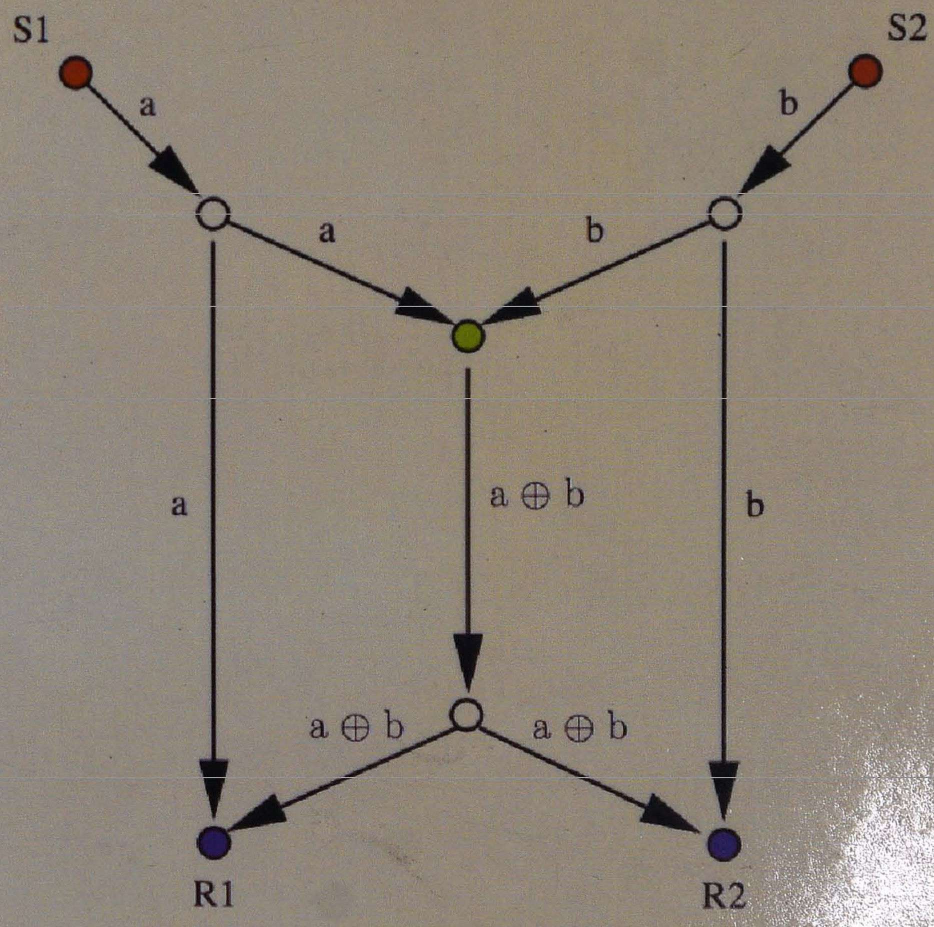
மெய்யெண் பகுப்பியல்

முனைவர் சி. முத்தம்மை



தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
காமராஜர் சாலை, சென்னை-600 005.

மெய்யெண் பகுப்பியல்

முனைவர் சி. முத்தம்மை

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை – 600 005.

முதற் பதிப்பு : 2011

பதிப்புரிமை : தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை – 600 005

நூலின் பெயர் : **மெய்யெண் பகுப்பியல்**

நூலாசிரியர் : முனைவர் சி. முத்தம்மை,
கணித இணைப்பேராசிரியர்,
அரசு மகளிர் கலைக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
புதுக்கோட்டை – 622 001.

மறு ஆய்வு செய்தவர் : முனைவர் இ. தண்டபாணி,
பேராசிரியர்,
இராமானுஜம் கணிதவியல் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்,
சென்னை 600 005.

தமிழ் திருத்தம் செய்தவர் : பேரா. எஸ். செல்வரங்கம்,
தே.நி. விரிவுரையாளர்,
கணிதவியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை – 600 005.

விலை : ரூ.85.00

அச்சிட்டோர் : பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்.,
142, ஜானி ஜான் கான் சாலை,
இராயப்பேட்டை, சென்னை – 600 014.
தொ.பே.: 28482441, 28482973

LIBRARY * UNIVERSITY
229095
MADURAI KA

மெய்யெண் பகுப்பியல்

பொருளடக்கம்

	பக்க எண்
அத்தியாயம் **1:** மெய்யெண்கள் கணித முறை	**1**
1.1. அடிப்படைத் திணை இயல்	**1**
1.2. புலங்கள்	**3**
1.3. முடிவுள்ள, எண்ணத்தக்க மற்றும் எண்ணிடமுடியாத கணங்கள்	**7**
1.4. யாப்பு வெளிகள்	**17**
1.5. யாப்புவெளியில் வரம்புடைய கணங்கள்	**21**
1.6. கச்சிதகணங்கள்	**32**
1.7. செவ்விய கணங்கள்	**41**
1.8. காண்டார் கணம்	**42**
1.9. இணைந்த கணங்கள்	**43**
1.10. பயிற்சி வினாக்கள்	**47**
அத்தியாயம் **2:** தொடர்வரிசைகள் மற்றும் தொடர்கள்	**49**
2.1. தொடர்வரிசையின் ஒருங்கல்	**49**
2.2. துணைத்தொடர்வரிசைகள்	**56**
2.3. காஷியின் தொடர்வரிசைகள்	**58**
2.4. மேல் மற்றும் கீழ் எல்லைகள்	**63**
2.5. சில சிறப்புத் தொடர்வரிசைகள்	**65**
2.6. முடிவிலாத் தொடர்	**67**
2.7. சில துணைத்தொடர்கள்	**72**

2.8. மூலச் சோதனை மற்றும் விகித சோதனை 75
2.9. அடுக்குத் தொடர் 78
2.10. பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல் 79
2.11. ஒன்றாடத் தொடர் 81
2.12. அற ஒருங்கல் 83
2.13. தொடரின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் 84
2.14. தொடர்களின் மறு வரிசைப்படுத்துதல் 87
2.15. பயிற்சி வினாக்கள் 92

அத்தியாயம் 3: யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள் 93
3.1. சார்புகளின் எல்லைகள் 93
3.2. மெய்ப்புனை மதிப்புடைய எல்லைகள் 97
3.3. யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள் 99
3.4. தொடர்ச்சியான மெய்ப்புனை மதிப்புடைய மற்றும் திசையன் மதிப்புடைய சார்புகள் 103
3.5. கச்சிதமான யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள் 104
3.6. சீரான தொடர்ச்சி 109
3.7. தொடர்ச்சி மற்றும் இணைப்புமை 114
3.8. தொடர்ச்சியின்மைகள் 118
3.9. ஓரியல்புச் சார்புகள் 120
3.10. முடிவிலா எல்லை மற்றும் கந்தழியில் எல்லைகள் 124
3.11. பயிற்சி வினாக்கள் 125

அத்தியாயம் **4:** வகையிடல் **127**

4.1. மெய்மதிப்புச் சார்பின் வகைக்கெழு **127**

4.2. வகைக்கெழுக்களின் இயற்கணிதம் **129**

4.3. இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள் **134**

4.4. உயர்வரிசை வகைக்கெழுக்கள் **139**

4.5. வரம்புறு மாறல் சார்புகள் **142**

4.6. மொத்த மாறல் **145**

4.7. பயிற்சி வினாக்கள் **152**

அத்தியாயம் **5:** ரீமன் - ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையும் **154**

5.1. ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையின் வரையறை **155**

5.2. நேரியல் பண்புகள் **156**

5.3. பகுதி வழித் தொகையிடல் **160**

5.4. ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையீட்டில் மாறியின் மாறுபாடு **162**

5.5. ஒருபோக்கு ஏறும் தொகுப்பான்கள் மேல் மற்றும் கீழ் தொகையீடுகள் **165**

5.6. ஒப்பீடு தேற்றங்கள் **171**

5.7. வரம்புறு மாறல் தொகுப்பான்கள் **174**

5.8. ரீமன்-ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையீடுகளின் இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள் **182**

5.9. இடைவெளியின் சார்பாக அமையும் தொகையீடு **183**

5.10. *ரீமன் தொகையீடுகள் இருப்பதற்கான லெபேக் வரைகூறு* **186**

5.11. பயிற்சி வினாக்கள் **189**

அத்தியாயம் 6: தொடர்வரிசைகள் மற்றும் சார்புகளின் தொடர்கள் 191

6.1. சார்புகளின் தொடர்வரிசையின் புள்ளிவாரி ஒருங்கல் 191

6.2. சீரான ஒருங்கல் 196

6.3. சீரான ஒருங்குதலுக்கான காஷி வரன்முறை 198

6.4. சார்புகளின் முடிவிலாத் தொடரின் சீரான ஒருங்கல் 199

6.5. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் தொடர்ச்சி 201

6.6. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் ரீமன்-ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையிடல் 205

6.7. உறுப்பு வாரியாக தொகையிடக் கூடிய, சீராக ஒருங்காத தொடர்வரிசைகள் 208

6.8. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் வகையிடல் 210

6.9. சார்புகளின் சம தொடர்ச்சியான தொகுதிகள் 215

6.10. ஸ்டோன் வயிஸ்ட்ராஸ் தேற்றம் 220

6.11. சராசரி ஒருங்கல் 230

6.12. பயிற்சி வினாக்கள் 233

அத்தியாயம் 7: பலமாறி சார்புகள் 237

7.1. நேரியல் உருமாற்றங்கள் 237

7.2. அணிகள் 247

7.3. வகையிடல் 250

7.4. பகுதி வகைக் கெழுக்கள் 254

7.5. சுருக்கக் கோட்பாடு 261

7.6. நேர்மாறு சார்புத் தேற்றம் 263

7.7. உள்ளார்ந்த சார்பு தேற்றம் 266

7.8. தரத் தேற்றம் 272

7.9. உயர்வரிசை வகையீடுகள் 277

7.10. தொகையங்களின் வகையீடுகள் 279

7.11. பயிற்சி வினாக்கள் 280

அத்தியாயம் 8: லெபேக் கோட்பாடு 283

8.1. கணச் சார்புகள் 283

8.2. லெபேக் அளவை 286

8.3. அளவை வெளிகள் 299

8.4. அளக்கத்தக்க சார்புகள் 300

8.5. எளிய சார்புகள் 306

8.6. தொகையிடல் 308

8.7. பயிற்சி வினாக்கள் 322

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் 325

குறியீடு 326

அத்தியாயம் 1

மெய்யெண்கள் கணித முறை

கணித அமைப்புகளில், மெய்யெண்களின் அமைப்பு அழகான அமைப்புகளில் ஒன்றாகும். மெய் பகுப்பாய்வியல் என்ற கணிதப்பிரிவு முழுவதும் மெய்யெண்களின் அமைப்பில் தான் உள்ளது. ஒருங்கல், தொடர்ச்சி என்பவை பகுப்பாய்வின் இரு அடிப்படை தத்துவங்களாவன. வகையிடல், தொகையிடல் என்பவை பகுப்பாய்வு இயலின் அடிப்படைச் செயலிகள். இங்கு, எண்ணத்தக்க, எண்ணிட முடியாத கணங்களையும், யாப்பு வெளிகளில், கச்சித கணங்கள், செவ்விய கணங்கள் மற்றும் இணைந்த கணங்கள் ஆகியவைகளையும் பற்றி காண்போம்.

முதலில், அடிப்படை பண்புகளைக் காண்போம்.

1.1. அடிப்படைத் திணை இயல்

1.1. வரையறை

S என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம். S- ல் வரிசை என்பது $<$ என க் குறியிடப்பட்டு, பின்வரும் பண்புகளை நிறைவேற்றும் ஒரு உறவு.

(i) $x, y \in S$ எனில், $x < y, x = y, y < x$ என்பனவற்றில் ஏதாவது ஒன்று மட்டும் பொருந்தும்.

(ii) $x, y, z \in S, x < y$ மற்றும் $y < z$ எனில், $x < z$.

$x < y$ என்பது, y - ஐ விட x குறைந்தது என்று வாசிக்கப்படும்.

$x < y$ என்பதற்குப் பதிலாக, $y > x$ எழுதப்படும்.

$x \leq y$ ஆனது $x < y$ அல்லது $x = y$ என்பதைக் குறிக்கும்.

1.2. வரையறை

S என்ற கணத்தில் வரிசை வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், S ஆனது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம் எனப்படும்.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம்.

1.3. வரையறை

S ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம். $E \subset S$ என்க. அனைத்து $x \in E$-க்கு, $\beta \in S$ என்பது $x \leq \beta$ என அமையுமானால், E ஆனது மேல் வரம்புடையது என்போம். β என்பது E-ன் மேல்வரம்பு எனப்படும்.

E-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பு x-க்கும் $x \geq \gamma$ என்றவாறு γ என்ற எண் இருக்குமானால், E ஆனது கீழ் வரம்புடையது என்போம். γ ஆனது E-ன் கீழ்வரம்பு எனப்படும்.

1.4. வரையறை

S ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம். $E \subset S$ மேல்வரம்புடையது..

(i) α என்பது E -ன் ஒரு மேல்வரம்பு.

(ii) $\gamma < \alpha$ எனில், γ ஆனது E -ன் மேல்வரம்பாக அமையாதவாறு $\alpha \in S$ இருந்தால், α-ஐ E-ன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு (least upper bound) என்போம்.

மீச்சிறு மேல்வரம்பை lub அல்லது sup எனக் குறியிடுவோம். $\alpha = \sup E$

இதைப்போலவே, S என்ற வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணத்தின் உட்கணம் E கீழ்வரம்புடையது,

(i) α என்பது E -ன் ஒரு கீழ்வரம்பு.

(ii) $\gamma > \alpha$ எனில், γ ஆனது E-ன் கீழ்வரம்பாக அமையாதவாறு $\alpha \in S$ இருந்தால், α-ஐ E-ன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு (greatest lower bound) என்போம்.

மீப்பெரு கீழ்வரம்பை glb அல்லது inf எனக் குறியிடுவோம். $\alpha = \inf E$

1.5. எடுத்துக்காட்டு

$E = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ எனில், $\sup E = 1 \in E$, $\inf E = 0 \notin E$.

1.6. வரையறை

S ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணத்தில், $E \subset S$ வெற்றற்ற வரம்புடைய கணம் மற்றும் $\sup E \in S$ எனில், S ஆனது மீச்சிறு மேல்வரம்பு பண்பைப் பெற்றிருக்கிறது என்போம்.

1.2. புலங்கள் (Fields)

1.7. வரையறை

ஒரு புலம் என்பது, கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் என்ற ஈருறுப்பு செயலிகளுடன் கீழ்க்கண்ட புலம் உரைகோள்களை நிறைவேற்றும் F என்ற கணம் ஆகும்.

(A) கூட்டலின் உரைகோள்கள்

(A1) $x \in F, y \in F$ எனில், $x + y \in F$

(A2) கூட்டலின் பரிமாற்று விதி: அனைத்து $x, y \in F$ க்கு, $x + y = y + x$

(A3) கூட்டலின் சேர்ப்பு விதி: அனைத்து $x, y, z \in F$ க்கு,
$(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A4) அனைத்து $x \in F$-க்கு, $0 \in F$ என்ற உறுப்பு $x + 0 = 0 + x = x$ எனத் தோன்றும்.

(A5) ஒவ்வொரு $x \in F$-க்கு ஏற்ப, $-x \in F$ என்பது $x + (-x) = 0$ எனத்தோன்றும்.

(M) பெருக்கலின் உரைகோள்கள்

(M1) $x \in F, y \in F$ எனில், அவைகளின் பெருக்கல் $xy \in F$.

(M2) பெருக்கலின் பரிமாற்று விதி: அனைத்து $x, y \in F$-க்கு, $xy = yx$.

(M3) பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி: அனைத்து $x, y, z \in F$-க்கு, $(xy)z = x(yz)$.

(M4) அனைத்து $x \in F$-க்கு, $1 \in F$ $(1 \neq 0)$ என்ற உறுப்பு $1x = x$ எனத் தோன்றும்.

(M5) $x \in F$, $x \neq 0$ எனில் $1/x \in F$ என்ற உறுப்பு $x(1/x) = 1$ எனத் தோன்றும்.

(D) பங்கீட்டு விதி

அனைத்து $x, y, z \in F$ க்கு, $x(y+z) = xy + xz$.

1.8. வரையறை

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட புலம் F என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணமாகவும், பின்வரும் பண்புகளை நிறைவேற்றும் புலம் ஆகவும் அமையும்.

(i) $x, y, z \in F$, $y < z$ எனில், $x + y < x + z$

(ii) $x, y \in F, x > 0, y > 0$ எனில், $xy > 0$.

$x > 0$ எனில், x மிகை எனவும், $x < 0$ எனில், x குறை எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q வரிசைப்படுத்தப்பட்ட புலம்.

1.9. மெய்யெண்களின் புலம்

மீச்சிறு மேல்வரம்பு பண்பினைக் கொண்ட வரிசைப்படுத்தப்பட்ட புலம் R, மெய்யெண்களின் புலம் ஆகும். மேலேக் கண்ட, விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q ஆனது R-ன் உட்புலமாக அமையும்.

R-ன் உறுப்புகள் மெய்யெண்கள் எனப்படும்.

விரிந்த மெய்யெண் தொகுப்பு

(Extended Real Number System)

1.10. வரையறை

விரிந்த மெய்யெண் தொகுப்பு ஆனது R என்ற மெய்யெண் புலத்தையும் $+\infty$ மற்றும் $-\infty$ என்ற இருகுறிகளையும் பெற்றிருக்கும்.

R-ன் வரிசையின் படி, அனைத்து $x \in R$ க்கு $-\infty < x < +\infty$ என வரையறுக்கப்படும்.

விரிந்த மெய்யெண் தொகுப்பின் ஒவ்வொரு உட்கணத்தின் மேல்வரம்பு $+\infty$ ஆகும். மேலும், ஒவ்வொரு வெற்றற்ற உட்கணமும், மீச்சிறு மேல்வரம்பைப் பெற்றிருக்கும். விரிந்த மெய்யெண் தொகுப்பு ஒரு புலம் அல்ல.

மெய்ப்புனை புலம் (Complex Field)

1.11. வரையறை

மெய்ப்புனை எண் என்பது, மெய்யெண்களின் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட இரட்டை (a, b) ஆகும். அதாவது, $a \neq b$ எனில், (a, b) மற்றும் (b, a) என்பன வெவ்வேறானவை.

$x = (a, b)$, $y = (c, d)$ என்பன மெய்ப்புனை எண்கள். $x = y \Leftrightarrow a = c$, $b = d$.

$x + y = (a + c, b + d)$, $xy = (ac - bd, ad + bc)$ என வரையறுக்க.

இந்த கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலைப் பொறுத்து, மெய்ப்புனை எண்களின் கணம் ஒரு புலம் ஆகும். இது C எனக் குறிக்கப்படும். 0, 1 என்பன முறையே, இங்கு (0, 0) மற்றும் (1, 0) ஆகும். (a, b) என்ற குறியீடு $a + ib$ என்ற மெய்ப்புனை எண்ணைக் குறிக்கும். $i^2 = -1$ ஆகும். $z = a + ib$ எனில், $\bar{z} = a - ib$ ஆனது z-ன் இணையிய எண் (conjugate) எனப்படும். மேலும். z-ன் தனி மதிப்பு (absolute value) $|z| = (z\,\bar{z})^{1/2}$ என வரையறுக்கப்படும்.

1.12. ஸ்குவார்ஸ் சமனின்மை (Schwarz inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ மற்றும் $b_1, b_2, \ldots, b_n$ என்பன மெய்ப்புனை எண்கள் எனில்,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 .$$

யூக்ளிடின் வெளிகள்

1.13. வரையறை

ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் k-க்கு, R^k என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ என்ற அமைப்பில் உள்ள உறுப்புகளின் கணம். $x_1, x_2, ..., x_k$ என்பன மெய்யெண்கள். இவை, $\mathbf{x}$-ன் ஆயக்கூறுகள் எனப்படும். R^k-ன் உறுப்புகள், புள்ளிகள் அல்லது திசையன்கள் $(k > 1)$ எனப்படும்.

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)$ மற்றும் α மெய்யெண் எனில்,

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1+y_1, ..., x_k+y_k)$, $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, ..., \alpha x_k)$.

எனவே, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$ மற்றும் $\alpha\mathbf{x} \in R^k$. இவைகள் திசையன் கூட்டலையும், ஒரு திசையனின் மெய்யெண் பெருக்கலையும் வரையறுக்கிறது. இந்த இரு செயல்களும் R^k-ஐ மெய்யெண் புலத்தின் மேல் ஒரு திசையன் வெளியாக (vector space) மாற்றுகிறது.

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ன் உள் பெருக்கல் $\mathbf{x} . \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\mathbf{x}$-ன் அலகை (norm) $|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}.\mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$

மேற்கண்ட உள்பெருக்கல் மற்றும் அலகையுடன் கூடிய திசையன் வெளி R^k ஆனது யூக்ளிடின் k-வெளி என அழைக்கப்படும்.

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$, α மெய்யெண் எனில்,

(a) $|\mathbf{x}| \geq 0$

(b) $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(c) $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha|\, |\mathbf{x}|$

(d) $|\mathbf{x} . \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| . |\mathbf{y}|$

(e) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

(f) $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$

குறிப்பு:

R^1 (மெய்யெண்களின் கணம்) என்பது வழக்கமாக கோடு என்றும், R^2 என்பது தளம் அல்லது மெய்ப்புனை தளம் என்றும் அழைக்கப்படும்.

1.3. முடிவுள்ள, எண்ணத்தக்க மற்றும் எண்ணிடமுடியாத கணங்கள்

1.14. வரையறை

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களை எடுத்துக்கொள்க. ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு $y \in B$- ஐ இணைக்கும் தொடர்புக்குச் சார்பு என்று பெயர்.. f ஒரு சார்பு எனில், y-ஐ $y = f(x)$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

கணம் A-ஐ f-ன் எண் அரங்கம் (அல்லது f ஆனது A-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது) எனவும், f(x) என்ற உறுப்புகள் f-ன் மதிப்புகள் எனவும் அழைக்கப்படும். f-ன் அனைத்து மதிப்புகளின் கணம், f-ன் வீச்செல்லை என அழைக்கப்படும்.

1.15. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள். f என்பது A, B இவைகளை இணைக்கும் சார்பு. $E \subset A$ எனில், $f(E) = \{ f(x): x \in E\}$. மேலும், f(E) ஆனது f-ன் கீழ் E-ன் பிம்பம் என அழைக்கப்படும். எனவே, f-ன் வீச்செல்லை $f(A) \subset B$ ஆகும்.

$f(A) = B$ எனில், f மேல்சார்பு எனப்படும்.

$E \subset B$ எனில், $f^{1}(E) = \{x \in A: f(x) \in E\}$. $f^{1}(E)$ ஆனது, f-ன் கீழ் E-ன் நேர்மாறு பிம்பம். $y \in B$ எனில், $f^{1}(y) = \{x \in A: f(x) = y\}$.

ஒவ்வொரு $y \in B$ க்கும், $f^{1}(y)$-ல் A-ன் அதிகப்பட்சமாக ஒரே ஒரு உறுப்பு இருப்பின், f ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு எனப்படும்.

1.16. வரையறை

A யிலிருந்து B-க்கு ஒன்றுக்கொன்றான மேல் கோர்த்தல் இருக்குமானால், A மற்றும் B இவைகள் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபில் இருக்கிறது என்போம். (A and B are isomorphic), அல்லது A மற்றும் B இவைகள் சமமான

செவ்வெண்களைப் (Cardinal Numbers) பெற்றிருக்கும்.. சுருக்கமாக, A மற்றும் B ஆகியன சமானமானவை. இது $A \approx B$ என எழுதப்படும்.

1.17. வரையறை

n என்ற ஏதாவதொரு மிகை முழு எண்ணிற்கு, J_n என்பது 1, 2, ... இவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம். J என்பது அனைத்து மிகை முழு எண்களையும் கொண்ட கணம் என்க. A ஆனது ஏதேனும் ஒரு கணம்.

(அ) A ஒரு வெற்றுக்கணம் அல்லது A ஆனது J_n உடன் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபில் இருக்குமானால், A முடிவுள்ள கணம் (finite set) எனப்படும்.

(ஆ) A முடிவுள்ள கணம் இல்லை எனில், முடிவிலா கணம் (infinite set) எனப்படும்.

(இ) A ஆனது J-உடன் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபில் இருக்குமானால், A எண்ணத்தக்க கணம் (countable set) எனப்படும்.

(ஈ) A முடிவுள்ளதாகவோ, எண்ணத்தக்கதாகவோ அமையவில்லை எனில், A எண்ணிட முடியாத கணம் (uncountable set) எனப்படும்.

(உ) A முடிவுள்ளது அல்லது எண்ணத்தக்கது எனில், A அதிகபட்ச எண்ணத்தக்க கணம் (atmost countable set) எனப்படும்.

எண்ணத்தக்க கணங்கள், முடிவிலா எண்ணத்தக்க கணங்கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

1.18. எடுத்துக்காட்டு

(அ) அனைத்து முழு எண்களின் கணம் எண்ணத்தக்கது.

(ஆ) $A = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ எனில், $f: J \to A$ என்ற சார்பு

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & (\text{n இரட்டை எண்}) \\ (n-1)/2 & (\text{n ஒற்றை எண்}) \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், f ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பாக அமையும். எனவே, A எண்ணத்தக்க கணம் ஆகும்.

1.19. வரையறை

J என்ற அனைத்து மிகை முழு எண்களின் கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f ஆனது தொடர் வரிசை அல்லது ஒழுங்கு வரிசை (Sequence) எனப்படும்

$f(n) = x_n, n \in J$ எனில், f என்ற தொடர்வரிசை $\{x_n\}$ அல்லது $\{x_1, x_2, \dots \dots\}$ எனக் குறிக்கப்படும். f-ன் மதிப்புகள், அதாவது x_n என்ற உறுப்புகள், தொடர்வரிசையின் உறுப்புகள் என அழைக்கப்படும். A ஒரு கணம், $x_n \in A, \forall\, n \in J$ எனில், $\{x_n\}$ என்பது A-ல் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

தொடர்வரிசையின் உறுப்புகள் $x_1, x_2, \dots$ என்பன வெவ்வேறானவையாக அமைய வேண்டிய தேவையில்லை.

குறிப்பு:

ஒவ்வொரு எண்ணத்தக்க கணமும், J-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்றான சார்பின் வீச்செல்லை என்பதால், ஒவ்வொரு எண்ணத்தக்க கணமும், வெவ்வாறான உறுப்புகள் உடைய தொடர்வரிசையின் வீச்செல்லை எனலாம். அதாவது, எண்ணத்தக்க கணத்தின் உறுப்புகள், தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளாக வரிசைப்படுத்தலாம். J-ஐ பூஜ்யமற்ற முழு எண்களாக மாற்றியமைப்பது சில நேரங்கள் வசதியாக அமையும்.

1.20. தேற்றம்

எண்ணத்தக்க கணத்தின் ஒவ்வொரு முடிவிலா உட்கணமும் எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்:

எண்ணத்தக்க கணம் A, அதன் முடிவிலா உட்கணம் E என்க.

A-ன் உறுப்புகளை, $\{x_n\}$ என்ற ஒழுங்குவரிசையின் வெவ்வேறான உறுப்புகளாக வரிசைப்படுத்துக. $\{n_k\}$ என்ற ஒழுங்குவரிசையைப் பின்வருமாறு அமைப்போம்.

$x_{n_1} \in E$ என்றவாறு உள்ளதில், n_1 மிகக் குறைந்த மிகைமுழு எண் என்க.

$n_1, \ldots, n_{k-1}$, $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ என்பனவற்றைத் தேர்ந்தெடுத்தபின், $x_{n_k} \in E$, n_{k-1}- ஐ விடப் பெரியதாக உள்ளதில், n_k மிகக் குறைந்த மிகைமுழு எண் என்க.

$f(k) = x_{n_k}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ எனில், E மற்றும் J-க்கு இடையிலான ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபாக f அமையும்.

எனவே, E ஒரு எண்ணத்தக்க கணம்.

குறிப்பு:

எந்த ஒரு எண்ணிடமுடியாத கணமும், எண்ணத்தக்க கணத்தின் உட்கணமாக அமையாது.

1.21. வரையறை

A மற்றும் Ω என்பன கணங்கள் என்க. A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பு α உடன், இணைக்கப்பட்ட Ω-ன் உட்கணம் E_α என்க. E_α-ஐ உறுப்புகளாக உடைய கணம் $\{E_\alpha\}$ எனக் குறிக்கப்படும். இது, கணங்களின் கூட்டம் அல்லது கணங்களின் குடும்பம் என அழைக்கப்படும்.

E_α என்ற கணங்களின் சேர்ப்பு $S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha$, குறைந்தது ஒரு $\alpha \in A\}$.

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$ எனில், $\{E_\alpha\} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, மற்றும் $S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m$ அல்லது $S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ எனக் குறிக்கப்படும்.

A என்பது அனைத்து மிகை முழு எண்களின் கணம் எனில், $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

E_α என்ற கணங்களின் வெட்டுக்கணம்

$$P = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha = \{x : x\in E_\alpha, \text{ அனைத்து } \alpha\in A\}$$ அல்லது

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$$ ஆகும்.

A என்பது அனைத்து மிகை முழு எண்களின் கணம் எனில், $S = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$.

$A\cap B$ வெற்றற்ற கணம் எனில், A, B என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் என்றும், இல்லையெனில், பொதுஉறுப்பற்ற கணம் என்றும் கூறப்படும்.

1.22. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) A என்பது மிகை முழு எண்களின் கணம். அனைத்து $i\in A$-க்கு, $E_i = \{i, i+1, \dots, i+n, \dots,\}$. எனவே, $E_1 = \{1, 2, \dots\}$, $E_2 = \{2, 3, \dots\}$. எனவே, $\{E_i : i\in A\}$ என்பது கணங்களின் குடும்பம்.

இங்கு, $\bigcup_{i\in A} E_i = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = A$ மற்றும் $\bigcap_{i\in A} E_i = \phi$.

(ஆ) A என்பது $0 < x \leq 1$ என அமையும் அனைத்து மெய்யெண்கள் x-ன் கணம். அனைத்து $x\in A$-க்கு E_α என்பது $0 < y < x$ என அமையும் மெய்யெண்கள் y-ன் கணம்.. எனவே,

(i) $E_x \subset E_z \Leftrightarrow 0 < x \leq z \leq 1$

(ii) $\bigcup_{x\in A} E_x = E_1$

(iii) அனைத்து $y > 0$ க்கு $x < y$ எனில், $y \notin E_x$. எனவே, $y \notin \bigcap_{x\in A} E_x$

ஆகையால், $\bigcap_{x\in A} E_x$ வெற்றுக்கணம்.

மேலே கண்ட வரையறையைப் பயன்படுத்தி, கீழேக் கண்ட தேற்றங்களை எளிதாக நிறுவலாம்.

1.23. தேற்றம்

$\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ என்பது கணங்களின் கூட்டம் எனில்,

(அ) $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \subset E_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$

(ஆ) $B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \right) \quad \bigcap_{\alpha \in A} (B \cup E_\alpha)$

(இ) $B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (B \cap E_\alpha)$

(ஈ) $\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha{}^c$

(உ) $\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha{}^c$

1.24. தேற்றம்

$\{E_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ என்பது எண்ணத்தக்க கணங்களின் தொடர்வரிசை எனில், $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்:

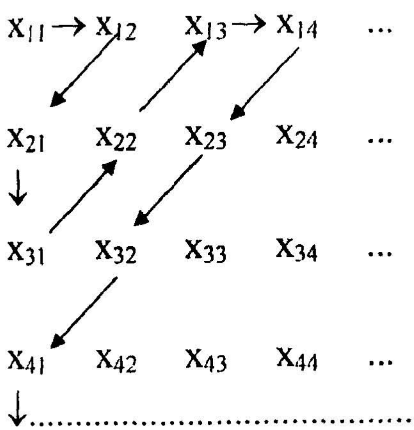
$E_1, E_2, \ldots$ என்பன ஒவ்வொன்றும் எண்ணத்தக்க கணங்கள். எனவே, அவைகளின் உறுப்புகளைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$E_1 = \{ x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}, \ldots \}$

$E_2 = \{ x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n}, \ldots \}$

$E_3 = \{ x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots, x_{3n}, \ldots \}$ ....

இவ்வுறுப்புகளை முடிவிலா அணியாக எழுத,



இங்கு, n-ஆவது நிரையில் உள்ளவை E_n-ன் உறுப்புகள். இந்த அணியில், S-ன் அனைத்து உறுப்புகளும் உள்ளன. அம்பு குறியிட்டபடி, இந்த உறுப்புக்களை

$x_{11}; x_{12}, x_{21}; x_{31}, x_{22}, x_{13}; x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}; \ldots$ ----- (1)

என வரிசைப்படுத்த முடியும்.

$\{E_n\}$-ல் ஏதேனும் இரு கணங்கள் பொது உறுப்பைக் கொண்டிருக்குமானால், அவைகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முறையில் (1)-ல் அமையும். S-உடன் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியையபில் அமையும் T என்ற மிகை முழு எண்களின் கணம் இருக்கும். எனவே, S ஆனது அதிகபட்ச எண்ணத்தக்கது. $E_1 \subset S$ மற்றும் E_1 முடிவில்லாதது ஆகையால், S-ம் முடிவில்லாதது. எனவே, S எண்ணத்தக்கது,

1.25. துணைத்தேற்றம்

A என்ற கணம் அதிகபட்ச எண்ணத்தக்கது. அனைத்து $\alpha \in A$-க்கு, B_α-ம் அதிகபட்ச எண்ணத்தக்கது எனில், $T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ - ம் அதிகபட்ச எண்ணத்தக்கது.

1.26. தேற்றம்

A ஒரு எண்ணத்தக்க கணம் என்க. $B_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_k \in A,$ $k = 1, 2, \ldots, n\}$ என்க. $a_1, \ldots, a_n$ என்ற உறுப்புகள் வெவ்வேறானதாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை., எனில், B_n எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்:

இதனை, n-ன் மீது தொகுத்தறிதல் முறைப்படி நிறுவுவோம். $n = 1$ எனில், $B_1 = A$. எனவே, B_1 எண்ணத்தக்கது. B_{n-1} ($n = 2, 3, 4, \ldots$) எண்ணத்தக்கது என்க. B_n-ல் உள்ள உறுப்புகள் (b, a), $b \in B_{n-1}$, $a \in A$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். ஒவ்வொரு நிலைத்த bக்கு, (b, a) என்ற இணைகளின் கணம், A உடன் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபுடன் அமைவதால் அக்கணம் எண்ணத்தக்கது. B_n ஆனது எண்ணத்தக்க கணங்களின் எண்ணத்தக்க சேர்ப்பு கணம் என்பதால், B_n-ம் எண்ணத்தக்கது.

1.27. எடுத்துக்காட்டு 1

N இயல் எண்களின் கணம் எனில், $N \times N$ எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்: $N \times N = \{ (i, j): i, j \in N\}$. $N \times N$-ன் அனைத்து உறுப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

(1, 1)→ (1, 2) (1, 3)→ (1, 4) ...

(2, 1) (2, 2) (2, 3) 2, 4) ...

↓

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) ...

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) ...

↓...,

மேற்கண்ட அமைப்பில். (1,1); (1,2), (2,1): (3,1), (2,2), (1,3): (1,4), (2,3), (3,2), (4,1); ... என்ற பாதையில் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்த, $N \times N$ எண்ணத்தக்க கணமாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்:

ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் n-ற்கு, $E_n = \{ 0/n, -1/n, 1/n, -2/n, 2/n, \ldots \}$ என்க. பின், E_n, n=1, 2, 3,...-களுக்கு எண்ணத்தக்கது. எனவே, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ எண்ணத்தக்கது. ஆனால், $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ என்பதால், Q எண்ணத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு 3

[0, 1]-ல் அனைத்து விகிதமுறு எண்களும் எண்ணத்தக்கது.

நிறுவல்:

Q எண்ணத்தக்கது. [0, 1]-ல் உள்ள விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q-ன் முடிவிலா உட்கணம். எனவே, எண்ணத்தக்கது.

குறிப்பு: அனைத்து, முடிவிலாதக் கணங்களும் எண்ணத்தக்கது அல்ல.

1.28. தேற்றம்

[0, 1] என்ற இடைவெளி எண்ணிட முடியாதது.

நிறுவல்:

இதை நாம் முரண்பாட்டுக் கொள்கை மூலம் நிறுவுவோம். முடியுமானால், [0,1] எண்ணத்தக்க கணம் என்க.

எனவே, [0, 1]-ன் அனைத்து உறுப்புகளையும் $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ என வரிசைப்படுத்தலாம். இவை அனைத்தும் [0, 1]-ல் அமைவதால், அவைகளின் தசம விரிவுகளை

$x_1 = 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$

$x_2 = 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$

$x_3 = 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$

... ...

$x_n = 0.\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots$

என எழுதலாம். இங்கு, $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

b_1 என்ற எண்ணை $b_1 \neq a_{11}$ மற்றும் $b_1 \neq 0$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க. பின், b_2 என்ற எண்ணை $b_2 \neq a_{22}$ மற்றும் $b_2 \neq 0$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க. இதைப் போலவே, தொடர்ந்து b_n என்ற எண்ணை $b_n \neq a_{nn}$ மற்றும் $b_n \neq 0$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

தற்போது, $y = 0. b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்க. $b_1 \neq a_{11}$ என்பதால், $y \neq x_1$. $b_2 \neq a_{22} \Rightarrow y \neq x_2$. $b_n \neq a_{nn} \Rightarrow y \neq x_n, n \in N$. y-ன் அமைப்பின் படி, $y \in [0,1]$. இது முரண்பாடு. ஏனெனில், [0,1]-ன் அனைத்து உறுப்புகளும் $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ என வரிசைப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, [0, 1] என்பது எண்ணிட முடியாதக் கணம்.

1.29. துணைத்தேற்றம்

அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் R^1 எண்ணிட முடியாதது.

நிறுவல்:

R^1 எண்ணத்தக்கது என்க. [0, 1] என்பது R^1-ன் முடிவில்லா உட்கணம். என்பதால், [0, 1]-ம் எண்ணத்தக்கது. இது தவறு, எனவே, R^1 எண்ணிட முடியாதது.

1.30. துணைத்தேற்றம்

அனைத்து விகிதமுறா எண்களின் கணம் S எண்ணிட முடியாது.

நிறுவல்:

S எண்ணத்தக்கது என்க. விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q எண்ணத்தக்கது என்பதால், $R^1 = S \cup Q$-ம் எண்ணத்தக்கது. இது தவறு. எனவே, S எண்ணிட முடியாத கணம்.

1.31. தேற்றம்

0 மற்றும் 1 என்ற இலக்கங்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட அனைத்து தொடர்வரிசைகளின் கணம் A எனில், A எண்ணிட முடியாத கணம்.

நிறுவல்:

A-ன் உறுப்புகள் (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, ...) என்ற அமைப்பில் உள்ள தொடர்வரிசைகள். A-ன் எண்ணத்தக்க உட்கணம் E என்க. E-ல் உள்ள தொடர்வரிசைகள் $s_1, s_2, s_3, \ldots$ என்க. s என்ற தொடர்வரிசையை கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்போம்.

s_n-ன் n-ஆவது இலக்கம் 1 எனில், s-ன் n-ஆவது இலக்கம் 0 என்க. இதைப் போலவே, s_n-ன் n-ஆவது இலக்கம் 0 எனில், s-ன் n-ஆவது இலக்கம் 1.

எனவே, தொடர்வரிசை s ஆனது E-ன் ஒவ்வொரு உறுப்புடன் குறைந்தது ஒரு இடத்திலாவது வேறுபடும். எனவே, $s \notin E$. ஆனால், $s \in A$. ஆகையால், E ஆனது A-ன் முறையான உட்கணம் ஆகிறது. அதாவது, A-ன் ஒவ்வொரு எண்ணத்தக்க உட்கணமும், அதன் முறையான உட்கணமாக அமைகிறது.

எனவே, A எண்ணிடமுடியாதது. (இல்லையெனில், A ஆனது A-ன் முறையான உட்கணமாக அமையும். இது முடியாதது.).

1.4. யாப்பு வெளிகள் (Metric Spaces)

மெய்யெண்களின் தொகுப்பு இரு வகையான பண்புகளைக் கொண்டிருக்கின்றன. முதல் வகையான, இயற்கணித வகை, கூட்டல், பெருக்கல் முதலியவற்றை உள்ளடக்கியது. மற்றொரு வகை, இரு எண்களுக்கிடையேயான தூரம் மற்றும் எல்லைக் கொள்கை பண்புகளை உள்ளடக்கியது. இப்பண்புகள் திணைய அல்லது யாப்பு எனப்படும்.

இங்கு, யாப்புவெளிகளின் எடுத்துக்காட்டுகளையும், வரம்புடைய கணங்கள், திறந்த கணங்கள் மற்றும் மூடிய கணங்கள் இவைகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

1.32. வரையறை

X என்பது ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. X-ல் யாப்பு என்பது, $X \times X$ என்ற புலத்தையும் $[0,\infty)$-ஐ உள்ளடக்கிய வீச்சையும், X-ல் உள்ள அனைத்து x, y, z புள்ளிகள் பின்வரும் பண்புகளை நிறைவேற்றுமாறு அமையும் d என்ற சார்பாகும்.

(அ) $d(x, y) > 0, x \neq y$

(ஆ) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(இ) $d(x, y) = d(y, x)$

(ஈ) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

d என்பது X-ல் குறையற்ற மெய்மதிப்புடைய சார்பாகும். (அ) மற்றும் (ஆ) என்பவை யாப்பின் குறையற்ற பண்பு எனவும், (இ) ஆனது சமச்சீர் பண்பு எனவும், (ஈ) ஆனது முக்கோண சமனின்மை எனவும் அறியப்படும். d என்ற யாப்புடன் கூடிய X என்ற கணம் யாப்பு வெளி எனப்படும். அது (X, d) எனக் குறிக்கப்படும்.

1.33. எடுத்துக்காட்டுகள்

1. மெய்யெண்களின் கணம் R^1-ல் $d(x, y) = |x - y|$ என வரையறுக்கப்படின்,

d-ஆனது R^1-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும். இது R^1-ல் வழக்கமான யாப்பு எனப்படும்.

நிறுவல்: $x, y, z \in R^1$ என்க.

(i) $d(x, y)| = |x - y| \geq 0$

மேலும், (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

d -ஆனது R^1-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

2. M என்ற ஏதாவதொரு வெற்றற்ற கணத்தில், கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்ட d என்ற சார்பு M-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

இது, M-ல் பிரிநிலை (Discrete) யாப்பு எனப்படும்.

நிறுவல்: $x, y, z \in M$ என்க.

(i) $d(x, y) \geq 0$

மேலும், (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$d(x, y) = d(y, x) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

(iii) **வகை (1):** $x = z$

எனவே, $d(x, z) = 0$

மேலும், $d(x, y) + d(y, z) \geq 0$

ஆகையால், $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

வகை (2): $x \neq z$

எனவே, $d(x, z) = 1$. மேலும், x, z என்பன வெவ்வேறானவை என்பதால், y ஆனது x மற்றும் z இவைகளுக்குச் சமமாக அமையாது. ஆகையால், $y \neq x$ அல்லது $y \neq z$. எனவே, $d(x, y) + d(y, z) \geq 1$, மற்றும்

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ என அமையும்.

d ஆனது M-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

3. $x, y \in R^2$ என்க. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^1$.

$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ என வரையறுக்கப்படின், d ஆனது R^2-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

நிறுவல்:

$x, y, z \in R^2$ என்க.

(i) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$

$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0$ மற்றும் $|x_2 - y_2| = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1$ மற்றும் $x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

$\Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d(y, x)$

(iv) $$\begin{aligned} d(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq \{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\} + \{|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|\} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

எனவே, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

ஆகையால், d ஆனது R^2-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

குறிப்பு:

R^n-ல் $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

என வரையறுக்கப்படின், d என்பது R^n -ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

4. E என்ற வெற்றற்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புடைய மெய்மதிப்புடைய சார்புகளின் கணம் M-ல் $d(f, g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in E\}$ என d வரையறுக்கப்படின், d ஆனது M-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

நிறுவல்: $f, g, h \in M$ என்க.

(i) $d(f, g) = \text{Sup}\{ |f(x) - g(x)|\} \geq 0$

(ii) $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \text{Sup}\{ |f(x) - g(x)|\} = 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in E$

$\Leftrightarrow f = g$

(iii) $d(f, g) = \text{Sup}\{ |f(x) - g(x)|\} = \text{Sup}\{ |g(x) - f(x)|\} = d(g, f)$

(iv) $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$

$\sup\{|f(x) - h(x)|\} \leq \sup\{ |f(x) - g(x)| \} + \sup\{|g(x) - h(x)| \}$

$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$

எனவே, d ஆனது M-ல் ஒரு யாப்பு ஆகும்.

1.5. யாப்புவெளியில் வரம்புடைய கணங்கள்

(X, d) என்பது ஒரு யாப்பு வெளி, A, B என்பன X-ன் உட்கணங்கள் என்க. $d(x, A) = \inf\{d(x, a): a\in A\}$, $d(A, B) = \inf\{d(a, b): a\in A, b\in B\}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், $d(x, A)$ என்பது x என்ற புள்ளிக்கும் A என்ற கணத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் மற்றும் $d(A, B)$ என்பது A, B என்ற கணங்களுக்கிடையேள்ள தூரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

1.34. வரையறை

X-ன் ஓர் உட்கணம் A. k என்ற மிகை முழுஎண், அனைத்து $x, y\in A$-க்கு $d(x, y) \leq k$ என அமையின், A-ஐ வரம்புடையது என்போம்.

A வரம்புடையது எனில், A-ன் விட்டம் $d(A) = \inf\{d(a, a'): a, a'\in A\}$ என வரையறுக்கப்படும்.

A வரம்பற்றது எனில், $d(A) = \infty$.

1.35. எடுத்துக்காட்டு

ஒரு யாப்பு வெளி (X, d)-ன் முடிவுள்ள உட்கணம் A வரம்புடையது.

நிறுவல்:

A என்பது X-ன் முடிவுள்ள உட்கணம் என்க. $A = \phi$ எனில், அது வரம்புடையது.. $A \neq \phi$ என்க. $\{d(x, y): x, y \in A\}$ என்பது மெய்யெண்களின் முடிவுள்ள கணம்.

$k = \max \{d(x, y): x, y\in A\}$ எனில், $d(x, y) \leq k, \forall\ x, y\in A$ ஆக அமைவதால், A வரம்புடையது.

1.36. வரையறை

(1) (a, b) என்ற துண்டு என்பது $a < x < b$ என அமையும் மெய்யெண்கள் x-ன் கணம்

(2) [a, b] என்ற இடைவெளி என்பது, $a \leq x \leq b$ என அமையும் மெய்யெண்கள் x-ன் கணம். அதாவது, $[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$

(3) அரை திறந்த இடைவெளிகள்

$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$ ஆகும்.

(4) $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) எனில்,

$\{x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k: a_i \leq xi \leq b_i, 1 \leq i \leq k\}$ என்பது k-கண் அறை (k-cell) எனப்படும்.

(5) $x \in R^k$, $r > 0$ எனில், மையம் x, ஆரம் r உடைய் திறந்த (அல்லது மூடிய) கோளம் B என்பது $\{y \in R^k: |y - x| < r\}$ (அல்லது $\{y \in R^k: |y - x| \leq r\}$) ஆகும்.

(6) $E \subset R^k$ என்ற கணத்தில் $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in E$, $\forall x, y \in E$, $0<\lambda<1$ என அமையின், E என்பது குவிகணம் (convex set) எனப்படும்.

1.37. எடுத்துக்காட்டு

கோளங்கள் குவி கணங்களாகும்.

நிறுவல்:

B என்பது, ஆரம் r, மையம் x உடைய திறந்த கோளம் என்க.

$y, z \in B \Rightarrow |y - x| < r$ மற்றும் $|z - x| < r$. $0<\lambda<1$ எனில்,

$$\begin{aligned} |\lambda y + (1-\lambda)z - x| &= |\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)| \\ &\leq \lambda|y - x| + (1 - \lambda)|z - x| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda)r = r \end{aligned}$$

$\lambda y + (1-\lambda)z \in B$. எனவே, B ஒரு குவிகணமாகும்.

இதைப் போலவே, மூடிய கோளங்களும் குவிகணங்களாகும்.

1.38. வரையறை

X ஒரு யாப்பு வெளி என்க. கீழே குறிப்பிடப்படும் அனைத்துப் புள்ளிகள் மற்றும் கணங்கள், X-ன் உறுப்புகள் மற்றும் உட்கணங்களைக் குறிக்கும்.

(அ) p என்ற புள்ளியின் அண்மை (neighborhood) $N_r(p)$ என்பது, $d(p, q) < r$ என அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகள் q-ஐக் குறிக்கும். r என்ற எண், $N_r(p)$-ன் ஆரம் என அழைக்கப்படும்.

(ஆ) p என்ற புள்ளியின் ஒவ்வொரு அண்மையும், p-ஐ தவிர்த்து, E என்றக் கணத்தின் ஒரு புள்ளியையாவது பெற்றிருந்தால், p என்பது E-ன் ஒரு எல்லைப் புள்ளி (limit point) எனப்படும்.

(இ) $p \in E$ மற்றும் p ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளியாக அமையாவிடில், அது E-ன் தனித்தப்புள்ளி (isolated point) எனப்படும்.

(ஈ) E-ன் அனைத்து எல்லைப்புள்ளிகளும் அதன் புள்ளிகளாக இருந்தால், E ஒரு மூடிய கணம் (closed set) எனப்படும்.

(உ) புள்ளி p-ன் ஏதேனும் ஒரு அண்மை N, $N \subset E$ என அமையின், p ஆனது E-ன் ஓர் உட்புள்ளி (interior point) எனப்படும்.

(ஊ) E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளும், E-ன் உட்புள்ளிகளாக அமையின், E ஒரு திறந்த கணமாகும் (open set).

(எ) E-ன் நிரப்புக்கணம் E^c என்பது, $p \in X$, $p \notin E$ என அமையும் புள்ளிகளைக் கொண்டதாகும்.

(ஏ) E என்ற கணம் மூடிய கணமாகவும், E-ன் அனைத்துப்புள்ளிளும் E-ன் எல்லைப் புள்ளிகளாகவும் அமையின், E ஒரு செவ்வியகணம் (perfect set) ஆகும்.

(உ) M என்ற மெய்யெண், $q \in X$ என்ற புள்ளியும், அனைத்து $p \in E$-க்கு $d(p, q) < M$ என அமையின், E வரம்புடையது ஆகும்.

(ஊ) X-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும், E-ன் எல்லைப் புள்ளியாகவோ, E-ன் ஒரு புள்ளியாகவோ (அல்லது இரண்டும்) அமையின், X-ல் E ஒரு அடர்கணம் (dense set) ஆகும்.

குறிப்பு:

R^1-ன் அண்மைகள் துண்டுகளாகவும், R^2-ன் அண்மைகள் வட்டங்களின் உட்பகுதிகளாகவும் அமையும்.

1.39. தேற்றம்

ஒவ்வொரு அண்மையும் ஒரு திறந்த கணமாகும்.

நிறுவல்:

$E = N_r(p)$ என்ற அண்மையை எடுத்துக்கொள்க. E-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி q என்க.

எனவே, $d(p, q) < r$ ஆகும். h என்ற மிகை மெய்யெண், $d(p, q) = r - h$ எனக் காணாலாம்.. $d(q, s) < h$ என அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகள் s -க்கு $d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < r - h + h = r \Rightarrow s \in E$.

ஆகையால், $N_h(q) \subset E$ என அமைகிறது. எனவே, q ஆனது E-ன் உட்புள்ளி ஆகும். q என்பது E-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்பதால், E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளும் E-ன் உட்புள்ளிகளாகும். ஆகையால், E ஒரு திறந்த கணம்.

1.40. தேற்றம்

E என்ற கணத்தின் எல்லைப்புள்ளி p ஆக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையும் E-ன் எண்ணற்ற புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதாகும்.

நிறுவல்:

(அ) தேவையான நிபந்தனை

p என்பது E-ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி என்க. p-ன் ஓர் அண்மை N-ல், E-ன் முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் மட்டும் தான் உண்டு எனக் கொள்வோம். $N \cap E$ முடிவுள்ளது ஆகையால், $N \cap E - \{p\} = \{ q_1, \ldots, q_n\}$ எனக் கொள்வோம்.

$r = \min_{1 \le m \le n} d(p, q_m)$. மிகை எண்களின் முடிவுள்ள கணத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு மிகை என்பதால், $r > 0$.

எனவே, $N_r(p)$ என்பது p-ன் ஓர் அண்மை என்பதால், $M = N \cap N_r(p)$-ம் p-ன் ஓர் அண்மையாக அமையும்.

ஆகையால், $M \cap E - \{p\} = N \cap N_r(p) \cap E - \{p\} = \phi \Rightarrow p$ ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல. இது முரண்பாடு.

எனவே, p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும் E-ன் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உண்டு.

(ஆ) போதுமான நிபந்தனை

p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையும் E-ன் எண்ணற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டது

$\Rightarrow$ p-ன் அண்மையில் p-ஐத் தவிர்த்து E-ன் ஒரு புள்ளி உள்ளது.

எனவே, p ஆனது E-ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி.

1.41. துணைத் தேற்றம்

ஒரு முடிவுள்ள கணத்தில், எல்லைப்புள்ளிகள் அமையாது.

நிறுவல்:

E-ஒரு முடிவுள்ள கணம், $p \in E$ என்க. p என்பது E-ன் எல்லைப்புள்ளி எனில், p-ன் அண்மையில் E-ன் எண்ணற்ற புள்ளிகள் அமையும். ஆனால், E முடிவுள்ளது. எனவே, p, E-ன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

குறிப்பு

ஒரு கணம் திறந்ததாக அல்லது மூடியதாக இருக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, $(a, b]$ திறந்ததும் அல்ல, மூடியதும் அல்ல.

1.42 எடுத்துக்காட்டு

R^2-ன் பின்வரும் உட்கணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(அ) $|z| < 1$ என அமையும் அனைத்து சிக்கல் எண்கள் z-ன் கணம்.

(ஆ) $|z| \leq 1$ என அமையும் அனைத்து சிக்கல் எண்கள் z-ன் கணம்.

(இ) ஒரு முடிவுள்ள கணம்.

(ஈ) முழு எண்களின் கணம்

(உ) $1/n\ (n = 1, 2, 3, ...,)$ என்ற எண்களைக் கொண்ட கணம்.

(ஊ) சிக்கல் எண்களின் கணம்.

(எ) (a, b) என்ற துண்டு.

இக்கணங்களின் பண்புகள் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

	மூடிய கணம்	திறந்த கணம்	செவ்விய கணம்	வரம்புடைய கணம்
(அ)	இல்லை	ஆம்	இல்லை	ஆம்
(ஆ)	ஆம்	இல்லை	ஆம்	ஆம்
(இ)	ஆம்	இல்லை	இல்லை	ஆம்
(ஈ)	ஆம்	இல்லை	இல்லை	இல்லை
(உ)	இல்லை	இல்லை	இல்லை	ஆம்
(ஊ)	ஆம்	ஆம்	ஆம்	இல்லை
(எ)	இல்லை	---	இல்லை	ஆம்

1.43. தேற்றம்

$\{E_\alpha\}$ என்பது (முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத) எண்ணிக்கையுள்ள கணங்கள் E_α-ன் தொகுதி எனில், $\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha E_\alpha{}^c$

நிறுவல்:

$A = \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c$, $B = \bigcap_\alpha E_\alpha{}^c$ என்க.

$x \in A$ எனில், $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$

$\Rightarrow$ அனைத்து α-க்கு, $x \notin E_\alpha \Rightarrow$ அனைத்து α-க்கு, $x \in (E_\alpha)^c$

$\Rightarrow x \in \cap(E_\alpha)^c \Rightarrow A \subset B$

மறுதலையாக, $x \in B$ எனில், $x \in (E_\alpha)^c, \forall\alpha \Rightarrow x \notin E_\alpha, \forall\alpha$

$\Rightarrow x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha \Rightarrow x \in \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c \Rightarrow B \subset A$

எனவே, $A = B$.

1.44. தேற்றம்

E என்ற கணம் திறந்த கணம் $\Leftrightarrow$ அதன் நிரப்புக் கணம் ஒரு மூடிய கணம்

நிறுவல்:

E^c - ஒரு மூடிய கணம் என்க. $x \in E$ என்க. எனவே, $x \notin E^c$.

மேலும், E^c மூடிய கணமென்பதால், x ஆனது E^c-ன் எல்லைப்புள்ளியாக அமையாது. எனவே, x-ன் ஏதாவதொரு அண்மை N, $E^c \cap N = \phi$ என்றவாறு அமையும். ஆகையால், $N \subset E \Rightarrow x$ ஆனது E-ன் உட்புள்ளியாக அமையும்.

$\Rightarrow E$ ஒரு திறந்த கணம்.

மறுதலையாக, E ஒரு திறந்த கணம் எ.்க. x என்பது E^c-ன் எல்லைப்புள்ளி என்க. எனவே, x-ன் அனைத்து அண்மையிலும், E^c-ன் ஒரு புள்ளி இருக்கும்.

$\Rightarrow x$ ஆனது E-ன் உட்புள்ளியாக அமையாது. E ஒரு திறந்த கணமாக இருப்பதால், $x \notin E$. எனவே, $x \in E^c$. ஆகையால், E^c ஒரு மூடிய கணம் ஆகும்.

1.45. துணைத்தேற்றம்

F ஒரு மூடிய கணம் $\Leftrightarrow$ அதன் நிரப்புக்கணம் ஒரு திறந்த கணம்.

இது மேலேக் கண்டத் தேற்றத்திலிருந்து உடனடியாகப் பெறப்படும்.

1.46. தேற்றம்

(அ) $\{G_\alpha\}$ என்பது திறந்த கணங்களின் கூட்டம் எனில், $\bigcup_\alpha G_\alpha$ ஒரு திறந்த கணம்.

(ஆ) $\{F_\alpha\}$ என்பது மூடிய கணங்களின் கூட்டம் எனில், $\bigcap_\alpha F_\alpha$ ஒரு மூடிய கணம்.

(இ) $G_1, \ldots, G_n$ என்பன திறந்த கணங்களின் முடிவுள்ள கூட்டம் எனில், $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ திறந்த கணம்.

(ஈ) $F_1, \ldots, F_n$ என்பன மூடிய கணங்களின் முடிவுள்ள கூட்டம் எனில், $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ மூடிய கணம்.

நிறுவல்:

(அ) $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ என்க.

$x \in G$ எனில், ஏதேனும் ஒரு α-க்கு $x \in G_\alpha$. G_α திறந்த கணம் என்பதால், x ஆனது G_α-ன் உட்புள்ளியாக அமையும்.

$\Rightarrow$ x, G-ன் உட்புள்ளியாகவும் அமையும். $\Rightarrow$ G ஒரு திறந்த கணம்.

(ஆ) F_α மூடிய கணம் $\Rightarrow F_\alpha{}^c$ திறந்த கணம்

$$\Rightarrow \bigcup_\alpha F_\alpha{}^c \text{ திறந்த கணம்}$$

$$\Rightarrow (\bigcap_{\alpha} F_{\alpha})^{c} \text{ திறந்த கணம்.}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \text{ மூடிய கணம்.}$$

(இ) $H = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ என்க.

$x \in H \Rightarrow x \in G_i$, i= 1, 2, ...,n. G_i திறந்த கணம் என்பதால், ஆரம் r_i உடைய x-ன் அண்மை N_i, $N_i \subset G_i$ (i= 1, 2, ...,n) என அமையும்.

$R = \min(r_1, ..., r_n)$ என்க. N என்பது ஆரம் r உடைய x-ன் அண்மை எனில், $N \subset G_i$, i= 1, 2, ..., n. ஆகையால், $N \subset H \Rightarrow H$ திறந்த கணம்.

(ஈ) F_i மூடிய கணம் $\Rightarrow F_i^c$ திறந்த கணம் (i = 1, 2, ..., n)

$$\Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{n} F_i)^{c} = \bigcap_{i=}^{n} F_i^{c} \text{ ஒரு திறந்த கணம்}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \text{ ஒரு மூடிய கணம்.}$$

குறிப்பு:

மேற்கண்ட தேற்றத்தில், பகுதி (இ) முடிவிலி வெட்டுகளுக்குப் பொருந்தாது.

$G_n = (-1/n, 1/n)$, (n= 1, 2, ...,) எனில், $G_1, G_2, ...$ என்பன திறந்த கணங்கள். ஆனால், $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$, ஓர் உறுப்புக்கணம். எனவே, திறந்த கணம் இல்லை.

இதைப் போலவே, பகுதி (ஈ)-ல் முடிவிலி சேர்ப்புக்கணம், மூடிய க ணமாக அமையத் தேவையில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, $F_n = [1/n, 2]$, n = 1, 2, ..., எனில், $F_1, F_2, ...,$ என்பவை மூடியவை. ஆனால், $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 2] = (0, 2]$ ஒரு மூடிய கணம் அல்ல.

1.47. வரையறை

X ஒரு யாப்பு வெளி, $E \subset X$, என்க. X-ல் E-ன் எல்லைப்புள்ளிகளின் கணம், E' எனில், E-ன் அடைப்பு $\bar{E} = E \cup E'$ என்ற கணமாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

1.48. தேற்றம்

X ஒரு யாப்பு வெளியில் $E \subset X$ எனில்,

(அ) $\bar{E}$ மூடிய கணம்

(ஆ) $E = \bar{E} \Leftrightarrow E$ மூடிய கணம்.

(இ)அனைத்து மூடிய கணம் $F \subset X, E \subset F$ என அமையும் எனில், $\bar{E} \subset F$.

நிறுவல்:

(அ) $p \in X$ மற்றும் $p \notin \bar{E}$ என்க. எனவே, $p \notin E \cup E' \Rightarrow$ p ஆனது E-ன் ஒரு புள்ளியாகவோ, E-ன் எல்லைப்புள்ளியாகவோ அமையாது. எனவே, ஓர் அண்மை N, $N \cap E = \phi$ என அமையும். அதாவது, $\bar{E}$-ன் நிரப்புக்கணம், திறந்த கணம். ஆகையால், $\bar{E}$ மூடிய கணம்.

(ஆ) $E = \bar{E}$ எனில், (அ)-ன் படி, E-மூடிய கணம். E ஒரு மூடிய கணம் எனில், E-ன் அனைத்து எல்லைப்புள்ளிகளும், E-ன் புள்ளியாக அமையும். எனவே, $E' \subset E$. ஆகையால், $\bar{E} = E \cup E' = E$.

(இ) F மூடிய கணம், $F \supset E$ எனில், $F \supset F'$. எனவே, $F \supset E'$. ஆகையால், $F \supset \bar{E}$.

1.49. தேற்றம்

E என்பது வெற்றற்ற மெய்யெண்களின் மேல் வரம்புடைய கணம். $y = \sup E$ எனில், $y \in \bar{E}$. மேலும், E ஒரு மூடிய கணம் எனில், $y \in E$.

நிறுவல்:

$y \in E$ எனில், $y \in \bar{E}$ ($\bar{E} = E \cup E'$). $y \notin E$ என்க. மேலும், $y = \sup E$ என்பதால், அனைத்து $h > 0$-க்கு $y - h$, E-ன் மேல்வரம்பாக அமையாது.

எனவே, $x \in E$ என்ற புள்ளி, $y - h < x < y$ என அமையும். ஆகையால், y ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளி ஆகும். இது $y \in \bar{E}$ என்பதைத் தரும்.

1.50. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியில், $E \subset Y \subset X$ என்க. ஒவ்வொரு $p \in E$-க்கு $r > 0$ என்ற எண், $q \in E$, $d(p, q) < r$ மற்றும் $q \in Y$ எனில், Y-ஐச் சார்ந்து E ஒரு திறந்த கணம் எனப்படும்.

1.51. தேற்றம்

$Y \subset X$ என்க. Y-ன் உட்கணம் E ஆனது Y-ஐச் சார்ந்து திறந்ததாக அமையத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $E = Y \cap G$, இங்கு G என்பது X-ன் ஏதேனும் ஒரு திறந்த உட்கணம்.

நிறுவல்:

நிபந்தனை தேவையானது

Y-ஐச் சார்ந்து E ஒரு திறந்த கணம் என்க. எனவே, ஒவ்வொரு $p \in E$-க்கு r_p என்ற மிகை எண், $d(p, q) < r_p$ என அமையும். $q \in Y$ எனில், $q \in E$ ஆகும்.

$V_p = \{q \in X : d(p, q) < r_p\}$, $G = \bigcup_{p \in E} V_p$ என்க.

V_p திறந்த கணம் என்பதால், G ஆனது X-ன் திறந்த கணமாக அமையும். $p \in V_p$, அனைத்து $p \in E \Rightarrow E \subset G \cap Y$ ஆகும்.

மேலும், V_p-ன் வரையறைப்படி, $V_p \cap Y \subset E$, $\forall p \in E$. எனவே, $G \cap Y \subset E$. ஆகையால், $E = G \cap Y$ ஆகும்.

மறுதலையாக, X-ல் G ஒரு திறந்த கணம். $E = G \cap Y$ எனில், ஒவ்வொரு $p \in E$-க்கு $V_p \subset G$ என்ற அண்மை உள்ளது. எனவே, $V_p \cap Y \subset E$ ஆகும். ஆகையால், E ஆனது Y-ஐச் சார்ந்து ஒரு திறந்த கணம்.

அடுத்து, கச்சித கணங்கள் பற்றிக் காண்போம்.

1.6. கச்சிதகணங்கள் (Compact Sets)

1.52. வரையறை

X என்ற யாப்புவெளியின் ஓர் உட்கணம் E என்க. X-ன் திறந்த கணங்களின் தொகுதி $\{G_\alpha\}$ என்க. $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ எனில், $\{G_\alpha\}$ என்பது E-ன் திறந்த உறை (open cover) எனப்படும்.

1.53. வரையறை

$\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ என்பன, E-ன் இரு திறந்த உறைகள் என்க. $\mathcal{F}$ என்பது $\mathcal{G}$-ன் உட்குடும்பம் எனில், $\mathcal{F}$ ஆனது $\mathcal{G}$-ன் உள்உறை எனப்படும். $\mathcal{G}$-ல் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் இருப்பின், $\mathcal{G}$ முடிவுள்ள உறை எனப்படும்.

1.54. எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $S = [0, 1]$ என்க.. அனைத்து $x \in S$-க்கு, $G_x = \{x\}$, எனில், $\{G_x : x \in [0,1]\}$ என்ற குடும்பம் S-ன் திறந்த உறை ஆகும்.

2. $S = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ என்க. அனைத்து $n \in S$-க்கு, $G_n = (n - 1/2, n + 1/2)$ எனில், $\{G_n : n \in S\}$ ஆனது S-ன் திறந்த உறை ஆகும்.

1.55. வரையறை

K என்பது X என்ற யாப்புவெளியின் உட்கணம் என்க. K-ன் ஒவ்வொரு திறந்த உறையிலும், முடிவுள்ள உள்உறை அமையுமானல், K ஆனது கச்சிதமான கணம் எனப்படும்.

1.56. எடுத்துக்காட்டுகள்

1. R^1 கச்சிதமான கணம் அல்ல.

$\mathcal{G} = \{(-n, n): n \in N\}$ என்க. $\mathcal{G}$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் திறந்த இடைவெளி ஆதலால், அது திறந்த கணம். மேலும், $\mathcal{G}$-ன் உறுப்புகளின் சேர்ப்பு R^1. ஆகையால், $\mathcal{G}$ ஆனது R^1-ன் திறந்த உறை.

$\mathcal{G}$-ன் முடிவுள்ள உள்குடும்பம் $\mathcal{F} = \{ (-n_1, n_1), (-n_2, n_2), \ldots (-n_k, n_k) \}$.

$\text{Max}\{ n_1, n_2, \ldots n_k \} = k$ எனில், $\mathcal{F}$ ஆனது R^1-ன் உறை அல்ல. எனவே, $\mathcal{G}$-ன் எந்த ஒரு முடிவுள்ள உள்குடும்பமும் R^1-ன் உறையாக அமையாது. ஆகையால், R^1-ன் கச்சிதமான கணம் அல்ல.

2. R^1-ன் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள உட்கணம் கச்சித கணம்.

$K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ என்பது R^1-ன் ஒரு முடிவுள்ள உட்கணம் என்க, மேலும், K-ன் ஏதேனும் ஒரு உறை $\mathcal{G}$ என்க. ஒவ்வொரு $a_i \in K$-க்கு $a_i \in G_i$ என அமையுமாறு $\mathcal{G}$-ல் G_i என்ற திறந்த கணத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க. $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ ஆனது K-ன் முடிவுள்ள திறந்த உறை. ஆகையால், $\mathcal{G}$ என்ற திறந்த உறைக்கு, முடிவுள்ள உள்உறை அமைகிறது. ஆகவே, K ஒரு கச்சிதமான கணம்.

1.57. தேற்றம்

$K \subset Y \subset X$ என்க. X-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சித கணம் $\Leftrightarrow$ Y-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சிதமான கணம்.

நிறுவல்:

X-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சித கணம் என்க. Y-ஐச் சார்ந்து திறந்த கணங்களின் தொகுதி $\{V_\alpha\}$, மற்றும் $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ என்க. தேற்றம் 1.51-ன் படி, அனைத்து α-ம், X-ஐச் சார்ந்த G_α என்ற திறந்த கணங்கள், $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$, என அமையும்.

X-ஐச் சார்ந்து K கச்சிதமானது என்பதால், $K \subset G_{\alpha 1} \cup \ldots \cup G_{\alpha n}$.

$K\subset Y \Rightarrow K\subset V_{\alpha 1}\cup \ldots \cup V_{\alpha n}$. $\Rightarrow$ Y-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சிதமான கணம்.

மறுதலையாக, Y-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சிதமான கணம் என்க. $\{G_\alpha\}$ என்பது, K-க்கு உறையாக அமையும் X-ன் திறந்த உட்கணங்களின் கூட்டம் என்க.

$V_\alpha = Y\cap G_\alpha$ எனில், ஏதேனும் $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$-க்கு $K\subset V_{\alpha 1}\cup \ldots \cup V_{\alpha n}$ என அமையும். $V_\alpha \subset G_\alpha$ என்பதால், $K\subset G_{\alpha 1}\cup \ldots \cup G_{\alpha n}$.

எனவே, X-ஐச் சார்ந்து K ஒரு கச்சிதமான கணம் ஆகும்.

1.58. தேற்றம்

யாப்பு வெளிகளின், கச்சிதமான உட்கணங்கள் மூடியவை.

நிறுவல்:

X என்ற யாப்பு வெளியின், கச்சிதமான உட்கணம் K என்க. K-ன் நிரப்புக் கணம், X-ன் திறந்த உட்கணம் என நிறுவுவோம். $p\in X$ மற்றும் $p\notin K$ என்க. $q\in K$ எனில், $p\neq q$. $r = d(p, q) > 0$ என்க, V_q, W_q என்பன முறையே, ஆரம் $< r/2$ உடைய p, q- ன் அண்மைகள் என்க. மேலும், $V_q \cap W_q = \phi$. K கச்சிதமான கணம் என்பதால், K-ல் $q_1, q_2, \ldots, q_n$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கைள்ள புள்ளிகள் $K\subset W_{q1}\cup \ldots \cup W_{qn} = W$ என அமையும். $V = V_{q1}\cap \ldots \cap V_{q_n}$ எனில், V ஆனது p-ன் அண்மையாக அமையும். மேலும், $V\cap W = \phi$. எனவே, $V\subset K^c$ ஆகும். ஆகையால், p ஆனது K^c-ன் உட்புள்ளி $\Rightarrow K^c$ ஒரு திறந்த கணம் $\Rightarrow$ K மூடிய கணம் ஆக அமையும்.

குறிப்பு:

மேலே கண்ட தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையல்ல. எடுத்துக்காட்டாக, $[0,\infty)$ என்பது மூடிய உட்கணம். ஆனால், இது கச்சிதமான கணம் அல்ல.

1.59. தேற்றம்

கச்சிதமான கணங்களின் மூடிய உட்கணங்கள் கச்சிதமானவை.

