புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

எஸ். கருப்பையா

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் – 216

புள்ளியியல் - துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

எஸ். கருப்பையா,

ாசிரியர், கணிதத்துறை,
ரசினர் கலைக் கல்லூரி,
தருமபுரி.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—December, 1969

B.T.P. No. 216

© Bureau of Tamil Publications

STATISTICS - ANCILLARY for B.Sc.

S. KARUPPIAH

Net Price Rs. 3-50
(No discount)

Printed by
PARAMOUNT PRINTERS,
31, Meeran Sahib St.,
Madras-2

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புதுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 216ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 251 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

நன்றியுரை

"ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்" என்ற புத்தகத்திலிருந்து *t*–பட்டியலும், கை-வர்க்கப் பட்டியலும் எடுத்துள்ளோம். அப்புத்தகத்தின் ஆசிரியர் காலஞ்சென்ற சர் ரொனல்டு A. ஃபிஷர் F.R.S. அவர்களும், அதன் வெளியிடுவோர் எடின்பர்க் நகரச் சார்ந்த ஆலிவர் & பாய்ட் லிமிட்., ஆகியவரும் எமக்கு அனுமதி அளித்தமைக்கு நன்றியுடையோம்.

"புள்ளியியல் முறைகள்" என்ற ஐந்தாவது பதிப்புப் புத்தகத்திலிருந்து F-பட்டியல் எடுத்து இங்குச் சேர்த்துள்ளோம். அதன் ஆசிரியர் புரபஸர் G.W. சினிடெகர் அவர்களும், வெளியிடுவோர் ஐவோ ஸ்டேட் யுனிவெர்ஸிடி பிரஸ் ஆகியவரும் எமக்கு அனுமதி அளித்தமைக்கு நன்றியுடையோம்.

ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	அறிமுகம்	...	1
2.	புள்ளிவிபர ஆய்வுத்தளம்	...	6
3.	விளக்கப் படங்கள்	...	23
4.	மையப் போக்கின் அளவைகள்	...	35
5.	பரவுகை அளவைகள்	...	51
6.	பரவலின் மற்றைய அளவைகள்	...	70
7.	தொடர் அலைவுப் பரவல்	...	78
8.	வளைகோடு பொருத்தல்	...	84
9.	ஒட்டுறவு	...	95
10.	இடைச்செருகல்	...	113
11.	பண்புகளின் உறவு	...	122
12.	நிகழ்தகவு	...	132
13.	ஈருறுப்புப் பரவல்	...	145
14.	பாய்ஸான் பரவல்	...	153
15.	இயல்நிலைப் பரவல்	...	158
16.	கூறுகளின் உருவக முறைகளும் பெருங் கூறுகளும்	...	171
17.	சிறு கூறுகளில் மிகைத்தன்மைச் சோதனை	...	190
18.	கைவர்க்கப் பரவல்	...	199
	இயல் நிலை வரை......பரப்புப் பட்டியல்	...	207
	கை-வர்க்கப் பட்டியல்	...	208
	t–பட்டியல்	...	209
	F–பட்டியல்	...	210
	கலைச்சொல் அகராதி	...	211

1. அறிமுகம்

புள்ளி விபரங்களைப் பற்றிய இயல் புள்ளியியல் ஆகும். புள்ளி விபரங்களைச் சேகரிக்கும் பல முறைகளைப் பற்றியும், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்களைப் பாகுபடுத்திப் பட்டியலில் அமைக்கும் முறைகளைப்பற்றியும், அவைகளை விளக்கப் படங்களில் படைத்துத் தெளிவுபடுத்தும் பாகங்கள், பின் அவ்விபரங்களுக்கு விளக்கம் காணும் முயற்சிகள், எதிர்காலத்தின் மதிப்பீட்டு முறைகள் ஆகியன பற்றியும் அது பேசுகிறது.

மனிதன் ஈடுபட்டுள்ள எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளி விபரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆராயப்படுகின்றன. நவீன காலத்தில் புள்ளி விபரங்கள் சேகரிக்கப்படாத துறைகளே இல்லை யெனலாம். பல்லாண்டுகளுக்கு முன்பெல்லாம், நாட்டினை ஆளுகின்ற அரசாங்கத்திற்கு மட்டுமே புள்ளி விபரங்கள் தேவைப் பட்டன. நாட்டிலுள்ள மனித சக்தி அளவினை அறிந்து கொள்ளவும், நாட்டு மக்களுக்குத் தேவையான உணவு போன்ற தேவைகளின் உற்பத்தி அளவினைத் தெரிந்துகொள்ளவும், அவர் களுள் பிணியாலும் மூப்பாலும் தொல்லைப்படுபவர், தொல்லைப் பட்டு இயற்கை யெய்துபவர் ஆகியவர்களின் எண்ணிக்கையை அறிந்துகொள்ளவும், அன்றைய அரசாங்கங்கள் புள்ளி விபரங் களைச் சேகரித்து ஆராய்ந்தன. ஆனால், இன்றைய நவீன விஞ்ஞான காலத்தில், அரசாங்கமட்டுமன்றிப் பல்கலைக்கழகங்கள், கலைக்கூடங்கள், மருத்துவ விடுதிகள், திட்டக் குழுக்கள், ஆராய்ச்சிக் கழகங்கள் முதலிய பல்வேறு நிறுவனங்கள் புள்ளி விபரங்களைச் சேகரிக்கத் தொடங்கியதோடன்றி, அதன் ஆய்வுக் கேற்ற பல உயர் கணித முறை வழிதுறைகளையும் கண்டு வருகின்றனர். இத்துறையில் பல கணித வல்லுநர்களின் தொண்டு மிகச் சிறந்ததாகும். பெர்நௌலி, ஹாஸ், லாப்லாஸ், கார்ல் பியர்ஸன், ஆர். எ. வ்பஸர் போன்ற கணிதப் பேராசிரி

யர்கள் புள்ளியியலை மிக உயர்ந்த நிலைக்கு வளர்த்துள்ளனர். பிற துறைகளில் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் (Applied Statistics), கணித அடிப்படையில் எழுந்த தூய புள்ளியியல் (Pure Statistics) என இரு வகையாக இணைந்து இது பெரிதும் வளர்ந்துள்ளது.

புள்ளியியல்—விளக்கம்

புள்ளியியல் என்றால் என்ன? பல்வேறு ஆசிரியர்கள் வெவ்வேறு விளக்கங்கள் தந்துள்ளனர். 'சராசரிகளின் அறிவியல்' என்றும், 'எண்ணிக்கையின் அறிவியல்' என்றும் பௌலி என்ற ஆசிரியர் இதற்கு வெவ்வேறு விளக்கம் தந்துள்ளார். 'பல்வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளால், குறிப்பிடத் தக்க அளவு பெரிதும் பாதிக்கப்பட்ட எண் அளவை விபரம்' என யூல் என்பார் விளக்கம் தந்துள்ளார். 'நேரில் கண்டு சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்களை அறிவால் பாகுபடுத்தும் அறிவியல்' எனவும் விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது.

எனினும், கிராக்ஸ்டன், கௌடன் என்பார் தந்த விளக்கத்தையே மிகப் பொருத்தமானதாகக் கருதலாம். 'புள்ளி விபரங்களைச் சேகரித்தல் ,படைத்தல், பகுத்துணர்தல், விளக்கம் காணுதல்' என அவர்கள் விளக்கியுள்ளனர். இவை அனைத்தும் சேர்ந்தது தான் புள்ளியியலாகும். புள்ளியியல் என்பது ஓர் அறிவியலன்று; அறிவியல் முறையாகும். அண்மைக் காலத்தில், புள்ளியியலில் ஏற்பட்ட முன்னேற்றம் சமவாய்ப்புக் கூறு கணிதமும், சோதனைகளின் உருவக அமைப்புமாகும். சமவாய்ப்புக் கூறின் (Random Sample) இயல்பினைக் கொண்டு, அத்தகு கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதி அல்லது இனத்தொகுதியின் (Population) இயல்பினையும் தன்மையையும் அறிய முடிகிறது. மேலும், அவ்வாறு முழுமைத் தொகுதியின் சிறப்பினை மதிப்பிடும்போது, ஒரு கூறிலிருந்து பெறப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் இயல்பிற்கும், வேறொரு கூறிலிருந்து பெறப்படும் இயல்பிற்குமுள்ள வேறுபாட்டினையும், அவ்வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவிற்கு மிகையானதா, தள்ளத்தக்க அளவிற்குச் சிறியதா எனவும் காணப்படுகிறது.

புள்ளியியல் பயன்படும் துறைகள்

வளர்ந்தோங்கிய இன்றைய புள்ளியியல் பயன்படாத துறையே எதுவுமில்லை எனத் திட்டவட்டமாகக் கூறலாம். மனித அறிவு எட்டும் எல்லாத் திக்குகளிலும் இது பயன்படுகிறது. பொருளாதாரத் துறையில் இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. உயர்ந்த பொருளாதாரத் தேற்றங்களும் கொள்கைகளும்

புள்ளியியல் அடிப்படையில் எழுந்துள்ளன. பொருளாதாரக் கொள்கைகள் புள்ளியியல் செங்கற்களால் கட்டப்படுகின்றன. மேலும், புள்ளியியல் பொருளாதாரத்தின் ஓர் அறிவியல் பாடமாக உருவாகிறது. கணக்கியலும் புள்ளியியலும் இணைந்து ஏற்பட்ட பொருளாதாரத் துறையொன்று புதிதாக எழுந்துள்ளது. இது தவிர, வேதியியல், பௌதிகவியல், புவியியல், வானவியல், விலங்கியல், உயிரியல், உளவியல், மருத்துவவியல் போன்ற எல்லா அறிவியல் துறைகளிலும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது. வம்ச வழி விதிகளை நிர்ணயிக்க உடலியலிலும், கால நிலையை முன்கூட்டியே அறிவிக்கப் பருவநிலையியலிலும், கால அளவு விகிதத்தினைத் தீர்மானிக்க ஆயுள் இன்சூரன்ஸிலும் புள்ளியியலைப் பெரிதும் பயன்படுத்துகின்றனர். வணிகத் துறையில் புள்ளியியலின் பங்கு மிகச் சிறந்ததும் இன்றியமையாததுமாகும். அரசாங்கத்தின் எல்லாத் துறைகளிலும் இது பயன்படுகிறது. சமுதாய, பொருளாதார வளர்ச்சித் திட்டங்கள் புள்ளியியல் அடிப்படையில்தான் நிகழுகின்றன.

ஆதார விதிகள்

இனி, புள்ளியியலுக்கு ஆதாரமான இரு விதிகளை இங்குக் காண்போம். அவை, புள்ளியியல் ஒழுங்கு விதி (Law of Statistical Regularity), பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதி (Law of Inertia of Large Numbers) என்பனவாகும். நவீனப் புள்ளியியல் வளர்ச்சியின் அங்கங்களான கூறுகளின் தேற்றக் கொள்கைகளும் சோதனை உருவக அமைப்புகளும் குறைந்த செலவில் மிகுந்த செய்தியினைச் சேகரிப்பதற்கு உறுதுணையாக அமைகின்றன. இவை புள்ளியியலின் ஒழுங்கு விதியின் அடிப்படையில் வளர்ந்தனவாகும். வியக்கத்தகுமளவிற்கு, வாழ்க்கையின் எல்லாத் துறைகளிலும், இயற்கை நிகழ்ச்சிகள் ஓர் ஒழுங்கு நியதியோடு இயங்குவதைக் காணலாம். ஓர் அறுமுகப் பகடையை, 1000 தடவைகள் சுழற்றிவிட்டால், ஒவ்வொரு முகமும் ஏறத்தாழ சமதடவைகளில் பிறழ்வதைக் காணலாம். ஒரு நூறு ஏக்கர் நிலத்தில் உள்ள தென்னை மரங்களில், சம வாய்ப்புக் கூறாக அமைந்த நூறு மரங்களில் விளைந்த தேங்காய்களின் கூட்டுச் சராசரி எண்ணிக்கையே, அந்த நில முழுமைக்குமுள்ள கூட்டுச் சராசரி எண்ணிக்கையாக அமைவதைக் காணலாம். ஒரு பல்கலைக்கழகத்தினைச் சார்ந்த 1000 மாணவர்களில், சமவாய்ப்புக் கூறாக அமைந்த ஒரு குழு மாணவர்களின் சராசரித் தரம், உயரம், பருமன் முதலியன அத்துணை மாணவர்களின் சராசரி அளவைகளாக அமைவதைக் காணலாம். சமவாய்ப்புக் கூறு ஒன்று, முழுமைத் தொகுதியின் எல்லாப் பண்புகளையும் பிரதிபலிக்கின்றது

எனக் கூறலாம். மேற்கண்டவை போன்று ஒழுங்கு விதி இயங்கும் எண்ணற்ற மாதிரிகளை நாம் எளிதில் காணமுடியும்.

இரண்டாவது விதி, பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதியாகும். நம் நாட்டின் ஒரு பகுதியில் பருவமழை தவறி உற்பத்தி குறையலாம்; வேறொரு பகுதியில் நல்ல விளைவு ஏற்பட்டு, மொத்தத்தில் நிகர உற்பத்தியில் எந்தவித மாறுதலும் இல்லாமல் சாதாரணச் சூழ்நிலை நிகழ்வதைக் காணலாம். ஓர் ஆண்டில், ஓர் இராஜ்யத்தின் சில பகுதியில், தொத்து நோயால் பலர் இறந்து விடக்கூடும்; வேறு பகுதியில் அதிகக் குழந்தைகள் பிறக்கலாம். அந்த ஆண்டில் அந்த இராஜ்ய மக்கள்தொகை குறிப்பிடத்தகுந்த அளவிற்கு மாருமல் இருப்பதைக் காணலாம். ஒருசில இடங்களில் ஏற்படுகின்ற எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள், வேறுசில இடங்களில் நிகழும் நேர்மறை நிகழ்ச்சிகளால் சரிசெய்யப்பட்டு, நிகர முழு எண் மாருத்தன்மையிலிருப்பதைக் காணலாம். இந்த விதியைக் கடைப்பிடித்துதான் ஆயுள் இன்சூரன்ஸ் கம்பெனிகள் இயங்குகின்றன.

புள்ளியியலின் வரையறை

புள்ளியியலைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஒரு வரையறையுண்டு. எல்லா நிலைகளிலும் பயன்படுத்துவது தவருன முடிவுக்கு இழுத்துச்சென்றுவிடும். எண் கூட்டங்களைச் சேகரித்துப் பாகுபடுத்தி விளக்கம் காணுகின்ற முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் புள்ளியியல் வழிமுறைகளைச் செவ்வனே பயன்படுத்த வேண்டும்; பின், கூறு காண்கின்ற நிலைகளிலும், பண்பளவைகள் ஏற்றதாகக் கணிக்கப்படுகின்ற தறுவாயிலும், ஒப்பிட்டு நோக்கி ஒப்புறவு காண்பதிலும், முடிவு கண்டு விளக்கம் தெளிந்து, எதிர்காலத்திற்கு மதிப்பீடு கணிக்கின்ற எல்லாப் படிப்படியான நிலைகளிலும், மிகுந்த கவனத்துடன் முறை பிறழாது புள்ளியியலைப் பயன்படுத்த வேண்டும். ஒன்றுக்குப் பயன்படும் ஒருவிதப் பண்பளவைப் பிறிதொன்றுக்குப் பயன்படுத்துவது தவருகும்.

புள்ளியியலின் வழிமுறைகள் எண்களால் செய்யப்படும் விபரங்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும். உடல் நலம், ஒழுக்கத் தன்மை, ஏழ்மை போன்ற பண்புகளில் எண் வடிவத்தில் கூறப்படாத நிலைகளில் புள்ளியியலின் வழிமுறைகள் பயன்படா. புள்ளியியலைத் தவருகக் கையாள்வதற்கு நிறைய வாய்ப்புகள் உண்டு. அத்தகு வாய்ப்புகளை நீக்கவேண்டும். அத்தகு வாய்ப்புகளைப் பயன்படுத்திக் கட்சி அரசியல்வாதிகளும் விளம்பரதாரிகளும் தங்கள் சொந்த நலனுக்காக மெய்நிலையைத் திரித்து

வேறுபடுத்திப் பொய்ப்படம் காட்டுவர்; ஒரு சூழ்நிலைக்குக் கண்ட புள்ளி விபரத்தினைப் பிறிதொரு சூழ்நிலைக்குப் பயன்படுத்துவர். இத்தகையாளர்களின் எண்ணிக்கை நாட்டில் பெருகிவருவதன் காரணமாகவே, புள்ளியியலைச் சாதாரண மக்கள் நம்புவதற்குத் தயங்குகின்றனர். 'புள்ளி விபரமே சுத்தப் பொய்' என மிகையாகக் கருதுவோருமுளர். இது அறியாமையாகும்! எய்தவர் ஒருவரிருக்க, அம்பை நொந்து என்ன பயன்? 'புள்ளிவிபரங்களைக் கொண்டு எதனையும் எப்படியும் நிறுவலாம்' எனக் கருதுவாருமுண்டு. இதுவும் தவறாகும். அறிவியல் வாயிலாகக் காணுகின்ற முடிவு ஒன்றாக இருக்கவேண்டுமேயல்லாது பல்வேறு வகையாக இருக்க முடியாது! புள்ளியியலைச் செவ்வனே பயின்றாரல்லாது, பிறர் கையில் புள்ளிவிபரம் ஓர் ஆபத்தான கருவியாகும்!

கணக்கியல் வழிமுறைப்படி புள்ளி விபரங்களையும் புள்ளியியலையும் கையாண்டால், அது நாட்டை வளமுள்ள பொற்காலத்திற்கு இழுத்துச் செல்லும் வண்டியின் சிறந்த அச்சாக அமையுமென்பதில் எவ்வித ஐயமுமில்லை. இன்று வியக்கத்தக்க அளவில் வளர்ந்துள்ள பல அறிவியல்கள் புள்ளியியல் துணைகொண்டு வளர்ந்துள்ளன எனக் கூறினால் மிகையாகாது. மேலும், ஆய்வில் நாட்டங்கொண்ட நன்மாணவருக்குப் புதுப்புதுத் தேற்றங்களையும் மெய்க்கூற்றுகளையும் காண இது விரிந்து பரந்து கிடக்கும் ஓர் அறிவுத்தளமெனக் கூறினாலும் அது மிகையன்று.

2. புள்ளிவிபர ஆய்வுத்தளம்

புள்ளிவிபர ஆய்வுத்தளங்கள் யாவை என்பதனையும் அதன் விளக்கங்களையும் இங்குக் காண்போம். புள்ளிவிபர ஆய்வினை மேற்கொள்ளும் ஒருவருக்குப் புள்ளிவிபரங்களும், அதன் பாகு பாட்டுத் தன்மையும், பட்டியல் அமைப்பும், விளக்கப் படங்களும் அவரது ஆய்வின் அடித்தளங்களாக அமைகின்றன.

ஆய்வின் நோக்கம்

முதலாவதாக அமைவது புள்ளி விபரங்கள். அதனை முதலில் பெறுதல் வேண்டும். அதனைப் பெறுவதற்குப் பல வழிமுறைகள் உள. எம்முறையில் அதனைப் பெறுவது என்பதனை முதலில் உறுதிப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். அவ்வுறுதி கொள்வதற்குக் கருவியாக அமைவது ஆய்வாளரின் நோக்கமாகும். எந்த நோக்கத்திற்காகப் புள்ளி விபரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பதை முதலில் நன்கு ஐயம் திரிபின்றித் தெளிவாகத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில், ஒரு நோக்கத்திற்காகச் சேகரிக்கப் பட்ட புள்ளி விபரங்கள் வேறொன்றுக்கும் பயன்படலாம் அல்லது பயனற்றுப்போகலாம் அல்லது ஒரு பகுதி பயன்பட்டு எச்சப் பகுதி பயன்படாமல்போகலாம். நோக்கத்தில் ஏற்படுகின்ற சில மாறுதல்கூடப் புள்ளி விபரத்தினைச் சேகரிக்கும் வழிமுறையையே மாற்றி அமைத்துவிடக்கூடும். பண்டங்களின் முதற் கட்ட அல்லது உற்பத்திக் கட்ட விலைக் குறியீட்டு எண்ணினைக் (Index Number) காணவேண்டி சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள், வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைக் காணப் பயன்படமாட்டா; ஏனெனில், வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணிற்குச் சில்லறை விற்பனைக் கட்ட நிலையில் உள்ள பண்ட விலைகள்தான் வேண்டும். இனி, நோக்கத்தில் தெளிவில்லையெனில் காலமும், பணமும், கருவிகளும் விரயமாகும். நோக்கத்தில் தெளிவிருப்பின், புள்ளி விபரங்களைச் சேகரிக்கின்ற முறைகளையும், அதற்குப் பயன்படும் கருவிகளையும்

(காலம், பணம், ஆள்கள் முதலியன) திட்டவட்டமாகக் கணிக்க முடியும்.

சேகரிக்கும் வழிமுறைகள்

நோக்கத்தினைத் தெளிவாகக் கொண்டபின், அதற்குப் பயன் படும் புள்ளிவிபரங்களை எவ்வாறு சேகரிப்பது என்ற கேள்வி எழும். அத்தகைய புள்ளிவிபரங்கள் ஏற்கெனவே சேகரிக்கப் பட்டு முழு நிலையிலோ, அம் முழுநிலையின் ஒரு பகுதியாகவோ அமையலாம். எனில், தொல்லையின்றி அதனை அப்படியே கையாண்டு கொள்ளலாம். இத்தகைய புள்ளிவிபரங்களுக்கு இரண்டாம் தரப் புள்ளிவிபரங்கள் எனவும், அவ்வாறு புள்ளி விபரங்களைப் பெறும் தன்மைக்கு இரண்டாம் தர சேகரிப்பு முறை எனவும் சொல்லலாம். இம்முறையில் உற்றுக் கவனிக்கத் தக்கது ஒன்றுளது. அங்ஙனம் ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள், சரியான புள்ளியியல் முறைப்படி சேகரிக்கப்பட்ட நம்பத்தகுந்த புள்ளிவிபரங்கள்தாமா என்பதை முதலில் நன்கு ஆய்ந்து தெளிவுபடுத்திக்கொள்ள வேண்டும். எஸ்.எஸ்.எல்.ஸி. சோதனையில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் தேறியவரின் மதிப்பெண் கள் ஓர் ஆய்விற்கு வேண்டுமெனில், அதனை நேரடியாகச் சேகரிக்க முற்பட வேண்டுவதில்லை; அந்த இராஜ்யக் கல்வித் துறை அலுவலகத்தில் எளிதாகப் பெறலாம்.

வேறு சில புள்ளி விபரங்கள் இவ்வாறு எளிதில் கிடைப்ப தில்லை. அவற்றினை ஆய்வாளர் நோக்கத்திற்கேற்ப நேரடியாகச் சேகரிக்க முற்படல் வேண்டும். மக்கள் தொகைக் கணிப்பு (Census) பத்தாண்டிற்கு ஒரு தரம் இம் முறையில்தான் செயற்படுத்தப்படு கிறது. இவ்வாறு நேரடியாகச் சேகரிக்கும் முறை முதல்தர சேகரிப்பு முறை எனவும், அத்தகைய புள்ளி விபரங்கள் முதல் தரப் புள்ளிவிபரங்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய புள்ளிவிபரங்களை ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சேகரிக்கலாம்; அல்லது சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து வினாப்பட்டியல் மூலமாகச் சேகரிக்கலாம்; அல்லது வினாப்பட்டியலை அஞ்சல் வாயிலாக அனுப்பிப் பதில்கள் பெறலாம்; தொலைபேசி மூலமாகத் தொடர்பு கொண்டும் சேகரிக்கலாம்.

புள்ளிவிபரங்கள் சேகரிக்கப்படவேண்டிய மூல இடம் மிகச் சிறியதாக, தனிநபர் ஒருவரால் எளிதில் அடையத்தக்க தன்மையில் அமைந்தால், ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சேகரிப்பதில் கடினமில்லை. ஆனல், மிகப் பெரிய ஆய்வாகவும், புள்ளி தருமிடங்கள் பரந்தும் அமையுமெனில், பல சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து, அவர்கள்

மூலமாகத்தான் புள்ளிவிபரங்கள் சேகரிக்கப்பட வேண்டும். இவ்விரண்டு வழிகளிலும் மிகமிக முக்கியப் பங்காற்றுவது வினுப் பட்டியலாகும்.

வினுப் பட்டியல்

ஆய்வின் நோக்கத்திற்கேற்ப வினுப் பட்டியல் நன்கு தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும், வேண்டிய செய்திகள் அனைத்தும் பெறும் வண்ணமும் அமைதல் வேண்டும். ஆய்வாளரே சேகரிக்கின்ற முறையில் இப் பட்டியல் சற்றுச் சிக்கலாகவும் நீண்டும்கூட அமையலாம். வினுக்களை ஆய்வாளரே விளக்கிப் பகர்ந்து பதில்கள் பெறமுடியும். ஆனுல், சேகரிப்பாளர்களைக் கொண்டு பெறப்படும் முறையில் வினுக்கள் தெளிவாகவும் சுருக்கமாகவும் அமைவது மிக முக்கியமானதாகும். சேகரிப்பாளர்கள் முதலில் தாங்களே வினுக்களை நன்கு தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ள வேண்டும். விடை தருபவர்களிடமிருந்து செய்திகளைக் கூட்டாமலும் குறைக்காமலும் தங்களின் விருப்புவெறுப்பிற்கேற்ப மாற்ருமலும் மெய்யான செய்திகளை விடாது சேகரிப்பதில் உண்மையான ஆர்வமுள்ளவர்களாக அவர்கள் விளங்க வேண்டும். வினுப்பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முக்கியக் கருவிகளான அவர்கள் செவ்வனே இயங்கும் நல்லூழியர்களாகச் செயல் புரிய வேண்டும். பத்தாண்டிற்கு ஒரு முறை எடுக்கப்படும் மக்கள் கணிப்பில் ஆசிரியர்களையும், மற்றைய அலுவலகக் குறிப்பாளர்களையும், எழுத்தர்களையும் சேகரிப்பாளர்களாக நியமிக்கின்றனர். இவர்கள் ஊதியமின்றி நாட்டின் நலனில் நாட்டங்கொண்டு இத்துறையில் சேவை புரிகின்றனர். நாட்டின் உணவு விளைவுப் புள்ளியினைக் கணக்கர்கள் சேகரிக்கின்றனர். இத்தகைய சேகரிப்பாளர்கள் எத்துணைமெய்யூழியர்களாக விளங்க வேண்டுமென்பதனைச் சொல்ல வேண்டுவதில்லை.

வினுப் பட்டியல் அஞ்சல் வாயிலாக அனுப்பப்படும்போது, அது மிகத் தெளிவாக இருக்க வேண்டும். வினுப் பட்டியல்கள் அனைத்தும் விடையளிக்கப்பட்டுத் திரும்ப அனுப்பப்படும் என்று சொல்ல முடியாது. இம்முறையில் சட்ட ரீதியாக வினுக்களுக்குரிய விடையினைக் கட்டாயமாகப் பெறப்படும் வசதியிருப்பின், இம்முறை சிறந்ததாகும்; இல்லாவிடில் நூறுபேர்களிடமிருந்து செய்திகளை எதிர்பார்த்தால், இரு நூறுபேர்களுக்கு வினுக்கள் அனுப்ப வேண்டும்.

வினுக்கள் எளிதில் புரிந்துகொள்ளும் வண்ணம் தெளிவாக அமைவதோடு, இருவகைப்பட்ட விடைகளுக்கு ஏதுவான

முறையில் அமைதல் கூடாது. இங்கிதமாக விடைபெறும் பாணியில் வினுக்கள் அமைதல் வேண்டும். செய்தியனுப்புபவர்களின் தனிப்பட்ட கருத்துகளேயோ, உள்ளத்தையோ, மத நெறிமுறைகளேயோ புண்படுத்தும் வண்ணம் அமைதல் கூடாது. ‘ ஆம் ’, ‘ இல்லே ’ என்பன போன்ற சுருக்கமான பதில்கள், எண் வடிவில் தரப்படும் பதில்களேப் பெறும் வண்ணம் வினுக்கள் அமைதல் வேண்டும். கற்றவரா ? செல்வந்தரா ? என்பன போன்ற வினுக்கள் முழு விளக்கமற்றவை. எனவே, அத்தகைய வினுக்களுக்குத் தெளிவான விளக்கங்கள் தரப்படல் வேண்டும். இன்ன வகுப்பு வரை படித்தவர் கற்றவரென்றும், ஆண்டு வருவாய் இன்ன அளவிற்கு மேற்பட்டால் செல்வந்தர் எனவும் விளக்கம் தரப்படல் வேண்டும். ஓர் ஏக்கர் நன்செய் நிலத்தில் எத்தனே மூடை ஆடுதுறை நெல் விளேந்தது எனக் கேட்டால், நாட்டில் வெவ்வேறு பகுதிகளில் மூடை என்பதை வெவ்வேறு அளவில் கொள்வர். எனவே, 60 கிலோ கொண்டது ஒரு மூடை என்பது போன்று தெளிவாகச் சொல்லி விடைபெறல் வேண்டும். இங்குக் கூறப்படும் மூல அளவைக்குப் புள்ளியியல் மூல அளவை அல்லது புள்ளியியல் அலகு (Statistical unit) எனப் பெயராகும். பெறப்படும் செய்திக்கேற்ப இம் மூலஅளவைகள் தெளிவாக விளக்கப்படல் வேண்டும். இனி, சில தருணங்களில் சில கேள்விகளுக்கு நேரடியான பதில்கள் பெறுவது கடினம். தொத்துநோய் உள்ளவரிடம் தொத்து நோயால் அவதிப்படுகிறீரா என நேரடியாகக் கேள்வி கேட்டால், சரியான விடையைப் பெறுவது கடினம். அத் தருணங்களில் வேறு ஏற்ற முறையில் கேள்விகளே அமைத்தல் வேண்டும். கனிவாகக் கேட்டு விடைபெற முயல வேண்டும். பெறப்படும் செய்திகளும் விடைகளும் பாகுபாட்டிற்கும் (Classification) பட்டியல் அமைப்பிற்கும் (Tabulation) உட்படும் தன்மையதாக அமைய வேண்டும் ; இல்லேயெனில், அவை ஆய்விற்கு முற்றிலும் பயன்படாது வீணுகும்.

கிட்டிய மதிப்பின் தரம்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்களேக் கிட்டிய மதிப்பில் சில தருணங்களில் சொன்னுல் போதுமானதாகும். இரு கல்லூரி மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை ஒப்பிடவேண்டுமெனில், அவற்றினே 10-ல் சொன்னுல் போதுமானதாகும். A கல்லூரியில் 960 மாணவர்கள், B கல்லூரியில் 850 மாணவர்கள் படிக்கின்றனர் எனக் கூறலாம். கிட்டிய மதிப்பிற்கு இங்கு 10 பயன்படுத்தப் படுகிறது. இரு பல்கலேக் கழகங்களேச் சார்ந்த மாணவர்களே 100-ல் கூறலாம். இங்கு நூறு கிட்டிய மதிப்பெண்ணுகப் பயன் படுகிறது. இரு நாடுகளின் மக்கள் தொகையினே ஒப்பிட

மில்லியனில் கூறுவது போதுமானதாகும். ஒரு மாவட்டத்தில் விளைந்த நெல்லின் அளவினை நெருங்கிய நூறு டன்களால் கூறினால் போதுமானதாகும். இவ்வாறு புள்ளிகளின் தன்மைக்கேற்ப மதிப்புகளின் தரம் (Degree of Accuracy) மாறுபடுகிறது. புள்ளி விபரங்களைக் கையாளுகையில் இவ்வாறு கொள்ளப்படும் கிட்டிய மதிப்புகள், சில நிலைகளில் உண்மையான சரிமதிப்பிற்குச் சற்று அதிகமாகவும் வேறு நிலைகளில் சற்றுக் குறைவாகவும் இருக்கலாம். முடிவாக, கூட்டிய நிலையில் உண்மை மதிப்பிற்கும் கிட்டிய மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு மிகமிகக் குறைவாக இருப்பதுதான் சிறந்ததாகும். எனவே, கிட்டிய மதிப்பிற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் தர அளவை (Standard of Approximation), மேற்கூறப்பட்ட வேறுபாடு மிகச் சிறிய அளவில் அமையுமாறு எடுத்துக் கொள்ளப்படவேண்டும் என்பது தெளிவாகும். இங்ஙனம், விடைகளில் பெறப்படும் எண் அளவைகளை ஏற்றதொரு கிட்டிய மதிப்பில் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

பாகுபாடு

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்களை, ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக்கொள்வதற்கேதுவாக, உற்ற முறையில் பிரித்துப் பாகுபடுத்திக்கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள் எண் குவியலாகத்தான் தோன்றுமேயன்றி, அதிலிருந்து எந்தவித முடிவும் தீர்வும் காண இயலாது. தக்க முறையில் பாகுபடுத்திப் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டினால்தான் அது ஆய்வுக்கு உறுதுணையான வடிவத்தில் அமைவதோடு, பார்ப்போர்க்கும் தெற்றெனப் புரியும்படி அமையும். வேலையின்மை நிலையை ஆயும் நோக்கத்திற்கான புள்ளி விபரங்களை, வேலையிலுள்ளோர், வேலையற்றவர், போதிய வேலையில்லாதவர், மேலும் அவர்களுள் நகரத்தார், நாட்டுப்புறத்தார், ஆண்கள், பெண்கள் என்ற வகையாகப் பிரித்து அமைத்துக் காட்டினால்தான் அது தெளிவாகப் புரியும். ஆய்விற்குப் பயன்படும்வண்ணமும், பார்ப்போர்க்குத் தெள்ளிதின் புரியும்வண்ணமும் புள்ளிகளை அல்லது விபரங்களைப் படைப்பது (Presentation of data), புள்ளியியல் விளக்கும் இரண்டாம் பகுதியாகும்.

இவ்வாறு, பாகுபடுத்தப்பட்ட நிலையில் புள்ளிவிபரக் குவியலானது, வேண்டாதவை புறக்கணிக்கப்பட்டுச் சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் அமைந்திருக்கும். பாகுபடுத்தலுக்கு வழிகாட்டும் வண்ணம் திட்டவட்டமான கணக்கியல் விளக்கங்கள் கூற முடியாது; பொது அறிவும், அனுபவமும், பல்வேறு பட்டியல்

களைப் பார்த்துப் பழகிய பயிற்சியும்தாம் பாகுபடுத்தலுக்கான திறனைப் பெற வழியாகும்.

பொதுவாக, பாகுபடுத்தலை இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். சமயம், பால் போன்ற தன்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகுபடுத்தலைத் தன்மை அளவைப் பாகுபாடு, வயது, வருவாய் போன்ற எண் அளவையினை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகு பாட்டினை எண் அளவைப் பாகுபாடு எனக் கொள்ளலாம்.

பட்டியல்

பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளி விபரங்களை ஏற்றதொரு பட்டியலில் (Tabulation) அமைப்பது அடுத்த கட்டமாகும். சில சமயங்களில் ஒருவழிப் பட்டியலும், வேறு சமயங்களில் இருவழிப் பட்டியல் அல்லது பல்வழிப் பட்டியலும் பயன்படுகின்றன. இவைகளில் தலையாயது அலைவெண் பட்டியலாகும். அதனைப் பற்றிய விளக்கங்களைப் பின்னர் காண்போம். காலத்தோடு இணைந்த எண்களைக் காலத்தொடர்ப் (Time Series) பட்டியலில் அமைத்தல் மரபாகும்.

பட்டியலில் படுக்கைக் கட்டங்களும் நெடுக்கைக் கட்டங்களும் அமைப்பதுண்டு. ஒவ்வொரு படுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும், ஒவ்வொரு நெடுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும் உற்ற சுருக்கமான, தெளிவான தலைப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். தகுந்த முறையில் இடைவெளி விட்டு, வேண்டியவாறு படுக்கை, நெடுக்கைக் கோடுகள் வரைந்து, தலையான புள்ளி விபரங்களுக்குச் சிறப்பிடம் தரவேண்டும். பொது அறிவும் பயிற்சியுமே அழகான பட்டியலை உருவாக்கும் கருவிகளாம். பல்வேறு பட்டியல்களைப் பார்த்துப் பழகிக்கொள்ளல் வேண்டும். இங்குச் சில பட்டியல்கள் எடுத்துக்காட்டாகத் தரப்படுகின்றன.

பட்டியல் 1

எஸ்.எஸ்.எல்.ஸி. தேறிய மாணவர்களின் பட்டியல்

ஆண்டு	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
மாணவர்கள்										
மாணவிகள்										

பட்டியல் 2

மூன்று நகர மக்கள்தொகைப் பட்டியல்

	நகரம் A		நகரம் B		நகரம் C	
	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்
உழவர்கள்						
தொழிலாளர்கள்						
வணிகர்கள்						
மாணவர்கள்						
பள்ளி செல்லாக் குழந்தைகள்						
மொத்தம்						

இனி, கீழ்க்கண்ட செய்தியினை ஒரு பட்டியல் வடிவத்தில் தருவோம் :

'100,000 பேர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் காச நோய் பீடிக்கப்பட்ட தன்மையில் இருந்தனர். அவர்களுள் 5,000 பேர்கள் இன்ஃபுளுயன்ஸா நோயாலும் பீடிக்கப்பட்டிருந்தனர்; ஆனால், இவர்களுள் 1,000 பேர் மட்டும் பரவாத் தன்மையுள்ள வீடுகளில் இருந்தனர். மாறாக, காச நோயால் பீடிக்கப்பட்டு இன்ஃபுளுயன் ஸாவிற்குத் தப்பித்தவர்களுள் $\frac{1}{15}$ பேர் பரவும் தன்மையுள்ள வீடுகளில் இருந்தனர். மொத்தத்தில் 21,000 பேர் இன்ஃபுளுயன் ஸாவாலும் பீடிக்கப்பட்டனர்; 41,000 பேர் ஃபுளு பரவாத்தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருந்தனர். ஆனால், காசநோய்க்குத் தப்பித்து ஃபுளுவால் பீடிக்கப்பட்டுப் பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் வசித்தவர் 2,000 பேர் மட்டுமேயாவர்.' (செ.ப.)

பட்டியல் 3

காசநோய், இன்ஃபுளூயன்ஸா நோய்ப்பட்டவர் பட்டியல்

		இன்ஃபுளூயன்ஸா				
		பீடிக்கப்பட்டவர்		பீடிக்கப்படாதவர்		
		பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவாத் தன்மையில் உள்ள வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவாத் தன்மையில் உள்ள வீடுகளில் இருப்பவர்	மொத்தம்
காச நோய்	பீடிக்கப் பட்டவர்	4,000	1,000	1,000	14,000	20,000
	பீடிக்கப் படாதவர்	2,000	14,000	34,000	30,000	80,000
மொத்தம்		6,000	15,000	35,000	44,000	100,000

பயிற்சி

1. ஏழு நகரங்களின் மக்கள் தொகையினை ஐந்து வகை வயது குழுக்கள், நான்கு மதங்கள், பால் ஆகிய பிரிவுகளில் அமைக்க ஏதுவான ஒரு வெற்றுப் பட்டியலை அமைத்துக் காட்டுக. (தி.ப.)

2. ஒரு கல்லூரியில் மொத்த மாணவர்கள் 1,248. அதில் $\frac{1}{3}$ பங்கினர் புகுமுக வகுப்பினைச் சார்ந்தவர்; அதில் சரிபாதி கலைப்பகுதியினையும், எஞ்சியவர் அறிவியல் பகுதியினையும் சார்ந்தவர். பட்டப்படிப்பு மாணவர்களுள் 242 பேர் அறிவியல் பகுதியினையும், எஞ்சியவர் கலைப்பகுதியினையும் சார்ந்தவர்கள். கல்லூரியில் மொத்த மாணவியர் 125 பேர். அவர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் பட்டப்படிப்புக் கலைப்பகுதியினைச் சார்ந்தவர்கள்; அறிவியல் பட்டப்படிப்புத் துறையில் அதைவிட 5 மாணவியர் அதிகம். 45 மாணவியர் புகுமுக வகுப்புக் கலைத்துறையினைச் சார்ந்தவர்.

இதனை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

3. 1951ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் மக்கள்தொகை 357 மில்லியன். இவர்களுள் 249 மில்லியன் உழவுத் தொழிலில் ஈடுபட்டவர்கள். உழவர்களில் 9 மில்லியன் பேர்கள் நகர்ப் புறத்திலும், எஞ்சியவர் நாட்டுப்புறத்திலும் இருந்தனர். உழவரல்லாதவர்களில் பாதிக்குச் சற்று மேலாக நாட்டுப் புறத்தில் வசித்தனர். திட்டவட்டமாகக் கூறினால், அவர்கள் 55 மில்லியன் ஆவர். தங்களைத் தாங்களே போற்றிக்கொள்ளும் 105 மில்லியன் பேர்களில் 71 மில்லியன் பேர்கள் உழவுத் தொழிலில் ஈடுபட்டவர்கள். பிறரைச் சார்ந்து வாழ்பவர்களுள் ஏறத்தாழ 147 மில்லியன் பேர்கள் உழவர்களைச் சார்ந்தும், 67 மில்லியன் பேர்கள் மற்றவர்களைச் சார்ந்தும் இருந்தார்கள். இதனை உற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

4. சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தினைச் சார்ந்த மாணவர் களின் செலவினை ஆராய மேற்கொள்வதற்கான ஒரு புள்ளி விபர ஆய்வுத் திட்டத்தினை வினாப்பட்டியலோடு விளக்குக.

5. கீழ்க்கண்ட பிரச்சினைகளை ஆய மேற்கொள்ளவிருக்கும் புள்ளியியல் ஆய்வுத் திட்டம், சேகரிப்பு முறை, வினாப்பட்டியல் முதலியவற்றை விளக்குக.

(1) கல்லூரி மாணவர்களின் பொழுதுபோக்கு.

(2) கோவை நகர நெசவாலைத் தொழிலாளர்களின் வாழ்க் கைத்தரம்.

(3) தஞ்சாவூர் மாவட்டத்தில் புகையிலை போடுவதால் ஏற் படும் தீமை.

(4) சென்னை நகரத்தில் தொழுநோயால் தொல்லைப்படுபவர்.

(5) புகை பிடிக்கும் தன்மைக்கும் பிளவை நோய்க்குமுள்ள உறவு.

(6) தமிழ் நாட்டில் இன்ஃபுளுயன்ஸா நோயால் பாதிக்கப் பட்டவர்களின் பிந்திய நிலை.

(7) பி.ஸி ஜி. தடுப்பு மருந்தின் விளைவு.

(8) மதுரை நகரத்தில் போக்குவரத்து.

(9) நகர நூலகத்தினைப் பயன்படுத்துவோரின் ஆர்வம்.

அலைவெண் பரவல்

இதனை அலைவெண் பட்டியல் எனவும் அழைக்கலாம்; பரவல் எனக் கூறுவது புள்ளியியல் மரபாகும். சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி

விபரங்களை ஏற்ற அளவுடைய பல்வேறு பிரிவுகளாக அமைத்து, ஒவ்வொரு பிரிவுடன் அது கொண்டுள்ள மொத்த எண்ணிக்கை யினையும் சுட்டிக்காட்டும் பட்டியலே அலைவெண் பரவல் அல்லது அலைவுப் பரவல் (Frequency Distribution) ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, 100 கணக்கியல் மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண் விபரங்களை 10 பிரிவாகப் பிரிக்கலாம். 0—9, 10 – 19, 20 – 29,……….90—100 என்பதாக. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் எதிராக அதனுள் அடங்கும் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக் கையைக் குறிக்கின்றோம். 40—49 என்ற மதிப்பெண்களை 35 மாணவர்கள் பெற்றிருந்தால், 40—49 என்ற பிரிவிற்கு எதிராக 35ஐ எழுதுகின்றோம். 40—49 என்ற பிரிவிற்குரிய அலைவெண் அல்லது நிகழ்வெண் (Frequency) 35 ஆகும்.

ஒரு பிரிவிற்கும், அதன் முந்திய பிரிவிற்குமுள்ள வேறுபாடு அப் பிரிவுகளின் தூரமாகும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய மதிப்பும் (mid-value) புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும். பிரிவின் தூரங்கள் (class-intervals) சீராக ஒரே மாதிரியும், சீரற்ற வேறு பட்ட நிலையிலும் அமைவதுண்டு. நடைமுறையில், பின்வருவன போன்று ஐந்து வகையாகப் பிரிவுகளை இடத்திற்கேற்ப அமைப்பது புள்ளியியல் வழக்கமாகும்.

(1) 0—9, 10 – 19, 20 – 29,………………

(2) 0—10, 10—20, 20—30,………………

(3) 0 – 10-ற்குக்கீழ், 10—20-ற்குக்கீழ், 20—30-ற்குக்கீழ்,………

(4) 0—, 10—, 20—,………………

(5) 5, 15, 25,…………………

மூன்றாவது, நான்காவது அமைப்புகள் ஒரே பொருளைத் தரு வன; எழுதும் முறைகள்தாம் வேறாகும். இந்த இரு வகை அமைப்புகளிலும், மேல் எல்லையை எந்தத் தசமயிடச் சுத்தமாக எடுக்க வேண்டுமென்பதைச் சொல்வது நல்லது. இவற்றுள், 0—10, 10—20, 20—30,……என்பன போன்ற பிரிவுதான் மெய்ப் பிரிவுகள் (True Classes) என அழைக்கப்படும். மெய்ப் பிரிவுகளில் ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லை, அதன் அடுத்த பிரிவின் கீழ் எல்லையாக அமையும். எத்தகைய பிரிவுகளிலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேல், கீழ் ஆகிய இரண்டு எல்லைகளின் கூட்டுச் சராசரியே அப் பிரிவின்

மைய மதிப்பாகும். எனவே, மேற்கண்ட ஐந்துவகைப் பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் வருமாறு :

(1) 4·5, 14·5, 24·5,..................
(2) 5, 15, 25,.......................
(3) 4·95, 14·95, 24 95,..............
(4) 4·95, 14·95, 24·95,..............
(5) 5, 15, 25,..................

சில தருணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட பிரிவினை, மெய்ப்பிரிவாக மாற்றி அமைக்க வேண்டியிருக்கும். அப்போது ஒரு பிரிவின் மைய மதிப்பிலிருந்து பிரிவுத் தூரத்தின் சரிபாதியினைக் கழித்தும், கூட்டியும் பெறப்படும் எண்கள், அதற்குரிய மெய்ப்பிரிவின் கீழ் மேல் எல்லைகளாகக் கருதப்படுகின்றன.

அலைவெண் பரவல் அமைத்தல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டங்களை ஓர் அலைவுப் பரவலில் எவ்வாறு அமைப்பது எனக் காண்போம். எடுத்துக் காட்டாக, 100 வணிகர்கள் அவர்களின் விற்பனை மதிப்பினை ரூபாயில் கீழ்க்கண்ட எண்கள் காட்டுவதாகக் கொள்வோம்:

50	124	179	225	121
71	83	163	176	187
133	156	177	215	125
243	254	135	184	192
231	251	276	298	251
91	126	112	133	156
197	214	224	233	151
267	276	177	183	193
194	211	223	231	311
276	294	213	276	299
133	141	153	125	67
124	90	96	105	114
176	155	165	222	231
213	265	272	285	297
314	340	370	250	76
176	130	137	144	147
157	167	165	245	254
195	228	297	245	261
331	351	383	244	254
354	296	313	96	114

பிரிவுகள்	அலை வெண் குறிகள்	அலைவெண்
50 - 74	|||	3
75 - 99	𝍸 |	6
100 - 124	𝍸 ||	7
125 - 149	𝍸 𝍸 ||	12
150 - 174	𝍸 𝍸	10
175 - 199	𝍸 𝍸 ||||	14
200 - 224	𝍸 |||	8
225 - 249	𝍸 𝍸	10
250 - 274	𝍸 𝍸	10
275 - 299	𝍸 𝍸 |	11
300 . 324	|||	3
325 - 349	||	2
350 - 374	|||	3
375 - 379	|	1
	மொத்தம்	100

பிரிவுகள் எத்தனை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும், பிரிவின் தூரத்தினை எந்த அளவில் கொள்ளல் வேண்டும் என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரத்தினைப் பொறுத்ததாகும். நடைமுறையில் 5, 8, 10, 15, 20 போன்ற அளவு பிரிவின் தூரமாகவும், 8 முதல் 20 வரை பிரிவுகள் கொண்ட பரவலாகவும் அமைக்கலாம். மேற்கண்ட எண் கூட்டத்தில் மிகப் பெரிய எண் 383; மிகச் சிறிய எண் 50 ஆகும்; மொத்த எண்கள் 100. எனவே, 25இனைப் பிரிவின் தூரமாகக் கொண்டு 14 பிரிவுகள் கொண்ட அலைவுப் பரவலாக அமைக்கலாம். முதலில் பிரிவு, அலைவெண் குறிகள், அலைவெண் என மூன்று பிரிவாகப் பட்டியலை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். இரண்டாவது பகுதியாகிய 'அலைவெண் குறிகள்' (Frequency Marks) என்ற பகுதியின்கீழ் ஒவ்வொரு எண்ணிற்கும் பதிலாக ஒரு நேர்கோடிட்டுக் குறியிட வேண்டும். ஐந்து குறிகள் கொண்டது ஒரு குழுவாக அமையுமாறு குறிகள் இடலாம். ||||/ என்றவாறு ஒவ்வொரு குறிக்குழுவும் அமைய வேண்டும். பின்பு குறிகளின் எண்ணிக்கையை மூன்றும் பகுதியில் எழுதவேண்டும். மேலே கண்ட புள்ளி விபரம் 17ஆம் பக்கத்தில் உள்ள அலைவெண் பரவலில் அமையும்.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட 50 எண்கள் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும் :

45, 54, 38, 72, 13, 28, 34, 45, 63, 45, 47, 54,
28, 17, 84, 95, 74, 99, 15, 24, 38, 95, 17, 28,
83, 53, 28, 46, 66, 59, 65, 95, 34, 23, 9, 45,
0, 24, 8, 98, 54, 33, 28, 46, 66, 75, 57, 36,
48, 82.

உற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

2. ஓர் இடத்தில் ஒரு திங்களில் 55 ஆண்டுகளில் பெய்த மழையின் அளவு (அங்குலத்தில்) வருமாறு :

22, 30, 14, 31, 25, 15, 40, 28, 34, 13, 21, 18,
27, 26, 36, 18, 30, 22, 20, 16, 34, 22, 18, 33,
17, 25, 34, 35, 26, 34, 18, 40, 25, 16, 24, 22,
30, 25, 17, 18, 25, 19, 31, 24, 30, 28, 18, 28,
19, 30, 21, 35, 25, 24, 27.

ஏற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

இந்தியாவில் மக்கட் கணிப்பு

இந்தியாவில் மக்கட் கணிப்புப் பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை நடைபெறுகிறது. 1881 பிப்ரவரி, 1891 பிப்ரவரி, 1901 மார்ச்சு, 1911 மார்ச்சு, 1921 மார்ச்சு, 1931 பிப்ரவரி, 1941 பிப்ரவரி, 1951 பிப்ரவரி, 1961 பிப்ரவரியில் வரிசையாக இது மேற்கொள்ளப்பட்டது.

