தமிழ்நாடு அரசு

கணக்கு

எட்டாம் வகுப்பு

தீண்டாமை
மனிதத்தன்மையற்ற செயல் – பெருங்குற்றம்

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது.
(விற்பனைக்கு அன்று)

© தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு-2011
(சமச்சீர்க் கல்வி பொதுப்பாடத் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

குழுத்தலைவர்

முனைவர் கி. இரவி
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை
தூய நெஞ்சக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
திருப்பத்தூர் (வேலூர் மாவட்டம்) - 635 601.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் கி. வாசுதேவன்
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
சென்னை - 600 005.

செ. சித்ரா
விரிவுரையாளர் (தேர்வு நிலை)
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
சென்னை - 600 005.

நூலாசிரியர்கள்

சி. ப. கார்த்திகேயன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
காந்தி நினைவு மேனிலைப்பள்ளி
திருவெண்ணெய்நல்லூர்,
விழுப்புரம் மாவட்டம் - 607 203.

ந. சாந்தி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
இரயில்வே இருபாலர் மேனிலைப்பள்ளி
பெரம்பூர்
சென்னை - 600 011.

தீ. கோ. நாராயணசாமி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு ஆண்கள் மேனிலைப்பள்ளி
பெண்ணாடம்
கடலூர் மாவட்டம் - 606 105.

வி. மெட்டில்டா சொர்ணம் டைட்டஸ்
பட்டதாரி ஆசிரியர்
டவுட்டன் பெண்கள் மேனிலைப்பள்ளி
வேப்பேரி
சென்னை - 600 007.

மு. தணிகைமணி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு பெண்கள் உயர்நிலைப்பள்ளி
புதுப்பேட்டை, திருப்பத்தூர்
வேலூர் மாவட்டம் - 635 651.

ஹ. லெக்ஷ்மி
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அக்ஷயா மெட்ரிக் மேனிலைப்பள்ளி
வேளச்சேரி
சென்னை - 600 042.

ஒளி அச்சுக்கோர்வை, வடிவமைப்பு & மேலட்டை : **ஷிவ் ஆனந்த்**

நூல் அச்சாக்கம்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை - 600 006.

விலை : ரூ.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

முகப்புரை

கணிதம் மிக வியப்பூட்டுவதாகவும் பயனுள்ளதாகவும் உள்ள பாடங்களுள் முதன்மையானதாகும். கணிதத்தின் கூறுகள் பல அறிவியல் பாடங்களிலும் மனித வாழ்வியலிலும் ஊடுருவியுள்ளன. **'கணிதம்' (Mathematics) என்ற சொல் மாபெரும் கணித மேதை பிதாகரஸால் உருவாக்கப்பட்டது. இதன் பொருள் 'கற்க விழைதல்' என்பதாகும்.** உலகின் மிகச் சிறந்த வடிவமைப்புகள் மூலம் கணிதத்தின் அழகை உணரலாம். இயற்கையும் கணிதத்தின் ஒழுங்கிற்குட்பட்டு இயங்குகிறது. சில குறிப்பிட்ட கணித சமன்பாடுகளின்படி பிரபஞ்சத்தின் பல பொருட்கள் இயங்கியும் செயல்பட்டும் வருகின்றன.

இத்தகைய சிறப்பு மிக்க கணித பாடத்தைக் கற்க ஆழ்ந்த சிந்தனையும் கூரிய கவனமும் தேவை. இது மனிதனை **'ஏன்', 'எதற்கு'** என்ற வினாக்களை எழுப்பி மென்மேலும் சிந்திக்க உந்துகிறது. இச்சிறப்புடைய கணிதத்தை இளம் மாணவச் செல்வங்களுக்கு ஒரு புத்தகமாக எழுதுவதென்பது ஒரு மகிழ்வூட்டும் பணியாகும்.

இப்புத்தகம் சமச்சீர்க் கல்வியின் குறிக்கோள்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு தமிழ் நாட்டில் உள்ள அனைத்துப் பள்ளிகளுக்கும் பயன்படும் வகையில் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. அரசுப் பள்ளிகள், மெட்ரிக்குலேசன் பள்ளிகள், ஆங்கிலோ – இந்தியப் பள்ளிகள், ஓரியண்டல் பள்ளிகள் ஆகியவற்றில் பயிலும் அனைத்து மாணவர்களுக்கும் ஏற்றதோர் பொதுப் புத்தகமாகவும் அமைகிறது. புத்தகத்தில் உள்ள பாடப்பொருளானது மேற்கண்ட பள்ளிகளில் பயிலும் அனைத்து வகை மாணவர்களின் தேவைகளை நிறைவு செய்யும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது.

சீரிய இப்பாடப்புத்தகத்தைத் தயாரித்து அளிப்பதற்காகத் தேவையான அனைத்து முயற்சிகளையும் கடின உழைப்பையும் நல்கியுள்ளோம். பல்வேறு சூழல்களிலும், இடங்களிலும் வாழும் மாணவர்களை ஈர்க்கும் வகையில் இப்புத்தகத்தில் எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிக் கணக்குகள், தேற்றங்களுக்கான நிரூபணங்கள், தீர்வு காணும் வழிமுறைகள் ஆகியவை கவனமாக எளிமையாக வழங்கப்பட்டுள்ளன. பல்வேறு தலைப்புகளின் கீழ் பல்வேறு தகவல்களும் வரலாற்று உண்மைகளும் மாணவர்களை மென்மேலும் ஊக்கப்படுத்திக் கற்கத்தூண்டும் வண்ணம் தரப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்கள் பாடப்பொருளை நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கு ஏதவாகவும், ஆர்வத்தை வளர்க்கும் நோக்கிலும் இப்பாடபுத்தகத்தில் அதிக அளவில் படங்கள், உருவங்கள், வரைபடங்கள் ஆகியவற்றுடன் செய்து பார், முயற்சி செய், சிந்திக்க, நீவீர் அறிவீரா ? போன்ற புதிய கருத்துகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எட்டாம் வகுப்பு பயிலும் மாணவப்பருவமானது பலவற்றைப் புரிந்து கொள்ளும் தகுதியைப் பெற முயற்சிக்கும் ஒரு மிக முக்கிய நிலையில் உள்ளதை ஆசிரியர் குழு உணர்ந்துள்ளது. எனவே, ஒவ்வொரு மாணவரும் புத்தகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தையும் நன்கு கற்றறிந்து பயிற்சியில் உள்ள அனைத்துக் கணக்குகளையும் போட முயலுமாறு கேட்டுக்கொள்கிறோம். பால் ஹால்மோஸ் என்பாரின் கூற்றுப்படி "கணிதத்தைக் குற்பதற்கான ஒரே வழி அக்கணக்குகளைச் செய்து பார்த்து அறிவதே ஆகும்". ஆகவே கணக்குகளை நாள்தோறும் திரும்பத் திரும்பச் செய்து பயிற்சி மேற்கொள்வதையும், முக்கிய கருத்துக்களை அடிக்கடி நினைவு கூர்தலையும் ஒரு பழக்கமாக உண்டாக்கிக்கொள்ளும்படி மாணவர்களைக் சூகட்டுக்கொள்கிறோம்.

கருத்துக்களை விவரித்தல், எடுத்துக்காட்டுகளை விளக்குதல், மாணவர்களின் தீர்வு காணும் ஆற்றலை வளர்த்தல் போன்றவைகட்கு உரிய முக்கியத்துவத்தை ஆசிரியர்கள் அளிப்பார்கள் என ஆசிரியர் குழு நம்புகிறது. இம்முயற்சியில் நாம் வெற்றி பெற்றால் கணிதத்தைக் கற்க நினைக்கும் எவரும் முதலில் அதை விரும்புதல் வேண்டும் என்ற மாபெரும் கணித மேதைகளின் கனவை நனவாக்க இயலும்.

பாடப்புத்தகத்தை மேம்படுத்துவதற்கான தேவை எப்பொழுதும் இருப்பதால் ஆசிரியர்கள், மாணவர்கள், மாணவச் சமுதாயத்தின் மீது அக்கறையுள்ள பெருமக்கள் ஆகியோரிடமிருந்து ஆக்கபூர்வமான விமர்சனங்களையும், ஆலோசனைகளையும் அன்புடன் எதிர்நோக்குகின்றோம்.

சீரிய இப்பணிக்கு எங்களைத் தேர்ந்தெடுத்த, அனுமதித்த உயர்ந்த உள்ளங்கட்கு எங்கள் குழுவின் சார்பாக எனது மனமார்ந்த நன்றியைத் தெரிவித்துக்கொள்கிறேன்.

முனைவர். **கி. இரவி**
பாடநூல் ஆசிரியர் குழுத் தலைவர்

பொருளடக்கம்

வ. எண்.	அத்தியாயம்	பக்கம்
1.	மெய் எண்களின் தொகுப்பு	1
2.	இயற்கணிதம்	59
3.	வாழ்வியல் கணிதம்	100
4.	அளவைகள்	150
5.	வடிவியல்	173
6.	செய்முறை வடிவியல்	207
7.	வரைபடங்கள்	252
8.	விவரங்களைக் கையாளுதல்	269
	விடைகள்	303

மெய் எண்களின் தொகுப்பு

1

1.1 அறிமுகம்
1.2 மீள்பார்வை – விகிதமுறு எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்
1.3 விகிதமுறு எண்களின் நான்கு பண்புகள்
1.4 மூவடைப்புக் கொண்ட எண்கோவைகளின் சுருக்கம்
1.5 அடுக்குகள் : எண்களை அடுக்குக்குறி வடிவில் முழுக்களின் படியாக எழுதுதல்
1.6 அடுக்குக்குறி விதிகள்
1.7 வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், கனங்கள், மற்றும் கன மூலங்கள்
1.8 எண்களின் தோராய மதிப்பு
1.9 எண்களுடன் விளையாடுதல்

1.1 அறிமுகம்

எண்ணியல் அறிவின் அடிப்படைக் கூறாய் கணித வளர்ச்சியில் முக்கியப்பங்கு வகிக்கிறது. கிரேக்க கணித வல்லுநர் பித்தகோரஸ் மற்றும் அவர்தம் சீடர்கள் ‘ஒவ்வொன்றும் எண்’ என்றும் அண்டத்தின் விளக்கம் எண்களை மையமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ளது என்றும் நம்பினார்கள்.

எண்கள் எழுதும் முறையானது சுமார் 10,000 வருடங்கள் முன்பே தோன்றி வளர்ச்சி அடைந்துள்ளது. இன்று நாம் பயன்படுத்தும் எண் முறை வளர இந்தியாவின் பங்கு மகத்தானது. எண் முறையினம் முழுமையான வளர்ச்சியைப் பெற சுமார் 5000 ஆண்டுகள் ஆனது.

எல்லா கணிதத்திற்கும் ஊற்று முகப்பாய் முழு எண்கள் இருக்கிறது. இன்றைய எண் முறையினம் இந்திய அரேபிய எண் முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.

இம்முறையில் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ஆகிய எண்கள் பயன்படுத்தப் படுகிறது. இது பத்தடிமான எண் முறையினம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. பத்து என்ற பொருளுடைய ஆங்கில மொழியின் ‘டெஸிமல்’ என்ற வார்த்தை லத்தீன் மொழியின் ‘டெஸி’ என்ற சொல்லிலிருந்து பெறப்பட்டது.

> அறிவியலின் அரசி கணிதம்
> கணிதத்தின் அரசி எண் முறையினம்

பால் எர்டாஸ்
(26 மார்ச், 1913 – 20 செம்டம்பர், 1996)

இவர் புகழ் பெற்ற, முக்கியமான ஹங்கேரியக் கணித வல்லுநர் ஆவார். எர்டாஸ் நூற்றுக் கணக்கான வல்லுநர்களுடன் சேர்ந்து எண்ணியலில் மற்ற எந்த கணித வல்லுநர்களையும் மிஞ்சும் வண்ணம் ஆய்வேடுகளை வெளியிட்டுள்ளார்.

இவருடைய கணித ஆர்வம் இவருடைய மூன்று வயதிலேயே தெரிந்தது. இவரால் ஒரு மனிதன் வாழ்ந்த விநாடிகளைக் கூட கணக்கிட முடிந்தது. இவரது வாழ்க்கை ஆனது இவர் வாழ் நாளிலேயே “N என்ற எண். பால் எர்டாஸைக் குறித்த ஒரு சித்திரம்” என்ற பெயரில் ஆவணப் படமாக்கப்பட்டது.

“எண்கள் அழகானவை. அவை அழகற்றவை எனில், மற்ற எவை அழகு?” என எர்டாஸ் கூறினார்.

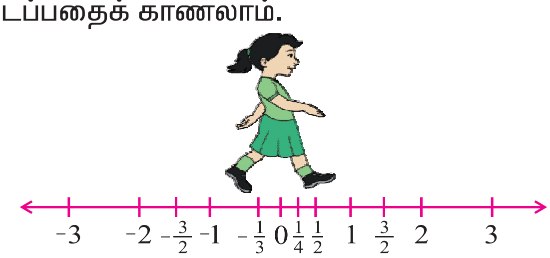
ஏழாம் வகுப்பில் நாம் இயல் எண்கள் N = {1, 2, ... }, முழு எண்கள் W = {0, 1, 2, ... }, முழுக்கள் Z = {..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ... }, விகிதமுறு எண்கள் Q மற்றும் அவற்றின் நான்கு அடிப்படைச் செயல்களைக் கற்றறிந்தோம்.

1.2 மீள் பார்வை – விகிதமுறு எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

விகிதமுறு எண்கள்

$\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் அமையும் எண்கள் விகிதமுறு எண்களாகும். இவ்வடிவத்தில் p, q ஆகியன முழுக்களாகும், மேலும் $q \neq 0$ ஆகும். $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் அமையும், $q > 0$ எனும் எண்களின் தொகுப்பு விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பு எனவும் அதனை Q எனவும் குறிப்பிடலாம். விகிதமுறு எண்களானது, இயல் எண்கள், முழு எண்கள், முழுக்கள் மற்றும் மிகை, குறை பின்னங்களை உள்ளடக்கியதாகும். கீழ்க்காணும் படத்தில் ஒரு சிறுமி எவ்வாறு எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் ஒரு மூட்டையில் சேகரிக்கிறாள் என்பதைக் காணலாம்.

விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டிலும் குறிக்கலாம். கீழ்க்காணும் படத்தில் ஒரு சிறுமி எண் கோட்டில் நடப்பதைக் காணலாம்.

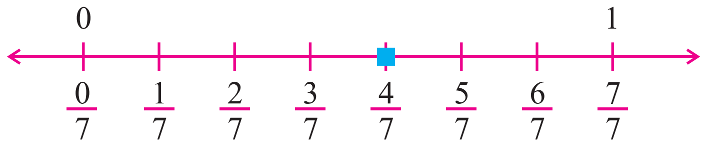


விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கும்போது, ஒவ்வொரு இடைவெளியையும் அதன் பகுதிக்குச் சமமான எண்ணிக்கையில் பிரிக்கவும். பின் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

உதாரணம்:

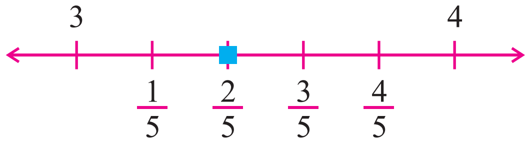
(i) $\frac{4}{7}$ என்ற எண்ணை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

$\frac{4}{7}$ என்ற எண் 0 விற்கும் 1 க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.



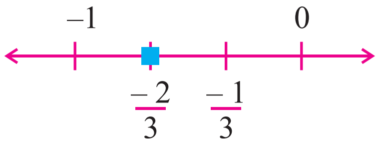
(ii) $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$

இது 3க்கும் 4க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.



(iii) $-\frac{2}{3}$

இது –1 க்கும் 0 க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.



ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும். இதன் மறுதலை உண்மையா?

1.3 விகிதமுறு எண்களின் நான்கு பண்புகள்

1.3.1 (அ) கூட்டல்

(i) அடைவுப் பண்பு

இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் கூட்டினால், கிடைக்கும் எண் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும். இதுவே 'கூட்டலின் அடைவுப் பண்பு' எனப்படும். Q ஆனது கூட்டலின் கீழ் அடைவுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதிமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ என்பதும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) $5 + \frac{1}{3} = \frac{5}{1} + \frac{1}{3} = \frac{15+1}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு

இரு விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

உதாரணம்: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \text{ ஆகும்.}$$

இடது பக்கம் = LHS
வலது பக்கம் = RHS

LHS	RHS
$= \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$	$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$
$= \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$	$= \frac{4+5}{10} = \frac{9}{10}$

$\therefore$ LHS = RHS

கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

(iii) சேர்ப்புப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம்: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ மற்றும் 2 என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + 2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4+15}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + 2 = \left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right) + 2 = \frac{7}{6} + 2 = \frac{7}{6} + \frac{2}{1} = \frac{7+12}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பினை நிறைவு செய்கிறது.

(iv) கூட்டல் சமனி

ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும் மற்றும் பூச்சியத்தையும் கூட்டினால் கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகை விகிதமுறு எண்ணே ஆகும்.

$\frac{a}{b}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} = 0 + \frac{a}{b}$.

விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல் சமனி பூச்சியம் ஆகும்.

பூச்சியம் ஒரு சிறப்பு விகிதமுறு எண்ணாகும். இதனை $0 = \frac{0}{q}, q \neq 0$ என எழுதலாம்.

உதாரணம்: (i) $\frac{2}{7} + 0 = \frac{2}{7} = 0 + \frac{2}{7}$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right) + 0 = \frac{-7}{11} = 0 + \left(\frac{-7}{11}\right)$

(v) கூட்டல் எதிர்மறை

$\left(\frac{-a}{b}\right)$ என்பது $\frac{a}{b}$ இன் கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும்.

$\frac{a}{b}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\left(\frac{-a}{b}\right)$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை $\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$ என்றவாறு காணலாம்.

உதாரணம்: (i) $\frac{3}{5}$ இன் கூட்டல் எதிர்மறை $\frac{-3}{5}$ ஆகும்.

(ii) $\frac{-3}{5}$ இன் கூட்டல் எதிர்மறை $\frac{3}{5}$ ஆகும்.

(iii) 0 இன் கூட்டல் எதிர்மறை 0 ஆகும்.

முயற்சி செய்

எண்கள்	கூட்டல்		
	அடைவுப் பண்பு	பரிமாற்றுப் பண்பு	சேர்ப்புப் பண்பு
இயல் எண்கள்			
முழு எண்கள்			ஆம்
முழுக்கள்			
விகிதமுறு எண்கள்	ஆம்		

1.3.1 (ஆ) கழித்தல்

(i) அடைவுப் பண்பு

இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் வேறுபாடு எப்பொழுதும் விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கும். ஆகவே, Q ஆனது கழித்தலின் கீழ் அடைவுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள், எனில், $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ என்பதும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) $1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு

இரு விகிதமுறு எண்களின் கழித்தல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

உதாரணம்: $\frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{2}{5}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{4}{9}-\frac{2}{5}\neq\frac{2}{5}-\frac{4}{9}$$

$$\text{LHS}=\frac{4}{9}-\frac{2}{5}=\frac{20-18}{45}=\frac{2}{45}$$

$$\text{RHS}=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}=\frac{18-20}{45}=\frac{-2}{45}$$

$$\therefore \text{LHS}\neq\text{RHS}$$

∴ கழித்தல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

நீவிர் அறிவீரா?

இரு விகிதமுறு எண்கள் சமம் எனில், அவை பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யும்.

(iii) சேர்ப்புப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் கழித்தல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)\neq\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ மற்றும் $\frac{1}{4}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

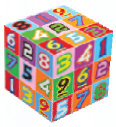
$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}-\left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} = \left(\frac{3-2}{6}\right)-\frac{1}{4} = \frac{1}{6}-\frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

∴ கழித்தல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.



முயற்சி செய்

எண்கள்	கழித்தல்		
	அடைவுப் பண்பு	பரிமாற்றுப் பண்பு	சேர்ப்புப் பண்பு
இயல் எண்கள்	இல்லை		
முழு எண்கள்			
முழுக்கள்			
விகிதமுறு எண்கள்			இல்லை

1.3.1 (இ) பெருக்கல்

(i) அடைவுப் பண்பு

இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் பலன் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணே ஆகும். எனவே Q ஆனது பெருக்கலின் கீழ் அடைவுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பது ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ என்பதும் விகிதமுறு எண் ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $\frac{1}{3}\times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) $\frac{4}{3}\times\frac{5}{9} = \frac{20}{27}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு

இரு விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன ஏதேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{-8}{11}$ என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{3}{5}\times\left(\frac{-8}{11}\right) = \left(\frac{-8}{11}\right)\times\frac{3}{5} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{LHS} = \frac{3}{5}\times\left(\frac{-8}{11}\right) = \frac{-24}{55} \qquad \text{RHS} = \frac{-8}{11}\times\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-24}{55}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

(iii) சேர்ப்புப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{-1}{4}\right)$ மற்றும் $\frac{1}{3}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\times\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\right)\right)\times\frac{1}{3}$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{12}\right) = \frac{-1}{24} \qquad \text{RHS} = \left(\frac{-1}{8}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{-1}{24}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

(iv) பெருக்கல் சமனி

ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும் 1 ஐயும் பெருக்கினால் வரும் பெருக்கல் பலன் அதே விகிதமுறு எண் ஆகும்.

‘ஒன்று’ என்பது விதிமுறு எண்களின் ‘பெருக்கல் சமனியாகும்’.

$\frac{a}{b}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\frac{a}{b}\times 1 = \frac{a}{b} = 1\times\frac{a}{b}$ ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $\frac{5}{7}\times 1 = \frac{5}{7}$

(ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)\times 1 = \frac{-3}{8}$.

முழுக்களுக்கு 1 என்பது பெருக்கல் சமனி ஆகுமா ?

(v) பூச்சியத்தின் பெருக்கல் பலன்

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் பூச்சியத்துடன் பெருக்கினால் பூச்சியம் கிடைக்கிறது.

$\frac{a}{b}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\frac{a}{b}\times 0 = 0 = 0\times\frac{a}{b}$ ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $-5\times 0 = 0$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right)\times 0 = 0$.

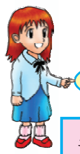
(vi) பெருக்கல் எதிர்மறை அல்லது தலைகீழி

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண் $\frac{a}{b}, (b \neq 0)$, க்கும் $\frac{c}{d}$ என்ற விகிதமுறு எண், $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ என்றவாறு இருக்கும். இந்த எண் $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ இன் பெருக்கல் எதிர்மறை அல்லது தலைகீழி ஆகும்.

$\frac{a}{b}$ என்பது விகிதமுறு எண் எனில், $\frac{b}{a}$ என்பது பெருக்கல் எதிர்மறை அல்லது தலைகீழி ஆகும்.

உதாரணம்: (i) 2 இன் பெருக்கல் தலைகீழி $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

(ii) $\left(\frac{-3}{5}\right)$ இன் பெருக்கல் எதிர்மறை $\left(\frac{-5}{3}\right)$ ஆகும்.

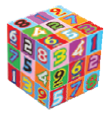


நீவிர் அறிவீரா?

i) 0 விற்கு தலைகீழி கிடையாது.
ii) 1 மற்றும் – 1 என்ற விகிதமுறு எண்களுக்கு அவ்வெண்களே தலைகீழிகளாகும்.

சிந்திக்க!

0.3 என்பது $3\frac{1}{3}$ இன் தலைகீழியா?



முயற்சி செய்

எண்கள்	பெருக்கல்		
	அடைவுப் பண்பு	பரிமாற்றுப் பண்பு	சேர்ப்புப் பண்பு
இயல் எண்கள்			
முழு எண்கள்		ஆம்	
முழுக்கள்			ஆம்
விகிதமுறு எண்கள்			

1.3.1 (ஈ) வகுத்தல்

(i) அடைவுப் பண்பு

பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பு வகுத்தலின் கீழ் அடைவுப் பண்பைப் பெற்றுள்ளது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள், மற்றும் $\frac{c}{d} \neq 0$, எனில் $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

உதாரணம்: (i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{2}{1} = 2$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு

இரு விகிதமுறு எண்களின் வகுத்தல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

$\frac{a}{b}$ மற்றும் $\frac{c}{d}$ என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள், எனில் $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{4}{5}$ மற்றும் $\frac{3}{8}$ என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{8} \neq \frac{3}{8} \div \frac{4}{5}$$

$$\text{LHS} = \frac{4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{15} \qquad \text{RHS} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{32}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

∴ வகுத்தல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

(iii) சேர்ப்புப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் வகுத்தல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) \neq \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f}$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{3}{4}$, 5 மற்றும் $\frac{1}{2}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right)$$ ஆகும்.

$$\text{LHS} = \left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{10}$$

$$\text{RHS} = \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \div \left(\frac{5}{1} \times \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{4} \div 10 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

∴ வகுத்தல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

முயற்சி செய்

எண்கள்	வகுத்தல்		
	அடைவுப் பண்பு	பரிமாற்றுப் பண்பு	சேர்ப்புப் பண்பு
இயல் எண்கள்	இல்லை		
முழு எண்கள்			
முழுக்கள்			
விகிதமுறு எண்கள்		இல்லை	

1.3.1 (உ) பங்கீட்டுப் பண்பு

(i) கூட்டலின் மீது பெருக்கலின் பங்கீட்டுப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல், கூட்டலின் மீதான பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$ என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்,

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{20+27}{45}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{47}{45} = \frac{94}{135}$$

$$\text{RHS} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{8}{27}+\frac{2}{5} = \frac{40+54}{135} = \frac{94}{135}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ கூட்டலின் மீது பெருக்கல் பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

(ii) கழித்தலின் மீது பெருக்கலின் பங்கீட்டுப் பண்பு

விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல், கழித்தலின் மீதான பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ மற்றும் $\frac{e}{f}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$ ஆகும்.

உதாரணம்: $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ மற்றும் $\frac{1}{2}$, என்பன ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் எனில்,

$$\frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}$$

$$\text{LHS} = \frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\left(\frac{8-5}{10}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{70}$$

$$\text{RHS} = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{12}{35}-\frac{3}{14} = \frac{24-15}{70} = \frac{9}{70}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ கழித்தலின் மீது பெருக்கல் பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

பயிற்சி 1.1

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

i) விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல் சமனி .... ஆகும்.

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) 2

ii) $\frac{-3}{5}$ என்ற எண்ணின் கூட்டல் எதிர்மறை .... ஆகும்.

(A) $\frac{-3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{-5}{3}$

iii) $\frac{-5}{13}$ இன் பெருக்கல் தலைகீழ் .... ஆகும்.

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{-13}{5}$ (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{-5}{13}$

iv) – 7 இன் பெருக்கல் எதிர்மறை .... ஆகும்.

(A) 7 (B) $\frac{1}{7}$ (C) – 7 (D) $\frac{-1}{7}$

v) .... என்ற எண்ணிற்கு தலைகீழியே இல்லை.

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) $\frac{1}{4}$

2. பின்வருவனவற்றில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள கூட்டல் பண்புகளை எழுதுக.

(i) $\left(\frac{-3}{7}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\left(\frac{-3}{7}\right)$ (ii) $\frac{4}{9}+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{9}+\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}$

(iii) $8+\frac{7}{10}=\frac{7}{10}+8$ (iv) $\left(\frac{-7}{15}\right)+0=\frac{-7}{15}=0+\left(\frac{-7}{15}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right)=0$

3. பின்வருவனவற்றில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள பெருக்கல் பண்புகளை எழுதுக.

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)\times 1=\frac{-3}{4}=1\times\left(\frac{-3}{4}\right)$

(iii) $\left(\frac{-17}{28}\right)\times\left(\frac{-28}{17}\right)=1$ (iv) $\frac{1}{5}\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{5}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{4}{3}$

(v) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{7}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}$

4. கீழே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்கிறதா என சோதிக்கவும்.

(i) 4 மற்றும் $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{4}$ மற்றும் $\frac{-2}{7}$

5. கீழே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறதா என சோதிக்கவும்.

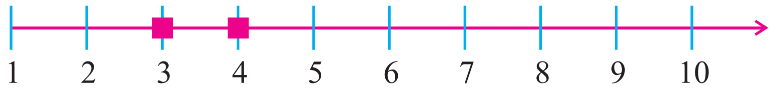
(i) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ மற்றும் $\frac{-3}{7}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{-4}{5}$ மற்றும் $\frac{9}{10}$

6. பெருக்கலின் பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்தி சுருக்கவும்:

(i) $\frac{-5}{4}\times\left(\frac{8}{9}+\frac{5}{7}\right)$ (ii) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

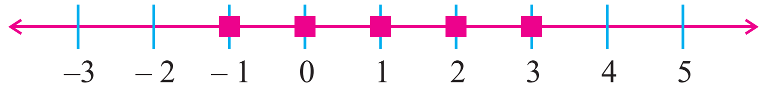
1.3.2 இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்களைக் கண்டறிதல்

2 மற்றும் 5 க்கும் இடையேயுள்ள இயல் எண்களைக் கூற முடியுமா?



அவை 3 மற்றும் 4 ஆகும்.

– 2 மற்றும் 4 க்கும் இடையேயுள்ள முழுக்களைக் கூற முடியுமா?



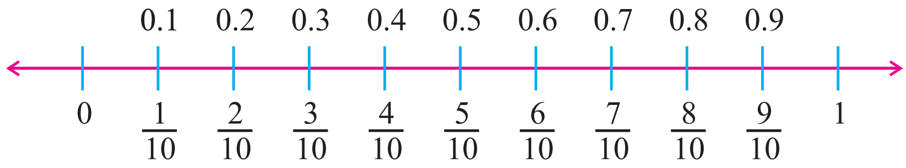
அவை – 1, 0, 1, 2, 3 ஆகும்.

எனவே இரு இயல் எண்கள் மற்றும் முழுக்களுக்கு இடையே குறிப்பிடத் தகுந்த முழுக்களைக் காணலாம்.

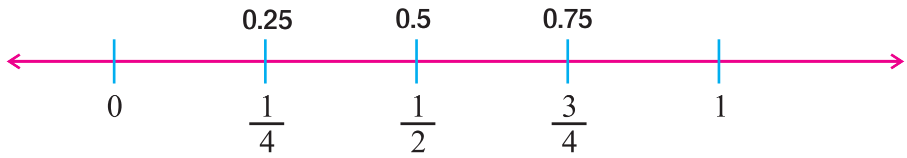
இப்பொழுது, 1 க்கும் 2 க்கும் இடையேயுள்ள முழுக்களை கூற இயலுமா?

இயலாது.

ஆனால் இரு முழுக்களுக்கு இடையே நாம் விகிதமுறு எண்களைக் காணலாம். 0 க்கும் 1 க்கும் இடையே $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots$ போன்ற எண்களைக் காணலாம். இவற்றை 0.1, 0.2, 0.3 என எழுதலாம்.

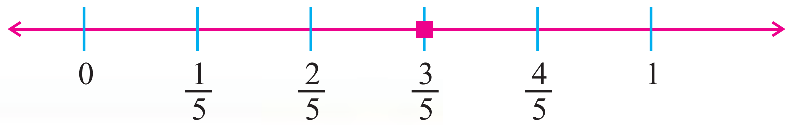


இது போலவே, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ போன்ற எண்கள் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையே உள்ளதை நாம் அறியலாம். இந்த விகிதமுறு எண்களை நாம் 0.25, 0.5, 0.75 என எழுதலாம்.



இப்பொழுது $\frac{2}{5}$ மற்றும் $\frac{4}{5}$ ஐ எடுத்துக் கொள்க. இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் விகிதமுறு எண்களைக் கூற இயலுமா?

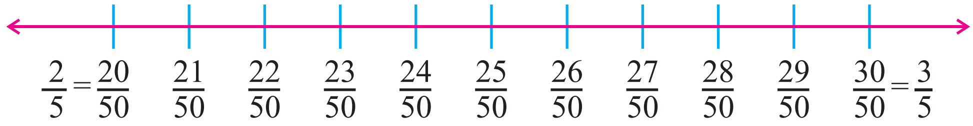
இயலும். $\frac{3}{5}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணைக் கூறலாம்.



இதேபோன்று, $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{4}{5}$ போன்ற எண்கள் 0விற்கும் 1ற்கும் இடையே உள்ளன.

$\frac{2}{5}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$க்கும் இடையே மேலும் பல விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்க இயலுமா?

இயலும். நாம் $\frac{2}{5}$ ஐ $\frac{20}{50}$ எனவும், $\frac{3}{5}$ ஐ $\frac{30}{50}$ எனவும் எழுதினால், மேலும் பல விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.



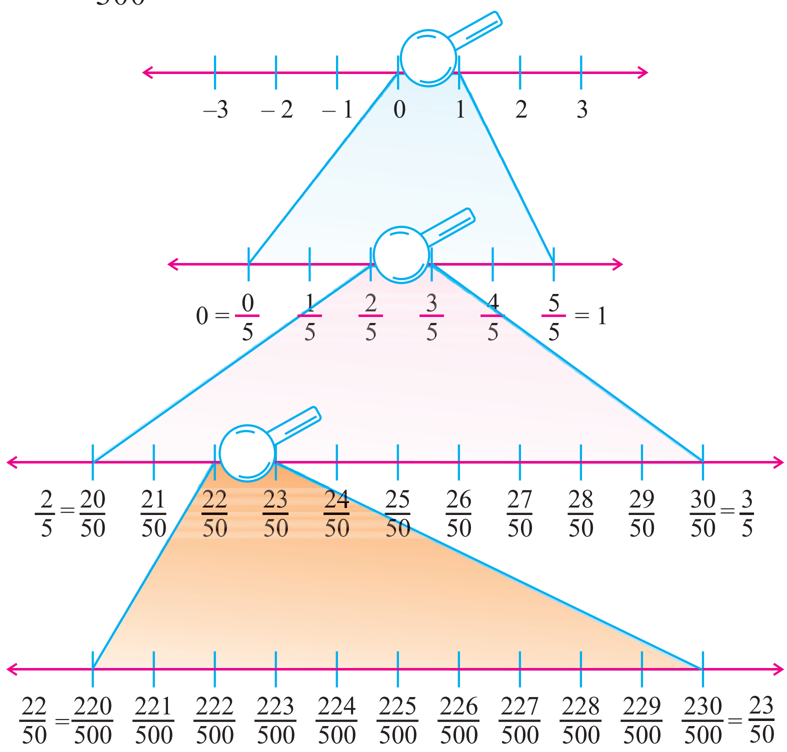
$\frac{21}{50}, \frac{22}{50}, \frac{23}{50}, \frac{24}{50}, \frac{25}{50}, \frac{26}{50}, \frac{27}{50}, \frac{28}{50}$ மற்றும் $\frac{29}{50}$ போன்ற ஒன்பது விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$\frac{22}{50}$ மற்றும் $\frac{23}{50}$,க்கு இடையே மேலும் பல விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்க, நாம் $\frac{22}{50}$ ஐ $\frac{220}{500}$ எனவும், $\frac{23}{50}$ ஐ $\frac{230}{500}$ எனவும் எழுத வேண்டும். பின் நாம் $\frac{221}{500}, \frac{222}{500}, \frac{223}{500}, \frac{224}{500}, \frac{225}{500}, \frac{226}{500}, \frac{227}{500}, \frac{228}{500}$ மற்றும் $\frac{229}{500}$ போன்ற ஒன்பது விகிதமுறு எண்களைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

இதனை நாம் படத்தில் உள்ள எண் கோட்டின் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

உருப்பெருக்கி மூலம் எண் கோட்டில் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையே உள்ள பகுதியை உற்று கவனிக்கவும்.

இதே போன்று நாம் பல விகிதமுறு எண்களை 1 லிருந்து 2 வரை, 2 லிருந்து 3 வரை கண்டறியலாம்.



இவ்வாறு தொடரும்போது, இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் இடையே நாம் மேன்மேலும் பல விகிதமுறு எண்களைக் கண்டறிய முடியும் என அறியலாம். இதிலிருந்து இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்தி அதிகம் எனப் புலப்படுகிறது.

ஆகவே இயல் எண்கள் மற்றும் முழுக்களைப் போல் அல்லாமல், கொடுக்கப்பட்ட இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையிலான விகிதமுறு எண்களைக் கண்டறிதல்

நாம் இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையிலான விகிதமுறு எண்களை இரு முறைகளில் கண்டறியலாம்.

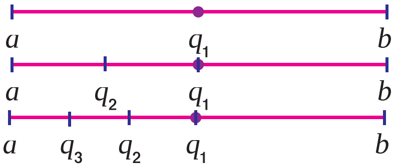
1. சூத்திர முறை

'a' மற்றும் 'b' என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் என்க. நாம் 'a' க்கும் 'b' க்கும் இடையே $q_1, q_2, q_3, \ldots$ போன்ற பல விகிதமுறு எண்களைப் பின்வருமாறு கண்டறியலாம்.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(a+q_1)$$

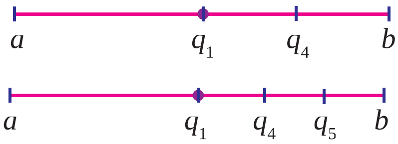
$$q_3 = \frac{1}{2}(a+q_2), \ \ldots..$$

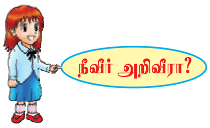


q_2, q_3 என்ற எண்கள் q_1 க்கு இடப்பக்கம் அமைந்துள்ளன. இதேபோன்று q_4, q_5 ஆகிய விகிதமுறு எண்கள் q_1 க்கு வலப்பக்கம் அமைந்துள்ளதைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

$$q_4 = \frac{1}{2}(q_1+b)$$

$$q_5 = \frac{1}{2}(q_4+b), \ \ldots.$$





இரு எண்களின் சராசரி எப்பொழுதும் அந்த எண்களுக்கு இடையே அமைந்திருக்கும்.

2. மாற்று முறை

'a' மற்றும் 'b' என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் என்க.

(i) பின்னங்களின் பகுதிகளை சமமாக இருக்குமாறு மீ.சி.ம.(LCM) மூலம் மாற்றவும். தொகுதிகளுக்கிடையே எண்களைக் காண இயலுமாயின் இவை இரண்டுக்கும் இடையே விகிதமுறு எண் உள்ளது.

(ii) தொகுதிகளுக்கிடையே எண் ஏதும் இல்லையெனில், தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை 10 ஆல் பெருக்கி அவற்றிற்கிடையேயான விகிதமுறு எண்களைப் பெறலாம். மேலும் பல விகிதமுறு எண்களைப் பெறுவதற்கு 100, 1000 ... என்ற எண்களால் பெருக்க வேண்டும்.

வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தினால் வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்களை a க்கும் b க்கும் இடையே காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

சூத்திர முறை:

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

q_1 என்பது $\frac{3}{4}$ க்கும் $\frac{4}{5}$ க்கும் இடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண் என்க.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15+16}{20}\right)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{31}{20}\right) = \frac{31}{40}$$

அந்த விகிதமுறு எண் $\frac{31}{40}$ ஆகும்.

மாற்று முறை:

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

a ஐயும் b ஐயும் முறையே $\frac{3}{4}\times\frac{5}{5} = \frac{15}{20}$ மற்றும் $\frac{4}{5}\times\frac{4}{4} = \frac{16}{20}$ என எழுதலாம்.

நாம் $\frac{15}{20}$ க்கும் $\frac{16}{20}$, இடையில் உள்ள விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்க தொகுதியையும் பகுதியையும் 10ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

$$\frac{15}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{150}{200} \quad , \quad \frac{16}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{160}{200}$$

$\therefore$ $\frac{150}{200}$ மற்றும் $\frac{160}{200}$ க்கும் இடையில் உள்ள விகிதமுறு எண்கள்

$\frac{151}{200}, \frac{152}{200}, \frac{153}{200}, \frac{154}{200}, \frac{155}{200}, \frac{156}{200}, \frac{157}{200}, \frac{158}{200}$ மற்றும் $\frac{159}{200}$ ஆகியனவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\frac{-3}{5}, \frac{1}{2}$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: $a = \frac{-3}{5}, b = \frac{1}{2}$

q_1 மற்றும் q_2 என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் என்க.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-6+5}{10}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{10}\right) = \frac{-1}{20}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(a+q_1) = = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\left(\frac{-1}{20}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12+(-1)}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12-1}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-13}{20}\right) = \frac{-13}{40}$$

$\frac{-1}{20}$ மற்றும் $\frac{-13}{40}$ ஆகியன இரு விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

குறிப்பு: இந்த விகிதமுறு எண்களை நாம் $\frac{-3}{5} < \frac{-13}{40} < \frac{-1}{20} < \frac{1}{2}$ என எழுதலாம்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்க்கண்ட விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

   (i) $\frac{4}{3}, \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-2}{7}, \frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{11}, \frac{7}{8}$ (iv) $\frac{7}{4}, \frac{8}{3}$

2. கீழ்க்கண்ட விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே உள்ள இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

   (i) $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{5}, \frac{9}{11}$ (iii) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}$ (iv) $\frac{-1}{6}, \frac{1}{3}$

3. கீழ்க்கண்ட விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே உள்ள மூன்று விகிதமுறு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

   (i) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{-1}{3}, \frac{3}{2}$ (iv) $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}$

1.4 மூவடைப்புக் கொண்ட எண்கோவைகளின் சுருக்கம்

நாம் சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போம்.

(i) $2 + 3 = 5$ (ii) $5 - 10 = -5$

(iii) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ (iv) $4 - 2 \times \frac{1}{2} = ?$

உதாரணம் (i), (ii) மற்றும் (iii) ஆகியவற்றில் ஒரே ஒரு செயலி உள்ளது. ஆனால் உதாரணம் (iv) இல் நாம் இரு செயலிகளைக் காண்கிறோம்.

உதாரணம் (iv) இல் எந்த செயலியை முதலில் செய்ய வேண்டும் என உங்களுக்குத் தெரியுமா?

உதாரணம் (iv) இல் சில விதிமுறைகளைப் பயன்படுத்தாவிடில் நமக்கு பல்வேறு தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

உதாரணமாக, (i) $(4-2) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$,

(ii) $4 - \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$ என்ற இரு தீர்வுகள் கிடைக்கிறது.

எனவே குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, செயலிகளைப் பயன்படுத்தும் போது சில விதிமுறைகளைப் பின்பற்ற வேண்டும். செயலிகளை இடப்புறமிருந்து வலப்புறமாக வரிசைக்கிரமமாக 'BODMAS' என்ற முறையில் பயன்படுத்தலாம்.

B – அடைப்பு, O – இன், D – வகுத்தல், M – பெருக்கல், A – கூட்டல், S – கழித்தல்

குறிப்பு: அந்த வள்ளல் பெயர் கூட கர்ணன் தானே. இந்த அமைப்புமூலம் அ – அடைப்பு, வ – வகுத்தல், பெ – பெருக்கல், கூ – கூட்டல், க– கழித்தல் எனச் சுருக்கமாக நினைவிற் கொள்ளலாம்.

தொகுப்புக் குறியீடுகள்	பெயர்
---	மேற்கோட்டு அடைப்பு (வின்குலம்)
( )	அடைப்புக் குறியீடு
{ }	கண அடைப்பு
[ ]	சதுர அடைப்பு

‘இன்’ அல்லது ‘இல்’ அல்லது ‘மடங்கு’ (of) என்ற செயலி

சில நேரங்களில் ‘3 இன் இரு மடங்கு’, ‘20 இல் நான்கில் ஒரு பங்கு’, ‘10 இல் பாதி’ போன்ற சொற்றொடர்களைக் கொண்ட கோவைகளைக் காண நேரிடுகிறது.

இவற்றில் ‘இன்’ அல்லது ‘இல்’ அல்லது ‘மடங்கு’ என்பது ‘பெருக்குதல்’ என்ற செயலியைக் குறிக்கிறது.

உதாரணமாக, (i) 3 இன் இரு மடங்கை 2×3,

(ii) 20 இல் நான்கில் ஒரு பங்கை $\frac{1}{4} \times 20$,

(iii) 10 இல் பாதியை $\frac{1}{2} \times 10$ என எழுதலாம்.

எனவே, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கணித அடைப்புகளைப் பயன்படுத்தும்பொழுது நாம் முதலில், உள் அடைப்பில் உள்ள செயலிகளை முடித்த பின் அவ்வடைப்பை நீக்க வேண்டும். தொடர்ந்து அதனையடுத்து உள்ள உள்ளடைப்பிற்கு இம்முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

சுருக்குக: $\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{8}{15}$

தீர்வு

$$\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{8}{15} = \left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{8}{15}$$

$$= \left(\frac{6}{3}\times\frac{8}{15}\right) \text{ (அடைப்பு முதலில் சுருக்கப்பட்டுள்ளது)}$$

$$= 2\times\frac{8}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

சுருக்குக: $5\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ இன் $\frac{8}{9}$.

தீர்வு

$$5\frac{1}{2}+\frac{3}{4} \text{ இன் } \frac{8}{9} = \frac{11}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}$$

$$= \frac{11}{2}+\frac{24}{36} = \frac{11}{2}+\frac{2}{3} \text{ (‘இன்’ என்பது முதலில் சுருக்கப்பட்டுள்ளது)}$$

$$= \frac{33+4}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

சுருக்குக: $\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{4}\right)+\left[\frac{3}{5}\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]$

தீர்வு

$$= \left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{4}\right)+\left[\frac{3}{5}\div\left(\frac{2-1}{4}\right)\right]$$ (உள்ளேயுள்ள அடைப்பு முதலில் சுருக்கப்பட்டுள்ளது)

$$= \left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{4}\right)+\left[\frac{3}{5}\div\frac{1}{4}\right] = \left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{4}\right)+\left[\frac{3}{5}\times 4\right] = \frac{-5}{12}+\frac{12}{5}$$

$$= \frac{-25+144}{60} = \frac{119}{60} = 1\frac{59}{60}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

சுருக்குக: $\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\}$

தீர்வு

$$\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\frac{9-20}{24}\right\}$$

$$= \frac{2}{7}-\left\{\frac{-11}{24}\right\} = \frac{2}{7}+\frac{11}{24} = \frac{48+77}{168} = \frac{125}{168}.$$

பயிற்சி 1.3

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) $2\times\frac{5}{3}$ = ...

(A) $\frac{10}{3}$ (B) $2\frac{5}{6}$ (C) $\frac{10}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}$ = ...

(A) $\frac{14}{20}$ (B) $\frac{8}{35}$ (C) $\frac{20}{14}$ (D) $\frac{35}{8}$

(iii) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}$ = ...

(A) $\frac{10}{23}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{38}{45}$ (D) $\frac{6}{13}$

(iv) $\frac{1}{5}\div 2\frac{1}{2}$ = ...

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{10}{7}$ (D) $\frac{3}{10}$

(v) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. சுருக்குக:

(i) $\frac{11}{12}\div\left(\frac{5}{9}\times\frac{18}{25}\right)$

(ii) $\left(2\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}\right)\div\left(1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$

(iii) $\frac{15}{16}$ இல் $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{10}{11}$

(iv) $\frac{9}{8}\div\frac{3}{5}$ இல் $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}\div\left\{\frac{1}{5}\right.$ இல் $\left.\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right]-1\right\}$

(vi) $\left(1\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{7}\right)-\left(4\frac{3}{8}\div 5\frac{3}{5}\right)$

(vii) $\left(\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}\right.$ இல் $\left.1\frac{7}{11}\right)\div 1\frac{1}{6}$

(viii) $\left(\frac{-1}{3}\right)-\left\{1\div\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\right)+8-\left[5-\overline{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right]\right\}$

1.5 அடுக்குகள் : எண்களை அடுக்குக் குறி வடிவில் முழுக்களின் படியாக எழுதுதல்

இப்பகுதியில், எண்களை எவ்வாறு அடுக்குக் குறி வடிவில் எழுதலாம் என்பதைப் பற்றி நாம் படிக்க இருக்கிறோம்.

$2\times2\times2\times2$ என்பதை 2^4 என எழுதலாம். $2^4 = 2\times2\times2\times2$ என்ற சமன்பாட்டில் 2 என்பது 'அடி' என்றும் 4 என்பதை "அடுக்கு" அல்லது "அடுக்கெண்" என்றும் கூறலாம்.

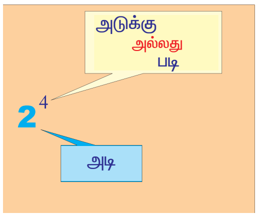
பொதுவாக a^n என்பது 'a' யை 'n' தடவை பெருக்குவதால் கிடைக்கும் பெருக்கற் பலன். இதில் 'a' என்பது மெய்யெண் மற்றும் 'n' ஆனது மிகை முழு எண் ஆகும். 'a' யை 'அடி' என்றும் 'n' ஐ 'அடுக்கெண்' அல்லது 'அடுக்கு' என அழைக்கிறோம்.

வரையறை

'n' என்பது மிகை முழுவாக இருப்பின் x^n என்பது $\underbrace{x.x.x.....x}_{n \text{ காரணிகள்}}$ ஆகும்.

அதாவது, $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots\ldots \times x}_{n \text{ தடவைகள்}}$ (இங்கு $n > 1$)

குறிப்பு : $x^1 = x$.



எப்படி வாசிப்பது?

7^3 என்பதை வாசிக்கும் போது 7ன் படி மூன்று அல்லது 7ன் முப்படி என வாசிக்க வேண்டும்.

இங்கு 7 ஐ அடி என்றும், 3 ஐ அடுக்கு அல்லது படி அல்லது அடுக்கு எண் என்றும் அழைக்கிறோம்.

இதை மேலும் விரிவாக விளக்க கீழ்க்காணும் அட்டவணையை நோக்குக :

வ. எண்.	எண்ணின் தொடர் பெருக்கற் பலன்	அடுக்குக்குறி அமைப்பு	அடி	அடுக்கெண் அல்லது படி அல்லது அடுக்கு
1	$2\times2\times2\times2$	2^4	2	4
2	$(-4)\times(-4)\times(-4)$	$(-4)^3$	-4	3
3	$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\frac{2}{3}$	6
4	$a\times a\times a\times\ldots$ m தடவைகள்	a^m	a	m

எடுத்துக்காட்டு 1.7

கீழ்க்கண்ட எண்களை இரண்டின் படி ஆக எழுதுக.

(i) 2 (ii) 8 (iii) 32 (iv) 128 (v) 256

தீர்வு:

(i) $2 = 2^1$

(ii) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(iii) $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

(iv) $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

(v) $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

1.6. அடுக்குக்குறி விதிகள்

மெய்யெண்களின் மிகை அடுக்குகளின் வரையறையைக் கொண்டு நாம், கீழ்க்காணும் "அடுக்குக் குறி விதிகளின்" பண்புகளைப் பற்றிக் காணலாம்.

(i) பெருக்கல் விதி

விதி 1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$, இங்கு 'a' என்பது மெய்யெண் மற்றும் m, n என்பன மிகை முழு எண்கள்.

உதாரணம்

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ (மேற்கண்ட விதிப்படி $a^m \times a^n = a^{m+n}$, இங்கு $a = \frac{2}{3}$, $m = 3$, $n = 4$)

(ii) வகுத்தல் விதி

விதி 2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் m, n ஆனது மிகை முழு எண்கள், இங்கு $m > n$ ஆகும்.

உதாரணம்

$\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$ (மேற்கூறிய விதிப்படி $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, இங்கு $a = 6$, $m = 4$, $n = 2$ ஆகும்)

(iii) அடுக்கு விதி

விதி 3	$(a^m)^n = a^{m \times n}$, இங்கு m மற்றும் n என்பன மிகை முழு எண்கள் ஆகும்.

முயற்சி செய்

$a^{(x-y)z} \times a^{(y-z)x} \times a^{(z-x)y} = 1$ என நிறுவுக

உதாரணம்

$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$

இதே விடையை இரு அடுக்குகளையும் பெருக்குவதன் மூலம் பெற முடியும்.

அதாவது, $(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$.

(iv) பூச்சியத்தை அடுக்காகக் கொண்ட எண்

$m \neq o$, எனில்

$m^3 \div m^3 = m^{3-3} = m^0$ (2ம் விதிப்படி);

மற்றொரு முறை :

$m^3 \div m^3 = \frac{m^3}{m^3} = \frac{m \times m \times m}{m \times m \times m} = 1$

மேற்கண்ட இரண்டு முறைப்படி, $m^3 \div m^3 = m^0 = 1$.

மேற்கண்ட உதாரணத்திலிருந்து, நான்காம் அடுக்கு விதியைப் பெறலாம்.

விதி 4	'a' என்பது பூச்சியம் தவிர வேறு எந்த விகிதமுறு எண்ணாக இருப்பின், $a^0 = 1$ ஆகும்.

உதாரணம்

(i) $2^0 = 1$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ (iii) $25^0 = 1$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$ (v) $(-100)^0 = 1$

(v) தலைகீழ் விதி

ஓர் எண்ணின் குறை அடுக்கு எண்ணைக் காண அந்த எண்ணின் மிகை அடுக்கு எண்ணின் நேர்மாறான பெருக்கற் பலன் காண வேண்டும்.

உதாரணம்

(i) $4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{4\times4\times4\times4} = \frac{1}{256}$

(ii) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{125}$

(iii) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{100}$

3 ன் தலைகீழி $\frac{1}{3} = \frac{3^0}{3^1}$

$\therefore \frac{1}{3} = \frac{3^0}{3^1} = 3^{0-1} = 3^{-1}$.

இதே போல், 6^2 ன் தலைகீழி $= \frac{1}{6^2} = \frac{6^0}{6^2} = 6^{0-2} = 6^{-2}$

மேலும், $\left(\frac{8}{3}\right)^3$ ன் தலைகீழி $\frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^3} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}$ ஆகும்.

மேற்கண்ட உதாரணத்திலிருந்து நாம் ஐந்தாம் அடுக்குக்குறி விதியினை எழுத முடியும்.

விதி 5	'a' என்பது ஓர் மெய் எண்ணாகவும், 'm' ஆனது முழு எண் ஆகவும் இருப்பின் $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ஆகும்.

(vi) ஒரே அடுக்கு எண்களைக் கொண்ட எண்களின் பெருக்கல்

கீழ்க்கண்ட சுருக்கு முறைகளைக் காண்க:

(i) $4^3\times7^3 = (4\times4\times4)\times(7\times7\times7) = (4\times7)\times(4\times7)\times(4\times7)$

$= (4\times7)^3$

(ii) $5^{-3}\times4^{-3} = \frac{1}{5^3}\times\frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$= \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{20}\right)^3$

$= 20^{-3} = (5\times4)^{-3}$

(iii) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)^2$

பொதுவாக, a, b என்பவை ஏதேனும் இரு முழு எண்கள் எனில்

$$a^2 \times b^2 = (a\times b)^2 = (ab)^2$$

இதன் மூலம் நமக்குக் கிடைப்பது அடுக்குகளின் பெருக்கல் விதி ஆகும்.

$(a\times a\times a\times \ldots.\text{m முறை})\times(b\times b\times b\times \ldots..m\text{ முறை}) = (ab\times ab\times ab\times \ldots\ldots m\text{ முறை}) = (ab)^m$

அதாவது, $a^m \times b^m = (ab)^m$

விதி 6	$a^m \times b^m = (ab)^m$, இங்கு a, b என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் m என்பது முழு எண் ஆகும்.

உதாரணம்

(i) $3^x \times 4^x = (3\times 4)^x = 12^x$

(ii) $7^2 \times 2^2 = (7\times 2)^2 = 14^2 = 196$

(vii) அடுக்குகளின் ஈவு விதி

கீழ்க்கண்ட உதாரணங்களின் சுருக்கு முறைகளைக் காண்போம் :

(i) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{16}{9} = \frac{4^2}{3^2}$

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3^2}{5^2}\right)} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

$= \frac{5}{3}\times\frac{5}{3} = \frac{5\times 5}{3\times 3} = \frac{5^2}{3^2} = 5^2 \times \frac{1}{3^2} = 5^2 \text{ x } 3^{-2} = \frac{1}{5^{-2}}\times 3^{-2}$

$= \frac{3^{-2}}{5^{-2}}.$

எனவே $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ஐ எழுதும் போது $\frac{a^2}{b^2}$ என எழுதலாம்.

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots.m\text{ முறைகள்}\right) = \frac{a\times a\times a\ldots..m\text{ முறைகள்}}{b\times b\times b\times\ldots.m\text{ முறைகள்}}$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

விதி 7	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, இங்கு $b \neq 0$, மற்றும் a , b என்பன மெய்யெண்கள், m ஆனது முழு எண் ஆகும்.

உதாரணம்

(i) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7}$ (ii) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$ (iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

சுருக்குக :

(i) $2^5 \times 2^3$ (ii) $10^9 \div 10^6$ (iii) $(x^0)^4$ (iv) $(2^3)^0$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (vi) $(2^5)^2$ (vii) $(2 \times 3)^4$

(viii) $2^p = 32$ எனில், p ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

(ii) $10^9 \div 10^6 = 10^{9-6} = 10^3$

(iii) $(x^0)^4 = (1)^4 = 1$ $[\because a^0 = 1]$

(iv) $(2^3)^0 = 8^0 = 1$ $[\because a^0 = 1]$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$

(vi) $(2^5)^2 = 2^{5\times 2} = 2^{10} = 1024$

(vii) $(2 \times 3)^4 = 6^4 = 1296$

(அல்லது) $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$

(viii) $2^p = 32$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதனை $2^p = 2^5$ என எழுதலாம்

எனவே $p = 5$ (இங்கு அடிகள் சமமானதால் அடுக்குகளும் சமமாகும்)

பகாக்காரணிப் படுத்தல்

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

எடுத்துக்காட்டு 1.9

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $3^4 \times 3^{-3}$ (ii) $\frac{1}{3^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) 10^{-3} (v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0 \times 3$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$ (viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{3}{8}\right)^4 \div \left(\frac{3}{8}\right)^9$

தீர்வு

(i) $3^4 \times 3^{-3} = 3^{4+(-3)} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

(ii) $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

(iv) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

(v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0 \times 3 = 1 \times 3 = 3$ $\left[\because \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1\right]$

(vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

(viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{3}{8}\right)^4 \div \left(\frac{3}{8}\right)^9 = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{5+4}}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^9}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = 1$

(அல்லது) $\left(\frac{3}{8}\right)^{9-9} = \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

16^{-2} ஐ நான்கின் அடி கொண்ட அடுக்காக எழுதுக.

தீர்வு

$16 = 4^2$ என்பது நாம் அறிந்ததே

எனவே, $16^{-2} = (4^2)^{-2}$

$= 4^{2\times -2}$

$= 4^{-4}$

எடுத்துக்காட்டு 1.11

சுருக்குக :

(i) $(2^3)^{-2} \times (3^2)^2$ (ii) $\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2}$

தீர்வு

(i) $(2^3)^{-2} \times (3^2)^2 = 2^{(3\times -2)} \times 3^{(2\times 2)}$

$= 2^{-6} \times 3^4 = \frac{1}{2^6} \times 3^4 = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$

(ii) $\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2} = \frac{2^{2\times 3}}{3^{2\times 2}} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

தீர்க்க :

(i) $12^x = 144$ (ii) $\left(\frac{2}{8}\right)^{2x} \times \left(\frac{2}{8}\right)^x = \left(\frac{2}{8}\right)^6$

தீர்வு

(i) $12^x = 144$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$12^x = 12^2$

$\therefore x = 2$ ($\because$ இங்கு அடிகள் இரண்டும் சம எண்கள்)

(ii) $\left(\frac{2}{8}\right)^{2x} \times \left(\frac{2}{8}\right)^x = \left(\frac{2}{8}\right)^6$

$\left(\frac{2}{8}\right)^{2x+x} = \left(\frac{2}{8}\right)^6$ ($\because$ இங்கு அடிகள் இரண்டும் சம எண்கள்)

$2x + x = 6$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3} = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

சுருக்குக: $\dfrac{(3^3)^{-2}\times(2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2}\times3^{-4}\times4^{-2}}$

தீர்வு

$$\frac{(3^3)^{-2}\times(2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2}\times3^{-4}\times4^{-2}} = \frac{3^{-6}\times2^{-6}}{2^{-8}\times3^{-4}\times4^{-2}}$$

$$= 3^{-6+4}\times2^{-6+8}\times4^2$$

$$= 3^{-2}\times2^2\times4^2$$

$$= \frac{1}{3^2}\times4\times16 = \frac{4\times16}{9}$$

$$= \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$$

பயிற்சி 1.4

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

(i) $a^m\times a^n$

(A) a^m+a^n (B) a^{m-n} (C) a^{m+n} (D) a^{mn}

(ii) p^0 =

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) p

(iii) 10^2 இல் அடுக்கு

(A) 2 (B) 1 (C) 10 (D) 100

(iv) 6^{-1} =

(A) 6 (B) – 1 (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

(v) 2^{-4} ன் பெருக்கல் தலைகீழி

(A) 2 (B) 4 (C) 2^4 (D) – 4

(vi) $(-2)^{-5}\times(-2)^6$ =

(A) – 2 (B) 2 (C) – 5 (D) 6

(vii) $(-2)^{-2}$ =

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{-1}{4}$

(viii) $(2^0+4^{-1})\times2^2$ =

(A) 2 (B) 5 (C) 4 (D) 3

(ix) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ =

(A) 3 (B) 3^4 (C) 1 (D) 3^{-4}

(x) $(-1)^{50}$ =

(A) – 1 (B) 50 (C) – 50 (D) 1

2. சுருக்குக:

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$ (v) $(3^{-7} \div 3^{10}) \times 3^{-5}$ (vi) $\frac{2^6 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^7}{2^8 \times 3^6}$

(vii) $y^{a-b} \times y^{b-c} \times y^{c-a}$ (viii) $(4p)^3 \times (2p)^2 \times p^4$ (ix) $9^{5/2} - 3 \times 5^0 - \left(\frac{1}{81}\right)^{-1/2}$

(x) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 3 \times 8^{2/3} \times 4^0 + \left(\frac{9}{16}\right)^{-1/2}$

3. மதிப்புக் காண்க:

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^2$ (vi) $7^{-20} - 7^{-21}$.

4. கீழ்க்கண்டவற்றில் m இன் மதிப்பு காண்க:

(i) $5^m \div 5^{-3} = 5^5$ (ii) $4^m = 64$ (iii) $8^{m-3} = 1$

(iv) $(a^3)^m = a^9$ (v) $(5^m)^2 \times (25)^3 \times 125^2 = 1$ (vi) $2m = (8)^{\frac{1}{3}} \div (2^3)^{2/3}$

5. (a) $2^x = 16$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க:

(i) x (ii) $2^{\frac{x}{2}}$ (iii) 2^{2x} (iv) 2^{x+2} (v) $\sqrt{2^{-x}}$

(b) $3^x = 81$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க:

(i) x (ii) 3^{x+3} (iii) $3^{x/2}$ (iv) 3^{2x} (v) 3^{x-6}

6. நிறுவுக : (i) $\frac{3^{x+1}}{3^{x(x+1)}} \times \left(\frac{3^x}{3}\right)^{x+1} = 1$, (ii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \cdot \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \cdot \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m} = 1$

1.7 வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், கனங்கள் மற்றும் கன மூலங்கள்

1.7.1 வர்க்கங்கள்

ஓர் எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் எண் அவ்வெண்ணின் **வர்க்கம்** எனப்படும். இதனை அவ்வெண்ணின் அடுக்கை அல்லது படியை ‘2’ ஆக உயர்த்தி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : (i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $5 \times 5 = 5^2 = 25$.

எடுத்துக்காட்டு (ii) ல், 5^2 என்பதை 5இன் அடுக்கு (அல்லது) படி 2 அல்லது 5ன் இருபடி எனவும் அழைக்கலாம். 25 ஆனது 5இன் வர்க்கம் ஆகும்.

இதேபோல் 49 மற்றும் 81 ஆனது முறையே 7 மற்றும் 9 இன் வர்க்கங்கள் ஆகும். இப்பாடப் பிரிவில், வர்க்கங்களைக் கண்டுபிடிக்கும் சில முறைகளைப் பற்றி அறிய உள்ளோம்.

முழு வர்க்கம்

1, 4, 9, 16, 25, ⋯ ஆகிய எண்களை முழு வர்க்கங்கள் அல்லது வர்க்கங்கள் என கூறலாம். ஏனெனில் $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$.

ஓர் எண் முழு வர்க்கம் எனில் அவ்வெண் ஒரு எண்ணின் வர்க்கமாக இருக்க வேண்டும்.

வர்க்க எண்களின் பண்புகள்

கீழ்க்காணும் வர்க்க எண்களின் பண்புகளை அவற்றின் அமைப்புகளைக் கொண்டு கவனிப்போம்.

1. வர்க்க எண்களின் 1ஆம் இலக்கங்கள் 0, 1, 4, 5, 6 மற்றும் 9 ஆக இருக்கும். மாறாக 2, 3, 7 அல்லது 8 போன்ற எண்கள் இருந்தால் அவை வர்க்க எண்கள் ஆக இருக்க முடியாது.

2.

i)

எண்	வர்க்கம்
1	1
9	81
11	121
19	361

ஓர் எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 1 அல்லது 9ஆக இருப்பின் அதன் வர்க்கமானது 1 ல் முடியும்.

ii)

எண்	வர்க்கம்
2	4
8	64
12	144
18	324

ஓர் எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 2 அல்லது 8ஆக இருப்பின் அதன் வர்க்கமானது 4ல் முடியும்.

iii)

எண்	வர்க்கம்
3	9
7	49
13	169
17	289

ஓர் எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 3 அல்லது 7ஆக இருப்பின் அதன் வர்க்கமானது 9 ல் முடியும்.

iv)

எண்	வர்க்கம்
4	16
6	36
14	196
16	256

ஓர் எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 4 அல்லது 6ஆக இருப்பின் அதன் வர்க்கமானது 6 ல் முடியும்.

3. கீழ்க்கண்ட வர்க்க எண்களைக் கவனிக்க :

எங்களிடம் ஒரே பூச்சியம் உள்ளது

$$\left\{\begin{array}{l} 10^2 = 100 \\ 20^2 = 400 \\ 30^2 = 900 \end{array}\right\}$$

ஆனால் எங்களிடம் இரண்டு பூச்சியங்கள் உள்ளன

எங்களிடம் இரண்டு பூச்சியங்கள் உள்ளன

$$\left\{\begin{array}{l} 100^2 = 10000 \\ 200^2 = 40000 \\ 700^2 = 490000 \end{array}\right\}$$

ஆனால் எங்களிடம் நான்கு பூச்சியங்கள் உள்ளன

முடிவு

(i) ஓர் எண்ணானது ஒற்றைப் பூச்சியத்தைக் கொண்டு முடிந்தால் அதன் வர்க்கமானது இரட்டை பூச்சியத்தைக் கொண்டு முடியும்.

(ii) ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையில் பூச்சியம் இருந்தால் அவ்வெண்ணானது முழு வர்க்கம் அல்ல.

4. கீழ்க்கண்டவற்றைக் கவனிக்க:

(i) $100 = 10^2$

↑ இரண்டு பூச்சியங்கள் உள்ளது

∴ 100 ஆனது முழுவர்க்கம் ஆகும்.

(ii) $81{,}000 = 81 \times 100 \times 10$

↑ மூன்று பூச்சியங்கள் உள்ளது

$= 9^2 \times 10^2 \times 10$ ∴ 81,000 என்பது முழுவர்க்கம் அல்ல.

5. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைக் கவனிக்க:

இரட்டைப் படை எண்களின் வர்க்கங்கள்

எண்	வர்க்கம்
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
⋮	⋮

ஒற்றைப் படை எண்களின் வர்க்கங்கள்

எண்	வர்க்கம்
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
⋮	⋮

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து பின்வருவனவற்றை அறியலாம்.

முடிவு

(i) இரட்டை எண்களின் வர்க்கங்கள் இரட்டை எண்கள்.
(ii) ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்கள் ஒற்றை எண்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

கீழ்க்கண்ட எண்களுக்கு இடைப்பட்ட முழு வர்க்க எண்களைக் காண்க.

(i) 10, 20 (ii) 50, 60 (iii) 80, 90

தீர்வு

(i) 10க்கும் 20க்கும் இடையேயுள்ள முழு வர்க்க எண் 16.

(ii) 50க்கும் 60க்கும் இடையே முழு வர்க்க எண் கிடையாது.

(iii) 80க்கும் 90க்கும் இடையேயுள்ள முழு வர்க்க எண் 81.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

3136, 867 மற்றும் 4413 என்ற எண்களின் 1 ஆம் இலக்கத்தை கவனித்து எவை முழு வர்க்க எண்கள் அல்ல எனக் காண்க?

தீர்வு

எண் 3136ல் 1ஆம் இலக்கத்தில் '6' உள்ளதால் அவ்வெண் வர்க்க எண்ணாக இருக்க முடியும். ஆனால் 867 மற்றும் 4413ல் 1ஆம் இலக்கங்களில் 7 மற்றும் 3 வருவதால் இவ்வெண்கள் கண்டிப்பாக முழு வர்க்க எண்களாக இருக்க முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

கீழ்க்கண்ட எண்களின் வர்க்கங்களின் 1 ஆம் இலக்கங்களைக் கண்டுபிடி.

(i) 24 (ii) 78 (iii) 35

தீர்வு

(i) 24 ன் வர்க்கம் = 24×24. இங்கு 1 ஆம் இலக்கத்தில் 4 உள்ளது.

எனவே, $4 \times 4 = 16$.

$\therefore$ 24 ன் வர்க்கத்தின் 1 ஆம் இலக்கமானது 6ல் முடியும்.

(ii) 78 ன் வர்க்கம் = 78×78. இங்கு 1 ஆம் இலக்கத்தில் 8 உள்ளது

எனவே, $8 \times 8 = 64$.

$\therefore$ 78 ன் வர்க்க எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 4 ல் முடியும்.

(iii) 35 ன் வர்க்கம் = 35×35. இங்கு 1 ஆம் இலக்கத்தில் 5 உள்ளது.

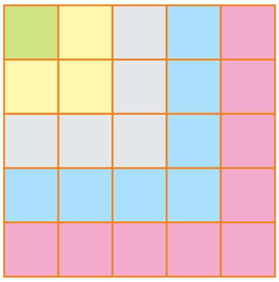
எனவே, $5 \times 5 = 25$.

$\therefore$ 35 ன் வர்க்க எண்ணின் 1 ஆம் இலக்கம் 5ல் முடியும்.

வர்க்க எண்களின் அழகிய வடிவமைப்பு

(i) தொடர்ச்சியான ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$



$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n$ உறுப்புகள் $= n^2$ (1 முதல் 'n' வரை உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்)

(அல்லது) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

மேற்கண்ட படம் நமக்கு இதை விளக்குகிறது.

$\frac{a}{b}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கங்களைக் காணுதல்

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\text{தொகுதியின் வர்க்கம்}}{\text{பகுதியின் வர்க்கம்}}$$

உதாரணம்

(i) $\left(\frac{-3}{7}\right) \times \left(\frac{-3}{7}\right) = \left(\frac{-3}{7}\right)^2$

$$= \frac{(-3)\times(-3)}{7\times 7} = \frac{9}{49}$$

(ii) $\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.

(i) $45^2 = 2025 = (20 + 25)^2$
(ii) $55^2 = 3025 = (30 + 25)^2$
$\therefore$ 45, 55 என்பன 'கேப்ரிகார்' எண்கள் ஆகும்.

பயிற்சி 1.5

1. கீழ்க்கண்ட எண்களின் 1 ஆம் இலக்கத்தைக் கவனித்து எந்த எண் முழு வர்க்கம் அல்ல எனக் கூறுக.

   (i) 3136 (ii) 3722 (iii) 9348 (iv) 2304 (v) 8343

2. கீழ்க்கண்ட எண்களின் வர்க்கங்களின் 1 ஆம் இலக்கத்தைக் காண்க.

   (i) 78^2 (ii) 27^2 (iii) 41^2 (iv) 35^2 (v) 42^2

3. நேரடியாகக் கூட்டாமல் கீழ்க்கண்ட எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ (ii) $1 + 3 + 5 + 7$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

4. கீழ்க்கண்ட எண்களை ஒன்று முதல் தொடங்கி தொடர் ஒற்றை எண்களின் கூடுதலாக எழுதுக.

   (i) 7^2 (ii) 9^2 (iii) 5^2 (iv) 11^2

5. கீழ்க்கண்ட எண்களின் வர்க்கங்களைக் காண்க.

   (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) $\frac{31}{40}$

6. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $(-3)^2$ (ii) $(-7)^2$ (iii) $(-0.3)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ (vi) $(-0.6)^2$

7. கொடுக்கப்பட்டவற்றின் வடிவமைப்பைப் பயன்படுத்தி விடுபட்ட எண்களைக் காண்க.

a) $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$,

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + ___ = 21^2$

$5^2 + ___ + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + ___ = ___$

b) $11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

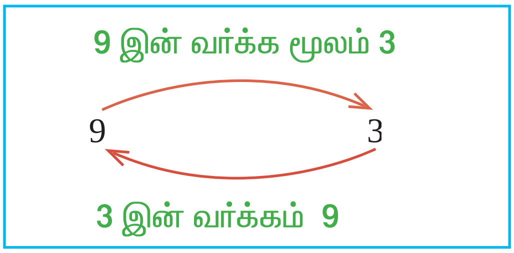
$100001^2 = 1______2______1$

$10000001^2 = ________________$

1.7.2 வர்க்க மூலங்கள்

வரையறை

ஓர் எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் பெருக்கற்பலன் அவ்வெண்ணின் வர்க்கம் எனப்படும். அந்த எண்ணை அப்பெருக்கற்பலனின் **வர்க்க மூலம்** எனக் கூறலாம்.



உதாரணமாக,

(i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $(-3) \times (-3) = (-3)^2 = 9$

இங்கு 9 இன் வர்க்க மூலங்கள் 3 மற்றும் (– 3) ஆகும்.

ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலத்திற்கு $\sqrt{}$ என்ற குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எனவே, $\sqrt{9} = \pm 3$ (இதை மிகை அல்லது குறை 3 என படிக்கலாம்)

இருப்பினும் மிகை வர்க்க மூலங்களை மட்டுமே எடுத்துக் கொண்டால், $\sqrt{9} = 3$.

> **குறிப்பு:** x ன் வர்க்க மூலத்தை $\sqrt{x}$ அல்லது $x^{\frac{1}{2}}$ என எழுதலாம்.
> எனவே, $\sqrt{4} = (4)^{\frac{1}{2}}$ மற்றும் $\sqrt{100} = (100)^{\frac{1}{2}}$ ஆகும்.

இப்பிரிவில், நாம் மிகை வர்க்க மூலங்களை மட்டுமே எடுத்துக் கொள்வோம். பின்வரும் அட்டவணையைக் கவனிக்க.

அட்டவணை 1

முழுவர்க்கம்	வர்க்க மூலம்	
1 16 36 81	1 4 6 9	ஒன்று அல்லது இரண்டு இலக்கமுள்ள எண்ணின் வர்க்கமூலம் ஓர் இலக்க எண்ணாகும்.
100 225 2025 7396 9801	10 15 45 86 99	மூன்று அல்லது நான்கு இலக்கமுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலம் இரண்டு இலக்க எண்ணாகும்.
10,000 14,641 2,97,025 9,98,001	100 121 545 999	ஐந்து அல்லது ஆறு இலக்கமுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலம் மூன்று இலக்க எண்ணாகும்.
10,00,000 15,00,625 7,89,96,544 999,80,001	1000 1225 8888 9999	ஏழு அல்லது எட்டு இலக்கமுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலம் நான்கு இலக்க எண்ணாகும்.

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்து நாம் சிலவற்றைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(i) முழு வர்க்கத்தில் 'n' இலக்கங்கள் இருந்து n-ஆனது இரட்டை எண் எனில் அதன் வர்க்க மூலத்தில் $\frac{n}{2}$ இலக்கங்கள் இருக்கும்.

(ii) முழு வர்க்கத்தில் n இலக்கங்கள் இருந்தது n-ஆனது ஒற்றை எண் எனில் அதன் வர்க்க மூலத்தில் $\frac{n+1}{2}$ இலக்கங்கள் இருக்கும்.

ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலத்தைக் கீழ்க்கண்ட இரண்டு வழிமுறைகளில் காணலாம்

(i) காரணி முறை

(ii) நீள் வகுத்தல் முறை

(i) காரணி முறை

முழுவர்க்க எண்ணின் வர்க்க மூலத்தை அவ்வெண்ணின் பகா காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாகப் பிரித்துக் காணலாம். மேலும் அப்பகாக்காரணிகளை முதலில் சோடியாகச் சேர்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

64 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு

$$64 = \underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2} = 2^2\times2^2\times2^2$$

$$\sqrt{64} = \sqrt{2^2\times2^2\times2^2} = 2\times2\times2 = 8$$

$$\sqrt{64} = 8$$

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

எடுத்துக்காட்டு 1.18

169 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

13	169
13	13
	1

தீர்வு

$$169 = \underbrace{13 \times 13} = 13^2$$

$$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

12.25 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

5	1225
5	225
7	49
7	7
	1

தீர்வு

$$\sqrt{12.25} = \sqrt{\frac{12.25 \times 100}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{5^2 \times 7^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5 \times 7}{10}$$

$$\sqrt{12.25} = \frac{35}{10} = 3.5$$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

5929 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

7	5929
7	847
11	121
11	11
	1

தீர்வு

$$5929 = \underbrace{7 \times 7} \times \underbrace{11 \times 11} = 7^2 \times 11^2$$

$$\sqrt{5929} = \sqrt{7^2 \times 11^2} = 7 \times 11$$

$$\therefore \sqrt{5929} = 77$$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

200 உடன் எந்த எண்ணைப் பெருக்கினால் அவ்வெண் முழு வர்க்கம் ஆகும்.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

தீர்வு

$$200 = 2 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{5 \times 5}$$

'2' ஆனது சோடியாக அமையாமல் தனித்து உள்ளது.

எனவே 200ஐ '2' ஆல் பெருக்கினால் அவ்வெண் முழுவர்க்கம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

384ஐ எந்த எண்ணால் வகுத்தால் அவ்வெண் முழு வர்க்கம் ஆகும்.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	384
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

தீர்வு

$$384 = 3 \times 2 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2}$$

'3' ம் '2' ம் சோடியற்று தனித்துள்ளன,

எனவே, 384ஐ $3 \times 2 = 6$ ஆல் வகுக்க, அவ்வெண் முழுவர்க்கம் ஆகும்.

(ii) நீள் வகுத்தல் முறை

ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலத்தைக் காரணி முறையில் கண்டுபிடிப்பதை நாம் கற்றுள்ளோம். எனினும் ஒரு எண் பெரிய எண்ணாக இருப்பின் அதன் காரணிகளைக் கண்டுபிடிப்பது எளிதானது அல்ல. எனவே வேறொரு முறையைப் பயன்படுத்துவோம். அது நீள் வகுத்தல் முறையாகும்.

இம்முறையைப் பயன்படுத்தி, தசம எண்களின் வர்க்க மூலத்தையும் காண முடியும். இம்முறையானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

529 இன் வர்க்க மூலத்தை நீள் வகுத்தல் முறையில் காண்க.

தீர்வு

படி 1 : நாம் 529ஐ $5\ \overline{29}$ என இரண்டு பிரிவாக, ஒன்றாம் இலக்கத்திலிருந்து ஆரம்பித்து இரண்டு இரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மீதும் சிறிய கோடிடுதல் வேண்டும்.

படி 2 : முதல் பிரிவான 5-ற்கு சமமான அல்லது குறைவான மிகப்பெரிய வர்க்கம் கொண்ட எண்ணைக் காண வேண்டும். இங்கு அது 2 ஆகும்.

$$2\,\big|\,5\ \overline{29}$$

படி 3 : எனவே '2' ஐ ஈவாகவும், வகுத்தியாகவும் எழுத வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

படி 4 : வகுத்தி '2'ஐ மேலே உள்ள '2'ஆல் பெருக்கி, பெருக்கற்பலன் '4'ஐ 5இன் கீழ் எழுதிக் கழிக்க வேண்டும். இதன் மீதி 1 ஆகும்.

படி 5 : இரண்டாம் பிரிவான '29' ஐ கீழே கொண்டு வந்து மீதி 1ன் வலப்புறம் எழுதக் கிடைப்பது 129 ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline & 1\ 29 \end{array}$$

படி 6 : ஈவான **2–**னை இரண்டு மடங்காக்கி ($2 \times 2 = 4$ஐ) அடுத்த பிரிவினை எழுதியதற்கு அருகில் இடம் விட்டு வகுத்தியாக எழுதிக் கொள்ளுதல் வேண்டும். $4n \times n$ ஆனது 129ஐ விட குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்குமாறு 'n' என்ற எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 3 \\ 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline 43 & 1\ 29 \\ & 1\ 29 \\ \hline & 0 \end{array}$$

உதாரணமாக : $42 \times 2 = 84$; மற்றும் $43 \times 3 = 129$. எனவே, $n = 3$ ஆகும்.

படி 7 : 3 ஐ அடுத்த வகுத்தியாகவும், ஈவின் இடத்தில் 2 இன் அருகிலும் எழுத வேண்டும். பெருக்குத் தொகை $43 \times 3 = 129$ஐ 129 ன் கீழ் எழுதிக் கழிக்க வேண்டும். மீதி '0' ஆனதால் நீள் வகுத்தல் முடிவு பெற்று விட்டது. எனவே, $\sqrt{529} = 23$.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

நீள் வகுத்தல் முறையில் $\sqrt{3969}$ காண்க.

தீர்வு

படி 1 : எண் 3969 ஐ $\overline{39}\ \overline{69}$ என இரண்டு பிரிவாக, ஒன்றாம் இலக்கத்திலிருந்து ஆரம்பித்து இரண்டு இரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மீதும் சிறிய கோடிடுதல் வேண்டும்.

படி 2 : முதல் பிரிவான 39 க்கு சமமான அல்லது குறைவான மிகப்பெரிய வர்க்கம் கொண்ட எண்ணைக் காண வேண்டும், அது 6 ஆகும்.

படி 3 : 6-னை ஈவாகவும், வகுத்தியாகவும் எழுத வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \ \overline{69} \end{array}$$

படி 4 : வகுத்தி 6 ஐ 6 ஆல் பெருக்கி, பெருக்கற் பலன் 36 ஐ 39 இன் கீழ் எழுதிக் கழிக்க வேண்டும். இதன் மீதி 3 ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \ \overline{69} \\ & 36 \\ \hline & \ \ 3 \end{array}$$

படி 5 : இரண்டாம் பிரிவான 69 ஐ கீழே கொண்டு வந்து மீதியான 3இன் வலப்புறம் எழுத வேண்டும். கிடைப்பது 369 ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \ \overline{69} \\ & 36\ \ \downarrow \\ \hline & \ \ 3\ \ 69 \end{array}$$

படி 6 : ஈவான 6-ஐ இரு மடங்காக்கி ($2 \times 6 = 12$ஐ) அடுத்த பிரிவின் அருகில் இடம் விட்டு வகுத்தியாக எழுதிக் கொள்ளுதல் வேண்டும். $12n \times n$ ஆனது 369ஐ விடக் குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்குமாறு 'n' என்ற எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

உதாரணமாக $122 \times 2 = 244; 123 \times 3 = 369$.

எனவே $n = 3$ ஆகும்.

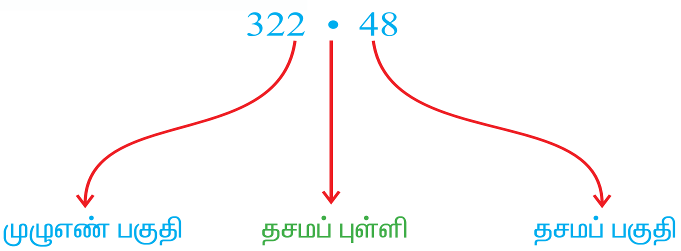
$$\begin{array}{r|l} & 6\ \ \ 3 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \ \overline{69} \\ & 36\ \ \downarrow \\ \hline 123 & \ \ 3\ \ 69 \\ & \ \ 3\ \ 69 \\ \hline & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

படி 7 : 3-ஐ அடுத்த வகுத்தியாகவும், ஈவின் இடத்தில் 6 இன் அருகில் எழுத வேண்டும். பெருக்கற் பலன் $123 \times 3 = 369$ ஐ 369 இன் கீழ் எழுதி கழிக்க வேண்டும். மீதி '0' ஆனதால் வகுத்தல் முடிவு பெற்று விட்டது. எனவே $\sqrt{3969} = 63$.

1.7.2 (அ) தசம எண்களின் வர்க்க மூலம்

நீள் வகுத்தல் முறையைக் கையாளும்போது, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் முழு எண் பகுதியில் ஆரம்பித்து இரண்டு இரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரித்து அதன் மீது கோடிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர் தசமப் புள்ளிக்கு வலப்புறமுள்ள தசமப் பகுதியிலும் மேற் சொன்னபடி இரண்டு இரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரித்து அதன் மேல் கோடிட்டுக் கொள்ள வேண்டும்.

உதாரணமாக, நாம் 322.48 என்ற எண்ணை எழுதும் போது



என எழுதுவோம்.

வர்க்க மூலம் காணும்போது தசமப் புள்ளியை எப்படி குறிப்பது என்பதை அறிந்திருக்க வேண்டும். ஏற்கெனவே அறிந்த தீர்மானத்தின்படி ஒன்று அல்லது இரண்டு இலக்கமுள்ள எண்ணின் வர்க்க மூலம் ஓர் இலக்க எண்ணாகும் (அட்டவணை 1 இன் படி). கீழ்க்கண்ட உதாரணங்கள் இம்முறையை நன்கு விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

6.0516-ன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை $6\,.\,\overline{05}\,\overline{16}$ என எழுத வேண்டும். முழு எண் பகுதியில் உள்ள இலக்கம் ஒன்று (6), எனவே அதன் வர்க்க மூலமானது ஒரே இலக்கத்தைக் கொண்டிருக்கும். முன்பு போலவே, வகுத்தல் முறையில் 60516 என்ற எண்ணுக்கு வர்க்க மூலம் காண வேண்டும்.

```
        2. 4  6
     ----------
  2  | 6.05 16
     | 4
     ----------
 44  | 2 05
     | 1 76
     ----------
486  |   29 16
     |   29 16
     ----------
     |       0
```

எனவே $\sqrt{6.0516} = 2.46$.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

3250 என்ற எண்ணிலிருந்து எந்தச் சிறிய எண்ணைக் கழிக்க முழு வர்க்கம் ஆகும்.

தீர்வு

```
        5   7
     ---------
  5  | 32 50
     | 25
     ---------
107  |  7 50
     |  7 49
     ---------
     |     1
```

மேற்கண்ட முறையில் 57^2 ஆனது 3250 வைவிட 1 குறைவானது. எனவே 3250லிருந்து 1-ஐக் கழித்தால் அவ்வெண் ஓர் முழு வர்க்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

1825 உடன் எந்தச் சிறிய எண்ணைக் கூட்ட முழு வர்க்கமாகும்.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & \;4\;\;\;2 \\ \hline 4 & \overline{18}\;\overline{25} \\ & 16 \\ \hline 82 & \;\;2\;25 \\ & \;\;1\;64 \\ \hline & \;\;\;\;\;61 \end{array}$$

மேற்கண்ட வகுத்தல் முறையில் $42^2 < 1825$.

42 இன் அடுத்த முழு வர்க்க எண்ணான 43 இன் வர்க்கமானது,

$43^2 = 43 \times 43 = 1849$ ஆகும்.

எனவே, $1849 - 1825 = 24$

எனவே, கூட்ட வேண்டிய எண் 24 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

$\sqrt{0.182329}$ ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.4\;\;\;2\;\;\;7 \\ \hline 4 & 0.\overline{18}\;\overline{23}\;\overline{29} \\ & \;\;\;16 \\ \hline 82 & \;\;\;\;\;2\;23 \\ & \;\;\;\;\;1\;64 \\ \hline 847 & \;\;\;\;\;\;\;59\;29 \\ & \;\;\;\;\;\;\;59\;29 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

> 0.182329 ஐ $0.\overline{18}\;\overline{23}\;\overline{29}$ என எழுத வேண்டும். இங்கு முழு எண் பகுதி இல்லை. எனவே வர்க்க மூலத்திலும் முழு எண் பகுதி இல்லை. எனவே முன்பு சொன்ன படி முறைகளைக் கையாண்டு 182329 என்ற எண்ணின் வர்க்க மூலம் காண வேண்டும்.

எனவே $\sqrt{0.182329} = 0.427$ ஆகும்.

> **குறிப்பு :** வர்க்க மூலம் காணும் எண்ணின் முழு எண் பகுதி பூச்சியம் எனில், அதன் வர்க்க மூலத்தின் முழு எண் பகுதியும் பூச்சியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.29

121.4404–ன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 1\;\;1\;.\;\;0\;\;\;2 \\ \hline 1 & 1\;\overline{21}.\;\overline{44}\;\overline{04} \\ & 1 \\ \hline 21 & 0\;21 \\ & \;\;\;21 \\ \hline 2202 & \;\;\;\;0\;\;44\;04 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;44\;04 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

எனவே, $\sqrt{121.4404} = 11.02$

எடுத்துக்காட்டு 1.30

0.005184 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு

$\sqrt{0.005184} = 0.072$

	0. 0 7 2
7	0. $\overline{00}$ $\overline{51}$ $\overline{84}$
	49
142	2 84
	2 84
	0

குறிப்பு : எ.கா 1.30 இல் தசம புள்ளிக்கு முன்பு முழு எண் பகுதி இல்லை. எனவே ஈவிலும் தசம புள்ளிக்கு முன்பு ஒரு பூச்சியம் எழுத வேண்டும். தசம புள்ளியை அடுத்து உடனே இரண்டு பூச்சியங்கள் இருப்பதால் வர்க்க மூலத்தில் புள்ளியை அடுத்து ஒரு பூச்சியம் எழுத வேண்டும்.

1.7.2 (ஆ) முழுமையற்ற வர்க்க எண்களின் வர்க்க மூலங்கள்

ஒரு எண் முழு வர்க்கம் இல்லையெனில் அது முழுமையற்ற வர்க்க எண் ஆகும்.

சில எண்கள் 2, 3, 5, 17.... போன்றவை முழு வர்க்க எண்கள் அல்ல. இவற்றை முழுமையற்ற வர்க்க எண்கள் என அழைக்கிறோம். இவ்வெண்களின் வர்க்க மூலங்களைக் காண நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

நாம் n தசம இடத் திருத்தமாக வர்க்க மூலத்தைக்காண $n+1$ தசம இடங்களுக்கு வர்க்க மூலத்தைக் கண்டு n தசம இடங்களுக்குத் திருத்தி எழுத வேண்டும். இம்முறையில் தசம புள்ளிக்குப் பிறகு அமைந்த எண்களின் வலது புறத்தில் தேவையான பூச்சியங்களைச் சேர்த்துக் கணக்கீடு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.31

3-ன் வர்க்க மூலத்தை இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாகக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு

	1. 7 3 2
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
27	2 00
	1 89
343	11 00
	10 29
3462	71 00
	69 24
	1 76

நாம் இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாக விடையைக் காண வேண்டியுள்ளதால், வர்க்க மூலத்தை மூன்று தசம இடங்களுக்கு கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இதற்காக நாம் 6 (மூன்று சோடி) பூச்சியங்களைத் தசம புள்ளிக்கு வலதுபுறம் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

$\therefore \sqrt{3}$ = 1.732 (மூன்று தசம இடங்களின் மதிப்பு)

$\sqrt{3}$ = 1.73 (இரண்டு தசம இடத் திருத்தமாக)

எடுத்துக்காட்டு 1.32

$10\frac{2}{3}$ ன் வர்க்க மூலத்தை இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாகக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு

$10\frac{2}{3} = \frac{32}{3} = 10.66\ 66\ 66$ ....

வர்க்க மூலத்தை இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாகக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும் என்பதால் மூன்று தசம இடங்களுக்கு வர்க்க மூலம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். எனவே $\frac{2}{3}$ யை ஆறு தசம இடங்களுக்கு மாற்றி எழுதிக் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

	3. 2 6 5
3	10. $\overline{66}$ $\overline{66}$ $\overline{67}$
	9
62	1 66
	1 24
646	42 66
	38 76
6525	3 90 67
	3 26 25
	64 42

$\sqrt{10\frac{2}{3}}$ = 3.265 (தோராயமாக)

= 3.27 (இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாக)

பயிற்சி 1.6

1. பின்வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க:

   (i) $3 \times 3 \times 4 \times 4$ (ii) $2 \times 2 \times 5 \times 5$

   (iii) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (iv) $5 \times 5 \times 11 \times 11 \times 7 \times 7$

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க :

   (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 49 (iv) 16

3. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி கீழ்கண்டவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க :

   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529 (v) 3249

   (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921 (ix) 576 (x) 3136

4. பகாக் காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி கீழ்கண்டவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க :

   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096 (v) 7744

   (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216 (ix) 529 (x) 8100

5. கீழ்க்கண்ட தசம எண்களின் வர்க்க மூலம் காண்க :

   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25 (v) 31.36

   (vi) 0.2916 (vii) 11.56 (viii) 0.001849

6. கீழ்க்கண்ட எண்களிலிருந்து எந்த மிகச்சிறிய எண்ணக் கழிக்க அவ்வெண்கள் முழுவர்க்கம் ஆகும்.

   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825 (v) 4000

7. கீழ்க்கண்ட எண்களுடன் எந்த மிகச்சிறிய எண்ணைக் கூட்ட அவ்வெண்கள் முழு வர்க்கம் ஆகும்.

   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825 (v) 6412

8. கீழ்க்கண்டவற்றின் வர்க்க மூலத்தை இரண்டு தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க :

(i) 2 (ii) 5 (iii) 0.016 (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $1\frac{1}{12}$

9. ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவு 441 சதுர மீட்டர்கள் எனில் அச்சதுரத்தின் பக்கத்தின் அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்

10. கீழ்க்கண்டவற்றின் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க :

(i) $\frac{225}{3136}$ (ii) $\frac{2116}{3481}$ (iii) $\frac{529}{1764}$ (iv) $\frac{7921}{5776}$

1.7.3 கனங்கள்

அறிமுகம்

சீனிவாச இராமானுஜன்
(1887 -1920)

புகழ்பெற்ற கணிதமேதை இராமனுஜன் அவர்களின் வாழ்வில் நடைபெற்ற ஒரு முக்கிய நிகழ்வைப் பற்றிக் காணலாம்.

ஒரு முறை கணித வல்லுநர் பேராசிரியர் G.H. ஹார்டி அவர்கள் திரு. இராமானுஜன் அவர்களைப் பார்க்க வாடகை மகிழ்வுந்தில் வந்தார். அவர் வந்த வாடகை மகிழ்வுந்தின் எண் 1729. இருவரும் பேசிக் கொள்ளும்போது ஹார்டி அவர்கள் தான் வந்த வாடகை மகிழ்வுந்தின் எண் 1729 என்றும், அது ஒரு ‘‘மந்தமான எண்’’ என்றும் கூறினார். உடனே இராமானுஜன் அவர்கள் 1729 என்பது மிகவும் அற்புதமான எண் என்றும், அவ்வெண்ணானது இரு கன எண்களின் கூடுதலாக இரு வெவ்வேறு முறைகளில் எழுதக்கூடிய மிகச்சிறிய பகா எண் எனவும் விளக்கினார்.

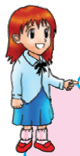
ஈரோட்டில் பிறந்த இந்தியக் கணித மேதையான இராமானுஜத்தின் “எண்ணியல் கோட்பாடுகள்” குறித்த அவரது பங்களிப்பு அவருக்கு மிகப்பெரும் உலகப் புகழைப் பெற்றுத் தந்தது. மிகக் குறுகிய அவரது வாழ்நாட்களுக்குள்ளேயே சுமார் **3900** ஆராய்ச்சி முடிவுகளை தனியாகவே தொகுத்து வெளியிட்டுச் சாதனை படைத்துள்ளார்.

அதாவது, $1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$

மற்றும் $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

1729 ஐ இராமானுஜன் எண் என்று அழைக்கிறோம்.

இப்பிரிவில் கனங்கள், கன மூலங்கள் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய உண்மைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

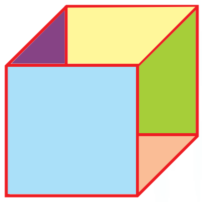


நீவிர் அறிவீரா?

1729 என்ற எண்ணானது மிகச் சிறிய இராமானுஜன் எண்ணாகும். இதேபோன்ற வேறு சில எண்கள் 4104 (2, 16 : 9, 15), 13832 (18, 20 : 2, 24).

கனச் சதுரம்

நாம் வடிவியலில் கனம் என்ற வார்த்தையைப் பற்றிப் படித்துள்ளோம். நீளம், அகலம், உயரம் ஆகிய அனைத்தும் சமமாக உள்ள ஓர் கன உருவம் கனச் சதுரம் ஆகும். ஒரு கனச் சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் ‘a’ அலகுகள் எனில் அதன் கன அளவு $a \times a \times a = a^3$ கன அலகுகள்.



a^3 என்பதை a–யின் "முப்படி" அல்லது "a–யின் கனம்" என அழைக்கலாம்.

இப்பொழுது, 1, 8, 27, 64, 125, $\cdots$ என்ற எண்களைக் கவனிக்கவும்.

இவை ‘‘கன எண்கள்’’ அல்லது ‘‘முழு கன’’ எண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

இவை ஓர் எண்ணை அதே எண்ணால் மும்முறை பெருக்கக் கிடைக்கின்றன.

உதாரணமாக,

$1\times1\times1 = 1^3,\ 2\times2\times2 = 2^3,\ 3\times3\times3 = 3^3, 5\times5\times5 = 5^3$

எடுத்துக்காட்டு 1.33

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க

(i) 15^3 (ii) $(-4)^3$ (iii) $(1.2)^3$ (iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3$

தீர்வு

(i) $15^3 = 15\times15\times15 = 3375$

(ii) $(-4)^3 = (-4)\times(-4)\times(-4) = -64$

(iii) $(1.2)^3 = 1.2\times1.2\times1.2 = 1.728$

(iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{4\times4\times4} = \frac{-27}{64}$

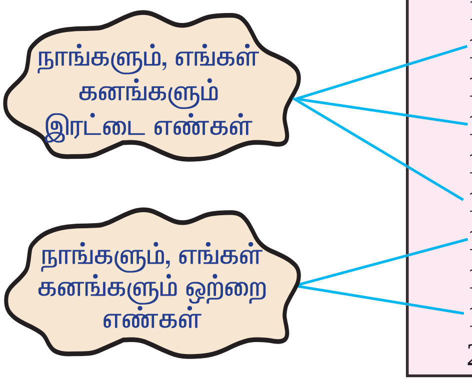
(ii) ஆம் கணக்கில் $(-4)^3 = -64$ என்பதை கவனிக்க.

குறிப்பு : ஓர் குறை எண்ணின் அடுக்கு ஓர் இரட்டை எண் எனில் அது ஒரு மிகை எண்ணாகும். அதன் அடுக்கு ஓர் ஒற்றை எனில், அது ஒரு குறை எண்ணாகவும் இருக்கும். அதாவது,

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ ஒரு ஒற்றை எண்} \\ +1, & n \text{ ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

கீழே உள்ளவை 1 முதல் 20 வரையிலான எண்களும் அவற்றின் கனங்களும் ஆகும்.

எண்கள்	கனம்
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000



எண்கள்	கனம்
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

அட்டவணை 2

கன எண்களின் பண்புகள்

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட கன எண்களின் பண்புகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளலாம்.

1. ஓர் எண்ணின் ஒன்றாம் இலக்கம் 1 ஆக இருப்பின், அவ்வெண்ணின் கனத்தின் ஒன்றாம் இலக்கமும் 1 ஆக இருக்கும்.
உதாரணமாக, $1^3 = 1; 11^3 = 1331; 21^3 = 9261; 31^3 = 29791$.

