University of Jaffna
123867
Library

AN

ELEMENTARY ALGEBRA.

BY

DANIEL L. CARROLL.

வீசகணிதம்.

இஃது

யாழ்ப்பாணம்

வட்டுக்கோட்டை வித்தியாசாலையில்

உபாத்தியாயர்

வைரவநாதர் குமாரர் விசுவநாதராற்

செய்யப்பட்டது.

STACKS

123867

123867

மானிப்பாய்:

அமரிக்கன் மிஷன் அச்சுக்கூடத்திற் பதிக்கப்பட்டது.

௲௮௱௫௫.

1855

எண்ணென்பவேனையெழுத்தென்பவிவ்விரண்டுங்
கண்ணென்பவாழுமுயிர்க் . . . . த.

மெய்கண்டதேவர் ஆதீனம்
5, கலைப் புலவர் வீதி,
யாழ்ப்பாணம்.

PREFACE.

The following summary of the Elements of Algebra is believed to be the first attempt of the kind in the Tamil language. In its preparation, various English and Sanscrit authors have been consulted, and the arrangement of subjects in President Day's Algebra is chiefly followed. Algebraic signs which are universally employed by the Mathematicians of Europe, are here adopted without alteration.

The light of mathematical science as that of the natural sun, was first enjoyed by the nations of the East. Though its early history is involved in obscurity, it is not difficult to show, that mathematics have been cultivated in India from time immemorial. We are told, that "in early times Pythagorus and Democritus, who taught the Greeks Astronomy and Mathematics, learnt these sciences in India."

The invention of Algebra is, by some learned men, ascribed to Diophantus, a Grecian Mathematician of Alexandria. This is contrary to the express testimony of Bompelli, who, in a treatise on Algebra published in 1579, informs us that he and a lecturer at Rome, whom he names, had translated part of Diophantus, and that "they had found that in the said work, the Indian authors are often cited; by which they learned that this science was known among the Indians, before the Arabians had it." (*Hutton's Dictionary.*)

Algebra was introduced into Europe about the beginning of the 13th century by the Arabians. There has been a difference of opinion among the learned, whether Arabic Algebra was of Grecian or of Hindu origin. "The learned Musselmans in India certainly consider the science as having originated among the Indians; and the Arithmetic, which in their treatises, always precedes Algebra, is undoubtedly Indian." (See a learned article on the early history of Algebra by Edward Strachey, Esq., Asiatic Researches, Vol. 12.)

The most celebrated treatise on Algebra in the Sanscrit language, with which we are acquainted, is the Vija Ganita of Bhascara, a native of Bidur in Deccan. From a Persian translation of this work, Mr. Strachey has proved, "that

the Hindus had made wonderful progress in some parts of Algebra; that in the Indeterminate Analysis, they were in possession of a degree of knowledge, which was in Europe, first communicated to the world by Bachet and Fermat, in the 17th century, and Euler and De La Grange, in the 18th century."

Notwithstanding the profound knowledge which was once possessed by the Hindu sages, their successors in these latter times, have become comparatively pigmies in intellect. It was with Hindu science, as with the ancient empires that rose by the prowess of a single hero, and passed away with him. A broad basis was not secured for it, by the general diffusion of information in the community at large, as in modern Europe.

Europe is now deservedly distinguished as the great depository of useful knowledge, and she enjoys the privilege of imparting her superior advantages to the Asiatic tribes. In proportion as the Hindu mind is brought in contact with the light of European science, will be the dissemination of knowledge, and the return of the long forgotten prosperity and glory of India. One of the most effectual methods of accomplishing this end, is to remove the linguistic veil of separation, and to furnish to the young facilities for investigation, through the medium of their mother tongue.

Mathematical science, as a branch of liberal education, is eminently useful, not only on account of the positive practical knowledge which may be acquired by the study of its multiplex subjects, but also on account of its influence in enlarging and disciplining the intellect. The latter object is entirely disregarded in the indigenous system of education, nothing beyond the mnemonic cultivation of the young being aimed at. To remedy in part this defect, and to contribute his mite, however insignificant, to the advancement of his country's improvement, is the sincere desire of

THE AUTHOR.

BATTICOTTA SEMINARY, January, 1855.

நூன்முகம்.

" தொட்டனைத்தூறு மணற்கேணிமாந்தர்க்குக்
கற்றனைத்தூறுமறி . . . . . வு."

மாநுஷியத்துக்கலங்காரமாவது கல்வி. கல்வியற்றமாந்தர் வனசரவேடரைப்போல மிருகத்தையொப்பார்கள். மாநுஷிய உசிதவல்லபம் யுத்தியாதலால் யுத்தியைத் தொழிற்பாற்படுத்து நூல்களைக் கற்கைநன்றாம். அந்நூல்களுட் கணிதந்தலைமையது. பலசாகைகளான் விரிந்து பூவுலகின்மாந்தருக்குப் பெரும்பயனை விளைவித்து அவர்களினது அநுபவசித்திக்கின்றியமையாத சிறப்பினையுடைய கணிதநூல் நுதலிய பொருண்மாட்சிமையாலன்றி, யுத்தியின் சாதனாசித்தியாலும் பெருமையுடையது. பரதவித்தையைப் பயிலுமொருவன் தான் நடிக்குந்தோறுந் தனது சுரசரணாதிகளின் பேசிலக்கணங்களையுற்றுநோக்கல் நடனசித்திக்குத் தடையாவதுபோல, நியாயிக்குந்தோறும் ஒருவன் யுத்தியிலக்கணங்களையுற்றுநோக்கல் நியாயசித்திக்குத் தடையாம். ஆகையால் சுயம்பிரமாணாதாரமாய் யதார்த்தபெரும்பொருள்களை நியாயித்தறியுஞ் சாமர்த்தியத்தை யுத்தியிற் பிறப்பிக்கின்ற கணிதநூல் நியாயநூலிலுஞ் சாதனாசித்திக்குச் சிரேஷ்டமுடையது. இவ்வியல்பமைந்த கணிதநூலில் வீசகணிதம் முக்கியசாகை.

வீசகணிதபூருவோத்தரசங்கதியைப் புராதன சாதனங்களைக்கொண்டு ஐயந்திரிபற நிச்சயித்தல் கூடாதாயினும் அது ஆதியில் பரதகண்டத்தே தோன்றியதெனத்துணிதல் வழுவாகாது. கணிதபூருவ விற்பத்தி ஆரியருக்கே உரிமையென்பது கற்றனாசிரியர் முதலிய கலைஞரின் ஆராய்ச்சியால் வெளிப்படையாயிருக்கின்றது. சகாப்தம் (உஎ௦) அளவில் அலெக்சந்திரியா நகரத்தே விளங்கிய வித்தியாலயத்திற் கற்ற தயோபந்தர் என்பவர் கிரேக்கபாஷையிலெழுதிய கணிதநூல்களையும், பாரசிய, அராபிய நூல்களையும் ஆதிநூலெனச் சாதித்தவர்களுடைய விபரீதமதங்களை அக்கலைஞர்கள் திருட்டாந்த பூருவமாக மறுத்தறுத்து ஆரியநூல்களை இவ்விஷயத்தில் மிகப்பாராட்டியிருக்கின்றார்கள். கணிதநூலை ஆதியிற் கிரேக்கருக்கு உபதேசித்த புதகோரரும் தமோகிருதரும் பரதகண்டத்தே அந்நூலை முன்பு கற்றனரென்பது, இதிகாசவாக்கென்பர். பரதகண்டத்தினின்று அராபியர் முன்படைந்த கணிதசோதிப் பிரதிபலனமே, ஐரோப்பையில் நெடுங்காலங் குடிகொண்டிருந்த அந்தகாரத்தை ஒழித்தற்குபயோகமானது. அராபியிலக்

க மென்ற நாமம் பூண்டு ஐரோப்பையில் வழங்குகின்ற, 1, 2
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, என்ற பத்திலக்கங்களும் ஆதியில் வட
மொழிக்குரியன. அவை காலவிகாரத்தாற் சில வேறுபாடு
வை அடைந்திருக்கின்றன.

சகாப்தம் ௪௨௧ல். பாடலிபுரத்தில் அவதரித்து ஆரியபட
த்தாந்தத்தையியற்றிய ஆரியபடர் வடமொழித்தொல்லாசிரி
ர்களுள் மிகு கீர்த்திமானெனக் கேள்வியுற்றும், அவர் செய்த க
ணிதநூலையாவது அவருக்குப் பின் பிரமகுப்தர் வரைக்குமிருந்
மற்றோர்செய்த நூல்களையாவது யாங்கண்டதில்லை. பிரமகுப்
தர் தாமியற்றிய பிரமஸ்புடசித்தாந்தத்தில், ௧௨ம். அத்தியாய
தாற் பாடீகணிதத்தையும், ௧௮ம். அத்தியாயத்தால் வீசகணி
தத்தையுமெடுத்துரைத்தனர். இவருக்குப்பின் நூல்செய்தவ
ர்கள் சிறீதரன், பத்மநாபன் முதலிய பலர். உரைசெய்தவர்
களும் அநேகர். இதற்குப் பின்பு சாலிவாகன சகாப்தம், ௧௧00.
அளவில் தக்கணதேயத்தேயுள்ள விதூர்நகரத்தில் மகேஸ்வர
ருக்குப் புத்திரராய் அவதரித்த பாஸ்கராசாரியரென்பவர் முன்
னையோரியற்றிய நூல்களையும் உரைகளையும் ஒருங்குணர்ந்
து யுத்திப்பிரவிருத்தியாற் கணிதமகாவிற்பத்திமானாகி, லோ
கோபகாரமாகவும் புலவர் மனமகிழவுஞ் சித்தாந்தசிரோமணி,
வீசகணிதம், லீலாவதி என்ற உசிதநூல்களை அளித்தனர். இ
வற்றுள் * லீலாவதியைச் சகாப்தம், ௧௫00 அளவில் இந்திர
ப்பிரத்தமென்று சொல்லப்படுந் தில்லிமாநகரிலிருந்து இராசரி
க்கஞ்செய்த வித்தியாபாலரான அக்பாரரசனின் அநுமதிப்படி
பிசிபண்டிதர் பாரசபாஷையில் மொழிபெயர்த்தனர்.

சகாப்தம். ௧௫௫௯. அளவில் வீசகணிதமும் பாரசபாஷை
யில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டது.

சென்றுபோன ௯00. வருஷங்களுள் அராபியர் வழியாய் ஐ
ரோப்பையில் வந்த கணித அறிவு நன்னிலத்தில் விழுந்த வி
தைபோல முளைத்து ஆச்சரியரூபங்கொண்டு விரிந்து ஆரியநூ
ல்களுக்கும் எட்டாமல் ஓங்கிவளர்ந்து உலகோர்களிக்க மா
தூரிய கனிகளைத் தந்தது. பாஸ்கரர், நியூற்றன், யூலர், லா
கிராஞர் முதலிய பெருங்கணித குரவர்கள் விவேகமடைதிற
ந்து வீசகணிதத்தை வளர்த்தனரென்றால் அதின் மகிமைப்
பிரதாபத்தை அறிதல் எளிதாமோ? சாஸ்திரத்துக்கு அணி
யாகவும், மாநுஷியத்துக்கு மாட்சிமையாகவும் இவர்களியற்
றிய நூல்கள் அன்னியபாஷைகளிற் புதைந்துகிடக்கின்றபடி
யால் பூமியின் வயிற்றில் மறைந்த ரத்தினம்போலத் தமிழ்
மாணுக்கருக்கு அநுபவப்படாவாம். ஆகையால் இவ்வீசகணி
தநூலைத் தமிழ்ப்பாஷையிற் செய்யலாயினோம். வடலங்கை
யிலும், "வடவேங்கடந் தென்குமரியாயிடைத்" தமிழ் வழங்
குநிலங்களிலும் பாடீகணிதப்பயிற்சியுண்டேனும் வீசகணித
ப்பயிற்சி அற்பமேனுமில்லை. தமிழில் முன்னோராற் செய்ய
ப்பட்ட வீசகணிதநூலை யாம் யாண்டுங் கண்டதில்லை. தமி
ழ்ப்பாஷையின் இப்பெருங்குறை ஒருவாறு நிறைதற்குந் தமிழ்
மாணுக்கர் கணிதஅறிவில் வளர்தற்கும் உபயோகமாக டேயா
சிரியர் முதலிய பலகணித விற்பத்திமான்கள் இங்கிலீஷில் சவி
ஸ்தாரமாக இயற்றிய நூல்களையும் பாஸ்கராசாரியர் முதலி
யோர் ஆரியத்திற்செய்த கணிதநூல்களையும் ஆதாரமாகக்கொ
ண்டு இச்சங்கிரகத்தைச் செய்தேம்.

பூர்வீகராச்சியங்கள் புயபல பராக்கிரமவீரராற் றோன்றி, யவ
ரோடுநின்றழிந்ததுபோலச் சில விவேகசிரோமணிகளாற்றோ
ன்றிய நூல்களும் அவர்காலத்தில் அவர் மாணுக்கரிடத்தே பி
ரவிருத்திப்பட்டுப் பின்பு ஒழிந்தன. இங்கிலீஷாரின் இராச்சி
யமும் அவர்களுடைய நானாவித சாஸ்திரங்களுஞ் சனசமுதாய
சாமர்த்தியத்தானின்று பிரகாசிக்கின்றபடியால், ஆயிரக்கா
லால விருட்சம்போல நெடுநாணிலைநிற்றல் கூடும். அவரை
ப்போலாதல் தமிழராகிய எமக்குந் தகுதியாமெனக் கருதிச் சா
தாரண சனங்களுக்குப் புலப்பட வாக்கியரூபமாக இந்நூலைச்
சமைத்தேம். ஆகையால் அறுசுவை அமுதருந்தித் தெகுட்டி
ய புலவோர் நா இங்கு குறைகூறுவதென்னோ?

வை. வி.

* மகவேமுன்னிலையாயியற்றிய காரணத்தாற் காரிகையென்றற்போல லீலாவதிஎன்
ற சிறப்புப்பெயர் இப்பாடீகேத்திர கணிதநூலுக்கிடப்பட்டது. பிசிபண்டிதர் வேறு
காரணமுங் கூறியிருக்கின்றனர். அதுவருமாறு:

"பாஸ்கராசாரியருக்கு லீலாவதியென்ற நாமதேயத்தையுடைய ஒரு புத்திரியிருந்தா
ள். அவள் சென்மலக்கினதோஷத்தால் இல்லாச்சிரமதருமத்திலுட்பட்டுப் புத்திரபா
க்கியத்தைபடையாளென்று பிதா அறிந்தும், சுபமுகூர்த்தவேளையொன்றை நிச்சயித்து அ
தில் தனது கன்னிகையைப் பாணிக்கிரகணம்பண்ணுவித்தாற் புத்திரபாக்கியமுண்டா
மென்று கருதி, முகூர்த்தவேளைக்கு முன் தனது புத்திரியையும் மணவாளப்பிள்ளையையும்
அழைத்துத் தன்னருகிருத்தி நாழிகைவட்டிலைத் தண்ணீரில் மிதக்கவிட அதனை அக்கன்னி
கை எட்டிப்பார்த்தனள். பார்த்தபொழுது அவளுடைய முத்துமாலையிலிருந்து ஒரு முத்
துக் கழன்று நாழிகைவட்டிலில் விழுந்து அதில் நீரேறுமற்றுவாரத்தை அடைக்க, நெடு
நேரம் வட்டில் தாழாததைக் கண்ட பிதா ஐயுற்று மனோபதைபதைப்புக்கொண்டு நாழி
கைவட்டிலைச சோதித்து அதின் துவாரத்தை அடைத்திருந்த முத்தைக் கண்டார். முகூ
ர்த்தவேளை தப்பிப்போனதைக் கண்டபொழுது, பிதாப் புத்திரியைநோக்கி, மகளே! நற்கீ
ர்த்தியானது நல்வாழ்க்கையும் முத்திக்கு வித்துமாகையால், உன் பெயர் நிலைநிற்கும்படி
ஒரு பிரபந்தஞ்செயகுவன் என்றுசொல்லி, லீலாவதியென்ற நாமஞ்சூட்டி இக்கணித
நூலையியற்றினர்."

அதிகாரவகை.—CONTENTS.

	பக்கம்.		Page
௧. ஆரம்பஅதிகாரம்,	௧	1. Introduction,	1
௨. கூட்டதிகாரம்,	௧௬	2. Addition,	16
௩. கழிப்பதிகாரம்,	௨௦	3. Subtraction,	20
௪. பெருக்கதிகாரம்,	௨௩	4. Multiplication,	23
௫. பிரிப்பதிகாரம்,	௨௮	5. Division,	28
௬. பின்னஅதிகாரம்,	௩௪	6. Algebraic Fractions,	34
௭. வெள்ளச்சமீகரண அதிகாரம்,	௫௧	7. Simple Equations,	51
௮. காதித அதிகாரம்,	௭௩	8. Powers,	73
௯. மௌலஅதிகாரம்,	௮௯	9. Radical Quantities,	89
௧௦. வர்க்கசமீகரண அதிகாரம்,	௧௧௪	10. Quadratic Equations,	114
௧௧. அநேகாட்சரசமீகரண அதிகாரம்,	௧௩௧	11. Equations which contain two or more unknown quantities,	131
௧௨. அநுபாத அதிகாரம்,	௧௪௦	12. Proportion,	140
௧௩. அந்தரமாலிகை அதிகாரம்,	௧௬௩	13. Arithmetical Progression,	163
௧௪. சகரணமாலிகை அதிகாரம்,	௧௭௧	14. Geometrical Progression,	171
௧௫. மகாபவர்த்த அதிகாரம்,	௧௭௬	15. Greatest Common Measure,	176
௧௬. அநந்தமாலிகை அதிகாரம்,	௧௮௧	16. Infinite Series,	181
௧௭. குதக அதிகாரம்,	௧௯௮	17. Indeterminate Analysis,	198
௧௮. கரணகுதக அதிகாரம்,	௨௦௫	18. Diophantine Analysis,	205
௧௯. அதிவர்க்கசமீகரண அதிகாரம்,	௨௧௦	19. Composition and Resolution of the higher Equations,	210
௨௦. எண் அதிகாரம்,	௨௧௬	20. Properties of Numbers,	216
		Miscellaneous Questions,	229
		Glossary and Index,	232

வீசகணிதம்.

மணிவான்றடவுச்சிமாகணிதக்கோவி . . . . . ற்
கணிவாயிலீதென்றறிஞர் . . . . . பணிநூலாம்
வீசகணிதம்விளக்கவிறையோனடிக . . . . . ள்
பூசனைசெய்கின்ரும்புகழ்ந் . . . . து.

௧. ஆரம்ப அதிகாரம்.

[Introduction.]

௧. *பிரகரணம். எண், பொருள் அளவை அறிவிக்கின்றது. அளவுகளெல்லாம் மூலஅளவு என்றும், விகாரஅளவு என்றும் இரண்டு வகைப்படும். இரண்டு ஸ்தானங்களுக்கிடையான தூரம் பதினைந்து கோலெனில், இந்தப் பதினைந்து கோல விகாரஅளவென்றும், தூரத்தின் அளவை நிச்சயம்பண்ணிய கோல மூலஅளவென்றுஞ் சொல்லலாம். இதில் மூல அளவின் திரிபே விகார அளவாதல்காண்க. மேலும், ஒரு பொற்கட்டியின் கனம் பத்துக்களஞ்சென்று நிச்சயிக்குமிடத்து, அந்தப் பத்துக்களஞ்சை விகாரஅளவென்றும், பொற்கட்டியின் கனத்தை அறிவிக்கின்ற களஞ்சுப்படியை மூல அளவென்றுமறிக. ஆகையாற் பொருள்களின் பெருமை சிறுமை முதலிய அளவுகளை அறிவிப்பதெது அது மூலஅளவென்றும், மூலஅளவுகளினுல் அளந்தறியப்படுவதெது அது விகாரஅளவென்றுங் காணலாம். இந்த மூல அளவையே அலகென்பது.

மூல அளவுகளிற் சில இயற்கையாயும் வேறு சில செயற்கையாயும் வரையறைபெற்றிருக்கின்றன. இச்சங்கத்தவர் நூற்றெருவரென்றும், இத் தோட்டத்துமரம் இருநூறு என்றும் எண்ணுமிடத்து, இயற்கைக்குதாரணத்தைக் காண்க. ஆனுல் முன்பு எடுத்துப் பேசின பொற்கட்டியையுந் தூரத்தையும் அளந்தறியும்படி உலகம் ஒப்புக்கொண்ட களஞ்சுப்படியுங் கோலுஞ் செயற்கைக்குதாரணங்களாம். ஆகையால் இயற்கையான மூலஅளவுகளிற் சந்தேக விபரீதங்கள் சாரமாட்டா. செயற்கையான மூல அளவுகள் தேசா தேசத்துக்குத்

* பிரகரணம், Article.

தக்க பேதா பேதமாயிருக்கும். அவை அவ்வவ தேசத்துக்கிணங்கப் பெரியோரால் வரையறுக்கப்பட்டுச் சனங்களால் ஏகமாய் அங்கீகரிக்கப்படாதிருந்தால் அவற்றின் பயன் குன்றும். இது காரணத்தினாற்றான் தற்காலத்திற் சில அரசர்கள் செயற்கையான மூல அளவுகளை வரையறைசெய்து சனங்கள் கைக்கொள்ளவேண்டிய நியாயப்பிரமாணங்களில் அமைத்திருக்கின்றார்கள். இந்த மூல அளவுகளிற் சந்தேகந் தலைப்பட்ட காலங்களில் அவற்றைச் சரியாய் நிச்சயஞ்செய்யும்படி சில கல்வி வல்லோர் விதிமுறைகளையுந் தந்திருக்கின்றார்கள்.

எண்கள் பொருட்களைச் சாராமல் எண்மாத்திரமாய் நின்று கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், பிரித்தல் என்ற கிர்த்தியங்களை அடையும்பொழுது, அவ்வெண்களுக்கு மூல அளவு யாது என்று கேட்டால் அது ஏகத்துவத்தை விளக்குகின்ற ஒன்று, அல்லது ஓரலகாமென்க. பத்தும் இரண்டும் பன்னிரண்டென்கின்றபொழுது ஒன்றின் விகாரமாகிய பத்தையும் இரண்டையுங் கூட்டினால், பன்னிரண்டலகு தொகையாய்வரும். எனவே சகல எண்களும் ஒன்றின் விகாரமென்றாம். இவ்வாறு இங்கெடுத்துக் காட்டிய அளவுகளனைத்தையும், எண்ணல், எடுத்தல், முகத்தல், நீட்டல் என்ற நான்கு அளவுகளாக வகுத்துரைப்பாருமுளர்.

உ. பிர. மேலும் எண்ணாற் குறிக்கப்படுவனவென்றும், எண்ணாற் குறிக்கப்படாதனவென்றும், அளவுகள் இரண்டு பிரிவையடையும். ஒரு கிணற்றுவெட்டி எட்டு நாளில் வெட்டின கிணற்றை அவனுடைய மகன் பன்னிரண்டு நாளில் வெட்டக்கூடுமானால், தகப்பனும் மகனுங் கூடி எத்தனைநாளில் வெட்டுவார்கள் என்று வினாவும்பொழுது, தகப்பனும் மகனுந் தனித்தனி வெட்டின நாட்கள், அ, கஉ, என்ற எண்களாற் குறிக்கப்பட்டன. இவர்கள் இருவருங் கூடி வெட்டி முடிக்குநாள் எண்ணாற் குறிக்கப்படவில்லை. வினாவிற்கு விடையை அறியும் வரைக்கும் அதனை எண்ணாற் குறித்தல் ஏலாது.

எண்ணாற் குறிக்கப்படாத அளவுகளைப் பொதுவென்றும், சிறப்பென்றும் இரண்டு கூருக்கலாம். மேனிறுத்திய வினாவுக்கு விடை அந்த வினாவுக்கு மாத்திரமே சிறந்தபடியால், அதனைச் சிறப்பென்பர். ஆனால்,

கிணற்றுவெட்டிகளில், தகப்பன் (ஆ) தினத்திலும், மகன் (ஈ) தினத்திலும் வெட்டக்கூடுமானால், இருவருங் கூடி எத்தனை தினத்திற் கிணற்றை வெட்டி முடிப்பார்களென்றால்,

இந்த வினாவிற் கூறிய அளவுகளெல்லாம் வரையறைகடந்த பலவினாக்களுக்கும் பொதுமையவாய் நிற்கையால் அவை பொது அளவுகளென்பது தெளிவு. ஆகையால்,

எண்களாற் குறிக்கப்பட்டும், எண்களாற் குறிக்கப்படாமலும், ஒரே வினாவுக்குச் சிறப்பாயும், பல வினாவுக்குப் பொதுவாயும் அளவுகள் வரும். இவற்றை இராசியென்பர்.

இராசியென்பது எண்களாற் குறிக்கப்படக்கூடிய அளவு.

இது அலகுகளின் கூட்டமாகையால் இராசியென்ற நாமம் இதற்கிடப்பட்டது.

௩. பிர. இராசிகளின் சம்பந்த விதிகளை உணர்த்துநூலே கணிதம். அது பாடீகணிதமென்றும், வீசகணிதமென்றும், கேத்திரகணிதமென்றும் மூன்று வகைத்து.

இவற்றுள், எண்களினாற் கணிக்கும் விதிகளை உணர்த்துநூல் பாடீகணிதமாம்.

எண்களாற் குறிக்கப்படாத இராசிகளை அட்சரங்கள் விளக்கும். மேலே தெரித்த உதாரணத்தில், தகப்பனும் மகனுங் கூடிக் கிணற்றை வெட்டி முடிக்குநாள் இத்தனையென்றறியப்படாதிருந்தாலும் அதற்குப் பதிலாய் அட்சரத்தை வைக்குமிடத்து அது கூட்டல், களைதல், பெருக்கல், பிரித்தலாகிய கணித கிர்த்தியங்களையடையத் தகுந்ததாகும். ஆனால் எண்களைக்கொண்டு கணிப்பதுபோல அட்சரங்களைக்கொண்டுங் கணித்தல் ஏலாமைபற்றிக் கணிதகிர்த்தியங்களைக் குறிக்கும்படி அடையாளங்களை வழங்குவர். இந்த அடையாளங்கள் சின்னங்களெனப்படும். ஆகையால்,

இராசிகளை அட்சரங்கள்கொண்டும், கணிதகிர்த்தியங்களைச் சின்னங்கள்கொண்டும் உணர்த்துநூலெது அது வீசகணிதமாம்.

அட்சரங்களினாற் கணிக்கின்றபடியால் இதனை அட்சரகணிதமென்பாருமுளர்.

கேத்திரங்களின் சம்பந்த விதிகளை உணர்த்து நூலே கேத்திரகணிதம். கேத்திரமென்பது நீளத்தையாவது, நீளத்தையும் அகலத்தையுமாவது, நீளத்தையும் அகலத்தையுங் கனத்தையுமாவது, பொருந்திய அளவு.

௪. பிர. பாடீகணிதம், வீசகணிதம், கேத்திரகணிதமென்ற மூன்று முக்கியமான உறுப்புகளோடுங் கூடி விளங்குகின்ற கணிதசாஸ்திரம் பிரயோசனமிகுதியினால் எல்லாச் சாஸ்திரங்களிலுந் தலைமைப்பாட்டையுடையது. பூமிசாஸ்திரம், வானசாஸ்திரம், சலனசாஸ்திரம், நயனசாஸ்திரம், சத்தசாஸ்திரம், மாலுமிசாஸ்திரம், நிலஅளவைசாஸ்திரம், சிற்பசாஸ்திரம், முதலிய சாஸ்திரங்களும், வாணிபம், உலகோம்பல்,

படைபயிற்றல், முதலிய தொழில்களுங் கணிதசாஸ்திரமின்றிப்பயன்படாவாம். கணிதநூலைக் கற்றோரேயன்றி மற்றோருங் கப்பலோட்டு, சிற்பம், வாணிபம் முதலிய தொழில்களிற் பிழைபடாதொழுதுகின்றாரேனும், அந்தத் தொழில்களை அவ்வாறியற்றும்படி விதிகளையும், முறைகளையும் உண்டாக்கினவர்கள் கணிதவல்லோராம். கப்பலோடுகின்ற ஸ்தானங்களின் *அட்சதேசாந்தரங்களை நிச்சயித்துப் பாதையற்ற சமுத்திரத்திற் பாதைபெற்றோடும்படி மாலுமிக்குப் பிராணசகாயமாயிருக்கின்ற நூலைச் செய்தவர்கள் கணிதசாஸ்திரத்திலும், வானசாஸ்திரத்திலும் முதிர்ந்த அறிஞராம். தொழில்களை விரைவாய்ச் செய்துமுடிக்கின்ற சூத்திரங்களைக் கையாட்சிபண்ணிப் பெரும்பயனையடைகின்ற அனைவரும் அச்சூத்திரங்களுக்கு ஆதாரமான பிரமாணங்களின் சம்பந்த சார்புகளை முற்றும் அறியாராயினும் அவற்றை முதன்முதல் நவமாய்த் தோற்றுவித்தவர்கள் கணிதசாஸ்திரத்திலுஞ் சலனசாஸ்திரத்திலுஞ் சிறந்த விற்பத்தியையுடையராயிருத்தல்வேண்டும். ஆகையாற் சமஸ்தசாஸ்திரங்களோடுந் தொழில்களோடுங் கூடி வியாபித்து அவையவையாய் நின்று பலன்களைப் பிறப்பிக்கின்ற கணிதநூலை யாவருங் கற்கைநன்றாம்.

ஆனால் இங்கே தெரித்த பிரயோசனங்களனைத்துங் கணிதநூல் தருகின்ற புறப்பிரயோசனங்களாகையால், அவை, அந்நூலைக் கற்கையால் அகத்துக்கண் விளைகின்ற பிரயோசனங்களோடு உவமிக்கத் தகுந்தனவல்ல.

நீரோடு கலந்த பாலைப் பிரிக்கின்ற அன்னம்போல†ஆபாசங்களினின்று உண்மையைப் பிரித்தறியவும், உண்மையான நியாயங்களைத் தகும் வகையெடுத்தாளவும், அநேக நியாயங்கள் தொடர்ந்துவருங்காலத்தில் அவையனைத்திலுங் குற்றமுஞ் சந்தேகமுஞ் சாராமல் முடித்து, மெய்யையும் பொய்யையும் அதுவதுவாய் நிறுத்தவும் வல்லசாமர்த்தியத்தை யுத்தியிற் பிறப்பிக்கின்றபடியால்,

உரத்தின்வளம்பெருக்கியுள்ளியதீமை . . . . . ப்
புரத்தின்வளமுருக்கிப்பொல்லா . . . . மரத்தின்
கனக்கோட்டந்தீர்க்குநூலஃதேபோன்மாந்த . . ர்
மனக்கோட்டந்தீர்க்குநூன்மாண் . . . . பு.‡

* அட்சம், Terrestrial Latitude. தேசாந்தரம், Terrestrial Longitude.
† ஆபாசம், போலிநியாயம்.
‡ (இதன்பொருள்.) உடம்பினுளிருக்கின்ற அறிவின் வளத்தை வளர்வித்து நினைக்கப்பட்ட அறியாமையின்வளத்தைக் கெடுத்துப பொல்லாதமரத்தினது கனம்பொருந்திய கோணலை ஏற்றுநூலானது நீக்கும், அதுபோலவே மனிதரதுமனதின் கோணலை நீக்குங் கல்வினது மாட்சிமையாம்.

என்று நன்னூலாசிரியரால் எல்லாநூற்குமாவதோர் பொது இலக்கணமாகக் கூறப்பட்டது கணிதநூற்கே மிகச்சிறந்ததாம். கணிதநூலோடு பயில்வது மாணாக்கனின் யுத்திசாதனையை அதிகரிப்பிக்கின்றபடியால் அவனதன் உபகாரத்தினால் மற்றெந்தக் கலைஞானங்களையும் விரைவாய் உணர்ந்துகொள்வான். ஆகையால் இந்த நூலினிடத்தே மாணாக்கன் பிரயோசனத்தை விரும்பிக் கற்கிற் கசடறக் கற்கக்கடவன்.

௫. பிர. இராசிகள் தெரிநிலையிராசியென்றும், மறைநிலையிராசியென்றும் இரண்டுவகைப்படும்.

தெரிநிலை இராசியென்பது வெளிப்படையாயாவது, குறிப்பாயாவது கணிதவினா முதலியவற்றிற் பொருள் கூறப்பெற்றதாம். பொருள் கூறப்பெறாத இராசி மறைநிலையிராசியாம்.

தெரிநிலையிராசியை வியக்தம் என்றும், மறைநிலையிராசியை அவ்வியத்தம் என்றும் வடநூலார் கூறுவர்.

௬. பிர. தெரிநிலையிராசிக்குப் பதிலாக நெடுங்கணக்கின் ஆதி அட்சரங்களையும், மறைநிலையிராசிக்குப் பதிலாக நெடுங்கணக்கின் ஈற்றட்சரங்களையும் வைப்பர்.

ஆதியட்சரமென்றது, அ, ஆ, இ, முதலியவையை. ஈற்றட்சரமென்றது, ன, ற, முதலியவையை. ஷ, ஸ, இவற்றையும் ஈற்றட்சரத்தோடு கூட்டுக.

௭. பிர. வரையறைபெற்ற தெரிநிலையிராசிக்குப் பதிலாக அட்சரங்களையன்றிச் சிறுபான்மை, ௧, ௨, ௩, ௪, முதலிய இலக்கங்களையுந் தீட்டுவதுண்டு. இவற்றுள், அ, உ, எ, ரு, ய, முதலியன இலக்கமாயன்றி அட்சரமாயும் நிற்கின்றபடியால் வரையறையற்ற இராசிக்குப்பதிலாகவும் இவற்றை வரையிற் பொருள் மயங்குமென்றறிக.

௮. பிர. சின்னம் என்பது கணிதகிர்த்தியத்தைச் சொல்லால் விளக்காது, குறிப்புமாத்திரமாய் விளக்கும் அடையாளமாம்.

உ-ம். ௬ + ௯. என்று வரையுமிடத்து (௬) க்கும் (௯) க்கும் இடையே நிற்பது சின்னம். (௬) ம் (௯) ம் கூட்டற் கிர்த்தியம்பெறல்வேண்டுமென்பது இந்த (+) சின்னத்தின் பயன்.

௯. பிர. (+) இது கூட்டறிகுறி. இச்சின்னத்திற்கு நாமம், சக. சக, என்ற சொற்பொருள், கூட, என்பது. உ-ம். ஒ + ஈ, என்று வரையுமிடத்து ஒ, ஈ, என்ற இரண்டு அட்சரங்களையுங் கூட்டல்வேண்டும், என்பது கருத்து. இதை ஒ சக ஈ, என்று வாசிப்பது.

ய. பிர. (—) இது கழிப்பறிகுறி. இதற்கு நாமம், சய. சய
என்ற சொற்பொருள், நட்டம் அல்லது குறை. உ-ம். ஒ—ஈ
என்று வரையுமிடத்து (ஈ) ஐ (ஒ) இற் கழித்தல்வேண்டுமெ
ன்பது கருத்து. இதை ஒ சய ஈ என்று வாசிப்பது.

யக. பிர. சகசின்னம் எந்த இராசிக்கு முன் வரையப்பட்டி
ருக்கின்றதோ அந்த இராசியைத் தனராசியென்றும், சயசின்ன
ம் எந்த இராசிக்கு முன் வரையப்பட்டிருக்கின்றதோ அந்த இரா
சியை இருணராசியென்றுஞ் சொல்லுவர்.

யஉ. பிர. ஆதியில் வருந் தனராசிக்கு முன் பெரும்பாலுஞ் ச
கசின்னந் தீட்டுவதில்லை. இருணராசி ஆதியில் வரின் அதின்
முன் சயசின்னம் எப்போதுந் தீட்டல்வேண்டும். எந்த இராசிக்
குமுன் சின்னமில்லையோ அந்த இராசி தனராசியென்றும் அவ்
விராசிக்குமுன் சகசின்னந் தொகைநிலையாயிற்றென்றும் உ
ணர்க. உ-ம். ஒ+ஈ என்று வரையும்போது, ஒ, என்ற அட்
சரத்தின் முன் + தொக்கது. அது +ஒ+ஈ, என்பதற்குச் சரி.

ய௩. பிர. சிறுபான்மை சகசின்னமுஞ் சயசின்னமும் ஒ
ரே அட்சரத்தின் முன் ± இவ்விதமாய்த் தீட்டப்படும். இந்தச்
சின்னத்தை உபயார்த்த சின்னமென்பது. உ-ம். ஒ±ஈ, எ
ன்று வரையும்போது இந்த இராசிகள் சேர்ந்த கணிதத்தில் ஒ
ருபுடை (ஈ) ஐக் கூட்டலும், ஒருபுடை (ஈ) ஐக் கழித்தலும்
வேண்டுமென்பது கருத்து.

யச. பிர. இரண்டிராசியில் ஒன்றையொன்று களைந்து வி
த்தியாசமறியவேண்டில் அவற்றினிடையே ∽ இப்படி வித்தி
யாசமறிகுறியிடுவது. உ-ம். ஆ∽ஒ, என்புழி இவ்விரண்டிரா
சியில் எதை மற்றதிற் களைதல் வேண்டுமென்பதைக் குறியா
மல் அவற்றின் வித்தியாசத்தைமாத்திரமே விளக்குகின்றது.

மேலும் சின்னங்களெல்லாஞ் சகசின்னமாய் அல்லது சய
சின்னமாய் வரின் அவை சமானசின்னமென்றும், சில சகசி
ன்னமாயும் சில சயசின்னமாயும் வரில் அவை வேற்றுச்சின்
னமென்றுஞ் சொல்லப்படும்.

ய௫. பிர. (=) இது சமமறிகுறி. இந்தச் சின்னத்தின் இர
ண்டு பக்கத்திலும் நிற்கின்ற இராசிகள் ஒன்றற்கொன்று சரி
யாயிருக்கும். உ-ம். ஒ+ஈ=ஊ, என்று வரையுமிடத்து (ஒ)
(ஈ) என்ற அட்சரங்களின் தொகை (ஊ) வுக்குச் சமமென்ப
து கருத்து. அ+ச=க௬—ச=க0+உ=எ+உ+௩=கஉ.

ய௬. பிர. இரண்டிராசி ஒன்றற்கொன்று பெருத்துச் சிறுத்
திருந்தால் அவ்விரண்டிற்குமிடையே > இப்படிச் சமமின்மை
யை விளக்குகின்ற தாரதம்மிய சின்னத்தை வரைவர்.

இந்தச் சின்னத்தின் மூலையைச் சார்ந்த இராசி சிறியதும் அ
தின் வாய்ப்புறத்திராசி பெரியதுமென்றுகொள்க. உ-ம். ஆ>

ஒ. இதை (ஆ), (ஒ) இற் பெரியதென்று வாசிப்பது. ஆ<ஒ,
இதை (ஆ), (ஒ) இற் சிறியதென்று வாசிப்பது.

யஎ. பிர. அட்சரத்தின் முன் வரையப்படும் இலக்கம் வர்ண
மாம். அது தனக்குப் பின் வருகின்ற அட்சரத்தோடு பெருக்க
ற்சம்பந்தங்கொண்டுநிற்கும். உ-ம். உஈ. இதன்கருத்து இர
ண்டுதரம் ஈ, என்பது. கூஈ, இது ஒன்பதுதரம் ஈ. (ஈ) ஐ ஒ
ன்பதாற்பெருக்கிய பேறெனினுமாம்.

யஅ. பிர. வர்ணம் அபின்னமாயாவது பின்னமாயாவது வ
ரும். உ-ம். ௫ஈ. இதில், ௫. அபின்னவர்ணம். உ/௫ ஈ. இதில்,
உ/௫, பின்னவர்ணம் அட்சரத்தின் முன் வர்ணம் வரையாதவிட
த்து (க) வர்ணமாம். உ-ம். ஒ, என்று வரையுமிடத்து ஒரு
ஒ, அல்லது, கஒ என்பது கருத்தாம்.

யகூ. பிர. வர்ணம் இலக்கமாயன்றி அட்சரமாயும் நிற்பது
ண்டு. உ-ம். ஙஆ. என்புழி (ங) எத்தனையோ அத்தனையா
ல், (ஆ) ஐப் பெருக்கவேண்டியபடியால் (ஆ) வுக்கு (ங) வர்
ணமென்று கொள்வது. (ங) (சு) க்குப் பதிலெனில் ஙஆ, எ
ன்பது (சுஆ) ஆம். ஙஆஒஞ. என்புழி (ஆஒஞ) வுக்கு வர்ண
ம் (ங) என்றும், (ஒஞ) வுக்கு வர்ணம் (ஙஆ) என்றும், (ஞ)
வுக்கு வர்ணம் (ஙஆஒ) என்றுமறிக.

உய. பிர. ஒற்றையிராசியென்பது தனி எண்ணுயாவது, த
னி அட்சரமாயாவது, சக (+) சய (—) சின்னங்களிஞல் இ
ணையாத அட்சரங்களாயாவது, எண்ணும் அட்சரமுமாயாவ
து நிற்கும். உ-ம். சு. இது தனி எண். ஆ. இது தனி அட்
சரம். ஆஒ, ஆஒஞ, இவை பல அட்சரம். சஒ, இது எண்
ணும் அட்சரமும். இப்படி ஒற்றையிராசி வந்தவாறு காண்க.

உக. பிர. சக (+) சய (—) சின்னங்களிஞல் இணைந்த
பலராசி வகுராசியென்ற பெயர்பெறும். உ-ம். ஆ+ஒ, ங—சி,
டி—ஞு+௫ண+ஷட. இவை வகுராசி. வகுராசியின் தனிக்
கூறுகளான ஒற்றையிராசிக்கு உறுப்பென்று பெயர்.

உஉ. பிர. இரண்டுறுப்புக்கொண்ட வகுராசியை இரட்டையி
ராசியென்பர். உ-ம். ஆ+ஒ, ஆ—ஒ, இவை இரட்டையிராசி
யாம். ஆ—ஒ, என்றிவ்வாறு சய சின்னத்தாலிணைந்து வருகி
ன்ற இரட்டையிராசியை எச்சராசியென்று கூறுவர். இது ஒ
ன்றிலொன்று களைந்து எஞ்சினசேடமாகையால், இதற்கிந்த
நாமமாம். இரட்டையிராசியைத் துவிராசியென்றும் எச்சரா
சியைச் சேடராசியென்றுஞ் சொல்லினுமாம்.

உ௩. பிர. மூன்றுறுப்புக்கொண்ட வகுராசியைத் திரிராசியெ
ன்றும், நான்குறுப்புக்கொண்ட வகுராசியைச் சதுரிராசியென்

றும், ஐந்துறுப்புக்கொண்ட வதுராசியைப் பஞ்சராசியென்றும், இப்படியே வதுராசிகளின் நாமங்கள் வருவனகாண்க.

௨௪. பிர. வதுராசியின் பல உறுப்புகள் ஒரேசிர்த்தியமடைதல்வேண்டில் அவற்றிற்கு விலங்குச்சின்னந் தீட்டுவது. அது ——— இப்படி நேர்வரிவடிவாயும், ( ) இப்படிப் பிறைவடிவாயுமிருக்கும். உ-ம். ஆ—ஒ+டி அல்லது ஆ—(ஒ+டி) என்று வரையுமிடத்து, ஒ, டி, என்ற அட்சரங்களின்தொகையை, ஆ, இற் கழிதல்வேண்டுமென்பது கருத்தாம். ஆ—ஒ+டி, என்று வரைந்தால், ஆ, இல், ஒ, ஐக் கழிந்து, டி, ஐக் கூட்டல்வேண்டுமென்பதாம்.

௨௫. பிர. இராசிகள் தனித்தாவது, இணைந்தாவது அட்சரசின்ன மாத்திரமாய் நிற்கில் அது வீசபாஷையாம்.

வீசவாக்கியமென்றும், வீசராசியென்றும், வீசரூபமென்றுஞ் சொல்லினுமாம். உ-ம். ௩ஆ என்பது, ஆ, எந்த எண்ணுக்குப் பதிலானதோ, அந்த எண்ணின் மும்மடங்கு என்று சொல்வதற்கு இது வீசபாஷை. கி+௨டி—ணி=தி. என்பது, கி, எந்த எண்ணுக்குப் பதிலானதோ அந்த எண்ணுடன், டி, பதிலான எண்ணினிரட்டியைச் சேர்த்து, ணி, பதிலான எண்ணைக் கழிந்து வருஞ் சேடம், தி, பதிலான எண்ணுக்குச் சரியென்று சொல்வதற்கு இது வீசபாஷை.

௨௬. பிர. (×) இது பெருக்கறிகுறி. உ-ம். ஆ×ஒ. (ஆ) ஆல் (ஒ) ஐப் பெருக்கல்வேண்டுமென்பது கருத்து. இதை ஆ தரம் ஒ, என வாசிப்பது. ௬×௩ என்பது ௬ தரம் ௩, அல்லது அறுமூன்று. சிறுபான்மை பெருக்கற்சின்னமாகப் புள்ளியைத் தீட்டுவர். உ-ம். ஆ. ஒ, என்று வரையினும், ஆ×ஒ, என்று வரையினும் இரண்டும் ஒக்கும்.

௨௭. பிர. பெரும்பாலும் ஒற்றையிராசியின் கூறுகளுக்கிடையே பெருக்கற்சின்னந் தீட்டுவதில்லை. இந்தக் கூறுகளான அட்சரங்களிணைந்து சொல்லுவடிவாய் நிற்கும். உ-ம். ஆடி, ஆ'டி, ஆ×டி, இம்மூன்றும் ஒரு பொருளன. ஆசடத, என்பது ஆ×ச×ட×த, என்பதற்குச் சரி.

௨௮. பிர. பெருக்கவேண்டிய இராசி வதுராசியானால் அதற்கு விலங்குச்சின்னந் தீட்டியபின் பெருக்கறிகுறியிடல்வேண்டும். உ-ம். ஆ, ஒ, இவற்றின் தொகையை, கீ, கி, இவற்றின் தொகையாற் பெருக்கவேண்டில், ஆ+ஒ×கி+கீ, அல்லது (ஆ+ஒ)×(கி+கீ) என்று வரைவது. (௬+௨)×௫, என்புழி இது அ×௫ அல்லது (௪௦) க்குச் சரி. ௬+௨×௫ என்றால் இது ௧௬க்குச் சரியாம்.

௨௯. பிர. பிறைவடிவு விலங்குச்சின்னம் வழங்கும்போது பெருக்கற்சின்னம் பெரும்பாலுந் தொகைநிலையாய்விடும். உ-ம். (ஷ+ஸ) (ண+த) என்பது (ஷ+ஸ)×(ண+த) என்பதற்குச் சரி.

௩௰. ஒன்றோடொன்று பெருக்கப்படும் இராசிகள் குணங்கமாம். உ-ம். ஆஒ, என்புழி, ஆ, ஒரு குணங்கம். ஒ, மற்றக்குணங்கம். வி×(ஆ+ம) என்புழி (வி) ஒரு குணங்கம் (ஆ+ம), மற்றக்குணங்கம். இதினால், வர்ணமெல்லாங் குணங்கமென்றும். ௩ஷ, என்புழி, ௩, ஒருகுணங்கம், ஷ, மற்றக்குணங்கம்.

௩௧. பிர. ஒரு இராசி தன்னைத் தன்னாலே ஒருமுறையாவது பலமுறையாவது பெருக்கப்பெற்றபேறு காதிதமாம். உ-ம். ஆ×ஆ, இது ஆ, இன் இரண்டாங்காதிதம் அல்லது வர்க்கம். ஆ×ஆ×ஆ, இது, ஆ, இன் மூன்றாங்காதிதம், அல்லது கனம். ஆ×ஆ×ஆ×ஆ. இது (ஆ) இன் நான்காங்காதிதம். ஆ×ஆ×ஆ×ஆ×ஆ. இது (ஆ) இன் ஐந்தாங்காதிதம். இப்படிப் பெருக்கற்குறியிட்டாவது, ஆஆஆஆஆ, என்று பெருக்கற் குறியிடாதாவது காதிதந்தீட்டலாம். இதற்குப்பதிலாய் $ஆ^{௫}$ என்று இப்படி அட்சரத்தின் வலப்புறத்தே சற்றுயர இலக்கம் வரைவது வழமை. இந்த இலக்கத்தைக் காதிதசூசியென்க. காதிதசூசி நிர்க்கண்டமென்ற பெயரையும் பெற்றுவரும். காதிதசூசி எத்தனையோ அத்தனைதரம் அட்சரங் குணங்கமாய் வருமென்றும் அந்தச் சூசியை வரையாதவிடத்து (௧) தொக்கதென்றுமறிக.

௩௨. பிர. √ இது மூலமறிகுறி. காதிதம்பிறத்தற்கு எந்த இராசி தன்னைத் தன்னாற் பெருக்கப்பெற்றதோ அந்த இராசியே மூலமாம். உ-ம். $ஆ^{௨}$ இது (ஆ) இன் இரண்டாங்காதிதம், அல்லது வர்க்கம். $\sqrt[௨]{ஆ}$. இது, (ஆ) இன் இரண்டாம் மூலம், அல்லது வர்க்கமூலம். இதை √ஆ. என்று வரைவது வழமை.. $\sqrt[௩]{ஆ}$. இது (ஆ) இன் மூன்றாம் மூலம், அல்லது கனமூலம். $\sqrt[௪]{ஆ}$. இது (ஆ) இன் நான்காம் மூலம். பிறவுமன்ன.

௩௩. பிர. மூலமறிகுறிக்கு மேலே நிற்கின்ற இலக்கத்தை மூலசூசியென்பர். (௨) வர்க்கமூலத்திற்கும், (௩) கனமூலத்திற்கும், (௪) நான்காம் மூலத்திற்கும், மூல சூசிகளாம். பிறவுமிப்படியே.

௩௪. பிர. பிரிப்பறிகுறி இரண்டுவகை. ௧வது. இரண்டு

புள்ளிகளினிடையே கிடக்கின்ற நேரிரேகைவடிவம். (÷) இந்தச் சின்னத்தின் இடப்புறத்திற் பாச்சியம் அல்லது பிரிக்கப்படும் இராசியும் வலப்புறத்திற் பாககம் அல்லது பிரிக்கும் இராசியும் நிற்கும். உ-ம். ஆ÷ஒ. என்புழி (ஆ) ஐ (ஒ) ஆற் பிரித்தல்வேண்டுமென்பது கருத்து. இதை ஆ அரண ஒ என்று வாசிப்பது. உவது. பாச்சியம் போகமாகவும், பாககம் ஆகமாகவும், பிரிப்புப் பின்னருபத்தில் விளங்கவரைவதுமுண்டு. உ-ம். $\frac{ஆ}{ஒ}$ என்புழி (ஆ) ஐ (ஒ) ஆற் பிரிப்பது என்றகருத்தாம்.

௩௫. பிர. இராசிகள் அநுபாதமாய்வரும்போது அநுபாதம் புள்ளிகளினால் விளக்கப்படும். உ-ம். ஆ : ஒ : : கீ : கூ என்று வரையுமிடத்து, (ஆ), (ஒ) இல் எத்தனைமடங்கு பெரிதாய் அல்லது சிறிதாயிருக்கின்றதோ அத்தனைமடங்கு பெரிதாய் அல்லது சிறிதாய் (கீ) (கூ) வுக்கு இருக்கின்றது என்பது கருத்து. இதில் : என்பதை (கு) என்றும், : : என்பதை எப்படியோ அப்படியேயென்றும் வாசிக்க. ௫ : ௬0 : : ௮ : ௯௬ என்பதை ஐந்துக்கு அறுபது எப்படியோ அப்படியே எட்டுக்குத் தொண்ணூற்றாறு என்று வாசிப்பது.

௩௬. பிர. வீசராசிகள் ஒரேகாதிதமுள்ள ஒரே அட்சரங்களாய்வரில் அவற்றைச் சமானராசியென்றும், காதிதம்வேறாயாவது, அட்சரம் வேறாயாவது வரில் வேற்றிராசியென்றுங் கூறுவர். கீகூ, ௩கீகூ, —கீகூ, —௬கீகூ. இவை சமானராசி, சின்னங்களும், வர்ணங்களும் வேறுவேறாய்வந்தும் அட்சரங்களொன்றாய் நின்றபடியால், சமானமென்றது. ௩ஆ, ௩ஷ, ௩கிஸ, இவைகள் வேற்றிராசி. ஏனெனில, சின்னங்களும், வர்ணங்களும் வேற்றுமைப்படாதிருந்தும் அட்சரங்கள் வேறுபட்டன. இன்னும், ஷ, ஷஷ, ஷஷஷ, இவை ஒரு அட்சரத்தின் வேறுவேறான காதிதமாகையால் வேற்றிராசியாம். (இவற்றை வழமையாய் ஷ, $ஷ^{௨}$, $ஷ^{௩}$, என்று வரைவர்.)

௩௭. பிர. ஒன்றற்கொன்று வித்தியாசமான இராசியில் ஒன்று மற்றதைச் சேடமில்லாமலரிக்குமேனில், அரித்தராசியை முற்றளவென்றும், அரிபட்டராசியை முற்றுப்பெருக்கமென்றுஞ் சொல்வர். உ-ம். (௩௫) ஐ (௫) ஆல் அரிக்கிற் பலம் (௭) சேடம் இல்லை. இதில் (௫) (௩௫)க்கு முற்றளவாம். (௩௫) (௫)க்கு முற்றுப்பெருக்கமாம். (௧௫ஆ) ஐ (௩ஆ) ஆற் பிரித்தாற் பலம் (௫) சேடம் இல்லை. இதில் (௩ஆ) முற்றளவு. (௧௫ஆ) முற்றுப்பெருக்கம். முற்றளவை வடநூலாசிரியர் அபவர்த்தமென்பர்.

வீசபாஷையாவது, வேறுபாஷையாவது எதற்குப் பதிலாக

நிற்கிறதோ அதை அர்த்தமென்பது. உ-ம். ௭+௫, என்புழி, ௧௨, இதற்கு அர்த்தமாம். ௪×௫ என்புழி (௨0) இதற்கு அர்த்தமாம். $\frac{௧௬}{௨}$, என்புழி இதற்கு (௮) அர்த்தமாம்.

௩௮. பிர. (௧) ஐ வைத்து அதற்கு ஆரகமாக ஒரு இராசியை த்தீட்டினால் இது அவ்விராசிக்கு விலோமராசியாம். உ-ம். (௬)க்கு விலோமராசி $\frac{௧}{௬}$. (கீ+கூ) வுக்கு விலோமராசி $\frac{௧}{கீ+கூ}$. (ஆ) வுக்கு விலோமராசி $\frac{௧}{ஆ}$.

௩௯. பிர. பின் வரும் வினாக்களுக்கு விடைவரைக. இவற்றில் ஆ, ஒ, கீ முதலிய அட்சரங்கள் இராசிப்பிரதிகளாம்.

௧. வினா. ஆ, ஒ, கீ, இவற்றின் குணித்தத்தை (கூ) இல் (௬) ஐக் கழித்த சேடத்துக்கீந்தால். (ஆ), (கீ) இன் தொகையை (௧௫) தரம் (டீ) உக்குக் கூட்டியதற்குச் சரி. இதற்கு வீசபாஷை யாது?

$$விடை.\quad \frac{ஆஒகீ}{கூ—௬} = ஆ+கீ+௧௫டீ.$$

௨. வினா. (ஆ) இல் (ஈ) ஐக் கழித்த சேடத்தை (ஆ) ஐயும் (ஷ) ஐயுங் கூட்டிய தொகையாற் பெருக்கினால், (௩௭) தரம் (டு) உடனே (௪) ஐயும், (ஞ) ஐயுங் கூட்டி (௭) க்கீந்ததற்குச் சரி. இதற்கு வீசபாஷை யாது?

௩. வினா. (ஆ) இனதும் (ஒ) இனதுந் தொகைக்குக் (கீ) ஐ, (௪) தரம் (கூ) உக்கீந்த பேறு எப்படியோ அப்படியே (ஆ) ஐயும் (ஈ) ஐயும் பெருக்கிய குணிதம் (௧௨) தரம் (கீ) உக்கிருக்கும். இதற்கு வீசபாஷையாது?

௪. வினா. ஷ, ன, ஸ, இம்மூன்றின் தொகையை இவற்றின் குணிதத்திற் கீந்தால் அத்தொகையின் பதின்மடங்கில் (ன) ஐக் கழித்ததற்குச் சரி. இதற்கு வீசபாஷையாது?

௫. வினா. ஆ, ஈ, ஒ, இவற்றின் தொகையை (சீ) க்குறைந்த சஎ, ஆற்றுக்கி (கூ) உக்கீந்தால் வருவது. சீ, டீ, ணி இவற்றின் தொகையை, சீ, ஞ, ஆலரித்து (ஆ) ஐக்கூட்டினதற்குச்சரி. இதற்கு வீசபாஷையாது?

௬. வினா. $\frac{ஆ+ஈ}{கி} = ஆஈஒ—௬டி+\frac{ஆ}{ஆ+கி}$. இந்த வீசபாஷையை வழக்கப்பாஷையாகப் பெயர்த்தால், விடை, (ஆ) ஐயும் (ஈ) ஐயுங் கூட்டி (கி) வுக்கீந்தால், ஈவு (ஆ, ஈ, ஒ) இன் குணிதத்தில் (௬) தரம் (டீ) ஐக் கழித்து அத்துடன் (ஆ)

ஜ (ஆ, கி) இன் தொகைக்கீந்த பலத்தைக் கூட்டினதற்குச் சரி
பின்வரும் வீசரூபங்களை வழக்கபாஷையாகப் பெயர்க்குக

௭. வினு. $\text{ஆஈ}+\frac{\text{௩டி}-\text{கி}}{\text{ஷ}+\text{ஸ்}}=\text{ட}\times(\text{ஆ}+\text{ஈ}+\text{ஒ})-\frac{\text{க}}{\text{௬ஈ}}$

௮. வினு. $\text{ஆ}+\text{௭}(\text{டி}+\text{ஷ})-\frac{\text{கி}-\text{௬டி}}{\text{௨ஆ}+\text{௪}}=(\text{ஆ}+\text{ஒ})(\text{ஒ}-\text{டி})$

௯. வினு. $\text{ஆ}-\text{ஈ}:\text{ஆஒ}::\frac{\text{டி}-\text{௪}}{\text{ம}}:\text{௩}\times(\text{கி}+\text{டி}+\text{ஸ்})$

௧௦. வினு. $\frac{\text{ஆ}-\text{ஒ}}{\text{௩}(\text{ஈ}-\text{டி})}+\frac{\text{டி}+\text{ஆஈ}}{\text{௨ம}}=\frac{\text{ஈஆ}(\text{டி}+\text{டீ})}{\text{ஆஒ}}-\frac{\text{ஒகி}}{\text{௯}}$

௪௰. பிர. வீசகணித கிர்த்தியம் பூரணமானபின்பு அட்சரம்பதிலாய்நின்ற எண் எது அதை அட்சரத்தினிடத்தே வருவித்துத் தீட்டும்போது தொகைநிலையான பெருக்கற்சின்னத்தைக்குணங்கங்களினிடையே தப்பாமல் வரைக. உ-ம். (ஆ), (௩)க்குப் பிரதியாயும், (ஈ), (௪) க்குப் பிரதியாகவும் நின்ருல் (ஆஈ)க்குப் பதில் (௩௪) அல்ல. அது $\text{௩}\times\text{௪}=(\text{௧௨})$ ஆம்.

ஆ=௩. ஈ=௪. ஒ=௨. டீ=௬. மீ=௮. நீ=௧௦., என்று வைத்துக்கொண்டு பின்னே தீட்டிய வீசபாஷைக்கு அர்த்தங்காண்க.

௧௧. வினு. $\frac{\text{ஆடீ}}{\text{ஒ}}+\text{ஆ}+\text{மீநீ}.$

விடை. $\frac{\text{௩}\times\text{௬}}{\text{௨}}+\text{௩}+\text{௮}\times\text{௧௦}=\text{௯}+\text{௩}+\text{௮௦}=\text{௯௨}.$

௧௨. வினு. $\frac{\text{ஈ}+\text{மீநீ}}{\text{ஒடீ}}+\frac{\text{ஈஒ}+\text{நீ}}{\text{௩டீ}}=\frac{\text{௪}+\text{௮௦}}{\text{௨}\times\text{௬}}+\frac{\text{௪}\times\text{௨}+\text{௧௦}}{\text{௩}\times\text{௬}}=$
௮.

௧௩. வினு. $\frac{\text{ஈ}+\text{ஆடீ}}{\text{ஒ}}+\text{ஈஒமீ}-\frac{\text{டீ}\times\text{௪ஒநீ}}{\text{௫ஆ}}$

௧௪. வினு. $\text{ஈமீ}+\frac{\text{ஆஈ}+\text{௩டீ}}{\text{டீ}}-\frac{\text{௩ஈநீ}-\text{டீஒ}}{\text{௩ஒடீ}}$

௧௫. வினு. $\text{ஆஈமீ}+\frac{\text{௨ஈ}}{\text{மீ}-\text{ஈ}}+\text{௨நீ}.$

௧௬. வினு. $(\text{ஆ}+\text{ஒ})\times(\text{நீ}-\text{மீ})+\frac{\text{மீ}-\text{ஈ}}{\text{மீ}-\text{டீ}}-\text{ஆ}.$

௧௭. வினு. $\frac{\text{ஆ}\times(\text{டீ}-\text{ஒ})}{\text{நீ}-\text{டீ}}+\text{ஆஈஒ}-\frac{(\text{ஒ}+\text{ஈ})(\text{மீ}-\text{டீ})}{\text{நீ}-\text{ஒ}}$

௧௮. வினு. $\frac{\text{ஆஒ}+\text{௫மீ}}{\text{௨நீ}+\text{௩}}+\text{மி}-\text{ஒஈ}+\frac{(\text{௪டீ}-\text{ஈ})(\text{ஆ}-\text{ஒ})}{\text{நீ}}$

௪௧. பிர. இராசிகளை அட்சரங்கள்கொண்டும் கணிதகிர்த்தியங்களைச் சின்னங்கள்கொண்டும், உணர்த்துநூல் வீசகணிதமென்று முன்பு யாம் கூறினேம். பாடீகணிதம்போல இலக்கங்களைக்கொண்டு கணிதம் இயற்ருமல் அட்சர சின்னங்களைக்கொண்டு இயற்றவேண்டிய காரணமென்னவென்று வினுவினுல் அதற்குத்தரம். பாடீகணிதம் எண்களின் சம்பந்தங்களைத் தெரிவிக்கின்ற நூலாதலானும், சமஸ்த எண்களுஞ் சிறப்பிராசிகளாதலானும், அது (௨) ம் பிரகரணத்திற் காட்டிய பொது இராசிகளின் விதிகளை அடக்கமாட்டாது. சிறப்பிராசிகளாகிய எண்களுக்குப் பதிலாய் இலக்கங்கள் நிற்பதுபோலப் பொது இராசிகளுக்குப் பதிலாய் அட்சரங்கள் வழங்கும். ஆகையால் அட்சரங்களைக்கொண்டு கணிதமியற்றுகின்ற வீசகணிதமே பொது இராசிகளின் விதிகளையுணர்த்தத் தகுந்த நூலாம்.

௪௨. பிர. இலக்கங்களுக்குப் பதிலாய் அட்சரங்களை வழங்குவதினுற் கணிதநூலுக்கு அநேக பிரயோசனங்கள் உண்டுபடுகின்றன. ௬௭௮, ௯௦௪, ௮௭௪; ௫௪, ௮௯௩, ௨௫௧; ௩௪௫௬௭ ௮௯௦௨௪; என்ற எண்களுக்குப் பதிலாய், ஆ, ஈ, ஓ, என்ற மூன்று அட்சரங்களும் நிற்குமேனில், அவற்றை ஒன்ருய்ப் பெருக்கிய பேறு (ஆஈஓ) ஆம். இந்த மூன்று அட்சரங்களும் ஒரு சொல்லுவடிவாய் நிற்கும்படி வரைவதே அவற்றைப் பெருக்குவதாகையால் கணிதகிர்த்தியம் மிகச்சுருங்கினது. இந்த மூன்று எண்களையும் ஒன்ருய்ப் பெருக்கும்போதும், மற்றும்பாடீகணித கிர்த்தியங்களை இயற்றும்போதும் எண்கள் ஒன்ருேடொன்று கலந்து மயங்குகின்றன. அட்சரங்களைக்கொண்டு கணிக்கும்பொழுது ஒவ்வொருகிர்த்தியமும் மற்றவைகளுடனே மயங்காமலிருக்கின்றது. ஆகையாற் சுருக்கமுடைமையும் மயக்கமின்மையுமாகிய இரண்டு அழகுகள் வீசகணிதத்தாற் கணிதநூலுக்குண்டாகின்றன.

௪௩. பிர. பாடீகணிதம் எண்களாகிய தெரிநிலையிராசிகளைக் கொண்டு மாத்திரமே கணிதமியற்றுகின்றது. வீசகணிதராசிகள் அட்சரங்களாகையால் வீசகணிதம் மறைநிலையிராசிகளையுங் கூடக் கணிதகிர்த்தியங்களில் அமைக்கின்றது. ஒரு மறைநிலையிராசியின் அர்த்தம் வெளிப்படையாகாதவிடத்தும், அந்த மறைநிலையிராசி மற்ற இராசிகளோடு இன்னின்ன சம்பந்தத்தைச் சார்ந்ததென்று அறிதல் கூடியதாகையால் அதற்குப் பதிலாக ஓரட்சரத்தை வைத்துக் கணிதகிர்த்தியத்தை அதனிடத்தியற்றலாம். இது வீசகணிதத்தாற் பெறப்படும் பிரயோசனங்களுள் முக்கியமானது.

௪௪. பிர. இப்பால் பாடீகணிதத்திற்கும் வீசகணிதத்திற்கு

முள்ள ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை இவ்வுதாரணங்களினால் ஒருவாறறிக.

இரண்டு எண்களின் தொகை (௬௭) வித்தியாசம் (௧௯) என்று வைத்துக்கொண்டால், அவ்விரண்டு எண்களும் யாவை?

இவ்வினாவிற்கு விடைகாணும்படி, அறியவேண்டிய இரண்டு எண்ணிற் சிறியதற்கு (௧௯) ஐக் கூட்டப் பெரியதுவரும். சிறிய எண் (ஷ) என்று வைத்துக்கொண்டால் பெரியஎண் (ஷ+௧௯). இவ்விரண்டெண்ணின் தொகையும், ஷ+ஷ+௧௯, அல்லது ௨ஷ+௧௯, என்றுவரும். ஆனால் இவ்விரண்டெண்ணின்தொகையும் (௬௭) க்குச் சமமாகையால்,

௨ஷ+௧௯=௬௭, என்ற சமீகரணம் பிறக்கின்றது. இதில் (௨ஷ) வுக்கு (௧௯) ஐக் கூட்டினால் (௬௭) ஆமெனவே, ௨ஷ=௬௭—௧௯, அல்லது ௨ஷ=௪௮, என்றதாயிற்று. ஆகையால்

௧ஷ=(௪௮) இற் பாதி, அல்லது $ஷ=\frac{\text{௪௮}}{\text{௨}}=\text{௨௪}$.

சிறிய எண் (௨௪) ஆகையாற், பெரிய எண் ௨௪+௧௯=௪௩, ௪௩+௨௪=௬௭, ஆகையாலும், ௪௩—௨௪=௧௯, ஆகையாலும், ௪௩, ௨௪, என்ற இவ்விரண்டெண்ணுமே யாமறியவேண்டிய எண்களாம்.

இந்தக் கிர்த்தியத்தை முற்றும் வீசபாஷை ரூபமாய் வரைகில்,

சிறியஎண், ஷ
பெரியஎண், ஷ+௧௯. ஆகையால்,
௨ஷ+௧௯=௬௭.
௨ஷ=௬௭—௧௯. பின்னை
$ஷ=\frac{\text{௬௭—௧௯}}{\text{௨}}=\text{௨௪}$.
ஷ+௧௯=௨௪+௧௯=௪௩.
௨௪+௪௩=௬௭
௪௩—௨௪=௧௯, என்று நிற்கும்.

இந்தக் கிர்த்தியத்தைச் சிறப்புக்கிர்த்தியமென்பர். சிறப்புக்கிர்த்தியத்தில் வேறொருவிதம்.

இரண்டெண்ணிற் பெரியதற்கு ஷ, பிரதியாய் நிற்குமெனில் (ஷ—௧௯) சின்ன எண்ணும், பின்னை, ௨ஷ—௧௯=௬௭. ௨ஷ=௬௭+௧௯=௮௬. ஆகையால், $ஷ=\frac{\text{௮௬}}{\text{௨}}=\text{௪௩}$. இது பெரிய எண். ஷ—௧௯=௪௩—௧௯=௨௪, இது சிறிய எண்.

இதினால், வழக்கபாஷையிற் பெருக்கமாய் வரைந்துகாட்ட

வேண்டிய கணிதகிர்த்தியங்களைச் சுருக்கமாயும் விளக்கமாயுஞ் சின்னப் பிரயோகத்தினால் காட்டலாமென்றும், அறியப்படாத மறைநிலையிராசிகளுக்குப் பிரதியாக அட்சரங்களை வைத்துக் கணிதமியற்றலாமென்றுங் காண்க.

௨. பொதுக்கிர்த்தியம்.

வினா. இரண்டு எண்களின் தொகை (ஆ) அவற்றின் வித்தியாசம் (ஈ), என்றுகொண்டால், அவ்விரண்டு எண்களும் யாவை?

விடை. சிறிய எண் ஷ என்றால், (ஷ+ஈ) பெரிய எண். பின்னை ௨ஷ+ஈ=ஆ. ௨ஷ=ஆ—ஈ. ஆகையால் $ஷ=\frac{\text{ஆ—ஈ}}{\text{௨}}=\frac{\text{ஆ}}{\text{௨}}-\frac{\text{ஈ}}{\text{௨}}$. $ஷ+ஈ=\frac{\text{ஆ}}{\text{௨}}-\frac{\text{ஈ}}{\text{௨}}+ஈ=\frac{\text{ஆ}}{\text{௨}}+\frac{\text{ஈ}}{\text{௨}}$. இதில் ஆ, ஈ, என்ற அட்சரங்கள் வரையறையற்ற எண்களுக்குப் பிரதியாய் நிற்கின்றபடியால் இந்தக் கிர்த்தியத்தைப் பொதுக்கிர்த்தியமென்பர். இந்தக் கிர்த்தியமுடிவிற் பெற்ற விடை சாதாரண விதிரூபமாய் நிற்கின்றது. அவ்விதி வருமாறு:

இரண்டு எண்களின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் அறிந்து, அவ்விரண்டெண்களும் யாவையென நிச்சயித்தல்வேண்டில், வித்தியாசத்திற் பாதியையுந் தொகையிற் பாதியையும் கூட்டிப் பெரிய எண்ணையும், தொகையிற் பாதியில் வித்தியாசப்பாதியைக் களைந்து சிறிய எண்ணையுமறி. உ-ம்.

தொகை, ௨௩௭. வித்தியாசம் ௯௯ என்றால், $\frac{\text{௨௩௭}}{\text{௨}}+\frac{\text{௯௯}}{\text{௨}}$, அல்லது $\frac{\text{௩௩௬}}{\text{௨}}=\text{௧௬௮}$. இது பெரிய எண். $\frac{\text{௨௩௭}}{\text{௨}}-\frac{\text{௯௯}}{\text{௨}}$, அல்லது, $\frac{\text{௧௩௮}}{\text{௨}}=\text{௬௯}$. இது சிறிய எண்.

௪௫. பிர. சமீகரணமும் அநுபாதமுமே வீசகணிதகிர்த்தியங்களைப் பரிபூரணமாக்குவன. இவ்விரண்டினையும் நன்குணரவும், அவற்றை விரும்பியவாறெடுத்தாளவும், கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், பிரித்தல் முதலிய கணிதகிர்த்தியங்களோடு பழகல்வேண்டும். ஆகையால், இந்தக் கிர்த்தியங்களைக் கிரமமாக அறிவிப்பான்றொடங்கி, ௨ம். அதிகாரத்தாற் கூட்டல் விதிகளை விளக்குவோம். இந்த விதிகளைக் கற்கின்ற மாணுக்கன் வீசகணிதகிர்த்தியங்களுக்கும் பாடீகணிதகிர்த்தி

யங்களுக்குமுள்ள ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை நன்ருய் உய்த்து ணரக்கடவன்.

---

௨. கூட்டதிகாரம்.

[Addition.]

சசு. பிர. சுந்தரன் (ஷ) மாதுளங்கனியை வைத்திருக்க, அவனுடைய பிதாவும் (கி) மாதுளங்கனியை அவனுக்குக் கொடுத்தால், ஆகச் சுந்தரனிடத்திலுள்ள மாதுளங்கனி எத்தனையென்று வினவுமிடத்து, தொகையறியும்படி (ஷ) ஐயும் (கி) ஐயுங் கூட்டல்வேண்டும். ஆனுற் கூட்டற்கிர்த்தியப்பிரதி (+) சகசின்னம். ஆகையால், ஷ+கி, தொகையாம்.

இப்படியே (௩ஆ) ரூபாயையும் (கூ) ரூபாயையும் (சீ) ரூபாயையுங் கூட்டிய தொகை யாது என்று வினவும்போது, வீசகணிதமுறையாய், ௩ஆ+கூ+சீ, ரூபாய் விடையென்றறியலாம்.

இவ்விரண்டு உதாரணத்திலும், ஷ+கி, மாதுளங்கனியென்றும், ௩ஆ+கூ+சீ, ரூபாயென்றுமறிந்ததேயன்றி, மாதுளங்கனி இத்தனை, ரூபாய் இத்தனையென்று நிச்சயமாய் யாமறியவில்லையேயென்ருல், முற்கூறிய இரண்டு வினுக்களிலும், அட்சரங்கள் எண்பிரதியாய் நின்றும், தாங்கள் பிரதியாய் நிற்கின்ற அந்த எண்கள் இன்னின்னவென்று விளக்காமற் குறிமாத்திரமாய்ப் பயன்றந்தபடியால், விடையும் இத்தனையென்று எண்ணளவால் விளக்கவில்லை. ஆகையால் வீசகணிதத்திற் பல இராசியை ஒன்ருய்க் கூட்டும்போது அர்த்தந் தோன்ருதாயினும், தொகைப்பிரதியான வீசவாக்கியந் தோன்றும். இப்படித் தொகைப்பிரதியான வீசவாக்கியமறியுங் கிர்த்தியத்தைக் கூட்டல் அல்லது சங்கலனம் என்பர். ஆகையால்,

பல இராசிகளை அவற்றின் சின்னங்களைக்கோண்டு ஒரு வீசவாக்கியமாகத் திரட்டுவதே சங்கலனம் அல்லது கூட்டலாம்.

கூட்டல்விதி.

சஎ. பிர. கூட்டவேண்டிய இராசிகளிற் சமான ராசிகளைச் சின்னம் வழுவாமல் ஒன்றின் கீழ் ஒன்று தீட்டி வேற்றிராசிகளைச் சின்னம் வழுவாமல் வேறே தீட்டிப் பின்பு சமானராசிகளைச் சுருக்கி அவற்ருேடு வேற்றிராசிகளைச் சின்னந்தப்பாமலிணைத்தெழுது.

உ-ம். $௩ஆ^{௨}—௪ஆஈ—௨ஈ^{௨}$; $௫ஆ^{௨}—ஈ^{௨}+௨ஆஈ+கி$; $(௩ஆஈ—௩ஒ^{௨}—௨ஈ^{௨})$; என்ற இந்த மூன்று வகுராசிகளையுங் கூட்டவேண்டில்,

$$\left.\begin{array}{l} ௩ஆ^{௨}—௪ஆஈ—௨ஈ^{௨} \\ ௫ஆ^{௨}+௨ஆஈ—ஈ^{௨}+கி \\ \quad +௩ஆஈ—௨ஈ^{௨}—௩ஒ^{௨} \end{array}\right\}$$ என்று இப்படி வரைந்தபின் இவற்றைக் கூட்டும் வகையாவது.

$$௮ஆ^{௨}+ஆஈ—௫ஈ^{௨}+கி—௩ஒ^{௨}.$$

$௩ஆ^{௨}$, $௫ஆ^{௨}$, என்ற இரண்டிராசியுஞ் சமான தனராசியானபடியால், (௩) ம் (௫) ம், ௮. $௮ஆ^{௨}$, இவற்றின் தொகையாம்.

—௪ஆஈ. இது இருணராசி. இதற்குச் சமானமான தனராசிகளின் தொகை +௫ஆஈ. பெரியதிற் சிறியதைக் களைய, +ஆஈ, சேடமாம். தனராசியேபெரியராசியாகையாற் சேடசின்னஞ் சகசின்னமென்று காண்க.

$—௨ஈ^{௨}$, $—ஈ^{௨}$, $—௨ஈ^{௨}$, இவையெல்லாம் இருண சமான ராசியானபடியால், இவற்றின் தொகை, $(—௫ஈ^{௨})$ ஆம். இவைகளுக்குப் பின்னே $+கி—௩ஒ^{௨}$, என்ற வேற்றிராசிகளையுஞ் சின்னந் தப்பாமல் வரையத் தொகைவரும்.

சஎ. பிர. பலராசிகளை அவற்றின் சின்னங்களைக்கொண்டு ஒரு வீசவாக்கியமாகத் திரட்டுவதே கூட்டலென்று முன்பு கூறிப், பின்பு கூட்டல்விதி கூறியவிடத்துச் சமானராசிகளைச் சுருக்கல்வேண்டுமென்றதுபொருந்தாதென்று கருதவேண்டாம். இராசிகளை இணைத்து ஒரு வீசவாக்கியரூபமாக நிறுத்துவதுதான் கூட்டலுக்குச் சிறந்த தொழிலாம். முன்பு நிறுத்திய இராசிகளின் தொகையறிய அவற்றைச் சின்னங்களினுற் பிணைத்தால், $௩ஆ^{௨}—௪ஆஈ—௨ஈ^{௨}+௫ஆ^{௨}—ஈ^{௨}+௨ஆஈ+கி+௩ஆஈ—௩ஒ^{௨}—௨ஈ^{௨}$ என்றுவரும். இதுஇந்தஇராசிகளுக்குத்தொகையாம். ஆனுல், சமானராசிகளின் தொகையைச் சுருக்கக்கூடிய விடத்துச் சுருக்குவது பிரயோசனமிகுதியையுடையதென்றுகருதியே கூட்டல்விதியில் இந்தக் கிர்த்தியமும் அமைக்கப்பட்டது.

சஅ. பிர. இனி, தொகைகளைச் சுருக்குவது எந்தெந்த இடங்களில் எந்தெந்தப் பிரகாரமென்ருல்,

க. இராசிகளுஞ் சின்னங்களுஞ் சமானமாய்வருமிடத்து :

வர்ணங்களைக் கூட்டிவந்த தொகையின் பின் பொது அட்சரங்களையும் அதன் முன் பொதுச்சின்னத்தையும் வரைவர்.

உ-ம்.

௩ஆ, ௪ஆ, ௬ஆ, இவற்றின் தொகையைச் சுருக்கினுல் ௧௩ஆ விடையாம்.

—௩ஆ—௪ஆ,—௬ஆ, இவற்றின் தொகையைச் சுருக்கினுல், —௧௩ஆ. விடையாம்.

பின்வரும் வினுக்களைக்கூட்டி இவ்விதமே விடைகாண்க.

௧.	௨.	௩.
௩ஷஸ	௭ஈ+ஷஸ	கிஸ+௩ஆஈகூ
௭ஷஸ	௮ஈ+௩ஷஸ	௩கிஸ+ஆஈகூ
௨ஷஸ	௨ஈ+௨ஷஸ	௬கிஸ+௪ஆஈகூ
	௬ஈ+௫ஷஸ	௨கிஸ+ஆஈகூ

௪.	௫.	௬.
கிடிஸஷ+௪மன	—ஆஷ	—௨ஆஈ—மன
௨கிடிஸஷ+௨மன	—௩ஆஷ	—௬ஆஈ—௨மன
௬கிடிஸஷ+௮மன	—௨ஆஷ	—௯ஆஈ—௬மன
௯கிடிஸஷ+௯மன	—௪ஆஷ	

௨. இராசிகள் சமானமாயுஞ் சின்னங்கள் வேற்றுச்சின்னங்களாயும் வருமிடத்து:

தன வர்ணத்தைத் தன வர்ணத்தோடும் இருண வர்ணத்தை இருண வர்ணத்தோடுங் கூட்டிப் பெரியதிற் சிறியதைக் களைந்து சேடத்தின் பின் போது இராசியையும், சேடத்தின் முன் பெரியதொகையின் அடையாளத்தையும் வரைவர். உ-ம்.

௩௦ஆ,—௨௮ஆ, ௨ஆ,—௫ஆ, இந்த நான்கு ஒற்றையிராசிக்குந் தொகையறிய:

௩௦ஆ, —௨௮ஆ, ௨ஆ, —௫ஆ } தன்வர்ணங்கள் (௩௦) ம் (௨) ம் ஆக (௩௨) இருணவர்ணங்கள் (௨௮) ம் (௫) ம், ஆக ௩௩. இருணவர்ணத்தின் தொகை தன் வர்ணத் தொகையிற் பெரியதானபடியால், (௩௨) ஐ (௩௩) இற் களையச் சேடம் (௧). பெரியதொகை இருணராசியாகையால், (௧) க்கு முன் சயசின்னந் தீட்டி அதற்குப்பின் (ஆ) என்ற போது அட்சரத்தை வரைந்தால் (—௧ஆ) அல்லது (—ஆ) என்ற விடைவரும். தனராசியிலும் இருணராசியிலுந் தனித்தனி ஒவ்வொன்று மாத்திரம் வந்தால் வர்ணங்களைக் கூட்டல்வேண்டியதில்லை. உ-ம்.

௧௫ஈ ;—௯ஈ, இவ்விரண்டிராசியையுங் கூட்டல்வேண்டில் (௧௫) இல் (௯) ஐக் களைந்து சேடமாகிய (௬) ன் முன் சகசின்னத்தையும் பின் (ஈ) என்ற அட்சரத்தையுந் தீட்டி (+௬ஈ) அல்லது (௬ஈ) விடையென்றறியலாம்.

அட்சரங்கள் வெவ்வேறாய்வரில் தொகைகள் சுருங்காவென்றறிக.

பின் வருங் கூட்டல்வினுக்களுக்குத் தொகைகாண்க.

௧. ஆஈ+அ, ஒட—௩, ௫ஆஈ—௪மி+௨.

௨. ஷ+௩ஸ—டஸ, ர—ஷ—அ+கிமி.

௩. ஆஈமி—௩ஷ—ஈமி, ஸ—ஷ+௭, ௫ஷ—௬ஸ+௯.

௪. ௩ஆமி+௯—௭விஸ—அ, ௧௦ஷஸ—௯+௫ஆமி. [ஸ.

௫. ௬ஆகிஸ+௭ட—௧+மிஷஸ—ஆட, ௫ஆட+கி—௭ஷ

௬. ௭ஆட—கி+அஷஸ—ஆட—, ௫ஆட+கி—௭ஷஸ.

௭. ௩ஆஈ—௨ஆஸ+ஷ, ஆஈ—ஆஸ+ஈஷ—கி.

௮. ௨ஈஸ—௩ஆஷ+௨ஆ, ௩ஈஸ—ஆஷ+ஆ.

௯. ஆஷ+ஈஸ—ஷஸ,—ஆஸ+௨ஷஸ+௫ஆஷ.

௰. ௪௧ஒடஷ—௧௦ஷஸ்—௪௮ஈ,௭ஷஸ+௨௪ஈ+௩ஒடஷ.

௰௧. ௪—ஈஷ—௧௭ஷஸ+௧௮ஆ, ௪ஆஷ—௫ஈஷ+௬௩ஒஷ.

௰௨. ௮ஆஈ—௬ஆஒ+௪ஒட—௭ஷஸ, ௧௭மிரி+௧௮ஷகி—௨ஆஷ.

௰௩. ௪௨ஆஈஒ+௧௮ஈட, ௫௦ஆஈஒ+௧௫ஆஈ+௫ஷஸ.

௰௪. ஆஷ—ஸ+௬—டஷ+௪௪, ௪டஷ—௨௦+௩ஆஷ+௭௫ஸ.

௰௫. ௪௫ஆ—௧௦ஈ+௪ஒடஷ, ௮௨ஈ—௪ஒடஷ+௪௦ஆ—௪ஈ.

௰௬. ௧௨ (ஆ+ஈ)+௩(ஆ+ஈ), ௨(ஆ+ஈ)—௧௦(ஆ+ஈ)

௰௭. ஷஸ(ஆ+ஈ)+௩ஷஸ(ஆ+ஈ), ௨ஷஸ (ஆ+ஈ)—௪ஷஸ(ஆ+ஈ).

௰௮. ஆஷ+ஆஆ+ஷ+ஷஷஷ, ௪ஆஆ+௨ஷ+ஆஷ, ௨ஷஷஷ.

௰௯. ஸ—ஸஸ+ஷஸ, ௨ஷஷ+௧௦ஸஸஸ, ௨௪ஷஸ+௬ஸ—அஷஷ.

௨௰. ஆஆஆ+௪ஆஆஆ, ௧௦ஆஆஆ—௧௪ஆஆஆ+ஆஆஆ.

௨௧. ௧௨ஸஸஸ—௧௦ஷஷ, ௨௦ஷஷ—அஸஸஸ+௨ஷஷ—௩ஸஸஸ.

௨௨. ௪(ஷ—ஸ)—௧௩(ஆ+ஈ)—௧௬(ஷ—ஸ)—௭ஆ+ஈ.

௨௩. ஆ(ஷ+ஸ)—௬ஸ, ௪௦(ஆ—ஈ)+அஆ(ஷ+ஸ)—௧௬(ஆ—ஈ).

௨௪. ௧௦ (ஆஷஸ)+௧௭ஈஒட—ஆஷஸ, ௬ஆஷஸ—௧௪ஈஒட.

௨௫. —ஷ+ஸ+௬ஷ(ஆ—ஈ)—௭ஷ, ௧௬ஷ—௧௫ஷ(ஆ—ஈ)+௨௫ஷ.

௨௬. —௪ஷ(ஷ+ஸ)+௧௬ஷ(ஷ+ஸ), ௧௫ஆஈஒ—௧௦ஷ(ஷ+ஸ).

௨௭. ௫ஆஈஒ—௬ஷஸ+மிரி, ஆ+௬ஆஈஒ+௧௪ஷஸ—

ககஆ+கூமிரி+கருஷஸ—களஆஈஓ—கருஆ—ஆஈஓ+ஷஸ—௩மிரி+ஆஈஓ.

உஅ. ஆ(ஷ+ஸ)—௩ஈ(ஷ+ஸ)—சஅ(ஷ+ஸ)—ச(ஷ+ஸ)—(ஷ+ஸ) சஈ(ஷ+ஸ)+எஆ(ஷ+ஸ)+ரு(ஷ+ஸ)+கூஈ(ஷ+ஸ).

---

௩. கழிப்பதிகாரம்.

[Subtraction.]

சகூ. பிர. கழித்தலென்பது இரண்டிராசியின் வித்தியாசத்தை அறிதலாம்;

உ-ம். (கூ) இலே (ச) ஐக்கழித்தால் வருவது (ரு). கழித்தலை வடநூலார் வியவகலனமென்பர். இதில் (கூ) சோதனீயமென்றும் (ச) சோதகமென்றும் (ரு) சேடமென்றுஞ் சொல்லப்படும்.

ஆ+ஈ, என்ற இராசியில் (ஈ) ஐ எடுத்தால் (ஆ) சேடமாம்.
ஆ—ஈ, என்ற இராசியில் (—ஈ) ஐ எடுத்தால் (ஆ) சேடமாம்.
ஆகையால், ஆ+ஈ, ஆ—ஈ, சோதனீயமாம். +ஈ,—ஈ, சோதகமாம்.

வீசகணிதத்தில் தனராசியைக் களைவது அந்தத் தனராசிக்குச் சமமான இருணராசியைக் கூட்டுவதற்கும், இருணராசியைக் களைவது அதற்குச் சமமான தனராசியைக் கூட்டுவதற்குஞ் சரியாம். எப்படியெனில்,

ஆ+ஈ, என்ற இராசியிலே (ஈ) என்ற தனராசியைக் களைந்தாலும், —ஈ, என்ற இருணராசியைக் கூட்டினாலும் பேறு (ஆ) ஆம். இவ்வகையே, ஆ—ஈ, என்ற இராசியில் —ஈ, என்ற இருணராசியைக் களைந்தாலும் ஈ, என்ற தனராசியைக் கூட்டினாலும் பேறு (ஆ) ஆம். ஆகையால் வீசராசிகளைக் கழிக்கும்படி,

விதி.

சோதனீய இராசியின்கீழே சோதகராசியைத் தீட்டிச் சோதகராசியின் சின்னங்களைச் (சகசின்னஞ் சயசின்னமாகவும், சயசின்னஞ் சகசின்னமாகவும்) மாற்றிக் கூட்டன்முறைபோலக் கூட்டிச் சுருக்கிக் கோள். உ-ம்.

சோதனீயம்,	+உஅ	ககூஈ	கசடிஆ
சோதகம்,	+ககூ	கஉஈ	கூடிஆ
சேடம்.	+கஉ	சஈ	அடிஆ

சோதனீயம்,	—உஅ	—ககூஈ	—கசடிஆ
சோதகம்,	—ககூ	—கஉஈ	—கூடிஆ
சேடம்.	—கஉ	—சஈ	—அடிஆ

இந்த உதாரணங்களிற் சோதனீயம்பெருத்துச் சோதகஞ் சிறுத்திருக்கின்றபடியால் இவை பாடீகணித உதாரணங்களுக்குச் சமானமாம். இப்பால் வரும் உதாரணங்கள் பாடீகணிதத்திலமையா.

சோதனீயம்,	+ககூ	கஉஈ	கூடிஆ
சோதகம்,	+உஅ	ககூஈ	கசடிஆ
சேடம்.	—கஉ	—சஈ	—அடிஆ

சோதனீயம்,	—ககூ	—கஉஈ	—கூடிஆ
சோதகம்,	—உஅ	—ககூஈ	—கசடிஆ
சேடம்.	கஉ	சஈ	அடிஆ

முந்தின உதாரணத்தின் இராசிகளே இந்த உதாரணத்திலும் வந்தாலும், சோதனீயமுஞ் சோதகமும் அடிதலையாறிநின்றபடியால், சேடசின்னங்களும் மாறிக்கொண்டன. இனி வேற்றுச்சின்னங்களையுடைய உதாரணங்கள் வருமாறு.

சோதனீயம்,	உஅ	உகூஈ	கசடிஆ
சோதகம்,	—ககூ ,	—கஉஈ	—கூடிஆ
சேடம்.	+சச,	+௩அஈ	+உ௦டிஆ

சோதனீயம்,	—உஅ	—ககூஈ	—கசடிஆ
சோதகம்,	+ககூ	—கஉஈ	—கூடிஆ
சேடம்.	—சச	—உஅஈ	—உ௦டிஆ

இந்த உதாரணங்களினற் சேடஞ் சோதக சோதனீயங்களிற் பெருத்தும் வருமென்றுகாணலாம்.

ருய. பிர. இராசிகளின் சேடத்தைக் கண்டபின் அது சரியோ பிழையோவென்றறியும்படி பாடீகணிதமுறைபோலச் சேடத்தையுஞ் சோதகத்தையுங் கூட்டுக. சேடஞ் சுத்தசேடமானல், சோதகத்தையுஞ் சேடத்தையுங் கூட்டியதொகை சோதனீயத்திற்குச் சரியாயிருக்கும். உ-ம்.

சோதனீயம்,	உஷஸ—க
சோதகம்,	—ஷஸ+எ
சேடம்.	௩ஷஸ—அ

இதைச் சோதகத்துடன் கூட்டிய தொகை. உஷஸ—க. இது சோதனீயத்திற்குச் சரியாதல்காண்க.

சோதனீயத்திலாவது சோதகத்திலாவது சிலராசி சமானமா யுஞ் சிலராசி வேற்றிராசியாயும் வரில் முன்போலக் களைதல் செய்தபின்பு சுருக்குகிர்த்தியம்பண்ணல்வேண்டும். உ-ம்.

சோதனீயம், ஆஈ.
சோதகம், ௩ஆமி+ஆமி+௭ஆமி+௨ஆமி+௬ஆமி
சேடம். ஆஈ—௩ஆமி—ஆமி—௭ஆமி—௨ஆமி—௬ஆமி

இது சுருக்குகிர்த்தியத்தினுல், ஆஈ—௧௯ஆமி. என்று நிற்கும்.

சோதனீயம்,	ஆ+ஈ	ஆ+ஈ
சோதகம்,	ஆ—ஈ	ஆ—ஈ
சேடம்.	௨ஈ.	தோகை. ௨ஆ

இந்த உதாரணங்களினுல், ஆ, ஈ, என்ற இராசிகளின் தோகையிலே அவற்றின் வித்தியாசத்தைக் களைந்தாற் சேடஞ் சிறிய இராசியின் இரட்டியென்றும், வித்தியாசத்தைக் கூட்டினுற் தொகை பெரிய இராசியின் இரட்டியென்றும் அறியலாம். வீசகணிதகிர்த்தியங்களினுற் போதுவிதி தோன்றுவதற்கு இது உதாரணமாம்.

இவ்வினுக்களுக்குச் சேட்மறிக.

௧. ௬ஆஈ+௭ஷஸ+௧அடகிசி என்பதிலிருந்து, ௩ஷஸ+௪ஆஈ+அடகிசி, என்பதைக் களை.

௨. —௩௫ஆஷ—௨௧ஆஈ—௩௭ஞ என்பதிலிருந்து, —௩௦ஞ—௧௫ஆஈ—௧௦ஆஷ என்பதைக் களை.

௩. ௯ஆஸ+௧௯ஈஷ+௨௨ஆஜ என்பதிலிருந்து, —௧௨ஆஈ+௧௦ஒ+௧௨ஆஸ+௩௧ஆஜ—௫௦ஆஷ, என்பதைக் களை.

௪. ௮ஷஸ—௧௦ஆஈ+௬ஒ என்பதிலிருந்து, —௧௨ஆஈ+௧௧ஒ+௨௪ஷஸ, என்பதைக் களை.

௫. ௭ஆ+௬ஷ+ஒஊ+ஷஸன என்பதிலிருந்து, ௩ஷ—௪ஆ—௩ஒஊ—௧௭ஷஸ, என்பதைக் களை.

௬. ௧௮ஆஈ—ஷஸ+௨௨டிணி என்பதிலிருந்து, ௪௧ஷஸ—டிணி+ஆஈ, என்பதைக் களை.

௭. ௨௧ஆஷ+ஸ+ஆஈ—ஆஸ என்பதிலிருந்து, ௪ஆ—ஆஈ—ஸன—ஒஜ, என்பதைக் களை.

௮. ௨௧ஷ—௪௦ஷஸ—௧௩ஆ என்பதிலிருந்து, ௪௨+௧௦ஆஈ—௫ஈஜ, என்பதைக் களை.

௯. ௫ஷஸ என்பதிலிருந்து, ௨ஆஈ+௩௦ஆஈ+ஆஈ—௪ஆஈ, என்பதைக் களை.

௧௦. ௫ஆஷ+௧௬ஆஸ என்பதிலிருந்து, ௪ஆஷ—ஆஸ+௩ஆஷ+௪ஆஸ, என்பதைக் களை.

௧௧. ஆ+ஈ என்பதிலிருந்து, —ஜ+ஒ—ஊ+டி—ணி+ஷஸ, என்பதைக் களை.

௧௨. ௭ஆஈ+௧௬ஷஸ—௭ஆஒ என்பதிலிருந்து, —(௬ஆஈ—௧௨ஷஸ+ஆஒ), என்பதைக் களை.

௧௩. ௪ஷ^{௨}+௬ஈ^{௩} என்பதிலிருந்து, ௩ஷ^{௨}+௪ஈ^{௩} என்பதைக் களை.

௧௪. ௨௦ஸ^{௨}—௨ஸ+௧௨ஆ^{௩} என்பதிலிருந்து, ௧௧ஸ^{௨}—௨ஸ—௧௨ஆ^{௩}, என்பதைக் களை.

௧௫. ஆ(ஆ+ஈ)+௧௬(ஷ+ஸ) என்பதிலிருந்து, ௨(ஆ+ஈ)—௬(ஷ+ஸ), என்பதைக் களை.

௧௬. ௪(ஆ+ஈ)+௧௬(ஷ—ஸ) என்பதிலிருந்து, ௧௭(ஆ+ஈ)+௩௬(ஷ—ஸ), என்பதைக் களை.

௧௭. ௨ஆ—ஆ^{௨}+ஈஆ என்பதிலிருந்து, ஆ—௪ஆ^{௨}—௬ஈஆ, என்பதைக் களை.

௧௮. ஷ^{௨}+௩ஷ—ஷ^{௩} என்பதிலிருந்து, ௨ஷ+௩ஷ^{௨}+௧௦ஷ^{௩}, என்பதைக் களை.

௧௯. ௧௮—௨௫ஆஈ+௨௦ஷ+௩ஸ என்பதிலிருந்து, ௩ஷ+௩ஸ—௨௫ஆஈ+௧, என்பதைக் களை.

௨௦. ௬(ஆ—ஸ)—௧௭(ஆ+ஸ) என்பதிலிருந்து, ௩(ஆ+ஸ)—௭(ஆ—ஸ), என்பதைக் களை.

௨௧. ஆஷ—ஷஸ—௫ஸ—௬ என்பதிலிருந்து, ௬ஆஷ—௬ஷஸ—ஆஸ+௪௬—௭ஒஜ, என்பதைக் களை.