மக்கட்கணிப்புத் தொடங்குவதற்கு ஏறத்தாழ ஓர் ஆண்டிற்கு முன்பே அதற்கான முயற்சிகளை, மத்திய அரசாங்கத்தால் நியமிக்கப்படும் மக்கட்கணிப்புத் தலைமை அலுவலர் மேற்கொள் வார். அன்னாரின்கீழ்ப் பல மத்திய, இராஜ்ய அரசாங்க ஊழியர் கள் பணிபுரிவர். இதற்கு அச்சாணி போன்றவர்கள் சேகரிப் பாளர்களாவர். பள்ளி ஆசிரியர்களும் பல அலுவலக எழுத்தர் களும் இப்பணியினை ஊதியமின்றி மேற்கொள்கின்றனர். இவர் களுக்கு ஊதியம் தர அரசாங்கப் பொருளாதார வளம் இடம் தராது. மில்லியனுக்கு மேற்பட்ட சேகரிப்பாளர்கள் செயல்படுவர். மக்கட் கணிப்புச் சட்டப்படி, சேகரிப்பாளர்களுக்குத் தகுந்த விடைகளைத் தருவதற்கு மக்கள் அனைவரும் கடமைப்பட்டவர்க ளாவர். அவர்களது விடைகள் இரகசியமாக வைத்துக்கொள்ளப் படும்; வழக்கு மன்றங்களில் அவைகள் சாட்சியமாகவோ, பிற செய்திகளாகவோ ஏற்றுக்கொள்ளப்படமாட்டா. இதனால் மெய்யான புள்ளிவிபரங்களைச் சேகரிக்க ஏதுவாகிறது. சேகரிப் பாளர்கள் செய்திகளைத் திரட்டுவதற்கேதுவாக, முன்பே ஒவ்வோர் இல்லமும் ஏற்ற முறையில் வரிசையாக நுழைவாயில் களில் எண்கள் குறிக்கப்படும்.

மக்கட் கணிப்பின் குறிக்கோள் மக்கள் தொகையின் எண்ணிக்கை மட்டுமன்றி, மக்களின் வாழ்க்கையோடு இணைந்த பல்வேறு செய்திகளைச் சேகரிப்பதுமாகும்.

1951ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு வேலை, பிப்ரவரித் திங்கள் 9ஆம் தேதியிலிருந்து மார்ச்சு திங்கள் முதல் தேதி வரை நடந்தது. அப்போது ஒவ்வொரு குடிமகனிடமும் கேட்கப் பட்ட வினாப்பட்டியலின் சுருக்கம் வருமாறு:

1. பெயரும் குடும்பத் தலைவருடன் கூடிய உறவும்:
2. (அ) தேசியம்:
   (ஆ) சமயம்:
   (இ) சாதி:

3. திருமண நிலை:
4. வயது:
5. பிறப்பிடம்:
6. வேறு நாட்டிலிருந்து குடிபெயர்ந்தவரா? அதன் விபரம்:
7. தாய்மொழி
8. அறிந்த பிற மொழிகள்:
9. பொருளாதார நிலை:
10. வேலை:
11. வாழ்க்கைக்குரிய முதல்தர வழி:
12. வாழ்க்கைக்குரிய இரண்டாம்தர வழி:
13. கல்வி:
14. அங்கவீனம் (தொழுநோய் பீடிப்பு)
15. பால்:

1961ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு நடந்தபொழுது, மேற்கண்டதுபோன்ற தனிப்பட்ட வினாத்தாளுடன், வீட்டு வினாப் பட்டியலும் குடும்ப வினாப்பட்டியலும் வழங்கப்பட்டுச் செய்திகள் சேகரிக்கப்பட்டன என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். தனிப்பட்ட வினாத்தாளின் சுருக்கம் வருமாறு:

1. (அ) பெயர்:
   (ஆ) குடும்பத் தலைவருடனுள்ள உறவு;
2. வயது:
3. திருமண நிலை:
4. (அ) பிறப்பிடம்:
   (ஆ) பிறப்பிடம் நகர்ப்புறமா? நாட்டுப்புறமா?
   (இ) தற்போதுள்ள இடத்தில் வசித்துவரும் காலம்?
5. (அ) தேசியம்:
   (ஆ) சமயம்:
   (இ) ஹரிஜன வகுப்பு அல்லது மலைவகுப்பைச் சார்ந்தவரா?
6. படிப்பும் கல்வியும்:
7. (அ) தாய்மொழி:
   (ஆ) வேறு தெரிந்த மொழிகள்:

8. உழவுத் தொழிலில் ஈடுபட்டவரா ?
9. உழவுத் தொழிலில் கூலி வேலை செய்பவரா ?
10. குடும்பத்தினைச் சார்ந்த தொழிற்சாலையில் வேலைசெய்பவரா ?
    (அ) அவ் வேலையின் தன்மை :
    (ஆ) அத் தொழிற்சாலையின் தன்மை :
    (இ) வேலைக்கு அமர்த்தப்பட்டவரா ?
11. வேறுவகை வேலையெனில்,
    (அ) வேலையின் தன்மை :
    (ஆ) வேலைசெய்யும் இடத்தன்மை :
    (இ) தொழிலாளர் வர்க்கப் பிரிவு :
    (ஈ) தொழிற்கூடத்தின் பெயர் :
12. வேலை எதுவும் இல்லையெனில் ஈடுபட்டுள்ள நிலை :
13. பால் :

வீட்டு விஞப்பட்டியல்

1. வீட்டின் பயன்படும் தன்மை :
2. சுவர்கள் கட்டப்பட்ட முக்கிய மூலப்பொருள்கள் :
3. கூரை கட்டப்பட்ட முக்கிய மூலப்பொருள்கள் :
4. சொந்தமானதா ? வாடகையா ?
5. அறைகளின் எண்ணிக்கை :

கட்டடம் தொழிற் கூடமாக இருப்பின் விஞப்பட்டியல் வருமாறு :

1. பெயர் :
2. உரிமை :
3. உற்பத்திப் பொருள் :
4. தொழிலாளர் எண்ணிக்கை :
5. எரிபொருள் :
6. இயந்திரவகை முதலிய செய்திகள் :

குடும்ப விஞப்பட்டியல்

1. குடும்பத்தினரால் பயிர் செய்யப்படும் சொந்த நிலத்தின் பரப்பும் குத்தகை நிலத்தின் பரப்பும் :

2. பிறருக்குப் பயிரிட விடப்பட்ட நிலத்தின் பரப்பு :
3. பெறும் அல்லது கொடுக்கும் வாடகை :
4. குடும்பத் தொழிற்சாலையின் தன்மையும் விபரமும் :

1961ஆம் ஆண்டில் மக்கட் கணிப்பு எடுக்கப்பட்டபோழ்து, அதனுடன் இணைந்து, ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களின் பலன்களையும் பொருளாதார வளர்ச்சி நிலையையும் காணவேண்டி, வேறு சில துணை ஆய்வுகளும் மேற்கொள்ளப்பட்டன. அவையாவன :

1. அறிவியல், தொழில்திறமை கொண்டவர்களைப் பற்றிய ஆய்வு :
2. சமுதாய, பொருளாதார ஆய்வு :
3. கைத்தறி, கைவேலைப்பாட்டினைப்பற்றிய ஆய்வு :
4. மனித இனங்களைப் (Races) பற்றிய ஆய்வு :

1961ஆம் ஆண்டுக் கணிப்பில் கண்ட சில முக்கியச் செய்திகளாவன : 1961ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகை 439 மில்லியன் : 226 மில்லியன் ஆண்கள் ; 213 மில்லியன் பெண்கள். மக்கள் தொகை 2·2 சதவீதத்தில் வளர்கிறது. இறப்பு விகிதம் 1951ஆம் ஆண்டு நிலையைவிடக் குறைந்துள்ளது. எனவே, மக்கள்தொகை வளர்ச்சி அதிகமாகிறது. இந்தியனின் சராசரி வாழ்வுக் காலம் 45 ஆண்டுகள். இது 35-லிருந்து 45 ஆக உயர்ந்துள்ளது. நகர்ப்புற மக்கள்தொகை ஓவ்வோர் ஆண்டிற்கும் 60 மில்லியன் அளவில் 1951ஆம் கணிப்புப்படி வளர்ந்துவந்தது. 1961ஆம் கணிப்புப்படி 80 மில்லியன் அளவில் மாறியிருக்கும் நிலை, நாட்டுப்புறத்திலிருந்து நகர்ப்புறத்திற்கு மக்கள் நகருவதைக் காட்டுகிறது. மக்கள்தொகையின் மிக வேகமான வளர்ச்சி பொருளாதார வளர்ச்சியில் குறுக்கிட்டு வாழ்க்கைத்தரம் முன்னேற முடியாமல் திணறுகிறது. அரசாங்கத்தின் குடும்பக் கட்டுப் பாட்டுத் திட்டங்களும் முயற்சிகளும் வெற்றி பெறுவதாகுக !

பயிற்சி

1. 1971ஆம் ஆண்டு மேற்கொள்ளப்படும் மக்கட் கணிப்பிற்கு நீங்கள் தலைமை அலுவலராக நியமிக்கப்பட்டால், எத்தகைய திட்டத்துடனும் வினாப்பட்டியல்களுடனும் பணியாற்றுவீர்கள் என்பதனையும், முந்திய கணிப்பில் மேற்கொள்ளவிருக்கும் மாற்றங்களையும் விளக்குக. மேலும், எத்தகைய துணை ஆய்வினை மேற்கொள்வீர்கள் என்பதனையும் அவைகளுக்குரிய திட்டங்களோடு விளக்குக.

3. விளக்கப் படங்கள்

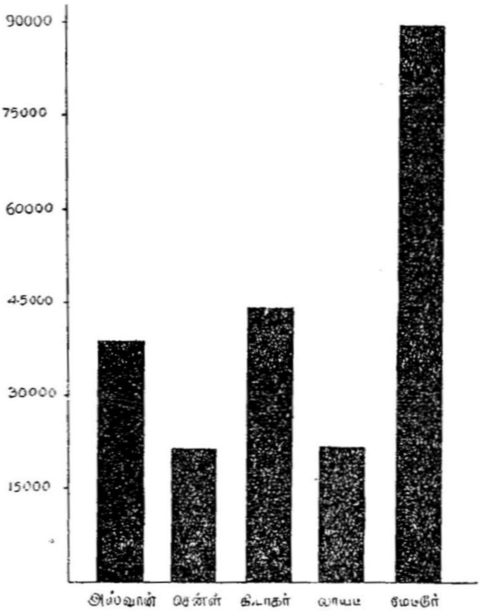
சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் ஒரே எண்குவியலாகத் தோன்றும் காரணத்தால், அவைகளிலிருந்து அப்படியே எளிதில் ஒன்றும் புலப்படாதாகையால், அவைகளை ஏற்றதொரு முறையில் பாகுபடுத்தி, வகையானதோர் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்ட வேண்டுமென முன்பு கண்டோம். பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளி விபரங்களை விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டுவதும் புள்ளியியல் மரபாகும். சராசரி அறிவுடைய சாதாரண மக்களும் உள்ள நிலையைத் தெள்ளிதின் தெரிந்துகொள்ளவும், புள்ளியியல் நிபுணர்களின் மேலாய்விற்கு உறுதுணையாக அமையும் முறையிலும் பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் பலவிதமான விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டப்படுகின்றன. அவைகளில் முக்கியமானவை : (1) பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Bar Diagrams), (2) வட்ட விளக்கப் படங்கள் (Pie Diagrams), (3) உருவக விளக்கப் படங்கள் (Pictograms), (4) நேர்கோட்டுப் படங்கள் (Line Diagrams), (5) பரவல் செவ்வகங்கள் (Histograms), (6) அலைவெண் பலகோணங்கள் (Frequency Polygons), (7) அலைவெண் வரைகள் (Frequency Curves), (8) ஓகைவ் வரைகள் (Ogive Curves), (9) லாரன்ஸ் வரைகள் (Lorenz Curves) ஆகியனவாம்.

பட்டை விளக்கப் படங்கள்

ஒரே நேர்கோட்டின்மீது பட்டை பட்டையாகப் பல்வகைச் செவ்வகங்கள் வரைந்து, புள்ளிவிபரங்கள் காட்டும் விளக்கங்களையும், வேறுபாடுகளையும், வளரும் தன்மைகளையும் ஒப்பு நோக்கித் தெளிவுபடும் வண்ணம் வரையப்படுகின்றன. சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் பட்டை விளக்கப் படங்களின் அமைப்பினைக் காண்போம். பின்வரும் பட்டியல் ஐந்து அணைக்

கட்டுகள் கொள்ளும் தண்ணீர் அளவினைக் (மில்லியன் கன அடியில்) காட்டுகின்றது :

அணைக்கட்டுகள்	கொள்ளளவு (மில்லியன் க. அடியில்)
அஸ்வான்	37,600
சென்னூர்	22,560
கிருஷ்ணராஜசாகர்	43,930
லாயட் அணை	24,200
மேட்டூர் அணை	93,500



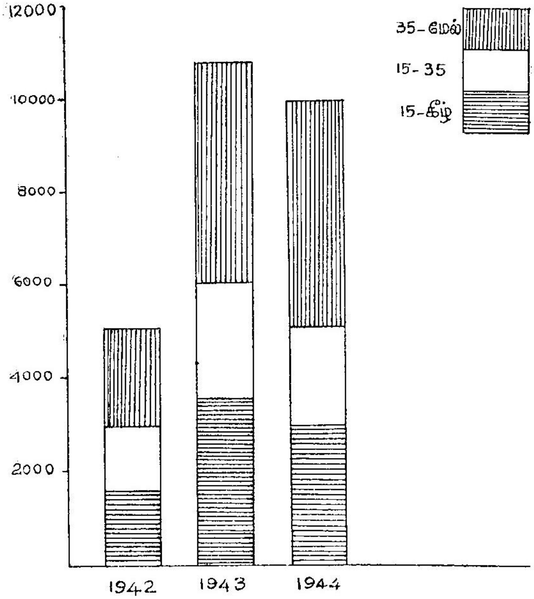
படம் 1.

இத்தகைய படங்களில் ஒரு பட்டைக்கும் அடுத்ததற்குமுள்ள இடைவெளி ஒரே மாதிரியாக அமைதல் வேண்டும். எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே வண்ணத்தில் பட்டை தீட்டப்படல் வேண்டும். ஒவ்வொரு பட்டையும் பலவாறு பிரித்துக் காட்டப்படும் வேறுவகைப் பட்டை விளக்கப் படங்களுமுள. அவைகளைப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Component Bar Diagrams) என அழைக்கலாம்.

1942–44ஆம் ஆண்டுகளில் தண்டனை பெற்றுச் சிறை சென்றவர்களின் பட்டியல் வருமாறு :

ஆண்டு	15 வயதிற்குட்பட்டவர்கள்	15-க்குமேல் 35 வயதிற்குட்பட்டவர்கள்	35 வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள்
1942	1455	1268	2314
1943	3065	3214	4565
1944	2602	2124	4979

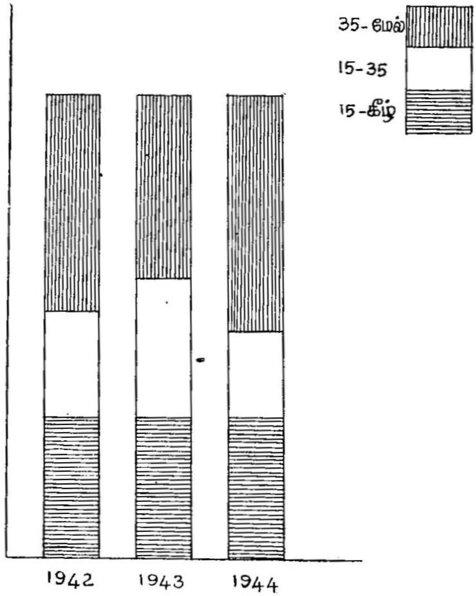
இது கீழ்க்கண்ட பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்களில் அமைத்துப் படைக்கப்படுகின்றது.



படம் 2.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிபரத்தினையே சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்களிலும் அமைக்கலாம். அங்கு ஒவ்வொரு மொத்தத்தையும் நூறாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு இணைப் பிரிவினையும் ஏற்ற சதவீத எண்ணில் அமைத்துப்

படங்கள் வரைதல் வேண்டும். இங்கு எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைகின்றன.



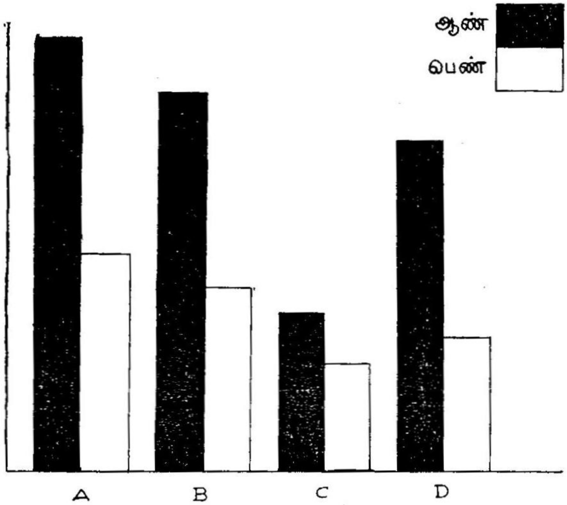
படம் 3.

இனி, இணைப்பட்டை விளக்கப் படங்கள் என்ற வகையுமுண்டு. இரு புள்ளிவிபரங்களை ஒப்பிட ஏதுவாகின்ற படங்களாகும் அவை. ஆண்–பெண், செலவு–வரவு, ஏற்றுமதி–இறக்குமதி போன்ற செய்திப் புள்ளிவிபரங்களை இணைத்து ஒப்பிட அவை பயன்படுகின்றன.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் நான்கு பல்கலைக்கழகங்களில் ஓர் ஆண்டில் பட்டம் பெற்றவர்களின் புள்ளிவிபரத்தினைத் தருகிறது.

பல்கலைக் கழகங்கள்	ஆண்	பெண்
A	465	220
B	408	186
C	245	85
D	310	102

இதனை விளக்கும் இணைப்பட்டை விளக்கப் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 4

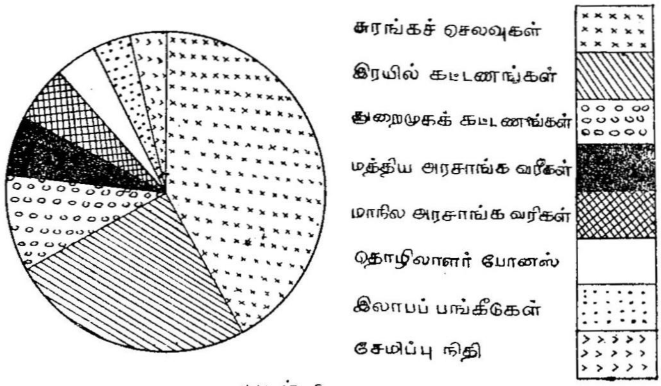
வட்ட விளக்கப் படங்கள்

சிலவகைப் புள்ளிவிபரங்கள் வட்ட விளக்கப் படங்களில் அளிக்கப்படுகின்றன. ஓர் இரும்பு, மெக்னீஸியத் தாதுப்பொருள் தொழிற்சாலையின் பட்டியல் வருமாறு :

			செலவு (இலட்சம் ரூபாய்களில்)
1.	சுரங்கச் செலவுகள்	...	480
2.	இரயில் கட்டணங்கள்	...	261
3.	துறைமுகக் கட்டணங்கள்	...	100
4.	மத்திய அரசாங்க வரிகள்	...	63
5.	இராஜ்ய வரிகள்	...	48
6.	தொழிலாளர் போனஸ் முதலியன	...	35
7.	இலாபப் பங்கீடுகள்	...	33
8.	சேமிப்பு நிதி		34
	மொத்தம்	...	1054

இதனை ஒரு வட்டத்தின் பல அங்கங்களாகக் காட்டி விளக்கலாம். வசதியான ஓர் ஆரத்தில் வட்டமொன்று முதலில் வரைந்து

கொள்ள வேண்டும். 1054ஐ 360° எனக் கொண்டு ஒவ்வோர் அங்கத்திற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரிக்க வேண்டும். பிரிக்கப்பட்ட வெவ்வேறு வட்டப் பகுதிகளை வெவ்வேறு வண்ணங்களில் காட்டவேண்டும். மேற்கண்ட விபரத்திற்குரிய வட்ட விளக்கப் படம் வருமாறு :



படம் 5.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலைகளின் இனங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு நிலையின் இனங்களையும் ஒவ்வொரு வட்டத்தில் காட்டவேண்டும். இனங்களின் கூடுதல் எண்ணிக்கைகளின் வர்க்க எண்களின் விகிதத்திற்கேற்ப ஆரங்களைப் பட அளவையில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று நிலை இனங்களின் தனித்தனிக் கூடுதல்கள் 2365, 4144, 6789 என அமைந்தால், ஆரங்களை $\sqrt{2365} : \sqrt{4144} : \sqrt{6789}$ என்ற விகித அளவுகளில் எடுத்துக் கொண்டு வட்டங்கள் வரையப்படல் வேண்டும்.

உருவக விளக்கப் படங்கள்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெவ்வேறு இனங்களின் மதிப்பிற்கேற்ற விகிதத்தில் உருவகப் படங்கள் வரைவதுண்டு. மனித உருவங்கள், விலங்குருவங்கள், வாகன உருவங்கள் ஆகிய இன்ன பிற உருவகங்கள் வரைந்து புள்ளிவிபரங்களை விளக்குவதும் வழக்கமாகும். புள்ளியியல் விபரத்தினை அறிந்துகொள்ள முடியாத சாதாரண மக்களுக்கு எளிதில் புரியும் வண்ணம் இம்முறை கையாளப்படுகிறது. பல்வேறு பொருட்காட்சி நிலையங்களில் இதனைக் காணலாம். 1931ஆம் ஆண்டு இந்திய மக்கட்கணிப்பு அறிக்கையிலும், மினோ மாஸினி அவர்கள் எழுதிய 'நம் இந்தியா' என்ற புத்தகத்திலும் மிகமிக அழகான இத்தகைய உருவ விளக்கப்

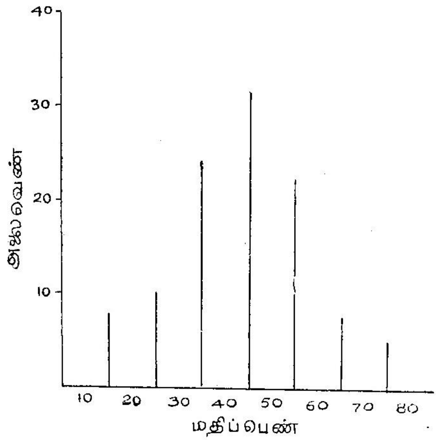
படங்களைக் காணலாம். ஒரு படத்தில் மூன்று வீரர்களையும், பிறிதொன்றில் நான்கு வீரர்களையும் வரைந்து காட்டி, 3084 வீரர்கள் கொண்ட ஒரு நாட்டுப் படையினையும், 4205 வீரர்கள் கொண்ட மற்றுமொரு நாட்டுப் படையினையும் ஒப்பிடலாம். பட்டை விளக்கப் படங்களில் நீளவாக்கிலும், வட்ட விளக்கப் படங்களில் வில் வளைவு வாக்கிலும், உருவக விளக்கப் படங்களில் உருவக நிலையிலும் புள்ளிவிபரங்களை ஒப்பிடுகிறோம்.

இதுவரை, பட்டியல் தரப்பட்ட புள்ளிவிபரங்களை அமைக்கும் பல்வேறு விளக்கப்படங்களைப்பற்றிப் பார்த்தோம். அலைவுப் பரவல் அல்லது நிகழ்வெண் பரவலில் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிவிபரங்களை, நேர்கோட்டுப் படங்கள், பரவல் செவ்வகங்கள், அலைவெண் பலகோணப் படங்கள், அலைவுப் பரவல் வரைகள், கீழ், மேலின ஓகைவ் வரைகள், லாரன்ஸ் வரைகளில் அமைக்கும் விதத்தினை இனிக் காண்போம்.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 100 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் காட்டுகின்றன :

மதிப்பெண்கள்	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
அலைவெண்கள்	7	9	22	31	20	6	5

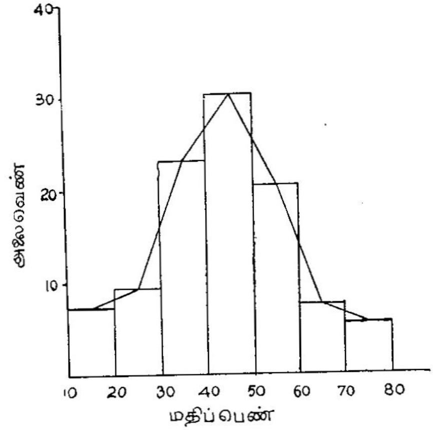
மதிப்பெண்களின் மைய மதிப்புகளை x அச்சில் எடுத்துக் கொண்டு, அதற்குரிய புள்ளிகளின் வழியாக y அச்சிற்கு இணை



படம் 6

யாக அலைவெண் மதிப்பிற்கேற்ற விகிதத்தில் நேர்கோடுகள் வரைந்தால், பெறப்படுவனதாம் நேர்கோட்டுப் படங்களாகும்.

பரவல் செவ்வகங்கள் வரையும்போது, அலேவுப் பரவலின் மெய்ப்பிரிவுத் தூரத்தின் பட அளவையினை ஒவ்வொரு செவ் வகத்தின் அகலமாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். செவ்வகத்தின் பரப்பு, அலைவெண்ணுக்கேற்ற பட அளவையில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். செவ்வகங்கள் அனைத்தும் படத்தில் காட்டியாங்கு தொடர்ந்து அமைதல் வேண்டும். மெய்ப்பிரிவுகள் சீராக ஒரே தூர அளவையில் அமைந்தால், எல்லாச் செவ்வகங்களும் ஒரே, அகலமுடையனவாக அமையும்; பிரிவின் தூரங்கள் சீரற்று மாறுபட்டு அமையின், அதற்கேற்பச் செவ்வகங்களின் அகலமும் மாறுபடும்.



படம் 7.

ஒரு பிரிவின் மைய மதிப்பினை x தூரமாகவும், அப் பிரிவிற் குரிய அலைவெண்ணை y தூரமாகவும் கொண்டு, எல்லாப் பிரிவு களுக்குமுரிய புள்ளிகளைக் கண்டு, அவற்றினை நேர்கோடுகளால் இணைத்தால் பெறப்படுவது பலகோணமாகும்; அதே புள்ளிகள் வளைவுக் கோட்டினுல் இணைக்கப் பெறப்படுவது அலைவெண் வரை யாகும். அலைவெண் வரைபடம் புள்ளியியலில் சிறந்ததொரு பங்கு பெறுகிறது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

ஓகைவ் வரை

ஓகைவ் வரைகளில் இருவகை உண்டு. அவை: (1) கீழின ஓகைவ், (2) மேலின ஓகைவ். ஓகைவ் என மட்டும் குறிப்பிட்டால் அது கீழின ஓகைவ் என நாம் கொள்வோம்.

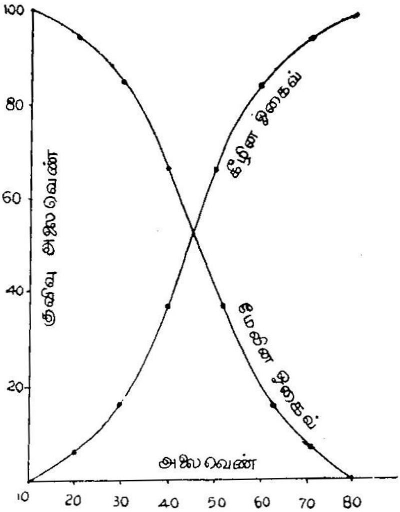
மேற்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்குரிய கீழின ஓகைவ் வரையப் பின்கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும் :

மெய்ப்பிரிவின் மேல் எல்லை (x)	20	30	40	50	60	70	80
குவிவு அலைவெண் (cf)	7	16	38	69	89	95	100

xஐ x அச்சிலும் cf இனை y அச்சிலுமாக உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளை வரைதாளில் குறிக்க வேண்டும். பின் அப்புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைக்க, பெறப்படுவதுதான் கீழின ஓகைவ் வரையாகும்.

மேலின ஓகைவ் வரைய, பட்டியலைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும் :

மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லைகள் (x)	10	20	30	40	50	60	70
குவிவு அலைவெண்கள் (cf)	100	93	84	62	31	11	5



படம் 8.

x இனை x அச்சிலும் cf இனை y அச்சிலும் உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளை வரைதாளில் குறிக்கவேண்டும். பின் புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைக்க, பெறப்படுவது தான் மேலின ஓகைவ் வரையாகும்.

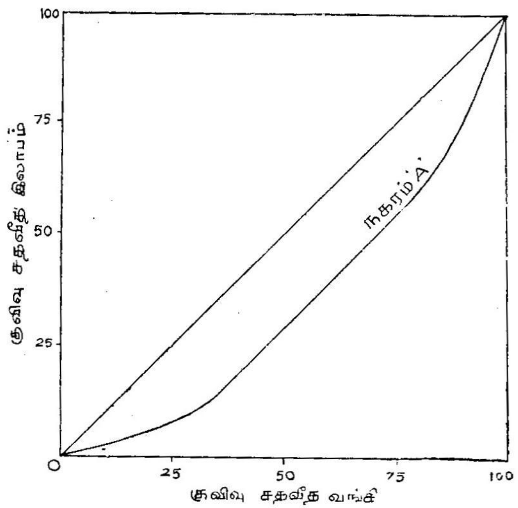
லாரன்ஸ் வரை

ஏழு ஆண்டுகளில் நகரம் A-யிலுள்ள வங்கிகளின் இலாப விபரம் பின்வருமாறு :

சராசரி இலாபம் (ஆயிரம் ரூபாய்களில்)	10	20	30	40	50	60	75
வங்கிகளின் எண்ணிக்கை	15	12	8	6	4	3	2

இப்புள்ளிவிபரத்திற்குரிய லாரன்ஸ் வரையினைக் காணக் கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும் :

மொத்த இலாபம் (ஆயிரம் ரூபாய்களில்)	சதவீத இலாபம்	குவிவு சதவீத இலாபம்	வங்கிக் குவிவு	குவிவு சதவீத வங்கி
150	10·7	10·7	15	30
240	17·1	27·8	27	54
240	17·1	44·9	35	70
240	17·1	62·0	41	82
200	14·3	76·3	45	90
180	13·0	89·3	48	96
150	10·7	100	50	100



படம் 9.

தற்போது சதவீதக் குவிவு வங்கிகளை ஏற்றதொரு பட அளவில் ஓர் அச்சிலும், சதவீதக் குவிவு இலாபத்தினை ஏற்ற பட அளவில்

பிறிதோர் அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளைக் குறித்து அவைகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைக்க, பெறப்படுவதே லாரன்ஸ் வரையாகும்.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 1938–39ஆம் ஆண்டில் பல்வேறு நாடுகளில் விளைந்த அரிசியின் அளவினைக் (பவுண்டில்) காட்டுகிறது. அதற்கேற்ற விளக்கப்படம் ஒன்று வரைக.

நாடுகள்	ஓர் ஏக்கரில் விளைவு (பவுண்டில்)
எகிப்து	2,153
இந்தியா	728
இத்தாலி	2,903
ஜப்பான்	2,276
சயாம்	943
அமெரிக்கா	1,449

2. கீழ்க்கண்ட புள்ளி விபரம் பல்வேறு நாடுகள் வாரந்தோறும் செலவு செய்யும் பானங்களின் அளவினைத் (டன்னில்) தருகிறது. அதனைப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்களிலும், சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்களிலும் அமைத்துக் காட்டுக.

நாடுகள்	தேயிலை	கொகோ	காப்பி
A	3,260	1,850	900
B	4,050	2,060	1,200
C	2,480	1,600	1,010
D	2,2(0	980	850

3. இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட நிதி நிலையினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது:

	ரூபாய்கள் (கோடியில்)
உழவு, சமுதாய வளர்ச்சி	565
பாசனப்பகுதி, வெள்ளக் கட்டுப்பாடு	458
மின்சக்தி	440
தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	891
போக்குவரத்து, செய்தித்துறை	1,384
சமூகச் சேவை	946
பிற இனங்கள்	116

இதனை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக.
(செ.ப.)

4. பின்கண்டவை மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்:

48, 31, 70, 28, 64, 49, 44, 58, 40, 67, 60, 9, 56, 88, 42, 45, 55, 40, 22, 34, 45, 52, 16, 43, 60, 79, 69, 58, 54, 48, 51, 42, 48, 39, 45, 34, 32, 38, 29, 80, 67, 63, 84, 59, 52, 96, 54, 91, 87, 22.

இதனை ஓர் அலைவெண் பரவலில் அமைத்து, பின் ஏற்றதொரு பரவல் செவ்வகத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.

5. அலைவெண் புள்ளிவிபரத்தினைப் படைக்கும் வெவ்வேறு விளக்கப் படங்கள் யாவை? கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குரிய விளக்கப் படங்களை வரைக.

உயரம் (அங்குலத்தில்)	அலைவெண்
59—61	3
61—63	13
63—65	54
65—67	111
67—69	128
69—71	85
71—73	30
73—75	6
75—77	1

(செ.ப.)

6. உற்பத்தியான பொருள்களின் நீள அளவை (மில்லி மீட்டரில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

நீள மைய மதிப்புகள்	604	606	608	610	612	614
அலைவெண்	3	16	35	33	11	2

இதற்குரிய ஓகைவ் வரைக. (செ.ப.)

7. இரு வகுப்பு மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

சராசரி மதிப்பெண்	வகுப்பு Aயில் மாணவர்கள்	வகுப்பு Bயில் மாணவர்கள்
35	20	25
40	22	20
45	16	10
50	15	12
60	8	5
70	2	1

இதனை ஏற்ற லாரன்ஸ் வரைகளில் அமைத்துக் காட்டுக.

4. மையப் போக்கின் அளவைகள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விபரக் குழு எண் சிதறலாக அமைந்து கிடக்கும். அதிலிருந்து அப்படியே அப் புள்ளி விபரத்தினைப் பற்றிய தன்மைகளைப் புரிந்துகொள்வது இயலாத காரியம். அப் புள்ளி விபரத்தின் தன்மைகளையும் சிறப்பியல்புகளையும் காண வேண்டின் அதற்குரிய பல்வேறு புள்ளியியல் பண்பளவைகளைக் (Parameters) காணவேண்டும். அத்தகைய ஒவ்வொரு சுட்டுறுப்பும் ஒவ்வொரு வகை தன்மையினை அல்லது பண்பினை எடுத்துக்காட்டத்தக்கது. புள்ளி விபரம் எத்தகைய மையத்தினைச் சுழன்று சுற்றி நிற்கிறது என அறிந்தால் அப் புள்ளி விபரத்தின் ஒருவிதத் தன்மையினை அறியவும் ஆயவும் ஏதுவாகிறது. ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் அவ் வகுப்பின் தரத்தினை எடுத்துக் காட்டும். ஒரு வணிகரின் உச்ச விற்பனை அவர் எவ்வளவு பொருள்கள் சேகரித்து வைத்துக்கொள்ள வேண்டுமென்பதனை எடுத்துக் காட்டும். ஒரே வயதுடையவர்களின் இடைநிலை அளவுடைய அங்கி, அங்கிகளை மொத்தமாகத் தைத்து விற்பனை செய்வோருக்குப் பயனுள்ளதாக விருக்கும். இது போன்று பின்பு நாம் காணவிருக்கின்ற பல்வேறு சுட்டுறுப்புகள் புள்ளி விபரத்தின் பல்வேறு தன்மைகளை எடுத்துக் காட்டப் பயன்படுகின்றன. அவை பலருக்குப் பல விதமாகப் பயன்படும் தன்மையதாக அமையும். இங்குப் புள்ளி விபரத்தின் மையப் போக்கினைக் காணப் பயன்படுகின்ற பண்பளவைகளை ஆய்வோம். அவ்வளவைகளுக்குச் சராசரிகள் (Averages) எனப் பெயராகும். ஒரு பரவலில் அடங்கியுள்ள எல்லாவித அம்சங்களின் அளவுகளைப் பிரதிபலிக்கின்ற ஓர் அளவே அப் பரவலின் சராசரி எனக் கூறலாம். அந்த ஒரு பிரதிநிதி அளவு அப் பரவலின் எல்லா அம்சங்களின் சுருக்களவாக நிற்கின்றதெனலாம். இத்தகைய அளவைகளாகிய சராசரிகள் பல உண்டு. வெவ்வேறு தருணங்களில் வெவ்வேறு சராசரிகள்

பயன்படுகின்றன. அவை (1) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean), (2) இடைநிலை (Median), (3) முகடு (Mode), (4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean), (5) ஹார்மோனிக் சராசரி அல்லது இடைச் சராசரி (Harmonic Mean) என்பனவாம்.

இத்தகைய சராசரிகளை ஓர் எண் கூட்டத்திற்கும், ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கும் எவ்வாறு கணக்கிடுவதென்பதை முதலில் அறிந்துகொள்ள வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகள் என்க. எனில், அவைகளின் கூடுதல் $\sum x_r$ ஆகும். $\frac{\sum x_r}{n}$ என்பதனைத்தான் அவ்வெண் கூட்டத்தின் கூட்டுச் சராசரி எனச் சொல்லுகிறோம்; இதனை $\bar{x}$ எனக் குறிக்கின்றோம். எனவே, $\bar{x} = \frac{\sum x_r}{n}$

$$\therefore \quad n\bar{x} = \sum x_r$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன ஓர் அலைவுப் பரவலில் n மைய மதிப்புகளாகட்டும்! $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ என்பன அப்பரவலில் முறையே அம் மதிப்புகளின் அலைவெண்கள் என்க! எனில், $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots\ldots + f_n x_n = \sum x_r f_r$ என்பதுதான் அப் பரவலின் கூடுதல் மதிப்பாகும். அதில் அடங்கியுள்ள அம்சங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n = N$ ஆகும். அப் பரவலின் மொத்த அலைவெண் N. எனவே, ஓர் அலைவுப் பரவலில்

$$\bar{x} = \frac{\sum f_r x_r}{N}$$

$$\therefore \quad N\bar{x} = \sum f_r x_r.$$

ஓர் அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட சூத்திரம் காணுதல்

மைய மதிப்புகள்	$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$
அலைவெண்	$f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots\ldots\ldots f_n$.

$x_r = A + d_r$ என்பதில் A என்பது எடுத்துக்கொண்ட ஏதாவதொரு மதிப்பென்க. எனவே, $d_r = x_r - A$.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_r x}{N}$$

$$= \frac{\sum f_r (A + d_r)}{N}$$

$$= A \frac{\sum f_r}{N} + \frac{\sum f_r d_r}{N}$$

$$= A + \frac{\sum f_r d_r}{N}$$

d_rஐ அப்படியே எடுத்துக்கொள்ளாமல், பிரிவின் தூரமாகிய C–ன் மடங்காகிய எண்ணை எடுத்துக்கொண்டு, இறுதியில் C ஆல் பெருக்கிக்கொள்ளலாம். எனில்,

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_r d_r}{N}\right) C$$

மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய மைய மதிப்பினை A ஆக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

பத்துப் பெண்களின் எடை (பவுண்டில்) வருமாறு :
85, 82, 98, 105, 112, 95, 98, 113, 120, 115.

கூட்டுச் சராசரி எடை யாது ?

$$\bar{x} = \frac{\sum x_r}{n} = \frac{1023}{10}$$

$$= 102{\cdot}3 \text{ பவு.}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக :

எடை (பவுண்டில்)	75—79	80—	85—	90—	95—	100—	105—	110—	115—119
அலைவெண்	5	15	25	41	50	43	31	14	6

x	f_r	d_r	$f_r\ d_r$
75 —79	5	−4	−20
80 —	15	−3	−45
85 —	25	−2	−50
90 —	41	−1	—41
95 —	50	0	0
100 —	43	1	43
105 —	31	2	62
110 —	14	3	42
115 —	6	4	24
	230		15

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_r\, d_r}{N}\right) C$$

$$= 97 + \left(\frac{15}{2\ 0}\right) 5$$

$$= 97 + 0{\cdot}3$$

$= \mathbf{97{\cdot}3}$ **பவு.**

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள்

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

நிறுவுதல் :

இங்கு $A = \bar{x}$

முதற் பகுதி :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_r}{n} \text{ (எண் கூட்டங்களுக்கு)}$$

இங்கு விலக்கம் $d_r = x_r - \bar{x}$

$$\therefore \quad \sum d_r = \sum (x_r - \bar{x})$$

$$\therefore \quad \frac{\sum d_r}{n} = \frac{\sum x_r}{n} - \bar{x}\ \frac{n}{n}$$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \sum d_r = 0.$$

இரண்டாம் பகுதி :

$$\bar{x} = \frac{\sum f_r x_r}{N} \text{ (அலைவுப் பரவலுக்கு)}$$

இங்கு விலக்கம் $f_r\, d_r = f_r\,(x_r - \bar{x})$

$$\therefore \quad \sum f_r d_r = \sum f_r x_r - \bar{x} \sum f_r$$

$$\therefore \quad \frac{\sum f_r d_r}{N} = \frac{\sum f_r x_r}{N} - \bar{x}\,\frac{\sum f_r}{N}$$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$

$$= 0$$

$$\therefore \sum f_r d_r = 0.$$

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மிகச் சிறியதாகும் :

நிறுவுதல் :

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகள் என்க !

x என்ற ஓர் எண்ணிலிருந்து விலக்கம் காணுவதாகக் கொள்வோம்.

(x) என்பது x-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் என்க !

$$\therefore \quad f(x) = \sum (x - x_r)^2$$

$$= \sum x^2 - 2 \sum x x_r + \sum x_r^2$$

$$= nx^2 - 2x \sum x_r + \sum x_r^2$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = 2\,nx - 2 \sum x_r$$

$f(x)$ மிகச் சிறியதெனில், $\dfrac{df}{dx} = 0$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad nx - \sum x_r = 0$$

$$(\text{அ} - \text{து}) \quad x = \frac{\sum x_r}{n}$$

$$= \bar{x}$$

எனவே, $f(x)$ மிகச் சிறியதாக இருக்கும்போது $x = \bar{x}$ ஆகும். எனவே, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மிகச் சிறியதாகும்.

(3) n_1 அம்சங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$; n_2 அம்சங்கள் கொண்ட பிறிதொரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$. இவ்விரண்டும் இணைந்த புதிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

நிறுவுதல்

முதல் குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_1 \bar{x}_1$. இரண்டாம் குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_2 \bar{x}_2$. இணைந்த குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2$. புதுக் குழுவின் மொத்த அலைவெண் $= n_1 + n_2$. $\bar{x}$ என்பது புதுக் குழுவின் கூட்டுச் சராசரி என்க.

$$\therefore \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

குறிப்பு: இத்தகைய K குழுவினை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \ldots\ldots + n_k \bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k}$$

இடைநிலை

இரண்டாவது மையப்போக்கின் அளவையாகப் பயன்படுவது இடைநிலையாகும். இறங்கு வரிசை அல்லது ஏறு வரிசையில் அமைந்த மதிப்புகளின் நடுவே அமைந்த மதிப்பினை இடைநிலையாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஏனெனில், இடைநிலையானது, சரிபாதி மாறி மதிப்புகளுக்குப் பெரிதானதாகவும், பிறவற்றுக்குச் சிறியதாகவும் அமைந்த மாறியின் மதிப்பேயாகும்.

எண் கூட்டங்களின் இடைநிலை

எண் கூட்டங்களை முதலில் ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதிக்கொள்வோம். அவ் வரிசையினில் ஒற்றைப்படை எண்களிருப்பின், நடுமதிப்பு ஒன்றேயாகும்; அங்கு அதுவே இடைநிலையாகும். இரட்டைப்படை எண்களிருப்பின், நடு இரு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியை இடைநிலையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

18, 24, 32, 19, 45, 36, 25, 45, 54 ஆகிய எண்களின் இடைநிலை காண்க.

18, 19, 24, 25, 32, 36, 45, 45, 54

நடுவெண் = 32

∴ இடைநிலை = 32

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

84, 78, 94, 65, 87, 75, 90, 68, 73, 66 ஆகிய எண்களின் இடைநிலை காண்க.

65, 66, 68, 73, 75, 78, 84, 87, 90, 94.

நடுவெண்கள் = 75, 78

$$\therefore \text{ இடைநிலை } = \frac{75+78}{2} = \frac{153}{2}$$

$$= 76.5$$

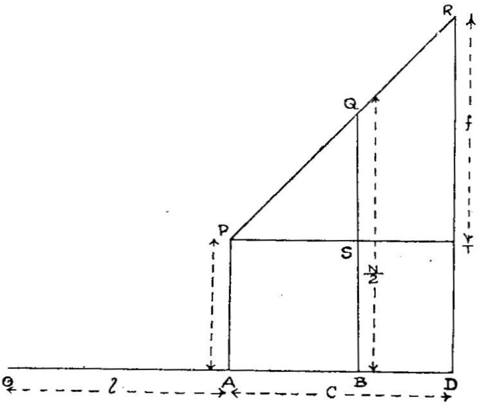
அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை

ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலை காண, மேற்கண்ட முறை பொருந்தாது. அலைவுப் பரவலில், அதன் அலைவுப் பரவல் வரை அடைக்கும் பரப்பானது அதன் மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கிறதென்பது எளிதில் புலனாகும். எனவே, எந்தவொரு y-அச்சிற்கு இணையான நேர்கோடு, அப்பரப்பினை இருசம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றதோ, அக் கோடு x அச்சில் வெட்டும் மதிப்பையே இடைநிலையாகக் கொள்ள வேண்டும். எனவே, $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பைக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் (Cumulative frequency) கொண்ட அம்சத்தின் மதிப்பே அப் பரவலின் இடைநிலையாகும். கூட்டுச் சராசரிக்குத் தெளிவான விளக்கம் காணமுடியும்; ஆனால், இடைநிலைக்குத் தெளிவானதொரு விளக்கம் கூறமுடியாது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை காண சூத்திரம் காணுதல்

கூட்டுச் சராசரிக்குச் சூத்திரம் காணுகையில், ஓர் அலைவெண்ணுக்குரிய மதிப்பாக அதனது பிரிவின் மையப் புள்ளியைக் கொள்ளுகின்றோம். இடைநிலையைக் காணுகையில் இவ்வனுமானம் பொருந்தாது. இங்கு ஒரு பிரிவுக்குரிய அலைவெண் அப் பிரிவினில் சமமாகப் பரவியிருப்பதாகக் கருதுகிறோம். மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய பிரிவினில், அம்சங்கள் வலப்புறமாக அதிகமாகச் சரிகின்றன; அதற்கடுத்த பிரிவினில் அவை இடப்புறமாக அதிகமாகச் சரிகின்றன என்பது உண்மையெனினும், மிகத் திட்டவட்டமாகக் கணக்கியல் இடைநிலைச் சூத்திரம் காண முடியா நிலையில், மேற்கண்ட அனுமானத்தைக் கையாள்கிறோம்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில், $\frac{N}{2}$ மதிப்புள்ள குவிவு அலைவெண் எந்தப் பிரிவில் விழுகின்றதென்பதைக் காண்பது எளிது. அப் பிரிவினை, இடைநிலைப் பிரிவாகக் கொள்ளல் வேண்டும். சூத்திரம் காண அப் பிரிவினை மெய்ப்பிரிவாக மாற்றி அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். இடைநிலைப் பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க. இடைநிலை மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க; இடைநிலைப் பிரிவிற்குரிய அலைவெண் f என்க; பிரிவின் தூரம் c என்க. கீழ்க்கண்ட படத்தினை நோக்குக:



படம் 10.

PQR, இடைநிலைப் பிரிவு ADயின் ஓகைவ் ஆகும்.

$$\frac{PS}{PT} = \frac{QS}{RT}$$

(அ.து) $$\frac{PS}{c} = \frac{\frac{N}{2} - m}{f}$$

$$\therefore \quad PS = \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

இடைநிலை $OB = OA + AB$

$$= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f}c$$

$$\therefore \quad \text{இடைநிலை} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) c}{f}.$$

குறிப்பு

ஓகைவ் வரையில் $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பிற்கான y–அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து x–அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர் கோடானது, வரையினை வெட்டும் புள்ளியின் x-ஆயத்தூரயே இடைநிலையாகுமென்பது எளிதில் புலனாகும். மேலும், கீழின, மேலின ஓகைவ் வரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் x-ஆயத் தொலையே இடைநிலையைக் காட்டுமென்பதும் எளிதில் புலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

230 பேர்களின் எடை அலைவுப் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

எடை	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
75 – 79	5	5
80 –	15	20
85 –	25	45
90 –	41	86
95 –	50	136 → $\frac{N}{2}$
100 –	43	179
105 –	31	210
110 –	14	224
115 –	6	230

இடைநிலை மெய்ப்பிரிவு = 94·5 – 99·5

$\frac{N}{2} = 115$; $l = 94{\cdot}5$; $m = 86$; $f = 50$; $c = 5$

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 94{\cdot}5 + \frac{(115-86)\ 5}{50}$$

$$= 94{\cdot}5 + 2{\cdot}9 = \mathbf{97{\cdot}4}$$

இடைநிலையில் சிறப்பியல்பு

ஒரு வெற்றெண் கூட்டத்தில், இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட எண் அளவை (Absolute) விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறிய தாகும் (இது அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது).

நிறுவுதல் :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டங்களை ஏறு வரிசையில் எடுத்துக்கொள்வோம். x என்பது எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஏதாவதொரு மூலவெண்ணாகட்டும். இவற்றுள் $a, b, c, \ldots$ என்பன xஐ விடச் சிறிதாகவுள்ள n_1 எண்களாகட்டும்; $a_1, b_1, c_1, \ldots$ என்பன xஐ விடப் பெரிதாகவுள்ள n_2 எண்களாகட்டும்.

$$f(x) = \sum_{n_1} (x-a) + \sum_{n_2} (a_1 - x)$$

இது ஒரு தொடர் சார்பு (Continuous function). எனவே,

$$\frac{df}{dx} = (1+1+1+ \ldots\ldots n_1 \text{ உறுப்புகள்})$$

$$(1+1+1+ \ldots\ldots n_2 \text{ உறுப்புகள்})$$

$$= n_1 - n_2$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = - \quad (n_1 < n_2 \text{ எனில்})$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad (n_1 = n_2 \text{ எனில்})$$

$$\frac{df}{dx} = + \quad (n_1 > n_2 \text{ எனில்})$$

$n_1 = n_2$ எனில் x என்பதுதான் இடைநிலையாகும். எனவே, இடைநிலைக்கு இடப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் இறங்குகின்ற சார்பாகவும், வலப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் ஏறுகின்ற சார்பாகவும் அமைகின்றது. இடைநிலையில் $\frac{df}{dx} = 0$ ஆக அமைகிறது. எனவே, இடைநிலையில் $f(x)$ மிகச் சிறியதாக அமைகிறது.

எனவே, இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

முகடு

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களை நோக்குவோம். எடுத்துக்காட்டாக, 42 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமானல், 42ஐ அம் மதிப்பெண்களின் முகடாகக் கொள்கிறோம். எந்தவொரு மாறியின் மதிப்பு மிக அதிகமான தடவைகளில் நிகழ்கின்றதோ, அம் மாறியின் மதிப்பு, அம் மாறி மதிப்புகளின் முகடாகக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, முகடானது அலைவுப் பரவலோடு இணைந்து விளக்கப்படுகிறது என்பது நோக்கத்தக்கது. வெற்று எண் கூட்டத்திற்கு முகடு கிடையாது. அவைகளை அலைவுப் பரவலில் அமைத்துத்தான் முகடு காணவேண்டும்.

மிகப்பெரிய அலைவெண்ணைப் பெற்ற பிரிவிற்குப் பெயர் முகட்டுப் பிரிவாகும். முகட்டுப் பிரிவின் மைய மதிப்பை முகடாகக் கொள்வது, முதல்தர கிட்டிய மதிப்படியான முகடாம்; இரண்டாம் தர கிட்டிய மதிப்புப்படி முகடு காணவேண்டுமெனில், முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் முந்திய, உடன் பிந்திய பிரிவுகளைக் கருத வேண்டும். f_1, f_2 என்பன முறையே அப் பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் என்க. எனில், முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லையில் f_1 எடை அழுத்துவதாகவும், மேல் எல்லையில் f_2 எடை அழுத்துவதாகவும் கொண்டு, அவைகளின் ஈர்ப்புப் புள்ளியினைக் கண்டு அதன் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}$$

இங்கு l—முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை; c—பிரிவின் தூரம்.