2. $1, 4, 5, 6, 9$ மற்றும் 0 ஆகிய இலக்கங்களை 1 ஆம் இலக்கத்தில் கொண்ட எண்களின் கன எண்களும் அதே இலக்கங்களை 1 ஆம் இலக்கத்தில் கொண்டிருக்கும்.
உதாரணமாக: $14^3 = 2744$; $15^3 = 3375$; $16^3 = 4096$; $20^3 = 8000$.

3. 2ஐ 1 ஆம் இலக்கத்தில் கொண்ட எண்ணின் கனமானது 8 ஆகவும், 8ஐ 1ஆம் இலக்கத்தில் கொண்ட எண்ணின் கனமானது 2ஐ 1ஆம் இலக்கத்திலும் கொண்டிருக்கும்..
உதாரணமாக: $(12)^3 = 1728$; $(18)^3 = 5832$.

4. 3ஐ 1ஆம் இலக்கத்தில் கொண்ட எண்களின் முப்படி (கனம்) ஆனது 7ஐயும், 7ஐ 1ஆம் இலக்கத்தில் கொண்ட எண்களின் முப்படி 3ஐயும் 1ஆம் இலக்கத்தில் பெற்றிருக்கும்.
உதாரணமாக : $(13)^3 = 2197$; $(27)^3 = 19683$.

5. இரட்டை எண்களின் கனமானது இரட்டை எண்ணாகவும், ஒற்றை எண்களின் கனமானது ஒற்றை எண்ணாகவும் இருக்கும்.

தொடர் ஒற்றை எண்களின் கூடுதல்

கீழ்க்காணும் ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் காணும் அமைப்பினைக் கவனிக்க:

	1	$= 1 = 1^3$
அடுத்த இரு ஒற்றை எண்கள்,	$3 + 5$	$= 8 = 2^3$
அடுத்த மூன்று ஒற்றை எண்கள்,	$7 + 9 + 11$	$= 27 = 3^3$
அடுத்த நான்கு ஒற்றை எண்கள்,	$13 + 15 + 17 + 19$	$= 64 = 4^3$
அடுத்த ஐந்து ஒற்றை எண்கள்,	$21 + 23 + 25 + 27 + 29$	$= 125 = 5^3$

இந்த அமைப்பு வியப்பளிக்கிறதா?

எடுத்துக்காட்டு 1.34

64 என்பது முழுகன எண் ஆகுமா?

தீர்வு

$$64 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}\times\underbrace{2 \times 2 \times 2}$$
$$= 2^3 \times 2^3 = (2 \times 2)^3 = 4^3$$

எனவே 64 ஓர் முழுகன எண் ஆகும்.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

எடுத்துக்காட்டு 1.35

500 என்ற எண் முழு கன எண் ஆகுமா?

தீர்வு

$$500 = 2 \times 2 \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

இங்கு 3 ஐந்துகள் உள்ளன. ஆனால் 2 இரண்டுகள் உள்ளன.

எனவே 500 ஆனது முழு கன எண் அல்ல.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

எடுத்துக்காட்டு 1.36

243 என்பது முழு கன எண்ணாகுமா? இல்லையெனில் எந்த எண்ணால் பெருக்கினால் அது முழு கன எண்ணாகும்.

தீர்வு

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$243 = \underbrace{3\times3\times3}\times3\times3$$

மேற்குறிப்பிட்ட காரணிப்படுத்தலில், $3^3 \times 3^2$. (3×3) ஆனது மும்மூன்றாக எழுத முடியாததால் 243 ஓர் முழு கன எண் அல்ல.

இதனை ஓர் முழு கனமாக்க 3 ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

அதாவது $243\times3 = \underbrace{3\times3\times3}\times\underbrace{3\times3\times3}$

$729 = 3^3\times3^3 = (3\times3)^3$

$729 = 9^3$ இது ஓர் முழு கனமாகும்.

எனவே, 243 ஐ 3 ஆல் பெருக்க அது ஒரு முழு கன எண்ணாகும்.

1.7.4 கன மூலங்கள்

ஓர் கன சதுரத்தின் கன அளவு 125 செமீ² எனில் அதன் பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவாக இருக்கும். அப்பக்கத்தின் நீளம் காண எந்த எண்ணின் முப்படி அல்லது கனமானது 125 என காண வேண்டியுள்ளது. எனவே முப்படி மூலம் அல்லது கன மூலம் என்பது, கனம் காண்பதின் தலைகீழ் முறை ஆகும்.

குறியீடு

$\sqrt[3]{}$ என்ற குறியீடு "கன மூலம்' என்பதைக் குறிக்கும்

உதாரணமாக :

$2^3 = 8$ என்பது நாமறிந்ததே. இதிலிருந்து 8-ன் கன மூலம் 2 என அறியலாம்.

இதைக் குறியீட்டில் $\sqrt[3]{8} = (8)^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3/3} = 2$ என எழுதலாம்.

மேலும் சில உதாரணங்கள் :

(i) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = (5^3)^{1/3} = 5^{3/3} = 5^1 = 5$

(ii) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = (4^3)^{1/3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$

(iii) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = (10^3)^{1/3}$

$= 10^{3/3} = 10^1 = 10.$

பகாக் காரணி முறையில் கனமூலம் காணுதல்

எண்ணின் கன மூலத்தைக் கண்டுபிடிக்கும் வழிகள்

படி 1 : கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை பகாக் காரணிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

படி 2 : ஒரே எண் காரணிகள் மூன்று மூன்றாக வருமாறு எழுதிக் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

படி 3 : ஒவ்வொரு மூன்று எண் தொகுப்பிலிருந்தும் ஒரு எண் என எடுத்து அவற்றின் பெருக்கற் பலனே கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் கன மூலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.37

512ன் கனமூலம் காண்க.

தீர்வு

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$\sqrt[3]{512} = (512)^{\frac{1}{3}}$$
$$= ((2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2))^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^3\times2^3\times2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(2^9\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^3$$
$$\sqrt[3]{512} = 8.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.38

27×64 ன் கனமூலம் காண்க.

தீர்வு

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	27
3	9
3	3
	1

27 மற்றும் 64ஐ பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்க நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\sqrt[3]{27} = (3\times3\times3)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt[3]{64} = (2\times2\times2\times2\times2\times2)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$
$$\sqrt[3]{64} = 4$$
$$\sqrt[3]{27\times64} = \sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{64}$$
$$= 3\times4$$
$$\sqrt[3]{27\times64} = 12$$

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

எடுத்துக்காட்டு 1.39

250 ஆனது ஒரு முழு கனமா? இல்லையெனில் எந்தச் சிறிய இயல் எண்ணால் வகுக்க அவ்வெண் முழு கனமாகும்.

தீர்வு

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$$250 = 2\times\underbrace{5\times5\times5}$$

பகாக் காரணியில் 2 ஆனது மும்முறை இல்லாததால் 250 ஓர் முழு கனம் ஆகாது.

'2' ஆனது பகாக் காரணிப்படுத்தும் போது ஒரே முறை வந்துள்ளதால், 250 ஐ 2 ஆல் வகுத்தால் ஈவில் '2' வராது. மீதமுள்ள காரணிகளை மும்மூன்றாக பெருக்கி எழுத முடியும்.

$$\therefore 250\div2 = 125 = 5\times5\times5 = 5^3.$$

எனவே 250ஐ 2 என்ற சிறிய இயல் எண்ணால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் முழுக் கனம் ஆகும்.

பின்னத்தின் கனமூலம்

$$\text{பின்னத்தின் கன மூலம்} = \frac{\text{தொகுதியின் கன மூலம்}}{\text{பகுதியின் கன மூலம்}}$$

அதாவது, $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{(a)^{\frac{1}{3}}}{(b)^{\frac{1}{3}}}$

எடுத்துக்காட்டு 1.40

$\dfrac{125}{216}$ இன் கனமூலம் காண்க.

தீர்வு

125 மற்றும் 216 ஆகியவற்றை பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்க நமக்குக் கிடைப்பது.

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

5	125
5	25
5	5
	1

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$$125 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$216 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 2 \times 3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.41

$\dfrac{-512}{1000}$ இன் கன மூலம் காண்க.

தீர்வு

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

5	1000
5	200
5	40
2	8
2	4
2	2
	1

$$-512 = \underbrace{-8 \times -8 \times -8}$$

$$\sqrt[3]{-512} = -8$$

$$1000 = 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\sqrt[3]{1000} = 5 \times 2 = 10$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-8}{10}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-4}{5}$$

$$\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{(-x) \times (-x) \times (-x)}$$

$$= -x.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.42

0.027 இன் கனமூலம் காண்க.

தீர்வு

$$\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 \times 3 \times 3}{10 \times 10 \times 10}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{3}{10}$$

$$\sqrt[3]{0.027} = 0.3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.43

$\dfrac{\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{343}}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{343}} = \frac{9-3}{8+7}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	27
3	9
3	3
	1

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

7	343
7	49
7	7
	1

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

பகாக் காரணிப்படுத்தல்

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

பயிற்சி 1.7

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

(i) கீழ்க்கண்ட எண்களில் முழு கன எண் எது ?

(A) 125 (B) 36 (C) 75 (D) 100

(ii) கீழ்க்கண்ட எண்களில் முழு கனம் அற்ற எண் எது ?

(A) 1331 (B) 512 (C) 343 (D) 100

(iii) ஒற்றை இயல் எண்ணின் கனம் ஆனது

(A) இரட்டை (B) ஒற்றை

(C) இரட்டை அல்லது ஒற்றை (D) பகா எண்

(iv) 1000 என்ற முழு கன எண்ணின் கன மூலத்தில் உள்ள மொத்த பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(v) 50 என்ற எண்ணின் கனத்தின் ஒன்றாம் இலக்கத்தில் உள்ள எண்

(A) 1 (B) 0 (C) 5 (D) 4

(vi) 100 என்ற எண்ணின் கனத்தில் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

(vii) 108 ஐ எந்த சிறிய எண்ணால் பெருக்க முழுக் கனம் ஆகும் ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(viii) 88 என்ற எண்ணை எந்த சிறிய எண்ணால் வகுத்தால் அவ்வெண் முழுக் கனமாகும்

(A) 11 (B) 5 (C) 7 (D) 9

(ix) ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு 64 கன செமீ, எனில் அதன் பக்க அளவு

(A) 4 செமீ (B) 8 செமீ (C) 16 செமீ (D) 6 செமீ

(x) கீழ்க்கண்டவற்றில் எது தவறான கூற்று ?

(A) ஒற்றை எண்ணின் கனமும் ஒற்றை எண்ணே

(B) ஓர் முழு கன எண் இரண்டு பூச்சியங்களைக் கொண்டு இருக்காது.

(C) ஒரு இலக்க எண்ணின் கனமானது ஓர் இலக்க எண்ணாக இருக்கலாம்.

(D) 8ஐ ஒன்றாம் இலக்கத்தில் கொண்ட முழு கன எண் கிடையாது.

2. கீழ்க்கண்டவற்றில் முழு கன எண்கள் எது ?

(i) 400 (ii) 216 (iii) 729 (iv) 250

(v) 1000 (vi) 900

3. கீழ்க்கண்டவற்றில் எது முழுகன எண்கள் அல்ல ?

(i) 128 (ii) 100 (iii) 64 (iv) 125

(v) 72 (vi) 625

4. கீழ்க்கண்ட எண்களை எந்த சிறிய எண்ணால் வகுக்க அவை முழுகன எண்கள் ஆகும் என காண்க.

(i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192

(v) 704 (vi) 625

5. கீழ்க்கண்ட எண்களை எந்த எண்ணால் பெருக்க அவை முழுகன எண்கள் ஆகும் என காண்க.

(i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100

6. கீழ்க்கண்ட எண்களின் கன மூலத்தை பகாகாரணி முறையில் காண்க:

(i) 729 (ii) 343 (iii) 512 (iv) 0.064

(v) 0.216 (vi) $5\frac{23}{64}$ (vii) – 1.331 (viii) – 27000

7. ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு 19.683 கன செ.மீ எனில் கன சதுரத்தின் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

1.8 எண்களின் தோராய மதிப்பு

நாம் அன்றாட வாழ்விற்கு தோராயமான மதிப்புகள் அல்லது தோராயமான அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

பெஞ்சமின் ₹ 59,896 க்கு மடிக் கணினி (Laptop) வாங்குகிறார். அதை மற்றவர்களுக்குச் சொல்ல முற்படும் போது ₹ 60,000 க்கு வாங்கியிருப்பதாகச் சொல்கிறார். இது ஒரு தோராயமான மதிப்பாகும். இம்மதிப்பு ஆயிரங்களில் மட்டுமே சொல்லப்பட்டிருக்கிறது.

வசந்த் ஒரு சோடி காலணிகளை ₹ 599.95க்கு வாங்குகிறார். எளிதில் சொல்வதற்காக தோராயமாக இம்மதிப்பை ₹ 600 என்கிறார்.

ஒரு படத்தின் அளவுகள் 35.23 செ.மீ நீளமும் 25.91 செ.மீ அகலமும் ஆகும். இதைத் சரிபார்க்க சாதாரண அளவுகோலால் அளக்க முற்படுவோமேயானால் நம்மால் மிகத் துல்லியமாக அளக்க முடியாது. ஏனெனில் சாதாரண அளவுகோலில் ஒரு சென்டி மீட்டரில் 10 பிரிவுகள் மட்டுமே குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

இதைவிடச் சிறிய அளவுகள் குறிக்கப்படவில்லை. இவ்வாறான சமயங்களில் அப்படத்தின் நீள அளவுகளை சரி பார்க்க, பத்தில் ஒன்றிற்குத் திருத்தமாக 35.2 செமீ என்றோ, முழுக்களுக்குத் திருத்தமாக 35 செமீ என்றோ எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

மேற்கண்ட சூழ்நிலைகளில் நாம் நமது வசதிக்காக தோராயமான மதிப்புகளை எடுத்திருக்கின்றோம். இவ்வாறாக கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் மிக அருகிலுள்ள மதிப்புகளைக் கருத்தில் கொள்வதை **"எண்களின் முழுதாக்கல்"** என்கிறோம். ஆகவே நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கையுடைய இலக்கங்களுக்குத் திருத்தப்பட்டு எழுதப்படும் தோராய மதிப்பு "இலக்கங்களை முழுதாக்கல்" எனப்படுகிறது.

சில நேரங்களில் தோராய மதிப்புகளை மட்டுமே கவனத்தில் கொள்ள முடியும். ஏனெனில்

(அ) ஓர் ஊரின் மக்கள் தொகையைப் பற்றிச் சொல்ல வேண்டும் எனில் அதை தோராயமாக 30 இலட்சம் அல்லது 25 இலட்சம் என்று தான் குறிப்பிடுகிறோம்.

(ஆ) இரு நகரங்களுக்கு இடையேயான தொலைவைக் கூறும்போது, 350 கி.மீ என்று எண்களை முழுதாக்கிக் கூறுகிறோமேயன்றி 352.15 கிமீ என கூறுவதில்லை.

எண்களை முழுதாக்கும் போது பின்வரும் விதிகளை நாம் பின்பற்றுகிறோம்.

(i) திருத்தப்பட வேண்டிய இடத்தின் அடுத்த இலக்கம் 5 ஐ விட குறைவாக இருப்பின் அந்த இடத்திலுள்ள இலக்கம் வரை அப்படியே எழுதுக.

(ii) திருத்தப்பட வேண்டிய இடத்தின் அடுத்த இலக்கம் 5 அல்லது 5ஐ விட அதிகமாக இருப்பின் திருத்தப்பட வேண்டிய இடத்திலுள்ள இலக்கத்துடன் 1ஐ கூட்டி விடை எழுதுக.

தோராயத்தினைக் குறிக்கும் குறியீடு $\simeq$ ஆகும்.

செய்து பார்

A4 தாள் ஒன்றினை எடுத்துக் கொள். அதன் நீளம், அகலம் காண்க. இதை செ.மீ. அளவுகளில் எப்படி தோராயமாக எழுதுவாய்

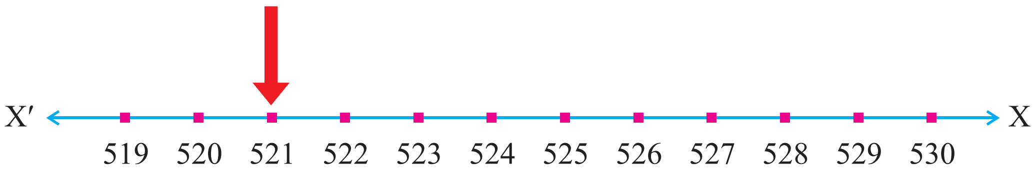
கீழே உள்ள சில உதாரணங்களைக் கொண்டு எண்களின் தோராய மதிப்பைக் காணும் முறையை அறிவோம். 521 என்ற எண்ணைக் கருதுக.

பத்தாம் இடத்திற்குத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பிடல்.

எடுத்துக்காட்டு 1.44

521 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொண்டு, அதை 10ஆம் இடத்திற்குத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பிடுக.

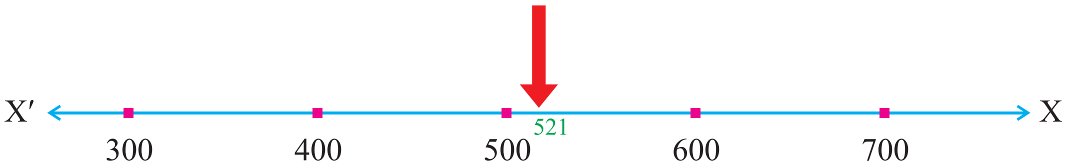
தீர்வு 521 ஆனது 520 மற்றும் 530 க்கும் இடையே உள்ளது.



ஆனால் 530ஐ விட 520க்கு மிக அருகில் உள்ளதால் எண் கோட்டினை பார்க்கும் போது 521 இன் தோராய மதிப்பு 520 ஆகும்.

நூறாம் இடத்திற்குத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பிடல்

521 என்ற எண் 500க்கும் 600 க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.



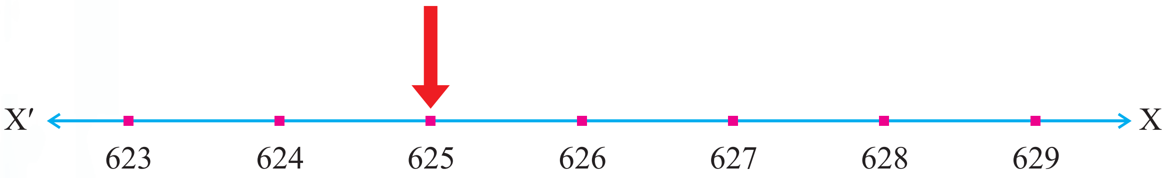
521 ஆனது 600 ஐ விட 500 க்கு அருகில் உள்ளது. எனவே 521 ன் நூறாம் இடத்தின் தோராய மதிப்பு 500 ஆகும்.

மற்றுமொரு உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.45

625 என்ற எண்ணை 100 ஆம் இடத்திற்குத் திருத்தமாக மதிப்பிடுக.

தீர்வு கீழே உள்ள எண் கோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.



இங்கு 625 ஆனது 624 அல்லது 626க்கு அருகில் உள்ளது என கூற முடியாது. ஏனெனில் அது இரு எண்களுக்கும் சரியாக நடுவில் அமைந்துள்ளது. இங்கு 625 ஆனது 626க்கு அருகில் உள்ளது எனக் கூறுவதே மரபாகும். எனவே 625 ன் தோராய மதிப்பு 626 என எடுத்துக் கொள்வோம்.

மாறாக நூறாம் இடத்திருத்தமாக கூறும்போது 625 ஐ தோராயமாக 600 என கூறலாமே அல்லாமல் 700 என கூற இயலாது.

மேலும் சில உதாரணங்கள்

47,618 என்ற எண்ணைக் கருதுக.

(அ) பத்தாம் இடத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பு = 47,620

(ஆ) நூறாம் இடத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பு = 47,600

(இ) ஆயிரமாவது இடத் திருத்தமாக தோராய மதிப்பு = 48,000

(ஈ) பத்தாயிரமாவது இட திருத்தமாக தோரய மதிப்பு = 50,000

தசமங்களின் தோராய மதிப்பீடு

எடுத்துக்காட்டு 1.46

36.729 என்ற தசம எண்ணை இரு மற்றும் ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக எழுதுக.

தீர்வு (அ) இதை இரு தசம இடத் திருத்தமாக 36.73 என எழுதலாம்.

(ஏனெனில், ஒன்றாம் இட இலக்கமான 9 > 5. எனவே 2 உடன் 1 ஐக் கூட்டி 3 என மாற்றி எழுதலாம்)

$\therefore$ 36.729 $\simeq$ 36.73 (இரு தசம இடத் திருத்தமாக)

(ஆ) 36,729ன் இரண்டாம் தசமத்தில் உள்ள 2 ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். 2 ஆனது 5 ஐ விட குறைவானதால், 7 ஐ அப்படியே விட்டு விட வேண்டும்.

$\therefore$ 36.729 $\simeq$ 36.7 (ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக)

எடுத்துக்காட்டு 1.47

36.745 என்ற தசம எண்ணை இரு மற்றும் ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக எழுதுக.

தீர்வு

அ) இதைத் தோராயமாக 36.75 என இரு தசம இடத் திருத்தமாக எழுதலாம். ஏனெனில், கடைசி இலக்கம் 5 ஆனதால், முந்தைய இலக்கமான 4 உடன் 1 ஐக் கூட்டி 5 என மாற்றி எழுதலாம்.

ஆ) இதைத் தோராயமாக 36.7 என ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக எழுதலாம். ஏனெனில் இரண்டாம் இலக்க எண் 4 ஆனது 5 ஐ விட குறைவாக இருப்பதால் 7 ஐ அப்படியே விட்டு விட வேண்டும்.

$\therefore$ 36.745 $\simeq$ 36.7 (ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக)

எடுத்துக்காட்டு 1.48

2.14829 என்ற தசம எண்ணை 1, 2, 3 மற்றும் 4 தசம இடத் திருத்தமாக எழுதுக.

தீர்வு

(i) 1 தசம இடத் திருத்தமாக 2.1

(ii) 2 தசம இடத் திருத்தமாக 2.15

(iii) 3 தசம இடத் திருத்தமாக 2.148

(iv) 4 தசம இடத் திருத்தமாக 2.1483

எடுத்துக்காட்டு 1.49

பின்வரும் எண்களை முழுக்களுக்குத் திருத்தமாக முழுதாக்குக.

(அ) 288.29 (ஆ) 3998.37 (இ) 485.995 (ஈ) 4999.96

தீர்வு

(அ) $288.29 \simeq 288$ (ஆ) $3998.37 \simeq 3998$

(மேலே உள்ள எண்களில் பத்திலொன்றின் இட மதிப்பிலுள்ள எண்கள் 5ஐ விடக் குறைவானவை. எனவே எல்லா முழுக்களின் மதிப்புகள் அப்படியே எழுதப்பட்டுள்ளன)

(இ) $4856.795 \simeq 4857$ (ஈ) $4999.96 \simeq 5000$

(இங்கு பத்திலொன்றின் இட மதிப்பிலுள்ள எண்கள் 5ஐ விட அதிகமானவை. எனவே முழுக்களின் மதிப்பில் 1 அதிகரிக்கப்பட்டுள்ளது)

பயிற்சி 1.8

1. பின்வரும் எண்களை இரு தசம இடத்திற்குத் திருத்தமாக எழுதுக :

   (i) 12.568 (ii) 25.416 கிகி (iii) 39.927 மீ

   (iv) 56.596 மீ (v) 41.056 மீ (vi) 729.943 கிமீ

2. பின்வரும் எண்களை மூன்று தசம இடத்திற்குத் திருத்தமாக எழுதுக :

   (i) 0.0518 மீ (ii) 3.5327 கிமீ (iii) 58.2936 லி

   (iv) 0.1327 கி (v) 365.3006 (vi) 100.1234

3. பின்வரும் எண்களை கொடுக்கப்பட்ட இலக்கங்களுக்குத் தோராயமாக்குக :

   (i) 247 ஐ பத்து இடத் திருத்தமாக (ii) 152 ஐ பத்து இடத் திருத்தமாக

   (iii) 6848 நூறு இடத் திருத்தமாக (iv) 14276 ஐ பத்தாயிரம் இடத் திருத்தமாக

   (v) 3576274 ஐ இலட்சம் இடத் திருத்தமாக

   (vi) 104, 3567809 ஐ கோடி இடத் திருத்தமாக.

4. கீழ்க்கண்ட எண்களை முழுக்குகளுக்குத் திருத்தமாக எழுதுக.

   (i) 22.266 (ii) 777.43 (iii) 402.06

   (iv) 305.85 (v) 299.77 (vi) 9999.9567

1.9 எண்களுடன் விளையாடுதல்

கணிதம் என்பது ஆச்சரியம் மிகுந்த, மகிழ்ச்சியூட்டும், வினோதமான பாடம் ஆகும். இப்பகுதியில் கணிதத்தின் அதிசயமான, மகிழ்ச்சியூட்டும் கணக்குகளைக் கற்க உள்ளோம்.

(அ) எண்களின் பொதுவான அமைப்பு முறை

42 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம், அதை எழுதும் போது

$$42 = 40 + 2$$
$$= 10 \times 4 + 2$$

அதே போல், 27 என்ற எண்ணை எழுதும் போது

$$27 = 20 + 7$$
$$= 10 \times 2 + 7$$

இங்கு ab என்பது வெறும் இலக்கங்கள் மட்டுமேயொழிய $a \times b$ ஆகாது.

பொதுவாக, 'a' மற்றும் 'b' என்ற இரு இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படும் இரு இலக்க எண் ab யை எழுதும் போது

$$ab = 10 \times a + b$$
$$= 10a + b$$
$$ba = 10 \times b + a$$
$$= 10b + a$$

என எழுதப்படுகிறது.

நாம் 351 என்ற எண்ணைக் கருதுவோம்.

இது 3 இலக்கங்கள் கொண்ட ஒரு எண்ணாகும். இதை எழுதும் போது

$$351 = 300 + 50 + 1$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$ என எழுதலாம்.

பொதுவாக, abc ஆகிய மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படும் எந்தவொரு மூன்றிலக்க எண்ணையுமே முறையாக

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + 1c$$, என எழுதலாம்.

இதே முறையைப் பயன்படுத்தி மூன்றிலக்க எண்கள் cab மற்றும் bca வினை எழுதும் போது

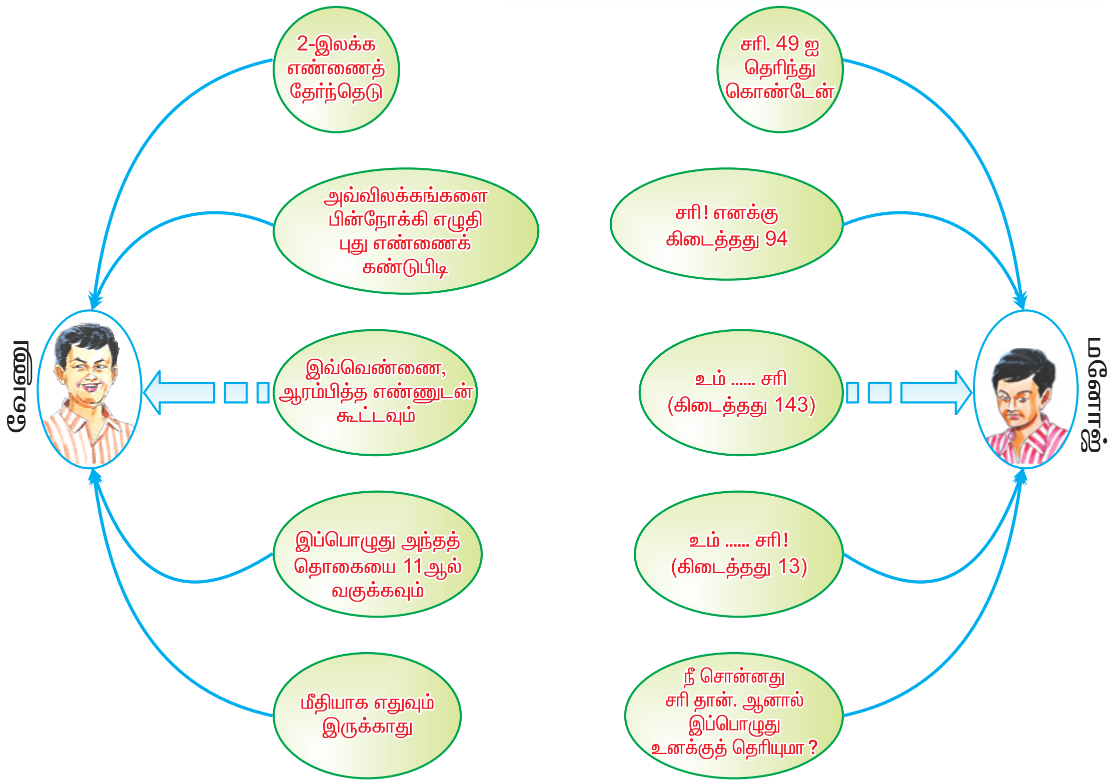
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$ எனவும் எழுதலாம்.

(ஆ) எண்களின் விளையாட்டுகள்

(i) இலக்கங்களை மாற்றி எழுதுதல் – ஈரிலக்க எண்

வேணு, மனோஜிடம் ஏதேனும் ஓர் 2 இலக்க எண்ணை மனதில் நினைத்துக் கொள்ளச் சொன்னார். பின்னர் அவர் என்ன செய்யச் சொல்லி சொல்கிறாறோ, அதை அப்படியே செய்யும்படி கூறினார். அவ்விருவருக்கும் இடையே நடந்த உரையாடல் கீழ்கண்டக் வடிவமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதைக் கவனமாகப் படிக்கவும்.

வேணு மற்றும் மனோஜ் இருவரின் உரையாடல்:



இப்போது, நாம் வேணுவின் சாமர்த்தியத்தைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம். ஒருவேளை மனோஜ் தேர்வு செய்த எண் ab ஆக இருந்திருந்தால், $10a+b$ என்பது ஓர் இரு இலக்க எண்ணின் குறுகிய வடிவம் ஆகும். அதன் இலக்கங்களை மாற்றி எழுதக் கிடைக்கும் எண் $ba = 10b + a$ ஆகும். இவ்விரு எண்களையும் கூட்டினால் மனோஜிற்குக் கிடைப்பது

$$(10a+b)+(10b+a) = 11a+11b$$
$$= 11(a+b)$$

எனவே அக்கூட்டுத் தொகையானது எப்போதுமே 11 இன் மடங்காக இருக்கும். அதைத்தான் வேணு கூறினார்.

அக்கூட்டுத் தொகையை 11 ஆல் வகுக்க நமக்குக் கிடைப்பது $(a+b)$. அதாவது இரு எண்களின் கூட்டற் பலன்.

(இ) கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு முறையைக் கண்டு அடுத்த மூன்று எண்களைக் காண்க :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் அமைப்பு முறையைப் பார்க்கவும்.

(i) 3, 9, 15, 21, ... (ஒவ்வொரு உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை விட 6 அதிகமாக பெற்றுள்ளது)

இதே அமைப்பு தொடர்ந்தால் அதன் அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் முறையே ....., ... மற்றும் ..... ஆகும்.

(ii) 100, 96, 92, 88, ..., ..., ... (ஒவ்வொரு உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை விட 4 குறைவாக உள்ளது)

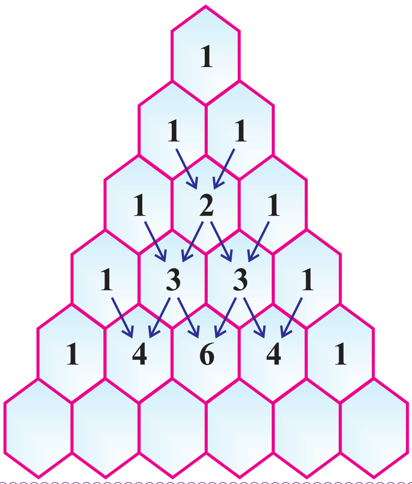
(iii) 7, 14, 21, 28, ..., ..., ... (7இன் மடங்கு)

(iv) 1000, 500, 250, ..., ..., ... (ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பில் பாதியாகும்)

(v) 1, 4, 9, 16, ..., ..., ... (இயல் எண்களின் வர்க்கங்கள்)

(ஈ) பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் எண் அமைப்பு முறை

கீழே கொடுக்கப்பட்ட முக்கோண வடிவில் அமைந்துள்ள இவ்வெண்களின் வடிவமைப்பு **பாஸ்கல் முக்கோணம்** எனப்படும்.



செய்து பார்

பாஸ்கல் முக்கோணத்தில் உள்ள எண் அமைப்பினைக் கண்டுபிடித்து 6ஆவது வரிசையைப் பூர்த்தி செய்க.

3 × 3 மாயச் சதுரம்

அருகில் உள்ள எண் அட்டவணையைப் பார்க்க. இது ஓர் 3×3 மாயச் சதுரம் என அழைக்கப்படுகிறது. மாயச் சதுரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு நிரை, நிரல், மூலை விட்டத்தில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் சமமாக இருக்கும்.

6	11	10
13	9	5
8	7	12

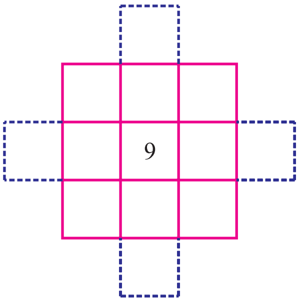
இந்த மாயச் சதுரத்தின் கூடுதல் 27 ஆகும். '9' என்ற எண்ணானது மையக் கட்டத்தில் எழுதப்பட்டு விட்டால், மீதமுள்ள 8 கட்டங்களும் நிரப்பப்பட வேண்டும். அவை 9ஐ விட குறைவான 4 எண்கள் மற்றும் 9ஐ விட அதிகமான 4 எண்களும் ஆகும். அவையாவன :

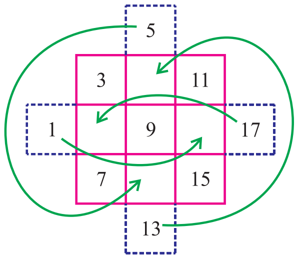
(அ) 5, 6, 7, 8 மற்றும் 10, 11, 12, 13 ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு எண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடு 1 ஆகும்.

(ஆ) 1, 3, 5, 7 மற்றும் 11, 13, 15, 17 ஆகிய எண்களானால் இவ்வெண்களின் வேறுபாடு '2' ஆக இருக்கும்.

தவிர வேறு ஏதாவது ஒரே எண்ணை வித்தியாசமாகக் கொண்ட எண்கள் அதாவது $-11, -6, -1, 4$ அல்லது 14, 19, 24, 29 என '5' வித்தியாசம் உடையதாகவும் எழுதலாம்.

இவற்றுள் ஏதாவது ஓர் அமைப்பு எண்களை முடிவு செய்த பின்பு, உதாரணமாக 1, 3, 5, 7 மற்றும் 11, 13, 15, 17 என எடுத்துக் கொண்டால் சதுரத்தின் 4 பக்கங்களிலும் நான்கு வீழல்களை கீழே காட்டியுள்ளபடி வரைந்து கொள்ள வேண்டும். மூலை விட்ட அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி ஒவ்வொரு எண்ணாக நாம் கட்டத்திற்குள் நிரப்ப வேண்டும்.





3	13	11
17	9	1
7	5	15

வீழல்களில் நிரப்பப்பட்ட எண்கள் எதிர் முனையில் உள்ள வெற்றிடமாக உள்ள கட்டங்களுக்கு மாற்றப்பட வேண்டும்.

செய்து பார்

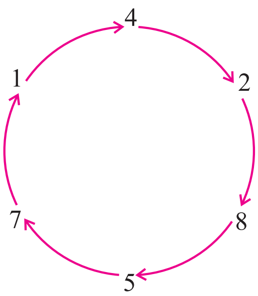
3	1	2		9	5		7	6
5		9	1		7		8	2
4		7	2	6	3	5		
9			7			2	4	
	2	8		1			9	3
	3		9	8	2		5	7
	4	5	6				3	1
1	7		3	5	8	9		4
8		3	4	2		7		5

வெவ்வேறு கலரில் உள்ள சதுரங்களை 1 முதல் 9 வரை உள்ள எல்லா இலக்கங்களைக் கொண்டும் ஒவ்வொரு நிரை, நிரல்களையும் நிரப்புக. எண்களை திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தக்கூடாது.

சுழற்சி எண்கள்

1 4 2 8 5 7

முதலில் மேற்கண்ட இலக்கங்களை வட்டதில் அமைத்துக் கொள்க.



இப்பொழுது 142857 என்ற எண்ணை 1 முதல் 6 வரை உள்ள எல்லா எண்களாலும் பெருக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 1 \\ \hline 142857 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 2 \\ \hline 285714 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 3 \\ \hline 428571 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 4 \\ \hline 571428 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times 5 \\ \hline 714285 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times\ 6 \\ \hline 857142 \\ \hline \end{array}$$

மேற்கண்ட பெருக்கல் மூலம் நாம் அறிந்தது என்னவெனில், வட்டத்தில் பொருத்தப்பட்ட எண்கள் சுழற்சி முறையில் வெவ்வேறு அமைப்பில் வட்டத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பித்து தொடர்ந்து அமைவதைப் பார்க்க முடிகிறது.

பயிற்சி 1.9

1. கீழ்க்கண்ட வடிவமைப்பை பூர்த்தி செய்க
   - (i) 40, 35, 30, ... , ... , ...
   - (ii) 1, 2, 4, ... , ... , ...
   - (iii) 84, 77, 70, ... , ... , ...
   - (iv) 4.4, 5.5, 6.6, ... , ... , ...
   - (v) 1, 3, 6, 10, ... , ... , ...
   - (vi) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , ... , ...

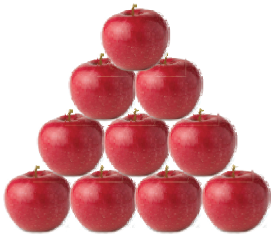
     (இத்தொடர் அமைப்பை “பிபோனாசி தொடர்” என அழைக்கிறோம்)
   - (vii) 1, 8, 27, 64, ... , ... , ...

2. ஒரு நீர்த்தொட்டியானது உட்புறம் படிக்கட்டுகளைக் கொண்டிருந்தது. ஒரு குரங்கானது படிக்கட்டின் உச்சியில் அமர்ந்துள்ளது. (அதாவது முதற் படியில் இருக்கிறது) தண்ணீரின் மட்டமானது ஒன்பதாம் படிக்கட்டில் உள்ளது.

(அ) குரங்கானது 3 படிகள் கீழாக குதித்து பின்பு 2 படிகள் மேல் நோக்கி குதிக்கிறது. இவ்வாறு குதித்தால் தண்ணீரின் மட்டத்தை அடைய எத்தனை முறை குதிக்க வேண்டும்?

(ஆ) குரங்கு தண்ணீர் குடித்த பின்பு, மீண்டும் மேலே வர வேண்டும். இதற்காக 4 படிகள் மேல் நோக்கி குதித்து பின்பு 2 படிகள் கீழ் நோக்கி குதிக்கிறது. இப்படி நகர்ந்து சென்று, தண்ணீர் தொட்டியின் மேல் பகுதிக்கு (முதற் படிக்கு) வர வேண்டுமானால் குரங்கு எத்தனை முறை குதிக்க வேண்டும்?

3. ஒரு பழ வியாபாரி ஆப்பிள் பழங்களை கீழ்க்கண்ட வடிவமைப்பில் அடுக்கி வைத்தார்.



(அ) இவ்வடிவமைப்பில் 10 வரிசைகளில் ஆப்பிள் அடுக்கி வைக்கப்பட்டிருந்தால் மொத்த ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கையை எண்ணாமல் கண்டுபிடி.

(ஆ) அதே அமைப்பில் 20 வரிசைகளில் ஆப்பிள்கள் அடுக்கி வைக்கப்பட்டிருந்தால் மொத்த ஆப்பிள் பழங்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

மொத்த ஆப்பிள்களைக் கணக்கிடும் வடிவமைப்பை உன்னால் தெரிந்து கொள்ள முடிகிறதா? கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை நிரப்ப முயல்க.

வரிசை	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை	1	3	6	10	15				

கருத்துச் சுருக்கம்

- விகிதமுறு எண்கள் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் செயல்பாடுகளால் அடைவு பெற்றுள்ளன.
- பூச்சியம் அற்ற விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பு வகுத்தலின் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது.
- விகிதமுறு எண்கள் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் செயல்பாடுகளைக் கொண்டு பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கின்றது.
- விகிதமுறு எண்களின் கூட்டல் சமனி 0 ஆகும்.
- விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் சமனி 1 ஆகும்.
- விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கல் பலன், கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் மீதான பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்கின்றது.
- $\frac{a}{b}$ ம் $\frac{-a}{b}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும்.
- $\frac{a}{b}$ என்பது $\frac{b}{a}$ இன் பெருக்கல் எதிர்மறை அல்லது தலைகீழி ஆகும்.
- இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.
- அடுக்குக் குறி விதிகள் ஏழு. அவையாவன

  a , b என்பன மெய் எண்களாகவும், m, n என்பன முழு எண்களாகவும் இருப்பின்,

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

  (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, இங்கு $a \neq 0$

  (iii) $a^0 = 1$, இங்கு $a \neq 0$

  (iv) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, இங்கு $a \neq 0$

  (v) $(a^m)^n = a^{mn}$

  (vi) $a^m \times b^m = (ab)^m$

  (vii) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, இங்கு $b \neq 0$.

- ஒரு எண் இரண்டு எண்களுக்கு இடையில் சம தூரத்தில் இருந்தால் அந்த எண்களுடன் மிகப்பெரிய எண்ணின் மதிப்பே அந்த எண்ணின் தோராய மதிப்பாகும்.

இயற்கணிதம்

2

2.1 அறிமுகம்
2.2 இயற்கணிதக் கோவைகள்–கூட்டலும் கழித்தலும்
2.3 இயற்கணிதக் கோவைகளின் பெருக்கல்
2.4 முற்றொருமைகள்
2.5 காரணிப்படுத்தல்
2.6 இயற்கணிதக் கோவைகளின் வகுத்தல்
2.7 ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

2.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதத்தைக் குறிக்கும் 'Algebra' என்னும் ஆங்கிலச் சொல் 'al-jabr' என்ற அரேபியச் சொல்லிலிருந்து பெறப்பட்டது. 'Al' என்றால் "அந்த" என்றும், 'jabr' என்றால் "உடைந்த பகுதிகளின் ஒன்றிணைப்பு" என்றும் பொருள்படும். அரேபியக் கணித மேதையான அல்-க்வாரிஸ்மி என்பவர் எழுதிய 'Kitab al-jabr wa l-muqabala' என்ற புத்தகத் தலைப்பிலிருந்து இச்சொல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. 'சமன்பாடுகளும் தொகுப்புகளும் பற்றிய புத்தகம்' என்பது இதன் பொருளாகும். நேரடியாக மொழி பெயர்த்தால் 'குறைத்தலும் ஒப்பிடுதலும்' என்ற பொருளைத் தருகிறது.

பழங்கால இந்தியாவில் இயற்கணிதம் 'பீஜ–கணிதம்' என்றழைக்கப் பட்டது. ('பீஜ' என்றால் 'பிற' அல்லது 'மற்ற' என்றும் 'கணிதம்' என்றால் 'கணக்கு' என்றும் பொருள்படும்)

ஆர்யபட்டர், பிரம்மகுப்தர், மஹாவீரர், பாஸ்கரர், ஸ்ரீதரர் போன்ற இந்திய கணித மேதைகள் இப்பாடப் பிரிவை வளர்ப்பதில் பெரும் பங்காற்றியுள்ளனர்.

அலெக்ஸாண்டிரியாவில் வாழ்ந்த கிரேக்கக் கணித மேதையான டயோஃபாண்டஸ் என்பவர் இப்பாடப் பிரிவில் மாபெரும் வளர்ச்சியை உருவாக்கியதால் இவரை 'இயற்கணிதத்தின் தந்தை' என்றழைக்கின்றோம்.

டயோஃபாண்டஸ்
(ஏறத்தாழ கி.மு. 3ஆம் நூற்றாண்டு)

அலெக்ஸாண்டிரியாவில் வாழ்ந்த கிரேக்கக் கணித மேதை. இவர் இயற் கணிதத்தின் தந்தை என்று அழைக்கப்படுகிறார்.

$x^n + y^n = z^n$ என்னும் சமன்பாடு டயோஃபாண்டைன் சமன்பாடு என்றழைக்கப் படுகிறது. இதில் $n > 2$ எனும்பொழுது x, y, z-களின் மிகை அடுக்கு மதிப்புகட்கு தீர்வுகள் ஏதுமில்லை.

அல்–க்வாரிஸ்மி
(கி.பி. : 780-850)

'Kitab al-jabr-wa-l-muqubala' என்ற புத்தகத்தை எழுதிய அரபுக் கணித மேதை. இது இந்திய இயற் கணிதத்தையும் கிரேக்க வடிவியலையும் இணைத்து உருவாக்கப்பட்டது. இது கணிதத்தின் வளர்ச்சியில் மிகப்பெரும் தாக்கத்தை ஏற்படுத்தியது.

2.2 இயற்கணிதக் கோவைகள் – கூட்டலும் கழித்தலும்

மாறிகள், மாறிலிகள், உறுப்புகளின் கெழுக்கள், கோவைகளின் படி போன்றவற்றை நாம் ஏழாம் வகுப்பிலேயே கற்றுள்ளோம். இப்பொழுது கோவைகளுக்கான கீழ்க்காணும் உதாரணங்களைக் கருதுவோம்.

உதாரணம்

(i) $x + 5$ (ii) $3y - 2$ (iii) $5m^2$ (iv) $2xy + 11$

$x + 5$ என்ற கோவையானது மாறி x-ஐயும் மாறிலி 5-ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

$3y - 2$ என்ற கோவையானது மாறி y-ஐயும் மாறிலிகள் 3-ஐயும் $-$ 2-ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

$5m^2$ என்ற கோவையானது மாறி m - ஐயும் மாறிலி 5-ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப் பட்டுள்ளது. $2xy + 11$ என்ற கோவையானது மாறிகள் x - ஐயும் y - ஐயும் மற்றும் மாறிலிகள் 2 - ஐயும் 11-ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

2.2.1 இயற்கணிதக் கோவையின் மதிப்புகள்

ஒரு கோவையில் உள்ள மாறிகளின் மதிப்புகள் மாறும்பொழுது கோவையின் மதிப்பும் மாறும் என்பதை நாம் அறிவோம். உதாரணமாக $x + 5$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். x - இன் மதிப்புகள் மாறும்பொழுது என்ன நிகழ்கிறது என்பதைக் கீழேயுள்ள அட்டவணை காட்டுகிறது.

x-இன் மதிப்பு	கோவை $x + 5$ இன் மதிப்பு
1	$1 + 5 = 6$
2	$2 + 5 = 7$
3	$3 + 5 = 8$
4	$4 + 5 = 9$
-1	$-1 + 5 = 4$
-2	$-2 + 5 = 3$
-3	$-3 + 5 = 2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$

அட்டவணையில், x-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கேற்ப கோவையின் மதிப்பு மாறுவதையும் மாறிலி 5-இன் மதிப்பில் மாற்றம் இல்லை என்பதையும் கவனிக்க.

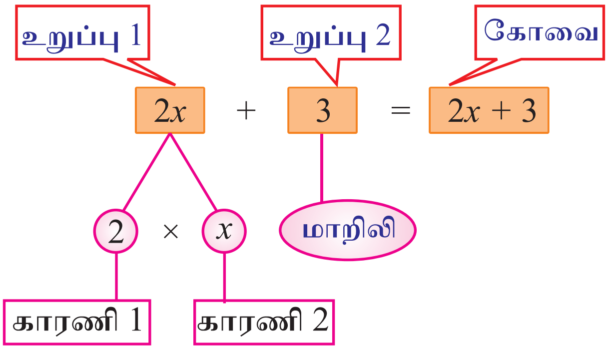
செய்து பார்

1. மேற்கண்ட உதாரணத்தில் உள்ள ஏனைய கோவைகளில் உள்ள மாறிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை அளித்து அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

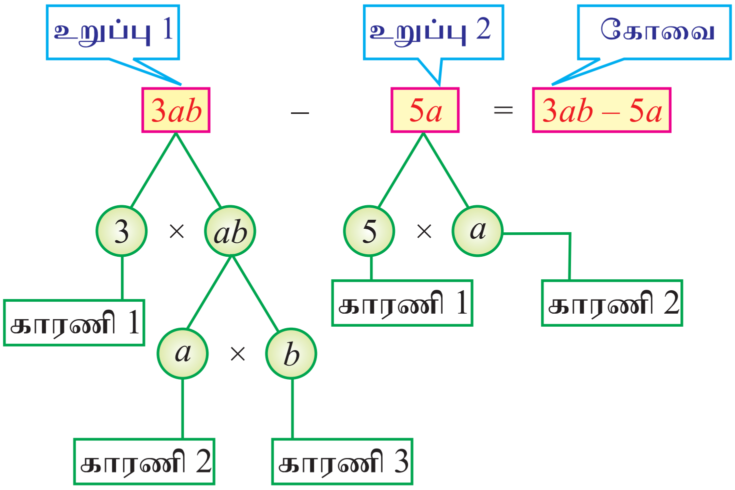
2. மாறிலிகளின் மதிப்புகளில் ஏதேனும் மாற்றம் உனக்குத் தெரிகின்றதா?

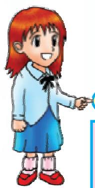
2.2.2 உறுப்புகள், காரணிகள் மற்றும் கெழுக்கள்.

$2x+3$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $2x$, 3 ஆகிய இரு உறுப்புகளால் ஆனது. **உறுப்புகள் சேர்ந்து கோவைகளாகின்றன.** உறுப்புகள் காரணிகளின் பெருக்கலால் உருவாகின்றன. $2x$ என்ற உறுப்பு 2, x ஆகிய காரணிகளின் பெருக்கலால் உருவாக்கப் பட்டுள்ளது. 3 என்ற உறுப்பு ஒரே ஒரு காரணியால் மட்டும் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.



$3ab-5a$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $3ab$, $-5a$ என்ற இரு உறுப்புகள் உள்ளன. $3ab$ என்ற உறுப்பு காரணிகள் 3, a, b ஆகியவற்றின் பெருக்கல்பலனால் ஆனது. $-5a$ என்ற உறுப்பு -5 , a ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாகும். **ஓர் உறுப்பின் எண்சார் காரணியே அதன் கெழு எனப்படும்.** ஆகவே, மேலே உள்ள கோவையில் ab-இன் கெழு 3 ஆகும். a-இன் கெழு -5 ஆகும்.





நீவிர் அறிவீரா?

(அ) ஒரு கோவையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அறிய அதில் உள்ள + (கூட்டல்) அல்லது – (கழித்தல்) குறிகளைக் கண்டறிந்து எளிதில் கணக்கிடலாம்.

(ஆ) மாறிலி உறுப்பு என்பது எந்த மாறியுடனும் சேராத தனித்த உறுப்பாகும்.

செய்து பார்

$x^2y^2 - 5x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - 11$ என்ற கோவையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் உறுப்புகளின் கெழுக்களையும் கண்டறிந்து கீழேயுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

வரிசை எண்	உறுப்பு	உறுப்பின் கெழு
1	x^2y^2	1
2		
3		
4		

2.2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள் :

ஒருறுப்புக் கோவை, ஈருறுப்புக் கோவை, மூவுறுப்புக் கோவை, பல்லுறுப்புக் கோவை

ஒருறுப்புக் கோவை : ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $2x^2,\ 3ab,\ -7p,\ \frac{5}{11}a^2b,\ -8,\ 81xyz, ...$

ஈருறுப்புக் கோவை : இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $x + y,\ 4a - 3b,\ 2 - 3x^2y,\ l^2 - 7m, ...$

மூவுறுப்புக் கோவை : மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $x + y + z,\ 2a - 3b + 4,\ x^2y + y^2z - z, ...$

பல்லுறுப்புக்கோவை : முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த பூச்சியமற்ற கெழுவையுடைய பல உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையை பல்லுறுருப்புக் கோவை என்கிறோம். இதையே, மாறிகள், கெழுக்கள், முழு எண் அடுக்குகளின் சேர்க்கையால் உருவான முடிவுறு எண்ணிக்கைக் கொண்ட உறுப்புகளால் ஆன கோவை என்றும் கூறலாம்.

உதாரணம் :

$a + b + c + d,\ 7xy,\ 3abc - 10,\ 2x + 3y - 5z,\ 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 72x + 5 ....$

> ஒருருப்புக்கோவை, ஈருருப்புக்கோவை, மூவுருப்புக்கோவை, ...
> ஆகியவைகளும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளே.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி : பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒருறுப்புக் கோவைகள் அதன் உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன. உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும். மிக உயர்ந்த அடுக்கைப் பெற்ற உறுப்பின் கெழுவை பல்லுறுப்புக் கோவையின் 'தலையாய கெழு' அல்லது 'வழி நடத்திச் செல்லும் கெழு' என்கிறோம்.

உதாரணம் :

$2x^5 - x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 12x - 4$ என்பது x இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. இங்கு $2x^5, -x^4, 7x^3, -6x^2, 12x, -4$ ஆகிய ஆறு ஒருறுப்புக் கோவைகள் உள்ளன. இவை இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன.

இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5. தலையாய கெழு 2 ஆகும்.

$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காணுமாறு ஓர் ஆசிரியர் கூறியபோது இரு மாணவர்கள் கீழ்க்கண்டுள்ளவாறு விடையளித்தார்கள்.

யார் சரியாக செய்தார் என உன்னால் கண்டறிய இயலுமா?

கௌதம்
பல்லுறுப்புக் கோவை:
$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$
உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு 4.
$\therefore$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 4.

ஆயிஷா
பல்லுறுப்புக் கோவை:
$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$
$= 13x^4 - 2x^2y^3 - 4x^0y^0$
உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு 5.
$\therefore$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5.

உங்கள் விடை ஆயிஷா எனில் சரி.

உனது விடை கௌதம் எனில், தவறு எங்கே உள்ளது?

இப்பொழுது, $13x^4 - 2x^2y^3 - 4$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை ஆராய்வோம்.

முதல் உறுப்பு : $13x^4 \rightarrow$ இதில், x^4 - இன் கெழு 13. மாறி x, மேலும் x -இன் அடுக்கு 4. எனவே $13x^4 \rightarrow$ இன் படி 4.

இரண்டாம் உறுப்பு : $-2x^2y^3 \rightarrow$ இதில், x^2y^3 - இன் கெழு -2. மாறிகள் x, y. x-இன் அடுக்கு 2, y-இன் அடுக்கு 3. எனவே x^2y^3 - இன் படி $2 + 3 = 5$ (x, y ஆகிய மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல்).

மூன்றாம் உறுப்பு : $-4 \rightarrow$ இது ஒரு மாறிலி உறுப்பு. இதை $-4x^0y^0$ எனவும் எழுதலாம். மாறிகள் x^0y^0 - இன் அடுக்கு பூச்சியம். எனவே -4 இன் படி பூச்சியம்.

கௌதம் செய்த தவறு என்ன?

இரண்டாம் உறுப்பான $-2x^2y^3$ இன் படி இரண்டாகவோ அல்லது மூன்றாகவோ இருக்கும் என கௌதம் நினைத்தான். இக்குழப்பமே அவனைத் தவறான முடிவுக்கு இழுத்துச் சென்றது. ஆனால் சரியான வழி மேலே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம்

x-இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் உறுப்புகளின் அடுக்குகள் இறங்கு வரிசையில் இருக்குமாறு மாற்றியமைத்தால், அது திட்ட வடிவில் இருப்பதாகச் சொல்வோம்.

உதாரணம் :

$2+9x-9x^2+2x^4-6x^3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைத் திட்ட வடிவில் எழுதுக.

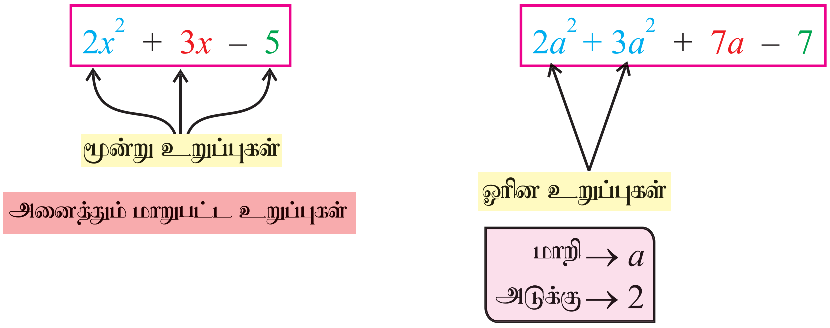
$2x^4-6x^3-9x^2+9x+2$ என நாம் இப்பல்லுறுப்புக் கோவையைத் திட்ட வடிவில் எழுதுகிறோம்.

நினைவில் கொள்க: அடுக்குகள் ஏதும் காண்பிக்கப்படவில்லை எனில் அதை '1' என்றே புரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

உதாரணம் : $9x=9x^1$

ஒத்த உறுப்புகள், மாறுபட்ட உறுப்புகள்

ஒத்த மாறிகளையும் ஒத்த அடுக்குகளையும் கொண்ட உறுப்புகள் ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன. கீழ்க்கண்ட கோவைகளைக் கருதுக.



கீழேயுள்ள கோவைகளைக் காண்க :

$$3x,\ 5x^2,\ 2xy,\ -70x,\ -7,\ -3y^2,\ -3x^2,\ -20yx,\ 20,\ 4x,\ -\frac{2}{7},\ 3y.$$

ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகளை நாம் கீழேயுள்ளவாறு பட்டியலிடலாம் :

(i) $3x, -70x, 4x$

(ii) $5x^2, -3x^2$

(iii) $2xy, -20yx$

(iv) $-7, 20, -\frac{2}{7}$

1. $3x, 3y$ ஆகியவை ஏன் ஒரின உறுப்புகள் அல்ல?
2. $5x^2, -3y^2$ ஆகியவை ஏன் ஒரின உறுப்புகள் அல்ல?

2.2.4 இயற்கணிதக் கோவைகளின் கூட்டலும் கழித்தலும் – மீள் பார்வை

ஏழாம் வகுப்பில் நாம் இயற்கணிதக் கோவைகளின் கூட்டலையும் கழித்தலையும் கற்றுள்ளோம். ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ முடியும். இவற்றை தற்பொழுது நாம் மீண்டும் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$3x^3 + x^2 - 2$, $2x^2 + 5x + 5$ ஆகியவற்றைக் கூட்டுக.

தீர்வு

முதலில் இவற்றை கீழேயுள்ளவாறு மாற்றியமைத்துப் பிறகுக் கூட்டுவோம்.

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & + x^2 & & -2 \\ (+) & & 2x^2 & + 5x & + 5 \\ \hline & 3x^3 & + 3x^2 & + 5x & + 3 \\ \hline \end{array}$$

(அல்லது)

இதையே இவ்வாறும் எழுதலாம்

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 + & x^2 & + 0x & - 2 \\ (+) & 0x^3 + & 2x^2 & + 5x & + 5 \\ \hline & 3x^3 + & 3x^2 & + 5x & + 3 \\ \hline \end{array}$$

நாம் $2x^2$ என்ற இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்பை அதன் ஒத்த உறுப்பான x^2 என்ற முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்பின் கீழே எழுதியுள்ளதை உற்று நோக்கி அறிக. அதேபோல் மாறிலி உறுப்பான $+ 5$ ஆனது மாறிலி உறுப்பான $- 2$ இன் கீழே எழுதப்பட்டுள்ளது. முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x உறுப்பும் இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^3 உறுப்பும் இல்லாததால் கூட்டலை எளிமைப்படுத்துவதற்காக அவற்றுக்குரிய இடங்கள் காலியாக விடப்பட்டுள்ளன. மாற்றாக இல்லாத உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக பூச்சியக் கெழுக்களை இணைத்தும் நாம் கூட்டல் கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$3x - y, 2y - 2x$, $x + y$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலைக் காண்க.

தீர்வு

நிரல் முறைக் கூட்டல்

$$\begin{array}{rr} & 3x - \ y \\ & -2x + 2y \\ (+) & x + \ y \\ \hline & 2x + 2y \\ \hline \end{array}$$

($2y - 2x$ என்பதை $-2x + 2y$ என மாற்றியமைத்தல்)

நிரைமுறைக் கூட்டல்

$(3x - y) + (2y - 2x) + (x + y)$

$= (3x - 2x + x) + (- y + 2y + y)$

$= (4x - 2x) + (3y - y)$

$= 2x + 2y.$

ஒரின உறுப்புகளை ஒன்றாகச் சேர்த்தல் மூலம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கூட்டல் நிறைமுறையில் செய்யப்படுகிறது

எடுத்துக்காட்டு 2.3

(i) $8xy$ இலிருந்து $5xy$ஐக் கழிக்க. (ii) $5c - d^2$ இலிருந்து $3c + 7d^2$ ஐக் கழிக்க.

(iii) $3x^2 - 7y^2 + 9$ இலிருந்து $2x^2 + 2y^2 - 6$ ஐக் கழிக்க.

தீர்வு

(i) $8xy$ இருந்து $5xy$ ஐக் கழிக்க

முதலில் கீழேயுள்ளவாறு அமைப்போம் ; பிறகு கழிப்போம்.

$$\begin{array}{r} 8xy \\ -5xy \\ \hline 3xy \\ \hline \end{array}$$

($8xy, - 5xy$ ஆகிய இரண்டும் ஒரின உறுப்புகள்)

$\therefore 8xy - 5xy = 3xy$

(ii) $5c - d^2$ இலிருந்து $3c + 7d^2$ ஐக் கழிக்க.

$$\begin{array}{r} 5c - d^2 \\ -(3c + 7d^2) \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad \text{(அல்லது)} \quad \begin{array}{r} 5c - d^2 \\ -3c - 7d^2 \\ \hline 2c - 8d^2 \\ \hline \end{array}$$

அடிக்கடி நாம் இதை இவ்வாறு செய்வோம் →

$$\begin{array}{r} 5c - d^2 \\ 3c + 7d^2 \\ - \quad - \\ \hline 2c - 8d^2 \\ \hline \end{array}$$

மாற்றாக, இதை இவ்வாறும் செய்யலாம் :

$$\begin{aligned} (5c - d^2) - (3c + 7d^2) &= 5c - d^2 - 3c - 7d^2 \\ &= (5c - 3c) + (-d^2 - 7d^2) \\ &= 2c + (-8d^2) \\ &= 2c - 8d^2 \end{aligned}$$

(iii) $3x^2 - 7y^2 + 9$ இலிருந்து $2x^2 + 2y^2 - 6$ ஐக் கழிக்க.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 7y^2 + 9 \\ 2x^2 + 2y^2 - 6 \\ - \quad - \quad + \\ \hline x^2 - 9y^2 + 15 \\ \hline \end{array}$$

(குறிகளை மாற்றுதல்)

மாற்று முறை :

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 7y^2 + 9) - (2x^2 + 2y^2 - 6) \\ &= 3x^2 - 7y^2 + 9 - 2x^2 - 2y^2 + 6 \\ &= (3x^2 - 2x^2) + (-7y^2 - 2y^2) + (9 + 6) \\ &= x^2 + (-9y^2) + 15 \\ &= x^2 - 9y^2 + 15 \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.1

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $-5x^7 + \frac{3}{7}x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 1$ இல் x^4இன் கெழு ....

(A) – 5 (B) – 3 (C) $\frac{3}{7}$ (D) 7

(ii) $7x^2 - 14x^2y + 14xy^2 - 5$ இல் xy^2 இன் கெழு ....

(A) 7 (B) 14 (C) – 14 (D) – 5

(iii) $x^3y^2z^2$ என்ற உறுப்பின் படி ....

(A) 3 (B) 2 (C) 12 (D) 7

(iv) $x^2 - 5x^4 + \frac{3}{4}x^7 - 73x + 5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ....

(A) 7 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 4 (D) – 73

(v) $x^2 - 5x^2y^3 + 30x^3y^4 - 576xy$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ....

(A) – 576 (B) 4 (C) 5 (D) 7

(vi) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 5x - 7$ என்பது ஒரு .... கோவை.

(A) ஒருறுப்பு (B) ஈருறுப்பு (C) மூவுறுப்பு (D) பல்லுறுப்பு

(vii) $0.4x^7 - 75y^2 - 0.75$ இன் மாறிலி உறுப்பு ....

(A) 0.4 (B) 0.75 (C) – 0.75 (D) – 75

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் உறுப்புகளைப் பிரித்து அவற்றின் கெழுக்களைக் காண்க:

(i) $3abc - 5ca$ (ii) $1 + x + y^2$ (iii) $3x^2y^2 - 3xyz + z^3$

(iv) $-7 + 2pq - \frac{5}{7}qr + rp$ (v) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - 0.3xy$

3. கீழேயுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஓருறுப்பு, ஈருறுப்பு, மூவுறுப்பு கோவைகளாக வகைப்படுத்துக:

$3x^2$, $3x + 2$, $x^2 - 4x + 2$, $x^5 - 7$, $x^2 + 3xy + y^2$,

$s^2 + 3st - 2t^2$, $xy + yz + zx$, $a^2b + b^2c$, $2l + 2m$

4. பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகளைக் கூட்டுக:

(i) $2x^2 + 3x + 5$, $3x^2 - 4x - 7$ (ii) $x^2 - 2x - 3$, $x^2 + 3x + 1$

(iii) $2t^2 + t - 4$, $1 - 3t - 5t^2$ (iv) $xy - yz$, $yz - xz$, $zx - xy$

(v) $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $2ab + 2bc + 2ca$.

5. (i) $3a - b$ இலிருந்து $2a - b$ ஐக் கழிக்க.

(ii) $-7x - 10y$ இலிருந்து $-3x + 8y$ ஐக் கழிக்க.

(iii) $7ab - 2bc + 10ca$ இலிருந்து $2ab + 5bc - 3ca$ ஐக் கழிக்க.

(iv) $x^3 + 3x^2 + 1$ இலிருந்து $x^5 - 2x^2 - 3x$ ஐக் கழிக்க.

(v) $15 - 2x + 5y - 11xy + 2xy^2 + 8x^2y$ இலிருந்து $3x^2y - 2xy + 2xy^2 + 5x - 7y - 10$ ஐக் கழிக்க.

6. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் படிகளையும் தலையாய கெழுக்களையும் காண்க:

(i) $x^2 - 2x^3 + 5x^7 - \frac{8}{7}x^3 - 70x - 8$ (ii) $13x^3 - x^{13} - 113$

(iii) $-77 + 7x^2 - x^7$ (iv) $-181 + 0.8y - 8y^2 + 115y^3 + y^8$

(v) $x^7 - 2x^3y^5 + 3xy^4 - 10xy + 11$

2.3 இயற்கணிதக் கோவைகளின் பெருக்கல்

2.3.1 இரு ஓருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல்

> கூட்டலின் சுருக்கப்பட்ட வடிவமே பெருக்கல் ஆகும்.

$x + x + x + x + x$ என்பதைச் சுருக்கமாக $5x$ என எழுதலாம்.

அதேபோல், $5 \times (2x) = (2x) + (2x) + (2x) + (2x) + (2x) = 10x$ என எழுதலாம். நாம் தற்பொழுது கீழ்க் காண்பவைகளை உற்று நோக்குவோம்.

உதாரணம்

(i) $x \times 5y = x \times 5 \times y = 5 \times x \times y = 5xy$

(ii) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6xy$

(iii) $2x \times (-3y) = 2 \times (-3) \times x \times y = -6 \times x \times y = -6xy$

(iv) $2x \times 3x^2 = 2 \times x \times 3 \times x^2 = (2 \times 3) \times (x \times x^2) = 6x^3$

(v) $2x \times (-3xyz) = 2 \times (-3) \times (x \times xyz) = -6x^2yz$.

குறிப்பு: 1. ஒருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஒருறுப்புக் கோவை ஆகும்.

2. பெருக்கல் பலனின் கெழு = முதல் ஒருறுப்புக் கோவையின் கெழு $\times$ இரண்டாம் ஒருறுப்புக் கோவையின் கெழு

3. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்ற அடுக்குக்குறி விதி உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனைக் காண உதவுகின்றது.

4. a , b இன் பெருக்கல் பலன் $a \times b$, ab, $a.b$, $a\,(b)$, $(a)\,b$, $(a)\,(b)$, (ab) என்றெல்லாம் குறிக்கப்படுகிறது.

(vi) $(3x^2)\,(4x^3)$

$= (3 \times x \times x)\,(4 \times x \times x \times x)$

$= (3 \times 4)\,(x \times x \times x \times x \times x)$

$= 12x^5$

(அல்லது) $(3x^2)\,(4x^3)$

$= (3 \times 4)\,(x^2 \times x^3)$

$= 12\,(x^{2+3}) = 12x^5$

($a^m \times a^n = a^{m+n}$ ஐப் பயன்படுத்தினால்)

மேலும் சில பயனுள்ள உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

(vii) $2x \times 3y \times 5z = (2x \times 3y) \times 5z$

$= (6xy) \times 5z$

$= 30\,xyz$

(அல்லது) $2x \times 3y \times 5z = (2 \times 3 \times 5) \times (x \times y \times z) = 30xyz$

(viii) $4ab \times 3a^2b^2 \times 2a^3b^3 = (4ab \times 3a^2b^2) \times 2a^3b^3$

$= (12a^3b^3) \times (2a^3\,b^3)$

$= 24a^6b^6$

(அல்லது) $4ab \times 3a^2b^2 \times 2a^3b^3 = 4 \times 3 \times 2 \times (ab \times a^2b^2 \times a^3b^3)$

$= 24\,(a^{1+2+3} \times b^{1+2+3})$

$= 24a^6b^6$

2.3.2 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதை நாம் கற்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

சுருக்குக: $(2x) \times (3x + 5)$

தீர்வு

படி 1

$(2x) \times (3x + 5) = (2x \times 3x) + (2x \times 5)$ (பங்கீட்டுப் பண்பை பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதுகிறோம்)

படி 2

$= 6x^2 + 10x$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

சுருக்குக: $(-2x)\times(4-5y)$

தீர்வு

(படி 1, படி 2)

$$(-2x)\times(4-5y) = [(-2x)\times 4] + [(-2x)\times(-5y)]$$
$$= (-8x) + (10xy) \quad \text{(பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}$$
$$= -8x + 10xy$$

> குறிப்பு: (i) ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும்.
>
> (ii) பரிமாற்றுப் பண்பையும் பங்கீட்டுப் பண்புகளையும் நாம் கணக்குகளைச் செய்யும் போது பயன்படுத்துகிறோம். $a\times b = b\times a$ (பரிமாற்றுப் பண்பு)
> $a(b+c) = ab+ac$ மற்றும் $a(b-c) = ab-ac$ (பங்கீட்டுப் பண்புகள்)

2.3.3 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை, ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையால் பின்வருமாறு பெருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

சுருக்குக: (i) $3(5y^2-3y+2)$

(ii) $2x^2\times(3x^2-5x+8)$

தீர்வு

(i) $3(5y^2-3y+2) = (3\times 5y^2)+(3\times -3y)+(3\times 2)$

$= 15y^2-9y+6$

(அல்லது)

$$\begin{array}{r} 5y^2-3y+2 \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline 15y^2-9y+6 \\ \hline \end{array}$$

(ii) $2x^2\times(3x^2-5x+8)$

$= (2x^2\times 3x^2)+(2x^2\times(-5x))+(2x^2\times 8)$

$= 6x^4-10x^3+16x^2$

(அல்லது)

$$\begin{array}{r} 3x^2-5x+8 \\ \times \quad\quad 2x^2 \\ \hline 6x^4-10x^3+16x^2 \\ \hline \end{array}$$

2.3.4 ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் பங்கீட்டுப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதை நாம் இப்பொழுது கற்க உள்ளோம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

சுருக்குக : $(2a+3b)(5a+4b)$

தீர்வு

இப்பெருக்கலில், ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குகிறது.

$$(2a+3b)\,(5a+4b) = (2a\times 5a)+(2a\times 4b)+(3b\times 5a)+(3b\times 4b)$$
$$= 10a^2+8ab+15ba+12b^2$$
$$= 10a^2+8ab+15ab+12b^2 \qquad [\because ab = ba]$$
$$= 10a^2+23ab+12b^2$$

($8ab$, $15ab$ ஆகியவை ஒரின உறுப்புகள். எனவே அவற்றைக் கூட்டுகிறோம்)

$$(2a+3b)\,(5a+4b) = 10a^2+23ab+12b^2$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்கும்போது நாம் எதிர்பார்க்கும் $2\times 2 = 4$ உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக விடையில் 3 உறுப்புகளே உள்ளன. ஏனெனில் ஒரின உறுப்புகளான $8ab$, $15ab$ ஆகியவற்றை நாம் சேர்த்துவிட்டோம்.

2.3.5 ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

ஈருறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பாலும் மூவுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குவதன் மூலம் இவ்வகைப் பெருக்கல் செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.8

சுருக்குக: $(x+3)\,(x^2-5x+7)$

தீர்வு

$$(x+3)\,(x^2-5x+7) = x\,(x^2-5x+7) + 3\,(x^2-5x+7) \quad \text{(பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}$$
$$= x^3-5x^2+7x+3x^2-15x+21$$
$$= x^3-5x^2+3x^2+7x-15x+21 \quad \text{(ஒரின உறுப்புகளைத் தொகுத்தல்)}$$
$$= x^3-2x^2-8x+21 \quad \text{(ஒரின உறுப்புகளைச் சேர்த்தல்)}$$

மாற்று முறை :

		$(x+3)$
		$\times\ (x^2-5x+7)$
$x\,(x^2-5x+7)$	:	x^3-5x^2+7x
$3\,(x^2-5x+7)$	:	$3x^2-15x+21$
		$= x^3-2x^2-8x+21$

இந்த எடுத்துக்காட்டில், பெருக்கும் போது $2\times 3 = 6$ உறுப்புகளை எதிர் பார்த்ததற்கு மாறாக, பெருக்கல் பலனில் நமக்கு 4 உறுப்புகளே கிடைத்துள்ளன. இதன் காரணத்தை உன்னால் கண்டறிய முடியுமா?

குழப்பத்தை வெளியேற்று

1. $2xx = 2x$ என்பது சரியா?

   இல்லை. $2xx$ என்பதை நாம் $2\,(x)\,(x) = 2x^2$ என எழுதலாம். இது, 2, x, x ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாகும். ஆனால் $2x$ என்பது $x+x$ அல்லது $2\,(x)$ எனப் பொருள்படும்.

2. $7xxy = 7xy$ என்பது சரியா?

   இல்லை. $7xxy$ என்பது 7, x, x, y ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனேயன்றி 7, x, y ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் அன்று. எனவே $7xxy$ என்பதற்குச் சரியான விடை $7\,(x)\,(x)\,(y) = 7x^2y$ என்பதாகும்.

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் ஒருறுப்புச் சோடிகளின் பெருக்கல் பலனைக் காண்க:
(i) $3, 7x$ (ii) $-7x, 3y$ (iii) $-3a, 5ab$ (iv) $5a^2, -4a$ (v) $\frac{3}{7}x^5, \frac{14}{9}x^2$
(vi) xy^2, x^2y (vii) x^3y^5, xy^2 (viii) abc, abc (ix) $xyz. x^2yz$ (x) $a^2b^2c^3, abc^2$

2. பின்வரும் அட்டவணையைப் பெருக்கல் பலன்களால் நிரப்புக:

முதலாம் ஒருறுப்புக் கோவை → இரண்டாம் ஒருறுப்புக் கோவை ↓	$2x$	$-3y$	$4x^2$	$-5xy$	$7x^2y$	$-6x^2y^2$
$2x$	$4x^2$					
$-3y$						
$4x^2$						
$-5xy$				$25x^2y^2$		
$7x^2y$						
$-6x^2y^2$		$18x^2y^3$				

3. பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
(i) $2a, 3a^2, 5a^4$ (ii) $2x, 4y, 9z$ (iii) ab, bc, ca
(iv) $m, 4m, 3m^2, -6m^3$ (v) xyz, y^2z, yx^2 (vi) lm^2, mn^2, ln^2
(vii) $-2p, -3q, -5p^2$

4. பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
(i) $(a^3)\times(2a^5)\times(4a^{15})$ (ii) $(5-2x)(4+x)$ (iii) $(x+3y)(3x-y)$
(iv) $(3x+2)(4x-3)$ (v) $(\frac{2}{3}ab)\ (\frac{-15}{8}a^2b^2)$

5. பின்வருவனவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
(i) $(a+b)(2a^2-5ab+3b^2)$ (ii) $(2x+3y)(x^2-xy+y^2)$
(iii) $(x+y+z)(x+y-z)$ (iv) $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ (v) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$

6. (i) $2x(x-y-z), 2y(z-y-x)$ ஆகியவற்றைக் கூட்டுக.
(ii) $4a(5a+2b-3c)$ இலிருந்து $3a(a-2b+3c)$ ஐக் கழிக்க.

2.4 முற்றொருமைகள்

$(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களின் மதிப்புகளையும் x இன் எதேனும் ஒரு மதிப்பிற்கு காண்க. உதாரணமாக, $x = 5$ எனில்

இடது பக்கம் $= (x+2)(x+3) = (5+2)(5+3) = 7\times 8 = 56$

வலது பக்கம் $= x^2+5x+6 = 5^2+5(5)+6 = 25+25+6 = 56$

ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களின் மதிப்புகளும் $x = 5$ எனும்போது சமம் ஆகின்றன.

இப்பொழுது, $x = -5$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

இடது பக்கம் $= (x+2)(x+3) = (-5+2)(-5+3) = (-3)(-2) = 6$

வலது பக்கம் $= x^2 + 5x + 6 = (-5)^2 + 5(-5) + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$

$x = -5$ எனும் போதும் இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கத்து மதிப்புகளும் சமமாகின்றன.

ஆகவே இச்சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிக்கு எந்த மதிப்பை அளித்தாலும், இடதுபக்க மதிப்பும் வலதுபக்க மதிப்பும் சமமாகிறது. எனவே $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$ என்பது ஒரு முற்றொருமை ஆகும்.

முற்றொருமை: மாறி ஏற்கும் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் எனில் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.

செய்து பார்

கீழ்க்காண்பவைகள் ஒரு முற்றொருமையா? இல்லையா? என்பதைச் சரிபார்.

(i) $5(x+4) = 5x + 20$ (ii) $6x + 10 = 4x + 20$.

2.4.1 இயற்கணித முற்றொருமைகள்

பல கணக்குகளைத் தீர்க்க அதிகம் பயன்படும் மூன்று முக்கிய இயற்கணித முற்றொருமைகளை நாம் இப்பொழுது கற்போம். ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதன் மூலம் நாம் இம்முற்றொருமைகளைப் பெறுகிறோம்.

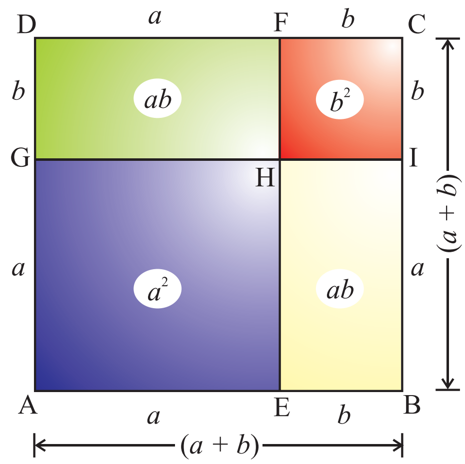
முதலாம் முற்றொருமை

$(a+b)^2$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 \quad [\because ab = ba]$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

ஆகவே, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2$ இன் வடிவியல் விளக்கம்



இப்படத்தில்,

ABCD என்ற சதுரத்தின் பக்கம் $(a+b)$ ஆகும்.

$\therefore$ சதுரம் ABCD –இன் பரப்பு

$= (a+b)(a+b)$

= சதுரம் AEHG இன் பரப்பு + செவ்வகம் EBIH இன் பரப்பு + செவ்வகம் GHFD இன் பரப்பு + சதுரம் HICF இன் பரப்பு

$$= (a\times a)+(b\times a)+(a\times b)+(b\times b)$$

$$= a^2+ba+ab+b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

இரண்டாம் முற்றொருமை

$(a-b)^2$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)$$

$$= a^2-ab-ba+b^2$$

$$= a^2-ab-ab+b^2$$

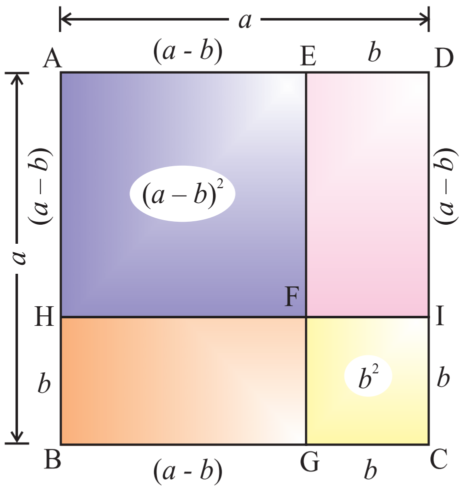
$$= a^2-2ab+b^2$$

ஆகவே, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^2$ இன் வடிவியல் விளக்கம்

ABCD என்ற சதுரத்தின் பரப்பு a^2 சதுர அலகுகள் ஆகும்.

$(a-b)$ ஐ பக்கமாகக் கொண்ட AHFE என்ற சதுரத்தின் பரப்பு $(a-b)^2$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.



இது படத்தில் நீலவண்ணத்தில் உள்ள சதுரப் பகுதியாகும்.

செவ்வகம் BCIH இன் பரப்பு = $a\times b$ சதுர அலகுகள்

செவ்வகம் EGCD இன் பரப்பு = $a\times b$ சதுர அலகுகள்

சதுரம் FGCI இன் பரப்பு = b^2 சதுர அலகுகள்

BGFH இன் பரப்பு = செவ்வகம் BCIH இன் பரப்பு – சதுரம் FGCI இன் பரப்பு

$$= ab-b^2$$

இப்பொழுது, சதுரம் AHFE இன் பரப்பு

= சதுரம் ABCD இன் பரப்பு – (செவ்வகம் EGCD இன் பரப்பு + செவ்வகம் BGFH இன் பரப்பு)

$$(a-b)^2 = a^2-(ab+ab-b^2)$$

$$= a^2-ab-ab+b^2$$

$$= a^2-2ab+b^2$$

$$\therefore (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

மூன்றாம் முற்றொருமை

$(a+b)(a-b)$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 \qquad [\because ab = ba]$$
$$= a^2 - b^2$$

ஆகவே, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)(a-b)$ இன் வடிவியல் விளக்கம்

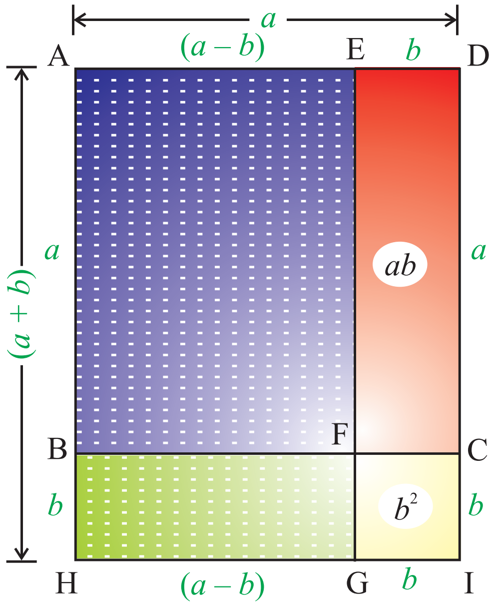
செவ்வகம் AHGE இன் பரப்பு = $(a+b)\times(a-b)$

= சதுரம் ABCD இன் பரப்பு – செவ்வகம் EFCD இன் பரப்பு + செவ்வகம் BHIC இன் பரப்பு – சதுரம் FGIC இன் பரப்பு

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

$\therefore \quad (a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$



பொது முற்றொருமை

$(x+a)(x+b)$ என்பதைக் கருதுவோம்

$$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + ax + bx + ab$$

ஆகவே, $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(x+a)(x+b)$ இன் வடிவியல் விளக்கம்

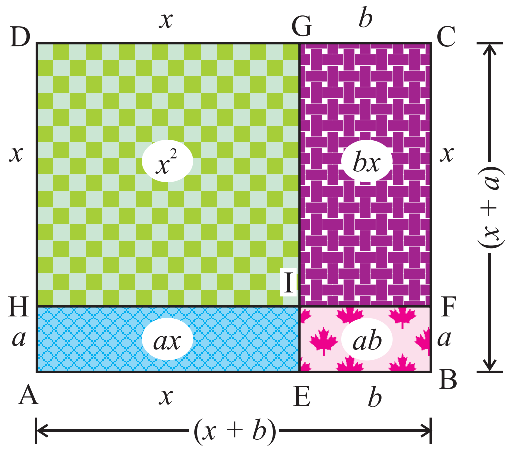
செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பு = $(x+a)(x+b)$

= சதுரம் DHIG இன் பரப்பு + செவ்வகம் AEIH இன் பரப்பு + செவ்வகம் IFCG இன் பரப்பு + செவ்வகம் EBFI இன் பரப்பு

$= x^2 + ax + bx + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

$\therefore \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$



இயற்கணித முற்றொருமைகள்

- $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

(பொதுவாக முற்றொருமைகளின் சமநிலைக்கு '$\equiv$' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவது வழக்கம். எளிமை கருதி இங்கு நாம் '=' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.)

2.4.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்

எடுத்துக்காட்டு 2.9

விரிவாக்குக : (i) $(x+5)^2$ (ii) $(x+2y)^2$ (iii) $(2x+3y)^2$ (iv) 105^2.

தீர்வு

(i)
$$(x+5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = 5$.

மாற்று முறை :
$$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x(x+5) + 5(x+5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

(ii)
$$(x+2y)^2 = x^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = 2y$.

மாற்று முறை :
$$(x+2y)^2 = (x+2y)(x+2y) = x(x+2y) + 2y(x+2y)$$
$$= x^2 + 2xy + 2yx + 4y^2 \quad [\because xy = yx]$$
$$= x^2 + 4xy + 4y^2$$

(iii)
$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 2x$, $b = 3y$.

மாற்றுமுறை :
$$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y) = 2x(2x+3y) + 3y(2x+3y)$$
$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$
$$= 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2 \quad [\because xy = yx]$$
$$(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(iv) $105^2 = (100+5)^2$

$= 100^2 + 2(100)(5) + 5^2$

$= (100 \times 100) + 1000 + 25$

$= 10000 + 1000 + 25$

$105^2 = 11025$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 100$, $b = 5$.

எடுத்துக்காட்டு 2.10

மதிப்புகளைக் காண்க : (i) $(x-y)^2$ (ii) $(3p-2q)^2$ (iii) 97^2 (iv) $(4.9)^2$

தீர்வு

(i) $(x-y)^2 = x^2 - 2(x)(y) + y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = y$.

(ii) $(3p-2q)^2 = (3p)^2 - 2(3p)(2q) + (2q)^2$

$= 9p^2 - 12pq + 4q^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 3p$, $b = 2q$.

(iii) $97^2 = (100-3)^2$

$= (100)^2 - 2(100)(3) + 3^2$

$= 10000 - 600 + 9$

$= 9400 + 9$

$= 9409$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 100$, $b = 3$.

(iv) $(4.9)^2 = (5.0-0.1)^2$

$= (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01$

$= 24.01$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 5.0$, $b = 0.1$.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $(x+3)(x-3)$ (ii) $(5a+3b)(5a-3b)$ (iii) 52×48 (iv) $997^2 - 3^2$.

தீர்வு

(i) $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$

$= x^2 - 9$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = 3$

(ii) $(5a+3b)(5a-3b) = (5a)^2-(3b)^2$

$= 25a^2-9b^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
இங்கு, $a=5a$, $b=3b$

(iii) $52\times 48 = (50+2)(50-2)$

$= 50^2-2^2$

$= 2500-4$

$= 2496$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
இங்கு, $a=50$, $b=2$

(iv) $997^2-3^2 = (997+3)(997-3)$

$= (1000)(994)$

$= 994000$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
இங்கு, $a=997$, $b=3$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $(m+3)(m+5)$ (ii) $(p-2)(p-3)$ (iii) $(2x+3y)(2x-4y)$

(iv) 55×56 (v) 95×103 (vi) 501×505

தீர்வு

(i) $(m+3)(m+5) = m^2+(3+5)m+(3)(5)$

$= m^2+8m+15$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x=m$, $a=3$, $b=5$.

(ii) $(p-2)(p-3) = p^2+(-2-3)p+(-2)(-3)$

$= p^2+(-5)p+6$

$= p^2-5p+6$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x=p$, $a=-2$, $b=-3$.

(iii) $(2x+3y)(2x-4y) = (2x)^2+(3y-4y)(2x)+(3y)(-4y)$

$= 4x^2+(-y)(2x)-12y^2$

$= 4x^2-2xy-12y^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x=2x$, $a=3y$, $b=-4y$.

(iv) $55\times 56 = (50+5)(50+6)$

$= 50^2+(5+6)50+(5)(6)$

$= (50\times 50)+(11)50+30$

$= 2500+550+30$

$= 3080$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x=50$, $a=5$, $b=6$.

(v) $95 \times 103 = (100-5)(100+3)$

$= (100)^2 + (-5+3)(100) + (-5)(3)$

$= (100 \times 100) + (-2)(100) - 15$

$= 10000 - 200 - 15$

$= 9800 - 15$

$= 9785$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
இங்கு, $x = 100$, $a = -5$, $b = 3$.

(vi) $501 \times 505 = (500+1)(500+5)$

$= (500)^2 + (1+5)(500) + (1)(5)$

$= (500 \times 500) + (6)(500) + (1)(5)$

$= (500 \times 500) + (6)(500) + 5$

$= 250000 + 3000 + 5$

$= 253005$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
இங்கு, $x = 500$, $a = 1$, $b = 5$.

2.4.3 மேலும் சில பயனுள்ள முற்றொருமைகளைத் தருவித்தல்

பின்வருவனவற்றை நாம் கருதுவோம்,

(i) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= 2a^2 + 2b^2$

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$\frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2] = a^2 + b^2$$

(ii) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] = ab$$

(iii) $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$

$= a^2 + b^2$

$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

(iv) $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

$= (a-b)^2$

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

(v) $(a-b)^2+2ab = a^2-2ab+b^2+2ab$
$= a^2+b^2$
$(a-b)^2+2ab = a^2+b^2$

(vi) $(a-b)^2+4ab = a^2-2ab+b^2+4ab$
$= a^2+2ab+b^2$
$= (a+b)^2$
$(a-b)^2+4ab = (a+b)^2$

தருவிக்கப்பட்ட முற்றொருமைகள்

- $\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2] = a^2+b^2$
- $\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2] = ab$
- $(a+b)^2-2ab = a^2+b^2$
- $(a+b)^2-4ab = (a-b)^2$
- $(a-b)^2+2ab = a^2+b^2$
- $(a-b)^2+4ab = (a+b)^2$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

$a+b, a-b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே $7, 4$ எனில் a^2+b^2, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $a^2+b^2 = \frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$
$= \frac{1}{2}[7^2+4^2]$ ($a+b=7,\ a-b=4$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்)
$= \frac{1}{2}(49+16)$
$= \frac{1}{2}(65) = \frac{65}{2}$
$a^2+b^2 = \frac{65}{2}$

(ii) $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$
$= \frac{1}{4}(7^2-4^2)$ ($a+b=7,\ a-b=4$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்)
$= \frac{1}{4}(49-16) = \frac{1}{4}(33)$
$ab = \frac{33}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

$(a+b)=10,\ ab=20$ எனில், $a^2+b^2,\ (a-b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$ ($a+b=10, ab=20$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்)
$a^2+b^2 = (10)^2-2(20)$
$= 100-40 = 60$
$a^2+b^2 = 60$

(ii) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ($a+b=10$, $ab=20$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்)

$= (10)^2 - 4(20)$

$= 100 - 80$

$(a-b)^2 = 20$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

$(x+l)(x+m) = x^2+4x+2$ எனில் l^2+m^2, $(l-m)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

பெருக்கற்பலன் சூத்திரத்திலிருந்து நாம் அறிவது,

எனவே, $(x+l)(x+m) = x^2+(l+m)x+lm$

வலது பக்கத்தை x^2+4x+2 உடன் ஒப்பிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$l+m = 4,\ lm = 2$

இப்பொழுது, $l^2+m^2 = (l+m)^2 - 2lm$

$= 4^2 - 2(2) = 16 - 4$

$l^2+m^2 = 12$

$(l-m)^2 = (l+m)^2 - 4lm$

$= 4^2 - 4(2) = 16 - 8$

$(l-m)^2 = 8$

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $(a+b)^2 = (a+b)\times$ ______

(A) ab (B) $2ab$ (C) $(a+b)$ (D) $(a-b)$

(ii) $(a-b)^2 = (a-b)\times$ ______

(A) $(a+b)$ (B) $-2ab$ (C) ab (D) $(a-b)$

(iii) $(a^2-b^2) = (a-b)\times$ ______

(A) $(a-b)$ (B) $(a+b)$ (C) $a^2+2ab+b^2$ (D) $a^2-2ab+b^2$

(iv) $9.6^2 =$ ______

(A) 9216 (B) 93.6 (C) 9.216 (D) 92.16

(v) $(a+b)^2-(a-b)^2 =$ ______

(A) 4ab (B) 2ab (C) $a^2+2ab+b^2$ (D) $2(a^2+b^2)$

(vi) $m^2+(c+d)m+cd =$

(A) $(m+c)^2$ (B) $(m+c)(m+d)$ (C) $(m+d)^2$ (D) $(m+c)(m-d)$

2. பொருத்தமான முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் பெருக்கற் பலன்களைக் காண்க:

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2m+3)(2m+3)$

(iii) $(2x-5)(2x-5)$ (iv) $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$

(v) $(3x+2)(3x-2)$ (vi) $(5a-3b)(5a-3b)$

(vii) $(2l-3m)(2l+3m)$ (viii) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(\frac{3}{4}+x\right)$

(ix) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ (x) $(100+3)(100-3)$

3. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் பெருக்கற்பலன்களைக் காண்க:

(i) $(x+4)(x+7)$ (ii) $(5x+3)(5x+4)$ (iii) $(7x+3y)(7x-3y)$

(iv) $(8x-5)(8x-2)$ (v) $(2m+3n)(2m+4n)$ (vi) $(xy-3)(xy-2)$

(vii) $\left(a+\frac{1}{x}\right)\left(a+\frac{1}{y}\right)$ (viii) $(2+x)(2-y)$

4. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வர்க்கங்களைக் காண்க:

(i) $(p-q)^2$ (ii) $(a-5)^2$ (iii) $(3x+5)^2$

(iv) $(5x-4)^2$ (v) $(7x+3y)^2$ (vi) $(10m-9n)^2$

(vii) $(0.4a-0.5b)^2$ (viii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ (ix) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$

(x) $0.54\times0.54-0.46\times0.46$

5. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) 103^2 (ii) 48^2 (iii) 54^2 (iv) 92^2

(v) 998^2 (vi) 53×47 (vii) 96×104 (viii) 28×32

(ix) 81×79 (x) 2.8^2 (xi) $12.1^2-7.9^2$ (xii) 9.7×9.8

6. நிரூபிக்க :

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$

(ii) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

7. $a+b=5$, $a-b=4$ எனில் a^2+b^2, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

8. (i) $a+b$, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 12, 32 எனில், a^2+b^2, $(a-b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(ii) $(a-b)$, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் 6, 40 எனில் a^2+b^2, $(a+b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

9. $(x+a)(x+b)=x^2-5x-300$ எனில் a^2+b^2 இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $(x+a)(x+b)(x+c)$ என்பதற்கான இயற்கணித முற்றொருமையை பெருக்கற்பலன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தருவி.

(குறிப்பு : $(x+a)(x+b)(x+c)=(x+a)\,[(x+b)(x+c)]$)

2.5 காரணிப்படுத்தல்

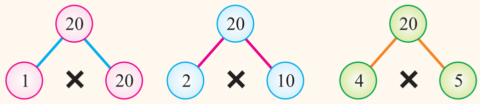
20 என்ற இயல்எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை நாம் பின்வரும் எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதலாம்.

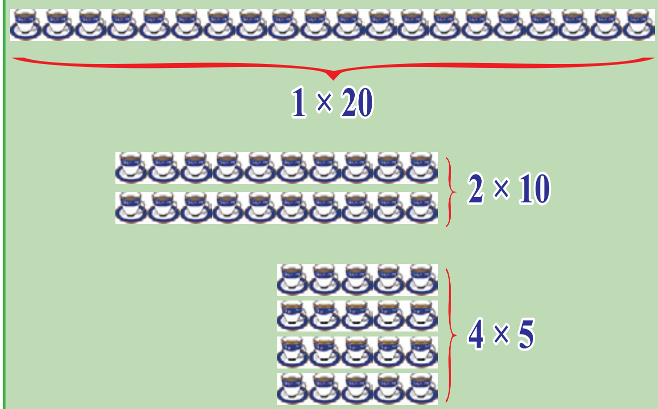
20 = 1 × 20

20 = 2 × 10

20 = 4 × 5



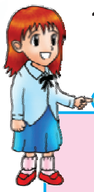
20 தேநீர்க் கோப்பைகளை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு வெவ்வேறு வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.



20 என்ற எண்ணிற்கு 6 காரணிகள் உள்ளன. அவை 1, 2, 4, 5, 10, 20 ஆகும். இவைகளுள் 2ம் 5ம், 20 இன் பகாக் காரணிகள் ஆகும்.

20 இன் பகாக் காரணி வடிவம் = 2 × 2 × 5.

2	20
2	10
	5



நீவிர் அறிவீரா?

1. ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்ணிற்கு 1 ஐயும் தன்னையும் தவிர வேறு காரணிகள் இல்லை எனில் அந்த எண்ணை பகா எண் என்கிறோம். உதாரணம் : 2, 3, 5, 7, ...
2. ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்ணிற்கு இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட காரணிகள் இருப்பின் அவ்வெண்ணை பகு எண் என்கிறோம். உதாரணம் : 4, 6, 8, 10, ...
3. ஒரு எண்ணை அதன் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதும்போது நாம் 1 ஐ ஒரு காரணியாக பொதுவாக எழுதுவது இல்லை. ஏனெனில் 1 என்பது எந்தவொரு எண்ணிற்கும் ஒரு காரணியாக அமைகிறது.
4. எந்தவொரு இயல் எண்ணும் பகு எண்ணாகவோ அல்லது பகா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
5. 1 என்ற எண் பகு எண்ணும் அல்ல, பகா எண்ணும் அல்ல.

2.5.1 காரணிப்படுத்தல் என்றால் என்ன?

எந்தவொரு இயற்கணிதக் கோவையையும் கூட நாம் அதன் காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம்.

காரணிப்படுத்தல் : எந்தவொரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் அதன் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவதைக் காரணிப்படுத்தல் என்கிறோம்.

நம்மால் பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகளை அவற்றின் காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத முடியும்.

(i) $6x^3 = (2x)(3x^2)$

(ii) $3a^2b + 3ab^2 = (3ab)(a+b)$

(iii) $2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2)$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் கீழ்க்கண்டுள்ளவாறும் எழுதலாம்:

இயற்கணிதக் கோவை	முதலாம் காரணி	இரண்டாம் காரணி	நம்மால் இவற்றை மேலும் காரணிப்படுத்த முடியுமா ?	
			முதலாம் காரணி	இரண்டாம் காரணி
$6x^3$	$2x$	$3x^2$	ஆம். $2x = 2 \times x$	ஆம். $3x^2 = 3 \times x \times x$
$3a^2b + 3ab^2$	$(3ab)$	$(a+b)$	ஆம். $3ab = 3 \times a \times b$	இல்லை. $(a+b)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.
$2x^2 + x - 6$	$(2x-3)$	$(x+2)$	இல்லை. $(2x-3)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.	இல்லை. $(x+2)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.

குறிப்பு : மேலும் காரணிகளாகப் பகுக்க முடியாதக் காரணிகளைப் பகாக் காரணிகள் என்கிறோம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் $(a+b), (2x-3), (x+2)$ ஆகியவை பகாக் காரணிகள் ஆகும்.

