வணிகக் கணிதவியல்

(இளம் வணிகவியல் மாணவர்களுக்குரியது)

50

வே. திலகராஜன்
சு. கனகவேல் பாண்டியன்

பதிப்புத்துறை
காமராசர் பல்கலைக்கழகம்
மதுரை

UG5730
R007G02
UG 5730

வணிகக் கணிதவியல்

(இளம் வணிகவியல் மாணவர்களுக்குரியது)

திலகராஜன்
கனகவேல் பாண்டியன்

பதிப்புத்துறை

மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்
மதுரை

பதிப்புரிமை :
பதிப்புத்துறை
மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்
மதுரை - 625 021.

© Rights Reserved
Publications Division,
Madurai Kamaraj University,
Madurai - 625 021.

பதிப்பு எண் : **138**

விலை : ரூபாய் **75-00**

பதிப்பு விவரங்கள் :

1. ஆசிரியர்கள் : வே. திலகராஜன், எம்.காம்., எம்.பில்., பி.ஜி.எல்.,
வெள்ளைச்சாமி நாடார் கல்லூரி, மதுரை - 625 019.

சு. கனகவேல் பாண்டியன், எம்.எஸ்ஸி, எம்.பில்.,
வெள்ளைச்சாமி நாடார் கல்லூரி, மதுரை - 625 019.

2. தலைப்பு : வணிகக் கணிதவியல்

3. பதிப்பு

அ) இடம் : மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்,
மதுரை - 625 021.

ஆ) பொதுப்பதிப்பாசிரியர் : முனைவர் ம.திருமலை, பதிப்பாளர்.

இ) பதிப்பித்தோர் : பதிப்புத்துறை,
மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்,
மதுரை - 625 021.

ஈ) ஆண்டு : 1997

உ) பக்கங்கள் : 264

ஊ) பொருள் : வணிகவியல்

எ) படிகள் : 500

ஏ) அச்சும் அமைப்பும் : லிட்டில் ஸ்டார், மதுரை - 625 001

4. நூல் தயாரிப்பு ஆலோசனைக்குழு :

1. முனைவர் நீ. தாணுலிங்கம்
2. முனைவர் வெ. அழகப்பன்
3. பேராசிரியர் ந. மு. கணேசன்.

வாழ்த்துரை

பேராசிரியர் கு. ஆளுடையபிள்ளை,
துணைவேந்தர்,
மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகம்,
மதுரை - 625 021.

ஓர் இனத்தின் பண்பாட்டு அடையாளங்களுள் இன்றிமையாதது அவ்வினத்திற்குரிய தாய்மொழியாகும். எனவே மொழியைப் பேணுவதும் வளர்ப்பதும் அம்மொழி பேசும் மக்களின் தலையாய கடமையாகும். ஓர் இனத்தின் மொழி வளரவளர, அவ்வினம் பண்பாட்டுத்துறையில் மேன்மையை அடையும்; மக்கள் இனம் மேன்மையை நோக்கி உயரஉயர, மொழி உயரும். எனவே மொழி வளர்ச்சியும் மக்களினத்தின் வளர்ச்சியும் ஒன்றோடு ஒன்று பின்னிப் பிணைந்திருப்பவை. பண்ணும் ஓசையும் போல, பழமும் சுவையும் போல ஒன்று கலந்து காணப்படுபவை தான் மொழி வளர்ச்சியும் மக்கள் பண்பாட்டு வளர்ச்சியும்!

இத்தகைய வளர்ச்சி நிலையைக் கருத்தில் கொண்டுதான் தமிழ்ப்புலவர் பெருமக்கள் மொழிக்கு ஆக்கம் சேர்க்கும் புதுவரவாக நூல்கள் எழுதப்படுதல் வேண்டும் என்று வற்புறுத்தினர். இறவாத புதுநூல்கள் தமிழ்மொழியில் எழுதப்படல் வேண்டும் என்ற சிந்தனைக்கு இணங்க, இன்று பல துறைகளிலும் நூல்கள் எழுதும் முயற்சி மேற்கொள்ளப்பட்டு வருகின்றது.

தமிழக அரசின் மொழிக் கொள்கைக்கு இணங்க, தமிழ்மொழி வாயிலாக உயர்கல்வியைக் கற்பிக்கும் பணி மேற்கொள்ளப்பட்டது. எனவே உயர்கல்விக்குரிய விரிவான தரமான பாடநூல்களைத் தக்க பேராசிரியர்களைக் கொண்டு எழுதுவிக்கும் திட்டம் தமிழக அரசினால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம் ஒருங்கிணைத்துச் செயற்படுத்தும் இத்திட்டத்தின் கீழ் மதுரை காமராசர் பல்கலைக்கழகத்தில் வணிகவியல், வேதியியல் முதலான பாடங்கட்குரிய நூல்கள் எழுதப்பட்டு வருகின்றன. இவ்வரிசையில் **வணிகக் கணிதவியல்** என்ற இந்நூல் வெளிவருகின்றது. உயர்கல்வி பயிலும் மாணவர்களின் தேவையை நிறைவு செய்யும் வகையிலும் அவர்களது மொழித்திறனையும், கற்கும் திறனையும் வளர்க்கும் வகையிலும் இந்நூல் அமைகின்றது.

துறைதோறும் துறைதோறும் தமிழுக்கு ஆற்றப்பட்ட தொண்டாகவும் இந்நூல் கருதத்தக்கது.

உயர்கல்விக்குரிய இப்பாடநூல் மாணவர்கட்கு மட்டுமல்லாமல் அறிவுத் தேடலில் ஈடுபடும் பிறருக்கும் பயன்படும் நாளே தமிழ் இன அறிவு வரலாற்றில் பொன்னாளாகும்.

தமிழ்கூறு நல்லுலகம் இம்முயற்சிகளுக்குத் தக்க ஏற்பினை அளிக்கும் என்று நம்புவோமாக!

கு. ஆளுடையபிள்ளை.

முன்னுரை

கணிதம் அறிவியல்களின் அரசி என்று கூறிக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளையில், தற்சமயம் கலைப்பாடங்களின் அரசன் என்று கூறும் அளவிற்குக் கணிதம் வளர்ந்து விட்டதா? அல்லது கலைப்பாடங்களின் வளர்ச்சி அதிகமாகி விட்டதா? என்று கூறும் அளவிற்குக் கல்வியானது பெருக்கெடுத்து வளர்ந்து விட்டது. வணிகவியலில், கணிதம் பயன்படும் முறைகளைப் பார்க்கும்போது, நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் பெறும் அனுபவத்தைக் கணித வாயிலாக அறிய வாய்ப்புகள் பெருகி வந்துள்ளது தெரிகிறது. அந்த அடிப்படையில் வணிகவியல் பயிலும் மாணவர்களுக்குத் தேவையான அளவு கணித அறிவைக் கொடுக்க வேண்டி இந்நூலை எழுத முற்பட்டோம். தற்போது உள்ள மேல்நிலைப் பாடத்திட்டத்தின் வாயிலாக மாணவர்கள் அடிப்படைக் கணித அறிவு பெற்றுள்ளதைக் கருத்தில் கொண்டும், மேலும் அவர்கள் வணிகக்கணிதம் பற்றிய பாடங்களைத் தெரிந்து கொள்வதற்காகவும் இந்நூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. கணிதத்தில் உள்ள திர்க்கமான முடிவுகளை மட்டும் வணிகவியல் மாணவர்களுக்குப் பயன்படும் வகையிலும், பல்கலைக்கழகங்களின் வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தை ஒருங்கமைத்தும் இந்நூலை எழுதியுள்ளோம். மாணவர் சமுதாயத்திற்கு ஏற்ற, எளிய முறைகளைப் பயன்படுத்தி நூலை வடிவமைத்துள்ளோம். எடுத்துக்காட்டாக முதல்பகுதியில் மடக்கை என்ற பாடத்தை ஆரம்பித்து அதன் பயன்பாடுகளை இறுதிப்பகுதியில் கணக்குகளாகக் கொடுத்துள்ளாம். அதேபோல் மற்ற பகுதியில் உள்ள பாடங்களின் பயன்பாடுகளையும் இறுதிப் பகுதியில் சேர்த்துள்ளோம். ஒரு சில பாடப்பகுதிகளில் அதன் இறுதியிலேயே பயன்பாடுகளைச் சுட்டிக் காட்டியுள்ளோம். நூலை மேலும் செம்மைப்படுத்தக் கூறும் கருத்துக்களை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

வே. திலகராஜன்

சு. கனகவேல் பாண்டியன்

பொருளடக்கம் பக்கம்

1. மடக்கை 1

2. தொடர் 16

3. வரிசை மாற்றங்கள், சேர்வுகள் 35

4. ஈருறுப்புத் தேற்றம் 49

5. கணங்களின் கோட்பாடு 62

6. அணிக்கோவை 86

7. அணிகள் 107

8. வகை நுண்கணிதம் 136

9. நிகழ்தகவு 171

10. கோட்பாட்டுப்பரவல் 203

11. வணிகவியல் கணக்குகள் 233

1. மடக்கை
(Logarithm)

அடுக்குக் குறிகள்

1. $a^m \times a^m = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

5. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

6. $a^{1/2} = \sqrt{a}$

7. $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

மேலே கூறப்பட்ட விதிமுறைகள் நமக்கு நன்கு தெரிந்தவை. இவைகளின் பயன்பாடுகளை வரும் பாடங்களில் கவனிக்கலாம்.

$a^x = N$ எனில் a-ஐ அடிமானம் அல்லது அடிஎண் எனவும் x-ஐ படிக்குறி அல்லது அடுக்குக் குறி எனவும் N-ஐ ஒரு மெய்யெண் எனவும் அழைக்கலாம்.

வரையறை

1. N என்பது ஒரு மிகை மெய்யெண் (N>0), a-என்பது

இன்னொரு மிகை மெய்யெண். மேலும் $a \neq 1$ இப்படி இருக்கும் நிலையில் x எனும் ஒரு மெய்யெண் உருவாகி $a^x = N$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$N = 9,\ a = 3,\ x = 2$ எனில்

$$3^2 = 9$$

2. கொடுத்த அடி எண்ணை ஒட்டி, ஒரு எண்ணின் மடக்கை என்பது அவ்வெண்ணின் மதிப்பைப் பெறுவதற்கு, அவ்வடி எண்ணை எவ்வளவுக்கு உயர்த்த வேண்டும் என்பதைக் காட்டும் படிக்குறியே ஆகும்.

$3^2 = 9$ எனில் $\log_3 9 = 2$ எனில் என மடக்கையைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்.

$2^6 = 64$ எனில் $\log_2 64 = 6$

$10^2 = 100$ எனில் $\log_{10} 100 = 2$

$(1/5)^{-3} = 125 \quad \log_{1/5} 125 = -3$

$3^{-5} = 1/243 \quad \log_3 (1/243) = -5$

குறிப்பு

1) $\log_a 1 = 0$ 2) $\log_a a = 1$

இதில் $a \neq 1$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

$\log_1 1$ தேறப் பெறாத அமைப்பு (நிர்ணயம் செய்ய முடியாது)

எடுத்துக்காட்டு 2

$\sqrt{3}$ என்ற அடி எண்ணை ஒட்டி 729-ன் மடக்கை எவ்வளவு?

தீர்வு

வேண்டும் எண் x என்க.

$\therefore \log_{\sqrt{3}} 729 = x$

$(\sqrt{3})^x = 729 \Rightarrow (3^{1/2})^x = 3^{x/2}$

$3^{x/2} = 729 = 3^5$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 5 \qquad \boxed{x = 10}$

$\log_{\sqrt{3}} 729 = 10$

அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

3) $\log_a (M)^N = N \log_a M$

4) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ *(அல்லது)* $\log_a M \cdot \log_b a$

(அடியெண் மாற்றல் விதி)

குறிப்பு

1. $\log_a (MNP \ldots\ldots) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \ldots\ldots\ldots$

2. $\log_a a \cdot \log_a b = 1$ (*அல்லது*) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

எடுத்துக்காட்டு 3

$\log_{10} 2 = 0.3010$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\log_{10}(.0625) = 0.3010$ *மற்றும்* $\log_{10}\left(\dfrac{384}{.015}\right)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

$\log_{10}(.0625)$

$$.0625 = \frac{625}{1000} = \frac{5^4}{10^4} = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\log_{10}(.0625) = \log(½)^4 \quad = 4 \log(½)$$

$$= 4 [\log 1 - \log 2]$$

$$= 4 [0 - .3010]$$

$$\boxed{\log_{10}(.0625) = -1.2040}$$

$$\log_{10}\left(\frac{384}{.075}\right)$$

$$\frac{384}{0.075} = \frac{128 \times 3 \times 1000}{75} = 2^7 . 2^2 = 2^9 \times 10$$

$$\log_{10}\left(\frac{384}{.015}\right) = \log_{10}(2^9 \times 10) = \log_{10}2^9 \times \log_{10}10$$

$$= 9 \log_{10}2 + 1$$

$$= 9 \times (.3010) + 1$$

$$= 2.7090 + 1$$

$$= 3.7090$$

$$\boxed{\log_{10}\left(\frac{384}{.015}\right) = 3.7090}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

$\log_{a_2} a_1 . \log_{a_3} a_2 . \log_{a_4} a_3 ....\log_{a_1} a_n = 1$ **என நிரூபி.**

தீர்வு

$$\text{L.H.S.} = \log_{a_2} a_1 . \log_{a_3} a_2 . \log_{a_4} a_3 ....\log_{a_1} a_n$$

$$\frac{\log_{a_1} a_1}{\log_{a_1} a_2} . \frac{\log_{a_1} a_2}{\log_{a_1} a_3} . \frac{\log_1 a_3}{\log_{a_1} a_4} .... \frac{\log_{a_1} a_{n-1}}{\log_{a_1} a_n} . \log_{a_1} a_n$$

$$= \log_{a_1} a_1$$

$$= 1$$

$$= \text{R.H.S.}$$

பயிற்சி வினாக்கள் :

1. பின்வரும் மடக்கையின் மதிப்புகளைக் காண்க.

a) $\log_{a\sqrt{3}}(.144)$ b) $\log_4(.0625)$ c) $\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}(256)$

2.

a) log 81 = 4 எனில் அடியெண் என்ன?

b) log 8 = 3 எனில் அடியெண் என்ன?

3. a) $\frac{\log\sqrt{27} + \log 8 + \log\sqrt{1000}}{\log 120} = \left(\frac{3}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

b) $\log_{10}\frac{351}{539} + 2\log_{10}\frac{91}{110} - 3.\log_{10}\frac{3.9}{110} = 1$

4. $\log_{10}2 = .3010$, $\log_{10}3 = .4771$ மற்றும் $\log_{10}7 = .8451$ எனில் $\log_{10}588$-ன் மதிப்பு என்ன?

5. $2\log_3 N = P$, $\log_2 2N = q$ மற்றும் $q-p = 4$ எனில் N-ன் மதிப்பு என்ன?

6. $\frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc} = 1$ என நிரூபி.

7. $a^{\log b - \log c} . b^{\log c - \log a} . c^{\log a - \log b} = 1$ என நிரூபி.

8. $\log_a N + \log_{1/a} N = 0$ என நிரூபி.

9. $x^2 + y^2 - 6xy$ எனில் $2\log(x+y) = \log x + \log y + 3\log 2$ என நிரூபி.

10. $x^2 + y^2 - 10xy$ எனில் $2\log(x-y) = 3\log 2 + \log x + \log y$ என நிரூபி.

பொது மடக்கை

இங்கிலாந்தைச் சேர்ந்த ஜான் நேப்பியர் (John Napier) என்ற வானவியல் விஞ்ஞானி கடினமான கணிப்புகளை எளிதாக்க மடக்கை என்ற புதுவழியைக் கண்டுபிடித்தார். அவர் e என்ற விகிதமுறா எண்ணை அடிஎண்ணாகப் பயன்படுத்தினார். e-ன் தோராய மதிப்பு *2.7183*. e-ஐ அடிஎண்ணாக பயன்படுத்தும் மடக்கையை நேப்பியரின் மடக்கை (Napier's Logarithm) என அழைப்பர்.

10-ஐ அடி எண்ணாகப் பன்படுத்தும் மடக்கைக்குப் பொது மடக்கை எனப் பெயர்.

ஒரு மிகை எண்ணின் மடக்கையை எழுதினால் இருசமமாகப் பிரிப்பர். ஒன்று முழுஎண் பாகமாகவும், இன்னொன்று தசம பின்னமாகவும் பிரிப்பர். முழுஎண் பாகத்தை, மடக்கை முழுஎண் (Charectristics) எனவும் தசமபின்னத்தை மடக்கைப் பின்னம் (Mantissa) எனவும் அழைப்பர்.

ஒரு மிகை மெய்யெண்ணின் மடக்கை (மெய்யெண் > 1) யில் மடக்கை முழுஎண், முழு மெய்யெண்ணின் இலக்கங்களை விட ஒன்று குறைவாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

1876-ன் மடக்கை முழுஎண் 3

இங்கு இலக்கம் 4, (4 – 1) = மடக்கை எண்

287.4546-ன் மடக்கை முழுஎண் 2

இங்கு முழு எண்ணின் இலக்கம் 3, (3 – 1) மடக்கை முழுஎண்.

ஒரு மிகை மெய்யெண்ணின் மடக்கை (மெய்யெண் <1) யில் மடக்கை முழுஎண், தசமபுள்ளிக்கு அடுத்தபடியாக எத்தனை பூச்சியங்கள் உள்ளனவோ, அதைவிட ஒன்று கூடுதலாக உள்ள ஒரு குறைஎண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

.000365 என்ற எண்ணில் *3* பூச்சியங்கள் தசமபுள்ளிக்குப் பின்னால் உள்ளது. ஆகையால் அந்த எண்ணின் மடக்கை முழுஎண் $-(3+1) = -4$ என இருக்கும்.

.415 என்ற எண்ணுக்கு மடக்கை முழுஎண் -1

[இங்கு தசமபுள்ளிக்குப் பூச்சியம் எதுவும் இல்லை என்பதை கவனிக்கவும். $-(0+1) = -1$]

பொது மடக்கையின் அமைப்பு ஒரு கண்ணோட்டம்

N என்பது ஒரு மெய்யெண் > 1 என்க.

$1 < N < 10$ என்றிருந்தால் $\log N = 0 +$ தசமபின்னம்

$10 < N < 100$ என்றிருந்தால் $\log N = 1 +$ தசமபின்னம்

$100 < N < 1000$ என்றிருந்தால் $\log N = 2 +$ தசமபின்னம்

$1000<N<10000$ என்றிருந்தால் $\log N = 3 +$ தசமபின்னம்

இப்போது N என்பது ஒரு மெய்யெண் < 1 என்க.

$.1 < N < 1$ என்றிருந்தால் $\log N = -1 +$ தசமபின்னம்

$.01 < N < .1$ என்றிருந்தால் $\log N = -2 +$ தசமபின்னம்

$.001 < N < .01$ என்றிருந்தால் $\log N = -3 +$ தசமபின்னம்

எடுத்துக்காட்டு 3

log 6.89345 = 0 + தசமபின்னம்

log 68.9345 = 1 + தசமபின்னம்

log 689.345 = 2 + தசமபின்னம்

log .689345 = −1 + தசமபின்னம்

log .0689345 = −2 + தசமபின்னம்

log .00689345 = −3 + தசமபின்னம்

எடுத்துக்காட்டு 4

$\frac{56.75 \times 3.728}{42.96}$ -ன் மடக்கையை மதிப்பிடுக. *(மடக்கை அட்டவணையை பயன்படுத்துக).*

தீர்வு

$x = \frac{56.75 \times 3.728}{42.96}$ என்க

$$\log x = \log \left(\frac{56.75 \times 3.728}{42.96} \right)$$

$$= \log 56.75 + \log 3.728 - \log 42.96$$

$$= 1.7540 + 0.5714 - 1.6331$$

$$= 0.6923$$

குறிப்பு : மடக்கை முழுஎண் மிகையாகவும் (+ve) அல்லது குறையாகவும் (–ve) இருக்கலாம். ஆனால் மடக்கைப் பின்னம் மிகையாக (+ve) மட்டுந்தான் இருக்கும்.

எதிர்மடக்கை காணல்

x என்ற எண்ணின் எதிர்மடக்கை என்பது ஒரு எண் y எனில், y-ன் மடக்கை எழுதினால் x என்ற எண் கிடைக்கும். அட்டவணை பார்த்து எதிர்மடக்கைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு **5**

$\dfrac{56.75 \times 3.728}{42.96}$ -ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

$x = \dfrac{56.75 \times 3.728}{42.96}$ என்க

$\log x = \log 56.75 + \log 3.728 - \log 42.96$

$= 1.7540 + 0.5714 - 1.6331$

$= 0.6923$

$\therefore x = \text{anti-log } .6923$

$= 4.923$

$x = \dfrac{56.75 \times 3.728}{42.96} = 4.923$

எடுத்துக்காட்டு **6**

$$\frac{\sqrt[3]{62.75} \times (4.658)^2}{\sqrt[5]{836.2}}$$ -ஐச் சுருக்குக.

தீர்வு

$$x = \frac{(62.75)^{1/3} \,.\, (4.658)^2}{(836.2)^{1/5}}$$

$$\log x = \log (62.75)^{1/3} + \log (4.658)^2 - \log (836.2)^{1/5}$$

$$= \frac{1}{3} \log (62.75) + 2 \log (4.658) - \frac{1}{5} \log (836.2)$$

$$= \frac{1}{3} [1.7976] + 2 [0.6682] - \frac{1}{5} [2.9223]$$

$$= .5992 + 1.3364 - .5845$$

$$= 1.3511$$

$$\therefore x = \text{anti-log } 1.3511 = 22.45$$

$$x = 22.45$$

எடுத்துக்காட்டு **7**

$$\frac{\sqrt[5]{.0125} \times (4.318)^4}{\sqrt[3]{.009684}}$$ -ஐச் சுருக்குக.

தீர்வு

$$x = \frac{\sqrt[5]{.0125} \times (4.318)^4}{\sqrt[3]{.009684}}$$

$$\log x = \log (.0125)^{1/5} + \log (4.378)^4 - (.009684)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{5} \log (.0125) + 4 \log (4.378) - \frac{1}{3} \log (.009684)$$

$$= \frac{1}{5} [\bar{2}.7976] + 4 \times .6413 - \frac{1}{5} [\bar{3}.9861]$$

$$= \frac{1}{5} [-2 + .0969] + 2.5652 - \frac{1}{3} [-3 + .9861]$$

$$= \frac{1}{5} [-2 - 3 + 3 + .0969] + 2.5652 - \left[-1 + \frac{.9861}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{5} [-5 + 3.0969] + 2.5652 + 1 - \frac{.9861}{3}$$

$$= -1 + .6194 + 2.5652 + 1 - .3287$$

$$= 2.8559$$

$$x = \text{anti-log}\ (2.8559)$$

$$x = 717.6$$

எடுத்துக்காட்டு 8

$\log_{10} 2$, 0.30103, $\log_{10} 7$ = 0.84570 என்று கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$\sqrt{\frac{4}{343}}$ ன் மடக்கை, 1000 அடிஎண்ணாக இருந்தால், மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

$$x = \log_{1000}\sqrt{\frac{4}{343}} = \log_{1000}\left(\frac{4}{343}\right)^{½}$$

$$= ½ \log_{1000}\left(\frac{4}{343}\right) = \frac{½ \log_{10}\left(\frac{4}{343}\right)}{\log_{10}1000}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\log_{10}\left(\frac{2^2}{7^3}\right)}{\log_{10}10^3}\right] = \frac{½ [2 \log 2 - 3 \log 7]}{3 \log_{10}10}$$

$$= \frac{1}{6}\left[2 \times 0.30103 - 3 \times 0.8457\right] \quad \{\therefore \log_{10}10 = 1\}$$

$$= -.3222$$

எடுத்துக்காட்டு 9

பாலு என்பர் ரூ.1000-த்தைத் தேசிய சேமிப்பு நிதியில் முதலீடு செய்து 12 ஆண்டுகள் கழித்து ரூ.1500-ஐப் பெறுகிறார், என்றால் அவருக்குக் கிடைக்கும் கூட்டுவட்டி விகிதம் கண்டுபிடி.

தீர்வு

கூட்டுவட்டி, வாய்பாடு $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = A$

இங்கு $A = 1500, \quad P = 1000, \quad n = 12, \quad r = ?$

$$1000\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} = 1500$$

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} = \frac{1500}{1000} = \frac{3}{2}$$

இருபுறமும் மடக்கையைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} = \log \frac{3}{2}$$

$$12 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 3 - \log 2$$

$$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{.4771 - .3010}{12} = 0.0147$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1.035 - 1 = .035$$

$$r = .035 \times 100 = 3.5$$

வட்டி விகிதம் = 3.5%

பயிற்சி வினாக்கள்

1. மதிப்பு காண்க. $\sqrt{\dfrac{26.54 \times .004321}{.00001357}}$

2. $\dfrac{(08.23)^3 \times (0.00843)^3 \times (0.4623)}{(2112.3) \times (2.184)^5 \times (0.01)^2}$

3. $\dfrac{2.389 \times .004679}{0.00556 \times 52.14}$

4. $\sqrt[7]{\dfrac{1}{.8176 \times 36.21}}$

5. ஒரு நகரத்தின் ஜனத்தொகை ஆண்டிற்கு 4% கூடுகிறது. அந்த நகரத்தின் ஜனத்தொகை **1985**-ல் **25** லட்சமாக இருந்தது. **1995**-முடிவில் ஜனத்தொகை தோராயமாக எவ்வளவு உயர்ந்திருக்கும்?

1986-ஆரம்பத்தில் நகரத்தின் ஜனத்தொகை லட்சம் $= 25 \times \frac{4}{100}$

1986-முடிவில் நகரத்தின் எதிர்பார்க்கும் ஜனத்தொகை $= 25 + 25 \times \frac{4}{100}$

$$= 25\left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

1987 முடிவில் எதிர்பார்க்கும் ஜனத்தொகை $= 25\left(1 + \frac{4}{100}\right) + 25\left(1 + \frac{4}{100}\right)$

$$= 25\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$$

∴ *1995*ன் முடிவில் எதிர்பார்க்கும் ஜனத்தொகை $= 25\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10}$

$x = 25\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10}$ என்க

$$= 25\left(\frac{104}{100}\right)^{10}$$

$$\log x = \log\left[25 \times \left(\frac{104}{100}\right)^{10}\right]$$

$$= \log 25 + 10\,[\log 104 - \log 100]$$

$= 36.95$ லட்சம் (தோராயமாக)

∴ தோராயமாக ஜனத்தொகை பெருக்கம் $= 36.95 - 25$

$= 11.95$ லட்சம்.

2. தொடர்
(Progression)

ஒரு தொடர்ச்சியில் எழுதப்படும் எண்களில் ஏதேனும் ஒரு விதிக்கு உட்பட்டு இருப்பின் அவைகளைத் 'தொடர்' என்ற சொல்லில் அழைக்கலாம்.

(எ.கா.) 2, 5, 8, 11, 12, ...

இந்தத் தொடர்ச்சியில் அடுத்தடுத்து 3 கூடுதலாக உள்ளது.

3, 6, 12, 24, ...

இந்தத் தொடர்ச்சியில் எண்கள் அடுத்தடுத்து 2ஆல் பெருக்கப்பட்டுள்ளது.

8, 2, –4, –10, –16, ...

இங்கு அடுத்தடுத்து எண்கள் 6 குறைவாக எழுதப்பட்டுள்ளன.

வரையறைக் கூட்டுத்தொடர்

ஒரு தொடரில் உள்ள எண்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவால், கூட்டப்பட்டோ, குறைக்கப்பட்டோ இருப்பின் அந்த எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன எனக் கூறலாம். குறிப்பிட்ட அளவிற்குப் 'பொது வேறுபாடு' எனப்பெயர்.

கூட்டுத் தொடரின் பொது அமைப்பு

a, a+d, a+2d, a+3d, ...

இதில் a முதல் உறுப்பு, d பொது வேறுபாடு. இந்தத் தொடரின் பொது உறுப்பு $a + \overline{n-1}d$ எனலாம். அதாவது அந்தத் தொடரின் n-வது உறுப்பு (T_n).

$$T_n = a + (\overline{n-1})d$$ [n-வது உறுப்பிற்கு வாய்ப்பாடு]

எடுத்துக்காட்டு 1

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

$$a = 2; \quad d = 3; \quad a + d = 2 + 3 = 5$$

$$a + 2d = 2 + 2 \times 3 = 8$$

$$a + 3d = 2 + 3 \times 3 = 11$$

$$a + \overline{(n-1)}d = a + \overline{(n-1)}\ 3 = 3n + 2 - 3 = 3n - 1$$

$$\boxed{T_n = 3n - 1}$$

$$T_1 = 3 . 1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$T_2 = 3 . 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$T_3 = 3 . 3 - 1 = 9 - 1 = 8$$

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் *4*-வது உறுப்பு *13* எனவும், *7*-வது உறுப்பு *22* எனவும் இருந்தால் அந்தத் தொடரினை எழுதுக.

n-வது உறுப்பு $T_n = a + \overline{(n-1)}d$ *(வாய்பாடு)*

$$T_4 = a + \overline{4 - 1} . d = 13$$

$$\boxed{a + 3d = 13} \quad (1)$$

$$T_7 = a + \overline{7 - 1} . d = 22$$

$$\boxed{a + 6d = 22} \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 6d - 3d = 22 - 13 = 9$$

$$3d = 9$$

$$\boxed{d = 3}$$

d-யின் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட,

$a + 3 . 3 = 13$

$a + 9 = 13$

$a = 4$

∴ கூட்டுத்தொடர்

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 9-வது உறுப்பு 465 ஆகவும் 20-வது உறுப்பு 388 ஆகவும் இருந்தால் 40-வது உறுப்பு என்ன?

$T_n = a + (\overline{n-1})d$ *(வாய்பாடு)*

$T_9 = a + \overline{9 - 1} . d = 465$

$\boxed{a + 8d = 465}$ (1)

$T_{20} = a + \overline{20 - 1} . d = 388$

$\boxed{a + 19d = 388}$ (2)

(2) – (1) ⇒ $19d - 8d = 388 - 465$

$7d = -77$

$\boxed{d = -11}$

d-யின் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட,

$a + 8 (-11) = 465$

$a - 88 = 465$

$\therefore\ a = 465 + 88$

$$\boxed{a = 553}$$

40-வது உறுப்பு = $T_{40} = a + \overline{40 - 1}\ .\ d$

$= 553 + 39\ (-11)$

$= 553 - 429 = 124$

$$\boxed{T_{40} = 124}$$

கூட்டுத்தொடரில் உள்ள n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$a, a+d, a+2d, \ldots, a + \overline{n-1}\ .\ d$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடரில் உள்ள n உறுப்புகள் என்க.

S_n என்பது அவைகளின் கூட்டுத்தொகை என வைத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore\ S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + a + (n-1)d$

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left(2a + \overline{(n-1)}d\right)}$ என்பது வாய்பாடு ஆகும்.

$l = a + \overline{n-1}\ .\ d$ என்பது n-வது உறுப்பு எனில்

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + \overline{(n-1)}d\right] = \frac{n}{2}\left[a + (a + \overline{n-1}\ .\ d)\right]$$

அதாவது,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\text{ [முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு]}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு தொடரில் n-வது உறுப்பு (4n–1) எனில், அது ஒரு கூட்டுத்தொடர் என நிரூபி. மேலும் n-உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை என்ன என்று காண்க.

தீர்வு

$T_n = 4n - 1$ n-வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$T_1 = 4 . 1 - 1 = 3$ முதல் உறுப்பாகும்.

(அ-து.) $a = 3$

$T_2 = 4 . 2 - 1 = 7,$

$T_3 = 4 . 3 - 1 = 11$

$T_2 - T_1 = 7 - 3 = 4$

$T_3 - T_2 = 11 - 7 = 4$

அடுத்துள்ள உறுப்புகளின் வித்தியாசம் ஒரே எண்ணாக (4) உள்ளது. ஆகவே இத்தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் என அறியலாம்.

$a = 3$ $d = 4$

n-உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை =

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (\overline{n-1})d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2 \times 3 + (\overline{n-1}) \, . \, 4\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[6 + 4n - 4\right]$$

$$= n\left[3 + 2n - 2\right]$$

$$= n\left[2n + 1\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழ்க்கண்ட கூட்டுத்தொடரின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

8, 13 , 18, 23, ... 23 உறுப்புகள் வரை.

தீர்வு

$a = 8, \quad d = 5 \qquad S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (\overline{n-1})d\right]$

$$S_{23} = \frac{23}{2}\left[2 \times 8 + (\overline{23-1}) \times 5\right]$$

$$= \frac{23}{2}\left[16 + 22 \times 5\right]$$

$$= 23\left[8 + 11 \times 5\right] = 23\left[8 + 55\right]$$

$$= 23 \times 63 = 1449.$$

எடுத்துக்காட்டு 3

***200**க்கும் **400**க்கும் இடையிலுள்ள எண்களில் **7**ஆல் வகுக்கப்படும் எண்களைக் கூட்டினால் வரும் தொகை எவ்வளவு?*

தீர்வு

***200**க்கு அருகாமையில் **7**-ஆல் வகுபடும் எண் **203**, **400**க்கு அருகாமையில் **7**-ஆல் வகுபடும் எண் **399**.*

$T_n = a + \overline{n-1} \, . \, d$

$T_n = 399 \qquad a = 203, \qquad d = 7 \qquad n = ?$

$$399 = 203 + \overline{(n-1)} \, . \, 7$$

$\div 7, \qquad 57 = 29 + (n-1)$

$$n = 29$$

$$\therefore \quad S_{29} = \frac{29}{2} [203 + 399] = \frac{n}{2} [a + l]$$

$$= 8729$$

எடுத்துக்காட்டு 4

1 + 5 + 9 . . . . . என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகை **190** என இருக்க வேண்டுமானால் எத்தனை உறுப்புக்களை நாம் கூட்ட வேண்டும்.

தீர்வு

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + \overline{(n-1)} \, . \, d]$$

$a = 1, \qquad d = 4, \qquad S_n = 190, \qquad n = ?$

$$190 = \frac{n}{2} \left[2 \times 1 + \overline{(n-1)} \,.\, 4\right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[2 + 4n - 4\right]$$

$$= \frac{n}{2} \left[4n - 2\right]$$

$$190 = n\left[\,2n - 1\,\right]$$

$2n^2 - n - 190 = 0$

$(2n + 19)\ (n - 10) = 0$

(அ.து.) $n - 10 = 0$ *அல்லது* $2n + 19 = 0$

(அ-து) $n = 10$ *அல்லது* $\frac{-19}{2}$

n குறை எண்ணாக இருக்காது.

$\therefore \boxed{n = 10}$

ஆகவே *10* எண்களைத் தொடரில் கூட்ட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு **5**

2, 3½, 5, 6½, 8 . . . . . 20 உறுப்பு வரை கூட்டுத்தொகை என்ன?