(கூட்டுச் சராசரி—முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை)

என்ற சூத்திரம் பல பயிற்சிகளின் முடிவில் உண்மையெனக் கண்டதாகும். கணக்கியல் வாயிலாக நிறுவப்படாவிடினும், இதனைப் பயன்படுத்தினல், பொருட்படுத்துமளவிற்குப் பிழை நேராது. ஓகைவ் வரையில் வளைவுமாற்றப் புள்ளி அல்லது திருகு புள்ளியின் (Point of inflexion) x-தூரமே முகடென்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

230 பேர்கள் கொண்ட எடைப் பரவலுக்குரிய முகடு காண்க:

முகட்டுப் பிரிவு = 95—99

$l = 94.5$; $f_1 = 41$; $f_2 = 43$; $c = 5$.

$$\text{மூகடு} = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 94{\cdot}5 + \frac{215}{84}$$

$$= 94{\cdot}5 + 2{\cdot}56 = 97{\cdot}06$$

பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி யானது $\sqrt[n]{x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n}$ ஆகும்.

அலேவுப் பரவலில் $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளோடு இணை ந்த அலேவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ ஆக அமையு மாயின், $\sqrt[N]{x_1^{f_1}\, x_2^{f_2}\, x_3^{f_3} \ldots\ldots x_n^{f_n}}$ என்பது அப் பரவலின் பெருக்குச்சராசரியெனக் கூறப்படுகிறது. N மொத்த அலே வெண்ணுகும்.

லாகிருதம் முறையில் மேற்கண்ட சூத்திரங்களேப் பயன்படுத்திப் பெருக்குச் சராசரி காண்பது எளிதாகும்.

ஹார்மோனிக் சராசரி அல்லது இசைச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகளின் வரிசையெனில்,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

என்பது அவற்றின் ஹார்மானிக் சராசரியாகும்.

அலேவுப்பரவலில் $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன n மதிப்பு களாகவும், முறையே அவைகளின் அலேவெண்கள் $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ எனில், அப் பரவலின் ஹார்மோனிக் சராசரியானது,

$$\frac{N}{\left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{f_n}{x_n}\right)}$$

இங்கு N மொத்த அலேவெண்ணுகும்.

பல்வேறு சராசரிகளின் இணைதராதரங்கள்

ஒரு சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகளே விளக்கி, அப் பண்புகளே நாம் கண்ட பல்வேறு சராசரிகள் எங்ஙனம் திருப்திப்படுத்து கின்றன எனக் காண்போம்.

(1) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தெளிவான சூத்திரமுடைய தாக இருக்கவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி ஆகியவற்றிற்கு இத்தகைய சூத்திரங்களுண்டு. அவை கணக்கியல் வாயிலாக வழிந்தெடுக்கப்பட்ட சூத்திரங்களாகும். இடைநிலை முகட்டிற்கு அத்தகைய கணக்கியல் சூத்திரங்கள் கிடையா.

(2) பரவல் முழுவதையும் பிரதிபலிக்கும் தன்மை வாய்ந்ததாகவும், அதன் மூலம் பரவலை அறிந்துகொள்வதற்கு ஏதுவாகவும் அமையவேண்டும்.

இப் பண்பு நோக்கில், கூட்டுச் சராசரி மிகச் சிறந்தது எனக் கூறலாம். என்றாலும் பரவலின் சராசரியை எந்த நோக்கத்திற்காகக் காணவிருக்கிறோமோ, அதனைப் பொறுத்துதான் அச் சராசரி அப் பரவலை எத் தன்மையில் பிரதிபலிக்கின்றது எனக் கூறலாம். முன்பே நாம் கண்டபடி, ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் தரத்தினைக் காணக் கூட்டுச் சராசரி நல்லதோர் பிரதிநிதியாகும். ஒரே வயதுடைய குழுவினருக்கு அங்கிகள் தைத்து விற்பனை செய்வார் ஒருவருக்கு, இடைநிலைதான் நல்லதோர் பிரதிநிதியாக அமையும். எத்தகைய பொருள்களை, எந்த அளவிற்கு சேமித்து வணிகம் மேற்கொள்ளவேண்டுமென்பவருக்கு, முகடுதான் சிறந்ததோர் பரவல் பிரதிநிதியாக இருக்கமுடியும். ஆற்றில் இறங்க முற்படுவாருக்கும், கூட்டுச் சராசரி ஆழம் பொருந்துமா ?

(3) சராசரியானது எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாக இருக்கவேண்டும்.

எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் கணக்கில் கொண்டுதான் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி கணிக்கப்படுகின்றன. ஆனால், இடைநிலை, முகடு ஆகியன எல்லா அம்சங்களையும் கணக்கீட்டில் எடுத்துக்கொள்வதில்லை ஆனால், இத்தன்மையால், மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அம்சங்கள் கூட்டுச் சராசரியினை மிகவும் பாதிக்கும். ரூ. 200 முதல் ரூ. 300 வரை வருவாயுள்ள 100 பேர்களின் சராசரி காணக் கூட்டுச் சராசரி சிறந்தது ; ஆனால், அந் நூறு பேர்களில் ஒருவரின் வருமானம் மட்டும் ரூ. 10,000 என இருந்தால், கூட்டுச் சராசரி பெரிதும் பாதிக்கப்படும். முகடு, இடைநிலைகளை அத்தகு அம்சங்கள் பாதிக்க மாட்டா. பெருக்குச் சராசரியில் ஓர் அம்சம் பூஜ்யமெனில், பெருக்குச் சராசரியே பூஜ்யமாகிவிடும்.

(4) எளிதான முறையில் கணக்கிட ஏதுவாக இருக்கவேண்டும். கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை இரண்டும் எளிதான முறையில்

கணக்கிடலாம். மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகளில், உச்ச அலைவெண் மீண்டும் மீண்டும் நிகழுமானால், அங்கு முகடு காண்பது எளிதன்று. பெருக்குச் சராசரியும், ஹார்மோனிக் சராசரியும் கணக்கிடக் கையாளப்படும் வழிகள் எளிமையானதாகக் கருதமுடியாது; சற்றுச் சிக்கலானவையேயாம்.

(5) கணக்கியல் வழிதுறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்ததாக அமையவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரிக்குச் சிறந்ததோர் கணக்கியல் சூத்திரமிருப்பதால், இது கணக்கியல் வழிதுறைகளுக்கு நன்கு பயன்படுகிறது. பல குழுக்களின் தனித்தனி கூட்டுச் சராசரிகள் தெரிந்த நிலையில், அவைகளால் இணைந்த பெரிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரியினை எளிதாகக் கணிக்க முடியும். பெருக்குச் சராசரியும் இத்தகு தன்மை வாய்ந்ததாகும். இது மாறுதலின் மதிப்பைவிட, மாறுதலின் மதிப்பு விகிதத்தைக் காண நன்கு பயன்படுகிறது. எனவேதான் இது குறியீட்டு எண் கணிப்புகளில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. ஹார்மோனிக் சராசரிக்கும் மேலே கண்ட தன்மையுண்டு. இடைநிலைக்கும் முகட்டிற்கும் இத்தன்மை கிடையாது.

(6) நிலையானதாக இருக்கவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி மட்டுமே நிலையானதாகும். மற்றவை நிலையானவை எனக் கூறமுடியாது. தனி அம்சங்களில் ஏற்படுகின்ற சிறு பிழைகள் நிலையான சராசரியினைப் பெரிதும் பாதியா.

மேற்கண்ட வாதங்களால், கூட்டுச் சராசரியே மற்றைய சராசரிகளைவிடச் சிறந்தது என்பது தெளிவாகும்.

பல்வேறு பரவல்களை ஒப்பிடும்போது ஒரே வகையான சராசரியையே கையாளவேண்டும்.

பயிற்சி

(1) 16 வயது நிரம்பியவர்களின் எடைப் பரவல் வருமாறு :

எடை (பவுண்டில்)	85	90	95	100	105	110	
அலைவெண்	2	4	12	20	28	35	
எடை (பவுண்டில்)	115	120	125	130	135	140	145
அலைவெண்	36	30	23	16	10	6	3

இதற்குரிய ஓகைவ் வரைந்து, வரையிலிருந்து இடைநிலை, முகட்டினைக் காண்க. கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக.

(செ.ப.)

(2) 800 சார்ன் பயிர்களின் நீளப்பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

நீளம் (அங்குலத்தில்)	4 0	4·5	5·0	5·5	6·0	6·5	7·0
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	1	1	8	33	70	110	170
நீளம் (அங்குலத்தில்)	7·5	8·0	8·5	9·0	9·5	10 0	
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	172	124	61	32	10	2	

இப் பரவலின் மையப் போக்கின் அளவைகளில் மூன்றினைக் கணக்கிட்டுக் காட்டுக. (செ.ப.)

(3) ஒரு நாட்டின் ஒரு பகுதியில் குழந்தைகள் நடக்கத் துவங்கும் வயதினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது.

வயது (மாதங்களில்)	8—8 9	9—9·9	10—10·9	11—11·9	12—12·9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1	9	20	29	60
வயது (மாதங்களில்)	13—13 9	14—14·9	15—15 9	16—16 9	17—17·9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	32	30	14	8	1

இப் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகட்டினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

(4) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் ஐந்தாவது அலைவெண் தெரியவில்லை. கூட்டுச் சராசரி 106 எனத் தெரிகிறது. காணாமற்போன அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக.

ரூபாய்	அலைவெண்	ரூபாய்	அலைவெண்
50— 60	1	100—110	155
60— 70	6	110—120	75
70— 80	20	120—130	52
80— 90	41	130—140	21
90—100	?	140—150	15

(க.ப.)

(5) 100 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 47. வேறு 250 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 52. அந்த 350 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

(6) ஒரு ராண்டம் மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகள்: x_1, x_2, x_3.........x_n ஆகும்; அவைகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ ஆகும். $X = ax + b$. X-ன் கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை, முகடு காண்க. (செ.ப.)

(7) ஒரு நேர்மறை மாறியின் (Positive Variate) கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகியன முறையே M, G, H எனில், $M \geqslant G \geqslant H$ என நிறுவுக. (செ.ப.)

5. பரவுகை அளவைகள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரம் எந்த அளவில் பரவிச் சிதறிக் கிடக்கின்றது என அறிந்தால், அப் புள்ளி விபரத்தின் பிற தன்மைகளை அறியவும், வேருெரு புள்ளி விபரத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் ஏதுவாகும். ஒரே கூட்டுச் சராசரியுடைய இரு புள்ளி விபரக் குழுக்கள் எல்லா அம்சங்களிலும் ஒத்த தன்மையானதெனக் கூறமுடியாது ; புள்ளிவிபரங்கள் வேறுபட்ட தன்மையில் சிதறிப் பரந்து கிடக்கலாம். புள்ளிவிபரங்களின் அத்தகு சிதறலுக்குச் 'சிதறல்' அல்லது 'பரவுகை' (Dispersion) எனக் கூறுகிருேம். அத்தருணங்களில் ஒப்பிட்டு நோக்கப் பரவுகை அளவைகள் (Measures of Dispersion) பெரிதும் பயன்படுகின்றன. அப் பரவுகை அளவைகள் வருமாறு: (1) வீச்சு (Range), (2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation), (3) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation), (4) திட்டவிலக்கம் அல்லது தர விலக்கம் (Standard Deviation).

வீச்சு

ஒரு பரவலிலுள்ள மிகப் பெரிய, சிறிய மதிப்புகளின் வேறுபாடே வீச்சாகும்.

ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்களில் மிகப் பெரியது ரூ. 8,500; மிகச் சிறியது ரூ. 5,000. எனில், அக்குழுவின் வீச்சு ரூ. 3,500 ஆகும்.

கால்மான விலக்கம்

ஒரு வெற்று எண் குழுவின் மொத்த அலைவெண் N என்க. ஓர் எண்ணில் I என்பது முழு எண் பகுதியையும், F என்பது தகு

பின்னப் பகுதியையும் காட்டுகிறது எனக் கொள்க. வெற்று எண் குழு வொன்றினை ஏறு வரிசையில் அமைத்தால், $\frac{N}{4} = I + F$ என அமையுமாயின், (I+1) ஆவது மதிப்பே முதல் கால்மானம் (First Quartile) Q_1 ஆகும்; $\frac{N}{4} = I$ ஆக அமைந்தால், I ஆவது (I+1) ஆவது மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியே Q_1 எனக் கொள்ள வேண்டும். இதுபோன்றே $\frac{3N}{4} = I+F$ அல்லது I என்பதற்கேற்ப மூன்றும் கால்மானம் Q_3ஐ I+1 ஆவது அல்லது I ஆவது (I+1) ஆவது மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொள்ள வேண்டும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $\frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பே, அப் பரவலின் முதல் கால்மானம் Q_1 ஆகும்; $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பு மூன்றும் கால் மானம் Q_3 ஆகும்; $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பது கால்மான விலக்கமாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் N/4ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட பிரிவினை முதல் கால்மானப் பிரிவு என அழைக்கிறோம்; இது போன்றே $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட பிரிவினை மூன்றும் கால்மானப் பிரிவு என அழைக்கிறோம். முதல் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க; முதல் கால்மான மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க; முதல் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் f என்க. பிரிவின் தூரம் c, எனில்,

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right) c}{f}$$

மூன்றும் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க; மூன்றும் கால்மான மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க; மூன்றும் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் f என்க. பிரிவின் தூரம் c, எனில்,

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right) c}{f}$$

$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பதே அப் பரவலுக்குரிய கால்மான விலக்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

19 தொழிலாளர்களின் மாத வருமானம் வருமாறு :

60, 75, 68, 74, 92, 90, 70, 57, 64, 84, 76, 86, 94, 98, 100, 95, 88, 97, 88.

ஏறுவரிசையில் அமைத்தால்,

57, 60, 64, 68, 70, 74, 75, 76, 84, 86, 88, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 100.

Q_1 = 5ஆவது மதிப்பு
= 70.

Q_3 = 15 ஆவது மதிப்பு
= 94.

$Q_3 = 94$; $Q_1 = 70$.

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{94 - 70}{2}$

$= 12.$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் 1,000 மனிதர்களின் வயது காட்டப்பட்டுள்ளது. அதனது கால்மான விலக்கத்தினைக் கணக்கிடுக.

வயது	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
எண்ணிக்கை	33	112	152	154	136	118	96
வயது	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	
எண்ணிக்கை	74	54	37	21	[illegible]	4	

x	f	cf	
20 – 25	33	33	
25 – 30	112	145	
30 – 35	152	297	← Q_1
35 – 40	154	451	
40 – 45	136	587	
45 – 50	118	705	
50 – 55	96	801	← Q_3
55 – 60	74	875	
60 – 65	54	929	
65 – 70	37	966	
70 – 75	21	987	
75 – 80	9	996	
80 – 85	4	1000	

$$\frac{N}{4} = \frac{1000}{4} = 250; \ \frac{3N}{4} = 750.$$

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)c}{f}$$

$$= 30 + \frac{(250 - 145)\,5}{152} = 33{\cdot}5$$

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)c}{f}$$

$$= 50 + \frac{(750 - 705)\,5}{96}$$

$$= 52{\cdot}3.$$

$$\text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{52\cdot 3 - 33\cdot 5}{2}$$

$$= 9\cdot 4.$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

ஏதாவது ஒரு சராசரியிலிருந்து தனி அம்சங்களின் எண் அளவை விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியே கூட்டுச் சராசரி விலக்கமாகும். வழக்கமாகக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சில சமயங் களிலும், இடைநிலையிலிருந்து சில சமயங்களிலும் தனி அம்சங் களின் எண் அளவை விலக்கங்களைக் காணுகிறோம். எனவே, வெற்று எண் கூட்டங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண, $\frac{\sum |x_r - A|}{N}$ என்பதனைச் சூத்திரமாகக் கொள்ளலாம்; இங்கு A அவ்வெண் கூட்டத்தின் சராசரி (கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடை நிலை) ஆகும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $\frac{\sum f_r |x_r - A|}{N}$ ஆகும். ஆனால், இந்தச் சூத்திரத்தினை அப்படியே பயன்படுத்தாமல், வசதியான ஏற்றதொரு மூல அளவையை (origin) எடுத்துக்கொண்டு கூட்டுச் சராசரி காண்பதுபோல இவைகளையும் கணக்கிட இயலும்.

A ஆனது x_r, x_{r+1} என்பனவற்றிற்கு இடையில் அமைந்தால், $x_1 - x_{r+1}$ என்ற பிரிவிற்குள் அமைந்த வசதியான ஒரு மதிப்பு αவை மூலமதிப்பாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். எதிர்மறை விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - \alpha + \alpha - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - \alpha) + (\alpha - A) \sum_{i=1}^{r} f_i$$

நேர்மறை விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=v+1}^{n} f_i\,(x_i - A)$$

$$= \sum_{i=v+1}^{n} f_i\,(x_i - \alpha + \alpha - A)$$

$$= \sum_{i=v+1}^{n} f_i\,(x_i - \alpha) + (\alpha - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

விலக்கங்களின் எண் அளவை கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i \mid x_i - \alpha \mid + \sum_{i=v+1}^{n} f_i \mid x_i - \alpha \mid$$

$$- (\alpha - A) \sum_{i=1}^{r} f_i + (\alpha - A) \sum_{i=v+1}^{n} f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - \alpha \mid - (\alpha - A) \left\{ \sum_{i=1}^{r} f_i - \sum_{i=v+1}^{n} f_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - \alpha \mid - (\alpha - A)\,(N_1 - N_2)$$

$= D$ (என்க).

இங்கு N_1 = முதல் r அலைவெண்களின் கூடுதல் ;

N_2 = மிஞ்சிய அலைவெண்களின் கூடுதல்.

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம் $= \dfrac{D}{2}$.

ஒரு வெற்று எண் கூட்டத்தில், இடைநிலையிலிருந்து கண்ட எண் அளவை விலக்கங்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும் என ஏற்கெனவே கண்டுள்ளோம். எனவே, கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானது, இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடுப்போது மிகச் சிறியதாக அமையுமென்பது பெறப்படும். ஆனல், இத்தேற்றம் ஒரு தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1000 பேர்களின் வயதுப்பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி விலக்க மானங்களைக் கணக்கிடுக.

x	f_r	d_r	$f_r\, d_r$	$c\, f_r$	
20—25	33	−3	−99	33	
25—30	112	−2	−224	145	
30—35	152	−1	−152	297	
35—40	154	0	0	451	
40—45	136	1	136	587	←M
45—50	118	2	236	705	
50—55	96	3	288	801	
55—60	74	4	296	875	
60—65	54	5	270	929	
65—70	37	6	222	966	
70—75	21	7	147	987	
75—80	9	8	72	996	
80—85	4	9	36	1000	
	1000		1228		

$$\bar{x} = 37{\cdot}5 + \frac{1228 \times 5}{1000} = 43{\cdot}64$$

$$\text{இடைநிலை} = 40 + \frac{(500-451)\,5}{136} = \mathbf{41{\cdot}8.}$$

x	f_r		$\|d_r\|$	$f_r\|d_r\|$
20—25	33		4	132
25—30	112		3	336
30—35	152	N_1	2	304
35—40	154		1	154
40—45	136		0	0
45—50	118		1	118
50—55	96		2	192
55—60	72		3	222
60—65	54		4	216
65—70	37		5	185
70—75	21		6	126
75—80	9		7	63
80—85	4		8	32
	1000			2080

$N_1 = 587; \quad N_2 = 413.$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம் (கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து)

$$= \frac{(2080 \times 5) - (42{\cdot}5 - 43{\cdot}64)\ (587 - 413)}{1000}$$

$= 10\ 598$

இடைநிலை $= 41{\cdot}8.$

இதுவும் 40—45 என்ற பிரிவில் இருப்பதால், $\measuredangle = 42{\cdot}5$ ஆகவே எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையிலிருந்து)

$$= \frac{(2080 \times 5) - (42{\cdot}5 - 41{\cdot}8)\ (587 - 413)}{1000}$$

$= 10{\cdot}278$

திட்ட விலக்கம்

ஏதாவது ஒரு சராசரியிலிருந்து தனி மதிப்புகளின் விலக்கங்களில் சில நேராகவும் பிற எதிர்மறையாகவும் இருக்கும். அவைகளை எண் அளவையில் மட்டும் எடுக்கும்போது, பரவுகை மதிப்பு ஒரே அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது. இதனை நீக்கிப் பரவுகை அளவையினைக் கணக்கியல் துல்லியமாகப் பெறமுடியும். நேர், எதிர்மறை என்ற அடையாளங்களை நீக்குவதற்காக, விலக்கங்களை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து, இறுதியில் வர்க்க மூலப்படுத்திப் பெறப்படுவதைப் பரவுகை அளவையாகக் கொள்ளலாம். கணக்கியல்படியும், பிற பரவுகை அளவைகளின் இயல்புபடியும், இதுவே மிகச் சிறந்த அளவையாகும். இதனை வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம் எனக் கூறுகிறோம். கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைக் கண்டு வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி, மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து வர்க்க மூலம் கண்டால், அதனைத் திட்ட விலக்கம் எனக் கூறுகிறோம். முன்னதை s என்ற குறியாலும், பின்னதை σ என்ற குறியாலும் எழுதுவது மரபாகும். எனவே,

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_1 (x_r - A)^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_r (x_r - \bar{x})^2}{N}}$$

$d = \bar{x} - A$ எனில் $s^2 = \sigma^2 + d^2$ என நிறுவுதல்

$$x_r - A = (x_r - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad (x_r - A)^2 = (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 + 2\,(x_r - \bar{x})\,(\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad \sum f_r (x_r - A)^2 = \sum f_r (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 \sum f_r + 2\,(\bar{x} - A) \sum f_r (x_r - \bar{x})$$

ஆனால் $\sum f_r (x_r - \bar{x}) = 0$ (கூட்டுச் சராசரியின் முதல் சிறப்பியல்புப்படி)

$$\therefore \quad \sum f_r (x_r - A)^2 = \sum f_r (x_r - \bar{x})^2 + Nd^2$$

$$\therefore \quad \frac{\sum f_r (x_r - A)^2}{N} = \frac{\sum f_r (x_r - \bar{x})^2}{N} + d^2$$

(அ-து) $s^2 = \sigma^2 + d^2$.

குறிப்பு: $\sigma^2 = s^2 - d^2$. எனவே, திட்ட விலக்கம்தான் மற்றைய வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கங்களைவிடச் சிறியது என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1000 பேர் வயதுப் பரவலுக்குரிய திட்ட விலக்கத்தினைக் கணக்கிடுக.

x	f_r	d_r	$f_r\,d_r$	$f_r\,d_r^2$
20 – 25	33	–3	–99	297
25 – 30	112	–2	–224	448
30 – 35	152	–1	–152	152
35 – 40	154	0	0	0
40 – 45	136	1	136	136
45 – 50	118	2	236	472
50 – 55	96	3	288	864
55 – 60	74	4	296	1184
60 – 65	54	5	270	1350
65 – 70	37	6	222	1332
70 – 75	21	7	144	1008
75 – 80	9	8	72	576
80 – 85	4	9	36	324
	1000		1228	8143

$$\sigma^2 = \left\{\frac{\sum f_r d_r^2}{N} - \left(\frac{\sum f_r d_r}{N}\right)^2\right\} c^2$$

$$= \left\{\frac{8143}{1000} - \left(\frac{1228}{1000}\right)^2\right\} \times 5^2$$

$$= \frac{(8143000 - 1507984)}{1000^2} \cdot 5^2$$

$$= \frac{6635016 \times 5^2}{1000^2}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{6635016} \times \frac{5}{1000} = 12\ 875.$$

குறிப்பு: ஒரு வெற்று எண் கூட்டத்திற்குத் திட்ட விலக்கம் காண $f_r = 1$ எனக் கொள்க.

மாறுபாடு

σ^2 இனை மாறுபாடு அல்லது பரவற்படி (Variance) என அழைக்கின்றோம்; புள்ளியியலின் மேல்படிப்பிலும் பல்வகை ஆய்வுகளிலும் மாறுபாடு மிகப் பயன்படுகிறது.

நிகழ்பிழை

0·6745 σ-வினை நிகழ் பிழை (Probable error) என அழைக்கின்றோம். ஒரு மாதிரிப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்திற்குத் திட்டப் பிழை (Standard error) எனப் பெயருமுண்டு. இதனைப் பற்றி விளக்கமாகப் பின்னர் காண்போம். நிகழ்பிழைக்கும் திட்டப் பிழைக்குமுள்ள வேறுபாட்டினை மாணவர் நன்கு அறிய வேண்டும்.

திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைவிடப் பெரியது

$$\frac{\sum d_r^2}{N} > \frac{\sum d_r}{N} \cdot \frac{\sum d_r}{N} \quad \{\text{கணக்கியல்படி}\}$$

$$\therefore \frac{\sum d_r^2}{N} > \left(\frac{\sum d_r}{N}\right)^2$$

∴ ஒரு வெற்று எண் குழுவில்

$\sigma^2 >$ (சராசரி விலக்கம்)^2

∴ திட்டவிலக்கம் $>$ கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்.

திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம்

சமச்சீராக அல்லது ஏறத்தாழச் சமச்சீராக அமைந்த ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ திட்ட விலக்கம். கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ திட்ட விலக்கம். மேற்கண்ட உறவுகள், கணக்கியல் வாயிலாக அல்லது நடைமுறையில் கண்ட சூத்திரங்களாகும்.

பல்வேறு குழுக்களின் திட்ட விலக்கம்

n_1 அம்சங்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$; திட்ட விலக்கம் σ_1 என்க ; n_2 அம்சங்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$; திட்ட விலக்கம் σ_2 என்க. எனில், அவ்விரண்டும் இணைந்த பெரிய குழுவின் திட்ட விலக்கம் σ-வை $N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$ என்பது தருகிறது. இங்கு $N = n_1 + n_2$; $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$; $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$. $\bar{x} =$ இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி.

நிறுவுதல்

$$N\sigma^2 = \sum_{1}^{N} (x_r - \bar{x})^2$$

மேலும், $s_1^2 = \sigma_1^2 + d_1^2$

$s_2^2 = \sigma_2^2 + d_2^2$

$\therefore\quad n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2$

$= n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$

(அ·து) $N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2.$

குறிப்பு: இதனை இரண்டிற்கு மேற்பட்ட குழுக்களுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

$$N\sigma^2 = n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3(\sigma_3^2 + d_3^2) + \ldots\ldots$$

தேற்றம்

$$N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \frac{n_1 n_2}{N}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

நிறுவுதல்

$$\begin{aligned}
n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 &= n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 \\
&= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) \\
&\qquad + (n_1 + n_2)\bar{x}^2 \\
&= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - 2\,\frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)}{n_1 + n_2}(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) \\
&\qquad + (n_1 + n_2)\,\frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \\
&= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - 2\,\frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} \\
&\qquad + \frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} \\
&= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - \frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} \\
&= \frac{(n_1 + n_2)(n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2) - (n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2)} \\
&= \frac{n_1 n_2(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2)}{n_1 + n_2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{N}$$

$$\therefore \quad N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \frac{n_1 n_2}{N} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

மூன்று டாக்டர்கள் மூன்று குழுவினரைப் பரிசோதனை செய்து கண்ட பருமன் விபரம் வருமாறு :

டாக்டர்கள்	குழுவின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி (பவுண்டில்)	திட்டவிலக்கம் (பவுண்டில்)
A	50	113	6
B	60	120	7
C	90	115	8

(செ.ப.)

இங்கு

$\bar{x}_1 = 113; \quad \bar{x}_2 = 120; \quad \bar{x}_3 = 115$

$n_1 = 50; \quad n_2 = 60; \quad n_3 = 90$

$\sigma_1 = 6; \quad \sigma_2 = 7; \quad \sigma_3 = 8$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{50 \times 113 + 60 \times 120 + 90 \times 115}{50 + 60 + 90} = 116$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 113 - 116 = -3$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 120 - 116 = 4$

$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 115 - 116 = -1$

$$\begin{aligned} N\sigma^2 &= n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_3 \sigma_3^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 + n_3 d_3^2 \\ &= n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3(\sigma_3^2 + d_3^2) \\ &= 50\,(36+9) + 60\,(49+16) + 90\,(64+1) \\ &= 12000 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{12000}{200} = 60$$

$$\therefore \quad \sigma = 7{\cdot}7.$$

ஷெப்பர்டின் திருத்தம்

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காணும்போது ஓர் அலைவுப் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அடங்கியுள்ள அம்சங்கள், அப்பிரிவின் மையப் புள்ளி என்ன அளவினை (அலைவெண்ணை)க் கொண்டிருக்கிறதோ அதே அளவைக் கொண்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளுகிறோம். இந்த அனுமானத்தில் சிறிது விலக்கம் ஏற்படுவதுமுண்டு. கூட்டுச் சராசரிக்கு மேலும் கீழும் தனி அம்சங்கள் சமமாகப் பிரிந்து கிடப்பதால், இந்த விலக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சரிசெய்து கொண்டு, நிகர நிலையில் குறிப்பிடத்தக்க பிழையில்லாமல்போய்விடுகிறது. ஆனால், திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுகையில், விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை எடுத்துக் கொள்ளுகிறோமாகையால், இப் பிழை மிகையாக விரிவதற்கு ஏதுவாகிறது. அப் பிழை $\frac{C^2}{12}$ ஆக இருக்குமெனக் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளது; C என்பது பிரிவின் தூரமாகும். எனவே, கணக்கிடப் பட்ட மாறிலியிலிருந்து $\frac{C^2}{12}$ ஐக் கழிக்கப் பெறப்படுவதுதான் பிழை திருத்தப்பட்ட மாறிலியாகும்.

மொத்த அலைவெண் 1000-க்கு மேற்படுகின்ற நிலையில் அல்லது 20-க்குட்பட்ட பிரிவுகள் அமைந்த அலைவுப் பரவலிலும், மேலும் மணிவடிவ அல்லது சிறிய நிலையில் அசம நிலையுடைய சமச்சீர் பரவலிலும் இந்தப் பிழைதிருத்தத்தினை மேற்கொள்ளவேண்டு மென்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

பரவுகை இணை அளவைகள்

இருவித அலைவுப் பரவல்கள் வெவ்வேறு மூல அளவைகளைக் கொண்டதாக இருக்கலாம்; எடுத்துக்காட்டாக மாணவர்களின் பருமனைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றும், பிறிதொன்று மாணவர்கள் படிக்கும் நேர்ப்பரவலைக் காட்டுவதாகவும் கொள்வோம். இவைகளின் பரவுகை அளவைகள் முறையே கிலோ, மணி ஆகிய வெவ்வேறு மூல அளவைகளில் சொல்லப்படும். அவ்வாறு வெவ்வேறு மூல அளவைகளில் சொல்லப்படும் பரவல்களைப் பரவுகை அளவைகளைக் கொண்டுஅப்படியே ஒப்பு நோக்க முடியாது. அப்பரவுகை அளவைகளை, அப்பரவல்களின் சராசரிகளால் வகுத்தால், மூல அளவை விடுபட்டு, அளவை எண்வடிவத்தில் அமைய, ஒப்பிட்டு நோக்க மிக ஏதுவாக இருக்கும். எனவே, அத்தகைய அளவை $\frac{\text{பரவுகை அளவை}}{\text{சராசரி}}$ யாகும். இதனைப் பரவுகை இணை அளவை எனக் கூறுகிறோம். இதனைப் பரவுகைக் கெழு (Coefficient of dispersion) எனவும் அழைக்கின்றோம்.

1. $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

2. $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

3. $\frac{\text{கால்மான விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

4. $\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

முதலியன அத்தகு பரவுகைக் கெழுக்களாகும். இவைகளுள் மிகச் சிறப்பானது இறுதியாகக் கூறப்பட்ட $\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$ ஆகும். இந்தக் குறிப்பிட்ட கெழுவினை 'மாறு விகிதக் கெழு' அல்லது மாற்றுக்கெழு (Coefficient of variation) எனவும் அழைக்கின்றோம். இதனைச் சதவீதத்தில் குறிப்பிடுவது புள்ளியியல் மரபாகும். இம் மாறுவிகிதக் கெழு ஒரு பரவலில் மதிப்புகளின் நிலைப்புத்தன்மையை (Consistency) அளக்கவும் பயன்படுகிறது. இரு பரவல்களில் எக்கெழு குறைவானதோ, அதன் நிலைப்புத்தன்மை மற்றதனைவிட அதிகமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

இரு மாணவர்கள் A, B மொத்தம் 8 சோதனைகளில் ஒரே பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

A	65	66	67	68	69	71	72	73
B	67	68	64	68	72	70	69	70

A-ன் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{551}{8} = 68{\cdot}9$

B-ன் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{548}{8} = 68{\cdot}5.$

எனவே, மாணவர் A, Bயைவிடத் திறமைசாலி.

A :

x :	65	66	67	68	69	71	72	73
d :	−3	−2	−1	0	1	3	4	5
d^2:	9	4	1	0	1	9	16	25

$$\sum d^2 = 65$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2 = \frac{65}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{471}{82}.$$

B :

x :	67	68	64	68	72	70	69	70
d :	−1	0	−4	0	4	2	1	2
d^2:	1	0	16	0	16	4	1	4

$$\sum d^2 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2 = \frac{42}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \frac{320}{82}.$$

$$\therefore \quad \sigma_A > \sigma_B.$$

∴ Bதான் Aயைவிட நிலையாக மதிப்பெண் பெற்றவராவர்.

பல்வேறு பரவுகை அளவைகளின் இணை தராதரங்கள்

மையப் போக்கின் அளவையானது சிறந்ததாக அமைய, நாம் கையாண்ட விதிமுறைகளையே, பரவுகை அளவைக்குரிய விதிகளாகக் கொள்ளலாம். அதற்கேற்பப் பல்வேறு பரவுகை அளவைகளின் சீர்களையும் சிறுமைகளையும் காண்போம்.

வீச்சு, ஒரு குத்துமதிப்பான விலக்க அளவையேயாகும். கணக்கியல் ஆய்வுகளுக்கு இது பயன்படாது. புள்ளிவிபரங்கள் முழுவதும் கிடைக்கப்படாத நிலையில் இது பயன்படும். மிகப் பெரிய சிறிய மதிப்புகளால் மட்டும் இது தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இடையில் உள்ளமதிப்புகள் இதனைப் பாதிக்கமாட்டா. ஒரு மாதிரிக் குழுவிற்கும் மற்றொன்றிற்கும் இது மாறும் நிலையுடையது; நிலையற்றது. இதை ஒரு சிறந்த பரவுகை அளவையாகக் கொள்ள முடியாது.

கால்மான விலக்கமானது, முதல் கால்மானம், மூன்றும் கால்மானம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்தது. அவைகளைக் கணக்கிட வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் சூத்திரங்கள் கிடையாதாகையால், இதற்கும் அத்தகைய சூத்திரம் கிடையாது எனக் கூறுகிறோம்; எனினும், பரவுகைத் தன்மையைக் காட்டும் நல்லதோர் அளவையாகும். இதனை எளிதில் கணக்கிட முடியும். ஓகைவ் வரையிலிருந்தும் இதனை எளிதில் காணலாம். சமச்சீர்த் தன்மையையும் தட்டை அளவையையும் (Kurtosis) காண இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. எனினும், கணக்கியல் ஆராய்ச்சி வழிமுறைகளுக்கு இது பயன்படாது. இதனை நிலையானதோர் அளவையாகக் கருதலாம்.

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரமுடைய தாகக் கொள்ளலாம். எனினும், இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடும் போது இதனை அவ்வாறு கருத முடியாது; ஏனெனில், இடைநிலை காண அத்தகைய சூத்திரம் கிடையாது. இதைக் கணக்கிடக் கையாளும் வழிமுறைகள் எளிதானவை எனச் சொல்ல முடியாது. எல்லைப்புற மதிப்புகளால் இது பெரிதும் பாதிக்கப்படமாட்டாது. திட்ட விலக்கத்தினைப் போல் அவ்வளவு உறுதியான நிலையுள்ள தாகவும் சொல்ல முடியாது. இது பொருளாதாரப் புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. மற்றைய மதிப்புகளிலிருந்து பெரிதும் வேறுபடுகின்ற அம்சங்கள் பல இருக்கின்ற ஒரு பரவலில் இதுவே சிறந்ததோர் பரவுகை அளவையாகும்.

திட்ட விலக்கத்தினைக் காணக் கணக்கியல்படி வரையறுக்கப் பட்ட சிறந்த சூத்திரம் உண்டு; கணக்கிடுதலும் எளிதே. புள்ளி யியல் ஆய்வுகளிலும், மாதிரித் தேற்றங்களிலும் இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. இது நிலையானது. கணக்கியல் வழிதுறை களுக்கு உட்பட்டு நன்கு பயன்படுகிறது. பரவலில் எல்லா அம்சங் களின் அடிப்படையிலும் இது கணிக்கப்படுகிறது. எனவே, எல்லையில் அமைந்துள்ள பெரிய, சிறிய மதிப்புகள் இதனைப் பாதிக்கும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட குழுக்களின் திட்ட விலக்கங்கள் தனித்தனியாகத் தெரியும்போது, அக்குழுக்கள் இணைந்த புதிய குழுவின் திட்டவிலக்கத்தினைக் காண்பது எளிதே. சமச்சீர் தன்மையையும், தட்டைத் தன்மையையும் காண இது பயன் படுகிறது. இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளின் இடையுறவினையும் இடையுறவுக் கோட்டினையும், காணவும் இது பயன்படுகிறது. மையப் போக்கினை அளவிட, கூட்டுச் சராசரி மிகச் சிறந்த கருவி யாவது போல், பரவுகை அளவைகளில் திட்ட விலக்கமே தலையானதாகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு சமயத்தில் இங்கிலாந்து நாட்டுப் பார்லிமெண்டின் பிரபுக்கள் சபையில் இருந்தவர்களின் வயது பரவல் வருமாறு:

மைய ஆண்டுகள் (n)	25	35	45	55	65	75	85
அலைவெண் (f)	3	60	132	153	139	51	2

கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கங்கள், திட்ட விலக்கம், மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

2. A, B என்ற இரு மாதிரிகளின் அளவைகள் வருமாறு :

மாதிரி	உருவ அளவு (Size)	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	20	44·8	8·3
B	30	47·3	6·5

Aயையும் Bயையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியினையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

3. 27 இன்னிங் ஆட்டங்களில் பிராட்மென், பான்ஸ்போர்டு ஆகிய இரு புகழ்பெற்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்களின் ஓட்ட எண்ணிக்கை வருமாறு :

பிராட்மென் : 304, 244, 206, 160, 149, 140, 132, 94, 80, 62, 53, 48, 45, 42, 36, 35, 32, 28, 25, 23, 20, 18, 16, 14, 10, 6, 3.

பான்ஸ்போர்டு: 281, 266, 229, 181, 125, 93, 83, 72, 64, 58, 52, 48, 46, 41, 36, 27, 21, 12, 10, 8, 8, 7, 6, 5, 3, 0, 0.

இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களில் மிகையான நிலைப்புத் தன்மை யுடையவர் யார்? (செ.ப.)

4. முதல் n இயல் எண்களின் (Natural numbers) கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக. திட்ட விலக்கத்தினைவிடக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் சிறியது என நிறுவுக. n ஆனது கந்தழி (Infinity) அளவிற்குப் பெரிதாகும் போது, அவைகளின் விகித நெருக்க மதிப்பினைக் (limit) கணக்கிடுக. (செ.ப.)

5. எந்தவோர் அலைவுப் பரவலிலும், இடைநிலை $\pm$ கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையிலிருந்து) என்ற இடைவெளியில் தான் கூட்டுச் சராசரி அமையுமெனக் காட்டுக. (செ.ப.)

6. ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் முறையே 96 அவுன்சுகள், 16 அவுன்சுகள் ஆகும். இவ் வளவைகள் பவுண்டில் காணப்பட்டால், அப்பண்பளவை களின் மதிப்புகள் எங்ஙனம் மாறும்? (செ.ப.)

7. 10 ஆய்வுகளின் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் கணக்கிட்ட பின்னர், ஓர் எழுதுதல் பிழை காணப்பட்டது. மாதிரிகளின் மதிப்புகளை எழுதும்போது, 326 என்பதற்குப் பதிலாக 236 என எழுதப்பட்டுவிட்டது. இத்தவற்றுடன் காணப்பட்ட கூட்டுச் சராசரியும் திட்டவிலக்கமும் முறையே 260·1 ; 51·6 ஆகும். எனில், சரியான திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க. (செ.ப.)

8. $a, a+d, a+2d, \ldots\ldots a+2nd$ என்ற கூட்டுத் தொடர் உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. பின்னது, முன்னதைவிடப் பெரியது என நிறுவுக. (செ.ப.)

9. ஓர் அலைவுப் பரவலில், A என்ற ஒரு மூல அளவையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $\bar{x} - A + \frac{2}{N}\left[A\sum(f_r) - \sum(f_r x_r)\right]$ என நிறுவுக. இங்கு $\bar{x}$ கூட்டுச் சராசரி. $x_r \leq A$. (தி.ப.)

10. x, y இரண்டும் சார்பற்றவை. $U = ax + by$. Uவின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் பண்பளவைகளில் காண்க. (செ.ப.)

11. எண் அளவைப் பரவுகை அளவிற்கும் பரவுகை இணை அளவிற்குமுள்ள வேறுபாட்டினை விளக்குக.

12. $\sigma_{Ax+B} = A\sigma_x$ என நிறுவுக. (செ.ப.)

6. பரவலின் மற்றைய அளவைகள்

ஒரு வெற்றெண் கூட்டத்தின் அல்லது அலைவுப் பரவலின் தன்மையினைக் காண மையப் போக்களவைகளும் விலக்களவை களும் பயன்படுவதாக இதுவரை கண்டோம். இவற்றைத் தவிர, புள்ளியியல் மேற்படிப்பு ஆய்விற்கும் புள்ளிவிபரத் தன்மை ஆய்விற்கும் பயன்படுகிற வேறு அளவைகளும் உள. அவைகள் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Moments), கோட்டளவைகள் (Measures of skewness), தட்டை அளவை (Kurtosis), B, r கெழுக்கள் (B, r Coefficients) ஆகியனவாம். அவைபற்றி இவ்வத்தியாயத்தில் பார்ப்போம்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

ஒரு பரவலின் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது,......k ஆவது முதலிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் புள்ளியியலில் முக்கிய பங்காற்றுகின்றன. ஓர் அலைவுப் பரவலில் ஏதாவது ஒரு மூலப் புள்ளி Aயோடு இணைந்த $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-A)^k$ யை k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (kth moment about A) என விளக்கப் படுகிறது. இங்கு N=மொத்த அலைவெண்; n=மொத்தப் பிரிவு கள். இது μ'_kஎன்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. (அ-து) $\mu'_k=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-A)^k$. $k=2$ ஆக இருக்கும்போது $\mu'_2=s_2$ என்பது நோக்கத்தக்கது. எனவே, வர்க்கமூலக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்தான், Aயோடு இணைந்த இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும். புள்ளியியலில் பல தருணங்களில் $A=\bar{x}$ என எடுத்துக்கொள்வதுண்டு. அப்போது, கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பெறப் படும். கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த kஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையினை μ_k எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$(\text{அ-து})\ \mu_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \bar{x})^k.$$

இங்கு $\sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \bar{x})^2$ என்பதும்

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \bar{x}) = 0 \text{ என்பதும்}$$

உற்றுநோக்கத்தக்கன.

தேற்றம்

ஓர் அலைவுப் பரவலில்

$$\mu_k - \mu'_k - kC_1\,\mu'_{k-1}d + kC_2\,\mu'_{k-2}d^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\,kC_r\,\mu'_{k-r}d^r + \ldots\ldots + (-1)^k d^k.$$

இங்கு $d = \bar{x} - A$.

நிறுவனம்

$$\mu_k = \frac{1}{N}\sum f_i\,(x_i - \bar{x})^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\,\Big\{(x_i - A) - (\bar{x} - A\Big\}^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\,\Big\{(x_i - A) - d\Big\}^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\,\Big\{(x_i - A)^k - kC_1\,(x_i - A)^{k-1}d + kC_2\,(x_i - A)^{k-2}d^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\,kC_r\,(x_i - A)^{k-r}\,d^r + \ldots\ldots\ldots + (-1)^k d^k\Big\}$$

$$= \mu'_k - kC_1\,\mu'_{k-1}d + kC_2\,\mu'_{k-2}d^2 - \ldots\ldots + (-1)^r\,kC_r\,\mu'_{k-r}\,d^r + \ldots + (-1)^k\,d^k.$$

இங்குக் கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, A என்ற மூலமதிப்போடு இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளால் கூறப்பட்டுள்ளது.

கிளைத்தேற்றங்கள்

$K = 1$ எனில், $\mu_1 = \mu_1' - d = 0\ \{\because\ \mu_1' = d\}$

$K = 2$ எனில், $\mu_2 = \mu_2' - 2C_1\mu_1'd + d^2$

$$= \mu_2' - 2d_1^2 + d^2$$

$$= \mu_2' - d^2$$

$\{(\text{அ-து})\ \sigma^2 = s^2 - d^2\}$

$$K=3 \text{ எனில் } \mu_3 = \mu_3' - 3C_1\mu_2'd + 3C_2\mu_1'd^2 - d^3$$
$$= \mu_3' - 3\mu_2'd + 3d^3 - d^3$$
$$= \mu_3' - 3\mu_2'd + 2d^3$$

$$K=4 \text{ எனில் } \mu_4 = \mu_4' - 4C_1\mu_3'd + 4C_2\mu_2'd^2$$
$$- 4C_3\mu_1'd^3 + d^4$$
$$= \mu_4' - 4\mu_3'd + 6\mu_2'd^2 - 4d^4 + d^4$$
$$= \mu_4' - 4\mu_3'd + 6\mu_2'd^2 - 3d^4.$$

செப்பர்டின் திருத்தம்

திட்ட விலக்கத்திற்குக் கூறிய காரணத்தின் அடிப்படையிலேயே விலக்கப் பெருக்குத் தொகைக்கும் செப்பர்டின் திருத்தம் மேற்கொள்ளப்படவேண்டும். கூட்டுச் சராசரியில் பிழைகள் ஒன்றுக்கொன்று சரிசெய்து நிகரில் திருத்தற்கிடமின்றி இருப்பது போல, ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் அதே காரணத்திற்காகத் திருத்தத்திற்கு இடமில்லை. இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கு மட்டுமே செப்பர்டின் திருத்தம் மேற்கொள்ளப்பட வேண்டும். கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து $\frac{C^2}{12}$ ஐக் கழிக்க வேண்டும் (ஏற்கெனவே கூறப்பட்டுள்ளது) ; கணக்கிடப்பட்ட நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து $\left(\frac{C^2\mu_2}{2} - \frac{7}{240}C^4\right)$ஐக் கழிக்க வேண்டும்; இங்கு C பிரிவின் தூரமே.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை மிகமிகத் துல்லியமாகக் கணக்கிட வேண்டிய தருணங்களில் மட்டும் மேற்கூறப்பட்ட திருத்தங்களை மேற்கொள்ளல் போதுமானதாகும்.

கோட்டளவைகள்

சில பரவல்களில், அதன் மைய மதிப்புகள் ஒரு பக்கம் மிகையாக விலகி அமைந்து கிடக்கும். அவற்றின் வரைகள் சமச்சீரான நிலையில் அல்லது இயல் நிலையில் அமையா. எத்துணை அளவிற்குச் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைந்துள்ளன எனக் காண்பது அவசியமாகும். சமச்சீரற்ற தன்மை அதன் கோட்டமாகும். அதனை அளக்கப் பயன்படுபவை கோட்டளவைகள் ஆகும். சமச்சீராக உள்ள பரவலில் இந்த அளவை பூஜ்யமாகும். அங்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய

மூன்றும் ஓரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்குமென்பது தெளிவாகும். சமச்சீரற்ற பரவல்களில், இடைநிலையும் கூட்டுச் சராசரியும் முகட்டிற்கு ஒரு பக்கத்தில் அல்லது இரு மருங்கிலும் விலகி அமைந்து கிடக்கும். எனவே, முகட்டிற்கும் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள தூரம் அல்லது முகட்டிற்கும் இடைநிலைக்குமுள்ள தூரம் கோட்டளவையாகப் பயன்படுகிறது. இரு பரவல்களை ஒப்பிடும்போது, அவைகள் வெவ்வேறு மூல அளவைகள் கொண்டிருப்பதால், இவ்வளவைகள் அம் மூல அளவைகளில் சொல்லப்படாது வெற்றெண்களில் சொல்லப்படல்வேண்டும். எனவே, அத்தகைய அளவைகளை ஏதாவது ஓர் அப்பரவலின் பரவுகை அளவையில் வகுத்துக்கொள்ளவேண்டும். எனவே,

$$\text{கோட்டளவை} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

இது பியர்ஸான் சூத்திரமாகும். இதனையே

$$\frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

எனவும் கொள்ளலாம். இதனைப் பியர்ஸான் கோட்டக் கெழு என அழைக்கின்றோம். வேறொரு கோட்டளவையும் உண்டு. அதனைக் கால்மானக் கோட்டக் கெழு என அழைகின்றோம். அது $\frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$ ஆகும்; இங்கு Q_1 கால்மானம்; Q_3 மூன்றும் கால்மானம்; M இடைநிலை. இதனைத் தவிர ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எதனையும் கோட்டளவையாகப் பயன்படுத்தலாம். $\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ என்பது மூன்றும் விலக்கப்பெருக்குத் தொகையினைப் பயன்படுத்திக் கையாளப்படும் கோட்டளவையாகும். இதனை α_3 எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கமாகும். $\frac{\sqrt{\beta_1}\;(\beta_2+3)}{2\,(5\beta_2-6\beta_1-9)}$ என்பதும் கோட்டளவையாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்குக் குறிப்பிட்டுள்ள β_1, β_2 பற்றிப் பின்னர் விளக்குவோம்.

தட்டை அளவை

அலைப்பரவலின் வரை உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எப்படி அமைகின்றதென அளக்கப்படுகிறது. அதுவும் புள்ளிவிபரத்தின் தன்மையை எடுத்துக் காட்டும் இதற்குத் தட்டை அளவை (Kurtosis) எனப் பெயராகும். $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}}$ என்பது தட்டை அளவையாகப் பயன்படும்.

ஓர் இயல்நிலை அல்லது சமச்சீர் பரவலில் $\alpha_4 = 3$ ஆகக் காணப்பட்டுள்ளது. எனவே, $\alpha_4 < 3$ ஆக அமைந்த வரையை மிகைத்தட்டை (Platykurtic) யுடையதெனவும், α_4 73 ஆக அமைந்த வரையைக் குறைத்தட்டை (Leptokurtic) யுடையதெனவும் கூறுகிறோம்.

β, γ கெழுக்கள்

வேறு சில கெழுக்களும் அலைவுப் பரவலின் தன்மையைக் காணவும், புள்ளியியலை ஆயவும் பயன்படுகின்றன.

β கெழுக்கள் இருவகை. $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$; $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$.

γ கெழுக்களும் இருவகை : $\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1}$; $\gamma_2 = \beta_2 - 3$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த 2, 3, 4 ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும், பியர்ஸான் கோட்டக் கெழுவினையும், கால்மானக் கோட்டக் கெழுவினையும் கணக்கிடுக.