2.5.2 பொதுக் காரணியை வெளியே எடுத்து காரணிப்படுத்தல்

இம்முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் பொதுக் காரணியைக் கண்டறிந்து அதை அடைப்புக் குறிக்கு வெளியே கொண்டு வந்து காரணிப்படுத்துகிறோம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் பொதுக் காரணி என்பது எல்லா உறுப்புகளிலும் வரும் காரணி என்பதை நினைவில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $2x+6$ (ii) $4x^2+20xy$ (iii) $3x^2-12xy$ (iv) a^2b-ab^2

(v) $3x^3-5x^2+6x$ (vi) $7l^3m^2-21lm^2n+28lm$

தீர்வு

(i) $2x+6 = 2x + (2\times 3)$

$\therefore 2x+6 = 2(x+3)$ ('2' என்பது இரு உறுப்புகட்கும் பொதுவாக உள்ளது)

குறிப்பு : (i) இங்கு, 2, $(x+3)$ ஆகியன $(2x+6)$ இன் காரணிகளாகும்.

(ii) 2, $(x+3)$ ஆகிய காரணிகளை மேலும் காரணிகளாகப் பகுக்க முடியாது. எனவே 2, $(x+3)$ ஆகியவை பகாக் காரணிகளாகும்.

(ii) $4x^2 + 20xy = (4 \times x \times x) + (4 \times 5 \times x \times y)$

$= 4x\,(x + 5y)$ (பொது உறுப்பான $4x$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(iii) $3x^2 - 12xy = (3 \times x \times x) - (3 \times 4 \times x \times y)$

$= 3x\,(x - 4y)$ (பொது உறுப்பான $3x$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(iv) $a^2b - ab^2 = (a \times a \times b) - (a \times b \times b)$

$= ab\,(a - b)$ (பொது உறுப்பான ab-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(v) $3x^3 - 5x^2 + 6x = (3 \times x \times x \times x) - (5 \times x \times x) + (6 \times x)$

$= x\,(3x^2 - 5x + 6)$ (பொது உறுப்பான x-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(vi) $7l^3m^2 - 21\,lm^2n + 28lm$

$= (7 \times l \times l \times l \times m \times m) - (7 \times 3 \times l \times m \times m \times n) + (7 \times 4 \times l \times m)$

$= 7lm\,(l^2m - 3mn + 4)$ (பொது உறுப்பான $7lm$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

2.5.3 உறுப்புகளைத் தொகுத்துக் காரணிப்படுத்தல்

இம்முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கோவையை இரண்டு அல்லது மூன்று உறுப்புகளின் தொகுப்புகளின் கூட்டலாக எழுதி பிறகு ஒரு பொதுக்காரணியைப் பெற்று காரணிப்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.17

பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^3 - 3x^2 + x - 3$ (ii) $2xy - 3ab + 2bx - 3ay$

(iii) $2m^2 - 10mn - 2m + 10n$ (iv) $ab\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + b^2)$

தீர்வு

(i) $\underbrace{x^3 - 3x^2} + \underbrace{x - 3} = x^2\,(x - 3) + 1\,(x - 3)$ (முதல் இரு உறுப்புகளையும் முதலில் தொகுத்த பின் பொது உறுப்பை வெளியே எடுத்தல்)

$= (x^2 + 1)\,(x - 3)$

(ii) $2xy - 3ab + 2bx - 3ay = \underbrace{2xy + 2bx} - \underbrace{3ab - 3ay}$ (உறுப்புகளை மாற்றியமைத்தல்)

$= 2x\,(y + b) - 3a\,(y + b)$

(பொது உறுப்புகளை வெளியே எடுத்தல்)

$= (2x - 3a)\,(y + b)$

(iii) $\underbrace{2m^2 - 10mn} - \underbrace{2m + 10n} = 2m\,(m - 5n) - 2\,(m - 5n)$

$= (2m - 2)\,(m - 5n)$ (பொது உறுப்புகளை வெளியே எடுத்தல்)

(iv) $ab\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + b^2) = abx^2 + ab + xa^2 + xb^2$

$= \underbrace{abx^2 + a^2x} + \underbrace{b^2x + ab}$ (உறுப்புகளை மாற்றியமைத்தல்)

$= ax\,(bx + a) + b\,(bx + a)$

(பொது உறுப்புகளை வெளியே எடுத்தல்)

$= (ax + b)\,(bx + a)$

2.5.4. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தல்

நினைவு கூர்க:

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

சில நேரங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கோவையை அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவையை மேற்குறிப்பிடப்பட்ட முற்றொருமைகளின் வடிவில் எழுத முடியும். அவ்வாறு எழுத முடிந்தால் வலப்புறம் உள்ள கோவைகட்கு அவற்றின் இடப்புறம் உள்ள கோவைகளே காரணிகளாகும்.

இம்முறையில் நாம் எவ்வாறு முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி காரணிப் படுத்துகிறோம் என்பதைக் கீழ்க்கண்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளைக் கற்பதன் மூலம் அறியலாம்.

கோவை	காரணிகள்
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b), (a + b)$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b), (a - b)$
$a^2 - b^2$	$(a + b), (a - b)$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) x^2+6x+9 (ii) $x^2-10x+25$ (iii) $49m^2-56m+16$

(iv) x^2-64 (v) $9x^2y-4y^3$ (vi) m^8-n^8

தீர்வு

(i) x^2+6x+9

x^2+6x+9 ஐ $a^2+2ab+b^2$ உடன் ஒப்பிட்டால், $a = x, b = 3$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a = x, b = 3$ என்பதால்

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ என்பதைப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ $x^2 + 6x + 9$ இன் காரணிகள் $(x + 3), (x + 3)$ ஆகியவைகளாகும்.

(ii) $x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 10x + 25$ ஐ $a^2 - 2ab + b^2$ உடன் ஒப்பிட்டால், $a = x, b = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, $a = x, b = 5$ என்பதால்

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2$

$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$ என்பதைப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ $x^2 - 10x + 25$ இன் காரணிகள் $(x - 5), (x - 5)$ ஆகியவைகளாகும்.

(iii) $49m^2-56m+16$

இதில், $49m^2 = (7m)^2$; $16 = 4^2$ என்றும் நாம் எழுதலாம்.

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$49m^2 - 56m + 16 = (7m)^2 - 2(7m)(4) + 4^2$$
$$= (7m-4)^2$$

$\therefore$ $49m^2 - 56m + 16$ இன் காரணிகள் $(7m-4)$, $(7m-4)$.

(iv) $x^2 - 64$ ஐ $a^2 - b^2$, உடன் ஒப்பிட்டால் $a = x$, $b = 8$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$x^2 - 64 = x^2 - 8^2$$
$$= (x+8)(x-8)$$

$\therefore$ $x^2 - 64$இன் காரணிகள் $(x+8)$, $(x-8)$ ஆகியவைகளாகும்.

(v) $$9x^2y - 4y^3 = y\,[9x^2 - 4y^2]$$
$$= y[(3x)^2 - (2y)^2]$$

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ என்பதுடன் $(3x)^2 - (2y)^2$ ஐ ஒப்பிட்டால் $a = 3x$, $b = 2y$ எனக் கிடைக்கும். $\therefore$ $9x^2y - 4y^3 = y[(3x+2y)(3x-2y)]$

(vi) $m^8 - n^8 = (m^4)^2 - (n^4)^2$

$$= (m^4 + n^4)(m^4 - n^4)$$

($a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல்)

$$= (m^4 + n^4)[(m^2)^2 - (n^2)^2]$$
$$= (m^4 + n^4)[(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)] \qquad [\because m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)]$$
$$= (m^4 + n^4)(m^2 + n^2)[(m+n)(m-n)]$$
$$m^8 - n^8 = (m^4 + n^4)(m^2 + n^2)(m+n)(m-n)$$

2.5.5 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தல்

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துகிறோம் என்பதை இப்பொழுது நாம் விரிவாகக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

காரணிப்படுத்துக : $x^2 + 5x + 6$

தீர்வு

$x^2 + 5x + 6$ஐ $x^2 + (a+b)x + ab$ உடன் ஒப்பிட

நமக்கு, $ab = 6$, $a + b = 5$, $x = x$ என கிடைக்கின்றன.

இதில் $ab = 6$ எனில், a யும் b யும் 6 இன் காரணிகள் ஆகும்.

இங்கு, $a = 2$, $b = 3$ என்ற மதிப்புகளை பெறும் போது $ab = 6$, $a + b = 5$ ஆகிய நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும். எனவே $a = 2$, $b = 3$ என்பவை சரியான மதிப்புகளாகும். இப்பொழுது,

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \text{ ஐப் பயன்படுத்தினால்}$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + (2 \times 3)$$

$$= (x+2)(x+3)$$

$x^2 + 5x + 6$ இன் காரணிகள் $(x+2), (x+3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.20

காரணிப்படுத்துக: $x^2 + x - 6$

தீர்வு

$x^2 + x - 6$ ஐ $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ என்பதுடன் ஒப்பிட,

நமக்கு $ab = -6$, $a + b = 1$ என்பவை கிடைக்கின்றன.

ஆகவே, $ab = -6$, $a + b = 1$ என்று அமையும்படி a, b ஆகியவைகட்கு இரு எண்களைச் சிந்தித்துக் கண்டறிக. a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் கீழ்கண்டுள்ளவாறு அமையலாம்.

a	b	ab	$a + b$	தெரிவு
1	6	6	7	✗
1	– 6	– 6	– 5	✗
2	3	6	5	✗
2	– 3	– 6	– 1	✗
– 2	3	– 6	1	✓

இங்கு, நாம் $a = -2$, $b = 3$ ஆகிய காரணிச் சோடிகளையேத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். ஏனெனில் அவை மட்டுமே $ab = -6$ மற்றும் $a + b = 1$ என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கின்றன.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ - ஐப் பயன்படுத்தினால் நாம் பெறுவது :

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

காரணிப்படுத்துக: $x^2 + 6x + 8$

தீர்வு

$x^2 + 6x + 8$ ஐ $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ உடன் ஒப்பிட,

நமக்கு $ab = 8$, $a + b = 6$ என்பவை கிடைக்கின்றன.

$$\therefore\ x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2+4)x + (2 \times 4)$$

$$= (x+2)(x+4)$$

$x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகள் $(x+2)$, $(x+4)$ ஆகியவைகளாகும்.

8 இன் காணிகள்	காரணிகள் கூடுதல்
1, 8	9
2, 4	6

இங்கு, 2, 4 ஆகியவையே சரியான காரணிகளாகும்.

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $3a + 21ab$ இன் காரணிகள் ....

(A) a , $(3 + 21b)$ (B) 3, $(a + 7b)$ (C) $3a$, $(1 + 7b)$ (D) $3ab$, $(a + b)$

(ii) $x^2 - x - 12$ இன் காரணிகள் ....

(A) $(x + 4), (x - 3)$ (B) $(x - 4), (x - 3)$ (C) $(x + 2), (x - 6)$ (D) $(x + 3), (x - 4)$

(iii) $6x^2 - x - 15$ இன் காரணிகள் $(2x + 3)$ மற்றும் ....

(A) $(3x - 5)$ (B) $(3x + 5)$ (C) $(5x - 3)$ (D) $(2x - 3)$

(iv) $169l^2 - 441m^2$ இன் காரணிகள் ....

(A) $(13l - 21m), (13l - 21m)$ (B) $(13l + 21m), (13l + 21m)$

(C) $(13l - 21m), (13l + 21m)$ (D) $13(l + 21m), 13(l - 21m)$

(v) $(x - 1)(2x - 3)$ இன் மதிப்பு ....

(A) $2x^2 - 5x - 3$ (B) $2x^2 - 5x + 3$ (C) $2x^2 + 5x - 3$ (D) $2x^2 + 5x + 3$

2. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக :

(i) $3x - 45$ (ii) $7x - 14y$ (iii) $5a^2 + 35a$ (iv) $-12y + 20y^3$

(v) $15a^2b + 35ab$ (vi) $pq - pqr$ (vii) $18m^3 - 45mn^2$ (viii) $17l^2 + 85m^2$

(ix) $6x^3y - 12x^2y + 15x^4$ (x) $2a^5b^3 - 14a^2b^2 + 4a^3b$

3. காரணிப்படுத்துக :

(i) $2ab + 2b + 3a$ (ii) $6xy - 4y + 6 - 9x$ (iii) $2x + 3xy + 2y + 3y^2$

(iv) $15b - 3bx^2 - 5b + x^2$ (v) $a^2x^2 + axy + abx + by$

(vi) $a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$ (vii) $ax^3 + bx^2 + ax + by$

(viii) $mx - my - nx + ny$ (ix) $2m^3 + 3m - 2m^2 - 3$ (x) $a^2 + 11b + 11ab + a$

4. காரணிப்படுத்துக :

(i) $a^2 + 14a + 49$ (ii) $x^2 - 12x + 36$ (iii) $4p^2 - 25q^2$

(iv) $25x^2 - 20xy + 4y^2$ (v) $169m^2 - 625n^2$ (vi) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

(vii) $121a^2 + 154ab + 49b^2$ (viii) $3x^3 - 75x$

(ix) $36 - 49x^2$ (x) $1 - 6x + 9x^2$

5. காரணிப்படுத்துக :

(i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $p^2 - 6p + 8$ (iii) $m^2 - 4m - 21$

(iv) $x^2 - 14x + 45$ (v) $x^2 - 24x + 108$ (vi) $a^2 + 13a + 12$

(vii) $x^2 - 5x + 6$ (viii) $x^2 - 14xy + 24y^2$

(ix) $m^2 - 21m - 72$ (x) $x^2 - 28x + 132$

2.6 இயற்கணிதக் கோவைகளின் வகுத்தல்

2.6.1 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

$10 \div 2$ என்பதை கருதுவோம். இதை நாம் இவ்வாறு எழுதலாம் $\frac{10}{2} = \frac{5 \times 2}{2} = 5$

அதே போல், (i) $10x \div 2$ ஐ $\frac{10x}{2} = \frac{5 \times 2 \times x}{2} = 5x$ என எழுதலாம்.

(ii) $10x^2 \div 2x = \frac{10x^2}{2x} = \frac{5 \times 2 \times x^2}{2x} = \frac{5 \times 2 \times x \times x}{2 \times x} = 5x$

(iii) $10x^3 \div 2x = \frac{10x^3}{2x} = \frac{5 \times 2 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 5x^2$

(iv) $10x^5 \div 2x^2 = \frac{10x^5}{2x^2} = \frac{5 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times x}{2 \times x \times x} = 5x^3$

இதற்குப் பதிலாக, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ என்ற அடுக்குக்குறி விதியைப் பயன்படுத்தி (iv) ஆம் கணக்கை நாம் பின்வருமாறு செய்யலாம் :

$$\frac{10x^5}{2x^2} = \frac{10}{2}x^{5-2} = 5x^3$$

(v) $5a^2b^2c^2 \div 15abc = \frac{5a^2b^2c^2}{15abc} = \frac{5 \times a \times a \times b \times b \times c \times c}{5 \times 3 \times a \times b \times c} = \frac{abc}{3} = \frac{1}{3}abc$

(அல்லது) $5a^2b^2c^2 \div 15abc = \frac{5a^2b^2c^2}{15abc}$

$= \frac{5}{15}a^{2-1}b^{2-1}c^{2-1} = \frac{1}{3}abc$ ($\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ஐப் பயன்படுத்தல்)

2.6.2 ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.22

சுருக்குக : (i) $(7x^2 - 5x) \div x$ (ii) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2) \div 3x^2$ (iii) $(8x^3 - 5x^2 + 6x) \div 2x$

தீர்வு

(i) $(7x^2 - 5x) \div x = \frac{7x^2 - 5x}{x}$

$= \frac{7x^2}{x} - \frac{5x}{x}$

$= \frac{7 \times x \times x}{x} - \frac{5 \times x}{x}$

$= 7x - 5$

> **மாற்று முறை :**
>
> $\frac{7x^2 - 5x}{x} = 7x^{2-1} - 5x^{1-1}$
>
> $= 7x^1 - 5x^0 = 7x - 5$ (1)
>
> $[\because a^0 = 1]$
>
> $= 7x - 5$

(ii) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2) \div 3x^2$

$= \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2}{3x^2}$

$= \frac{x^6}{3x^2} - \frac{3x^4}{3x^2} + \frac{2x^2}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{2}{3}$

> **மாற்று முறை :**
>
> x^2 என்ற பொது உறுப்பைக் கண்டறிந்து நாம் இவ்வாறும் சுருக்கலாம்
>
> $\frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2}{3x^2} = \frac{x^2(x^4 - 3x^2 + 2)}{3x^2}$
>
> $= \frac{1}{3}(x^4 - 3x^2 + 2)$
>
> $= \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{2}{3}$

(iii) $(8x^3 - 5x^2 + 6x) \div 2x$

$$= \frac{8x^3 - 5x^2 + 6x}{2x}$$

$$= \frac{8x^3}{2x} - \frac{5x^2}{2x} + \frac{6x}{2x}$$

$$= 4x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

மாற்று முறை :

$8x^3 - 5x^2 + 6x$ இன் ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் $2x$ ஐப் பிரித்தெடுத்தால் நமக்கு,

$$8x^3 - 5x^2 + 6x = 2x(4x^2) - 2x\left(\frac{5}{2}x\right) + 2x(3)$$

$$= 2x\left(4x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\frac{8x^3 - 5x^2 + 6x}{2x} = \frac{2x(4x^2 - \frac{5}{2}x + 3)}{2x}$$

$$= 4x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

சுருக்குக : $(5x^2 + 10x) \div (x + 2)$.

தீர்வு

$$(5x^2 + 10x) \div (x + 2) = \frac{5x^2 + 10x}{x + 2}$$

தொகுதி $(5x^2 + 10x)$ ஐக் காரணிப்படுத்தினால்

$$5x^2 + 10x = (5 \times x \times x) + (5 \times 2 \times x)$$

$$= 5x(x + 2)$$ (பொது உறுப்பான $5x$ ஐ வெளியே எடுத்தல்)

இப்பொழுது, $(5x^2 + 10x) \div (x + 2) = \frac{5x^2 + 10x}{x + 2}$

$$= \frac{5x\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}} = 5x.$$ ($(x + 2)$ ஐ நீக்குதல்)

பயிற்சி 2.5

1. சுருக்குக:

(i) $16x^4 \div 32x$ (ii) $-42y^3 \div 7y^2$ (iii) $30a^3b^3c^3 \div 45abc$

(iv) $(7m^2 - 6m) \div 2m$ (v) $25x^3y^2 \div 15x^2y$ (vi) $(-72l^4m^5n^8) \div (-8l^2m^2n^3)$

2. பின்வரும் வகுத்தல்களைச் செய்க:

(i) $5y^3 - 4y^2 + 3y \div y$ (ii) $(9x^5 - 15x^4 - 21x^2) \div (3x^2)$

(iii) $(5x^3 - 4x^2 + 3x) \div (2x)$ (iv) $4x^2y - 28xy + 4xy^2 \div (4xy)$

(v) $(8x^4yz - 4xy^3z + 3x^2yz^4) \div (2xyz)$

3. கீழ்க்காணும் கோவைகளைச் சுருக்குக:

(i) $(x^2 + 7x + 10) \div (x + 2)$ (ii) $(a^2 + 24a + 144) \div (a + 12)$

(iii) $(m^2 + 5m - 14) \div (x + 7)$ (iv) $(25m^2 - 4n^2) \div (5m + 2n)$

(v) $(4a^2 - 4ab - 15b^2) \div (2a - 5b)$ (vi) $(a^4 - b^4) \div (a - b)$

2.7 ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஏழாம் வகுப்பில் நாம் இயற்கணிதக் கோவைகள், ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி கற்றுள்ளோம். அவற்றை நாம் இப்பொழுது நினைவு கூர்வோம்.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் காண்க:

(i) $2x = 8$ (ii) $3x^2 = 50$ (iii) $5x^2 - 2 = 102$ (iv) $2x - 3 = 5$

(v) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 4$ (vi) $3x^3 = 81$ (vii) $2(5x + 1) - (2x + 1) = 6x + 2$

இவை யாவும் சமன்பாடுகளாகும்.

ஒரு ‘ = ’ குறியால் இணைக்கப்பட்டுள்ள இரு கோவைகளைக் கொண்ட ஒரு கூற்று சமன்பாடு எனப்படும். இதையே, ‘ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமத்தன்மையுள்ள கூற்று’ என்றும் கூறலாம்.

பிறகு, ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பது யாது?

அடுக்கு அல்லது படியை ஒன்றாகக் கொண்ட ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளால் ஆன சமன்பாட்டை நேரியல் அல்லது ஒருபடிச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

ஆகவே, மேற்கண்ட சமன்பாடுகளுள் (i), (iv), (v), (vii) ஆகியவற்றில் உள்ள மாறிகளின் படி ஒன்றாகும். ஆகவே, அவைகள் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

மேலும், சமன்பாடுகள் (ii), (iii), (vi) ஆகியவை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் அல்ல. ஏனெனில் மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி ஒன்றை விட அதிகம்.

சமன்பாடுகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

$2x - 3 = 5$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

மாறி சமக்குறி

$2x - 3 = 5$

சமன்பாடு

(i) ஒரு இயற்கணித சமன்பாடு என்பது மாறிகள், மாறிலிகள் ஆகியவைகளால் ஆன சமத்தன்மையுள்ள கூற்று ஆகும்.

(ii) ஒவ்வொரு சமன்பாடும் ஒரு சமக்குறியைப் பெற்றிருக்கும். சமக்குறிக்கு இடது கை புறம் உள்ள கோவையை (இடதுபக்கம்) என்றும் வலது கை புறம் உள்ள கோவையை (வலது பக்கம்) என்றும் குறிக்கிறோம்.

$2x - 3$ = இடது பக்கம்

5 = வலது பக்கம்

(iii) ஒரு சமன்பாட்டின் இடதுபக்கக் கோவையின் மதிப்பும் வலதுபக்கக் கோவையின் மதிப்பும் சமம் ஆகும். இது மாறிகளின் குறிப்பிட்ட சில மதிப்பு களுக்கே உண்மையாகும். இவ்வாறு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் மதிப்பு களை தீர்வுகள் அல்லது மூலங்கள் என்கிறோம்.

$x = 4$ என்பது $2x - 3 = 5$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. எனவே, $x = 4$ என்பது இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

இடதுபக்கம் $= 2(4) - 3$

$= 8 - 3 = 5 =$ வலது பக்கம்

$x = 5$ என்பது இச்சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு அல்ல. ஏனெனில் $x = 5$ எனில்,

இடது பக்கம் $= 2(5) - 3$

$= 10 - 3 = 7 \neq$ வலது பக்கம்

சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க உதவும் விதிகள்

சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கும்போது நாம் கீழ்க்கண்ட விதிகளுள் ஒன்றையோ அல்லது இரண்டையோ அல்லது அனைத்தையும் கூட பயன்படுத்த நேரிடலாம்.

1. ஒரு சமன்பாட்டின் இரு பக்கமும் ஒரே எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ சமன்பாட்டின் மதிப்பு மாறாது.
2. பூச்சியமற்ற ஒரு எண்ணால் சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ அதன் மதிப்பு மாறாது.
3. இடமாற்று முறை : ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்போது, மாறிகளை கொண்ட உறுப்புகளை எல்லாம் ஒரு பக்கமாகவும், மாறிலிகளையெல்லாம் மறுபக்கமாகவும் கொண்டு செல்ல வேண்டும். சில உறுப்புகளை ஒரு பக்கத்திலிருந்து மறுபக்கத்திற்கு இடமாறுதல் செய்வதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம். சமன்பாட்டின் எந்தவொரு உறுப்பையும் அதன் குறியை மாற்றி ஒரு பக்கத்திலிருந்து மறுபக்கத்திற்கு எடுத்துச் செல்லலாம். இவ்வாறு உறுப்புகளை மாற்றும் முறைக்கு இட மாற்று முறை என்று பெயர்.

2.7.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு

ஏழாம் வகுப்பிலேயே நாம் ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கக் கற்றுள்ளோம். $ax + b = 0$, இங்கு $a \neq 0$ என்ற வடிவில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

ஒரு மாறிலியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$5x - 13 = 42$ இன் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு

படி 1 : இருபக்கமும் 13ஐக் கூட்ட, $5x - 13 + 13 = 42 + 13$

$5x = 55$

படி 2 : இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுக்க, $\frac{5x}{5} = \frac{55}{5}$

$x = 11$

சரிபார்த்தல் :

இடது பக்கம்

$= 5 \times 11 - 13$

$= 55 - 13$

$= 42$

= வலது பக்கம்

இடமாற்று முறை:

$5x - 13 = 42$

$5x = 42 + 13$ (– 13 ஐ வலப்பக்கத்திற்கு மாற்றுதல்)

$5x = 55$

$\frac{5x}{5} = \frac{55}{5}$ (இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுத்தல்)

$x = 11$

எடுத்துக்காட்டு 2.25

தீர்க்க : $5y + 9 = 24$

தீர்வு

$$5y + 9 = 24$$

$$5y + 9 - 9 = 24 - 9$$ (இருபக்கமும் 9ஐக் கழித்தல்)

$$5y = 15$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{15}{5}$$ (இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுத்தல்)

$$y = 3$$

சரிபார்த்தல் :

இடது பக்கம் $= 5(3) + 9 = 24 =$ வலது பக்கம்

மாற்றுமுறை :

$$5y + 9 = 24$$

$5y = 24 - 9$ (9ஐ வலதுபக்கத்திற்கு மாற்றிடல்)

$5y = 15$ மற்றும் $y = \frac{15}{5}$. எனவே $y = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 2.26

தீர்க்க: $2x + 5 = 23 - x$

தீர்வு

$$2x + 5 = 23 - x$$

$$2x + 5 - 5 = 23 - x - 5$$

(– 5 ஐ இருபுறமும் சேர்த்தல்)

$$2x = 18 - x$$

$$2x + x = 18 - x + x$$

$$3x = 18$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$ (இருபக்கத்தையும் 3ஆல் வகுத்தல்)

$$x = 6$$

மாற்றுமுறை :

$$2x + 5 = 23 - x$$

$2x + x = 23 - 5$ (இடமாற்று முறை)

$$3x = 18$$

$x = \frac{18}{3}$ (இருபக்கத்தையும் 3ஆல் வகுத்தல்)

$$x = 6$$

சரிபார்த்தல் : இடது பக்கம் $= 2x + 5 = 2(6) + 5 = 17$,

வலது பக்கம் $= 23 - x = 23 - 6 = 17$.

எடுத்துக்காட்டு 2.27

தீர்க்க : $\frac{9}{2}m + m = 22$

தீர்வு

$$\frac{9}{2}m + m = 22$$

$$\frac{9m + 2m}{2} = 22$$ (இடதுபக்கத்திற்கு மீபொம எடுத்தல்)

$$\frac{11m}{2} = 22$$

$$m = \frac{22 \times 2}{11}$$ (குறுக்குப் பெருக்கலின்படி)

$$m = 4$$

சரிபார்த்தல் :

இடதுபக்கம் $= \frac{9}{2}m + m = \frac{9}{2}(4) + 4$

$= 18 + 4 = 22 =$ வலது பக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 2.28

தீர்க்க : $\frac{2}{x}-\frac{5}{3x}=\frac{1}{9}$

தீர்வு

$$\frac{2}{x}-\frac{5}{3x} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{6-5}{3x} = \frac{1}{9}$$ (இடதுபக்கத்திற்கு மீபொம எடுத்தல்)

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{9}$$

$$3x = 9;\ x = \frac{9}{3};\ x = 3.$$

சரிபார்த்தல் :

இடது பக்கம்

$$= \frac{2}{x}-\frac{5}{3x}$$

$$= \frac{2}{3}-\frac{5}{3(3)} = \frac{2}{3}-\frac{5}{9}$$

$$= \frac{6-5}{9}$$

$= \frac{1}{9}$ = வலது பக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 2.29

இரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்களின் கூடுதல் 32 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

தீர்வு

இரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்கள் x , $(x+2)$ என்க.

மேலும், அவற்றின் கூடுதல் 32.

$$\therefore (x)+(x+2) = 32$$

$$2x+2 = 32$$

$$2x = 32-2$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2} = 15$$

சரிபார்த்தல் :

15 + 17 = 32

ஒரு எண் $x = 15$ எனில், மற்றொரு எண் $x+2 = 15+2 = 17$.

$\therefore$ தேவைப்படும் அவ்விரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்கள் 15, 17 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.30

ஓர் எண்ணின் மூன்றில் ஒரு பங்கின் இரண்டில் ஒருபங்கின் ஐந்தின் ஒரு பங்கு 15 எனில் அவ்வெண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான எண் x என்க.

கணக்கின்படி, x இன் $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ இன் $\frac{1}{5}$ பங்கு = 15.

அதாவது, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times x = 15$

$$x = 15\times3\times2\times5$$

$$x = 45\times10$$

$$= 450$$

எனவே, தேவையான அவ்வெண் 450 ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

இடதுபக்கம்

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times x$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times 450$$

= 15 = வலதுபக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 2.31

ஒரு விகிதமுறு எண்ணை $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்கி வரும் பெருக்கற் பலனுடன் $\frac{2}{3}$ ஐக் கூட்டினால் $\frac{-7}{12}$ கிடைக்கும் எனில் அவ்விகிதமுறு எண் எது?

தீர்வு

அந்த விகிதமுறு எண் x என்க.

இதை $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்கி வரும் பெருக்கல் பலனுடன் $\frac{2}{3}$ ஐக் கூட்ட, நமக்குக்கிடைப்பது $\frac{-7}{12}$.

அதாவது, $x \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-7}{12}$

$$\frac{5x}{2} = \frac{-7}{12} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-7-8}{12} = \frac{-15}{12}$$

$$= \frac{-15}{12} \times \frac{2}{5} = \frac{-1}{2}.$$

சரிபார்த்தல் :

இடது பக்கம்

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-5}{4} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-15+8}{12} = \frac{-7}{12}$$

= வலது பக்கம்.

எனவே, தேவைப்பட்ட அவ்விகிதமுறு எண் $\frac{-1}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.32

அருணின் தற்போதைய வயது அவருடைய தந்தையின் வயதில் பாதியாகும். பன்னிரெண்டு ஆண்டுகட்கு முன்பு தந்தையின் வயதானது அருணின் வயதைப் போல் மும்மடங்காக இருந்தது. அவர்களின் தற்போதைய வயதினைக் காண்க.

தீர்வு

அருணின் தற்போதைய வயது x என்க.

அவருடைய தந்தையின் தற்போதைய வயது $2x$ ஆண்டுகள் ஆக இருக்கும்.

12 ஆண்டுகட்கு முன்பு, அருணின் வயது $(x - 12)$ ஆண்டுகளாகவும்,

அவருடைய தந்தையின் வயது $(2x-12)$ ஆண்டுகளாகவும் இருந்திருக்கும்.

கணக்கின்படி, $(2x - 12) = 3(x - 12)$

$$2x - 12 = 3x - 36$$

$$36 - 12 = 3x - 2x$$

$$x = 24$$

சரிபார்த்தல் :

அருணின் வயது	தந்தையின் வயது
தற்பொழுது : 24	தற்பொழுது : 48
12 ஆண்டுகட்கு முன்பு 24 – 12 = 12	48 – 12 = 36 36 = 3 × (அருணின் வயது) = 3 (12) = 36

எனவே, அருணின் தற்போதைய வயது = 24 ஆண்டுகள்.

அவருடைய தந்தையின் தற்போதைய வயது = 2 (24) = 48 ஆண்டுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.33

ஒரு நபர் ஒரு மகிழுந்தை ₹ 1,40,000க்கு விற்பனை செய்ததன் மூலம் 20% நட்டமடைந்தார் எனில் மகிழுந்தின் அடக்கவிலை யாது?

தீர்வு

மகிழுந்தின் அடக்க விலை x என்க.

நட்டம் 20% = x இன் $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}\times x = \frac{x}{5}$

அடக்கவிலை – நட்டம் = விற்பனை விலை

$$x-\frac{x}{5} = 140000$$
$$\frac{5x-x}{5} = 140000$$
$$\frac{4x}{5} = 140000$$
$$x = 140000\times\frac{5}{4}$$
$$x = 175000$$

எனவே, அந்த மகிழுந்தின் அடக்கவிலை ₹ 1,75,000 ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

நட்டம் = 175000 இல் 20%

$= \frac{20}{100}\times 175000$

= ₹ 35,000

வி.வி. = அ.வி. – நட்டம்

= 175000 – 35000

= ₹ 140000

பயிற்சி 2.6

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

(i) $3x+5=23$

(ii) $17=10-y$

(iii) $2y-7=1$

(iv) $6x=72$

(v) $\frac{y}{11}=-7$

(vi) $3(3x-7)=5(2x-3)$

(vii) $4(2x-3)+5(3x-4)=14$

(viii) $\frac{7}{x-5}=\frac{5}{x-7}$

(ix) $\frac{2x+5}{3x+7}=\frac{3}{5}$

(x) $\frac{m}{3}+\frac{m}{4}=\frac{1}{2}$

2. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளுக்குச் சமன்பாடுகளை அமைத்துத் தீர்வு காண்க:

(i) ஓர் எண்ணின் பாதியுடன் அவ்வெண்ணின் மூன்றிலொரு பங்கைக் கூட்டினால் 15 கிடைக்கும் எனில் அந்த எண்ணைக் காண்க.

(ii) அடுத்தடுத்த மூன்று எண்களின் கூடுதல் 90 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(iii) ஒரு செவ்வகத்தின் அகலம் அதன் நீளத்தைவிட 8 செ.மீ. குறைவு. மேலும், அச்செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 60 செ.மீ. எனில் அதன் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

(iv) இரு எண்களின் கூடுதல் 60. அவற்றுள் பெரிய எண்ணானது சிறிய எண்ணைப் போல் 4 மடங்கு எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(v) இரு எண்களின் கூடுதல் 21 அவ்விரு எண்களுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு 3 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(குறிப்பு: பெரிய எண்ணை x என்க. எனவே, சிறிய எண் $x - 3$ ஆகும்)

(vi) இரு எண்கள் 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றின் வேறுபாடு 18 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(vii) எந்த எண்ணிலிருந்து அதனுடைய 5% ஐக் குறைந்தால் 3800 கிடைக்கும் ?

(viii) ஒரு பின்னத்தின் பகுதி அதன் தொகுதியைவிட 2 அதிகம். மேலும் அப்பின்னத்தின் தொகுதியுடனும் பகுதியுடனும் ஒன்றைக் கூட்டினால் $\frac{2}{3}$ கிடைக்கும். எனில் அந்த பின்னத்தைக் காண்க.

(ix) மேரி, நந்தினியின் வயதைப் போல் மும்மடங்கு மூத்தவர். 10 ஆண்டுகளுக்கு பிறகு அவர்களின் வயதுகளின் கூடுதல் 80 ஆக இருக்கும் எனில் அவர்களின் தற்போதைய வயதினைக் காண்க.

(x) முரளி தன்னுடைய சொத்தில் பாதியை மனைவிக்கும், மீதியில் மூன்றில் இரு பங்கை மகனுக்கும் எஞ்சிய . ₹ 50,000 ஐ தனது மகளுக்கும் கொடுத்தார் எனில் அவருடைய மனைவியின் பங்கையும் மகனின் பங்கையும் காண்க.

கருத்துச் சுருக்கம்

- ஒருறுப்புக் கோவை: ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- ஈருறுப்புக் கோவை: இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- மூவுறுப்புக் கோவை: மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை: முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த பூச்சியமற்ற கெழுவையுடைய பல உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையை பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம்.
- பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி: உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும்.

  ஒத்த மாறிகளையும் ஒத்த அடுக்குகளையும் கொண்ட உறுப்புகள் ஒத்த அல்லது ஓரின உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன.

  - ஒத்த அல்லது ஓரின உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ முடியும்.
  - ஒருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலனும் ஓர் ஒருறுப்புக்கோவையே.
  - ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈறுறுப்புகோவையால் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும்.

முற்றொருமைகள்
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

- காரணிப்படுத்தல்: எந்தவொரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் அதன் காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுதுவதையே காரணிப்படுத்தல் என்கிறோம்.
- ஒருபடிச் சமன்பாடு: அடுக்கு அல்லது படியை ஒன்றாகக் கொண்ட ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளால் ஆன சமன்பாட்டை நேரியல் அல்லது ஒருபடிச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

  $ax + b = 0$ என்பது ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். இங்கு $a \neq 0$; a, b ஆகியவை மாறிலிகள், x என்பது மாறி ஆகும்.
- ஒரு மாறியில் அமைந்த ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

கணித மன்ற செயல்பாடு

இயற்கணித வேடிக்கை

சில தந்திரங்களைக் கையாண்டு நாம் $2 = 3$ என நிரூபிக்கலாம்.

இது கேள்விப்படாத ஒன்றல்லவா? ஆம். ஆனால் தவறு எங்கே உள்ளது என உங்களால் கண்டறிய இயலுமா?

$2 = 3$ என நிறுவ, எவ்வித கேள்விக்கும் இடமளிக்காத கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுடன் தொடங்குவோம்.

$$4 - 10 = 9 - 15$$

$6\frac{1}{4}$ என்பதை சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் கூட்ட

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$$ இதையே நாம்,

$$2^2 - 2(2)(\frac{5}{2}) + (\frac{5}{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\frac{5}{2}) + (\frac{5}{2})^2$$ என்றவாறு எழுதலாம்.

அதாவது, $(2 - \frac{5}{2})^2 = (3 - \frac{5}{2})^2$

இருபக்கமும் வர்க்கமூலம் காண, நமக்கு $(2 - \frac{5}{2}) = (3 - \frac{5}{2})$ என்பது கிடைக்கும்.

இருபக்கமும் $\frac{5}{2}$ ஐக் கூட்டினால்,

$$2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

$$2 = 3$$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது

இப்பொழுது, நாம் 2 ம் 3 ம் சமம் என நிரூபித்து விட்டோம்.

தவறு எங்கே உள்ளது?

நாம் சற்று விரிவாகக் காண்போம் : $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$ என்பதை

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

என்று நாம் முடிவு செய்த இடத்தில் ஒரு தவறு நிகழ்ந்து விட்டது.

வர்க்கங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் முதற்படிகளும் (மூலங்களும்) சமம் என்ற முடிவுக்கு வருவது தவறு. எனவே முதற்படிகள் அல்லது மூலங்கள் சமம் அல்ல.

உதாரணமாக. $(-5)^2 = 5^2$ $[\because (-5)(-5) = (5)(5) = 25]$

எனில் -5 என்பது 5-க்குச் சமம் அல்ல.

மேலே உள்ள கணக்கில் நாம் $\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ என்ற முடிவினை பெற்றோம்.

இதிலிருந்து, $\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ என நாம் முடிவு செய்ததே இத்தவறு ஏற்படக் காரணமாகும்.

உங்களுக்குத் தற்பொழுது புரிந்துவிட்டதா?

வாழ்வியல் கணிதம்

3

3.1 அறிமுகம்

3.2 இலாபம், நட்டம் மற்றும் தனி வட்டி பற்றிய மீள்பார்வை

3.3 சதவீதம், இலாபம், நட்டம், மேற்படிச்செலவுகள், தள்ளுபடி மற்றும் வரி ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள்

3.4 கூட்டு வட்டி

3.5 கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

3.6 நிரந்தர வைப்புத் தொகை மற்றும் தொடர் வைப்புத் தொகை

3.7 கலப்பு மாற்றங்கள்

3.8 காலம் மற்றும் வேலை

ரோஜர் பேகன்

[1214-1294]

ரோஜர் பேகன் திறமையான ஆசிரியர். ஆங்கிலத் தத்துவ மேதை. சோதனை முறைகளை வலியுறுத்தியவர். ஆக்ஸ்போர்டில் கற்றுத் தேர்ந்தவர்.

''கணிதத்தை புறக்கணித்தால் அது எல்லா அறிவிற்கும் பாதிப்பை ஏற்படுத்தும்'' எனக் கூறினார்.

கணிதத்தின் முக்கியத்துவம் பொதுவான மனிதனின் அன்றாட தேவைகளாகன வங்கிகள், அங்காடி வளாகம், இரயில்வே, தபால் அலுவலகங்கள், காப்பீட்டு கழகங்கள் ஆகியவற்றை பயன்படுத்தும் போதும், போக்குவரத்து மற்றும் வியாபார பரிமாற்றங்களான இறக்குமதி, ஏற்றுமதி, வணிகம் மற்றும் வர்த்தகம் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தும் போதும் உணர முடிந்தது என்று கூறுகிறார்.

3.1 அறிமுகம்

மனிதர்கள் அனைவரும் வாழ்நாட்கள் முழுவதும் ''வெற்றி–வெற்றி'' என்ற உயர்வான இலக்கை அடைய விரும்புகின்றனர். இதற்காகத் தங்கள் நேரத்தைச் செவ்விய வழியில் ஒதுக்கி அதிகப் பணம் மற்றும் செல்வம் ஆகியவற்றைச் சேர்க்கின்றனர்.

கற்காலம் முதல் தற்காலம் வரை, பண்ட மாற்றிலிருந்து பணப் பரி மாற்றம் வரை, நிலங்களுக்கும் அவற்றிலிருந்து கிடைக்கும் உற்பத்திக்கும், மனிதன் விகித மற்றும் விகிதசம அறிவைப் பயன்படுத்துகின்றான். தாஜ்மகால் போன்ற மாபெரும் நினைவுச் சின்னங்கள், தஞ்சை பிரஹதீஸ்வரர் ஆலயம் போன்ற கலைச்செல்வங்கள் ஆகியன மிக அழகிய தோற்றத்திற்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இவையாவும் நம் முன்னோர்கள் விகித அளவை மிகச் சரியாகப் பயன்படுத்தி அழகாகவும், உறுதியாகவும் கட்டியுள்ளதை நமக்குப் புலப்படுத்துகின்றன.

இவ்வுலகில் மழை மற்றும் அறுவடை; உணவு மற்றும் உடல்நலம்; வரவு மற்றும் செலவு போன்றவை காரண காரிய தொடர்புகளில் அமைந்துள்ளன. எனவே, கலப்பு மாற்றங்கள் என்ற கருத்து எழுந்துள்ளது.

நாம் நம்மைக் காப்பாற்றிக் கொள்ளும் முயற்சியில் பணத்தைக் கடனாகப் பெறுகின்றோம். மேலும் நம்மை வளர்த்துக் கொள்ளும் முயற்சியில் பணத்தை வங்கிகளில் முதலீடு செய்கின்றோம். இச்செயல்பாடுகளில் கூட்டு

வட்டியை முன்னிலைப்படுத்தி ஈடு செய்கின்றோம். நாட்டின் பாதுகாப்பு, சுகாதாரம், கல்வி மற்ற வசதிகள் ஆகியவற்றை அரசாங்கம் பொறுப்பேற்றுச் செயல்படுத்துகின்றது. இவற்றை நமக்கு அளிக்க அரசுக்கு நம் வருமானத்திலிருந்து வரியைச் செலுத்துகின்றோம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் நம் நடைமுறை வாழ்வோடு ஒருங்கிணைந்த தலைப்புகளைப் பற்றி காண்போம்.

3.2 இலாபம், நட்டம் மற்றும் தனிவட்டி பற்றிய மீள்பார்வை

முன் வகுப்பில் இலாபம், நட்டம், தனிவட்டி ஆகியவற்றைக் காணும் முறைகளைக் கற்றுள்ளோம். நாம் கற்ற முடிவுகளை நினைவு கூர்வோம்:

இலாபம், நட்டம், தனிவட்டி ஆகியவற்றின் முடிவுகள்

(i) இலாபம் = விற்பனை விலை – அடக்க விலை
(விற்பனை விலை > அடக்க விலை)

(ii) நட்டம் = அடக்க விலை – விற்பனை விலை
(அடக்க விலை > விற்பனை விலை)

(iii) இலாப சதவீதம் = $\frac{\text{இலாபம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100$

(iv) நட்ட சதவீதம் = $\frac{\text{நட்டம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100$

(v) தனி வட்டி (I) = $\frac{\text{அசல்} \times \text{காலம்} \times \text{வட்டி வீதம்}}{100} = \frac{Pnr}{100}$

(vi) கூட்டுத்தொகை = அசல் + வட்டி

3.3 சதவீதம், இலாபம், நட்டம், மேற்படிச் செலவுகள், தள்ளுபடி மற்றும் வரி ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள்

நீவிர் அறிவீரா?

= $\frac{1}{2}$ = 50 %

= $\frac{1}{4}$ = 25 %

= $\frac{3}{4}$ = 75 %

3.3.1 சதவீதத்தின் பயன்பாடுகள்

நாம் முன் வகுப்புகளில் சதவீதங்களைப் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இவற்றை பயன்படுத்தும் முறைகள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) இரண்டு சதவீதம் = $2\% = \frac{2}{100}$

(ii) 600 கிலோ கிராமின் 8% = $\frac{8}{100} \times 600 = 48$ கி.கி.

(iii) 125% = $\frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

இப்பொழுது, சதவீதங்களைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

2 ரூபாய் 70 பைசாவில் 15 பைசா எத்தனை சதவீதம்?

தீர்வு

$$₹\ 2 \text{ பைசா } 70 = (2 \times 100 \text{ பைசா} + 70 \text{ பைசா})$$
$$= 200 \text{ பைசா} + 70 \text{ பைசா}$$
$$= 270 \text{ பைசா}$$

எனவே, தேவையான சதவீதம் $= \frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}\%$.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

ஒரு தொகையின் 12% என்பது ₹ 1080 எனில் அத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு

தொகை ₹ x என்க.

தரப்பட்டுள்ளது : அத்தொகையின் 12% = ₹ 1080

$$\frac{12}{100} \times x = 1080$$
$$x = \frac{1080 \times 100}{12} = ₹\ 9000$$

∴ தொகை = ₹ 9000.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

25 மாணவர்களில் 72% பேர் கணிதப் பாடத்தில் திறமையானவர்கள். கணிதப் பாடத்தில் திறமையற்றோர் எத்தனை பேர்?

தீர்வு

கணிதத்தில் திறமையானவர்களின் சதவீதம் = 72%

கணிதத்தில் திறமை மிக்க மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 25 மாணவர்களில் 72%

$$= \frac{72}{100} \times 25$$

= 18 மாணவர்கள்

∴ கணிதத் திறமையற்றோர் எண்ணிக்கை = 25 – 18 = 7.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

240 யை விட 15% குறைவான எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

240 இல் 15% $= \frac{15}{100} \times 240 = 36$

∴ தேவையான எண் = 240 – 36 = 204.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

ஒரு வீட்டின் விலை 15 இலட்சம் ரூபாயிலிருந்து 12 இலட்சம் ரூபாயாகக் குறைந்தது எனில் குறைந்த சதவீதம் காணவும்.

தீர்வு

முதலில், வீட்டின் விலை = ₹ 15,00,000

தற்போதைய விலை = ₹ 12,00,000

விலையில் குறைவு = 15,00,000 – 12,00,000 = 3,00,000

$\therefore$ குறைந்த சதவீதம் = $\frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$

நினைவிற்கொள்க

அதிகரிப்பதின் சதவீதம் = $\frac{\text{அதிகரித்தத் தொகை}}{\text{முதல் தொகை}} \times 100$

குறைந்ததின் சதவீதம் = $\frac{\text{குறைந்தத் தொகை}}{\text{முதல் தொகை}} \times 100$

முயற்சி செய்

சரத், பரத் என்போர் 15 மிட்டாய்களை முறையே 20%, 80% என்றவாறு பிரித்துக் கொள்கின்றனர். ஒவ்வொருவரும் பெறும் மிட்டாய்களின் எண்ணிக்கையைக் காணவும்.

செய்து பார்

என் பாட்டி தன்னுடைய குழந்தைப் பருவத்தில் ஒரு கிராம் தங்கத்தின் விலை ₹ 100 என்று கூறுகின்றார். செய்தித்தாளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு மாத முதல் தேதியிலும் தங்கத்தின் விலையை காணவும். ஒவ்வொரு மாதத்திலும் ஏற்படும் அதிகரிப்பு சதவீதம் காண்க.

பயிற்சி 3.1

1. சரியான விடையினைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) ஒரு கூடையிலுள்ள 25 பழங்களில் 5 ஆரஞ்சுப் பழங்கள் எனில் ஆரஞ்சுப் பழங்களின் சதவீதம் ....

(A) 5% (B) 25% (C) 10% (D) 20%

(ii) $\frac{2}{25}$ = ... %.

(A) 25 (B) 4 (C) 8 (D) 15

(iii) ஒரு பாட்டிலில் உள்ள மொத்த பிஸ்கட்டுகளின் எண்ணிக்கையில் 15% பிஸ்கட்டுகள் 30 எனில், பிஸ்கட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ....

(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 300

(iv) சென்ற ஆண்டு ஒரு ஸ்கூட்டரின் விலை ₹ 34,000. இந்த ஆண்டு இதன் விலை 25% கூடுதலாகின்றது. அக்கூடுதல் தொகை ....

(A) ₹ 6,500 (B) ₹ 8,500 (C) ₹ 8,000 (D) ₹ 7,000

(v) மாத வருமானம் ₹ 20,000 பெறும் நபர் ஒருவர் ஒவ்வொரு மாதமும் ₹ 3,000ஐ சேமிப்பு செய்கின்றார் எனில், அவருடைய மாதச் சேமிப்புச் சதவீதம் ....

(A) 15% (B) 5% (C) 10% (D) 20%

2. (i) ஒரு கொள்கலத்தில் உள்ள 20% ஆனது 40 லிட்டர் எண்ணெய் ஆகும். அக் கொள்கலத்தில் உள்ள எண்ணெயின் மொத்த அளவைக் காணவும்.

(ii) ஒரு பயணத்தில் 25% தொலைவு 5000 கி.மீ எனில் மொத்தப் பயணத் தொலைவு எவ்வளவு?

(iii) ஒரு தொகையில் 3.5% என்பது ₹ 54.25 எனில், அத்தொகையைக் காண்க.

(iv) மொத்த நேரத்தில் 60% என்பது 30 நிமிடங்களாகும் எனில், அந்த மொத்த நேரத்தைக் கணக்கிடவும்.

(v) ஒரு பொருளை விற்றதில் 4% விற்பனை வரி வீதம் ₹ 2 வரி செலுத்தினால், அவர் என்ன விலைக்கு விற்றிருப்பார்?

3. மீனு தன்னுடைய சம்பளத்தில் 5%ஐ அதாவது ₹ 2000 ஐ, பொழுதுபோக்கிற்குச் செலவிட்டால் அவருடைய சம்பளம் என்ன?

4. ஒரு கூடையிலுள்ள மொத்த மாம்பழங்களில் 25% அழுகியவை. அவற்றின் எண்ணிக்கை 1250 எனில் மொத்தப் பழங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. மேலும் நல்ல மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

5. 12ஆம் வகுப்பு தேர்வில் இராணி பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அம்மதிப்பெண்களைச் சதவீதங்களாகக் கூறவும்.

பாடங்கள்	அதிக மதிப்பெண்கள்	பெற்ற மதிப்பெண்கள்	சதவீதம்
(i) ஆங்கிலம்	200	180	
(ii) தமிழ்	200	188	
(iii) கணக்கு	200	195	
(iv) இயற்பியல்	150	132	
(v) வேதியியல்	150	142	
(vi) உயிரியல்	150	140	

6. ஒரு பள்ளியின் கிரிக்கெட் குழு மற்றொரு பள்ளியின் கிரிக்கெட் குழுவுடன் ஆடிய ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை 20. இவற்றில் முதற் பள்ளி 25% ஆட்டங்களை வென்றது எனில் மொத்தம் வென்ற ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

7. ஆண்டொன்றிற்கு 18% தனி வட்டி தரும் குழுமத்தில் ரஹீம் ₹ 10000ஐ முதலீடு செய்தார் எனில், 5 வருடங்களுக்கு பிறகு அவர் பெறும் வட்டியினைக் காண்க.

8. ஒரு பொம்மையின் குறித்த விலை ₹ 1200. கடைக்காரர் 15% தள்ளுபடி விலையில் கொடுத்தார் எனில், பொம்மையின் விற்பனை விலை என்ன?

9. கணினி குழுமத்தில் நடைபெற்ற நேர்முகத் தேர்வில் 1500 நபர்கள் கலந்து கொண்டனர். இதில் 12% நபர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டனர் எனில், எத்தனை நபர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டனர்? மேலும் எத்தனை நபர்கள் தேர்வு செய்யப்படவில்லை எனக் காண்க.

10. ஒரு உலோகக் கலவையில் 30% தாமிரம், 40% துத்தநாகம், மீதி நிக்கல் உள்ளது. 20 கி.கி உள்ள இந்த உலோகக் கலவையில் நிக்கலின் அளவு யாது?

11. கிராமப் பஞ்சாயத்து உறுப்பினர் தேர்தலில் தாமரை மற்றும் பாண்டியன் ஆகிய இருவர் போட்டியிட்டனர். மொத்த வாக்குகளில் 44% அதாவது 11,484 வாக்குகள் பாண்டியனுக்குக் கிடைத்தது. தாமரைக்கு 36% வாக்குகள் கிடைத்தன.
    (i) இக்கிராமத்தில் பதிவான மொத்த வாக்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?
    (ii) போட்டியிட்ட இருவருக்கும் வாக்காளிக்காதவர்கள் எத்தனை பேர்?
12. ஒருவர் தன் வருமானத்தில் 40% உணவுக்காகவும், 15% உடைக்காகவும், 20% வீட்டு வாடகைக்காகவும் செலவிடுகின்றார். மீதியைச் சேமிக்கின்றார். அவர் வருமானம் ₹ 34,400 எனில், அவர் எவ்வளவு சேமிக்கின்றார்?
13. ஜோதிகா ஆங்கிலத்தில் 50க்கு 35 மதிப்பெண்களும், கணக்கில் 30க்கு 27 மதிப்பெண்களும் பெற்றார். எப்பாடத்தில் அதிக மதிப்பெண் பெற்றார்? எவ்வளவு அதிகம் பெற்றார்?
14. ஒரு தொழிலாளி ₹ 11,250 ஊக்கத் தொகையாகப் பெறுகின்றார். இத்தொகை அவர் தம் ஆண்டு வருமானத்தில் 15% எனில், அவரின் மாத வருமானம் என்ன?
15. ஓர் ஆடையின் விலை ₹ 2100 லிருந்து ₹ 2520 ஆக அதிகரிக்கின்றது எனில், அதிகரிப்பு சதவீதத்தைக் காண்க.

முயற்சி செய்

1. 40% = 100% – ______ %
2. ஒரு வகுப்பு மாணவர்களில் 25% நடந்தும், 65% பேர் சைக்கிளிலும், மீதியுள்ளோர் பள்ளிப் பேருந்திலும் பள்ளிக்கு வருகின்றனர் எனில் பள்ளிப் பேருந்தில் வருகின்றவர்களின் சதவீதம் யாது?
3. ஒரு வகுப்பில் 30% இந்தி, 50% தமிழ், மீதம் உள்ளவர்கள் பிரெஞ்சு ஆகிய மொழிகளை இரண்டாம் பாடமாகத் தேர்ந்தெடுத்தனர் எனில் பிரெஞ்சு மொழியை தேர்ந்தெடுத்தோரின் சதவீதம் என்ன?
4. ஒரு நகரில் ஆண்கள் 40% , பெண்கள் 30%, மீதியுள்ளோர் குழந்தைகள் எனில் குழந்தைகளின் சதவீதம் யாது?

செய்து பார்

கணேசன், கோவிந்தன் ஆகிய வியாபாரிகளிடமிருந்து அமுதா பட்டுப் புடவைகளை வாங்குகின்றார். கணேசன் 200 கி வெள்ளி நூல் கொண்டும், 100 கி தாமிர நூல் கொண்டும், கோவிந்தன் 300 கி வெள்ளி நூல் கொண்டும், 200 கி தாமிர நூல் கொண்டும் புடவையை நெய்கின்றனர். ஒவ்வொரு புடவையிலும் உள்ள வெள்ளி நூலின் சதவீதம் காண்க. அதிக வெள்ளி நூல் கொண்ட புடவை உயர்தரமானது எனில், இவ்விருவரில் யார் உயர்ந்த தரத்தில் புடவை தருகின்றார்?

3.3.2 இலாப, நட்டங்களின் பயன்பாடுகள்

இப்பகுதியில் இலாப, நட்டங்களைப் பயன்படுத்தி கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணக் கற்றுக் கொள்வோம்.

(i) விற்பனை விலை சூத்திரத்திற்கான விளக்கம் :

இராஜேஷ் ஒரு பேனாவை ₹ 80க்கு வாங்கி அவரின் நண்பருக்கு 5% இலாபத்தில் விற்றார் எனில் அப்பேனாவின் விலை என்ன?

இராஜேஷ் வாங்கிய பேனாவின் அடக்க விலை ₹ 80. இவ்விலையில் 5% இலாபம் கொண்டு விற்கின்றார்.

∴ இலாபம் =அடக்க விலையில் 5% = $\frac{5}{100} \times 80$ = ₹ 4

இலாபம் என்பதினால், விற்பனை விலை வாங்கிய விலையை விட அதிகம்.

விற்பனை விலை = வாங்கிய விலை + இலாபம் = 80 + 4 = ₹ 84.

∴ இராஜேஷ் பேனாவினை ₹ 84க்கு விற்பனை செய்து இருப்பார்.

இதையே சூத்திரம் மூலம் செய்யும் முறையைக் காண்போம்.

விற்பனை விலை (வி.வி.) $= \frac{(100 + \text{இலாபம் } \%)}{100} \times$ அடக்க விலை

$= \frac{(100+5)}{100} \times 80 = \frac{105}{100} \times 80$ = ₹ 84.

(ii) அடக்க விலை சூத்திரத்திற்கான விளக்கம் :

ஒரு கடிகாரக் கடைக்காரர் ஒரு கைக்கடிகாரத்தை ₹ 540 க்கு, 5% இலாபத்தில் விற்றதாகக் கொள்வோம். இதன் அடக்க விலை என்னவாக இருந்திருக்கும்?

கடைக்காரர் அக்கைக்கடிகாரத்தை 5% இலாபத்தில் விற்கின்றார். நமக்கு அடக்க விலை தெரியாது ஆதலால் நாம் அதை ₹ 100 எனக் கொள்வோம்.

முதலில் நாம் அடக்க விலையில் 5% இலாபத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

∴ இலாபம் = அடக்க விலையில் 5%

= $\frac{5}{100} \times 100$ = ₹ 5.

விற்பனை விலை = வாங்கிய விலை + இலாபம்

= 100 + 5 = ₹ 105.

விற்பனை விலை ₹ 105 எனில், அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 540 எனில், அடக்க விலை = $\frac{540 \times 100}{105}$ = ₹ 514.29.

அக்கடைக்காரருக்கு, கைக்கடிகாரத்தின் அடக்க விலை ₹ 514.29 ஆகும்.

மேற்கண்ட கணக்கை சூத்திரம் மூலமாகவும் தீர்வு செய்யலாம்.

$$\text{அடக்க விலை (அ.வி.)} = \frac{100}{(100 + \text{இலாபம் \%})} \times \text{விற்பனை விலை}$$

$$= \frac{100}{100+5} \times 540$$

$$= \frac{100}{105} \times 540$$

$$= ₹\ 514.29.$$

விற்பனை விலை (வி.வி.), அடக்க விலை (அ.வி.) இவற்றைக் காண உதவும் சூத்திரங்களின் தொகுப்பை இங்கு காண்போம் :

1. இலாபம் எனில்

(i) $\text{அ.வி.} = \left(\frac{100}{100 + \text{இலாபம் \%}}\right) \times \text{வி.வி.}$

1. நட்டம் எனில்

(ii) $\text{அ.வி.} = \left(\frac{100}{100 - \text{நட்டம்\%}}\right) \times \text{வி.வி.}$

2. இலாபம் எனில்

(i) $\text{வி.வி.} = \left(\frac{100 + \text{இலாபம் \%}}{100}\right) \times \text{அ.வி.}$

2. நட்டம் எனில்

(ii) $\text{வி.வி.} = \left(\frac{100 - \text{நட்டம்\%}}{100}\right) \times \text{அ.வி.}$

எடுத்துக்காட்டு 3.6

ஹமீது ஒரு வண்ணத் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை ₹ 15,200 க்கு வாங்குகின்றார். இதனை 20% நட்டத்திற்கு விற்றார் எனில், அத்தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விற்பனை விலை என்ன?

தீர்வு

இராகுல் செய்த முறை :

அடக்க விலையில் நட்ட சதவீதம் 20%

$$= \frac{20}{100} \times 15200$$

$$= ₹\ 3040$$

விற்பனை விலை= அடக்க விலை – நட்டம்

$$= 15,200 - 3,040$$

$$= ₹\ 12,160$$

அல்லது

ரோஷன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்தமுறை :

அ.வி. = ₹ 15, 200

நட்டம் = 20%

$$\text{வி.வி.} = \frac{100 - \text{நட்டம\%}}{100} \times \text{அ.வி.}$$

$$= \frac{100-20}{100} \times 15200$$

$$= \frac{80}{100} \times 15200 = ₹\ 12,160$$

இராகுலும், ரோஷனும் ஒரே விடையைப் பெற்றனர். பெட்டியின் விற்பனை விலை ₹ 12,160.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

ஒரு ஸ்கூட்டியை ₹ 13,600க்கு விற்பனை செய்யும்பொழுது 15% நட்டம் ஆகிறது எனில், அதன் அடக்க விலை என்ன?

தேவியும், ரேவதியும் இக்கணக்கினை இரு முறைகளில் செய்தனர்.

தீர்வு

தேவி செய்த முறை :

அடக்க விலை ₹ 100இல், நட்டம் 15% எனில், நட்டம் ₹ 15.

விற்பனை விலை = 100 – 15 = ₹ 85

விற்பனை விலை ₹ 85 எனில், அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 13600 எனில்,

அடக்க விலை $= \frac{100 \times 13600}{85}$

$= ₹\ 16,000$

அல்லது

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி ரேவதி செய்த முறை :

நட்டம் = 15%

வி.வி. = ₹ 13,600

அ.வி. $= \frac{100}{100 - \text{நட்டம்}\%} \times$ வி.வி.

$= \frac{100}{100 - 15} \times 13600$

$= \frac{100}{85} \times 13600$

$= ₹\ 16,000$

இருவருக்கும் ஒரே விடையாக அடக்க விலை ₹ 16,000 கிடைத்தது.

முயற்சி செய்

அட்டவனையைப் பூர்த்தி செய்க

பொருள்	அடக்க விலை (ரூபாயில்)	இலாபம் /நட்டம்	விற்ற விலை (ரூபாயில்)
துணி துவைக்கும் இயந்திரம்	16,000	9% இலாபம்	
மைக்ரோ வேவ் ஓவன்	13,500	12% நட்டம்	
மர அலமாரி		13% நட்டம்	6,786
சோபா செட்		12½% இலாபம்	7,000
குளிரூட்டும் சாதனம்	32,400	7% இலாபம்	

எடுத்துக்காட்டு 3.8

11 பேனாக்களின் அடக்கவிலை 10 பேனாக்களின் விற்ற விலைக்குச் சமம் எனில் இலாப அல்லது நட்ட சதவீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

பேனா விற்பனை விலை ₹ x என்க.

∴ 10 பேனாக்களின் விலை = ₹ $10x$

11 பேனாக்களின் அடக்கவிலை = 10 பேனாக்களின் விற்பனை விலை ஆகும்.

= ₹ $10x$

இங்கு, விற்பனை விலை > அடக்க விலை.

∴ இலாபம் = விற்பனை விலை – அடக்க விலை

$= 11x - 10x = ₹\ x$

இலாப சதவீதம் $= \frac{\text{இலாபம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100 = \frac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

இரு கைக்கடிகாரங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ₹ 594க்கு ஒருவர் விற்றார். இவ்வாறு விற்றதில் ஒன்றில் 10% இலாபமும், மற்றதில் 10% நட்டமும் அவருக்கு ஏற்பட்டது. மொத்தத்தில் அவருக்கு ஏற்பட்ட இலாபம் அல்லது நட்ட சதவீதம் காணவும்.

தீர்வு

முதல் கைக்கடிகாரத்தின் விற்பனை விலை = ₹ 594, இலாப சதவீதம் = 10%

$\therefore$ முதல் கைக்கடிகாரத்தின் அடக்க விலை $= \dfrac{100}{100 + \text{இலாபம் } \%} \times$ வி.வி

$$= \frac{100}{(100+10)} \times 594$$

$$= \frac{100}{110} \times 594 = ₹\ 540.$$

இரண்டாவது கைக்கடிகாரத்தை 10% நட்டத்தில் விற்றார் எனில்

அடக்க விலை $= \dfrac{100}{100 - \text{நட்டம் } \%} \times$ வி.வி

$$= \frac{100}{(100-10)} \times 594 = \frac{100}{90} \times 594 = ₹\ 660.$$

நிகர இலாபம் அல்லது நட்டம் உள்ளதா என்பதை தெரிந்துகொள்ள, ஒருங்கிணைந்த அடக்க விலை மற்றும் விற்பனை விலையைக் காண வேண்டியுள்ளது.

இரண்டு கைக்கடிகாரங்களின் மொத்த அடக்க விலை = 540 + 660 = ₹ 1,200.

இரண்டு கைக்கடிகாரங்களின் மொத்த விற்பனை விலை = 594 + 594 = ₹ 1,188.

மொத்த நட்டம் = 1,200 – 1,188 = ₹ 12.

நட்ட சதவீதம் $= \dfrac{\text{நட்டம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100$

$$= \frac{12}{1200} \times 100 = 1\%$$

3.3.3 மேற்படிச்செலவுகளைக் காட்டும் பயன்பாடு

ஒரு காற்று குளிரூட்டியை வாங்குவதற்கு மாயா தன் தந்தையுடன் கடைக்குச் சென்றார். அதனை ₹ 18,000க்கு வாங்கினர். அக்கடை அவர்களின் வீட்டின் அருகில் இல்லை. எனவே அக்குளிரூட்டியை எடுத்துச் செல்வதற்கு ஒரு வண்டி வேண்டியுள்ளது. அதன் வாடகை ₹ 500 எனில் அக்குளிரூட்டியின் அடக்க விலை, கடையில் வாங்கிய விலையுடன் ₹ 500 அதிகமாயிற்று. எனவே அதன் அடக்க விலை என்பது வாங்கிய விலை ₹ 18,000 உடன் வண்டி வாடகை ₹ 500ஐயும் சேர்க்க வேண்டியுள்ளது. இதைத்தான் நாம் மேற்படிச்செலவு என்கின்றோம். இப்பொழுது

காற்றுக் குளிரூட்டியின் அடக்க விலை = அதன் உண்மை விலை + வண்டி வாடகை

= 18,000 + 500 = ₹ 18,500

மற்றொரு உதாரணத்தை இங்கு காண்போம்.

கிஷோரின் தந்தை ஒரு பழைய மாருதி காரை ₹ 2,75,000 க்கு சென்னையிலுள்ள ஒரு மொத்த விற்பனையாளரிடம் இருந்து வாங்கினார். அதற்கு வண்ணம் தீட்ட ₹ 25,000 செலவு செய்தார். பின்பு அக்காரினை தன் சொந்த ஊருக்கு கொண்டுச் செல்ல மேலும் ₹ 2,000 செவழித்தார் எனில் பின்வரும் வினாக்களுக்கு உங்களால் விடையளிக்க இயலுமா?

(i) காரின் மொத்த அடக்க விலை என்ன?

(ii) காரின் உண்மையான அடக்க விலை என்ன?

(iii) இங்கு கூறப் பெற்ற மேற்படிச்செலவினங்கள் எவை?

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் வண்ணம் தீட்ட செலவு மற்றும் வண்டியைச் சொந்த ஊருக்கு கொண்டு செல்ல செலவு ஆகியவைகள் மேற்படிச்செலவுகளாகும்.

∴ காரின் அடக்கவிலை = உண்மையான அடக்க விலை + மேற்படிச்செலவுகள்

= 2,75,000 + (25,000 + 2,000)

= 2,75,000 + 27,000 = ₹ 3,02,000.

இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவிற்கு வருகின்றோம்.

சில சமயங்களில் ஒரு பொருளை வாங்குகின்ற போது அல்லது விற்பதற்கு முன்பு கூடுதல் செலவுகள் ஏற்படும். இந்தச் செலவுகளை அடக்க விலையுடன் கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும். இந்தச் செலவினங்களை மேற்படிச்செலவினங்கள் என்கின்றோம். பழுதை நீக்க ஆகும் செலவு, வண்டி வாடகை, மற்றும் இதர வகைகளை மேற்படிச்செலவினங்களில் சேர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

இராஜீ ₹ 36,000க்கு ஒரு மோட்டார் சைக்கிளை வாங்கி, அதன் தோற்றப் பொலிவு நன்கு அமையவும் மேலும் நன்முறையில் இயங்கவும் சில இதர பாகங்களைப் பொருத்தினார். பின்பு அம்மோட்டார் சைக்கிளை ₹ 44,000க்கு 10% இலாபத்தில் விற்கின்றார் எனில் இதர பாகங்கள் வாங்க எவ்வளவு செலவு செய்தார்?

தீர்வு

அடக்க விலை ₹ 100 என்க.

இலாபம் = 10%, விற்பனை விலை = ₹ 110

விற்பனை விலை ₹ 110 எனில் அடக்க விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 44,000 எனில் அடக்க விலை = $\frac{44000 \times 100}{110}$ = ₹ 40,000

∴ மொத்த செலவினங்கள் = 40,000 – 36,000 = ₹ 4,000.

பயிற்சி 3.2

1. அடக்க விலை அல்லது விற்பனை விலையைக் காண்க.

அடக்க விலை	விற்பனை விலை	இலாபம்	நட்டம்
(i) ₹ 7,282		₹ 208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹ 18,500

2. சரியானவற்றை விடுப்பட்ட கட்டங்களில் நிரப்பவும்.

அடக்க விலை	விற்பனை விலை	இலாபமும், இலாப சதவீதமும்	நட்டமும், நட்ட சதவீதமும்
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 நட்டம்
(v) ₹ 5,000		₹ 500 இலாபம்	

3. பின்வரும் கணக்குகளில் 5% இலாபம் எனில் பொருட்களின் விற்பனை விலையைக் காண்க.
   (i) மிதிவண்டி ₹ 700யுடன் மேற்படிச்செலவு ₹ 50.
   (ii) ஒரு கணினி மேசை ₹ 1150க்கு வாங்கி, எடுத்து வர வண்டிச் செலவு ₹ 50.
   (iii) ஒரு மேசை மீது அமையும் மாவு அரைக்கும் இயந்திரத்தை ₹ 2,560க்கு வாங்கி அதன் பழுது நீக்கும் செலவு ₹ 140.
4. வியாபாரி ஒருவர் ₹ 1320க்கு ஒரு மேசையை 10% இலாபத்தில் விற்றார் எனில் அதன் அடக்க விலையைக் காணவும்.
5. 16 நோட்டு புத்தகங்களின் அடக்க விலை, 12 நோட்டு புத்தகங்களின் விற்பனை விலைக்கு சமம். இதன் இலாப சதவீத்தைக் காணவும்.
6. ஒருவர் இரு பொருட்களை ஒவ்வொன்றையும் ₹ 375க்கு விற்கின்றார். முதல் பொருளை 25% இலாபத்திற்கும் மற்றதை 25% நட்டத்திற்கும் விற்கின்றார் எனில் மொத்த வியாபாரத்தில் ஏற்பட்ட இலாபம் அல்லது நட்டம் எவ்வளவு? இலாபம் அல்லது நட்ட சதவீதத்தையும் காணவும்.

7. அன்பரசன் ஒரு வீட்டை ₹ 17,75,000 க்கு வாங்கினார். பின்பு உட்புறங்களை ₹ 1,25,000 க்கு அழகுப்படுத்தி அதை 20% இலாபத்திற்கு விற்றார் எனில் விற்பனை விலையைக் காண்க.

8. அமலா ஒரு வீட்டினை வாங்கி அதன் கட்டிட அமைப்பினை மாற்ற ₹ 60,000 செலவு செய்தார். பின்னர் அவ்வீட்டை 20% இலாபத்தில் விற்றார். அதன் விற்பனை விலை ₹ 42,00,000 எனில் அவ்வீட்டை வாங்குவதற்கு அவர் செய்த செலவு யாது?

9. ஜெயக்குமார் நகரத்தின் வெளிப்புறத்தில் ₹ 21,00,000க்கு வீடு கட்ட இடம் வாங்கினார். இதனைச் சுற்றி சுவர் எழுப்ப ₹ 1,45,000 செலவு செய்தார். ₹ 25,00,000க்கு அவ்விடத்தினை விற்க ₹ 5,000 கொடுத்து செய்தித்தாளில் விளம்பரம் செய்தார் எனில் அவருக்குக் கிடைக்கும் இலாப சதவீதம் என்ன?

10. ஒருவர் தன்னுடைய செல்லப் பிராணியான ஒரு வகை நாயினை 15% இலாபத்தில் ₹ 3605க்கும், வேறு ஒரு வகை நாயினை 9% நட்டத்தில் ₹ 3605 க்கும் விற்றார் எனில், மொத்த இலாபம் அல்லது மொத்த நட்டம் காண்க.
(குறிப்பு : ஒவ்வொன்றின் அடக்க விலையையும் காண்க)

3.3.4 தள்ளுபடிகளின் பயன்பாடுகள்

பொங்கல் பண்டிகைக்காக புதிய துணி வாங்க நேற்று பூஜா தன் பெற்றோர்களுடன் ஒரு துணிக்கடைக்குச் சென்றார். வழியில் பல கடைகளில் தள்ளுபடி 10%, தள்ளுபடி 20%, தள்ளுபடி 25%, தள்ளுபடி 50% ஆகிய விளம்பரங்களைக் கண்டார். இதன் பொருள் அவருக்கு ஒன்றும் புரியவில்லை. இந்த ஐயத்துடன் ஒரு கடையினுள் நுழைந்து ஒரு சட்டையை வாங்கினார்.

அச்சட்டையின் மீது ஒரு சிறு துண்டு அட்டையில் ₹ 550 என்றிருந்தது. அதனைக் குறித்த விலை என்பர். பூஜா கடைக்காரருக்கு ₹ 550 கொடுத்தார். ஆனால் கடைக்காரரோ ஒரு தொகையை திரும்பக் கொடுத்து இதற்கு 20% தள்ளுபடி உண்டு என்றார்.

இங்கு 20% தள்ளுபடி என்பது குறித்த விலையில் 20% தள்ளுபடி என்று பொருள்படும்.

தள்ளுபடி $= \frac{20}{100} \times 550 =$ ₹ 110.

தள்ளுபடி என்பது குறித்த விலையில் அல்லது பட்டியலில் உள்ள விலையை விடக் குறைத்து கொடுக்கும் விற்பனை விலை ஆகும்.

ஒரு பொருளின் மேல் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் துண்டு அட்டையில் தள்ளுபடிக்கு முன் எழுதப்பட்டிருக்கும் விலையை குறித்த விலை (கு.வி.) அல்லது பட்டியல் விலை என்போம்.

பூஜா கடைக்காரரிடம் கொடுத்த தொகை ₹ 440

= ₹ 550 – ₹ 110

= குறித்த விலை – தள்ளுபடி

இதிலிருந்து நாம் அறிவன :

தள்ளுபடி	=	குறித்த விலை – விற்பனை விலை
விற்பனை விலை	=	குறித்த விலை – தள்ளுபடி
குறித்த விலை	=	விற்பனை விலை + தள்ளுபடி

விழாக்காலங்களிலும், தமிழ் மாதமான ஆடியிலும் 10%, 20%, 50% என்பன போன்ற தள்ளுபடிகள் வழங்குவதன் மூலம் கோ–ஆப்டெக்ஸ், காதி போன்ற பல கடைகள் வாடிக்கையாளர்களை ஈர்த்து தங்கள் வியாபாரத்தைப் பெருக்கிக் கொள்கின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11

ஒரு மிதிவண்டியின் விலை ₹ 1500 என்று குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை ₹ 1350க்கு விற்றால், தள்ளுபடி சதவீதம் என்ன?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை : குறித்த விலை = ₹ 1500, விற்பனை விலை ₹ 1350

தள்ளுபடி = கு.வி. – வி.வி.

= 1500 – 1350 = ₹ 150

₹ 1500க்குத் தள்ளுபடி = ₹ 150.

எனவே, ₹ 100க்குத் தள்ளுபடி = $\frac{150}{1500} \times 100$

∴ தள்ளுபடி சதவீதம் = 10%.

தள்ளுபடி குறித்த விலையின் மேல் அமைவதால், நாம் குறித்த விலையையே அடிப்படையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

ஓர் உடையின் பட்டியல் விலை ₹ 220. அதன் விற்பனையில் 20% தள்ளுபடி என்று அறிவிக்கப்பட்டுள்ளது. உடையின் மேல் தள்ளுபடி எவ்வளவு? அதன் விற்பனை விலை என்ன?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை: குறித்த விலை = ₹ 220, தள்ளுபடி வீதம் = 20%

தள்ளுபடி = $\frac{20}{100} \times 220$

= ₹ 44

∴ அதன் விற்பனை விலை = குறித்த விலை – தள்ளுபடி

= 220 – 44

= ₹ 176.

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஓர் அலமாரி 5% தள்ளுபடியில் ₹ 5,225க்கு விற்கப்படுகின்றது. அதன் குறித்த விலையைக் காண்க.

தீர்வு

கிருஷ்ணா பயன்படுத்திய முறை :

தள்ளுபடி சதவீதத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. எனவே, குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

தள்ளுபடி சதவீதம் = 5%

தள்ளுபடி = $\frac{5}{100} \times 100$ = ₹ 5

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 100 – 5 = ₹ 95.

விற்பனை விலை ₹ 95 எனில்,

குறித்த விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 5225 எனில்,

குறித்த விலை = $\frac{100}{95} \times 5225$= ₹ 5500

∴ அலமாரியின் குறித்த விலை = ₹ 5500.

அல்லது

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி விக்னேஷ் செய்த முறை :

விற்பனை விலை = ₹ 5225

தள்ளுபடி = 5%

கு.வி. = ?

கு.வி. = $\frac{100}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ வி.வி

$= \left(\frac{100}{100-5}\right) \times 5225$

$= \frac{100}{95} \times 5225$

= ₹ 5,500.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு கடைக்காரர் தன் வாடிக்கையாளர்களுக்கு 10% தள்ளுபடி தந்தும், 20% இலாபம் அடைகின்றார். ஒரு பொருளின் உண்மை விலை ₹ 450 எனில், அப்பொருளின் குறித்த விலையைக் காண்க.

தீர்வு

வனிதா பயன்படுத்திய முறை:

குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

தள்ளுபடி = குறித்த விலை மீது 10%

$= \frac{10}{100} \times$ குறித்த விலை $= \frac{10}{100} \times 100$

= ₹ 10

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 100 – 10 = ₹ 90

இலாபம் = அடக்க விலையின் மீது 20%

$= \frac{20}{100} \times 450$ = ₹ 90

வி.வி. = அடக்க விலை + இலாபம்

= 450 + 90 = ₹ 540.

அல்லது

விமல் பயன்படுத்திய முறை:

தள்ளுபடி = 10%, இலாபம் = 20%

அ.வி. = ₹ 450, கு.வி. = ?

குறித்த விலை

$= \frac{100 + \text{லாபம் } \%}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ அ.வி

$= \frac{(100+20)}{(100-10)} \times 450$

$= \frac{120}{90} \times 450$

= ₹ 600

விற்பனை விலை ₹ 90 எனில்,

குறித்த விலை ₹ 100

விற்பனை விலை ₹ 540 எனில்,

குறித்த விலை $= \frac{540 \times 100}{90}$ = ₹ 600.

$\therefore$ அப்பொருளின் குறித்த விலை ₹ 600.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

ஒரு புத்தகத்தின் விலையில் 10% தள்ளுபடி செய்தாலும் ஒரு வியாபாரிக்கு 10% லாபம் கிடைக்கின்றது. அப்புத்தகத்தின் குறித்த விலை ₹ 220 எனில், அதன் அடக்க விலை யாது?

தீர்வு

சுகந்தன் பயன்படுத்திய முறை :

குறித்த விலை = ₹ 220.

தள்ளுபடி = குறித்த விலையில் 10%

$= \frac{10}{100} \times 220 =$ ₹ 22.

வி.வி. = கு.வி. – தள்ளுபடி

= 220 – 22 = ₹ 198.

அடக்க விலை ₹ 100 எனக் கொள்க

இலாபம் = அடக்க விலையில் 10%

$= \frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10.

வி.வி. = அ.வி. + இலாபம்

= 100 + 10 = ₹ 110.

₹ 110 வி.வி. எனில், அ.வி. ₹ 100.

₹ 198 விற்பனை விலை எனில்,

அடக்க விலை $= \frac{198 \times 100}{110}$ = ₹ 180.

அல்லது

முகுந்தன் பயன்படுத்திய சூத்திர முறை :

தள்ளுபடி = 10%

இலாபம் = 10%

குறித்த விலை = ₹ 220

அடக்க விலை = $\frac{100 - \text{தள்ளுபடி}\ \%}{100 + \text{இலாபம்}\ \%}$ × குறித்த விலை

$= \frac{100-10}{100+10} \times 220$

$= \frac{90}{110} \times 220 =$ ₹ 180.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

தொடர் தள்ளுபடிகள் முறையே 10%, 20% என்றவாறு ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி ₹ 14,400க்கு விற்கப்பட்டது எனில் அதன் குறித்த விலை என்ன?

தீர்வு

விற்பனை விலை = ₹ 14,400

குறித்த விலை ₹ 100 என்க.

முதல் தள்ளுபடி = 10% $= \frac{10}{100} \times 100 =$ ₹ 10.

முதல் தள்ளுபடிக்கு பின் விற்பனை விலை = 100 – 10 = ₹ 90.

இரண்டாம் தள்ளுபடி = 20% $= \frac{20}{100} \times 90 =$ ₹ 18.

இரண்டாம் தள்ளுபடிக்கு பின் விற்பனை விலை = 90 – 18 = ₹ 72.

விற்பனை விலை ₹ 72 எனில், குறித்த விலை ₹ 100.

விற்பனை விலை ₹ 14,400 எனில் குறித்த விலை

$$= \frac{14400 \times 100}{72} = ₹\ 20,000.$$

∴ குறித்த விலை = ₹ 20,000.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

ஒரு வியாபாரி ஒரு பொருளை ₹ 1200க்கு வாங்கினார். பின்பு அதன் அடக்க விலைக்கு மேல் 30% உயர்த்தி, குறித்த விலை ஆக்கினார். இதற்கு 20% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்றார் எனில், விற்பனை விலை மற்றும் இலாப சதவீதம் காண்.

தீர்வு

அப்பொருளின் அடக்க விலை ₹ 100 என்க.

குறித்த விலை = அடக்க விலையைவிட 30% அதிகம்

∴ குறித்த விலை = ₹ 130.

அடக்க விலை ₹ 100 எனில் குறித்த விலை ₹ 130.

அடக்க விலை ₹ 1200 எனில், குறித்த விலை $= \frac{1200 \times 130}{100} = ₹\ 1560$

தள்ளுபடி = 1560 இல் 20% $= \frac{20}{100} \times 1560 = ₹\ 312.$

விற்பனை விலை = குறித்த விலை – தள்ளுபடி

= 1560 – 312 = ₹ 1248.

இலாபம் = விற்பனை விலை – அடக்க விலை

= 1248 – 1200 = ₹ 48.

∴ இலாப சதவீதம் $= \frac{\text{இலாபம்}}{\text{அடக்க விலை}} \times 100\%$

$= \frac{48}{1200} \times 100 = 4\%.$

ஒரு கடையில் பொருட்களின் விலையில் 20% தள்ளுபடி நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது எனில், கீழ்க்காணும் பொருட்களின் விற்ற விலை என்ன?

(i) ஒரு ஆடையின் குறித்த விலை ₹ 120

(ii) ஒரு பையின் குறித்த விலை ₹ 250

(iii) ஒரு சோடி செருப்பின் குறித்த விலை ₹ 750

3.3.5 வரியின் பயன்பாடுகள்

குழந்தைகளே! செய்தித்தாள்கள் மற்றும் தொலைக் காட்சிகளில் வரிகளைக் குறித்த காலத்திற்குள் கட்டுமாறு விளம்பரம் செய்வதை நாம் கண்டுள்ளோம். வரி என்றால் என்ன? அரசு பொதுமக்களிடம் இருந்து வரியை ஏன் வசூலிக்க வேண்டும்?

நம் நாடு ஒரு சிறந்த நாடாக அமைய சாலைகள், இரயில்கள், நீர் பாசன வசதி, குடிநீர் வசதி, மின்சார வசதி போன்றவை மக்களுக்கு மிகவும் அவசியமாக அமைய வேண்டும். இத்திட்டங்களைச் செயல்படுத்த தேவையான செல்வத்தை அரசு பொது மக்களிடம் வரி மூலமாக வசூலிக்கின்றது.

வரிகள் இருவகைப்படும். அவையாவன :

1. நேர்முக வரி   2. மறைமுக வரி.

1. நேர்முக வரி

வருமான வரி, சொத்து வரி, தொழில் வரி, தண்ணீர் வரி போன்ற வரிகள் நேர்முக வரிகளாகும். இவை பொது மக்களால் அரசுக்கு நேரிடையாக செலுத்தும் வரிகளாகும்.

2. மறைமுக வரி

சில வரிகள் நேரிடையாக மக்களால் செலுத்த முடியாது. அவ்வரி மறைமுக வரி எனப்படும். இவற்றை இங்கு விவரிப்போம்.

கலால் வரி

இவ்வரி நம் நாட்டில் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற சில பொருட்களின் மீது விதிக்கப்படுகின்றது. இது நடுவண் அரசுக்குச் செல்லுகின்றது.

பணி வரி

உணவு விடுதிகள், திரையரங்குகள், வணிகக் கணக்காளர்களின் பணிகள், தொலைபேசிக் கட்டணம் போன்றவற்றிற்கு விதிக்க வரிகள் பணி வரிகள் ஆகும். இவ்வரிகள் நமக்குப் பணி செய்பவர்கள் மூலமாக அரசுக்குச் செல்கின்றது.

வருமான வரி

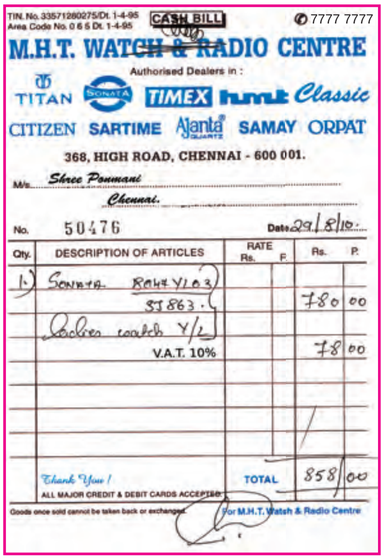
அரசின் மிக முக்கியமான வருமானத்தின் ஆதாரம் வருமான வரியாகும். இதனை ஆண்டு வருமானம் குறிப்பிட்ட அளவிற்கு மேல் உள்ளவர்களிடமிருந்து வசூலிக்கப்படுகின்றது. நம் நாட்டின் சிறந்த குடிமகனாக இருக்க வேண்டுமெனில், நம் கடமையை உணர்ந்து வரியினை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் செலுத்த வேண்டும்.

விற்பனை வரி / மதிப்புக்கூட்டு வரி

விற்பனை வரி

ஒரு கடைக்காரர் ஒரு பொருளை விற்கும்போது விதிக்கப்படும் வரியே விற்பனை வரியாகும். பொருளை வாங்கும் பொழுது பொருள்களின் விலையுடன் இவ்வரியை சேர்த்து செலுத்துவர்.

> விற்பனை வரி ஒரு பொருளின் விற்பனை மேல் அரசால் விதிக்கப்படுகிறது.


TIN. No. 33571260275/Dt. 1-4-95
Area Code No. 0 6 5 Dt. 1-4-95
CASH BILL
7777 7777
M.H.T. WATCH & RADIO CENTRE
Authorised Dealers in :
TITAN SONATA TIMEX hmt Classic
CITIZEN SARTIME Ajanta SAMAY ORPAT
368, HIGH ROAD, CHENNAI - 600 001.
M/s. Shree Ponmani
Chennai.
No. 50476 Date 29/8/10.

Qty.	DESCRIPTION OF ARTICLES	RATE Rs. P.	Rs. P.
1)	Sonata 8047 YL03 / 55863 · Ladies watch Y/L		780 00
	V.A.T. 10%		78 00
	TOTAL		858 00

Thank You !
ALL MAJOR CREDIT & DEBIT CARDS ACCEPTED
Goods once sold cannot be taken back or exchanged
For M.H.T. Watch & Radio Centre

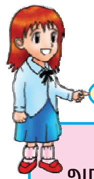
மதிப்புக் கூட்டு வரி

இது மாநில அரசின் முக்கியமான வரியாகும். அண்மைக் காலத்தில் நாம் கடைகளில் வாங்கும் பொருள்களின் விலையுடன் வரியையும் சேர்த்து, மதிப்புக் கூட்டு வரி என்ற வரியை வசூலிக்கின்றனர்.

செய்து பார்

2011-ஆம் ஆண்டிற்கான பின்வரும் பொருள்களின் மீதான விற்பனைவரியை காண்க.

1. மின் கருவிகள் .... %
2. பெட்ரோல் .... %
3. டீசல் .... %
4. வீட்டு உபயோகப் பொருள்கள் .... %
5. இரசாயனப் பொருள்கள் .... %



நீவிர் அறிவீரா?

அரிசி, சர்க்கரை, பால், உப்பு, பேனா, பென்சில்கள், புத்தகங்கள் ஆகியவற்றுக்கு அரசு விற்பனை வரியிலிருந்து விலக்கு அளிக்கப்பட்டுள்ளது.

விற்பனை வரியைக் கணக்கிடுதல்

$$\text{விற்பனை வரித் தொகை} = \frac{\text{விற்பனை வரி விகிதம்}}{100} \times \text{பொருளின் விலை}$$

$$\text{விற்பனை வரி விகிதம்} = \frac{\text{விற்பனை வரித் தொகை}}{\text{பொருளின் விலை}} \times 100$$

$$\text{செலுத்த வேண்டிய தொகை} = \text{பொருளின் விலை} + \text{விற்பனை வரித் தொகை}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

வினோத் ₹ 12,000க்கு இசைக்கருவிகளை வாங்கினார். விற்பனை வரி விகிதம் 8% எனில், அவர் செலுத்த வேண்டிய விற்பனை வரி, மொத்த தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

இசைக்கருவிகளின் மதிப்பு = ₹ 12,000

விற்பனை வரி விகிதம் = 8%

விற்பனை வரித்தொகை = $\frac{8}{100} \times 12000$

= ₹ 960

வினோத் செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 12,000 + 960

= ₹ 12,960

எடுத்துக்காட்டு 3.19

விற்பனை வரியுடன் ஒரு குளிர்சாதன கருவியின் மொத்த விலை ₹ 14,500. குளிர்சாதன கருவியின் விலை ₹ 13,050 எனில் விற்பனை வரி விகிதத்தைக் காணவும்.

தீர்வு

விற்பனை வரி = பட்டியலில் விலை – பொருளின் விலை

= 14,355 – 13,050 = ₹ 1,305

$$\text{விற்பனை வரி விகிதம்} = \frac{\text{விற்பனை வரித்தொகை}}{\text{பொருளின் விலை}} \times 100\%$$

$$= \frac{1305}{13050} \times 100 = 10\%$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

பிரியா ₹ 2730க்கு ஒரு சூட்கேஸ் வாங்கினார். இதன் மீது மதிப்பு கூட்டு வரி 5% ஆகும். மதிப்பு கூட்டு வரியைச் சேர்க்கும் முன்னர் அப்பெட்டியின் விலை என்ன? மதிப்பு கூட்டு வரி எவ்வளவு எனவும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : மதிப்புக் கூட்டு வரி 5%

மதிப்புக் கூட்டு வரி இல்லாத போது பொருளின் விலை ₹ 100 எனில், மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் அதன் விலை ₹ 105 என்றாகின்றது.

மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு பொருளின் விலை ₹ 105 எனில், அதன் அசல் விலை ₹ 100.

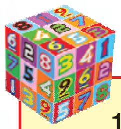
மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு பொருளின் விலை ₹ 2730 எனில் அதன் அசல் விலை

$$= \frac{100}{105} \times 2730 = ₹\ 2,600$$

அப்பெட்டியின் அசல் விலை = ₹ 2,600

∴ மதிப்புக் கூட்டு வரி = 2,730 – 2,600

= ₹ 130.



முயற்சி செய்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருட்களின் விலைகளுடன் 5% விற்பனை வரியைச் சேர்த்து விற்கப்படுகின்றது எனில், அப்பொருட்களின் விற்பனை விலையை காண்க:
   (i) ஒரு தலையணையின் விலை ₹ 60.
   (ii) இரு சோப்புக் கட்டிகள் ஒவ்வொன்றின் விலையும் ₹ 25.
2. கீழ்க்கண்ட பொருள்களின் விலையுடன் 8% மதிப்பு கூட்டு வரியை சேர்த்த பின் அவற்றின் அடக்க விலைகளைக் காண்க.
   (i) ஒரு மின்சார நீர் சூடேற்றி ₹ 14,500க்கு வாங்கப்பட்டது.
   (ii) சிறு தட்டுகளுடன் கூடிய கோப்பைகள் போன்றவை ₹ 200க்கு வாங்கப் பட்டது.

பயிற்சி 3.3

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) தள்ளுபடி என்பது .... மீதான உள்ள விலை.

(A) குறித்த விலை (B) அடக்க விலை

(C) விற்பனை விலை (D) வட்டி

(ii) ஒரு பொருளின் குறித்த விலை ₹ 140. விற்பனை விலை ₹ 105 எனில் தள்ளுபடி ....

(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) .... = குறித்த விலை – தள்ளுபடி.

(A) அடக்க விலை (B) விற்பனை விலை

(C) பட்டியல் விலை (D) சந்தை விலை

(iv) ஒரு பொருளின் மதிப்புடன் சேர்க்கும் வரி ....

(A) விற்பனை வரி (B) மதிப்புக்கூட்டு வரி (C) கலால் வரி (D) பணி வரி

(v) ஒரு பொருளின் விற்ற விலை ₹ 240, தள்ளுபடி ₹ 28 எனில், குறித்த விலை ....

(A) ₹ 212 (B) ₹ 268 (C) ₹ 228 (D) ₹ 258

2. ஒரு புத்தகத்தின் மீது அதன் விலை ₹ 450 குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு புத்தகக் கண்காட்சியில் கடைக்காரர் அப்புத்தகத்தின் மீது 20% தள்ளுபடி கொடுக்கின்றார். அப்புத்தகத்தின் விற்பனை விலை என்ன?

3. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி 10%, 20% ஆகிய தொடர் தள்ளுபடிகள் கொடுத்த பின் ₹ 5,760 க்கு விற்கப்படுகின்றது எனில் இதன் குறித்த விலை என்ன?

4. சேகர் ஒரு கணினியை ₹ 38,000 க்கும் அதற்குரிய அச்சு இயந்திரத்தை ₹ 8000க்கும் வாங்கினார். இப்பொருட்களுக்குரிய விற்பனை வரி 7% எனில், அவர் இவ்விரு பொருட்களுக்கும் கொடுக்க வேண்டிய தொகை எவ்வளவு?

5. மதிப்புக் கூட்டு வரியுடன் ஒரு சமையல் சாதனத்தின் விலை ₹ 19,610. அதன் மதிப்புக் கூட்டு வரி 6% எனில், அதன் அடக்க விலை எவ்வளவு?

6. ரிச்சர்டு ஒரு முழு ஆடைத்தொகுதியை வாங்கும்போது 10% தள்ளுபடி கிடைத்தது. அதன் குறித்த விலை ₹ 5000. அவர் இப்பொருளின் வாங்கிய விலையில் 10% விற்பனை வரி செலுத்தினால், அவர் அதை என்ன விலைக்கு வாங்கினார்?

7. ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியின் மீது 9% விற்பனை வரி வீதம் விற்பனை வரி ₹ 1170 எனில் அதன் அடக்க விலை என்ன?

8. ஒரு வியாபாரி ஒரு பொருளை வாங்கி அதன் விலையில் 40% உயர்த்திக் குறித்தார். அதை 5% தள்ளுபடி செய்து விற்றார். அவருக்குக் கிடைத்த இலாப அல்லது நட்ட சதவீதம் என்ன?

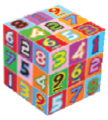
9. குறித்த விலை ₹ 11,500 உள்ள ஒரு தொலைக்காட்சி பெட்டியின் மீது 10% தள்ளுபடி செய்து விற்கப்படுகிறது. விழாக்காலம் ஆனதால் கடைக்காரர் மேலும் 5% தள்ளுபடி கொடுத்து விற்கின்றார். அதன் விற்ற விலையைக் காண்க.

10. ₹ 3500 என்ற விலை குறிப்பிடப்பட்ட ஒரு குளிரூட்டியை ₹ 2800 க்கு வாங்கினார். கொடுக்கப்பட்ட தள்ளுபடி சதவீதம் காணவும்.

11. ஒவ்வொன்றும் ₹ 1200 விலையுள்ள 15 சட்டைகளை தீபா வாங்கினார். அவற்றை 5% லாபத்திற்கு விற்றார். வாடிக்கையாளர் 4% விற்பனை வரி செலுத்த வேண்டுமெனில் இவ் வாடிக்கையாளருக்கு ஒரு சட்டையின் விலை என்ன ஆகின்றது?

12. தள்ளுபடி, தள்ளுபடி வீதம், விற்பனை விலை மற்றும் குறித்த விலை ஆகியவற்றை உரிய இடங்களில் பூர்த்தி செய்க.

வ. எண்.	பொருள்கள்	குறித்த விலை	தள்ளுபடி வீதம்	தள்ளுபடி	விற்பனை விலை
(i)	புடவை	₹ 2,300	20%	.....	.....
(ii)	பேனா செட்	₹ 140	.....	.....	₹ 105
(iii)	சாப்பாட்டு மேஜை	.....	20%	.....	₹ 16,000
(iv)	துவைக்கும் இயந்திரம்	₹ 14,500	.....	.....	₹ 13,775
(v)	சமைக்க உதவும் செட்	₹ 3,224	12½%	.....	.....



முயற்சி செய்

எது சிறந்த சலுகை? 20%, 5% என்ற அடுத்தடுத்த தள்ளுபடியா அல்லது ஒரே நேரத்தில் 25% தள்ளுபடியா? தகுந்த காரணத்தைக் கூறவும்.

3.4 கூட்டு வட்டி

நாம் ஏழாம் வகுப்பில் தனி வட்டி கணக்கிடுவது பற்றி கற்றுள்ளோம். தனி வட்டி மேலும் கூடுதல் காண உதவும் சூத்திரங்களையும் கற்றுள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் கூட்டு வட்டி பற்றிய கருத்தையும், கூட்டு வட்டியை எவ்வாறு கணக்கிடுதல், கூடுதல் எவ்வாறு காணுதல் என்பன பற்றியும் (ஒரு குறிப்பிட்ட காலக் கெடுவிற்குள்) அறிந்து கொள்வோம்.

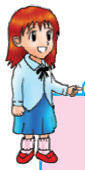
ஒரு வங்கியில் வினய் ₹ 50,000 ஆண்டு வட்டி வீதம் 4%இல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு கடனாகப் பெறுகிறார்.

முதல் ஆண்டு வினய் செலுத்து வேண்டிய வட்டி,

$$\text{தனிவட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,000$$

அவர் முதலாம் ஆண்டு வட்டி ₹ 2000த்தை கட்டத் தவறியதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது இந்த வட்டியான ₹ 2000த்தை பழைய அசலாகிய ₹ 50,000 உடன் சேர்த்து புதிய அசலாக ₹ 52,000 என எடுத்துக் கொள்வர். இந்த அசலுக்கு இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி கணக்கிடுவர்.



நீ அறிவாயா?