௨௨. ௬௬ஆ—௪ஈ என்பதிலிருந்து, ௨௦ஆ—ஈ—௩௦ஆ—௧௬ஆ—௩ஈ+௫ஆ, என்பதைக் களை.

---

௪. பெருக்கதிகாரம்.

[Multiplication.]

௫௧. பிர. (௬) ஐ நாலுமுறை (௬) ஒடே கூட்டினுற் தொகை (௨௪)=௬+௬+௬+௬. அப்படியே (ஷ) ஐ நாலுமுறை (ஷ) ஒடே கூட்டினுற் தொகை (௪ஷ)=ஷ+ஷ+ஷ+ஷ. இவ்விதமாய் ஒருராசியை அதனுடனே பலமுறை கூட்டுவது பெருக்கல் அல்லது குணனமாம். (ஷ) ஐ (ஷ) வடனே எத்தனைதரங் கூட்டல்வேண்டுமென்று காட்டுவது (௪). இதற்குக் குணகம் என்றும், (ஷ) வுக்குக் குணனீயமென்றும் (௪ஷ) வுக்குக் குணிதமென்றும் பெயராம். குணகம் என்பது பெருக்குமெண். குணனீயமென்பது பெருக்கப்படுமிராசி. குணிதமென்பது பெருக்கிக்கண்ட பேறு. உ-ம்.

குணனீயம்,	௮.	௭ஷ
குணகம்.	௬.	௫
குணிதம்.	௪௮	௩௫ஷ.

௫௨. பிர. ஒரு இராசியை அதனுடனே பலமுறை கூட்டுவது

பெருக்கல் எனவே அபின்னதுணகத்தில் எத்தனையலகோ அ தனை முறை குணனீயத்தைக் குணனீயத்தோடே கூட்டிக் ணிதமறிவதென்றாயிற்று. இப்படிக் குணகம் அபின்னமாகா ல், பின்னமாய்வரில் அந்தப் பின்னம் (க) இன் எத்தனைகூ அத்தனை கூறுகளைக் குணனீயத்திற்கொண்டு கூட்டுவதே பெ க்கலாமென்க. எப்படியென்றால், (க) ஆற் பெருக்குவது குண னீயத்தை ஒருமுறை கொள்வதாம். உ-ம். ஆ×க=ஆ. (உ) ஆற் பெருக்குவது குணனீயத்தை இரண்டுமுறை கொள்வதாம். உ-ம். ஆ×உ=ஆ+ஆ. இவ்விதமே ($\frac{க}{ரு}$) ஆற் பெருக்குவ குணனீயத்தின் ($\frac{க}{ரு}$) ஐ ஒருமுறை கொள்வதாம். உ-ம். ஆ ×$\frac{க}{ரு}$=$\frac{க}{ரு}$ஆ. ($\frac{உ}{ரு}$) ஆற்பெருக்குவது குணனீயத்திலே ($\frac{க}{ரு}$) ஐ இரண்டுமுறை கொள்வதாம். உ-ம். ஆ×$\frac{உ}{ரு}$=$\frac{உ}{ரு}$ஆ. பிற வுமன்ன. ஆகையாற் குணகம் (க) ஆனாற் குணிதம் குண யத்துக்குச் சரி. குணகம் (க) க்கு மேற்பட்டால், குணிதம் கு ணனீயத்துக்கு மேற்படும். குணகம் (க) க்குக் குறைந்தால் குணிதம் குணனீயத்துக்குக் குறையும்.

ருரு. பிர. குணனீயமுங் குணகமும் அட்சரமாத்திரமாய் வ ரில், அவற்றினிடையிலே பெருக்கற்குறியிட்டாவது, இடாம லாவது இணைத்துத்தீட்டினாற் குணிதமாம். உ-ம்.

ஆ, குணனீயமும் இ, குணகமுமானால்	ஆஈஒ குணனீயமும் ஷஸனற, குணகமுமானால்
(ஆ×ஈ), அல்லது (ஆ.ஈ), அல்லது (ஆஈ), குணிதமாம்.	ஆஈஒஷஸனற, என்றது குணிதமாம்.

இப்படிச் சொல்லுவடிவாகக் குணிதத்தைத் தீட்டும்போது அட்சரங்களை அகராதிமுறையாகத் தீட்டுவது உத்தமமாம். இ லக்கவர்ணங்களையுடைய இராசிகளைப் பெருக்கவேண்டில் வர்ணங்களைப் பெருக்கிக் கண்டபேற்றை அட்சரகுணிதத்தின் முன் வரைக. உ-ம்.

ஈஆ×உஈ=கூஆஈ. கஉகிஷ×ஈஆஈ=ஈகூஆஈகிஷ.

ருச. பிர. குணனீயம் வதுராசியானால், அதினுறுப்புகளனை த்தையுந் தனித்தனி குணகத்தினாற் பெருக்குக. உ-ம்.

குணனீயம். ஈ+ஒ+கி+ஷ
குணகம். ஆ.
குணிதம். ஆஈ+ஆஒ+ஆகி+ஆஷ.

குணனீயமுங் குணகமும் வதுராசியானால் குணனீயத்தின் ஒவ்வோரு உறுப்பையுங் குணகத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பினாலும் பெருக்கவேண்டும். உ-ம்.

குணனீயம், ஆ+ஈ.
குணகம், ஊ+ஒ
ஆஊ+ஈஊ
+ஆஒ+ஈஒ

(ஆ+ஈ ஐ (ஊ) ஆற் பெருக்க வருவது (ஆஊ+ஈஊ). (ஆ+ஈ) ஐ (ஒ) ஆற பெருக்க வருவது (ஆஒ+ஈஒ). ஆகையினால்,

குணிதம், ஆஊ+ஈஊ+ஆஒ+ஈஒ

இம்முறையேபெருக்கி இணைத்துத்தீட்டும்போது குணிதத்திற்பல இராசிகள் சமான உறுப்புகளாய் வரில் அவற்றிற்குச் சுருக்குகிரியம்பண்ணுக. உ-ம்.

குணனீயம், ஆ+ஈ
குணகம், ஆ+ஈ
குணிதம், ஆஆ+உஆஈ+ஈஈ.

ருரு. பிர. குணங்கங்கள் தனமுந் தனமுமாயாவது, இருணமும் இருணமுமாயாவது, சமானசின்னம்பெற்று வரில், குணிதந் தனராசியாம். குணங்கங்கள் தனமும் இருணமுமாயாவது, இருணமுந் தனமுமாயாவது வேற்றுச்சின்னம்பெற்றுவரில், குணிதம் இருணராசியாம். இவ்விடத்து, தனத்தையுந் தனத்தையும் பெருக்கினால் பேறு தனமாமென்பது வெளிப்படை. இனி இருண குணனீயத்தைத் தன குணகத்தாற் பெருக்கும்போது இருண குணனீயத்தை இருணகுணனீயத்தோடு கூட்டல்வேண்டியபடியால், குணிதமும் இருணமாய் வருமென்பதுந் தெளிவாம். உ-ம். —ஆ×ரு=—ருஆ. இது. —ஆ—ஆ—ஆ—ஆ—ஆ, என்ற ஐந்து (—ஆ) ஐயுங் கூட்டியதொகைக்குச் சரி.

குணனீயம், உஆ—ஈ
குணகம், ஈகி+ஷ
குணிதம், கூஆகி—ஈஈகி+உஆஷ—ஈஷ.

குணனீயம், டு—ஈஷ+ச
குணகம், உஸ
குணிதம், உடுஸ—கூஷஸ+அஸ.

இப்படிக் குணகந் தனராசியாய் வரில் குணனீயங் கூட்டப்படவேண்டியபடியால், குணனீயசின்னங்கள் விகாரப்படவில்லை. ஆனாற் குணகம் இருணகுணகமாய் வரில் சின்னங்கள் மாறிவரும். எப்படியென்றால், முன்புபோலப் பெருக்கியபேற்றைக் களைதல்வேண்டுமென்பது குணகசின்னத்தின் தாற்பரியமாகையால், வியவகலன விதிப்படி (சகசின்னஞ் சயசின்னமாயும் சயசின்னஞ் சகசின்னமாயும்) குணிதத்தில் மாறிவரும்.

௨-ம். ஆ×—௪=—௪ஆ. இதில் (ஆ) ஐ (௪) ஆற் பெருக்கியபேறு +௪ஆ. இந்தப் பேற்றைக் கழையவேண்டியபடியால், சகசின்னத்தைச் சயசின்னமாகமாற்றி (—௪ஆ) என்று வரைந்தது. ஆகையால், ஒரு இராசியை அதனுடன் பலமுறை கூட்டுவது குணனமாமென்று கூறியது குணகந் தனகுணகமாய் வரும்போதன்றி, இருணகுணகமாய்வரும்போதல்லவாம். குணகம் இருணகுணகமாய்வரில் குணனீயத்தைக் கூட்டுதலல்லக் கழைதலே குணனமாகும். உ-ம்.

௬ஈ	௬ஈ	ஆ	ஆ	ஆ
௩	—௩	௬—௪	—௨	௬+௪
௧௮ஈ	—௧௮ஈ	௬ஆ—௪ஆ	—௨ஆ	௬ஆ+௪ஆ

பின்வரும் வினக்களுக்கு விடைகாண்க.

௧. ஆ+ஈ / ஈ—ஷ ; ௨. ௩டுஸ+கிஷ+௨ / மற—ஈஊ ; ௩. ௩கு+௩ / ஆத—௬

௫௬. பிர. இனி இருணத்தையும் இருணத்தையும் பெருக்கும்போது தனம்பிறக்குமென்றதெப்படியெனில், இருணகுணனீயத்தைக் குணகத்தின் அலகு எத்தனையோ அத்தனைமுறை கூட்டினுல், இருணப்பேருய் வருமன்றித் தனப்பேருய் வராது. இந்த இருணப்பேற்றைக் குணகம் இருணகுணகமாகையாற் கழைதல்வேண்டும். கழையவே பேறு தனப்பேரும். உ-ம்.

—ஆ / —௨ தரம். +௨ஆ.

(ஆ) ஐ (+௨) ஆற்பெருக்கினுல், (—௨ஆ) குணிதமாம். ஆனுற் குணகம் (+௨) ஆகாமல் (—௨) ஆகவந்தபடியால், (—௨ஆ) ஐக் கழையவே சயசின்னஞ் சகசின்னமாய்மாற (+௨ஆ) குணிதமாம்.

இவ்வினுக்களுக்கு விடைகாண்க.

௧. (ஆ—௪) தரம் (—௩ஈ—௬)
௨. (௪டுஷ—கிற) தரம் (௩ஆட—ஆகி—கிற)
௩. —(௪ட—௨ஷ+௩) தரம் (௨கிஸ+௩ம—க)

௫௭. பிர. பெருக்கியபேற்றிற் சமானராசிகள் தனமும் இருணமுமாய்வரில், அவற்றைத் தள்ளிக் குணிதத்தைச் சுருக்கிக்கொள்க. உ-ம்.

+ஆ—ஈ / +ஆ+ஈ தரம் ; ஆஆ—ஆஈ / +ஆஈ—ஈஈ ; ஆஆ * —ஈஈ.

மம—ஸஸ / மம+ஸஸ தரம்.

ஆஆ+ஆஈ+ஈஈ / ஆ—ஈ தரம்.

வகுராசிகளுக்குப் பெருக்கற்கிர்த்தியத்தாற் குணிதங்காணும்போது குணிதம் அவ்வகுராசிகளுக்கு விரிந்தரூபமென்றும் பெருக்சற்கிர்த்தியத்தை இயற்றுமற் சின்னமாத்திரமாய் அந்தக் கிர்த்தியத்தை விளக்கும்போது அது அந்த வகுராசிகளுக்கு விரியாரூபமென்றுஞ் சொல்லுவர். உ-ம்.

(ஆ+ஈ+ஒ) × (கி+கு+கூ) இது விரியாரூபம்.

ஆகி+ஈகி+ஒகி+ஆகு+ஈகு+ஒகு+ஆகூ+ஈகூ+ஒகூ. இது விரிந்தரூபம்.

௫௮. பிர. எந்தராசிக்காவது சுன்குணங்கமாய்வரில், குணிதஞ் சூனியமாம். உ-ம்.

512 V1c 5

௨ஆ×0=0.

இவ்வாறெடுத்துக்காட்டிய நெறிகளை அமைத்துப் பெருக்கற்கிர்த்தியம்பண்ணுவதற்குச் சாதாரணவிதி கூறுகின்ருேம்.

பெருக்கற்சாதாரணவிதி.

௫௯. பிர. குணனீயத்தின் ஒவ்வோரு அட்சரத்தையும் வர்ணத்தையுங் குணகத்தின் ஒவ்வோரு அட்சரத்திலுைம் வர்ணத்திலுைம் பெருக்கிக் குணனசின்னங்களுக்குக் கூறிய விதிப்படி குணிதஉறுப்போவ்வோன்றின் முன்னுஞ் சின்னமிடு.

இக்குணனவினுக்களுக்கு விடைகாண்க.

௧. ஆ+௩ஈ—௨ தரம் ௪ஆ—௬ஈ—௪
௨. ௪ஆஈ×ஷ×௨ தரம் ௩டஸ—க+ஐ
௩. (௭ஆஐ—ஸ)௪ தரம் ௪ஷ×௩×௫×ஒ
௪. (௬ஆஈ—ஐஒ+க)×௨ தரம் (ஆ+௪ஷ—க)×ஒ
௫. ௩ஆஸ+ஸ—௪+ஐ தரம் (ஒ+ஷ)×(ஐ+ஸ)
௬. ௬ஆஷ—(௪ஐ—ஒ) தரம் (ஈ+க)(ஐ+க)
௭. ௭ஆஸ—க—ஐ×(ஒ—ஷ) தரம் —(ணி+௩—௪ட)
௮. (ஆ+ஈ)×(ஆ+ஈ) தரம் ஆ+ஈ
௯. (ஷ+ஸ) (ஷ—ஸ தரம் ஷ+ஸ
௧0. (ஆஆ+ஈஈ)(கிகி+ஒஒ) தரம் ஷஷ+ஸஸ
௧௧. ஆஈகி—ஒதட+ஸ—௭+ஸ தரம் ஆ+ஈ
௧௨. ஷஸ—ஸஸ+௧0 தரம் ஆஆ—௧௨
௧௩. ௪(ஷ+ஸ) தரம் ௩ஆ×௬ஈ×௩
௧௪. ௩(ஆ+ஈ+கி+ஒ) தரம் ஷஸன×ட
௧௫. ஆ—ஈ—கி+ஒ தரம் ௫(கி+ஒ)
௧௬. ஷஷ+ஷஸ+ஸஸ தரம் ஷ—ஸ

123867
STACKS

௧௭. ஆஆஆ−ஈஈஈ தரம் ஆஆஆ+ஈஈஈ
௧௮. ஆஆ−ஆஷ+ஷஷ தரம் ஆ+ஷ
௧௯. ஸஸஸ−ஆஸஸ+ஆஆஸ−ஆஆஆ தரம் ஸ+ஈ
௨௦. ௧௫ஆ+௨௦ஈஈ தரம் ௩ஆ−௪ஈஈ
௨௧. ௩ஆ(ஷ+ஸ)×௪ தரம் ஆ+கி
௨௨. ௨௧ஷஸ−௧௮ஆ+௨−௭கி தரம் ௧−ஷ
௨௩. ௨ஆஷ−ஸ தரம் −(ஈ+௨)×ஷஸன
௨௪. ௨௫+௯ஆஈ×−(−ஸ+ஷ) தரம் −௨+ட
௨௫. ஆஆ+௨ஆஈ+ஈஈ தரம் (ஆ+ஈ)(ஆ+ஈ)

---

௫. பிரிப்பதிகாரம்.

[Division]

௯௰. பிர. பெருக்கற்கிர்த்தியத்திஞற் குணனீயம், குணசம் என்ற குணங்கங்களைக்கொண்டு குணிதமறியும்விதியை விளக்கி இப்பால், குணிதத்தையுங் குணங்கங்களிலொன்றையுங்கொண்டு மற்றக்குணங்கமறியும் விதியைத் தெரிவிக்கின்ஞேம். இப்படிக் குணங்கமறியுங் கிர்த்தியத்தை, பிரித்தலென்றும், அரித்தலென்றும், ஈதலென்றும், பாககாரமென்றுஞ் சொல்லுவர். உ−ம். ௯, ௪, என்ற குணங்கங்களின் குணிதம், ௨௪. (௨௪) ஐயும் (௪) ஐயுங் கொண்டு (௯) ஐ அறிய, (௨௪) ஐ (௪) ஆற் பிரிப்பது. இவ்வகையே பிரிக்கப்படும் இராசியைப் பாச்சியமென்றும், பிரிக்கும் இராசியைப் பாககமென்றும், பிரித்துக் கண்டபலத்தைப் பாசிதம் என்றும், ஈவு என்றுஞ் சொல்லுவர். ஆகையால்,

பிரித்தல் என்பது பாச்சியத்தைப் பிறப்பிக்கும்படி பாககம் எந்த இராசியாற் பெருக்கப்படல்வேண்டுமோ அந்த இராசியாகிய பாசிதத்தை அறியுங் கிர்த்தியமாம்.

௯௧. பிர. பாககத்தையும் பாசிதத்தையும் பெருக்கிக்கண்ட குணிதமே பாச்சியத்திற்குச் சமமானபடியால், பாச்சியத்திற் பாககங் குணங்கமாய்வரில் இந்தப் பாககசமமான குணங்கத்தைத் தள்ளி நிற்பது பாசிதமாம். உ−ம். ஈஒ, பாச்சியம். ஒ. பாககம். பாச்சியமாகிய (ஈஒ) இல், பாககமாகிய (ஒ) குணங்கமாய்வந்தபடியால், இந்த (ஒ) ஐத் தள்ள நிற்பது (ஈ). இது பாசிதமாம். இந்தப் பாசிதத்தையும் பாககத்தையும் பெருக்கப் பாச்சியமாம். ஒ×ஈ=ஈஒ, பாச்சியம். உ−ம்.

பாச்சியம்,	ஆஷ		கீ௯டு	
பாககம்,	ஆ	சாட்சி. ஆ×ஷ=ஆஷ	௯	சாட்சி ௯×கீடு=கீ௯டு
பாசிதம்.	ஷ		கீடு	

௯௨. பிர. பாககசமமான குணங்கத்தைத் தள்ளிப் பாசிதம் அறிக எனவே பாககத்திற்குச் சமமாய்ப் பாச்சியத்தில் வரும் எல்லாக் குணங்கங்களையுந் தள்ளல்வேண்டுமென்று கருதியதல்ல. பாககத்திற்குச் சரியான அளவே தள்ளுவதாம். உ−ம்.

பாச்சியம்,	ஆஆஈ	பாககத்திற்குச் சரியளவான இராசி ஆ) ஆகையால் மற்ற (ஆ) ஐத் தள்ளல்வேண்டியதில்லை.
பாககம்,	ஆ	
பாசிதம்,	ஆஈ	

கீகீகீ௯. இதை (கீ) வுக்கீந்தால், கீகீ௯ பாசிதமாம்.

௯௩. பிர. பாச்சியத்தின் எந்தக் குணங்கத்தையாவது தள்ளுவது அந்த இராசியிஞல் அந்தப் பாச்சியத்தைப் பிரித்தற்குச் சரியாம். உ−ம். (ஷசி) என்றபாச்சியத்தில் (ஷ) ஐத்தள்ளிஞல் (சி) வரும். இந்த (சி) (ஷசி) ஐ (ஷ) ஆற் பிரித்துப் பெற்ற பலமாம். ஆ(ஷ+ஸ) என்ற பாச்சியத்தில் (ஆ) ஐத்தள்ள (ஷ+ஸ) ஆம். இது (ஆ) ஆற் பாச்சியத்தை அரித்த பலமாம்.

௯௪. பிர. இலக்கவர்ணங்கள்வரில், பாச்சியவர்ணங்களைப் பாககவர்ணங்களிஞலரிப்பர். உ−ம்.

பாச்சியம்,	௯ஆஈ	௨௫டிடுண	௧௯னனிஞு
பாககம்,	௨ஈ	டிடுண	௪னஞு
பாசிதம்.	௩ஆ	௨௫	௪னி

௯௫. பிர. வகுராசியான பாச்சியத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் பாககங் குணங்கமாய்வரில், இந்த வகுராசியை அரிக்குமிடத்துப் பாககசமமான குணங்கத்தை ஒவ்வொரு உறுப்பினின்றுந் தள்ளுவர். உ−ம்.

பாச்சியம்,	ஆஈ+ஆஊ	ஒவ்வொரு உறுப்பினின்றுந் தள்ளுவது ஏனென்ருல், ஆ×(ஈ+ஊ) வுக்குப் பாச்சியம் சமமாகையாலென்றறிக.
பாககம்,	ஆ	
பாசிதம்.	ஈ+ஊ	

இலக்கவர்ணங்கள் வந்தால் ஒவ்வொரு உறுப்பின் வர்ணங்களையும் பிரித்தல்வேண்டும். உ−ம்.

பாச்சியம்,	௯ஆஈ+௧௨ஆஒ	௧௦டிறஸ+௧௯டி
பாககம்,	௩ஆ	௨டி
பாசிதம்.	௨ஈ+௪ஒ	௫றஸ+அ

பிரிப்புச்சின்னம்.

௯௬. பிர. பிரிப்புச்சின்னங்களுக்குக் கூறப்படும் விதியுங் கு

ணனசின்னங்களுக்குக் கூறப்பட்டவிதியும் ஒன்று. எப்படியென்றால்,

பாககமும் பாச்சியமுந் தனமுந் தனமுமாயாவது இருணமும் இருணமுமாயாவது, சமானசின்னம் பெற்றுவந்தாற் பாசிதந் தனமாய்வரும். பாககமும் பாச்சியமும் வேற்றுச்சின்னம்பெற்றுவந்தாற் பாசிதம் இருணமாய்வரும்.

௬௭. பிர. பாககத்தையும் பாசிதத்தையும் பெருக்கிக்கண்ட குணிதம் பாச்சியத்திற்குச் சமமாய்வரல்வேண்டியபடியாற் குணனசின்னவிதியும் பிரிப்புச்சின்னவிதியும் ஒன்றுமென்றது. உ-ம்.

$$\left.\begin{array}{l} +\text{ஆ}\times+\text{ஈ}=+\text{ஆஈ} \\ -\text{ஆ}\times+\text{ஈ}=-\text{ஆஈ} \\ +\text{ஆ}\times-\text{ஈ}=-\text{ஆஈ} \\ -\text{ஆ}\times-\text{ஈ}=+\text{ஆஈ} \end{array}\right\} \text{ஆகையால்} \left\{\begin{array}{l} +\text{ஆஈ}\div+\text{ஈ}=+\text{ஆ} \\ -\text{ஆஈ}\div+\text{ஈ}=-\text{ஆ} \\ -\text{ஆஈ}\div-\text{ஈ}=+\text{ஆ} \\ +\text{ஆஈ}\div-\text{ஈ}=-\text{ஆ} \end{array}\right.$$

௬௮. பிர. பாககஅட்சரங்கள் பாச்சியத்தில் இல்லையானால் பிரிப்புக்கிர்த்தியம்பண்ணும்படி, பாககத்தைப் பாச்சியத்தின் கீழே பின்னரூபமாய் வரைவர். உ-ம்.

$$\text{ஷஸ}\div\text{ஆ}=\frac{\text{ஷஸ}}{\text{ஆ}},\ (\text{ட}-\text{ஸ})\div-\text{கி}=\frac{\text{ட}-\text{ஸ}}{-\text{கி}}.$$

௬௯. பிர. பாககத்தின் சில அட்சரம் பாச்சியத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலுஞ் செறிந்திருந்தால், இந்தப் போது அட்சரத்தைத் தள்ளிப் பின்னரூபமான பாச்சியத்தைச் சுருக்கலாம். உ-ம்.

$$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஆஒ}}=\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}.\quad \frac{\text{ஆடிணி}-\text{௩ஆஷ}}{\text{ஆஈ}}=\frac{\text{டிணி}-\text{௩ஷ}}{\text{ஈ}}$$

பாககசமமானராசி பாச்சியத்திற் சில உறுப்பில்மாத்திரம் உண்டானால், அந்த உறுப்பைமாத்திரம் அரித்து மற்ற உறுப்புகளைப் பின்னரூபமாக இணைத்து வரையலாம். உ-ம்.

௧. $(\text{ஆஈ}+\text{ட})\div\text{ஆ}=\frac{\text{ஆஈ}+\text{ட}}{\text{ஆ}}=\text{ஈ}+\frac{\text{ட}}{\text{ஆ}}.$

௨. $(\text{ஈம}+\text{௩ஸ})\div-\text{ஈ}=-\text{ம}-\frac{\text{௩ஸ}}{\text{ஈ}}.$

௭௰. பிர. பாககமும் பாச்சியமுஞ் சமமானாற் பாசிதம் (௧) ஆம். உ-ம்.

$$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஆஈ}}=\text{௧}.\quad \frac{\text{௬ஆ}}{\text{௪ஆ}+\text{௨ஆ}}=\text{௧}.\quad \frac{\text{ஆ}-\text{ஈ}+\text{உள}}{\text{ஆ}-\text{ஈ}+\text{உள}}=\text{௧}.$$

ஆகையால், எந்த இராசியைக்கொண்டாவது தன்னைத் தன்னாலரித்தபலம்

(௧) என்று காண்க. பாககத்திற் பாச்சியம் பெருத்தாற் பாசிதம் (௧) இன் மேற்பட்டும், சிறுத்தால் (௧) இன் கீழ்ப்பட்டும்வரும். உ-ம்.

$$\frac{\text{௨௫}}{\text{௫}}=\text{௫}.\quad \frac{\text{௨௫}}{\text{௫0}}=\frac{\text{௧}}{\text{௨}}.\quad \frac{\text{௨௫}}{\text{௨௫}}=\text{௧}.$$

௭௧. பிர. இனி வகுராசியான பாககங்களைக்கொண்டு அரிக்கும்படி,

உதாரணம். ஆஒ+ஈஒ+ஆட+ஈட÷ஆ+ஈ.

```
ஆ+ஈ)ஆஒ+ஈஒ+ஆட+ஈட(ஒ+ட
     ஆஒ+ஈஒ
     *   *
           ஆட+ஈட
           ஆட+ஈட
           *   *
```

இந்த உதாரணத்தில் (ஆ+ஈ) பாககம். பாககத்தைப் பாச்சியத்தினிடப்புறத்திற் றீட்டிப்பாச்சியத்தின் முதலுறுப்பாகிய (ஆஒ) ஐப் பாககத்தின் முதலுறுப்பாகிய (ஆ) ஆலரிக்கப் பாசிதத்தின் முதலுறுப்பாகிய (ஒ) வரும். இந்த (ஒ) ஆல் பாககமுற்றையும் பெருக்க (ஆஒ+ஈஒ) பேறும். இந்தப் பேற்றைப் பாச்சியத்தின் முதலுறுப்புகளிலே கழிந்து எஞ்சிய உறுப்புகளை இறக்கி அவற்றின் முதலுறுப்பை முன்போல அரித்தால் (ட) பலமாம். இது பாசிதத்தின் இரண்டாமுறுப்பு. இதைக்கொண்டு முன்போலப் பாககத்தைப் பெருக்கிய பேறு (ஆட+ஈட). இதைக் கழயச் சேடமில்லை. ஆகையால் (ஒ+ட) பாசிதமாம்.

இப்படிப் பிரிப்புக்கிர்த்தியம் பண்ணுவதற்குப் பிரமாணமென்னவென்றால், பாககத்தைக்கொண்டு பாசித உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் பெருக்கினற் குணிதம் பாச்சியத்திற்குச் சமமாய்வருதலாம். மேலும் வகுராசியைக்கொண்டு பிரிப்புக்கிர்த்தியம்பண்ணுமுன், இராசிகளை வேண்டியகிரமமாய் நிறுத்தல்வேண்டும். எப்படியென்றால், பாககத்தின் முதலுறுப்பிலிருக்கும் அட்சரமே பாச்சியத்தின் முதலுறுப்பட்சரமாகவும் பாககத்திலாவது பாச்சியத்திலாவது பாககபாச்சியம் இரண்டிலுமாவது இந்த அட்சரம் பலமுறை குணங்கமாய்வரில் பெரிய குணங்க உறுப்பை முதலுறுப்பாகவும் அதிற் சிறுத்ததை இரண்டாமுறுப்பாகவும் இப்படியே கிரமங் கிரமமாக வரைக. உ-ம்.

உஆஆஈ+ஈஈஈ+உஆஈஈ+ஆஆஆ, என்ற பாச்சியத்தை,

ஆஆ+ஈஈ+ஆஈ, என்ற பாககத்தாலரித்தல்வேண்டில், பா

*௧ முதலுறுப்பாக (ஆஆ) ஐ வைத்துக்கொண்டால், (ஆ) ஞங்கமாக எத்தனைமுறை வருகிறதோ அத்தனைமுறைப் பாச்சியஉறுப்புகளை நிறுத்தல்வேண்டும்.

ஆஆ+ஆஈ+ஈஈ)ஆஆஆ+௨ஆஆஈ+௨ஆஈஈ+ஈஈஈ(ஆ+ஈ
ஆஆஆ+ஆஆஈ+ஆஈஈ
*
ஆஆஈ+ஆஈஈ+ஈஈஈ
ஆஆஈ+ஆஈஈ+ஈஈஈ
* * *

பிரிப்புச்சாதாரணவிதி.

௭௨. பிர. (௧) பிரிப்புக்கிர்த்தியம்பண்ணும்படி பாச்சியத்தின்கீழ்ப் பாககத்தைப் பின்னரூபமாக வரைவது எல்லாராசிக்கும் பொதுவிதி.

(௨) பாககமும் பாச்சியமும் ஒற்றையிராசியாய்ப் பொதுக்குணங்கம் பொருந்திவரில், பாககவர்ணத்தினாற் பாச்சியவர்ணத்தை அரித்துப் பாககபாச்சியங்களின் பொதுக்குணங்க அட்சரங்களைத் தள்ளு.

(௩) பாககம் ஒற்றையிராசியும் பாச்சியம் வகுராசியுமானால் பாச்சியத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பாககத்துக்கீ.

(௪) பாககமும் பாச்சியமும் வகுராசியானால், முன்பு கூறியவகையே கிரமங்கிரமமாக அவற்றைத் தீட்டி, பின்பு பாககமுதலுறுப்பைக்கொண்டு பாச்சியமுதலுறுப்பை அரித்துப் பலத்தைப் பாசித முதலுறுப்பாக் நிறுத்தி இந்தப் பலத்தினாற் பாககத்தைப் பெருக்கிக்கண்ட குணிதத்தைப் பாச்சியத்திற் களைந்து சேடத்துடனே அரிக்கப் போந்த இராசிகளைப் பாச்சியத்திலிருந்திறக்கி முன்போல அரித்து இவ்வாறு பாச்சியராசிகள் முற்றும் ஒழியும்வரைக்கும் அரி.

(௫) இப்படி அரிக்கும்போது பாகக பாச்சியசின்னங்கள் சமானசின்னங்களானாற் பாசிதந் தனமாயும் வேற்றுச்சின்னங்களானாற் பாசிதம் இருணமாயும் வருமென்றறி.

பிரிப்புவினா.

௧. (௧௨ஆஈஸ+௬ஆஈஷ—௧௮ஈஈம+௨௪ஈ)÷௬ஈ.
௨. (௧௬ஆ—௪௨+௮ஸ+௪—௨0ஆடஷ+ம)÷௪.
௩. (ஆ—ஊ)×(௩ம+ஸ)×ஷ÷(ஆ—ஊ)×(௩ம+ஸ).
௪. (ஆஊட—௪ஆட+௩ஆஸ—ஆ)÷(ஊட—௪ட+௩ஸ—௧).
௫. (ஆஷ—ணஸ+ஆட—௪மஸ—௬+ஆ)÷—ஆ.
௬. (ஆமஸ+௩மஸ—மஷஸ+ஆம—ட)÷டமஸ.
௭. (ஆணட—௬ஆ+௨ண—ஊட+௬)÷௨ஆணட.
௮. (௬ஆஷ—௮+௨ஷஸ+௪—௬ஊஸ)÷௪ஆஷஸ.
௯. (௧௬ஆஈஐஷ—௧௨ஷஸஆஈ+௨௪ஆஈஷட—௩௬ஆஊதஈ)÷௪ஆஈ.
௧0. (௨௧ஆஆஈஸ+௪௨ஐடஷஆஆ+௧௪ஆஆஆ—௩௫ஆஆஈ)÷௭ஆஆ.
௧௧. (௯௨ஆஈணஷஸ—௬ஊடஆஈஷஸ+௨௪ஷஸஆஈம)÷௩ஆஈஷஸ.
௧௨. (௩ஆஷ—௩௬ஈஷ+௪௨—௭௨ஐஷ+௩0ஆஷ)÷௩ஷ.
௧௩. (௧0ஆஈ—௪) (ஷ+ஸ)+௭௨+௧௨(ஆ+ஈ)+௪௮ஐ) ÷—௪.
௧௪. (ஆஈஷ—ஐடஷ+அணிஷ+ஷ)÷(ஆஈ—ஐட+அணி+௧).
௧௫. (௨௪ணஷஸ—௩௬ஐட—௪௮ஆஈஐட)÷(௧௨ணஷஸ—௧௮ஐம—௨௪ஆஈஐட).
௧௬. (—ஆஈ—ஆட+ஆஷ (ஆ+ஈ) —௪௨ஆஷஸ+ஆஈ) ÷—ஆ.
௧௭. (௬ஆம—௧0ஆ௨ண+௨0—௧௨ஐட+௧௭ஆ)÷—௨மஆ.
௧௮. (ணஷஸ+௬ஷ+ஊ—௧+௨ணஷஸ(ஆ+ஈ))÷௬ணஷஸ.
௧௯. (—௬ஆஐ—௧௨ஈஐ—௬ஆஈ—௧0—௨௮ஆஈஈஐஐ)÷௬ [ஈ. ஆஈஐ.
௨0. (௧௮ஆஈஷஸ+௧௬ஆஈஷ—௨0ஈஈஐம+௨௪ஆஈ)÷௨
௨௧. (௧௬ஷ—௨௪+ஆஆ+௮௪—௨0ஆஷ—ஆ)÷—௪.
௨௨. (ஷ—ஸ).(௩ஆ+ஷ)×ஈ÷(ஷ—ஸ)×(௩ஆ+ஷ).
௨௩. (௪௧ட×(௪—ஆ).(ஷ+ஸ))÷(௪—ஆ)×௪௧ட.
௨௪. (—௪0ஷஸ+௭ஆஈஷ—௩ஆஊமஷ)÷(—௪0ஸ+௭ [ஆ. ஆஈ—௩ஆஊம).
௨௫. {௨0(ஆஈ+௧)—௬0(ஆஈ+௧)+௫0(ஆஈ+௧)}÷௫
௨௬. (௬ஆஷ+௨ஷஸ—௩ஆஈ—ஈஸ+௩ஆஐ+ஸஐ+ஊ)÷(௩ஆ+ஸ).
௨௭. (ஆஆஈ—௩ஆஆ+௨ஆஈ—௬ஆ—௪ஈ+௨௨)÷(ஈ—௩)

உஅ. (ஈஈ — ௩ஈஜ + உஜஜ) ÷ (ஈ + ஜ).
உகூ. (ஆஆஆஆ — ஈஈஈஈ) ÷ (— ஈ + உஆ).
௩0. (ஷஷஷ — ௩ஆஷஷ + ௩ஆஆஷ — ௩ஆஆஆ) ÷ (ஷ
௩க. (உஸஸஸ — ககூஸஸ + உகூஸ — கசா) ÷ (ஸ + அ).
௩உ. (ஷஷஷஷஷஷ — க) ÷ (ஷ — க).
௩௩. (சஷஷஷஷ — கூஷஷ + கூஷ — ௩) ÷ (உஷஷ + ஷ — க).

கூ. பின்ன அதிகாரம்.

[Fractions.]

எ௩. பிர. பின்னம் என்பது பங்கு.

உ-ம். $\frac{க}{ச}$ இது நான்கிலொருபங்கு. அதாவது காற்பங்கு. இந்தப் பின்னத்தின் உறுப்புகளாகிய (க) ஐப் போகமென்றும், பாகம் என்றும், (ச) ஐ ஆரம் என்றும், ஆரகமென்றுஞ் சொல்லுவர்.

ஒரலகு எத்தனை கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டதென்று ஆரகமும், அதில் எத்தனை கூறுகளைக் கொள்ளல்வேண்டியதென்று போகமும் உணர்த்தும்.

$\frac{௩}{ச}$ என்று வரையுமிடத்து, (க) ஐ நான்கு கூறாக்கி அவற்றின் மூன்று கூறுகளைக் கொண்டதென்றாலும், (௩) ஐ நான்குகூறாக்கியதென்றாலும் இரண்டும் ஒக்கும். எப்படியென்றால், ஒரு ரூபாயின் நான்கிலொருபங்கு (ச) அணா. (ச) அணாவின் மும்மடங்கு (கஉ) அணா அப்படியே (௩) ரூபாயின் நான்கிலொருபங்கு (கஉ) அணாவாம்.

எச. பிர. பின்னரூபமாக வரைவது பிரிப்புக்கிர்த்தியமாகையால், போகம் பாச்சியமென்றும், ஆரகம் பாககமென்றுங் காண்க.

போகத்தை ஆரகத்துக்கீந்து பெற்ற பாசிதம் பின்னார்த்தமாம். உ-ம்.

$\frac{சா}{௩}$ என்ற பின்னத்துக்கு அர்த்தம். (உ). $\frac{ஆஈ}{ஈ}$ என்ற பின்னத்துக்கு அர்த்தம். (ஆ).

எரு. பிர. ஆகையாற் பின்னத்தின் போக ஆரங்கள் எந்தெந்த விகாரங்களையடைந்தாலும் அந்தந்த விகாரங்களாற் பாசிதத்தில் விகாரமில்லையானாற் பின்னார்த்தம் விகாரியாது. எப்பயென்றால்,

$$\frac{ச}{உ} = \frac{க0}{ரு} = \frac{சஆஈ}{உஆஈ} = \frac{அடறஸ}{சடறஸ} = \frac{சூனஸ}{௩னஸ}.$$

இந்தப் பின்னம் யாவுக்கும் பாசிதம் (உ) ஆகையாற் பின்னார்த்தம் மாறவில்லை.

எசா. பிர. பின்னார்த்தமென்பது போகத்தை ஆரகத்துக்கீந்த லமெனவே, போகமும் ஆரகமுஞ் சமமாய்வரிற் பின்னார்த்தம் (க) என்றும், போகம் ஆரகத்திற் சிறுத்தாற் பின்னார்த்தம் (க)ற் குறையுமென்றும், போகம் ஆரகத்திற் பெருத்தாற் பின்னார்த்தம் ஒன்றிற் பெருக்குமென்றும் அறியலாம்.

எஎ. பிர. ஆரகத்தைவிட்டுப் போகத்தை ஒரு இராசியாற் பெருக்குவது பின்னார்த்தத்தை அந்த இராசியாற் பெருக்குவதற்கும், போகத்தை விட்டு ஆரகத்தை ஒரு இராசியாற் பெருக்குவது, பின்னார்த்தத்தை அந்த இராசியால் அரிப்பதற்குஞ் சரி. உ-ம்.

$\frac{ஆஈ}{ஆ}$, $\frac{௩ஆஈ}{ஆ}$, $\frac{எஆஈட}{ஆ}$, $\frac{க}{௩}\frac{ஆஈ}{ஆ}$. இந்தப் பின்னங்களின் அர்த்தங்களாவன, ஈ, ௩ஈ, எஈட, $\frac{க}{௩}$ஈ. இவைமுறையே முதற் பின்னார்த்தமான (ஈ) ஐ, ௩, எட, $\frac{க}{௩}$, என்பனவாற் பெருக்கியதற்குச்சரி.

எஅ. பிர. இனிப் போகம் ஆரகம் என்ற இரண்டையும் ஒரு இராசியாற் பெருக்கினால் அல்லது இரண்டையும் ஒரு இராசியாலரித்தாற் பின்னார்த்தம் விகாரியாது. உ-ம்.

$\frac{ஈஷ}{ஈ} = \frac{ஆஈஷ}{ஆஈ} = \frac{௩ஈஷ}{௩ஈ}$. இந்தப் பின்னங்களின் அர்த்தம் (ஷ). இது விகாரிக்கவில்லை.

எகூ. பிர. எந்த அபின்ன இராசியையாவது பின்னரூபமாக அர்த்தவிகாரமின்றி வரையவேண்டில், யாம் விரும்பிய ஆரகத்தைக்கொண்டு அபின்னத்தைப் பெருக்கிப் பெற்ற குணிதத்தைப் போகமாகவும் பெருக்கிய இராசியை ஆரகமாகவும் நிறுத்தலாம். உ-ம்.

$\text{ஆ}=\frac{\text{ஆ}}{\text{க}}=\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=\frac{\text{ஆட}+\text{ஆகீ}}{\text{ட}+\text{கீ}}=\frac{\text{கூஷஆ}}{\text{கூஷ}}=\frac{\text{ஆணஸ}}{\text{ணஸ}}$. இவை யாவுக்கும் அர்த்தம், (ஆ).

அய. பிர. பின்னத்தின் இடைவரியின் முன் சகசின்னம் வரிற் பின்னார்த்தந் தனம் என்றும், சயசின்னம் வரிற் பின்னார்த்தம் இருணமென்றும் அறிக. உ-ம்.

$$+\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=+\text{ஆ}.\quad -\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=-\text{ஆ}.\quad \text{ஸ}+\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=\text{ஸ}+\text{ஆ}.$$

$$\text{ஸ}-\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=\text{ஸ}-\text{ஆ}.$$

இந்த உதாரணங்களினாற், பின்னத்தின் முன் வரைந்த சின்னத்தை மாற்றுவது பின்னார்த்தத்தைத் தனமிருணமாகவும், இருணந் தனமாகவும் மாற்றுவதற்குச் சரியென்று காணலாம்.

அக. பிர. மேலும் போகசின்னம் யாவையும் மாற்றுவது பின்னார்த்த சின்னத்தை மாற்றுவதாம். உ-ம்.

$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=+\text{ஆ}$. ஆனால், $\frac{-\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=-\text{ஆ}$. மேலும்,

$\frac{\text{ஆஈ}-\text{ஈசி}}{\text{ஈ}}=\text{ஆ}-\text{சி}$. ஆனால், $\frac{-\text{ஆஈ}+\text{ஈசி}}{\text{ஈ}}=-\text{ஆ}+\text{சி}$.

அஉ. அப்படியே ஆரகத்தின் சின்னம் யாவையும் மாற்றுவது பின்னார்த்தத்தைத் தனம் இருணமாகவும் இருணந் தனமாகவும் மாற்றுவதாம். உ-ம்.

$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=+\text{ஆ}$. ஆனால் $\frac{\text{ஆஈ}}{-\text{ஈ}}=-\text{ஆ}$. ஆகையால்,

அங. பிர. பின்னத்தின் முன் வருஞ் சின்னத்தையாவது, போகத்தின் சர்வசின்னங்களையாவது, ஆரகத்தின் சர்வசின்னங்களையாவது, மாற்றினால் பின்னந்தனம் இருணமாகவும் இருணந் தனமாகவும் மாறிவிடும்.

அச. பிர. இந்தப் பிரகாரம் மாற்றுவதினால், தனம் இருணமாயும் இருணந் தனமாயும் வருமெனவே, பின்னம், போகம், ஆரகம், என்ற இவற்றில் ஒன்றை ஒழித்து மற்றிரண்டுக்குமுரிய சின்னங்களை மாற்றினால் இரண்டின் விகாரமும் ஒன்றையொன்று சூன்யார்த்தப்படுத்துவதினாற் பின்னார்த்தம் விகாரமடையாது; எப்படியென்றால்,

$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=+\text{ஆ}$. இதின் போகசின்னத்தை மாற்றினால், $\frac{-\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=-\text{ஆ}$, என்றிருணமாம். போகசின்னத்தையும் ஆரகசின்னத்தையும் மாற்றினால், $\frac{-\text{ஆஈ}}{-\text{ஈ}}=+\text{ஆ}$, என்று தனமாம். பின்னத்தின் சின்னத்தை மாற்றினால் $\text{ஸ}+\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}$ என்றது, $\text{ஸ}-\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=\text{ஸ}-\text{ஆ}$, என்றும், போகசின்னத்தையும் இதினோடு மாற்றினால், $\text{ஸ}-\frac{-\text{ஆஈ}}{\text{ஈ}}=\text{ஸ}+\text{ஆ}$, என்று பழையபடி விகாரமின்றியும் வரும். ஆனபடியினாலே,

அரு. பிர. போகம் ஆரகம் என்ற இவ்விரண்டின் சின்னங்களை ஒரேமுறை மாற்றினாலும், அவ்விரண்டிலொன்றினது சின்னத்தையும் முழுப்பின்னத்தின் முன் வரையப்பட்ட சின்னத்தையும் மாற்றினாலும் பின்னார்த்தம் விகாரமடையாது. உ-ம்.

$$\frac{\text{கூ}}{\text{உ}}=\frac{-\text{கூ}}{-\text{உ}}=-\frac{\text{கூ}}{-\text{உ}}=-\frac{-\text{கூ}}{\text{உ}}=+\text{ரூ}.\quad \text{மேலும்,}$$

$$\frac{\text{கூ}}{-\text{உ}}=\frac{-\text{கூ}}{\text{உ}}=-\frac{\text{கூ}}{\text{உ}}=-\frac{-\text{கூ}}{-\text{உ}}=-\text{ரூ}.$$

அபவர்த்தனம், அதாவது, பின்னங்களைச் சுருக்கு கிர்த்தியம்.

அசா. பிர. இங்கே யாம் எடுத்துக்காட்டியவற்றை வழியாகக்கொண்டு பின்னங்களைச் சுருக்குவதற்கு விதிகளைப் பிறப்பிக்கலாம். அவைபாடீகணித விதிகளுக்கொப்பானவையாம்.

பின்னங்களைச் சுருக்கும்படி, சேடமில்லாமல் போகத்தையும் ஆரகத்தையும் அரிக்கும் எந்த இராசியாலும் போக ஆரகங்களை அரி. உ-ம்.

$\frac{\text{ஆஈ}}{\text{சீஈ}}$. இந்தப் பின்னத்தின் போகத்தையும் ஆரகத்தையும் (ஈ) ஆல் அரிக்கவருவது $\frac{\text{ஆ}}{\text{சீ}}$. இப்படி அரிப்பதினால் அர்த்தவிகாரமுண்டாகாதென்பதை (எஅ) ம் பிரகரணத்தாலறிக. மேலும்,

$\frac{\text{கூடிம}}{\text{அஆடிஸ}} = \frac{\text{௩ம}}{\text{சஆஸ}}$, ஆகவும்,
$\frac{\text{எம}}{\text{எமற}} = \frac{\text{க}}{\text{ற}}$, ஆகவும்,
$\frac{\text{ஆ}+\text{ஈசி}}{\text{ம}(\text{ஆ}+\text{ஈசி})} = \frac{\text{க}}{\text{ம}}$, ஆகவும், } சுருக்கலாம்.

௮எ. பிர. பின்னங்களை *லகிஷ்டரூபமாக்கவேண்டில், போகத்தையும் ஆரகத்தையும் மகாபவர்த்தத்திஞல் அரி.

௮௮. பிர. வேறுவேருன ஆரகங்களையுடைய பின்னங்களை ஒரே ஆரகத்தையுடைய பின்னங்களாக்கும்படி, ஒவ்வொரு போகத்தையும் அதின் அதின் ஆரகமொழிந்த சர்வஆரகத்தாலும் பெருக்கி அந்தந்தப் பின்னபோகமாகத் தீட்டிச் சர்வ ஆரககுணிதத்தை எல்லாப்போகங்களுக்கும் போது ஆரகமாக வரை. உ-ம்.

$\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}, \frac{\text{ஒ}}{\text{சீ}}, \frac{\text{ஷ}}{\text{ஸ}}$, என்ற பின்னங்களைப் போது ஆரகபின்னங்களாக்கும்படி,

ஆ×சீ×ஸ=ஆசீஸ. முதற்போகம்.
ஒ×ஈ×ஸ=ஒஈஸ. இரண்டாம்போகம்.
ஷ×ஈ×சீ=ஈசீஷ. மூன்றாம்போகம்.
ஈ×சீ×ஸ=ஈசீஸ. போதுஆரகம். ஆகையால்,

போதுஆரகபின்னங்களாவன $\frac{\text{ஆசீஸ}}{\text{ஈசீஸ}}, \frac{\text{ஈஒஸ}}{\text{ஈசீஸ}}, \frac{\text{ஈசீஷ}}{\text{ஈசீஸ}}$.

இதில் அந்தந்தப் பின்னத்தின் போகத்தையும் ஆரகத்தையும் மற்றெல்லாப் பின்ன ஆரகங்களாற் பெருக்கியபடியால் பின்னூர்த்தம் விகாரியாதென்பது தெளிவு.

க. $\frac{\text{டற}}{\text{௩ம}}; \frac{\text{உசி}}{\text{கி}}; \frac{\text{௬ணி}}{\text{ஸ}}$
உ. $\frac{\text{உ}}{\text{௩}}; \frac{\text{ஆ}}{\text{ஷ}}; \frac{\text{ற}+\text{க}}{\text{ட}+\text{சி}}$
௩. $\frac{\text{க}}{\text{ஆ}+\text{ஈ}}; \frac{\text{க}}{\text{ஆ}-\text{ஈ}}$.
} இவற்றைப் போது ஆரக பின்னங்களாக்குக.

* மிகச்சிறுத்தது லகிஷ்டம்.

அபின்னமும் பின்னமுங் கூடிவரில், அபின்னத்துக்கு ஒன்றை (க) ஆரகமாக வரைந்து முன்புபோலப் போதுஆரக பின்னங்களாக்குவர். உ-ம்.

ஆ, $\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$ இவற்றை $\frac{\text{ஆ}}{\text{க}}; \frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$ என்று வரைந்து முன்புபோலப் போது ஆரக பின்னங்களாக்கினல், $\frac{\text{ஆஒ}}{\text{ஒ}}, \frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$ என்றுவரும்.

க. ஆ; ஈ; $\frac{\text{ண}}{\text{ம}}; \frac{\text{ட}}{\text{ஸ}}$.
உ. $\frac{\text{௩ஷ}}{\text{ஆ}}; \frac{\text{ஸ}}{\text{௫ஈ}}; \frac{\text{க}}{\text{உ}}$.
௩. $\frac{\text{ஷ}}{\text{ஆ}}; \frac{\text{ஈ}}{\text{ன}}; \frac{\text{௩ஜ}}{\text{ஸ}}; \frac{\text{க}}{\text{௩}}$.
௪. $\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}; \frac{\text{௫}}{\text{எ}}; \frac{\text{அஆ}}{\text{ஸ}}; \frac{\text{க}}{\text{௪}}$.
௫. $\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}; \frac{\text{ஜ}}{\text{ட}}; \frac{\text{ஐ}}{\text{த}}$.
௬. ஈ; $\frac{\text{ஷ}}{\text{ஸ}}; \frac{\text{ஐ}}{\text{உ}}$.
௭. $\frac{\text{௩ஷ}}{\text{ஆ}}; \frac{\text{ஈ}}{\text{௪ஜ}}; \frac{\text{ஷ}}{\text{௫}}$.
௮. $\frac{\text{௪ஜ}}{\text{ஷ}}$; கஎ; $\frac{\text{ஸ}}{\text{ஜ}}$; ஷ; $\frac{\text{ஐ}}{\text{௪ஆ}}$
} இவற்றைப் போது ஆரகபின்னங்களாக்குக.

௮௯. பிர. மிச்சிர பின்னத்தைத் தகாபின்னமாக்கும்படி, பின்ன ஆரகத்தைக்கொண்டு அபின்ன ராசியைப் பெருக்கிப் பின்னபோகத்தைக் கூட்டிக்கொள். உ-ம்.

$\text{ஆ}+\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$, என்ற மிச்சிரபின்னத்தைத் தகாபின்னமாக்கும்படி, (ஆ) ஐ (ஒ) ஆற் பெருக்கி (ஈ) ஐக் கூட்டி $\frac{\text{ஆஒ}+\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$, என்று வரைவது. இது தகாபின்னம்.

போகம் ஆரகத்திற் பெருத்தாவது அதற்குச் சமமாயாவதுவரில் அந்தப் பின்னத்தைத் தகாபின்னம் என்பர். ஆரகத்திற் போகஞ் சிறுத்தால், அப்பின்னத்தைத் தகுபின்னம் என்பர். உ-ம்.

$\frac{\text{௩}}{\text{௧௦}}$. இது தகுபின்னம். அபின்னமும் பின்னமுஞ் சக, சய சின்னங்களினலிணைந்துவரும்போது அதை மிச்சிர பின்னம் என்பர்.

௯௰. பிர. தகாபின்னத்தை மிச்சிர பின்னமாக்கும்படி போகத்தை ஆரகத்தாலரி. உ-ம்.

$\frac{\text{ஆஒ}+\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$ என்ற தகாபின்னத்தின் போகத்தை ஆரகத்துக்கீய $\text{ஆ}+\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}$, என்ற மிச்சிரபின்னம் பிறக்கும். மேலும், $\frac{\text{உகீடீ}-\text{சீ}}{\text{கீ}}$ என்ற தகாபின்னத்தை மிச்சிரபின்னமாக்கினல் $\text{உடீ}-\frac{\text{சீ}}{\text{கீ}}$ என்று வரும்.

௧. $\frac{\text{ஆஈ}+\text{ஈம}+\text{ட}}{\text{ஈ}}$

௨. $\frac{\text{ஆம}-\text{ஆ}+\text{ஆடஸ}-\text{ணற}}{\text{ஆ}}$

௩. $\frac{\text{ணிற}+\text{டிணிகி}-\text{ஆணிஷ}-\text{ஸ}+\text{ஷ}}{\text{ணி}}$

} இவற்றை மிச்சிர பின்னமாக்குக.

௯௧. பிர. பின்னபின்னம்வரில் அதைச் சுருக்கித் தனிப்பின்னமாக்கும்படி, போகங்களையெல்லாம் ஒன்றாய்ப் பெருக்கிப் பெற்ற குணிதத்தை நவபோகமென்றும், ஆரகங்களையெல்லாம் ஒன்றாய்ப்பெருக்கிப் பெற்ற குணிதத்தை நவ ஆரகமென்றுந் தீட்டு. உ-ம்.

$\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}$ இன் $\frac{\text{௩}}{\text{௪}}$, என்புழி இதைப் பின்னபின்னமென்பர். மற்றையபின்னங்கள் அபின்னத்தின் கூறுகளாவதுபோலப் பின்னபின்னங்கள் பின்னத்தின் கூறுகளாம். எப்படியென்றால் $\frac{\text{௩}}{\text{௪}}$ (௩) இன் காற்பங்கு; $(\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}})$ இன் $(\frac{\text{௩}}{\text{௪}})$ என்பது $(\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}})$ இன் முக்காற் பங்காம். இத்னைச் சுருக்கும் வகை.

$\text{ஆ}\times\text{௩}=\text{௩ஆ}.$
$\text{௪}\times\text{ஈ}=\text{௪ஈ}.$ } ஆகையால், $\frac{\text{௩ஆ}}{\text{௪ஈ}}$, என்பது தனிப்பின்னமாம்.

௧. $(\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}+\text{உ}})$ இன் $(\frac{\text{உ}}{\text{எ}})$

௨. $(\frac{\text{ஈ}+\text{ஐ}}{\text{உஆ}-\text{ம}})$ இன் $(\frac{\text{ச}}{\text{௫}})$ இன் $(\frac{\text{உ}}{\text{௩}})$

௩. $(\frac{\text{க}}{\text{அ}-\text{ஆ}})$ இன் $(\frac{\text{க}}{\text{எ}})$ இன் $(\frac{\text{ஷ}+\text{ஸ}}{\text{ட}+\text{ன}})$

} இவற்றைத் தனிப்பின்ன மாக்குக.

பின்னங்களைக்கூட்டல்.

௯௨. பிர. அபின்னங்களைக் கூட்டுவதுபோலவே பின்னங்களையுங் கூட்டலாம். சின்னந்தப்பாமல் அபின்னராசிகளைப் பிணைத்து வரைவதுபோலவே சின்னந்தப்பாமற் கிரமங்கிரமமாய்ப் பின்னங்களையும் பிணைத்து வரைந்துங் கூட்டற்கிர்த்தியம்பண்ணலாம். ஆனால்,

சர்வபின்னத்தையும் ஒரேபின்னமாகத் திரட்டல் வேண்டில், பின்னங்களைப் போது ஆரகபின்னங்களாக்கிப் பின்னத்தின் முன் நிற்கின்ற சின்னங்களனைத்தையுஞ் சகசின்னமாகச்செய்து போகங்களை ஒன்றாய்க் கூட்டித் தோகையைப் போதுஆரகத்தின் மேற் போகமாக வரை. உ-ம்.

௧. $\frac{\text{உ}}{\text{எ}}$, $\frac{\text{௩}}{\text{எ}}$, என்ற போது ஆரகபின்னங்களைக் கூட்டல்வேண்டில், தோகை $\frac{\text{௫}}{\text{எ}}$ என்பது தெளிவு. எப்படியென்றால், $\frac{\text{உ}}{\text{எ}}=\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}$. இனி $\frac{\text{௩}}{\text{எ}}=\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}$. ஆகையால், $\frac{\text{உ}}{\text{எ}}+\frac{\text{௩}}{\text{எ}}=\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}+\frac{\text{க}}{\text{எ}}=\frac{\text{௫}}{\text{எ}}$.

உ. $\frac{ஆ}{ஈ}, \frac{ஊ}{ஒ}$, என்ற பின்னங்களைக் கூட்டல்வேண்டில், அவற்றைப் பொதுஆரகபின்னங்களாக்க $\frac{ஆஒ}{ஈஒ}, \frac{ஈஊ}{ஈஒ}$, என்று வரும். இவற்றின் போகங்களைக் கூட்ட, ஆஒ+ஈஊ, தொகையாம். இந்தத் தொகையின்கீழ்ப் பொது ஆரகத்தைத் தீட்ட $\frac{ஆஒ+ஈஊ}{ஈஒ}$ என்று பின்னத்தொகைவரும்.

ங. $\frac{ணி}{நி}; -\frac{ஊ+றி}{ஙஷ}$, என்ற பின்னங்களைக்கூட்டினல், $\frac{ணி}{நி}-\frac{ஊ+றி}{ஙஷ}=\frac{ஙஷணி}{ஙநிஷ}-\frac{நிஊ+நிறி}{ஙநிஷ}=\frac{ஙஷணி-ஊநி-நிறி}{ஙநிஷ}$ தொகையாம்.

ச. $\frac{ஆ}{ஸ}, \frac{டி}{ங}$, இவற்றைக் கூட்டினல், $\frac{டிஸ+ஙஆ}{ஙஸ}$ தொகையாம்.

ரு. $\frac{ஆ}{ஆ+ஈ}, \frac{ஈ}{ஆ-ஈ}$ இவற்றைக் கூட்டினல், $\frac{ஆஆ+ஈஈ}{ஆஆ-ஈஈ}$ தொகையாம்.

சு. $\frac{-ஆ}{டி}, \frac{-யு}{ங-றி}$ இவற்றின் தொகை யாது?

கூங. பிர. பின்னங்களின் முன் நிற்கின்ற சின்னங்களைச் சகசின்னமாக்கவேண்டுமெனவே, பின்னூர்த்தம் மாரூமல், அப்படிச்செய்தல் வேண்டுமென்பது கருத்தாம். பின்னங்களைப் பொது ஆரகபின்னங்களாக்காமல் அபின்னக்கூட்டல்போற் கூட்டுவதற்கு உதாரணம்.

$\frac{ஆ}{ஈ}, \frac{ங}{ஸ}, -\frac{டி}{உமி}$ என்ற பின்னங்களின் தொகை, $\frac{ஆ}{ஈ}+\frac{ங}{ஸ}-\frac{டி}{உமி}$ என்பது.

கூச. பிர. அபின்னத்தையும் பின்னத்தையுங் கூட்டுவது மிச்சிரபின்னத்தைத் தகாபின்னமாக்குவதற்குச் சரியென்றறிக.

க. ஆ, $\frac{ஈ}{ம}$, இவற்றின் தொகை யாது?

உ. ஙட, $\frac{ஊ+ட}{ம-ஸ}$, இவற்றின் தொகை யாது?

ங. ருஷ, $\frac{ஆ+ஙஷ}{ஐ}$, இவற்றின் தொகை யாது?

பின்னங்களைக் கழித்தல்.

கூரு. பிர. அபின்னங்களுக்குச் சொன்ன களைதல்விதியே பின்னங்களைக் கழித்தற்கும் விதியாம்.

சோதக பின்ன சின்னங்களைச் சகசின்னஞ் சயசின்னமாகவும், சயசின்னஞ் சகசின்னமாகவும் மாற்றிக் கூட்டன்முறைப்படி கூட்டிக்கோள். உ--ம்.

க. $\frac{ஆ}{ஈ}$ என்ற பின்னத்தில், $\frac{னீ}{லி}$, என்ற பின்னத்தைக் களையும்படி, சோதகபின்னமாகிய $\frac{னீ}{லி}$ முன் தொகைநிலையாய்க்கிடக்கின்ற சகசின்னத்தைச் சயசின்னமாக மாற்றினல், $-\frac{னீ}{லி}$ என்றுவரும். இந்த இரண்டு பின்னங்களையும் பொது ஆரகபின்னங்களாக்க, $\frac{ஆலி}{ஈலி}, -\frac{ஈனீ}{ஈலி}$, என்றும், போகங்களைக்கூட்ட, ஆலி—ஈனீ, என்றும், இந்தத் தொகையின் கீழ்ப் பொது ஆரகத்தை வரைய $\frac{ஆலி-ஈனீ}{ஈலி}$, என்றும் வரும்.

உ. $\frac{ஆ+ஸ}{ற}$ என்பதில், $\frac{டி-ஈ}{ஸ}$, என்பதைக் களைய $\frac{ஆஸ+ஸஸ-டிற+ஈற}{றஸ}$ என்பது சேடமாம்.

ங. $\frac{ஆ}{ம}$, என்பதில், $\frac{டி-ஈ}{ஸ}$ என்பதைக் களைய $\frac{ஆஸ-மடி+ஈம}{மஸ}$ என்பது சேடமாம்.

ச. $\frac{ஆ+க}{டி}$ என்பதில், $\frac{டி-க}{ம}$ என்பதைக் களைந்தாற் சேடம் யாது?

ரு. $\frac{ஙஆ}{ஈ}$ என்பதில், $\frac{ச}{ஒ}$, என்பதைக் களைந்தாற் சேடம்யாது?

அபின்னங்களைக் கழித்தல்போலப் பின்னங்களையுங் க[ளை]வதற்கு உதாரணம்.

$\frac{ஒ}{ஊ}$, என்பதில், — $\frac{ணி+டி}{ஸ}$, என்பதைக் களையில், [illegible] + $\frac{ணி+டி}{ஸ}$, என்பது சேடமாம்.

கசு. பிர. அபின்னத்தைப் பின்னத்திலாவது பின்னத்[தை] அபின்னத்திலாவது களைவதுமிப்படியே. உ-ம்.

(ஆ) இல் ($\frac{ஒ}{ஈ}$) ஐக் களைந்தால், ஆ—$\frac{ஒ}{ஈ}$ சேடமாம்.

($\frac{ஈ}{ஒ}$) இல், (ஆ) ஐக் களைந்தால், $\frac{ஈ}{ஒ}$ — ஆ சேடமாம். இ[ங்]
அபின்னங்களைப் பின்னுகாரமாக்கிக் களைந்தால், $\frac{ஆஈ—[ஒ]}{ஈ}$ என்றும், $\frac{ஈ—ஆஒ}{ஒ}$ என்றும் விடைவரும்.

க. சஆ+ $\frac{ஈ}{சீ}$, என்பதில், ௩ஆ—$\frac{ணி}{டி}$ என்பதைக் களை.

உ. க+$\frac{ஈ—சீ}{டி}$, என்பதில், $\frac{சீ—ஈ}{டி}$ என்பதைக் களை.

௩. ஆ+௩ணி—$\frac{டி—ஈ}{உ}$ என்பதில், ௩ஆ—ணி+ $\frac{டி+[illegible]}{௩}$ என்பதைக் களை.

ச. $\frac{ஆ—ஷ}{ஈ}$ என்பதில், $\frac{டி+ஸ}{சி}$ என்பதைக் களை.

ரு. $\frac{ஆ+ஈ}{ஷ}$ என்பதில், $\frac{சீ—டி}{ஸ}$ என்பதைக் களை,

சு. $\frac{ஆ}{ஈ—ஷ}$ என்பதில், $\frac{கி}{டி+ஸ}$ என்பதைக் களை.

எ. $\frac{ஆ}{ஷ—ஸ}$ என்பதில், $\frac{௩டி}{உ}$ +ஸ என்பதைக் களை.

அ. ஷ+ஸ என்பதில், $\frac{ஆ—சி}{ஈ}$ என்பதைக் களை.

கூ. $\frac{ஷ—ஸ}{க0}$ என்பதில், $\frac{ஆ—ஈ}{ஷ+ஸ}$ என்பதைக் களை.

க0. ஷ—$\frac{சஸ—உசி}{உ}$ என்பதில், $\frac{௩ஷ—சுஸ}{௩}$ +ஆ என்[ப]தைக் களை.

பின்னங்களைப் பெருக்கல்.

கஎ. பிர. பின்னகுணகம் (க) இன் எத்தனை பங்காயி[ரு]க்கின்றதோ அத்தனை பங்குகளைக் குணனீயத்திற் கொ[ள்]வதே பின்னப்பெருக்கலாமென்று முன்புரைத்தோம். எப்[ப]டியென்றால், ($\frac{௩}{ச}$) ஐ இரண்டாற் பெருக்கும்போது இருமுக்கா[ல்] ஒன்றரை அல்லது ($\frac{சு}{ச}$) என்று போகத்தைப் பெருக்கி அ[றி]யலாம். அப்படியே முக்காலை அரையாற் பெருக்கவேண்[டி]ல், முக்காலில் அரைப்பங்கு காலேஅரைக்கால் அதாவது [illegible] என்று போகத்தையும் போகத்தையும், ஆரகத்தையும் ஆர[க]த்தையும் பெருக்கி அறியலாம். ஆகையாற் பின்னத்தைப் [பி]ன்னத்தாற்பெருக்கும்படி,

விதி.

போகங்களை ஒன்றாய்ப் பெருக்கிப் பெற்ற குணி[த]ம் நவபோகமாகவும், ஆரகங்களை ஒன்றாய்ப் பெ[ரு]க்கிப் பெற்ற குணிதம் நவஆரகமாகவுங் கோள். உ-ம்.

க. $\frac{௩டி}{ஈ}$, என்பதை $\frac{ணி}{தலி}$ என்பதாற் பெருக்கினால்

௩டி×ணி=௩டிணி நவபோகம்.
ஈ×தலி=ஈதலி நவஆரகம். } குணிதம். $\frac{௩டிணி}{ஈதலி}$

உ. $\frac{ஆ+டி}{ஸ}$ தரம் $\frac{சஷ}{நி—உ}$ = $\frac{சஆஷ+சடிஷ}{நிஸ—உஸ}$ குணிதம்.

௩. $\frac{(ஆ+ம)லீ}{௩}$ தரம் $\frac{ச}{ஆ—நி}$ எத்தனை?

ச. $\frac{ஆ+ணி}{௩+டி}$ தரம் $\frac{ச—ம}{சி+ஸ}$ எத்தனை?

ரு. $\frac{க}{ஆ+௩ற}$ தரம் $\frac{௩}{அ}$ எத்தனை?

௬. $\frac{ஆ}{ஈ} \times \frac{சி}{டி}$ தரம் $\frac{ம}{ஸ}$ எத்தனை ?

௭. $\frac{௨ஆ}{ம} \times \frac{ணி - டி}{ஸ} \times \frac{ஈ}{சீ}$ தரம் $\frac{க}{ற - க}$ எத்தனை ?

௮. $\frac{௩ + ஈ}{ஈ} \times \frac{க}{ணீ}$ தரம் $\frac{டி}{ற + ௨}$ எத்தனை ?

௯. $\frac{ஆடி}{ணிஸ} \times \frac{ஆ - ௬}{டி + க}$ தரம் $\frac{௩}{௭}$ எத்தனை ?

௯௮. பிர. போகத்திலும் ஆரகத்திலும் ஒன்றற்கொன்று
மமான குணங்கங்கள் வரில் அவற்றைத் தள்ளிக் கணிதகி
தியத்தைச் சுருக்கலாம். உ-ம்.

$\frac{ஆ}{ற}; \frac{லி}{ஆ}; \frac{டி}{ஸ}$ என்ற பின்னங்களைப் பெருக்குமிடத்து (ஆ
போகத்திலும் ஆரகத்திலும் வந்தபடியால் அதனைத் தள்
$\frac{லிடி}{றஸ}$ விடையாம். (ஆ) ஐத் தள்ளாமற் பெருக்கினுல் $\frac{ஆலி}{ஆற}$
குணிதமாம். இது அபவர்த்தனத்திஞற் சுருங்கி முன்போல
$\frac{லிடி}{றஸ}$ என்றுவரும்.

௯௯. பிர. அபின்னத்தாற் பின்னத்தைப் பெரு
கல்வேண்டில், பின்னபோகத்தை அபின்னத்தா
பெருக்கியாவது, பின்ன ஆரகத்தை அபின்னத்தா
ரித்தாவது குணிதமறி. உ-ம.

௧. $\frac{ம}{ஷ} \times ஆ = \frac{ம \times ஆ}{ஷ} = \frac{ஆம}{ஷ}$ குணிதமாம்.

௨. $\frac{ம}{ஆஷ}$ என்பதை (ஆ) வாற் பெருக்கும்படி, (ஆ) வால்
ஆரகத்தை அரிக்கக் குணிதம் $\frac{ம}{ஷ}$ என்று வரும். இது $\frac{ஆம}{ஆஷ}$
என்பதற்குச் சரி. ஆகையால்,

௱. பிர. ஆரகத்துக்காவது அதினேர் குணங்கத்திற்காவது
ணக அபின்னஞ் சரியாய்வரில், இதற்குச் சரியான ஆரகத்தை
அல்லது அதின் சமகுணங்கத்தைத் தள்ளுவதே அந்த அபி
ன்னபின்னங்களின் பெருக்கலாம். உ-ம்.

௧. $\frac{ஆ}{ஈ} \times ஈ = ஆ$. ௨. $\frac{௩ம}{ஆ - ஸ} \times (ஆ - ஸ) = ௩ம$.

௩. $\frac{ஆ}{ஈஸ} \times ஸ = \frac{ஆ}{ஈ}$.

பின்னப்பெருக்கல்வினு.

௧. $\frac{ஆ}{௨}, \frac{௪ஆ}{௫}, \frac{௧௦ஆ}{௨௧}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௨. $\frac{ஷ}{ஆ}, \frac{ஆ + ஷ}{ஆ - ஷ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௩. $\frac{௩ஷ}{௨}, \frac{௫ஷ}{௩ஈ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௪. $\frac{௩ஷ + ஸ}{௨௪ஆ + ௩௨ஜ}$, அ, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௫. $\frac{ஆ + ஈ}{௨௦ஷ + ௨௫ஸஷ}$, ௫ஷ, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௬. $\frac{௩}{ஷ}, \frac{௪ஷ}{௩}, \frac{ஆ}{ஈ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௭. $\frac{ஆஈசிடி}{௩ஷ + ஸ}, \frac{௩ஷ + ஸ}{ஆஈசிடி}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௮. $\frac{ஆ - ஈ}{ஷ}, \frac{ஸ}{ஆ - ஈ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௯. $\frac{ஆ}{ஈ} \times \frac{சி}{டி} \times \frac{௩}{௪} \times \frac{ஈ}{ஆ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௧௦. $\frac{ஆ + ஈ}{௪}, \frac{ஆ - ஈ}{௩}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௧௧. ஆ, $\frac{ஈசி}{௩ஷ}$, ௬ஷ இவற்றின் குணிதம் யாது ?

௧௨. $\frac{௨௪ஆஈ}{௩ஷ}, \frac{௩ஷஸ}{௮ஆ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது ?

பின்னங்களைப் பிரித்தல்.

௱௧. பிர. பின்னத்தைப் பின்னத்தாலரிக்கும்படி, பாககமாய் வருகின்ற பின்னத்தின் போகத்தை ஆரகமாகவும் ஆரகத்தைப் போகமாகவும் மாற்றிப் பாச்சியபின்னத்தைப் பெருக்கு. உ-ம்.

$\frac{ஆ}{ஈ}$ என்பதை $\frac{ஒ}{ஊ}$ என்பதற்கியவேண்டில் பாககபின்ன த்தை மாற்றி, $\frac{ஊ}{ஒ}$ என்று நிறுத்தி, இதினால் $\frac{ஆ}{ஈ}$ என்ற பா யபின்னத்தைப் பெருக்க $\frac{ஊ}{ஒ}\times\frac{ஆ}{ஈ}=\frac{ஆஊ}{ஈஒ}$ என்ற பாசி பிறக்கும்.

௩௨. பிர. இவ்வாறு பின்னத்தைப் பின்னத்தாலரிக்கும் பாககபின்னத்தை அடிதலைமாற்றிப் பெருக்கல்வேண்டிய ன்னவென்று வினவினால் விடை வருமாறு.

எந்தப் பின்னத்தையுங் கீழ்மேலாகமாற்றி அந்தப் பின்ன திலே பெருக்க வருவது (௧) ஆம். உ-ம். $\frac{ஆ}{ஈ}$ என்ற பின்ன தைக் கீழ்மேலாகமாற்ற $\frac{ஈ}{ஆ}$ என்று நிற்கும். இவை இரண் யும் பெருக்க $\frac{ஆ}{ஈ}\times\frac{ஈ}{ஆ}=௧$, என்று வரும். இனி (௧) ஆல் ந்த இராசியைப் பெருக்கினாலும் அந்த இராசியே பெருய்வரு னால், முன்பு பாககபின்னத்தைக் கீழ்மேலாகமாற்றிப் பாச் யபின்னத்தைப் பெருக்கிப் பின்பு, பாககபின்னத்தாற் பெரு க வருவது பாச்சியபின்னமே. பாச்சியத்தைப் பிறப்பிக்கும் டி பாககம் எந்த இராசியாற் பெருக்கப்படல்வேண்டுமோ அ இராசியாகிய பாசிதத்தை அறியுங் கிர்த்தியமே, பிரித்தலா யால், இது பின்னங்களைப் பிரித்தற்குச் சுத்தகிர்த்தியமென் ணர்க. $\frac{ஆ}{ஈ}$ பாககமும் $\frac{டீ}{ணி}$ பாச்சியமுமானால், இந்தப் பா சியத்தைப் பாககத்தாலரிக்க வரும் பாசிதம் எப்படிப்பட் தோவென்றால், அப்பாசிதத்தைப் பாககத்தாற்றுக்கும்போது ழையபடி பாச்சியத்தைப் பிறப்பிக்கும், அப்படிப்பட்டதா ஆகையால் $\frac{டீ}{ணி}$ என்ற பாச்சியத்தை, $\frac{ஈ}{ஆ}$ என்று அடிதல மாறி நிற்கின்ற பாககத்தாற் பெருக்க $\frac{டீஈ}{ணிஆ}$ என்ற பாசித பிறக்கும். இதை $\frac{ஆ}{ஈ}$ ஆற் பெருக்கப் பழையபடி $\frac{டீ}{ணி}$ என் பாச்சியம் பிறக்கும்.

$\left.\frac{டீ}{ணி}\times\frac{ஈ}{ஆ}\times\frac{ஆ}{ஈ}=\frac{டீ}{ணி}\right\}$ இது சாட்சி.

௧. $\frac{ஷ+ட}{ற}$ என்பதை $\frac{௫ட}{ஸ}$ என்பதாலரித்தால் பாசிதம் யாது?

௨. $\frac{சடகி}{ஷ}$ என்பதை $\frac{சகிற}{ஆ}$ என்பதாலரித்தால் பாசிதம் யாது?

௩. $\frac{௩சுட}{௫}$ என்பதை $\frac{௪அகி}{௧0ஸ}$ என்பதாலரித்தால் பாசிதம் யாது?

௪. $\frac{கி-மஸ}{௪}$ என்பதை $\frac{௩}{ஆ+௧}$ என்பதாலரித்தால் பாசிதம் யாது?

௩௩. பிர. பின்னத்தை அபின்னத்தாலரிக்கும்படி; பின்னபோகஞ் சேடமில்லாமலரிபடில், அப்போகத்தை அபின்னத்தாலரித்தாவது, சேடம்வரில் ஆரகத்தை அபின்னத்தாற் பெருக்கியாவது பாசிதமறி. உ--ம்.

௧. $\frac{ஆஒ}{ஈ}$ என்பதை (ஒ) ஆலரித்தால் $\frac{ஆ}{ஈ}$ பாசிதமாம்.

௨. $\frac{௧}{ஆ-ஈ}$ என்பதை (கி) ஆலரிக்க $\frac{௧}{ஆகி-ஈகி}$ பாசிதமாம்.

இனி அபின்னத்தைப் பின்னத்தாலரிக்கும்படி, அபின்னத்தையும் பின்னரூபமாக்கிப் பின்னங்களைப் பிரித்தல்போற் பிரித்தற்கிர்த்தியம்பண்ணு. அல்லது, அபின்னத்தைப் பின்னஆரகத்தாற் பெருக்கிப் பின்னபோகத்தாலரி. உ--ம்.

௧. (ண) என்பதை $(\frac{ஆ}{ஒ})$ என்பதாலரிக்கும்வகை.

$\frac{ண}{௧}\div\frac{ஆ}{ஒ}=\frac{ஒண}{ஆ}$ அல்லது $ண\div\frac{ஆ}{ஒ}=\frac{ஒ\times ண}{ஆ}=\frac{ஒண}{ஆ}$

௨. ஷஸ என்பதை, $\frac{ஆ+ஈ}{௩}$ என்பதாலரி.

௩. ஆஈ+டிஷ என்பதை, $(\frac{௩ஆம}{௧௨டி})$ என்பதாலரி.

௱ச. பிர. ஓரலகை அதாவது (க) ஐ வைத்து அதற்கு ஆ
மாக ஒரு இராசியைத் தீட்டினல், அது அவ்விராசிக்கு வி
மராசி. ஆகையால் ஒரு பின்னத்தை அடிதலமாற்றி வ
ந்தால், அது அப்பின்னத்துக்கு விலோமராசியாம், எப்படி
ன்ருல், $\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}$ என்பதற்கு விலோமராசி $\text{க} \div \frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}} = \text{க} \times \frac{\text{ஈ}}{\text{ஆ}}$.

$\left(\frac{\text{ஈ}}{\text{ம}+\text{ஸ}}\right)$ என்பதின் விலோமராசி $\frac{\text{ம}+\text{ஸ}}{\text{ஈ}}$ ஆகையாற்
ன்னபோகம் (க) ஆமெனின் ஆரகம் விலோமராசியாம். உ-
$\left(\frac{\text{க}}{\text{ஆ}}\right)$ என்பதின் விலோமராசி (ஆ).

பின்னப்பிரிப்புவினு.

க. $\frac{\text{ஙஆஈஒ}}{\text{ஷ}-\text{ஸ}}$ என்பதை (ஙஆஈ) என்பதாலரித்த ப
யாது?

உ. $\frac{\text{கoஆஷஷ}+\text{கருஆஈஷ}}{\text{கo}-\text{ஸ}}$ என்பதை (ருஆஷ) என்
லரி.

ங. $\frac{\text{ஙஷ}+\text{கக}}{\text{ஷ}}$ என்பதை (ஙஆ) ஆலரி.

ச. $\frac{\text{ஆ}+\text{க}-\text{ஷ}}{\text{உசிடி}}$ என்பதை (டி) ஆலரி.

ரு. $\frac{\text{ஆ}+\text{ஈ}}{\text{ஷ}}$ என்பதை $\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}$ ஆலரி.

சா. $\frac{\text{ஷ}}{\text{ஙஆஈ}}$ என்பதை $\left(\frac{\text{ஸ}}{\text{ச}+\text{உம}}\right)$ ஆலரி.

எ. $\frac{\text{ஆ}+\text{ஈ}}{\text{ங}}$ என்பதை $\frac{\text{ச}}{\text{ஆ}-\text{ஈ}}$ ஆலரி.

அ. $\frac{\text{ஷ}+\text{ஸ}}{\text{ஆ}}$ என்பதை $\left(\frac{\text{ஈ}}{\text{ஆ}}\right)$ ஆலரி.

கூ. $\frac{\text{ஙஆஈ}-\text{கூஷஸ}}{\text{கூ}}$ என்பதை $\frac{\text{ஆஈ}-\text{உஷஸ}}{\text{உ}}$ ஆலரி.

கo. உகஆஈசி என்பதை $\frac{\text{எஆஈ}}{\text{ஷ}}$ ஆலரி.

கக. அஷஸ என்பதை $\frac{\text{உஆஈ}}{\text{சி}}$ ஆலரி.

கஉ. கஅஆஷ என்பதை உஆ $\left(\frac{\text{ஆ}-\text{ஸ}}{\text{ஙம}}\right)$ ஆலரி.

கங. $\frac{\text{கஅ}(\text{ஆ}+\text{ஷ})}{\text{ங}}$ என்பதை $\frac{\text{உஆ}(\text{ஆ}-\text{ஸ})}{\text{உம}}$ ஆலரி.

கச. $\text{உஆ}+\frac{\text{ஙசி}+\text{டி}}{\text{ஷ}}$ என்பதை $\text{ஷ}+\frac{\text{ஸ}+\text{ஆ}}{\text{உ}}$ ஆலரி.

எ. வேள்ளைச்சமீகரண அதிகாரம்.

[Simple Equations.]

௱ரு. பிர. சமமறிகுறியின் இருபுடையும் ஒன்ற
கொன்று சரியான இராசிகள் வீசபாஷையினது ரூ
மாய்வரில் அது சமீகரணமாம். உ--ம்.

ஷ=ஆ+ஈ, என்பது சமீகரணம். இதில் (=) என்ற சம
றிகுறியின் இருபுடையும் நிற்கின்ற இராசிகளாகிய (ஷ) வும்
(ஆ+ஈ) உம் ஒன்றற்கொன்று சரி. இப்படிச் சரியாய்வரும்
இராசிகளை அங்கங்களென்றும், பாகமென்றும், இந்த அங்க
ங்களில் இடப்புறத்து அங்கத்தை வாமமென்றும், வலப்புறத்
து அங்கத்தைத் தட்சிணமென்றுஞ் சொல்வர்.

௱சா. பிர. கணிதவினுக்களில் வரும் மறைநிலையிராசிகளி
ன் அர்த்தத்தை நிச்சயம்பண்ணுதலே சமீகரணத்துக்குச் சிற
ந்ததொழிலாம். ஒரு மறைநிலையிராசியோடு புணர்ந்து வருகி
ன்ற சமீகரணம், ஏகாட்சரசமீகரணமென்றும், பலமறை
நிலையிராசிகளோடு புணர்ந்து வருகின்ற சமீகரணம் அநே
கவருண சமீகரணம் அல்லது அநேகாட்சரசமீகரணமென்றுஞ்
சமீகரணங்கள் இரண்டுவகைப்படும். மேலும், மறைநிலையி
ராசியின் காதிதகுசி, (க) ஆனல், சமீகரணத்தை வேள்ளைச்
சமீகரணமென்றும் (உ) ஆனல் வர்க்கசமீகரணமென்றும் (ங)
ஆனல் கனசமீகரணமென்றும், இவ்வகையே சமீகரணத்தை
மறைநிலையிராசியின் காதிதகுசிப்படி வீசகணிதர்கள் வகுத்து
ரைப்பர்கள். உ-ம்.

$\text{ஆஷ}+\text{ஈ}=\text{ஊஷ}+\text{ஒ}$. இது வேள்ளைச்சமீகரணம்.

$\text{உஷ}^{\text{உ}}-\text{ஙஷ}=\text{ரு}-\text{உஷ}^{\text{உ}}$ இது வர்க்கசமீகரணம்.

$\text{சஷ}^{\text{ங}}-\text{ருஷ}^{\text{உ}}=\text{ஙஷ}+\text{கக}$. இது கனசமீகரணம்.

இந்தச் சமீகரணங்களில் (ஷ) மறைநிலையிராசிப்பிர
இவ்வகைப்பட்ட சமீகரணங்களில் இந்த அதிகாரத்தால் வெ
ள்ளச்சமீகரணத்தை விரித்துரைக்கின்ரும்.

௩௭. பிர. சமீகரணத்தில் தேரிநிலையிராசிகளு மறைநிலையிராசிகளுங் கலந்துவரில், அந்தந்த இரா சியைச் சாதிசாதியாக நிற்கச்செய்தல் சாதிகரண மாம்.

இப்படிச் சாதிகரணஞ்செய்யவே மறைநிலையிராசியின் ர்த்தம் வெளிப்படையாமாதலாற் சமீகரணகணிதத்திற்கு திவே முக்கியகிர்த்தியமாமென்க.

௩௮. பிர. சாதிகரணம்பண்ணும்போது வாம தட்சிண அ கங்களின் சமத்துவம் அழியாமற் பேணுவது அவசியம். நிறை கோலின் தட்டுகளிரண்டுஞ் சமமாயிருக்கும்போது சமபாரங் ள அந்தத் தட்டுக்களிலிட்டாலும், சமபாரங்களையெடுத் லும் அந்த நிறைகோல் இன்னுஞ் சமமாயிருக்கும்வாறுபோ வாம தட்சிண அங்கங்களிரண்டையும், சமமாயேற்றினலு சமமாய்க்குறைத்தாலும் அவற்றின் சமத்துவஞ் சிதையாதா

ஆகையாற் சமீகரண அங்கங்களிரண்டிலும்

௧. சமராசியைக்கூட்டினலும்;

௨. சமராசியைக் களைந்தாலும்; அங்கங்களைச்

௩. சமராசியாற் பெருக்கினலும்;

௪. சமராசியாலரித்தாலும்;

அங்கசமத்துவஞ் சிதையாது. இந்த நான்கு பிரமாணங் ளையும், சுயம்பிரமாணங்களென்பர்.

சுயம்பிரமாணமேன்பது பிறிதொரு சாட்சி வே ண்டாது தன்னிற்ருனே உண்மை வெளிப்படை யாய்விளங்கும் வாக்கியமாம்.

இந்நான்கு பிரமாணங்களேயன்றிச் சுயம்பிரமாணங்கள் வே றுமுள. அவற்றுட் சில வருமாறு.

௫. ஒரே இராசியை வேருேரு இராசியிற் கூட்டி க்களைந்தாலும்,

௬. ஒரே இராசியை வேருேரு இராசியாற் பெரு க்கியரித்தாலும், அர்த்தவிகாரமுண்டாகாது.

௭. விஷமராசிகளுக்குச் சமராசிகளைக்கூட்டினு ற் பெரியராசியின் தொகை பெரியதாயும்;

௮. விஷமராசிகளிற் சமராசிகளைக் களைந்தாற் பெ ரியராசியின் சேடம் பெரியதாயும் வரும்.

௯. விஷமராசிகளைச் சமராசிகளினுற் பெருக்கி ணுற் பெரியதின் குணிதம் பெரியதாயும்;

௧௦. விஷமராசிகளைச் சமராசிகளினுல் அரித்தாற் பெரியதின்பாசிதம் பெரியதாயும் வரும்.

௧௧. ஒரே இராசிக்குத் தனித்தனி தத்தமிற் சம மான இராசிகளெல்லாம் ஒன்றற்கொன்றுஞ்சமமாம்.

௧௨. ஒரிராசியின் முழுமை அதன் ஒரேகூற்றிற் பேரிதாம்.

௩௯. பிர. இந்தச் சுயம்பிரமாணம் ஆதாரமாய் இயற்றுஞ் சாதி கரணம், நிலமாற்றென்றும், குணனமென்றும், பாககரமென் றும் மூன்றுவிதம். கூட்டல் களைதலினுல் முடிக்குஞ் சாதிகர ணம், நிலமாற்றுச்சாதிகரணமாம். பெருக்கலினுல் முடிக்குஞ் சாதிகரணம், குணனசாதிகரணமாம். அரித்தலினுல் முடிக் குஞ் சாதிகரணம் பாககரசாதிகரணமாம்.

நிலமாற்றுச் சாதிகரணம்.

ஷ—எ=௬ என்ற வெள்ளச் சமீகரணத்தில் (ஷ) மறை நிலயிராசிப்பிரதி. இது (—எ) என்ற இருணராசியோடு கலந் து நிற்பதினுல் சாதிகரணஞ்செய்தல்வேண்டியது.

சாதிகரணஞ்செய்யுமிடத்து, (எ), (ஷ) இற் களையப்பட்டி ருக்கிறபடியால் அங்கங்களிலிரண்டிலும் (எ) ஐக் கூட்ட,

ஷ—எ+எ=௬+எ என்றுவரும். சமராசியைச் சமீகரண அங்கங்களிரண்டிலுங் கூட்டினுல் சமத்துவஞ் சிதையாதென் ற சுயம்பிரமாணப்படி (எ) ஐ இரண்டங்கங்களிலுங் கூட்டின படியால் சமீகரண சமத்துவஞ் சிதையவில்லை. இந்தச் சமீக ரணத்தின் வாமபாகத்தில் (எ) இருணமாயுந் தனமாயும் நிற்ப தால், அது சூனியார்த்தப்பட, ஷ=௬+எ என்று மறைநில யிராசி தனியே ஓரங்கமாகவும் தேரிநிலயிராசிகள் வேறே ம ற்றை அங்கமாகவும் வந்தன.

“ அந்தந்தராசியைச் சாதிசாதியாக நிற்கச்செய்தலே சாதிக ரணம்.” ஆகையால் சமீகரணஞ் சாதிகரணமடைந்தது. அ டையவே, (ஷ) என்ற மறைநிலயிராசித்த அர்த்தம் (௬+எ) அல்லது (௧௩) ஆம்.

இப்படியே ஷ—ஈ=ஆ என்றதைச் சாதிகரிக்கும்படி,
ண்டு அங்கத்திலும் (ஈ) ஐக் கூட்ட, ஷ—ஈ+ஈ=ஆ+ஈ,
றும் (—ஈ+ஈ) ஐத் தள்ள ஷ=ஆ+ஈ என்றும் வரும்.

ஸ+ஒ=கூ என்றதைச் சாதிகரிக்கும்படி ஸ, என்ற ம
நிலையிராசியோடு, ஒ என்ற தேரிநிலையிராசி தனராசிய
ணைந்து நிற்பதால் இந்த (ஒ) வை அங்கங்களிற் கவ
ஸ+ஒ—ஒ=கூ—ஒ என்று முன்பு நிறுத்திய பிரமாணப்
சமத்துவஞ் சிதையாமல் வரும். இதில் (+ஒ—ஒ) என்ற
த்தள்ள, ஸ=கூ—ஒ என்று சாதிகரணமடைந்தது.

௱௰. பிர. தேரிநிலையிராசி மறைநிலையிராசியோடு சக
சின்னங்களினுல் இணைந்துவரில், சமீகரணத்தைச் சாதி
க்கும்படி,

அந்தத் தேரிநிலையிராசியை அது கலந்து நிற்கின்
அங்கத்தினின்றெடுத்துத் தனம் இருணமாகவும்
ருணந் தனமாகவும் மாற்றி மற்ற அங்கத்தோடு
ட்டு.

இப்படி நிலைமாற்றுற் சாதிகரித்தலைச் சங்கலன வியவக
ன சாதிகரணம் எனினுமாம். உ-ம்.

க. ஷ+ருஈ—ம=ஒ—டி, என்ற சமீகரணத்தைச் சாதி
ரிக்கவேண்டில், +ருஈ என்ற தனராசியை நிலைமாற்ற,

ஷ—ம=ஒ—டி—ருஈ என்றும், —ம, என்ற இருணராசி
நிலைமாற்ற,

ஷ=ஒ—டி—ருஈ+ம என்றும் வரும்.

௱௰க. பிர. வாமபாகத்திலாவது, தடசிணபாகத்திலாவது
லசமான இராசிகள்வரிற் கூட்டதிகாரத்திற் சொன்ன விதிப்
டி சுருக்கிக்கொள்க. உ-ம்.

உ. ஷ+ருஈ—சகி=எஈ, என்றதைச் சாதிகரிக்கும்படி,
ருஈ—சகி, என்ற தன இருண இராசிகளை நிலைமாற்ற, ஷ=
எஈ—ருஈ+சகி என்று வரும்.

எஈ—ருஈ, என்றதை, உஈ, என்று சுருங்குமாகையால்,
=உஈ+சகி என்றும்.

௱௰உ. பிர. மறைநிலையிராசி வலப்பாகத்திலும் இடப்பா
த்திலும் வரில், நிலைமாற்றுல் அவற்றை ஒருபாகத்தே வருவி
கலாம். உ-ம்.

௩. உஷ+உகி—கி+டி=ருஷ என்பது நிலைமாற்றுல், உ
—கி+டி=ருஷ—உஷ என்றும் சுருக்குகிர்த்தியத்தால்,

கி+டி=ஷ என்றும் வரும்.

௱௰௩. பிர. ஒரே இராசி சமானசின்னம்பெற்று வலப்பாக
த்திலும் இடப்பாகத்திலும் எதிரேதிராய் நின்றுல், அவற்றை
நிலைமாற்றுமல், தள்ளிவிடுவர். உ-ம்.

௪. ஷ+ருகி+டி=ஈ+ருகி+எடி, என்பதில் (ருகி) ஐத்த
ள்ள, ஷ+டி=ஈ+எடி என்றும் முன்புபோல நிலைமாற்ற,
ஷ=ஈ+சுடி என்றும் வரும்.

௱௰௪. பிர. சமீகரணத்தின் சமத்துவஞ் சிதைவுறுமல், அதி
ன் சகல உறுப்புகளும் நிலைமாற்றையடையும்: ஆதலால் ச
மீகரண சர்வசின்னங்களையுஞ் சமத்துவஞ்சிதையாமல் மாற்
றலாமென்பது வெளிப்படை. உ-ம்.

௫. ஷ—ஈ=டி—ஆ என்ற சமீகரணம் நிலைமாற்றுல்,
—டி+ஆ=—ஷ+ஈ என்றும், வாமந் தட்சிணமாகவும்,
தட்சிணம் வாமமாகவும் வரப்பண்ணினுல்,
—ஷ+ஈ=—டி+ஆ என்றுஞ் சமத்துவமழியாமல் நிற்கு
ம்.

௱௰௫. பிர. சமீகரணத்தின் ஒருபாகத்தே நிற்கும்படி சர்வ இ
ராசிகளையும் நிலைமாற்றினுல், வாமமுந் தட்சிணமுந் தத்தமிற்
சூன்யமாம். உ-ம்.

௬. ஷ+ஈ=டி என்றசமீகரணத்தின் தட்சிணபாகத்தை
நிலைமாற்ற,

ஷ+ஈ—டி=0 என்று சூன்யசமத்துவம் பிறந்தவாறு
காண்க.

சாதிகரணவினு.

௭. ஆ+உஷ—அ=ஈ—ச+ஷ+ஆ என்பதைச் சாதிகரி.

௮. ஸ+ஆஈ—ணம=+ஆ+உஸ—ஆஈ+ணம.
௯. ண+ரு0+எஷ=அ—கூண+கூஷ+ஈ—டி.
க0. ஈண+உக—சஷ+ஷ=கஉ—ருஷ+டி—எஈண.
கக. ருஷ+க0+ஆ=உரு+சஷ+ஆ.
கஉ. ருசி+உஷ+கஉ—ரு=ஷ+உ0+ருசி.
கரு. ஆ+ஈ—ருஷ=உ0+ஆ—சஷ+ஈ.
கச. ஷ+ரு—உஷ—ச=ருச+ருஷ—ச—ருஷ.

(௮–கச: இவற்றைச் சாதிகரி.)

குணனசாதிகரணம்.

௱௰௬. பிர. தேரிநிலையிராசி மறைநிலையிராசியோடு சக ச
ய சின்னங்களினுல் இணையாமற், பாககர சம்பந்தங்கொண்
டு வருவதுமுண்டு. உ-ம்.

$\frac{ஷ}{ஆ}$ = ஈ. இப்படி வருஞ் சமீகரணத்தை நிலைமாற்றுற் சா

திகரித்தல் ஏலாது. ஆயினும், அங்கங்களிரண்டையும் (ஆ
ஆற் பெருக்க, ஷ=ஆஈ என்று சமீகரணம் சாதிகரணமன
யும். அதெவ்வாறெனில், பின்ன அதிகாரத்திற் கூறியபடி,
ரு பின்னத்தை அதின் ஆரகத்தாற் பெருக்கவேண்டில், அ
ஆரகத்தைத் தள்ளுவதே பெருக்கலாம்.

௱௰எ. பிர. மறைநிலையிராசி தெரிநிலையிராசியா
பிரிக்கப்பட்டுவரில், சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கு
படி, பிரிக்குங் கருவியான தெரிநிலையிராசியால் வ
மதட்சிண அங்கங்களிரண்டையும் பெருக்கு.

இப்படிப் பெருக்கிச் சாதிகரிக்கும்போது சமீகரணசமத்து
ஞ் சிதையாதென்பதை (௩) ஞ் சுயம்பிரமாணத்தாற் காண்
நிலைமாற்று வேண்டுமிடத்து, முன்பு போலச் செய்யலா
உ-ம்.