மாறி :	3–6,	6–9,	9–12,	12–15,	15–18
அலைவெண் :	4	10	15	8	5

x	f	d	fd	fd^2	fd^3	fd^4	cf
3–6	4	–2	–8	16	–32	64	4
6–9	10	–1	–10	10	–10	10	14 ← Q_1
9–12	15	0	0	0	0	0	29 ← M
12–15	8	1	8	8	8	8	37 ← Q_3
15–18	5	2	10	20	40	80	42
	42		0	44	6	162	

$$\bar{x} = 10\cdot5 + 0 = 10\cdot5$$

$$M = 9 + \frac{(21-14)3}{15} = 10\cdot4$$

$$Q_1 = 6 + \frac{(10\cdot5-4)3}{10} = 7\cdot95$$

$$Q_3 = 12 + \frac{(31\cdot5-29)3}{8} = 12\cdot94$$

$$\mu_2 = \left\{\frac{44}{42} - 0\right\} 3^2 = 9\cdot44$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,d\,\mu_2' + 2\,d^3$$

$$= \frac{6}{42}\cdot3^3.\ \{\because \quad d = 0\}$$

$$= 3\cdot86.$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\,d\,\mu_3' + 6\,d^2\,\mu_2' - 3\,d^4$$

$$= \frac{162}{42} \times 3^4$$

$$= 312\cdot48.$$

பியர்ஸான் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{3\ (\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{3\ (10\cdot5 - 10\cdot4)}{\sqrt{9\cdot44}}$$

$$= 0\cdot098.$$

கால்மானக் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{12\cdot94 + 7\cdot95 - 20\cdot8}{12\cdot94 - 7\cdot95}$$

$$= 0\cdot02.$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட மாத வருமானப் பரவலின் எல்லாவிதக் கோட்டக் கெழுக்களையும் கணக்கிடுக.

மாத வருவாய் (ரூபாயில்)	100	125	150	175	200	225	250	275	300
அலைவெண்	2	12	27	31	45	18	6	5	2

2. கீழ்க்கண்ட பரவலின் அலைவு வரையை வரைக.

x :	—3	—2	—1	0	1	2	3
y :	1	10	18	12	7	2	0

கூட்டுச் சராசரியையும், அதனோடு இணைந்த இரண்டாவது, நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

3. A, B என்ற இரு புள்ளிவிபரங்களில்

	A	B
இடைநிலை	19·64	24·46
முதல் கால்மானம்	13·46	15·64
மூன்றும் கால்மானம்	25·94	37·76

A, B ஆகிய இரு குழுக்களின் பரவுகை, கோட்டம் ஆகிய வற்றினை ஒப்பிட்டு நோக்குக. (தி.ப.)

4. 1000 மாணவர்களின் உயரம் (அங்குலத்தில்) ஒரு பரவலில் தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி = 60; கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த 2, 3, 4 ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 10, 32, 195 ஆகும். வேண்டிய கெழுக்களைக் கணக் கிட்டுப், பரவலின் முக்கியத் தன்மைகளை விளக்குக. (செ.ப.)

5. மூலப்புள்ளியோடு (Origin) இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 5, —0·55, —0·43, 68·32. எனில், $\sqrt{\beta_1}$, β_2 ஐக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

6. $x = 4$ என்பதோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே வருமாறு : 1, 4, 10, 45. எனில் கூட்டுச் சராசரி = 5 ; மாறுவிகிதம் = 3 ; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 26$ என நிறுவுக. (செ.ப.)

7. மூலப்புள்ளியோடு இணைந்த முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் வருமாறு :

$$\mu_1' = \frac{n+1}{2};\ \mu_2' = \frac{(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\mu'_3 = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$ எனில்,

புள்ளி விபரத்தின் கோட்டத்தினை ஆய்க. (செ.ப.

8. x என்ற மாறி சமச்சீர் பரவலே உருவாக்குமானல், x^2 நேர் மறைக் கோட்டமுடைய பரவலே உருவாக்குமென நிறுவுக.

(செ.ப.)

9. ஒரே விதமான சீரான உலோகத்தால் செய்யப்பட்ட கோளவடிவப் பந்துகளின் விட்டங்கள் சமச்சீர் பரவலில் அமைகின்றன. எனில், அவைகளின் எடைப் பரவல் நேர்மறைக் கோட்ட முடையது என நிறுவுக. (செ.ப.)

10. β_1, β_2 என்பன வெற்று எண்களாக மூல அளவையிலிருந்து (Scale) விடுபட்டு நிற்கின்றன எனக் காட்டுக. (செ.ப.)

11. $\beta_2 > 1$ என நிறுவுக. எப்போது சம அடையாளம் பொருந்தும்? (செ.ப.)

7. தொடர் அலைவுப் பரவல்

1000 மாணவர்கள் ஒரு பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமையும். ஆனால், அது தொடர் அலைவுப் பரவலாக (Continuous frequency distribution) அமையாது. அதனை ஒரு செவ்வக விளக்கப் படத்தில் அமைத்துக் காட்டலாம். ஒரு வேப்ப மரத்தின் இலைகளின் நீளங்களை ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைக்கலாம். அதனை ஒரு தொடர் அலைவுப் பரவலாகக் கருதலாம்; வரையப்படும் செவ்வகங்களின் அகலம் மிக நுணுக்கமாக இருக்கும். புள்ளியியலின் உயர்நிலையில் பல தேற்றங்களைக் காணத் தொடர் அலைவுப் பரவல்கள் பயன்படுகின்றன. ஒரு செவ்வக விளக்கப் படம் அல்லது துலைவுப் பலகோணம் அணுகுவது ஒரு தொடர் அலைவுப் பரவலையேயாகும். எனவே சாதாரணப் பாகுபடுத்தப்பட்ட அலைவுப் பரவலில் $\sum$ குறியிட்ட இடங்களெல்லாம் தொடர் அலைவுப் பரவலில் $\int$ குறியிட வேண்டும்.

ஒரு தொடர் அலைவுப் பரவலுக்குரிய அலைவெண் வரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ என்க. அவ்வலைவுப் பரவலில் மிகக் கீழ், மேல் எல்லைகள் முறையே a, b என்க. எனில்,

$$\text{மொத்த அலைவெண் } N = \int_a^b f(x)\,.\;dn \tag{1}$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,.\,x\,.\,dx \tag{2}$$

இடைநிலை M, $\int_a^x f(t)\,dt = \frac{N}{2}$ என்பதில் x-ன் மதிப்பாகும். (3)

முகடு $f'(x) = 0$ என்பதில் x-ன் மதிப்பாகும். (4)

கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த k ஆவது விலக்குப் பெருக்குத் தொகை $= \mu_k = \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,(x - \bar{x})^k\,dx$ (5)

குறிப்பாக $\mu_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,(x - \bar{x})^2\,dx$ (6)

$$s^2 = \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,(x - A)^2\,dn \quad (7)$$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,|\,x - A\,|\,dx$ (8)

முதல் கால்மானம் $\int_a^{Q1} f(x)\,dx = \frac{N}{4}$-ல் Q_1-ன் மதிப்பாகும். (9)

மூன்றும் கால் மானம் $\int_a^{Q3} f(x)\,dx = \frac{3N}{4}$-ல் Q_3-ன் மதிப்பாகும். (10)

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ என்க.

எனில், அலைவுப் பரவலின் ஓகைவ் வரையின் சமன்பாடு $y = F(x)$. (11)

ஓர் அலைவுப் பரவலின் முகடு அதன் ஓகைவ் வரையின் திருகு புள்ளியின் (**Point of Inflexion**) **x** மதிப்பாகும்.

நிறுவனம்

$f(x)$-ன் மதிப்பு எங்கு அதிகமாக உள்ளதோ, அப்புள்ளிதான் முகட்டுப் புள்ளியாகும்.

அப்புள்ளியில் $f'(x) = 0$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\therefore\ F'(x) = f(x)$$
$$\therefore\ F''(x) = f'(x)$$

எனவே, $f'(x) = 0$ ஆகுமானால், $F''(x) = 0$. $f'(x) = 0$ ஆகும்போது x-ன் மதிப்பே முகடாகும். எனவே, $F''(x) = 0$ ஆகும் போது x-ன் மதிப்பு ஓகைவ் வரை $y = F(x)$-ன் திருகுபுள்ளியின் x-ஆய தூரமாகும். எனவே, ஓர் அலைவுப் பரவலுக்குரிய ஓகைவ் திருகு புள்ளியானது, அதன் முகட்டுப் புள்ளியோடு பொருந்து கிறது.

அலைவுப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு

X-அச்சு, அலைவு வரை $x=c$, $x=d$ என்ற இரண்டு ஆயங்களுக் கிடையே உள்ள பரப்பு $\int_c^d f(x) \,.\, dx$ ஆகும். எனவே, இப்பரப்பு $c \leq x \leq d$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள மொத்த அலைவெண்ணைத் தருகிறது. எனவே, $c \leq x \leq d$ என்ற இடைவெளியில் x அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவும் (Probability)

$$= \frac{x=c,\ x=d \text{ யிடையில் உள்ள பரப்பு}}{\text{மொத்தப் பரப்பு}}$$

$$= \int_c^d f(x) \,.\, dx/\mathrm{N}.$$

$$= \int_c^d \frac{f(x)}{\mathrm{N}} \,.\, dx$$

$$= \int_c^d \phi(x) \,.\, dx \left\{ \phi(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{N}} \right\}$$

$\phi(x)$ ஐ நிகழ்தகவுச் சார்பு என அழைக்கிறோம்.

ஒரு தொடர் அலைவுப் பரவலிலும் $\mu_1 = 0$

நிறுவுதல்

$$\mu_1 = \frac{1}{\mathrm{N}} \int_a^b f(x) \,.\, (x - \bar{x}) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \int_a^b f(x)\, x \, dx - \frac{\bar{x}}{\mathrm{N}} \int_a^b f(x) \,.\, dx$$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$
$$= 0.$$

ஒவ்வொரு தொடர் அலைவுப் பரவலிலும் $s^2 = \sigma^2 + d^2$.

நிறுவுதல்

$$s^2 = \frac{1}{N}\int_a^b f(x) \cdot (x - A)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b f(x) \cdot \left\{(x - \bar{x}) + (\bar{x} - A)\right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\int_a^b f(x) \cdot (x - \bar{x})^2 \, dx + 2(\bar{x} - A)\int_a^b f(x)(x - \bar{x}) \cdot dx + (\bar{x} - A)^2 \int_a^b f(x) \cdot dx\right\}$$

$$= \sigma^2 + 0 + (\bar{x} - A)^2$$

$$= \sigma^2 + d^2;$$

(அ-து) $\underline{s^2 = \sigma^2 + d^2}$.

ஒவ்வோர் அலைவுப் பரவலிலும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கெடுக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் வேறு எந்த மதிப்பிலிருந்தும் கண்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைவிடச் சிறியதாகும்.

நிறுவுதல்

இடைநிலையானது $\int_a^X f(t) \cdot dt = \frac{N}{2}$-ல் x-ன் மதிப்பாகும்;

(அ-து) $\int_a^X \frac{f(t)}{N} \cdot dt = \frac{1}{2}$-ல் x-ன் மதிப்பாகும்;

(அ-து) $\int_a^Z \phi(x)\, dx = \frac{1}{2}$-ல் z-ன் மதிப்பாகும்.

இடைநிலைக்கு மூலப்புள்ளியினை மாற்றிப் புதிய எல்லைகளை $-c, d$ என்க. எனவே,

$$\int_{-c}^{o} \phi(x) \cdot dx = \int_{o}^{d} \phi(x) \cdot dx = \tfrac{1}{2} \text{ (A)}$$

தற்போது, இடைநிலையிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \int_{-c}^{o} - x\,\phi(x)\,dx + \int_{o}^{d} x\,\phi(x)\,dx \text{ (B)}$$

$k > o$ என்ற மதிப்பிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \int_{-c}^{k} (k-x)\,\phi(x) \cdot dx + \int_{k}^{d} (x-k)\,\phi(x) .\ dx$$

$$= \left[\int_{-c}^{o} + \int_{o}^{k}\right] (k-x)\,\phi(x) . dx + \left[\int_{o}^{d} - \int_{o}^{k}\right] (x-k)\,\phi(x)\,dx$$

$$= k \int_{-c}^{o} \phi(x)\,dx - \int_{-c}^{o} x\,\phi(x)\,dx + \int_{o}^{k} (k-x)\,\phi(x)\,dx +$$

$$\int_{o}^{d} x\phi(x)\,dx - k \int_{o}^{d} \phi(x)\,dx - \int_{o}^{k} (x-k)\,\phi(x) .\ dx$$

$$= - \int_{-c}^{o} x\,\phi(x)\,dx + \int_{o}^{k} (k-x)\,\phi(x) .\ dx + \int_{o}^{d} x\,\phi(x)\,dx$$

$$- \int_{o}^{k} (x-k)\,\phi(x)\,dx \text{ \{ A யின்படி \}}$$

$$= \left\{ 2 \int_{o}^{k} (k-x)\,\phi(x) \cdot dx \right\} + \text{ இடைநிலையிலிருந்து}$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்.

∴ k-யிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் — இடைநிலையி

லிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= 2 \int_{o}^{k} (k-x)\,\phi(x) \cdot dx.$

ஆனால், $(k-x)$ ஆனது (o,k) என்ற இடைவெளியில் + ஆகும்; $\phi(x)$ எப்பொழுதுமே + ஆகும்.

∴ மேலே கண்ட வேறுபாடு எப்போதும் + ஆகும்.

∴ இடைநிலையிலிருந்து கண்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கமே மிகமிகச் சிறியது.

இது போன்றே $k<o$ ஆக இருப்பினும் இவ்வுண்மையை நிறுவலாம்.

இத்தேற்றம் ஒரு வெற்று எண் கூட்டத்திற்கும் தொடர் அலைவுப் பரவலுக்கும் பொருந்தும்; பாகுபடுத்தப்பட்ட (தொடர் பற்ற) அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது.

பயிற்சி

(1) $f(x)\,dx = e^{-x}\,dx;\quad o \leq x \leq \infty$ என்ற அலைவுப் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

(2) $f(x)\,dx = \dfrac{f}{2a}\,dx;\ -a \leq x \leq a.$ இதற்குரிய முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் கோட்ட அளவினையும் காண்க. (செ.ப.)

(3) $f(x)\,dx = 6x\,(1-x)\,dx;\ o \leq x \leq 1.$ இதற்குரிய கூட்டுச் சராசரியையும் முகட்டினையும் காண்க. (செ.ப.)

(4) $2mx\,e^{-mx^2}\,o \leq x < \infty$ என்று விளக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவலின் கால்மான விலக்கத்தினைக் காண்க. (செ.ப.)

(5) 0, 2 ஆகிய மதிப்புகளுக்கிடையே வேறுபடும் ஒரு மாறியின் அலைவுப் பரவல் வருமாறு :

$$f(x) = x^3\ (0 \leq x \leq 1)$$
$$f(x) = (2-x)^3\ (1 \leq x \leq 2).$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

8. வளைகோடு பொருத்தல்

ஒரு பல்கலைக் கழகத்தின் மாணவர்களை முழுமைத் தொகுதி (Population) எனக் கூறுகிறோம். அவர்களுள், சில விதிகளின்படி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட (100 பேர் என்க) மாணவர் குழுவினை அம்முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு மாதிரி அல்லது கூறு (A sample) எனக் கூறுகிறோம். மாணவர்களின் பருமனையும் உயரத்தினையும் x, y என இரு மாறிகளாகக் கொள்ளலாம். அந்த மாதிரியில் x, y-க்கு உள்ள உறவு, முழுமைத் தொகுதியில் x, y-க்கு உள்ள உறவாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இதுபோன்று மாதிரிகளின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளை அறியவும், ஒரு குறிப்பிட்ட x அல்லது y மாறியின் மதிப்பிற்கு இணையான y அல்லது x-ன் மதிப்பினை மதிப்பிடவும் வளைகோடு பொருத்தல் (Curve fitting) பயன்படுகிறது. மாதிரியில், x, y-ன் x மதிப்புகள் தெரியவரின், x, y-களுக்கிடையேயுள்ள ஏற்றதோர் உறவு பொருத்தப்படுகிறது. அவ்வுறவினைச் செப்பும் சமன்பாடு, பொருத்தப்பட வேண்டிய வளைகோடாகும். வெவ்வேறு புள்ளி விபரங்களுக்கு வெவ்வேறு வகையான வளைகோடுகள் பொருத்தப் படுகின்றன. எவ்வகைப் புள்ளிவிபரங்களுக்கு எத்தகைய வளை கோடு பொருத்தப்படவேண்டுமென்பதைக் கீழே காணவிருக்கும் எடுத்துக்காட்டுகள் தெள்ளிதின் விளக்கும். பொருத்தப்படும் வளைகோடு ஏற்றதொன்றாக அமையவேண்டும். அதாவது, அவ்வளைகோடு (x, y) புள்ளிகளின் மிகப் பெரும்பாலானவற்றின் வழியாகச் செல்லவேண்டுமென்பது எளிதில் புலனாகும். ஆனால், இவ்வாறு கூறுவது கணக்கியல் தெளிவற்ற கூற்றாகும். கணக்கியல் தெளிவோடு கூடிய கூற்றுகளில் மிக எளிமையானதும் சிறந்தது மான 'குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை' (Principle of least squares) என்பதை முதலில் விளக்குவோம்.

$(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ $(x_3 y_3)$ ...... $(x_n y_n)$ என்பன ஒரு மாதிரியில் கண்ட x, y ஆகியவற்றின் n ஜோடி மதிப்புகள் என்க. $y = f(x)$ என்பது பொருத்தப்படும் வளைகோட்டின் சமன்பாடு என்க.

எனில், x_i என்ற மதிப்பிற்கு இணையான நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i என்க ; வளைகோட்டின் வாயிலாகக் காணப்படுவது $f(x_i)$ ஆகும். இரண்டிற்குமுள்ள வேறுபாடு $d_i = y_i - f(x_i)$. இந்த வேறுபாடு f_i-க்கு வளைகோட்டின் விலக்கம் (Residual) எனக் கூறலாம். இவ் விலக்கெண் $d_i \lesseqgtr 0$ ஆக அமையலாம். எனவே, $d_i^2 = [y_i - f(x_i)]^2$ என்ற விலக்க வர்க்கத்தினை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\sum d_i^2$ ஆகும். பொருத்தப்படும் $y = f(x)$ என்ற வளைகோடு ஏறத்தாழ ஏற்றதொரு பொருத்த மானதாக அமைய வேண்டுமெனில், $\sum d_i^2$-ன் மதிப்பு மிகமிகச் சிறியதாயிருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவாகும். இக்கொள் கையைத்தான் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை எனக் கூறுகிறோம். இக்கொள்கைதான் இவ்வத்தியாயத்தின் அச்சாகும்.

இனி, பொருத்தப்படும் பல்வேறு வளைகோட்டுச் சமன்பாடு களைக் காண்போம்.

நேர்கோட்டினைப் பொருத்தல்

(x_1y_1) ; (x_2y_2) ; (x_3y_3) …… (x_ny_n) என்பன நேரில் கண்ட n ஜோடி மதிப்புகளாகட்டும் !

பொருத்தப்படும் நேர்கோடு $y = mx + c$ என்க. y-ன் நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i ஆகும் ; சமன்பாட்டிலிருந்து கண்ட கணக்கு மதிப்பு $mx_i + c$ ஆகும். எனவே, வேறுபாடு $y_i - (mx_i + c)$ குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி, $\sum [y_i - (mx_i + c)]^2$ என்பது மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டும். அதற்கு $\sum [y_i - (mx_i + c)]^2 = f(m, c)$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

(அ-து) $2 \sum [y_i - (mx_i + c)]\, x_i = 0$

$2 \sum [y_i - (mx_i + c)] = 0.$

(அ-து) $\sum y_i x_i - m \sum x_i^2 - c \sum x_i = 0$

$\sum y_i - m \sum x_i - nc = 0.$

இவைகளிலிருந்து நாம் பெறும் இயல் சமன்பாடுகள் (Normal equations) :

$$m \sum x^2 + c \sum x = \sum xy \qquad \text{——(1)}$$
$$m \sum x + nc = \sum y \qquad \text{——(2)}$$

இவைகளிலிருந்து m, c-யைத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட புள்ளி விபரத்திற்குப் பொருத்தமான நேர் கோட்டினைக் காண்க.

x :	0	8	16	24	32
y :	15	18	22	25	30.

x	y	x	x^2	xy
0	15	-2	4	-30
8	18	-1	1	-18
16	22	0	0	0
24	25	1	1	25
32	30	2	4	60
	110	0	10	37

இயல் சமன்பாடுகள் :

$$10m + 0 = 37$$
$$0 + 5c = 110.$$
$$\therefore \quad m = 3{\cdot}7\ ;\ c = 22.$$

பொருத்தப்படவேண்டிய நேர்கோடு :

$$y = 3\,7\,x + 22$$
$$y = 3\,7\,\frac{(x-16)}{8} + 22$$
$$\mathbf{y = 0{\cdot}46\,x + 14{\cdot}6.}$$

பரவளைவைப் பொருத்தல்

$(x_1 y_1)$; $(x_2 y_2)$; $(x_3 y_3)$ ...... $(x_n y_n)$ என்பன நேரில் கண்ட n ஜோடி மதிப்புகளாகட்டும். $y = ax^2 + bx + c$ என்பது பொருத்தப் படவேண்டிய பரவளைவு (Parabola) என்க.

எனவே, y-ன் நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i எனில், அதன் கணக்கு மதிப்பு $ax_i^2 + bx_i + c$.

$\therefore$ வேறுபாடு $y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி,

$\sum [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$ மிகக் குறைந்த மதிப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\sum [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = f(a,b,c)$ என்க.

எனில்,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial b} = 0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

எனவே,

$$2 \sum [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i^2 = 0$$
$$2 \sum [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i = 0$$
$$2 \sum [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0.$$

(அ-து) $\sum x_i^2 y_i - a \sum x_i^4 - b \sum x_i^3 - c \sum x_i^2 = 0$

$\sum x_i y_i - a \sum x_i^3 - b \sum x_i^2 - c \sum x_i = 0$

$\sum y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i - nc = 0.$

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள் :

$$a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 = \sum x^2 y \quad \text{——(1)}$$
$$a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x = \sum xy \quad \text{——(2)}$$
$$a \sum x^2 + b \sum x + nc = \sum y \quad \text{——(3)}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிபரத்தினை ஓர் இருபடி பரவளையில் பொருத்திக் காட்டுக.

ஆண்டு	1900	1901	1902	1903	1904	1905
உற்பத்தி அளவு	63	62	52	68	79	80
ஆண்டு	1906	1907	1908	1909	1910	
உற்பத்தி அளவு	85	115	137	141	150	

x	y	X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1900	63	−5	−17	25	−125	625	85	−425
1901	62	−4	−18	16	−64	256	72	−288
1902	52	−3	−28	9	−27	81	84	−252
1903	68	−2	−12	4	−8	16	24	−48
1904	79	−1	−1	1	1	1	1	−1
1905	80	0	0	0	0	0	0	0
1906	85	1	5	1	1	1	5	5
1907	115	2	35	4	8	16	70	140
1908	137	3	57	9	27	81	171	513
1909	141	4	61	16	64	256	244	976
1910	150	5	70	25	125	625	350	1750
மொத்தம்		0	152	110	0	1958	1106	2370

இயல் சமன்பாடுகள் :

$$1958a + 0 \cdot b + 110c = 2370 \quad \text{——(1)}$$
$$0a + 110b + 0 \cdot c = 1106 \quad \text{——(2)}$$
$$110a + 0b + 11c = 152 \quad \text{——(3)}$$

தீர்வு கண்டால்,

$$a = -0 \cdot 48 ; \quad b = 10 ; \quad c = 99 \cdot 2$$

∴ பரவளைவின் சமன்பாடு :

$$y = -0 \cdot 48\, X^2 + 10\, X + 99 \cdot 2$$
$$(y-80) = -0 \cdot 48\, X^2 + 10\, X + 99 \cdot 2$$
$$\underline{Y = -0 \cdot 48\, X^2 + 10\, X + 179 \cdot 2.}$$

லாகரிதம் வழியில் பொருத்தும் வளைகோடுகள்

x, y என்ற மாறிகளின் வெவ்வேறு மதிப்புகளை ஒரு வரைத் தாளில் அமைத்தால் பெறப்படுவது சிதறல் படமாகும் (Scatter diagram). எக்கோட்டினைப் பொருத்த வேண்டுமென்பதை அச் சிதறல் படம் ஓரளவிற்கு அறிவுறுத்தும். ஆனால், உடலியல், வங்கி, வணிகவியல்களில் சில தருணங்களில் பெறப்படும் புள்ளிவிபரங் களுக்குச் சிதறல் விளக்கப் படங்கள் எளிதாகக் காணமுடியாது. அங்கெல்லாம் ஒரு மாறியின் மதிப்போடு இணைந்த மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகள் மிகப் பெரிய அளவில் மாறுபடும். அத் தருணங்களில் $y = Ae^{Bx}$; $y = Ax^m$. $y = a\, b^x$ என்ற வளைகோடுகள் மிகப் பொருத்தமாக அமைகின்றன. இவ் வளைகோடுகளைக் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின்படி அப்படியே பொருத்தல் இயலாது. எனவே, மாறிகளை மாற்றி அமைத்து, ஒரு நேர் கோட்டுச் சமன்பாட்டிற்குக் கொணர்ந்து, இத்தகு வளைகோடு களைப் பொருத்தலாம்.

(i) $y = Ae^{Bx}$

இரு பக்கத்திலும் லாக் எடுக்கவும் ;

$$\log_{10} y = \log_{10} A + Bx \log_{10} e$$

(அ-து) $Y = m\,X + c.$

இங்கு $y = \log y$; $m = B \log e$; $x = X$ $c = \log A.$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் A, B-யின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

(ii) $y = Ax^m$

$$\log y = \log A + m \log x$$

(அ-து) $Y = mX + c.$

இங்கு $Y = \log y;\ X = \log x$

$c = \log A.$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் A-யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

(iii) $y = a\, b^{x}$

$\log y = \log a + x \log b$

(அ-து) $Y = mX + c.$

இங்கு $Y = \log y;\ m = \log b;\ X = x;$

$c = \log a.$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் a, b யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு மிகப் பொருத்தமான $y = Ae^{BX}$ வடிவ வளைகோட்டினைக் காண்க.

x:	1	2	3	4	5	6
y:	14	27	40	55	68	300

(செ.ப.)

X	y	Y	XY	X^2
1	14	1·1461	1·1461	1
2	27	1·4314	2·8628	4
3	40	1·6021	4·8063	9
4	55	1·7404	6·9616	16
5	68	1·8325	9·1625	25
6	300	2·4771	14·8626	36
21		10·2296	39·8019	91

இயல் சமன்பாடுகளாவன :

$91m + 21c = 39{\cdot}8019$ ——(1)

$21m + 6c = 10{\cdot}2296$ ——(2)

தீர்வுகண்டால்,

$m = 0{\cdot}2285;\quad c = 0{\cdot}9052$

(அ-து) $B \log e = 0{\cdot}2285$

$B \times 0{\cdot}4343 = 0{\cdot}2285$

$\therefore\ B = 0{\cdot}5261$

$\log A = 0{\cdot}9052$

$\therefore\ A = 8{\cdot}039$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு $y = 8{\cdot}039\, e^{0{\cdot}5261X}$

எடுத்துகாட்டுக் கணக்கு

ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகையினைக் காட்டும் கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிபரத்திற்கு $y = a\,b^x$ என்ற வடிவ வளைகோட்டினைப் பொருத்துக; பின் 1951ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகையை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	1881	1891	1901	1911	1921	1931	1941
மக்கள்தொகை (மில்லியனில்)	3·9	5·3	7·3	9·6	12·9	17·1	23·2

ஆண்டு x	மக்கள்தொகை y	X	Y	X^2	XY
1881	3·9	−3	0·5911	9	−1·7733
1891	5·3	−2	0 7243	4	−1·4486
1901	7·3	−1	0·8633	1	−0·8633
1911	9·6	0	0·9823	0	0
1921	12·9	1	1·1106	1	1·1106
1931	17·1	2	1·2330	4	2·4660
1941	23·2	3	1·3655	9	4 0965
மொத்தம்		0	6·8701	28	3·5879

இயல் சமன்பாடுகள் :

$$28m + 0 \cdot b = 3{\cdot}5879 \qquad \text{—— (1)}$$
$$0 \cdot m + 7c = 6{\cdot}8701 \qquad \text{—— (2)}$$

தீர்வு கண்டால், $m = 0{\cdot}1281$

$c = 0{\cdot}9814.$

$$m = \log b$$
$$0{\cdot}1281 = \log b \qquad \therefore \quad b = 1{\cdot}343.$$
$$c = \log a$$
$$0{\cdot}9814 = \log a \qquad \therefore \quad a = 9{\cdot}581.$$

$\therefore$ வளைகோடு $y = (9{\cdot}581)\,(1{\cdot}848)^x$.

$x = 1951$ எனில் $X = 4$.

$$Y = 0{\cdot}1281\,X + 0{\cdot}9814$$
$$= (0{\cdot}1281)4 + 0{\cdot}9814$$
$$= 1{\cdot}4938$$

(அ-து) $\log y = 1{\cdot}4938$

$\therefore \quad y = 81{\cdot}18.$

ஒரு பக்க லாகிருதத் தாள்

$y = Ae^{Bx}$ என்ற வளைகோட்டினைப் பொருத்த மாறிகளை ஏற்ற முறையில் மாற்றினால், அது $Y = mX + c$ என்ற வடிவத்தில் அமைகிறது எனக் கண்டோம். இங்கு $Y = \log_{10} y$ ஆகும். எனவே, இக்கோட்டினை வரையச் சாதாரணமான வரைத்தாள் (graph sheet) பயன்படாது. எனவே, அதற்கெனச் சிறப்பான வரைத்தாள் வேண்டும். அதில் x–அச்சானது, சாதாரண வரைத்தாளில் போன்று ஒரே தரமாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும்; y-அச்சு லாகிருத முறையில் அளவிடப்பட்டிருக்கும். y–அச்சினில் 1, 10; 10, 100; 100, 1000 என்பன போன்ற இணைந்த எண்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் ஒரே அளவாக அமையும். அத்தகு வரைத்தாளிற்கு ஒரு பக்க லாகிருதத் தாள் (Semilogarithmic paper) எனப் பெயராகும்.

இரு பக்க லாகிருதத் தாள்

$y = a\,x^m$ என்ற சமன்பாட்டில் மாறிகளை ஏற்ற முறையில் மாற்றியமைக்க $\log y = m \log x + \log a$ எனக் கண்டு, அதன் மூலம் $Y = mX + c$ என்ற நேர்கோட்டினைக் கண்டோம். இதனை வரைந்துகாட்டப் பயன்படுவது இருபக்க லாகிருதத் தாளாகும். இதில் x, y ஆகிய இரண்டு அச்சுகளும் லாகிருத முறையில் அளவிடப்பட்டிருக்கும். இதனை லாக்லாக் தாள் எனவும் அழைப்பதுண்டு. எனவே, சாதாரண வரைபடத்தில் $y = a\,x^m$ என்ற வளைகோடாக அமைவது லாக்லாக் தாளில் $Y = mX + c$ என்ற நேர்கோடாக அமைகிறது.

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின் பிறிதொரு பயன்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை, அதில் காணப்படும் மாறிகளின் எண்ணிக்கையைவிட அதிகமானால், அம்மாறிகளின் மிகப் பொருத்தமான மதிப்புகளைக் காண இக்கொள்கை பயன்படுகிறது.

α, β என்பன இரு மாறிகள் என்க. அவைகள் காணப்படும் சமன்பாடுகள் :

$$a_1\,\alpha + b_1\,\beta = c_1$$
$$a_2\,\alpha + b_2\,\beta = c_2$$
$$a_3\,\alpha + b_3\,\beta = c_3 \text{ என்க.}$$

α, β-க்களின் மிகப் பொருத்தமான மதிப்புகள் முறையே x, y என்க. எனில், விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல்

$$= (a_1x + b_1y - c_1)^2 + (a_2x + b_2y - c_2)^2 + (a_3x + b_3y - c_3)^2$$

$$= f(x,y).$$

x y-ம் முறையே α, β-வின் மிகப் பொருத்தமான மதிப்புகளென அமையவேண்டுமெனில், குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின்படி,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள் :

$$a_1(a_1x + b_1y - c_1) + a_2(a_2x + b_2y - c_2) + a_3(a_3x + b_3y - c_3) = 0$$

$$b_1(a_1x + b_1y - c_1) + b_2(a_2x + b_2y - c_2) + b_3(a_3x + b_3y - c_3) = 0.$$

(அ-து)

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)y - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = 0$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)y - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = 0.$$

(அ-து) $Ax + By = C$

$A'x + B'y = C'$.

இவை இரண்டையும் தீர்வுகாணப் பெறப்படும் x, y மதிப்புகள், முறையே α, β-வின் மிகப் பொருத்தமான மதிப்புகளாகும்.

பயிற்சி

(1) வேலையில்லாத் திண்டாட்ட நிலையினை விளக்கும் கீழ்க் கண்ட பட்டியலுக்கேற்ற ஒரு நேர்கோடு காண்க.

ஆண்டு	1945	1946	1947	1948
மொத்தத் தொழில் நிலையில் வேலையற்றவரின் சதவீதம்	2·1	2·2	3·0	5·1
ஆண்டு	1949	1950	1951	1952
மொத்தத் தொழில் நிலையில் வேலையற்றவரின் சதவீதம்	6·4	6·7	7·2	7·9

1959-ல் வேலையற்றவரின் சதவீதம் என்ன ? (செ.ப.)

(2) கீழ்க்கண்டது ஒரு விலைப்பட்டியலாகும். அதனை ஓர் இருபடி பரவளைவில் பொருத்துக:

ஆண்டு	1875	1876	1877	1878	1879	1880
விலை	88	87	81	78	74	79
ஆண்டு	1881	1882	1883	1884	1885	
விலை	85	84	90	92	100	

(தி.ப. ; செ.ப.)

(3.) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு ஓர் இருபடி பரவளைவு பொருத்துக. மேலும், மதிப்புகளின் விலக்க வர்க்கக் கூடுதலையும் காண்க.

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	14	18	23	29	36	40	46

(4) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒருவகைப் பூவிலுள்ள இதழ்களில் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. மிகப் பொருத்தமான $y = a\,e^{bx}$ என்ற வடிவ வளைகோட்டினைக் காண்க.

இதழ்களின் எண்ணிக்கை	5	6	7	8	9	10
பூக்களின் எண்ணிக்கை	133	55	23	7	2	2

(5.) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 1922-29 ஆண்டுகளில் அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டில் உற்பத்தியான பெட்ரோலியம் அளவினைக் காட்டுகிறது.

ஆண்டு	1922	1923	1924	1925
உற்பத்தி அளவு (மில்லியன் பவுண்டில்)	557·5	732·4	713·9	763·7
ஆண்டு	1926	1927	1928	1929
உற்பத்தி அளவு (மில்லியன் பவுண்டில்)	770·9	901·1	901·5	1007 3

$\log y = a + b\,x$ என்ற வளைகோட்டினைப் பொருத்துக. 1922-29 ஆண்டுகளில் பெட்ரோலியத்தின் உற்பத்திப் பெருக்க வேகத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

(6.) கீழ்க்காணும் பட்டியல் தரும் ஆண்டுகளில் சுற்றுலாப் பிரயாணிகளுக்குரிய லாகிருத வரைபடத்தினை வரைக. உமது கண்ணோட்ட விளக்கத்தினைக் கூறுக.

ஆண்டு	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
சுற்றுலாப் பிரயாணிகள் (ஆயிரத்தில்)	19·9	25·4	28·1	39·2	43·6	68·9	80·5

(செ.ப.)

(7.) $y = a e^{bx+cx^2}$ என்ற வளைகோட்டினைக் கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு புள்ளிவிபரத்திற்குப் பொருத்தும் விதத்தினை விளக்குக. எந்தச் சூழ்நிலைகளில் $y = a + bx + cx^2$ ஐவிட இது சிறந்தது? (செ.ப.)

(8.) x, y ஆகியவற்றின் 50 ஜோடி மதிப்புகள் தரப் பட்டுள்ளன. $y x^a = b$ என்ற சமன்பாட்டில் a, b நிலை உறுப்பு கள். இதனைப் பொருத்தும் விதத்தினை விளக்குக. (செ.ப.)

9. ஒட்டுறவு

x, y என்ற இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உறவினையும் அதன் அளவினையும் காண்பதும் புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும் பகுதியாகும். உறவுள்ள இவ்விரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவு அளக்கப்பட வேண்டும். மழை அளவும் பயிர் விளைச்சலும் உறவுள்ள இரு மாறிகளாகும். மனிதர்களின் உயரமும் பருமனும் அத்தகு மாறிகளேயாகும். இதற்கு மாறிகள் உறவு நேர்மறையாகவும் எதிர்மறையாகவும் இருக்கலாம். மழை அளவும் உற்பத்தி அளவும் நேர்மறை உறவில் உள்ளன. பொருளின் விலையும் விற்பனை அளவும் எதிர் மறையாக அமையலாம்; விற்பனை அளவு பெருகப் பெருக, பொருள் விலை குறையலாம்.

அத்தகு இரு x, y மாறிகளின் இடையுறவினை அல்லது ஒட்டுறவினை (Correlation) அளப்பது எங்ஙனம்? அளக்கும் கருவி யாது? $\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})^2$ என்பது x மாறி $\bar{x}$-லிருந்து அமையும் விலகலை அளப்பதென்பதை நாம் முன்னர் கண்டோம். இதுபோன்றே $\frac{1}{N}\sum(y-\bar{y})^2$ என்பது y மாறி $\bar{y}$-லிருந்து விலகியிருக்கும் தன்மையைக் காட்டும் அளவையாகும். எனவே, x, y ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைவிலகலை (Co-variation) அளக்கும் கருவியாக அமைவது $P=\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ என்ற பெருக்குச் சுழல் திறனாகும். இந்த இணைவிலகல் திறனையே ஒட்டுறவு அளவையாகக் கொள்ளலாம். ஆனால், x என்பது ஓர் அலகிலும் y என்பது பிறிதோர் அலகிலும் சொல்லப்பட்டிருக்கலாம். எனவே, இப்பெருக்குச் சுழல்திறன், σx, σy என்ற முறையே x, y-ன் திட்ட விலக்கங்களால் வகுக்கப்பெறின், அலகுகளினின்று

விடுபட்டு வெற்றெண்ணாக அமையும். எனவே, ஒட்டுறவு அளவுத் திறனாக $r = \frac{1}{N} \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma x \sigma y}$ என்பதைக் கொள்ளுகின்றோம். இதற்குப் பியர்ஸான் பெருக்குச் சுழல் ஒட்டுறவுக் கெழு (Pearson's Product-Moment Coefficient of Correlation) எனப் பெயராகும்.

ஒட்டுறவுக்குரிய சுருக்கச் சூத்திரம் காணுதல்

$$P = \frac{1}{N} \sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \sum [\{(x-A)+(A-\bar{x})\}\{(y-B)+(B-\bar{y})\}]$$

(A,B ஏதாவது இரு மதிப்புகள்)

$$= \frac{1}{N} \sum (x-A)(y-B) + \frac{1}{N}(B-y)\sum(x-A)$$

$$+ \frac{1}{N}(A-\bar{x})\sum(y-B) + (A-\bar{x})(B-\bar{y})$$

$$= \frac{1}{N}\sum d_x d_y + \frac{1}{N}(B-\bar{y})\sum d_x + \frac{1}{N}(A-\bar{x})\sum d_y +$$

$$(A-\bar{x})(B-\bar{y}) \quad \{d_x = x-A;\ d_y = y-B\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum d_x d_y + (B-\bar{y})(\bar{x}-A) + (A-\bar{x})(\bar{y}-B)$$

$$+ (A-\bar{x})(B-\bar{y}) \left\{\because \bar{x} = A + \frac{\sum d_x}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum d_x d_y - (\bar{x}-A)(\bar{y}-B)$$

$$= \frac{1}{N}\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x}{N} \cdot \frac{\sum d_y}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\sum d_x d_y - \sum d_x \cdot \sum d_y\right\}$$

$\therefore\ r = \frac{P}{\sigma x \sigma y}$ · இங்கு $P = \frac{\sum d_x d_y - \sum d_x \cdot \sum d_y}{N}$.

குறிப்பு :

ஓர் இருவழி அலைவுப் பரவலில்

$$P = \frac{\sum f_x d_x d_y - \sum f_x d_x \cdot \sum f_y d_y}{N} c_1 c_2.$$

இங்கு c_1 = ஒரு பக்கப் பிரிவின் தூரம்
c_2 = மறுபக்கப் பிரிவீன் தூரம்
d_x = c_1-ன் மடங்குகள்
d_y = c_2-ன் மடங்குகள்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

தந்தை, மகன் உயரங்களைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது. ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	65	66	67	67	68	69	71	72	73
மகன் உயரம் (அங்குலத்தில்)	67	68	64	68	72	70	70	69	70

x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
65	67	0	2	0	4	0
66	68	1	3	1	9	3
67	64	2	−1	4	1	−2
67	68	2	3	4	9	6
68	72	3	7	9	49	21
69	70	4	5	16	25	20
71	70	6	5	36	25	30
72	69	7	4	49	16	28
73	70	8	5	64	25	40
618	618	33	33	183	163	146

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum d_x^2}{N} - \left(\frac{\sum d_x}{N}\right)^2$$

$$= \frac{183}{9} - \left(\frac{33}{9}\right)^2 = \frac{558}{92}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum d_y^2}{N} - \left(\frac{\sum d_y}{N}\right)^2$$

$$= \frac{163}{9} - \left(\frac{33}{9}\right)^2 = \frac{378}{9^2}$$

$$P = \frac{\sum d_x d_y}{N} - \frac{\sum d_x}{N} \cdot \frac{\sum d_y}{N}$$

$$= \frac{146}{9} - \frac{33}{9} \cdot \frac{33}{9} = \frac{225}{9^2}$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{225}{\sqrt{558 \times 378}} = 0 \cdot 49.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

x, y-க்குரிய ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

x ↓ \ y →	−2·5	−·5	1·5	3·5	5·5
−10	2		7		1
−4	3	8	9	4	2
2	1	7	17	10	
8		2	2	7	6
14	1	3		1	2
20				3	2

$$\sigma_x^2 = \left\{\frac{\sum f_x d_x^2}{N} - \left(\frac{\sum f_x d_x}{N}\right)^2\right\} \times c_1^2$$

$$= \left\{\frac{256}{100} - \left(\frac{-100}{100}\right)\right\} c_1^2$$

$$= \frac{15,600}{100^2} c_1^2$$

$$\sigma_y^2 = \left\{\frac{\sum f_y d_y^2}{N} - \left(\frac{\sum f_y d_y}{N}\right)^2\right\} \times c_2^2$$

$$= \left\{\frac{125}{100} - \left(\frac{17}{100}\right)^2\right\} c_2^2$$

$$= \frac{12211}{100^2} c_2^2$$

x↓ y→	−2.5 (−2)	−.5 (−1)	1.5 (0)	3.5 (1)	5.5 (2)	மொத்தம்	$f_x d_x$	$f_x d_x^2$	$f d_x d_y$
−10 (−3)	6 2 (12)		0 7 (0)		−6 1 (−6)	10	−30	90	6
−4 (−2)	4 3 (12)	2 8 (16)	0 9 (0)	−2 4 (−8)	−4 2 (−8)	26	−52	104	12
2 (−1)	2 1 (2)	1 7 (7)	0 17 (0)	−1 10 (−10)		35	−35	35	−1
8 (0)		0 2 (0)	0 2 (0)	0 7 (0)	0 6 (0)	17	0	0	0
14 (1)	−2 1 (−2)	−1 3 (−3)		1 1 (1)	2 2 (4)	7	7	7	0
20 (2)				2 3 (6)	4 2 (8)	5	10	20	14
மொத்தம்	7	20	35	25	13	100	−100	256	31
$f_y d_y$	−14	−20	0	25	26	17			
$f_y d_y^2$	28	20	0	25	52	125			
$f d_x d_y$	24	20	0	−11	−2	31			

$$P = \left[\frac{\sum f\, d_x\, d_y}{N} - \frac{\sum f_x\, d_x}{N} \cdot \frac{\sum f_y\, d_y}{N}\right] c_1\, c_2$$

$$= \left[\frac{31}{100} - \left(\frac{-100}{100}\right)\left(\frac{17}{100}\right)\right] c_1\, c_2$$

$$= \frac{4800}{100^2}\, c_1\, c_2$$

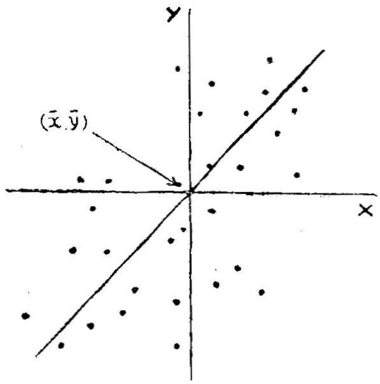
$$r = \frac{P}{\sigma_x\, \sigma_y}$$

$$= \frac{4800}{\sqrt{15{,}600 \times 12{,}211}}$$

$$= \mathbf{0 \cdot 85.}$$

சிதறல் விளக்கப் படம்

x, y என்பன ஒன்றுக்கொன்று உறவுள்ள இரு மாறிகள் என்க. அவைகளின் பல்வேறு ஜோடி மதிப்புகளை ஒரு வரைபடத்தில் புள்ளிகளாக அமைத்தால் பெறப்படுவது சிதறல் விளக்கப் படம் (Scatter diagram) ஆகும்.



படம் 11.

ஒட்டுறவுக் கோடுகள்

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் புள்ளிகள் அமைந்த தன்மையினைக் கொண்டு, x, y-க்குள்ள உறவினைக் குத்துமதிப்பாகக் கூறலாம். அப்புள்ளிகள் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கோடுகளைச் சுற்றிச் சுழன்று அமைந்து கிடப்பின், x, y-க்குள்ள உறவினை அது

தெளிவுபடுத்தும்; அன்றி, தாள் முழுவதும் விரிந்து பரந்து கிடந்தால் அம்மாறிகளிடையே உறவின்மையைப் புலப்படுத்தும்.

xஐத் தனி மாறியாகவும், yயினைச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டால், பொருத்தக்கூடிய மிகச் சிறந்த ஒருவகை நேர் கோட்டினை $y=mx+c$ என்ற வடிவிலும் yயைத் தனி மாறியாகவும் xஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டால், பொருத்தக்கூடிய மிகச் சிறந்த வேறொருவகை நேர்கோட்டினை $x=m'x+c'$ என்ற வடிவிலும் பெறலாம். இக்கோடுகளைச் சுற்றித்தான் புள்ளிகள் அமைந்து கிடக்கும். இத்தகு கோடுகளுக்கு ஒட்டுறவுக் கோடுகள் (Regression Lines) எனப் பெயராகும். முன்னதற்கு, x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடெனவும், பின்னதற்கு y-ன்மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடெனவும் கூறப்படுகின்றன.

ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காணுதல்

பொருத்தப்படக்கூடிய மிகச் சிறந்த நேர்கோடு $y=mx+c$ என்க. எனில் பெறப்படும் இயல் சமன்பாடுகள்

$$m\sum x + nc = \sum y \qquad (1)$$
$$m\sum x^2 + c\sum x = \sum xy \qquad (2)$$

(1)ஐ n ஆல் வகுக்க,

$$m\bar{x} + c = \bar{y}$$

நாம் கருதும் நேர்கோடு $mx+c=y$ ஆகையால், அந்த ஒட்டுறவுக் கோடு $(\bar{x}\ \bar{y})$ வழியாகச் செல்கிறது என்பதை இது காட்டுகிறது.

மூலப்புள்ளியினை $(\bar{x}\ \bar{y})$-க்கு மாற்ற, நாம் பெறுவது

$$c = 0$$

$$Y = mX \quad \begin{cases} X = x-\bar{x} \\ Y = y-\bar{y} \end{cases}$$

எனவே (2) ஆவது சமன்பாடு

$$m\sum X^2 = \sum XY$$

$$\therefore\quad m = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$

$$= \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\frac{1}{N}\sum (x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{P}{\sigma_x^2}$$

எனவே, x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y = \frac{P}{\sigma_x^2} X$$

(அ-து) $(y-\bar{y}) = \frac{P}{\sigma_x^2}(x-\bar{x})$

(அ-து) $(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$

இதுபோன்றே y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$X = \frac{P}{\sigma_y^2} Y$$

(அ-து) $(x-\bar{x}) = \frac{P}{\sigma_y^2}(y-\bar{y})$

(அ-து) $(x-\bar{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$

குறிப்பு :

(1) $\frac{P}{\sigma_x^2}$ என்பது x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுக்கெழு எனவும், $\frac{P}{\sigma_y^2}$ என்பது y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுக்கெழு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

(2) $r^2 = 1$ யெனில், இவ்விரு உறவுக் கோடுகளும் ஒன்றன் மேல் ஒன்று பொருந்துகின்றன. அதாவது, முழுமையான உறவு உள்ளபோது இக்கோடுகள் பொருந்துகின்றன.

(3) x, y களுக்கிடையே உறவேயில்லையெனில், இக்கோடுகள் இரண்டும் குத்துக் கோடுகளாக அமையும்.

(4) $-1 < r < 1$ ஆக இருக்கும்போது கோடுகள் இரண்டும் தனித்தனியாக வெவ்வேறாக அமையும்.

(5) இவ்விரு கோடுகளும் $(\bar{x}\ \bar{y})$யில் சந்திக்கின்றன.

ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் பயன்கள்

ஒரு மாறியின் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால், மற்றொரு மாறியின் சிறந்த மதிப்பினைத் தீர்மானிக்க இக்கோடுகள் உதவுகின்றன. இவ்வாறு தீர்மானிக்கும்போது, x-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு, அதற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைக் காண, x-ன் மேல் y-ன் உறவுக் கோட்டினையும், y கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான x-ன் மதிப்பைக் காண y-ன்மேல் x-ன் உறவுக்கோட்டினையும் பயன் படுத்தவேண்டும். x, y-யும் ஒன்றையொன்று சார்ந்த மாறிகளாக அமைந்த தருணங்களில், இரண்டு கோடுகளையும், ஒரு மாறி மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டு அதன் இணையான மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் காணப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

தந்தை, மகன் வயது பட்டியலில், மாறிகளின் உறவுக் கோடுகளைக் காண்க.

$$\bar{x} = \frac{618}{9} = 69{\cdot}7\,; \quad \bar{y} = 69{\cdot}7$$

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = \frac{225}{558} = 0{\cdot}4$$

$$\frac{P}{\sigma_y^2} = \frac{225}{378} = 0{\cdot}6$$

x-ன் மேல் y-ன் உறவுக்கோடு :

$$(y - 69{\cdot}7) = 0{\cdot}4\,(x - 69{\cdot}7)$$

$$y = 0{\cdot}4\,x + 41{\cdot}82$$

y-ன் மேல் x-ன் உறவுக்கோடு,

$$(x - 69{\cdot}7) = 0{\cdot}6\,(y - 69{\cdot}7)$$

$$x = 0{\cdot}6\,y + 27{\cdot}88$$

மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை

x-ன் மேல் y-ன் உறவுக் கோட்டிலிருந்து, y-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கிறோம். இந்த y-ன் மதிப்பிற்கும், அதன் மெய்யான மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு d யெனில் $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$ என்பது y மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை (Standard Error) ஆகும். இது y

மதிப்பீட்டுப் பிழைகளின் திட்ட விலக்கமாகும். இதனை S_y எனக் குறிக்கின்றோம்

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

$$\therefore \quad NS_y^2 = \sum d^2$$

$$= \sum \left(Y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X\right)^2$$

$$= \sum Y^2 - 2r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\sum XY + r^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\sum X^2$$

$$= N\sigma_y^2 - 2r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot Nr\,\sigma_x\,\sigma_y + r^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}N\sigma_x^2$$

$$= N\sigma_y^2 - 2\,N\,r^2\,\sigma_y^2 + N\,r^2\,\sigma_y^2$$

$$= N\,\sigma_y^2\,(1-r^2)$$

$$\therefore \quad S_y^2 = \sigma_y^2\,(1-r^2)$$

இது போன்றே $S_x^2 = \sigma_x^2\,(1-r^2)$

குறிப்பு :

$$1-r^2 = \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}$$

வலப் பக்கம் ஒரு நேர்மறை எண்ணுகையால்,

$1 - r^2 = +$ எண் அல்லது பூஜ்யம்

$$\therefore \quad r^2 \leq 1$$

$$\therefore \quad -1 \leq r \leq 1.$$

தர ஒட்டுறவு

இரு மாறிகளின் மெய்யான மதிப்புகள் பெறப்படாத நிலையில், அம்மாறிகள் தரமதிப்புகள் (Ranks) பெறப்படலாம். அத்தரங்களிடையே உள்ள உறவு ஓரளவிற்கு அம்மாறிகளின் இடை உறவினை எடுத்துக் காட்டும். இந்தத் தர ஒட்டுறவைக் (Rank Correlation) காண, ஒட்டுறவுக் கோடு நேர்கோடாக அமையுமென அனுமானத்தில், பியர்ஸான் பெருக்குச் சுழல்திறன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். எனில் மாறிகளின் தரம், இயலெண்களாக மாறுகின்றன.

x:	1	2	3		n
y:	5	9	8 ...... n		2

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{n\,(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

இது போன்றே $\sigma_y^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$

$z = x - y$ என்க.

$$\frac{\sum z}{n} = \frac{\sum x}{n} - \frac{\sum y}{n}$$

(அ-து) $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$

$$\therefore\ (z - \bar{z}) = (x - \bar{x}) - (y - \bar{y})$$

$$\therefore\ \sum (z - \bar{z})^2 = \sum (x - \bar{x})^2 + \sum (y - \bar{y})^2 - 2\sum (x - \bar{x})\,(y - \bar{y})$$

$$\therefore\ \frac{\sum (z - \bar{z})^2}{n} = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} + \frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n} - \frac{2\sum (x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n}$$

(அ-து) $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\,p$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\,r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$\therefore\ r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

இங்கு $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 0$

$$\therefore\ \sigma z^2 = \frac{\sum z^2}{n} = \frac{\sum (x-y)^2}{n}$$

$$\therefore\ r = \frac{2\,\dfrac{(n^2-1)}{12} - \dfrac{1}{n}\sum (x-y)^2}{\dfrac{2\,(n^2-1)}{12}}$$

$$=\frac{\frac{n^2-1}{6}-\frac{\sum d^2}{n}}{\frac{n^2-1}{6}} \{\because \quad x-y=d\}$$

$$=1-\frac{6\sum d^2}{n\,(n^2-1)}$$

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை p ஆல் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\therefore \quad p=1-\frac{6\sum d^2}{n\,(n^2-1)}$$

குறிப்பு :

மேலே கண்ட $r=\frac{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2-\sigma_z{}^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$ என்ற சூத்திரமும் rஐக் கணக்கிடப் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

20 மாணவர்கள் A, B ஆகிய இரண்டு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு; அவைகளின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

A : 90, 47, 68, 57, 76, 61, 30
44, 82, 58, 49, 65, 63, 69
72, 37, 59, 77, 53, 40

B : 73, 61, 70, 40, 72, 39, 18
62, 66, 65, 60, 91, 67, 34
51, 48, 53, 82, 76, 17

தரநிலை

A : 1, 16, 7, 13, 4, 10, 20
17, 2, 12, 15, 8, 9, 6
5, 19, 11, 3, 14, 15

B : 4, 11, 6, 16, 5, 17, 19
10, 8, 9, 12, 1, 7, 18
14, 15, 13, 2, 3, 20

d: 3, 5, 1, 3, 1, 7, 1, 7
6, 3, 3, 7, 2, 8, 9
4, [illegible], 1, 11, 5

d^2 : 9, 25, 1, 9, 1, 49, 1
49, 36, 9, 9, 49, 4, 64, 81
16, 4, 1, 121, 25

$$\sum d^2 = 563$$

$$p = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\,(n^2-1)}$$

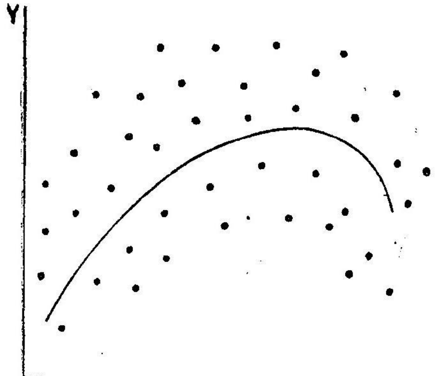
$$= 1 - \frac{6\times 563}{20\times 399}$$

$$= \frac{4602}{7980}$$

$$= 0{\cdot}58$$

ஒட்டுறவு விகிதம்

உறவுள்ள இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் அமைந்த சிதறல் விளக்கப்படம் காட்டும் புள்ளிகளுக்கு, சில தருணங்களில் நேர் கோட்டினை ஒட்டுறவுக் கோடாகப் பொருத்த முடியாது. உறவுக் கோடு வளைகோடாக அமையலாம். வயது, உடல் வலிமை ஆகிய இரண்டிற்கும் உறவு கண்டால், ஏறத்தாழ 35 வயது வரை இரண்டும் ஒன்று சேர்ந்து வளர்வதையும், பின்னர் வயது மட்டும் வளர, உடல்வலிமை குறைவதையும் காணலாம். அங்கு உறவுக்



படம் 12.

கோடு வளைகோடாக அமையும். உறவுக்கோடுகள், வளைகோடு களாக அமைகின்ற மாறிகளின் உறவினை அளவிட, பியர்ஸான்

ஒட்டுறவுக்கெழு பொருத்தமான கருவியன்று; அதற்குப் பயன் படுவது ஒட்டுறவு விகிதம் (Correlation Ratio) ஆகும்.

நாம் கண்டது $S_y^2 = \sigma_y^2 (1-r^2)$

$$\therefore\ 1-r^2 = \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

$$r^2 = 1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

$$\therefore\ r = \pm\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

S_y^2 என்பது, உறவுக் கோட்டிலிருந்து பெற்ற y-ன் விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகும். இருவகைப் பட்டியலில், நெட்டு வாக்குப் பிரிவுகளில் (Columns) அமைந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து கண்ட y–ன் விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி S'^2_y என்க. அதாவது $S'^2_y = \frac{1}{N}\sum\sum(y-\bar{y}_i)^2$. இங்கு நெட்டு வாக்குப் பிரிவினில் அடங்கியுள்ள மதிப்புகளின் கூடுதலை ஒரு கூட்டுக் குறியும், நெட்டுப் பிரிவிற்குப் பிரிவு எடுக்கப்படும் கூடுதலை மற்றொரு பிரிவும் காட்டுகிறது.

$\eta_y = \sqrt{1-\frac{S'^2_y}{\sigma_y^2}}$ என்பது x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவு விகிதமெனக் கொள்ளப்படுகிறது. இது போன்றே, $\eta_x = \sqrt{1-\frac{S'^2_x}{\sigma_x^2}}$ என்பது y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவு விகிதமாகும். உறவுக்கோடு நேர்கோடாக அமைகின்ற நிலைகளில் இந்த விகிதங்கள் $\eta_y = \eta_x = 0$ ஆகும்.

ஒட்டுறவு விகிதம், இரு திட்ட விலக்கங்களின் விகிதமாகக் காட்டுதல்

i ஆவது y-ன் நெட்டுப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y}_i$ என்றும், நெட்டுப் பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் திட்ட விலக்கம் σ_{my} எனவும் கொள்க.

$$N\sigma_y^2 = \sum(y-\bar{y})^2$$
$$= \underset{\text{நெ.பி. 1}}{\sum(y-\bar{y})^2} + \underset{\text{நெ.பி. 2}}{\sum(y-\bar{y})^2} + \ldots\ldots$$

முதலாவது நெட்டுப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y}_1$ யெனில்,

$$\sum_{\text{நெ.பி } 1} (y - \bar{y})^2 = \sum_{\text{நெ.பி } 2} (y - \bar{y}_1)^2 + f_1 (\bar{y}_1 - \bar{y})^2$$

$$\therefore \; N\sigma_y^2 = \sum \sum (y - \bar{y}_i)^2 + \sum f_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$= NS'_y{}^2 + N\sigma_{my}{}^2$$

$$\therefore \; \sigma_y{}^2 = S_y{}^2 + \sigma_{my}{}^2$$

$$\therefore \; \eta_y{}^2 = \left(1 - \frac{S'_y{}^2}{\sigma_y{}^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_y{}^2 - S'_y{}^2}{\sigma_y{}^2}$$

$$= \frac{\sigma_{my}{}^2}{\sigma_y{}^2}$$

$$\therefore \; \eta_y = \frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

இதுபோன்றே

$$\eta_x = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$$

பயிற்சி

(1) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கணவன், மனைவியின் வயதினைக் காட்டுகிறது.

x: 22, 24, 26, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37

y: 18, 20, 20, 24, 22, 27, 21, 29, 27, 27, 27, 31, 30, 32

பியர்ஸான் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக. (அ.ப.)

(2) கீழ்க்கண்ட பட்டியல், கோதுமை, உருளைக்கிழங்கு ஆகிய உணவுப் பொருள்கள் 15 மாவட்டங்களில் விளைந்த நிலையைக் காட்டுகிறது.

கோதுமை	16	20	17	16	15	18	14	12	13	14	15	12	11	10	12
உருளைக் கிழங்கு	5	6	6	8	6	6	5	7	4	6	7	4	6	3	6

இவ்விளைச்சலுக்கிடையே உள்ள உறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக. கோதுமையின் விளைவு 33 யெனில், உருளைக்கிழங்கின் உற்பத்தியினை மதிப்பிடுக. (அ.ப.)

(3) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 1000 மனிதர்களின் உயரம், பருமனைக் காட்டும் இருவழி அலைவுப் பரவலாகும்.

பருமன் (பவுண்டில்)

உயரம் (அங்குலத்தில்)	85 – 100	100 –	115 –	130 –	145 –	160 –	175 –	190 – 205
60 – 62	3	9	1					
62 –	9	32	40	20	8	1		
64 –	7	39	95	51	31	4		
66 –	2	25	104	110	60	8	2	
68 –	1	4	42	71	49	40	5	2
70 –		1	5	11	32	35	4	
72 –			1	1	5	19	3	2
74 – 76				1		2	2	1

பருமனுக்கும் உயரத்திற்குமிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

(4) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டும், x, y-ன் உறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக. (செ ப.)

x \ y	41 – 45	36 – 40	31 – 35	26 – 30	21 – 25
1 – 5				9	15
6 – 10			10	11	
11 – 15		7	9	4	
16 – 20		13	5		
21 – 25	14	3			

(5) ஓர் அழகு போட்டியில் 15 நங்கைகளுக்கு A, B என்ற இரு நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

இரு நீதிபதிகளும் பொதுவான அழகு கண்ணோட்டமுடையவர் களா என்பதை ஆய்க.

A: 36, 42, 35, 29, 45, 53, 48, 40, 35, 37, 44, 53, 62, 41, 25

B: 68, 59, 46, 84, 48, 59, 60, 45, 54, 53, 58, 80, 75, 64, 70

(6) x, y உறவற்ற இரு மாறிகள். $u = x + y$; $v = x - y$. u, v களுக்கிடையே உள்ள உறவுக் கெழுவினை, அவ்விரு மாறி களின் திட்ட விலக்கங்களில் காண்க. (அ.ப.)

(7) $x = 4y + 5$; $y = kx + 4$ என்பன இரு உறவுக் கோடு களாகும். எனில் $0 \leq k \leq \frac{1}{4}$ என நிறுவுக. $k = \frac{1}{8}$ யெனில், $\bar{x}, \bar{y}, r$ ஐக் காண்க. (ஆ.ப.)

(8) x, y என்பன இரு ராண்டம் மாறிகள். அவை $(x_i\ y_i)_{i=1,2,3,\ldots n}$ மதிப்புகளைப் பெறத்தக்கன. x-ன் மேல் y-ன் உறவுக்கோடு $a+bx$ வடிவத்தில் காண்க; y-ன் மேல் x-ன் உறவுக் கோடு $a'+b'y$ என்ற வடிவத்தில் அமைந்தால், x, y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு $\sqrt{b,b'}$ என நிறுவுக. (b, b' ஒரேவகை மாறிக் குறியை உடையன). (செ.ப.)

(9) x, y என்பன உறவுள்ள இரு ராண்டம் மாறிகள். x-ன் மேல் y-ன் உறவுக் கோட்டினைப் பயன்படுத்தி, $x = x_1$ யெனில் y-ன் மதிப்பாகிய y_1 யாது? இந்த y-ன் மதிப்பாகிய y_1ஐப் பயன் படுத்தி, y-ன் மேல் x-ன் உறவுக் கோட்டின் வாயிலாக, x-ன் மதிப் பாகிய x_2 ஐக் காண்க. இரு மாறிகளும் பூரண உறவில் அமைந்தால் என்ன நேரும்? (செ.ப.)

(10) x, y-ன் உறவினைத் தரும் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$. அவைகளின் உறவுக் கெழு -1 என நிறுவுக.

(11) 60 நிகழ்ச்சிகளில் கண்ட இரு உறவுக் கோடுகள்: $5x = 6y + 24$; $1000y = 768x - 3608$. உறவுக் கெழு யாது? (செ.ப.)

(12) ஓர் உறவுப் பட்டியல் தரும் உறவுக்கோடுகள்: $y = 0{\cdot}516x + 33{\cdot}73$; $x = 0{\cdot}512y + 32{\cdot}52$. x, y-ன் உறவுக் கெழுவினைக் காண்க. $\bar{x}, \bar{y}$ யாவை? (செ.ப.)

(13) இரு உறவுக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ. r அதன் ஒட்டுறவுக் கெழு. எனில் $\text{Sin}\,\theta \leq 1 - r^2$ என நிறுவுக.

(14) x, y-ன் இருவழி அலைவுப் பரவல் வருமாறு :

$y \backslash x$	x_1	x_2
y_1	n_{11}	n_{12}
y_2	n_{21}	n_{22}

x, y-ன் உறவுக் கெழு,

$$\frac{n_{11}\, n_{22} - n_{12}\, n_{21}}{\sqrt{(n_{11}+n_{12})\,(n_{21}+n_{22})\,(n_{11}+n_{21})\,(n_{21}+n_{22})}}$$

என நிறுவுக. (செ.ப.)

(15) x-ன் மேல் y-ன் உறவுக்கோடு $a+bx$; பிறிதொன்று $c+dy$. எனில் $\bar{x}$, $\bar{y}$, rஐக் காண்க. S_x, S_y—இவைகளிலிருந்து காண முடியுமா? (செ.ப.)

(16) r என்பது x, y-ன் உறவுக்கெழு. a, b ஆகியன இரண்டு நிலை உறுப்புகள். இவ்விரண்டின் அடையாளங்களும் (signs) ஒரே மாதிரியாக அமைந்தால், ax, by ஆகியவற்றின் உறவுக் கெழு r எனவும், அடையாளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மாறாக அமைந்தால், அது $-r$ யெனவும் நிறுவுக. (செ.ப.)

(17) x, y என்பன இரு மாறிகள். $\bar{x} = \bar{y}$. அவைகளின் உறவுக்கோடுகள் $y=ax+b$; $x=a'y+b'$. எனில் $b\,(1-a')= b'\,(1-a)$ என நிறுவுக. இவற்றிலிருந்து $\bar{x}$-ன் மதிப்பினையும், உறவுக் கெழுவின் மதிப்பினையும் காண்க. (செ.ப)

(18) கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிபரத்திற்கேற்ற உறவுக்கோடுகளைக் காண்க. $\bar{x} = 150$ பவு., $\sigma_n = 20$ பவு., $N = 1000$. $\bar{y} = 68$ அங்., $\sigma_y = 2{\cdot}5$ அங்., $\sum xy = 10{,}230{,}000$ (செ.ப.)

(19) x, y-ன் உறவுக் கெழு r எனில், $2x+3$, $4-3y$-ன் உறவுக் கெழுவினைக் காண்க. (செ.ப.)

(20) $3x=4y+9$; $1{\cdot}5\,y = 6x+7$

(i) x, yகளின் கூட்டுச் சராசரிகளையும், மாறிலிகளையும் (Variance) காண்க.

(ii) x, y களின் மாறிலிகளின் கூடுதல் 8 எனில், x, y களின் ஒட்டுறவுக் கெழு யாது? (செ.ப.)

10. இடைச் செருகல்

கைக்குக் கிடைத்த தொடர்ச்சியான ஒரு புள்ளி விபரத்தில், இடையில் உள்ள ஓர் எண்ணையோ, முன்னால் அல்லது பின்னுலுள்ள எண்ணையோ மதிப்பிட வேண்டியிருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, நம் நாட்டின் மக்கள்தொகை 1901, 1911, 1921, 1931, 1941, 1951, 1961 ஆகிய ஆண்டுகளில் கணிக்கப்பட்ட நிலையில் கைவசமுள்ளதாகக் கருதுவோம். எனில் 1939ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை என்ன என மதிப்பிட வேண்டியிருக்கும். அப் புள்ளி விபரத் தொடரில் இம் மதிப்பீட்டெண்ணைச் செருக வேண்டும். இம்முறைக்கு இடைச் செருகல் (Interpolation) எனப் பெயராகும். இதுபோன்றே, 1891, 1971ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகையினை மதிப்பிட வேண்டியிருக்கும். அம் முறைக்கு, வெளிச் செருகல் (Extrapolation) எனப் பெயராகும். ஒரு மாறியின் மதிப்பினை இடைச் செருகல் முறையால் மதிப்பிடும்போது, சில அடிப்படையான நிலைகளை நாம் அனுமானித்துக் கொள்கிறோம். அவையாவன :

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரத் தொடரில், மதிப்புகள் ஒரு நிலையிலிருந்து அடுத்த நிலைக்குத் திடீரென மிகையாக ஏறுவதோ இறங்குவதோ இல்லை.

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் மாறுபடுகின்ற மாறியின் மதிப்புகள் ஒரே சீராக (uniform) ஏறுகின்றன அல்லது இறங்குகின்றன.

இங்கு இடைச் செருகல் முறைகள் சிலவற்றைக் காண்போம். இங்குச் 'செருகல்' என நாம் குறிப்பிடுவது இடைச் செருகலை யாகும்.

நேர்கோட்டுச் செருகல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரங்களுக் கேற்ற மிகச் சிறந்த நேர்கோட்டினைப் பொருத்துகிறோம். பின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு இணையான y-ன் மதிப்பை, அந்நேர்கோட்டி லிருந்து மதிப்பிடுகிறோம். இரு ஜோடி மதிப்புகள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலையில், இம்முறை மிகப்பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

காலியான இடத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

x	y
16	4·45
17	...
18	4·64

$$\frac{x-16}{18-16}=\frac{y-4\cdot45}{4\cdot64-4\cdot45}$$

(அ-து) $0\cdot19\,x-2y+5\cdot86=0$

$x=17$ யெனில், $3\cdot23-2y+5\cdot86=0$.

$$y=\mathbf{4\cdot545}$$

பரவளைச் செருகல்

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட ஜோடி மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடங்களில், பொருத்தமான முறையே இரு படி அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட படி பரவளையைப் பொருத்த லாம். n ஜோடி மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் $(n-1)$ படி பரவளையைப் பொருத்தவேண்டுமெனக் கூறலாம். அதாவது, பொருத்தப்பட வேண்டிய பரவளை $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$. பின், $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண் பட்டியல் வருமாறு: ஏற்ற தொரு பரவளையைப் பொருத்தி, 1950ஆம் ஆண்டிற்கான குறியீட்டு எண்ணை மதிப்பிடுக. (செ.ப.)

ஆண்	1948	1949	1951	1952
குறியீட்டு எண்	100	107	157	212

x	-2	-1	0	1	2
y	100	107	?	157	212

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$100 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \quad (1)$$

$$107 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \quad (2)$$

$$157 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \quad (3)$$

$$212 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \quad (4)$$

(1) + (4)

$$312 = 2a_0 + 8a_2$$

$$156 = a_0 + 4a_2 \quad (5)$$

(2) + (3)

$$264 = 2a_0 + 2a_2$$

$$132 = a_0 + a_2 \quad (6)$$

(5) — (6)

$$24 = 3a_2$$

$$a_2 = 8$$

$$a_0 = 124.$$

$$107 = 124 - a_1 + 8 - a_3$$

$$a_1 + a_3 = 25 \quad (7)$$

$$100 = 124 - 2a_1 + 32 - 8a_3$$

$$2a_1 + 8a_3 = 56$$

$$a_1 + 4a_3 = 28 \quad (8)$$

(8) − (7) $3a_3 = 3$

$$a_3 = 1$$

$$a_1 = 24$$

$$\therefore \quad y = 124 + 24x + 8x^2 + x^3$$

$x = 0$ யெனில், $y = 124$

வேறுபாட்டு வழிச் செருகல்

x, y — இரு மாறிகளின் மதிப்புகளில், ஒரு மாறியின் வரிசை மதிப்புகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரில் அமையும்போது இம்முறை பயன்படுகிறது.

$(x_0\ y_0)$ $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ ...... $(x_n\ y_n)$ என்பன கொடுக்கப் பட்டுள்ள (x, y) மாறிகளின் மதிப்புகள் என்க.

மேலும் $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் என்க. அதில் அதிகரிப்பு எண் அல்லது பொது வித்தியாசம் (Common difference) h என்க.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0)$$
$$= \Delta(y_1 - y_0)$$
$$= \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0)$$
$$= \Delta(y_2 - 2y_1 + y_0)$$
$$= \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0$$
$$= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^4 y_0 = \Delta(\Delta^3 y_0)$$
$$= \Delta(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$
$$= \Delta y_3 - 3\Delta y_2 + 3\Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= (y_4 - y_3) - 3(y_3 - y_2) + 3(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$
$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

இதுபோன்றே

$$\Delta^n y_0 = y_n - n\, y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y_{n-2}$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots + (-1)^n y_n.$$

$$(x_0 y_0)\ (x_1 y_1)\ (x_2 y_2)\ \ldots\ (x_n y_n)$$

ஆகிய புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தப்பட வேண்டிய வளைகோடு,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ என்க.}$$
$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n$$
$$y_1 = a_0 + a_1(x_0 + h) + a_2(x_0 + h)^2 + \ldots\ \ldots + a_n(x_0 + h)^n.$$

$$y_1 - y_0 = a_1 h + a_2 (2hx_0 + h^2) + \ldots\ldots + a_n \left[nx_0^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + h^n \right]$$

எனவே, y_0 என்பது n படியானால்,

Δy_0 ஆவது $(n-1)$ படியாகும்.

$\therefore$ $\Delta^2 y_0$ என்பது $(n-2)$ படியாகும்.

$\Delta^3 y_0$ என்பது $(n-3)$ படியாகும்.

இதுபோன்றே $\Delta^n y_0$ என்பது $(n-n) = 0$ படியாகும்.

அதாவது $\Delta^n y_0$ என்பது ஒரே நிலை உறுப்பாக அமையும்.

$\therefore \Delta^{n+1} y_0 = 0$ { $n+1$ மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை நோக்குக.

$$(\text{அ·து})\ y_{n+1} - (n+1) y_n + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} y_{n-1}$$

$$- \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n+1} y_{n+1} = 0.$$

இதனைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள x மதிப்பிற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட $f(x)$ன் மதிப்புகளிலிருந்து, $f(6)$ஐ மதிப்பிடுக.

$f(4) = 0 \cdot 7326008$

$f(5) = 0 \cdot 5952380$

$f(7) = 0 \cdot 4084968$

$f(8) = 0 \cdot 3439971$

$f(9) = 0 \cdot 2923978$

$f(10) = 0 \cdot 2506265$ (செ.ப.)

x:	4	5	6	7	8	9	10
y:	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$

x-ன் 6 மதிப்புகளுக்கு இணையான, y-ன் 6 மதிப்புகள் தரப் பட்டுள்ளன.

எனவே, $\Delta^6 y_0 = 0$

$$(\text{அ-து})\quad y_6 - 6 y_5 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} y_4 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y_2 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y_1 + y_0 = 0.$$

(அ-து) $0{\cdot}2506265 - 6\,(0{\cdot}2923978) + 15\,(0{\cdot}3439971) - 20\,(0{\cdot}4084968) + 15\,y_2 - 6\,(0{\cdot}5952380) + 0{\cdot}7326008 = 0.$

$$\therefore \quad y_2 = 0{\cdot}4901711.$$

நியூடன் இடைச் செருகல்

இம் முறையிலும் x-ன் மதிப்புகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரில் அமைந்திருக்க வேண்டும். $(x_n\, y_n)$ $n = 0, 1, 2, \ldots n$ என்ற மதிப்புகள் $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உட்பட்டவை என்க.

கூட்டுத் தொடரின் அதிகரிப்பு எண் h என்க.

$$\therefore \quad x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2h; \ldots x_n = x_0 + nh.$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$\Delta y_0 = \Delta f(x_0) = y_1 - y_0$$
$$= f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\therefore \quad f(x_0 + h) = (1 + \Delta) f(x_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\therefore \quad y_2 = 2y_1 - y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$= 2 f(x_0 + h) - f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$
$$= 2(1 + \Delta) f(x_0) - f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$
$$= (1 + 2\Delta + \Delta^2) f(x_0)$$
$$= (1 + \Delta)^2 f(x_0)$$

(அ-து) $$f(x_0 + 2h) = (1 + \Delta)^2 f(x_0)$$

இதுபோன்றே $f(x_0 + n\,h) = (1 + \Delta)^n f(x_0)$

$$= f(x_0) + n\,\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{1\,2} \Delta^2 f(x_0)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1{\cdot}2{\cdot}3} \Delta^3 f(x_0) + \ldots\ldots + \Delta^n f(x_0)$$

(அ-து) $$y_n = y_0 + n\,\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1{\cdot}2} \Delta^2 y_0 + \ldots\ldots + \Delta^n y_0$$

இதுவே நியூடன் இடைச் செருகல் சூத்திரமாகும். n-ன் எல்லா நேர்மறை மதிப்புகளுக்கும் (பின்னமானலும்) இது பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

நியூடன் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திணைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் 25 வயதிற்குள்ள பருவக் கட்டணத்தைக் கணக்கிடுக.

வயது	20	24	28	32
பருவக் கட்டணம்	0·01427	0·01581	0·01772	0·01996

(செ.ப.)

x	1	2	3	4
y	0·01427	0·01581	0·01772	0·01996

$x = 1\cdot25$ யெனில் $y = ?$

y	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
0·01427			
	·00154		
0·01581		·00037	
	·00191		0
0·01772		·00033	
	·00224		
0·01996			

$$y_{1\frac{1}{4}} = y_0 + \tfrac{5}{4}\triangle y_0 + \frac{\frac{5}{4}(\frac{5}{4}-1)}{1\cdot2}\triangle^2 y_0$$

$$= 0\cdot01427 + \tfrac{5}{4}(0\cdot00154) + \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}(\cdot00037)$$

$$= \mathbf{0\cdot016255}$$

லக்ராஞ்சி இடைச் செருகல்

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ \dots\ \dots\ (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ \dots\ \dots\ (x_0-x_n)}y_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ \dots\ \dots\ (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ \dots\ \dots\ (x_1-x_n)}y_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ \dots\ \dots\ (x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ \dots\ \dots\ (x_2-x_n)}y_2$$

$$+ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ \dots\ (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ \dots\ \dots\ (x-x_{n-1})}y_n$$

இந்த உறவு (x_0y_0); (x_1y_1); (x_2y_2); ... ... (x_ny_n) ஆகிய எல்லா மதிப்புகளையும் திருப்திப்படுத்தும்.

எனவே, இது இந்த $(n+1)$ புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைகோடாகும். இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து கொடுக்கப் பட்டுள்ள எந்தவொரு x-ன் மதிப்பிற்கும் இணையான y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். இங்கு x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடரில் அமையவேண்டுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

x, y-ன் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. $x = 10$ எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	5	9	11	14
y	168	130	100	85

லாக்ராஞ்சி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$y = \frac{(6-9)\,(6-11)\,(6-14)}{(5-9)\,(5-11)\,(5-14)}\,168 + \frac{(6-5)\,(6-11)\,(6-14)}{(9-5)\,(9-11)\,(9-14)}\,130$$

$$+ \frac{(6-5)\,(6-9)\,(6-14)}{(11-5)\,(11-9)\,(11-14)}\,100 + \frac{(6-5)\,(6-9)\,(6-11)}{(14-5)\,(14-9)\,(14-11)}\cdot 85.$$

$$= 149.$$

பயிற்சி

(1) கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் காலியிடத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

t	பரப்பு
1·3	0·4032
1·4	....
1·5	0·4332

(2) நீள்வட்டச் சார்பு, $S_n(x)$-ன் மதிப்புத் தரப்பட்டுள்ளது. $S_n(0_3)$யின் மதிப்பினை இடைச் செருகல் வழியில் காண்க.

x	$S_n(x)$
0 0	0·00000
0 1	0·09980
0·2	0·19841
0·4	0·38752
0 5	0·47595
0·6	0·55912

(செ.ப)

(3) காலி இடத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

x:	25	30	35	40	45
y:	23	26	...	35	42

(4) $\frac{x}{\sigma}$: 1·4 1·5 1·6 1·7

P: 0·9192 0·9332 0·9452 0·9554

$\frac{x}{\sigma} = 1·54$ எனில், Pயின் மதிப்பினைக் காண்க; P = 0·93 யெனில் $\frac{x}{\sigma}$ வின் மதிப்பினைக் காண்க.

(5) இரண்டாவது வேறுபாடு நிலையானதெனக் கொண்டு, T (x) யின் மதிப்பு மிகச் சிறியதாகயிருப்பதற்குரிய x-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

x	1·45	1·46	1·47
10+log T (x)	9·9472677	9·9472397	9·9472539

(செ.ப.)

(6) $x, f(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. $x = 27$ யெனில் $f(x)$ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	14	17	31	35
$f(x)$	68·7	64·0	44·0	39·1

(செ.ப.)

(7) $b_3 = 168$; $b_7 = 120$; $b_9 = 72$; $b_{10} = 63$. b_6, b_8-ன் மதிப்புகள் யாவை? (செ.ப.)

(8) $b_0 + b_8 = x$; $b_1 + b_7 = y$; $b_2 + b_6 = z$; $b_3 + b_5 = t$ b_4 ஐக் காண்க. (செ.ப.)

(9) b_xன் ஐந்தாவது வேறுபாடு நிலையானது. எனில்

$$b_{2\frac{1}{2}} = \frac{c}{2} + \frac{25(c-b) + 3(a-c)}{256}$$ என நிறுவுக. இங்கு

$a = b_0 + b_5$; $b = b_1 + b_4$; $c = b_2 + b_3$. (செ.ப.)

(10) $f(0) = 1$; $f(1) + f(2) = 10$; $f(3) + f(4) + f(5) = 65$. இரண்டாவது வேறுபாடு நிலையானதெனக் கொண்டு, $f(4)$ ஐக் காண்க. (செ.ப.)

(11) மூன்று மதிப்புகளுக்குரிய லக்ராஞ்சி சார்பி மிகக் குறைந்த அல்லது மிக அதிகமான மதிப்பைப் பெறுகையில்,

$$x = \frac{(b^2-c^2)f(a) + (c^2-a^2)f(b) + (a^2-b^2)f(c)}{2\{(b-c)f(a) + (c-a)f(b) + (a-b)f(c)\}}$$ என நிறுவுக.

(செ.ப.)

11. பண்புகளின் உறவு

கல்வியுடைய தன்மை, மணமான தன்மை, புத்திக் கூர்மைத் தன்மை போன்ற தன்மைகளைப் பண்புகள் (Attributes) என புள்ளியியலில் குறிப்பிடுகிறோம். இத்தகு பண்புகளை A, B, C ... போன்ற உரோமப் பெரிய எழுத்துகளாலும், அப் பண்புகளற்ற, கல்லாத் தன்மை, மணமாகாத் தன்மை, புத்திக் கூர்மையற்ற தன்மை போன்ற எதிர்மறை இயல்புத் தன்மைகளையும் பண்புகளெனவே குறிப்பிட்டாலும், அவைகளை α, β, γ ... ... என்ற கிரேக்க எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுகிறோம். A, α என்பன ஒன்றுக்கொன்று எதிர்மறை. A தன்மையுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையை (A) என்ற குறியாலும், γ தன்மையுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையை (γ) என்ற குறியாலும், இதுபோன்றே மற்றைய தன்மைகளை அதற்குரிய குறிகளாலும் எழுதுகிறோம். (A, B) என்பது A, B ஆகிய இரு பண்புகளுமுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். ஓர் ஆய்வுத் தொகையிலுள்ள மொத்த எண்ணிக்கை N எனில், கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் எளிதில் புலனாகும்.

$$N = (A) + (\alpha)$$
$$N = (B) + (\beta)$$
$$N = (AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta)$$
$$(A) = (AB) + (A\beta)$$
$$(\beta) = (A\beta) + (\alpha\beta)$$

(A), (B), (α) முதலியன ஓரினப் பண்பலைவெண்கள், (AB); ($A\beta$); ($A\gamma$) ... ... என்பன ஈரினப் பண்பலைவெண்கள், ($AB\gamma$), (ABC) முதலியன மூவினப்பண்பலை வெண்கள் எனக் கூறுகிறோம்; N ஆனது பூஜ்ய இன அலைவெண்ணாகும்.

புள்ளி விபரத்தின் மெய்நிலை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரங்கள் மெய்யானதாகயிருக்க வேண்டுமெனில், பண்பலைவெண்கள் நேர்மறை எண்களாகவோ, பூஜ்யமாகவோ இருக்க வேண்டும். அவை எதிர்மறை எண்களாக இருக்கக் கூடாது. புள்ளி விபரத்தின் மெய்நிலையை நிறுவ, பண்பலைவெண்கள் நேர்மறை எண்களே எனக் காட்டினால் போதுமானதாகும்.

குறிமுறை

$(A) = A \cdot N$ என எழுதுகிறோம்.

$(\alpha) = \alpha \cdot N$ ஆகும்.

எனவே, $A + \alpha = 1$

$$\alpha = 1 - A.$$
$$A = 1 - \alpha.$$
$$\begin{aligned}(\alpha\beta) &= \alpha\beta \,.\, N\\ &= (1 - A)(1 - B) \,.\, N\\ &= (1 - B - A + AB) \,.\, N\\ &= N - (B) - (A) + (AB)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta\,\gamma) &= \alpha\,\beta\gamma \,.\, N\\ &= (1-A)(1-B)(1-C) \,.\, N\\ &= (1-A-B-C+AB+AC+BC-ABC) \,.\, N\\ &= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(AC)\\ &\quad +(BC)-(ABC).\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$N = 2000$; $(A) = 1620$; $(B) = 1050$;

$(C) = 850$; $(AB) = 1140$; $(AC) = 710$;

$(BC) = 190$; $(ABC) = 590$.

இப் புள்ளி விபரத்தின் மெய்த்தன்மையை ஆய்க.

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta\,\gamma) &= (1-A)(1-B)(1-C) \cdot N\\ &= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(AC)+(BC)-(ABC)\\ &= 2000-1620-1050-850+1140+710+190-590\\ &= -70.\end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விபரம் மெய்யானதன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$N = 450;\ (A) = 30;\ (B) = 40;$

$(C) = 15;\ (AB) = 11,\ (BC) = 6;$

$(AC) = 8;\ (ABC) = 2$

மிக உயர்வினப் பண்பலெவெண்களைக் காண்க.

$(ABC) = 2$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

$$
\begin{aligned}
(AB\gamma) &= AB(1-C).N\\
&= (AB)-(ABC)\\
&= 11-2 = 9.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A\beta C) &= A(1-B)C.N\\
&= (AC)-(ABC)\\
&= 8-2 = 6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A\beta\gamma) &= A(1-B)(1-C).N\\
&= A(1-C-B+BC).N\\
&= (A)-(AC)-(AB)+(ABC)\\
&= 30-8-11+2\\
&= 13.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha BC) &= (1-A)BC\cdot N\\
&= (BC)-(ABC)\\
&= 6-2\\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta C) &= (1-A)(1-B)C\cdot N\\
&= (C)-(BC)-(AC)+(ABC)\\
&= 15-6-8+2\\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha B\gamma) &= (1-A)B(1-C)\cdot N\\
&= (B)-(BC)-(AB)+(ABC)\\
&= 40-6-11+2\\
&= 25
\end{aligned}
$$

$$(\alpha\beta\gamma) = (1 - A)(1 - B)(1 - C) \cdot N$$
$$= (N) - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) + (BC) - (ABC)$$
$$= 450 - 30 - 40 - 15 + 11 + 6 + 8 - 2$$
$$= 388.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

B பண்பு காணுத இடங்களைவிட, B பண்பு காணுமிடங்களில் A பண்பு மிகுந்த விகிதாசாரத்தில் நிகழ்கிறது. எனில் A காணுத இடங்களைவிட, A காணுமிடங்களில் B மிகுந்த விகிதா சாரத்தில் நிகழும் எனக் காட்டுக. (செ.ப.)

$$\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(\beta)} \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)}$$

$$\therefore \frac{(\beta)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(AB)}$$

$$\therefore \frac{(\beta)}{(B)} + 1 > \frac{(A\beta)}{(AB)} + 1$$

$$\text{(அ-து) } \frac{(B) + (\beta)}{(B)} > \frac{(AB) + (A\beta)}{(AB)}$$

$$\text{(அ-து) } \frac{N}{(B)} > \frac{(A)}{(AB)}$$

$$\therefore \frac{N}{(A)} > \frac{(B)}{(AB)}$$

$$\therefore \frac{N}{(A)} - 1 > \frac{(B)}{(B)} - 1$$

$$\text{(அ-து) } \frac{N - (A)}{(A)} > \frac{(B) - (AB)}{(AB)}$$

$$\frac{(\alpha)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(AB)}$$

$$\therefore \frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$$

இதுவே நிறுவ வேண்டியதாகும்.

தேற்றம்

(ABC ... n உறுப்புகள்) $\geqslant \{(A) + (B) + (C) + \dots\} - (n - 1\, N.)$

நிறுவுதல்

$(\alpha\beta) \geqslant 0$ { $\because$ எப் பண்பலேவெண்ணும் எதிர்மறையன்று}

(அ-து) $(1 - A)(1 - B) . N \geqslant 0$

$N - (B) - (A) + (AB) \geqslant 0$

$\therefore \quad (AB) \geqslant (A) + (B) - N \qquad (1)$

தற்போது $N - (C) = (\gamma) \geqslant (AB\gamma)$

$\therefore \quad -(AB\gamma) \geqslant (C) - N \qquad (2)$

(1) + (2),

$(AB) - (AB\gamma) \geqslant (A) + (B) + (C) - 2N.$

(அ-து) $(ABC) \geqslant (A) + (B) + (C) - 2N$

இதனை, n பண்புகளுக்கு விரிக்க, நாம் பெறுவது

$(ABC \ldots) \geqslant \{(A) + (B) + (C) + \ldots\} - (n - 1) . N$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு நாட்டுப்புறப் பகுதியில் 75% மக்கள் கடனாளியாகவும், குறைந்தது 80% மக்கள் நிலமற்றவர்களாகவும், குறைந்தது 85% அசுத்தமான இடங்களில் வாழ்பவர்களாகவும் காணப்பட்டனர். எனில் கடனாளியாகவும், நிலமில்லாமலும், அசுத்தமான இடங்களில் வசிப்பவர்களாகவுமிருப்பவர் குறைந்தது எத்தனை சதவீதமெனக் காண்க.

கடனாளித் தன்மை A என்க

நிலமற்ற தன்மை B என்க

அசுத்தமான இடத்தில் வாழும் தன்மை C என்க

தற்போது $(ABC) \geqslant (A) + (B) + (C) - 2N$

(அ-து) $(ABC) \geqslant 75 + 80 + 85 - 200$

(அ-து) $(ABC) \geqslant 40$

மூன்று தன்மையாலும் சூழப்பட்டவர்கள் குறைந்தது 40% ஆகும்.

இரு பண்புகளின் உறவு

$(AB) = \dfrac{(A) \times (B)}{N}$ என்றால், Aயும் Bயும் உறவற்ற பண்புகளெனவும், $(AB) > \dfrac{(A) \times (B)}{N}$ யெனில், A, B ஆகியன நேர்மறை உறவுடையன எனவும், $(AB) < \dfrac{(A) \times (B)}{N}$ யெனில், A, B ஆகியன நேர்மறை உறவுடையன எனவும் கூறுகிறோம்

பண்புறவுக் கெழுக்கள்

(1) யூல் பண்புறவுக் கெழு =

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

இங்கு Q ஆனது, கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலில் குறுக்கே பெருக்கிக் கண்ட இரு உறுப்புகளின் வேறுபாட்டுத் தொகுதியாகவும், அவைகளின் கூடுதல் பகுதியாகவும் அமைந்துள்ளது.

பண்பு	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	(Aβ)	($\alpha\beta$)	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

இக் கெழு $-1 \leqslant Q \leqslant 1$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்து கிடக்கும்.

$Q = -1$ யெனில் A, B உறவற்றவை $-1 < Q < 0$ யெனில் A, B எதிர்மறை உறவுடையன.

$Q = 0$ யெனில், A, B தனித்தன்மையன.

$0 < Q < 1$ யெனில், A, B நேர்மறை உறவுடையன.

$Q = 1$ யெனில், A, B முழு உறவுடையன.

பிறிதொரு கெழு $R = \dfrac{\sqrt{(AB)(\alpha\beta)} - \sqrt{(A\beta)(\alpha B)}}{\sqrt{(AB)(\alpha\beta)} + \sqrt{(A\beta)(\alpha B)}}$

Qவைப் போன்ற, R-ன் மதிப்பிலிருந்தும் A, Bயின் உறவினைத் தீர்மானிக்கலாம்.

$Q = \frac{2R}{1+R^2}$ என்பதனையும் எளிதில் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ள இரு பண்புகளின் Q, R கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

பண்புகள்	A	α
B	8	5
β	6	4

$$Q = \frac{32-30}{32+30} = \frac{2}{64} = \frac{1}{31}.$$

$$R = \frac{\sqrt{32} - \sqrt{30}}{\sqrt{32} + \sqrt{30}} = \frac{0{\cdot}18}{11{\cdot}134} = \frac{180}{1134}$$

பண்புகளின் தூர உறவு

C என்ற ஒரு பண்போடு இணைந்து, Aயும் Bயும் உறவு பெற்றால், A,B ஆகியன தூர உறவுடையன எனக் கூறுகிறோம்.

$(ABC) > \frac{(AC)\,(BC)}{(C)}$ யெனில், A, B ஆகியன நேர்மறை தூர உறவுடையன என்றும், $(ABC) < \frac{(AC)\,(BC)}{(C)}$ யெனில் அவை எதிர்மறை உறவுடையன என்றும் கூறுகிறோம்.

யூல் தூர உறவுக்கெழு $Q_{AB.C} = \frac{(ABC)\,(\alpha\beta C) - (A\beta C)\,(\alpha BC)}{(ABC)\,(\alpha\beta C) + (A\beta C)\,(\alpha BC)}$

Q கெழுவிலுள்ள ஒவ்வோர் அடைப்புக் குறியினுள்ளும் Cயைச் சேர்க்கப்படுவது, $Q_{AB.C}$ என்பதை நோக்குக.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

500 மாணவர்கள் கண் தெரியாதவர்கள். அவர்களின் புத்திக் கூர்மையை Aயும், உடல் வலிமையை Bயும் குறிக்கின்றன. $(AB) = 62$ $(A\beta) = 88$; $(\alpha B) = 100$; $(\alpha\beta) = 250$. எனில் A,B ஆகிய பண்புகளின் தூர உறவினைக் காண்க.

கண்தெரியாத் தன்மை C என்க.

$$(C) = 500$$
$$(AB) = (ABC) = 62$$
$$(A\beta) = (A\beta C) = 88$$
$$(\alpha B) = (\alpha BC) = 100$$
$$(\alpha\beta) = (\alpha\beta C) = 250$$

$$Q_{AB.C} = \frac{(62 \times 250) - (88 \times 100)}{(62 \times 250) + (87 \times 100)}$$
$$= \frac{15500 - 8800}{15500 + 8800}$$
$$= \frac{6700}{24300}$$
$$= 0{\cdot}28$$

எனவே, Cயுடன் இணைந்து Aயும் Bயும் நேர்மறைத் தூர உறவுடையன.

நேர்வுப் பட்டியல்

A என்ற பண்பு A_1, A_2, A_3 ... என்ற பல துணைப் பண்புகளை உடையதாக இருக்கும். A என்பது கண் நிறமாகக் கொண்டால், கருப்பு, நீலம், மாநிறம் என்ற துணைப் பண்புகளை A_1, A_2, A_3 எனக் கூறலாம். இது போன்றே B பண்புகளின் துணைப் பண்புகள் B_1, B_2, B_3 ... முதலியன. இவ்விரு தலைப்பண்புகளை, அவற்றோடு இணைந்த துணைப் பண்புகளோடு அமைக்கப்படும் பட்டியலுக்கு நேர்வுப் பட்டியல் (Contingency Table) என்பது பெயராகும்.

பண்பு A

பண்பு B	A_1	A_2	A_3	...	...	...	...	மொத்தம்
B_1	(A_1B_1)	(A_2B_1)	(A_3B_1)	...	...	...	...	(B_1)
B_2	(A_1B_2)	(A_2B_2)	(A_3B_2)	...	...	...	...	(B_2)
B_3	(A_1B_3)	(A_2B_3)	(A_3B_3)	...	...	...	...	(B_3)
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	(A_3)	...	...	...	...	N

பயிற்சி

(1) (ABC) = 15; $(AB\gamma)$ = 74
$(A\beta C)$ = 23; $(A\beta\gamma)$ = 120
(αBC) = 20; $(\alpha B\gamma)$ = 176
(αBC) = 17; $(\alpha\beta\gamma)$ = 2184

மற்றைய பண்பலேவெண்களைக் காண்க.

(2) N = 1000; (A) = 525; (B) = 312; (C) = 410; $(A\beta)$ = 483; $(A\gamma)$ = 378; $(B\gamma)$ = 226; (ABC) = 25. இப் புள்ளிவிபரத்தின் மையத் தன்மையை ஆய்க. (அல.ப.)

(3) ஒரு சோதனையில், குறைந்தது 57% கணக்கிலும், 60% புள்ளியியலிலும், 82% வேதியியலிலும், 91% ஆங்கிலத்திலும் தேற வில்லை. நான்கிலும் தேருதவர்கள் குறைந்தது எத்தனை சதவீதம்?

(4) 'மது அருந்துபவர்களில் 99% இளமையில் இறந்து விடுகின்றனர். எனவே, வாழ்விற்கு மது தீங்கானது' — இக் கூற்றினை ஆய்க. (செ.ப.)

(5) கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலில் யூல் உறவுக் கெழு வினைக் காண்க.

பண்பு	A	α
B	$a+b-c$	$b+c-a$
β	$c+a-b$	$a+b+c$

(6) கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தந்தை, மகன் கண்களின் நிற உறவினைக் காண்க.

மகன் கண் நிறம்

தந்தை கண் நிறம்		கருங்கருமை	சாம்பல் கருமை
	கருங்கருமை	230	150
	சாம்பல் கருமை	150	420

(அல.ப.)

(7) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குப் பண்புறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

சகோதரர்கள்

		நல்ல தன்மையினர்	நல்ல தன்மை யற்றவர்
சகோதரிகள்	நல்ல தன்மை யினர்	1230	530
	நல்ல தன்மை யற்றவர்	850	980

(செ.ப.)

(8) ஓருவிதத் தொத்துநோயால் பாதிக்கப்பட்ட ஒரு நகரில், பாதிக்கப்பட்ட 408 குழந்தைகளுக்கு மருத்துவம் செய்யப்பட்டது. அவர்களில் 104 பேருக்குக் குணத்திற்குப் பின்னர் சில தீங்குகள் (after-effects) ஏற்பட்டன. மருத்துவம் செய்யப்படாத எஞ்சிய 519 குழந்தைகளில், குணத்திற்குப்பின் 166 பேருக்குச் சில தீங்குகள் ஏற்பட்டன. இப் புள்ளிவிபரத்தினை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்து, பண்புகளின் உறவினைக் காண்க. (செ.ப.)

(9) (A) = (B) = (C) = N/2 = 50
(AB) = 30 ; (AC) = 25.

(BC) எந்த எண்ணிற்குள் விழும் ? (செ.ப.)

(10) $\frac{(A)}{N} = x;\ \frac{(B)}{N} = y = 2x$

$$\left(\frac{C}{N}\right) = 3x;\ \frac{(AB)}{N} = \frac{(AC)}{N} = \frac{(BC)}{N} = y$$

எனில், x, y-ன் தனித்தனி மதிப்புகள் $\frac{1}{4}$க்கு மிகைபடாவெனக் காட்டுக. (செ.ப.)

12. நிகழ்தகவு

ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குரிய வாய்ப்பினை எண் வடிவத்தில் தருவது நிகழ்தகவாகும். ஒரு நாணயத்தினைச் சுண்டினால், தலை விழுவதற்குரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$ எனக் கூறுகிறோம். அதாவது, தலைக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனப் பொருளாகும். இது போன்றே அறுமுகப் பகடை ஒன்றைச் சுற்றிவிட்டால், ஏதாவது ஒரு முகம் பிறழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{6}$ எனக் கூறுகிறோம். இத்தகைய வாய்ப்பினைக் காட்டும் பின்னத்தினை, அதாவது, நிகழ்தகவு அல்லது நிகழ்திறத்தை (Probability) எவ்வாறு கணிக்கிறோம்? இரு முறைகளில் இது கணிக்கப்படுகிறது.

கணக்கியல் நிகழ்தகவு

நெட்டுக்குத்தாக நிற்க இயலாதபடி உயரம் குறைந்த அளவுடைய சீரான நாணயம் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். அதனைச் சுண்டினால், நிகழுகின்ற இயக்கங்கள் இரண்டேயாகும். தலை, பூ ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளே உள; அதாவது, இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் இரண்டேயாகும். அவைகளில், தலை விழுவது ஒன்றாகும்; அதாவது, இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சி அவற்றுள் ஒன்றாகும். எனவே, இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை என்பதனை நிகழ்தகவாகக் கொண்டு, அது $\frac{1}{2}$ எனக் கூறுகிறோம். இது போன்றே, பகடை வீச்சில், இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் 6 ஆகும். எந்த முகமும் பிறழலாம். இயலவேண்டியது ஏதாவது ஒரு புள்ளிமுகம் (வெற்றிமுகம் '5 புள்ளிமுகம்' என்க) ஆகும். எனவே, இந்நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ எனக் கூறுகிறோம். இங்ஙனம், நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதற்கு முன்னமேயே, நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கியல் வாயிலாகக் கண்டு, நிகழ்தகவினைத் தீர்மானிக்கின்றோம். அவ்வாறு தீர்மானிக்கும் நிகழ்தகவினைக்

காரணகாரிய நிகழ்தகவு (Apriori probability) அல்லது கணக்கியல் நிகழ்தகவு (Mathematical probability) எனக் கூறுகின்றோம்.

புள்ளியியல் நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவினைச் சோதனைகள் வாயிலாகவும் காணலாம். ஒரு நாணயத்தை 1000 தடவைகள் சுண்டுவோம். அத்தனை சோதனைகளிலும், தலை விழுந்த தடவைகளை எண்ணி வைத்துக்கொள்வோம். எனில், நிகழ்தகவு $\frac{\text{தலைகளின் எண்ணிக்கை}}{1000}$ ஆகும். இந்த எண் $\frac{1}{2}$-க்கு மிக நெருங்கி அமைவதைக் காணலாம். சுண்டப்படும் தடவைகள் மிகமிக, இத்தகவு $\frac{1}{2}$-க்கு இன்னும் மிகமிக நெருங்கி அமைவதைக் காணலாம். எனவே, தலைக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனக் கொள்கிறோம். இது போன்றே, பல தடவைகள் பகடையை வீசினால், ஏதாவது ஒரு முகம் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$-க்கு மிகமிக நெருங்கி அமைவதைக் கண்டு, அத்தகவு $\frac{1}{6}$ எனக் கொள்கிறோம். இம்முறை நிகழ்தகவினைக் காரியகாரண நிகழ்தகவு (Aposteriori probability) அல்லது புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Statistical probability) என அழைக்கின்றோம்.