தீர்வு

$a = 2, \quad d = 1\frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + \overline{(n-1)} . d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 2 + \overline{(20-1)} . (1½)]$$

$$= 10 \left[4 + 19 \times \frac{3}{2}\right]$$

$$S_n = 325$$

எடுத்துக்காட்டு **6**

ஒரு தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $2n^2 + 3n$ எனில், அந்தத் தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் என நிரூபி.

n உறுப்புக்களின் கூடுதல் $S_n = 2n^2 + 3n$
(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

(n–1) உறுப்புக்களின் கூடுதல் $= S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$

$$= 2 [n^2 - 2n + 1] + 3n - 3$$

$$\boxed{S_{n-1} = 2n^2 - n - 1}$$

∴ n-வது உறுப்பு $= T_n = S_n - S_{n-1}$

$$= 2n^2 + 3n - (2n^2 - n - 1)$$

$$\boxed{T_n = 4n + 1}$$

$T_1 = 5$, $T_2 = 9$, $T_3 = 13$, $T_1 = 17$ . . . . .

தொடரில் உள்ள எண்கள் 5, 9, 13, 17, ...

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் என்பதை அறியலாம்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் 5வது உறுப்பு 41 ஆகவும், 11வது உறுப்பு 171 ஆகவும் இருந்தால் அந்தத் தொடரைக் கண்டுபிடி. மேலும் முதல் 30 உறுப்புக்கள் வரையிலான கூட்டுத் தொகையினைக் காணவும்.

2. ஒரு தொடரில் உள்ள nவது உறுப்பு 3n + 2 எனில், அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் என நிரூபி.

3. 202க்கும் 802க்கும் இடையே உள்ள ஒற்றைப்படை எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டுபிடி.

4. 600க்கும் 1000க்கும் இடையே உள்ள முழுஎண்களில் 17-ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

5. 500க்கும் 900க்கும் இடையே உள்ள எண்களின் 13-ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

6. மூன்று இலக்கம் உடைய எண்களில் 19-ன் மடங்குகள் உள்ள எல்லா எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

7. –9, –6, –3, . . . என்ற தொடரில் எத்தனை எண்களை எடுத்துக் கூட்டினால் 90 கிடைக்கும்?

8. 3 + 6 + 9 + . . . என்ற தொடரில் எத்தனை எண்களை எடுத்துக் கூட்டினால், கூட்டுத்தொகை 1000த்தை விட கூடுதலாக இருக்கும்?

9. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 27 ஆகவும் பெருக்கற்பலன் 231 ஆகவும் இருந்தால் அந்த எண்கள் யாவை?

10. ஒரு தொடரில் உள்ள n-வது உறுப்பு 3n + 7 எனில் முதல் 20 எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

11. S_1, S_2, S_3 என்பன ஒரு கூட்டுத்தொடரில் உள்ள முதல் n, 2n, 3n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை எனில் $S_1 = 3(S_2 - S_1)$ என நிரூபி.

12. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் முதல் p உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை q எனவும் முதல் q உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை p எனவும் இருந்தால், (p+q) உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காணவும்.

13. ஒரு அதிகாரி மாதம் ரூபாய் *2500* சம்பளத்தில் வேலையில் சேருகிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவருடைய சம்பளத்தில் *50* ரூபாய் கூடுந்தொகை (increment) கிடைக்கிறது. அவர் ஒரு ரூபாய்க்கு *10* பைசா வீதம் சேமநலநிதியில் ஒவ்வொரு மாதமும் சம்பளத்திலிருந்து சேமிக்கின்றார். *25* வருடத்திற்குப் பின் அவருக்குக் கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு?

14. ஒருவர் தன்னுடைய ரூபாய் *3600* கடனை *40* தவணைகளாக திருப்பிச் செலுத்த ஒத்துக்கொண்டு, தவணை முறை ஒரு கூட்டுத்தொடரில் அமையுமாறு ஏற்பாடு செய்து செலுத்தி வந்தார். *30*வது தவணை கட்டியவுடன் அவர் இறந்து விட்டார். அப்போது மூன்றில் ஒருபங்கு கடன் மீதி செலுத்த வேண்டிய நிலையில் இருந்தது. அப்படியானால் அவர் முதல் தவணையாக செலுத்திய பணம் எவ்வளவு?

15. ஒருவர் ரூபாய் *1200* அசலுக்கு வட்டி ரூபாய் *168* என முடிவு செய்து, *12* தவணைகளாக திருப்பிச் செலுத்த ஒத்துக்கொள்கிறார். அப்போது அவர் ஒரு தவணைக்கு அடுத்ததவணை செலுத்தும்போது ரூபாய் *20* குறைவாக செலுத்துகிறார் என்றால் முதல் தவணைத்தொகை எவ்வளவு எனக் கண்டுபிடி.

16. A என்பவர் ஒரு வேலையை முடிக்க தினசரி ரூ.*18* கூலி என நிர்ணயித்து ஒப்பந்தம் செய்கிறார். அவருடைய நண்பர் B. அதே வேலையை முடிக்க முதல் நாள் ரூ.*12* எனவும் இரண்டாம் நாள் ரூ.*15* எனவும் மூன்றாம் நாள் ரூ.*18* எனவும் கூட்டுத்தொடரில் அமையும்படி ஒப்பந்தம் செய்கிறார். இவர்கள் இருவரும் மொத்தத்தில் ஒரே செலவு செய்து வேலையை முடிக்கின்றனர். இருவரில் B சீக்கிரமாக வேலையை முடிக்கிறார் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

பெருக்குத்தொடர்

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புக்கள் ஒரே விகிதத்தில் அதிகரித்துக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ செல்லுமாயின், அத்தொடர் பெருக்குத்தொடர் என அழைக்கப்படும்.

ஒரு பெருக்குத் தொடரில் எந்த இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களை எடுத்து விகிதம் கண்டால் அது மாறாமலிருக்குமோ மாறாத அவ்விகிதம் **பொதுவிகிதம்** எனப்படும்.

குறிப்ப

பொது விகிதம் மிகையாகவோ, குறையாகவோ, முழுஎண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

(1) 2, 6, 18, 54, ... பொது விகிதம் 3.

(2) 1, –2, 4, –8, 16, ... பொது விகிதம் –2.

(3) 6, 2, 2/3, 2/9, ... பொது விகிதம் 1/3.

பொது அமைப்பு

பெருக்குத் தொடரின் பொது அமைப்பு

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3, \ldots$$

nவது உறுப்பின் பொது அமைப்பு ar^{n-1}

nவது உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$ (வாய்பாடு)

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு பெருக்குத்தொடரில் 5வது உறுப்பு *81*, எனவும் 2வது உறுப்பு *24* எனவும் இருந்தால், தொடரைக் கண்டுபிடி.

$T_n = ar^{n-1}$ வாய்பாடு

தீர்வு

$T_5 = ar^{5-1}$ $\quad$ $\boxed{ar^4 = 81}$ $\quad$ (1)

$T_2 = ar^{2-1}$ $\quad$ $\boxed{ar = 24}$ $\quad$ (2)

$$\frac{ar^4}{ar} = r^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$\boxed{r = \frac{3}{2}}$$

(2) ல் பிரதியிட, $a \cdot \frac{3}{2} = 24$

$$a = \frac{2 \times 24^{8}}{3} = 24$$

$$\boxed{a = 16}$$

முதல் உறுப்பு 16, பொதுவிகிதம் r = 3/2

∴ தொடர் 16, 24, 36, 54, ... என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு பெருக்குத் தொடரில் உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 9¼. பெருக்குத்தொகை 27 எனில் தொடரைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

பெருக்குத்தொடரில், a/r, a, ar என மூன்று உறுப்புகள் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{a}{r} + a + ar = 9\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 27 \quad (2)$$

$$a^3 = 27$$

$$\boxed{a = 3}$$

(1)-ல் பிரதியிட $\frac{3}{r} + 3 + 3r = \frac{37}{4}$

$$3\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{37}{4}$$

$$12(1 + r + r^2) = 37r$$

$$12r^2 - 25r + 12 = 0$$

$$12r^2 - 16r - 9r + 12 = 0$$

$4r(3r - 4) - 3(3r - 4) = 0$ $\quad \boxed{(4r - 3)(3r - 4) = 0}$

$4r - 3 = 0$ அல்லது $3r - 4 = 0$

$\boxed{r = 3/4}$ அல்லது $\boxed{r = 4/3}$

பொது விகிதம் ¾ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$\frac{a}{r} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

$$a = 3 \qquad ar = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

தொடரில் உள்ள மூன்று எண்கள் 4, 3, 9/4 என இருக்கும்.

(பொது விகிதம் 4/3 என எடுத்தால் 9/4, 3, 4 என அமையும்).

பெருக்குத் தொடரில் உள்ள n உறுப்புகளின் கூடுதல்

பெருக்குத் தொடர் $a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}} \ (r < 1) \quad \text{அல்லது} \quad \boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}} \ (r > 1)$$

$S_\infty = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots \text{to } \infty$ (கந்தழிவரைக் கூட்டினால்)

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}} \quad (r < 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 4

கீழ்க்கண்ட n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்.

$$3,\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3},\ \ldots\ldots$$

தீர்வு

$$a = 3, \quad r = \frac{2}{3}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{3\left(1-(2/3)\right)^n}{1-2/3} = \frac{3\left(1-(1/3)\right)^n}{(1/3)}$$

$$= 9\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 5

$1 + 3 + 3^2 + 3^2 + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் குறைந்தது எத்தனை உறுப்புக்களை எடுத்துக் கூட்டினால், கூட்டுத்தொகை 2000 விட கூடும்?

தீர்வு

$$a = 1, \quad r = 3 > 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{1(3^n-1)}{3-1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{3^n-1}{2}}$$

க. படி. $\dfrac{3^n-1}{2} > 2000$

$$3^n - 1 > 4000$$

$$3^n > 4001$$

இருபக்கமும் மடக்கை மதிப்பைக் கண்டால்

$$\log 3^n > \log 4001$$

$$n \log 3 > \log 4001$$

$$n > \frac{\log 4001}{\log 3}$$

(அ.து) $$n > \frac{3.6022}{4771}$$

$$n > 7.5$$

n என்பது முழுஎண்ணாக இருக்க வேண்டி இருப்பதால் n-ன் குறைந்த மதிப்பு *8* எனலாம். ஆகவே குறைந்தது *8* உறுப்புக்களை எடுத்துக் கூட்டினால் *2000*ஐக் கூடும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

கீழ்க்கண்ட தொடரில் உள்ள n-உறுப்புக்களைக் கூட்டி எழுதுக.

தீர்வு

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots\ldots$$

$$= 5(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots)$$

$$S_n = \frac{5}{9}\left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10^1-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10^1+10^2+\ldots+10^n) - (1+1+\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{50}{81}\,(10^n - 1) - \frac{5}{9}\,n$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பின்வரும் பெருக்குத்தொடரில் கந்தழிவரை உள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை கண்டுபிடி.

(a) $\frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots$ to ∞

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ to ∞

(c) $6 + 3 + \frac{3}{2} + \ldots\ldots$ to ∞

2. ஒரு பெருக்குத்தொடரில் கந்தழிவரை உள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 4/3, முதல் உறுப்பு 3/4 எனில் வித்தியாசத்தைக் காண்க.

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் உறுப்புக்கள் வரையில் உள்ள கூட்டுத்தொகைக்கும் கந்தழிவரை உள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும் உள்ள வித்தியாசம் $\frac{1}{5000}$ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் ன் குறைந்த மதிப்பு எதை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

4. x, y, z என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடரில் உள்ள l-வது, mவது, nவது உறுப்புக்களாக உள்ளன. அப்படி எனில்

$(m - n) \log x + (n - l) \log y + (l - m) \log z = 0$ என நிரூபி.

5. ஒரு பெருக்குத்தொடரில் உள்ள மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 7 எனவும், அந்த உறுப்புக்களின் தலைகீழ் மதிப்புகளை கூட்டினால் 7/4 எனவும் கிடைக்கின்றது. பெருக்குத் தொடரைக் காண்க.

6. பெருக்குத்தொடரில் உள்ள n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை என்ன?

(1) $3 + 33 + 333 + \ldots\ldots n$ வரை.

(2) $\frac{5}{10} + \frac{55}{100} + \frac{555}{1000} + \ldots\ldots n$ வரை.

7. $S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots\ldots + 4^n$ என உள்ளது. $S_n > 1500$ எனில் n-ன் குறைந்த மதிப்பு என்ன?

8. ஒரு பெருக்குத்தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 26 ஆகவும், பெருக்குத்தொகை 216 ஆகவும் இருந்தால் தொடரினைக் காண்க.

9. கடல் மட்டத்தில் காற்றின் அழுத்தம் 750 மிமீ ஆக உள்ளது. 80 மீட்டர் உயரத்தில் 600 மிமீ ஆகவும், 1700 மீ உயரத்தில் 480 மிமீ ஆகவும் உள்ளது. 9350 மீ உயரத்தில் காற்றின் அழுத்தம் என்னவாய் இருக்கும்.

10. ஒரு பெருக்குத்தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S ஆகவும், பெருக்குத்தொகை P ஆகவும், உறுப்புக்களின் தலைகீழ்மதிப்புகளின் கூடுதல் R ஆகவும் இருந்தால்

$$P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$$ என நிரூபி.

3. வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும் (Permutations and Combinations)

காம்பினேட்டரிஸ் (Combinatries) என்ற கோட்பாடானது நிகழ்தகவு கோட்பாடு மற்றும் வரைபடக் கோட்பாடுகளில் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. வரிசை மாற்றம், சேர்வு ஆகியவைகள் காம்பினேட்டரிஸ்-ன் முக்கிய அம்சங்களாகும்.

வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations)

நமது அன்றாடச் செயல்கள் பலவற்றினுள், வரிசைப் படுத்துதல் என்ற செயலைச் செய்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, மாணவர்களை வகுப்பறையில் உட்காரவைத்தல், ஏடுகளை அலமாரியில் அடுக்குதல் போன்றவைகளாகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருட்களில் சிலவற்றையோ அல்லது அனைத்தையுமோ எடுத்து வரிசைப்படுத்தும் பொழுது ஒவ்வொரு வரிசைப்படுத்துதலும் ஒரு வரிசை மாற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களை வரிசைப்படுத்தும் பொழுது AB, BA, AC, CA, BC, CB என்று ஆறுவழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு வரிசைமாற்றம் எனப்படுகிறது.

A, B, C . . . . . என்ற "n" பொருட்களில் "r" பொருட்களை தேர்வு செய்து அவைகளை முறையான வரிசையில் வரிசைப் படுத்தினால் அதை வரிசைமாற்றம் என்கிறோம். அதன் எண்ணிக்கையை ^nP_r என்கிறோம்.

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

A, B, C என்ற மூன்று எழுத்துக்களை i) மும்மூன்றாக எடுக்கும்போது ii) இரண்டிரண்டாக எடுக்கும்போது iii) ஒவ்வொன்றாக எடுக்கும்போது வரும் வரிசை மாற்றங்கள் யாவை?

தீர்வு

i) ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA.

ii) AB, AC, BC, BA, CA, CB.

iii) A, B, C.

எண்ணிக்கையின் ஓர் அடிப்படைத் தத்துவம்

ஒரு செயலைத் தனித்து m வழிகளிலும், மற்றொரு செயலைத் தனித்து n வழிகளிலும் செய்ய முடியுமானால், இரு செயல்களையும் ஒரே சமயத்தில் தேர்வு செய்யும் வழிகள் mn ஆகும். இதனை இரு செயல்களுக்கு மேலும் தொடரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2

A எனும் ஊரிலிருந்து B எனும் ஊருக்கு நான்கு வழிகளிலும், B எனும் ஊரிலிருந்து C எனும் ஊருக்கு ஐந்து வழிகளிலும் செல்லலாம் எனில், ஒருவர் எத்தனை விதமான வழிகளில் Aயிலிருந்து Cக்கு B வழியாகச் செல்லலாம்.

தீர்வு

A-யிலிருந்து Bக்கு செல்ல – 4 வழிகள்

B-யிலிருந்து Cக்கு செல்ல – 5 வழிகள்

∴ A-யிலிருந்து Cக்கு B வழியாகச் செல்ல = 4 x 5

= 20 வழிகள்

எடுத்துக்காட்டு 3

$^7P_3$-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$^7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

எடுத்துக்காட்டு 4

$^{10}P_4$-ன் மதிப்பை இரு வழிகளில் காண்க.

தீர்வு

$$\text{i) } ^{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 5040$$

$$\text{ii) } ^{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

$$= 5040$$

எடுத்துக்காட்டு 5

$^5P_r = 60$ எனில் "r"- ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$^5P_r = 60$$

$$^5P_r = 5 \times 4 \times 3$$

$$^5P_r = {}^5P_3$$

$$\therefore \; r = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 6

$n(n-1) = 30$ எனில் 'n'-ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

$$n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n-5) = 0$$

$$n = 6 \text{ (or) } -5$$

$$\therefore \; n = 6$$

தேற்றம்

n பொருட்களில் n_1 விதமான முதல்வகையும் (ஒரே மாதிரியான) n_2 விதமான இரண்டாவது வகையும், இவ்வாறு n_k விதமான K வகையும் இருந்தால் ஏற்படும் வரிசை மாற்றம்

$$= \frac{n!}{n_1! \; n_2! \; \ldots \ldots \; n_k!}$$

எடுத்துக்காட்டு 7

"COMMERCE" என்ற வார்த்தையை எத்தனை விதமான வழிகளில் வரிசைமாற்றம் செய்யலாம்.

எழுத்து	எண்ணம்
C	2
O	1
M	2
E	2
R	1

$$\text{வரிசை மாற்றம்} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!}$$

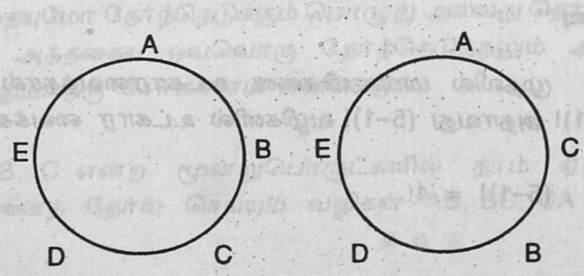
$$= \frac{8!}{2!\ 1!\ 2!\ 2!\ 1!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1}$$

$$= 5040$$

வட்ட வரிசை மாற்றம் (Circular Permutations)

வட்ட வரிசை மாற்றத்தில் பொருட்கள் வட்ட வடிவில் வரிசை மாற்றம் செய்யப்படும். வட்ட வடிவில் முதல் இடம் கடைசி இடம் என்பது கிடையாது.



மேலே உள்ள படங்களில் உள்ள இருவரிசைகளும் ஒன்றல்ல. படத்தில் வரிசை முறை மாறுகிறது. அதாவது வட்டவரிசை மாற்றத்தில் முதலில் பொறுத்தப்பட்ட பொருளின் நிலையைப் பொறுத்து மற்ற பொருட்களின் நிலை அமையும்.

n பொருட்களின் வட்டவரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = (n–1)! ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

ஒரு விருந்தில் 6 பேர் வட்டவடிவில் அமரும் விதம் எத்தனை எனக் காண்க.

தீர்வு

6 பேர் வட்ட வரிசை மாற்றம் செய்யும்

மொத்த வழி $= (6-1)!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

எடுத்துக்காட்டு 9

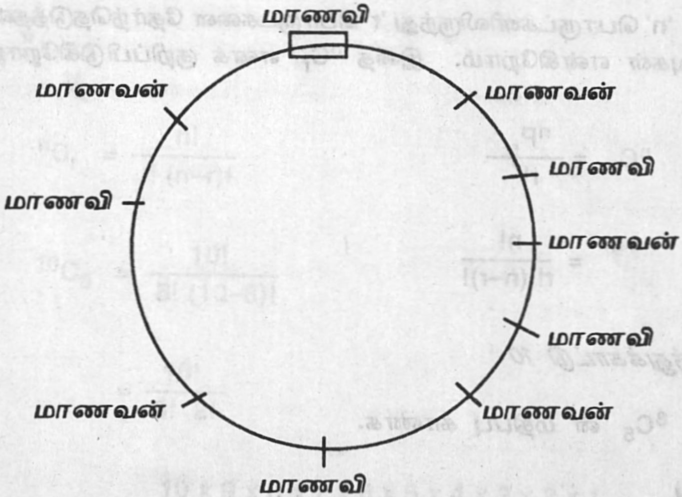
எத்தனை வழிகளில் 5 மாணவிகளையும் 5 மாணவர் களையும் வட்டவடிவில் அமரச் செய்யலாம். எந்த இரு மாணவிகளும் அடுத்தடுத்து உட்காரக் கூடாது.

தீர்வு

முதலில் மாணவிகளை உட்காரவைத்தால் அவர்களை (n–1)! அதாவது (5–1)! வழிகளில் உட்கார வைக்கலாம்.

$(5-1)! = 4!$

இப்போது மாணவர்களுக்கான இடங்கள் முடிவானவை. அதாவது 5! வழிகளில் மாணவர்களை உட்கார வைக்கலாம்.



மொத்த வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் = 4! x 5!

= 24 x 120

= 2880 வழிகள்

சேர்வுகள் (Combinations)

கொடுக்கப்பட்ட பொருட்களில் சிலவற்றையோ அல்லது அனைத்தையுமோ தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது அல்லது தொகுக்கும் பொழுது அத்தகைய ஒவ்வொரு தேர்ந்தெடுத்தலும் அல்லது தொகுத்தலும் ஒரு சேர்மானம் எனப்படும்.

A, B, C என்ற மூன்றுபொருட்களில் நாம் ஏதாவது இரண்டினைத் தேர்வு செய்யும் வழிகள் AB, BC, CA ஆகும்.

இதில் நாம் தேர்வு செய்யும் வரிசையை கணக்கில் கொள்வதில்லை. அதாவது AB, BA என்பன ஒரேவகைத் தேர்வுகள் ஆகும்.

'n' பொருட்களிலிருந்து 'r' பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்தலை சேர்வுகள் என்கிறோம். இதை $^{n}C_{r}$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$^{n}C_{r} = \frac{^{n}P_{r}}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 10

$^{8}C_{5}$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$^{8}C_{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!}$$

$$= \frac{8!}{5!\;3!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)\,(3 \times 2 \times 1)}$$

$$= 56$$

$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ என்பதை $^{n}C_{n-r}$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11

$^{10}C_8$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$^{n}C_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$^{10}C_8 = \frac{10!}{8!\,(10-8)!}$$

$$= \frac{10!}{8!\;\;2!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)\,(2 \times 1)}$$

$$= 45$$

$$^{n}C_r = {}^{n}C_{n-r}$$

$$^{10}C_8 = {}^{10}C_{10-8}$$

$$= {}^{10}C_2$$

$$= \frac{10 \times 9}{2}$$

$$= 45$$

எடுத்துக்காட்டு 12

$^nC_0 = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு

$$^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$^nC_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!}$$

$$= \frac{n!}{n!}$$

$$= 1$$

எடுத்துக்காட்டு 13

$^nC_5 = {}^nC_9$ எனில் n-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$^nC_r = {}^nC_{n-r}$ என்ற அடிப்படையில் தீர்வு காணப்படுகிறது.

$^nC_5 = {}^nC_9$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே $^nC_5 = {}^nC_{n-5}$

$\therefore\ ^nC_{n-5} = {}^nC_9$

$n-5 = 9$

$\therefore\ n = 14$

எடுத்துக்காட்டு 14

$\left(\frac{9}{x}\right) = \left(\frac{9}{x-3}\right)$ எனில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\left(\frac{9}{x}\right) = {}^9C_x$$

$$\left(\frac{9}{x-3}\right) = {}^9C_{x-3}$$

$$^9C_x = {}^9C_{x-3}$$

$$\therefore\ x + x - 3 = 9 \qquad \left[\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r} \quad \therefore n = r + n - r\right]$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

எடுத்துக்காட்டு 15

$^nC_3 = {}^nC_5$ எனில் 2^nC_2 -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$^nC_3 = {}^nC_5$$

$$^nC_{n-3} = {}^nC_5$$

$$n - 3 = 5$$

$$n = 8$$

$$\therefore\ 2^nC_2 \Rightarrow {}^{16}C_2 = \frac{16 \times 15}{2 \times 1}$$

$$= 120$$

எடுத்துக்காட்டு 16

10 வினாக்கள் உள்ள ஒரு வணிகவியல் வினாத்தாள் பகுதி அ, பகுதி ஆ என இரண்டு பகுதிகளை உடையது. பகுதி அ-ல் ஐந்து வினாக்களும், பகுதி ஆ-ல் ஐந்து வினாக்களும் இருக்கின்றன. ஒரு மாணவன் எத்தனை வழிகளில், ஒவ்வொரு பகுதியிலிருந்தும் குறைந்தது இரண்டு வினாக்களையாவது தேர்வு செய்து மொத்தம் ஆறு வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முடியும்?

தீர்வு

மாணவன் கீழ்க்கண்டவாறு விடையளிக்கலாம்.

i) 2 வினாக்கள் பகுதி அ-விலும் 4 வினாக்கள் பகுதி ஆ-விலும் இருப்பதற்கான வழிகள் = $^5C_2 \times {}^5C_4 = 50$

ii) 3 வினாக்கள் பகுதி அ-விலும் 3 வினாக்கள் பகுதி ஆ-விலும் இருப்பதற்கான வழிகள் = $^5C_3 \times {}^5C_3 = 100$

iii) 4 வினாக்கள் பகுதி அ-விலும், 2 வினாக்கள் பகுதி ஆ-விலும் இருப்பதற்கான வழிகள் = $^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$

மொத்த வழிகள் = $({}^5C_2 \times {}^5C_4) + ({}^5C_3 \times {}^5C_3) + ({}^5C_4 \times {}^5C_2)$

$= 50 + 100 + 50$

$= 200$ வழிகள்

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $^8P_4$ -ன் மதிப்பு காண்க.

2. 5 ஆங்கில ஏடுகளையும் 3 வணிகவியல் ஏடுகளையும் ஒரே பாட ஏடு எப்போதும் அடுத்தடுத்து வருமாறு ஒரு அலமாரியில் எத்தனை வழிகளில் அடுக்க முடியும்?

3. 16 இருக்கைகள் கொண்ட ஒரு ரயில் பெட்டியில் 5 பயணிகளை எத்தனை விதத்தில் உட்கார வைக்கலாம்?

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வார்த்தைகளினால் வரும் வரிசைமாற்றத்தைக் காண்க.

i) ASSESSEE

ii) ASSASSINATION

iii) ALLAHABAD

iv) INDEPENDENCE

v) MISSISSIPPI

5. 5 பொருளாதாரம், 3 வணிகவியல், 3 மேலாண்மை ஏடுகளை ஒரே பாட ஏடுகள் சேர்ந்து இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் அடுக்கலாம்?

6. ${}^{n}P_4 = {}^{12}P_2$ எனில் n-ன் மதிப்பு காண்க.

7. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = n^3 - n$ என நிரூபி.

8. ஒரு முக்கியமான பிரச்சனை பற்றி விவாதிப்பதற்காக 18 மாநில முதலமைச்சர்கள் ஒரு இடத்தில் குழுமுகிறார்கள். ஒரு வட்ட மேஜையில் தமிழக முதலமைச்சரும், ஆந்திர முதலமைச்சரும் சேர்ந்து உட்காருமாறு எத்தனை வழிகளில் உட்கார வைக்கலாம்?

9. மதிப்பு காண்க. ${}^{15}C_{12}$, ${}^{20}C_{18}$

10. ஒரு வேலைக்கு 5 நபர்களை தேர்வு செய்ய நேர்முகத் தேர்வு நடைபெறுகிறது. அதில் 6 ஆண்களும் 8 பெண்களும் பங்கு பெறுகின்றனர். தேர்வு பெற்றவர்களில் 3 பேர் பெண்களாக

இருக்க வேண்டுமெனில் எத்தனை வழிகளில் அவர்களைத் தேர்வு செய்யலாம்.

11. 5 நபர்கள் கொண்ட குழு ஒன்றை 6 ஆண்கள் 4 பெண்கள் அடங்கிய அமைப்பிலிருந்து தேர்வு செய்ய வேண்டும். தேர்வான குழுவில் குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இருக்கும்படி எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

12. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள 3 சகோதரர்களும், 4 சகோதரிகளும் ஒரு விருந்துக்குச் செல்கின்றனர். 4 சகோதரிகளும் ஒன்றாக உட்கார வேண்டுமானால் அவர்களை எத்தனை வழிகளில் அமரச் செய்யலாம்?

13. ஒரு வட்ட மேஜையில் ஒரு நிறுவனத்தின் 8 நெறியாளர்களை எத்தனை வழிகளில் அமரச் செய்யலாம்?

14. 5 ஆண்கள், 2 பெண்கள் ஒரு வட்ட வடிவ மேஜையில் அமரும்போது அ) எல்லா பெண்களும் ஒன்றாக உட்காரும்படி ஆ) பெண்கள் ஒன்றாக உட்காராமல் இருக்கும்படி அமரும் வழிகள் எத்தனை?

15. ஒருவர் வட்ட மேஜையில் 7 பேர் அமரும்போது இருவர் மட்டும் ஒன்றாக உட்காரும் வழிகள் எத்தனை?

4. ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem)

முன்னுரை

இயற்கணிதத்தில் ஒரேயொரு உறுப்பு மட்டும், $3x^2$ அல்லது $2x$ அல்லது $-10a$ அல்லது $\sqrt{3}x$ ஆக இருந்தால் ஒருறுப்புக்கோவை (Monomial expression) என அழைப்பர். இரண்டு உறுப்பு மட்டும் $3x + 4$ அல்லது $x^2 + 1$, அல்லது $\sqrt{3}\,x - 4$ என்று அமைந்திருந்தால் ஈருறுப்புக்கோவை (Binomial expression) என அழைப்பர். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் அமைந்திருந்தால், [$3x^2 - 2x^2 - 4a + 1$ அல்லது $13x^2 - 2x + 7$ அல்லது $a_1 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$] அதனை பல்லுறுப்புக்கோவை (Polynomial or Multi nomial expression) என அழைப்பர்.

ஈருறுப்புக்கோவைகளின் விரிவுகளைக் காணவே இந்த அத்தியாயத்தை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

சாதாரணமாக $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ எனவும் $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ எனவும் விரிவுகளைப் பார்த்திருப்போம்.

$(a+b)^{20}$ என்றால் எவ்வாறு விரித்து எழுவது என அறியவே ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தப் போகிறோம்.

வரையறை

n-ஆனது ஒரு மிகைமுழு எண்ணாக இருந்தால்,

$$(x + a)^n = x^n + {}^nc_1 x^{n-1} a + {}^nc_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nc_r x^{n-r} a^r + \dots + a^n$$

என்பது ஈருறுப்புத் தேற்றம். இதனுடைய நிரூபணம் நமக்குத்

தேவையில்லையெனினும், எடுத்துக்காட்டாக அது அமையும் முறையைக் கவனிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

1) $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$$= x^2 + {}^2c_1\, xa + a^2 \qquad ({}^2c_2 = 1)$$

2) $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3$

$$= x^3 + {}^3c_1\, x^2 a + {}^3c_2\, xa^2 + a^3 \qquad ({}^3c_3 = 1)$$

இதன் அடிப்படையில் தேற்றத்தின் விரிவைக் காணலாம்.

குறிப்பு

1) $(x + a)^n$ -ன் விரிவில், பொது உறுப்பு (General Term) அல்லது $(r + 1)$ -ஆவது உறுப்பு

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

2) $(x + a)^n$ -ஐ விரிவுபடுத்தினால், மொத்தம் $(n + 1)$ உறுப்புக்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 11^7 -ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

$$11^7 = (10 + 1)^7 = 10^7 + {}^7C_1\, 10^6\, 1 + {}^7C_2\, 10^5\, 1^2 + {}^7C_3\, 10^4\, 1^3$$
$$+ {}^7C_4\, 10^3\, 1^4 + {}^7C_5\, 10^2\, 1^5 + {}^7C_6\, 10\, 1^6 + {}^7C_7\, 1^7$$

$$^7C_1 = \frac{7}{1} = 7 \; ; \; ^7C_2 = \frac{7 . 6}{1 . 2} = 21 \; ; \; ^7C_3 = \frac{7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3} = 35 \; ;$$

$$^7C_4 = {}^7C_3 = 35 \; ; \; ^7C_5 = {}^7C_2 = 21 \; ; \; ^7C_6 = {}^7C_1 = 7 \; ; \; ^7C_7 = 1.$$

$$\therefore \; 11^7 = 1,00,00,000 + 7\text{x}10,00,000 + 21\text{x}1,00,000 + 35\text{x}10,000 + 35\text{x}1,000 + 21\text{x}100 + 7\text{x}10 + 7\text{x}1$$

$$11^7 = 1,94,87,171$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$\left(\frac{y\sqrt{x}}{5} - \frac{5}{x\sqrt{y}}\right)^{12}$ - ன் விரிவில் அமையும் மைய உறுப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

மேற்சொன்ன ஈருறுப்பின் விரிவில் 13 உறுப்புகள் இருக்கும். இதில் மைய உறுப்பு 7-வது உறுப்பாகும்.

(r+1) வது உறுப்பு $= T_{r+1} = {}^nC_r \, x^{n-r} \, a^r$

இங்கு $r = 6 \; ; \; n = 12 \; ; \; x = \frac{y\sqrt{x}}{5}, \quad a = \frac{-5}{x\sqrt{y}}$

$$T_7 = {}^{12}C_6 \left(\frac{y\sqrt{x}}{5}\right)^{12-6} \left(\frac{-5}{x\sqrt{y}}\right)^6$$

$$= {}^{12}C_6 \left(\frac{y^6x^3}{5^6}\right) \left(\frac{5^6}{y^6x^3}\right)$$

$$T_7 = {}^{12}C_6 \frac{y^3}{x^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

$\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{15}$ -ன் விரிவில் மைய உறுப்புக்களை எழுதுக.

தீர்வு

$\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{15}$ - ன் விரிவில் *16* உறுப்புக்கள் இருக்கும்.

ஆகவே, *8*வது, *9*வது உறுப்புக்கள் மைய உறுப்புக்களாக இருக்கும்.

(r+1)வது உறுப்பு $= T_{r+1} = {}^{n}C_r\, x^{n-r}\, a^r$

இங்கு $r = 7, 8$

$r = 7$; $n = 15$, $x = 2x$; $a = -3/x$

$$T_8 = {}^{15}C_r\, (2x)^{15-7} \left(\frac{-3}{x}\right)^7$$

$$T_8 = -{}^{15}C_7 \,.\, 2^8 \,.\, \frac{x^8 \,.\, 3^7}{x^7}$$

$$= -{}^{15}C_7 \,.\, 2^8 \,.\, 3^7 \,.\, x$$

$r = 8$,

$$T_9 = {}^{15}C_8\, (2x)^{15-8} \left(\frac{-3}{x}\right)^8$$

$$T_9 = \frac{{}^{15}C_8 \,.\, 2^7 \cdot 3^8}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 5

$\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$-ன் விரிவில் x^{32}-ன் குணகம் என்ன?