௧. $\frac{ஷ}{ஏ} + ஆ = ஈ + டி$ என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிக
கும்படி, இரண்டு அங்கங்களையும் (ஏ) ஆற் பெருக்க,
$ஷ + ஆஏ = ஏஈ + ஏடி$ குணிதமாம்.
நிலைமாற்றல், $ஷ = ஏஈ + ஏடி - ஆஏ$ என்றுவரும். இப்
டியே,

௨. $\frac{ஷ - ௪}{௬} + ௫ = ௨௦.$
௩. $\frac{ஷ}{ஆ + ஈ} டி = கி.$
} இவற்றையுஞ் சாதிகரி.

௱௰௮. பிர. மறைநிலையிராசி பின்னத்தின் ஆர
மாயாவது, ஆரக உறுப்பாயாவது வரில் சாதிகரிக்
ம்படி, இந்த ஆரகத்தால் முன்புபோல அங்கங்க
ப் பெருக்கல்வேண்டும். உ-ம்.

௪. $\frac{௬}{௧௦ + ஷ} + ௭ = ௮.$ இதை $(௧௦ + ஷ)$ ஆற் பெருக்
$௬ + ௭௦ + ௭ஷ = ௮௦ + ௮ஷ$ என்றும் நிலைமாற்றல்,
$ஷ = -௪$ என்றும் வரும்.

௱௰௯. பிர. மறைநிலை இராசி பின்னஉறுப்பாக வராதவிட
தும், தெரிநிலையிராசிகள் பின்னரூபத்தோடு சமீகரணங்க
ளில் நிற்கில், அவற்றின் பின்னரூபத்தை மாற்றுவது சிறுபா

மவேண்டிவரும். அப்படி வருமிடத்து மறைநிலையிராசிக்கு
சொல்லிய முறைப்படியே ஆரகங்களைக்கொண்டு பெருக்கு
ர். உ-ம்.

௫. $\frac{ஷ}{ஆ} = \frac{டி}{ஈ} + \frac{கி}{ஏ}$ என்ற சமீகரணத்தை (ஆ) ஆற் பெ
க்க,
$ஷ = \frac{ஆடி}{ஈ} + \frac{ஆகி}{ஏ}$ என்றும் (ஈ) ஆற் பெருக்க,
$ஈஷ = ஆடி + \frac{ஈஆகி}{ஏ}$ என்றும், (ஏ) ஆற் பெருக்க, $ஈஏஷ
= ஆஏடி + ஆஈகி$ என்றும் வரும். ஆகையால்,

௱௨௰. பிர. பின்னரூபத்தை அபின்னரூபமாய்மா
றும்படி சமீகரணங்களை ஆரகமெல்லாவற்றாலு
் பெருக்கவேண்டும். பின்னத்தின் போகம் முற்
ுப்பெருக்கமாகவும், அதின் ஆரகம் முற்றளவாகவு
் வரில், இப்படி ஆரகத்தாற் பெருக்காமற் போகத்
தை ஆரகத்துக்கீந்து அபின்னரூபத்தைப் பிறப்பிப்
து உசிதம். உ-ம்.

$\frac{ஷ}{ஆ} = \frac{ஈ}{டி} + \frac{ஊ}{ணி} - \frac{கி}{ம}$ என்ற சமீகரணத்தை அபின்னரூப
ாக்குமிடத்து,
$டிணிமஷ = ஆஈமணி + ஆஊடிம - ஆகிடிணி$ என்றுவரும்.
$\frac{௧௨மஷ^{௨}}{௬மஷ} = ஈ$ என்புழி, போகம் முற்றுப்பெருக்கமும்,
ஆரகம் முற்றளவுமாகையால், போகத்தை ஆரகத்துக்கீய
$ஷ = ஈ$ என்று அபின்னரூபம் பிறத்தல் காண்க.
$\frac{ஷ}{௨} = \frac{௨}{௩} + \frac{௪}{௫} + \frac{௬}{௨}$ என்ற சமீகரணத்தை அபின்னரூப
ாக்குக.

௱௨௰௧. பிர. பின்னத்தை அபின்னரூபமாக மாற்றுமிடத்துப்
பின்னத்தின்முன் சயசின்னம்வரில், போகசின்னமனைத்தை
யும் மாற்றினாலன்றி அர்த்தவிகாரமுண்டாகுமென்றறிக.

குணனசாதி கரணவினு.

$$\text{௧.}\quad \frac{\text{ஆ}-\text{ஷ}}{\text{ஷ}}=\text{ஒ}-\frac{\text{௩ஈ}-\text{௨கிம}-\text{௬நி}}{\text{ற}}$$

$$\text{௨.}\quad \frac{\text{ஷ}}{\text{௩}}-\frac{\text{ஷ}}{\text{௪}}=\text{௬}$$

$$\text{௩.}\quad \frac{\text{௪ஷ}}{\text{௫}}=\frac{\text{௩}}{\text{௫}}+\frac{\text{௩ஷ}}{\text{௫}}+\frac{\text{௮}}{\text{௧௦}}$$

$$\text{௪.}\quad \text{௨ஷ}-\frac{\text{௬ஷ}}{\text{௫}}=\frac{\text{௧௦}}{\text{௨௫}}+\frac{\text{௮}}{\text{௫}}$$

$$\text{௫.}\quad -\text{ஷ}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௨}}+\frac{\text{௩ஷ}}{\text{௪}}-\frac{\text{௨ஷ}}{\text{௭}}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௧௪}}=\frac{\text{௧௦}}{\text{௪}}$$

இவற்றைச் சாதிகரி.

பாககரசாதிகரணம்.

௱௨௨. பிர. மறைநிலையிராசிக்குத் தெரிநிலையிராசி குணங்கமாய்வரில், சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கும்படி, வாமதட்சிணங்கங்களை இந்தக் குணங்கத்தாலரித்தல்வேண்டும்.

இப்படி அரிக்குமிடத்துச் சமீகரண சமத்துவம் பிழையாதென்பதை (௪) ஞ் சுயம்பிரமாணத்தாலறிக. உ-ம்.

௧. $\text{ஆஷ}+\text{ஈ}-\text{௩கி}=\text{டி}$ என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிகரித்தல்வேண்டில், நிலைமாற்றால்,

$\text{ஆஷ}=\text{டி}+\text{௩கி}-\text{ஈ}$ என்றும், பாககரத்தால்,

$$\text{ஷ}=\frac{\text{டி}+\text{௩கி}-\text{ஈ}}{\text{ஆ}}$$ என்றும் வரும்.

௨. $\text{௨ஷ}=\frac{\text{ஆ}}{\text{ஒ}}-\frac{\text{டி}}{\text{கி}}+\text{௪ஈ}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௱௨௩. மறைநிலையிராசி பல உறுப்பிலே தெரிநிலையிராசியோடு குணங்கமாய்வரில், சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கும்படி, குணங்கமான தெரிநிலையிராசிகளைச் சின்னம்பிழையாமல் வகுராசிரூபமாக நிறுத்தி இதினுற் சமீகரண அங்கங்களை அரிக்கலாம். உ--ம்.

௩. $\text{௩ஷ}-\text{ஈஷ}=\text{ஆ}-\text{டி}$ என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிகரித்தல்வேண்டில், வாமபாகத்துறுப்பிரண்டிலும் (ஷ) என்

அவ்வியத்தங்குணங்கமாய்வந்தபடியால், இதனேடிணைந்துநிற்கும் (௩) ஐயும் (ஈ) ஐயும் வகுராசிரூபமாக்க, (௩—ஈ) என்று வரும். இதினுல் அங்கங்களைப் பிரிக்க, $\text{ஷ}=\frac{\text{ஆ}-\text{டி}}{\text{௩}-\text{ஈ}}$ என்பது விடையாம்.

௪. $\text{ஆஷ}+\text{ஷ}=\text{கி}-\text{௪}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௫. $\text{ஷ}-\frac{\text{ஷ}-\text{ஈ}}{\text{கி}}=\frac{\text{ஆ}+\text{டி}}{\text{௪}}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௱௨௪. பிர. தெரிநிலையிராசியாவது மறைநிலையிராசியாவது சர்வ உறுப்போடுங் குணங்கமாயிணைந்துவரில், இதினுற் சமீகரணம் முற்றையும் அரிக்க, அல்லது அது சர்வ உறுப்புக்கும் ஆரகமாய்வரிற் சமீகரணம் முற்றையும் இதனுற் பெருக்க அக்குணங்கமும் ஆரகமும் அழியும்; சமீகரணமுஞ் சுருங்கும். உ-ம்.

௬. $\text{ஆஷ}+\text{௩ஆஈ}=\text{௬ஆடி}+\text{ஆ}$ என்ற சமீகரண உறுப்பணத்திலும் (ஆ) குணங்கமாயிருப்பதால், இந்த (ஆ) ஆலரிக்க,

$\text{ஷ}+\text{௩ஈ}=\text{௬டி}+\text{௧}$ என்று சுருங்கும்.

௭. $\frac{\text{ஷ}+\text{௧}}{\text{ஷ}}-\frac{\text{ஈ}}{\text{ஷ}}=\frac{\text{கி}-\text{டி}}{\text{ஷ}}$ என்பதின் சர்வஉறுப்புக்கும் (ஷ) ஆரகமாய்வந்தபடியால், இதனுற் பெருக்க,

$\text{ஷ}+\text{௧}-\text{ஈ}=\text{கி}-\text{டி}$ என்று வரும்.

$\text{ஷ}=\text{கி}-\text{டி}+\text{ஈ}-\text{௧}$. விடையாம்.

௮. $\text{ஷ}(\text{ஆ}+\text{ஈ})-\text{ஆ}-\text{ஈ}=\text{டி}(\text{ஆ}+\text{ஈ})$ என்பதைச் சாதிகரி.

௱௨௫. பிர. அநுபாதத்தைச் சமீகரணமாக மாற்றல்வேண்டில், அந்தங்களின் குணிதத்தை ஒரங்கமாகவும், மத்தியங்களின் குணிதத்தை மற்ற அங்கமாகவும் வரை. உ—ம்.

௯. ஆஷ : ஈ :: ஒகி : டி என்ற அநுபாதத்தைச் சமீகரணமாக்கும்படி அந்தங்களான (ஆஷ), (டி) என்பவற்றைப் பெருக்க (ஆடிஷ) குணிதமாம். மத்தியங்களான (ஈ), (ஒகி) என்பனவற்றைப் பெருக்க (ஈஒகி) குணிதமாம்: ஆகையால்,

$\text{ஆடிஷ}=\text{ஈஒகி}$. இது சமீகரணம்.

௧௦. ஆ+ஈ : ஒ :: கி—ம : ஸ என்ற அநுபாதத்தைச் சமீகரணமாக்கு.

௱௨௬. பிர. சமீகரணத்தை அநுபாதமாக்கவேண்டில் சமீகரணங்கங்களில் ஒன்றை இரண்டு குணங்கங்களாகப் பிரித்து மத்தியராசிகளாகவும், மற்றை அங்கத்தை இரண்டு குணங்கங்களாகப் பிரித்து அந்தங்களாகவுந் தீட்டலாம். உ-ம்.

௧௧. $\text{ஆடிஷ}=\text{ஈஒகி}$ என்ற சமீகரணத்தை அநுபாதமாக்

கல் வேண்டில், முதல் அங்கத்தை (ஆஷ), (டி) என்ற இர
டு குணுங்கங்களாகவும், தட்சிணுங்கத்தை (ஒகி) (ஈ) எ
இரண்டு குணுங்கங்களாகவும் பிரிவுசெய்யலாம். ஆகைய

ஆஷ : ஈ :: ஒகி : டி என்னும் அநுபாதம் பிறக்கும்.

௧௨. $\text{ஆஸ}+\text{ஈஸ}=\text{ஒகி}-\text{ஒம}$ என்பதை அநுபாதமாக
ற்று.

௧௩. $\text{௧௬ஷ}+\text{௨}=\text{௩௪}$ என்பதை அநுபாதமாகமாற்று.

௧௪. $\text{௮ஷ}-\text{௩}+\text{௯}=\text{௭ஷ}+\text{௯}+\text{௨௬}$ என்பதை அநுப
மாக மாற்று.

பிரதிகரணம்.

௩௨௭. பிர. சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்குமிடத்தும் மற்
வீசகணிதகிர்த்தியங்களிலும், பெருத்த எண்ணுக்குப் பிரதி
கவும், வீசரூபத்துக்குப் பிரதியாகவுந் தனி அட்சரங்களை
ட்டிக் கணிதசுருக்கம்பண்ணுவதுமுண்டு.

இந்தக் கிர்த்தியத்துக்குப் பிரதிகரணமென்றும், உத்தாபன
என்றும்பெயர். பிரதிகரித்து விடையறிந்தபின், அட்சரங்
பிரதியாய்நின்ற எண்களையும் வீசரூபங்களையும் பழைய
தீட்டுவர். உ-ம்.

$\frac{\text{ஷ}}{\text{௭௫0}}+\frac{\text{௩}}{\text{௩௭௫}}=\text{௧}$ என்பதின் பின்னரூபைமாற்ற ௩௭௫

$+\text{௩}\times\text{௭௫0}=\text{௧}\times\text{௭௫0}\times\text{௩௭௫}$ என்றும்

$\text{ஷ}=\frac{\text{௨௮௧௨௫0}-\text{௨௨௫0}}{\text{௩௭௫}}=\text{௭௪௪}$ என்று விடையும் வரும்.

ஆனல் (௭௫0) என்ற எண்ணுக்கு (ஆ) பிரதியாகவும், (
க்கு (ஈ) பிரதியாகவும், (௩௭௫) க்கு (ஒ) பிரதியாகவும் வ
ந்தால், சமீகரணம்,

$\frac{\text{ஷ}}{\text{ஆ}}+\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}=\text{௧}$ என்றும், இதின் பின்னரூபை மாற்ற,

$\text{ஒஷ}+\text{ஆஈ}=\text{ஆஒ}$ என்றும்,

$\text{ஷ}=\text{ஆ}-\frac{\text{ஆஈ}}{\text{ஒ}}$ என்று விடையும் வரும்.

பழையபடி எண்களைப் பிரதியட்சரங்களினிடத்தே வ
ம, $\text{ஷ}=\text{௭௫0}-\frac{\text{௭௫0}\times\text{௩}}{\text{௩௭௫}}=\text{௭௪௪}$ என்று முன்போ
விடையாம்

சாதிகரணவினு.

௧. $\frac{\text{௩ஷ}}{\text{௪}}+\text{௬}=\frac{\text{௫ஷ}}{\text{௮}}+\text{௭}$ இவற்றைச் சாதிகரி.

௨. $\frac{\text{ஷ}}{\text{ஆ}}+\text{ஒ}=\frac{\text{ஷ}}{\text{ஈ}}-\frac{\text{ஷ}}{\text{கி}}+\text{டி}$ இவற்றைச் சாதிகரி.

௩. $\text{௪0}-\text{௬ஷ}-\text{௧௬}=\text{௧௨0}-\text{௧௪ஷ}$ இவற்றைச் சாதிகரி.

௪. $\frac{\text{ஷ}-\text{௩}}{\text{௨}}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௩}}=\text{௨0}-\frac{\text{ஷ}-\text{௧௯}}{\text{௨}}$ என்பதைச் சாதி
கரி.

௫. $\frac{\text{ஷ}}{\text{௩}}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௫}}=\text{௨0}-\frac{\text{ஷ}}{\text{௪}}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௬. $\frac{\text{௧}-\text{ஆ}}{\text{ஷ}}-\text{௪}=\text{௫}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௭. $\frac{\text{௩}}{\text{ஷ}+\text{௪}}-\text{௨}=\text{௮}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௮. $\frac{\text{௬ஷ}}{\text{ஷ}+\text{௪}}=\text{௧}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௯. $\text{ஷ}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௨}}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௩}}=\text{௧௧}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧0. $\frac{\text{ஷ}}{\text{௨}}+\frac{\text{ஷ}}{\text{௩}}-\frac{\text{ஷ}}{\text{௪}}=\frac{\text{௭}}{\text{௧0}}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧௧. $\frac{\text{ஷ}-\text{௫}}{\text{௪}}+\text{௬ஷ}=\frac{\text{௨௪௮}-\text{ஷ}}{\text{௫}}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧௨. $\text{௩ஷ}+\frac{\text{௨ஷ}+\text{௬}}{\text{௫}}=\text{௫}+\frac{\text{௧௧ஷ}-\text{௩௭}}{\text{௨}}$ என்பதைச்
சாதிகரி.

௧௩. $\frac{\text{௬ஷ}-\text{௪}}{\text{௩}}-\text{௨}=\frac{\text{௧௮}-\text{௪ஷ}}{\text{௩}}+\text{ஷ}$ என்பதைச் சா
திகரி.

௧௪. $\text{௨௧}+\frac{\text{௩ஷ}-\text{௧௧}}{\text{௧௬}}=\frac{\text{௫ஷ}-\text{௫}}{\text{௮}}+\frac{\text{௯௭}-\text{௭ஷ}}{\text{௨}}$ என்ப
தைச் சாதிகரி.

௧௫. $\text{௩ஷ}-\frac{\text{ஷ}-\text{௪}}{\text{௪}}-\text{௪}=\frac{\text{௫ஷ}+\text{௧௪}}{\text{௩}}-\frac{\text{௧}}{\text{௧௨}}$ என்பதை
ச்சாதிகரி.

௧௬. $\frac{௭ஷ+௫}{௩}-\frac{௧௬+௪ஷ}{௫}+௬=\frac{௩ஷ+௯}{௨}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧௭. $\frac{௧௭-௩ஷ}{௫}-\frac{௪ஷ+௨}{௩}=௫-௬ஷ+\frac{௭ஷ+௧௪}{௩}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧௮. $ஷ-\frac{௩ஷ-௩}{௫}+௪=\frac{௨௦-ஷ}{௨}-\frac{௬ஷ-௮}{௭}+\frac{௪ஷ-௪}{௫}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௧௯. $\frac{௬ஷ+௭}{௯}+\frac{௭ஷ-௧௩}{௬ஷ+௩}=\frac{௨ஷ+௪}{௩}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௨௦. $\frac{௫ஷ+௪}{௨}:\frac{௧௮-ஷ}{௪}::௭:௪$. என்பதைச் சாதிகரி.

வெள்ளைச்சமீகரணகிர்த்தியம்.

௱௨௮. பிர. எந்தச் சமீகரண வினாவிற்கும் விடையறியும்ப செய்யவேண்டிய கிர்த்தியங்கள் இரண்டு. ௧வது. மொழி யர்ப்பு, ௨வது. சாதிகரணம். சாதிகரண நெறிகளை முன்பு ரித்துரைத்தோம். இனி மொழிபெயர்ப்பு யாதெனில், வழக் பாஷையிற் சொல்லிய வினாவை வீசபாஷையினது ரூபமா மாற்றுவதாம். யாமறியவேண்டிய மறைநிலையிராசியையு அறிந்த இராசியாகப் பாவித்து (௩௯) ம் பிரகரணத்தின்படி சபாஷாரூபமாக்கிக்கொள்க. வெள்ளைச்சமீகரணங்களை த்தையுஞ் சாதிகரிக்கும்படி,

பொதுவிதி.

(௧) வழக்கப்பாஷையில் வினாவிய கணிதவி வைச் சமீகரணமாகும்படி வீசபாஷையாக மொ பெயர்த்து; (பிர. ௩௯.)

(௨) பின்னம்வரிற் சர்வ ஆரகங்களினாலுஞ் சமீக ணத்தைப் பெருக்கி அபின்னரூபமாக்கி; (பிர. ௱௨

(௩) மறைநிலையிராசி ஒரு அங்கமாயும், தெரி லையிராசி மற்ற அங்கமாயும் வரும்படி நிலைமாற்றி சமானராசிகளை ஒன்றாய்த்திரட்டி; (பிர. ௱௰., ௪

(௪) மறைநிலையிராசியோடு தெரிநிலையிராசியா

குணங்கமிணைந்து நிற்கில், அந்தக் குணங்கத்தினாற் சமீகரணமுற்றையும் அரி. (பிர. ௱௨௨.)

விடைச்சோதனை. மறைநிலையிராசியின் அர்தத்தை மறைநிலையிராசிப் பிரதியாகிய அட்சரத்தினிடத்தே வைத்து வினாவிற்சொல்லிய கிர்த்தியங்களைப்பண்ணு. இந்தக் கிர்த்தியங்களைப் பண்ணுமிடத்து அவையனைத்தையும் அவ்விடைதழுவி முடியுமெனில், அதுவே சுத்தவிடையாமென்றறி.

வெள்ளைச்சமீகரண வினா.

வினா ௧. ஒரு மந்திரிகுமாரன் தோட்டத்திற் பூக்கொய்து வருவதைக் கண்ட இராசகுமாரன், "மந்திரிகுமாரா, நீ எத்தனை பூக்கொய்தாயென்று கேட்க" இராசகுமாரனே, நான் கொய்த பூவை நாலாற்பெருக்கி வருவதில் எழுபதைக்கூட்டித் தொகையில் ஐம்பதைக் கழித்தால், சேடம் ௨௨௦ என்று மந்திரிகுமாரன் சொன்னான். மந்திரி குமாரன் கொய்த பூ எத்தனை?

இந்த வினாவைச் சமீகரண ஆகாரமாக மொழிபெயர்க்குமிடத்து:—

மந்திரிகுமாரன் கொய்த பூ, ஷ, என்றும், இதை நாலாற் பெருக்கிவருவது, ௪ஷ, என்றும், இந்த (௪ஷ) இல் (௭௦) ஐக் கூட்ட, $௪ஷ+௭௦$ என்றும், இந்தத் தொகையில் (௫௦) ஐக் கழிக்க, $௪ஷ+௭௦-௫௦$ என்றும், ஆகையால், $௪ஷ+௭௦-௫௦=௨௨௦$ என்றும் வரும். இந்தச் சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்க, $ஷ=௫௦$ என்று விடைவரும். வரவே, மந்திரிகுமாரன் கொய்த பூ (௫௦) ஆமென்க.

இதற்குச் சோதனை (௫௦) க்குப் பிரதியாக நின்ற (ஷ) வினிடத்தே (௫௦) ஐ வைக்கச் சமீகரணம் $௪\times௫௦+௭௦-௫௦=௨௨௦$ என்றும், சின்னங்கள் குறிக்கின்ற கிர்த்தியத்தை முடிக்க $௨௨௦=௨௨௦$, என்றும் வாமதட்சிண சமத்துவம் பிறந்தபடியால் விடையைப் பிழையின்றியடைந்தோமென்க.

வினா ௨. ஒரு எண்ணிற் பாதியை அவ்வெண்ணிரட்டியிற் கழிக்கச் சேடம் (௬) என்றால், அந்த எண் யாது?

மறைநிலை எண்ணை (ஷ) என்று வைத்து முன்போல மொழிபெயர்க்க,

$௨ஷ-\frac{ஷ}{௨}=௬$ எனற சமீகரணம் பிறக்கும். இதைச் சாதிகரிக்க, $ஷ=௪$, விடையாம். சோதனை. $௨+௪-\frac{௪}{௨}=௬$

வினு ௩. ஒரு பிதாத் தனது மூன்று குமாரருக்குந் தி
யத்தைப் பங்கிட்டான். எப்படியென்ருல், (௧000) வராக
குறையப் பாதித்திரவியத்தை மூத்தகுமாரனுக்கும், (அ00) வ
கன் குறைய மூன்றிலொருபங்குத் திரவியத்தை இரண்டா
மாரனுக்கும், (௬00) வராகன் குறையக் காற்பங்குதிரவியத்
இளைய குமாரனுக்குங் கொடுத்தான். அந்தப் பிதாவினிட
லிருந்த முழுத்திரவியமும் எத்தனைவராகன்?

முழுத்திரவியம் ஷ என்று வைத்தால்,

மூத்தகுமாரனுக்கு, $\frac{\text{ஷ}}{\text{௨}} - \text{௧000}$ வராகன்.

இரண்டாங்குமாரனுக்கு, $\frac{\text{ஷ}}{\text{௩}} - \text{௮00}$ வராகன்.

இளையகுமாரனுக்கு, $\frac{\text{ஷ}}{\text{௪}} - \text{௬00}$ வராகன்.

இந்த மூன்றையும் ஒன்ருய்த்திரட்ட முழுத்திரவியமும் வரு
ஆகையால்,

$\frac{\text{ஷ}}{\text{௨}} - \text{௧000} + \frac{\text{ஷ}}{\text{௩}} - \text{௮00} + \frac{\text{ஷ}}{\text{௪}} - \text{௬00} = \text{ஷ}$. இது சமீகர
ம். இதைச் சாதிகரிக்க, ஷ = ௨௮௮00. இது முழுத்திரவிய

சோதனை. $\frac{\text{௨௮௮00}}{\text{௨}} - \text{௧000} + \frac{\text{௨௮௮00}}{\text{௩}} - \text{௮00} + \frac{\text{௨௮௮00}}{\text{௪}} - \text{௬00} = \text{௨௮௮00}$.

வினு ௪. ஒரு எண்ணுடனே (௭௨0) ஐக் கூட்டித் தொகை
யை (௧௨௫) க் கீந்து வந்தபலம் (௭௩௯௨) ஐ (௪௬௨) க்கீந்த ப
த்திற்குச் சரி. அந்த எண் யாது?

இந்த வினுவிற்கு விடையறியும்படி, (௩௨௭) ம் பிரகரணப்ப
டி எண் பிரதியாக அட்சரங்களை வரைந்துங் கணிதகிர்த்திய
தை முடிக்கலாம். எப்படியென்ருல்,

மறைநிலை எண்ணை, ஷ, என்றும்; (௭௨0) ஐ, ஆ, என்று
(௧௨௫) ஐ, ஈ, என்றும்; (௭௩௯௨) ஐ, ஊ, என்றும்; (௪௬
ஐ, ஒ, என்றும், வைத்து, வினுவை மொழிபெயர்த்து,

$\frac{\text{ஷ}+\text{ஆ}}{\text{ஈ}} = \frac{\text{ஊ}}{\text{ஒ}}$ என்ற சமீகரணத்தைப் பிறப்பித்துச் சா
கரிக்க. ஷ $= \frac{\text{ஈஊ}-\text{ஆஒ}}{\text{ஒ}}$ என்றுவரும்.

இதில் அட்சரம் பிரதியான எண்களைப் பழையபடி வை
தால்,

ஷ $= \frac{(\text{௧௨௫} \times \text{௭௩௯௨} - \text{௭௨0} \times \text{௪௬௨})}{\text{௪௬௨}} = \text{௧௨௮0}$ விடையாம்.

வினு ௫. ஒரு செட்டியாருக்கு மிளகாய் வியாபாரத்தில்,
(௩௫0) ரூபாய் லாபம். புகையிலைவியாபாரத்தில் (௬0) ரூபாய்
நட்டம். பாக்குவியாபாரத்தில் நயமடைந்தாரோ நட்டமடைந்
தாரோ தெரியவில்லை. ஆனுல் இந்த மூன்று வியாபாரத்தினுலும்
அடைந்த நயநட்டத்தைத் திரட்டிப்பார்த்தபோது, செட்டியா
ருக்கு (௨00) ரூபாய் லாபமானுல், பாக்குவியாபாரத்தில் அடைந்
த நயமாவது நட்டமாவது எத்தனை ரூபாய்?

இந்த வினுவை வீசபாஷாரூபமாக மொழிபெயர்க்குமிடத்
து, லாபத்தைத் தனராசியாகவும், நட்டத்தை இருணராசியாக
வுங் கொண்டு,

ஷ + ௩௫0 — ௬0 = ௨00, என்ற சமீகரணத்தைப் பிறப்பித்து
அதைச் சாதிகரிக்க,

ஷ = —௯0, என்று வரும். —௯0 இருணராசியாகையால்,
பாக்குவியாபாரத்தாற் செட்டியாருக்கு (௯0) ரூபாய் நட்டமெ
ன்று காணலாம்.

வினு ௬. ஒருபிராமணன் விக்கிரகபுஷபாஞ்சலிபண்ணின
போது தனது கையிலிருந்த புஷபத்தில் மூன்றிலொருபங்கைச்
சிவனுக்கும், ஐந்திலொருபங்கை விஷணுவுக்கும், நான்கிலொ
ருபங்கைப் பார்வதிக்கும், ஆறிலொருபங்கைச் சுப்பிரமணியனு
க்குமேறிந்து சேஷமான ஆறுபுஷபத்தைத் தனது குடுமியிற் சூ
டினுன். அந்தப் பிராமணன் வைத்திருந்த புஷபமெத்தனை?

விடை. ௧௨0.

வினு ௭. ஒருதேன்கூட்டிலிருந்த தேனீயில் ஐந்திலொருபங்
கு கடம்பப்புஷபத்துக்கும், மூன்றிலொருபங்கு சிலந்தரப்புஷப
த்துக்கும் பறந்துபோக, இந்த இரண்டு புஷபத்துக்கும் போனதே
னீயின் எண்களை ஒன்றிலொன்று களைந்து பெற்றசேடத்
தின் மும்மடங்கு ஒரு பூம்பந்தலையடைந்தன. தனித்துக்கொ
ண்ட ஒருதேனீயோ, கேதகையும் மாலதியும் இருபுறத்துந் தத்
தம்வாசனையாற் கவர அவற்றினிடையே பறந்துகொண்டிருந்
தது. அப்படியானுல் தேன்கூட்டிலிருந்த தேனீயெத்தனை?

விடை ௧௫.

வினு ௮. (௩௬) முழத்துக்கப்பாலே நின்ற ஒரு மானை வே
ட்டைநாய் கண்டு துரத்திக் கலைத்துக்கொண்டுபோனபோது
மான் ஏழுமுழம் ஓட வேட்டைநாய் பத்துமுழமோடிக்கொண்
டுபோனுல், வேட்டைநாய் ஓடத்தொடங்கின இடத்தினின்று
எத்தனை முழத்துக்கப்பால் அது மானைப் பிடிக்கும்?

விடை ௧௨ முழம்.

வினு கூ. ஒருமுறை வெடிமருந்து சேர்த்தபோது, முழு வெடி
ருந்தின் மூன்றிலிரண்டுபங்குக்கு (கo) இருத்தல் அதிகமாயிரு
து, அதிற் சேர்ந்த வெடியுப்பு. முழு வெடிமருந்தின் ஆறிலொ
ங்குக்கு ச $\frac{க}{உ}$ இருத்தல் குறைய இருந்தது கெந்தகம். வெடியுப்
ன் ஏழிலொருபங்கைப்பார்க்க (உ) இருத்தல் குறைய இருந்
து கரி. முழுவெடிமருந்தும் எத்தனை இருத்தல்?

விடை சுகூ. இருத்தல்.

வினு கo. (கசகூ) படிகொள்ளத்தக்க ஒரு சாடியில் வே
ப்பெண்ணெய், தேங்காயெண்ணெய், இலுப்பையெண்ணெ
என்ற இந்த மூன்றெண்ணெயையும் விட்டு நிறைத்தபோது வே
ப்பெண்ணெயைப்பார்க்க (கரு) படி அதிகப்பட்டிருந்தது இலு
ப்பையெண்ணெய். வேப்பெண்ணெயையும் இலுப்பையெ
ண்ணெயையும் ஒன்ருய்ச் சேர்த்த தொகையளவிருந்த
தேங்காயெண்ணெய். அப்படியிருந்தால் ஒவ்வொரு எண்
ணெயிலும் எத்தனையெத்தனை படி சாடியில் விடப்பட்டது

வேப். உகூ. இலுப். சச. தேங். எரு.

வினு கக. (சுகூ) ஐ, ஐந்துகூறுக்குமிடத்து, முதற்கூறு இரண்
டாவதைப்பார்க்க (ரு) அதிகமாயும், மூன்ருவதைப்பார்க்க (க
குறைந்தும், நாலாவதைப்பர்ர்க்க (கூ) அதிகமாயும், ஐந்தாவ
தைப்பார்க்க (ககூ) குறைந்துமிருந்தது. அந்தக் கூறுக
யாவை?

கஎ, கச, உஎ, அ, ருரு.

வினு கஉ. ஒருகமக்காரனிடத்திலே இருந்த இரண்டு பட்டி
ற்சரி சரி தொகையான ஆடுகளிருந்தன. ஒருபட்டியில் (ருக
ஆட்டையும், மற்றப்பட்டியில் (கூரு) ஆட்டையும் விற்றபின்
ஒருபட்டிக்கு மற்றப்பட்டியினது ஆட்டுத்தொகை இரட்டித்து
கொண்டது. கமக்காரனிடத்தில் நின்ற ஆடுகள் எத்தனை?

விடை சசஎ.

வினு கரு. ஒரு பிராமணன் தனது ஆயுசின் நான்கிலொ
பங்குகாலம் பிரமசாரியாயிருந்தான். ஏழிலொருபங்கையு
(ரு) வருடத்தையும் இல்லாச்சிரமத்திற் கழித்தான். பின்
அவனுக்கு ஒரு புத்திரன் பிறந்து பிதாவின் ஆயுசின் அரைவா
காலம் வாழ்ந்திருந்து பிதாமரிக்க (ச) வருடத்துக்கு முன் கால
ஞ்சென்றுவிட்டான். அப்படியானல் பிராமணன் எத்தனை
வயதுக்கு உயிரோடிருந்தான்?

விடை அச.

வினு கச. ஒரு சாடிநிறைய இருந்த எண்ணெயில் மூன்றி

லொருபங்கு ஒழுகிச் சிதைந்துபோனது. (உக) படி எண்ணெய்
விளக்குக்குச் செலவிடப்பட்டது. சேஷமான எண்ணெய் சா
டியிற் சரி அரைவாசியானுற் சாடியிலெத்தனை படி எண்ணெ
யிருந்தது?

விடை கஉசு.

வினு கரு. ஒரு சேனபதி யுத்தத்திற்றேற்றோடினபோது அவ
னுடைய சேனையில் அரைவாசியும் (ருசுoo) பெயருஞ் சேதமி
ன்றி அவனுடனே ஓடிப்போனர்கள். சேனையில் எட்டிலொ
ருபங்கும் (சுoo) பெயருங் காயப்பட்டு மூர்ச்சித்துக்கிடந்தார்கள்.
எஞ்சியவர்கள் சேனையில் ஐந்திலொருபங்கு மாத்திரம். இவர்
கள் யுத்தத்தில் மடிந்தவர்களும் சிறைபிடிக்கப்பட்டவர்களு
மாம். சேனையின் முழுத்தொகையுமென்ன?

விடை உசooo.

வினு கசு. அஸ்தினுபுரி, குருக்கேத்திரம், அகரபுரி, மகரபுரி
என்ற நாலு நகரங்கள் ஒரே நேரிலிருக்கின்றன. இவற்றுள் அ
ஸ்தினுபுரிக்கும் மகரபுரிக்குமிடையான தூரம் ருச காதம். அஸ்
தினுபுரிக்குங் குருக்கேத்திரத்துக்குமிடையான தூரம் அகரபுரிக்
கும், மகரபுரிக்குமிடையான தூரத்துக்கு எப்படியிருக்கிறதோ
வென்ருல் (உ) (ரு) க்கு இருக்கின்ற அப்படி. மேலும் அஸ்
தினுபுரிக்கும் குருக்கேத்திரத்துக்கும் இடையான தூரத்திற் காற்
பங்குடன் அகரபுரிக்கும் மகரபுரிக்குமிடையான தூரத்திற் பா
தியைக்கூட்டினுல், குருக்கேத்திரத்துக்கும் அகரபுரிக்குமிடை
யான தூரத்தின் மும்மடங்காம். பின்னை இந்தப் புரங்களுக்
கிடையான தூரங்கள் யாவை?

விடை முறையே, கஉ, ச, கஅ. காதம்.

வினு கஎ. ஒரு மனுஷன் இரண்டு குடந் தயிர் வாங்கினபோ
து சிறுக்குடத்திலிருந்த தயிரில் மும்மடங்கு பெரிய குடத்திலிருந்
தது. அந்த இரண்டு குடத்திலும் நான்குபடி தயிரை எடுத்த
போதோ பெரியகுடத்திற் தயிர் மற்றதில் நாலுமடங்கானது.
இந்த இரண்டு குடத்திலுமிருந்த தயிர் எத்தனைபடி?

சிறுக்குடம் கஉ படி. பெரியகுடம் ருசு படி.

வினு கஅ. காலாக்கினியுங் காலநேமியுஞ் சரிசரியான முத
ல்போட்டு வியாபாரம்பண்ணினபோது முதல்வருடங் காலாக்கி
னிக்கு நாற்பது வராகன் லாபம். காலநேமிக்கு நாற்பது வராக
ன் நட்டம். இரண்டாம்வருடத்தில், காலாக்கினி முதல்வரு
டாந்தத்தில் வைத்திருந்த வராகனில் மூன்றிலொருபங்கை
நட்டமடைந்தான். காலநேமியோ காலாக்கினியடைந்த நட்
டத்திரட்டியில் (சo) வராகன் குறைய லாபமடைந்தான். அப்
பொழுது காலநேமியுடைய வராகன் காலாக்கினியுடைய வரா

கனில் இரட்டியானது. இவ்விருவரும் வியாபார ஆரம்பத்தி[ல்] போட்ட முதல் எத்தனை ?

விடை ௯௨௦.

வினா ௧௯. இரண்டு தேசாந்தரிகளில் ஒருவன் சகநாதபு[ரத்]திலிருந்து இராமேஸ்வரத்துக்கும், மற்றவன் இராமேஸ்வரத்தில[ிரு]ந்து சகநாதபுரத்துக்கும் யாத்திரைபண்ணினார்கள். இராமே[ஸ்]வரத்திலிருந்து போனவன் ஒருநாள் இரண்டு காதமும் சகநா[த]புரத்திலிருந்துபோனவன் ஒருநாள் (௫) காதமும் நடந்தார்க[ளெ]ன்றும், சகநாதபுரத்துக்கும் இராமேஸ்வரத்துக்குமிடையான [தூ]ரம் (௪௨) காதமென்றும், வைத்துக்கொண்டால், இந்தத் [தே]சாந்தரிகள் ஒருவரையொருவர் சந்திக்கு முன் எத்தனை கா[தம்] நடந்தார்கள் ?

விடை. இராமேஸ்வரத்திலிருந்துபோனவன் ௧௨ காதமு[ம்] சகநாதபுரத்திலிருந்து போனவன் ௩௦ காதமும் நடந்தார்கள்.

வினா ௨௦. ஒரு தடாகத்தின் மத்தியிலே நாட்டியிருந்த [ஸ்த]ம்பத்தில் ஐந்திலொருபங்கு சேற்றிலும் ஏழின் மூன்றுபங்கு ச[ல]த்திலும், (௧௩) முழஞ் சலத்துக்கு மேலேயுமிருந்தால் அந்த [ஸ்]தம்பம் எத்தனைமுழ நீளங்கொண்டது ?

விடை ௩௫.

வினா ௨௧. ஒரு தமையனுந் தம்பியும் உத்தியோகத்திலே பட்டுச்சரிசரியான சம்பளம் வாங்கிவந்தார்கள். தமையன் தன்னுடைய சம்பளம் முற்றையுஞ் செலவிட்டதுமன்றி வரு[டா]ந்தந் தனது சம்பளத்தின் ஏழிலொருபங்களவுக்குக் கடன்பட்[டு]ஞ் செலவழித்துவந்தான். தம்பியானவன் தனது சம்பளத்தி[ல்] ஐந்திலொருபங்கை வருடாந்தரஞ் சேமித்துவைத்தான். ப[த்து] வருடஞ்சென்றபோதோ தம்பி தமையன்பட்ட கடனை[க்] கொடுத்துக் கையில் (௧௬௦) ரூபாயும் வைத்திருந்தான். இ[வ்]விருவருடைய வருடாந்தரச் சம்பளம் யாது ?

விடை ௨௮௦.

வினா ௨௨. அருணோதயத்தில் ஐந்தாம் ஆறும்மணி வேளை[க்]கிடையே ஒருவன் மணிக்கூட்டைப் பார்த்தபோது மணிக்க[ம்]பியும்* நிமிஷக்கம்பியும் ஒன்றின்மேலொன்று நிற்கக்கண்[டா]ன். அப்பொழுது நேரமென்ன ?

விடை. ௫ மணி. ௨௭ ௩/௧௧ நிமிஷம்.

வினா ௨௩. ஒரு தோட்டக்காரன் வேலியடைக்கும்படி சி[ல] முருக்கந்தடியை வாங்கி அரைமுழத்துக்கொருதடியாய் நட்டுவந்தபோது முழுவேலிக்குங் கணக்காகப் போட இன்னும் (௧௫௦) தடி வேண்டியதாயிருந்தது. மறுபடி அவன் அவைகளைப் பிடு[ங்]கி ஒன்றரைமுழத்துக் கொருதடியாக நட்டுவந்தபோது (௭௦) தடி மிஞ்சிப்போனது. தோட்டக்காரன் வாங்கின முருக்கந்தடி எத்தனை ?

விடை ௧௮௦.

வினா ௨௪. வருஷமொன்றுக்கு (௮) ரூபாயும் ஒருசோடு அங்கவஸ்திரமுங் கொடுக்கப்பொருந்தி ஒரு செட்டியார் தனக்குச் சொக்கப்பையன் ஒருவனை வைத்திருந்தார். ஆனால் ஏழாம்மாதமுடிவில் செட்டியாருக்குஞ் சொக்கப்பையனுக்கும் வாக்குவாதமுண்டானபடியினால் சொக்கப்பையனுக்கு இரண்டரையே அரைக்கால் ரூபாயும் முன் வாக்குப்பண்ணியிருந்தபடி ஒரு சோடு அங்கவஸ்திரமுங் கொடுத்துச் செட்டியார் சொக்கப்பையனைத் தள்ளிவிட்டார். இந்த அங்கவஸ்திரத்துக்கு விலையென்ன ?

விடை ௪ ௯/௧௦ ரூபாய்.

வினா ௨௫. சென்னபட்டணத்தில் ஒரு கடைக்காரன் ஒரு அணுவுக்கு மூன்றாகச் சில கொப்புறத்தேங்காயையும் அத்தனை யாழ்ப்பாணத்திற் தேங்காயை ஒரு அணுவுக்கு இரண்டாகவும் வாங்கி இந்த இரண்டுவகையான தேங்காயையுங் கலந்து இரண்டணுவுக்கு ஐந்து தேங்காயாக முதலில் நட்டம்வராமல்விற்க நினைத்து விற்றபோது அவனுக்கு நாலு அணு நட்டமானது. அப்படியானாற் கடைக்காரன் ஒவ்வொருவகைத் தேங்காயிலும் எத்தனை வாங்கினான் ?

விடை ௧௨௦.

வினா ௨௬. ஒரு சாடியிலே இரண்டு துவாரமுண்டு. இந்த இரண்டு துவாரத்தையுங்கொண்டு அந்தச் சாடியைத் தண்ணீரால் நிறைக்கும்படி (௧௨) நாழிகைசெல்லும். துவாரங்களிற் சிறியதுவாரத்தை அடைத்தபோதோ அந்தச் சாடியை நிறைக்க (௨௦) நாழிகைசென்றது. சிறுத்துவாரத்தைத் திறந்து பெருந்துவாரத்தை அடைத்தாற் சாடியை நிறைக்க எத்தனை நாழிகைசெல்லும் ?

விடை ௩௦ நாழிகை.

வினா ௨௭. ஒரு தட்டான் (௧௦௦) ரூபாய் விலைகொண்ட ஒரு பூஷணத்தைக் கொடுத்து அந்தப் பூஷணநிறைகொண்டபொன்னும், (௩௭) ரூபாயும் வாங்கினான். அவன் வேறொரு தருணத்தில் (௧௨) கழஞ்சு நிறைகொண்ட பூஷணத்தைக் கொடுத்து

* ௬௦ நிமிஷங்கொண்டது ஒரு மணி. ௨௪ மணித்தியாலங்கொண்டது ஒரு தி[னம்]. மணியென்பதும் ஓரையென்பதும் ஒரேயளவுகொண்ட காலப்பிரிவுகளாம்.

(அ) கழஞ்சு நிறைகொண்ட பொன்னும் (உரு) ரூபாயும் வா
கினன். அப்படியானல் தட்டான் முன்கொடுத்த பூஷண
எத்தனை கழஞ்சு? அந்தப் பூஷணத்தின் (க) கழஞ்சுக்கு வி
யென்ன?

விடை. உரு கழஞ்சு. ஒருகழஞ்சுக்கு விலை ச ரூபாய்.

வினு உஅ. யுத்தம் மிகுத்தகாலத்தில் ஒரு கூட்டம் இர
வீரர் ஓரிடையனுடைய ஆட்டுப்பட்டியிற் புகுந்து அவனுடை
ஆட்டில் நாலிலொருபங்கையும் ஒரு ஆட்டின் நாலிலொரு
கையுங் கொள்ளைகொண்டுபோக, வேறொருகூட்டம் இரண
ரர் புகுந்து சேஷமாய்நின்ற ஆட்டின் மூன்றிலொருபங்கை
ஒரு ஆட்டின் மூன்றிலொருபங்கையும் எடுத்துப்போனார்க
சேஷமாய் நின்ற ஆட்டின் அரைவாசியையும் ஒரு ஆட்டி
அரைவாசியையும் இன்னும் ஒரு கூட்டம் இரணவீரர் பி
துப்போனார்கள். கடைசியாய் இடையனிடத்தில் சேஷி
நின்றஆடு (உரு.) அப்படியானல் இடையனுடைய பட்டியி
நின்ற ஆடு எவ்வளவு?

விடை கoறு.

வினு உகூ. ஒரு வர்த்தகன் மூன்றுவருடக்காலமாக வ
மொன்றுக்கு (ருo) வராகன் தனது திரவியத்திலிருந்து எடுத்
செலவிட்டுவருவான். ஆகிலும் அவனிடத்திற் செலவழியா
கிடந்த திரவியத்தின் மூன்றிலொருபங்களவுக்கு வருடாந்த
அவனுக்கு இலாபங்கிடைத்துவந்தபடியினலே மூன்றும்வரு
கடைசியில் அவனுடைய திரவியம் இரட்டித்துப்போனது. வ
த்தகன் முதன்முதல் வைத்திருந்த வராகன் எத்தனை?

விடை எசo.

வினு றுo. ஒரு கப்பற்சண்டை நடந்தபோது சில கப்ப
சமுத்திரத்தில் அமிழ்ந்திப்போயின. (கரு) கப்பல் ஒழித்
தப்பிவிட்டன. அமிழ்ந்திப்போன கப்பலைப்பார்க்கச் சத்
பிடித்துப்போன கப்பல் (எ) அதிகமும், தகனிக்கப்பட்ட க
பல் (உ) குறைவுமாயிருந்தன. சண்டைபண்ணின கப்ப
ல்லாம் அமிழ்ந்தின கப்பலின் எண்மடங்கானல், சண்டை
ண்ணின கப்பலெத்தனை?

விடை றுஉ.

வினு றுக. ஒரு சதுரங்கசேனையின் தொகை (ருசச
இந்தச் சேனையிலிருந்த கசத்திலிரட்டி ரதம். ரதத்தின் மு
மடங்கு துரகம். துரகத்தின் நான்மடங்கு பதாதி. இந்நால்வ
ச்சேனையிலும் வகையொன்றுக்குத் தொகையென்ன?

விடை. கசம், கசுரு. ரதம், றுறுo. துரகம், கூகூo. பதா
றுகூசுo.

வினு றுஉ. போதவாதித்தன், போதசந்திரன் என்ற இரண்டு
மாணுக்கர் பள்ளிக்கூடத்துக்குப் போகிறவழியில் அஸ்திரபரீட்
சைபண்ணினர்கள். எப்படியென்றால், முதற் போதவாதித்த
ன் எய்த அஸ்திரம் விழுந்த இடத்தில் நின்றெடுத்து அந்த நேர் வி
லகாமற் போதசந்திரன் எய்ய, போதசந்திரன் எய்த அஸ்திரம்
விழுந்த இடத்தில் நின்று போதவாதித்தன் எய்ய, இப்படியே
(றுருஉo) முழம்வரைக்கும் எய்தபோது, போதவாதித்தன் (அ)
முறையும், போதசந்திரன் (எ) முறையும் எய்ததாகக் கண்டார்
கள். சிலநாட்சென்றபின் இவர்கள் இருவரும் ஒரு நதியின்
எதிர்க்கரைகளில் நின்று நதியின் அகலத்தைத் தாங்கள் முன்
செய்த அஸ்திரபரீட்சையைக்கொண்டு நிதானிக்க எண்ணி
னர்கள். அப்போது போதவாதித்தன் அஸ்திரபிரயோகம்பண்
ண, அஸ்திரம் போதசந்திரன் நின்ற கரைக்கிப்பால் (உசு)
முழம் அளவில் விழுந்தது. அந்த அஸ்திரம் விழுந்த இடத்தில்
நின்றே போதசந்திரன் அஸ்திரபிரயோகஞ்செய்தபோது அது
போதவாதித்தன் நின்ற கரைக்கப்பால் (கஅ $\frac{ச}{எ}$) முழம் அள
வில்விழுந்தது. அப்படியானல் நதியின் அகலம் யாது?

விடை உoo.

வினு றுறு. முருகப்பசெட்டி, வெள்ளயன்செட்டி, உடை
யப்பசெட்டி, திருமலச்செட்டி, என்ற நான்குசெட்டிகளும் ஒரு
வியாபாரிக்குக் கடன்கொடுத்திருந்தகாலத்தில், வியாபாரிக்குப்
பலவகையானநட்டங்களும்நேரிட்டன. இதைக் கண்ட செட்
டிகள்வியாபாரியுடைய ஆஸ்தியை நடுக்கட்டி, அதை (உகooo)
ரூபாய்க்கு விற்றார்கள். இந்தப் பணம் அவரவருடைய கடன்
முற்றையும் நீக்கமாட்டாதபடியால் அவரவருடைய கடனுக்கு
த்தக்கதாய்ப் பணத்தைப் பங்கிட்டார்கள். எப்படியென்றால்
முருகப்பசெட்டிக்கும் வெள்ளயன்செட்டிக்கும் உ: று போல்;
வெள்ளயன்செட்டிக்கும் உடையப்பச்செட்டிக்கும் சு: ரு
போல்; உடையப்பசெட்டிக்கும் திருமலச்செட்டிக்கும் சு: எ
போல். ஒவ்வொரு செட்டியும் பெற்றுக்கொண்ட ரூபாய் எத்
தனை?

விடை முரு. றுஉoo; வெள். சஅoo; உடை. சுooo; திரு. எooo.

வினு றுச. தஞ்சாவூரிராசாவினது ஒரு பத்திரசாரணன் செ
ன்னபட்டணத்துக்குப் போகப்புறப்பட்டு (றுo) நாழிகை சென்
றபின்வேறொருபத்திரசாரணன் அங்கிருந்து புறப்பட்டான. மு
ந்தினவன் (ரு) நாழிகைக்கு (கறு) மைல் நடந்தானென்றும்
பிந்தினவன (எ $\frac{க}{உ}$) நாழிகைக்கு (உசு) மைல் நடந்தானெ

ன்றும், இவ்விருபத்திரசாரணரும் ஒருமார்க்கமே சென்றார் ளென்றும் வைத்துக்கொண்டால், முந்தின பத்திரசாரணவ ப் பிந்தின பத்திரசாரணன் என்ன தூரத்திலே எத்தனை நா கையிலே பிடிப்பான்?

விடை தூரம், ௱௧௨, மைல். நாழிகை, ௬௦.

வினா ௱௫. ஒரு ஓடக்காரன் ஆற்றுப்பாய்ச்சலின் சகாய தினால் (க $\frac{\text{க}}{\text{உ}}$) மணித்தியாலத்தில் (௧௮) மைல் தூரத்திற்கு ஓ டத்தை நடத்தி, அங்கிருந்து மறுபடி ஆற்றுப்பாய்ச்சலினெதி தான் ஆரம்பித்த தானத்தை அடையவெண்ணி ஆற்றின்மத் யமார்க்கவேகத்தில் ($\frac{\text{௱}}{\text{௫}}$) குறைந்த கரைமார்க்க வேகத்து கெதிரே ஓடத்தை நடத்தி (உ $\frac{\text{க}}{\text{௪}}$) மணித்தியாலத்திற் போ ச் சேர்ந்தான. அப்படியானால், அதிவேகமாய் நீரோடுகின் மத்தியமார்க்கத்தில் நீரோட்டக் கதியாது?

விடை ஒருமணித்தியாலத்தில். உ $\frac{\text{க}}{\text{உ}}$ மைல்.

வினா ௱௬. ஒரு வியாபாரி (௬௯) ரூபாய்க்கு ஒரு புடை வை வாங்கி, அதில் (௧௧) முழத்தை விற்றுப்போட்டபின், இத குச் சரிவந்த வேறொரு புடைவையை (௨௧) ரூபாய்க்கு வாங் னான். (௨க) ரூபாய்க்கு வாங்கின புடைவையில் ஒரு முழங் ட்டினால் இதின் நீளம் முன்பு சேஷமாயிருந்த புடைவையி நீளத்திற்கு உ : ௱ போல். பின்னை வாங்கின ஒவ்வொரு டைவைக்கும் நீளம் யாது? அவற்றின் ஒரு முழத்துக்கு வி எத்தனை ரூபாய்?

விடை. முதல்வாங்கின புடைவை, ௨௱. முழம். இரண் வதுவாங்கின புடைவை, எ முழம். ஒருமுழத்துக்கு விலை, ரூபாய்.

வினா ௱எ. ஒரு மனிதனிடத்தில் நான்கு எண்ணெய்ச்சாடி ளிருந்தன. அவற்றின் முதற்சாடியிலிருந்தஎண்ணெயை இரண் டாஞ்சாடியில் விட்டபோது ($\frac{\text{௪}}{\text{எ}}$) அதிற் சேஷமாயிருந்தது. இ ண்டாஞ்சாடியிலிருந்த எண்ணெயை மூன்றாஞ்சாடியில்வி டபோது அதிற் காற்பங்கு சேஷமாயிருந்தது. மூன்றாஞ்சா யிலிருந்த எண்ணெயை நான்காஞ்சாடியில் விட்டபோதே

நான்காவதை நிரப்பும்படி இன்னும் $\frac{\text{எ}}{\text{௧௬}}$ பங்கு வேண்டிய தாயிருந்தது. ஆனால் முதற்சாடியில் எண்ணெயை மூன்றாஞ் சாடியிலும், நானகாஞ்சாடியிலும் விட்டால் (௧௫) படி சேஷ மாயிருக்கும். அப்படியானால் இந்த நானகுசாடிகளில் ஒவ் வொன்றும் எத்தனைபடி எண்ணெய்கொள்ளும்?

விடை முறையே, ௧௪௦; ௬௦; ௪௫; ௮௦.

காதித மௌல ராசிகளின கணிதத்தை உணர்ந்தாலன்றி அ நேக வீசகணிதவினாக்களுக்கு விடையறிதல் கூடாதாகையால், சமீகரணகணிதத்தை முடிவுசெய்யமுன காதிதகணிதத்தை யும் மௌலகணிதத்தையும் விளக்குவோம்.

அ. காதித அதிகாரம்.

[Powers.]

௱௨௯. பிர. ஒரு இராசி தன்னைத் தன்னாலே ஒ ருதரமாவது பலதரமாவது பெருக்கப்பெற்ற குணித மேது அது காதிதம். (௱௧. பிர.) உ-ம்.

(௪) இன் வர்க்கம், அதாவது இரண்டாங்காதிதம் (௧௬) = ௪×௪. (௪) இன் கனம், அதாவது மூன்றாங்காதிதம் (௬௪) =௪×௪×௪. பிறவுமன்ன.

(ஆ) இன் வர்க்கம் (ஆ$^{\text{உ}}$)

(ஆ) இன் கனம் (ஆ$^{\text{௩}}$)

(ஆ) இன் நான்காங்காதிதம் (ஆ$^{\text{௪}}$). பிறவுமிப்படியே.

ஆ$^{\text{உ}}$, ஆ$^{\text{௩}}$, ஆ$^{\text{௪}}$, என்ற காதிதங்களில், உ, ௩, ௪ என்ற எண்கள் காதிதசூசி. இதனை நிர்க்கண்டமெனினுமாம். சூசி (க) ஆனால் அதனை வரையாதொழிதல் பெரும்பாலும் வழமை. எப்படியென்றால், (ஆ$^{\text{க}}$,) என்று சூசிகொடுத்து வரையினும், (ஆ) என்று சூசிகொடாதுவரையினும் இரண்டுமொக்கும்.

௱௩௰. பிர. ஒரு இராசியின் இன்ன காதிதம் இத்தனைத்தெ ன்று அறியாதகாலத்தும், அக்காதிதத்தை அறிந்தாற்போல அ தனைக் கணிதகிர்த்தியத்திலமைத்து நடத்துந்திறமை காதித சூசிப்பிரயோகத்தினால் வரும் பயனென்றுகாண்க. எப்படியெ ன்றால், ௨$^{\text{ஷ}}$, என்று வரையுமிடத்து (உ) இன் வர்க்கமோ, கன மோ, வேறொருகாதிதமோ என்று வரையறைசெய்துணர்த்தா திருந்தும், (உ) இன் யாதொரு காதிதமென்பதைக் குறிக்கின் றது. இப்படியே ஆ$^{\text{ஷ}}$, ஒ$^{\text{ஷ}}$, கீ$^{\text{ஷ}}$, முதலியனவும்.

மேலுஞ் சூசிகளை வழங்குவதினுல், வகுராசிகள் சுருங்குகி[றன]. உ-ம்.

$(ஆ+ஈ+ஒ)^{௩}$ அல்லது $\overline{ஆ+ஈ+ஒ}|^{௩}$, அல்லது

$\overline{ஆ+ஈ+ஒ}^{௩}$, என்பது $(ஆ+ஈ+ஒ)$ என்ற வகுராசியின் க[னமாம்]. இதனை வழக்கப்படிவரையில், $(ஆ+ஈ+ஒ)\times(ஆ+ஈ+ஒ)\times(ஆ+ஈ+ஒ)$ என்று வரும்; விரிக்கில், $ஆ^{௩}+௩ஆ^{௨}ஈ+௩ஆஈ^{௨}+௩ஆ^{௨}ஒ+௬ஆஈஒ+௩ஆஒ^{௨}+ஈ^{௩}+௩ஈ^{௨}ஒ+௩ஈஒ^{௨}+ஒ^{௩}$ என்று நிற்கும்.

௱௩௧. பிர. சுபாவகாதிதமென்றும், விலோமகாதிதமென்று[ம்] காதிதமெல்லாம் இரண்டுவகைப்படும். இவற்றுள்,

சூசியைத் தனராசியாகப்பெற்ற காதிதமேது அ[து] சுபாவகாதிதமாம். இது குணனகிர்த்தியத்தாற் பி[றக்]கின்றது. உ-ம்.

$ண\times ண=ண^{௨}$. $ண\times ண\times ண=ண^{௩}$,
$ண\times ண\times ண\times ண=ண^{௪}$.

சூசியை இருணமாகப்பெற்ற காதிதமேது அது வி[லோமகாதிதமாம்]. இது சுபாவகாதிதத்தால் (க) ஐ [ப]ரிக்கப் பிறப்பதாம். உ-ம்.

$\frac{க}{ண^{௨}}$, $\frac{க}{ண^{௩}}$, $\frac{க}{ண^{௪}}$, $\frac{க}{ண^{௫}}$, (௱அ. பிர).

சுபாவகாதிதமாலிகையினின்று விலோமகாதித மாலிகை[யைப்] பிறப்பிக்கும்வகையெவ்வாறெனில், சுபாவகாதிதத்தை மூலா[ட்]சரபரியந்தம் அதன் மூலத்துக்கு ஈந்தீந்துவந்தால், தன சூசி[யைப்] பெற்ற காதிதங்கள் பிறக்கும். சூசிகளோ ஒன்றுக்கொன்று ஒவ்வொரலகு குறைந்து குறைந்து, மூலாட்சரத்தை மூலாட்ச[]ரத்துக்கீயும்போது, சூசி சூன்யமாகக் காதிதம் (க) ஆம். இ[ப்]பால் (க) ஐ முன்போல மூலாட்சரத்துக்கீந்து பேற்றையுமிப்ப[]டியே ஈந்தீந்துவர விலோமகாதித மாலிகை வெளிப்படும். உ-ம்.

$\frac{ண^{௩}}{ண}=ண^{௨}$; $\frac{ண^{௨}}{ண}=ண$; $\frac{ண}{ண}=ண^{0}=க$
$\frac{க}{ண}$; $\frac{க}{ண}\div ண=\frac{க}{ண^{௨}}$; $\frac{க}{ண^{௨}}\div ண=\frac{க}{ண^{௩}}$
} இதில் (ண) மூலாட்சரம்.

இப்படிப் பின்னமாக வரையவேண்டிய விலோமகாதிதத்[]தைச் சுபாவகாதிதத்தைப்போல வரைந்து நிர்க்கண்டத்தின் [மு]ன் சயசின்னந் தீட்டுவதுமுண்டு. உ-ம்.

$\frac{க}{ண^{௨}}=ண^{-௨}$; $\frac{க}{ண^{௩}}=ண^{-௩}$; $\frac{க}{ண^{௪}}=ண^{-௪}$.

(ண) இன் சுபாவகாதிதங்களும் விலோமகாதிதங்களும் வரு[]மாறு.

$ண^{௪}$, $ண^{௩}$, $ண^{௨}$, $ண^{௧}$, $ண^{0}$, $ண^{-௧}$, $ண^{-௨}$, $ண^{-௩}$, $ண^{-௪}$, பிறவுமன்ன, இதில் $ண^{0}=க$.

௱௩௨. பிர. காதகரணமென்பது காதித்தல். அது [எ]ந்தராசிக்காவது வேண்டியகாதிதத்தை அறியுங் கிர்[த்]தியமாம்.

காதகரணவிதி.

காதிதசூசியில் எத்தனை யலகுண்டோ அத்தனைத[ரங்] காதிக்கவேண்டிய இராசியைக் குணங்கமாய்க் [கொ]ண்டுபெருக்கு.

௱௩௩. பிர. காதிக்கவேண்டிய இராசி தனியட்ச[ர]மாய்வரில், வேண்டிய காதிதத்தின் சூசியை அந்த [அ]ட்சரத்திற்றீட்டியாவது, நிர்க்கண்டத்திலே எத்த[னை]யலகுணடோ அத்தனைதரம் அட்சரத்தைக் குண[ங்]கமாகக்கோண்டாவது காதிக்கலாம். உ-ம்.

க. (ஆ) இன் நான்காங்காதிதம் $(ஆ^{௪})$ அல்லது ஆஆஆஆ.
உ. (ஷ) இன் ஆருங்காதிதம் $(ஷ^{௬})$ அல்லது ஷஷஷஷ[ஷ]ஷ.
௩. (ஸ) இன் (ம) காதிதம் $(ஸ^{ம})$ அல்லது ஸஸஸ . . . . [(ம)] தரம்.

இந்த அட்சரத்தின் வர்ணம் எண்ணுனல், அந்த எண்ணுக்கு [வே]ண்டிய காதிதம் பிறக்கும்படி பெருக்கவேண்டும். உ-ம்.

க. (௩ஷ) இன் மூன்ருங்காதிதம் $௨௭ஷ^{௩}$.
உ. (சஸ) இன் நான்காங்காதிதம் $௨௫௬ஸ^{௪}$.

௱௩௪. பிர. பல குணங்கங்களைக்கொண்ட இரா[]சியைக் காதிக்கும்படி, குணங்கங்களை ஒன்ருய்ப் [பெ]ருக்கிப் பெற்ற குணிதத்தை வேண்டியகாதிதமா

க்கலாம். அல்லது குணங்களைத் தனித்தனி
த்தபின் காதிதங்களை ஒன்றாய்ப்பெருக்கலாம்
உ-ம்.

க. $(ஆஷ)^{௨} = ஆ^{௨} ஷ^{௨}$. எப்படியென்றால், மேலேப்
கரணப்படி $(ஆஷ)^{௨} = ஆஷ \times ஆஷ = ஆஷஆஷ = ஆஆஷ$
$= ஆ^{௨} ஷ^{௨}$, என்று வருதலாலென்றறிக.

உ. (ஈமஷ) இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௩. (ஆடஸ) இன் (ன) காதிதம் யாது?

௪. (கிடஸ) இன் (௪)ங் காதிதம் யாது?

௫. (௪ஈ) இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௬. (௬ஆட) இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௭. $(௩ம \times உஸ)$ இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௮. (ணனற) இன் (ண) காதிதம் யாது?

௱௩௫. பிர. இராசிகளைக் காதிக்குமிடத்து, மூல
தனமூலமானால், காதிதந் தன காதிதமாய்வருமென்
றும், மூலம் இருணமூலமானால் ஒற்றைக்காதித
இருணகாதிதமாயும், இரட்டைக்காதிதந் தனகாதி
மாயும் வருமென்றறி.

அறியவே, மூலசின்னமெப்படியோ அப்படியே ஒற்றித்த கா
திதசின்னமிருக்குமென்பதும், மூலசின்னஞ் சகசின்னமானா
ஞ் சயசின்னமானாலும், இரட்டித்த காதிதசின்னம் எப்பொ
துஞ் சகசின்னமாயிருக்குமென்பதும் வெளிப்படையாம், உ-

$$+ஆ \times +ஆ = +ஆ^{௨}; \quad -ஆ \times -ஆ = +ஆ^{௨}.$$
$$+ஆ \times +ஆ \times +ஆ = +ஆ^{௩}; \quad -ஆ \times -ஆ \times -ஆ = -ஆ$$

௱௩௬. பிர. சூசியைப் பெற்றிருக்கின்ற இரா
யைக் காதிக்கும்படி அந்தச் சூசியைத்தானே வே
ண்டிய காதிதத்தின் சூசியினாலே பெருக்கு. உ-ம்

க. $(ஆ^{௨})$ இன் மூன்றாங்காதிதம் அதாவது கனம் $ஆ^{௨ \times}$
$= ஆ^{௬}$. எப்படியென்றால், $ஆ^{௨} = ஆஆ$. ஆகையா
(ஆஆ) இன் கனம் $ஆஆ \times ஆஆ \times ஆஆ = ஆஆஆஆஆஆ = ஆ$
இது (ஆ) இன் ஆறாங்காதிதம்; அதாவது $(ஆ^{௨})$ க்கு மூன்றா
காதிதம்.

உ. $(ஆ^{௩} ஈ^{௨})$ இன் நான்காங் காதிதம் யாது?

௩. $(௪ஆ^{௨} ஷ)$ இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௪. $(உஆ^{௩} \times ௩ஷ^{௨} ட)$ இன் நான்காங்காதிதம் யாது?

௫. $(டி^{௨} ண^{௩})$ இன் (ன) காதிதம்யாது?

௬. (௩கிம) இன் மூன்றாங்காதிதம் யாது?

௭. $(ஆ^{௩} \times ஈ^{௩})$ இன் இரண்டாங்காதிதம் யாது?

௱௩௭. பிர. பின்னத்தைக் காதிக்கும்படி போகத்தையும் ஆரகத்தையுந் தனித்தனி காதிக்கலாம். உ-ம்.

க. $\left(\frac{ஆ}{ஈ}\right)$ இன் வர்க்கம், $\frac{ஆ^{௨}}{ஈ^{௨}}$. எப்படியென்றால், பின்ன குணனவிதிப்படி $\frac{ஆ}{ஈ} \times \frac{ஆ}{ஈ} = \frac{ஆஆ}{ஈஈ} = \frac{ஆ^{௨}}{ஈ^{௨}}$. (௯௭. பிர)

உ. $\left(\frac{க}{ஆ}\right)$ இன், உ ம், ௩ ம், காதிதங்கள் யாவை?

௩. $\left(\frac{உஷ^{௩} ற^{௨}}{௩ஸ}\right)$ இன் கனம் யாது?

௪. $\left(\frac{ஷ^{௨} ற}{ஆஸ^{ம}}\right)$ இன் (ன) காதிதம் யாது?

௫. $\left\{\frac{-ஆ^{௩} (ட + ண)}{(ஷ + க)^{௩}}\right\}$ இன் வர்க்கம் யாது?

௱௩௮. பிர. சகசயசின்னங்களினாலிணைந்த வகுராசியைக் காதிக்கும்படி, அந்த வகுராசியினுறுப்புகளைப் பெருக்கதிகாரத்திற் சொல்லிய விதிப்படி பெருக்கிக்கொள். உ-ம்.

க. $(ஆ+ஈ)^{க} = ஆ+ஈ$ முதலாங்காதிதம்.

$$\begin{array}{rl}
 & ஆ+ஈ \\
\hline
 & ஆ^{௨} + ஆஈ \\
 & \quad + ஆஈ + ஈ^{௨} \\
\hline
(ஆ+ஈ)^{௨} & = ஆ^{௨} + உஆஈ + ஈ^{௨} \quad \text{இரண்டாங்காதிதம்.} \\
 & ஆ+ஈ \\
\hline
 & ஆ^{௩} + உஆ^{௨}ஈ + ஆஈ^{௨} \\
 & \quad ஆ^{௨}ஈ + உஆஈ^{௨} + ஈ^{௩} \\
\hline
(ஆ+ஈ)^{௩} & = ஆ^{௩} + ௩ஆ^{௨}ஈ + ௩ஆஈ^{௨} + ஈ^{௩}, \text{ ௩ங் காதிதம்} \\
 & ஆ+ஈ \\
\hline
 & ஆ^{௪} + ௩ஆ^{௩}ஈ + ௩ஆ^{௨}ஈ^{௨} + ஆஈ^{௩} \\
 & \quad + ஆ^{௩}ஈ + ௩ஆ^{௨}ஈ^{௨} + ௩ஆஈ^{௩} + ஈ^{௪} \\
\hline
(ஆ+ஈ)^{௪} & = ஆ^{௪} + ௪ஆ^{௩}ஈ + ௬ஆ^{௨}ஈ^{௨} + ௪ஆஈ^{௩} + ஈ^{௪}.
\end{array}$$

நான்காங்காதிதம். பிறவுமன்ன.

உ. $(ஆ-ஈ)$ இன் வர்க்கம் யாது?

௩. $(ஆ+க)$ இன் கனம் யாது?

௪. (ஆ+ஈ+டி) இன் வர்க்கம் யாது?
௫. (ஆ+உட+௩) இன் கனம் யாது?
௬. (ஈ+௨) இன் நான்காங்காதிதம் யாது?
௭. (௧—ஈ) இன் ஆறுங்காதிதம் யாது?

௱௩௯. பிர. இப்படி உறுப்புகளைப் பெருக்காமல் வகுராசிகளின் காதிதங்களைச் சூசிமாத்திரமாயும் விளக்கலாம். உ-ம்.
(ஆ+ஈ) இன் வர்க்கம் $\overline{ஆ+ஈ}|^{௨}$ அல்லது (ஆ+ஈ)
(ஒ+கீ) இன் (ன) காதிதம் $\overline{ஒ+கீ}|^{ன}$ அல்லது (ஒ+கீ)
இந்தப்பிரகாரஞ் சூசிமாத்திரமாய் வகுராசி காதிதத்தை விக்கும்போது விலங்குச்சின்னம் வகுராசியுறுப்புகளனைத்தைமிணைக்கும்படி வரைதல்வேண்டும். ஆனால் மூலமானவசியோடு இராசிகள் குணங்கமாயிணைந்துநின்றால், இராசிக்களனைத்தையுமிணைக்கும்படி ஒரே விலங்குச்சின்னந் தீட்யாவது, தனித்தனிக்குணங்கங்களுக்குத் தனித்தனிவிலங்சின்னந்தீட்டியாவது காதிதத்தை விளக்கலாம். உ-ம்.
(ஆ+ஈ)×(ஒ+ண) இன் வர்க்கமென்பதை உணர்த்படி,

$\overline{(ஆ+ஈ)×(ஒ+ண)}^{௨}$ என்றாவது,
$(ஆ+ஈ)^{௨} × (ஒ+ண)^{௨}$ என்றாவது வரையலாம்.

௱௪௰. பிர. வகுராசி காதிதங்களுள் இரட்டையிராசிகளிகாதிதங்கள் வீசகணிதகிர்த்தியங்களுள் மிகப்பயனுடைய

இரட்டையிராசியை வர்க்கிக்கும்படி, அதனிண்டுறுப்புகளுந் தனராசியாய்வந்தால், முதலுறுப்ன்வர்க்கத்தோடு இரண்டுறுப்புகளின் குணிதவிரடியையும், இரண்டாமுறுப்பின் வர்க்கத்தையுகூட்டு.

எச்சராசியை வர்க்கிக்கும்படி, முதலுறுப்பின் வர்க்கத்தில் இரண்டுறுப்பின் குணிதவிரட்டியைக் கழிந்து இரண்டாமுறுப்பின் வர்க்கத்தைக் கூட்டு.
உ.-ம்.

௧

$$\begin{array}{llll} & ஆ+ஈ & & \\ & ஆ+ஈ & & \\ \hline & ஆ^{௨}+ஆஈ & & \\ & \quad\;\;+ஆஈ+ஈ^{௨} & & \\ \hline & ஆ^{௨}+௨ஆஈ+ஈ^{௨} & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} ஆ—ஈ \\ ஆ—ஈ \\ \hline ஆ^{௨}—ஆஈ \\ \quad\;\;—ஆஈ+ஈ^{௨} \\ \hline ஆ^{௨}—௨ஆஈ+ஈ^{௨} \end{array}$$

௨. (௨ஆ+ஈ) இன் வர்க்கம்யாது?
௩. (ண+க) இன் வர்க்கம்யாது?
௪. (ஆஈ+கீடி) இன் வர்க்கம்யாது?
௫. (௬ஸ+௩) இன் வர்க்கம்யாது?
௬. (௩ன—ட) இன் வர்க்கம்யாது?
௭. (ஆ—க) இன் வர்க்கம்யாது?
௮. (ஆஷ—ஸ) இன் வர்க்கம்யாது?

துவிராசிவிதி.

௱௪௧. பிர. இரட்டையிராசியின் பெரிய காதிதங்களைக் குணனகிர்த்தியத்தால் (௫௪ம்.) பிரகரணத்திற் காட்டியபடி கிரகிப்பது அருமையும் அலக்கணுமுடையதென்று கருதிப் பண்டிதசிரோமணியாகிய நியுற்றனாசிரியர் இரட்டையிராசிகளின் காதிதகரணமனைத்தையும் எளிதில் முடிக்கும்படி ஒருபோது விதி தந்தனர். அதற்குத் துவிராசிவிதியென்று நாமம். அவ்விதியை விளக்குமுன் (ஆ+ஈ) இனதும், (ஆ—ஈ) இனதும் வர்க்கம், கனம், நான்காங்காதிதமென்பவைகளை இவ்விடத்து வரைகின்றோம்.

(ஆ+ஈ) இன் வர்க்கம் $ஆ^{௨}+௨ஆஈ+ஈ^{௨}$.
(ஆ+ஈ) இன் கனம் $ஆ^{௩}+௩ஆ^{௨}ஈ+௩ஆஈ^{௨}+ஈ^{௩}$.
(ஆ+ஈ) இன் நாலாங்காதிதம் $ஆ^{௪}+௪ஆ^{௩}ஈ+௬ஆ^{௨}ஈ^{௨}+௪ஆஈ^{௩}+ஈ^{௪}$.
(ஆ—ஈ) இன் வர்க்கம் $ஆ^{௨}—௨ஆஈ+ஈ^{௨}$.
(ஆ—ஈ) இன் கனம் $ஆ^{௩}—௩ஆ^{௨}ஈ+௩ஆஈ^{௨}—ஈ^{௩}$.
(ஆ—ஈ) இன் நாலாங்காதிதம் $ஆ^{௪}—௪ஆ^{௩}ஈ+௬ஆ^{௨}ஈ^{௨}—௪ஆஈ^{௩}+ஈ^{௪}$.

௱௪௨. பிர. இந்த உதாரணங்களை மனதிலமைத்துத்துணருமிடத்துத் துவிராசி காதிதகிர்த்தியத்திற்கெல்லாம் பொதுவான சில இலக்கணங்கள் வெளிப்படையாம். அவையாவன:

௧. சூசி எத்தனையலகையுடையதோ அத்தனையலகில் (௧) மேற்பட்டது காதித உறுப்புகளின் தொகையாம். உம். (௪) ௫ங் காதித உறுப்புகளின் தொகை. பிறவுமன்ன.

௨. சின்னங்களின் இலக்கணம். துவிராசியின் இருகூறுகளுந் தனமேனில், காதித உறுப்பனைத்துந் தனமாம். துவிராசி சேடதுவிராசியெனில், காதிதத்தின் ஒற்றித்த உறுப்புகள் தனமும், இரட்டித்த உறுப்புகள் இருணமுமாம். (காதிதஉறுப்பையெண்ணும்போது இடப்புறமுதலாயெண்ணுவது.) உ-ம்.

சேடதுவிராசியினது சம் காதிதத்தில், முதலாம், மூன்றும்,

ஐந்தாம், உறுப்புகள் (+). இரண்டாம், நான்காமுறுப்பு
(—).

ங. சூசியிலக்கணம். துவிராசியுறுப்புகளின் முதலுறு
அறியவேண்டிய காதிதசூசியோடு கூடி இடப்பக்கத்தே முதலு
ப்பாக நின்று வலப்பாகத்தை நோக்கி நடக்க உறுப்புக்குறு
சூசி ஒவ்வோரலகு குறைந்து குறைந்து கடையுறுப்பிற் சூ
மாகும். உ-ம்.

சம் காதிதத்தில் முதலுறுப்பாகிய (ஆ) இன் சூசிகளாவ
ச, ங, உ, க.

. துவிராசியின் மற்றையுறுப்பினது சூசி காதிதத்திரண்டா
ப்பில் (க) எனத்தோற்றி உறுப்புக்குறுப்பு ஒவ்வோரலகு அ
ப்பட்டுக் கடையுறுப்பில் அறியவேண்டிய காதித நிர்க்கண
மெத்தனையோ அத்தனையாகவே கிடக்கும். உ-ம்.

சம் காதிதத்தில் இரண்டாமுறுப்பாகிய (ஈ) இன் சூசிக
வன. க, உ, ங, ச.

மேலுங் காதிதஉறுப்பு ஒவ்வொன்றிலும் வரும் சூசிகளி
தொகை ஒன்றிற்கொன்று சமமாயிருக்கும். உ-ம்.

சம் காதித உறுப்பொவ்வொன்றிலும் சூசிததொகை (ச)

ச. வர்ணஇலக்கணம். எந்தக் காதிதத்திலும் முதல்,
டைகாதித உறுப்புகளுக்கு வர்ணம் (க) ஆம். முதலயல்க
யயலான உறுப்புகளுக்கு வர்ணம் அறியவேண்டிய காதித
யாம். உ-ம்.

ஙம் காதிதத்தில் முதலயலுறுப்புக்கு வர்ணம் (ங) க
யலுறுப்புக்கு வர்ணம் (ங). சம். காதிதத்தில் முதலயலு
புக்கு வர்ணம் (ச). கடையயலுறுப்புக்கு வர்ணம் (ச).

வர்ணங்கள் காதித உறுப்புகளின் முற்பாதிவரைக்கும்
யேறிப் பிற்பாதியில் முன்னேறினகிரமமே இறங்கியிறங்கிக்
றைந்துவரும். உ-ம்.

சம். காதிதவர்ணங்கள். க; ச; சு; ச; க.

சும். காதிதவர்ணங்கள். க; சு; கரு; உ0; கரு; சு;

ஆதியந்த காதித உறுப்புகளுக்குச் சரிசரிதூரத்திற் கிடக்
வர்ணங்கள் ஒன்றற்கொன்று சமமாம். உ-ம்.

சம் காதிதத்தில் முதலயலான இரண்டாமுறுப்பின் வர்
ம் (ச) கடையயலான நான்காமுறுப்பின் வர்ணம் (ச).

சும். காதிதத்தில் முதலயலுறுப்பின் வர்ணம் (சு). கடை
யலுறுப்பின்வர்ணம் (சு). முதற்றொட்டு மூன்றாமுறுப்பின்வர்
ம் (கரு). ஈறுதொட்டு மூன்றாமுறுப்புவர்ணம் (கரு). மேலுங்
தித உறுப்புகளனைத்தின் வர்ணங்களையுங் கூட்டியதொ
அந்தக் காதிதம்பிறக்கும்படி (உ) ஐக் காதித்துப் பெற்றபேறு
உ-ம்.

சம் காதிதவர்ணங்களின் தொகை கசு=க+ச+சு+ச
+க=(உ) இன் நான்காங்காதிதம் (கசு)=(உ)^{ச}.

சும் காதிதவர்ணங்களின் தொகை (சுச)=க+சு+கரு
+உ0+கரு+சு+க=(உ) இன் (சு) ம் காதிதம்=சுச=
(உ)$^{சு}$.

இந்தப்பிரகாரமே எடுத்துக்காட்டிய உதாரணங்களில் அமை
ந்துகிடக்கின்ற இலக்கணங்கள் துவிராசியின் சர்வகாதிதங்க
ளுக்கும் பொதுவாமாதலில் இவ்விலக்கணங்களைத் தழுவி மு
டிகின்ற துவிராசிவிதியைக் கூறுவாம்.

ாசங. பிர. துவிராசியைக் காதிக்குமிடத்து:

(க) சின்னம். உறுப்புகளிரண்டுஞ் சகசின்னம்
(+) பொருந்திவரின் காதிதஉறுப்பனைத்துஞ் சகசி
ன்னம் (+) பொருந்துமென்றும், சேடதுவிராசியா
னால், இடப்பாகமுதல் ஒற்றித்த காதித உறுப்புகள்
சக (+) சின்னமும், இரட்டித்த காதித உறுப்புகள்
சய (—) சின்னமும் பொருந்துமென்றும்;

(உ) சூசி. துவிராசியின் முதலுறுப்பு இடப்பாகத்
தே நின்று வலப்பாகத்தை நோக்கியும், மற்றையுறு
ப்பு வலப்பாகத்தே நின்றிடப்பாகத்தை நோக்கியுங்
கருதிய காதிதசூசியே ஆரம்பசூசியாகப் பூண்டு கா
தித உறுப்புக்குறுப்பு ஒவ்வோரலகு குறைந்து சூன்
யமாகும் பரியந்தம் நடைபெற்றுவருமென்றும்;

(ங) வர்ணம். முதல் கடைவர்ணம் (க)என்றும்,
முதலயல் கடையயல்வர்ணங் காதிதசூசியென்றும்,
எந்த வர்ணத்தையாவது அந்த வர்ணத்தைத் தரித்த
முதலிராசியின் சூசியாற் பெருக்கிக் கடையிராசியி
ன் சூசியோடொன்றைக்கூட்டி அரிக்கப் பிந்தியவ
ர்ணம் பிறக்குமென்றும்;

(ச) காதிதஉறுப்புகளின் தொகை காதித சூசியி
ல் (க) அதிகப்பட்டதென்றுமறி.

வீசபாஷாரூபமாக இவ்விதிவருமாறு.

$$(ஆ+ஈ)^{ன} = ஆ^{ன} + ன \times ஆ^{ன-க} ஈ + ன \times \frac{ன-க}{உ} ஆ^{ன-உ} ஈ^{உ} + \text{முதலியன.}$$

துவிராசியுறுப்புகளின் வர்ணமுஞ் சூசியும் (௧) என்று க
இவ்விதிகூறப்பட்டதேனும், அவை வேறுனகாலத்திலும் பி
கரணத்தால் அவற்றை இவ்விதியில் அமைத்துக்கோள்
லாம்.

உதாரணம்.

(௧) (ஷ+ஸ) இன் (௬) ங் காதிதமறியும்படி. வர்ணமெ
ழிந்த காதிதஉறுப்புகள்,

$ஷ^{௬}$, $ஷ^{௫}ஸ$, $ஷ^{௪}ஸ^{௨}$, $ஷ^{௩}ஸ^{௩}$, $ஷ^{௨}ஸ^{௪}$, ஷஸ
$ஸ^{௬}$.

வர்ணங்கள்.

$௧, ௬, \frac{௬ \times ௫}{௨}, \frac{௧௫ \times ௪}{௩}, \frac{௨௦ \times ௩}{௪}, ௬, ௧,$ அல்லது,
௧, ௬, ௧௫, ௨௦, ௧௫, ௬, ௧.

இந்த வர்ணங்களை முன் வரைந்த காதித உறுப்புகளோ
ணைக்க,

$ஷ^{௬}+௬ஷ^{௫}ஸ+௧௫ஷ^{௪}ஸ^{௨}+௨௦ஷ^{௩}ஸ^{௩}+௧௫ஷ$
$ஸ^{௪}+௬ஷஸ^{௫}+ஸ^{௬}$ என்று காதிதம் பரிபூரணமடையும்

(௨) (ஈ+ம) இன் (ன) காதிதம் யாது?

விடை. $ஈ^{ன}+ன \times ஈ^{ன-௧} ம + ன \times \frac{ன-௧}{௨} ஈ^{ன-௨} ம$
+ முதலியன.

(௩) ($ஷ^{௨}+௩ஸ^{௨}$) இன் ஐந்தாங் காதிதம் யாது?

இவ்வினவுக்கு விடையறியும்படி ($ஷ^{௨}$) க்குப் பிரதி (ஆ
என்றும் ($௩ஸ^{௨}$) க்குப் பிரதி (ஈ) என்றும் (௱௨௭ம்.) பிரகர
ப்படி வைத்தபின் முன்போல,

$ஆ^{௫}+௫ஆ^{௪}ஈ+௧௦ஆ^{௩}ஈ^{௨}+௧௦ஆ^{௨}ஈ^{௩}+௫ஆஈ^{௪}+ஈ^{௫}$
என்று காதிதத்தைப் பிறப்பித்து (ஆ), (ஈ) என்ற இராசிகளி
டத்தே ($ஷ^{௨}$) ($௩ஸ^{௨}$) ஐ நிறுத்த $(ஷ^{௨}+௩ஸ^{௨})^{௫}=ஷ$
$+௧௫ஷ^{௮}ஸ^{௨}+௯௦ஷ^{௬}ஸ^{௪}+௨௭௦ஷ^{௪}ஸ^{௬}+௪௦௫ஷ$
$ஸ^{௮}+௨௪௩ஸ^{௧௦}$ என்றும் வரும்.

(௪) (௩ஷ+௨ஸ) இன் (௬) ங் காதிதம் யாது?

(௫) (ஆ−ஈ) இன் வர்க்கம் யாது?

(௬) (டி+கி) இன் (௫) ங் காதிதம் யாது?

(௭) (ஆ−ஈ) இன் ௩ம், ௪ம், ௫ம், ௬ங் காதிதம் யாவை?

(௮) (ஆ−ஈ) இன் (ன) காதிதம் யாது?

துவிராசியையன்றி மற்ற வகுராசிகளையும் பிரதிகரணத்தா
ல் துவிராசிவிதியிலமைத்துக் காதிக்கலாம். எப்படியென்று
ல், (ஆ+ஈ+ஒ) என்ற திரிராசியின் கனத்தை அறியும்படி,
(ஈ+ஒ) என்றதற்கு (கி) ஐப் பிரதியாகநிறுத்தினுல் முன் நிற

த்திய திரிராசி துவிராசிருபமடைகின்றது. இதைத்துவிராசி
திப்படி காதிக்க,

$ஆ^{௩}+௩ஆ^{௨}கி+௩ஆகி^{௨}+கி^{௩}$ என்ற கனம்பிறக்கும்.
தில் (கி) இனிடத்தே (ஈ+ஒ) ஐ வைக்க,

$(ஆ+ஈ+ஒ)^{௩}=ஆ^{௩}+௩ஆ^{௨} \times (ஈ+ஒ)+௩ஆ(ஈ+$
$ஒ)^{௨}+(ஈ+ஒ)^{௩}$ என்று வரும். இதிற் கடையுறுப்புகளிரண்
லும் (ஈ+ஒ) இன் காதிதங்களிருப்பதால் இவற்றைத் தனி
தனி காதித்தல்வேண்டும்.

௱௪௪. பிர. காதிதசூசி அபின்னதனராசியானுல் காதிதமாலி
கை வரையறைபெற்று முடிவுபெறும். எவ்வாறெனில், சூசி
றுப்புக்குறுப்பு ஒவ்வோரலகு குறைந்து குறைந்து வருகின்றப
யால் அது சூன்யமாகவே மாலிகையும் முடிவுபெறும். ஆனு
காதிதசூசி இருணமாயாவது பின்னமாயாவது வரில் அதில்
ஒவ்வோரலகு குறைந்து குறைந்து வரினும் முடிவுபெருதாகை
ல் காதிதமாலிகையும் முடிவுருது. அது அநந்த சோருப
கும். உ−ம்.

$\frac{௧}{ஆ+ஈ}=(ஆ+ஈ)^{-௨}$ என்ற ரூபத்தை விரிக்குமிடத்து,

$ஆ^{-௨}-௨ஆ^{-௩}ஈ+௩ஆ^{-௪}ஈ^{௨}-௪ஆ^{-௫}ஈ^{௩}+௫ஆ^{-௬}$
, முதலியன என்று வருமேயன்றி முடிவுபெருது.

௱௪௫. பிர. துவிராசி விதியைக்கொண்டு காதிதங்களைமாத்
ரமல்ல மூலங்களையும் அறிவதுண்டு. எப்படியென்ருல்,
$(ஆ+ஈ)^{ன}$ என்ற ரூபத்தை விரிக்குமிடத்து (ன) என்ற சூசி
அபின்னமாயாவது பின்னமாயாவது வரலாம். பின்னமாய்வ
ல், அதற்குத் துவிராசி காதிதத்தையறிவதே மூலங்கொள்ளு
கிர்த்தியமாம். உ−ம்.

ன=௨, என்புழி, இரண்டாங்காதிதமாகிய வர்க்கமும்,

$ன=\frac{௧}{௨}$ என்புழி இரண்டாம்மூலமாகிய வர்க்கமூலமும் வ
ம்.

௱௪௬. பிர. சூசி பின்னமாய்வரில், துவிராசிருபத்தை விரிக்
ம்போது உறுப்புகள் வரையறைபெற்று முடியாவாம்.

எப்படியென்ருல் சூசி ($\frac{௧}{௨}$) ஆனுல் இதில் ஒவ்வோரலகு த
ளிவர,

௨ம். உறுப்பில் $\frac{௧}{௨}-௧=-\frac{௧}{௨}$ என்றும்,

௩ம். உறுப்பில் $-\frac{௧}{௨}-௧=-\frac{௩}{௨}$ என்றும்,

௪ம். உறுப்பில் $-\frac{௩}{௨}-௧=-\frac{௫}{௨}$ என்றும்,

௫ம். உறுப்பில் $-\frac{௫}{௨}-௧=-\frac{௭}{௨}$ என்றும்,

௬ம். உறுப்பில் $-\frac{௭}{௨}-௧=-\frac{௯}{௨}$ என்றும், இப்படி அநந்தமாய்ப்பெருகும்.

காதிதவினா.

௧. $(ஷ+ஸ)$ இன் கனம் யாது?
௨. $(ஆ+ஈ)$ இன் வர்க்கம் யாது?
௩. $(ஆ-ஈ)$ இன் ௬ம் காதிதம் யாது?
௪. $(ஷ+ஸ)$ இன் ௫ம் காதிதம் யாது?
௫. $(ஷ-ஸ)$ இன் ௨ம் காதிதம் யாது?
௬. $(ம+ன)$ இன் ௭ம் காதிதம் யாது?
௭. $(ஆ-ஈ)$ இன் ௯ம் காதிதம் யாது?
௮. $(ஷ+ஸ)$ இன் ௧0ம் காதிதம் யாது?
௯. $(ஷ-ஸ)$ இன் ௧௩ம் காதிதம் யாது?
௧0. $(ஆ-ஈ)$ இன் ௮ம் காதிதம் யாது?
௧௧. $(ஆ+ஈ)$ இன் ௧௧ம் காதிதம் யாது?
௧௨. $(௨+ஷ)$ இன் ௫ம் காதிதம் யாது?
௧௩. $(ஆ-ஈஷ+சி)$ இன் ௩ம் காதிதம் யாது?
௧௪. $(ஆ+௩ஈசி)$ இன் ௪ம் காதிதம் யாது?
௧௫. $(௩ஆஈ-ஷ)$ இன் ௫ம் காதிதம் யாது?
௧௬. $(௪ஆஈ+௫சீ^{௨})$ இன் ௨ம் காதிதம் யாது?
௧௭. $(௩ஷ-௬ஸ)$ இன் ௩ம் காதிதம் யாது?
௧௮. $(௫ஆ+௩டி)$ இன் ௩ம் காதிதம் யாது?
௧௯. $\frac{௧}{௧-ஆ}$ அல்லது $(௧-ஆ)^{-௧}$ என்ற ரூபத்தைவிரி?
௨0. $(ஆ\pm ஈ)^{\frac{௧}{௨}}$ என்ற ரூபத்தைவிரி?

காதிதகூட்டல்.

௱௪௭. பிர. (௪௭ம்.) பிரகரணத்திற் கூறிய கூட்டல், விதியை வழியாகக்கொண்டு காதிதங்களையுங் கூட்டித் தொகையறியலாம். எப்படியென்றால்,

(௧) காதிதஞ் சமானராசியாய்வரில், அவற்றின் வர்ணங்களைக் கூட்டிப் போது அட்சரத்தையும் அதன் சூசியையும் அத்தொகையின் பின்வரையலாம்.

(௨) காதிதம் வேற்றிராசியாய்வரில் இராசிகளைச் சின்னம்வழுவாமல், ஒன்றின் பின்னொன்று தீட்டுவதே அவற்றைக் கூட்டுவதாம்.

காதிதக்கூட்டல்வினா.

௧. $௫ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}+ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}+௨ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}$, $௧0ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}$, இவற்றின் தொகை யாது?
விடை. $௧௮ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}$.

௨. $௩(ஷ+ஸ)^{௪}+௫ஆ^{௪}-௪(ஷ+ஸ)^{௪}+௧0ஆ^{௨}+௬(ஷ+ஸ)^{௪}$, இவற்றின் தொகை யாது?
விடை. $௫(ஷ+ஸ)^{௪}+௫ஆ^{௪}+௧0ஆ^{௨}$.

௩. $ஆ^{௩}ஈ^{௨}+ஷ^{௩}-ஸ^{௪}$, $ஆ^{௩}ஈ^{௨}-ஷ^{௨}ஸ^{௪}+ஆ^{௪}ஈ^{௪}$, இவற்றின் தொகை யாது?

௪. $௫ஆ^{௨}ஈசி^{௩}+௩ஆ^{௨}ஈசி^{௩}+ஆ^{௨}ஈசி^{௩}+௨ஆ^{௨}ஈசி^{௩}$, இவற்றின் தொகை யாது!

௫. $௩ஆ^{௩}+ஈசி^{௩}+௫ஆ^{௩}+௨ஈசி^{௨}+ஆ^{௩}+௫ஈசி^{௨}+௬ஆ^{௩}+௨ஈசி^{௨}$, இவற்றின் தொகை யாது!

௬. $\frac{௧}{௨}(ஷஸ-சிம)^{௬}+௩(ஷஸ-சிம)^{௬}-\frac{௧}{௪}(ஷஸ-சிம)^{௬}+\frac{௩}{௪}(ஷஸ-சிம)^{௬}$ இவற்றின் தொகை யாது?

காதிதக்களைதல்.

௱௪௮. பிர. காதிதங்களைக் களையும்படி கழித்தல் விதியிற் கூறியவகையே சோதகசின்னங்களை மாற்றிய பின் காதிதக்கூட்டல் விதிப்படி கூட்டிக்கோள்.

௧. $(௨ஆ^{௪})$ இல் $(-௬ஆ^{௪})$ ஐக் களைய $(௮ஆ^{௪})$ சேடமாம்.

காதிதக்களைதல்வினா.

௨. $(-௩ஈ^{ன})$ இலே $(௪ஈ^{ன})$ ஐக்களை.
௩. $(௩ண^{௨}ஈ^{௬})$ இலே, $(௪ண^{௨}ஈ^{௬})$ ஐக் களை.
௪. $(ஆ^{௩}ஈ^{ன})$ இல் $(ஆ^{௩}ஈ^{ன})$ ஐக் களை.
௫. $௫(ஆ-ண)^{௬}$, இல் $௨(ஆ-ண)^{௬}$ ஐக் களை.
௬. $௬ஆ(ஆ+ஈ)^{௪}$, இல் $ஆ(ஆ+ஈ)^{௪}$ ஐக் களை.
௭. $(௧௭ஆ^{௨}ஷ^{௩}+௫ஷஸ^{௨})$ இல் $(௧௨ஆ^{௨}ஷ^{௩}-௪ஷஸ^{௨})$ ஐக் களை.

௮. $௩ஆ^{௩}(ஈ^{௨}-ஆ)^{௩}$ இல் $ஆ^{௩}(ஈ^{௨}-ஆ)^{௩}$ ஐக் கவா.

௯. $(ஆ^{௨}+ஈ^{௩}+ஷ^{௩}ஸ^{௪})$ இல் $(ஆ^{௫}ஈ^{௬}-ஷ^{௨}ஸ^{௩})$ ஐக்கவா.

௧௦. $௫(ஷ^{௩}+ஸ^{௪})^{௩}$ $௩(ஆ^{௨}ஈ^{௩})^{௫}$ இல், $-௩(ஆ^{௨}ஈ^{௩})+௪(ஷ^{௩}+ஸ^{௪})^{௩}$ ஐக் கவா.

௧௧. $௨ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}+௩(ஆ-ஈ)^{௩}$ இல், $ஷ(ஆ-ஈ)^{௩}+௩(ஆ-ஈ)$ ஐக் கவா.