பொதுக் குறிப்பு

$\frac{\text{இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$ என்பதனை, நிகழ்தகவு என விளக்கினோம். ஒரு நிகழ்ச்சி a தடவைகள் நிகழ முடியுமெனவும், b தடவைகள் நிகழத் தவறுமெனவும், மேலும் இந்த $(a+b)$ நிகழ்ச்சிகளும் சமவாய்ப்புடையன வெனவும் கொண்டால், அந்நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{a}{a+b}$ என்பதாகும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்குரிய நிகழ்தகவு p, அதன் தோல்விக்குரிய நிகழ்தகவு q என்றால், $q+p=1$ என்பது எளிதில் புலனாகும். $p=1$ எனில், அந்நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழுமெனவும், $p=0$ எனில் அது உறுதியாக நிகழாதெனவும் கருதலாம். ஒரு நிகழ்ச்சியின் தகவு p எனில், N தடவைகளுள் pN தடவைகள் அது நிகழும் என்ற கூற்று எளிதில் விளங்கும். வெற்றிக்குச் சாதக பின்னம் $\frac{p}{q}$ என்றும், தோல்விக்குச் சாதக பின்னம் $\frac{q}{p}$ என்றும் கொள்ளப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1, 2, 3, 5, 0 என்ற ஐந்து எண்களைக் கொண்டு, நான்கு இடமுடைய எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) 5ஆல் வகுபட

(ii) ஒற்றைப்படை எண்ணாக அமைவதற்குரிய வாய்ப்புகள் யாவை ?

ஆ நூ ப ஒ

ஆயிரமாவது இடத்தில் 1, 2, 3, 5 ஆகிய நான்கு எண்களில் ஒன்று இடம்பெறும். எனவே, அவ்விடத்தினை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது இடத்தை எந்த எண்ணும் நிரப்பும். எனவே, அதனை 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். இது போன்றே, பத்தாவது, ஒன்றுவது இடங்களையும் ஐந்து, ஐந்து வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, உருவாகும் ஆயிரமாவது இடமுடைய எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500.$$

(i) ஆ நூ ப ஒ

எண் 5ஆல் வகுபட வேண்டுமெனில், ஒன்றுவது இடம் 0, 5 ஆகிய இரண்டு எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப்பட வேண்டும் எனவே, அவ்விடத்தினை இரு வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆயிரமாவது இடத்தினை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது, பத்தாவது இடங்களை, 5, 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, 5ஆல் வகுபடும் எண்கள்

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 2$$
$$= 200$$

எனவே, உருவாகும் எண் 5ஆல் வகுபடுவதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \frac{200}{500} = \frac{2}{5}.$$

(ii) உருவாகும் எண் ஒற்றைப்படை எண்ணாக அமைய, ஒன்றுவது இடம் 1,3,5 ஆகிய 3 எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப்பட முடியும். எனவே, ஒன்றுவது இடம் 3 வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆயிரமாவது இடம் 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது, பத்தாவது இடங்கள் 5, 5 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

∴ ஒற்றைப்படை எண்கள்

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 3$$
$$= 300.$$

எனவே, உருவாகும் எண் ஒற்றைப்படையாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{300}{500} = \frac{3}{5}.$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை உருவினால், அது இராஜாவாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

இங்கு இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் $= 52$

கட்டில் உள்ள இராஜாக்கள் $= 4$

$\therefore$ இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகள் $= 4$

$\therefore$ சீட்டு, இராஜாவாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும், 6 கருப்புப் பந்துகளும், 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள. 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் சேர்த்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறமென்ன ?

எடுக்கவேண்டிய மொத்தப் பந்துகள் $= 5$

பையிலுள்ள மொத்தப் பந்துகள் $= 12$

$\therefore$ 5 பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 12C_5 = 792$

3 வெள்ளைப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 4C_3 = 4$

2 கருப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 6C_2 = 15$

$\therefore$ 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 4 \times 15 = 60$.

$\therefore$ வேண்டியவாறு பந்துகளை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= \frac{60}{792}$$

$$= \frac{5}{66}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

இரு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் வீசினால் மொத்தப் புள்ளிகள் 9ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

இயலத்தக்க மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6$

$= 36$

வேண்டிய நிகழ்ச்சிகள் : (3,6) (4,5) (5,4) (6,3)

$= 4$

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

3 பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் மூன்றுமுகப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 10 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

இயலும் மொத்த நிகழ்ச்சிகள்

$$= 6\times6\times6$$
$$= 216$$

இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

$= (x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$-ல் x^{10}-ன் கெழு

$= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$-ல் x^7-ன் கெழு

$= \left(\dfrac{1-x^6}{1-x}\right)^3$-ல் x^7-ன் கெழு

$= (1-x^6)^3\,(1-x)^{-3}$-ல் x^7-ன் கெழு

$= (1-3x^6+3x^{12}-x^{18})\left\{\sum \dfrac{(\gamma+1)\,(\gamma+2)}{1\cdot2}x^{\gamma}\right\}$-ல் x^7-ன் கெழு

$$= \frac{(7+1)\,(7+2)}{1\cdot2} - 3\cdot\frac{(1+1)\,(1+2)}{1\cdot2}$$

$$= 27$$

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$

பயிற்சி

(1) 1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய எண்களைக் கொண்டு நூறுவது இடமுள்ள எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) ஒற்றைப்படை எண்ணாக, (ii) இரட்டைப்படை எண்ணாக, (iii) 5ஆல் வகுபடும் எண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(2) 0, 3, 5, 7, 8 ஆகிய எண்களைக் கொண்டு ஆயிரமாவது இடமுள்ள எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) ஒற்றைப் படையாக, (ii) இரட்டைப் படையாக, (iii) 5ஆல் வகுபடுமாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை ?

(3) நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து, ஒரே சமயத்தில், இரண்டு சீட்டுகள் உருவப்படுகின்றன. அவை ஒன்று ஏஸாகவும், பிறிதொன்று ஜாக்காகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க; இரண்டுமே டைமண்டாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவினையும் காண்க.

(4) ஒரு பையில் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும், 6 கருப்புப் பந்துகளும், 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 நீலப் பந்துகளும் உள.

4 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 நீலப் பந்துகளும் ஒன்றாக எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(5) 'புள்ளியியல்' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகள் மாறிமாறி வரிசைப்படுத்தி அமைக்கப்படுகின்றன.

(i) 'பு' என்ற எழுத்தில் முடியும் சொல்லைப் பெற வாய்ப்பென்ன?

(ii) 'ய'ல் தொடங்கி 'பு'-ல் முடியும் சொல்லைப் பெற வாய்ப்பென்ன?

(iii) 'பு', 'ய' என்ற எழுத்துகளுக்கிடையே இரண்டு எழுத்துகள் மட்டுமே அமைவதற்குரிய வாய்ப்பென்ன?

(6) 3 பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்ட, மொத்தப் புள்ளிகள் 9 ஆகவும் 10 ஆகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

(7) ஒரு குழுவில் 10 பி.யு.ஸி., மாணவர்களும், 5 பி.ஏ., மாணவர்களும், 6 பி.எஸ்.ஸி., மாணவர்களும் உள்ளனர். 5 பேர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவர்களுள் 3 பேர் மட்டும் பி.எஸ்.ஸி., மாணவர்களாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி, அது நிகழும் அதே தருணத்தில் பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழாவண்ணம் தடுக்குமானல், அத்தகு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events) என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு சோதனைக்குட்படும் ஒரு மாணவர் வெற்றியடைவார் அல்லது தோல்வியடைவார். நாணயத்தினைச் சுண்ட, தலை விழும் அல்லது பூ விழும். வெற்றி, தோல்வி; தலை, பூ ஆகிய ஜோடி நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். பகடையை வீச விழும் நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டல் தேற்றம்

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் பல நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அத்தகு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும். எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் மொத்தம் N தடவைகளில் நிகழுகின்றன என்க.

இவற்றுள், முதல் நிகழ்ச்சி a_1 தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_1 = \frac{a_1}{N}$. இரண்டாம் நிகழ்ச்சி a_2 தடவைகளில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_2 = \frac{a_2}{N}$. இதைப் போன்றே, kஆவது நிகழ்ச்சி a_k தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_k = \frac{a_k}{N}$. ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால், ஒன்று நிகழும்போது பிறிதொன்று நிகழாது. எனவே, இந்த k நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நடப்பன $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k$ தடவைகள் ஆகும்.

∴ ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{தகவு} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k}{N}$$

$$= \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N} + \frac{a_3}{N} + \ldots\ldots + \frac{a_k}{N}$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_k$$

எனவே, தேற்றம் மெய்யானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 7 கருப்பு, 5 மஞ்சள், 3 வெள்ளைக் கோலிகள் இருக்கின்றன. ஏதாவது ஒரு கோலி எடுக்கப்படுகிறது. அது மஞ்சளாக அல்லது வெள்ளையாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

மஞ்சள் கோலியை எடுப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு $= \frac{5}{15}$.

வெள்ளைக் கோலியை எடுப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு $= \frac{3}{15}$

இரு நிறத்தில் ஒன்றாக இருக்கவேண்டுமாதலால், இவையிரண்டும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

∴ வேண்டிய நிகழ் தகவு $= \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 3 சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. 3 சீட்டுகளும் ஹார்ட்ஸாகவோ, கிளப்ஸாகவோ அமைய நிகழ்தகவு யாது?

3 சீட்டுகளை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 52C_3 = 22100.$

3 ஹார்ட்ஸ்களை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 13C_3 = 286$

$\therefore$ 3 ஹார்ட்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{236}{22100}$

3 கிளப்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{286}{22100}$

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{572}{22100} = \frac{145}{5525}$

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி, அது நிகழும் அதே தருணத்தில், பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதை பாதிக்காமலிருப்பின், அத்தகு நிகழ்ச்சி களுக்குச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events) எனப் பெயராகும்.

புகுமுக வகுப்பிலிருந்து ஒரு செயலாளரையும், இளங்கலை வகுப்பிலிருந்து ஒரு செயலாளரையும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டு மெனில், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

பெருக்குத் தேற்றம்

ஒரே சமயத்தில் பல சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அந்தந்தச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ் தகவுகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும். முதலில், இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அந் நிகழ்ச்சிகளை E_1, E_2 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எனில், 4 வகையான சம்பவங்கள் நிகழலாம்.

(1) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வது
(2) E_1 நிகழ்வது ; E_2 நிகழாமலிருப்பது
(3) E_1 நிகழாமலிருப்பது ; E_2 நிகழ்வது
(4) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழாமலிருப்பது.

E_1 நிகழ்வது a_1 தடவைகள் ; நிகழாமலிருப்பது b_1 தடவை கள் என்க.

E_2 நிகழ்வது a_2 தடவைகள் ; நிகழாமலிருப்பது b_2 தடவை கள் என்க.

எனில்,

(1) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வது a_1, a_2 தடவைகள்
(2) E_1 நிகழ்ந்து E_2 நிகழாமலிருப்பது a_1, b_2 தடவைகள்
(3) E_1 நிகழாது E_2 நிகழ்வது b_1, a_2 தடவைகள்
(4) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழாமலிருப்பது b_1, b_2 தடவைகள்.

எனவே, இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின்

$$\text{எண்ணிக்கை} = a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2$$
$$= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$$

E_1, E_2 இரண்டும் இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின்

$$\text{எண்ணிக்கை} = a_1 a_2$$

$\therefore$ E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{தகவு} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$
$$= \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2}$$
$$= p_1 p_2$$

இங்கு p_1, p_2 என்பன E_1, E_2-வின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளாகும். இவ்வாறு, இரு நிகழ்ச்சிகளில் தேற்றம் உண்மையெனக் காணப் பட்டது. இது போன்றே, எத்தனை நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இதனை நீட்ட, தேற்றம் மெய்யாகும்.

குறிப்பு

E_1 நிகழ்ந்தபின் E_2 நிகழுமானால், மேற்கண்ட வாதம் இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொருந்தும். அங்கு p_2-வினை E_2-வின் சார்ந்த நிகழ்தகவு (Conditional probability) எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 7 வெள்ளை, 4 கருப்புப் பந்துகள் உள. ஒன்றன் பின் ஒன்றாக இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் பையில் போட்ட நிலையில், (ii) முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் போடாத நிலையில், அவ்விரு பந்துகளும் கருப்பாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

முதல் கருப்புப் பந்து எடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{4}{11}$ மீண்டும் பந்தைப் போட்டபின், முன்நிலையே இருப்பதால், 2ஆவது கருப்புப் பந்து எடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{4}{11}$.

எனவே, இரண்டும் கருப்புப் பந்துகளாக அமைவதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{11}$$
$$= \frac{16}{121}.$$

(ii) முதல் பந்து எடுத்தபின், மீண்டும் போடாவிட்டால், பையில் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் இருக்கும்.

எனவே, 2ஆவது கருப்புப்பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{3}{10}$.
எனவே, இரண்டும் கருப்புப் பந்துகளாக அமைய நிகழ்தகவு

$$= \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

பயிற்சி

1. குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவைகள் இரண்டும் டைமண்டுகளாக அல்லது இரண்டும் ஹார்ட்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

2. ஒரு பையில் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள. 5 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவைகளில் 3 வெள்ளையாகவும் 2 கருப்பாகவும் அமைவதற்நூரிய நிகழ்தகவு என்ன ? (செ. ப.)

3. ஒரு பாத்திரத்தில் 5 சிவப்பு, 10 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. 8 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. (1) ஒவ்வொரு பந்தும் எடுத்த பின்னர், மீண்டும் பாத்திரத்தில் போடப்பட்டால், (2) அவ்வாறு போடாமல் இருந்தால், 3 சிவப்பாகவும் 5 பச்சையாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ? (செ.ப.)

4. ஒரு பாத்திரத்தில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன ; வேறொன்றில் 3 வெள்ளையும் 4 கருப்பும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டும் ஒரே நிறமாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ? (செ.ப.)

5. ஒரு கணக்கிற்குத் தீர்வு காண, A-க்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$; B-க்குரியது $\frac{4}{5}$. இருவரும் முயன்றால், கணக்கின் தீர்வு காணப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ? (செ.ப.)

6. மூன்று பேர், ஒருவருக்குப்பின் ஒருவராக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுகின்றனர். முதன் முதலில் தலை பெறுபவருக்குச் சிறப்புப் பதவியுண்டு. ஒவ்வொருவரும் சிறப்புப் பதவி பெறுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் யாவை ? n பேர்கள் போட்டியிட்டால், ஒவ்வொருவரின் வாய்ப்பென்ன ? (செ.ப.)

தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p எனில், n தடவைகளில் r தரம் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $nC_r q^{n-r} p^r$. இங்கு $q + p = 1$.

நிறுவுதல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சி, குறிப்பிட்ட r தடவைகள் நிகழ்ந்து, $(n-r)$ தடவைகள் நிகழாமலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $p^r q^{n-r}$ ஆகும் (பெருக்குத் தேற்றப்படி). மொத்தத் தடவைகளில், ஏதாவது r தடவை இந் நிகழ்ச்சி நடந்தும், எஞ்சிய $(n-r)$ தடவைகளில் நிகழாமலிருக்கும். அத்தகைய r தடவைகளுக்கான வழிகள் nC_r ஆகும். எனவே, அந் நிகழ்ச்சிகளின் வெற்றியும் தோல்வியும் இணைந்து nC_r வழிகளில் நடக்கும். ஒவ்வொரு வழியிலும் நிகழ்ச்சிக்குரிய தகவு $p^r\ q^{n-r}$ ஆகும். nC_r வழிகளில் $nC_r\ q^{n-r}\ p^r$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றித் தகவு p, தோல்வித் தகவு q எனில், n சோதனைகளில் 0, 1, 2, 3 ...... n வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் முறையே $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிப்பின் வரிசை உறுப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஏழு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக 4 தலைகள், (ii) குறைந்தது 4 தலைகள், (iii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை?

இங்கு $q=\frac{1}{2}$; $p=\frac{1}{2}$; $n=7$. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு காட்டும் ஈருறுப்பு விரிப்பு $=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^7$.

(i) சரியாக 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= 7\ C_4\ q^3\ p^4$
$= 7\ C_3\ (\frac{1}{2})^7$.

(ii) குறைந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= 7\ C_4\ q^3\ p^4 + 7\ C_5\ q^2\ p^5 + 7\ C_6\ q\ p^6 + p^7$$
$$= 7\ C_4\ (\tfrac{1}{2})^7 + 7\ C_5\ (\tfrac{1}{2})^7 + 7\ C_6\ (\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{1}{2})^7$$
$$= (\tfrac{1}{2})^7\ \{7\ C_3 + 7\ C_2 + 7\ C_1 + 7\ C_0\}$$

(iii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= (q)^7 + 7\ C_1\ q^6\ p + 7\ C_2\ q^5\ p^2 + 7\ C_3\ q^4\ p^3 + 7\ C_4\ q^3\ p^4$$
$$= (\tfrac{1}{2})^7\ \{7\ C_0 + 7\ C_1 + 7\ C_2 + 7\ C_3 + 7\ C_4\}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு கம்பெனிக்கு 6 கப்பல்கள் உள்ளன. ஒரு கடல் பிரயாணத்தில் எந்தவொரு கப்பலும் நாசமாவதற்குரிய நிகழ்

தகவு 0·02 ஆகும். எனில், (அ) ஒரு கப்பலை (ஆ) மிகுந்தது இரண்டு கப்பலை இழப்பதற்குள்ள நிகழ் தகவினையும், ஒரு கப்பலையும் இழக்காமலிருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவினையும் காண்க. (செ.ப.)

$$\text{இங்கு } p = 0{\cdot}02 = \frac{1}{50}$$

$$q = \frac{49}{50}$$

வேண்டிய ஈருறுப்பு விரிப்பு

$$= \left(\frac{49}{50} + \frac{1}{50}\right)^6$$

(அ) ஒரு கப்பலை இழப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= 6C_1 q^6\, p$$

$$= 6 \,.\, \left(\frac{49}{50}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)$$

(ஆ) மிகுந்தது 2 கப்பல்களை இழப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \left(\frac{49}{50}\right)^6 + 6C_1 \left(\frac{49}{50}\right)^5 \left(\frac{1}{50}\right) + 6C_2 \left(\frac{49}{50}\right) \left(\frac{1}{50}\right)^2$$

(இ) ஒரு கப்பலும் இழக்காமலிருப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \left(\frac{46}{50}\right)^6 .$$

பயிற்சி

(1) 50 புத்தகங்களில் 3 மிகச் சிறந்த புத்தகங்களாகும். ஒரு திருடன் இங்கும் அங்குமாக 5 புத்தகங்களை எடுத்துச் சென்று விடுகிறான். (i) அம் மூன்றினில் எடுக்காமலிருக்கும் நிலை, (ii) அம் மூன்றில் இரண்டு எடுக்கப்பட்டுள்ள நிலைக்குரிய நிகழ் தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

(2) பிறப்பு விகிதம் ஆண் : பெண் = 51 : 49. ஒரு மகப்பேறு மருத்துவ விடுதியில் ஓரே நாளில் பிறந்த 10 குழந்தைகளில் 8 அல்லது 8-க்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தைகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ? (செ.ப.)

(3) ஒரு பையில் 8 வெள்ளை, 6 கருப்புப் பந்துகள் உள. 5 பந்துகள் எடுத்தால் (i) 3 வெள்ளையாகவும், (ii) 3 அல்லது 3-க்கு மேற்பட்டன வெள்ளையாகவும் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

(4) ஒரு பையில் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள. 4 பந்துகளை நான் எடுக்கிறேன். எனில், குறைந்தது ஒரு கருப்புப் பந்தாவது இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

(5) நீண்ட ஒரு கணக்குப்படி, ஒவ்வொரு நூற்றிற்கும் 3 கப்பல்கள் மூழ்கின. 10 கப்பல்கள் பிரயாணத்தைத் தொடங்கின. (i) 6 கப்பல்கள் பத்திரமாகக் கரை சேர்வதற்கு, (ii) குறைந்தது 6 கப்பல்கள் பத்திரமாகக் கரை சேர்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ ப.)

(6) இங்குமங்குமாக ஏழு தேதிகள் குறிக்கப்பட்டன. அவைகளில் (i) சரியாக 5 ஞாயிறும், (ii) குறைந்தது 5 ஞாயிறும், (iii) முதல் ஐந்து மட்டுமே ஞாயிருகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப)

(7) ஒருதலைச் சார்பற்ற 16 நாணயங்கள் ஒரே தடவையில் சுண்டப்பட்டன. (1) சரியாக 8 தலைகள், (2) சரியாக 11 தலைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

(8) ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 10 சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. (i) குறைந்தது 1 ஏஸாக, (2) குறைந்தது 2 ஏஸாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

(9) 'QUESTION' என்ற சொல்லில், எழுத்துகள் வரிசையாக மாறிமாறி எழுதப்பட்டன. 'Q', 'U' ஆகிய எழுத்துகளுக்கிடையே சரியாக இரண்டு எழுத்துகள் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

(10) X, Y என்பவர்கள் 10 பேர்களுடன் இங்குமங்குமாக ஒரு வரிசையில் நிற்கின்றனர். X, Y-க்கு இடையே மூவர் நிற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

11. ஒரு நாணயம் 10 தடவைகள் சுண்டப்படுகிறது. கடைசி மூன்று சுண்டுதலில் பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக, முதல் ஏழு சுண்டுதலில் தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (தி.ப.

13. ஈருறுப்புப் பரவல்

ஒவ்வொரு தடவையும் n சோதனைகளாக, N தடவைகள் நடத்தினால், 0, 1, 2, ... n வெற்றிகளை முறையே $N(q+p)^n$ என்பதன் விரிப்பில் பெறப்படும் வரிசையான உறுப்புகள் தருகின்றன. $N \cdot nC_r \, q^{n-r} \, p^r$ தடவைகளில் r வெற்றிகள் நிகழும். ஏனெனில் 0, 1, 2, 3 ...... n வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் முறையே $(q+p)^n$ என்ற விரிப்பில் பெறப்படும் வரிசை உறுப்புகளாகுமென ஏற்கெனவே கண்டோம். மொத்தத் தடவைகள் Nஆல் அவைகளைப் பெருக்க, அந்தந்த வெற்றிகளின் அலைவெண்கள் பெறப்படுகின்றன. இவ்வாறு பெறப்படும் பரவலுக்கு ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution) எனப் பெயராகும். ஜேம்ஸ் பெர்னௌலி என்பவர் இதனை முதன் முதலாகக் கண்டார். எனவே, இதனை பெர்னௌலி பரவல் என்றும் அழைப்பதுண்டு. இது ஒரு தொடர்பற்ற (Discrete) பரவலாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவல்

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை (x)	அலைவெண் (f)
0	$N q^n$
1	$N \; nC_1 \, q^{n-1} p$
2	$N \cdot nC_2 \, q^{n-2} p^2$
3	$N \cdot nC_3 \, q^{n-3} p^3$
...	...
...	...
...	...
r	$N \cdot nC_r \, q^{n-r} p^r$
...	...
...	...
...	...
n	$N \cdot p^n$
மொத்தம் =	$N(q+p)^n = N$

ஈருறுப்பின் கூட்டுச் சராசரி

ஒவ்வோர் அலைவெண்ணும் N-ன் மடங்காகவும், மொத்த அலைவெண் N ஆக இருப்பதாலும், அலைவெண்களை N ஆல் வகுக்கப் பெறப்படும் எண்களையே அலைவெண்களாகவும், மொத்த அலைவெண்ணை 1 ஆகவும் கொள்ளலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \sum f . x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} . p^{x} . x$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} q^{n-x} p^{x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} q^{n-x} p^{x-1}$$

$$= np(q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $= np$.

ஈருறுப்புப் பரவலின் திட்டவிலக்கம்

பூஜ்யத்தினை மூலப்புள்ளியாக எடுத்துக்கொண்டால்,

$$s^2 = \frac{\sum f \cdot x^2}{\sum f}$$

$$= \sum f x^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x! \ n-x)!} q^{n-x} p^{x} . x^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^{x} [x(x-1)+x$$

$$= \sum_{=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} q^{n-x} p^{x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^{x} . x$$

$$= n(n-1)p^2(q+p)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\therefore \sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p) = npq$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{npq}$$

$\therefore$ ஈருறுப்புப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

மூன்றும், நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_3' = \frac{\sum f \cdot x^3}{\sum f}$$
$$= \sum f x^3$$
$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^x [x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x]$$
$$= \sum_{x=3}^{n} \frac{n!}{(x-3)!(n-x)!} q^{n-x} p^x$$
$$+ 3\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^x x^2$$
$$- 2\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^x x$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3(q+p)^{n-3}$$
$$+ 3(n^2p^2 - np^2 + np) - 2np$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n^2p^2 - np^2 + np) - 2np$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$$
$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 d + 2d^3$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$
$$- 3\{n(n-1)p^2 + np\} np + 2n^3p^3$$
$$= \{n(n-1)(n-2) - 3n^2(n-1) + 2n^3\} p^3$$
$$\{3n(n-1) - 3n^2\} p^2 + np$$
$$= 2np^3 - 3np^2 + np$$
$$= np(1-p)(1-2p)$$
$$= npq(q-p)$$

இது போன்றே

$\mu_4 = npq(3npq + 1 - 6pq)$ எனக் காணலாம்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் சார்பு

x என்ற மாறியின் அலைவுச் சார்பு $f(x)$ எனில்,

$$M(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x)$$

என்பது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைச் சார்பி எனக் கொள்ளப் படுகிறது. வலப் பக்கம் ஒருங்கு தொடராகக் (Convergent Series) கருதப்படுகிறது.

$$M(\theta) = \sum_{0}^{\infty} \left(1 + \frac{\theta x}{1!} + \frac{\theta^2 x^2}{2!} + \ldots\ldots \right) f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} f(x) + \frac{0}{1!} \sum_{0}^{\infty} f(x) \,.\, x$$

$$+ \frac{\theta^2}{2!} \sum_{0}^{\infty} f(x) \,.\, x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{\theta}{1!} \mu_1' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_2' + \ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{ \sum_{0}^{\infty} f(x) = 1 \text{ என்க} \right\}$$

$$\therefore \frac{dM}{d\theta} = \mu_1' + \frac{\theta}{1!} \mu_2' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_3' + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \left[\frac{dM}{d\theta}\right]_{\theta=0} = \mu_1'$$

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} = \mu_2' + \frac{\theta}{1!} \mu_3' + \frac{\theta^2}{2!} \mu'_4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \left[\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right]_{\theta=0} = \mu_2'$$

இது போன்றே $\left[\frac{d^k M}{d\theta^k}\right]_{\theta=0} = \mu'_k$

முதல் இரண்டு பெருக்கு விலக்கத்தினை மேலே கண்ட சார்புவழி காணுதல்

இங்கு $f(x) = nC_x \, q^{n-x} \, p^x$

$$M(\theta) = \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} nC_x \, q^{n-x} \, p^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} nC_x \, q^{n-x} (pe^{\theta})^x$$

$$= (q + pe^{\theta})^n$$

$$\therefore \frac{dM}{d\theta} = n(q + pe^{\theta})^{n-1} pe^{\theta}$$

$$\mu_1' = \left[\frac{dM}{d\theta}\right]_{\theta=0} = np$$

$$\frac{d^2 M}{d\,\theta^2} = np\left[e^{\theta}\,(n-1)\,(q+pe^{\theta})^{n-2}\,pe^{\theta} + (q+pe^{\theta})^{n-1}\cdot e^{\theta}\right]$$

$$\left[\frac{d^2 M}{d\,\theta^2}\right]_{\theta=0} = np\left[(n-1)\,p+1\right]$$

$$= n\,(n-1)\,p^2 + np$$

$$\therefore\quad \mu_2' = n\,(n-1)\,p^2+np$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு

T_r என்பது ஈருறுப்புத் தொடரில் r ஆவது உறுப்பு என்க.

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{p}{q}$$

$$\therefore \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{p}{q} \gtrless 1 \text{ என்பதற்கேற்ப } \frac{T_{r+1}}{T_r} \gtrless 1$$

$$\therefore\quad (n-r+1)\,p \gtrless r\,q \qquad ,, \qquad ,,$$

$$\therefore\quad (n+1)\,p \gtrless r\,(p+q) \qquad ,, \qquad ,,$$

$$(\text{அ-து})\quad (n+1)\,p \gtrless r \qquad ,, \qquad ,,$$

$$\therefore\quad r \gtrless (n+1)\,p \qquad ,, \qquad ,,$$

$(n+1)\ p$ என்பது முழு எண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ அமையலாம். $(n+1)\,p$ பின்னமாக இருப்பின், $(n+1)\ p = I+F$ என்பதில் I முழு எண் பகுதி, F பின்னப் பகுதி என்க. எனில், $x=(n+1)\,p$-ல் முழு எண் பாகமே முகடாகும். $(n+1)\,p$ என்பது முழு எண்ணாக (I) அமைந்துவிட்டால், $T_I = T_{I+1}$ ஆகும். இங்கு $x = I-\frac{1}{2}$ என்ற மதிப்பை முகடாக எடுத்துக்கொள்வது மரபாகும்.

β, γ கெழுக்கள்

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{n^2p^2q^2\,(q-p)^2}{n^3p^3q^3}$$

$$= \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \pm\ \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$$

γ_1 என்பது கோட்டக் கெழுவாகும். எனவே, $p = q$ என்ற நிலையில், பரவல் வரை சமச்சீராக அமைகிறது. $p < \frac{1}{2}$ என்ற நிலையில், வரை நேர்மறைக் கோட்டமுடையதாகவும், $p > \frac{1}{2}$ என்ற நிலையில் அது எதிர்மறைக் கோட்டமுடையதாகவும் அமையும். $p \neq q$ என்ற நிலையில்கூட, n மிகப் பெரிய மதிப்பாக அமையுமானால், $\gamma_1 = 0$. எனவே, அங்கும் வரை சமச்சீராக அமைகிறது என்பது நோக்கத்தக்கது.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{npq\,(3npq + 1 - 6pq)}{(npq)^2}$$

$$= 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}$$

n மிகப் பெரிய எண்ணாக அமைகின்றபோழ்து $\beta_2 = 3$ ஆகும். எனவே, வரை சமச்சீராக அங்கும் அமைகிறது என்பது புலப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

5 பகடைகள் ஒன்றாக 96 தரம் வீசப்பட்டன. 4, 5 அல்லது 6 புள்ளிகள் விழுவது வெற்றியாகக் கருதப்பட்டது. அவை விழுந்த எண்ணிக்கை வருமாறு :

4, 5 அல்லது 6 முகப்புள்ளிகள் விழுந்த பகடைகள்	0	1	2	3	4	5
நேரில் கண்ட அலைவெண்	1	10	24	35	18	8

கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க; கணக்கியல் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

வெற்றி = 4, 5 அல்லது 6 புள்ளிமுகம்

எனவே, $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$

$$f(x) = n\mathrm{C}_x\, q^{n-x}\, p^x$$

$$= 5\mathrm{C}_x \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$\mathrm{N}f(x) = 96 \cdot 5\mathrm{C}_x \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

எனவே, கணக்கியல் அலைவெண்கள்

$96\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $96 \cdot 5\,\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $96 \cdot 5\,\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$;

$96 \cdot 5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $96 \cdot 5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $96\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(அ–து) 3, 15, 30, 30, 15, 3,

$$\text{கணக்கியல் } \bar{x} = np = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{\cdot}5$$

$$\text{கணக்கியல் } \sigma = \sqrt{npq} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}125$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கூட்டுச் சராசரி 5; மாறுபாடு (Variance) $3\frac{3}{4}$ என அமைந்த ஈருறுப்புப் பரவல் காண்க. அதன் முகட்டினையும் காண்க. (செ.ப.)

$$\bar{x} = 5$$

$$\text{(அ-து) } np = 5 \qquad (1)$$

$$\sigma = 15/4$$

$$\text{(அ-து) } npq = \frac{15}{4} \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \cdot q = \frac{3}{4} \quad \therefore \ p = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \ n = 20$$

$$\therefore \text{ பரவல் } \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{20}$$

$$(n+1)\,p = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}\,.$$

$$\therefore \text{ முகடு} = \mathrm{I}\left(5\frac{1}{4}\right) = 5$$

பயிற்சி

(1) ஒவ்வொரு தடவையும் 6 பகடைகள் வீதம் 1,000,000 தடவைகள் வீசப்பட்டன. ஐந்து புள்ளிமுகம் விழுவது வெற்றி யாகக் கருதப்பட்டது. ஈருறுப்பு விதிப்படி கணக்கியல் அலை வெண்களைக் காண்க. (செ.ப.)

(2) ஒவ்வொரு தடவையும் 8 நாணயங்கள் வீதம் 256 தடவைகள் வீசப்பட்டன. ஒவ்வொரு தடவையும் விழுந்த தலை களின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்பட்டது. அவை வருமாறு :

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8
அலைவெண்	2	6	30	52	67	56	32	10	1

இங்குக் கண்ட அலைவுப் பரவலின் திட்டவிலக்கத்தினையும் ஆல்மான விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக. கணக்கியல் திட்ட விலக்கம் யாது ? (செ.ப.)

(3) ஒரு தொடர்ச்சியற்ற மாறி 0,1,2, ... n என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. அவைகளின் அலைவெண்கள் முறையே 1, n, nC_2 ...... n, 1 என்பனவற்றினை ஒரே நிலை உறுப்பால் பெருக்கப் பெறப்படும் எண்களாகும். கூட்டுச் சராசரி $= \frac{n}{2}$; திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{n}{2}}$ என நிறுவுக. (செ.ப.)

(4) ஒரு நாணயம் 6 தடவைகள் சுண்டப்பட்டது. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆவது தடவைகளில் தலை விழுந்தால் முறையே ரூ. 1,2,0,4,5,6 ஒருவர் பெறுவார். பூ விழுந்தால், அதே தொகையை அம்முறைப்படி அவர் தரவேண்டும். அவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபமும் மாறுபாடும் யாவை? (செ.ப.)

(5) ஒருதலைச் சார்பற்ற நல்ல நாணயமொன்றினை 10 தடவைகள் சுண்டுவது ஒரு சோதனையாகும். 100 சோதனைகள் மேற்கொள்ளப்பட்டன. குறைந்தது 7 தலைகளாக, எத்தனை சோதனைகளில் விழுமென்பதைக் காண்க. (செ.ப.)

14. பாய்ஸான் பரவல்

ஈருறுப்புப் பரவலில் p-யானது மிகச் சிறியதாகவும், n மிகப் பெரியதாகவும், ஆனால் np முடிவுள்ளதாகவும் (finite) அமையுமானால், அப்பரவல் பாய்ஸான் பரவலாக மாறுகிறது. பாய்ஸான் பரவலும் தொடர்ச்சியற்ற ஒரு பரவலாகும். p ஆனது மிகச் சிறியதெனில், நிகழ்ச்சிக்குரிய வாய்ப்பு மிகச்சிறியதெனப் பொருளாகும். எனவே, எப்பொழுதோ ஒரு முறை ஏற்படுகின்ற அரிய நிகழ்ச்சிகள் (rare events) இப்பரவலில் அமைகின்றன. அத்தகைய நிகழ்ச்சிகளும் ஓர் ஒழுங்கு நியதியில் அமைவதை இது காட்டுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, விபத்துகளால் ஏற்படும் இறப்பு, அரிய தருணங்களில் நோயால் ஏற்படுகின்ற இறப்பு முதலியனவற்றைக் கூறலாம்.

பாய்ஸான் பரவல், ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமெனக் காணல்

$$n \to \infty \qquad p \to 0$$

$$np = m = \text{முடிவுள்ள நிலை உறுப்பு}$$

$$f(x) = n\,C_x\, q^{n-x} p^x$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-x+1)}{x\,!}\left(\frac{m}{n}\right)^x \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{m^x}{x\,!}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left\{1-\frac{(x-1)}{n}\right\}\right]\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{m^x}{x\,!}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n \left\{\because \quad n \to \infty\right\}$$

$$= \frac{m^x}{x\,!}e^{-m} \left\{\because \quad n \to \infty\right\}$$

எனவே, பாய்ஸான் பரவலில், x வெற்றிக்குரிய அலைவெண் $e^{-m}\cdot\frac{m^x}{x\,!}$ ஆகும்.

பாய்ஸானின் மொத்த அலைவெண்

$$N = \sum_{0}^{\infty} e^{-m} \cdot \frac{m^x}{x!}$$
$$= e^{-m} \cdot e^m$$
$$= e^0 = 1$$

பாய்ஸானில் $\bar{x} = \mu_2 = \mu_3 = m$

$$\bar{x} = \sum_{0}^{\infty} x \cdot f(x)$$
$$= \sum_{0}^{\infty} x \cdot m^x \cdot \frac{e^{-m}}{x!}$$
$$= \sum_{1}^{\infty} m^x \cdot \frac{e^{-m}}{(x-1)!}$$
$$= me^{-m} \sum_{1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= m \cdot e^{-m} \cdot e^m = m$$

$$s^2 = \sum_{0}^{\infty} x^2 \cdot f(x)$$
$$= \sum_{0}^{\infty} x^2 \cdot m^x \cdot \frac{e^{-m}}{x!}$$
$$= \sum_{0}^{\infty} m^x \cdot \frac{e^{-m}}{x!} [x(x-1)+x]$$
$$= \left[e^{-m} m^2 \sum_{2}^{\infty} \frac{m^{x-2}}{(x-2)!}\right] + m$$
$$= e^{-m} \cdot m^2 e^m + m$$
$$= m + m^2$$

$$\therefore \mu_2 = \sigma^2 = s^2 - d^2$$
$$= m + m^2 - m^2 = m$$

$$\mu_3' = \sum_{0}^{\infty} x^3 \cdot f(x)$$
$$= \sum_{0}^{\infty} x^3 \cdot e^{-m} \cdot \frac{m^x}{x!}$$
$$= \sum_{0}^{\infty} e^{-m} \cdot \frac{m^x}{x!}\left[x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x\right]$$

$$= \left[e^{-m} \cdot m^3 \sum_{3}^{\infty} \frac{m^{x-3}}{(x-3)!} \right] + 3(m + m^2) - 2m$$

$$= m^3 + 3(m + m^2) - 2m$$

$$= m^3 + 3m^2 + m$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' + 2d^3$$

$$= (m^3 + 3m^2 + m) - 3(m + m^2)m + 2m^3$$

$$= m$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \mu_2 = \mu_3 = m$$

இது பாய்ஸான் பரவலுக்கே உரித்தான சிறப்பியல்பாகும்.

குறிப்பு : இதுபோன்றே $\mu_4 = 3m^2 + m$ எனக் காணலாம்.

β, γ கெழுக்கள்

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m}$$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1}$$

$$= +\sqrt{\frac{1}{m}}.$$

எனவே, m-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பிற்கும் பரவலின் கோட்டம் மிக அதிகமாகிறது.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3m^2 + m}{m^2} = 3 + \frac{1}{m}.$$

$2 < m < 5$ என்ற நிலையில், பாய்ஸான் பரவல் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைவதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. m ஆனது 6 அல்லது 6-க்கு மேற்படும்போது, பரவல் இயல்நிலைக்கு நெருங்குகிறது. தட்டை அளவை $3 + \frac{1}{m}$ ஆகையால், m அதிகமாக அதிகமாக, வரை இயல் நிலைக்கு நெருங்குகிறது.

பாய்ஸான் முகடு, $(m-1, m)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதைக் காணல்

T_r என்பது பரவலின் rஆவது உறுப்பு என்க.

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{e^{-m} \cdot m^{r-1}}$$

$$= \frac{m}{r}$$

$\therefore \quad m \gtreqless r$ என்பதற்கேற்ப $T_{r+1} \gtreqless T_r$ அமைகிறது. m என்பது ஒரு முழு எண்ணாக அமைந்தால்,

$$
\begin{aligned}
T_1 &< T_2 \\
&< T_3 \\
&< T_4 \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&< T_m \\
&= T_{m+1} \\
&> T_{m+2} \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots
\end{aligned}
$$

எனவே, T_m, T_{m+1} என்பன மிகப் பெரிய மதிப்புடைய உறுப்பு களாகும். அவை $x=m-1$; $x=m$ என்ற மதிப்புகளில் பெறப்படு கின்றன. எனவே, முகடு$=m-\frac{1}{2}$ எனக் கொள்வது மரபாகும். m என்பது ஒரு முழு எண்ணாக அமையாவிட்டால், I என்பது m-ன் முழுப்பகுதி என்க. எனில்,

$$
\begin{aligned}
T_1 &< T_2 \\
&< T_3 \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&< T_{I+1} \\
&> T_{I+2} \\
&> T_{I+3} \\
&\dots\dots \\
&\dots\dots \\
&\dots\dots
\end{aligned}
$$

$\therefore$ T_{I+1} தான் மிகப் பெரிய மதிப்புள்ள உறுப்பாகும். $x=I$ என்ற நிலையில் இது பெறப்படுகிறது. எனவே, I தான் முகடாகும்.

$\therefore \quad (m-1) <$ முகடு $< m$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குரிய பாய்ஸானைக் காண்க. கணக்கியல் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

x	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

$$\bar{x} = \frac{0 + 65 + 44 + 9 + 4}{200} = 0{\cdot}61$$

$$\therefore \quad f(x) = e^{-0\cdot61} \cdot \frac{(0{\cdot}61)^x}{x\,!}$$

எனவே, 0, 1, 2, 3, 4 x-ன் மதிப்புக்குக் கணக்கியல் அலைவெண்கள்

$$200\ e^{-0\cdot61},\ 200\ e^{-0\cdot61} \cdot \frac{(0{\cdot}61)}{1\,!},\ 200\ e^{-0\cdot61}\ \frac{(0{\cdot}61)^2}{2\,!},$$

$$200\ e^{-0\cdot61}\ \frac{(0{\cdot}61)^3}{3\,!},\ 200\ e^{-0\cdot61}\ \frac{(0\ 61)^4}{4\,!}$$

(அ-து) 108·7 ; 66·3 ; 20·2 ; 4·1 ; 0·7.

பயிற்சி

1. ஒரு நூலகத்தில் ஒவ்வொரு நாளும் காணுமற்போன தாகக் கூறப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைப் பரவல் வருமாறு :

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
நாள்கள்	80	62	35	15	4	1

இதற்குரிய பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

2. கீழ்க்கண்ட பரவலில், கூட்டுச் சராசரியும் மாறுபாடும் ஏறத்தாழச் சமமானவை எனக் காட்டுக. மூன்ருவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையையும் காண்க. பரவலின் வகையைப் பற்றி விளக்கம் தருக.

பண்பு	0	1	2	3	4
அலைவெண்	46	38	22	9	1

(தி.ப.)

3. ஓர் அலகு பரப்பில் எதிர்பார்க்கப்படும் பாக்டீரியா கிருமிகள் 5. எனில், 25 அலகு பரப்பினில் 5 அல்லது ஐந்திற்கு மேற்பட்ட கிருமிகளைக் காண்பதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் காண்க. (செ.ப.)

4. ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு x பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. $x = 1$ என அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவும், $x = 2$ என அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவும் சமமாகும். எனில், $x = 3$, $x = 4$ என்றவாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

5. x, yயும் முறையே m, m' பண்பளவைகளாகக் கொண்ட பாய்ஸான் மாறிகளாகும். எனில், $(x + y)$ என்பது $(m + m')$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் மாறி என நிறுவுக. (செ.ப.)

15. இயல்நிலைப் பரவல்

உயிரியல், சமூகவியல் முதலியவற்றில் காணுகின்ற புள்ளி விபரங்களின் அலைவுப் பரவல் ஏறத்தாழ இயல்நிலைப் பரவலாக (Normal Distribution) அமைவதைக் காணலாம். ஒரு மாறி, ஒரு கணக்கியல் சூத்திரத்திற்குட்பட்ட அலைவெண்களைப் பெற்று, $(-\infty, +\infty)$ இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெற்றால், அது இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது எனக் கூறப் படுகின்றது. சூதாட்ட விளையாட்டுக் கேள்விகளை ஆய்ந்துகொண் டிருந்தபோது, 1733ஆம் ஆண்டு டீ மாவர் என்ற அறிஞர் இதனைக் கண்டார். தனித்தனியாக இதனை, லாபிளாஸ், ஹாஸ் என்ற அறிஞர்களும் கண்டனர். பௌதீக ஆய்வுகளில் காணுகின்ற பிழைகள், இவ்வகை அலைவுப் பரவலில் அமைவதைக் கண்டனர். இதற்குரிய அலைவு வளைகோட்டினைப் பிழைகளின் இயல்நிலை வரை (The Normal Curve of Error) அல்லது இயல்நிலை நிகழ்திற வரை (The Normal Probability Curve) என அழைக்கின்றோம்; இயல் நிலை வரை (Normal Curve) எனவும் இது அழைக்கப்படுகிறது. அலைவெண் வரைகள் அனைத்திலும் இது மிகமிகச் சிறப்பானதும் முக்கியமானதுமாகும். கூறு கொள்கைத் தேற்றங்களில் இது சிறந்த பங்காற்றுகின்றது.

$n \to \infty$ என்ற நிலையில், ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமே இயல் நிலைப் பரவல் எனக் காணல்

ஈருறுப்புப் பரவலின்படி, x வெற்றிக்குரிய அலைவெண் $= N \cdot {}^{n}C_{x}\, q^{n-x} p^{x}$

$p = q = \frac{1}{2}$ என்க.

எனில்,

$$y = f(x) = N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

$n \to \infty$ ஆகையால், $n = 2k$ என இரட்டைப்படை எண்ணாக வழி முறை வசதிக்காகக் கொள்ளலாம். எனில், ஈருறுப்புத் தொடரில் நடு உறுப்பே மிகப் பெரியதாகும்.

அதன் மதிப்பு

$$y_0 = N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{2k!}{k!\,k!} \qquad (1)$$

எனவே, மிக உயர்ந்த y தூரத்தின் இருமருங்கிலும் பரவல் சமச்சீராக அமைந்து, அதன் இருமருங்கிலும் வாலோட்டமாக நீள்கிறது.

$(k+x)$ வெற்றிக்குரிய அலைவெண்

$$y = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{2k!}{(k+x)!\,(k-x)!} \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}, \quad \frac{y}{y_0} = \frac{k!\,k!}{(k+x)!\,(k-x)!}$$

$$= \frac{k \cdot (k-1) \ldots\ldots (k-x+1)}{(k+1)\,(k+2) \ldots\ldots (k+x)}$$

$$= \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) \ldots\ldots \left(1-\frac{x-1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{x}{k}\right)}$$

$$\therefore \quad \log_e \frac{y}{y_0} = \sum_{r=1}^{x-1} \log_e\left(1-\frac{r}{k}\right) - \sum_{r=1}^{x} \log\left(1+\frac{r}{k}\right)$$

$n \to \infty \ \therefore \ k$ ஒரு மிக மிகப் பெரிய எண்.

எனவே, $\left(\frac{r}{k}\right)^2, \left(\frac{r}{k}\right)^3, \ldots\ldots$ முதலியவற்றை நீக்க,

நாம் பெறுவது,

$$\log \frac{y}{y_0} = -\frac{2}{k}\,(1+2+\ldots\ldots+\overline{x-1}) - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{2}{k}\,\frac{x(x-1)}{2} - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{x^2}{k}$$

$$\therefore \frac{y}{y_0} = e^{-x^2/k}$$

$$\therefore \quad y = y_0\, e^{-x^2/k}.$$

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் $\sigma^2 = npq$

$$= 2k \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{k}{2}$$

$$\therefore \quad k = 2\sigma^2$$

$$\therefore \quad y = y_0 \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

இது இயல்நிலை அலைவுச் சார்பாகும்.

குறிப்பு: $p \neq q$ என்ற நிலையில் உள்ள மேற்கண்ட தேற்றத்தின் நிறுவனம், நமது பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகும்.

இயல்நிலை வளைகோட்டின் பொது வடிவம்

இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = y_0 \, e^{-x^2/2\sigma^2}$$

(x, y) $(-x, y)$ என்ற புள்ளிகள் இதன்மேல் அமைவதால், இது y அச்சிற்கு இரு மருங்கிலும் சமச்சீராக அமைகின்றது. எனவே, இப்பரவலில் $\bar{x} = 0$ ஆகும். மூலப்புள்ளியை x அச்சில் வேறொரு புள்ளிக்கு மாற்றினால் அப்புள்ளியின் x-ஆயதூரம் m எனில், மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் x-க்குப் பதிலாக $(x - m)$ என அமையும். மிக உயர்ந்த y ஆயத்திற்கு $(x = m)$ இரு மருங்கிலும் ∞ வரை இவ்வரை நீள்கிறது. தற்போது இதன் சமன்பாடு

$$y = y_0 \, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ஒரு செவ்வகப் படத்தின் நெருக்கமே அலைவெண் வளைகோடாகும். எனவே, ஓர் இடைவெளியிலுள்ள, வளைகோட்டிற்குள் அமைந்த பரப்பு அவ்விடைவெளியிலுள்ள மொத்த அலைவெண்ணாகும். எனவே, முழு வளைகோடு அமைந்த பரப்பு மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

$$\therefore \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y_0 \, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

$$= \sqrt{2}\cdot y_0\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du \quad \left\{\because \frac{x-m}{2\sigma^2} = u\right\}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot y_0\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\therefore y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

எனவே, இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}.\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

N = 1 எனக் கொண்டால்,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

இதுவே இயல்நிலை வரையின் பொது வடிவமாகும்.

இயல்நிலை நிகழ்திறச் சார்பி

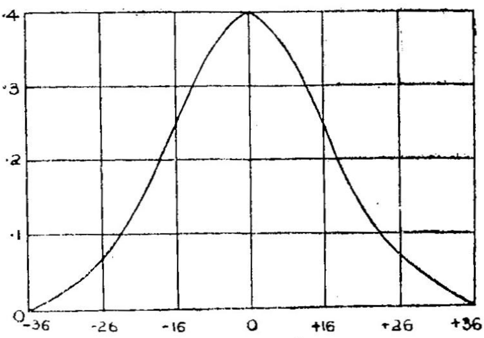
$N = 1;\ \sigma = 1$ எனக் கொண்ட குறிப்பிட்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவல்

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \left\{x - m = t\right\}$$

$$= \phi(t)$$

$\phi(t)$யை இயல்நிலைச் சார்பி என அழைக்கின்றோம்.

$y = \phi(t)$ என்பது இயல்நிலை நிகழ்திற வரையாகும். இந்த வரையின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



படம்-13.

t ஆனது (t_1, t_2) இடைவெளியில் அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவினை $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t).dt$ என்பது தருகிறது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது. $x = -3\sigma$, $x = +3\sigma$ என்ற புள்ளிகளில் x அச்சினை, வரை மிக மிக நெருங்கி அமைகிறது என்பது நோக்கத் தக்கது.

சில முக்கிய நிகழ்தகவுகள்

1. $P = \int_{-1}^{1} \phi(t).dt = 2\int_{0}^{1} \phi(t).dt = 0{\cdot}6827$

2. $P = \int_{-2}^{2} \phi(t).dt = 2\int_{0}^{2} \phi(t).dt = 0{\cdot}9545$

3. $P = \int_{-3}^{3} \phi(t).dt = 2\int_{0}^{3} \phi(t).dt = 0{\cdot}9973$

இயல்நிலை y-தூரப் பட்டியல், பரப்புப் பட்டியல்

$y = \phi(t)$ என்ற இயல்நிலை வரையில் $t = 0$ முதல் $t = 4$ வரை அம்மதிப்புகளோடு இணைந்த y தூரங்கள் ஒரு பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இதற்கு y-தூரப்பட்டியல் (Table of Ordinates of the Normal Curve) எனப் பெயராகும்.