நிறுவல்:

X என்ற யாப்புவெளியின் கச்சிதமான கணம் K என்க. F ஆனது K-ன் மூடிய உட்கணம் F (X-ச் சார்ந்து) என்க. எனவே $F \subset K \subset X$. F கச்சிதமான கணம் என நிறுவுவோம். $\{V_\alpha\}$ என்பது F-ன் ஒரு திறந்த உறை என்க. எனவே, $\cup V_\alpha \supseteq F$ ஆக் அமையும். ஆகையால், $F^c \cup \{\cup V_\alpha\} = K$. F மூடிய கணம் என்பதால், F^c திறந்த கணம். ஆகவே, $\Omega = \{V_\alpha\} \cup F^c$ என்பது K-ன் திறந்த உறையாக இருக்கும். K கச்சிதமான கணம் என்பதால், Ω-ன் முடிவுள்ள உள்கூட்டம் Φ ஆனது K-ன் உறையாக அமையும். $F \subset K \Rightarrow \Phi$ ஆனது F-ன் உறையாகவும் இருக்கும். Φ-ன் ஓர் உறுப்பு F^c என்பதால், Φ-யிலிருந்து F^c-ஐ நீக்கினாலும், அது F-ன் திறந்த உறையாக அமையும். எனவே, $\{V_\alpha\}$-ன் முடிவுள்ள உள்கூட்டம் F-ன் உறையாக அமையும். ஆகையால், F ஒரு கச்சிதமான கணமாக இருக்கும்.

1.60. துணைத்தேற்றம்

F மூடிய கணம், K கச்சிதமான கணம் எனில், $F \cap K$ ஒரு கச்சிதமான கணம் ஆகும்.

நிறுவல்:

K கச்சிதமான கணம் $\Rightarrow$ K ஒரு மூடிய கணம்.

எனவே, F, K மூடிய கணங்கள் $\Rightarrow F \cap K$ ஒரு மூடிய கணம் ஆக இருக்கும். $F \cap K \subset K \Rightarrow F \cap K$ ஒரு கச்சிதமான கணமாக இருக்கும்.

1.61. தேற்றம்

X என்ற யாப்புவெளியின், கச்சிதமான உட்கணங்களின் கூட்டம் $\{K_\alpha\}$ என்க. மேலும், $\{K_\alpha\}$-ன் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள உள்கூட்டத்தின் வெட்டுக்கணம் வெற்றற்றது எனில், $\cap K_\alpha$-ம் வெற்றற்றது.

நிறுவல்:

$\cap K_\alpha = \phi$ என்க, $\cap K_\alpha$-ன் ஓர் உறுப்பு K_1 ஐ நிலை நிறுத்துக. $G_\alpha = K_\alpha^c$ என்க. மேலும், அனைத்து α-க்கும், $K_1 \cap K_\alpha = \phi$. K_α கச் சிதமான கணங்கள் என்பதால், அவை மூடியவை. எனவே, $\{G_\alpha\}$ என்பது K_1- ன் திறந்த உறையாக அமையும். K_1 கச்சிதமான கணம் என்பதால், $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ என்ற முடிவுள்ள குறியீட்டு எண்கள் $K_1 \subset G_{\alpha 1} \cup \ldots \cup G_{\alpha n}$ என அமையும்.

ஆகவே, $K_1 \cap K_{\alpha 1} \cap \ldots \cap K_{\alpha n} = \phi$ ஆக இருக்கும். இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடு. ஆகையால், $\cap K_\alpha$ வெற்றற்றது.

1.62. துணைத்தேற்றம்

$\{K_n\}$ என்பது, வெற்றற்ற கச்சிதமான கணங்களின் ஒழுங்குவரிசை. மேலும், $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots\}$ எனில், $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ ஒரு வெற்றற்ற கணம்.

1.63. தேற்றம்

E என்பது, கச்சிதமான கணம் K-ன் முடிவில்லாத உட்கணம் எனில், K-ல் E-ன் எல்லைப்புள்ளி இருக்கும்.

நிறுவல்:

K-ன் எந்த புள்ளியும், E-ன் எல்லைப்புள்ளியாக அமையவில்லை என்க. அனைத்துப் புள்ளி $q \in K$-க்கு, V_q என்ற அண்மை E-ன் எந்த புள்ளியையும் பெற்றிருக்காது ($q \notin E$ எனில்) அல்லது E-ன் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டும் பெற்றிருக்கும்

($q \in E$ எனில்). q என்பது K-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்பதால், $\{V_q\}$ ஆனது K-ன் திறந்த உறை ஆகும். K கச்சிதமான கணம் என்பதால், $\{V_q\}$-ன் எந்த ஒரு முடிவுள்ள உள்கூட்டமும், K-ன் உறையாகும். அது, E-ன் உறையாகவும் அமையும். இது ஒரு முரண்பாடு. ஏனெனில், E ஒரு முடிவில்லாத கணம். மேலும், ஒவ்வொரு அண்மையும் E-ன் அதிகபட்சமாக ஒரு புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.

ஆகையால், K-ல் E-ன் எல்லைப்புள்ளி இருக்கும்.

1.64. தேற்றம்

$\{I_n\}$ ஆனது R^1-ல் இடைவெளிகளின் தொடர்வரிசை. மேலும், $I_n \supset I_{n+1}$ (n =1, 2, …) எனில், $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ஒரு வெற்றற்ற கணமாக அமையும்.

நிறுவல்:

$I_n = [a_n, b_n]$ என்க. E ஆனது அனைத்து a_n- களின் கணம் எனில், E ஒரு வெற்றற்ற மேல்வரம்புடைய கணம். (மேல் வரம்பு b_1). $x = \sup E$ என்க. m, n என்பன, மிகை முழு எண்கள் எனில், $a_n \le a_{m+n} \le b_{m+n} \le b_m$.

எனவே, அனைத்து m-க்கு, $x \le b_m$,

$x = \sup E = \sup (\{a_n, n = 1, 2 \ldots\}) \Rightarrow a_m \le x$.

எனவே, $x \in [a_m, b_m] = I_m$, m = 1, 2,…. அதாவது, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

ஆகையால், $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ஒரு வெற்றற்ற கணமாக அமையும்.

1.65. தேற்றம்

k ஒரு மிகை முழு எண் என்க. $\{I_n\}$ ஆனது k- கண் அறைகளின் (k-cell) தொடர்வரிசை, $I_n \supset I_{n+1}$ (n =1, 2, …) எனில், $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ஒரு வெற்றற்ற கணமாக அமையும்.

நிறுவல்:

$I_n = \{ x = (x_1, \ldots, x_k): a_{n,j} \le x_j \le b_{n,j}, 1 \le j \le k, n = 1, 2, \ldots\}$

$I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$ என்க. அனைத்து j-க்கு, $\{I_{n,j}\}$ என்பது தேற்றம் 1.64-ன் கொள்கையை நிறைவேற்றுவதால், $x_j^* (1 \le j \le k\}$ என்ற மெய்யெண்கள்,

$a_{n,j} \le x_j \le b_{n,j,}, (1 \le j \le k, n = 1, 2, \ldots)$ என்றவாறு காணலாம்.

$x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ எனில், $x^* \in I_n, (n = 1, 2, \ldots)$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ஒரு வெற்றற்ற கணமாக அமையும்.

1.66. தேற்றம்

ஒவ்வொரு k-கண் அறையும் கச்சிதமானது.

நிறுவல்:

I என்பது ஒரு k-கண் அறை என்க.

$I = \{ x = (x_1, \ldots x_k\}: a_j \le x_j \le b_j, 1 \le j \le k\}.$

$\delta = \left[\sum_1^k (b_j - a_j)^2\right]^{1/2}$ என்க. எனவே, $x \in I, y \in I$ எனில், $|x - y| \le \delta$ ஆகும்.

I கச்சிதமான கணம் அல்ல என்க. I-ன் திறந்த உறை $\{G_\alpha\}$-ன் எந்த ஒரு உள்கூட்டமும், I-ன் உள்உறையாக அமையாதவாறு, $\{G_\alpha\}$ காணலாம்.

$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$ என்க. $[a_j, c_j]$ மற்றும் $[c_j, b_j]$ என்ற இடைவெளிகள் 2^k எண்ணிக்கையுள்ள Q_i என்ற k-கண் அறைகளை உருவாக்கும். இவைகளின் சேர்ப்பு I. Q_i என்ற இந்த கணங்களில் குறைந்தது ஒன்று I_1-க்கு $\{G_\alpha\}$-ன் முடிவுள்ள துணைக்கூட்டம் எதுவும் உறையாக அமையாது. அடுத்ததாக, I_1-ஐ உள்பிரித்து, மேற்கண்ட முறையைத் தொடர, கீழ்க்கண்டப் பண்புகள் உடைய $\{I_n\}$ எ ன்ற தொடர்வரிசை கிடைக்கப்பெறும்.

(அ) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$

(ஆ) $\{G_\alpha\}$-ன் எந்த ஒரு முடிவுள்ள துணைக் கூட்டமும் I_n-ன் உறையாக அமையாது.

(இ) $x, y \in I_n$ எனில், $|x - y| \leq 2^{-n}\delta$.

(அ) மற்றும் தேற்றம் 1.65-ன் படி, அனைத்து I_n-லும் இருக்கும் படியான x^* என்ற புள்ளி இருக்கும்.

ஏதேனுமொரு α-க்கு $x^* \in G_\alpha$ என்க. G_α திறந்த கணம் என்பதால், $r > 0$ என்பது $|y - x^*| < r$ என அமையின், $y \in G_\alpha$ ஆக இருக்கும். $2^{-n}\delta < r$ என அமையும் n மிகப்பெரியது எனில், (இ) $\Rightarrow I_n \subset G_\alpha$ ஆகும். இது (ஆ)-க்கு முரண்பாடானது. எனவே, ஒவ்வொரு k-கண் அறையும் கச்சிதமானது.

1.67. தேற்றம்

R^k-ன் ஓர் உட்கணம் E, கீழ்கண்ட மூன்று பண்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பெற்றிருப்பின், மீதி இரண்டையும் E பெற்றிருக்கும்.

(அ) E ஆனது மூடிய மற்றும் வரம்புடைய கணம்.

(ஆ) E கச்சிதமான கணம்.

(இ) E-ன் ஒவ்வொரு முடிவில்லாத உட்கணமும், E-ல் எல்லைப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

(அ) உண்மை எனில், E ஆனது மூடிய மற்றும் வரம்புடைய கணம் ஆகும். எனவே, I என்ற k-கண் அறை $E \subset I$ ஆக இருக்கும். தேற்றம் 1.66-ன் படி, I கச்சிதமான கணம். மேலும், தேற்றம் 1.59-ன் படி, E-ம் கச்சிதமான கணமாகும்.

(ஆ) உண்மை எனில், தேற்றம் 1.63-ன் படி,(ஆ) $\Rightarrow$ (இ) ஆகும்.

(இ) $\Rightarrow$ (அ) என நிறுவ வேண்டும்.

E வரம்பற்றது எனில், E-ல் x_n என்ற புள்ளி $|x_n| > n$ ($n = 1, 2, \ldots$) என அமையும். இத்தகைய புள்ளிகள் x_n -ஐக் கொண்ட கணம் முடிவில்லாதது. மற்றும், R^k-ல் எல்லைப்புள்ளியைக் கொண்டிராது. ஆகையால், E-லும் எல்லைப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்காது. இது முரண்பாடு. எனவே, E வரம்புடைய கணம்.

E மூடிய கணம் அல்ல எனில், $x_0 \in R^k$ என்ற புள்ளி E-ல் எல்லைப்புள்ளியாக அமையும், ஆனால், E-ன் புள்ளியாக இருக்காது. $n = 1, 2, \ldots$ க்கு $x_n \in E$ என்ற புள்ளிகள் $|x_n - x_0| < 1/n$ ஆக இருக்கும். இத்தகைய புள்ளிகள் x_n-ஐக் கொண்ட கணம் S எனில், S முடிவற்றது. (S முடிவுள்ளது எனில், முடிவில்லாத அநேக பல n-க்கு $|x_n - x_0|$-ன் மதிப்பு மிகை மாறிலியாக அமையும்).

மேலும், S-க்கு x_0 எல்லைப்புள்ளியாக இருக்கும். ஆனால், S ஆனது R^k-ல் மற்ற எந்த புள்ளியும் எல்லைப்புள்ளியையும் பெற்றிருக்காது. ஏனெனில், $y \in R^k$, $y \neq x_0$ எனில், $|x_n - y| \geq |x_0 - y| - |x_n - x_0|$

$\geq |x_0 - y| - 1/n \geq (|x_0 - y|)/2$ (n- ன் முடிவுள்ள எண்ணிக்கைத் தவிர)

$\Rightarrow y$ ஆனது S-ன் எல்லைப்புள்ளியாக அமையாது. எனவே, E-ல் S-ன் எந்த எல்லைப்புள்ளியும் இல்லை. இது முரணானது. ஆகையால், E ஒரு மூடிய கணம்.

குறிப்பு:

எந்த ஒரு யாப்பு வெளியிலும் (ஆ), (இ) என்பன சமானவையாகும். ஆனால், பொதுவாக, (அ) ஆனது (ஆ) மற்றும் (இ)-ஐத் தராது.

எடுத்துக்காட்டாக, $E = [0, 1]$-ன் யாப்பு பிரிநிலை (discrete) என்க.

$A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ என்ற கணம் மூடிய மற்றும் வரம்புடைய கணம். ஆனால், கச்சிதமான கணம் அல்ல என நிறுவுவோம். A ஆனது வரம்புடையது. இதற்கு, எல்லைப்புள்ளிகள் இல்லை என்பதால், A மூடியது. $G = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

என்ற திறந்த உறைக்கு, முடிவுள்ள உள்உறை கிடையாது. ஏனெனில், முடிவுள்ள உள்உறை இருப்பின், அவ்வுறையில், A-ன் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகளே அமையும். எனவே, A கச்சிதமான கணம் அல்ல.

1.68. தேற்றம் (வயிஸ்ட்ராஸ்)

R^k-ன் எந்த வரம்புடைய முடிவற்ற உட்கணமும். R^k-ல் எல்லைப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

E என்பது R^k-ன் வரம்புடைய முடிவற்ற உட்கணம் என்க. ஆகவே, E ஆனது $I \subset R^k$ என்ற k-கண் அறைக்கு உட்கணமாக அமையும். எனவே, I ஒரு கச்சிதமான கணம்.. தேற்றம் 1.63-ன் படி, E-ன் எல்லைப்புள்ளி I-ல் அமையும்.

ஆகையால், R^k-ல் அமையும்.

1.7. செவ்விய கணங்கள் (Perfect Sets)

1.69. தேற்றம்

P என்பது R^k-ல் வெற்றற்ற செவ்விய கணம் எனில், P எண்ணிடதகாதது.

நிறுவல்:

P-ல் எல்லைப்புள்ளிகள் அமைவதால், P முடிவில்லாததாக அமையும்.

P. எண்ணிடத்தக்கது எனில், P-ன் புள்ளிகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots$ எனக் குறிக்கலாம். $\{V_n\}$ என்ற அண்மைகளின் ஒழுங்குவரிசையைப் பின்வருமாறு அமைப்போம்.

V_1 என்பது x_1-ன் அண்மை என்க. V_1-ல் $|y - x_1| < r$ என அமையும் அனைத்து $y \in R^k$ -ம் அமையுமானால், V_1-ன் அடைப்பு $\overline{V}_1 = \{ y \in R^k : |y - x_1| \le r\}$ ஆக இருக்கும். $V_n \cap P$ வெற்றற்ற கணமாக அமையுமாறு V_n அமைக்கப்பட்டுள்ளது என்க. P-ன் அனைத்துப்புள்ளிகளும், P-ன் எல்லைப்புள்ளிகளாக அமைவதால், V_{n+1} என்ற

அண்மை (i) $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$, (ii) $x_n \notin \bar{V}_{n+1}$ (iii) $V_{n+1} \cap P$ வெற்றற்றது என அமையும்.

(iii)-ல் இருந்து, V_{n+1} நமது தொகுத்தறிதல் கொள்கையை நிறைவு செய்வதால், இந்த அமைப்பைத் தொடர முடியும். $K_n = \bar{V}_n \cap P$ என்க. $\bar{V}_n$ மூடிய வரம்புடைய கணம் என்பதால், $\bar{V}_n$ கச்சிதமான கணமாக அமையும். மேலும், $x_n \notin K_{n+1} \Rightarrow P$-ன் எந்தப் புள்ளியும் $\bigcap_1^{\infty} K_n$-ல் இருக்காது. $K_n \subset P \Rightarrow \bigcap_1^{\infty} K_n$ ஒரு வெற்று கணமாக அமையும். ஆனால், ஒவ்வொரு K_n-ம் வெற்றற்றது ((iii)-ல் இருந்து) மற்றும் $K_n \supset K_{n+1}$ ((i)-ல் இருந்து). இ து து ணைத்தேற்றம் 1.62-க்கு முரண்பாடானது. எனவே, P எண்ணிடத்தகாதது.

1.70. துணைத்தேற்றம்

ஒவ்வொரு இடைவெளி $[a, b]$, ($a < b$)-யும் எண்ணிடத்தகாதது. குறிப்பாக, அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணிடத்தகாதது.

1.8. காண்டார் கணம் (Cantor Set)

R^1-ல் எந்த துண்டும் இல்லாத செவ்விய கணங்களை அமைப்போம்.

E_0 என்பது $[0, 1]$ என்ற இடைவெளி என்க. அதிலிருந்து, $[1/3, 2/3]$ என்ற துண்டை நீக்குக.

E_1 என்பது $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ என்ற இடைவெளிகளின் சேர்ப்பு என்க. இவ்விடைகளின், மத்திய மூன்றில் ஒரு பகுதியை நீக்குக.

E_2 என்பது $[0, 1/9]$, $[2/9, 3/9]$, $[6/9, 7/9]$, $[8/9, 1]$ என்ற இடைவெளிகளின் சேர்ப்பு என்க. இம்முறையை தொடருவோமானால், E_n என்ற கச்சிதமான கணங்களின் ஒழுங்கு முறையைப் பின்வருமாறுக் காணலாம்.

(அ) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$

(ஆ) E_n என்பது, ஒவ்வொன்றும் 3^{-n} நீளமுடைய 2^n இடைவெளிகளின் சேர்ப்பு. $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ என்ற கணம், காண்டார் கணம் என அழைக்கப்படும். இக்கணம், வெற்றற்ற கச்சிதமான கணமாக அமையும்.

(i) P-ல் எந்த துண்டும் இல்லை எனக் காட்டுவோம்.

$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right)$, (k, m என்பன முழு எண்கள்) என்ற துண்டுகளுக்கும் P-க்குப் பொதுவான புள்ளிகள் எதுவுமில்லை. (α, β) என்ற துண்டு, $3^{-m} < (\beta - \alpha)/6$ எனில், மேலே கண்ட அமைப்பில் உள்ள துண்டைப் பெற்றிருக்கும். எனவே, P-ல் எந்த ஒரு துண்டும் இல்லை.

(ii) P- ஒரு செவ்விய கணம் எனக் காட்டுவோம்.

இதனை நிறுவ, P-ல் எந்த ஒரு தனித்தப் புள்ளியும் இல்லை என நிறுவுவோம்.

$x \in P$ மற்றும் x-ஐக் கொண்ட ஏதேனுமொரு துண்டு S என்க. I_n என்பது x-ஐ உள்ளடக்கிய E_n-ன் ஒரு இடைவெளி என்க. n-ஐ மீப்பெரிதாக, $I_n \subset S$ என அமையுமாறுத் தொ்ந்தெடுக்க. x_n என்பது I_n-ன் இறுதிப்புள்ளி, $x_n \neq x$ என்க.

P-ன் அமைப்பின் படி, $x_n \in P$ ஆக இருக்கும். எனவே, x என்பது P-ன் எல்லைப்புள்ளியாக அமையும்.

ஆகையால், P ஒரு செவ்விய கணம்.

1.9. இணைந்த கணங்கள் (Connected Sets)

1.71. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியின் இரு உட்கணங்கள் A, B. $A \cap \bar{B}$ மற்றும் $\bar{A} \cap B$ வெற்று கணங்களாக அமையின், A, B பிரிக்கப்பட்டக் கணங்கள் (separated sets) எனப்படும்.

அதாவது, A, B-ன் எந்த ஒரு புள்ளியும் முறையே B-ன் அடைப்பிலும், A-ன் அடைப்பிலும் இருக்காது.

$E \subset X$ என்ற கணம், இரு வெற்றற்ற பிரிக்கப்பட்ட கணங்களின் சேர்ப்பாக அமையவில்லை எனில், அக்கணம் இணைந்த கணம் எனப்படும்.

குறிப்பு:

பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள் பொது உறுப்பற்ற (disjoint) கணங்களாக அமையும். ஆனால், பொது உறுப்பற்ற கணங்கள், பிரிக்கப்பட்ட கணங்களாக அமையத் தேவையில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, [0, 1] என்ற இடைவெளியும், (1, 2) என்ற துண்டும் பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள் இல்லை. ஏனெனில், (1, 2)-ன் எல்லைப்புள்ளி 1. ஆனால், (0, 1) மற்றும் (1, 2) என்ற துண்டுகள் பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள்.

1.72. தேற்றம்

R^1 என்ற மெய்கோட்டின் உட்கணம் E இணைந்த கணமாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது:

$x \in E, y \in E$ மற்றும் $x < z < y$ எனில், $z \in E$ ஆகும்.

நிறுவல்:

$E \subset R^1$ ஒரு இணைந்த கணம் என்க. $x \in E, y \in E$ மற்றும் ஏதேனும் ஒரு $z \in (x, y)$- க்கு $z \notin E$ என்க, $A_z = E \cap (-\infty, z)$, $B_z = E \cap (z, \infty)$ எனில், $E = A_z \cup B_z$ ஆகும். $x < z < y$ என்பதால், $x \in A_z$ மற்றும் $y \in B_z$.

எனவே, A_z மற்றும் B_z வெற்றற்றவை. மேலும், $A_z \cap B_z = \phi$. $A_z \subset (-\infty, z)$, $B_z \subset (z, \infty)$ என்பதால், அவை பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள்.

எனவே, E இணைந்த கணம் அல்ல. இது முரணானது. எனவே, $z \in E$.

மறுதலையாக, E இணைந்த கணம் அல்ல என்க. எனவே, A, B என்ற வெற்றற்ற பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள், $A \cup B = E$ என்றவாறு அமையும். ஆகையால் $A \cap \bar{B} = \phi$ மற்றும் $\bar{A} \cap B = \phi$.

$x \in A$, $y \in B$ மற்றும் $x < y$ என்க.

$z = \sup[A \cap [x, y])$ (தேற்றம் 1.46-ன் படி, $z \in \bar{A} \Rightarrow z \notin B$.

ஆனால், $z \in [x, y]$. எனவே, $z<y$)

குறிப்பாக, $x \leq z < y$ ஆக இருக்கும். $z \notin A$ எனில், $z \neq x$. எனவே, $z > x$ ஆகும். ஆகையால், $x < z < y$ மற்றும் $z \notin E$.

$z \in A$ எனில், $z \notin \bar{B}$ ஆகும். எனவே, z_1 என்ற புள்ளி $z < z_1 < y$ மற்றும் $z_1 \notin B$ என அமையும். எனவே, $x < z_1 < y$ மற்றும் $z_1 \notin E$ ஆக இருக்கும்.

1.73. துணைத்தேற்றம்

மெய்க்கோடு R^1 ஒரு இணைந்த கணம்.

1.74. தேற்றம்

X என்ற யாப்புவெளியின் E என்பது ஓர் இணைந்த உட்கணம். மேலும், A, B என்பன பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள், $E \subset A \cup B$ எனில், $E \subset A$ அல்லது $E \subset B$ ஆக அமையும்.

நிறுவல்:

$E \subset A \cup B$ என்பதால், $E = E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B)$ ----- (2)

$E \cap A$ மற்றும் $E \cap B$ என்பதில் குறைந்தது ஒரு கணமாவது வெற்றுகணம் என நிறுவுவோம்.

முடியுமானால், இரு கணங்களும் வெற்றற்றவை என்க.

$\overline{E \cap B} \subset \bar{E} \cap \bar{B}$ என்பதால், $(E \cap A) \cap (\overline{E \cap B}) \subset (E \cap A) \cap (\bar{E} \cap \bar{B})$

$$= (E \cap \bar{E}) \cap (A \cap \bar{B}) = E \cap \bar{E} \cap \phi = \phi$$

$\Rightarrow (E \cap A) \cap (\overline{E \cap B}) = \phi$.

இதைப் போலவே, $(\overline{E\cap A})\cap(E\cap B)=\phi$.

எனவே, $E\cap A$ மற்றும் $E\cap B$ என்பன பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள். மேலும், அவை, E-ன் பிரித்தலாக அமைகிறது. ஆகையால், E இணைந்த கணம் அல்ல. இது முரண்பாடு.

எனவே, $E\cap A$, $E\cap B$ இவைகளில் குறைந்தது ஒன்று வெற்று கணம் ஆகும்.

$E\cap A=\phi$ எனில், (2)-ல் இருந்து, $E=E\cap B\Rightarrow E\subset B$.

இதைப் போலவே, $E\cap B=\phi$ எனில், $E\subset A$ எனக் கிடைக்கும். ஆகையால், $E\subset A$ அல்லது $E\subset B$ ஆக அமையும்.

1.75. தேற்றம்

X என்ற யாப்புவெளியின் ஓர் இணைந்த உட்கணம் E என்க. F என்ற X-ன் உட்கணம் $E\subset F\subset\overline{E}$ என அமைகிறது எனில், F இணைந்த கணம். குறிப்பாக, $\overline{E}$ ஓர் இணைந்த கணம் ஆகும்.

நிறுவல்:

முடியுமானால், F இணைந்த கணம் அல்ல என்க. A, B என்ற பிரிக்கப்பட்ட கணங்கள், $A\cup B=F$ என அமையும். $E\subset F$ என்பதால், $E\subset A\cup B$ ஆக இருக்கும். தேற்றம் 1.74-ன் படி, $E\subset A$ அல்லது $E\subset B$ ஆக அமையும். $E\subset A$ எனில், $\overline{E}\subset\overline{A}\Rightarrow\overline{E}\cap B\subset\overline{A}\cap B=\phi\Rightarrow\overline{E}\cap B=\phi$.

மேலும், $F=A\cup B$ மற்றும் $F\subset\overline{E}$, $B\subset F\subset\overline{E}\Rightarrow\overline{E}\cap B=B\Rightarrow B=\phi$.

இது, $B\neq\phi$ என்பதற்கு முரண்பாடு. எனவே, F ஓர் இணைந்த கணம்..

ஆகையால் $E\subset F\subset\overline{E}\Rightarrow\overline{E}$ இணைந்த கணம்.

குறிப்பு:

இணைந்த கணத்தின் உட்கணம் இணைந்ததாக அமையத் தேவையில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, மெய்கோடு R^1 ஓர் இணைந்த கணம். ஆனால், அதன் உட்கணம் $\{1, 2, \dots\}$ இணைந்த கணம் அல்ல.

1.10. பயிற்சி வினாக்கள்

1. A ஒரு எண்ணத்தக்க கணம், B ஒரு எண்ணிடமுடியாத கணம் எனில், B - A ஆனது எண்ணிடமுடியாத கணம் எனக் காட்டுக.

2. ஒவ்வொரு என்ணிடமுடியாத கணமும். முடிவற்ற எண்ணத்தக்க உட்கணத்தைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக,

3. பின்வரும் கணங்கள் எண்ணத்தக்கவை எனக் காட்டுக.

(அ) விகிதமுறு எண்களை ஆரமாகவும், விகிதமுறு எண்களை ஆயத்தொலைகளாகவும் கொண்ட மையங்களை உடையதாகவும், மெய்ப்புனை தளத்தில் உள்ள வட்டங்களின் கணம்

(ஆ) மிகை நீளம் கொண்ட பொது உறுப்பற்ற இடைவெளிகளின் கணம்

4. R^1-ல் திறந்த மற்றும் மூடிய கணமாகவும் அமையும் கணங்கள் வெற்று கணம் மற்றும் R^1 மட்டுமே என நிறுவுக.

5. ஒரு யாப்பு வெளியின் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள உட்கணமும் மூடியது என நிறுவுக.

6. S ஒரு மூடிய கணம், T ஒரு கச்சித கணம் எனில், $S \cap T$ ஒரு கச்சித கணம் என் நிறுவுக.

7. M என்ற யாப்பு வெளியின் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள கச்சித உட்கணங்களின் சேர்ப்பு கச்சிதமானது என நிறுவுக.

8. M என்ற யாப்பு வெளியின் ஏதேனும் ஒரு தொகுதி கச்சித உட்கணங்களின் வெட்டு கச்சிதமானது என நிறுவுக.

9 R^1-ல் மூடிய, கச்சித கணமாக அமையாது ஓர் உட்கணத்தின் உதாரணம் தருக.

10. R^1-ல் வரம்புடைய, கச்சித கணமாக அமையாது. ஓர் உட்கணத்தின் உதாரணம் தருக.

11. R^1-ன் இணைந்த உட்கணத்தின் அடைப்பு இணைந்த கணம் என நிறுவுக.

12. மெய்யெண்களின் கச்சித கணத்தை, அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் எண்ணத்தக்க கணமாக அமையுமாறு உருவாக்குக.

13. இணைந்த கணங்களின் அடைப்புகள் எப்பொழுதும் இணைந்த கணங்களாக அமையுமா? காரணம் கூறுக.

14. R^1-ல் விகிதமுறு எண்கள் எதுவும் அமையாத, வெற்றற்ற செவ்விய கணம் இருக்குமா? காரணம் கூறுக.

15. ஒவ்வொரு முடிவுள்ள யாப்புவெளியும் கச்சிதமானது எனக் காட்டுக.

16. X என்ற யாப்புவெளியின் இரு கச்சித கணங்கள் A, B எனில், $A \cup B$ ஒரு கச்சித கணம் என நிறுவுக.

17. X என்ற யாப்புவெளியின் இரு இணைந்த கணங்கள் A, B, $A \cap B = \phi$ எனில், $A \cup B$ ஒரு இணைந்த கணம் என நிறுவுக.

****

அத்தியாயம் 2

தொடர்வரிசைகள் மற்றும் தொடர்கள்

(Sequences and Series)

இந்த அத்தியாயம், சார்புகளின் சிறப்பு வகையான தொடர்வரிசைகள் மற்றும் தொடர்களைப் பற்றியது. ஒருங்கும் தொடர்வரிசைகள், காஷி தொடர்வரிசைகள் இங்கு கூறப்பட்டுள்ளன. தொடர்களின் ஒருங்கலை அறிவதற்கான சோதனைகள், தொடர்களின் அற ஒருங்கல், அடுக்குத் தொடர்கள் மற்றும் பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல் ஆகியவை விளக்கப்பட்டுள்ளன

2.1. தொடர்வரிசையின் ஒருங்கல்

$\{p_n\}$ என்பது X என்ற யாப்புவெளியின் ஒரு தொடர்வரிசை மற்றும் $p \in X$ என்க. $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்படும் போது, $d(p_n, p) < \varepsilon$, $n \geq N$ என்றவாறு ஒவ்வொரு ε-ஐப் பொறுத்து ஒரு முழு எண் N ஆனது இருந்தால், $\{p_n\}$ ஆனது, p-க்கு ஒருங்குகிறது என்போம்.

d என்பது X- ல் தூரத்தைக் குறிக்கும்.

தொடர்வரிசை $\{p_n\}$ ஆனது, p-க்கு ஒருங்கினால், p-க்கு $\{p_n\}$-ன் எல்லை என்று பெயர். இது, $p_n \rightarrow p$ அல்லது $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ எனவும் எழுதுவதுண்டு.

தொடர்வரிசை $\{p_n\}$ ஆனது, ஒருங்கவில்லையென்றால், அது விரி தொடர்வரிசை எனப்படும்.

ஒருங்கு தொடர்வரிசை, $\{p_n\}$- ஐ மட்டும் சார்ந்திராமல், X-ஐயும் சார்ந்திருக்கும்.

எடுத்துகாட்டாக, $\{1/n\}$ என்ற தொடர்வரிசை R^1-ல் 0-க்கு ஒருங்கும். ஆனால், அனைத்து மிகை மெய்யெண்களின் கணத்தில் ஒருங்காது.
$(d(x, y) = |x - y|)$.

2.2. வரம்புடைய தொடர்வரிசை (Bounded Sequence)

அனைத்துப்புள்ளிகளின் கணம், p_n, $(n = 1, 2, \ldots\}$ என்பது $\{ p_n\}$-ன் வீச்செல்லை எனப்படும். $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசையின் வீச்செல்லை வரம்புடையது எனில், $\{p_n\}$ வரம்புடையது எனப்படும்.

2.3. எடுத்துக்காட்டுகள்

மெய்ப்புனை எண்களின் தொடர்வரிசைகளை எடுத்துக்கொள்க. $(X = R^2)$.

(அ) $p_n = 1/n$ எனில், $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ இதன் வீச்செல்லை முடிவிலாதது. ஆனால், தொடர்வரிசை வரம்புடையது.

(ஆ) $p_n = n^2$ எனில், $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை முடிவிலா வீச்செல்லை உடைய வரம்பற்ற தொடர்வரிசையாகும்.

(இ) $p_n = 1 + (-1)^n/n$ எனில், $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை 1-க்கு ஒருங்கும். மேலும், $\{p_n\}$ ஆனது முடிவிலா வீச்செல்லை உடைய, வரம்புடைய தொடர்வரிசை.

(ஈ) $p_n = i^n$ எனில், $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை வரம்புடைய, முடிவுள்ள வீச்செல்லை உடைய விரியும் தொடர்வரிசை.

(உ) $p_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots\}$ எனில், $\{p_n\}$ ஆனது 1-க்கு ஒருங்கும், வரம்புடைய, முடிவுள்ள வீச்செல்லை உடைய தொடர்வரிசை.

2.4. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியில் $\{p_n\}$ என்பது ஒரு தொடர்வரிசை என்க. $\{p_n\}$ ஆனது $p\in X$ என்ற புள்ளிக்கு ஒருங்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை:

p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும் $\{p_n\}$-ன் அனைத்து ஆனால் முடிவுள்ள அநேக (all but finitely many) உறுப்புகள் இருக்கும்.

நிறுவல்:

$p_n \to p$ மற்றும் p-ன் ஓர் அண்மை V என்க. எனவே, $\varepsilon > 0$ என்ற எண்ணிற்கு, $d(p, q) < \varepsilon$ என அமையும்.

$q \in X$ என்பதால், $q \in V$.

$p_n \to p \Rightarrow$ இந்த ε-க்கு, N என்ற எண், $n \geq N$ எனில், $d(p_n , p) < \varepsilon$ என்றவாறு இருக்கும். எனவே, $n \geq N \Rightarrow p_n \in V$ ஆகும்,

மறுதலையாக, p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையும் அனைத்து, ஆனால் முடிவுள்ள அநேக பல (finitely many) p_n -ஐப் பெற்றிருக்கிறது என்க.

$\varepsilon > 0$ என்க.

$V = \{q \in X: d(p, q) < \varepsilon\}$ என்க.

நமது கொள்கையின் படி, V-க்கு ஏதுவாக, N என்ற எண், $n \geq N$ எனில், $p_n \in V$ ஆக அமையும். எனவே, $n \geq N$ எனில் $d(p_n, p) < \varepsilon$ ஆக இருக்கும். ஆகையால், $p_n \to p$.

அடுத்ததாக, ஒரு தொடர்வரிசை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எல்லைக்கு ஒருங்காது என நிறுவுவோம்.

2.5. **தேற்றம்**

ஒருங்கும் தொடர்வரிசைக்கு, ஒரே ஒரு எல்லை தான் உண்டு.

அதாவது, $\{p_n\}$ என்பது யாப்புவெளி X-ல் ஒரு தொடர்வரிசை. $p, p' \in X$ மற்றும் $p_n \to p, p_n \to p'$ எனில், $p = p'$ ஆக இருக்கும்.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$p_n \to p, p_n \to p'$ என்பதால், $n \geq N' \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon/2$ என்றவாறும்,

$n \geq N'' \Rightarrow d(p_n, p') < \varepsilon/2$ என்றவாறும், N', N'' என்ற முழு எண்கள் இருக்கும்.

$N = \max(N', N'')$ என்க.

எனவே, $n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon/2$ மற்றும் $d(p_n, p') < \varepsilon/2$.

இப்பொழுது, $d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ ஏதேனுமொரு எண் என்பதால், $d(p, p') = 0$.

எனவே, $p' = p$ ஆக அமையும்.

2.6. தேற்றம்

X யாப்பு வெளியில், ஒவ்வொரு ஒருங்கும் தொடர்வரிசையும் வரம்புள்ளதாகும்.

நிறுவல்:

$\{p_n\}$ என்பது X-ல் p என்ற புள்ளியில் ஒருங்கும் தொடர்வரிசை என்க.

எனவே, $n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < 1$ என்றவாறு ஒரு முழு எண் N இருக்கும்.

$r = \max\{1, d(p_1, p), ..., d(p_N, p)\}$ எனில், $d(p_n, p) \leq r, n = 1, 2, 3, ...$

வரை இலக்கணப்படி, $\{p_n\}$ ஆனது வரம்புள்ளதாகும்.

குறிப்பு:

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையாகாது. அதாவது, பொதுவாக, வரம்புள்ள தொடர்வரிசைகள் ஒருங்குவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $\{p_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$ என்ற தொடர்வரிசை வரம்புடையது.

$$p_n = \begin{cases} 1, & n \text{ இரட்டை எண் எனில்,} \\ 0, & n \text{ ஒற்றை எண் எனில்} \end{cases}$$

எனவே, $\{p_n\}$ ஒருங்கும் தொடர்வரிசை அல்ல.

2.7. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஓர் உட்கணம் E. p என்பது E-ன் எல்லைப்புள்ளி எனில், E-ல் $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை, $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ எனக் காணலாம்.

நிறுவல்:

E-ன் எல்லைப்புள்ளி p என்பதால், ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் n-ற்கு, $p_n \in E$ என்ற புள்ளி $d(p_n, p) < 1/n$ என அமையும்.

கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-விற்கு, N-ஐ $N\varepsilon > 1$ என்றவாறு தேர்ந்தெடுக்க.

எனவே, $n > N$ எனில், $d(p_n, p) < 1/N < \varepsilon$.

ஆகையால், $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ ஆகும்.

மெய்ப்புனை எண்களின் தொடர்வரிசைகளின் இயற்கணித செயல்களைக் கீழ்க்கண்டத் தேற்றத்தில் காணலாம்.

2.8. தேற்றம்

$\{s_n\}$ மற்றும் $\{t_n\}$ என்பன மெய்ப்புனை தொடர்வரிசைகள். $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ எனில்,

(அ) $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$

(ஆ) $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$, c ஆனது ஏதேனும் ஓர் எண்.

(இ) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$

(ஈ) $s_n \neq 0$ (n = 1, 2, 3. ...) மற்றும் $s \neq 0$ எனில், $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$

நிறுவல்:

(அ) $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ என்பதால்,

$|s_n - s| < \varepsilon/2, n \geq N_1$ என்றவாறு N_1-ம்,

$|t_n - t| < \varepsilon/2, n \geq N_2$ என்றவாறு N_2-ம் இருக்கும்.

$N = \max(N_1, N_2)$ எனில்,

$n \geq N \Rightarrow |(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon$ ஆகும்.

எனவே, $\{s_n + t_n\} \to s + t$..

(ஆ) $c \neq 0$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு, $|s_n - s| < \varepsilon/|c|$, $n \geq N$ என்றவாறு N இருக்கிறது.

எனவே, $n \geq N$ எனில், $|cs_n - cs| \leq |c|\,|s_n - s| < \varepsilon$ ஆகும்.

ஆகையால், $cs_n \to cs$.

இதைப்போலவே, $n \geq N$ எனில், $|s_n - s| < \varepsilon$ என்றவாறு N இருக்கிறது.

ஆகவே, $n \geq N$ எனில் $|(c + s_n) - (c + s)| = |s_n - s| < \varepsilon$.

எனவே, $c + s_n \to c + s$ ஆகும்.

(இ) $s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s)$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}, n \geq N_1$ என்றவாறு N_1-ம்

$|t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}, n \geq N_2$ என்றவாறு N_2-ம் இருக்கின்றன.

$N = \max(N_1, N_2)$ எனில், $n \geq N \Rightarrow |(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon$.

எனவே, $\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0$.

$t_n \to t \Rightarrow st_n \to st$

$s_n \to s \Rightarrow ts_n \to ts$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = 0$.

(ஈ) $s_n \to s \Rightarrow |s_n - s| < |s|/2, n \geq m$ என்றவாறு m இருக்கிறது.

எனவே, $n \geq m$ எனில், $|s_n| > |s|/2$.

கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$ க்கு, $N > m$ என்றவாறு N என்ற எண்,

$n \geq N \Rightarrow |s_n - s| < |s|^2\varepsilon/2$ என இருக்கிறது.

ஆகையால், $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < 2\frac{|s_n - s|}{|s|^2} < \varepsilon$.

எனவே, $\frac{1}{s_n} \to \frac{1}{s}$ ஆக இருக்கும்.

2.9. **தேற்றம்**

(அ) $x_n \in R^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ மற்றும் $x_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n})$ என்க. $\{x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$-க்கு ஒருங்கும் $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ $(1 \leq j \leq k)$.

நிறுவல்:

$x_n \to x$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$ க்கு ஏற்ப, N என்ற முழு எண்,

$|x_n - x| < \varepsilon, n \geq N$ என்றவாறு அமையும்.

R^k -ன் அலகை (norm) யின் வரையறைப்படி, $|(\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |x_n - x|$

எனவே, $n \geq N \Rightarrow |\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \varepsilon$ ஆகும்.

மறுதலையாக, $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ என்க.

ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப, N என்ற முழு எண், $n \geq N \Rightarrow |\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \varepsilon/\sqrt{k}$, $(1 \leq j \leq k)$ என அமையும்.

எனவே, $n \geq N \Rightarrow \left\{\sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_{j,n} - \alpha_j\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. ஆகையால், $x_n \to x$.

2.2. துணைத்தொடர்வரிசைகள் (subsequences)

2.10. வரையறை

கொடுக்கப்பட்ட $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசைக்கு, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ என அமையும் $\{n_k\}$ என்ற மிகை முழுஎண்களின் தொடர்வரிசையை எடுத்துக் கொள்க. $\{p_{n_i}\}$ என்ற தொடர்வரிசை, $\{p_n\}$-ன் துணைத்தொடர்வரிசை எனப்படும்.

$\{p_{n_i}\}$ ஒருங்குமாயின், அதன் எல்லை, $\{p_n\}$-ன் துணைத் தொடர்பு எல்லை (subsequential limit) எனப்படும்.

2.11. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியில், $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை p-க்கு ஒருங்குவதற்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாவது, $\{p_n\}$-ன் ஒவ்வொரு துணைத் தொடர்வரிசையும் p-க்கு ஒருங்குவதாகும்.

நிறுவல்:

$\{p_n\} \to p$ என்க. $\{p_{n_i}\}$ என்பது $\{p_n\}$-ன் துணைத்தொடர்வரிசை என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு, N என்ற முழு எண், $n \geq N$ எனில், $d(p_n, p) < \varepsilon$ என அமையும். $\{p_{n_i}\}$ஆனது துணைத்தொடர்வரிசை என்பதால், M என்ற முழுஎண், $n \geq M$ எனில், $n_i \geq N$ என அமையும். எனவே, $n \geq M$ எனில், $d(p_{ni}, p) < \varepsilon$ ஆக இருக்கும். ஆகையால், $p_{n_i} \to p$ ஆகும்.

இதன் மறுதலை, $\{p_n\}$-ம் ஒரு துணைத்தொடர்வரிசை என்பதால், உண்மையாகிறது.

2.12. தேற்றம்

(அ) X என்ற கச்சிதமான யாப்பு வெளியில், $\{p_n\}$ என்பது ஒரு தொடர்வரிசை எனில், $\{p_n\}$-ன் ஏதேனும் ஒரு துணைத்தொடர்வரிசை, X-ன் ஒரு புள்ளிக்கு ஒருங்கும்.

(ஆ) R^k-ல் ஒவ்வொரு வரம்புடைய தொடர்வரிசையும், ஒருங்கும் துணைத் தொடர்வரிசையைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

(அ) $\{p_n\}$-ன் வீச்செல்லை E என்க.

E முடிவுள்ளது எனில், $p \in E$ என்ற புள்ளி மற்றும் $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ என அமையும் $\{n_i\}$ என்ற தொடர்வரிசை, $p_{n_1} = p_{n_2} = \dots = p$ என்றவாறு இருக்கும்.

எனவே, இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட $\{p_{n_i}\}$என்ற துணைத்தொடர்வரிசை, p-க்கு ஒருங்கும்.

E முடிவற்றது எனில், E ஆனது $p \in X$ என்ற எல்லைப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.

[E என்பது K என்ற கச்சித கணத்தின் முடிவற்ற உட்கணம் எனில், K-ல் E ஒரு எல்லைப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.]

n_1-ஐ $d(p, p_{n_1}) < 1$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

$n_1, \dots, n_{i-1}$ என்பவைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தப் பின், $n_i > n_{i-1}$ என்ற முழு எண், $d(p, p_{n_i}) < 1/i$ என அமையும்.

[E என்ற கணத்தின் ஒரு எல்லைப்புள்ளி p எனில், p-ன் ஒவ்வொரு அண்மையும் E-ன் முடிவில்லாத அநேகப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கும்.]

எனவே, $\{p_n\}$ என்பது p-க்கு ஒருங்கும்.

(ஆ) தேற்றம் 1.63-ன் படி, R^k-ன் ஒவ்வொரு வரம்புடைய உட்கணமும், R^k-ன் கச்சிதமான உட்கணம் ஒன்றில் அமையும்.

(அ)-ன் படி. R^k-ன் ஒவ்வொரு வரம்புடைய தொடர்வரிசையும், ஒருங்கும் துணைத் தொடர்வரிசையைக் கொண்டிருக்கும்.

2.13. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியில், $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசையின் துணைத் தொடர்பு எல்லைகளின் (subsequential limits) கணம், X-ன் மூடிய உட்கணமாக அமையும்.

நிறுவல்:

$\{p_n\}$ என்ற துணைத்தொடர்பு எல்லைகளின் கணம் E^* என்க.

மேலும், q என்பது E^*-ன் எல்லைப்புள்ளி என்க. $q \in E^*$ என நிறுவ வேண்டும்.

$p_{n1} \neq q$ என அமையுமாறு, n_1-த் தேர்ந்தெடுக்க.

$\delta = d(q, p_{n1})$ என்க.

$n_1, \ldots, n_{i-1}$ என்பவைத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளன என்க.

q ஆனது E^*-ன் எல்லைப்புள்ளி என்பதால், $x \in E^*$ என்ற புள்ளி, $d(x, q) < 2^{-i}\delta$ என அமையும்.

$x \in E^*$ என்பதால், $n_i > n_{i-1}$ என்பது $d(x, p_{ni}) < 2^{-i}\delta$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, $d(q, p_{ni}) \leq d(q, x) + d(x, p_{ni})$

$$< 2^{-i}\delta + 2^{-i}\delta = 2^{1-i}\delta, \ (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ஆகவே, $\{p_n\}$ என்பது, q-க்கு ஒருங்கும். ஆகையால், $q \in E^*$.

2.3. காஷியின் தொடர்வரிசைகள் (Cauchy Sequences)

2.14. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஒரு தொடர்வரிசை $\{p_n\}$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப N என்ற முழு எண், $n \geq N$ மற்றும் $m \geq N$ எனில், $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ என அமையுமானால், $\{p_n\}$ என்பது காஷியின் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

2.15. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஓர் உட்கணம் E என்க. S என்பது $d(p, q)$, $p \in E$, $q \in E$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும் அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $\sup S$ ஆனது E-ன் விட்டம் எனப்படும். அது $\operatorname{diam} E$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு:

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஒரு தொடர்வரிசை $\{p_n\}$. E_N என்பது p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, … என்ற புள்ளிகளுடைய கணம். மேலேக் கண்ட வரையறைகளின் படி, $\{p_n\}$ என்பது காஷியின் தொடர்வரிசையாக அமையத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0$ ஆகும்.

2.16. தேற்றம்

(அ) X என்ற யாப்பு வெளியில், E என்ற கணத்தின் அடைப்பு $\bar{E}$ எனில், $\operatorname{diam} \bar{E} = \operatorname{diam} E$.

(ஆ) K_n என்பது X-ல் கச்சிதமான கணங்களின் தொடர்வரிசை. மேலும், $K_n \supset K_{n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ மற்றும் $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0$ எனில், $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ –ல் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டுமே இருக்கும்.

நிறுவல்:

(அ) E-ன் அடைப்பு $\bar{E}$ என்பதால், $E \subset \bar{E}$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, $\operatorname{diam} E \le \operatorname{diam} \bar{E}$.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் $p \in \bar{E}$, $q \in \bar{E}$ என்க.

$\bar{E}$-ன் வரையறையின் படி, E-ல் p', q' என்ற புள்ளிகள்

$d(p, p') < \varepsilon$, $d(q, q') < \varepsilon$ என அமையும்.

எனவே, $d(p, q) \le d(p, p') + d(p', q') + d(q', q)$

DR. T.P.M. LIBRARY ★ MADURAI KAMARA 299095

$$< 2\varepsilon + d(p', q')$$
$$\leq 2\varepsilon + \text{diam}E$$

எனவே, $\text{diam } \bar{E} \leq 2\varepsilon + \text{diam } E$

ε ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் என்பதால், $\text{diam } \bar{E} = \text{diam } E$

(ஆ) $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ என்க.

தேற்றம் 1.57-ன் படி, K வெற்றற்றது.

K-ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் அமையுமாயின், $\text{diam } K > 0$.

ஒவ்வொரு n-க்கு, $K_n \supset K$ என்பதால், $\text{diam } K_n \geq \text{diam } K$.

இது $\lim_{n \to \infty} \text{diam } K_n = 0$-க்கு முரண்பாடானது.

ஆகையால், K-ல் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டுமே இருக்கும்.

2.17. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியில், ஒவ்வொரு ஒருங்கும் தொடர்வரிசையும் ஒரு காஷி தொடர்வரிசையாக இருக்கும்

நிறுவல்:

X-ல் $\{p_n\}$ ன்ற தொடர்வரிசை p-ல் ஒருங்குகிறது என்க.

எனவே, $\varepsilon > 0$ எனில், N என்ற முழு எண், $n \geq N$ எனில், $d(p, p_n) < \varepsilon$ எனக் காணலாம்.

$n \geq N, m \geq N$ எனில், $d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon$

எனவே, $\{p_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை, ஒரு காஷியின் தொடர்வரிசையாகும்.

2.18. தேற்றம்

X என்ற கச்சிதமான யாப்பு வெளியில், $\{p_n\}$ என்பது ஒரு காஷி தொடர்வரிசை எனில், $\{p_n\}$ ஆனது X-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$\{p_n\}$ என்பது X என்ற கச்சிதமான யாப்பு வெளியில், காஷி தொடர்வரிசை என்க.

$N = 1, 2, 3, \ldots$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, E_N என்பது $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ என்ற புள்ளிகளுடைய கணம்,

வரையறை 2.15 மற்றும் தேற்றம் 2.16(அ)-ன் படி, $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam } \overline{E}_n = 0$.

$\overline{E}_N$ ஆனது, கச்சிதமான யாப்பு வெளி X-ன் மூடிய உட்கணம் என்பதால், ஒவ்வொரு $\overline{E}_N$-ம் கச்சிதமானது. மேலும், $E_N \supset E_{N+1} \Rightarrow \overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$

தேற்றம் 2.16(ஆ)-ன் படி, $\cap\ \overline{E}_N$-ல் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டுமே இருக்கும்.

$p \in X$ மற்றும் $p \in \cap\ \overline{E}_N$ என்க. எனவே, அனைத்து $\overline{E}_N$-க்கு $p \in \overline{E}_N$ ஆகும்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam } \overline{E}_n = 0$ என்பதால், N_0 என்ற முழு எண்,

$N \geq N_0 \Rightarrow \text{diam } \overline{E}_N < \varepsilon$ எனக் காணலாம்.

$p \in \overline{E}_N \Rightarrow$ அனைத்து $q \in \overline{E}_N$-க்கு $d(p, q) < \varepsilon$ ஆகும்.

எனவே, அனைத்து $q \in E_N$-க்கு $d(p, q) < \varepsilon$ ஆகும். மாற்றாக, $n \geq N_0$ எனில், $d(p, p_n) < \varepsilon$ ஆக இருக்கும். ஆகையால், $p_n \to p$.

2.19. **தேற்றம்**

R^k-ல் அனைத்து தொடர்வரிசையும் ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$\{x_n\}$ *என்பது* R^k*-ல் ஒரு காஷி தொடர்வரிசை,* $N = 1, 2, 3, \ldots$ என்ற எணக்ளுக்கு, E_N என்பது $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ என்ற புள்ளிகளைக் கொண்ட கணம் என்க.

ஏதேனும் ஒரு எண் N-க்கு, $\text{diam } E_N < 1$.

$\{x_n\}$-ன் வீச்செல்லை ஆனது, E_N மற்றும் $\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ என்ற கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம் ஆகும். எனவே, $\{x_n\}$ வரம்புடையது.

தேற்றம் 1.63-ன் படி, R^k-ன் ஒவ்வொரு வரம்புடைய உட்கணமும், R^k-ல் கச்சிதமான அடைப்பைப் பெற்றிருக்கும்

தேற்றம் 2.18-ன் படி, $\{x_n\}$ ஆனது, R^k-ன் ஒரு புள்ளிக்கு ஒருங்கும்.

2.20. வரையறை

ஒரு யாப்பு வெளியின் ஒவ்வொரு காஷி தொடர்வரிசையும் ஒருங்கினால், அவ்வெளி முழு யாப்பு வெளி (Complete Metric Space) எனப்படும்.

குறிப்பு:

1. தேற்றம் 2.18-ன் படி, அனைத்து கச்சிதமான யாப்பு வெளிகள் முழு யாப்பு வெளிகளாகும்.
2. தேற்றம் 2.19-ன் படி, அனைத்து யூக்ளிடின் வெளிகளும் முழு யாப்பு வெளிகளாக அமையும்.
3. அனைத்து விகிதமுறு எண்களில், $d(x, y) = |x - y|$ உடன் கூடிய யாப்பு வெளி, முழு யாப்பு வெளி அல்ல.

2.21. வரையறை

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ ஆனது

(அ) $s_n \le s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ என்றவாறு இருந்தால், $\{s_n\}$-ஐ ஒரு போக்கு ஏறும் (monotonically increasing) தொடர்வரிசை என்போம்.

(ஆ) $s_n \ge s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ என்றவாறு இருந்தால், $\{s_n\}$-ஐ ஒரு போக்கு குறையும் (monotonically decreasing) தொடர்வரிசை என்போம்.

2.22. தேற்றம்

$\{s_n\}$ என்பது ஓர் ஒருபோக்கு தொடர்வரிசை. $\{s_n\}$ ஒருங்குவதற்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாவது $\{s_n\}$ வரம்புடையதாக இருப்பதாகும்.

நிறுவல்:

$\{s_n\}$ ஓர் ஒருபோக்கு ஏறும் தொடர்வரிசை என்க.. எனவே, $s_n \leq s_{n+1}$

$\{s_n\}$-ன் வீச்செல்லை E என்க. மேலும், $\{s_n\}$ வரம்புடையது என்க.

E-ன் மீச்சிறு மேல் வரம்பு S என்க. எனவே, $s_n \leq s$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு, N என்ற முழு எண், $s-\varepsilon < s_N \leq s$ என அமையும்.

அவ்வாறு இல்லையெனில், $s - \varepsilon$ ஆனது E-ன் மேல்வரம்பாக அமையும்.

$\{s_n\}$ ஒருபோக்கு ஏறும் தொடர்வரிசை என்பதால், $n \geq N \Rightarrow s-\varepsilon < s_n \leq s$ ஆக இருக்கும். எனவே, $\{s_n\}$ ஆனது s-க்கு ஒருங்கும்.

மறுதலையாக, தேற்றம் 2.6-ன் படி, ஒவ்வொரு ஒருங்கும் தொடர்வரிசையும் வரம்புள்ளதாகும்.

2.4. மேல் மற்றும் கீழ் எல்லைகள்

2.23. வரையறை

$\{s_n\}$ என்பது, மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்க.

ஒவ்வொரு மெய்யெண் M-க்கும், N என்ற முழுஎண், $n \geq N$ எனில், $s_n \geq M$ என அமையுமாயின், $s_n \to +\infty$ என எழுதுவதுண்டு.

இதைப் போலவே, ஒவ்வொரு மெய்யெண் M-க்கும் N என்ற முழுஎண் $n \geq N$ எனில், $s_n \leq M$ என அமையுமாயின், $s_n \to -\infty$ என எழுதப்பெறும்.

2.24. வரையறை

$\{s_n\}$ என்பது மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்க. விரிவாக்கப்பட்ட மெய்யெண் அமைப்பில், ஏதேனும் ஒரு துணைத்தொடர்வரிசை $\{s_{n_k}\}$, $s_{n_k} \to x$ என அமையுமானால், எண்கள் x-ஐக் கொண்ட கணம் E என்க. E என்பது அனைத்து துணைத் தொடர்பு எல்லைகளையும் (subsequential limits) மற்றும் $+\infty$, $-\infty$ ஆகியவற்றையும் பெற்றிருக்கும்.

$s^* = \sup E$, $s_* = \inf E$ எனில், s^*, s_* என்பன முறையே, $\{s_n\}$-ன் மேல் மற்றும் கீழ் எல்லைகள் எனப்படும்.

இவைகள், $\lim\limits_{n\to\infty} \sup s_n = s^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf s_n = s_*$ எனவும் குறியிடப்படும்.

2.25. தேற்றம்

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ என்க. E மற்றும் s^* என்பன வரையறை 2.24-ல் வரையறுக்கப்பட்டவை எனில், s^* ஆனது பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

(அ) $s^* \in E$

(ஆ) $x > s^*$ எனில், N என்ற முழு எண், $n \geq N$ ஆக இருக்கும் போது, $s_n < x$ என அமையும்.

மேலும், (அ) மற்றும் (ஆ) பண்புகளைப் பெற்ற ஒரு எண் s^* மட்டுமே ஆகும்.

நிறுவல்:

(அ) $s^* = +\infty$ எனில், E ஆனது மேல் வரம்புடையது அல்ல.

எனவே, $\{s_n\}$ மேல் வரம்பற்றது. $\{s_{n_k}\}$ என்ற துணைத் தொடர்வரிசை, $s_{n_k} \to +\infty$ என அமையும். s^* மெய் எனில், E மேல்வரம்புடையது.

என்வே, குறைந்தது ஒரு துணைத் தொடர்பு எல்லையாவது இருக்கும்.

தேற்றம் 2.13-ன் படி, $\{s_n\}$-ன் துணைத் தொடர்பு எல்லைகளின் கணம், யாப்பு வெளியின் மூடிய உட்கணமாக அமையும்.

மேலும், தேற்றம் 1.46-ன் படி, $s^* \in E$.

$s^* = -\infty$ எனில், E-ல் $-\infty$ என்ற உறுப்பு மட்டுமே இருக்கும். ஆனால், எந்த ஒரு துணைத் தொடர்பு எல்லையும் இருக்காது.

M என்ற ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணுக்கு, அதிகபட்சமாக, n-ன் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள மதிப்புகளுக்கு, $s_n > M$ என அமையும்.

எனவே, $s_n \to -\infty$.

ஆகையால், அனைத்து வகைகளிலும், $s^* \in E$.

(ஆ) $x > s^*$ என்ற எண், n-ன் முடிவில்லா அநேக பல மதிப்புகளுக்கு $s_n \geq x$ என அமையுமாறு உள்ளது என்க.

எனவே, $y \in E$ என்ற எண், $y \geq x > s^*$ என அமையும்.

இது, s^*-ன் வரையறைக்கு முரண்பாடானது.

எனவே, s^* ஆனது (அ) மற்றும் (ஆ)-ஐ நிறைவேற்றுகிறது.

தனித்தன்மை:

(அ) மற்றும் (ஆ)-ஐ நிறைவேற்றும் இரு எண்கள் p, q என்க. $p < q$ என்க.

x என்ற எண்ணை, $p < x < q$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

p ஆனது (ஆ)-ஐ நிறைவேற்றுவதால், $n \geq N$ எனில், $s_n < x$ ஆகும்.

எனவே, q ஆனது (அ)-ஐ நிறைவேற்றாது.

2.5. சில சிறப்புத் தொடர்வரிசைகள்

2.26. தேற்றம்

(அ) $p > 0$ எனில், $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$

(ஆ) $p > 0$ எனில், $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

(இ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(ஈ) $p > 0$ மற்றும் α மெய் எனில், $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} = 0.$

(உ) $|x| < 1$ எனில், $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$

நிறுவல்:

N என்ற நிலையான எண், $n \geq N$-க்கு $0 \leq x_n \leq s_n$, மற்றும் $s_n \to 0$ எனில், $x_n \to 0$ என்பதைப் பயன்படுத்தி, இத்தேற்றத்தினை நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

(அ) $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$ என்க.

$x_n = 1/n^p < \varepsilon$ என்பதால், $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

(ஆ) $p > 1$ என்க.

$x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ எனில், $x_n > 0$ ஆகும்.

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் படி, $(1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$

$\Rightarrow p \geq 1 + nx_n$

எனவே, $0 < x_n \leq (p-1)/n \Rightarrow x_n \to 0$ ஆகும்.

$p = 1$ எனில், $x_n = 0$ ஆக அமையும்.

$0 < p < 1$ எனில், $1/p > 1$.

எனவே, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \infty$.ஆகையால், $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 0.$

(இ) $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ என்க. $x_n \geq 0$.

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் படி,

$n = (1 + x_n)^n \geq ((n(n-1)/2)x_n^2$

எனவே, $x_n^2 \leq 2/(n-1), n \geq 2$.

ஆகையால், $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, n \geq 2 \Rightarrow x_n \to 0$ ஆகும்.

(ஈ) k என்ற முழு எண், $k > \alpha, k > 0$ என அமைகிறது என்க.

எனவே, $n > 2k$-க்கு, $(1+p)^n > ({}^nC_k) p^k = ((n(n-1) \ldots \ldots (n-k+1))p^k)/k!$

$$> (n^k p^k)/(2k)k!$$

எனவே, $(1+p)^n > \frac{n^k p^k}{2^k k!} = \frac{n^{\alpha} n^{k-\alpha} p^k}{2^k k!}$

$$\frac{(1+p)^n}{n^{\alpha}} = \frac{n^{k-\alpha} p^k}{2^k k!}$$

ஆகையால், $0 < \frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} < \frac{2^k k! n^{\alpha-k}}{p^k}, (n > 2k)$

$\alpha-k < 0$ என்பதால், $n^{\alpha-k} \to 0$.

எனவே, (அ)-ன் படி, $x_n \to 0$.

(உ) (ஈ)-ல் $\alpha = 0$ எனக் கொள்க.

எனவே, $|x| < 1$ எனில், $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.6. முடிவிலாத் தொடர் (Infinite Series)

2.27. வரையறை

$\{a_n\}$ என்பது கொடுக்கபட்ட ஓர் தொடர்வரிசை என்க. n உறுப்புகள் வரை உள்ள தொடர் பொதுவாக $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ எனக் குறிக்கப்படும்.

இது போல், முடிவிலி உறுப்புகள் உள்ள தொடர் $s = a_1 + a_2 + \ldots + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஆனது முடிவிலாத் தொடர் எனப்படும். இதில், a_n என் பது தொடரின் பொது உறுப்பு ஆகும்.

s_n என்ற எண்கள், தொடரின் பகுதிக் கூட்டல் எனப்படும். $\{s_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை s-க்கு ஒருங்கினால், தொடர் ஒருங்குகிறது என்போம். இது, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ என எழுதப்படும். s ஆனது, தொடரின் கூடுதல் எனப்படும். $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பதை $\sum a_n$ எனவும் எழுதலாம்.

2.28. வரையறை

$\sum a_n$ என்ற தொடரின் பகுதிக் கூட்டல் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ என்பது

(அ) ஒருங்குமானால், $\sum a_n$ ஒரு ஒருங்கும் தொடர்

(ஆ) விரிந்தால், $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடர்.

2.29. தேற்றம் (தொடர்களின் ஒருங்குதலுக்கான காஷியின் கோட்பாடு)

$\sum a_n$ என்ற தொடர் ஒருங்குவதற்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு: ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப, N என்ற முழு எண், $m \geq n \geq N$ எனில், $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$ எனத் தோன்றும்.

நிறுவல்:

$\sum a_n$ என்பது ஓர் ஒருங்கும் தொடர் என்க.

எனவே, $\{s_n\}$ ஆனது ஒருங்கும் தொடர்வரிசையாக அமையும். அதனால், $\{s_n\}$ ஆனது ஒரு காஷியின் தொடர்வரிசையாக இருக்கும்.

ஆகையால், ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப, N என்ற முழு எண், அனைத்து $m \geq n \geq N$-க்கு $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$ ஆக அமையும்.

மறுதலையாக, அனைத்து $m \geq n \geq N$-க்கு $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$ என்க.

எனவே, $\{s_n\}$ ஆனது ஒரு காஷியின் தொடவரிசையாகும். எனவே, $\{s_n\}$ ஓர் ஒருங்கும் தொடர்வரிசை. ஆகையால், $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடராகும்.

2.30. தேற்றம் (ஒருங்குதலுக்கான தேவையான நிபந்தனை)

$\sum a_n$ ஆனது ஓர் ஒருங்கும் தொடர் எனில், $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

நிறுவல்:

$\sum a_n$ ஓர் ஒருங்குதொடர் என்க.

$\{s_n\}$ என்பது $\sum a_n$-ன் பகுதிக் கூட்டல் தொடர்வரிசை எனில்,

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ஆகும். மேலும், $\{s_n\}$ குவி.யும்.

எனவே, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ என்க.

$a_n = s_n - s_{n-1}$ என்பதால், $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$

குறிப்பு:

மேலேக் கண்ட நிபந்தனை போதுமானதல்ல.

அதாவது, $\sum a_n$-ல் $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ எனில், $\sum a_n$ ஒருங்க வேண்டியதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sum a_n = \sum(1/n)$-ல் $a_n = 1/n$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

ஆனால், $\sum(1/n)$ ஒரு விரிதொடராகும்.

2.31. தேற்றம்

மிகை உறுப்புத் தொடர் $\sum a_n$ குவிதலுக்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: $\sum a_n$-ன் பகுதிக் கூட்டல்கள் வரம்புடைய தொடர்வரிசையாக அமைதலேயாகும்.

நிறுவல்:

$\sum a_n$ ஒருங்குகிறது என்க.

பின், $\sum a_n$-ன் பகுதிக் கூட்டல் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ ஒருங்கும்.

எனவே, $\{s_n\}$ வரம்புடையதாக அமையும்.

மறுதலையாக, $\{s_n\}$ வரம்புடையது எனில், $\{s_n\}$ மேல் வரம்புடையதாகும். எனவே, அனைத்து $a_n > 0$ ஆதலின், $\{s_n\}$ ஏறும் தொடர்வரிசையாகும். ஆதலால், $\{s_n\}$ ஒருங்கும். எனவே, $\sum a_n$-ம் ஒருங்குத்தொடராக அமையும்.

2.32. எடுத்துக்காட்டு

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ ஓர் ஒருங்கும் தொடர்.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 < 1 + \sum_{k=2}^{n} 1/(k(k-1)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} ((1/(k-1) - 1/k)$$

$$= 1 + (1 - 1/n) < 2$$

எனவே, $\{s_n\}$ வரம்புடையது.

ஆகையால், $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ ஓர் ஒருங்கும் தொடர்.

2. (அ) $0 < x < 1$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$

(ஆ) $x \geq 1$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ விரியும்.

நிறுவல்:

(அ) $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ என்க.

$x < 1$ என்பதால், $s_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$0 < x < 1$ எனில், $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-x}$

(ஆ) $x > 1$ எனில், $\lim_{n\to\infty} x^n \neq 0$

எனவே, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ஒருங்கும் தொடர் அல்ல.

$x = 1$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + 1 + 1 + \ldots$ இது விரியும் தொடராக அமையும்.

தொடர்கள் ஒருங்குவதற்கானச் சோதனைகளை இப்பொழுது காண்போம்.

2.33. தேற்றம் (ஒப்பீட்டுச் சோதனை) (Comparison Test)

(அ) m என்பது முழு எண். அனைத்து $n \geq m$-க்கு $0 < a_n \leq c_n$ என்க. $\sum c_n$ ஒருங்குத் தொடராக இருப்பின், $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடராக அமையும்.

(ஆ) அனைத்து $n \geq m$-க்கு, $0 \leq d_n \leq a_n$ மற்றும் $\sum d_n$ விரிதொடர் எனில், $\sum a_n$-ம் விரிதொடராகும்.

நிறுவல்:

(அ) $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\sum c_n$ ஒருங்குத் தொடர் என்பதால், காஷியின் கோட்பாடு பயன்படுத்த, $\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$.

எனவே, $\sum_{k=n}^{m} a_k \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$.

ஆகையால், $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடராகும்.

(ஆ) $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடர் எனில், $\sum d_n$-ம் ஒருங்கும் தொடராக அமையும்.

இது தவறு. எனவே, $\sum a_n$ விரி தொடராக இருக்கும்.

2.34. தேற்றம் (ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் எல்லை வடிவம்)

$\sum a_n, \sum b_n$ என்ற இரு முடிவில்லா மிகை உறுப்புத் தொடர்களில்,

$\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n)$ ஆனது, ஒரு முடிவில்லா பூச்சியமற்ற எல்லைக்கு ஒருங்கினால், $\sum a_n$, $\sum b_n$ இவை இரண்டும் ஒரே நேரத்தில், ஒருங்கும் அல்லது விரியும் (அதாவது இரண்டும் ஒரே தன்மை உடையன).

நிறுவல்:

$\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = l$ என்க. $(l \neq 0)$

எனவே, $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப m என்ற முழு எண், $n \geq m$ எனில்,

$l - \varepsilon < a_n/b_n < l + \varepsilon$ என்றவாறு இருக்கும். அதாவது, $a_n < b_n(l + \varepsilon)$

எனவே, $\sum b_n$ ஒருங்கினால், $\sum a_n$-ம் ஒருங்கும். இது போலவே, $a_n > b_n(l - \varepsilon)$ ஆக இருக்கும் போது, $\sum b_n$ விரிந்தால், $\sum a_n$-ம் விரியும்.

2.7. சில துணைத்தொடர்கள்

2.35. தேற்றம் (பெருக்குத் தொடர்)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்

(அ) $0 < x < 1$ எனில், ஒருங்கும்

(ஆ) $x \geq 1$ எனில், விரியும்.

நிறுவல்:

$x > 0$ ஆதலின், $\sum x^n$ ஒரு மிகைத் தொடர். இதன் பகுதிக் கூட்டல் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ எனில், $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.

(அ) $0 < x < 1$ என்க.

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

$$= \frac{1}{1 - x} \quad \left(|x| < 1 \text{ எனில் } \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \right)$$

எனவே, $\{s_n\}$ ஒருங்குகிறது. ஆகையால், $\sum x^n$ -ம் ஒருங்கும்.

(ஆ) $x = 1$ என்க.

$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (n தடவைகள்) $= n$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

ஆகையால், $\{s_n\}$ விரிகிறது. $\sum x^n$ -ம் விரியும்.

$x > 1$ என்க. $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \infty \quad \left(x > 1 \text{ எனில் } \lim_{n\to\infty} x^n = \infty \right)$$

$\{s_n\}$ விரிவதால், $\sum x^n$ -ம் விரியும்.

2.36. தேற்றம்

$\sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர், $p > 1$ எனில், ஒருங்கும் மற்றும் $p \leq 1$ எனில் விரியும்.

நிறுவல்:

வகை (i): $p > 1$ என்க.

$$\frac{1}{1^p} = 1$$

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

இது போல், $\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$

$$\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\ldots+\frac{1}{15^p} < \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$$

... ...

இவைகளைக் கூட்ட,

$$\sum\frac{1}{n^p} < \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2}+\ldots$$

ஆனால், வலது புறத்தில் உள்ள தொடர் $\frac{1}{2^{p-1}}$ ஐப் பொது விகிதமாகக் கொண்ட முடிவில்லாத பெருக்குத் தொடர்.

$$p > 1 \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} < 1$$

எனவே, $\sum\frac{1}{2^{p-1}}$ ஒருங்குத் தொடர். ஆகவே, $\sum\frac{1}{n^p}$-யும் ஒருங்கும்.

வகை (ii): $p = 1$ என்க.

$$\sum\frac{1}{n^p} = \sum\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

$$1+\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

... ...

இவைகளைக் கூட்ட,

$$\sum\frac{1}{n} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

வலப்புறம் விரியும் தொடர் என்பதால், $\sum\frac{1}{n}$-ம் விரியும்.