௧௨. $\frac{௧}{௨}(ஷ+ஸ)^{௨}+\frac{௧}{௩}(ஆ+ஈ)^{௩}$ இல், $\frac{௧}{௪}(ஷ+ஸ)^{௨}+\frac{௨}{௬}(ஆ+ஈ)^{௨}$, ஐக் கவா.

காதிதப்பெருக்கல்.

௩௪௯. பிர. காதிதங்களை மற்றேந்த இராசியையும் போலவே பெருக்கறிகுறி யிட்டாவது, இடாதாவது ஒன்றின்பின் ஒன்ருக வரைவதுதான் காதிதப்பெருக்கலாம். உ-ம்.

$(ஆ^{௩})$ ஐ, $ஈ^{௨}$ இனுற் பெருக்கினுல் $(ஆ^{௩}ஈ^{௨})$ குணிதமாம்.
$(ஷ^{௩})$ ஐ $(ஆ^{ன})$ இனுற்பெருக்க $(ஷ^{௩}ஆ^{ன})$ குணிதமாம்.

பெருக்கவேண்டிய காதிதங்களின் மூலாட்சரங்களாவது, இலக்கங்களாவது சமமாய்வரில் குணிதமறியும்படி சூசிகளின் தோகையை அந்த மூலரூபத்துக்குச் சூசியாகவரையலாம். உ-ம்.

$(ஆ^{௩})$ ஐ $(ஆ^{௬})$ இனுற் பெருக்க $(ஆ^{௯})$ குணிதமாம்.

இப்படியே $(டி^{ன})\times(டி^{ம})=(டி^{ன+ம})$ குணிதமாம். ஆகையால் காதிதங்களைப் பெருக்கும்படி,

பொதுவிதி.

௧. ஒரே மூலரூபத்தையுடைய காதிதங்களைப் பெருக்கும்படி அவற்றின் சூசிகளைக் கூட்டு.

௨. காதிதங்களுக்கு வர்ணமுண்டானுல் அவ்வர்ணங்களை ஒன்ருகப் பெருக்கிக் குணிதத்தை அட்சரத்தின் முன் வரை.

௩. வெவ்வேருன மூலரூபங்களையுடைய காதிதங்களைப் பெருக்கவேண்டில், அந்தக் காதிதங்களைப் பெருக்கறிகுறியிட்டாவது, இடாமலாவது ஒன்றின் பின்னென்று வரை. உ-ம்.

௧. $ஆ^{௨}+ஆ^{௬}=ஆ^{௨+௬}=ஆ^{௮}$.

௨. $ஷ\timesஷ^{௨}\timesஷ^{௩}=ஷ^{௧+௨+௩}=ஷ^{௬}$.

௩. $௪ஆ^{ன}\times௨ஆ^{ன}=௮ஆ^{௨ன}$.

௪. $௩ஷ^{௪}\times௨ஷ^{௩}=௬ஷ^{௭}$.

௫. $ஷ^{௩}+ஷ^{௨}ஸ+ஷஸ^{௨}+ஸ^{௩}$ என்றதை $(ஷ-ஸ)$ ஆற்பெருக்கினுற் குணிதம யாது?

௬. $ஆ^{-௨}\timesஆ^{-௩}=ஆ^{-௫}$ இது விலோமகாதிதகுணனத்திற்கு உதாரணம். இந்தக் குணனமும் முந்தின விதியிலடங்கும்.

௭. $ஸ^{-ன}$, $ஸ^{-ம}$, $ஸ^{-௪}$, இவற்றின் குணிதம் யாது?

௮. $ஆ^{-௨}$, $ஆ^{-௩}$, $ஆ^{-௮}$, இவற்றின் குணிதம் யாது?

௯. $ஆ^{-௨}$, $ஆ^{௩}$, $-ஆ^{-௫}$, இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௦. $ஆ^{-ன}$, $ஆ^{ம}$, $-ஆ^{௨ன}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௧. $ஸ^{-௨}$, $ஸ^{௨}$, $-ஸ^{-ன}$, $ஸ^{-௩}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௨. $(ஆ+ஈ)^{௨}$, $(ஆ+ஈ)^{௨}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௩. $(ஆ-ஸ)^{௩}$, $(ஆ+ஸ)^{௩}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௪. $(ஆ^{௨}-ஸ^{௨})$, $(ஆ^{௨}+ஸ^{௨})$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௫. $(ஆ^{௪}-ஸ^{௪})$, $(ஆ^{௪}+ஸ^{௪})$ இவற்றின் குணிதம்யாது?

௧௬. $(ஆ^{௨}+ஆ^{௪}+ஆ^{௬})$, $(ஆ^{௨}-௧)$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௭. $௩ஆ(ஷ^{௨}-ஸ^{௩})^{௩}$, $௨ஆ(ஷ^{௨}+ஸ^{௩})^{௪}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௮. $\frac{௧}{௨}(ஆ^{௨}+ஈ^{௩})^{௩}$, $\frac{௧}{௨}(ஆ^{௨}+ஈ^{௩})^{௨}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௧௯. $(ஆ^{௩}-ஈ^{௨})$, $(ஆ^{௩}+ஈ^{௨})$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௨௦. $(ஷ^{௩}+ஷ^{௨}ஸ+ஷஸ^{௨}+ஸ^{௩})$, $(ஷ+ஸ)$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௨௧. $(ஆ^{௪}-௨ஆ^{௩}ஈ+௪ஆ^{௨}ஈ^{௨}-௮ஆஈ^{௩}+௧௬ஈ^{௪})$, $(ஆ+௨ஈ)$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

௨௨. $(ஆ^{௨}+ஈ)$, $(ஆ^{௨}-௮)$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

காதிதப்பிரித்தல்.

௱ருய. பிர. காதிதங்களை மற்றெந்த இராசிகளையும் போல வே பிரிக்கலாம். எப்படியென்றல்,

(க) பாச்சியமும் பாககமும் ஒரே மூலரூபங்களை க்கொண்ட காதிதங்களானுற் பாககசூசியைப் பாச் சியசூசியிற் களைந்தும்;

(உ) பாச்சிய பாககங்களில் வர்ணமுண்டானுல் பாககவர்ணத்தாற் பாச்சியவர்ணத்தைப் பிரித்தும்;

(ங) பாககபாச்சியங்கள் வகுராசியானல், வகுரா சிகளைப் பிரிக்கும்படி சோன்ன விதிப்பிரகாரம் பிரி த்துங் காதிதங்களுக்குப் பிரித்தற்கிர்த்தியத்தை இயற்று. (எஉ. பிர.)

உதாரணம்.

க. $ஸ^{ங} \div ஸ^{உ} = ஸ^{ங-உ} = ஸ^{க}$.

உ. $ஸ^{உம} \div ஸ^{ம} = ஸ^{உம-ம} = ஸ^{ம}$.

ங. $கஉ\,(ஆ+ஈ)^{ன} \div ங(ஆ+ஈ)^{ங} = \frac{கஉ}{ங}\,(ஆ+ஈ)^{ன-ங} = ச(ஆ+ஈ)^{ன-ங}$.

ச. $(ஆ^{ங}+ஷ^{ங}) \div (ஆ+ஷ) = ஆ^{உ} - ஆஷ + ஷ^{உ}$.

ரு. $ஆ^{-ரு} \div ஆ^{-ங} = ஆ^{-ரு+ங} = ஆ^{-உ}$. இது விலோமகா திதங்களைப் பிரித்தற்கு உதாரணம். இதுவும் முந்தினவிதியில் அடங்கிய வாறுகாண்க.

சா. $(கி^{உ})$ ஐ $(கி^{-க})$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

எ. $(சாஆ^{ன})$ ஐ $(உஆ^{-ங})$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

அ. $(ஈஆ^{ங})$ ஐ $(ஆ)$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கூ. $(ஈ^{ங})$ ஐ $(ஈ^{ரு})$ ஆலரித்தாற் பாசிதிம் யாது!

க0. $(ஆ^{ச})$ ஐ $(ஆ^{எ})$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கக. $(ஆ^{ங}+ஸ^{ங})^{ம}$ ஐ $(ஆ^{ங}+ஸ^{ங})^{எ}$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கஉ. $(ஈ+ஷ)^{ன}$ ஐ $(ஈ+ஷ)$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கங. $(ஆ^{ங}+ஷ^{ங})$ ஐ $(ஆ+ஷ)$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கச. $(ஆ^{ச}+சஷ^{ச})$ ஐ $(ஆ^{உ}-உஆஷ+ஷ)^{உ}$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கரு. $(ஷ^{சா}-க)$ ஐ $(ஷ-க)$ ஆலரித்தாற் பாசிதம் யாது?

கசா. $(ஆ^{ச}+உஆ^{ங}ஈ+உஆ^{உ}ஈ^{உ}+ஆஈ^{ங})$ ஐ $(ஆ^{ங}+ஆ^{உ}ஈ+ஆஈ)^{உ}$ ஆலரி.

கஎ. $(ஈ^{அ}-கசாசி^{அ})$ ஐ $(ஈ^{உ}-உசி^{உ})$ ஆலரி.

கஅ. $(ஆ^{சா}-ஆ^{ரு}ஷ-ஆ^{உ}ஷ^{ங}+உஷ^{ச})$ ஐ $(ஆ^{ச}-ஷ^{ங})$ ஆலரி.

ககூ. $(ஆ^{ச}+சஆ^{ங}ஈ+சாஆ^{உ}ஈ^{உ}+சஆஈ^{ங}+ஈ^{ச})$ ஐ $(ஆ+ஈ^{உ})$ ஆலரி.

உ0. $(அஷ^{ங}-ஸ^{ங})$ ஐ $(உஷ-ஸ)$ ஆலரி.

உக. $(ஷ^{ங}-ஙஆஷ^{உ}+ஙஆ^{உ}ஷ-ஆ^{ங})$ ஐ $(ஷ-ஆ)$ ஆலரி.

உஉ. $(உஸ^{ங}-ககூஸ^{உ}+உசாஸ-கசா)$ ஐ $(ஸ-அ)$ ஆலரி.

உங. $(ஷ^{சா}-க)$ ஐ $(ஷ+க)$ ஆலரி.

உச. $(சஷ^{ச}-கூஷ^{உ}+சாஷ-ங)$ ஐ $(உஷ^{உ}+ஙஷ-க)$ ஆலரி.

உரு. $(ஆ^{ச}+சஆ^{உ}ஈ+ஙஈ^{ச})$ ஐ $(ஆ+உஈ)$ ஆலரி.

உசா. $(ஷ^{ச}-ஆ^{உ}ஷ^{உ}+உஆ^{ங}ஷ-ஆ^{ச})$ ஐ $(ஷ^{உ}-ஆஷ+ஆ^{உ})$ ஆலரி.

உஎ. $(ஸ^{உ}-ஆ^{உ})$ ஐ $(ஸ-ஆ)$ ஆலரி.

உஅ. $(ஸ^{ங}-ஆ^{ங})$ ஐ $(ஸ-ஆ)$ ஆலரி.

உகூ. $(ஸ^{ச}-ஆ^{ச})$ ஐ $(ஸ-ஆ)$ ஆலரி.

ங0. $(ஸ^{ரு}-ஆ^{ரு})$ ஐ $(ஸ-ஆ)$ ஆலரி.

கூ. மௌல அதிகாரம்.

[Radical Quantities]

௱ருக. பிர. காதிதம் பிறத்தற்கு எந்த இராசி தன்னைத் தன்னுற் பெருக்கப்பெற்றதோ அந்த இராசியே மூலமாம். (பிர. ஙஉ.)

உ-ம்.

$(ஈ^{ங})$ என்ற காதிதம் பிறத்தற்கு (ஈ) தன்னைத் தன்னுற் பெருக்கப்பெற்றதால், (ஈ) ஐ $(ஈ^{ங})$ க்கு மூலமென்பர். $(ஈ^{ங})$ பிறக்கும்படி $ஈ \times ஈ \times ஈ$, என்று மூன்றுதரம் (ஈ) குணங்கமாய் நிற்கின்றபடியால்,

ஒரு இராசி பிறக்கும்படி பலமுறை எந்த இராசி குணங்கமாய்நின்றதோ அந்த இராசி மூலமெனினுமாம்.

காதிதமான இராசி பிறத்தற்கு மூலத்தை எத்தனைதரங் குணங்கமாகக்கொண்டதென்பதை மூலநாமம் விளக்கும். எப்படியென்றல்,

(உ.) (கசா) இன் நான்காம் மூலம் என்னுமிடத்து, $உ \times உ \times உ \times உ$, என்று நான்குதரம் மூலங் குணங்கமானது வெளிப்படையாம். அப்படியே $(ஆ^{ங})$, $(ஆ^{ச})$ இன் வர்க்கமூலமென்புழி, $ஆ^{ங} \times ஆ^{ங}$ என்று மூலம் இரண்டுதரங் குணங்கமானதென்றறியலாம்.

௱௫௨. பிர. வீசகணிதர்கள் மூலத்தை இரண்டுவிதமாக விளக்குவார்கள். இவ்விரண்டு விதங்களுள் மூலமறிகுறியிட்டு விளக்கும் விதம் (௩௨ம்) பிரகரணத்திற் காட்டியபடி ; உ-ம்.

(ஆ) இன் கனமூலத்தை விளக்கும்படி $\sqrt[௩]{ஆ}$ என்று வரைவர். மூலமறிகுறியின் மேற்கிடக்கின்ற (௩) என்ற எண்வணத்தான் மூலசூசியென்பது. அது ஆ பிறத்தற்கு மூலத்தை இத்தனை தரந் துணுங்கமாய்க்கொள்ள வேண்டுமென்று காட்டுகின்றது.

மூலத்தை விளக்கும் மற்றவிதம் எப்படியென்றால், நிர்க்கண்டத்தைப் போகமாகவும் சூசியை ஆரகமாகவும் பின்னரூபத்தில் நிறுத்துவது. உ-ம். ஆ இன் கனமூலமென்பதை விளக்க $(ஆ)^{\frac{௧}{௩}}$ என்று வரையலாம். (ஆ) இன் (ன) மூலம் $= \sqrt[ன]{ஆ} = (ஆ)^{\frac{௧}{ன}}$

௱௫௩. பிர. காதிதத்தில் இருண நிர்க்கண்டத்தை வழங்குமாறுபோல மூலத்திலும் இருண சூசியை வழங்குவதுண்டு. உ-ம்.

$ஆ^{-\frac{௧}{௨}}$. இது $\frac{௧}{ஆ^{\frac{௧}{௨}}}$ என்பதற்குச்சரி. $\frac{௧}{ஆ^{\frac{௧}{௩}}} = ஆ^{-\frac{௧}{௩}}$. $\frac{௧}{ஆ^{\frac{௧}{ன}}} = ஆ^{-\frac{௧}{ன}}$

௱௫௪. பிர. இந்த உதாரணங்களில் சூசியைப் பின்னரூபமாக வரைந்தபோது போகங்கள் (௧) ஆக நின்றன. இனி (௧) இற் பெருத்த போகங்கள் வருமாறு ;

$(ஈ)^{\frac{௨}{௩}} = \sqrt[௩]{ஈ^{௨}}$; $டி^{\frac{௩}{௪}} = \sqrt[௪]{டி^{௩}}$ பிறவுமன்ன.

இவ்விடத்து $\frac{௨}{௩}$, $\frac{௩}{௪}$ என்ற பின்னங்களின் போகங்கள் நிர்க்கண்டமும், ஆரகஞ் சூசியுமாம். போகம் (௧) ஆனால் நிர்க்கண்டமும் (௧) ஆம்.

௱௫௫. பிர. இந்தப் பின்னங்களினிடத்தே இவற்றுக்குச் சமமான வேறு பின்னங்களை வரைவது வழுவாகாது. உ-ம்.

௧. $ஆ = ஆ^{\frac{௨}{௨}} = ஆ^{\frac{௩}{௩}} = ஆ^{\frac{ன}{ன}}$.

௨. $ஆ^{\frac{௨}{௩}} = ஆ^{\frac{௪}{௬}} = ஆ^{\frac{௮}{௧௨}}$

இப்பின்னங்களைத் தசமபின்னங்களாய் வரையினும் அர்த்த வழுவுண்டாகாது. உ-ம்.

$ஆ^{\frac{௧}{௨}} = ஆ^{0.௫}$; $ஆ^{\frac{௧}{௪}} = ஆ^{0.௨௫}$.

தசமபின்னமாக வரையும்போது அந்தப் பின்னம் பெரும்பாலும் வரையறைகடந்து அநந்தராசியாகும். உ-ம்.

$ஆ^{\frac{௧}{௩}} = ஆ^{0.௩௩௩௩}$ முதலியன

மூலகிரகணம்.

௱௫௬. பிர. காதசரணமும் மூலகிரகணமும் ஒன்றற்கொன்று விரோதமான கிர்த்தியங்கள்.

காதிதம் பிறத்தற்காய் எந்த இராசி தன்னைத் தன்னாலே பெருக்கப் பெற்றதோ அந்த ராசியாகிய மூலத்தை அறியுங் கிர்த்தியம் மூலகிரகணமாம்.

அல்லது சமதுணுங்கங்களாய் இராசிகளைப் பிரிக்குங் கிர்த்தியம் மூலகிரகணமெனினுமாம். மூலகிரகணம், கழித்தல், பிரித்தல் என்ற இம்மூன்றிற்கும் வித்தியாசம் யாதென்றால்; கழித்தல் ஒரு இராசியை இரண்டு கூறுகளாகச் செய்தல், பிரித்தல் ஒரு இராசியை இரண்டு துணுங்கங்களாக்கல், மூலகிரகணம் ஒரு இராசியைச் சமதுணுங்கங்களாக்கல், ஆகையால் இம்மூன்றும் வேறுவேறான கிர்த்தியங்களாம்.

ஒற்றையிராசிக்கு மூலகிரகணவிதி.

௧. எந்த மூலத்தைக் கொள்ளல்வேண்டுமோ அந்த மூலத்தின் சூசியினால் மூலமேடுபடவேண்டிய இராசியின் நிர்க்கண்டத்தை அரி, அல்லது கொள்ள வேண்டிய மூலத்தை மூலமறிகுறியினால் விளங்கத் தீட்டு.

௨. மூலங் கொள்ளல்வேண்டிய இராசிக்கு வர்ணமுண்டானால் அவ்வர்ணத்திற்கு மூலமறிந்து இதனை முன்பறிந்த மூலத்தின் முன்னாக வரை. உ-ம்.

௧. $(ட^{௪})$ என்ற இராசிக்கு வர்க்கமூலங் கொள்ளும்படி, நிர்க்கண்டமாகிய (௪) ஐச் சூசியாகிய (௨) இனாலரித்தால் $ட^{\frac{௪}{௨}} = (ட^{௨})$ என்றும் ; $(ட^{௯})$ என்ற இராசிக்குக்கனமூலங்கொள்ளும்படி, (௯), ஐ, ௩, க்கீய $ட^{\frac{௯}{௩}} = ட^{௩}$, என்றும் வரும். இந்த மூலங்களை $\sqrt{ட^{௪}}$, $\sqrt[௩]{ட^{௯}}$ என்றும் வரையலாம்.

௨. $(௨௭ஆ^{௯})$ என்ற இராசியின் கனமூலத்தைக் கொள்ளும்

படி முன்போல நிர்க்கண்டத்தை சூசிக்கீந்தால் $\text{ஆ}^{\frac{௯}{௩}} = \text{ஆ}$ என்றும், வர்ணத்திற்குக் கனமூலங்கொண்டால் $\sqrt[௩]{\text{உஎ}} =$ என்றும் வர்ணமூலத்தை அட்சரமூலத்தின் முன் வரை $௩\text{ஆ}^{௩}$ என்றும் வரும். இதவை $\sqrt[௩]{\text{உஎஆ}^{௯}}$ என்றும் $௩\sqrt[௩]{\text{ஆ}}$ என்றும் வரையினுமாம்.

விஞ.

௩. (ஆஈ) இன் ஐந்தாம் மூலம் யாது?
௪. ($\text{ஆ}^{௨}$) இன், ண, மூலம் யாது!
௫. (உடி—ஷ) இன், எம், மூலம் யாது?
௬. $(\text{ஆ}—\text{ஈ})^{௨}$ இன், ௫ம், மூலம் யாது?
௭. ($\text{ஆ}^{\frac{௧}{௨}}$ இன் கனமூலம் யாது?
௮. (ஆ—க) இன் ௪ம் மூலம் யாது?
௯. ($\text{ஆ}^{\frac{௨}{௩}}$) இன் கனமூலம் யாது?
௧௦. ($\text{ஷ}^{\text{ம}}$) இன் ண, மூலம் யாது?
௧௧. ($\text{ஆ}^{௬}$) இன் ௬—ம, மூலம் யாது?
௧௨. ($\text{ஷ}^{\text{அ}}$) இன் ௪—ம, மூலம் யாது?
௧௩. ($\text{ஷ}^{\text{ம}}$) இன் வர்க்கமூலம் யாது?
௧௪. ($\text{டி}^{௩}$) இன் (௫ம்) மூலம் யாது?
௧௫. ($\text{ஆ}^{௩}$) இன் அம், மூலம் யாது?

௫௭. பிர. பல குணங்கங்களோடு கூடிநிற்கின்ற ஒரு இராசியின் மூலத்தைக் கிரகிக்கும்படி, அந்தந்தக் குணங்கத்தின் மூலத்தைத் தனித்தனி கிரகித்தபின்பு மூலங்களை ஒன்ருய்ப் பெருக்கலாம். அல்லது குணங்கங்களை ஒன்ருய்ப் பெருக்கியபின்பு குணிதத்திற்கு மூலங்கொள்ளலாம். உ-ம்.

$$\sqrt{\text{ஆஈ}} = \sqrt{\text{ஆ}} \times \sqrt{\text{ஈ}}. \quad \sqrt[௫]{௩\text{ஸ}} = \sqrt[௫]{௩} \times \sqrt[௫]{\text{ஸ}}.$$

$$\sqrt[௬]{\text{ஆஈண}} = \sqrt[௬]{\text{ஆ}} \times \sqrt[௬]{\text{ஈ}} \times \sqrt[௬]{\text{ண}} = \text{ஆ}^{\frac{௧}{௬}}\,\text{ஈ}^{\frac{௧}{௬}}\,\text{ண}^{\frac{௧}{௬}}.$$

௫௮. பிர. பின்னத்துக்கு மூலங்கொள்ளும்படி போகமூலத்தை ஆரக மூலத்துக்கீ. உ-ம்.

$$\sqrt{\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}} = \frac{\sqrt{\text{ஆ}}}{\sqrt{\text{ஈ}}} = \frac{\text{ஆ}^{\frac{௧}{௨}}}{\text{ஈ}^{\frac{௧}{௨}}}; \quad \sqrt[௩]{\frac{\text{ஈ}}{\text{ஒ}}} = \frac{\sqrt[௩]{\text{ஈ}}}{\sqrt[௩]{\text{ஒ}}} = \frac{\text{ஈ}^{\frac{௧}{௩}}}{\text{ஒ}^{\frac{௧}{௩}}}.$$

௫௯. பிர. இனி மூலகிரகணத்திலே சின்னங்களை நிச்சயிக்கும்படி;

க. எந்த இராசியின் சின்னமும் அந்த இராசியின் ஒற்றித்த மூலத்தின் சின்னமுஞ் சமமாம், என்றும்;

உ. தனராசியின் இரட்டைமூலம் உபயார்த்தமுடையதென்றும்,

௩. இருணராசியின் இரட்டைமூலங் கணிதாதீதமாமென்றும் அறி. உ-ம்.

(+ஆ) இன் வர்க்கம் $= +\text{ஆ}^{௨}$.
(—ஆ) இன் வர்க்கம் $= +\text{ஆ}^{௨}$.
(+ஆ) இன் கனம் $= +\text{ஆ}^{௩}$.
(—ஆ) இன் கனம் $= -\text{ஆ}^{௩}$. என்றிப்படி (ஆ) தனராசியானபோதும் இருணராசியானபோதும், கம், ௩ம், காதிதங்களின் சின்னம் அந்தந்த இராசிகளின் சின்னமேப்படி அப்படி நின்றபடியால், மூலங்கொள்ளும்போதும் அது அந்தப்படியே நிற்கும். எந்தப்படியென்ருல், ($+\text{ஆ}^{௩}$) இன் கனமூலம் $= +\text{ஆ}$. ($-\text{ஆ}^{௩}$) இன் கனமூலம் (—ஆ). இதில் ஒற்றித்தமூலமென்றது கம். ௩ம். ௫ம். மூலமுதலிய வற்றை. உம். ௪ம். ௬ம். மூலமுதலியன இரட்டைமூலமாம்.

தனராசியின் இரட்டைமூலம் உபயார்த்தமுடையதென்றது எவ்வாறென்ருல், ($\text{ஆ}^{௨}$) இன் வர்க்கமூலத்தை (+ஆ) ஆகவும் (—ஆ) ஆகவுங் கொள்ளலாம். $(-\text{ஆ})^{௨} = +\text{ஆ}^{௨}$. அப்படியே $(+\text{ஆ})^{௨} = +\text{ஆ}^{௨}$. இப்படித் தனராசியின் இரட்டைமூலந் தனமுமாய் இருணமுமாய் இரண்டு அர்த்தத்தை விளவித்து அவ்விரண்டு அர்த்தத்துக்கும் போதமையவாய்க்கிடத்தல்பற்றித் தனராசியின் இரட்டைமூலம் உபயார்த்தமுடையதென்றது.

இருணராசியின் இரட்டைமூலங் கணிதாதீதம் என்றதெப்படியென்ருல், இருணராசிக்கு இரட்டை மூலத்தைக்கொள்ளும்போது அந்த மூலந் தனமாய் நின்ருவது இருணமாய்நின்ருவது காதகரணமடைந்து அந்த இருணராசியைப் பிறப்பிக்கமாட்டாது. உ-ம். ($-\text{ஆ}^{௨}$) இன் வர்க்கமூலம் (—ஆ) என்ருல் $-\text{ஆ} \times -\text{ஆ}$, ($-\text{ஆ}^{௨}$) ஆகாது. அது ($+\text{ஆ}^{௨}$) ஆம். இனி ($-\text{ஆ}^{௨}$) இன் வர்க்கமூலம் +ஆ, என்ருல், $+\text{ஆ} \times +\text{ஆ}, = (-\text{ஆ}^{௨})$ ஆகாது. அது ($+\text{ஆ}^{௨}$) ஆம். ஆகையால் ($-\text{ஆ}^{௨}$) இன் வர்க்கமூலங் கணிதகிர்த்தியத்தாற் கிரகிக்கப்படமாட்டாததாம், எனவே இருணராசியின் இரட்டைமூலங் கணிதாதீதமென்பது வெளிப்படை.

௱கூ௰. பிர. துவிராசிவர்க்கத்துக்கு வர்க்கமூல கொள்ளல்வேண்டுமேயானுல், பூரணவர்க்கங்க ய்க் கிடக்கின்ற இராசிகளின் மூலமே துவிராசி உறுப்புகளேன்றறிந்து அவற்றை வர்க்கமல்லாத ற்ற இராசியின் சின்னத்திறைற் பிணே. உ-ம்.

$ஆ^{உ} + உஆஈ + ஈ^{உ}$ என்ற துவிராசிவர்க்கத்திற் பூரண க்கங்களாவன. $ஆ^{உ}$, $ஈ^{உ}$ இவற்றின் வர்க்கமூலங்களாவ ஆ, ஈ, வர்க்கமல்லாத மற்ற இராசி உஆஈ. இதின் சின்ன +. இந்தச் சின்னத்தால் ஆ, ஈ, என்ற மூலங்களை இணை $ஆ + ஈ$, வர்க்கமூலமாம். அப்படியே $ஆ^{உ} - உஆஈ + ஈ^{உ}$, எ றதற்கு, $ஆ - ஈ$, வர்க்கமூலமாம். இந்தப் பிரகாரமே பின் ம் வினுக்களுக்கு விடையறிக.

க. $ஷ^{உ} - உஷ + க$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

உ. $ஷ^{உ} + உஷஸ + ஸ^{உ}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

ங. $ஆ^{உ} + ஆ + \frac{க}{ச}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

ச. $ஆ^{உ} + \frac{ச}{ங} ஆ + \frac{ச}{கூ}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

ரு. $ஆ^{உ} + ஆஈ + \frac{ஈ^{உ}}{ச}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

சு. $ஆ^{உ} + \frac{உஆஈ}{ஒ} + \frac{ஈ^{உ}}{ஒ^{உ}}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

௱கூக. பிர. எல்லா இராசிகளுக்கும் வர்க்கமூலங்கொள்ள

போதுவிதி.

க. வர்க்கமூலங் கொள்ளல்வேண்டிய இராசியு றுப்புகளின் பெரிய காதித உறுப்பு முதலிலும், அவ் வுறுப்பிற் குறைந்த காதிதங்கள் காதிதப் பெருமை சிறுமைப்படி வரிசையாகவும் நிற்கும்படி வரிசை செய்து, முதலுறுப்பினது வர்க்கமூலமே அறியவே ண்டிய வர்க்கமூலத்திற்கு முதலுறுப்பாகும்படி தீட் டி அம்மூலத்தினது வர்க்கத்தை முதலுறுப்பிற் களை ந்து ;

உ. முதலுறுப்புக்கயலான இரண்டுறுப்புக்களை

றக்கி முன் கண்ட மூலத்திரட்டியால் அரித்துப் பற்ற ஈவை மூலத்தோடும் பாககத்தோடுமிணையத் ட்டிப் பின்பு அந்த ஈவினுற் பாககமுற்றையுந்தா கிக் குணிதத்தைப் பாச்சியத்திற் றள்ளி ;

ங. இன்னும் இருக்கின்ற இரண்டு மூன்றுறுப்பு ளை முன்போலவேயிறக்கி முந்தின கிரித்தியப்படி செய். உ-ம்.

$ஆ^{உ} + உஆஈ + ஈ^{உ} + உஆஒ + உஈஒ + ஒ^{உ}$ என்ற வகுரா சிக்கு வர்க்கமூலஞ் சொல்லும் வகை.

$ஆ^{உ} + உஆஈ + ஈ^{உ} + உஆஒ + உஈஒ + ஒ^{உ}$ ($ஆ + ஈ + ஒ$

$ஆ^{உ}$ முதற்சோதகம்.

($உஆ + ஈ$) * $உஆஈ + ஈ^{உ}$,

$× ஈ =$) $உஆஈ + ஈ^{உ}$. இரண்டாஞ் சோதகம்.

* * $உஆஒ + உஈஒ + ஒ^{உ}$. [கம்.

($உஆ + உஈ + ஒ$) $× ஒ =$) $உஆஒ + உஈஒ + ஒ^{உ}$. ஙஞ். சோத

* * *

க. $க - சஆ + சஆ^{உ} + உஸ - சஆஸ + ஸ^{உ}$ என்றதின் வர் க்கமூலம் யாது?

உ. $ஆ^{சு} - உஆ^{ரு} + ஙஆ^{ச} - உஆ^{ங} + ஆ^{உ}$ என்றதின் வர்க்க மூலம் யாது?

ங. $ஆ^{ச} + சஆ^{உ}ஈ + சஈ^{உ} - சஆ^{உ} - அஈ + ச$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

௱கூஉ. பிர. வகுராசியின் எந்த மூலத்தையும் அறிய,

போதுவிதி.

க. மூலங்கொள்ளல்வேண்டிய வகுராசியட்சரங் களிலொன்றைத் தெரிந்துகொண்டு அந்த அட்சரத்தி னது பெரிய காதித உறுப்பை முதலுறுப்பாகவும் ம ற்றை உறுப்புகள் அவ்வட்சரத்தின் காதிதப்பெரு மை சிறுமைப்படி வரிசையாக நிற்கவும் தீட்டியபி ன்பு,

உ. முதலுறுப்புக்கு மூலங்கொண்டு அதனை அறி யவேண்டிய மூலத்தின் முதலுறுப்பாக வரைந்து,

ங. இந்த மூலத்தின் காதிதத்தை வகுராசியிற் க ளைந்து நின்ற சேடத்தை அரிக்கும்படி, அறியவேண்

டிய மூலசூசி எத்தனையோ அத்தனையிலொன்று
றைந்த காதிதமாகும்படி மூன் தீட்டிய மூலத்தை
காதித்து அக்காதிதத்தை மூலசூசியாற் பெருக்
பாககமாகக்கொண்டுந்து பெற்ற ஈவை முந்தின
லத்தோடிணைய வரைந்து,

ச. மூலமாக வரையப்பட்ட எல்லாராசிகளையு
காதித்துக் காதிதத்தை வகுராசியிற் களைந்து சே
தை முந்தின பாககத்துக்கு முன்போலவேயீந்து
தப் பிரகாரமே மூலகிரகணத்தை நடத்திக்கொள்.

உதாரணம்.

$ஆ^{சு} + ஙஆ^{ரு} - ஙஆ^{ச} - கஙஆ^{ங} + சுஆ^{உ} + கஉஆ - அ$, எ
ற வகுராசிக்குக் கனமூலங் கொள்ளும்வகை.

$ஆ^{சு} + ஙஆ^{ரு} - ஙஆ^{ச} - கஙஆ^{ங} + சுஆ^{உ} + கஉஆ - அ$ [ஆ
[$+ ஆ - உ$. மூல

$ஆ^{சு}$ முதற்சோதகம்.

$ஙஆ$) $ஙஆ^{ரு} - ஙஆ^{ச}$ முதலியன முதற்சேடம்.

$ஆ^{சு} + ஙஆ^{ரு} + ஙஆ^{ச} + ஆ^{ங}$. இரண்டாஞ் சோதக
$ஙஆ^{ச}$) $- சுஆ^{ச}$ முதலியன இரண்டாஞ் சேடம்.

$ஆ^{சு} + ஙஆ^{ரு} - ஙஆ^{ச} - கஙஆ^{ங} + சுஆ^{உ} + கஉஆ - அ$. மூ
ன்றாஞ் சோதகம்.

க. $ஆ^{ச} + அஆ^{ங} + உசஆ^{உ} + ஙஉஆ + கசு$ என்றதின், ச
மூலம் யாது?

உ. $ஆ^{ரு} + ருஆ^{ச}ஈ + கOஆ^{ங}ஈ^{ங} + கOஆ^{உ}ஈ^{ங} + ருஆஈ^{ச}$
$ஈ^{ரு}$, எனறதின், ரும் மூலம் யாது?

ங. $ஆ^{ங} - சுஆ^{உ}ஈ + கஉஆஈ - அஈ^{ங}$ என்றதின் கனமூல
யாது?

ச. $சஆ^{உ} - கஉஆஈ + கூஈ^{உ} + கசுஆண - உசஈண + க$
$ண^{உ}$ என்றதின் வர்க்கமூலம் யாது?

ஙசுங. பிர. எந்த மூலத்தினது அர்த்தம் எண்ணளவாற்
யாய் விளக்கப்படக்கூடாததோ அந்த மூலங் கரணமாம். உ
$\sqrt{உ}$ என்பது கரணம். எப்படியென்றால் (உ) இன் வர்க்க
லம் (க) என்றால்; ஒரொன்று ஒன்றும். (உ) என்றால் ஈரிரண்
நான்காம். ஆகையால் (உ) இன் வர்க்கமூலம் (க) க்கும் (
க்குமிடையே சரிவர எண்ணளவாற் குறிக்கப்படமாட்ட
தாய்க் கிடக்கின்றது. ஆகையால் இது கரணம். கரண
லாதஇராசிகள் எவை அவை விகரணமாம். மூலசின்னம்

ற்று நிற்கின்ற எந்த இராசிக்கும் மௌலமென்பது பொதுப்பெ
யர். மௌலமல்லாத இராசிகள் அமௌலமாம்.

மௌலதிரிபு.

ஙசுஉ. பிர. அமௌலத்தை மௌலமாக மாற்று
ம்படி அறியவேண்டிய மௌலத்தின் சூசி எத்தனை
யோ அத்தனையாங்காதிதம் பிறக்கும்படி அமௌல
இராசியைக் காதித்துக் காதிதத்தை மூல சின்னத்
தோடிணைக்கலாம். உ--ம்.

(ஆ) என்ற அமௌலத்தை (ந) என்ற சூசியைப் பொருந்
திய மௌலமாக்கும்படி, (ஆ) வுக்கு (ந) காதிதம் பிறக்கும்ப
டி காதித்தால், ($ஆ^{ந}$) என்று வரும். இதற்கு மூலசின்னத்
தை இணைத்து வரைய $\sqrt[ந]{ஆ^{ந}}$ என்று அர்த்த விகாரமுறுமல்
மௌலரூபத்தை அடையும். அர்த்தவிகாரமுறுமல் என்றதெ
ப்படியென்றால் $\sqrt[ந]{ஆ^{ந}}$ என்றது (ஆ) என்ற இராசிக்குச் சம
மாகையால்; $\sqrt[ந]{ஆ^{ந}} = ஆ^{\frac{ந}{ந}} = ஆ$.

க. (ச) க்குக் கனமூலரூபம் யாது?

உ. (ஙஆ) க்கு நான்காம் மூலரூபம் யாது?

ங. ($\frac{க}{ங}$ ஆஈ) க்கு வர்க்கமூலரூபம் யாது?

ச. ங$\times$(ஆ$-$ஷ) க்குக் கனமூலரூபம் யாது?

ரு. ($ஆ^{உ}$) க்கு கனமூலரூபம் யாது?

சு. ($ஆ^{ங}ஈ^{ச}$) க்கு வர்க்கமூலரூபம் யாது?

எ. ($ஆ^{ம}$) க்கு (ந) மூலரூபம் யாது?

ஙசுங. பிர. வெவ்வேறான சூசிகளைத் தரித்துநிற்
கின்ற இராசிகளுக்குச் சமசூசிபுணர்த்தும்படி,

க. நிர்க்கண்டமுஞ் சூசியுங் கூடிய பின்னங்க
ளைப் பொது ஆரகபின்னங்களாக்கி,

உ. பொது ஆரகபின்னத்தின் போகம் எத்தனை
யோ அத்தனையாங்காதிதம் பிறக்கும்படி அந்தராசி
யைக் காதித்து,

ங. பொது ஆரகம் எத்தனை அத்தனையாம் மூலத்
தைக்கொள்ளு. உ--ம்.

$ஆ^{\frac{க}{ச}}$; $ஈ^{\frac{க}{சு}}$ என்ற இராசிகளுக்குச் சமசூசி புணர்த்தும்படி; $\frac{க}{ச}$; $\frac{க}{சு}$ என்ற ரூபங்களைப் போது ஆரகபின்னங்களாக்க அவை முறையே, $\frac{௩}{கஉ}$; $\frac{உ}{கஉ}$ என்றும். (அஅ. பிர.)

இனி (ஆ) (ஈ) என்ற இராசிகளை முறையே மூன்றும் இரண்டாம் காதிதமாக்க, $ஆ^{௩}$; $ஈ^{உ}$; என்று வரும். போது ஆரகம் (கஉ) ஆகையால் இந்தக் காதிதங்களுக்கு (கஉ) ம் மூலத்தைக்கொள்ள ;

$(ஆ^{௩})^{\frac{க}{கஉ}}$; $(ஈ^{உ})^{\frac{க}{கஉ}}$ விடையாம். இப்படிச் சமசூசி பிறப்பித்துங்கிர்த்தியத்தினால் அர்த்தவிகாரமுண்டாகாதென்றுணர்க.

க. $ஆ^{உ}$; $ஈ^{\frac{க}{௩}}$

உ. $ஷ^{\frac{க}{௩}}$; $ஸ^{\frac{க}{ம}}$;

௩. $ஆ + ஈ^{உ}$; $(ஷ — ஸ)^{\frac{உ}{௩}}$

ச. $உ^{\frac{க}{உ}}$; $௩^{\frac{க}{௩}}$;

ரு. $ஆ^{\frac{க}{உ}}$; $ஈ^{\frac{க}{ரு}}$;

சு. $ஷ^{\frac{உ}{௩}}$; $ரு^{\frac{க}{உ}}$;

இந்த இராசிகளுக்குச் சமசூசி புணர்த்து.

௱கூச. பிர. எந்த இராசிக்கும் அர்த்தவிகாரஞ் சேராமல் விரும்பிய சூசியைப் புணர்த்தும்படி ;

அந்த இராசியின் சூசியை விரும்பிய சூசிக் கீந்த ஈவை இராசிக்குச் சூசியாக வரைந்து பெற்ற ரூபத்தோடு விரும்பிய சூசியைத் தீட்டு. உ-ம்.

$(ஆ^{\frac{க}{சு}})$ என்ற இராசிக்கு $(\frac{க}{உ})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்தும்படி இராசியின் சூசியாகிய $(\frac{க}{சு})$ என்றதை விரும்பிய சூசியாகிய $(\frac{க}{உ})$ க்கீய, $(\frac{க}{௩})$, ஈவாம். எப்படியென்றால்; $\frac{க}{சு} \div \frac{க}{உ} = \frac{க}{சு} \times \frac{உ}{க} = \frac{உ}{சு} = \frac{க}{௩}$, (௱க. பிர.) இந்த ஈவை (ஆ) என்ற இராசிக்குச் சூசியாகவரைய, $ஆ^{\frac{க}{௩}}$ என்றும் விரும்பிய சூசியாகிய $(\frac{க}{உ})$ ஐத்தீட்ட, $(ஆ^{\frac{க}{௩}})^{\frac{க}{உ}}$ என்றும் விடையாம்.

க. $ஆ^{உ}$, $ஷ^{\frac{க}{உ}}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{க}{௩})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

உ. $ச^{\frac{க}{உ}}$, $௩^{\frac{க}{௩}}$, என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{க}{சு})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

௩. $ஷ^{உ}$, $ஸ^{ச}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{க}{ரு})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

ச. $ஆ^{\frac{க}{உ}}$, $ஈ^{\frac{க}{௩}}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{க}{சு})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

ரு. $ஒ^{உ}$, $ட^{உ}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{௩}{ச})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

சு. $ஆ^{\frac{க}{ம}}$, $ஈ^{\frac{உ}{ம}}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{க}{௩})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

எ. $\text{ஆ}^{\frac{\text{சு}}{\text{உ}}}$, $\text{ஈ}^{\frac{\text{க}}{\text{ங}}}$ என்ற இராசிகளுக்கு $(\frac{\text{க}}{\text{சஉ}})$ என்ற சூசியைப் புணர்த்து.

௱சுரு. பிர. மேளலங்களின் சில குணங்கங்களை மூலசின்னத்தின் இடப்புறத்தே வருவித்துச் சுருக்கும்படி; மூலசின்னம் எத்தனையோ அத்தனையாங்காதிதத்தையுடைய குணங்கம் பிறக்கும்படி மூலத்தைக் கூறுபடுத்தக்கூடுமானால் அப்படிக் கூறுபடுத்திக் காதிதமான குணங்கத்தின் மூலத்தை இடப்புறத்தும் மற்றக்குணங்கத்தை வலப்புறத்தும் நடுவே மூலசின்னத்தையும் வரை. உ-ம்.

$\sqrt{\text{அ}}$, என்ற மேளலத்தை ச, உ, என்ற இரண்டு குணங்கங்களாக்குமிடத்து, ச, என்ற குணங்கம், உ, இன் வர்க்கமாய் நின்றபடியால் (ச) இன் வர்க்கமூலமாகிய (உ) ஐ இடப்புறத்தும், மற்றக் குணங்கமாகிய (உ) ஐ வலப்புறத்தும், நடுவே மூலசின்னத்தையும் வரைய, $\text{உ}\sqrt{\text{உ}}$, என்று சுருங்கிநிற்கும்.

இப்படிச் சுருக்குகிர்த்தியம்பண்ணும்படி சொன்னவிதிக்கு ஆதாரம் யாதென்றால், இரண்டு குணங்க குணிதத்தினது மூலமும் அந்த இரண்டு குணங்க மூலத்தினது குணிதமும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாம். எப்படியென்றால், $\sqrt{\text{அ}} = \sqrt{\text{ச}} \times \sqrt{\text{உ}}$; ஆனால் $\sqrt{\text{ச}} = \text{உ}$, ஆகையால் (ச) என்பதற்குப் பதிலாக (உ) ஐ வரையலாம், வரையவே அது $\text{உ} \times \sqrt{\text{உ}}$, அல்லது $\text{உ}\sqrt{\text{உ}}$ என்றும் வரும்.

மேளலத்தைக் குணங்கங்களாக்குமிடத்து அந்தக் குணங்கங்களிலொன்று மேளலத்திலடங்கிய எல்லாக்காதிதத்திலும் பெரிதாக வரும்படி கூறுசெய்தல்வேண்டும். சரியான காதிதம் மேளலத்திலில்லாவிட்டால் அதற்குச் சுருக்குகிர்த்தியமில்லை.

க. $\sqrt{\text{ஆ}^{\text{உ}}\text{ஷ}}$ என்றதைச் சுருக்கினால் $\sqrt{\text{ஆ}^{\text{உ}}} \times \sqrt{\text{ஷ}} = \text{ஆ} \times \sqrt{\text{ஷ}} = \text{ஆ}\sqrt{\text{ஷ}}$. விடையாம்.

உ. $\sqrt{\text{கஅ}}$

ங. $\sqrt[\text{ங}]{\text{சுசஈ}^{\text{ங}}\text{ஒ}}$

இந்த மேளலங்களைச் சுருக்கு.

ச. $\sqrt[\text{ச}]{\frac{\text{ஆ}^{\text{ச}}\text{ஈ}}{\text{ஒடு}}}$

ரு. $\sqrt[\text{ங}]{\text{ஆ}^{\text{ங}}\text{ஈ}}$

சு. $(\text{ஆ}^{\text{ங}} - \text{ஆ}^{\text{உ}}\text{ஈ})^{\frac{\text{க}}{\text{உ}}}$

எ. $(\text{ருச}\text{ஆ}^{\text{சு}}\text{ஈ})^{\frac{\text{க}}{\text{ங}}}$

அ. $\sqrt{\text{கூஅ}\text{ஆ}^{\text{உ}}\text{ஷ}}$

கூ. $\sqrt[\text{ங}]{\text{ஆ}^{\text{ங}} + \text{ஆ}^{\text{ங}}\text{ஈ}^{\text{உ}}}$

இந்த மேளலங்களைச் சுருக்கு.

௱சுசு. பிர. மேளலத்தின் வர்ணத்தை மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தே வருவிக்கும்படி ;

மேளலம் எத்தனையாம் மூலத்தையுடையதோ அத்தனையாங்காதிதமாகும்படி வர்ணத்தைக் காதித்து மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தே குணங்கமாகவரை. உ-ம்.

$\text{ஆ}\sqrt[\text{ங}]{\text{ஈ}}$; என்ற இராசியின் வர்ணம் (ஆ). இதனை மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தே கொண்டுவரும்படி மேளலத்தின் மூலம் கனமூலமாகையால் (ஆ) வுக்கு மூன்றுங்காதிதம் பிறப்பிக்க அது $\text{ஆ}^{\text{ங}}$ ஆம். இதனைக் குணங்கமாக மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தே வரைய, $\sqrt[\text{ங}]{\text{ஆ}^{\text{ங}} \times \text{ஈ}}$, விடையாம்.

க. $\text{ஆ}(\text{ஷ}+\text{ஈ})^{\frac{\text{க}}{\text{ங}}}$; என்ற இராசியின் வர்ணத்தை மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தே வருவித்தால், $(\text{ஆ}^{\text{ங}}\text{ஷ}+\text{ஆ}^{\text{ங}}\text{ஈ})^{\frac{\text{க}}{\text{ங}}}$ விடையாம்.

இப்படியே பின் வருகின்ற இராசிகளின் வர்ணங்களுக்குஞ் செய்க.

உ. $\text{உஆஈ}(\text{உஆஈ}^{\text{உ}})^{\frac{\text{க}}{\text{ங}}}$

ங. $\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}\left(\frac{\text{ஈ}^{\text{உ}}\text{ஒ}}{\text{ஆ}^{\text{உ}}+\text{ஈ}^{\text{உ}}}\right)^{\frac{\text{க}}{\text{உ}}}$

௪. $௨\sqrt{௨}$ ௫. $௪ஈ\sqrt[௩]{௭}$

மௌல திரிபுவினு.

௧. $௫\sqrt{௬}$. என்ற இராசி முழுவதையும் மௌலரூபமாக்குக.

௨. $\frac{௧}{௫}\sqrt{௫ஆ}$ என்ற இராசி முழுவதையும் மௌலரூபமாக்குக.

௩. $௫^{\frac{௧}{௨}}$; $௬^{\frac{௧}{௩}}$; இவை $(\frac{௧}{௬})$ என்ற சூசியைப் பெறச்செய்க.

௪. $\sqrt{௯௮}$. இதைச் சுருக்கு.

௫. $\sqrt{௨௪௩}$. இதைச் சுருக்கு.

௬. $\sqrt[௩]{௫௪}$. இதைச் சுருக்கு.

௭. $௭\sqrt{௮0}$ இதைச் சுருக்கு.

௮. $௯\sqrt[௩]{௮௧}$. இதைச் சுருக்கு.

௯. $\sqrt{ஷ^{௨}+ஆஷ^{௨}}$. இதைச் சுருக்கு.

௧0. $\sqrt{௧௯௮ஆ^{௨}ஷ}$. இதைச் சுருக்கு.

௧௧. $\sqrt{ஷ^{௩}-ஆ^{௨}ஷ^{௨}}$. இதைச் சுருக்கு.

மௌலக்கூட்டல்.

௱௬௭. பிர. காதிதக்கூட்டல், காதிதக்கழிதல், காதிதப்பெருக்கல், காதிதப்பிரித்தல், காதகரணம், காதிதமூலகிரகணம், என்ற இவற்றின் விதிகளும், மௌலக்கூட்டல், மௌலக்கழிதல், மௌலப்பெருக்கல், மௌலப்பிரித்தல், மௌலகாதகரணம், மௌலமூலகிரணம், என்பனவற்றின் விதிகளும், ஒருநெறிபற்றியொழுகுமாகையால், காதித விதிகளை நன்குணர்ந்தோர் மௌலவிதிகளையெளிதில் உணரவல்லராவார். அந்த மௌல விதிகளுள் மௌலக்கூட்டல் விதிவருமாறு.

மௌலக்கூட்டல் விதி.

௧. மௌலங்கள் சமானராசிகளானால் வர்ணங்களைக் கூட்டித் தொகையைச் சமானமௌலங்களினிடப்புறத்தே தீட்டியும் ;

௨. அவை வேற்றிராசிகளானால், சின்னங்கள்மாறாமல், அந்தந்த இராசியை ஒன்றின்பின்னொன்றாக வரைந்துந் தொகையறி.

மூலசின்னத்தைப்பெற்ற இராசிகளும் மூலசின்னங்களும் ஒன்றற்கொன்று சரியாய் வரப்பெற்ற மௌலங்கள் சமான ராசிகளாம். (௩௬. பிர.)

உதாரணம்.

$௨\sqrt{ஈ}$, $௩\sqrt{ஈ}$; என்ற இராசிகளில் வர்க்கமூலசின்னம் பெற்று அதின் வலப்புறத்தே நிற்கின்ற, (ஈ) (ஈ) என்ற இராசிகள் ஒரேயிராசியாகையாலும் இராசிகளிரண்டிற்குஞ் சின்னம் வர்க்கமூல சின்னமாகையாலும், இந்த இராசிகள் சமானமாம். ஆகையால், அவற்றின் வர்ணங்களைக் கூட்டித் தொகையறியலாம். எப்படியென்றால்,

$௨\sqrt{ஈ}+௩\sqrt{ஈ}=௫\sqrt{ஈ}$. இந்தப் பிரகாரமே $\sqrt[௩]{ஆஸ}$, $௨\sqrt[௩]{ஆஸ}$, என்ற இராசிகளைக் கூட்டினால், $\sqrt[௩]{ஆஸ}+௨\sqrt[௩]{ஆஸ}=௩\sqrt[௩]{ஆஸ}$, தொகையாம்.

௱௬௮. பிர. மௌலங்கள் வேற்றிராசியாய்வரினுஞ் சிறுபான்மை மௌலதிரிபுக்குச் சொன்னவிதிகளினால் அவற்றைச் சமானராசிகளாக்கிச் சமானராசிகளைக் கூட்டற்குச் சொல்லிய விதியில் அமைக்கலாம். உ-ம்.

$\sqrt{௮}$; $\sqrt{௫0}$, என்ற இராசிகளின்மௌலகூறுகள் வேற்றிராசிகளாயினும் (௱௬௫ம்.) பிரகரணப்படி, $\sqrt{௮}=௨\sqrt{௨}$, ஆகவும், $\sqrt{௫0}=௫\sqrt{௨}$, ஆகவுந் திரியுமாகையால் அந்தக் கூறுகள் சமானகூறுகளாயினவென்றும், அவற்றின் தொகை $௭\sqrt{௨}$ என்றுமறியலாம். இப்படியே,

$\sqrt{௧௬ஈ}$, $\sqrt{௪ஈ}$, என்ற இராசிகள் $௪\sqrt{ஈ}$, $௨\sqrt{ஈ}$, என்று திரியுமாகையால், $௬\sqrt{ஈ}$, அவற்றின் தொகையாம்.

இனி வேற்றிராசிகளான மௌலங்களைக் கூட்டும்வகை.

$௨\sqrt{ஈ}$; $௪\sqrt{ஆ}$, இந்த இராசிகளைக் கூட்டினால் $௨\sqrt{ஈ}+௪\sqrt{ஆ}$, தொகையாம். அப்படியே $௩\sqrt{ஆ}$, $௨\sqrt[௩]{ஆ}$ என்ற இராசிகளையுங் கூட்டினால் $௩\sqrt{ஆ}+௨\sqrt[௩]{ஆ}$, தொகையாம்.

மேளலக்கூட்டல் விஞ.

க. √உஎ; √சஅ இவற்றின் தொகை யாது?
உ. √எஉ; √கஉஅ இவற்றின் தொகை யாது?
ங. √கஅo; √சoரு இவற்றின் தொகை யாது?
ச. ங ∛சo; ∛கஙரு இவற்றின் தொகை யாது?
ரு. ரு ∛ருச; ரு √கஉஅ இவற்றின் தொகை யாது?
சா. கூ. √உசங; கo√ஙசாங இவற்றின் தொகை யாது?
எ. √அகஆ^ஈ; √சகூஆ^ஈ இவற்றின் தொகை யாது?
அ. √கூஆ^உ டி; √கசாஆ^உ டி இவற்றின் தொகை யாது?
கூ. ஷ√உருண^உ தி; √ஙசாண^உ தி இவற்றின் தொகை யாது?
கo. ங ∛ஆ^ங ஈ; சஆ ∛ஆ^ங ஈ இவற்றின் தொகை யாது?

மேளலக்களைதல்.

ாசாகூ. பிர. மேளலங்களைக் களையுமிடத்துச் சோதகசின்னங்களை மாற்றுவதிலன்றி மேளலக்கூட்டல்விதியும் மேளலக்களைதல்விதியும் வேறெவ்வகையினும் வேற்றுமைப்படாவாம். உ-ம்.

√ஆஸ, என்பதில், ங√ஆஸ, என்பதைக் களைந்தால் —உ√ஆஸ சேடமாம்.

√ஆ, என்பதில், √ஈ, என்பதைக் களைய, √ஆ — √ஈ சேடமாம்.

மேளலக்களைதல் விஞ.

க. ச∛ஆ+ஷ, என்பதில் ங∛ஆ+ஷ, என்பதைக் களை.
உ. ங ண^(க/ங), என்பதில் — ரு ண^(க/ங) என்பதைக் களை.
ங. ஆ(ஷ+ஸ)^(க/ச) என்பதில் ஈ(ஷ+ஸ)^(க/ச) என்பதைக் களை.

ச. —ஆ^(க/ங) என்பதில் —உஆ^(க/ங) என்பதைக் களை.
ரு. √ருo என்பதில் √அ என்பதைக் களை.
சா. ∛ஈ^ச ஸ, என்பதில் ∛ஈஸ^ச என்பதைக் களை.
எ. ∛ஷ என்பதில் ⁶√ஷ என்பதைக் களை.
அ. உ√ருo என்பதில் √கஅ என்பதைக் களை.
கூ. ∛கஉo என்பதில் ∛சo என்பதைக் களை.
கo. ரு√உo என்பதில் ங√சரு என்பதைக் களை.
கக. √அoஆ^ச ஷ என்பதில் √உoஆ^உ ஷ என்பதைக்களை.

மேளலப்பெருக்கல்.

ாஎo. பிர. பெருக்கறிகுறியிட்டாவது இடாமலாவது இராசிகளை ஒன்றின்பின்ஞென்ருக வரைந்து அமேளலங்களைப்பெருக்கும் வாறுபோலவே மேளலங்களையும் பெருக்கலாம். (ருங. பிர.) உ-ம்.

(√ஆ) ஐயும் (√ஈ) ஐயும் பெருக்கியபேறு √ஆ × √ஈ, என்ருவது √ஆ √ஈ என்ருவது ஆ^(க/உ) ஈ^(க/உ) என்ருவது நிற்கும். அப்படியே ட^(க/ங) ஸ^(க/உ) என்ற மேளலங்களின் குணிதம் ட^(க/ங) ஸ^(க/ங) என்ருவது, ட^(க/ங) × ஸ^(க/ங) என்ருவது ∛ட × ∛ஸ என்ருவது ∛ட ∛ஸ என்ருவது நிற்கும்.

இப்படிப் பெருக்கற்கிர்த்தியத்தை அடையவேண்டிய குணங்களுக்குச் சமசூசிபுணர்த்தவேண்டில் (ாசாஙம்.) பிரகாரப்படி சமசூசியைப் பிறப்பித்துக்கொள்க, ஆகையால்,

ாஎக. பிர. சமசூசியைப்பெற்ற மேளலங்களை அமேளலங்களைப் பெருக்கும்வகையாய்ப் பெருக்கிப் பொதுவான மூலசின்னத்தோடிணைத்து வரை.* உ—ம்.

* கணிதாதீதமாய் வருகின்ற இருணமேளலம் இவ்விதியிலடங்காதென்றறிக. ாஙக. பிர.

$\sqrt{ஷ}$, $\sqrt[ங]{ஷ}$ என்ற இராசிகளைப் பெருக்கும்படி (௱சுரு பிரகரணப்படி அவற்றிற்குச் சமசூசிபிறப்பித்தால், அவை $(ஷ^{ங})^{\frac{க}{சு}}$; $(ஸ^{உ})^{\frac{க}{சு}}$ என்று திரியும். அவற்றைப் பெருக்கினல்

$(ஷ^{ங})^{\frac{க}{சு}}\ (ஸ^{உ})^{\frac{க}{சு}} = \sqrt[சு]{ஷ^{ங}\,ஸ^{உ}}$ என்று குணிதம்பிறக்கும். மேலும் $\sqrt{உ}$, $\sqrt{கஅ}$, என்ற மௌலங்களைப்பெருக்க (ச என்ற அமௌலம் பிறக்கும். இப்படியே சிறுபான்மை மௌலகுணனத்தால் அமௌலம் பிறப்பதுமுண்டென்றுகாண்க.

௱எஉ. பிர. பெருக்கவேண்டிய மௌலாட்சரங்களும் இலக்கங்களும் ஒன்றேயானல் குணிதமறியும்படி அவற்றின் பின்னரூபமான சூசிகளைக் கூட்டலாம். உ-ம்.

$ஆ^{\frac{க}{உ}}$, $ஆ^{\frac{க}{ங}}$ என்ற இராசிகளின் குணிதம் $ஆ^{\frac{க}{உ}} \times ஆ^{\frac{க}{ங}} = ஆ^{\frac{க}{உ}+\frac{க}{ங}} = ஆ^{\frac{ங}{சு}+\frac{உ}{சு}} = ஆ^{\frac{ரு}{சு}}$. பின்னரூபமான சூசிகளைக் கூட்டும்போது அவற்றைப் பொது ஆரகபின்னங்களாக்கியதையும், பொது ஆரகபின்னங்களாக்கிய பொது அர்த்த விகாரமுண்டாகாததையுங் கண்டுகொள்க. சூசிகளைக் கூட்டிப் பெற்றதொகையினது போகம் ஆரகத்தாற் சேடமில்லாமல் அறுபடிற் குணிதம், அமௌலமாம்.

௱எங. பிர. இந்த வகையாகப் பெருக்குமிடத்து, மௌலங்கள் வர்ணங்களோடு கூடிவந்தால் அந்த வர்ணங்களின் குணிதத்தை முன் சொன்ன பிரகாரங் கண்ட மௌலகுணிதத்துக்கு வர்ணமாகத் தீட்டல்வேண்டும். உ-ம்.

ஆ $\sqrt{ஈ}$, ஒ $\sqrt{டி}$ என்ற இராசிகளைப் பெருக்கும்போது மௌல குணிதம் $= \sqrt{ஈடி}$; அமௌலமான வர்ணகுணிதம் $=$ ஆஒ. முழுக்குணிதம் $=$ ஆஒ $\sqrt{ஈடி}$.

௱எச. பிர. அமௌலங்கள் வர்ணங்களாய் வராமற் சகய சின்னங்களால் மௌலங்களோடிணைந்துவரில் (ருசம் பிரகரணத்திற் கூறியபிரகாரம், குணக உறுப்போவ்வொன்றிலும், குணனீய உறுப்போவ்வொன்றையும் பெருக்கவேண்டும்.

ஆ $+\sqrt{ஈ}$ என்ற வகுராசியை

ஒ $+\sqrt{டி}$ என்ற வகுராசியாற் பெருக்கும்வகை.

$$\begin{array}{r} ஆ+\sqrt{ஈ} \\ ஒ+\sqrt{டி} \\ \hline ஆஒ+ஒ\sqrt{ஈ} \\ +ஆ\sqrt{டி}+\sqrt{ஈடி} \\ \hline \end{array}$$

ஆஒ $+$ ஒ $\sqrt{ஈ}$ $+$ ஆ $\sqrt{டி}$ $+$ $\sqrt{ஈடி}$. குணிதம்.

௱எரு. பிர. ஆகையால் மௌலப்பெருக்கல் விதிவருமாறு.

மௌலப்பெருக்கல்விதி.

க. மௌலராசிகள் ஒரே அட்சரங்களாயாவது ஒரே இலக்கங்களாயாவது வரில், அந்த இராசிகளினது பின்னரூபமான சூசிகளைக் கூட்டு.

உ. மூலசின்னம் ஒன்றேயானல் அமௌலங்களைப் பெருக்கும்வகையேபெருக்கிக் குணிதத்தைப் பொதுவான மூலசின்னத்தின் வலப்புறத்தில் வரை.

ங. மௌலங்கள் வகுராசியானல் குணக உறுப்பு ஒவ்வொன்றினலுங் குணனீய உறுப்பு ஒவ்வொன்றையும் வகுராசிப் பெருக்கம்போற் பெருக்கு.

மௌலப்பெருக்கல்வினு.

க. $\sqrt{ஆ}$; $\sqrt[ங]{ஈ}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

உ. ரு $\sqrt{ரு}$; ங $\sqrt{அ}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

ங. உ $\sqrt{ங}$; ங $\sqrt[ரு]{ச}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

ச. $\sqrt{டி}$; $\sqrt[ங]{ஆஈ}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

ரு. $\sqrt{\frac{உஆஈ}{ஙசி}}$; $\sqrt{\frac{கூஆடி}{உஈ}}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

சு. ஆ$(ஆ—ஷ)^{\frac{க}{உ}}$, $(சி—டி)(ஆஷ)^{\frac{க}{உ}}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

எ. ரு $\sqrt{அ}$, ங $\sqrt{ரு}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

அ. $\frac{க}{ச}\sqrt{சு}$, $\frac{க}{கரு}\sqrt{கூ}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

கூ. $\frac{க}{உ}\sqrt{கஅ}$, ரு $\sqrt{உ௦}$; இவற்றின் குணிதம் யாது?

க௦. $உ\sqrt{௰}$, $க௰\frac{க}{உ}\sqrt{ரு}$, இவற்றின் குணிதம் யாது?

கக. $எஉ\sqrt{\frac{க}{ச}}$, $ஆ\sqrt{\frac{உ}{௰}}$, $கஉ௦\sqrt{\frac{க}{உ}}$, $ஆ\sqrt{\frac{க}{ச}}$ இவற்றின்குணிதம் யாது?

கஉ. $ச+உ\sqrt{உ}$, $உ-\sqrt{உ}$, இவற்றின் குணிதம் யாது?

மௌலப்பிரித்தல்.

௱எரு. பிர. மௌலங்களை அரிக்கும்படி, பாச்சியத்தின் ழே பாககத்தைப் பின்னரூபமாக வரையலாம். உ-ம்.

$(\sqrt[ங]{ஆ})$ ஐ, $(\sqrt{ஈ})$ ஆலரிக்கும்படி பாச்சியமாகிய $(\sqrt[ங]{ஆ})$ ப்போகமாகவும், பாககமாகிய $(\sqrt{ஈ})$ ஐ ஆரகமாகவும் வரை $\frac{\sqrt[ங]{ஆ}}{\sqrt{ஈ}}$ பாசிதம், அதாவது ஈவாம். இப்படியே (ஆ+ஈ) என்ற இராசியை $(ஈ+ஷ)^{\frac{க}{ங}}$ என்ற இராசியாலரிக்க,

$$\frac{(ஆ+ஈ)^{\frac{க}{ங}}}{(ஈ+ஷ)^{\frac{க}{ங}}}$$ பாசிதமாம்.

இந்த உதாரணங்களில் அடைந்த ஈவுகளின் போகத்துக்கும், ஆரகத்துக்குந் தனித்தனி மூலசின்னம் வரையப்பட்டே னும், போகமூலத்தை ஆரகமூலத்துக்கீந்து பெற்ற ஈவும், போ கத்தை ஆரகத்துக்கீந்து பெற்ற ஈவின் மூலமும் ஒன்றற்கொ ன்று சமமானபடியினுல் போகத்தினதும் ஆரகத்தினதும் மூல சின்னங்களைச் சமசின்னங்களாக்கிய பின் பின்னம் முழுதுக் கும் ஒரே மூலசின்னத்தையிடலாம். உ-ம்.

க. $\frac{\sqrt[ங]{ஆ}}{\sqrt[ங]{ஈ}} = \sqrt[ங]{\frac{ஆ}{ஈ}}$. உ. $\frac{\sqrt[ங]{டி}}{\sqrt[ச]{ணி}} = \frac{\sqrt[கஉ]{டி^{ச}}}{\sqrt[கஉ]{ணி^{ங}}} = \sqrt[கஉ]{\frac{டி^{ச}}{ணி^{ங}}}$

௱எசு. பிர. சமமூல சின்னம்பெற்ற இராசிகளை அரிக்கும் படி, அமௌலங்களை அரிக்கும் வகையாக இராசிகளை அரித் துப் பெற்ற ஈவுகளுக்குச் சமமூலசின்னத்தையிடுவர். உ-ம்.

க. $\sqrt[ங]{ஆஈ}$, என்பதை $\sqrt[ங]{ஆ}$ என்பதாலரிக்கும்படி, (ஆஈ) ஐ, (ஆ) வுக்கீய, (ஈ) ஈவாம். இந்த ஈவுக்கு மூலசின்னத்தை யிட $\sqrt[ங]{ஈ}$ விடையாம்.

உ. $(ஷ^{ங} ஸ^{உ})^{\frac{க}{சு}}$ என்பதை $(ஸ)^{\frac{க}{ங}}$ என்பதாலரிக்கவேண்டில் அவற்றின் மூலசூசிகளைச் சமசூசியாகத்திரித்தால், $(ஷ^{ங} ஸ^{உ})^{\frac{க}{சு}}$ என்றும் $(ஸ^{உ})^{\frac{க}{சு}}$ என்றும் வரும். அவற்றை முன்போல அரிக்க, $(ஷ^{ங})^{\frac{க}{சு}} = ஷ^{\frac{க}{உ}}$, விடையாம்.

௱எஎ. பிர. பாகக பாச்சிய இராசிகள் ஒரே அட்சரமாயாவது ஒரே இலக்கமாயாவது வரிற் பிரித்தற்கிர்த்தியத்தை இயற்றும் படி, பாககசூசியைப் பாச்சியசூசியிற் கழிப்பர். உ- ம்.

க. $ஆ^{\frac{க}{உ}} \div ஆ^{\frac{க}{சு}} = ஆ^{\frac{க}{உ}-\frac{க}{சு}} = ஆ^{\frac{உ}{சு}} = ஆ^{\frac{க}{ங}}$.

உ. $ஆ^{\frac{க}{ம}} \div ஆ^{\frac{க}{ங}} = ஆ^{\frac{க}{ம}-\frac{க}{ங}}$.

௱எஅ. பிர. சமசூசி புணர்த்தப்பட்ட மௌலங்களினது வர் ணங்கள் அமௌலங்களானுல், அந்த அமௌலவர்ணங்களை வேறேயரித்துப் பெற்ற ஈவை மௌலங்களினீவுக்கு முன்னே தீட்டுவர். உ-ம்.

க. $ஆஒ\sqrt{ஈட} \div ஆ\sqrt{ஈ} = ஒ\sqrt{ட}$.

உ. $ஆஈ(ஷ^{உ}ஈ)^{\frac{க}{ச}} \div ஆ(ஷ)^{\frac{க}{உ}} = ஆஈ(ஷ^{உ}ஈ)^{\frac{க}{ச}} \div ஆ(ஷ^{உ})^{\frac{க}{ச}} = ஈ(ஈ)^{\frac{க}{ச}} = (ஈ^{ரு})^{\frac{க}{ச}}$.

மௌலப்பிரித்தல்விதி.

௱எகூ. பிர. க. மௌலராசிகள் ஒரேயட்சரமாயாவது, ஒரேயிலக்கமாயாவது வரில், பாககசூசியைப் பாச்சியசூசியிற் கழிந்து சேடத்தைப் போது மௌலராசிக்குச் சூசியாக வரை.

௨. மேளலங்களுக்கு வர்ணங்களுண்டானால் பாச்சியவர்ணத்தைப் பாககவர்ணத்துக்கீந்து ஈவை மூலசின்னத்தின் முன் வரை.

௩. மூலசின்னங்கள் சமசின்னங்களாய்வரில், இராசிகளை அமேளலங்களைப்போல, அரித்துப் பெற்ற ஈவைப் போதுவான மூலசின்னத்தோடிணைத்துக் கோள்.

மேளலப்பிரித்தல்வினா.

௧. ௨ ௩√ஈஒ. என்பதை √ஆஒ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௨. ௧௦ ௩√௧௦அ என்பதை ௫ ௩√ச என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௩. ௧௦√௨௭ என்பதை ௨√௩ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௪. அ√௧௦அ என்பதை ௨√சு என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௫. (ஆ^௨ ஈ^௨ டி^௩)^(௧/௩) என்பதை டி^(௧/௨) என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௬. (௧௬ஆ^௩ —௧௨ஆ^௨ ஷ)^(௧/௨) என்பதை ௨ஆ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௭. சு√௧௩சு என்பதை ௨√சு என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௮. அ ௩√௫௧௨ என்பதை ச ௩√௨ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௯. (௧/௨) √௫ என்பதை (௧/௩) √௨ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௧௦. √எ என்பதை ௬√எ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௧௧. சு√௫ச என்பதை ௩√௨ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

௧௨. ச ௩√எ௨ என்பதை ௨ ௩√௧அ என்பதற்கீந்தால் ஈவு யாது?

மேளல காதகரணம்.

௯௪. பிர. மேளலங்களைக் காதிக்கும்படி மூலசூசியை அறியவேண்டிய காதித நிர்க்கண்டத்தாற் பெருக்கு. உ-ம்.

(ஆ^(௧/௩)) என்ற மேளலத்தின் வர்க்கத்தை அறியும்படி மூலசூசியாகிய (௧/௩) ஐக் காதித நிர்க்கண்டமாகிய (௨) ஆற் பெருக்க (௨/௩) பேறும். ஆகையால் (ஆ)^(௧/௩) இன் வர்க்கம் = (ஆ)^(௨/௩).

மூலசூசியும் அறியவேண்டிய காதித நிர்க்கண்டமும் ஒரேநாமிகளானால் மேளலத்தினது மூலசின்னத்தைத் தள்ளுவதே காதகரணமாம். இந்த மேளலங்கள் அமேளலவர்ணங்களையுடையனவானால் அவ்வர்ணங்களைப் பெருக்கற்கிர்த்தியத்தாற் காதிக்க வேண்டும். உ-ம்.

௧. ௩√(ஆ+ஷ), என்பதற்குக் கனம் (ஆ+ஷ) ஆம்.

௨. ஆ ௩√ஷ என்பதற்கு வர்க்கம் (ஆ^௨ ௩√ஷ^௨) ஆம்.

௩. ஆ ௩√ஷ என்பதற்கு (௩ம்.) காதிதம் (ஆ^௩ ஷ) ஆம்.

மேளலங்கள் அமேளலங்களோடு சக சய சின்னங்களினலிணைந்துவரில், சர்வ உறுப்புகளையும் பெருக்கிக் காதிதமறிதல் வேண்டும். (பிர ௯௩௨) உ-ம்.

ஆ+√ஸ, ஆ—√ஸ, என்றதுவிராசிகளின் வர்க்கமறியும் வகை.

ஆ+√ஸ	ஆ—√ஸ
ஆ+√ஸ	ஆ—√ஸ
ஆ^௨ +ஆ√ஸ	ஆ^௨ —ஆ√ஸ
+ஆ√ஸ+ஸ	—ஆ√ஸ+ஸ
வர்க்கம். ஆ^௨ +௨ஆ√ஸ+ஸ.	ஆ^௨ —௨ஆ√ஸ+ஸ.

மௌலமூலகிரகணம்.

௱அக. பிர. மௌல மூலகிரகண விதி அமௌலமூலகிரகண விதிக்கொத்திருக்கும். எப்படியென்றால்,

க. அறியவேண்டிய மூல சூசியைக்கொண்டு மௌலத்தினது சூசியை அரித்தாவது, அறியவேண்டிய மூலத்தினது சின்னத்தை மௌலசின்னமாக வரைந்தாவது மூலங்கொள்.

உ. மௌலங்களுக்கு அமௌலவர்ணமுண்டானால் இந்த வர்ணங்களின் மூலங்களை அறிந்து அவற்றை மௌல மூலத்தின் முன் வரை. உ-ம்.

க. $ஆ^{\frac{க}{ந}}$ என்ற மௌலத்துக்கு வர்க்கமூலங்கொள்ளும்படி இந்த மௌலத்தின் சூசியாகிய $(\frac{க}{ந})$ ஐ அறியவேண்டிய மூல சூசியாகிய (உ) க்கீய $\frac{க}{ந} \div உ = \frac{க}{சு}$. ஆகையால் $(ஆ)^{\frac{க}{ந}}$ இன் வர்க்கமூலம் $(ஆ)^{\frac{க}{சு}}$.

உ. $ஆ\,(ஷஸ)^{\frac{க}{உ}}$, என்ற இராசிக்குக் கனமூலம் $= ஆ^{\frac{க}{ந}}(ஷஸ)^{\frac{க}{சு}}$.

மௌலவினா.

க. $(அகஆ^{—உ})$ இன் நான்காம் மூலம் யாது?

உ. $(ஆ+ஈ)^{—ந}$ இன் சும் மூலம் யாது?

ந. $(ஷ—ஸ)^{\frac{க}{சு}}$ இன் (நம்) மூலம் யாது?

ச. $\sqrt{(—கஉருஆ^{ந}\,ஷ^{ச})}$ இன் கனமூலம் யாது?

ரு. $\sqrt{(\frac{சஆ^{ச}}{கூஷ^{உ}\,ஸ^{உ}})}$ இன் வர்க்கமூலம் யாது?

சு. $(\frac{ந^{உ}\,ஆ^{ரு}\,ஷ}{உசந})^{\frac{க}{க0}}$ இன் ரும் மூலம் யாது?

எ. $\sqrt{(ஷ^{உ}—சுஈஷ+கூஈ^{உ})}$ இன் வர்க்கமூலம் யாது?

அ. $\sqrt{(ஆ^{உ}+ஆஸ+\frac{ஸ^{உ}}{ச})}$ இன் வர்க்கமூலம் யாது?

கூ. $(ஆஷ^{உ})$ இது $(\frac{க}{சு})$ என்ற சூசிபெறச் செய்.

க0. $\sqrt{(—நஸ)}$ இது $(\frac{க}{ந})$ என்ற சூசி பெறச்செய்.

கக. $\sqrt{(ஆ^{உ})}, (ஆ)^{\frac{க}{ந}}$ இவை சமசூசிபெறச் செய்.

கஉ. $(ச)^{\frac{க}{ந}}, (ரு)^{\frac{க}{ச}}$ இவை சமசூசி பெறச்செய்.

கந. $(ஆ)^{\frac{க}{உ}}, (ஈ)^{\frac{க}{ச}}$ இவை $(\frac{க}{அ})$ என்ற சூசிபெறச்செய்.

கச. $\sqrt{உ}, \sqrt[ச]{ச}$, இவை $\frac{க}{அ}$ என்ற சூசிபெறச்செய்.

கரு. $\sqrt{உகூச}$ இதைச் சுருக்கு.

கசு. $\sqrt{ஷ^{ந}—ஷ^{உ}ஆ^{உ}}$, இதைச் சுருக்கு.

கஎ. $\sqrt{கசுஆ^{உ}ஷ}, \sqrt{சஆ^{உ}ஷ}$, இவற்றின் தொகையுஞ் சேடமும் யாவை?

கஅ. $\sqrt[ந]{ககூஉ}, \sqrt[ந]{உச}$ இவற்றின் தொகையுஞ் சேடமும் யாவை?

ககூ. $எ\sqrt[ந]{கஅ}, ரு\sqrt[ந]{ச}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

உ0. $(ச+உ\sqrt{உ}),(உ+\sqrt{உ})$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

உக. $ஆ(ஆ+\sqrt{சி})^{\frac{க}{உ}}, ஈ(ஆ+\sqrt{சி})^{\frac{க}{உ}}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

உஉ. $உ(ஆ+ஈ)^{\frac{க}{ந}}, ந(ஆ+ஈ)^{\frac{க}{ம}}$ இவற்றின் குணிதம் யாது?

உந. $சு\sqrt{ருச}$ என்பதை $ந\sqrt{உ}$, எனபதற்கீந்தாலீவுயாது?

௨௪. $௪\sqrt[௩]{௭௨}$ என்பதை $௨\sqrt[௩]{௧௮}$ என்பதற்கீந்தாலீவுயாது

௨௫. $\sqrt{௭}$, என்பதை $\sqrt[௩]{௭}$ என்பதற்கீந்தாலீவுயாது?

௨௬. $௮\sqrt[௩]{௫௧௨}$ என்பதை $௪\sqrt[௩]{௨}$, என்பதற்கீந்தாலீவுயாது

௨௭. $௧௭\sqrt{௨௧}$, என்பதின் கனம் யாது?

௨௮. $௫+\sqrt{௨}$, என்பதின் வர்க்கம் யாது?

௨௯. $\frac{௧}{௬}\sqrt{௬}$, என்பதின் சம் காதிதம் யாது?

௩௦. $\sqrt{ஷ}-\sqrt{ஈ}$, என்பதின் கனம் யாது?

௰. வர்க்க சமீகரண அதிகாரம்.

[Quadratic Equations.]

௱௮௨. பிர. காதிதங்களினதும் மௌலங்களினதுங் கணி[…]த்தை முன்பு உணர்ந்தாலன்றிச் சமீகரணத்தின் சர்வவி[…]க்கும் விடையறியுஞ் சாமர்த்தியம் உண்டாகாதென்று வெ[…]ளச்சமீகரண அதிகாரத்தினது ஈற்றிலுரைத்துப் பின் வ[…] இரண்டு அதிகாரங்களாலுங் காதிதமௌல கணிதத்தையெ[…]த்து விளக்கினேம். இப்பால் காதிதமௌல கிர்த்தியங்க[…]த் துணையாகக்கொண்டு, சமீகரணங்களைச் சாதிகரித்து [...]டையறியும் விதங்களைத் தெரிவிக்கின்றேம்.

காதிதசாதிகரணம்.

$\sqrt{ஷ}=ஆ$. என்றிப்படிச் சமீகரணத்தினது மறைநிலை[…] ராசி மூலசின்னம்பெற்றுவருங்காலை காதகரணத்தாற் சமீ[…]ணத்தைச் சாதிகரிக்கலாம்.

எப்படியெனில் இந்தச் சமீகரணத்தின் வாமதட்சிண அ[…]ங்களை வர்க்கிக்க,

$ஷ=ஆ^{௨}$ என்று வரும்.

௱௮௩. பிர. ஆகையால் மறைநிலையிராசி மூல[…]ன்னம்பெற்றுற் சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கும்ப[…] நிலைமாற்று, குணனம், பாககரம், என்றகிர்த்தியங்க[…]ல் வேண்டியவாறே சாதிகரித்தபின் மூலசின்ன[…]த்தனையாம் மூலத்தைக் குறிக்கிறதோ அத்தனையா[…] காதிதம் பிறக்கும்படி வாமதட்சிண பாகங்க[…] காதி. உ-ம்.

௧. $\sqrt{ஷ}+௪=௯$. என்ற சமீகரணம் நிலைமாற்றால் $\sqrt{[…]}$ $=௯-௪=௫$, என்றும், காதகரணத்தால் $ஷ=௫^{௨}=௨[…]$

என்றும்வரும். இவ்விடத்தில் வாமதட்சிண அங்கங்கள் சமராசியாற் பெருக்கப்பட்டபடியால், ௩ம். சுயம்பிரமாணப்படி சமீகரணத்தின் சமத்துவஞ் சிதையாதென்றறிக.

௨. $ஆ+\frac{௨}{௩}\sqrt[௩]{ஷ}=ஈ$, என்ற சமீகரணம் நிலைமாற்றால் $\frac{௨}{௩}\sqrt[௩]{ஷ}=ஈ-ஆ$, என்றும், குணனத்தால் $௨\sqrt[௩]{ஷ}=௩ஈ-௩ஆ$ என்றும், பாககரத்தால் $\sqrt[௩]{ஷ}=\frac{௩ஈ-௩ஆ}{௨}$ என்றும்காதகரணத்தால் $ஷ=\left(\frac{௩ஈ-௩ஆ}{௨}\right)^{௩}$ என்றும் வரும்.

௩. $\sqrt[௩]{ஷ+௧}=௪$ என்பதைச் சாதிகரி.

௪. $௪+௩\sqrt{ஷ-௪}=+௬+\frac{௧}{௨}$, இதைச் சாதிகரி.

௫. $\sqrt{ஆ^{௨}}+\sqrt{ஷ}=\frac{௩+டி}{\sqrt{ஆ^{௨}}+\sqrt{ஷ}}$, இதைச் சாதிகரி.

௬. $௩+௨\sqrt{ஷ}-\frac{௪}{௫}=௬$ இதனைச் சாதிகரி.

௭. $௪\sqrt{\frac{ஷ}{௫}}=௮$ இதனைச் சாதிகரி.

௮. $(௨ஷ+௩)^{\frac{௧}{௩}}+௪=௭$ இதனைச் சாதிகரி.

௯. $\sqrt{௧௨+ஷ}=௨+\sqrt{ஷ}$ இதனைச் சாதிகரி.

௧௦. $\sqrt{ஷ-ஆ}=\sqrt{ஷ}-\frac{௧}{௨}\sqrt{ஆ}$ இதனைச் சாதிகரி.

௧௧. $\sqrt{௫}\times\sqrt{ஷ+௨}=௨+\sqrt{௫ஷ}$, இதைச் சாதிகரி.

௧௨. $\frac{ஷ-ஆஷ}{\sqrt{ஷ}}=\frac{\sqrt{ஷ}}{ஷ}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௩. $\frac{\sqrt{ஷ}+௨௮}{\sqrt{ஷ}+௪}=\frac{\sqrt{ஷ}+௩௮}{\sqrt{ஷ}+௬}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௪. $\sqrt{ஷ}+\sqrt{ஆ+ஷ}=\frac{௨ஆ}{\sqrt{ஆ+ஷ}}$, இதைச் சாதிகரி.

௧௫. $ஷ+\sqrt{ஆ^{௨}+ஷ^{௨}}=\frac{௨+ஆ^{௨}}{\sqrt{ஆ^{௨}+ஷ^{௨}}}$ என்பதைச்சாதிகரி.

௧௬. $ஷ + ஆ = \sqrt{ஆ^{௨} + ஷஈ^{௨} + ஷ^{௨}}$ என்பதைச்சாதிகரி.

௧௭. $\sqrt{௨ + ஷ} + \sqrt{ஷ} = \dfrac{௪}{\sqrt{௨ + ஷ}}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௮. $\sqrt{ஷ - ௩௨} = ௧௬ - \sqrt{ஷ}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௯. $\sqrt{௪ஷ + ௧௭} = ௨\sqrt{ஷ} + ௧$ இதைச் சாதிகரி.

௨௦. $\dfrac{\sqrt{௬ஷ} - ௨}{\sqrt{௬ஷ} + ௨} = \dfrac{௪\sqrt{௬ஷ} - ௯}{௪\sqrt{௬ஷ} + ௯}$ இதைச் சாதிகரி.

மூலக்கிரகண சாதிகரணம்.

௱௮௪. பிர. $ஷ^{௨} = ௧௬$ என்றிப்படிச் சமீகரணத்தில் வருகின்ற மறைநிலை இராசி காதிதமாய்வரில், மூலக்கிரகணத்தாற் சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கலாம். வாமதட்சிணபாகங்களுக்கு வர்க்கமூலங்கொள்ள, $ஷ = ௪$ என்று சாதிகரணமடையும்.

ஆகையால்மறைநிலையிராசி காதிதமானவிடத்துச் சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கும்படி, மறைநிலையிராசி எத்தனையாங்காதிதத்தையுடையதோ அத்தனையாம் மூலத்தைக்கோள். உ-ம்.

௧. $௬ + ஷ^{௨} - ௮ = ௭$ என்ற சமீகரணம் நிலமாற்றால், $ஷ^{௨} = ௭ - ௬ + ௮ = ௯$, என்றும் மூலக்கிரகணத்தால் $ஷ = \pm ௩$ என்றும் வரும்.

இதில் சமராசிகளுக்கு மூலங்கொண்டபடியால், அம்மூலங்கள் சமமென்றுகாண்க. (௱௫௯ம்) பிரகரணப்படி தனராசியின் இரட்டை மூலம் உபயார்த்தமுடையதாதலால் (௯) இன் வர்க்கமூலமாகிய (௩) இன் முன் $\pm$ என்ற உபயார்த்த சின்னந் தீட்டியது.

௨. $௫ஷ^{௨} - ௩௦ = ஷ^{௨} + ௩௪$, என்ற சமீகரணம் நிலமாற்றலுங், பாககரத்தாலும்; $ஷ^{௨} = ௧௬$ என்றும், மூலக்கிரகணத்தால், $ஷ = ௪$, என்றும் வரும்.

௩. $\sqrt[௩]{ஷ^{௨}} = ௪$, என்ற சமீகரணங்காதகரணத்தால் $ஷ^{௨} = ௬௪$ என்றும் மூலக்கிரகணத்தால் $ஷ = \pm ௮$. என்றும் வரும்.

௪. $\sqrt{ஷ^{ம} - ஆ} = கி - டி$ இதனைச் சாதிகரி.

௫. $(ஷ + ஆ)^{\frac{௧}{௨}} = \sqrt{\dfrac{ஆ + ஈ}{(ஷ - ஆ)}}$ இதனைச் சாதிகரி.

௬. $(ஷ^{௨} - ௩)^{\frac{௧}{௨}} = \sqrt{\dfrac{௮}{(ஷ^{௨} - ௧)}}$ இதனைச் சாதிகரி.

௭. $\sqrt{ஷ^{௨} - ௧௧} = ௫$ இதனைச் சாதிகரி.

௮. $\sqrt{ஷ^{௨} - ௪ஆஈ} = ஆ - ஈ$ இதனைச் சாதிகரி.

௯. $௧௩ + \sqrt{௨௩ + ஸ^{௨}} = ௫$ இதனைச் சாதிகரி.

௧௦. $(௩ + \sqrt{௩௨௯ + ஷ^{௨}})^{௨} = ௧௪௪$ இதனைச் சாதிகரி.

சுத்தவர்க்க சமீகரண வினா.

௧. ஒரு வித்தியார்த்தியை அவன் தோழன் நோக்கி நீ நிகண்டிலெத்தனை பாட்டுக் கற்றாயென்று கேட்க, தோழா, நான் கற்ற பாட்டோடே பத்தைக் கூட்டித் தொகையினது வர்க்கமூலத்தில் இரண்டைக் கழித்தால் சேடம் (௬) ஆமென்று வித்தியார்த்திசொன்னான். வித்தியார்த்தி நிகண்டிற் கற்ற பாட்டெத்தனை ?

இந்த வினாவை வீசபாஷையினது ரூபமாக மொழிபெயர்க்க $\sqrt{ஷ + ௧௦} - ௨ = ௬$. என்ற சமீகரணம் பிறக்கும். இது நிலமாற்றால், $\sqrt{ஷ + ௧௦} = ௬ + ௨ = ௮$ என்றும், காதகரணத்தால் $ஷ + ௧௦ = ௬௪$ என்றும், நிலமாற்றால் $ஷ = ௬௪ - ௧௦ = ௫௪$, என்றும் வரும். விடைச்சோதனை (௱௨௮ம்பிர) $\sqrt{௫௪ + ௧௦} - ௨ = ௬$.

௨. இரண்டுபட்டணங்களுக் கிடையானதூரத்தைவர்க்கித்து (௯௬) ஐக் கழித்தால் சேடம் (௪௮) ஆனால் அந்தத் தூரம் யாது ?

விடை ௧௨.

௩. ஒரெண்ணின் வர்க்கத்தினது மும்மடங்கை (௪) க் கீந்த ஈவில் (௧௨) ஐக் கழித்தால் சேடம் (௧௮௦) என்றால் அவ்வெண் யாது ?

விடை ௧௬.

௪. (௧௮) ஐ இரண்டு கூறுகளாக்கினால் அவற்றின் வர்க்கங்கள் ஒன்றற்கொன்று (௨௫) க்கு (௧௬) எப்படி அப்படியிருக்குமெனில் அக்கூறுகள் யாவை ?

விடை ௧௦; ௮.

௫. (௫) (௪) க்கு எப்படியோ அப்படியேயிருக்கின்ற இரண்டெண்களின் கனத்தைக் கூட்டினால் (௫௧௩) தொகையாம். அவ்விரண்டெண்களும் யாவை ?

விடை ௧௫; ௧௨.

௬. சித்த புரியிலிருந்து மகரபுரிக்குச் சூரியப்பட்டனும், மகரபுரியிலிருந்து சித்தபுரிக்குச் சந்திரப்பட்டனும் ஒரேவேளையிற் பிரயாணப்பட்டுப் பிரயாணமார்க்கத்தில் ஒருவரையொருவர் சந்தித்தபோது சூரியப்பட்டன் சந்திரப்பட்டனில் (௧௮) காதவழி அதிகமாய் நடந்தானென்றும், சந்திரப்பட்டன் நடந்த தூரத்தைச் சூரியப்பட்டன் ௧௫ $(\frac{௩}{௪})$ நாளில் நடப்பானென்றும், சூரியபட்டன நடந்த தூரத்தைச் சந்திரப்பட்டன் (௨௮) நாளில்

நடப்பானென்றுங் கண்டார்கள். சித்தபுரிக்கும் மகரபுரிக்குமிடையான தூரம் எத்தனை காதம்?

விடை ௧௨௬ காதம்.

௭. சில கள்வர் ஒருதோட்டத்திற் புகுந்து கள்வர் எத்தனை பெயரோ அத்தனை குலைபாக்கை ஒவ்வொருவனும் பிடுங்கின். ஒவ்வொரு குலையிலுமிருந்த பாக்குக் கள்வரின்தொகையின் நான்மடங்கு: ஆகப் பிடுங்கின பாக்கின் தொகை(௨௬௧௬) அப்படியானால் கள்வரின் தொகையென்ன?

விடை ௯.

௮. யுத்த களத்தை நோக்கிச் சென்ற ஒரு சேனையின் முன்னணியைப்பார்க்கப் பக்கஅணியினின்றபடைச்சேவகரின் தொகை (௫) அதிகப்பட்டிருந்தது. சத்துரு நெருங்கிவருவதைக் கண்டபோது முன்னணியில் (௮௪௫) போர்ச்சேவகர் கூட நிறுத்தப்பட்டார்கள். அப்பொழுது அந்த யூகம் ஐந்து நிரைகொண்ட யூகமானதென்றால், சேனையிலிருந்த போர்ச்சேவகரின் தொகையாது?

விடை ௪௫௫௦.

௯. நீலன், குமுதன் என்ற கம்மாளர் வேறுவேறான கூலிக்குப் பொருந்திச் சரிசரியான சிலநாளாக வேலைசெய்ய ஏற்பட்டார்கள். இவ்விரு கம்மாளரில் நீலன் நாலு நாளும், குமுதன் ஏழுநாளும் விளையாட்டுப்பராக்கிற் செலவிட்டபடியால் தவணை முடிந்தபோது நீலன் (௭௫) ரூபாயையும், குமுதன் (௪௮) ரூபாயையும் சம்பளமாகப்பெற்றார்கள். ஆனால் விளையாட்டுப்பராக்கில் குமுதன் நாலுநாளையும், நீலன்ஏழுநாளையுஞ் செலவிட்டால் இருவருடைய சம்பளமுஞ் சரிசரியாயிருக்கும். அப்படியானால் இவர்கள் வேலைசெய்யும்படி ஏற்பட்ட தினம் எத்தனை! ஒவ்வொரு கம்மாளனுக்குங் கிடைத்த நாள்வீதச் சம்பளம் எத்தனைரூபாய்?

விடை தினம் ௧௯. நீலனுக்கு நாளொன்றுக்கு (௫) ரூபாய் குமுதனுக்கு நாளொன்றுக்கு (௪) ரூபாய்.

௧௦. ஒரு முயலை அதற்கு ஏழ முழத்திற்குப் பின்னே நின்று ஒரு நாய் ஒரே நேராய் இருபது முழமளவுக்குத் துரத்திக்கொண்டு போனபோது முயல் தானோடின பாதைக்குச் சரிகுறுக்காய்த் திரும்பி முன் போலவே ஓடிப்போனது. இதைக் கண்ட நாயோ தானும் ஓடின பாதையை விட்டுத் திரும்பி முயலைப் பிடிக்கத்தக்க சுருக்கமான பாதையிலோடிப்பிடித்தது. முயல் நாலுமுழமோட நாய் ஐந்துமுழமோடினது. நாயும் முயலுமோடின தூரம் எத்தனைமுழம்?

விடை நாய் ௨௫. முயல் ௨௦.

௧௧. (௨௫௬) படிகொள்ளத்தக்க ஒரு சாடி நிறையவிருந்த சாராயத்தில் ஒருவன் சிலபடி சாராயத்தை மோண்டபின் அவ்வளவு தண்ணீர்விட்டுச் சாடியை நிறைத்து, இப்படி நான்கு முறை மோண்டு மோண்டு சாடியைத் தண்ணீரால் நிறைத்த போது (௮௧) படி சாராயஞ் சாடியிலிருந்தது. ஒவ்வொரு முறையிலும் அவன் மோண்ட சாராயம் எத்தனைபடி?

விடை ௬௪; ௪௮; ௩௬; ௨௭ படி.

௧௨. ஈரெண்ணில் பெரியதால் அவற்றின் வித்தியாசத்தைப் பெருக்க (௪௦) ம், சிறியதால் அவ்வித்தியாசத்தைப் பெருக்க (௧௫)ம் வருமெனில் அந்த ஈரெண்ணும் யாவை?

விடை ±அ. ±௩.

௧௩. இரண்டு எண்களைத் தனித்தனி (௨௭) ஆற் பெருக்கினால், பெரிய எண்ணின் குணிதம் சிறிய எண்ணின் வர்க்கமாயும், அவ்விரண்டெண்களையுந் தனித்தனி மூன்றாற்பெருக்கினாற் பெரிய எண்ணின் குணிதம் சிறிய எண்ணின் குணிதத்தினது கனமாயுமிருக்குமெனில், அந்த இரண்டெண்களும் யாவை?

விடை ௨௪௩. ௩.

௧௪. ஒரு கமக்காரனுடைய இரண்டு தோட்டங்களில் ஒன்றுக்கு வடிவம்* சாத்தியமுக்கோணம். மற்றதற்கு வடிவந் தீர்க்கசதுரம். தீர்க்கசதுரத்தின் நீளம் முக்கோணத்தினது† கன்னத்துக்கும், அதின அகலம் முக்கோணத்தின் பெரியபக்கத்தரைக்குஞ் சமம். இவ்விரண்டு தோட்டத்தையும் வேறொருவனுக்குக் கொடுத்து இவற்றின பரப்புக்குச் சரியான ஒரு சதுரநிலத்தை மாற்றுக்காணியாக வாங்கினபோது, இந்தச் சதுரத்தின் ஒவ்வொரு புறமுஞ் சாத்திய முக்கோணத்தின் பெரும்பக்கத்திற்குச் சமமென்றும், இந்தச் சதுரநிலத்தைச் சுற்றி வேலியடைப்பது மற்றிரண்டு தோட்டங்களையடைப்பதில் (௧௦) க் கோலளவுக்கு லாபமென்றுங் கண்டான். இந்த முக்கோணமுந் தீர்க்கசதுரமுமான தோட்டங்களின் பரப்பும் நீள அகல அளவுகளும் யாவை?

விடை. முக்கோணத்தின் கன்னம் ௫ கோல். பக்கங்கள் ௩. ௪. தீர்க்கசதுரம் நீளம் ௫ கோல் அகலம் ௨. முக்கோணத்தினது பரப்பு ௬. குழி. தீர்க்கசதுரபரப்பு, ௧௦. குழி.