அசலுக்கு மட்டும் வட்டி காணுதலை தனி வட்டி என்கிறோம். ஆனால் ஒவ்வொரு முறை பெற்ற வட்டியையும் அசலுடன் சேர்த்து வட்டி காணுதலை கூட்டு வட்டி என்கிறோம்.

இந்த இரண்டாம் ஆண்டிற்கான வட்டி,

$$\text{தனி வட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2,080$$

எனவே வினய் இரண்டாம் ஆண்டு அதிக வட்டியைக் கட்ட வேண்டி வரும். இவ்வாறு வட்டி காணும் முறைக்குக் கூட்டு வட்டி காணுதல் என்று பெயர்.

பொதுவாக வங்கிகள், காப்பீட்டு குழுமங்கள், அஞ்சல் அலுவகங்கள் முதலியவற்றில் பணத்தை முதலீடு செய்ய அல்லது கடன் வாங்க நேரிடும். இந்த குழுமங்களில் வட்டியை கணக்கிடும்போது கூட்டு வட்டிக் கணக்கிடும் முறையைப் பயன்படுத்துகிறார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

ராம்லால் என்பவர் ₹ 8000ஐ, 15% கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் முதலீடு செய்தார் எனில், மூன்று ஆண்டுகளில் அவருக்குக் என்ன கூடுதல் தொகை கிடைக்கும்? மேலும் அவருக்குக் கிடைக்கும் வட்டி தொகை என்ன?

தீர்வு

படி 1 : முதலாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 8,000

$$\text{முதலாம் ஆண்டு வட்டி} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1,200$$

முதலாண்டு இறுதியில் கூடுதல் = $P + I = 8,000 + 1,200 =$ ₹ 9,200

படி 2 : முதலாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் என்பது இரண்டாமாண்டு துவக்கத்தில் அசல் ஆகின்றது.

இரண்டாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 9,200

இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{9200 \times 1 \times 15}{100} =$ ₹ 1,380

இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $=$ P + I = 9,200 + 1,380 = ₹ 10,580

படி 3: இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் ஆனது மூன்றாம் ஆண்டு துவக்கத்தில் முதலீடாகின்றது.

மூன்றாம் ஆண்டு அசல் = ₹ 10,580

மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{10580 \times 1 \times 15}{100} =$ ₹ 1,587

மூன்றாம் ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் $=$ P + I

$=$ 10,580 + 1,587 = ₹ 12,167

மூன்று ஆண்டுகள் முடிவில், ராம்லால் பெறும் கூட்டு வட்டி

$=$ 12,167 - 8,000 = ₹ 4,167.

கூட்டு வட்டி காணும் சூத்திரத்தைப் பெறுதல்

கால அளவு அதிகரிக்கும் போது, மேற்கண்ட முறை நீண்டதாகவும், கடினமாகவும் ஆகின்றது. எனவே, கூட்டு வட்டி முறைப்படி கூடுதலையும், வட்டியையும் காண ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறுவோம்.

அசல் ₹ P, ஆண்டு வட்டி வீதம் r %, காலம் 'n' ஆண்டுகள் என்றவாறு கூட்டு வட்டி காண உதவும் சூத்திரம் அமைப்போம்.

படி 1: முதலாண்டு முதல் $=$ ₹ P

முதலாண்டு வட்டி $= \dfrac{P \times n \times r}{100}$

$= \dfrac{P \times 1 \times r}{100} = \dfrac{Pr}{100}$

முதலாண்டு இறுதியில் கூடுதல் $=$ P + I

$= P + \dfrac{Pr}{100}$

$= \mathbf{P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)}$

படி 2: இரண்டாம் ஆண்டு துவக்க அசல் $= P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)$

இரண்டாம் ஆண்டு வட்டி $= \dfrac{P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right) \times 1 \times r}{100}$

(தனி வட்டி காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்)

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$$

இரண்டாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $= P + I$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right) + P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}$$

படி 3 : மூன்றாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அசல் $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times 1\times r}{100}$

(தனி வட்டி காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்)

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$$

மூன்றாம் ஆண்டு இறுதியில் கூடுதல் $= P + I$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3}$$

இவ்வாறு 'n' ஆவது ஆண்டு இறுதியில், கூட்டுத் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$\therefore$ கூட்டு வட்டி $= A - P$

'n' ஆண்டுள் முடிவில் கூட்டு வட்டி $= C.I. = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$

கூட்டு வட்டி கணக்கிடுதல்

வகை 1: ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

ஒவ்வொரு ஆண்டு இறுதியிலும் வட்டியை அசலுடன் கூட்டுவதையே, ஆண்டு முறையில் கணக்கிடல் என்றாகும்.

இங்கு கூட்டுத் தொகை $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$; கூட்டு வட்டி $= A - P$

வகை 2: அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

இம்முறையில் கணக்கிடும்பொழுது, ஓர் ஆண்டில் இரண்டு ஆறு மாதங்கள் உள்ளன. ஆதலால் இரண்டு (அசல்) மாற்றுக் காலங்கள் உள்ளன. அரையாண்டு வட்டி வீதம் $\left(\frac{r}{2}\right)$.

இப்பொழுது, கூட்டுத் தொகை $A = P\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$; கூட்டு வட்டி $= A - P$

வகை 3: கால் ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடல்

இம்முறையில் கணக்கிடும்போது ஓர் ஆண்டில், நான்கு கால் ஆண்டுகள் உள்ளன. ஆதலால் 4 (அசல்) மாற்று காலங்கள் உள்ளன. எனவே, காலாண்டு வட்டி வீதம் $\left(\frac{r}{4}\right)$ ஆகும்.

இப்பொழுது, கூட்டுத் தொகை $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$; கூட்டு வட்டி = A – P

வகை 4: காலம் ஆண்டுகளின் பின்னமாக அமைதல்

கூட்டு வட்டி ஆண்டு முறையில் கணக்கிடலில் ஆண்டுகளுடன் ஆண்டின் பின்னமும் அமையலாம்.

உதாரணமாக, கூட்டு வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 'r%', அசல் ₹ P, காலம் $5\frac{1}{4}$ வருடங்கள் என்க. கூட்டுத் தொகை,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$; கூட்டு வட்டி = A – P

↓ 5 ஆண்டுகள் ↓ ¼ ஆண்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 3.22

ஆண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி காணும் முறையில் ₹ 15,625 க்கு ஆண்டு வட்டி 8% வீதம் எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டி காணவும்.

தீர்வு

3 ஆண்டுகள் முடிவில் கூட்டுத் தொகை $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3$

$= 15625\left(1 + \frac{2}{25}\right)^3$

$= 15625\left(\frac{27}{25}\right)^3$

$= 15625 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25}$

= ₹ 19,683

எனவே, கூட்டு வட்டி = A – P = 19,683 – 15,625

= ₹ 4,058

கூட்டு வட்டி முறையில் ஆண்டுக்கு ஒரு முறையில் அல்லது அரை ஆண்டுக்கு ஒரு முறையில் கணக்கிடுதலை ஒப்பிடுவோம்.

₹ 100ஐ இவ்விரு முறைகளிலும் முதலீடு செய்தால் கூட்டுத் தொகை, கூட்டு வட்டி என்ன கிடைக்கும் என்பதைக் காண்போம்.

எண்	ஆண்டுக்கு ஒரு முறை	அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை
1	P = ₹ 100, 10% கூட்டு வட்டி ஆண்டுக்கு ஒரு முறை	P = ₹ 100, 10% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை
2	காலம் 1 ஆண்டு	காலம் 6 மாதங்கள் அதாவது ½ ஆண்டு.
3	$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = ₹\ 10$	$I = \frac{100 \times 10 \times 1/2}{100} = ₹\ 5$
4	A = 100 + 10 = ₹ 110	½ ஆண்டு முடிவில் கூடுதல் = 100 + 5 = ₹ 105 அடுத்த ½ ஆண்டுக்கு முதல் ₹ 105 $I = \frac{105 \times 10 \times 1/2}{100} = ₹\ 5.25$ ∴ A = 105 + 5.25 = ₹ 110.25
5	A = ₹ 110	A = ₹ 110.25

இவ்வாறாக அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி அசலுடன் சேருவதாக இருப்பின், இரு தடவை வட்டியும், வட்டி வீதம் ஆண்டு வீதத்தில் பாதியாகவும் கொள்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

அரை ஆண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டி அசலுடன் சேர்க்கப்பட்டால் ₹ 1000க்கு ஆண்டு வட்டி வீதம் 10% வீதப்படி, 18 மாதங்களுக்குக் கூட்டு வட்டி காணவும்.

தீர்வு

P = ₹ 1000, r = 10% ஆண்டுக்கு

n = 18 மாதங்கள் = $\frac{18}{12}$ வருடங்கள் = $\frac{3}{2}$ வருடங்கள் = $1\frac{1}{2}$ வருடங்கள்

∴ 18 மாதங்கள் இறுதியில் கூட்டுத்தொகை

$$A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$$

$$= 1000\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{100}\right)\right]^{2\times\frac{3}{2}}$$

$$= 1000\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{3}$$

$$= 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{3}$$

$$= 1000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

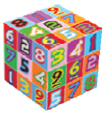
$$= ₹\ 1157.625$$

$$= ₹\ 1157.63$$

கூட்டு வட்டி = A – P

= 1157.63 – 1000

= ₹ 157.63



முயற்சி செய்

8% ஆண்டு வட்டி வீதத்தில், ஒரு தொகையை, 3 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை, வட்டியை அசலுடன் சேர்க்கும் முறையில் எத்தனை முறை வட்டி கணக்கிடப்படும்?

எடுத்துக்காட்டு 3.24

₹ 20,000க்கு 15% ஆண்டு வட்டி வீதத்திற்கு $2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டியைக் காண்க.

தீர்வு

P = ₹ 20,000, r = ஆண்டொன்றுக்கு 15%, $n = 2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகள்

$2\frac{1}{3}$ ஆண்டுகள் இறுதியில் கூட்டுத் தொகை

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{100}\right)\right] \\
&= 20000\left(1+\frac{15}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{15}{100}\right)\right] \\
&= 20000\left(1+\frac{3}{20}\right)^2\left(1+\frac{1}{20}\right) \\
&= 20000\left(\frac{23}{20}\right)^2\left(\frac{21}{20}\right) \\
&= 20000\times\frac{23}{20}\times\frac{23}{20}\times\frac{21}{20} \\
&= ₹\ 27,772.50 \\
C.I. &= A - P \\
&= 27,772.50 - 20,000 \\
&= ₹\ 7,772.50
\end{aligned}$$

கூட்டு வட்டி முறையில் எதிர்மாறிக் கணக்குகள்

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, என்ற சூத்திரத்தை ஏற்கனவே நாம் கற்றுள்ளோம்.

இங்கு A, P, r, n என்ற 4 மாறிகள் உள்ளன. இவற்றுள் ஏதேனும் 3 மாறிகள் தெரியுமானால் நான்காவது மாறியை நாம் கணக்கிட இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

₹ 640 ஆனது இரண்டு ஆண்டுகளில் கூட்டுத்தொகை ₹ 774.40 ஆகும். கூட்டு வட்டி வீதம் காண்க. (வட்டி ஆண்டிற்கு ஒரு முறை அசலுடன் சேருகின்றது)

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: P = ₹ 640, A = ₹ 774.40, காலம் = 2 ஆண்டுகள், r = **?**

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ என நாம் அறிவோம்.

$$\begin{aligned}
\mathbf{774.40} &= 640\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \\
\frac{774.40}{640} &= \left(1+\frac{r}{100}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{11}{10} = 1+\frac{r}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11}{10}-1$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11-10}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{100}{10} = 10\%$$

∴ கூட்டு வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 20%.

எடுத்துக்காட்டு 3.26

₹ 1600 ஆனது 5% ஆண்டு கூட்டு வட்டி வீதம் கொண்டு எத்தனை ஆண்டுகளில் ₹ 1852.50 ஆகும்?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: P = ₹ 1600, A = ₹ 1852.20, r = 5% ஆண்டொன்றுக்கு, n = ?

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$1852.20 = 1600\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{1600} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\frac{185220}{160000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$\therefore n$ = 3 ஆண்டுகள்

முயற்சி செய்

காலவரைகளையும் வட்டி வீதங்களையும் காண்க.

1. அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டியுடன் அசலுடன் சேருகின்ற முறையில், இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு, 8% ஆண்டு வட்டி வீதம்.
2. அரையாண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டியுடன் அசலுடன் சேருகின்ற முறையில், 1½ ஆண்டுகளுக்கு, 4% ஆண்டு வட்டி வீதம்.

3.5 கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

அசல் P க்கு r % வட்டிவீதம் எனில் இரண்டு ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் = $P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

₹ 8000க்கு 10% வட்டி வீதம் எனில் இரண்டு ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

தீர்வு

P = ₹ 8000, $n = 2$ ஆண்டுகள், $r = 10\%$ ஆண்டொன்றுக்கு

இரண்டு ஆண்டுகளுக்குக் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம்

$$= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$$

$$= 8000\left(\frac{10}{100}\right)^2 = 8000\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹\ 80$$

பயிற்சி 3.4

1. பின்வருவனவற்றிக்குக் கூடுதலையும், கூட்டு வட்டிகளையும் காணவும் :

எண்	முதல் (₹ இல்)	ஆண்டு வட்டி வீதம்	காலம் (ஆண்டுகளில்)
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$

2. சங்கீதா ₹ 8000 ஐ அலெக்ஸிடம் 12½ % கூட்டு வட்டி வீதத்தில் ஆண்டுகளுக்கு கடன் வாங்கினார். சங்கீதா அலெக்ஸிற்கு தர வேண்டிய வட்டி எவ்வளவு?

3. மரியா ₹ 80,000 ஐ ஒரு வியாபாரத்தில் முதலீடு செய்தார். இதற்கு 5% ஆண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் கூட்டு வட்டி கிடைக்கும் எனில் (i) இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் அவர் பெயரில் எவ்வளவு இருக்கும் (ii) மூன்றாம் ஆண்டு வட்டி என்ன?

4. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி கூட்டும் முறையில் ₹ 24,000 க்கு ஆண்டொன்றுக்கு 10% வட்டி வீதம் 1½ ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி எவ்வளவு?

5. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி கூட்டும் முறையில் ட்ராவிட் ₹ 8192 ஐ, 18 மாதங்களுக்கு, 12½% ஆண்டு வட்டி வீதம் கொடுப்பதில் முதலீடு செய்தார். அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு?

6. ₹ 15,625 ஐ 9 மாதங்களுக்கு 16% ஆண்டு வட்டி வீதத்தில் முதலீடு செய்தால், வட்டி காலாண்டுக்கு ஒருமுறை சேர்க்கப்பட்டால், கூட்டு வட்டியைக் காண்க.

7. 4% ஆண்டு வட்டி வீதப்படி 2 ஆண்டுகளில் ₹ 1632 கூட்டு வட்டி தரும் அசலைக் காணவும்.

8. விக்கி ஒரு ஸ்கூட்டரை வாங்க ஒரு வங்கியில் ₹ 26,400 ஐ கடனாகப் பெற்றார். ஆண்டு வட்டி 15% வீதம், ஆண்டொன்றுக்கு வட்டியைச் சேர்த்தால் 2 ஆண்டுகள் 4 மாதங்கள் ஆன பின் தன் கடனை அடைக்க அவர் எவ்வளவு செலுத்த வேண்டும்?

9. அரீப் என்பவர் ஒரு வங்கியில் ₹ 80,000 கடன் வாங்கினார். ஆண்டு ஒன்றுக்கு 10% வட்டி வீதம் 1 ½ ஆண்டுகளில் (i) ஆண்டொன்றுக்கு வட்டி சேர்க்கும் முறையில் (ii) அரையாண்டிற்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் கணக்கிடப்பட்டால் வித்தியாசத்தைக் காணவும்.

10. ₹ 2400க்கு 5% ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் காண்க.

11. ₹ 6400க்கு 6¼ % ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் காண்க.

12. ஒரு கடன் தொகை மீது 2 ஆண்டுகளில் 5% ஆண்டு வட்டி வீதம் 2 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் ரூபாய் 5 எனில் அத்தொகையைக் காணவும்.

13. சுஜா ₹ 12,500ஐ ஆண்டொன்றுக்கு தனி வட்டி வீதம் 12% வீதம் 3 ஆண்டுகளில் செலுத்தக் கடன் வாங்கினார். ராதிகா அதே தொகையை அதே காலத்திற்கு ஆண்டொன்றுக்கு 10% கூட்டு வட்டி வீதம் கடன் வாங்கினார். அதிக வட்டி செலுத்துபவர் யார்? எவ்வளவு?

14. அரை ஆண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டியைச் சேர்க்கும் முறையில் ஒரு தொகையை ஆண்டு வட்டி 4% வீதம் தருவதில் 1½ ஆண்டுகளுக்கு முதலீடு செய்தார். முடிவில் ₹ 1,32,651 பெற்றார் எனில் அவர் முதலீடு எவ்வளவு?

15. காயத்திரி ₹ 12,000ஐ 5% ஆண்டு கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு வங்கியில் 'n' ஆண்டுகளுக்கு முதலீடு செய்தார். அவர் முடிவில் ₹ 13,230 பெற்றார். 'n' இன் மதிப்பு என்ன?

16. ₹ 640 ஆனது எந்தக் கூட்டு வட்டி வீதத்தில் இரண்டு ஆண்டுகளில் கூடுதல் ₹ 774.40 ஆக இருக்கும்?

17. அரையாண்டிற்கு ஒரு முறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில் 1 ½ ஆண்டுகளில் ₹ 2000 ஆனது ₹ 2315.25 ஆகிறது எனில் ஆண்டு கூட்டு வட்டி வீதம் காண்க.

3.5.1 மதிப்புக் கூடுதலும் குறைதலும்

அ) மதிப்பு கூடுதல்

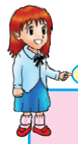
மக்கள் தொகை, பாக்டீரியாவின் வளர்ச்சி, சொத்தின் மதிப்பு, விலை அதிகமுள்ள சில பொருட்கள் இவை அனைத்திற்கும் ஆண்டுதோறும் மதிப்புகள் கூடுகின்றன.

இதைக் காண $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

ஆ) மதிப்பு குறைதல்

சில இயந்திரங்களின் மதிப்பு, வண்டிகளின் மதிப்பு, சில பொருள்களின் விலைகள், கட்டிடங்களின் மதிப்பு ஆகியவை ஆண்டுதோறும் குறைகின்றன.

இதைக்காண $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.



நீவிர் அறிவீரா?

cyf k¡fŸ bjhif

ஆண்டு	மக்கள் தொகை
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000

கடந்த மூன்று நூற்றாண்டுகளில் மக்கள் தொகை பத்து மடங்காக பெருகியுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3.28

ஒரு கிராமத்தின் மக்கள் தொகை ஆண்டொன்றுக்கு 7% வீதம் அதிகரிக்கின்றது. இப்பொழுது மக்கள் தொகை 90,000 எனில் 2 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு

இப்போதைய மக்கள் தொகை P = 90,000, அதிகரிப்பு விகிதம் r = 7%,

n = 2 ஆண்டுகள்.

இரண்டு ஆண்டுகளில் மக்கள் தொகை $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$$= 90000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 = 90000\left(\frac{107}{100}\right)^2$$

$$= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100}$$

$$= 103041$$

இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை = 1,03,041

எடுத்துக்காட்டு 3.29

ஒரு இயந்திரத்தின் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% குறைகிறது. ஒருவர் இதை வாங்குவதற்கு ₹ 30,000 கொடுத்தார். மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு இதன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு P = ₹ 30,000, குறைவு வீதம் r = 5%,

காலம் = 3 ஆண்டுகள்.

மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $= P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$$= 30000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 30000\left(\frac{95}{100}\right)^3$$

$$= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$$

$$= ₹\ 25721.25$$

மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் அந்த இயந்திரத்தின் மதிப்பு ₹ 25,721.25

எடுத்துக்காட்டு 3.30

ஒரு கிராமத்தின் மக்கள் தொகை ஒரே சீராக ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% வீதத்தில் கூடிக் கொண்டு செல்கிறது. இப்பொழுது அதன் மக்கள் தொகை 1,04,832 எனில் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் என்னவாக இருந்திருக்கும்?

தீர்வு

இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் மக்கள் தொகை P என்க.

$$\therefore P\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\left(\frac{105}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832\times 100\times 100}{105\times 105}$$

$$= 95085.71$$

$$= 95,086$$ (முழு எண் திருத்தமாக)

$\therefore$ இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் மக்கள் தொகை **95,086.**

பயிற்சி 3.5

1. ஒரு பள்ளியில் மாணவர் சேர்க்கை எண்ணிக்கை 2000. இச்சேர்க்கை ஒவ்வொரு ஆண்டும் 5% வீதத்தில் கூடுகின்றது, இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பின் அப்பள்ளியில் எத்தனை மாணவர்கள் இருப்பார்கள்?

2. ஒரு மோட்டார் இயந்திரத்தின் விலை ₹ 3,50,000. இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் 10% வீதம் குறைகின்றது. மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின் அதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்கும்?

3. ஒருவர் மோட்டார் சைக்கிளை ₹ 50,000க்கு வாங்கினார். இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 8% வீதம் குறைகின்றது, ஓராண்டிற்குப் பின் இதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்கும்?

4. ஒரு ஆய்வகத்தில், ஓர் ஆராய்ச்சியில் ஒரு வகை பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு மணிக்கு 2.5% வீதம் அதிகரிக்கின்றது. தொடக்கத்தில் 5,06,000 பாக்டீரியாக்கள் இருந்தால், 2 மணி நேரத்திற்கு பிறகு அதன் எண்ணிக்கை என்ன?

5. வேலையில்லாத் திண்டாட்டத்தினால் ஒரு கிராமத்திலுள்ள மக்கள் அண்மையிலுள்ள நகரங்களுக்குச் இடம் பெயர்ந்தனர். இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு முன் அக்கிராமத்தின் மக்கள் தொகை 6,000. இடம் பெயர்ந்தோரின் எண்ணிக்கை ஆண்டொன்றுக்கு 5% எனில் தற்போதைய மக்கள் தொகை என்ன?

6. ஒரு எண்ணெய் இயந்திரத்தின் தற்போதையே மதிப்பு ₹ 14,580. இதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் 10% ஆகக் குறைந்தால் மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் முன்னர் இதன் மதிப்பு எவ்வளவாக இருக்கும்?

7. வேலை வாய்ப்பு அதிகமுள்ளதால் ஒரு கிராமத்தில் உள்ள மக்கள் தொகை ஆண்டொன்றுக்கு 9% அதிகரித்தது. இப்போது அதன் மக்கள் தொகை 11,881 எனில் இரண்டாண்டுகளுக்கு முன்னர் அதன் மக்கள் தொகை என்னவாக இருந்திருக்கும்?

3.6 நிரந்தர வைப்புத் தொகை, தொடர் வைப்புத் தொகை

பொதுமக்கள் வங்கிகள், அஞ்சல் அலுவலகங்கள், பல நிதி நிறுவனங்கள் ஆகியவை வேறுபட்ட வீதத்தில் பணத்தை முதலீடு செய்யக் கோருகின்றனர். மக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் வருமானம் பெற பணத்தை இந்நிறுவனங்களில் முதலீடு செய்கின்றனர்.

இந்நிறுவனங்கள் பணத்தைச் சேமிக்கப் பலவகைத் திட்டங்களை வைத்துள்ளனர். அவற்றுள் சில :

(i) நிரந்தர வைப்புத் திட்டம் (ii) தொடர் வைப்புத் திட்டம் ஆகியனவாகும்.

(i) நிரந்தர வைப்புத் திட்டம்

ஒரு தொகையை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு மக்கள் இம்முறையில் முதலீடு செய்கின்றனர். இத்திட்டத்தை நிரந்தர வைப்புத் திட்டம் என்பர் (F.D.).

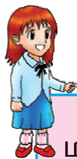
குறிப்பு : இக்கால அளவு குறுகியதாகவோ நீண்டதாகவோ இருக்கலாம். வைப்புத் தொகையின் காலத்திற்கேற்ப வட்டி வீதம் அதிகரிக்கும்.

(ii) தொடர் வைப்புத் திட்டம்

நிரந்தர வைப்புக்கு முற்றிலும் மாறானது தொடர் வைப்பாகும்.

இத்திட்டத்தில் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை ஒருவர் தன் வசதிக்கேற்ப குறிப்பிட்ட ஆண்டுகளுக்கு தொடர்ச்சியாக இடலாம்.

வங்கிகள் அல்லது அஞ்சலகங்கள் அந்தக் கால முடிவில், பணம் செலுத்தியவருக்கு அவர் அதுவரை முதலீடு செய்த அசல் தொகையுடன் வட்டியையும்சேர்த்துக்கொடுக்கின்றன.இத்திட்டத்திற்கு தொடர் வைப்புத் திட்டம் (R.D.) என்று பெயர்.



நீவிர் அறிவீரா?

மாதத் தவணையை அம்மாதத்திற்குள் என்று வேண்டுமானாலும் செலுத்தலாம்

குறிப்பு : தொடர் வைப்பு முறையில் கணக்கிடப்படும் வட்டி, தனி வட்டி வழியில் கணக்கிடப்படுகின்றது.

தொடர் வைப்புத் திட்ட முறையில் வட்டி, கால முடிவில் கிடைக்கும் தொகை ஆகியவற்றைக் காண உதவும் சூத்திரத்தைக் காண்போம்:

வட்டி வீதம் r % க்கு மாதந்தோறும் செலுத்தும் அசல் தொகை ₹ P ஐ 'n' மாதங்களுக்குச் செலுத்துவதாகக் கொள்வோம்.

வட்டி = $\frac{PNr}{100}$, இங்கு $N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்.

'n' மாதங்கள் முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை $A = Pn + \frac{PNr}{100}$

எடுத்துக்காட்டு 3.31

தருண் என்பவர் இரண்டு லட்ச ரூபாயை 5 ஆண்டுகளுக்கு ஒரு வங்கியில் நிரந்தர வைப்புத் திட்டத்தில் முதலீடு செய்கின்றார். அவ்வங்கி ஆண்டொன்றுக்கு 8% தனி வட்டி தருகின்றது எனில் 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு

அசல் P = ₹ 2,00,000, n = 5 ஆண்டுகள், r = 8% (ஆண்டொன்றுக்கு)

$$\text{வட்டி} = \frac{Pnr}{100}$$

$$= 200000 \times 5 \times \frac{8}{100} = ₹\ 80,000$$

∴ 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவர் பெறும் மொத்த தொகை

= 2,00,000 + 80,000 = ₹ 2,80,000.

எடுத்துக்காட்டு 3.32

வைதீஷ் என்பவர் ₹ 500ஐ ஒவ்வொரு மாதத் தொடக்கத்திலும் ஓர் அஞ்சலகத்தில் 5 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்துகின்றார். வட்டி வீதம் 7.5% எனில் 5 ஆண்டுகள் முடிவில் அவர் பெறும் தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு

ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்தப்பெறும் தொகை, P = ₹ 500

மாதங்களின் எண்ணிக்கை, n = $5 \times 12 = 60$

வட்டி வீதம், r % = $7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$

மொத்தம் செலுத்திய தொகை = $Pn = 500 \times 60$ = ₹ 30,000

தொடர் வைப்புக்காலம், N = $\frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்

= $\frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2}$ ஆண்டுகள்

வட்டி, I = $\frac{PNr}{100}$

= $500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100}$

= ₹ 5,718.75

5 ஆண்டுகளின் முடிவில் அவர் பெறும் தொகை = $Pn + \frac{PNr}{100}$

= 30,000 + 5,718.75 = ₹ 35,718.75

எடுத்துக்காட்டு 3.33

விஷால் ஒவ்வொரு மாதத் துவக்கத்திலும் ₹ 200ஐ ஓர் அஞ்சலகத்தில் 5 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்தி வந்தார். முடிவில் அவர் ₹ 13,830 பெற்றார் எனில், வட்டி வீதம் என்ன ?

தீர்வு

முதிர்வுத்தொகை A = ₹ 13,830, தொடர் வைப்புத் தொகை P = ₹ 200,

$n = 5 \times 12 = 60$ மாதங்கள்

காலம், $N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ஆண்டுகள்

$= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2}$ ஆண்டுகள்

மொத்தம் செலுத்திய தொகை = $Pn = 200 \times 60 =$ ₹ 12,000

இறுதியில் கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகை $= Pn + \frac{PNr}{100}$

$$13{,}830 = 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100}$$

$$13830 - 12000 = 305 \times r$$

$$1830 = 305 \times r$$

$$\therefore r = \frac{1830}{305} = 6\%$$

$\therefore$ வட்டி வீதம் = 6%

3.6.1 வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் மற்றும் தவணை முறைத்திட்டம்

இன்றைய நுகர்வோருக்கு வங்கிகள் மற்றும் நிதி நிறுவனங்கள் வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் மற்றும் தவணை முறைத் திட்டம் போன்றவற்றை அறிமுகம் செய்துள்ளனர்.

வாடகைக் கொள்முதல் திட்டம் : இத்திட்டத்தின் கீழ், பொருள் வாங்குவோருக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குச் சொந்தமாகாது. அவர் அப்பொருளின் விலையை வட்டியுடன் கட்டினால் அப்பொருள் அவருக்குச் சொந்தமாகும்.

தவணை முறைத்திட்டம் : பொருளின் விலையுடன் வட்டி இதரச் செலவுகள் ஆகியவற்றைச் சேர்த்து மொத்தத் தொகையாகின்றது. குறிப்பிட்ட காலக் கெடுவுக்குள் உள்ள மாதங்களின் எண்ணிக்கையால் இக்கடன் தொகையை வகுத்து வசூலிப்பர். இவ்வாறு கிடைத்த சிறு தொகையை தவணை என்பர்.

சமப்படுத்தப்பெற்ற மாதாந்திர தவணை முறைத்திட்டம் (ச.மா.த.)

இது தவணைமுறைத் திட்டத்திற்கு இணையானது. இத்தவணை முறைத் திட்டம் பகுதி குறைவுத் திட்டமாகும். நாம் வாங்கிய கடன், இதன் மீது வட்டி, மேலும் சில குறிப்பிட்ட

கட்டணங்களுடன் வரும் மொத்த தொகையை செலுத்த வேண்டிய காலத்தை மாதங்களாக்கி, அத்தொகையைச் சமமாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு தொகையைச்செலுத்த வேண்டும். இத்தொகையைச் **சமப்படுத்தப் பெற்ற மாதத் தவணைகள்** (ச.மா.த) என்பர்.

$$\text{ச.மா.த.} = \frac{\text{அசல் + வட்டி}}{\text{மாதங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

பல்வேறுபட்ட தவணை முறைத்திட்டங்கள்

1. 0% வட்டித் திட்டம்:

குழுமங்கள் 4 அல்லது 5 முன் தவணைகளுடன் சில நடைமுறைச் செலவுக்கான தொகையையும் முதலிலேயே எடுத்துக் கொள்கின்றன.

2. 100% கடன் திட்டம்:

குழுமங்கள் அசலுடன், வட்டி, நடைமுறைச் செலவுகள் ஆகியவற்றைக் கூட்டிக் கணக்கிடும்.

3. தள்ளுபடி விற்பனை:

குழுமங்கள் வியாபாரத்தைப் பெருக்கிக் கொள்ள தவணை முறையில் கழிவுக் கொடுக்கும்.

4. முன் பணம் செலுத்துதல்:

ஒரு பொருளின் விலையில் ஓர் பகுதியை அப்பொருள் வாங்குவதற்கு முன் செலுத்த வேண்டும். அதை முன் பணம் செலுத்தி பெறுதல் என்று அழைக்கப்பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.34

ஒரு துணி துவைக்கும் இயந்திரத்தின் அடக்க விலை ₹ 18,940 ஆகும். இதனை வாங்குவதற்கான தவணை முறைத் திட்டங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எண்	தவணை முறைத் திட்டங்கள்	விற்கும் விலை (₹)	முதலில் கொடுக்கப்படும் பணம்	வட்டி வீதம்	சேவைக் கடன்	காலம்
(i)	75% நிதித் திட்டம்	18,940	25%	12%	1%	24 மாதங்கள்
(ii)	100% நிதித் திட்டம்	18,940	இல்லை	16%	2%	24 மாதங்கள்
(iii)	0% நிதித் திட்டம்	18,940	4 ச.மா.த. முன் பணம்	இல்லை	2%	24 மாதங்கள்

மேற்குறித்த திட்டங்களின் ச.மா.த மற்றும் மொத்த தொகையையும் காண்க.

தீர்வு

(i) 75% கடன் திட்டம்

P = ₹ 18,940, முதலில் கொடுக்கப்படும் பணம் = 25%, வட்டி வீதம் = 12%, சேவைக் கட்டணம் = 1%

சேவைச் செலவு = ₹ 18,940 இல் 1%

$= \frac{1}{100} \times 18940 =$ ₹ 189.40 = ₹ 189

முதலில் கொடுக்க வேண்டிய பணம் = ₹ 18,940 இல் 25%

$= \frac{25}{100} \times 18940 =$ ₹ 4,735

கடன் தொகை = 18,940 – 4,735 = ₹ 14,205

வட்டி $= \frac{14205 \times 12 \times 2}{100}$

= ₹ 3,409.20 ≃ ₹ 3,409

ச.மா.த. $= \frac{\text{கடன் தொகை + வட்டி}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$

$= \frac{14205 + 3409}{24} = \frac{17614}{24}$

= ₹ 733.92 ≃ ₹ 734

∴ செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 4,735 + 14,205 + 3,409 + 189

= ₹ 22,538

(ii) 100% கடன் திட்டம்

சேவைக் கட்டணம் = ₹ 18,940 இல் 2%

$= \frac{2}{100} \times 18940$

= ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

வட்டி வீதம் = 16%

வட்டி $= 18940 \times \frac{16}{100} \times 2$

= ₹ 6060.80 ≃ ₹ 6,061

ச.மா.த. $= \frac{\text{கடன் தொகை + வட்டி}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$

$= \frac{18940 + 6061}{24} = \frac{25001}{24}$

= ₹ 1,041.708

≃ ₹ 1,042

செலுத்தப்பட வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 6,061 + 18,940 + 379 = ₹ 25,380

(iii) 0% வட்டித் திட்டம்

நடைமுறைச் செலவு = ₹ 18,940 இல் 2%

$= \frac{2}{100} \times 18940$

= ₹ 378.80 ≃ ₹ 379

$$\text{ச.மா.த.} = \frac{\text{மொத்தத் தொகை}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$$

$$= \frac{18940 + 0}{24} = \frac{18940}{24}$$

$$= ₹\ 789.166 \simeq ₹\ 789$$

செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 18,940 + 3,156 + 379 = ₹ 22,475

4 மாத முன் தவணை = ₹ 789 × 4 = ₹ 3,156

எனவே, 0% வட்டித்திட்டம் மிகச் சிறந்ததாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.35

ஒரு கணினியின் விலை ₹ 20,000. ஒரு கம்பெனி இத்தொகையை 10% வட்டியுடன் 36 மாதத் தவணையாகத் தரலாம் என்கின்றனர். இதை வாங்குபவர் செலுத்த வேண்டிய மாதாந்திர தவணை எவ்வளவு?

தீர்வு

கணினியின் விலை = ₹ 20,000, வட்டி ஆண்டொன்றுக்கு = 10%

காலம் = 36 மாதங்கள் (3 ஆண்டுகள்).

$$\text{மொத்த வட்டி} = 20000 \times \frac{10}{100} \times 3$$

$$= ₹\ 6,000$$

∴ செலுத்த வேண்டிய மொத்தத் தொகை = 20,000 + 6,000

= ₹ 26,000

$$\text{மாதாந்திர தவணை} = \frac{\text{மொத்தத் தொகை}}{\text{மொத்த மாதங்கள்}}$$

$$= \frac{26000}{36}$$

$$= ₹\ 722.\ 22$$

$$\simeq ₹\ 722$$

பயிற்சி 3.6

1. ஸ்வேதா ஆண்டு வட்டி வீதம் 4% தரும் ஒரு வங்கியில் ₹ 25,000ஐ 2 ஆண்டுகளுக்கு நிரந்தர இட்டு வைப்புத்திட்டத்தில் முதலீடு செய்தார். அது முடிவடையும்போது அவருக்கு கிடைக்கும் முதிர்வு தொகை என்ன?
2. நித்தின் ஆண்டொன்றுக்கு 5% வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் ₹ 75,000ஐ 3 ஆண்டுகளுக்கு நிரந்தர வைப்புத்திட்டத்தில் முதலீடு செய்தால் எனில், அவருக்கு கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகை என்ன?
3. இம்ரான் ஓர் அஞ்சலகத்தில் 12% வட்டியில் ஒவ்வொரு மாதமும் ₹ 400ஐ 2 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்தி வந்தார். இரண்டு ஆண்டுகள் முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் தொகையை காணவும்.

4. இரமேஷ் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு தொகையை ஓர் அஞ்சலகத்தில் 6 ஆண்டுகள் செலுத்தி 8% வட்டி வீதத்தில் ₹ 17,904 பெற்றார். அவர் ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்திய தொகை எவ்வளவு?

5. ஈடின் தொடர் வைப்பு நிதியில் மாதா மாதம் ₹ 700ஐ, 6 வருடங்களுக்கு ஒரு வங்கியில் செலுத்தி வருகின்றார். 6 ஆண்டுகள் முடிவில் அவருக்கு ₹ 64,197 கிடைத்தால் ஆண்டு வட்டி வீதம் என்ன?

6. ஒரு மைக்ரோவேவ் ஓவனின் விலை ₹ 6000. பூரணி இதை 5 தவணைகளில் வாங்க நினைக்கிறார். அக்குழுமம் ஆண்டு தனி வட்டி 10% வீதத்தில் அதை விற்றால், பூரணி செலுத்த வேண்டிய மாதாந்திர தவணை யாது?

7. ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியின் விலை ₹ 16,800. இரஞ்சித் இதை 0% வட்டித் திட்டத்தில் வாங்க விரும்புகின்றார். 3 மாத முன் தவணைகளையும் தருகின்றார். கம்பெனி 3% நடைமுறைச் செலவு எடுத்துக் கொள்கின்றது எனில், 24 மாதங்களுக்கு அவர் செலுத்த வேண்டிய மாதத் தவணையைக் காணவும். அவர் செலுத்த வேண்டிய மொத்த தொகையையும் காணவும்.

8. ஓர் உணவு மேசையின் அடக்க விலை ₹ 8400. குழுமம் ஒன்று ஆண்டொன்றுக்கு 5% தனி வட்டி வீதத்தில் விற்கிறது. வெங்கட் இம்மேசையை 10 மாதத் தவணைகளில் பெற நினைக்கின்றார். அவர் செலுத்த வேண்டிய மாதத் தவணையும் மொத்தத் தொகையையும் காணவும்.

3.7 கலப்பு மாற்றங்கள்

நாம் முன் வகுப்புகளில் நேர் மாறல்கள், எதிர் மாறல்கள் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இவற்றை நாம் இப்பொழுது நினைவு கூர்வோம்.

நேர்மாறல்

இரண்டு அளவுகள் ஒரே சீராக அதாவது ஒன்று அதிகமாகும்போது மற்றொன்றும் அதிகமாகி, அல்லது ஒன்று குறையும்போது மற்றொன்றும் குறைந்து இருந்தால், அவை இரண்டும் நேர் மாறலில் உள்ளன என்பர்.

நேர்மாறலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

1. ஒரு குறித்த வேகத்தில் பயணம் செய்தால், தொலைவும், காலமும் நேர்மாறலாகும். ஏனெனில் தொலைவு அதிகமெனில் காலம் அதிகரிக்கும்.
2. அசலும், வட்டியும் நேர்மாறலாக அமைகிறது. ஏனெனில் அசல் அதிகரித்தால் வட்டியும் அதிகரிக்கும்.
3. பொருள்களை வாங்குதலும் அவற்றின் விலைகளும் நேர்மாறலாகும். ஏனெனில் பொருள்கள் அதிகமாக வாங்கும்போது அதன் விலையும் அதிகரிக்கும்.

எதிர்மாறல்

இரு அளவுகளில் ஒன்று அதிகரிக்கும்போது மற்றொன்று அதற்கேற்ப குறைந்தும், ஒன்று குறையும் போது மற்றொன்று அதற்கேற்ப அதிகரித்தும் இருப்பின் அவ்விரண்டு அளவுகளும் எதிர் மாறலில் அமைந்துள்ளன என்கிறோம்.

எதிர்மாறலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

1. வேலை செய்வோரின் எண்ணிக்கையும், காலமும் எதிர் மாறலாகும். ஏனெனில் ஆட்கள் அதிகரித்தால், அவர்கள் வேலை செய்து முடிக்க வேண்டிய காலம் குறையும்.
2. ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவில் வேகமும் காலமும் எதிர்மாறலாக அமையும். ஏனெனில் வேகத்தை அதிகரித்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவை அடையும் காலம் குறைகின்றது.
3. மக்கள் தொகை அதிகரித்தால், ஓர் இருப்பில் உள்ள உணவு அளவு குறையும். எனவே உணவின் அளவும் மக்கள் தொகையின் அளவும் எதிர் மாறலாகும்.

கலப்பு மாறல்

ஒரு சில கணக்குகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறல்கள் வரும். இவ்வாறு அமைவதைக் கலப்பு மாறல் என்பர்.

இரு மாறல்கள் கலந்து வரும் அமைப்புகளைப் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிப்பிடப் பெற்றுள்ளன:

மாறல் I	மாறல் I I
நேர்மாறல்	நேர்மாறல்
எதிர்மாறல்	எதிர்மாறல்
நேர்மாறல்	எதிர்மாறல்
எதிர்மாறல்	நேர்மாறல்

கலப்பு மாறல்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள சில கணக்குகளை செய்து பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.36

112மீ நீளமுள்ள ஒரு சுவரை, 20 ஆட்கள் 6 நாட்களில் கட்டி முடித்தால், இதே மாதிரியாக 25 ஆட்கள் 3 நாட்களில் எவ்வளவு நீளச் சுவரை கட்டி முடிப்பர்?

தீர்வு

முறை 1: இக்கணக்கில் 3 அமைப்பு மாறிகள் உள்ளன. ஆட்களின் எண்ணிக்கை, நாட்கள், சுவரின் நீளம்.

ஆட்களின் எண்ணிக்கை	நாட்கள்	சுவரின் நீளம் (மீட்டரில்)
20	6	112
25	3	x

படி 1 : ஆட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஆட்களின் எண்ணிக்கை 20லிருந்து 25 ஆக உயரும் பொழுது கட்டப்படும் சுவரின் நீளமும் அதிகரிக்கும். எனவே இது நேர் மாறலில் உள்ளது.

எனவே, $20 : 25 :: 112 : x$ ...... (1)

படி 2 : நாட்களையும், சுவரின் நீளத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம். நாட்கள் 6 லிருந்து 3 ஆக குறையும் பொழுது, சுவரின் நீளம் குறையும். எனவே இது நேர் மாறலாகும்.

எனவே, $6 : 3 :: 112 : x$ ..... (2)

(1) ஐயும், (2) ஐயும் இணைத்து பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$$\left.\begin{matrix}20:25\\6:3\end{matrix}\right\}::112:x$$

ஓர் விகித சமத்தில், கோடி (கடைசி) உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன், இடை உறுப்புகளின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம் என்று நாம் அறிவோம்.

கோடி உறுப்புகள்		இடை உறுப்புகள்		கோடி உறுப்புகள்
20	:	25 :: 112	:	x
6	:	3		

எனவே, $20\times6\times x = 25\times3\times112$

$$x = \frac{25\times3\times112}{20\times6} = 70 \text{ மீட்டர்கள்}$$

முறை 2

ஆட்களின் எண்ணிக்கை	நாட்கள்	சுவரின் நீளம் (மீட்டரில்)
20	6	112
25	3	x

படி 1: ஆட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் கருத்தில் கொள்வோம். ஆட்களின் எண்ணிக்கை 20லிருந்து 25ஆக அதிகரிக்கும் பொழுது, சுவரின் நீளமும் அதிகரிக்கும். எனவே இது நேர்மாறலாகும்.

இதற்கு பெருக்கற்காரணி $= \frac{25}{20}$

படி 2: நாட்களின் எண்ணிக்கையையும், சுவரின் நீளத்தையும் கருத்தில் கொள்வோம். நாட்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 3ஆக குறையும்பொழுது, சுவர்களின் நீளமும் குறையும். எனவே இது நேர்மாறலாகும்.

இதற்கு பெருக்கற்காரணி $= \frac{3}{6}$

$$\therefore x = \frac{25}{20}\times\frac{3}{6}\times112 = 70 \text{ மீட்டர்கள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.37

6 ஆண்கள் ஒரு வேலையை நாளொன்றுக்கு 10 மணி நேரம் வேலை செய்து, 24 நாட்களில் முடிப்பர். 9 ஆண்கள், நாளொன்றுக்கு 8 மணி நேரம் வேலை செய்தால், எத்தனை நாட்களில் அவ்வேலையை முடிப்பர்?

தீர்வு

முறை 1: இக்கணக்கில் 3 அமைப்பு மாறிகள் உள்ளன. ஆண்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம் மற்றும் நாட்கள்

ஆண்களின் எண்ணிக்கை	ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம்	நாட்கள்
6	10	24
9	8	x

படி 1 : ஆண்களின் எண்ணிக்கையையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். ஆண்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 9 ஆக அதிகரிக்கும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை குறையும். எனவே இது எதிர் மாறல் ஆகும்.

எனவே இதின் விகித சமம் $9 : 6 :: 24 : x$ ..... (1)

படி 2 : ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரத்தையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரத்தின் கால அளவு 10லிருந்து 8ஆக குறையும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும். இது எதிர் மாறலில் அமைந்துள்ளது.

எனவே இதின் விகித சமம் $8 : 10 :: 24 : x$ ..... (2)

(1) ஐயும், (2) ஐயும் இணைத்துப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\left.\begin{matrix} 9:6 \\ 8:10 \end{matrix}\right\} :: 24 : x$$

கோடி உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் இடை உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

கோடி உறுப்புகள்		இடை உறுப்புகள்		கோடி உறுப்புகள்
9	:	6 : : 24	:	x
8	:	10		

எனவே, $9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8}$$

$= 20$ நாட்கள்.

குறிப்பு : 1. நேர்மாறலை கீழ் நோக்கிய அம்புக்குறியால் (↓) குறிக்கிறோம் .
2. எதிர் மாறலை மேல் நோக்கிய அம்புக்குறியால் (↑) குறிக்கிறோம் .
3. பெருக்கற் காரணிகளை, அம்புக்குறிகளைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம். அம்புக்குறியின் தலைகளில் உள்ள எண்களை தொகுதியாகவும், வால் பகுதியில் உள்ள எண்களை பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

முறை 2க்கு மேற்கண்ட குறிப்புகளை பயன்படுத்துவோம்

முறை 2 :

ஆண்களின் எண்ணிக்கை	ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் நேரம்	நாட்கள்
6	10	24
9	8	x

படி 1 : ஆண்களின் எண்ணிக்கையையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வோம். வேலை செய்யும் ஆண்களின் எண்ணிக்கை 6லிருந்து 9 ஆக உயரும்பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை குறையும். இது எதிர்மாறலில் உள்ளது.

$$\text{பெருக்கற்காரணி} = \frac{6}{9}$$

படி 2 : ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் காலத்தையும், நாட்களையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளவோம். ஒரு நாளில் வேலை செய்யும் காலத்தின் அளவு 10லிருந்து 8ஆக குறையும் பொழுது, நாட்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும். இது எதிர்மாறலில் உள்ளது.

$$\text{பெருக்கற்காரணி} = \frac{10}{8}$$

$$\therefore x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ நாட்கள்.}$$

பயிற்சி 3.7

1. 12 தச்சர்கள் நாளொன்றுக்கு 10 மணி நேரம் வேலை செய்து சில மர வேலைகளை 18 நாட்களில் செய்து முடிக்கின்றனர். இதே வேலையை 15 தச்சர்கள் நாளொன்றுக்கு 6 மணி நேரம் வேலை செய்தால் எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?
2. 80 தானியங்கி இயந்திரங்கள் ஒரே மாதிரியான 4800 கைப்பேசிகளை 6 மணியில் உற்பத்தி செய்கின்றன. ஒரு தானியங்கி இயந்திரம், ஒரு மணி நேரத்தில் எத்தனை கைப்பேசிகளை உற்பத்தி செய்யும்? 25 தானியங்கி இயந்திரங்கள் 5 மணி நேரத்தில் எத்தனை கைப்பேசிகளை உற்பத்தி செய்யும்?
3. 14 அச்சுக் கோர்ப்பவர்கள், 5 மணி நேரத்தில் ஒரு புத்தகத்தின் 70 பக்கங்களை முடிப்பர். 9 மணி நேரத்தில், 100 பக்கங்களை முடிக்க எத்தனை அச்சுக் கோர்ப்பவர்கள் தேவை?
4. 2400 ச.மீ நிலத்தை 12 வேலையாட்கள் 10 நாட்களில் உழுது முடிப்பர். 5400 ச.மீ நிலத்தை 18 நாட்களில் உழுவதற்கு எத்தனை வேலையாட்கள் தேவை?

5. சுவாதி ஒரு நாளுக்கு 4 மணி நேரம் வேலை செய்து, 5 சேலைகளுக்கு 18 நாட்களில் எம்பிராய்டரி வேலை செய்து முடிப்பார். அவர் 10 சேலைகள் எம்பிராய்டரி செய்வதற்கு நாள்தோறும் 6 மணி நேரம் வேலை செய்தால், எத்தனை நாட்களில் வேலையை செய்து முடிப்பார்?

6. ₹ 2500ஐ வங்கியில் 6 மாதங்களுக்கு செலுத்தினால் வங்கி ₹ 100ஐ வட்டியாக தருகின்றது. ₹ 3200ஐ அதே வட்டி வீதத்தில், 9 மாதங்கள் செலுத்தினால், கிடைக்கும் வட்டி என்னவாக இருக்கும்?

3.8 காலம் மற்றும் வேலை

பல ஆட்கள் செய்யும் வேலையை நாம் ஒப்பிடும்பொழுது, அவர்கள் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையை அறிய வேண்டியுள்ளது. காலமும் வேலையும் எதிர்மாறலாகும். எனவே அதிக ஆட்கள் ஒரு வேலையைச் செய்யும் பொழுது அவ்வேலை சீக்கிரம் முடியும், இங்குள்ள கணக்குளைத் தீர்க்கும் பொழுது நாம் பின்வருவனவற்றை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

1. ஒருவர் ஒரு வேலையை 'n' நாட்களில் முடித்தால், ஒரு நாளில் '$\frac{1}{n}$' வேலையை முடிப்பார். எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவர் ஒரு வேலையை 4 நாட்களில் முடித்தால், அவர் ஒரு நாளில் அவ்வேலையில் $\frac{1}{4}$ பாகம் செய்து முடிப்பார்.
2. ஒருவர் ஓர் நாளில் முடிக்கும் வேலையின் பகுதி கொடுக்கப் பெற்றால்,

   அவ்வேலை முடிக்க ஆகும் மொத்த நாட்கள் $= \dfrac{1}{\text{ஒரு நாளின் வேலை}}$

   எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவர் ஒரு நாளில் $\frac{1}{10}$ பாகம் வேலை செய்தால், அவர்

   அவ்வேலையை $= \dfrac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \dfrac{10}{1} = 10$ நாட்களில் முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 3.38

A என்பவர் ஒரு வேலையை 20 நாட்களிலும், B என்பவர் அதே வேலையை 30 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பார்கள். அவ்விருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்து முடிக்க எத்தனை நாட்கள் ஆகும்?

தீர்வு

ஒரு நாளில் A செய்யும் வேலை $= \frac{1}{20}$; ஒரு நாளில் B செய்யும் வேலை $= \frac{1}{30}$

ஒரு நாளில் A, B இருவரும் சேர்ந்து செய்யும் வேலை $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ பகுதி வேலை

$\therefore$ A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை, $\dfrac{1}{1/12} = 12$ நாட்களில் செய்து முடிப்பர்.

எடுத்துக்காட்டு 3.39

ஒரு வேலையை A, B இருவரும் சேர்ந்து 8 நாட்களில் முடிப்பர். A மட்டும் அவ்வேலையை 12 நாட்களில் முடிப்பார். B மட்டும் அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்?

தீர்வு

A, B இருவரும் சேர்ந்து ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{8}$ பாகம்

ஒரு நாளில் A மட்டும் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{12}$ பாகம்

ஒரு நாளில் B மட்டும் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$

B மட்டும் அவ்வேலையை செய்து முடிக்க ஆகும் காலம் $= \frac{1}{1/24} = 24$ நாட்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.40

A ஒரு வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். B அதே வேலையை 20 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 3 நாட்கள் செய்தனர். பின் A சென்று விட்டார். மீதி வேலையை B எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்?

தீர்வு

A ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{12}$

B ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{20}$

A, B இருவரும் சேர்ந்து ஒரு நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$= \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

A, B இருவரும் சேர்ந்து 3 நாளில் முடிக்கும் வேலை $= \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$ பாகம்

மீதமுள்ள வேலை $= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ பாகம்

மீதமுள்ள வேலையை B முடிக்க ஆகும் நாட்கள் $= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1} = 12$ நாட்கள்

$\therefore$ மீதமுள்ள வேலையை 12 நாட்களில் B செய்து முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 3.41

A, B இருவரும் ஒரு வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். B, C அதே வேலையை 15 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். C, A அதே வேலையை 20 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். மூவரும் சேர்ந்து மற்றும் தனித்தனியாகவும் அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?

தீர்வு

A, B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{12}$ பாகம்

B, C ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{15}$ பாகம்

C, A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{20}$ பாகம்

ஒரு நாளில் (A+B)+(B+C)+(C+A) செய்யும் வேலை $= \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$

ஒரு நாளில் (2A + 2B + 2C) செய்யும் வேலை $= \frac{5+4+3}{60}$

ஒரே நாளில் 2(A + B + C) செய்யும் வேலை $= \frac{12}{60}$ பாகம்

ஒரே நாளில் A, B, C முடிக்கும் வேலை $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{60} = \frac{1}{10}$ பாகம்

∴ மூவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 10 நாட்களில் முடிப்பர்.

A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (B + C) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3-2}{30} = \frac{1}{30}$$

∴ A அவ்வேலையைத் தனியே 30 நாட்களில் முடிப்பார்.

B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (C + A) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2-1}{20} = \frac{1}{20}$$

∴ B அவ்வேலையை 20 நாட்களில் முடிப்பார்.

C ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை

அதாவது [(A + B + C)களின் 1 நாள் வேலை – (A + B) களின் 1 நாள் வேலை]

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{6-5}{60} = \frac{1}{60}$$

∴ C அவ்வேலையை 60 நாட்களில் முடிப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 3.42

A ஒரு வேலையை 10 நாட்களிலும், B அதை 15 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பர். இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை செய்து ₹ 15000ஐ ஈட்டினால், அத்தொகையை எவ்வாறு பிரித்து கொள்வர்?

தீர்வு

A ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{10}$ பாகம்

B ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை $= \frac{1}{15}$ பாகம்

எனவே அவர்களின் வேலைத்திறன்களின் விகிதம் $= \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 3 : 2$

மொத்தத் தொகை = ₹ 1500

A இன் பங்கு $= \frac{3}{5} \times 1500$

= ₹ 900

B இன் பங்கு $= \frac{2}{5} \times 1500$

= ₹ 600

எடுத்துக்காட்டு 3.43

ஒரு தொட்டியை இரு குழாய்கள் தனித்தனியே முறையே 30 நிமிடங்கள், 40 நிமிடங்களில் நிரப்புகின்றது. மற்றொரு குழாய் நீர் நிரம்பிய தொட்டியை 24 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். தொட்டி காலியாக இருந்து இம்மூன்று குழாய்களும் ஒரே சமயத்தில் திறந்து விடப்பட்டால், அத்தொட்டி எத்தனை நிமிடங்களில் நிரம்பும்?

தீர்வு

முதல் குழாய் 1 நிமிடத்தில் அத்தொட்டியை நிரப்பும் பாகம் $= \frac{1}{30}$

இரண்டாம் குழாய் 1 நிமிடத்தில் அத்தொட்டியை நிரப்பும் பாகம் $= \frac{1}{40}$

மூன்றாம் குழாய் 1 நிமிடத்தில் நீர் நிரம்பிய தொட்டியை காலி செய்யும் பாகம் $= \frac{1}{24}$

ஒரே சமயத்தில் இம்மூன்று குழாய்களையும் திறந்து விட்டால், 1 நிமிடத்தில் தொட்டியில் நிரம்பும் பாகம்

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{4+3-5}{120}$$

$$= \frac{7-5}{120}$$

$$= \frac{2}{120}$$

$$= \frac{1}{60}$$

எனவே, அத்தொட்டி நிரம்பும் காலம் $= \frac{1}{1/60}$

= 60 நிமிடங்கள்

= 1 மணி

பயிற்சி 3.8

1. ஓர் ஆண் ஒரு வேலையை 4 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். ஆனால் ஒரு பெண் அதே வேலையை 12 நாட்களில் செய்து முடிப்பார். இவ்விருவரும் சேர்ந்து வேலை செய்தால், அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பர்?
2. இரண்டு சிறுவர்கள் ஒரு வேலையை சேர்ந்து செய்யும் பொழுது, 10 நாள்களில் முடிப்பர். முதல் சிறுவன் அவ்வேலையை தனியே 15 நாட்களில் முடித்தால், இரண்டாம் சிறுவன் தனியே அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பார்?
3. A, B, C என்ற மூவர் ஒரு வேலையை முறையே 8, 12, 16 நாட்களில் முடிப்பார்கள். A, B இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை 3 நாட்களுக்கு செய்தனர். பின்னர் B விலகுகின்றார், C சேருகின்றார் எனில், A, C ஆகிய இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்கள்?
4. A என்ற குழாய் ஒரு பெரிய பாத்திரத்தைத் தனியே 10 நிமிடங்களில் நிரப்பும். B என்ற குழாய் அதே பாத்திரத்தை தனியே 20 நிமிடங்களில் நிரப்பும். நீர் நிரப்பியுள்ள அப்பாத்திரத்தை C என்ற குழாய் 15 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். ஆரம்பத்தில் பாத்திரம் காலியாக இருந்து, இம்மூன்று குழாய்களையும் திறந்தால், அப்பாத்திரம் நிரம்ப எவ்வளவு நேரமாகும்?
5. A ஒரு வேலையை 20 நாட்களிலும், B அதே வேலையை 3 நாட்களிலும் முடிப்பர். இருவரும் சேர்ந்து வேலை செய்து, அவ்வேலையை முடித்து ₹ 600ஐ தங்கள் வருவாயாகப் பெற்றனர் எனில் அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் பெறும் தொகை எவ்வளவு?
6. A, B, C என்பர் ஒரு வேலையை முறையே 12, 24, 8 நாட்களில் முடிப்பார்கள். இம்மூவரும் சேர்ந்து ஒரு நாள் வேலை செய்தனர். பின் C விலகி விடுகிறார் எனில், A, B இருவரும் மீதமுள்ள வேலையை முடிக்க எடுக்கும் நாட்கள் எத்தனை?
7. ஒரு குழாய் காலியாக உள்ள தொட்டியை 15 நிமிடங்களில் நிரப்பும். மற்றொரு குழாய் நீர் நிரம்பியுள்ள அத்தொட்டியை 20 நிமிடங்களில் காலி செய்யும். ஆரம்பத்தில் தொட்டி காலியாக இருந்து, இரு குழாய்களும் ஒரே நேரத்தில் திறந்து விடப்பட்டால், அத்தொட்டி எவ்வளவு நிமிடங்களில் நிரம்பும்?

சுருக்க குறியீடு: அ.வி. = அடக்க விலை, வி.வி. = விற்பனை விலை,
கு.வி. = குறித்த விலை,
P = அசல், r = வட்டி வீதம், n = கால அளவு,
A = கூடுதல், C. I. = கூட்டு வட்டி

கருத்துச் சுருக்கம்

- சதவீதம் என்பது நூற்றுக்கு என்று பொருள்படும். 100ஐப் பகுதியாக கொண்ட சின்னம் சதவீதம் எனப்படும்.
- இலாபம் கிடைக்கும் சூழ்நிலையில்

  இலாபம் = வி.வி. − அ.வி.; இலாப சதவீதம் $= \frac{\text{இலாபம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100\%$

  வி.வி. $= \left(\frac{100 + \text{இலாப } \%}{100}\right) \times$ அ.வி. ; அ.வி. $= \left(\frac{100}{100 + \text{இலாப } \%}\right) \times$ வி.வி.
- நட்டம் ஆகின்ற சூழ்நிலையில்

  நட்டம் = அ.வி. − வி.வி; நட்ட சதவீதம் $= \frac{\text{நட்டம்}}{\text{அ.வி.}} \times 100\%$

  வி. வி. $= \left(\frac{100 + \text{நட்டம் } \%}{100}\right) \times$ அ.வி. ; அ.வி. $= \left(\frac{100}{100 + \text{நட்டம் } \%}\right) \times$ வி.வி.
- குறித்த விலையின் மீது தான் தள்ளுபடி செய்யப்படும்.
- குறித்த விலையிலிருந்து தள்ளுபடியைக் கழித்துக் கிடைக்கும் தொகை விற்ற விலையாகும்.
- தள்ளுபடி = கு.வி. − வி.வி.
- கு.வி. $= \frac{100}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ வி.வி. ; வி.வி. $= \frac{100 - \text{தள்ளுபடி } \%}{100} \times$ கு.வி.
- அ.வி. $= \frac{100 - \text{தள்ளுபடி } \%}{100 + \text{இலாபம்}\%} \times$ கு.வி. ; கு.வி. $= \frac{100 + \text{இலாபம்}\%}{100 - \text{தள்ளுபடி } \%} \times$ அ.வி.
- தள்ளுபடி சதவீதம் $= \frac{\text{தள்ளுபடி } \%}{\text{கு.வி.}} \times 100\%$

  (குறிப்பு : அ.வி. = அடக்க விலை, வி.வி. = விற்பனை விலை, கு.வி. = குறித்த விலை)
- (i) ஆண்டொன்றுக்கு வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  (ii) அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

  (iii) காலாண்டுக்கு ஒரு முறை வட்டி சேர்க்கும் முறையில், $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$

  (குறிப்பு: P = அசல், r = வட்டி வீதம், n = கால அளவு, A = கூடுதல், C. I. = கூட்டு வட்டி)
- வளர்ச்சி, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$; வீழ்ச்சி, $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$
- இரண்டு ஆண்டுகளில் கூட்டு வட்டிக்கும் தனி வட்டிக்கும்

  உள்ள வித்தியாசம் $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$
- A இன் ஒரு நாள் வேலை $= \frac{1}{\text{அவ்வேலையை முடிக்க A எடுத்துக் கொள்ளும் நாட்கள்}}$
- 'x' நாட்களில் முடிக்கும் வேலை= ஒரு நாள் வேலை $\times x$.

அளவைகள்

4

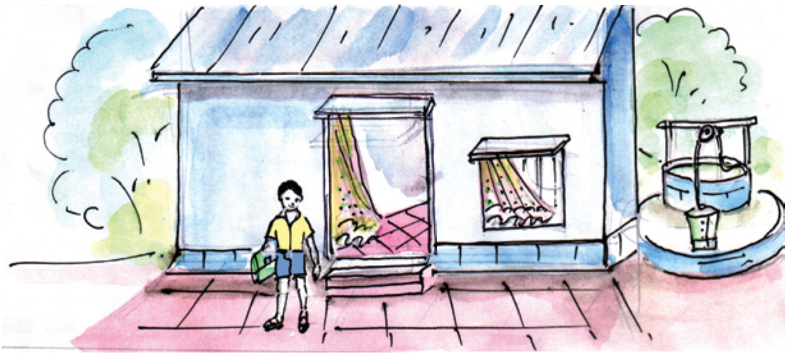
4.1 அறிமுகம்

4.2 அரை வட்டங்கள் மற்றும் கால் வட்டங்கள்

4.3 கூட்டு உருவங்கள்

4.1 அறிமுகம்

அளவிடுதல் என்பது ஒரு திறனாகும். இது ஒவ்வொரு மனிதனின் அன்றாட வாழ்விற்கு அவசியமாகிறது. ஒவ்வொருவரும் தன் அன்றாட வாழ்வில் ஏதேனும் ஒன்றை அளவிட வேண்டியுள்ளது. இதற்கு சில உதாரணங்களாக,



படம் 4.1

(i) கிணற்றிலிருந்து நீர் இறைக்கப் பயன்படும் கயிற்றின் நீளம்,

(ii) நம் வீட்டின் கதவு மற்றும் சன்னல்களுக்குப் பயன்படும் திரைச் சீலையின் அளவு,

(iii) நம் வீட்டு அறையைத் தளமிட வேண்டிய தரையின் அளவு மற்றும்

(iv) பள்ளிச்சீருடைக்குத் தேவையான துணியின் நீளம் ஆகியவற்றைக் கூறலாம்.

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு சூழலிலும் அளவியலின் கருத்து பயன்படுகிறது.

தள உருவங்களின் பக்க நீளங்கள், கோணங்கள், பரப்பளவுகள், சுற்றளவுகள் மற்றும் கன உருவங்களின் புறப்பரப்புகள், கன அளவுகள் ஆகியவற்றை எடுத்துரைக்கும் கணிதப் பிரிவை அளவியல் என்கிறோம்.

நினைவு கூர்க

நாம் ஏழாம் வகுப்பில் படித்த பின்வரும் சில வரையறைகளை நினைவு கூர்வோம்.

‘Perimeter’ என்ற ஆங்கிலச் சொல்லுக்கு ‘சுற்றளவு’ என்று பொருள். கிரேக்க மொழியில் ‘Peri’ என்றால் ‘சுற்றி’ என்றும் ‘meter’ என்றால் ‘அளவிடல்’ என்றும் பொருள்படும்.

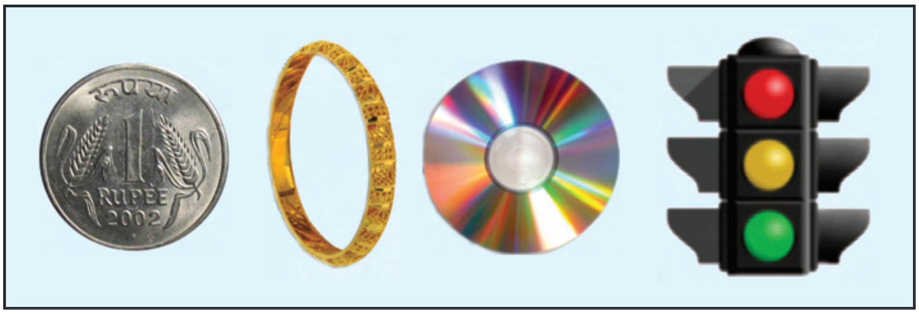
(i) பரப்பளவு

ஒரு தளத்தில் உள்ள உருவத்தினால் அடைபடும் உட்பகுதி பரப்பளவு எனப்படும்.

(ii) சுற்றளவு

ஒரு மூடிய வடிவத்தின் சுற்றளவு என்பது அவ்வுருவத்தின் எல்லையின் நீளம் ஆகும்.

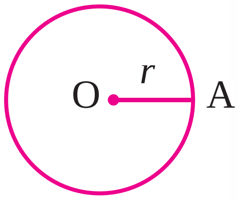
கீழ்க்கண்ட பொருட்களின் வடிவம் என்னவென்று தெரிகிறதா?



படம் 4.2

இவை அனைத்தும் வட்ட வடிவப் பொருட்கள் ஆகும்.

(iii) வட்டம்



படம் 4.3

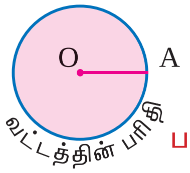
படத்தில் வட்டத்தின் மையத்தை O எனவும், வட்டத்தின் ஆரத்தை r எனவும் எடுத்துக் கொண்டால்,

வட்டத்தின் பரப்பளவு, $A = \pi r^2$ சதுர அலகுகள்.

$\therefore$ வட்டத்தின் சுற்றளவு அல்லது பரிதி,

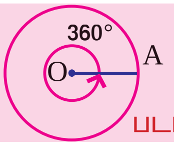
$P = 2\pi r$ அலகுகள்,

$\pi \simeq \frac{22}{7}$ அல்லது 3.14



படம். 4.4

குறிப்பு: வட்டத்தின் மையக்கோணம் = 360°.



படம் 4.5

செய்து பார்

ஓர் அட்டையை எடுத்துக் கொள்ளவும். அதில் வெவ்வேறு ஆரங்களை உடைய வட்டங்களை வரையவும். அவ்வட்டங்களை வெட்டி அவற்றின் பரப்பளவையும் சுற்றளவையும் காண்க.

வ. எண்	ஆரம்	பரப்பளவு	சுற்றளவு
1.			
2.			
3.			

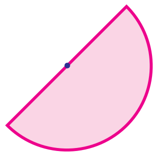
4.2 அரைவட்டங்கள் மற்றும் கால் வட்டங்கள்

4.2.1 அரை வட்டம்

அமாவாசை அல்லது பௌர்ணமி முடிந்து ஏழு நாட்களுக்குப் பிறகு நிலவைப் பார்த்திருக்கிறீர்களா?

நிலவின் வடிவம் எவ்வாறு இருக்கும்?

நிலவின் வடிவம் படம் 4.6 இல் உள்ளது போன்று இருக்கும்.


படம் 4.6

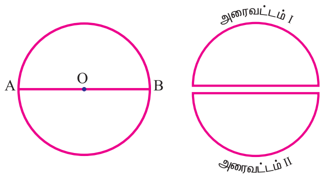
இதை எப்படி அழைக்கலாம்?

இதை அரைவட்டம் (வட்டத்தில் பாதி) என அழைக்கலாம்.

வட்டத்தை விட்டம் பிரிப்பதால் கிடைக்கும் இரு சம பகுதிகள் அரைவட்டங்கள் ஆகும்.

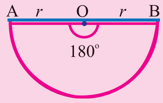
செய்து பார்

வட்டத்திலிருந்து ஓர் அரைவட்டத்தை எப்படிப் பெறுவாய்? ஓர் வட்ட வடிவ அட்டையை எடுத்துக் கொள்ளவும்.அதனை விட்டம் $\overline{AB}$ இன் வழியாக வெட்டவும். படம் 4.7 (ஆ) இல் உள்ளபடி இரு அரைவட்டங்கள் பெறுவாய்.



(அ) படம் 4.7 (ஆ)

குறிப்பு: அரை வட்டத்தின் மையக்கோணம் 180°.



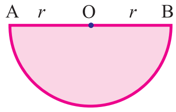
படம் 4.8

(அ) அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு

சுற்றளவு, P $= \frac{1}{2} \times$ (வட்டத்தின் பரிதி) + 2 × (ஆரம்)

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r + 2r$

P $= \pi r + 2r = (\pi + 2)\, r$ அலகுகள்.



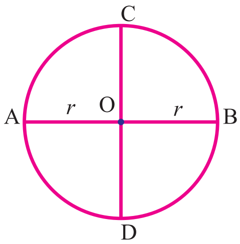
படம் 4.9

(ஆ) அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு

பரப்பளவு, A $= \frac{1}{2} \times$ வட்டத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

A $= \frac{\pi r^2}{2}$ சதுர அலகுகள்.

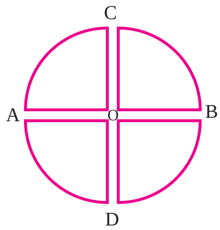


படம் 4.10

4.2.2 கால் வட்டம்

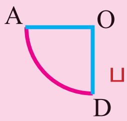
வட்டத்தை அதன் செங்குத்து விட்டங்களின் வழியாக வெட்டவும். நான்கு சமமான பகுதிகள் கிடைக்கும். ஒவ்வொரு பகுதியும் கால் வட்டம் எனப்படும்.

படம் 4.11இல் கூறியபடி வட்டத்தை வெட்டும்போது நமக்கு OCA, OAD, ODB மற்றும் OBC என நான்கு கால் விட்டங்கள் கிடைக்கிறது.



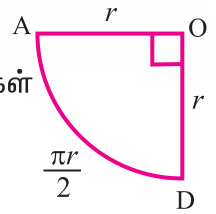
படம் 4.11

குறிப்பு: கால் வட்டத்தின் மையக்கோணம் 90°.



படம் 4.12

(அ) கால் வட்டத்தின் சுற்றளவு



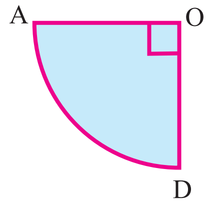
படம் 4.13

சுற்றளவு, P $= \frac{1}{4} \times$ (வட்டத்தின் பரிதி) + 2 × (ஆரம்) அலகுகள்

$= \frac{1}{4} \times 2\pi r + 2r$

P $= \frac{\pi r}{2} + 2r = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ அலகுகள்

(ஆ) கால் வட்டத்தின் பரப்பளவு



படம் 4.14

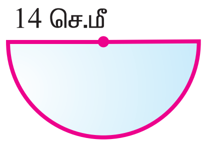
பரப்பளவு, A $= \frac{1}{4} \times$ (வட்டத்தின் பரப்பளவு)

A $= \frac{1}{4} \times \pi r^2$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.1

14 செ.மீ ஆரமுள்ள அரை வட்டத்தின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 4.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

வட்டத்தின் ஆரம், r = 14 செ.மீ.

அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு, P $= (\pi + 2)\, r$ அலகுகள்

$\therefore$ P $= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 14$

$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 14 = \frac{36}{7} \times 14 = 72$ செ.மீ.

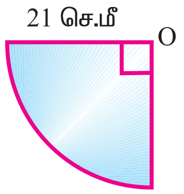
அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு, P = 72 செ.மீ.

அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு, A $= \frac{\pi r^2}{2}$ ச. அலகுகள்

$\therefore$ A $= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14}{2} = 308$ செ.மீ^{2}.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 21 செ.மீ எனில், அதன் கால் வட்டத்தின் சுற்றளவையும், பரப்பளவையும் காண்க.



படம் 4.16

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

வட்டத்தின் ஆரம், r = 21 செ.மீ

கால் வட்டத்தின் சுற்றளவு, P $= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ அலகுகள்

$= \left(\frac{22}{7 \times 2} + 2\right) \times 21 = \left(\frac{22}{14} + 2\right) \times 21$

P $= \left(\frac{22 + 28}{14}\right) \times 21 = \frac{50}{14} \times 21$

= 75 செ.மீ.

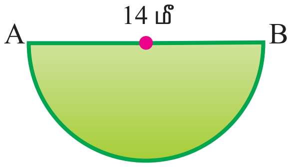
கால் வட்டத்தின் பரப்பளவு, $A = \frac{\pi r^2}{4}$ ச.அலகுகள்

$$A = \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21}{4}$$

$$= 346.5 \text{ செ.மீ}^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.3

அரை வட்ட வடிவிலான புல்வெளி ஒன்றின் விட்டம் 14 மீ. அதற்கு சுற்று வேலி அமைக்க ஒரு மீட்டருக்கு ₹ 10 வீதம் செலவு ஆகின்றது எனில் மொத்த செலவைக் காண்க.



படம் 4.17

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : விட்டம், $d = 14$ மீ

$\therefore$ ஆரம், $r = \frac{14}{2} = 7$மீ

அந்நிலத்திற்கு சுற்று வேலி அமைப்பதாயின் நாம் அதன் சுற்றளவைக் காண வேண்டும்.

அரை வட்டத்தின் சுற்றளவு, $P = (\pi + 2) \times r$ அலகுகள்

$$= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 7$$

$$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 7$$

$$P = 36 \text{ மீ}$$

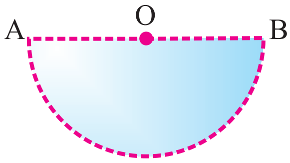
1 மீட்டருக்கு சுற்று வேலி அமைக்க ஆகும் செலவு = ₹ 10

$\therefore$ 36 மீட்டருக்கு சுற்றுவேலி அமைக்க ஆகும் செலவு

= 36 × 10 = ₹ 360.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

அரை வட்ட வடிவிலான பூங்கா ஒன்றின் எல்லை வேலியாக பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள சங்கிலியின் நீளம் 36மீ எனில் பூங்காவின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 4.18

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

சங்கிலியின் நீளம் = அரை வட்டத்தின் சுற்றளவு

$$\therefore (\pi + 2)r = 36 \text{ மீ}$$

$$\left(\frac{22}{7} + 2\right) \times r = 36$$

$$\left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times r = 36$$

$$\frac{36}{7} \times r = 36 \Rightarrow r = 7\text{மீ}$$

பூங்காவின் பரப்பளவு = அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு

$A = \frac{\pi r^2}{2}$ ச. அலகுகள்

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2} = 77$ மீ^{2}

$\therefore$ பூங்காவின் பரப்பளவு = 77 மீ^{2}.

பயிற்சி 4.1

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) ஓர் அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவில் .... மடங்கு ஆகும்.

(A) இரண்டு (B) நான்கு (C) அரை (D) கால்

(ii) அரை வட்டத்தின் சுற்றளவு .... ஆகும்.

(A) $\left(\frac{\pi + 2}{2}\right) r$ அலகுகள் (B) $(\pi + 2)\, r$ அலகுகள்

(C) $2r$ அலகுகள் (D) $(\pi + 4)r$ அலகுகள்

(iii) ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 7 மீ எனில், அதன் அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு .... ஆகும்.

(A) 77 மீ^{2} (B) 44 மீ^{2} (C) 88 மீ^{2} (D) 154 மீ^{2}

(iv) ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு 144 செ.மீ^{2} எனில், அதன் கால் வட்டத்தின் பரப்பளவு .... ஆகும்.

(A) 144 செ.மீ^{2} (B) 12 செ.மீ^{2} (C) 72 செ.மீ^{2} (D) 36 செ.மீ^{2}

(v) ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் 84 செ.மீ எனில், அதன் கால் வட்டத்தின் சுற்றளவு .... ஆகும்.

(A) 150 செ.மீ (B) 120 செ.மீ (C) 21 செ.மீ (D) 42 செ.மீ

(vi) ஒரு வட்டத்தில் .... கால் வட்டங்கள் உள்ளன.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(vii) கால் வட்டம் என்பது வட்டத்தின் .... ஒரு பங்கு ஆகும்.

(A) இரண்டில் (B) நான்கில் (C) மூன்றில் (D) ஐந்தில்

(viii) அரைவட்டத்தின் மையக்கோணம்.......... ஆகும்.

(A) 90° (B) 270° (C) 180° (D) 360°

(ix) கால் வட்டத்தின் மையக் கோணம் .... ஆகும்.

(A) 90° (B) 180° (C) 270° (D) 0°

(x) ஓர் அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு 84 செ.மீ^{2} எனில் அவ்வட்டத்தின் பரப்பளவு ....

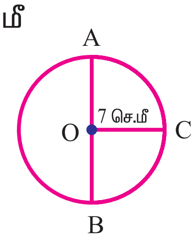
(A) 144 செ.மீ^{2} (B) 42 செ.மீ^{2} (C) 168 செ.மீ^{2} (D) 288 செ.மீ^{2}

2. பின்வரும் அளவுகளை ஆரங்களாகக் கொண்ட அரை வட்டங்களின் சுற்றளவுகளையும் பரப்பளவுகளையும் காண்க.
(i) 35 செ.மீ (ii) 10.5 செ.மீ (iii) 6.3 மீ (iv) 4.9 மீ

3. பின்வரும் அளவுகளை விட்டங்களாகக் கொண்ட அரை வட்டங்களின் சுற்றளவுகளையும் பரப்பளவுகளையும் காண்க.
(i) 2.8 செ.மீ (ii) 56 செ.மீ (iii) 84 செ.மீ (iv) 112 மீ

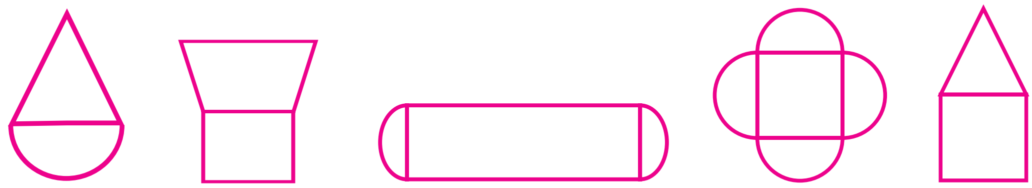
4. பின்வரும் அளவுகளை ஆரங்களாகக் கொண்ட கால் வட்டங்களின் சுற்றளவுகளையும் பரப்பளவுகளையும் காண்க.
(i) 98 செ.மீ (ii) 70 செ.மீ (iii) 42 மீ (iv) 28 மீ

5. படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட அரை வட்டம் ACB மற்றும் கால் வட்டம் BOC இன் பரப்பளவைக் காண்க.



6. அரை வட்ட வடிவிலான பூங்காவின் ஆரம் 21 மீ. ஒரு மீட்டருக்கு ₹ 5 வீதம் அதற்கு சுற்று வேலி அமைக்க ஆகும் செலவைக் காண்க.

4.3 கூட்டு உருவங்கள்



(அ) (ஆ) (இ) (ஈ) (உ)

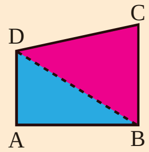
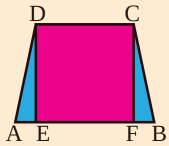
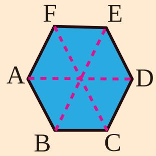
படம் 4.19

மேற்கண்ட உருவங்களிலிருந்து நீ எதை அறிந்து கொண்டாய்?

முதல் படம் (அ) இல் அரை வட்டத்தின் மேல் ஒரு முக்கோணம் வைக்கப்பட்டுள்ளது போல் தோன்றுகிறது. இரண்டாவது படம் (ஆ) இல் ஒரு சதுரத்தின் மேல் ஒரு சரிவகம் வைக்கப்பட்டுள்ளது போன்றுள்ளது.

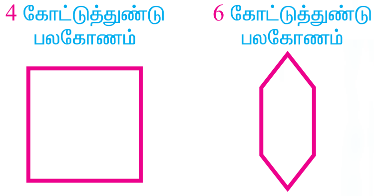
உருவங்களின் இணைப்பு நிலை (Juxtaposition) என்பது சில தள உருவங்களின் ஒன்றின் பக்க நீளத்தை மற்றொன்றின் ஒத்த பக்க நீளத்திற்குச் சமமாக அடுத்தடுத்து வைத்து உருவாகக்கப்படும் அமைப்பு ஆகும்.

இரண்டு அல்லது மூன்று உருவங்களை ஒன்றின் பக்கத்தில் மற்றொன்றை வைத்தால் புது உருவம் கிடைக்கிறது. இவை ‘கூட்டு உருவங்கள்’ எனப்படும். மேற்கண்ட உருவங்கள் முக்கோணம், செவ்வகம், அரைவட்டம் போன்ற சில தெரிந்த உருவங்களின் இணைப்பு நிலை ஆகும். இதற்கு சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போமா?

வ. எண்	தள உருவங்கள்	இணைப்பு நிலை
1.	இரண்டு அசம பக்க முக்கோணங்கள்	நாற்கரம் 
2.	இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் மற்றும் செவ்வகம்	சரிவகம் 
3.	ஆறு சம பக்க முக்கோணங்கள்	அறுங்கோணம் 

(அ) பலகோணம்

பலகோணம் (Polygon) என்பது '*n*' நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் வடிவமைக்கப்பட்ட மூடிய தள உருவமாகும்.



படம் 4.20

நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளை உள்ளடக்கிய தள உருவம் நேர்க்கோட்டு உருவம் ஆகும்.

மூன்று பக்கங்களை உள்ளடக்கிய நேர்க்கோட்டு உருவத்தை முக்கோணம் என்றும் நான்கு பக்கங்களை உள்ளடக்கிய நேர்க்கோட்டு உருவத்தை நாற்கரம் என்றும் அழைக்கிறோம்.

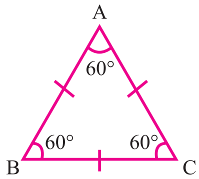
> பலகோணம் என்பது மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பக்கங்களைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டு உருவம் ஆகும்.

(ஆ) ஒழுங்கு பலகோணம்

பலகோணத்தின் பக்கங்களும் கோணங்களும் சமமாக இருப்பின், அது ஓர் ஒழுங்கு பலகோணம் (Regular Polygon) எனப்படும்.

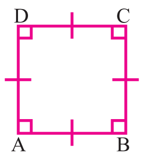
உதாரணமாக,

(i) சமபக்க முக்கோணமானது மூன்று பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணமாகும்.



படம் 4.21

(ii) சதுரம் நான்கு பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்கு பலகோணமாகும்.



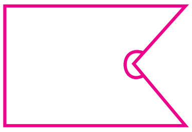
படம் 4.22

(இ) ஒழுங்கற்ற பலகோணம்

ஒழுங்கற்ற வடிவமைப்பில் உருவாகும் பலகோணங்கள் ஒழுங்கற்ற பலகோணம் எனப்படும்.

(ஈ) குழிவுப் பலகோணம்

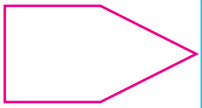
ஒரு பலகோணத்தில் குறைந்தபட்சம் ஒரு கோணமாவது 180°ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் அது குழிவுப் பலகோணம் எனப்படும்.



படம் 4.23

(உ) குவிந்த பலகோணம்

ஒரு பலகோணத்தில் ஒவ்வொரு உட்கோணமும் பலகோணத்தில் 180°ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் அது குவிந்த பலகோணம் எனப்படும்.

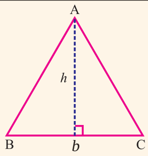
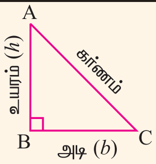
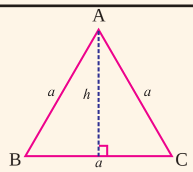
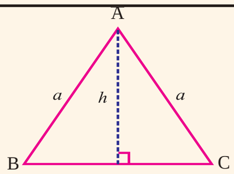
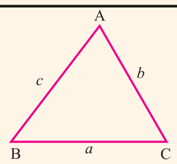
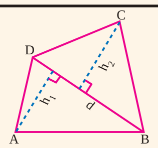
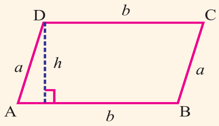
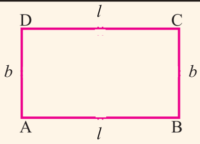
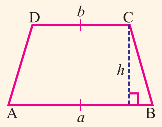
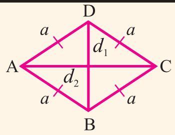
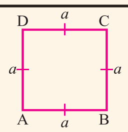


படம் 4.24

பலகோணங்கள் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தப்படும்.

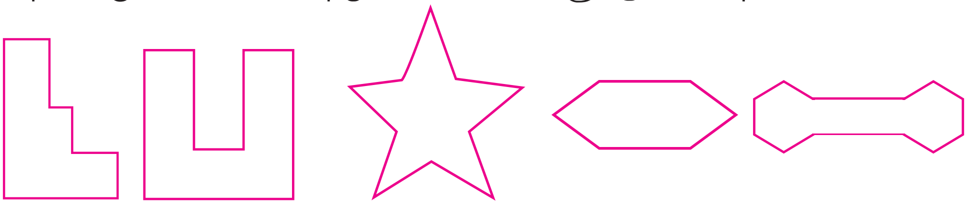
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	பலகோணத்தின் பெயர்
3	முக்கோணம்
4	நாற்கரம்
5	ஐங்கோணம்
6	அறுங்கோணம்
7	ஏழுகோணம்
8	எண்கோணம்
9	நவகோணம்
10	பதின்மக்கோணம்

பெரும்பான்மையான கூட்டுருவங்கள் ஒழுங்கற்ற பலகோணங்களாகும். நாம் இவற்றை அறிந்த தள உருவங்களாக பிரிப்பதன் மூலம் இவற்றின் சுற்றளவு, பரப்பளவு ஆகியவற்றை முந்தைய வகுப்பில் கற்ற சூத்திரங்களைக் கொண்டு கணக்கிடலாம். கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இவை வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

வ. எண்	உருவத்தின் பெயர்	உருவம்	பரப்பளவு (A) சதுர அலகுகள்	சுற்றளவு (P) அலகுகள்
1.	முக்கோணம்		$\frac{1}{2}\times b\times h$	AB + BC + CA
2.	செங்கோண முக்கோணம்		$\frac{1}{2}\times b\times h$	(அடி + உயரம் + கர்ணம்)
3.	சமபக்க முக்கோணம்		$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ($\sqrt{3}\simeq 1.732$)	AB+BC+CA = $3a$; செங்குத்து, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ அலகுகள்
4.	இரு சம பக்க முக்கோணம்		$h\times\sqrt{a^2-h^2}$	$2a+2\sqrt{a^2-h^2}$
5.	அசம பக்க முக்கோணம்		$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s=\frac{a+b+c}{2}$	AB + BC + CA $=(a+b+c)$
6.	நாற்கரம்		$\frac{1}{2}\times d\times(h_1+h_2)$	AB + BC + CD + DA
7.	இணைகரம்		$b\times h$	$2\times(a+b)$
8.	செவ்வகம்		$l\times b$	$2\times(l+b)$
9.	சரிவகம்		$\frac{1}{2}\times h\times(a+b)$	AB + BC + CD + DA
10.	சாய்சதுரம்		d_1, d_2 ஆகியன மூலை விட்டங்கள் எனில் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\times d_1\times d_2$	$4a$
11.	சதுரம்		a^2	$4a$

செய்து பார்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவங்களை உங்கள் விருப்பப்படி நீங்கள் அறிந்த தள உருவங்களாகப் பிரித்துப் பின்னர் உங்களுக்குள் விவாதிக்கவும்.

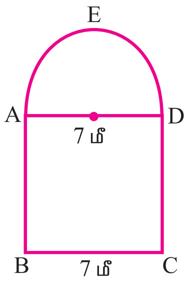


படம் 4.25

எடுத்துக்காட்டு 4.5

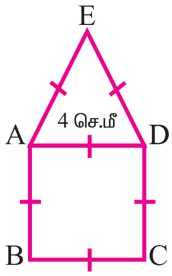
கீழ்க்கண்ட கூட்டு உருவங்களின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்க.

(i)



படம் 4.26

(ii)

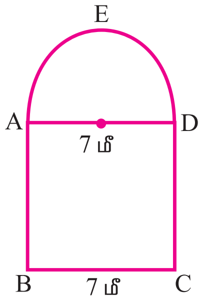


படம் 4.27

தீர்வு

(i) இது ABCD என்ற சதுரமும், DEA என்ற அரை வட்டமும் கொண்ட கூட்டு உருவமாகும்.

$\overset{\frown}{DEA}$ என்ற வில் AD ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பரிதியில் பாதியாகும்.



கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

சதுரத்தின் பக்கம் = 7 செ.மீ

∴ அரை வட்டத்தின் விட்டம் = 7 செ.மீ

∴ அரைவட்டத்தின் ஆரம், r = $\frac{7}{2}$ செ.மீ

கூட்டு உருவத்தின் சுற்றளவு = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overset{\frown}{DEA}$

$P = 7 + 7 + 7 + \frac{1}{2} \times$ (வட்டத்தின் பரிதி)

$= 21 + \frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= 21 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}$

$P = 21 + 11 = 32$ செ.மீ

∴ கூட்டு உருவத்தின் சுற்றளவு = 32 செ.மீ

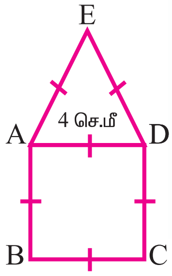
கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவு = அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு + சதுரத்தின் பரப்பளவு

$$A = \frac{\pi r^2}{2} + a^2$$

$$= \frac{22}{7 \times 2} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} + 7^2 = \frac{77}{4} + 49$$

∴ கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவு = 19.25 + 49 = 68.25 செ.மீ^{2}.

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுருவம் ABCD என்ற சதுரமும், ADE என்ற சம பக்க முக்கோணமும் கொண்டு உருவானது.



கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

சதுரத்தின் பக்கம் = 4 செ.மீ

∴ கூட்டு உருவத்தின் சுற்றளவு = AB + BC + CD + DE + EA

= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 செ.மீ

∴ கூட்டு உருவத்தின் சுற்றளவு = 20 செ.மீ

கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவு = சதுரத்தின் பரப்பளவு + சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad \sqrt{3} = 1.732$$

$$= 4 \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4$$

$$= 16 + 1.732 \times 4$$

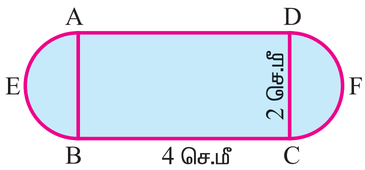
கூட்டு உருவத்தின் பரப்பளவு = 16 + 6.928 = 22.928

பரப்பளவு $\simeq$ 22. 93 செ.மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 4.6

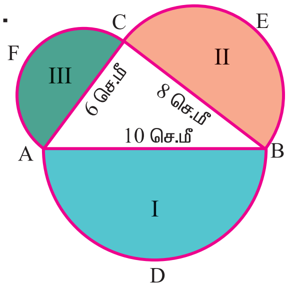
நிழலிட்ட பகுதியின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவு காண்க.

(i)



படம் 4.28

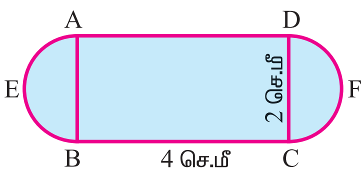
(ii)



படம் 4.29

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டு உருவம் ABCD என்ற செவ்வகம், AEB மற்றும் DFC ஆகிய இரு சமபரப்பு கொண்ட அரை வட்டங்கள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டது ஆகும்.



கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

செவ்வகத்தின் நீளம், l = 4 செ.மீ

செவ்வகத்தின் அகலம், b = 2 செ.மீ

அரைவட்டத்தின் விட்டம் = 2 செ.மீ

∴ அரைவட்டத்தின் ஆரம், r = $\frac{2}{2}$ = 1 செ.மீ

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தின் சுற்றளவு $= AD+BC+\widehat{AEB}+\widehat{DFC}$

$= 4+4+2\times\frac{1}{2}\times$ (வட்டத்தின் பரிதி)

$= 8+2\times\frac{1}{2}\times 2\pi r$

$= 8+2\times\frac{22}{7}\times 1$

$= 8+2\times 3.14$

$= 8+6.28$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட படத்தின் சுற்றளவு $=$ 14.28 செ.மீ

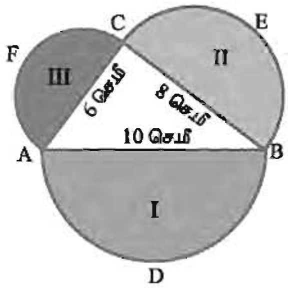
கொடுக்கப்பட்ட படத்தின் பரப்பளவு $=$ செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பு + 2 $\times$ அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு

$= l\times b+2\times\frac{\pi r^2}{2}$

$= 4\times 2+2\times\frac{22\times 1\times 1}{7\times 2}$

$\therefore$ மொத்தப் பரப்பளவு $= 8+3.14 = 11.14$ செ.மீ^{2}

(ii) ADB, BEC மற்றும் CFA ஆகிய மூன்றும் அரை வட்டங்கள் I, II மற்றும் III ஆகும்.



கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

அரைவட்டம் I-ன் ஆரம், $r_1 = \frac{10}{2} = 5$ செ.மீ

அரைவட்டம் II-ன் ஆரம், $r_2 = \frac{8}{2} = 4$ செ.மீ

அரைவட்டம் III-ன் ஆரம், $r_3 = \frac{6}{2} = 3$ செ.மீ

நிழலிட்ட பகுதியின் சுற்றளவு $=$ அரைவட்டம் I இன் சுற்றளவு + அரைவட்டம் II இன் சுற்றளவு + அரைவட்டம் III இன் சுற்றளவு

$= (\pi+2)\times 5+(\pi+2)\times 4+(\pi+2)\times 3$

$= (\pi+2)(5+4+3) = (\pi+2)\times 12$

$= \left(\frac{22+14}{7}\right)\times 12 = \frac{36}{7}\times 12 = 61.714$

நிழலிட்ட பகுதியின் சுற்றளவு $\simeq$ 61.71 செ.மீ

நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு, A $=$ அரைவட்டம் I இன் பரப்பளவு + அரைவட்டம் II இன் பரப்பளவு + அரைவட்டம் III இன் பரப்பளவு

$$A = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2}$$

$$= \frac{22}{7\times 2}\times 5\times 5 + \frac{22}{7\times 2}\times 4\times 4 + \frac{22}{7\times 2}\times 3\times 3$$

$$A = \frac{275}{7} + \frac{176}{7} + \frac{99}{7} = \frac{550}{7} = 78.571 \text{ செ.மீ}^2$$

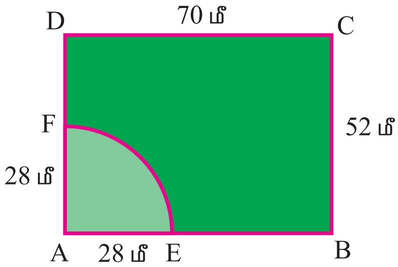
நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு $\simeq$ 78.57 செ.மீ^{2}

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில்,

அரைவட்டம் BEC இன் பரப்பளவு + அரைவட்டம் CFA இன் பரப்பளவு
= அரைவட்டம் ADB இன் பரப்பளவு

எடுத்துக்காட்டு 4.7

செவ்வக வடிவிலான 70 மீ × 52 மீ பரிமாணம் கொண்ட களத்தில் ஒரு மூலையில் ஒரு குதிரை மேய்வதற்காக 28 மீ கொண்ட கயிற்றினால் கட்டப்பட்டுள்ளது. குதிரை களத்தின் உட்புறமாக மேயும் பரப்பளவைக் காண்க. குதிரை மேயாத களத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 4.30

தீர்வு

செவ்வகத்தின் நீளம், l = 70 மீ

செவ்வகத்தின் அகலம், b = 52 மீ

கயிற்றின் நீளம் = 28 மீ

AEF என்ற நிழலிட்ட பகுதி குதிரை மேய்ந்த பரப்பைக் குறிக்கிறது. இப்பரப்பு கால் வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு ஆகும். இதன் ஆரம், r = 28 மீ.

கால் வட்டப் பகுதி AEF இன் பரப்பளவு = $\frac{1}{4}\times \pi r^2$ ச. அலகுகள்

$= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times 28\times 28$

= 616 மீ^{2}

∴ குதிரை மேய்ந்த பரப்பளவு = 616 மீ^{2}

குதிரை மேயாத பரப்பளவு = செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பளவு – கால் வட்டப் பகுதி AEF இன் பரப்பளவு

செவ்வகம் ABCD ன் பரப்பளவு = $l \times b$ ச. அலகுகள்

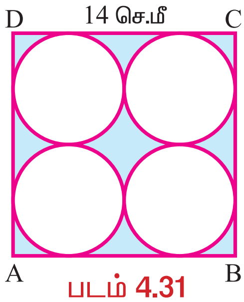
= 70 × 52 = 3640 மீ^{2}

∴ குதிரை மேயாத பரப்பளவு = 3640 – 616

= 3024 மீ^{2}.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் சதுரம் ABCD இன் பக்க அளவு 14 செ.மீ. நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 4.31

தீர்வு

சதுரத்தின் பக்கம், a = 14 செ.மீ

ஒவ்வொரு வட்டத்தின் ஆரம், r = $\frac{7}{2}$ செ.மீ

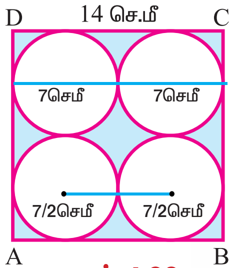
நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு = சதுரத்தின் பரப்பளவு – 4 × வட்டத்தின் பரப்பளவு

$= a^2 - 4(\pi r^2)$

$= 14 \times 14 - 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= 196 - 154$

∴ நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு = 42 செ.மீ^{2}.