வகை (iii): $p < 1$ என்க.

$$\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1}\ ;\ \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n^p} > \sum \frac{1}{n}$$

வலப்புறம் (வகை(ii)-ன் படி) விரியும் தொடர் என்பதால், $\sum \frac{1}{n^p}$-ம் விரியும்.

எனவே, (அ) $p > 1$ எனில், $\sum \frac{1}{n^p}$ ஒருங்கும்.

(ஆ) $p \leq 1$ எனில், $\sum \frac{1}{n^p}$ விரியும்.

2.8. மூலச் சோதனை மற்றும் விகித சோதனை

2.37. தேற்றம் (மூலச் சோதனை) (Root Test)

$\sum a_n$ என்ற தொடரில், $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ என்க.

(அ) $\alpha < 1$ எனில், $\sum a_n$ ஒருங்கும்.

(ஆ) $\alpha > 1$ எனில், $\sum a_n$ விரியும்

(இ) $\alpha = 1$ எனில், சோதனை தோல்வியுறும்.

நிறுவல்:

(அ) $\alpha < 1$ என்க.

$\alpha < \beta < 1$ என அமையுமாறு β என்ற எண்ணையும் $n \geq N$ எனில், $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$ எனுமாறு N-ஐயும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். (தேற்றம் 2.26(ஆ)).

அதாவது, $n \geq N$ எனில், $|a_n| < \beta^n$. $0 < \beta < 1$ என்பதால், $\sum \beta^n$ ஒருங்கும்.

ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் படி, $\sum a_n$-ம் ஒருங்கும்.

(ஆ) $\alpha > 1$ என்க.

$\{n_k\}$ என்ற தொடர்வரிசையை $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha$ எனுமாறு காணலாம்.

(தேற்றம் 2.26)

எனவே, n-ன் முடிவில்லா அநேக மதிப்புகளுக்கு, $|a_n| > 1$.

ஆகையால், $\sum a_n$ ஒருங்குவதற்குத் தேவையான நிபந்தனை $a_n \to 0$ என்ற கட்டுப்பாடு நிறைவேறாது. எனவே, $\sum a_n$ விரியும்.

(இ) $\alpha = 1$ என்க.

$a_n = 1/n$ எனில், $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

இங்கு, $\sum a_n$ விரிகிறது.

$a_n = 1/n^2$ எனில், $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \dfrac{1}{(n^{1/n})^2}$

ஆனால், $\sum a_n$ ஒருங்குகிறது. எனவே, $\alpha = 1$- ற்கு சோதனை தோல்வியுறுகிறது.

2.38. தேற்றம் (விகித சோதனை) (Ratio Test)

$\sum a_n$ என்ற தொடர்,

(அ) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ எனில் ஒருங்கும்.

(ஆ) n_0 என்ற நிலைத்த முழு எண், $n \geq n_0$ என அமையும் போது, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ எனில், விரியும்.

நிறுவல்:

(அ) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ என்க.

$\beta < 1$ மற்றும் N என்ற முழு எண்ணையும் $n \geq N$ எனில், $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$ எனக் காணலாம்.

குறிப்பாக, $|a_{N+1}| < \beta |a_N|$

$|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|$

$$|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|$$

எனவே, $|a_n| < \beta^{n-N} |a_N|, n \geq N$

$$|a_n| < |a_N|\beta^{-N}\beta^n$$

$\beta < 1$ என்பதால், $\sum\beta^n$ ஒருங்கும்.

எனவே, ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் படி, $\sum a_n$ ஒருங்கும்.

(ஆ) $n \geq n_0$ க்கு $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ எனில், $|a_{n+1}| \geq |a_n|$.

எனவே, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ஆக அமையாது. ∴ $\sum a_n$ விரியும்.

குறிப்பு:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ எனில், $\sum a_n$-ன் ஒருங்குதலைப் பற்றி எதுவும் அறிய முடியாது.

$\Sigma 1/n$ மற்றும் $\Sigma 1/n^2$ என்ற தொடர்களுக்கு, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. ஆனால், $\Sigma 1/n$ விரியும், $\Sigma 1/n^2$ ஒருங்கும்.

2.39. **எடுத்துக்காட்டு**

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்க.

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

மூலச் சோதனை, ஒருங்குதலைத் தருகிறது. ஆனால், விகிதச் சோதனையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

2.9. அடுக்குத் தொடர் (Power Series)

$\{c_n\}$ என்பது மெய்ப்புனை எண்களின் தொடர்வரிசை எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ஆனது, அடுக்குத்தொடர் எனப்படும்.

c_n என்பன தொடரின் குணகங்கள் என்று அழைக்கப்படும். z ஆனது மெய்ப்புனை எண்.

2.40. தேற்றம்

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ என்ற அடுக்குத் தொடரில் $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}$, $R = 1/\alpha$ என்க. ($\alpha = 0$ எனில், $R = +\infty$; $\alpha = +\infty$ எனில், $R = 0$)

$|z| < R$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ஒருங்கும், மற்றும் $|z| > R$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ விரியும்.

நிறுவல்:

$a_n = c_n z^n$ என்க.

மூலச்சோதனையைப் பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n z^n|} \\ &= |z| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} \\ &= |z|/R\end{aligned}$$

எனவே, $|z| < R$ எனில், $\sum a_n$ ஒருங்கும்.

$|z| > R$ எனில், $\sum a_n$ விரியும்.

குறிப்பு:

R என்பது $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$-ன் ஒருங்கல் ஆரம் எனப்படும்.

2.41. **எடுத்துக்காட்டுகள்**

(அ) $\Sigma n^n z^n$ என்ற தொடரின் $R = 0$.

(ஆ) $\Sigma z^n/n!$ என்ற தொடரின் $R = +\infty$.

(இ) $\sum z^n$ என்ற தொடருக்கு, $R = 1$. எனவே, $|z| = 1$ எனில், இத்தொடர் விரியும்.

(ஈ) $\sum z^n/n$ என்ற தொடருக்கு, $R = 1$. $z = 1$ எனில், இத்தொடர் விரியும்: $|z| < 1$ என அமையும் z-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், இத்தொடர் ஒருங்கும்.

(உ) $\sum z^n/n^2$- ன் $R = 1$. இத்தொடர், $|z| = 1$ என அமையும் அனைத்து z-க்கு ஒருங்கும்.

2.10. **பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல்** (Summation by Parts)

2.42. **தேற்றம்**

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பன இரு தொடர்வரிசைகள். $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$;

$A_{-1} = 0$, $0 \leq p \leq q$ எனில், $\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$.

இச்சூத்திரம், பகுதி கூட்டல் வாய்ப்பாடு என்று அழைக்கப்படும்.

நிறுவல்:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n$$

$$= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n$$

$$= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

$$= \sum_{n=p}^{q-1} A_nb_n + A_qb_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_nb_{n+1} - A_{p-1}b_p$$

எனவே, $\sum_{n=p}^{q} a_nb_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_qb_q - A_{p-1}b_p.$

2.43. தேற்றம் (Dirichelet's Test)

(அ) $\sum a_n$-ன் பகுத்தக் கூடுதலின் தொடர்வரிசை $\{A_n\}$ வரம்புடையது.

(ஆ) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \ldots$

(இ) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ எனில், Σa_nb_n ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$\{A_n\}$ வரம்புடையது என்பதால், அனைத்து n-க்கு M என்பது $|A_n| \leq M$ என அமையும்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.,N என்பது $b_N \leq \varepsilon/2M$ என அமையும்.

$N \leq p \leq q$ எனும் போது,

$$|\sum_{n=p}^{q} a_nb_n| = |\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_qb_q - A_{p-1}b_p|$$

$$\leq M|\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p|$$

$$= 2Mb_p \leq 2Mb_N \leq \varepsilon$$

எனவே, காஷியின் வரைகூற்றின் படி, Σa_nb_n ஒருங்கும் தொடராக அமையும்.

2.44. தேற்றம்

Σc_nz^n- ன் ஒருங்கல் ஆரம் 1. மேலும், $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \ldots \ldots$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ எனில், $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில் $z = 1$ என்ற புள்ளியைத் தவிர அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் Σc_nz^n ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$a_n = z^n, b_n = c_n$ என்க.

$|z| = 1$ மற்றும் $z \neq 1$ எனில்,

$$|A_n| = |\sum_{m=0}^{n} a_m| = |\sum_{m=0}^{n} z^m| = |\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

எனவே, $\{A_n\}$ வரம்புடையது.

$c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots \dots$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ என்பதால், தேற்றம் 2.43-ன் படி, $\Sigma a_n b_n = \Sigma c_n z^n$ ஒருங்கும். $(z \neq 1)$.

2.11. ஒன்றாடத் தொடர் (Alternating Series)

ஒவ்வொரு $a_n > 0$ ஆக இருப்பின், $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots\dots$ என்ற தொடர் ஒன்றாடத் தொடர் எனப்படும்.

இவ்வகைத் தொடர்களின் ஒருங்கல் தன்மையைப் பற்றி இப்பகுதியில் ஆராய்வோம். ஒன்றாடத் தொடரின், அடிப்படை தேற்றத்தை முதலில் நிறுவுவோம்.

2.45. தேற்றம் (லீபின்ஸ்டன் விதி)

$\{a_n\}$ என்பது மிகை எண்களின் தொடர்வரிசை

(அ) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \dots$

(ஆ) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

எனில், ஒன்றாடத் தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

தொடரின் ஒருங்கலை நிறுவுவதற்கு, $\{s_n\}$ என்ற பகுதிக் கூடுதலின் தொடர்வரிசை ஒருங்கும் என நிறுவினால் போதுமானது.

$s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$.

$\{s_{2n}\}$ மற்றும் $\{s_{2n+1}\}$ என்ற தொடர்வரிசைகள் இரண்டும் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்குகின்றன. என நிறுவுவோம்.

$s_{2n} \;=\; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$

$s_{2n+2} \;=\; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + + a_{2n+1} - a_{2n+2}$

எனவே, $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2}$

கொள்கையின் படி, $a_{n+1} < a_n$.

ஆகையால், $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0 \Rightarrow s_{2n+2} - s_{2n} > 0$ ஆகும்.

எனவே, $\{s_{2n}\}$ ஓர் ஒருபோக்கு ஏறும் சார்பு.

மேலும், $s_{2n} \;=\; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$

$\qquad\quad = \; a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots\ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}]$

$\Rightarrow s_{2n} < a_1$ (ஏனெனில், $a_{n+1} < a_n$)

$\{s_{2n}\}$ மேல்வரம்புடைய ஏறும் தொடர்வரிசை என்பதால், $\{s_{2n}\}$ ஒருங்கும்.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$ என்க.

மேலும், $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s$

எனவே, $\{s_{2n}\}$ மற்றும் $\{s_{2n+1}\}$ என்ற தொடர்வரிசைகள் இரண்டும் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்குகின்றன.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$ ஆதலின், $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப, n_1, n_2 என்ற மிகை எண்கள், அனைத்து $2n \geq n_1$- க்கு $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ மற்றும் அனைத்து $2n + 1 \geq n_2$-க்கு $|s_{2n+1} - s| < \varepsilon$ என அமையும்.

$n_0 = \max(n_1, n_2)$ என்க. எனவே, அனைத்து $n \geq n_0$- க்கு $|s_n - s| < \varepsilon$ ஆகும்.

ஆகையால், $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

பகுதிக் கூட்டல் தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ ஒருங்குவதால், $\sum(-1)^{n+1}a_n$ –ம் ஒருங்குகிறது.

2.46. எடுத்துக்காட்டு

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்க.

இங்கு, $a_n = 1/n > 0$. $a_{n+1} - a_n = 1/(n+1) - 1/n = -1/(n(n+1)) < 0$

எனவே, அனைத்து n-க்கு $a_{n+1} < a_n$. அதாவது, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

மேலும், $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$

எனவே, கொடுக்குப்பட்டத் தொடர் ஒருங்கும்.

2.12. அற ஒருங்கல் (Absolute Convergence)

$\Sigma|a_n|$ ஆனது ஒருங்கும் தொடரானால், Σa_n ஓர் அற ஒருங்கும் தொடர் எனப்படும்.

2.47. தேற்றம்

ஒவ்வொரு அற ஒருங்கும் தொடரும், ஓர் ஒருங்கும் தொடராகும்.

நிறுவல்:

Σa_n ஓர் அற ஒருங்கும் தொடர் என்க. வரையறைப்படி, $\Sigma|a_n|$ ஒருங்கும்

இதற்கு, காஷியின் ஒருங்கல் கோட்பாட்டின் படி, $\varepsilon > 0$-க்கு ஏற்ப N என்ற முழு எண், $m \geq n \geq N$ எனில், $||a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m|| \leq \varepsilon$ என அமையும். அதாவது, $m \geq n$ எனில், $|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| \leq \varepsilon$

அடுத்து, $m \geq n$ எனில், $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| \leq \varepsilon$

எனவே, காஷியின் ஒருங்கல் கோட்பாட்டின் படி, Σa_n ஒருங்கல் தொடராகிறது.

குறிப்பு:

மேற்கண்ட தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையல்ல. ஓர் ஒருங்கும் தொடர், அற ஒருங்கும் தொடராக அமைய வேண்டியதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ என்பது ஒருங்கும் தொடர். இது Σa_n எனில், $\Sigma|a_n| = \Sigma 1/n$ விரியும் தொடராகும்.

2.48. தேற்றம்

Σa_n ஓர் அற ஒருங்கும் தொடர். $\{b_n\}$ ஒரு வரம்புடைய தொடர்வரிசை எனில், $\Sigma a_n b_n$ என்பது அற ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$\{b_n\}$ வரம்புடைய தொடர்வரிசை என்பதால், $M > 0$ என்ற எண், அனைத்து $n \in N$-க்கும், $|b_n| \le M$, என அமையும்.

அனைத்து n -க்கு $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \le M|a_n|$. $\Sigma|a_n|$ ஒருங்கும் என்பதால், $\Sigma M|a_n|$-ம் ஒருங்கும். ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் படி, $\Sigma|a_n b_n|$ -ம் ஒருங்கும்.

எனவே, $\Sigma a_n b_n$ ஓர் ஒருங்கும் தொடர்.

2.13. தொடரின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல்

2.49. தேற்றம்

$\Sigma a_n = A$ மற்றும் $\Sigma b_n = B$ எனில், $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$ மற்றும் $\Sigma c a_n = cA$, இங்கு, c என்பது ஒரு நிலைத்த எண்.

நிறுவல்:

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ என்க.

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$$

அதாவது, $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$

மற்றும், $\lim_{n\to\infty} cA_n = c \lim_{n\to\infty} A_n = cA$

$\Sigma cA_n = cA.$

எனவே, இரு ஒருங்கும் தொடர்களின் கூட்டல், அவ்விரு தொடர்களின் கூடுதலுக்கு ஒருங்கும். அது போல், ஓர் ஒருங்கும் தொடரை மாறிலியால் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடர், தொடரின் கூடுதலை அம்மாறிலியால் பெருக்கக் கிடைக்கும் எண்ணுக்கு ஒருங்கும்.

2.50. வரையறை: காஷி பெருக்கல்

Σa_n மற்றும் Σb_n என்பன, இரு கொடுக்கப்பட்ட தொடர்கள் என்க.

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) எனில், Σc_n என்பது இரு கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களின் பெருக்கம் என அழைக்கப்படும்.

$\Sigma a_n z^n$ மற்றும் $\Sigma b_n z^n$ என்பன, இரு அடுக்குத் தொடர்கள் என்க. இவைகளின் பெருக்கம்

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots).(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots$$

$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

2.51. எடுத்துக்காட்டு

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ மற்றும் $A_n \to A$, $B_n \to B$, எனில், $\{c_n\}$ ஆனது AB-க்கு ஒருங்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

இப்பொழுது, இரு ஒருங்கும் தொடர்களின் பெருக்கம் விரியும் என்பதைக் காண்போம்.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{4} + \ldots$$

என்ற தொடர், லீபின்ஸ்டன் தேற்றத்தின் படி ஒருங்கும். இத்தொடருடன், அதனையே பெருக்கம் காண,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - (1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{3} + 1/(\sqrt{2}\sqrt{2}) + 1/\sqrt{3}) - (1/\sqrt{4} + 1/(\sqrt{3}\sqrt{2}) + 1/(\sqrt{2}\sqrt{3}) + 1/\sqrt{4}) + \ldots$$

எனவே, $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$

$$\begin{aligned}(n-k+1)(k+1) &= (n/2+1)^2 - (n/2-k)^2 \\ &\le (n/2+1)^2\end{aligned}$$

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} 1/(n/2+1) = \sum_{k=0}^{n} 2/(n+2) = 2(n+1)/(n+2)$$

எனவே, Σc_n ஒருங்கதலுக்குத் தேவையான நிபந்தனை, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ நிறைவேறவில்லை. ஆகையால், Σc_n விரியும்.

2.52. **தேற்றம்**

(அ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ என்பது ஓர் அற ஒருங்கும் தொடர்.

(ஆ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$

(இ) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$

(ஈ) $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ எனில், $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

அதாவது, இரு ஒருங்கும் தொடர்களில் குறைந்தது ஒன்று அற ஒருங்கும் எனில், அவைகளின் பெருக்கம் ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\beta_n = B_n - B$ என்க.

$$\begin{aligned}C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_nb_0 \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0\end{aligned}$$

$$= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0)$$
$$= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$$
$$= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$$

$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$ என்க.

$A_nB \to AB$ என்பதால், $C_n \to AB$ என நிறுவ, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ எனக் காண்பித்தால் போதுமானது..

$\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ என்க.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

(இ)-ல் இருந்து $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \beta_n \to 0.$

எனவே, N என்ற எண், $n \geq N$ எனில், $|\beta_n| \leq \varepsilon$ எனக் காணலாம்.

$$|\gamma_n| = |a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0|$$
$$\leq |a_0\beta_n + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + |a_{n-N-1}\beta_{N+1} + \ldots + a_n\beta_0|$$
$$\leq |a_0\beta_n + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon\alpha$$

N நிலைத்ததாகக் கொண்டு, $n \to \infty$ எனில்,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup|\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha$ (ஏனெனில், $k\to\infty$ எனில், $a_k \to 0$) ஆகும்.

எனவே, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. ஆகையால், $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = AB$ ஆகும்.

2.14. தொடர்களின் மறு வரிசைப்படுத்துதல் (Rearrangement of Series)

2.53. வரையறை

$\{K_n\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ என்பது, ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் n, ஒரே ஒரு தடவை வருமாறு உள்ள ஒரு தொடர்வரிசை என்க.

அதாவது, J என்பது அனைத்து மிகை எண்களின் கணம் எனில், $\{K_n\}$, என்பது $J \to J$ *வரையிலான ஒன்றுக்கொன்றான* சார்பு.

$a_n' = a_{kn}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) எனில், $\sum a_n'$ ஆனது $\sum a_n$-ன் மறுவரிசைப்படுத்துதல் எனப்படும்.

2.54. எடுத்துக்காட்டு

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots \qquad \text{----- (1)}$$

என்ற ஒருங்கும் தொடரை எடுத்துக் கொள்க..

இதன் கூடுதல் s என்க.

$s_{2n} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + 1/(2n-1) - 1/2n > 1/2$

எனவே, $s > 1/2$

கொடுக்கப்பட்டத் தொடரை, 1/2 ஆல் பெருக்க,

$$1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + \ldots = s/2 \qquad \text{----- (2)}$$

$\{s_n'\}$ என்பது தொடர் (2)-ன் பகுதிக் கூட்டல் என்க.

$$0 + 1/2 + 0 - 1/4 + 0 + 1/6 + 0 - 1/8 + \ldots \qquad \text{----- (3)}$$

என்ற தொடரின் பகுதிக் கூடுதல்கள்,

$0, s_1', s_1', s_2', s_2', s_3', s_3', s_4', s_4', \ldots$

இவைகள் (2)-ன் பகுதிக் கூடுதல்களுக்குச் சமம்.

(1) மற்றும் (3) இவைகளின் உறுப்புகளைக் கூட்ட,

$1 + 0 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 0 + 1/7 - 1/4 + \ldots = 3s/2$

$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + 1/7 + \ldots = 3s/2$ ---(4)

தொடர் (4) ஆனது (1)-ன் மறு வரிசைப்படுத்துதல் ஆகும். ஆனால், (4) வேறான கூடுதலுக்கு ஒருங்குகிறது.

2.55. தேற்றம்

$\sum a_n$ என்ற குறைமதிப்பற்ற எண்களின் தொடர்வரிசை A என்ற மெய்யெண்ணுக்கு ஒருங்குகிறது. $\sum b_n$ என்பது $\sum a_n$-ன் மறுவரிசைப் படுத்தியது எனில், $\sum b_n$-ம் ஒருங்கும். மேலும், $\sum b_n = A$

நிறுவல்:

M என்ற ஒவ்வொரு எண்ணுக்கும், $s_m = b_1 + b_2 + ... + b_m$ என்க.

$\{k_i\}$ என்ற ஏதேனும் ஒரு தொடர்வரிசைக்கு $b_i = a_{ki}$.

அதாவது, $b_1 = a_{k1}, b_2 = a_{k2}, ..., b_m = a_{km}$

$m = \max(k_1, k_2, ..., k_m)$ எனில், $s_m \le a_1 + a_2 + ... + a_m \le A$

எனவே, $\sum b_n$ ஒருங்கும். இதன் கூடுதல் B என்ற மெய்யெண் என்க.

ஆனால், $B = \lim_{n\to\infty} s_m$. எனவே, $B \le A$

$\sum a_n$ என்பது, $\sum b_n$-ன் மறுவரிசைப்படுத்துதல் என்பதால், மேலேக் கண்டதின் படி, $A \le B$. ஆகையால், $A = B$.

2.56. தேற்றம்

$\sum a_n$ என்பது A-க்கு அற ஒருங்கும் எனில், $\sum a_n$-ன் எந்த மறுவரிசைப்படுத்திய தொடர் $\sum b_n$-ம் A-க்கு அற ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$\sum a_n$-ன் மிகை மற்றும் குறை உறுப்புகளின் தொடர்வரிசைகள் முறையே $\sum p_n$, $\sum q_n$ என்க. எனவே, $A = P + Q$ ஆகும்.

$\sum b_n$ ஆனது $\sum a_n$-ன் மறுவரிசைப்படுத்திய தொடர் என்பதால், $\{n_i\}$ என்ற தொடர்வரிசை $b_i = a_{ni} = p_{ni} + q_{ni}$ என அமையும்.

மேலும், $\sum p_{ni}$ ஆனது குறை மதிப்பற்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர் $\sum p_n$-ன் மறுவரிசைப்படுத்திய தொடர் என்பதால், தேற்றம் 2.51-ன் படி, $\sum p_{ni} = P$. இதைப் போலவே, $\sum q_{ni} = Q$ ஆகும்.

$b_i = p_{ni} + q_{ni}$ என்பதால், $\sum b_i$ ஒருங்கும்.

மேலும், $\sum b_i = \sum p_{ni} + \sum q_{ni} = P + Q = A$

$\sum b_i$ ஓர் அற ஒருங்கும் தொடர் என நிறுவ வேண்டும்.

$$b_i = p_{ni} + q_{ni} \Rightarrow |b_i| < |p_{ni}| + |q_{ni}|$$
$$= p_{ni} - q_{ni}$$

பின், m என்ற மிகை முழு எண்ணுக்கு,

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m| \le \sum_{i=1}^{m} p_{ni} - \sum_{i=1}^{m} q_{ni} \le P - Q$$

எனவே, $\sum_{i=1}^{m} |b_i|$ என்ற தொடரின், பகுதிக் கூட்டலின் தொடர்வரிசை மேல் வரம்புடையது. அதன் மேல்வரம்பு P - Q. எனவே, $\sum_{i=1}^{m} |b_i|$ ஒருங்கும்.

அதாவது, $\sum b_i$ அற ஒருங்கும் தொடராகும்.

2.57. ரீமான் தேற்றம்

$\sum b_n$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர் ஒருங்கும், ஆனால் அற ஒருங்காது. $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$ எனில், பகுதிக் கூடுதல் s_n' உடைய $\sum a_n'$ என்ற மறுவரிசைப்படுத்துதல் $\lim\limits_{n\to\infty} \inf s_n' = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup s_n' = \beta$ ----- (5)

என அமையும்.

நிறுவல்:

$p_n = (|a_n| + a_n)/2$, $q_n = (|a_n| - a_n)/2$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ என்க.

$p_n - q_n = a_n$, $p_n + q_n = |a_n|$, $p_n \ge 0$, $q_n \ge 0$.

$\sum p_n$ மற்றும் $\sum q_n$ இவைகள் விரியும் என நிறுவுவோம்.

$\sum p_n$ மற்றும் $\sum q_n$ இவையிரண்டும் ஒருங்கும் தொடர்களானால், $\sum(p_n + q_n) = \sum|a_n|$ ஒருங்கும். இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடு.

$\sum p_n$ மற்றும் $\sum q_n$ இவைகளில் ஒன்று $\sum p_n$ விரியும் தொடராகவும், மற்றொன்று $\sum q_n$ ஒருங்கும் தொடராகவும் உள்ளது என்க.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n.$$

எனவே, $\sum a_n$ விரியும். இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடு.

$\sum a_n$-ன் குறைமதிப்பற்ற உறுப்புகள், அவைகள் இருக்கின்ற வரிசையின் படி, P_1, P_2, P_3, ... என்க. $\sum a_n$-ன் குறை உறுப்புகளின் அற மதிப்புகள், அவைகள் இருக்கின்ற வரிசையின் படி, $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ என்க.

$\sum P_n$, $\sum Q_n$ என்ற தொடர்கள் $\sum p_n$, $\sum q_n$ இவைகளிலிருந்து பூஜ்ய உறுப்புகள் வேறுபடுவதால், அவைகள் விரியும் தொடர்கள்.

$\{m_n\}, \{k_n\}$ என்ற தொடர்வரிசைகளை

$$P_1 + \ldots + P_{m1} - Q_1 - \ldots - Q_{k1} + P_{m1+1} + \ldots + P_{m2} - Q_{k1+1} - \ldots - Q_{k2} + \ldots \quad \text{-----} \quad (6)$$

என்ற தொடர் (5)- ஐ நிறைவேற்றுமாறு அமைப்போம்.

மேலேக் கண்ட தொடர், $\sum a_n$-ன் மறுவரிசைப்படுத்துதல் ஆகும்.

மெய்யெண் மதிப்புடைய தொடர்வரிசைகள் $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$-ஐ $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $\alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 > 0$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

m_1, k_1 என்பன, $P_1 + \ldots + P_{m1} > \beta_1$, $P_1 + \ldots + P_{m1} - Q_1 - \ldots - Q_{k1} < \alpha_1$ எனுமாறு உள்ள மிகச் சிறிய முழு எண்கள் என்க.

m_2, k_2 என்பன, $P_1 + \ldots + P_{m1} - Q_1 - \ldots - Q_{k1} + P_{m1+1} + \ldots + P_{m2} > \beta_2$

$P_1 + \ldots + P_{m1} - Q_1 - \ldots - Q_{k1} + P_{m1+1} + \ldots + P_{m2} - Q_{k1+1} - \ldots - Q_{k2} < \alpha_2$

எனுமாறு உள்ள மிகச் சிறிய முழு எண்கள் என்க.

$\sum P_n$, $\sum Q_n$ என்பவை விரியும் தொடர்கள் என்பதால், இதனைத் தொடரலாம்.

x_n, y_n என்பன $P_{mn}, -Q_{kn}$ இவைகளை இறுதி உறுப்புகளாகக் கொண்ட (6)-ன் பகுதிக் கூடுதல்கள் என்க. எனவே, $|x_n - \beta_n| \le P_{mn}$, $|y_n - \alpha_n| \le Q_{kn}$

$n \to \infty$ எனில், $P_n \to 0$ மற்றும் $Q_n \to 0$. எனவே, $x_n \to \beta$, $y_n \to \alpha$.

மேலும், α-ஐ விட சிறிய எண் அல்லது β-ஐ விடப் பெரிய எண் எதுவும், தொடர் (6)-ன் பகுதிக் கூடுதல்களின் துணைத் தொடர்பு எல்லையாக இருக்க முடியாது.

2.15. பயிற்சி வினாக்கள்

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்ற இரு தொடர்வரிசைகளில், $\{a_n\}$ ஆனது அனைத்து n-க்கு ∞-க்கு விரிகிறது எனில், $\{b_n\}$-ம் ∞-க்கு விரியும் என நிறுவுக.

2. ∞-க்கு விரியும், ஏதேனும் ஒரு தொடர்வரிசை $\{s_n\}$ மேல் வரம்புடையது, ஆனால், கீழ்வரம்புடையது அல்ல எனக் காட்டுக.

3. $\{s_n\}$ என்ற மிகை எண்களின் தொடர்வரிசை, $s_{n+1} < r\, s_n$ $(0 < r < 1)$ என இருக்குமானால், $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ என நிறுவுக.

4. R^1-ல் வரம்புடைய, காஷி தொடர்வரிசையாக அமையாத, தொடர்வரிசையின் ஒரு உதாரணம் தருக.

5. $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ என்பன மிகைஉறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொடர்வரிசை, $s_{n+1} = (s_n + t_n)/2$, $t_{n+1} = \sqrt{s_n t_n}$ எனில், $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ இவைகள் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

6. காஷியின் ஒருங்கல் உரைகோளிலிருந்து, ஒரு வரம்புடைய ஒருபோக்கு தொடர்வரிசை ஒருங்கும் என தருவிக்க.

7. $\Sigma \frac{1}{2^n}$ என்ற தொடர் 1-க்கு ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

8. $\Sigma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$ என்ற தொடர் விரியும் எனக் காட்டுக.

9. $\Sigma (-1)^{n-1} a_n$ என்ற ஒன்றாடத் தொடரின் ஒருங்கல் தன்மையை ஆராய்க.

10. Σa_n, Σb_n என்பன அற ஒருங்கும் தொடர்கள் எனில், $\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n)$ மற்றும் $\Sigma C a_n$ என்பனவும் அற ஒருங்கும் என நிறுவுக, (α, β, c என்பன மெய்யெண்கள்.)

11. Σa_n ஒரு அற ஒருங்கும் தொடர் மற்றும் $\{b_n\}$ ஒரு வரம்புடைய தொடர்வரிசை எனில், $\Sigma a_n b_n$ ஒரு அற ஒருங்கும் தொடர் எனக் காட்டுக.

12. Σa_n என்பது A-க்கு அற ஒருங்குகிறது எனில், அதன் ஏதேனும் ஒரு மறுவரிசைபடுத்துதல் Σb_n -ம் A-க்கு அற ஒருங்கும் என நிறுவுக.

13. இரு அற ஒருங்கும் தொடர்களின் காஷி பெருக்கமும் அற ஒருங்கும் என நிறுவுக.

****

அத்தியாயம் 3

யாப்புவெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள்

(Continuous Functions on Metric Spaces)

தற்காலத்திய பகுப்பாய்வு இயலில், சார்புத் தொடர்ச்சி ஆனது அடிப்படைக் கருத்தாகும்.சார்பின் எல்லையை ஒட்டித்தான், சார்புத் தொடர்ச்சியை வறையறுக்கப்படுகிறது. இந்த அத்தியாயத்தில், யாப்புவெளிகளில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சி இவைகள் கூறப்பட்டுள்ளன. மேலும், தொடர்ச்சி மற்றும் திறந்த, மூடிய கணங்களின் நேர்மாற்று பிம்பங்கள், கச்சிதமான யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள், சீரான தொடர்ச்சி, தொடர்ச்சியின்மைகள் ஆகியவைகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

முதலில், சார்பு, சார்புகளின் சில வகைகள், சார்புகளுக்கு சில உதாரணங்கள் இவற்றைச் சுருக்கமாக காண்போம்.

3.1. சார்புகளின் எல்லைகள்

X, Y என்ற யாப்பு வெளிகளை எடுத்துக் கொள்க. E என்பது X-ன் உட்கணம் எனில், $f: E\to Y$ என்பது E-லிருந்து Y-க்கு ஒரு சார்பு ஆகும்.

3.1. வரையறை

p ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளி, மற்றும் $q\in Y$ என்க. ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு $\delta > 0$ என்ற எண், $0 < d_X(x, p) < \delta$ என அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகள் $x\in E$-க்கு $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ என அமையுமானால், $\lim_{x\to p} f(x) = q$ என்போம்.

இது, $x\to p$ எனில், $f(x)\to q$ எனவும் எழுதப்படும். இங்கு, d_X மற்றும் d_Y என்பன முறையே, X, Y-ல் தூரங்கள் ஆகும்.

$X = Y = R^1$ எனில், $d_X(x, p) = |x - p|$ மற்றும் $d_Y(f(x), q) = |f(x) - q|$

குறிப்பு:

மேலேக் கண்ட வரையறையில், $p \in X$, ஆனால், p ஆனது E-ன் ஒரு புள்ளியாக அமையத் தேவையில்லை. மேலும், $p \in E$ ஆக இருந்தாலும், $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$ ஆக அமையலாம்.

3.2. எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $f: (0, 1) \to R^1$ என்ற சார்பு அனைத்து $x \in (0, 1)$-க்கு $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு $a \in (0, 1)$-க்கும் $\lim_{x \to a} f(x) = a$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

$\varepsilon > 0, \delta = \varepsilon$ என்க.

$x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a) < \delta = \varepsilon.$

எனவே, $\lim_{x \to a} f(x) = a.$

2. $X = R^1 - \{0\}, Y = R^1, f(x) = \sin(1/x), x \in X$

$\varepsilon = 1/2 > 0$, $\delta > 0$ ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண், $2n\pi + \pi/2 > \frac{1}{\delta}$ என்றவாறு, n என்பது ஒரு மிகை முழு எண் என்க.

பின், $x = 1/(2n\pi+\pi/2)$ எனில், $|x - 0| < \delta$ ஆகும்.

இந்த x-ற்கு, $|f(x) - 0| = |\sin(1/x)| = |\sin(2n\pi+\pi/2)| = 1 > 1/2 = \varepsilon$

எனவே, $\lim_{x \to 0} \sin(1/x) \neq 0.$

3. $f: (-1, 1) \to R^1$ என்க.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனில், $\lim_{x \to 0} f(x)$ இல்லை என நிறுவுவோம்.

அதாவது, ஒவ்வொரு மெய்யெண் ℓ-க்கும், ஒவ்வொரு $\varepsilon>0$ ஆனது, ஒவ்வொரு $\delta>0$-க்கும் ஒரு $x\in(-1, 1)$ ஆனது, $0 < |x - 0| < \delta$ என்றும் $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$ என்றவாறு இருந்தால், $\lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

(i) $\ell \geq 1, \varepsilon = 2, \delta > 0$ என்க.

அப்படியானால், ஒரு $x_0 < 0$ என்ற ஒரு எண் $x_0\in(-1, 1), 0 < |x_0- 0| < \delta$ இருக்கிறது. எனினும், $| f(x_0) - \ell | = | -1 - 1 | \geq 2 = \varepsilon$.

இது எல்லையின் வரை இலக்கணத்துக்குப் புறம்பானது.

$\ell < 1$ என்க. $\varepsilon = | 1- \ell |, \delta > 0$ என்க.

அப்படியானால், $x_1 > 0$ என்ற முழு எண், $x_1\in(-1, 1), 0 < |x_1 - 0| < \delta$ என்றவாறு இருக்கிறது.

எனவே, $| f(x) - \ell | = | 1- \ell | = \varepsilon$.

ஆகையால் $\lim_{x\to 0} f(x)$ இல்லை.

பின்வரும் தேற்றம், சார்புகளின் எல்லைகளையும், ஒருங்கும் தொடர்வரிசைகளின் எல்லைகளையும் தொடர்புபடுத்துகிறது.

3.3. தேற்றம்

X, Y என்பன யாப்புவெளிகள். $E\subset X$, $f: E\to Y$. மேலும், p என்பது E-ன் எல்லைப்புள்ளி. $\lim_{x\to p} f(x) = q$ என அமையத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாவது: p-ற்கு ஒருங்கும் E-ல் உள்ள ஒவ்வொரு தொடர்வரிசை

$\{p_n\}$-ற்கும் $(p_n \neq p)$, $\lim_{x\to p} f(p_n) = q$ ஆகும்.

நிறுவல்:

(i) $\lim_{x \to p} f(x) = q$ என்க.

E-ல் உள்ள ஒரு தொடர்வரிசை, $\{p_n\}$ என்பது p-க்கு ஒருங்குகிறது என்க.

அதாவது, $p_n \to p$. $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

எனவே, $\delta > 0$ என்ற எண், $x \in E$ எனில், $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ மற்றும்

$0 < d_X(x, p) < \delta$ என அமையும்.

$p_n \to p \Rightarrow N$ என்ற எண், $n > N$ எனில், $0 < d_X(p_n, p) < \delta$ என அமையும்.

எனவே, $n > N$ எனில், $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to p} f(p_n) = q$ ஆகும்.

மறுதலையாக, $p_n \to p \Rightarrow f(p_n) \to q$ என்க.

மேலும், $\lim_{x \to p} f(p_n) \neq q$ என்க.

ஏதாவதொரு $\varepsilon > 0$ ற்கும், அனைத்து $\delta > 0$ விற்கும், $x \in E$ (δ-ஐப் பொறுத்து) எனும் புள்ளி, $d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon$. ஆனால், $0 < d_X(x, p) < \delta$ என அமையும்.

$\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, ...$), $x = p_n$ எனில்,

$0 < d_X(p_n, p) < 1/n \Rightarrow d_Y(f(p_n), q) \geq \varepsilon$.

இதில், $p_n \to p$, ஆனால், $\lim_{x \to p} f(p_n) \neq q$ ஆகும்.

இது கொள்கைக்கு முரண்பாடு. எனவே, $\lim_{x \to p} f(x) = q$.

குறிப்பு:

தேற்றம் 3.3 மற்றும் தேற்றம் 2.5-ன் படி, ஒரு சார்புக்கு இரு வெவ்வேறான எல்லைகள் இருக்க முடியாது என்பதை அறிய முடிகிறது.

3.2. மெய்ப்புனை மதிப்புடைய எல்லைகள்

3.4. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஓர் உட்கணம் E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட இரு மெய்ப்புனை மதிப்புடைய சார்புகள் f, g என்க. $f: E \to C$, $g: E \to C$, இங்கு C என்பது மெய்ப்புனை எண்களின் கணம்.

இவைகளின் கூடுதல், $f + g$ ஆனது, அனைத்து $x \in E$-க்கும், அதன் மதிப்பு $f(x) + g(x)$ என்ற மெய்ப்புனை எண் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதைப் போலவே, f, g இவைகளின் வித்தியாசம் f-g, பெருக்கல் f.g, வகுத்தல் f/g இவைகளும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. $g(x) \neq 0$ என அமையும் புள்ளிகள் x-ல் மட்டுமே f/g வரையறுக்கப்படுகிறது.

E-ல் ஒவ்வொரு புள்ளி x-க்கும், f-ன் மதிப்பு மாறிலி எனில், அது மாறிலி சார்பு **(constant function)** எனப்படும். இது, $f = c$ என எழுதப்படும்.

f, g என்பன மெய் சார்புகள், அனைத்து $x \in E$- க்கு $f(x) \geq g(x)$ எனில், $f \geq g$ என எழுதப்படும்.

இதைப் போலவே, f, g என்பன $E \to R^k$ சார்புகள் எனில், $f + g$ மற்றும் f.g என்பன முறையே, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f.g)(x) = f(x) \, . \, g(x)$ என வரையறுக்கப்படும்.

மேலும், λ ஒரு மெய்யெண் எனில், $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ஆகும்.

பின்வரும் தேற்றம், யாப்பு வெளிகளில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்ப்புனை மதிப்புடைய சார்புகளின் எல்லைகளின் இயற்கணித பண்புகளைத் தரும்.

3.5. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஓர் உட்கணம் E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்ப்புனை மதிப்புடைய சார்புகள் f, g என்க. p என்பது E-ன் எல்லைப்புள்ளி.

$\lim_{x\to p} f(x) = A$, $\lim_{x\to p} g(x) = B$ எனில்,

(அ) $\lim_{x\to p} (f+g)(x) = A + B$

(ஆ) $\lim_{x\to p} (fg)(x) = AB$

(இ) $\lim_{x\to p} (f/g)(x) = A/B,\ B \neq 0.$

நிறுவல்:

$\lim_{x\to p} f(x) = A$, $\lim_{x\to p} g(x) = B$

தேற்றம் 3.3-ன் படி, $p_n \to p$ $(p_n \neq p)$ எனில், $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = A$, $\lim_{n\to\infty} g(p_n) = B$.

(அ)
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f+g)(p_n) &= \lim_{n\to\infty} (f(p_n) + g(p_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(p_n) + \lim_{n\to\infty} g(p_n) \\ &= A + B \end{aligned}$$

எனவே, $p_n \to p$ எனில், $\lim_{n\to\infty} (f+g)(p_n) = A + B$

ஆகையால், $\lim_{x\to p} (f+g)(x) = A + B$.

இதைப் போலவே, (ஆ) மற்றும் (இ) இவைகளை நிறுவலாம்.

குறிப்பு:

f, g என்பன $E \to R^k$ என்ற சார்புகள் எனில்

(அ) $\lim_{x\to p} (f+g)(x) = A + B$

(ஆ) $\lim_{x\to p} (fg)(x) = AB$

(இ) $\lim_{x\to p} (f/g)(x) = A/B,\ B \neq 0.$

3.3. யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள்

3.6. வரையறை

X, Y என்பன யாப்பு வெளிகள், $E \subset X$, $p \in E$, f என்பது E-லிருந்து Y-க்கு கோர்த்தல். $\varepsilon > 0$-க்கு ஒத்த $\delta > 0$ என்ற எண், $d_X(x, p) < \delta$ என அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகள் $x \in E$-க்கும் $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ என்றவாறு இருந்தால், f ஆனது p-யிடத்து தொடர்ச்சியான சார்பு என்போம்.

E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், f தொடர்ச்சியானது எனில், E-ல் f தொடர்ச்சியானது என்போம்.

குறிப்பு:

p-ல் தொடர்ச்சியானதாக அமைய, p-ல் f வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

p ஆனது E-ன் தனித்தப் புள்ளியாக அமையின், $\varepsilon > 0$-ற்கு $\delta > 0$ என்ற எண் $d_X(x, p) < \delta$ என அமையும் ஒரே புள்ளி $x = p$-க்கு, $d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$ ஆக அமையும்.

3.7. தேற்றம்

X, Y என்பன யாப்பு வெளிகள், $E \subset X$, $p \in E$ ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளி. $f : E \to Y$ எனில், p-ல் f தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

நிறுவல்:

வரையறைகள் 3.1 மற்றும் 3.6-ன் படி தேற்றம் நிரூபணமாகிறது.

இணைந்த சார்புகளின் தொடர்ச்சி (Continuity of Composite Functions)

3.8. தேற்றம்

X, Y, Z என்பன யாப்பு வெளிகள், $E \subset X$, $f: E \to Y$, $g: f(E) \to Z$ என்பன சார்புகள். $h: E \to Z$ என்ற சார்பு $h(x) = g(f(x))$, $(x \in E)$ என வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது என்க. f ஆனது $p \in E$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், g ஆனது f(p)-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும் அமையின், h ஆனது p-ல் தொடர்ச்சியானதாக அமையும்.

h ஆனது f, g- ன் இணைந்த சார்பு என அழைக்கப்படும். அது $h = fog$ எனக் குறிக்கப்படும்.

இத்தேற்றம் "தொடர்ச்சியுள்ள சார்பின் தொடர்ச்சியான சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்" எனவும் கூறப்படும்)

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

f(p)-ல் g தொடர்ச்சியானது என்பதால், $\eta > 0$ என்ற எண்,

$d_Y(y, f(p)) < \eta$, $y \in f(E)$ எனில், $d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$ என அமையும்.

p-ல் f தொடர்ச்சியானது என்பதால், $\delta > 0$ என்ற எண், $d_X(x, p) < \delta$, $x \in E$ எனில், $d_Y(f(x), f(p)) < \eta$ என அமையும்.

$y = f(x)$ எனில், இவ்விரு கூற்றுகளிலிருந்து,

$d_X(x, p) < \delta$, $x \in E$ எனில், $d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$.

அதாவது, $d_X(x, p) < \delta$, $x \in E$ எனில், $d_Z(h(x), h(p)) < \varepsilon$.

எனவே, p-ல் h தொடர்ச்சியானது.

தொடர்ச்சி மற்றும் திறந்த, மூடிய கணங்களின் நேர்மாற்று பிம்பங்கள்

3.9. தேற்றம்

$f: X \to Y$ என்பது யாப்பு வெளி X-லிருந்து யாப்பு வெளி Y-க்கு சார்பு. X-ல் f தொடர்ச்சியானதாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: Y-ல் ஒவ்வொரு திறந்த கணம் V-க்கும், அதன் நேர்மாற்று பிம்பம் $f^{-1}(V)$ ஆனது X-ல் திறந்த கணமாக அமைதலாகும்.

நிறுவல்:

(அ) X-ல் f தொடர்ச்சியானது மற்றும் V என்பது Y-ல் ஒரு திறந்த கணம் என்க. $f^{-1}(V)$ ஆனது X-ல் திறந்த கணம் என நிறுவ வேண்டும்.

$p \in X$ ஆனது, $f^{-1}(V)$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

p ஆனது $f^{-1}(V)$-ன் உள்புள்ளி என நிறுவ வேண்டும்.

$p \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(p) \in V$

V திறந்த கணம் என்பதால், $\varepsilon > 0$ என்ற எண், $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$ எனில், $y \in V$ என அமையும்.

p-ல் f தொடர்ச்சியானது என்பதால், $\delta > 0$ என்ற எண், $d_X(x, p) < \delta$ எனில், $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ என அமையும்.

இவையிரண்டையும் இணைக்க. $d_X(x, p) < \delta$ எனில், $f(x) \in V$ என அமையும்.

அதாவது, $d_X(x, p) < \delta \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$. எனவே, p-ன் அண்மை, $f^{-1}(V)$-ன் உட்கணமாக அமையும். அதாவது, $p \in f^{-1}(V)$ ஆனது $f^{-1}(V)$-ன் உள்புள்ளி.

எனவே, $f^{-1}(V)$ ஆனது X-ல் திறந்த கணமாக அமையும்.

(ஆ) மறுதலை

Y-ல் ஒவ்வொரு திறந்த கணம் V-க்கும், $f^{-1}(V)$ ஆனது X-ல் திறந்த கணம் என்க. $p \in X$, $\varepsilon > 0$ என்க.

$V = \{y \in Y : d_Y(y, f(p)) < \varepsilon\}$ எனில், V ஒரு திறந்த கணம்.

எனவே, $f^{-1}(V)$-ம் திறந்த கணம்.

ஆகையால், $\delta > 0$ என்ற எண், $d_X(p, x) < \delta$ எனில், $x \in f^{-1}(V)$ என அமையும்.

$$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V$$
$$\Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

எனவே, p-ல் f தொடர்ச்சியானது.

3.10. கிளைத்தேற்றம்

யாப்புவெளி X-லிருந்து யாப்பு வெளி Y-க்கு f ஒரு சார்பு, X-ல் தொடர்ச்சியானதாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: Y-ல் ஒவ்வொரு மூடிய கணம் C-க்கும், அதன் நேர்மாற்று பிம்பம் $f^{-1}(C)$ ஆனது X-ல் மூடிய கணமாக அமைதலாகும்.

நிறுவல்:

f ஆனது X-ல் தொடர்ச்சியானது.

$\Leftrightarrow$ E ஆனது Y-ல் மூடிய கணம் எனில், E-ன் நிரப்பு E^c, Y-ல் திறந்த கணம்.

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$ ஆனது Y-ல் திறந்த கணம்.

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(E)$ ஆனது X-ல் மூடிய கணம்.

குறிப்பு:

தொடர்ச்சியான சார்பில், ஒரு திறந்த கணத்தின் பிம்பம் திறந்த கணமாக அமையத் தேவையில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளையும் R^1-ன் ஒரே புள்ளிக்குக் கோர்க்கும் மாறிலி சார்பு. இதைப்போலவே, தொடர்ச்சியான சார்பில், மூடிய கணத்தின் பிம்பம் மூடியக் கணமாக அமையத் தேவையில்லை.

3.4. தொடர்ச்சியான மெய்ப்புனை மதிப்புடைய மற்றும் திசையன் மதிப்புடைய சார்புகள்

3.11. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியில், f மற்றும் g என்பன மெய்ப்புனை தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில், f+g மற்றும் fg என்பன X-ல் தொடர்ச்சியானவை. மேலும், அனைத்து $x \in X$-க்கு $g(x) \neq 0$ எனில், f/g-ம் தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

X-ன் தனித்தப்புள்ளிகளில், நிறுவ வேண்டியது எதுவுமில்லை.

X-ன் எல்லைப்புள்ளிகளில், தேற்றம் 3.5 மற்றும் 3.7 இவைகளிலிருந்து இத்தேற்றம் பெறப்படும்.

3.12. தேற்றம்

(அ) X என்ற யாப்பு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்சார்புகள் $f_1, \ldots, f_k$, என்க. $f: X \to R^k$ என்ற சார்பு $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), (x \in X)$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், f தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow$ $f_1, \ldots, f_k$ என்ற ஒவ்வொரு சார்பும் தொடர்ச்சியானது.

(ஆ) $f: X \to R^k$, $g: X \to R^k$ என்பன தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில், f+g மற்றும் f.g என்பனவும் X-ல் தொடர்ச்சியானவை.

நிறுவல்:

$a = (a_1, \ldots, a_k)$ எனில், ஒவ்வொரு $j = 1, 2, \ldots, n$ க்கு

$$|f_j(x) - a_j| \leq |f(x) - a| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - a_i|$$

$$= \{ \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - ai|^2 \}^{1/2}$$

இந்த சமனின்மை, $\lim_{x\to p} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to p} fi(x) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

என்பதைக் காட்டும்.

f ஆனது p என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது என்க.

p ஆனது X-ன் தனித்தப்புள்ளி எனில், நிறுவுவதற்கு எதுவுமில்லை.

p ஆனது X-ன் எல்லைப் புள்ளி என்க.

எனவே, $x\to p$ எனில், $f(x) \to f(p) \Leftrightarrow$ அனைத்து $k= 1, 2, \ldots, n$ க்கு,

$f_k(x) \to f_k(p)$

ஆகையால், ஒவ்வொரு $f_1, \ldots, f_k$-ம் தொடர்ச்சியானவை.

பகுதி (ஆ) ஆனது பகுதி (அ) மற்றும் தேற்றம் 3.11 இவைகளிலிருந்துப் பெறப்படும்.

குறிப்பு:

$f_1, \ldots, f_k$ என்பன f-ன் பகுதிகள் எனப்படும். $f + g$ என்பது $X\to R^k$ என்ற சார்பாகும். ஆனால், $f.g$ ஆனது $X\to R^1$ என்ற சார்பாகும்.

3.5. கச்சிதமான யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள்

3.13. தேற்றம்

$f: E\to R^k$ என்ற சார்பிற்கு, M என்ற மெய்யெண், அனைத்து $x\in E$-க்கு, $|f(x)| \le M$ என அமையுமானால், f வரம்புடையது எனப்படும்.

கீழ்க்கண்ட .தேற்றம், கச்சிதமான யாப்புவெளியின் தொடர்ச்சியான பிம்பமும், கச்சிதமானது என்பதை நிறுவுகிறது. இது, தொடர்ச்சியான சார்புகளின் முழுதளாவிய (global) பண்புகளில் ஒன்றாகும்.

3.14. தேற்றம்

X, Y என்பன யாப்பு வெளிகள். X கச்சிதமானது. $f: X \to Y$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், f(X) கச்சிதமானது.

நிறுவல்:

f(X)-ன் ஒரு திறந்த உறை $\{V_\alpha\}$ என்க.

எனவே, $f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha} V_\alpha$. f தொடர்ச்சியான சார்பு என்பதால், ஒவ்வொரு கணம்

$f^{-1}(V_\alpha)$-ம் திறந்த கணம். (தேற்றம் 3.9)

எனவே, $\{f^{-1}((V_\alpha)\}$ ஆனது X-ன் திறந்த உறை ஆகிறது.

X கச்சித யாப்பு வெளி என்பதால், முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள குறியீட்டு எண்கள்

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ஆகியவை,

$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$ என அமையும்.

ஒவ்வொரு $E \subset Y$-க்கும், $f(f^{-1}(E)) \subset E$ என்பதால்,

$$\begin{aligned} f(X) &\subset f(f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})) \\ &= f(f^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup ... \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_n})) \\ &\subset V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n} \end{aligned}$$

எனவே, f(X) கச்சிதமானது.

குறிப்பு:

$E \subset Y$ எனில், $f(f^{-1}(E)) \subset E$. ஆனால், $E \subset X$ என அமையின்,

$f(f^{-1}(E)) \supset E$. இரு வகைகளிலும், சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

$f: E \to R^k$ என்பது E-ல் வரம்புடையது $\Leftrightarrow$ f(S) என்பது R^k-ன் வரம்புடைய உட்கணம். எனவே, பின்வருவன, தேற்றம் 3.14-ன் விளைவு ஆகும்.

3.15. தேற்றம்

X என்பது கச்சித யாப்பு வெளி. $f: E \to R^k$ தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், f(X) மூடிய மற்றும் வரம்புடைய கணம் ஆகும். எனவே, f வரம்புடையது.

இது தேற்றம் 1.55-ல் இருந்து நிரூபணமாகிறது.

பின்வரும் தேற்றம், X கச்சித கணம் எனில், f என்ற தொடர்ச்சியான சார்பு supf(X), inf f(X) என்ற மதிப்புகளைப் பெறுவதைக் காட்டுகிறது.

3.16. தேற்றம்

X என்ற கச்சிதமான யாப்பு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்சார்பு f மற்றும் $M = \sup_{p \in X} f(p)$, $m = \inf_{p \in X} f(p)$ எனில், $p, q \in X$ என்ற புள்ளிகள் $f(p) = M$ மற்றும் $f(q) = m$ எனக் காணலாம்.

நிறுவல்:

f என்பது கச்சிதமான யாப்பு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புடைய சார்பு என்பதால், f(X) ஆனது மூடிய மற்றும் வரம்புடைய மெய்யெண்களின் கணமாக அமையும். (தேற்றம் 3.15). எனவே, f ஒரு வரம்புடைய சார்பு.

மேலும், f(X) மூடிய கணம் என்பதால், f(X)-ன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு M மற்றும் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு m ஆகியவை f(X)-ன் உறுப்புகளாக அமையும். எனவே, X-ன் ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் p, q க்கு $f(p) = M$ மற்றும் $f(q) = m$ என இருக்கும்.

குறிப்பு:

(1) X கச்சிதமானது இல்லை எனில், இத்தேற்றம் உண்மையாகாது.

$f: (0, 1) \to R^1$, $f(x) = x$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு வரம்புடையது.

$m = M = 0$. இந்த வரம்புகளை, (0, 1)-ன் எந்தப் புள்ளியிலும், f பெறாது.

(2) $p, q \in X$ என்ற புள்ளிகள், அனைத்து $x \in X$-க்கு $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ என அமையும். அதாவது, ஒரு கச்சிதமான யாப்பு வெளி X-ல் வரையறுக்கப்பட்ட, தொடர்ச்சியான மெய்சார்பு,

அதன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு (p-ல்) மற்றும் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு (q-ல்) இவைகளை, X-ல் ஏதேனும் புள்ளிகளில் பெற்றிருக்கும்.

3.17. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) $f(x) = 1/(1+x^2)$, $(-\infty < x < \infty)$ எனில், f அதன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். ஆனால், மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற்றிருக்காது. $x = 0$ எனில், $f(0) = 1$. $x \in (-\infty, \infty)$, $x \neq 0$ எனில், $f(x) < f(0)$.

ஆகையால், $x = 0$-ல் f அதன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். $x = +\infty$ அல்லது $x = -\infty$ என்ற புள்ளிகளில் மட்டுமே, $f(x) = 0$.

ஆகவே, f அதன் மீச்சிறு மதிப்பை அடையாது.

(ஆ) $(-\infty, \infty)$-ல் $f(x) = x|x|/(1+x^2)$ என்க.

இது ஓர் ஒற்றை சார்பு. மேலும், தொடர்ச்சியானது.

$x > 0$ எனில், $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$,

$x < 0$ எனில், $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$.

எனவே, R^1-ல் f(x) வரம்புடைய சார்பு.

f(x)-ன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு = 1, மீப்பெரு கீழ்வரம்பு = -1.

ஆனால், $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$ என அமையும் எந்த புள்ளிகள் x_1, x_2-ம் R^1-ல் இல்லை.

3.18. தேற்றம்

X என்பது கச்சிதமான யாப்பு வெளி. Y ஆனது ஏதேனும் ஒரு யாப்பு வெளி. $f: X \to Y$ என்பது தொடர்ச்சியான ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பு எனில், Y-ல் $f^{-1}(f(x)) = x \ (x \in X)$ என வரையறுக்கப்பட்ட நேர்மாறு சார்பு $f^{-1}: Y \to X$-ம் தொடர்ச்சியான மேல் சார்பாகும்.

நிறுவல்:

தேற்றம் 3.9.-ஐ f-க்குப் பதிலாக, f^{-1}-க்குப் பயன்படுத்த, X-ல் ஒவ்வொரு திறந்த கணம் V-க்கு f^{-1}-ன் நேர்மாற்று பிம்பம் $f(V)$ ஆனது Y-ல் திறந்த கணமாக அமையும் என நிறுவினால் போதுமானது.

அவ்வாறு உள்ள கணத்தை V என்று எடுத்துக் கொள்க. எனவே, V-ன் நிரப்பு V^c ஆனது X-ல் மூடிய கணம். கச்சிதமான கணங்களின் மூடிய உட்கணங்ள் கச்சிதமானவை (தேற்றம் 1.55) என்பதால், V^c கச்சித கணம் ஆகிறது.

தேற்றம் 3.14-ன் படி, $f(V^c)$ ஆனது Y-ன் கச்சித உட்கணமாக அமையும். யாப்பு வெளிகளில், கச்சித உட்கணங்கள் மூடியவை (தேற்றம் 1.58) என்பதால், $f(V^c)$ ஆனது Y-ல் மூடிய கணம்.

f ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பு என்பதால், $(f(V^c))^c = f(V)$.

எனவே, $f(V)$ ஆனது Y-ல் திறந்த கணம்.

ஆகையால், $f^{-1}: Y \to X$ தொடர்ச்சியானது.

குறிப்பு:

மேலேக் கண்ட தேற்றத்தில், X கச்சிதமானது என்பது தேவையானது.

$X = [0, 1)$ என்ற பாதி திறந்த இடைவெளியை, R^1-ன் வழக்கமான யாப்புடன் எடுத்துக் கொள்க. f என்ற சார்பு, $f(x) = e^{2\pi i x}$, $0 , x < 1$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$f: [0, 1) \to \{$மெய்ப்புனைத் தளத்தில் அலகு வட்டம் $|z| = 1\}$ என்பது ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்ச்சியான சார்பு. ஆனால், f^{-1}ஆனது $f(0)$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது அல்ல. ஏனெனில், $x_n = 1- (1/n)$ எனில், $\{f(x_n)\}$ என்ற தொடர்வரிசை $f(0)$-க்கு ஒருங்கும். ஆனால், $\{x_n\}$ என்பது X-ல் ஒருங்காது.

3.6. *சீரான தொடர்ச்சி* (Uniform Continuity)

3.19. வரையறை

X, Y என்பன யாப்பு வெளிகள். $f: X \to Y$ என்பது ஒரு சார்பு. அனைத்து $\varepsilon > 0$-ற்கு ஏற்ப $\delta > 0$ என்ற எண், $d_X(p, q) < \delta$ என அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகள் $p, q \in X$-க்கு $d_Y(f(p), f(q) < \varepsilon$ என இருக்குமானால், X-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது என அழைக்கப்படும். δ ஆனது p, q ஐப் பொறுத்ததல்ல.

குறிப்பு:

1. ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி என்பது ஒரு புள்ளியில் அல்லது ஒரு கணத்தில் அமையும் பண்பு. ஆனால், சீரான தொடர்ச்சி என்பது ஒரு கணத்தில் மட்டுமே அமையும் பண்பு. ஒரு புள்ளியிடத்துச் சீரான தொடர்ச்சி என்பது பொருளற்றது.

2. X-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு என்க. வரை இலக்கணப்படி, X-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி p-இடத்து $\varepsilon > 0$ என்றால், $d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ என்றவாறு $\delta(\varepsilon) > 0$ இருக்குமானால், f ஆனது p-இடத்துத் தொடர்ச்சியாய் உள்ளது. இந்த δ ஆனது, ε-ஐயும் p-ஐயும் பொறுத்தது. ஆகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு ஒத்த $\delta > 0$ ஆனது பலப்பல p-க்கும் ஒத்தது எனக் கூற முடியாது. அப்படி எல்லா p-க்கும், அதே $\delta > 0$ ஒத்து வந்தால், f ஆனது X-ல் ஒரு சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது ஆகும்.

3. ஒவ்வொரு சீரான தொடர்ச்சியான சார்பும் தொடர்ச்சியானது.

X-ல் யாப்பு வெளி X-ல் தொடர்ச்சி மற்றும் சீரான தொடர்ச்சி இவைகளின் வித்தியாசங்களை விளக்குவதற்குக், கீழ்க்கண்ட மெய்மதிப்புடைய சார்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

3.20. எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $X = (0, 1]$, $f(x) = 1/x$, $x > 0$ என்க.

இச்சார்பு, X-ல் தொடர்ச்சியானது. ஆனால், சீரான தொடர்ச்சியானது அல்ல.

இதனை நிறுவ, $\varepsilon = 10$ என்க. வரையறையின் கட்டுப்பாட்டை நிறைவேற்றும் δ,

$0 < \delta < 1$ உள்ளது என்க. $x = \delta$, $p = \delta/11$ எனில், $d_X(x, p) = | x - p < \delta$

மற்றும் $d_Y(f(x), f(p)) = |f(x) - f(p)| = 11/\delta - 1/\delta = 10/\delta > 10$

இந்த இரு புள்ளிகளுக்கும், $d_Y(f(x), f(p)) > 10$.

இது, சீரான தொடர்ச்சிக்கு முரண்பாடு.

2. $X = (0, 1]$, $f(x) = x^2$, $x \in R^1$.

இச்சார்பு, சீரான தொடர்ச்சியானது.

$d_Y(f(x), f(p)) = |f(x) - f(p)| = |x^2 - p^2| = | (x - p)(x + p)| < 2|x - p|$

$|x - p| < \delta$ எனில், $|f(x) - f(p)| < 2\delta$.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $|x - p| < \delta$ என அமையும் அனைத்து x, p க்கு, $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ என அமைய $\delta = \varepsilon/2$ என எடுத்துக் கொண்டால் போதுமானது. X-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது.

சீரான தொடர்ச்சி மற்றும் கச்சித கணங்கள்

X என்ற யாப்பு வெளியில், f சீரான தொடர்ச்சியானது எனில், அது தொடர்ச்சியானது. X கச்சிதமானது எனில், இதன் மறுதலையும் உண்மை.

3.21. தேற்றம்

X என்பது ஒரு கச்சிதமான யாப்பு வெளி. Y ஒரு யாப்பு வெளி.

$f: X \to Y$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானது எனில், X-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

f தொடர்ச்சியானது என்பதால், $p \in X$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த மிகை எண் $\varphi(p)$ ஆனது $q \in X,\ d_X(p, q) < \varphi(p) \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon/2$ ------ (1) என அமையும்.

$J(p) = \{q \in X: d_X(p, q) < \varphi(p)/2\}$ என வரையறுக்க.

$p \in J(p)$ ஆதலால், அனைத்து கணங்கள் $J(p)$-ன் கூட்டம், X-ன் திறந்த உறை ஆகும்.

X கச்சிதமானது என்பதால், $p_1, \ldots, p_n \in X$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள், $X \subset J(p_1) \cup \ldots \cup J(p_n)$ என்றவாறு கிடைக்கும்.

$\delta = (1/2) \min \{ \varphi(p_1), \ldots , \varphi(p_n)\}$ என்க.

எனவே, $\delta > 0$.

[இங்கு தான், X-ன் கச்சித பண்பு உதவுகிறது. முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள மிகை எண்களின் மீச்சிறு மதிப்பு மிகை. ஆனால், முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள மிகை எண்களின் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு 0 ஆக அமையலாம்]

X-ல் ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் p, q , $d_X(p, q) < \delta$ என்க..

$X \subset J(p_1) \cup \ldots \cup J(p_n)$ என்பதால், $p \in J(p_m),\ 1 \leq m \leq n$.

எனவே, $d_X(p, p_m) < (1/2)\varphi(p_m)$

$(1) \Rightarrow d_Y(f(p), f(p_m)) < \varepsilon/2$

மேலும், $d_X(q, p_m) \leq d_X(p, q) + d_X(p, p_m)$

$$< \delta + (1/2)\varphi(p_m) \leq \varphi(p_m)$$

எனவே, சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $d_Y(f(p), f(p_m)) < \varepsilon/2$. ஆகையால்,

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

எனவே, அனைத்து $p, q \in X$-க்கு, $d_X(p, q) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$ என நிறுவப்பட்டது. ஆகவே, X-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது.

3.22. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளியின் ஓர் உட்கணம் A. Y என்பது ஒரு முழு யாப்பு வெளி. $f: A \to Y$ சீரான தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், f-ஐ $F: X \to Y$ என்ற சீரான தொடர்ச்சியான சார்புக்கு ஒரே முறையில் விரிவாக்கம் செய்யலாம்.

நிறுவல்:

$\{x_n\}$ என்பது A-ல் ஒரு காஷி தொடர்வரிசை எனில், Y-ல் $\{f(x_n)\}$ காஷி தொடர்வரிசை ஆகும். $x \in A$ எனில், $F(x) = f(x)$ என வரையறுக்க. இப்போது, $x \in X$ ஆனால், $x \notin A$ என்க.

A ஆனது X-ன் அடர் உட்கணம் என்பதால், x ஆனது A-ன் எல்லைப்புள்ளி.

எனவே. A-ல் $\{x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ஆக இருக்கும்.

$\{x_n\}$ ஆனது X-ல் தொடர்வரிசையாதலால், அது A-ல் காஷி தொடர்வரிசை.

எனவே, $\{f(x_n)\}$ ஆனது Y-ல் காஷி தொடர்வரிசை ஆகும்.

Y முழு யாப்பு வெளி என்பதால், $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ இருக்கும்.

$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ என வரையறுக்க.

இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட F ஆனது x-க்கு ஒருங்கும் $\{x_n\}$-ஐச் சார்ந்திருக்காது எனக் காட்டுவோம்.

$\{y_n\}$ என்பது $y_n \to x$ என அமையும் A-ன் மற்றொரு தொடர்வரிசை என்க.

எனவே, $d_X(x_n, y_n) \to 0$.

A-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது என்பதால், A-ல் தொடர்ச்சியானது.

ஆகையால், $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

எனவே, $F(x)$ ஆனது $\{x_n\}$-ஐ சார்ந்திருக்காது.

ஆகவே, $F(x)$ நன்றாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

அனைத்து $x \in X$-க்கு $F(x)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால், F ஆனது f-ன் விரிவாக்கம் ஆகும்.

இப்பொழுது, X-ல் F சீரான தொடர்ச்சியானது என நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

A-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது என்பதால், $\delta > 0$ என்ற எண், அனைத்து $x, y \in A$-க்கு $d_X(x, y) < \delta/3 \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ என அமையும்.

$a, b \in X$ மற்றும் $d_X(a, b) < \delta/3$ என்க.

$a \in X \Rightarrow A$-ல் $\{a_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ என அமையும்.

F-ன் வரையறையின் படி, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = F(a)$

எனவே, $d_X(a_m, a) < \delta/3$ மற்றும் $d_Y(f(a_m), F(a)) < \varepsilon/3$ என இருக்கும் a_m-ஐக் காணலாம்.

இதைப்போலவே, $\{b_n\} \in A$ ஆனது, $d_X(b_n, b) < \delta/3$ மற்றும் $d_Y(f(b_m), F(b)) < \varepsilon/3$ என அமையும்.

இப்பொழுது,

$$
\begin{aligned}
d_X(a_m, b_n) &< d_X(a_m, a) + d_X(a, b) + d_X(b, b_n) \\
&< \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.
\end{aligned}
$$

எனவே, $d_Y(f(a_m), f(b_n)) < \varepsilon/3$.

ஆகையால்,

$$
\begin{aligned}
d_Y(F(a), F(b)) &< d_Y(F(a), f(a_m)) + d_Y(f(a_m), f(b_n)) + d_Y(f(b_n), F(b)) \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

எனவே, $d_X(a, b) < \delta/3 \Rightarrow d_Y(F(a), F(b)) < \varepsilon$.

$\Rightarrow F: X \to Y$ சீரான தொடர்ச்சியானது.

F தனித்தன்மையானது என நிறுவுவோம்.

F தனித்தது இல்லை எனில், X-ல் வரையறுக்கப்பட்ட F_1 என்ற மற்றொரு சார்பு, அனைத்து $x \in A$-க்கு $F_1(x) = F(x)$ என இருக்கும்.

மேலும், X-ல் F சீரான தொடர்ச்சியானது. $x \in A$ எனில், $F_1(x) = F(x) = f(x)$.

$x \notin A$ என்க. $\{x_n\}$ என்பது A-ல் தொடர்வரிசை, $x_n \to x$ என்க.

வரையறையின் படி, $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

$x_n \to x$ மற்றும் F_1 தொடர்ச்சியானது $\Rightarrow n\to\infty$ எனில், $F_1(x_n) \to F_1(x)$

ஆனால், $F_1(x_n) = f(x_n)$. அனைத்து n-க்கு $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to F_1(x)$

எனவே, அனைத்து $x \in X$-க்கு $F_1(x) = F(x)$.

தேற்றம் பூர்த்தியாகிறது.

3.7. தொடர்ச்சி மற்றும் இணைப்புமை (Continuity and Connectivity)

இங்கு, ஓர் இணைந்த கணத்தின் பிம்பம் ஓர் இணைந்த கணம் என நிறுவுவோம்.

3.23. தேற்றம்

X மற்றும் Y என்பன யாப்பு வெளிகள். $f : X \to Y$ தொடர்ச்சியான சார்பு. E என்பது X-ன் இணைந்த கணம் எனில், f(E) ஓர் இணைந்த கணம்.

நிறுவல்:

f(E) இணைந்த கணம் இல்லை எனில், $f(E) = A \cup B$, A மற்றும் B என்பன Y-ன் வெற்றற்ற பிரிக்கும் உட்கணங்கள்.

$G = E \cap f^{-1}(A)$, $H = E \cap f^{-1}(B)$ என்க.

எனவே, $E = G \cup H$ மற்றும் G, H என்பவை வெற்றற்றவை.

$A \subset \bar{A}$ என்பதால், $G \subset f^{-1}(\bar{A}) \Rightarrow f(\bar{G}) \subset \bar{A}$.

மேலும், $f(H) = B$ மற்றும் $\bar{A} \cap B$ வெற்று கணம் என்பதால், $\bar{G} \cap H$ வெற்று கணம். இதைப்போலவே, $G \cap \bar{H}$-ம் வெற்று கணம்.

எனவே, G, H ஆகியன பிரிக்கும் கணங்கள்.

E இணைந்த கணம் என்பதால், இது தவறு.

எனவே, f(E) ஓர் இணைந்த கணம்.

தேற்றம் 3.23-ன் கிளைத்தேற்றமாகப் பின்வரும் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

3.24. தேற்றம் (இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம்) (Mean Value Theorem)

மூடிய இடைவெளி [a, b]-ல் f ஒரு தொடர்ச்சியான மெய்சார்பு. $f(a) < f(b)$ மற்றும் $f(a) < c < f(b)$ என அமையும் ஓர் எண் c எனில், $x \in (a, b)$ என்ற புள்ளி $f(x) = c$ என்றவாறு இருக்கும்.

நிறுவல்:

[a, b] ஆனது R^1-ன் இணைந்த கணம். எனவே, f தொடர்ச்சியானது என்பதால், $f([a, b])$, R^1-ன் இணைந்த கணம். (தேற்றம் 3.23.)

எனவே, $f(a) < c < f(b) \Rightarrow c \in f([a, b])$.

$x \in (a, b)$ என்ற புள்ளி $f(x) = c$ என அமையும்.

3.25. தேற்றம்

f என்பது கச்சிதமான இணைந்த யாப்பு வெளி X-ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புடைய சார்பு எனில், f ஆனது அதன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகளுக்கிடையேயான அனைத்து மதிப்புகளையும் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

X என்ற கச்சிதமான இணைந்த யாப்பு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புடைய சார்பு f-ன் வீச்சு ஒற்றை புள்ளி அல்லது ஒரு மூடிய வரம்புடைய இடைவெளி என நிறுவுவோம்.