௱௪௫. பிர. சமீகர்ணங்களெல்லாம் சுத்தம் என்றும், சங்கரம் என்றும் இரண்டு வகைப்படும். மறைநிலையிராசி காதிதமாய் ஒருறுப்பில் மாத்திரம் வரிற் சமீகரணஞ் சுத்தமாம். மறைநிலையிராசி பலகாதிதம்பெற்றுப் பலஉறுப்பிற் கலந்துவரிற் சமீகரணஞ் சங்கரமாம். உ—ம்.

$ஷ^{௨} = ட - ஈ$. இது சுத்தவர்க்க சமீகரணம்.

† சாத்தியமுக்கோணம், Right angled Triangle. * கன்னம், Hypothenuse.

ஷ² + ௯ஷ = ட. இது சங்கரவர்க்க சமீகரணம். ஷ³ = ௯ — ஒ. இது சுத்தகன சமீகரணம்.

ஷ³ + ஆஷ² + ௯ன = ட. இது சங்கரகன சமீகரணம். பிறவுமன்ன.

௱அசு. பிர. இந்த அதிகாரத்தால் இதுவரைக்குஞ் சுத்தவர்க்க சமீகரண நெறிகளையெடுத்து விளக்கி, இப்பாற் சங்கரவர்க்க சமீகரணங்களைச் சாதிகரித்து விடை அறியுங் கிர்த்தியங்களை அறிவிக்கின்றேம்.

சங்கரவர்க்க சமீகரணமென்பது மறைநிலையிராசியை ஒருறுப்பிலும், மறைநிலையிராசியின் வர்க்கத்தை வேறேருறுப்பிலும் வரப்பெற்ற சமீகரணமாம்.

௱அஎ. பிர. மறைநிலையிராசியோடிணைந்த சமீகரணங்கள் பரிபூரணவர்க்கமாய்வரில், சுத்தவர்க்கசமீகரணத்தை மூலகிரகணத்தாற் சாதிகரித்தவாறு போலச் சங்கரவர்க்க சமீகரணத்தையுஞ் சாதிகரிக்கலாம். உ-ம்.

ஷ² + உஆஷ + ஆ² = ௯ + ஒ, என்ற சங்கரவர்க்க சமீகரணத்தின வாமபாகம், (ஷ + ஆ), என்ற துவிராசியின் வர்க்கமாதலில் மூலகிரகணத்தால் ஷ + ஆ = √(௯ + ஒ) என்றும், நிலமாற்றல் ஷ = √(௯ + ஒ) — ஆ என்றுஞ் சாதிகரணமடையும். ஆனல், மறைநிலையிராசியோடிணைந்த சமீகரணங்கள் பரிபூரணவர்க்கமாய் வராமற் பெரும்பாலும் வர்க்கக்குறையாய்வரும். உ-ம்.

ஷ² + உஆஷ = ௯. இந்தச் சங்கரவர்க்க சமீகரணத்தின் வாமபாகம்வர்க்கபூர்த்தியில்லாததாயினும், அதனுறுப்பிரண்டுந் துவிராசிவர்க்க உறுப்புகளென்றெளிதிலறியலாம். இந்தத் துவிராசி வர்க்கஉறுப்புகளோடு இணைந்து வர்க்கபூர்த்தியுண்டாக்குகின்றதுமாய் இவ்விடத்தில் மறைந்து கிடக்கின்றதுமான இராசி யாதென்று கிரகித்தால் அதனைச் சமீகரணங்களோடு கூட்டி முன்போலவே சாதிகரிக்கலாம். துவிராசிவர்க்கமாம்படி இராசிகளின் தனித்தனி வர்க்கங்களோடு அவ்விராசிகளின் குணித இரட்டியைக் கூட்டுவது விதியாமாதலானும்,

ஷ² + உஆஷ, என்ற சமீகரணங்கத்திற் துவிராசியுறுப்புகளின் குணிதவிரட்டி (உஆஷ) ஆதலானும் மறைந்து நின்ற இராசி (ஆ²) ஆம். இது மறைநிலையிராசியான (ஷ) இனது வர்ணத் தரையினது வர்க்கமாதல் காண்க.

௱அஅ. பிர. ஆகையால் வர்க்கபூர்த்தியுண்டாகும்படி, முதலாங்காதிதமாய் நிற்கின்ற மறைநிலையிராசியினது வர்ணப்பாதியை வர்க்கித்து சமீகரணங்களிரண்டிலுங் கூட்டு. உ-ம்.

ஷ² + சுஆஷ = ௯ என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிகரித்தர்த்த நிச்சயம்பண்ணும்படி முதலாங்காதிதமாய் நிற்கின்ற மறைநிலையிராசியின் வர்ணம் (சுஆ). ஆகையால் அதிற் பாதியாகிய (௩ஆ) ஐ வர்க்கித்து வர்க்கமான (கூஆ²) ஐ இரண்டங்கங்களிலுங் கூட்ட

ஷ² + சுஆஷ + கூஆ² = ௯ + கூஆ² என்று வர்க்கபூர்த்தியுண்டாம். இது மூலகிரகணத்தால் ஷ + ௩ஆ = ± √(௯ + கூஆ²) என்றும், நிலமாற்றல் ஷ = — ௩ஆ ± √(௯ + கூஆ²) என்றுஞ் சாதிகரணமடையும்.

க. ஷ² — அ௯ஷ = கி இதனைச் சாதிகரி.

உ. ஷ² + ஆஷ = ௯ + கி இதனைச் சாதிகரி.

௩. ஷ² — ஷ = கி — டி இதனைச் சாதிகரி.

௪. ஷ² + ௩ஷ = டி + சு இதனைச் சாதிகரி.

௫. ஷ² — ஆ௯ஷ = ஆ௯ — சிடி இதனைச் சாதிகரி.

சு. ஷ² + ஆஷ/௯ = கி என்பதைச் சாதிகரி.

எ. ஷ² — ஷ/௯ = எகி என்பதைச் சாதிகரி.

௱அகூ. பிர. முதலாங் காதிதமான மறைநிலையிராசி அநேக உறுப்புகளோடிணைந்துவரும்போது கூட்டதிகாரத்திற் சொன்ன சுருக்குகிர்த்தியத்தால் அவற்றை ஒரே உறுப்பாகத் திரட்டலாம். வர்ணங்கள் அட்சரங்களாய்வரில் அட்சரங்களைக் கூட்டி வருந்தொகையாகிய வகுராசியை மறைநிலையிராசிக்கு வர்ணமாகத் தீட்டுவர். உம்.

க. ஷ² + ௩ஷ + உஷ + ஷ = ட, என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கும்படி (ஷ) வுடனிணைந்துநிற்கின்ற உறுப்புகளைத் திரட்ட, ஷ² + சுஷ = ட, என்று சுருங்கும். இனி வர்க்கபூர்த்தி செய்து மூலகிரகணத்தாலும் நிலமாற்றலும் முன்போற் சாதிகரிக்க, ஷ = — ௩ ± √(கூ + ட) என்றுவரும்.

உ. ஷ² + ஆஷ + ௯ஷ = ண என்ற சமீகரணத்தினது வர்ணங்கள் அட்சரங்களாய் வந்தபடியால் அவற்றைத் திரட்டும்போது (ஆ + ௯) என்ற வகுராசியாம். ஆகவே சமீகரணமும்

ஷ² + (ஆ + ௯) ஷ = ண என்று நிற்கும். இதை வர்க்கபூர்த்திசெய்து சாதிகரிக்க,

ஷ = — (ஆ + ௯)/உ ± √(((ஆ + ௯)/உ)² + ண) என்றுவரும்.

௱கூ௰. பிர. வர்க்கபூர்த்திசெய்யமுன் நிலமாற்றல் தெரிநிலையிராசியை ஒருபாகத்தும், மறைநிலையிராசியை மற்றப்பாகத்தும் நிறுத்தி, மறைநிலையிராசியின் வர்க்கத்தைத் தனராசி

யாக்கிக்கொள்க. இந்த வர்க்கத்தைச் சமீகரணத்தின் முத
றுப்பாக்கிக்கொள்வது உசிதமாம். உ-ம்.

ஆ$+$ருஷ$-$ரு௯$=$ருஷ$-$ஷ^{உ} என்ற சமீகரணம் நிலமா
ற்றலுஞ் சுருக்குகிர்த்தியத்தாலும், ஷ$^{உ}+$உஷ$=$ரு௯$-$ஆ, என்
ம், வர்க்கபூர்த்திசெய்து சாதிகரிக்க, ஷ $=-$க $\pm$
$\sqrt{க+ரு௯-ஆ}$ என்றும்வரும்.

௱கூக. பிர. மறைநிலையிராசியினது வர்க்கத்துக்கு வர்ண
மாவது, ஆரகமாவது கூடிவரில், பாககர குணனகிர்த்தியங்களி
னல் அவற்றை ஒழிக்கலாம். (௱யஎ, ௱உஉ. பிர.) உ-ம்.

ஷ$^{உ}+$உசஆ$-$சுண$=$கஉஷ$-$ருஷ^{உ} என்ற சமீகரண
நிலமாற்றலுஞ் சுருக்குகிர்த்தியத்தாலும்,

சுஷ$^{உ}-$கஉஷ$=$சுண$-$உசஆ, என்றும் பாககரத்தால்,

ஷ$^{உ}-$உஷ$=$ண$-$சஆ, என்றும், வர்க்கபூர்த்திசெய்ய,

ஷ$^{உ}-$உஷ$+$க $=$ ண$-$சஆ$+$க என்றும், மூலகிரகணத்தா
லும் நிலமாற்றலும், ஷ$=$க$\pm\sqrt{க+ண-சஆ}$ என்றும்வரும்.

வர்க்கபூர்த்திசெய்ய வேறொரு விதி.

௱கூஉ. பிர. வர்க்கமான மறைநிலையிராசியினது
வர்ணத்தை நான்கிற்றாக்கிக் குணிதத்தாற் சமீகரண
முற்றையும் பெருக்கி முதற்காதிதமாய் நிற்கின்ற ம
றைநிலையிராசியினது வர்ணவர்க்கத்தை வாமதட்சி
ணபாகங்களிற் கூட்டு.* உ-ம்.

ஆஷ$^{உ}+$௯ஷ$=$ட, என்ற சமீகரணத்தில் (ஆ) வர்க்கமா
ன மறைநிலையிராசியினது வர்ணமாம். இதின் நான்மடங்கு
(சஆ) ஆம். இந்த (சஆ) ஆற் சமீகரணமுற்றையும் பெருக்க,

சஆ^{உ}ஷ$^{உ}+$சஆ௯ஷ $=$ சஆட, என்றும் வர்க்கமல்லாத
(ஷ) இன் வர்ணம் (௯) ஆகையால் (௯) இன் வர்க்கத்தைச்
சமீகரணங்கங்களிற் கூட்ட, சஆ^{உ}ஷ$^{உ}+$சஆ௯ஷ$+$௯$^{உ}=$
சஆட$+$௯^{உ} என்றும், சமீகரணம் வர்க்கபூர்த்தியடைந்த வா
றுகாண்க.

முன்னே (௱அஅ)ம் பிரகரணத்திற் கூறியவிதி சர்வசங்கரசமீ
கரணங்களுக்கும் வர்க்கபூர்த்தியடைவிக்கத் தகுந்த சாதாரண
விதியாயிருக்க, இந்த விதியையும் அதனுடன் கூட்டிக் கூறியத
ன் பயன் யாதெனில், முன்னயவிதிப்படி வர்க்கபூர்த்தியுண்
டாக்கும்போது சிறுபான்மை பின்னரூபங்கள் பிறக்கும். ஆனல்
பின்னயவிதிப்படி வர்க்கபூர்த்திசெய்தால் அப்பின்னரூபங்க
ள் வெளிப்படமாட்டா. ஆகையால் இதுவும் பயனுடையதா

* பாஸ்கராசாரியர்செய்த வீசகணிதத்தில் இவ்விதியைக் காண்க.

ம். இவ்விதிகளைத் தவிர வர்க்கபூர்த்திசெய்யும்படி வேறு ப
லவிதிகளையும் வீசகணிதர் எடுத்துரைப்பார்கள். அவற்றுட்
சில வருமாறு.

௱கூ௩. பிர. வர்க்கமான மறைநிலையிராசியினது
வர்ணத்தை (கசு) ஆற் பெருக்கிக் குணிதத்தாற் சமீ
கரணமுற்றையும் பெருக்கி முதலாங் காதிதமான
மறைநிலையிராசியினது வர்ணவர்க்கத்தினது நான்
மடங்கை வாமதட்சிண பாகங்களிற் கூட்ட வர்க்க
பூர்த்தியுண்டாம். அல்லது பெரிய காதிதமான ம
றைநிலையிராசியினது வர்ணத்தை யாதாமொரு இ
ஷ்டராசியினது வர்க்கத்தாற்றாக்கிப் பெற்ற குணி
தத்தாற் சமீகரணமுற்றையும் பெருக்கி, இந்த இஷ்
டராசியினது பாதியின் வர்க்கத்தையும் சிறிய காதி
தமான மறைநிலையிராசியினது வர்ணவர்க்கத்தையு
ம் ஒன்றிலொன்று தாக்கி வந்த குணிதத்தை வாமத
ட்சிணபாகங்களிற் கூட்டினுற் சமீகரணம் வர்க்க
பூர்த்தியடையும். உ-ம்.

உஷ$^{உ}-$௩ஷ$=$உ என்ற சமீகரணத்தில் வர்க்கமான ம
றைநிலையிராசியினது வர்ணம் (உ). இதை (கசு) இற்றாக்க
(௩உ) குணிதமாம். (௩உ) ஆற் சமீகரணமுற்றையும் பெருக்க,
சுசஷ$^{உ}-$௯சுஷ$=$சுச என்றும், முதலாங் காதிதமான ம
றைநிலையிராசியினது வர்ணம் (௩). (௩) இன் வர்க்கம் (௯)
(௯) இன் நான்மடங்கு (௩சு). ஆகையால் (௩சு) ஐ வாமத
ட்சிணபாகங்களிற் கூட்ட.

சுசஷ$^{உ}-$௯சுஷ$+$௩சு $=$ க00 என்றும், மூலகிரகணத்
தாலும் நிலமாற்றலும் பாககரத்தாலும், ஷ $=$ உ என்றுஞ்
சாதிகரணமடையும். அல்லது,

ஆஷ$^{உ}+$ஒஷ $=$ ௯ என்ற சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கு
ம்படி பெரிய காதிதமான (ஷ^{உ}) இன் வர்ணம் (ஆ). இதை
(ன^{உ}) என்ற இஷ்டராசி வர்க்கத்தாற் பெருக்க (ஆன^{உ}) கு
ணிதமாம். இதனுற் சமீகரணத்தைப் பெருக்க,

ன^{உ}ஆ^{உ}ஷ$^{உ}+$ஒஆன^{உ}ஷ $=$ ஆ௯ன^{உ} என்றுவரும். இ
னி இஷ்டராசியின் பாதியாகிய $\left(\frac{ன}{உ}\right)$ ஐ வர்க்கிக்க $\left(\frac{ன^{உ}}{ச}\right)$ எ
ன்றும், இதை (ஒ^{உ}) ஆற் பெருக்க, $\left(\frac{ஒ^{உ}ன^{உ}}{ச}\right)$ என்றும் வரும்.

இதை வாமதட்சிண பாகங்களிற் கூட்ட

$$\text{ண}^{\text{உ}}\text{ஆ}^{\text{உ}}\text{ஷ}^{\text{உ}} + \text{ஒஆண}^{\text{உ}}\text{ஷ} + \frac{\text{ஒ}^{\text{உ}}\text{ண}^{\text{உ}}}{\text{ச}} = \text{ஆஈண}^{\text{உ}} + \frac{\text{ஒ}^{\text{உ}}\text{ண}^{\text{உ}}}{\text{ச}}$$

என்று வர்க்கபூர்த்தியடையும். இதின் வாமபா

ம் $\left(\text{ணஆஷ} + \frac{\text{ஒண}}{\text{உ}}\right)$ என்ற துவிராசியின் வர்க்கமென்றறி

௱௬ச. பிர. இதுவரைக்குஞ் சமீகரணத்தின் முதலுறுப்ப (ஷ$^{\text{உ}}$) என்றே வைத்து உதாகரித்துவந்தோம். ஆனால் எ ச் சமீகரணத்திலாவது மறைநிலையிராசியோடிவணந்த இரண் டு உறுப்புகள் வர, அவ்விரண்டுறுப்பிலும் நிற்கின்ற மறைநி யிராசிகளின் காதிதங்களின் நிர்க்கண்டமாவது மௌலங் ளின் சூசிகளாவது ஒன்றற்கொன்று இரட்டியாய் நிற்குமே ல் முன்சொன்ன விதிகளைக்கொண்டு வர்க்கபூர்த்திசெய்து மீகரணத்தைச் சாதிகரித்து விடையறியலாம். உ-ம்.

க. $\text{ஷ}^{\text{ச}} - \text{ஷ}^{\text{உ}} = \text{ஈ} - \text{ஆ}$, என்ற சமீகரணத்தை வர்க்கபூ ர்த்திசெய்ய,

$\text{ஷ}^{\text{ச}} - \text{ஷ}^{\text{உ}} + \frac{\text{க}}{\text{ச}} = \text{ஈ} - \text{ஆ} + \frac{\text{க}}{\text{ச}}$ என்றும் மூலகிரகணத் தால்,

$\text{ஷ}^{\text{உ}} - \frac{\text{க}}{\text{உ}} = \pm\sqrt{\text{ஈ} - \text{ஆ} + \frac{\text{க}}{\text{ச}}}$ என்றும் நிலைமாற்றால்,

$\text{ஷ}^{\text{உ}} = \frac{\text{க}}{\text{உ}} \pm \sqrt{\text{ஈ} - \text{ஆ} + \frac{\text{க}}{\text{ச}}}$ என்றும் மூலகிரகணத்தால்,

$\text{ஷ} = \sqrt{\frac{\text{க}}{\text{உ}} \pm \sqrt{\text{ஈ} - \text{ஆ} + \frac{\text{க}}{\text{ச}}}}$ என்றும் வரும்.

உ. $\text{ஷ} + \text{ச}\sqrt{\text{ஷ}} = \text{ல}$, என்ற சமீகரணத்தை வர்க்கபூர்த் செய்ய,

$\text{ஷ} + \text{ச}\sqrt{\text{ஷ}} + \text{ச} = \text{ச} + \text{ல}$, என்றும் மூலகிரகணத்தால்,

$\sqrt{\text{ஷ}} + \text{உ} = \pm\sqrt{\text{ச} + \text{ல}}$, என்றும் நிலைமாற்றால்,

$\sqrt{\text{ஷ}} = -\text{உ} \pm \sqrt{\text{ச} + \text{ல}}$, என்றும் காதகரணத்தால்,

$\text{ஷ} = \left(-\text{உ} \pm \sqrt{\text{ச} + \text{ல}}\right)^{\text{உ}}$ என்றும் வரும்.

௱௬ரு. பிர. தனராசியினிரட்டைமூலம் உபயார்த்தமுடை தாதலின் (௱ரு௬. பிர.) வர்க்கசமீகரணஞ் சுத்தமானாலும் சங் கரமானாலும் இரண்டு விடையைப் பிறப்பிக்கும். எப்படியெ ன்றால்,

$\text{ஷ}^{\text{உ}} = \text{௬ச}$ என்புழி, $\text{ஷ} = +\text{அ}$, என்றும் $\text{ஷ} = -\text{அ}$. என்றும் வரும். இப்படியே சுத்தசமீகரணத்திற் சின்ன

விகாரமேயன்றி எண் விகாரம் வராது. சங்கரசமீகரணத்தி லோ சமீகரணார்த்தத்தின் ஒரு கூறுமாத்திரமே மூலகிரகணம டைகின்றபடியால் எண்ணிலுஞ் சின்னத்திலும் விகாரம்வரும்.

௱௬௬. பிர. இருணராசியினிரட்டைமூலங் கணிதாதீதமாத லில் (௱ரு௬. பிர) சங்கரவர்க்க சமீகரணத்தைச் சாதிகரிக்கு மிடத்துச் சமீகரணார்த்தஞ் சிறுபான்மை கணிதாதீதமாவதுமு ண்டு. உ-ம்.

$\text{ஷ}^{\text{உ}} - \text{அஷ} = -\text{உ0}$ என்புழி

$\text{ஷ} = \text{ச} \pm \sqrt{-\text{ச}}$ என்று வரும். இவ்விடத்து $(-\text{ச})$ என்ற இருணராசிக்கு மூலங் கணிதாதீதமாகையால் (ஷ) இன் அர்த்தத்தை நிச்சயித்தல் கூடாதாம்.

கணிதாதீதமான மூலஞ் சமீகரணத்தில் வரில், விடையறியு ம்படிசொல்லப்பட்ட வினாவுக்கு விடையில்லையென்றும், வி னாவும் பொருந்தாத பிழை வினாவென்றும் நிச்சயித்துக்கொள் க. உ-ம்.

(அ) ஐ இரண்டு கூறாக்கிக் கூறுகளை ஒன்றிலொன்று தாக்கி னால் பேறு (உ0) ஆமெனில் அக்கூறுகள் யாவை என்றொரு வன் வினாவினால்,

(ஷ) ஒரு கூறென்றும், (அ—ஷ) மற்றக் கூறென்றுங் கொ ண்டு வினாவைச் சமீகரணரூபமாக மொழிபெயர்க்க,

$(\text{அ} - \text{ஷ})\,\text{ஷ} = \text{உ0}$, என்றும், சாதிகரிக்க, $\text{ஷ} = \text{ச} \pm \sqrt{-\text{ச}}$. என்றும் வருமாதலால் இந்த வினாப் பொருந்ாதென்றுசொல்க.

௱௬எ. பிர. வர்க்கசமீகரணம் ஒவ்வொன்றும் இவ்விரண்டு விடையைப் பிறப்பிக்கின்றதாயினும் அவ்விரண்டு விடையும் ஒரே வினாவுக்கு விடையாகாமற் போவதுமுண்டு. ஏனெனில் மூலகிரகணத்தை அடைகின்ற இராசி தனராசியினின்றும் இரு ணராசியினின்றும் பிறக்கலாமாகையால், வினாவுட்புகுந்த இ ராசி அவ்விரண்டினு நின்று தோன்றாது, அவற்றொன்றினின்று மாத்திரமே தோன்றினதாயுமிருக்கலாம். உ-ம்.

(ங0) ஐ இரண்டு கூறுகளாக்கினாற் கூறுகளின் குணிதம் கூ றுகளின் அந்தரத்தினது எண்மடங்குக்குச் சமமாமெனில், அ க்கூறுகள் யாவையெனவினாவினால்,

(ஷ) ஐச் சிறியகூறென்றும், (ங0—ஷ) ஐப் பெரிய கூறென் றுங்கொண்டு மொழிபெயர்க்க,

$\text{ஷ}\,(\text{ங0} - \text{ஷ}) = \text{அ}\,(\text{ங0} - \text{உஷ})$ என்றுஞ் சாதிகரிக்க,

$\text{ஷ} = \text{உங} \pm \text{கஎ}$ என்றும் வரும். இதில் (ஷ) இன் அர்த்தம் (ச0) அல்லது (௬) ஆம். ஆனால் (ச0) (ங0) இன் கூறாகாததால் சிறியகூறு (௬) என்றும் பெரியகூறு (உச) என்றும் நிச் சயித்துக்கொள்க.

௱௬அ. பிர. சர்வசங்கர வர்க்கசமீகரணத்தையுஞ் சாதிகரி க்கும்படி.

பொதுவிதி.

க. மறைநிலையிராசி ஓரங்கமாகவும், தெரிநிலையிராசி மற்ற அங்கமாகவும் வரும்படி சமீகரணத்தை நிலைமாற்றி,

௨. வர்க்கமான மறைநிலையிராசி இருணமானால் வாமதட்சிண பாகங்களின் சர்வசின்னங்களையும் மாற்றித் தன வர்க்கமாக்கி அதைச் சமீகரணத்தின் முதலுறுப்பாக நிறுத்தி,

௩. மறைநிலையிராசியினது வர்க்கத்தினது வர்ணத்துக்குத் தள்ளு கிர்த்தியம்பண்ணிப் பின் முதலாங்காதிதமாய் நிற்கின்ற மறைநிலையிராசியினது வர்ணப் பாதியை வர்க்கித்துச் சமீகரணாங்கங்களிற் கூட்டியாவது, மறைநிலையிராசியின் வர்க்கத்தினது வர்ணத்தின் நான்மடங்காற் சமீகரணமுற்றையும் பெருக்கி முதற்காதிதமாய் நிற்கின்ற மறைநிலையிராசியினது வர்ணவர்க்கத்தை வாமதட்சிணபாகங்களிற் கூட்டியாவது வர்க்கபூர்த்திசெய்து,

௪. வாமதட்சிணபாகங்களுக்குத் தனித்தனி வர்க்கமூலங்கொண்டு மறைநிலையிராசியோடு கூடி நிற்கின்ற தெரிநிலையிராசியை நிலைமாற்றிச் சாதிகரித்துக்கொள்.

சங்கரவர்க்க சமீகரணவினா.

க. $\text{௩ஷ}^{\text{௨}} - \text{௯ஷ} - \text{௪} = \text{௮௦}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௨. $\text{௪ஷ} - \frac{\text{௩௬} - \text{ஷ}}{\text{ஷ}} = \text{௪௬}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௩. $\text{௪ஷ} - \frac{\text{௧௪} - \text{ஷ}}{\text{ஷ} + \text{௧}} = \text{௧௪}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௪. $\text{௫ஷ} - \frac{\text{௩ஷ} - \text{௩}}{\text{ஷ} - \text{௩}} = \text{௨ஷ} + \frac{\text{௩ஷ} - \text{௬}}{\text{௨}}$ இதைச்சாதிகரி.

௫. $\frac{\text{௧௬}}{\text{ஷ}} - \frac{\text{௧௦௦} - \text{௯ஷ}}{\text{௪ஷ}^{\text{௨}}} = \text{௩}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௬. $\frac{\text{௩ஷ} - \text{௪}}{\text{ஷ} - \text{௪}} + \text{௧} = \text{௧௦} - \frac{\text{ஷ} - \text{௨}}{\text{௨}}$ என்பதைச் சாதிகரி.

௭. $\frac{\text{ஷ} + \text{௪}}{\text{௩}} - \frac{\text{௭} - \text{ஷ}}{\text{ஷ} - \text{௩}} = \frac{\text{௪ஷ} + \text{௭}}{\text{௯}} - \text{௧}$ இதைச் சாதிகரி.

௮. $\frac{\text{ஷ}^{\text{௩}} - \text{௧௦ஷ}^{\text{௨}} + \text{௧}}{\text{ஷ}^{\text{௨}} - \text{௬ஷ} + \text{௯}} = \text{ஷ} - \text{௩}$ இதைச் சாதிகரி.

௯. $\frac{\text{௬}}{\text{ஷ} + \text{௧}} + \frac{\text{௨}}{\text{ஷ}} = \text{௩}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௦. $\frac{\text{௩ஷ}}{\text{ஷ} + \text{௨}} - \frac{\text{ஷ} - \text{௧}}{\text{௬}} = \text{ஷ} - \text{௯}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௧. $\frac{\text{ஷ}}{\text{ஆ}} + \frac{\text{ஆ}}{\text{ஷ}} = \frac{\text{௨}}{\text{ஆ}}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௨. $\text{ஷ}^{\text{௪}} + \text{ஆஷ}^{\text{௨}} = \text{ஈ}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௩. $\frac{\text{ஷ}^{\text{௬}}}{\text{௨}} - \frac{\text{ஷ}^{\text{௩}}}{\text{௪}} = - \frac{\text{௧}}{\text{௩௨}}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௪. $\text{௨ஷ}^{\frac{\text{௨}}{\text{௩}}} + \text{௩ஷ}^{\frac{\text{௧}}{\text{௩}}} = \text{௨}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௫. $\frac{\text{௧}}{\text{௬}}\text{ஷ} - \frac{\text{௧}}{\text{௩}}\sqrt{\text{ஷ}} = \text{௨௨}\frac{\text{௧}}{\text{௬}}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௬. $\text{௨ஷ}^{\text{௪}} - \text{ஷ}^{\text{௨}} + \text{௯௬} = \text{௯௧}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௭. $(\text{௧௦} + \text{ஷ})^{\frac{\text{௧}}{\text{௨}}} - (\text{௧௦} + \text{ஷ})^{\frac{\text{௧}}{\text{௪}}} = \text{௨}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௮. $\text{௩ஷ}^{\text{௨ன}} - \text{௨ஷ} = \text{௮}$ இதைச் சாதிகரி.

௧௯. $\text{௨}(\text{௧} + \text{ஷ} - \text{ஷ}^{\text{௨}}) - \sqrt{\text{௧} + \text{ஷ} - \text{ஷ}^{\text{௨}}} = - \frac{\text{௧}}{\text{௯}}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௦. $\sqrt[\text{ந}]{\text{ஷ}^{\text{ந}} - \text{ஆ}^{\text{ந}}} = \text{ஷ} - \text{ஈ}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௧. $\frac{\sqrt{\text{௪ஷ} + \text{௨}}}{\text{௪} + \sqrt{\text{ஷ}}} = \frac{\text{௪} - \sqrt{\text{ஷ}}}{\sqrt{\text{ஷ}}}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௨. $\text{ஷ}^{\frac{\text{௪}}{\text{௫}}} + \text{ஷ}^{\frac{\text{௩}}{\text{௫}}} = \text{௭௫௬}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௩. $\sqrt{\text{௨ஷ} + \text{௧}} + \text{௨}\sqrt{\text{ஷ}} = \frac{\text{௨௧}}{\sqrt{\text{௨ஷ} + \text{௧}}}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௪. $\text{௨}\sqrt{\text{ஷ} - \text{ஆ}} + \text{௩}\sqrt{\text{௨ஷ}} = \frac{\text{௭ஆ} + \text{௫ஷ}}{\sqrt{\text{ஷ} - \text{ஆ}}}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௫. $ஷ+௧௬-௭\sqrt{ஷ+௧௬} = ௧0-௪\sqrt{ஷ+௧௬}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௬. $\sqrt{ஷ^{௫}} + \sqrt{ஷ^{௩}} = ௬\sqrt{ஷ}$ இதைச் சாதிகரி.

௨௭. $\frac{௪ஷ-௫}{ஷ} - \frac{௩ஷ-௭}{௩ஷ+௭} = \frac{௯ஷ+௨௩}{௧௩ஷ}$ இதைச்சாதிக

௨௮. $\frac{௩}{௬ஷ-ஷ^{௨}} + \frac{௬}{ஷ^{௨}+௨ஷ} = \frac{௧௧}{௫ஷ}$ இதைச் சாதிக

௨௯. $(ஷ-௫)^{௩} - ௩(ஷ-௫)^{\frac{௩}{௨}} = ௪0$ இதைச் சாதிக

௩0. $ஷ+\sqrt{ஷ+௬} = ௨+௩\sqrt{ஷ+௬}$ இதைச் சாதிக

௩௧. ஒரு கூறு பட்டாடையாகவும், மறுகூறு மயிர்ப்படாமாக வும், நீளம் (௧௧0) முழமாகவுமிருந்த ஒரு புடைவையை ஒரு வர்த்தகன் வைத்திருக்கக் கண்ட கோமட்டி, பட்டாடைக்கும் மயிர்ப்படாத்துக்குந் தனித்தனி நீளம் யாதென வினவப், பட்டாடை நீளத்தினது வர்க்கத்தை மயிர்ப்படாம் நீளத்தினது எண்பது மடங்கிற் கழிக்கச் சேடம் (௪00) ஆம் என்று வர்த்தகன் சொன்னுற் பட்டாடைக்கும் மயிர்ப்படாத்துக்கும் என்னென்ன நீளமாம்?

இவ்வினவுக்கு விடையறியும்படி, பட்டாடை நீளம் (ஷ) என்றும், மயிர்ப்படாம் நீளம் (௧௧0—ஷ) என்றுங் கொண்டால் $௮0(௧௧0-ஷ)-ஷ^{௨} = ௪00$ என்ற சமீகரணம் பிறக்கும். இதைச் சாதிகரிக்க,

$ஷ = -௪0 \pm ௧00$ என்று விடைவரும். வரவே (ஷ)=௬0 என்றும், ஷ= —௧௪0, என்றும் இரண்டு விடைவருமாயினும் பட்டாடைமுதலிய பொருட்களுக்கு இருணராசி பொருந்தாதாகையால் (ஷ)=௬0 என்ற ஒன்றுமாத்திரமே விடையெனக்கொள்க. ஆகையாற் பட்டாடைக்கு நீளம் (௬0) முழம், மயிர்ப்படாத்துக்கு நீளம் (௧௧0—௬0)=௫0 முழமாம்.

௩௨. இரண்டு சகோதரங்களின் வயதை ஒன்ருய்க்கூட்டத் தொகை (௪௫), பெருக்கக் குணிதம் (௫00) எனில் அந்தச் சகோதரங்களின் வயதென்னென்ன?

விடை ௨௫; ௨0.

௩௩. ஒரு வியாபாரி (௯௭௫) ரூபாய்க்குச் சில புடைவை வாங்கி ஒவ்வொரு புடைவையை (௪௮) ரூபாய் விற்றபோது ஒரு புடைவையின் விலை அவனுக்கு லாபமானுல் அந்த வியாபாரி வாங்கின புடைவை எத்தனை?

விடை ௧௫.

௩௪. சில செட்டிகள் சரிசரியாகப் பணம் போடப் பொருந்தி (௧௭௫) ரூபாய்க்கு ஒரு கர்ப்பூரப்பெட்டியை வாங்க, அவர்கள் இருவர் பொருந்திக்கொண்டபடி பணம்போடாதபடியால் மற்றச் செட்டிகள் தாங்கள் போடவேண்டிய பணத்திலும் பத்துப்பத்து ரூபாய் அதிகமாய்ப்போட்டுப் பெட்டியை வாங்கினுர்கள். கர்ப்பூரப்பெட்டியை வாங்கின செட்டிகள் எத்தனை பெயர்?

விடை ௭.

௩௫. நவநீதச் செட்டியொருவன் வெண்ணெய்வாங்கி(௩௯) வராகனுக விற்றபோது கொள்விலை இலாபத்துக்கெப்படியோ அப்படியே (௧00) கொள்விலைக்கிருந்தது. செட்டிக்குக் கொள்விலை எத்தனைவராகன்?

விடை ௩0.

௩௬. ஒரு இடையன் சில ஆட்டை (௭௨) ரூபாய்க்கு இராசாவின் தலையாரிக்கு விற்றபோது தலையாரி வாங்கின ஆட்டோடே (௬) ஆட்டைக் கூட வலாற்காரமாகப் பிடித்துக்கொண்டு போய்விட்டான். இந்த ஆருட்டையுங் கூட்டி விலைபார்த்தபோது ஆட்டுக் கொவ்வொரு ரூபாய் தலையாரிக்கு லாபமானதென்ருல், அவன் வாங்கின ஆடெத்தனை? ஒவ்வொரு ஆட்டுக்கும் விலையென்ன?

விடை ஆடு ௧௮. விலை ௪ ரூபாய்.

௩௭. (௧௮) கோல்நீளம் (௧௨) கோல் அகலமான பத்ம தடாகமொன்றைச் சூழ்ந்திருந்த பித்திகை ஏகத்துக்கு ஒரே அகலமும், பத்மதடாகத்தின் பரப்பெத்தனையோ அத்தனை பரப்புடையதுமாயிருந்ததெனில், பித்திகை எத்தனை கோல் அகலமுடையது?

விடை ௩.

௩௮. இந்திரபுரத்தரசன் மாத்தாண்ட புரத்தரசனைக் காணும்படி இரதாருடனுய் நாளொன்றுக்கு ஏழகாதஞ்சென்று (௩௨) காதம் போனபோது அவ்வரசன் வரவைக் கேள்வியுற்ற மாத்தாண்டேசன் அந்தக்ஷணமே தானும் இரதாருடனுய்ச் செல்லவேண்டிய தூரத்தின் $(\frac{௧}{௧௯})$ தூரம் ஒவ்வொரு நாளுஞ் சென்று ஒரு நாளிற் சென்ற காதம் எத்தனையோ அத்தனை தினந்தத்தில் அரசனைச் சந்தித்தானெனில் இந்திரபுரத்துக்கும் மாத்தாண்டபுரத்துக்குமிடையான தூரம் எத்தனைகாதம்?

விடை ௧௫௬. அல்லது ௭௬.

௩௯. கிருஷ்ணன், இராமன் என்ற இரண்டு செட்டிகள் கூடி

(சகசு) வராகன் முதல்கட்டி வியாபாரம்பண்ணினபோது கி ஷணன் தன் பணத்தை (கூ) மாதத்துக்கும், இராமன் தன் ணத்தை (சு) மாதத்துக்கும் வியாபாரத்தில் விட்டுப் பின்பு வ ரவு செலவுக் கணக்கைப் பார்த்தார்கள். அப்படியே பார்த் போது முதலும் இலாபமுமாகக் கிருஷணனுக்கு (உஉஅ) வரா னும், இராமனுக்கு (உருஉ) வராகனுங் கிடைத்ததென்றால் ஒ வ்வொரு செட்டியும் போட்ட முதல் எத்தனைவராகன்?

விடை கசுஉ., உஉச.

சo. ஒரு சதுரமண்டபத்தைச் சுற்றியிருந்த வீதியின் அறு டங்கில் (உ) கோலைத் தள்ளினால் மண்டபத்தின் ஒரு நீட்டுவ ரும். இந்த மண்டபத்தின் நான்குபுறத்தில் நீட்டையும் (கூஉ) கோலையுங் கூட்டினால் வீதியிலடங்கிய குழிவரும். அப்படியா னால் மண்டபம் எத்தனை குழிகொண்டது?

விடை உருசு.

சக. ஒருவன் சூதாடினபோது சூதாடும்படி அவன் கொண்டு போன ரூபாய் எத்தனையோ அத்தனை ரூபாயை முதலாட்டத் தில் வென்று பின்னுந் தன்வசப்பட்ட ரூபாயின் வர்க்கமூலத் தோடைந்து ரூபாயைக்கூட்டிய அளவு இரண்டாமாட்டத்தில் வென்று மூன்றுமாட்டத்திற் றன்வசப்பட்ட ரூபாய்த்தொகையி ன் வர்க்கமளவாய் வென்றான். அப்பொழுது அவன் வசமிரு ந்த ரூபாய் (உஉருசு.) சூதாட அவன் கொண்டுபோன ரூபாய் எத்தனை?

விடை கஅ.

சஉ. * இரண்டெண்ணின் அந்தரம் (அ) ம் அவ்வெண்ணி ன் வர்க்காந்தரம் (சoo) மாமெனில் அந்த எண்கள் யாவை?

விடை உக, உகூ.

சரு. ஒரு தடாகத்திலிருந்த அன்னக்கூட்டத்தினது வர்க்க மூலத்தரையினது ஏழமடங்கு மெல்ல மெல்ல நடந்து தடாக த்தை நீங்க அங்கோர்பேடையுஞ் சேவலும் மாத்திரம் ஒன் றையொன்று கொத்திக் கொத்தித் தண்ணீரில் விளையாடிக் கொண்டிருந்தன. அந்தத் தடாகத்திலிருந்த அன்னப்பட்சிக ளெத்தனை?

விடை கசு.

சச. ஒரெண்ணின் வர்க்கமூலத்தோன்பது மடங்கை அவ் வெண்ணிற் கூட்டத் தொகை (கஉசo) ஆமெனில் அந்த எ ண்யாது?

விடை கூசுக.

* சஉ—சஎம். வினாக்களைப் பாஸ்கராசாரியர் செய்த லீலாவதியிலும் வீசகணிதத்திலு காண்க.

சரு. கார்முகில் வரக்கண்ட ஒரு ஓதிமக்கூட்டத்தினது வர் க்கமூலத்தின்து பதின்மடங்கு சிறையடித்தெழுந்து மானதவா விக்குச்செல்ல அக்கூட்டத்தின் எட்டிலொருகூறு வாவிக்கரை யிலிருந்த தாமரைக்கூட்டத்திலொளித்துக்கொள்ள எஞ்சின மூன்றுசோடோ தண்ணீரில் விளையாடிக்கொண்டிருந்தன. அப்படியானால் ஓதிமம் எத்தனை?

விடை கசச.

சசு. கோபாக்கினி அழலும் நெஞ்சனான அருச்சுனன்போர் முகத்திற் கன்னனை வதைக்கும்படி சில அஸ்திரங்களைக் கை யிலெடுத்து அவற்றின் அரைவாசியாற் கன்னனுடைய அஸ்தி ரங்களைச் சின்னபின்னப்படுத்தி, அவற்றின் வர்க்கமூலத்தின து நான்மடங்காற்றேரிற்கட்டிய குதிரைகளை வீட்டிச், சாரதி யாகிய சல்லியனை ஆறு அஸ்திரங்களாற் சங்கரித்து, மூன்றஸ் திரத்தாற் குடையையும், கொடியையும், வில்லையுஞ் சிதைத் து, ஒரு அஸ்திரத்தாற் கன்னனுடைய சிரத்தை அறுத்தான். அப்படியானால் அருச்சுனன் கையிலெடுத்த அஸ்திரமெத்தனை?

விடை கoo.

சஎ. ஒருகூட்டந் தேனீயின் அரைவாசியினது வர்க்கமூலமு ம் அக்கூட்டத்தில் $\left(\frac{\text{அ}}{\text{கூ}}\right)$ ம் மல்லிகைப்புஷபத்தில் வீழ்ந்திருக் க, இராத்திரியிற் குவிந்த தாமரைமலருட் கிடந்த ஒரு ஆணீயினி னிய கீதத்தைச் சிரவணஞ்செய்த பெண்ணீயொன்று தானும் அதற்கிசையக் கானஞ் செய்துகொண்டிருந்தது. தேனீயெ த்தனை?

விடை எஉ.

௰க. அநேகாட்சர சமீகரண அதிகாரம்.

[Equations which contain two or more unknown quantities.]

ரகூகூ. பிர. வெள்ளைச் சமீகரணத்தாலும், வர்க்கசமீகரண த்தாலும் ஏகாட்சரசமீகரணங்களை மாத்திரமே சாதிகரிக்க விதிகூறினோம். ஆனால்,

மறைநிலையிராசி ஒன்றுக்கதிகப்பட்டு அநேகமாக வருங் காலை சமீகரணத்தை அநேகாட்சர சமீகரண மென்பர்.

அநேகாட்சர சமீகரணத்தை அநேக வர்ண சமீகரணமென் றும் வடநூலார் கூறுவர். உ-ம்.

க. ஷ+ஸ=கச }
உ. ஷ—ஸ=உ } இவை அநேகாட்சர சமீகரணங்கள்

இவ்விடத்து ஷ, ஸ, என்பன மறைநிலயிராசிப் பிரதி
ளாம். இந்தச்சமீகரணங்கள் நிலமாற்றுல்,

க. ஷ=கச—ஸ } என்றும் இவற்றின் வாமபாகம் (ஷ
உ. ஷ=உ+ஸ } ஆகையால், (கக) ம் சுயம்பிரமாண
படி,

உ+ஸ=கச—ஸ என்றும், நிலமாற்றுல், ஸ=சு என்று
ம் வரும். இதில் (ஸ) வுக்குப் பெற்ற அர்த்தத்தை முதற் சமீக
ணத்திற் பிரதிகரிக்க,

ஷ+சு=கச, என்றும், ஷ=அ என்றும் வரும்.

உ௱. பிர. இந்தப் பிரகாரமே மறைநிலயிராசி
களின் அர்த்தங்களைத் தனித்தனியே நிச்சயித்துப் பு
துச்சமீகரணங்களை வருவித்துச்சாதிகரிக்குமுறைமை
விமோசனகரணமேன்பர்.

விமோசனகரணத்தை கவது சமானகரணம், உவது பிர
திகரணம், ௩வது சங்கலனவியவகலனம் என்ற மூன்று கிர்த்
தியத்தால் முடிக்கலாம்.

உ௱க. பிர. (க) இரண்டு மறைநிலயிராசிகள் வரும்போது
சமானகரணத்தால் விமோசனஞ் செய்யும்படி,

விதி.

மறைநிலயிராசிகளிரண்டின் ஒன்றைத் தெரிந்து
கொண்டு சமீகரணங்களோவ்வோன்றிலுந் தெரிந்து
கொள்ளப்பட்ட மறைநிலயிராசியினது அர்த்தங்க
ளை நிச்சயித்து அவ்வர்த்தங்களை வாமதட்சிணபாகங்
களாகப் பேறும் புதிய சமீகரணத்தைப் பிறப்பித்து
க்கோள். உ—ம்.

ஷ+ஸ=௩சு }
ஷ—ஸ=கஉ } என்ற அநேகாட்சர சமீகரணங்களில்

ஷ, ஸ, என்ற மறைநிலயிராசிகளின் அர்த்தங்களை நிச்ச
க்கும்படி முதற் சமீகரணத்தில் (ஸ) வையும், இரண்டாஞ்ச
கரணத்தில் (ஸ) வையும் நிலமாற்ற,

ஷ=௩சு—ஸ }
ஷ=கஉ+ஸ } என்றும் (ஷ) வின் அர்த்தங்களாகிய
ட்சிணங்கங்களைப் புதுச்சமீகரணங்களாக்க,

கஉ+ஸ=௩சு—ஸ, என்றும் சாதிகரிக்க, ஸ=கஉ, என்று
ம், (ஸ) இன் அர்த்தமாகிய (கஉ) ஐப் பிரதிகரிக்க,

ஷ=உச என்றும் வரும்.

விஞ.

௩. உஷ+௩ஸ=உஅ }
௩ஷ+உஸ=௩எ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

உ. சஷ+ஸ=ச௩ }
௫ஷ+உஸ=௫சு } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

௩. சஷ—உஸ=உ௦ }
சஷ+உஸ=க௦௦ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

ச. சஷ—உஸ=கசு }
சுஷ=௬ஸ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

௫. ௫ஷ+அ=எஸ }
௫ஸ+௩உ=எஷ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

உ௱உ. பிர. (உ) இரண்டு மறைநிலயிராசிகள் வரும்போது
பிரதிகரணத்தால் விமோசனஞ்செய்யும்படி,

விதி.

மறைநிலயிராசியின் அர்த்தத்தை ஒரு சமீகரண
த்தில் நிச்சயித்து, அதனை மற்றச் சமீகரணத்திற் பிர
திகரித்துக்கோள். உ-ம்.

ஷ+௩ஸ=க௫ }
சஷ+௫ஸ=௩உ } என்புழி,

முதற் சமீகரணத்தில் (௩ஸ) ஐ நிலமாற்ற ஷ=க௫—௩ஸ
என்றும், (ஷ) இன் அர்த்தத்தை இரண்டாஞ்சமீகரணத்திற்
பிரதிகரிக்க,

சு௦—கஉஸ+௫ஸ=௩உ என்றும், சாதிகரணத்தால் ஸ=
ச என்றும் வரும். ஆகையால் ஷ=க௫—கஉ=௩.

விஞ.

சு. அஷ+ஸ=சஉ }
உஷ+சஸ=கஅ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

எ. உஷ+அஸ=அச }
சஷ+சுஸ=சுஅ } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

அ. ௩ஷ+௩ஸ=எஉ }
சஷ+௫ஸ=கககு } இவற்றுக்கு அர்த்த நிச்சயம்பண்ணு.

௯. க/உ ஷ+க௦ஸ=கஉச }
உஷ+௬ஸ=கஉச } இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

உ௱௩. பிர. (௩) இரண்டு மறைநிலயிராசிகள் வரும்போது
சங்கலன வியவகலன கிர்த்தியங்களால் விமோசனஞ்செய்யு
ம்படி,

வினா.

மறைநிலையிராசிகளிலொன்றைத் தரித்திருக்கின்ற உறுப்பு ஒரு சமீகரணத்திலேத்துணைத்தாயிருக்கிறதோ அத்துணைத்தாய் மற்றச் சமீகரணத்திலும் இருக்கும்படி பெருக்கல், பிரித்தல் என்ற கிர்த்தியங்களால் இயற்றியபின், இந்த மறைநிலையிராசிகளோடு கூடிநிற்கின்ற உறுப்புகள் சமானசின்னமுடையனவானால், சமீகரணங்களை ஒன்றிலொன்று களைந்தும், வேற்றுச்சின்னமுடையனவானால் அவற்றை ஒன்றாய்க் கூட்டியுங்கோள்க. உ-ம்.

$$\left.\begin{matrix} ௨ஷ+௪ஸ=௨௦ \\ ௪ஷ+௫ஸ=௨௮ \end{matrix}\right\}$$ என்புழி,

முதற் சமீகரணத்தை (௨) ஆற்பெருக்க, ௪ஷ+௮ஸ=௪௦ என்றுவரும்.

இதில் மறைநிலையிராசியோடு கூடி நிற்கின்ற உறுப்பாகிய (௪ஷ) இரண்டாஞ்சமீகரணத்தில் இருக்கின்ற (௪ஷ) ஒடு சமப்பட்டதினாலும் இவ்விரண்டுறுப்புகளுஞ் சகசின்னம்பெற்ற சமானராசிகளானதினாலுஞ் சமீகரணங்களை ஒன்றிலொன்று களைய,

$$\left.\begin{matrix} ௪ஷ+௮ஸ=௪௦ \\ ௪ஷ+௫ஸ=௨௮ \end{matrix}\right\}$$

௩ஸ=௧௨ என்றும்,
ஸ=௪ என்றும் வரும்.

(ஸ) இன் அர்த்தத்தைப் பிரதிகரிக்க, ஷ=௨, என்றுவரும்.

மேலும்,

$$\left.\begin{matrix} ௨ஷ+ஸ=௧௬ \\ ௩ஷ-௩ஸ=௬ \end{matrix}\right\}$$ என்புழி,

இரண்டாஞ்சமீகரணத்தை (௩) ஆற்பிரிக்க, ஷ−ஸ=௨ என்றும்,

சமப்பட்ட உறுப்புகளாகிய (ஸ) (−ஸ) வேற்றுச்சின்னம் பெற்றவையானதால், சமீகரணங்களைக்கூட்ட,

$$\begin{matrix} ௨ஷ+ஸ=௧௬ \\ ஷ-ஸ=௨ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ௩ஷ=௧௮ \\ ஷ=௬ \end{matrix}\right\}$$ என்றும் (ஷ) இன் அர்த்தத்தைப் பிரதிகரிக்க, ஸ=௪ என்றும் வரும்.

மறைநிலையிராசியோடு கூடிவருகின்ற உறுப்பு ஒரு சமீ

ணத்திலிருப்பதுபோலவே மற்றச் சமீகரணத்திலுமிருந்தால் பெருக்கவாவது, பிரிக்கவாவது வேண்டியதில்லை.

வினா.

௧௦. $\left.\begin{matrix} ௪ஷ+௩ஸ=௫௦ \\ ௩ஷ-௩ஸ=௬ \end{matrix}\right\}$ இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

௧௧. $\left.\begin{matrix} ௩ஷ+௨ஸ=௩௮ \\ ௫ஷ+௪ஸ=௬௮ \end{matrix}\right\}$ இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணு.

௧௨. $\left.\begin{matrix} ௪ஷ-௪௦=-௪ஸ \\ ௬ஷ-௬௩=-௭ஸ \end{matrix}\right\}$ இவற்றுக்கு அர்த்தநிச்சயம் பண்ணு.

௧௩. ஒரு நாயகி தனது பாங்கியை நோக்கி என் நாயகன் என்னை மணம்புரிய (௭) வருடத்துக்கு முன் அவருடைய வயது எனது வயதின் மும்மடங்காயும், மணம்புரிந்து எழுவருடஞ்சென்றபின் அவருடைய வயது எனது வயதினிரட்டியாயுமிருந்தால், பாங்கியே நாங்கள் மணம்புரிந்தபோது, எங்களிருவருடைய வயதுகளென்னென்னவென்று சொல்வாயாகவென்றாள். நாயகன் நாயகி இவர்களிருவருடைய வயதுகளும் யாவை?

விடை நாயகன்வயது ௪௬.
நாயகிவயது ௨௧.

௧௪. போர்முகத்திலெதிர்த்த இரண்டு சேனையின் பதாதித்தொகை (௨௧,௧௧௦.) பெரிய சேனையின் பதாதியை இரட்டித்துச்சிறிய சேனைப்பதாதியின் மும்மடங்கோடு கூட்ட (௫௨,௨௧௬) தொகையாம். இப்படியானாற் பெரிய சேனைப்பதாதி எத்தனை?

விடை ௪௧,௧௧௪.

௧௫. ஒரு தடாகமத்தியில் நிறுத்தியிருந்த தம்பத்தினது சலத்தின் கீழ்ப்பட்ட கூற்றின் மூன்றிலொருபங்கையுஞ் சலத்தின் மேற்பட்ட கூற்றின் ஆறிலொருபங்கையும் ஒன்றாய்க்கூட்டத்தொகை (௨௮) ம்; கீழ்க்கூற்றின் ஐந்துமடங்கில் மேற்கூற்றின் ஆறுமடங்கைத் தள்ளச் சேடம் (௧௨) மானால், தம்பத்தின் நீளம் எத்தனை முழம்?

விடை ௧௦௮.

௧௬. ஒரு பின்னபோகத்துடன் (௪) ஐக் கூட்டப் பின்னர்த்தம் $\left(\frac{௧}{௨}\right)$ ஆகவும், ஆரகத்துடன் (௭) ஐக் கூட்டப் பின்னர்த்தம் $\left(\frac{௧}{௫}\right)$ ஆகவும் வருமெனில் அப்பின்னம் யாது?

விடை $\frac{௫}{௮}$.

௧௭. இரண்டெண்ணின் தொகையையும் அந்தரத்தையும்

பெருக்கக் குணிதம் (௫) ஆகவும், அவ்வெண்ணினது வர்க்கங்களின் தொகையையும் அந்தரத்தையும் பெருக்கக் குணிதம் (௬௫) ஆகவும் வருமெனில் அந்த இரண்டெண்களும் யாவை?

விடை ௨, ௩.

௧௮. இரண்டெண்ணின் அந்தரமும், தொகையும், குணிதமும் முறையே (௨, ௩, ௫) என்ற எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று எப்படியோ அப்படியேயிருக்குமெனில், அவ்விரண்டெண்களும் யாவை?

விடை ௧௦, ௨.

௧௯. ஒரு செட்டி (௨௦) துலாங் கண்ட சருக்கரையையும், (௩௦) துலாஞ் சருக்கரையையும், (௧௨௦) வராகனுக்கு விற்றான். பின்னொருவேளையில் முன் விற்ற கிரயப்படியே (௩௦) துலாங் கண்ட சருக்கரையும் (௨௫) துலாஞ் சருக்கரையும் (௧௪௦) வராகனுக்கு விற்றான். செட்டி விற்ற கண்டசருக்கரைக்குஞ் சருக்கரைக்குந் துலாமொவ்வொன்றிற்கு விலை எத்தனை வராகன்?

விடை ௩, ௨.

௨௦. பேடையுஞ் சேவலுஞ் சரிசரியாயிருந்த ஓரன்னக்கூட்டத்திற் சில பேடை அன்னங்கள் ஒரு வேடன் வலையிற் பட்டிறந்துபோகச் சேடமாயிருந்த பேடையின் மும்மடங்கு, சேவலினிரட்டிக்கு (௧௫) ஐக் கூட்டினதற்குச் சரியாயிருந்தது. பின்னும் வேறொருவலையில் (௧௫ பேடை அன்னம்பட்டிறக்க, (௧௦) சேவல் அன்னக்கூட்டத்தோடு வந்து சேர்ந்தபோது, (௭) (௩) க்கு எப்படி அதிகப்பட்டிருக்கிறதோ, அப்படியே சேவலின் தொகை பேட்டின்தொகையில் அதிகப்பட்டிருந்தது. அப்படியானால், முதன்முதல் அன்னக்கூட்டத்திலிருந்த பேடையுஞ் சேவலும் எத்தனை? முதன்முதல் வேடன்வலையிற் பட்ட பேடை எத்தனை?

விடை ௬௦, ௧௫.

௨௧. பறை ஒன்றுக்கு (௭) அணு விலையான (௨௮) பறை வரகோடே, பறையொன்றுக்கு (௯) அணுவிலையான குரக்கனையும், பறையொன்றுக்கு (௧௨) அணு விலையான நெல்லையும் கலந்து, கலந்த தானியத்தைப் பறையொன்றுக்கு (௧௦) அணுமுடிய விற்கவேண்டுமேயானால் (௧௦௦) பறை கலப்புத்தானியத்திற் குரக்கன் எத்தனை பறை? நெல்லு எத்தனை பறை கலக்கவேண்டும்?

விடை குரக்கன், ௨௦ நெல் ௫௨.

௨௨. ஒரு இடைச்சி பாலையுந் தண்ணீரையுங் கலந்தாள். கலந்தபின் (௬) படிபாலையும் (௬) படி தண்ணீரையுங் கூட்டிக் கலப்பாளேயாகில், ஏழேழுபடிபாலுக்கு ஆறுபடி தண்ணீருமாம். (௬) படிபாலையும் (௬) படி தண்ணீரையும் அதிலெடுத்துப்போடுவாளேயாகில் ஆறுபடிபாலுக்கு ஐவைந்துபடி தண்ணீருமாமெனில், அவள் கலந்தபால் எத்தனைபடி? தண்ணீர் எத்தனைபடி?

விடை பால் ௭௮. தண்ணீர் ௬௬.

௨௱௪. பிர. இதுவரைக்குங் கூறிய உதாரணங்களில் இரண்டு மறைநிலையிராசிகள் கலந்து வரப்பெற்ற சமீகரணங்களைச் சாதிகரிக்குமுறையை விளக்கினேமாயினும், ௩, ௪, ௫, முதலிய பலமறை நிலையிராசிகள் விரவி வரப்பெற்ற சமீகரணங்களையும், முன்னையவிதிகளைத் துணையாகக்கொண்டு சாதிகரிக்கலாமென்றுணர்க. பலமறை நிலையிராசி வரும்போது மறைநிலையிராசிகளெத்தனையோ அத்தனை தனிமைச் சமீகரணங்களும் வந்தாலன்றி மறைநிலையிராசிகளின் அர்த்தங்கள் வரையறைபெருவாம்.

௨௱௫. பிர. இவ்விடத்துத் தனிமைச்சமீகரணமென்றது,

ஒன்றிலொன்று பற்றின்றி வெவ்வேறு துறைகளைச் சார்ந்து பிறக்கின்ற சமீகரணங்களை.

ஒரே துறையைப் பலரூபங்களில் விளக்குகின்ற சமீகரணங்கள் பரிணும சமீகரணங்களாம். ஆகவே,

ஒரு பரிணுமசமீகரணம் வேறொரு பரிணுமசமீகரணமாக மாறுமென்றும், ஒரு தனிமைச்சமீகரணம் வேறொரு தனிமைச்சமீகரணமாக மாறாதென்று மறிக. உ-ம்.

ஈ—ஷ=ஸ } இவ்விரண்டு சமீகரணங்களும் (ஷ) ஐ
ஈ=ஸ+ஷ } நிலைமாற்ற ஒன்றினின்றொன்று பிறக்குமாதலால், பரிணுமசமீகரணங்களாம்.

ஈ—ஷ=ஸ } இவை ஒன்றினின்றொன்று பிறவா
ஆ+ஷ=உஈஸ } மல் வேறுவேறான துறைகளைச் சார்ந்து நிற்கின்றபடியால், தனிமைச்சமீகரண்ங்களாம்.

௪ஷ—௬=௪ஷ—௬. என்றிப்படி,

வாமதட்சிண பாகங்களாவது பலசமீகரணங்களாவது ஒரேரூபத்தில் அமைந்துகிடக்கில் இவற்றை அத்துவைத சமீகரணம் அதாவது ஒருமைச் சமீகரணமென்னலாம்.

௨௱௬. பிர. மூன்று மறைநிலையிராசிகள் மூன்று தனிமைச்சமீகரணங்களில் விரவிவருமாயினும், பலமறை நிலையிராசிகள், எத்தனை மறைநிலையிராசிகளுளவோ அத்தனை தனிமைச்சமீகரணங்களில் விரவிவருமாயினும் அவற்றைச் சாதிகரிக்கும்படி,

மறைநிலையிராசிகளை ஒவ்வொன்ருய் விமோசனி

த்துச் சமீகரணங்களின் தோகையைச் சுருக்கி ஒரே மறைநிலையிராசியை மாத்திரங் கலந்து நிற்கின்ற ஒரு சமீகரணத்தைப் பிறப்பித்து அர்த்தநிச்சயஞ்செய். உ--ம்.

௧. ஷ+௫ஸ+௬ன=௫௩
ஷ+௩ஸ+௩ன=௩0
ஷ+ஸ+ன=௧௨ } என்புழி,

ஷ, ஸ, ன, என்ற மறைநிலையிராசிகளுக்கு அர்த்தம் எவையெனில்,

இரண்டாஞ் சமீகரணத்தை முதற் சமீகரணத்திலிருந்தும், மூன்றாஞ் சமீகரணத்தை இரண்டாஞ் சமீகரணத்திலிருந்துங் கழிய,

௨ஸ+௩ன=௨௩
௨ஸ+௨ன=௧௮ } என்றும்,

இவ்விரண்டு சமீகரணங்களிற் கீழ்ச்சமீகரணத்தை மேற்சமீகரணத்திற் கழிய, ன=௫ என்றும் வரும்.

கடைசியில் வந்த சமீகரணத்தில் (ன) ஐப் பிரதிகரித்துச் சாதிகரிக்க, ஸ=௪ என்றும்,

மூன்றாஞ்சமீகரணத்தில் (ன) (ஸ) என்பனவற்றைப் பிரதிகரித்து நிலைமாற்ற, ஷ=௩ என்றும்வரும்.

௧. (௧/௨) ஷ+ன+(௧/௨) ற=௮
௨. ௨. ஸ+ஷ+ற=௯
௩. ஸ+ஷ+ன=௧௨
௪. ஸ+ற+ன=௧0 } என்புழி,

ஷ, ஸ, ன, ற, என்பனவற்றின் அர்த்தங்கள் யாவையெனில்,

௫. முதற் சமீகரணத்தின் பின்னரூபைக் குணனகிர்த்தியத்தாலொழிக்க,

ஷ+௨ன+ற=௧௬ என்றும்,

௬. இரண்டாஞ் சமீகரணத்தை மூன்றாஞ் சமீகரணத்திற் கழிய,

ன−ற=௩ என்றும்,

௭. நான்காஞ் சமீகரணத்தை மூன்றாஞ் சமீகரணத்திற் கழிய,

ஷ−ற=௨ என்றும் மூன்று சமீகரணங்களாம்.

௮. ஐந்தாவதையும் ஆறாவதையுங் கூட்ட,

ஷ+௩ன=௧௯ என்றும்,

௯. ஏழாவதை ஆறாவதிற் கழிய

−ஷ+ன=௧ என்றும்,

இரண்டு சமீகரணங்களாம்.

௰. எட்டாவதையும் ஒன்பதாவதையுங் கூட்ட,

௪ன=௨0 அல்லது ன=௫ என்றும்,

௧௧. எட்டாவதுநிலைமாற்றால், ஷ=௧௯−௩ன=௪ என்றும்,

௧௨. மூன்றாவது நிலைமாற்றால் ஸ=௧௨−ஷ−ன=௩ என்றும்,

௧௩. இரண்டாவது நிலைமாற்றால், ற=௯−ஷ−ஸ=௨, என்றும், அந்தந்த மறைநிலையிராசியின் அர்த்தம் நிச்சயப்பட்டவாறுகாண்க.

௨௱௭. பிர. இவ்விரண்டு சமீகரணங்களும் மூன்றும் விமோசன விதிப்படி சாதிகரணமடைந்தவாயினும், அவை மற்றிருவிதியானுஞ் சாதிகரணமடையவும் பெறுமாதலால் முன்போன மற்றும் வினாக்களுக்கும் பலவாறு விடையறியலாமென்பது வெளிப்படையாம். முன் எடுத்துக்காட்டின உதாரணங்களிற்றெரித்தமுறைகளே அவ்வவ்வினாக்களுக்குச் சிறந்த சுருங்கிய முறைகளென்றெண்ணவேண்டாம். விதிகளை உதாகரித்து விளக்குவதற்கேயன்றிச் சூட்சமான விதிகளை உணர்த்துவதற்கு யாங் கருதியதில்லை. இன்னின்னவிதியே தகுந்ததென்று வரையறைசெய்து கூறுவது ஏலாதாயினும், கணிதரின் விவேகசாதனையால் அந்தந்த வினாக்களின சுருங்கிய சூட்சமான முறைகளும், அவற்றின பற்பல துறைகளும் அறியப்படும். உ–ம்.

ஷ, ஸ, ன, ற, என்ற நான்கு எண்களில்,

முதன் மூன்றையுங் கூட்டியதொகை, =௧௩.
முதலிரண்டையும ஈற்றெண்ணையுங் கூட்டியதொகை=௧௭
முதலையும் ஈற்றிரண்டையுங் கூட்டியதொகை, =௧௮
ஈற்றெண்மூன்றையுங் கூட்டியதொகை, =௨௧

அந்த எண்கள் யாவையெனில், நான்கெண்ணின் தொகைக்கும் (ஞ) ஐப் பிரதியாகவைத்தால்,

ஞ−ற=௧௩
ஞ−ன=௧௭
ஞ−ஸ=௧௮
ஞ−ஷ=௨௧ என்றும்,

சமீகரணங்களெல்லாவற்றையுங் கூட்ட,

௪ஞ−(ற+ன+ஸ+ஷ)=௬௯.

அதாவது, ௪ஞ−ஞ=௬௯ என்றும்,

ஞ=௨௩ என்றும் வரும்.

இதனைப் பிரதிகரிக்க,

௨௩−ற=௧௩
௨௩−ன=௧௭
௨௩−ஸ=௧௮
௨௩−ஷ=௨௧ } ஆகையால் { ற=௧0 என்றும்,
ன=௬ என்றும்,
ஸ=௫ என்றும்,
ஷ=௨ என்றும்,
வரும்.

௰௨. அநுபாத அதிகாரம்.

[Proportion.]

௨௱௮. பிர. ஒன்றற்கொன்று சமமாயாவது பெரிதாயாவது சிறிதாயாவது வருஞ் சில இராசிகளின் சம்பந்த சார்புகளைக் கொண்டு கருதிய இராசியைக் கிரகித்துணர்வதே கணிதகிர்த்தியங்களினது முடிபாகையால், அம்முடிபை அடைவிக்கின்ற சமீகரணத்தையும், அநுபாதத்தையும் நன்குணர்தல்வேண்டும். சமீகரணத்தால் மறைநிலையிராசிக்குந் தெரிநிலையிராசிக்கும் இடையே சமத்துவம் பிறப்பித்து அர்த்த நிச்சயஞ்செய்தோம். ஆனால் மறைநிலையிராசிகளும் தெரிநிலையிராசிகளும் ஒன்றற்கொன்று சமமாய்வராமல் ஒன்றற்கொன்று ஏறிக்குறைந்து வருமிடத்து மறைநிலையிராசிகளின் அர்த்தத்தை நிச்சயஞ்செய்யும்படி அநுபாதவிதிகளை அறிதல்வேண்டுமாதலில் இந்த அதிகாரத்தால் அநுபாதத்தை விளக்குகின்றேம்.

விகிதம்.

௨௱௯. பிர. இராசிகளொன்றற்கொன்றேறிக் குறைந்துவரும்பொழுது அவ்வேற்றத்தாழ்ச்சி எத்துணைத்தென்றுணர்த்துவதேதுவோ அது விகிதமாம்.

அந்தர விகிதமென்றும், அரணவிகிதமென்றும் விகிதம் இரண்டுவகைத்து. இவற்றுள்,

அந்தர விகிதமென்பது இரண்டிராசியை ஒன்றிலொன்று களைந்த சேடமாம். உ—ம்.

ரு . . ரூ அல்லது, ரு—ரூ என்புழி (ரூ) ஐ (ரு) இற் களைந்த சேடமாகிய (உ) அந்தரவிகிதமாம். (ரு) க்கும் (ரூ) க்கும் இடையே (. .) இப்படி அல்லது (—) இப்படி நிற்கின்ற சின்னங் கழிப்பறிகுறி.

(ரு) ஐயும் (ரூ) ஐயும் உறுப்புகளென்பர்.

அந்தரவிகித உறுப்பிரண்டையும் ஒரே இராசியாற் பெருக்குவது, அல்லது ஒரே இராசியால் அரிப்பது விகிதத்தை அவ்விராசியாற் பெருக்குவது அல்லது அரிப்பதற்குச் சமமாம். உ—ம்.

ஆ—ஈ=ர என்புழி, (ண) ஆற்பெருக்க,

ஆண—ஈண=ரண என்றும் (ண) ஆலரிக்க,

$\frac{ஆ}{ண}-\frac{ஈ}{ண}=\frac{ர}{ண}$ என்றுஞ் சமத்துவம் சிதையாதுவரும்.

(ரூம், சம், சுயம்பிர.)

௨௱௰. பிர. ஒரு அந்தரவிகிதத்தின் உறுப்புகளை வேறொரு அந்தரவிகிதத்தின் உறுப்புகளோடுமுறையே கூட்டினாலும், அவற்றை முறையே களைந்தாலும், அவற்றின் தொகையுஞ் சேடமும் அவ்விரண்டு விகிதத்தின் தொகைக்குஞ் சேடத்திற்குஞ் சமமாயிருக்கும். உ—ம்.

ஆ—ஈ, ஒ—ஐ } என்பன இரண்டு விகிதங்களாமெனில் இவற்றைக் கூட்ட, (ஆ+ஒ)—(ஈ+ஐ)=(ஆ—ஈ)+(ஒ—ஐ) என்றும் இவற்றைக் களைய (ஆ—ஒ)—(ஈ—ஐ)=(ஆ—ஈ)—(ஒ—ஐ) என்றுஞ் சமத்துவஞ் சிதையாதுவரும்.

௨௱௰௧. பிர. இரண்டிராசியில் ஒன்றை மற்றதற் கீந்து பெற்ற பலத்தால் விளக்கப்படும் இராசிச்சம்பந்தமேது அது சகரணவிகிதமாம். உ—ம்.

அ, ச, என்ற இராசிகளில் (அ) ஐ (ச) ஆலரித்தபலம் (உ). ஆதலால் (அ) க்கும் (ச) க்குஞ் சகரணவிகிதம் (உ) ஆம். இவ்வாறுவிகிதத்தைப் பிறப்பித்த உறுப்பிரண்டையுஞ் சோடு என்றும் துவிதயம் என்றும், துவிதயத்தின் முதலுறுப்பைப் பூருவம் என்றுங் கடையுறுப்பை அபரமென்றுஞ் சொல்லுவர்.

௨௱௰௨. பிர. சகரணவிகிதத்தை வரிவடிவில் விளக்கும் விதம் இரண்டு. பூருவத்தைப் போகமாகவும், அபரத்தை ஆரகமாகவுமுடைய பின்னரூபம் ஒருவிதம். பூருவத்துக்கும் அபரத்துக்குமிடையே இரண்டுபுள்ளி நிற்கப் பெற்றவடிவும் மற்றவிதம். உ—ம்.

(ஆ) வுக்கும் (ஈ) க்கும் உள்ள சகரணவிகிதம் $\left(\frac{ஆ}{ஈ}\right)$ அல்லது (ஆ : ஈ)

௨௱௰௩. பிர. பூருவம், அபரம், விகிதம் என்றிம்மூன்றனுள் யாதேனு மிரண்டையறிந்தால், மூன்றாவதையுமறியலாம். எப்படியென்றால்,

பூ, பூருவமென்றும்
ஆ, அபரமென்றும்
வி, விகிதமென்றுங்கொண்டால்

$வி=\frac{பூ}{ஆ}$ என்ற சமீகரணம் பிறக்கும். பிறக்கவே பூருவத்தை அபரத்துக்கீய விகிதமாம். இந்தச் சமீகரணங்குணனத்தால்,

பூ=ஆவி என்றும், பாககரத்தால்

$ஆ=\frac{பூ}{வி}$ என்றும் வருமாதலால்

அபரத்தை விகிதத்தாற் பெருக்கிப் பெற்ற பலம் பூருவமென்றும், பூருவத்தை விகிதத்தாலரித்துப்பெற்றபலம் அபரமென்றுங் காணலாம். ஆகையால்,

இரண்டு துவிதயத்திற் பூருவமும், பூருவமும், அபரமும், அபரமும் முறையே சமமானல் அவ்விருதுவியத்தினது விகிதங்களு மொன்றற்கோன்று சமமாமென்பது வெளிப்படை.

௨. அப்படியே இரண்டு துவிதயத்தின் விகிதங்கள் சமமாயிருக்க, பூருவமும், பூருவமுஞ் சமமானல், அவற்றின் அபரமும் அபரமுஞ் சமமாயென்றும், அபரமும், அபரமுஞ் சமமாஞற் பூருவமும், பூருவமுஞ் சமமாமென்றுங் காணலாம்.

௨௱௰௪. பிர. பூருவமும் அபரமும் ஒன்றற்கொன்று சமமானல் விகிதம் (௧) ஆம். உ-ம். ௩ × ௬ : ௧௮ = ௧. இந்த விகிதத்தைச் சமவிகிதமென்பர். பூருவம் பெருத்து அபரஞ் சிறுத்தால் விகிதம் (௧) க்கதிகப்படும். உ-ம். ௧௮ : ௬ = ௩. இந்த விகிதத்தைப் பெரியதாரதம்மிய விகிதமென்பர். பூருவஞ் சிறுத்து அபரம்பெருத்தால் விகிதம் (௧) இற் குறையும். உ-ம்.

$௨ : ௩ = \frac{௨}{௩}$ இந்த விகிதத்தைச் சிறியதாரதம்மிய விகிதமென்பர்.

௨௱௰௫. பிர. இரண்டிராசியின் விலோமரூபங்கள் பூருவமும் அபரமுமாக வருமிடத்து விகிதம் விலோம விகிதமாம். உ-ம்.

$\frac{௧}{௬} : \frac{௧}{௩}$ இது (௬) க்கும் (௩) க்குமுள்ள விலோமவிகிதமாம். $\frac{ஆ}{ஈ}$ இது (ஆ) வுக்கும் (ஈ) க்குமுள்ள சுபாவவிகிதம். பூருவத்தை அபரத்துக்கீந்தபலம் சுபாவ விகிதமென்றுகாண்க.

$\frac{௧}{ஆ} : \frac{௧}{ஈ}$ அல்லது $\frac{௧}{ஆ} \div \frac{௧}{ஈ} = \frac{௧}{ஆ} \times \frac{ஈ}{௧} = \frac{ஈ}{ஆ}$. இது அவ்விராசிகளின் விலோமவிகிதமாம். ஆகையால் அபரத்தைப் பூருவத்துக்கீந்தபலம் விலோமவிகிதமென்க. சுபாவவிகிதம் பின்னரூபியானவிடத்து அந்தப் பின்னத்தைக் கீழ்மேலாகமாற்றியும், அது புள்ளிகளினலே விளக்கப்பட்டிருந்தால், பூருவத்தை அபரமாகவும், அபரத்தைப் பூருவமாகவும் மாற்றியும் விலோம விகிதம் பெறுவதென்றுகாண்க.

௨௱௰௬. பிர. இரண்டு துவிதயமாகுதல் இரண்டின் மேற்பட்ட பல துவிதயமாகுதல் வருமிடத்து அந்தத் துவிதயங்களின் பூருவங்களைப் பெருக்கி ஒரு ரூபமாகவும் அபரங்களைப் பெருக்கி வேறொருரூபமாகவும் வைத்தால், இந்தப் பூருவ அபரதணிதங்கள் ஒன்றற்கோன்று பொருந்திநிற்கும் விகிதத்தைக் குணனவிகிதமென்பர். உ-ம்.

$௬ : ௩ = ௨$
$௧௨ : ௪ = ௩$ } இவை தனித் துவிதயங்கள்.

$௭௨ : ௧௨ = ௬$. இது குணனவிகிதம்.

௨௱௰௭. பிர. ஒரு விகிதமாலிகையில் ஒவ்வொருதுவிதயத்தின் அபரமும் முறையே அதற்குப் பிந்தின துவிதயத்தின் பூருவமாய்வரில், முதற்றுவிதயபூருவத்துக்குங் கடைத்துவிதய அபரத்துக்குமுள்ள விகிதம் எல்லாத் துவிதயங்களின் குணனவிகிதத்துக்குஞ் சமமாம். உ-ம்.

ஆ : ஈ
ஈ : ஒ
ஒ : ஐ
ஐ : ந
ந : த } என்ற விகிதமாலிகையில் ஆ : த, என்ற முதற்கடைவிகிதம்,

ஆ ஈ ஒ ஐ ந : ஈ ஒ ஐ ந த, என்ற குணனவிகிதத்திற்குச் சமமாம். எப்படியெனில், மேலைப்பிரகரணப்படி,

$\frac{ஆஈஒஐந}{ஈஒஐநத}$, என்பது குணனவிகிதமாகவே, அது $\frac{ஆ}{த}$ என்றுசுருங்கும்.

௨௱௰௮. பிர. ஒரு தனிவிகிதந் தன்னைத் தன்னுற் பெருக்கப்பெறின், வர்க்கமுதலியன பிறக்கும். எப்படியென்ருல் ஆ : ஈ, என்ற தனிவிகிதத்தை ஆ : ஈ, என்றதனுற்ருக்க $ஆ^{௨} : ஈ^{௨}$, என்ற வர்க்கவிகிதம் பிறக்கும். இம்முறையே இன்னும் பெருக்க, $ஆ^{௩} : ஈ^{௩}$, என்ற கனவிகிதமும், $ஆ^{௪} : ஈ^{௪}$, என்ற வர்க்கவர்க்கவிகிதமும் பிறக்கும். பிறவுமன்ன. இந்த வகையே விகிதஉறுப்புகள் வர்க்கமூலம்பெற்றுவரில் அதனைத் துவிதீயவிகிதமென்பர். உ-ம்.

$\sqrt{ஆ} : \sqrt{ஈ}$. கனமூலம்பெற்றுவரில், திரிதீயமூலவிகிதமென்பர். உ-ம்.

$\sqrt[௩]{ஆ} : \sqrt[௩]{ஈ}$. வர்க்க வர்க்கமூலம்பெற்றுவரில், சதுர்த்தமூலவிகிதமென்பர். உ-ம்.

$\sqrt[௪]{ஆ} : \sqrt[௪]{ஈ}$. பிறவுமன்ன.

௨௱௰௯. பிர. சகரணவிகிதங்களைப் பின்னரூபமாக வரையுமிடத்துப் பூருவம் போகமாயும் அபரம் ஆரகமாயும் நிற்குமாதலால், அப்பின்னர்த்தமே விகிதமென்பது வெளிப்படை. ஆகையால்,

ஒரேயிராசியினலே பூருவத்தையும் அபரத்தையும் பெருக்கினலும் அரித்தாலும், விகிதம் விகாரமுரு

தென்றும், பூருவத்தைமாத்திரம் பெருக்குவது அல்லது அரிப்பது, விகிதத்தைப் பெருக்குவது அல்லது அரிப்பதற்குச் சரியென்றும், அபரத்தை மாத்திரம் பெருக்குவது விகிதத்தை அரிப்பதற்கும், அபரத்தை மாத்திரம் அரிப்பது விகிதத்தைப் பெருக்குவதற்குஞ் சரியென்றுமறிக. (௭௭. பிர.)

௨௱௨௰. பிர. ஒரே விகிதத்தையுடைய இரண்டு துவிதயங்களின் பூருவத்தைப் பூருவத்தோடும், அபரத்தை அபரத்தோடுங் கூட்டினுலும், பூருவத்தில் பூருவத்தையும் அபரத்தில் அபரத்தையுங் கழித்தாலும், விகிதம் விகாரமுருது. உ-ம்.

ஆ : ஈ } என்ற இரண்டு துவிதயத்தின் விகிதங்களும்
ஐ : ஒ } ஒன்றேயானுல், பூருவங்களின் தொகையாகிய (ஆ+ஐ) உக்கும், அபரங்களின் தொகையாகிய (ஈ+ஒ) உக்கும் விகிதமும் அதுவேயாம். எப்படியெனில்,

$\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}=\frac{\text{ஐ}}{\text{ஒ}}$. ஆகையால் சமீகரணத்தை (ஈ) ஆலும் (ஒ) ஆலும் பெருக்க,

ஆஒ=ஈஐ, என்றும், (ஐஒ) என்பதை வாமதட்சிணபாசங்களிற்கூட்ட,

ஆஒ+ஐஒ=ஈஐ+ஐஒ, என்றும் (ஒ) ஆலரிக்க,

$\text{ஆ}+\text{ஐ}=\frac{\text{ஈஐ}+\text{ஐஒ}}{\text{ஒ}}$ என்றும், (ஈ+ஒ) ஆலரிக்க

$\frac{\text{ஆ}+\text{ஐ}}{\text{ஈ}+\text{ஒ}}=\frac{\text{ஐ}}{\text{ஒ}}\left(=\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}}\right)$ என்றும் வரும். இவ்வாறே,

ஆ : ஈ } என்ற சமதுவிதயங்களுக்கு,
ஐ : ஒ }

$\frac{\text{ஆ}-\text{ஐ}}{\text{ஈ}-\text{ஒ}}$ } என்ற அந்தர துவிதயஞ் சரியாமெனச் சித்தாந்தப்படுத்தலாம். இன்னும் ஒரு உதாரணம் வருமாறு

க௫ : ௫ என்ற விகிதம் = ௩ } என்புழி, கூட்டல், கவர்தலினுல்.
௯ : ௩ என்ற விகிதம் = ௩ }

க௫+௯ : ௫+௩, என்ற விகிதம் = ௩ } எனவரும்.
க௫—௯ : ௫—௩, என்ற விகிதம் = ௩ }

இரண்டு துவிதய உறுப்புகளை முறையே கூட்டினுல், விகிதவிகாரம் வராதென்றேமாயினும், அநேக துவிதயங்கள் வருமிடத்து, அவற்றை இரண்டிரண்டு துவிதயங்களாகக் கொள்ளலாமாகையால், அவையும் இவ்விதியில் அடங்குமென்றறிக. எப்படியென்ருல்,

௨௱௨௧. பிர. பல துவிதயங்கள் சமவிகிதமுடையனவாய்வரில் சர்வபூருவங்களின் தொகைக்குஞ், சர்வஅபரங்களின் தொகைக்குமுள்ள விகிதமேதுவோ அது ஒவ்வோரு தனித்துவிதயத்தின் பூருவத்துக்கும் அபரத்துக்குமுள்ள விகிதமாம். உ-ம்.

க௨ : ௬ = ௨ }
க௦ : ௫ = ௨ } என்புழி,
௮ : ௪ = ௨ }
௬ : ௩ = ௨ }

(க௨+க௦+௮+௬) : (௬+௫+௪+௩) = ௨ என்றுவரும்.

விகிதவினு.

க. கக : ௯, என்ற விகிதமோ, ௪௪ : ௩௫, என்ற விகிதமோ எது பெரிது?

௨. ஒரு துவிதயத்தின் பூருவம், (௯௫) விகிதம் (க௮) என்ருல், அபரம் யாது?

௩. ஒரு துவிதயத்தின் அபரம் (௭). விகிதம் (க௮) என்ருல் பூருவம் யாது?

௪. ௩ : ௭; ௨ஆ : ௫ஈ; (௭ஷ+க) : (௩ஸ—௨) என்பனவற்றின் குணனவிகிதம் யாது?

௫. ௫ஷ+௭ : ௨ஷ—௩; ஷ+௨ : $\frac{\text{க}}{\text{௨}}$ ஷ+௩, என்பனவற்றின் குணனவிகிதம் பெரியதாரதம்மிய விகிதமோ சிறியதாரதம்மிய விகிதமோ?

௬. ௪ : ௯, என்பதின் வர்க்கவிகிதத்தையும், ௩ : ௨, என்பதின் கனவிகிதத்தையும், ௭ : ௫, என்ற தனிவிகிதத்தோடே பெருக்கினுல், வருங் குணனவிகிதம் யாது?

அநுபாதம்.

௨௱௨௨. பிர. அநுபாதமென்பது விகிதசமத்துவமாம்.

அது அந்தராநுபாதமென்றும், சகரணுநுபாதமென்றும் இரண்டுவகைத்து.

அந்தராநுபாதமென்பது அந்தரவிகிதங்களின் சமத்துவமாம். உ-ம்.

௬, ௪, க௦, ௮, என்ற எண்களில் (௬) க்கும் (௪) க்குமுள்ள அந்தரமே (க௦) க்கும் (௮) க்குமுள்ள அந்தரமாகையால், இவை அந்தராநுபாதமாம்.

சகரணுநுபாதமேன்பது சகரணவிகிதங்களின் மத்துவமாம். உ–ம்.

சு, உ, கஉ, ச, என்ற எண்களில (சு) ஐ (உ) க்கீந்தபல (கஉ) ஐ (ச) க்கீந்த பலத்திற்குச் சமமானதால் இவை சகரணு நுபாதமாம்.

உளஉரு. பிர. அநுபாதத்தை விளக்கும்படி துவிதயங்களி டையே (=) இப்படிச் சமத்துவசின்னமேனும் (: :) இப்ப டி நாற்புள்ளிவடிவமேனும் வரைவர். உ–ம்.

அ : சு = ச : உ, அல்லது, அ : சு : : ச : உ } இவைஅந்தர
ஆ : ஈ = ஐ : ஒ, அல்லது, ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ } நுபாதங்கள்.
கஉ : சு = அ : ச, அல்லது, கஉ : சு : : அ : ச } இவை சகரணு
ஆ : ஈ = ந : ட, அல்லது, ஆ : ஈ : : ந : ட } நுபாதங்கள்.

உளஉச. பிர. அநுபாதங்களின் முதல் கடையுறுப்புகளை அ ந்தங்களென்றும், நடு உறுப்புகளை, மத்தியங்கள் அல்லது இ டைகளென்றும், பூருவத்தையும், பூருவத்தையும் அல்லது அ பரத்தையும், அபரத்தையும் ஏகதையுறுப்புகளென்றும் ஒரு த் விதய உறுப்புகளாகிய பூருவத்தையும் அபரத்தையும் துல்லிய வுறுப்புகளென்றுஞ் சொல்வர். மத்தியங்களுக்குச் சமமித் யென்றும் பெயர்.

உளஉரு. பிர. அநுபாதம் விகிதசமத்துவமாகையால் துவிதய ங்கள் இடம் மாறிவரினும் பொருள் விகாரமுருது. உ–ம. ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்பதும், ஐ : ஒ : : ஆ : ஈ, என்பதும் ஒரு பொரு ளுடையன. மேலும் ஒவ்வொரு துவிதயம் இவ்விரண்டுறுப்பு டையதாதலால், அநுபாதம்பிறத்தற்கு வேண்டிய உறுப்புகள் நான்கிற் குறையா. ஆனல் நான்குறுப்புகளில் இரண்டு ஒரே ராசியாகவரும்பொழுது, அநுபாதம் மூன்றுறுப்புக்கொண்டு முடிய மென்பாருமுளர். உ–ம. அ : ச : : ச : உ. இதில் மத்தியங்க ளாகிய (ச) ம் (ச) ம், ஒரே இராசியாகையால், அநுபாதத்தை மூனறுறுப்புக்கோண்ட அநுபாதமென்பது. மூன்றுறுப்புக்கொ ண்ட அநுபாதத்தின் நடு உறுப்பைச் சமாநுபாத்தியமென்றும் கடையுறுப்பைத் திரிதீயாநுபாத்தியமென்றுஞ் சொல்லலாம். மேலை உதாரணத்தில் (ச) சமாநுபாத்தியம், (உ) திரிதீயாநுபா த்தியம். அநுபாத்தியமென்பது அநுபாத உறுப்பு.

உளஉசு. பிர. சுபாவவிகிதம் விலோமவிகிதத்திற் குச் சமமாய்வரில் அந்தச் சமத்துவத்தை விலோமா நுபாதமேன்பர்.

விலோமாநுபாதத்திற்கு வியஸ்தாநுபாதமென்றும் பெயர். உ–ம்.

ச : உ : : $\frac{\text{க}}{\text{ங}}$: $\frac{\text{க}}{\text{சு}}$ இதனைப் பின்னரூபத்தில் வரையாமல்

ச : உ : : ங : சு. விலோமமாய்; என்றிப்படி வரைவதுமுண்டு. இப்படி வரையுமிடத்து, முதலிராசி இரண்டாமிராசிக் கெப்ப டி அப்படி நான்காமிராசி மூன்ருமிராசிக்கென்றதாயிற்று.

ளஉஎ. பிர. சமவிகிதங்கள் ஒன்றையொன்று தொ டர்ந்து மாலிகையாகவரில் அதனைத் தொடரநுபாத மென்பர். உ–ம்.

கo—அ=அ—சு=சு—ச=ச—உ. இது அந்தரதொடரநுபாதம். சுச : ஙஉ : : ஙஉ : கசு : : கசு : அ : : அ : ச. இது சகரண தொடரநுபாதம்.

ளஉஅ. பிர. நான்கிராசி அந்தராநுபாதமாய்வரில், அந்தங்களின் தோகை மத்தியங்களின் தோகைக்குச் சமமாம். உ–ம்.

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்புழி (ஆ+ஒ) = (ஈ+ஐ) ஆம்; எப படியெனருல்,
ஆ—ஈ = ஐ—ஒ நிலைமாற்ருல்,
ஆ+ஒ = ஐ+ஈ என்றுவரும்.

மூன்றிராசி அந்தராநுபாதமாய்வரில் அந்தங்களின் தோகை சமாநுபாத்தியத்தினிரட்டிக்குச் சமமாம். உ–ம்.

ஆ : ஈ : : ஈ : ஒ, என்புழி ஆ—ஈ = ஈ—ஒ என்ற சமீகர ணம் பிறக்கும்; இது நிலைமாற்ருல், ஆ+ஒ = உஈ; என்றுவ ரும்.

சகரணுநுபாதம்.

உளஉகூ. பிர. நான்கிராசி சகரணுநுபாதமாய்வரில் அந்தங்களின் குணிதம் மத்தியங்களின் குணிதத்திற்குச் சமமாம். உ—ம்.

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்புழி
$\frac{\text{ஆ}}{\text{ஈ}} = \frac{\text{ஐ}}{\text{ஒ}}$, என்றுங், குணனத்தால்
ஆஒ = ஈஐ, என்றும்வரும். இப்படியே,
கஉ : அ : : கரு : கo, என்புழி
கஉ × கo = கரு × அ, என்றுவரும்.

உளஙo. பிர. இரண்டிராசியின் குணிதம் வேறிர ண்டிராசியின் குணிதத்திற்குச்சமமாய்வருமிடத்து,

ஒரு குணிதத்தின் குணுங்கங்கள் அந்தங்களாகவும் மற்றக் குணிதத்தின் குணுங்கங்கள் மத்தியங்களாகவுந் தீட்டிச் சமீகரணத்தைச் சகரணுநுபாதமாய் மாற்றலாம். உ-ம்.

ஷண = ஙஸ, என்புழி, அது
ஷ : ங :: ஸ : ண ; என்று அநுபாதமாம்.

௨௱௩௧. பிர. மூன்றிராசி சகரணுநுபாதமாய்வரில், அந்தங்களின் குணிதம் சமாநுபாத்தியத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாம்.

சமாநுபாத்தியங்கள் முதற்றுவிதயத்தின் அபரமாயும், இரண்டாந் துவிதயத்தின் பூருவமாயும் நிற்பதால், அதின் வர்க்கம் அந்தங்களின் குணிதத்திற்குச் சமமாமென்றறிக. உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஈ : ஒ, என்புழி ஆ × ஒ = ஈ², என்றுவரும். வரவே, அந்தங்களின் குணிதத்தினது வர்க்கமூலம் சமாநுபாத்தியமாம். மேவல உதாரணத்தில், ஈ = √ஆஒ.

௨௱௩௨. பிர. மத்தியங்களின் குணிதத்தை ஓர் அந்தத்தாலரிக்க மற்ற அந்தமும், அந்தங்களின் குணிதத்தை ஒரு மத்தியத்தாலரிக்க மற்றமத்தியமும் பிறக்குமென்று (௨௱௨௯ம்) பிரகரணத்தாற் காணலாம். உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ, என்புழி, ஆஒ = ஈஐ, என்றும், இதனை (ஒ) ஆலரிக்க ஆ = $\frac{ஈஐ}{ஒ}$ என்றும், (ஈ) ஆலரிக்க ஐ = $\frac{ஆஒ}{ஈ}$ என்றும் (ஐ) ஆலரிக்க, ஈ = $\frac{ஆஒ}{ஐ}$ என்றும் (ஆ) ஆலரிக்க, ஒ = $\frac{ஈஐ}{ஆ}$ என்றும் வரும். ஆகையால்,

இரண்டாமுறுப்பையும் மூன்ருமுறுப்பையும் பெருக்கி முதலுறுப்பாலரிக்க நான்காமுறுப்புத் தோன்றுதலினுல் பாடீகணிதத்தில் முத்தொகைவினவென்று சொல்லப்படுந் திரைராசிவிதிக்கு இதுவே ஆதாரமென்றறிக.

௨௱௩௩. பிர. சமீகரணத்தின் சமத்துவஞ் சிதைவுருமல் மாற்றக்கூடிய எந்தப்பிரகாரமாயும் அதனை மாற்றிக் கணிதகிர்த்தியங்களை முடிப்பதெப்படியோ அப்படியே அநுபாதங்களையும் விகிதசமத்துவஞ் சிதைவுருமல் எப்படியும் மாற்றலாம். உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஒ : ஐ என்றது, ஆ : ஒ :: ஈ : ஐ, என்று மத்தியங்கள்தான் விகாரமடைந்துவரினும் விகிதசமத்துவஞ் சிதையாதாம். ஆகையால்,

௧. கிரமமாற்று.

௨௱௩௪. பிர. நான்கிராசி அநுபாதமாய்வருமிடத்து மத்தியங்களின் கிரமத்தையாவது, அந்தங்களின் கிரமத்தையாவது இரண்டு துவிதயஉறுப்புகளின் கிரமத்தையாவது விகிதசமத்துவஞ் சிதையாமல் மாற்றலாம். உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ } என்புழி, (௧வது) மத்தியங்களின் கி-
௧௨ : ௮ :: ௯ : ௬ } ரமத்தை மாற்ற,

ஆ : ஐ :: ஈ : ஒ } முதலுறுப்பு மூன்ருமுறுப்புக்கெப்படி
௧௨ : ௯ :: ௮ : ௬ } அப்படியே இரண்டாமுறுப்பு நான்காமுறுப்புக்காம். எனவே,

பூருவங்களின் விகிதம் அபரங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமென்று காண்க. இப்படி மத்தியத்தை மாற்றலை இடைமாற்றென்பர்.

(௨வது) அந்தங்களைமாற்ற,

ஒ : ஈ :: ஐ : ஆ } நான்காமுறுப்பு இரண்டாமுறுப்புக்
௬ : ௮ :: ௯ : ௧௨ } கெப்படி, அப்படி மூன்ருமுறுப்பு முதலாமுறுப்புக்காமென்று வரும்.

இதனை முதல் கடைமாற்றென்பர்.

(௩வது) இரண்டு துவிதய உறுப்புக்களைமாற்ற,

ஈ : ஆ :: ஒ : ஐ } இரண்டாமுறுப்பு முதலாமுறுப்புக்கெ-
௮ : ௧௨ :: ௬ : ௯ } ப்படி அப்படி நான்காமுறுப்பு மூன்ருமுறுப்புக்காம் என்றுவரும்.

இது துவிதயமாற்ரும். இம்மூன்றுகிர்த்தியங்களுக்குங் கிரமமாற்றென்பது பொதுப்பெயர். ஆகையால்,

அர்த்தாபத்தி. அநுபாத உறுப்புகளனைத்தின் கிரமத்தையும், விகிதசமத்துவஞ் சிதையாமல் அடிதலைமாற்றலாமென்பது வெளிப்படை. உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ, என்பதை, ஒ : ஐ :: ஈ : ஆ; என்று மாற்றலாம். ஆனல் ஒரு துவிதயத்தினது உறுப்புகளின் கிரமத்தைமாத்திரம் மாற்றினுல், அநுபாதம் விலோமாநுபாதமாம். (பிர. ௨௱௨௯.)

௨. சமபெருக்கல், அரித்தல்.

௨௱௩௫. பிர. நான்கிராசி அநுபாதமாய்வரில், இரண்டு துல்லிய உறுப்பையாவது, இரண்டு ஏகதை உறுப்பையாவது, ஒரேயிராசியாற் பெருக்கினுலும், அரித்தாலும் விகிதசமத்துவஞ் சிதையாது. உ-ம்.