படம் 4.32

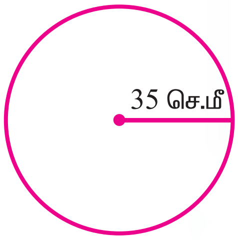
எடுத்துக்காட்டு 4.9

வட்ட வடிவிலான ஒரு தாமிரக் கம்பியின் ஆரம் 35 செ.மீ. இது ஒரு சதுர வடிவில் வளைக்கப்படுகிறது எனில், அச்சதுரத்தின் பக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

வட்டத்தின் ஆரம், r = 35 செ.மீ



படம் 4.33

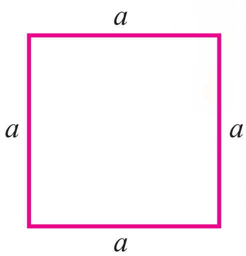
அதே கம்பியானது, சதுரமாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது.

வட்டத்தின் சுற்றளவு = சதுரத்தின் சுற்றளவு

வட்டத்தின் சுற்றளவு = $2\pi r$ அலகுகள்

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$ செ.மீ

P = 220 செ.மீ



படம் 4.34

'a' என்பது சதுரத்தின் பக்கம் என்க.

சதுரத்தின் சுற்றளவு = $4a$ அலகுகள்

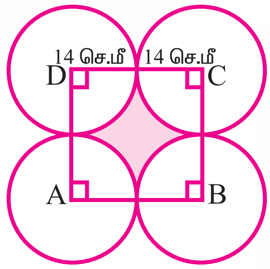
$4a$ = 220

a = 55 செ.மீ

∴ சதுரத்தின் பக்கம் = 55 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 4.10

பக்க அளவு 28 செ.மீ அளவுள்ள ஒரு சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளிலிருந்து ஒவ்வொரு வட்டமும் மற்ற இரண்டு வட்டங்களைத் தொடுமாறு நான்கு வட்டங்கள் படத்தில் உள்ளபடி வரையப்படுகின்றன எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 4.35

தீர்வு

ABCD என்ற சதுரத்தின் பக்கம் a என்க.

$\therefore a = 28$ செ.மீ

$\therefore$ ஒவ்வொரு வட்டத்தின் ஆரம், $r = \frac{28}{2}$

$= 14$ செ.மீ

நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு = சதுரத்தின் பரப்பளவு − 4 × கால் வட்டப் பகுதி

$= a^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$

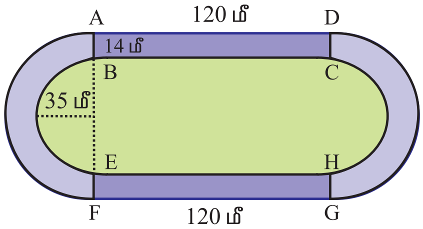
$= 28 \times 28 - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 784 - 616$

$\therefore$ நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவு = 168 செ.மீ^{2}.

எடுத்துக்காட்டு 4.11

14 மீ அகலமுள்ள ஓர் ஓடுதளப் பாதையானது 120 மீ நீளமுள்ள இரண்டு நேர்ப் பகுதிகளையும் உள் ஆரம் 35 மீ அளவுள்ள இரு அரை வட்டப் பகுதிகளையும் கொண்டுள்ளது. அந்த ஓடு பாதையின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.



படம் 4.36

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

உள் அரை வட்டத்தின் ஆரம், r = 35 மீ

ஓடு பாதையின் அகலம் = 14 மீ

$\therefore$ வெளி அரை வட்டத்தின் ஆரம், R = 35 + 14 = 49 மீ

R = 49 மீ

ஓடு பாதையின் பரப்பளவு, அரை வட்ட ஓடு பாதைகளின் பரப்பளவுகள் மற்றும் செவ்வக ஓடு பாதைகளின் பரப்பளவுகளின் கூடுதல் ஆகும்.

செவ்வக ஓடு பாதைகள் ABCD மற்றும் EFGH இன் பரப்பளவு = $2 \times (l \times b)$

$= 2 \times 14 \times 120 = 3360$ மீ^{2}

அரைவட்ட ஓடு பாதைகளின் பரப்பளவு = 2 × (வெளி அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு – உள் அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு)

$$= 2\times\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2\right)$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\times\pi(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7}\times(49^2 - 35^2)$$

$$= \frac{22}{7}(49+35)(49-35)$$

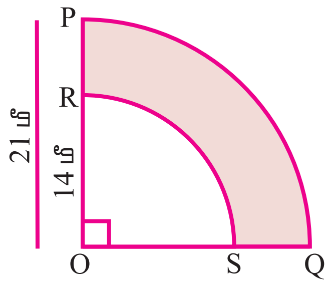
$$= \frac{22}{7}\times 84\times 14 = 3696 \text{ மீ}^2$$

∴ ஓடு பாதையின் பரப்பளவு = 3360 + 3696

= 7056 மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 4.12

படம் 4.37 இல் PQSR என்பது ஒரு மலர்ப்படுகையைக் குறிக்கிறது. OP = 21 மீ, எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 4.37

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

OP = 21 மீ மற்றும் OR = 14 மீ

∴ PR = OP – OR = 21 – 14 = 7 மீ

மலர்ப்படுகையின் பரப்பளவு = கால் வட்டப் பகுதி OQP இன் பரப்பளவு – கால்பட்டப் பகுதி OSR இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{4}\pi\times OP^2 - \frac{1}{4}\pi\times OR^2$$

$$= \frac{1}{4}\times\pi\times 21^2 - \frac{1}{4}\times\pi\times 14^2$$

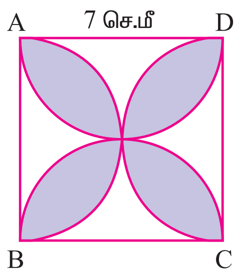
$$= \frac{1}{4}\times\pi\times(21^2 - 14^2)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times(21+14)\times(21-14)$$

∴ மலர்ப்படுகையின் பரப்பளவு $= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times 35\times 7 = 192.5$ மீ^{2}.

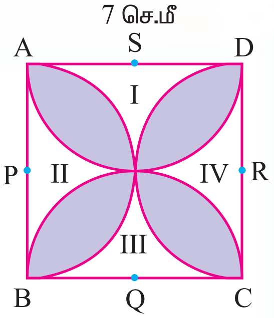
எடுத்துக்காட்டு 4.13

7 செ.மீ பக்க அளவுடைய ABCD என்ற சதுரத்தில் படம் 4.38 இல் காட்டியுள்ளபடி நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



படம் 4.38

தீர்வு



படம் 4.39

நிழலிடப்படாத பகுதிகளை I, II, III மற்றும் IV என படம் 4.39 இல் காட்டியுள்ளபடி எடுத்துக் கொள்ளவும்.

P, Q, R மற்றும் S என்பன AB, BC, CD மற்றும் DA இன் மையப் புள்ளிகள் எனலாம்.

சதுரத்தின் பக்கம், $a = 7$ செ.மீ

அரைவட்டத்தின் ஆரம், $r = \frac{7}{2}$ செ.மீ

I இன் பரப்பளவு + III இன் பரப்பளவு = சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு – P மற்றும் R ஐ மையமாகக் கொண்ட அரைவட்டங்களின் பரப்பளவு

$$= a^2 - 2\times\frac{1}{2}\times\pi r^2$$

$$= 7\times7-2\times\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}$$

$\therefore$ I இன் பரப்பளவு + III இன் பரப்பளவு = $\left(49-\frac{77}{2}\right)$ செ.மீ^{2} = $\frac{21}{2}$செ.மீ^{2}.

II ன் பரப்பளவு + IV ன் பரப்பளவு = $\left(49-\frac{77}{2}\right)$ செ.மீ^{2} = $\frac{21}{2}$செ.மீ^{2}.

நிழலிட்ட பகுதிகளின் பரப்பளவுகள் = சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு – (I, II, III மற்றும் IV இன் பரப்பளவு)

$$= 49-\left(\frac{21}{2}+\frac{21}{2}\right)$$

$$= 49 - 21 = 28 \text{ செ.மீ}^2$$

$\therefore$ நிழலிட்ட பகுதிகளின் பரப்பளவு = 28 செ.மீ^{2}.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

ஒரு நில அளவையாளர் ஒரு நிலத்தின் அளவுகளைப் பின்வருமாறு குறித்துள்ளார். நிலத்தின் பரப்பினைக் கண்டுபிடி.

	மீட்டரில்	
	D க்கு	
	20	
	15	C க்கு 10
E க்கு 9	12	
	10	B க்கு 6
F க்கு 7	5	
	Aஇல் இருந்து	

படம் 4.40

தீர்வு

A யிலிருந்து D வரை உள்ள நிலமளப்பவரின் குறிகள் J, K, L, M என்க.

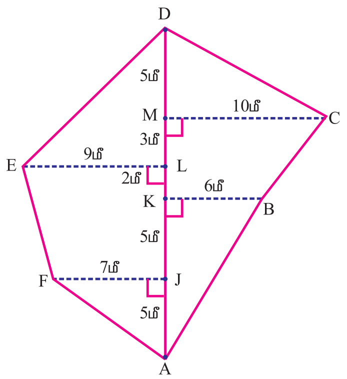
கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை:

AJ = 5 மீ , JF = 7 மீ,

KB = 6 மீ, LE = 9 மீ, MC = 10 மீ,

AK = 10 மீ, AL = 12 மீ,

AM = 15 மீ மற்றும் AD = 20 மீ.



கொடுக்கப்பட்ட நிலமானது சரிவகங்கள் KBCM, LEFJ மற்றும் செங்கோண முக்கோணங்கள் ABK, MCD, DEL மற்றும் JFA இவற்றின் தொகுப்பாகும்.

சரிவகம் KBCM இன் பரப்பளவு, A_1 என்க.

$$A_1 = \frac{1}{2}\times(KB+MC)\times KM$$
$$= \frac{1}{2}\times(6+10)\times 5$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\times 16\times 5 = 40 \text{ மீ}^2.$$

(∵ KB மற்றும் MC இணை பக்கங்கள், குத்துயரம் KM.
KB = 6 மீ, MC = 10 மீ,
KM = AM – AK
= 15 – 10 = 5 மீ)

சரிவகம் LEFJ இன் பரப்பளவு, A_2 என்க.

$$A_2 = \frac{1}{2}\times(JF+LE)\times JL$$
$$= \frac{1}{2}\times(7+9)\times 7$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\times 16\times 7 = 56 \text{ மீ}^2.$$

(∵ LE மற்றும் JF இணை பக்கங்கள், குத்துயரம் JL.
JF = 7 மீ, LE = 9 மீ,
JF = 7 மீ, LE = 9 மீ,
JL = AL – AJ
= 12 – 5 = 7 மீ)

செங்கோண முக்கோணம் ABK இன் பரப்பளவு, A_3 என்க.

$$A_3 = \frac{1}{2}\times AK\times KB$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\times 10\times 6 = 30 \text{ மீ}^2.$$

செங்கோண முக்கோணம் MCD இன் பரப்பளவு, A_4 என்க.

$$A_4 = \frac{1}{2}\times MC\times MD.$$
$$= \frac{1}{2}\times 10\times 5$$
$$A_4 = \frac{50}{2} = 25 \text{ மீ}^2.$$

செங்கோண முக்கோணம் DEL இன் பரப்பளவு, A_5 என்க.

$$A_5 = \frac{1}{2}\times DL\times LE$$
$$= \frac{1}{2}\times(AD-AL)\times LE$$
$$= \frac{1}{2}(20-12)\times 9$$
$$A_5 = \frac{1}{2}\times 8\times 9 = 36 \text{ மீ}^2.$$

செங்கோண முக்கோணம் JFA இன் பரப்பளவு, A_6 என்க.

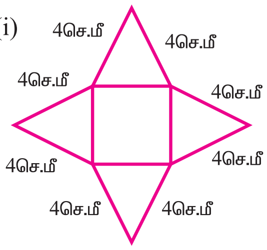
$$A_6 = \frac{1}{2}\times AJ\times JF$$
$$= \frac{1}{2}\times 5\times 7 = \frac{35}{2} = 17.5 \text{ மீ}^2.$$

நிலப்பகுதியின் பரப்பளவு $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$
$= 40 + 56 + 30 + 25 + 36 + 17.5$
$= 204.5 \text{ மீ}^2.$

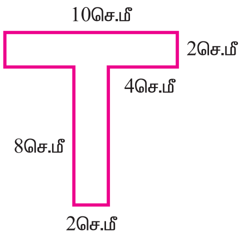
பயிற்சி 4.2

1. கீழ்க்கண்ட படங்களின் சுற்றளவைக் காண்க

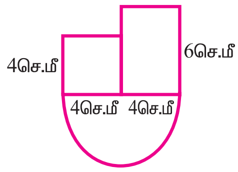
(i)



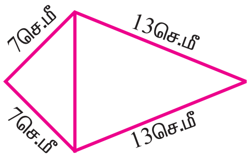
(ii)



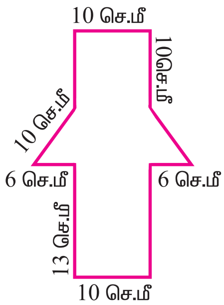
(iii)



(iv)

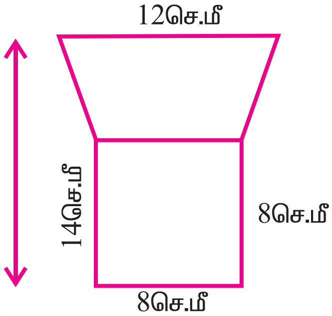


(v)

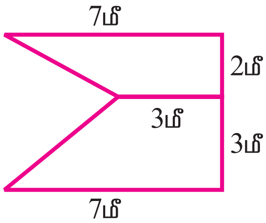


2. கீழ்க்கண்ட படங்களின் பரப்பளவைக் காண்க.

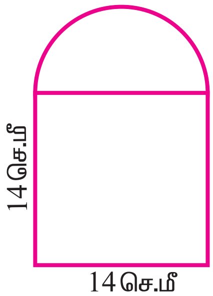
(i)



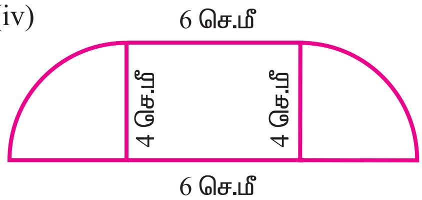
(ii)



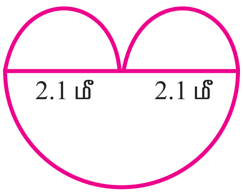
(iii)



(iv)

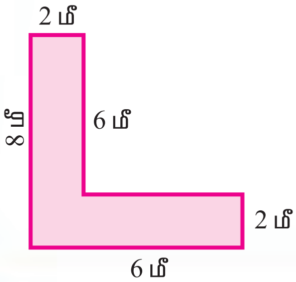


(v)

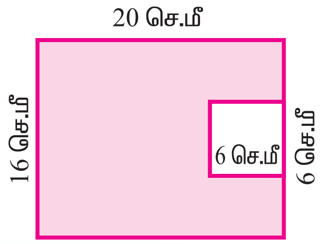


3. வண்ணமிட்ட பகுதிகளின் பரப்பளவைக் காண்க.

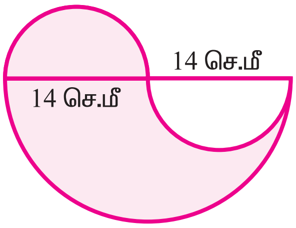
(i)



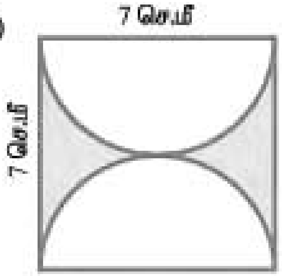
(ii)



(iii)

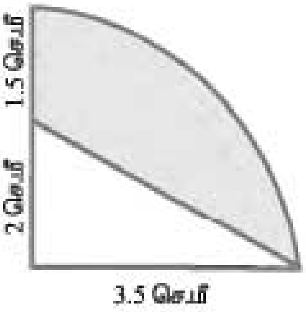


(iv)

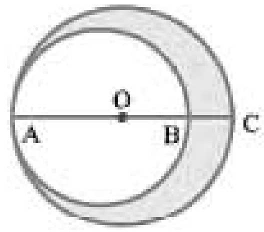


(v)

(vi)

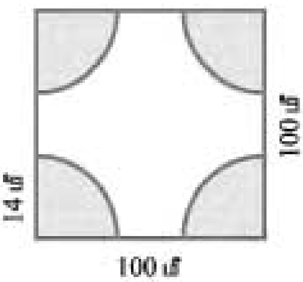


4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O என்பது பெரிய வட்டத்தின் மையம், AC = 54 செ.மீ, BC = 10 செ.மீ எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

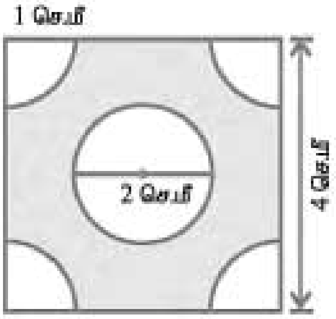


5. 40 மீ × 36 மீ அளவுகளையுடைய ஒரு செவ்வக வடிவ வயலின் ஒரு மூலையில் ஒரு பசு 14 மீ நீளமுள்ள கயிறு ஒன்றால் மேய்ச்சலுக்காக கட்டப்பட்டுள்ளது. பசு மேயாத பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

6. 100 மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவ பூங்கா ஒன்றின் ஒவ்வொரு மூலையிலும் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி 14 மீ ஆரமுள்ள கால் வட்ட வடிவிலான மலர்ப் படுகைகள் அமைந்துள்ளன. எஞ்சியுள்ள பூங்கா பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

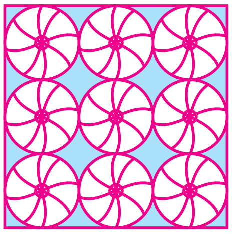


7. படத்தின் நான்கு மூலைகளும் கால் வட்டப் பகுதிகளாகும். அதன் மையத்தில் 2 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டம் உள்ளது. நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



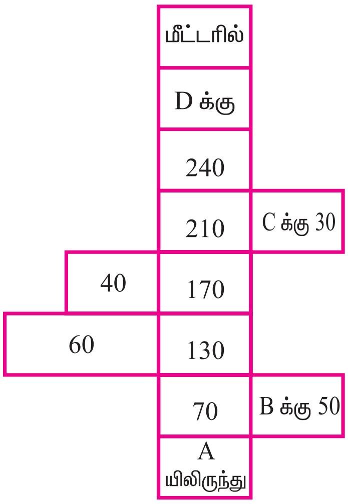
8. ABCD என்ற செவ்வக வடிவிலான ஒரு தாளின் அளவுகள் AB = 20 செ.மீ, BC = 14 செ.மீ என உள்ளன. BC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரை வட்டப்பகுதி அதிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக்காண்க.

9. ஒரு சதுர வடிவ கைக்குட்டையில், ஒன்பது வட்ட வடிவமைப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 7 செ.மீ ஆரமுள்ளதாகத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. வட்டப் பகுதிகளைத் தவிர்த்து கைக்குட்டையில் எஞ்சியுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

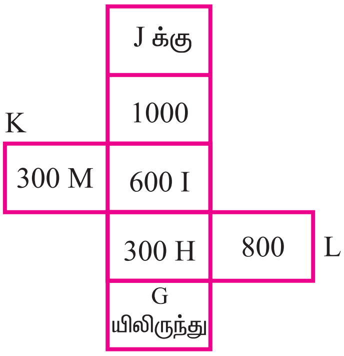


10. நில அளவையாளரின் நோட்டுப் புத்தகத்திலுள்ள பின்வரும் குறிப்புகளிலிருந்து உதவிப் படம் வரைந்து அவற்றின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

(i)



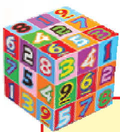
(ii)



செய்து பார்

உங்களால் எறும்புக்கு உதவ முடியுமா ?

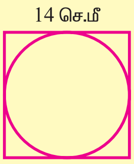
வெவ்வேறு வடிவங்களில் தரையில் சிதறிக் கிடக்கும் உணவுத் துண்டுகளைச் சுற்றி ஓர் எறும்பு ஊர்கின்றது. அது எந்த உணவுத் துண்டைச் சுற்றி வரும்போது மிகக் குறுகிய மற்றும் மிக நீண்ட சுற்று எடுக்க நேரும்?



முயற்சி செய்

எது சிறியது?

சதுரத்தின் சுற்றளவு அல்லது சதுரம் உள்ளடக்கிய வட்டத்தின் சுற்றளவு?



கருத்துச் சுருக்கம்

- வட்டத்தின் மையக் கோணம் 360° ஆகும்.
- அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு $= (\pi + 2) \times r$ அலகுகள்.
- அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு $= \frac{\pi r^2}{2}$ ச.அலகுகள்.
- அரைவட்டத்தின் மையக் கோணம் 180° ஆகும்.
- கால் வட்டத்தின் சுற்றளவு $= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \times r$ அலகுகள்.
- கால் வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \frac{\pi r^2}{4}$ ச. அலகுகள்.
- கால் வட்டத்தின் மையக் கோணம் 90° ஆகும்.
- கூட்டு உருவத்தின் சுற்றளவு அதன் எல்லையின் நீளம் ஆகும்.
- பலகோணம் என்பது 'n' நேர் கோட்டுத் துண்டுகளால் வடிவமைக்கப்பட்ட மூடிய தள உருவமாகும்.
- பலகோணத்தின் பக்கங்களும் கோணங்களும் சமமாக இருப்பின் அப்பலகோணம் ஓர் ஒழுங்கு பலகோணம் ஆகும்.
- பெரும்பான்மையான கூட்டு உருவங்கள் ஒழுங்கற்ற பலகோணங்களாகும். இவற்றை தெரிந்த தள உருவங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

வடிவியல்

5

5.1 அறிமுகம்

5.2 முக்கோணத்தின் பண்புகள்

5.3 சர்வசம முக்கோணங்கள்

5.4 முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்

5.5 பிதாகரஸ் தேற்றம்

5.6 வட்டங்கள்

5.1 அறிமுகம்

வடிவியலைக் கிறிஸ்து பிறப்பதற்கு 1000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே எகிப்தியர்கள் உருவாக்கிப் பயன்படுத்தி உள்ளனர். அவர்கள் தங்களின் நிலங்களை நைல் நதியின் வெள்ளத்திற்குப் பின் அடையாளம் காண வடிவியலைப் பயன்படுத்தினர். கிரேக்கர்கள் வடிவியலில் தேவையான அடிப்படைக் கோட்பாடுகளை உருவாக்கித் தர்க்க ரீதியான பல நிரூபணங்களைக் கண்டறிந்தனர்.

வடிவியல் நம் தினசரி வாழ்வில் பல இடங்களில் முக்கியமாகப் பங்காற்றுகிறது. உதாரணமாகக் கோள வடிவப் பந்துகள், அறுகோண வடிவத் தேன் கூடு, செவ்வக வடிவ நீர்த்தேக்கத் தொட்டிகள் மற்றும் உருளை வடிவக் கிணறுகள் உட்படப் பலவற்றை நம் வாழ்வில் காணலாம். வடிவியலின் நடைமுறைப் பயன்பாட்டிற்கு மிகச் சிறந்த உதாரணமாக எகிப்தியர்களின் பிரமிடுகள் திகழுகின்றன. மேலும் வெவ்வேறு துறைகளில் வடிவியலின் எண்ணிலடங்கா செய்முறைப் பயன்பாடுகள் உள்ளன. அவற்றில் சில இயற்பியல், வேதியியல், வடிவமைப்பியல், கட்டிடக்கலையியல், பொறியியல் மற்றும் தடயவியல் ஆகும்.

கிரேக்க மொழிச் சொல்லான ஜியோ (பூமி), மெட்ரி (அளவீடு)இல் இருந்து வடிவியல் எனும் பொருள் கொண்ட ஜியோமெட்ரி பெறப்பட்டது, கணிதத்தின் ஒரு பிரிவான வடிவியல், பொருட்களின் வடிவம், அளவு, நிலை மற்றும் பிற பண்புகளைப் பற்றி அறிவதாகும்,

நாம் ஏழாம் வகுப்பில் இணைகோடுகள், குறுக்கு வெட்டிகள், கோணங்கள், ஒத்த மற்றும் ஒன்று விட்ட கோணங்கள் ஆகியவற்றைப் பற்றிப் படித்துள்ளோம். மேலும் முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பினைப் பற்றியும் படித்துள்ளோம்.

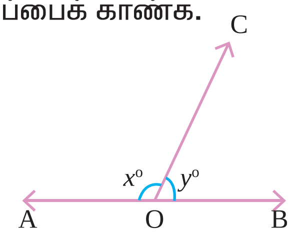
யூக்ளிட்
வடிவியலின் தந்தை

"மாபெரும் கணித மேதை யூக்ளிட் வடிவியலில் தர்க்க அடிப்படையிலான சிந்தனைக்கு வித்திட்டவராவார். யூக்ளிட் கிறிஸ்து பிறப்பதற்கு 300 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே வடிவியல் பற்றிய பல்வேறு தகவல்களைத் திரட்டி 13 புத்தகங்களாக வெளியிட்டுள்ளார். இப்புத்தகங்கள் யூக்ளிட் எலமன்ட்ஸ் என்று அழைக்கப் படுகிறது. யூக்ளிட், 'முழுமை அதன் எந்த பகுதிகளை விடவும் பெரியதாகும்' என்றார்.

இவற்றைக் கீழ்க்காணும் பயிற்சி மூலம் நினைவு கூர்வோம்.

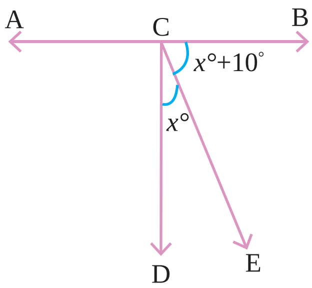
திருப்புதல் பயிற்சி

1. படம் 5.1 இல், $x° = 128°$ எனில் $y°$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 5.1

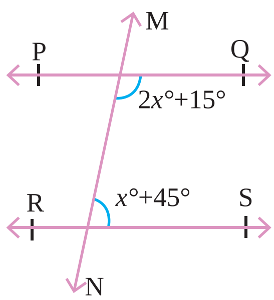
2. படம் 5.2 இல், $\angle ACD = 90°$ எனில் $\angle BCE$ மற்றும் $\angle ECD$ஐக் காண்க.



படம் 5.2

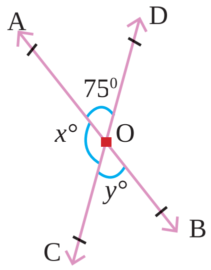
3. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் 43° மற்றும் 27° எனில் மூன்றாவது கோணத்தைக் காண்க.

4. படம் 5.3 இல், PQ || RS எனில். $x°$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



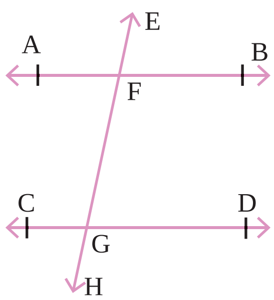
படம் 5.3

5. படம் 5.4 இல், AB மற்றும் CD எனும் கோடுகள் ‘O’ எனும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $x°$, $y°$ இன் மதிப்புகளைக் காண்க.



படம் 5.4

6. படம் 5.5 இல், AB || CD எனில் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.



படம் 5.5

(i) $\angle EFB$ மற்றும் $\angle FGD$ ஆகியன .... கோணங்கள்.

(ii) $\angle AFG$ மற்றும் $\angle FGD$ ஆகியன .... கோணங்கள்.

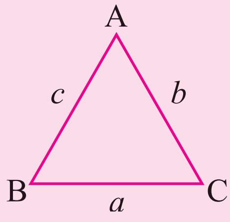
(iii) $\angle AFE$ மற்றும் $\angle FGC$ ஆகியன .... கோணங்கள்.

5.2 முக்கோணத்தின் பண்புகள்

ஒரு தளத்தில் மூன்று கோட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் உருவம் முக்கோணம் ஆகும்.

இதனை ‘Δ’ என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

முக்கோணம் ABC இல், உச்சிகள் A, B, C க்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் முறையே a, b, c என்று குறிப்பிடப்படும்.



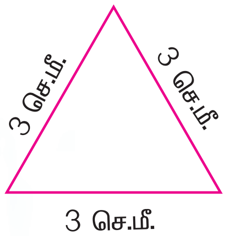
படம் 5.6

5.2.1 முக்கோணத்தின் வகைகள்

முக்கோணங்கள் அவற்றின் பக்கங்கள், கோணங்கள் ஆகியவற்றைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தப்படுகின்றன.

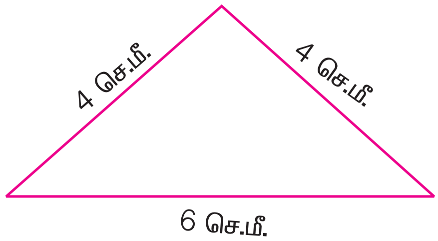
பக்கங்களைப் பொறுத்து:

(அ) சமபக்க முக்கோணம்



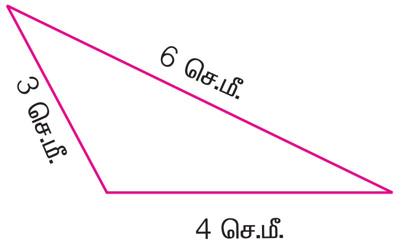
மூன்று பக்கங்களும் சமம்

(ஆ) இரு சமபக்க முக்கோணம்



இரு பக்கங்கள் சமம்

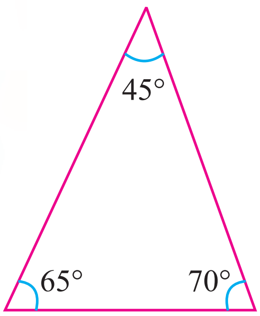
(இ) அசமபக்க முக்கோணம்



அனைத்து பக்கங்களும் வெவ்வேறானவை

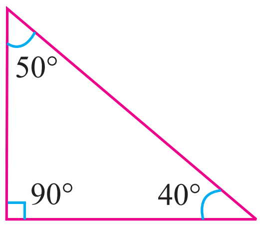
கோணங்களைப் பொறுத்து:

(ஈ) குறுங்கோண முக்கோணம்



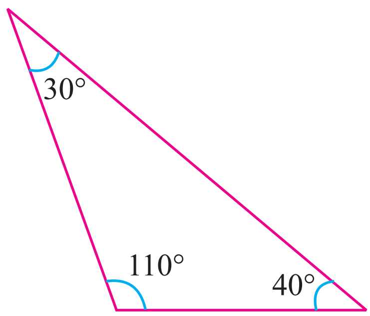
மூன்றும் குறுங்கோணங்கள்

(உ) செங்கோண முக்கோணம்



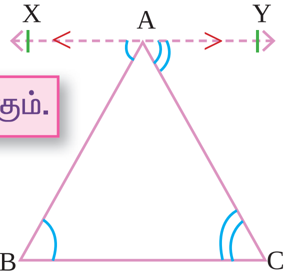
ஒரு செங்கோணம்

(ஊ) விரிகோண முக்கோணம்



ஒரு விரிகோணம்

5.2.2 முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பு



படம் 5.7

தேற்றம் 1

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

தரவு : ABC ஒரு முக்கோணம்.

நிறுவ வேண்டியது : $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^{o}$

அமைப்பு : BC க்கு இணையாக A வழியே XY ஐ வரைக.

நிரூபணம் :

கூற்று	காரணம்
(i) BC ∥ XY , AB ஒரு குறுக்குவெட்டி $\therefore \angle ABC = \angle XAB$	ஒன்று விட்ட கோணங்கள்.
(ii) $\angle BCA = \angle YAC$	ஒன்று விட்ட கோணங்கள்.
(iii) $\angle ABC + \angle BCA = \angle XAB + \angle YAC$	(i), (ii) ஐக் கூட்ட
(iv) $(\angle ABC + \angle BCA) + \angle CAB = (\angle XAB + \angle YAC) + \angle CAB$	இருபுறமும் ∠CAB ஐக் கூட்ட.
(v) $\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$	நேர்க்கோணம்.

எனவே, முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180° என நிறுவப்பட்டது.

முடிவுகள்

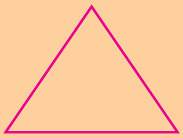
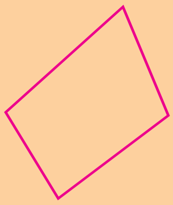
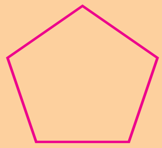
(i) மூன்று பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணம் முக்கோணம் ஆகும்.

(ii) எந்த ஒரு பலகோணமும் அவற்றின் மூலை விட்டங்களை இணைக்கும்போது பல முக்கோணங்களாகப் பகுக்கப்படுகிறது.

(iii) பலகோணத்தில் உட்கோணங்களில் கூடுதல் = $(n - 2)$ 180°.

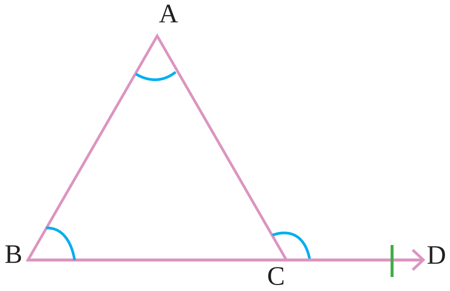
இங்கு, n என்பது பக்கங்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

உதாரணம்

படம்			
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	3	4	5
வகைப்பாடு	முக்கோணம்	நாற்கரம்	ஐங்கரம்
கோணங்களின் கூடுதல்	(3 – 2) 180° = 180°	(4 – 2)180° = 360°	(5 – 2) 180° = 540°

தேற்றம் 2

> முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை நீட்டினால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணமானது அதன் உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.



படம் 5.8

தரவு : ABC ஒரு முக்கோணம்.

BC ஆனது D வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.

நிறுவ வேண்டியது : $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

நிரூபணம் :

கூற்று	காரணம்
(i) ΔABC இல், $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$	முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்.
(ii) $\angle BCA + \angle ACD = 180^0$	நேர்க்கோணம்
(iii) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BCA + \angle ACD$	(i), (ii) இலிருந்து
(iv) $\therefore \angle ABC + \angle CAB = \angle ACD$	(iii) இல் இருபுறமும் $\angle BCA$ ஐக் கொண்டு கழிக்க.
(v) வெளிக்கோணம் $\angle ACD$, உள்ளெதிர்க் கோணங்கள் $\angle ABC$, $\angle CAB$ ஆகியவற்றின் கூடுதலுக்குச் சமம்	நிறுவப்பட்டது.

முடிவுகள்

(i) ஒரு முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தில் நீண்ட பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் பெரியது.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

முக்கோணம் ΔABC இல், $\angle A = 75^\circ, \angle B = 65^\circ$ எனில் $\angle C$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

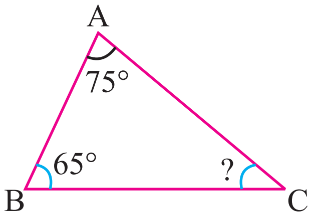
ΔABC இல் $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$75^\circ + 65^\circ + \angle C = 180^\circ$

$140^\circ + \angle C = 180^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 140^\circ$

$\therefore \angle C = 40^\circ.$



படம் 5.9

எடுத்துக்காட்டு 5.2

ΔABC இல், $\angle A = 70^\circ$ மற்றும் AB = AC எனில் மற்ற கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு

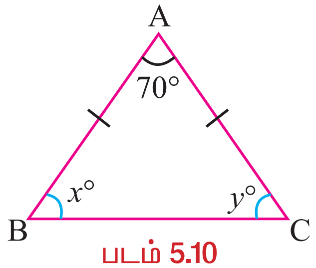
$\angle B = x^\circ$ மற்றும் $\angle C = y^\circ$ என்க.

ΔABC, ஒரு இரு சம பக்க முக்கோணம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $AC = AB$

$\angle B = \angle C$ [சம பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்]

$x^o = y^o$



படம் 5.10

ΔABCஇல், $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$70^o + x^o + y^o = 180°$

$70^o + x^o + x^o = 180°$ $[\because x° = y°]$

$2x° = 180° - 70°$

$2x° = 110°$

$x° = \frac{110^o}{2} = 55°$.

எனவே $\angle B = 55°$ மற்றும் $\angle C = 55°$.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் விகிதங்கள் 5 : 4 : 3 எனில் கோண அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

ΔABC இல், $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 4 : 3$

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் கோணங்களை $5x°$, $4x°$ மற்றும் $3x°$ என்க.

முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

எனவே, $5x° + 4x° + 3x° = 180° \Rightarrow 12x° = 180°$

$x° = \frac{180^0}{12} = 15°$

எனவே, முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள் 75°, 60° மற்றும் 45° ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

படம் 5.11 இல் முக்கோணம் ABC இன் கோணங்களைக் காண்க.

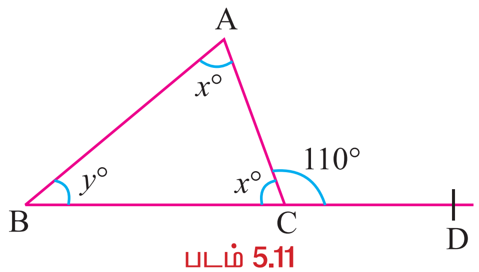
தீர்வு

BD ஒரு நேர்க்கோடு. நேர்க்கோட்டில் அமையும் கோணம் 180° ஆகும்

எனவே, $x° + 110° = 180°$

$x° = 180° - 110°$

$x° = 70°$



படம் 5.11

ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

எனவே, $x° + y° = 110°$

$70° + y° = 110°$

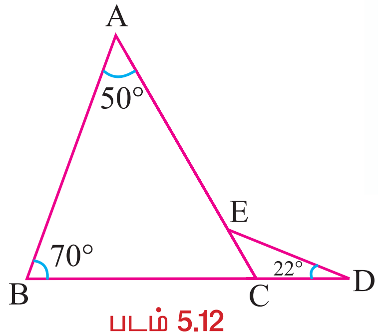
$$y^\circ = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

ஆகவே, $x^\circ = 70^\circ$

மற்றும் $y^\circ = 40^\circ$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

படம் 5.12 இல், $\angle DEC$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 5.12

தீர்வு

ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

ΔABCல், $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

$\therefore \angle ACD = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$

எனவே, $\angle ACD = \angle ECD = 120^\circ$.

ΔECDல்,

$$\angle ECD + \angle CDE + \angle DEC = 180^0$$

(முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல்)

$$120^0 + 22^0 + \angle DEC = 180^0$$

$$\angle DEC = 180^\circ - 142^\circ$$

$$\angle DEC = 38^\circ$$

செய்து பார்

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 மற்றும் T_6 என்ற ஆறு வகையான முக்கோணங்களையும் வரைக. ஒவ்வொன்றையும் ABC எனப் பெயரிடுக. உச்சி A,B,Cக்கு எதிரேயுள்ளப் பக்கங்களை முறையே a, b, c எனக் கொள்க.

பக்கங்களை அளந்து அட்டவணையை நிரப்புக.

Δ இன் வரிசை எண்	a (செ.மீ)	b (செ.மீ)	c (செ.மீ)	$(c+a) > b$ சரியா / தவறா	$(a+b) > c$ சரியா / தவறா	$(b+c) > a$ சரியா / தவறா
T_1						
T_2						
T_3						
T_4						
T_5						
T_6						

அட்டவணையிலிருந்து நீ என்ன அறிகிறாய்?

தேற்றம் 3 முக்கோணத்தின் சமனின்மைப் பண்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்க அளவுகளின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்க அளவை விட அதிகமாகும்.

சரிபார்த்தல் :

முக்கோணம் ABC இல், BC = 12 செ.மீ., AB = 8 செ.மீ., AC = 9 செ.மீ. எனக் கொள்வோம்.

(i) AB = 8 செ.மீ., BC + CA = 21 செ.மீ.

(ii) BC = 12 செ.மீ., CA + AB = 17 செ.மீ.

(iii) CA = 9 செ.மீ., AB + BC = 20 செ.மீ.

மேலும்,

(i) AB + BC > CA

(ii) BC + CA > AB

(iii) CA + AB > BC

எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்க அளவுகளின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்க அளவை விட அதிகம் என அறியப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு **5.6**

கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகும்**?**

(i) 23செ.மீ., 17 செ.மீ., 8செ.மீ. (ii) 12செ.மீ., 10செ.மீ., 25செ.மீ.

(iii) 9செ.மீ., 7செ.மீ., 16செ.மீ.

தீர்வு

(i) தரப்பட்டுள்ள பக்க நீளங்கள் 23செ.மீ., 17செ.மீ., 8செ.மீ. ஆகும்.

23 + 17 > 8, 17 + 8 > 23 மற்றும் 23 + 8 > 17.

∴ 23 செ.மீ., 17 செ.மீ., 8 செ.மீ.

ஆகியன முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளாகும்.

(ii) தரப்பட்டுள்ள பக்க நீளங்கள் 12செ.மீ., 10செ.மீ., 25செ.மீ. ஆகும்.

இங்கு 12 + 10 என்பது 25ஐ விட பெரியதல்ல. அதாவது $12 + 10 \ngtr 25$

∴ 12செ.மீ., 10செ.மீ., 25செ.மீ.. ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்காது.

(iii) தரப்பட்டுள்ள பக்க அளவுகள் 9செ.மீ., 7செ.மீ., 16செ.மீ. ஆகும்.

இங்கு 9 + 7 என்பது 16ஐ விட பெரியதல்ல.

அதாவது $9 + 7 = 16,\ 9 + 7 \ngtr 16$

∴ 9செ.மீ., 7செ.மீ., 16செ.மீ. ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்காது.

முடிவுகள்

(i)	$c + a > b$	$\Longrightarrow$	$b < c + a$	$\Longrightarrow$	$b - c < a$
(ii)	$b + c > a$	$\Longrightarrow$	$a < b + c$	$\Longrightarrow$	$a - b < c$
(iii)	$a + b > c$	$\Longrightarrow$	$c < a + b$	$\Longrightarrow$	$c - a < b$

மேற்கண்ட முடிவிலிருந்து, ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதாவது இரு பக்க அளவுகளின் வித்தியாசம் மூன்றாவது பக்க அளவைவிடக் குறைவாக இருக்கும்.

பயிற்சி 5.1

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை முக்கோணத்தின் கோணங்களாக அமையும்?

(A) $35°, 45°, 90°$ (B) $26°, 58°, 96°$ (C) $38°, 56°, 96°$ (D) $30°, 55°, 90°$

(ii) கீழ்க்கண்டவற்றில் எது சரியான கூற்று?

(A) சமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் சமம்.

(B) இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் சமம்.

(C) மூன்று சம கோணங்களைக் கொண்ட முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

(D) அசமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் சமம்.

(iii) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு வெளிக்கோணங்கள் $130°$, $140°$ எனில் மூன்றாவது வெளிக்கோணம் ....

(A) $90°$ (B) $100°$ (C) $110°$ (D) $120°$

(iv) கீழ்க்காணும் பக்க அளவுகளில் எது முக்கோணத்தை அமைக்கும்?

(A) 11 செ.மீ., 4 செ.மீ., 6 செ.மீ. (B) 13 செ.மீ., 14 செ.மீ., 25 செ.மீ.

(C) 8 செ.மீ., 4 செ.மீ., 3 செ.மீ. (D) 5 செ.மீ., 16 செ.மீ., 5 செ.மீ.

(v) கீழ்க்காணும் கோண அளவுகளில் எது செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்?

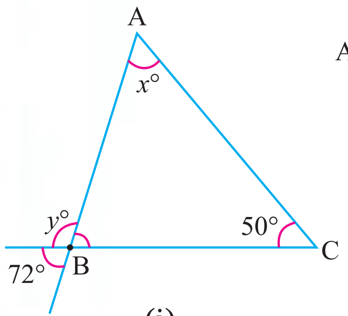
(A) $24°, 66°$ (B) $36°, 64°$ (C) $62°, 48°$ (D) $68°, 32°$

2. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள் $(x-35)°$, $(x-20)°$ மற்றும் $(x+40)°$ எனில் அம்முக்னோணத்தின் கோண அளவுகளைக் காண்க.

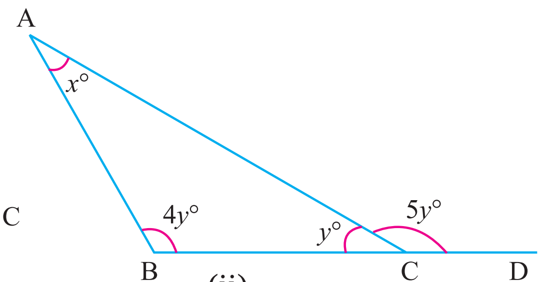
3. ΔABC இல் $\angle A$ ஆனது $\angle B$ ஐ விட $24°$ அதிகம். மேலும் $\angle C$ இன் வெளிக்கோணம் $108°$ எனில் ΔABC இன் கோணங்களைக் காண்க.

4. ΔABC இல் $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ இன் இரு சமவெட்டிகள் O வில் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle BOC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$ என நிறுவுக.

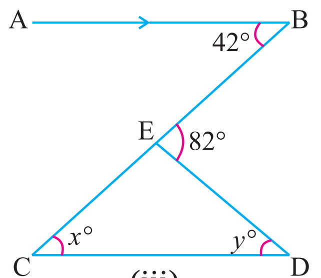
5. கீழ்க்காணும் முக்கோணங்களில் $x°$ மற்றும் $y°$ இன் மதிப்புகளைக் காண்க:



(i)



(ii)



(iii)

6. படத்திலிருந்து $x°$, $y°$ மற்றும் $z°$ இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

5.3 சர்வசம முக்கோணங்கள்

நாம் சர்வசமம் என்கிற வடிவியல் தன்மையைப் பற்றிக் காண்போம்.

சர்வசமத் தன்மையைப் புரிந்து கொள்ளக் கீழ்க்காணும் செயலைச் செய்வோம்.

செய்து பார்

இரு பத்து ரூபாய்த் தாள்களை எடுத்துக்கொள். ஒன்றின் மீது மற்றொன்றை வை. என்ன அறிகிறாய்?

ஒன்று மற்றொன்றை முழுவதுமாகவும் சரியாகவும் மறைக்கின்றது.

மேற்கண்ட செயலின் மூலம் உருவங்கள் ஒரே வடிவமும் அளவும் கொண்டுள்ளன என அறிகிறோம்.

பொதுவாக, இரண்டு உருவங்கள் ஒரே வடிவமும் அளவும் கொண்டிருந்தால் அவை சர்வசமம் எனலாம்.

செய்து பார்

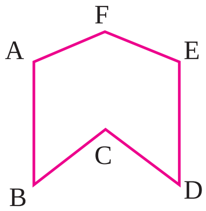
கீழ்க்காணும் பொருட்களில் எவை சர்வசமத் தன்மை உடையவை எனக் காண்க.

அ) ஒரே மதிப்புடைய அஞ்சல் வில்லைகள்

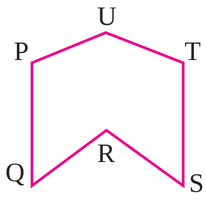
ஆ) ஒரே பாக்கெட்டில் உள்ள பிஸ்கட்டுகள்

இ) ஒரே பாக்கெட்டில் உள்ள சவர பிளேடுகள்

கீழ்க்காணும் தள உருவங்களைக் கருத்தில் கொள்வோம்.



படம் 5.13



படம் 5.14

இவை இரண்டும் சர்வசமமா என்பதை எப்படி அறிவது?

நாம் ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருத்தும் முறை மூலம் அறியலாம்.

படி 1 : மை அச்சுத்தாளை பயன்படுத்தி படம் 5.13 ஐ படி எடுக்கவும்.

படி 2 : படி எடுத்த படத்தை படம் 5.14 இன் மீது வளைக்காமலும், மடிக்காமலும் மற்றும் நீட்டாமலும் பொருத்தவும்.

படி 3 : ஒன்று மற்றொன்றின் மீது சரியாகப் பொருந்துகிறது.

எனவே, இவ்விரு தள உருவங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.

சர்வசமம்: இரு தள உருவங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்று சரியாகப் பொருந்தினால் அவை சர்வசமம் எனப்படும். இதை '≡' என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிக்கலாம்.

5.3.1 (அ) சர்வசம நேர்கோடுகள்

இரு கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளம் சமம் எனில் அவை சர்வசமம் ஆகும்.

இங்கு, AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் நீளம், CD என்ற கோட்டுத்துண்டின் நீளத்திற்குச் சமம். எனவே, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

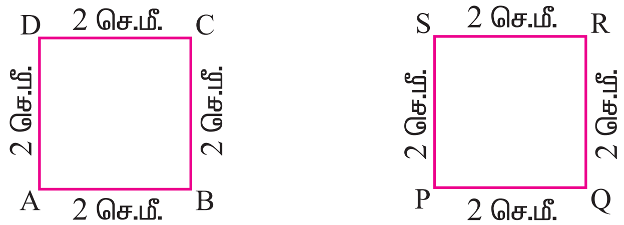
(ஆ) சர்வசமக் கோணங்கள்

சம கோண அளவுள்ள இருகோணங்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

இங்கு கோண அளவுகள் சமம். எனவே, $\angle MON \equiv \angle PQR$.

(இ) சர்வசமச் சதுரங்கள்

சம பக்க அளவுடைய சதுரங்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

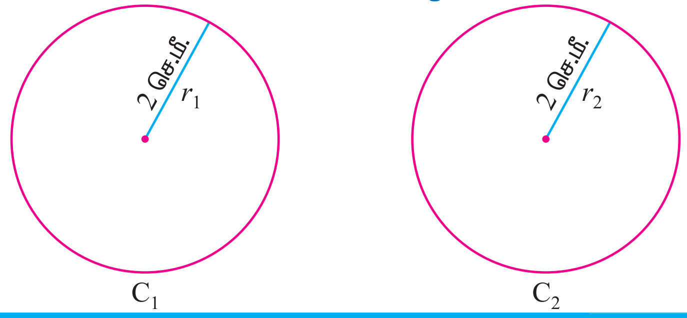


இங்கு, சதுரம் ABCD இன் பக்க அளவுகள், சதுரம் PQRS இன் பக்க அளவுகளுக்குச் சமம்.

எனவே, சதுரம் ABCD ≡ சதுரம் PQRS

(ஈ) சர்வசம வட்டங்கள்

சம ஆர அளவுடைய வட்டங்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

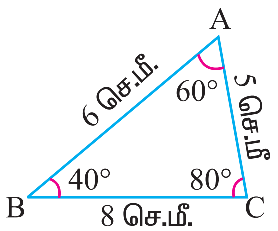


வட்டம் C_1 இன் ஆரம், வட்டம் C_2 இன் ஆரத்திற்குச் சமம்.

$\therefore$ வட்டம் $C_1 \equiv$ வட்டம் C_2

மேற்கூறிய நான்கு சர்வசமத் தன்மைகளும் நம்மை **சர்வசம முக்கோணம்** பற்றி அறியத் தூண்டுகிறது.

கீழ்க்காணும் இரு முக்கோணங்களைக் கருதுவோம்.



இப்பொழுது ΔABC ஐ ΔPQR இன் மீது பொருத்தும் போது உச்சி A உச்சி P இன் மீதும், உச்சி B உச்சி Q இன் மீதும், உச்சி C உச்சி R இன் மீதும் சரியாக பொருந்துகிறது. மேலும் ஒத்த பக்கங்கள் மற்றும் ஒத்த கோணங்கள் மிகச் சரியாகப் பொருந்துகிறது.

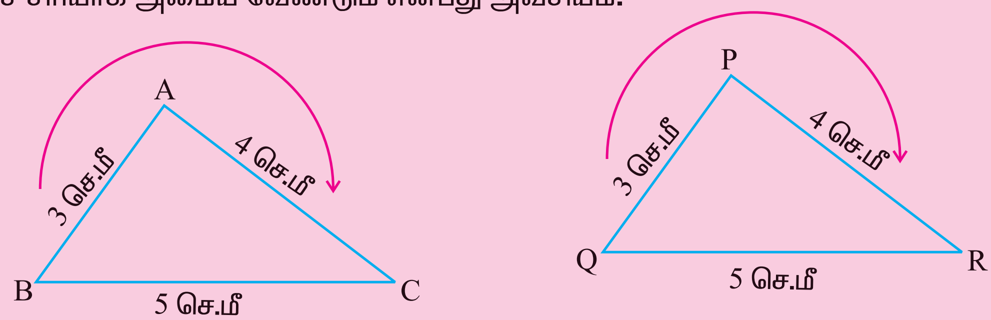
ΔABC, ΔPQR இன் ஒத்த பகுதிகளை கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

ஒத்த உச்சிகள்	ஒத்த பக்கங்கள்	ஒத்த கோணங்கள்
$A \longleftrightarrow P$	$AB = PQ$	$\angle A = \angle P$
$B \longleftrightarrow Q$	$BC = QR$	$\angle B = \angle Q$
$C \longleftrightarrow R$	$CA = RP$	$\angle C = \angle R$

5.3.2 சர்வசம முக்கோணங்கள்

இரு முக்கோணங்களில் ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் முறையே மற்றொன்றின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் மூன்று கோணங்களுக்கும் சமம் எனில் அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

குறிப்பு: இரு முக்கோணங்களின் சர்வசமத் தன்மையைக் குறிக்கும்பொழுது, உச்சிகளின் வரிசை சரியாக அமைய வேண்டும் என்பது அவசியம்.



$\Delta ABC \equiv \Delta PQR$ என்பதனை $\Delta BAC \equiv \Delta QPR$, $\Delta CBA \equiv \Delta RQP$ எனவும் எழுதலாம். கடிகாரமுள் சுற்றுவதன் எதிர்த் திசை வரிசையிலும் அதன் உச்சிகளை எழுதலாம்.

5.3.3 முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருக்க நிபந்தனைகள்

இரு முக்கோணங்கள் சர்வசமம் எனில் அதன் ஆறு சோடி ஒத்த பகுதிகள் (மூன்று சோடி பக்க அளவுகளும், மூன்று சோடி கோண அளவுகளும்) சமம்.

ஆனால் சில சமயங்களில் சர்வசமத் தன்மையை அறிய மூன்று சோடிகளின் ஒத்த பகுதியை ஆராய்ந்தால் போதுமானது. அவை அடிப்படைக் கொள்கைகளாகத் தரப்பட்டுள்ளன.

அவற்றில் நான்கு வகையான அடிப்படைக் கொள்கைகளை இங்கு காணலாம்.

அடிப்படைக் கொள்கை: உண்மையாக நிரூபிக்கப் படாமல் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட கூற்று அடிப்படை கொள்கையாகும்

இக்கொள்கைகள் சர்வசம முக்கோணங்களை அடையாளம் காண உதவும்.

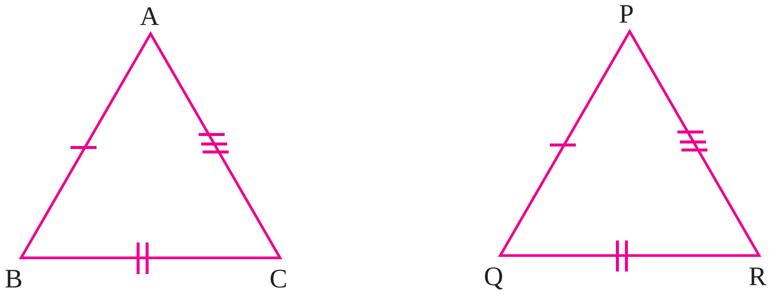
ப – பக்கத்தினையும், கோ – கோணத்தினையும், செ – செங்கோணத்தினையும், க – கர்ணத்தினையும் குறிப்பதாகக் கொண்டால் பல்வேறு அடிப்படைக் கொள்கைகளாவன:

(i) ப–ப–ப அடிப்படைக் கொள்கை (ii) ப–கோ–ப அடிப்படைக் கொள்கை

(iii) கோ–ப–கோ அடிப்படைக் கொள்கை (iv) செ–க–ப அடிப்படைக் கொள்கை

(i) ப–ப–ப அடிப்படைக் கொள்கை

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்குச் சமம் எனில் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசம முக்கோணங்களாகும்.



AB = PQ, BC = QR மற்றும் CA= RP என்றுள்ளவாறு ΔABC, ΔPQR ஐக் கருதுவோம்.

ΔABC ஐ படி எடுத்து பக்கம் AB ஐ பக்கம் PQ இன் மீதும் , பக்கம் BC ஐ பக்கம் QR இன் மீதும் மற்றும் பக்கம் CA ஐ பக்கம் RP இன் மீதும் சரியாகப் பொருந்துமாறு ΔPQR இன் மீது பொருத்துக.

உச்சி A ஆனது உச்சி P இன் மீதும், உச்சி B ஆனது உச்சி Q இன் மீதும் உச்சி C ஆனது உச்சி R இன் மீதும் சரியாகப் பொருந்துகிறது.

எனவே, இரு முக்கோணங்களும் ஒன்றன் மீது ஒன்று சரியாகப் பொருந்துகிறது.

$$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta PQR.$$

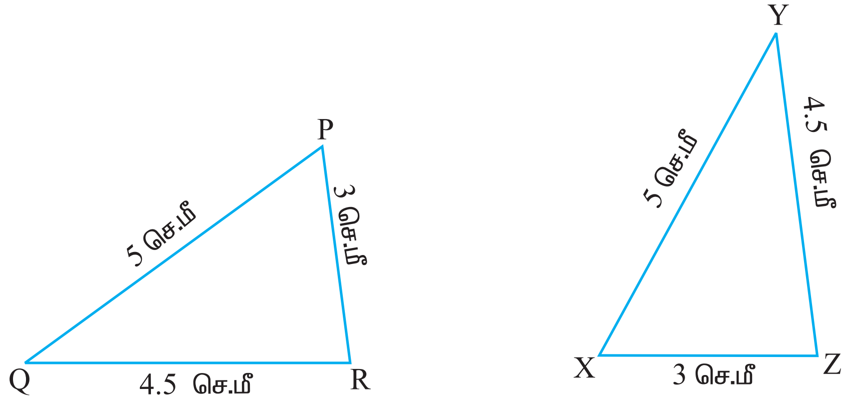
மேலும், $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$.

இதை $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} = 1$ எனவும் எழுதலாம்.

இந்த விகிதத்தின் அளவு 1ஆக இல்லை எனில் என்ன நிகழும்?

எடுத்துக்காட்டு 5.7

கீழ்க்காணும் முக்கோணங்கள் ப–ப–ப அடிப்படைக் கொள்கையின்படி சர்வசமமா என ஆராய்க.



தீர்வு

ΔPQR மற்றும் ΔXYZ இன் பக்க அளவுகளை ஒப்பிடுக.

$PQ = XY = 5$ செ.மீ., $QR = YZ = 4.5$ செ.மீ. மற்றும் $RP = ZX = 3$ செ.மீ..

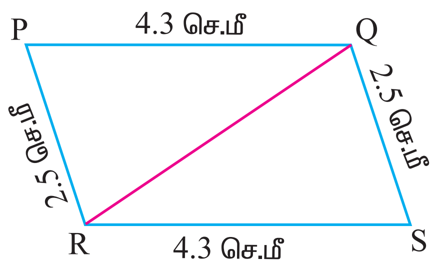
Δ PQR ஐ Δ XYZ இன் மேல் பொருத்த உச்சி P உச்சி X இன் மீதும், உச்சி Q உச்சி Y இன் மீதும், உச்சி R உச்சி Z இன் மீதும் பொருந்துகிறது.

$\therefore \Delta PQR \equiv \Delta XYZ$ (ப–ப–ப கொள்கையின் படி)

எடுத்துகாட்டு 5.8

PQRS ஒரு இணைகரம் PQ = 4.3 செ.மீ., QS = 2.5 செ.மீ. எனில் $\Delta PQR \equiv \Delta PSR$?

தீர்வு



ΔPQR மற்றும் ΔPSR ஐக் கருத்தில் கொள்வோம்.

இங்கு, $PQ = SR = 4.3$ செ.மீ. மற்றும்

$PR = QS = 2.5$ செ.மீ.

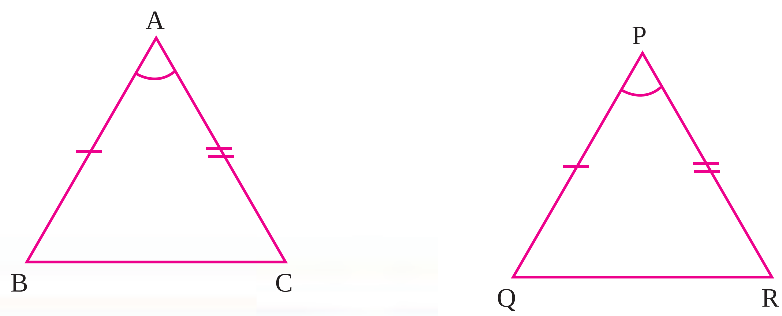
$PR = PR$ (பொது)

$\therefore \Delta PQR \equiv \Delta RSP$ (ப–ப–ப கொள்கையின் படி)

$\therefore \Delta PQR \not\equiv \Delta PSR$ (ΔRSP மற்றும் ΔPSR இன் வரிசை மாறி உள்ளது)

(ii) ப–கோ–ப அடிப்படைக் கொள்கை

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கிய கோணமும் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவை உள்ளடக்கிய முக்கோணத்திற்கும் சமமெனில் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசம முக்கோணங்களாகும்.



AB = PQ, AC = PR மற்றும் உள்ளடங்கிய கோணம் BAC = உள்ளடங்கிய கோணம் QPR என்றுள்ளவாறு ΔABC மற்றும் ΔPQR ஐக் கருத்தில் கொள்வோம்.

ΔABC ஐ ΔPQRஇன் மீது AB ஐ PQ இன் மீதும் AC ஐ PR இன் மீதும் அமையுமாறு பொருத்துக.

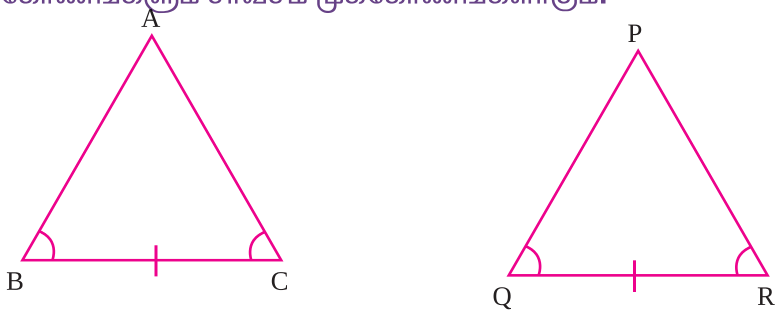
உச்சி A ஆனது உச்சி P இன் மீதும்,உச்சி B ஆனது உச்சி Q இன் மீதும், உச்சி C ஆனது உச்சி R இன் மீதும் சரியாகப் பொருந்துகிறது. ஏனெனில் AB = PQ, AC = PR.

உச்சி B ஆனது உச்சி Q இன் மீதும் உச்சி C ஆனது உச்சி R இன் மீதும் அமைவதால் BC ஆனது QR இன் மீது பொருந்துகிறது. $\therefore \Delta ABC$ ΔPQR இன் மீது பொருந்துகிறது.

எனவே, $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$

(iii) கோ–ப–கோ அடிப்படைக் கொள்கை

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் அவற்றால் இணைந்த பக்கத்திற்கும் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசம முக்கோணங்களாகும்.



ΔABC மற்றும் ΔPQR ஐக் கருத்தில் கொள்வோம்.

இங்கு, $BC = QR, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ஆகும்.

மேற்பொருத்தும் முறையில் $\angle ABC$, $\angle PQR$ இன் மீதும்

$\angle BCA$, $\angle QRP$ மீதும் பொருந்துகிறது.

எனவே உச்சி B ஆனது உச்சி Q இன் மீதும்,

உச்சி C ஆனது உச்சி R இன் மீதும் அமைகின்றது.

எனவே, உச்சி A ஆனது உச்சி P இன் மீதும் சரியாகப் பொருந்துகிறது.

$\therefore \Delta ABC$, ΔPQR இன் மீது முழுவதுமாகப் பொருந்துகிறது.

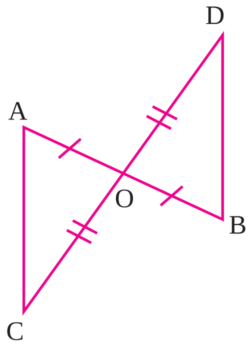
எனவே, $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$.

முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக உள்ளதால் மீதமுள்ள ஒத்த பகுதிகள் சர்வசமம்.
அதாவது, AB = PQ, AC = PR மற்றும் $\angle A = \angle P$.

குறிப்பு: சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பகுதிகள் சர்வசமம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.9

AB மற்றும் CD ஆகிய கோட்டுத்துண்டுகள் O வில் இருசமக் கூறிடுகிறது எனில் AC = BD என நிறுவுக.



தீர்வு

தரவு : O என்பது AB மற்றும் CD இன் மையம்.

எனவே, AO = OB மற்றும் CO = OD

நிறுவப்பட வேண்டியது : AC = BD

நிரூபணம் : ΔAOC மற்றும் ΔBOD இல்

$AO = OB$ (தரவு)

$CO = OD$ (தரவு)

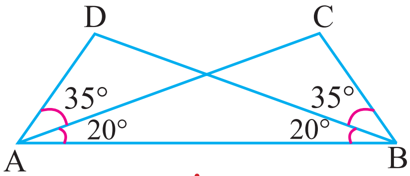
$\angle AOC = \angle BOD$ (எதிரெதிர்க் கோணங்கள்)

$\Delta AOC \equiv \Delta BOD$ (ப–கோ–ப கொள்கையின் படி)

எனவே, $AC = BD$ (ஒத்த பக்கங்கள்)

எடுத்துக்காட்டு 5.10

படம் 5.13 இல், $\Delta DAB \equiv \Delta CAB$ என நிறுவுக.



படம் 5.13

தீர்வு

ΔDAB மற்றும் ΔCAB ஐக் கருத்தில் கொள்க.

$\angle DAB = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ = \angle CBA$ (படத்தில் உள்ள படி)

$\angle DBA = \angle CAB = 20^\circ$ (தரவு)

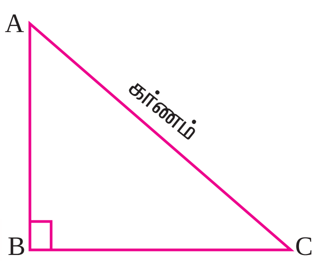
AB பொதுப் பக்கம்.

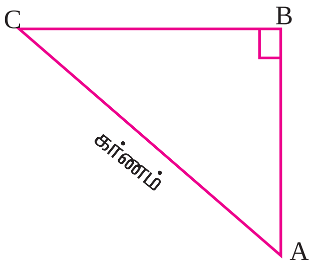
$\therefore \Delta DBA \equiv \Delta CAB$ (கோ–ப–கோ கொள்கையின் படி)

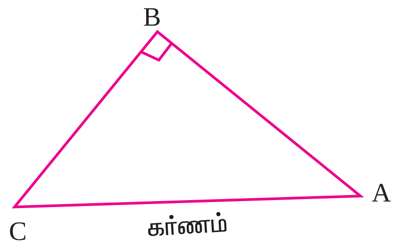
கர்ணம்

கர்ணம் என்றால் என்ன என்பதை அறிவீர்களா?

கர்ணம், செங்கோண முக்கோணத்துடன் தொடர்புடையது.







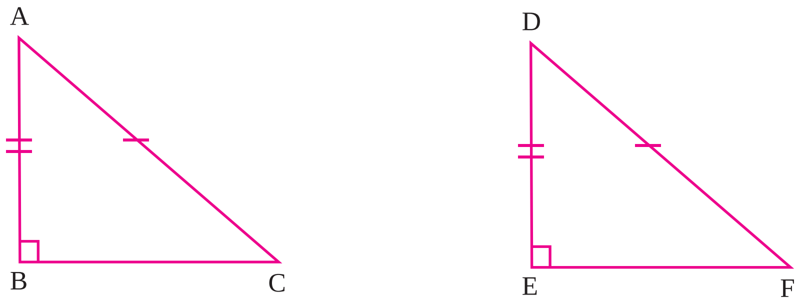
செங்கோண முக்கோணம் ABCஐக் கருதுவோம். இதில் $\angle B$ செங்கோணம்.

செங்கோணத்தின் எதிர்ப் பக்கம் கர்ணம் ஆகும்.

எனவே, AC கர்ணம் ஆகும்.

(iv) செ–க–ப அடிப்படைக் கொள்கை

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமும் செங்கோணத்தை உள்ளடக்கியப் பக்கங்களில் ஒன்றும் முறையே மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்திற்கும் செங்கோணத்தை உள்ளடக்கியப் பக்கங்களில் ஒன்றுக்கும் சமமாக இருந்தால் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசம முக்கோணங்களாகும்.



ΔABC மற்றும் ΔDEF ஐக் கருதுக. $\angle B = \angle E = 90^\circ$ மற்றும்

கர்ணம் AC = கர்ணம் DF (தரவு)

மேலும், AB = DE (தரவு)

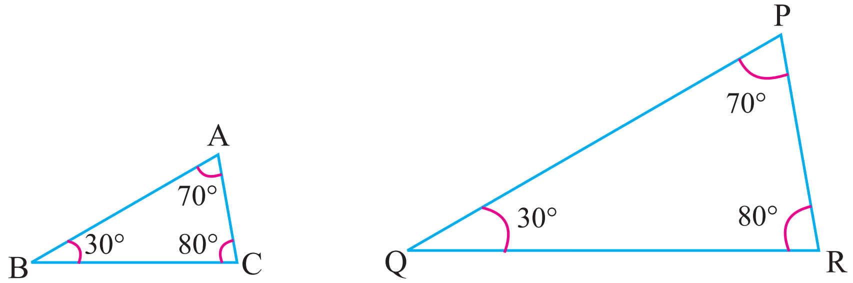
ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும் முறைப்படி, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ என அறியலாம்.

5.3.4 சர்வசம முக்கோணங்கள் அமையப் போதுமானதற்ற நிபந்தனைகள்

(i) கோ–கோ–கோ

இந்தக் கொள்கை சர்வசம முக்கோணத்தை அமைக்காது. ஏன்?

காரணத்தைக் காண்போம். கீழ்காணும் முக்கோணத்தைக் கருதுவோம்.



ΔABC மற்றும் ΔPQR லிருந்து,

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ மற்றும் $\angle C = \angle R$. ΔABC ஆனது ΔPQR ஐ விட சிறியது.

எனவே, ΔABC ஐ ΔPQR இன் மேற்பொருத்தும் போது முழுவதுமாகப் பொருந்துவது இல்லை. எனவே, $\Delta ABC \not\equiv \Delta PQR$.

(ii) ப–ப–கோ

நாம் கீழ்க்கண்ட ஒரு உதாரணத்தை ஆராய்வோம்.

$\angle B = 50^\circ$, AB = 4.7 செ.மீ. மற்றும் AC = 4 செ.மீ. உள்ளவாறு ΔABC ஐ வரைந்து கொள். BC ஐ X வரை நீட்டுக. A ஐ மையமாகவும் AC ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டவில் வரைக. இது BX ஐ C மற்றும் D இல் வெட்டும்.

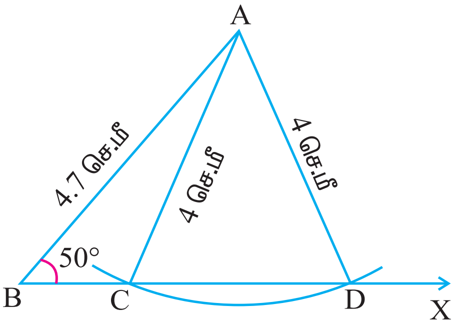
$\therefore$ AD = 4 செ.மீ. ($\because$ AC, AD ஆகியன ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்களாகும்)

ΔABC மற்றும் ΔABDஐக் கருதுவோம்.

$\angle$B பொதுவானது.

AB பொதுவானதாகவும் மேலும் AC = AD = 4செ.மீ. ஆகவும் உள்ளது.

ΔABCஇல் பக்கம் AC, பக்கம் AD மற்றும் $\angle$B ஆகியன முறையே ΔABDஇல் பக்கம் AD, பக்கம் AB மற்றும் $\angle$B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமம். ஆனால் BC $\neq$ BD. $\therefore \Delta$ ABC $\not\equiv \Delta$ ABD.



எடுத்துக்காட்டு 5.11

ஒரு முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம் என்பதை நிறுவுக.

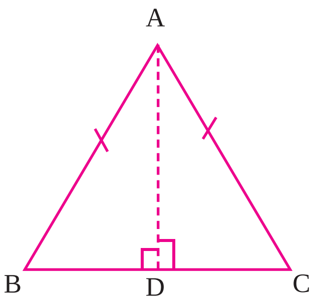
தீர்வு

தரவு : ΔABC இல், AB = AC.

நிறுவப்பட வேண்டியது : $\angle$C = $\angle$B.

அமைப்பு : BCக்குச் செங்குத்தாக AD ஐ வரைக.

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$



நிரூபணம் :

ΔABD மற்றும் ΔACD இல்,

AD பொது

AB = AC (ΔABC ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம்)

$\angle$ADB = $\angle$ADC = 90° (அமைப்பு)

$\therefore \Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (செ–க–ப கொள்கை)

எனவே, $\angle$ABD = $\angle$ACD (நிறுவப்பட்டது)

அல்லது $\angle$ABC = $\angle$ACB.

$\therefore \angle B = \angle C$, என நிறுவப்பட்டது.

இது இருசமபக்க முக்கோணத் தேற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

ஒரு முக்கோணத்தில் சம கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் சமம் என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு

தரவு : ΔABC இல், $\angle$B = $\angle$C.

நிறுவப்பட வேண்டியது : AB = AC.

அமைப்பு : BCக்குச் செங்குத்தாக AD ஐ வரைக.

நிரூபணம்:

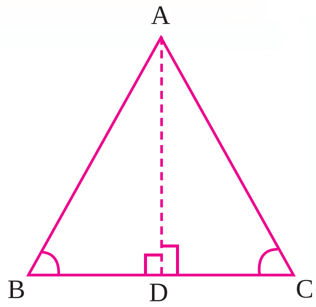
$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (அமைப்பு)

$\angle B = \angle C$ (தரவு)

AD பொதுப்பக்கம்

$\therefore \Delta ADB \equiv \Delta ADC$. (கோ–ப–கோ கொள்கையின்படி)

எனவே, $AB = AC$. (ஒத்த பக்கங்கள்)

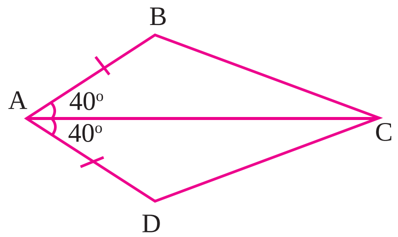


$\therefore$ இரு சமபக்க முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்.

இது இரு சமபக்க முக்கோணத் தேற்றத்தின் மறுதலை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

படத்தில் $AB = AD$ மற்றும் $\angle BAC = \angle DAC$ எனில் $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ என்பது சரியா? சரி எனில் பிற ஒத்த பகுதிகளைக் காண்க.



தீர்வு

ΔABC மற்றும் ΔADCஇல்

AC பொதுப்பக்கம்

$\angle BAC = \angle DAC$ (தரவு)

$AB = AD$ (தரவு)

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (ப.கோ.ப. கோட்பாடு)

பிற ஒத்த பகுதிகள் $BC = DC$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle ACB = \angle ACD$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

இரு சமபக்க முக்கோணம், PQRஇல், $PQ = PR$, QP ஆனது S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும் PT ஆனது வெளிக்கோணம் $SPR = 2x°$இன் கோண இரு சமவெட்டி எனில், $\angle Q = x°$ என நிறுவுக. மேலும் $PT \parallel QR$ என நிறுவுக.

தீர்வு

தரவு : இரு சமபக்க முக்கோணம், PQR இல், $PQ = PR$.

நிரூபணம் : PT ஆனது வெளிக்கோணம் $\angle SPR$ இன் இரு சமவெட்டி

$\therefore \angle SPT = \angle TPR = x°$. மேலும், $\angle Q = \angle R$ (சம பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள்)

ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை நீட்டினால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். ஆகவே,

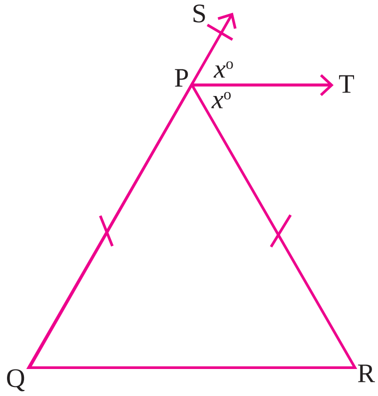
ΔPQRல் வெளிக்கோணம் $\angle SPR = \angle PQR + \angle PRQ$

$$2x° = \angle Q + \angle R = \angle Q + \angle Q$$

$$2x° = 2\angle Q$$

$$x° = \angle Q$$

$$\therefore \angle Q = x°.$$



நிறுவப்பட வேண்டியது : PT ∥ QR

மேலும் இங்கு, SQ ஆனது, PT மற்றும் QR இன் குறுக்கு வெட்டி.

மேலும், $\angle SPT = x^\circ$, $\angle Q = x^\circ$. எனவே, $\angle SPT$ மற்றும் $\angle PQR$ ஆகியன ஒத்தக் கோணங்கள் .

$\therefore$ PT ∥ QR.

பயிற்சி 5.2

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) இரு சமபக்க முக்கோணம் XYZஇல், XY = YZ எனில் கீழ்கண்ட கோணங்களில் எவை சமம் ?

(A) $\angle X$ மற்றும் $\angle Y$ (B) $\angle Y$ மற்றும் $\angle Z$

(C) $\angle Z$ மற்றும் $\angle X$ (D) $\angle X$, $\angle Y$ மற்றும் $\angle Z$

(ii) ΔABC மற்றும் ΔDEF இல், $\angle B = \angle E$, AB = DE, BC = EF எனில் இவை .... அடிப்படைக் கொள்கையின் படி சர்வ சமம்.

(A) ப–ப–ப (B) கோ–கோ–கோ (C) ப–கோ–ப (D) கோ–ப–கோ

(iii) .... உள்ள இரு தள உருவங்கள் சர்வ சமம்.

(A) சம அளவுகள் (B) சம உருவம்

(C) சம அளவு மற்றும் சம உருவம் (D) சம அளவு ஆனால் சம உருவமில்லை

(iv) ΔABC இல், $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் AB = AC, எனில் ABC .... முக்கோணம்.

(A) செங்கோணம் (B) சமபக்கம் (C) இருசம பக்கம் (D) அசமபக்கம்

(v) ΔABC இல், $\angle A = 90^\circ$ எனில் கர்ணம் ....

(A) AB (B)BC (C) CA (D) எதுவுமில்லை

(vi) ΔPQRஇல் PQ மற்றும் PR ஆல் அடைபடும் கோணம் ....

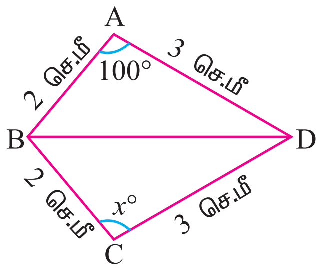
(A) $\angle P$ (B) $\angle Q$

(C) $\angle R$ (D) எதுவுமில்லை

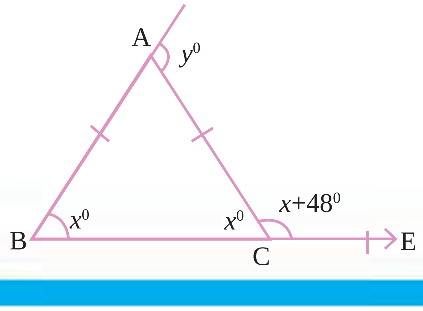
(vii) படத்தில் x° இன் மதிப்பு ....

(A) 80° (B) 100°

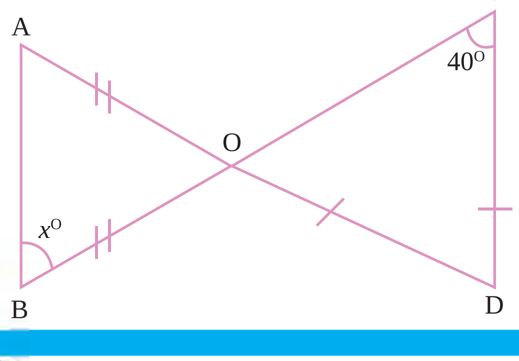
(C) 120° (D) 200°



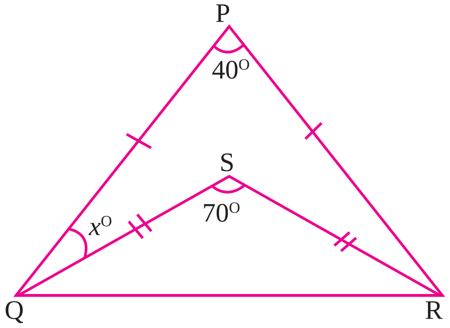
2. ΔABC இல் AB = AC எனில் x° மற்றும் y° இன்மதிப்பைக் காண்க.



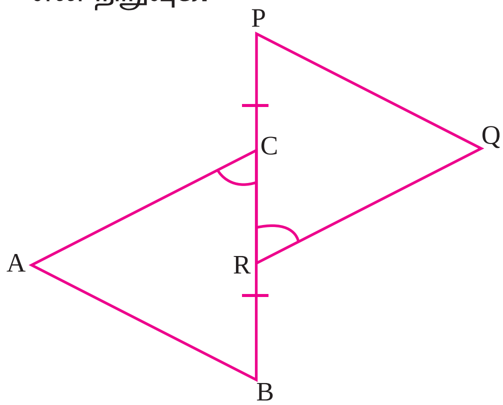
3. படத்திலிருந்து x° இன் மதிப்பைக் காண்க.



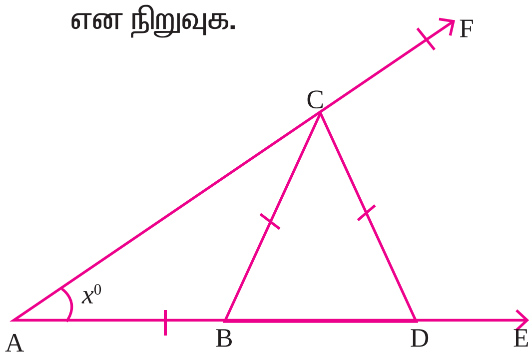
4. படத்தில் ΔPQR மற்றும் ΔSQR ஆகியன இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் எனில் $x°$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



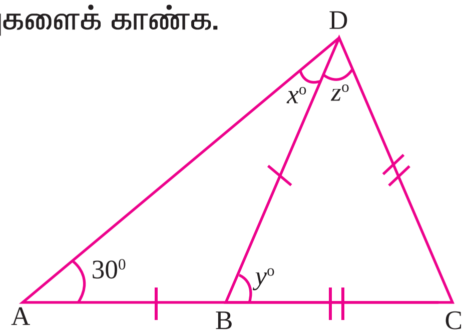
5. படத்தில் BR = PC, $\angle ACB = \angle QRP$ மற்றும் AB ∥ PQ எனில் AC = QR என நிறுவுக.



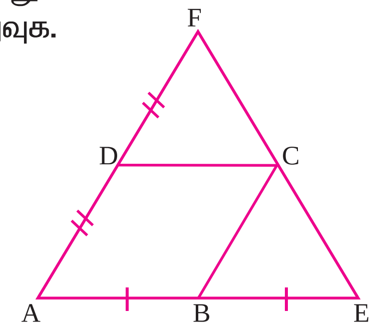
6. படத்தில் AB = BC = CD மற்றும் $\angle A = x°$ எனில் $\angle DCF = 3\angle A$ என நிறுவுக.



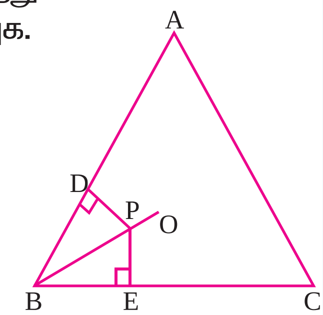
7. படத்தில் AB = BD, BC = DC மற்றும் $\angle DAC = 30°$ எனில் $x°$, $y°$, $z°$ இன் மதிப்புகளைக் காண்க.



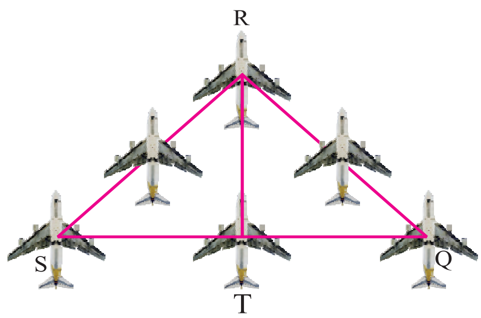
8. படத்தில் ABCD ஒரு இணைகரம். AB = BE என்றுள்ளவாறு AB, E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. AD = DF என்றுள்ளவாறு AD, F வரை நீட்டப் பட்டுள்ளது. $\Delta FDC \equiv \Delta CBE$ என நிறுவுக.



9. படத்தில் ΔABCஇல் BOஆனது$\angle B$ இன் கோண இருசமவெட்டி. P, BOஇல் உள்ள ஒரு புள்ளி. $PD \perp AB$ மற்றும் $PE \perp BC$ எனில் PD = PE என நிறுவுக.



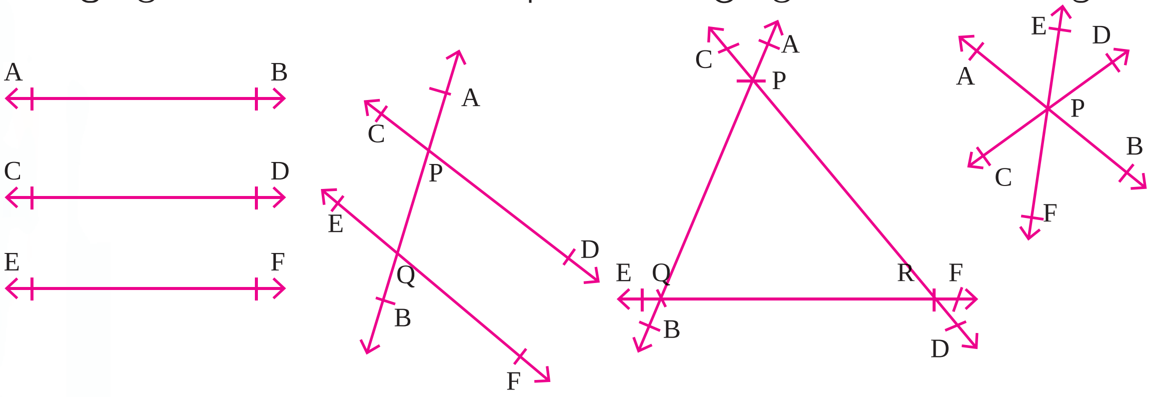
10. இந்திய கடற்படை விமானங்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு பறக்கின்றன எனில் $\triangle SRT \equiv \triangle QRT$, என நிறுவுக. (SQ இன் மையம் T, SR = RQ எனக்கொள்க)



5.4 முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை வரைந்தால் அவற்றை என்னென்ன வழிகளில் வரையலாம்?

மூன்று கோடுகள் வரையப்படும் விதங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



(அ) (ஆ) (இ) (ஈ)

படம் (அ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் இணை கோடுகளாகவும், ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலும் செல்கின்றன.

படம் (ஆ) இல், AB யும் CD யும் P யிலும், AB யும் EF யும் Q யிலும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

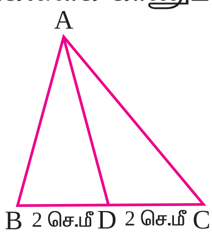
படம் (இ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் P, Q, R என்ற மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

படம் (ஈ) இல், AB, CD மற்றும் EF ஆகிய கோடுகள் P என்ற ஒரே புள்ளியில் மட்டும் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியே சென்றால் அவை ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் எனப்படும். அவற்றின் பொதுப்புள்ளி, சந்திக்கும் புள்ளி எனப்படும்.

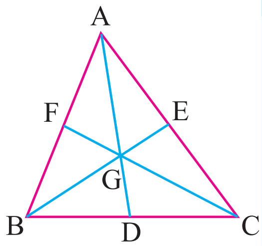
ஒரு முக்கோணத்தில் நடுக்கோட்டு மையம், செங்கோட்டு மையம், உள் மற்றும் சுற்று வட்ட மையம் என்ற சில சிறப்புப் புள்ளிகள் உள்ளன. நாம் அப்புள்ளிகளைக் காணும் முறையைப் பற்றி கற்க உள்ளோம்.

5.4.1 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்



அருகில் உள்ள படத்தில் உள்ள ΔABC இல், BC இன் மையம் D. AD ஐ இணை. இங்கு AD என்பது முக்கோணம் ABC இன் நடுக் கோடுகளில் ஒன்று.

ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடு எனப்படும்.

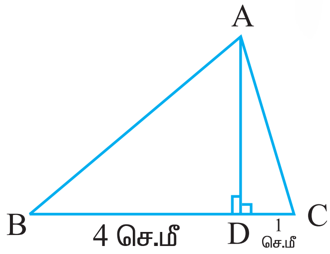


அருகில் உள்ள படத்தில், AD, BE, CF ஆகியன நடுக்கோடுகள் ஆகும். அவை சந்திக்கும் புள்ளி G. G என்பது நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

எனவே ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும். இது G என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

> குறிப்பு: (i) நடுக்கோட்டு மையம், நடுக்கோடுகளை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
> (ii) நடுக்கோட்டு மையம் அம்முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆகும்.

5.4.2 ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்



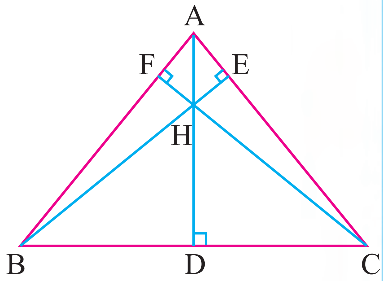
அருகில் உள்ள படம் ΔABC இல்,

A இலிருந்து BC க்கு செங்குத்துக் கோடு வரைக.

$\therefore\ AD \perp BC$

$\angle ADB = \angle ADC = 90^{\circ}$.

இங்கு D, BC இன் மையமாக அமையவேண்டிய அவசியமில்லை. மேலும் AD உச்சி A வழியே செல்லும் ஒரு செங்கோடு ஆகும்.



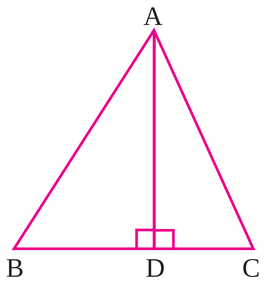
ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிர்ப் பக்கத்திற்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டிற்கு செங்கோடு என்று பெயர்.

அருகிலுள்ள முக்கோணம் ABCயில் AD, BE, CF ஆகியவை செங்கோடுகள் ஆகும்.அவை சந்திக்கும் புள்ளி H.

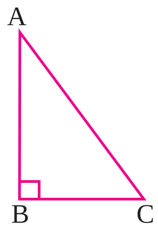
இப்புள்ளி H ஐ செங்கோட்டு மையம் எனலாம்.

எனவே முக்கோணத்தின் மூன்று குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் செங்கோட்டுமையமாகும்.

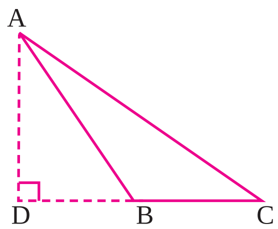
செங்கோட்டுமையத்தின் அமைவிடங்கள்



(a)



(b)



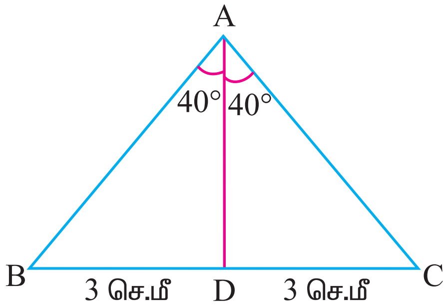
(c)

நிலை (i) : படம் (a) இல், ΔABC ஒரு குறுங்கோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டுமையம் முக்கோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

நிலை (ii) : படம் (b) இல், ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டுமையம் செங்கோணம் அமையும் உச்சியின் மீது அமைந்துள்ளது.

நிலை (iii) : படம் (c) இல், ΔABC ஒரு விரிகோண முக்கோணம். இங்கு செங்கோட்டுமையம் முக்கோணத்தின் வெளிப்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

5.4.3 முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம்

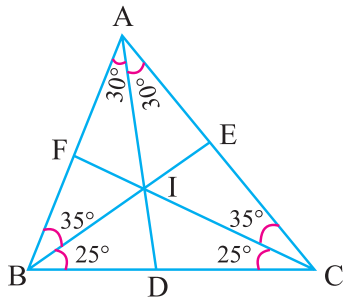


அருகில் தரப்பட்டுள்ள ΔABC இல், $\angle A$, AD என்ற கோட்டுத் துண்டால் இரு சமக் கூறிடப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\angle BAD = \angle DAC$.

இங்கு, AD என்பது கோண இருசம வெட்டி ஆகும்.

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் இருசம வெட்டி என்பது அக்கோணத்தை இருசமக் கூறிடும் கோட்டுத்துண்டு ஆகும்.



அருகில் உள்ள ΔABC இல் AD, BE, CF ஆகியன கோண இருசம வெட்டிகள் ஆகும்.

இவை I என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்புள்ளி I உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.

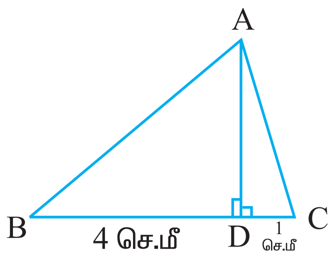
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.

5.4.4 முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம்

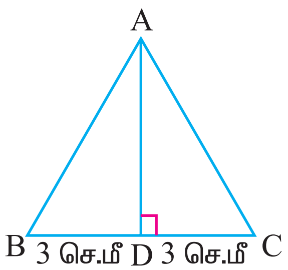
நாம் மையக்குத்துக் கோடு பற்றி சென்ற வகுப்பில் கற்று அறிந்துள்ளோம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்குத்துக்கோடு என்றால் என்ன?

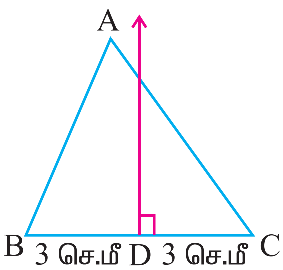
கீழ்காணும் படங்களைக் கவனிப்போம்.



(a)



(b)



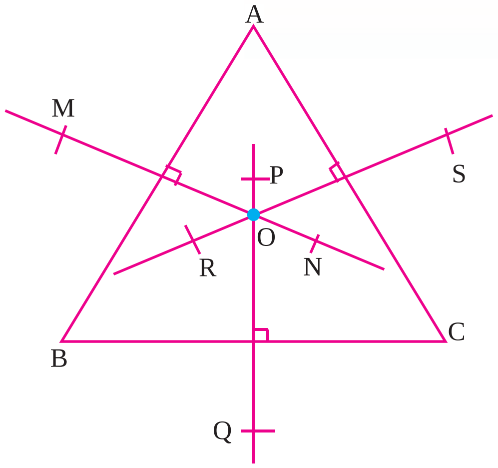
(c)

படம் (a) : AD, BC க்கு செங்குத்து. ஆனால் D, BC இன் மையம் அல்ல.

படம் (b) : AD, BC க்கு செங்குத்து மற்றும் AD, BC ஐ இருசமக் கூறிடுகிறது. எனவே, BD = DC.

படம் (c) : XD, BCஐ இருசமக் கூறிடுகிறது. XD, BC க்கு செங்குத்து மேலும் XD உச்சி A வழியே செல்ல வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் மையக்குத்துக் கோடு என்பது அப்பக்கத்திற்கு செங்குத்தாகவும், அதே சமயம் அப்பக்கத்தை இரு சமப் பாகங்களாகவும் பிரிக்கும் கோடு ஆகும்.



மேலுள்ள படத்தை கருத்தில் கொள்வோம்.

இங்கு PQ, RS, MN ஆகியன BC, AC மற்றும் AB இன் மையக்குத்துக் கோடுகள் ஆகும். இவை O வில் சந்திக்கின்றன.O சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

குறிப்பு : (i) முக்கோணம் ABC இல் சுற்றுவட்ட மையம் (O), நடுக்கோட்டு மையம் (G), செங்கோட்டு மையம் (H) ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும். அக்கோடு ஆய்லர் கோடு என்றழைக்கப்படுகிறது. மேலும் OG : GH = 1 : 2 ஆகும்.

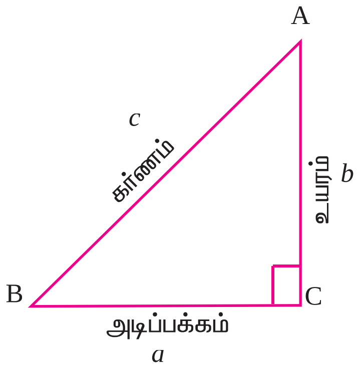
(ii) சமபக்க முக்கோணத்தில் சுற்றுவட்ட மையம் (O) நடுக்கோட்டு மையம் (G), செங்கோட்டு மையம் (H) , உள்வட்ட மையம் (I) ஆகியன ஒரே புள்ளியில் அமையும்.

5.5 பிதாகரஸ் தேற்றம்

பிதாகரஸ் (சுமார் 582 கி.மு. முதல் 497 கி.மு. வரை) ஒரு மிகச்சிறந்த, காலத்தை வென்ற கணித மேதை. செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் இடையேயுள்ள தொடர்பு இவர் பெயரைத் தாங்கியுள்ளது. இதன்மூலம் இவர் பெயர் நன்கு அறியப்படுகிறது.

5.5.1 பிதாகரஸ் தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.



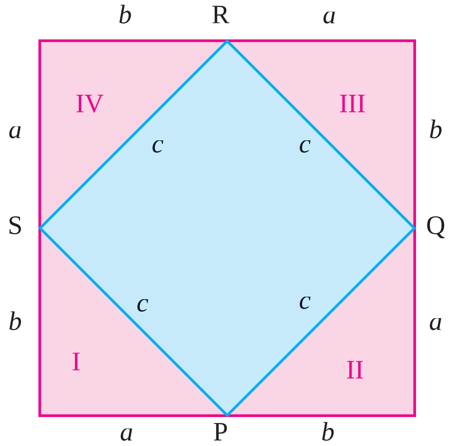
செங்கோண ΔABC இல் $\angle C = 90^{\circ}$.

$BC = a, CA = b$ மற்றும் $AB = c$ என்க.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, $a^2 + b^2 = c^2$.

இச்சமன்பாட்டை பல கணிதவியலாளர்கள் பல வழிகளில் நிரூபித்துள்ளனர். நாம் இங்கு எளிய வழியில் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தைக் காண்போம்.

பக்க அளவு $(a+b)$ உள்ளவாறு ஒரு சதுரத்தை அமைப்போம். இதனைப் பயன்படுத்தி $a^2+b^2=c^2$ என நிறுவலாம்.



சதுரத்தின் பரப்பு பக்க அளவின் வர்க்கம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

படத்திலிருந்து, $(a+b)$ என்ற பக்கத்தைக் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பு = $(a+b)^2$

= முக்கோணம் I, II, III, IV இன் பரப்புகள் + சதுரம் PQRS இன் பரப்பு.