தீர்வு

x^{32} அமையும் உறுப்பு (r+1)-வது உறுப்பு என்க.

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

$$= {}^{15}C_r\ (x^4)^{15-r} \left(\frac{-1}{x^3}\right)^r$$

$$= {}^{15}C_r\ (-1)^r\ x^{60-4r} \cdot \frac{1}{x^{3r}}$$

$$= {}^{15}C_r\ (-1)^r\ x^{60-7r}$$

$x^{60-7r} = x^{32}$ எனில்,

$60-7r = 32$

$r = 4$

அதாவது, 5-வது உறுப்பில் x^{32} இருக்கும்

∴ x^{32} -ன் குணகம் $= {}^{15}C_4\ (-1)^4$

$$= {}^{15}C_4 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= 1{,}365$$

எடுத்துக்காட்டு 6

$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ -ன் விரிவில் x சார்பற்ற உறுப்பு எது?

தீர்வு

x சார்பற்ற உறுப்பு எனில் x^0-ன் குணகம் என்று பொருள்.

(r+1) வது உறுப்பில் x^0 இருக்கும் எனில்,

$$T_{r+1} = {}^{20}C_r \ (2\sqrt{x})^{20-r} \left(\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\right)^r$$

$$= {}^{20}C_r \ . \ 2^{20-r} \ . \ x^{\left(20 - \frac{r}{20}\right)} . (-3)^r . \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^r$$

$$T_{r+1} = (-1)^r \ . \ {}^{20}C_r \ . \ 2^{20-r} \ . \ 3^r . \ x^{\frac{20-r}{2}} . \ x^{\frac{-r}{3}}$$

$$= (-1)^r \ . \ {}^{20}C_r \ . \ 2^{20-r} \ . \ 3^r . \ x^{10 - \frac{r}{2} - \frac{r}{3}}$$

$x^{10 - \frac{r}{2} - \frac{r}{3}} = x^0$ எனில்,

$$10 - \frac{5r}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 12}$$

அதாவது, 13-வது உறுப்பு x சார்பற்றதாக இருக்கும்.

$$T_{13} = (-1)^{12} \ . \ {}^{20}C_{12} \ . \ 2^{20-12} \ . \ 3^{12}$$

$$T_{13} = {}^{20}C_{12} \ . \ 2^8 \ . \ 3^{12}$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1) பின்வருவனவற்றிற்கு விரிவு காண்க.

(அ) $(3x + 5y)^5$ (ஆ) $\left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$ (இ) $\left(4x - \frac{3}{y}\right)^7$

(ஈ) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^4$ (உ) $\left(\frac{6x^2}{y^2} + \frac{y^2}{3x}\right)^5$ (ஊ) $\left(2x^{1/2} - \frac{3}{x^{3/2}}\right)^4$

2) அ) $(3 - 4x)^{23}$ ன் விரிவில் 6-வது உறுப்பு என்ன?

ஆ) $\left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a^2}\right)^{14}$ -ன் விரிவில் 10-வது உறுப்பு என்ன?

இ) $(x^{1/2} - y^{2/3})^{20}$ -ன் விரிவில் 16-வது உறுப்பு என்ன?

3) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்.

அ) $(101)^5$ ஆ) $(99)^4$

இ) $(9.999)^4$ -ன் மதிப்பு (தசம பின்னத்தில் 4 இடங்களில் உள்ளது)

ஈ) $(1.01)^5$ -ன் மதிப்பு (தசம பின்னத்தில் 3 இடங்களில் உள்ளபடி)

4) பின்வருவனவற்றின் மைய உறுப்பு காண்.

(அ) $\left(3x - \frac{1}{2x^2}\right)^8$ (ஆ) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^{13}$

(இ) $(x - 2y)^{14}$ (ஈ) $\left(2x^2 + \frac{y}{x}\right)^9$

5) அ) x^{11} -ன் குணகத்தை $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{17}$-ன் விரிவில் காண்க.

ஆ) x^{-17}-ன் குணகத்தை $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$-ன் விரிவில் காண்க.

இ) x^{15} -ன் குணகத்தை $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{20}$ -ன் விரிவில் காண்க.

6) அ) $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$-ன் விரிவில் x சார்பற்ற உறுப்பினைக் கண்டுபிடி.

ஆ) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{3}{2x}\right)^9$ -ன் விரிவில் x சார்பற்ற உறுப்பினைக் கண்டுபிடி.

ஈருறுப்புக் குணகங்கள் உள்ளிட்ட தொடர்களின் கூட்டுத்தொகை

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விரிவினைக் காண்போம்.

$$(1 + x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots\ldots + {}^nC_r x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$$

${}^nC_0 = 1 = C_0$; ${}^nC_1 = C_1$; ${}^nC_2 = C_2$; .... ${}^nC_r = C_r$.

${}^nC_n = 1 = C_n$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$(1 + x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots + C_r x^r + \ldots\ldots + C_n x^n \quad \rightarrow (1)$$

பொதுவாக, $C_r = C_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$

இப்பொழுது, x = 1 என (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$(1+1)^n = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n$

$$\boxed{2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n} \quad \text{(I)}$$

$C_0 = 1$ எனில்,

$$\boxed{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n = 2^n - 1} \quad \text{(II)}$$

அடுத்தபடியாக, x = –1 என (1)-ல் பிரதியிட்டால்

$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots\ldots\ldots$

அதாவது, $\boxed{C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots\ldots = 0} \quad \text{(III)}$

அல்லது, $\boxed{C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots} \text{(IV)}$

மேலும் $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{எல்லாக்} \\ \text{குணகங்களின்} \\ \text{கூட்டுத்தொகை} \end{array} \right\}$

$= \frac{1}{2} \times 2^n$

அதாவது, $\boxed{C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots = 2^{n-1}} \quad \text{(V)}$

எடுத்துக்காட்டு 1

$C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots\ldots + nC_n = n \cdot 2^{n-1}$ என நிரூபி.

தீர்வு

$S = 0.C_0 + 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + \ldots + n.C_n$ என்க. $\rightarrow(1)$

மேலும்,

$S = nC_n + (n-1)C_{n-1} + (n-2)C_{n-2} + \ldots\ldots + 0C_0$

$S = nC_0 + (n-1)C_1 + (n-2)C_2 + \ldots\ldots + 0C_n$ $\rightarrow(2)$

$\because C_r = C_{n-r}$

$(1) + (2) \Rightarrow 2s = n(C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n)$

$= n \cdot 2^n$

$$S = n \cdot \frac{2^n}{2}$$

$$\boxed{S = n \cdot 2^{n-1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டுபிடி.

$aC_0 + (a+d)C_1 + (a+2d)C_2 + \ldots\ldots + (a+nd)C_n$

தீர்வு

S என்பதைக் கூட்டுத்தொகையாக எடுத்துக்கொண்டால்,

$S = aC_0 + (a+d)C_1 + (a+2d)C_2 + \ldots + (a+nd)C_n$ $\rightarrow(1)$

$\therefore\ S = (a+nd)C_n + (a+(n-1)d)C_{n-1} + \ldots + aC_0$

[தொடரைத் திருப்பி எழுதினால்]

மேலும், $C_{11} = C_0$; $C_{n-1} = C_1$; $C_{n-2} = C_2 \ldots$

ஆகையால்,

$$S = (a+nd)C_0 + (a+(n-1)d)C_1 + \ldots + aC_n \rightarrow (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2s = (2a+nd)C_0 + (2a+nd)C_1 + \ldots + (2a+nd)C_n$$

$$= (2a+nd)(C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$$

$$= (2a+nd)\ 2^n$$

$$S = (2a+nd)\frac{2^n}{2}$$

$$\boxed{S = (2a+nd)\ 2^{n-1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$$C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + C_2 C_{r+2} + \ldots + C_{n-r} C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+r\ \lfloor n-r}$$

என நிரூபி.

தீர்வு

பின்வரும் தொடரினைக் காண்போம்.

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_r x^{n-r} + \ldots + C_n x^n \rightarrow (1)$$

மேலேயுள்ள தொடரைத் திருப்பி எழுதினால்

$$(1+x)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-r} x^r + \ldots + C_n \rightarrow (2)$$

(1) x (2) ஐ எழுதி, x^{n+r} -ன் குணகத்தை ஒழுங்குபடுத்தி எழுதும்பொழுது,

$C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + C_2 C_{r+2} + \ldots + C_{n-r} C_n$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore \; C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + \ldots\ldots + C_{n-r} C_n$

$= x^{n+r}$ -ன் குணகம்

$= 2n\, C_{n+r}$

$= \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n+r \lfloor n-r}$ {வாய்பாடு மூலம்}

$$\boxed{C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + \ldots\ldots + C_{n-r} C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+r \; \lfloor n-r}}$$

மேலே சொன்ன முடிவில் r = 0 எனப் பிரதியிட்டால்,

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots\ldots + C_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \; \lfloor n} = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1) $C_0\, 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)\, C_n = 2^{n-1}\,(n+2)$ என நிரூபி.

2) பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத்தொகையினைக் கண்டுபிடி.

i) $2C_0 + 5C_1 + 8C_2 + \ldots + (3n+2)\, C_n$

ii) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \ldots + (2n+1)\, C_n$

iii) $3C_0 + 5C_1 + 7C_2 + \ldots + (2n+3)\, C_n$

iv) $C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \ldots + (3n+1)\, C_n$

3) மதிப்பு காண்க.

$$C_0 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_4 + \ldots + C_{n-2} C_n$$

4) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (-1)^n\,(n+1)\, C_n = 0$ என நிறுவு.

5) $2C_0 - 3C_1 + 4C_2 - 5C_3 + \ldots + (n+1)$ உறுப்புவரை $= 0$ என நிரூபி.

6) $C_1 - \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{3} - \dfrac{C_3}{4} + \ldots + (-1)^n \dfrac{C_n}{n+1}$ -ன் கூட்டுத்தொகை என்ன?

7) கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $$\frac{C_0}{1} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \ldots = \frac{2^n}{n+1}$$

(ii) $$\frac{C_1}{2} + \frac{C_3}{4} + \frac{C_5}{6} + \ldots = \frac{2^n - 1}{n+1}$$

5. கணங்களின் கோட்பாடு

(Theory of Sets)

பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் (Set) என்றழைக்கப் படுகிறது. கணங்கள் நவீன கணிதத்தின் மூலமாகும். கணிதத்தில் நாம் ஒரு குழுவான பொருட்களை விவரிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

i) குறிப்பிட்ட குழுவினரின் வருமானம்

ii) கல்லூரி மாணவர்கள்

iii) ஒரு துறையைச் சார்ந்த மாணவர்கள்

நுகர்வோர்களின் தெரிவுகள் பற்றி அறியவும், பங்குச்சந்தை கணிப்பு செய்யவும் கணங்கள் பற்றிய அறிவு மிகவும் பயன்படுகிறது.

வரையறை

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட உறுப்புகளின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் ஒரே மாதிரியான அல்லது மாறுபட்ட பண்புகளாகக் கொண்டிருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

i) இந்தியாவிலுள்ள அரசுமயமாக்கப்பட்ட தொழில் நிறுவனங்கள்

ii) பாரதி கல்லூரி மாணவர்கள்

iii) வணிகவியல் மூன்றாம் ஆண்டு மாணவர்கள்.

ஒரு கணத்தை A, B, C, D போன்ற ஆங்கில எழுத்துக்களாலும் (Capitl Alphabets) அதன் உறுப்புகளை x, y, z போன்ற எழுத்துக்களாலும் (Small Alphabets) குறிப்பிடலாம்.

ஒரு கணத்தை அடைப்புக்குறி முறை (Roaster method) மூலமாகவோ அல்லது கண உருவாக்கல் முறை (Set builder notation) மூலமாகவோ குறிப்பிடலாம். அடைப்புக்குறி முறையில் ஒரு கணத்தின் அனைத்து உறுப்புகளும் இரண்டு அடைப்புக்குறிக்குள் எழுதப்படும். கணத்தின் உறுப்புகள் குறைந்த எண்ணிக்கையில் இருக்கும்போது இம்முறை கையாளப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

1 முதல் *10* வரை உள்ள இயல் எண்களின் கணம்

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

கணத்தின் உறுப்புகள் அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கும் போது கணஉருவாக்கல் முறை கையாளப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

N எனும் இயல் எண்களின் கணத்தை

N = {x/x ஒரு இயல் எண்} என்று குறிப்பிடலாம்.

கணத்தின் இயல்புகள்

1. ஒவ்வொரு உறுப்பையும், கணத்தில் குறிக்கும்போது, அரைப்புள்ளி (Comma) யிட்டுக் குறிக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

2. கணத்தின் உறுப்புக்களை, இக்கணத்தில் உள்ளது எனக் குறிக்க ∈ என்ற குறியீட்டால் குறிக்க வேண்டும். (∈ - belongs to)

எடுத்துக்காட்டு

$Z = \{\ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

என்பது முழு எண்களின் கணம்

$-2 \in Z$ = (–2 belongs to Z) என வாசித்திடல் வேண்டும்.

$5 \in Z$ = (5 belongs to Z) என வாசித்திடல் வேண்டும்.

$\frac{2}{3} \notin Z$ = $\left(\frac{2}{3}\right.$ does not belongs to Z$\left.\right)$ என வாசித்திடல் வேண்டும்.

(∉ - does not belongs to)

3. கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைத் திரும்பத்திரும்ப எழுத அவசியமில்லை. ஒரு தடவை எழுதினால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, 1, 5, 4\}$

இங்கு 1, 4 என்ற உறுப்புகள் இருதடவை எழுதப்பட்டுள்ளது.

அதனை $A = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$ எனக்குறிப்பிட்டால் போதும்.

4. உறுப்புக்களைக் கணத்தில் இடம் மாற்றி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 5, 7\}$

$= \{2, 5, 1, 7\}$.

$= \{7, 5, 2, 1\}$ என எப்படி வேண்டுமானாலும் வரிசைப்படுத்தி எழுதிக் கொள்ளலாம்.

கணங்களின் வகைகள் (Types of Sets)

அ) வெற்றுக்கணம் (Empty set or Null set or Void set)

எந்த ஓர் உறுப்பும் (Element) இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் எனப்படும். இக்கணத்தை { } என்று குறிப்பிடு கிறோம். இக்கணத்தைக் குறிப்பதற்கு ϕ (P_i) எனும் குறியீடு பயன்படுத்தப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

i) வெண் காக்கைகளின் கணம்

ii) இந்திய பெண் குடியரசுத்தலைவர்களின் கணம்

ஆ) ஒருறுப்புக்கணம் (Singleton set or Unit set)

ஒரே ஓர் உறுப்பு மட்டுமே உள்ள கணம் ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

i) ஒருவரின் தாயின் கணம்

ii) $B = \{3\}$

iii) ஆளும் தமிழக முதல்வர்கள் அடங்கிய கணம்

இ) முடிவுறு கணம் (Finite set)

ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அளவிடக் கூடியதாக இருந்தால் அது முடிவுறு கணம் எனப்படும். வெற்றுக்கணமும் ஒரு முடிவுறு கணமேயாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

i) ஆங்கில எழுத்துக்களின் கணம்

ii) முக்கனிகள்

iii) 100-க்கு குறைவான இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்

ஈ) முடிவுறாக்கணம் (Infinite set)

எண்ணிக்கையில் அளவிட முடியாத உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணம் முடிவுறாக் கணமாகும். முடிவுறு கணம் அல்லாத பிற கணங்கள் அனைத்தும் முடிவுறாக் கணங்கள் எனப்படும். அதாவது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவடையாமல் தொடர்ந்து வந்து கொண்டேயிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

i) இயல் எண்களின் கணம்

ii) உலகின் அனுக்களின் கணம்

iii) இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்

உ) உட்கணம் (Sub set)

A,B எனும் இரு கணங்களில், A எனும் கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளும் B எனும் கணத்தின் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால் Aஐ B-ன் உட்கணம் என்கிறோம். இதை $A \subset B$ (A is contained in B) என்று எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

i) வணிகவியல் துறை மாணவர்கள் அடங்கிய கணம் கல்லூரி மாணவர்கள் எனும் கணத்தின் உட்கணமாகும்.

ii) A = { *மா, வாழை, பலா* }

B = {வாழை, *பலா* }

இங்கு B ⊂ Aஆகும். அதாவது B, A-ன் உட்கணமாகும்.

உட்கணத்தின் பண்புகள்

i) வெற்றுக்கணம். எல்லாக் கணங்களின் உட்கணமாகும்.

ii) ஒரு கணம் அந்த கணத்தின் உட்கணமாகும். (A ⊆ A)

iii) A ⊆ B, மேலும் B ⊆ C எனில் A ⊆ C ஆகும்.

ஒரு கணத்தில் "n" உறுப்புக்கள் இருந்தால் அதில் 2^n உபகணங்கள் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு கணத்தில் *3* உறுப்புக்கள் இருந்தால்

2^3 = 8 உட்கணங்கள் வரும்.

A = {5, 6, 7} எனில், A-ன் உட்கணங்கள்

{ 5, 6, 7,}, {5, 6}, {6, 7}, {5, 7} {5}, {6}, {7}, { } ஆகும்.

ஊ) சமகணம் (Equal set)

A, B எனும் இருகணங்களில் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் Bயிலும், B-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் Aயிலும் இருக்குமேயானால்

Aயும், Bயும், சமகணங்கள் எனப்படும். அதாவது $A \subseteq B$ மேலும் $B \subseteq A$ ஆக இருந்தால் $A = B$ எனக் குறிப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3 \}$; $B = \{ x / (x - 1), (x - 2), (x - 3)\ 20\}$

இங்கு Bயும் $B = \{1, 2, 3\}$ ஆகும்.

எனவே $A \subseteq B$ மேலும் $B \subseteq A$

ஆகவே $A = B$

எ) சமமான கணம் (Equivalent set)

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமான எண்ணிக்கையில் மற்றொரு கணத்தின் உறுப்புக்கள் அமைந்தால், அவ்விரு கணங்களையும் சமமான கணம் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

i) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

எனவே $A \equiv B$

ii) A = {x/x என்பது GOOD என்ற ஆங்கில வார்த்தையின் எழுத்து }

B = {x/x என்பது SETS என்ற ஆங்கில வார்த்தையின் எழுத்து }

எனவே $A = B$

ஏ) தகு உட்கணம் (Proper Subset)

A, B எனும் இரு கணங்களில் A கணத்தின் எல்லா

உறுப்புகளும் மற்றொரு கணமாகிய B-யின் உறுப்புக்களாகவும் இருந்து, அதே சமயம் கணம் B-ன் ஒரே ஒரு உறுப்பாவது அதிகமாக இருந்தால் கணம் A என்பது கணம் B-ன் தகுஉட்கணம் என்கிறோம். இதை A ⊂ B எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

A = { 1, 2, 3, 5, 9, 12 }

B = { 1, 2, 2, 3, 5,9,12,12 }

C = {1, 2, 2, 3, 3, 5, 9 }

இங்கு C ⊂B ஆகும் (C என்பது B-ன் தகுஉட்கணமாகும். ஏனெனில் B-ல் 12 என்ற உறுப்பு அதிகமாக இருக்கிறது)

C ⊆ A (*உட்கணம்*)

A ⊆ B (*உட்கணம்*)

எனவே A = B (*சமகணம்*)

ஐ) பொதுக்கணம் (Universal sets)

அனைத்துக் கணங்களையும் தன்னுள்ளே அடங்கிய கணம் பொதுக்கணம் எனப்படும். இதை "∪" அல்லது "x" என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

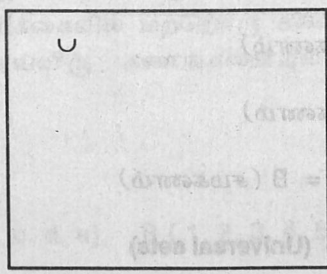
i) எண்களைப்பற்றிக் கணக்கிடும் போது இயற்கை எண்களின் கணம் "∪" ஆகும்.

ii) ஒரு கல்லூரியில் வணிகவியல் மாணவர்களைப் பற்றிக் கணக்கிடும்போது அக்கல்லூரியில் பயிலும் அனைத்து மாணவர்களின் கணம் "∪" ஆகும்.

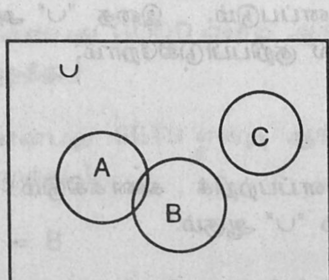
வென்விளக்கப்படம் (Venn Diagram)

ஆங்கிலக் கணித அறிஞர் ஜான்வென் என்பவர் (*1834 - 1883*) கணக்களுக்கிடையே உள்ள உறவுகளைக் காட்ட, ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் வட்டங்கள் கொண்ட படங்கள் மூலம் முதல் முதலாக அறிமுகப்படுத்தினார்.

வென்படங்கள் என்பது கணங்களுக்கிடையேயுள்ள உறவுகளைக் காட்டப் பயன்படும் விளக்கப்படங்கள் ஆகும். பொதுக்கணத்தை ஒரு செவ்வகமாகக் குறிப்பிடுகிறோம். அதன் உட்கணங்களான A, B, C-ஐ அதனுள்ளே வட்டங்கள் மூலம் குறிப்பிடுகிறோம். பொதுவான உறுப்புகள் இருந்தால் வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டுகின்றன. இதனைக் கணங்களின் வெட்டு என்கிறோம்.



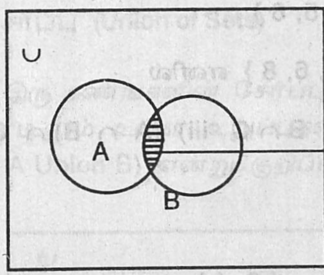
பொதுக்கணம்



A, B, C ஆகிய உட்கணங்களைக் கொண்ட பொதுக்கணம்.

கணங்களின் வெட்டு **(Intersection of Sets)**

A, B எனும் இரு கணங்களில் A, B இரண்டிலும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமே கணங்களின் வெட்டு ஆகும். அதாவது A, B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு இந்தக் கணம் உருவாக்கப்படுகிறது. இதை $B \cap A$ (B interaction B) எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.



வென்விளக்கப்படம்

எடுத்துக்காட்டு 1

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$B = \{ 2, 4, 6 \}$ எனில் $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு

A-க்கும் B-க்கும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகள் *3,4* ஆகும். எனவே

$A \cap B = \{ 2 ,4 \}$

எடுத்துக்காட்டு 2

$A = \{ 1, 2 ,3 \}$

$B = \{ A, B, C \}$ எனில் $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு

A க்கும் Bக்கும் பொதுவாக ஒரு உறுப்பும் இல்லை. எனவே $A \cap B = \emptyset$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 4, 5, 6\}$

$C = \{3, 4, 6, 8\}$ எனில்

i) $A \cap B$; ii) $B \cap C$ iii) $(A \cap B) \cap C$ iv) $A \cap (B \cap C)$ காண்க.

தீர்வு

i) $A \cap B = \{2, 4\}$

ii) $B \cap C = \{4, 6\}$

iii) $(A \cap B) \cap C = \{4\}$

iv) $A \cap (B \cap C) = \{4\}$

மேலே கண்ட தீர்வுகளிலிருந்து $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என்பதும் தெரிகிறது.

வெட்டுக்கணங்களின் முக்கியப் பண்புகள்

அ) $A \cap B$ என்பது A மற்றும் Bயின் உட்கணமாகும்

கணக்குறியீட்டில் $A \cap B \subseteq A$ மற்றும் $A \cap B \subseteq B$

ஆ) வெற்றுக்கணத்துடன் ஏதேனும் ஒரு கணத்தின் வெட்டுக்கணம் வெற்றுக்கணமாகும். $A \cap \emptyset = \emptyset$

இ) ஒரு கணத்திற்கும், அதே கணத்திற்கும் உள்ள வெட்டுக்கணம் அக்கணமேயாகும். $A \cap A = A$

ஈ) ஒரு கணத்திற்கும், அதன் நிரப்பிக் கணத்திற்கும் உள்ள

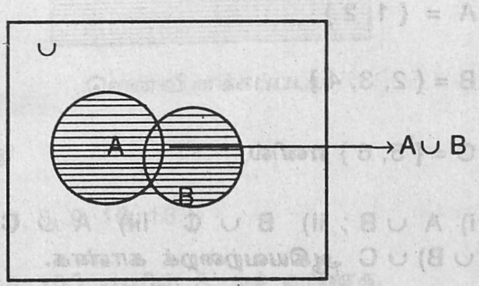
வெட்டுக்கணம் வெற்றுக்கணமாகும். $A \cap A = \emptyset$

உ) வெற்றுக்கணம் பரிமாற்றப் பண்பைக் கொண்டதாகும். $A \cap B = B \cap A$

ஊ) மூன்று கணங்களின் வெட்டுக்கணங்கள் சேர்ப்பு விதியைக் கொண்டிருக்கும். $A \cap (B \cap C) . (A \cap B) \cap C$

கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Sets)

A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்பு என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் குறிப்பதாகும். இதனை $A \cup B$ (A Union B) என்று குறிப்பிடுகிறோம்.



வென்விளக்கப்படம்

எடுத்துக்காட்டு 1

A = { 1, 3. 4, 5 }

B = {2, 3, 6,7 } எனில் $A \cup B$ காண்க.

தீர்வு

A, B ஆகிய கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7** ஆகியவைகளாகும். ஒரே எண் இருமுறை வருமாயின் அதனை இருமுறை குறிப்பிடத் தேவையில்லை.

எனவே $A \cup B$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

A = { 1, 3, 5, 7 }

B = { 3, 5 } எனில் A ∪ B காண்க.

தீர்வு

A ∪ B = { 1, 3, 5, 7} ஆகும். இவ்வெடுத்துக்காட்டில் B என்பது A-ன் உட்கணமாகும். எனவே A ∪ B = A எனக் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3

A = { 1, 2 }

B = { 2, 3, 4 }

C = { 5, 6 } எனில்

i) A ∪ B ; ii) B ∪ C iii) A ∪ C iv) A ∪ (B ∪ C) v) (A ∪ B) ∪ C ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

i) A ∪ B = { 1, 2, 3, 4 }

ii) B ∪ C = { 2, 3, 4, 5, 6 }

iii) A ∪ C = { 1, 2, 5, 6 }

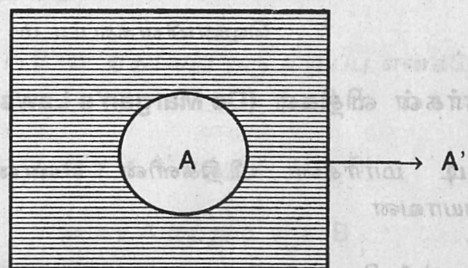
iv) A ∪ (B ∪ C) = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

v) (A ∪ B) ∪ C = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

மேற்கண்ட தீர்வுகளிலிருந்து A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C என்பதும் தெரிகிறது.

கணங்களின் நிரப்பி (Complement of a set)

∪ என்பது பொதுக்கணமாகவும், A என்பது அதன் உட்கணமாகவும் இருப்பின், Aயில் உள்ள உறுப்புகளைத்தவிர ∪-ல் உள்ள பிற உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் A எனும் கணத்தின் நிரப்பி எனப்படும். இதனை A' (A Complemenet) எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.



வென்விளக்கப்படம்

எடுத்துக்காட்டு

$\cup = \{1, 3, 5, 9, 10, 18\}$

$A = \{3, 5, 10\}$ எனில் A'-ஐக் காண்க.

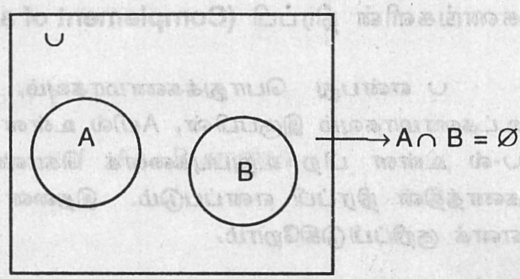
தீர்வு

$A' = \cup - A$

$= \{1, 9, 18\}$

தொடர்பற்ற கணங்கள் (Disjoint Sets)

A,B எனும் இரு கணங்களில், இரண்டிற்குமிடையே பொதுவான உறுப்புகள் இல்லையெனில், A, B என்ற இரண்டும் தொடர்பற்ற கணங்கள் எனப்படும்.



வென்விளக்கப்படம்

டி மார்கன் விதிகள் (De Margan's Laws)

டி மார்கன் விதிகளின் எண்ணிக்கை இரண்டு. அவையாவன

அ) A, B எனும் இரு கணங்களின், சேர்ப்புக் கணங்களின் நிரப்பு ஆனது நிரப்பிக் கணங்களின் வெட்டு ஆகும். அதாவது

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

இதனை நிரூபிக்க நாம் இரண்டு முடிவுகளை நிரூபிக்க வேண்டும்.

i) $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ii) $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

i) $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

x என்பது $(A\cup B)'$-ன் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு எனக்கொள்க.

அவ்வாறெனில்

$x \in (A \cup B)' \quad \Rightarrow x \notin (A\cup B)$

$\Rightarrow x \notin A$ மற்றும் $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A'$ மற்றும் $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

அதாவது $(A \cup B)'$ -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $A' \cap B'$ன் உறுப்புகளாகும். எனவே $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ii) $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

y என்பது $A \cap B'$-ன் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு எனக்கொள்க. அவ்வாறெனில்

$y \in A' \cap B'$ $\Rightarrow y \in A'$ மற்றும் $y \in B'$

$\Rightarrow x \notin A$ மற்றும் $y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cup B$

$\Rightarrow y \in (A \cup B)'$

அதாவது $A' \cap B'$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $(A \cup B)'$ன் உறுப்புகளாகும்.

எனவே $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ ஆகும். அதாவது $(A \cup B)'$ $A' \subseteq A' \cap B'$.

ஆ) A, B எனும் இரு கணங்களின், வெட்டுக்கணங்களின் நிரப்பி அக்கணங்களின் நிரப்பிகளின் சேர்ப்பு ஆகும். அதாவது

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

முதல் விதியைப் போன்று இதையும் நிரூபிக்கலாம்.

மூன்று கணங்களுக்கான டி மார்கன் விதிகள் :

அ) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A-C)$

ஆ) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A-C)$

அ) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

இவ்விதியினை நிரூபிக்க நாம் இரண்டு முடிவுகளை நிரூபிக்க வேண்டும்.

i) $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$

ii) $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$

i) $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$: x என்பது $A - (B \cup C)$ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு எனக் கொள்க.

$x \in A - (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ மற்றும் $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \notin A$ மற்றும் ($x \notin B$ மற்றும் $x \notin C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ மற்றும் $x \notin B$) மற்றும்
($x \in B$ மற்றும் $x \notin C$)

$\Rightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$

எனவே $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$

ii) $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$: y என்பது $(A - B) \cap (A - C)$ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு எனக்கொள்க.

$y \in (A - B) \cap (A - C) \Rightarrow y \in (A - B)$ மற்றும் $y \in (A \cup C)$

$\Rightarrow$ ($y \in A$ மற்றும் $y \notin B$) மற்றும்
($y \in A$ மற்றும் $y \notin C$)

$\Rightarrow y \in A$ மற்றும் ($y \notin B$ மற்றும் $y \notin C$)

$\Rightarrow y \in A$ மற்றும் $y \notin B \cup C$)

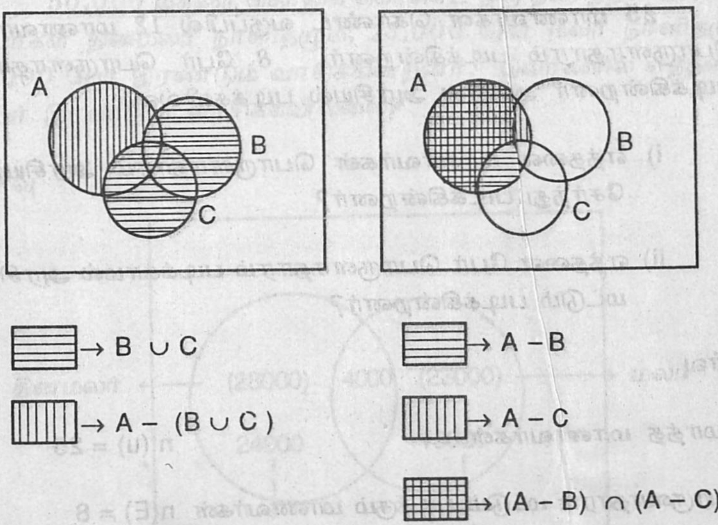
$\Rightarrow y \in A - (B \cup C)$

எனவே $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$

i) மற்றும் ii)லிருந்து சமகணங்களின் வரையறையின்படி

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

மேற்கண்ட விதியினை வென்படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.



ஆ) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

முதல் விதியைப் போன்று இதனையும் நிரூபிக்கலாம்.

முடிவுறு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை (Number of Elements in a finite set)

முடிவுறு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு நிரூபணமற்ற முக்கிய வாய்ப்பாடுகள் பின்வருமாறு :

அ) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(இதில் $n(A \cup B)$ என்பது $A \cup B$ கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும்)

ஆ) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + N(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

எடுத்துக்காட்டு 1

25 *மாணவர்கள் கொண்ட வகுப்பில்* ***12*** *மாணவர்கள் பொருளாதாரம் படிக்கின்றனர்.* ***8*** *பேர் பொருளாதாரம் படிக்கின்றனர் ஆனால் அரசியல் படிக்கவில்லை.*

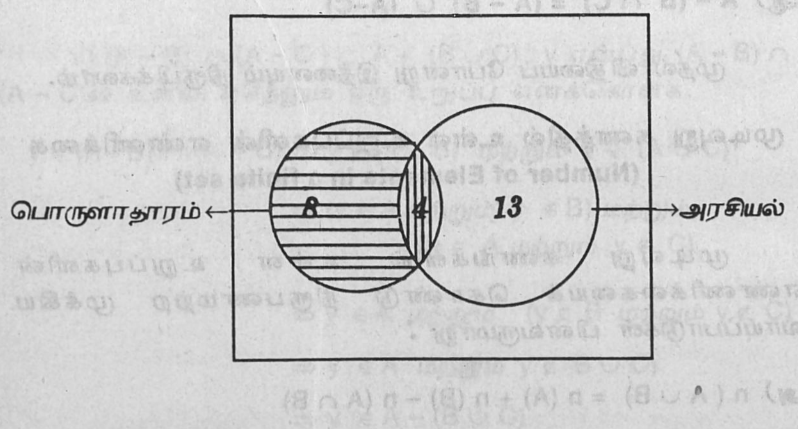
i) *எத்தனை மாணவர்கள் பொருளாதாரம் அரசியலும் சேர்ந்து படிக்கின்றனர்?*

ii) *எத்தனை பேர் பொருளாதாரம் படிக்காமல் அரசியல் மட்டும் படிக்கின்றனர்?*

தீர்வு

மொத்த மாணவர்கள் n (u) = 25

பொருளாதாரம் மட்டும் படிக்கும் மாணவர்கள் n(E) = 8



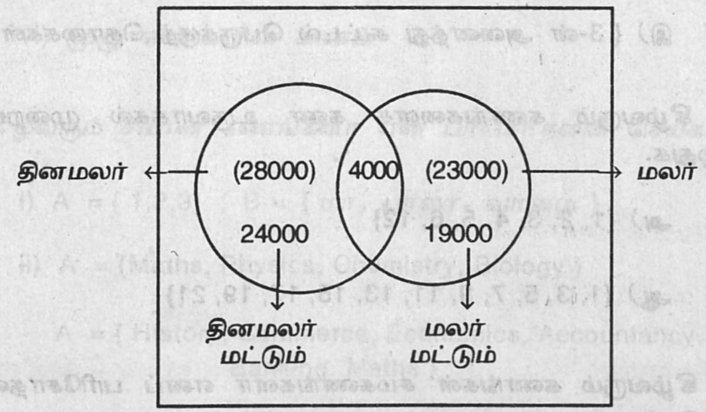
i) *பொருளாதாரமும் அரசியலும் சேர்ந்து படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 4*

ii) *பொருளாதாரம் படிக்காமல் அரசியல் மட்டும் படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 13*

எடுத்துக்காட்டு 2

50,000 மக்கள் தொகை கொண்ட ஒரு நகரத்தில் 28,000 நபர்கள் தினமலர் நாளிதழும், 23,000 பேர் மலர் நாளிதழும் 4,000 பேர் இரண்டும் வாசிக்கின்றனர். இவர்களில் எத்தனை பேர் இரண்டும் வாசிக்கவில்லை?