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்புழி,

க. முதலிரண்டுறுப்பையும் பெருக்க,

மஆ : மஈ : : ஐ : ஒ, என்றும்,

உ. ஈற்றிரண்டுறுப்பையும் பெருக்க,

ஆ : ஈ : : மஐ : மஒ, என்றும்,

௩. பூருவமிரண்டையும் பெருக்க,

மஆ : ஈ : : மஐ : ஒ, என்றும்,

௪. அபரமிரண்டையும் பெருக்க,

ஆ : மஈ : : ஐ : மஒ, என்றும்,

௫. முதலிரண்டுறுப்பையுமரிக்க,

$\frac{ஆ}{ம} : \frac{ஈ}{ம} : : ஐ : ஒ$, என்றும்,

௬. ஈற்றிரண்டுறுப்பையுமரிக்க,

$ஆ : ஈ : : \frac{ஐ}{ம} : \frac{ஒ}{ம}$, என்றும்,

௭. பூருவமிரண்டையுமரிக்க,

$\frac{ஆ}{ம} : ஈ : : \frac{ஐ}{ம} : ஒ$, என்றும்,

௮. அபரமிரண்டையுமரிக்க,

$ஆ : \frac{ஈ}{ம} : : ஐ : \frac{ஒ}{ம}$, என்றும்,

விகிதசமத்துவஞ் சிதையாமல் வந்தவாறு காண்க. ஆகையால் எல்லா உறுப்புகளையும் விகிதசமத்துவஞ் சிதையாமல் ஒரே இராசியாற் பெருக்கலாம், அல்லது அரிக்கலாமென்பது வெளிப்படை. உ-ம்.

மஆ : மஈ : : மஐ : மஒ }
$\frac{ஆ}{ம} : \frac{ஈ}{ம} : : \frac{ஐ}{ம} : \frac{ஒ}{ம}$ }

௩. ஒப்புமை:

௨௱௩௬. பிர. அநுபாத உறுப்புகளின் கிரமமாற்றலுஞ் சமபெருக்கல் அரித்தலினலுமன்றி அவற்றின் ஒப்புமையாலும் புது அநுபாதத்தைப்பிறப்பித்துக் கணிதகிர்த்தியமியற்றல் வேண்டிவரும். எவ்வாறெனில்,

இரண்டு விகிதங்களிலெவ்வொன்றும் வேறொரு மூன்றும்விகிதத்துக்குச் சமமானல் அவ்விரண்டு விகிதங்களும் ஒன்றற்கொன்று சமமாம்.

(௩௩வது சுயம்பிரமாணத்தைக் காண்க.) உ-ம்.

க. ஆ : ஈ : : ம : ந }
ஐ : ஒ : : ம : ந } என்புழி. { ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்று வரும்.

உ. ஆ : ஈ : : ம : ந }
ம : ந : : ஐ : ஒ } என்புழி { ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்றுவரும்.

அர்த்தாபத்தி,

ஆ : ஈ : : ம : ந }
ம : ந > ஐ : ஒ } என்புழி. { ஆ : ஈ > ஐ : ஒ, என்றுவருமென்பது வெளிப்படை.

௨௱௩௭. பிர. இந்த உதாரணங்களில் முதலிரண்டுறுப்புகளுங் கடையிரண்டுறுப்புகளுஞ் சமமாய்வந்தாலும், (விகிதசமத்துவஞ் சிதைவுறமல் அநுபாதஉறுப்புகளைப் பலவாறுமாற்றக்கூடியபடியால்) இவ்விதமே வருதல் விகித ஒப்புமைக்கின்றியமையாத இலட்சணங்களென்றெண்ணவேண்டாம். எப்படியென்றல்,

க. ஒவ்வொரு அநுபாதத்தினிரண்டு பூருவங்களாவது இரண்டு அபரங்களாவது சமஉறுப்புக்களாய்வரலாம். உ-ம்.

ம : ஆ : : ந : ஒ }
ம : ஐ : : ந : ஈ } என்புழி இடைமாற்றல்,

ம : ந : : ஆ : ஒ }
ம : ந : : ஐ : ஈ } என்றும், ஆகையால்

ஆ : ஒ : : ஐ : ஈ, என்றும் மேலைப்பிரகரணப்படி வந்தவாறுகாண்க,

உ. ஒரு அநுபாத பூருவங்கள் மற்ற அநுபாத அபரங்களுக்குச் சமமாயும் வரலாம். உ-ம்.

ம : ஆ : : ந : ஈ }
ஐ : ம : : ஒ : ந } என்புழி கிரமமாற்றல்,

ஆ : ஈ : : ம : ந }
ஐ : ஒ : : ம : ந } என்றும், ஆகையால்,

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்றும் முன்போல வருவது காண்க.

௩. ஒரு அநுபாதத்தின் ஏகதையுறுப்புகள் மற்ற அநுபாதத்தின் துல்லிய உறுப்புகளுக்குச் சமமாய்வரலாம். உ-ம்.

ஆ : ம : : ஈ : ந }
ஐ : ஒ : : ம : ந } என்புழி, கிரமமாற்றல்,

ஆ : ஈ : : ம : ந }
ஐ : ஒ : : ம : ந } என்றும், ஆகையால், முன்போல,

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ, என்றும்வரும்.

௨௱௩௮. பிர. அநேக அநுபாதங்கள் வருமிடத்து, ஒவ்வொரு அநுபாதத்தின் முதலிரண்டுறுப்பாவது, ஈற்றிரண்டுறுப்பாவது

அதற்குப் பிந்தின அநுபாதத்தின் முதலிரண்டுறுப்போடு, அல்லது ஈற்றிரண்டுறுப்போடு சமமாய்வரில் அவ்வநுபாதங்களெல்லாம் ஒப்புமையடையும். உ-ம்.

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ
ஐ : ஒ : : ம : ந
ம : ந : : ட : ண
ட : ண : : த : ர
} என்புழி ஆ : ஈ : த : ர, என்றுவரும்.

இந்த உதாரணத்தில் நிறுத்திய கிரமத்திலே, எல்லா உறுப்புகளு நில்லாதிருந்தும், அவை இந்தக் கிரமத்தைச் சாரும்படி மாற்றக்கூடுமேயானால், இந்த உதாரணத்தைப்போலவே ஒப்புமைக்கிர்த்தியத்தை அடையுமென்றறிக. உ-ம்.

ஆ : ஐ : : ஈ : ஒ
ஐ : ம : : ஒ : ந
ம : ட : : ந : ண
ட : த : : ண : ர
} என்புழி கிரமமாற்றல்

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ
ஐ : ஒ : : ம : ந
ம : ந : : ட : ண
ட : ண : : த : ர
} என்றுவருவதினல், ஆ : ஈ : : த : ர, என்று ஒப்புமையடைந்தவாறுகாண்க.

௱௬௬. பிர. இந்த உதாரணங்களில், வந்த சம உறுப்புகளிரண்டும் மத்தியங்களாக வரவுமில்லை. அந்தங்களாக வரவுமில்லை. அவை மத்தியங்களிலும் அந்தங்களிலுங் கலந்துவந்தன. ஆகையால் அவற்றினின்று பிறந்த அநுபாதங்கள் சபாவாநுபாதங்களாயின. ஆனல் ஒரு அநுபாதமத்திய உறுப்புகளிரண்டும் அல்லது அந்தங்களிரண்டும் மறு அநுபாதத்தின் மத்தியஉறுப்புக்களிரண்டிற்குமாவது அந்தங்களிரண்டிற்குமாவது சமமானல் சமமாகாத மற்ற நான்குறுப்புகளும் விலோமாநுபாதமாகவரும். உ-ம்.

ஆ : ம : : ந : ஈ
ஐ : ம : : ந : ஒ
} என்புழி ஆ : ஐ : $\frac{க}{ஈ}$: : $\frac{க}{ஒ}$ அல்லது

ஆ : ஐ : : ஒ : ஈ, என்றுவரும். எப்படியெனில்,

ஆஈ = மந
ஐஒ = மந
} ஆகையால் ஆஈ = ஐஒ, என்றாகும், ஆகவே, ஆ : ஐ : : ஒ : ஈ, என்று அநுபாதம்பிறக்கும். இவ்வுதாரணத்தில் மத்தியங்களும் மத்தியங்களுஞ் சமமாய்வந்தன.

ம : ஆ : : ஈ : ந
ம : ஐ : : ஒ : ந
} என்புழி, ஆ : ஐ : : ஒ : ஈ, என்றும்,

ஆ : ம : : ந : ஈ
ம : ஐ : : ஒ : ந
} என்புழி, ஆ : ஐ : : ஒ : ஈ, என்றும்

அந்தங்கள் அந்தங்களோடும், அந்தங்கள் மத்தியங்களோடும் சமமாய்வந்தவழி, விலோமாநுபாதங்கள் பிறந்தவாறு காண்க.

ச. சங்கலன வியவகலனம்.

௰௪௪. பிர. அநுபாத உறுப்புகளை மேற்கூறிய விதங்களாலன்றிச் சங்கலன வியவகலன கிர்த்தியங்களாலும் மாற்றுவதுண்டு. எப்படியென்றல்,

இரண்டு துல்லிய உறுப்புகளையாவது, இரண்டு ஏகதை உறுப்புகளையாவது, அவற்றோடு சமவிகிதமாய் நிற்கின்ற வேறிரண்டுறுப்புகளோடு முறையே கூட்டினலும், அவ்வுறுப்புகளினின்று முறையே எடுத்தாலும் விகிதசமத்துவஞ் சிதைவுறாது. உ--ம். (௱௨௰. பிர.)

ஆ : ஈ : : ஐ : ஒ
ஆ : ஈ : : ம : ந
} என்புழி, ஆ : ஈ, என்ற இராசிகளோடே, ம : ந, என்ற விகிதத்தை முறையே கூட்ட, ஆ+ம : ஈ+ந : : ஐ : ஒ, என்றும், அவற்றின் முறையே களைய, ஆ—ம : ஈ—ந : : ஐ : ஒ, என்றும், ஐ : ஒ, என்றஇராசிகளோடே கூட்ட ஆ : ஈ : : ஐ+ம : ஒ+ந, என்றும், அவற்றிற் களைய, ஆ : ஈ : : ஐ—ம : ஒ—ந, என்றும், விகிதசமத்துவஞ் சிதையாமல் வரும்.

இவ்விடத்துக் கூட்டிக் களைந்தது, துல்லிய உறுப்புகளையாகுலுங் கிரமமாற்றல் துல்லிய உறுப்புகள் ஏகதை உறுப்புகளாகவரப்பெறும். உ-ம்.

ஆ+ம : ஐ : : ஈ+ந : ஒ, என்றும்,
ஆ—ம : ஐ : : ஈ—ந : ஒ, என்றும் வரும்.

௧. அர்த்தாபத்தி. இப்படிக்கூட்டப்படுஞ் சமவிகிதங்கள் அநேகமாய் வந்தாலும் அவற்றைக் கூட்டும்பொழுது, விகிதசமத்துவஞ் சிதைவுறாதென்பது, வெளிப்படை. உ-ம்.

ஆ : ஈ : : {ஐ : ஒ, ங : ண, ர : ல, ஷ : ஸ, ற : தி} என்புழி,

ஆ : ஈ : : ஐ+ங+ர+ஷ+ற : ஒ+ண+ல+ஸ+தி என்றுவரலாம்.

௨. அர்த். ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ } என்புழி, ஆ+ம : ஈ :: ஐ+ந :
ம : ஈ :: ந : ஒ } ஒ. என்றுவரும்.

௨௱௪௧. பிர. ஒரு அநுபாதத்தின் இரண்டு துல்லிய உறுப்புகளையாவது, இரண்டு ஏகதைஉறுப்புகளையாவது மற்ற உறுப்புகளிற் கூட்டினாலும், கழிந்தாலும், விகிதசமத்துவம் அழியாதென மேலைப்பிரகரணத்தாற் காணலாம். உ--ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ
௧௨ : ௪ :: ௬ : ௨ } என்புழி,

௧. ஈற்றிரண்டுறுப்புகளை முதலிரண்டுறுப்போடுகூட்ட,

ஆ+ஐ : ஈ+ஒ :: ஆ : ஈ
ஆ+ஐ : ஈ+ஒ :: ஐ : ஒ
ஆ+ஐ : ஆ :: ஈ+ஒ : ஈ
ஆ+ஐ : ஐ :: ஈ+ஒ : ஒ } என்றும்,

௧௨+௬ : ௪+௨ :: ௧௨ : ௪
௧௨+௬ : ௪+௨ :: ௬ : ௨
௧௨+௬ : ௧௨ :: ௪+௨ : ௪
௧௨+௬ : ௬ :: ௪+௨ : ௨ } என்றும்,

௨. பூருவங்களை அபரங்களோடே கூட்ட,

ஆ+ஈ : ஈ :: ஐ+ஒ : ஒ
ஆ+ஈ : ஆ :: ஐ+ஒ : ஐ } என்றும்,

௧௨+௪ : ௪ :: ௬+௨ : ௨
௧௨+௪ : ௧௨ :: ௬+௨ : ௬ } என்றும்வரும், பிறவுமன்ன.

இந்த உதாரணங்களைப்போலக் கூட்டற்கிர்த்தியத்தாற் பிறப்பதைச் சமரசமென்பர்.

௩. ஈற்றிரண்டுறுப்பினின்று முதலிரண்டுறுப்பையுங் கழிய,

ஐ—ஆ : ஆ :: ஒ—ஈ : ஈ
ஐ—ஆ : ஐ :: ஒ—ஈ : ஒ } என்றிவை முதலியனவரும்.

௪. முதலிரண்டுறுப்பினின்று ஈற்றிரண்டுறுப்பையுங் கழிய

ஆ—ஐ : ஈ—ஒ :: ஆ : ஈ
ஆ—ஐ : ஈ—ஒ :: ஐ : ஒ } என்றிவைமுதலியனவரும்.

௫. அபரங்களைப் பூருவங்களிற் கழிய,

ஆ—ஈ : ஈ :: ஐ—ஒ : ஒ
ஆ : ஆ—ஈ :: ஐ : ஐ—ஒ } என்றிவை முதலியன் வரும்.

௬. அபரங்களினின்று பூருவங்களைக் கழிய,

ஈ—ஆ : ஆ :: ஒ—ஐ : ஐ
ஈ : ஈ—ஆ :: ஒ : ஒ—ஐ } என்றிவைமுதலியனவரும்.

௭. அநுபாத உறுப்புகளைக் கூட்டிக்கழிய,

ஆ+ஈ : ஆ—ஈ :: ஐ+ஒ : ஐ—ஒ, என்றுவரும்.

அர்த். மேலையுதாரணங்களிற் காட்டியபடி வதுராசிகள் அநுபாதமாய் வருமிடத்து அவ்வதுராசிகளினுறுப்புகளும் அநுபாதமாகுமென்பது வெளிப்படையாம். உ-ம்.

ஆ+ஈ : ஈ :: ஐ+ஒ : ஒ, என்புழி,

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ, என்ற அநுபாதம் பிறக்கும். இந்தப் பிறப்பை வர்ச்சனமென்னலாம்.

௫. அநுபாத குணனபாககரம்.

௨௱௪௨. பிர. இரண்டு அநுபாதமாவது இரண்டின் மேற்பட்ட பல அநுபாதமாவது வருமிடத்து, அவ்வநுபாதங்களின் ஏக நாம உறுப்புகளை ஒன்றாய்ப் பெருக்கினால் குணிதங்கள் அநுபாத உறுப்புகளாய் வரும். (௨௱௰௬. பிர.) உ--ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ
ஷ : ஸ :: ற : ன } அல்லது { ௧௨ : ௪ :: ௬ : ௨
௧௦ : ௫ :: ௮ : ௪ } என்புழி,

ஆஷ : ஈஸ :: ஐற : ஒன, என்றும் ௧௨௦ : ௨௦ :: ௪௮ : ௮, என்றும் ஏகநாம உறுப்புகளின் குணிதங்கள் அநுபாதமாய் வந்தவாறுகாண்க. இப்படியே,

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ
ஷ : ஸ :: ற : ன
ழ : ல :: ள : ர } என்புழி,

ஆழஷ : ஈலஸ : ஐளற : ஒரன, என்றுவரும்.

௨௱௪௩. பிர. இராசிகள் அநுபாதமாய் வரும்பொழுது, அநுபாத உறுப்புகளின் சமகாதிதங்களும், சமமூலங்களும் அநுபாதமாகி வருமென்க. உ--ம்.

ஆ : ஈ : ஐ :: ஒ, என்புழி,

ஆ^{௨} : ஈ^{௨} :: ஐ^{௨} : ஒ^{௨}, என்றுவரலாம். எப்படியெனில், மேலைப்பிரகரணப்படி அநுபாதங்களின் ஏகநாம உறுப்புகளைப் பெருக்கலாமாகையால் அவ்வநுபாதங்கள் ஒரேயநுபாதங்களாய்வரில், சமகாதிதங்கள் தோன்றுமென்பது தெளிவு.

ஆஒ = ஈஐ. ஆகையால்,

√ஆஒ = √ஈஐ. என்றுவரும். வரவே,

√ஆ : √ஈ :: √ஐ : √ஒ, என்றுறுப்புகள் சமமூலம்பெற்று அநுபாதமாயின.

௨௱௪௪. (௨௱௪௨) ம் பிரகரணப்படி ஏகநாம உறுப்புகளைப் பெருக்கின பிரகாரமே, இரண்டனுபாதங்களின் ஏகநாம உறுப்புகளை அரித்தாலும் விகிதசமத்துவம் அழியாது. உ--ம்.

$$\left.\begin{matrix} ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ \\ ஷ : ஸ :: ற : ன \end{matrix}\right\} \text{ என்புழி}$$

$$\frac{ஆ}{ஷ} : \frac{ஈ}{ஸ} :: \frac{ஐ}{ற} : \frac{ஒ}{ன} \text{ என்றும்,}$$

$$\left.\begin{matrix} ௧௨ : ௬ :: ௧௮ : ௯ \\ ௬ : ௨ :: ௯ : ௩ \end{matrix}\right\} \text{ என்புழி,}$$

$$\frac{௧௨}{௬} : \frac{௬}{௨} :: \frac{௧௮}{௯} : \frac{௯}{௩} \text{ என்றும் வரும்.}$$

௨௱௪௫. பிர. விகிதசமத்துவஞ் சிதைவுறாமல் அநுபாத உறுப்புகளைப் பலவாறு விகாரப்படுத்தல் கூடுமாயினும், மேலே எடுத்துக்காட்டிய விகாரங்களே முக்கியமானவைகள். அவை எவையெனில்,

௧. உறுப்புகளின் ஸ்தானக் கிரமத்தைமாற்றுதலினல் (பிர. ௨௱௩௬.)

௨. சமராசியின் பெருக்கல் பிரித்தலினல் (பிர. ௨௱௩௫.)

௩. சமஉறுப்புகளையுடைய அநுபாதங்களின் ஒப்புமையினல், (பிர. ௨௱௩௯.)

௪. சமவிகித உறுப்புகளைக் கூட்டிக் கழித்தலினல் (பிர. ௨௱௩௯, ௨௱௪௰.)

௫. ஒரு அநுபாதத்தை வேறொரு அநுபாதத்தாற் பெருக்குவதினல் அல்லது அரிப்பதினல், (பிர. ௨௱௪௨, ௨௱௪௪.)

௬. அநுபாத உறுப்புகளின் காதகரணத்தால் அல்லது மூலகிரகணத்தால் (பிர. ௨௱௪௩.) உண்டாகும் விகாரங்களாம்.

௨௱௪௬. பிர். நான்கிராசி அநுபாத உறுப்புகளாய் வரும்போது முதலுறுப்பு இரண்டாமுறுப்பிற் பெருத்தால் மூன்றுமுறுப்பு நான்காமுறுப்பிற் பெருத்தும், சமமானற் சமமாயும், குறைந்தாற் குறைவாயுமிருக்கும். உ--ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ. என்புழி ஆ > ஈ எனில் ஐ > ஒ
ஆ = ஈ " ஐ = ஒ
ஆ < ஈ " ஐ < ஒ

௧. அர்த். முதலுறுப்பு மூன்றுமுறுப்பிற் பெருத்தால் இரண்டாமுறுப்பு நான்காமுறுப்பிற் பெருத்தும், சமமானற் சமமாயும் குறைந்தாற் குறைவாயுமிருக்கும். முந்தின அநுபாதத்தினதிடையை மாற்றி உதாகரித்துக்கொள்க.

௨. அர்த். $\left.\begin{matrix} ஆ : ம :: ஐ : ன \\ ம : ஈ :: ன : ஒ \end{matrix}\right\}$ என்புழி, ஆ = ஈ. ஆமெனில் ஐ = ஒ பிறவுமன்ன.

இது அநுபாதஒப்புமையாலாவது விகிதகுணனத்தாலாவது பெறப்படும்.

௩. அர்த். $\left.\begin{matrix} ஆ : ம :: ந : ஒ \\ ம : ஈ :: ஐ : ந \end{matrix}\right\}$ என்புழி, ஆ = ஈ, ஆமெனில், ஐ = ஒ. பிறவுமன்ன. இது விகிதகுணனத்தாற் பெறப்பட்டது. (௨௱௫. பிர.)

௨௱௪௭. பிர. நான்கிராசி அநுபாத உறுப்புகளாய் வரும்பொழுது அவ்வுறுப்புகளின் விலோமராசிகளும் அநுபாதப்படும். உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ. என்புழி.

$$\frac{௧}{ஆ} : \frac{௧}{ஈ} :: \frac{௧}{ஐ} : \frac{௧}{ஒ}$$ என்றுவரும். இவ்விரண்டநுபாதங்களையும் சமீகரணகாரமாக்க, ஈஐ = ஐஒ என்று வருதல் காண்க.

அர்த். விலோம உறுப்புகளைச் சுபாவ அநுபாத உறுப்புகளாகவும் மாற்றலாமென்பது வெளிப்படையாம்.

தொடர் அநுபாதம்.

௨௱௪௮. பிர. இராசிகள் தொடரநுபாதமாய் வரும்போது எல்லாவிகிதங்களும் ஒன்றற்கொன்று சமமாம். உ-ம்.

ஆ : ஈ :: ஈ : ஐ :: ஐ : ஒ :: ஒ : ல, என்புழி,

ஆ : ஈ; ஈ : ஐ; ஐ; ஒ; ஒ : ல; என்ற விகிதங்களெல்லாம் ஒன்றற்கொன்று சமமாம். இந்தராசிகளில் முதலுறுப்புக்குங் கடையுறுப்புக்குமுள்ள விகிதம் இடையில் வந்த எல்லாவிகிதங்களின் குணிதத்திற்குச் சமமாம். (பிர. ௨௱௰௭.) உ-ம்.

ஆ : ல, என்ற விகிதத்திற்கு, $\frac{ஆ}{ஈ} \times \frac{ஈ}{ஐ} \times \frac{ஐ}{ஒ} \times \frac{ஒ}{ல}$ என்ற குணிதஞ் சமம். ஆனல் இந்தக் குணிதத்தின் குணங்களாகிய விகிதங்களெல்லாம் ஒன்றற்கொன்று சமமாகையால் விகிதம் எத்தனையோ அத்தனையாங் காதிதம் பிறக்கும்படி இவ்விகிதங்களிலொன்றைப் பெருக்கலாம், உ-ம்.

$$\frac{ஆ}{ஈ} \times \frac{ஈ}{ஐ} \times \frac{ஐ}{ஒ} \times \frac{ஒ}{ல} = \frac{ஆ^{௪}}{ஈ^{௪}}$$ ஆகையால்,

௨௱௪௯. பிர. மூன்று இராசிகள் அநுபாத உறுப்புகளாய் வரும்போது முதலுறுப்பு மூன்றுமுறுப்புக்கெப்படியோ அப்படியே முதலுறுப்பின் வர்க்கம்

இரண்டாமுறுப்பின் வர்க்கத்துக்கும், அல்லது இரண்டாமுறுப்பின் வர்க்கம் மூன்றும் உறுப்பின் வர்க்கத்துக்குமாம். உ–ம்.

ஆ : ஈ : : ஈ : ஐ, என்புழி,

ஆ : ஐ : : ஆ^{௨} : ஈ^{௨}, என்றும்,

ஆ : ஐ : : ஈ^{௨} : ஐ^{௨}, என்றும்வரும்.

பலராசிகள் தொடரநுபாத உறுப்புகளாயிருக்கும்போது அவ்விராசிகளனைத்தையும் வாமந்தட்சிணமாக அடிதலைமாற்றினும், விகிதசமத்துவஞ் சிதையாது. உ–ம்.

௬௪, ௩௨, ௧௬, ௮, ௪, என்ற எண்களுக்கு (௨) பொதுவிகிதமாம். இவ்விராசிகளை அடிதலையாகமாற்ற, ௪, ௮, ௧௬, ௩௨, ௬௪, என்று $\left(\frac{\text{௧}}{\text{௨}}\right)$ ஐப் பொதுவிகிதமாகப் பொருந்திவரும்; எனவே,

எந்த அநுபாதத்தை அடிதலையாகமாற்றினும், வருகின்ற அநுபாத விகிதங்கள் மற்ற அநுபாத விகிதங்களுக்கு விலோமமாய் வருமென்று காண்க.

சுதியநுபாதம்.

௨௱௫௰. பிர. மூன்று இராசிகொண்ட அநுபாதத்திலாவது, நான்கிராசிகொண்ட அநுபாதத்திலாவது, முதலுறுப்புக்குக் கடையுறுப்பெப்படியோ, அப்படியே முதலிரண்டுறுப்புகளின் அந்தரம், கடையிரண்டுறுப்புகளின் அந்தரத்துக்காம் என்று இராசிகள் வருமெனில், அவ்வநுபாதத்தைச் சுதியநுபாதமென்னலாம். உ—ம்.

ஆ, ஈ, ஐ, என்ற மூன்றிராசிகள் சுதியநுபாதமாய்வரில்,

ஆ : ஐ : : ஆ—ஈ : ஈ—ஐ, என்று நிற்கும்.

ஆ, ஈ, ஐ, ஒ, என்ற நான்கிராசிகள் சுதியநுபாதமாய்வரில்,

ஆ : ஒ : : ஆ—ஈ : ஐ—ஒ, என்று நிற்கும். இப்படியே,

௧௨, ௮, ௬ என்ற மூன்றிராசிகளும்,

௨0, ௧௬, ௧௨, ௧0 என்ற நான்கிராசிகளும் சுதியநுபாதமடைதல்காண்க.

சுதியநுபாதமாய் வருகின்ற நான்குறுப்பில், மூன்றையும் அறிந்துகொண்டால் நான்காமுறுப்பை எளிதில் அறியலாம். உ–ம்.

ஆ : ஒ : : ஆ—ஈ : ஐ—ஒ என்ற அநுபாதத்தைச் சமீகரணமாகமாற்ற,

ஆஐ—ஆஒ = ஆஒ—ஈஒ என்று வருமாகையால், இதில் வேண்டிய உறுப்பைச் சாதிகரித்து அறிந்துகொள்ளலாம்.—ஆஒ, என்பதை நிலைமாற்றி, (ஆ) ஆலரிக்க, $\text{ஐ}=\frac{\text{௨ஆஒ}-\text{ஈஒ}}{\text{ஆ}}$ என்று சாதிகரணமடைதல்காண்க.

௨௱௫௧. பிர. சுதியநுபாதமான மும்மூன்றிராசிகள் தொடர்ந்துபிறக்கின்ற மாலிகையைச் சுதியநுபாதமாலிகையேன்பர். உ–ம்.

ஆ, ஈ, ஐ, ஒ, ங, ச, ஞ, ட, ண, முதலியன சுதியநுபாதமாலிகையாகவரில்,

(ஆ, ஈ, ஐ,), (ஈ, ஐ, ஒ,), (ஐ, ஒ, ங,), (ஒ, ங, ஞ), என்றிப்படி மும்மூன்று சுதியநுபாதமாயிருத்தல்வேண்டும்.

௨௱௫௨. பிர. மூன்றுறுப்புக்கொண்ட சுதியநுபாதத்தினது முதல் கடையுறுப்பினுல் சமாநுபாத்தியத்தை நிச்சயிக்கும்படி முதல் கடையுறுப்புகளை (ஆ, ஈ,) என்றும் சமாநுபாத்தியத்தை (ஷ) என்றும் வைத்தால்,

ஆ : ஈ : : ஆ—ஷ : ஷ—ஈ (பிர. ௨௱௫௰) என்ற சுதியநுபாதம் பிறக்கும். இதனைச் சமீகரணமாக்கிச் சாதிகரிக்க,

$\text{ஷ}=\frac{\text{௨ஆஈ}}{\text{ஆ}+\text{ஈ}}$ என்று சமாநுபாத்தியம்வெளிப்படுகின்றது.

௨௱௫௩. பிர. மூன்றுறுப்புக்கொண்ட சுதியநுபாதத்தின் மூன்றும் அநுபாத்தியத்தை அறியும்படி,

ஆ, ஈ, ஷ, அம்மூன்றுறுப்புகளாமென்றுவைத்து,

ஆ : ஷ : : ஆ—ஈ : ஈ—ஷ என்ற அநுபாதத்தைப் பிறப்பித்து, முன்போலச் சமீகரணமாக மாற்றிச் சாதிகரிக்க,

$\text{ஷ}=\frac{\text{ஆஈ}}{\text{௨ஆ}-\text{ஈ}}$ என்று அர்த்தநிச்சயமாகும். ஆகையால் மூன்றுறுப்புக்கொண்ட சுதியநுபாதத்தின் எந்த உறுப்பையும் மற்றிரண்டுறுப்பையுங்கொண்டு நிச்சயிக்கலாமென்பது வெளிப்படை.

௨௱௫௪. பிர. இரண்டெண்களினிடையே வேறிரண்டு சுதியநுபாத உறுப்புகளைப் புகுத்தும்படி,

ஆ, ஈ, அவ்விரண்டெண்களென்றும், அவற்றின் இடையே புகுத்தவேண்டிய எண்கள், ஷ, ஸ, என்றும் வைத்து,

ஆ : ஸ : : ஆ—ஷ : ஷ—ஸ, என்றும்,

ஷ : ஈ : : ஷ—ஸ : ஸ—ஈ, என்றும் இரண்டு அநுபாதங்களைப் பிறப்பித்துச் சமீகரணங்களாக்க,

ஆ (ஷ—ஸ) = (ஆ—ஷ) ஸ, என்றும்,

ஷ (ஸ—ஈ) = ஈ (ஷ—ஸ என்றும் வரும்.

இந்தச் சமீகரணங்களொவ்வொன்றிலும்,

(ஸ) இன் அர்த்தத்தை நிச்சயித்து அவ்வர்த்தங்களைக்கொண்டு புதுச்சமீகரணத்தைப் பிறப்பிக்க,

$\frac{\text{ஆஷ}}{\text{௨ஆ}-\text{ஷ}} = \frac{\text{௨ஈஷ}}{\text{ஈ}+\text{ஷ}}$, அல்லது $\frac{\text{ஆ}}{\text{௨ஆ}-\text{ஷ}} = \frac{\text{௨ஈ}}{\text{ஈ}+\text{ஷ}}$, என்று வரும். இதனைச் சாதிகரிக்க,

$\text{ஷ} = \frac{\text{௩ஆஈ}}{\text{ஆ}+\text{௨ஈ}}$ என்றும் இதனை (ஸ) இன் அர்த்தமான சமீகரணத்திற் பிரதிகரிக்க,

$\text{ஸ} = \frac{\text{௩ஆஈ}}{\text{௨ஆ}+\text{ஈ}}$ என்றும்வரும்.

இப்படி இரண்டு சுதியநுபாத உறுப்புகளை நிச்சயித்து அவற்றை இடையே புகுத்துவதுபோல, அநேக உறுப்புகளையுமறிந்து புகுத்தலாமென்றுகாண்க.

வினா.

௧. ௧, $\frac{\text{௨}}{\text{௩}}$, என்ற சுதியநுபாத உறுப்புகளுக்கு இடையே நிற்கின்ற சமானுபாத்தியம் யாது? (௨௱௫௨ம்) பிரகரணப்படி கண்ட சமீகரணத்தில், ஆ $=$ ௧, ஈ $= \frac{\text{௨}}{\text{௩}}$ என்றுவைத்தால்,

$$\text{ஷ} = \frac{\text{௨ஆஈ}}{\text{ஆ}+\text{ஈ}} = \frac{\text{௨}\times\text{௧}\times\frac{\text{௨}}{\text{௩}}}{\text{௧}+\frac{\text{௨}}{\text{௩}}} = \frac{\text{௪}}{\text{௩}} \times \frac{\text{௩}}{\text{௫}} = \frac{\text{௪}}{\text{௫}}$$ விடை.

௨. ௬, ௪, என்ற எண்களுக்கு மூன்றாஞ் சுதியநுபாத்தியம் யாது?

(௨௱௫௩ம்) பிரகரணப்படி, ஆ $=$ ௬, ஈ $=$ ௪. ஆகையால்,

$$\text{ஷ} = \frac{\text{ஆஈ}}{\text{௨ஆ}-\text{ஈ}} = \frac{\text{௬}\times\text{௪}}{\text{௧௨}-\text{௪}} = \frac{\text{௨௪}}{\text{௮}} = \text{௩}.$$ விடை.

௩. ௧, $\frac{\text{௨}}{\text{௩}}$, என்ற எண்களுக்கிடையே நிற்கின்ற இரண்டு சுதியநுபாத உறுப்புகள் யாவை?

(௨௱௫௪ம்) பிரகரணப்படி, ஆ $=$ ௧, ஈ $= \frac{\text{௨}}{\text{௩}}$ ஆகையால்,

$$\text{ஷ} = \frac{\text{௩ஆஈ}}{\text{ஆ}+\text{௨ஈ}} = \frac{\text{௨}\times\text{௩}}{\text{௭}} = \frac{\text{௬}}{\text{௭}}. \quad \text{ஸ} = \frac{\text{௩ஆஈ}}{\text{௨ஆ}+\text{ஈ}} = \frac{\text{௨}\times\text{௩}}{\text{௮}} = \frac{\text{௩}}{\text{௪}}$$ விடை.

இவ்விரண்டெண்களுஞ் சேர்ந்த சுதியநுபாதமாலிகையாவது ௧, $\frac{\text{௬}}{\text{௭}}$, $\frac{\text{௩}}{\text{௪}}$, $\frac{\text{௨}}{\text{௩}}$.

௪. ௧௨, ௬, என்ற உறுப்புகளுக்கிடையே நிற்கின்ற சமானுபாத்தியம் யாது?

விடை ௮.

௫. ௩, ௨, என்ற உறுப்புகளுக்கு மூன்றாஞ் சுதியநுபாத்தியம் யாது?

விடை $\frac{\text{௩}}{\text{௨}}$.

௬. ௮௪, ௫௬, என்ற எண்களுக்கிடையே நிற்கின்ற இரண்டு சுதியநுபாத்தியங்கள் யாவை?

விடை ௭௨, ௬௩.

அநுபாதவினா.

௧. வினா. (௪௯) ஐ இரண்டுகூறாக்கிப் பெரிய கூற்றில் (௬) ஐக் கூட்டிச் சிறியகூற்றில் (௧௧) ஐக் கழித்தால் வருந்தொகைக்குச் சேடம் எப்படியோ அப்படியே (௯) (௨) க்காமெனில் அந்தக்கூறுகள் யாவை?

இவ்வினாவிற்கு விடையறியும்படி, பெரிய கூற்றுப்பிரதி (ஷ) என்றுகொண்டால், சிறியகூறு (௪௯ — ஷ) ஆம். ஆகையால் ஷ + ௬ : ௩௮ — ஷ :: ௯ : ௨, என்ற அநுபாதம் பிறக்கும். பூருவங்களை அபரங்களோடே கூட்ட, (௨௱௪௧. பிர.)

ஷ + ௬ : ௪௪ :: ௯ : ௧௧ என்றும்;

அபரங்களை அரிக்க, (௨௱௩௫. பிர.)

ஷ + ௬ : ௪ :: ௯ : ௧. என்றும் அந்தங்களையும், மத்தியங்களையும் பெருக்கிச் சமீகரணமாக்க,

ஷ + ௬ = ௩௬ என்றும், ஷ = ௩௦ என்றும் விடைவரும்.

௨. வினா. ஒரெண்ணுடன் ௧, ௫, ௧௩, என்ற மூன்றெண்களையும் வெவ்வேறேகூட்டினால், முதற்றொகை இரண்டாந்தொகைக்கெப்படியோ அப்படியே இரண்டாந்தொகை மூன்றாந்தொகைக்காமெனில் அந்த எண்யாது? என்புழி,

அவ்வெண்பிரதி = ஷ. ஆகையால்,

ஷ + ௧ : ஷ + ௫ :: ஷ + ௫ : ஷ + ௧௩ என்றும், அபரங்களிற் பூருவங்களைக் கழிய, (௨௱௪௧. பிர.)

ஷ + ௧ : ௪ :: ஷ + ௫ : ௮ என்றும், அபரங்களை அரிக்க

ஷ + ௧ : ௧ :: ஷ + ௫ : ௨ என்றும், கிரமமாற்றால்,

ஷ + ௧ : ஷ + ௫ :: ௧ : ௨ என்றும், அபரங்களிற் பூருவங்களைக் கழிய,

ஷ + ௧ : ௪ :: ௧ : ௧ என்றும், சமீகரணமாக்க,

ஷ + ௧ = ௪, என்றும் நிலைமாற்றால்,

ஷ = ௩ என்றும் விடைவரும்.

௩. வினா. (௨௦) ஐ இரண்டுகூறாக்கினால் அக்கூறுகளில் ஒன்றுக்கு மற்றது எப்படியோ அப்படியே (௩) இன் வர்க்கம் (௧) இன் வர்க்கத்துக்காமெனில், அவ்விருகூற்றுக்குஞ் சமாநுபாத்தியம்யாது?

பெரியகூற்றுப்பிரதி = ஷ, சிறியகூறு ௨௦—ஷ. ஆகவே,
ஷ : ௨௦—ஷ : : ௩^{௨} : ௧^{௨} : : ௯ : ௧.
பூருவங்களையும் அபரங்களையுங் கூட்ட,
ஷ : ௨௦ : : ௯ : ௧௦ என்றும் அபரங்களை அரிக்க,
ஷ : ௨ : : ௯ : ௧, என்றும்,
ஆகையால், ஷ=௧௮, என்றும்,
௨௦—ஷ=௨, என்றும் வரும்.
இக்கூறுகளுக்குச் சமாநுபாத்தியம் = $\sqrt{௨ \times ௧௮}$ = ௬.

௪. வினா. இரண்டெண்களின் குணிதம் (௨௪) என்றும் அவற்றின் கனாந்தரத்துக்கு அந்தரகனமெப்படியோ அப்படியே (௧௯) (௧) க்காமென்றும் வருமெனில், அவ்விரண்டெண்களும் யாவை? என்புழி,

ஷ, ஸ, இரண்டெண்களின் பிரதியெனக்கொண்டால், வினாவிற் கூறியபடி,

{ ஷஸ=௨௪
{ ஷ^{௩} —ஸ^{௩} : (ஷ—ஸ)^{௩} : : ௧௯ : ௧ } என்றும்.

அல்லது, ஷ^{௩} —ஸ^{௩} : ஷ^{௩} —௩ஷ^{௨}ஸ+௩ஷஸ^{௨} —ஸ^{௩} : : ௧௯ : ௧ என்றும், ஆகையால் (௨௩௪௧ பிர.) ௩ஷ^{௨}ஸ—௩ஷஸ^{௨} : (ஷ—ஸ)^{௩} : : ௧௮ : ௧, என்றும், பூருவங்களை அரிக்க, ஷ^{௨}ஸ—ஷஸ^{௨} : (ஷ—ஸ)^{௩} : : ௬ : ௧ என்றும் (ஷ—ஸ) ஆலரிக்க, ஷஸ : (ஷ—ஸ)^{௨} : ௬ : ௧ என்றும், ஷஸ=௨௪. ஆகையால், (ஷஸ) இனிடத்தே (௨௪) ஐப்பிரதிகரித்து, (௬) ஆலரிக்க, ௪ : (ஷ—ஸ)^{௨} : : ௧ : ௧ என்றும் வர்க்கமூலங்கொள்ள, ௨ : ஷ—ஸ : : ௧ : ௧ என்றும் சமீகரணமாக்க ௨=ஷ—ஸ என்றும் இந்தச் சமீகரணத்தையும் முதலில்வைத்த ஷஸ=௨௪. என்பதையுஞ் சாதிகரிக்க, ஷ=௬, ஸ=௪, என்றும்வரும்.

௫. வினா. இரண்டெண்களின் குணிதம் (௧௩௫.) அந்த எண்களின் வர்க்காந்தரத்துக்கு அந்தரவர்க்கமெப்படியோ அப்படியே, (௪) (௧) க்காமெனில் அவ்விரண்டெண்களும் யாவை?

விடை. ௧௫. ௯.

௬. வினா. இரண்டெண்களின் அந்தரம், தொகை, குணிதம் என்ற மூன்றுபேறுகளும் முறையே, ௨, ௩, ௫, என்ற எண்களைப்போலாமெனில், அவ்விரண்டெண்களும் யாவை?

விடை. ௧௦. ௨.

௭. வினா. (௨௪) ஐ இரண்டுகூறுகளாகப் பகிர்ந்தால் அக்கூறுகளின் குணிதத்துக்கு அவற்றின் வர்க்கங்களின்தொகை எப்படியோ அப்படியே, (௩) (௧௦) க்காமெனில் அவ்விரண்டுகூறுகளும் யாவை?

விடை. ௧௮. ௬.

௮. வினா. பாலையுந் தண்ணீரையுங் கலந்து ஒரு சாடியிற் பெய்தபோது பாலுக்குந் தண்ணீருக்குமுள்ள அந்தரத்துக்குத் தண்ணீரெப்படியிருந்ததோ அப்படியே, (௧௦௦) பாலுக்காமென்றும், முன்சொல்லப்பட்ட அந்தரத்துக்குப் பாலெப்படியோ அப்படியே, (௬) தண்ணீருக்காமென்றுமறியப்பட்டது. பாலிலுந்தண்ணீரிலும் எவ்வளவு எவ்வளவு சாடியிற் பெய்தது.

விடை. பால், ௨௫. தண்ணீர், ௫.

௯. வினா. இரண்டெண்களின் குணிதம், (௩௨௦.) அவ்வெண்களின் கனாந்தரம் அவற்றின் அந்தரகனத்திற்கெப்படியோ அப்படியே. (௬௧) (௧) க்காமெனில் அவ்விரண்டெண்களும் யாவை?

விடை. ௨௦. ௧௬.

௰௩. அந்தரமாலிகை அதிகாரம்.

[Arithmetical Progression.]

௨௩௫௫. பிர. தொடரநுபாதம் அந்தரவிகிதத்தாலாவது சகரண விகிதத்தாலாவது பிறக்கின்றபடியால், அது அந்தர தொடரநுபாதமென்றும், சகரணதொடரநுபாதமென்றும் இரண்டுவகைப்படும்.—இவ்விரண்டுவகையில் அந்தரவிகிதத்தால் பிறக்கின்றதை, அந்தரமாலிகையென்றும், சகரண விகிதத்தாற் பிறக்கின்றதைச் சகரணமாலிகையென்றும் வீசகணிதர் வகுத்துரைப்பார்கள். அவருரைத்த கிரமமே:மும், ௧வது. அந்தரமாலிகையையும், ௨வது. சகரணமாலிகையையும் எடுத்து விளக்குவாம்.

அந்தரமாலிகை.

௨௩௫௬. பிர. அந்தரமாலிகையென்பது அந்தர விகிதத்தால் ஏறி ஏறி அல்லது இறங்கி இறங்கி வருந் தொடரநுபாதமாம் உ—ம்.

௨, ௪, ௬, ௮, ௧௦, இவைமுதலியன, ஏறந்தரமாலிகை இதனை ஆரோகணமென்னலாம்.

௧௨, ௯, ௬, ௩, இவைமுதலியன, இறங்கந்தரமாலிகை. இதனை அவரோகணமென்னலாம்.

இவ்விடத்து ஆரோகணத்தின் எந்த உறுப்புடனே அந்தர விகி
தத்தைக்கூட்டினாலும் அவரோகணத்தின் எந்த உறுப்பிலே அ
ந்தரவிகிதத்தைக் கழித்தாலும் அதற்கயலுறுப்பு வரும். வரு
மெனவே முதலுறுப்பையும் அந்தர விகிதத்தையுங்கொண்டு மா
லிகையைப் பிறப்பிக்கலாமென்பது வெளிப்படையாம். உ-ம்.

முதலுறுப்பு, (ங) என்றும், அந்தரம், (உ) என்றுங்கொண்
டால், ங, ரு, எ, கூ, கக, கங, முதலியன, மாலிகையாம்.

முதலுறுப்பு, (ஆ) என்றும் அந்தரம், (ஔ) என்றுங்கொண்டால்,
ஆ, ஆ+ஔ, ஆ+உஔ, ஆ+ஙஔ, முதலியன மாலிகையாம்.

முதலுறுப்பு, (ஆ), அந்தரம், (ஆ,), புள்ளி, (பு), எனில்,
ஆ, உஆ, ஙஆ, சஆ, ... புஆ, மாலிகையாம்.

இப்படி ஆரோகணங்கூட்டற் கிர்த்தியத்தாற் பிறந்தவாறுகா
ண்க. கழித்தற்கிர்த்தியத்தால் அவரோகணம் இவ்வாறே பிறக்
கும்.

இதிலே புள்ளி என்றது மாலிகையுறுப்பு இத்தனையென்றுண
ர்த்தும் எண்ணை. இதனை உறுப்பெண் என்றுஞ்சொல்லலாம்.

உாருகூ. பிர. நீண்டமாலிகைகளினுறுப்புகளை மேலேஉதா
கரித்த பிரகாரம் அறிவது பிரயாசமாகையால், அவற்றைச் சு
லபமாகப் பிறப்பிக்கின்ற விதிகளைத் தெரிதல்வேண்டும்.
(வி) அந்தர விகிதமென்றும், (ஆ) முதலுறுப்பென்றும், (ன)
ஈற்றுறுப்பென்றும். (பு) புள்ளியென்றுங்கொண்டால், ஈற்றுறுப்
பாகிய

ன=ஆ±(பு—க) ×வி, என்றுவரும். ஆகையால்,

ஆரோகணத்தின் ஈற்றுறுப்பையறியும்படி,

க. உறுப்பெண்ணில், (க) ஐக் கழிந்துபெற்ற அந்
தரத்தை விகிதத்தாற்பெருக்கிக் குணிதத்தை முதலு
றுப்போடே கூட்டு. அவரோகணத்தின் ஈற்றுறுப்
பையறியும்படி,

உ. முன்போலே கண்டகுணிதத்தை முதலுறுப்
பிற்கழி.

உாருஎ. பிர. இவ்விதிப்பிரகாரம் ஈற்றுறுப்பை அறியலாமென
வே மாலிகையினெவ்வொரு உறுப்பையும், ஈற்றுறுப்பாகக்
கொண்டு வேண்டிய எந்த உறுப்பையும் இவ்விதிப்படி அறியலா
மென்பது வெளிப்படை. உ-ம்.

ஒரு ஆரோகணத்தில் முதலுறுப்பு (எ) என்றும், அந்தரவிகி
தம் (ங) என்றும், புள்ளி (கூ) என்றும்கொண்டால், ஈற்று
றுப்புயாதெனவினவியவழி,

ன=ஆ+(பு—க) வி=எ+(கூ—க)×ங=ஙக. ஈற்றுறுப்பு.

அவரோகணத்தின் முதலுறுப்பு (கூ0) என்றும், அந்தரவிகி

தம் (ரு) என்றும், புள்ளி (கஉ) என்றுங்கொண்டால் ஈற்று
றுப்பு யாதென வினவியவழி,

ன=ஆ—(பு—க) வி=கூ0—(கஉ—க) ரு=ரு, ஈற்றுறுப்பு.

உாருஅ. பிர. அந்தரமாலிகையின் ஈற்றுறுப்பையறிவதேயன்
றிச் சர்வஉறுப்புக்களின் தொகையையும் அறியவேண்டில்,
உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் ஒன்றாய்க் கூட்டாமலும் அத்தொ
கையை நிச்சயிக்கலாம். எப்படியெனில்,

ங, ரு, எ, கூ, கக, என்ற மாலிகையுறுப்புகளுடனே
கக, கூ, எ, ரு, ங, என்று அடிதலைமாறி நிற்கின்ற

கச கச கச கச கச

மற்ற மாலிகையினுறுப்புகளை முறையே கூட்ட ஒவ்வொரு
தொகையும் கச, கச என்றுவரும். இந்தப்படியே,

ஆ, ஆ+ஔ, ஆ+உஔ, ஆ+ஙஔ, ஆ+சஔ }
ஆ+சஔ, ஆ+ஙஔ, ஆ+உஔ, ஆ+ஔ, ஆ }

என்றமாலிகை உறுப்புகளின் தொகையும்

உஆ+சஔ, உஆ+சஔ, உஆ+சஔ, உஆ+சஔ, உஆ+சஆ,
என்று ஒன்றற்கொன்று சமானமாய்வரும்.

ஆகையால், அந்தங்களின் தொகையும் அந்தங்களிலிருந்து
சமதூரத்தேகிடக்கின்ற எந்த இரண்டிராசியின் தொகையும்
ஒன்றற்கொன்று சமமென்றும், ஒருமாலிகையின் முழுத்தொ
கையை நிச்சயிக்கும்படி அந்தங்களைக்கூட்டிப் புள்ளியினாற்
பெருக்கி, அர்த்திக்கவேண்டுமென்றுங் காணலாம். காணவே,
மாலிகைத்தொகை, (ஸ) ஆனால்

ஸ = (ஆ+ன)/உ ×பு, என்றுவரும்.

மாலிகைத்தொகையைச் சங்கலிதமென்றும், கலிதமென்
றுஞ் சொல்வர். ஆகையால் அந்தரமாலிகைக்குச் சங்கலித
மறியும்படி,

விதி.

உாருகூ. பிர. அந்தங்களின் தொகைப்பாதியை
ப் புள்ளியினாற் பெருக்கு. உ—ம்.

க. வினா. க, உ, ங, ச, ரு, என்றிப்படியே (க000) வரைக்கு
ம் நீடித்திருக்கின்ற மாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

விடை, ஸ= (ஆ+ன)/உ ×பு= (க+க000)/உ ×க000=
ரு00, ரு00, இதனை நற்சங்கலிதமென்பாருமுளர்.

உாகூ0. பிர. ன=ஆ±(பு—க) வி, ஸ= (ஆ+ன)/உ ×பு என்
ற மேலேதீட்டிய இரண்டு சமீகரணங்களில் (ஆ) என்ற முத

லுறுப்பும் (வி) என்ற அந்தர விகிதமும் (பு) என்ற புள்ளியும் (ன) என்ற ஈற்றுறுப்பும் (ஸ) என்ற சங்கலிதமுமாகிய பஞ்ச ராசிகள் கூடியிருக்கின்றன.

இப்பஞ்சராசிகளில் மூன்றிராசிகளை அறிந்தால் அவற்றைக்கொண்டு மற்றஇராசிகளை நிச்சயிக்க மேலச்சமீகரணங்களினின்று புதுச்சமீகரணங்களைப் பிறப்பிக்கலாம். அவற்றுட் சில முக்கியமான சமீகரணங்கள் அல்லது

வீசசூத்திரங்கள் வருமாறு.

முதற்சமீகரணத்தில், (பு—க) வி, என்பதை நிலமாற்ற,

(௧) முதலுறுப்பாகிய, $ஆ = ன \pm (பு - க)\, வி$, என்றுவரும்.

வரவே, ன, பு, வி, என்ற இராசிகளைக்கொண்டு (ஆ) ஐ, நிச்சயித்தற்கு இது வீசசூத்திரமென்றறிக.

(ஆ) ஐ, நிலமாற்றி (பு—க) என்பதாலரிக்க,

(௨) அந்தர விகிதமாகிய, $வி = \frac{ன - ஆ}{பு - க}$, என்றுவரும்.

நிலமாற்றாலும், பாககரத்தாலும்,

(௩) புள்ளியாகிய $(பு) = \frac{ன - ஆ}{வி} + க$, என்றுவரும்.

இனி இரண்டாஞ்சமீகரணமாகிய,

$ஸ = \frac{ஆ + ன}{௨} \times பு$ என்பதில் (ன) வினது அர்த்தத்தைப் பிரதிகரிக்க,

$ஸ = \frac{௨ஆ + (பு - க)வி}{௨} \times பு$, என்றும், இதில் (ஆ) வைச் சாதிகரிக்க,

(௪) முதலுறுப்பாகிய, $(ஆ) = \frac{௨ஸ - விபு^{௨} + விபு}{௨பு}$ என்றும் (வி) ஐச் சாதிகரிக்க,

(௫) அந்தரவிகிதமாகிய, $வி = \frac{௨ஸ - ௨ஆபு}{பு^{௨} - பு}$ என்றும் (பு) ஐச் சாதிகரிக்க,

(௬) புள்ளியாகிய, $பு = \frac{\sqrt{(௨ஆ - வி)^{௨} + ௮விஸ} - ௨ஆ + வி}{௨வி}$

என்றும்வரும். பிறவுமன்ன.

அந்தரமாலிகைவினா.

௧. ஒரு ஆரோகணமாலிகைக்கு முதலுறுப்பு (௩) அந்தரவிகிதம், ௨, புள்ளி ௨௦, என்றால் இந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது ?

விடை ௪௪௦.

௨. முழத்துக்கோருகல்லாக ஒரே நேரில் அடுக்கியிருந்த நூறு கல்லை, ஒவ்வொன்றாகவெடுத்து, முதற்கல்லுக்கோருமுழத்தூரத்திலிருந்த ஒருகூடையிலே போடவேண்டுமானால், அப்படி எடுத்துப்போடும்படி ஒருவன் எத்தனைமுழம் நடப்பான் ?

விடை ௩௦௬௦.

௩. ஒரு அந்தரமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் (௧௪௫௫) முதலுறுப்பு (௫) புள்ளி (௩௦) என்றால் அந்தரவிகிதம் யாது ?

விடை ௩.

௪. சங்கலிதம் (௫௬௭) முதலுறுப்பு (௭) அந்தரவிகிதம் (௨) என்றால் புள்ளி யாது ?

விடை ௨௧.

௫. ஒரு வர்த்தகன், (௪௭) யானையைக் கிரயத்துக்கு வாங்கினபோது, முதல்யானைக்குப் பத்துவராகனும், இரண்டாம்யானைக்கு (௩௦) வராகனும், மூன்றாம் யானைக்கு (௫௦) வராகனுமாக, இவ்வாறே கிரமமாக விலைகொடுத்தால் அந்த வர்த்தகன் கொடுத்த வராகன் எத்தனை !

விடை ௨௨,௦௯௦.

௬. ஒரு மணிக்கூடு (௭) நாளில் எத்தனை தரம் அடிக்கும் ?

விடை ௧௦௯௨.

௭. ஒருவன் ஒரு தருமப்பெட்டியிலே வருடாரம்பத்தில் ஒரு காசும், மற்றநாள் இரண்டுகாசும், மூன்றாநாள் மூன்றுகாசுமாக இவ்வாறே வருடாந்தம்வரைக்கும் போட்டுவந்தால் அவன் (௩௬௫) தினத்தில் எத்தனைபோடுவான்.

விடை ௬௬,௭௯௫.

௨௱௬௧. பிர. ௧, ௩, ௫, ௭, ௯, என்றிவ்வாறு நடைபெறுகின்ற மாலிகைக்கு உறுப்பெண் (௨௫) ஆமெனில், அதற்குச் சங்கிலிதமும் ஈற்றுறுப்பும் யாவை ?

இந்த மாலிகையின் ஈற்றுறுப்பையறியும்படி புள்ளியை இரட்டித்து, அதில் ஒரலகைத் தள்ளல் வேண்டும்.

எப்படியென்றால்,

$ன = ஆ + (பு - க)\, வி$, என்ற சமீகரணத்தில் $ஆ = க$, ஆகையாலும், $வி = ௨$ ஆகையாலும்,

$ன = க + (பு - க) \times ௨ = ௨பு - க$, என்றுவரும்.

ஆகையால் ஈற்றுறுப்பு (௪௯) என்று காண்க.

இந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதமறியும்படி,

$ஸ = \frac{க}{௨}\,(ஆ + ன)\, பு$, என்ற சமீகரணத்தில்

(௧) என்ற முதலுறுப்பையும் (௨பு—௧) என்ற ஈற்றுறுப்பையும் பிரதிகரிக்க,

$\text{ஸ} = \frac{\text{௧}}{\text{௨}}(\text{௧}+\text{௨பு}-\text{௧})\text{பு} = \text{பு}^{2}$, என்றுவருமாகையால், புள்ளியின் வர்க்கமாகிய (௬௨௫) சங்கலிதமாம். ஆகையால்,

௧, ௩, ௫, என்றிவ்வாறு நடைபெற்றுவருகின்ற மாலிகையினது உறுப்பெண்ணேது அதின் வர்க்கஞ் சங்கலிதமாம். உ--ம்.

௧+௩=௪
௧+௩+௫=௯
௧+௩+௫+௭=௧௬ } இவை புள்ளியின் வர்க்கங்களாம்.

௩௬௨. பிர இரண்டு அந்தரமாலிகைகளை ஒன்றின்கீழொன்று கிரமமாய்நிற்கத்தீட்டித் தானம்வழுவாமற் கூட்டியாவது கழித்தாவது வருகின்ற பேறுகளும் அந்தரமாலிகைகளாம். உ--ம்.

{ ௩, ௬, ௯, ௧௨, ௧௫, ௧௮, ௨௧,
{ ௨, ௪, ௬, ௮, ௧0, ௧௨, ௧௪, } என்பன மாலிகைகள்.
௫, ௧0, ௧௫, ௨0, ௨௫, ௩0 ௩௫.—தொகை.
௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭.—அந்தரம்.

இந்தத் தொகையும் வித்தியாசமும் அந்தரமாலிகையாய் வருதல்காண்க.

௩௬௩. பிர. அந்தரமாலிகையின் ஒவ்வோருறுப்பையும் ஒரேயிராசியாற் பெருக்கினாலும் அரித்தாலும் வருகின்ற பேறுகள் அந்தரமாலிகையாம். உ--ம்.

௩, ௫, ௭, ௯, ௧௧, } முதலியன, என்ற இந்த மாலிகையை (௪) ற்பெருக்க

௧௨, ௨0, ௨௮, ௩௬, ௪௪, } முதலியன, என்ற குணிதமும் இதனை (௨) ஆல் அரிக்க

௬, ௧0, ௧௪, ௧௮, ௨௨, } முதலியன, என்ற பாசிதமும் அந்தரமாலிகையாய்ப் பிறத்தல் காண்க.

௩௬௪. பிர, அந்தரமாலிகைகளின் விலோமங்கள் சுதி அநுபாதமாலிகைகளாம். உ–ம்.

௩, ௬, ௯, ௧௨, ௧௫, முதலியன, அந்தரமாலிகையாய்வரில் இதன் விலோமமாகிய

$\frac{\text{௧}}{\text{௩}}, \frac{\text{௧}}{\text{௬}}, \frac{\text{௧}}{\text{௯}}, \frac{\text{௧}}{\text{௧௨}}, \frac{\text{௧}}{\text{௧௫}}$, முதலியன, சுதியநுபாதமாலிகை

$\frac{\text{௧}}{\text{௩}} : \frac{\text{௧}}{\text{௯}} :: \frac{\text{௧}}{\text{௩}} - \frac{\text{௧}}{\text{௬}} : \frac{\text{௧}}{\text{௬}} - \frac{\text{௧}}{\text{௯}}$. அதாவது

$\frac{\text{௧}}{\text{௩}} : \frac{\text{௧}}{\text{௯}} :: \frac{\text{௧}}{\text{௬}} : \frac{\text{௧}}{\text{௧௮}}$. அல்லது

$\frac{\text{௬}}{\text{௧௮}} : \frac{\text{௨}}{\text{௧௮}} :: \frac{\text{௩}}{\text{௧௮}} : \frac{\text{௧}}{\text{௧௮}}$. ஆகையால்,

௬ : ௨ :: ௩ : ௧ என்றுவரும்.

௩௬௫. பிர. மேலே தெரித்த வினாக்களுக்கேயன்றி அந்தரமாலிகை விதிகளைத் துணையாகக்கொண்டு வேறநேகவித வினாக்களுக்கும் விடையறியலாம். சொல்லியவினாக்களை வீசபாஷாரூபமாக மொழிபெயர்த்துச் சமீகரணமாக்கிச் சாதிகரிக்க விடைவரும்.

௧. வினா. அந்தரமாலிகையாய் நிற்கின்ற நான்கிராசியின் தொகை (௫௬.) அந்த நான்கிராசியின் வர்க்கத்தொகை (௮௬௪.) அந்த நான்கிராசிகளும் யாவை?

நான்கிராசியினிரண்டாமுறுப்பு, ஷ என்றும், அந்தரவிகிதம் ஸ என்றுங்கொண்டால்,

ஷ—ஸ, ஷ, ஷ+ஸ, ஷ+௨ஸ, என்பன மாலிகையாம்.

ஆகையால், (ஷ—ஸ)+ஷ+(ஷ+ஸ)+(ஷ+௨ஸ)=௫௬, என்றும்,

$(\text{ஷ}-\text{ஸ})^{2}+\text{ஷ}^{2}+(\text{ஷ}+\text{ஸ})^{2}+(\text{ஷ}+\text{௨ஸ})^{2}=\text{௮௬௪}$ என்றும், சமீகரணங்கள் பிறக்கும். பிறக்கவே,

$\text{௪ஷ}+\text{௨ஸ}=\text{௫௬}$
$\text{௪ஷ}^{2}+\text{௪ஷஸ}+\text{௬ஸ}^{2}=\text{௮௬௪}$ } என்றும் சாதிகரிக்க,

ஷ=௧௨, ஸ=௪ என்றும் வரும்.

ஆகையால், ௮, ௧௨, ௧௬, ௨0, என்ற இவையே மாலிகையுறுப்புகளாம்.

௨. வினா. அந்தரமாலிகையாய் நிற்கின்ற மூன்றிராசியின் சங்கலிதம் (௯.) அந்த இராசிக்கனங்களின் தொகை (௧௫௩.) அந்த இராசிகள் யாவை?

விடை ௧, ௩, ௫.

௩. வினா. அந்தர மாலிகையான நான்கிராசிகளின் முதலிரண்டுறுப்புகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டத் தொகை (௩௪) என்றுங் கடையுறுப்புகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டத் தொகை (௧௩0) என்றும் வருமெனில் அவ்விராசிகள் யாவை?

விடை ௩, ௫, ௭, ௯.

௪. வினா. ஒரு இலக்கத்துக்கு மூன்றுதானமுண்டு. இந்த மூன்றுதானத்தெண்களும் அந்தரமாலிகையாய் நிற்கும். அம்மூன்றெண்களின் தொகையால் இலக்கத்தை அரிக்க, (௨௬) பலமாய்வரும். இலக்கத்தோடே (௧௯௮) ஐக்கூட்ட, (௧00) ந்தா

னம், (௧) ந்தானமாகவும், (௧) ந்தானம், (௧௦௦) ந்தானமாகவும் அடிதலைமாறி வரும். அந்த இலக்கம்யாது?

விடை ௨௱௪.

௫. வினா. மீகாமன், வேடியரசன் என்ற இருவர் பூமியைப் பிரதட்சணம்பண்ணும்படி இலங்காபுரியிலிருந்து புறப்பட்டார்கள். மீகாமன் கிழக்குமுகமாக, முதல்நாள் (௧) மைல், இரண்டாநாள் (௨) மைல், மூன்றாநாள் (௩) மைல், இவ்வாறு யாத்திரைசெய்ய, வேடியரசன் மேற்குமுகமாக நாளொன்றுக்கு (௨௦) மைல்சென்றான். பூமியின் சுற்றளவு (௨௩௯௯௧) மைல் என்றால், அவ்விருவரும் எத்தனைநாளில் என்னதூரத்தில் ஒருவரையொருவர் சந்திப்பார்கள்?

விடை. நாள். ௯௯அ. மீகாமன். ௯௯௭௦௧. மைல். வேடியரசன். ௩௯௯௬௦. மைல்.

௬. வினா. கோடிக்கரையான் தோணியொன்று புறப்பட்டு, (௫) நாட்சென்றபின்பு அதைப் பிடிக்கும்படி ஒரு சிங்களவன் தனது துல்லாத் தோணிக்குப் பாய்தூக்கி நாளொன்றுக்கு, (௧௨) காதமோடினான். கோடிக்கரையான் தோணி, (௧) ம்நாளில் ஒருகாதமும், (௨) ம்நாளில் இரண்டுகாதமும், (௩) ம்நாளில் மூன்றுகாதமுமாக இவ்வாறே ஓடினால், சிங்களவன் கோடிக்கரையானை எத்தனைநாளில் என்னதூரத்திலே பிடிப்பான்?

விடை. நாள். ௩. அல்லது, ௧௦. தூரம், ௩௬. அல்லது, ௧௨௦.

௭. வினா. அந்தரமாலிகையாய் நிற்கின்ற நான்கெண்ணுக்கு, (௪) விகிதம். நான்கெண்ணையுமொன்றாய்ப் பெருக்கிப் பெற்றபேறு, (௧௬அ௦) அவ்வெண்கள் யாவை?

விடை. ± ௧௪, ± ௧௦, ± ௬, ± ௨.

அ. வினா. (௩௧௨) படிகொள்ளத்தக்க ஒரு சாடியிற் கொஞ்ச வேப்பெண்ணெய் ஒரு எண்ணெய்வாணிபன் விட்டபோது அந்தச்சாடி நிறையவில்லை. தான்விட்டவேப்பெண்ணெயின் வர்க்கமூலத்தில், (௨) குறையத் தேங்காயெண்ணெயை வேறொருசாடியிலிருந்தெடுத்துவிட்டான். பின்னும் இவ்விரண்டைக் குறைத்துக் குறைத்து எடுத்துவிட்டுப் பார்த்தபோது தேங்காயெண்ணெய்ச் சாடியிலெண்ணெய் இல்லாமற் போக வேப்பெண்ணெய்ச்சாடி நிறைந்தது. ஒருமுறை, (அ) படிதேங்காயெண்ணெயை எடுத்துவிட்டபோது தேங்காயெண்ணெய்ச்சாடியில், (௧௨) படியெண்ணெய் மிஞ்சியிருந்ததென்று கண்டிருந்தான். அப்படியென்றால், வேப்பெண்ணெய் எத்தனைபடி? அதிற் கலந்திருந்த தேங்காயெண்ணெய் எத்தனைபடி?

விடை. வேப்பெண். ௨௫௬., தேங்காய். ௫௬.

௯. வினா. முத்துக்கறுப்பன், வீரப்பன் என்ற இரண்டுசெட்டிகள் சிலதொகையான பணங்களைப்போட்டுக் கூட்டுவியாபாரம்பண்ணினார்கள். அவர்களில் முத்துக்கறுப்பனுக்கு வருடத்துக்கு வருடம் முப்பது முப்பது ரூபாய் அதிகப்பட்டலாபங்கிடைத்துவந்தது. அவனுக்குக் கடைசிவருடத்திற் கிடைத்த லாபம், (௧௭௦) ரூபாய். அவனுக்குக்கிடைத்த முழுலாபமும், (௫௭௦) ரூபாய். வீரப்பனுக்கு முதல் நாலுவருடத்திலுங் கிடைத்தலாபம், (௫௨௦) ரூபாய். முத்துக்கறுப்பன் போட்டமுதலையும் வீரப்பன் இரண்டாம் வருடத்தில் ஆதாயம்பண்ணிய லாபத்தையுங் கூட்டினால், (௧௩௦) ரூபாய் வரும். அப்படியானால் அவ்விருவரும் போட்ட முதலெத்தனைரூபாய், அவர்கள் எத்தனைவருடம் வியாபாரம்பண்ணினார்கள்?

விடை. முத்துக்கறுப்பன். முப்பதுரூபாய் } வருடம், ௬.
வீரப்பன், ௬௦. ரூபாய்.

௰௪. சகரணமாலிகை அதிகாரம்.

[Geometrical Progression.]

௨௱௯௯. பிர. தொடர் அந்தரானுபாதத்தை அந்தரமாலிகையென்பது போலவே, தொடர் சகரணானுபாதத்தைச் சகரணமாலிகையென்பர். உ-ம்.

௯௪, ௩௨, ௧௬, அ, ௪, ௨, ௧, இவை தொடர்சகரணானுபாதம் அதாவது சகரணமாலிகையாம். இதில், (௯௪) ஐ முதலுறுப்பென்றும், (௧) ஐக் கடையுறுப்பென்றும், (௨) ஐச் சகரணவிகிதமென்றும், (௭) ஐப்புள்ளி அதாவது உறுப்பெண்ணென்றுங் கொள்க.

இந்தமாலிகையின் ஒவ்வோருறுப்பும் அதற்கு முந்தின உறுப்பைச் சகரணவிகிதத்தாலரித்துப் பெற்ற ஈவாகையால், மாலிகையைச் சகரணமாலிகையென்பர். மாலிகையை அடிதலையாகமாற்றினால் பாககமாய் நின்ற விகிதங் குணகமாக மாறி வரும். ஆகையால் இம்மாலிகையைச் சகுணமாலிகையெனினுமாம். ஆகவே,

௨௱௯௭. பிர. இராசிகள் ஒரேபாககத்தாற் குறைந்து குறைந்தாவது, ஒரேகுணகத்தாற் கூடிக்கூடியாவது வரும்பொழுது அவற்றைச் சகரணமாலிகையென்க.

குறைந்து குறைந்து வருகின்ற மாலிகைக்கு அவரோகணமாலிகையென்றும், கூடிக்கூடிவருகின்ற மாலிகைக்கு ஆரோகணமாலிகையென்றும் நாமமாம். ஆரோகணமாலிகையினொவ்வோருறுப்பையும் அறியும்படி அதற்கு முந்தின உறுப்பை விகிதத்தாற் பெருக்கவேண்டும். இனி முதலுறுப்பு (ஆ) என்றும் விகிதம் (வி) என்றுங் கொண்டால்,

ஆ, ஆவி, ஆவி^{உ}, ஆவி^{ங}, ஆவி^{ச}, ஆவி$^{ரு}$, ஆவி$^{சு}$ முதலியன மாலிகையாம். முதலுறுப்பும் விகிதமும் ஒரேஇராசியானால்,

வி, வி^{உ}, வி^{ங}, வி^{ச}, வி$^{ரு}$, வி$^{சு}$, முதலியன மாலிகையாம். இந்தமாலிகை (வி) இன் காதிதமாலிகையாய் வருதல் காண்க. இம்மட்டும் ஆரோகணமாலிகைக்கு உதாரணம்.

அவரோகணமாலிகைக்கு உதாரணம் வருமாறு. முதலுறுப்பு (ஆவி$^{சு}$) என்றும் விகிதம் (வி) என்றுங்கொண்டால் ஆவி$^{சு}$, ஆவி$^{ரு}$, ஆவி^{ச}, ஆவி^{ங}, ஆவி^{உ}, முதலியன மாலிகையாம். முதலுறுப்பு (ஆ) என்றும் விகிதம் (வி) என்றுங்கொண்டால்,

ஆ, ஆவி$^{-க}$, ஆவி$^{-உ}$, ஆவி$^{-ங}$, ஆவி$^{-ச}$, முதலியன மாலிகையாம். இந்தமாலிகைகளினெவ்வோருறுப்பிலும் விகிதகாதிதத்தின் சூசி எத்துவணத்தெனின் புள்ளியில் ஓரலகுகுறைந்த அத்துவணத்தாம். ஆகையால்,

ஆ=முதலுறுப்பென்றும்,
ன=ஈற்றுறுப்பென்றும்,
வி=விகிதமென்றும்,
பு=புள்ளியென்றும்வரில்

ன=ஆவி$^{பு-க}$, என்றும்.

உ௱கூஅ. பிர. ஆகையால், சகரணமாலிகையின் ஈற்றுறுப்பை அறியும்படி,

புள்ளியில் ஓரலகைக்குறைத்து, அத்தனையாம் விகிதகாதிதத்தைப் பிறப்பித்து அதை முதலுறுப்பினாலே பெருக்கு.

ஆ, ன, வி, பு, என்ற நான்கிராசியுள், எந்த மூன்றிராசியைக்கொண்டும், எஞ்சிய நான்காமிராசியை நிச்சயிக்கலாம். உ-ம்.

க. மேலேகாட்டியபடி ஈற்றுறுப்பாகிய ன=ஆவி$^{பு-க}$, இதை (வி$^{பு-க}$) என்பதாலரிக்க,

உ. ஆ= $\frac{ன}{வி^{பு-க}}$, என்றும் (ஆ) ஆலரித்து மூலங்கொள்ள விகிதமாகிய,

ங. வி = $\left(\frac{ன}{ஆ}\right)^{\frac{க}{பு-க}}$ என்றும்வரும்.

உ௱கூகூ. பிர. ஒரு சகரணமாலிகையை விகிதத்தா

ற்பெருக்கி வந்த குணிதத்தில் அந்த மாலிகையைத் தள்ளுவதும் ஈற்றுறுப்பை விகிதத்தாற் பெருக்கி, அதில் முதலுறுப்பைத் தள்ளுவதுமொக்கும். உ--ம்.

உ, ச, அ, கசு, ஙஉ, என்ற மாலிகையை (உ) என்ற விகிதத்தாற் பெருக்கினால்,

ச, அ, கசு, ஙஉ, சுச, என்றும் முன்மாலிகையைப் பின்மாலிகையிற் கழிய, சுச—உ=சுஉ என்றும் ஈற்றுறுப்பை விகிதத்தாற் பெருக்கிப்பெற்ற (சுச) இலே, முதலுறுப்பாகிய (உ) ஐக் கழியச் சேடம் (சுஉ) என்றும் இரண்டுபேறுஞ் சமமாய் வருதல்காண்க.

இவ்வாறே,

ஆ, ஆவி, ஆவி^{உ}, ஆவி^{ங}, ... ஆவி$^{பு-க}$, என்ற மாலிகையை (வி) ஆற் பெருக்க,

ஆவி, ஆவி^{உ}, ஆவி^{ங}, ஆவி^{ச}.... ஆவி, $^{பு-க}$, ஆவி$^{பு}$, என்றும், இதிலே முதன்மாலிகையைக் கழிய,

ஆவி$^{பு}$—ஆ என்றும், முன்போலேவரும்.

இது (வி) தரம் மாலிகையில் (க) தரம் மாலிகை போகப்பெற்ற சேடமாகையால் இதனை (வி—க) ஆலரிக்க (ஸ) என்ற சங்கலிதம் பிறக்கும்= $\frac{ஆவி^{பு}—ஆ}{வி—க}$ ஆகையால்,

சகரணமாலிகைக்குச் சங்கலிதமறியும்படி ஈற்றுறுப்பை விகிதத்தாற்பெருக்கி முதலுறுப்பைக்களைந்து பெற்றசேடத்தைப் பாச்சியமாகவும் விகிதத்திலோரலகைத்தள்ளி நிற்பதைப் பாககமாகவுங் கொண்டுஅரி. உ--ம்.

க. வினா. ஒரு சகரணமாலிகையினது முதலுப்பு (சு.) ஈற்றுறுப்பு (கசருஅ.) விகிதம் (ங.) என்றுகொண்டால் அந்த மாலிகைக்குச் சங்கிலிதம்யாது?

விடை. ஸ= $\frac{வின—ஆ}{வி—க} = \frac{ங \times கசருஅ—சு}{ங—க}$ =உகஅச

உ. வினா. அவரோகணமாலிகையினது முதலுப்பு, $\left(\frac{க}{உ}\right)$, விகிதம் $\left(\frac{க}{ங}\right)$, புள்ளி (ரு) என்று கொண்டால் அம்மாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

இந்த மாலிகையின் ஈற்றுறுப்புக்கு,=ஆவி$^{பு-க}$ $= \frac{க}{உ}\left(\frac{க}{ங}\right)^{ச} =$

$\frac{௧}{௧௯௨}$. இதன் சங்கலிதத்துக்கு $= \dfrac{\frac{௧}{௩}\times\frac{௧}{௧௯௨}-\frac{௧}{௨}}{\frac{௧}{௩}-௧} = \dfrac{௧௨௧}{௧௯௨}$

௩. வினு. ௧, ௩, ௯, ௨௭, என்றிப்படி (௧௨) புள்ளியையுள்ள மாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

விடை. ௨௬௫௭௨0.

௪. வினு. ௧, $\frac{௨}{௩}$, $\frac{௪}{௯}$, $\frac{௮}{௨௭}$, என்றிப்படி (௧0) புள்ளியையுள்ள மாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

விடை. $\frac{௧௭௪0௭௫}{௫௯0௪௯}$

ஈற்றுறுப்பையுஞ் சங்கலிதத்தையும் அறியும்படி சொல்லிய விதிகளினின்று மற்றெல்லா இராசிகளையுமறிய விதிகளைப் பிறப்பிக்கலாம்.

பிர. ௨௱௭௰. அந்தர மாலிகையைச்சார்ந்த சில வினுக்களுக்குச் சமீகரண விதிகளைக்கொண்டு விடை நிச்சயித்த பிரகாரமே சகரணமாலிகையைச்சார்ந்த சில வினுக்களுக்கும் விடை நிச்சயிக்கலாம்.

௧. வினு. சகரணமாலிகையான மூன்றிராசியின் சங்கலிதம், (௧௪) என்றும், அம்மூன்றிராசியின் வர்க்கங்களின் தொகை, (௮௪) என்றும் கொண்டால், அந்த இராசிகள்யாவை?

இவ்விடத்து மாலிகை உறுப்புகளை, ஷ, ஸ, ன, என்று கொண்டால்,

ஷ : ஸ : : ஸ : ன. அல்லது, $ஷன = ஸ^{2}$, என்றும்,

$ஷ + ஸ + ன = ௧௪$, என்றும்,

$ஷ^{2} + ஸ^{2} + ன^{2} = ௮௪$, என்றுஞ் சமீகரணங்கள் பிறக்கும். இவற்றைச் சாதிகரிக்க,

௨, ௪, ௮. விடையாம்.

௨. வினு. சகரணமாலிகையான மூன்றிராசியின் குணிதம், (௬௪) அவற்றின் கனங்களைக் கூட்டிய தொகை, (௫௮௪) அம்மூன்றிராசிகளும் யாவை?

விடை. ௨, ௪, ௮.

௩. வினு. சகரணமாலிகையான நான்கிராசியில் முதலிரண்டையுங்கூட்டிய தொகை, (௧௫), ஈற்றிரண்டையுங் கூட்டியதொகை, (௬0) என்ருல் அவ்வெண்கள் யாவை?

விடை. ௫, ௧0, ௨0, ௪0.

௪. வினு. சகரணமாலிகையான மூன்றிராசியுட் பெரியராசி சிறியராசியைப்பார்க்க, (௧௫) அதிகப்பட்டது. பெரியதின் வர்

ப்புகளின் வர்க்கத்தொகைக்கெப்படியோ அப்படியே, (௫) (௭) க்காம். அம்மூன்றிராசிகளும் யாவை?

விடை. ௫, ௧0, ௨0.

௫. வினு. சகரணமாலிகையான நான்கிராசியில் இரண்டாமுறுப்பு நான்காமுறுப்பில், (௨௪) குறைந்தது. மேலும் அந்தங்களின் தொகைமத்தியங்களின் தொகைக்கெப்படியோ அப்படி (௭) (௩) க்காம். அப்படியானுல் அவ்வெண்கள்யாவை?

விடை. ௧, ௩, ௯, ௨௭.

௬. வினு. சகரணமாலிகையான நான்கெண்ணில், முதலுறுப்பிரண்டையுங் கூட்டினுல் (௧௫), கடையுறுப்பிரண்டையுங் கூட்டினுல் (௬0) தொகையாம். அந்தநான்கெண்களும்யாவை?

விடை ௫, ௧0, ௨0, ௪0.

௭. வினு. நான்குறுப்புக்கொண்ட ஒரு சகரணமாலிகையினது விகிதத்துக்கு (௧) ஐக்கூட்ட அம்மாலிகைக்குச் சங்கலிதமாம். மாலிகை முதலுறுப்பு $(\frac{௧}{௧௭})$ என்ருல் உறுப்புகள் நான்கும் யாவை?

விடை. $\frac{௧}{௧௭}$, $\frac{௪}{௧௭}$, $\frac{௧௬}{௧௭}$, $\frac{௬௪}{௧௭}$.

௮. வினு. ஒரு இராசகுமாரன் தனது மூன்று தோழருக்கு (௨௧0) வராகனைச் சகரணமாலிகைப்படி பகிர்ந்துகொடுத்தபோது, மூன்ருவதாக நின்ற கனிஷடனைப்பார்க்க முதலாவதாக நின்ற சிரேஷடதோழனுக்கு (௯0) வராகன் அதிகங்கிடைத்தது. ஒவ்வொரு தோழனும் பெற்றுக்கொண்ட வராகன் எத்தனை?

விடை ௧௨0, ௬0, ௩0.

௯. வினு. சகரணமாலிகையான மூன்றுறுப்புக்குத் தொகை (௩௫.) அம்மூன்றுறுப்புகளுள் மத்தியத்துக்குக் கடையுறுப்புகளின் அந்தரம் எப்படி அப்படி (௨), (௩) க்காம். அந்த மூன்றுறுப்புகளும் யாவை?

விடை ௫, ௧0, ௨0.

௧0. வினு. * மூன்றிலக்கத்தைத் தண்டாகாரமாகப் பொருந்திய ஒரெண்ணின், முதற்ருனம் இரண்டாந்தானத்துக்கெப்படி அப்படி இரண்டாந்தானம் மூன்ருந்தானத்துக்காம். முழு எண் மூன்று இலக்கங்களின் தொகைக்கெப்படி அப்படி (௧௨௪) (௭) க்காம். முழுஎண்ணுக்கு (௫௯௪) ஐக்கூட்டினுல், இலக்கங்கள் அடிதலைமாறிவரும். அந்த எண் யாது?

விடை ௨௪௮.

* Three Digits

கக. வினு. கரு, ஙகூ, ககஎ, என்றிப்படி வருகின்ற சகரண மாலிகை உறுப்பெண் (எ) அதன் சங்கலிதம் யாது?

கஉ. வினு. ஒரு சகரணமாலிகையினது இரண்டாம், மூனரும் உறுப்புகளின் தொகை (உச); சம்., ரும்., உறுப்புகளின் தொகை (உகசு.) முதலுறுப்பு யாது?

௰ரு. மகாபவர்த்த அதிகாரம்.

[Greatest Common Measure.]

உாஎக. பிர. ஒன்றற்கொன்று வித்தியாசமான இரண்டிராசியையாவது பலராசியையாவது சேடமில்லாமல் வேறோரு இராசி அரிக்குமேனில், அரிக்குமிராசியை அபவர்த்தமேன்பர். உ—ம்.

(கரு) க்கும் (உ௦) க்கும் (ரு) அபவர்த்தம்.

$சூஆ^{ச}ஷ^{உ}$, $கஉஆ^{ங}ஷ$, என்பவைகளுக்கு ($ஙஆ^{உ}$) அபவர்த்தம்,

இராசிகளைச் சேடமில்லாமலரிக்கின்ற பெரிய அபவர்த்தத்தை மகாபவர்த்தமேன்றுசோல்லுவர். உ-ம்.

கஉ, கஅ, என்ற எண்களுக்கு, உ, ங, சா, என்பன அபவர்த்தங்களானுலும், அவையனைத்திலும் பெருத்த, (சா) மகாபவர்த்தமென்னப்படும். மகாபவர்த்தத்திலும் மேற்பட்ட அபவர்த்தமில்லை.

உாஎஉ. பிர. அபவர்த்தமில்லாத இராசிகளைப் பகாநிலையிராசி, அதாவது பிறச்சுட்டுப்பகாநிலையிராசி என்பர்.

கூ, கசா, என்ற எண்களிரண்டையும் (க) ஒழிந்த வேறெந்த இராசியாலும் அரிப்பதேலாமையால் அவ்வெண்கள் ஒன்றையொன்று சுட்டிப் பகாநிலையிராசிகளாம்.

அவை தனித்தனி வேறெண்களாலரிபடக்கூடுமாயினும் இணைந்து அரிபடமாட்டா.

(சு) ஐயுந்தன்னையும் ஒழித்த வேறெந்த எண்களினுலும் அரிபடமாட்டாத இராசிவரில், அது தற்சுட்டுப்பகாநிலையிராசியாம். உ—ம்.

ங, ரு, எ, கக, முதலியன.

பிர. உாஎங. பகாநிலையிராசிகளின் பெருக்கத்தாற்பிறப்பது பகுநிலையிராசியாம். உ—ம்.

உ, ரு, என்ற தற்சுட்டுப்பகாநிலைஎண்களின் பெருக்கத்தா...

ஆ, ஷ, என்ற தற்சுட்டுப்பகாநிலை இராசிகளின் பெருக்கத்தால் (ஆஷ) பிறக்கின்றபடியால் இது பகுநிலையிராசியாம். பிறவுமன்ன.

பிர. உாஎச. இரண்டிராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தங்காணும்படி

விதி.

பேரியகாதிதத்தோடு புணர்ந்துவருகின்ற இராசியை மற்றராசிக்கீந்து, சேடத்துக்குப் பாககத்தை ஈந்து, சேடமில்லாமலரிபடும்வரைக்கும் முந்தின பாககத்தைப் பிந்தின சேடத்துக்கு முறைமுறையே ஈந்தால், கடைசியிற் சேடமில்லாமலரித்த பாககமேது அது மகாபவர்த்தமாம்.

மகாபவர்த்தங்காணவேண்டிய இரண்டிராசிகளும் ஒற்றையிராசிகளானுல் அவற்றின் மகாபவர்த்தத்தைக் கண்டவுடனே அறிந்துகொள்ளலாம். ஆகையால்மேனிறுத்தியவிதி அதற்கவசியமன்று. இரண்டு இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தங்காணுமிடத்து,

ஒன்றைச் சேடமில்லாமலும் மற்றதைச் சேடத்தோடுமரிக்கின்ற வேறோரு இராசியுண்டானுல், சேடமில்லாமலரிபடுகின்ற இராசியை இதனுலரித்துச் சுருக்கிக்கோள்க.

பாச்சியத்தின் முதற்கண் வருகின்ற வர்ணம் பாககத்தாற் சேடமின்றி அரிபடமாட்டாததானுல், பாச்சியமுழுதையும் ஓர் இஷ்டராசியினுற் பெருக்கிக் கோள்ளலாம். உ--ம்.

க. $ஷ^{ங} - ஸ^{ங}$; $ஷ^{ச} - ஸ^{உ}ஷ^{ங}$, என்ற இரண்டுவகுராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தங் காணும்படி,—இரண்டாம்வகுராசியைச்சேடமில்லாமலும் முதல்வகுராசியைச்சேடத்தோடும் ($ஷ^{ங}$) அரிக்குமாகையால் இந்த ($ஷ^{ங}$) ஆல், ($ஷ^{ச} - ஸ^{உ}ஷ^{ங}$) என்பதை அரிக்க, அது ($ஷ^{உ} - ஸ^{உ}$) என்று சுருங்கும். இனி விதிப்பிரகாரம் இதினுல் முதலிராசியை அரிக்க,

$ஷ^{உ} - ஸ^{உ}$) $ஷ^{ங} - ஸ^{ங}$ (ஷ

$ஷ^{ங} - ஷஸ^{உ}$

$ஷஸ^{உ} - ஸ^{ங}$ அல்லது

இதில் (ஸ^{௨}) ஐ முன்போலத் தள்ளிச் சுருக்கி மறுபடியும் விதிப்பிரகாரம் அரிக்க,

ஷ—ஸ)ஷ^{௨} —ஸ^{௨} (ஷ+ஸ
ஷ^{௨} —ஷஸ
ஷஸ—ஸ^{௨}
ஷஸ—ஸ^{௨}

என்று சேடமில்லாமல் அரிபடும். ஆகையால் கடைசிப் பாககமாகிய (ஷ—ஸ) மகாபவர்த்தமாம்.

௨. ௬ஆ^{௪} —ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௧௨ஷ^{௪} ; ௯ஆ^{௫} +௧௨ஆ^{௩}ஷ^{௨} —௬ஆ^{௨}ஷ^{௩} —௮ஷ^{௫} ; என்ற இரண்டிராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தங்காணும்படி,

பெரியகாதிதத்தோடு புணர்ந்துவருகின்ற இரண்டாம் இராசியைப் பாச்சியமாக்கி மற்றதைப் பாககமாக நிறுத்தி அரிக்குமிடத்துப் பாச்சியத்தின் முதற்கண்ணே நிற்கிற வர்ணம் பாககத்தாற் சேடமின்றி அரிபடமாட்டாதாகையால் அதனை (௨) ஆற் பெருக்கி அரித்தல்வேண்டும்.

௯ஆ^{௫} +௧௨ஆ^{௩}ஷ^{௨} —௬ஆ^{௨}ஷ^{௩} —௮ஷ^{௫}
௨

௬ஆ^{௪} — ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௧௨ஷ^{௪}) ௧௮ஆ^{௫} +௨௪ஆ^{௩}ஷ^{௨} —௧௨ஆ^{௨}ஷ^{௩} [—௧௬ஷ^{௫} (௩ஆ
௧௮ஆ^{௫} —௩ஆ^{௩}ஷ^{௨} —௩௬ஆஷ^{௪}

௨௭ஆ^{௩}ஷ^{௨} —௧௨ஆ^{௨}ஷ^{௩} +௩௬ஆஷ^{௪} —௧௬ஷ^{௫}
அல்லது ஷ^{௨} (௨௭ஆ^{௩} —௧௨ஆ^{௨}ஷ +௩௬ஆஷ^{௨} —௧௬ஷ^{௩})

இந்தச்சேடத்தில் (ஷ^{௨}) ஐத்தள்ளி முந்தினபாககத்தைப் பாச்சியமாக்கி அரிக்கும்படி (௯) ஆற் பெருக்கல்வேண்டும்.

௬ஆ^{௪} —ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௧௨ஷ^{௪}
௯

௨௭ஆ^{௩} — ௧௨ஆ^{௨}ஷ + ௩௬ஆஷ^{௨} — ௧௬ஷ^{௩}) ௫௪ஆ^{௪} —௯ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௧௦௮ஷ^{௪} (௨ஆ+௮ஷ
௫௪ஆ^{௪} —௨௪ஆ^{௩}ஷ +௭௨ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௩௨ஆஷ^{௩}

௨௪ஷஆ^{௩} —௮௧ஆ^{௨}ஷ^{௨} +௩௨ஆஷ^{௩} —௧௦௮ஷ^{௪}
௨௪ஆ^{௩}ஷ—௮௧ஆ^{௨}ஷ^{௨} +௩௨ஆஷ^{௩} —௧௦௮ஷ^{௪}
௯

௨௧௬ஆ^{௩}ஷ—௭௨௯ஆ^{௨}ஷ^{௨} +௨௮௮ஆஷ^{௩} —௯௭௨ஷ^{௪}
௨௧௬ஆ^{௩}ஷ—௯௬ஆ^{௨}ஷ^{௨} +௨௮௮ஆஷ^{௩} —௧௨௮ஷ^{௪}

—௬௩௩ஆ^{௨}ஷ^{௨} —௮௪௪ஷ^{௪}
… ஷ^{௨} (௩ஆ^{௨} +௪ஷ^{௨})

௩ஆ^{௨} + ௪ஷ^{௨}) ௨௭ஆ^{௩} —௧௨ஆ^{௨}ஷ +௩௬ஆஷ^{௨} — [௧௬ஷ^{௩} (௯ஆ—௪ஷ
௨௭ஆ^{௩} +௩௬ஆஷ^{௨}

—௧௨ஆ^{௨}ஷ—௧௬ஷ^{௩}
—௧௨ஆ^{௨}ஷ—௧௬ஷ^{௩}

ஆகையாற் கடைசிப்பாககமாகிய (௩ஆ^{௨} +௪ஷ^{௨}) என்பதே மகாபவர்த்தமாம்.

முதற்கண்வருகிற வர்ணஞ் சேடமின்றி அரிபடும்படிக்கு இந்த உதாரணத்தில் மூன்றுமுறை பெருக்கியவாறுகாண்க.

௨௱௭௫. பிர. மகாபவர்த்தங்காணும்படி மேலே தந்த விதிக்கு ஆதாரப்பிரமாணங்கள் வருமாறு:—

௧. தன்னைத் தன்னால் எந்த இராசியை அரித்தாலுஞ் சேடமில்லை.

௨. இரண்டிராசி தனித்தனிசேடமில்லாமல் வேறொரு மூன்றாம் இராசியால் அரிபடுமெனில், அந்த மூன்றாம் இராசியால் மற்றிரண்டிராசியின் தொகையும் அந்தரமுஞ் சேடமில்லாமல் அரிபடும். உ-ம்.

௨௧, ௧௨, என்ற இரண்டெண்களையுந் தனித்தனி சேடமில்லாமல் (௩) ஆலரிக்கக்கூடுமாகையால் அவற்றின் தொகையாகிய (௩௩) ஐயும் அந்தரமாகிய (௯) ஐயுஞ் சேடமில்லாமல் அரிக்கலாம்.

௩. ஒரு இராசி வேறொரு இராசியினாலே சேடமில்லாமல் அரிபடுமெனில், சேடமில்லாமல் அரிபடுகின்ற இராசியின் பெருக்கங்களும் அப்படியே சேடமில்லாமல் அரிபடும். (ஈ) ஐச் சேடமில்லாமல் (ஆ) ஆலரிக்கக்கூடுமானால், ௨ஈ, ௩ஈ முதலியவற்றையும் (ஆ) ஆற் சேடமில்லாமல் அரிக்கலாம்.

இந்த ஆதாரப்பிரமாணங்களைக்கொண்டு மகாபவர்த்தங்காணும்படி தந்தவிதிக்குத் திருட்டாந்தங்காட்டுமுன் மீ, கீ, என்ற பெரிதுஞ்சிறிதுமானஇரண்டிராசியை விதிப்பிரகாரம்அரித்தால்

கீ)மீ(ஈ
ஈகீ
நீ)கீ(சீ
நீசீ
தீ)நீ(டீ
தீடீ
0 என்றுவரும்.

இவ்விடத்து, ஈ, சீ, டீ, என்பன ஈவுகளென்றும், நீ, தீ, 0, என்பன சேடங்களென்றும் வைத்துக்கொள்க.

பாசிதத்தைப் பாககத்தாற் பெருக்கிச் சேடத்தைக் கூட்டப் பாச்சியத்துக்குச் சரியாகையால்,

மீ = கீஈ+நீ என்றும் கீ = நீசீ+தீ என்றும் வரும்.

இனிக் கடைசியாய் வந்தபாககமாகிய தீ, (நீ) ஐச்சேடமில்லாமல் அரித்தபடியினுல், (உம் , ௩ம் ,) பிரமாணங்களின்படி,

நீ சீ + தீ, = கீ

என்பதையும்,

கீ ஈ + நீ = மீ

என்பதையுஞ் சேடமில்லாமல் அரிக்கும்.

ஆகையால் இந்த (தீ), மீ, கீ என்கிற இரண்டிராசிகளுக்கும் அபவர்த்தமாமென்க. இதுதானே இந்த இரண்டிராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தமுமாம். எப்படியென்ருல்,

மீ, கீ என்கிற இராசிகளின் அபவர்த்தங்களெல்லாம் (உம் , ௩ம் ,) பிரமாணங்களின்படி, மீ—ஈகீ=நீ என்பதற்கும் அபவர்த்தங்களாம்.

இவ்வாறே கீ. நீ, என்ற இராசிகளின் அபவர்த்தங்களெல்லாம், கீ—நீசீ, =தீ, என்பதற்கும் அபவர்த்தங்களாம். ஆனல் தீ, என்பதற்கு தீ, தானே மகாபவர்த்தம். ஆகையால் இந்த (தீ) தானே மீ, கீ என்பனவுக்கும் மகாபவர்த்தங்களாமென்க.

உ௱எசு. பிர. மகாபவர்த்தங் காணவேண்டிய இராசிகள் இரண்டுக்குமேற்பட்டுவரில், இரண்டிராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தத்தைக் கண்டபின் இந்த மகாபவர்த்தத்தையும் ஒரு இராசியாகப் பாவித்து இதற்கும் மூன்ரும் இராசிக்கும் மகாபவர்த்தத்தைக்கண்டு இவ்வாறே முடிவுவரைக்குஞ் செய்தாற் கடைசியில் வருகின்ற மகாபவர்த்தம் எல்லா இராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தமாம். உ-ம்.

மீ, கீ, நீ, என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தங் காணவேண்டில், முதல் (மீ, கீ) என்ற இரண்டிராசிகளுக்கும் மேலவிதிப்பிரகாரம் மகாபவர்த்தத்தை நிச்சயித்து இந்தமகாபவர்த்தம், (ஈ) ஆனல் இந்த (ஈ) வுக்கும் (நீ) வுக்கும் விதிப்பிரகாரம் மகாபவர்த்தத்தையறிந்தால் இதுவே, (மீ, கீ, நீ) என்ற மூன்றிராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தமாம்.

உ௱எஎ. பிர. இரண்டிராசியை அவற்றின் மகாபவர்த்தங்களினுலே அரித்தால் ஈவுகள் பிறச்சுட்டுப் பகாநிலையிராசிகளாம். உ-ம்.

கஉஷ^{௩} , கூஷ^{உ}ஆ என்ற இரண்டிராசிகளையும் அவற்றின் மகாபவர்த்தமாகிய, (௩ஷ^{உ}) என்பதால் அரித்தால் ஈவுகளாகிய, சஷ, ௩ஆ, என்பன பிறச்சுட்டுப் பகாநிலையிராசிகளாதல் காண்க.

உ௱எஅ. பிர. மகாபவர்த்தங் காணவேண்டிய இரண்டிராசிகளுக்கும் பொதுக்குணங்கமாய் வருகின்ற இராசியைத் தள்ளி ஈவுகளுக்கு மகாபவர்த்தங் கண்டால் இந்த மகாபவர்த்தத்தைமுன் தள்ளின குணங்கத்தாற் பெருக்கிக்கொள்ளவேண்டியது. அல்லாதிருந்தால் ஈவுகளுக்குக் கண்டமகாபவர்த்தம் முந்தின இரண்டிராசிகளுக்கும் மகாபவர்த்தமாயிருக்கமாட்டாது.