$(a+b)^2$ = 4 (செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு) + (சதுரம் PQRS இன் பரப்பு)

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\times a\times b\right)+c^2$$

$$a^2+b^2+2ab = 2ab+c^2$$

$\therefore a^2+b^2 = c^2$. எனவே, பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

செய்து பார்

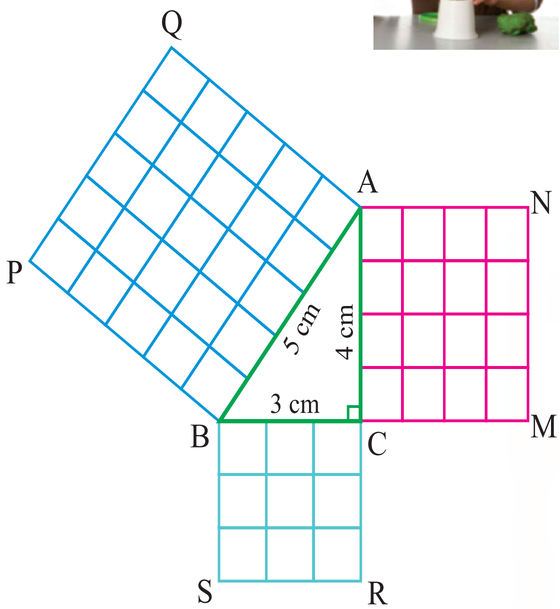
பிதாகரஸ் தேற்றம்

$\angle C = 90^\circ$, AB = 5 செ.மீ., AC = 4 செ.மீ. மற்றும் BC = 3 செ.மீ. என்று உள்ளவாறு செங்கோண ΔABC ஐ வரைக.

இந்த முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரங்களை வரைக.

சதுரங்களை 1 ச.செ.மீ. அளவுள்ள சிறு சதுரங்களாக பிரிக்கவும்.

சிறு சதுரங்களினை எண்ணிப் பார்த்தால் பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுவிடும்.



ABPQ இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 25

BCRS இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 9

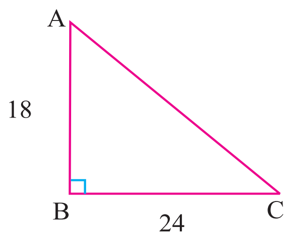
ACMN இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = 16

ABPQ இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை = BCSR இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை + ACMN இல் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை

பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண்களுக்குப் பித்தாகரஸின் மூன்றன் தொகுதி என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

ΔABC இல் $\angle B = 90^\circ$, AB = 18 செ.மீ. மற்றும் BC = 24 செ.மீ. எனில் AC இன் நீளம் காண்க.



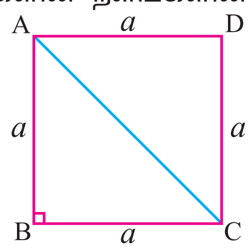
தீர்வு

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 18^2 + 24^2$$
$$= 324 + 576$$
$$= 900$$
$$\therefore AC = \sqrt{900} = 30 \text{ செ.மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

சதுரத்தின் சுற்றளவு 40 செ.மீ எனில் அதன் மூலை விட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் என்ன?



தீர்வு

சதுரத்தின் பக்க அளவை 'a' என்க. AC மூலைவிட்டம்.

சதுரம் ABCDஇன் சுற்றளவு = $4\,a$ அலகுகள்

$4\,a$ = 40 செ.மீ. [தரவு]

$a = \frac{40}{4} = 10$ செ.மீ.

சதுரத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் 90° மற்றும் மூலை விட்டங்கள் சமம்.

ΔABC இல், $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$\therefore AC = \sqrt{200} = \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$

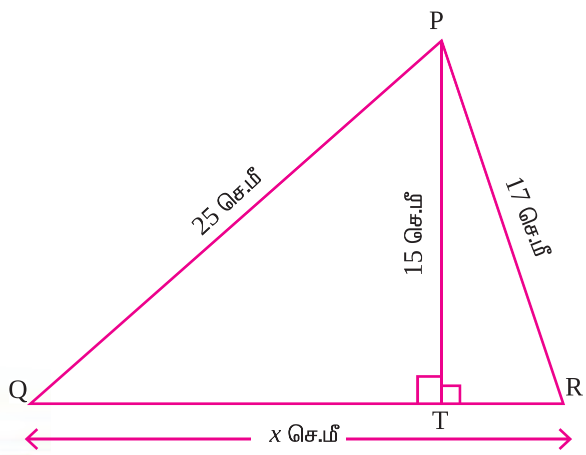
$= 10 \times 1.414 = 14.14$ செ.மீ.

மூலைவிட்டம் AC = மூலைவிட்டம் BD

எனவே, மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் = 14.14 + 14.14 = 28.28 செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

படத்தில் ΔPQR இல், PT செங்கோடு. மேலும் PQ = 25 செ.மீ., PR = 17 செ.மீ. மற்றும் PT = 15 செ.மீ., QR = x செ.மீ. எனில் x இன் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு

படத்திலிருந்து, QR = QT + TR.

செங்கோணம் முக்கோணம் PTQ இல், $\angle PTQ = 90^\circ$ [PT செங்கோடு]

இப்போது QT, TR இன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$\therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$$

$$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2$$

$$= 625 - 225 = 400$$

$$QT = \sqrt{400} = 20 \text{ செ.மீ.} \quad .....(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் PTR இல்,

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$$

$$= 17^2 - 15^2$$

$$= 289 - 225 = 64$$

$$TR = \sqrt{64} = 8 \text{ செ.மீ..} \quad ..... (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $QR = QT + TR$

$$= 20 + 8 = 28 \text{ செ மீ.}$$

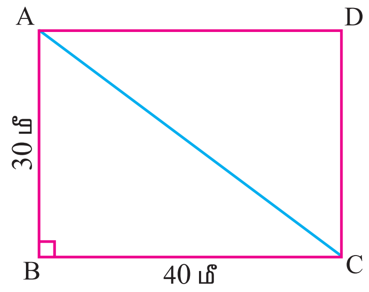
எடுத்துக்காட்டு 5.18

செவ்வக வடிவ வயலின் நீள அகலங்கள் முறையே 40மீ, 30மீ மூலைவிட்டத்தின் வழியே ஒரு மூலையிலிருந்து மற்றொரு மூலையை அடைந்தால் மீதப்படுத்தப்படும் தூரம் எவ்வளவு?

தீர்வு

தரவு : செவ்வக வயல் ABCD இன் நீளம் = 40 மீ, அகலம் = 30 மீ, $\angle B = 90^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ABC இல்,



பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 30^2 + 40^2$$

$$= 900 + 1600$$

$$= 2500$$

$$\therefore AC = \sqrt{2500}$$

$$= 50 \text{ மீ}$$

A இலிருந்து C க்கு B வழியே,

$$\text{தூரம்} = 30 + 40$$

$$= 70 \text{ மீ}$$

$$\text{மீதப்படுத்தப்படும் தூரம்} = 70 - 50$$

$$= 20 \text{ மீ.}$$

பயிற்சி 5.3

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்டம் மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(ii) முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்டம் மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(iii) முக்கோணத்தின் கோண இரு சம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) வட்டம் மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

(iv) முக்கோணத்தின் மையக் குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ....

(A) உள் வட்ட மையம் (B) சுற்று வட்ட மையம்

(C) செங்கோட்டு மையம் (D) நடுக்கோட்டு மையம்

2. இருசம பக்க முக்கோணம் ABC இல் AB = AC மற்றும் $\angle B = 65^\circ$ எனில் குறைந்த நீளமுடைய பக்கம் எது?

3. செங்கோண முக்கோணம் PQR இல், PQ = 10 செ.மீ. மற்றும் PR = 24 செ.மீ. எனில் QR இன் நீளம் காண்க? ($\angle P = 90^\circ$)

4. கீழே கொடுக்கப்பட்ட பக்க அளவுகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்குமா? AB = 25 செ.மீ., BC = 24 செ.மீ., AC = 7செ.மீ.

5. ΔPQR இல் $\angle P = 25^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ எனில் ΔPQR செங்கோண முக்கோணம் ஆகுமா? மேலும் PQ = 4 செ.மீ., PR = 3 செ.மீ. எனில் QR இன் நீளம் காண்க.

6. 15 மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணி சுவற்றில் 12 மீ உயரத்தில் உள்ள சன்னலைத் தொடுகிறது எனில் சுவற்றிற்கும் ஏணிக்கும் இடையே தரையில் உள்ள தொலைவைக் காண்க?

7. 10 செ.மீ. நீளமுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டின் நீளம் என்ன?

8. 12, 5, 13 என்ற எண்கள் பிதாகரஸின் மூன்றன் தொகுதியாக அமையுமா?

9. ஒரு ஏணி 16 அடி உயரத்தில் உள்ள இரண்டாவது மாடி சன்னலின் கீழ்ப் பகுதியைத் தொடுமாறு உள்ளது. ஏணியின் அடிப்பாகம் தரையில் 12 அடி தொலைவில் உள்ளது. வர்ணம் பூசுபவர் வர்ணங்களைக் கலக்கும்போது பக்கத்து வீட்டுக்காரரின் நாய் ஏணியைத் தள்ளி விடுதால் ஏணி மேலும் 2 அடி தொலைவு நகர்கிறது எனில் ஏணி தொடும் உயரத்தைக் காண்க.

5.6 வட்டங்கள்

கீழ்க்காணும் பொருட்களை நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். அவற்றின் வடிவங்களைக் கூற இயலுமா?

(அ) மிதி வண்டியின் சக்கரம்

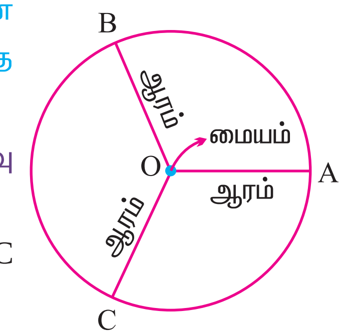
(ஆ) தேசியச் சின்னத்திலுள்ள அசோகச் சக்கரம்

(இ) முழு நிலவு

ஆம். உங்கள் விடை வட்டம். ஏனெனில், ஒரு தளத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கும் சம தொலைவில் நகரும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் மாறாமலிருப்பதால் அதை ஒரு வட்டம் என அறியலாம்.

வட்டத்தின் வரையறை

வட்டம் என்பது ஒரு தளத்தில் உள்ள நிலையான புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஆகும்.



நிலையான புள்ளி வட்ட மையம் எனப்படும். சம தொலைவு ஆரம் எனப்படும்.

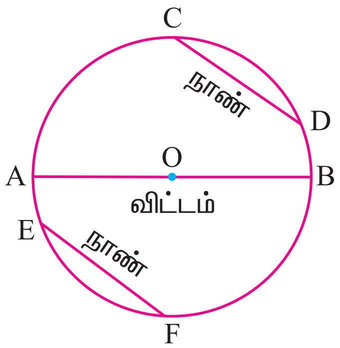
படத்தில் O என்பது வட்ட மையம். மேலும் OA, OB, OC ஆகியன ஆரங்கள்.

இங்கு, OA = OB = OC = r ஆகும்.

> குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தில் உள்ள அனைத்து ஆரங்களும் சம நீளமுடையவை.

நாண்

வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டு நாண் எனப்படும்.



படத்தில் CD, AB, EF ஆகியன நாண்கள் ஆகும்.

இங்கு நாண் AB, வட்ட மையம் O வழியே செல்கிறது.

விட்டம்

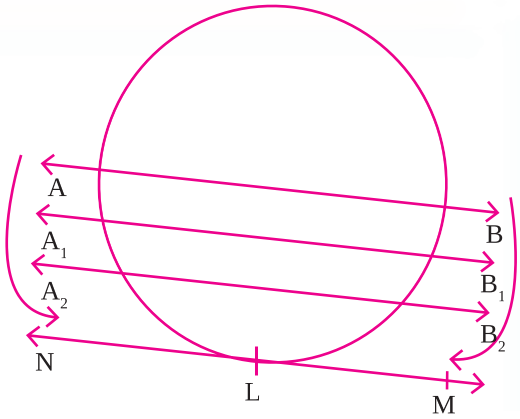
வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும். வட்டத்தில் வரையப்படும் மிகப் பெரிய நாண் விட்டம் ஆகும்.

படத்தில், AOB என்பது ஒரு விட்டம். AB இன் மையம் O. OA = OB = ஆரம் ஆகும்.

எனவே, விட்டம் = 2 × ஆரம் (அல்லது) ஆரம் = (விட்டம்) ÷ 2

> குறிப்பு: (i) ஒவ்வொரு விட்டத்தின் மையமும் வட்ட மையம் ஆகும்.
>
> (ii) வட்டத்தில் வரையப்படும் அனைத்து விட்டங்களும் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும். அவை சந்திக்கும் புள்ளி, வட்ட மையம் ஆகும்.

ஒரு வட்டத்தின் வெட்டுக் கோடுகள்



ஒரு வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை வெட்டிக் கொண்டு செல்லும் கோடு வெட்டுக் கோடு எனப்படும்.

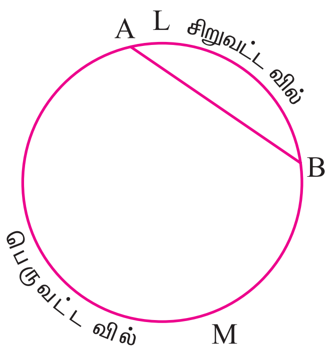
தரப்பட்டுள்ள படத்தில், AB ஒரு வெட்டுக் கோடு. இது வட்டத்தை A, B எனும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டு செல்கிறது. தற்போது AB எனும் வெட்டுக் கோட்டை கீழ்ப்புறமாக நகர்த்து. அது A_1B_1, A_2B_2, ..., என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டே செல்லும்.

கீழே நகர்த்தும் போது Aக்கும் Bக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு குறைந்து கொண்டே செல்லும். ஒரு நிலையில், வெட்டுக் கோடு AB, வட்டத்தை L என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும். இந்நிலையில், LM என்ற கோடு தொடுகோடாக மாறுகிறது. இது வட்டத்தை ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச் செல்லும்.

தொடுகோடு

தொடுகோடு என்பது வட்டத்தினை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும் கோடு ஆகும். தொட்டுச் செல்லும் அப்புள்ளியைத் தொடுபுள்ளி என அழைக்கிறோம்.

வட்ட வில்



படத்தில் AB நாண். இந்த நாண் வட்டத்தை இரண்டாகப் பிரிக்கிறது.

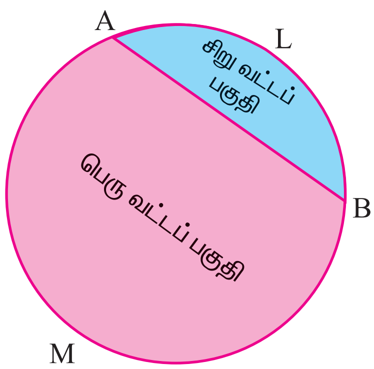
வளைந்த பகுதிகள் ALB மற்றும் AMB ஆகியன வட்ட வில் எனப்படும்.

வட்ட வில் ‘ $\frown$ ’ என்ற குறியால் குறிப்பிடப்படும்.

இங்கு சிறிய வில் $\overset{\frown}{ALB}$ சிறு வட்ட வில் என்றும்

பெரிய வில் $\overset{\frown}{AMB}$ பெருவட்ட வில் என்றும் அழைக்கப்படும்.

வட்டப் பகுதி



வட்டத்தை ஒரு நாண் இரண்டு பகுதியாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் வட்டப் பகுதி எனப்படும்.

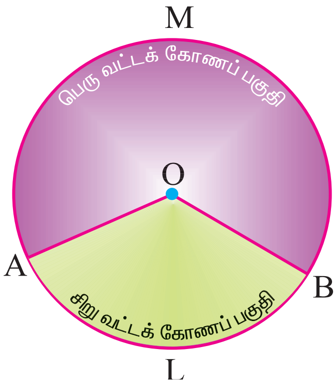
சிறிய வட்ட வில்லைக் கொண்ட பகுதி சிறு வட்டப் பகுதி ஆகும்.

பெரு வட்ட வில்லைக் கொண்ட, பகுதி பெரு வட்டப் பகுதி எனப்படும்.

வட்டக் கோணப் பகுதி

ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு ஆரங்களாலும், அதன் வட்ட வில்லாலும் அடைபடும் பகுதியே வட்டக் கோணப் பகுதி எனப்படும்.

இவ்வட்டத்தில், சிறு பரப்பு OALB சிறு வட்டக் கோணப் பகுதி என்றும், பெருபரப்பு OAMB பெரு வட்டக் கோணப் பகுதி என்றும் அழைக்கப்படும்.



பயிற்சி 5.4

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

(i) .... என்பது வட்ட மையத்திற்கும் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிக்குமுள்ள தூரம் ஆகும்.

(A) பகுதி (B) நீளம் (C) விட்டம் (D) ஆரம்

(ii) விட்டத்திற்கும் ஆரத்திற்குமுள்ள தொடர்பு ....

(A) ஆரம் = 2 × விட்டம் (B) ஆரம் = விட்டம் + 2

(C) விட்டம் = ஆரம் + 2 (D) விட்டம் = 2 × ஆரம்

(iii) வட்டத்தின் மிகப் பெரிய நாண் ....

(A) ஆரம் (B) வெட்டுக் கோடு

(C) விட்டம் (D) தொடுகோடு

2. வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் நீளங்களின் கூடுதல் 200 மி.மீ. எனில் அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தினை செ.மீ. இல் காண்க.

3. வரையறு: வட்டப் பகுதி, வட்டக் கோணப் பகுதி.

4. வரையறு: வட்ட வில்.

5. வரையறு: தொடுகோடு மற்றும் வெட்டுக்கோடு.

கருத்துச் சுருக்கம்

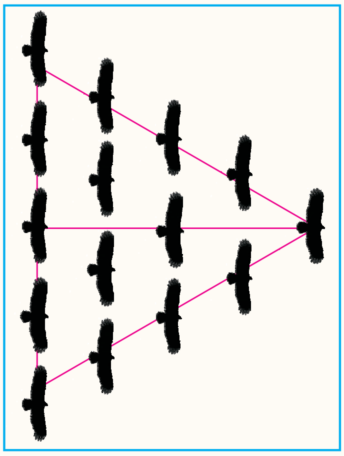
- ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.
- முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை நீட்டினால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணமானது அதன் உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.
- ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்க அளவுகளின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்க அளவை விட அதிகம்.
- இரு தள உருவங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்று சரியாகப் பொருந்தினால் அவை சர்வ சமம் எனப்படும். இதை '≡' என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிக்கலாம்.
- இரு முக்கோணங்களில் ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் முறையே மற்றொன்றின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் மூன்று கோணங்களுக்கும் சமம் எனில் அவை சர்வ சம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.
- ப–ப–ப கொள்கை : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்குச் சமம் எனில் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம் ஆகும்.
- ப–கோ–ப கொள்கை : ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கிய கோணமும் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவை உள்ளடக்கிய முக்கோணத்திற்கும் சமமெனில் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமாகும்.
- கோ–ப–கோ கொள்கை: ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களும் அவற்றால் இணைந்த பக்கமும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்கும் அவற்றால் இணைந்த பக்கத்திற்கும் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வ சம முக்கோணங்களாகும்.
- செ–க–ப கொள்கை : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமும் செங் கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங்களில் ஒன்றும் முறையே மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்திற்கும் மற்றும் செங்கோணத்தை உள்ளடக்கிய பக்கங்களில் ஒன்றுக்கும் சமமாக இருந்தால் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம் ஆகும்.
- நடுக்கோட்டு மையம் : முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.
- செங்கோட்டு மையம் : முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் செங்கோட்டுமையமாகும்.
- உள் வட்ட மையம் :ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் எனப்படும்.
- சுற்று வட்ட மையம் : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

- வட்டம் : வட்டம் என்பது தளத்தில் உள்ள நிலையான புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஆகும்.
- நாண் : வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டு நாண் எனப்படும்.
- விட்டம் : வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் விட்டம் எனப்படும்.
- வெட்டுக் கோடு : வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை வெட்டிக் கொண்டு செல்லும் கோடு வெட்டுக் கோடு எனப்படும்.
- தொடுகோடு : தொடுகோடு என்பது வட்டத்தினை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லும் கோடு ஆகும். தொட்டுச் செல்லும் அப்புள்ளியைத் தொடுபுள்ளி என அழைக்கிறோம்.
- வட்டப் பகுதி : வட்டத்தை ஒரு நாண் இரண்டு பகுதியாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் வட்டப் பகுதி எனப்படும்.
- வட்டக் கோணப் பகுதி : ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு ஆரங்களாலும், அதன் வட்ட வில்லாலும் அடைபடும் பகுதியே வட்டக் கோணப் பகுதி எனப்படும்.

கணித மன்ற செயல்பாடு

சர்வசமத் தன்மையின் முக்கியத்துவம்

நமது அன்றாட வாழ்வில், சர்வசமத் தன்மையை பல இடஙகளில் பயன்படுத்துகின்றோம். நமது வீட்டில் உள்ள அறையின் இரட்டை கதவுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று சர்வ சமம். பெரும்பாலும் நமது வீட்டின் முன் வாசற்கதவுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று சர்வ சமம். பறவைகளின் இறக்கைகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று சர்வ சமம். மனிதனின் உடலமைப்பில் கைகள், கால்கள் போன்றவை ஒன்றுக்கு ஒன்று சர்வ சமம். இதுபோல பல உதாரணஙகளை நாம் கூறலாம்.



வானில் பறவைகள் பறக்கின்றபோது அவை ஒரு முக்கோண வடிவத்தை அமைக்கின்றன. இதில் முன்னால் பறக்கும் பறவையின் வழியாக ஒரு மையக் கோட்டை வரைந்தால் அது சர்வ சமத் தன்மை பெறுவதை அறியலாம். இந்த அமைப்பில் சர்வ சமத்தன்மை குலைந்தால் தொடர்ந்து வரும் பறவைகளின் நிலைப்புத் தன்மை குறைந்து அவற்றால் பறக்க இயலாது.

இப்போது, இயற்கையிலும் நமது அன்றாட வாழ்விலும் சர்வ சமத் தன்மையை பயன்படுத்தும் வடிவமைப்புக்களைக் கண்டறிய முயற்சி செய்க.

செய்முறை வடிவியல்

6

6.1 அறிமுகம்

6.2 நாற்கரம்

6.3 சரிவகம்

6.4 இணைகரம்

6.5 சாய்சதுரம்

6.6 செவ்வகம் மற்றும் சதுரம்

6.7 பொதுமைய வட்டங்கள்

6.1 அறிமுகம்

பழங்கால எகிப்தியர்கள் நிலங்களை அளத்தல், கட்டடம் கட்டுதல் ஆகியவற்றில் தங்கள் பயன்பாட்டு அறிவை வெளிப்படுத்தியுள்ளனர். பழங்காலக் கிரேக்கர்கள் செய்முறை வடிவக்கணிதத்தைத் தங்கள் கலாசாரத்தில் பயன்படுத்தினர். அளவுகோல் மற்றும் கவராயம் இவற்றைப் பயன்படுத்தி பெரும் வியப்பளிக்கக்கூடிய வரைதல்களைச் செய்துள்ளனர்.

வடிவியல் என்பது பழங்கால கணிதப் பிரிவுகளுள் ஒன்று. அறிமுறை வடிவியல், செய்முறை வடிவியல் என இரு பெரும் பகுதிகளாக வடிவியல் பிரிக்கப்படுகிறது. அறிமுறை வடிவியலானது வடிவியல் கொள்கைகளை உதவிப் படங்கள் மூலமாக விளக்குகிறது. வடிவியல் கருவிகளைக் கொண்டு படங்களைத் துல்லியமாக எவ்வாறு வரைவது என்பதைச் செய்முறை வடிவியல் விளக்குகிறது.

முன் வகுப்புகளில், சில வடிவ கணித உருவங்களின் வரையறை, பண்புகள் மற்றும் பரப்பு காண உதவும் சூத்திரங்களை நாம் கற்றுள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் மேலும் சில சமதள வடிவக் கணித உருவங்களை வரையக் கற்போம்.

கௌஸ் (Gauss)

[1777-1855]

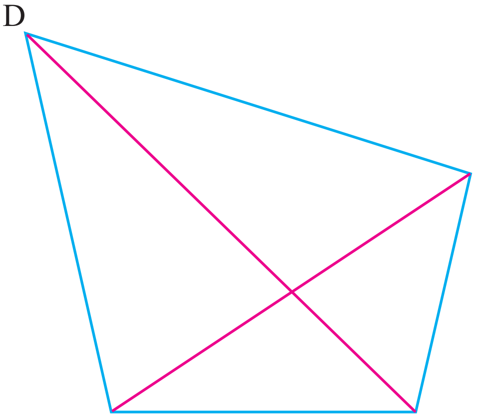
கௌஸ் ஒரு ஜெர்மானியக் கணிதமேதை. அவர் தமது 17ஆம் வயதில் p-கோணம் (p- பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம்) வரைவதை ஆராய்ந்தார். இங்கு p என்பது ஒரு பகா எண். $p = 3$ மற்றும் $p = 5$ என்ற பக்கங்களுக்கு மட்டுமே பலகோணம் வரைவது அறியப் பட்டிருந்தது. p ஒரு ஃபெர்மாட் பகா எண்ணாக $(p = 2^{2n} + 1)$ இருந்தால் மட்டுமே ஒழுங்கு p-கோணம் வரையமுடியும் என்பதை கௌஸ் கண்டுபிடித்தார்.

6.2 நாற்கரம்

6.2.1 அறிமுகம்

ஏழாம் வகுப்பில் நாம் நாற்கரம் பற்றியும், அவற்றின் பண்புகள் பற்றியும் கற்றறிந்துள்ளோம். அவற்றை நினைவு கூர்வோம்.

படம். 6.1 இல், A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் உள்ளன. எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையவில்லை.



படம் 6.1

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ இவைகள் முறையே ஒன்றையொன்று உச்சிகளில் சந்திக்கின்றன. ஒரு தளத்தில் நான்கு பக்கங்களால் அடைபட்ட உருவம் நாற்கரம் என்பதை நாம் அறிவோம். இதன் நான்கு கோண அளவுகளின் கூடுதல் **360°** ஆகும்.

$(\overline{AB}, \overline{AD})$, $(\overline{AB}, \overline{BC})$, $(\overline{BC}, \overline{CD})$, $(\overline{CD}, \overline{DA})$ இவைகள் அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகும். $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ என்பன மூலைவிட்டங்கள் ஆகும்.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ மற்றும் $\angle D$ (அல்லது $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$) என்பன நாற்கரம் ABCD இன் கோணங்கள் ஆகும்.

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

குறிப்பு: (i) நாற்கரத்திற்குப் பெயரிடும்போது ஒரு வட்டச் சுற்றில் ABCD என்றோ BCDA என்றோ குறிக்க வேண்டும்.

(ii) சதுரம், செவ்வகம், சாய்சதுரம், இணைகரம், சரிவகம் என்பன எல்லாம் நாற்கர வகைகள் ஆகும்.

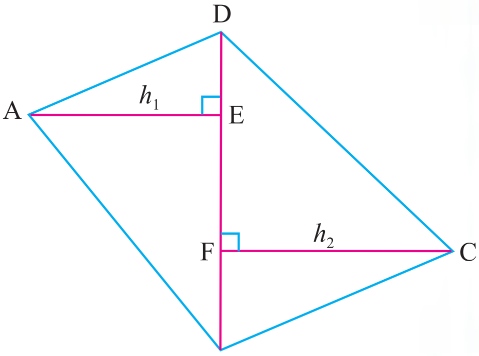
(iii) ஒரு நாற்கரத்தில் நான்கு உச்சிகள், நான்கு பக்கங்கள், நான்கு கோணங்கள் மற்றும் இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் உள்ளன..

6.2.2 நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

ABCD என்ற நாற்கரத்தில் $\overline{BD}$ என்பது ஒரு மூலைவிட்டமாகும்.

$\overline{AE}$, $\overline{FC}$ என்பன முறையே A, C என்ற உச்சிகளிலிருந்து மூலைவிட்டம் $\overline{BD}$ க்கு வரையப் பட்ட குத்துக்கோடுகளாகும்.

படம் 6.2 இல் இருந்து



படம் 6.2

நாற்கரம் ABCD யின் பரப்பளவு

$= \triangle$ ABDஇன் பரப்பளவு + $\triangle$ BCD இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times (AE + CF)$$

$= \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$ சதுர அலகுகள்

இங்கு $BD = d$, $AE = h_1$ மற்றும் $CF = h_2$.

குறியீட்டு முறை:

(i) செங்குத்து ($\perp$):

$\overline{PQ} \perp \overline{RS}$ எனில் $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

(ii) இணை (||):

$\overline{PQ} \,||\, \overline{RS}$ எனில் $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை.

ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பளவானது, மூலைவிட்டத்தின் நீளம் மற்றும் எதிர் உச்சிகளிலிருந்து மூலைவிட்டத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்களின் கூடுதல், இவைகளின் பெருக்கற் பலனில் பாதியாகும்.

$A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ இதில் 'd' என்பது நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம், h_1 மற்றும் h_2 என்பவை மூலைவிட்டத்தின் எதிர் உச்சிகளிலிருந்து மூலைவிட்டத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டுத்துண்டுகளின் நீளம் ஆகும்.

செய்து பார்

காகித மடிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி, $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ என்பதைச் சரிபார்.

6.2.3 நாற்கரம் அமைத்தல்

இவ்வகுப்பில் ஒரு நாற்கரத்தை வரையும் முறையை நாம் கற்போம்.

ஒரு நாற்கரத்தை வரைய முதலில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தை வரைய வேண்டும். பின்னர் நான்காவது உச்சி கண்டறியப்படுகிறது.

ஒரு முக்கோணம் வரைய ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற மூன்று அளவுகள் தேவை. நான்காம் உச்சியைக் காண மேலும் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற அளவுகள் தேவை. எனவே ஒரு நாற்கரம் வரைய ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற ஐந்து அளவுகள் தேவை.

பின்வரும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் நாற்கரத்தை வரையலாம்.

(i) நான்கு பக்கங்கள், ஒரு மூலைவிட்டம்

(ii) நான்கு பக்கங்கள், ஒரு கோணம்

(iii) மூன்று பக்கங்கள், ஒரு மூலைவிட்டம் மற்றும் ஒரு கோணம்

(iv) மூன்று பக்கங்கள், இரண்டு கோணங்கள்

(v) இரண்டு பக்கங்கள், மூன்று கோணங்கள்

6.2.4 நான்கு பக்கங்களும், ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது நாற்கரம் அமைத்தல்

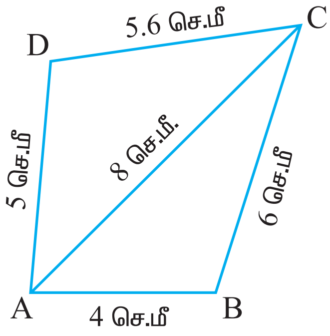
எடுத்துக்காட்டு 6.1

AB = 4 செ.மீ., BC = 6 செ.மீ., CD = 5.6 செ.மீ., DA = 5 செ.மீ., மற்றும் AC = 8 செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற நாற்கரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

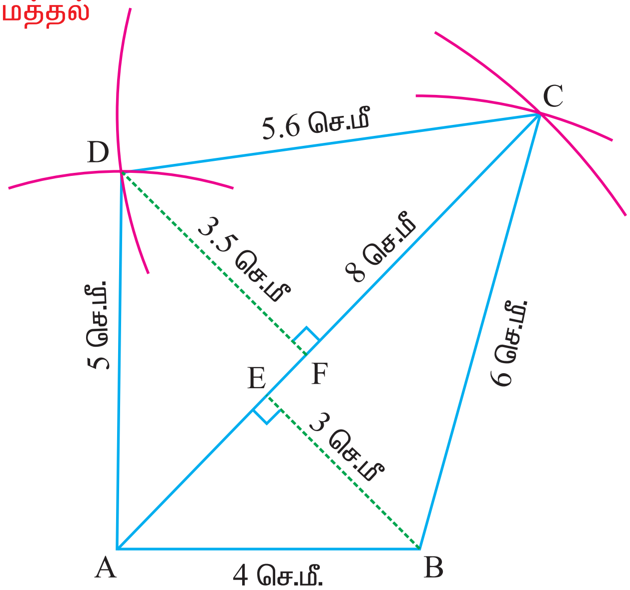
தரவு: AB = 4 செ.மீ., BC = 6 செ.மீ., CD = 5.6 செ.மீ., DA = 5 செ.மீ., மற்றும் AC = 8 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 6.3

நாற்கரம் அமைத்தல்



படம் 6.4

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 4 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : A ஐயும் B ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 8 செ.மீ., 6 செ.மீ. ஆரங்களை உடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை C இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : $\overline{AC}$ மற்றும் $\overline{BC}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : Aஐயும் Cஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 5 செ.மீ., 5.6 செ.மீ., ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ஐ வரையவும். ABCD தேவையான நாற்கரம் ஆகும்.

படி 7 : B, D யிலிருந்து முறையே $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ மற்றும் $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ஆகியவற்றை வரையவும். BE, DF இவற்றின் நீளங்களைக் காணவும். BE = $h_1 = 3$ செ.மீ., DF = $h_2 = 3.5$ செ.மீ. AC = d = 8 செ.மீ ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

நாற்கரம் ABCD இல், $d = 8$ செ.மீ., $h_1 = 3$ செ.மீ. மற்றும் $h_2 = 3.5$ செ.மீ.

நாற்கரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(8)(3 + 3.5)$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6.5$

$=$ 26 செ.மீ ^{2}.

6.2.5 நான்கு பக்கங்களும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது நாற்கரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.2

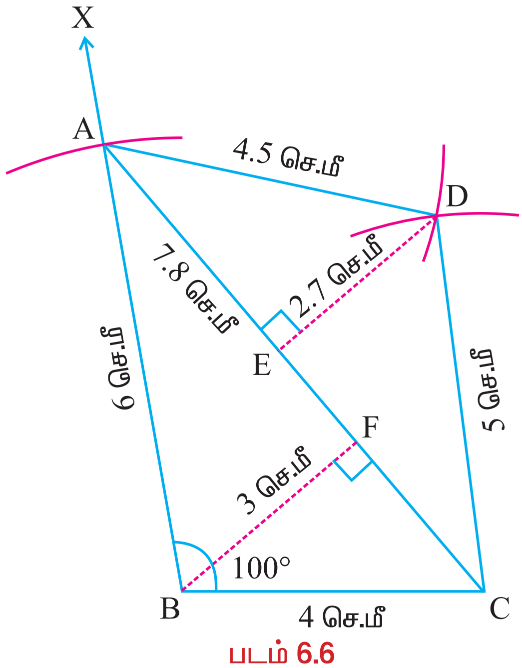
AB = 6 செ.மீ., BC = 4 செ.மீ., CD = 5 செ.மீ., DA = 4.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 100° என்ற அளவுகள் கொண்ட நாற்கரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காணவும்.

தீர்வு

தரவு:

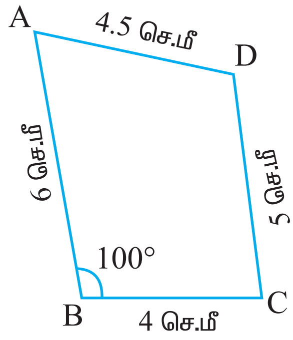
AB = 6 செ.மீ., BC = 4 செ.மீ., CD = 5 செ.மீ., DA = 4.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 100°

நாற்கரம் அமைத்தல்



படம் 6.6

உதவிப்படம்



படம் 6.5

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 4 செ.மீ., நீளமுடைய BC என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : BC என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் B இல் $\angle$ CBX = 100° உள்ளவாறு $\overrightarrow{BX}$ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : B ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ., ஆரமுடைய ஒரு வட்ட வில் வரையவும். இது $\overrightarrow{BX}$ஐ A இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : CA என்ற கோட்டுத் துண்டை வரையவும். C, A இவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 5 செ.மீ., 4.5 செ.மீ., ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரைக. இவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{CD}$ மற்றும் $\overline{AD}$ ஐ வரையவும்.
ABCD தேவையான நாற்கரம் ஆகும்.

படி 7 : B, D யிலிருந்து முறையே $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ மற்றும் $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ஆகியவற்றை வரையவும். BF, DE இவற்றின் நீளங்களைக் காணவும். BF = $h_1 = 3$ செ.மீ., DE = $h_2 = 2.7$ செ.மீ. AC = d = 7.8 செ.மீ ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

நாற்கரம் ABCD இல், $d = 7.8$ செ.மீ., $h_1 = 3$ செ.மீ. மற்றும் $h_2 = 2.7$ செ.மீ.

நாற்கரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(7.8)(3 + 2.7) = \frac{1}{2} \times 7.8 \times 5.7$

$= 22.23$ செ.மீ ^{2}.

6.2.6 மூன்று பக்கங்கள், ஒரு மூலைவிட்டம் மற்றும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது நாற்கரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.3

PQ = 4 செ.மீ., QR = 6 செ.மீ., PR = 7 செ.மீ., PS = 5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ PQS = 40° என்ற அளவுகள் கொண்ட PQRS என்ற நாற்கரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

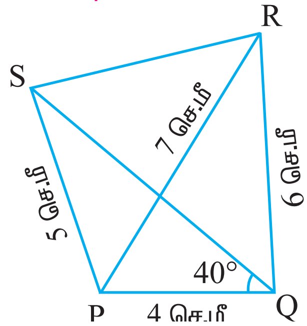
தீர்வு

தரவு: PQ = 4 செ.மீ., QR = 6 செ.மீ., PR = 7 செ.மீ.,
PS = 5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ PQS = 40°

நாற்கரம் அமைத்தல்

வரைதலுக்கான படிகள்

உதவிப்படம்

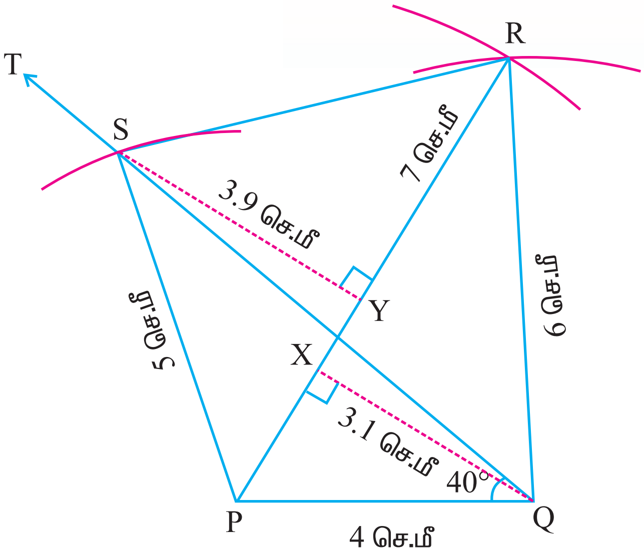


படம் 6.7

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 4 செ.மீ., நீளமுள்ள PQ என்ற கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : P, Q ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ., 6 செ.மீ. ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை R இல் வெட்டட்டும்.



படம். 6.8

படி 4 : $\overline{PR}$ மற்றும் $\overline{QR}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : $\overline{PQ}$ என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் Q இடத்து $\angle PQT = 40°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{QT}$ ஐ அமைக்கவும்

படி 6 : P யை மையமாகக் கொண்டு 5 செ.மீ., ஆரமுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும். இது $\overrightarrow{QT}$ ஐ S இல் வெட்டுகிறது.

படி 7 : $\overline{PS}$ ஐ வரையவும்.

PQRS தேவையான நாற்கரம் ஆகும்.

படி 8 : Q, S யிலிருந்து முறையே $\overline{QX} \perp \overline{PR}$ மற்றும் $\overline{SY} \perp \overline{PR}$ ஆகியவற்றை வரையவும். QX, SY இவற்றின் நீளங்களைக் காணவும்.

$QX = h_1 = 3.1$ செ.மீ., $SY = h_2 = 3.9$ செ.மீ., $PR = d = 7$ செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற நாற்கரத்தில், $h_1 = 3.1$ செ.மீ., $h_2 = 3.9$ செ.மீ. மற்றும் $d = 7$ செ.மீ.

நாற்கரம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(7)(3.1 + 3.9)$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7$

$= 24.5$ செ.மீ ^{2}.

6.2.7 மூன்று பக்கங்களும் மற்றும் இரண்டு கோணங்களும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது நாற்கரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.4

AB = 6.5 செ.மீ., AD = 5 செ.மீ., CD = 5 செ.மீ., $\angle$ BAC = 40° மற்றும் $\angle$ ABC = 50° என்ற அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற நாற்கரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காணவும்.

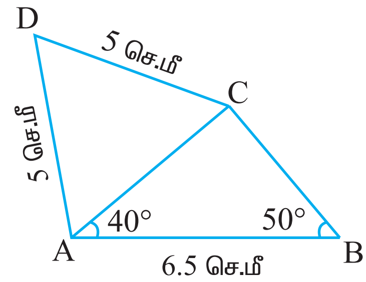
தீர்வு

தரவு:

AB = 6.5 செ.மீ., AD = 5 செ.மீ., CD = 5 செ.மீ.,

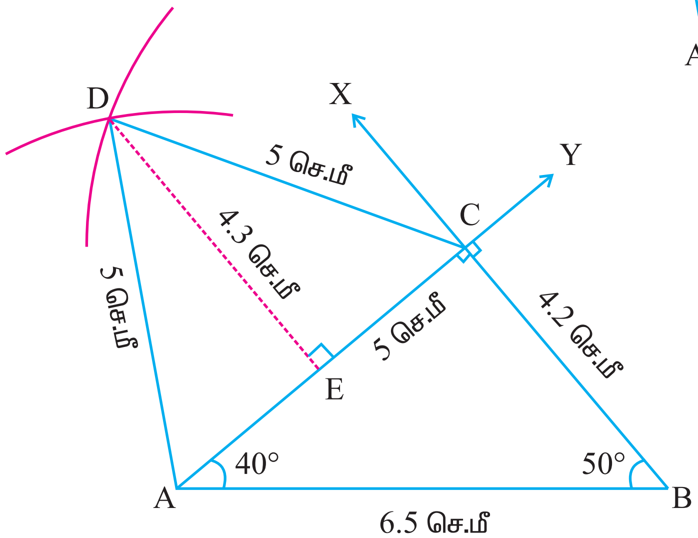
$\angle$ BAC = 40° மற்றும் $\angle$ ABC = 50°

உதவிப்படம்



படம். 6.9

நாற்கரம் அமைத்தல்



படம் 6.10

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6.5 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் A இல் $\angle$ BAX = 40° உள்ளவாறும், B இல் $\angle$ ABY = **50**° உள்ளவாறும் $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$ களை வரைக. $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$ இவை C இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : A மற்றும் C களை மையங்களாகக் கொண்டு 5 செ.மீ., ஆரத்திற்கு இரு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான நாற்கரம் ஆகும்.

படி 6 : B, D யிலிருந்து முறையே $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ மற்றும் $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ஆகியவற்றை வரையவும்.

BC, DE இவற்றின் நீளங்களை காணவும். BC = h_1 = 4.2 செ.மீ., DE = h_2 = 4.3 செ.மீ., மற்றும் AC = d = 5 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்

ABCD என்ற நாற்கரத்தில், $d = 5$ செ.மீ., $h_1 = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $h_2 = 4.3$ செ.மீ.

நாற்கரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(5)(4.2 + 4.3)$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8.5 = 21.25$ செ.மீ ^{2}.

6.2.8 இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் மூன்று கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது நாற்கரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.5

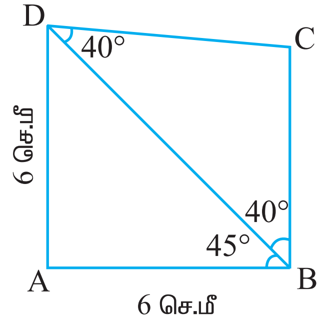
AB = 6 செ.மீ., AD = 6 செ.மீ., ∠ ABD = 45°, ∠ BDC = 40° மற்றும் ∠ DBC = 40° என்ற அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற நாற்கரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு

தரவு: AB = 6 செ.மீ., AD = 6 செ.மீ.,

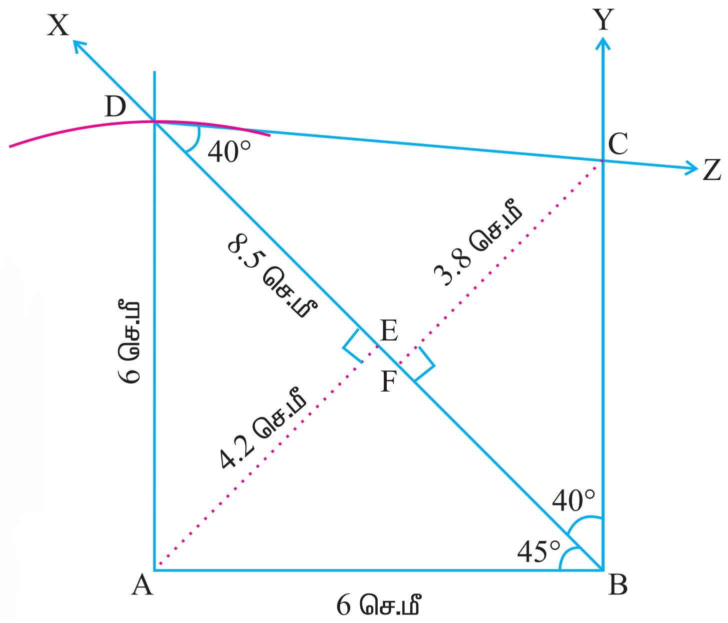
∠ ABD = 45°, ∠ BDC = 40° மற்றும் ∠ DBC = 40°

உதவிப்படம்



படம் 6.11

நாற்கரம் அமைத்தல்



படம் 6.12

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் B யிடத்து ∠ ABX = 45° உள்ளவாறு $\overrightarrow{BX}$ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ., ஆரமுடைய வட்ட வில் வரையவும். அது $\overrightarrow{BX}$ ஐ D இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : $\overline{AD}$ ஐ வரையவும்.

படி 6 : B இல் $\overline{BD}$ இன் மீது $\angle DBY = 40^\circ$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{BY}$ ஐ அமைக்கவும்.

படி 7 : D இல் $\overline{BD}$ இன் மீது $\angle BDZ = 40^\circ$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{DZ}$ ஐ அமைக்கவும்.

படி 8 : $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{DZ}$ என்பன C இல் வெட்டட்டும்.
ABCD தேவையான நாற்கரம் ஆகும்.

படி 9 : A, C யிலிருந்து முறையே $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ மற்றும் $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ ஆகியவற்றை வரையவும்.
AE மற்றும் CF இன் நீளங்களைக் காணவும்.
$AE = h_1 = 4.2$ செ.மீ.,, $CF = h_2 = 3.8$ செ.மீ., மற்றும் $BD = d = 8.5$ செ.மீ.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற நாற்கரத்தில், $d = 8.5$ செ.மீ., $h_1 = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $h_2 = 3.8$ செ.மீ.

நாற்கரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{2}(8.5)(4.2 + 3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.5 \times 8 = 34 \text{ செ.மீ}^2.$$

பயிற்சி 6.1

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு ABCD என்ற நாற்கரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

1. AB = 5 செ.மீ, BC = 6 செ.மீ, CD = 4 செ.மீ, DA= 5.5 செ.மீ மற்றும் AC = 7 செ.மீ.
2. AB =7 செ.மீ, BC = 6.5 செ.மீ, AC = 8 செ.மீ, CD = 6 செ.மீ மற்றும் DA = 4.5 செ.மீ.
3. AB = 8 செ.மீ, BC = 6.8 செ.மீ, CD = 6 செ.மீ, AD = 6.4 செ.மீ மற்றும் $\angle B = 50^\circ$.
4. AB = 6 செ.மீ, BC = 7 செ.மீ, AD = 6 செ.மீ, CD = 5 செ.மீ மற்றும் $\angle BAC = 45^\circ$.
5. AB = 5.5 செ.மீ, BC = 6.5 செ.மீ, BD = 7 செ.மீ, AD = 5 செ.மீ மற்றும் $\angle BAC = 50^\circ$.
6. AB = 7 செ.மீ, BC = 5 செ.மீ, AC = 6 செ.மீ, CD = 4 செ.மீ மற்றும் $\angle ACD = 45^\circ$.
7. AB = 5.5 செ.மீ, BC = 4.5 செ.மீ, AC = 6.5 செ.மீ, $\angle CAD = 80^\circ$ மற்றும் $\angle ACD = 40^\circ$.
8. AB = 5 செ.மீ, BD = 7 செ.மீ, BC = 4 செ.மீ, $\angle BAD = 100^\circ$ மற்றும் $\angle DBC = 60^\circ$.
9. AB = 4 செ.மீ, AC = 8 செ.மீ, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ மற்றும் $\angle CAD = 40^\circ$.
10. AB = 6 செ.மீ, BC = 6 செ.மீ, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$ மற்றும் $\angle CAD = 100^\circ$.

6.3 சரிவகம்

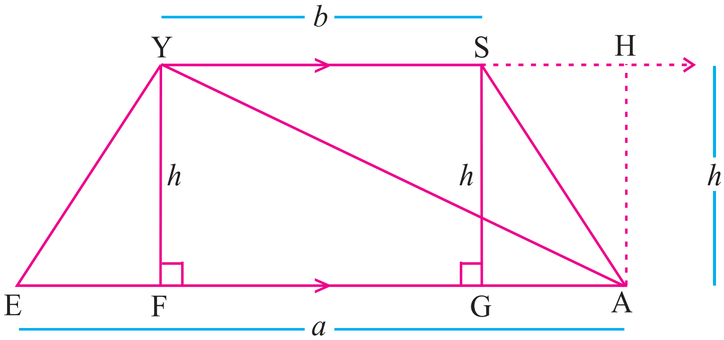
6.3.1 அறிமுகம்

ஏழாம் வகுப்பில் சரிவகம், இருசமபக்க சரிவகம் என்ற சிறப்பு நாற்கரங்களைப் பற்றியும், அவற்றின் பண்புகளையும் கற்றறிந்துள்ளோம். இப்பொழுது சரிவகத்தின் வரையறையை நினைவு கூர்க.

ஒரு நாற்கரத்தில் ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் மட்டும் இணையாக இருப்பின் அந்த நாற்கரம் சரிவகம் ஆகும்.

6.3.2 சரிவகத்தின் பரப்பளவு

EASY என்ற சரிவகத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 6.13

கொடுக்கப்பட்ட சரிவகத்தில் $\overline{YA}$ என்ற மூலைவிட்டத்தை வரைந்து இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

$\triangle$ EAY இன் அடிப்பக்கம் = $\overline{EA}$ (EA = a அலகுகள்)

$\triangle$ YAS இன் அடிப்பக்கம் = $\overline{YS}$ (YS = b அலகுகள்)

$\overline{EA} \parallel \overline{YS}$ என்று நாம் அறிவோம்.

மேலும் YF = HA = h அலகுகள்

$\triangle$ EAY இன் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}ah$. இது போலவே, $\triangle$ YAS இன் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}bh$.

எனவே,

சரிவகம் EASY இன் பரப்பளவு = $\triangle$ EAY இன் பரப்பளவு + $\triangle$ YAS இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}h(a+b) \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{உயரம்} \times (\text{இணைப்பக்க அளவுகளின் கூடுதல்}) \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

சரிவகத்தின் பரப்பளவு

A = $\frac{1}{2}$ h (a + b) ச.அ. 'a' மற்றும் 'b' என்பவை இணைப்பக்கங்களின் நீளங்கள், மேலும் h என்பது இணைப்பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும்.

6.3.3 சரிவகம் அமைத்தல்

பொதுவாக, நாம் சரிவகத்தை வரையும் பொழுது, அதிக நீளமுள்ள இணைப் பக்கத்தை அடிப்பக்கமாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். இந்த அடிப்பக்கத்தின் மீது கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்கு ஒரு முக்கோணம் வரைய வேண்டும். இம்முக்கோணம் இணைப்பக்கங்களுக்கு இடையில் அமையுமாறு வரைய வேண்டும்.

இப்பொழுது, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு எதிராக அமையும் உச்சி, சரிவகத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு எதிராக உள்ள இணை கோட்டில் அமைகின்றது. இந்த உச்சியின் வழியாக அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைகின்றோம்.

சரிவகத்தின் நான்காவது உச்சி இக்கோட்டில் அமைகின்றது. கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளில் எஞ்சியுள்ள அளவின் உதவியால் இந்த நான்காவது உச்சி குறிக்கப்படுகின்றது. பின்னர் தக்க உச்சிகளைக் கோட்டுத் துண்டுகளின் மூலம் முறையாகச் சேர்ப்பதால் சரிவகம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது.

ஒரு சரிவகத்தை வரைய ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற நான்கு அளவுகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

பின்வரும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் நாம் சரிவகத்தை வரைய இயலும்:

(i) மூன்று பக்கங்கள், ஒரு மூலைவிட்டம்
(ii) மூன்று பக்கங்கள், ஒரு கோணம்
(iii) இரண்டு பக்கங்கள், இரண்டு கோணங்கள்
(iv) நான்கு பக்கங்கள்

6.3.4 மூன்று பக்கங்களும், ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சரிவகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.6

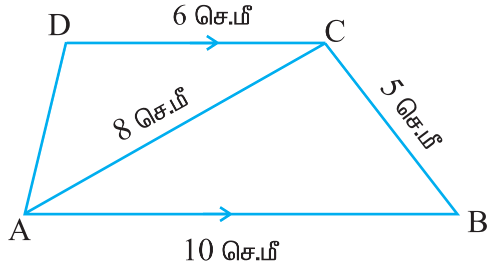
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. AB = 10 செ.மீ., BC = 5 செ.மீ., AC = 8 செ.மீ. மற்றும் CD = 6 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

தரவு : $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

AB = 10 செ.மீ., BC = 5 செ.மீ., AC = 8 செ.மீ. மற்றும் CD = 6 செ.மீ.

உதவிப்படம்



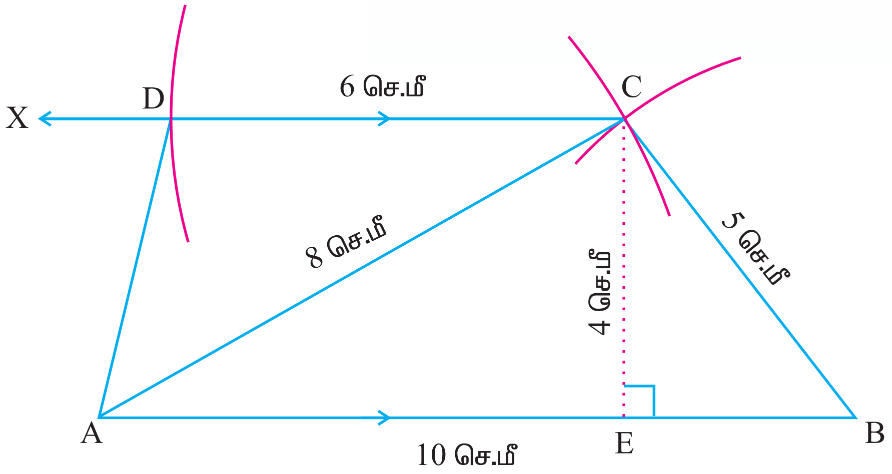
படம் 6.14

சரிவகம் அமைத்தல்

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 10 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.



படம் 6.15

படி 3 : A யையும், B யையும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 8 செ.மீ., 5 செ.மீ., ஆர அளவுகளையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை C இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : $\overline{AC}$ மற்றும் $\overline{BC}$ஐ வரையவும்.

படி 5 : BA க்கு இணையாக $\overrightarrow{CX}$ ஐ வரையவும்.

படி 6 : C ஐ மையமாகக்கொண்டு 6 செ.மீ., ஆரமுடைய ஒரு வட்டவில் $\overrightarrow{CX}$ஐ D இல் வெட்டுமாறு வரையவும்.

படி 7 : $\overline{AD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான சரிவகம் ஆகும்.

படி 8 : C யிலிருந்து $\overline{AB}$ க்கு $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ ஆக வரையவும்.

CE இன் அளவு காணவும்.

CE = h = 4 செ.மீ. AB = a = 10 செ.மீ., DC = b = 6 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சரிவகத்தில், a = 10 செ.மீ., b = 6 செ.மீ. மற்றும் h = 4 செ.மீ.

சரிவகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, h(a+b)$

$= \frac{1}{2}(4)\,(10+6)$

$= \frac{1}{2}\times 4\times 16 = 32$ செ.மீ ^{2}.

6.3.5 மூன்று பக்கங்களும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சரிவகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.7

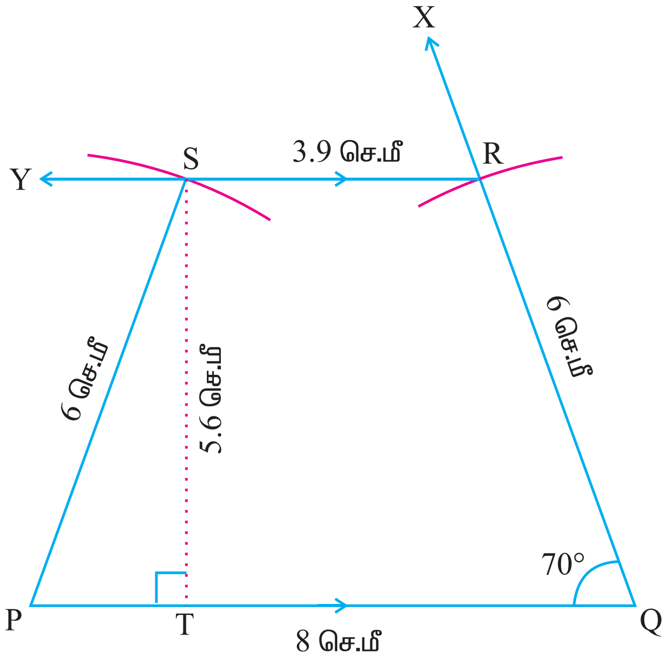
$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 8 செ.மீ., $\angle PQR = 70^\circ$, QR = 6 செ.மீ. மற்றும் PS = 6 செ.மீ. ஆகிய அளவுகள் கொண்ட PQRS என்ற சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

தரவு: $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$

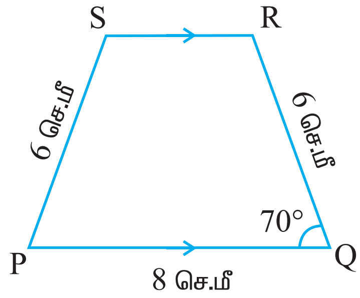
PQ = 8 செ.மீ., ∠PQR = 70°, QR = 6 செ.மீ. மற்றும் PS = 6 செ.மீ.

சரிவகம் அமைத்தல்



படம் 6.17

உதவிப்படம்



படம் 6.16

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 8 செ.மீ. நீளமுடைய PQ என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : PQ என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் Q இல் ∠ PQX = 70° உள்ளவாறு $\overrightarrow{QX}$ ஐ வரையவும்.

படி 4 : Q ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும். இது $\overrightarrow{QX}$ ஐ R இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : $\overline{QP}$ க்கு இணையாக $\overrightarrow{RY}$ ஐ வரையவும்.

படி 6 : P ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டவில் ஒன்று $\overrightarrow{RY}$ ஐ S இல் வெட்டுமாறு வரையவும்.

படி 7 : கோட்டுத்துண்டு PS ஐ வரையவும்.

PQRS தேவையான சரிவகம் ஆகும்.

படி 8 : S யிலிருந்து $\overline{PQ}$ க்கு, $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$ ஆக வரையவும். ST இன் அளவு காணவும். ST = h = 5.6 செ.மீ.,

PQ = a = 8 செ.மீ., RS = b = 3.9 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்

PQRS என்ற சரிவகத்தில், a = 8 செ.மீ., b = 3.9 செ.மீ. மற்றும் h = 5.6 செ.மீ.

சரிவகம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} h (a + b)$

$= \frac{1}{2}(5.6)(8 + 3.9)$

$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11.9$

= 33.32 செ.மீ ^{2}.

6.3.6 இரண்டு பக்கங்களும், இரண்டு கோணங்களும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சரிவகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.8

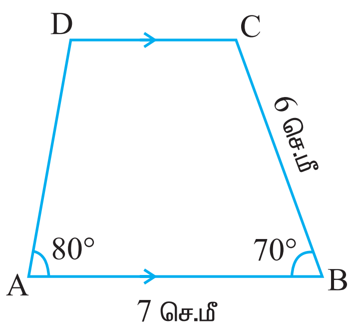
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. AB = 7 செ.மீ., BC = 6 செ.மீ., $\angle$ BAD = 80° மற்றும் $\angle$ ABC = 70° ஆகிய அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

தரவு: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ AB = 7 செ.மீ., BC = 6 செ.மீ.,

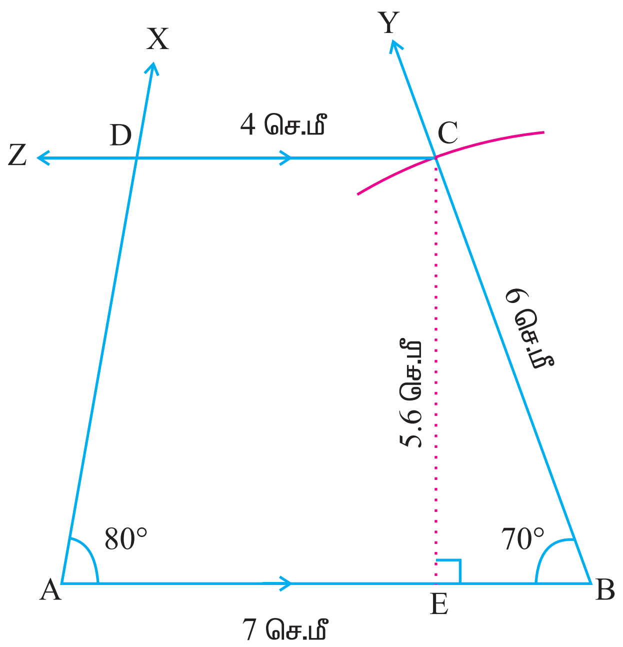
$\angle$ BAD = 80° மற்றும் $\angle$ ABC = 70°

உதவிப்படம்



படம் 6.18

சரிவகம் அமைத்தல்



படம் 6.19

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 7 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் A இடத்து $\angle BAX = 80°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{AX}$ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் B இடத்து $\angle ABY = 70°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{BY}$ஐ அமைக்கவும்.

படி 5 : B ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும். இந்த வில் $\overrightarrow{BY}$ ஐ C இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{AB}$ க்கு இணையாக C இன் வழியாக $\overrightarrow{CZ}$ ஐ வரையவும்.

இது $\overrightarrow{AX}$ஐ D இல் வெட்டட்டும். ABCD தேவையான சரிவகம் ஆகும்.

படி 7 : C யிலிருந்து $\overline{AB}$ க்கு $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். CE யின் அளவு காணவும்.

$CE = h = 5.6$ செ.மீ. மற்றும் $CD = b = 4$ செ.மீ. ஆகும்.

$AB = a = 7$ செ.மீ.

பரப்பளவு கணக்கிடல்:

சரிவகம் ABCD இல், $a = 7$ செ.மீ., $b = 4$ செ.மீ., மற்றும் $h = 5.6$ செ.மீ.

சரிவகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} h(a+b)$

$= \frac{1}{2}(5.6)\ (7+4)$

$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11$

$= 30.8$ செ.மீ ^{2}.

6.3.7 நான்கு பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சரிவகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.9

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. AB = 7 செ.மீ., BC = 5 செ.மீ., CD = 4 செ.மீ. மற்றும் AD = 5 செ.மீ., ஆகிய அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

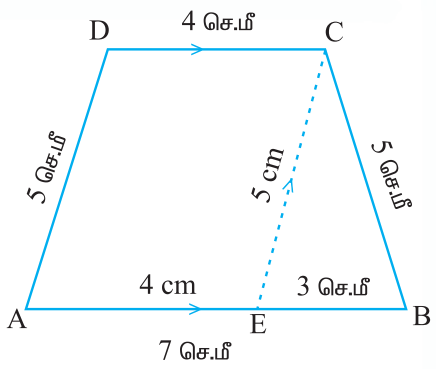
தரவு: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

AB = 7 செ.மீ., BC = 5 செ.மீ.,

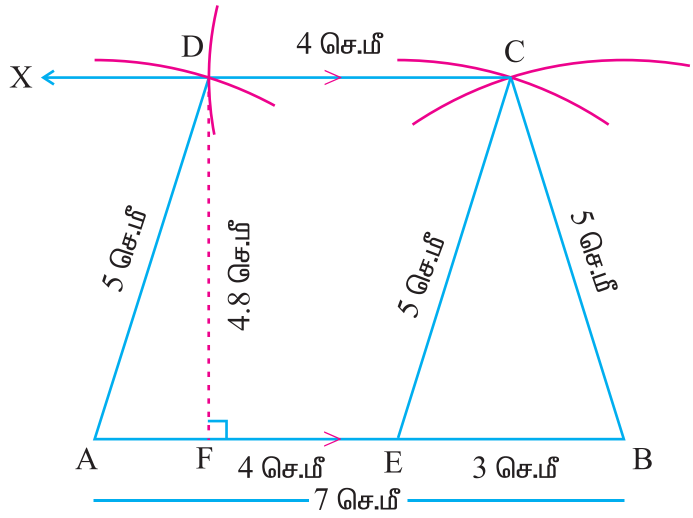
CD = 4 செ.மீ. மற்றும் AD = 5 செ.மீ.

சரிவகம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.20



படம் 6.21

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

$\overline{CE} \parallel \overline{DA}$ ஆக வரையவும். AECD ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

$\therefore$ EC = 5 செ.மீ., AE = DC = 4 செ.மீ.,

படி 2 : 7 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : DC = 4 செ.மீ. என்பதால் AB இல் AE = 4 செ.மீ. உள்ளவாறு E என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : B மற்றும் E ஐ மையங்களாகக் கொண்டு 5 செ.மீ., ஆர அளவுகளுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை வெட்டும் புள்ளியை C எனக் குறிக்கவும்.

படி 5 : $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{EC}$ஐ வரையவும்.

படி 6 : C மற்றும் A ஐ மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 4 செ.மீ., மற்றும் 5 செ.மீ., ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 7 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD என்பது தேவையான சரிவகம் ஆகும்.

படி 8 : D யிலிருந்து $\overline{AB}$க்கு $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். DF இன் அளவு காணவும். DF = h = 4.8 செ.மீ.

AB = a = 7 செ.மீ., CD = b = 4 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்

சரிவகம் ABCD இல், $a = 7$ செ.மீ., $b = 4$ செ.மீ., மற்றும் $h = 4.8$ செ.மீ.

சரிவகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} h(a+b)$

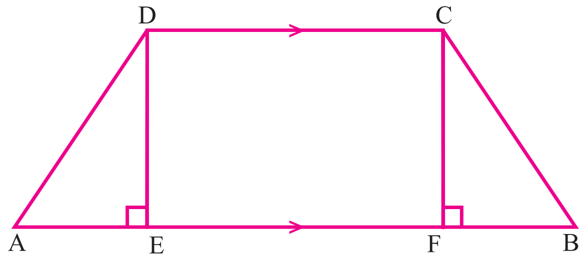
$$= \frac{1}{2}(4.8)\ (7+4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4.8 \times 11$$

$= 2.4 \times 11 = 26.4$ செ.மீ ^{2}.

6.3.8 இருசமபக்க சரிவகம்

படம் **6.22** இல் ABCD ஒரு இருசமபக்க சரிவகம். இதில்



படம் **6.22**

(i) இணையில்லாப் பக்கங்கள் AD மற்றும் BC இன் அளவுகள் சமம்.
அதாவது, AD = BC.

(ii) $\angle A = \angle B$.
மற்றும் $\angle ADC = \angle BCD$

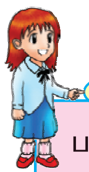
(iii) மூலைவிட்டங்களின் அளவுகள் சமம்.
அதாவது, AC = BD

(iv) AE = BF, ($\overline{DE} \perp \overline{AB}$, $\overline{CF} \perp \overline{BA}$)

ஒரு இருசமபக்க சரிவகத்தில்

(i) ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை
(ii) இணையில்லாப் பக்கங்கள் சமம்

என்பதால் இருசமபக்க சரிவகம் அமைத்திட ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மூன்று அளவுகள் மட்டுமே நமக்குத் தேவைப்படுகிறது.



நீவிர் அறிவீரா?

பழங்கால இந்தியர்கள் நாற்கரங்களின் பல பண்புகளை அறிந்திருந்தனர் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. “பௌத்தயான சூத்ராஸ்” என்னும் நூலில் தெளிவாகக் குறிப்பிடப்பட்ட இரண்டு வடிவியல் தேற்றங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

i) செவ்வகத்தின் இரு மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும். அவை செவ்வகத்தினை நான்கு சமப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

ii) சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இரு சமக் கூறிடும்.

6.3.9 இரு சமபக்க சரிவகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.10

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. AB = 11 செ.மீ., DC = 7 செ.மீ. மற்றும் AD = BC = 6 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற இருசமபக்க சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

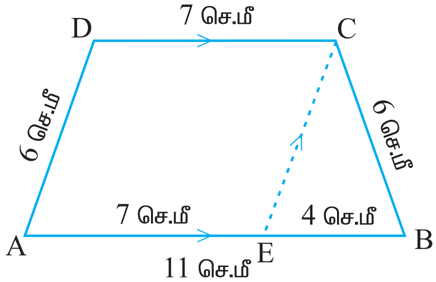
தீர்வு

தரவு: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

AB = 11 செ.மீ., DC = 7 செ.மீ. மற்றும்

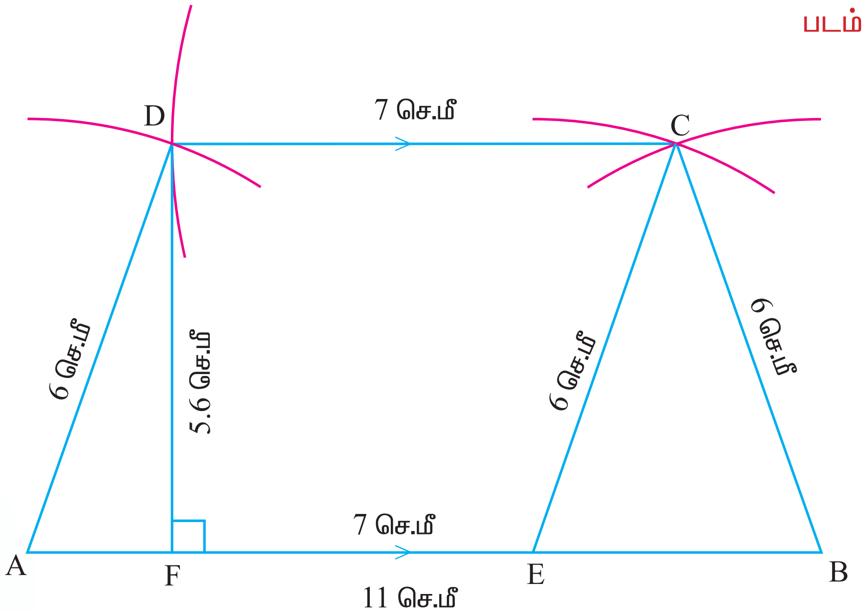
AD = BC = 6 செ.மீ.

உதவிப் படம்



படம் 6.23

இருசமபக்க சரிவகம் அமைத்தல்



படம் 6.24

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 11 செமீ நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : DC = 7 செ.மீ., என்பதால் $\overline{AB}$ இல் AE = 7 செ.மீ., உள்ளவாறு E என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : E, B இவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு (AD = EC = 6 செ.மீ.) 6 செ.மீ. ஆர அளவுடைய இரு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை வெட்டுமிடம் C எனக் குறிக்கவும்.

படி 5 : $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{EC}$ ஐ வரையவும்.

படி 6 : C, A இவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ. ஆர அளவுகளையுடைய இரு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை வெட்டுமிடம் D எனக் குறிக்கவும்.

படி 7 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான இருசமபக்க சரிவகம் ஆகும்.

படி 8 : D யிலிருந்து $\overline{AB}$ க்கு $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். DF இன் அளவு காணவும்.

DF = h = 5.6 செ.மீ. AB = a = 11 செ.மீ. மற்றும் CD = b = 7 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்

ABCD என்ற இருசமபக்க சரிவகத்தில், a = 11 செ.மீ., b = 7 செ.மீ., மற்றும் h = 5.6 செ.மீ.

இருசமபக்க சரிவகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}h(a+b)$

$$= \frac{1}{2}(5.6)\ (11+7)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 18 = 50.4 \text{ செ.மீ}^2.$$

பயிற்சி 6.2

I. கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு PQRS என்ற சரிவகம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காணவும்.

1. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 6.8 செ.மீ., QR = 7.2 செ.மீ., PR = 8.4 செ.மீ. மற்றும் RS = 8 செ.மீ.
2. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 8 செ.மீ., QR = 5 செ.மீ., PR = 6 செ.மீ. மற்றும் RS = 4.5 செ.மீ.
3. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 7 செ.மீ., $\angle$ Q = 60°, QR = 5 செ.மீ., மற்றும் RS = 4 செ.மீ.
4. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 6.5 செ.மீ., QR = 7 செ.மீ., $\angle$ PQR = 85° மற்றும் PS = 9 செ.மீ.
5. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 7.5 செ.மீ., PS = 6.5 செ.மீ., $\angle$ QPS = 100° மற்றும் $\angle$ PQR = 45°.
6. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 6 செ.மீ., PS = 5 செ.மீ., $\angle$ QPS = 60° மற்றும் $\angle$ PQR = 100°.
7. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 8 செ.மீ., QR = 5 செ.மீ., RS = 6 செ.மீ. மற்றும் SP = 4 செ.மீ..
8. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. PQ = 4.5 செ.மீ., QR = 2.5 செ.மீ., RS = 3 செ.மீ. மற்றும் SP = 2 செ.மீ..

II. கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு இருசமபக்க சரிவகம் ABCD வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, AB = 9 செ.மீ., DC = 6 செ.மீ. மற்றும் AD = BC = 5 செ.மீ.
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, AB = 10 செ.மீ., DC = 6 செ.மீ. மற்றும் AD = BC = 7 செ.மீ.

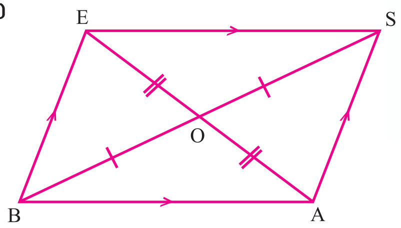
6.4 இணைகரம்

6.4.1 அறிமுகம்

ஏழாம் வகுப்பில் இணைகரம் பற்றிய கருத்துகளைக் கற்றுள்ளீர்கள். இணைகரத்தை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ள ஒரு நாற்கரம், இணைகரம் ஆகும்.

படம் **6.25** இல் காட்டப்பட்டுள்ள இணைகரம் BASE இல் பின்வரும் பண்புகளைப் பற்றி நாம் அறிவோம்.



படம் **6.25**

(i) $\overline{BA} \parallel \overline{ES}$; $\overline{BE} \parallel \overline{AS}$

(ii) எதிர்ப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்.
அதாவது BA = ES ; BE = AS

(iii) எதிர்க்கோணங்களின் அளவுகள் சமம்.
அதாவது $\angle$ BES = $\angle$ BAS; $\angle$ EBA = $\angle$ ESA

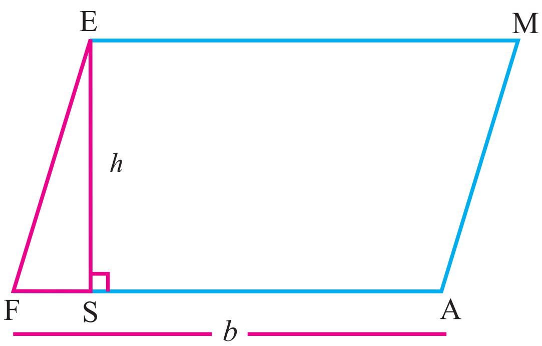
(iv) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமபாகங்களாக வெட்டிக்கொள்கின்றன.
OB = OS ; OE = OA, ஆனால் BS $\neq$ AE.

(v) இரு அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

இப்பொழுது நாம் இணைகரங்களை வரையும் முறை மற்றும் அதன் பரப்பளவு காணும் முறையைப் பற்றிக் காண்போம்.

6.4.2 இணைகரத்தின் பரப்பளவு

சிவப்புப் பகுதியை FAME என்ற இணைகரத்திலிருந்து வெட்டி எடுப்போம். (செங்கோண முக்கோணம் EFS). இதை வலப்புறம் FAME உடன் இணைப்போம், முடிவில் கிடைத்த உருவம் ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.



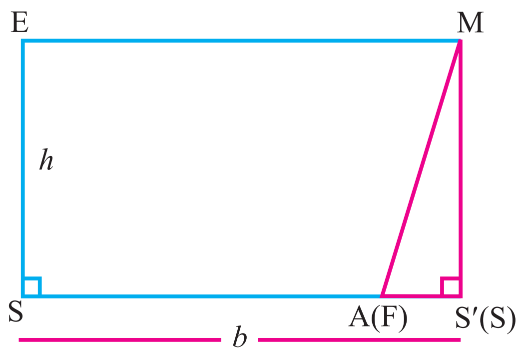
படம் **6.26**

நீள அளவு b அலகுகள், உயர அளவு h அலகுகள் எனில் செவ்வகத்தின் பரப்பு

A = bh சதுர அலகுகள்.

இங்கு நாம் FAME என்ற இணைகரத்தை ESS′M என்ற செவ்வகமாக மாற்றியுள்ளோம். எனவே **இணைகரத்தின் பரப்பு A = bh சதுர அலகுகள் ஆகும்.**

இதில் 'b' என்பது இணைகரத்தின் அடிப்பக்கம். மேலும் 'h' என்பது இணைப் பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும்.



படம் **6.27**

6.4.3 இணைகரம் அமைத்தல்

பொருத்தமான இருமுக்கோணங்களாகப் பிரிப்பதன்மூலம் இணைகரங்கள் வரையப் படுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளிலிருந்து ஒரு முக்கோணம் வரைந்த பின்னர் நான்காவது உச்சியை காண்கிறோம். எனவே, இணைகரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மூன்று அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

பின்வருவனவற்றின் அளவுகளைக் கொடுத்தால் நாம் இணைகரத்தை வரையலாம்.

(i) இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்கள், ஒரு கோணம்

(ii) இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்கள், ஒரு மூலைவிட்டம்

(iii) இரண்டு மூலைவிட்டங்கள், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஒரு கோணம்

(iv) ஒரு பக்கம், ஒரு மூலைவிட்டம் மற்றும் ஒரு கோணம்

6.4.4 இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்களும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது இணைகரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு **6.11**

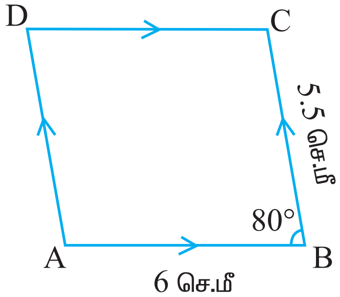
AB = 6 செ.மீ., BC = 5.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 80° அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற இணைகரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவு காண்க.

தீர்வு

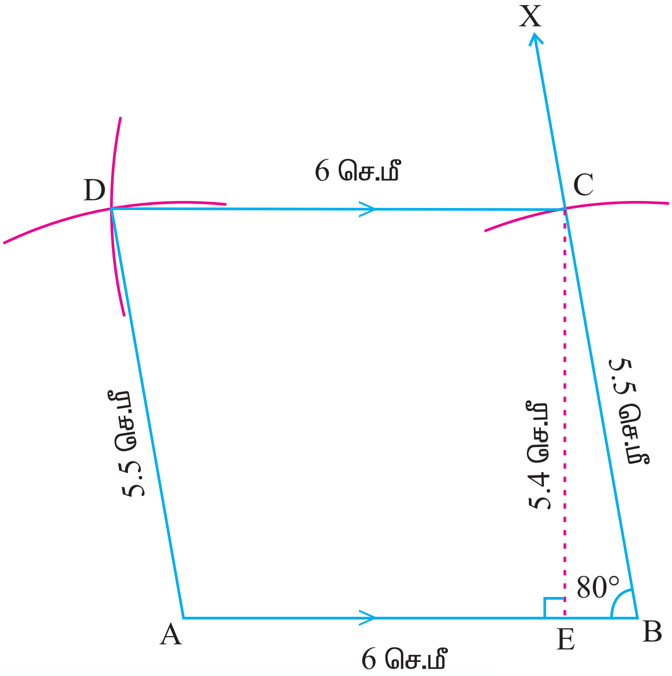
தரவு: AB = 6 செ.மீ., BC = 5.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 80°

இணைகரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் **6.28**



படம் **6.29**

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் B இல் $\angle ABX = 80°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{BX}$ ஐ வரையவும்.

படி 4 : B ஐ மையமாகக் கொண்டு 5.5 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டவில் ஒன்று வரைக. இது $\overrightarrow{BX}$ ஐ C இல் வெட்டுகிறது.

படி 5 : C ஐயும், A ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 6 செ.மீ., 5.5 செ.மீ. ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ஐ வரையவும்
ABCD தேவையான இணைகரம் ஆகும்.

படி 7 : C யிலிருந்து $\overline{AB}$க்கு $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். CE இன் அளவு காணவும். CE = h = 5.4 செ.மீ. AB = b = 6 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்

இணைகரம் ABCD, b = 6 செ.மீ., h = 5.4 செ.மீ.

இணைகரம் ABCDஇன் பரப்பளவு $= b \times h = 6 \times 5.4 = 32.4$ செ.மீ^{2}.

6.4.5 இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்களும், ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது இணைகரம் அமைத்தல்

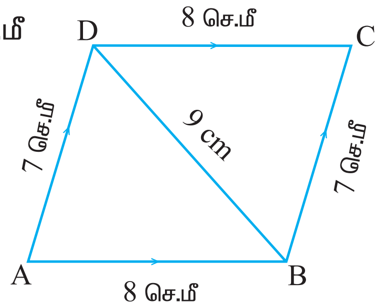
எடுத்துக்காட்டு 6.12

AB = 8 செ.மீ., AD = 7 செ.மீ. மற்றும் BD = 9 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற இணைகரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

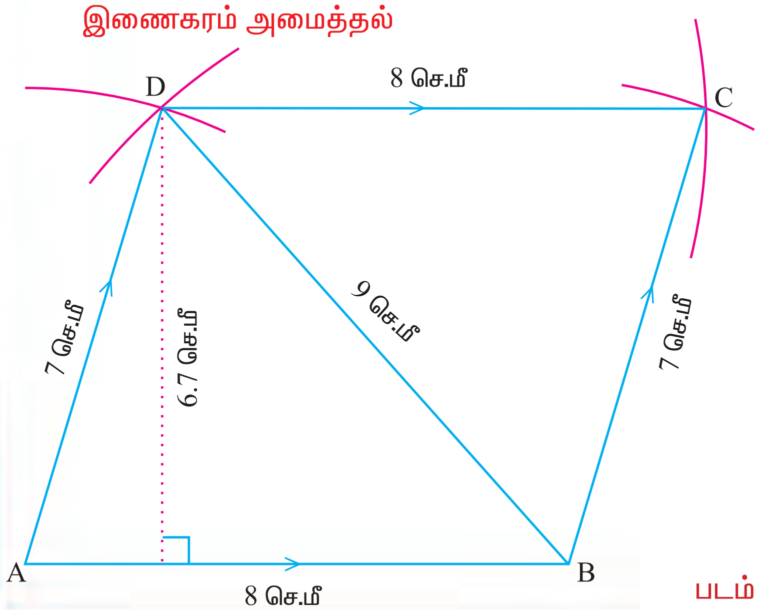
தரவு: AB = 8 செ.மீ., AD = 7 செ.மீ. மற்றும் BD = 9 செ.மீ

உதவிப்படம்



படம் 6.30

இணைகரம் அமைத்தல்



படம் 6.31

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 8 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : A ஐயும், B ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ., 9 செ.மீ. ஆர அளவுகளையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை D இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{BD}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : B ஐயும், D ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ., 8 செ.மீ. ஆர அளவுகளையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை C இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{CD}$ மற்றும் $\overline{BC}$ஐ வரையவும்.
ABCD தேவையான இணைகரம் ஆகும்.

படி 7 : D யிலிருந்து $\overline{AB}$ க்கு $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். DE யின் அளவு காணவும். DE = h = 6.7 செ.மீ., AB = DC = b = 8 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

இணைகரம் ABCD இல், b = 8 செ.மீ. மற்றும் h = 6.7 செ.மீ.

இணைகரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= b \times h$

$= 8 \times 6.7 = 53.6$ செ.மீ^{2}.

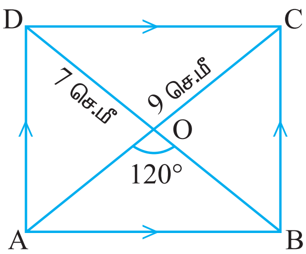
6.4.6 இரண்டு மூலைவிட்டங்களும், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஒரு கோணமும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது இணைகரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.13

AC = 9 செ.மீ, BD = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ AOB = 120°, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ என்பன ‘O’ வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. இந்த அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற இணைகரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

உதவிப்படம்



படம் 6.32

தரவு: AC = 9 செ.மீ, BD = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ AOB = 120°, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ என்பன ‘O’ வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

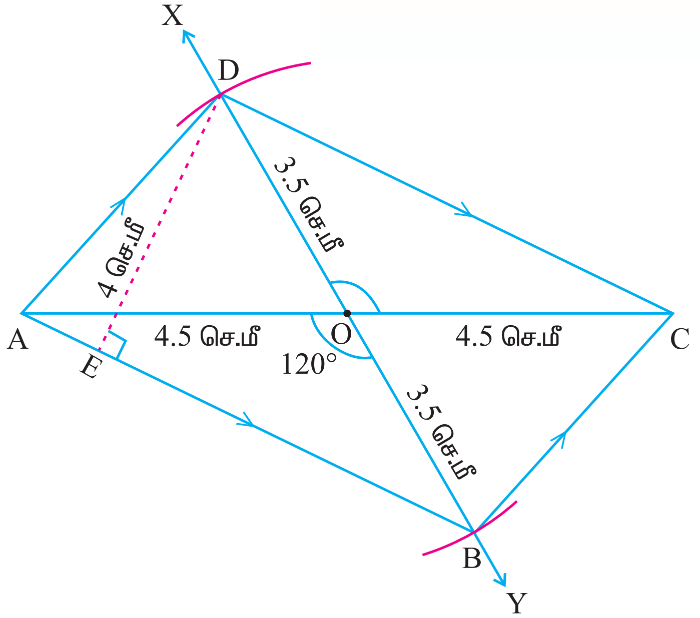
இணைகரம் அமைத்தல்

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 9 செ.மீ. நீளமுடைய AC என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{AC}$இன் மையப்புள்ளியை ‘O’ எனக் குறிக்கவும்.



படம் 6.33

படி 4 : $\angle$ AOY = 120° என இருக்குமாறு 'O' இன் வழியாக $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : 'O' வை மையமாகக் கொண்டு $\overline{AC}$ இன் இருபுறங்களிலும் $\overleftrightarrow{XY}$ இல் 3.5 செ.மீ. ஆர அளவுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். இவ்வில்கள் $\overrightarrow{OX}$ ஐ D யிலும் $\overrightarrow{OY}$ ஐ B யிலும் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ மற்றும் $\overline{DA}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான இணைகரம் ஆகும்.

படி 7 : D யிலிருந்து $\overline{AB}$ க்கு $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். DE இன் அளவு காணவும்.

DE = h = 4 செ.மீ. AB = b = 7 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

இணைகரம் ABCD இல், b = 7 செ.மீ. மற்றும் h = 4 செ.மீ.

இணைகரம் ABCD இன் பரப்பளவு = $b \times h = 7 \times 4 = 28$ செ.மீ ^{2}.

6.4.7 ஒரு பக்கம், ஒரு மூலைவிட்டம் மற்றும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது இணைகரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.14

AB = 6 செ.மீ., $\angle$ ABC = 80° மற்றும் AC = 8 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற இணைகரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

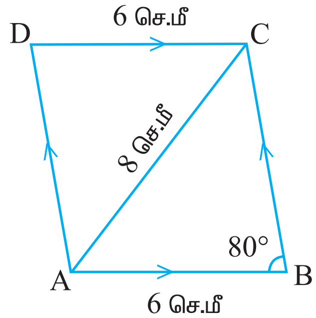
தீர்வு

தரவு:

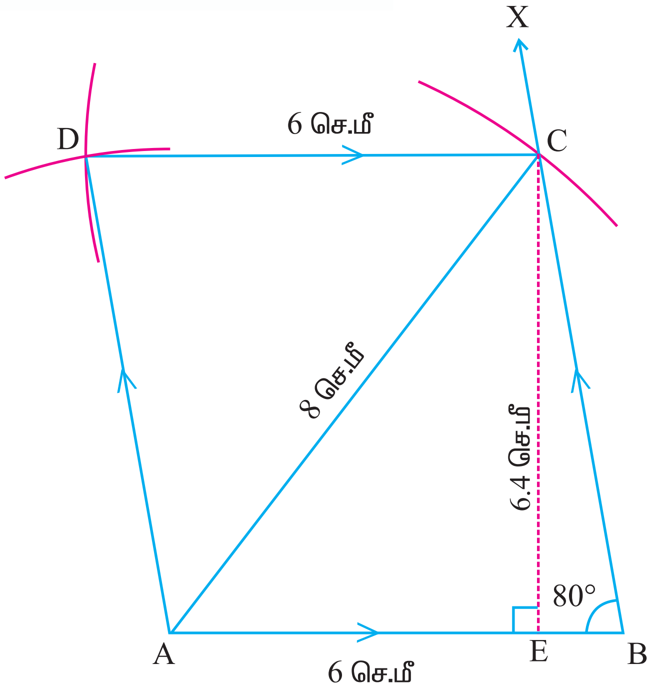
AB = 6 செ.மீ., $\angle$ ABC = 80° மற்றும் AC = 8 செ.மீ.

இணைகரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.34



படம் 6.35

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் B இல் $\angle ABX = 80^\circ$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{BX}$ ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகக்கொணடு 8 செ.மீ. ஆரமுடைய ஒரு வட்ட வில் வரையவும். அது $\overrightarrow{BX}$ ஐ C இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : $\overline{AC}$ ஐ வரையவும்.

படி 6 : C ஐ மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆர அளவுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும்.

படி 7 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு, BC இன் அளவுக்குச் சமமான ஆரமுடைய மற்றொரு வில் வரையவும். இவ்விரண்டு வில்களும் D இல் வெட்டட்டும்.

படி 8 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான இணைகரம் ஆகும்.

படி 9 : C யிலிருந்து $\overline{AB}$ இக்கு $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும். CE யின் அளவு காணவும்.

CE = h = 6.4 செ.மீ., AB = b = 6 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

இணைகரம் ABCD இல், $b = 6$ செ.மீ. மற்றும் $h = 6.4$ செ.மீ.

இணைகரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= b \times h$

$= 6 \times 6.4$

$= 38.4$ செ.மீ ^{2}.

பயிற்சி 6.3

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு ABCD என்ற இணைகரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

1. AB = 7 செ.மீ., BC = 5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 60°.
2. AB = 8.5 செ.மீ., AD = 6.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ DAB = 100°.
3. AB = 6 செ.மீ., BD = 8 செ.மீ. மற்றும் AD = 5 செ.மீ.
4. AB = 5 செ.மீ., BC = 4 செ.மீ. மற்றும் AC = 7 செ.மீ.
5. AC = 10 செ.மீ., BD = 8 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ AOB = 100°.
   $\overline{AC}$ ம் $\overline{BD}$ ம் ‘O’ இல் வெட்டுகின்றன.
6. AC = 8 செ.மீ., BD = 6 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ COD = 90°.
   $\overline{AC}$ ம் $\overline{BD}$ ம் ‘O’ இல் வெட்டுகின்றன.
7. AB = 8 செ.மீ., AC = 10 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ ABC = 100°.
8. AB = 5.5 செ.மீ., $\angle$ DAB = 50° மற்றும் BD = 7 செ.மீ.

6.5 சாய்சதுரம்

6.5.1. அறிமுகம்

அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள ஓர் இணைகரம் சாய்சதுரமாகும்.

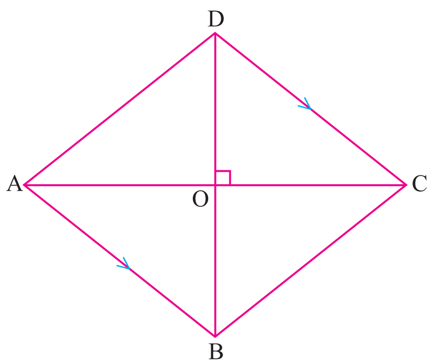
ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில் (படம் 6.36 இல் பார்க்கவும்)

(i) அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம்.

அதாவது, AB = BC = CD = DE

(ii) எதிர்க் கோண அளவுகள் சமம்.

அதாவது, $\angle$ A = $\angle$ C மற்றும் $\angle$ B = $\angle$ D



படம் 6.36

(iii) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இருசமக் கூறிடுகின்றன.

அதாவது, AO = OC ; BO = OD,

'O' இல் $\overline{AC}$ ம் $\overline{BD}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

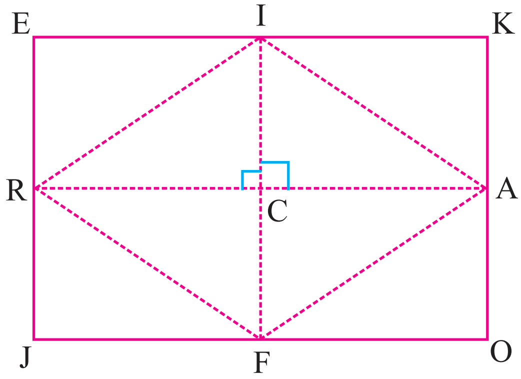
(iv) எவையேனும் இரு அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

(v) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் சாய்சதுரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

(vi) மூலைவிட்டங்கள் அளவில் சமமற்றவை.

6.5.2 சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு

JOKE என்ற ஒரு செவ்வகத்தாளை எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 6.37

இதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை குறிக்கவும். இம்மையப் புள்ளிகளைக் காகித மடிப்புகளின் மூலம் செய்து காணவும். $\overline{JO}$ இன் நடுப்புள்ளி F; $\overline{OK}$ இன் நடுப்புள்ளி A; $\overline{KE}$ இன் நடுப்புள்ளி I மற்றும் EJ இன் நடுப்புள்ளி R. $\overline{RA}$, $\overline{IF}$ களை இணைப்போம். இவை C இல் வெட்டட்டும். FAIR என்பது சாய்சதுரம்.

நமக்கு 8 சர்வசமச் செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைத்துள்ளன.

தேவையான சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு 4 செங்கோண முக்கோணங்களின் பரப்பாகும். (அதாவது Δ ICR, Δ ICA, Δ FCA, Δ FCR)

எனவே, சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு என்பது செவ்வகம் JOKE-இன் பரப்பில் பாதியாகும்.

செவ்வகத்தின் நீளம் $\overline{JO}$ ஆனது சாய்சதுரத்தின் ஒரு மூலை விட்டம் $(\overline{RA})$ ஆகும். செவ்வகத்தின் அகலம் $\overline{JE}$ ஆனது சாய்சதுரத்தின் மற்றொரு மூலை விட்டம் $(\overline{IF})$ ஆகும்.

சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times \overline{JO} \times \overline{JE}$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{RA} \times \overline{IF}$$

சாய்சதுரத்தின் பரப்பு $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ சதுர அலகுகள்

d_1, d_2 என்பன சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் ஆகும்.

6.5.3 சாய்சதுரம் அமைத்தல்

சாய்சதுரத்தை இரண்டு பொருத்தமான முக்கோணங்களாகப் பிரிப்பதன் மூலம் வரையலாம். கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளிலிருந்து ஒரு முக்கோணம் வரைந்த பின்னர் நான்காவது உச்சியைக் காண்கிறோம். எனவே சாய்சதுரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

பின்வருமாறு அளவுகள் அமைந்தால் நாம் சாய்சதுரத்தை வரைய இயலும்.

(i) ஒரு பக்கம், ஒரு மூலைவிட்டம்

(ii) ஒரு பக்கம், ஒரு கோணம்

(iii) இரண்டு மூலைவிட்டங்கள்

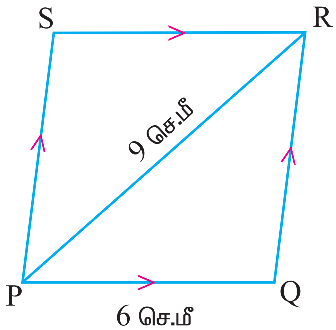
(iv) ஒரு மூலைவிட்டம், ஒரு கோணம்

6.5.4 ஒரு பக்கமும், ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.15

PQ = 6 செ.மீ. மற்றும் PR = 9 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட PQRS என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

உதவிப்படம்

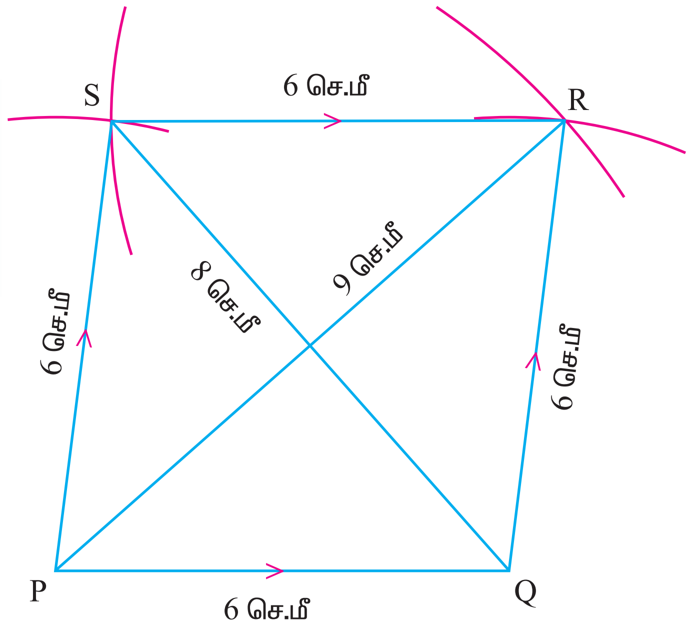


படம் 6.38

தீர்வு

தரவு: PQ = 6 செ.மீ. மற்றும் PR = 9 செ.மீ.

சாய்சதுரம் அமைத்தல்



படம் 6.39

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செமீ நீளமுடைய PQ என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : P மற்றும் Q களை மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 9 செ.மீ., 6 செ.மீ. ஆர அளவுகளையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை R இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : $\overline{PR}$ மற்றும் $\overline{QR}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : P மற்றும் R ஐ மையங்களாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆர அளவுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை S இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{PS}$ மற்றும் $\overline{RS}$ ஐ வரையவும்.

PQRS தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 7 : QS இன் அளவு காணவும்.

$QS = d_2 = 8$ செ.மீ. $PR = d_1 = 9$ செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற சாய்சதுரத்தில், $d_1 = 9$ செ.மீ. மற்றும் $d_2 = 8$ செ.மீ.

சாய்சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36$ செ.மீ ^{2}.

6.5.4 ஒரு பக்கமும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.16

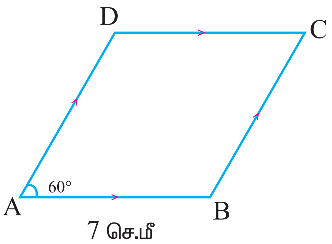
AB = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 60°$ அளவுகள் கெண்ட ABCD என்ற சாய்சதுரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காணவும்.