$f: X \to R^1$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. என்க.

வகை (i): f ஒரு மாறிலி சார்பு என்க.

எனவே, f-ன் வீச்சு ஓர் ஒற்றை புள்ளி. அனைத்து $x \in X$-க்கு $f(x) = c$ என்க. எனவே, f-ன் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் c ஆகும்.

வகை (ii):

f மாறிலி சார்பு அல்ல என்க.

எனவே, f-ன் வீச்சில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் இருக்கும்.

X இணைந்த கணம் என்பதால், f(X) ஆனது R^1-ன் இணைந்த கணமாக அமையும். எனவே, R^1-ல் f(X) ஒரு இடைவெளி.

X கச்சிதமானது என்பதால், f(X) ஆனது ஒரு மூடிய, வரம்புடைய இடைவெளியாக R^1-ல் இருக்கும்.

மேலும்., f ஒரு கச்சிதமான யாப்பு வெளி மற்றும் X-ல் f ஒரு தொடர்ச்சியான மெய் மதிப்புடைய சார்பு என்பதால், X-ன் புள்ளிகளில் f-ஆனது மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகளைப் பெறும்.

a, b என்பன $f(a) = \inf_{x\in X} f(x)$ மற்றும் $f(b) = \sup_{x\in X} f(x)$ என அமையும், X-ன் புள்ளிகள் என்க.

f(X) மூடிய , வரம்புடைய இடைவெளி என்பதால், $f(X) = [f(a), f(b)]$.

எனவே, f-ன் அனைத்து மதிப்புகளும், அதன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகளுக்கிடையில் அமையும்.

3.26. தேற்றம்

X என்ற யாப்பு வெளி இணைந்ததாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான மேல் சார்பு $f:X \to [0, 1]$-ம் இருக்காது என்பதாகும்.. இங்கு, [0, 1] பிரிநிலை யாப்பு வெளியாகும்.

நிறுவல்:

$f: X \to [0, 1]$ ஒரு தொடர்ச்சியான மேல் சார்பு என்க.

[0, 1] என்பது பிரிநிலை யாப்பு வெளி என்பதால், $\{0\}$, $\{1\}$ என்பன திறந்த கணங்கள். எனவே, $A = f^{-1}(0)$ மற்றும் $B = f^{-1}(1)$ என்பனவும் X-ல் திறந்த கணங்கள்.

f மேல் சார்பு என்பதால், A, B என்பன வெற்றற்றவை. மேலும், $A \cap B = \varphi$, $A \cup B = X$. ஆகையால், X ஆனது இரு வெற்றற்ற, பொது உறுப்பற்ற கணங்களின் சேர்ப்புக் கணமாக அமைகிறது. எனவே, X இணைந்த கணம் அல்ல.

மறுதலையாக, X இணைந்த கணம் அல்ல என்க.

எனவே, A, B என்ற வெற்றற்ற, பொது உறுப்பற்ற கணங்கள் X-ல் $X = A \cup B$ என அமையும்.

$f: X \to [0, 1]$ என்ற சார்பை,

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in A \text{ எனில்,} \\ 1, x \in B \text{ எனில்,} \end{cases}$$ என வரையறுப்பின், f ஒரு மேல் சார்பு.

மேலும், $f^{-1}(\varphi) = \varphi$, $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$, $f^{-1}(\{0,1\}) = X$ என்பதால், ஒவ்வொரு திறந்த கணத்தின் நேர்மாற்று பிம்பமும் திறந்த கணமாக இருக்கிறது.

ஆகையால், f ஒரு தொடர்ச்சியான மேல் சார்பு.

3.8. தொடர்ச்சியின்மைகள் (Discontinuties)

f என்ற சார்பின் வரையறை அரங்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி x-ல் f தொடர்ச்சியாய் இல்லை எனில், f-ஐ x இடத்துத் தொடர்ச்சியற்ற சார்பு என்போம்.

3.27. வரையறை

(a, b) என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f என்க. $a \le x < b$ என அமையும் x என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. x-க்கு ஒருங்கும் (x, b)-ல் உள்ள அனைத்து தொடர்வரிசை $\{t_n\}$-களுக்கு, $n \to \infty$ எனில், $f(t_n) \to q$ என இருக்குமானால், அதை $f(x+) = q$ என எழுதுவோம். $f(x+)$ ஆனது x-ல் f-ன் வலது பக்க எல்லை எனப்படும்.

இதைப்போல், $a < x \le b$ என அமையும் ஒரு புள்ளி x என்க.
x-க்கு ஒருங்கும் (a, x)-ல் உள்ள அனைத்து தொடர்வரிசை $\{t_n\}$ களுக்கு, $n \to \infty$ எனில், $f(t_n) \to q$ என இருக்குமானால், அதை $f(x-) = q$ என எழுதுவோம். $f(x-)$ ஆனது x-ல் f-ன் இடப்பக்க எல்லை எனப்படும்.

(a, b)-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x-க்கு, $\lim_{t\to x} f(t)$ இருக்கும் $\Leftrightarrow$ $f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t)$.

3.28. வரையறை

(a,b)-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f என்க. x என்ற புள்ளியில் f தொடர்ச்சியில்லாமலும், $f(x+)$ மற்றும் $f(x-)$ இருக்கும்படியும் அமையின், f ஆனது x-ல் முதல் வகை தொடர்ச்சியின்மையுடையது அல்லது x-ல் f ஆனது எளிய தொடர்ச்சியின்மையுடையது. $f(x+)$, $f(x-)$ இவற்றில் இரண்டுமே இல்லாவிடின், f ஆனது x-ல் இரண்டாம் வகை தொடர்ச்சியின்மை கொண்டது என்றழைக்கப்படும்.

சார்பு ஒன்று எளிய தொடர்ச்சியின்மை பெறுவதற்கு இரு வழிகள் உள்ளன.

(i) $f(x+) \neq f(x-)$ அல்லது

(ii) $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

3.29. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ விகிதமுறு எண் எனில்,} \\ 0, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$

என்ற சார்பு அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், இரண்டாம் வகை தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கும். ஏனெனில், $f(x+)$ மற்றும் $f(x-)$ இருக்காது.

(ஆ) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ விகிதமுறு எண் எனில்,} \\ 0, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$

என்ற சார்பு $x = 0$-ல் தொடர்ச்சியானது. ஆனால், மற்ற புள்ளிகளில் இரண்டாம் வகை தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கும்.

(இ) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -3 < x < -2 \\ -x-2, & -2 \leq x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

என்ற சார்பு $x = 0$-ல் எளிய தொடர்ச்சியின்மையையும், $(-3, 1)$-ல், 0 ஐத் தவிர மற்ற புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியாகவும் இருக்கும்.

(ஈ) $f(x) = \begin{cases} |x|/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

என்ற சார்பு $x = 0$-ல் எளிய தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கும்.

(உ) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}/(1+e^{1/x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

என்ற சார்பு $x = 0$-ல் எளிய தொடர்ச்சியின்மையுடையது. $x = 0$ ஐத் தவிர, மற்றெல்லாப் புள்ளிகளிடத்து f ஆனது தொடர்ச்சியாயுள்ளது.

(ஊ) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

என்ற சார்பு $x = 0$-ல் இரண்டாம் வகை தொடர்ச்சியின்மையுடையது. $x = 0$-ஐத் தவிர மற்றெல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது.

3.9. ஓரியல்புச் சார்புகள் (Monotonic Functions)

3.30. வரையறை

R^1-ன் உட்கணம் S-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புடைய சார்பு f என்க. S-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகள் x, y-க்கு $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ என்றால், f ஆனது ஏறும் சார்பு (Increasing Function) எனப்படும்.

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ என்றால், f-ஐத் திட்டமாக (strictly) ஏறும் சார்பு என்போம்.

S-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகள் x, y-க்கு $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ என்றால், f ஆனது குறையும் சார்பு (Decreasing Function) எனப்படும்.

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ என்றால், f-ஐத் திட்டமாக குறையும் சார்பு என்போம்.

f ஆனது ஏறும் சார்பாகவோ, இறங்கும் சார்பாகவோ இருந்தால், f-ஐ S-ன் மீதான ஓரியல்புச் சார்பு என்போம்.

குறிப்பு:

f ஒரு ஏறும் சார்பு எனில், -f ஒரு குறையும் சார்பு.

கீழ்க்கண்டத் தேற்றத்தில், கச்சித இடைவெளிகளில் ஓரியல்பாக உள்ள சார்புகள், முடிவுள்ள வலப்பக்க மற்றும் இடப்பக்க எல்லைகளைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுவோம்.

3.31. தேற்றம்

f என்ற சார்பு $[a, b]$-ல் ஓரியல்பு ஏறும் சார்பு எனில், அனைத்து $c \in (a, b)$-க்கு $f(c+)$ மற்றும் $f(c-)$ இவையிரண்டும் இருக்கும். மேலும், $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$.

நிறுவல்:

$A = \{f(x) : a < x < c\}$ என்க.

f ஏறும் சார்பு என்பதால், A மேல் வரம்புடையது. அதன் மேல் வரம்பு $f(c)$.

$\alpha = \text{Sup } A$ என்க. எனவே, $\alpha \leq f(c)$

$f(c-)$ இருக்கிறது மற்றும் $f(c-) = \alpha$ எனவும் நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ என்க.

$\alpha = \text{Sup } A \Rightarrow A$-ல் $f(x_1)$ எனும் உறுப்பு, $\alpha - \varepsilon < f(x_1) \leq \alpha$ என அமையும்.

$\delta = c - x_1$ என்க.

எனவே, x ஆனது $c - \delta < x < c$ என அமையும் எனில்,

$f(x) > f(x_1)$ (f ஏறும் சார்பு)

ஆகவே, $|f(x) - \alpha| = \alpha - f(x) < \alpha - f(x_1) < \varepsilon$

ஆகையால், $f(c-) = \alpha$.

இதைப்போல், $x \in (c, b)$, $f(x) > f(c)$.

எனவே, $B = \{ f(x): x \in (c, b)\}$ என்ற கணம் கீழ்வரம்புடையது.

$\beta = \inf B$ என்க. $f(c+)$ இருக்கிறது. $f(c+) = \beta$ என நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\beta + \varepsilon > \beta = \inf f(x) \Rightarrow x_2 \in (c, b)$ என்பது $f(x_2) < \beta + \varepsilon$ என அமையும்.

$\delta = x_2 - c$ என்க.

எனவே, x ஆனது $c < x < c + \delta$-ஐ நிறைவேற்றுமானால், $f(x) < f(x_2)$

ஆகையால், $|f(x) - \beta| = f(x) - \beta < f(x_2) - \beta < \varepsilon \Rightarrow f(c+) = \beta$.

குறிப்பு:

f குறையும் சார்பு எனில், இதே போன்று ஒரு தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

3.32. கிளைத்தேற்றம்

(a, b)-ல் f ஒரு ஏறும் சார்பு எனில், அனைத்து $c \in (a, b)$-க்கு
$f(c-) = \sup_{x \in (a,c)} f(x) < f(c) < \inf_{x \in (a,c)} f(x) = f(c+)$.
மேலும், $a < x < y < b$ எனில், $f(x+) \leq f(y-)$.

3.33. தேற்றம்

R^1-ன் ஒரு கணம் S-ல் திட்டமாக ஏறும் சார்பு f எனில், f^{-1} இருக்கும் மற்றும் f(S)-ல் திட்டமாக ஏறும் சார்பாக அமையும்.

நிறுவல்:

f திட்டமாக ஏறும் சார்பு என்பதால், S-ல் அது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக இருக்கும். எனவே, f^{-1} இருக்கும்.

$y_1 < y_2$ என்பன f(S)-ன் இரு புள்ளிகள் என்க.

$x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ என்க. $x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2$. இது தவறு.

எனவே, $x_1 < x_2$. ஆகையால், f^{-1}-ம் ஒரு திட்டமாக ஏறும் சார்பு.

தேற்றம் 3.33 உடன் தேற்றம் 3.18 இணைக்க, கீழ்க்கண்டத் தேற்றம் கிடைக்கும்.

3.34. தேற்றம்

[a, b] என்ற கச்சித இடைவெளியில் f தொடர்ச்சியானதாகவும், திட்டமாக ஏறும் சார்பாகவும் இருப்பின், [f(a), f(b)] என்ற இடைவெளியில், f^{-1} தொடர்ச்சியானதாகவும் திட்டமாக ஏறும் சார்பாகவும் இருக்கும்.

3.35. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஏறும் சார்பு f என்க. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ என்பன $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ என அமையும் $(n+1)$ புள்ளிகள் எனில்,

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(b) - f(a) \text{ ஆகும்.}$$

நிறுவல்:

$y_k \in (x_k, x_{k+1})$ என்க.

$1 \leq k \leq n-1$- க்கு $f(x_k+) \leq f(y_k), f(y_{k-1}) \leq f(x_k-)$

எனவே, $f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1}), k = 1, 2, \ldots, n-1$

இவைகளைக் கூட்ட,

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-) \leq \sum_{k=1}^{n-1} [f(y_k) - f(_{k-1})$$

$$= f(y_{n-1}) - f(y_0)$$

ஆனால், $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$.

எனவே, $\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(b) - f(a)$.

3.36. தேற்றம்

(a, b)-ல் f ஏறும் சார்பு எனில், (a, b)-ல் f-ன் தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகள் அதிகபட்சமாக எண்ணிடத்தக்கது.

நிறுவல்:

f ஏறும் சார்பு என்க. f-ன் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகளின் கணம் E என்க. E-ன் அனைத்துப்புள்ளி x-க்கு, $r(x)$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை, $f(x-) < r(x) < f(x+)$ என இணைக்கவும்.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1+) \leq f(x_2-)$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$ எனில், $r(x_1) \neq r(x_2)$.

எனவே, கணம் E-க்கும், விகிதமுறு எண்களின் கணத்தின் உட்கணம் இவைகளுக்கிடையே ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு உள்ளது.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் அதிகபட்ச எண்ணத்தக்கது என்பதால், E-ம் எண்ணத்தக்கது.

3.10. முடிவிலா எல்லை மற்றும் கந்தழியில் எல்லைகள்

3.37. வரையறை

c என்ற ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணிற்கு, $x > c$ என அமையும் அனைத்து மெய்யெண்கள் x-ன் கணம் $+\infty$-ன் அண்மை எனப்படும். அது $(c, +\infty)$ என எழுதப்படும். இதைப்போலவே, $(-\infty, c)$ என்பது $-\infty$-ன் அண்மை ஆகும்.

3.38. வரையறை

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்சார்பு f என்க. A, x என்பன விரிவாக்கப்பட்ட மெய்யெண் அமைப்பில் உள்ள எண்கள். A-ன் ஒவ்வொரு அண்மை U-ற்கு ஏற்ப, x-ன் ஓர் அண்மை V ஆனது $V \cap E$ வெற்றற்றதாகவும், அனைத்து $t \in V \cap E$ $(t \neq x)$-க்கு $f(t) \in U$ ஆக அமையும் எனில், $t \to x$ எனில், $f(t) \to A$ என்போம்.

இந்த வரையறையிலிருந்து, கீழ்க்கண்டத் தேற்றம் பெறப்படும்.

3.39. தேற்றம்

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகள் f, g என்க. $t \to x$ எனில், $f(t) \to A$, $g(t) \to B$ ஆகும்.

(அ) $f(t) \to A' \Rightarrow A' = A$

(ஆ) $(f+g)(t) \to A + B$

(இ) $(fg)(t) \to AB$

(ஈ) $(f/g)(t) \to A/B$

இங்கு, (ஆ), (இ), (ஈ)-ன் வலப்புற உறுப்புகள் இருக்கின்றன எனக் கொள்க. மேலும், $\infty - \infty$, $0.\infty$, ∞/∞, $A/0$ என்பன வரையறுக்கப்படவில்லை.

3.11. பயிற்சி வினாக்கள்

1. X, Y என்பன யாப்புவெளிகள், $f: X\to Y$ என்பது தொடர்ச்சியானதாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: X-ன் அனைத்து கச்சித உட்கணங்களில் f தொடர்ச்சியாக அமைதலாகும்.

2. X என்ற யாப்புவெளியில் ஒரு சார்பு சீரான தொடர்ச்சியானது எனில், S-ல் அது தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

3. X, Y என்பன யாப்புவெளிகள், $f: X\to Y$ ஆனது சீரான தொடர்ச்சியானது. $\{x_n\}$ ஆனது S-ல் ஒரு காஷி தொடர்வரிசை எனில், $\{f(x_n)\}$ ஆனது Y-ல் காஷி தொடர்வரிசை என நிறுவுக.

4. X, Y என்பன யாப்புவெளிகள், $f: X\to Y$ தொடர்ச்சியானது எனில், அனைத்து $E\subset X$-க்கு, $f(\bar{E})\subset \overline{f(E)}$ என நிறுவுக.

5. $E\subset R^k$ என்ற வரம்புடைய கணத்தில், மெய் மதிப்புடைய சீரான தொடர்ச்சியான சார்பு f ஆனது E-ல் வரம்புடையது என நிறுவுக. E வரம்புடையது அல்ல எனில், மேலேக் கண்ட முடிவு, உண்மையானதல்ல எனவும் காட்டுக.

6. ஒரு சீரான தொடர்ச்சியான சார்பின், சீரான தொடர்ச்சியான சார்பு, சீரான தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

7. R^1-ல் வரையறுக்கப்பட்ட, மெய்மதிப்புடைய மாறிலி சார்பாக அல்லாத தொடர்ச்சியான சார்பின் வீச்சு எண்ணிடமுடியாதது எனக் காட்டுக.

8. $A = \{ (x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ என்பது R^2-ன் இணைந்த கணம் என நிறுவுக.

9. X என்பது ஒரு இணைந்த யாப்புவெளி, Y ஏதேனும் ஒரு யாப்புவெளி.
f: X→Y ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், f(X) ஆனது Y-ன் இணைந்த கணம் என நிறுவுக.

10. ஒரு காச்சிதமான இணைந்த யாப்புவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்புடைய சார்பின் வீச்சு, ஒரு தனிப் புள்ளி அல்லது மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியாக அமையும் என நிறுவுக.

11. X, Y என்பன யாப்புவெளிகள், f: X→Y தொடர்ச்சியானதாக அமையின், f ஒரு மூடிய சார்பு எனக் காட்டுக.

12. ஒரு கச்சித கணத்தின் தொடர்ச்சியான பிம்பம் கச்சிதமானது எனக் காட்டுக.

****

அத்தியாயம் 4

வகையிடல்

(Differentiation)

ஒரு மாறி சார்பின் வகைக்கெழு ஆனது வகையிடல் என்ற சிறப்பு எல்லை செய்முறையைப் பற்றியது. இந்த அத்தியாயத்திலே, நாம் மெய் மாறிகளின் மெய்மதிப்புச் சார்புகளின் வகையீடு என்பதையும், அதன் இயற்கணித அமைப்புகளையும் பற்றி படிப்போம். மேலும், ஒரு போக்கு சார்புகளுடன் மிக நெருங்கிய தொடர்புடைய வரம்புறு மாறல் சார்புகளை பற்றியும் காண்போம்.

4.1. மெய்மதிப்புச் சார்பின் வகைக்கெழு

4.1. வரையறை

[a, b] என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புச் சார்பு f என்க.

$x \in [a, b]$-க்கு $\phi(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}, \ (a < t < b, t \neq x)$ என்க.

மேலும், $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \phi(t)$ ------ (1)

என வரையறுக்க. (இந்த எல்லை இருக்க வேண்டும்)

f என்ற சார்புடன், (1) என்ற எல்லை இருக்கக் கூடியப் புள்ளிகள் x-ன் கணத்தை அரங்கமாகக் கொண்ட f' -ஐ இணைக்கலாம். f' ஆனது f-ன் வகைக்கெழு (derivative) எனப்படும்.

x-ல் f' வரையறுக்கப்படுமானால், f ஆனது x-ல் வகைமையுறு சார்பு அல்லது வகைக்கெழுக் காணத்தக்கச் சார்பு (differentiable function) என்றழைக்கப்படும்.

$E \subset [a, b]$ என்ற கணத்தின் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் f' வரையறுக்கப்படுமானால், E-ல் f வகைமையுறு சார்பு என்போம்.

$\lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ -க்கு இடக்கை வகைக்கெழு (left derivative) என்றும்,

$\lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ -க்கு வலக்கை வகைக்கெழு (right derivative) என்றும் பெயர்.

f ஆனது (a, b) என்ற துண்டில், (segment) வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதென்க.

$a < x < b$ எனில், $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ என வரையறுக்கப்படும்.

வகைக்கெழுக்கள் மற்றும் தொடர்ச்சி

4.2. தேற்றம்

[a, b] என்ற இடைவெளியில், f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. $x \in [a, b]$-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது எனில், f ஆனது x-ல் தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

f என்பது x-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கது என்க.

எனவே, $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, (a < t < b, t \neq x)$

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} . (t - x)$$

$$\lim_{t \to x} (f(t) - f(x)) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \lim_{t \to x} (t - x)$$

$$= f'(x) . 0 = 0$$

$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$. ஆகவே, f ஆனது x-ல் தொடர்ச்சியானது.

குறிப்பு: இந்த தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையாகாது. ஒரு சார்பு ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது எனில், அது அப்புள்ளியில் வகையிடக்கூடியதாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $f(x) = |x|, x \in R^1$ என்ற சார்பு $x = 0$-ல் தொடர்ச்சியானது. ஆனால், $x = 0$-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கதல்ல.

4.2. வகைக்கெழுக்களின் இயற்கணிதம்

4.3. தேற்றம்

f, g என்ற சார்புகள் $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன என்றும், $x \in [a, b]$ என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கன எனவும் கொண்டால், $f + g$, $f.g$ மற்றும் f/g என்பன x-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கன. மேலும்,

(அ) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ஆ) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(இ) $(f/g)'(x) = [g(x)f'(x) - g'(x)f(x)]/g^2(x)$, இங்கு, $g(x) \neq 0$.

நிறுவல்:

f, g என்பன x-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கன.

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, (t \neq x)$$

$$g'(x) = \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}$$

(அ) $$(f+g)'(x) = \lim_{t\to x} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t - x}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{(f(t) + g(t)) - (f(x) + g(x))}{t - x}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

(ஆ) f ஆனது x-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது என்பதால், x-ல் f தொடர்ச்சியானது. ஆகவே, $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$

$h = f.g$ என்க.

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= (fg)(t) - (fg)(x) \\ &= f(t)g(t) - f(x)g(x) \\ &= f(t)g(t) - f(t)g(x) + f(t)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)] \end{aligned}$$

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = f(t) \cdot \frac{g(t) - g(x)}{t - x} + g(x) \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$\lim_{t\to x} \frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} f(t) \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} + g(x) \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

(இ) g ஆனது x-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது என்பதால், x-ல் g தொடர்ச்சியானது. $\lim_{t\to x} g(t) = g(x)$

$h = f/g$ என்க.

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= (f/g)(t) - (f/g)(x) \\ &= f(t)/g(t) - f(x)/g(x) \\ &= \frac{f(t)g(x) - f(x)g(t)}{g(t)g(x)} \\ &= \frac{f(t)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(t)}{g(t)g(x)} \end{aligned}$$

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x).\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f(x).\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right]$$

$t \to x$ எனில்,

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{1}{\lim_{t\to x} g(t)}\left[g(x).\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f(x).\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right]$$

$$(f/g)'(x) = \frac{1}{[g(x)]^2}[g(x)\,f'(x) - g'(x)f(x)]$$

4.4. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) ஒரு மாறிலி சார்பின் வகைக்கெழு பூஜ்யம்.

f ஒரு மாறிலி சார்பு எனில், $f(x) = c, x \in R^1$.

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{c-c}{t-x} = 0$$

(ஆ) f என்ற சார்பு $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதெனின், $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t-x}{t-x} = 1$$

(இ) (அ) மற்றும் (ஆ) இவைகளைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த, x^n வகைக்கெழு காணத்தக்கது. அதன் வகைக்கெழு nx^{n-1}, n ஏதேனும் ஒரு முழுஎண்.

(ஈ) எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையும் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

இதைப் போலவே, எந்த ஒரு விகிதமுறு சார்பும் (வகுதி பூஜ்யம் ஆகும் புள்ளிகளைத் தவிர) வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

சங்கிலி விதி (Chain Rule)

4.5. தேற்றம்

f ஆனது [a, b]-ல் தொடர்ச்சியானது. $x \in [a, b]$-ல் $f'(x)$ இருக்கிறது. f-ன் வீச்சைக் கொண்ட இடைவெளி I-ல் g வரையறுக்கப்பட்டதாகவும், f(x) என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கதாகவும் அமைகிறது. $h(t) = g(f(t))$, $(a \le t \le b)$ எனில், x-ல் h வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது மற்றும்

$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

நிறுவல்:

$x \in [a, b]$ என்ற புள்ளியில் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது. வகைக்கெழுவின் வரையறையின் படி, $f(t) - f(x) = (t - x)\,[f'(x) + u(t)],\ t \in [a, b]$.

மேலும், $t \to x$ எனில், $u(t) \to 0$.

$y = f(x)$ என்க. $y = f(x)$-ல் g வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

$g(s) - g(y) = (s - y)(g'(y) + v(s)],\ s \in I$.

$s \to y$ எனில், $v(s) \to 0$. $s = f(t)$ என்க.

எனவே,
$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= g(s) - g(y) \\ &= (s - y)\,[g'(y) + v(s)] \\ &= (f(t) - f(x))\,[g'(y) + v(s)] \\ &= (t - x)\,[f'(x) + u(t)]\,[g'(y) + v(s)] \end{aligned}$$

$t \neq x$ எனில்,

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(x)}{t - x} &= [f'(x) + u(t)]\,[g'(y) + v(s)] \\ &= [g'(y) + v(s)]\,[f'(x) + u(t)] \end{aligned}$$

x-ல் f தொடர்ச்சியானது என்பதால், $t \to x \Rightarrow f(t) \to f(x) = y$

எனவே, $t \to x$ எனில், $h'(x) = g'(y)\, f'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

4.6. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) f என்ற சார்பு,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

(i) $x \neq 0$

தேற்றம் 4.3 மற்றும் 4.5 பயன்படுத்த, $f'(x) = \sin(1/x) - (1/x)\cos(1/x)$, $x \neq 0$

(ii) $x = 0$ என்க.

$1/x$ வரையறுக்கப்படாததால், வரையறையை நேரடியாகப் பயன்படுத்த,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t\sin(1/t)}{t} = \sin(1/t)$$

$t \to 0$ எனில், இது எந்த எல்லைக்கும் அணுகாது. எனவே, $f'(0)$ இருக்காது.

(ஆ) f என்ற சார்பு,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

மேலே உள்ளது போலவே,

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), \quad x \neq 0$$

$x = 0$ எனில்,

$$\left|\frac{f(t) - f(0)}{t - 0}\right| = \left|\frac{t^2\sin(1/t)}{t}\right| = |t\sin(1/t)| \leq |t|, \; (t \neq 0)$$

$t \to 0$ எனில், $f'(0) = 0$.

எனவே, அனைத்துப் புள்ளி x-லும் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

ஆனால், $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, $(x \neq 0)$- ல் $\cos(1/x)$ ஆனது, எந்த எல்லைக்கும் அணுகாது என்பதால், f' தொடர்ச்சியானதல்ல.

4.3. இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள்

4.7. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்சார்பு f என்க. $p \in X$ என்க. $\delta > 0$ என்ற எண், $d(p, q) < \delta$ என அமையும் அனைத்து $q \in X$-க்கு $f(q) \leq f(p)$ என இருக்குமானால், $p \in X$-ல் f இடம் சார்ந்த பெருமம் (local maximum) பெற்றிருக்கிறது என்போம்.

இதைப்போலவே, $\delta > 0$ என்ற எண், $d(p, q) < \delta$ என அமையும் அனைத்து $q \in X$-க்கு $f(q) \geq f(p)$ என இருக்குமானால், $p \in X$-ல் f இடம் சார்ந்த சிறுமம் (local minimum) பெற்றிருக்கிறது என்போம்.

கீழ்க்கண்டத் தேற்றம், பூஜ்ய வகைக்கெழுக்களுக்கும் இடம் சார்ந்த பெருமத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பைக் கூறுகிறது.

4.8. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f என்க. $x \in (a, b)$-ல் இடம் சார்ந்த பெருமத்தைப் பெற்றிருக்கும் போது $f'(x)$ இருக்கிறது எனில், $f'(x) = 0$.

நிறுவல்:

$x \in (a, b)$-ல் f இடம் சார்ந்த பெருமத்தைப் பெற்றிருக்கிறது.

வரையறை 4.7-ன் படி, $\delta > 0$ என்ற எண், $a < x - \delta < x < x + \delta < b$ எனத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

$x - \delta < t < x$ எனில், $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0$

$t \to x$ எனில், $f'(x) \geq 0$

$x < t < x + \delta$ எனில், $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0.$

$t \to x$ எனில், $f'(x) \leq 0$. ஆகையால், $f'(x) = 0$.

குறிப்பு:

இதன் மறுதலை உண்மையல்ல. $f'(x) = 0$ எனில், x-ல் f-ன் இடம் சார்ந்த பெருமம் அமையத் தேவையில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $x = 0$-ல் $f(x) = x^3$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்க. $f'(0) = 0$. R^1-ல் திட்டமாக ஏறும் சார்பு என்பதால், x-ல் f ஆனது இடம் சார்ந்த பெருமம் பெற்றிருக்காது.

பொதுப்படையான இடைமதிப்பு தேற்றம்

4.9. தேற்றம்

f, g என்பன [a, b]-ல் தொடர்ச்சியான மெய் சார்புகள் மற்றும் (a, b)-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கன எனில், $x\in(a, b)$ என்ற புள்ளியிடத்து
$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$ ஆகும். (முனைப்புள்ளிகளில் வகைக்கெழு அமையத் தேவையில்லை)

நிறுவல்:

$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t), a \leq t \leq b$ என்க.

[a, b]-ல் h தொடர்ச்சியானது. (a, b)-ல் h வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

மேலும், $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$.

தேற்றத்தை நிறுவ, ஏதேனும் $x\in(a, b)$-க்கு $h'(x) = 0$ எனக் காண்பித்தால் போதுமானது.

h மாறிலி எனில், அனைத்து $x\in(a, b)$-க்கு $h'(x) = 0$.

$t\in(a, b)$-க்கு $h(t) > h(a)$ என்க.

[a, b]-ல் h மீப்பெரு மதிப்பை அடையும் புள்ளி $x \in[a, b]$ என்க.

$h(a) = h(b) \Rightarrow x\in(a, b)$

$\Rightarrow h'(x) = 0$ (தேற்றம் 4.8)

இதைப்போல், $t \in (a, b)$-க்கு $h(t) < h(a)$ என்க.

$x \in [a, b]$ என்பது h மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் புள்ளி என்க.

$h(a) = h(b) \Rightarrow x \in (a, b) \Rightarrow h'(x) = 0.$

4.10. இடைமதிப்புத் தேற்றம்

$[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட f என்ற சார்பு $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b)-ல் வகைகெழுக் காணத்தக்கதாகவும் இருப்பின், $x \in (a, b)$ என்ற ஒரு புள்ளி, $f(b) - f(a) = (b - a) f'(x)$ என்றவாறு தோன்றும்.

நிறுவல்:

$g(x) = x$ எனத் தேற்றம் 4.9-ல் பயன்படுத்த, $[f(b) - f(a)].1 = (b - a)f'(x)$, $x \in (a, b)$.

பின்வரும் தேற்றம் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் விளைவு ஆகும்.

4.11. தேற்றம்

(a, b)-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது.

(அ) அனைத்து $x \in (a, b)$-க்கு, $f'(x) \geq 0$ எனில், f ஒருபோக்கு ஏறும் சார்பு.

(ஆ) அனைத்து $x \in (a, b)$-க்கு, $f'(x) = 0$ எனில், f மாறிலி சார்பு.

(இ) அனைத்து $x \in (a, b)$-க்கு, $f'(x) \leq 0$ எனில், f ஒருபோக்கு குறையும் சார்பு.

நிறுவல்:

$x_1 < x_2$ என்க. $[a, b]$-ன் உள்இடைவெளி $[x_1, x_2]$-ல் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த, $x \in (x_1, x_2)$-க்கு $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x)$ என அமையும். அனைத்து $x_1, x_2 \in (a, b)$-க்கு

(அ) $f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Rightarrow$ f ஒருபோக்கு ஏறும் சார்பு.

(ஆ) $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$, அனைத்து $x_1, x_2 \in (a, b)$-க்கும்

$\Rightarrow$ f மாறிலி சார்பு.

(இ) $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

$\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

$\Rightarrow$ f ஒருபோக்கு குறையும் சார்பு.

4.12. கிளைத்தேற்றம்

$[a, b]$-ல் f, g என்பன தொடர்ச்சியானவை. (a, b)-ல் f, g முடிவுள்ள சமமான வகைக்கெழுக்களைப் பெற்றிருப்பின், f - g ஆனது $[a, b]$-ன் மீது மாறிலிச் சார்பு ஆகும்.

4.13. தேற்றம்

f என்ற மெய் சார்பு, $[a, b]$-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது மற்றும் f' வரம்புடையது எனில், $[a, b]$-ல் f சீரான தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

$[a, b]$-ல் f' வரம்புடையது.

ஆதலால், $M > 0$ என்ற எண், எல்லா $x \in [a, b]$-க்கும் $|f'(x)| \leq M$ என அமையும்.

$x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ என்க.

$[x_1, x_2]$-ல் f-க்கு இடைமதிப்புத் தேற்றம் பயன்படுத்த, $c \in (x_1, x_2)$ என்ற எண்,

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$ என அமையும்.

எனவே, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|$

x_1, x_2 என்பன ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் என்பதால்,

$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\delta = \varepsilon/M$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

எனவே, $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ எனில்,

$|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1| < M\delta < \varepsilon$.

ஆகையால், $[a, b]$-ல் f சீரானத் தொடர்ச்சியானது.

தேற்றம் 3.25-ல் ஒரு யாப்பு வெளியில் தொடர்ச்சியான f என்ற சார்பு, அதன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகளுக்கிடையேயான அனைத்து மதிப்புகளையும் பெற்றிருக்கும் என நிறுவினோம். அதற்கு இணையான, வகைக்கெழுக் காணத்தக்க சார்புகளுக்கான தேற்றம் இப்பொழுது நிறுவப்படுகிறது.

4.14. தேற்றம் (வகைக்கெழுக்கான இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம்)

f என்பது $[a, b]$-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்க மெய்சார்பு மற்றும் $f'(a) < \lambda < f'(b)$ ஆகவும் இருப்பின், $x \in (a, b)$ என்ற ஒரு புள்ளி $f'(x) = \lambda$ என்றவாறு தோன்றும்.

$f'(a) > \lambda > f'(b)$ எனினும், இதைப் போன்று $x \in (a, b)$ ஆனது, $f'(x) = \lambda$ என அமையும்.

நிறுவல்:

$g(t) = f(t) - \lambda t$ என்க. $a \le t \le b$.

$g'(t) = f'(t) - \lambda$

$f'(a) - \lambda < 0 \Rightarrow g'(a) < 0$

$\Rightarrow$ ஏதேனும் ஒரு $t_1 \in (a, b)$ -க்கு $g(t_1) < g(a)$

மேலும்,

$f'(b) - \lambda > 0 \Rightarrow g'(b) > 0$

$\Rightarrow$ ஏதேனும் ஒரு $t_2 \in (a, b)$ -க்கு $g(t_2) < g(b)$

எனவே, $x \in (a, b)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில், $[a, b]$-ல் g ஆனது அதன் மீச்சிறு மதிப்பை அடையும். (தேற்றம் 3.17). எனவே, $g'(x) = 0$ (தேற்றம் 4.8)

$\Rightarrow f'(x) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(x) = \lambda$.

4.15. கிளைத்தேற்றம்

[a, b]-ல் f வகைக் கெழுக் காணத்தக்கது எனில், [a, b]-ல் f' எளிய தொடர்ச்சியின்மைகளைப் பெற்றிருக்க முடியாது.

4.4. உயர்வரிசை வகைக்கெழுக்கள் (Higher Derivatives)

4.16. வரையறை

ஏதேனும் ஒரு இடைவெளியின் மீது f என்ற சார்பு f' என்ற வகைக்கெழுவைப் பெற்றிருப்பின், f'-ம் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது. f'-ன் வகைக்கெழுவை f'' எனக் குறியிடப்படும். அது f-ன் இரண்டாம் வகைக்கெழு என்றழைக்கப்படும்.

இதனைத் தொடரின், $f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$ என்ற சார்புகள் கிடைக்கும். ஒவ்வொன்றும் அதன் முன்னதன் வகைக்கெழு ஆகும்.

$f^{(n)}$ ஆனது f-ன் n-ஆவது வகைக்கெழு அல்லது வரிசை n உடைய வகைக்கெழு எனப்படும்.

x என்ற புள்ளியில், $f^{(n)}(x)$ இருக்க வேண்டுமாயின், x-ன் அண்மையில் $f^{(n-1)}(t)$ இருக்க வேண்டும் மற்றும் x-ல் $f^{(n-1)}$ வகைக்கெழுக் காணத்தக்கதாக அமைய வேண்டும்.

x-ன் அண்மையில், $f^{(n-2)}$ இருக்க, அதே அண்மையில், $f^{(n-2)}$ வகைக்கெழுக் காணத்தக்கதாக அமைய வேண்டும்.

டெய்லரின் தேற்றம் (Taylor's Theorem)

4.17. தேற்றம்

[a, b]-ன் மீது f ஒரு மெய்சார்பு. n ஒரு மிகை முழு எண். [a, b]-ல் $f^{(n-1)}$ தொடர்ச்சியானது. அனைத்து $t \in (a, b)$-க்கு $f^{(n)}(t)$ இருக்கிறது. [a, b]-ன் வெவ்வேறான இரு புள்ளிகள் α, β மற்றும் $P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$ எனில்,

α, β இவைகளுக்கிடையில், x என்ற புள்ளி $f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n$ என்றவாறு இருக்கும்.

நிறுவல்:

M என்ற எண், $f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \ (a \le t \le b)$ என்க.

α, β இவைகளுக்கிடையேயான x என்ற புள்ளிக்கு, $n!M = f^{(n)}(x)$ எனக் காண்பித்தல் வேண்டும்.

$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \ (a < t < b)$.

ஏனெனில், $P^{(n)}(t) = 0$, $(t - \alpha)^n$-ன் n ஆவத்து வகைக்கெழு $n!$.

$k = 0, 1, \ldots, (n-1)$-க்கு, $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$.

எனவே, $g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

மேலும், M-ன் வரையறைப்படி, $g(\beta) = 0$.

$[\alpha, \beta]$ இடைவெளியில், இடைமதிப்புத் தேற்றம் g-க்குப் பயன்படுத்த, $x_1 \in (\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளி $g(\beta) - g(\alpha) = (\beta - \alpha)\, g'(x_1)$ என்றவாறு இருக்கும்.

எனவே, $g'(x_1) = 0$, $x_1 \in (a, b)$ [ஏனெனில், $g(\alpha) = g(\beta) = 0$]

இதைப்போலவே, $g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ மற்றும் x_1 இவைகளுக்கிடையில் அமையும் x_2 என்ற புள்ளிக்கு, $g''(x_2) = 0$.

n படிகளுக்குப் பிறகு, α, x_{n-1} இவைகளுக்கிடையில் அமையும் x_n என்ற புள்ளிக்கு, $g^{(n)}(x_n) = 0$.

அதாவது, α, β-களுக்கு இடையில், x என்ற புள்ளிக்கு, $g^{(n)}(x) = 0$.

எனவே, $f^{(n)}(x) - n!M = 0$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = n!M$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

ஆகையால், $f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n, x \in (\alpha, \beta)$

வெக்டர் மதிப்புச் சார்புகளின் வகைக்கெழுக்கள்

மெய்ச்சார்பின் வகையிடுதலுக்கான வரையறை, தேற்றங்கள் 4.2., 4.3., என்பன மெய்ப்புனை சார்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

f என்ற மெய்ப்புனைச் சார்பின் மெய் மற்றும் புனைப் பகுதிகள் f_1, f_2 என்க.

அதாவது, $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ ($a \leq t \leq b$). f_1, f_2 என்பன மெய்ச்சார்புகள்.

$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$. மேலும், x-ல் f வகைக்கெழு காணத்தக்கச் சார்பு $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 என்பனவும் x-ல் வகைக்கெழு காணத்தக்கன.

பொதுப்படையாக, $f: [a, b] \rightarrow R^k$ என்ற திசையன் மதிப்புடையச் சார்பை எடுத்துக் கொள்க.

$f'(x)$ என்பது, $\lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| = 0$

என அமையும் R^k-ல் அதன் மதிப்புகளை உடைய சார்பு.

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ என்பன f-ன் கூறுகள் எனில், $f' = (f_1', \ldots, f_k')$. மற்றும், x என்ற புள்ளியில் f வகைமையான சார்பு $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \ldots, f_k$ என்ற சார்புகளும் x-ல் வகைமையானவை.

4.18. எடுத்துக்காட்டு

$f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$ என வரையறுக்க. x என்பது மெய்.

$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0$

ஆனால், $f'(x) = ie^{ix}$

அனைத்து மெய் x-க்கு, $|f'(x)| = |ie^{ix}| = 1$

எனவே, இடைமதிப்புத் தேற்றம் இங்கு உண்மையல்ல.

குறிப்பு:

திசையன் மதிப்புடை சார்புகளுக்கு $|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{a<x<b} |f'(x)|$ என்பது உண்மையாகும்.

4.19. தேற்றம்

$f: [a, b] \to R^k$ என்பது தொடர்ச்சியான, (a, b)-ல் வகைமையான சார்பு எனில், $x \in (a, b)$ என்ற எண், $|f(b) - f(a)| \leq (b - a) |f'(x)|$ என்றவாறு அமையும்.

நிறுவல்:

$z = f(b) - f(a)$ என்க.

$\varphi(t) = z \cdot f(t), (a \leq t \leq b)$ என வரையறுக்க.

φ ஆனது $[a, b]$-ல் மெய்மதிப்புடைய தொடர்ச்சியானதாகவும் (a, b)-ல் வகைமையான சார்பாகவும் அமையும்.

எனவே, இடைமதிப்புத் தேற்றம் φ-க்குப் பயன்படுத்த,

$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a) \varphi'(x) = (b - a) z \cdot f'(x), x \in (a, b).$

ஆனால், $\varphi(b) - \varphi(a) = z \cdot f(b) - z \cdot f(a) = z \cdot z = |z|^2$

ஸ்குவார்ஸ் சமனின்மையின் படி,

$|z|^2 = (b - a) |z \cdot f'(x)| \leq (b - a) |z| |f'(x)|$

எனவே, $|z| \leq (b - a) |f'(x)|$

ஆகையால், $|f(b) - f(a)| \leq (b - a) |f'(x)|$.

4.5. வரம்புறு மாறல் சார்புகள் (Functions of Bounded Variation)

இங்கு, ஒருபோக்கு சார்புகளுக்குத் தொடர்புடைய சார்புகளின் வகுப்புகளான வரம்புறு மாறல் சார்புகளைப் பற்றி காண்போம். வரம்புறு மாறல் சார்பு என்ற கருத்தை உருவாக்கியவர் ஜோர்டான் என்ற கணித மேதையாவார்.

4.20. வரையறை

f என்பது மூடிய இடைவெளி [a, b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்க.

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ என்ற சமனின்மைகளை நிறைவேற்றும்

$P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் [a, b]-ன் பிரிவினை (Partition) எனப்படும்.

$[x_{k-1}, x_k]$ என்ற இடைவெளி, P-ன் k-ஆவது உள் இடைவெளி எனப்படும்.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ எனில், $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ ஆகும்.

இவ்வாறான, [a, b]-ன் அனைத்து பிரிவினைகளின் தொகுதி $\wp[a, b]$ எனக் குறியிடப்படும்.

4.21. வரையறை

[a, b]-ல் f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. [a, b]-ல் $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ஒரு பிரிவினை எனில், $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}), k = 1, 2, \ldots, n$ எனக் குறிக்க. M என்ற முழு எண், [a, b]-ன் அனைத்து பிரிவினைகளுக்கும் $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$ என அமையுமாயின், f ஆனது [a, b]-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு என அழைக்கப்படும்.

வரம்புறு மாறல் சார்புகளின் எடுத்துக்காட்டுகள் கீழ்வரும் தேற்றங்களில் கூறப்படுகின்றன.

4.22. தேற்றம்

[a, b]-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒருபோக்கு சார்பானது [a, b]-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பாகும்.

நிறுவல்:

f ஆனது [a, b]-ல் ஒருபோக்கு ஏறும் சார்பு என்க.

அப்போது, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0, x_2 > x_1$.

[a, b]-ன் அனைத்துப் பிரிவினைகளுக்கும், $\Delta f_k \geq 0$.

எனவே, $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= f(b) - f(a)$$

ஆகையால், [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பாக அமையும்.

இதைப் போல், f ஆனது [a, b]-ல் ஒருபோக்கு இறங்கும் சார்பு என்றால், $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = f(a) - f(b)$ ஆகும்.

எனவே, இந்நிகழ்ச்சியிலும் கூட, f ஆனது [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு.

4.23. தேற்றம்

[a, b]-ல் f தொடர்ச்சியான சார்பு. (a, b)-ல் f′ இருக்கிறது மற்றும் வரம்புடையது எனில், [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பாகும்.

நிறுவல்:

(a, b)-ல் f′ வரம்புடையது.

எனவே, A என்ற எண், $|f'(x)| \le A, x \in (a, b)$ என்றவாறு அமையும்.

இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை f-க்கு (x_{k-1}, x_k)-ல் பயன்படுத்த,

$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(t_k)$.

இங்கு, $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$.

எனவே, $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) |f'(t_k)|$

$$\le A \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = A(b - a)$$

ஆகையால், f ஒரு வரம்புறு மாறல் சார்பு

4.24. தேற்றம்

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு எனில், [a, b]-ல் f வரம்புடையது.

நிறுவல்:

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு. எனவே, [a, b]-ன் அனைத்து பிரிவினைகளுக்கு, M என்ற மிகை எண், $\sum|\Delta f_k| \leq M$ என அமையும்.

$x \in (a, b)$ என்க. $P = \{a, x, b\}$ என்ற குறிப்பிட்ட பிரிவினைக்கு,

$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq M$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(a)| + M$

இந்த சமனின்மை, $x = a$ அல்லது $x = b$ ஆக இருந்தாலும் பொருந்தும்.

எனவே, [a, b]-ல் f வரம்புடையது.

4.6. மொத்த மாறல் (Total Variation)

4.25. வரையறை

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு. [a, b]-ன் பிரிவினை $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$-க்கு ஒத்தக் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$-ஐ $\sum(P)$ எனக் குறிக்க.

$V_f(a, b) = \sup\{\sum(P): P \in \wp[a, b]\}$ என்ற எண், [a, b] இடைவெளியில், f-ன் மொத்த மாறல் எனப்படும். $V_f(a, b)$- ஐ V_f எனக் குறிப்போம்.

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு என்பதால், V_f என்ற எண் முடிவுள்ளது. மேலும், $\sum(P) \geq 0$ என்பதால், $V_f \geq 0$.

$V_f(a, b) = 0 \Leftrightarrow$ [a, b]-ல் f மாறிலி சார்பு.

4.26. தேற்றம்

[a, b]-ல் f, g சார்புகள் ஒவ்வொன்றும் வரம்புறு மாறல் சார்புகள் எனில், $f \pm g$. fg என்பனவும் வரம்புறு மாறல் சார்புகள். மேலும், $V_{f \pm g} \leq V_f + V_g$ மற்றும்

$V_{fg} \le AV_f + BV_g$. இங்கு, $A = \sup\{|g(x)| : x \in [a, b]\}$,

$B = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

நிறுவல்:

$[a, b]$-ல் f, g வரம்புறு மாறல் சார்புகள். $[a, b]$-ன் அனைத்துப் பிரிவினை $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$- க்கு M_1, M_2 என்ற மிகை எண்கள், $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \le M_1$ மற்றும் $\sum_{k=1}^{n} |\Delta g_k| \le M_2$ என அமையும்.

(அ) $h(x) = (f + g)(x)$ என்க.

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |(f(x_k) + g(x_k)) - (f(x_{k-1}) + g(x_{k-1}))| \\ &\le |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &= |\Delta f_k| + |\Delta g_k| \le M_1 + M_2. \end{aligned}$$

எனவே, $h = f + g$ ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு.

மேலும், $V_{f+g} \le V_f + V_g$

இதைப்போலவே, $f - g$ என்பதும், $[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பாகும்.

$V_{f-g} \le V_f + V_g$

(ஆ) $h(x) = f(x)g(x)$ என்க.

$[a, b]$-ன் அனைத்துப் பிரிவினைகள் P-க்கு

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |(f(x_k)\, g(x_k)) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[(f(x_k)g(x_k)) - f(x_{k-1})g(x_k)] + [(f(x_{k-1})g(x_k)) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \\ &\le A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k| \end{aligned}$$

எனவே, $h = fg$ வரம்புறு மாறல் சார்பு. மேலும், $V_h \le AV_f + BV_g$.

4.27. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு என்றும். அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு m என்ற மிகை எண், $0 < m \le |f(x)|$ என்றும் இருந்தால், $g = 1/f$ ஆனதும், $[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு ஆகும். மேலும், $V_g \le V_f/m^2$.

நிறுவல்:

$$|\Delta g_k| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right|$$

$$= \frac{|f(x_{k-1}) - f(x_k)|}{|f(x_k)|\,|f(x_{k-1})|} \leq |\Delta f_k| / m^2.$$

எனவே, $g = 1/f$ ஆனது $[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு, மற்றும் $V_g \leq V_f/m^2$.

மொத்த மாறலின் கூட்டத்தக்க பண்பு

4.28. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு. $c \in (a, b)$ எனில், $[a, c]$ மற்றும் $[c, b]$ -லும் f வரம்புறு மாறல் சார்பு. மேலும், $V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b)$

நிறுவல்:

$[a, c]$ மற்றும் $[c, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு என்று முதலில் நிறுவுவோம். $[a, c]$-ன் ஒரு பிரிவினை P_1 என்றும், $[c, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை P_2 என்றும் கொள்க.

ஆகையால், $P_0 = P_1 \cup P_2$ என்பது $[a, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை ஆகும்.

P என்ற பிரிவினைக்கு, $\sum P = \sum |\Delta f_k|$ எனில்,

$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leq V_f(a, b)$

எனவே, $\sum(P_1) \leq V_f(a, b)$ மற்றும்

$\sum(P_2) \leq V_f(a, b)$

ஆகையால், $[a, c]$ மற்றும் $[c, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு.

மேலும், $V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b)$.

இதன் மாற்று சமனின்மையை நிறுவ, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \wp[a, b]$ என்க.

$P_0 = P\cup\{c\}$ என்பது P என்ற பிரிவினையுடன் c என்ற புள்ளியை இணைக்கக் கிடைக்கும் பிரிவினை என்க.

$c\in[x_{k-1}, x_k]$ எனில், $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})$

எனவே, $\sum(P) \leq \sum(P_0)$.

[a, c]-ல் P_0-ன் புள்ளிகள் [a, c]-ல் P_1 என்ற பிரிவினையையும், [c, b]-ல் P_0-ன் புள்ளிகள் P_2 என்ற பிரிவினையையும் தரும்.

இந்த பிரிவினைகளுக்குண்டானக் கூடுதல், கீழ்க்கண்ட தொடரால் இணைக்கப்படும்.

$$\begin{aligned}\sum(P) \leq \sum(P_0) &= \sum(P_1) + \sum(P_2)\\ &\leq V_f(a, c) + V_f(c, b)\end{aligned}$$

எனவே, $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ என்பது $\sum(P)$ என்ற ஒவ்வொரு கூடுதலின் மேல் வரம்பாகும்.

இது, மீச்சிறு மேல்வரம்பை விடச் சிறியதாக இருக்க முடியாததலால்,

$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b)$.

எனவே, $V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b)$.

4.29. தேற்றம்

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு. V ஆனது [a, b]-ல் $V(x) = V_f(a, x)$, $a < x \leq b$ எனில், $V(a) = 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்,

(i) [a, b]-ல் f ஒரு ஏறும் சார்பு.

(ii) [a, b]-ல் V - f ஒரு ஏறும் சார்பு.

நிறுவல்:

(i) $a < x < y \leq b$ எனில்,

$$V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$$

$$\Rightarrow \quad V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad V(x) \leq V(y) \quad \Rightarrow \quad V \text{ ஏறும் சார்பு}$$

(ii) $D(x) = V(x) - f(x), x \in [a, b]$ என்க.

$a \leq x < y \leq b$ எனில்,

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)]$$
$$= V_f(x, y) - [f(y) - f(x)]$$

$V_f(x, y)$-ன் வரையறையின் படி, $f(y) - f(x) \leq V_f(x, y)$

எனவே, $D(y) - D(x) \geq 0$. ஆகையால், $D = V - f$ ஏறும் சார்பு.

ஒரு சார்பு, வரம்புறு மேல் சார்பாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைப் பின்வரும் தேற்றத்தில் கூறப்படுகிறது.

4.30. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட f என்ற சார்பு, $[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பாக் அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது, f ஆனது, இரண்டுமே ஒருபோக்கு ஏறும் சார்புகளின் வேறுபாடாக அமையும்.

நிறுவல்:

$[a, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு எனில், $f = V\text{-}D$. இங்கு, V ஆனது தேற்றம் 4.28-ல் வரையறுக்கப்பட்டச் சார்பு. மற்றும் $D = V - f$.

V மற்றும் D என்பவை இரண்டும் ஏறும் சார்புகள் (தேற்றம் 4.28)

மறுதலையாக, F, G என்பவை $[a, b]$-ன் மீதான ஒருபோக்கு ஏறும் சார்புகள் என்க.

$f(x) = F(x) - G(x)$ என்க. $[a, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை P என்க.

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = [F(x_k) - F(x_{k-1})] - [G(x_k) - G(x_{k-1})]$$

$$\Sigma(P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})]$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]$$

$[a, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு ஆகும்.

குறிப்பு:

ஒரு வரம்புறு மாறல் சார்பை, இரண்டு ஒரு போக்கு ஏறும் சார்புகளின் வேறுபாடாக எழுதுவது தனித்தன்மை ஆகாது. ஏனெனில், f_1, f_2 என்பன ஏறும் சார்புகள், $f = f_1 - f_2$ எனில், ஏதேனும் ஓர் ஏறும் சார்பு g-க்கு $f = (f_1+g) - (f_2+g)$ என அமைவதால், f-க்கு மற்றொரு சார்பாண்மை கிடைக்கிறது.

மேலேக் கண்டத் தேற்றம், திட்டமான ஏறும் சார்புகளாக இருந்தாலும் உண்மையாகும்.

வரம்புறு மாறலின் தொடர்ச்சியான சார்புகள்

4.31. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு f என்க. $x \in (a, b)$ எனில், $V(x) = V_f(a, x)$ மற்றும் $V(a) = 0$ என்க. பின், f-ன் அனைத்து தொடர்ச்சியானப் புள்ளிகளும், V-ன் தொடர்ச்சியான புள்ளிகளாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

நிறுவல்:

V ஒருபோக்குச் சார்பு என்பதால், வலக்கை மற்றும் இடக்கை எல்லைகள் $V(x+)$ மற்றும் $V(x-)$ என்பன, (a, b)-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் இருக்கும்.

தேற்றம் 4.30-ன் படி, இது $f(x+)$ மற்றும் $f(x-)$-க்கு உண்மையாகும்.

$a < x < y \leq b$ எனில், $V_f(x, y)$ -ன் வரையறையின் படி,

$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq V(y) - V(x)$

$y \to x$ எனில், $0 \leq |f(x+) - f(x)| \leq V(x+) - V(x)$

இதைப்போலவே, $0 \leq |f(x) - f(x-)| \leq V(x) - V(x-)$

இந்த இரு சமனின்மைகளும், V-ன் தொடர்ச்சி புள்ளி, f-ன் தொடர்ச்சிப் புள்ளி ஆகும் என தெரிவிக்கின்றன.

மறுதலையை நிறுவ, $c \in (a, b)$-ல் f தொடர்ச்சியானது என்க.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$ -க்கு, $\delta > 0$ என்ற எண்,

$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ என அமையும்.

இதே, ε-க்கு, $[c, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0 = c$, $x_n = b$

மற்றும், $V_f(c, b) - \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ என இருக்கும்.

P-ல் மேலும் புள்ளிகளைச் சேர்ப்பதால், $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ -ன் மதிப்புக் கூடுதலாகும்.

எனவே, $0 < x_1 - x_0 < \delta$ என்க.

அதாவது, $|\Delta f_1| = |f(x_1) - f(c)| < \varepsilon/2$.

எனவே, $V_f(c, b) - \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \sum_{k=2}^{n} |\Delta f_k|$

$$\leq \varepsilon/2 + V_f(x_1, b)$$

(ஏனெனில், $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ஆனது $[x_1, b]$-ன் பிரிவினை)

எனவே, $V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon$

ஆனால்,

$$\begin{aligned} 0 \leq V(x_1) - V(c) &= V_f(a, x_1) - V_f(a, c) \\ &= V_f(c, x_1) \\ &= V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon \end{aligned}$$

எனவே, $0 < x_1 - c < \delta \Rightarrow 0 \leq V(x_1) - V(c) < \varepsilon$

ஆகையால், $V(c+) = V(c)$

இது போலவே, $V(c-) = V(c)$

$[a, b]$-ன் அனைத்து உள்புள்ளிகளுக்கு இத்தேற்றம் நிறுவப்பட்டது,

தேற்றம் 4.31 மற்றும் 4.30 இவைகளை இணைக்க,

4.32. தேற்றம்

[a, b]-ல் f தொடர்ச்சியானது. [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: f -ஐ இரண்டு ஒரு போக்கு ஏறும் (திட்டமாக ஏறும்) தொடர்ச்சியான சார்புகளின் வேறுபாடாக அமைக்க முடியும்.

4.7. பயிற்சி வினாக்கள்

1. (a, b) என்ற இடைவெளியில், f வகையிடத்தக்கது, அனைத்து $x \in (a, b)$-க்கு, $f'(x) < 0$ எனில், (a, b)-ல் f ஒரு போக்கு சார்பு என நிறுவுக.

2. அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு, $f'(x) > 0$ எனில், [a, b]-ல் f ஏறும் சார்பு என நிறுவுக. இதன் மறுதலை உண்மையா?

3. a என்ற புள்ளியில், f, g என்ற சார்புகள் வகையிடத்தக்கன, $f(a) \neq g(a)$ எனில், max(f, g) மற்றும் min (f, g) என்பனவும் a-ல் தொடர்ச்சியானவை எனக் காட்டுக.

4. R^1-ல் f மெய்மதிப்புடைய சார்பு, அனைத்து $x \in R^1$-க்கு, $a < f'(x) < b$, $a, b > 0$ மற்றும் $f(0) = 0$ எனில், அனைத்து $x \in R^1$-க்கு $ax < f(x) < bx$ என நிறுவுக.

5. அனைத்து x-க்கு, f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது, $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ எனில், f ஒரு மாறிலி சார்பு என நிறுவுக,

6. வகையிடத்தக்கதாக, தொடர்ச்சியானதாக அமையாத சார்பின் உதாரணம் தருக.

7. தொடர்ச்சியானதாக, வரம்பற்றதாக அமையும் சார்பின் உதாரணம் தருக.

8. வரம்புடைய மற்றும் தொடர்ச்சியானதாக அமையும் சார்பின் உதாரணம் தருக.

9. மூடிய, வரம்புடைய இடைவெளியில், ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையும் வரம்புறு மாறல் சார்பாகும் என நிறுவுக.

10. f: [a, b]→R^1 என்பது வரம்புறு மாறல் சார்பு, மற்றும் [c, d] ⊂ [a, b] எனில், [c, d]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பென நிறுவுக.

11. [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு, k > 0 என்பது f(x) ≥ k, x∈[a, b] எனில், 1/f-ம் வரம்புறு மாறல் சார்பு என நிறுவுக.

12 தொடர்ச்சியானதாக, ஆனால் வரம்புறு மாறல் சார்பாக அமையாத சார்பின் உதாரணம் தருக.

13. ஒரு மூடிய இடைவெளியில் ஒரு சார்பு வரம்புறு மாறல் சார்பாக அமையின், அதன் எந்த உள் இடைவெளியிலும் வரம்புறு மாறல் சார்பாக அமையும்.

****

அத்தியாயம் 5

ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையம்

(Riemann- Stieltjes Integral)

பரப்பளவை, ஒரு கூட்டுத் தொகையில் எல்லை மதிப்பாக கணக்கிடுவதில் தான் தொகை நுண் கணிதமே பிறந்தது. $y = f(x)$ என்ற சார்பு, ஒரு சம தளத்தில், தொடர்ச்சியான வளைவரையைக் குறிக்குமானால், அவ்வளைவரை, X-அச்சு, $x = a$, $x = b$ என்ற நேர்கோடுகள் ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவை $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற வரையறுத்தத் தொகை குறிப்பிடும். இவ்விளக்கம் வடிவ கணிதத்தின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. தொடர்ச்சியான வளைவரைகளால் குறிப்பிட முடியாத சார்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட இவ்விளக்கம் பொருந்தாது.

எனவே, வரையறுத்த தொகைக்குப் புதிய விளக்கம் தேவைப்பட்டது. வடிவ கணிதத்தின் துணையின்றி, எண்கணிதத்தை மட்டும் அடிப்படையாகக் கொண்ட வரையறையை முதன் முதலில் தந்தவர் கணித மேதை ரிச்சர்டு ரீமன் ஆவார்.

இந்த அத்தியாயத்தில், தொகையிடுதலின், செய்கையை விரிவாகக் காண்போம். ரீமனின் கருத்தின் விரிவாக்கமான ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையான f மற்றும் α என்ற இரு சார்புகளைச் சார்ந்தது. இந்த தொகையின் வடிவம் $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$.

$\alpha(x) = x$ ஆகும் போது இத்தொகை ரீமன் தொகை ஆகும்.

α ஆனது தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுவைப் பெற்றிருப்பின், ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகை $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ ஆனது $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx$ என மாறுதல் அடையும்.

ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையை, α தொடர்ச்சியின்மையாகவோ, வகையிட முடியாததாகவோ இருப்பினும் பயன்படுத்தலாம்.

முதலில், இடைவெளிகளில் மெய்மதிப்புச் சார்புகளின் தொகையைப் பற்றி விவாதிப்போம். இங்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் சார்புகள் $f, g, \alpha, \beta \ldots$ என்பவை [a, b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புடைய வரம்புடைய சார்புகளாகும்.

5.1. வரையறை

[a, b]-ன் பிரிவினை $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ஆனது $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ என அமையும் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.

[a, b]-ன் பிரிவினை P' ஆனது $P \subseteq P'$ என அமையுமாயின், P-ஐ விட மென்மையானது P' என்போம். அல்லது P' ஆனது P-யின் மென்மையாக்கம் எனப்படும். இது $P' \supseteq P$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

$\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ என்ற மாறுபாட்டைக் குறிக்குமானால்,

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a).$$

[a, b]-ன் அனைத்து பிரிவினைகளின் கணம் $\wp[a, b]$ என்று குறிக்கப்படும்.

பிரிவினை P-ன் அலகை என்பது P-ன் மிகப்பெரிய உள் இடைவெளியின் நீளம் என வரையறுக்கப்பட்டு $||P||$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$P' \supseteq P$ எனில், $||P'|| \leq ||P||$. எனவே, ஒரு பிரிவினையின் மென்மையாக்கம் அதன் அலகையைக் குறைக்கிறது. இதன் மறுதலை உண்மையாக இருக்கத் தேவையில்லை.

5.1. ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையின் வரையறை

5.2. வரையறை

[a, b]-ன் ஒரு பிரிவினை $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. t_k என்பது $[x_{k-1}, x_k]$ என்ற உள்இடைவெளியின் ஒரு புள்ளி.. $S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$ என்ற வடிவில் உள்ளக் கூடுதல், α-ஐப் பொறுத்து f-ன் ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் கூடுதல் எனப்படும்.

ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு, [a, b]-ல் P_ε என்ற பிரிவினை, P_ε- விட மெனமையான அனைத்து பிரிவினைகள் P மற்றும் $[x_{k-1}, x_k]$-ல் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகள் t_k -க்கு $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ எனும் படியாக A என்ற எண் இருக்குமானால், [a, b]-ல் α-ஐப் பொறுத்து f ரீமன் தொகையிடத்தக்கது என்போம்.

இது, [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ என எழுதப்படும்.

இப்படியாக அமையும் A என்ற எண் இருக்குமானால், அது ஒரே முறையில் வரையறுக்கப்பட்டு, $\int_a^b f\,d\alpha$ அல்லது $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ எனக் குறிக்கபப்டும்.

மேலும், ரீமன்- ஸ்டீல்டிஜெஸ் தொகையம் $\int_a^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது என்போம்.

f மற்றும் α என்ற சார்புகள் முறையே தொகையுறு (Integrand), மற்றும் தொகைப்பான் (Integrator) என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பாக, $\alpha(x) = x$ எனில், $S(P, f, \alpha)$ ஆனது $S(P, f)$ எனவும், $f \in R(\alpha)$ ஆனது $f \in R$ என வும் எழுதப்படும். இவ்வகையில், தொகையம் ரீமன் தொகை என்றழைக்கப்பட்டு $\int_a^b f\,dx$ அல்லது $\int_a^b f(x)\,dx$ எனக் குறிக்கப்படும்.

5.2. நேரியல் பண்புகள்

5.3. தேற்றம்

[a, b]- ல் $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$ எனில், [a, b]- ல் $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$. ($c_1$, c_2 என்பன மாறிலிகள்). மேலும், $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)d\alpha = c_1 \int_a^b f\,d\alpha + c_2 \int_a^b g\,d\alpha$

நிறுவல்:

$h = c_1 f + c_2 g$ என்க.

[a, b]- ல் பிரிவினை P என்க.

$$S(P, h, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\,\Delta\alpha_k$$

$$= c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta\alpha_k$$

$$= c_1\, S(P, f, \alpha) + c_2\, S(P, g, \alpha)$$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$P \supseteq P_\varepsilon'$ எனும் படியாக P_ε' தேர்ந்தெடுக்க.

$$f \in R(\alpha) \Rightarrow \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon.$$

$P \supseteq P_\varepsilon''$ எனும் படியாக P_ε'' தேர்ந்தெடுக்க.

$$g \in R(\alpha) \Rightarrow \left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

$P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ எனில், P ஆனது P_ε -ஐ விட மென்மையானது.

எனவே, $\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f\, d\alpha - c_2 \int_a^b g\, d\alpha \right|$

$$= \left| c_1\, S(P, f, \alpha) + c_2\, S(P, g, \alpha) - c_1 \int_a^b f\, d\alpha - c_2 \int_a^b g\, d\alpha \right|$$

$$\le |c_1| \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| + |c_2| \left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g\, d\alpha \right|$$

$$< |c_1|\, \varepsilon + |c_2|\, \varepsilon$$

எனவே, $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$.

மேலும், $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, d\alpha = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b g\, d\alpha$.

5.4. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$ மற்றும் $f \in R(\beta)$ எனில், $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$, ($c_1$, c_2 என்பன மாறிலிகள்). மேலும், $\int_a^b f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b f\, d\beta$

நிறுவல்:

$\gamma = c_1\alpha + c_2\beta$ என்க.

[a, b]- ல் கொடுக்கப்பட்ட பிரிவினை P-க்கு,

$$S(P, f, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\gamma_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta(c_1\alpha_k + c_2\beta_k)$$

$$= c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\beta_k$$

$$= c_1\, S(P, f, \alpha) + c_2\, S(P, f, \beta)$$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

P_ε', P_ε''-ஐ $P \supseteq P_\varepsilon'$, $P \supseteq P_\varepsilon''$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

$$f \in R(\alpha) \Rightarrow \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

$$f \in R(\beta) \Rightarrow \left| S(P, f, \beta) - \int_a^b f\, d\beta \right| < \varepsilon$$

$P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ எனில், P_ε -ஐ விட P மென்மையானது.

எனவே, $\left| S(P, f, \gamma) - c_1 \int_a^b f\, d\alpha - c_2 \int_a^b f\, d\beta \right| = \left| c_1\, S(P, f, \alpha) + c_2\, S(P, f, \beta) - c_1 \int_a^b f\, d\alpha - c_2 \int_a^b f\, d\beta \right|$

$$\leq |c_1| \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| + |c_2| \left| S(P, f, \beta) - \int_a^b f\, d\beta \right|$$

$$< |c_1|\,\varepsilon + |c_2|\,\varepsilon$$

எனவே, $f \in R(\gamma) \Rightarrow f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$, மற்றும்

$$\int_a^b f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b f\, d\beta .$$

5.5. தேற்றம்

$c \in (a, b)$ என்க. கீழ்க்கண்ட மூன்று தொகையங்களில், ஏதேனும் இரண்டு இருக்குமானால், மூன்றாவதும் இருக்கும். மேலும், $\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha$

நிறுவல்:

$[a, b]$- ல் ஒரு பிரிவினை P என்க. $c \in P$ என்க.

$P' = P \cap [a, c]$ மற்றும் $P'' = P \cap [c, b]$ என்பன முறையே, $[a, c]$ மற்றும் $[c, b]$ இவைகள் பிரிவினைகள் ஆகும்.

இந்த பிரிவினைகளுக்குண்டான ரீமன் - ஸ்டீல்ஜெஸ் கூடுதல்கள்

$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha)$ என இணைக்கப்படும்.

$\int_a^c f\,d\alpha$ மற்றும் $\int_c^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது என்க.

$[a, c]$-ல் P_ε' என்ற பிரிவினையின் மென்மையாக்கம் P'-க்கு,

$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha \right| < \varepsilon/2$ என இருக்கும்.

இதைப் போல், $[c, b]$-ல் P_ε'' என்ற பிரிவினையின் மென்மையாக்கம் P''-க்கு

$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon/2$ என இருக்கும்.

$P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ ஆனது $[a, b]$-ன் பிரிவினை. மேலும்,

$P \supseteq P_\varepsilon \Rightarrow$, $P' \supseteq P_\varepsilon'$ மற்றும் $P'' \supseteq P_\varepsilon''$. எனவே, $P \supseteq P_\varepsilon$ எனில்,

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha - \int_c^b f\,d\alpha \right|$$

$$= \left| S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha - \int_c^b f\,d\alpha \right|$$

$$\leq \left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha \right| + \left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon$$

எனவே, $\int_a^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது, மற்றும் $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$

மீதியுள்ள வகைகளுக்கும், இதைப் போன்று நிறுவலாம்.

5.6. வரையறை

$a<b$ மற்றும் $\int_a^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது எனில், $\int_b^a f\,d\alpha = -\int_a^b f\,d\alpha$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.. மேலும், $\int_a^a f\,d\alpha = 0$.

5.3. பகுதி வழித் தொகையிடல் (Integration by Parts)

தொகையுறு மற்றும் தொகுப்பான் இவைகளுக்கிடையில் தனிச் சிறப்புக்குரிய தொடர்பு இருக்கிறது. $\int_a^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது எனில், $\int_a^b \alpha\,df$ –ம் இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

5.7. தேற்றம் (பகுதி வழித் தொகையிடலின் வாய்ப்பாடு)

$[a, b]$- ல் $f \in R(\alpha)$ எனில், $[a, b]$- ல் $\alpha \in R(f)$.

மேலும், $\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\int_a^b f\,d\alpha$ இருக்கிறது என்பதால், $[a, b]$- ன் பிரிவினை P_ε-ன் அனைத்து மென்மையாக்கம் P'-க்கும், $\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon$ ----- (1)

என அமையும்.

$\int_a^b \alpha df$ –ன் ஏதேனும் ஒரு ரீமன்- ஸ்டீல்டிஜெஸ் கூடுதல் $S(P, \alpha, f)$ எடுத்துக் கொள்க.

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, \Delta f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_{k-1})$$

இங்கு, P_ε-ன் மென்மையாக்கம் P. $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$ என எழுத,

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, \alpha(x_{k-1})$$

எனவே, $A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, [\alpha(x_k) - \alpha(t_k)] +$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, [\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

வலதுபுறத்தில் உள்ள இரு கூடுதல்களையும் இணைத்து $S(P', f, \alpha)$ என்ற ஒரே கூடுதலாக அமைக்கலாம். P' என்பது [a, b]- ல் x_k மற்றும் t_k என்ற புள்ளிகளை ஒன்றாகச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் பிரிவினை.