இதுபோன்றே $t = 0$ முதல் $t = 4$ வரை, x அச்சும் வரையும் அடைக்கும் பரப்பினை மற்றொரு பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. பரப்புப் பட்டியல் (Table of Areas of Normal Curve) என அதற்குப் பெயராகும். y அச்சிற்கு வலப்புற மொத்தப் பரப்பு 0·5, இடப்புற மொத்தப் பரப்பு 0·5 ஆகும். அதாவது $\int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt = 0.5$.

மேலும் $\int_{-t}^{0} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{t} \phi(t)\,dt$ ஆகும்.

நிகழ்திறப் பிழை

நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ யாகக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரிக்கும் இரு பக்கத்திலும் அமையும் விலக்கமே நிகழ்திறப் பிழையாகும். அதாவது நேரில் காணும் அம்சங்களில் பாதியினைக் கொண்ட இடைவெளியின் தூரமே இப்பிழையாகும். எனவே $\int_{-t}^{t} \phi(t) \,.\, dt = \frac{1}{2}$ என்பதில் t-ன் மதிப்பே நிகழ்திறப் பிழையாகும். அதாவது $\int_{0}^{t} \phi(t) \,.\, dt = \frac{1}{4}$ யில் t-ன் மதிப்பே நிகழ்திறப் பிழையாகும்.

$$\therefore \quad \text{நிகழ்திறப்பிழை} = t = 0{\cdot}6745 = \tfrac{2}{3}.$$

$$\therefore \quad \text{நிகழ்திறப்பிழை} = \tfrac{2}{3} \text{ திட்டவிலக்கம்.}$$

இயல்நிலைப் பரவலின் கால்மான விலக்கம்

முதல் கால்மானம் Q_1 ஆனது, $\frac{N}{4}$ க்கு இணையான மாறி x-ன் மதிப்பாகும். கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து முதற் கால்மானத்தின் விலக்கம் $Q_1 - \bar{x}$

$$\therefore \int_{t=0}^{\frac{\bar{x}-Q_1}{\sigma}} \phi(t) \,.\, dt = 0{\cdot}25$$

$$\therefore \frac{\bar{x}-Q_1}{\sigma} = 0{\cdot}6745 = \frac{2}{3}$$

இது போன்றே $\frac{Q_3 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{2}{3}$

$$\therefore \quad Q_1 = \bar{x} - \frac{2}{3}\sigma$$

$$Q_3 = \bar{x} + \frac{2}{3}\sigma$$

$$\therefore \quad \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2}{3}\sigma.$$

இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mid x - m \mid . dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mid x - m \mid . \ dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \int_{m}^{\infty} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mid x - m \mid . dn$$

[$\because x = m$ல் வரைச் சமீபமானது]

$$= \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sigma^2 \cdot e^{-z} dz. \left[\because \frac{x - m^2}{2\sigma^2} = z \right]$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z} \quad dz$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 1$$

$$= 0{\cdot}7988 \, \sigma$$

$$= \frac{4}{5} \sigma.$$

இயல்நிலைப் பரவலில் ஒற்றைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பூஜ்யமாகும்

$$\mu_{2r+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1} . e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx . \{\bar{x} = 0 \text{ எனக் கொள்க}\}$$

$$= 0 \quad \{ \because \ f(x) \text{ ஒற்றைப்படச் சார்பு} \}$$

இயல்நிலைப் பரவலில் இரட்டைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை காணுதல்

தற்போது $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \ (p > 0)$

pயைக் குறித்து வகையிட்டால் (Differentiate w.r.t.p) நாம் பெறுவது

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2} x^2\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,p^{-3/2}$$

மேலும் p யைக் குறித்து வகையிட்டால், நாம் பெறுவது

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-px^2}\, dx = \sqrt{\pi}.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,p^{-5/2}$$

இதனை, pயைக் குறித்து $(r-2)$ தடவை வகையிட்டால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-px^2}\, dx = \sqrt{\pi}.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{5}{2} \ldots\ldots \frac{2r-1}{2}\,.\,p^{\frac{-(2r+1)}{2}}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-px^2}\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots(2r-1)}{2^2}\, p^{\frac{-(2r+1)}{2}}\cdot\sqrt{\pi}$$

தற்போது,

$$\mu_{2r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r}\,.\,e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$\therefore\ \mu_{2r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\,\sigma}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r}.\,(2\sigma^2)^{\frac{2r+1}{2}}\sqrt{\pi}$$

$$= 1\,.\,3\,.\,5 \ldots\ldots (2r-1)\ \sigma^{2r}$$

குறிப்பாக $\mu_4 = 3\sigma^4$.

குறிப்பு

(1) இயல்நிலைப் பரவலில்

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3.$$

$\beta_1 = 0 \quad \{\because \mu_3 = 0\}$

$\mu_2 = \sigma^2$

$\therefore$ திட்டவிலக்கம் $= \sigma$.

இயல்நிலை வரையின் திருகு புள்ளிகள்

$$y = \phi(t)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} (-t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{t^2}{2}} + t.\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) \left(-t \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^2 - 1)$$

திருகு புள்ளியில் $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

$$\therefore \quad t = \pm 1$$

எனவே $t = -1, t = +1$ என்ற தூரத்திலுள்ள y ஆயங்கள் வரையினை வெட்டும் புள்ளிகள் இயல்நிலைப் பரவலின் திருகு புள்ளிகளாகும்.

இயல்நிலைப் பரவலின் சிறப்பு

நேரில் கண்ட அம்சங்களின் பிழைகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. உயிரியல், சமூகவியல் போன்ற புள்ளி விபரங்கள் இப்பரவலில் அமைகின்றன. $n > 30$ என்ற நிலைகளில் ஈருறுப்புப் பரவல், இயல்நிலைப் பரவலாக ஏறத்தாழ மாறுகிறது. இயல் நிலைப் பரவலின் தட்டை அளவையும், கோட்ட அளவையும் (முறையே 3,0,) மற்றைய பரவல்களை ஒப்பிடப் பயன்படுகின்றன., இயற்கையில் நிகழும் எண்ணற்ற நிகழ்ச்சிகளின் புள்ளி விபரங் கள் இயல்நிலைப் பரவலிலே அமைகின்றன. கூறு பரவல்கள் பல இயல்நிலைப் பரவலாகவே அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

67 மரங்களின் குறுக்குப் பகுதியின் விட்ட அளவினை அங்குலத்தில்) கீழே கண்ட பட்டியல் தருகிறது. இதற்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக. (தி.ப).

மதிப்பு 11-க்குரிய கணக்கியல் அலைவெண்ணைக் கண்டு ஒப்பிடுக.

விட்டம் (அங்குலத்தில்)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
அலைவெண்	1	6	7	11	20	10	6	5	1

கணக்கிட, $\bar{x} = 10·9$; $\sigma = 1·74$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}.\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{67}{\sqrt{2\pi}} \quad 1·74 \quad e^{-\frac{(x-10·9)^2}{6·02}}$$

$$t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{11-10·9}{1·74} = \frac{0·2}{1·74} = 0·1$$

$\phi(t) = t$ மதிப்பின் உயரம் $= 0·3970$.

$$\text{கணக்கியல் அலைவெண்} = \frac{N}{\sigma}\phi(t)$$

$$= \frac{67}{1·74} \times 0·3970$$

$$= 15·4.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு சோதனையில் மதிப்பெண்களின் பரவல் இயல்நிலையாகும். 60 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றவர்கள் 23% ஆவர்; 40 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழ் பெற்றவர்கள் 21% ஆவர். எனவே, பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

60-க்கு மேல் வாங்கியவர் 23% எனில், $t=0$ முதல் $t = \frac{60-\bar{x}}{\sigma}$ வரையில் உள்ள இயல்நிலைப் பரப்பு $(0·5-0·23)$ ஆகும்.

(அ-து) $t=0$ முதல் $t = \frac{60-\bar{x}}{\sigma}$ வரையில் இயல்நிலைப் பரப்பு $= 0·27$

பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து இதற்குரிய t-ன் மதிப்பு $= 0·7398$

$$\therefore \quad \frac{60-\bar{x}}{\sigma} = 0·7398$$

$$\therefore \quad \bar{x} + 0·7398\,\sigma = 60 \qquad (1)$$

40-க்குகீழ் வாங்கியவர் 21% எனில், $t = \frac{40 - \bar{x}}{\sigma}$ முதல் $t = 0$ வரையில் உள்ள இயல்நிலைப் பரப்பு $0.5 - 0.21 = 0.29$ ஆகும்.

பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து இதற்குரிய t-ன் மதிப்பு -0.8068

$$\therefore \quad \bar{x} - 0.8068\,\sigma = 40 \qquad (2)$$

இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்வுகாண,

$$\bar{x} = 50.43, \ \sigma = 12.93.$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக. கணக்கியல் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
f	1	7	15	22	35	43	38	20	13	5	1

(தி.ப.)

2. கீழ்க்கண்ட பரவலின் இயல்நிலைத் தன்மையைச் சோதனை செய்க.

எடை (பவுண்டில்)	நேரில் கண்ட மனிதர்கள்
110	250
120	670
130	1310
140	2425
150	2100
160	1705
170	925
180	620
190	355
200	220

(செ.ப.)

3. 5000 மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன. $\bar{x} = 50$. நிகழ்திறப் பிழை = 13·49. பட்டியலைப் பயன்படுத்தாமல், கால்மானம், இடைநிலை, முகடு, திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம் ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக. 1250 ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மாறி யாது? (செ.ப.)

4. $\bar{x} \pm s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm 3s$ என்ற இடைவெளிகளில் விழும் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையினைக் கொண்டு, கீழ்க்கண்ட டிக்கட்

இல்லாப் பிரயாணிகளின் எண்ணிக்கைப் பட்டியல் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகிறதா எனக் காண்க.

62, 39, 45, 23, 30, 39, 29
33, 12, 32, 13, 16, 42, 9
15, 19, 20, 30, 37, 28

5. 1,000 மாணவர்கள் முதல், இரண்டாம், மூன்றும் வகுப்புகளில் தேறியதாகக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கூறுகிறது. பரவல் இயல்நிலையானதெனக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்க மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும், 43 — 53 மதிப்பெண்களைப் பெற்றவர்கள் 500 பேர் எனக் காட்டுக.

வகுப்பு I	60 –	50
,, II	50 – 60	350
,, III	– 50	600
	மொத்தம்	1000

(தி.ப)

6. மாறி x-ன் அலைவுப் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. பரவல் இயல்நிலையாகும். x-ன் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் காண்க. 30—40 என்ற பிரிவில் அமைந்த அலைவெண்ணைக் காண்க.

x	< 40	$40 - < 50$	$\geqslant 50$
அலைவெண்	30	33	37

(செ.ப.)

7. ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் 15%, 30-க்குக் கீழும் 10% 40-க்கு மேலும் அமைந்துள்ளன. அதன் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்டவிலக்கத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

8. $\bar{x} = 75$; $\sigma = 8$ ஆக உள்ள இயல்நிலைப் பரவலில், மொத்த அலைவெண்ணில் 75% தன்னகத்தே கொண்ட மதிப்புகளின் எல்லைகளைக் காண்க. (செ.ப.)

9. கல்லூரி மாணவர்களின் பருமன் $\bar{x} = 100$ பவு.; $\sigma = 5$ பவு., என அமைந்த ஓர் இயல்நிலைப் பரவலைக் கொள்க. ஒரு வேலைக்கு எடுத்துக் கொள்பவரின் குறைந்த எடை 120 பவு. ஆக இருக்கவேண்டும். எத்தனை சதவீத கல்லூரி மாணவர், இந்த அடிப்படையில் வேலை பெறும் வாய்ப்பை இழப்பர் ?
(செ.ப.)

10. இயல்நிலைப் பரவல் ஒன்றில் 45-க்குக் கீழே 31% அம்சங்களும், 64-க்கு மேல் 8% அம்சங்களும் அமைந்து கிடந்தால், அதன் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

11. பள்ளிக் குழந்தைகள் 1000 பேரின் புத்திக்கூர்மை கெழுவின் $\bar{x} = 96$; $\sigma = 12$. அது ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால், 72-க்கு மேலேயும், 80—120 என்ற பிரிவிலும் அமையும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையினைக் காண்க. (செ.ப.)

12. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவை 10 : 12 : 15 என்ற விகிதத்தில் அமையுமெனக் காட்டுக. (தி.ப.)

13. ஓர் இளைஞர் குழுவில் 60% பேர் ஓர் அரசாங்கப் பணித் துறையில் சேர்க்கப்படுவதற்கு ஏற்ற வாய்ப்புடையவர்களாக அமைக்கவேண்டியிருக்கிறது. அவர்களின் சராசரி உயரம் 60·6 அங். திட்டவிலக்க உயரம் 2·55 அங். எனில், அத்தகைய தேர்வுக்குரிய குறைந்த உயரத்தைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

14. இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மொத்த அலைவெண்கள் சமமாகும். ஆனால், முதல் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம், இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தைவிட இருமடங்காகும். எனில், முதல் முழுமைத் தொகுதியின் மிக உயர்ந்த அலைவெண், இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியின் மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணில் பாதியெனக் காட்டுக. (செ.ப.)

15. ஒரு கம்பெனியில், இரவுபகலெனத் தொடர்ந்து மின் விளக்குகள் எரிக்கப்படுகின்றன. ஒரு மின்விளக்கின் வாழ்நாள் கூட்டுச் சராசரி 60 நாள்கள்; திட்ட விலக்கம் 18 நாள்களாக அமைந்த ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அவை அமைகின்றன. 1954 ஆம் ஆண்டு ஜனவரித் திங்கள் முதல் நாள், 5000 புதிய மின் விளக்குகளை எரிக்கத் தொடங்கினர்; பின்னர் பிப்ரவரி முதல் நாள் இன்னும் 1000 புதிய விளக்குகளை எரிக்கத் தொடங்கினர். 1954 ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு முதல் நாள், ஏப்ரல் முதல் நாளில் எத்தனை புதிய மின்விளக்குகளை எரிக்கத் துவங்குவர்? (அ.ப.)

16. x என்பது ஓர் இயல்நிலை மாறியெனில், $(x+a)$ ஓர் இயல்நிலை மாறியென நிறுவுக. (ஆ.ப.)

17. ஒரு பந்தயத்தில் வெற்றி நிகழ்தகவு p. எனில், n பந்தயங்களில் x வெற்றிகள் பெறுவதற்குரிய வாய்ப்பென்ன?

$p = \frac{3}{8}$; $n = 18$. என்றால் 9-க்கு மேற்பட்ட பந்தயங்களில் வெற்றி பெறுவதற்குரிய வாய்ப்பு, ஏறத்தாழ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-5/4}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ என நிறுவுக. (ஆ.ப.)

16. கூறுகளின் உருவக முறைகளும் பெருங்கூறுகளும்

கூறுகளின் கொள்கைகளும் தேற்றங்களும் நவீன புள்ளியியலில் மிகச் சிறப்பான பங்கு பெறுகின்றன. 'ஒரு பானைச் சோற்றுக்கு ஒரு சோறு பதம்' என்ற ஒழுங்கு நியதியில் எழுந்தவைகளாகும் அவை! ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் (Population) இயல்புகளை ஆய, முழுமைத் தொகுதி கணிப்பு முறை பல இடங்களில் வேண்டாதவையாக இருக்கலாம்; பல இடங்களில் மிகச் சிக்கல் வாய்ந்ததும், பணம், காலம், சக்தி முதலிய செலவுகள் மிதமிஞ்சியதாகவும் இருக்கலாம். அங்கெல்லாம் முழுமைத் தொகுதியின் இயல்புகளை, அதில் பிறந்த கூறு அல்லது மாதிரி (Sample) பிரதிபலிக்கிறது என்ற அடிப்படையில், அம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறிலிருந்து முழுமைத் தொகுதி ஆயப்படுகிறது. கூறுவாயிலாக ஆயப்படுவது எளிய முறைமட்டுமன்றி, கணக்கியல்படி முழுமைக் கணிப்பினைவிடச் சிறந்ததெனப் புள்ளியியல் அறிஞர் ஃபிஷர் கூறுகிறார். ஏனெனில், சமவாய்ப்புக் கூறுகளின் பிழைத்தேற்றங்கள் கணித அடிப்படையில் எழுந்தவை. அவைகளை ஆதாரமாகக் கொண்ட ஒவ்வொரு வழிமுறையும் கணிதத் தெளிவும் நுண்ணியம் உடையவை. ஒரு கிராமப் பகுதியில், பல்வேறு வருவாய் குழுக்களில், வருவாய் ஈட்டுபவர்களின் எண்ணிக்கை போன்ற ஆய்வுகளில் முழு கணிப்புமுறை தான் தேவைப்படும். ஆனால், வேறு பல தருணங்களில், காட்டாக நாடு முழுமைக்கும் அத்தகைய ஆய்வு மேற்கொள்ள வேண்டுமெனில் கூறுமுறை சிறந்ததும் போதுமானதுமாகும். கூறின் சிறிய உருவத்தின் காரணமாகச் சிறுசிறு பிழைகள் நேரலாம். அத்தகைய கூறுபிழைகளை நிகழ்தகவு வழிமுறைகளால் மதிப்பிட முடியுமென்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

இனி, கூறு உருவாக்கப்படும் சில முக்கிய வழிமுறைகளைக் காண்போம். அவை (1) சமவாய்ப்புக் கூறு (Random sample), (2) நோக்குடைய கூறு (Purposive sample), (3) இவ்விரு முறைகளும் கலந்த கூறு முறை.

சமவாய்ப்புக் கூறு

சமவாய்ப்புக் கூறின் சிறப்பான பண்புகள் இரண்டு. (1) முழுமைத் தொகுதியின் எல்லா அம்சங்களும், கூறில் இடம் பெற சமவாய்ப்பினைப் பெறுகின்றன. அதாவது, கூறில் இடம் பெறுவதற்கு ஓர் அம்சத்திற்கு என்ன வாய்ப்பு அல்லது நிகழ் தகவு உள்ளதோ அதே அளவிற்கு மற்றைய ஒவ்வோர் அம்சத்திற்குமுண்டு. (2) தேர்ந்தெடுக்கப்படும் எந்தவோர் அம்சமும், பிறிதோர் அம்சம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதைத் தடை செய்யாது. X ஒரு கூறின் உறுப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பின்னரும், Yயும் உறுப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம்.

சமவாய்ப்புக் கூறு என்பது இங்கொன்றும் அங்கொன்றுமாக நியதியில்லாது உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது எனக் கூறுவது தவறாகும். இத்தகு சமவாய்ப்புக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கப் பல முறைகள் உள. முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைக்கேற்ப முறைகளைக் கையாள வேண்டும்.

முதல் முறை 'வரிசை எண்' முறையாகும். 1000 கல்லூரி மாணவர்களிலிருந்து 20 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்க வேண்டுமெனில், அம்மாணவர்களை வரிசையாக எண்ணிட்டு, 50, 100, 150, ... என்ற எண்ணுடைய மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். மாணவர்களை எண்ணிடும்போது, அவர்களது பெயர்களின் எழுத்து வரிசைப்படி எண்ணிடலாம். இது முறையாகக் கூறெடுத்தல் முறை (Systematic Sample) ஆகும்.

சமவாய்ப்புக் கூறினை எடுக்கப் பயன்படுத்தப்படும் மற்றொரு முறை குலுக்கல் முறை (Lottery method) ஆகும். மேற்கண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 1 முதல் 1000 ஆகும். ஒரே அளவுள்ள தாளில் இந்த எண்களை எழுதி, அந்த ஆயிரம் சீட்டுகளையும் சீராகச் சுருட்டி, சுழலும் ஒரு கலத்தில் இட்டு, இயந்திர தலைச்சார்பு, மனித இயல் ஒருதலைச் சார்பு முதலிய நடுநிலையற்ற தன்மைகள் இல்லாமல், சீராகக் கலத்தினைப் பல தடவைகள் ஒரே வேகத்தில் சுழற்றி ஒவ்வொரு தாளாக எடுக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு தாள் எடுத்த பின்பும், மீண்டும் அதே தடவைகளில் அதே வேகத்தோடு சீராகக் கலத்தினைச் சுற்றவேண்டும். இவ்வாறு 20 தாள்கள் எடுக்கப்பட்டு, அவை தரும் எண்களுடைய மாணவர்களை சமவாய்ப்புக் கூறின் உறுப்பினர்களாகக் கருதுகிறோம்.

டிப்பெட், ஃபிஷர், கெண்டால், மஹாலா நோபிஸ் முதலிய புள்ளியியல் நிபுணர்கள் சமவாய்ப்புக் கூறுகளுக்கென எண்களைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். அந்த எண்களைக் கொண்டு சமவாய்ப்புக் கூறினை உருவாக்கலாம். ஒரு முழுமைக் கணிப்பிலிருந்து 41600 எண்களை டிப்பெட் எடுத்தார். ஆயிரமாவது இடமுள்ள எண்களாக அவைகளிலிருந்து 10400 எண்களை எடுத்தார். அவற்றினை ஒரு பட்டியலில் அமைத்தார். ... ... 6111, 5246, 1112, 6107 ... ... என அது அமைந்துள்ளது. 9580 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து 20 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு உருவாக்க வேண்டுமெனில், டிப்பெட் பட்டியலிலிருந்து 9580-க்குக் கீழ்ப்பட்ட ஏதாவது 20 எண்களை எடுக்கவும். அவ்வெண்கள் கொண்டவர்கள் கூறின் உறுப்பினர் ஆவார்கள். டிப்பெட் எண்கள் 1000 முதல் 9999 வரையிருக்கும். மேலே கண்ட 1000 மாணவர்களிலிருந்து, 20 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு காண்போம். டிப்பெட் எண்கள் 9000 ஆகும். நமது முழுமைத் தொகுதியின் எண்ணிக்கை 1000 ஆகும். $\frac{9000}{1000} = 9$ என்பதனை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இது பின்னமாக அமைந்தால், நெருங்கிய முழு எண்ணை மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். டிப்பெட் எண்களில் ஏதாவது ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம். அது 5246 என்க / எனில், $\frac{5246 - 1000}{9}$ $= \frac{4246}{9} = 472$ (முழு எண் வடிவில்). டிப்பெட் எண் வரிசையில் 472ஆவது எண்ணைக் கூறின் ஓர் உறுப்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். இது போன்றே டிப்பெட் எண்ணை ஒவ்வொன்றுகப் பொறுக்கி, இருபது உறுப்பினர்களைக் காணலாம்.

நோக்குடைய கூறு

நோக்குடைய கூறு என்பது மற்ருெரு வகை மாதிரி தேர்ந்தெடுப்பதாகும். ஒரு லாரியில் உள்ள உருளைக்கிழங்கு குவியலிலிருந்து, சிறிய பெரிய கிழங்குகளை நீக்கி, சராசரி பருமனுள்ள உருளைக் கிழங்குகளை எடுத்து ஒரு கூறு அமைக்கலாம். இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் ஒவ்வோர் அம்சத்திற்கும் கூறின் உறுப்பாவதற்குச் சமவாய்ப்புக் கிடையாது. இத்தகைய கூறுகளும், புள்ளியியலிலும் வணிகத் துறைகளிலும் பயன்படுகின்றன. பொதுவாக, நோக்குடைய கூறுகளை மூன்று வகையாகப் பிரிக்கலாம். அவையாவன : (1) படுகைக்கூறு (Stratified Sample), (2) பலநிலைக் கூறு (Multistage Sample), (3) அளவுடைக் கூறு (Quota Sample).

ஒரு நகர மக்களிலிருந்து, 100 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு அமைக்கவேண்டுமெனக் கருதலாம். நகர ஆட்சிக் கொள்கையினை அந் நூறு பேர் தீர்மானிக்கவிருக்கின்றனர். நகர மக்களை, ஏழைகள், செல்வந்தர்கள், நடுத்தர மக்கள், உயர் நடுத்தர மக்கள் என நான்கு பிரிவாகப் பிரித்துக்கொண்டு, ஒவ்வொரு பிரிவி லிருந்தும் 25 பேர் கொண்டு ஒரு கூறு எடுக்கலாம். இங்ஙனம், முழுமைத் தொகுதியைப் பல பாகங்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பாகத்திலிருந்தும் ஒரு சிறு கூறு கண்டு, அச் சிறு கூறுகளை இணைத்துப் பெருங்கூறு காணுவதுதான் படுகைக் கூறு முறை யாகும்.

இந்திய நாட்டில், நாட்டுப்புற உழவர்களின் வாழ்க்கைத் தரத்தினை ஆய ஒரு கூறு எடுப்பதாகக் கொள்வோம். முதலில் இந்திய நாட்டை 30 அல்லது 35 பகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொள்ள வேண்டும். இந்த 30 அல்லது 35 பகுதிகளிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறைப்படி 10 பகுதிகளை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். மக்கள் தொகை எண்ணிக்கை விகிதாச்சாரத்திற்கேற்ப, ஒவ்வொரு பகுதியிலும் எடுக்கவேண்டிய கிராமங்களின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானித்துக் கொள்ளவேண்டும். ஒரு பகுதியில் 40 கிராமங்கள் உள்ளதாகக் கொள்வோம். பின் இந்த 40 கிராமங்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு விதிப்படி 5 கிராமங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். பின் அந்த 5 கிராமங்களிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யுள்ள உழவர்களை உருவாக்க வேண்டும். இவ்வாறு 10 பகுதி களிலிருந்தும் சிறுசிறு கூறுகள் பெறப்படும். பத்துச் சிறு கூறுகளும் சேர்ந்த பெருங் கூறைப் பலநிலைக் கூறு எனச் சொல்லலாம்.

அளவுடைக் கூறுகளை, வணிகக் குழுக்கள், தங்கள் பொருள்கள் விற்கப்படும் நிலையை அறியப் பயன்படுத்துகின்றன. இது ஏறத் தாழப் படுகைக் கூறைப் போன்றதேயாகும். முழுமைத் தொகுதி யினைப் பல பகுதிகளாக அல்லது படுகைகளாக முதலில் பிரித்துக் கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு சமவாய்ப்புக் கூறினையும் ஒவ் வோர் ஆய்வாளர் வினாப்பட்டியலைக் கொண்டு விடை சேகரிக் கிறார். இங்ஙனம் பல்வேறு சேகரிப்பாளர்களைக் கொண்டு, செய்திகள் கூறு முறையில் உருவாக்கப்படுகின்றன. இம்முறைக்கு அளவுடைக் கூறு எனப் பெயராகும்.

சமவாய்ப்பு, நோக்குடைய கூறுகளின் கலவை

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்று உருவாக்கும் போது, சில தருணங்களில் சமவாய்ப்புக் கூறு முறைகளையும்

நோக்குடைய கூறுமுறைகளையும் இணைத்துக் கையாளப் படுகின்றன. ஒரு நோக்கத்தின் அடிப்படையில், முழுமைத் தொகுதி பல சீரான குழுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு, அத்தகு ஒவ்வொரு குழுவிலிருந்தும் கூறுகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந் தெடுக்கப்பட்டு, பெருங்கூறு உருவாக்கப்படுகிறது.

கூறுப் பரவல்

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எண்ணற்ற கூறுகள் உருவாக்க முடியும். ஒவ்வொரு கூறின் கூட்டுச் சராசரியையும் காண்க. எல்லாக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளும் ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் அமைவதைக் காணலாம். முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் இயல்நிலையாக அமையாவிடினும்கூடக் கூட்டுச் சராசரி களின் பரவல் இயல்நிலையாகவே அமையும். அந்த இயல்நிலைப் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியின் கூறுப் பரவல் (Sampling distribution of the mean) எனக் கூறப்படும். இது போன்றே, மற்றைய பண்பளவைகளான (Parameters or statistics) இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம், விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், β கெழுக்கள் முதலியனவற்றின் கூறுப் பரவல்களெல்லாம் இயல்நிலையாக அமைவதாகக் காணப் பட்டுள்ளது.

திட்டப் பிழை

முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் எத்தன்மைத்தாயினும், அதன் பண்பளவைகளின் பரவல் இயல்நிலையாக அமையுமெனக் கூறினோம். கூட்டுச் சராசரியின் கூறுப் பரவலை எடுத்துக் கொள் வோம். அக் கூறுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்திற்கு, அக் கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழை (Standard Error) எனப் பெயராகும். இதுபோன்றே மற்றைய பண்பளவைகளின் கூறுப்பரவல்களின் திட்ட விலக்கங்கள் அப் பண்பளவைகளின் திட்டப்பிழைகளாகும். கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழையை $\sigma_{\bar{x}}$ எனவும், திட்டவிலக்கத் தின் திட்டப்பிழையை σ_{σ} எனவும், இதுபோன்றே மற்றைய திட்டப் பிழைகளையும் குறிப்பிடுகிறோம்.

பெருங்கூறு

ஒரு கூறில் அடங்கியுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அக்கூறின் 'உருவ அளவு' (size) எனக் கூறுகிறோம். இந்திய நாட்டு விஞ்ஞானிகளிலிருந்து 10 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு கண்டால், அக் கூறின் உருவ அளவு 10 ஆகும். நடைமுறை யில், 30 அல்லது 30-க்கு மேற்பட்ட உருவ அளவுடைய கூறுகளைப்

'பெருங்கூறுகள்' (Large Samples) என அழைக்கின்றோம். 30-க்குக் கீழ் உருவ அளவுடைய கூறுகள் 'சிறு கூறுகள்' (Small Samples) என அழைக்கின்றோம்.

பெருங்கூறுகளின், வேறுபாடு மிகைத்தன்மைச் சோதனை

கூறுகளின் பண்பளவைகளுக்கும், அவை பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளுக்கும் வேறுபாடு நிகழும். இவை கூறுக்குக் கூறு மாறுபடும். முழுமைத் தொகுதியினைப் பிரதி பலிக்கும் கூறுகளில், இவ் வேறுபாடுகள் தள்ளத்தக்களவிற்குச் சிறியதாயிருக்கும். கூறுகளில் ஏற்படும் சிறு சிறு அகமாற்றங்களால் (fluctuations due to sample) இச் சிறு வேறுபாடுகள் அமைகின்றன. இவ் வேறுபாடுகள் பொருட்படுத்துமளவிற்கு மிகையானதா, தள்ளத்தக்களவிற்குச் சிறியதா எனக் காணல் வேண்டும். இவ்வாறு காணும் சோதனைக்கு வேறுபாடு மிகைத் தன்மைச் சோதனை (Test of significance) எனப் பெயராகும்.

இவ் வேறுபாடுகளின் மிகைத்தன்மையை அளக்கப் பயன் படுவது ஒரு நிகழ்தகவு வரை (Level of probability) ஆகும். இந்த வரைக்கு மிகைத் தன்மை வரை (Level of significance) எனப் பெயராகும். ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் σ விற்குச் சமமான அல்லது பெரிய பிழைகள் 32% அம்சங்களிலும், 2σ விற்குச் சமமான அல்லது பெரிய பிழைகள் 5%க்குக் குறைவான அம்சங்களிலும், 3σவிற்குச் சமமான அல்லது பெரிய பிழைகள் 1%க்குக் குறைவான அம்சங்களிலும் நிகழ்கின்றன. எனவே, வேறுபாடு > அவ்வேறு பாட்டின் திட்டப்பிழை என அமைந்தால், அவ் வேறுபாடு 32% வரைப்படி மிகையானதாகும். வேறுபாடு > அவ் வேறுபாட்டின் திட்டப் பிழையின் இரு மடங்கு என அமைந்தால், அவ் வேறுபாடு 5% வரைப்படி மிகையானதாகும். வேறுபாடு > அவ் வேறு பாட்டின் திட்டப் பிழையின் மூன்று மடங்கு என அமைந்தால், அவ் வேறுபாடு 1% வரைப்படி மிகையானதாகும். வேறுபாட்டினை 'D' எனவும், அதன் திட்டப் பிழையை 'σ_D' எனவும் குறிப் பிடுவோம்.

மிகைத்தன்மை வரை	தீர்மானிக்கும் விகிதம்
32%	$\frac{D}{\sigma_D} > 1$
5%	$\frac{D}{\sigma_D} > 2$
1%	$\frac{D}{\sigma_D} > 1$

$\frac{\sigma}{\sigma_D}$ யைத் தீர்மானிக்கும் விகிதம் (critical ratio) என அழைக்கலாம்.

$t = \frac{D}{\sigma_D}$ யானது 0வினைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், 1ஐ மாறிலியாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது எனக் கொள்கிறோம்.

தேற்றம்

x, y ஆகியன தனி மாறிகளானால், $\sigma^2_{(x\pm y)} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

நிறுவுதல்

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots\dots + y_n}{n}$$

$$\sigma^2_{x+y} = \frac{1}{n} \sum \left[(x_r + y_r) - (\bar{x} + \bar{y}) \right]^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum \left[(x_1 - \bar{x}) + (y_r - \bar{y}) \right]^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (x_r - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum (y_r - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2p$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

x, y தனிமாறிகள். எனவே $r = 0$.

$$\therefore \quad \sigma^2_{x+y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

இதுபோன்றே $\sigma^2_{x-y} = \sigma_n^2 + \sigma_y^2$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad \sigma^2_{x\pm y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y$$

குறிப்பு: $X = x_1 + x_2 + \dots \dots + x_n$ எனில்,

$$\sigma_X^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots\dots + \sigma_{x_n}^2.$$

சோதனை 1

நேரில் கண்ட மதிப்பிற்கும் கணக்கியல் மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு.

நேரில் கண்ட மதிப்பு x என்க.

அதன் கணக்கியல் மதிப்பு α என்க.

$$\therefore \quad \text{வேறுபாடு } (x - \alpha)$$

(அ-து) $D = x - \alpha$

$(x-\alpha)$ ஆனது $y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$ என்ற இயல்

நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுவதாக நடைமுறையில் காணப்படுகிறது. எனவே, $(x-\alpha)$ வின் திட்டப் பிழை σ.

$$\therefore \quad \sigma_D = \sigma$$

$$t = \frac{D}{\sigma_D} = \frac{x-\alpha}{\sigma}$$

எனவே, $\frac{|x-\alpha|}{\sigma} > 2$ யெனில், வேறுபாடு 5% வரையில் மிகையானது.

$\frac{|x-\alpha|}{\sigma} \leqslant 2$ யெனில், வேறுபாடு 5% வரையில் மிகையன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பகடை 120 தடவைகள் வீசப்பட்டது. 1 அல்லது 6 விழுந்தால் வெற்றியாகும். அச் சோதனையில் 60 வெற்றிகள் கண்டால், வெற்றியானது கூறில் ஏற்படுகின்ற சிறு சிறு சலனங்களைப் பொறுத்ததா எனக் காண்க.

இங்கு $x = 60$.

$$p = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = np = 120 \times \frac{1}{3} = 40$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{240}}{3}$$

$$t = \frac{D}{\sigma_D} = \frac{20}{\sqrt{240}/3} = \frac{60}{\sqrt{240}} > 3$$

எனவே, வெற்றி வேறுபாடு 5% வரையில் மிகையானதாகும். அது கூறுச் சலனங்களைப் பொறுத்ததன்று. பகடை ஒருதலைச் சார்புடையது.

$\bar{x}$ன் திட்டப்பிழை

$X = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n$ என்க. மேலும் $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்பன தனித்தனி மாறிகள் என்க.

$\therefore \sigma_X^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \ldots\ldots + \sigma_{x_n}^2$

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பன x-ன் n மதிப்புகள். எனவே, x-ன் திட்ட விலக்கம் σ யெனில்,

$$\sigma = \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \ldots\ldots = \sigma_{x_n}$$

$$\therefore \quad \sigma_X^2 = n\sigma^2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{X}{n}$$

$$\bar{x}\text{-ன் திட்ட விலக்கம்} = \frac{X}{n}\text{ ன் திட்ட விலக்கம்}$$

$$= \frac{X\text{-ன் திட்ட விலக்கம்}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n}.\sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\therefore \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

சோதனை 2

கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்க. அக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$ என்க.

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \{\bar{x} \text{ நிலைஉறுப்பு}\}$$

$$(\text{அ-து})\ \sigma_D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \{\sigma = \text{முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம்.}\}$$

$$\text{தீர்மான விகிதம்} = t = \frac{|\bar{x} - \bar{x}_1|}{\sigma/\sqrt{n}}$$

குறிப்பு: முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் σ அறியப் படாவிட்டால், கூறின் திட்ட விலக்கம் s லிருந்து σ யை மதிப்பிட முடியும். σ ன் மதிப்பீடு $\frac{s}{\sqrt{n-1}}$ ஆகும். பெரிய கூறுகளில் n பெரி

தாகையால், இதனை $\frac{s}{\sqrt{n}}$ எனக் கொள்ளலாம். எனவே, இங்கு

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{x}_1|}{s/\sqrt{n}}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் $\bar{x} = 64''$. $\sigma = 3''$. 1,000 பேர் கொண்ட அதனது ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 63·5". கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு மிகையானதா? (அ.ப.)

$$t = \frac{64 - 63{\cdot}5}{\frac{3}{\sqrt{1000}}} = 5{\cdot}25 > 3.$$

∴ 5% வரைப்படி, வேறுபாடு மிகையானது!

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

மேலே கண்ட கணக்கில், முழுமைத் தொகுதியில் σ கொடுக்கப் படவில்லை. கூறின் திட்ட விலக்கம் 2·8" எனில், வேறுபாடு மிகையானதா?

$$t = \frac{64 - 63{\cdot}5}{\frac{2{\cdot}8}{\sqrt{1000}}} > 3$$

∴ 5% வரையில், வேறுபாடு மிகையானது.

சோதனை 3

இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாடு.

ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x}_1$

அதன் உருவ அளவு $= n_1$

இரண்டாவது கூறின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x}_2$

அதன் உருவ அளவு $= n_2$

$$\therefore \quad D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$\sigma_D = \sigma \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$\sigma_D{}^2 = \sigma^2 \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$= \sigma \bar{x}_1{}^2 + \sigma \bar{x}_2{}^2 \quad = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)$$

$$\sigma_D = \sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

$$\therefore t = \frac{D}{\sigma_D} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

குறிப்பு:

σ அறியப்படா நிலையில், s_1 s_2 ஆகிய கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களிலிருந்து σயை மதிப்பிடலாம். அம் மதிப்பீடு

$\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ ஆகும். n பெரிதாகையால், இதனை

$\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\text{இங்கு } t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}}$$

$$= \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}}$$

இரு கூறுகளும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால்,

$$\sigma\bar{x}_1 = \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \quad \sigma\bar{x}_2 = \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \quad \sigma^2\,\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

$$\therefore t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}.$$

சோதனை 4

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும், கூறின் திட்ட விலக்கத்திற்குமுள்ள வேறுபாடு.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $= \sigma$

கூறின் திட்ட விலக்கம் $= s$ என்க.

$$\therefore D = s - \sigma$$

$$\sigma_D = \sigma_{s-D}$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_s^2 + \sigma_D^2$$

$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ {நிறுவுதல் நமது பாடதிட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.}

$$\sigma\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}.$$

$$\therefore \quad t = \frac{|s - \sigma|}{\sigma/\sqrt{2n}}$$

சோதனை 5

இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களது வேறுபாடு.

கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்கள் s_1, s_2 என்க. அவைகளின் உருவ அளவைகள் n_1, n_2 என்க.

$$\sigma_D = \sigma_{s1-s2}$$

$$\sigma_D{}^2 = \sigma_{s1}{}^2 + \sigma_{s2}{}^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{2n_1} + \frac{\sigma^2}{2n_2}$$

$$\sigma_D = \sigma\sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}$$

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$$

குறிப்பு :

σ அறியப்படாவிட்டால், அதன் மதிப்பீடு $\sqrt{\frac{n_1\ s_1{}^2 + n_2\ s_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

n_1, n_2 மிகப் பெரிய எண்களாதலால், σன் மதிப்பீடு $\sqrt{\frac{n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2}{n_1 + n_2}}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \sigma_{s1-s2} = \sqrt{\frac{n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2}{n_1 + n_2} \cdot \left(\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{s_1{}^2}{2n_2} + \frac{s_2{}^2}{2n_1}}$$

$$\therefore \quad t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{2n_2} + \frac{s_2{}^2}{2n_1}}}$$

இரு கூறுகளும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தால், $\sigma_{s1} = \frac{s_1}{\sqrt{2n_1}}$; $\sigma_{s2} = \frac{s_2}{\sqrt{2n_2}}$

$$\therefore \sigma_{s_1-s_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}$$

$$\therefore \quad t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}}$$

சோதனை 6

நேரில் கண்ட விகிதாச்சாரத்திற்கும் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள விகிதாச்சாரத்திற்குமுள்ள வேறுபாடு.

ஒரு தனிச் சோதனையில் வெற்றித் தகவு காண்க. எனவே, n சோதனைகளில் x வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்புத்தொடர் உறுப்புகள் தருகின்றன. எனவே, வெற்றி தடவைகளின் சராசரி $= np$; வெற்றிகளின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{npq}$. ஆனால், வெற்றி விகிதாச்சாரத்தின்

$\left(\frac{x}{n}\text{ களின்}\right)$ கூட்டுச் சராசரி p ஆகும்; அதன் திட்ட விலக்கம் $\frac{\sqrt{npq}}{n} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ஆகும்.

n உருவ அளவுடைய கூறில் வெற்றி விகிதாச்சாரம் p' எனில்,

$$t = \frac{|p-p'|}{\sqrt{pq/n}}.$$

சோதனை 7

இரு கூறுகளின் விகிதாச்சார வேறுபாடு.

வெற்றி விகிதாச்சாரங்கள் p_1, p_2 என்க. அவைகளின் உருவ அளவைகள் n_1, n_2 என்க.

$$\therefore \quad \sigma_{p_1} = \sqrt{\frac{pq}{n_1}}$$

$$\sigma_{p_2} = \sqrt{\frac{pq}{n_2}}$$

p ஆனது முழுமைத் தொகுதியில் வெற்றி விகிதாச்சாரமாகும்.

$$\therefore \quad \sigma^2_{p_1-p_2} = \frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}$$

$$\therefore \quad t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$$

குறிப்பு: முழுமைத் தொகுதியின் விகிதாச்சாரம் p அறியப் படாவிட்டால், அதன் மதிப்பீடு $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டின் ஜனாதிபதிகளின் மொத்தப் பிள்ளைகள் : 70 மகன்கள், 46 மகள்கள். மக்கள்தொகையான முழுமைத் தொகுதியில் ஆண் பிள்ளைகள் 51% ஆவர். எனில் ஜனாதிபதியின் பிள்ளைகளது விகிதாச்சாரம் முரண்பட்டதா?

(செ.ப.)

$$p = \frac{51}{100};\ q = \frac{49}{50}$$

$$p' = \frac{70}{116}$$

$$t = \frac{\left|\frac{51}{100} - \frac{70}{116}\right|}{\sqrt{\frac{0{\cdot}51 \times 0{\cdot}49}{116}}} < 2.$$

∴ 5% வரையில், ஜனாதிபதிகளின் பிள்ளைகளது விகிதாச்சாரம் முரண்பட்டதன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில், இறப்பு விகிதாச்சாரத்தின் வேறுபாடு மிகையானதா? எனக் காண்க.

	பிழைத்தவர்கள்	இறந்தவர்கள்
தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டவர்கள்	130	45
தடுப்பு மருந்து போடப்படாதவர்கள்	35	90

$$p_1 = \frac{45}{175};\quad p_2 = \frac{90}{125}$$

$$n_1 = 175;\quad n_2 = 125$$

$$p = \frac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2} = \frac{45 + 90}{300}$$

$$= \frac{135}{300}$$

$$q = \frac{165}{300}$$

$$t = \frac{\left| \frac{45}{175} - \frac{90}{125} \right|}{\sqrt{\frac{135}{300} \times \frac{165}{300}\left(\frac{1}{175} + \frac{1}{125}\right)}} 72$$

∴ வேறுபாடு மிகையானதாகும்.

சோதனை 8

நேரில் கண்ட சிறு ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மிகைத் தன்மை.

கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r என்க. முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு p என்க. n பெரியதாகவும், r, p சிறியனவாகவும் அமைந்தால் $\sigma_r = \frac{1 - p^2}{\sqrt{n-1}}$. n மிகப்பெரியதாகையால் $\sigma_r = \frac{1 - p^2}{\sqrt{n}}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore t = \frac{|r - p|}{\frac{1 - p^2}{\sqrt{n}}}.$$

சோதனை 9

நேரில் கண்ட பெருங் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மிகைத் தன்மை.

கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r பெரிதாயிருப்பின், ஃபிஷர் Z–சோதனையைப் பயன்படுத்த வேண்டும். r என்பது கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு. p என்பது முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு.

$$z = \tfrac{1}{2} \log_e \frac{1 + r}{1 - r} \; ; \; z' = \log_e \frac{1 + p}{1 - p}$$

இங்கு $r - p$ மிகையானதா எனக் காணப் பயன்படும் தீர்மான விகிதம்

$$t = \frac{|z - z'|}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

சோதனை 10

இரு கூறுகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வேறுபாடு.

r_1 r_2 என்பன இரு ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள்

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}\ ;\ z_2 = \frac{1}{2}\ \log \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\sigma_{z1} = \frac{1}{\sqrt{n_1-3}}\ ;\ \sigma_{2} = \frac{1}{\sqrt{n_2-3}}$$

$$\sigma_{z1-z2} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}$$

$$\therefore\ t = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

x, y-ன் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·72 என அமைந்த ஒரு குழுவினில் 420 பையன்கள் உள்ளனர். பிறிதொரு குழுவினில் 225 பெண்கள் உள்ளனர். இரண்டாம் கெழுவினில் x, y-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·65 ஆகும். ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வேறுபாடு மிகையானதா? (செ.ப.)

$$z_1 = \frac{1}{2}\log \frac{1+0{\cdot}72}{1-0{\cdot}72} = 0{\cdot}89$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+0{\cdot}65}{1-0{\cdot}65} = 0{\cdot}77$$

$$t = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}} = \frac{|0{\cdot}89-0{\cdot}77|}{\sqrt{\frac{1}{417}+\frac{1}{222}}} = 1{\cdot}44 < 2$$

$\therefore$ 5% வரையில், வேறுபாடு மிகையன்று.

நம்பிக்கை வரைகள்

கூறின் ஒரு பண்பளவிலிருந்து, அதன் முழுமைத் தொகுதியின் அப் பண்பளவையை மதிப்பிட வேண்டியிருக்கும். அவ்வாறு மதிப்பிடும்போது, மதிப்பீடுகளில் 98% சரியாக இருக்க வேண்டுமெனக் கொள்ளலாம். $\bar{x}_1$ என்பது ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி என்க. அதன் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ என்க. முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் σ என்க.

n கூறின் உருவ அளவையாகும். எனில், $t = \dfrac{|x - \bar{x}_1|}{\sigma/\sqrt{n}}$ என்பது 1 ஐத் திட்ட விலக்கமாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும். எனவே, $|t| > 2{\cdot}3263$ யென அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு 0·02. எனவே, 100-க்கு 98 கூறுகளில்,

$$\frac{|\bar{x} - \bar{x}_1|}{\sigma/\sqrt{n}} < 2{\cdot}3263.$$

$$(\text{அ-து}) \quad -2{\cdot}3263 < \frac{x - \bar{x}_1}{\sigma/\sqrt{n}} < 2{\cdot}3263.$$

$$\therefore \quad \bar{x}_1 - 2{\cdot}3263\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \bar{x}_1 + 2{\cdot}3263\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\left(\bar{x}_1 - 2{\cdot}3263\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_1 + 2{\cdot}3263\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

என்பன $\bar{x}$-ன் 98% நம்பிக்கை வரைகளாகக் கொள்ளப்படுகின்றன.

குறிப்பு

(1) σ அறியப்படா நிலையில், sன் மதிப்பீட்டைக் கையாளலாம். எனவே $\bar{x}_1 - 2{\cdot}3263\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_1 + 2{\cdot}3263\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ என்பன $\bar{x}$-ன் 98% நம்பிக்கை வரைகளாகும்.

(2) n மிகச் சிறியதாக அமையின், இந்த வரைகள் உண்மையன்று.

பயிற்சி

1. ஒரு நாணயம் 400 தடவைகள் சுண்டப்பட்டது. அதில் 250 தடவைகள் தலை விழுந்தது. நடைமுறையில் கண்ட இந்த வெற்றி தடவைகளுக்கும், கணக்கியல் வெற்றி தடவைகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு மிகையானதா எனக் காண்க.

2. 9000 மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 3·47. எனில், கூட்டுச் சராசரி 3, திட்ட விலக்கம் 2 ஆகக்கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் பிறந்த கூறுதானா இது என்பதை ஆய்க. (செ.ப.)

3. வயதுவந்தவர்களின் பருமன் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகிறது. அதன் கூட்டுச் சராசரி 132 பவு. 225 பேர் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி 125 பவு. அதன் திட்ட விலக்கம் 25 பவு. எனில், கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும்,

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு மிகையானதா ?

4. 150 மனிதர்களின் சராசரி உயரம் 5′ 5″. அவர்களின் திட்ட விலக்கம் 2′ 5″. ‘இந்தக் கூறு, 5′ 6″ கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தது’ என்ற கூற்று மெய்யா, பொய்யா ?

5. 62 தொழிலாளர் குடும்பங்கள் கொண்ட ஒரு கூறில் கூட்டுச் சராசரி பால் செலவு 12·8 பைன்ட்; அதன் திட்ட விலக்கம் 5·6 பைன்ட். அதுபோல, 113 குடும்பங்கள் கொண்ட வேறொரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி பால் செலவு 15·9 பைன்ட்; அதன் திட்ட விலக்கம் 6·8 பைன்ட். இரு கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டுத் தன்மையை ஆய்க.

6. 500 குடும்பங்களில், மாதந்தோறும் சராசரி முட்டைச் செலவு 50. அதுபோல, 1000 குடும்பங்களில் அத்தகைய கூட்டுச் சராசரி 55. அவ்விரு கூறுகளும் பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க முட்டைச் செலவு 6 ஆகும். இவ்விரு கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டு மிகைத்தன்மையை ஆய்க.

7. ஒரு புத்திக் கூர்மை சோதனையில், முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க மதிப்பெண் 35. அதே சோதனையில், 250 பையன்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 130; அதுபோல 150 பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 140. எனில், இவ்விரண்டு கூறுகளிலும் பொருட்படுத்துமளவிற்கு புத்திக் கூர்மை வேறுபடுகிறதா என ஆய்க.

8. 75 அம்சங்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் திட்ட விலக்கம் 3·75. திட்ட விலக்கம் 3 5 ஆகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு பிறந்ததுதானா என ஆய்க.

9. ஒரு கூறின் உருவ அளவு 1000. அதன் திட்ட விலக்கம் 2·5. மற்றொரு கூறின் உருவ அளவு 600; அதன் திட்ட விலக்கம் 2·4. எனில், இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு மிகையானதா ?

10. டைஃபாய்ட் காய்ச்சலால் இறந்தவர்கள் 17·26%. ஓர் ஆண்டில் ஒரு மருத்துவ விடுதியில் 640 நோயாளிகள் கவனிக்கப் பட்டனர். அவர்களுள் 63 பேர் இறந்தனர். அது ஒரு திறமையான மருத்துவ விடுதியா என ஆய்க.

11. ஒரு நகரில் உள்ள 6000 மனிதர்களில் 4000 பேர் புகை பிடிப்பவர்கள். மற்றொரு நகரில் 9000 மனிதர்களில் 4500 பேர் புகைபிடிப்பவர்கள். புகைபிடிக்கும் தன்மையில், இவ்விரு நகரங்களும் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வேறுபடுகின்றனவா?

12. ஒரு தேசிய ஆய்வினில், காசநோயால் பீடிக்கப்பட்டவர்கள் 1%. இனி, 400 பேர் கொண்ட ஒரு கல்லூரியில் 5 பேர் அந்நோயால் பீடிக்கப்பட்டனர். 1200 பேர் கொண்ட பிறிதொரு கல்லூரியில் 10 பேர் பீடிக்கப்பட்டனர். இவ் வேறுபாடு மிகையானதா? தேசிய விகிதாச்சாரம் தெரியாத நிலையிலும் அவ் வேறுபாட்டின் மிகைத்தன்மையைக் காண்க.