தீர்வு



n (தி ∪ ம) = n (தி) + n (ம) − n (தி ∩ ம)

= 24,000 + 19,000 − 4,000

= 47,000

எனவே இரண்டு நாளிதழையும்
வாசிக்காதவர்களின் எண்ணிக்கை = 50,000 − 47,000

= 3,000 நபர்கள்

பயிற்சி வினாக்கள்

1. கிழ்வரும் கணங்களை விவரி.

அ) { x/x என்பது 10-ன் வகுஎண்கள்; $x \in N$ }

ஆ) { $x/x^2 - x - 12 = 0$ }

இ) { 3-ன் அனைத்து கூட்டல் பெருக்குத் தொகைகள்}

2. கிழ்வரும் கணங்களைக் கண உருவாக்கல் முறையில் எழுதுக.

அ) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 12}

ஆ) {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21}

3) கிழ்வரும் கணங்கள் சமகணங்களா எனப் பரிசோதனை செய்க.

அ) A = { –1, 1} ; B = { $x/x^2 - 1 = 0$}

ஆ) A={X/X என்பது என்ற PAPER வார்த்தையின் எழுத்துக்கள்}

B={X/X என்பது என்ற REAP வார்த்தையின் எழுத்துக்கள்}

4) A = {1, 2, 3}; B = { 2 }; C = {1,3} எனில் பின்வரும் மதிப்புகளைக் காண்க.

i) $A \cap B$ ii) $A \cup B$ iii) $(A \cap B) \cup C$ iv) $(A \cup B) \cap C$

v) $(A - B) \cup (A - C)$ vi) $(A \cap C) \cup B$

5) கீழ்வருவனவற்றை அடைப்புக்குறி முறையில் எழுதுக.

i) ஆங்கில எழுத்துக்களின் கணம்

ii) 25-க்கும் குறைவான ஒற்றைப்படை முழுஎண்கள்

iii) இயல் எண்களின் கணம்

vi) முழு எண்களின் கணம்

6) கீழ்வரும் சமான கணங்களா என பரிசோதனை செய்க.

i) A = { 1,2,3} ; B = { மா, பாலா, வாழை }

ii) A = {Maths, Physics, Chemistry, Biology }

A = { History, Commerce, Economics, Accountancy, Banking, Maths }

7) கீழ்வரும் கணங்களின் உட்கணங்களை எழுதுக.

i) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

ii) B = { a, e, i, e, o, u }

8) ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என நிரூபி.

9) A = {1, 2, 3 } ; B = { a, b, c } எனில் B – A மற்றும் A – B காண்க.

10) A = { a, b, c, 2, 3 } B = { 1, 2, 3, 4, 5 } எனில்

i) $(A - B) \cup (B - A)$

ii) $(A - B) \cap (B - A)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

11) $\cup$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } ஒரு பொதுக்கணம்

A = { 1, 2, 3, 4, 5 } ; B = { 2, 3, 6 } ; C = { 1, 2, 5 } எனில்

i) $(A \cup B) \cap C$

ii) $(A - B')'$

iii) $(B' \cup C)$

iv) $(A' \cap C)$ மதிப்புகளைக் காண்க.

12) A = {5, 6, 7, 8, 9 } ; B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12 } மற்றும் C = {3, 6, 9, 12 } எனில்

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என நிரூபி.

13) ஏதேனும் இரு கணங்களை உதாரணமாகக் கொண்டு டி மார்கன் விதிகளை நிரூபி.

14) A = {1, 2, 3, 4 } ; B = { 1, 3 } ; C = { 1, 2, 3 } எனில் கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபி.

i) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

ii) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$

15) A = { 1, 2, 3 } ; B = { 2, 3, 4, 5 } ; C = { 2, 4, 6, 8 } எனில் கீழ்க்கண்டவைகளை சரிபார்க்க.

i) $A \cup B = (A - B) \cup B$

ii) $A - (A - B) = A \cap B$

iii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$

16) வென்படம் மூலம் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

i) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ii) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

iii) $(A - B) = A \cap B'$

17) 30 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்பில் 10 மாணவர்கள் கணிதமும், 15 மாணவர்கள் வணிகவியலும் படிக்கின்றார்கள். 10 மாணவர்கள் இரண்டும் படிக்கவில்லை. அவ்வாறெனில் எத்தனை மாணவர்கள் கணிதமும் வணிகவியலும் சேர்ந்து படிக்கின்றார்கள்.

6. அணிக்கோவை

(Determinents)

கீழ்க்கண்ட ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளை (Simultaneous equation) எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1$$

$$a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2$$

இந்த இரு சமன்பாடுகளின் மூலம் x,y-ன் தீர்வுகள் காணலாம்.

(அ.து) $x = \dfrac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})}$ $y = \dfrac{b_2\,a_{11} - b_1\,a_{21}}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})}$

$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{22})$ என்பதை $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ எனக் குறிப்போம்.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ என்பது அணிக்கோவை எனப்படும்.

$a_{11}\,a_{12}$ என்பது முதல் வரிசை அதாவது முதல் நிரையில் அமைந்துள்ள (மூலகங்கள்) உறுப்புக்கள் a_{21}, a_{22} என்பன இரண்டாவது நிரையில் அமைந்துள்ள உறுப்புகள் a_{11}, a_{21} என்பன முதல் நிரலில் அமைந்த உறுப்புக்கள் a_{12}, a_{22} என்பன இரண்டாவது நிரலில் அமைந்துள்ள உறுப்புக்கள்.

இதில் இரண்டு நிரல்களும் இரண்டு நிரைகளும் இருப்பதால் அணிக்கோவையின் வரிசை 2 என அழைப்பர்.

அணிக்கோவையின் வரிசை 3 என்றால் 3 நிரல்களும் 3 நிரைகளும் அணிக்கோவையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

அணிக்கோவையின் விரிவு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ எனில் இதன் மதிப்பு

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{21}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

இங்கு முதல் நிரை வழியாக அணிக்கோவையின் பிரிவு எழுதப்பட்டுள்ளது. பெருக்குத்தொகையில் ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுக்கும்போது அது இருக்கும் நிரலையும் நிரையையும் தவிர்த்து, எஞ்சியுள்ள அணிக்கோவை வரிசை *2*ஐக் கொண்டு உறுப்புடன் பெருக்கப்படுகின்றது. பெருக்குத்தொகையின் குறியீடு +ve, –ve என மாறி மாறியிருக்கின்றது. முதல் நிரையை எடுத்துத் தான் விரிவு காணவேண்டும் என்பது அவசியமில்லை. எந்த நிரையொத்தும் அல்லது நிரலொத்தும் விரிவு காணலாம். அப்படிச் செய்யும்போது அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

மூலகத்தின் குறியீட்டைக் குறிக்கும் முறை

a_{31} என்ற மூலகத்தை எடுப்போம். அதின் பின்னொட்டுக் குறிகளைக் கூட்டினால் 3 + 1 = 4, ஒரு இரட்டைப்படைஎண் கிடைக்கின்றது. ஆகவே அதன் குறியீடு +ve எனக் குறிக்கலாம். அதே போல் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால் –ve எனக் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 12 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையில்

'–1' -ன் குறியீடு (a_{11}) +

'2' -ன் குறியீடு (a_{12}) –

'3' -ன் குறியீடு (a_{13}) +

'12' -ன் குறியீடு (a_{21}) –

'–3' -ன் குறியீடு (a_{22}) +

'–4' -ன் குறியீடு – (a_{23})

'5' -ன் குறியீடு + (a_{31})

'6' -ன் குறியீடு – (a_{32})

'7' -ன் குறியீடு + (a_{33})

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 12 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்பு காணல்

தீர்வு

$= -1 [(-3)(7) - (6)(-4)] - 2 [(12)(7) - 5(-4)] + 3 [(12)(6) - 5(-3)]$

$= -1 [-21 + 24] - 2 [84 + 20] + 3 [72 + 15]$

$= -3 - 208 + 261 = 261 - 211$

$= 50$

அணிக்கோவைகளின் பண்புகள்

1. ஒரு அணிக்கோவையின் மதிப்பு எந்த நிரை (அல்லது நிரல்)யின் உறுப்புகளைப் (மூலகங்களைப்) பொறுத்து விரிவு செய்தாலும் அதன் மதிப்பு மாறாது.

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[6-63] - 3[5-56] + 4[45-48]$$

$$= 2[-57] - 3[-51] + 4[-3]$$

$$= -114 + 153 - 12$$

$$= 27$$

இது முதல் நிரையின் உறுப்புக்களைப் பொறுத்து விரிவு படுத்தப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[6-63] - 5[3-36] + 8[21-24]$$

$$= 2[-57] - 5[-33] + 8[-3]$$

$$= -114 + 165 - 24$$

$$= 27$$

இது முதல் நிரலில் உள்ள உறுப்புக்களைப் பொறுத்து விரிவு படுத்தப்பட்டுள்ளது.

உண்மை

இரு மதிப்புகளும் சமமாக உள்ளன. இதே மாதிரி மற்ற நிரல் அல்லது நிரை உறுப்புக்களைப் பொறுத்து விரிவுபடுத்தினாலும் அதே மதிப்புதான் கிடைக்கும்.

2. ஓர் அணிக்கோவையில் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றினால் அதன் மதிப்பு மாறாது.

எடுத்துக்காட்டு

மேலே கூறிய எடுத்துக்காட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 27 \text{ (நிறுவப்பட்டது)}$$

நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றும்போது கிடைக்கும் அணிக்கோவை

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

இதன் மதிப்பு

$$= 2(6-63) - 5(3-36) + 8(21-24)$$

$$= 27$$

3. ஓர் அணிக்கோவையில் எவையேனும் இருநிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) பரிமாற்றம் செய்யப்படின் அணிக்கோவையின் மதிப்பில் குறியீடு மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 27 \text{ (நிறுவப்பட்டது)}$$

முதல் நிரையையும், இரண்டாவது நிரையையும் பரிமாற்றம் செய்திடின்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,(3 - 36) - 6\,(2 - 32) + 7\,(18 - 24)$$

$$= 5\,(-33) - 6\,(-30) + 7\,(-6)$$

$$= -165 + 180 - 42$$

$$= -27$$

4. ஓர் அணிக்கோவையில் எந்த இருநிரைகளாவது (அல்லது நிரல்களாவது) முழுதொத்தவை (identical) எனில் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும் நிரைகள் முழுத்தொத்தவை.

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,(21 - 24) - 3\,(14 - 20) + 4\,(12 - 15)$$

$$= 2\,(-3) - 3\,(-6) + 4\,(-3)$$

$$= -6 + 18 - 12$$

$$= 0$$

:

நிரல்கள் முழுதொத்தவை

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\ (15 - 12)\ - 4\ (6 - 6) + 1\ (12 - 15)$$

$$= 3\ - 4\ (0)\ -3$$

$$= 0$$

5. ஓர் அணிக்கோவையில் இரண்டு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) விகிதசமமாக இருந்தால், அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

என்ற அணியில் முதல் நிரல் உள்ள உறுப்புகள் மூன்றாவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் போல் 4 மடங்கு உள்ளது.

$$\Delta \quad = 1\ (60 - 48)\ -4\ (24 - 24) + 4\ (12 - 15)$$

$$= 12 - 4\ (0) + 4\ (-3)$$

$$= 12\ -\ 12$$

$$= 0$$

6. ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பினையும் k (≠0) என்ற எண்ணால் பெருக்கி எழுதினால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு k மடங்கு கூடும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 27 \text{ (நிறுவப்பட்டது)}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 15 & 6 & 7 \\ 24 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\,(6 - 63) \;- 3\,(15 - 168) + 4\,(135 - 144)$$

$$= 6\,(-57) \;- 3\,(-153) + 4\,(-9)$$

$$= -342 + 459 - 36$$

$$= 81 = 3 \times 27$$

$$\Delta' = 3\,\Delta$$

அணிக்கோவைகளின் கூட்டல்

வரையறை

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_4 + b_4 & a_5 + b_5 & a_6 + b_6 \\ a_7 + b_7 & a_8 + b_8 & a_9 + b_9 \end{vmatrix}$$

இரு அணிக்கோவைகளைக் கூட்டும்போது,

1. இரண்டு அணிக்கோவைகளும் ஒருவரிசையாக இருத்தல் வேண்டும்.

2. முதல் அணிக்கோவையில் உள்ள முதல் நிரலும் இரண்டாவது அணிக்கோவையில் உள்ள முதல் நிரலும் கூட்டப்பட வேண்டும். அதே முறையில் இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரல்களும் கூட்டப்பட வேண்டும். அணிக்கோவைகளின் கழித்தல் இந்த முறையில்தான் செயல்படும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ a_4-b_4 & a_5-b_5 & a_6-b_6 \\ a_7-b_7 & a_8-b_8 & a_9-b_9 \end{vmatrix}$$

முக்கிய குறிப்பு

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta + 0$$

$$\Delta' = \Delta$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $\begin{vmatrix} bc & b+a & 1 \\ ca & c+a & 1 \\ ab & a+b & 1 \end{vmatrix} = 4abc$ என நிரூபி.

2. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & c+a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ என நிரூபி.

3. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -3$ என நிரூபி.

4. $\begin{vmatrix} a & k & g \\ k & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgk - af^2 - kg^2 - ck^2$ என நிரூபி.

5. $\begin{vmatrix} a & c & b \\ k & a & c \\ c & ba & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ என நிரூபி.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1+x & 7+x \\ 8 & 2+x & 4+x \\ 27 & 3+x & 6+x \end{vmatrix} = 12x$ என நிரூபி.

இணைக்காரணி - சிற்றணிக்கோவை

வரையறை

சிற்றணிக்கோவை

ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு உறுப்பு அமையும். நிரை, நிரல்களை நீக்கிய பின், நாம் பெறும் நாம் பெறும் அணிக்கோவையே அவ்வுறுப்பின் சிற்றணிக்கோவை எனப்படும்.

ஓர் அணிக்கோவையில் i -வது நிரை, j -வது நிரலில் அமையும் உறுப்பின் சிற்றணிக்கோவையினை Mij -எனக் குறிக்கட்டும்.

இணைக்காரணி

குறியீடுடன் உள்ள சிற்றணிக் கோவையே இணைக்காரணி எனப்படும். ஓர் அணிக்கோவையில் i -வது நிரை மற்றும் j -வது நிரலில் அமையும் உறுப்பின் இணைக்காரணியை Aij எனக் குறிப்பிட்டால் Aij =(–1) Mij ஆகும்.

குறிப்பு

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவையை சிற்றணிக்கோவை வாயிலாக விரிவு காணும்போது அவற்றின் குறியீடுகள் பின்வருமாறு அமையும்.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

2-ன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

3-ன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

–4-ன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

–1-ன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

2-ன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

3-ன் இணைக்காரணி $= A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$

–1-ன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

-2-ன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

அணிக்கோவையின் விரிவு (இணைக்காரணி மூலம்)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3$$

சிற்றணிக்கோவை மூலம் விரிவு காணில்,

$$\Delta = a_1M_1 - a_2M_2 + a_3M_3$$

குறிப்பு

$a_1B_1 - a_2B_2 + a_3B_3 = 0$ *(நிரூபி).*

B_1 , B_2 , B_3 *என்பன* b_1 , b_2 , b_3 *ஆகியவற்றின் இணைக்காரணிகள்*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad B_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad . B_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore a_1\left[-\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right] + a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\left[-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= -a_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + a_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) - a_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

$$= -a_1 a_2 c_3 + a_1 a_3 c_2 + a_1 a_2 c_3 - a_2 a_3 c_1 - a_1 a_3 c_2 - a_2 a_3 c_1$$

$$= 0$$

இதுபோல் $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$

ஆனால் $b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = \Delta$

$c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = \Delta$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$$

$$b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0$$

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta$$

$$a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = \Delta$$

$$a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = \Delta$$

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$$

$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & b_2 & b_2 \\ l_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \times \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 l_1 + b_1m_1 + c_1n_1 & a_1 l_2 + b_1m_2 + c_1n_2 & a_1 l_3 + b_1m_3 + c_1n_3 \\ a_2 l_1 + b_2m_1 + c_2n_1 & a_2 l_2 + b_2m_2 + c_2n_2 & a_3 l_3 + b_3m_3 + c_3n_3 \\ a_3 l_1 + b_3m_1 + c_3n_1 & a_3 l_2 + b_3m_2 + c_3n_2 & a_3 l_3 + b_3m_3 + c_3n_3 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x4 + 1x9 & 2x5 + 1x3 \\ 3x4 + 4x9 & 3x5 + 4x3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 + 9 & 10 + 3 \\ 12 + 36 & 15 + 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 13 \\ 48 & 27 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\times1+(-1)\times2+2\times(-1) & 2\times4+(-1)\times3+2\times2 & 2\times5+(-1)\times6+2\times(-2) \\ 1\times1+2\times2+(-2)\times(-1) & 1\times4+2\times3+(-3)\times2 & 1\times5+2\times6+(-3)\times(-2) \\ 3\times1+1\times2+(-4)\times(-1) & 3\times4+1\times3+(-4)\times2 & 3\times5+1\times6+(-4)\times(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-2-2 & 8-3+4 & 10-6-4 \\ 1+4+3 & 4+6-6 & 5+12+6 \\ 3+2+4 & 12+3-8 & 15+6+8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 8 & 4 & 23 \\ 9 & 7 & 29 \end{vmatrix}$$

பயிற்சி வினாக்கள்

பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் காண்க.

1. $= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 9 & 29 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$

2. $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் உறுப்புக்களின் சிற்றணிக்கோவை, இணைக்காரணிகளை எழுது.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -6 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

கிராமர் விதி

கீழ்க்கண்ட ஒருங்கிணைச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

இந்த சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டுமானால் முதலில்

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவை

பூச்சியமாக இருத்தல் கூடாது. $(D \neq 0)$.

அப்போது

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$\& \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

மேலே சொன்ன வாய்பாடுகளை வைத்து x, y, z-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

தீர்க்க :-

$$x + 2y - z = -1$$

$$3x - y - 2z = 5$$

$$x - y - 3z = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-2) - 2(-9+2) - 1(-3+1)$$

$$= 1 + 14 + 2$$

$$= 17 \neq 0$$

$D \neq 0$ என்பதால் தீர்வுகள் காணலாம்.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{-1(3-2) - 2(-15) - 1(-5)}{17}$$

$$= \frac{-1 + 30 + 5}{17} = \frac{34}{17}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{-1(-15) + 1(-9 + 2) - 1(-5)}{17}$$

$$= \frac{-15 - 7 + 5}{17} = \frac{-17}{17}$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{1(5) - 2(-5) - 1(-3 + 1)}{17}$$

$$= \frac{5 + 10 + 2}{17} = \frac{17}{17}$$

$$\boxed{z = 1}$$

ஆகவே இடைத்தீர்வுகள் $\boxed{x = 2,\ y = -1,\ z = 1}$

பயிற்சி வினாக்கள்

தீர்க்க :-

1. $x + 2y + 3z = 6$
   $2x + 4y + z = 7$
   $3x + 2y + 9z = 14$

2. $x + y + z = 6$
   $2x + 3y - z = 5$
   $4x + 9y + z = 25$

3. $x + y + z = 1$
   $ax + by + cz = d$
   $a^2x + b^2y + c^2z = d^2$

4. $9x + 7y + 3z = 6$
   $5x - y + 4z = 1$
   $6x + 8y + 2z = 4$

5. $x + y + z = 6$
   $x + 2y + 3z = 14$
   $-x + y - z = -2$

முக்கிய குறிப்பு

ஓர் அணிக்கோவையில் மூலை விட்டங்களில் உள்ள உறுப்புகள் தவிர மற்ற உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருப்பின், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உறுப்புகளைப் பெருக்கினால் கிடைக்கும் தொகையே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்பு $= 4 \times -5 \times 3 = -60$ ஆகும்.

7. அணிகள்
(Matrices)

செவ்வக அல்லது சதுர அமைப்பில் எண்களை நிரல்களிலும் நிரைகளிலும் வரிசைப்படுத்தி இரு வளைவுக் கோடுகளுக்கிடையே எழுதிக் குறிக்கும் ஒரு முறைக்கு அணி என அழைக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(1 \quad 2 \quad 4), \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$ என்பன அணிகளின்

வகைகளாகக் காணலாம். ஆனால் இது எப்படிக் கணிதத்தில் பயன்படுகிறது என்பதை விரிவாகப் பார்ப்பதுதான் இப்பகுதியின் நோக்கமாகும்.

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கவனிக்கவும்.

$$x + 2y + 3z = 7$$

$$2x + y - 5z = 3$$

$$x - 2y + 6z = 5$$

இந்தச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு கண்டால் x, y, z என்பதற்கு மதிப்பு காணலாம். சமன்பாடுகளைத் தீர்வு முறையில் கண்டால் x = 3, y = 2, z = 1 என அறியலாம். இங்கு மூன்று மாறிகள் x, y, z என்பன மட்டும் இருப்பதால் எளிதாகக் காண இயலும். மாறிகள் எண்ணிக்கை அதிகமானால் கீழ் வகுப்புகளில் கண்டறிந்த முறைகளில் தீர்வு காண்பது எளிதல்ல. ஆகவே அணிகளின் உதவியை நாம் இப்போது நாடுகிறோம். அணிகளின் உதவியால் இச்சமன்பாடுகளை எழுதினால்

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

என எழுதலாம். இதிலிருந்து x, y, z என்பனவற்றின் மதிப்புகளை எப்படிக் காண்பது என்பதை விரிவாகப் பார்க்கலாம்.

அணிகளின் அமைப்பு

m நிரைகளையும், n நிரல்களையும் கொண்ட ஒரு அணியானது கீழ்க்கண்ட முறையில் அமையும்.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \\ \text{1வது நிரல்} & \text{2வது நிரல்} & & & & \text{nவது நிரல்} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{1வது நிரை} \\ \text{2வது நிரை} \\ \text{3வது நிரை} \\ \\ \\ \\ \text{mவது நிரை} \\ \\ \end{matrix}$$

a_{ij} என்பது i-ஆவது நிரையிலும், j-ஆவது நிரலிலும் உள்ள உறுப்பாகும். இனிமேல் $a_{11}, a_{12}, \ldots$ என்பனவற்றை உறுப்புக்கள் என அழைக்கலாம். மேலும் இதனை m x n அணி எனச் சொல்லலாம்.

மேலே கண்ட அணியைச் செவ்வக அணி எனவும் அழைக்கலாம். இங்கு $m \neq n$ என இருக்கும்.

$m > n$ அல்லது $m < n$ என்று இருக்கலாம். $m = n$ என இருந்தால் அதாவது நிரைகளும் நிரல்களும் சமமாக இருந்தால் அதனைச் சதுரஅணி என அழைக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ என்பது 2 x 2 அணி எனவோ, சதுரஅணி வரிசை இரண்டு எனவோ, கூறலாம். ஆனால் நாம் "சதுரணி வரிசை 2 அல்லது சதுரஅணி" என அழைக்கலாம்.

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ என்பது 2 x 3 அணி எனக்கூறலாம்.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது சதுரணி வரிசை 3 என்று கூறலாம்.

(4 2 3) என்பது 1 x 3 அணி அல்லது நிரை அணி (நிரை வெக்டர்) எனக்கூறப்படும்.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ என்பது 4 x 1 அணி அல்லது நிரல் அணி என கூறப்படும். (நிரல் வெக்டர்)

பொதுவாக ஒரு அணியினை, ஆங்கில பெரிய எழுத்துக் களிலும், உறுப்புக்களை ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களாலும் குறிக்கப்படும்.

ஒரே எண்கள் 1, 2, 3 என்பனவற்றால் அமையும் அணிகள்

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்பன இருவேறு அணிகளாகும்.

ஆகவே

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

என்று இரு அணிகள் சமம் எனக் கூறினால்

1) $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$ . . . . .

. . . . . $a_{33} = b_{33}$, என்று இருக்கவேண்டும்.

2) இரண்டும் ஒரே வரிசை அணிகளாக இருக்க வேண்டும்.

அணிகளின் வகை

1) நிரல்-அணி

ஒரு நிரலைக் கொண்ட அணியை நிரல் அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) நிரை-அணி

ஒரே நிரையினைக் கொண்ட அணி நிரை-அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) (1 5 7), $(a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n})$, (0 1 0)

3) சதுர-அணி

நிரைகளும், நிரல்களும் சம எண்ணிக்கையில் இருந்தால் (m = n) அந்த அணி சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

சதுர அணி வரிசை 3 *சதுர அணி வரிசை 'n'* *சதுர அணி வரிசை '3'*

குறிப்பு

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **என்ற சதுரணியை எடுத்துக் கொண்டோம். இதில்** a_{11}, a_{22}, a_{33} **என்ற உறுப்புகள்**

மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. இந்த உறுப்புக்களை a_{11}, a_{22}, a_{33} மூலைவிட்ட உறுப்புகள் என அழைக்கப்படும். எந்த சதுரணியிலும் மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள உறுப்புக்களை மூலைவிட்ட உறுப்புக்கள் அல்லது தலையாய மூலைவிட்ட உறுப்புக்கள் (Principal diagonal elements) என அழைக்கப்படும்.

4) அணி அலகு (Unit Matrix அல்லது Identity Matrix)

ஒரு சதுரணி வரிசை 'n' ஆக இருப்பின், அதன் தலையாய மூலைவிட்ட உறுப்புகள் 1 எனவும், மற்ற உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருப்பின் அது அணி அலகு என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - சதுரணி வரிசை இரண்டு. இதில் மூலைவிட்ட உறுப்புக்கள் 1 என இருக்கின்றது. ஏனைய உறுப்புகள் பூச்சியமாக உள்ளன. இதனை I_2 என்ற குறியீட்டால் குறிக்கலாம். அது போல

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது I_3 எனவும் $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$

என்பது I_n சதுரணி வரிசை குறிக்கப்படும்.

5) பூச்சிய அணி

ஒரு அணியில் உள்ள எல்லா உறுப்புக்கள் பூச்சியமாக இருந்தால் அவ்வணி பூச்சிய அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $(0 \ 0 \ 0)$ (3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $(0\ 0\ 0)$

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) மூலைவிட்ட அணி

ஒரு சதுரணியில் தலையாய மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் தவிர மற்ற உறுப்புக்கள் பூச்சியமாக இருப்பின் அது மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

7) மூலைவரை அணி

ஒரு சதுரணியில் (1) தலையாய மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் தவிர மற்ற உறுப்புக்கள் பூச்சியமாக இருத்தல்

வேண்டும். (2) தலையாய மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

8) முக்கோண வடிவ அணி

ஒரு சதுரணியில் தலையாய மூலைவிட்டத்திற்கு மேலோ, அல்லது கீழே உள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ கீழ் முக்கோண வடிவஅணி

(மூலைவிட்டத்திற்கு மேலே உள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருக்கிறது).

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ மேல் முக்கோண வடிவஅணி

(மூலைவிட்டத்திற்கு கீழே உள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருக்கிறது).

அணிகளிடையே உள்ள செயல்பாடுகள்

1) சம அணிகள்

இரு அணிகள் A, B என்பன சமமாக இருப்பின், (A = B)

(1) இரண்டும் ஒரே வரிசையில் உள்ள அணிகளாக இருத்தல் வேண்டும். மேலும்

(2) இரண்டு அணிகளிலும் உள்ள ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ எனில்

a = 5; b = 6; c = 7; d = 8 என இருத்தல் வேண்டும்.

2) இரண்டு அணிகளின் கூட்டல்

இரு அணிகள் சமவரிசையில் இருக்குமானால் (அதாவது சமநிரல்களும், சம நிரைகளும் இருத்தல் வேண்டும்). இரு அணிகளின் கூட்டல் என்பது இரண்டு அணிகளில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகள் கூட்டப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ எனில்

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 4+1 & 7+5 \\ 2+2 & 5+2 & 9+6 \\ 1+3 & 6+3 & 7+4 \end{pmatrix}$$

3) இரண்டு அணிகளின் கழித்தல்

இரு அணிகள் சமவரிசையில் இருக்குமேயானால் (அதாவது சமநிரல்களும் சமநிரைகளும் இருத்தல் வேண்டும்). இரு அணிகளின் கழித்தல் என்பது இரண்டு அணிகளில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகள் கழிக்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11}, & a_{12} - b_{12}, & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21}, & a_{22} - b_{22}, & a_{23} - b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-2 & 4-3 \\ 5-4 & 6-7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4) எண்ணியியல் அணிப்பெருக்கல் (மாறிலியாய் அணியைப் பெருக்கல்)

A = (aij) என ஒரு அணி m x n வரிசையில் இருந்தால் k என்ற மாறிலியால் அணியைப் பெருக்கினால் அணியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பினையும் k ஆல் பெருக்க வேண்டும். அதாவது kA = (kaij) என எழுதுவோம்.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ k = 2 எனில்

2) k = ½ $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ என்றால்

$$k = ½ \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 7/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

அணிகளின் பெருக்கல்

A, B என்ற அணிகளின் பெருக்கல் என்பது AB எனக்குறிக்கப்படும். மேலும் A யின் நிரல்களும், Bயின் நிறைகளும் சமமாக இருப்பின் AB என்பதுவரையறுக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக A ஆனது m x n வரிசையிலும் B ஆனது n x p வரிசையிலும் இருந்தால், AB ஆனது m x p வரிசையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 x 3 வரிசை 3 x 2 வரிசை

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 & 3 \times 4 + 5 \times 3 + (-1) \times 2 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 4 & 3 \times 1 + 5 \times 0 + (-1) \times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 25 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$$

அம்புக் குறிப்போட்ட திசையில் உறுப்புக்களைப் பெருக்க வேண்டும்.

பெருக்கலின் அமைப்பு

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} \ldots & l_{np} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} \ldots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{n2} + \ldots + a_{nn}b_{n2} \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A என்பது 2 x 2 வரிசையில் உள்ளது.

B என்பது 2 x 3 வரிசையில் உள்ளது.

AB என்பது 2 x 3 வரிசையில் உள்ளது.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x1 + 3x{-2} & 2x0 + 3x3 & 2x2 + 3x1 \\ -1x1 + 1x{-2} & -1x0 + 1x3 & -1x2 + 1x1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 6 & 0 + 9 & 4 + 3 \\ -1 - 2 & 0 + 3 & -2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 9 & 7 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

குறிப்பு

BA என்பது வரையறுக்க முடியாது. ஏனெனில் B என்பது 2x3 வரிசை, A என்பது 2x2 வரிசை.

Bயில் உள்ள நிரல்கள் 3. Aயில் உள்ள நிரைகள் 2. நிரல்களும், நிரைகளும் சமமாக இருப்பின், பெருக்கல் வரையறுக்கப்படும்.

அணி வகைகளின் தொடர்ச்சி

இடமாற்ற அணி (நிரை நிரல் மாற்று அணி)

ஒரு அணியில் உள்ள நிரைகளை, நிரல்களாகவும் நிரல்களை நிரைகளாகவும், மாற்றி அமைத்து ஏற்படுத்தும் அணிக்கு இடமாற்ற அணி எனக் கூறுவர். A என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியானால் இடமாற்ற அணியை A^T என்று குறிப்பார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{என்றால்} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

குறிப்பு

$(AB)^T = B^TA^T$ என அறிக.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 11 & 35 \end{pmatrix} \quad (AB)^T = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 12 & 35 \end{pmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 12 & 35 \end{pmatrix}$$

ஆகவே $(AB)^T = B^TA^T$

சேர்ப்பு அணி (துணை அணி)

பூச்சியக்கோவை அணி

வரையறை

ஒரு சதுர அணியினது அணிக்கோவை |A|-யின் மதிப்பு பூச்சியமெனில் அது பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.

அதாவது, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *என்ற அணி ஒரு சதுரஅணி*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1(28-24) - 2(14-6) + 3(8-4) \\ &= 4 - 16 + 12 = 0 \end{aligned}$$

இப்போது |A| = 0 என்றிருப்பதால், A என்ற அணியினை பூச்சியக்கோவை அணி எனக்கூறுவர்.

பூச்சியமற்ற கோவை அணி

ஒரு சதுர அணி A-யின் அணிக்கோவை ($|A| \neq 0$) மதிப்பு பூச்சியம் இல்லையெனில் இதை அணி A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-3) - 2(2-9) + 1(1) = -12 + 14 + 1 = 3 \neq 0$$

அணி A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி.

சேர்ப்பு அணி

ஒரு சதுர அணி A-யின் சேர்ப்பு அணி என்பது |A|-யின் இணைக்காரணிகள் அணியின் இடமாற்ற அணியாகும். A-யின் சேர்ப்பு அணியினை adj A எனக் குறிப்பிடுவர்.

எடுத்துக்காட்டாகக்கூறின்

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ எனில்}$$

$$|A|\text{-யின் இணைக்காரணிகளின் அணி} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A_{11} &= 4-3 &= 1 \\ A_{12} &= -(2-9) &= 7 \\ A_{11} &= 1-6 &= -5 \end{aligned}$$

$A_{21} = -(6-1) = -5$ $A_{22} = 4-3 = 1$ $A_{21} = -(2-9) = -7$

$A_{31} = 9-2 = 7$ $A_{32} = -(6-1) = -5$ $A_{33} = 4-3 = 1$

Aயின் இணைக்காரணி அணி = $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

நேர்மாறு அணி

A, B என்ற இரு சதுர அணிகள். AB = BA = I என இருந்தால் Bஐ Aயின் நேர்மாறு அணி என்பர் அல்லது Aஐ Bயின் நேர்மாறு அணி என்பர். I என்பது அலகு அணி Aயின் நேர்மாறு அணியினை A^{-1} எனக் குறியீட்டால் குறிப்பர்.