எனவே, P-ன் மென்மையாக்கம் P' ஆகும். அதாவது, P_ε -ன் மென்மையாக்கம் P'.

ஆகவே, $A - S(P, \alpha, f) = S(P', f, \alpha)$

P_ε -ஐ விட P மென்மையானது எனில், (1)-ல் பிரதியிட,

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

எனவே, $\int_a^b \alpha df$ இருக்கிறது மற்றும் $\int_a^b \alpha df = A - \int_a^b f\, d\alpha$

$$\int_a^b \alpha df + \int_a^b f\, d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

5.4. ரீமன்- ஸ்டீல்ட்ஜெஸ் தொகையீட்டில் மாறியின் மாறுபாடு

5.8. தேற்றம்

[a, b]- ல் $f \in R(\alpha)$ என்க. c, d இவைகளை முனைப்புள்ளிகளாக உடைய இடைவெளி S-ல் வரையறுக்கப்பட்ட திட்டமாக ஒருபோக்கு தொடர்ச்சியான சார்பு g என்க. $a = g(c)$, $b = g(d)$ என்க. h, β என்பன கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்ட இணைந்த சார்புகள். $h(x) = f[g(x)]$, $\beta(x) = \alpha[g(x)]$, $x \in S$ எனில், S-ல் $h \in R(\beta)$. மேலும், $\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$.

அதாவது, $\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,d\alpha(t) = \int_c^d f[g(x)]\,d\{\alpha[g(x)]\}$

நிறுவல்:

S-ல் g திட்டமாக ஏறும் சார்பு என்க. எனவே, $c < d$.

ஆகவே, g ஆனது ஒன்றுக்கொன்றானதாவும், [a, b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட, தொடர்ச்சியான நேர்மாறு g^{-1}-யும் பெற்றிருக்கும். மேலும், g^{-1} திட்டமாக ஏறும் சார்பாக அமையும். எனவே, [c, d]-ன் ஒவ்வொரு பிரிவினை $P = \{y_0, ..., y_n\}$-க்கு ஒத்த, [a, b]- ல் ஒரே ஒரு பிரிவினை $P' = \{x_0, ..., x_n\}$, $x_k = g(y_k)$ என அமையும் படி இருக்கும். $P' = g(P)$, $P = g^{-1}(P')$ என எழுதலாம்.

மேலும், P-ன் மென்மையாக்கம், P′-ன் மென்மையாக்கத்தைத் தரும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$f \in R(\alpha) \Rightarrow$ [a, b]-ன் பிரிவினை P_ε', அனைத்து $P' \supseteq P_\varepsilon'$-க்கு ($P_\varepsilon'$-ன் மென்மையாக்கம் P′), $\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon$ என அமையும்.

$P_\varepsilon = g^{-1}(P_\varepsilon')$ என்பது $[c, d]$-ல் பிரிவினை ஆகும். $[c, d]$-ல் P_ε-ன் மென்மையாக்கப் பிரிவினை $P = \{y_0, ..., y_n\}$ என்க. $(P \supseteq P_\varepsilon)$

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} h(u_k)\,\Delta\beta_k,\ u_k \in [y_{k-1}, y_k],\ \Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-1})$$

$t_k = g(u_k)$ மற்றும் $x_k = g(y_k)$ எனில், $P' = \{x_0, ..., x_n\}$ என்பது $[a, b]$- ல்

P_ε'- ஐ விட மென்மையான பிரிவினை. மேலும்,

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} f[g(u_k)]\,\{\alpha[g(y_k)] - \alpha[g(y_{k-1})]\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

$$= S(P', f, \alpha),\ t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

எனவே, $\left| S(P, h, \beta) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon \Rightarrow [a, b]$- ல் $h \in R(\beta)$ மற்றும்

$\int_a^b f\, d\alpha = \int_c^d h\, d\beta$. எனவே, தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

ரீமன் தொகையத்திற்குக் குறைத்தல்

α ஆனது தொடர்ச்சியான வகைக்கெழு α'-ஐப் பெற்றிருப்பின், $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ -ல் $d\alpha(x)$-ஐ $\alpha'(x)$ ஆக மாற்றுவதைக் கீழ்க்கண்டத் தேற்றம் கூறுகிறது.

5.9. தேற்றம்

[a, b]- ல் $f \in R(\alpha)$ என்க. மேலும், [a, b]- ல் α ஆனது தொடர்ச்சியான வகைக்கெழு α'-ஐப் பெற்றிருக்கிறது எனில், ரீமன் தொகை $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ இருக்கிறது, மேலும், $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$

நிறுவல்:

$g(x) = f(x)\alpha'(x)$ என்க.

ரீமன் தொகை $S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\alpha'(t_k)\Delta x_k$

ரீமன்- ஸ்டீல்ஜெஸ் கூடுதல் $S(P, f, \alpha)$ அமைப்பதற்கு இதே பிரிவினை மற்றும் t_k-ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k$$

இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\,\Delta x_k\ ,\ v_k \in (x_{k-1}, x_k)$

எனவே, $S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\alpha'(v_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\alpha'(t_k)\Delta x_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,[\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)]\Delta x_k$$

f வரம்புடையது என்பதால், அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $|f(x)| \le M,\ M > 0.$

[a, b]-ல் α' தொடர்ச்சியானது $\Rightarrow$ [a, b]- ல் α' சீரான தொடர்ச்சியானது.

எனவே, $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், $\delta > 0$ (ε-ஐ மட்டும் பொறுத்தது) என்ற எண்,

$0 \le |x - y| < \delta \Rightarrow |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \varepsilon/(2M(b-a))$

P_ε' என்ற பிரிவினையை, அதன் அலகை $\|P_\varepsilon'\| < \delta$ என எடுத்துக்கொள்வோமானால், எந்த ஒரு மென்மையான பிரிவினை P-க்கு,

$|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \varepsilon/(2M(b-a)).$

இந்த P-க்கு $| S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \sum_{k=1}^{n} M (\varepsilon/(2M(b-a)))\Delta x_k \leq \varepsilon/2$

மறுபடியும், [a, b]-ல் $f \in R(\alpha) \Rightarrow P_\varepsilon'' \supseteq P$ என அமையும் P_ε'' என்ற பிரிவினை,

$| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha | < \varepsilon/2$ ஆக இருக்கும்.

இவ்விரண்டு சமனின்மைகளை இணைக்க, P-ன் மென்மையாக்கம் $P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ ஆக இருக்கும் எனில், $| S(P, g) - \int_a^b f\, d\alpha | < \varepsilon$

எனவே, $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

5.5. ஒருபோக்கு ஏறும் தொகுப்பான்கள் மேல் மற்றும் கீழ் தொகையீடுகள்

5.10. வரையறை

[a, b]-ல் ஒரு பிரிவினை P மற்றும்,

$M_k(f) = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$m_k(f) = \inf\{ f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ என்க.

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\, \Delta\alpha_k$$

என்ற எண்கள் முறையே, பிரிவினை P-ன் α- ஐப் பொறுத்து f-ன் மேல் மற்றும் கீழ் ஸ்டீலிஜெஸ் கூடுதல்கள் எனப்படும்.

குறிப்பு:

எப்பொழுதும், $m_k(f) \leq M_k(f)$ ஆக இருக்கும். [a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு எனில், $\Delta\alpha_k \geq 0$. எனவே, $m_k(f)\, \Delta\alpha_k \leq M_k(f)\, \Delta\alpha_k$.

$\Rightarrow L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

மேலும், $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ எனில், $L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$.

இது α ஏறும் சார்பாக அமையவில்லை எனில், இந்த சமனின்மை பொருந்தாது.

கீழ்க்காணும் தேற்றம், α ஏறும் சார்பு ஆக இருக்கும் போது, பிரிவினையின் மென்மையாக்கம் கீழ் கூடுதலை அதிகமாக்கவும், மேல் கூடுதலைக் குறைக்கவும் செய்யவும் என்பதை எடுத்துக்காட்டுகிறது.

5.11. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு என்க.

(அ) P-ன் மென்மையாக்கம் P' எனில், $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$ மற்றும்

$L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$

(ஆ) P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு பிரிவினைகளுக்கு, $L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$.

நிறுவல்:

(அ) இத்தேற்றத்தை, P'-ல் P-ஐ விட ஒரே ஒரு புள்ளி c மட்டும் கூடுதலாக இருக்கும் போது, நிறுவினால் போதுமானது.

P-ன் i-ஆவது உள் இடைவெளியில் c உள்ளது எனில், ($x_{i-1} < c < x_i$)

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

M', M'' என்பன முறையே $[x_{i-1}, c]$, $[c, x_i]$ என்ற இடைவெளிகளில், c-ன் மேன்மங்கள் (sup) ஆகும்.. மேலும், $M' \leq M_i(f)$ மற்றும் $M'' \leq M_i(f)$

எனவே, $U(P', f, \alpha) - U(P, f, \alpha)$

$$= M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)] - M_i(f)[[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$
$$= [M' - M_i(f)][\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + [M'' - M_i(f)][\alpha(x_i) - \alpha(c)] \leq 0.$$

எனவே, $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

இதைப் போலவே,

$$L(P', f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k + m'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + m''[\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

$m' = \inf f(x),\ x \in [x_{i-1}, c]$, $m'' = \inf f(x),\ x \in [c, x_i]$.

எனவே, $m' \geq m_i(f)$ மற்றும் $m'' \geq m_i(f)$

$L(P', f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$

$= m'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + m'' [\alpha(x_i) - \alpha(c)] - m_i(f)[[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$

$= [m' - m_i(f)] [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + [m'' - m_i(f)] [\alpha(x_i) - \alpha(c)] \geq 0.$

எனவே, $L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$

(ஆ) $P = P_1 \cup P_2$ என்க.

$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$

எனவே, $L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$

குறிப்பு:

α ஏறும் சார்பாக அமையும் போது,

$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$

இங்கு, $M = \sup\{ f(x): x \in [a, b]\}$

$m = \inf\{ f(x): x \in [a, b]\}$

5.12. வரையறை

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு. α-ஐப் பொறுத்து, f-ன் மேல் ஸ்டீலிஜெஸ் தொகையீடு,

$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf\{U(P, f, \alpha): P \in \wp[a, b]\}$ எனவும் கீழ் ஸ்டீலிஜெஸ் தொகையீடு,

$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup \{L(P, f, \alpha): P \in \wp[a, b]\}$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு:

சில நேரங்களில், மேல் மற்றும் கீழ் தொகையீடுகள் முறையே, $\overline{I}(f, \alpha)$, $\underline{I}(f, \alpha)$ எனவும் குறிப்பிடப்படுவதுண்டு.

$\alpha(x) = x$ என்ற வகையில், மேல் மற்றும் கீழ் கூடுதல்கள் முறையே U(P, f) மற்றும் L(P, f) எனக் குறிக்கப்பட்டு, மேல் மற்றும் கீழ் ரீமன் கூடுதல்கள் என

அழைக்கப்படும். அதற்கு இசைந்த தொகையீடுகள், $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ என்பன முறையே மேல் மற்றும் கீழ் தொகையீடுகள் என அழைக்கப்பெறும். இவைகள், J.G. டார்போ (1875) என்பவரால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

5.13. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு எனில், $\underline{I}(f, \alpha) \le \overline{I}(f, \alpha)$.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\overline{I}(f, \alpha) = \inf\{U(P, f, \alpha): P \in \wp[a, b]\}$.

எனவே, P_1 என்ற பிரிவினை, $U(P_1, f, \alpha) < \overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ என அமையும்

தேற்றம் 5.11-ன் படி, $\overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ ஆனது, அனைத்து கீழ் கூடுதல் $L(P, f, \alpha)$-க்கு மேல்வரம்பாக அமையும். எனவே, $\underline{I}(f, \alpha) \le \overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ ஏதேனும் ஒரு எண் என்பதால், $\underline{I}(f, \alpha) \le \overline{I}(f, \alpha)$ ஆகும்.

5.14. எடுத்துக்காட்டு

$\alpha(x) = x$ என்க. f என்ற சார்பு, [0, 1]-ல்

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ விகிதமுறு எண் எனில்} \\ 0, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. [0, 1]-ல் அனைத்து பிரிவினைகளுக்கும், $M_k(f) = 1$, $m_k(f) = 0$ (ஏனெனில், அனைத்து உள் இடைவெளிகளும் விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களைப் பெற்றிருக்கும்). அனைத்து P-க்கு $U(P, f) = 1$, $L(P, f) = 0$.

எனவே, $[a, b] = [0, 1]$-க்கு, $\overline{\int_a^b} f\,dx = 1$, $\underline{\int_a^b} f\,dx = 0$.

ஆகையால், $\underline{I}(f, \alpha) < \overline{I}(f, \alpha)$.

ரீமன் நிபந்தனை

5.15. வரையறை

அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, பிரிவினை P-ன் மென்மையாக்கம் P_ε ஆனது, $0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$ என இருக்குமானால், [a, b]-ல் α-ஐப் பொறுத்து f ஆனது ரீமன் நிபந்தனையை நிறைவேற்றுகிறது என்போம்.

5.16. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஓர் ஏறும் சார்பு எனில், பின்வரும் கூற்றுகள் சமானமானவை.

(அ) [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$

(ஆ) [a, b]-ல் α-ஐப் பொறுத்து f ரீமன் நிபந்தனையை நிறைவேற்றும்

(இ) $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$.

நிறுவல்:

(அ) $\Rightarrow$ (ஆ)

[a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ என்க.

$\alpha(b) = \alpha(a)$ எனில், (அ) அற்ப வகையாகும்.

எனவே, $\alpha(a) < \alpha(b)$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு P-ன் மென்மையாக்கம் P_ε மற்றும் $[x_{k-1}, x_k]$-ன் அனைத்துப் புள்ளிகள் t_k, t_k'-க்கு, $\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k - A \right| < \varepsilon/3$ மற்றும்

$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k')\, \Delta\alpha_k - A \right| < \varepsilon/3$ என அமையும்.

இங்கு, $A = \int_a^b f\, d\alpha$

இந்த இரு சமனின்மைகளை இணைக்க,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\, \Delta\alpha_k \right| < 2\varepsilon/3.$$

மேலும், $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(x'): x, x' \in [x_{k-1}, x_k]\}$ என்பதால்,

அனைத்து $h > 0$-க்கு t_k, t_k' என்ற புள்ளிகளை,

$f(t_k) - f(t_k') > M_k(f) - m_k(f) - h$ எனத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$h = \dfrac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]}$ எனில்,

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta\alpha_k \\ &< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta\alpha_k + h \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k \\ &< 2\varepsilon/3 + \frac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]}[\alpha(b) - \alpha(a)] = \varepsilon \end{aligned}$$

எனவே, (அ) $\Rightarrow$ (ஆ)

அடுத்ததாக, (ஆ) $\Rightarrow$ (இ) என நிறுவ வேண்டும்.

$[a, b]$-ல் α-ஐப் பொறுத்து, f ரீமன் நிபந்தனை நிறைவேற்றுகிறது என்க.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், பிரிவினை P_ε-ன் மென்மையாக்கம் P என்ற பிரிவினை $U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon$ என அமையும்.

இந்த P-க்கு, $\overline{I}(f, \alpha) \le U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon \le \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$

அதாவது, $\overline{I}(f, \alpha) \le \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon, \varepsilon > 0$

எனவே, $\overline{I}(f, \alpha) \le \underline{I}(f, \alpha)$

ஆனால், $\underline{I}(f, \alpha) \le \overline{I}(f, \alpha)$ (தேற்றம் 5.13.). எனவே, $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$

(ஆ) $\Rightarrow$ (இ) நிறுவப்பட்டது.

இறுதியாக, $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$ என்க.

இவைகளின் பொதுவான மதிப்பு A என்க.

$\int_a^b f\, d\alpha$ இருக்கிறது என்றும் அதன் மதிப்பு A எனவும் நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், பிரிவினை P-ன் மென்மையாக்கம் P_ε என்ற பிரிவினை,

$U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ எனத் தெரிவுச் செய்யலாம்.

P_ε'' என்ற பிரிவினையை, $L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon$.

அனைத்து P-க்கு $P \supseteq P_\varepsilon''$ எனத் தெரிவுச் செய்க.

எனவே, $P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ எனில், P_ε -ன் மென்மையாக்கம் P-ஐ

$\underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon < L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ எனத் தெரிவு செய்யலாம்.

ஆனால், $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha) = A$ என்பதால், $P_\varepsilon \subseteq P$, $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

எனவே, $\int_a^b f\, d\alpha$ இருக்கிறது. அதன் மதிப்பு A.

தேற்றத்தின் நிறுவல் நிறைவடைகிறது.

5.6. ஒப்பீடு தேற்றங்கள்

5.16. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு என்க. [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ மற்றும் $g \in R(\alpha)$.

அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $f(x) \leq g(x)$ எனில், $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x)\, d\alpha(x)$

நிறுவல்:

அனைத்து பிரிவினை P-க்கு,

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$$

$$S(P, g, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta\alpha_k$$

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு, $x \in [a, b]$-க்கு $f(x) \leq g(x)$ என்பதால், அனைத்து P-க்கு, $S(P, f, \alpha) \leq S(P, g, \alpha)$.

$f \in R(\alpha) \Rightarrow$ அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு $[a, b]$-ல் P_ε' என்ற பிரிவினை, அனைத்து $P \supseteq P_\varepsilon'$-க்கு $\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f(x)d\alpha(x) \right| < \varepsilon$ என அமையும்.

$g \in R(\alpha) \Rightarrow P_\varepsilon''$ என்ற பிரிவினை, $P \supseteq P_\varepsilon''$-க்கு $\left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g(x)d\alpha(x) \right| < \varepsilon$

$P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ என்க. எனவே, அனைத்து $P \supseteq P_\varepsilon$-க்கு,

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f(x)d\alpha(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g(x)d\alpha(x) \right| < \varepsilon$$

$$S(P, f, \alpha) \le S(P, g, \alpha) \Rightarrow \int_a^b f(x)d\alpha(x) \le \int_a^b g(x)d\alpha(x)$$

5.18. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் α ஏறும் சார்பு. $[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$ எனில், $|f| \in R(\alpha)$. மேலும்,

$$\left| \int_a^b f(x)d\alpha(x) \right| \le \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x)$$

நிறுவல்:

வரையறை 5.10-ன் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்த,

$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$;

$\big| |f(x)| - |f(y)| \big| \le |f(x) - f(y)|$ என்ற சமனின்மை எப்பொழுதும் உண்மை என்பதால்,

$M_k(|f|) - m_k(|f|) \le M_k(f) - m_k(f)$.

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(|f|) - m_k(|f|)]\, \Delta\alpha_k \le \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta\alpha_k$$

$\Rightarrow [a, b]$-ல் அனைத்து பிரிவினை P-க்கு,

$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \le U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ என அமையும்.

ரீமன் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்த, $U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) < \varepsilon$

எனவே, $|f| \in R(\alpha)$

அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $f(x) \leq |f|(x)$ என்பதால், தேற்றம் 5.16- $g = |f|$ எனப் பயன்படுத்த, $\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x)$

குறிப்பு:

இதன் மறுதலை உண்மையல்ல. $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட f என்ற சார்பு,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ விகிதமுறு எண்} \\ -1, & x \text{ விகிதமுறா எண்} \end{cases}$$

அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு, $|f(x)| = 1$.

$\alpha(x) = x$ என்க.

ஆகையால், $|f| \in R(\alpha)$ மற்றும் $\int_a^b |f(x)| = b - a$.

ஆனால், $\int_a^{-b} f\, dx = b - a$, $\int_{-a}^{b} f\, dx = -(b - a) \Rightarrow f \notin R(\alpha)$.

5.19. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் α ஏறும் சார்பு என்க. $[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$ எனில், $f^2 \in R(\alpha)$.

நிறுவல்:

வரையறை 5.9-ன் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்த,

$M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2$, $m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2$

ஆகவே, $M_k(f^2) - m_k(f^2) = [M_k(|f|) + m_k(|f|)]\,[M_k(|f|) - m_k(|f|)]$

$$\leq 2M\,[M_k(|f|) - m_k(|f|)]$$

இங்கு, M என்பது $[a, b]$-ல் $|f|$-ன் மேல்வரம்பு.

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f^2) - m_k(f^2)]\, \Delta\alpha_k \leq 2M \sum_{k=1}^{n} [M_k(|f|) - m_k(|f|)]$$

[a, b]-ல் அனைத்து பிரிவினை P-க்கு,

$U(P, f^2, \alpha) - L(P, f^2, \alpha) < 2M [U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha)]$

$f \in R(\alpha) \Rightarrow |f| \in R(\alpha)$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

அனைத்து P-க்கு $U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) < \varepsilon$

எனவே, f^2-ம் ரீமன் நிபந்தனையை [a, b]-ல் நிறைவேற்றும்.

ஆகையால், $f^2 \in R(\alpha)$.

5.20. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு என்க. [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$ எனில், $f.g \in R(\alpha)$.

நிறுவல்:

$2f(x).\, g(x) = [f(x) + g(x)]^2 - [f(x)]^2 - [g(x)]^2$

தேற்றம் 5.19-ஐப் பயன்படுத்த, $f.g \in R(\alpha)$.

5.7. வரம்புறு மாறல் தொகுப்பான்கள் (Integrators of Bounded Variation)

5.21. தேற்றம்

[a, b]-ல் α வரம்புறு மாறல் சார்பு. $a < x \leq b$ எனில், V(x) என்பது [a, x]-ல் α-ன் மொத்த மாறல். V(a) = 0 என்க. [a, b]-ல் f வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புடைய சார்பு. [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ எனில், [a, b]-ல் $f \in R(V)$.

நிறுவல்:

V(b) = 0 எனில், V மாறிலி. எனவே, தேற்றம் அற்பமானது.

V(b) > 0 என்க.

மேலும், $x \in [a, b]$ எனில், $|f(x)| \leq M$ என்க.

V ஏறும் சார்பு என்பதால், [a, b]-ல் V-ஐப் பொறுத்து f ரீமன் நிபந்தனை நிறைவேற்றும் என பரிசோதித்தால் போதுமானது.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. P_ε-ஐத் தெரிவு செய்க. P_ε-ன் மென்மையான அனைத்து பிரிவினை P-க்கு மற்றும் $[x_{k-1}, x_k]$-ல் புள்ளிகள் t_k, t_k'-க்கு,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta\alpha_k \right| < \varepsilon/4.$$

மற்றும், $V(b) = \sup\{ \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| \} \Rightarrow V(b) < \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| + \varepsilon/4M$

P_ε-ன் மென்மையான பிரிவினை P-க்கு,

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) < \varepsilon/2$$

மற்றும், $\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta\alpha_k| < \varepsilon/2$ என நிறுவுவோம்.

P_ε-ன் மென்மையான பிரிவினை P-க்கு, $\Delta V_k - |\Delta\alpha_k| \geq 0$ என்பதால்,

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) \leq 2M \sum_{k=1}^{n} (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|)$$

$$= 2M(V(b) - \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| < \varepsilon/2 \text{ ---(2)}$$

(ii) $A(P) = \{k: \Delta\alpha_k \geq 0\}$, $B(P) = \{k: \Delta\alpha_k < 0\}$

$h = \varepsilon/(4V(b))$ என்க.

$k \in A(P)$ எனில், t_k, t_k'-இவைகளை, $f(t_k) - f(t_k') > M_k(f) - m_k(f) - h$ எனத் தெரிவு செய்க.

$k \in B(P)$ எனில், t_k, t_k'-இவைகளை, $f(t_k') - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$ எனத் தெரிவு செய்க.

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta\alpha_k| < \sum_{k \in A(P)} [f(t_k) - f(t_k')] |\Delta\alpha_k| +$$

$$\sum_{k \in B(P)} [f(t_k') - f(t_k)] |\Delta\alpha_k| + h \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta\alpha_k + h \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$

$$< \varepsilon/4 + hV(b) = \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \quad \text{-----}(3)$$

சமனின்மைகள் (2), (3)-ஐக் கூட்ட,

$U(P, f, V) - L(P, f, V) < \varepsilon$, ஆகையால், $f \in R(V)$.

5.22. தேற்றம்

[a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு, [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ எனில், [a, b]-ன் அனைத்து உள் இடைவெளி [c, d]-ல் $f \in R(\alpha)$.

நிறுவல்:

[a, x]-ல் α-ன் மொத்த மாறல் V(x) என்க. $V(a) = 0$

$\alpha = V - (V-\alpha)$ என எழுதினால், V, $V-\alpha$ இவைகள் இரண்டும் [a, b]-ல் ஏறும் சார்புகள். (தேற்றம் 4.29)

தேற்றம் 5.21-ன் படி, $f \in R(V)$.

எனவே, [a, b]-ல் $f \in R(V - \alpha)$.

இத்தேற்றம், ஏறும் தொகுப்பான்களுக்கு சரியாக இருக்குமானால், [c , d]-ல் $f \in R(V)$, மற்றும் $f \in R(V-\alpha)$ எனில், [c, d]-ல் $f \in R(\alpha)$.

[a, b]-ல் α என்ற ஏறும் சார்புக்கு இத்தேற்றம் நிறுவினால் போதுமானது.

இதனை நிறுவ, $\int_a^c f\, d\alpha$ மற்றும் $\int_a^d f\, d\alpha$ இருக்கின்றன என நிறுவினால் போதுமானது. (தேற்றம் 5.5)

$a < c < b$ என்க.

[a, x]-ன் ஒரு பிரிவினை P எனில், [a, x] உடன் இணைந்த மேல் மற்றும் கீழ் கூடுதலின் வேறுபாடு $\Delta(P, x)$ என்க.

$\Delta(P, x) = U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$

[a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$ என்பதால், ரீமன் நிபந்தனை நிறைவேறும்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், $[a, b]$-ன் பிரிவினை P_ε-க்கு, P_ε-ன் மென்மையான பிரிவினை P, $\Delta(P, b) < \varepsilon$ என அமையும்.

$c \in P_\varepsilon$ என்க.

$[a, c]$-ல் P_ε-ன் புள்ளிகள், $[a, c]$-ல் P_ε' என்ற பிரிவினையை உண்டாக்கும்.

$[a, c]$-ல் P_ε'-ன் மென்மையான பிரிவினை P' எனில், $P = P' \cup P_\varepsilon$ ஆனது P'-ன் புள்ளிகளையும், $[c, b]$-ல் P_ε-ன் புள்ளிகளையும் பெற்ற $[a, b]$-ன் பிரிவினையாக அமையும்.

எனவே, $\Delta(P', c)$ -ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூடுதலில், $\Delta(P, c)$- ன் வரையறுக்கப்பட்ட கூடுதலின் உறுப்புகளின் சில பகுதியை மட்டும் பெற்றிருக்கும். ஒவ்வொரு உறுப்பும் குறை மதிப்பற்றதாக இருக்கும். மேலும், P ஆனது, P_ε-ஐ விட மென்மையானது என்பதால், $\Delta(P', c) \leq \Delta(P, b) < \varepsilon$.

அதாவது, $P' \supset P_\varepsilon' \Rightarrow \Delta(P', c) < \varepsilon$.

எனவே, $[a, c]$-ல் f ரீமன் நிபந்தனையை நிறைவேற்றும். மேலும், $\int_a^c f\, d\alpha$ இருக்கும்.

இதைப் போலவே, $\int_a^d f\, d\alpha$ இருக்கும்.

தேற்றம் 5.5-ன் படி, $\int_c^d f\, d\alpha$ இருக்கும்.

பின்வரும் தேற்றம், தேற்றங்கள் 5.20, 5.18 மற்றும் 5.20 இவைகளின் பயன்பாடு ஆகும்.

5.23. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$ மற்றும் $g \in R(\alpha)$ என்க. α என்பது $[a, b]$-ல் ஏறும் சார்பு. $x \in [a, b]$ எனில், $F(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$, $G(x) = \int_a^x g(t)\, d\alpha(t)$ எனில், $f \in R(G)$, $g \in R(F)$. மேலும், $[a, b]$-ல் $f.g \in R(\alpha)$.

மேலும், $\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b g(x)\, dF(x)$.

நிறுவல்:

தேற்றம்5.20-ன் படி, $\int_a^b f.g\, d\alpha$ இருக்கும்.

[a, b]-ன் அனைத்து பிரிவினை P-க்கு,

$$S(P, f, G) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)\, d\alpha(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t_k)\, g(t)\, d\alpha(t)$$

மேலும், $\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, g(t)\, d\alpha(t)$

எனவே, $M_g = \sup\{|g(x)| : x \in [a, b]\}$ எனில்,

$$\left| S(P, f, G) - \int_a^b f.g\, d\alpha \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t_k) - f(t)]\, g(t)\, d\alpha(t) \right|$$

$$\leq M_g \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t_k) - f(t)|\, d\alpha(t)$$

$$\leq M_g \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [M_k(f) - m_k(f)]\, d\alpha(t)$$

$$= M_g \{U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)\}$$

$f \in R(\alpha)$ என்பதால், அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, மற்றும் P_ε என்ற பிரிவினை, அனைத்து $P \supseteq P_\varepsilon$-க்கு, $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$ என அமையும். எனவே, [a, b]-ல், $f \in R(G)$ ஆகும். மேலும், $\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x)$ ஆகும்.

இதைப்போல், [a, b]-ல் $g \in R(F)$ மற்றும் $\int_a^b f.g\, d\alpha = \int_a^b g\, dF$ என நிறுவலாம்.

குறிப்பு:

[a, b]-ல் α வரம்புறு மாறல் சார்பு எனினும், இத்தேற்றம் உண்மையாகும்.

ரீமன்-ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையீடுகள் இருத்தலுக்கான போதுமான நிபந்தனைகள் முந்தைய தேற்றங்களில், சில தொகையீடுகள் இருப்பதாகக்கொண்டு அதன் பண்புகளைப் படித்தோம். இப்போது, இவ்வகையான தொகையீடுகள் இருக்கும் என்பதற்கான இரு போதுமான நிபந்தனைகளைப் பின்வரும் தேற்றங்களில் காண்போம்.

5.24. தேற்றம்

[a, b]-ல் f தொடர்ச்சியானதாகவும், α வரம்புறு மாறல் சார்பாகவும் இருப்பின், [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$.

நிறுவல்:

α ஆனது ஏறும் சார்பாகவும், $\alpha(a) < \alpha(b)$ எனக் கொண்டு, இத்தேற்றம் நிறுவினால் போதுமானது.

[a, b]-ல் f-ன் தொடர்ச்சி, அதன் சீரான தொடர்ச்சியைத் தரும். எனவே, $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், $\delta > 0$ (ε-ஐ மட்டும் பொறுத்து) என்ற எண்,

$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/A$ எனக் காணலாம்.

$A = 2[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

P_ε-ஆனது $\|P_\varepsilon\| < \delta$ என அமையும் பிரிவினை எனில், P_ε-ஐ விட மென்மையான பிரிவினை P-க்கு, $M_k(f) - m_k(f) \le \varepsilon/A$.

ஏனெனில், $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{ f(x) - f(y): x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$

எனவே, $\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta\alpha_k \le (\varepsilon/A) \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k$

அதாவது, $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq (\varepsilon/A) \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \varepsilon/2 < \varepsilon$

எனவே, [a, b]-ல் $f \in R(\alpha)$.

குறிப்பு:

தேற்றம் 5.7-ன் படி, இத்தேற்றத்தில் f மற்றும் α-ஐ மாற்றியமைக்க, இரண்டாம் போதுமான நிபந்தனை கிடைக்கும்.

தேற்றங்கள் 5.24 மற்றும் 5.7-ல் α(x) = x எனக் கொண்டால், கீழ்காணும் தேற்றம் கிடைக்கும்.

5.25. தேற்றம்

ரீமன் தொகையீடு $\int_a^b f(x)\, dx$ இருப்பதற்கு

(அ) [a, b]-ல் f தொடர்ச்சி,யானது

(ஆ) [a, b]-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு என்ற ஒவ்வொரு நிபந்தனையும் போதுமானது.

ரீமன்-ஸ்டீலிஜெஸ் தொகையீடுகள் இருப்பதற்கான தேவையான நிபந்தனைகள்

தொகையீடு இருக்க வேண்டுமானால், வலப்புற அலல்து இடப்புற தொடர்ச்சியின்மைகள் விலக்கப்பட வேண்டும் என்பதைப் பின்வரும் தேற்றம் எடுத்துக்காட்டுகிறது.

5.26. தேற்றம்

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு. a < c < b என்க. x = c-ல் α மற்றும் f ஆகிய இரண்டு சார்புகளும் பொதுவான வலப்புற தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கிறது என்க. அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட ε > 0-க்கு ஏற்றவாறு δ > 0 என்ற எண், எல்லா

$x, y \in (c, c+\delta)$-ல், $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$ மற்றும் $|\alpha(y) - \alpha(x)| \geq \varepsilon$ என அமையும் எனில், $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ இருக்க முடியாது.

இதைப்போலவே, c-ல் α மற்றும் f இடப்புற தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருந்தாலும், $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ இருக்காது.

நிறுவல்:

[a, b]-ன் ஒரு பிரிவினை P என்க. மேலும், $c \in P$ என்க.

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta\alpha_k$$

i-ஆவது உள் இடைவெளியின் இடப்புற முனைப்புள்ளி c ஆக அமையுமானால்,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq [M_i(f) - m_i(f)]\,[\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

ஏனெனில், கூடுதல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ≥ 0.

c ஆனது பொதுவான வலப்புற தொடர்ச்சியின்மைப்புள்ளியாக இருக்குமெனில், x_i என்பது $\alpha(x_i) - \alpha(c) \geq \varepsilon$ எனுமாறு தெரிவுச் செய்யப்படுகிறது என்க.

மேலும், தேற்றத்தின் கருதுகோளின் படி, $M_i(f) - m_i(f) \geq \varepsilon$.

எனவே, $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon^2$.

ஆகவே, ரீமன் நிபந்தனை நிறைவேற்றப்படவில்லை. ஆகையால், $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ இருக்காது.

இது போல, c ஆனது பொதுவான இடப்புற தொடர்ச்சியினமையாக இருப்பினும், இதே போன்று நிறுவலாம்.

5.8. ரீமன்–ஸ்டீல்டிஜெஸ் தொகையீடுகளின் இடைமதிப்புத் தேற்றங்கள்

5.27. தேற்றம் (முதல் இடைமதிப்புத் தேற்றம்)

$[a, b]$-ல் α ஏறும் சார்பு. மற்றும் $f \in R(\alpha)$ என்க. $\{f(x): x \in [a, b]\}$ என்ற கணத்தின் மேன்மம், தாழ்மம் முறையே M, m எனில், $m \le c \le M$ என அமையும் c என்ற மெய்யெண், $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ எனுமாறு இருக்கும்.

குறிப்பாக, $[a, b]$-ல் f தொடர்ச்சியானது எனில், ஏதேனும் ஒரு $x_0 \in [a, b]$-க்கு $c = f(x_0)$ ஆகும்.

நிறுவல்:

$\alpha(a) = \alpha(b)$ எனில், இரு பக்கங்களின் மதிப்பு பூஜ்யம் என்பதால், தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

$\alpha(a) < \alpha(b)$ என்க. அனைத்து மேல் மற்றும் கீழ் கூடுதல்கள்,

$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \le L(P, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha) \le M[\alpha(b) - \alpha(a)]$-ஐ நிறைவேற்றுவதால், $\int_a^b f\,d\alpha$ என்ற தொகையும் இவ்விரண்டு வரம்புகளுக்குள் அமையும்.

எனவே, ஈவு $c = \dfrac{\int_a^b f\,d\alpha}{\int_a^b d\alpha}$ ஆனது m மற்றும் M இவைகளுக்கிடையில் அமையும்.

ஆகையால், $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

$[a, b]$-ல் f தொடர்ச்சியானது எனில், இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம் பயன்படுத்த, $c = f(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$.

5.28. தேற்றம் (இரண்டாம் இடை மதிப்புத் தேற்றம்)

$[a, b]$-ல் α தொடர்ச்சியானது மற்றும் f ஏறும் சார்பு எனில், $x_0 \in [a, b]$ என்ற புள்ளி $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x)$ எனுமாறு அமையும்.

நிறுவல்:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\, df(x) \quad (\text{தேற்றம் } 5.7)$$

வலப்புற தொகையத்திற்கு தேற்றம் 5.27 பயன்படுத்த,

$\int_a^b \alpha(x)\, df(x) = \alpha(x_0)\, [f(b) - f(a)]$. ஆகையால்,

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a)[\alpha(x_0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x_0)],\ x_0 \in [a, b].$$

$$= f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x)$$

5.9. இடைவெளியின் சார்பாக அமையும் தொகையீடு

$[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$, α வரம்புறு மாறல் சார்பு எனில், அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $\int_a^x f\, d\alpha$ இருக்கும். இதனை, இங்கு x-ன் சார்பாக அறியலாம்.

5.29. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் f வரம்புறு மாறல் சார்பு, மற்றும் $f \in R(\alpha)$ என்க.. $F(x) = \int_a^x f\, d\alpha$ என F வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்,

(அ) $[a, b]$-ல் F வரம்புறு மாறல் சார்பு,

(ஆ) α-ன் ஒவ்வொரு தொடர்ச்சிப்புள்ளியும் F-ன் தொடர்ச்சிப் புள்ளியாக இருக்கும்.

(இ) [a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு எனில், ஒவ்வொரு $x \in (a, b)$-க்கும் f தொடர்ச்சியாகவும், $\alpha'(x)$-ம் இருந்தால், அப்புள்ளியில் $F'(x)$ இருக்கும், மேலும், $F'(x) = f(x)\alpha'(x)$ ஆகும்.

நிறுவல்:

[a, b]-ல் α ஏறும் சார்பு எனக. $x \neq y$ எனக.

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f\, d\alpha - \int_a^x f\, d\alpha$$

$$= \int_x^y f\, d\alpha = c[\alpha(y) - \alpha(x)] \text{ (தேற்றம் 5.27)}$$

இங்கு, $m \leq M$.

இந்த சமன்பாட்டிலிருந்து, (அ), (ஆ) என்ற கூற்றுக்கள் உடனடியாக நிறுவப்படும்.

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = c\, \frac{\alpha(y) - \alpha(x)}{y - x}$$

$y \to x$ எனில், $F'(x) = c\, \alpha'(x)$.

f ஆனது [a, b]-ல் தொடர்ச்சியானது என்பதால்,

ஏதேனும் ஒரு $x \in (a, b)$-க்கு $c = f(x)$. எனவே, $F'(x) = f(x)\, \alpha'(x)$.

5.30. தேற்றம்

[a, b]-ல் $f \in R$, $g \in R$ எனக., மற்றும் $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, $x \in [a, b]$. மேலும், [a, b]-ல் $f \in R(G)$, $g \in R(F)$ எனில்,

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

நிறுவல்:

தேற்றம் 5.29-ன் (அ), (ஆ) பகுதிகள் F மற்றும் G என்பன [a, b]-ல் தொடர்ச்சியான மற்றும் வரம்புறு மாறல் சார்புகள்.

தேற்றம் 5.23-ல் $\alpha(x) = x$ எனில், $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ இருக்கும் மற்றும்

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

குறிப்பு:

$\alpha(x) = x$ எனில், தேற்றம் 5.23 (இ) ஆனது, தொகை நுண் கணிதத்தின் முதல் அடிப்படைத் தேற்றம் என்றழைக்கப்படும்.

அதாவது, f-ன் தொடர்ச்சிப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும், $F'(x) = f(x)$.

5.31. தேற்றம் (தொகைநுண் கணிதத்தின் இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றம்)

$[a, b]$-ல் $f \in R$ என்க. $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட g என்ற சார்பின் வகைக்கெழு g', (a, b)-ல் இருக்கிறது. அதன் மதிப்பு, அனைத்து $x \in (a, b)$-க்கு, $g'(x) = f(x)$. முனைப்புள்ளிகளில், $g(a+)$ மற்றும் $g(b-)$ இருக்கின்றன. மேலும்,

$g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-)$ எனில், $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a)$

நிறுவல்:

$[a, b]$-ன் அனைத்து பிரிவினைகளுக்கும்,

$$g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

வகைக்கெழுக்கான, இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை $[x_{k-1}, x_k]$-ல் g-க்குப் பயன்படுத்த,

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(t_k)\, [x_k - x_{k-1}] = g'(t_k)\, \Delta x_k, \quad t_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

எனவே, $g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^{n} g'(t_k)\, \Delta x_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு மென்மையான பிரிவினையை,

$|g(b) - g(a) - \int_a^b f(x)\,dx| = |\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$ என எடுத்துக் கொள்ள முடியும்.

எனவே, $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$

இத்தேற்றத்துடன் தேற்றம் 5.30-ஐ இணைக்கப், பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கப்பெறும்.

5.32. தேற்றம்

[a, b]-ல் $f \in R$ என்க. α என்பது [a, b]-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், அதன் வகைக்கெழு α' ரீமன் தொகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது எனில், பின்வரும் தொகையீடுகள் இருக்கும் மற்றும் $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx$.

நிறுவல்:

இரண்டாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தின் படி, அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு,

$\alpha(x) - \alpha(a) = \int_a^b \alpha'(t)\,dt$.

தேற்றம் 5.30-ல் $g = \alpha'$ என, $\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$

5.10. ரீமன் தொகையீடுகள் இருப்பதற்கான லெபேக் வரைகூறு (Lebesgue's Criterian for existence of Riemann Integrals)

ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பும் ரீமன் தொகையிடத்தக்கது. [a, b]-ல் f ஒரு வரம்புறு மாறல் சார்பு எனில், $f \in R$ என்பதால், f-ன் தொடர்ச்சி தேவையில்லை. குறிப்பாக, f ஆனது ஒருபோக்கு சார்பு மற்றும் எண்ணத்தக்க தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருப்பினும், $\int_a^b f(x)\,dx$ இருக்கும். எண்ண முடியாத

தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகளைப் பெற்ற சார்புகளும் ரீமன் தொகையிடதக்கவைகளாக அமையும். எத்தனை தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகளைப் பெற்ற சார்பு ரீமன் தொகையிடத்தக்கதாக அமையும் என்ற கேள்விக்கு லெபேக் நிறுவின தேற்றம் இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

5.33. வரையறை

S மெய்யெண்களின் கணம் என்க. அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, என்ணத்தக்க திறந்த இடைவெளிகளின் நீளங்களின் கூடுதல் $< \varepsilon$ ஆக அமையும் திறந்த இடைவெளிகள் S-ன் உறையாக அமையின், S பூஜ்ஜிய அளவு (measure) பெற்றிருக்கும் என்கிறோம்.

திறந்த இடைவெளிகள் (a_k, b_k) என குறிப்பிடப்பட்டிருப்பின், $S \subseteq \cup_k(a_k, b_k)$ மற்றும் $\sum_k(b_k - a_k) < \varepsilon$

திறந்த இடைவெளிகளின் கூட்டம் முடிவுள்ளது எனில், k என்ற குறியீடு முடிவுள்ள கணம் வழிச் செல்லும்.

கூட்டமானது, எண்ணத்தக்க முடிவிலாததாக அமையின், k-ன் மதிப்பு 1-லிருந்து ∞-க்குச் செல்லும் போது, நீளங்களின் கூடுதல்,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k)$$

5.34. தேற்றம்

F என்பது R^1-ன் எண்ணத்தக்க கணங்களின் கூட்டம். $F = \{ F_1, F_2, \ldots, \}$. ஒவ்வொன்றின் அளவை பூஜ்ஜியம் எனில், அவைகளின் சேர்ப்பு $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ -ன் அளவையும் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

ஒவ்வொரு F_k-ன் அளவையும் பூஜ்ஜியம் $\Rightarrow$ எண்ணத்தக்க திறந்த இடைவெளிகள், அவைகளின் நீளங்களின் கூடுதல் $< \varepsilon/2^k$, F_k-ன் உறையாக அமையும்.

எனவே, S-ன் உறையானது, எண்ணத்தக்க திறந்த இடைவெளிகளாக அமையும். அவைகளின் கூடுதல் $< \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon$

5.35. எடுத்துக்காட்டு

R^1-ல் ஒரு புள்ளி கணத்தின் அளவை பூஜ்ஜியம் என்பதால், R^1-ன் எந்த ஒரு எண்ணத்தக்க உட்கணத்தின் அளவை பூஜ்ஜியமாக இருக்கும். குறிப்பாக, அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் கணத்தின் அளவை பூஜ்ஜியம்.

5.36. வரையறை

S என்ற இடைவெளியில், வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புடைய சார்பு f. $T \subseteq S$ எனில், $\Omega_f(T) = \sup\{ f(x)-f(y): x, y \in T\}$ என்பது T-ல் f-ன் அலைவு (oscillation) எனப்படும்.

x-ல் f-ன் அலைவு என்பது, $w_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(B(x ; h) \cap S)$

$B(x ; h) = \{ y \in R^1: |x-y| < h\}$

இந்த எல்லை எப்பொழுதும் இருக்கும். ஏனெனில், $\Omega_f(B(x ; h) \cap S)$ என்பது h-ல் குறையும் சார்பு. $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow \Omega_f(T_1) \le \Omega_f(T_2)$.

5.37. தேற்றம்

[a, b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புடைய சார்பு f. $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு, $w_f(x) < \varepsilon$ எனில், $\delta > 0$ (ε- மட்டும் பொறுத்தது) என்ற எண், $T \subseteq [a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளிக்கு, T-ன் நீளம் $<$ δ எனில், $\Omega_f(T) < \varepsilon$ என அமையும்.

நிறுவல்:

அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $w_f(x) < \varepsilon$

$B_x = B(x\ ;\ \delta_x)$ என்பது $\Omega_f(B_x \cap [a, b]) < w_f(x) + (\varepsilon - w_f(x)) = \varepsilon$ என அமையும்.

மேலும், $B(x\ ;\ \delta_x/2)$ என அமையும் கணங்கள் $[a, b]$ - ன் திறந்த உறையாக இருக்கும்.

$[a, b]$ கச்சிதமானது என்பதால், இவைகளின் முடிவுள்ள எண்ணிக்கை (k) உள்ள கணங்கள் $[a, b]$-ன் உறையாகும்.

அவைகளின் ஆரங்கள் $\delta_1/2, \ldots, \delta_k/2$ என்க.

$\delta = \min\{\delta_1/2, \ldots, \delta_k/2\}$ என்க.

இடைவெளி T-ன் நீளம் $< \delta$ எனில், இவைகளின் குறைந்தது ஒரு கணமாவது T-ன் பகுதி உறையாக இருக்கும். அக்கணம் $B(x_p\ ;\ \delta_p/2)$ என்க.

$\delta_p \geq 2\delta$ என்பதால், $B(x_p\ ;\ \delta_p)$, T-ன் முழுவதுமான உறையாகும்.

மேலும், $B(x_p\ ;\ \delta_p) \cap [a, b]$ – ல் f-ன் அலைவு $< \varepsilon$. ஆகவே, $\Omega_f(T) < \varepsilon$.

5.11. பயிற்சி வினாக்கள்

1. $[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$ மற்றும் f ஒரு போக்கு சார்பு, $\int_a^b f d\alpha = 0$ எனில், $[a, b]$-ல் f ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

2. α என்பது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியான வரம்புறு மாறல் சார்பு. $[a, b]$-ல் $g \in R(\alpha)$ என்க. $x \in [a, b]$ எனில், $\beta(x) = \int_a^x g(t) d\alpha(t)$ என அமையுமானால்,

(அ) $[a, b]$-ல் f ஒரு ஏறும் சார்பு எனில், $x_0 \in [a, b]$ என்ற புள்ளி,

$\int_a^b f\,d\beta = f(a)\int_a^{x_0} g\,d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g\,d\alpha$ எனக் காட்டுக.

(ஆ) கூடுதலாக, [a, b]-ல் f தொடர்ச்சியானது எனில்,

$\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_0} g\,d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g\,d\alpha$ எனக் காட்டுக.

3. α என்பது [a, b]-ல் வரம்புறு மாறல் சார்பு. [a, b]-ல் $f\in R(\alpha)$. அனைத்து $x\in[a, b]$ க்கு, $V(x)$ என்பது [a, x]-ல் α-ன் மொத்த மாறல், $V(a) = 0$ எனில்,

$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,dV \le MV(b)$ என நிறுவுக.

4. $f: [a, b]\to R^1$ என்ற சார்பு ரீமன் தொகையிடத்தக்கது மற்றும் [a, b]-ல் $1/f$ வரம்புடையது எனில், [a, b]-ல் $1/f$ ரீமன் தொகையிடத்தக்கது என நிறுவுக.

5. (a, b)-ல் f வரம்புடையது மற்றும் (a, b)-ன் அனைத்து மூடிய உள் இடைவெளிகளில் ரீமன் தொகையிடத்தகக்து எனில், (a, b)-ல் f தொகையிடத்தக்கது எனக் காட்டுக.

****

அத்தியாயம் 6

தொடர்வரிசைகள் மற்றும் சார்புகளின் தொடர்கள்

(Sequences and Series of Functions)

இங்கு, மெய்ப்புனை மதிப்பு சார்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். ஏனெனில், தேற்றங்களில் பல மற்றும் அதன் நிறுவல் இவைகள் திசையன் மதிப்பு சார்புகளுக்கும், பொதுவான யாப்பு வெளிகளுக்குண்டான சார்புகளுக்கும் பொருந்தும். இந்த அத்தியாயத்தில், சார்புகளின் தொடர்வரிசையின் புள்ளிவாரி ஒருங்கல், சீரான ஒருங்கல், சீரான ஒருங்கலுக்கான காஷியின் வரன்முறை, சீரான ஒருங்கல், தொடர்ச்சி, வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் இவைகளுக்கான தொடர்பு ஆகியவைகள் கூறப்படுகின்றன.

மேலும், சார்புகளின் சம தொடர்ச்சியான தொகுதிகள், சராசரி ஒருங்கல் இவைகள் வரையறுக்கப்பட்டு, அவைகளின் பண்புகள் எடுத்தியம்பப்படுகின்றன.

6.1. சார்புகளின் தொடர்வரிசையின் புள்ளிவாரி ஒருங்கல்

6.1. வரையறை

E என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ என்க. மேலும், அனைத்து $x \in E$-க்கு, எண்களின் தொடர்வரிசை $\{f_n(x)\}$ ஒருங்குகிறது என்க.

f என்ற சார்பை, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), (x \in E)$ ----- (1)

என வரையறுப்பின், E-ல் $\{f_n\}$ ஒருங்குகிறது என்போம். f ஆனது $\{f_n\}$-ன் எல்லை அல்லது எல்லை சார்பு எனப்படும்.

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), (x \in E)$ ஆக இருக்குமெனில், E-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்கு புள்ளிவாரியாக ஒருங்குகிறது என்போம்.

இதைப் போல், அனைத்து $x \in E$-க்கு $\sum f_n$ ஒருங்குகிறது மற்றும்

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), (x \in E) \qquad \text{-----} (2)$$

என வரையறுத்தோமானால், f ஆனது $\sum f_n$ என்ற தொடரின் கூடுதல் என்றழைக்கப்படும்.

இங்கு உள்ள முக்கியமான வினா ஆனது (1), (2) என்ற எல்லை செயல்களால் சார்புகளின் முக்கியமான பண்புகள் பாதுகாக்கப்படுமா என்பது தான்?

அதாவது, x என்ற புள்ளியில் ஒவ்வொரு f_n-ம் தொடர்ச்சியானதாக இருந்தால், x-ல் f-ம் தொடர்ச்சியாக அமையுமா?

அதாவது, $\lim\limits_{t \to x} f_n(t) = f_n(x) \Rightarrow \lim\limits_{t \to x} f(x) = f(t)$ என்பது சரியா? -----(3)

(3)-ஐ, $\lim\limits_{t \to x} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{t \to x} f_n(t)$ ----- (4)

என எழுதலாம்.

இப்பொழுது நமது வினா ஆனது, (4)-ல் எல்லைகளின் வரிசையை பரிமாற்றம் செய்ய முடியுமா என்பது தான். பொதுவாக, அது முடியாது.

முதலில், $\lim\limits_{t \to x} f(x)$ இல்லாமல் இருக்கலாம். அப்படி இருந்தால், அது f(t)-க்குச் சமமில்லாமல் இருக்கலாம். அதன் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

6.2. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) $f_n(x) = x^n, 0 \le x \le 1, n = 1, 2, 3\ldots$

எனில், f_n ஆனது [0, 1]-ல் f-க்கு ஒருங்கும்.

$f(x) = 0, \ 0 \le x < 1,$

$f(1) = 1.$

(ஆ) $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}, 0 \le x < \infty, n = 1, 2, 3, \ldots$

$x > 0$ எனில், $0 < g_n(x) \le 1/n$.

எனவே, $\{g_n(x)\}$ ஆனது $[0, \infty]$-ல் 0-க்கு ஒருங்கும்.

(இ) $$h_n(x) = \frac{1/nx}{(1/n^2x^2) + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0, \; h_n(0) = 0$$

$\Rightarrow (-\infty, \infty)$-ல் $\{h_n\}$ ஆனது 0-க்கு ஒருங்கும்.

(ஈ) $m = 1, 2, 3\ldots, n = 1, 2, 3\ldots$-க்கு,

$s_{m,n} = \dfrac{m}{m+n}$ என்க.

அனைத்து நிலைத்த n-க்கு, $\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$.

எனவே, $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$

அனைத்து நிலைத்த m-க்கு, $\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n} \ne \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n}$$

இது, எல்லைகளை மாற்றியமைக்கும் போது, மதிப்புகள் வேறுபடுவதைக் காட்டுகிறது.

(உ) பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு, தொடர்ச்சியான சார்புகளின் ஒருங்கல் தொடர், தொடர்ச்சியற்ற கூடுதலைப் பெற்றிருக்கிறது என்பதைக் காட்டுகிறது.

$$f_n(x) = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \; x \text{ மெய்.}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$x \neq 0$ எனில், இத்தொடர், கூடுதல் $1 + x^2$ உடைய ஒருங்கும் பெருக்குத் தொடர். $f_n(0) = 0$ என்பதால், $f(0) = 0$.

எனவே, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ எனில்} \\ 1 + x^2, & x \neq 0 \text{ எனில்} \end{cases}$

இங்கு, $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது.

(ஊ) தொடர்ச்சியற்ற எல்லை சார்பு கொண்ட தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை.

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, n = 0, 1, 2, \ldots, x \text{ மெய்.}$$

அனைத்து மெய் x-க்கு $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ இருக்கிறது.

எல்லை சார்பு f, $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

மெய்த்தளத்தில், ஒவ்வொரு f_n-ம் தொடர்ச்சியானது. ஆனால், f ஆனது $x = 1$ மற்றும் $x = -1$- ல் தொடர்ச்சியற்றது.

(எ) $m = 1, 2, 3, \ldots$ க்கு, $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$ என்க.

$m!x$ முழு எண் எனில், $f_m(x) = 1$.

x- ன் மற்றைய மதிப்புகளுக்கு, $f_m(x) = 0$.

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_m(x)$ என்க.

x விகிதமுறா எண் எனில், அனைத்து m-க்கு $f_m(x) = 0$.

எனவே, $f(x) = 0$.

x விகிதமுறு எண், $x = p/q$, (p, q முழு எண்கள்) எனில், $m \geq q$ எனில், $m!x$ முழு எண். எனவே, $f(x) = 1$.

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0, & x \text{ விகிதமுறா எண்} \\ 1, & x \text{ விகிதமுறு எண்} \end{cases}$$

எனவே, அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ள ஒரு எல்லை சார்பு கிடைக்கப் பெற்றிருக்கிறது. இது, ரீமன் தொகையிடத்தக்கது அல்ல.

6.3. எடுத்துக்காட்டு (எல்லை 0 உடைய வகைக்கெழுக் காணத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை ஆனால் $\{f_n'\}$ குவியும்).

$f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, x மெய்.

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

எனவே, $f'(x) = 0$

$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$

எனவே, $\{f_n'(x)\}$ ஆனது f'-க்கு ஒருங்காது.

எடுத்துக்காட்டாக, $n \to\infty$ எனில், $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$, ஆனால், $f'(0) = 0$.

6.4. எடுத்துக்காட்டு: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ என அமையும் சார்புகளின் தொடர்வரிசை.

$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$0 < x \leq 1$ எனில், $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

மேலும், $f_n(0) = 0$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. $(0 \leq x \leq 1)$

ஆகையால், $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$

ஆனால், $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{n^2}{2(n+1)}$

$n \to\infty$ எனில், $\frac{n^2}{2(n+1)} \to \infty$. ஆகையால், $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty.$

எனவே, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

இந்த எடுத்துக்காட்டில், $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $0 \le x \le 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, எனில், $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, $(0 \le x \le 1)$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

ஆனால், $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \tfrac{1}{2}$$

எனவே, தொகையீட்டின் எல்லை, எல்லையின் தொகையீட்டிற்கு, இரண்டுமே முடிவுள்ளதாக இருப்பினும் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை.

புள்ளிவாரி ஒருங்கலை விட வலிமையான மற்றொரு ஒருங்கலான சீரான ஒருங்கலை இப்பொழுது வரையறுப்போம்.

6.2. சீரான ஒருங்கல் (Uniform Convergence)

f_n, $(n = 1, 2, 3\ldots)$-ன் வரையறை அரங்கம் E என்ற கணம் என்க. அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு N என்ற முழு எண், அனைத்து $x \in E$-க்கு $n \ge N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ என்றவாறு இருந்தால், $\{f_n\}$ என்ற சார்புகளின் தொடர்வரிசை E-ல் f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது என்போம்.

ஒவ்வொரு சீரான ஒருங்கு தொடர்வரிசையும், புள்ளி வாரி ஒருங்குதலையுடையது. இந்த இரு கருத்துக்களுக்கும் உள்ள வரையறை வித்தியாசமானது.

E-ல் $\{f_n\}$ புள்ளிவாரி ஒருங்குகிறது எனில், f என்ற சார்பு, அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, அனைத்து $x \in E$-க்கு ε மற்றும் x-ஐப் பொறுத்து N என்ற முழு எண், $n \geq N$ எனில், $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ என அமையும்.

E-ல் $\{f_n\}$ சீராக f-க்கு ஒருங்குகிறது எனில், அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $x \in E$-க்கு, ஒரே ஒரு முழு எண் N ஆனது $n \geq N$ எனில், $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ என அமையும்.

குறிப்பு:

ஒவ்வொரு புள்ளிவாரி ஒருங்கு தொடர்வரிசையும், சீரான ஒருங்கும் தொடர்வரிசையாக அமையத் தேவையில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, x மெய்.

$\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை புள்ளிவாரியாக f என்ற சார்புக்கு ஒருங்கும். அனைத்து மெய் x-க்கு $f(x) = 0$.

0-ஐ உள்புள்ளியாக எந்த இடைவெளி $[a, b]$-லும் $\{f_n\}$ ஆனது சீராகக் ஒருங்காது என நிறுவுவோம்.

$[a, b]$ -ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது என்க.

$\varepsilon > 0$ எனின், N என்ற முழு எண், அனைத்து $n \geq N$-க்கு அனைத்து

$x \in [a, b]$- க்கு $\left|\dfrac{nx}{1 + n^2x^2} - 0\right| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1/4$ என்க.

k என்ற முழு எண், $k \geq N$ மற்றும் $1/k \in [a, b]$ எனக் காணலாம்.

$n = k$ மற்றும் $x = 1/k$ எனில், $\dfrac{nx}{1 + n^2x^2} = 1/2$

இது முரண்பாடு. எனவே, 0-ஐ உள்புள்ளியாகக் கொண்ட இடைவெளி [a, b]-ல் $\{f_n\}$ சீராக ஒருங்காது..

6.3. சீரான ஒருங்குதலுக்கான காஷி வரன்முறை

(Cauchy Criterion for Uniform Convergence)

6.5. தேற்றம்

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. E-ல் சீராக ஒருங்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: அனைத்து $\varepsilon > 0$, N என்ற முழு எண், $m \geq N, n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ எனுமாறு அமையும்.

நிறுவல்:

E-ல் $\{f_n\}$ சீராக ஒருங்குகிறது என்க. f என்பது எல்லை சார்பு என்க. ஆகையால், N என்ற முழு எண், $n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ என அமையும்,

$n \geq N, m \geq N, x \in E$ எனில்,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

மறுதலையாக, காஷி நிபந்தனை நிறைவேறுகிறது என்க.

எனவே, அனைத்து $x \in E$-க்கு $\{f_n(x)\}$ என்ற தொடர்வரிசை ஒருங்கும்.

$x \in E$ எனில், $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ என்க.

E-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது என நிறுவ வேண்டும்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

N-ஐ, $n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ என அமையும் படித் தேர்ந்தெடுக்க.

n-ஐ நிலைத்தாகக் கொண்டு, $m \to \infty$ என,

$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ஏனெனில், $\lim_{n \to \infty} f_m(x) = f(x)$.

எனவே, அனைத்து $n \geq N, x \in E$-க்கு, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

ஆகையால் ஒருங்கல் சீரானது.

குறிப்பு:

யாப்பு வெளிகளில், புள்ளிவாரி ஒருங்கல் மற்றும் சீரான ஒருங்கலை வரையறுக்க முடியும்.

Y என்பது ஒரு யாப்பு வெளி, E ஒரு வெற்றற்ற கணம்.

$f_n: E \to Y$, $f: E \to Y$ என்பன சார்புகள்.

அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு N (ε-ஐ மட்டும் பொறுத்தது) என்ற எண் $n \geq N, x \in E \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ என அமையுமானால், E-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது என்போம்.

6.6. தேற்றம்

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $(x \in E)$ என்க. $M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ என்க.

E-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ எனில், $M_n \to 0$.

இதன் நிறுவல், வரையறை 6.5-ல் இருந்து நேரடியாகப் பெறப்படும்.

6.4. சார்புகளின் முடிவிலாத் தொடரின் சீரான ஒருங்கல்

6.7. வரையறை

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. அனைத்து $x \in E$-க்கு $s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ என்க.

f என்ற சார்பு, E-ல் $\{s_n\}$ ஆனது, f-க்கு சீராக ஒருங்குமாறு அமையும் எனில்,

E-ல் $\sum f_n(x)$ சீராக ஒருங்குகிறது என்போம். இது, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ (E-ல் சீராக) என எழுதப்படும்.

6.8. தேற்றம் (தொடரின் சீரான ஒருங்குதலுக்கான காஷியின் நிபந்தனை)

E-ல் முடிவிலாத் தொடர் $\sum f_n(x)$ சீராக ஒருங்கும் $\Leftrightarrow$ அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு N என்ற எண், $n \geq N, x \in E \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \varepsilon, p = 1, 2, \ldots$

நிறுவல்:

$s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$, (n = 1, 2,...) என வரையறுத்து, தேற்றம் 6.7 பயன்படுத்த, இத்தேற்றம் நிறுவப்படும்.

தொடரின் சீரான ஒருங்குதலுக்கான வயிஸ்ட்ராஸ் சோதனையைக் காண்போம்.

6.9. தேற்றம் (வயிஸ்ட்ராஸ் M சோதனை)

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. $\{M_n\}$ என்பது குறையற்ற எண்களின் தொடர்வரிசை.

$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, x \in E, n = 1, 2, \ldots$ என்க. $\sum M_n$ ஒருங்கும் எனில், E-ல் $\sum f_n$ சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$\sum M_n$ ஒருங்குகிறது என்க. $n \geq N$ எனில், $\varepsilon > 0$-க்கு,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \leq \varepsilon. \ (x \in E).$$

சீரான ஒருங்கல், தேற்றம் 6.8-ல் இருந்து கிடைக்கும்.

6.5. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் தொடர்ச்சி

யாப்பு வெளியில், சார்புகளின் சீரான ஒருங்கல் மற்றும் தொடர்ச்சி இவைகளுக்குண்டான தொடர்பை இப்பொழுது காண்போம்.

6.10. தேற்றம்

ஒரு யாப்பு வெளியின் கணம் E-ல் சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\sum f_n(x)$ ஆனது f-க்கு ஒருங்குகிறது என்க. x ஆனது E-ன் எல்லைப்புள்ளி. $\lim\limits_{t \to x} f_n(t) = A_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ எனில், $\{A_n\}$ ஒருங்கும் மற்றும் $\lim\limits_{t \to x} f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

அதாவது, $\lim\limits_{t \to x} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{t \to x} f_n(t)$.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\{f_n\}$ –ன் சீரான ஒருங்கல் $\Rightarrow$ N என்ற முழு எண்,

$n \geq N, m \geq N, t \in E \Rightarrow | f_n(t) - f_m(t) | \leq \varepsilon$.

$t \to x$ என்க.

$n \geq N, m \geq N$ எனில்,
$$| \lim_{t \to x} f_n(t) - \lim_{t \to x} f_m(t)| \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow | A_n - A_m| \leq \varepsilon$$
$\Rightarrow \{A_n\}$ ஆனது காஷி தொடர்வரிசை

$\{A_n\} \to A$ என்க.

அடுத்ததாக,

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A| \qquad \text{----- (5)}$$

$\{f_n\} \to f$ சீரானது $\Rightarrow$ அனைத்து $t \in E$ -க்கு

$|f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon/3$, $|A_n - A| \leq \varepsilon/3$ என n-ஐத் தேர்ந்தெடுக்க,

இந்த n-க்கு, x-ன் அண்மை V-ஐ, $t \in V \cap E$, $t \neq x$ எனில், $|f_n(t) - A_n| \leq \varepsilon$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க,

இந்த சமனின்மைகளை (5)-ல் பிரதியிட,

$t \in V \cap E$, $t \neq x$ எனில், $|f(t) - A| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

6.11. தேற்றம்

E-ல் $\{f_n\}$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது எனில், E-ல் f தொடர்ச்சியானது.

இது தேற்றம் 6.10-ன் கிளைத் தேற்றமாகும்.

இதன் மறுதலை உண்மையல்ல. அதாவது, தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை, ஒரு தொடர்ச்சியான சார்புக்கு ஒருங்கலாம். (சீரான ஒருங்கல் இல்லாமலே கூட). ஆனால், கச்சித வெளியில் இது உண்மையாகும். இது தேற்றம் 6.13-ல் கூறப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 6.4 -ல் இது விளக்கப்பட்டுள்ளது.

6.12. தேற்றம்

E-ல் $\sum f_n(x) = f(x)$ (சீரானது). E-ல் ஒவ்வொரு f_n-ம் தொடர்ச்சியானது எனில், f-ம் தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ என்க.}$$

E-ல் f_n தொடர்ச்சியானது என்பதால், s_n-ம் தொடர்ச்சியானது.

எனவே, $\{s_n\}$ ஆனது E-ல் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசையாக இருக்கும். மேலும், E-ல் $\{s_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

எனவே, E-ல் f தொடர்ச்சியானது. (தேற்றம் 6.11).

6.13. தேற்றம்

K ஒரு கச்சிதமான கணம் என்க. மேலும்,

(அ) $\{f_n\}$ ஆனது K-ல் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை.

(ஆ) $\{f_n\}$ புள்ளிவாரியாக, K-ல் தொடர்ச்சியான f என்ற சார்புக்கு ஒருங்கும்.

(இ) அனைத்து $x \in K$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ -க்கு $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ எனில், K-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$g_n = f_n - f$ என்க.

எனவே, g_n தொடர்ச்சியானது.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, (x \in K)$$

மேலும், $f_n(x) \geq f_{n+1}(x), x \in K \Rightarrow g_n(x) \geq g_{n+1}(x), x \in K$

$\{g_n\}$ ஆனது K-ல் 0-க்குச் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$K_n = \{ x \in K : g_n(x) \geq \varepsilon\}$ என்க.

g_n தொடர்ச்சியானது என்பதால், K_n மூடிய கணம் (கிளைத் தேற்றம் 3.10)

எனவே, K_n கச்சிதமானது. (தேற்றம் 1.59)

$g_n \geq g_{n+1}$ என்பதால், $K_n \supset K_{n+1}$

$x \in K$ என்க.

$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ என்பதால், n போதுமான அளவு பெரியது எனில், $x \notin K_n$.

எனவே, $x \notin \cap K_n$. அதாவது, $\cap K_n$ வெற்றுகணம்.

ஆகையால், ஏதேனும் ஒரு N-க்கு, K_N வெற்றுகணமாக அமையும்.

ஆகவே, அனைத்து $x \in K$ மற்றும் அனைத்து $n \geq N$-க்கு $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ ஆகும்.

எனவே, K-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

இங்கு, கச்சித கணம் என்பது தேவையானது. எடுத்துக்காட்டாக,

$f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $0 < x < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ எனில்,

(0, 1)-ல் $f_n(x) \to 0$ (ஒரு போகாக)

ஆனால், ஒருங்கல் சீரானதல்ல.

6.14. வரையறை

X ஒரு யாப்பு வெளி எனில், $\mathcal{C}(X)$ என்பது X-ஐக் களமாகக் கொண்ட அனைத்து மெய்ப்புனை மதிப்புடை, தொடர்ச்சியான, வரம்புடைய சார்புகளின் கணத்தைக் குறிக்கிறது.

X கச்சித யாப்பு வெளி எனில், $\mathcal{C}(X)$ ஆனது அனைத்து மெய்ப்புனை தொடர்ச்சியான சார்புகளின் கணமாக அமையும்.

அனைத்து $f \in \mathcal{C}(X)$ உடன் அதன் மேண்மம் அலகை $\| f \| = \sup |f(x)|$ இணைப்போம்.

f வரம்புடையது என்பதால், $\| f \| < \infty$.

மேலும், $\| f \| = 0 \Leftrightarrow$ அனைத்து $x \in X$-க்கு, $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

$h = f+g$ எனில், அனைத்து $x \in X$-க்கு,

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq \|f\| + \|g\|$$

எனவே, $\| f+g \| \leq \|f\| + \|g\|$

$f \in \mathcal{C}(X)$, $g \in \mathcal{C}(X)$ இவைகளின் தூரம் $\|f - g\|$ என வரையறுத்தோமானால், ஒரு யாப்பின் உரைகோள்கள் நிறைவேற்றப்படுகின்றன.

எனவே, $\mathcal{C}(X)$ ஒரு யாப்பு வெளி. ஆகையால் தேற்றம் 6.8. பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கப்படும்.

$\mathcal{C}(X)$ -ன் யாப்பைப் பொறுத்து $\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை f-க்கு ஒருங்கும் $\Leftrightarrow$ $\{f_n\}$ ஆனது X-ல் f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

ஆகையால், $\mathcal{C}(X)$- ன் அடைப்பு, சீரான அடைப்பு எனவும் அழைக்கப்பெறும்.

6.15. தேற்றம்

மேலேக் கண்ட யாப்பு, $\mathcal{C}(X)$ -ஐ முழு யாப்பு வெளியாக மாற்றும்.

நிறுவல்:

$\{f_n\}$ என்பது $\mathcal{C}(X)$-ன் காஷி தொடர்வரிசை என்க.

எனவே, ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$-க்கு, N என்பது, $n \geq N, m \geq N$ எனில்,

$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ என இருக்கும்.

ஆகையால், X-ஐக் களமாகக் கொண்ட f என்ற சார்பு, $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும் படி அமையும். (தேற்றம் 6.5)

மேலும், f தொடர்ச்சியானது. (தேற்றம் 6.10)

f_n வரம்புடையது மற்றும் n என்ற எண், அனைத்து $x \in X$-க்கு, $|f(x) - f_n(x)| < 1$ என இருப்பதால், f-ம் வரம்புடையது.

எனவே, $f \in \mathcal{C}(X)$.

X-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குவதால், $n \to \infty$ எனில், $\|f_n - f\| \to 0$.

ஆகையால், $\mathcal{C}(X)$ ஒரு முழு யாப்பு வெளி.

6.6. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் ரீமன்-ஸ்டீல்ஜெஸ் தொகையிடல்

6.16. தேற்றம்

[a, b]-ல் α வரம்புறு மாறல் சார்பு. $\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மெய்மதிப்புச் சார்பு, அனைத்து n = 1, 2, ... -க்கு [a, b]-ல் $f_n \in R(\alpha)$ என்க. [a, b]-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்கு ஒருங்குகிறது.

$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,d\alpha(t),\ x\in[a, b],\ n = 1,2, \ldots$ எனில்,

(அ) $[a, b]$- ல் $f\in R(\alpha)$

(ஆ) $g(x) = \int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$, எனில், $\{g_n\}$ ஆனது g-க்கு ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

α ஆனது ஏறும் சார்பு, $\alpha(a) < \alpha(b)$ என்க.

(அ) $[a, b]$-ல் α-ஐப் பொறுத்து f ரீமன் நிபந்தனையை நிறைவேற்றும் என நிறுவினால் போதுமானது.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

N என்ற எண்ணை, அனைத்து $x\in[a, b]$-க்கு,

$|f(x) - f_N(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3[\alpha(b)-\alpha(a)]}$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

பின், $[a, b]$-ன் அனைத்து பிரிவினை P-க்கு,

$|U(P, f - f_N, \alpha)| \le \varepsilon/3$ மற்றும் $|L(P, f - f_N, \alpha)| \le \varepsilon/3$.