தீர்வு

தரவு: AB = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 60°$

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.40

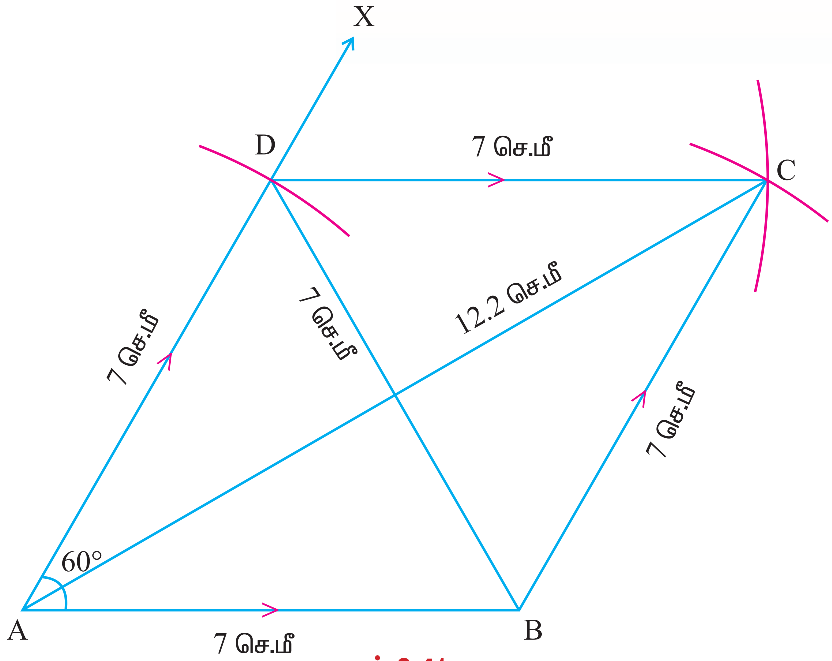
வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 7 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் A இடத்து $\angle BAX = 60°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{AX}$ ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு 7 செமீ ஆர அளவுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும். இது $\overrightarrow{AX}$ ஐ D இல் வெட்டட்டும்.



படம் 6.41

படி 5 : B ஐயும், D ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு 7 செமீ ஆர அளவுடைய வட்டவில்கள் வரையவும். அவை C இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{DC}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 7 : AC மற்றும் BD களின் அளவுகளைக் காணவும்.

AC = d_1 = 12.2 செ.மீ. மற்றும் BD = d_2 = 7 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில், d_1 = 12.2 செ.மீ. மற்றும் d_2 = 7 செ.மீ.

சாய்சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 12.2 \times 7$

= 42.7 செ.மீ ^{2}.

6.5.5 இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.17

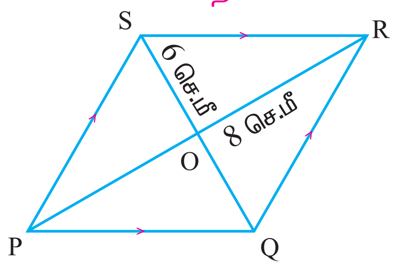
PR = 8 செ.மீ. மற்றும் QS = 6 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட PQRS சாய்சதுரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

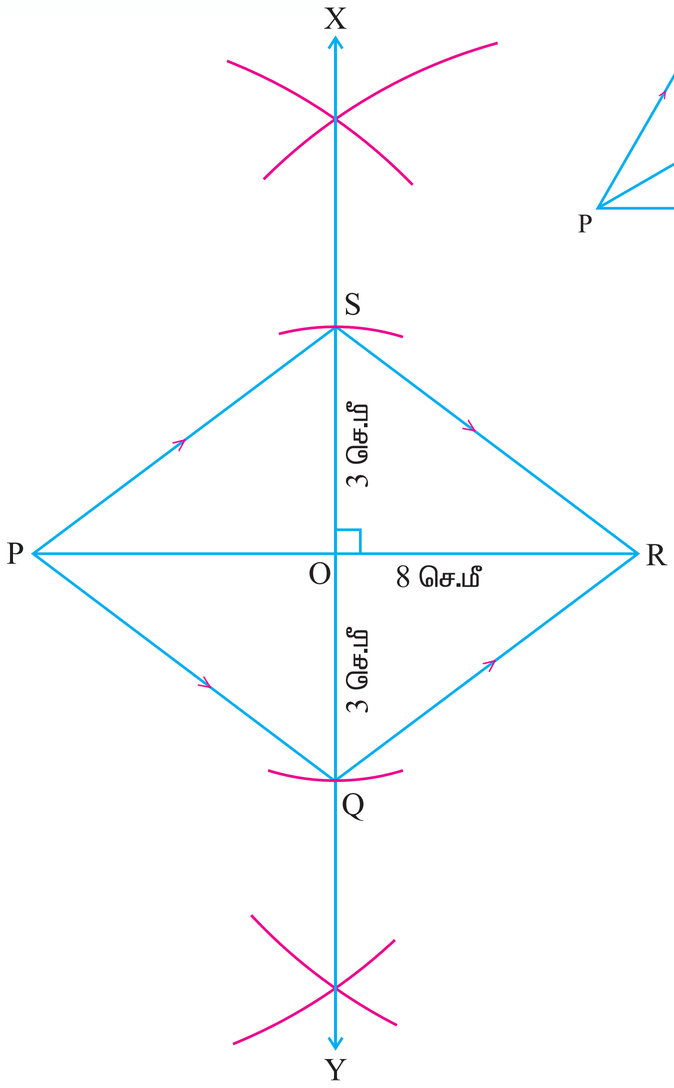
தரவு: PR = 8 செ.மீ. மற்றும் QS = 6 செ.மீ.

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.42



படம் 6.43

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 8 செமீ நீளமுடைய PR என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{PR}$ க்கு மையக்குத்துக்கோடாகிய $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ வரையவும். அது $\overline{PR}$ ஐ 'O' இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : 'O' ஐ மையமாகக்கொண்டு 3 செ.மீ. (QS இன் பாதியளவு) ஆர அளவுடைய வில்கள் $\overleftrightarrow{XY}$ இன் மேல் 'O' இன் இருபுறங்களிலும் $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ (படம் 6.43 இல் காட்டியுள்ளது போல்) Q மற்றும் S இல் வெட்டுமாறு வரையவும்.

படி 5 : $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ மற்றும் $\overline{SP}$ ஐ வரையவும்.

PQRS என்பது தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 6 : PR = d_1 = 8 செ.மீ., QS = d_2 = 6 செ.மீ ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற சாய்சதுரத்தில் $d_1 = 8$ செ.மீ. மற்றும் $d_2 = 6$ செ.மீ.

சாய்சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$

$= 24$ செ.மீ ^{2}.

6.5.6 ஒரு மூலைவிட்டமும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.18

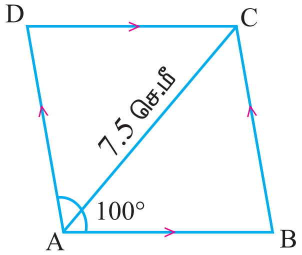
AC = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ A = 100° அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

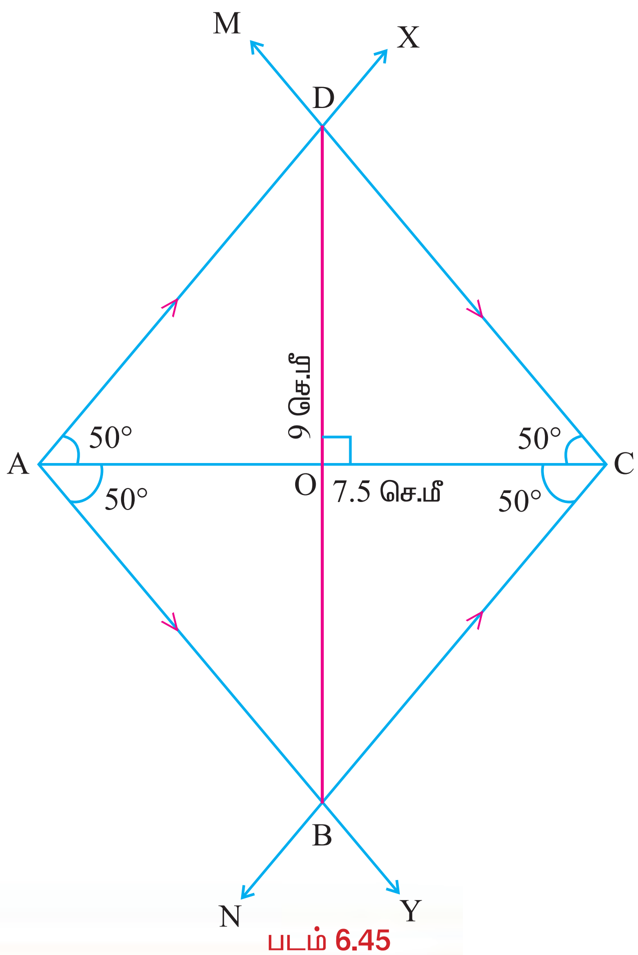
தரவு: AC = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$ A = 100°

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.44



படம் 6.45

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 7.5 செ.மீ. நீளமுடைய AC என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{AC}$ இன் இருபக்கங்களிலும் A இடத்து 50° கோணம் உண்டாக்குமாறு $\overrightarrow{AX}$ மற்றும் $\overrightarrow{AY}$ களை வரையவும்.

படி 4 : $\overline{CA}$ இன் இருபக்கங்களிலும் C இடத்து 50° கோணம் உண்டாக்குமாறு $\overrightarrow{CM}$ மற்றும் $\overrightarrow{CN}$ களை வரையவும்.

படி 5 : $\overrightarrow{AX}$ மற்றும் $\overrightarrow{CM}$ என்பன D இல் வெட்டட்டும்.

$\overrightarrow{AY}$ மற்றும் $\overrightarrow{CN}$ என்பன B இல் வெட்டட்டும்.

ABCD தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 6 : BD இன் அளவைக் காணவும்.

BD = d_2 = 9 செ.மீ. AC = d_1 = 7.5 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில், d_1 = 7.5 செ.மீ. மற்றும் d_2 = 9 செ.மீ.

சாய்சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 7.5 \times 9$

$= 7.5 \times 4.5$

= 33.75 செ.மீ ^{2}.

பயிற்சி 6.4

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு BEST என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

1. BE = 5 செ.மீ. மற்றும் BS = 8 செ.மீ.
2. BE = 6 செ.மீ. மற்றும் ET = 8.2 செ.மீ.
3. BE = 6 செ.மீ. மற்றும் $\angle B = 45°$.
4. BE = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle E = 65°$.
5. BS = 10 செ.மீ. மற்றும் ET = 8 செ.மீ.
6. BS = 6.8 செ.மீ. மற்றும் ET = 8.4 செ.மீ.
7. BS = 10 செ.மீ. மற்றும் $\angle B = 60°$.
8. ET = 9 செ.மீ. மற்றும் $\angle E = 70°$.

6.6 செவ்வகம் மற்றும் சதுரம்

6.6.1 செவ்வகம்

இணைகரத்தில் ஒரு கோணஅளவு 90° எனில் அது செவ்வகமாகும்.

இதன் பண்புகளாவன:

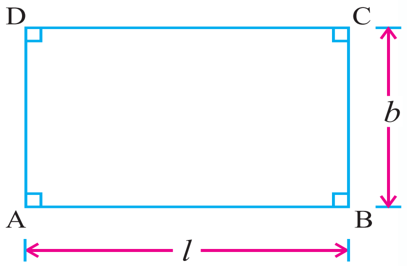
(i) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.

(ii) எல்லாக் கோண அளவுகளும் சமம்.

(iii) ஒவ்வொரு கோண அளவும் 90°.

(iv) மூலைவிட்டங்களின் அளவுகள் சமம்.

(v) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன.



படம் 6.46

செவ்வகத்தின் பரப்பு

ABCD என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பு = நீளம் × அகலம் சதுர அலகுகள்

$A = l \times b$ சதுர அலகுகள்.

6.6.2 செவ்வகம் அமைத்தல்

பின்வரும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் செவ்வகங்களை வரையலாம்.

(i) நீளம் மற்றும் அகலம்.

(ii) ஒரு பக்கம் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம்

6.6.3 நீளம் மற்றும் அகலம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது செவ்வகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.19

அடுத்துள்ள பக்கங்களின் அளவுகள் 6 செ.மீ. மற்றும் 4 செ.மீ. என்ற அளவுகளைக் கொண்ட செவ்வகம் வரைந்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

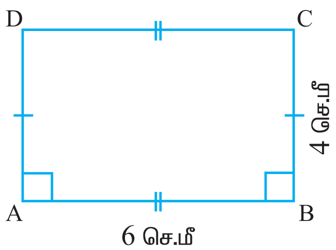
தரவு : செவ்வகத்தின் அடுத்துள்ள பக்கங்களின் அளவுகள் 6 செ.மீ. மற்றும் 4 செ.மீ.

செவ்வகம் அமைத்தல் வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்

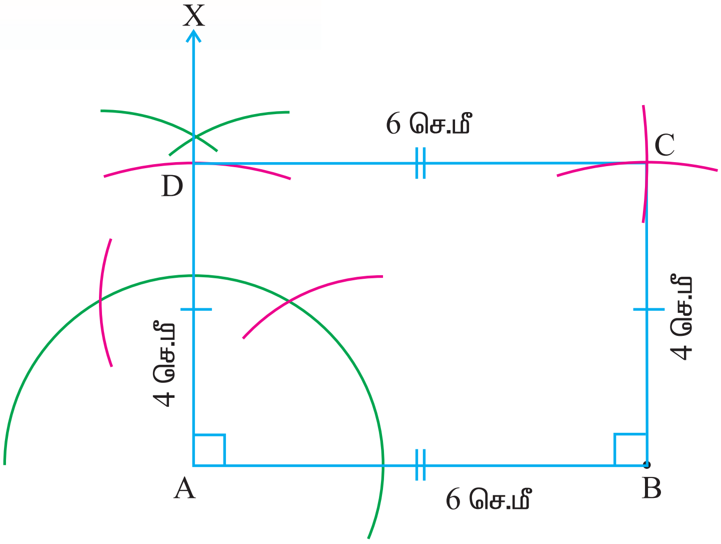
படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : A இல் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $\overrightarrow{AX} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும்.



படம் 6.47

படி 4 : A ஐ மையமாகவும், 4 செ.மீ. ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்ட வில்லை $\overrightarrow{AX}$ ஐ D இல் வெட்டும்படி வரையவும்.



படம் 6.48

படி 5 : D ஐ மையமாகவும் 6 செ.மீ. ஆர அளவு கொண்டு ஒரு வட்டவில்லை $\overline{AB}$ இன் மேற்புறத்தில் வரையவும்.

படி 6 : B ஐ மையமாகவும், 4 செ.மீ. ஆர அளவு கொண்டு முன்பு வரைந்த வட்டவில்லை C இல் வெட்டும்படி வரைக. $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும். ABCD தேவையான செவ்வகம் ஆகும்.

படி 7 : AB = l = 6 செ.மீ. மற்றும்
BC = b = 4 செ.மீ. ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற செவ்வகத்தில், l = 6 செ.மீ. மற்றும் b = 4 செ.மீ.

செவ்வம்ABCD இன் பரப்பளவு $= l \times b$

$= 6 \times 4$

$= 24$ செ.மீ ^{2}.

6.6.4 ஒரு மூலைவிட்டமும், ஒரு பக்கத்தின் அளவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது செவ்வகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 6.20

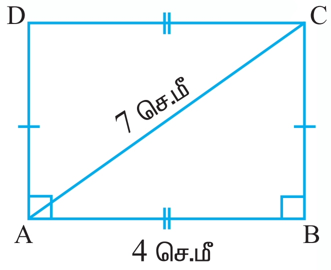
மூலைவிட்டத்தின் அளவு 7 செ.மீ., ஒரு பக்கத்தின் அளவு 4 செ.மீ., உள்ள செவ்வகத்தை அமைத்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

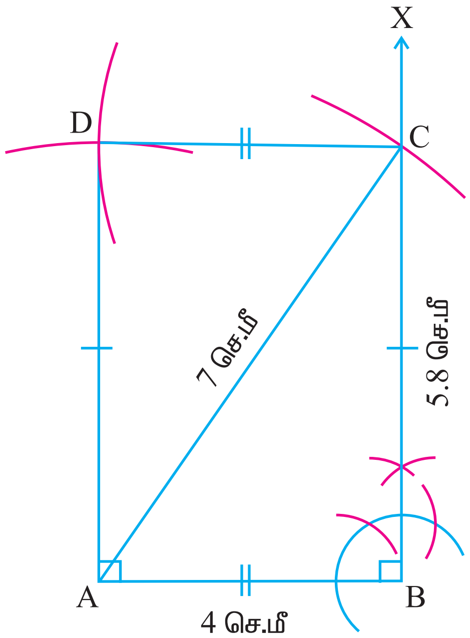
தரவு :செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் 7 செ.மீ., மற்றும் ஒரு பக்கத்தின் அளவு 4 செ.மீ.

செவ்வகம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 6.49



படம் 6.50

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 4 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overrightarrow{BX} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகவும், 7 செ.மீ. ஆர அளவுள்ள ஒரு வட்டவில்லை $\overrightarrow{BX}$ ஐ C இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 5 : BC அளவு ஆரமாகவும், A ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டவில்லை $\overline{AB}$ இன் மேற்புறம் வரையவும்.

படி 6 : C ஐ மையமாகவும் 4 செ.மீ. ஆர அளவுள்ள வட்டவில் முன்பு வரைந்த வட்டவில்லை D இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 7 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான செவ்வகம் ஆகும்.

படி 8 : BC இன் அளவு காணவும். BC = l = 5.8 செ.மீ. ஆகும்

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற செவ்வகத்தில், l = 5.8 செ.மீ. மற்றும் b = 4 செ.மீ.

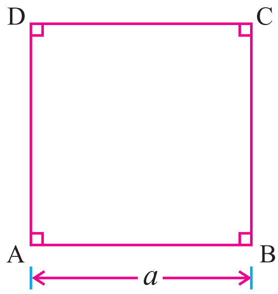
செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= l \times b = 5.8 \times 4$

$= 23.2$ செ.மீ ^{2}.

6.6.5 சதுரம் அமைத்தல்

சதுரம்

அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள செவ்வகம் சதுரமாகும்.



படம் 6.51

சதுரத்தின் பண்புகள்

(i) எல்லாக் கோண அளவுகளும் சமம்.
(ii) எல்லாப் பக்க அளவுகளும் சமம்.
(iii) ஒவ்வொரு கோணமும் செங்கோணம்.
(iv) மூலைவிட்டங்கள் சமஅளவுடையன.
(v) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் இருசமக் கூறிடுகின்றன.

சதுரத்தின் பரப்பளவு = பக்கம் × பக்கம்

$$A = a \times a$$

$A = a^2$ சதுர அலகுகள்.

> குறிப்பு : மூலைவிட்ட அளவு கொடுக்கப்பட்டால் சதுரத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{d^2}{2}$

சதுரம் வரைய ஒரே ஒரு அளவு தேவைப்படுகிறது.

ஒரு சதுரத்தின்

(i) ஒரு பக்க அளவு அல்லது (ii) ஒரு மூலைவிட்ட அளவு

கொடுக்கப்பட்டால் நாம் சதுரத்தை வரையலாம்.

6.6.6 ஒரு பக்க அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சதுரத்தை அமைத்தல்

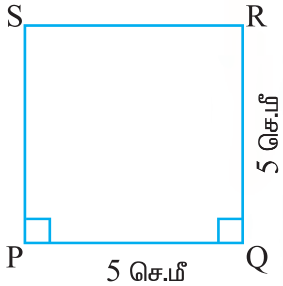
எடுத்துக்காட்டு 6.21

5 செ.மீ. பக்க அளவுடைய சதுரம் வரைந்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

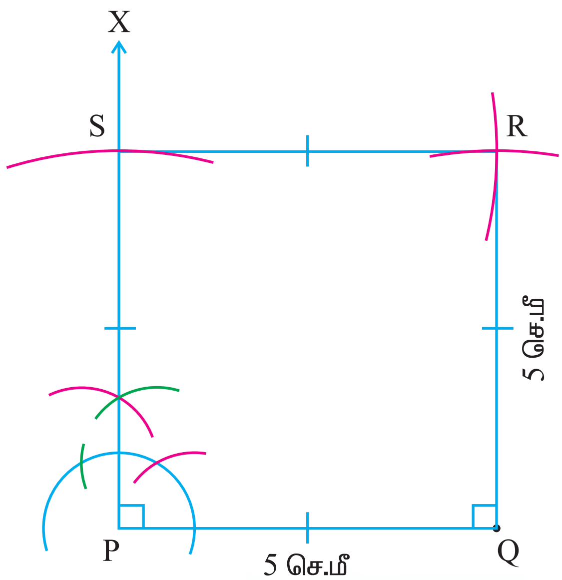
தரவு: சதுரத்தின் பக்க அளவு = 5 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 6.52

சதுரம் அமைத்தல்



படம் 6.53

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 5 செ.மீ. நீளமுடைய PQ என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : P இல் கவராயம் கொண்டு $\overrightarrow{PX} \perp \overline{PQ}$ ஆக வரையவும்.

படி 4 : P ஐ மையமாகவும், 5 செ.மீ. அளவு ஆர அளவாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில்லை $\overrightarrow{PX}$ ஐ S இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 5 : S ஐ மையமாகக் கொண்டு 5 செ.மீ. அளவுடைய ஆரத்தில் $\overline{PQ}$ க்கு மேற்புறமாக ஒரு வட்டவில் வரையவும்.

படி 6 : Q ஐ மையமாகவும் 5 செ.மீ. ஆர அளவாகவும் கொண்டு முன்னர் வரைந்த வட்டவில்லை R இல் வெட்டும்படி வட்டவில் வரையவும்.

படி 7 : $\overline{QR}$ மற்றும் $\overline{RS}$ ஐ வரையவும்.
PQRS தேவையான சதுரமாகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடல்:

PQRS என்ற சதுரத்தின் பக்க அளவு a = 5 செ.மீ.

சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு = $a \times a = 5 \times 5 = 25$ செ.மீ ^{2}.

6.6.7 ஒரு மூலைவிட்டம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது சதுரம் அமைத்தல்

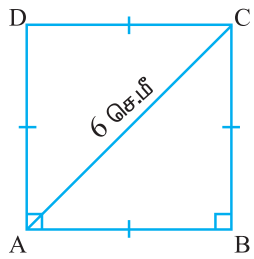
எடுத்துக்காட்டு 6.22

6 செ.மீ. அளவுள்ள மூலைவிட்டத்தைக் கொண்டு சதுரம் வரைக. அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

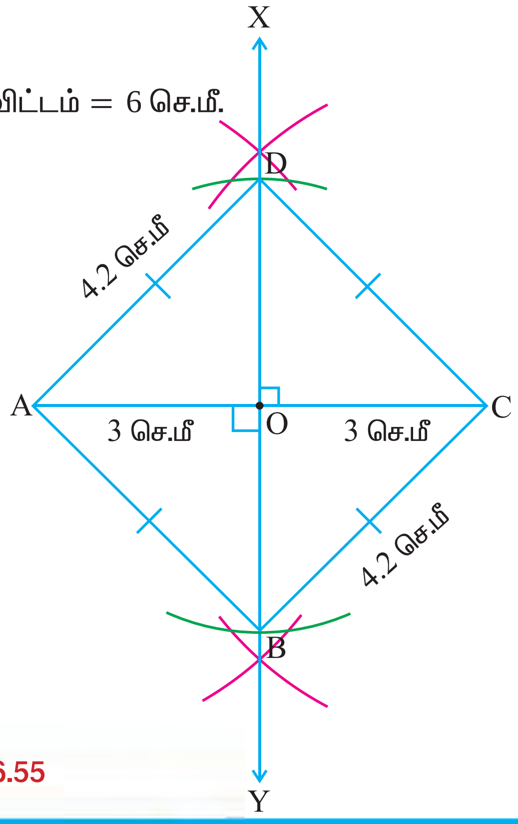
தீர்வு

தரவு: சதுரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் = 6 செ.மீ.

சதுரம் அமைத்தல்



படம் 6.54



படம் 6.55

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AC என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{AC}$ க்கு மையக் குத்துக்கோடு $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ வரையவும்.

படி 4 : $\overleftrightarrow{XY}$, $\overline{AC}$ வெட்டும் புள்ளி O என்க. எனவே OC = AO = 3 செ.மீ. ஆகும்.

படி 5 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ. ஆர அளவினைக் கொண்டு இரு வட்ட விற்கள் $\overleftrightarrow{XY}$ என்ற கோட்டை B, D களில் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 6 : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ மற்றும் $\overline{DA}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான சதுரம் ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சதுரத்தில் மூலைவிட்டம் d = 6 செ.மீ.

சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு = $\frac{d^2}{2} = \frac{6 \times 6}{2}$ = 18 செ.மீ ^{2}.

பயிற்சி 6.5

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் கொண்டு JUMP என்ற செவ்வகம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   (i) JU = 5.4 செ.மீ. மற்றும் UM = 4.7 செ.மீ.
   (ii) JU = 6 செ.மீ. மற்றும் JP = 5 செ.மீ.
   (iii) JP = 4.2 செ.மீ. மற்றும் MP= 2.8 செ.மீ.
   (iv) UM = 3.6 செ.மீ. மற்றும் MP = 4.6 செ.மீ.

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் கொண்டு MORE என்ற செவ்வகம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   (i) MO = 5 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் MR = 6.5 செ.மீ.
   (ii) MO = 4.6 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் OE = 5.4 செ.மீ.
   (iii) OR = 3 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் MR = 5 செ.மீ.
   (iv) ME = 4 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் OE = 6 செ.மீ.

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பக்க அளவைக் கொண்டு EASY என்ற சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   (i) 5.1 செ.மீ. (ii) 3.8 செ.மீ.
   (iii) 6 செ.மீ. (iv) 4.5 செ.மீ.

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலைவிட்ட அளவுகளைக் கொண்டு GOLD என்ற சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   (i) 4.8 செ.மீ. (ii) 3.7 செ.மீ.
   (iii) 5 செ.மீ. (iv) 7 செ.மீ.

6.7 பொதுமைய வட்டங்கள்

இப்பகுதியில் நாம் பொதுமைய வட்டங்களைப் பற்றி கற்போம். உங்களுக்கு வட்டங்களைப் பற்றி முன்னரே தெரியும்.

6.7.1 கற்றல் தூண்டல்

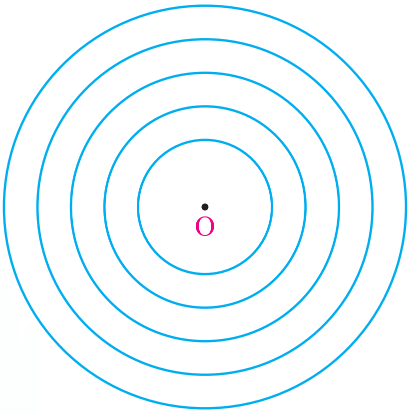
அசைவற்ற நீர்ப்பரப்பில் ஒரு சிறு கல்லைப் போட்டதும் வட்டம் வட்டமாக அலைகள் உண்டாவதைப் பார்த்திருக்கிறீர்கள். அவ்வட்டங்களுக்கெல்லாம் பொதுவான மையம் எது? அச்சிறு கல் எங்கு நீரில் விழுந்ததோ அந்த இடம் தானே! ஆம்.

பொதுவான மையத்தைக் கொண்டு வேறுபட்ட ஆர அளவுகளுடன் ஒரு தளத்தில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் எனப்படும். அந்த மையம் பொதுமையமாகும்.

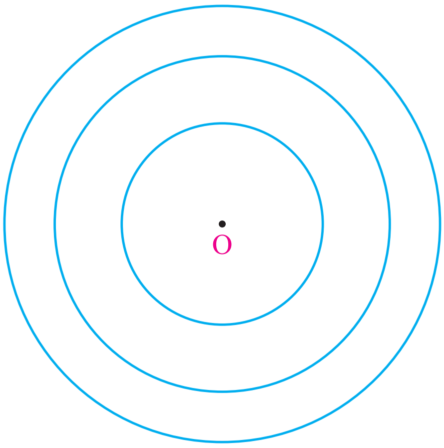
பொதுமைய வட்டங்கள்

ஒரு தளத்தில் பொது மையத்தைக் கொண்டு வெவ்வேறான ஆரங்களில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் என்றழைக்கப்படுகின்றன.

படங்கள் 6.56 மற்றும் 6.57 பொதுமைய வட்டங்களைக் குறிக்கின்றன.

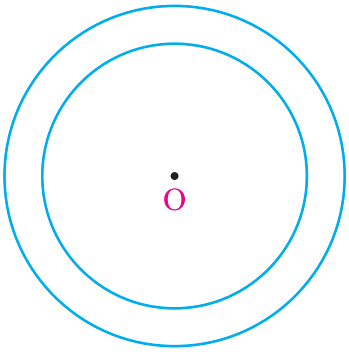


படம் 6.56

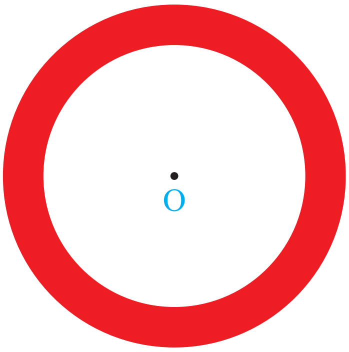


படம் 6.57

பின்வரும் இரண்டு படங்களையும் பார்க்கவும்.



படம் 6.58



படம் 6.59

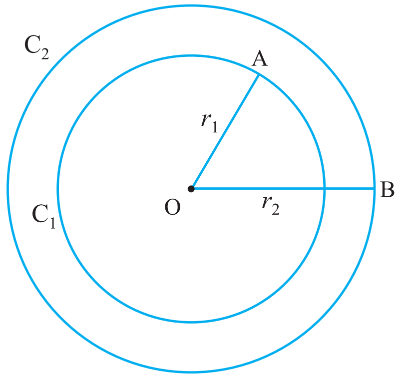
படம் 6.58 இல் இரண்டு பொதுமைய வட்டங்கள் உள்ளன.

படம் 6.59இல் இரு வட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள பகுதியை வண்ணம் தீட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த வண்ணமிட்டப் பகுதியை வட்ட வலயம் (Circular ring) என்பர்.

வட்ட வலயம் – விவரிப்பு

படம் 6.60 இல், C_1 மற்றும் C_2 என்பவை O என்ற புள்ளியை பொது மையமாகவும், r_1 மற்றும் r_2 என்ற வேறுபட்ட ஆர அளவுகளையும் கொண்ட இரு வட்டங்கள் C_1 மற்றும் C_2 என்பவை பொதுமைய வட்டங்கள் ஆகும். இவ்விரு வட்டங்களுக்கு இடையே அடைபடும் பரப்பளவு வட்ட வலயம் என்றழைக்கப்படுகிறது.

வட்டவலயம் அகலம் = OB – OA $= r_2 - r_1$ $(r_2 > r_1)$



படம் 6.60

6.7.2 ஆரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது பொதுமைய வட்டங்கள் வரைதல்

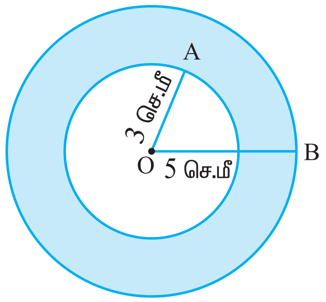
எடுத்துக்காட்டு 6.23

3 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ ஆகிய ஆர அளவுகளுடைய பொதுமைய வட்டங்கள் வரைந்து வட்ட வலயத்தை நிழலிட்டுக் காட்டுக. அதன் அகலத்தையும் காண்க.

தீர்வு

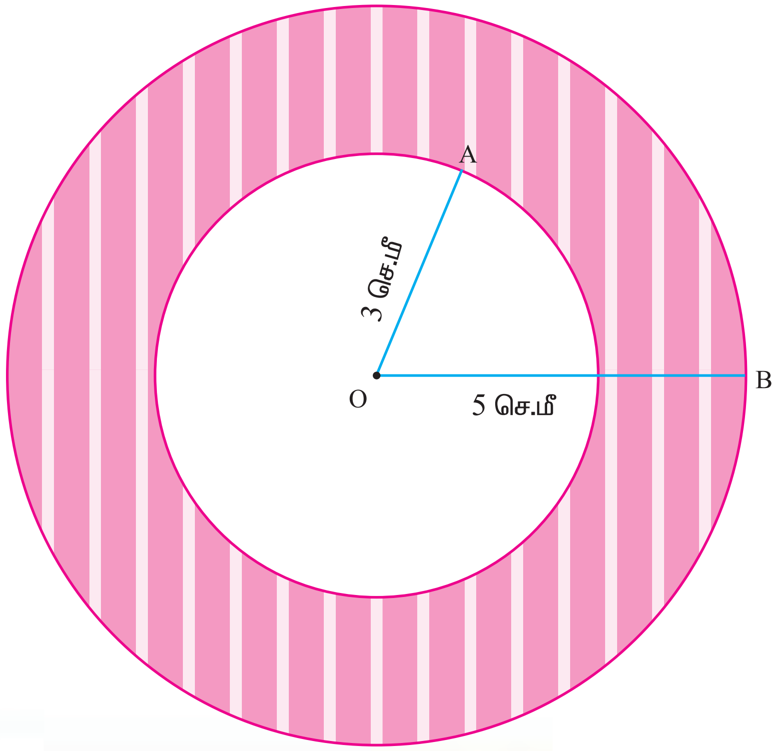
தரவு: பொதுமைய வட்டங்களின் ஆரங்கள்3 செ.மீ. மற்றும் 5 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 6.61

பொதுமைய வட்டங்கள் வரைதல்



படம் 6.62

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : O என்ற புள்ளியை குறிக்கவும்.

படி 3 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆர அளவு (OA) = 3 செ.மீ. உள்ளவாறு ஒரு வட்டம் வரையவும்.

படி 4 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆர அளவு (OB) = 5 செ.மீ. உள்ளவாறு மற்றொரு வட்டம் வரையவும்.

இவ்வாறு பொதுமைய வட்டங்கள் C_1 மற்றும் C_2 வரையப்படுகின்றன.

வட்ட வலயத்தின் அகலம் = OB – OA

= 5 – 3

= 2 செ.மீ.

பயிற்சி 6.6

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆர அளவுகளையுடைய பொதுமைய வட்டங்கள் வரைந்து வட்ட வலயத்தின் அகலத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

(i) 4 செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ.

(ii) 3.5 செ.மீ. மற்றும் 5.5 செ.மீ.

(iii) 4.2 செ.மீ. மற்றும் 6.8 செ.மீ.

(iv) 5 செ.மீ. மற்றும் 6.5 செ.மீ.

(v) 6.2 செ.மீ. மற்றும் 8.1 செ.மீ.

(vi) 5.3 செ.மீ. மற்றும் 7 செ.மீ.

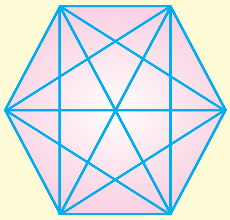
கருத்துச் சுருக்கம்

- ஒரு தளத்தில் நான்கு கோடுகளால் அடைபடும் வடிவம் ஒரு நாற்கரம்.
- ஒரு நாற்கரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத ஐந்து அளவுகள் தேவை.
- ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரம் சரிவகம் ஆகும்.
- ஒரு சரிவகம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத நான்கு அளவுகள் தேவை.
- ஒரு சரிவகத்தில் இணையில்லாத பக்க அளவுகள் சமமெனில் அச்சரிவகம் இருசமபக்க சரிவகம் ஆகும்.
- ஓர் இருசமபக்க சரிவகம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மூன்று அளவுகள் தேவை.
- ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரம் இணைகரம் ஆகும்.
- ஓர் இணைகரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மூன்று அளவுகள் தேவை.
- எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாகவும், அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாகவும் உள்ள நாற்கரம் ஒரு சாய் சதுரம் ஆகும்.
- ஒரு சாய்சதுரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு அளவுகள் தேவை.
- இணைகரத்தில் ஒரு கோண அளவு 90° எனில் அது செவ்வகமாகும்.
- அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள செவ்வகம் சதுரமாகும்.
- பொதுவான மையத்தைக் கொண்டு வெவ்வேறான ஆரங்களுடன் ஒரு தளத்தில் வரையப்படும் வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங்கள் எனப்படும்.

- இரண்டு பொது மைய வட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு வட்ட வலயம் ஆகும்.
- ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ சதுர அலகுகள். இதில் d என்பது மூலைவிட்டத்தின் அளவு h_1 மற்றும் h_2 என்பவை எதிர் உச்சிகளிலிருந்து மூலைவிட்டத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துத் தொலைவுகள்.
- ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{1}{2} h (a + b)$ சதுர அலகுகள். இதில் a மற்றும் b என்பன இணைப்பக்கங்களின் அளவுகள் மற்றும் h என்பது இணைப் பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு.
- ஒரு இணைகரத்தின் பரப்பளவு $A = b \times h$ சதுர அலகுகள். இதில் b என்பது இணைகரத்தின் அடிப்பக்கத்தின் அளவு மற்றும் h என்பது இணைப் பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு.
- ஒரு சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ சதுர அலகுகள். இதில் d_1 மற்றும் d_2 என்பன மூலைவிட்டங்களின் அளவுகள்.

ஆர்வமூட்டும் தகவல்கள்

- தங்க செவ்வகம் என்பது பன்னெடுங் காலமாக கலை மற்றும் கட்டடக்கலையில் காணப்படும் ஒருவித செவ்வகமாகும். தங்க செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் தோராயமாக 1 : 1.6 என்ற விகிதத்தில் அமைந்து இருக்கும். இந்த விகிதம் தங்க விகிதம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. தங்க செவ்வகம் கண்ணுக்கு விருந்தாகும். தங்க விகிதம் கி.மு. 5ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் கிரேக்கர்களால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.
- 1855இல் காலமான கணிதமேதை கௌஸ், 17 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு பலகோணத்தைத் தன்னுடைய கல்லறையின் மீது வரையப்பட வேண்டும் என விரும்பினார். ஆனால் சிற்பி அதைச் செதுக்கும் போது அது ஒரு வட்டத்தைப் போன்று அமைந்துவிட்டது.
- புதிர் அறுகோணம்: எல்லா மூலைவிட்டங்களும் வரையப்பட்ட ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம் புதிர் அறுகோணம் ஆகும்.



வரைபடங்கள்

7

7.1 அறிமுகம்

7.2 கார்ட்டீசியன் தளம், ஆய அச்சுகள் –ஓர் அறிமுகம்

7.3 வெவ்வேறு சூழல்களில் புள்ளிகளைக் குறித்தல்

7.4 நேர்க்கோடுகளையும், ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளையும் வரைதல்

7.5 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்கள்

7.6 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்களைப் படித்தறிதல்

ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ்

(1596- 1650 A.D)

கணித மேதையும் பிரெஞ்சு தத்துவ ஞானியுமான இவர் ‘Discourse on Method’ என்ற புத்தகத்தை எழுதியுள்ளார். இயற்கணிதத்தையும் வடிவியலையும் ஒருங்கிணைக்க இவர் எடுத்த முயற்சிகளால் இரு புதிய கணிதப் பிரிவுகளான பகுமுறை வடிவியலும் வரைபடங்களும் பிறந்தன.

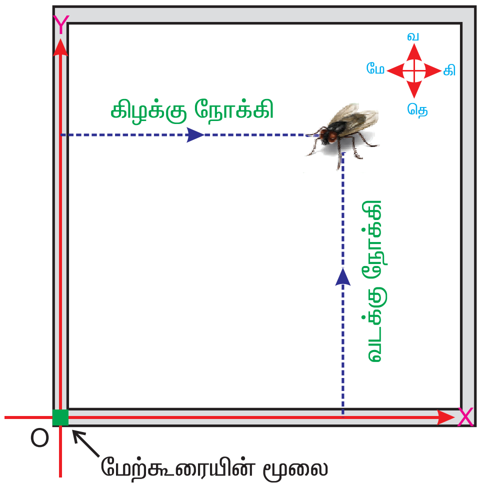
“நான் சிந்திக்கிறேன், ஆகவே நான் இருக்கின்றேன்”, என்பது இவரது பெரும்புகழ் பெற்ற கூற்றுகளுள் ஒன்றாகும்.

7.1 அறிமுகம்

ஓர் ஈயும் வரைபடமும் : ஒரு கதை

17 ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியைச் சார்ந்த பிரெஞ்சுக் கணிதமேதை ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் என்பவரே வரைபடத்தைக் கண்டறிந்தவர் ஆவார். அவரது வாழ்வில் நிகழ்ந்த ஒரு சுவையான நிகழ்ச்சி இங்கே தரப்பட்டுள்ளது.

ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் சிறுவனாக இருந்தபோது நோயாளியாக இருந்தார். ஆகவே அவர் காலையில் வெகுநேரம் படுக்கையிலேயே படுத்திருக்க அனுமதிக்கப்பட்டார். பின்னர் அதுவே அவரது இயல்பாகிப் போனது. அவ்வாறு ஒருநாள் அவர் படுக்கையில் படுத்திருந்தபோது மேற்கூரையின் ஒரு மூலைக்கருகே ஓர் ஈ இருந்ததைக் கண்டார். அது பல்வேறு நேரங்களில் மேற்கூரையின் பல இடங்களில் அமர்ந்தது. ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் அந்த ஈ அமர்ந்த பல்வேறு இடங்களைத் தீர்மானிக்க எண்ணினார். இது அவரை மேலும் சிந்திக்க வைத்தது. அவர் மேற்கூரையின் மூலை O விலிருந்து கிழக்கு நோக்கியும், வடக்கு நோக்கியும் எவ்வளவு தொலைவில் அந்த ஈ இருந்தது எனக் கண்டால் போதுமானது என நினைத்தார். (படத்தைப் பார்க்கவும்) இதுவே ‘வரைபடங்கள்’ என்ற பாடப்பிரிவின் தொடக்கமாகும்.

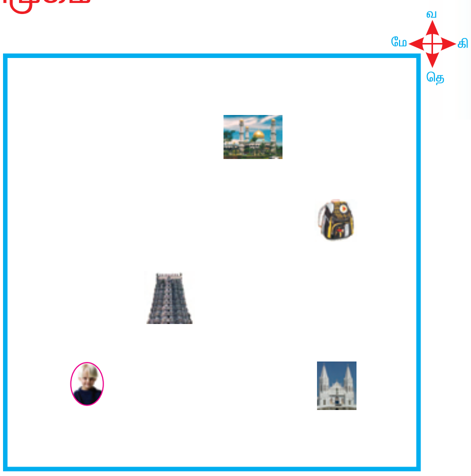


ஒரு புள்ளியை இரு அளவுகளைக் (ஒரு கிடை மற்றும் ஒரு செங்குத்து) கொண்டு குறிப்பிடும் இம்முறையை “கார்ட்டீசியன் அமைப்பு” என்கிறோம். Rene Descartes என்ற அவரது பெயரில் இருந்து ‘Cartes’ என்ற சொல் எடுக்கப்பட்டு “ கார்ட்டீசியன் அமைப்பு” என்று அவருடைய நினைவாக பெயரிடப்பட்டுள்ளது, x அச்சு, y அச்சு ஆகிய இவ்விரு அச்சுகளையும், ‘கார்ட்டீசியன் அச்சுகள்’ என்றே அழைக்கிறோம்.

7.2 கார்ட்டீசியன் தளம், ஆய அச்சுகள்–ஓர் அறிமுகம்

7.2.1 ஒரு புள்ளியின் அமைவிடம்

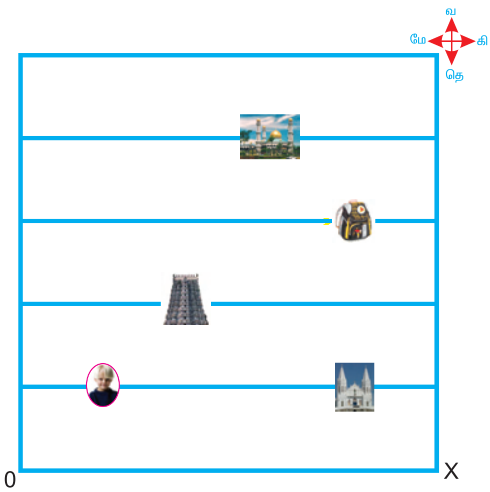
படம் 7.1 ஐக் காண்க. நம்மால் சிறுவன் எங்கே இருக்கிறான்? சர்ச் எங்கே இருக்கிறது? கோயில் எங்கே இருக்கிறது? பை எங்கே இருக்கிறது? மசூதி எங்கே இருக்கிறது? என்று கூற இயலுமா? இது எளிதா? இல்லை. நாம் சிறுவன், சர்ச், கோயில், பை, மசூதி ஆகியவற்றின் அமைவிடங்களை எவ்வாறு சரியாகக் கூற இயலும்?



படம் 7.1

நாம் முதலில், ஒன்றுக்கொன்று ஓரலகுத்தொலைவில் அமைந்த இணைகோடுகளை வரைவோம். அடியில் உள்ள கிடைக்கோடு ‘OX’ ஆகும். இப்பொழுது, படம் 7.1 ஆனது படம் 7.2 ஐப் போன்று தோன்றும்.

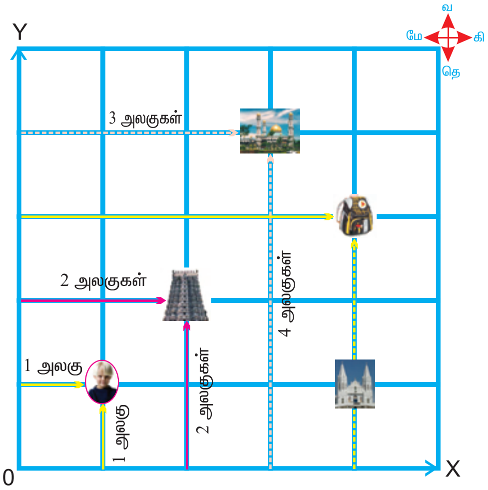
இப்பொழுது சிறுவன், சர்ச், கோயில், பை, மசூதி ஆகியவைகளின் இருப்பிடங்களைக் கூற முயல்வோம். சிறுவனின் இருப்பிடமும் சர்ச்சின் இருப்பிடமும் முதல் இணைக்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. அதாவது OX என்ற அடிக்கோட்டிலிருந்து இவை ஓரலகுத் தொலைவு தள்ளியுள்ளன. இப்பொழுதும் கூட நம்மால் இவைகளின் அமைவிடங்களை மிகச் சரியாகச் சுட்டிக்காட்ட இயலவில்லை. நமக்கு இன்னும் ஏதோ குழப்பம் இருக்கின்றது. இவ்வாறே கோயில், பை, மசூதி ஆகியவற்றின் மிகச் சரியான இருப்பிடங்களை கூறவும் நமக்கு கடினமாகவே உள்ளது. ஏனெனில் அவை யாவும் வெவ்வேறு இணை கோடுகளில் அமைந்துள்ளன.



படம் 7.2

இக்குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, நாம் ஒன்றுக்கொன்று ஓரலகுத் தொலைவில் அமைந்த செங்குத்துக் கோடுகளை படம் 7.2 இல் வரைவோம். இடது ஓரம் உள்ள செங்குத்து கோடு ‘OY’ ஆகும். பின்பு அது படம் 7.3 இல் உள்ளது போல் தோன்றும்.

இணை மற்றும் செங்குத்துக் கோடுகளின் உதவியுடன் நாம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருட்களின் அமைவிடங்களைத் தீர்மானிக்கலாம். முதலில் சிறுவனின் இருப்பிடத்தைக் காண்போம். அவன் OY என்ற செங்குத்துக் கோட்டிலிருந்து 1 அலகுத் தொலைவிலும் OX என்ற கிடைக் கோட்டிலிருந்து 1 அலகுத் தொலைவிலும் உள்ளான். எனவே அவனது அமைவிடம் (1, 1) என்ற புள்ளியால் குறிப்பிடப்படுகிறது.



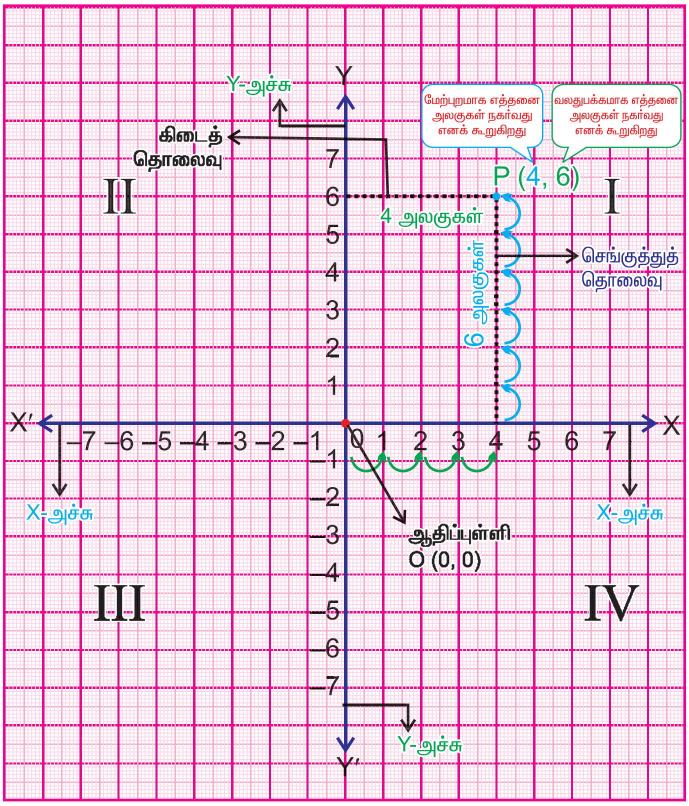
படம் 7.3

அதே போல், சர்ச்சின் அமைவிடம் (4, 1) என்ற புள்ளியாலும், கோயிலின் அமைவிடம் (2, 2) என்ற புள்ளியாலும், பையின் அமைவிடம் (4, 3) என்ற புள்ளியாலும், மசூதியின் அமைவிடம் (3, 4) என்ற புள்ளியாலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

7.2.2 ஆய அச்சு முறை

நாம் இப்பொழுது ஆய அச்சு முறை என்பது யாதென முறையாக வரையறுப்போம்.

X′OX, Y′OY ஆகியவை இரு எண் கோடுகள் என்றும் இவை ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக பூச்சியத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன என்றும் கொள்வோம். இவை தாளின் முழுத் தளத்தை நான்கு சமப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும். நாம் இவற்றை காற்பகுதிகள் [I, II, III மற்றும் IV] என்கிறோம். படத்தைக் காண்க. இதில்,



X′OX என்ற கோட்டை

***x*–அச்சு** என்கிறோம்.

Y′OY என்ற கோட்டை

***y*–அச்சு** என்கிறோம்.

'O' என்ற புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி என்கிறோம்.

இப்புள்ளியே *x*-அச்சும், *y*-அச்சும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியாகும்.

இதுவே கார்ட்டீசியன் ஆயஅச்சுமுறை எனப்படுகிறது.

குறிப்பு : ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க, நாம் முதலில் x அச்சுத் தொலைவையும் (அல்லது கிடையச்சின் மீதுள்ள எண்) பிறகு y அச்சுத் தொலைவையும் (அல்லது செங்குத்து அச்சின் மீதுள்ள எண்) எழுதுவதே வழக்கமாகும். வரிசை சோடியின் முதல் எண் x அச்சுத் தொலைவு அல்லது கிடைத் தொலைவு எனப்படுகிறது, வரிசை சோடியின் இரண்டாம் எண் y அச்சுத் தொலைவு அல்லது செங்குத்துத் தொலைவு எனப்படுகிறது.

உற்று நோக்கல்: படத்தில் உள்ள P (4, 6) என்ற புள்ளியைக் கருதுவோம். இது y-அச்சிலிருந்து வலது புறம் 4 அலகுத் தொலைவிலும் x-அச்சிலிருந்து மேற்புறம் 6 அலகுத் தொலைவிலும் தள்ளி அமைந்துள்ளது. P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களை (4, 6) என்றழைக்கிறோம்.

7.3 வெவ்வேறு சூழல்களில் புள்ளிகளைக் குறித்தல்

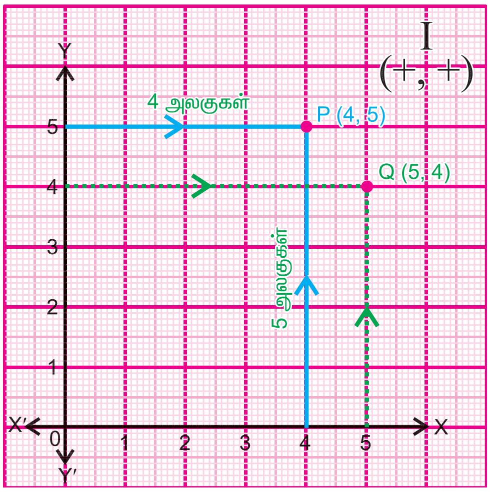
7.3.1 வரைபடத்தாளில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 7.1

(4, 5) என்ற புள்ளியை வரைபடத்தாளில் குறி. இப்புள்ளியும் (5, 4) ம் ஒன்றா?

தீர்வு

அளவுத் திட்டம்:
X அச்சு 1 செ.மீ = 1 அலகு
Y அச்சு 1 செ.மீ = 1 அலகு



X′OX, Y′OY ஆகிய இரு எண்கோடுகளை வரைக. அவை ஆதிப்புள்ளி ‘O’ இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்தை முடிவு செய்து x, y அச்சுகளில் அளவுகளைக் குறிக்கிறோம் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி P (4, 5). இங்கு P யின், x அச்சுத்தொலைவு 4, y அச்சுத் தொலைவு 5 ஆகும்.

இவ்விரண்டுமே மிகை. எனவே P (4, 5) என்ற புள்ளி முதற் கால் பகுதியில் அமையும். புள்ளியைக் குறிக்க ஆதிப்புள்ளி O (0, 0) இல் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 4 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்வோம். இப்பொழுது, நாம் P (4, 5) என்ற புள்ளியை வந்தடைந்துள்ளோம். அதனைக் குறிக்கிறோம். (மேற்கண்ட படத்தில் காட்டியுள்ளபடி).

அடுத்து, Q (5, 4) என்ற புள்ளியை நாம் குறிப்போம். இங்கு Q வின் x அச்சுத் தொலைவு 5, y அச்சுத் தொலைவு 4 ஆகும். இரண்டுமே மிகை. எனவே Q (5, 4) என்ற இப்புள்ளியும் முதற் காற்பகுதியிலேயே அமையும். Q (5, 4) என்ற இப்புள்ளியைக் குறிக்க ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலப்பக்கமாக **5** அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 4 அலகுகள் நகர்வோம். இப்பொழுது, நாம் Q (5, 4) என்ற புள்ளியினை வந்தடைந்துள்ளோம். அதனைக் குறிக்கிறோம். (மேற்கண்ட படத்தில் காட்டியுள்ளபடி)

முடிவு மேற்கண்ட படத்திலிருந்து P (4, 5) என்ற புள்ளியும் Q (5, 4) என்ற புள்ளியும் இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் என்பது மிகத் தெளிவாகத் தெரிகின்றது.

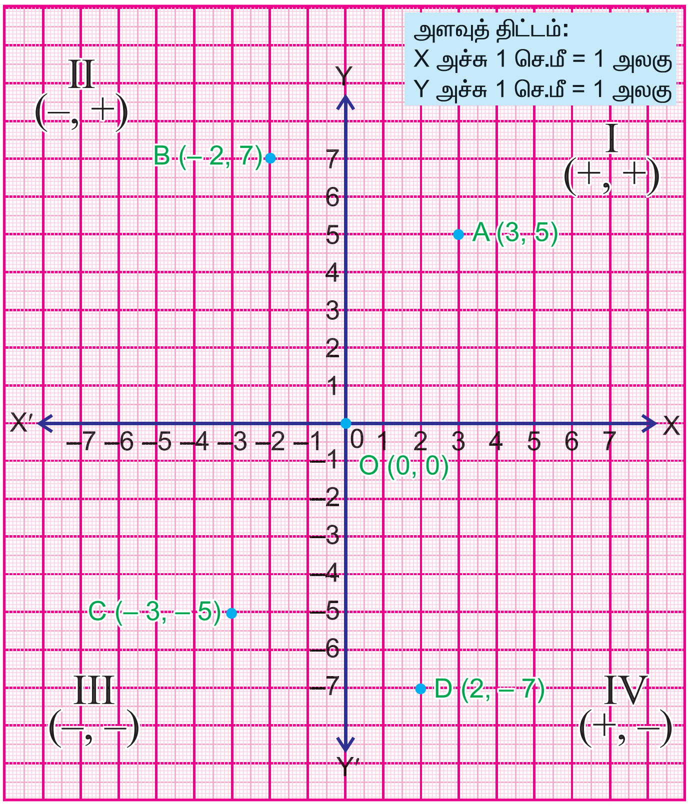
எடுத்துக்காட்டு 7.2

பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவை எந்த எந்த காற்பகுதிகளில் அமைகின்றன என்றும் காண்க.

(i) A (3,5) (ii) B (–2 , 7)

(iii) C (–3,–5) (iv) D (2, – 7)

(v) O (0, 0)



தீர்வு

x, *y* அச்சுகளை வரைகிறோம். பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தை முடிவு செய்து *x*, *y* அச்சுகளின் அளவுகளைக் குறிப்போம்.

(i) A (3 , 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க:

இங்கு A யின் *x* அச்சுத் தொலைவு 3, *y* அச்சுத் தொலைவு 5 ஆகும். இரண்டுமே மிகை. எனவே A (3, 5) என்ற புள்ளி முதற் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில் தொடங்கி, *x* அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 3 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி *y* அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து A (3, 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(ii) B (–2 , 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு B யின் *x* அச்சுத் தொலைவு –2, *y* அச்சுத் தொலைவு 7, இது மிகை. எனவே B (–2, 7) என்ற புள்ளி இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில் தொடங்கி, *x* அச்சின் மீது இடது பக்கமாக 2 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி *y* அச்சுக் கிணையாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து B (–2 , 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iii) C (–3 , –5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு C யின் *x* அச்சுத்தொலைவு – 3, *y* அச்சுத் தொலைவு – 5 ஆகும். இரண்டுமே குறை. எனவே C (– 3, – 5) என்ற புள்ளி மூன்றாம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, *x* அச்சின் மீது இடது பக்கமாக 3 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு கீழ்நோக்கித் திரும்பி *y* அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து C (– 3, – 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iv) D (2, – 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, D யின் *x* அச்சுத் தொலைவு 2, இது மிகை. *y* அச்சுத் தொலைவு –7, இது குறை. எனவே D (2, – 7) என்ற புள்ளி நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில்

தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 2 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு கீழ்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து D (2, – 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(v) O (0, 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

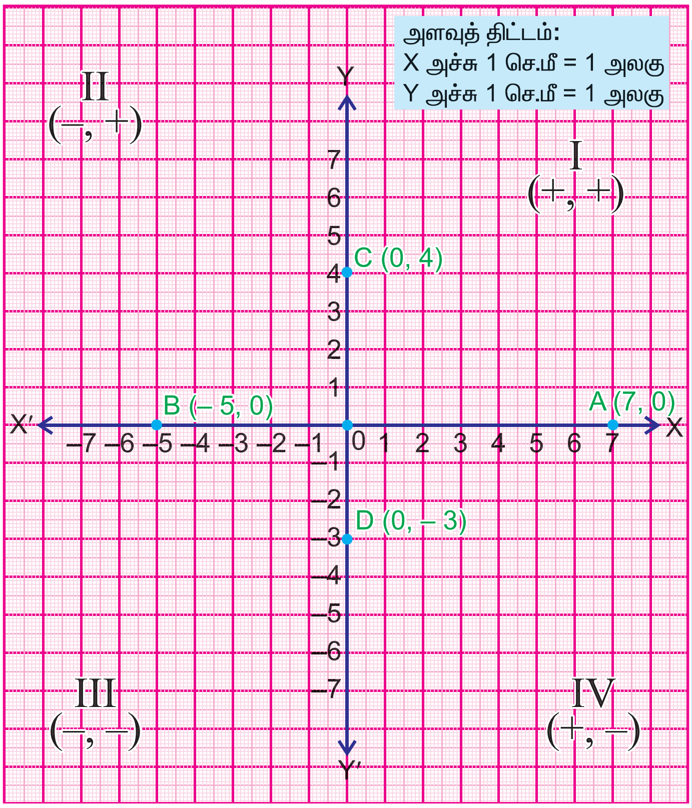
இது ஆதிப்புள்ளியாகும். x, y ஆகிய இரு அச்சுத்தூரங்களும் பூச்சியமே. x, y ஆகிய இரு அச்சுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி இதுவாகும். இதனை O (0, 0) என்ற புள்ளியாகக் குறிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.3

பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றின் அமைவிடங்களைக் காண்க.

(i) A (7, 0) (ii) B (– 5, 0)

(iii) C (0 , 4) (iv) D (0, – 3)



தீர்வு

x, y அச்சுகளை வரைகிறோம். பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தை முடிவுசெய்து x, y அச்சுகளில் அளவுகளைக் குறிக்கிறோம்.

(i) A (7, 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, A யின் x அச்சுத் தொலைவு 7, இது மிகை, y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம். எனவே A (7, 0) என்ற புள்ளி x அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலதுபக்கமாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(ii) B (–5 , 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

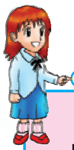
இங்கு, B யின் x அச்சுத் தொலைவு – 5, இது குறை, y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம். எனவே B (– 5, 0) என்ற புள்ளி x அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது இடதுபக்கமாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iii) C (0 ,4) என்ற புள்ளியைக் குறி

இங்கு, C யின் x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம், y அச்சுத் தொலைவு 4, இது மிகை. எனவே C (0, 4) என்ற புள்ளி y அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி y அச்சின் மீது மேல்நோக்கி 4 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iv) D (0 , –3) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம், y அச்சுத் தொலைவு – 3, இது குறை. எனவே D (0, – 3) என்ற புள்ளி y அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி y அச்சின் மீது கீழ்நோக்கி 3 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.



நீவிர் அறிவீரா?

புள்ளிகள் எங்கு அமைகின்றன என்பதை வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே நம்மால் கூற முடியுமா? இதை அறிய, கீழ்க்காணும் அட்டவணையை உற்று நோக்குக.

வ. எண்	எடுத்துக் காட்டுகள்	புள்ளியின் x அச்சுத் தொலைவு	புள்ளியின் y அச்சுத் தொலைவு	புள்ளியின் அமைவிடம்
1.	(3,5)	மிகை (+)	மிகை (+)	முதலாம் காற்பகுதி
2.	(–4,10)	குறை (–)	மிகை (+)	இரண்டாம் காற்பகுதி
3.	(–5,–7)	குறை (–)	குறை (–)	மூன்றாம் காற்பகுதி
4.	(2,–4)	மிகை (+)	குறை (–)	நான்காம் காற்பகுதி
5.	(7,0)	பூச்சியமற்ற எண்	பூச்சியம்	X அச்சின் மீது
6.	(0,–5)	பூச்சியம்	பூச்சியமற்ற எண்	Y அச்சின் மீது
7	(0,0)	பூச்சியம்	பூச்சியம்	ஆதிப்புள்ளி

முயற்சி செய்

பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே உன்னால் அவற்றின் அமைவிடங்களைக் கூற இயலுமா?

(i) (2 , 7) (ii) (–2 , 7) (iii) (–2 , –7) (iv) (2 , –7)

(v) (2 , 0) (vi) (–2 , 0) (vii) (0 , 7) (viii) (0 , –7)

7.4 நேர்க்கோடுகளையும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளையும் வரைதல்

கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளால் ஆன நேர்க்கோட்டினையும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளையும் வரைவது எவ்வாறு என்பதை இப்பகுதியில் நாம் கற்கவுள்ளோம். மேலும் தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளையும் கண்டறியவுள்ளோம்.

7.4.1 கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 7.4

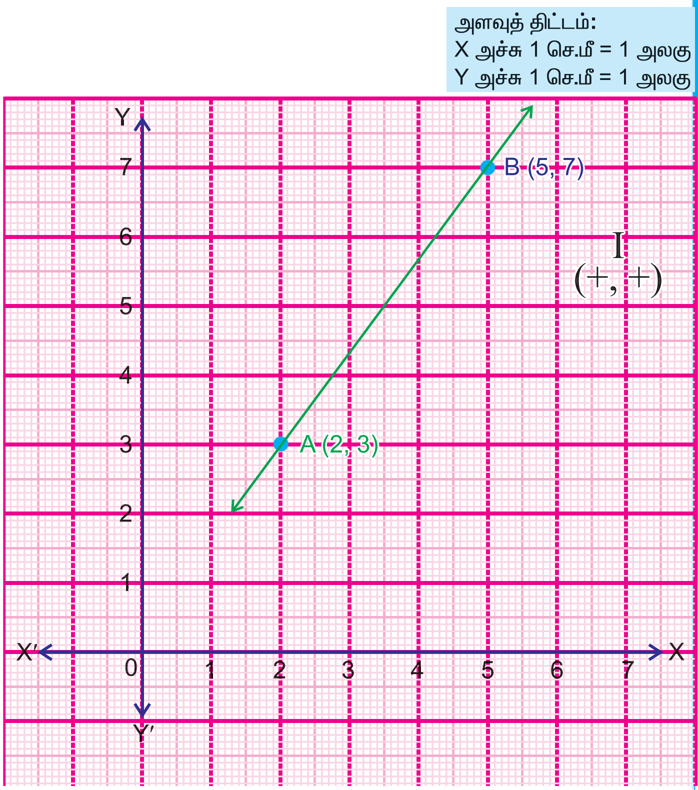
பின்வரும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைக.

(i) A (2,3), B (5, 7),

(ii) P (–4,5), Q (3,–4).

தீர்வு

(i) A (2 , 3), B (5 , 7) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்:



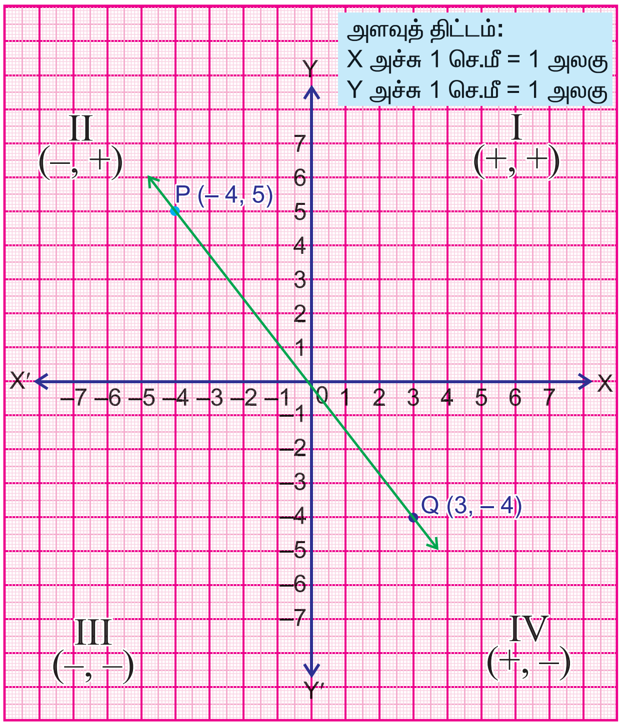
முதலில் (2, 3) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு A எனப் பெயரிடுகிறோம்.

அடுத்து (5, 7) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு B எனப் பெயரிடுகிறோம்.

பிறகு புள்ளிகள் A ஐயும் B ஐயும் சேர்க்கிறோம்.

AB என்பது தேவையான கோடாகும்.

(ii) P (– 4, 5), Q (3, – 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்:



முதலில் (– 4, 5) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு P எனப் பெயரிடுகிறோம்.

அடுத்து (3, – 4) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு Q எனப் பெயரிடுகிறோம்.

பிறகு புள்ளிகள் P ஐயும் Q ஐயும் சேர்க்கிறோம்.

PQ என்பது தேவையான கோடாகும்.

7.4.2 ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான நேர்க்கோடுகளை வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 7.5

(i) $x = 3$ இன் வரைபடம் வரைக.

(ii) $y = -5$ இன் வரைபடம் வரைக.

(iii) $x = 0$ என்பதன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

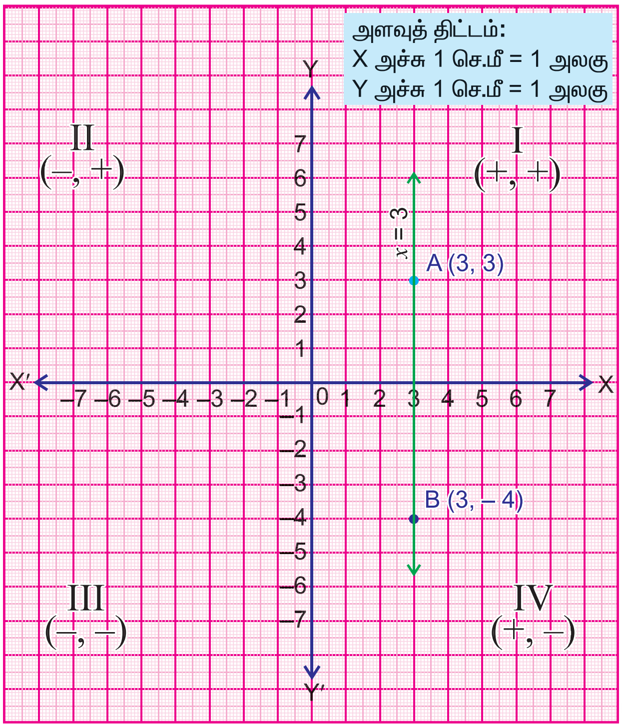
(i) $x = 3$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

y அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் x அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் 3 ஆகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	3	3
y	3	–4

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (3, 3), B (3, –4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து இருபக்கமும் கோட்டை நீட்டினால் $x = 3$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



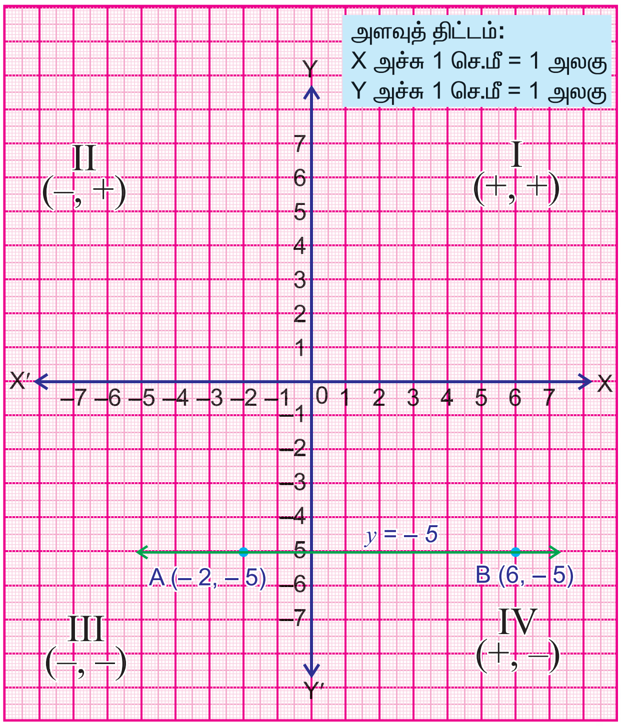
(ii) $y = -5$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

x அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் y அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் -5 ஆகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	–2	6
y	–5	–5

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (– 2, – 5), B (3, – 5) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து இருபக்கமும் கோட்டை நீட்டினால் $y = -5$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



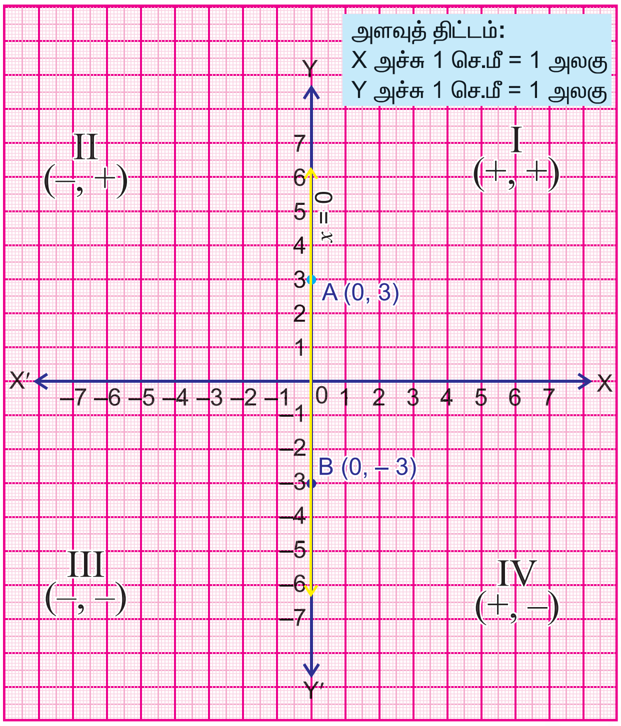
(iii) $x = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

y அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் x அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் பூச்சியமாகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	0	0
y	3	–3

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (0, 3) , B (0, – 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து கோட்டை நீட்டினால் $x = 0$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



7.4.3 தள உருவங்களின் பரப்பளவு

ஒரு வரைபடத்தாளில் வரையப்பட்ட சதுரம், செவ்வகம், இணைகரம், சரிவகம், முக்கோணம் போன்ற தள உருவங்களால் அடைபடும் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளை வரைபடத்தாளில் உள்ள அலகு சதுரங்களை எண்ணித் தீர்மானிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.6

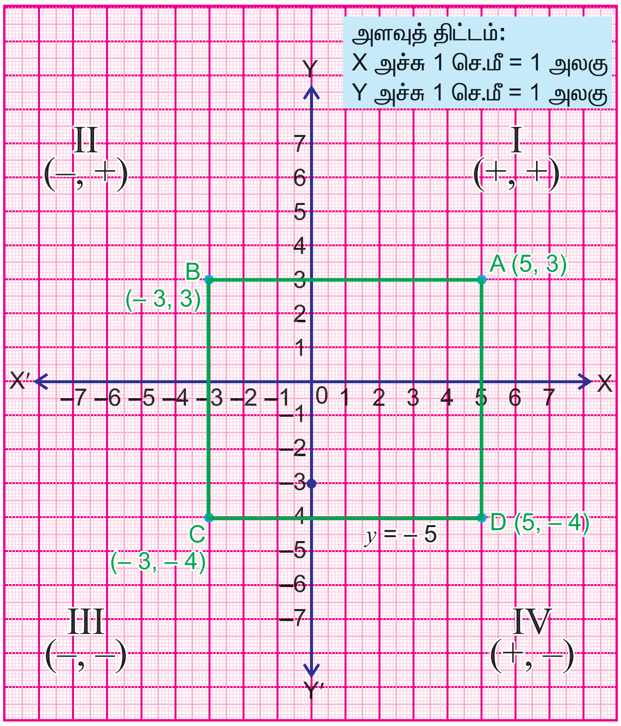
A (5 , 3), B (–3 , 3), C (–3 , –4), D (5 , –4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து ABCD என்ற வடிவத்தால் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

x, y அச்சுகளை பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்துடன் வரைகிறோம்.

A (5 , 3), B (–3 , 3), C (– 3 , –4), D (5 , –4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம்.

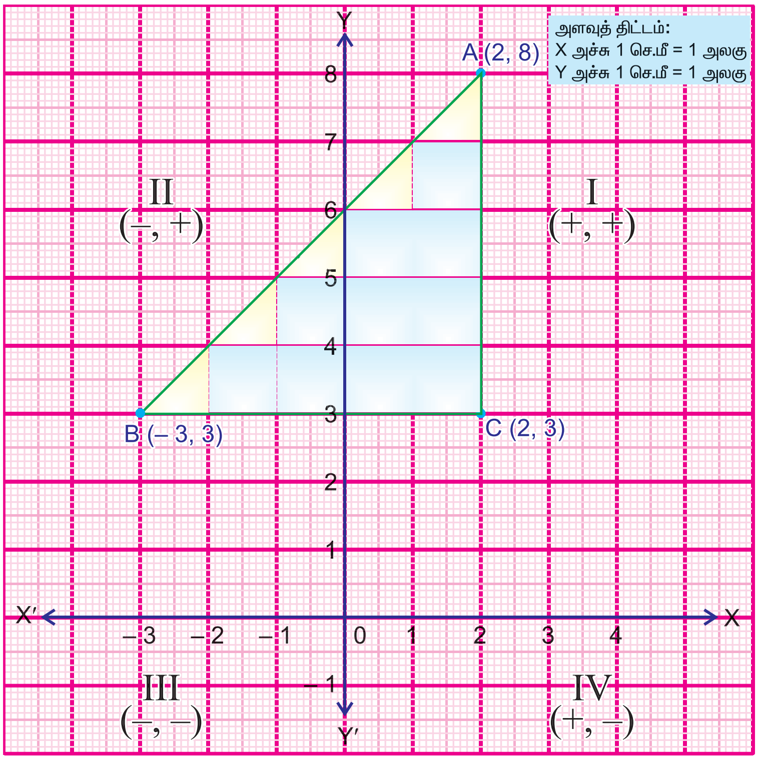
A மற்றும் B, B மற்றும் C, C மற்றும் D, D மற்றும் A ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கிறோம். ABCD என்ற ஓர் அடைபட்ட வடிவம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது. தெளிவாக இது ஒரு செவ்வகம் ஆகும். நான்கு பக்கங்களுக்குள்ளும் அடைபட்டுள்ள அலகு சதுரங்களைக் கூட்டினால் 56 அலகு சதுரங்கள் உள்ளன.



எனவே செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பளவு 56 சதுர செ.மீ. ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.7

A (2, 8), B (– 3, 3), C (2, 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து ABC என்ற வடிவத்தால் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



தீர்வு

x, y அச்சுகளை பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்துடன் வரைகிறோம்.

A (2 , 8), B (– 3 , 3) , C (2 , 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம்.

A மற்றும் B, B மற்றும் C, C மற்றும் A ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கிறோம். ABC என்ற ஓர் அடைபட்ட வடிவம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது. தெளிவாக இது ஒரு முக்கோணம் ஆகும். அடைப்பட்டுள்ள வடிவத்தில் உள்ள முழு அலகுச் சதுரங்களை எண்ணுவோம். இதில் 10 முழு அலகுச் சதுரங்கள் உள்ளன.

அரை அலகுச் சதுரங்களை எண்ணிப்பார்க்கிறோம். இதில் 5 அரை அலகுச் சதுரங்கள் உள்ளன. எனவே, முக்கோணத்தில் பரப்பு $10 + \frac{5}{2} = 10 + 2.5 = 12.5$ சதுர செ.மீ. ஆகும்.

பயிற்சி 7.1

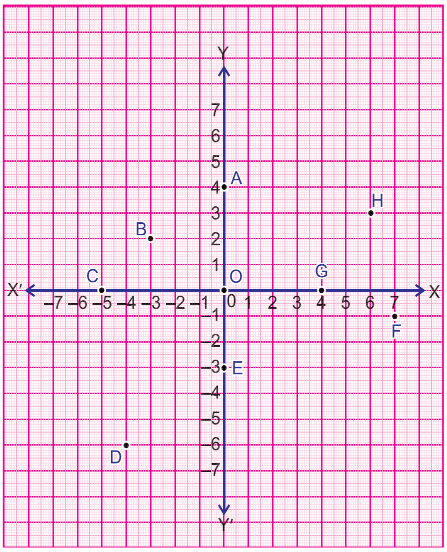
1. பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றின் அமைவிடங்களைக் காண்க.

   (i) A (2 , 3) (ii) B (– 3 , 2) (iii) C (–5 ,–5) (iv) D (5 , –8)
   (v) E (6 , 0) (vi) F (–4 , 0) (vii) G (0 , 9)
   (viii) H (0 , –3) (ix) J (7 , 8) (x) O (0 , 0).

2. வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே, கீழே உள்ள புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் எங்கு அமையும் என்று எழுதுக.

   (i) (8 , 15) (ii) (–15 , 2) (iii) (–20 , –10)
   (iv) (6 , –9) (v) (0 , 18) (vi) (–17 , 0)
   (vii) (9 , 0) (viii) (–100 , –200)
   (ix) (200 , 500) (x) (–50 , 7500).

3. படத்தில் உள்ள A, B, C, D, E, F, G, H மற்றும் O ஆகிய புள்ளியின் அமைவிடங்களையும் அச்சுத்தூரங்களையும் காண்க.



4. பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றின் வழிச்செல்லும் கோடுகளை வரைக.

(i) (2 , 7) , (–2 ,– 3) (ii) (5 , 4), (8 , –5) (iii) (–3 , 4), (–7 , –2)

(iv) (–5 , 3), (5 , –1) (v) (2 , 0), (6 , 0) (vi) (0 , 7), (4 , –4)

5. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக.

(i) $y = 0$ (ii) $x = 5$ (iii) $x = –7$ (iv) $y = 4$ (v) $y = –3$

6. பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றால் அடைபடும் வடிவங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

(i) A (3 , 1), B (3 , 6), C (–5 , 6), D (–5 , 1)

(ii) A (– 2 , – 4), B (5 , – 4), C (5 , 4), D (–2 , 4)

(iii) A (3 , 3), B (–3 , 3), C (–3 , –3), D (3 , –3)

(iv) O (0 , 0), A (0 , 7), B (–7 , 7), C (–7 , 0)

(v) A (0 , – 2), B (–4 , – 6), C (4 ,– 6)

(vi) A (1 , 2), B (9, 2), C (7 , 4), D (3 , 4)

(vii) A (–4, 1), B (–4, 7), C (–7, 10), D (–7 , 4)

7. முந்தைய கணக்கு எண் 6 (i), (ii), (iii) மற்றும் (iv) இல் கிடைக்கும் செவ்வகங்கள் மற்றும் சதுரங்களின் சுற்றளவுகளைக் காண்க.

7.5 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்கள்

வரைபடத்தாளில் நேர்க்கோடுகளையும் இணை கோடுகளையும் வரைவதை நாம் ஏற்கெனவே கற்றறிந்துள்ளோம். ஒரு வரைபடத்தாளில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கிறது எனில் அந்த வரைபடத்தை நேர்க்கோட்டு வரைபடம் என்கிறோம்.

7.5.1 ‘காலம்–தொலைவு’ வரைபடம்

காலத்திற்கும் தொலைவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறித்து அறிய கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.8

அமுதா மணிக்கு **3** கி.மீ வேகத்தில் நடக்கிறாள். காலத்திற்கும் தொலைவிற்குமிடையே உள்ள உறவைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு

அமுதா மணிக்கு 3 கி.மீ வேகத்தில் நடக்கிறார், இதன் பொருள் அவர் 1 மணி நேரத்தில் 3 கி.மீ, 2 மணி நேரத்தில் 6 கி.மீ, 3 மணி நேரத்தில் 9 கி.மீ என்றவாறு நடக்கிறார் என்பதாகும்.

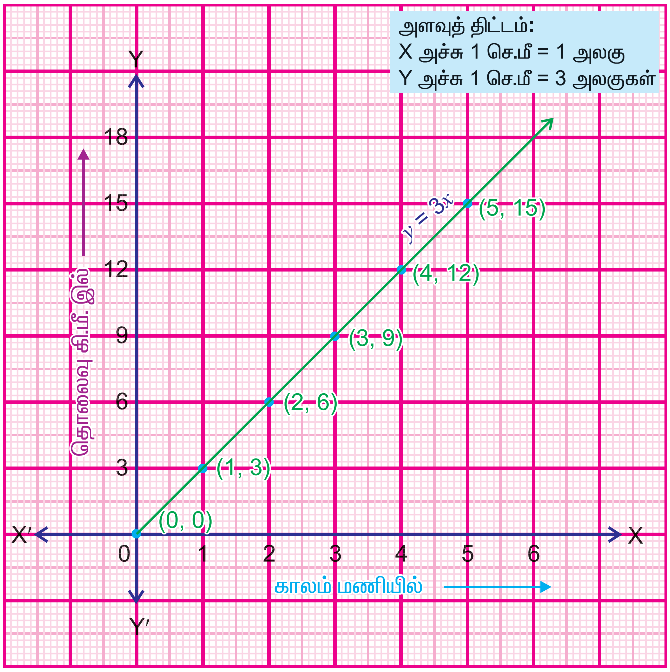
ஆகவே, நமக்கு

காலம் (x மணியில்)	0	1	2	3	4	5
தூரம் (y கி.மீ.இல்)	0	3	6	9	12	15

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது

புள்ளிகள்: (0 , 0), (1 , 3), (2 , 6), (3 , 9), (4 , 12), (5 , 15).

மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கின்றது. இதுவே இதன் நேர்க்கோட்டு வரைபடம் ஆகும்.



x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு

தொலைவு = வேகம் × காலம்

என்பது நாமறிந்ததே.

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து

$0 = 3 \times 0$ | $9 = 3 \times 3$

$3 = 3 \times 1$ | $12 = 3 \times 4$

$6 = 3 \times 2$ | $15 = 3 \times 5$

$\Longrightarrow y = 3x$

(இங்கு, y = தொலைவு, x = காலம் மணியில் மற்றும் 3 என்பது வேகத்தையும் குறிக்கிறது)

இந்த கணக்கின் ஒருபடிச் சமன்பாடு $y = 3x$ என்பது ஆகும்.

7.5.2 'ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவு – பக்கம்' வரைபடம்

எடுத்துக்காட்டு 7.9

ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவுக்கும் பக்கத் திற்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு

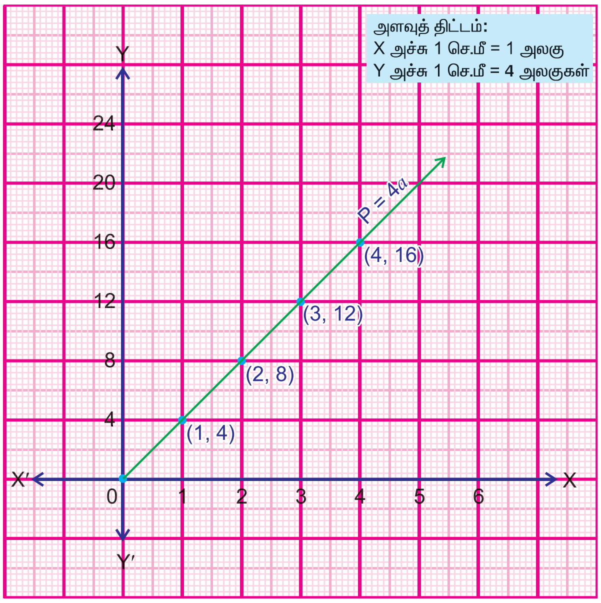
ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவு என்பது அதன் பக்கத்தைப் போன்று நான்கு மடங்கு என்பது நாமறிந்ததே.

அதாவது $P = 4a$.

(இங்கு, P = சுற்றளவு மற்றும் a = பக்கம்)

a வெவ்வேறு மதிப்புகட்கான P இன் மதிப்புகளை அட்டவணைப் படுத்தினால்

a (செ.மீ. இல்)	1	2	3	4
P = 4a (செ.மீ. இல்)	4	8	12	16



புள்ளிகள்: (1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16).

மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். நமக்கு P = 4a என்பதன் நேர்க்கோட்டு வரைபடம் கிடைக்கிறது.

7.5.3 ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள சார்பு

எடுத்துக்காட்டு 7.10

ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக்காட்டும் வரைபடத்தை வரைக.

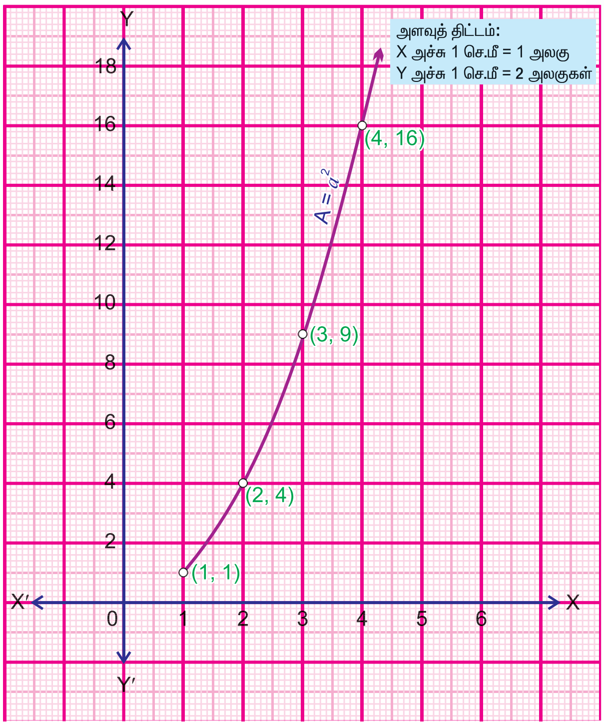
தீர்வு

ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவு என்பது அதனுடைய பக்கத்தின் வர்க்கமாகும் என்பது நாமறிந்ததே. அதாவது $A = a^2$.

(இங்கு, A = பரப்பளவு, a = பக்கம்). a யின் வெவ்வேறு மதிப்புகட்கான A யின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்தினால்.

a (செ.மீ. இல்)	1	2	3	4	5
$A = a^2$ (ச.செ.மீ. இல்)	1	4	9	16	25

புள்ளிகள்: (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)



மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். இது ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடமா? இல்லை. இது ஒரு வளைகோடு ஆகும்.

7.5.4 ஓர் எண்ணின் வெவ்வேறு மடங்குகளை வரைபடத்தில் குறித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 7.11

மூன்றின் மடங்குகளைக் காட்டும் வரைபடத்தை வரைக.

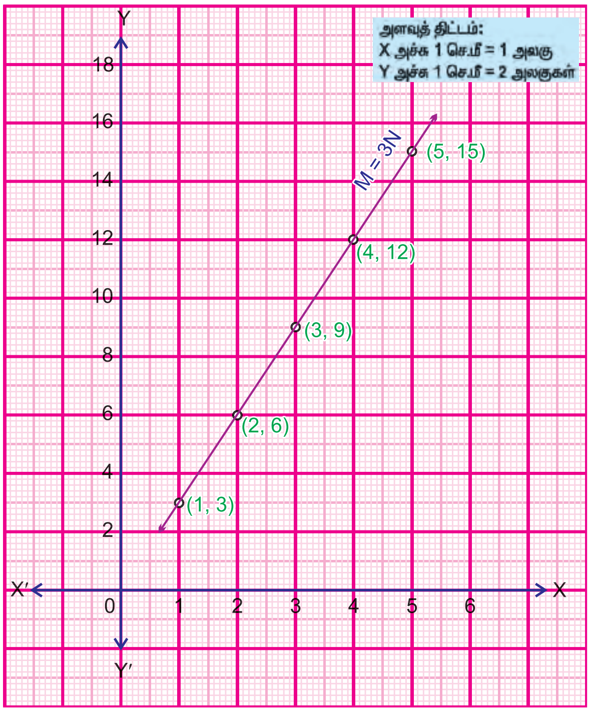
தீர்வு

இப்பொழுது நாம் மூன்றின் மடங்குகளை எழுதுவோம்.

3, 6, 9, 12, 15... போன்றவை 3 இன் மடங்குகளாகும்.

3 இன் மடங்குகளை நாம் இவ்வாறு எழுதலாம் $3 \times n$ (இங்கு, n = 1, 2, 3, ...)

$m = 3\,n$ (m என்பது 3 இன் மடங்கு ஆகும்)



ஆகவே, நமக்கு

n	1	2	3	4	5
$m = 3n$	3	6	9	12	15

புள்ளிகள்: (1 , 3), (2 , 6), (3 , 9), (4 , 12), (5 , 15).

அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறித்து இணைத்தால். நமக்கு 3 இன் மடங்குகளின் வரைபடம் கிடைக்கிறது.

7.5.5 'தனிவட்டி – காலம்' வரைபடம்

எடுத்துக்காட்டு 7.12

அசோக் ₹ 10,000 ஆண்டுக்கு 8% என்ற வட்டி வீதத்தில் ஒரு வங்கியில் முதலீடு செய்துள்ளார். தனி வட்டிக்கும் காலத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக. மேலும், 5 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் தனி வட்டியையும் காண்க.

தீர்வு

தனிவட்டி $= \frac{Pnr}{100}$ என்பது நாமறிந்ததே.

[இங்கு, P = அசல், n = காலம் ஆண்டுகளில், r = வட்டி விகிதம்]

அசல், P = 10000

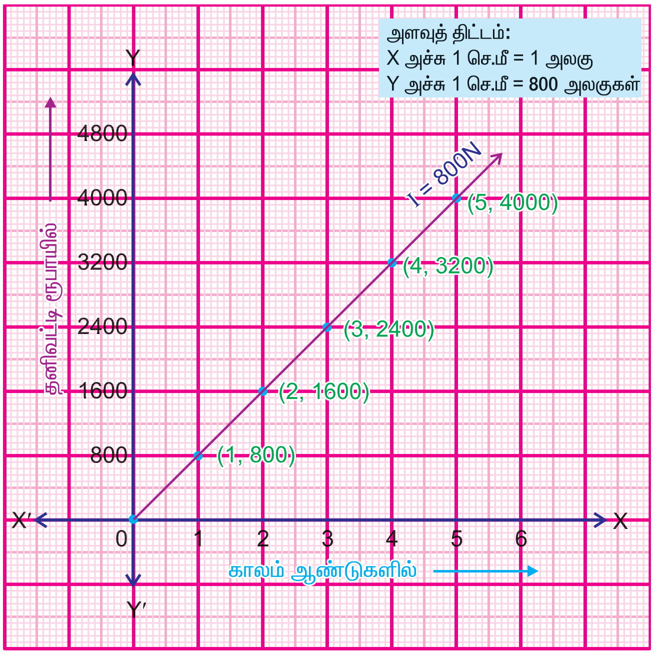
காலம், n = ?

வட்டி விகிதம், r = 8%

$$I = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$I = \frac{10000 \times n \times 8}{100}$$

$$I = 800\,n.$$



(இங்கு, தனிவட்டி I ஆனது n ஐச் சார்ந்துள்ளது)

n இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய I யின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

n (காலம் ஆண்டுகளில்)	1	2	3	4	5
I = 800 n (₹ இல்)	800	1600	2400	3200	4000

புள்ளிகள்: (1, 800), (2, 1600), (3, 2400), (4, 3200), (5, 4000)

அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறித்து அவைகளை இணைத்து நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைகிறோம்.

ஆகவே, 5 ஆண்டுகட்குப் பிறகு அசோக்கிற்குக் கிடைக்கும் தனி வட்டி ₹ 4,000 ஆகும். (வரைபடத்தில் விடை புள்ளியிட்ட கோடுகளால் அடையாளம் காட்டப்பட்டுள்ளது).

7.6 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்களைப் படித்தறிதல்

நாணயப் பரிமாற்றம்: உலகம் இன்று மிகவும் சிறியதாகி விட்டது. அயல் நாடுகளுடன் வர்த்தகம் செய்வது என்பது தவிர்க்க இயலாத ஒன்றாகி விட்டது. நாம் அவ்வாறு செய்கையில் நமது நாட்டு நாணயத்தை (இந்திய பணத்தை) பிற நாடுகளின் நாணயங்களாக மாற்ற வேண்டியுள்ளது. வெவ்வேறு நாடுகள் வெவ்வேறு பெயருடைய வெவ்வேறு நாணயங்களைப் பயன்படுத்துகின்றன. எனவே பணப் பரிமாற்றம் அல்லது நாணயப் பரிமாற்றம் குறித்த கருத்துகளை நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டியுள்ளது. கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு யூரோவிற்கு நிகரானப் பணப் பரிமாற்ற வீதம் ₹ 55 ஆக இருந்தது. கீழே உள்ள நேர்க்கோட்டு வரைபடம் நாணயங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை காட்டுகிறது. கவனமாக வரைபடத்தைப் படித்தறிந்து அடியில் கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி.

(i) 4 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) 6 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காண்க.

(iii) ₹ 275க்கு சமமான யூரோவின் மதிப்பைக் காண்க.

(iv) ₹ 440க்கு சமமான யூரோவின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

4 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காணல் :

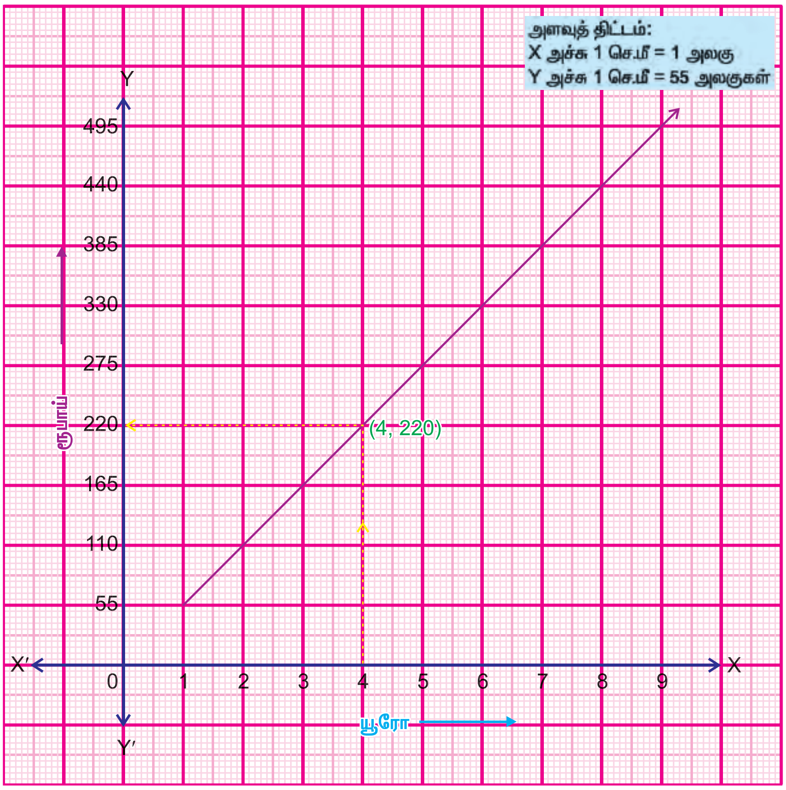
இந்த வரைபடத்தில், $x = 4$ இல் y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு புள்ளியிடப் பட்ட கோட்டை வரைகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுடன் இது வெட்டும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

அப்புள்ளியிலிருந்து x அச்சுக்கிணையாக ஒரு புள்ளியிட்ட கோட்டை வரைகிறோம்.

இது y அச்சை 220 இல் வெட்டுகிறது. (படத்தைக் காண்க)

எனவே, 4 யூரோக் களுக்குச் சமமான மதிப்பு ₹ 220 ஆகும்.



செய்து பார்

மேலே உள்ள (ii), (iii) மற்றும் (iv) ஆகிய வினாக்களுக்கான விடைகளை முயன்று கண்டறிக.

பயிற்சி 7.2

1. பின்வரும் விவரங்களுக்குரிய நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

(i)

x	5	5	5	5	5	5
y	1	2	3	4	5	6

(ii)

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5

2. நேர்க்கோட்டு வரைபடம் வரைந்து விடுபட்ட மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

x	1	2	3	4	–
y	6	12	–	–	30

3. ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

பக்கம் (மீட்டரில்)	2	3	4	5	6
பரப்பு (ச. மீட்டரில்)	4	9	16	25	36

4. $y = 7x$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

5. அக்பர் ஒரு மகிழுந்தை 40 கி.மீ / மணி என்ற சீரான வேகத்தில் ஓட்டிச் செல்கிறார். ‘தொலைவு – காலம்’ வரைபடம் வரைக. மேலும் 200 கி.மீ செல்ல அக்பருக்கு ஆகும் காலத்தையும் கண்டறிக.

6. எலீசா ஒரு வங்கியில் ₹ 20,000 ஐ ஆண்டுக்கு 10% வட்டி வீதத்தில் முதலீடு செய்துள்ளார். தனி வட்டிக்கும் காலத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் காட்டும் ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக. இதிலிருந்து 4 ஆண்டுகட்குரிய தனி வட்டியையும் காண்க.