அதாவது $B = A^{-1}$

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

A^{-1} கண்டுபிடிப்பதற்கான வழி

1. A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாக இருக்க வேண்டும் $|A| \neq 0$.

2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$ என்ற வாய்பாடை வைத்துக் கண்டு பிடிக்கலாம். (குறிப்பு ∴ பூச்சியக்கோவை அணிக்கு நேர்மாறு அணி கிடையாது).

எடுத்துக்காட்டு

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $|A| = 6-4 = 2 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} என்பதைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

A-யின் இணைக்காரணி அணி $= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது A-யின் நேர்மாறு அணி

குறிப்பு

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

எடுத்துக்காட்டு

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6-4) - (-1)4 + 0$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$A_{11} = 6 - 4 = 2 \qquad A_{12} = -4 \qquad A_{13} = 2$

$A_{21} = 2 \qquad A_{22} = 2 \qquad A_{23} = -1$

$A_{31} = 4 \qquad A_{32} = -4 \qquad A_{33} = 5$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ எனில் A^{-1}-ஐக் கண்டுபிடி. மேலும் $2A^{-1} = 9I - A$ என நிரூபி.

2. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் நேர்மாறு அணியினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

என்ற இரு அணிகளின் உதவியால் $(AB)^T = B^T A^T$ என நிரூபி.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

முதலில் AB ஐக் கண்டுபிடி. AB = C எனக் குறித்தால் C^{-1} என்னவென்று காண்க. எனவும் நிரூபி.

5. $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ எனில்,

$A^{-1} = A^T$ எனக் காண்க.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனில்,

கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

a) $(AB)^T = B^T A^T$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

c) adj (AB) = (adj A) (adj B)

7. $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $XX^{-1} = I_3$

எனில் என நிரூபி.

அணிகளும், ஒருபடிச் சமன்பாடுகளும்

அணிகளின் உதவியால் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வழிமுறைகளைப் பார்ப்போம்.

தீர்க

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 3y + 4z = 9$$

$$3x - y - 2z = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$ என x, y, z குணகங்களைக் கொண்டு ஒரு அணியை அமைத்துக் கொள்வோம்.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ என நிரல் அணியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$ என மாறிலிகளைக் கொண்டு இன்னொரு நிரல் அணியை வைத்துக்கொள்வோம். மேலே கொடுத்துள்ள ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை அணிமுறையில் எழுதினால்

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$ என இருக்கும்.

(அ.து.) $$AX = B$$

A^{-1} என்பதைக் கொண்டு AX = B-ஐ முன்னால் பெருக்கினால்

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

(அ.து.) $(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B$

$$I\,X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

வழக்கப்படி கணக்கிட்டால் $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 16 & -5 & -2 \\ -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

எனக்கிடைக்கும்.

∴ $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ எனில், $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(அ.து.) x = 1, y = 1, z = 1 எனத் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

அணிகளின் உதவியால் பின்வரும் ஒருங்கமைச் (ஒருபடிச், சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

1. $x + y + z = 6$

   $x + 2y + 3z = 14$

   $-x + y - z = -2$

2. $9x + 4y + 3z = 6$

   $5x - y + 4z = 14$

   $6x + 8y + 2z = -2$

3. $4x + 3y + 6z = 25$

$x + 5y + 7z = 13$

$2x + 9y + z = 1$

உண்மைகள்

A, B, C என்ற மூன்று அணிகள். கீழ்க்கண்ட உண்மைகளை உடைனவாய் இருக்கும்.

1. $A + B = B + A$

2. $AB \neq BA$

3. $A(B+C) = AB + AC$

4. $A(B - C) = AB + AC$

5. $(AB)C = A(BC)$

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A + B = B + A}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -6+2 \\ 3-3 & -6+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 & 2-6 \\ 3-3 & -2+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \; AB \neq BA}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A\,(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+4 & 0+10 \\ 6+6 & 0+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 & 6+8 \\ 3+9 & 6+12 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 1+9 & -4+14 \\ 0+12 & -3+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A(B+C) = AB + AC$$

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A(B-C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -12 \; -6 \\ -12 & -12 \; -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -18 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$$

$$AB - AC = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -18 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore\ A(B - C) = AB - AC}$$

எடுத்துக்காட்டு

சென்னையில் உள்ள A என்ற வியாபாரியிடம் 300 டின் தேங்காய் எண்ணெய், 600 டின் நல்லெண்ணெய் 800 டின் கடலெண்ணெய் இருக்கிறது. B என்ற வியாபாரியிடம் 250 டின், 900 டின், 1000 டின் என்று முறையே எண்ணெய் இருக்கிறது. கீழ்க்கண்ட ஊர்களில் விலைவாசிப்பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	தே.எண்ணெய்	ந.எண்ணெய்	க.எண்ணெய்
மதுரை	Rs. 100	Rs. 90	Rs. 80
திருச்சி	Rs. 110	Rs. 80	Rs. 70
சேலம்	Rs. 120	Rs. 70	Rs. 80

ஒவ்வொரு வியாபாரியும் எந்தெந்த ஊரில் வியாபாரம் செய்தால் அதிகலாபம் அடைவர்?

A யின் கையிருப்பு $A = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$ எனவும்,

B யின் கையிருப்பு $B = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$ எனவும் குறித்தால்,

மற்ற ஊர்களில் உள்ள விலைவாசியினை $C = \begin{pmatrix} 100 & 90 & 80 \\ 110 & 80 & 70 \\ 120 & 70 & 80 \end{pmatrix}$ எனக் குறிக்கவும்.

$$CA = \begin{pmatrix} 158000 \\ 157000 \\ 142000 \end{pmatrix} \; ; \; CB = \begin{pmatrix} 168000 \\ 153500 \\ 159000 \end{pmatrix}$$

∴ CA, CB என்ற பெருக்கல் பலன்களில் நாம் அறிவது A மதுரையிலும் B மதுரையிலும் அதிகலாபம் ஈட்டலாம் என அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ எனில் (AB) C = A (BC) என நிரூபி.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)\,C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow (2)$$

(1) (2) என்ற நிலையிலுருந்து,

A (BC) = (AB) C என அறிகிறோம்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

என்ற மூன்று அணிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கீழ்க்கண்ட உண்மைகளை நிரூபிக்கவும்.

i) A + B = B + A

ii) (A + B) + C = A + (B + C)

iii) AB BA

iv) A (B + C) = AB + AC

v) A (C – B) = AC – AB

vi) (AB) C = A (BC)

2. அ. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில்

AB= 0 எனக்காட்டுக.

ஆ. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனில்

AI= IA = A என நிரூபி

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

எனில்

AB, AC என்பனவற்றைக் கண்டுபிடி. இதன் முடிவில் நீ கண்டறியும் உண்மை என்ன?

(AB = AC என்றால் B = C ஆக இருக்காது)

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில்

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என நிரூபி.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ எனில்

BA = B என நிரூபி.

8. வகைநுண் கணிதம் (Calculus)

எல்லை என்றால் என்ன?

எடுத்துக்காட்டாக $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொண்டு ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x	1	1.5	1.6	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.01	2.2	2.5
f(x)	3	3.5	3.6	3.8	3.9	3.99	3.999	0/0	4.01	4.2	4.5

மேலே சொன்ன அட்டவணைப்படி x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் f(x)க்கு ஒரு மதிப்பு கிடைக்கிறது. ஆனால் x = 2 எனக் குறிப்பிடும்போது f(x) = 0/0 என்ற அமைப்பில் இருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை கொடுக்க இயலவில்லை. சார்பு என்பதன் பொருள், x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் f(x) ஒவ்வொரு மதிப்பை தர வேண்டும். ஆனால் 0/0 என்ற ஒரு தேறப்பெறாத அமைப்பில் [indeterminate form] உள்ளது. ஆகையால் f(x)க்கு x = 2 என்று பிரதியிடும்போது ஒரு மதிப்பு வேண்டும். அதற்கு அட்டவணையைக் கூர்ந்து நோக்கினால் ஓர் உண்மைப்புலப்படும். அதாவது x ஆனது 2ஐ நோக்கி சிறிது சிறிதாக நகரும்போது f(x)ம் ஒரு எண்ணை அதாவது 4ஐ நோக்கி சிறிது சிறிதாக நகர்ந்து கொண்டு செல்வதைப் பார்க்கின்றோம். சார்பு என்பதன் வரையறைப்படியும், அட்டவணையில் உள்ள அமைப்புப்படியும் நாம் f(x)க்கு 4 என்பதைப் பிரதியிடலாம். ஆனால் அது 0/0 = 4 என்ற ஒத்துக்கொள்ள முடியாத நிலையைக் கொடுக்கும். ஆகவே, 4 என்ற மதிப்பிற்கு எல்லை மதிப்பு [Limiting Value] என ஒரு புதுப்பெயர் சூட்டுகிறோம். அதனை

$$\underset{x \to 2}{Lt} (f(x)) = \underset{x \to 2}{Lt} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4$$ எழுதும் போது எனக் குறிப்பிட்டு எழுதுகிறோம். இந்த எல்லை என்ற புது அணுகுமுறைதான் வகைநுண் கணிதத்திற்கு வழிவகுக்கின்றது.

எல்லை காணலில் அடிப்படை வாய்பாடுகள் :-

(1) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left(\frac{x^n - a^n}{x - a} \right) = na^{n-1}$

(2) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

(3) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$

(4) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\lim x}{x} \right) = 1$

வாய்பாடுகள்

(1) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left[f(x) + g(x) \right] = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) + \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)$

(2) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left[f(x) - g(x) \right] = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) - \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)$

(3) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left[f(x) \,.\, g(x) \right] = \left[\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) \right] . \left[\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) \right]$

(4) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left[f(x) \,/\, g(x) \right] = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) \,/\, \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)^{*}$

*[$\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) \neq 0$ என்று இருந்தால் மட்டும்]

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\right]$ ன் மதிப்பு என்ன?

x = 2 எனப் பிரதியிட்டால் நமக்கு 0/0 எனக் கிடைக்கும். ஆகவே கணக்கிடுவது கடினம்.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ \frac{x+3}{x+1} = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$$

(2) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}\right]$ ன் மதிப்பு என்ன?

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{x^2+3x}{x^2-x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{x(x+3)}{x(x-1)}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{3}{-1} = -3$$

(3) $\underset{x\to -2}{\text{Lt}}\left[\dfrac{x^4-16}{x+2}\right]$ ன் மதிப்பு என்ன?

$\underset{x\to a}{\text{Lt}}\left[\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right] = na^{n-1}$ என வாய்ப்பாடு அறிவோம்.

$$\underset{x\to -2}{\text{Lt}}\left(\frac{x^4-16}{x+2}\right) = \underset{x\to -2}{\text{Lt}}\left[\frac{x^4-(-2)^4}{x-(-2)}\right] = 4(-2)^{4-1}$$

$$= 4(-2)^3 = 4 \times (-8) = -32$$

(4) $\underset{x \to \infty}{Lt} \left[\frac{4x+8}{5x-7}\right]$ ன் மதிப்பு என்ன?

$x = 1/y$ எனப் பிரதியிட்டால் $x \to \infty,\ y \to 0$

$$\frac{4x+8}{5x-7} = \frac{4/y + 8}{5/y - 7} = \frac{4+8y}{5-7y}$$

$$\therefore \underset{x \to \infty}{Lt} \left(\frac{4x+8}{5x-7}\right) = \underset{y \to 0}{Lt} \left(\frac{4+8y}{5-7y}\right) = \left(\frac{4+0}{5-0}\right) = \frac{4}{5}$$

(5) $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin 60}{\theta} = 6$ என நிரூபி.

$$\frac{\sin 60}{\theta} = \left(\frac{\sin 60}{60} \times 6\right)$$

$$\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin 60}{\theta} = \underset{60 \to 0}{Lt} \left[\frac{\sin 60}{\theta} \times 6\right]$$

$$= 6 \underset{60 \to 0}{Lt} \left[\frac{\sin 60}{\theta}\right]$$

$$= 6 \times 1 = 6$$

பயிற்சி வினாக்கள்

(1) $\underset{x \to 1}{Lt} \left(\frac{x^2+x+2}{x^2-6x+5}\right)$

(2) $\underset{x \to 2}{Lt} \left(\frac{x^2+3x-10}{x-2}\right)$

(3) $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \left(\dfrac{\sin n\theta}{\theta} \right)$

(4) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(\dfrac{4x + 5}{x - 2} \right)$

(5) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \left(\dfrac{x^3 - 27}{x - 3} \right)$

(6) $\underset{x \to 2}{\text{Lt}} \left(\dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4} \right)$

(7) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \right)$

(8) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(\dfrac{2x^4 + 5x^2 + 6}{3x^5 + 2x^3 - 4x} \right)$

வகையிடல் (Differentiation)

ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்க.

A என்பது வட்டத்தின் பரப்பளவைக் குறிக்கும். r என்பது வட்டத்தின் ஆரத்தைக் குறிக்கும்.

$A = \pi r^2$ என்பது பரப்பளவு காணப் பயன்படும் வாய்ப்பாடு. இதில் r-ன் மதிப்பு தன்னிச்சையாக மாறக்கூடியது. r-ன் மதிப்பு மாறினால், A-ன் மதிப்பு மாறும். அதாவது A-ன் மதிப்பு, r-ன் மதிப்பைச் சார்ந்து இருக்கின்றது. இதைக் கணக்கியல் படி கூறுவோமானால்

A ஆனது r-ன் சார்பு என அழைக்கலாம். அதாவது $A = f(r)$ எனக் குறிக்கலாம்.

r என்பது சாராமாறி (independent variable) எனக்கூறுவர்.

A என்பது சார்புடை மாறி (dependent variable) எனக்கூறுவர்.

இன்னுமொரு எடுத்துக்காட்டைக் கவனிப்போம்.

$y = f(x) = x^2/100$ என்பது ஒரு சார்பு. இதில் x என்பது நெல்லின் முதலீடு விலை. y என்பது மொத்த நெல் உற்பத்தி. இங்கு முதலீடு அதிகமானால், நெல் உற்பத்தி அதிகமாகும் முதலீடு குறையுமானால் நெல் உற்பத்தி குறையும். ஆகையால் x என்பது சாராமாறி, y என்பது சார்புடை மாறி.

வரையறை :

வகைக்கெழு

$y = f(x) \rightarrow (1)$ என்ற ஒரு சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். x-க்கு ஒரு கூடுந்தொகை Δx கொடுத்தால், y ஆனது எடுக்கும் கூடுந்தொகை Δy.

$$\therefore \; y + \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad [\Delta y \rightarrow 0 \text{ as } \Delta x \rightarrow 0]$$

$$\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{Lt}} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

இடதுகைப் பக்கம் எல்லையின் மதிப்பு கிடைக்குமனால் f(x) வகையிடத்தக்கது எனக் கூறப்படும். எல்லையின் மதிப்பு f'(x) எனக் குறிக்கலாம். இடதுபக்கம் உள்ள $\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}$ எனக் குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

குறிப்பு

(1) $\frac{dy}{dx}$ என்பது ஒரு குறியீடு.

(2) f'(x) என்பது x-ஐப் பொறுத்து f(x)-ன் வகைக்கெழு எனவும் கூறுவர். பொதுவாக f(x)-ன் வகைக்கெழு f'(x) ஆகும்.

தேற்றம்

x^n ன் வகைக்கெழு, x-ஐப் பொறுத்து அடிப்படைக் கொள்கையிலிருந்து கண்டுபிடி.

$y = x^n$ என்க. $\rightarrow$ (1)

x-க்கு கூட்டுத்தொகை Δx கொடுத்தால், y க்குக் கூடுந்தொகை Δy எனக் கிடைக்கும். $\Delta x \rightarrow 0$ எனில் $\Delta y \rightarrow 0$ ஆகும்.

$(y + \Delta y) = (x + \Delta x)^n \rightarrow (2)$

(2) – (1) (கொடுப்பது) $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} \right]$$

அதாவது, $$\frac{dy}{dx} = \underset{x + \Delta x \to x}{\text{Lt}} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} \right]$$

$$= nx^{n-1} \left[\because \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{(x^n - a^n)}{(x - a)} = na^{n-1} \right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

கிளைத்தேற்றம்

(1) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

(2) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

(3) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

(4) $\frac{d}{dx}(k) = 0$ ['k' என்பது ஒரு மாறிலி]

(அதாவது) $\frac{d}{dx}(10) = 0, \ \frac{d}{dx}(a) = 0$

(5) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left[\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \right.$

$$\left. = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

வகைக்கெழு விதிகள்

(1) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ [sum] (கூட்டல் விதி)

(2) $\frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ [sum] (கூட்டல் விதி)

(3) $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ [Difference] (கழித்தல் விதி)

(4) $\frac{d}{dx}(u \,.\, v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (பெருக்கல் விதி)

(5) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ du/dx - u\ dv/dx}{v^2}$ (வகுத்தல் விதி)

(6) $\frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx}$ (k என்பது மாறிலி)

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$ (சங்கிலி விதி அல்லது சார்பின் சார்பு விதி)

பின்வரும் சார்புகள் வகைக்கெழு முதல் கொள்கைகளிலிருந்து காணலாம்.

(1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(4) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(5) $\frac{d}{dx}$ (sec x) = sec x tan x

(6) $\frac{d}{dx}$ (cosec x) = –cosec x cot x

(7) $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

(8) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(9) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a.$

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $7x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7x - 11$-ன் வகைக்கெழு காண்.

முதலில் $y = 7x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7x - 11$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். y-ஐப் பொறுத்து வகையிட வேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7x - 11)$$

$$= \frac{d}{dx}(7x^5) + \frac{d}{dx}(9x^4) - \frac{d}{dx}(7x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(11)$$

$$= 7\frac{d}{dx}(x^5) + 9\frac{d}{dx}(x^4) - 7\frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - 0$$

$$= 7(x^4) + 9(x^3) - 7(x^2) + 2(x) + 7.1$$

$$= 35x^4 + 36x^3 - 21x^2 + 4x + 7$$

2. $6x^{3/2} + 3\sqrt{x} - 3/x + 5/x^2$ ன் வகைக்கெழு என்ன?

$y = 6x^{3/2} + 3x^{½} - 3x^{-1} + 5x^{-2}$ என்க.

y-ஐப் பொறுத்து வகையிடல் வேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^{3/2}) + \frac{d}{dx}(3x^{½}) - \frac{d}{dx}(3x^{-1}) + \frac{d}{dx}(5x^{-2})$$

$$= 6\frac{d}{dx}(x^{3/2}) + 3\frac{d}{dx}(x^{½}) - 3\frac{d}{dx}(x^{-1}) + 5\frac{d}{dx}(x^{-2})$$

$$= 6(3/2)\left(x^{\frac{3}{2}-1}\right) + 3(½)(x^{½-1}) - 3(-1)x^{-1-1} + 5(-2)(x^{-2-1})$$

$$= 9x^{½} + \frac{3}{2}x^{-½} + 3x^{-2} - 10x^{-3}$$

3. பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழு காண்க.

(1) $2x^3 - 3\log x + 6e^x + 35/x^2$

(2) $2\sin x - 3\tan x$

(1) $y = 2x^3 - 3\log x + 6e^x + 35x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 3\log x + 6e^x + 35/x^2$$

$$= 6x^2 - 3/x + 6e^x - 70x^{-3}$$

(2) $y = 2\sin x - 3\tan x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x - 3\sec^2 x$$

$$= 2\cos x - 3\sec^2 x$$

சங்கிலி விதி பயன்படுத்தி வகைக்கெழு கண்டுபிடித்தல் (சார்பின் சார்பு விதி)

$y = f(x)$ என்னும் $u = g(x)$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ *என சார்பின் சார்புவிதி உபயோகிக்கப்படும்.*

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $y = \sin 3x$ *என்க.*

$3x = u$ *என பிரதியிடுக.*

$y = \sin u \qquad u = 3x$

$\frac{dy}{du} = \cos u \qquad \frac{du}{dx} = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \,.\, (3) = 3 \cos u = 3 \cos 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos 3x$$

2. $y = (3x+1)^3$ *என்க.*

$3x + 1 = u$ *எனப் பிரதியிடுக.*

$y = u^2 \qquad u = 3x + 1$

$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad \frac{du}{dx} = 3 \,.\, 1 + 0 = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \,.\, 3 = 9(3x+1)^2$$

3. $y = e^{\sqrt{x}}$ என்க.

$$u = \sqrt{x}$$

$$\therefore \quad y = e^u \qquad u = \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

எடுத்துக்காட்டு : 1

$y = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

வாய்ப்பாடு $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{\dfrac{v\,du}{dx} - \dfrac{u\,dv}{dx}}{v^2}$

$$y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{u}{v}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cos x)\frac{d}{dx}(1 + \cos x) - (1 + \cos x)\frac{d}{dx}(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \cos x)(0 - \sin x) - (1 + \cos x)[0 - (-\sin x)]}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{- \sin x + \sin x / \cos x - \sin x - \sin x / \cos x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{- 2\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு : 2

$y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}}{(x^2 - 1)^{1/2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1)^{1/2} \frac{d}{dx}[(x^2 + 1)^{1/2}] - (x^2 + 1)^{1/2} \frac{d}{dx}[(x^2 - 1)^{1/2}]}{[(x^2 - 1)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{1/2 - 1} \frac{d}{dx} (x^2 + 1)\right] - (x^2 + 1)^{1/2} \left[\frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-1/2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)\right]}{(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} (2x)\right] - (x^2 + 1)^{1/2} \left[\frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-1/2} (2x)\right]}{(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{x (x^2 - 1)^{1/2} (x^2 + 1)^{-1/2} - x (x^2 + 1)^{1/2} (x^2 - 1)^{-1/2}}{(x^2 - 1)}$$

(1) $y = \log_{10} x$ என்க.

$$= \log_e x \quad \log_{10} e$$

$$\frac{dy}{dx} = \log_{10} e \quad \frac{d}{dx} (\log_e x)$$

$$= \log_{10}e \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[\log_{10}x] = \frac{1}{x} \cdot \log_{10}e$$

(2) $y = \log (5x^2 - 1)$ என்க.

$(5x^2 - 1) = u$ எனப் பிரதியிடுக.

$y = \log u \qquad u = 5x^2 - 1$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \qquad \frac{du}{dx} = 5\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx} \quad (1)$$

$$= 5(2x) - 0$$

$$= 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} - \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}(10x)$$

$$= \frac{1}{5x^2 - 1} \times 10x = \frac{10x}{5x^2 - 1}$$

(3) $y = x^3 e^{3x}$ என்க.

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{dx}[x^3 e^{3x}]$$

$$= x^3 \frac{d}{dx}(e^{3x}) + e^{3x} \cdot \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 (3 e^{3x}) + e^{3x} (3x^2)$$

$$= e^{3x} [3x^3 + 3x^2]$$

$$= 3e^{3x} [x^3 + x^2]$$

குறிப்பு

(1) $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m \cos mx$

(2) $\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m \cos mx$

(3) $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$

(4) $\frac{d}{dx}(\sec mx) = m \sec^2 mx$

(5) $\frac{d}{dx}\left\{\log (ax + b)\right] = \frac{a}{ax + b}$

பயிற்சி வினாக்கள்

பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழு காண்க.

(1) $8x^{10} - 7x^5 + \frac{7}{x} - \frac{7}{x^2}$

(2) $\sin x \, . \, \cos x$

(3) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

(4) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 2}$

(5) $\dfrac{x^2 + \sin x}{\cos x}$

(6) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

(7) $x^2 \sec x$

(8) $xe^x + 3 \log x$

(9) $\cos^3 x$

(10) $(2x^2 + 2x - 1)^{1/2}$

(11) $\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

(12) $\sqrt{4 - 9x}$

(13) $\log (8x^2 + 2x + 1)$

(14) $\log_{10} (3x^2)$

(15) $x^2 e^{-4x} + x \log x^2$

(16) $(3x - 1) \sqrt{2x - 1}$

(17) $x^2 \sqrt{1 + x^2}$

(18) $\sin 2x \,.\, \sin 3x$

(19) $\cos 2x \,.\, \cos 4x$

(20) $\sin^3 2x$

(21) $\tan^2 (e^x)$

(22) $\tan (\sin x)$

(23) $x^2 \cot 3x - e^{3x}$

(24) $\log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(25) $\log_5 (7x^2 - x + 1)$

$\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(1) $y = \sin 2x$ at $x = \frac{\pi}{3}$

(2) $x^2 \sqrt{1 + x^2}$ at $x = 2$

(3) $\cos (x^2 - 4x)$ at $x = 0$

(4) $x - \cos x$ at $x = \frac{\pi}{4}$

(5) $3x^{1/2}$ at $x = 4$

(6) $(x^2 - 3x + 1)^2$ at $x = 1$

எடுத்துக்காட்டு : 1

$x = 1$-ல் $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பு, $x^3 + 3x^3 - 2$ என்ற சார்பிற்குக் கண்டுபிடி.

$y = x^3 + 3x^2 - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x$$

$\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு x = 1 என்ற இடத்தில்

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 3 . 1^2 + 6 . 1 = 3 + 6$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 9$$

எடுத்துக்காட்டு : 2

sin 2x cos 2x -ன் வகைக்கெழுவின் மதிப்பு என்ற $x = \frac{\pi}{2}$ இடத்தில் என்ன?

$$y = \sin 2x \ . \ \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x \ . \ \frac{d}{dx}(\cos 2x) + \cos 2x \ . \ \frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \sin 2x \ (-\sin 2x)\, 2 + \cos 2x \ . \ (\sin 2x)\, 2$$

$$= -2 \sin^2 2x + 2 \cos^2 2x$$

$$= 2 [\cos^2 2x - \sin^2 2x]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/2} = 2 \left[\cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2 [0 - 1]$$

$$= -2$$

எடுத்துக்காட்டு : 3

$y = \sin^3 4x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு என்ன?

$y = \sin^3 4x$

$u = \sin 4x$ எனவும் $v = 4x$ எனவும் பிரதியிடுக.

$y = u^3 \qquad u = \sin 4x \qquad v = 4x$

$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad u = \sin v$

$\frac{du}{dx} = \cos v \qquad \frac{dv}{dx} = 4$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \; \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= 3u^2 \cdot (\cos v) \cdot 4$$

$$= 3 \sin^2 4x \; \cos 4x \cdot 4$$

$$= 12 \sin^2 4x \; \cos 4x$$

எடுத்துக்காட்டு : 4

$y = \log_e \sec 3x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு என்ன?

$y = \log_e \sec 3x$ என்க.

$u = \sec 3x, \quad v = 3x$ எனப் பிரதியிடுக.

$y = \log u, \quad u = \sec v, \quad v = 3x$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dv} = \sec v \tan v, \quad \frac{dv}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} . \sec v \tan v . 3$$

$$= \frac{1}{\sec 3x} \sec 3x . \tan 3x . 3$$

$$= 3 \tan 3x$$

தொடர் வகையிடல்

$y = f(x)$ என்ற சார்பு கொடுக்கப்பட்டால், x-ஐப் பொறுத்து y-ஐ வகையிட்டால், $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ எனக் கிடைக்கும் என அறிவோம். இப்போது $\frac{dy}{dx}$ ஐ x-ஐப் பொறுத்து இன்னொரு தடவை வகையிட்டால்,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ எனக் கிடைக்கும்.

இதனைச் சுருக்கமாக $\frac{d^2y}{dx^2}$ எனக்குறிப்பிடலாம். (2வது வகைக்கெழு)

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ எனவும் வரையறுக்கலாம். (3வது வகைக்கெழு)

இப்படி y என்ற சார்பை எத்தனை தடவை வகையிட முடியுமோ அதுவரை வகையிடலாம்.

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ (முதல் வகைக்கெழு)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \text{ (2 வது வகைக்கெழு)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$ எனக் குறிப்பிடலாம்.
(3 வது வகைக்கெழு)

எடுத்துக்காட்டு

$y = x^3$ எனில் $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(3x^2)$$

$$= 3\left(\frac{d}{dx}\right)(x^2) = 3 . (2x) = 6x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(6x) = 6\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 6(1) = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(6) = 0$$

இங்கு நான்காவது தடவை தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு கண்டுபிடித்தால், இறுதியில் பூச்சியம் கிடைக்கிறது. அதன்பின் ஐந்தாவது தடவையாக வகைக்கெழு காணமுடியாது.

அதே நேரத்தில் இப்பொழுது வேறொரு எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -(-\sin x) = \sin x$$

இப்படி தொடர் வகையிடல் நீண்டு கொண்டே போகலாம்.

சில முக்கிய குறிப்பு

$\frac{dy}{dx}$ ஐ சில இடங்களில் y_1 எனவும் $D(y)$ எனவும் குறிப்பர். $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ y^2 எனவும், $D^2(y)$ எனவும் குறிப்பர். பொதுவாக $\frac{d^ny}{dx^n} = y_n = D^n(y)$.

எடுத்துக்காட்டு

$y = \cos^4 x$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$y = \cos^4 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos^3 x\,(-\sin x) = -4\cos^3 x\sin x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}[-4\cos^3 x\sin x]$$

$$= -4\left[\cos^3 x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(\cos^3 x)\right]$$

$$= -4\,[\cos^3 x\cos x + \sin x\,(3\cos^2 x)(-\sin x)]$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -4\,[\cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x]$$

எடுத்துக்காட்டு

$y = \log(4 - x^2)$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ன் மதிப்புக் காண்.

$y = \log(4 - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4 - x^2}\cdot\frac{d}{dx}(4 - x^2) = \frac{1}{4 - x^2}(0 - 2x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4 - x^2}}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2x}{4 - x^2}\right]$$

$$= \frac{(4 - x^2)\frac{d}{dx}(-2x) - (-2x)\frac{d}{dx}(4 - x^2)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(-2)\ [\ (4 - x^2)\ +\ 2x^2\ ]}{(4 - x^2)^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2)\ [4 + x^2]}{(4 - x^2)^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு

$y = 13x^3 + 7x^2 - 6x + 5$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ன் மதிப்புக் காண்.

$$y = 13x^3 + 7x^2 - 6x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 39x^2 + 14x - 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 78x + 14$$

பயிற்சி வினாக்கள்

பின்வருவனவற்றிற்கு 2வது வகைக்கெழு காண்க.

I (1) $\sin^2 x$

(2) $\sin^2(2x)$

(3) $\cos^3(2x)$

(4) $\tan x$

(5) $\frac{3x + 2}{2x - 3}$

(6) $\frac{x - 1}{x + 1}$

(7) $\log (2x + 3)$

(8) $\frac{1}{4x^2 - 1}$

(9) $\log (3 - 4x^2)$

(10) e^{2x+5}

(11) $\sin 2x \cos 3x$

(12) $e^{2x} \sin 3x$

(13) $e^{-2x} \cos 4x$

(14) $e^x \sin^2 x$

(15) $\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$

II. $y = 13x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 5x + 105$ எனில் $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ன் மதிப்பு காண்க.

III. $y = 3x^{3/2} + 5x^{1/2} - \frac{5}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ எனில் $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ன் மதிப்பு காண்க.

IV. $y = x^2 \log x$ எனில் $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ன் மதிப்பு காண்க.

V. $y = ae^{x} + be^{-x}$ எனில்

$$(2x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - (4x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2(2x^2-x+1) = 0$$ என நிரூபி.

VI. $xy = ae^{x} + be^{-x}$ எனில் $xy_2 + 2y_1 - xy = 0$ என நிரூபி.

VII. $y = x^2 \cos x_2$ எனில் $x^2{}_{1/2} - 4xy_1 + (x^2+6)y = 0$ என நிரூபி.

VIII. $y = e^{-x}\cos x$ எனில் $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ என நிரூபி.

IX. $y(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$ எனில் $2xy_2 = \frac{y}{2} + y_1$ என நிரூபி.

X. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log 2)$ எனில்

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$ என நிரூபி.

வடிவ கணிதத்தில் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$-ன் பொருள்

$y = f(x)$ என்ற ஒரு வளைவுவரை இருந்தால் $\frac{dy}{dx}$ ன் மதிப்பு, $x = a$ என்ற இடத்தில் எதைக் குறிக்கும் என வடிவ கணித முறையால் வரையறை செய்தால், நமக்கு தெரியும் உண்மை பின்வருகின்றது.

அந்த வளைவு வரைமேல் $[x, f(x)]$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். அந்தப் புள்ளியில் அந்த வளைவு வரைக்கு ஒரு தொடுகோடு வரையவும். அந்தத் தொடுகோட்டின் சரிவுதான் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ ன் மதிப்பு குறிக்கும். இதனை எளிதாக வடிவ கணிதத்தில் நிரூபிக்கலாம். ஆனால் நமக்கு $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ ன் மதிப்பு தொடுகோட்டின் சரிவு என்பது மட்டும்தான் முக்கியம்.

அடுத்து x-ன் மதிப்பு கூடும் போது y-ன் மதிப்பும் கூடுமானால் $y = f(x)$ என்பது ஒரு கூடும் சார்பு (increasing function) எனப்படும். அதற்கான விதி $\frac{dy}{dx}$ (> 0) மிகையாக இருக்கவேண்டும்.

மேலும் x-ன் மதிப்பு கூடும்போது y-ன் மதிப்பு குறையுமானால், $y = f(x)$ ஒரு குறையும் சார்பு (decreasing function) எனப்படும். அதற்கான விதி $\frac{dy}{dx}$ (< 0) குறையாக இருக்கவேண்டும்.

எந்த ஒரு புள்ளியில், $y = f(x)$க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x-அச்சுக்கு இணையாக இருக்குமோ அந்தப் புள்ளியை 'நிலைப்புள்ளி' அல்லது 'திருப்பப்புள்ளி' எனக் கூறுவர். அந்த நிலைப்புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y = x^3 - 3x^2 + 5$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$x = 1$ எனப் பிரதியிடவும். $\frac{dy}{dx} = 3 - 6 = -3 < 0.$ ஆகவே $x = 1$, என்ற புள்ளியில் y ஒரு குறையும் சார்பாக இருக்கும்.

$x = 4$ எனப் பிரதியிடவும். $\frac{dy}{dx} = 3 . 16 - 6 . 4$

$$= 48 - 24 = 24 > 0$$

ஆகவே $x = 4$, என்ற புள்ளியில் y ஒரு கூடும் சார்பாக இருக்கும்.

$\frac{dy}{dx} = 0$ என எழுதினால்,

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \; x = 2$$

ஆக $x = 0$, $x = 2$ என்ற புள்ளிகளை நிலைப்புள்ளிகள் என்று கூறலாம்.

மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் காணவழி

$y = f(x)$ என்ற ஒரு சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். அந்தச் சார்பு ஒரு புள்ளியிடத்து மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என வைத்துக் கொண்டால், அதற்கான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு :

$x = a$-ல் $\frac{dy}{dx}$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ எனக் கிடைத்தால் சார்பு மீப்பெரு மதிப்பை $x = a$-ல் பெறும் எனக் கூறுவோம்.