13. ஒரு போட்டிப் பரீட்சையில், 60 மாணவர்களில் 42 பேர் தேர்வு பெற்றனர்; 160 மாணவர்களுள் 130 பேர் தேர்வு பெற்றனர். மாணவர்களை விட மாணவிகள் சரியாகச் சோதனை எழுதவில்லையா? (செ.ப.)

14. 14,000 பசுக்களில், வாரப் பாலளவிற்கும் வெண்ணெய் கொழுப்புச் சத்தளவிற்குள்ள எதிர்மறை ஒட்டுறவுக் கெழு 0·08. இச் சிறிய ஒட்டுறவுக் கெழு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததுதானா என்பதை ஆய்க. (செ.ப.)

15. 9,000 உருவ அளவு கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·52. முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·6. எனில், ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வேறுபாடு மிகையானதா?

16. 16 மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தது ஆகும். அதன் கூட்டுச் சராசரி 40·6. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் 135. எனில், முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரியின் 95% நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க. (செ.ப.)

17. சிறு கூறுகளில் மிகைத்தன்மைச் சோதனை

ஒரு கூறின் உருவ அளவு 30-க்குக் கீழானால், அதனைச் சிறு கூறு எனக் கருதலாம் என முன்பே கூறினோம்.

ஸ்டுடன்ஸ் ‘t’ பரவல்

பெரிய கூறுகளில், தீர்மானிக்கும் விகிதம் ‘t’ ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். ஆனால், சிறு கூறுகளில் அங்ஙனம் கூற முடியாது.

n ஒரு சிறிய எண். அதனை உருவ அளவையாகக் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, திட்ட விலக்கம் s என்க. மேலும்

$$t = \frac{\bar{x}}{s/\sqrt{n-1}} \text{ என்க.}$$

இந்த t-க்குரிய அலைவெண் சார்பாகக் காணப்பட்டது.

$$f(t) = k\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

அலைவுவரை அடைக்கும் பரப்பு 1 எனக் கொண்டால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\text{(அ-து)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} k\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dx = 1$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dx}.$$

$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}\ (1-x)^{m-1}\, dx$ என்பதைப் பயன்படுத்த

நாம் பெறுவது,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dx = \sqrt{n-1}\ \beta\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\,\beta\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

இங்குச் சமன்பாட்டுப் படி (Degrees of Freedom) $(n-1)$ ஆகும்.

$n - 1 = \nu$ என்க.

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}\,\beta\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}}$$

't' பரவலின் பண்புகள்

t பரவலுக்குரிய சமன்பாடு $y = \frac{1}{\sqrt{\nu}\,\beta\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$

என்பதைக் கண்டோம். இதன் சமன்பாட்டுப் படி ν ஆகும். (t, y) $(-t, y)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளும் சமன்பாட்டில் பொருந்துவதால், இது y அச்சினைச் சுற்றிச் சமச்சீராக அமைந்துள்ளது. $t = 0$ என்ற y அச்சில் இதன் கூட்டுச் சராசரியும், முகடும், இடைநிலையும் ஒரே புள்ளியில் பொருந்தி அமைகின்றன. இதனது ஒற்றைப்படை பெருக்கு விலக்குத் தொகைகள் பூஜ்யமாகும்.

இதனது மாறுபாடு $\frac{\nu}{\nu-2}$ ஆகும். $\nu \to \infty$ ஆக அமைகின்ற போது, t பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாக மாறி அமைகிறது. $\nu \geqslant 30$ என்ற நிலையிலேயே இத் தன்மையைக் காணலாம்.

முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரிக்கும் அதனது ஒரு சிறு கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு

கூறின் உருவ அளவு $= n$
,, கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x}_1$
,, திட்ட விலக்கம் $= s$

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x}$ என்க.

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{x}_1} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} \quad (\because \bar{x} \text{ ஒரு நிலை உறுப்பு})$$

$$\therefore t = \frac{|\bar{x}-\bar{x}_1|}{s \,|\, \sqrt{n-1}}$$

இந்த t_1 $(n-1)$ படியுடைய 't' பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. எனில், $(n-1)$ படியில் இந்த t யின் மதிப்பிற்குரிய நிகழ்தகவு 0·05-க்கு அதிகமானால், வேறுபாடு மிகையன்று எனக் கூறுகிறோம்.

இரு சிறு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாடு

முதல் கூறின்		கூட்டுச் சராசரி	$\bar{x}_1$
	,,	திட்ட விலக்கம்	s_1
	,,	உருவ அளவு	n_1
இரண்டாம்	,,	கூட்டுச் சராசரி	$\bar{x}_2$
	,,	திட்ட விலக்கம்	s_2
	,,	உருவ அளவு	n_2

$$\text{இங்கு } t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

இது $n_1 + n_2 - 2$ படியுள்ள 't' பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. எனவே இந்த tயின் மதிப்பிற்குரிய நிகழ்தகவு 0·05-க்கு அதிகமானால், வேறுபாடு மிகையன்று எனக் கூறுகிறோம்.

ஒரு சிறு கூறில் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முக்கியத்துவம்

ஒட்டுறவுக் கெழு r யெனில்,

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

இந்த t பரவலின் படி $(n-2)$. இதன் மதிப்பிற்குரிய நிகழ்தகவு 0·05-க்கு அதிகமானால், நேரில் கண்ட r-ன் மதிப்பு முக்கியமான தன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட 10 மாறிகளின் மதிப்புகள்: 53, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 56 என்ற கொள்கையை ஆய்க.

$$\bar{x} = \frac{582}{10} = 58{\cdot}2$$

$$s^2 = 11-({\cdot}2)^2 = 10{\cdot}96$$

கூறின் திட்ட விலக்கம் $= 3{\cdot}31$

$$t = \frac{58{\cdot}2-56}{3{\cdot}31/\sqrt{9}} = 1{\cdot}994$$

இந்த t பரவலின் படி $= n-1=10-1=9$. 't' பட்டியலில் 1·994 ஆனது (0·10, 0·05) என்ற நிகழ் தகவுகளுக்கு இடையே விழுகின்றது. எனவே, அது 0·05ஐவிட அதிகமானது. எனவே, வேறுபாடு மிகையன்று. எனவே, கொடுத்த கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

10, 8 ஆகிய எண்ணிக்கை கொண்ட இரு குழு மாணவர்கள் ஒரே பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

முதற் குழு: 56, 59, 58, 60, 57, 60, 58, 62, 59, 58

இரண்டாம் குழு: 57, 58, 56, 59, 59, 58, 60, 57

கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு மிகையானதா?

$$\bar{x}_1 = 58{\cdot}7\,; \quad \bar{x}_2 = 58$$

$$s_1^2 = 2{\cdot}6\,; \quad s_2^2 = 1{\cdot}5$$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_{2-2}} \times \dfrac{(n_1+n_2)}{n_1 n_2}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}7}{\sqrt{\dfrac{26+12}{16} \times \dfrac{18}{80}}} = 0{\cdot}96$$

இதன் படி $\nu = 16$. இங்கு $P > {\cdot}05$. எனவே, வேறுபாடு மிகையன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

10 எலிகளுக்கு A உணவு, B உணவு வெவ்வேறு காலங்களில் அளிக்கப்பட்டு, அவைகளின் எடைகள் அதிகமான புள்ளி விபரம் வருமாறு :

A: 5, 6, 8, 10, 1, 12, 3, 4, 9, 6

B: 1, 10, 2, 8, 0, 8, 6, 0, 3, 2

வேறுபாடு மிகையானதா?

இங்கு ஒரே குழு எலிகள் ஆயப்படுவதால், மேலே கண்ட இரு மாறிகளும் ஒட்டுறவுடையன. எனவே, அச் சோடி மதிப்புகளின் வேறுபாடுகளைக் கண்டு, அவ் வேறுபாடுகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் 0 விற்குமுள்ள வேறுபாடு மிகையானதா எனக் காண வேண்டும்.

$d = x - y$: 4, −4, 6, 2, 1, 4, −3, 4, 6, 4

d^2 : 16, 16, 36, 4, 1, 16, 9, 16, 36, 16

$$\sum d = 24 \qquad \bar{d} = 2{\cdot}4$$

$$\sum d^2 = 166 \qquad \frac{\sum d^2}{n} = 16{\cdot}6$$

$$s^2 = \frac{166}{10} - \left(\frac{24}{10}\right)^2 = \frac{1084}{100}$$

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{s^2/n-1}} = \frac{2{\cdot}4}{\sqrt{\frac{1084}{100} \times \frac{1}{9}}} = 2{\cdot}2$$

$$v = 10 - 1 = 9$$

எனவே, t-ன் மதிப்பின் நிகழ்தகவு (0·1,0·05) இடையில் விழுகின்றது. $\therefore P > 0{\cdot}05$.

∴ வேறுபாடு மிகையன்று. இரண்டு உணவிலும் வேறுபாடு இல்லை.

கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை வரைகள்

n உருவ அளவுடைய ஒரு சிறு கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$ என்க. 98%க்கு முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி வரைகளைக் காண வேண்டும்.

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{x}_1|}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

இது $(n-1)$ படியில் t பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. $|t| > \bar{x}$ என்பதற்கு நிகழ்தகவு 0·02. எனவே,

$$-\bar{x} < t < \bar{x}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - \frac{\bar{x}\, s}{\sqrt{n-1}} < \bar{x} < \bar{x}_1 + \frac{\bar{x}\, s}{\sqrt{n-1}}$$

$\left(\bar{x}_1 - \frac{\bar{x}\, s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x}_1 + \frac{\bar{x}\, s}{\sqrt{n-1}}\right)$ என்பது $\bar{x}$ ன் வரைகளாகும்.

F பரவல்

$$F = \frac{\mu^2}{\nu^2} = \frac{n_1\, s_1^2\, (n_1 - 1)}{n_2\, s_2^2\, (n_2 - 1)}$$

இங்கு n_1 உருவ அளவுடைய கூறின் மாறிலி s_1^2

,, n_2 ,, ,, ,, s_2^2

முதல் கூறிலிருந்து, முழுமைத் தொகுதி மாறிலியின் மதிப்பீடு

$$= \mu^2 = \frac{n_1\, s_1^2}{n_1 - 1}$$

இரண்டாவது கூறிலிருந்து, முழுமைத் தொகுதியின் மாறிலி மதிப்பீடு $= \nu^2 = \frac{n_2\, s_2^2}{n_2 - 1}$

இம் மதிப்பீடுகளின் படிகள் (Degrees of Freedom) முறையே $n_1 - 1 = \nu_1$, $n_2 - 1 = \nu_2$ ஆகும்.

F-ன் அலைவுச் சார்பி

$$y = f(F) = k\, \frac{F^{(\nu_1 - 2)/2}}{(\nu_1 F + \nu_2)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}$$

அலைவு வரை அடைக்கும் பரப்பு 1 எனக் கொண்டால்,

$$\int_0^{\infty} f(F)\, dF = 1.$$

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$k = \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)}$$

எனவே,

$$f(F) = \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \quad \frac{F^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{(\nu_1 F + \nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

$$(0 \leqslant F \leqslant \infty)$$

F பரவலின் பண்புகள்

இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\frac{\nu_2}{\nu_2-2}$.

இதன் முகடு $\frac{\nu_1-2}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_2+2}$ ($\nu_1 > 2$ ஆக அமைந்தால்).

எனவே, இப்பரவல் நேர்மறை கோட்ட முடையது.

குறிப்பு

1. ஸ்டூடன்ஸ் t சோதனையைச் சமமாறிலிகளுடைய முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாட்டு மிகைத் தன்மையைக் கணிக்கப் பயன் படுத்துகிறோம். எனவே, இந்தச் சோதனையைப் பயன்படுத்து வதற்கு முன்னர், மாறிலிகளின் சமத்தன்மையைச் சோதித்துக் கொள்ளவேண்டும். அத்தகைய சோதனைக்கு F பரவல் பயன் படுகிறது.

2. F பட்டியலில் மிகப்பெரிய மாறிலியின் படி ν_1 எனவும், சிறிய மாறிலியின் படி ν_2 எனவும் கொள்ளவேண்டும். 1%, 5% வரைகளில் ν_1, ν_2 படிகளில் F மதிப்புகள் F பட்டியலில் தரப் பட்டுள்ளன. ν_1 ν_2 படிகளில் பட்டியலில் தரும் $F_{0 \cdot 05}$ மதிப் பானது, கணக்கிடப்பட்ட F-ன் மதிப்பிற்கு மிகையானால், F விகிதம் மிகையன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

8, 7 அம்சங்கள் கொண்ட இரு தனிக் கூறுகளின் மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

கூறு 1 : 9, 11, 13, 11, 15, 9, 12, 14
கூறு 2 : 10, 12, 10, 14, 9, 8, 10

முழுமைத் தொகுதி மாறிலியின் மதிப்பீடுகள் மிகையான அளவிற்கு வேறுபடுகின்றதா? (செ.ப.)

$$s_1^2 = 4{\cdot}1875$$
$$s_2^2 = 3{\cdot}3878$$

$$F = \frac{n_1\ (n_2 - 1)\ s_1^2}{n_2\ (n_1 - 1)\ s_2^2} = 1{\cdot}1211$$

பட்டியலிலிருந்து, 7, 6 படிகளில் $F_{0\cdot05} = 4{\cdot}21$.

$\therefore \quad F_{0\cdot05} > F$

$\therefore$ மாறிகளின் மதிப்பீடுகளது வேறுபாடு மிகையன்று.

பயிற்சி

1. மாணவர்கள், மாணவியர்கள் கொண்ட இரு குழுவிற்கு ஒரு புத்திகூர்மைச் சோதனை தரப்பட்டது. அதன் புள்ளி விபரம் வருமாறு :

	மாணவர்	மாணவியர்
கூட்டுச் சராசரி	124	121
திட்ட விலக்கம்	12	10
உருவ அளவு	18	14

மாணவ, மாணவியர் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாடு மிகையானதா ? (செ.ப.)

2. 10 மாணவர்கள் பெற்ற புத்திகூர்மைக் கெழுக்கள் வருமாறு : 70, 120, 110, 101, 88, 83, 95, 98, 107, 100.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி புத்திகூர்மைக் கெழு 100 என்ற கொள்கை பொருத்தமுடையதுதானா எனக் காண்க.

(செ.ப.)

3. ஓர் இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 11 ஜோடி மதிப்புகள் கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·42. எனில் 5% வரையில் இந்த ஒட்டுறவுக் கெழு முக்கிய மானதா எனக் காண்க. (செ.ப.)

4. ஓர் இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 18 ஜோடி மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r ஆகும். 5% வரையில் இக் கெழு முக்கியமானதாக அமையுமாறு r-ன் மிகக் குறைந்த மதிப்பு யாது? (செ.ப.)

5. 20 உருவ அளவுள்ள ஒரு கூறின் திட்ட விலக்கம் 7·3 எனில், 95% வரையில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க நம்பிக்கை வரைஎல்லைகளது கீழ் எண்ணைக் காண்க.

6. 9, 8. அம்சங்கள் கொண்ட இரு கூறுகளின் அம்ச மதிப்பு கள் வருமாறு:

கூறு 1: 15, 9, 10, 13, 11, 12, 11, 10, 14
கூறு 2: 12, 8, 12, 10, 9, 11, 14, 10

முழுமைத் தொகுதியின் மாறிலிக்குரிய மதிப்பீடுகள் மிகைபட வேறுபடுகின்றனவா?

7. இரு நகரங்களின் தொழிலாளர் தினக் கூலிப் பட்டியல் வருமாறு:

	உருவ அளவு	திட்ட விலக்கத் தினக்கூலி
நகர் 1:	16	25
நகர் 2:	13	32

5% வரையில், தினக்கூலி மாறிலிகளின் சமத்தன்மையைச் சோதனை செய்க. (செ.ப.)

18. கைவர்க்கப் பரவல்

கைவர்க்கப் பரவல்

இப் பரவலுக்குரிய சமன்பாடு,

$$f(\chi^2) = k(\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} - e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

இதன் சமன்பாட்டுப் படி ν ஆகும்.

$y = f(\chi^2)$ அலைவு வரை அடைக்கு பரப்பு 1 எனக் கொண்டால்,

$$\int_0^\infty k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x)^{\frac{\nu-2}{2}} dx = 1$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} \quad x^{n-1} \quad dx \qquad (n > 1)$$

எனில்,

$$k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

எனவே, அலைவுச் சார்பு

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})} \quad e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}}$$

கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty \chi^2 \, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u} (2u)^{\frac{\nu}{2}} 2\,du \;\{ \chi^2 = 2u \}$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{\nu}{2}} du$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\nu}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$= \nu.$$

மாறிலி

$$s^2 = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty (\chi^2)^2 \, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u} \cdot (2u)^{\frac{\nu}{2}+1} 2\,du$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\left(\frac{\nu}{2}+2\right)-1} du$$

$$= \frac{4\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$= \nu(\nu+2)$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$= \nu(\nu+2) - \nu^2 = 2\nu.$$

முகடு

$$y = ke^{-\frac{\chi^2}{2}}(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}$$

$$\frac{dy}{d\chi^2} = -\tfrac{1}{2}\,e^{-\frac{\chi^2}{2}}.(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} + \left(\frac{\nu}{2}-1\right)e^{-\frac{\chi^2}{2}}.(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-2} = 0$$

$$\therefore \chi^2 = \nu - 2$$

$$\therefore \text{முகடு} = \nu - 2$$

கோட்டளவை

$$\text{பியர்ஸான் கோட்டளவை} = \frac{2}{\sqrt{\nu}}.$$

தட்டை அளவை

$$\beta_2 = 3 + \frac{12}{\nu}$$

$\nu \to \infty$ என்ற நிலையில் இப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது. $\nu \geqslant 30$ என்ற நிலையிலேயே இது நிகழ்கிறது.

வளைகோட்டுப் பொருத்தச் சோதனை

ஓர் அலைவுப் பரவலில் n பிரிவுகளும், ஒவ்வொரு பிரிவோடு இணைந்த அலைவெண்ணும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொது அலைவெண் f_i என்க. பொருத்தப்பட்ட வளைகோட்டின் வாயிலாகக் கண்ட இதற்குரிய கணக்கியல் அலைவெண் m_i என்க. மொத்த அலைவெண் N ஆகட்டும். $\frac{f_i}{N}$ மிகச் சிறியதாக அமையாம லிருந்தால், $(f_i - m_i)$ ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும் எனில் $\sum \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i}$ என்பது ஏறத்தாழ ஒரு கைவர்க்கப் பரவலில்

அமையும். அந்த கைவர்க்கப் பரவலின் சமன்பாட்டுப் படி $[n-(k+1)]$ ஆகும். இங்கு n பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை. k என்பது கூறிலிருந்து மதிப்பிடப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளின் எண்ணிக்கையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக அமைந்தால், அதற்குரிய வரையினைப் பொருத்த $\bar{x}, \sigma$ என்ற இரு பண்பளவைகளையும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறுகிய அலைவுப் பரவலிலிருந்து மதிப்பிட வேண்டும். எனவே, இங்கு $k=2$ ஆகும். கொடுத்த அலைவுப் பரவலுக்குரிய $\chi^2 = \sum \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i}$ கணக்கிட்டு, χ^2 பட்டியலில் $(n-k)$ படியில் அம் மதிப்பிற்குரிய நிகழ்தகவு P யினைக் காணவேண்டும். $P > 0{\cdot}05$ யெனில், 5% வரையில் வளைகோடு பொருத்தமானதே எனக் கருதலாம். நேரில் கண்ட கணக்கியல் அலைவெண்கள், கணக்கியல் அலைவெண்களிலிருந்து பெறும் வேறுபாடு மிகையன்று எனப் பொருளாகும்.

இங்கு f_i சிறியதாக அமையக்கூடாது என்பது நோக்கத்தக்கது. எனவே, f_i சிறியதாகக் கொடுக்கப்பட்டால், முந்திய அல்லது பிந்திய பிரிவு அல்லது பிரிவுகளோடு இணைத்துப் பெரிய அலைவெண்ணைப் பெற்றுக்கொள்ள வேண்டும்.

நேர்வுப் பட்டியலில் பண்புகளின் தனித்தன்மைச் சோதனை

ஒரு நேர்வுப் பட்டியலில் n படுக்கை வரிசைகளும், m நெட்டு வரிசைகளும் அமைவதாகக் கொள்வோம். பண்புகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தவை என்பது கொள்கை என்க. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் அமைந்த f_i என்ற கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண்ணிற்கு இணையான கணக்கியல் அலைவெண் m_i ஐக் காணவேண்டும்.

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i}$$ என்பது கைவர்க்கப் பரவலில் அமைகிறது.

அதன் சமன்பாட்டுப் படி $(m-1)\,(n-1)$ ஆகும். χ^2 பட்டியலில், $(m-1)\,(n-1)$ படியில் இதன் மதிப்பிற்கான நிகழ் தகவு P யைக் காணவேண்டும். $P > 0{\cdot}05$ ஆக அமைந்தால், கொள்கை ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது ; இல்லாவிடில் புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

400 குடும்பங்களில் பிறந்த 4 குழந்தைகளில் ஆண், பெண் இனம் வருமாறு :

ஆண் :	0	1	2	3	4
குடும்பம் :	16	89	145	118	32

ஈருறுப்புப் பரவல் $(q+p)^n$ஐப் பொருத்துக. அதன் பொருத்தத்தினை ஆய்க. (செ.ப.)

ஈருறுப்புப் பரவல் : $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^4$

0, 1, 2, 3, 4 ஆண் குழந்தைகளுக்கான கணக்கியல் அலைவெண்கள் $400(\frac{1}{2})^4$, $400 \cdot 4C_1 \cdot (\frac{1}{2})^4$; $400 \cdot 4C_2 \cdot (\frac{1}{2})^4$, $400 \cdot 4C_3 (\frac{1}{2})^4$, $400 \cdot (\frac{1}{2})^4$ (அ-து) 25, 100, 150, 100, 25.

$\therefore \quad (f_i - m_i)^2$ 81, 121, 25, 324, 49

$$\sum \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i} = \frac{81}{25} + \frac{121}{100} + \frac{25}{150} + \frac{324}{100} + \frac{49}{25}$$
$$= 9 \cdot 8.$$

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை ஏதுவும் கூறிலிருந்து கணிக்கப்படவில்லை.

எனவே படி $= 5 - 1 = 4$.

χ^2 பட்டியல் படி $P > 0 \cdot 05$

எனில் 5% வரையில், கொள்கை ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது. ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்தமானதே.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு குழு நபர்களில் டைபாயிடு தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டதன் பலன் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

	டைபாயிடினல் பீடிக்கப் பட்டவர்கள்	டைபாயிடினல் பீடிக்கப் படாதவர்கள்	மொத்தம்
தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டவர்கள்	585	15	600
தடுப்பு மருந்து போட்டுக் கொள்ளாதவர்கள்	380	20	400
மொத்தம்	965	35	1000

மருந்து பலனுள்ளதா எனக் காண்க.

(i) $965 \times \frac{6}{10} = 579$

(ii) $965 - 579 = 386$

(iii) $35 \times \frac{6}{10} = 21$

(iv) $35 - 21 = 14$

$$\chi^2 = \frac{(585-579)^2}{579} + \frac{(380-386)^2}{386} + \frac{(15-21)^2}{21} + \frac{(20-14)^2}{14}$$

$$= \frac{36}{579} + \frac{36}{386} + \frac{36}{21} + \frac{36}{14}$$

$$= 4{\cdot}43$$

இதன் படி $= (2-1)(2-1) = 1$

χ^2 பட்டியல் படி, 4·43-க்குரிய நிகழ்தகவு $P < 0{\cdot}05$

∴ 5% வரையில், தடுப்பு மருந்து பலனுள்ளதாகும்.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 100 மாணவர், 100 மாணவியர் ஒரு புத்தி கூர்மைச் சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்.

மதிப்பெண்கள்	< 20	20 – 30	30 – 40	> 40
மாணவர்	10	41	29	20
மாணவியர்	25	50	20	5

இப்பரவல்கள் வெவ்வேறு வகைதானு என்பதை ஆய்க.

(செ.ப.)

2. பூ, இலைத்தன்மைக்கேற்ப 500 செடிகளின் வகைகள் வருமாறு :

தட்டை இலையோடு நீலப் பூ	329
கூரான இலையோடு நீலப் பூ	78
தட்டை இலையோடு வெள்ளைப் பூ	121
கூரான இலையோடு வெள்ளைப் பூ	32

இவ்வலைவெண்கள் 9 : 3 : 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனவா எனக் காண்க. (செ.ப.)

3. ஒரு பகடைச் சோதனையின் முடிவுகள் வருமாறு ; 4096 தடவைகள் 12 பகடைகள் வீசப்பட்டன. 6 விழுந்தால் வெற்றியாகும்.

வெற்றி :	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	மொத்தம்
அலைவெண் :	447	1145	1181	796	380	115	24	8	4096

சீரான பகடைதானு என்பதை கைவர்க்கப் பரவலைக் கொண்டு ஆய்க. (செ.ப.)

4. ஒரு பகடை பல தடவைகள் வீசப்பட்டது. அதன் முடிவு வருமாறு :

விழுந்த முகப்புள்ளி	1	2	3	4	5	6
அலைவெண்	16	20	25	14	29	28

இப்பகடை ஒருதலைச் சார்புடையது என்ற கொள்கையை ஏற்கலாமா ? (செ.ப.)

5. கைவர்க்கப் பரவலைப் பயன்படுத்தி, $\bar{x} = 45, \sigma = 5$ ஆகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைக் கீழ்க்கண்ட புள்ளி விபரம் பின் பற்றுகிறதா எனக் காண்க.

பிரிவுகள்	நேரில் கண்ட அலைவெண் விகிதாச்சாரம்
45—50	0·40
50—60	0 15

மொத்த அலைவெண் 500 எனக் கொள்க. (செ.ப.)

6. ஒருவகைத் தொத்துநோய் ஒரு விலங்கினைப் பீடித்துக் கொள்வதற்குரிய வாய்ப்பு 0·25. ஒரு புது தடுப்பு மருந்தால் 8 விலங்குகள் கண்காணிக்கப்பட்டன. ஒரே விலங்கிற்கு அந் நோய் வரவில்லை. 1% வரையில், மருந்தின் சக்தியினை ஆய்க. (செ.ப.)

7. 18—35 வயது குழுவில் 1620 பேர்கள் கொண்ட ஒரு கூறுவில், உணவுப் பழக்கத்திற்கும், கண்பார்வைத் தெளிவிற்குமான புள்ளி விபரம் வருமாறு :

உணவுப் பழக்கம்

		புலால் வகை உண்ணுதவர்	புலால் வகை உண்ணுபவர்
கண் பார்வை	குறையுடையது	216	91
	குறையற்றது	772	541

உணவுப் பழக்கத்திற்கும், கண்பார்வைத் தெளிவிற்குமுள்ள உறவினை ஆய்க. (செ.ப.)

8. ஒரு ரண சிகிச்சையானது குறிப்பிட்ட இட மயக்க மருந்து அல்லது உடல் முழுவதுமான மயக்க மருந்துகளைக் கொண்டு மேற்கொள்ளப்படுகிறது. மேற்கொள்ளப்பட்ட அவ்வித பல சிகிச்சைகளின் முடிவுகள் வருமாறு :

	வெற்றி	தோல்வி
குறிப்பிட்ட இட மயக்க மருந்து	211	14
உடல் முழுமைக்கும் மயக்க மருந்து	65	10

வெவ்வேறு வகை மயக்க மருந்துகளால் வெற்றி விகிதங்கள் வேறுபடுகின்றதா எனக் காண்க. (செ.ப.)

9. உந்து வண்டியினை ஓட்டுபவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க மேற்கொண்ட முதல், இறுதிச் சோதனைகளின் முடிவுகள் வருமாறு :

		முதல் சோதனை	
		தேறியவர்	தேருதவர்
இறுதிச் சோதனை	தேறியவர்	605	135
	தேருதவர்	195	65

இரு சோதனைகளின் உறவினை ஆய்க. (செ.ப.)

10. 2×2 நேர்வுப் பட்டியலில் கட்ட (cell) அலைவெண்களும், மொத்தமும் தரப்பட்டுள்ளன.

$$\begin{array}{lll} a & b & (a+b) \\ c & d & (c+d) \\ (a+c) & (b+d) & \end{array}$$

இதற்குரிய கைவர்க்கத்தினைக் காண்க. (செ.ப.)

இயல் நிலைவரை $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$-ன் y ஆயத்தூர, பரப்புப் பட்டியல்

t	$\phi(t)$	$\phi(t)$-யின் பரப்பு	t	$\phi(t)$	$\phi(t)$-யின் பரப்பு
0·0	·3989	·0000	2·0	·0540	·4772
0·1	·3970	·0398	2·1	·0440	·4821
0·2	·3910	·0793	2·2	·0355	·4861
0·3	·3814	·1179	2·3	·0283	·4893
0·4	·3683	·1554	2·4	·0224	·4918
0·5	·3521	·1915	2·5	·0175	·4938
0·6	·3332	·2257	2·6	·0136	·4953
0·7	·3123	·2580	2·7	·0104	·4965
0·8	·2897	·2881	2·8	·0079	·4974
0·9	·2661	·3159	2·9	·0060	·4981
1·0	·2420	·3413	3·0	·0044	·4987
1·1	·2179	·3643	3·1	·0033	·4990
1·2	·1942	·3849	3·2	·0024	·4993
1·3	·1714	·4032	3·3	·0017	·4995
1·4	·1497	·4192	3·4	·0012	·4997
1·5	·1295	·4332	3·5	·0009	·4997
1·6	·1109	·4452	3·6	·0006	·4998
1·7	·0940	·4554	3·7	·0004	·49989
1·8	·0790	·4641	3·8	·0003	·49993
1·9	·0656	·4713	3·9	·0002	·49995

கைவர்க்கப் பட்டியல்

ν \ P	0·99	0·95	0·05	0·01
1	0·0002	0·004	3·84	6·64
2	0·020	0·103	5·99	9·21
3	0·115	0·35	7·82	11·34
4	0·30	0·71	9·49	13·28
5	0·55	1·14	11·07	15·09
6	0·87	1·64	12·59	16·81
7	1·24	2·17	14·07	18·48
8	1·65	2·73	15·51	20·09
9	2·09	3·32	16·92	21·67
10	2·56	3·94	18·31	23·21
11	3·05	4·58	19·68	24·72
12	3·57	5·23	21·03	26·22
13	4·11	5·89	22·36	27·69
14	4·66	6·57	23·68	29·14
15	5·23	7·26	25·00	30·58
16	5·81	7·96	26·30	32·00
17	6·41	8·67	27·59	33·41
18	7·02	9·39	28·87	34·80
19	7·63	10·12	30·14	36·19
20	8·26	10·85	31·41	37·57
21	8·90	11·59	32·67	38·93
22	9·54	12·34	33·92	40·29
23	10·20	13·09	35·17	41·64
24	10·86	13·85	36·42	42·98
25	11·52	14·61	37·65	44·31
26	12·20	15·38	38·88	45·64
27	12·88	16·15	40·11	46·96
28	13·56	16·93	41·34	48·28
29	14·26	17·71	42·56	49·59
30	14·95	18·49	43·77	50·89

நூல் ஆசிரியர், வெளியிடுவோர், எடின்பர்க் ஆலிவர் பாய்டு லிமிடெட் ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் ‘ ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்’ என்ற புத்தகத்திலிருந்து இப்பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

t-பட்டியல்

ν \ P	0·5	0·1	0·05	0·02	0·01
1	1·0000	6·31	12·71	31·82	63·66
2	0·816	2·92	4·30	6·97	9·93
3	0·765	2·35	3·18	4·54	5·84
4	0·741	2·13	2·78	3·75	4·60
5	0·727	2·02	2·57	3·37	4·03
6	0·718	1·94	2·45	3·14	3·71
7	0·711	1·90	2·37	3·00	3·50
8	0·706	1·86	2·31	2·90	3·36
9	0·703	1·83	2·26	2·82	3·25
10	0·700	1·81	2·23	2·76	3·17
11	0·697	1·80	2·20	2·72	3·11
12	0·695	1·78	2·18	2·68	3·06
13	0·694	1·77	2·16	2·65	3·01
14	0·692	1·76	2·15	2·62	2·98
15	0·691	1·75	2·13	2·60	2·95
16	0·690	1·75	2·12	2·58	2·92
17	0·689	1·74	2·11	2·57	2.90
18	0·688	1·73	2·10	2·55	2·88
19	0·688	1·73	2·09	2·54	2·86
20	0·687	1·73	2·09	2·53	2·85
21	0·686	1·72	2·08	2·52	2·83
22	0·686	1·72	2·07	2·51	2·82
23	0·685	1·71	2·07	2·50	2·81
24	0·685	1·71	2·06	2·49	2·80
25	0·684	1·71	2·06	2·49	2·79
26	0·684	1·71	2·06	2·48	2·78
27	0·684	1·70	2·05	2·47	2·77
28	0·683	1·70	2·05	2·47	2·76
29	0·683	1·70	2·05	2·46	2·76
30	0·683	1·70	2·04	2·46	2·75
∞	0·67	1·65	1·96	2·33	2·58

நூல் ஆசிரியர்கள், வெளியிடுவோர் எடின்பர்க் ஆலிவர் பாய்டு லிமிடெட் ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன், 'உயிரியல், உழவியல், மருத்துவவியல் ஆய்விற்கான புள்ளிப் பட்டியல்—ஃபிஷர், யேட்ஸ் ஆகியோரின் பட்டியல்—III' என்ற புத்தகத்திலிருந்து இப் பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

F-பட்டியல்

ν_2	ν_1 = 3	4	5	6	7	10	20	50	∞
3	9·28 29·46	9·12 28·71	9·01 28·24	8·94 27·91	8·88 27·67	8·78 27·23	8·66 26·69	8·58 26·30	8·53 26·12
4	6·59 16·69	6·39 15·98	6·26 15·52	6·16 15·21	6·09 14·98	5·96 14·54	5·80 14·02	5·70 13·69	5·63 13·16
5	5·41 12·06	5·19 11·39	5·05 10·97	4·95 10·67	4·88 10·45	4·74 10·05	4·56 9·55	4·44 9·24	4·36 9·02
6	4·76 9·78	4·53 9·15	4·39 8·75	4·28 8·47	4·21 8·26	4·06 7·87	3·87 7·39	3·75 7·09	3.67 6.88
7	4·35 8·45	4·12 7·85	3·97 7·46	3·87 7·19	3·79 7·00	3·63 6·62	3·44 6·15	3·32 5·85	3·23 5·65
8	4·07 7·59	3·84 7·01	3·69 6·63	3·50 6·37	3·50 6·19	3·34 5·82	3·15 5·36	3·03 5·06	2·93 4·86
9	3·86 6·99	3·63 6·42	3·48 6·06	3·37 5·80	3·29 5·62	3·13 5·26	2·93 4·80	2·80 4·51	2·71 4·31
10	3·71 6·55	3·48 5·99	3·33 5·64	3·22 5·39	3·14 5·21	2·97 4·85	2·77 4·41	2·64 4·12	2·54 3·91
11	3·59 6·22	3·36 5·67	3·20 5·32	3·09 5·07	3·01 4·88	2·86 4·54	2·65 4·10	2·50 3·80	2·40 3·60
12	3·49 5·95	3·26 5·41	3·11 5·06	3·00 4·82	2·92 4·65	2·76 4·30	2·54 3·86	2·40 3·56	2·30 3·36
13	3·41 5·74	3·18 5·20	3·02 4·86	2·92 4·62	2·84 4·44	2·67 4·10	2·46 3·67	2·32 3·37	2·21 3·16
14	3·34 5·56	3·11 5·03	2·96 4·69	2·85 4·46	2·77 4·28	2·60 3·94	2·39 3·51	2·24 3·21	2·13 3·00
15	3·29 5·42	3·06 4·89	2·90 4·56	2·79 4·32	2·70 4·14	2·55 3·80	2·33 3·36	2·18 3·07	2·07 2·87
20	3·10 4·94	2·87 4·43	2·71 4·10	2·60 3·87	2·52 3·71	2·35 3·37	2·12 2·94	1·96 2·63	1·84 2·42
30	2·92 4·51	2·69 4·02	2·53 3·70	2·42 3·47	2·34 3·30	2·16 2·98	1·93 2·55	1·76 2·24	1·62 2·01
50	2·79 4·20	2·56 3·72	2·40 3·41	2·29 3·18	2·20 3·02	2·02 2·70	1·78 2·26	1·60 1·94	1·44 1·68
100	2·70 3·98	2·46 3·51	2·30 3·20	2·19 2·99	2·10 2·82	1·92 2·51	1·68 2·06	1·48 1·73	1·28 1·43
∞	2·60 3·78	2·37 3·32	2·21 3·02	2·09 2·80	2·01 2·64	1·83 2·32	1·57 1·87	1·35 1·52	1·00 1·00

ஜவோகலிஜியேட் பிரஸால் வெளியிடப்பட்டு, G. N. சினிடெகர் எழுதிய 'புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற 5 ஆவது பதிப்புப் புத்தகத்திலிருந்து ஆசிரியர், வெளியிடுவோர் அனுமதியின் பேரில் இப்பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கலைச்சொல் அகராதி

(ஆங்கிலம்—தமிழ்)

A

Absolute Value	—	எண் அளவை மதிப்பு
Add	—	கூட்டு
Addition	—	கூட்டல்
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Analysis	—	பகுப்புணர்தல், பகுப்பாய்வு
Analysis of Variance	—	பரவற்படி ஆய்வு
Answer	—	விடை
Aposteriori	—	காரியகாரண
Aposteriori Probability	—	காரியகாரண நிகழ்தகவு
Apriori Probability	—	காரணகாரிய நிகழ்தகவு
Arithmetic Mean	—	கூட்டுச் சராசரி
Arithmetic Progression	—	கூட்டுத் தொடர்
Ascending order	—	ஏறுவரிசை
Association	—	தொடர்பு, உறவு
Association of Attributes	—	பண்புகளின் உறவு
Asymmetrical	—	சமச்சீரில்லாத
Attribute	—	பண்பு
Average	—	சராசரி
Average Deviation	—	சராசரி விலக்கம்
Axes of Co-ordinates	—	அச்சுகள்

B

Bell-Shaped	—	மணிவடிவமான
Best fit	—	மிகச் சிறந்த பொருத்தம்

Biased	—	ஒருசார்பான, ஒரு தலைப்பட்ட
Binomial	—	ஈருறுப்பு
Binomial Distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
Binomial Theorem	—	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bivariate	—	இருமாறி
Blank	—	வெற்றிட

C

Census	—	மக்கட் கணிப்பு
Census Methods	—	முழுக்கணிப்பு முறைகள்
Chart	—	வரைபடம்
Chi-square	—	கை வர்க்கம்
Class	—	பிரிவு
Class Limit	—	பிரிவின் எல்லை
Classification	—	பாகுபாடு
Coefficient	—	கெழு
Computation	—	கணிப்பு, கணக்கிடுதல்
Computer	—	கணணி
Constant	—	நிலையெண்
Contingency Table	—	நேர்வுப் பட்டியல்
Continuous Curve	—	தொடர் வரை
Continuous Function	—	தொடர்புடைச் சார்பு
Convention	—	வழக்கு, மரபு
Correlation	—	ஒட்டுறவு, இடையுறவு
Correlation Coefficient	—	ஒட்டுறவுக் கெழு
Cost of Living Index No.	—	வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்
Cumulative	—	குவிவு
Cumulative Curve	—	குவிவு வரை
Cumulative Frequency	—	குவிவு அலைவெண், குவிவு நிகழ்வெண்

D

Degrees of Freedom	—	சமன்பாட்டுப் படி
Design	—	திட்ட அமைப்பு, உருவ அமைப்பு
Deviation	—	விலக்கம், விலகல்
,, Absolute	—	எண்அளவை விலக்கம்
,, Average	—	சராசரி விலக்கம்

,, Mean	— கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, Quartile	— கால்மான விலக்கம்
,, Standard	— திட்ட விலக்கம், தரவிலக்கம்
Diagram	— விளக்கப் படம்
,, Bar	— பட்டை விளக்கப் படம்
,, Pie	— வட்ட விளக்கப் படம்
,, Scatter	— சிதறல் விளக்கப் படம்
Discontinuous Function	— தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Dispersion	— பரவுகை
Distribution	— பரவல்
,, Binomial	— ஈருறுப்புப் பரவல்
,, Bivariate	— இருமாறிப் பரவல்
,, Continuous	— தொடர் பரவல்
,, Cumulative	— குவிவுப் பரவல்
,, Discrete	— தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
,, Frequency	— அலைவெண் பரவல், அலைவுப் பரவல்
,, J-Shaped	— ஜே-வடிவப் பரவல்
,, Normal	— சமச்சீர்ப் பரவல், இயல் நிலைப் பரவல்
,, Poisson	— பாய்ஸான் பரவல்
,, Sampling	— கூறு பண்புகளின் பரவல், மாதிரிப் பரவல்
,, Students 'T'	— டி. பரவல்
,, Skew	— சீரிலாப் பரவல், கோட்டப் பரவல்
,, 'U' Shaped	— U வடிவப் பரவல்
,, x^2	— கைவர்க்கப் பரவல்
Divide	— வகு

E

Element	— மூலகம், உறுப்பு
Ellipse	— நீள்வட்டம்
Empirical Formula	— நடைமுறைச் சூத்திரம்
Enquiry	— கணக்கெடுப்பு
Enumeration	— எண்ணெடுப்பு, சேகரித்தல்
Enumerator	— செய்தி சேகரிப்பார்
Equal	— சமம்
Equation	— சமன்பாடு

Error — பிழை
Estimate — மதிப்பிடு
Event — நிகழ்ச்சி
,, Independent — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
,, Mutually Exclusive — ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சி

F

F-Test — எஃப்-சோதனை
Formula — சூத்திரம்
Frequency — அலைவெண், நிகழ்வெண்
Function — சார்பு

G

Graph — வரைபடம்
Graph Sheet — வரைபடத் தாள்

H

Height — உயரம்
Histogram — செவ்வகப் படம்
Hypothesis — எடுகோள்
,, Testing of — எடுகோள் சோதனை

I

Index Number — குறியீட்டெண்
Inflexion, Point of — திருகுபுள்ளி, வளைவு மாற்றப் புள்ளி
Interpolation — இடைச்செருகல்

K

Kurtosis — தட்டை அளவு
,, Leptokurtic — குறைத்தட்டை
,, Platykurtic — மிகைத்தட்டை

L

Lagarithm — லாகரிதம்
Large Samples — பெருங்கூறுகள்
Law — விதி
Law of Inertia of Large Numbers — பெரிய எண்களின் நிலைத் தன்மை விதி

Law of Statistical Regularity — புள்ளிவிபர ஒழுங்கு விதி
Limit — எல்லை, நெருக்க மதிப்பு
,, Lower — கீழ் எல்லை
,, Upper — மேல் எல்லை
,, Confidence — நம்பக வரம்புகள்
Line — கோடு
,, Straight — நேர்கோடு
Line Diagram — நேர்கோட்டு விளக்கப்படம்
Linear — ஒருபடி

M

Mark — அலைவெண் குறி, குறி
Mathematics — கணிதம்
Mean — கூட்டுச் சராசரி
,, Arithmetic — கூட்டுச் சராசரி
,, Geometric — பெருக்குச் சராசரி
,, Harmonic — ஹார்மோனிக் சராசரி, இசைச் சராசரி
,, Weighted — நிறையிட்ட சராசரி
Measures — அளவைகள்
,, of Central Tendency — மையப் போக்கின் அளவைகள்
,, Dispersion — பரவுகை அளவைகள்
,, Skewness — கோட்ட அளவைகள்
Median — இடைநிலை
,, Class — இடைநிலைப் பிரிவு
Million — மில்லியன், பத்து இலட்சம்
Minus — கழி
Mode — முகடு
Model Class — முகட்டுப் பிரிவு
Moment — விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Multiply — பெருக்கு

N

National Income — தேசிய வருமானம்
National Sample Survey — தேசிய மாதிரி அளவெடுப்பு
Negative — எதிர்மறை
,, Number — எதிர்மறை எண்
Nonsense Correlation — பொருளற்ற ஒட்டுறவு

Notation	—	குறியீடு
Number	—	எண்
Natural Numbers	—	இயல் எண்கள்

O

Observation	—	நேரில்காணல்
Observed Data	—	நேரில் கண்ட புள்ளி விபரம்
Ogive	—	ஓகைவ்
,, Less than	—	கீழின ஓகைவ்
,, More than	—	மேலின ஓகைவ்
Origin	—	மூலப்புள்ளி

P

Pair	—	ஜோடி
Parabola	—	பரவளைவு
Parameter	—	புள்ளியியல் பண்பளவை, சுட்டுறுப்பு
Percent	—	சதவீதம்
Period	—	காலம்
Permutation	—	வரிசை மாற்றம்
Population	—	முழுமைத் தொகுதி, இனத் தொகுதி
,, Finite	—	வரம்புடை முழுமைத் தொகுதி
,, Infinite	—	எண்ணற்ற முழுமைத் தொகுதி
Positive	—	நேர்மறை
Probability	—	நிகழ் தகவு
Problem	—	உத்திக் கணக்கு, கணக்கு
Procedure	—	வழிமுறை, செய்முறை
Product	—	பெருக்கம்

Q

Quality Control	—	தரக் கட்டுப்பாடு
Quantitative Data	—	எண் அளவைப் புள்ளி விபரம்
Quartile	—	கால்மானம்
Questionnaire	—	வினாப் பட்டியல்

R

Random Sample — ராண்டம் மாதிரி, சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
Rank — தரம்
Rank Correlation — தர ஒட்டுறவு
Ratio — விகிதம்
Raw Data — வெற்று எண் கூட்டம், சீர்படா விவரங்கள்
Real — மெய்யான
Reasoning — ஆய்வு
Regression Lines — ஒட்டுறவுக் கோடுகள்
Regular Polygon — ஒழுங்குப் பலகோணம்
Root — மூலம்

S

Square root — வர்க்கமூலம்
Sample — கூறு, மாதிரி
  Large — பெரு
  Small — சிறு
Sampling Distribution — மாதிரிப் பரவல், கூறுப் பரவல்
Sampling Methods — கூறு எடுக்கும் முறைகள்
  ,, Multiple — பலபடி கூறெடுத்தல்
  ,, Multistage — பல நிலை கூறெடுத்தல்
  ,, Purposive — நோக்கத்துடன் கூறெடுத்தல்
  ,, Random — சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்
  ,, Stratified — படுகைக் கூறெடுத்தல்
  ,, Systematis — முறையாகக் கூறெடுத்தல்
Scatter — சிதறல்
  ,, Diagram — சிதறல் விளக்கப்படம்
Series — தொடர்
Significance — முக்கியத்துவம்
  ,, Test of — முக்கியத்துவ சோதனை
Skewness — கோட்டம்
  ,, Coefficient of — கோட்டக் கெழு
  ,, Measure of — கோட்டளவை
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்வு காண்க
Standard Deviation — திட்ட விலக்கம், தரவிலக்கம்

Standard Error	— திட்டப் பிழை, கூறு பண்பு களின் திட்ட விலக்கம்
Statistic	— புள்ளியியல் அளவை
Statistics	— புள்ளியியல்
Symmetry	— சமச்சீர்

T

Table	— பட்டியல், அட்டவணை
Tabulation	— பட்டியலமைத்தல்
Tally Mark	— அலைவெண் குறி, கணிப்பு குறி, சரிபார்க்கும் குறி
Test	— சோதனை
Theorem	— தேற்றம்
Theory	— கொள்கை
Total	— மொத்தம்

U

Unit	— அலகு, மூல அளவை
Unsymmetrical	— சீரற்ற

V

Value	— மதிப்பு
Variable	— மாறி
Variance	— மாறுபாடு
Variate	— புள்ளியியல் மாறி

X

X – Axis	— X–அச்சு

Y

Y – Axis	— Y–அச்சு
Year	— ஆண்டு, வருடம்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை - 9

1969 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1A.	,, II	,,	9	00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரைஜாட்சி	12	00
3.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்–I	தி. சி. மோகன்	12	00
4.	,, ,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும்—II	சி. வேலாயுதம்	11	50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7	50
*8.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*9.	அரசாங்க நிதி இயல்	ஆர். சேஷாசலம்	4	75
10.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
11.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
13.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு–I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
15.	,, ,, II	,,	6	00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00

*மூலநூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
18.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	50
19.	,, ,, III	,,	6	50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
21.	,, ,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
23.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*25.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
26.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
27.	பொதுஜனப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
28.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*29.	வரவுசெலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
30.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
31.	,, ,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
33.	,, ,, II	,,	7	00
34.	வளர்ச்சியுறாத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
36.	1939முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
38.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857–1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
39.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*40.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*41.	,, ,, II	,,	3	50
*42.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா	4	50
43.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றாண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	C0
44.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
45.	,, ,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
46.	,, ,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
47.	,, ,, IV	,,	8	00
48.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
49.	,, ,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
50.	,, ,, III	,,	5	00
51.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
52.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
53.	,, ,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	00
54.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
55.	,, ,, II	,,	7	00
56.	,, ,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
57.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
58.	,, ,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
59.	,, ,, ,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
60.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான்ஷெரீப், எம்.எக்ஸ்.மிராண்டா	7	50

*மூலநூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
61.	முகலாயப் பேரரசு—II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா.மாணிக்கவேலு	7	75
62.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
63.	,, ,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
64.	,, ,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
65.	,, ,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
66.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
67.	,, ,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
68.	,, ,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
69.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
70.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*71.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
72.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
73.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
74.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
75.	,, II	,,	13	25
76.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
77.	,, ,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
78.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
79.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
80.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
81.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
82.	,, ,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

83.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்		
*84.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
85.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
86.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
87.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
88.	,, ,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
89.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

90.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
91.	,, II	,,	7	00
92.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
93.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
94.	,, II	,,	9	00
95.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
96.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
97.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*98.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

*மூல நூல் (Original Book)

தத்துவம்

			ரூ.	பை.
99.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*100.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*101.	மேலை நாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
102.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
103.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
104	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனுபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3	50
105.	,, II	,,	6	00
10ó.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

107.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

108.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50

மானிடவியல்

*109.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
110.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5	50
111.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

112.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50

புவியியல்

113.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
114.	,, II	,,	8	75
115.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*116.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*117.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
*118.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*119.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*120.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*121.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*122.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. செயச்சந்திரன்	9	00
*123.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*124.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
125.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
126.	,, II	,,	5	00
127.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
*128.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
129.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
130.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
131.	,, ,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
132.	,, ,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்		

*மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
புள்ளியியல்				
*133.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00
134.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
135.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14	00
136.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50
உயர்கணிதம்				
*137.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12	50
*138.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8	00
*139.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9	00
விலங்கியல்				
*140.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12	00
பௌதிகவியல்				
141.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00
விஞ்ஞானம்				
*142.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*143.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*144.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*145.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	3	50
*146.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*147.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*148.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

மருத்துவம்

*149.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2 50
150.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8 25
*151.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2 50
152.	புற்று நோய்	அ. கதிரேசன்	3 50
153.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது.	6 75
154.	,, II	,,	5 50
155.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7 25

பொறியியல்

156.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8 50

கூட்டுறவு

157.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5 50

சட்டம்

*158.	குற்றவியல் சட்டம்	எப். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10 00

பொது நூல்கள்

159.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3 25
160.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8 00

*மூல நூல் (Original Book)

பொது நூல்கள் —(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*161.	சேமக் கைநூல்	ஆ. சுப்ரமணியம்	2	50
*162.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*163.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கிட்கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C.)

			ரூ.	பை.
*164.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	50
*165.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*166.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*167.	,, ,, II	,,	2	25
*168.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*169.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*170.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*171.	,, II	,,	3	00
*172.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*173.	,, II	,, ,,	4	50
*174.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*175.	,, II	,,	3	25
*176.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*177.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*178.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*179.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை	7	25
*180.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	50

*மூல நூல் (Original Book)