விவரங்களைக் கையாளுதல்

8

8.1 அறிமுகம்

8.2 நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைப்பதை நினைவு கூர்தல்

8.3 தொகுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

8.4 எளிய வட்ட விளக்கப்படம் வரைதல்

8.5 மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்

R. A . ஃபிஷர்
(17பிப்ரவரி 1890 – 29 ஜுலை 1962)

பிழைக் கொள்கைகளில் R.A. ஃபிஷர் மிகுந்த ஆர்வமுடையவராக இருந்தார். இதனால் அவர் புள்ளியியல் சம்பந்தமான கணக்குகளைச் சோதனை செய்ய நேரிட்டது. 1915 – 1919 இடைப்பட்ட காலத்தில் அவர் கணித ஆசிரியராகவும், இயற்பியல் ஆசிரியராகவும் விளங்கினார். உலகம் முழுவதும் பயன்படுத்தப்படும் பரவல்படிப் பகுப்பாய்வு மற்றும் சம வாய்ப்புச் சோதனை மாதிரிகளை ஆராய்ந்தார். அவர் 'நவீனப் புள்ளியியலின் தந்தை' என அழைக்கப் படுகிறார்.

8.1 அறிமுகம்

செய்தித்தாள்கள் மற்றும் செய்தித் தொடர்புச் சாதனங்கள் வாயிலாக பல வேறுபட்ட தகவல்கள் நமக்குத் தினமும் கிடைக்கின்றன. இவை எல்லாம் எண்கள் வடிவங்களாகத்தான் நமக்குத் தெரிய வருகின்றன.

நம் நாட்டின் உணவு உற்பத்தி, உலகின் மக்கள்தொகை, பல்வேறு நாடுகளின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி விவரங்கள், நம் மாநிலத்தில் பள்ளிப்படிப்பில் இடையில் நின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, விபத்தில் இறப்போர் எண்ணிக்கை போன்ற பல தகவல்களை நாம் பார்க்க நேரிடுகிறது.

இப்படிப்பட்ட எல்லாத் தகவல்களிலும், நாம் எண்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இந்த எண்களை நாம் விவரங்கள் என்கின்றோம். இவ்விவரங்கள் முடிவுகளை எடுக்க நமக்குப் பயன்படுகின்றன. ஒவ்வொரு குடிமகனின் வாழ்விலும் இவை முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. ஆதலால், பொருத்தமான மற்றும் சரியான தகவல்களை இப்படிப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு அறிய வேண்டியது அவசியமாகிறது.

பொதுவாக, கணக்கீடு செய்யப்பட்ட விவரங்கள் படிக்க, புரிந்து கொள்ள மற்றும் ஆய்வு செய்ய உகந்ததல்ல. இவ்விவரங்களைக் கவனத்துடன் கையாளுவதன் மூலம் அவற்றைப் பல்வேறு வடிவங்களில் அளிக்க முடியும். இதன் மூலம் எந்த ஒரு சராசரி மனிதனும் புரிந்து கொள்ளும் வகையிலும், பார்த்தவுடன் அறிந்து கொள்ளும் வகையிலும் இவ்விவரங்களைப் பற்றிய செய்திகளைப் பெற முடியும்.

8.2 நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைப்பதை நினைவு கூர்தல்

ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியல் அமைக்கும் முறையை நாம் ஏழாம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். அம்முறையை இங்கு நினைவு கூர்வோம்.

8.2.1 தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு நிகழ்வெண் பட்டியல் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 8.1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியல் தயார் செய்க :

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25.

தீர்வு

மேற்குறிப்பிட்ட விவரங்களுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு நிகழ்வெண்பட்டியலை அமைக்கலாம்.

எண் (x)	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	நிகழ்வெண் (*frequency*)
15	||||	4
16	~~||||~~	5
17	||	2
18	~~||||~~	5
20	~~||||~~ ||	7
25	|||	3
27	|	1
28	||	2
30	|	1
	மொத்தம்	**30**

8.2.2 தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வெண்பட்டியல் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 8.2

ஒரு கணிதத் தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (100க்கு) பின்வருமாறு :

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35,

25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61,

45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

மேற்கண்ட விவரங்களுக்குப் பிரிவு இடைவெளிகளுடன் ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலைத் தயார் செய்க.

தீர்வு

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களின் எண்ணிக்கை = 50

வீச்சு = மீப்பெரு மதிப்பு – மீச்சிறு மதிப்பு

= 98 – 8 = 90

இதை 10 பிரிவு இடைவெளிகளாகப் பிரிப்போம்.

$\therefore$ பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் $= \dfrac{\text{வீச்சு}}{\text{பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை}}$

$= \dfrac{90}{10} = 9$

கணிதத் தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் நிகழ்வெண் பட்டியல், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு அமைக்கப்படுகிறது.

பிரிவு இடைவெளி (Class Interval)	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	நிகழ்வெண் (*frequency*)
0 - 10	||	2
10 - 20	||||	4
20 - 30	~~||||~~ |	6
30 - 40	~~||||~~ ||	7
40 - 50	~~||||~~ ||||	9
50 - 60	||||	4
60 - 70	~~||||~~ |||	8
70 - 80	||	2
80 - 90	~~||||~~	5
90 - 100	|||	3
	மொத்தம்	**50**

இவ்வாறாகப் பெறப்பட்ட விவரங்கள் அனைத்தையும் தொகுக்கப்பட்டு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன:

பிரிவு இடைவெளி (C.I)	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
நிகழ்வெண் (*f*)	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

8.3 தொகுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

புள்ளி விவரங்களைப் படங்கள் அல்லது வடிவக் கணிதப் படங்கள் மூலமாகக் குறிப்பிடலாம். பொதுவாக இப்படங்கள் 'வரைபடங்கள்' என்று அழைக்கப்படும். இவ்வரைபடங்களின் வாயிலாக விவரங்கள் ஆர்வத்துடன் படிக்க ஏதுவாகவும், குறுகிய காலத்தில் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளும்படியாகவும் உள்ளன. இவ்வரைபடங்களைப் பல வழிகளில் குறிப்பிடலாம். இந்த அத்தியாயத்தில் பின்வரும் வரைபடங்களின் வகைகளைப் பற்றி நாம் கற்போம்.

(i) நிகழ்வுச் செவ்வகம் (Histogram)

(ii) நிகழ்வுப் பலகோணம் (Frequency Polygon)

8.3.1 நிகழ்வுச் செவ்வகம் (Histogram)

தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவலை இரு பரிமாண வரைபடத்தில் குறிக்கும் அமைப்பை நிகழ்வுச் செவ்வகம் என்பர்.

ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில், செவ்வகங்கள் ஒன்றின் பக்கத்தில் ஒன்றாக இடைவெளியின்றித் தொடர்ச்சியாக வரையப்படுகிறது. அதாவது, செவ்வகங்கள் பிரிவு இடைவெளிகள் மீது வரையப்படுகின்றன. இச்செவ்வகங்களின் பரப்புகள் நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும்.

8.3.1 (அ) தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : தொடர்ச்சியற்ற நிலையில் (விலக்கும் அமைப்பு) நிகழ்வெண் பரவல் இருப்பின் அதைத் தொடர்ச்சியான நிலைக்கு (சேர்க்கும் அமைப்பு) மாற்றி அமைக்கவும்.

படி 2 : பிரிவு இடைவெளிகளை வரைபடத்தில் X – அச்சின் மீது ஒரு சீரான அளவுத் திட்டத்தில் எடுத்துக் கொள்க.

படி 3 : சீரான அளவுத் திட்டத்துடன் Y– அச்சின் மீது நிகழ்வெண்களைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : பிரிவு இடைவெளிகளை அடிப்பக்கங்களாகவும், அதற்குரிய நிகழ்வெண்களை உயரங்களாகவும் கொண்ட செவ்வகங்களை வரையவும்.

மேற்கூறிய முறையில் நிகழ்வுச்செவ்வகம் வரையும் முறையைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

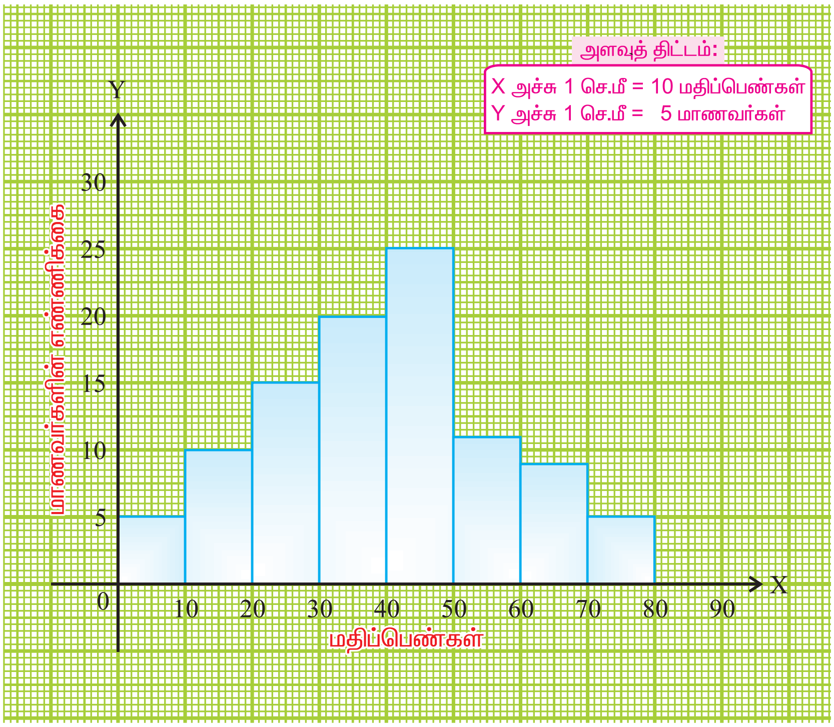
எடுத்துக்காட்டு 8.3

ஒரு தேர்வில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	15	20	25	12	8	5

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி அளவு 10 மதிப்பெண்ணாக உள்ளவாறு எல்லா இடைவெளிகளும் உள்ளன. இந்தப் பிரிவு இடைவெளிகளை X–அச்சின் மீது குறிப்போம். Y–அச்சின் மீது மாணவர்களின் எண்ணிக்கைகளைக் குறிப்போம். தக்க அளவுத் திட்டங்களை இவ்விரண்டு அச்சுகளிலும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான நிகழ்வுச்செவ்வகம் கீழே தரப்பட்டுள்ளதைக் காணவும்.



படம் 8.1

குறிப்பு : மேற்கண்ட படத்தில் செவ்வகங்கள் தொடர்ச்சியாக வரையப்பட்டுள்ளன. இச்செவ்வகங்களின் உயரங்கள் அவற்றின் நிகழ்வெண்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளன. பிரிவு இடைவெளிகளின் அளவுகள் சமமாக உள்ளதால் செவ்வகங்களின் பரப்புகள், அவற்றிற்கான நிகழ்வெண்களுக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளன.

8.3.1 (ஆ) தொடர்ச்சியற்ற பிரிவு இடைவெளிகளுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 8.4

ஒரு வனப்பகுதியிலுள்ள மரங்களின் உயரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்வுச் செவ்வகம் அமைக்கவும்.

உயரங்கள் (மீட்டரில்)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
மரங்களின் எண்ணிக்கை	10	15	25	30	45	50	35	20

தீர்வு

இக்கணக்கில் பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ளன. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து அப்படியே செவ்வகங்கள் வரைந்தால், பிரிவு இடைவெளிக்கு இடையே இடைவெளிகள் அமையும். ஆனால், நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள் தொடர்ச்சியாக அமைய வேண்டும். எனவே, இந்த இடைவெளிகளைத் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்படி மாற்ற வேண்டும். இதற்கு சரிசெய் காரணி தேவைப்படுகிறது. இதைப் பின்வருமாறு காண்போம்.

சரிசெய்காரணி = $\frac{1}{2}$ [(ஏதேனும் ஒரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை) – (அதற்கு உடனடியாக முன்னுள்ள பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லை)]

$$= \frac{1}{2}(21-20) = 0.5$$

மேற்கண்ட பிரிவு இடைவெளியில், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையிலிருந்து சரிசெய் காரணி 0.5 ஐ கழிக்கவும், மேல் எல்லையுடனும் சரிசெய் காரணி 0.5 ஐக் கூட்டவும். இவ்வாறு மாற்றியமைக்கப்பட்ட அட்டவணை பின்வருமாறு இருக்கும்.

உயரங்கள் (மீட்டரில்)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
மரங்களின் எண்ணிக்கை	10	15	25	30	45	50	35	20

இப்பொழுது மேலே கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்பரவல் அட்டவணை, தொடர்ச்சியான அட்டவணையாக மாற்றப்பட்டுள்ளது. அதற்கேற்ற, நிகழ்வுச் செவ்வகம் அருகில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

படம் 8.2

குறிப்பு: படம் 8.2 இல் நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் X–அச்சில் முதல் மதிப்பு 15.5 இல் தொடங்குகின்றது. இங்கு ஆதியிலிருந்து தொடங்குவதற்கு மாறாக 15.5இல் தொடங்குவதால் இந்த சிறு இடைவெளியை முறுக்கு வளைவாகக் குறிப்பிடுகின்றோம். இம்முறுக்கு வளைவு நிகழ்வுச் செவ்வகம் ஆதியில் தொடங்குவதற்கு பதில் வேறு இடத்தில் (இங்கு 15.5 இல்) தொடங்குகின்றது எனக் குறிக்க உதவுகிறது.

நீவிர் அறிவீரா?

இந்த முறுக்கு வளைவு குறுக்கு நெடுக்கான (Zig-Zag) கோட்டின் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றது.

8.3.2 நிகழ்வுப் பலகோணம் (Frequency Polygon)

வரைபடம் மூலம் நிகழ்வெண் பரவலைக் குறிப்பிடும் மற்றொரு முறை நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச்செவ்வகம் வரைவோம். இச்செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை நேர்க்கோட்டுத்துண்டுகள் மூலம் இணைத்தால், ஒரு பலகோணம் கிடைக்கும். இந்தப் பலகோணம் நிகழ்வுப் பலகோணம் என்று அழைக்கப்படும். இவ்வாறு வரையப்படும் பலகோணத்தின் இரு முனைகளையும் அவற்றுக்கடுத்த நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் இல்லாத பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளியுடன் இணைப்பது வழக்கம்.

நிகழ்வுப் பலகோணத்தை இருமுறைகளில் அமைக்கலாம்:

(i) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி வரைதல்

(ii) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தமால் வரைதல்

8.3.2 (அ) நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்வெண் பரவலைப்பெற்று நிகழ்வுச்செவ்வகம் வரையவும்.

படி 2 : அடுத்தடுத்து அமைகின்ற செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

படி 3 : பூச்சிய நிகழ்வெண் கொண்ட இரு பிரிவு இடைவெளிகளை, முதல் செவ்வகத்திற்கு இடப்பக்கத்திலும், கடைசிச் செவ்வகத்திற்கு வலப்பக்கத்திலும் எடுத்துக் கொள்க. இவ்வாறு எடுக்கப்படும் பிரிவு இடைவெளிகள் கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகள் என அறியப்படும்.

படி 4 : முதல் செவ்வகத்தின் மேற்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும், கடைசி செவ்வகத்தின் மேற்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் முறையே அருகில் உள்ள கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைப்பதால் பலகோணம் நிறைவடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

கீழே கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

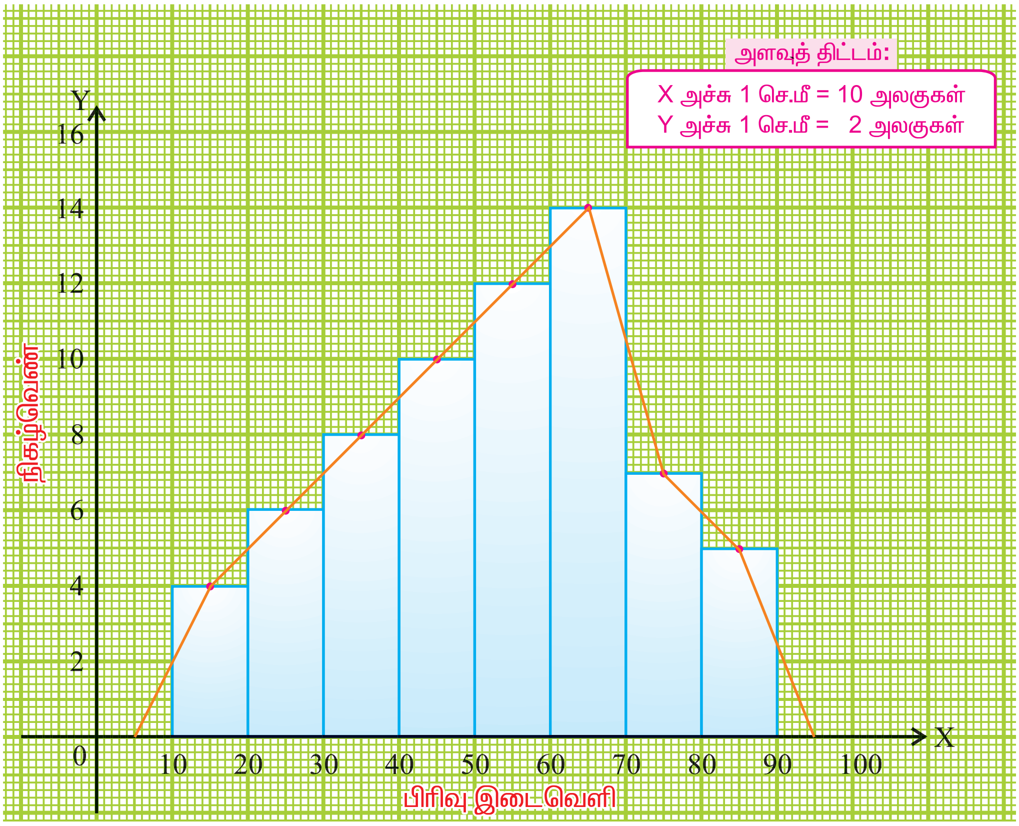
பிரிவு இடைவெளி	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
நிகழ்வெண்	4	6	8	10	12	14	7	5

தீர்வு

படம் 8.3இல் காட்டியுள்ளவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை X–அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை Y–அச்சிலும் தக்க அளவுத் திட்டம் கொண்டு வரைவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச்செவ்வகத்தை வரைவோம். செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிப்போம். கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளான 0-10 மற்றும் 90-100 பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப்புள்ளிகளை X–அச்சின் மீது குறிப்போம். அளவுகோலைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத்துண்டுகளால் அடுத்தடுத்துள்ள மையப்புள்ளிகளை இணைப்போம்.

இப்பொழுது படம் 8.3 இல் உள்ளதுபோல் ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் கிடைக்கின்றன.



படம் 8.3

எடுத்துக்காட்டு 8.6

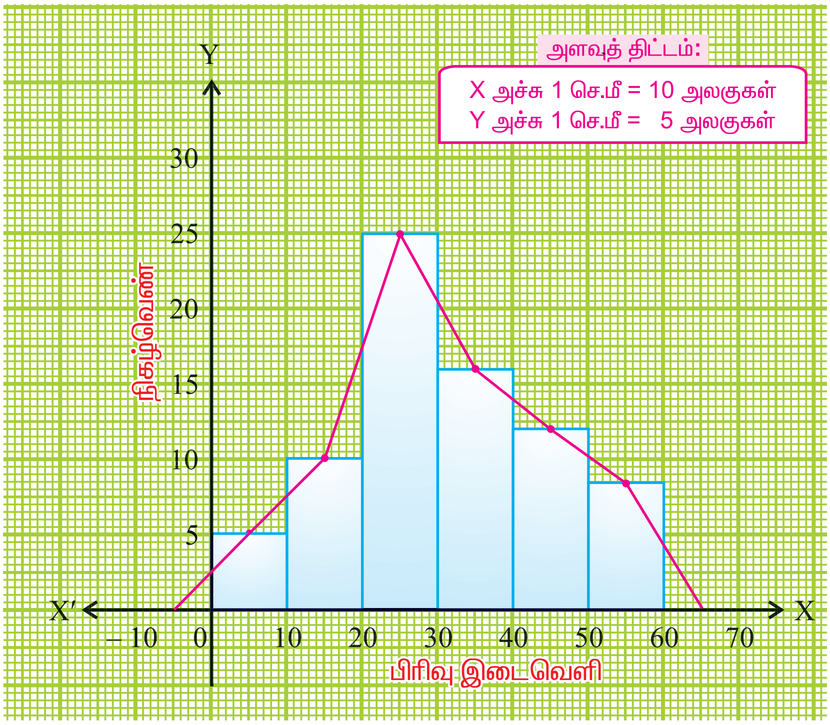
கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணத்தை வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
நிகழ்வெண்	5	10	25	16	12	8

தீர்வு

படம் 8.4 இல் காட்டியுள்ளவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை X-அச்சிலும், நிகழ்வெண் களை Y-அச்சிலும் தக்க அளவுத் திட்டம் கொண்டு வரைவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைவோம். அடுத்தடுத்து அமையும் செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகளான (– 10) - 0 மற்றும் 60-70 என்ற பிரிவு இடைவெளிகளின் மையப் புள்ளிகளை X-அச்சில் குறிக்கிறோம். ஓர் அளவுகோலைக் கொண்டு அடுத்தடுத்த மையப்புள்ளிகளை வரிசையாக கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கிறோம். நமக்கு நிகழ்வுப் பலகோணம் கிடைத்துள்ளது. (படம் 8.4 ஐப் பார்க்க)



படம் 8.4

குறிப்பு: சில சமயங்களில் கற்பனைப் பிரிவு இடைவெளிகள் கிடைக்கப் பெறுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக மாணவர்கள் தேர்வில் பொதுவாகப் பூச்சியத்திற்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற இயலாது. இவ்வாறே அத்தேர்வில் அதிக மதிப்பெண்ணிற்கு மேலேயும் அவர்கள் மதிப்பெண் பெற இயலாது. இந்தச் சூழ்நிலையில் முதல் செவ்வகத்தின் இடப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும், கடைசிச் செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இப்பொழுது மையப்புள்ளிகளை வரிசையாக, அளவுகோலைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்க வேண்டும்.

இந்தக் குறிப்பைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஏற்ப நிகழ்வுப்பலகோணம் அமைப்போம்.

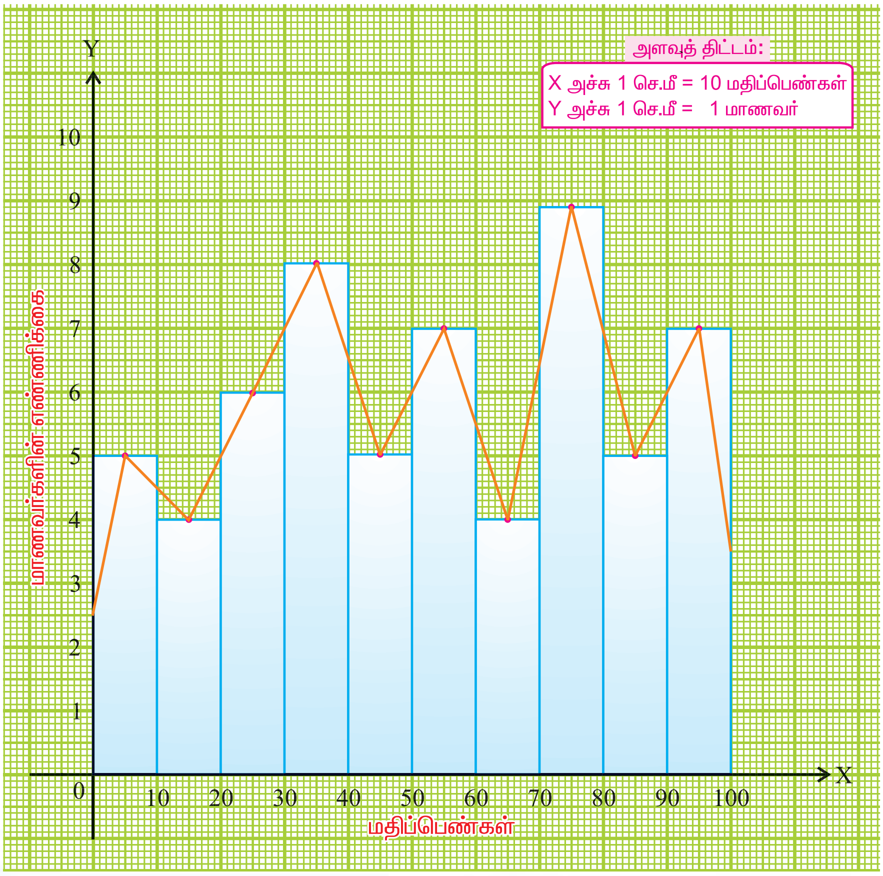
எடுத்துக்காட்டு 8.7

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு, நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணத்தை வரைக.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

தீர்வு

மதிப்பெண்களை X– அச்சிலும், மாணவர்களின் எண்ணிக்கைகளை Y-அச்சிலும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் அமைக்கிறோம். அடுத்தடுத்து அமைகின்ற செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளைக்குறிக்கிறோம்.முதல்செவ்வகத்தின்இடப்பக்கத்தின்மையப்புள்ளியைக் குறிக்கிறோம். கடைசி செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியைக் குறிக்கிறோம். அடுத்தடுத்த செவ்வகங்களின் மேல் பக்க மையப் புள்ளிகளை அளவுகோலைக் கொண்டு வரிசையாகக் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கிறோம். இவ்வாறு இணைக்கப்பட்ட பலகோணத்தின் முதல் கோட்டுத்துண்டின் முனையை முதல் செவ்வகத்தின் இடப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியுடனும், கடைசி கோட்டுத்துண்டின் முனையைக் கடைசி செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியுடனும் இணைக்கக் கிடைப்பது நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.



படம் 8.5

8.3.2 (ஆ) நிகழ்வுச்செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைதல்

செய்முறை

படி 1 : நிகழ்வெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்ளவும். ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளியையும் குறிக்கவும்.

படி 2 : மையப்புள்ளிகளை X- அச்சிலும், நிகழ்வெண்களை Y-அச்சிலும் குறிக்கவும்.

படி 3 : ஒவ்வொரு மையப்புள்ளியிலும் நிகழ்வெண்ணுக்கேற்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4 : வரிசையாக இந்தப் புள்ளிகளை நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் இணைக்கவும்.

படி 5 : பல கோணத்தை முடிக்க, முதல் பிரிவு இடைவெளியின் முன் உள்ள மையப் புள்ளியையும், கடைசிப் பிரிவு இடைவெளியின் பின்னர் உள்ள மையப்புள்ளியையும் (இவை பூச்சிய நிகழ்வெண் கொண்டவாறு) X-அச்சில் இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல், நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
நிகழ்வெண்	4	6	8	10	12	14	7	5

தீர்வு

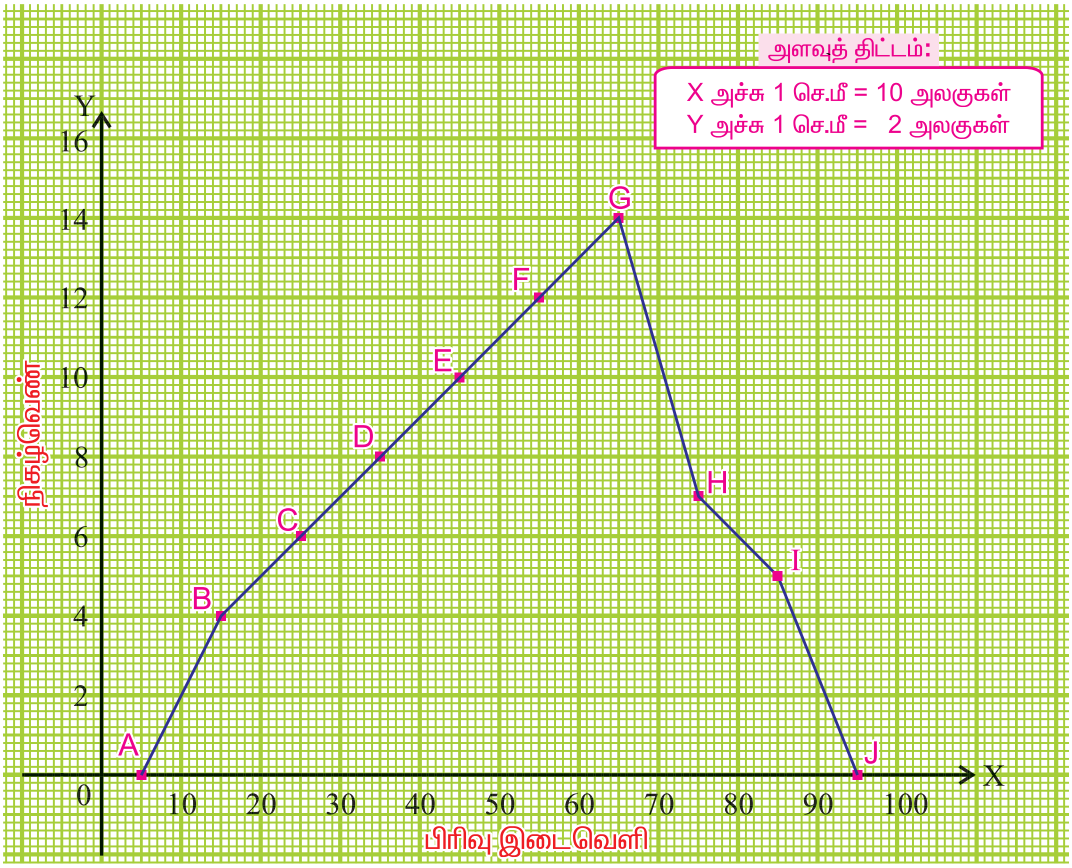
X-அச்சில் பிரிவு இடைவெளிகளையும், Y-அச்சில் நிகழ்வெண்களை எடுத்துக் கொள்கிறோம். நிகழ்வெண் பூச்சியமாக உள்ள 0-10 என்ற முதல் கற்பனை இடைவெளியையும், 90-100 என்ற இறுதி கற்பனை இடைவெளியையும் கருத்தில் கொள்கிறோம். இவ்விவரங்கள் அருகிலுள்ள அட்டவணையில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

பிரிவு இடைவெளி	மையப்புள்ளி	நிகழ்வெண்
0-10	**5**	**0**
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	**95**	**0**

அட்டவணையிலிருந்து பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கவும்.

A (5, 0), B (15, 4),
C (25, 6), D (35, 8),
E (45, 10), F (55, 12),
G (65, 14), H (75, 7),
I (85, 5) மற்றும் J (95, 0).

கோட்டுத் துண்டுகள் AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ ஆகியவற்றை இணைப்பதால் ABCDEFGHIJ என்ற நிகழ்வுப்பலகோணம் கிடைக்கின்றது. (பார்க்க படம் 8.6.)



படம் 8.6

பயிற்சி 8.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	8	12	6	14	10	5

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரைக.

ஒரு ஏக்கரில் விளைச்சல் (குவிண்டால்)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
நெல் வயல்களின் எண்ணிக்கை	3	5	18	15	6	4

3. ஒரு கிரிக்கெட் ஆட்டத்தில் பார்வையாளர்களின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
பார்வையாளர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	12	10	8	2

4. ஒரு கிராமத்தில் உள்ள மக்களில் நீரிழிவு நோயினால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	3	6	13	20	10	5

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	7	10	23	11	8	5

6. பின்வரும் அட்டவணையில் அறிவுக்கூர்மைத் தேர்வு எழுதிய 150 போட்டியாளர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அறிவுக்கூர்மை விகிதம்	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
போட்டியாளர்களின் எண்ணிக்கை	20	40	30	35	10	15

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க.

7. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தி நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் வரைக.

வயது (ஆண்டுகளில்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ஆள்களின் எண்ணிக்கை	6	11	25	35	18	12	6

9. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தைப் பயன்படுத்தாமல் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

பிரிவு இடைவெளி	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
நிகழ்வெண்	12	16	20	8	10	4

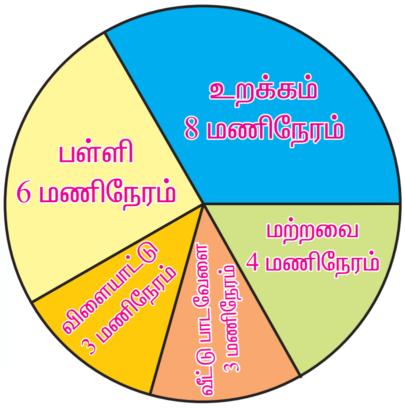
10. ஓர் ஆங்கிலத் தேர்வில் 40 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் (50க்கு) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கு நிகழ்வுச் செவ்வகம் மற்றும் நிகழ்வுப் பலகோணம் அமைக்கவும்.

29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13, 32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

8.4 எளிய வட்ட விளக்கப்படம் வரைதல்

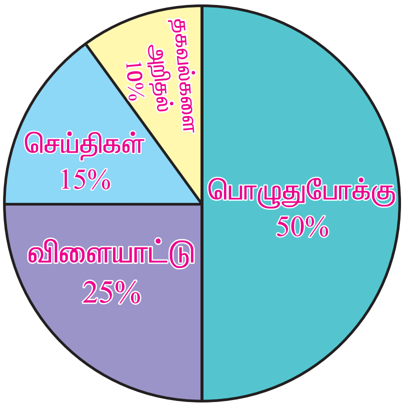
படம் 8.7 மற்றும் படம் 8.8 ஆகியவற்றில் காட்டியுள்ள விவர வட்ட விளக்கப்படங்களைப் போன்று எங்கேயாவது பார்த்து இருக்கிறீர்களா?

ஒரு பள்ளி மாணவன் ஒரு நாளில் (24 மணி நேரம்) செலவழித்த நேரங்கள்



படம் 8.7

பல்வேறுபட்ட தொலைக்காட்சி அலைவரிசைகளைக் காண்பவர்கள்



படம் 8.8

மேற்கண்ட படங்களை வட்ட விளக்கப் படங்கள் என்று அழைப்போம். வட்ட விளக்கப்படம், அதன் முழுமைக்கும், ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் உள்ள தொடர்பை விளக்குகின்றது. இங்கு ஒரு வட்டம் வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வட்டக் கோணப்பகுதியின் அளவு அது குறிக்கும் செயல் மற்றும் தகவல்களுக்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும். இந்த வட்டக்கோணப் பகுதி ‘பை’(Pie) என்ற வட்ட வடிவத் திண்பண்டத்தின் துண்டுகள் போல் தோற்றமளிப்பதால் இதை ஆங்கிலத்தில் **Pie Chart** என்று கூறுவர்.

பை (pie) என்பது ஒரு அமெரிக்க உணவு வகை

எடுத்துக்காட்டாக, படம் 8.7 இல்உள்ள வட்ட விளக்கப் படத்தில்

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் உறக்கத்திற்கு}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{உறங்கும் நேரம்}}{\text{முழு நாள்}} = \frac{8 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{3}$$

எனவே, உறக்கத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{3}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாணவன் பள்ளியில்}\\ \text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{பள்ளியில் உள்ள நேரம்}}{\text{முழு நாள்}} = \frac{6 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{4}$$

எனவே, பள்ளியில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{4}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{matrix}\text{மாணவன் விளையாட்டில்}\\\text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{விளையாடும் நேரம்}}{\text{முழு நாள்}} = \frac{3 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{8}$$

எனவே, விளையாட்டிற்காகச் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{8}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{matrix}\text{மாணவன் வீட்டுப்பாட வேலையில்}\\\text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{வீட்டுப்பாட வேலை நேரம்}}{\text{முழு நாள்}} = \frac{3 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{8}$$

எனவே, வீட்டுப்பாட வேலையில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{8}$ பாகமாகும்.

$$\left.\begin{matrix}\text{மாணவன் இதர வேலையில்}\\\text{செலவிடும் நேர விகிதம்}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{இதர வேலை நேரம்}}{\text{முழு நாள்}} = \frac{4 \text{ மணி}}{24 \text{ மணி}} = \frac{1}{6}$$

எனவே, இதர வேலையில் செலவிடும் நேரத்திற்கான வட்டக்கோணப் பகுதியின் அளவு வட்டத்தில் $\frac{1}{6}$ பாகமாகும்.

மேற்கண்ட எல்லாச் செயல்களின் பின்னக் காலங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8+6+3+3+4}{24}$$

$$= \frac{24}{24} = 1 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இங்கு ஒருநாளில் மாணவன் செலவழித்த நேரம் வட்டத்தின் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றது. **வட்டத்தின் முழுப்பகுதியின் அளவு 1 எனக் கொள்க.**

மாணவனின் வெவ்வேறு செயல்பாடுகள் ஆரங்களின் நேர விகிதச்சாரத்திற்கு ஏற்ப வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. இந்த விகிதச்சாரப் பகுதியை கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். வட்ட மையத்தில் அமையும் கோண அளவுகளின் கூடுதல் $360°$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே நாம் வட்டக் கோணப் பகுதிகளைக் கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிடலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம், கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்தி வட்ட விளக்கப்படம் எவ்வாறு அமைக்கப்படுகிறது எனக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

ஒரு மாணவன் ஒரு வேலை நாளில் வெவ்வேறு செயல்களுக்காக செலவிட்ட நேரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்குக் கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்தி வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

செயல்	உறக்கம்	பள்ளி	விளையாட்டு	வீட்டுப்பாட வேலை	மற்றவை
கால அளவு	8	6	3	3	4

தீர்வு

24 மணிநேரம் கொண்ட ஒரு நாளில் வெவ்வேறு செயல்களுக்குச் செலவழித்த நேரங்களை 360° இன் பாகங்களாக மாற்றுவோம்.

உறக்க நேரம் 8 மணிநேரம் என்பதால் $\frac{8}{24}\times 360^0 = 120°$ என்று வட்டமையக் கோணமுடைய வட்டக்கோணப் பகுதியில் இதனைக் குறிக்க வேண்டும்.

எனவே, உறக்கத்தைக் குறிக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதியின் மையக்கோணம் 120°.

இதுபோலவே, மற்றச் செயல்களான பள்ளி, விளையாட்டு, வீட்டுப்பாட வேலை மற்றும் மற்றவை ஆகியவற்றின் வட்டக்கோணப் பகுதியின் மையக்கோணங்கள் கணக்கிடப்பட்டு, பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

செயல்	கால அளவு	மையக்கோண அளவு
உறக்கம்	8	$\frac{8}{24}\times 360^0 = 120^0$
பள்ளி	6	$\frac{6}{24}\times 360^0 = 90^0$
விளையாட்டு	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
வீட்டுப்பாட வேலை	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
மற்றவை	4	$\frac{4}{24}\times 360^0 = 60^0$
மொத்தம்	24	360^0

வட்ட விளக்கப் படத்தை அமைத்தல்

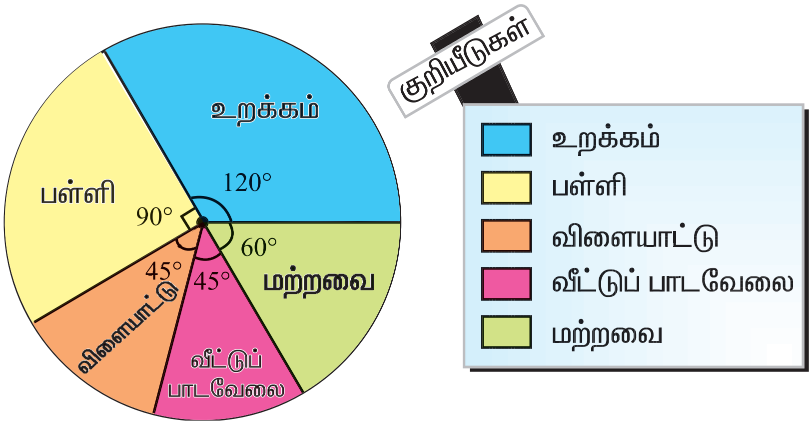
நம் வசதிக்கேற்ப ஏதேனும் ஓர் ஆரமுடைய வட்டத்தை வரைவோம். இவ்வட்டத்தில் ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தை முதலில் வரைவோம். இந்த ஆரத்தின் மீது வட்ட மையத்தில் 120° பிரிவு ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாம் புயம் வரைவோம். இந்த வட்டக்கோணப் பகுதி அம்மாணவன் உறக்கத்திற்குச் செலவிட்ட நேரத்தைக் குறிக்கின்றது.

இப்புயத்திலிருந்து இரண்டாம் வட்ட மையத்தில் 90° ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாம் வட்டக்கோணப் பகுதியை அளந்து குறிக்கிறோம். இவ்வட்டக் கோணப் பகுதி பள்ளி நேரத்தைக் குறிக்கிறது.

இதுபோலவே விளையாட்டு நேரம், வீட்டுப் பாடவேலை செய்யும் நேரம் இவற்றைக் குறிக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதிகளை அமைக்கவும். இறுதியாக உள்ள வட்டக்கோணப் பகுதி மற்றவைக்கான நேரத்தைக் குறிக்கும்.

ஒவ்வொரு வட்டக்கோணப்பகுதியை மற்ற வட்டக்கோணப்பகுதியிலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்ட நிழலிடலாம் அல்லது பல்வேறு வண்ணமிடலாம்.

பள்ளி மாணவன் ஒரு நாளில்
(24 மணிநேரம்) செலவழித்த நேரங்கள்



குறிப்பு: வட்டவிளக்கப் படத்தில், பல்வேறுபட்ட தகவல்கள் அல்லது பகுதிகள் வட்டக்கோணப் பகுதிகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. எல்லா வட்டக்கோணப் பகுதிகளின் கூடுதலை முழு வட்டம் குறிக்கும். வட்ட மையத்தில் உள்ள கோணம் 360° ஆனது ஒவ்வொரு வட்ட கோணப் பகுதியின் அளவுக்கேற்ப பிரிக்கப்படுகிறது. இதை ஒட்டி மற்ற கோண அளவுகளைக் கணக்கிடுகின்றோம்.

$$\text{ஒரு பகுதியின் மையக்கோண அளவு} = \frac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{\text{மொத்த மதிப்பு}} \times 360^\circ$$

சில சமயங்களில் பகுதிகளின் அளவு சதவீதங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கலாம்.

$$\text{இதுபோன்ற வேளைகளில் மையக்கோண அளவு} = \frac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{100} \times 360^\circ$$

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்ற வட்ட விளக்கப்படம் அமைத்தலுக்கான படிநிலைகள்

1. ஒவ்வொரு பகுதியின் மையக்கோண அளவை மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணவும்.
2. நம் வசதிக்கேற்ப ஏதேனும் ஓர் ஆரமுடைய வட்டம் வரைக.
3. வட்டத்தினுள் கிடையான ஓர் ஆரம் வரைக.

4. கிடைமட்ட ஆரத்துடன் முதல் பகுதியின் கோணத்தை வட்ட மையத்தில் ஏற்படுத்துமாறு இரண்டாவது ஆரத்தை வரைக. இப்போது கிடைக்கும் வட்டக்கோணப் பகுதி முதல் பகுதியைக் குறிக்கும். இந்த இரண்டாவது ஆரத்துடன் வட்ட மையத்தில் இரண்டாவது பகுதியின் கோணத்தை ஏற்படுத்தும் அடுத்த ஆரத்தை வரைக. தற்போது கிடைக்கும் வட்ட கோணப் பகுதி இரண்டாவது பகுதியைக் குறிக்கும். இது போலவே மற்ற எல்லாப் பகுதி களும் முடியும் வரை அவற்றுக்குரிய வட்டகோணப் பகுதிகளை வரையவும்.
5. வட்டக்கோணப் பகுதிகளை வேறுபடுத்திக் காட்ட வெவ்வேறு வண்ணமிடவும். ஒவ்வொரு பகுதியும் எதைக் குறிக்கிறது என்பதை எழுதவும். வண்ணங்கள் குறிக்கும் பகுதிகளின் பெயர்களைக் குறிப்பிடவும்.
6. குறியீடு கொடுக்கவும்.
7. விவரங்களுக்கேற்ற தலைப்பு கொடுக்கவும்.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு உரிய வட்ட விளக்கப்படம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8.10

பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு குடும்பத்தில் மாதாந்திர வரவு, செலவு விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

விவரங்கள்	உணவு	வீட்டு வாடகை	உடை	கல்வி	சேமிப்பு	இதர செலவுகள்
செலவுகள் (₹ இல்)	4800	2400	1600	800	1000	1400

கோண அளவைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

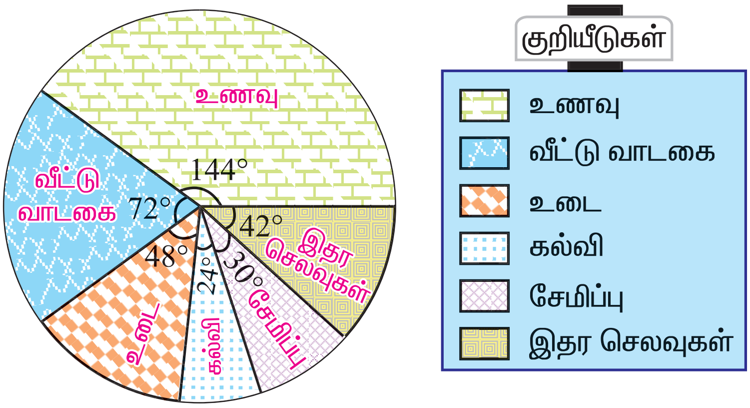
தீர்வு

அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு விவரத்தின் மையக்கோணத்தையும் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

விவரங்கள்	செலவுகள் (₹-இல்)	மையக்கோண அளவு
உணவு	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360^\circ = 144^\circ$
வீட்டு வாடகை	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360^\circ = 72^\circ$
உடை	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360^\circ = 48^\circ$
கல்வி	800	$\frac{800}{12000} \times 360^\circ = 24^\circ$
சேமிப்பு	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360^\circ = 30^\circ$
இதர செலவுகள்	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360^\circ = 42^\circ$
மொத்தம்	**12000**	**360°**

நாம் பின்வருமாறு வட்ட விளக்கப் படத்தினைப் பெறுகிறோம்.

ஒரு குடும்பத்தின் மாதாந்திர வரவு செலவு விபரம்



படம் 8.10

எடுத்துக்காட்டு 8.11

பள்ளி இறுதிப் பொதுத்தேர்வில் (S.S.L.C.) ஒரு பள்ளியின் தேர்வு முடிவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேர்வு முடிவு	முதல் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	இரண்டாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	மூன்றாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	தேர்ச்சி பெறாதோர்
மாணவர்களின் சதவீதம்	25	35	30	10

மேற்கண்ட விவரங்களை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

தீர்வு

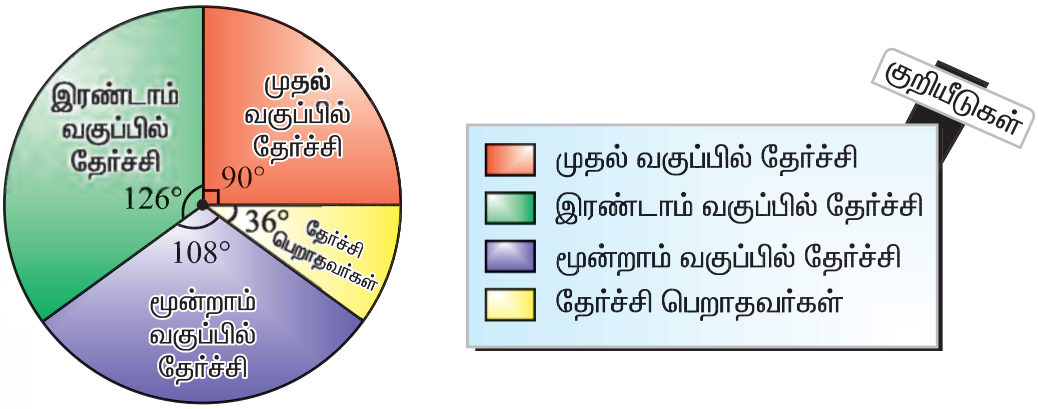
$$\text{தேவையான பகுதியின் மையக்கோணம்} = \frac{\text{அப்பகுதியின் சதவீதம்}}{100} \times 360^\circ$$

இதைப் பயன்படுத்தி நாம், வெவ்வேறு பகுதிகளின் மையக்கோண அளவுகளைப் பின்வருமாறு காணலாம்:

தேர்வு முடிவு	மாணவர்களின் சதவீதம்	மையக்கோண அளவு
முதல் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	25	$\frac{25}{100} \times 360^0 = 90^0$
இரண்டாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	35	$\frac{35}{100} \times 360^0 = 126^0$
மூன்றாம் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றோர்	30	$\frac{30}{100} \times 360^0 = 108^0$
தேர்ச்சி பெறாதவர்கள்	10	$\frac{10}{100} \times 360^0 = 36^\circ$
மொத்தம்	100	360^0

பின்வருமாறு வட்ட விளக்கப்படத்தை நாம் பெறுகின்றோம்.

பள்ளி இறுதிப் பொதுத்தேர்வு (S.S.L.C.) முடிவுகள்



படம் 8.11

பயிற்சி 8.2

1. யுகேந்திரனின் தேர்ச்சி முன்னேற்றத் தகவல் அட்டையில் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன :

பாடம்	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணக்கு	அறிவியல்	சமூக அறிவியல்
மதிப்பெண்கள்	72	60	84	70	74

மேற்கண்ட விவரங்களை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரையவும்.

2. எட்டாம் வகுப்பில் 36 மாணவர்கள் உள்ளனர். இவர்கள் பல்வேறு அமைப்புகளில் உறுப்பினராக உள்ளனர்.

அமைப்புகள்	கணக்கு	N.C.C	J.R.C	சாரணர்
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	6	10	8

மேற்கண்ட விவரத்தை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் காண்பிக்கவும்.

3. ஒரு மாணவர் விடுதியில் உள்ள மாணவர்கள் வெவ்வேறு மொழி பேசுபவர்கள், அவர்களின் விவரம் பின்வருமாறு :

மொழி	தமிழ்	தெலுங்கு	மலையாளம்	கன்னடம்	ஆங்கிலம்	மற்ற மொழிகள்
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	36	12	9	6	5	4

மேற்கண்ட விவரத்தைக் காட்டும் ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

4. ஒரு பள்ளியில் வெவ்வேறு வகைப் பொழுது போக்கில் ஈடுபடும் எட்டாம் வகுப்பு மாணவர்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

பொழுதுபோக்கு	இசை	மண் பொம்மை செய்தல்	நடனம்	நாடகம்	சமூக நலப்பணி
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	20	25	27	28	20

5. ஓர் உலோகக் கலவையில் பின்வரும் உலோகங்கள் கலந்துள்ளன. இதை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் அளிக்கவும்.

உலோகங்கள்	தங்கம்	ஈயம்	வெள்ளி	தாமிரம்	துத்தநாகம்
எடை (கிராமில்)	60	100	80	150	60

6. ஒரு அடுமனையில் ஒருநாளில் விற்பனையான பொருள்களும், அவற்றின் விலைகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

பொருள்கள்	சாதாரண ரொட்டி	பழரொட்டி	கேக்	பிஸ்கட்டு	பிற
விலை (₹)	320	80	160	120	40

7. ஒரு புத்தக வெளியீட்டாளர் புத்தகம் ஒன்றுக்குச் செலவு செய்யப்பட்ட தொகைக்கான விவரம் பின்வருமாறு:

விவரங்கள்	தாள்	அச்சிடல்	கட்டமைப்பு	விளம்பரம்	உரிமை
செலவு செய்யப்பட்ட தொகை (₹)	25	12	6	9	8

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

8. ஒரு விவசாயி பயிர் செய்வதற்கு ஆகும் செலவுகள் பின்வருமாறு :

விவரங்கள்	நிலத்தை உழுதல்	உரம்	விதைகள்	பூச்சிக் கொல்லிகள்	நீர்ப் பாய்ச்சுதல்
தொகை (₹)	2000	1600	1500	1000	1100

இவற்றை விவரிக்கும் ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

9. ஒரு மிருகக்காட்சி சாலையில் உள்ள **900** உயிர் வாழ்வனவற்றின் விவரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உயிரினங்கள்	காட்டு விலங்குகள்	பறவைகள்	மற்ற நிலவாழ் விலங்குகள்	நீர் விலங்குகள்	ஊர்வன
உயிரினங்களின் எண்ணிக்கை	400	120	135	170	75

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

10. ஒரு தொழிற்சாலையில் ஓர் ஆண்டில் உற்பத்தியாகும் 5 வகையான ஊர்திகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் குறிக்க.

ஊர்திகள்	ஸ்கூட்டர்	மோட்டர் பைக்	கார்	ஜீப்	வேன்
எண்ணிக்கை	3000	4000	1500	1000	500

11. ஓர் உணவுப்பொருளில் உள்ள சத்துக்கள் பின்வருமாறு உள்ளன. கீழ்க்கண்ட விவரங்களை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தில் வரைக.

சத்துப் பொருட்கள்	புரதம்	கொழுப்பு	கார்போ ஹைட்ரேட்	வைட்டமின்	தாது உப்பு
சதவீதம்	30	10	40	15	5

12. ஒரு பள்ளியில் உள்ள மாணவர்கள் விரும்பும் சுவையான ஐஸ்கிரீம் வகைகள் சதவீதங்களில் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வகைகள்	சாக்லேட்	வெண்ணிலா	ஸ்ட்ராபெரி	மற்ற நறுமணங்கள்
மாணவர்கள் விரும்பும் வகைகளின் சதவீதம்	40	30	20	10

இதை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தில் வரைக.

13. ஒரு பள்ளிக்கு மாணவர்கள் வருகை தரும் போக்குவரத்து முறை பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

போக்குவரத்து முறை	பேருந்து	மிதிவண்டி	நடந்து வருதல்	ஸ்கூட்டர்	கார்
மாணவர்கள் சதவீதம்	40	30	15	10	5

இதை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தின் உதவியுடன் குறிக்கவும்.

14. திரு. இராஜன் பாபு தன் வருமானத்தில் 20% ஐ வீட்டு வாடகைக்காகவும், 30% ஐ உணவுக்காகவும், 10% ஐ தன் குழந்தைகளின் கல்விச் செலவுக்காகவும் செலவழிக்கின்றார். 25% ஐச் சேமிக்கின்றார். எஞ்சியதை மற்ற செலவினங்களுக் காகச் செலவு செய்கிறார். இவற்றை விளக்க ஒரு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

15. ஒரு மாநிலத்தில் பல்வேறு வகைத் தொழில் செய்பவர்களின் விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தொழிலாளர் களின் வகைகள்	பயிரி-டுவோர்	விவசாயத் தொழிலா ளர்கள்	தொழிற் சாலையில் பணி புரிவோர்	வணிகத் தொழிலா ளர்கள்	பிற
சதவீதம்	40	25	12.5	10	12.5

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு ஒரு வட்ட விளக்க வரைபடம் வரைக.

8.5 மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

திரட்டப்பெற்ற அதிக அளவிலான விவரங்களை அட்டவணைப்படுத்தியப் பின்னரும், அப்பரவலின் பொது வடிவம் தெளிவாகத் தெரிவது இல்லை. மேலும் தெளிவான வடிவம் தெரிய வேண்டுமானால் அந்த மொத்த விவரங்களையும் ஒரு தனி எண்ணால் குறித்துச் சொல்ல வேண்டும். அப்படிப்பட்ட எண்ணைச் சுற்றி அதிக அளவிலான விவரங்கள் இருந்தால். அந்த எண்ணே இவ்விவரங்களின் பண்புகளைக் கொண்டிருக்கும். அந்த வகையான எண்களை மையநிலைப் போக்கு அளவைகள் என்பர். அவ்விதமான சில அளவைகள்

(i) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

(ii) இடைநிலை (Median) மற்றும்

(iii) முகடு (Mode)

8.5.1 கூட்டுச் சராசரி (A.M)

கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும், மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதத்தைக் கூட்டுச் சராசரி என்கின்றோம்.

8.5.1. (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்குக் கூட்டுச்சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளைக் கொண்ட மாறி x எனில் அதன் கூட்டுச் சராசரியை $\overline{x}$ என்று குறிப்போம்.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

கிரேக்க எழுத்தாகிய ‘Σ’ வை கணிதத்தில் சிக்மா என்கிறோம். இது கூட்டுப் பலனைக் குறிக்கப் பயன் படுத்தப்படும்.இக்குறியீட்டில் $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ஆகிய எண்களின் கூட்டற்பலனை $\sum_{i=1}^{n} x_i$ அல்லது Σx_i என்று குறிப்பர்.

இப்பொழுது கூட்டுச்சராசரி

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

Σ குறியீட்டைப் புரிந்துகொள்வோம்

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^{6} n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^{4} 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 = \sum_{k=1}^{3} 5 \times k^0 = 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{K=2}^{4} (k-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6$$

குறிப்பு:

கூட்டுச் சராசரி, சராசரி (Average) அல்லது மத்திமம் (Mean) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

ஒரு தேர்வில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்

15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11 எனில், இதன் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $n = 10$

கூட்டுச் சராசரி $= \overline{x} = \dfrac{15+75+33+67+76+54+39+12+78+11}{10}$

$\overline{x} = \dfrac{460}{10} = 46.$

எடுத்துக்காட்டு 8.13

9, 6, 7, 8, 5 மற்றும் x ஆகியவற்றின் சராசரி 8 எனில் x இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் 9, 6, 7, 8, 5 மற்றும் x, $n = 6$.

சூத்திரத்தின்படி, கூட்டுச் சராசரி $= \overline{x} = \dfrac{9+6+7+8+5+x}{6} = \dfrac{35+x}{6}$

$\overline{x} = 8$

ஆதலால், $\dfrac{35+x}{6} = 8$

எனவே, $35 + x = 48$

$x = 48 - 35 = 13.$

எடுத்துக்காட்டு 8.14

ஒரு வகுப்பிலுள்ள 10 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 166 செ.மீ. எனக் கணக்கிடப்பட்டது. தகவல்களைச் சரிபார்க்கும்போது ஒரு மதிப்பு 150 செ.மீ.க்கு பதிலாக 160 செ.மீ. என்று குறிப்பிடப்பட்டது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது எனில் சரியான சராசரி உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $\overline{x} = 166$ செ.மீ. மற்றும் $n = 10$.

$\therefore \overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{\Sigma x}{10}$

$166 = \dfrac{\Sigma x}{10}$ அல்லது $\Sigma x = 1660$

தவறான கூடுதல் $= 1660$

சரியான கூடுதல் = தவறான கூடுதல் – தவறான மதிப்பு + சரியான மதிப்பு

$= 1660 - 160 + 150 = 1650$

சரியான சராசரி உயரம் $= \dfrac{1650}{10} = 165$ செ.மீ.

8.5.1 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச்சராசரி காணுதல்

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காணும் இரு வழிகளாவன:

(i) நேரடி முறை மற்றும் (ii) உத்தேச சராசரி முறை

(i) நேரடி முறையில் கூட்டுச் சராசரி காணல்

நிகழ்வெண் பரவல் ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம்

மாறி	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
நிகழ்வெண்	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

இந்த அட்டவணையின் விளக்கம் பின்வருமாறு:

x_1 என்பது f_1 முறையும்
x_2 என்பது f_2 முறையும்
x_3 என்பது f_3 முறையும்
....
....
x_n என்பது f_n முறையும் உள்ளன என்பதைக் குறிக்கின்றது.

x என்ற மாறியின் வேறுபட்ட மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ஆகும். இங்கு N என்பது மாறிகளின் நிகழ்வெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை ஆகும்.

அதாவது $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = \text{N}$ (அல்லது) $\sum_{i=1}^{n} f_i = \text{N}$

எனவே, மொத்தக் கூடுதல் = $(x_1 + x_1 + x_1 + \cdots f_1$ முறை$) + (x_2 + x_2 + x_2 + \cdots f_2$ முறை$) +$
..... + $(x_n + x_n + x_n + \cdots f_n$ முறை$)$

$= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_n \times x_n = \Sigma f_i x_i$

இங்கு, $\bar{x} = \dfrac{\text{கண்டறியப்பட்ட மதிப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{கண்டறியப்பட்ட மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை}} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$, இங்கு $\text{N} = \Sigma f$.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

நேரடி முறையில் கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

தீர்வு

x	f	fx
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
மொத்தம்	N = 25	$\Sigma fx = 390$

கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$

$= \dfrac{390}{25} = 15.6$

(ii) உத்தேச சராசரி முறையில் கூட்டுச்சராசரி காணல்

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் எண்கள் சிறியனவாக உள்ளன. எனவே இங்கு பெருக்கற் பலன் எளிதாகக் காணப்படுகிறது. பெரிய எண்களாக இருப்பின், பெருக்கற்பலன் காண்பது கடினமாகும். மேலும் பிழை வரவும் வாய்ப்பு உள்ளது.

மற்றொரு எளிய வழி முறையில் இக்கடினத்தைத் தீர்க்கலாம். இம்முறையில் ஒரு பொருத்தமான எண் A ஐ உத்தேசமாக எடுத்துக் கொள்கின்றோம். இந்த எண் உத்தேச சராசரியாகும்.

உத்தேச சராசரி A யிலிருந்து ஒவ்வொரு மாறி $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ இன் விலகல்கள் முறையே $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

அதாவது $d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A, \cdots, d_n = x_n - A$

இப்பொழுது $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ இவற்றை முறையே $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ ஆல் பெருக்கவும். இப்பொழுது Σfd காணலாம். கூட்டுச் சராசரியைப் பின்வரும் சூத்திரம் மூலம் காணலாம்.

கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$ (A என்பது உத்தேச சராசரி, $N = \Sigma f$)

இப்பொழுது எடுத்துக்காட்டு 8.15 இல் உள்ள விவரங்களுக்கு நாம் உத்தேச சராசரி முறையில் கூட்டுச் சராசரி காண்போம்.

உத்தேச சராசரி A = 15 என்க

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	– 10	– 40
10	5	– 5	– 25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
மொத்தம்	N = 25		$\Sigma fd = 15$

கூட்டுச்சராசரி $= \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75+3}{5} = \frac{78}{5} = 15.6$

8.5.2 எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean)

சில சமயங்களில் மாறிகள், பல்வேறுபட்ட எடையுடன் கூடியதாக அமையும். இந்தச் சூழ்நிலையிலும் கூட்டுச்சராசரியை (A.M.) காண இயலும். இதை நாம் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி என்கின்றோம் (W.A.M).

எடுத்துக்காட்டாக x_1 என்ற மாறி w_1 என்ற எடையுடனும், x_2 என்ற மாறி w_2 என்ற எடையுடனும், இறுதியாக x_n என்ற மாறி w_n என்ற எடையுடனும், கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

எடையிட்ட கூட்டுச்சராசரி W. A. M. = $\dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \dfrac{\Sigma wx}{\Sigma w}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காண்க.

உணவுப் பொருட்கள்	அளவு (கி.கி.) w_i	ஒரு கிலோ கிராம் விலை (₹) x_i
அரிசி	25	30
சர்க்கரை	12	30
எண்ணெய்	8	70

தீர்வு

இங்கு x இன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்ட உணவுப் பொருட்களின் விலையாகவும், இவற்றின் சம்பந்தப்பட்ட அளவுகள் (கி.கி) எடைகளாகவும் அமைந்துள்ளன.

ஆதலால், எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (W.A.M) $= \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}$

$= \dfrac{25 \times 30 + 12 \times 30 + 8 \times 70}{25 + 12 + 8} = \dfrac{1670}{45}$

= ₹ 37.11 .

8.5.3 இடைநிலை (Median)

மையநிலைப் போக்கு அளவுகளில் **இடைநிலையும்** ஒன்று ஆகும்.

8.5.3 (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் இடைநிலை காணல்

இடைநிலை அளவைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

முதலில், நாம் எடுத்துக்கொண்ட விவரங்களை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைப்போம்.

(i) விவரங்களின் எண்ணிக்கை **ஒற்றைப்படை எண்** எனில் இதன் நடு உறுப்பு இடைநிலை அளவாகும்.

உதாரணம்: 33, 35, 39, 40, 43 என்பனவற்றின் நடு உறுப்பு 39. எனவே இதன் இடைநிலை 39 ஆகும்.

(ii) விவரங்களின் எண்ணிக்கை **இரட்டைப்படை எண்** எனில் இரு மத்திய மதிப்புகளின் சராசரியே அவற்றின் இடைநிலை அளவாகும்.

உதாரணம்: 33, 35, 39, 40, 43, 48 எனில் இடைநிலை $= \dfrac{39 + 40}{2} = 39.5$

குறிப்பு: இடைநிலை அளவுக்குக் கீழ் எத்தனை விவரங்கள் உள்ளனவோ அதே எண்ணிக்கையிலான விவரங்கள் அதற்கு மேல் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.17

17, 15, 9, 13, 21, 7, 32 ஆகியவற்றின் இடைநிலை காண்க.

தீர்வு

மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைத்தால் 7, 9, 13, 15, 17, 21, 32 எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு, n = 7 (ஒற்றைப்படை எண்)

இடைநிலை = நடுமதிப்பு

= $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ இன்மதிப்பு = $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ இன்மதிப்பு

= 4 ஆம் இடத்தில் உள்ள எண்

எனவே, இடைநிலை = 15

எடுத்துக்காட்டு 8.18

ஒரு கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92. இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

தீர்வு

ஓட்டங்களை ஏறுவரிசையில் அமைப்போம் 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92.

இங்கு n = 10 (இரட்டை எண்)

இங்கு, இரு மத்திய மதிப்புகள் உள்ளன. அவை 28, 33 ஆகும்.

$$\therefore \text{இடைநிலை} = \frac{28+33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5\ .$$

8.5.3 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலை காணல்

குவிவு நிகழ்வெண் (Cumulative frequency)

ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் குவிவு நிகழ்வெண் என்பது அந்தப் பிரிவு இடைவெளி வரை உள்ள நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான இடைநிலை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	27	34	43	58	65	89
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	4	6	11	12	8	7

தீர்வு

மதிப்பெண்கள் (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	நிகழ்வெண் குவிவு
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	**12**	**(23 + 12 =) 35**
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

இங்கு மொத்த நிகழ்வெண், $N = \sum f = 50$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

இடைநிலை = $\left(\frac{N}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு = 25 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

ஆனால், 25 ஆவது உறுப்பு குவிவு நிகழ்வெண் நிரலில் உள்ள 35 என்ற இடத்தில் உள்ளது. இதற்குத் தொடர்பான மதிப்பு 58.

எனவே, இடைநிலை = 58.

8.5.4 முகடு (Mode)

முகடும் ஒரு மையப்போக்கு அளவு ஆகும்.

முகடு பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

8.5.4 (அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் முகடு (தனித்தனியான விவரங்கள்)

தனித் தொகுதியாக அமைந்துள்ள மதிப்புகளின் கணத்தில் எந்த ஒரு மதிப்பானது அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கிறதோ அது தரப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

மேலே உள்ள விவரங்களில் 2 மிக அதிக தடவையாக 4 முறை வந்துள்ளது.

எனவே, முகடு = 2.

எடுத்துக்காட்டு 8.21

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இங்கு 22 மூன்று முறையும், 25 மூன்று முறையும் அமைந்திருக்கின்றன.

எனவே 22, 25 ஆகிய இரண்டுமே முகடுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

15, 25, 35, 45, 55, 65 ஆகியவற்றின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இங்கு ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரே முறை தான் வந்துள்ளது. எனவே தரப்பட்ட விவரங்களுக்கு முகடு இல்லை.

8.5.4 (ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடு (நிகழ்வெண் பரவல்)

தரப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்குப்படுத்தி ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் அமைத்தால், அதிக நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட பிரிவு, முகட்டுப் பிரிவு எனப்படுகிறது. இப்பிரிவில் உள்ள மாறியின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.23

பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியலுக்கு முகடு காண்க.

கூலி (₹)	250	300	350	400	450	500
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	16	12	11	13

தீர்வு

கூலி (₹)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
250	10
300	15
350	**16**
400	12
450	11
500	13

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து மீப்பெரு நிகழ்வெண் 16 ஆகும். இதற்கு ஏற்ற மாறியின் மதிப்பு (கூலி) ₹ 350. எனவே, முகடு 350 ஆகும்.

நீவிர் அறிவீரா?

ஒரு முகடு (Uni modal)	இரு முகடுகள் (Bi modal)	மூன்று முகடுகள் (Tri modal)	பன் முகடுகள் (Multi modal)
கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஒரே ஒரு முகடு மட்டும் இருப்பின் அதனை ஒரு முகடு என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இரு முகடுகள் மட்டும் இருப்பின் அதனை இரு முகடுகள் என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு மூன்று முகடுகள் மட்டும் இருப்பின் அதனை மூன்று முகடுகள் என்பர்.	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு மூன்றுக்கு மேற்பட்ட முகடுகள் இருப்பின் அதனைப் பன் முகடுகள் என்பர்.
எடுத்துக்காட்டு : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. முகடு 15.	எடுத்துக்காட்டு : 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. இரு முகடுகள் 25, 30	எடுத்துக்காட்டு : 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. மூன்று முகடுகள் 60, 80, 85.	எடுத்துக்காட்டு : 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. பன் முகடுகள் 1, 2, 3, 4, 5.

பயிற்சி 8.3

I. கூட்டுச்சராசரி காணும் கணக்குகள்

1. கூட்டுச் சராசரி காணவும் 2, 4, 6, 8, 10 , 12, 14, 16.

2. 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36 இவற்றின் சராசரி 31 எனில் x இன் மதிப்பு என்ன ?

3. ஒரு வகுப்பில் 20 மாணவர்கள் உள்ளனர். இவர்களுள் 5 மாணவர்கள் தலா 76 மதிப்பெண்களும், 7 மாணவர்கள் தலா 77 மதிப்பெண்களும், 8 மாணவர்கள் தலா 78 மதிப்பெண்களும் பெற்றுள்ளனர். வகுப்புச் சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

4. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 20 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 160 செ.மீ எனக் கணக்கிடப்பட்டது. சரிபார்க்கும் போது 152 செ.மீ என்பதை 132 செ.மீ என தவறாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டதாகத் தெரிய வந்தது. சரியான சராசரி உயரம் காணவும்.

5. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. 40 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் பல்வேறு வயதுகளை உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களின் சராசரி வயதைக் காணவும்.

வயது (ஆண்டுகளில்)	13	14	15	16	17	18
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	8	9	11	6	3

7. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	65	70	75	80	85	90	95	100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	11	3	5	4	7	10	4

8. ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள 12 தொழிலாளர்களின் எடைகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் சராசரி எடையைக் காணவும்.

எடைகள் (கி.கி.)	60	64	68	70	72
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	3	4	2	2	1

9. ஒரு குடும்பத்திற்கு ஒரு மாதத்திற்குத் தேவையான பொருட்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தேவையான எடை அளவுகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும்.

பொருட்கள்	எடை (கி.கி.)	1 கிலோவின் விலை (₹)
அரிசி	25	30
கோதுமை	5	20
பருப்புகள்	4	60
காய்கறிகள்	8	25
எண்ணெய்	3	65

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காண்க.

பொருட்கள்	பொருட்களின் எண்ணிக்கை	பொருள் ஒன்றின் விலை (₹)
முகப்பூச்சு மாவு	2	45.00
சோப்பு	4	12.00
எழுதுபொருள்	5	15.00
கணிதக் கருவிப் பெட்டிகள்	4	25.50

II. இடைநிலை காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் மதிப்புகளுக்கு இடைநிலை காண்க.

   (i) 83, 66, 86, 30, 81.

   (ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.

   (iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.

   (iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

2. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலை காண்க.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்களின் உயரங்கள் (செ.மீ) பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உயரம் (செ.மீ.)	156	155	154	153	152	151	150
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	4	6	10	12	3	7

   இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

4. 60 நோயாளிகளின் இதயங்களின் X-கதிர்ப் படங்களை ஆராய்ந்தபோது கிடைத்த தகவல்கள் பின்வருமாறு. இவற்றின் இடைநிலை காண்க.

இதயத்தின் விட்டம் (மி.மீ.)	130	131	132	133	134	135
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	7	9	15	12	6	11

5. 43 தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மாதச் சம்பளம் (₹)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	5	4	3	13	8	3

III. முகடு காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு முகடு காணவும்.

   i) 74, 81, 62, 58, 77, 74.

   ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32.

   iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.

   vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. பின்வரும் நிகழ்வெண் அட்டவணைப் பரவலுக்கு முகடு காண்க.

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. பின்வரும் விவரங்களுக்கு முகடு காண்க.

வெப்பநிலை °c	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
நாட்களின் எண்ணிக்கை	7	2	6	4	8	3

4. ஓர் ஆய்வில் பின்வரும் அளவுகளுள்ள சட்டைகளுக்கு அதிகத் தேவை இருப்பதாகத் தெரிய வருகின்றது. இவற்றின் முகடு காண்க.

அளவு	38	39	40	41	42	43	44
நபர்களின் எண்ணிக்கை (அணிந்து கொண்டிருப்போர்)	27	40	51	16	14	8	6

IV. கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு காணும் கணக்குகள்

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் அட்டவணைக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க.

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ஒரு குழுமத்தில் வேலை செய்வோரின் வயதும், எண்ணிக்கையும் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வயது (ஆண்டுகளில்)	19	21	23	25	27	29	31
ஆள்களின் எண்ணிக்கை	13	15	20	18	16	17	13

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு காண்க.

3. 20 மாணவர்களின் எடைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடை (கி.கி.)	47	50	53	56	60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	3	7	2	4

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு கணக்கிடுக.

கருத்துச் சுருக்கம்

- நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் என்பவை ஒரு நிகழ்வுப் பரவலின் இருவகை வரைபடங்கள் ஆகும்.

- நிகழ்வுச் செவ்வகம், நிகழ்வுப் பலகோணம் போன்ற வரைபடங்களின் பிரிவு இடைவெளிகள் X-அச்சிலும், அதற்குரிய நிகழ்வெண்கள் Y-அச்சிலும் குறிக்கப்படுகின்றன.

- ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள் அடுத்தடுத்தும், தொடர்ச்சியாகவும் எந்த இரண்டு அடுத்துள்ள செவ்வகங்களுக்கும் இடையில் இடைவெளியில்லாமலும் அமைக்கப்படுகின்றன.

- ஒரு நிகழ்வுச் செவ்வகத்தில் அடுத்தடுத்துள்ள செவ்வகங்களின் மேற்பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை, முதல் பிரிவு இடைவெளிக்கு முன்னதாக உள்ள பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியோடும், கடைசிப் பிரிவு இடைவெளிக்கு அடுத்துள்ள இடைவெளியின் மையப்புள்ளியோடும் இணைத்தால் கிடைப்பது நிகழ்வுப் பலகோணம் ஆகும்.

- ஒரு பகுதியின் மையக்கோண அளவு = $\dfrac{\text{அப்பகுதியின் மதிப்பு}}{\text{மொத்த மதிப்பு}} \times 360^\circ$

- கூட்டுச் சராசரி என்பது மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும், மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும்.

- கூட்டுச் சராசரி ($\overline{x}$) காண சூத்திரம்

  (i) தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$

  (ii) நேரடி முறையில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு $\overline{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

  (iii) உத்தேச சராசரி முறையில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு $\overline{x} = A + \dfrac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

  (இங்கு A என்பது உத்தேச எண், $d = x - A$)

- எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (W.A.M.) = $\dfrac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$.

- இடைநிலை அளவுக்குக் கீழ் எத்தனை விவரங்கள் உள்ளனவோ அதே எண்ணிக்கையிலான விவரங்கள் அதற்கு மேல் இருக்கும்.

- ஒரு பரவலின் மிக அதிக தடவை வருகின்ற மதிப்பு அப்பரவலின் முகடு ஆகும்.

விடைகள்

அத்தியாயம் 1

பயிற்சி 1.1

1. i) A ii) C iii) B iv) D v) A

2. i) பரிமாற்றுப் பண்பு ii) சேர்ப்புப்பண்பு iii) பரிமாற்றுப் பண்பு
   iv) கூட்டல் சமனி v) கூட்டல் தலைகீழி

3. i) பரிமாற்றுப் பண்பு ii) பெருக்கல் சமனி
   iii) பெருக்கல் தலைகீழி iv) சேர்ப்பு
   v) பெருக்கலின் மேல் கூட்டலுக்கான பங்கீட்டுப் பண்பு

6. i) $\frac{-505}{252}$ ii) $\frac{-1}{14}$

பயிற்சி 1.2

1. i) $\frac{13}{15}$ ii) $\frac{23}{84}$ iii) $\frac{117}{176}$ iv) $\frac{53}{24}$

2. i) $\frac{31}{70}, \frac{51}{140}$ ii) $\frac{111}{110}, \frac{243}{220}$ iii) $\frac{17}{30}, \frac{9}{20}$ iv) $\frac{-1}{24}, \frac{1}{12}$

3. i) $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{9}{32}$ ii) $\frac{41}{60}, \frac{83}{120}, \frac{167}{240}$
   iii) $\frac{7}{12}, \frac{1}{8}, \frac{-5}{48}$ iv) $\frac{5}{48}, \frac{11}{96}, \frac{23}{192}$

குறிப்பு: மேற்கண்ட 1, 2, 3 ஆகிய கணக்குகளுக்கு உள்ள சரியான விடைகளுள் ஒன்று மட்டுமே தரப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 1.3

1. i) A ii) B iii) C iv) A v) B

2. i) $2\frac{7}{24}$ ii) $\frac{16}{17}$ iii) $\frac{11}{32}$ iv) $1\frac{7}{18}$ v) $\frac{-8}{19}$
   vi) $4\frac{23}{32}$ vii) 4 viii) $-5\frac{41}{60}$

பயிற்சி 1.4

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) C
   vi) A vii) B viii) B ix) B x) D

2. i) $\frac{-1}{64}$ ii) $\frac{1}{64}$ iii) 625 iv) $\frac{2}{675}$ v) $\frac{1}{3^{22}}$
   vi) 54 vii) 1 viii) $256\,p^{q}$ ix) 231 x) $5\frac{1}{3}$

3. i) 5 ii) $\frac{1}{2}$ iii) 29 iv) 1 v) $5\frac{1}{16}$ vi) $\frac{6}{7^{21}}$

4. i) $m = 2$ ii) $m = 3$ iii) $m = 3$ iv) $m = 3$ v) $m = -6$ vi) $m = \frac{1}{4}$

5. a) i) 4 ii) 4 iii) 256 iv) 64 v) $\frac{1}{4}$

5. b) i) 4 ii) 2187 iii) 9 iv) 6561 v) $\frac{1}{9}$

பயிற்சி 1.5

1. (ii), (iii), (v) ஆகியவை வர்க்க எண்கள் அல்ல.

2. i) 4 ii) 9 iii) 1 iv) 5 v) 4

3. i) 64 ii) 16 iii) 81

4. i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11 + 13 ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

 iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 iv) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

5. i) $\frac{9}{64}$ ii) $\frac{49}{100}$ iii) $\frac{1}{25}$ iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{961}{1600}$

6. i) 9 ii) 49 iii) 0.09 iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{9}{16}$ vi) 0.36

7. a) $4^2 + 5^2 + \underline{20}^2 = 21^2$ b) 10000200001

 $5^2 + \underline{6}^2 + 30^2 = 31^2$ 100000020000001

 $6^2 + 7^2 + \underline{42}^2 = \underline{43}^2$

பயிற்சி 1.6

1. i) 12 ii) 10 iii) 27 iv) 385

2. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) 7 iv) 4

3. i) 48 ii) 67 iii) 59 iv) 23 v) 57

 vi) 37 vii) 76 viii) 89 ix) 24 x) 56

4. i) 27 ii) 20 iii) 42 iv) 64 v) 88

 vi) 98 vi) 77 viii) 96 ix) 23 x) 90

5. i) 1.6 ii) 2.7 iii) 7.2 iv) 6.5 v) 5.6

 vi) 0.54 vii) 3.4 viii) 0.043

6. i) 2 ii) 53 iii) 1 iv) 41 v) 31

7. i) 4 ii) 14 iii) 4 iv) 24 v) 149

8. i) 1.41 ii) 2.24 iii) 0.13 iv) 0.94 v) 1.04

9. 21 மீ 10. i) $\frac{15}{56}$ ii) $\frac{46}{59}$ iii) $\frac{23}{42}$ iv) $1\frac{13}{76}$

பயிற்சி 1.7

1. i) A ii) C iii) B iv) A v) B
   vi) D vii) A viii) A ix) A x) D
2. ii) 216 iii) 729 v) 1000
3. i) 128 ii) 100 v) 72 vi) 625
4. i) 3 ii) 2 iii) 5 iv) 3 v) 11 vi) 5
5. i) 3 ii) 2 iii) 3 iv) 5 v) 10
6. i) 9 ii) 7 iii) 8 iv) 0.4 v) 0.6
   vi) 1.75 vii) – 1.1 viii) – 30
7. 2.7 செ.மீ.

பயிற்சி 1.8

1. i) 12.57 ii) 25.42 கி.கி. iii) 39.93 மீ
   iv) 56.60 மீ v) 41.06 மீ vi) 729.94 கி.மீ.
2. i) 0.052 மீ ii) 3.533 கி.மீ. iii) 58.294 லி
   iv) 0.133 கிராம் v) 365.301 vi) 100.123
3. i) 250 ii) 150 iii) 6800 iv) 10,000
   v) 36 லட்சங்கள் vi) 104 கோடிகள்
4. i) 22 ii) 777 iii) 402 iv) 306 v) 300 vi) 10,000

பயிற்சி 1.9

1. i) 25, 20, 15 ii) 6, 8, 10 iii) 63, 56, 49
   iv) 7.7, 8.8, 9.9 v) 15, 21, 28 vi) 34, 55, 89
   vii) 125, 216, 343
2. a) 11 தாவல்கள் b) 5 தாவல்கள்

3. a) 10ஆவது வரிசைகளிலும் உள்ள ஆப்பிள்கள் = 55ஆப்பிள்கள்

b) 210 ஆப்பிள்கள்

வரிசை	1	2	3	4	5	6	7	8	9
மொத்த ஆப்பிள்கள்	1	3	6	10	15	21	28	36	45

அத்தியாயம் 2

பயிற்சி 2.1

1. i) C ii) B iii) A iv) A v) D

vi) D vii) C

2.

வ. எண்	உறுப்புகள்	மாறிகளின் கெழுக்கள்
i)	$3\,abc$ $-5\,ca$	3 -5
ii)	$1, x, y^2$	மாறிலி உறுப்பு, 1, 1
iii)	$3x^2\,y^2$ $-3xyz$ y^2	3 3 1
iv)	-7 $2\,pq$ $\frac{-5}{7}qr$ qp	மாறிலி உறுப்பு 2 $\frac{-5}{7}$ 1
v)	$\frac{x}{2}$ - $\frac{-y}{2}$ $-0.3\,xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{-1}{2}$ -0.3

3. ஓருறுப்பு கோவை : $3x^2$

ஈருறுப்பு கோவைகள் : $3x + 2,\ x^5 - 7,\ a^2b + b^2c\ ,\ 2l + 2m.$

மூவுறுப்பு கோவைகள் : $x^2 - 4x + 2,\ x^2 + 3xy + y^2,\ s^2 + 3st - 2t^2$

4. i) $5x^2 - x - 2$ ii) $2x^2 + x - 2$ iii) $-3t^2 - 2t - 3$

iv) 0 v) $2\,(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

5. i) a ii) $-4x - 18y$ iii) $5ab - 7bc + 13ca$

iv) $-x^2 + 5x^2 + 3x + 1$ v) $5x^2y - 9xy - 7x + 12y + 25$

6. i) 7, 5 ii) 13, – 1 iii) 7, – 1 iv) 8, 1 v) 8, – 2

பயிற்சி 2.2

1. i) $21x$ ii) $-21xy$ iii) $-15a^2b$ iv) $-20a^3$ v) $\frac{2}{3}x^7$ vi) x^3y^3

   vii) x^4y^7 viii) $a^2b^2c^2$ ix) $x^3y^2z^2$ x) $a^3b^3c^5$

2.

முதலாம் ஒருறுப்புக்கோவை → இரண்டாம் ஒருறுப்புக்கோவை ↓	$2x$	$-3y$	$4x^2$	$-5xy$	$7x^2y$	$-6x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-6xy$	$8x^3$	$-10x^2y$	$14x^3y$	$-12x^3y^2$
$-3y$	$-6xy$	$9y^2$	$-12x^2y$	$15xy^2$	$-21x^2y^2$	$18x^3y^3$
$4x^2$	$8x^3$	$-12x^2y$	$16x^4$	$-20x^3y$	$28x^4y$	$-24x^4y^2$
$-5xy$	$-10x^2y$	$15xy^2$	$-20x^3y$	$25x^2y^2$	$35x^3y^2$	$30x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-21x^2y^2$	$28x^4y$	$-35x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-42x^4y^3$
$-6x^2y^2$	$-12x^3y^2$	$18x^2y^3$	$-24x^4y^2$	$30x^3y^3$	$-42x^4y^3$	$36x^4y^4$

3. i) $30a^7$ ii) $72xyz$ iii) $a^2b^2c^2$ iv) $-72m^7$ v) $x^3y^4z^2$

   vi) $l^2m^3n^4$ vii) $-30p^3q$

4. i) $8a^{23}$ ii) $-2x^3-3x+20$ iii) $3x^2+8xy-3y^2$ iv) $12x^2-x-6$

   iv) $\frac{-5}{4}a^3b^3$

5. i) $2a^3-3a^2b-2ab^2+3b^3$ ii) $2x^3+x^2y-xy^2+3y^3$

   iii) $x^2+2xy+y^2-z^2$ iv) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ v) m^3-n^3

6. i) $2(x^2-2xy+yz-xz-y^2)$ ii) $17a^2+14ab-21ac$

பயிற்சி 2.3

1. i) C ii) D iii) B iv) D v) A vi) B

2. i) x^2+6x+9 ii) $4m^2+12m+9$ iii) $4x^2-20x+25$

   iv) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ v) $9x^2-4$ vi) $25a^2-30ab+9b^2$

   vii) $4l^2-9m^2$ viii) $\frac{9}{16}-x^2$ ix) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$ x) 9991

3. i) $x^2+11x+28$ ii) $25x^2+35x+12$ iii) $49x^2-9y^2$

   iv) $64x^2-56x+10$ v) $4m^2+14mn+12n^2$ vi) $x^2y^2-5xy+6$

   vii) $a^2+\left(\frac{x+y}{xy}\right)a+\frac{1}{xy}$ viii) $4+2x-2y-xy$

4. i) $p^2 - 2pq + q^2$ ii) $a^2 - 10a + 25$ iii) $9x^2 + 30x + 25$

iv) $25x^2 - 40x + 16$ v) $49x^2 + 42xy + 9y^2$ vi) $100m^2 - 180mn + 81n^2$

vii) $0.16a^2 - 0.4ab + 0.25b^2$ viii) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

ix) $x^2 - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$ x) 0.08

5. i) 10609 ii) 2304 iii) 2916 iv) 8464 v) 996004 vi) 2491

vii) 9984 viii) 896 ix) 6399 x) 7.84 xi) 84 xii) 95.06

7. $ab = \frac{9}{4}$, $a^2 + b^2 = 4\frac{1}{2}$ 8. i) 80, 16, ii) 196, 196

9. 625

10. $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc.$

பயிற்சி 2.4

1. i) C ii) D iii) A iv) C v) B

2. i) $3(x - 15)$ ii) $7(x - 2y)$ iii) $5a(a + 7)$

iv) $4y(5y^2 - 3)$ v) $5ab(3a + 7)$ vi) $pq(1 - r)$

vii) $9m(2m^2 - 5n^2)$ viii) $17(l^2 + 5m^2)$ ix) $3x^2(2xy - 4y + 5x^2)$

x) $2a^2b(a^3b^2 - 7b + 2a)$

3. i) $a(2b + 3) + 2b$ (or) $2b(a + 1) + 3a$ vi) $(a + b)(ax + by + c)$

ii) $(3x - 2)(2y - 3)$ vii) $(ax - b)(x^2 + 1)$

iii) $(x + y)(3y + 2)$ viii) $(x - y)(m - n)$

iv) $(5b - x^2)(3b - 1)$ ix) $(2m^2 + 3)(m - 1)$

v) $(ax + y)(ax + b)$ x) $(a + 11b)(a + 1)$

4. i) $(a + 7)^2$ ii) $(x - 6)^2$

iii) $(2p + 5q)(2p - 5q)$ iv) $(5x - 2y)^2$

v) $(13m + 25n)(13m - 25n)$ vi) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

vii) $(11a + 7b)^2$ viii) $3x(x + 5)(x - 5)$

ix) $(6 + 7x)(6 - 7x)$ x) $(1 - 3x)^2$

5. i) $(x + 3)(x + 4)$ ii) $(p - 2)(p - 4)$ iii) $(m - 7)(m + 3)$

iv) $(x - 9)(x - 5)$ v) $(x - 18)(x - 6)$ vi) $(a + 12)(a + 1)$

vii) $(x - 2)(x - 3)$ viii) $(x - 2y)(x - 12y)$

ix) $(m - 24)(m + 3)$ x) $(x - 22)(x - 6)$

பயிற்சி 2.5

1. i) $\frac{x^3}{2}$ ii) $-6y$ iii) $\frac{2}{3}a^2b^2c^2$ iv) $7m - 6$

v) $\frac{5}{3}xy$ vi) $9l^2 m^3 n^5$

2. i) $5y^2 - 4y + 3$ ii) $3x^3 - 5x^2 - 7$ iii) $\frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

iv) $x + y - 7$ v) $8x^3 - 4y^2 + 3xz^3$.

3. i) $(x + 5)$ ii) $(a + 12)$ iii) $(x - 2)$ iv) $(5m - 2n)$

v) $(2a + 3b)$ vi) $(a^2 + b^2)(a + b)$

பயிற்சி 2.6

1. i) $x = 6$ ii) $y = -7$ iii) $y = 4$ iv) $x = 12$ v) $y = -77$

vi) $x = -6$ vii) $x = 2$ viii) $x = 12$ ix) $x = 6$ x) $m = \frac{6}{7}$

2. i) 18 ii) 29, 30, 31 iii) $l = 19, b = 11$ iv) 12, 48

v) 12, 9 vi) 45, 27 vii) 4000 viii) $\frac{3}{5}$

ix) நந்தினியின் தற்போதைய வயது **15** ஆண்டுகள்,
மேரியின் தற்போதைய வயது **45** ஆண்டுகள். x) ₹ 3,00,000

அத்தியாயம் 3

பயிற்சி 3.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A

2. i) 200 லி ii) 20,000 கி.மீ. iii) ₹ 1,550

iv) 50 நிமிடங்கள் v) ₹ 50

3. ₹ 40,000 4. 3750

5. i) 90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%

6. 5 7. ₹ 9,000 8. ₹ 1,020

9. 180, 1320 10. 6 கி,கி.

11. i) 26,100 ii) 5,220 12. 25%, ₹ 8,600

13. ஜோதிகா கணக்கில் 20% அதிகமாகப் பெற்றார். 14. ₹ 6,250 15. 20%

பயிற்சி 3.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500

2. i) இலாபம் ₹ 64, இலாபம்% = 20%

   ii) இலாபம்₹ 200, இலாபம் % = 8%

   iii) நட்டம் ₹ 19, நட்டம் % = 5%

   iv) வி.வி = ₹ 38, நட்டம் % = 5%

   v) வி.வி = ₹ 5,500, இலாபம் % = 10%.

3. i) ₹ 787.50 ii) ₹ 1,260 iii) ₹ 2,835

4. ₹ 1,200 5. $33\frac{1}{3}\%$ 6. 25%

7. ₹ 22,80,000 8. ₹ 34,40,000

9. $11\frac{1}{9}\%$ 10. மொத்த இலாபம் ₹ 113.68

பயிற்சி 3.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C

2. ₹ 360 3. ₹ 8,000 4. ₹ 49,220

5. ₹ 18,433.40 6. ₹ 4,950 7. ₹ 13,000

8. 33% 9. ₹ 9,832.50 10. 20%

11. ஒரு சட்டைக்கு ₹ 1,310.40

12. i) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 460; வி.வி. = ₹ 1,840

   ii) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 35; தள்ளுபடி வீதம் = 25%

   iii) கு.வி = ₹ 20,000; தள்ளுபடித் தொகை= ₹ 4,000

   iv) தள்ளுபடி வீதம் = 5%; தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 725

   v) தள்ளுபடித் தொகை = ₹ 403; வி.வி = ₹ 2,821

பயிற்சி 3.4

1. i) A = ₹ 1,157.63, வட்டித் தொகை = ₹ 157.63

   ii) A = ₹ 4,840, வட்டித் தொகை = ₹ 840

   iii) A = ₹ 22,869, வட்டித் தொகை = ₹ 4,869

2. ₹ 2,125

3. i) ₹ 88,200 ii) ₹ 4,410

4. A = ₹ 27,783, கூட்டு வட்டி = ₹ 3,783 5. ₹ 9,826

6. கூட்டு வட்டி = ₹ 1,951 7. ₹ 20,000 8. ₹ 36,659.70

9. i) ₹ 92,400 ii) ₹ 92,610, வித்தியாசம் = ₹ 210

10. ₹ 6 11. ₹ 25 12. ₹ 2,000

13. சுஜா அதிகமாக செலுத்தியத் தொகை ₹ 924.10 14. P = ₹ 1,25,000

15. 2 வருடங்கள் 16. 10% 17. 10%

பயிற்சி 3.5

1. 2,205 2. ₹ 2,55,150 3. ₹ 46,000

4. 5,31,616.25 5. 5,415 6. ₹ 20,000

7. 10,000

பயிற்சி 3.6

1. ₹ 27,000 2. ₹ 86,250 3. ₹ 10,800
4. ₹ 200 5. 9% 6. ₹ 1,250
7. ₹ 19,404 8. மாதத் தவணை = ₹ 875, மொத்தத் தொகை=₹8,750

பயிற்சி 3.7

1. 24 நாட்கள் 2. 10; 1250

3. அச்சுக்கோர்ப்போரின் எண்ணிக்கை 36

4. 15 வேலையாட்கள் 5. 24 நாட்கள் 6. ₹ 192

பயிற்சி 3.8

1. 3 நாட்கள் 2. 30 நாட்கள் 3. 2 நாட்கள் 4. 12 நிமிடங்கள்

5. A = ₹ 360, B = ₹ 240 6. 6 நாட்கள் 7. 1 மணி

அத்தியாயம் 4

பயிற்சி 4.1

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) A

vi) D vii) B viii) C ix) A x) C

2. i) 180 செ.மீ., 1925 செ.மீ^{2} ii) 54 செ.மீ., 173.25 செ.மீ^{2}

iii) 32.4 மீ, 62.37 மீ^{2} iv) 25.2 மீ, 37.73 மீ^{2}

3. i) 7.2 செ.மீ., 3.08 செ.மீ^{2} ii) 144 செ.மீ., 1232 செ.மீ^{2}

iii) 216 செ.மீ., 2772 செ.மீ^{2} iv) 288மீ, 4928 மீ^{2}

4. i) 350 செ.மீ., 7546 செ.மீ^{2} ii) 250 செ.மீ., 3850 செ.மீ.^{2}

iii) 150 மீ, 1386 மீ^{2} iv) 100 மீ, 616 மீ^{2}

5. 77 செ.மீ^{2}, 38.5 செ.மீ^{2} 6. ₹ 540

பயிற்சி 4.2

1. i) 32 செ.மீ. ii) 40 செ.மீ. iii) 32.6 செ.மீ.
   iv) 40 செ.மீ. v) 98 செ.மீ.
2. i) 124 செ.மீ^{2} ii) 25 செ.மீ^{2} iii) 273 செ.மீ^{2}
   iv) 49.14 செ.மீ^{2} v) 10.40செ.மீ^{2}
3. i) 24 மீ^{2} ii) 284 செ.மீ^{2} iii) 308 செ.மீ^{2}
   iv) 10.5 செ.மீ^{2} v) 135.625 செ.மீ^{2} vi) 6.125 செ.மீ^{2}
4. 770 செ.மீ^{2} 5. 1286 மீ^{2} 6. 9384 மீ^{2}
7. 9.71 செ.மீ^{2} 8. 203 செ.மீ^{2} 9. 378 செ.மீ^{2}
10. i) 15,100 மீ^{2} ii) 550000 மீ^{2}

அத்தியாயம் 5

திருப்புதல் பயிற்சி

1. $y° = 52°$ 2. $x° = 40°$ 3. $\angle A = 110°$
4. $x° = 40°$ 5. $x° = 105°$
6. i) ஒத்த கோணங்கள் ii) ஒன்று விட்ட கோணங்கள் iii) ஒத்த கோணங்கள்

பயிற்சி 5.1

1. i) B ii) A iii) A iv) B v) A
2. $x° = 65°$ 3. $x° = 42°$
5. i) $x° = 58°, y° = 108°$ ii) $x° = 30°, y° = 30°$ iii) $x° = 42°, y° = 40°$
6. $x° = 153°, y° = 132°, z° = 53°$.

பயிற்சி 5.2

1. i) C ii) C iii) C iv) C v) B vi) A vii) B
2. $x° = 66°, y° = 132°$ 3. $x° = 70°$
4. $x° = 15°, y° = 55°$ 7. $x° = 30°, y° = 60°, z° = 60°$

பயிற்சி 5.3

1. i) D ii) C iii) A iv) B
2. குறைந்த நீளமுடைய பக்கம் BC
3. QR = 26 செ.மீ. 4. செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.
5. QR = 5 செ.மீ. 6. $x = 9$ மீ
7. குத்துக் கோட்டின் நீளம் $x = 5\sqrt{3}$ செ.மீ.
8. ஆம் 9. $2\sqrt{51}$ அடி

பயிற்சி 5.4

1. i) D ii) D iii) C 2. ஆரம் = 5 செ.மீ.

அத்தியாயம் 7

பயிற்சி 7.1

2. i) முதல் கால்பகுதி ii) இரண்டாம் கால்பகுதி
   iii) மூன்றாம் கால்பகுதி iv) நான்காம் கால்பகுதி v) y-அச்சின் மீது
   vi) x-அச்சின் மீது vii) x-அச்சின் மீது viii) மூன்றாம் கால்பகுதி
   ix) முதல் கால்பகுதி x) இரண்டாம் கால்பகுதி

3.

புள்ளி	கால்பகுதி/ அச்சு	அச்சுத்தூரங்கள்
A	y - அச்சின் மீது	(0,4)
B	இரண்டாம் கால்பகுதி	(-3,2)
C	x-அச்சின் மீது	(-5,0)
D	மூன்றாம் கால்பகுதி	(-4,-6)
E	y-அச்சின் மீது	(0.-3)
F	நான்காம் கால்பகுதி	(7,-1)
G	x-அச்சின் மீது	(4,0)
H	முதல் கால்பகுதி	(6,3)
O	ஆதி புள்ளி	(0,0)

6. i) 40 செ.மீ^{2} ii) 56 செ.மீ^{2} iii)36 செ.மீ^{2} iv) 49 செ.மீ^{2}
   v) 16 செ.மீ^{2} vi) 12 செ.மீ^{2} vii)18 செ.மீ^{2}

பயிற்சி 7.2

5. 5 மணி 6. ₹ 8,000

7. i) 26 செ.மீ. ii) 30 செ.மீ. iii) 24 செ.மீ. iv) 28 செ.மீ.

அத்தியாயம் 8

பயிற்சி 8.3

I. கூட்டுச் சராசரி காணும் கணக்குகள்

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161 செ.மீ. 5. 45
6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹ 33 10. ₹ 21

II. இடைநிலை காணும் கணக்குகள்

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51
2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹ 10,000

III. முகடு காணும் கணக்குகள்

1. i) 74 ii) முகடு இல்லை iii) 25 மற்றும் 36 iv) 20
2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. சராசரி 28; இடைநிலை 25; முகடு 30 2. சராசரி 25; இடைநிலை 25; முகடு 23
3. சராசரி 53.05; இடைநிலை 53; முகடு 53

எண்களோடு விளையாடு

8 இல் உருவாகும் வியப்பூட்டும் எண்வரிசை

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

9 உடனான 8 இன் வரிசை

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

8 அல்லாத எண் உடனான எண்வரிசை

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 36 = 444444444$$
$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

1 ஆல் அமைந்த எண் பிரதிபலிப்பான்கள்

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$111111 \times 111111 = 12345654321$$
$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$
$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$
$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$