$x = a$-ல் $\frac{dy}{dx}$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ எனக் கிடைத்தால் சார்பு மீச்சிறு மதிப்பை $x = a$-ல் பெறும் எனக் கூறுவோம்.

ஆகவே, மீப்பெரு மதிப்பையும், மீச்சிறு மதிப்பையும் காணவழி

1. முதலில் $\frac{dy}{dx}$ஐக் கண்டுபிடித்து பூச்சியத்திற்குச் சமப் சமப்படுத்த வேண்டும். எந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx} = 0$ என அறிந்த பின்பு அதனை $x_1, x_2, \ldots$ என வைத்துக் கொள்வோம். (நிலைப்புள்ளிகள்)

2. அடுத்து $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டுபிடித்து, $x_1, x_2, \ldots$ என

மதிப்புகளை $\frac{d^2y}{dx^2}$ ல் பிரதியிடவும். அப்போது $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ என அறிந்தால் அந்த மதிப்புகளில் y ஆனது மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும் என அறிவோம்.

3. அடுத்து $x_2, x_2, \ldots$ என்ற மதிப்புகளை $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ல் பிரதியிடும் போது $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ எனக் கிடைத்தால் அந்த மதிப்புகளில் y ஆனது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும் என அறிவோம்.

வகைநுண் கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

$\frac{dy}{dx}$ என்பதன் பொருள் x-ஐப் பொறுத்து y-ன் மாறுவீதம் என அழைப்பர். ஏற்கனவே, $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு வளைவு வரையின் தொடுகோட்டின் சரிவு எனவும் பார்த்துள்ளோம். ஆனால், பொருளாதாரப் பாடத்தில் வகைநுண் கணிதத்தின் பயன்பாட்டினைச் சற்றுக் கவனிப்போம். முதலில் பொருளாதாரத்தில் பயன்படும் குறியீடுகளைக் காண்போம்.

p - விலை	q - அளவு	c - மொத்தச் செலவு
s - விற்பனை வருமானம்		P - இலாபம்
A.C - சராசரிச் செலவு		M.C - இறுதிநிலைச் செலவு
M.R - இறுதிநிலை வருவாய்		A.R - சராசரி வருவாய்
Q - மொத்த விற்பனை அளவு		f(C.. - மொத்த வருவாய்
a - விளம்பரச் செலவு		v - மாறும் செலவு

மொத்தச் செலவு = நிலையான செலவு + மாறும் செலவு

மாறும் செலவு = kx எனக் கொள்வோம். இதில் k என்பது ஒரு பொருளுக்கான செலவு, x என்பது உற்பத்திப் பொருள்களின் அளவு.

இறுதி நிலைச்செலவு $M.C = \frac{dc}{dx}$ (c - மொத்தச் செலவு)

c ஆனது (மொத்தச் செலவு) மீச்சிறு மதிப்பை அடையும். ஆனால்

M.C = A.C (சராசரிச் செலவு)

இதில் $A.C = \frac{c}{x}$

மொத்த வருவாய் = விற்பனை அளவு x ஒரு பொருளின் விற்பனை விலை

விற்பனை அளவு = மொத்த வருவாய் = f(Q)

இறுதி நிலை வருவாய் $(M.R) = \frac{d}{dQ}$ (மொத்த வருவாய்)

$$= \frac{d}{dQ}\,(\,f(Q)\,)$$

எடுத்துக்காட்டு

$$y = 2x^2 - x^3 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x - 3x^2 = 0$$

(அ.து.) $x(4 - 3x) = 0$

(அ.து.) $x = 0$ அல்லது $4 - 3x = 0$

$x = 0$ அல்லது $x = 4/3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 12x$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 4 > 0$$

$x = 0$-ல், y மீச்சிறுமதிப்பைப் பெறும்.

∴ மீச்சிறு மதிப்பு $y = 2 . 0 - 0 + 5 = 5$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4/3} = 4 - \frac{12}{3} \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$$

$x = 4/3$-ல் மீப்பெரு மதிப்பை பெறும்.

$$\text{மீப்பெரு மதிப்பு} = y = 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 5$$

$$= 2\left(\frac{16}{9}\right) - \left(\frac{64}{27}\right) + 5$$

$$= \frac{32}{9} - \frac{64}{27} + 5 = \frac{167}{27}$$

எடுத்துக்காட்டு

ஓர் உற்பத்தியாளர் வாரத்திற்கு x சரக்குகளை ரூபாய் $P = 20 - 0.001\,x$ என்ற விலையில் விற்க முடியும்.

x சரக்கு தயாரிக்கச் செலவு

ரூபாய் $y = bx + 2000$ ஆகும். அதிகலாபம் பெற அவர் எத்தனைச் சரக்குகளை ஒரு வாரத்தில் தயாரிக்க வேண்டும்.

$$C = \text{மொத்த வருவாய்} = x\,(20 - .001x)$$

$$= 20x - 0.001x^2$$

$$\text{M.R இறுதி நிலை வருவாய்} = \frac{dc}{dx} = 20 - .002x$$

$$\text{இறுதி நிலைச் செலவு} = \text{M.C} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}(5x + 2000) = 5$$

அதிகப்படியான (மீப்பெரு மதிப்பு) இலாபம் கிட்ட வேண்டுமானால்,

$$\text{M.R} = \text{M.C}$$

$$20 - 0.002x = 5$$

$$\boxed{x = 7500}$$

ஆகவே வாரம் 7500 சரக்குகள் உற்பத்தி செய்தால் அவருக்கு அதிகப்படியான இலாபம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

C - மொத்த செலவு R - மொத்த வருவாய்

x - உற்பத்தியாகும் சரக்குகளின் எண்ணிக்கை

ஒரு நிர்வாகம் வருவாய், செலவு அமைப்புகளை நிர்ணயிக்கும் போது

$C = 100 + .015\, x^2$ மற்றும் $R = 3x$ எனக் கண்டுபிடித்தது.

நிர்வாகத்திற்கு அதிகப்படியான இலாபம் கிடைக்க வேண்டுமானால் தயாரிப்பு விகிதம் எப்படி இருக்கவேண்டும்.

$$M.C = \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}(100 + 0.015\, x^2)$$

$$M.R = \frac{d}{dx}(R) = \frac{d}{dx}(3x) = 3$$

அதிகப்படியான இலாபம் பெற

$$M.C = M.R$$

$$.03x = 3$$

$$\boxed{x = 100}$$

நிர்வாகத்திற்கு மீப்பெரு இலாபம் வேண்டும் போது
$M.R = M.C$ என இருக்கும்.

அதாவது இலாபம் மீப்பெரு மதிப்பை பெறும் போது
$M.R = M.C$ என இருக்கும்.

தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of Demand)

$$\text{விலைத் தேவை நெகிழ்ச்சி} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{x}{p}}$$

இங்கு x - என்பது அசல் விலையில் தேவைப்படும் அளவு

p - என்பது ஒரு பொருளின் அசல் விலை

தேவை சார்பு x = f(x) எனக் கூறப்படும்.

மேற்கூறிய வாய்ப்பாட்டினால் $\frac{dx}{dp}$ எப்பொழுதும் குறை என்றதாகவே இருக்கும். $\frac{dx}{dp} < 0$. ஆகையால் விலைத் தேவை

நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{\left(\frac{dx}{dp}\right)}{\left(\frac{d}{p}\right)}$ (எனக் குறிப்பிடலாம்)
(அளவின்மட்டும்)

p என்பது பொருளின் விலையாகவும், q பொருளின் அளவாகவும் குறிக்கப்பட்டால் மொத்த வருவாய் R = pq எனலாம்.

இப்போது விலைத் தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$ என்ற வாய்ப்பாட்டின் மூலம் அறியலாம்.

குறிப்பு

R = kq எனில் $\frac{dR}{dp} = q(1-\eta)$ என நிரூபி.

R = pq

$$\frac{dR}{dp} = q + p\frac{dq}{dp} = q - q\left(\frac{-p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\right)$$

$$= (q - q\eta)$$

$$= q(1-\eta)$$

9. நிகழ்தகவு
(Probability)

நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் நடைபெறுகின்ற பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளின் முடிவுகளை நாம் நூறு விழுக்காடு துல்லியமாக கூற இயலாது. நிகழ்ச்சி நடைபெறக்கூடிய சாத்தியக் கூற்றினை மட்டுமே நம்மால் குறிப்பிட இயலும். இது நிகழ்தகவு எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக மழைக்காலங்களில் "இன்று மழை வருவதற்கு 80 விழுக்காடு வாய்ப்பிருக்கிறது" எனக் கூறுகிறோம். ஒரு சோதனையின்போது வரக்கூடிய பல முடிவுகள் நமக்குத் தெரிந்திருந்த போதிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையின்போது வரக்கூடிய முடிவு பற்றி உறுதியாகக் கூற இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது அது தலை அல்லது பூ மேல் நோக்கிவிழும் எனத் தெரிந்தபோதிலும், நாணயம் கீழே விழும்போது 100 விழுக்காடு தலைதான் மேல்நோக்கி விழும் எனக் கூற இயலாது. அதேபோல் ஒரு பகடையை உருட்டும்போது அதில் வரக்கூடிய முடிவுகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 எண்ணிக்கை கொண்ட முகங்கள் என்பது நமக்குத் தெரிந்தபோதிலும், நாம் ஒருமுறை பகடையை உருட்டும்போது எந்த எண்ணிக்கை வரக்கூடும் என்பதை நம்மால் உறுதியாகக் கூறஇயலாது. எனவே, நிச்சயமில்லாத நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான சாத்தியக்கூறுகளைக் கணிதத்தின் மூலம் கணக்கிடுவதே நிகழ்தகவு ஆகும்.

நிகழ்தகவு ஆரம்பகாலத்தில் சூதாட்டங்களோடு தொடர்புடைய நிகழ்ச்சிகளின் முடிவுகளைக் காணும் வாய்ப்பாக அமைந்திருந்தது. தற்சமயம் நிகழ்தகவுக் கொள்கையானது புள்ளியியலின் அடிப்படைத் தத்துவத்தில் அமைந்துள்ளது. எனவே, நிகழ்தகவானது பொருளாதாரம், வணிகம், சமூகம் போன்ற பல்வேறு துறைகளின் பகுத்தாய்தலுக்கு மிகவும் பயன்உள்ளதாய் அமைந்துள்ளது.

முக்கிய சொற்கள்

நிகழ்தகவு தேற்றங்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்வதற்கு

முன்பாக நாம் நிகழ்தகவில் பயன்படுத்தக்கூடிய சில முக்கிய சொற்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது அவசியம். அவையாவன:

அ) சமவாய்ப்புச் சோதனை **(Random Experiment)**

சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளின் கீழ் திரும்பத்திரும்ப செய்து பார்க்கும் செயல் சோதனை எனப்படும். சோதனையின்போது வரக்கூடிய முடிவுகள் பற்றி முன்கூட்டியே தெரிந்திருப்பினும் கூட, குறிப்பிட்ட சோதனையின் விளைவைப் பற்றி முன்கூட்டியே தெரிந்து கொள்ள இயலா சோதனைக்குச் "சமவாய்ப்புச் சோதனை" என்று பெயர். சோதனையை மீண்டும் மீண்டும் செய்யும்போது ஒரேவிதமான முடிவு வருவதில்லை. பல்வேறு முடிவுகளும் வருவதற்கு சமவாய்ப்புகள் உள்ளன.

ஆ) கூறு இடைவெளி **(Sample Square)**

சமவாய்ப்புச் சோதனையில் நிகழக்கூடிய அனைத்து விளைவுகளின் கணம் "கூறு இடைவெளி" எனப்படும். கூறுஇடைவெளி "S" என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. கூறு இடைவெளியில் உள்ள உறுப்புக்கள் "கூறுவெளிப்புள்ளிகள்" எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பகடையை உருட்டினால் *1, 2, 3, 4, 5, 6* என ஆறு கூறுவெளிப்புள்ளிகள் உண்டாகின்றன.

A, B என்ற இரண்டு பகடைகளை ஒன்று சேர்த்து உருட்டினால் கீழ்க்கண்டவாறு *36* கூறுவெளிப்புள்ளிகள் உண்டாகின்றன.

A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_1B_5, A_1B_6

A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_2B_4, A_2B_5, A_2B_6

A_3B_1, A_3B_2, A_3B_3, A_3B_4, A_3B_5, A_3B_6

A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, A_4B_4, A_4B_5, A_4B_6

A_5B_1, A_5B_2, A_5B_3, A_5B_4, A_5B_5, A_5B_6

A_6B_1, A_6B_2, A_6B_3, A_6B_4, A_6B_5, A_6B_6

இ) நிகழ்ச்சிகள் (Events)

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளியின் உட்கணம் நிகழ்ச்சி எனப்படும். நிகழ்ச்சிகள் A, B, C அல்லது E_1, E_2, E_3 என்ற ஆங்கில எழுத்தால் அல்லது குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு அட்டையை எடுக்கும்போது அது கருப்பு வண்ணம் கொண்ட அட்டையாக இருந்தால் அது ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். கருப்பு வண்ணம் கொண்ட அட்டையாக இல்லாமலிருந்தால் அது மற்றொரு நிகழ்ச்சியாகும்.

ஈ) சாதகமான முடிவுகள் (Favourate Outcomes)

சமவாய்ப்புச் சோதனையில் நிகழக்கூடிய அனைத்து விளைவுகளின் கணத்தைக் "கூறு இடைவெளி" எனவும் உட்கணத்தை "நிகழ்ச்சி" எனவும் குறிப்பிடுகிறோம். ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதைத் தவிர்க்க முடியாததாக்கும் முடிவுகள் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான முடிவுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கும்போது அது கருப்பு வண்ணச்சீட்டாக இருப்பதற்கு 26 சாதகமான முடிவுகள் (ஸ்பேடு 13 + கிளாவர் 13) உள்ளன.

உ) உடன் ஒத்துநிகழா நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events)

சமவாய்ப்புச் சோதனையின்போது நடைபெறக்கூடிய பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளில், ஒன்றின் நிகழ்வு மற்ற நிகழ்வுகளைத் தடுக்குமேயானால் அந்நிகழ்ச்சிகள் உடன் ஒத்துநிகழா நிகழ்ச்சிகள் அல்லது ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். கூறுவெளியில் நிகழக்கூடிய பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி மட்டுமே நடைபெறும். அதேசமயம் அந்நிகழ்ச்சி மற்ற எல்லாவித நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதையும் நிகழவிடாமல் செய்யும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கூறுவெளி, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என ஆறு நிகழ்ச்சிகள் ஏற்பட வாய்ப்புள்ளது. இதில் ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுமேயானால் மற்றொரு நிகழ்ச்சி நடைபெற வாய்ப்பேதுமில்லை. அதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியுடன் மற்றொரு நிகழ்ச்சியும் சேர்ந்து நடைபெற வாய்ப்பில்லை. இதனையே உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சி என்கிறோம்.

ஊ) சாராத நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

ஒரு நிகழ்ச்சியின் முடிவு, அதற்கடுத்து நடைபெறும் நிகழ்ச்சியை எவ்வி தத்திலும் பாதிக்காத தன்மையில் இருந்தாலோ அல்லது அதற்கு முந்திய நிகழ்ச்சியினால் பாதிக்கப்படாமல் இருந்தாலோ அந்நிகழ்ச்சி "சாராத நிகழ்ச்சி" எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ மேல்நோக்கி வி ழ சமவாய்ப்பு உண்டு. மீண்டும் மீண்டும் அந்த நாணயத்தைச் சுண்டும்போதும் தலை அல்லது பூ மேல்நோக்கி வி ழ சமவாய்ப்பே உள்ளது. வாய்ப்பின் இயல்பு மாறாமல் இருக்கிறது. அதாவது குறிப்பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சி அதற்கு முந்தைய அல்லது பின் நிகழ்ச்சிகளை எவ்வி தத்திலும் சாராத தன்மையில் இருக்கும் போது அதை சாராநிகழ்ச்சி என்கிறோம்.

எ) சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events)

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவது, அதற்கு முந்தைய நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்து அமையுமேயானால் அதை "சார்ந்த நிகழ்ச்சி" என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பெட்டியில் கருப்பு, வெள்ளை, மஞ்சள் என மூன்று வண்ணங்களில் பந்துகள் உள்ளன எனக் கொள்வோம். அவைகளிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். முதலில் எடுக்கப்பட்ட பந்து கருப்பு அல்லது வெள்ளை அல்லது மஞ்சள் ஆகிய வண்ணத்தில் அமையலாம். இரண்டாவது முறையாக எடுக்கப்படும் பந்தின் வண்ணம் முதல் நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்தே அமையும். அதாவது முதல் நிகழ்ச்சியில் கருப்புப்பந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தால் இரண்டாவது நிகழ்ச்சியில் வெள்ளை அல்லது மஞ்சள் வண்ணமாக அமையும். முதல் நிகழ்ச்சியில் வெள்ளைப்பந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தால் இரண்டாவது நிகழ்ச்சியில் கருப்பு அல்லது மஞ்சள் வண்ணமாக அமையும். அதேபோல் முதல் நிகழ்ச்சியில் மஞ்சள் பந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தால் கருப்பு அல்லது வெள்ளையாக அமையும். அதாவது இரண்டாவது நிகழ்ச்சியின் தன்மை முதல் நிகழ்ச்சியைச் சார்ந்தே நடைபெறும். முதல் நிகழ்ச்சியின் முடிவை தெரிந்து கொள்ளாமல் இரண்டாவது நிகழ்ச்சியின் முடிவை நாம் கூற இயலாது.

நிகழ்தகவின் வரையறை **(Definition of Probability)**

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கைக்கும், சமவாய்ப்புடைய அனைத்து முடிவுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான "நிகழ்தகவு" எனப்படும். A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு P(A) என்று குறிக்கப்படும்.

$$P(A) = \frac{\text{A நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{சமவாய்ப்புடைய மொத்த வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை}}$$

நிகழ்தகவை தசமத்திலும், பின்னத்திலும், விகிதத்திலும் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படும்போது அந்தச்சீட்டு இஸ்பேடு ராஜாவாக இருக்கக்கூடிய நிகழ்தகவு யாது? இஸ்பேடு ராஜாவாக இல்லாமலிருக்கக்கூடிய நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

சமவாய்ப்புடைய மொத்த வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 52

நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 1

$$P(\text{இஸ்பேடு ராஜா}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\text{இஸ்பேடு ராஜா இல்லாதது}) = \frac{52-1}{52}$$

$$= 0.980762$$

$$= 51 : 52$$

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது அதன் தலைப்பகுதி மேல்புறமாக விழக்கூடிய நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

சமவாய்ப்புடைய மொத்த வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 2

நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 1

P (தலை மேல்புறம்) = ½

= 0.5

= 1 : 2

எடுத்துக்காட்டு 3

இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டிவிடும்போது அதனுடைய தலைப்பகுதி ஒன்றுமட்டும் மேல்புறமாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

சமவாய்ப்புடைய மொத்த வாய்ப்புக்கள்

	முதல் நாணயம்	இரண்டாவது நாணயம்
i)	தலை	பூ
ii)	தலை	தலை
iii)	பூ	தலை
v)	பூ	பூ

நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான வாய்ப்புக்கள்

i) முதல் வாய்ப்பு (தலை, பூ)

ii) மூன்றாவது வாய்ப்பு (பூ, தலை)

$$P\,(\text{ஒரு தலை மேல்புறம்}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு P(A) எனக் கொண்டால், A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற முடியாததற்கான நிகழ்தகவை $P(\bar{A})$ எனலாம்.

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{பாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

70 சிவப்பு மற்றும் 30 கருப்பு நிறப்பந்துகள் கொண்டுள்ள பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்த பந்து சிவப்பு பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவையும், சிவப்புப் பந்தாக இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் காண்க.

தீர்வு

சிவப்புப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை A எனக் கொள்வோம்.

நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான வாய்ப்புக்கள் = 70

நிகழ்ச்சிக்குப் பாதமான வாய்ப்புக்கள் = 30

நிகழ்ச்சியின் மொத்த வாய்ப்புக்கள் = 100

$$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

கூட்டுநிகழ்ச்சி (Compound Event)

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் இணைந்து நடைபெறுமானால் அது "கூட்டு நிகழ்ச்சி" எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சிட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு தடவை ஒரு சிட்டை எடுத்தால் அது "தனி நிகழ்ச்சி" யாகும். ஆனால் அடுத்தடுத்து இரண்டு சிட்டுக்களை எடுத்தால் அது கூட்டு நிகழ்ச்சியாகும். கூட்டு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு கிழ்க்கண்ட வாய்ப்பாடு மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

$$P(A) = \frac{n_{c_r}}{n_{c_r}}$$

எடுத்துக்காட்டு 5

ஒரு பெட்டியில் 7 சிவப்பு, 12 வெள்ளை, மற்றும் 4 பச்சை வண்ணங்களில் பந்துகள் உள்ளன. கிழ்க்கண்ட நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

அ) எடுக்கப்பட்ட மூன்று பந்துக்களும் சிவப்பு வண்ணம் உடையன.

ஆ) எடுக்கப்பட்ட மூன்று பந்துக்களும் வெள்ளை வண்ணம் உடையன.

இ) எடுக்கப்பட்ட மூன்று பந்துக்களும் வெவ்வேறு வண்ணங்களில் உள்ளன.

தீர்வு

$$\text{மொத்த வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை} = {}^{23}C_3 = \frac{23 \times 22 \times 21}{3 \times 2 \times 1} = 1771$$

வெள்ளை வண்ணப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{12}C_3 = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$

சிவப்பு வண்ணப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{7}C_3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

வெவ்வேறு வண்ணப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{7}C_1 \times {}^{12}C_1 \times {}^{4}C_1$

$$= \frac{7}{1} \times \frac{12}{1} \times \frac{4}{1}$$

$$= 336$$

அ) P (மூன்றும் சிவப்பு) $= \dfrac{{}^{7}C_3}{{}^{23}C_3} = \dfrac{35}{1771} = 0.0198$

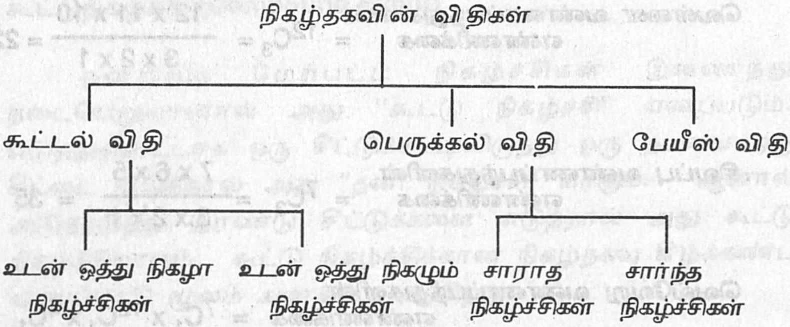
ஆ) P (மூன்றும் வெள்ளை) $= \dfrac{{}^{12}C_3}{{}^{23}C_3} = \dfrac{220}{1771} = 0.1242$

இ) P (மூன்றும் வெவ்வேறு வண்ணங்கள்) $= \dfrac{{}^{7}C_1 \times {}^{12}C_1 \times {}^{4}C_1}{{}^{23}C_3}$

$$= \frac{336}{1771} = 0.1897$$

நிகழ்தகவின் விதிகள் (Probability Rules)

நிகழ்தகவு நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சிலவிதிகளின் அடிப்படையில் நடைபெறுகின்றன. அதனை "நிகழ்தகவின் விதிகள்" என அழைக்கிறோம்.



கூட்டல் விதி (Additional Rule)

சமவாய்ப்புச் சோதனை நிகழ்ச்சிகளை (அ) உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சிகள் என்றும் (ஆ) உடன் ஒத்து நிகழும் நிகழ்ச்சிகள் என்றும் இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கலாம். அந்த அடிப்படையின்படி கூட்டல்விதி சற்று மாறுபட்டுச் செயல்படுகிறது.

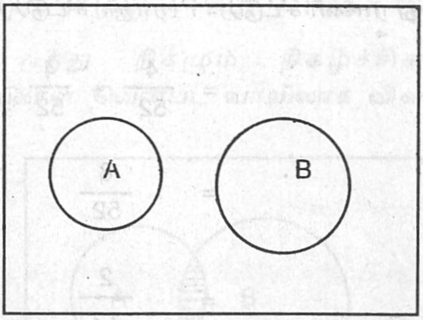
அ) உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சிகள் **(Mutually exclusive Events)**

A, B என்பவை ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சிகள் எனக்கொண்டால் "நிகழ்ச்சி A" அல்லது "நிகழ்ச்சி B" நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவானது, நிகழ்ச்சி A, B இரண்டின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

குறிப்பு

A, B, C என மூன்று நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுமானால் கூட்டல் விதிப்படி $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ஆகும். இதே அடிப்படையில் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமானால் கூட்டுத்தொகையில் சேர்க்கப்படும் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையும் அதிகமாகும். உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சிகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்பட வாயிலாக விளக்கலாம்.



வென்விளக்கப்படம்

மேலே உள்ள படத்தில் A மற்றும் B கணங்கள் ஒவவாக் கணங்களாகும். அதாவது அவைகளுக்கிடையில் பொது உறுப்புக்கள் இல்லை. நிகழ்ச்சி இரண்டும் உடன் ஒத்து நிகழா நிகழ்ச்சிகளாகும். எனவே, அவைகள் தனித்தனியாக உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 6

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. கிழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு காண்க.

அ) சிவப்பு சீட்டு

ஆ) ராணி சீட்டு

இ) ராஜா அல்லது ராணி சீட்டு

தீர்வு

$$P(\text{சிவப்பு சீட்டு}) = \frac{\text{சிவப்பு சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த சீட்டுகள்}} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ராணி சீட்டு}) = \frac{\text{ராணி சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த சீட்டுகள்}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

P(ராஜா அல்லது ராணி சீட்டு) = P(ராஜா சீட்டு) +P(ராணிசீட்டு)

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}$$

$$= \frac{8}{52}$$

$$= \frac{2}{13}$$

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு பெட்டியில் சிவப்பு வண்ணப்பந்துகள் 8ம், வெள்ளை வண்ணப் பந்துகள் 7ம் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால் அந்தப் பந்து (அ) சிகப்பு வண்ணப்பந்து (ஆ) சிவப்பு அல்லது வெள்ளை வண்ணப்பந்தாக இருக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

P (சிகப்பு) $= \frac{8}{15}$

P (சிகப்பு அல்லது வெள்ளை) = P (சிகப்பு) + P(வெள்ளை)

$$= \frac{8}{15} + \frac{7}{15}$$

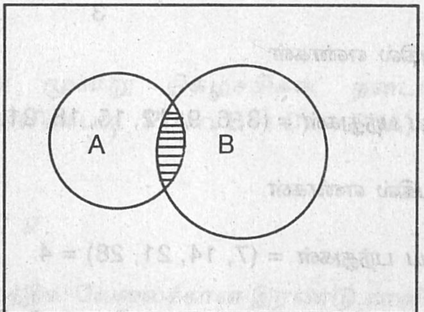
$$= 1$$

ஆ) உடன் ஒத்து நிகழும் நிகழ்ச்சிகள்

A,B என்பவை ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் உடன் ஒத்து நிகழும் நிகழ்ச்சிகள் எனக்கொண்டால், "நிகழ்ச்சி A அல்லது B" நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவின் வாய்ப்பாடு பின்வருமாறு இருக்கும்.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

உடன் ஒத்து நிகழும் நிகழ்ச்சிகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்பட வாயிலாக விளக்கலாம்.



வென்விளக்கப்படம்

இதில் A, B என்ற இருகணங்கள் வெட்டுக்கணங்களாகும். இவ்விரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 8

ஒரு கூடையில் 1 முதல் 60 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட 60 பந்துகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படும் போது அந்தப்பந்து அ) 5 அல்லது 7 ஆ) 6 அல்லது 7 மடங்கில் வரும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவுவு காண்க.

தீர்வு

அ) 5ன் மடங்கில் எண்கள்

உடைய பந்துகள் = (5, 10, 15, 20, 25, 30) = 6

7ன் மடங்கில் எண்கள்

உடைய பந்துகள் = (7, 14, 21, 28) = 4

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{30} + \frac{4}{30}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ஆ) 3ன் மடங்கில் எண்கள்

உடைய பந்துகள் = (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30) = 10

7ன் மடங்கில் எண்கள்

உடைய பந்துகள் = (7, 14, 21, 28) = 4

21 என்ற எண் கொண்ட பந்து இரண்டு நிகழ்ச்சிகளிலுமே வருவதால் இவை உடன்ஒத்து நிகழும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{4}{30} - \frac{1}{30}$$

$$= \frac{14}{30} - \frac{1}{30}$$

$$= \frac{13}{30}$$

பெருக்கல் விதி (Multipulation Rule)

சமவாய்ப்புச் சோதனை நிகழ்ச்சிகளை (அ) சாராத நிகழ்ச்சிகள் என்றும் (ஆ) சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் என்றும் இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

அ) சாராத நிகழ்ச்சி

A, B ஆகிய இரண்டும் சாராத நிகழ்ச்சிகள் என்றால் A, B இரண்டும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு அவை தனித்தனியே நடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

$$P\ (A \text{ and } B) = P\ (A) + P\ (B)$$

$$P\ (A \cap B) = P\ (AB)$$

குறிப்பு

ABC என மூன்று நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுமானால் பெருக்கல் விதியின்படி $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C)$ எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

ஒரு நிறுமத்தில் வேலைக்கான இரண்டு காலியிடங்களுக்குக் கணவன், மனைவி இருவரும் நேர்முகத் தேர்வுக்குச் செல்கின்றனர். கணவனைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு *1/3*, மனைவியைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு *1/4* எனில்,

i) இருவரையும் தேர்ந்தெடுப்பது

ii) ஒருவரை மட்டும் தேர்ந்தெடுப்பது

iii) இருவரையும் தேர்ந்தெடுக்காமல் இருப்பது ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கணவனைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை A எனக்கொள்க.

மனைவியைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை B எனக்கொள்க.

i) $P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

ii) $P[(A \cap \bar{B})\ (\bar{A} \cap B)] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right)$

$$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

iii) $P[(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times \bar{P}(B)$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{6}{12}$$

$$= ½$$

ஆ) சார்ந்த நிகழ்ச்சி

சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளை உடைய நிகழ்தகவிற்கு "நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு" (conditional probability) என்ற பெயர் உண்டு. A என்னும் நிகழ்ச்சி நடைபெற்றது என்று தெரிந்த பிறகு B என்றும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு எனப்படும். இது P(B/A) என அழைக்கப்படும். இது குறித்த வாய்ப்பாடு பின்வருமாறு :

i) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

ii) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

எடுத்துக்காட்டு 10

ஒரு பகடையை இருமுறை உருட்டியதில் பக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 6 கிடைத்தது. அதில் புள்ளிமுகம் 5 குறைந்தபட்சம் ஒருமுறையாவது நிகழ்வதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

புள்ளிமுகம் 5 குறைந்தபட்சம் ஒருமுறை நிகழ்வதை A எனக்கொள்க. கூட்டுத்தொகை 6 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B எனக்கொள்க.

மொத்த வாய்ப்புகள் $= 6 \times 6 = 36$

A நிகழுவதற்கான வாய்ப்புக்கள் = (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4),

(5, 5) (5, 6) (1, 5) (2, 5),

(3, 5) (4, 5) (6, 5) = 11

B நிகழுவதற்கான வாய்ப்புக்கள்= (1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) = 5

$(A \cap B) = (1, 5)\ (5, 1) = 2$

$$\therefore P(A) = \frac{11}{36} \ ; \quad P(B) = \frac{5}{36} \ ; \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

B கொடுக்கப்படின் A-யின் நிபந்தனை நிகழ்வு $= P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{2/36}{5/36}$$

$$= \frac{2}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு நிறுமத்தின் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து 200 பொறியியல் வல்லுநர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கிழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வயது	பட்டப் படிப்பு	பட்டமேற் படிப்பு	மொத்த எண்ணிக்கை
20க்கு கிழ்	90	10	100
30 - 40	20	30	50
40க்கு மேல்	40	10	50
மொத்த எண்ணிக்கை	150	50	200

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் அடிப்படையில் ஒரு பொறியியல் வல்லுநர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், அந்நிகழ்ச்சி கிழே கொடுக்கப்பட்டவைகளாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

அ) அவர் பட்டப்படிப்பு உடையவர்

ஆ) 40 வயதுக்கு மேற்பட்டவர் எனில் பட்டமேற்படிப்பு உடையவர்

இ) பட்டப்படிப்பு படித்தவர் எனில் 30 வயதுக்குக்கிழ் உள்ளவர்.

தீர்வு

பட்டப்படிப்பு உடைய பொறியியல் வல்லுநரை A எனக்கொள்க.

பட்டமேற்படிப்பு உடைய பொறியியல் வல்லுநரை B எனக்கொள்க.

30 வயதுக்கு கிழ் உள்ள பொறியியல் வல்லுநரை C எனக்கொள்க.

40 வயதுக்கு மேல் உள்ள பொறியியல் வல்லுநரை D எனக்கொள்க.

அ) $P(A) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

ஆ) $P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{10/200}{50/200} = \frac{1}{5}$

இ) $P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{90/200}{150/200} = \frac{3}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு பையில் 5 வெள்ளைப்பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் இருக்கின்றன. அவற்றிலிருந்து 4 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. அவை திரும்ப வைக்கப் படுவதில்லை. அவை ஒன்று மாறி ஒன்று வெவ்வேறு வண்ணத்தில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

E_1 = முதல்பந்து வெள்ளை என வைத்துக் கொள்வோம்.

முதல் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு $= \frac{5}{8}$

இரண்டாவது பந்து கருப்பாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{7}$

மூன்றாவது பந்து வெள்ளையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு $= \frac{4}{6}$

நான்காவது பந்து கருப்பாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு $= \frac{2}{5}$

இந்நிகழ்ச்சியின் பெருக்கல் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}$

$$= \frac{120}{1680}$$

$$= \frac{1}{14}$$

E_2 = முதல்பந்து கருப்பு என வைத்துக் கொள்வோம்.

முதல்பந்து கருப்பாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு = 3/8

இரண்டாவது பந்து வெள்ளையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு = 5/7

மூன்றாவது பந்து கருப்பாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு = 2/6

நான்காவது பந்து வெள்ளையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு = 4/5

இந்நிகழ்ச்சியின் பெருக்கல் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}$

$$= \frac{120}{1680} = \frac{1}{14}$$

வண்ணம் மாறி மாறி
இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$$

$$= \frac{1}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு பெட்டியில் 6 சிகப்பு, 4 வெள்ளை,5 நீல வண்ணப்பந்துகள் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து 3 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்பட்ட பந்துகள் முறையே சிகப்பு, வெள்ளை, நீலவண்ணங்களில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்க.

அ) பந்துகள் திருப்பி வைக்கப்படுகின்றன.

ஆ) பந்துகள் திருப்பி வைக்கப்படவில்லை.