இந்த N-க்கு, P_ε என்ற பிரிவினையை, அதை விட மென்மையான பிரிவினை P-க்கு, $U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha)| < \varepsilon/3$ எனுமாறு தேர்ந்தெடுக்க.

இந்த P-க்கு,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \le U(P, f - f_N, \alpha) + L(P, f - f_N, \alpha) + U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

$$< |U(P, f - f_N, \alpha)| + |L(P, f - f_N, \alpha)| + \varepsilon/3 \le \varepsilon$$

எனவே, $f\in R(\alpha)$.

(ஆ) $\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

N-ஐ $n > N$, அனைத்து $t\in[a, b]$-க்கு,

$|f_n(t) - f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}$ எனுமாறு தேர்ந்தெடுக்க.

$x \in [a, b]$ எனில்,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, d\alpha(t),$$

$$\leq \frac{\alpha(x) - \alpha(a)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

எனவே, $[a, b]$-ல் $\{g_n\}$ ஆனது g-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது.

குறிப்பு:

இத்தேற்றத்தின் முடிவு, அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, d\alpha(t)$$ என்பதைத் தருகிறது.

இந்த பண்பு, ஒரு சீரான ஒருங்கும் தொடர்வரிசையை உறுப்பு வாரியாக தொகையிட முடியும் என்பதை விளக்குகிறது.

6.17. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் α என்பது ஒரு வரம்புறு மாறல் சார்பு. $\Sigma f_n(x) = f(x)$ ($[a, b]$-ல் சீரானது) இங்கு ஒவ்வொரு f_n-ம் மெய்மதிப்புச் சார்பு, $[a, b]$-ல் $f_n \in R(\alpha)$ எனில்,

(அ) $[a, b]$-ல் $f \in R(\alpha)$

(ஆ) $$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t),$$ ($[a, b]$-ல் சீரானது)

நிறுவல்:

பகுதி கூடுதல்களின் தொடர்வரிசைக்கு, தேற்றம் 6.16-ஐப் பயன்படுத்த, இத்தேற்றம் நிறுவப்படும்.

குறிப்பு:

இத்தேற்றம், ஒரு சீராக ஒருங்கும் தொடரை உறுப்பு வாரியாக தொகையிட முடியும் என்பதை விளக்குகிறது.

6.7. உறுப்பு வாரியாக தொகையிடக் கூடிய, சீராக ஒருங்காத தொடர்வரிசைகள்

உறுப்பு வாரியான தொகையிடலுக்கு, சீரான ஒருங்கல் ஆனது போதுமான நிபந்தனை ஆகும். ஆனால், தேவையானது அல்ல. அதைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் வழிக் காண்போம்.

6.18. எடுத்துக்காட்டு

$f_n(x) = x^n,\ 0 \le x \le 1.$

இதன் எல்லை சார்பு f, $f(x) = 0,\ x \in [0, 1),\ f(1) = 1$ ஆகும்.

எனவே, $\{f_n\}$ ஆனது தொடர்ச்சியற்ற எல்லையைக் கொண்ட, தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை என்பதால், [0, 1]- ல் இந்த ஒருங்கல் சீரானது அல்ல.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n\, dx = 1/(n+1)$$

$n \to \infty$ எனில், $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0.$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = 0$

6.19. வரையறை

E என்ற கணத்தின், தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. $M > 0$ என்ற மாறிலி., அனைத்து $x \in E$ மற்றும் அனைத்து n-க்கு, $|f_n(x)| \le M$ என அமையுமானால், E-ல் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ சீரான வரம்புடையது (uniformly bounded) எனப்படும்.

M ஆனது $\{f_n\}$-ன் சீரான வரம்பு எனப்படும்.

ஒவ்வொரு சார்பு f_n-ம் வரம்புடையது. E-ல் $\{f_n\}$, f-க்குச் சீராக ஒருங்கும் எனில், E-ல் $\{f_n\}$ சீரான வரம்புடையது.

6.20. எடுத்துக்காட்டு

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1 - nx)^2}, 0 \leq x \leq 1., n = 1, 2, ...$$

$|f_n(x)| \leq 1$ என்பதால், $[0, 1]$-ல் $\{f_n\}$ சீரான வரம்புடையது.

6.21. வரையறை

E-ல் $\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை புள்ளிவாரியாக ஒருங்கும் தொடர்வரிசையாகவும், E-ல் சீரான வரம்புடையாதாகவும் அமையின், $\{f_n\}$ ஆனது வரம்புக்குட்பட்ட ஒருங்கும் (boundedly convergent) தொடர்வரிசை எனப்படும்.

6.22. தேற்றம்

$\{f_n\}$ என்பது $[a, b]$-ல் வரம்புக்குட்பட்ட ஒருங்கும் தொடர்வரிசை. மேலும், $[a, b]$-ல் ஒவ்வொரு $f_n \in R^1$ மற்றும் அதன் எல்லை சார்பு $f \in R^1$. $[a, b]$-ல் $P = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ என்ற பிரிவினை, x_k என்ற எந்த புள்ளிகளும் இல்லாத, ஒவ்வொரு உள் இடைவெளி $[c, d]$-ல் $\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது என அமைகிறது எனில்,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

நிறுவல்:

f வரம்புடையது மற்றும் $\{f_n\}$ சீரான வரம்புடையது என்பதால், M என்ற மிகை எண், அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு, $n \geq 1$, $|f(x)| \leq M$ மற்றும் $|f_n(x)| \leq M$ என அமையும்.

$\varepsilon > 0$ என்பது $2\varepsilon < \|P\|$ என்றவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$h = \varepsilon/2m$, m என்பது P-ன் உள்இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை.

$[a, b]$-ல் P' என்ற புது பிரிவினையை எடுத்துக் கொள்க.

$P' = \{ x_0, x_0+h, x_1-h, x_1 + h, \ldots, x_{m-1} - h , x_{m-1} + h, \ldots, x_m - h, x_m\}$ என்க.

$[a, b]$-ல் $|f - f_n|$ தொகையிடத்தக்கது மற்றும் வரம்புடையது (வரம்பு $2M$) என்பதால், $[x_0, x_0+h]$, $[x_1-h, x_1 + h]$, $\ldots$, $[x_{m-1} - h , x_{m-1} + h]$, $\ldots$, $[x_m - h, x_m]$ என்ற இடைவெளிகளின் மேல் $|f - f_n|$-ன் தொகையீடுகளின் மதிப்பு அதிகபட்சமாக $2M(2mh) = 2M\varepsilon$ என அமையும்.

$[a, b]$-ன் மீதியுள்ள பகுதி (E என்க) ஆனது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள மூடிய இடைவெளிகளின் சேர்ப்பு ஆகும். இந்த ஒவ்வொரு மூடிய இடைவெளியிலும், $\{f_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

எனவே, N என்ற முழு எண் (ε-ஐ மட்டும் பொறுத்து) அனைத்து $x \in E$-க்கு $n \geq N$ எனில், $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ என அமையும்.

ஆகையால், E-ன் இடைவெளிகளின் மேல், $|f - f_n|$-ன் தொகையீடுகளின் மதிப்பு அதிகபட்சமாக $\varepsilon(b - a)$ என இருக்கும்.

எனவே, $n \geq N$ எனில், $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq (2M + b - a)\varepsilon$.

ஆகையால், $n \to \infty$ எனில், $\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$

6.8. சீரான ஒருங்கல் மற்றும் வகையிடல்

$\{f_n\}$-ன் சீரான ஒருங்கலால், $\{f_n'\}$ பற்றி எதுவும் அறியமுடியாது என எடுத்துகாட்டு 6.3-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $f_n \to f$ எனில், $f_n' \to f'$ ஆக அமைவதற்கு வலிமையான கருதுகோள் தேவைப்படுகிறது.

6.23. தேற்றம்

$\{f_n\}$ என்பது $[a,b]$-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கச் சார்புகளின் தொடர்வரிசை. $[a, b]$-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x_0-ல் $\{f_n(x_0)\}$ ஒருங்குகிறது.

$[a, b]$-ல் $\{f_n'\}$ ஆனது சீராக ஒருங்குகிறது எனில், $[a, b]$-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f என்ற சார்புக்குச் சீராக ஒருங்கும் மற்றும் $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ $(a \le x \le b)$.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

N என்ற எண்ணை, $n \ge N, m \ge N \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \varepsilon/2$ ----- (6)

எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

மற்றும், $|f_n'(t) - f_m'(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $(a \le t \le b)$. ----- (7)

$f_n - f_m$ என்ற சார்புக்கு, இடைமதிப்புத் தேற்றம் பயன்படுத்த,

$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \le |x - t|\,|(f_n' - f_m')(c)|,\ c \in (a, b)$

$x, t \in [a,b]$-க்கு, $n \ge N, m \ge N$ எனில்,

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \le |x - t| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le \varepsilon/2 \qquad \text{----- (8)}$$

எனவே,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ (a \le x \le b, n \ge N, m \ge N)$$

ஆகையால், $[a, b]$-ல் $\{f_n\}$, சீராக ஒருங்குகிறது.

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ என்க. $(a \le x \le b)$

$x \in [a,b]$-ஐ நிலைத்ததாகக் கொண்டு, $a \le t \le b, t \ne x$-க்கு,

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \ \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad \text{----- (9)}$$

என வரையறுக்க.

பின், $\lim_{t\to x} \varphi_n(t) = f_n'(x)$, $\lim_{t\to x} \varphi(t) = f'(x)$.

$$(7) \Rightarrow |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, n \ge N, m \ge N$$

எனவே, $t \neq x$ எனில், $\{\varphi_n\}$ ஆனது சீராக ஒருங்கும்.

$\{f_n\}$ ஆனது f-க்கு ஒருங்குவதால்,

$(9) \Rightarrow a \le t \le b, t \neq x$ எனில், $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, (சீராக)

தேற்றம் 6.12-ஐ $\{\varphi_n\}$-க்குப் பயன்படுத்த,

$$\lim_{t\to x} \varphi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

அதாவது, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

தொடர்களுக்கான, இத்தேற்றம் பின்வருமாறு கூறப்படும்

6.24. தேற்றம்

$\{f_n\}$ ஆனது [a, b]-ல் வகைக்கெழுக் காணத்தக்கச் சார்புகளின் தொடர்வரிசை. [a, b]-ன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x_0-ல் $\sum f_n(x_0)$ என்ற தொடர் ஒருங்குகிறது. மேலும், $\{f_n'\}$ ஆனது [a, b]-ல் சீராக ஒருங்குகிறது எனில், $\{f_n\}$- ம் f-க்குச் சீராக ஒருங்கும் மற்றும் $f'(x) = \sum f_n'(x), x \in [a, b]$.

6.25. தேற்றம்

எந்த புள்ளியிலும் வகைக்கெழு காண முடியாத, ஆனால் மெய் தொடர்ச்சியுடைய மெய் சார்பு மெய்க்கோட்டில் இருக்கும்.

நிறுவல்:

$\varphi(x) = |x|, (-1 \le x \le 1)$

அனைத்து மெய் x-க்கும், $\varphi(x+2) = \varphi(x)$ எனின், $\varphi(x)$-ன் வரையறை விரிவாக்கப்படும்.

எனவே, அனைத்து s, t-க்கு, $|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|$

குறிப்பாக, R^1-ல் φ தொடர்ச்சியாக அமையும்.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$ என வரையறுக்க. ------ (10)

$0 \leq \varphi \leq 1$ என்பதால், R^1-ல் தொடர் (10) ஆனது சீராக ஒருங்கும். (தேற்றம் 6.11)

எனவே, R^1-ல் f தொடர்ச்சியானது. (தேற்றம் 6.12).

x என்ற மெய்யெண்ணையும், m என்ற மிகை முழு எண்ணையும் நிலைத்ததாகக் கொள்க.

$\delta_m = \pm (1/2)(4)^{-m}$ என்க.

இதில், குறியானது எந்த முழு எண்ணும் $4^m x$ மற்றும் $4^m(x + \delta_m)$ இவைகளுக்கிடையில் அமையாதிருக்கும் படி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

$4^m|\delta_m| = 1/2$ என்பதால், இது சாத்தியமாகும்.

$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}$ என வரையறுக்க.

$n > m$ எனில், ஆனது $4^m \delta_n$ இரட்டை எண். எனவே, $\gamma_n = 0$.

$0 \leq n \leq m$ எனில், $|\gamma_n| \leq 4^n$

$|\gamma_m| = 4^m$ என்பதால்,

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(3/4)^n\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \sum_{n=0}^{\infty}(3/4)^n\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(3/4)^n\gamma_n\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{m}(3/4)^n\gamma_n\right| \quad (n > m \Rightarrow \gamma_n = 0)$$

$$\geq (3/4)^m|\gamma_m| - \left|\sum_{n=0}^{m-1}(3/4)^n\gamma_n\right|$$

$$\geq 3^m - \left|\sum_{n=0}^{m-1} 3^n\right| \quad (0 \leq n \leq m \Rightarrow |\gamma_n| \leq 4^n)$$

$$\geq 3^m - (3^m - 1)/2$$

$$= (3^m + 1)/2$$

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \geq (3^m + 1)/2$$

$m \to \infty$ எனில், $\delta_m \to 0$ என்பதால், x-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கதல்ல.

ஒரு தொடரின் சீரான ஒருங்குதலுக்கான போதுமானக் கட்டுப்பாடுகளை இப்பொழுது காண்போம்.

6.26. தேற்றம் (சீரான ஒருங்குதலுக்கான டிரிக்லெட் சோதனை)

E என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்ப்புனை மதிப்பு சார்புகளின் தொடர் $\sum f_n(x)$-ன் n ஆவது பகுதிக் கூட்டல் $F_n(x)$ ஆனது E-ல் சீரான வரம்புடையது என்க. $\{g_n\}$ என்பது, அனைத்து $x \in E$ மற்றும் $n = 1, 2, \ldots$-க்கு $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ என அமையும் மெய்மதிப்பு சார்புகளின் தொடர்வரிசை. E-ல் $\{g_n\}$ ஆனது பூஜ்யத்திற்குச் சீராக ஒருங்குகிறது எனில், E-ல் $\sum f_n(x) g_n(x)$ ஆனது சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(x) \text{ என்க.}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [F_k(x) - F_{k-1}(x)]\, g_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\, g_k(x) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\, g_{k+1}(x) - F_n(x)\, g_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\, [g_k(x) - g_{k+1}(x)] + g_{n+1}(x) F_n(x)$$

எனவே, $n > m$ எனில்,

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)\, [g_k(x) - g_{k+1}(x)] + g_{n+1}(x) F_n(x) - g_{m+1}(x) F_m(x)$$

$\{F_n\}$-ன் சீரான வரம்பு M எனில்,

$$| s_n(x) - s_m(x)| \le M \sum_{k=m+1}^{n} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] + Mg_{n+1}(x) - Mg_{m+1}(x)$$

$$= M[g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)] + Mg_{n+1}(x) - Mg_{m+1}(x)$$

$$= 2Mg_{m+1}(x)$$

E-ல் $\{g_n\}$ ஆனது பூஜ்ஜியத்திற்கு ஒருங்குகிறது என்பதால், தொடர்களுக்கான காஷியின் வரைகூற்றைப் பயன்படுத்த, $\sum f_n(x) g_n(x)$ ஆனது E-ல் சீராக ஒருங்கும்.

6.9. சார்புகளின் சம தொடர்ச்சியான தொகுதிகள்

(Equicontinuous Families of Functions)

ஒவ்வொரு வரம்புடைய மெய்ப்புனை எண்களின் தொடர்வரிசை, ஒரு ஒருங்கும் துணைத் தொடர்வரிசையைப் பெற்றிருக்கும் என்பதை தேற்றம் 2.12-ல் கண்டோம். இது, சார்புகளின் தொடர்வரிசைகளுக்கும் உண்மையா என்பதைக் காண்போம். முதலில், புள்ளிவாரி வரம்புடை சார்புகளை வரையறுப்போம்.

6.27. வரையறை

E என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. அனைத்து $x \in E$-க்கு $\{f_n(x)\}$ என்ற தொடர்வரிசை வரம்புடையதாக அமையும் எனில், $\{f_n\}$, புள்ளிவாரி வரம்புடையது (pointwise bounded) என்போம்.

அதாவது, E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட முடிவுள்ள மதிப்பு சார்பு φ ஆனது $|f_n(x)| < \varphi(x),\ x \in E, n = 1, 2, \ldots$ எனக் காணலாம்.

6.28. வரையறை

X என்ற யாப்பு வெளியின் கணம் E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்ப்புனை சார்புகளின் தொகுதி $\mathcal{F}$ என்க. அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $\delta > 0$ என்பது $x \in E, y \in E$ -க்கு $d(x, y) < \delta$ எனில், $|f(x) - f(y)| < \varepsilon, f \in F$ எனுமாறு இருந்தால், E-ல் $\mathcal{F}$ சமதொடர்ச்சியானது (Equicontinuous) என்போம்.

d என்பது X-ன் யாப்பு ஆகும்.

சமதொடர்ச்சி தொகுதியின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் சீரான தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவு.

6.29. தேற்றம்

$\{f_n\}$ என்பது E என்ற எண்ணத்தக்க கணத்தில் புள்ளிவாரி வரம்புடைய மெய்ப்புனை சார்புகளின் தொடர்வரிசை எனில், $\{f_n\}$ என்பது $\{f_{n_k}\}$ என்ற துணைத் தொடர்வரிசையை, அனைத்து $x \in E$-க்கு $\{f_{n_k}(x)\}$ ஒருங்கும் படியாகப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

$\{x_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots$ என்பன, தொடர்வரிசையில் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட E-ன் புள்ளிகள் என்க.

$\{f_n(x_i)\}$ வரம்புடையது என்பதால், $\{f_{\ell, k}\}$ என்ற துணைத் தொடர்வரிசை, $k\to\infty$ எனில், $\{ f_{\ell, k} (x_i)\}$ ஒருங்குமாறு இருக்கும்.

$S_1, S_2, S_3, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசைகளை எடுத்துக் கொள்க.

$S_1 = f_{1, 1}, \quad f_{1, 2}, \quad f_{1, 3}, \quad f_{1, 4}, \quad \ldots$
$S_2 = f_{2, 1}, \quad f_{2, 2}, \quad f_{2, 3}, \quad f_{2, 4}, \quad \ldots$
$S_3 = f_{3, 1}, \quad f_{3, 2}, \quad f_{3, 3}, \quad f_{3, 4}, \quad \ldots$
... ...

இவைகள் பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

(அ) $n = 2, 3, 4, \ldots$-க்கு S_n ஆனது S_{n-1}-ன் துணைத் தொடர்வரிசை.

(ஆ) $k\to\infty$ எனில், $\{f_{n,k}(x_n)\}$ ஒருங்கும்.

(இ) ஒவ்வொரு தொடவரிசையிலும் சார்புகள் ஒரே வரிசையில் தோன்றும். அதாவது, S_1 -ல் ஒரு சார்பு மற்றொன்றின் முன்னால் வருமாயின், ஒவ்வொரு S_n-லும் அதே தொடர்பில் இருக்கும். (ஒன்று அல்லது மற்றொன்று நீக்கப்படும் வரை)

$S = f_{1, 1}, \quad f_{2, 2}, \quad f_{3, 3}, \quad f_{4, 4}, \quad \ldots$ என்ற தொடர்வரிசை, S_n-ன் துணைத்தொடர்வரிசையாகும். (முதல் n உறுப்புகளைத் தவிர), $n = 1, 2, 3, \ldots$

எனவே, (ஆ) $\Rightarrow$ அனைத்து $x_i \in E$-க்கு, $n\to\infty$ எனில், $\{f_{n,n}(x_i)\}$ ஒருங்கும்.

சமதொடர்ச்சி மற்றும் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசைகளின் சீரான ஒருங்கல் இவைகளுக்குண்டானத் தொடர்பை பின்வரும் இரு தேற்றங்கள் கூறுகின்றன.

6.30. தேற்றம்

K என்பது ஒரு கச்சித யாப்பு வெளி. $n = 1, 2, 3, \ldots$-க்கு $f_n \in \mathcal{C}(K)$ மற்றும் K-ல் $\{f_n\}$ சீராக ஒருங்குகிறது எனில், K-ல் $\{f_n\}$ சம தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. $\{f_n\}$ சீராக ஒருங்குகிறது என்பதால், N என்ற முழு எண், $\| f_n - f_m\| < \varepsilon \ (n > m)$ எனுமாறு இருக்கும்.

கச்சித கணத்தில், தொடர்ச்சியான சார்புகள் சீரான தொடர்ச்சியானவையாதலால்,

$$1 \le i \le N, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \quad \text{----- (11)}$$

என இருக்கும். எனவே, $n > N$ மற்றும் $d(x, y) < \delta$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)|$$
$$< 3\varepsilon$$

இதனுடன் (11)- இணைக்க, K-ல் $\{f_n\}$ சம தொடர்ச்சியாக அமையும்.

6.31. தேற்றம்

K என்ற கச்சித கணம், $n = 1, 2, 3, \ldots$-க்கு $f_n \in \mathcal{C}(K)$ மற்றும் K-ல் $\{f_n\}$ புள்ளிவாரி வரம்புடைய, சம தொடர்ச்சியானது எனில்,

(அ) $\{f_n\}$ ஆனது K-ல் சீரான வரம்புடையது.

(ஆ) $\{f_n\}$ ஆனது சீரான ஒருங்கல் உடைய துணைத்தொடர்வரிசையைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

(அ) $\varepsilon>0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. $\{f_n\}$ சம தொடர்ச்சியானது என்பதால், $\delta > 0$ என்பது $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ (அனைத்து n-க்கும்).

K கச்சிதமானது என்பதால், K-ல் முடிவுள்ள அநேக பல புள்ளிகள் $P_1, \ldots, P_r$ என்பன, ஒவ்வொரு $x \in K$-ம், $d(x, p_i) < \delta$ என அமையும் குறைந்தது ஒரு p_i உடனாவது இணைக்கும்படியாக அமையும்.

$\{f_n\}$ புள்ளிவாரி வரம்புடையது என்பதால், $M_i < \infty$ ஆனது, அனைத்து n-க்கு $|f_n(p_i)| < M_i$ என இருக்கும்.

$M = \text{Max}\{M_1, \ldots, M_r\}$ எனில், அனைத்து $x \in K$-க்கு $|f(x)| < M + \varepsilon$.

எனவே, K-ல் $\{f_n\}$ K-ல் சீரான வரம்புடையது.

(ஆ) E என்பது K-ன் எண்ணத்தக்க அடர் உட்கணம் என்க.

தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ ஆனது, அனைத்து $x \in E$-க்கு $\{f_{n_i}(x)\}$ ஒருங்கும் படியாக,

$\{f_{n_i}\}$ என்ற துணைத் தொடர்வரிசையைப் பெற்றிருக்கும். (தேற்றம் 6.31)

$f_{n_i} = g_i$ என்க.

$\{g_i\}$ ஆனது K-ல் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுவோம்.

$\varepsilon > 0$ என்க. $\delta > 0$.

$V(x, \delta) = \{y \in K: d(x, y) < \delta\}$ என்க.

E ஆனது K-ன் அடர் உட்கணம், K கச்சித கணம் என்பதால், E-ல் முடிவுள்ள அநேக பல புள்ளிகள் $x_1, \ldots, x_m$ என்பன,

$K \subset V(x_1, \delta) \cup \ldots \cup V(x_m, \delta)$ எனுமாறு இருக்கும்.

அனைத்து $x \in E$-க்கு $\{g_i(x)\}$ ஒருங்கும் என்பதால், N என்ற முழு எண்,

$i \geq N, j \geq N, 1 \leq s \leq m$ எனும் பொழுது, $|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon$ எனுமாறு இருக்கும்

$x \in K \Rightarrow \quad x \in V(x_1, \delta) \cup \ldots \cup V(x_m, \delta)$

$\Rightarrow$ ஏதேனும் ஒரு s-க்கு, $x \in V(x_s, \delta)$

$\Rightarrow$ அனைத்து i-க்கு, $|g_i(x) - g_j(x_s)| < \varepsilon$

எனவே, $i \geq N, j \geq N$ எனில்,

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_j(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x)| < 3\varepsilon$$

$\{f_n\}$ என்பது, சீரான ஒருங்கும் துணைத்தொடர்வரிசை $\{f_{n_i}\}$ பெற்றிருக்கும்.

6.10. ஸ்டோன் வயிஸ்ட்ராஸ் தேற்றம் (Stone Weierstrass Theorem)

6.32. தேற்றம்

f என்பது [a, b]-ல் தொடர்ச்சியான மெய்ப்புனை சார்பு எனில், $\{P_n\}$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொடர்வரிசை, [a, b]-ல் f-க்குச் சீராக ஒருங்குமாறு அமையும்.

f மெய் எனில், P_n-ம் மெய்யாக எடுக்கப்பட வேண்டும்.

நிறுவல்:

$[a, b] = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ என்க.

இந்த வகையில், தேற்றம் நிறுவப்படுமானால்,

$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$ $(0 \leq x \leq 1)$ எனில், $g(0) = g(1) = 0$

g ஆனது சீராக ஒருங்கும், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொடர்வரிசையின் எல்லையாகப் பெறப்படுமேயானால், f - g ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதால், இது f-க்கும் உண்மையாகும்.

மேலும், $x \notin [0, 1]$ எனில், $f(x) = 0$ என வரையறுக்க.

எனவே, மெய்க்கொடு முழுவதும், f சீரான தொடர்ச்சியானது.

$Q_n(x) = c_n (1 - x^2)^n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

c_n என்பது, $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ என இருக்கும் படி, தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

$$\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\,dx$$

$$\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,dx, \text{ (ஏனெனில், } (1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ஆனால், $\int_{-1}^{1} c_n (1-x^2)^n \, dx = 1$

எனவே, $1 > \frac{c_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow c_n < \sqrt{n}$

$(1 - x^2)^n - 1 + nx^2$ என்ற சார்பின் மதிப்பு $x = 0$ எனில், பூஜ்யம் ஆகும், $(0, 1)$-ல் அதன் வகைக்கெழுவின் மதிப்பு மிகை என்பதினால் நிறுவப்படுகிறது.

$Q_n(x) = c_n (1 - x^2)^n < \sqrt{n} (1 - x^2)^n$

$\delta \leq |x| \leq 1$ எனில், $Q_n(x) \leq \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n$

எனவே, $\delta \leq |x| < 1$ எனில், Q_n ஆனது பூஜ்ஜியத்திற்குச் சீராக ஒருங்கும்.

$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t) \, Q_n(t) dt, \ (0 \leq x \leq 1)$ என்க.

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x + t) \, Q_n(t) dt$$

$$= \int_{0}^{1} f(t) \, Q_n(t - x) \, dt$$

இது, x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை. எனவே, $\{P_n\}$ ஆனது பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் தொடர்வரிசை. மேலும், f மெய் எனில், P_n-ம் மெய்.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$\delta > 0$ என்பது $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

$M = \sup|f(x)|$ என்க.

$0 \leq x \leq 1$ -க்கு,

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)\, dt\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)\, dt\right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)dt$$

$$\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt$$

$$\leq 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \varepsilon/2 \qquad (Q_n(x) \geq 0)$$

$< \varepsilon$ (n-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு)

எனவே, $\{P_n(x)\}$ ஆனது $[0, 1]$-ல் f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது.

6.33. துணைத்தேற்றம்

$[-a, a]$ என்ற ஒவ்வொரு இடைவெளிக்கும். மெய் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொடர்வரிசை $\{P_n\}$, $P_n(0) = 0$ ஆனது $[-a, a]$-ல் $|x|$-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

தேற்றம் 6.32-ன் படி, $\{P_n^*\}$ என்ற மெய் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் தொடர்வரிசை, $[-a, a]$-ல் $|x|$-க்குச் சீராக ஒருங்கும். குறிப்பாக, $n \to \infty$ எனில், $P_n^*(0) \to 0$.

$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0)$ $(n= 1, 2, 3, ...)$ என்க.

எனவே, $\{P_n(x)\}$ என்ற தொடர்வரிசையானது, $[-a, a]$-ல் $|x|$-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

மேலும், $P_n(0) = 0$

6.34. வரையறை

E என்ற கணத்தில் வரையறுக்கபாட்ட மெய்ப்புனை சார்புகளின் தொகுதி $\mathcal{A}$ என்க. அனைத்து $f \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{A}$ க்கு,

(அ) $f + g \in \mathcal{A}$

(ஆ) $fg \in \mathcal{A}$

(இ) $cf \in \mathcal{A}$, c ஒரு மெய்ப்புனை எண்

என அமையுமானால், $\mathcal{A}$ ஆனது அறமம் (Algebra) எனப்படும்.

அதாவது, $\mathcal{A}$ ஆனது கூட்டல், பெருக்கல், அளவிப் பெருக்கல் (scalar multiplication) ஆகியவற்றின் கீழ் மூடியது.

$\mathcal{A}$ என்பது மெய்சார்புகளின் அறமம் எனில், (இ)-ல் c என்பது மெய் ஆகும்.

$f_n \in \mathcal{A}$ (n = 1, 2, 3, ...) மற்றும் E-ல் $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும். $f \in \mathcal{A}$ எனில், $\mathcal{A}$ ஆனது சீராக மூடியது (uniformly closed) எனப்படும்.

$\mathcal{A}$-ன் உறுப்புகளின் சீராக ஒருங்கும் தொடர்வரிசைகளின் எல்லைச்சார்புகளின் கணம் $\mathcal{B}$ எனில், $\mathcal{B}$ என்பது $\mathcal{A}$- ன் சீரான அடைப்பு (uniform closure) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணம் ஒரு அறமம் ஆகும். எனவே, வயிஸ்ட்ராஸ் தேற்றம் பின்வருமாறுக் கூறப்படும்.

[a, b]-ல் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் கணம் ஆனது, [a, b]-ல் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கணத்தின், சீரான அடைப்பு ஆக அமையும்.

6.35. தேற்றம்

வரம்புடைய சார்புகளின் அறமம் $\mathcal{A}$-ன் சீரான அடைப்பு $\mathcal{B}$ எனில், $\mathcal{B}$ ஆனது சீரான அடைத்த அறமம்.

நிறுவல்:

$f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$ எனில், $\{f_n\}$ மற்றும் $\{g_n\}$ என்ற சீராக ஒருங்கும் தொடர்வரிசைகள் $f_n \to f$, $g_n \to g$, $f_n \in \mathcal{A}$, $g_n \in \mathcal{A}$ எனக் காணலாம்.

சார்புகள் வரம்புடையன என்பதால்,

$f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$, $cf_n \to cf$ ஆகும். (c என்பது மாறிலி)

ஒவ்வொரு வகையிலும், ஒருங்கல் சீரானது. எனவே, $f + g \in \boldsymbol{B}$, $fg \in \boldsymbol{B}$, $cf \in \boldsymbol{B}$

எனவே, $\boldsymbol{B}$ ஒரு அறமம்.

தேற்றம் 1.48-ன் படி $\boldsymbol{B}$ சீராக மூடியது.

6.36. வரையறை

E என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் தொகுதி $\boldsymbol{A}$. ஒவ்வொரு இணை வெவ்வேறான இணைப்புள்ளிகள் $x_1, x_2 \in E$-க்கு $f \in \boldsymbol{A}$ என்பது $f(x_1) \neq f(x_2)$ என அமையுமாயின், $\boldsymbol{A}$ ஆனது E-ன் புள்ளிகளைப் பிரிக்கிறது (separate points) என்கிறோம்.

அனைத்துப் புள்ளி $x \in E$-க்கு, $g_n \in \boldsymbol{A}$ என்ற சார்பு, $g(x) \neq 0$ எனில், E-ன் எந்தப்புள்ளியிலும் மறையவில்லை (vanishes at no point of E) என்கிறோம்.

அனைத்து ஒரு மாறி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் அறமம் R^1-ல் இப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

[-1, 1]-ல் அனைத்து இரட்டை பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் அறமம் புள்ளிகளைப் பிரிக்காது. ஏனெனில், அனைத்து இரட்டை சார்பு f-க்கு $f(-x) = f(x)$.

இந்த கருத்துக்களைப் பின்வரும் தேற்றம் மேலும் எடுத்துக்காட்டுகிறது.

6.37. தேற்றம்

E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் அறமம் $\boldsymbol{A}$ ஆனது, E-ல் புள்ளிகளைப் பிரிக்கிறது. மற்றும் E-ன் எந்தப் புள்ளியிலும் மறையாது. x_1, x_2 என்பன E-ன் வெவ்வேறானப் புள்ளிகள் மற்றும் c_1, c_2 என்பன மாறிலிகள். ($\boldsymbol{A}$ மெய் அறமம் எனில், c_1, c_2-ம் மெய்.) எனில், $\boldsymbol{A}$ ஆனது f என்ற சார்பை $f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$ எனுமாறு பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

கொடுக்கப்பட்ட தற்கோள்களின் படி, $\boldsymbol{A}$ ஆனது g, h, k என்ற சார்புகளை, $g(x_1) \neq g(x_2)$, $h(x_1) \neq 0$, $k(x_2) \neq 0$ எனுமாறுப் பெற்றிருக்கும்.

$u = gk - g(x_1)k$

$v = gh - g(x_2)h$ எனில், $u \in \boldsymbol{A}$, $v \in \boldsymbol{A}$

$$u(x_1) = (gk)(x_1) - g(x_1)k(x_1)$$
$$= g(x_1)k(x_1) - g(x_1)k(x_1) = 0$$

$v(x_2) = 0$, $u(x_2) \neq 0$ மற்றும் $v(x_1) \neq 0$.

எனவே, $f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$ என வரையறுத்தால், $f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$ ஆகும்.

வயிஸ்ட்ராஸ் தேற்றத்தின் ஸ்டோன் பொதுமையாக்கம் (Stone's generalization of Weierstrass Theorem)

6.38. தேற்றம்

K என்ற கச்சித கணத்தில், மெய் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் அறமம் $\boldsymbol{A}$ என்க. K-ல் $\boldsymbol{A}$ புள்ளிகளைப் பிரிக்கிறது மற்றும் K-ன் எந்தப் புள்ளியிலும், $\boldsymbol{A}$ மறையவில்லை எனில், $\boldsymbol{A}$ -ன் சீரான அடைப்பு $\boldsymbol{B}$, K-ல் வரையறுக்கப்பட்ட அனைத்து மெய் தொடர்ச்சியான சார்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

இதன் நிறுவலை, நான்கு படிகளாகப் பிரிப்போம்.

படி 1:

$f \in \boldsymbol{B}$ எனில், $|f| \in \boldsymbol{B}$.

நிறுவல்:

$a = \sup|f(x)|, (x \in K)$ என்க ----- (12)

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

துணைத்தேற்றம் 6.35-ன் படி, $c_1, \ldots, c_n$ என்ற மெய்யெண்கள்,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon, \ (-a \le y \le a)$$

(13)

என அமையும்.

B ஒரு அறமம் என்பதால்,

$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$ ஆனது ***B*** -ன் ஒரு உறுப்பாக இருக்கும்.

எனவே, (11), (12)-ன் படி, $|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \ (x \in K)$

ஆனது சீராக மூடியது என்பதால், $|f| \in \boldsymbol{B}$

படி 2:

$f \in \boldsymbol{B}$, $g \in \boldsymbol{B}$ எனில், $\max(f, g) \in \boldsymbol{B}$ மற்றும் $\min(f, g) \in \boldsymbol{B}$

$\max(f, g) = h$ என்பது,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x), \quad f(x) \ge g(x) \\ &= g(x), \quad f(x) < g(x) \end{aligned}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. $\min(f, g)$-ம் இதைப்போல் வரையறுக்கப்படும்.

நிறுவல்:

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

படி (1)-ன் வாயிலாக, $\max(f, g) \in \boldsymbol{B}$ மற்றும் $\min(f, g) \in \boldsymbol{B}$

மறுசெய்கையினால், (by induction), இந்த முடிவு, முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளுக்கு விரிவாக்கப்படும்.

அதாவது, $f_1, \ldots, f_n \in \boldsymbol{B}$ எனில், $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \boldsymbol{B}$

படி 3:

K-ல் தொடர்ச்சியான மெய்சார்பு f , $x \in K$ என்ற புள்ளி மற்றும் $\varepsilon > 0$ என்பவைக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், $g_x \in \boldsymbol{B}$ என்ற சார்பு $g_x(tx) = f(x)$ மற்றும்

$g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ ----- (14)

என அமையும். $(t \in K)$.

நிறுவல்:

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ மற்றும் $\boldsymbol{A}$ ஆனது தேற்றம் 6.39-ன் கருதுகோள்களை (hypotheses) நிறைவேற்றுவதால், $\boldsymbol{B}$ -ம் நிறைவேற்றும்.

எனவே, அனைத்து $y \in K$-க்கு, $h_y \in \boldsymbol{B}$ என்ற சார்பை,

$h_y(x) = f(x), h_y(y) = f(y)$ ----- (15)

எனுமாறு காணலாம்.

h_y தொடர்ச்சியானது என்பதால், y-ஐத் தன்னடக்கிய J_p என்ற திறந்த கணம்,

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon, (t \in J_p). \quad \text{----- (16)}$$

என இருக்கும்.

K கச்சித கணம் என்பதால், $y_1, ...y_n$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள், $K \subset J_{y1} \cup ... \cup J_{yn}$ ----- (17)

எனுமாறு இருக்கும்.

$g_x = \max(h_{y1}, ..., h_{yn})$ என்க.

படி(2)-ன் படி, $g_x \in \boldsymbol{B}$, $g_x(x) = f(x)$

மேலும், $g_x(t) > f(t) - \varepsilon, (t \in K)$.

படி 4:

K-ல் தொடர்ச்சியான மெய் சார்பு f, $\varepsilon > 0$ என இருப்பின், $h \in \boldsymbol{B}$ என்பது,

$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \ (x \in K)$ என இருக்கும்.

B சீராக மூடியது என்பதால், இந்த கூற்று தேற்றத்தின் முடிவுக்குச் சமானமானது.

நிறுவல்:

ஒவ்வொரு $x \in K$-க்கும், படி(3)-ல் அமைத்த g_x என்ற சார்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

g_x தொடர்ச்சியானது என்பதால், x-ஐக் கொண்ட V_x என்ற திறந்த கணங்கள்,

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon, \ (t \in V_x) \qquad \text{----- (18)}$$

என அமையும்.

K கச்சித கணம் என்பதால், $x_1, \ldots, x_m$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள்,

$$K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m} \qquad \text{----- (19)}$$

என இருக்கும்.

$h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$ என்க.

படி (2) $\Rightarrow h \in \boldsymbol{B}$

$(12) \Rightarrow h(t) > f(t) - \varepsilon, \ (t \in K).$

$(16), (17) \Rightarrow h(t) < f(t) + \varepsilon, \ (t \in K).$

ஆகையால், $|h(t) - f(t)| < \varepsilon, \ (t \in K).$

குறிப்பு:

இத்தேற்றம், ***A*** ஒரு மெய்ப்புனை அறமம் எனில் பொருந்தாது.

6.39. வரையறை

A ஒரு அறமம் என்க. அனைத்து $f \in \boldsymbol{A}$- க்கு, அதன் மெய்ப்புனை இணையிய சார்பு $\overline{f}$-ம் ***A***-ல் இருந்தால், ***A*** ஆனது தன் இணைப்பு அறமம் (self-adjoint algebra) எனப்படும்.

$\overline{f}$ ஆனது $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

6.40. தேற்றம்

K என்ற கச்சித கணத்தில் உள்ள மெய்ப்புனை தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தன் இணைப்பு அறமம் $\mathcal{A}$ ஆனது K-ல் புள்ளிகளைப் பிரிக்கிறது மற்றும் K-ன் எந்தப் புள்ளியிலும் மறையவில்லை எனில், $\mathcal{A}$-ன் சீரான அடைப்பு K-ன் அனைத்து மெய்ப்புனை தொடர்ச்சியானச் சார்புகளைக் கொண்டிருக்கும். அதாவது, $\mathcal{C}(K)$-ல் $\mathcal{A}$ அடர்கணம் ஆகும்.

நிறுவல்:

$\mathcal{A}$ -ல் உள்ள K-ன் அனைத்து மெய்ச்சார்புகளைக் கொண்ட $\mathcal{A}_R$ கணம் என்க.

$f\in \mathcal{A}$ மற்றும் $f = u + iv$, (u, v மெய்) எனில், $2u = f + \bar{f}$.

$\mathcal{A}$ தன் இணைப்பு அறமம் என்பதால், $u\in\mathcal{A}_R$.

$x_1 \neq x_2$ எனில், $f\in \mathcal{A}$ என்பது $f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$ எனக் காணலாம்.

எனவே, $u(x_2) \neq u(x_1) = 1$

ஆகையால், K-ல் $\mathcal{A}_R$ புள்ளிகளைப் பிரிக்கிறது.

$x\in K$ எனில், ஏதேனும் ஒரு $g\in\mathcal{A}$-க்கு $g(x) \neq 0$. மேலும் λ என்ற மெய்ப்புனை எண், $\lambda g(x) > 0$ என இருக்கும்.

$f = \lambda g, f = u + iv$ எனில், $u(x) > 0$.

எனவே, K-ன் எந்தப் புள்ளியிலும், $\mathcal{A}_R$ மறையவில்லை.

ஆகையால், தேற்றம் 6.38-ன் $\mathcal{A}_R$ கருதுகோள்களை நிறைவேற்றுகிறது.

எனவே, K-ன் ஒவ்வொரு மெய் தொடர்ச்சியான சார்பும், $\mathcal{A}_R$-ன் சீரான அடைப்பில் இருக்கும். அதாவது, $\mathcal{B}$-ல் இருக்கும்.

K-ல் f ஒரு மெய்ப்புனை தொடர்ச்சியான சார்பு, $f = u + iv$ எனில், $u\in\mathcal{B}$, $v\in\mathcal{B}$. ஆகையால், $f\in \mathcal{B}$ இது தேற்றத்தை நிறைவேற்றுகிறது.

6.11. சராசரி ஒருங்கல் (Mean Convergence)

இந்த அத்தியாயத்தில் கூறப்பட்ட சார்புகள் மெய் அல்லது மெய்ப்புனை மதிப்புகள் பெற்றவை.

6.41. வரையறை

[a, b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ரீமன் தொகையிடத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. [a, b]-ல் $f \in R^1$ என்க. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ எனில்,

[a, b]-ல் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ ஆனது f-க்கு சராசரி ஒருங்குகிறது என்போம்.

இது, $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ f_n = f$ என எழுதப்படும்.

குறிப்பு:

(அ) அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ எனில்,

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\, dx \leq \varepsilon\,(b - a).$$

ஒவ்வொரு f_n-ம் [a, b]-ல் ரீமன் தொகையிடத்தக்கதாக இருப்பின், [a, b]-ல் $\{f_n\}$-ன் f-க்குச் சீரான ஒருங்கல் சராசரி ஒருங்கலாக அமையும்.

(ஆ) ஆனால், சராசரியில் ஒருங்கல், இடைவெளியின் எந்தப் புள்ளியிலும் புள்ளிவாரி ஒருங்கலைத் தராது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வொரு முழு எண் $n \geq 0$-க்கு, [0, 1] இடைவெளியை 2^n இடைவெளிகளாகப் பிரிக்க.

I_{2n+k} என்பது $(k+1)/2n$ -ஐ வலது முனைப் புள்ளியாகக் கொண்ட உள் இடைவெளி, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$.

இது, [0, 1]-ல் $\{I_1, I_2, \ldots, \}$ என்ற உள் இடைவெளிகளின் தொகுதியைத் தரும்.

$I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, 1./2]$, $I_3 = [1/2, 1]$

$I_4 = [0, 1/4]$, $I_5 = [1/4, 1/2]$, $I_6 = [1/2, 3/4]$,...

$[0, 1]$-ல் f_n-என்ற சார்பை,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \text{ எனில்,} \\ 0, & x \in [0, 1] - I_n \text{ எனில்,} \end{cases}$$

என வரையறுக்க.

பின், $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = I_n$- ன் நீளம்.

இது $n \to \infty$ எனில், $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \to 0$ என்பதால், $\{f_n\}$ ஆனது பூஜ்ஜியத்திற்குச் சராசரி ஒருங்கும்.

மேலும், அனைத்து $x \in [0, 1]$-க்கு $\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = 0$ என்பதால், எந்த $x \in [0, 1]$-க்கும் $\{f_n(x)\}$ ஒருங்காது.

பின்வரும் தேற்றம் சராசரி ஒருங்கலின் முக்கியத்துவத்தைத் தரும். குறிப்பாக, பூரியர் தொடரியலில் இத்தேற்றம் பயன்படுகிறது.

6.42. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ f_n = f$. $[a, b]$-ல் $g \in R^1$ என்க.

$h(x) = \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt$, $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, g(t)\, dt$, $x \in [a, b]$ எனில், $[a, b]$-ல் h_n ஆனது h-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

காஷி- ஸ்குவார்ச்ஷ் சமனின்மையின் படி,

$$0 \le \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|\, |g(t)|\, dt \right)^2$$

$$\leq \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt\right)\left(\int_a^x |g(t)|^2 dt\right) \qquad \text{----- (20)}$$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், N என்ற எண்,

$$n > N \Rightarrow \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt < \varepsilon^2/2A \qquad \text{----- (21)}$$

என இருக்கும்.

$$A = 1 + \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

(21)-ஐ (20)-ல் பிரதியிட,

அனைத்து $x \in [a, b]$-க்கு, $n > N$ எனில், $|h(x) - h_n(x)| < \varepsilon$.

எனவே, $[a, b]$-ல் h_n ஆனது h-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

6.43. தேற்றம்

$[a, b]$-ல் $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ f_n = f$, $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ g_n = g$, $x \in [a, b]$-ல், $h(x) = \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt$, $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, g(t)\, dt$ எனில், $[a, b]$-ல் h_n ஆனது h-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

நிறுவல்:

$$h_n(x) - h(x) = \int_a^x (f - f_n)(g - g_n)\, dt + \left(\int_a^x f_n g\, dt - \int_a^x fg\, dt\right) + \left(\int_a^x f g_n\, dt - \int_a^x fg\, dt\right)$$

காஷி- ஸ்குவார்க்ஷ் சமனின்மையைப் பயன்படுத்த,

$$0 \leq \left(\int_a^b |f - f_n|\, |g - g_n|\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f - f_n|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g - g_n|^2 dt\right)$$

இனி, நிறுவல், தேற்றம் 6.42-லிருந்துப் பெறப்படும்.

இத்தேற்றம் 6.42-ன் பொதுமையாக்கமாகும்.

6.12. பயிற்சி வினாக்கள்

1. E என்ற கணத்தில், $\{f_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்குகிறது மற்றும் E-ல் ஒவ்வொரு f_n-ம் வரம்புடையது எனில், E-ல் $\{f_n\}$ சீராக வரம்புடையது என நிறுவுக.

2. E-ல் $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ என்பன முறையே f, g இவைகளுக்குச் சீராக ஒருங்குகிறது எனில், E-ல் $f_n + g_n \to f + g$ (சீராக) என நிறுவுக. கூடுதலாக, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ என்பன வரம்புடைய சார்புகளின் தொடர்வரிசைகள் எனில், E-ல் $\{f_n g_n\}$ சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

3. $f_n(x) = (e^{-nx})/n$, $x \in (0, \infty)$, எனில், $\{f_n\}$ ஆனது $[0, \infty)$-ல் பூஜ்யத்திற்குச் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

4. [0, 1]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $f_n(x) = x^n(1 - x)$ ஆனது சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

5. [a, b]-ல் $\sum |f_n(x)|$ சீராக ஒருங்கும் எனில், $\sum f_n(x)$-ம் சீராக ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ என்ற தொடர் ஒவ்வொரு வரம்புடைய இடைவெளியிலும், சீராக ஒருங்கும். ஆனால், x-ன் எந்த மதிப்புக்கும் அற ஒருங்காது என நிறுவுக.

7. $\{f_n\}$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை, E-ல் f என்ற சார்புக்குச் சீராக ஒருங்கும் என்க. $x \in E$ என்க. $\{x_n\}$ என்ற E-ன் புள்ளிகளின் ஒவ்வொரு தொடர்வரிசையும் x-க்கு ஒருங்கும் எனில், $f_n\{x_n\} \to f(x)$ என நிறுவுக. இதன் மறுதலை உண்மையா?

8. $\sum x^n(1-x)$ என்பது $[0, 1]$-ல் புள்ளிவாரி ஒருங்கும். ஆனால், சீராக ஒருங்காது என நிறுவுக. மேலும், $\sum(-1)^n x^n(1-x)$ என்பது $[0, 1]$-ல் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

9. $\sum a_n$ என்பது மிகை உறுப்புகளின் இறங்கும் தொடர். $\sum a_n \sin nx$ என்ற தொடர் R^1-ல் சீராக ஒருங்கும் $\Leftrightarrow$ $n\to\infty$ எனில் $na_n \to 0$ என நிறுவுக.

10. $\{f_n\}, \{g_n\}$ என்ற இரு தொடர்வரிசைகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$$f_n(x) = x\left(1+\frac{1}{n}\right), x\in R^1, n = 1, 2, \ldots$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = 0 \text{ அல்லது } x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ b+\frac{1}{n}, & x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$$

$h_n(x) = f_n(x)\, g_n(x)$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\{f_n\}, \{g_n\}$ இவை இரண்டும் ஒவ்வொரு வரம்புடைய இடைவெளியிலும் சீராக ஒருங்கும்.

(ஆ) எந்த ஒரு வரம்புடைய இடைவெளியிலும், $\{h_n\}$ சீராக ஒருங்காது.

11. E-ல் $\{f_n\}, \{g_n\}$ என்பன வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன என்க. மேலும்,

(அ) $\sum f_n$, சீராக வரம்புடைய பகுதிக் கூட்டலைப் பெற்றிருக்கும்.

(ஆ) E-ல் $g_n \to 0$ (சீராக)

(இ) அனைத்து $x\in E$-க்கு, $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \ldots \ldots$ எனில்,

$\sum f_n g_n$ சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

12. R^1-ல் $\{f_n\}$ என்பது ஒருபோக்கு ஏறும் சார்புகளின் தொடர்வரிசை. அனைத்து x, n-க்கு, $0 \le f_n(x) \le 1$ என்க.

(அ) f என்ற சார்பு, $\{n_k\}$ என்ற தொடர்வரிசை, அனைத்து $x \in R^1$-க்கு,

$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{nk}(x)$ என நிறுவுக

(ஆ) மேலும், f தொடர்ச்சியானது எனில், R^1-ல் $\{f_{nk}\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

13. S என்ற கச்சித கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை $\{f_n\}$ என்க. மேலும், $\{f_n\}$ ஆனது, S-ல் புள்ளிவாரியாக f என்ற எல்லைச் சார்புக்குச் ஒருங்குகிறது என்க. $\{f_n\}$ ஆனது S-ல் f சீராக ஒருங்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடுகள்:

(அ) எல்லைச் சார்பு f ஆனது S-ல் தொடர்ச்சியானதாக அமையும்.

(ஆ) அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $m > 0, \delta > 0$ என்பன, $n > m$ மற்றும் $|f_n(x) - f(x)| < \delta \Rightarrow$ அனைத்து $x \in S$-க்கு, அனைத்து $k = 1, 2, \ldots$-க்கு, $|f_{k+n}(x) - f(x)| < \varepsilon$ என்றவாறு அமையும்.

14. K என்ற கச்சித கணத்தில், $\{f_n\}$ என்பது சமதொடர்ச்சியான சார்புகளின் தொடர்வரிசை. K-ல் $\{f_n\}$ புள்ளிவாரியாக ஒருங்கும் எனில், K-ல் $\{f_n\}$ சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

15. $\{f_n\}$ என்பது, சீராக வரம்புடைய சார்புகளின் தொடர்வரிசை. மேலும், அவைகள் [a, b]-ல் ரீமன் தொகையிடத்தக்கது. $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$, $(a \le x \le b)$ எனில், $\{F_{nk}\}$ என்ற துணைத்தொடர்வரிசை [a, b]-ல் சீராக ஒருங்கும் என நிறுவுக.

16. [0, 1]-ல் f தொடர்ச்சியானது. மேலும், $\int_0^1 f(x)\, x^n dx = 0,$

$(n = 0, 1, 2 \ldots)$ எனில், [0, 1]-ல் $f(x) = 0$ என நிறுவுக.

17. $P_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ –க்கு, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x^2 - P_n^2(x))/2$ எனில், [-1, 1]-ல் $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$ (சீராக) என நிறுவுக.

18. $f_n(x) = n^{3/2}x \exp(-n^2x^2)$ என்க. [-1, 1]-ல் $\{f_n\}$ ஆனது பூஜ்ஜியத்திற்குப் புள்ளிவாரியாக ஒருங்கும். ஆனால், [-1, 1]-ல் $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, f_n \neq 0$ எனக் காட்டுக.

19. [a, b]-ல் $\{f_n\}$ புள்ளிவாரியாக f-க்கு ஒருங்குகிறது. மேலும், $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, f_n = g$ என்க. [a, b]-ல் f மற்றும் g என்பன தொடர்ச்சியானவை எனில், f = g எனக் காட்டுக.

20. $f_n(x) = \cos^n x,\ 0 \le x \le \pi$ என்க.

(அ) $[0, \pi]$-ல் $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, f_n = 0$, ஆனால், $f_n(\pi)$ ஒருங்காது என நிறுவுக.

(ஆ) $\{f_n\}$ புள்ளிவாரியாக ஒருங்கும். ஆனால், $[0, \pi/2]$-ல் சீராக ஒருங்காது என நிறுவுக.

****

அத்தியாயம் 7

பலமாறி சார்புகள்

(Functions of Several Variables)

இது வரை, ஒரே ஒரு சாரா மாறியுடைய சார்புகளை ஆராய்ந்தோம். இப்போது, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகளையுடைய சார்புகளின் பண்புகளைக் காண்போம். அவைகளின் வகையிடத் தக்கமை, சுருக்கக் கொள்கை, நேர்மாறு சார்பு தேற்றம், உள்ளார்ந்த சார்பு தேற்றம், தர எண் தேற்றம், உயர் வரிசை வகைகெழுக்கள் ஆகியவற்றை ஆராய்வோம்.

யூக்ளிடின் n-வெளி R^n-ல் திசையன்களின் கணத்தை முதலில் விவாதிப்போம்.

7.1. நேரியல் உருமாற்றங்கள் (Linear Transformations)

7.1. வரையறைகள்

(அ) $X \subset R^n$ என்ற வெற்றற்ற கணத்தில், அனைத்து $x \in X$, $y \in X$, அனைத்து அளவிகள் (scalars) c-க்கு, $x + y \in X$, $cx \in X$ என அமையுமானால், X ஒரு திசையன் வெளி எனப்படும்.

(ஆ) $x_1, \ldots, x_k \in R^n$; மற்றும் $c_1, \ldots, c_k$ என்பன அளவிகள் எனில், $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k$ என்ற திசையன் $x_1, \ldots, x_k$-ன் நேரியல் கூட்டு (Linear Combination) எனப்படும்.

$S \subset R^n$ மற்றும் E என்பது S-ன் உறுப்புகளின் நேரியல் கூட்டுகளின் கணம் எனில், E ஆனது S-ன் அளாவல் (Span) எனப்படும்.

ஒவ்வொரு அளாவலும் திசையன் வெளியாகும்.

(இ) $x_1, \ldots, x_k$ என்ற திசையன்களைக் கொண்ட கணத்தில், $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$ ஆனது $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ எனத் தருமானால், அக்கணம் சார்பற்ற கணம் எனப்படும்.

அவ்வாறு இல்லையெனில், $\{x_1, ..., x_k\}$ என்ற கணம் சார்ந்த கணம் எனப்படும்.

எந்த ஒரு சார்பற்ற கணமும், சுழி திசையனைப் பெற்றிருக்காது.

(ஈ) X என்ற திசையன் வெளியில், r திசையன்களைக் கொண்ட கணம், ஒரு சார்பற்ற கணமாகவும், (r+1) திசையன்கள் கண்ட கணம் சார்ந்த கணமாகவும் இருப்பின், X-ன் பரிமாணம் r எனப்படும். இது, பரிமாணம் X = r என எழுதப்படும்.

0 என்ற திசையனை மட்டுமே கொண்ட திசையன் வெளியின் பரிமாணம் பூஜ்யம் ஆகும்.

(உ) X என்ற திசையன் வெளியில், சார்பற்ற உட்கணம் ஒன்று, X- ன் அளாவலாகவும் அமையின், அக்கணம் X-ன் அடிக்கணம் (Basis) என்றழைக்கப்படும்.

$B = \{x_1, ..., x_r\}$ என்பது X-ன் ஒரு அடிக்கணம் எனில், அனைத்து $x \in X$ ஆனது, $x = \sum c_j x_j$ என்ற தனித்தன்மையான அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

B ஆனது X-ன் அளாவல் என்பதால், மேலேக் கண்ட அமைப்பு சாத்தியமாகும். B சார்பற்ற கணம் என்பதால், அந்த அமைப்பு தனித்தன்மை உடையது.

$c_1, ..., c_r$ என்ற எண்கள், அடிக்கணம் B-ஐப் பொறுத்து x-ன் ஆயங்கள் (coordinates) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, R^n-ன் ஒரு உட்கணம் $\{e_1, ..., e_n\}$ ஆனது, R^n-ன் அடிக்கணம் ஆகும். e_j என்பது, j ஆவது ஆயம் 1 ஆகவும் மற்ற ஆயங்கள் 0 ஆகவும் உள்ள திசையன் ஆகும். $x \in R^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ எனில், $x = \sum x_j e_j$, $\{e_1, ..., e_n\}$ என்பது R^n-ன் திட்ட அடிக்கணம் (standard basis) எனப்படும்.

7.2. தேற்றம்

r என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண். r. திசையன்கள் கொண்ட கணம், X என்ற திசையன் வெளியின் அளாவலாக இருப்பின், X-ன் பரிமாணம் $\leq r$ ஆக இருக்கும்.

நிறுவல்:

இது உண்மையல்ல எனில், X என்ற திசையன் வெளி, $Q = (y_1, \ldots, y_{r+1}\}$ என்ற சார்பற்ற கணத்தையும், r திசையன்கள் கொண்ட கணம் S_0-ஐ அளவலாகவும் பெற்றிருக்கும்.

$0 \leq i < r$ என்க.

S_i என்ற கணம், X-ன் அளாவலாகவும், y_j, $1 \leq j \leq i$ என்ற திசையன்களயும், அதனுடன் S_0-ன் i உறுப்புகளான $x_1, \ldots, x_{r-1}$ இவைகளையும் கொண்டது என்க. (அதாவது, S_0-ன் i உறுப்புகளை, Q-உறுப்புகளாக மாற்றியமைத்து, அளாவல் மாறாமல் அமைக்கப்பட்டக் கணம் S_i ஆகும்.)

S_i ஆனது, X-ன் அளாவலாக அமைவதால், y_{i+1} ஆனது S_0-ன் அளாவலில் இருக்கும். எனவே, $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{r-i}, a_{i+1} = 1$ என்ற அளவிகள், $\sum_{j=1}^{i+1} a_i y_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k x_k = 0$ என அமையும்.

அனைத்து b_k-ம் பூஜ்யம் என்க.

Q சார்பற்ற கணம் என்பதால், அனைத்து a_j-ன் மதிப்புகளும் பூஜ்யம்.

இது முரண்பாடு.

எனவே, அனைத்து b_k-ம் பூஜ்யம் அல்ல.

ஏதேனும் ஒரு $x_k \in Si$ என்பது, $T_i = S_i \cup \{y_{i+1}\}$-ன் மற்ற உறுப்புகளின் நேரியல் கூட்டு ஆகும்.

இந்த x_k-ஐ T_i-ல் இருந்து நீக்கி, மீதியுள்ள கணம் S_{i+1} ஆனது, S_i-ல் i-க்குப் பதிலாக $i+1$ மாற்றியமைத்த கணத்தில் உள்ள பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

S_0-ல் ஆரம்பித்து., $S_1, \ldots, S_r$ என்ற கணங்கள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இதில், கடைசியுள்ள கணம் S_r ஆனது $y_1, \ldots, y_r$ புள்ளிகளைப் பெற்று, அதன் அமைப்பின் படி, S_r ஆனது X-ன் அளாவலாகவும் அமையும்.

Q சார்பற்றது என்பதால், y_{r+1} ஆனது, S_r-ன் அளாவலில் அமையாது.

இது முரண்பாடு.

எனவே, X-ன் பரிமாணம் $\leq r$ ஆக அமையும்.

7.3. துணைத்தேற்றம்

R^n-ன்பரிமாணம் $= n$.

நிறுவல்:

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ ஆனது, R^n-ன் அளாவலாக அமைவதால், R^n-ன் பரிமாணம் $\leq n$.

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ சார்பற்றது என்பதால், R^n-ன் பரிமாணம் $\geq n$.

7.4. தேற்றம்

X என்ற திசையன் வெளியின் பரிமாணம் n எனில்,

(அ) X-ன் n திசையன்களின் கணம் E ஆனது X-ன் அளாவலாக அமையும் $\Leftrightarrow E$ சார்பற்றது.

(ஆ) X ஒரு அடிக்கணத்தைப் பெற்றிருக்கும். மேலும், அனைத்து அடிக்கணங்களும் n திசையன்களைப் பெற்றிருக்கும்.

(இ) $1 \leq r \leq n$ மற்றும் $\{y_1, \ldots, y_r\}$ ஆனது, X-ன் சார்பற்ற கணம் எனில், X ஆனது $\{y_1, \ldots, y_r\}$ என்பதைக் கொண்ட ஒரு அடிக்கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

நிறுவல்:

(அ) $E = \{x_1, ..., x_n\}$; X-ன் பரிமாணம் = n என்பதால், அனைத்து $y \in X$ க்கு $\{x_1, ..., x_n, y\}$ என்பது சார்ந்தக் கணமாக அமையும்,

E சார்பற்ற கணம் எனில், y ஆனது E-ன் அளாவலில் அமையும்.

எனவே, X-ன் அளாவல் E ஆகும்.

மறுதலையாக, E சார்ந்த கணம் எனில், E-ன் அளாவலை மாற்றியமைக்காமல், அதன் ஏதேனும் ஒரு உறுப்பை நீக்க முடியும். தேற்றம் 7.2-ன் படி, E ஆனது X-ன் அளாவலாக அமைய முடியாது. ஆகையால், X ஒரு சார்பற்ற கணம்.

(ஆ) X-ன் பரிமாணம் n ஆனதால், X ஆனது n திசையன்களைக் கொண்ட ஒரு சார்பற்ற கணத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

(அ)-ன் படி, இந்த ஒவ்வொரு கணமும், X-ன் அடிக்கணம் ஆகும்.

மேலும், 7.1 (ஈ) மற்றும் தேற்றம் 7.2-ன் படி, ஒவ்வொரு அடிக்கணமும் n திசையன்களைப் பெற்றிருக்கும்.

(இ) $\{x_1, ..., x_n\}$ என்பது X-ன் ஒரு அடிக்கணம் என்க.

$S = \{y_1, ..., y_r, x_1, ..., x_n\}$ என்ற கணம் n-ஐ விட அதிகமான திசையன்களைப் பெற்றிருப்பதால், அக்கணம் X-ன் அளாவலாகவும், சார்ந்த கணமாகவும் அமையும்.

எனவே, x_i-ல் ஏதேனும் ஒன்று, S-ன் மற்ற உறுப்புகளின் நேரியல் கூட்டாக அமையும். இந்த x_i-ஐ S-ல் இருந்து நீக்க கிடைக்கும் கணமும், X-ன் அளாவலாக அமையும்.

இந்த முறையை, r தடவைகள் தொடரின், (அ)-ன் படி, $\{y_1, ..., y_r\}$ என்ற கணம் X-ன் அடிக்கணமாக அமையும்.

7.5. வரையறை (நேரியல் உருமாற்றம்)

திசையன் வெளி X-லிருந்து திசையன் வெளி Y-க்கு A என்ற சார்பிடல் (mapping) ($A: X \rightarrow Y$), அனைத்து $x, x_1, x_2 \in X$, அனைத்து அளவிகள் c-க்கு, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,

$A(cx) = cAx$ என அமையின், A ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் எனப்படும்.

A நேரியல் எனில், A(x) ஆனது Ax எனக் குறிப்பிடப்படுவதுண்டு, மேலும், $A0 = 0$.

குறிப்பு:

$A: X \rightarrow Y$ என்பது ஒரு நேரியல் உருமாற்றம். $\{x_1, ..., x_n\}$ ஆனது X-ன் ஒரு அடிக்கணம் எனில், அனைத்து $x \in X$, $x = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i$ என்ற தனித்துவமான அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும். A நேரியல் என்பதால், $Ax = \sum_{j=1}^{n} c_i Ax_i$

7.6. வரையறை

X-லிருந்து X-க்கு ($A: X \rightarrow X$) நேரியல் உருமாற்றங்கள் X-ல் நேரியல் செயலிகள் எனப்படும்.

X-ல் A என்ற நேரியல் செயலி, ஒன்றுக்கொன்றான, மேல் சார்பிடலாக அமையின், A ஆனது நேர்மாற்றல் உடையது (invertible) எனப்படும்.

இந்த வகையில், X-ல் A^{-1} என்ற செயலி, அனைத்து $x \in X$-க்கு, $A^{-1}(Ax) = x$ என அமையும்.

மேலும், அனைத்து $x \in X$-க்கு, $A(A^{-1}x) = x$, மற்றும் A^{-1} நேரியல் செயலியாக இருக்கும்.

7.7. தேற்றம்

X என்ற முடிவுள்ள பரிமாணமுடைய திசையன் வெளியில், A என்ற நேரியல் செயலி, ஒன்றுக்கொன்றானதாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: A-ன் வீச்சு X ஆக இருப்பதாகும்.

நிறுவல்:

$\{x_1, ..., x_n\}$ என்பது X-ன் ஒரு அடிக்கணம் என்க. A நேரியல் செயலி என்பதால், A- ன் வீச்சு $\Re(A)$ என்பது $Q = \{Ax_1, ..., Ax_n\}$ என்ற அளாவல் ஆகும்.

எனவே, $\Re(A) = X \Leftrightarrow Q$ சார்பற்ற கணம் என நிறுவினால் போதுமானது.

(தேற்றம் 7.5(அ))

அதாவது, Q சார்பற்ற கணம் $\Leftrightarrow$ A ஒன்றுக்கொன்றானது என நிறுவ வேண்டும்.

A ஒன்றுக்கொன்றானது மற்றும் $\sum c_i Ax_i = 0$ என்க.

எனவே, $A(\sum c_i x_i) = 0$

$\Rightarrow \sum c_i x_i = 0$

$\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$

$\Rightarrow Q$ சார்பற்ற கணம்.

மறுதலையாக, Q சார்பற்ற கணம் மற்றும் $A(\sum c_i x_i) = 0$ என்க.

ஆகையால், $\sum c_i Ax_i = 0$

$\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$

எனவே, $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$Ax = Ay \Rightarrow A(x - y) = Ax - Ay = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

A ஒன்றுக்கொன்றானாதாகும்.

7.8. வரையறைகள்

(அ) திசையன் வெளி X-லிருந்து Y-க்கு அனைத்து நேரியல் உருமாற்றங்களின் கணம் $L(X, Y)$ என்க. $L(X, X)$-க்குப் பதிலாக, $L(X)$ என எழுதுவது வழக்கம்.

$A_1, A_2 \in L(X, X)$; c_1, c_2 என்பன அளவிகள் எனில், $c_1A_1 + c_2A_2$ என்பது, $(c_1A_1 + c_2A_2)x = c_1A_1x + c_2A_2x$ $(x \in X)$ என வரையறுக்கப்ப்டுகிறது.

மேலும், $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, X)$

(ஆ) X, Y, Z என்பன திசையன் வெளிகள்.

$A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$ எனில், BA என்ற பெருக்கல், $(BA)(x) = B(Ax)$ $(x \in X)$ என வரையறுக்கப்ப்டுகிறது. மேலும், $BA \in L(X, Z)$

$X = Y = Z$ ஆக இருந்தாலும், BA ஆனது AB-க்குச் சமமாக இருக்கத்தேவையில்லை.

(இ) $A \in L(R^n, R^m)$-க்கு, A-ன் அலகை $||A|| = \sup\{|Ax| : x \in R^n, |x| \leq 1\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அனைத்து $x \in R^n$-க்கு, $|Ax| \leq \lambda|x|$ எனில், $||A|| \leq \lambda$ ஆகும்.

பின்வரும் தேற்றத்தில், $L(R^n, R^m)$ ஒரு யாப்பு வெளி என நிறுவுவோம்.

7.9. தேற்றம்

(அ) $A \in L(R^n, R^m)$ எனில், $||A|| < \infty$.மேலும், $A: R^n \to R^m$ சீரான தொடர்ச்சியானது.

(ஆ) $A, B \in L(R^n, R^m)$, c ஒரு அளவி எனில்,

$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,

$||cA|| = |c| \, ||A||$

A, B இவைகளுக்கிடையாயான தூரம் $||A - B||$ என வரையறுக்கப்படின், $L(R^n, R^m)$, ஆனது ஒரு யாப்பு வெளி.

(இ) $A\in L(R^n, R^m)$, $B\in L(R^n, R^m)$ எனில், $||BA|| \le ||B||\ ||A||$

நிறுவல்:

(அ) R^n-ன் திட்ட அடிக்கணம் $\{e_1, ..., e_n\}$ என்க.

$x = \sum c_i e_i$, $|x| \le 1$ எனில், $|c_i| \le 1$, $I = 1, 2, ..., n$.

எனவே, $|Ax| = |A\sum c_i e_i|$

$$= |\sum ciAei|$$

$$\le \sum |c_i|\ |Ae_i|$$

$$\le \sum |Ae_i|$$

$$\Rightarrow ||A|| \le \sum_{i=1}^{n} |Ae_i| < \infty$$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$x, y \in R^n$ எனில், $\delta > 0$ என்ற எண், $|x - y| < \delta$ என உள்ளது என்க.

$\delta = \varepsilon/||A||$ எனில்,

$$|Ax - Ay| = |A(x - y)| \le ||A||\ |x - y| < \varepsilon$$

எனவே, A சீரான தொடர்ச்சியானது.

(ஆ) (i) $A\in L(R^n, R^m)$ என்க.

$x\in R^n$ எனில்,

$$|(A+B)(x)| \le |Ax + Bx| \le |Ax| + |Bx|$$

$$\le (||A|| + ||B||)\ |x|$$

எனவே, $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$

(ii) இதைப்போல், c ஒரு அளவி எனில்,

$$|(cA)x| \le |cA(x)| = |c|\ ||A||\ |x|$$

எனவே, $||cA|| = |c|\ ||A||$

(iii) $d(A, B) = ||A - B||$ என வரையறுக்கப்பட்ட தூரம் ஒரு யாப்பு என நிறுவ வேண்டும்.

(அ) $d(A, B) = ||A - B|| > 0; A \neq B$

$d(A, B) = 0$

(ஆ) $d(A, B) = d(B, A)$

(இ) $A, B\ C \in L(R^n, R^m)$ என்க.

$$||A - C|| = ||(A - B) + (B - C)||$$
$$\leq ||A - B|| + ||B - C|| \text{ (முக்கோண சமனின்மை)}$$

எனவே, $L(R^n, R^m)$ ஒரு யாப்பு வெளியாக அமையும்.

(இ) $x \in R^n$ எனில்,

$$|(BA)(x)| = |B(Ax)| \leq ||B||\ |Ax|$$
$$\leq ||B||\ ||A||\ |x|$$
$$\Rightarrow ||BA|| \leq ||B||\ ||A||$$

7.10. தேற்றம்

Ω என்பது அனைத்து நேர்மாற்றல் உடைய நேரிய செயலிகளின் கணம் என்க.

(அ) $A \in \Omega, B \in L(R^n)$ மற்றும் $||B-A||\ ||A^{-1}|| < 1$ எனில், $B \in \Omega$.

(ஆ) Ω ஆனது $L(R^n)$-ன் திறந்த கணம். மேலும், Ω-ல் $A \to A^{-1}$ என்ற சார்பிடல் தொடர்ச்சியானது.