உ௱எகூ. பிர. மகாபவர்த்தங் காணவேண்டிய இரண்டிராசிகளில் ஒன்றைச்சுட்டிப் பகாநிலையிராசியான ஒரெண்ணைக்கொண்டு மற்றராசியைப் பெருக்கிப் பின்பு மகாபவர்த்தத்தைக்கொண்டால் இது முந்தின இரண்டிராசிகளின் மகாபவர்த்தத்துக்குச் சரியாம். உ-ம்.

அக, ௩சு என்ற இரண்டிராசிகளின் மகாபவர்த்தம் = ௩ ஆனல், (அக) ஐ, (௩சு) ஐச்சுட்டிப் பகாநிலையிராசியான (ரு) ஆற் பெருக்க சஂரு, வரும். ஆகையால், சஂரு, ௩சு, என்ற இரண்டெண்களின் மகாபவர்த்தமும் அதுவேயாம்.

க. ஷ^{௩} — ஆ^{உ}ஷ, ஷ^{௩} — ஆ^{௩} என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தம்யாது?

உ. ஷ^{௩} — ஒ^{உ}ஷ, ஷ^{உ} + உஒஷ + ஒ^{உ} என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தம்யாது?

௩. சாஆ^{௩} — சாஆ^{உ}ஷ + உஆஷ^{உ} — உஷ^{௩} , கஉஆ^{உ} — கருஆஷ + ௩ஷ^{உ} , என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தம்யாது?

ச. ஆ^{அ} — ஷ^{அ} , ஆ^{கக} — ஷ^{கக}, என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தம்யாது?

ரு. ஆ^{உ} — ருஆஷ + சஷ^{உ}, ஆ^{௩} — ஆ^{உ}ஷ + ௩ஆஷ^{உ} — ௩ஷ^{௩} , என்ற இராசிகளுக்கு மகாபவர்த்தம்யாது?

யசு. அநந்தமாலிகை அதிகாரம்.

[Infinite Series.]

உ௱அய. பிர. அநந்தராசியென்றும் முற்றிராசியென்றும், சர்வராசிகளையும் இரண்டு கூறுகளாகக் கணிதர்கள் வகுத்துரைப்பார்கள்.

இவ்விரண்டினுள், இதுவரைக்கும் முற்றிராசிக் கணிதத்தை விரித்துரைத்தோம்.

அநந்தராசியென்பது இதற்கிது எல்லையென்ற வரையறை கடந்து விசாலிக்கின்ற இராசியாம். உ-ம்.

க, உ, ௩, ச, ரு, * (இ—தி.) என்றிப்படி, எல்லையிறந்து விரிகின்ற மாலிகையினது, அந்தம் இன்னதென்று குறிக்கலாகாது. ஆகையால், இதனை அநந்தராசியென்க.

உ௱அக. பிர. இப்படிவருகின்ற அநந்த ராசிகளில் ஒன்று மற்றதிற் பெரிது சிறிதெனக்கூறுவது அடாதென்று கருதவேண்டாம். எப்படியெனில்,

உ, உ, உ, உ, உ, உ, உ, உ, (இ—தி) என்றும்,

---

* (இ—தி) என்பதை இத்யாதி (அதாவது இவைமுதலியன) என்று வாசிப்பது.

ச, ச, ச, ச, ச, ச, ச, ச, (இ-தி) என்றும், விரிகின்ற மாலிகைகளின் ஒவ்வொன்றும் அநந்தமாலிகையாயினும், முந்தின்மாலிகையினிரட்டியே மற்றமாலிகையென்பது தெளிவு. அப்படியே,

ஆ, $ஆ^{உ}$, $ஆ^{௩}$, $ஆ^{ச}$, $ஆ^{ரு}$, (இ-தி) என்றமாலிகையைப் பார்க்க,

க0ஆ, க0$ஆ^{உ}$, க0$ஆ^{௩}$, க$ஆ^{ச}$, க0$ஆ^{ரு}$, (இ—தி) என்ற மாலிகை பதின்மடங்காம். ஆகையாற் கணிதார்த்தமாய்வருகின்ற அநந்தராசிகள்கூட்டல் கழிதல் அடையுமென்றுணர்க.

உாஅக. பிர. குறிக்கின்ற எந்தச் சிறுஇராசியிலுஞ் சிறிதாய்வருகின்றதேது அது தனிஷ்டராசியாம். உ--ம்.

$\frac{சா}{க0}, \frac{சா}{க00}, \frac{சா}{க000}, \frac{சா}{க0000}$, (இ—தி) என்ற மாலிகை அநந்தமாய்ப் பெருதமெனில் மாலிகை முடிவில்வருமிராசி சிறுமையிற்சிறுமையாம். அதனையே தனிஷ்டமென்பது.

உாஅஉ. பிர. ஒரு தனிஷ்டம் வேறொரு தனிஷ்டத்திற் பெரிதுசிறிதாய் வரலாம். உ--ம்.

$\frac{௩}{க0}, \frac{௩}{க00}, \frac{௩}{க000}, \frac{௩}{க0000}$, (இ—தி) என்ற மாலிகை முந்தின மாலிகையின் அரைவாசியாகையால் இதனது தனிஷடம் முந்தின மாலிகையின் தனிஷடத்தில் அரைவாசியாமென்க.

0, என்ற சின்னந் தனிஷடப்பிரதியாயும் ∞ என்ற சின்னம் அநந்தராசிப்பிரதியாகவும் வழங்கும்.

உாசுரு. பிர. தனிஷடமானது கருதிய எந்தச் சிறு இராசியினுஞ் சிறிதாமெனவே கணித கிர்த்தியங்களில் அதனைச் சூன்யசமானமென்றெடுத்தாளப்பெறும். ஆனால் தனிஷடந் தன்னளவிற் பொருட்படாதாயினும் மற்றிராசிகளோடு கலக்கும்பொழுது அநேக பொருள்விகாரத்தைப் பிறப்பிக்கும். அநந்தராசியோடு முற்றிராசியைக் கூட்டினுலுங் கழித்தாலும் யாதொருவிகாரமும் வராது. அதுபோலவே முற்றிராசியோடு தனிஷடத்தைக் கூட்டினுலுங் கழித்தாலும் அந்த முற்றிராசி நிருவிகாரமாய் நிற்கும். ஆகையால் அநந்தராசியோடு சகசயசின்னங்களினுலிணைந்த தனிஷடங்களைக் கணித கிர்த்தியங்களிற்றள்ளிவிடுவர்.

ஆனால் அநந்தராசியை முற்றிராசியாற்பெருக்கும்போது எந்தராசியையும்போலவே குணகமெத்துணைத்தோ அத்துணைத்தாய் அநந்தராசியைப்பெருகப்பண்ணும். உ—ம்.

உ, உ, உ, உ, உ, (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையை (ச) ஆற் பெருக்க,

அ, அ, அ, அ, அ, (இ—தி) என்றிப்படி முந்திய மாலிகையின் நான்மடங்காய்வரும்.

அநந்தராசியை முற்றிராசியாலரிக்கும்போது மற்றுமிராசிகள் அரித்தற்கிர்த்தியத்தாலடையும் விகாரத்தையே இதுவுமடையும்.

சா, சா, சா, சா, சா, (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையை (உ) ஆலரிக்க,

௩, ௩, ௩, ௩, ௩ (இ—தி) என்றிப்படி முந்தினதினரைவாசியாகவரும்.

உாஅச. பிர. முற்றிராசியைத் தனிஷடத்தாற் பெருக்கினுற் கணிதமுந் தனிஷடமாம். உ—ம்.

$ன \times 0 = 0$

முற்றிராசியைத் தனிஷடத்தாலரித்தால் வரும்பாசிதம் அநந்தராசியாம். உ—ம்.

$\frac{ன}{0} = \infty$

முற்றிராசியை அநந்தராசியாலரித்தால் வரும்பாசிதந் தனிஷடமாம். உ—ம்.

$\frac{ன}{\infty} = 0$

உாஅரு. பிர. எந்தமாலிகையினது உறுப்பெண் அநந்தமாயெல்லையிறந்துவருகிறதோ அந்த மாலிகையையே அநந்தமாலிகையென்பர்.

அநந்தமாலிகையின் சர்வ உறுபபையும் ஒன்றுய்த் திரட்டுமிடத்துத் தொகைமுற்றிராசியாய் வருவதுமுண்டு. ஆனால் மாலிகையினது உறுப்பெண் அநந்தமாயே நிற்கும்.

அநந்தமாலிகைப் பிறப்பு.

உாஅசூ. பிர. அநந்தமாலிகைகள் விவிதோற்பத்தியுடையன. அவற்றுட் சிலதோன்றுமாறு.

க. பின்னபோகத்தை ஆரகத்துக்கீந்தபலமே பின்னுர்த்தமாகையாற் போகத்தை ஆரகத்தாலரிக்குமிடத்துப் பாசிதம் அநந்தமாலிகையாகச் சிறுபான்மைவரும். உ—ம்.

$\frac{க}{க—ஆ}$ என்ற பின்னத்தின் போகத்தை (எஉ) ம்பிரகரணப்படி அரித்தால்.

க—ஆ) க (க+ஆ+ஆ^{௨}+ஆ^{௩} (இ—தி) பாசிதம்.
க—ஆ
———
ஆ
ஆ—ஆ^{௨}
———
ஆ^{௨}
ஆ^{௨}—ஆ^{௩}
———
ஆ^{௩} (இ—தி) என்று வரும்.

இப்படிப்பிறக்கின்ற பாசிதம் அநந்தமாலிகையாதல் காண்
௧. இம்மாலிகைகள் சமீபகமென்றும், விகமமென்றும் இரண்டுவகைப்படும்.

மாலிகை உறுப்புகள் அதிகப்பட அதிகப்பட மாலிகை பின்னுர்த்தசமத்துவத்தை நெருங்கிநெருங்கி வருமேனில், அந்தமாலிகை சமீபகமாலிகையாம். மாலிகையுறுப்புகள் அதிகரிக்க அதிகரிக்க, மாலிகை பின்னுர்த்தசமத்துவத்தை விலகிவிலகிவரில் அந்த மாலிகை விகமமாலிகையாம்.

௨. வகுராசியான கரணத்துக்கு மூலங்கொள்ளும்போது அம்மூலங்கள் அநந்தராசிகளாகத் தோன்றுவதுமுண்டு. உ—ம்.

$\sqrt{ஆ^{௨}+ஈ^{௨}}$, என்ற கரணத்துக்கு (௱௬௧ம்) பிரகரணவிதிப்படி வர்க்கமூலங்கொள்ள,

$ஆ+\frac{ஈ^{௨}}{௨ஆ}-\frac{ஈ^{௪}}{௮ஆ^{௩}}+\frac{ஈ^{௬}}{௧௬ஆ^{௫}}$ (இ—தி) என்ற அநந்தராசி பிறக்கும். அப்படியே

(௧) $\sqrt{ஆ^{௨}-ஈ^{௨}}$, என்ற கரணத்தினின்று

$ஆ-\frac{ஈ^{௨}}{௨ஆ}-\frac{ஈ^{௪}}{௮ஆ^{௩}}-\frac{ஈ^{௬}}{௧௬ஆ^{௫}}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையும்,

(௨) $\sqrt{௨}=\sqrt{௧+௧}$, என்ற கரணத்தினின்று, $௧+\frac{௧}{௨}-\frac{௧}{௮}+\frac{௧}{௧௬}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையும்.

(௩) $\sqrt{௧+ஷ}$, என்ற கரணத்தினின்று, $௧+\frac{ஷ}{௨}-\frac{ஷ^{௨}}{௮}+\frac{ஷ^{௩}}{௧௬}-\frac{௫ஷ^{௪}}{௧௨௮}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையும் பிறக்குமாறுகாண்க.

௩. இருண சூசிபெற்ற துவிராசிகளைத் துவிராசி விதிப்பிரகாரம், அநந்தமாலிகைகளாக விரிக்கலாம். இதற்கு உதாரணம் (௱௪௪ம்) பிரகரணத்திற் காண்க.

௪. * இஷ்டவர்ணத்தோடுகூடிய அநந்தமாலிகை ஓர்வீசரூபத்துச் சமமென்றுகொண்டு பின்பு ஒவ்வொரு இஷ்டவர்ணத்தின் அர்த்தத்தையும் நிச்சயித்தால் அநந்தமாலிகை பிறக்கும். உ—ம்.

$\frac{ஆ}{ஐ+ஈஷ}$ என்ற வீசரூபத்தை அநந்தமாலிகையாக விரிக்கவேண்டில்;

$\frac{ஆ}{ஐ+ஈஷ}=ங+ஙிஷ+ஙீஷ^{௨}+ஙுஷ^{௩}$ (இ—தி) என்றிப்படி இஷ்டவர்ணத்தோடு கூடியமாலிகையை அதற்குச் சமமென்றுகொண்டு ஆரகத்தாற் பெருக்கி, (ஆ)ஐ நிலைமாற்றி(௱௰௫)ம் பிரகரணப்படி சூன்யசமத்துவம் பிறப்பித்தால்,

$0=(ஙஐ-ஆ)+(ஙஈ+ஙிஐ)ஷ+(ஙிஈ+ஙீஐ)ஷ^{௨}+(ஙீஈ+ஙுஐ)ஷ^{௩}$ (இ—தி) என்றுவரும். இதில், வலப்பாகத்தே நிற்கின்ற மாலிகைத்தொகை சூன்யசமமாகையால் (ஙஐ—ஆ), (ஙஈ+ஙிஐ), முதலியமாலிகைக்கூறுகளுந் தத்தமிற் சூன்யசமமாம். ஆகையால்,

$$\left.\begin{array}{l}ஙஐ-ஆ=0\\ ஙஈ+ஙிஐ=0\\ ஙிஈ+ஙீஐ=0\\ ஙீஈ+ஙுஐ=0\end{array}\right\}$$
முதலிய சமீகரணங்களைச் சாதிகரித்து வர்ண அர்த்தத்தை நிச்சயஞ்செய்ய,

$$\left.\begin{array}{l}ங=\frac{ஆ}{ஐ}\\ ஙி=-\frac{ஈ}{ஐ}ங\\ ஙீ=-\frac{ஈ}{ஐ}ஙி\\ ஙு=-\frac{ஈ}{ஐ}ஙீ\end{array}\right\}$$
(இ—தி) என்றிப்படி, ஙி, ஙீ, ஙு, முதலிய வர்ணங்களிலொவ்வொன்றும் முந்திய வர்ணத்தை $\left(-\frac{ஈ}{ஐ}\right)$ என்பதாற் பெருக்கிப் பெற்ற பேறுக்குச் சமமென்று வரும். வரவே,

$$\frac{ஆ}{ஐ+ஈஷ}=\frac{ஆ}{ஐ}-\frac{ஆஈ}{ஐ^{௨}}ஷ+\frac{ஆஈ^{௨}}{ஐ^{௩}}ஷ^{௨}-\frac{ஆஈ^{௩}}{ஐ^{௪}}ஷ^{௩}$$
(இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகை தோன்றுமென்றுகாண்க.

இந்தப்பிரகாரமே பின்வருகின்ற வீசரூபங்களையும் அநந்தமாலிகையாக விரி.

௧. $\frac{௧+௨ஷ}{௧-ஷ-ஷ^{௨}}$ என்ற வீசவாக்கியத்திற்குச் சமமான அநந்தமாலிகையாது?

* இஷ்டவர்ணமென்பது விரும்பியபடி கற்பித்துக்கொள்ளப்பட்ட வர்ணமாம்.

விடை. $௧+௩ஷ+௪ஷ^௨+௭ஷ^௩+௧௧ஷ^௪+௧௮ஷ^௫+௨௯ஷ^௬$, (இ—தி.)

௨. $\frac{ஒ}{ஈ—ஆஷ}$ இதற்குச் சமமான அநந்தமாலிகையாது?

விடை. $\frac{ஒ}{ஈ}\left(௧+\frac{ஆஷ}{ஈ}+\frac{ஆ^௨ ஷ^௨}{ஈ^௨}+\frac{ஆ^௩ ஷ^௩}{ஈ^௩}\right)$ (இ—தி)

௩. $\frac{௧—ஷ}{௧—௨ஷ—௩ஷ^௨}$ இதற்குச் சமமான அநந்தமாலிகையாது?

விடை. $௧+ஷ+௫ஷ^௨+௧௩ஷ^௩+௪௧ஷ^௪+௧௨௧ஷ^௫$ (இ—தி,)

௪. $\frac{௧}{௧—ஷ—ஷ^௨+ஷ^௩}$ இதற்குச் சமமான அநந்தமாலிகையாது?

விடை. $௧+ஷ+௨ஷ^௨+௨ஷ^௩+௩ஷ^௪+௩ஷ^௫+௪ஷ^௬+௪ஷ^௭$ (இ—தி.)

சங்கலிதம்.

௨௱௮௭. பிர. அநந்தமாலிகையின் உறுப்பெண் அநந்தமாயினும் அதின் சங்கலிதத்தை நிச்சயித்தல் பெரும்பாலும் அரிதல்ல. எப்படியென்றால்,

$\frac{௧}{௧௦}+\frac{௩}{௧௦௦}+\frac{௩}{௧௦௦௦}+\frac{௩}{௧௦௦௦௦}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையினது உறுப்பெண் எல்லையிறந்ததாயினும், எல்லா உறுப்புகளையுந் திரட்டிய தொகையாகிய சங்கலிதம் $\left(\frac{௧}{௩}\right)$ ஆம். ஆகையால் அநந்தமாலிகை அவரோகண சகரணமாலிகையாய்வரில் சகரணமாலிகைக்குச் சொல்லியபடி சங்கலிதமறியலாம். (௨௱௬௯. பிர.) எப்படியென்றால்,

$ஸ=\frac{வின—ஆ}{வி—௧}$, எனவே விகிதத்தாற் பெரிய உறுப்பைப் பெருக்கிச் சிறிய உறுப்பைக் களைந்து ஒலகு குறைந்த விகிதத்தாலரிக்கச், சங்கலிதமென்றதாயிற்று. ஆனால் அவரோகண அநந்தமாலிகையின் சிறிய உறுப்புத் தனிஷடமாகையால் அதனைச் சூன்யசமத்துவமெனக்கொள்ள,

$ஸ=\frac{வின—௦}{வி—௧}=\frac{வின}{வி—௧}$ என்றுவரும். உ-ம்.

௧. $\frac{௩}{௧௦}+\frac{௩}{௧௦௦}+\frac{௩}{௧௦௦௦}+\frac{௩}{௧௦௦௦௦}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையின் சங்கலிதம் யாதெனில் பெரிய உறுப்பாகிய

$\left(\frac{௩}{௧௦}\right)$ ஐ விகிதமாகிய ௧௦ ஆற்பெருக்கி ஒரலகு குறைந்தவிகிதமாகிய (௯) ஆலரிக்க,

$ஸ=\frac{௧௦\times\frac{௩}{௧௦}}{௧௦—௧}=\frac{௩}{௯}=\frac{௧}{௩}$ என்று சங்கலிதம் பிறத்தல்காண்க.

௨. $௧+\frac{௧}{௨}+\frac{௧}{௪}+\frac{௧}{௮}+\frac{௧}{௧௬}+\frac{௧}{௩௨}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

விடை $ஸ=\frac{௨\times௧}{௨—௧}=௨$.

௩. $௧+\frac{௧}{௩}+\frac{௧}{௯}+\frac{௧}{௨௭}+\frac{௧}{௮௧}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

விடை $\frac{௩}{௨}=௧+\frac{௧}{௨}$.

௨௱௮௮. பிர. சில அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் கழித்தற்சித்தியத்தாலறியப்படும். எப்படியெனில்,

$\frac{௧}{௨.௩}+\frac{௧}{௩.௪}+\frac{௧}{௪.௫}+\frac{௧}{௫.௬}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் அறியும்படி ஆரகத்தின் வலப்புறத்திலுள்ள குணங்கத்தை நீக்கிநின்ற மாலிகைச் சங்கலிதம், ஸ, என்றுகொண்டால்,

$ஸ=\frac{௧}{௨}+\frac{௧}{௩}+\frac{௧}{௪}+\frac{௧}{௫}$ (இ—தி) என்றுவரும்.

முதலினிற்கின்ற பெரிய உறுப்பை நிலமாற்ற,

$ஸ—\frac{௧}{௨}=\frac{௧}{௩}+\frac{௧}{௪}+\frac{௧}{௫}$ (இ—தி) என்றும் இந்தமாலிகையை முந்தினமாலிகையிற் களைய,

$\frac{௧}{௨}=\frac{௧}{௨.௩}+\frac{௧}{௩.௪}+\frac{௧}{௪.௫}+\frac{௧}{௫.௬}$ (இ—தி) என்றுஞ் சங்கலிதம்வரும். வரவே அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் $\left(\frac{௧}{௨}\right)$ என்றறியலாம்.

௧. வின. $\frac{௧}{௧.௩}+\frac{௧}{௨.௪}+\frac{௧}{௩.௫}+\frac{௧}{௪.௬}+\frac{௧}{௫.௭}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

இதினது ஆரகத்தின் வலப்புறத்துக் குணங்கத்தை நீக்கி முன்போலப் புதுமாலிகையைப் பிறப்பித்துச் சங்கலிதங்காண்பது. எப்படியென்றால்,

$ஸ = க + \frac{க}{உ} + \frac{க}{ங} + \frac{க}{ச} + \frac{க}{ரு}$ (இ—தி) என்றும்,

$ஸ - \frac{ங}{உ} = \frac{க}{ங} + \frac{க}{ச} + \frac{க}{ரு} + \frac{க}{சா}$ (இ—தி) என்றுங் கொண்டுகழிக்க,

$\frac{ங}{உ} = \frac{உ}{க.ங} + \frac{உ}{உ.ச} + \frac{உ}{ங.ரு} + \frac{உ}{ச.சா} + \frac{உ}{ரு.எ}$ (இ—தி) என்று அல்லது,

$\frac{ங}{ச} = \frac{க}{க.ங} + \frac{க}{உ.ச} + \frac{க}{ங.ரு} + \frac{க}{ச.சா} + \frac{க}{ரு.எ}$ (இ—தி) என்று சங்கலிதம் பிறக்கும்.

உ. வினா. $\frac{க}{உ.ச.சா} + \frac{க}{ச.சா.அ} + \frac{க}{சா.அ.க௦}$. (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

விடை. $\frac{க}{ஙஉ}$

ங. வினா. $\frac{க}{க.உ.ங} + \frac{க}{உ.ங.ச} + \frac{க}{ங.ச.ரு} + \frac{க}{ச.ரு.சா}$ (இ—தி.) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

விடை. $\frac{க}{ச}$

உ௱அகூ. பிர. சில அநந்தமாலிகைகளுக்குச் சங்கலிதமறிய வேறொருவிதம்.

(ஷ) என்ற மறைநிலையிராசியின் காதிதங்களோடு கலந்து வருகின்ற ஒரு அவரோகண அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம், (ஸ) என்றுகொண்டு பின்பு, (ஷ) வும், யாதொரு *மாறுராசியுங் கூடின வதுராசியாற் சமீகரணங்களைப் பெருக்கி வதுராசி சூன்யமாகும்படி இஷ்டமான அர்த்தத்தை, (ஷ)வுக்குக்கற்பித்து மாலிகையின் முதலுறுப்புகளோன்றையாகுதல் பலவையாகுதல் நிலமாற்றினுற் சங்கலிதம்பிறக்குமென்றறிக. உ—ம்.

க. $ஸ = க + \frac{ஷ}{உ} + \frac{ஷ^{உ}}{ங} + \frac{ஷ^{ங}}{ச} + \frac{ஷ^{ச}}{ரு} + \frac{ஷ^{ரு}}{சா}$ (இ—தி) என்ற சமீகரணங்கங்களை (ஷ—க) ஆற்பெருக்க,

* அர்த்தவிகாரமில்லாத இராசியை மாறுராசி என்பது.

$ஸ \times (ஷ - க) = -க + \frac{ஷ}{க.உ} + \frac{ஷ^{உ}}{உ.ங} + \frac{ஷ^{ங}}{ங.ச} + \frac{ஷ^{ச}}{ச.ரு} + \frac{ஷ^{ரு}}{ரு.சா}$ (இ—தி) என்றும் (ஷ=க) என்றுகொண்டால்,

இடப்பாகஞ் சூன்யார்த்தப்படுமாகையால் (—க) ஐ நிலைமாற்ற,

$க = \frac{க}{க.உ} + \frac{க}{உ.ங} + \frac{க}{ங.ச} + \frac{க}{ச.ரு} + \frac{க}{ரு.சா}$ (இ—தி) என்றுவரும்.

உ. $ஸ = க + \frac{ஷ}{உ} + \frac{ஷ^{உ}}{ங} + \frac{ஷ^{ங}}{ச} + \frac{ஷ^{ச}}{ரு}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகையை ($ஷ^{உ}$ —க) ஆற்பெருக்கி (ஷ=க) என்று பிரதிகரித்து நிலமாற்ற,

$க + \frac{க}{உ} = \frac{ங}{உ} = \frac{உ}{க.ங} + \frac{உ}{உ.ச} + \frac{உ}{ங.ரு} + \frac{உ}{ச.சா}$ (இ—தி) என்றுவரும். பிறவுமன்ன.

மடக்குமாலிகை.

உ௱கூ௰. பிர. ஒரு அநந்தமாலிகையின் ஒருறுப்பாகுதல் பலவுறுப்பாகுதல்சார்ந்த சம்பந்தத்தையே பின்வருமுறுப்புகளுஞ் சார்ந்துவருமெனில் அம்மாலிகையை மடக்குமாலிகையென்பர். உ—ம்.

$க + ஙஷ + சஷ^{உ} + எஷ^{ங} + ககஷ^{ச} + கஅஷ^{ரு}$, (இ—தி) என்றமாலிகையில் இரண்டாமுறுப்பின் பின்னே வருகின்ற ஒவ்வோருறுப்பும் பிறக்கும்படி அதற்குமுந்திய அயலுறுப்பை, (ஷ) ஆற்பெருக்கி அதற்கு முந்திய அயலுறுப்பை, ($ஷ^{உ}$) ஆற்பெருக்கி ஒன்றாய்க்கூட்டவேண்டுமென்று காணலாம்.

$க + உஷ + ஙஷ^{உ} + சஷ^{ங} + ருஷ^{ச} + சாஷ^{ரு}$ (இ—தி) என்றமாலிகையின்இரண்டாம் உறுப்பின் பின்னே வருகின்ற ஒவ்வோருறுப்பும் பிறக்கும்படி அதற்கு முந்திய அயலுறுப்பை, (உஷ) ஆற்பெருக்கி, அதற்குமுந்தியஉறுப்பை, ($ஷ^{உ}$)ஆற்பெருக்கி இரண்டையும் ஒன்றாய்க்கூட்டலாம். இவ்விடத்து, (உஷ) (—$ஷ^{உ}$) என்பனவின் வர்ணங்களாகிய, (+உ—க) என்பதைச் சம்பந்தஅளவையென்பர்.

$க + சஷ + சாஷ^{உ} + ககஷ^{ங} + உஅஷ^{ச}$ (இ—தி)என்றமாலிகையில் மூன்றுறுப்பிணைந்து சம்பந்தத்தை விளக்குகின்றன. இதில், (உ—க+ங) என்பது சம்பந்த அளவையாம்.

இம்மாலிகைகளின் உறுப்புகளிலொன்றை நிச்சயிக்கும்படி அதற்கு முந்திய உறுப்புக்குத் திரும்பிப்போகவேண்டியபடியால் இவற்றுக்கு மடக்குமாலிகையென்ற நாமமாம்.

உ௱கூக. பிர. ந+நி+நீ+நு+நூ+நெ, (இ—தி) என்பது

எந்தமடக்குமாலிகைக்கும் பிரதியென வைத்துக்கொண்டால், அதின் சம்பந்த அளவை இரணடுறுப்பைச்சார்ந்ததெனில் அதற்கும் பிரதி, (ம, ந) என்று கற்பிக்க,—

$ஙீ = ஙிமஷ + ஙநஷ^{உ}$ என்றும்,

$ஙு = ஙீமஷ + ஙிநஷ^{உ}$ என்றும்,

$ஙூ = ஙுமஷ + ஙீநஷ^{உ}$ என்றும், இவைமுதலிய சமீகரணங்கள் பிறக்கும். சம்பந்தஅளவை மூன்றுறுப்புளதேனில் அவ்வுறுப்புகளை (ம, ந, ர) என்று கற்பிக்க,—

$ஙு = ஙீமஷ + ஙிநஷ^{உ} + ஙரஷ^{ங}$, என்றும்,

$ஙூ = ஙுமஷ + ஙீநஷ^{உ} + ஙிரஷ^{ங}$ என்றும்,

$ஞ = ஙூமஷ + ஙுநஷ^{உ} + ஙீரஷ^{ங}$ என்றும், சமீகரணங்கள்பிறக்கும். சம்பந்தஅளவை மூன்றுறுப்பின்மேற்பட்ட பலவுறுப்புள்ளதாய் வரினும் இவ்வாறே சமீகரணங்களைப் பிறப்பிக்கலாம்.

உ௱கூஉ. பிர. ஆகையால் எந்த மடக்குமாலிகையாயினுஞ், சம்பந்தஅளவை ஈருறுப்புடையதெனில், அவ்வீருறுப்புங் கலந்துவருகிற இரண்டு சமீகரணங்களையும், மூன்றுறுப்புடையதெனில், அம்மூன்றுறுப்புங் கலந்துவருகிற மூன்று சமீகரணங்களையும், இவ்வாறு சம்பந்த அளவை எத்தனையுறுப்புடையதோ அத்தனை சமீகரணங்களையுஞ் சாதிகரித்துச்சம்பந்தஅளவையினுறுப்புகளுக்கு அர்த்த நிச்சயஞ் செய்யலாம்.

மாலிகையில் வருகின்ற, (ஷ) வின் அர்த்தம் எத்துணைத்தாயினுஞ் சம்பந்தஅளவையின் அர்த்தம் விகாரியாதாதலால், (ஷ = க)என்று கற்பித்துச் சாதிகரிப்பதே உசிதம். உ-ம்.

முன்னிறுத்திய இரண்டு உதாரணங்களில் முதலுதாரணத்தேயமைந்த சம்பந்தஅளவையை நிச்சயிக்கும்படி, (ஷ = க) என்று கற்பிதஞ்செய்ய,

$ஙு = ஙீம + ஙிந$ }
$ஙூ = ஙும + ஙீந$ } என்றுவரும்.

இவற்றைச் சாதிகரிக்க,

$$ம = \frac{ஙுஙீ - ஙிஙூ}{ஙீஙீ - ஙிஙு}$$ என்றும்,

$$ந = \frac{ஙீஙூ - ஙுஙு}{ஙீஙீ - ஙிஙு}$$ என்றும்வரும். ஆதலால்,

{ ங ஙி ஙீ ஙு ஙூ.
{ $க + ஙஷ + ருஷ^{உ} + எஷ^{ங} + கூஷ^{ச}$ (இ-தி) என்ற மாலிகையில், (ஷ = க) என்றுகொண்டால்,

$$ம = \frac{எ \times ரு - ங \times கூ}{ரு^{உ} - ங \times எ} = உ,$$ என்றும்.

$$ந = \frac{ரு \times கூ - எ^{உ}}{ரு^{உ} - ங \times எ} = -க,$$ என்றும் வரும்.

ஆகையால், (உ—க) என்பதே சம்பந்தஅளவையாமென்க.

உ௱கூங. பிர. அவரோகண மடக்குமாலிகையின் சம்பந்த அளவையை அறிந்தால், அம்மாலிகைக்குச் சங்கலிதமுமறியலாம். எப்படியென்றால்,

{ ங ஙி ஙீ ஙு ஙூ
{ $ஆ + ஈஷ + ஐஷ^{உ} + ஒஷ^{ங} + லஷ^{ச}$, (இ-தி) என்பது மடக்குமாலிகையென்றும், (ம + ந) சம்பந்தஅளவையென்றுங்கொண்டால்,

ங = முதலுறுப்பாகவும்,

ஙி = இரண்டாமுறுப்பாகவும்,

$ஙீ = ஙி \times மஷ + ஙநஷ^{உ}$, மூன்றாமுறுப்பாகவும்,

$ஙு = ஙீ \times மஷ + ஙிநஷ^{உ}$, நான்காமுறுப்பாகவும்

$ஙூ = ஙு \times மஷ + ஙீநஷ^{உ}$, ஐந்தாமுறுப்பாகவும், இவ்வாறே வரும்.

இதில், (மஷ) முதல் கடையுறுப்புகளையொழித்த சர்வஉறுப்புகளுக்குங் குணங்கமாய் வருதலானும், ($நஷ^{உ}$) கடையிரண்டுறுப்புகளையொழித்த சர்வஉறுப்புகளுக்குங் குணங்கமாய் வருதலானும், மாலிகை அநந்த அவரோகண மாலிகையாதலால் கடையுறுப்புகளை அர்த்தவிகாரமுறாமல் நீக்கலாமாதலானும்,

(ஸ) மாலிகைச் சங்கலிதமென்று கற்பித்தால்,

$ஸ = ங + ஙி + மஷ \times (ஙி + ஙீ + ஙு + ஙூ)$ (இ—தி) $+ நஷ^{உ}$ ங + ஙி + ஙீ, (இ—தி) என்று வரும். இனி,

ஸ = ங + ஙி + ஙீ + ஙு (இ—தி) ஆகையால், ஸ — ங = ஙி + ஙீ + ஙு (இ—தி) எனவே,

$ஸ = ங + ஙி + மஷ \times (ஸ - ங) + நஷ^{உ} \times ஸ$, என்றுவரும். இதனைச் சாதிகரிக்க,

$$ஸ = \frac{ங + ஙி - ஙமஷ}{க - மஷ - நஷ^{உ}}$$ என்று சங்கலிதம் பிறத்தல்காண்க.

விஞ.

க. $க + சுஷ + கஉஷ^{உ} + சஅஷ^{ங} + கஉ௰ஷ^{ச} +$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

இம்மாலிகையின் சம்பந்த அளவை (க + சு) என்றறியவே,

$$சங்கலிதம் = \frac{க + ருஷ}{க - ஷ - சுஷ^{உ}}$$ என்று காணலாம்.

௨. க + ௩ஷ + ௪ஷ^{௨} + ௭ஷ^{௩} + ௧௧ஷ^{௪} + ௧௮ஷ^{௫} — (இதி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

$$\text{விடை}\quad \frac{\text{கஷ} + \text{௨}}{\text{க} - \text{ஷ} - \text{ஷ}^{௨}}$$

௩. க + ஷ + ௫ஷ^{௨} + ௧௩ஷ^{௩} + ௪௧ஷ^{௪} + ௧௨௧ஷ^{௫} (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

$$\text{விடை}\quad \frac{\text{க} + \text{ஷ}}{\text{க} - \text{௨ஷ} - \text{௩ஷ}}$$

௪. க + ௨ஷ + ௩ஷ^{௨} + ௪ஷ^{௩} + ௫ஷ^{௪} (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

$$\text{விடை}\quad \frac{\text{க} + \text{௨ஷ} - \text{௨ஷ}}{\text{க} - \text{௨ஷ} + \text{ஷ}^{௨}} = \frac{\text{க}}{(\text{க} - \text{ஷ})^{௨}}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ஙி} & \text{ஙீ} & \text{ஙு} & \text{ஙூ} & \text{ஒ} & \text{ஞி} & \\ \text{ஆ} + & \text{ஈஷ} + & \text{ஐஷ}^{௨} + & \text{ஒஷ}^{௩} + & \text{லஷ}^{௪} + & \text{லிஷ}^{௫} + & \end{matrix} \right\}$$

என்றஅநந்தமாலிகையின் சம்பந்தஅளவை (ம+ந+ர) என்றிப்படி மூன்றுறுப்புடையதேனில்,

ங = மாலிகையின் முதலுறுப்பாம்.

ஙி = மாலிகையின் இரண்டாமுறுப்பாம்.

ஙீ = மாலிகையின் மூன்றாமுறுப்பாம்.

ஙு = ஙீ×மஷ + ஙி×நஷ^{௨} + ஙரஷ^{௩}, நான்காமுறுப்பாம்.

ஙூ = ஙு×மஷ + ஙீ×நஷ^{௨} + ஙிரஷ^{௩} ஐந்தாமுறுப்பாம்.

ஒ = ஙூ×மஷ + ஙுநஷ^{௨} + ஙீரஷ^{௩} ஆறாமுறுப்பாம். பிறவுமன்ன,

ஸ = ங + ஙி + ஙீ + மஷ {ஙீ + ஙு + ஙூ (இ—தி)} + நஷ^{௨} × {(ஙி + ஙீ + ஙு) (இ—தி)} + ரஷ^{௩} × {ங + ஙி + ஙீ (இ—தி)} என்றும், எனவே

ஸ = ங + ஙி + ஙீ + மஷ (ஸ — ங — ஙி) + நஷ^{௨} × (ஸ — ங) + ரஷ^{௩} × ஸ என்றும் வரும். இதனைச்சாதிகரிக்க,

$$\text{ஸ} = \frac{\text{ங} + \text{ஙி} + \text{ஙீ} - (\text{ங} + \text{ஙி})\,\text{மஷ} - \text{ஙநஷ}^{௨}}{\text{க} - \text{மஷ} - \text{நஷ}^{௨} - \text{ரஷ}^{௩}} \quad \text{என்றுவரும்.}$$

வினா.

(௫) க + ௪ஷ + ௬ஷ^{௨} + ௧௧ஷ^{௩} + ௨௮ஷ^{௪} + ௬௩ஷ^{௫} (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம் யாது?

௬. க + ஷ + ௨ஷ^{௨} + ௨ஷ^{௩} + ௩ஷ^{௪} + ௩ஷ^{௫} + ௪ஷ^{௬} + ௪ஷ^{௭} (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்குச் சங்கலிதம்யாது?

விடை சம்பந்த அளவை = க + க — க

$$\text{சங்கலிதம்} = \frac{\text{க}}{\text{க} - \text{ஷ} - \text{ஷ}^{௨} + \text{ஷ}^{௩}}$$

அந்தரகரணத்தாற் சங்கலிதமறியும்படி.

௨௱௬௪. பிர. மாலிகைகள் ஆரோகண அநந்தமாலிகைக ...ாய் வரும்பொழுது அவற்றின் முழுச்சங்கலிதமும் அநந்தராசி ...ாம். ஆகவே, அச்சங்கலிதத்தை நிச்சயித்தல் கூடாது. ஆ...ல் ஆரோகண அநந்தமாலிகையின் உறுப்பெண் வரையறை ...பெற்ற முற்றிராசியாகப்பெறின், அவ்வரையறைபெற்ற உறுப்பு ...களுக்குச் சங்கலிதமும் நிச்சயஞ்செய்யலாம். இவ்வாறே மு...ழுச்சங்கலித நிச்சயஞ்செய்ய ஏலாத ஆரோகண அநந்தமாலி...கைக்கு உறுப்பெண்ணை வரையறைபெற்றதெனக்கொண்டு ...அவ்வெல்லைக்குட்பட்ட உறுப்புகளுக்குச் சங்கலிதம் அறிய...லாம். வரையறைபெற்ற உறுப்பெண் வரும்பொழுது சங்கலி...த நிச்சயஞ் செய்வதற்கு அந்தரகரணவிதி முக்கியமுடையது.

அந்தரகரணம் என்பது மாலிகை உறுப்புகளின் ...பற்பலநிரை அந்தரங்களைக் கிரகித்தலாம்.

மாலிகை உறுப்புகளை முறையே ஒன்றிலொன்று தள்ளிப் ...பெறுஞ்சேடங்களை முதனிரை அந்தரமென்றும், முதனிரை ...அந்தர உறுப்புகளை ஒன்றிலொன்று தள்ளிப் பெறுஞ்சேடங்க...ளை இரண்டாநிரையந்தரமென்றும் இவ்வாறே அந்தரநிரைக...ளுக்கு நாமங்களாம். உ-ம்.

௧, ௮, ௨௭, ௬௪, ௧௨௫, (இ-தி) என்றமாலிகையின் முன் ...னுறுப்பைப் பின்னுறுப்பிற்களைய,

௭, ௧௯, ௩௭, ௬௧, (இ-தி) என்று முதனிரையந்தரமும், இ...தன் முன்னுறுப்பைப் பின்னுறுப்பிற்களைய, ௧௨, ௧௮, ௨௪, (இ-தி) என்று இரண்டாநிரையந்தரமும் இப்படியே அந்தரநி...ரைகள் பிறத்தல்காண்க. இம்முறையே, ஆ, ஈ, ஐ, ஒ, ன, ...ஞ, (இ-தி) என்றமாலிகையை அந்தரிக்க,

ஈ—ஆ, ஐ—ஈ, ஒ—ஐ, ன—ஒ, ஞ—ன, (இ-தி) என்று ...முதனிரை அந்தரமும்,

ஐ—௨ஈ+ஆ, ஒ—௨ஐ+ஈ, ன—௨ஒ+ஐ, ஞ—௨ன+ஒ, (இ-தி) என்று இரண்டாநிரையந்தரமும்,

ஒ—௩ஐ+௩ஈ—ஆ, ன—௩ஒ+௩ஐ—ஈ, ஞ—௩ன+௩ஒ—ஐ, (இ-தி) என்று மூன்றாநிரையந்தரமும்.

ன—௪ஒ+௬ஐ—௪ஈ+ஆ, ஞ—௪ன+௬ஒ—௪ஐ+ஈ (இ-தி) என்று நான்காநிரையந்தரமும்.

ஞ—௫ன+௧௦ஒ—௧௦ஐ+௫ஈ—ஆ, (இ-தி) என்று ஐந்தாநிரையந்தரமும் இம்முறையே பிறவும் வருதல்காண்க.

இதில், ஈ—ஆ, ஐ—உஈ+ஆ, ஔ—௩ஐ+௩ஈ—ஆ, ன—௪ஔ+௬ஐ—௪ஈ+ஆ, என்ற அந்தரநிரை முதலுறுப்புகளான வகு ராசிகளே சங்கலித நிச்சயத்திற்கு முக்கியமானவைகள். இந்த உறுப்புகளின் வர்ணங்கள் வருமாறு,—

இரண்டாநிரையில், க, உ, க,
மூன்றாநிரையில், க, ௩, ௩, க,
நான்காநிரையில், க, ௪, ௬, ௪, க,
ஐந்தாநிரையில், க, ௫, ௧௦, ௧௦, ௫, க,

ஆகையால் இவை துவிராசியின்சாதித வர்ணங்களைப்போலாமென்க. எனவே, (ன) நிரையந்தரத்தில் முதலுறுப்புக்கு வரணம்.

$$க,\ ன,\ ன \times \frac{ன—க}{உ},\ ன \times \frac{ன—க}{உ} \times \frac{ன—உ}{௩}$$

(இ—தி) என்றுவரும்.

௨௱௯௫. பிர. ஆ, ஈ, ஐ, ஔ, (இ—தி) என்றிப்படி வருகின்றமாலிகையிற் கருதியஉறுப்பு இது என்றறியும்படி, த, தி, தீ, து, தூ, (இ—தி) அந்தர நிரைகளின் முதலுறுப்புகளாமெனில்,

த=ஈ—ஆ,
தி=ஐ—உஈ+ஆ
தீ=ஔ—௩ஐ+௩ஈ—ஆ,
து=ன—௪ஔ+௬ஐ—௪ஈ+ஆ, என்றிவைமுதலிய சமீகரணங்கள் பிறக்கும்; இவைகளைச் சாதிகரிக்க,

ஈ=ஆ+த, என்றுமாலிகையில் இரண்டாமுறுப்பும்,
ஐ=ஆ+உத+தி, என்று மூன்றாமுறுப்பும்,
ஔ=ஆ+௩த+௩தி+தீ, என்று நான்காமுறுப்பும்,
ன=ஆ+௪த+௬தி+௪தீ+து, என்று ஐந்தாமுறுப்பும் வரும்.

இதில், வர்ணங்கள் துவிராசிகளின் சாதிதவர்ணங்களுக்கு ஒப்பாய் வந்தன. இவற்றிற்குந் துவிராசி காதிதவர்ணங்களுக்குமுள்ள வித்தியாசமென்னவெனில், மாலிகையினது யாதோருறுப்புப்பெறுகின்றவர்ணங்கள், துவிராசி காதிதத்தில், அவ்வுறுப்புக்கு முந்திய அயல் உறுப்புப் பெறுகின்றவர்ணங்களாம்.

அதாவது மாலிகையினது, (ன) உறுப்புப்பெறும் வர்ணமும், துவிராசி காதிதத்தில், (ன—க) உறுப்புப் பெறும்வர்ணமும் ஒக்கும், எப்படியென்றால்,

மாலிகையின் ஐந்தாமுறுப்புக்கு வர்ணங்களாகிய, க, ௪, ௬, ௪, க, என்பன நான்காங் காதிதத்துக்கு வர்ணங்களாம். ஆகையால் துவிராசிச் சூத்திரத்தில், (௱௪௩. பிர), (ன)வுக்குப் பிரதியாக (ன—க) ஐ வைத்தால் அநந்தமாலிகையின் எந்த உறுப்பையுமறிதற்கான சூத்திரம்பிறக்கும்.

அச்சூத்திரம் வருமாறு, அநந்தமாலிகையின் கருதியஉறுப்பு (ன) எனில், அந்த (ன) உறுப்பு

$$=ஆ+(ன—க)\,த+(ன—க)\,\frac{ன—உ}{உ}\,தி+(ன—க)\,\frac{ன—உ}{உ}\times\frac{ன—௩}{௩}\,தீ,$$

(இ-தி.)

அந்தரநிரைகள் சில பிறந்தபின்பு வேறு நிரை அந்தரங்கள்பிறவாமற் சூன்யசமத்துவம்பிறக்குமெனில், அவ்வியல்பமைந்தமாலிகைகளிற் கருதியஉறுப்பை எளிதில் நிச்சயிக்கலாமென்றறிக. உ—ம்.

க, ௩, ௬, ௧௦, ௧௫, ௨௧, (இ—தி) என்றமாலிகைக்கு (ன) உறுப்புயாது?

இந்தமாலிகையை அந்தரிக்கும்வகை.

க, ௩, ௬, ௧௦, ௧௫, ௨௧, (இ—தி) என்பதுமாலிகை.
உ, ௩, ௪, ௫, ௬, (இ—தி) இதுமுதனிரையந்தரம்.
க, க, க, க, (இ—தி) இது இரண்டாநிரையந்தரம்.
0, 0, 0, (இ—தி) இது மூன்றாநிரையந்தரம்.

இனி, ஆ=க, த=உ, தி=க, தீ=0 என்றுவருதலால்,

$$(ன)\ உறுப்பு=க+(ன—க)\,உ+(ன—க)\,\frac{ன—உ}{உ}$$

ஆகையால் இந்தமாலிகைக்கு, (௨௦) ம், உறுப்புயாதெனில், க+௩௮+௧௭௧=௨௧௦, என்றும், (௫௦)ம் உறுப்புயாதெனில் (௧௨௭௫) என்றுமறிக.

உ. $க^௩, உ^௩, ௩^௩, ௪^௩, ௫^௩, ௬^௩$, (இ—தி) என்றமாலிகையின் (௨௦) ம் உறுப்புயாது?

விடை. ௮௦௦௦.

௩. $க^உ, உ^உ, ௩^உ, ௪^உ, ௫^உ$, என்ற மாலிகையின் (௧௫) ம் உறுப்புயாது?

விடை. ௨௨௫.

௨௱௯௬. பிர. அந்தரகரணத்தாற் சங்கலிதமறியும் வகையாவது,

ஆ, ஈ, ஐ, ஔ, ன, (இ—தி) என்றமாலிகையின் உறுப்புகளையொன்றோடொன்று முறையேகூட்டி,—

0, ஆ, ஆ+ஈ, ஆ+ஈ+ஐ, ஆ+ஈ+ஐ+ஔ, (இ—தி) என்றமாலிகையைப் பிறப்பித்து முன்போல இதனை அந்தரிக்க,

ஆ, ஈ, ஐ, ஔ, (இ—தி) என்றமுதனிரையந்தரமும்,
ஈ—ஆ, ஐ—ஈ, ஔ—ஐ, (இ—தி) என்ற இரண்டாநிரையந்தரமும்,
ஐ—உஈ+ஆ, ஔ—உஐ+ஈ, (இ—தி) என்றமூன்றாநிரையந்தரமும்,
ஔ—௩ஐ+௩ஈ—ஆ, (இ—தி) என்ற நான்காநிரையந்தரமும் இவ்வாறே மற்ற அந்தரங்களும் முறைமுறையே தோன்றும்.

இவ்விடத்துச், சுன்முதலுறுப்பாகப்பெற்ற புதுமாலிகையின் இரண்டாநிரையந்தரமும், முதன்மாலிகையின் (உ௱௯௩. பிர.) முதனிரையந்தரமும், ஒன்றற்கொன்று சமானமாயும், புதுமாலிகையின் மூன்றாநிரையந்தரமும், முதன்மாலிகையின் இரண்டாநிரையந்தரமும், ஒன்றற்கொன்று சமானமாயும், இந்தப்பிரகாரமே பிறவும் வரும். ஆதலால் முதன்மாலிகையின், (ன) உறுப்புக்குப் புதுமாலிகையின், (ன+க) என்ற உறுப்புச்சமமாமென்க, எனவே,

$$\text{ன}+\text{க என்ற உறுப்பு}=0+\text{ன}\text{ஆ}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\,\text{த}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\times\frac{\text{ன}-\text{உ}}{\text{௩}}\times\text{தி}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\times\frac{\text{ன}-\text{உ}}{\text{௩}}\times\frac{\text{ன}-\text{௩}}{\text{ச}}\times\text{தீ}+(\text{இ-தி.})$$

o, ஆ, ஆ+ஈ, ஆ+ஈ+ஐ, (இ-தி) என்றமாலிகைக்த இந்தஉறுப்பு (ன+க) என்ற உறுப்பாமெனவே, ஆ, ஈ, ஐ, ஒ, (இ-தி) என்றமாலிகைக்கு இவ்வுறுப்பு, (ன) உறுப்பாம். ஆனல், இந்தப் புதுமாலிகையின், (ன) உறுப்பு முதன்மாலிகையினது, (ன) உறுப்புகளுக்குக் கலிதமாகையால்,

ஆ, ஈ, (இ-தி) என்றுவருகிற எந்தமாலிகையினது, (ன) உறுப்புகளின் சங்கலிதமறியும்படி,

வீச சூத்திரம்வருமாறு.

$$\text{சங்கலிதம்}=\text{ன}\text{ஆ}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\,\text{த}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\times\frac{\text{ன}-\text{உ}}{\text{௩}}\,\text{தி}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\times\frac{\text{ன}-\text{உ}}{\text{௩}}\times\frac{\text{ன}-\text{௩}}{\text{ச}}\,\text{தீ}+(\text{இ-தி})$$

க, ௩, ரு, எ, ௯, (இ-தி) என்றமாலிகைக்கு, (ன) உறுப்பெண் என்றால், சங்கலிதம்யாது?

க, ௩, ரு, எ, ௯, (இ-தி) மாலிகை.
உ, உ, உ, உ, (இ-தி) முதனிரையந்தரம்.
o, o, o, (இ-தி) இரண்டாநிரையந்தரம்.
ஆ=க. த=உ. தி=o. ஆதலால்,

$$\text{சங்கலிதம்}=\text{ன}+\text{ன}\,\frac{\text{ன}-\text{க}}{\text{உ}}\times\text{உ}=\text{ன}^{\text{உ}}$$ ஆகையால், உறுப்பெண்ணின்வர்க்கமே சங்கலிதமென்று காண்க.

உ. $\text{க}^{\text{உ}}$, $\text{உ}^{\text{உ}}$, $\text{௩}^{\text{உ}}$, $\text{ச}^{\text{உ}}$, $\text{ரு}^{\text{உ}}$, (இ-தி) என்றமாலிகைக்கு, (ன) உறுப்பெண்ணமெனில் சங்கலிதம்யாது?

இதில், ஆ=க, த=௩, தி=உ, தீ=o, ஆகையால் சங்கலிதம் $=\frac{\text{க}}{\text{௬}}\,\text{ன}\,(\text{ன}+\text{க})\times(\text{உ}\text{ன}+\text{க.})$

உறுப்பெண், (உo) ஆமெனில், சங்கலிதம் = உஅஎo, இந்தச்சங்கலிதத்தை வர்க்க சங்கலிதமென்பர்.

க, உ, ௩, ச, ரு, ௬, (இ-தி) என்ற மாலிகையினது சங்கலிதத்துக்கு $=\frac{\text{க}}{\text{உ}}\,\text{ன}\,(\text{ன}+\text{க})$

இதவண (ஸ) வுக்குச் சமமென்றுகொண்டு மேலேவந்த வர்க்க சங்கலித சமீகரணத்திற் பிரதிகரித்தால், $=\text{ஸ}\times\frac{\text{க}}{\text{௩}}\,(\text{உ}\text{ன}+\text{க})$ என்று வரும். ஆகையால் உறுப்பெண்வண இரட்டித்து (க) ஐக்கூட்டி (௩) க்கீந்து நற்சங்கலிதத்திற்குக்க வர்க்க சங்கலிதம்வரும்.

௩. $\text{க}^{\text{௩}}$, $\text{உ}^{\text{௩}}$, $\text{௩}^{\text{௩}}$, $\text{ச}^{\text{௩}}$, $\text{ரு}^{\text{௩}}$, (இ-தி) என்றமாலிகைக்கு (ன) உறுப்பெண்ணனல், சங்கலிதம்யாது?

இதில், ஆ=க, த=எ, தி=கஉ, தீ=௬, து=o. ஆகையால், சங்கலிதம் $=\left\{\frac{\text{க}}{\text{உ}}\,\text{ன}\,(\text{ன}+\text{க})\right\}^{\text{உ}}$, இதவணக் கனசங்கலிதம் என்பர். முந்திய உதாரணத்தில், ஸ $=\frac{\text{க}}{\text{உ}}\,\text{ன}\,(\text{ன}+\text{க})$ என்றுகொண்டது போல இவ்வுதாரணத்திலுங் கொள்ளக், கனசங்கலிதம் $=\text{ஸ}^{\text{உ}}$ என்றுவரும்.

உறுப்பெண் (ருo) ஆனல் கனசங்கலிதம்=க௬உரு௬உரு.

ச. க, ௩, ௬, கo, கரு, (இ-தி) என்றமாலிகையின் உறுப்பெண் (ன) என்றால் சங்கலிதம்யாது?

சங்கலிதம் $=\frac{\text{க}}{\text{௬}}\,\text{ன}\,(\text{ன}+\text{க})\,(\text{ன}+\text{உ})$, இதவணச் சங்கலித சங்கலிதமென்பர். சங்கலிதசங்கலிதத்துக்கு $=\text{ஸ}\times\frac{\text{க}}{\text{௩}}\,(\text{ன}+\text{உ})$ எனினுமொக்கும்.

உறுப்பெண் (௯) ஆனல், சங்கலிதசங்கலிதம், க௬ரு.

ரு. $\text{க}^{\text{ச}}$, $\text{உ}^{\text{ச}}$, $\text{௩}^{\text{ச}}$, $\text{ச}^{\text{ச}}$, $\text{ரு}^{\text{ச}}$, (இ-தி) என்ற மாலிகைக்கு (கஉ) உறுப்பெண் என்றால், அதற்குச் சங்கலிதம்யாது?

௰௭. குதக அதிகாரம்.

[Indeterminate Analysis.]

உ௱௯௭. பிர. சமீகரண விதிகளைக்கொண்டு மறைநிலையிராசிகளுக்கு அர்த்த நிச்சயஞ் செய்யுமிடத்து, மறைநிலையிராசிகளெத்தனையோ அத்தனை தனிமைச் சமீகரணங்களும்வந்தாலன்றி அவ்வர்த்தம் வரையறைபெறாதாமென்று முன்புரைத்தோம். (உ௱௪. பிர.) ஆனாற் சிறுபான்மை வரையறைபெறாத சமீகரண அர்த்தங்களை நிச்சயிக்கவேண்டிவருகின்றது. உ-ம். $\frac{\text{உஉகஷ} \pm \text{கூரு}}{\text{ககூரு}}$ = ஸ என்ற சமீகரணத்தில் (ஷ, ஸ) என்ற இரண்டு மறைநிலையிராசிகள் வந்தாலும் இரண்டு தனிமைச் சமீகரணங்கள் வராதபடியால் சமீகரணார்த்தங்கள் வரையறுக்கப்படமாட்டா. இவ்விடத்து (ஷ) என்ற மறைநிலையிராசியைக் குதகமென்றும், (± கூரு) ஐக் கேபமென்றுங்கூறுவர்.

உ௱௯௮. பிர. இந்தச் சமீகரணத்தின் வாமபாகம் பின்னரூபுடையதாதலானும், மகாபவர்த்தத்தால் எந்தப் பின்னத்தின் போகத்தையும் ஆரகத்தையும் அரித்தால் பின்னார்த்தம் விகாரியாதாதலானும் மகாபவர்த்தமாகிய (கூ) ஆலரித்து வாமபாகத்தைச் சுருக்க,

$$\frac{\text{கஎஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}} = \text{ஸ என்றுவரும்.}$$

இனி, எந்த எண்ணை (கஎ) ஆற்பெருக்கி (ரு) ஐக் கூட்டியாவது, கழித்தாவது (கரு) ஆலரிக்கச் சேடமில்லையென்று வினாவினால் விடையறியும்படி, $\frac{\text{கஎஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}}$ அதாவது,

ஷ + $\frac{\text{உஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}}$ அபின்னமாகையால், (க) ஐத் தள்ளினால், $\frac{\text{உஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}}$ என்பதும் அபின்னமாம். இதை (அ) ஆற்பெருக்க, $\frac{\text{கசுஷ} \pm \text{சo}}{\text{கரு}}$ அதாவது, ஷ + உ + $\frac{\text{ஷ} \pm \text{கo}}{\text{கரு}}$ என்பதும் அபின்னமாம் $\frac{\text{ஷ} \pm \text{கo}}{\text{கரு}}$ = ஆ, என்று வைத்துக்கொண்டால் ஷ = கருஆ ± கo என்றுவரும். இதில் (ஆ) என்ற அட்சரத்துக்கு இஷடமான அர்த்தத்தைப் பிரதிகரிக்க (ஷ) இன் அர்த்தம் வெளிப்ப...

ஆ = க, என்றால்
ஷ = ரு, என்றும்
ஸ = சு, என்றும் வரும்,

ஆகையால் குதகவினாக்களுக்கு விடையறியும்படி முன்பு யாம அறியவேண்டிய மூலப்பிரமாணங்கள் நான்கு. அவை இவ்வுதாரணத்திற் காட்டியவைகளும் பிறவுமாம். அவை வருமாறு:—

க. அபின்னத்தோடு அபின்னத்தைக்கூட்டினாலும்,

உ. அபின்னத்தில் அபின்னத்தைக் கழித்தாலும்,

௩. அபின்னத்தை அபின்னத்தாற் பெருக்கினாலும் பேறு அபின்னமாய்வரும்.

உ௱௯௯. பிர. இனி அபின்னத்தை அபின்னத்தாலரிக்குமிடத்து, ஈவு அபின்னமாய்வர, அப்படி அரிக்கின்ற பாககஅபின்னத்தாற் பாச்சியஅபின்னத்தின் ஒரு கூற்றை அரிக்குமிடத்தும் ஈவு அபின்னமாயே வருமெனில், சேடமான மற்றைக்கூற்றைப் பாககஅபின்னத்தால் அரிக்குமிடத்தும் ஈவு அபின்னமாயேவரும். முந்திய உதாரணத்தில் $\frac{\text{கஎஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}}$ என்பது அபின்னமாகையால் இதில் (ஷ) ஐத் தள்ள, $\frac{\text{உஷ} \pm \text{ரு}}{\text{கரு}}$ என்பதும் அபின்னமாம். ஆகையால்,

ச. ஒரு அபின்னத்தை வேறொரு அபின்னஞ் சேடமில்லாமல் அரிக்குமெனில் சேடமில்லாமல் அரிபடுஞ் சில கூறுகளைத் தள்ளினாலும், எஞ்சிய மற்றைக்கூறுகள் சேடமில்லாமலரிபடும். ஆதலாற் குதகவினாக்களுக்கு விடையறியும்படி,

பொதுவிதி.

௩௱. பிர. குதகரூபத்தை மகாபவர்த்தத்தால் அரித்துச் சுருக்கவேண்டுமானாற் சுருக்கிப் பின்பு தள்ளக்கூடிய அபின்னங்களனைத்தையுந் தள்ளிக் குதகாட்சரம் (க) என்ற வர்ணமேயன்றி வேறுவர்ணங்களைப் பொருந்தாமலிருக்கும்படி முற்கூறிய மூலப்பிரமாணங்களில், அமைந்த கிர்த்தியங்களை இயற்றி, ஈற்றில் வந்தபேற்றை ஒரிஷடாட்சரத்துக்குச் சமமென்று கொண்டு சமீகரணத்தைச் சாதிகரித்து இஷடாட்சரத்துக்குத் தகுந்த அர்த்தத்தைக் கற்பித்துக்கொள். உ-ம்.

க. $\frac{\text{கசஷ} \pm \text{கக}}{\text{ககூ}}$ = ஸ, என்றால், விடையறியும்படி,

ககூஷ என்ற அபின்னத்திற் கழிய, ககூஷ — கசஷ ± கக

$= \frac{\text{ருஷ—கக}}{\text{கசு}}$, என்றும், (ச) ஆற்பெருக்க, $\frac{\text{உ0ஷ—சச}}{\text{கசு}} =$ ஷ—உ $+ \frac{\text{ஷ—சு}}{\text{கசு}}$ என்றும், ஷ—உ, என்ற அபின்னத்தைத் தள்ள, $\frac{\text{ஷ—சு}}{\text{கசு}}$, என்றும்வரும். இதை (ஆ) வுக்குச் சமமெ ன்றுகொள்ள, $\frac{\text{ஷ—சு}}{\text{கசு}} =$ ஆ, என்ற சமீகரணம்பிறக்கும். ஆகையால் ஷ = கசுஆ+சு. இதில் ஆ = 0 என்றுகொண்டால், ஷ = சு என்றும், ஸ = ரு என்றும்வரும். இவை இந்த மறைநிலையிராசிகளுக்கு லகிஷ்ட அர்த்தங்களாம்; எனவே இந்த மறைநிலையிராசிகளின் அர்த்தத்துக்கோர் வரையறை இல்லையென்றுகாண்க.

உ. $\frac{\text{உரு—௩ஷ}}{\text{உ}} =$ ஸ. என்றால் குதகார்த்தம் யாதெனில், $\frac{\text{உரு—௩ஷ}}{\text{உ}} =$ கஉ—ஷ $+ \frac{\text{க—ஷ}}{\text{உ}}$. ஆகையால் அபின்னங்களைத் தள்ளிநிற்கின்ற $\frac{\text{க—ஷ}}{\text{உ}}$ என்பதை (ஆ) வுக்குச் சமமென்று சமீகரணஞ்பாக்க, $\frac{\text{க—ஷ}}{\text{உ}} =$ ஆ, என்றும் க—ஷ = உஆ அதாவது ஷ = க—உஆ என்றும்வரும். இதில் (ஷ) வுக்குத் தனராசியாகிய விடைவேண்டுமேயானால் 0,—க,—உ. —௩,—ச, என்ற இலக்கங்களை (ஆ) வுக்குப் பிரதிகரிககவேண்டும். ஆ = 0 என்றால் ஷ = க, என்றும் ஸ = கக என்றும்வரும்.

ஆ = —க என்றால் ஷ = ௩, ஸ = அ என்றும்
ஆ = —உ என்றால் ஷ = ரு, ஸ = ரு என்றும்
ஆ = —௩ என்றால் ஷ = எ, ஸ = உ என்றும்
} வரும்.

இந்நான்குவிடைகளைவிட மற்றெல்லாவிடைகளும் இருணராசியாமென்றுகாண்க.

குதகவர்ணமும் பாசிதமும் ஒரெண்ணாற் சேடமில்லாமல் அரிக்கப்படக் கேபமும், அப்படியே சேடமில்லாமல் அரிக்சப்படாதிருக்குமேயானால் அவ்வியல்பையுடைய வினுப் பொருந்தாதவினுவென்க, உ-ம்.

$\frac{\text{மஷ} \pm \text{ல}}{\text{மன}} =$ ஸ என்புழி, இது மஷ—மனஸ = $\pm$ ல என்றுவருமாகையால் இதை (ம) ஆலரிக்க ஷ—னஸ = $\pm \frac{\text{ல}}{\text{ம}}$, என்றுவரும். இப்படி அபின்னத்தை அபின்னத்திற் க

ளந்த சேடம் பின்னமாகையால் இது பொருந்தாத வினுவென்றுகாண்க. இவ்வாறே நூற்றைம்பது அணவை ரூபாயாகவும் இறையாலாகவும் கொடுக்கும்படி ஒருவன் கேட்டால் அது பொருந்தாத கேள்வியென்றறியலாம். எப்படியென்றால் கசுவு +கஉஸ = கரு0. ஆதலால் (கசு) ஐயும், (கஉ) ஐயும் (ச) ஆற் சேடமில்லாமலரிப்பதுபோல (கரு0) ஐயும் (ச) ஆற் சேடமில்லாமலரித்தல்கூடாதபடியாலென்க.

குதகவினு.

எந்த எண்வண (க00) ஆற்பெருக்கி (கூ0) ஐக்கூட்டி (சு௩) ஆலரிக்கும்போது சேடம்வராது?

விடை $\frac{\text{க00ஷ+கூ0}}{\text{சு௩}} =$ ஸ $= \frac{\text{க00×கஅ+கூ0}}{\text{சு௩}} =$ ௩0.

உ. எந்த எண்வண (சு0) ஆற்பெருக்கி (கசு) ஐக்களைந்து (க௩) ஆலரிக்கும்போது சேடம்வராது?

விடை $\frac{\text{சு0×உ—கசு}}{\text{க௩}} =$ அ.

௩. (க௩) வருடத்தில் (கக) மண்டலபூரணஞ் செய்கின்ற ஒருகிரகத்துக்குப் புடம் எண்ணினபோது சில மண்டலம் (அதாவது பாகணமும்,) இராசியும், பாகையும், கலையும், விகலையும் வந்து ஈற்றில் $\frac{\text{க0}}{\text{க௩}}$ என்ற விகலைப்பின்னமும் வந்தால் இந்த விகலைப்பின்னத்தினின்று பாகணம், இராசி, பாகை, கலை, விகலை, என்ற இவற்றை அறிவதெப்படி?

இந்த வினுவிற்கு விடையறியும்வகை, கலையில் எஞ்சியசேடத்தை (சு0) ஆற்பெருக்கி (க௩) ஆலரித்தபோது இந்த விகலாபின்னந் தோற்றியபடியால், கலையிலெஞ்சியசேடத்தை (ஷ) என்றுகொள்ள,

$\frac{\text{சு0ஷ—க0}}{\text{க௩}} =$ ஸ விகலை, என்ற குதகசமீகரணம்பிறக்கும். ஆகையால் ஷ = கக, என்றும், ஸ = ரு0, என்றும் அறியலாம். இனிப் பாகையிலெஞ்சிய சேடத்தை ற என்றுகொள்ள,

$\frac{\text{சு0ற—கக}}{\text{க௩}} =$ ன கலை, என்ற சமீகரணம் பிறக்கும். ஆகையால் ற = ௩ என்றும், ன = க௩ கலை, என்றுங் காணலாம்.

இவ்வகையே $\frac{\text{௩0ழ—௩}}{\text{க௩}} =$ ல பாகை. ஆகையால் ழ = ச, ல = கூ பாகை.

$\frac{\text{௧௨ர}-\text{௪}}{\text{௧௩}}$ = லி இராசி. ஆகையால் ர = ௯. லி = ௮ இராசி.

$\frac{\text{௧௧ம}-\text{௯}}{\text{௧௩}}$ = மி மண்டலம். ஆகையால் ம = ௧. மி = ௧ மண்டலம். ஆதலாற் கிரகபுட எண்ணலிற் கண்ட மண்டல முதலியன; மண்டலம், ௧; இராசி, ௮; பாகை, ௯; கலை, ௧௩; விகலை, ௫௦ $\frac{\text{௧௦}}{\text{௧௩}}$.

இப்படிக் குதககிர்த்தியத்தால் மண்டலம் இராசி முதலியஅறியும் விதத்தைத் திரகுதகமென்பர்.

௪. ஐந்துவராகனுக்கு ஒவ்வொரு குதிரையும், முக்கால்வராகனுக்கு ஒவ்வொரு கழுதையும், கால்வராகனுக்கு ஒவ்வொரு ஆடுமாக ஒருவன் நூறுவராகனுக்கு நூறு உரு வாங்கினனென்றால், அவன வாங்கின குதிரையும், கழுதையும், ஆடும் வகை ஒன்றுக்கெத்தனை ?

விடை குதிரை, ௧௪. கழுதை, ௧௭. ஆடு, ௬௯.

௫. ஆடவரும், ஸ்திரீகளும், குழந்தைகளும் கூடிக் கடையிற் பண்ணிகாரம் வாங்கினபோது ஆடவர்கள் ஆளுக்கு (௪) பண்ணிகாரமும், ஸ்திரீகள் ஆளுக்கு அரைப்பண்ணிகாரமும், குழந்தைகள் ஆளுக்குக் காற்பண்ணிகாரமுமாகப் பங்கிட்டார்கள். பண்ணிகாரமும் (௨௦) ஆளும் (௨௦) ஆமெனில் ஆடவர், ஸ்திரீ, குழந்தையென்ற ஒவ்வொரு வகையாட்களில் எத்தனைபெயரிருந்தார்கள் ?

விடை ஆடவர், ௩. ஸ்திரீ, ௧௫. குழந்தை, ௨.

௬. மோருச்செட்டியார் வராகன்செட்டியாருக்கு அரைரூபாய் கொடுக்கவேண்டிவந்தபோது மோருச்செட்டியாரிடத்திலே மோருவும், வராகன்செட்டியாரிடத்திலே வராகனுமேயல்லாமல் வேறுநாணயமிருக்கவில்லை. ஒரு மோரு ($\text{௧௩}\frac{\text{௧}}{\text{௨}}$) ரூபாயென்றும், ஒருவராகன் ($\text{௩}\frac{\text{௧}}{\text{௨}}$) ரூபாயென்றும் வைத்துக்கொண்டால் மோருச்செட்டியார் கொடுத்த மோரு எத்தனை ? வராகன் செட்டியார் கொடுத்த வராகன் எத்தனை ?

விடை, மோரு ௬. வராகன், ௨௩.

சங்கிலிக்குதகம்.

சேடமில்லாமல் அரிக்கப்படுகின்ற எண்கள் யாவையென்றறியும்வகையைக் குதகவிதியினல் விளக்கினேமாயினும் இன்னின்ன எண்களாலரிக்குமிடத்து இன்னின்ன சேடங்கள் வருமென்று கூறுகின்ற வினக்களுக்கும் அக்குதகவிதிவழியாய்

விடையுணரலாம். இவ்விதமான வினக்களுக்கு விடையுணர்த்துமுறையைச் சங்கிலிக்குதகமென்பர். அதற்கு உதாரணம் வருமாறு.

௧. (௧௭) ஆலரிக்க (௭) ஐயும் (௨௬) ஆலரிக்க (௧௩) ஐயுஞ் சேடமாய்த்தருகின்ற லகிஷ்டமான அபின்னம் யாது ?

இந்தவினவிற் சேடம்வந்துஞ் சேடமான எண்வணப் பாச்சிய எண்ணிற் கவளந்து பாககத்தாலரிக்கச் சேடம்வராது. ஆதலால் முற்கூறிய விதிப்படி இதற்கும் விடையறியலாம். ஆனல் இதிலிரண்டு குதகரூபங்கள் வந்தபடியால் ஒரு ரூபத்திற் கண்ட மறைநிலையிராசியின் அர்த்தத்தை மற்றக்குதகரூபத்திற் பிரதிகரித்து முன்போற் செய்யவேண்டும். இனி வினவிற் கூறியபடி,

$\frac{\text{ஷ}-\text{௭}}{\text{௧௭}}$, $\frac{\text{ஷ}-\text{௧௩}}{\text{௨௬}}$ என்ற ரூபங்கள் அபின்னங்களாம். இவற்றுள் $\frac{\text{ஷ}-\text{௭}}{\text{௧௭}}=\text{ஆ}$ என்றுகொள்ளில் $\text{ஷ}=\text{௭}+\text{௧௭ஆ}$, என்றுவரும். இந்த அர்த்தத்தை மற்றைக்குதகரூபத்திலே பிரதிகரிக்க,

$\frac{\text{௧௭ஆ}+\text{௭}-\text{௧௩}}{\text{௨௬}}=\frac{\text{௧௭ஆ}-\text{௬}}{\text{௨௬}}$ என்ற அபின்னம்வரும்.

$\frac{\text{௨௬ஆ}}{\text{௨௬}}$, அபின்னமாகையால்,

$\frac{\text{௨௬ஆ}}{\text{௨௬}}-\frac{\text{௧௭ஆ}-\text{௬}}{\text{௨௬}}=\frac{\text{௯ஆ}+\text{௬}}{\text{௨௬}}$ என்பதும் அபின்னமாம்.

இதை (௩) ஆற்பெருக்க, $\frac{\text{௨௭ஆ}+\text{௧௮}}{\text{௨௬}}=\text{ஆ}+\frac{\text{ஆ}+\text{௧௮}}{\text{௨௬}}$ என்றும், (ஆ) என்ற அபின்னத்தைத்தள்ள $\frac{\text{ஆ}+\text{௪௮}}{\text{௨௬}}$ என்றும் அபின்னம்வரும். இதை (ஈ) க்குச் சமமென்றுகொள்ள, $\frac{\text{ஆ}+\text{௧௮}}{\text{௨௬}}=\text{ஈ}$ என்றும், $\text{ஆ}=\text{௨௬ஈ}-\text{௧௮}$ என்றும் வரும். $\text{ஈ}=\text{௧}$, எனக்கொள்ள, $\text{ஆ}=\text{௮}$, என்றும், $\text{ஷ}=\text{௧௪௩}$, என்றும்வரும்.

ஆகையால் முற்கூறிய குதகவிதிப்பிரகாரமே சங்கிலிக்குதக வினக்களுக்கும் விடையறியலாமென்க. ஆனல் சங்கிலிக்குதக கிர்த்தியத்திற்கும் மற்றைக்குதககிர்த்தியத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசமென்னவென்றால் குதகவினக்கள் மறைநிலையிராசியின் அர்த்தத்தை ஒரு ரூபத்தில் மாத்திரமே விளக்கும். சங்கிலிக்குதகவினக்களோ மறைநிலையிராசியைப் பலரூபங்களில் வி

ளக்கிநிற்கும். இப்படிப் பலரூபங்களில் விளக்குமிடத்து ஒரு ரூபத்திற் கண்ட மறைநிலையிராசியின் அர்த்தத்தை மற்றரூபங்களிற் பிரதிகரிப்பதுஞ்சங்கிலிக்குதகவிசேஷமென்றுகாண்க.

௨. ௧௧, ௧௯, ௨௯, என்ற எண்களால் ஒரிலக்கத்தை அரிக்க முறையே ௩, ௫, ௧0, என்ற சேடங்கள் வருமெனில் அந்த இலக்கம் யாது?

அவ்விலக்கம் (ஷ) எனில்,

$\frac{\text{ஷ—௩}}{\text{௧௧}}, \frac{\text{ஷ—௫}}{\text{௧௯}}, \frac{\text{ஷ—௧0}}{\text{௨௯}}$ என்பன அபின்னங்களாம். இவற்றுள் $\frac{\text{ஷ—௩}}{\text{௧௧}} = \text{ஆ}$, என்று கொண்டால் $\text{ஷ} = \text{௧௧ஆ} + \text{௩}$ என்றுவரும். இதைஇரண்டாம்ரூபத்திற் பிரதிகரிக்க, $\frac{\text{௧௧ஆ—௨}}{\text{௧௯}}$ என்ற அபின்னம்வரும். இதை (௨) ஆற்பெருக்க $\frac{\text{௧௧ஆ—௨}}{\text{௧௯}} \times \text{௨} = \frac{\text{௨௨ஆ—௪}}{\text{௧௯}} = \text{ஆ} + \frac{\text{௩ஆ—௪}}{\text{௧௯}}$ என்றும், ஆ ஐத்தள்ள, $\frac{\text{௩ஆ—௪}}{\text{௧௯}}$ என்றும், ௬ ஆற்பெருக்க, $\frac{\text{௩ஆ—௪}}{\text{௧௯}} \times \text{௬} = \frac{\text{௧௮ஆ—௨௪}}{\text{௧௯}} = \frac{\text{௧௮ஆ—௫}}{\text{௧௯}} - \text{௧}$, என்றும், ௧ ஐத் தள்ள, $\frac{\text{௧௮ஆ—௫}}{\text{௧௯}}$ என்றும், $\frac{\text{௧௯ஆ}}{\text{௧௯}}$ என்ற அபின்னத்திற் கழிய, $\frac{\text{௧௯ஆ}}{\text{௧௯}} - \frac{\text{௧௮ஆ—௫}}{\text{௧௯}} = \frac{\text{ஆ+௫}}{\text{௧௯}}$ என்றும் அபின்னம்பிறக்கும். இது (ஈ) க்குச் சமமென்றுகொள்ள, $\text{ஆ} = \text{௧௯ஈ—௫}$ என்றும், $\text{ஷ} = \text{௨0௯ஈ—௫௨}$ என்றும்வரும். இந்த (ஷ) இன் அர்த்தத்தை மூன்றாவது ரூபத்திற் பிரதிகரிக்க,

$\frac{\text{௨0௯ஈ—௬௨}}{\text{௨௯}} = \text{௭ஈ—௨} + \frac{\text{௬ஈ—௪}}{\text{௨௯}}$ என்றும் (௭ஈ—௨) என்ற அபின்னத்தைத் தள்ளி நின்ற அபின்னத்தை (௫) ஆற்பெருக்க, $\frac{\text{௬ஈ—௪}}{\text{௨௯}} \times \text{௫} = \frac{\text{௩0ஈ—௨0}}{\text{௨௯}} = \text{ஈ} + \frac{\text{ஈ—௨0}}{\text{௨௯}}$ என்றும் (ஈ) ஐத்தள்ளிச் சேடமான அபின்னம் (ஐ) க்குச் சமமென்றுகொள்ள, $\text{ஈ} = \text{௨௯ஐ+௨0}$ என்றும்,

$\text{ஷ} = \text{௨0௯ஈ—௫௨} = \text{௨0௯} \times (\text{௨௯ஐ+௨0}) - \text{௫௨}$ என்றும். (ஐ) = (0) என்றுகொள்ள,

$\text{ஷ} = \text{௨0௯} \times \text{௨0} - \text{௫௨} = \text{௪௧௨௮}$ என்றுவரும். இதுவே வினவிற்கு விடையாம்.

௩. ஒரு எண்ணை (௬) ஆலரிக்கும்போது (௨) ம் (௧௩) ஆலரிக்கும்போது (௩) ஞ் சேடமாய்வரில் அந்த எண் யாது?

௪. ௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭, ௮, ௯, என்ற ஒவ்வொரு இலக்கத்திஞலுஞ் சேடமில்லாமல் அரிபடும் லகிஷ்ட எண் யாது?

விடை ௨௫௨0.

௫. ஒரு பந்தியிற் கட்டியிருந்த குதிரைகளை ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, பந்திகளில் முறைமுறையே பிரித்துக்கட்டினபோது ஒவ்வொரு பந்தியிலுங் குதிரைகள் சரிசரியாக இருந்தன. இந்தக் குதிரைகளோடே இன்னும் இரண்டு குதிரை சேர்த்தால் அவைகளைப் பிரித்து ஏழுபந்தியிற் சரிசரியாக நிற்கும்படி கட்டலாமெனில் குதிரைகளின் தொகையாது?

விடை ௧௮0.

௬. ஒருத்தி சில எலுமிச்சம்பழங் கொண்டுவர அவற்றை ஒரு கள்வன் பறித்துக் கொண்டுபோய்விட்டான். அவள் இராசாவுக்கு முறைப்பட்டாள். இராசா நீ எத்தனைபழங் கொண்டுவந்தாயென்றுகேட்க, அவள் நான் கொண்டுவந்த பழங்களை இவ்விரண்டாகவும், மும்மூன்றாகவும், நாநான்காகவும், ஐவைந்தாகவும், ஆறாறாகவும் எடுத்தெடுத்து வைத்தபோது முறையே, ௧, ௨, ௩, ௪, ௫, மிஞ்சின. ஏழேழாக வைத்தபோதோ மிச்சமில்லையென்று சொன்னாள். அவள் கொண்டுபோன எலுமிச்சம்பழங்கள் எத்தனை?

விடை ௧௧௯.

௰௮. கரணகுதக அதிகாரம்.

[Diophantine Analysis.]

௩௱௧. பிர. அர்த்தவரையறை பெறாத கரணரூப சமீகரணங்களோடு புணர்ந்து வர்க்க கனராசிச் சம்பந்தியாய் வருகின்ற மறைநிலையிராசிக்குக் கரணகுதகமென்றுபெயர்.

கரணகுதகவினாக்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு துறைபற்றி வருகையால் அவையனைத்தையுந் தழுவி முடிகின்ற ஓர் பொதுவிதிதருதல் கூடாது. அல்லது இன்ன வினவுக்கு இன்னஇடத்தே இன்னகிர்த்தியமியற்றல் வேண்டுமென்று ஒவ்வொரு வினவையுந் தப்பாமலெடுத்துத் தீட்டிக்காட்டலுங் கூடாது. ஆகையால் யாம் இவ்விடத்தில் எடுத்துச் சொல்லுகின்ற வினாக்களை உதாரணமாகக்கொண்டு

"சொற்றவற்றியலான் மற்றையபிறவுந்
தெற்றெனவுணர்தறெளிவோர்திறனே."

சர்வகரண குதகவினுக்களுக்கும் ஒப்பமுடியாதாயினும் பெரும்பாலும் உபயோகமுடைத்தாய் வருகின்ற விதியாவது :

க. எந்தரூபத்தை மறைநிலையிராசியினிடத்தே பிரதிகரித்துக்காதித்தால் மறைநிலையிராசிப் பெரிய காதிதமாவது வினவிற் சொல்லிய எண்ணுவது, ஒழியுமென்றறிந்து அந்தரூபத்தைப் பிரதிகரி. சமீகரணஞ் சுருங்கி வெள்ளைச்சமீகரணமானால் அதனைச் சாதிகரித்து விடையறி.

உ. தகுந்த இஷடரூபத்தைப் பிரதிகரித்தபோது சமீகரணம் வெள்ளைச்சமீகரணமாகச் சுருங்காதிருக்குமெனில் அது அவ்வாறு சுருங்குமளவும் முன்போலத் தகுந்தரூபங்களைப் பிரதிகரித்துச் சுருக்கு.

உதாரணம்.

க, எந்த எண்ணின் வர்க்கத்தோடு (க) ஐக்கூட்டினால் தொகையும் வர்க்கமாகுமென்ற வினவிற்கு விடையறியும்படி, மறைநிலைஎண் (ஷ) என்றுகொண்டால், $ஷ^{உ}+க$, வர்க்கமாதல்வேண்டும் ; அதாவது வர்க்கமூலஞ் சரிவரக்கொள்ளக்கூடிய விகரணமாதல்வேண்டும். ஆனால், $ஷ^{உ}+க$. கரணம். இக்கரணரூபத்தை விகரணமாக்கும்படி $(ஷ-ஞ)^{உ}$, அதற்குச் சமமென்று ஒரிஷடரூபத்தைக் கற்பித்தால்,

$ஷ^{உ}+க=ஷ^{உ}-உஞஷ+ஞ^{உ}$, என்றும்,

$உஞஷ=ஞ^{உ}-க$, என்றும்,

$ஷ=\frac{ஞ^{உ}-க}{உஞ}$, என்றும்வரும்.

இதில், (ஞ), (க) க்குமேற்பட்ட எந்தஎண்ணையும் நிற்கலாம்.

$ஞ=உ$, என்றால், $ஷ=\frac{௩}{ச}$, என்றும், $ஷ^{உ}+க=\frac{கூ}{க௬}+\frac{க௬}{க௬}=\frac{உரு}{க௬}=(\frac{ரு}{ச})^{உ}=$ வர்க்கம் என்றும்வரும்.

$ஞ=௩$ என்றால், $ஷ=\frac{அ}{௬}$, என்றும், $ஷ^{உ}+க=\frac{௬ச}{௩௬}+\frac{௩௬}{௩௬}=\frac{க00}{௩௬}=(\frac{க0}{௬})^{உ}=$ வர்க்கமென்றும் வரும். பிறவுமன்ன.

உ. ஒரு எண்ணின்வர்க்கத்தோடு அவ்வெண்ணைக்கூட்டத் தொகையும் வர்க்கமாமெனில், அவ்வெண்யாது?

இவ்வினவுக்கு விடைகாண்கின்ற வகை.

$ஷ^{உ}+ஷ=(ஷ-ஞ)^{உ}$, என்று ஒருஇஷடரூபத்தைக்கற்பித்துவர்க்கித்தால், $ஷ^{உ}+ஷ=ஷ^{உ}-உஞஷ+ஞ^{உ}$, என்றும்,

$ஷ=\frac{ஞ^{உ}}{உஞ+க}$ என்றும் வரும்.

இதில் $(ஞ)=க$, என்றுகொண்டால் $ஷ\frac{க}{௩}$ என்றும், $ஷ^{உ}+ஷ=\frac{ச}{கூ}=$ வர்க்கமென்றும் வரும். $ஞ=உ$, என்று கொண்டால், $ஷ=\frac{ச}{ரு}$ என்றும், $ஷ^{உ}+ஷ=\frac{௩௬}{உரு}$, என்றும் வரும். பிறவுமிப்படியே.

௩. $க௬ஷ^{உ}+ஷ-க$ வர்க்கமானால், (ஷ) வுக்கு அபின்னார்த்தம்யாது?

விடை. $ஷ=க$.

ச. $உஷ^{உ}-உஷ+க$ வர்க்கமானால், (ஷ) எத்தனை?

விடை. ச.

ரு. ஒருகோமட்டிக்கு இரண்டு புத்திரர் இருந்தார்கள், அவர்களில் மூத்தவனுக்கு வயது, (கூ). இளையவனுடைய வயதின் வர்க்கத்து மும்மடங்கு அவர்களுடையமாதாவுக்கு வயது. இளையவனுடைய வயதிற் பன்னிரண்டுமடங்கு கோமட்டியுடைய வயது. மாதாவுடைய வயதையும் பிள்ளைகளிருவருடைய வயதையும் கோமட்டியுடைய வயதையுமொன்றாய்க்கூட்டினால் தொகை வர்க்க எண்ணாம். அப்படியானால் இளைய புத்திரனுக்கு வயதென்ன?

விடை, ரு.

௬. $\sqrt{எஸ^{உ}+க}=ஞ$ என்றால் (ஞ) வுக்கு அபின்னார்த்தம்யாது?

விடை. $ஞ=அ$.

எ. $\sqrt{ஷ^{ச}-உ}=ஞ$ என்றால், (ஞ) வுக்கு அர்த்தம்யாது?

விடை. $ஞ=\frac{எ}{ச}$.

அ. இரண்டு வர்க்கங்களின் தொகையை வேறிரண்டு வர்க்கங்களாய்ப் பிரிக்கும்படி ;

$ஆ^{உ}$, $ஈ^{உ}$, வர்க்கங்களென்றும், $ஆ^{உ}+ஈ^{உ}$, அவ்வர்க்கங்களின் தொகையென்றும் வைத்துக்கொள்: இதனை வேறிரண்டு வர்க்கங்களாகப் பிரிக்கும்படி, $ஆ^{உ}=$* $(றஷ-ஆ)^{உ}$

*இதில் (ற) பெரியதென்றும், (ஸ்)சிறியதென்றுமறிக. மேலும் அவை, ற : ஸ் : : ஆ : ஈ; என்றுவது. ற : ஸ் : : ஆ+ஈ : : ஆ−ஈ, என்றுவது நிற்கப்பெறு.

என்றும், $ஈ^{௨} = (ஸஷ - ஈ)^{௨}$, என்றும் இஷடரூபங்களைக் கற்பித்தால், $ஆ^{௨} + ஈ^{௨} = ஆ^{௨} + ஈ^{௨} + ற^{௨}ஷ^{௨} + ஸ^{௨}ஷ^{௨} - ௨ஆறஷ - ௨ஈஸஷ$, என்றும், சுருக்கினல்,

$ற^{௨}ஷ + ஸ^{௨}ஷ = ௨ஆற + ௨ஈஸ$; அல்லது,

$ஷ = \frac{௨ஆற + ௨ஈஸ}{ற^{௨} + ஸ^{௨}}$, என்றும் வரும்.

ஆகையால்,

$றஷ - ஆ = \frac{ஆற^{௨} + ௨ஈறஸ - ஆஸ^{௨}}{ற^{௨} + ஸ^{௨}}$, இது பெரியவர்க்கத்துக்குமூலம்.

$ஸஷ - ஈ = \frac{ஈஸ^{௨} + ௨ஆறஸ - ஈற^{௨}}{ற^{௨} + ஸ^{௨}}$. இது சிறியவர்க்கத்துக்குமூலம்.

உதாரணம்.

௯, ௪, என்ற இரண்டுவர்க்க எண்களின் தோகையை வேறிரண்டு வர்க்கங்களாகப் பிரித்தால், அவை $\left(\frac{௧௭}{௫}\right)^{௨}$, $\left(\frac{௬}{௫}\right)^{௨}$ என்று வருமென்று காண்க.

௮. இரண்டு எண்களின் தோகையும் அந்தரமும் வர்க்கமானல், அவ்வெண்கள்யாவை?

$ற^{௨} + ஸ^{௨}$, ஒரு எண் என்றும், ௨றஸ, மற்ற எண்என்றும் வைத்தால் அதுவே விடையாம்.

௯. இரண்டு வர்க்கங்களின் அந்தரத்தைக்கொண்டு அவ்வர்க்கங்களையறியும்படி;

வர்க்காந்தரத்தை இரண்டுசமமற்ற குணங்கங்களாகப்பிரித்து அவ்விரண்டு குணங்கத்தோகையின் பாதியை வர்க்கித்தால், பெரிய வர்க்கமும், குணங்கங்களினந்தரபாதியை வர்க்கித்தால் சிறியவர்க்கமும் வரும். உ—ம்.

ஷ + க, ஷ — க, என்ற இரண்டுரூபங்களும் வர்க்கமானல், (ஷ) வுக்கு அர்த்தம்யாது?

இதில் வர்க்காந்தரம் ௨. குணங்கங்கள் ௨, ௧. குணங்கத்தோகை (௩). இதிற்பாதி $\left(\frac{௩}{௨}\right)$. இதின்வர்க்கம் $\left(\frac{௯}{௪}\right)$. குணங்காந்தரம், (௧). இதிற்பாதி $\left(\frac{௧}{௨}\right)$. இதின் வர்க்கம் $\left(\frac{௧}{௪}\right)$. ஆகையால், பெரியவர்க்கம் $\frac{௯}{௪}$, என்றும், சிறியவர்க்கம் $\frac{௧}{௪}$, என்றும் அறிக. அறியவே $ஷ = \left(\frac{௫}{௪}\right)$ ஆம்.

௧௦. மூன்று எண்வை இவ்விரண்டாகக் கூட்டினலும், மூன்றையும் ஒன்ருய்க்கூட்டினலும் தோகைகள் வர்க்கமாய்வரில் அம்மூன்றெண்களும் யாவை?

முதலெண், ௪ஷ, என்றும், இரண்டாமெண் $ஷ^{௨} - ௪ஷ$, என்றும், மூன்ருமெண் ௨ஷ + ௧ என்றும் வைத்துக்கொண்டால், $(௪ஷ) + (ஷ^{௨} - ௪ஷ) = ஷ^{௨}$; $(ஷ^{௨} - ௪ஷ) + (௨ஷ + ௧) = ஷ^{௨} - ௨ஷ + ௧$; $(௪ஷ) + (ஷ^{௨} - ௪ஷ) + (௨ஷ + ௧) = ஷ^{௨} + ௨ஷ + ௧$, என்ற இம்மூன்று தோகையும் வர்க்கமாம். ஆகையால் $(௪ஷ) + (௨ஷ + ௧) = ௬ஷ + ௧$ என்ற ஒன்றை மாத்திரமே வர்க்கமாக்கல் வேண்டியது. இது $(ஆ^{௨})$ என்பதற்குச் சமமென்றுவைத்துக்கொண்டால்,

$ஷ = \frac{ஆ^{௨} - ௧}{௬}$, என்றுவரும், ஆகையால்,

$\frac{௨ஆ^{௨} - ௨}{௩}$; $\frac{ஆ^{௪} - ௨௬ஆ^{௨} + ௨௫}{௩௬}$; $\frac{ஆ^{௨} + ௨}{௩}$; என்பன விடையாம்.

௧௧. மூன்றுவர்க்க எண்வை இவ்விரண்டாகக்கூட்டினல், தோகைகளும் வர்க்கமாய்வரில் அம்மூன்று எண்களும் யாவை?

விடை. $(௪௪)^{௨}$; $(௧௧௭)^{௨}$; $(௨௪௦)^{௨}$.

௧௨. (௧௦௦) ஐ இரண்டு வர்க்கங்களாகப் பிரி.

விடை. ௩௬; ௬௪:

௧௩. $ஷ^{௨} + ஷ$; $ஷ^{௨} - ஷ$; என்ற இரண்டு ரூபங்களும் வர்க்கமானல், (ஷ) வுக்கு அர்த்தம் யாது?

விடை. $\frac{௨௫}{௨௪}$.

௧௪. இரண்டெண்ணின் குணிதத்தை அவ்வெண்களுக்கு முறையே கூட்டினல் தோகைவர்க்கமாம், அவ்வெண்கள் யாவை?

விடை. $\frac{௨}{௩}$, $\frac{௫}{௩}$.

௧௫. மூன்று வர்க்க எண்கள் அந்தரமாலிகையாகவும் வர்க்கமாகவுமிருக்கில் அவையாவை?

விடை. ௧, ௨௫, ௪௯.

௧௬. அந்தரமாலிகையான மூன்று அபின்னங்களை இரண்டிரண்டாகக்கூட்டினல் தோகை வரக்கமாம். அவ்வெண்கள் யாவை?

விடை. ௪௮௨, ௩௩௬௨, ௬௨௪௨.

௧௭. இரண்டெண்களைத் தனித்தனிவர்க்கித்து அவ்வெண்களின் குணிதத்துக்குக்கூட்டினல் தோகைகள் வர்க்கமாம். அவ்வெண்கள் யாவை? விடை. [illegible]

கஅ. சகரணமாலிகையான மூன்றெண்ணின் ஒவ்வொன் றோடேயும் (ககூ) ஐக் கூட்டினுல் தொகை வர்க்கமாம். அவ் வெண்கள் யாவை?

விடை. அக, $\frac{ரு}{ச}$, $\frac{உரு}{கஉகூரு}$.

ககூ. மூன்றுவர்க்க எண்களில் இவ்விரண்டின் அந்தரமும் வர்க்கமாம். அவ்வெண்கள் யாவை?

விடை. சஅருஅ0கூ, ௬சஉஉரு, உ௬ச0கூ.

௰கூ. அதிவர்க்கசமீகரண அதிகாரம்.

[Composition and Resolution of the higher Equations.]

௬ாஉ. பிர. சமீகரணத்தில் வருகின்ற மறைநிலையிராசியி னது நிர்க்கண்டம் இரண்டின் மேற்படில் அந்தச் சமீகரணத் தை அதிவர்க்க சமீகரணமென்பர். ஆகையால் கனசமீகர ணம், வர்க்கவர்க்கசமீகரணம் முதலியனவெல்லாம் அதிவர்க் க சமீகரணமென்ற பொதுப்பெயரிலடங்குமென்க. இந்தச் சமீகரணங்கள் வெள்ளைச்சமீகரணங்களினின்று குணனசிர் த்தியத்தாற் பிறக்கும். எப்படியென்றுல்,

ஷ—உ = 0 }
ஷ—௩ = 0 } என்ற வெள்ளைச்சமீகரணங்களைப் பெருக்க,

ஷ^{உ} —ருஷ+சு = 0 } என்ற வர்க்கசமீகரணமும்,
ஷ—ச = 0 } என்றதாற்பெருக்க,

ஷ^{௩} —கூஷ^{உ} —உசுஷ—உச = 0 என்ற கனசமீகரணமும்
ஷ—ரு =0 என்றதாற்பெருக்க

ஷ^{ச} —கசஷ^{௩} +எகஷ^{உ} —கருசஷ—கஉ0 = 0 என்ற வர் க்கவர்க்க சமீகரணமும் இவ்வாறே பிறவுந்தோன்றும். இங் கே குணங்கமாய் வந்த சமீகரணங்களுக்கு நிலமாற்றல் சூ ன்யசமத்துவம் பிறப்பித்ததையும் ஒரே மறைநிலையிராசிக்கு ப் பல அர்த்தங்களைக் கற்பித்ததையுங் கண்டுகொள்க.

௬௩௩. பிர. இந்தச் சமீகரணங்களின் முதலுறுப்பினது நிர்க்கண்டஞ் சமீகரணநாமம் எப்படியோ அப்படியிருக்க, அத ற்குப் பிந்திய உறுப்புகளின் நிர்க்கண்டம் ஒவ்வோரலகு குறை ந்து குறைந்துவரும். உ-ம்.