தீர்வு

அ) பந்துகள் திருப்பி வைக்கப்படுகின்றன

முதலில் சிவப்பு பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{6}{15}$

இரண்டாவது வெள்ளை பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 4/15

மூன்றாவது நீலபந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 5/15

$$P\ (\text{சிவப்பு} \cap \text{வெள்ளை} \cap \text{நீலம்}) = \frac{6}{15} \times \frac{4}{15} \times \frac{5}{15}$$

$$= \frac{120}{3375}$$

$$= \frac{8}{225}$$

ஆ) பந்துகள் திருப்பி வைக்கப்படவில்லை

முதலில் சிவப்புப்பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{6}{15}$

இரண்டாவது வெள்ளைப்பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{4}{14}$

மூன்றாவது நீலப்பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{5}{13}$

$$P\,(\text{சிவப்பு} \cap \text{வெள்ளை} \cap \text{நீலம்}) = \frac{6}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{120}{2730}$$

$$= \frac{4}{91}$$

பேயீஸ் விதி (Baye\s Law)

வணிக நிறுவனங்களில் பொருள்களை உற்பத்தி செய்ய வேண்டிய அளவு மற்றும் பொருட்களை விற்பனை செய்ய வேண்டிய அளவு போன்றவைகளை நிகழ்தகவின் வாயிலாக முன்கூட்டியே திட்டமிட்டு செயல்படுகிறோம். இதனை "முன்நிகழ்தகவு" (Priori Probability) என்கிறோம். இவ்வாறு முடிவு எடுத்தபின்பு, கூடுதல் விபரங்கள் ஏதேனும் கிடைக்கப்பெற்றால், கிடைத்துள்ள விபரங்களின் அடிப்படையில் உற்பத்தி அல்லது விற்பனையின் அளவை மாற்றி கணக்கிடுகிறோம். இந்நிகழ்ச்சியை "பின்நிகழ்தகவு" (Posterior Probability) என்கிறோம். இவ்விதியானது "தாமஸ் பேயீ" என்ற கணித வல்லுநர் *1763*-ம் ஆண்டு உருவாக்கினார். இவ்வாறு கூடுதல் விவரங்களின் அடிப்படையில் திருத்தி அமைக்கப்பட்ட நிகழ்தகவானது வியாபாரத்துறையிலும், மேலாண்மைத்

துறையிலும் நிர்வாகிகள் சிறந்த பயனுள்ள முடிவை எடுப்பதற்கும், எதிர்பாராது ஏற்படக்கூடிய சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதற்கும் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது.

பேயீஸ் விதியில் பயன்படுத்தும் நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு :

அ) முன் நிகழ்தகவு - கூடுதல் விவரங்கள் கிடைப்பதற்கு முன்பு கணக்கிடப்பட்ட பழைய நிகழ்தகவு P(A)

ஆ) நிபந்தனை நிகழ்தகவு - முன் நிகழ்தகவு தெரிந்த பிறகு கிடைக்கப்பெற்ற நிகழ்ச்சிகளில் நிகழ்தகவு P(B/A)

இ) இணை நிகழ்தகவு - ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் இணைந்து ஏற்படும் நிகழ்தகவு $P(A \cap B)$

ஈ) பின் நிகழ்தகவு - கூடுதல் விவரங்களின் காரணமாக திருத்தி அமைக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு P(A/B)

$$P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(A)\,P(B/A) + P(\bar{A})\,P(B/\bar{A})}$$

எடுத்துக்காட்டு 14

ஒரு மாணவர் ஆண்டுத்தேர்வில் முதல்வகுப்பில் தேர்ச்சி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு 1/10 ஆகும். அவர் 10 வகுப்புத்தேர்வு எழுதி அதில் 4-ல் முதல் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றார். தற்போது அந்த மாணவர் ஆண்டுத்தேர்வில் முதல்வகுப்பில் தேர்ச்சி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

முன்நிகழ்வின்படி ஆண்டுத்தேர்வில் முதல்வகுப்பில் தேர்ச்சி பெறும். நிகழ்ச்சியை "A" எனக்கொள்க.

$$P(A) = \frac{1}{10} \quad ; \quad P(\bar{A}) = \frac{9}{10}$$

முன்நிகழ்தகவு தெரிந்தபிறகு கிடைக்கப்பெற்ற நிகழ்ச்சியாகிய வகுப்புத்தேர்வில் முதல்வகுப்பில் தேர்ச்சி பெறும் நிகழ்ச்சியை B எனக்கொள்க.

$$P(B) = \frac{4}{10} \quad ; \quad P(\bar{B}) = \frac{6}{10}$$

தற்போது மாணவர் ஆண்டுத்தேர்வில் முதல்வகுப்பில் தேர்ச்சி பெறுவதற்குரிய பின் நிகழ்தகவு ______

$$P(A/B) = \frac{P(A)\ P(B/A)}{P(A)\ P(B/A) + P(\bar{A})\ P(B/\bar{A})}$$

$$= \frac{1/10 \times 4/10}{(1/10 \times 4/10) + (9/10 \times 6/10)}$$

$$= \frac{4}{58}$$

எடுத்துக்காட்டு 15

ஒரு தொழிற்சாலையில் A, B என்ற இரு இயந்திரங்கள் உள்ளன. முந்தைய பதிவேடுகளின்படி A எனும் இயந்திரம் மொத்த உற்பத்தியில் 30 விழுக்காடும், B எனும் இயந்திரம் 70 விழுக்காடும் உற்பத்தி செய்கின்றன. A எனும் இயந்திரம் 5 விழுக்காடு குறையுள்ள பொருட்களையும், B எனும் இயந்திரம் 1 விழுக்காடு குறையுள்ள பொருட்களையும் உற்பத்தி செய்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளிலிருந்து, சமவாய்ப்புச் சோதனையின் அடிப்படையில் ஒரு பொருள் எடுக்கப்பட்டால் அப்பொருள் (அ) இயந்திரம் A உற்பத்தி செய்தது (ஆ) இயந்திரம் B உற்பத்தி செய்தது என்தற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

பொருள், இயந்திரம் A-யினால் உற்பத்தி செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= P(A_1) = \frac{30}{100}$

பொருள், இயந்திரம் B-யினால் உற்பத்தி செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= P(A_2) = \frac{70}{100}$

குறையுள்ள பொருளை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = P(B)

∴ நிகழ்தகவுகள் $P(B/A_1) = 5/100$

$P(B/A_2) = 1/100$

இணை நிகழ்தகவுகள் $P(A_1 \cap B) = \frac{30}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{150}{10000}$

$P(A_2 \cap B) = \frac{70}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{70}{10000}$

பேயீஸ்-ன் விதியின் அடிப்படையில் பின் நிகழ்தகவு

அ) இயந்திரம் A-யினால் உற்பத்தி செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{P(A_1)\ P(B/A_1)}{P(A_1)\ P(B/A_1)\ +\ P(A_2)\ P(B/A_2)}$$

$$= \frac{\frac{150}{10,000}}{\frac{150}{10,000} + \frac{70}{10,000}}$$

$$= \frac{150}{220}$$

ஆ) இயந்திரம் B-யினால் உற்பத்தி செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{P(A_2)\ P(B/A_2)}{P(A_2)\ P(B/A_2)\ +\ P(A_1)\ P(B/A_1)}$$

$$= \frac{\frac{70}{10,000}}{\frac{70}{10,000} + \frac{50}{10,000}}$$

$$= \frac{70}{220}$$

பேய்ஸ்-ன் விதியின் அடிப்படையிலான நிகழ்தகவை அட்டவணையின் வாயிலாகவும் கணக்கிடலாம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டிற்கான தீர்வு பின்வருமாறு :

நிகழ்ச்சி	முன் நிகழ்தகவு	நிபந்தனை நிகழ்தகவு	இணை நிகழ்தகவு	பின் நிகழ்தகவு
A_1	$\frac{30}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{150}{10,000}$	$\frac{150/10000}{220/10000} = \frac{150}{220}$
A_2	$\frac{70}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{70}{10,000}$	$\frac{70/10000}{220/10000} = \frac{70}{220}$
		கடைநிலை நிகழ்தகவு	$\frac{220}{10,000}$	

பயிற்சி வினாக்கள்

1. நிகழ்தகவினை ஒரு உதாரணத்துடன் வரையறு.

2. நிகழ்தகவில் எப்பொழுது இரு நிகழ்ச்சிகள் சாராதது என்று கூறப்படுகிறது?

3. பேயீஸின் தேற்றத்தை எழுதுக.

4. கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் நிகழ்தகவுத் தேற்றத்தை விளக்குக.

5. ஒரு நாணயம் ஆறுமுறை சுண்டப்படுகிறது. 4 முறை தலைவரும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. இரண்டு பகடைகள் வீசப்பட்டதில் அதன் கூட்டுத்தொகை 8-ஐ விட அதிகமாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

7. 52 சீட்டுகள் உள்ள ஒரு கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்புச் சோதனையின்படி இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகிறது. அதில் ஒன்று ராஜாவாகவும் மற்றொன்று ராணியாகவும் இருக்கக்கூடிய நிகழ்தகவு காண்க.

8. இருபது நபர்கள் உள்ள ஒரு பிரிவில் ஐந்துபேர் பட்டதாரிகள். இப்பிரிவில் சமவாய்ப்புச் சோதனையின்படி மூன்று நபர்கள் எடுத்தால், அம்மூவரில் அ) எல்லோரும் பட்டதாரிகளாகவும் ஆ) ஒருவராவது பட்டதாரியாக இருக்கவும் நிகழும் நிகழ்தகவு யாது?

9. அழகான பெண்ணைத் திருமணம் செய்யும் நிகழ்தகவு 0.27 சீதனத்துடன் வரும் பெண்ணைத் திருமணம் செய்யும் நிகழ்தகவு 0.40 எனில் அழகான மற்றும் சீதனத்துடன் வரும் பெண்ணைத் திருமணம் செய்யும் நிகழ்தகவு யாது?

10. ஒரு கூடையில் 6 வெள்ளை வண்ணப் பந்துகளும், 4 சிவப்பு வண்ணப் பந்துகளும் உள்ளன. அதிலிருந்து சமவாய்ப்புச் சோதனைமுறை மூலம் நான்கு பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. கீழ்வரும் நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

அ) இரண்டு வெள்ளைப் பந்துகளும், இரண்டு சிவப்புப் பந்துகளும்

ஆ) அனைத்துப் பந்துகளும் வெள்ளையாக வருவதற்கு

இ) அனைத்துப் பந்துகளும் சிவப்பாக வருவதற்கு

11. ஒருவன் நான்கு முறைகளில், மூன்றைக் குறி தவறாமல் இலக்கில் எறிகிறான். மற்றொருவன் மூன்று குறிகளில் இரண்டைத் தவறாமல் இலக்கில் எறிகிறான். இருவரும் சேர்த்து குறிவைத்து எறியும்போது இலக்கில்மேல் தவறாது வரும் நிகழ்தகவைக் காண்க.

12. ஒரு நிறுமத்தில் இரண்டு வேலை காலி இடங்களுக்கு ஒரு கணவனும் மனைவியும் நேர்முகத் தேர்வுக்குச் செல்கின்றனர். கணவன் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 1/7 ஆகவும், மனைவி தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்கான நிகழ்தகவு 1/5 ஆகவும் இருப்பின்,

அ) இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கும்
ஆ) ஒருவர் மட்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கும்
இ) இருவரில் ஒருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமலிருப்பதற்கும் உள்ள நிகழ்தகவைக் காண்க.

13. A என்பவரால் ஒரு புத்தகத்தில் உள்ள கணக்குகளில் 90 விழுக்காடு அளவு தீர்வு காணஇயலும். B என்பவரால் 70 விழுக்காடு அளவு தீர்வு காணஇயலும். சமவாய்ப்புச் சோதனைமூலம் எடுக்கப்பட்ட ஒரு கணக்கிற்கு இருவரும் சேர்ந்து விடைகாண இயலும்போது ஒருவராவது விடை காண்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

14. புள்ளியல் கணக்கு ஒன்று A, B இருவருக்கும் கொடுக்கப்பட்டது. A அக்கணக்கை தீர்வு காண்பதற்கான சாற்றுக்கூறு 9-க்கு 6-ஆகவும் B-க்கு எதிர்சாற்றுக்கூறு 10க்கு 12-ஆகவும் உள்ளது. இருவரும் முயற்சிக்கும்போது அக்கணக்கிற்குத் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

15. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை விழுந்தால் A பையிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படும். தலை விழாவிட்டால் B பையிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படும். A பையில் மூன்று கருப்பு வண்ணப்பந்துகளும் ஐந்து வெள்ளை வண்ணப் பந்துக்களும் உள்ளது. B பையில் ஏழு கருப்பு மற்றும் ஒரு வெள்ளை பந்தும் உள்ளது. இரண்டு முறையும் தேர்வுகள் மறுபடி வைத்ததுடன் நடைபெறுகிறது. எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பந்துகளும் கருப்பு வண்ணமாக இருப்பின் பை A உபயோகப்படுத்தப் படுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

16. சமவாய்ப்பில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு லீப்வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்
(Mathematical Expectation)

கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் என்பது ஒரு மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பின் நிறையிட்ட சராசரியாகும். $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புக்களையுடைய x என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ என இருப்பின், அதன் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலை E(x) எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n p_n$$

எடுத்துக்காட்டு 1

A என்பவர் ஒரு நாணயத்தை 3 முறை சுண்டுகிறார். மூன்று முறையும் தலைப்பகுதி மேல் நோக்கி விழுந்தால் அவருக்குக் கிடைக்கும் பரிசுத்தொகை ரூ.160. இவ்விளையாட்டின் நுழைவுக்கட்டணம் ரூ.16. A-யினுடைய கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு?

தீர்வு

வெற்றி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு = ½ x ½ x ½ = 1/8

வெற்றி பெறாமலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு = 1 – 1/8 = 7/8

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

$$= (160 \times 1/8) + (-16 \times 7/8)$$

$$= 20 - 14$$

= ரூ.6

எடுத்துக்காட்டு 2

மழை பெய்தால் நாள் ஒன்றிற்குக் குடை விற்பவர் ரூ.300 சம்பாதிக்க இயலும். மழை பெய்யாவிடின் அவருக்கு ரூ.80 நட்டமாகும். மழை பெய்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.57 எனில், அவருடைய கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு?

தீர்வு

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

$$= (300 \times 0.57) + (-80 \times 0.43)$$

$$= 171 - 34.40$$

$$= \text{ரூ.}136.60$$

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு பகடை சமவாய்ப்புடன் எறியப்பட்டால், அதில் கிடைக்கும் எண்ணுக்கான எதிர்பார்ப்பு என்ன?

தீர்வு

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6$$

$$= (1 \times 1/6) + (2 \times 1/6) + (3 \times 1/6) + (4 \times 1/6) + (5 \times 1/6) + (6 \times 1/6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

A என்பவர் இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டுகிறார். இரண்டும் தலை மேல்நோக்கி விழுந்தால் ரூ.10-ம், ஒரு தலை விழுந்தால் ரூ.5-ம், தலை விழவில்லையெனில் ரூ.2-ம் பரிசாகப் பெறுகிறார். எவ்வளவு ரூபாய் பரிசாக கிடைக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்?

இரண்டு தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ஒரு தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}$

தலை விழாமலுள்ள நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

x	10	5	2
P	¼	½	¼

$E(x) = (10 \times \frac{1}{4}) + (5 \times \frac{1}{2}) + (2 \times \frac{1}{4})$

$= 2.5 + 2.5 + 0.5$

= ரூ.5.50

பயிற்சி வினாக்கள்

1. கணக்கியல் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்றால் என்ன?

2. ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒருவரால் *1, 2, 3, 4* என மீன் பிடிப்பதன் நிகழ்தகவு *0.4, 0.3, 0.2* மற்றும் *0.1* என்றால் எத்துணை எதிர்பார்க்கும் எண்களில் மீன் பிடிக்கப்படலாம்.

3. A, B இருவருக்கிடையே உள்ள பந்தயத்தில் குறிப்பிட்ட நாளில்

மழைபெய்தால் A ரூ.200 பெறுவார் என்றும், மழை பெய்யாவிட்டால் ரூ.100 இழப்பார் என்றும் காணப்பட்டது. குறிப்பிட்ட நாளில் மழை பெய்யக்கூடிய நிகழ்தகவு 0.7 எனில் A-ன் கணக்கியல் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு யாது?

4. மூன்று பொருளாதார வல்லுநர்கள், ஒரு மருத்துவர், நான்கு பொறியியல் வல்லுநர்கள் மற்றும் நான்கு புள்ளியல் வல்லுநர்கள் உள்ளனர். நான்கு நபர்கள் அடங்கிய ஒரு குழு அமைக்கப்பட வேண்டும். அக்குழுவின் பின்வரும் நபர்கள் அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

அ) ஒவ்வொரு வல்லுநர் இருக்க வேண்டும்.

ஆ) குறைந்தது ஒரு பொருளாதார வல்லுநர் இருக்க வேண்டும்.

இ) மருத்துவர் குழுவில் கட்டாயம் இடம்பெற வேண்டும்.

5. தலை கிடைக்கும் வரை ஒரு நாணயம் சுண்டப்படுகிறது. அது சுண்டப்படும் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

6. ஒரு பரிசுச் சீட்டகம் 10,000 சீட்டுகளை ரூ.1 வீதம் விற்பனை செய்தது. குலுக்கலில் பரிசு கிடைப்பவருக்குப் பரிசுத்தொகை ரூ.5000. நீவிர் ஒரு பரிசுச் சீட்டு வாங்கியிருந்தால், வெற்றி பெற எவ்வளவு எதிர்பார்க்கலாம்?

10. கோட்பாட்டுப்பரவல்
(Theoretical Distribution)

அலைவெண் பரவல்கள் நேரடிச் சோதனையின் வாயிலாக வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. அவ்வாறு நேரடியாகக் கண்டுபிடிக்காமல் முந்தைய அனுபவங்களிலிருந்தோ அல்லது கோட்பாட்டின் அடிப்படையிலோ கணக்கிடப்படும் பரவல்கள் கோட்பாட்டுப்பரவல்கள் (Theoretical Distribution) அல்லது நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் (Probability Distribution) எனப்படும். கோட்பாட்டுப் பரவல்கள் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. எந்தெந்த நிகழ்ச்சிகளைக் கோட்பாட்டுப்பரவல்கள் வாயிலாகக் கண்டுபிடிக்க இயலுமோ அந்த நிகழ்ச்சிகளைச் சோதனையின் வாயிலாக கண்டுபிடிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கோட்பாட்டுப்பரவல்கள், சரியான முடிவுகளை எடுப்பதற்கான தேவையான தகவல்களைக் கொடுக்கவல்லது.

கோட்பாட்டுப்பரவல்களில் முக்கியமானவை ஈருறுப்புப்பரவல், பாய்சான் பரவல், இயல்நிலைப்பரவல் ஆகியவைகளாகும். இவற்றில் முதலிரண்டு பரவல்களான ஈருறுப்புப்பரவல், பாய்சான் பரவல் ஆகியவை தனித்த பரவல்களாகும். இயல்நிலைப்பரவல் ஒரு தொடர்பரவலாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution)

சுவிஸ் நாட்டுக் கணக்கியல் வல்லுநரான ஜேம்ஸ் பெர்னோலி (1954 - 1705) என்பவர் 1700-ம் ஆண்டு ஈருறுப்புப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். அவரது கண்டுபிடிப்பு 1713-ம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்டது. இதற்கு “பெர்னோலி நிகழ்தகவுச் சார்பு” என்ற பெயரும் உண்டு.

ஈருறுப்புச் சோதனையைப் பின்வரும் நிலைகளில் பயன்படுத்தலாம்.

அ) சமவாய்ப்புச் சோதனை குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் இருக்கவேண்டும்.

ஆ) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும், அதன் முடிவு "வெற்றி" அல்லது "தோல்வி" ஆகிய இரண்டில் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும்.

இ) வெற்றியில் நிகழ்தகவு ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் மாறாத தன்மையுள்ளவை.

ஈ) முயற்சிகள் சார்பற்றவையாக இருக்க வேண்டும்.

வெற்றியின் நிகழ்தகவு "P" எனவும், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு "Q" எனவும் கொள்ளப்படும். $P + Q = 1$ ஆகும். அல்லது $Q = 1 - P$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

வரையறை

"வெற்றி", "தோல்வி" என இரண்டு முடிவுகள் மட்டுமே உள்ள ஒரு சோதனையில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு "P" எனவும், தோல்வியின் நிகழ்தகவு "Q" எனவும் கொண்டு இச்சோதனையை ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் "n" முறைகள் நடத்தினால் x வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(x) = n_{C_x} \; P^x \; Q^{n-x}$ ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள்

ஈருறுப்புப் பரவல் n, P என்ற இரண்டு பண்பளவைக் கொண்டது. "n" என்பது சோதனைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும். அதுவே x-ன் அதிகபட்ச மதிப்பாகும். ஈருறுப்புப் பரவலின் --

அ) சராசரி $\bar{x} = nP$

ஆ) திட்டவிலக்கம் $= \sigma = \sqrt{nPQ}$

இ) பரவற்படி $= \sigma^2 = nPQ$

ஈ) கோட்டகெழு $= \beta_1 = \dfrac{Q - P}{\sqrt{nPQ}}$

உ) கோட்டகெழு $= \beta_2 = 3 + \dfrac{1 - 6Pa}{\sqrt{nPQ}}$

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. குறைந்தது ஒருமுறை தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

வெற்றிக்கான (தலை வருவதற்கான) நிகழ்தகவு (P) = ½

தோல்விக்கான (தலை வராமலிருப்பதற்கான) நிகழ்தகவு (Q) = 1 – P

$$= 1 - \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

ஒருமுறை தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு = P(1)

$$P(1) = 3_{C_1} \ (\tfrac{1}{2})^1 \ (\tfrac{1}{2})^{3-1}$$

$$P(1) = 3 \times (\tfrac{1}{2}) \times (\tfrac{1}{4})$$

$$= 3/8$$

இரண்டுமுறை தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு = P(2)

$$P(2) = 3_{C_2} \ (\tfrac{1}{2})^2 \ (\tfrac{1}{2})^{3-2}$$

$$= 3 \times (\tfrac{1}{4}) \times (\tfrac{1}{2})$$

$$= 3/8$$

மூன்றுமுறை தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு = P(3)

$$P(3) = 3_{C_3} \ (\tfrac{1}{2})^3 \ (\tfrac{1}{2})^{3-3}$$

$= 1 \times 1/8 \times 1$

$= 1/8$

குறைந்தது ஒரு தலை வருவதற்கான

நிகழ்தகவு $= P(1) + P(2) + P(3)$

$= 3/8 + 3/8 + 1/8$

$= 7/8$

எடுத்துக்காட்டு 2

இயல்பான ஒரு பகடையை 5 முறை உருட்டும்போது எண் 3 (அ) குறைந்த பட்சம் இரண்டுமுறை (ஆ) அதிகபட்சம் ஒருமுறை வருவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

பகடையை உருட்டும்போது எண் 3 விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $P = 1/6$

$\therefore Q = 1 - P$

$= 1 - 1/6$

$= 5/6$

அ) பகடையை 5 முறை $(n = 5)$ உருட்டும்போது

$$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= 5_{C_2} (1/6)^2 (5/6)^3 + 5_{C_3} (1/6)^3 (5/6)^2 + 5_{C_4} (1/6)^4 (5/6)^1 + 5_{C_5} (1/6)^5 (5/6)^0$$

$$= (10 \times 1/6 \times 1/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6) + (10 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 5/6 \times 5/6) + (5 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 5/6) + (1 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1)$$

$$= \frac{1250}{7776} + \frac{250}{7776} + \frac{25}{7776} + \frac{1}{7776}$$

$$= \frac{1526}{7776}$$

$$= 0.1962448$$

இந்த எடுத்துக்காட்டை மாற்று முறையிலும் தீர்வுகாண முடியும்.

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$

$$= 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[5_{C_0} (1/6)^0 (5/6)^5 + 5_{C_1} (1/6)^1 (5/6)^4\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776}\right]$$

$$= 1 - \frac{6250}{7776}$$

$$= \frac{1526}{7776}$$

$$= 0.1962448$$

ஆ) $P(x \leq 1) = P(0) + P(1)$

$$= \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776}$$

$$= \frac{6250}{7776}$$

$$= 0.8037531$$

எடுத்துக்காட்டு 3

ஐந்து நாணயங்கள் *3200* தடவைகள் சுண்டிவிடப்படுகின்றன தலை விழுவதற்கான கோட்பாடு அடுக்கு நிகழ்வெண் காண்க.

தீர்வு

தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு = P = ½

தலை விழாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு = Q = 1 – P

= 1 – ½ = ½

3200 தடவை ஐந்து நாணயங்களை எறிவதால், நிகழ்வெண் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(x) = N \times n_{C_x} (P)^x (Q)^{n-x}$ ஆகும்.

கோட்பாடு அடுக்கு நிகழ்வெண்

x	நிகழ்வெண்
0	$f(0) = 5_{C_0} (½)^0 (½)^5 \times 3200 = 100$
1	$f(1) = 5_{C_1} (½)^1 (½)^4 \times 3200 = 500$
2	$f(2) = 5_{C_2} (½)^2 (½)^3 \times 3200 = 1000$
3	$f(3) = 5_{C_3} (½)^3 (½)^2 \times 3200 = 1000$
4	$f(4) = 5_{C_4} (½)^4 (½)^1 \times 3200 = 500$
5	$f(5) = 5_{C_5} (½)^5 (½)^0 \times 3200 = 100$
மொத்தம்	= 3200

எடுத்துக்காட்டு 4

ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் *சராசரி 20*, அதனுடைய திட்டவிலக்கம் 4, பரவலின் n, P, Q ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

பரவற்படி $= \sigma^2 = 4^2 = 16$

சராசரி $= \bar{x} = 20$

அதாவது $nPQ = 16$

$nP = 20$

$$\frac{nPQ}{nP} = \frac{16}{20}$$

$$\boxed{\therefore Q = 4/5}$$

எனவே $P = 1 - Q$

$= 1 - 4/5$

$$\boxed{P = 1/5}$$

$nP = 20$

$n (1/5) = 20$

$$n = \frac{20}{1/5} = \boxed{100}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஈருறுப்புப்பரவல் என்றால் என்ன?

2. ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 4 மற்றும் 4/3 எனில் $P(x \geq 1)$-ஐக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு தேர்வில் தேர்வு பெறாதோரின் சராசரி விழுக்காடு 40. சமவாய்ப்பில் எடுக்கப்பட்ட ஆறு நபர்களில் குறைந்தது 4 பேர் தேர்வு பெற்றவர்களாக இருக்கக்கூடியதன் நிகழ்தகவைக் காண்க.

4. 12 நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. அவ்வாறு ஒருமுறை சுண்டப்படும் பொழுது (அ) 9 அல்லது அதற்கு அதிகமான தலைகள் (ஆ) மூன்று தலைகளுக்குக் குறைவாகக் கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

5. 80 அணிகள் கொண்ட விதைகளின் முளைப்புத்திறன் பத்துக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி கோட்ட அலைவெண்களைக் காண்க.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
அலைவெண்	6	20	28	12	8	6	0	0	0	0	0

6. ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள தொழிலாளிகள் விடுப்பு எடுப்பதற்கான வாய்ப்பு 10 விழுக்காடாகும். அங்குள்ள 5 தொழிலாளிகளில் 3 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவர்கள் விடுப்பு எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

7. ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 4 மற்றும் 3 எனில், n, P மற்றும் Q-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

பாய்சான் பரவல் (Poisson Distribution)

ஈருறுப்புப் பரவலில் கூறுகளின் எண்ணிக்கை குறிப்பிட்ட அளவுகளில் உள்ளபடியால் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட முடிந்தது. ஆனால் நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பு குறைவாக இருக்கும்போது, கூறுவெளிப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை குறைவாகவே இருப்பதனால், ஒரு முயற்சியின் வெற்றி வாய்ப்பு மிகவும் குறைவாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாகச் சாலை விபத்துக்கள், புத்தகத்தில் உள்ள அச்சுப்பிழை, தீ விபத்து போன்றவைகளைக் கூறலாம்.

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு மிகவும் குறைவாகவும், முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் அதிகமாகவும் இருக்கும்பொழுது 'பாய்சன் பரவல் விதி' பின்பற்றப்படுகிறது. பாய்சன் பரவல் 1837-ம் ஆண்டு சைமன் டி-பாய்சன் (1781-1840) என்ற பிரெஞ்சு நாட்டுக் கணக்கியல் வல்லுநரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

பாய்சன் பரவல் விதி பின்வரும் நிலைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது :

அ) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை (n) மிகப்பெரியது.

ஆ) வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு (P) மிகச்சிறியது.

இ) கூட்டுச்சராசரி (np = m) மாறாத எண்

ஈ) சோதனைகள் ஒன்றையொன்று சாராதவை.

வரையறை

நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு குறைவாக இருக்கும். ஒரு சோதனையின் வெற்றி x எண்ணிக்கை எனில் வெற்றிகளின் நிகழ்தகவு

$$P(x) = \frac{e^{-m}\ m^{x}}{x!}$$ எனப்படும்.

இதில் e என்பது இயற்மடக்கையில் அடி எண்ணாகப் பயன்படுத்தப்படும் எண்ணாகும். இதன் மதிப்பு 2.7183 ஆகும். m என்பது பாய்சன் பரவலில் கூட்டுச்சராசரியாகும்.

பாய்சன் பரவலின் பண்புகள்

பரவலின் கூட்டுச்சராசரி = m

பரவலின் பரவற்படி = m

பரவலின் திட்டவிலக்கம் = $\sqrt{m}$

பரவலின் கோட்டகெழு = $\beta_1 = \frac{1}{m}$

பரவலின் தட்டைஅளவு = $\beta_2 = 3 + \frac{1}{m}$

பாய்சான் பரவலின் முக்கியப்பங்கு

பாய்சான் பரவல்கள் கீழ்க்கண்ட நிகழ்ச்சிகளின் போது முக்கியப்பங்கு வகிக்கின்றது :

அ) குறிப்பிட்ட நேரங்களில், ஒரு மணித்துளி நேரத்தில் உள்வரும் தொலைபேசி அழைப்புகளைக் கணக்கிடுதல்.

ஆ) ஒரு பேரங்காடிக்கு ஒரு மணி நேரத்தில் உள்வரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

இ) ஒரு நகரத்தில் ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நோயினால் ஏற்படும் மரணங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

ஈ) மக்கள் கூட்டம் கொண்ட ஒரு இடத்தில் ஒரு மணித்துளி நேரத்தில் கடந்து செல்லும் பேருந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

உ) தட்டச்சு செய்யும்பொழுது ஒரு பக்கத்தில் ஏற்படும் பிழைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

ஊ) உயிரியலில் நுண்ணுயிர்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுதல்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பேரளவு எண்ணிக்கையில் தொழிலாளர்களைக் கொண்ட ஒரு உற்பத்தித் தொழிற்சாலையில், ஒரு குறிப்பிட்ட காலக்கெடுவில், ஒரு சேவைக்காலத்தில் சராசரியாக 3 தொழிலாளிகள் வராமலிருக்கிறார்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சேவைக்காலத்தில் கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு நிகழ்தகவு காண்க.

அ) சரியாக இரண்டு தொழிலாளிகள் வராமலிருத்தல்

ஆ) நான்கிற்கும் மேற்பட்ட தொழிலாளிகள் வராமலிருத்தல்

தீர்வு

சேவைக்காலத்தில் வராமலிருக்கும் தொழிலாளிகளின் சராசரி எண்ணிக்கை = 3

எனவே பாய்சான் பரவலில் m = 3

அ) சரியாக இரண்டு தொழிலாளிகள் வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(2) = \frac{e^{-3}\, 3^2}{2!} = \frac{0.0498 \times 9}{2} = 0.2241$$

ஆ) நான்கிற்கும் மேற்பட்ட தொழிலாளிகள் வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x > 4) = 1 - \left[P(0) + P(1) + P(2) + P(4)\right]$$

$$P(0) = \frac{e^{-3}\, 3^0}{0!} = 0.0498$$

$$P(1) = \frac{e^{-3}\, 3^1}{1!} = 0.1494$$

$$P(2) = \frac{e^{-3}\,3^2}{2!} = 0.2241$$

$$P(3) = \frac{e^{-3}\,3^3}{3!} = 0.2241$$

$$P(4) = \frac{e^{-3}\,3^4}{4!} = 0.1681$$

$$P(x > 4) = 1 - \left(0.0498 + 0.1494 + 0.2241 + 0.2241 + 0.1681\right)$$

$$= 1 - 0.8155$$

$$= 0.1845$$

எடுத்துக்காட்டு 2

ஏராளமான பாடநூல்கள் அனுப்புகையில் 2% நூல்கள் குறையுள்ள கட்டுமானம் உள்ளவை. இத்தகைய 400 நூல்களில் சரியாக 5 நூல்கள் மட்டுமே குறையான கட்டுமானம் உள்ளவையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

$$P = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$n = 400$$

எனவே, $m = np = 0.02 \times 400 = 8$

$$P(5) = \frac{e^{-8}\,8^5}{5!}$$

$$= \frac{0.000337 \times 32768}{120}$$

$$= \frac{11.042816}{120}$$

$$= 0.0920234$$

எடுத்துக்காட்டு 3

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து கோட்பாட்டுப் பரவலின் அடிப்படையில் பாய்சான் பரவல் காண்க.

ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தவறுகளின் எண்ணிக்கை (x)	0	1	2	3	4
தவறுகள் நடந்த பக்கங்களின் எண்ணிக்கை (f)	109	65	22	3	1

தீர்வு

பாய்சான் பரவல் காண்பதற்கு முதலில் 'm'-ன் மதிப்பை கணக்கிடல் வேண்டும்.

x	f	fx
0	109	0
1	65	65
2	22	44
3	3	9
4	1	4
	200	122

கூட்டுச்சராசரி $= \bar{x} = m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$$= \frac{122}{200} = 0.61$$

எதிர்பார்க்கப்படும் பாய்சான் பரவலின் அலைவெண்கள்

x	நிகழ்தகவு $P(x) = \frac{e^{-x}\ m^{x}}{x!}$	அலைவெண்கள்	
			முழுஎண்
0	$e^{-0.61} = 0.5432$	200 x 0.5432 = 108.64	109
1	$\frac{e^{-0.61} \times (.61)^1}{1!} = 0.3314$	200 x 0.3314 = 66.28	66
2	$\frac{e^{-0.61} \times (.61)^2}{2!} = 0.1011$	200 x 0.1011 = 20.22	20
3	$\frac{e^{-0.61} \times (.61)^3}{3!} = 0.02055$	200 x 0.02055 = 4.11	4
4	$\frac{e^{-0.61} \times (.61)^4}{4!} = 0.00313$	200 x 0.00313 = 0.63	1
			200

எடுத்துக்காட்டு 4

ஒரு நிறுமத்தில் மாலை *2* மணி முதல் *4* மணி வரை வரும் தொலைபேசி எண்ணிக்கை *சராசரி 2.5* உள்ள பாய்சான் பரவல் ஆகும். குறிப்பிட்ட ஒரு மணித்துளி நேரத்தில் (அ) தொலைபேசி இல்லாமலிருப்பது (ஆ) சரியாக மூன்று எண்ணிக்கை (இ) குறைந்தபட்சம் *3* எண்ணிக்கை ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவு காண்க

கூட்டுச்சராசரி $= m = 2.5$

$$P(x) = \frac{e^{-2.5}\ (2.5)^x}{x!}$$

அ) தொலைபேசி இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு :

$$P(0) = \frac{e^{-2.5} \times (2.5)^0}{0!}$$

$$= \frac{0.0821 \times 1}{1}$$

$$= 0.0821$$

ஆ) சரியாக மூன்று எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு :

$$P(3) = \frac{e^{-2.5} \times (2.5)^3}{3!}$$

$$= \frac{0.0821 \times 15.625}{6}$$

$$= 0.2138$$

இ) குறைந்தபட்சம் மூன்று எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு :

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2)$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

$$= 1 - (0.0821 + 0.20525 + 0.2566)$$

$$= 1 - 0.54395$$

$$= 0.45605$$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பாய்சான் பரவலை வரையறு.