நிறுவல்:

(அ) $||A^{-1}|| = 1/\alpha, ||B - A|| = \beta$ எனில்,

$$||B - A||\ ||A^{-1}|| < 1 \Rightarrow \beta(1/\alpha) < 1 \Rightarrow \beta < \alpha.$$

அனைத்து $x \in R^n$-க்கு,

$$\alpha|x| = \alpha|A^{-1}Ax| \leq \alpha||A^{-1}||\ |Ax|$$
$$= |Ax|$$
$$= |(A - B+B)x|$$
$$\leq |(A - B)x| + |Bx|$$
$$\leq ||A - B||\ |x| + |Bx|$$
$$\leq \beta|x| + |Bx|$$

எனவே, $\alpha|x| - \beta|x| \le |Bx|$

$(\alpha - \beta)|x| \le |Bx|, (x \in R^n)$ ----- (1)

$\alpha - \beta > 0 \Rightarrow x \ne 0$ எனில், $Bx \ne 0$.

எனவே B ஒன்றுக்கொன்றானது.

தேற்றம் 7.7-ன் படி, $B \in \Omega$.

இது, $||B-A|| < \alpha$ என அமையும் அனைத்து B-க்கு உண்மையாதலால், Ω ஒரு திறந்த கணமாக அமையும்.

(ஆ) (1)-ல் x-ஐ $B^{-1}y$ ஆல் மாற்ற,

$(\alpha - \beta) |B^{-1}y| \le |BB^{-1}y| = |y|, (y \in R^n)$

$\Rightarrow ||B^{-1}|| \le (\alpha-\beta)^{-1}$

மேலும், $||B^{-1} - A^{-1}|| = || B^{-1} (A - B)A^{-1} ||$

$$\le ||B^{-1}|| \, ||A - B|| \, ||A^{-1}||$$

$$\le \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}$$

$B \to A$ எனில், $\beta \to 0 \Rightarrow B^{-1} \to A^{-1}$

ஆகையால், $A \to A^{-1}$ என்ற சார்பிடல் தொடர்ச்சியானது.

7.2. அணிகள்

X, Y என்ற வெக்டர்வெளிக்ளின் அடிக்கணங்கள் முறையே $\{x_1, ..., x_n\}$, $\{y_1, ..., y_m\}$ என்க.

எனவே, அனைத்து $A \in L(X, Y)$ ஆனது, $Ax_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \, (1 \le j \le n)$ என அமையும். a_{ij} என்ற எண்களைத் தீர்மானிக்கும் இந்த எண்களை, m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வக அணியாக

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

என அமைக்கப்படும்.

இங்கு, Ax_j திசையனின், a_{ij} -ன் ஆய அச்சுகள் $\{y_1, \dots, y_m\}$ என்ற அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து, [A]-ன் j ஆவது நிரலாக அமையும்.

ஆகவே, Ax_j என்ற திசையன்கள், [A]-ன் நிரல் திசையன்கள் என அழைக்கப்படும். [A]-ன் நிரல் திசையன்களின் அளாவல், A-ன் வீச்சாக அமையும்.

$$x = \sum c_j x_j \text{ எனில், } Ax = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) y_i$$

எனவே, Ax-ன் ஆய அச்சுகள் $\sum_j a_{ij} c_j$ ஆக இருக்கும்.

அடுத்ததாக, a_{ij} என்ற மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட mxn அணி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

A ஆனது, $Ax = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) y_i$ என வரையறுக்கப்படின், $A \in L(X, Y)$.

மேலும், [A] என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியாக அமையும்.

எனவே, L(X, Y) மற்றும் அனைத்து மெய் m x n அணிகளின் கணம் இவைகளுக்கிடையே ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு இருக்கும்.

[a] ஆனது A-ஐ மட்டும் சார்ந்திராமல், X மற்றும் Y இவைகளின் அடிக்கணங்களையும் பொறுத்தமையும்.

அடிக்கணங்களை மாற்றும் போது, ஒரே A-க்கு வெவ்வேறான அணிகள் கிடைக்கும், மறுதலையாக, வெவ்வேறான அணிகளுக்கு, அடிக்கணங்கள் வெவ்வேறாக அமையும்.

$\{z_1, ..., z_p\}$ அடிக்கணமாகக் கொண்ட மூன்றாவது திசையன் வெளி Z என்க

A என்பது, $Ax_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ என அமையின்,

$By_i = \sum_k b_{ki} z_k$ எனில், $(BA)x_j = \sum_k c_{kj} z_k$ எனில், $A \in L(X, Y)$,

$B \in L(Y, Z)$, மற்றும் $BA \in L(X, Z)$.

$$B(Ax_j) = B\sum_i a_{ij} y_i$$

$$= \sum_i a_{ij} By_i$$

$$= \sum a_{ij} \sum_k b_{ki} z_k = \sum_k (\sum_i b_{ki} a_{ij}) z_k$$

$\{z_1, ..., z_p\}$ சார்பற்ற கணம் என்பதால், $c_{kj} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ij}$,

$(1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq n)$

இது, [B], [A]-ல் இருந்து [BA] என்ற p x n அணி அமைப்பதைக் காட்டுகிறது.

[B][A] என்ற அணி பெருக்கம் [BA] என வரையறுக்கப்படின் $\sum_i b_{ki} a_{ij}$ என்பது அணி பெருக்கலின் வழக்கமான விதியை விவரிக்கிறது.

முடிவாக, R^n, R^m இவைகளின் திட்ட அடிக்கணங்கள் முறையே, $\{x_1, ..., x_n$ மற்றும் $\{y_1, ..., y_m\}$ என்க.

A என்பது, $A = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j) y_i$ எனக் கொடுக்கப்படின், ஸ்குவார்ஸ் சமனின்மை,

$$|Ax|^2 = \sum_i (\sum_j a_{ij} c_j)^2 \leq \sum_i (\sum_j a_{ij}^2 \sum_j c_j^2) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 |x|^2$$ -ஐத் தரும்.

எனவே, $||A|| \leq [\sum_{i,j} a_{ij}^2]^{1/2}$ ஆகும்

7.3. வகையிடல் (Differentiation)

இங்கு, R^n-ஐ அரங்கமாகக் கொண்ட சார்புகளின் வகைக்கெழுவினைப் பற்றி காண்போம்.

7.11. முந்தைய வரையறைகள்

(அ) $(a, b) \subset R^1$-ஐ அரங்கமாகக் கொண்ட மெய்சார்பு f. $x \in (a, b)$ எனில், $f'(x)$ என்பது $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என வரையறுக்கப்பட்ட மெய்யெண். (மேலேக் கண்ட எல்லை இருக்க வேண்டும்)

எனவே, $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$. இங்கு, $r(h)$ என்ற மீதி சிறியது.

அதாவது, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$

(ஆ) $f: (a, b) \subset R^1 \to R^m$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்க.

$f'(x)$ என்பது $\lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{f(x+h) - f(x) - y}{h} \right] = 0$ என வரையறுக்கப்பட்ட $x \in R^m$ என்ற திசையன். இதனை, $f(x+h) - f(x) = hy + r(h)$ ----- (2)

$h \to 0$ எனில், $\dfrac{r(h)}{h} \to 0$

(2)-ன் வலது பக்க உறுப்பு, h-ன் ஒரு நேரியல் சார்பாகும்.

எனவே, $f: (a, b) \subset R^1 \to R^m$ என்பது வகைமையுறு சார்பிடல். $x \in (a, b)$ எனில், $f'(x)$ ஆனது, $R^1 \to R^m$ வரையிலான, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$ என்பதை நிறைவேற்றும் ஒரு நேரியல் உருமாற்றம், அல்லது,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0.$$

7.12. தேற்றம்

R^n-ன் ஒரு திறந்த கணம் E. f: $E \to R^m$ மற்றும் $x \in E$. A: $R^n \to R^m$ என்ற நேரியல் உருமாற்றம் $\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$ ----- (3)

என அமையின், x-ல் f வகைமையான சார்பு எனப்படும். இது, $f'(x) = A$ என எழுதப்படும்.

அனைத்து $x \in E$-க்கும், f வகைமையுறும் எனில், E-ல் f வகையிடத்தக்கது என்போம்.

(3)-ல் $h \in R^n$.

$|h|$ மிகச் சிறியது எனில், E திறந்த கணம் என்பதால், $x + h \in E$.

எனவே, $f(x + h)$ வரையறுக்கப்படுகிறது, $f(x + h) \in R^m$, $A \in L(R^n, R^m)$ என்பதால், $Ah \in R^m$.

ஆகையால், $f(x + h) - f(x) - Ah \in R^m$.

(3)-ல் தொகுதியின் அலகை, R^m-ன் அலகையாகும். பகுதியின் அலகை, h-ன் R^n-அலகையாகும்.

7.13. தேற்றம்

E என்பது R^n-ன் திறந்த கணம். f: $E \to R^m$ மற்றும் $x \in E$. $\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$ என்பது $A = A_1$ மற்றும் $A = A_2$ என்பனவற்றிற்கு நிறைவேறும் எனில், $A_1 = A_2$.

நிறுவல்:

$B = A_1 - A_2$ எனில்,

$$
\begin{aligned}
|Bh| &= |(A_1 - A_2)h| \\
&= |-[f(x+h) - f(x) - A_1h] + [f(x+h) - f(x) - A_2h]| \\
&\leq |f(x+h) - f(x) - A_1h| + |f(x+h) - f(x) - A_2h|
\end{aligned}
$$

$h \to 0$ எனில், $\dfrac{|Bh|}{|h|} \to 0.$

$h \neq 0$ என்ற நிலைத்த எண்ணிற்கு, $t \to 0$ எனில், $\dfrac{|B(th)|}{|th|} \to 0$

எனவே, அனைத்து $h \in R^n$-க்கு, $Bh = 0$.

ஆகையால், $B = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$.

குறிப்பு:

(அ) சமன்பாடு (3) ஆனது, $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$ எனவும் எழுதப்படும்.

இங்கு, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|r(h)|}{|h|} = 0.$

(ஆ) E என்பது R^n-ன் திறந்த கணம். $f: E \to R^m$ ஆனது E-ல் வகையிடத்தக்கது. எனவே, அனைத்து $x \in E$-க்கு, $f'(x)$ ஒரு சார்பு;

இது, $R^n \to R^m$ என்ற நேரியல் உருமாற்றமாகும்.

ஆனால், $f': E \to L(R^n, R^m)$ என்ற சார்பாகும்.

(இ) f வகைமையுறும் புள்ளிகளில், f தொடர்ச்சியானது.

(ஈ) (3)-ல் வரையறுக்கப்பட்ட வகையீடு, x-ல் f-ன் வகையீடு (derivative) அல்லது x-ல் f-ன் மொத்த வகையீடு என அழைக்கப்படும்.

7.14. எடுத்துக்காட்டு

$A \in L(R^n, R^m)$, $x \in R^n$ எனில், $A'(x) = A$.

இதன், இரு பக்கங்களிலும் உள்ளவை, $L(R^n, R^m)$-ன் உறுப்புகளாகும். ஆனால், $Ax \in R^m$.

நிறுவல்:

$f(x) = Ax$ என்க. அனைத்து $h \in R^n$-க்கு,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{|A(x+h) - A(x) - Ah|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{|Ah - Ah|}{|h|} = 0.$$

ஆகையால், $A'(x) = A$.

தேற்றம் 4.5-ன் விரிவாக்கத்தை இனி காண்போம்.

7.15. தேற்றம் (சங்கிலி விதி)

E என்பது R^n-ன் திறந்த கணம். $f: E\to R^m$, $x_0\in E$-ல் f வகையிடத்தக்கது. g என்பது f(E)-ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த கணத்திலிருந்து R^k -க்கு சார்பிடல். $f(x_0)$-ல் g வகையிடத்தக்கது. எனில், $f: E\to R^k$, $F(x) = g(f(x))$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு, x_0-ல் வகையிடத்தக்கது.

மேலும், $F'(x_0) = g'(f(x_0)f'(x_0)$.

நிறுவல்:

$y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$ என்க.

$f(x_0 + h)$, $g(y_0 + k)$ வரையறுக்கப்பட்ட அனைத்து $h\in R^n$, $k\in R^m$-க்கு,

$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$

$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk$ என வரைறுக்க.

எனவே, $|u(h)| = \varepsilon(h)\,|h|$, $|v(k)| = \eta(k)\,|k|$ ----- (4)

இங்கு, $h\to 0$ எனில், $\varepsilon(h) \to 0$, $k \to 0$ எனில், $\eta(k) \to 0$

h கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ என்க.

$$\begin{aligned}|k| &= |f(x_0 + h) - f(x_0)|\\ &= |Ah + u(h)|\\ &\le |Ah| + |u(h)|\\ &\le \|A\|\,|h| + \varepsilon(h)\,|h|\\ &= [\|A\| + \varepsilon(h)]\,|h| \qquad \text{----- (5)}\end{aligned}$$

மேலும்,
$$\begin{aligned}F(x_0+h) - F(x_0) - BAh &= g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - BAh\\ &= g(y_0 + k) - g(y_0) - BAh\\ &= Bk + v(k) - BAh\end{aligned}$$

$$= B(k - Ah) + v(k)$$
$$= B\,u(h) + v(k) \quad (u(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - Ah = k - Ah)$$

ஆகையால்,

$$\frac{|F(x_0+h) - F(x_0) - BAh|}{|h|} \le \frac{|Bu(h)|}{|h|} + \frac{|v(k)|}{|h|}$$
$$= \frac{|Bu(h)|}{|h|} + \frac{\eta(k)\,|k|}{|h|} \qquad ((4)\text{-ல் இருந்து})$$
$$\le \frac{|Bu(h)|}{|h|} + \eta(k)\frac{[||A|| + \varepsilon(h)]}{|h|}|h|$$
$$\le ||B||\,\varepsilon(h) + [||A|| + \varepsilon(h)]\eta(k)$$

$h\to 0$ எனில், $\varepsilon(h) \to 0$, மற்றும் $k\to 0$. ((5)-ல் இருந்து)

எனவே, $\eta(k)\to 0$.

ஆகையால், $F'(x_0) = BA = g'(y_0)\, f'(x_0). = g'(f(x_0)\, f'(x_0)$.

7.4. பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Partial Derivatives)

7.16. வரையறை

$E\subset R^n$ ஆனது R^n -ன் திறந்த கணம் என்க. $f: E\to R^m$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ மற்றும் $\{u_1, \ldots, u_m\}$ என்பன முறையே R^n, R^m இவைகளின் திட்ட அடிக்கணங்கள் என்க. f-ன் கூறுகள் (components) $f_1, \ldots, f_m$ என்பன, $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, u_i \quad (x\in E)$

என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

அல்லது, $f_i(x) = f(x) \cdot u_i$, $x\in E$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$-க்கு

$$(D_j f_i)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. (இந்த எல்லை இருக்க வேண்டும்)

$f_i(x)$-க்குப் பதிலாக, $f_i(x_1, ..., x_n)$ என எழுத, $D_j f_i$ என்பது x_j-ஐப் பொறுத்து f_i வகைமையுறு சார்பாகும். (மற்ற மாறிகள் நிலைத்ததாகக் கொள்ளப்படும்)

$D_j f_i$ என்பது $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ எனவும் குறியிடப்படும். இது, பகுதி வகைமை என்றழைக்கப்படும்.

7.17. தேற்றம்

E என்பது R^n -ன் திறந்த கணம் என்க. $f: E \to R^m$, $x \in E$-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது. எனில், $D_j f_i(x)$ இருக்கும் மற்றும் $f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i$, $(1 \le j \le n)$. இங்கு $\{e_1, ..., e_n\}$ மற்றும் $\{u_1, ..., u_m\}$ என்பன முறையே R^n, R^m இவைகளின் திட்ட அடிக்கணங்கள்.

நிறுவல்:

j-ஐ நிலைத்ததாகக் கொள்க. x-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது என்பதால்,

$f(x + te_j) - f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j)$

இங்கு, $t \to 0$ எனில், $|r(te_j)|/t \to 0$

$f'(x)$ ஆனது நேரியல் சார்பு என்பதால்,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = f'(x)e_j$$

f-ஐ அதன் கூறுகளாக அமைக்க,

$$\lim_{t \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x)e_j$$

இந்த கூடுதலின், ஒவ்வொரு வகுத்தலும், $t \to 0$ எனில், ஒரு எல்லையைப் பெற்றிருக்கும். எனவே, $(D_j f_i)(x)$ இருக்கிறது.

மேலும், $f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i$

7.18. தேற்றம் 7.17-ன் விளைவுகள்

திட்ட அடிக்கணங்களைப் பொறுத்து, $f'(x)$-ன் அணி $[f'(x)]$ எனில், $f'(x)e_j$ என்பது $[f'(x)]$-ன் j ஆவது நிரல் திசையன்.

எனவே, $f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i \Rightarrow (D_j f_i)(x)$ ஆனது, $[f'(x)]$-ன் (i, j) ஆவது உறுப்பு ஆக இருக்கும். எனவே,

$$[f'(x)] = \begin{pmatrix} (D_1f_1)(x) & \ldots & \ldots & (D_nf_1)(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (D_1f_m)(x) & \ldots & \ldots & (D_nf_m)(x) \end{pmatrix}.$$

$h = \sum h_j e_j$ என்பது R^n-ன் ஏதேனுமொரு திசையன் எனில்,

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=i}^{n} (D_j f_i)(x) h_j \right\} u_i$$

7.19. எடுத்துக்காட்டு

$E \subset R^n$-ன் திறந்த கணம். $\gamma: (a, b) \subset R^1 \to E$ என்பது வகைமையுறு சார்பிடல். அதாவது, E-ல் γ வகைமையுறு வளைவரை. f என்பது E-ல் மெய் மதிப்புடைய வகையுறு சார்பு. எனவே, $f: E \to R^1$, வகைமையுறு சார்பிடல்.

$g(t) = f(\gamma(t)), (a < t < b)$ என வரையறுக்க.

சங்கிலி விதியின் படி,

$g'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t), (a < t < b)$ ----- (6)

$\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$, $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$ என்பதால், $g'(t)$ ஆனது R^1-ல் நேரியல் செயலியாக அமையும். எனவே, $g: (a, b) \to R^1$.

R^n-ன் திட்ட அடிக்கணம் $\{e_1, \ldots, e_n\}$-க்கு, $[\gamma'(t)]$ என்ற n x 1 நிரல் அணியின் i-ஆவது நிரலின் உறுப்பு $\gamma_i'(t)$. இங்கு, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ என்பன, γ-ன் கூறுகள்.

அனைத்து $x \in E$-க்கு $[f'(x)]$ ஆனது $1 \times n$ நிரை அணியாக இருக்கும். அதன், j- ஆவது நிரல் உறுப்பு $(D_j f)(x)$. எனவே, $[g'(t)]$ ஆனது 1×1 அணி. இதன் ஒரே ஒரு உறுப்பு, $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)$ என்ற மெய்யெண் ஆகும்.

இது, சங்கிலி விதியின் தனித்த வகையாகும். இது பின்வருமாறும் எழுதப்படும்.

ஒவ்வொரு $x \in E$ என்ற திசையனுடன், x-ல் f-ன் சாய்வு விகிதம் (gradient),

$(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x) e_i$ இணைக்கப்படுகிறது.

$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)\, e_i$ என்பதால்,

$$g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad \text{----- (7)}$$

$= (\nabla f)(\gamma(t))$ மற்றும் $\gamma'(t)$ என்ற திசையன்களின் அளவிப் பெருக்கல்.

$x \in E$- நிலைத்ததாகக் கொள்க.

$u \in R^n$ என்பது அலகு திசையன் ($|u| = 1$) என்க.

$$\gamma(t) = x + tu \; (-\infty < t < \infty) \text{ என்க.} \qquad \text{----- (8)}$$

அனைத்து t-க்கு, $\gamma'(t) = u$.

(7)-ல் இருந்து, $g'(0) = (\nabla f)(x) \cdot u$

(8)-ல் இருந்து, $g(t) - g(0) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))$

$$= f(x + tu) - f(x)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = (\nabla f)(x).u$$

இந்த எல்லை, u என்ற அலகு வெக்டரின் திசையில், x-ல் f-ன் திசைசார் வகையீடு (directional derivative) என்றழைக்கப்படும். இது, $(D_u f)(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

f மற்றும் x இவைகள் நிலைத்தவை, u மாற்றமடையும் எனில், u, $(\nabla f)(x)$-ன் மிகை அளவி பெருக்கமாக அமையும் போது, $(D_u f)(x)$ ஆனது அதன் மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்.

$u = \sum u_i e_i$ எனில், $(D_u f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x)\, u_i$

7.20. தேற்றம்

$E \subset R^n$ என்பது ஒரு குவி திறந்த கணம் என்க. $f: E \to R^m$, E-ல் f வகைக்கெழுக் காணத்தக்கது. எனில், M என்ற மெய்யெண், அனைத்து $x \in E$-க்கு, $\|f'(x)\| \leq M$ என இருக்கிறது எனில், அனைத்து $a \in E$, $b \in E$-க்கு,
$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ ஆக அமையும்.

நிறுவல்:

$a \in E$, $b \in E$ என்க.

அனைத்து $t \in R^1$-க்கு, $\gamma(t) \in E$, $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ என அமையுமாறு வரையறுக்க.

E குவிகணம் என்பதால், $0 \leq t \leq 1$ எனில், $\gamma(t) \in E$.

$g(t) = f(\gamma(t))$ என்க. அனைத்து $t \in [0, 1]$-க்கு

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(\gamma(t))\, \gamma'(t) \\ &= f'(\gamma(t))\, (b - a) \end{aligned}$$

எனவே, $\|g'(t)\| \leq \|f'(\gamma(t))\|\, |(b - a)|$

$\leq M\, |b - a|$

தேற்றம் 4.18-ன் படி, $|g(1) - g(0)| \leq M\, |b - a|$

ஆனால், $g(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$, $g(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$

எனவே, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

7.21. துணைத்தேற்றம்

கூடுதலாக, அனைத்து $x \in E$-க்கு, $f'(x) = 0$ எனில். f ஒரு மாறிலி சார்பு.

நிறுவல்:

$f'(x) = 0$ எனில், $M = 0$

எனவே, $|f(a) - f(b)| = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f$ ஒரு மாறிலிசார்பு.

7.22. வரையறை

$E \subset R^n$ என்பது ஒரு திறந்த கணம். $f: E \rightarrow R^m$, $f': E \rightarrow L(R^n, R^m)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பாக அமையின், E-ல் f தொடர் வகையிடத்தக்க (continuosly differentiable) சார்பு எனப்படும்.

அதாவது அனைத்து $x \in E$, அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $\delta > 0$ என்ற எண், $y \in E$, $|x - y| < \delta$ எனில், $\|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon$ என அமையும்.

அப்படியெனில், f என்பது ஒரு $\mathcal{C}'$- சார்பிடல் ஆகும், அல்லது $f \in \mathcal{C}'(E)$.

7.23. தேற்றம்

$E \subset R^n$ ஒரு திறந்த கணம். $f: E \rightarrow R^m$, $f \in \mathcal{C}'(E)$ என அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ எனில், E-ல் $D_j f_i$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இருக்கும் மற்றும் அவைகள் E-ல் தொடர்ச்சியானவைகளாக அமையும்.

நிறுவல்:

$f \in \mathcal{C}'(E)$ என்க. அனைத்து i, j மற்றும் $x \in E$-க்கு,

$(D_j f_i)(x) = (f'(x)e_j) \cdot u_i$

எனவே, $(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x) = \{[f'(y) - f'(x)]e_j\} \cdot u_i$

$|u_i| = |e_j| = 1$ என்பதால்,

$|(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x)| \leq |[f'(y) - f'(x)]e_j| \leq \|f'(y) - f'(x)\|$.

f$\in \mathcal{C}'(E)$ என்பதால், அனைத்து $x\in E$ மற்றும் அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $\delta > 0$ என்ற எண், $|x - y| < \delta$ எனில், $\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon$ என இருக்கும்.

ஆகையால், $|x - y| < \delta \Rightarrow |(D_i f_i)(y) - (D_i f_i)(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow D_i f_i$ தொடர்ச்சியானது.

மறுதலையாக, $m = 1$-க்கு நிறுவினால் போதுமானது.

$x\in E$-ஐ நிலைத்ததாகக் கொள்க.

$\varepsilon > 0$ என்க.

E திறந்த கணம் என்பதால், மையம் x, ஆரம் r உடைய $S\subset E$ என்ற திறந்த பந்து இருக்கும். $D_j f$ தொடர்ச்சியானது என்பதால், r என்ற எண்ணை,

$|(D_j f)(y) - (D_j f)(x)| < \varepsilon/n$, $(y\in S, 1 \le j \le n)$ எனுமாறு தேர்ந்தெடுக்க முடியும்.

$h = \sum h_j e_j$ எனில், $|h| < r$.

$v_0 = 0$, $v_k = h_1 e_1 + \dots + h_k e_k$ என்க. $(1 \le k \le n)$

பிறகு,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} [f(x + v_j) - f(x + v_{j-1})]$$

$1 \le k \le n$-ல், $|v_k| < r$ ஆகும்.

S குவிகணம் என்பதால், $x + v_{j-1}$ மற்றும் $x + v_j$ இவைகளை முனைப் புள்ளிகளாக உள்ளத் துண்டுகள் S-ல் இருக்கும்.

$v_j = v_{j-1} + h_j e_j$ என்பதால், இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் படி,

$f(x + v_j) - f(x + v_{j-1}) = h_j (D_j f)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j)$, $\theta_j \in (0, 1)$

மற்றும், $|h_j (D_j f)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j) - h_j (D_j f)(x)| < |h_j| \varepsilon/n$

எனவே, $|h| < r$ என அமையும் அனைத்து h-க்கு,

$$|f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x)|$$

$$= |\sum_{j=1}^{n} [f(x+v_j) - f(x+v_{j-1})] - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x)|$$

$$= |\sum_{j=1}^{n} h_j \left(D_j f\right)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j) - \sum_{j=1}^{n} h_j \left(D_j f\right)(x)|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j| \, \varepsilon \leq |h| \, \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ஆனது x-ல் வகையிடத்தக்கது.

மேலும், $f'(x)$ என்பது, $h = \sum h_j e_j$ என்ற திசையனுக்கு $\sum h_j (D_j f)(x)$ என்ற எண்ணைத் தரும் ஒரு நேரியல் சார்பு.

$[f'(x)]$ என்ற அணி, $(D_1 f)(x), \ldots. (D_n f)(x)$ என்ற நிரையைப் பெற்றிருக்கும்.

$(D_1 f)(x), \ldots. (D_n f)(x)$ என்பன, E-ல் தொடர்ச்சியான சார்புகள் என்பதால், $f \in \mathcal{C}'(E)$.

7.5. சுருக்கக் கோட்பாடு (The Contraction Principle)

7.24. வரையறை

X என்பது d என்ற யாப்புடன் கூடிய ஒரு யாப்பு வெளி. $\varphi: X \to X$ என்க அனைத்து $x, y \in X$-க்கு, $c < 1$ என்ற எண், $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c d(x, y)$ என அமையுமானால், $\varphi: X \to X$- ன் சுருக்கம் ஆகும்.

7.25. தேற்றம்

X ஒரு யாப்பு வெளி. $X \to X$-ன் சுருக்கம் φ எனில், $x \in X$ என்ற ஒரே ஒரு உறுப்பு, $\varphi(x) = x$ என இருக்கும்.

அதாவது, φ ஒரே ஒரு நிலைத்தப் புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும் எனலாம்.

நிறுவல்:

$x_0 \in X$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ என வரையறுக்க.

$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$ என அமையுமாறு $c < 1$ -ஐத் தேர்ந்தெடுக்க.

$n \geq 1$-க்கு,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d((\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1}))$$
$$\leq cd(x_n, x_{n-1})$$

உய்த்தறிதல் முறையில்,

$$d(x_{n+1}, x_n) = c.\, c.d(x_{n-1}, x_{n-2}) \quad = c^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$$
$$\leq c^n d(x_1, x_0), (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$n < m$ எனில்,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} d(x_i, x_{i-1})$$
$$\leq (c^n + c^{n-1} + \ldots + c^{m-1}) d(x_1, x_0)$$
$$\leq c^n (1 - c)^{-1} d(x_1, x_0)$$
$$= [(1 - c)^{-1} d(x_1, x_0)]\, c^n$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ என்பது ஒரு காஷி தொடர்வரிசை. X ஒரு முழு யாப்பு வெளி என்பதால், ஏதேனும் ஒரு $x \in X$-க்கு, $\lim x_n = x$.

φ ஒரு சுருக்கம் என்பதால், X-ல் φ தொடர்ச்சியானது. (சீரான தொடர்ச்சியானது)

எனவே, $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$.

φ-ன் தனித்தன்மை:

$\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$ என்க.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y) \Rightarrow \quad d(x, y) \leq cd(x, y)$$
$$\Rightarrow \quad d(x, y) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = y$$

φ ஆனது தனித்த நிலைத்தப் புள்ளியைப் பெற்றிருக்கிறது.

7.6. நேர்மாறு சார்புத் தேற்றம்

7.26. தேற்றம்

$E\subset R^n$ ஒரு திறந்த கணம். $f: E\to R^m$ என்பது ஒரு $\mathscr{C}'$ சார்பிடல். ஏதேனும் ஒரு $a\in E$-க்கு, $f'(a)$ நேர்மாற்றல் உடையது மற்றும் $b = f(a)$. பிறகு,

(அ) R^n-ல் U, V என்ற திறந்த கணங்கள், $a\in U$, $b\in V$, U-ல் f என்ற ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு $f(U) = V$ என இருக்கும்.

(ஆ) V-ல் வரையறுக்கப்பட்ட g என்ற f-ன் நேர்மாறு சார்பு, $g(f(x)) = x$ $(x\in U)$ என வரையறுக்கப்படின், $g\in \mathscr{C}'(V)$.

நிறுவல்:

(அ) $f'(a) = A$ எனக் குறிக்க.

λ என்பதை, $2\lambda\|A^{-1}\| = 1$ ----- (9)

எனத் தேர்ந்தெடுக்க.

a-ல் f' தொடர்ச்சியானது என்பதால், a-ஐ மையமாக உடைய $U\subset E$ என்ற திறந்த பந்து, $\|f'(x) - A\| < \lambda$ $(x\in U)$ -----

(10)

என அமையும்.

ஒவ்வொரு $y\in R^n$-உடன், $\varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$, $(x\in E)$ ----- (11)

என்ற சார்பை இணைக்க.

$f(x) = y \Leftrightarrow x$ என்பது φ-ன் நிலைத்தப் புள்ளி

$$\varphi'(x) = I - A^{-1}f'(x)$$

$$= A^{-1}(A - f'(x)) \text{ என்பதால்}$$

$$\|\varphi'(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\|$$

$$= \|A^{-1}\|\,\|A - f'(x)\|$$

$$< \|A^{-1}\|\,\lambda = 1/2 \text{ ((9), (10)-ல் இருந்து)}$$

எனவே,

$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le (1/2)\,|x_1 - x_2|, (x_1, x_2 \in U)$ ----- (12)

(தேற்றம் 7.20)

ஆகவே, U-ல், φ ஆனது அதிகப்பட்சமாக ஒரு நிலைத்தப் புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்.

அதாவது, அதிகப்பட்சமாக ஒரு $x \in U$-க்கு, $f(x) = y$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, U-ல் f ஒன்றுக்கொன்றானது.

அடுத்ததாக, $V = f(U)$ என்க. $y_0 \in V$ என்க.

∴ ஏதேனும் ஒரு $x_0 \in U$-க்கு, $y_0 = f(x_0)$.

மையம் x_0, ஆரம் $r > 0$ உடைய திறந்த பந்து B என்க. B-ன் அடைப்பு (closure) $\overline{B}$ ஆனது U-ல் இருக்குமாறு, r-ஐச் சிறியதாகத் தேர்ந்தெடுக்க.

(அ) $|y - y_0| < \lambda r$ எனில், $y \in V$ என நிறுவுவோம்.

$|y - y_0| < \lambda r$ எனக் கொண்டு, y-ஐக் குறிக்க.

$$\begin{aligned}|\varphi(x_0) - x_0| &= |A^{-1}(y - f(x_0))|, \quad ((11)\text{-ன் படி})\\ &= |A^{-1}(y - y_0)|\\ &< \|A^{-1}\|\,\lambda\, r = r/2, \quad (\because 2\lambda\|A^{-1}\| = 1)\end{aligned}$$

$x \in \overline{B}$ எனில்,

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - x_0| &= |\varphi(x) - \varphi(x_0) + \varphi(x_0) - x_0|\\ &\le |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - x_0|\\ &< (1/2)|x - x_0| + r/2 \le r\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(x) \in B$

இங்கு, $x_1 \in \overline{B}, x_2 \in \overline{B}$ எனினும், சமன்பாடு (12) உண்மையாகும்,

எனவே, φ ஆனது, $\overline{B} \to \overline{B}$-ன் சுருக்கம் ஆகும். $\overline{B}$ ஆனது R^n-ன் மூடிய உட்கணம் என்பதால், $\overline{B}$ முழுதாகும். (complete)

எனவே, தேற்றம் 7.24-ன் படி, φ-க்கு $x \in \overline{B}$ என்ற நிலைத்தப்புள்ளி இருக்கும்.

இந்த x-க்கு, $f(x) = y$ ஆகும். ஆகையால், V திறந்த கணம் ஆகும்.

இதனால், தேற்றத்தின் (அ) பகுதி நிறுவப்படுகிறது.

(ஆ) $y \in V, y + k \in V$ என்க.

எனவே, $x \in U, x + h \in U$ என்பவை, $y = f(x), y + k = f(x + h)$ என இருக்கும்.

(11)-ன் படி, $\varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$

$$\begin{aligned}\varphi(x + h) - \varphi(x) &= [(x + h) + A^{-1}(y - f(x + h))] - [x + A^{-1}(y - f(x)] \\ &= h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] \\ &= h + A^{-1}[y - (y + k)] \\ &= h - A^{-1}k\end{aligned}$$

(12)-ல் இருந்து,

$|\varphi(x + h) - \varphi(x)| \le (1/2)|h|$

$\Rightarrow |h - A^{-1}k| \le (1/2)|h|$

$\Rightarrow |A^{-1}k| \ge (1/2)|h|$ மற்றும்

$|h| \le 2\|A^{-1}\|\,|k| = \lambda^{-1}|k|$ ----- (13)

(9), (10) மற்றும் தேற்றம் 7.10 இவைகளிலிருந்து, $f'(x)$-க்கு ஒரு நேர்மாறு T அமையும்.

$$\begin{aligned}g(y + k) - g(y) - Tk &= x + h - x - Tk \\ &= h - Tk \\ &= Tf'(x)h - T[f(x+h) - f(x)] \\ &= -T[f(x + h) - f(x) - f'(x)h]\end{aligned}$$

$$(13) \Rightarrow \frac{|g(y + k) - g(y) - Tk|}{|k|} \le \frac{\|T\|}{\lambda}\,\frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}$$

மேலும், $k \to 0$ எனில், $h \to 0$

ஆகவே, $\displaystyle\lim_{k \to 0} \frac{|g(y + k) - g(y) - Tk|}{|k|}$

$$\le \frac{\|T\|}{\lambda} \lim_{h \to 0} \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0 \Rightarrow g'(y) = T$$

ஆனால், T ஆனது $f'(x) = f'(g(y))$ -ன் நேர்மாறாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையால், $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}, (y\in V)$ ----- (14)

g வகையிடத்தக்க சார்பு என்பதால், $g: V\to U$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு.

Ω என்பது, $L(R^n)$-ன் நேர்மாறு உடைய உறுப்புகளின் கணம் எனில், $f': U\to\Omega$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு.

தேற்றம் 7.10-ன் படி, இந்த நேர்மாறு, $g: \Omega \to\Omega$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு.

எனவே, (14) $\Rightarrow g\in \mathcal{C}'(V)$ ஆகும்.

கீழ்க்கண்டத் தேற்றம், நேர்மாறு சார்பு தேற்றம் பகுதி (அ)-ன் உடனடி விளைவு ஆகும்.

7.27. தேற்றம்

$E\subset R^n$ ஒரு திறந்த கணம். $f: E\to R^m$ என்பது ஒரு $\mathcal{C}'$ சார்பிடல். அனைத்து $x\in E$-க்கு $f'(x)$ நேர்மாறு உடையது எனில், அனைத்து திறந்த கணம் $W\subset E$-க்கு, $f(W)$ ஆனது R^n-ன் ஒரு திறந்த கணம்.

அதாவது, $f: E\to R^n$ ஆனது ஒரு திறந்த சார்பாகும்.

7.7. உள்ளார்ந்த சார்பு தேற்றம்

(The Implicit Function Theorem)

7.28. குறியீடு

$x = (x_1, ..., x_n)\in R^n$, $y = (y_1, ..., y_m))\in R^m$ எனில், (x, y) என்ற புள்ளி $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m))\in R^{n+m}$-ஐக் குறிக்கும்.

அனைத்து $A\in L(R^{n+m}, R^n)$ என்பது A_x, A_y என்ற நேரியல் உருமாற்றங்களாக எழுதலாம்.

A_x, A_y என்பன, $A_xh = A(h, 0)$, $A_yk = A(0, k)$, $(h\in R^n, k\in R^m)$ என வரையறுக்கப்படும்.

பிறகு, $A_x \in L(R^n)$, $A_y \in L(R^m, R^n,)$, மற்றும் $A(h, k) = A_x h + A_y k$.

7.29. தேற்றம்

$A \in L(R^m, R^n,)$, A_x நேர்மாற்றல் உடையது எனில், அனைத்து $k \in R^m$-க்கு, $h \in R^n$ என்ற தனி உறுப்பு, $A(h, k) = 0$ என அமையும்.

இந்த h ஆனது, k-ல் இருந்து $h = -(A_x)^{-1} A_y k$ என்ற சூத்திரத்தால் பெறப்படும்.

நிறுவல்:

$A(h, k) = A_x h + A_y k$.

$A(h, k) = 0 \Leftrightarrow \quad A_x h + A_y k = 0$

$\Leftrightarrow \quad h = -(A_x)^{-1} A_y k$

$\Leftrightarrow \quad A_x$ நேர்மாற்றல் உடையது.

7.30. தேற்றம்

$E \subset R^{n+m}$ திறந்த கணம் என்க.

$f: E \to R^n$ என்பது ஒரு $\mathcal{C}'$ சார்பிடல். ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(a, b) \in E$-க்கு, $f(a, b) = 0$. $A = f'(a, b)$. A_x நேர்மாற்றல் உடையது எனில், $U \subset R^{n+m}$, $W \subset R^m$, $(a, b) \in U$, $b \in W$ என்ற திறந்த கணங்கள், பின்வரும் பண்புகளை நிறைவேற்றுமாறு அமையும்.

அனைத்து $y \in W$-க்கு, x என்ற தனித்த உறுப்பு, $(x, y) \in U$ மற்றும் $f(x, y) = 0$ என இருக்கும்.

இந்த x, $x = g(y)$ என வரையறுக்கப்படுமானால், $g: W \to R^n$ என்பது $\mathcal{C}'$ சார்பிடல். $g(b) = a$, $f(g(y), y) = 0$, $(y \in W)$ மற்றும் $g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y$ எனக் காணலாம்.

நிறுவல்:

F என்ற சார்பை, $F(x, y) = (f(x, y), y)$, $((x, y) \in E)$ என வரையறுக்க.

பின், $F: E \to R^{n+m}$ என்பது ஒரு $\mathcal{C}'$ சார்பிடல்.

(அ) F(a, b) என்பது $L(R^{n+m})$ நேர்மாற்றல் உடையது என நிறுவுவோம்.

$f(a, b) = 0 \Rightarrow f(a + h, b + k) = A(h, k) + r(h, k)$. இங்கு, r என்பது,

$f'(a, b)$-ன் வரையறையில் இருக்கும் மீதி.

$$\begin{aligned} F(a + h, b + k) - F(a, b) &= (f(a + h, b + k), b + k) - (f(a, b), b) \\ &= ((f(a + h, b + k), b + k) - (0. b) \\ &= ((f(a + h, b + k), k) \\ &= (A(h, k) + r(h, k), k) \\ &= (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F'(a, b)$ என்பது R^{n+m}-ல் நேரியல் செயலியாகும். இந்த சார்பிடலில், (h, k)-ன் பிம்பம் (A(h, k), k) ஆகும்.

(A(h, k), k) = 0 எனில், A(h, k) = 0 மற்றும் k = 0.

எனவே, A(h, 0) = 0. இது, h = 0 என்பதைத் தரும்.

ஆகையால், $F'(a, b)$ ஒன்றுக்கொன்றானது.. எனவே, நேர்மாற்றல் உடையது.

ஆகவே, நேர்மாறு சார்பு தேற்றத்தை F-க்குப் பயன்படுத்த, R^{n+m}-ல் U மற்றும் V என்ற திறந்த கணங்கள், $(a, b)\in U$, $(0, b)\in V$ மற்றும் $F: U \to V$ ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக அமையுமாறு இருக்கும்.

$W = \{y\in R^m : (0, y)\in V\}$ என்க.

$(0, b)\in V$ என்பதால், $b\in W$.

V திறந்த கணம் என்பதால், W-ம் ஒரு திறந்த கணம்.

$y\in W$ எனில், ஏதேனுமொரு $(x, y)\in U$-க்கு, (0, y) = F(x, y)

ஆனால், F(x, y) = (f(x, y), y).

எனவே, இந்த x-க்கு $(x', y)\in U$, $f(x', y) = 0$ என்க.

$$\begin{aligned} F(x', y) &= (f(x', y), y) = (0, y) \\ &= (f(x, y), y) = F(x, y) \end{aligned}$$

U-ல் F ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு என்பதால், $x' = x$ ஆக இருக்கும்.

இதனால், தேற்றத்தின் முதல் பகுதி நிறுவப்படுகிறது.

இரண்டாம் பகுதியை நிறுவ, $y\in W$-க்கு $g(y)$- ஐ $(g(y), y)\in U$ மற்றும்

$f(g(y), y) = 0$ என வரையறுக்க.

பின், $F(g(y), y) = (f(g(y), y), y) = (0, y), \ (y\in W)$ ----- (15)

$G: V\to U$ என்பது F-ன் நேர்மாறு மேல் சார்பு எனில், $G\in \mathcal{C}'$ (நேர்மாறு சார்பு தேற்றம்)

(15)-ல் இருந்து, $(g(y), y) = G(0, y), \ (y\in W)$

$G\in \mathcal{C}'$ என்பதால், $g\in \mathcal{C}'$.

$g'(b)$-ஐக் காண, $(g(y), y) = \Phi(y)$ என்க.

$\Phi'(y)\, k = (g'(y)k, k), \ (y\in W, k\in R^m)$

$f(g(y), y) = 0 \Rightarrow$ W-ல் $f(\Phi(y)) = 0, \ (y\in W)$

எனவே, சங்கிலி விதியின் படி, $f'(\Phi(y), \Phi'(y)) = 0$

$y = b$ எனில், $\Phi(y) = (g(b), a), \quad (g(b) = a)$

$= (a, b)$

$f'(\Phi(y)) = f'(a, b) = A.$

எனவே, $A\Phi'(b) = 0$

$A(h, k) = A_x h + A_y k \Rightarrow$ அனைத்து $k\in R^m$-க்கு

$A_x g'(b)k + A_y k = A(g'(b)k, k) = A\Phi'(b)k = 0.$

எனவே, $A_x g'(b) + A_y = 0 \Rightarrow g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y.$

குறிப்பு:

(1) $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடு, $n + m$ மாறிகளில் n சமன்பாடுகளின் தொகுதியாக எழுதப்படும்.

$f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$

$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$

A_x நேர்மாற்றல் உடையது ஆதலால், (a, b)-ல் மதிப்பிடப்படும்

$$\begin{pmatrix} D_1f_1 \dots & \dots D_nf_1 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ D_1f_n \dots & \dots D_nf_n \end{pmatrix}$$

என்ற $n \times n$ அணி R^n-ல் நேரியல் நேர்மாற்றல் உடைய செயலியாக வரையறுக்கப்படும்.

அதாவது, அதன், நிரல் வெக்டார்கள் சார்பற்றவையாக அமையும், அல்லது அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு $\neq 0$

(2) f, g -ன் கூறுகளில், $A_x g'(b) + A_y = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(a,b)(D_k g_j)(b) = -(D_{n+k} f_i)(a, b)$$

அல்லது, $$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\right) = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right), \; (1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m)$$

அனைத்து k-க்கு, இது $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$, $(1 \leq j \leq n)$ என்ற வகைக்கெழுக்கள் மாறிகளாக உடைய, n நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுதியாகும்.

7.31. எடுத்துக்காட்டு

$n = 2, m = 3$ என்க.

$f: (f_1, f_2): R^5 \to R^2$ என்ற சார்பு

$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2y_1 - 4y_2 + 3$

$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2\cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$a = (0, 1), b = (3, 2, 7)$ எனில்,

$f(a, b) = (f_1, f_2)(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$

$= (f_1(0, 1, 3, 2, 7), f_2(0, 1, 3, 2, 7)) = (0, 0) = 0$

திட்ட அடிக்கணங்களைப் பொறுத்து, $A = f'(a, b)$-ன் உருமாற்ற அணி,

$$[A] = \begin{pmatrix} D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1 & D_4f_1 & D_5f_1 \\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_2 & D_4f_2 & D_5f_2 \end{pmatrix} (a, b) = (0, 1, 3, 2, 7)$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{x1} & y_1 & x_2 & -4 & 0 \\ -x_2\sin x_1 - 6 & \cos x_1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} (a, b) = (0,1,3,2,7)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

எனவே, $[A_x] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ $A_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$[A_x]$-ன் நிரல் வெக்டர்கள் சார்பற்றவை என்பதால், A_x நேர்மாற்றல் உடையது.

உள்ளார்ந்த சார்பு தேற்றத்தின் படி, g என்பது (3, 2, 7)-ன் அண்மையில் வரையறுக்கப்பட்ட $\mathcal{C}'$ சார்பிடல் இருக்கும்.

$g(3, 2, 7) = (0, 1)$ மற்றும் $f(g(y), y) = 0$.

$g'(3, 2, 7)$ காண்பதற்கு,

$g'(b) = -(A_x)-1A_y$ பயன்படுத்துவோம்.

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = (1/20) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ஆகவே, $[g'(3, 2, 7)] = (-1/20) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & -3/20 \\ -1/2 & 6/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

பகுதி வகைக் கெழுக்களில், (3, 2, 7) புள்ளியில்,

$D_1g_1 = 1/4$ $D_2g_1 = 1/5$ $D_3g_1 = -3/20$

$D_1g_2 = -1/2$ $D_2g_2 = 6/5$ $D_3g_2 = 1/10$

7.8. தரத் தேற்றம்

7.32. வரையறைகள்

X, Y என்பன திசையன் வெளிகள். $A \in L(X, Y)$ என்க.

A-ன் இன்மை வெளி (null space),

$\aleph(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\aleph(A)$ ஆனது, X-ல் திசையன் வெளி. இதைப் போல், A-ன் வீச்சு, $\Re(A)$ ஆனது Y-ல் திசையன் வெளி ஆகும்.

A-ன் தர எண் = $\Re(A)$-ன் பரிமாணம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $L(R^n)$-ன் நேர்மாற்றல் உடைய உறுப்புகள் ஆனது, $L(R^n)$-ல் தர எண் n உடைய உறுப்புகள் ஆகும்.

$A \in L(X,Y)$ மற்றும் A-ன் தர எண் = 0 எனில், அனைத்து $x \in A$-க்கு,

$A_x = 0$. எனவே, $\aleph(A) = X$.

7.33. வீழல்கள் (Projections)

X என்பது ஒரு திசையன் வெளி. $P \in L(X)$ என்ற செயலி, $P^2 = P$ என அமையுமானால், P ஆனது X-ல் வீழல் எனப்படும்.

அதாவது, அனைத்து $x \in X$-க்கு, $P(Px) = Px$.

மாற்றாக, P ஆனது அதன் வீச்சு $\Re(P)$-ல் அனைத்து வெக்டரையும் நிலை நிறுத்துகிறது.

7.34. வீழல்களின் சில தொடக்க நிலை பண்புகள்

(அ) X-ல் ஒரு வீழல் P எனில், அனைத்து $x \in X$-ம் $x = x_1 + x_2$, ($x_1 \in \Re(P)$, $x_2 \in \aleph(P)$) என்ற தனித்த அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

இந்த அமைப்பைப் பெற, $x_1 = Px$, $x_2 = x - x_1$ எனில்,

$$Px_2 = P(x - x_1) = Px - Px_1 = Px - P(Px) = Px - P^2x = 0$$

தனித்தன்மை:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow Px = Px_1 + Px_2$$

$x_1 \in \Re(P) \Rightarrow Px_1 = x_1$ (ஏனெனில், $Px_2 = 0$)

$\Rightarrow x_1 = Px$

(ஆ) X என்பது முடிவுள்ள பரிமாண திசையன் வெளி, X-ல் X_1 ஆனது திசையன் வெளி எனில், X-ல் P என்ற வீழல், $\Re(P) = X_1$ என இருக்கும்.

X_1-ல் 0 மட்டுமே அமையின், இது அற்பமானது.

அனைத்து $x \in X$-க்கு, $Px = 0$.

X_1-ன் பரிமாணம் $= k > 0$ என்க. தேற்றம் 7.4.-ன் படி, $\{u_1, ..., u_n\}$ என்ற X-ன் அடிக்கணம், X_1-ன் அடிக்கணமாகவும் அமையும்.

$P(c_1u_1 + ... + c_nu_n) = c_1u_1 + ... + c_ku_k$ என வரையறுக்க. $c_1, ... ,c_n$ என்பன அளவிகள். அனைத்து $x \in X_1$-க்கு, $Px = x$ மற்றும் $X_1 = \Re(P)$.

7.35. தேற்றம்

m, n, r என்பன குறை மதிப்பற்ற முழு எண்கள், $m \geq r$, $n \geq r$, $E \subset R^n$ ஒரு திறந்த கணம். $F: E \to R^m$ என்பது $\mathscr{C}'$ சார்பிடல். அனைத்து $x \in E$-க்கு, $F'(x)$-ன் தர எண் r.

$a \in E$-ஐ நிலைத்ததாகக் கொள்க. $A = F'(a)$ என்க. Y_1 என்பது A-ன் வீச்சு என்க. P என்பது R^m-ல் Y_1-ஐ வீச்சாக உடைய வீழல். Y_2 என்பது P-ன் இன்மை வெளி எனில், R^n-ல் U மற்றும் V என்ற திறந்த கணங்கள், $a \in U$, $U \subset E$ மற்றும்

$H: V \to U$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றான மேல் $\mathcal{C}'$ சார்பிடல், $F(H(x)) = Ax + \varphi(Ax)$, $(x \in V)$ என அமையும்.

இங்கு, $\varphi: A(V) \to Y_2$ என்ற $\mathcal{C}'$ சார்பிடல், $A(U) \subset Y_1$ ஒரு திறந்த கணமாக அமையும்.

நிறுவல்:

$r = 0$ எனில், தேற்றம் 7.20-ன் படி, a-ன் அண்மை U-ல் F(x) மாறிலி ஆகும். எனவே, $V = U$, $H(x) = x$, $\varphi(0) = F(a)$ ஆக இருக்கும் போது,

$F(H(x)) = Ax + \varphi(Ax)$ என்பது உண்மையாகும்.

$r > 0$ என்க.

Y_1 -ன் பரிமாணம் r என்பதால், Y_1-ன் அடிக்கணம் $\{y_1, \ldots, y_r\}$ என்க.

$Az_i = y_i \; (1 \le i \le r)$ என அமையுமாறு, $z_i \in R^n$ தேர்ந்தெடுக்க.

$S = Y_1 \to R^n$ என்ற நேரியல் சார்பிடலை,

$S(c_1y_1,+ \ldots, +c_ry_r) = c_1z_1,+ \ldots, +c_rz_r$ என வரையறுக்க,. $c_1, \ldots, c_r$ என்பன அளவிகள்.

எனவே, $ASy_i = Az_i = y_i$, $1 \le i \le r$

$\Rightarrow ASy = y \; (y \in Y_1)$ ----- (16)

$G = E \to R^n$ என்ற சார்பிடலை, $G(x) = x + SP[F(x) - Ax] \; (x \in E)$ என வரையறுக்க.

$G'(x) = I + SP[F'(x) - AI]$

$F'(a) = A \Rightarrow G'(a) + I$, R^n-ன் சமனிச் செயலி.

நேர்மாறு சார்பு தேற்றத்தின் படி, R^n-ல் U மற்றும் V என்ற திறந்த கணங்கள், $a \in U$ மற்றும் $G: U \to V$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பு, அதன் நேர்மாறு H-ம் $\mathcal{C}'$ என்ற வகுப்பில் அமையுமாறு இருக்கும்.

தேவைப்படின், U மற்றும் V -ஐக் குவிக்கணமாகவும், அனைத்து $x \in V$-க்கு,

$H'(x)$ நேர்மாற்றல் உடையதாகவும் அமையும் படி சுருக்க முடியும்.

$PA = A$ என்பதால், $ASPA = A$.

எனவே, $ASy = y\ (y \in Y_1)$ இருக்கும்.

ஆகையால் $AG(x) = A[x + SP(F(x) - AX))$

$= PF(x), (x \in E)$

குறிப்பாக, $x \in U$-க்கு, $AG(x) = PF(x)$.

x-ஐ $H(x)$ ஆல் மாற்றியமைக்க.,

$PF(x) = AX, (x \in V)$

$\psi(x) = F(H(x)) - Ax, (x \in V)$ என வரையறுக்க.

$PA = A \Rightarrow$ அனைத்து $x \in V$-க்கு, $P\psi(x) = 0$.

எனவே, $\psi: V \rightarrow Y_2$ ஒரு $\mathcal{C}'$ சார்பிடல்,

V திறந்த கணம் என்பதால், $A(V)$ என்ற A-ன் வீச்சு $\Re(A) = Y_1$-ன் திறந்த உட்கணமாக அமையும்.

நிறுவலை நிறைவு செய்ய. $\varphi: A(V) \rightarrow Y_2, \varphi(Ax) = \psi(x), (x \in V)$----- (17) என்பது $\mathcal{C}'$ சார்பிடல், எனக் காட்ட வேண்டும்

இதற்கு, முதலில், $x_1 \in V$, $x_2 \in V$, $Ax_1 = Ax_2$ எனில், $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ என நிறுவுவோம்.

$\Phi(x) = F(H(x)), x \in V$ என்க.

அனைத்து $x \in V$-க்கு, $H'(x)$-ன் தர எண் n என்பதால், அனைத்து $x \in U$-க்கு, $F'(x)$ -ன் தர எண் r ஆகும்.

$\Phi'(x)$-ன் தர எண் $= F'(H(x))H'(x)$-ன் தர எண் $= r\ (x \in V)$

$x \in V$-ஐ நிலைநிறுத்துக.

$\Phi'(x)$-ன் வீச்சு M எனில், $M \subset R^m$, M-ன் பரிமாணம் $= r$.

$PF(H(x)) = Ax \Rightarrow P\Phi'(x) = A$.

ஆகையால், $P: M \to \Re(A) = Y_1$ என்பது மேல் சார்பாக அமையும்.

M மற்றும் Y_1 இவைகள் ஒரே தர எண் பெற்றிருப்பதால், P(M-க்குக் குறைத்து) ஒன்றுக்கொன்றானது.

$Ah = 0$ என்க.

எனவே, $P\Phi'(x)\, h = 0$ ($P\Phi'(x) = A$ ஆதலால்)

ஆனால், $\Phi'(x)h \in M$.

மேலும், M-ல் P ஒன்றுக்கொன்றானது. எனவே, $\Phi'(x)h = 0$.

ஆகையால், $x \in V$, $Ah = 0$ எனில், $\psi'(x)h = 0$ என நிறுவியுள்ளோம்.

இப்பொழுது, $x_1 \in V$, $x_2 \in V$, $Ax_1 = Ax_2$ என்க.

$h = x_2 - x_1$ என்க.

$g(t) = \psi(x_1 + th)$ $(0 \le t \le 1)$ என வரையறுக்க.

V குவிக்கணம் என்பதால், இந்த t-க்கு $x_1 + th \in V$ ஆகும்.

எனவே, $g'(t) = \psi'(x_1 + th)h = 0$ $(0 \le t \le 1)$, $g(1) = g(0)$.

ஆனால், $g(1) = \psi(x_2)$ மற்றும் $g(0) = \psi(x_1)$.

எனவே, $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.

$x \in V$-க்கு, $\psi(x)$ ஆனது Ax-ஐ மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்.

ஆகவே, A(V)-ல் $\varphi(Ax) = \psi(x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\varphi \in \mathcal{C}'$ என மட்டுமே நிறுவ வேண்டும்.

$y_0 \in A(V)$ என நிலைநிறுத்துக.

$Ax_0 = y_0$ என அமையும் $x_0 \in V$ என்க.

V திறந்த கணம் என்பதால், Y_1-ல் y_0-ன் அண்மை, $x = x_0 + S(y - y_0)$ ----- (18)

ஆனது, அனைத்து $y \in W$-க்கு V-ல் அமையுமாறு இருக்கும்.

(16)-ன் படி, $Ax = Ax_0 + y - y_0 = y$

(17) மற்றும் (18) $\Rightarrow \varphi(y) = \psi(x_0 - Sy_0 + Sy)\ (y \in W)$

$\Rightarrow$ W-ல் $\varphi \in \mathscr{C}' \Rightarrow$ A(V)-ல் $\varphi \in \mathscr{C}'$.

(ஏனெனில், A(V)-ல் y_0 ஏதேனும் ஒரு உறுப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

இப்பொழுது, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

7.9. உயர்வரிசை வகையீடுகள்

7.36. வரையறை

$E \subset R^n$ ஒரு திறந்த கணம் என்க. E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் சார்பு f-ன் பகுதி வகையீடுகள் $D_1 f, \ldots, D_n f$.

$D_j f$ என்ற வகையீடுகள் வகையிடத்தக்கவை என்பதால், f-ன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகையிடல்கள் $D_{ij} f = D_i D_j f\ (i, j = 1, \ldots, n)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

E-ல் அனைத்து $D_{ij} f$ சார்புகளும் தொடர்ச்சியானவை எனில், E-ல் f ஆனது $\mathscr{C}'$.வகுப்பைச் சார்ந்தது என்போம்.

அதாவது, $f \in \mathscr{C}''(E)$.

$f: E \rightarrow R^m$ என்ற சார்பின் அனைத்துக் கூறுகளும் $\mathscr{C}''$ வகுப்பைச் சார்ந்தது எனில், f ஆனது $\mathscr{C}''$ வகுப்பைச் சார்ந்தது என்போம்.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில், $D_{ij} f \neq D_{ji} f$ (இரு வகையீடுகளும் இருப்பினும்) ஆனால், இந்த வகையீடுகள் தொடர்ச்சியானவை எனில், $D_{ij} f = D_{ji} f$.

இரு மாறிகளில் மெய் சார்புகளுக்கான இரு தேற்றங்கள், இங்கு கூறப்படுகின்றன.. முதலில், இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைக் காண்போம்.

7.37. தேற்றம்

f என்பது $E \subset R^2$ என்ற திறந்த கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், $D_1 f$ மற்றும் $D_{21} f$ இருக்கின்றன. $Q \subset E$ என்பது, அதன்

பக்கங்கள் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ள ஒரு மூடிய செவ்வகம். (a, b) மற்றும் $(a + h, b + k)$ $(h \neq 0, k \neq 0)$ என்பன அதன் எதிர் உச்சிகள்.

$\Delta(f, Q) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$ எனில், Q-ன் உள்பகுதியில், (x, y) என்ற புள்ளி, $\Delta(f, Q) = hk(D_{21}f)(x, y)$ என இருக்கும்.

நிறுவல்:

$u(t) = f(t, b + k) - f(t, b)$ என்க.

தேற்றம் 4.10-ன் படி, $a, a + h$ இவைகளுக்கிடையில் x என்ற புள்ளியும் $b, b + k$ இவைகளுக்கிடையில் y என்ற புள்ளியும்,

$$\begin{aligned} \Delta(f, Q) &= u(a + h) - u(a) \\ &= hu'(x) \\ &= h[D_1f)(x, b + k) - (D_1f)(x, b)] \\ &= hk\,(D_{21}(x, y)) \end{aligned}$$

7.38. தேற்றம்

$E \subset R^2$ என்ற திறந்த கணத்தில் f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. E-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும், D_1f, $D_{23}f$ மற்றும் D_2f இருக்கின்றன. ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(a. b) \in E$-க்கு, $D_{21}f$ தொடர்ச்சியானது எனில், $(a. b)$-ல் $D_{12}f$ இருக்கும் மற்றும் $(D_{12}f)(a, b) = (D_{21}f)(a, b)$.

7.39. கிளைத்தேற்றம்

$f \in \mathscr{C}''(E)$ எனில், $D_{12}f = D_{21}f$.

நிறுவல்:

$A = (D_{21}f)(a, b)$ என்க.

$\varepsilon > 0$ என்க.

Q என்பது 7.37-ல் கூறப்பட்ட செவ்வகம், h, k என்பன மிகச் சிறியன எனில், அனைத்து $(x, y) \in Q$-க்கு, $|A - (D_{21}f)(x, y)| < \varepsilon$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, $\left| \dfrac{\Delta(f, Q)}{hk} - A \right| < \varepsilon$

h-ஐ நிலைநிறுத்துக.

$k \to 0$ என்க.

E-ல் D_2f இருக்கிறது என்பதால்,

$$\left| \frac{(D_2f)(a+h, b) - (D_2f)(a, b)}{h} - A \right| \le \varepsilon \qquad \text{----- (19)}$$

ε ஏதேனும் ஒரு எண் என்பதால், அனைத்து சிறிய $h \neq 0$-க்கு, (19) உண்மையாகும்.

எனவே, $(D_{12}f)(a, b) = A = (D_{21}f)(a, b)$.

7.10. தொகையங்களின் வகையீடுகள் (Differentiation of Integrals)

φ என்ற இரு மாறிகளின் சார்பை, ஒரு மாறியைப் பொறுத்து தொகையிடவும், அடுத்த மாறியைப் பொறுத்து வகையிடவும் முடியும் என்க.

$\varphi^t(x) = \varphi(x, t)$ என்க.

அதாவது, அனைத்து t-க்கு φ^t என்பது ஒரு மாறி சார்பாகும்.

7.40. தேற்றம்

(அ) $a \le x \le b, c \le t \le d$-க்கு $\varphi(x, t)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(ஆ) $[a, b]$-ல் α ஏறும் சர்ர்பு.

(இ) அனைத்து $t \in [c, d]$-க்கு, $\varphi^t \in \Re(\alpha)$

(ஈ) $c < s < d$ மற்றும் அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு $\delta > 0$ என்ற எண் அனைத்து $x \in [a, b]$ மற்றும் அனைத்து $t \in (s - \delta, s + \delta)$-க்கு,

$|(D_2\varphi)(x, t) - (D_2\varphi)(x, s)| < \varepsilon$ என அமையும்.

$f(t) = \int_a^b \varphi(x, t)\, d\alpha(t)$, $(c \le t \le d)$ என வரையறுப்பின்,

$(D_2\varphi)^s \in \Re(\alpha)$, $f'(s)$ இருக்கும், மற்றும் $f'(s) = \int_a^b (D_2\varphi)(x, s)\, d\alpha(x)$

நிறுவல்:

$0 < |t - s| < \delta$-க்கு,

$\psi(x, t) = \dfrac{\varphi(x, t) - \varphi(x, s)}{t - s}$ என்க.

தேற்றம் 4.10-ன் படி, ஒவ்வொரு (x, t)-க்கு s மற்றும் t இவைகளுக்கிடையில் அமையும் u என்ற எண், $\psi(x, t) = (D_2\varphi)(x, u)$ என இருக்கும்.

$(19) \Rightarrow |\psi(x, t) - (D_2\varphi)(x, s)| < \varepsilon, (a \le x \le b, 0 < |t - s| < \delta)$

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \int_a^b \psi(x, t)\, d\alpha(x) \quad \text{----- (20)}$$

என்பதால், $[a, b]$-ல் $t \to s$ எனில், $\psi^t \to (D_2\varphi)^s$ (சீராக).

ஒவ்வொரு $\psi^t \in \Re(\alpha)$ என்பதால், (20) மற்றும் தேற்றம் 6.22-ன் படி,

$(D_2\varphi)^s \in \Re(\alpha)$ மற்றும் $f'(s) = \int_a^b (D_2\varphi)(x, s)\, d\alpha(x)$.

7.11. பயிற்சி வினாக்கள்

1. S என் பது ஒரு திசையன் வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில், S-ன் அளாவல் ஒரு திசையன் வெளி எனக் காட்டுக.

2. $A \in L(X, Y)$ மற்றும் $x = 0$-ல் மட்டுமே $Ax = 0$ எனில், A ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.

3. நேரிய உருமாற்றங்களின் இன்மை வெளிகள் மற்றும் வீச்சுகள் திசையன் வெளிகள் என நிறுவுக.

4. f: $R^1 \to R^1$ என்ற சார்பு, நேரியச் சார்பாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாவது: $f(x) = ax, a = f(1)$ என அமைதலாகும்.

5. $f: R^2 \to R^1$ என்ற சார்பு நேரியல் சார்பாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை காண்க.

6. E என்பது R^n-ன் ஏதேனும் ஒரு உட்கணம். $f: E \to R^m$ என்பது $f(x) = \|x\|^2$ என அமையும் ஒரு சார்பு எனில், f-ன் திசையிடப்பட்ட வகைக்கெழுக் காண்க.

7. $E \subset R^n$ என்ற திறந்த கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புடைய சார்பு f-ன் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $D_1f, \ldots, D_nf$ என்பவை E-ல் வரம்புடையன் எனில், E-ல் f தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

8. $E \subset R^n$ என்பது ஒரு இணைந்த திறந்த கணம். $f: E \to R^m$ ஒரு வகையிடத்தக்கச் சார்பு, மேலும் அனைத்து $x \in E$-க்கு, $f'(x) = 0$ எனில், E-ல் f ஒரு மாறிலி சார்பு என நிறுவுக.

9. $E \subset R^n$ என்ற குவிந்த, திறந்த கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புடைய சார்பு f, அனைத்து $x \in E$-க்கு, $(D_1f)(x) = 0$ எனில், f(x) ஆனது $x_2, \ldots, x_n$ இவைகளை மட்டுமே பொறுத்தமையும் எனக் காட்டுக.

10. $f(0, 0) = 0$ மற்றும் $(x, y) \neq (0, 0)$ எனில், $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ என இருப்பின், (0, 0)-ல் f தொடர்ச்சியானதாக அமையாவிடிலும், R^n-ன் அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் $(D_1f(x, y)$, $(D_2f)(x, y)$ இருக்கும் என நிறுவுக.

11. $f: R^2 \to R^1$ என்ற சார்பு, $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $f_{xy} = f_{yx}$ எனக் காட்டுக.

12. $f: R^2 \to R$ என்ற சார்பு, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $f_{xy} \neq f_{yx}$ எனக் காட்டுக.

13. $f(u, v, w) = u^2v + wv^2$, மற்றும் $u = xy, v = \sin x, w = e^x$ எனில், சங்கிலி விதியைப் பரிசோதிக்க.

14. $z = x^2 - y^2, x = u\cos v, y = u\sin v$, எனில், $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ -ன் மதிப்புகளைச் சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

15. $x = au + bv, y = cu + dv$ என்ற நேரிய உருமாற்றம் நேர்மாற்றல் உடையது $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ எனக் காட்டுக.

16. $x^3 - y^3 - 3xy - y = 0$ என்ற சமன்பாடு, ஆதியில் $y = g(x)$ என்ற தனித்தத் தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காண்க. மேலும், $g'(x)$ காண்க.

17. $f: R^2 \rightarrow R^1$ என்ற சார்பு, $f(x, y) = \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$,

$f(0, 0) = 0$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $f_x(0), f_y(0), f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ காண்க.

18. f என்பது R^1-ல் அனைத்துப்புள்ளிகளிலும் வகைக்கெழு f' உடைய சார்பு என்க. R^3-ல் $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு g என்க. $h = fog$ எனில், $\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z)(f'[g(x,y, z)])^2$ என நிறுவுக.

****

அத்தியாயம் 8

லெபேக் கோட்பாடு

(The Lebesgue Theory)

இந்த அத்தியாயத்தில், லெபேக் கோட்பாட்டின் அடிப்படை கருத்துக்களான அளவை மற்றும் தொகையிடல் எடுத்துரைக்கப்பட்டுள்ளன. $\int_a^b f(x)\,dx$ -ன் ரீமன் தொகையம் தொடக்கநிலை நுண்கணிதத்தின் (Elementary Calculus) அனைத்து தேவைகளையும் விவரிக்கிறது.

ரீமன் கோட்பாட்டில், தொகைய இடைவெளி, முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஆனால், லெபேக் கோட்பாட்டில், இடைவெளிகள் கணங்களின் பொது அமைப்பான அளக்கத்தக்க கணங்களாக (measurable sets) பிரிக்கப்படுகிறது.

8.1. கணச் சார்புகள் (Set Functions)

A மற்றும் B என்பன இரு கணங்கள். $A - B = \{x: x \in A, x \notin B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வெற்றுகணம் 0 எனக் குறிக்கப்படுகிறது. A, B என்பவை, $A \cap B = 0$ என இருக்குமானால், அவைகள் பொது உறுப்பற்ற கணங்கள் என்றழைக்கப்படும்.

8.1. வரையறை

$\Re$ என்பது கணங்களின் குடும்பம். $A \in \Re$, $B \in \Re \Rightarrow A \cup B \in \Re$, $A - B \in \Re$ எனில், $\Re$ ஒரு வளையம் (ring) என்றழைக்கப்படும்.

$\Re$ ஒரு வளையம் எனில்,

(அ) $A \cap B = A - (A - B) \in \Re$

(ஆ) $A_n \in \mathfrak{R}, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ எனில், $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ என இருக்குமானால், $\mathfrak{R}$ என்ற வளையம் σ வளையம் எனப்படும்.

$\mathfrak{R}$ என்பது σ வளையம் எனில், $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$.

8.2. வரையறை

விரிவாக்கப்பட்ட மெய்யெண் அமைப்பில், φ என்ற சார்பு, அனைத்து $A \in \mathfrak{R}$-க்கு $\varphi(A)$ என்ற எண்ணைத் தருமானால், φ ஆனது $\mathfrak{R}$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கணச் சார்பு (set function) எனப்படும்.

$A \cap B = 0$ எனில், $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ என இருக்குமானால், φ கூட்டத்தக்கச் சார்பு (additive function) எனப்படும்.

$A_i \cap A_j \ (i \neq j)$ எனில், $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ என அமையின், ஆனது எண்ணத்தக்க கூட்டுக் கணச்சார்பு (countably additive set function) எனப்படும்.

இங்கு, φ-ன் வீச்சு, $+\infty$ மற்றும் $-\infty$ அல்லது இவை இரண்டையும் பெற்றிருக்காது.. மேலும், $+\infty$, $-\infty$ மட்டுமே மதிப்புகளாகக் கொண்ட கணச்சார்புகள் இங்கு விலக்கப்படுகின்றன.

φ கூட்டத்தக்க சார்பு எனில், பின்வரும் பண்புகள் மிக எளிதாகப் பெறப்படும்.

(அ) $\varphi(0) = 0$

(ஆ) $A_i \cap A_j = 0, (i \neq j)$ எனில், $\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n)$

இது n-ல் தொகுத்தறிதல் முறைப்படி நிறுவப்படும்.

$n = 2$ எனில், $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$ என்பது φ கூட்டத்தக்கது என்பதால் உண்மை.

$(n-1)$ கணங்களுக்கு, இது உண்மை எனில்,

$$\varphi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n) = \varphi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + \varphi(A_n)$$

(ஏனெனில், $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n = 0$)

$$= \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + . + \varphi(A_{n-1}) + \varphi(A_n)$$

(இ) $\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 \cup A_2) &= \varphi[A_1 \cup (A_2 - (A_1 \cap A_2))] \\ &= \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - (A_1 \cap A_2)), (A_1 \cap [A_2 - (A_1 \cap A_2)] = 0) \\ &= \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varphi(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

(ஈ) அனைத்து A-க்கு, $\varphi(A) \geq 0$, $A_1 \subset A_2$ எனில், $\varphi(A_1) \leq \varphi(A_2)$

$A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$ என்பதால்,

$$\begin{aligned} \varphi(A_2) &= \varphi[A_1 + (A_2 - A_1)] \\ &= \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1) \Rightarrow \varphi(A_2) \geq \varphi(A_1) \end{aligned}$$

எனவே, குறை மதிப்பற்ற கூட்டத்தக்க கணச் சார்புகள், ஒரு போக்கு சார்புகளாக (Monotonic Functions) அமையும்.

(உ) $B \subset A$ மற்றும் $|\varphi(B)| < +\infty$ எனில், $\varphi(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B)$.

$$A = B \cup (A - B) \Rightarrow \quad \varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(A - B).$$

எனவே, $\varphi(A) - \varphi(B) = \varphi(A - B)$.