வர்க்கசமீகரணத்தின் நிர்க்கண்டங்கள், உ, க.

கனசமீகரணத்தின் நிர்க்கண்டங்கள், ௩, உ, க.

வர்க்கவர்க்கசமீகரணத்தின் நிர்க்கண்டங்கள், ச, ௩, உ, க.

பிறவுமன்ன,

இந்தச் சமீகரணங்களின் கடையுறுப்புத் தெரிநிலையிராசி

யாகையால் சமீகரணஉறுப்பெண் பெரிய நிர்க்கண்டத்திலும் ஓரலகு பெருத்துவந்ததென்றறிக.

௬ாச. பிர. முன் பிறப்பித்த சமீகரணங்கள் வேறுவே று அர்த்தங்களையுடைய மறைநிலையிராசிகளின் குணனத்தா ற் பெறப்பட்டபடியால் சமீகரணங்களுக்கு அர்த்தநிச்சயஞ் செய்யும்போதும் அம்மறைநிலையிராசிகளுக்குப் பல அர்த்தம் பிறக்கும். எப்படியென்றுல் வர்க்கசமீகரணத்தில் ௩, உ, என் றும், கனசமீகரணத்தில், ச, ௩, உ, என்றும், வர்க்கவர்க்கச மீகரணத்தில், ரு, ச, ௩, உ, என்றும், (ஷ) வுக்குப் பல அர் த்தங்கள் கற்பிக்கப்பட்டன.

ஆகையால் வர்க்கசமீகரணத்தில் இரண்டு அர்த்தங்களும், கனசமீகரணத்தில் மூன்று அர்த்தங்களும், வர்க்கவர்க்கசமீக ரணத்தில் நான்கு அர்த்தங்களும், இப்படியே பிறவும்வரும். இ ந்த அர்த்தங்களைச் சமீகரணமூலமென்பர்.

இந்த அர்த்தங்களில் எதை மறைநிலையிராசியினிடத்தே பிரதிகரித்தாலும் சமத்துவஞ் சிதையாது. உ-ம்.

ஷ^{௩} —கூஷ^{உ} +உசுஷ—உச = 0 என்ற சமீகரணத்தில், (ஷ=உ) என்றுகொண்டால்,

உ^{௩} —கூ×உ^{உ} +உசு×உ—உச=0 என்றும் (ஷ=௩) என் றுகொண்டால், ௩^{௩} —கூ×௩^{உ} +உசு×௩—உச=0 என்றுஞ் சமத்துவஞ்சிதையாமல் வந்தவாறுகாண்க. பிறவுமிப்படியே. இந்த அர்த்தங்களிற் சில கணிதாதீதமூலமாயும் வரும். கணி தாதீதமூலங் குணங்கமாய் நின்று சமீகரணத்தைப் பிறப்பித் தால் அர்த்தமுங் கணிதாதீதமூலமாயே வருமென்க.

௬ாரு. பிர. இனி அதிவர்க்க சமீகரணங்கள் பிறக்குமிடத்து வர்ணங்கள் என்ன கிரமத்தைப்பற்றி நடைபெறுமென்று நிச் சயிக்கும்படி சூன்யசமத்துவத்தையுடைய,

ஷ—ஆ=0, ஷ—ஈ=0, ஷ—ஐ=0, ஷ—ஔ=0, என்ற ச மீகரணங்களை ஒன்ருய்ப்பெருக்கி ஏரேகாதிதவர்ணங்களை ஒ ன்றின்கீழ் ஒன்ருகத்தீட்ட,

ஷ—ஆ }
ஷ—ஈ } இவற்றின்குணிதம்

ஷ^{உ} —ஆ }
—ஈ } ஷ+ஆஈ = 0

என்ற வர்க்கசமீகரணமாயும் இதனை (ஷ—ஐ) ஆற் பெருக் கக் குணிதம்,

—ஆ } +ஆஈ }
ஷ^{௩} —ஈ } ஷ^{உ} +ஆஐ } ஷ—ஆஈஐ = 0
—ஐ } +ஈஐ }

என்ற கனசமீகரணமாயும்,

இதனை (ஷ—ஔ) ஆற் பெருக்கக் குணிதம்,

$ஷ^{௪}$	$ஷ^{௩}$	$ஷ^{௨}$	ஷ
—ஆ	+ஆஈ	—ஆஈஐ	+ஆஈஐஔ =0.
—ஈ	+ஆஐ	—ஆஈஔ	
—ஐ	+ஆஔ	—ஆஐஔ	
—ஔ	+ஈஐ	—ஈஐஔ	
	+ஈஔ		
	+ஐஔ		

என்ற வர்க்கவர்க்க சமீகரணமாயும் வரும். இதில் முதலுறுப்புக்கு வர்ணம் (க) இரண்டாமுறுப்புக்கு வர்ணம் சமீகரணார்த்தங்களாகிய மூலங்களின்தொகை. இந்தத் தொகை தனம் இருணமாயும் இருணந் தனமாயும் மாறிவரும். உ-ம். வர்க்க சமீகரணமூலங்கள் ஆ, ஈ, இவை—ஆ,—ஈ, என்றுவரும்.

சமீகரணமூலங்களை இரண்டிரண்டாகப்பெருக்கிப் பெற்ற குணிதங்களின் தொகை மூன்ருமுறுப்புக்கு வர்ணமாம். உ-ம். கனசமீகரணமூலங்கள், ஆ, ஈ, ஐ, ஆகையால் மூன்ருமுறுப்புக்கு வர்ணங்கள், ஆஈ, ஆஐ, ஈஐ என்றுவரும். சமீகரணமூலங்களின் சின்னங்களை மாற்றி அவற்றை மும்மூன்ருகப் பெருக்கிப் பெற்றகுணிதங்களின் தொகை நான்காமுறுப்புக்கு வர்ணமாம். உ-ம். வர்க்கவர்க்க சமீகரணமூலங்கள், ஆ, ஈ, ஐ, ஔ, ஆகையால் நான்காமுறுப்புக்கு வர்ணம்,—ஆஈஐ,—ஆஈஔ, —ஆஐஔ,—ஈஐஔ, என்றுவரும். சின்னங்களைமாற்றி மூலங்களனைத்தையும் ஒன்ருய்ப்பெருக்கிப் பெற்றகுணிதஞ் சமீகரணத்தின் கடையுறுப்பாம். உ-ம். கனசமீகரணத்தின் கடையுறுப்பு=—ஆ×—ஈ×—ஐ=—ஆஈஐ வர்க்கவர்க்க சமீகரணத்தின் கடையுறுப்பு=—ஆ×—ஈ×—ஐ×—ஔ=+ஆஈஐஔ.

௯௱௬. பிர. இந்த உதாரணங்களிற் சமீகரணமூலங்களைத் தனராசியாகக் கோண்டபடியால் அவை நிலமாற்ருல் இருணராசியாகிச் சேடதவிராசி காதிதங்கள்போல முறைமுறையே இருணமுந் தனமுமான குணிதஉறுப்புகளைப் பிறப்பித்தன. மூலங்கள் இருணமாளுல், அவை நிலமாற்ருல் தனமாகக் குணித உறுப்புகளனைத்துந் தனமாயேவரும். உ-ம். (ஷ) வுக்கு அர்த்தம்—ஆ,—ஈ,—ஐ,—ஔ, என்றுகோண்டால்,

ஷ+ஆ=0, ஷ+ஈ=0, ஷ+ஐ=0, ஷ+ஔ=0, என்றசமீகரணங்களே குணங்கங்களாய்நின்று அதிவர்க்க சமீகரணங்களைப்பிறப்பிக்கும். ஆகையால் அவற்றிற் சின்னவிகாரமேயன்றி வேறுவிகாரம் வராதென்றுகாண்க. வேறுசமீகரணங்கள் தனமுமிருணமுமான மூலங்களின் குணனத்தாலும் பிறக்கும்.

௯௱௭. பிர. குணனகிர்த்தியத்தாற்சமீகரணங்களோன்றிலொ ... போல பாககிர்த்தியத்தால் அவை ஒ

ன்றிலொன்று குறைந்துகுறைந்துவரும். உ-ம். (ஷ—ஆ) என்பதை (ஷ—ஈ) என்பதாற்பெருக்கப் பேறுவர்க்க சமீகரணமாகியும் இப்பேற்றை (ஷ—ஐ) ஆற்பெருக்கக் கனசமீகரணமாகியும் (ஷ—ஔ) ஆற்பெருக்க வர்க்கவர்க்க சமீகரணமாகியும் வருகின்றபடியால் வர்க்கவர்க்க சமீகரணத்தை (ஷ—ஔ) ஆல்அரிக்கக் கனசமீகரணமும், கனசமீகரணத்தை (ஷ—ஐ) ஆலரிக்க வர்க்கசமீகரணமும் பிறக்குமென்பது வெளிப்படை. ஆகையால் சமீகரணமூலத்தோடிணைந்த (ஷ) ஆலரிக்கச் சமீகரணங்கள் ஒவ்வோருபடியிறங்குமேன்றறிக.

௯௱௮. பிர. அதிவர்க்க சமீகரணங்களுக்கு அர்த்தநிச்சயம்பண்ணும்படி கணிதர்கள் பற்பலவிதிகளைக் கூறியிருக்கிருர்கள். அவற்றுட் சிலவிதிகள் எல்லாச் சமீகரணங்களுக்கும் பொருந்தாதனவாயும் வேறநேகம் மிகமலைவை விளைவிக்கின்றனவாயுமிருக்கும். ஆளுல் மூலங்கள் அடசரமாத்திரமாய்வராமல் எண்மாத்திரமாய் நின்றுபுணர்ந்த சமீகரணங்கள்வரில் அவற்றின் அர்த்தங்களை (௯௱௫) ம் பிரகரணத்திற்காட்டிய வர்ண இலக்கணப்படி ஒருவாறுநிச்சயிக்கலாம். எப்படியென்ருல்,

அர்த்தங்களின் சின்னங்களை மாற்றி ஒன்ருய்ப்பெருக்கிய பேறு சமீகரணத்தின் கடையுறுப்பாகவும் ஒன்ருய்க்கூட்டிய தொகை இரண்டாமுறுப்பின் வர்ணமாகவும் வருகின்றபடியால், அவ்வர்த்தங்களின்னின்னவென்று ஒரளவுக்கு உத்தேசம் பண்ணியறிலாம். இப்படி உத்தேசமாத்திரமாயறிந்த அர்த்தங்களைச் சமீகரணத்திற் பிரதிகரித்துச் சோதனைபண்ணிப் பிசகுபட்டால் வேறுஅர்த்தங்களைப் பிரதிகரித்து இவ்வகையே சோதித்துச் சோதித்துச் சரியான அர்த்தத்தை நிச்சயித்துக் கோள்வது. உத்தேசித்த இரண்டுஅர்த்தங்களைக்கொண்டு சோதனைபண்ணி அவ்வர்த்தங்களாலுண்டான பிழைகளை அறிந்துகொண்டால் அவ்வர்த்தங்களை விரைவாய்ச் சுத்தம்பண்ணும்படி,

விதி.

உத்தேசித்த அர்த்தங்களின் அந்தரத்தைச் சிறியபிழையாற் பெருக்கிப் பிழைகளின் அந்தரத்துக்கீந்து வந்த ஈவைக்கொண்டு சிறியபிழையைப் பிறப்பித்த அர்த்தத்தைச் சுத்தம்பண்ணு.

இவ்விதிப்படி ஒருமுறை சுத்தம்பண்ணிவருகின்ற அர்த்தம் பிசகுபட்டால் சுத்தம்பண்ணப்பட்ட அர்த்தத்தை மேலும்மேலும் விதிப்பிரகாரமே சுத்தம்பண்ணிச் சரியான அர்த்தத்தை அறியலாம். உ-ம்.

ஷ^{ங} —அஷ^{உ} +கஎஷ—க௦=௦ என்ற கனசமீகரணத்தில் (ஷ) இன் அர்த்தங்களை நிச்சயிக்கும்படி,

சமீகரண உறுப்புகள் முறைமுறையே தனமுமிருணமுமாயிருப்பதால் (௱௫) ம் பிரகரணப்படி மூலங்களாகிய அர்த்தங்கள் தனராசியென அறியலாம். அவற்றின்குணிதம்=க௦. தொகை=அ, ஆகையால், அர்த்தம், ௫.க, என்றும், ௫. உ, என்றும் உத்தேசிக்கலாம். இனி உத்தேசித்த அர்த்தத்தைச் சமீகரணத்திற் பிரதிகரித்தால், முதல் உத்தேசப்படி,

(௫.க)^{ங} —அ (௫.க)^{உ}+ கஎ (௫.க) —க௦=க.உஎக என்றும், இரண்டாமுத்தேசப்படி,

(௫.உ)^{ங} —அ (௫.உ)^{உ} +கஎ (௫.உ)—க௦=உ.௬அஅ என்றும்வரும். ஆகையால்,

க.உஎக
உ.௬அஅ } என்பனபிழைகளாம்.

க. சகஎ. இது பிழைகளின் அந்தரம்.
மேலே நிறுத்திய விதிப்படி

௦.க, என்ற அர்த்தங்களின் அந்தரத்தை
க.உஎ, என்ற சிறியபிழையாற் பெருக்கி
க.ச, என்ற பிழைகளின் அந்தரத்துக்கீய
௦.௦௬, என்ற சுத்தம்பிறக்கும், இதை
௫.க, என்ற அர்த்தத்திற்களைய
௫.௦௪, என்ற புதிய அர்த்தம்பிறக்கும்.

இன்னும் இந்தப் புது அர்த்தத்தைச் சுத்தம்பண்ணும்படி,
ஷ = ௫.௦௪ அல்லது ஷ = ௫.௦உ என்று உத்தேசித்து முன்புபோலப் பிரதிகரிக்க,

௦.௪உக
௦.உ௪௬ } என்ற புதப்பிழைகள் பிறக்கும். ஆகையால்,

௦.௧உ௫, பிழைகளின் அந்தரமாம்.
இனிவிதிப்பிரகாரமே,
௦.௦௪, என்ற புதிய அர்த்தங்களின் அந்தரத்தை,
௦.௧உக, என்ற சிறிய பிழையாற்பெருக்கி,
௦.௧உ௫, என்ற பிழைகளின் அந்தரத்துக்கீய,

௦.௦௪, என்ற சுத்தம்பிறக்கும். இந்தச் சுத்தத்தைக்கொண்டு (௫.௦௪) என்ற அர்த்தத்தைச் சுத்தம்பண்ண,
ஷ = ௫, என்றுவரும். இது சோதனைக்குச்சரி. எப்படியென்றால்,
௫^{ங} —அ×௫^{உ} ×கஎ×௫×க௦=௦.

கனசமீகரணத்துக்குரிய மூன்று அர்த்தங்களில் ஒரே அர்த்தத்தைமாத்திரம் நிச்சயித்தோமன்றி மற்றிரண்டு அர்த்தங்க

ளையும் இன்னும் நிச்சயிக்கவில்லை. அவற்றை அறியும்படி கனசமீகரணத்தை (ஷ—௫) என்பதாலரிக்க,
ஷ—௫) ஷ^{ங} —அஷ^{உ} +கஎஷ—க௦ (ஷ^{உ} —௩ஷ+உ =௦ என்றவர்க்கசமீகரணம் (௱௭)ம் பிரகரணப்படி பிறக்கும். இதனை வர்க்கசமீகரணவிதிப்படி சாதிகரித்து விடையறிய,

ஷ= $\frac{௩}{உ}$ ± $\frac{க}{உ}$ = உ, அல்லது=க, என்றுவரும். ஆகையால், ௫, உ, க என்ற மூன்று எண்களுமே கனசமீகரணத்தின் மூன்று அர்த்தங்களுமாம். இவற்றின் சின்னங்களை மாற்றிக்கூட்டினால் இரண்டாம் உறுப்பின் வர்ணமாகிய,—அ, என்ற எண்ணும் பெருக்கினால் கடையுறுப்பாகிய (—ச௦) என்ற எண்ணும் வந்தவாறு காண்க.

வினா.

க. ஷ^{ங} —க௬ஷ^{உ} +௬௫ஷ—௫௦=௦ என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

விடை. க, ௫, க௦.

உ. ஷ^{ங} —அஷ^{உ} +சஷ+௪அ=௦ என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

விடை. —உ, ச, ௬.

௩. ஷ^{ங} +உஷ^{உ} —௩௩ஷ =௬௦ என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

விடை. ௬,—௫,—௩.

ச. ஷ^{ங} +௬ஷ^{உ} +சஷ=அ௦ என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

௫. ஷ^{ங} +ஷ^{உ} +ஷ=க௦௦ என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

௱௭௬. பிர. எண்மாத்திரமாய் மூலங்கள் புணர்ந்துவருகின்ற சமீகரணங்களின் அர்த்தத்தை உத்தேசித்தறியும்படி நியூற்றனாசிரியர் தந்த வேறுமோரு விதமுண்டு. அது பிரதிகரணத்தினால் இயற்றப்படுகின்றது. அதின் விபரம் எப்படியென்றால்,
உத்தேசித்துக்கொண்ட அர்த்தம் (ஈ) என்றும் (ஈ) க்குஞ் சமீகரணத்தின்சரியான அர்த்தத்திற்குமுள்ள அந்தரம் (ண) என்றும் வைத்துக்கொண்டு,
(ஷ) இன் இடத்தே அதின்பிரதியாகிய (ஈ ± ண) என்பதைச் சமீகரணத்திற் பிரதிகரித்து (ண) வினது காதிதங்களோடு புணர்ந்துவருகின்ற உறுப்புகளைத்தள்ள ஒரு வெள்ளைச்சமீகரணம் பிறக்கும். இந்த வெள்ளைச்சமீகரணத்தைச் சாதிகரித்து (ண) வினது அர்த்தத்தை நிச்சயித்தபின், சரியான அர்த்தத்தில் (ஈ) ஏறிக்குறைந்திருக்கின்றபடி அதில் (ண) வின் அர்த்தத்தைக்களைதல் கூட்டுதல்செய்ய உத்தேசித்த அர்த்தமாகிய (ஈ) சுத்தமாக்கப்படும்.

இனிச்சுத்தம்பண்ணப்பட்ட அர்த்தத்தை (ஈ) ஆகப்பாவித்துப் பிரதிகரித்துப் பிரதிகரித்துச் சமீகரணத்தின் சரியான அர்த்தத்தை அறியலாம். உ-ம்.

௧. $ஷ^{௩}$—௧௬$ஷ^{௨}$+௬௫ஷ=௫0, என்ற சமீகரணத்தின் அர்த்தத்திலொன்றை நிச்சயிக்கும்படி,

ஷ=ஈ—ண, என்று உத்தேசித்தால், பிரதிகரணத்தினல்

$ஷ^{௩}$=$ஈ^{௩}$—௩$ஈ^{௨}$ண+௩ஈ$ண^{௨}$—$ண^{௩}$
—௧௬$ஷ^{௨}$=—௧௬$ஈ^{௨}$+௩௨ஈண—௧௬$ண^{௨}$
+௬௫ஷ=௬௫ஈ—௬௫ண
} =௫0 என்றும்,

$ண^{௨}$—$ண^{௩}$, என்ற காதிதங்களோடு புணர்ந்து நிற்கின்ற உறுப்புகளைத்தள்ள,

$ஈ^{௩}$—௧௬$ஈ^{௨}$+௬௫ஈ—௩$ஈ^{௨}$ண+௩௨ஈண—௬௫ண=௫0 என்றுஞ், சாதிகரிக்க,

ண= (௫0—$ஈ^{௩}$+௧௬$ஈ^{௨}$—௬௫ஈ) / (—௩$ஈ^{௨}$+௩௨ஈ—௬௫) என்றும்வரும். இதில் ஈ=௧௧, என்று உத்தேசித்துக்கொண்டால், அதைப் பிரதிகரிக்க

ண= ௬0 / ௭௬ =0. ௮. ஆகையால்

ஷ=ஈ—ண=௧௧—0.௮=௧0.௨. என்று வரும். இப்படிச் சுத்தம்பண்ணப்பட்ட (௧0.௨) என்பதை (ஈ) ஆகப்பாவித்து முன்போலப்பிரதிகரிக்க, ண=.௧௮௮ என்றும்,

ஷ=ஈ—ண=௧0.௨—0.௧௮௮=௧0.0௧௨, என்றும் வரும். மூன்ருந்தரமும் ஈ=௧0.0௧௨, என்றுபாவித்துப் பிரதிகரிக்க, ண=.0௧௨, என்றும், ஷ=௧0 என்றும் வரும்.

௨. $ஷ^{௩}$+௪0$ஷ^{௨}$+௫ஷ=௨௬00 என்ற சமீகரணத்துக்கு அர்த்தம் யாது?

விடை. ௧௧.00௬௭.

௩. $ஷ^{௩}$+௨$ஷ^{௨}$—௧௧ஷ=௧௨, என்றசமீகரணத்துக்கு அர்த்தங்கள் யாவை ?

௪. $ஷ^{௪}$+௪$ஷ^{௩}$—௭$ஷ^{௨}$—௩௪ஷ=௨௪, என்ற சமீகரணத்தினது அர்த்தங்கள் யாவை?

௨௰. எண் அதிகாரம்.

[Properties of Numbers.]

௩௱௰. பிர. முந்தின அதிகாரங்களுள் அமையாத சில சிறப்பிலக்கணங்களை எண்களுக்குச் சொல்லுவாம். சகல எண்களும் ஒன்றின் விகாரமென (௧) ம் பிரகரணத்திற் காட்டினேம்.

எப்படியென்ருல்,

௧, ௧, ௧, ௧, ௧, ௧, ௧, ௧, ௧, (இ-தி) என்ற மாலிகையை முறைமுறையே கூட்ட,

௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭, ௮, ௯, (இ-தி) என்று எல்லா எண்களும் பிறக்கும். இந்தமாலிகைக்கு நற்சங்கலிதமாலிகையென்றுபெயர்.

௩௱௰௧. பிர. நற்சங்கலிதமாலிகையை முறைமுறையே கூட்டச் சங்கலித சங்கலிதமாலிகை; அதாவது திரிசங்கலிதமாலிகை பிறக்கும். பிறமாலிகைகளும் இவ்வாறே தோன்றும். உ-ம்.

௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, (இ-தி) நற்சங்கலிதமாலிகை.

௧, ௩, ௬, ௧0, ௧௫, ௨௧, (இ-தி) சங்கலித சங்கலிதமாலிகை; அதாவது திரிசங்கலிதமாலிகை.

௧, ௪, ௯, ௧௬, ௨௫, ௩௬, (இ-தி) வர்க்கசங்கலிதமாலிகை; அதாவது சதுரசங்கலிதமாலிகை.

௧, ௫, ௧௨, ௨௨, ௩௫, ௫௧, (இ-தி) பஞ்சசங்கலிதமாலிகை இம்மாலிகைகளுக்குச் சங்கலிதமறிகின்றமுறையை (௨௱௯௬)ம் பிரகரணத்திற் காண்க.

நற்சங்கலிதமாலிகை.

௩௱௰௨. பிர. சகல எண்களுக்கும் (௧) மூல அளவாயிருத்தல்போல (௧0) நற்சங்கலிதமாலிகைக்கு மூல அளவாயிருக்கின்றது. இம்மாலிகையுறுப்புகள் பத்துப்பத்தாய் முடிந்து முடிந்து விரிவதாலே அதைக்காணலாம். ஆகையால், வரிவடிவிற் சகல எண்களையும் விளக்குகின்ற இலக்கங்கள் ஆக (௧0)* அவையாவன,

0, ௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭, ௮, ௯.

௩௱௰௩. பிர. நற்சங்கலிதமாலிகைக்கு (௧0) ஐ விட வேறெண்களை மூலஅளவாகக்கோள்ளல் கூடாதோ என்ருல், அதுவுங் கூடும்.

---

* (௰) என்ற குறி பத்துக்கும், (௱) என்ற குறி நூற்றுக்கும், (௲) என்ற குறி ஆயிரத்துக்கும் வழங்குவதுமுண்டு. இக்குறிகளும் மேலே நிறுத்திய மற்ற இலக்கங்களுந் தத்தம் பெயர்களின் முதலட்சரம்போலே, உ-ம்.

௨.—உபயம, என்பதின் முதலட்சரம்.
௩.—திரி, என்ற வடமொழி முதலட்சரம்.
௪.—சதுர், என்பதன் முதலட்சரம் மருவியது.
௬.—ஷஷ, என்ற வடமொழி முதலட்சரம் மருவியது.
௭.—எழு, என்பதன் முதலடசரம்.
௮.—அட்டம், என்பதன் முதலட்சரம்.
௯.—நவம் என்ற வடமொழி முதலட்சரம் மருவியது.
௰.—தசம் என்ற வடமொழி முதலடசரம்.
௱.—சதம், என்ற வடமொழி மருவியது.
௲.—சகத்திரம், என்ற வடமொழி மருவியது.
(௧, ௫, என்ற குறிகளும் இவ்வாறு பிறக்கல்கூடும்.)

(உ) ஐ மூலஅளவாய்க்கொண்டால், 0, க, இலக்கங்களாம்.
(௩) ஐ மூலஅளவாய்க்கொண்டால், 0, க, உ, இலக்கங்களாம்.
(ச) ஐ மூலஅளவாய்க்கொண்டால், 0, க, உ, ௩, இலக்கங்களாம்.

(ரு) ஐ மூலஅளவாய்க்கொண்டால், 0, க, உ, ௩, ச, இலக்கங்களாம். பிறவுமன்ன.

ஆனல், (க0) ஐ முன்னையோர் மூல அளவாக நிறுத்தியபடியாலும் அம்முறை கணிதகிர்த்தியங்களில் மிகப்பயனுடையதாகையாலும் அதனையே யாமுந் தலமேற்கொள்ளல் கடனும்.* இனி (க0) ஐ மூலஅளவாகப் பொருந்தின எந்த எண்களுக்கும் வீசபாஷையாவது.

ஆ+க0ஈ+க0^{உ}ஔ+க0^{௩}ங (இ-தி)

எந்த இராசியையாவது மூலஅளவாகப் பொருந்தின எண்ணுக்குச் சாதாரண வீசபாஷை யாவது;

ஆ+மூஈ+மூ^{உ}ஔ+மூ^{௩}ங (இ-தி) இதில் (ஆ) = முதலாந்தானவெண். ஈ = இரண்டாந்தானவெண். ஔ = மூன்ருந்தானவெண். ங = நாலாந்தானவெண். பிறவுமன்ன. மூ = மூலஅளவு. உ-ம்.

அருஎச = ச+க0×எ+க0^{உ}×ரு+க0^{௩}×அ.

௩௱௰ச. பிர. (க0) ஐ மூலஅளவாகப் பொருந்திய ஒரெண்ணை வேறிராசியை மூலஅளவாகப் பொருந்தின மற்றேரெண்ணுக மாற்றும்படி,

விதி.

விரும்பிய மூலஅளவைக்கொண்டு சொல்லப்பட்ட எண்ணை முறைமுறையே அரித்துச் சேடங்களைத் தானம்வழுவாமற்றீட்டு. உ-ம்.

(க0) ஐ மூலஅளவாகப்பொருந்திய (௩உ0) ஐ (ரு) ஐ மூலஅளவாகவுடைய மற்றேரெண்ணுக மாற்றும்படி,

ரு) ௩உ0
ரு) ௬ச—0
ரு) கஉ—ச
ரு) உ—உ
ரு) 0—உ
சேடங்கள். } ஆகையால், உஉச0, விடையாம்.

உ. (உ) மூலஅளவென்ருல் (க000) எப்படி மாறிநிற்கும்?
விடை கககககக0க000

* கேத்திரகணிதத்தில் மகாநிபுணராயிருந்த கிரேக்கர் பாடி, வீசகணிதங்களில் பாதங்கண்டத்தவர்களாகிய எம்முன்னேர்க்குக் குறைவுபடவந்த முக்கியகாரணம் (க0) ஐ மூலஅளவாயக்கொண்ட வரிவடிவெண்களினது அறியாமைபோலே.

(௩) மூலஅளவென்ருல் (க000) எப்படி மாறிநிற்கும்?
விடை கக0க00க.
(௬) மூலஅளவென்ருல் (க000) எப்படி மாறிநிற்கும்?
விடை ச௩சச.

௩௱௰ரு. பிர. (க0) ஐ மூலஅளவாகவுடைய ஒரெண்ணை (கூ) ஆலரிக்குமிடத்து எந்தச்சேடம் வருகின்றதோ அந்தச்சேடமே அவ்வெண்ணினது தானங்களின் தொகையை அரித்தாலும் வரும். உ-ம்.

(அருஎஉ) ஐ (கூ) ஆலரித்தாற் சேடம் (ச). அப்படியே தானங்களின் தொகையாகிய (அ+ரு+எ+உ=உஉ) என்பதை (கூ) ஆலரித்தாலுஞ் சேடம் (ச) ஆம்.

(௩) க்கும் இவ்விலக்கணம் பொருந்துமென்றறிக.

(க0) ஐ மூலஅளவாகப்பொருந்தின எந்த எண்ணுக்கும்,

ஆ+க0ஈ+க0^{உ}ஔ+க0^{௩}ங, (இ—தி) வீசபாஷையாகையால், இது கூஈ+கூகூஔ+கூகூகூங. (இ—தி) +ஆ+ஈ+ஔ+ங, (இ—தி) என்று பிரிபடும். பிரிபடவே, இதனை (கூ) ஆல் அரித்தசேடம்.

ஆ+ஈ+ஔ+ங (இ—தி) என்பதை, (கூ) ஆல் அரித்துப்பெற்றசேடத்துக்குச் சமமாமென்பது வெளிப்படை. ஆகையால்,

மூலஅளவில் (க) ஐத்தள்ளி அம்மூல அளவைப் பொருந்தின எந்த எண்ணைப் பிரிப்பதும் அதன் தானங்களின் தொகையைப் பிரிப்பதும் ஒரே சேடத்தைப்பிறப்பிக்குமென்றநுமதித்துக்கொள்க.

மேலும் குணனபாககர கிர்த்தியங்களை (கூ) ஐக்கொண்டு சோதனைசெய்வதற்கும் இது நியாயமாகின்றது. எப்படியென்ருல், ஷ, ஸ, என்ற எண்களில்,

குணனீயம்=ஷ=கூற+ன என்றும்,
குணகம்=ஸ=கூல+ம. என்றும் வைத்துப்பெருக்க,
குணிதம். அகலற+கூலன+கூமற+மன என்றும்வரும்.

இனிக் குணனீயத்தை (கூ)ஆலரிக்க (ன) வும், குணகத்தை (கூ) ஆலரிக்க (ம) வுஞ் சேடமாம். குணிதத்தை (கூ) ஆலரித்தால் (மன) சேடமாம். இது முந்தின இரண்டுசேடங்களின் குணிதத்துக்குச் சமம்.

௩௱௰௬. பிர. எப்படிப்பட்ட எண்ணிலாவது அதன் தானங்களின் தொகையைத் தள்ளி (க) குறைந்த மூலஅளவால் அரித்தாற் சேடம்வராது.

எப்படியென்ருல், மூலஅளவு=மூ, என்றும், எண்=ஆ+மூஈ+மூ^{உ}ஔ+மூ^{௩}ங (இ—தி) என்றுங்கொண்டால், தானங்களின் தொகையாகிய அ+ஈ+ஔ+ங (இ—தி) என்பதைச்

ந்த சேடம்=ஈ (மூ—௧)+ஒ (மூ^{௨}—௧)+ந (மூ^{௩}—௧)+ (இ—தி). இது (மூ—௧) என்பதாற் சேடமில்லாமல் அரிபடுமென்பது வெளிப்படை. உ—ம்.

(௧௦) ஐ மூலஅளவாகப் பொருந்தின (௯௪௩௨) என்ற எண்ணில் தானங்களின் தொகையாகிய (௯+௪+௩+௨=௧௫) ஐக் கவளந்தாற் சேடம் (௯) ஆல் மிச்சமில்லாமல் அரிபடும்.

வினா.

௧. எந்த மூலஅளவையுடைய (௩௨) (௧௦) என்ற மூலஅளவையுடைய (௧௪) க்குச்சமம். இதற்கு விடையறியும்படி, அறியவேண்டிய மூலஅளவு=ஷ, என்றால், ௩௨=௩ஷ+௨=௧௪, என்றும், ஷ=௪, என்றும் வரும்.

௨. (௨௩௧௦) என்ற எண் தனது மூலஅளவின் (௪௫) மடங்கென்றால் அம்மூலஅளவுயாது? மூலஅளவு=ஷ, என்றால்,

௨௩௧௦=௨ஷ^{௩}+௩ஷ^{௨}+ஷ+௦=௪௫ஷ, என்றும், ஆகையால், ௨ஷ^{௨}+௩ஷ=௪௪, என்றும்,

ஷ=௪, என்றும் வரும்.

௩. ஒருசாஸ்திரியை வழியிலே கண்ட கோமட்டி அவனை நோக்கி, அகோ! சாஸ்திரியாரே, எனக்கு எத்தனை ஆண்பிள்ளைகள்? எத்தனை பெண்பிள்ளைகள்? எத்தனை இறந்த பிள்ளைகள் என்று சொல்லும் என்னச் சாஸ்திரி கோமட்டிக்குப் பிரதியுத்தரங் கூறுகின்றான். கோமட்டியே, உனது ஆண்பிள்ளைகளோடு உன்னையும் உன்மனைவியையுங் கூட்டித் தொகையை இரட்டித்து (௧) ஐக்கூட்டி (௫) ஆற்பெருக்கிப் பின்புபெண்பிள்ளைகளையுங்கூட்டிப் பத்திற்றாக்கிச் செத்தபிள்ளைகளையுங்கூட்டிப் பெற்ற தொகையைச் சொல்வாயாக என்றான். அத்தொகை (௭௭௧) என்று கோமட்டி சொன்னான். சொல்லவே, உனக்கு ஆண்பிள்ளைகள் (௫) பெண்பிள்ளைகள் (௨) செத்தபிள்ளை (௧) என்று சாஸ்திரி உத்தரங் கொடுத்தான். சாஸ்திரியறிந்த வகையாது?

அறிந்த வகையாவது, (௭௭௧) இல் (௨௫௦) ஐக்கழிய வருவது (௫௨௧) இதில் நூற்றுந்தானத்தில் நிற்கின்ற (௫) ஆண்பிள்ளையென்றும், பத்தாந்தானத்தினிற்கின்ற (௨) பெண்பிள்ளையென்றும், முதலாந்தானத்தினிற்கின்ற (௧) செத்தபிள்ளையென்றுஞ் சொல்லுவது. எப்படியென்றால்,

ஆண்பிள்ளை=ஷ என்றும்,
பெண்பிள்ளை=ஸ என்றும்,
செத்தபிள்ளை=ன என்றும் வைத்துக்கொண்டால்,

{(ஷ+௨×௨+௧)௫×ஸ}×௧௦+ன=௭௭௧. அதாவது, ௧௦௦ஷ+௨௫௦+௧௦ஸ+ன=௭௭௧. நிலைமாற்றால், ௧௦௦ஷ+௧௦ஸ+ன=௫௨௧, இதில் (ஷ) நூற்றுந்தானத்தெண்ணென்

றும், (ஸ) பத்தாந்தானத்தெண்ணென்றும், (ன) முதலாந்தானத்தெண்ணென்றுங் காண்க.

௩௱௰௭. பிர. ஒரெண்ணைச் சேடமில்லாமலரிக்கத்தக்க பாககங்களின் தொகையறிய.

௧. ஆ^{ம} ஈ^{ந} ஒ^{ர} ங (இ—தி) என்பது எந்த எண்ணுக்கும் பொதுவான வீசபாஷை. இதில் ஆ, ஈ, ஒ, ங, முதலியன பகாநிலையெண்கள். உ-ம்.

௩௬௦=௨^{௩}.௩^{௨}.௫. இவ்விடத்து ௨; ௩; ௫, என்ற எண்கள் பகாநிலையெண்கள். ௩, ௨, காதித சூசிகள். இனி,

ஆ^{ம} ஈ^{ந} ஒ^{ர} ங^{ல} (இ-தி) என்ற எண்ணைச் சேடமில்லாமலரிக்கத்தக்க எண்கள் எத்தனையென்றறிய வீசசூத்திரம்—

(ம+௧) (ந+௧) (ர+௧) (ல+௧) (இ—தி) உ—ம்.

௧௦௦௦, என்ற எண்ணைச் சேடமில்லாமலரிக்கத்தக்க எண்களெத்தனை?

இதற்கு விடையறியும்படி, ௧௦௦௦=௨^{௩}.௫^{௩}. இதில் ம=௩ ந=௩. ஆகையால் (௩+௧) (௩+௧)=௧௬. சேடமில்லாமலரிக்கின்ற எண்களாவன. ௧, ௨, ௪, ௫, ௮, ௧௦, ௨௦, ௨௫, ௪௦, ௫௦, ௧௦௦, ௧௨௫, ௨௦௦, ௨௫௦, ௫௦௦, ௧௦௦௦, ஆகப்பதினறு; இதில், ௧, ௧௦௦௦, என்பனவும் பாகக எண்களாய் வருதல் காண்க.

௩௱௰௮. பிர. சேடமில்லாமல் அரிக்கின்றபாககங்களின்தொகையைக்கொண்டு அப்பாககங்களாற்சேடமில்லாமலரிபடும் பாச்சியம் யாதென்றறியும்படி,

சொல்லப்பட்ட பாககத்தொகை=த, என்று வைத்துக்கொண்டால் மேலே காட்டியபடி (ம+௧) (ந+௧)(இ-தி) ஆம். இதனை, ஷ, ஸ, ன, முதலிய குணங்கங்களாக்கினால்,

ஷ=ம+௧, ஸ=ந+௧ (இ-தி) என்றுவரும்.

ஆகையால், ம=ஷ—௧. ந=ஸ—௧. (இ—தி) என்றும். இவற்றை,

ஆ^{ம} ஈ^{ந} ஒ^{ர} (இ-தி) என்ற ரூபத்திலே பிரதிகரித்து விடையறியலாம்.

உ-ம். சேடமில்லாமல் (௩௦) எண்களாலரிபடுகிற எண் யாது?

இதற்கு விடையறியும்படி ௩௦=௨×௩×௫, இதில் ஷ=௨. ஸ=௩, ன=௫: ஆகையால் ம=௧, ந=௨, ர=௪, எனவே, ஆ.ஈ^{௨}.ஒ^{௪}, என்பதே யாமறிய வேண்டிய எண். இதில் ஆ, ஈ, ஒ, என்ற பகாநிலையெண்களுக்கு இஷடராசிகளைப் பிரதிகரிக்கலாம். உ-ம்.

ஆ=௨, ஈ=௩, ஒ=௫, என்று வைத்துக்கொண்டால், ௨. ௩^{௨}.௫^{௪} = ௧௧௨௫௦, விடையாம். ஆ=௫. ஈ=௩,

$ஒ=௨$ என்றுகொண்டால், $௫.௩^{௨}.௨^{௪}=௭௨௦$. விடையாம். பிறவுமிப்படியே.

௩௱௰௯. பிர. சொல்லப்பட்ட ஒரேண்ணுக்குக் கீழ்ப்பட்ட பகாநிலைஅபின்னங்கள் எத்தனையென்றறியும்படி,

வீசசூத்திரம.

$$ழ \times \frac{ஆ—௧}{ஆ} \times \frac{ஈ—௧}{ஈ} \times \frac{ஒ—௧}{ஒ}$$ (இ-தி) இதில் (ழ) சொல்லப்பட்ட எண். உ-ம்.

(௧௦௦) க்குக்கீழ்ப்பட்ட பகாநிலை அபின்னங்களெத்தனை? இதில் $(௧௦௦)=௨^{௨}\times ௫^{௨}$ ஆகையால்,

$$௧௦௦ \times \frac{௨—௧}{௨} \times \frac{௫—௧}{௫} = ௪௦.$$ விடை.

அவ்வெண்களாவன,

௧	௧௩	௨௭	௩௯	௫௧	௬௩	௭௭	௮௯
௩	௧௭	௨௯	௪௧	௫௩	௬௭	௭௯	௯௧
௭	௧௯	௩௧	௪௩	௫௭	௬௯	௮௧	௯௩
௯	௨௧	௩௩	௪௭	௫௯	௭௧	௮௩	௯௭
௧௧	௨௩	௩௭	௪௯	௬௧	௭௩	௮௭	௯௯

வினு. (௩௬௦) க்குக் கீழ்ப்பட்ட பகாநிலையெண்கள் எத்தனை?

விடை. ௯௬.

௩௱௨௰. பிர. ஒன்றற்கொன்று பகாநிலையான இரண்டேண்களின் வர்க்கத்தொகையைச் சேடமில்லாமற்பிரிக்கின்ற எந்த எண்ணும் அவ்வாறே இரண்டேண்ணின் வர்க்கத்தொகையாம். உ--ம்.

$௬௫=௮^{௨}+௧^{௨}$: ஆகையால் அதனைச் சேடமில்லாமற் பிரிக்கின்ற (௧௩), (௫), என்ற எண்களும் அவ்வகையே ஈரேண்களின் வர்க்கத்தொகையாம். எப்படியென்றால், $௧௩=௩^{௨}+௨^{௨}$. $௫=௨^{௨}+௧^{௨}$. மேலும், $௫௦=௭^{௨}+௧^{௨}$. இதனைச்சேடமில்லாமற் பிரிக்கின்ற $௨=௧^{௨}+௧^{௨}$. $௫=௨^{௨}+௧^{௨}$. $௧௦=௩^{௨}+௧^{௨}$. $௨௫=௪^{௨}+௩^{௨}$.

௩௱௨௧. பிர. ஒன்றற்கொன்று பகாநிலையான இரண்டேண்களில் ஒன்றின் வர்க்கத்தையும் மற்றதின் வர்க்கத்திரட்டியையுங் கூட்டிவந்த தொகையைச் சேடமில்லாமற்பிரிக்கின்ற எந்தஎண்ணும் அவ்வாறே வர்க்கமும் வர்க்கத்திரட்டியுங் கூடிய எண்ணும். உ--ம்.

$௯௯=௧^{௨}+௨\times ௭^{௨}$. இதனைச் சேடமில்லாமற் பிரிக்கின்ற சகல எண்ணும் இவ்விலக்கணத்தையுடையன. எப்படியென்றால்,

$௩=௧^{௨}+௨.௧^{௨}$
$௯=௧^{௨}+௨.௨^{௪}$
$௧௧=௩^{௨}+௨.௧^{௨}$
$௩௩=௫^{௨}+௨.௨^{௨}$
} பிறவுமிவ்வாறே காண்க.

௩௱௨௨. பிர. ஒன்றற்கொன்று பகாநிலையான இரண்டேண்களில் ஒன்றின் வர்க்கத்தில் மற்றதின்வர்க்கத்திரட்டியைக் களைந்த சேடத்தை மிச்சமில்லாமற் பிரிக்கின்ற எந்த எண்ணும் அவ்வாறே வர்க்கத்தில் வர்க்கத்திரட்டி களையப்பெற்ற சேடமாம். உ-ம்

$௯௮=௧௦^{௨}—௨.௧^{௨}$. இதனைச் சேடமில்லாமற்பிரிக்கின்ற சகல எண்களும் இவ்வாறே. எப்படியென்றால்,

$௨=௨^{௨}—௨.௧^{௨}$
$௭=௩^{௨}—௨.௧^{௨}$
$௧௪=௪^{௨}—௨.௧^{௨}$
$௪௯=௯^{௨}—௨.௪^{௨}$

௩௱௨௩. பிர. இரண்டு வர்க்கங்களின் தொகையை இரண்டுவர்க்கங்களின் தொகையாற் பெருக்கினால், பேறும் இரண்டுவர்க்கங்களின் தொகையாம். உ-ம்.

$௨^{௨}+௧^{௨}=௫.$
$௩^{௨}+௨^{௨}=௧௩.$

$௬௫=௮^{௨}+௧^{௨}$ அல்லது
$௭^{௨}+௪^{௨}$

௩௱௨௪. பிர. இரண்டேண்களின் தொகையையும் அந்தரத்தையும் பெருக்கினால் பேறு அவ்வெண்களின் வர்க்காந்தரமாம். உ--ம்.

$(ஷ+ஸ)\ (ஷ—ஸ)=ஷ^{௨}—ஸ^{௨}.$

௩௱௨௫. பிர. இரணடு வர்க்கத்தொகையை வர்க்க இரட்டியாற் பெருக்கினால், பேறு இரண்டுவர்க்கத் தொகையாம். உ--ம்.

$(ஷ^{௨}+ஸ^{௨})\times ௨ண^{௨}=(ஷ+ஸ)^{௨}\times ண^{௨}+(ஷ—ஸ)^{௨}\times ண^{௨}.$

௩௱௨௬. பிர. மூன்றுவர்க்கங்களின் தொகையை

இரண்டு வர்க்கங்களாற் பெருக்கினுல் பேறு நான்கு வர்க்கங்களின் தோகையாம். உ--ம்.

$௧௪ = ௩^{௨} + ௨^{௨} + ௧^{௨}.$
$௫ = ௨^{௨} + ௧^{௨}.$
$௭0 = ௮^{௨} + ௧^{௨} + ௨^{௨} + ௧^{௨}.$

௩௱௨௭. பிர. நான்கு வர்க்கங்களின் தோகையை இரண்டுவர்க்கங்களின் தோகையாற் பெருக்கினுல், பேறு நான்குவர்க்கங்களின் தோகையாம். உ--ம்.

$௩0 = ௪^{௨} + ௩^{௨} + ௨^{௨} + ௧^{௨},$
$௫ = ௨^{௨} + ௧^{௨}.$
$௧௫0 = ௧௧^{௨} + ௪^{௨} + ௩^{௨} + ௧^{௨}.$

௩௱௨௮. பிர. நான்குவர்க்கங்களின் தோகையைநான்குவர்க்கங்களின் தோகையாற் பெருக்கினுல், பேறும் நான்குவர்க்கங்களின் தோகையாம். உ--ம்.

$௩0 = ௪^{௨} + ௩^{௨} + ௨^{௨} + ௧^{௨}.$
$௧0 = ௨^{௨} + ௨^{௨} + ௧^{௨} + ௧^{௨}.$
$௩00 = ௧௫^{௨} + ௭^{௨} + ௫^{௨} + ௧^{௨}.$

௩௱௨௯. பிர. வர்க்கங்கள் (௫) ஆலும், கனங்கள் (௭) ஆலும், ஐந்தாங் காதிதங்கள் (௧௧) ஆலும், ஆருங்காதிதங்கள் (௧௩) ஆலும், எட்டாங் காதிதங்கள் (௧௭) ஆலும், ஒன்பதாங் காதிதங்கள் (௧௯) ஆலும், பதினேராங் காதிதங்கள் (௨௩) ஆலும் சேடமில்லாமலரிபடும்; அரிபடாதவிடத்து (௧) ஐக்கூட்டினுல் அல்லது கழிந்தால் அப்படியே சேடமில்லாமல் அரிபடும்.

௩௱௩௰. பிர. ஒவ்வொரு அபின்னமுஞ் சங்கலித சங்கலிதமாலிகையில், ௧, ௨, அல்லது, ௩, உறுப்புகளின் தோகையாம். வர்க்கசங்கலிதமாலிகையில், ௧, ௨, ௩, அல்லது, ௪, உறுப்புகளின் தோகையாம். பஞ்சசங்கலிதமாலிகையில், ௧, ௨, ௩, ௪, அல்லது ௫, உறுப்புகளின் தோகையாம். இவ்வாறே சட்சங்கலிதமாலிகைமுதலியவற்றுக்குமாம்.

புறனடை.

சதுர அறைகளில் இலக்கம் அடைக்கின்ற வகை.

௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭, ௮, ௯, என்ற இவ்வொன்பது நற் சங்கலித இலக்கங்களைச் சதுரஅறைகளில் அடைத்தால் அவை நிற்குமாறு.

சுபாவநிலை.

௧	௨	௩
௪	௫	௬
௭	௮	௯

மாயநிலை.

௪	௯	௨
௩	௫	௭
௮	௧	௬

இவ்விரண்டு சதுரங்களிலும் அறைகள் ஒன்பது ஒன்பது. முதற் சதுர அறைகளில் இலக்கங்கள் தத்தங் கிரமப்படி நிற்கின்றன. ஆகையால் இந்நிலைக்குச் சுபாவநிலையென்றுபெயர். மற்றச்சதுரத்தில் எந்த நிரையைக் கூட்டினுலும் தோகை (௧௫) என்றுவரும். ஆகையால் இலக்கங்களிந்நிலையில் நிற்கும்போது அது அவற்றிற்கு மாயநிலையென்னப்படும். மாயநிலையில் அடைபட்ட எண்களில் மூலையோட்ட நிரைகளின் தோகைகளும், மற்ற நிரைகளின் தோகைகளும் ஒன்றற்கொன்று சரியென்றுகாண்க. சுபாவநிலையில் இலக்கங்கள் வரையப்பெற்ற சதுரத்தைச் சுபாவசதுரமென்றும், மாயநிலையில் அவை வரையப்பெற்ற சதுரத்தை மாயாசதுரமென்றுஞ்சொல்வர்.

௧, ௨, ௩, ௪, ௫, ௬, ௭, ௮, ௯, (இ-தி) என்ற நற்சங்கலிதமாலிகையின் ஒற்றைவர்க்க இலக்கத்துக்கு மாயாசக்கரம் வரையும்படி,

வேண்டிய அறைகளாய் வகுக்கப்பட்ட சதுரத்தினது மைய அறைக்கு அடுத்த கீழறை முதல் கீழ்கீழாக வலப்புறத்தை நோக்கி மூலையோட்டத்திலே ௧, ௨, ௩, முதலிய இலக்கங்களைக் கிரமங்கிரமமாக வரை.

மூலையோட்டஞ் சதுரத்தினது அடியிலே வந்து முடிந்தால் அடுத்த மூலையோட்ட அறை எந்த நிரையில் வருமென்று கண்டு அந்த நிரையில் வெறுமையான உச்ச அறையில் அடுத்த இலக்கத்தை எழுதி முன்போல மூலையோட்டத்திலே மற்ற இலக்கங்களை நிறுத்து.

மூலையோட்டம் வலப்பக்கத்திலே வந்துமுடிந்தால் அடுத்த மூலையோட்ட அறை எந்த நிரையில் வருமென்று கண்டு அந்த நிரையில் வெறுமையான அதிதூர அறை முதலாகத்தீட்டு.

மூலையோட்டத்திலே வரையுமிடத்து முன்பு வரையப்பட்ட இலக்கங்கள் நின்று தடுத்தால் அந்த இலக்கத்தினது அறையினின்று இடப்புறத்தை நோக்கிக் கீழ்கீழாக மூலையோட்டத்திலே வெறுமையாயிருக்கின்ற அறையைக் கண்டு அதிலே தீட்டி மற்ற இலக்கங்களை முன்சொன்ன கிரமத்திலே வை.

வரலாறு.

க, உ, ௩, ச, முதலிய சகூ, இலக்கங்களை அடைக்கும்படி, கவது. மைய அறைக்கடுத்த கீழறைமுதலாக மூலையோட்டத்திலே க, உ, ௩, என்ற இலக்கங்களைத்தீட்டினால் (ச) க்கு இடமில்லை. (ச) மூலையோட்டத்திலேயடுத்த வலப்புறநிரையில்

உஉ	சஎ	கசு	சக	க0	௩ரு	ச
ரு	உ௩	சஅ	கஎ	சஉ	கக	உகூ
௩0	சு	உச	சகூ	கஅ	௩சு	கஉ
க௩	௩க	எ	உரு	ச௩	ககூ	௩எ
௩அ	கச	௩உ	க	உசு	சச	உ0
உக	௩கூ	அ	௩௩	உ	உஎ	சரு
சசு	கரு	ச0	கூ	௩ச	௩	உஅ

வரும். ஆகையால் அந்நிரையினது உச்ச அறையிலே (ச) ஐத் தீட்டுவது. (ச) னின்று மூலையோட்டம் வலப்பக்கத்தில் முடிகின்றபடியால் அடுத்த கீழ் நிரையில் இடப்புறத்தேயிருக்கின்ற அதிதூரஅறையிலே (ரு) ஐத் தீட்டுவது. இதினின்று மூலையோட்டத்திலே இலக்கங்களை வரைந்துகொண்டுபோனால், (க) இன் அறை தடுக்கும். இவ்வறையினின்று இடப்புறத்தை நோக்கி மூலையோட்டத்திலே (அ) ஐ வரைவது (அ) னின்று முன்புபோல மூலையோட்டத்திலே (கூ) வரையலாம். (க0) க்கிடமில்லாதபடியால் அதை அடுத்த வலப்புறத்து நிரையினது உச்சஅறையிலே தீட்டுவது. இவ்வாறே மற்றவைகளையுந் தீட்டுவதென்றறிக்.

இரட்டையிலக்கத்துக்கு மாயாசதுரம் வரையும்படி, உ-ம்.

க, உ, ௩, முதலிய (கசு) இலக்கங்களை அடைக்கும்படி. அவற்றைச் சுபாவநிலையினிறுத்தினால்,

க	உ	௩	ச
ரு	சு	எ	அ
கூ	க0	கக	கஉ
க௩	கச	கரு	கசு

இப்படி நிற்கும். இவற்றை மாயநிலையினிறுத்தினால் ஒவ்வொரு நிரையும் (௩ச) க்குச் சமமாயிருத்தல்வேண்டும். ஏனெனில் ௩ச = (கசு + க) × அ / ச.

ஆனால் சுபாவசதுரத்திற் கீழ்மேலான முதனிரைத்தொகை = உஅ = ௩ச — சு. கீழ்மேலான கடைநிரைத்தொகை ச0 = ௩ச — சு. ஆகையால் முதனிரை (௩ச) க்குக் குறைந்திருக்கிற அளவே கடைநிரை (௩சு) ற் கதித்திருக்கின்றது. இந்தப்பிரகாரமே மேனிரையையுங் கீழ்நிரையையுங் கண்டுகொள்க. ஆகையால் மூலையோட்டத்தினிற்கின்ற இலக்கங்களைவிட்டு மற்ற இலக்கங்களாகிய (உ), (கரு); (௩), (கச); (ரு) (கஉ); (கூ), (அ); என்பவைகளை நிலைமாற்றித் தீட்டினால் இலக்கங்கள் மாயநிலையில் வரும். அவை நிற்குமாறு.

க	கஉ	அ	க௩
கரு	சு	க0	௩
கச	எ	கக	உ
ச	கூ	ரு	கசு

மாயநிலைமாறுதபடி இலக்கங்களை இன்னும் பலவிதமாய் மாற்றித் தீட்டலாம். உ-ம்.

மாயநிலை.

க0	கரு	சு	௩
அ	க	கஉ	க௩
கக	கச	எ	உ
ரு	ச	கூ	கசு

மாயநிலை.

கச	க	கஉ	எ
கக	அ	க௩	உ
ரு	க0	௩	கசு
ச	கரு	சு	கூ

நற்சங்கலிதமாலிகையிலக்கங்களை மாயநிலையில் நிறுத்தும்வாறுபோலவே சகரணமாலிகை இலக்கங்களையும் மாயநிலையில் நிறுத்தலாம். மாயநிலையில் நிறுத்தவே ஒவ்வொரு நிரைக்குணிதங்களுஞ் சமமாம். உ-ம்.

க, உ, ச, அ, கசு, (இ-தி) என்றமாலிகைக்கு,

மாயநிலை.

அ	உருசு	உ
ச	கசு	சுச
கஉஅ	க	௩உ

இதில் ஒவ்வொரு நிரைக்குணிதமும் (சு0, கூசு) என்றுவரும். இது மையஇலக்கமாகிய (கசு) இன் கனமென்றுகாண்க. *

* மாயநிலையில் இலக்கங்களை அடைக்கின்ற விதங்கள் இன்னும் பலவுள. அவற்றுக்கிணங்கின அச்சஇல்லாமையால் இங்கே அவைவிடுபெட்டன. மாயாசக்கரசக்கரம் விடப்பட்டதும் இக்காரணத்தாலென்றறிக்.

மெய்கண்டதேவர் ஆதீனம்
5, ... புலவர் வீதி,
யாழ்ப்பாணம்,

மகாமாயாசதுரம்.

௨௫௬ அறை.

௨௨௬	௨௫௫	௧௮	௧௫	௧௯௪	௨௨௩	௫௦	௪௭	௧௬௨	௧௯௧	௮௨	௭௯	௧௩௦	௧௫௯	௧௧௪	௧௧௧
௩௨	௧	௨௪௦	௨௪௧	௬௪	௩௩	௨௦௮	௨௦௯	௯௬	௬௫	௧௭௬	௧௭௭	௧௨௮	௯௭	௧௪௪	௧௪௫
௨௩௯	௨௪௨	௩௧	௨	௨௦௭	௨௧௦	௬௩	௩௪	௧௭௫	௧௭௮	௯௫	௬௬	௧௪௩	௧௪௬	௧௨௭	௯௮
௧௭	௧௬	௨௨௫	௨௫௬	௪௯	௪௮	௧௯௩	௨௨௪	௮௧	௮௦	௧௬௧	௧௯௨	௧௧௩	௧௧௨	௧௨௯	௧௬௦
௨௨௮	௨௫௩	௨௦	௧௩	௧௯௬	௨௨௧	௫௨	௪௫	௧௬௪	௧௮௯	௮௪	௭௭	௧௩௨	௧௫௭	௧௧௬	௧௦௯
௩௦	௩	௨௩௮	௨௪௩	௬௨	௩௫	௨௦௬	௨௧௧	௯௪	௬௭	௧௭௪	௧௭௯	௧௨௬	௯௯	௧௪௨	௧௪௭
௨௩௭	௨௪௪	௨௯	௪	௨௦௫	௨௧௨	௬௧	௩௬	௧௭௩	௧௮௦	௯௩	௬௮	௧௪௧	௧௪௮	௧௨௫	௧௦௦
௧௯	௧௪	௨௨௭	௨௫௪	௫௧	௪௬	௧௯௫	௨௨௨	௮௩	௭௮	௧௬௩	௧௯௦	௧௧௫	௧௧௦	௧௩௧	௧௫௮
௨௩௦	௨௫௧	௨௨	௧௧	௧௯௮	௨௧௯	௫௪	௪௩	௧௬௬	௧௮௭	௮௬	௭௫	௧௩௪	௧௫௫	௧௧௮	௧௦௭
௨௮	௫	௨௩௬	௨௪௫	௬௦	௩௭	௨௦௪	௨௧௩	௯௨	௬௯	௧௭௨	௧௮௧	௧௨௪	௧௦௧	௧௪௦	௧௪௯
௨௩௫	௨௪௬	௨௭	௬	௨௦௩	௨௧௪	௫௯	௩௮	௧௭௧	௧௮௨	௯௧	௭௦	௧௩௯	௧௫௦	௧௨௩	௧௦௨
௨௧	௧௨	௨௨௯	௨௫௨	௫௩	௪௪	௧௯௭	௨௨௦	௮௫	௭௬	௧௬௫	௧௮௮	௧௧௭	௧௦௮	௧௩௩	௧௫௬
௨௩௨	௨௪௯	௨௪	௯	௨௦௦	௨௧௭	௫௬	௪௧	௧௬௮	௧௮௫	௮௮	௭௩	௧௩௬	௧௫௩	௧௨௦	௧௦௫
௨௬	௭	௨௩௪	௨௪௭	௫௮	௩௯	௨௦௨	௨௧௫	௯௦	௭௧	௧௭௦	௧௮௩	௧௨௨	௧௦௩	௧௩௮	௧௫௧
௨௩௩	௨௪௮	௨௫	௮	௨௦௧	௨௧௬	௫௭	௪௦	௧௬௯	௧௮௪	௮௯	௭௨	௧௩௭	௧௫௨	௧௨௧	௧௦௪
௨௩	௧௦	௨௩௧	௨௫௦	௫௫	௪௨	௧௯௯	௨௧௮	௮௭	௭௪	௧௬௭	௧௮௬	௧௧௯	௧௦௬	௧௩௫	௧௫௪

பலவகைவினா.

[Miscellaneous Questions.]

௧. வினா. ஒரு இராசாவிடத்திற் செட்டியொருவன் மாணிக்சங்கொண்டுவந்தான். அதனை விலைமதிக்கும்படி இராசாத் தனது நாலுமந்திரிகளுக்குங் கற்பித்தான். முதன்மந்திரி தன் சம்பளத்திற் பாதியும் மற்ற மூன்றுபேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான். ௨ம். மந்திரி தன் சம்பளத்தில் மூன்றிலொன்றும் மற்ற மூன்றுபேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான். ௩ம். மந்திரி தன் சம்பளத்தில் நாலிலொன்றும் மற்றமூன்றுபேர் சம்பளமும்பெறுமென்றான். நாலுபேர் மதித்த விலையுஞ் சரியென்றால் மாணிக்கத்தின் விலையென்ன, மந்திரிகள் சம்பளம் என்ன?

௨. வினா. மையூரான்படையும் மதுரேசன்படையும் பொருதபோழுது, மையூரான்படையில், $\frac{௧}{௩}$ மறவர்கையாலும், $\frac{௧}{௮}$ கடலிலும் $\frac{௧}{௫}$ வனத்திலும் $\frac{௧}{௬}$ யானைக்காலால் அரைபட்டும் $\frac{௧}{௪}$ குறைத்தலைக்கவந்தமாயும் போகச் சமர்க்களத்தினின்று பொருதவர்கள் ௯௦௦௦. ஆகப்போனபடையெத்தனை?

௩. வினா. ஒருசெட்டிக்கு (௧௦)பிள்ளைகளிருந்தார்கள். அவர்களில் மூத்தபிள்ளையைச் செட்டி அழைத்துக்கையிலே(௧௦) பணங்கொடுத்து இந்தப் பத்துப்பணத்துக்கும் மிளகுகொண்டு (௧)க்கிரட்டியாகவிற்று, (௨௦) பணங்கொண்டுவரச்சொன்னான். இரண்டாம்பிள்ளையை அழைத்து (௯) பணங்கொடுத்துத் தமையன்கொண்ட கடையிற்கொண்டு தமையன் விற்ற விலைக்கு விற்று (௨௦) பணங்கொண்டுவரச்சொன்னான். மூன்றாம்பிள்ளைக்கு (௮) பணங்கொடுத்து அவனுக்கும் அப்படியே சொன்னான். இந்தப்படி மற்றப்பிள்ளைகளுக்குங் கொடுத்துக் கடைசிப்பிள்ளைக்கும் (௧) பணத்தைக் கொடுத்துத் தமையன் கொண்டபடிகொண்டு தமையன்விற்றபடி விற்று (௨௦) பணங்கொண்டுவரச் சொன்னான். பிள்ளைகள் எப்படிக் கொண்டு எப்படி விற்கவேண்டும்.

௪. வினா. ஒருவர்க்க எண்ணை (௯௧) ஆற்பெருக்கி (௧) ஐக்கூட்டினால் தொகையும் வர்க்கமாம். அவ்வர்க்க எண்யாது?

௫. மூன்றெண்ணை முறையே ௫, ௭, ௯, என்ற எண்களாற் பெருக்கி (௨௦) க்கீந்தால் அந்த எண்ணின் ஈவுஞ் சேடமும் ஒன்றற்கொன்று சமமாம். ஆனால் முதற்சேடத்தில் இரண்டாஞ் சேடம் (௧) ஏறியும் இரண்டாஞ்சேடத்தில் மூன்று

ஞ்சேடம் (௧) ஏறியுமிருக்குமெனில் அம்மூவெண்களும் யாவை?

௬. வினா. யாசகனொருவனுக்கு ஓர்பிரபு முதனாள் மூன்று பணமும் மற்றநாள் (௫) பணமும் இப்படியே நாளொன்றுக்கு இவ்விரண்டுபணம் அதிகம் அதிகமாகக் கொடுத்துவர, அந்தயாசகன் ஓர்கணக்கனைநோக்கி, ஐயா, எனக்கு இப்பொழுதுள்ள பணத்தொகை மும்மடங்காவதற்கு எத்தனைநாட் செல்லுமென்று வினாவினான். கணக்கன்சொல்லவேண்டிய உத்தரமென்ன?

௭. வினா. முன்னொருகாலத்திலே, ௩. வியாபாரிகள் முறையே ௬, ௮, ௧௦௦, வராகன்களைக்கொண்டு வர்த்தகத்திலாரம்பித்தார்கள். அவர்கள் மூவரும், ௧. கடையில் முத்துவாங்கி ஒருவிலைக்கு விற்றார்கள். அவர்களிடத்தில் மிஞ்சினமுத்துகளை வேறொரு கடைக்குக்கொண்டுபோய் ஒவ்வொருமுத்தை ஐவைந்துவராகனுக்கு விற்றபோது மூன்றுவியாபாரிகளிடத்திலுஞ் சரிசரியான வராகன் இருந்தன. அவர்கள் முதற்கடையிலென்னவிலைக்கு முத்துவாங்கினார்கள். என்னவிலைக்கு விற்றார்கள். அவர்களிடத்திலே மிஞ்சியிருந்த முத்துகளெத்தனை?

௮. வினா. ஒருகிளிக்கூட்டம் ஒருதினைத்தோட்டத்திற் புகுந்து ௨௪. தினத்திலே அரைவாசியைத் தின்றபின் வேறு (௧௬) கிளிகள் அந்தக்கூட்டத்தோடு வந்துசேர்ந்தன. இவையுங்கூடி மிஞ்சிய அரைவாசித்தினையை (௧௬) தினத்திலே தின்றுவிட்டன. அப்படியானால் முதல்வந்த கிளிக்கூட்டத்தில் எத்தனை கிளி? அக்கிளிகளில் ஒன்று ஒருநாளில் தின்றதினைக்குவிலை ($\frac{௧}{௨}$) ப்பணமென்றால் எல்லாக்கிளிகளுந் தின்றதினைக்கு விலை என்ன?

௯. வினா. ஒரு ரதம் (௨௪௦) முழம் ஓடினபோது, அதின் முன் சில்லுப் பின்சில்லைப்பார்க்க (௬) முறை அதிகஞ் சுழன்றது. இந்தச் சில்லுகளின் சுற்றளவுக்கு (௨) முழத்தைக் கூட்டினால் முன் சில்லு (௪) முறைமாத்திரம் அதிகஞ் சுழலும். அப்படியானால் சில்லுகளின் சுற்றளவென்ன?

௧௦. வினா விக்கிரமாதித்தராசன் தனது சபையிலிருந்த புலவர்களுக்குச் சிலதிரவியங்களைச் சரிவரப்பங்கிட்டுக் கொடுத்தான். அப்பொழுது, புலவர்களில் மூவரில்லையானால் மற்றவர்களில் ஒவ்வொருவரும் (௫௦௦) வராகனை அதிகப்படப்பெறுவார்கள். புலவர்களோடே (௬) பேரைக்கூட்டினால், ஒவ்வொருவரும் (௧௨௦)வராகன் குறையப்பெறுவார்கள். சபையிற் புலவரெத்தனை? அவர்களுக்குக்கொடுத்த வராகன் எத்தனை?

௧௧. வினா. இரண்டுசேனைகள் தாங்களிருந்த இடத்தைவிட்டு (௩௯) காதமளவிலிருந்த ஒருதுருக்கத்துக்குப் போய்ச்சேரும்படி சேனாபதி கற்பிக்க, ஒரு சேனை காற்கால் காதம் நாழிகை ஒன்றுக்கு அதிவிரைவாய் நடந்து, மற்றச் சேனை போய்ச்சேர (௧) நாழிகைக்குமுன் துருக்கத்தைச் சேர்ந்தது. அப்படியானாற் சேனைகள் நாழிகையொன்றுக்கு எத்தனைகாதம் நடந்தார்கள்?

௧௨. வினா. $\frac{௧}{௩}+\frac{௨}{௯}+\frac{௩}{௨௭}+\frac{௪}{௮௧}$ (இ—தி) என்ற அநந்தமாலிகைக்கு உறுப்பெண் (௧௦௦) என்றால் சங்கலிதம் யாது?

௧௩. வினா. (௧×௨) + (௩×௪) + (௫×௬) + (௭×௮) + (௯×௧௦)+இ—தி) என்றமாலிகைக்கு உறுப்பெண் (௧௦௦) என்றால் சங்கலிதம்யாது?

௧௪. வினா. ஷ^{௪} —௫௫ஷ^{௨} —௩௦ஷ+௫௦௪=௦, என்றவர்க்க வர்க்க சமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள்யாவை?

௧௫. வினா. ஷ^{௩} +௩ஷ^{௨} —௬ஷ=௮, என்ற கனசமீகரணத்தின் அர்த்தங்கள் யாவை?

௧௬. வினா. ஒருதோட்டத்திற்குவாசல்(௫). ஒருராசாவும் அவன்பரிசனங்களும் அந்தத் தோட்டத்துக்குவந்தபோது வாசலுக்கு வாசல் பரிசனங்களிற் பாதியை நிறுத்தி இராசாவுங் கடைசியாய் மிஞ்சின பாதிச்சனங்களுந் தோட்டத்திற் புகுந்து நற்சங்கலிதப்படி பழம்பறித்தார்கள். அப்பொழுது பறித்தபழமும் இராசாவுடைய பரிசனங்களின் தொகையுஞ்சரி. இராசாவுடனேபோன பரிசனங்களெத்தனை?

௧௭. வினா. ஒருகணக்கனைப் பிராமணனொருவன் கண்டு, கணக்கனே, உனக்கொரு அதிசயஞ்சொல்லுகிறேன் கேள். நான் சில பூக்களை எடுத்து ஒரு குளத்திற்போட்டேன், அவை இரட்டித்தன. இரட்டித்த பூவில் எனது நியமப்படி எடுத்துக்கோவிலுக்குச் சாத்தி மிச்சத்தை இரண்டாங் குளத்திற் போட்டேன், அதிலும் அவை இரட்டித்தன. இரட்டித்த பூவில் முன்போல எடுத்துக்கோவிலுக்குச் சாத்தி மூன்றாங்குளத்திற்போட்டேன். இப்படியே (௫) குளத்திற்போட்டு இரட்டித்த பூவிற் சரிசரியாக எடுத்து (௫) கோவிலுக்குச் சாத்தி அருச்சித்தேன். மிச்சமில்லை. நான் முதலெடுத்த பூவெத்தனை சொல்வாயாகவென்றான். இதற்குவிடையென்ன?

௧௮. வினா. கழுதை காற்பணம், குதிரை முக்காற்பணம், யா

வை (௨) பணம், என்று விலைசொன்னால் உருவும் பணமுஞ் ச ரிவர அறிவதெப்படி ?

௧௯. வினா. ஒருராசாவுக்கு வந்த மாம்பழப்பொதியொன்றில் இராசா (௧) எடுத்துக்கொண்டு மனைவியர்நால்வருக்கும் அனு ப்பினர். மனைவியர்க்கு நற்சங்கலிதப்படி பிள்ளைகளிருந்தார் கள். ஒருபிள்ளையுடையாள் பிள்ளையொரு பழத்தையெடுத்த பின் நாலாகப்பகிர்ந்து, ஒருபங்கையெடுத்தாள். இவ்விதமே மற்றமூன்று மனைவியரும் பிள்ளைகளுமெடுத்துக்கொண்டு மி ச்சத்தை இராசாவுக்கனுப்ப, இராசாத் தானெடுத்துவைத்தி ருந்த பழமொன்றையும் போட்டுச் சரிவர நாலாகப் பிரித்துக் கொடுத்தாரென்றால், மாம்பழப்பொதியிலிருந்த பழமெத்தனை ?

௨௦. வினா. ஒரு இராசகுமாரத்தி அணிந்திருந்த (௯௯௦) வரா கன் விலைபெற்ற முத்துமாலை களவுபோய்விட்டதைக் கண்டு அரமனைக் காவலாளர் அனைவரும் முத்துமாலையின் விலை யை இறுக்கும்படி இராசாக் கற்பித்தான். ஆனால் காவலாள ரில் நால்வர் களவுபோன தினத்தில் அங்கில்லாததினால் மற் றவர்கள் முழுதையும் இறுக்கவேண்டிவந்தது. அப்பொழுது அ வர்கள் நாற்பது நாற்பது வராகன் முன்னையிலும் அதிகமாக இறுத்தார்கள். அப்படியானால் அரமனைக் காவலாளர் எத் தனை ?

௨௧. வினா. ஒருவேளாளன் (௧௯௦) ரூபாய்க்குச் சில எருத்து மாட்டை வாங்கி (௧௦) எருதைத் தனது கமத்துக்கு விட்டுக்கொ ண்டு மிச்சமான எருதுகளை (௧௯௨) ரூபாய்க்கு விற்றான். அவ னுக்கு எருதொன்றுக்கு ஒரு ரூபாய் லாபம். அவன் கொண்ட எருது எத்தனை ?

௨௨. வினா. வீரகேசரி, வையாபுரி என்ற இரண்டு பரதேசி கள் ஒரேமார்க்கத்தில் ஒரேநேராய்ப் பிரயாணம்பண்ணினார்க ள். இவர்களில் வையாபுரி (௯) நாழிகைக்கு முந்திப்புறப்பட அவனோடு கூடவிருந்த வீரகேசரி (௯) நாழிகைக்குப் பிந்திப்பு றப்பட்டு (௫௨ $\frac{௧}{௨}$) காதத்திலே வையாபுரியைப் பிடித்தான். இவர்களிருவரும் ஒவ்வொரு நாழிகையிலும் நடந்தகாதத்தில் ($\frac{௧}{௨}$) க் காதங்குறைய நடப்பார்களானால், வையாபுரியை, வீர கேசரி (௩௯) காதத்திலே பிடித்துவிடுவான். அப்படியானால் இவர்களிருவரும் நாழிகையொன்றுக்கு எத்தனைகாதஞ் சென் றார்கள் ?

௨௩. வினா. செட்டியொருவன் (௨௦௦) க்குமேலே (௩௦௦) க்கு ட்பட முத்துவாங்கினான். அவன் அந்த முத்துகளை ஆறாறாக எ

ண்ணிப்பார்த்தபோது (௪) மிஞ்சினது. எட்டெட்டாக எண்ணி னபோது (௨) மிஞ்சினது. ஒன்பதொன்பதாக எண்ணினபோ து (௭) மிஞ்சினது. அவன் வாங்கின முத்துகளெத்தனை ?

௨௪. வினா. இரண்டு யாத்திரைகாரரில் ஒருவன் நாளொன் றுக்கு (௩) காதம் நடந்துபோக, மற்றவன் முதனாள் (௪) காத மும், இரண்டாம்நாள் (௩ $\frac{௧}{௨}$) க்காதமும், மூன்றாம்நாள் (௩) கா தமும், இந்தப்பிரகாரமே குறையக்குறைய நடந்தானேயாகில் இவனை மும்மூன்றுகாதம் நடந்தவன் எத்தனைநாளிற் பிடிப் பான் ?

௨௫. வினா. ஒருபிராமணன் வழியிலொருவனைநோக்கி நீ எ ன்னசமயி என்றுகேட்க, ஓ! பிராமணோத்தமரே, எனதுசமய முதலட்சரத்தோடு (௨) ஐக்கூட்டி இரட்டித்து (௧) ஐக்கூட்டி ஐமடங்காக்கியபின் இரண்டாமட்சரத்தைக்கூட்டிப் பதின்மட ங்காக்கி மூன்றாம் அட்சரத்தையுங்கூட்டினால் (௧௧௦௧) தொ கையாம். இதினால் என் சமயத்தை அறிந்துகொள்ளுமென் றான். வழிப்போக்கன் என்னசமயி ?

௨௬. வினா. கோபுரசிகரம்போல அடுக்கப்பட்ட இரண்டு பீர ங்கிக்குவியல்களில் ஒன்றின் அடி முக்கோணாகாரம். மற்றதின் அடி சதுராகாரம். இவ்விருகுவியல்களின் ஒவ்வொரு பக்கத்து க்கு முப்பது முப்பதுபீரங்கி அடுக்கப்பட்டதேயானால், அவற்றின் பீரங்கித் தொகையென்ன ? சதுராகாரக்குவியலில் மற்றதை ப்பார்க்க எத்தனை பீரங்கி அதிகம் ?

௨௭. வினா. ஒருபீரங்கிக்குவியலின்அடி சதுராகாரம். அதி ன் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அடுக்கியிருந்த பீரங்கி (௨௦). குவிய லுக்குச் சிகரமில்லாதபடியால் மேனிரையின் ஒவ்வொரு பக் கத்திலும் ஆறாறு பீரங்கியிருந்தன. அப்படியானால் குவியலி ல் அடுக்கியிருந்த பீரங்கியெத்தனை ?

௨௮. வினா. ஒருபிரபு (௭௨) ரூபாயைச் சில பிராமணருக்குத் தானம்பண்ணும்படி கொண்டுவந்தான். அவன் தானம்பண் ணத் தொடங்கின சமயத்திலே வேறுமிரண்டு பிராமணர் அங் கே வந்தபடியால் அவர்களிருவரையும் மற்றவர்களுடனே வைத்து யாவருக்குஞ் சரிவர ரூபாயைப் பங்கிட்டபோது, முன்பு வந்திருந்த பிராமணருக்கு அரையரை ரூபாய் குறைந்துபோன தென்றால், வந்த பிராமணரெத்தனை ?

௨௯. வினா. மதுரைத் தமிழ்ச்சங்கப்புலவர் நாற்பத்தொன் மரும் பாண்டியன்பேரிலே நாற்பத்தொன்பது பிரபந்தம் பாடிக் கொண்டுபோக அவர்களுக்கு நற்சங்கலிதப்படி வராகன் கொ டுத்தானென்றால் அவன் கொடுத்த வராகனெத்தனை ?

அரும்பத அகராதி.

[Glossary and Index.]

		பிரகரணம். பக்கம்.
அங்கம், . . .	Member (of anequation)	கoரு-ருக
அதிவர்க்கசமீகரணம்,	Equations higher than the quadratic,	ரூoஉ-உகo
அத்துவைதசமீகரணம்,	Identical equation	உoரு-கரூஎ
அநந்தமாலிகை, .	Infinite series, .	உஅரு-கஅரூ
அநந்தராசி, . .	Infinite quantity,	உஅo-கஅக
அநுபாதம், . .	Proportion, . .	உஉஉ-கருச
அநுபாதவுறுப்பு, .	Terms of a proportion	
அநுபாத்தியம், .	Proportionals, . .	உஉரு-கசகூ
அநேகாட்சரசமீகரணம், . . .	Equations that contain two or more unknown quantities,	கககூ-கரூக
அந்தம், . . .	Extremes of a proportion,	உஉச-கசகூ
அந்தரகரணம். . .	Differential method,	உகூச-ககூரூ
அந்தரமாலிகை, .	Arithmetical progression, . .	உருகூ-ககூரூ
அந்தரம், . . .	Difference, . . .	
அந்தரவிகிதம், . .	Arithmetical ratio,	உoகூ-கசo
அந்தராநுபாதம்,	Arithmetical proportion,	உஉஉ-கருச
அபரம், . . .	Consequent of a proportion,	உகக-கசக
அபவர்த்தம், . .	Common measure,	உஎக-கஎகூ
அபின்னம், . . .	Integer, ...	
அமௌலம், . . .	Quantities that do not appear under a radical sign, .	ககூக-கூஎ
அரண, ...	Divided by, ...	ரூச-கo
அர்த்தம், . . .	Value	

		பிரகரணம். பக்கம்.
அர்த்தாபத்தி, . .	Corollary . . .	
அலகு, . . .	A unit, . . .	
அவரோகணமாலிகை,	Descending series,	உருகூ-ககூ
அவ்வியத்தம், . / அவ்வியத்தராசி, .	Unknown quantity,	ரு-ரு
ஆரகம், . . .	Denominator, . . .	எரூ-ரூ
ஆரோகணமாலிகை,	Ascending series,	உருகூ-ககூ
இஷ்டராசி, . . .	Assumed quantity, .	
இஷ்டவர்ணம், .	Assumed co-efficient, .	
இரட்டையிராசி, .	Binomial quantity, .	உஉ-
இராசி, ...	Quantity, ...	உ-
இருணம், . . .	Negative, ...	
இருணராசி, . . .	Negative quantity, . .	கக-
ஈதல், ...	To divide, . . .	கூo-உ
ஈவு, ...	Quotient, . . .	கூo-உ
ஈற்றுறுப்பு, . . .	Last term of a series, .	
உபயார்த்தசின்னம், .	Sign of ambiguity, . .	கரூ-
உபயார்த்தம், . .	Ambiguity, ...	
உரூபம், ...	Formula, ...	உரு-
உறுப்பு, . . .	Term, ...	உக-
உறுப்பெண், . .	Number of terms of a series,	உருரு-ககூ
எச்சராசி, . . .	Residual quantity, . .	உஉ-
எண், ...	Number, ...	
ஏகதை, ...	Homologous, .	உஉச-கச
ஒப்புமை, . . .	Comparison (of proportions,)	உரூகூ-கரு
ஒற்றையிராசி, . .	Simple quantity, .	உo-
கணிதசாஸ்திரம், / கணிதம், . . .	Mathematics, . .	ரூ-
கரணம், ...	Surd, ...	ககூரூ-கூக
கரணகுதகம், . .	Diophantine analysis,	ரூoக-உo
கழித்தல், . . . / கழிதல், . . .	To subtract, . .	
கனசங்கலிதம்,	Sum of the series, 1, 8, 27, 64. &c.	உகூகூ-ககூ

		பிரகரணம். பக்கம்.
னமூலம்,	Cube root,	௯௨-௯
னம்,	Cube,	௬௧-௯
னவிகிதம்,	Triplicate ratio,	௨௧௮-௧௪௬
ாதகரணம்,	Involution,	௧௬௨-௭௫
ாதிதசூசி,	Index of a power,	௧௨௯-௭௬
ாதிதம்,	Power,	௧௨௯-௭௬
ாதித்தல்,	To involve,	
ிரமமாற்று,	Inversion,	௨௬௪-௧௪௯
நணகம்,	Multiplier,	௫௧-௨௬
நணனம்,	Multiplication,	௫௧-௨௬
நணனவிகிதம்,	Compound ratio,	௨௧௯-௧௪௨
நணனீயம்,	Multiplicand,	௫௧-௨௬
நுணங்கம்,	Factor,	௬0-௯
நணிதம்,	Product,	௫௧-௨௬
நதககணிதம்,	Indeterminate analysis,	
நதகம்,	An unknown quantity in an indeterminate equation,	௨௯௭-௧௯௮
ூட்டல்,	To add,	௪௯-௧௯
ேத்திரகணிதம்,	Geometry,	௬-௬
௧,	Plus,	௯-௫
கரண,	Geometrical,	
கரணமாலிகை,	Geometrical progression,	௨௯௯-௧௭௧
கரணவிகிதம்,	Geometrical ratio,	௨௧௧-௧௪௧
கரணனுபாதம்,	Geometrical proportion,	௨௨௨-௧௪௯
சங்கரவர்க்கசமீகரணம்,	Affected quadratic equation,	௧௮௯-௧௨0
சங்கலனம்,	Addition,	
சங்கலிதசங்கலிதம்,	Sum of the series, 1,3,6, &c.	௨௯௯-௧௯௭
சங்கலிதம்,	Sum of all the terms of a series,	௨௫௮-௧௯௫
சங்கிலிக்குதகம்,	An unknown quantity (in an Indeterminate Equation) which when divided by given numbers shall have given remainders,	௬00-௨0௬
சமத்துவம்,	Equality,	
சமமறிகுறி,	Sign of equality,	௧௫-௯
சமம்,	Equal,	

		பிரகரணம். பக்க
சமாசம்,	Composition of proportions,	௨௪௧-௧௫
சமாநுபாத்தியம்,	Mean proportional,	௨௨௫-௧௪
சமானகரணம்,	Comparison of equations,	௨0௧-௧௬
சமானம்,	Similar,	
சமானராசி,	Similar quantity,	௬௯-௧
சமீகரணமூலம்,	Root of an equation,	௬0௪-௨௧
சமீகரணம்,	Equation,	௧0௫-௫
சமீபகமாலிகை,	Converging series,	௨௮௯-௧௮
சமீபகித்தல்,	To converge,	
சம்பந்தஅளவை,	Scale of relation,	௨௯0-௧௮
சய,	Minus,	௧0-
சாதிகரணம்,	Reduction of an equation,	௧0௭-௫
சாதிகரித்தல்,	To reduce an equation,	
சிறியதாரதம்மியவிகிதம்	Ratio of less inequality,	௨௧௪-௧௪
சின்னம்,	Sign,	௮-
சுதியநுபாதம்,	Harmonical proportion,	௨௫0-௧௫
சுத்தவர்க்கசமீகரணம்	Pure quadratic equation	௧௮௫-௧௧
சுபாவகாதிதம்,	Direct power,	௧௬௧-௭
சுயம்பிரமாணம்,	Axiom,	௧0௮-௫
சுருக்கல்,	To reduce,	
சூசி,	Index,	௬௧, ௧௨௧-௯, ௭
சேடதுவிராசி, சேடராசி,	Residual quantity,	௨௨-
சேடம்,	Remainder,	௪௯-௨
சோடு,	Couplet,	௨௧௧-௧௪
சோதகம்,	Subtrahend,	௪௯-௨
சோதனீயம்,	Minuend,	௪௯-௨
தகாபின்னம்,	Improper fraction,	௮௯-௪
தகுபின்னம்,	Proper fraction,	௮௯-௪
தட்சிணபாகம்,	Right hand side of an equation,	௧0௫-௫
தரம்,	Into,	௨௯-
தனம்,	Positive,	
தனராசி,	Positive quantity,	௧௧-
தனிஷ்டம்,	Infinitesimal,	௨௮௧-௧௮
தனிமைச்சமீகரணம்,	Independent equation,	௨0௫-௧௬
தாரதம்மியம்,	Inequality,	

பிரகரணம். பக்கம்.

துல்லியம், . . . Analogous, . . .
துல்லியவுறுப்பு, . . Analogous terms, உஉச-கசகூ
துவிதயம், . . . Couplet, . . உகக-கசக
துவிராசி, . . . Binomial, . . . உஉ-எ
துவிராசிவிதி, . . Binomial theorem . கசக-எகூ
தெரிநிலே, . . . Known, . . .
தெரிநிலேயிராசி, . . Known quantity, . ரு-ரு
தொகை, ... Sum, ...
தொடரநுபாதம், Continued proportion, உஉஎ-கசஎ
நற்சங்கலிதமாலிகை, {Natural series of numbers, 1, 2, 3, &c.} ஈக0-உகஎ
நற்சங்கலிதம், . . Sum of the series, 1, 2, 3, 4, &c.
நிர்க்கண்டம், . . Exponent, ஈக, கஉகூ-கூ, எஈ
நிலேமாற்று, . . . Transposition, . . க0கூ-ருஈ
பகாநிலேயெண், . Prime number, . உஎஉ-கஎகூ
பகுநிலேயெண், . . Composite number, உஎஈ-கஎகூ
பரிணமசமீகரணம், Dependent equation, உ0ரு-கஈஎ
பாககம், ... Divisor, ... சா0-உஅ
பாககரம், . . . Division, ... சா0-உஅ
பாகம், ... Side of an equation, க0ரு-ருக
பாசிதம், ... Quotient, . . . சா0-உஅ
பாச்சியம், . . . Dividend, . . . சா0-உஅ
பாடீகணிதம், . . Arithmetic, . . . ஈ-ஈ
பிரதிகரணம், . . Substitution, . . கஉஎ-சா0
பிரதிகரித்தல், . . To substitute, . .
பிரித்தல், . . . To divide, . . . சா0-உஅ
பின்னபின்னம், . . Compound fraction, கூக-ச0
பின்னம், ... Fraction, . . . எஈ-ஈச
பின்னுர்த்தம், . . Value of a fraction, எச-ஈச
புள்ளி, Number of terms of a series, உருரு-ககூச
பூருவம், ... Antecedent, . உகக-கசக
பெரியதாரதம்மியவிகிதம், . . . {Ratio of greater inequality,} உகச-கசஉ
பெருக்கல், . . . To multiply, . . ருக-உஈ
பேறு, ... Result, ...
பொதுஆரகம், . . Common denominator, அஅ-ஈஅ
போகம், ... Numerator, . . . எஈ-ஈச

பிரகரணம். பக்கம்.

மகாபவர்த்தம், Greatest common measure, உஎக-கஎ
மடக்குமாலிகை, . Recurring series, உகூ0-கஅ
மத்தியம், . , . Means, . . . உஉச-கச
மறைநிலே, . . . Unknown, . . .
மறைநிலேயிராசி, . Unknown quantity, ரு-ரு
மாயாசதுரம், . . Magic square, . . உஉ
மாலிகை, . . . Series, ...
மாறுராசி, . . . Constant quantity,
மாறிராசி, . . . Variable quantity, .
மிச்சிரபின்னம், . . Mixed fraction, . அகூ-ச
முதலுறுப்பு, . . First term, . . .
முற்றளவு, . . . Measure of a quantity, ஈஎ-க
முற்றிராசி, . . . Finite quantity, .
முற்றுப்பெருக்கம், . Multiple, . . . ஈஎ-க
மூலஅளவு, Standard unit; scale of notation, க, உக
மூலகிரகணம், . . Evolution, . . . கருசா-கூ
மூலசூசி, . . . Index of a root, ஈஈ, கருஉ-கூ, க
மூலங்கொள்ளல், . To extract a root, .
மூலம், ... Root, . ஈஉ, கருக-கூ, அ
மௌலம், . . . Radical quantity, கசாஈ-க
வகுராசி, ... Compound quantity, உக-
வர்க்கசங்கலிதம், {Sum of the series, 1, 4, 9, 16, &c.} உகூகூ-கக
வர்க்கசமீகரணம், . Quadratic equation, க0சா-ரு
வர்க்கபூர்த்திசெய்தல், To complete a square,
வர்க்கம், ... Square, ... ஈக-
வர்க்கவர்க்கசமீகரணம், Biquadratic equation, ஈ0உ-உக
வர்க்கித்தல், . . . To square, . . .
வர்க்கமூலம், . . Square root, . . ஈஉ-
வர்க்கவிகிதம், . . Duplicate ratio, உகஅ-கச
வர்ச்சனம், . . Division of proportions, உசக-கரு
வர்ணம், ... Co-efficient, . . கஎ-
வாமபாகம், . Lefthand side of an equation, க0ரு-ரு
விகரணம், . . . Rational quantity, கசாஈ-க
விகிதம், ... Ratio, . . . உ0கூ-க
விகமமாலிகை, . . Diverging series, உஅ

அரும்பத அகராதி.

		பிரகரணம். பக்கம்.
ிகமித்தல், . . .	To diverge, . . .	
ிமோசனகரணம்,	Elimination, . .	உ00-கஈஉ
ிமோசனித்தல், .	To eliminate, . .	
ியக்தம், . .	Known quantity, .	ரு-ரு
ியக்தராசி, . .		
ியவகலனம், . .	Subtraction, . . .	சகூ-உ0
ிலங்குச்சின்னம், .	Vinculum or parenthesis	உச-அ
ிலோமகாதிதம், .	Reciprocal power, .	சஈக-எச
ிலோமம், . . .	Inverse, ...	
ிலோமராசி, . .	Reciprocal of a quantity,	ஈஅ-கக
ிலோமவிகிதம், .	Reciprocal ratio,	உகரு-கசஉ
ீசகணிதம், . . .	Algebra, ...	ஈ-ஈ
ீசசூத்திரம், .	Algebraic Expression, or Formula, . . .	உரு-அ
ீசபாவைஷ, . .		
ீசராசி, . . .		
ீசரூபம், . .		
ீசவாக்கியம், .		
்வள்ளைச்சமீகரணம்,	Simple equation, .	க0சு-ருகூ
்வற்றிராசி, . . .	Unlike quantities, .	ஈசு-க0

முற்றிற்று.

பிழைதிருத்தல்.

பக்கம்.	வரி.	பிழை.	திருத்தல்.
க	கச, கரு, கசு, உசு	களஞ்சு	கழஞ்சு
க0	ஈசு	முற்றளவை	பலராசியின்முற்றளவை
கஅ	உஉ	தன்	தன
உக	உஉ	—	+
உச	கஈ, கரு	குணணீய	குணனீய
உசு	உஉ	ஆ	—ஆ
சுக	உ, ஈ, ச	இவற்றை	என்பதை
சுஈ	ஈரு	—	×
அஉ	உஎ	+கருஷ—அஸஉ	+கருஷஅஸஉ
அஉ	உஅ	ஸ—அ	ஸஅ
அஉ	உஅ	என்றும்	என்று
அஈ	ரு	ஆ—ஈ / க	ஆஈ / க
அஈ	கஎ	க / ஆ+ஈ	க / (ஆ+ஈ)உ
கூ0	கஎ	க / ஆ ஈ/உ	க / ஆ ஈ/உ
கூசு	கசு	ஈஆ	ஈஆச
ககஎ	ஈஎ	கரு (ஈ/ச)	கரு ஈ/ச
கஉக	ஈஈ	+ , ±	± , +
கஉரு	உசு	தனரரசி	தனராசி
கச0	ககூ	அரண	சகரண
கசசு	கூ0	:	..
கசஎ	ச	கஉஎ	உஉஎ
கசஎ	க0	கஉஅ	உஉஅ
கசஎ	கஈ, உ0	:	..
கருக	கசு	உறுப்புக்கள்	உறுப்புகள்
கருச	உரு	சமரச	சமாச
கசுஈ	ஈ0	உருசு. பிர.	தள்ளு
கசுரு	கசு	சஆ	சஔ
க௭0	உச	நான்கெண்வண	நான்கெண்வண
கஎஈ	கசு	ஆவிபு—ஆ / க க	ஆவிபு —ஆ / க க

பிழைதிருத்தல்.

பக்கம்.	வரி.	பிழை.	திருத்தல்.
௧௮௬	௧௭	௧/௧௦	௩/௧௦
௧௮௯	௨௫	$ஷ^{௨}$	—$ஷ^{௨}$
௧௯௧	௨௪	ங+ஙி+ஙீ	(ங+ஙி+ஙீ)
௧௯௧	௩௩	ன்ற	என்ற
௧௯௨	௧	—(இதி)	(இ—தி)
௧௯௨	௩	(௧ஷ+௨)/(௧—ஷ—$ஷ^{௨}$)	(௧+௨ஷ)/(௧—ஷ—$ஷ^{௨}$)
௧௯௨	௬	(௧+ஷ)/(௧—௨ஷ—௩ஷ)	(௧—ஷ)/(௧—௨ஷ—௩ஷ)
௧௯௨	௧௦	ஙி ஙீ ஙு ஙூ ஙெ ஞி	ங ஙி ஙீ ஙு ஙூ ஙெ
௧௯௪	௧௨	(ண ௨)/௩	(ண—௨)/௩
௧௯௬	௨	௨௯௩	௨௯௪
௧௯௮	௨௩	(௧)	(ஷ)
௨௦௨	௩	ம=௧	ம=௨
௨௧௦	௨௧	—௨௬ஷ	+௨௬ஷ
௨௧௦	௨௩	—௧௨௦	+௧௨௦
௨௧௪	௩௭	௫×௧௦	௫—௧௦
௨௧௯	௨௩	றநுமதித்து	றநுமித்து
௨௨௭	௧௬	௪௦, ௯௬	௪௦௯௬

வீசபாஷையை வாசிக்கும் விதம்.

வீசபாஷை.	வாசிக்கும் விதம்.
ஆ+ஈ	ஆவன்னா சக ஈயன்னா; அல்லது, ஆகார ச… ஈகாரம்.
ஆ—ஈ	ஆவன்னா சய ஈயன்னா; அல்லது, ஆகார ச… ஈகாரம்.
ஆ±ஈ	ஆவன்னா சக சய ஈயன்னா; அல்லது, ஆகா… சக சய ஈகாரம்.
ஆ×ஈ	ஆவன்னா தரம் ஈயன்னா; அல்லது, ஆகாரத… ம் ஈகாரம்.
ஆ/ஈ, ஆ÷ஈ	ஆவன்னா அரண ஈயன்னா; அல்லது, ஆகா… அரண ஈகாரம்.

ஆ+ஈ=ஊ ஆவன்னா சக ஈயன்னாவுக்குச் சமம் ஊ வ…ன்னா; அல்லது, ஆகார சக ஈகாரத்துக்குச் சமம் ஊகாரம் … ஆவன்னா சக ஈயன்னா என்பதற்குச் சமம் ஊவன்னா; அல்ல…து, ஆகார சக ஈகாரம் என்பதற்குச் சமம் ஊகாரம்.

(ஆ+ஈ)/(ஆ+ஈ)	விலங்குறு ஆவன்னா சக ஈயன்னா; அல்லது விலங்குறு ஆகார சக ஈகாரம்.

ஆ : ஈ :: ஐ : ஒ ஆவன்னாவுக்கு ஈயன்னா எப்படியோ அப்படி…யே ஐயன்னாவுக்கு ஒவன்னா; அல்லது, ஆகாரத்துக்கு ஈகார… எப்படியோ அப்படியே ஐகாரத்துக்கு ஒகாரம்.

$ஆ^{௬}$	ஆவன்னாவின் ஆறுங்காதிதம்; அல்லது, ஆ…காரத்தின் ஆறுங்காதிதம்.
$ஆ^{௩/௭}$	ஆவன்னாவின் ஏழில் மூன்றுகாதிதம்; அல்ல…து, ஆகாரத்தின் ஏழில் மூன்றுகாதிதம்.
$ஆ^{ஈ}$	ஆவன்னாவின் ஈயன்னா காதிதம்; அல்லது… ஆகாரத்தின் ஈகாரகாதிதம்.
$\sqrt[௪]{ஆ}$	நாலாம்மூலஆவன்னா; அல்லது, நாலாம் மூ…ல ஆகாரம்.