8.3. தேற்றம்

$\mathfrak{R}$ என்ற வளையத்தில், φ ஒரு எண்ணத்தக்க கூட்டு கணச்சார்பு என்க. $A_n \in \mathfrak{R}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A \in \mathfrak{R}$ மற்றும்

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ எனில், $n \to \infty$ ஆக இருக்கும் போது, $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$.

நிறுவல்:

$B_1 = A_1$ மற்றும்

$B_n = A_n - A_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ என்க.

$i \neq j$ எனில், $B_i \cap B_j = 0$.

$$B_1 \cup \ldots \cup B_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \ldots \cup (A_n - A_{n-1})$$
$$= A_n$$

மேலும், $A = \cup B_n$.

எனவே, $\varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_i)$$

மற்றும், $\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i)$

எனவே, $n \to \infty$ எனில், $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ ஆகும்.

8.2. லெபேக் அளவை (Lebesgue Measure)

8.4. வரையறை

R^p என்பது p-பரிமாண யூக்ளிடின் வெளி.

(அ) R^p-ல் இடைவெளி என்பது, $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ என அமையும் $x = (x_1, \ldots, x_p)$ என்ற புள்ளிகளின் கணம், அல்லது மேலேக் கண்ட $\leq$ குறிகளில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவை $<$ என்ற குறியினால் மாற்றப்படினும், அந்த புள்ளிகளின் கணமும் R^p -ல் இடைவெளிகளாகும்.

குறிப்பாக, இன்மைக் கணமும் இடைவெளிகளில் ஒரு கணமாகும்.

(ஆ) A என்பது, முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள இடைவெளிகளின் சேர்ப்பு எனில், A என்பது தொடக்க நிலை கணம் (Elementary Sets) என்றழைக்கப்படும்.

(இ) I ஒரு இடைவெளி எனில், $m(I) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$ வரையறுக்கப்படுள்ளது.

(ஈ) $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ மற்றும் இந்த இடைவெளிகள் ஜோடிவாரியாக பொது உறுப்பற்றவை (pairwise disjoint) எனில், $m(A) = m(I_1) + \ldots + m(I_n)$ ----(1) என அமைக்க.

R^p-ன் அனைத்து தொடக்கநிலை உட்கணங்களின் குடும்பம் $\mathcal{E}$ எனில், $\mathcal{E}$ பின்வரும் பண்புகளை நிறைவேற்றும்.

(உ) $\mathcal{E}$ ஒரு வளையம். ஆனால், σ வளையம் அல்ல.

(ஊ) $A \in \mathcal{E}$ எனில், A ஆனது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பொது உறுப்பற்ற இடைவெளிகளின் இரு வெவ்வேறான பிரித்தலைப் பயன்படுத்தினாலும், ஒவ்வொன்றும் m(A)-ன் ஒரே மதிப்பைத் தரும்.

(ஊ) $A \in \mathcal{E}$ எனில், (1)-ன் படி m(A) நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது, A ஆனது, பொது உறுப்பற்ற இடைவெளிகளின் இரு வெவ்வேறான பிரித்தலைப் பயன்படுத்தினாலும், ஒவ்வொன்றும் m(A)-ன் ஒரே மதிப்பைத் தரும்.

(எ) $\mathcal{E}$-ல் m கூட்டத்தக்கது. அதாவது, $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B = 0$ எனில், $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

p = 1, 2, 3 எனில், m ஆனது முறையே நீளம், பரப்பு மற்றும் கன அளவு இவைகளைக் குறிக்கும்.

8.5. வரையறை

$\mathcal{E}$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட, குறை மதிப்பற்ற, கூட்டத்தக்க கணச்சார்பு φ என்க.

அனைத்து $A \in \mathcal{E}$, அனைத்து $\varepsilon > 0$-க்கு, $F \in \mathcal{E}$ என்ற மூடிய கணம், $G \in \mathcal{E}$ என்ற திறந்த கணம், $F \subset A \subset G$ மற்றும் $\varphi(G) - \varepsilon \le \varphi(A) \le \varphi(F) + \varepsilon$ என அமையின், φ ஆனது ஒழுங்கான (regular) சார்பு எனப்படும்.

8.6. எடுத்துக்காட்டு

(அ) m என்ற கூட்டத்தக்க சார்பு ஒழுங்கானது.

A ஒரு இடைவெளி என்க.

$A = [a, b], F = [a + \varepsilon/3, b - \varepsilon/3] = [a_1, b_1]$,

$G = [a - \varepsilon/3, b + \varepsilon/3] = [a_2, b_2]$ என்க.

$m(A) = b - a$

$m(F) = b - a - 2\varepsilon/3$

$m(G) = b - a + 2\varepsilon/3$

$m(G) - \varepsilon = b - a - \varepsilon/3$

எனவே, $m(G) - \varepsilon \leq b - a = m(A)$

$m(F) + \varepsilon = b - a + \varepsilon/3 \geq b - a$

$m(F) + \varepsilon \geq m(A)$

ஆகவே, $m(G) - \varepsilon \leq m(A) \leq m(F) + \varepsilon$

A ஏதேனும் ஒரு தொடக்கநிலை கணம் எனில். (ஊ)-ன் படி, A ஆனது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பொது உறுப்பற்ற இடைவெளிகளின் சேர்ப்பாகும்.

8.7. வரையறை

$\mathcal{E}$-ல் கூட்டத்தக்க, ஒழுங்கான, குறைமதிப்பற்ற, முடிவுள்ள சார்பு μ என்க. $E \subset R^p$ என்க. E-ன் திறந்த தொடக்கநிலை கணங்களின் எண்ணத்தக்க அடைப்பு $\{A_n\}$,

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ என்க.

$\mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ என வரையறுக்க.

$\mu^*(E)$ ஆனது, μ-ஐப் பொறுத்து, E-ன் புற அளவை (outer measure) எனப்படும்.

அனைத்து E-க்கு, $\mu^*(E) \geq 0$. மேலும், $E_1 \subset E_2$ எனில், $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$.

8.8. தேற்றம்

(அ) அனைத்து $A \in \mathcal{E}$-க்கு, $\mu^*(A) = \mu(A)$

(ஆ) $E = \bigcup_1^\infty E_n$ எனில், $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

μ^* ஆனது, μ-ன் விரிவாக்கம் ஆகும். ($\mathcal{E}$ -ல் இருந்து, R^p-ன் அனைத்து உட்கணங்களின் குடும்பத்திற்கு விரிவாக்கம்) பண்பு (ஆ)-ஆனது, μ^* உள் கூட்டத்தக்கது எனப்படும்.

நிறுவல்:

$A \in \mathcal{E}, \varepsilon > 0$ என்க.

(அ) μ ஒழுங்கான சார்பு என்பதால், G என்ற திறந்த தொடக்க நிலை கணமானது, $A \subseteq G$, $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$ என அமையும்.

$\mu^*(A) \leq \mu(G)$ என்பதால், $\mu^*(A) \leq \mu(A) + \varepsilon$

ε ஏதேனும் ஒரு எண் என்பதால், $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

μ^*-ன் வரையறையின் படி, $\{A_n\}$ என்ற திறந்த தொடக்கநிலை கணங்களின் தொடர்வரிசை, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, மற்றும் $\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ என அமையும்.

எனவே, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$

μ ஒழுங்கான சார்பு என்பதால், F என்ற மூடிய தொடக்கநிலை கணம், $F \subset A$ மற்றும் $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ என அமையும்.

F கச்சிதமானது என்பதால், ஏதேனும் ஒரு N-க்கு, $F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$ என இருக்கும்.

$\mu(F) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$ [μ கூட்டத்தக்கது, $A_i \cap A_j = 0, i \neq j$]

எனவே, $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$

$$\leq \sum_1^N \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

ஆகவே, $\mu(A) \leq \mu^*(A) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$

(ஆ) $E = \cup E_n$ என்க.

அனைத்து n-க்கு, $\mu^*(E_n) < +\infty$ என்க.

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

E_n-ன் திறந்த தொடக்கநிலை கணங்களின் அடைப்பு (covering) $\{A_{nk}\}$,

$(k = 1, 2, ...)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$ என அமையும்.

இப்பொழுது, $E = \bigcup_{1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}\right)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

எனவே, $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

ஏதேனும் ஒரு n-க்கு, $\mu^*(En) = +\infty$ எனில், $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ என்பது அற்பமானது.

8.9. **வரையறை**

(அ) $A \subset R^p$, $B \subset R^p$ என்க.

$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A)$

$d(A, B) = \mu^*(S(A, B))$ என வரையறுக்க.

$\lim_{n \to \infty} d(A, A_n) = 0$ எனில், $A_n \to A$ என எழுதப்படும்.

(ஆ) $\{A_n\}$ என்ற தொடக்கநிலை கணங்களின் தொடர்வரிசை, $A_n \to A$ என அமையுமானால், A ஆனது முடிவுறு μ-அளக்கத்தக்க கணம். (finitely μ-measurable set) என்றழைக்கப்படும். இது, $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ என எழுதப்படும்.

(இ) A என்பது எண்ணத்தக்க, முடிவுறு μ-அளக்கத்தக்க கணங்களின் சேர்ப்பாக அமையும் எனில், A ஆனது μ-அளக்கத்தக்கது (μ-measurable) எனப்படும். இது, $A \in \mathcal{M}(\mu)$ என எழுதப்படும்.

குறிப்பு:

S(A, B) ஆனது A, B-ன் சமச்சீர் வேறுபாடு (symmetric difference) ஆகும். d(A, B) ஆனது தூர சார்பாக அமையும்.

8.10. S(A, B)-ன் பண்புகள்

(அ) $S(A, B) = S(B, A)$

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = S(B, A)$$

(ஆ) $S(A, A) = 0$

(இ) $S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B)$

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$x \in A-B \Rightarrow x \in A$ மற்றும் $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A - C$ அல்லது $x \in C - B$

$\Rightarrow x \in (A - C) \cup (C - B)$

$\Rightarrow A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$

இதைப்போல், $B - A \subset (B - C) \cup (C - A)$

எனவே, $S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B)$

(ஈ)
$$\left.\begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$$

நிறுவல்:

$$S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) = [(A_1\cup A_2) - (B_1\cup B_2)]\cup[(B_1\cup B_2) - (A_1\cup A_2)]$$

$x\in (A_1\cup A_2) - (B_1\cup B_2) \Rightarrow x\in A_1\cup A_2$ மற்றும் $x\notin B_1\cup B_2$

$\Rightarrow$ ($x\in A_1$ அல்லது $x\in A_2$) மற்றும் ($x\notin B_1$ மற்றும் $x\notin B_2$)

$\Rightarrow$ ($x\in A_1$ மற்றும் $x\notin B_1$) அல்லது ($x\in A_2$ மற்றும் $x\notin B_2$)

$\Rightarrow x\in(A_1-B_1)$ அல்லது $x\in A_2-B_2$

$\Rightarrow x\in(A_1 - B_1)\cup(A_2 - B_2)$

எனவே, $(A_1\cup A_2) - (B_1\cup B_2) \subset (A_1 - B_1)\cup(A_2 - B_2)$

இதைப்போல், $(B_1\cup B_2) - (A_1\cup A_2) \subset (B_1 - A_1)\cup(B_2 - A_2)$

எனவே, $S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$

அடுத்ததாக,

$$\begin{aligned} S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) &= S[(A_1\cup A_2)^c, (B_1\cup B_2)^c] \\ &= S(A_1^c\cup A_2^c, B_1^c\cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) \\ &= S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2) \end{aligned}$$

இறுதியாக,

$A_1 - A_2 = A_1\cap A_2^c$

$\Rightarrow S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) = S(A_1\cap A_2^c, B_1 \cap B_2^c)$

$\subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2^c, B_2^c)$

$= S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$

8.11. d(A, B)-ன் பண்புகள்

மேலேக் கண்ட S(A,B)-ன் பண்புகளில் μ^* காண,

(i) $d(A,B) = d(B,A)$

(ii) $d(A, A) = 0$

(iii) $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$

(iv) $\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

d என்பது ஒரு யாப்பு என்பதற்கான பண்புகளில் $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ என்பதைத் தவிர, அனைத்தையும் நிறைவேற்றுகிறது.

(v) $\mu^*(A)$ மற்றும் $\mu^*(B)$ இவைகளில் குறைந்தது ஒன்று முடிவுள்ளது எனில், $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$

நிறுவல்:

$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ என்க.

$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \Rightarrow d(A, 0) \leq d(A, B) + d(B, 0)$

$\Rightarrow \mu^*(S(A, 0)) \leq d(A, B) + \mu^*(S(B, 0))$

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$

$\mu^*(B)$ முடிவுள்ளது என்பதால், $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$

8.12. தேற்றம்

$\mathcal{M}(\mu)$ ஒரு σ வளையம். மேலும், $\mathcal{M}(\mu)$-ல் μ^* எண்ணத்தக்க கூட்டத்தக்க சார்பாகும்.

நிறுவல்:

$A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, $B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ என்க.

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ மற்றும் $A - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$

மேலும் $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu) \Rightarrow A, B$ என்பன முடிவுறு μ - அளக்கத்தக்கது.

$\Rightarrow \{A_n\}, \{B_n\}$ என்ற தொடர்வரிசைகள், $A_n \in \mathcal{E}, B_n \in \mathcal{E}, n \to \infty$ எனில், $A_n \to A$, $B_n \to B$ என அமையும்.

மேலும், $d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leq d(A_n, A) + d(B_n. B)$

$n \to \infty$ எனில், $d(A_n \cup B_n) \to A \cup B$.

எனவே, $A_n \cup B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

இதைப்போலவே,

$d(A_n \cap B_n, A\cap B) \leq d(A_n, A) + d(B_n, B)$

$n\to\infty$ எனில், $A_n\cap B_n \to A\cap B$.

மேலும், $A_n - B_n \to A - B .. \Rightarrow A - B\in M_F(\mu)$.

ஆகையால், $\mathcal{M}_F(\mu)$ ஒரு வளையம் ஆகும்.

$d(A, B)$-ன் பண்பு (v)-ன் படி,

$|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq d(A_n, A) \to 0$, ($n\to\infty$ எனில்)

எனவே, $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$, மேலும், $\mu^*(A) < +\infty$

அடுத்து, $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 8.8-ன் படி, $A_n\in\mathcal{E} \Rightarrow \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$.

அடுத்ததாக,

$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n\cup B_n) + \mu(A_n\cap B_n)$

$A_n, B_n, A_n\cup B_n , A_n\cap B_n \in \mathcal{E}$ என்பதால்,

$\mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) = \mu^*(A_n\cup B_n) + \mu^*(A_n\cap B_n)$

$n \to\infty$ எனில், $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A\cup B) + \mu^*(A\cap B)$

$A\cap B = 0$ எனில், $\mu^*(A\cap B) = 0$.

ஆகவே, $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A\cup B)$

இது, μ^* ஆனது $\mathcal{M}_F(\mu)$-ல் கூட்டத்தக்கது, என்பதைத் தரும்.

அடுத்ததாக, $A\in\mathcal{M}(\mu)$ எனில், $A\in\mathcal{M}_F(\mu)$ என நிறுவுவோம்.

$A\in \mathcal{M}(\mu)$ என்க.

(அ) A-ஐ, $\mathcal{M}_F(\mu)$-ன் பொது உறுப்பற்ற கணங்களின் எண்ணத்தக்க சேர்ப்பு ஆக அமைக்கலாம் என நிறுவுவோம்.

$A = \cup A_n'$, $A_n'\in\mathcal{M}_F(\mu)$ என்க.

$A_1 = A_1'$

$A_2 = (A_1' \cup A_2') - A_1'$

$A_3 = (A_1' \cup A_2' \cup A_3') - (A_1' \cup A_2')$

... ...

$A_n = (A_1' \cup \ldots \cup A_n') - (A_1' \cup \ldots \cup A_{n-1}'), (n = 2, 3, 4 \ldots)$ எனில்,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

மேலும், அனைத்து A_n-களும் பொது உறுப்பற்றவை.

(ஆ) $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ என நிறுவுவோம்.

தேற்றம் 8.8 (ஆ)-ன் படி, $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ ----- (2)

$A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ஆகும்.

$\mathcal{M}_F(\mu)$-ல் A கூட்டத்தகக்து, A_n பொது உறுப்பற்றவை என்பதால்,

$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n)$

$n \to \infty$ எனில், $\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ ----- (3)

(2), (3)-ல் இருந்து, $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

(இ) $\mu^*(A)$ முடிவுள்ளது என்க. $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ என்க.

$B_n \to A$ என நிறுவுவோம்.

$$d(B_n, A) = \mu^*[S(B_n, A)]$$
$$= \mu^*[(B_n - A) \cup (A - B_n)]$$
$$= \mu^*[0 \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i]$$
$$= \mu^*[\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0 \ (n \to \infty \text{ எனில்})$$

(4)-ல் இருந்து, $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

எனவே, $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0$

$n\to\infty$ எனில், $d(B_n, A) \to 0$. ஆகவே, $B_n \to A$.

$B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ என்பதால், $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

ஆகையால், $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $\mu^*(A) < +\infty$ எனில், $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ ----- (5)

(ஈ) $\mathcal{M}(\mu)$-ல் μ^* எண்ணத்தக்க கூட்டுச் சார்பு என நிறுவுவோம்.

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\{A_n\}$ என்பது $\mathcal{M}(\mu)$-ல் பொது உறுப்பற்ற கணங்களின் தொடர்வரிசை.

அனைத்து n-க்கு, $\mu^*(A) < +\infty$ என்க.

பின், $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ ((5)-ல் இருந்து)

(4)-ல் இருந்து, $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

ஏதேனும் ஒரு n-க்கு, $\mu^*(A) = +\infty$ எனில், $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$.

இப்பொழுது, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \geq A_n$

எனவே, $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_n) = \infty \Rightarrow \mu^*(A) = \infty$.

$\Rightarrow \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

μ^* ஆனது $\mathcal{M}(\mu)$-ல் எண்ணத்தக்க கூட்டுச் சார்பாக அமையும்.

(உ) $\mathcal{M}(\mu)$ ஆனது σ வளையம் என நிறுவுவோம்.

(i) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}(\mu)$ எனில், $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mu)$

(ii) $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ எனில், $A - B \in \mathcal{M}(\mu)$ என நிறுவ வேண்டும்.

அதற்கு முதலாவதாக, $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ என்க. $(n = 1, 2, \ldots)$

பின், $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$, $A_{nk} \in M_F(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} \in \mathcal{M}(\mu)$$

அடுத்ததாக, $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ எனில்,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \; B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \; A_n, B_n \in \mathcal{M}_F(\mu).$$

இப்பொழுது, $A_n \cap B = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right)$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

$A_n \cap B_i \in \mathcal{M}(\mu)$ $(I = 1, 2, \ldots) \Rightarrow A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$.

மேலும், $\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty$ (ஏனெனில், $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$.)

$\Rightarrow A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

எனவே, $A_n - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \mathcal{M}(\mu).$$

ஆகையால், $\mathcal{M}(\mu)$ ஒரு σ வளையம்

தேற்றத்தின் நிறுவல் நிறைவடைகிறது.

குறிப்பு:

$A \in \mathcal{M}(\mu)$ எனில், $\mu^*(A)$-ஐ $\mu(A)$-ஆல் மாற்றியமைக்க, $\mathcal{E}$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட μ ஆனது, $\mathcal{M}(\mu)$ என்ற σ வளையத்தில், எண்ணத்தக்க கூட்டு கணச்சார்பாக விரிவாக்கம் செய்யப்படும்.

இந்த விரிவாக்கப்பட்ட, கணச்சார்பு அளவை (measure) என்றழைக்கப்படும்.

$\mu = m$ என்ற தனி வகை, R^p-ல் லெபேக் அளவை (Lebesgue measure) எனப்படும்.

குறிப்பு:

(அ) A ஒரு திறந்த கணம் என்க.

R^p-ல் அனைத்து திறந்த கணமும், எண்ணத்தக்க திறந்த இடைவெளிகளின் குழுமத்தின் சேர்ப்புக் கணம் என்பதால், $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

நிரப்பிகள் காண, $\mathcal{M}(\mu)$.-ன் ஒவ்வொரு மூடிய கணமும், $\mathcal{M}(\mu)$-ன் உறுப்பாக அமையும்.

(ஆ) $A \in \mathcal{M}(\mu)$, $\varepsilon > 0$ எனில், F மற்றும் G என்ற திறந்த கணங்கள் $F \subset A \subset G$ என அமையும்.

F மூடிய கணம் மற்றும் G திறந்த கணம். மேலும், $\mu(G - A) < \varepsilon$, $\mu(A - F) < \varepsilon$

(இ) E ஆனது திறந்த கணங்களில், எண்ணத்தக்க செய்லிகளைச் செயல்படுத்தும் போது கிடைக்கும் கணம் எனில், E போரல் கணம் (Borel set) எனப்படும். ஒவ்வொரு செயலியும், சேர்ப்பு, வெட்டு அல்லது நிரப்பி இவைகளாக அமையும்.

R^p-ல் அனைத்து போரல் கணங்களின் கூட்டம் $\mathcal{B}$ ஆனது σ வளையம் ஆகும்.

இது அனைத்து திறந்த கணங்களையும் உள்ளடக்கிய மிகச் சிறிய σ வளையம் ஆகும்.

(அ)-ன் படி, $E \in \mathcal{B}$ எனில்,, $E \in \mathcal{M}(\mu)$.

(ஈ) $A \in \mathcal{M}(\mu)$ எனில், F மற்றும் G என்ற போரல் கணங்கள், $F \subset A \subset G$ என அமையும். $\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0$ என இருக்கும்.

இது, (ஆ)-ல் $\varepsilon = 1/n$ மற்றும் $n \to \infty$ என செயல்படுத்தக் கிடைக்கும்.

$A = F \cup (A - F)$ என்பதால், அனைத்து $A \in \mathcal{M}(\mu)$-ம் போரல் கணம் மற்றும் அளவை பூஜ்ஜியம் உடைய கணம் இவைகளின் சேர்ப்புக் கணம் ஆகும்.

அனைத்து μ-க்கு, போரல் கணங்கள் μ அளக்கத்தக்கது. ஆனால், அளவை பூஜ்ஜியம் உடைய கணங்கள் (அதாவது, $\mu^*(E) = 0$ என அமையும் E என்ற கணங்கள்), μ-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறாக அமையலாம்.

(உ) அனைத்து μ-க்கு, அளவை பூஜ்ஜியம் உடைய கணங்கள், σ வளையம் ஆகும்.

(ஊ) லெபேக் அளவையில், ஒவ்வொரு எண்ணத்தக்க கணமும், அளவை பூஜ்ஜியம் உடையதாக அமையும். ஆனால், அளவை பூஜ்ஜியம் உடைய எண்ணிட முடியாத கணங்களும் உள்ளன.

இதற்கு உதாரணமக, காண்டார் கணங்கள் உள்ளன.

முதல் அத்தியாயத்தில் உள்ள காண்டார் குறியீடுகளின் படி, $m(E_n) = (2/3)^n$, $(n = 1., 2, \dots)$

$P = \cap E_n$, அனைத்து n-க்கு $P \subset E_n$ எனில், $m(P) = 0$ ஆக அமையும்.

8.3. அளவை வெளிகள் (Measure Spaces)

8.13. வரையறை

X ஒரு கணம் என்க. (X ஆனது, யூக்ளீடின் வெளியின் உட்கணம் அல்லது யாப்பு வெளியின் உட்கணம் ஆக அமையத் தேவையில்லை)

X-ன் உட்கணங்களைக் கொண்ட $\mathcal{M}$ என்ற σ வளையம் மற்றும் $\mathcal{M}$ -ல் வரையறுக்கப்பட்ட குறைமதிப்பற்ற எண்ணத்தக்க கூட்டு கணச்சார்பு μ (countably additive set function). இவைகள் இருக்குமானால், X ஒரு அளவை வெளி (Measure Space) எனப்படும்.

$\mathcal{M}$-ன் உறுப்புகள் அளக்கத்தக்க கணங்கள் என்றும், μ ஆனது ஒரு அளவை (measure) எனவும் அழைக்கப்படும்.

கூடுதலாக, $X \in \mathcal{M}$ எனில், X ஒரு அளக்கத்தக்க வெளி (Measurable Space) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $X = R^p$ எனில், $\mathcal{M}$ ஆனது R^p-ன் லெபேக் அளக்கத்தக்க உட்கணங்களின் கூட்டம் ஆகவும், μ ஆனது லெபேக் அளவையாகவும் அமையும். அல்லது, அனைத்து முழு எண்களின் கணம் X எனில், $\mathcal{M}$ ஆனது, X-ன் அனைத்து உட்கணங்களின் கூட்டமாகவும், $\mu(E)$ ஆனது E-ன் உறுப்புகளின் என்ணிக்கையாகவும் அமையும்.

மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாக, நிகழ்தகவு வெளியில், நிகழ்ச்சிகள் (events) கணங்களாகவும், நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு, என்ணத்தக்கக் கூட்டு கணச் சார்பாகவும் அமையும்.

பின்வரும் அத்தியாயங்களில், அளக்கத்தக்க வெளிகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

P என்ற பண்பைப் பெற்ற, அனைத்து உறுப்புகள் X-ன் கணம், $\{x|P\}$ எனக் குறியிடப்படும்.

8.4. அளக்கத்தக்க சார்புகள் (Measurable Functions)

8.14. வரையறை

X என்ற அளக்கத்தக்க வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட, விரிவாக்கப்பட்ட மெய்யெண் அமைப்பில் மதிப்புகள் உடைய சார்பு f என்க.

அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x: f(x) > a\}$ என்ற கணம் அளக்கத்தக்கக் கணமாக அமையின், f அளக்கத்தக்கச் சார்பு எனப்படும்.

8.15. எடுத்துக்காட்டு

$X = R^p$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu)$ (வரையறை 8.9) எனில், அனைத்து தொடர்ச்சியான சார்பு f-ம் அளக்கத்தக்கது.

$$\{x : f(x) > a\} = \{x: f(x) \in (a, \infty)\}$$
$$= \{x : x \in f^{-1}(a, \infty)\} = f^{-1}(a, \infty)$$

f தொடர்ச்சியானது என்பதால், (a, ∞)-ன் நேர்மாற்று பிம்பம் $f^{-1}(a, \infty)$-யும் திறந்த கணமாக அமையும். அதாவது, $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{M}(\mu)$.

8.16. தேற்றம்

பின்வரும் நான்கு கட்டுப்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற மூன்றைத் தரும்.

(அ) அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கது.

(ஆ) அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) \geq a\}$ அளக்கத்தக்கது.

(இ) அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) < a\}$ அளக்கத்தக்கது.

(ஈ) அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) \leq a\}$ அளக்கத்தக்கது.

நிறுவல்:

(அ) $\Rightarrow$ (ஆ)

அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கது என்க.

$\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > a - 1/n\}$ அளக்கத்தக்கது.

(ஆ) $\Rightarrow$ (இ)

அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) \geq a\}$ அளக்கத்தக்கது. என்க.

$\{x : f(x) < a\} = X - \{x : f(x) \geq a\}$ அளக்கத்தக்கது.

(இ) $\Rightarrow$ (ஈ)

அனைத்து மெய் a-க்கு, $\{x : f(x) < a\}$ அளக்கத்தக்கது என்க.

$\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) < a + 1/n\}$ அளக்கத்தக்கது.

(ஈ) $\Rightarrow$ (அ)

$\{x : f(x) \leq a\}$ அளக்கத்தக்கது எனில், அதன் நிரப்பி $X - \{x : f(x) \leq a\}$- யும் அளக்கத்தக்கது. அதாவது, $\{x : f(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கது.

8.17. எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) f அளக்கத்தக்கது எனில், ஒவ்வொரு விரிவாக்கப்பட்ட மெய்யெண் a-க்கு $\{x : f(x) = a\}$- யும் அளக்கத்தக்கது.

நிறுவல்:

a முடிவுள்ளது எனில்,

$\{x : f(x) = a\} = \{x : f(x) \geq a\} \cap \{x : f(x) \leq a\}$ என்பது அளக்கத்தக்கது.

$a = \infty$ எனில்,

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > n\}$$ என்பது அளக்கத்தக்கது.

இதைப் போலவே, $a = -\infty$ எனில், $\{x : f(x) = \infty\}$ –ம் அளக்கத்தக்கது.

(ஆ) மாறிலி சார்புகள் அளக்கத்தக்கன

நிறுவல்:

f மாறிலி சார்பு எனில், a-ஐப் பொறுத்து, $\{x : f(x) > a\}$ ஆனது, மெய்க்கோடு அல்லது வெற்று கணமாக அமையும்.

8.18. தேற்றம்

c என்பது ஏதேனுமொரு மெய்யெண் X என்ற அளக்கத்தக்க வெளியில், வரையறுக்கபட்ட, மெய் மதிப்புடைய அளக்கத்தக்க சார்புகள் f, g எனில், $f + c$, cf, $f + g$, $f - g$ மற்றும் fg என்பனவும் அளக்கத்தக்கன.

நிறுவல்:

(அ) அனைத்து a-க்கு, $\{x : f(x) + c > a\} = \{x : f(x) > a - c\}$ ஒரு அளக்கத்தக்கக் கணம்.

எனவே, $f + c$ அளக்கத்தக்கது.

(ஆ) $c = 0$ எனில், cf அளக்கத்தக்கது.

$c > 0$ எனில், $\{x : cf(x) > a\} = \{x : f(x) > c^{-1}a\}$ அளக்கத்தகக்து.

இதைப்போலவே, $c < 0$ எனில், $\{x : cf(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கது.

எனவே, cf அளக்கத்தக்கது.

(இ) $A = \{x : f(x) + g(x) > a\}$ என்க.

$f(x) > a - g(x)$ எனில், $x \in A$.

அதாவது, r_i என்ற விகிதமுறு எண், $f(x) > r_i > a - g(x)$ என இருக்கும்.

$\{r_i : i = 1, 2, \ldots\}$ என்பது, விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q-ன் கணக்கெடுப்பு (enumeration) ஆகும்.

ஆனால், $g(x) > a - r_i. \Rightarrow x \in \{x: f(x) > r_i\} \cap \{x: g(x) > a - r_i\}$

எனவே, $A \subseteq B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x: f(x) > r_i\} \bigcap \{x: g(x) > a - r_i\}$, ஒரு அளக்கத்தக்கக் கணம்.

$A \supset B$ என்பதால், $A = B$. எனவே, $f + g$ அளக்கத்தக்கது.

(ஈ) $f - g = f + (-g)$ அளக்கத்தக்கது.

(உ) $fg = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$ என்பதால், f அளக்கத்தக்கது எனில், f^2 அளக்கத்தக்கது என நிறுவினால் போதுமானது.

$a < 0$ எனில், $\{x : f^2(x) > a\} = R^1$ அளக்கத்தக்கது.

$a \geq 0$ எனில், $\{x : f^2(x) > a\} = \{x : f(x) > \sqrt{a}\} \cap \{x : f(x) < -\sqrt{a}\}$ அளக்கத்தக்கது.

8.19. கிளைத்தேற்றம்

$f = \infty$ மற்றும் $g = -\infty$-ல் $f + g$ வரையறுக்கப்படாதப் புள்ளிகளைத் தவிர, மேலேக் கண்டவை, விரிவாக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புடைய அளக்கத்தக்க சார்புகளுக்குப் பொருந்தும்.

நிறுவல்:

$$\{x : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x: f(x) > r_i\} \cap \{x: g(x) > a - r_i\} \cup$$
$$(\{x: f(x) = \infty\} - \{x: g(x) = -\infty\}) \cup$$
$$= (\{x: g(x) = \infty\} - \{x: f(x) = -\infty\})$$

அளக்கத்தக்கக் கணம். எனவே, $f + g$ -ம் அளக்கத்தக்கது.

இதைப்போலவே, $f - g$-ம் அளக்கத்தக்கது என நிறுவலாம்.

8.20. தேற்றம்

f அளக்கத்தகக்து எனில், $|f|$-ம் அளக்கத்தக்கது.

நிறுவல்:

f அளக்கத்தக்கச் சார்பு எனில், அனைத்து a-க்கு, $\{x : f(x) > a\}$, $\{x : f(x) < a\}$ அளக்கத்தக்கக் கணங்கள்.

அனைத்து a-க்கு,

$$\{x : (|f|)(x) < a\} = \{x : |f(x)| < a\} = \{x : -a < f(x) < a\}$$
$$= \{x : f(x) > -a\} \cap \{x : f(x) < a\}$$

f அளக்கத்தக்கச் சார்பு என்பதால், $\{x : f(x) > -a\}$, $\{x : f(x) < a\}$ என்பதும் அளக்கத்தக்கக் கணங்கள். இவைகளின் வெட்டுக்கணம் அளக்கத்தக்கது. எனவே, $|f|$ அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

8.21. தேற்றம்

$\{f_n\}$ என்பது அளக்கத்தக்கச் சார்புகளின் தொடர்வரிசை. $x \in X$-க்கு, $g(x) = \sup f_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $h(x) = \lim_{n \to \infty} \sup f_n(x)$ எனில், g மற்றும் h என்பன அளக்கத்தக்கச் சார்புகள்.

நிறுவல்:

(அ) அனைத்து $n = 1, 2, \ldots,$ -க்கு f_n அளக்கத்தக்கச் சார்புகள்.

எனவே, $\{x : f_n(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கக் கணம்,

$$\{x : g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\}$$ ஒரு அளக்கத்தக்கக் கணம்,

$\therefore$ $g(x)$ அளக்கத்தக்கது.

(ஆ) $\inf f_n(x) = -\sup(-f_n(x))$ என்பதால், $\inf f_n(x)$ அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

$g_m(x) = \sup_{n \geq m} f_n(x)$, அனைத்து $m = 1, 2, \ldots,$ -க்கு, (அ)-ன் படி, $g_m(x)$ அளக்கத்தக்கச் சார்பு. $h(x) = \inf g_m(x)$-ம் அளக்கத்தக்கது.

இதைப்போலவே, $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$-ம் அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

8.22. கிளைத்தேற்றம்

(அ) f, g என்பன அளக்கத்தக்கச் சார்புகள் எனில், $\max(f, g)$ மற்றும் $\min(f, g)$ என்பனவும் அளக்கத்தக்கச் சார்புகள்.

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$ எனில், f^+ மற்றும் f^- என்பனவும் அளக்கத்தக்கன.

(ஆ) அளக்கத்தக்கச் சார்புகளின் ஒருங்கும் தொடர்வரிசையின் எல்லை அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

இவைகள் தேற்றம் 8.21-ல் இருந்து நேரடியாகப் பெறப்படும்.

8.23. தேற்றம்

f, g என்பன் X-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புடைய அளக்கத்தக்கச் சார்புகள் என்க. F என்பது R^2-ல் மெய் மற்றும் தொடர்ச்சியான சார்பு.

$h(x) = F(f(x), g(x))$, $(x \in X)$ எனில், h அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

குறிப்பாக, $f + g$ மற்றும் fg அளக்கத்தக்கச் சார்புகள்.

நிறுவல்:

$G_a = \{ (u, v): F(u, v) > a\}$ என்க.

அனைத்து a-க்கு, (a, ∞) ஆனது R^2-ல் திறந்த கணம். F தொடர்ச்சியான சார்பு என்பதால், $F^{-1}(a, \infty)$-ம் R^2-ல் திறந்த கணம்.

அதாவது, R^2-ல் G_a ஒரு திறந்த உட்கணம்.

ஆகவே, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

I_n என்பது, $I_n = \{(u, v) : a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}$

என்ற திறந்த இடைவெளிகளின் தொடர்வரிசை.

$\{x: a_n < f(x) < b_n\} = (x: f(x) > a_n \} \cap \{x: f(x) < b_n\}$ என்பதால்,

$\{x: a_n < f(x) < b_n\}$ ஒரு அளக்கத்தக்கக் கணம்.

எனவே, $\{x: (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x: a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x: c_n < g(x) < d_n\}$ என்பதும் அளக்கத்தக்கக் கணம்.

$$\begin{aligned}\{x: h(x) > a\} &= \{x: F(f(x), g(x)) > a\} \\ &= \{x: (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: (f(x), g(x)) \in I_n\}\end{aligned}$$

$\{x: (f(x), g(x) \in I_n\}$ என்பது அளக்கத்தக்கக் கணம் என்பதால், $\{x: h(x) > a\}$ அளக்கத்தக்கது.. எனவே, $h(x)$ அளக்கத்தக்கச் சார்பு.

8.5. எளிய சார்புகள் (Simple Functions)

8.24. வரையறை

s என்பது X-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புடையச் சார்பு. s-ன் வீச்சு முடிவுள்ளது எனில், s ஒரு எளிய சார்பு எனப்படும்.

$E \subset X$ எனில், $K_E(x) = \begin{cases} 1, & (x \in E) \\ 0, & (x \notin E) \end{cases}$

என்பது, E-ன் சிறப்பியல்பு சார்பு (Characteristic Function) எனப்படும்.

s-ன் வீச்சு, $c_1, \ldots, c_n$ என்ற வெவ்வேறான எண்களைப் பெற்றிருக்கிறது என்க.

$E_i = \{x: s(x) = c_i\}$ $(i = 1, ..., n)$ எனில், $s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}$

அதாவது, ஒவ்வொரு எளிய சார்பும் சிறப்பியல்பு சார்புகளின் முடிவுள்ள நேரியல் சேர்க்கையாகும்.

மேலும் s அளக்கத்தக்கச் சார்பு $\Leftrightarrow$ $E_1, ..., E_n$ என்பனவும் அளக்கத்தக்கக் கணங்களாக அமைதலாகும்.

8.25. தேற்றம்

f என்பது X-ல் மெய் சார்பு. $\{s_n\}$ என்ற எளிய சார்புகளின் தொடர்வரிசை, $n \to \infty$ எனில், அனைத்து $x \in X$-க்கு $s_n(x) \to f(x)$ என இருக்கும் f அளக்கத்தக்கச் சார்பு எனில், $\{s_n\}$ ஆனது அளக்கத்தக்கச் சார்புகளின் தொடர்வரிசையாகத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். $f \geq 0$ எனில், $\{s_n\}$ ஒரு போகு ஏறும் சார்புகளின் தொடர்வரிசையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்.

நிறுவல்:

(அ) $f \geq 0$ என்க.

$E_{n_i} = \{x: \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$ மற்றும்

$F_n = \{x: f(x) \geq n\}$ என வரையறுக்க.

$(n = 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., n2^n)$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{n_i}} + nK_{F_n} \quad \text{எனில்,} \qquad \text{------ (6)}$$

$n \to \infty$ ஆகும் போது, $\{s_n(x)\} \to f(x)$.

பொதுவான வகையில், $f = f^+ - f^-$ என்க. $f^+, f^- \geq 0$.

$\{s_n'\}$ மற்றும் $\{s_n''\}$ என்ற எளிய சார்புகளின் தொடர்வரிசை,

அனைத்து $x \in X$-க்கு, $\{s_n'\}(x) \to f^+(x)$ மற்றும் $\{s_n''\}(x) \to f^-(x)$ எனக் காணலாம்.

எனவே, $\{s_n' - s_n''\}(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$

E_n மற்றும் F_n அளக்கத்தக்கக் கணங்கள் என்பதால், s_n அளக்கத்தக்கது.

குறிப்பு:

f வரம்புடையது எனில், (6)-ல் கொடுக்கப்பட்ட, $\{s_n\}$ ஆனது f-க்குச் சீராக ஒருங்கும்.

8.6. தொகையிடல் (Integration)

$\mathcal{M}$ என்பது அளக்கத்தக்கக் கணங்களின் σ வளையம். μ ஆனது அளவை. X என்ற அளக்கத்தக்க வெளியில், தொகையிடலை வரையறுப்போம்.

8.26. வரையறை

$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$, $(x \in X, c_i > 0)$ என்பது அளக்கத்தக்கது என்க.

$E \in \mathcal{M}$ என்க.

$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$ என வரையறுக்க.

f குறை மதிப்பற்றது. இது, அளக்கத்தக்கது எனில், $\int_E f\, d\mu = \sup I_E(s)$ ----- (7)

இங்கு sup (மேன்மம்) ஆனது, $0 \leq s \leq f$ என அமையும் அனைத்து அளக்கத்தக்க எளிய சார்புகள் s-ன் மேல் எடுக்கப்படும்.

(7)-ன் $\int_E f\, d\mu$ ஆனது, E என்ற கணத்தின் மேல், அளவை μ-ஐப் பொறுத்து, f-ன் லெபேக் தொகையம் என்றழைக்கப்படும். இந்த தொகையம், $+\infty$ மதிப்பையும் பெறும்.

குறிப்பு:

அனைத்து குறைமதிப்பற்ற எளிய அளக்கத்தக்கச் சார்பு s-க்கு, $\int_E f\, d\mu = I_E(s)$ ஆக இருக்கும்.

8.27. வரையறை

f அளக்கத்தக்கச் சார்பு என்க. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின்,

$$\int_E f^+\, d\mu \;,\; \int_E f^-\, d\mu \qquad \text{----- (8)}$$

என்ற தொகையங்களை எடுத்துக் கொள்க.

இவைகளில், குறைந்தது ஒரு தொகையம் முடிவுள்ளது எனில்,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu \qquad \text{----- (9)}$$

என வரையறைக்க.

(8)-ல் இரு தொகையங்களும் முடிவுள்ளது எனில், $\int_E f\, d\mu$-ம் முடிவுள்ளது.

எனவே, E-ல், μ-ஐப் பொறுத்து, f லெபேக் முறையில் அளக்கத்தக்கது. (கூட்டத்தக்கது) என்போம்.

இது, E-ல் $f \in \mathscr{L}(\mu)$ என எழுதப்படும்.

$\mu = m$ எனில், E-ல் $f \in \mathscr{L}$ ஆகும்.

(9)-ன் மதிப்பு $+\infty$ அல்லது $-\infty$ எனில், மேலேக் கண்ட வரையறையின் படி, f தொகையிடத்தகாததாக அமையினும், E-ல் f-ன் தொகையம் வரையறுக்கப்படும்.

E-ல் f-ன் தொகையம் முடிவுள்ளதாக ஆக அமைந்தால் மட்டும், E-ல் f தொகையிடத்தக்கது.

8.28. பண்புகள்

(அ) E-ல் f அளக்கத்தக்கது மற்றும் வரம்புடையது, $\mu(E) < +\infty$ எனில், E-ல் $f \in \mathscr{L}(\mu)$.

(ஆ) $x \in E$-க்கு, $a \leq f(x) \leq b$ மற்றும் $\mu(E) < +\infty$ எனில்,

$$a\mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq b\mu(E).$$

(இ) E-ல், $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, $x \in E$-க்கு, $f(x) \leq g(x)$ எனில்,

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$$

(ஈ) E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ எனில், அனைத்து முடிவுள்ள மாறிலி c-க்கு, $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ மற்றும், $\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu$

(உ) $\mu(E) = 0$ மற்றும் f அளக்கத்தக்கது எனில், $\int_E f\, d\mu = 0.$

(ஊ) E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $A \in \mathcal{M}$ மற்றும் $A \subset E$ எனில், A-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

8.29. தேற்றம்

(அ) X-ல் f குறைமதிப்பற்றது மற்றும் அளக்கத்தக்கது. $A \in \mathcal{M}$-க்கு, $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ என வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், $\mathcal{M}$-ல், φ ஆனது எண்ணத்தக்க கூட்டுச் சார்பு (countably additive) சார்பாகும்.

(ஆ) X-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ எனினும், மேலே கூறிய முடிவு பொருந்தும்.

நிறுவல்:

(அ) நிறுவ, $A_n \in \mathcal{M}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $i \neq j$ எனில், $A_i \cap A_j = 0$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ எனில், $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ என நிறுவ வேண்டும்.

வகை (1): E-ல் f சிறப்பியல்பு சார்பு என்க, $f = K_E$.

இப்பொழுது,

$$\varphi(A) = \int_A f\, d\mu = \int_A K_E\, d\mu$$

$$= \mu(A \cap E)$$

$$= \mu[(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap E]$$

$$= \mu[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E)$$ (E-ல் μ எண்ணத்தக்க கூட்டுச் சார்பு) .

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} K_E \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

வகை (2):

$f = s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}$ ஒரு எளிய சார்பு.

$$\varphi(A) = \int_A s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A \cap E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_n \cap E_i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

வகை (3):

(1) $0 \leq s \leq f$ என அமையும் அனைத்து அளக்கத்தக்க எளிய சார்பு s-க்கு,

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} I_E(s)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \qquad \text{----- (10)}$$

ஏதேனும் ஒரு n-க்கு, $\varphi(A_n) = +\infty$, $\varphi(A) \geq \varphi(A_n)$ என்பதால்,

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

(2) அனைத்து n-க்கு, $\varphi(A_n) < +\infty$ என்க.

$$\varphi(A_1) = \int_{A_1} f\,d\mu, \quad \varphi(A_2) = \int_{A_2} f\,d\mu$$

$\varepsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், $0 \leq s \leq f$ என அமையும் s என்ற அளக்கத்தக்க சார்பை, $\int_{A_1} s\,d\mu \geq \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon$,

$\int_{A_2} s\,d\mu \geq \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon$ எனத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எனவே,
$$\begin{aligned} \varphi(A_1 \cup A_2) &= \int_{A_1 \cup A_2} f\,d\mu \\ &\geq \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu \\ &= \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \\ &\geq \int_{A_1} f\,d\mu + \int_{A_2} f\,d\mu - 2\varepsilon \\ &= \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

எனவே, $\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$.

ஆகையால், அனைத்து n-க்கு, $\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n)$.

$A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$ என்பதால், $\varphi(A) \geq \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n)$.

அதாவது, $\varphi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ ----- (11)

(10), (11) இவைகளிலிருந்து, $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$.

(ஆ) X-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ என்க.

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

f^+ மற்றும் f^- இவைகளுக்கு, (அ)-ஐப் பயன்படுத்த, $\mathcal{M}$ -ல் φ எண்ணத்தக்க கூட்டுச் சார்பாக அமையும்.

8.30. கிளைத்தேற்றம்

$A \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ மற்றும் $\mu(A - B) = 0$ எனில், $\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu$

நிறுவல்:

$$A = B \cup (A-B) \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B \cup (A-B))$$
$$= \varphi(B) + \varphi(A-B)$$

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_{A-B} f\,d\mu = \int_B f\,d\mu, \left(\mu(A-B) = 0 \Rightarrow \int_{A-B} f\,d\mu = 0\right)$$

குறிப்பு:

(அ) மேலேக் கண்ட கிளைத்தேற்றம், தொகையிடலில், அளவை பூஜ்யம் உள்ள கணங்கள் புறக்கணிக்கத் தக்கவை என்பதை எடுத்துக்காட்டுகிறது.

(ஆ) $\{x: f(x) \neq g(x)\} \cap E$ என்ற கணத்தின் அளவை பூஜ்யம் எனில், அதனை, E-ல் $f \sim g$ என எழுதுவோமானால்,

(1) $f \sim f$

(2) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$.

(3) $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$

அதாவது, $\sim$ என்ற உறவு, சமான (Equivalencc) உறவு ஆகும்.

(இ) E-ல் $f \sim g$ எனில், E-ன் அனைத்து அளக்கத்தக்க உட்கணத்திற்கு,

$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ என அமையும். (இரு தொகையங்களும் இருக்கும் எனில்)

(ஈ) அனைத்து $x \in E - A$-க்கு, P என்ற பண்பு இருக்கும், மற்றும் $\mu(A) = 0$ என அமையும் எனில், E-ல் P ஆனது அநேகமாக எல்லா இடங்களிலும் (almost everywhere) உண்மையாக இருக்கும் என்போம்.

E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ எனில், E-ல் f(x) ஆனது அநேகமாக எல்லா இடங்களிலும் முடிவுள்ளது (finite almost everywhere) ஆக இருக்கும்.

8.31. தேற்றம்

E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ எனில், E-ல் $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ மற்றும் $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$

நிறுவல்:

$A = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$

$B = \{x \in E : f(x) < 0\}$ எனில், $E = A \cup B$ மற்றும் $A \cap B = 0$.

தேற்றம் 8.29-ன் படி,

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu$$

$$= \int_A f^+\,d\mu + \int_B f^-\,d\mu$$

எனவே, E-ல் $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$.

$$f \leq |f| \Rightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$$

$$-f \leq |f| \Rightarrow -\int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \int_E f\,d\mu \geq -\int_E |f|\,d\mu$$

$$-\int_E |f|\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu.$$

குறிப்பு:

f-ன் தொகையிடத்தக்கதாக அமையின், $|f|$-ம் தொகையிடத்தக்கதாக அமைவதால், லெபேக் தொகையம் தனி ஒருங்கு தொகையம் என்று (absolutely convergent integral) அழைக்கப்படும்.

8.32. தேற்றம்

E-ல் f அளக்கத்தக்கது, $|f| \leq g$ மற்றும் E-ல் $g \in \mathcal{L}(\mu)$ எனில், E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

நிறுவல்:

$f^+ \leq |f| \leq g$ மற்றும் $f^- \leq |f| \leq g$ என்பதால்,

$$\int_E f^+ \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu < \infty$$

$$\int_E f^- \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu < \infty$$

எனவே, $\int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu < \infty$.

ஆகையால், E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

8.33. லெபேக் ஒரு போக்கு ஒருங்கல் தேற்றம்

(Lebesgue's Monotone Convergence Theorem)

$A \in \mathcal{M}$ என்க. $\{f_n\}$ என்பது, $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots, (x \in E)$ என அமையும் அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை என்க.

f என்பது, $n \to \infty$ எனில், $f_n(x) \to f(x), (x \in E)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது! எனில், $n \to \infty$ எனில், $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$

நிறுவல்:

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots, (x \in E) \Rightarrow 0 \leq \int_E f_1 \, d\mu \leq \int_E f_2 \, d\mu \leq \ldots$$

எனவே, $\{\int_E f_n \, d\mu\}$ ஆனது ஒருபோக்கு ஏறும் மெய் எண்களின் தொடர்வரிசை.

மேலும், $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட $\varepsilon > 0$-க்கு, m என்ற இயல்எண், அனைத்து $n > m$-க்கு, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ என இருக்கும்.

அதாவது, அனைத்து $n > m$-க்கு, $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ என இருக்கும்.

ஆகவே, $\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

$\{\int_E f_n \, d\mu\}$ வரம்புடைய தொடர்வரிசையாக அமையும்.

$n\to\infty$ எனில், $\int_E f_n \, d\mu \to \alpha$ என்க.

அடுத்ததாக, $\alpha = \int_E f \, d\mu$ என நிறுவுவோம்.

$\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$ என்பதால், $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$

$$\Rightarrow \alpha \leq \int_E f \, d\mu \qquad \text{----- (11)}$$

c என்பது, $0 < c < 1$ என அமையும் எண் என்க. s என்பது, $0 \leq s \leq f$ என இருக்கும் எளிய அளக்கத்தக்க சார்பு என்க.

$E_n = \{x: f_n(x) \geq cs(x)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ என்க.

$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$, $(x \in E)$ என்பதால்,

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \text{ மற்றும் } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \text{----- (12)}$$

($n\to\infty$ எனில், $f_n(x) \to f(x)$)

அனைத்து n-க்கு, $\int_E f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} cs \, d\mu = c \int_{E_n} s \, d\mu$ ----- (13)

தொகையம் அளக்கத்தக்க கூட்டுக் கணச்சார்பு மற்றும் $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ என்பதால்,

(13)-ன் தொகையத்தில், தேற்றம் 8.3 பயன்படுத்த,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \le c \int_{E_n} s \, d\mu$$

அதாவது, $\alpha \ge c \int_{E_n} s \, d\mu$

$c \to 1$ எனில், $\alpha \ge \int_E s \, d\mu$ ----- (14)

$\int_E f \, d\mu = \sup_{0 \le s \le f} I_E(s)$ என்பதால்,

$\alpha \ge \sup_{0 \le s \le f} I_E(s) = \int_E f \, d\mu$ ----- (15)

(11), (15)-ல் இருந்து, $\alpha = \int_E f \, d\mu$

அதாவது, $n \to \infty$ எனில், $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$

8.34. தேற்றம்

$f = f_1 + f_2$ என்க. E-ல், $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ எனில், $f \in \mathcal{L}(\mu)$ மற்றும்

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu$$

நிறுவல்:

வகை (1): $f_1 \ge 0, f_2 \ge 0$ என்க.

(அ) f_1, f_2 என்பன எளிய சார்புகள் எனில், அவைகளின் வரையறைப் படி $\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu$ என்பது எளிதாகப் பெறப்படும்.

(ஆ) f_1, f_2 என்பன எளிய சார்புகள் அல்ல எனில், $\{s_n'\}, \{s_n''\}$ என்ற குறை மதிப்பற்ற அளக்கத்தக்க எளிய சார்புகளின் ஒரு போக்கு ஏறும் தொடர்வரிசைகளை, f_1, f_2-க்கு முறையே ஒருங்குமாறு காண்க.

தேற்றம் 8.25-ன் படி, இது சாத்தியமாகும்.

$s_n = s_n' + s_n''$ என்க. எனவே, $n \to \infty$ எனில், $\{s_n\} \to f_1 + f_2 = f$.

ஆகையால், $\int_E s_n \, d\mu = \int_E s_n' \, d\mu + \int_E s_n'' \, d\mu$

$n \to \infty$ எனில், $\int_E s_n' \, d\mu \to \int_E f_1 \, d\mu$,

$$\int_E s_n'' \, d\mu \to \int_E f_2 \, d\mu$$

எனவே, $\int_E s_n \, d\mu \to \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu$

ஆனால், $\lim_{n\to\infty} \int_E s_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$

ஆகவே, $\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu$

வகை (2): $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$ என்க.

$A = \{x: f(x) \geq 0\}$, $B = \{x: f(x) < 0\}$ எனில், A-ல் f, f_1, $-f_2$ என்பன குறைமதிப்பற்றவை.

A-ல் வகை (1)-ஐப் பயன்படுத்த,

$$\int_A f_1 \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A (-f_2) \, d\mu = \int_A f \, d\mu - \int_A f_2 \, d\mu \qquad \text{----- (16)}$$

இதைப்போலவே B-ல் f, f_1 மற்றும் $-f_2$ என்பன குறைமதிப்பற்றவை.

எனவே, $\int_B (-f_2) \, d\mu = \int_B f_1 \, d\mu + \int_B (-f) \, d\mu$

அதாவது, $\int_B f_1 \, d\mu = \int_B f \, d\mu - \int_B f_2 \, d\mu \qquad \text{----- (17)}$

(16), (17) இவைகளைக் கூட்ட,

$$\int_A f_1 \, d\mu + \int_B f_1 \, d\mu = \left(\int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu\right) - \left(\int_A f_2 \, d\mu + \int_B f_2 \, d\mu\right)$$

அல்லது, $\int_E f_1 \, d\mu = \int_E f \, d\mu - \int_E f_2 \, d\mu$

$\therefore \int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu$

வகை (3):

பொதுவான வகையில், E-ஐ E_i (i = 1, 2, 3, 4) என நான்கு கணங்களாக, ஒவ்வொன்றிலும் $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்பன மாறிலிக் குறிகளைப் பெற்றிருக்குமாறு பிரித்துக் கொள்க.

மேலே நிறுவப்பட்ட வகைகளின் படி,

$$\int_{E_i} f\,d\mu = \int_{E_i} f_1\,d\mu + \int_{E_i} f_2\,d\mu \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளையும் கூட்ட, $\int_E f\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu$

8.35. தேற்றம்

$E \in \mathcal{M}$ என்க. $\{f_n\}$ என்பது குறைமதிப்பற்ற அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை மற்றும் $\mathbf{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), (x \in E)$ எனில்,

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

நிறுவல்:

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ என்க.

அனைத்து $f_n \geq 0$ எனில், $\{S_n\}$ என்ற பகுதிக்கூடுதலின் தொடர்வரிசையாக அமையும். மேலும், $n \to \infty$ எனில், $S_n(x) \to f(x), (x \in E)$

லெபேக் ஒரு போக்கு ஒருங்கல் தேற்றம் பயன்படுத்த,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E S_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$$

அதாவது, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$

8.36. ∴பேட்டாவின் தேற்றம் (Fatou's Theorem)

$E \in \mathcal{M}$ என்க. $\{f_n\}$ என்பது குறைமதிப்பற்ற அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை மற்றும் $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf fn(x), (x \in E)$ எனில்,

$$\int_E f\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu .$$

நிறுவல்;

$n = 1, 2, \ldots$ மற்றும் $x \in E$-க்கு, $g_n(x) = \inf f_i(x), (i \ge n)$ என்க.

எனவே, (அ) E-ல் g_n அளக்கத்தக்கன

(ஆ) $0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \ldots$

(இ) $g_n(x) \le f_n(x)$

$n \to \infty$ எனில், $g_n(x) \to f(x)$ ஆகும்.

ஆகையால், லெபேக் ஒருபோக்கு ஒருங்கல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$n \to \infty$ எனில், $\int_E g_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu$

எனவே, $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ ஆகும்.

மேலும், (இ) ஆனது, $\int_E g_n\, d\mu \le \int_E f_n\, d\mu$ என்பதைத் தரும்.

ஆகையால், $\lim_{n\to\infty} \inf \int_E g_n\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu$

$$\Rightarrow \int_E f\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu$$

8.37. லெபேக் மேலாண்மை ஒருங்கல் தேற்றம்

(Lebesgue's Dominated Convergence Theorem)

$E \in \mathcal{M}$ என்க. $\{f_n\}$ என்பது அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை, $n \to \infty$ எனில், $f_n(x) \to f(x), (x \in E)$.

E-ல் $g \in \mathcal{L}(\mu)$ என்ற சார்பு, $|f_n(x)| \le g(x)$, ----- (18)

$(n = 1, 2, \dots)$ என அமையின், $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

பண்பு (18)-ன் படி, $\{f_n\}$ ஆனது g -ஆல் மேலாண்மையாக உள்ளது.

நிறுவல்:

E-ல் $g \in \mathcal{L}(\mu)$ மற்றும் $|f_n(x)| \le g(x)$, $(n = 1, 2, \dots, x \in E)$ என்பதால், தேற்றம் 8.32-ன் படி, E-ல் $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$, $(n = 1, 2, \dots)$. மேலும், E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

$x \in E$-க்கு, $|f_n(x)| \le g(x) \Rightarrow -g(x) \le f_n(x) \le g(x)$, $x \in E$.

$\Rightarrow f_n(x) + g(x) \ge 0$ மற்றும் $g(x) - f_n(x) \ge 0$

ஆகையால், $\{f_n + g\}$ மற்றும் $\{g - f_n\}$ என்பன குறைமதிப்பற்ற அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசைகள். மேலும், $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n + g)(x) = (f + g)(x)$, $x \in E$.

$\therefore$ பேட்டாவின் தேற்றம் $f_n + g$-க்குப் பயன்படுத்த,

$$\int_E (f + g) \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E (f_n + g) \, d\mu \qquad \text{----- (19)}$$

அதாவது, $\int_E f \, d\mu \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf \int_E f_n \, d\mu$

இதைப் போல், $g - f_n \ge 0$ மற்றும் $\lim\limits_{n\to\infty} (g - f_n) = g - f$

$\therefore$ பேட்டாவின் தேற்றம் $g - f_n$ -க்குப் பயன்படுத்த,

$$\int_E (g - f) \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E (g - f_n) \, d\mu$$

$$-\int_E f \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \left[-\int_E f_n \, d\mu\right]$$

அதாவது, $\int_E f \, d\mu \ge \lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_E f_n \, d\mu$ ----- (20)

(19), (20)-ல் இருந்து, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$ ஆக இருக்கும்.

8.38. கிளைத்தேற்றம்

$\mu(E) < +\infty$, E-ல் $\{f_n\}$ சீராக வரம்புடையது மற்றும் E-ல் $f_n(x) \to f(x)$ எனில், $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

நிறுவல்:

$\{f_n\}$ சீராக வரம்புடையது என்பதால், அனைத்து n-க்கு, M என்ற எண், $|f_n(x))| < M, (x \in E, n = 1, 2, \ldots)$ எனுமாறு இருக்கும். மேலும், E-ல் $M \in \mathcal{L}(\mu)$. லேபேக் மேலாண்மை ஒருங்கல் தேற்றம் பயன்படுத்த, $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

8.7. பயிற்சி வினாக்கள்

1. நிறுவுக.

(அ) R^1-ன் ஒரு புள்ளியின் லெபேக் அளவை பூஜ்யம்.

(ஆ) எண்ணத்தக்கப் புள்ளிகளின் கணத்தின் லெபேக் அளவை பூஜ்யம்

(இ) R^n-ன் ஒரு நேர்கோட்டின் லெபேக் அளவை பூஜ்யம்.

(ஈ) ஒரு காண்டார் கணத்தின் லெபேக் அளவை பூஜ்யம்.

2. ஒரு வரம்புடைய அளக்கத்தக்க சார்பு ஆனது, அளக்கத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசையின் சீரான எல்லையாக இருக்கும் எனக் காட்டுக,

3. f ஒரு அளக்கத்தக்க சார்பு,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & f(x) \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ 0, & f(x) \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$$

எனில், g-ம் அளக்கத்தக்க சார்பு எனக் காட்டுக.

4. அளக்கத்தக்க, விரிந்த மெய்மதிப்புடைய இரு சார்புகளின் பெருக்கம் அளக்கத்தக்கது என நிறுவுக.

5. f என்பது ஒரு மெய்மதிப்புடைய சார்பு, g என்பது $(-\infty, \infty)$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், gof அளக்கத்தக்கது என நிறுவுக.

6. அளக்கத்தக்கக் கணமாகவும், போரல் கணமாக அமையாத கணம் உண்டு எனக் காட்டுக.

7. f ஒரு அளக்கத்தக்கச் சார்பு, B ஒரு போரல் கணம் எனில், $f^{-1}(B)$ அளக்கத்தக்கக் கணம் என நிறுவுக.

8. f என்பது ஒரு குறைமதிப்பற்ற அளக்கத்தக்க சார்பு என்க.

(அ) $\{\varphi_n\}$ என்ற குறைமதிப்பற்ற எளிய சார்புகளின் தொடர்வரிசையை, அதன் ஒவ்வொரு உறுப்பின் மதிப்பும், முடிவுள்ள அளவை உடைய கணத்திற்கு வெளியே பூஜ்யமாகும் மற்றும் $f = \lim \varphi$ எனவும் காணலாம் எனக் காட்டுக.

(ஆ) $\varphi \leq f$ என அமையும் அனைத்து எளிய சார்பு φ-க்கு, $\int f = \sup \int \varphi$ எனக் காட்டுக.

9. f என்பது குறைமதிப்பற்ற, தொகையிடத்தக்க, எளிய சார்பு, $\int f\, d\mu = 0$ எனில், $f = 0$ a.e. என நிறுவுக.

10. f தொகையிடத்தக்கது, g அளக்கத்தக்கது, $g = f$ a.e. எனில், g தொகையிடத்தக்கது மற்றும் $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$ என நிறுவுக.

11. f தொகையிடத்தக்கது, g ஒரு எளிய சார்பு, $|f(x)| \geq |g(x)|$ எனில், g தொகையிடத்தக்கது என நிறுவுக.

12. f தொகையிடத்தக்கது, மற்றும் அனைத்து அளக்கத்தக்கக் கணம் A-க்கு, $\int_A f\, d\mu \geq 0$ எனில், $f \geq 0$ a.e. என நிறுவுக.

13. $\{f_n\}$ என்ற தொகையிடத்தக்க சார்புகளின் தொடர்வரிசை f-க்கு சீராக ஒருங்குகிறது, ஆனால், f தொகையிடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.

14. R^1-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு போகு சார்பு லெபேக் அளக்கத்தக்கது என நிறுவுக.

15. E-ல் $f \in \mathcal{L}(\mu)$ E-ல் g வரம்புடைய அளக்கத்தக்க சார்பு எனில், E-ல், $fg \in L(\mu)$ என நிறுவுக.

16. X-ல் $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ என்க. f, g இவைகளுக்கிடையேயான தூரம் $\int_X (f-g)\, d\mu$ என வரையறுக்கப்படின், $\mathcal{L}(\mu)$ ஒரு முழு யாப்புவெளி என நிறுவுக.

17. f என்ற மெய்ப்புனை சார்பு அளக்கத்தக்கதாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை: தளத்தில் அனைத்து திறந்த கணம் V-க்கு, $f^{-1}(V)$ அளக்கத்தக்கதாக அமைதலாகும் என நிறுவுக.

18. $\{f_n\}$ என்ற குறைமதிப்பற்ற அளக்கத்தக்கச் சார்புகளின் தொடர்வரிசை f என்ற சார்புக்கு ஒருங்குகிறது. அனைத்து n-க்கு, $f_n \leq f$ எனில், $\int f = \lim \int f_n$ எனக் காட்டுக.

****

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(Bibliography)

Apostol, T.M.: "Mathematical Analysis", 2nd Ed., Addison – Wesley, Reading Mass, Massachusetts, 1974.

De Barra, G: "Measure Theory and Integration", New Age International (P) Ltd. Publishers, New Delhi, 2000.

Dipak Chatterjee: "Real Analysis", Prentice – Hall of India Private Ltd., New Delhi, 2005.

Gupta, K.P.: Measure Theory", 7th Ed., Krishna Prakashan Mandir, Meerut, 1986.

Halmos, P.R.: "Measure Theory", Affiliated East – West Press Pvt. Ltd., New Delhi, 1962.

Herstein, I.N.: "Topics in Algebra", Blaisdeil Publishing Company, New York, 1964.

Royden, H.L.: "Real Analysis", 3rd Ed., Prentice – Hall of India Private Ltd., New Delhi, 1995.

Rudin, W: "Principles of Mathematical Analysis", 3rd Ed., McGraw – Hill Book Company, International Edition, 1984.

Rudin, W: "Real and Complex Analysis", 3rd Ed., McGraw – Hill Book Company, International Edition, 1987.

Simmons, G.F.: "Topology and Modern Analysis", McGraw – Hill Book Company, New York, 1963.

Singal, M.K., Asharani Singal: "A First Course in Real Analysis", R. Chand & Co., New Delhi, 2007.

Somasundaram, D, Choudharym, B: A First Course in Mathematical Analysis", Narosa Publishing House, New Delhi, 1996.

குறியீடு

INDEX

absolute convergence	- அற ஒருங்கல்	- 83
absolute value	- தனி மதிப்பு	- 5
additive function	- கூட்டத்தக்கச் சார்பு	- 284
all but finitely many	- அனைத்து ஆனால் முடிவுள்ள அநேக	- 50
almost everywhere	- அநேகமாக எல்லா இடங்களில்	- 314
alternating series	- ஒன்றாடத் தொடர்	- 81
atmost countable set	- அதிகபட்ச எண்ணத்தக்க கணம்	- 8
basis	- அடிக்கணம்	- 238
borel set	- போரல் கணம்	- 298
bounded sequence	- வரம்புடைய தொடர்வரிசை	- 50
boundedly convergent	- வரம்புக்குட்பட்ட ஒருங்கும்	- 209
cantor set	- காண்டார் கணம்	- 42
cardinal number	- செவ்வெண்	- 8
cauchy sequence	- காஷியின் தொடர்வரிசைகள்	- 58
characteristic function	- சிறப்பியல்பு சார்பு	- 306
chain rule	- சங்கிலி விதி	- 132
closed set	- மூடிய கணம்	- 23
compact set	- கச்சிதகணம்	- 32
comparison test	- ஒப்பீட்டுச் சோதனை	- 71
complete metric space	- முழு யாப்பு வெளி	- 62
complex field	- மெய்ப்புனை புலம்	- 5

component	கூறு	254
conjugate	இணையிய எண்	5
connected set	இணைந்த கணம்	43
connectivity	இணைப்புமை	114
constant function	மாறிலி சார்பு	97
continuous functions	தொடர்ச்சியான சார்புகள்	93
continuosly differentiable	தொடர் வகையிடத்தக்க	259
contraction principle	சுருக்கக் கோட்பாடு	261
convex set	குவிகணம்	22
coordinate	ஆயம்	238
countable set	எண்ணத்தக்க கணம்	8
dense set	அடர்கணம்	24
derivative	வகைக்கெழு	127
differentiation	வகையிடல்	127
differentiable function	வகைக்கெழுக் காணத்தக்கச் சார்பு	127
directional derivative	திசைசார் வகையீடு	257
discontinuty	தொடர்ச்சியின்மை	118
discrete	பிரிநிலை	19
disjoint	பொது உறுப்பற்ற	44
elementary set	தொடக்க நிலை கணம்	286
enumeration	கணக்கெடுப்பு	303
equicontinuous	சம தொடர்ச்சி	216
event	நிகழ்ச்சி	300
extended Real Number System	விரிந்த மெய்யெண் தொகுப்பு	4

field	- புலம்	- 3
finite set	- முடிவுள்ள கணம்	- 8
finitely many	- முடிவுள்ள அநேக பல	- 51
functions of bounded variation	- வரம்புறு மாறல் சார்புகள்	- 142
gradient	- சாய்வு விகிதம்	- 257
greatest lower bound	- மீப்பெரு கீழ்வரம்பு	- 2
higher derivatives	- உயர்வரிசை வகைக்கெழுக்கள்	- 139
hypotheses	- கருதுகோள்	- 227
infinite set	- முடிவிலா கணம்	- 8
integrand	- தொகையுறு	- 156
integration by parts	- பகுதி வழித் தொகையிடல்	- 160
integrator	- தொகைப்பான்	- 156
interior point	- உட்புள்ளி	- 23
isolated point	- தனித்தப்புள்ளி	- 23
least upper bound	- மீச்சிறு மேல்வரம்பு	- 2
lebesgue measure	- லெபேக் அளவை	- 286
left derivative	- இடக்கை வகைக்கெழு	- 128
limit point	- எல்லைப் புள்ளி	- 23
linear combination	- நேரியல் கூட்டு	- 237
linear transformation	- நேரியல் உருமாற்றம்	- 237
local maximum	- இடம் சார்ந்த பெருமம்	- 134
local minimum	- இடம் சார்ந்த சிறுமம்	- 134
k-cell	- k- கண் அறை	- 37
mean convergence	- சராசரி ஒருங்கல்	- 230
mean value theorem	- இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம்	- 115
measurable space	- அளக்கத்தக்க வெளி	- 299

measure - அளவை - 187
measure space - அளவை வெளி - 299
metric space - யாப்பு வெளி - 17
monotonically decreasing - ஒரு போக்கு குறையும் - 62
monotonically increasing - ஒரு போக்கு ஏறும் - 62
monotonic functions - ஓரியல்புச் சார்புகள் - 120
neighborhood - அண்மை - 23
norm - அலகை - 6
null space - இன்மை வெளி - 272
open cover - திறந்த உறை - 32
open set - திறந்த கணம் - 23
oscillation - அலைவு - 188
outer measure - புற அளவை - 288
partial derivative - பகுதி வகைக் கெழு - 254
partition - பிரிவினை - 143
perfect set - செவ்வியகணம் - 23
pointwise bounded - புள்ளிவாரி வரம்புடைய - 216
power series - அடுக்குத் தொடர் - 78
projection - வீழல் - 272
ratio test - விகித சோதனை - 76
rearrangement of series - தொடர்களின் மறுவரிசைப்படுத்துதல்-87
regular - ஒழுங்கான - 287
right derivative - வலக்கை வகைக்கெழு - 128
root test - மூலச் சோதனை - 75
scalar - அளவி - 237

schwarz inequality	- ஸ்குவார்ஸ் சமனின்மை	- 5
segment	- துண்டு	- 128
self-adjoint	- தன் இணைப்பு	- 228
separated sets	- பிரிக்கப்பட்டக் கணங்கள்	- 43
sequence	- தொடர் வரிசை	- 9
set function	- கணச் சார்பு	- 283
simple function	- எளிய சார்பு	- 306
span	- அளாவல்	- 237
standard basis	- திட்ட அடிக்கணம்	- 238
Stone Weierstrass Theorem	- ஸ்டோன் வயிஸ்ட்ராஸ் தேற்றம்	- 220
subsequences	- துணைத்தொடர்வரிசைகள்	- 56
subsequential limit	- துணைத் தொடர்பு எல்லை	- 56
summation by parts	- பகுதி பகுதியாகக் கூட்டல்	- 79
symmetric difference	- சமச்சீர் வேறுபாடு	- 291
Taylor's Theorem	- டெய்லரின் தேற்றம்	- 139
total variation	- மொத்த மாறல்	- 145
uncountable set	- எண்ணிட முடியாத கணம்	- 8
uniform closure	- சீரான அடைப்பு	- 223
uniform continuity	- சீரான தொடர்ச்சி	- 109
uniformly bounded	- சீரான வரம்புடையது	- 208
uniformly closed	- சீராக மூடிய	- 223
vector space	- திசையன் வெளி	- 6

****

T.P.M. LIBRARY
MADURAI KAMA
299095