2. பாய்சான் பரவலின் பண்புகளைக் கூறுக. பாய்சான் பரவலுக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

3. போக்குவரத்து அதிகமாகவுள்ள ஒரு சாலையில் சராசரியாக ஒரு மாதத்தில் நான்கு விபத்துக்கள் நடைபெறுவதாக அறியலாகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட மாதத்தில் நான்கு விபத்துக்களைவிட குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒரு மாவட்டத்தில் உள்ள ஆயிரம் வீடுகளில் சராசரியாக ஓர் ஆண்டில் ஒரு வீடு தீக்கு இரையாகிறது எனக்கொண்டால், அம்மாவட்டத்தில் இரண்டாயிரம் வீடுகள் இருப்பின், ஓர் ஆண்டில் ஐந்து வீடுகள் தீக்கிரையாவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவு யாது?

5. ஒரு புள்ளி விவர அறிக்கையின்படி ஒரு ஆண்டில் திவாலாகும் வியாபாரிகளின் எண்ணிக்கை சராசரியாக 1,00,000 நபர்களுக்கு 2 நபர்கள் ஆவர். 2,00,000 நபர்கள் உள்ள ஒரு

மாநகரத்தில் ஒரு ஆண்டில் அ) ஒரு நபர் ஆ) இரண்டு நபர்கள் இ) குறைந்தபட்சம் 4 நபர்கள் திவாலாவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

6. ஒரு நிறுமம் உற்பத்தி செய்யும் பொருட்களில் 10 விழுக்காடுகள் குறையுடையவை. 10 பொருட்கள் உள்ள ஒரு கூறில் 2 பொருட்கள் குறையுடையவையாய் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

இயல்நிலைப்பரவல் (Normal Distribution)

புள்ளியியலில் ஈருறுப்புப்பரவல், பாய்சான் பரவல் ஆகிய இரண்டும் தனித்த பரவலில் முக்கியமான பரவல்களாக இருப்பதைப் போன்று, தொடர்பரவலில் மிக முக்கியமானது இயல்நிலைப் பரவலாகும். கணக்கியல் சமன்பாடான இயல்நிலை வளைகோடு 1733-ம் ஆண்டு டி-மொய்வர் (De-Moivre) என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இது பிரஞ்சு நாட்டு கணிதவியல் வல்லுநர் லாபிளேஸ் (Laplase 1749-1827) என்பவரால் இயற்கை மற்றும் சமூக அறிவியல் துறைகளில் பயன்படுத்தப்பட்டது. இயல்நிலைப்பரவல் கார்ல் பிரைட்ரிக்காஸ் (Karl Friendrich Gavss 1977-1885) என்ற வல்லுநரின் பெயருக்கு பெருமையளிக்கும் வகையில் "காசியன் பரவல்" (Gaussian distribution) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வரையறை

ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி x-ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனைப் பெற்றிருந்தால் அது இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளதாகக் கூறப்படுகிறது.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

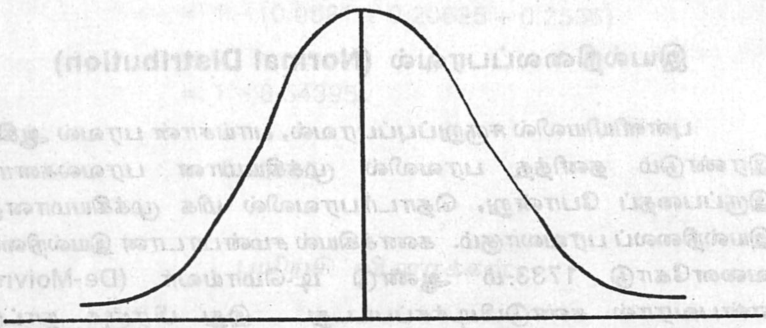
இதில் μ = கூட்டுச்சராசரி

σ = திட்டவிலக்கம்

π = 3.14159

e = 2.7183 ஆகும்.

இயல்நிலைப்பரவலின் வரைபடம்



μ

இயல்நிலைப்பரவலின் வரைபடம், இயல்நிலைப்பரவலின் நிகழ்தகவு வளை வரை எனப்படும். இதனுடைய பண்புகள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளது.

அ) இயல்நிலைப் பரவலானது கொடுக்கப்பட்டுள்ள பண்பளவைகளாக கூட்டுச்சராசரி (μ) மற்றும் திட்டவிலக்கத்தை (σ) பொறுத்து அமையும்.

ஆ) இயல்நிலை வளைவரை மணியின் சாயலை (Bell Shaped) ஒத்திருக்கும்.

இ) இது ஒழுங்குமுறையான வளைவரையானதால் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகிய மூன்றும் சமமாக இருக்கும். இதனுடைய கோட்டம் சுழி ஆகும்.

ஈ) இது ஒற்றை முகடு உடையது.

உ) இதன் மீப்பெருகுத்துயரம் $x = \mu$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது. இதன் மதிப்பு $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ஆகும்.

ஊ) $x = \mu$ என்ற புள்ளியில் உள்ள குத்துயரம் வளைவரையின் கீழுள்ள பரப்பளவை இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கிறது.

எ) இந்த வளைவரை இருபுறமும் x-அச்சின் தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது. கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து வளையின் தூரம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க அது x-அச்சுக்கு அருகே வருகிறது. ஆனால் அதைத் தொடுவதில்லை.

ஏ) இயல்நிலைப்பரவலின் மாறா எண்கள் பின்வருமாறு :

i) கூட்டுச்சராசரி $= \bar{x} = \mu$

ii) திட்டவிலக்கம் $= \sigma$

iii) பரவற்படி $= \sigma^2$

iv) கோட்ட அளவு $= \beta_1 = 0$

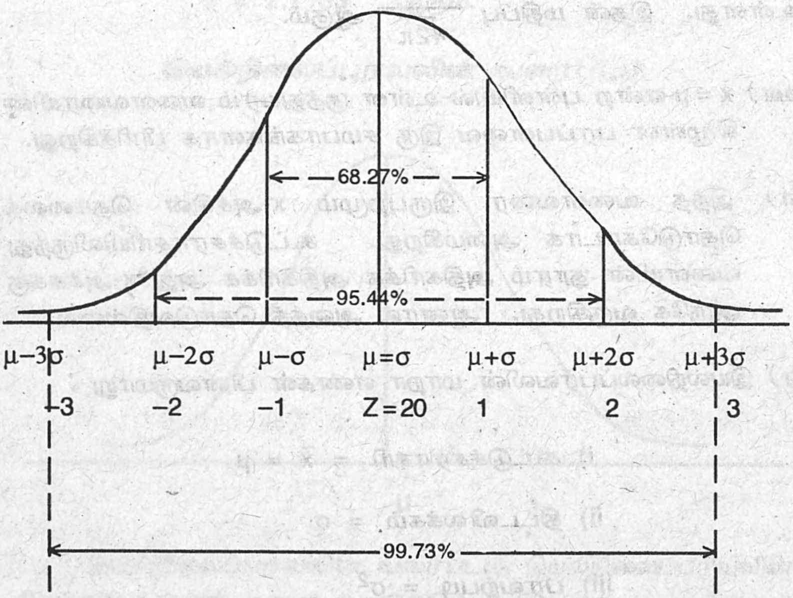
v) தட்டை அளவு $= \beta_2 = 3$

தர இயல்நிலைப்பரவல்

இயல்நிலைப் பரவலானது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுச்சராசரி மற்றும் அதனுடைய திட்ட விலக்கத்தைப் பொறுத்து மாறுபடும். இந்த பண்பளவைகளின் மாறுதலுக்கு ஏற்ப அவை தட்டையானவைகளாகவோ அல்ல குவிந்தோ காணப்படும். இயல்நிலைப்பரவலைத் தரப்படுத்தினால் இயல்நிலை பரப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம்.

கூட்டுச்சராசரி சுழியும் பரவற்படி ஒன்றும் உள்ள இயல்நிலைப்பரவல் தர இயல்நிலைப் பரவல் என

அழைக்கப்படும். தர இயல்நிலை பரவலின் வரைபடம் கீழ்க்கண்டவாறு அமையப் பெற்றிருக்கும்.



தர இயல்நிலை வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ள மொத்தப்பரப்பு 1 ஆகும். 1, −1 என்ற இருமதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள Z நிகழ்தகவு தர இயல்நிலை வளைகோட்டிற்கு கீழே உள்ள பரப்பளவில் Z = −1 என்ற கோட்டிற்கும் Z = 1 என்ற கோட்டிற்கும் உள்ள பரப்பாகும். இயல்நிலை மாறியின் மதிப்புகள் முதலில் $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ என்று மாறுபாட்டுடன் தரப் படுத்தப்பட வேண்டும். அந்த பரப்பு பின்பு அட்டவணையிலிருந்து (Area under the normal curve table) கண்டுபிடிக்கலாம்.

இயல்நிலைப்பரவலின் முக்கியத்துவம்

அ. நிகழ்ச்சிகளின் (n) எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது தனித்த பரவல்களான ஈருறுப்புப்பரவல், பாய்சான் பரவல் ஆகியவைகள், இயல்நிலைப்பரவலை தோராயமாக ஒத்திருக்கும்.

ஆ) கூறெடுத்தல் கணக்குகளில் (எடுத்துக்காட்டாக t- பரவல், F - பரவல், Z - பரவல், χ^2 - பரவல்) புள்ளியல் முடிவுகளைக் கண்டுபிடிப்பது எளிதாகும்.

இ) தரக்கட்டுப்பாட்டு முறைகளில், கட்டுப்பாட்டு எல்லையைக் கண்டுபிடிக்க இது பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

ஈ) இயல்நிலைப்பரவல் அல்லாத பரவல்களை எளிதான மாறுதல் மூலமாக இயல்நிலைப் பரவலாக மாற்ற இயலும்.

உ) கணக்கியல் பண்புகளை அதிகம் பெற்றிருப்பதால், சமூக அறிவியல் துறைகளில் கணக்கிடுவதற்கு பயன்படுத்தப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு குழுவிலுள்ளவர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ.120, திட்டவிலக்கம் ரூ.40 கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனக் கொண்டால் பின்வரும் வருமானம் உள்ளவர்களின் விகிதம் கண்டுபிடி.

அ) ரூ.150க்கு மேல்

ஆ) ரூ.100 முதல் ரூ.150 வரை

இ) ரூ.60 முதல் ரூ.90 வரை

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பண்பளவுகள் $\mu = 120$; $\sigma = 40$

அ) $P(x > 150)$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{150 - 120}{40} = 0.75$$

$\therefore$ P (x > 150) = P (Z > 0.75)

தேவைப்படும் பரப்பு Z = 0.75 க்கு மேலே

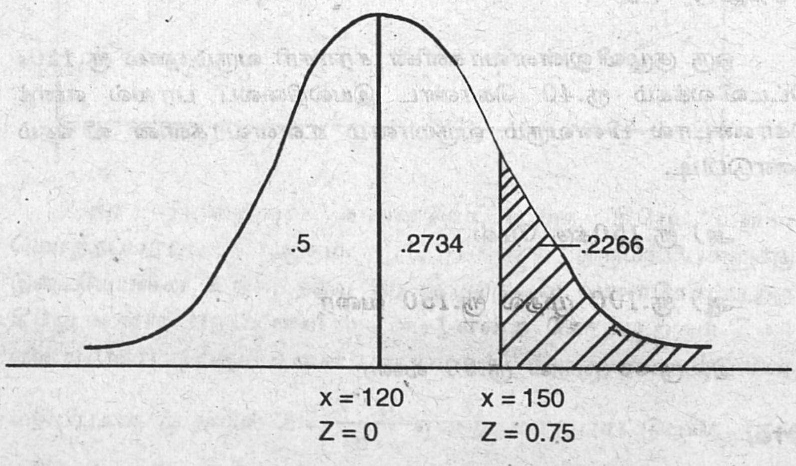
= (Z = 0.75) க்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பு

= 0.5 – 0.2734 (அட்டவணையிலிருந்து)

= 0.2266

= 22.66 %

ரூ.150க்கு மேல் வருமானம் உள்ளவர்கள் ***22.66*** விழுக்காடாகும்.



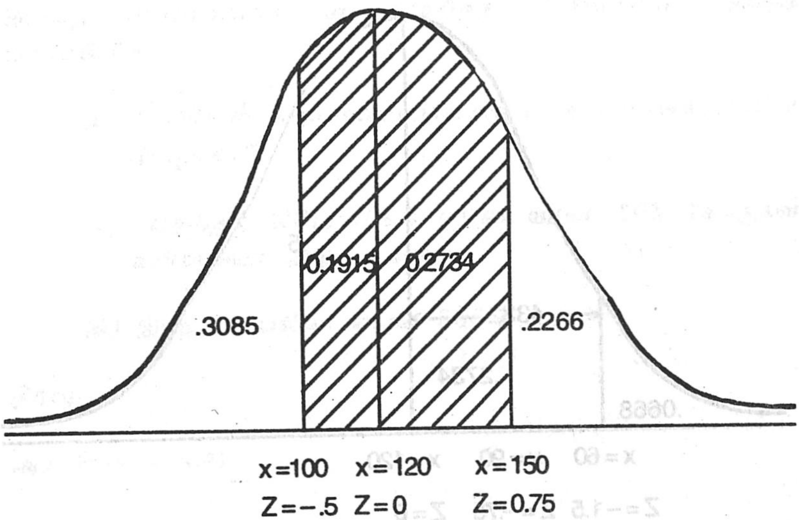
ஆ) P (100 ≤ x ≤ 150)

x = 100 எனில் $Z = \dfrac{100 - 120}{40} = -0.5$

x = 150 எனில் $Z = \dfrac{150 - 120}{40} = 0.75$

$P(100 \leq x \leq 150) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.75)$

= (பரப்பு Z = −.5 முதல் 0 வரை) +
(பரப்பு Z = 0 முதல் 0.75 வரை)



= 0.1915 + 0.2734

= 0.4649

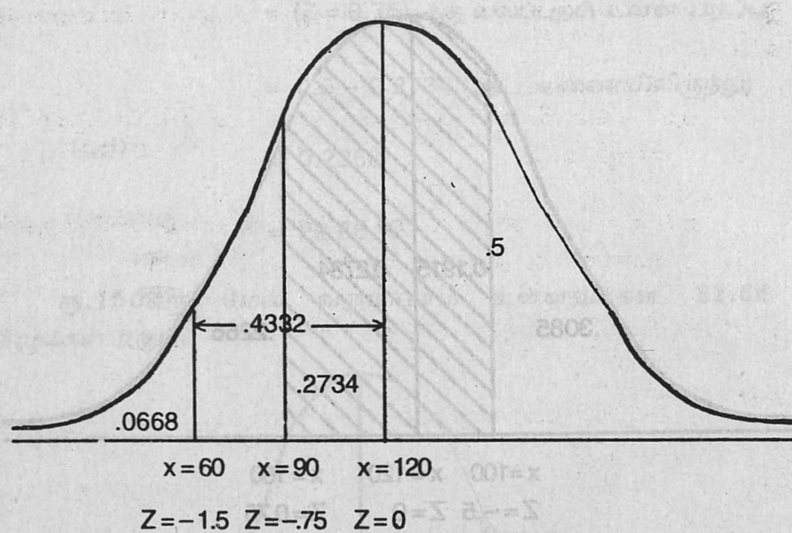
= 46.49 %

ரூ.*100*க்கு முதல் ரூ.*150* வரை வருமானம் உள்ளவர்கள் ***46.49*** விழுக்காடாகும்.

இ) $P(60 \leq x \leq 90)$

$$x = 60 \text{ எனில் } Z = \frac{60 - 120}{40} = -1.5$$

x = 90 எனில் $Z = \dfrac{90 - 120}{40} = -0.75$



$P(60 \leq x \leq 90) = P(-1.5 \leq Z \leq -0.75)$

= (பரப்பு Z = − 1.5 முதல் 0 வரை) −
(பரப்பு Z = − 0.75 முதல் 0 வரை)

= 0.4332 − 0.2734

= 0.1598

= 15.98 %

ரூ.60 முதல் ரூ.90 வரை வருமானம் உள்ளவர்கள் 15.98 விழுக்காடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு குறிப்பிட்ட தயாரிப்பில் கேக்குகளின் சராசரி உயரம் 5.3 செ.மீ. திட்டவிலக்கம் 0.75 செ.மீ. உயரங்களின் பரவலை இயல்நிலைப்பரவலாக அனுமானித்து பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக.

அ) 4.4 செ.மீ. க்குக் குறைவாக உயரம் உள்ள கேக்குகளின் விழுக்காடு.

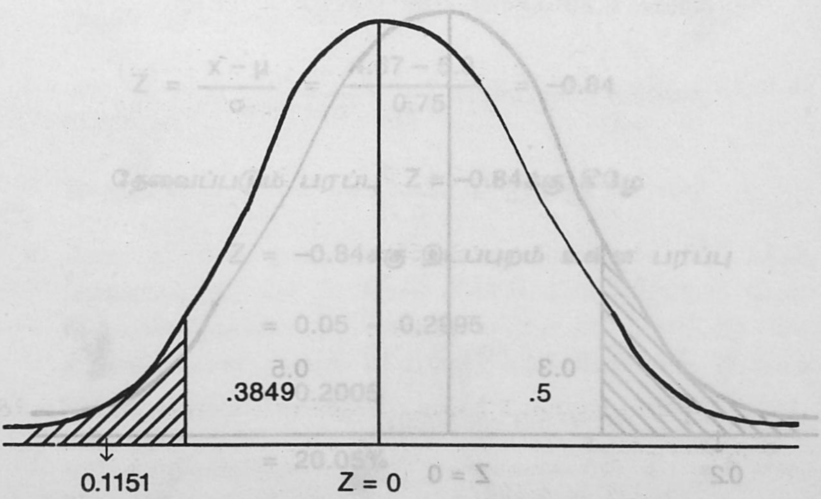
ஆ) எதற்குக் கீழே மிகக் குட்டையான 20% கேக்குகள் உள்ளவோ அந்த உயரம்

இ) இந்த பரவலின் மைய 50%

தீர்வு

அ) $P(x < 4.4)$

$x = 4.4$ எனில் $Z = \dfrac{4.4 - 5.3}{0.75} = -1.2$



P (x < 4.4) = P (Z < −1.2)

தேவைப்படும் பரப்பு = −1.2 க்கும் கீழே

= (Z = −1.2)க்கு இடப்புறம் உள்ள பரப்பு

= 0.5 − 0.3849

= 0.1151

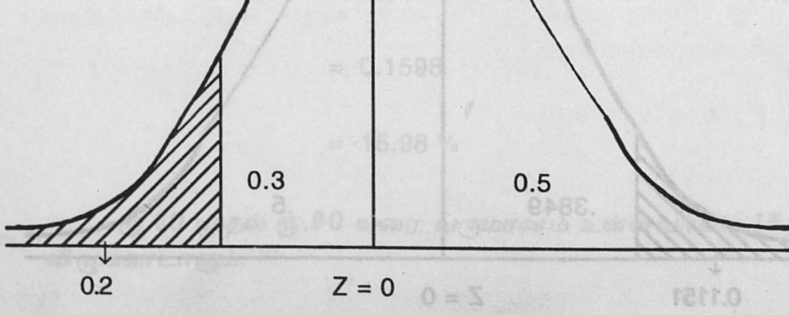
= 11.51%

ஆ) மிகக் குட்டையான 20% கேக்குகள் எதற்குக்கீழ் உள்ளதோ அந்த உயரம்

20%க்கு குறைவான கேக்குகளின்

பரப்பு = 0.3-க்கு இடது பக்கம்

பரப்பு = −0.3-க்குரிய Z-ன் மதிப்பு = −0.84



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

எனவே $-0.84 = \dfrac{Z - 5.3}{0.75}$

$x - 5.3 = (-0.84)\ (0.75)$

$x - 5.3 = -0.63$

$x = (5.3) - (0.63)$

$x = 4.67$ செ.மீ.

மிகக்குட்டையான 20% கேக்குகள் 4.67 செ.மீ. உயரத்திற்குக் கிழே இருக்கவேண்டும்.

நிருபணம்

$x = 4.67$; $\mu = 5.3$; $\sigma = 0.75$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4.67 - 5.3}{0.75} = -0.84$$

தேவைப்படும் பரப்பு $Z = -0.84$க்கு கிழே

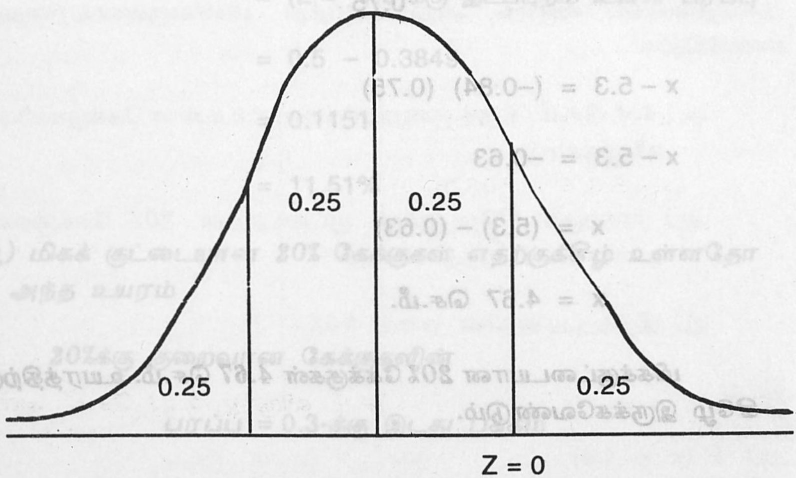
$Z = -0.84$க்கு இடப்புறம் உள்ள பரப்பு

$= 0.05 - 0.2995$

$= 0.2005$

$= 20.05\%$

இ) மைய 50% சராசரியில் இருபுறமும் 25% பரப்பு கொண்டிருக்கும். எனவே பரப்பு 0.25 க்குரிய Z-ன் மதிப்பை இரண்டு புறமும் கண்டுபிடித்துக் கூட்ட வேண்டும்.



பரப்பு –0.25-க்குரிய Z-ன் மதிப்பு = –0.675

பரப்பு 0.25-க்குரிய Z-ன் மதிப்பு = 0.675

குறைந்தபட்ச அளவு $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$-0.675 = \frac{x - 5.3}{0.75}$$

$$x - 5.3 = (-0.675)\ (0.75)$$

$$x - 5.3 = -0.50625$$

$$x = 5.3 - 0.50625$$

$$x = 4.79375$$

அதிகபட்ச அளவு $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$0.675 = \frac{x - 5.3}{0.75}$$

$$x - 5.3 = (0.675)\ (0.75)$$

$$x - 5.3 = 0.50625$$

$$x = 5.3 + 0.50625$$

$$x = 5.80625$$

பரவலின் மைய 50% = 4.79 செ.மீ. லிருந்து 5.81 செ.மீ. வரை

பயிற்சி வினாக்கள்

1. கோட்பாட்டுப்பரவலில், இயல்நிலைப்பரவலின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

2. தர இயல்நிலைப் பரவல் என்றால் என்ன? படத்துடன் விளக்குக.

3. இயல்நிலைப் பரவலின் குணாதிசயங்கள் யாவை?

4. போர் வீரர்களது உயரங்களின் கூட்டுச்சராசரி 170 செ.மீ. பரவற்படி 27 செ.மீ. எனக் கொண்டால், ஆயிரம் போர் வீரர்கள் கொண்ட ஒரு படைப்பிரிவில் 180 செ.மீ.க்கு மேல் உயரம் உள்ள போர் வீரர்கள் எத்துனை பேர் இருப்பர் என்று எதிர்பார்க்கலாம்?

5. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள 500 மாணவர்களின் சராசரி எடை 60 கிலோவாகவும், திட்டவிலக்கம் 6 கிலோவாகவும்

இருக்கிறது. எடை இயல்நிலைப் பரவலாக இருப்பதாகக் கொண்டால் (அ) 50 கிலோவிற்கும் 55 கிலோவிற்கும் இடையே எடையுள்ள மாணவர்கள் (ஆ) 65 கிலோவிற்கும் அதிகமான எடையுள்ள மாணவர்கள் ஆகியோரின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

6. ஒரு ஈருறுப்புப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 20, மற்றும் திட்டவிலகல் 7 என்ற கூற்றில் உள்ள முரண்பாட்டை விளக்குக.

7. ஒரு தேர்வில் பங்குபெற்றவர்களின் மதிப்பெண்கள் இயல்புப்பரவலாக உள்ளது. கூட்டுச்சராசரி 500, திட்டவிலகல் 100 எனில் 600 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைவாகப் பெற்றவர்களின் விழுக்காட்டைக் காட்டுக.

8. ஒரு இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச்சராசரி 125 மற்றும் திட்டவிலகல் 15 எனில், அ) 130க்கு மேல் ஆ) 114–134 என்ற நிலையில் நிகழ்தகவு காண்க.

9. ஒரு குழுவில் உள்ளவர்களில் 5%, 150 செ.மீ. உயரத்திற்கும் குறைவானவர்கள் 40%, 150 செ.மீ. லிருந்து 160 செ.மீ. உயரம் உள்ளவர்கள். இயல்நிலைப் பரவலை அனுமானித்து அக்குழுவில் உள்ளவர்களின் சராசரி உயரம், மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

11. வணிகவியல் கணக்குகள்
(Commercial Arithmetic)

அறிமுகம்

வணிகம் செய்பவர் நடைமுறையில் சரக்கு வாங்குவதற்குத் தேவையான மூலதனம் (Capital) இல்லையெனில் மற்றொரு வணிகரிடமோ அல்லது வங்கியின் உதவியையோ நாடுவார். அவர் வாங்கிய கடன் தொகையைத் தவணைமுறையில் திருப்பிச் செலுத்துவார். அப்போது உபயோகித்த பணத்திற்கு வட்டி என்ற பெயரில் கூடுதலாகப் பணம் செலுத்துவார். அந்த வட்டி இரண்டு வகைப்படும்.

1. தனிவட்டி (Single Interest)

2. கூட்டுவட்டி (Compound Interest)

வரையறை

1. தனிவட்டி என்பது அசல் தொகைக்கு மட்டும் வட்டி கணக்கிடப்படும் தொகையாகும்.

2. கூட்டுவட்டி என்பது, ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு உரிய வட்டியை அசலுடன் சேர்த்து, அடுத்த குறிப்பிட்டகாலத்திற்கு வட்டியைக் கணக்கிடும் முறையில், அசலுக்கும், கூட்டுத்தொகைக்கும் உள்ள வித்தியாசத் தொகையாகும்.

தனிவட்டி

P - அசல்

n - ஆண்டு எண்ணிக்கை

r - வட்டி விகிதம்

I - தனிவட்டி

A - மொத்தத் தொகை

$$I = \frac{Pnr}{100}$$

$$A = P + I = P + \frac{Pnr}{100}$$

$$A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

$$P = \frac{A}{1 + \frac{nr}{100}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

ரூ.420க்கு 50 நாட்களுக்கு ரூ.325க்கு 63 நாட்களுக்கும் ரூ.743க்கு 80 நாட்களுக்கும் ஆண்டொன்றுக்கு 5% வட்டி வீதம் அளித்தால், மொத்த வட்டியைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

ரூ.420க்கு 50 நாட்களுக்கு வட்டி $= \text{Rs. } 420 \times \frac{50}{365} \times \frac{5}{100}$

ரூ.325க்கு 63 நாட்களுக்கு வட்டி $= \text{Rs. } 325 \times \frac{63}{365} \times \frac{5}{100}$

ரூ.743க்கு 80 நாட்களுக்கு வட்டி $= \text{Rs. } 743 \times \frac{80}{365} \times \frac{5}{100}$

∴ மொத்த வட்டி $= \text{Rs.}420 \times \frac{50}{365} \times \frac{5}{100} + 325 \times \frac{63}{365} \times \frac{5}{100}$

$$+ 743 \times \frac{80}{365} \times \frac{5}{100}$$

$$= Rs. \frac{5}{365 \times 100} \left[420 \times 50 + 325 \times 63 + 743 \times 80 \right]$$

$$= Rs.14.03$$

குறிப்பு

$$A = P + I = Rs.(420 + 325 + 743) + 14.03$$

$$= Rs.1488 + 14.03$$

$$= Rs.1502.03$$

எடுத்துக்காட்டு 2

16% வட்டி விகிதத்தில் 8 மாதங்களுக்கு மொத்தத் தொகை ரூ.2000, ஆக உயர்ந்தால், அசல் என்னவாய் இருக்கும்?

திர்வு

$$A = P \left(I + \frac{rn}{100} \right)$$

$$2000 = P \left(I + \frac{16}{100} + \frac{8}{12} \right)$$

$$P = I + \frac{2000}{1 + .16 \times 2/3} = \frac{2000}{1.1067} = 180.8$$

அசல் = ரூ.1808

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை *8%* தனிவட்டியில் ஒருவர் முதலீடு செய்கிறார். *9*மாதம் கழித்து அதே தொகையை *10%* தனிவட்டிக்கு அவர் முதலீடு செய்கிறார். இரண்டு முதலீடுகளும் சிறிது காலம் கழித்து ரூ.*2600* என்ற ஒரே தொகையை அவருக்குத் தருகின்றன என்றால் எத்தனை ஆண்டு ஒவ்வொன்றையும் முதலீடு செய்திருப்பார்?

முதலீடு செய்த தொகை ரூ.x என்க. முதலீடு செய்த காலம் n ஆண்டு என்க.

முதல் முதலீடுக்கு

$2600 = x\left(1 + \frac{8n}{100}\right)$ எனச் சமன்பாடு எழுதலாம். ---------*(1)*

இரண்டாவது முதலீடு காலம் $\left(n - \frac{9}{12}\right)$ ஆண்டுகளாக இருக்கும்.

∴ இரண்டாவது முதலீடுக்கு,

$2600 = x\left(1 + \frac{10}{100}\left(n - \frac{9}{12}\right)\right]$ எனச் சமன்பாடு---------*(2)* எழுதலாம்.

$$(2) \div (1)\ \frac{2600}{2600} = \frac{x\left[1 + \frac{n}{100}\ \left(n - \frac{3}{4}\right)\right]}{x\left[1 + \frac{8n}{100}\right]}$$

$$1 = \frac{1 + .10\left(n - \frac{3}{4}\right)}{(1 + .08n)}$$

அதாவது $1 + 0.08n = 1 + .10\left(n - \frac{3}{4}\right)$

சுருக்கினால்,

$$.02\,n = 0.075$$

$$n = \frac{75}{20}$$

$$= 3\tfrac{3}{4} \text{ ஆண்டுகள்.}$$

குறிப்பு

n-ன் மதிப்பை பிரதியிட,

$$2600 = x\left(1 + \frac{8}{100}\,n\right)$$

$$= x\left(1 + .08 \times 3\frac{3}{4}\right)$$

$$= x\left(1 + .08 \times \frac{15}{4}\right)$$

$$= x\,(1.3)$$

$$x = \frac{2600}{1.3} = \text{ரூ.}2000$$

முதலீடு செய்த தொகை = ரூ.2000	எனக்கிடைக்கும்.

கூட்டுவட்டி

P - அசல்

n - ஆண்டு எண்ணிக்கை

r - வட்டிவிகிதம்

A - கூட்டு மொத்தத்தொகை

கூட்டுவட்டி = A – P

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

$$\text{கூட்டுவட்டி} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$\text{கூட்டுவட்டி} = P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 4

ரூ.2500க்கு நான்கு ஆண்டுக்கு 8% வட்டிவிகிதத்தில் கூட்டுவட்டி காண்க.

தீர்வு

$P - 2500; \quad n - 4; \quad r = \frac{8}{100}$

$$\text{கூட்டுவட்டி} = P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 2500\left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^4 - 1\right]$$

$$= 2500\left[(1.08)^4 - 1\right]$$

$$= 2500 \times (1.3605 - 1)$$

$$= 2500 \times 0.3605$$

= ரூ.901.25

எடுத்துக்காட்டு 5

ஒருவர் தன்னுடைய இருபிள்ளைகள் A, B ஆகியோர்க்கு தன்னிடமுள்ள ரூ.40,000ஐப் பகிர்ந்து கொடுக்கும்போது, அவர்களுடைய 20வது வயதில் சமதொகை கிடைக்க ஒரு வங்கியில் வைப்புத் தொகையில் இடுகிறார். Aயின் வயது 13, Bயின் வயது 16. வங்கி கொடுக்கும் கூட்டுவட்டி விகிதம் ஆண்டொன்றுக்கு 9% என்றால், அவர் எப்படி பணத்தை இருபாகமாகப் பிரித்துப் போடுவார்?

தீர்வு

வைப்பு நிதியில் Aயின் பங்கு = x என்க.

∴ வைப்பு நிதியில் Bயின் பங்கு = (40,000 – x)

x ஆனது 7 ஆண்டிற்கு வட்டி பெறும், (40,000 – x) ஆனது 4 ஆண்டிற்கு வட்டி பெறும். இருவரும் இறுதியில் பெறும் தொகை சமமாக இருக்கும்.

இறுதியில் பெறும் தொகை A எனில்

$$A = P - \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$x\left[1 + \frac{9}{100}\right]^7 = (40,000 - x)\left(1 + \frac{9}{100}\right)^4$$

$$x\left(1 + \frac{9}{100}\right)^3 = (40,000 - x)$$

$$x\,(1 + .09)^3 = (40,000 - x)$$

$$x\left[(1.09)^3 + 1\right] = 40,000$$

$x\,(2.295) = 40{,}000$

x = ரூ.17,865 (தோராயமாக)

A-யின் பேரில் செய்யும் முதலீடு = ரூ.17,865

B-யின் பேரில் செய்யும் முதலீடு = ரூ.40,000 − 17,865

= ரூ.22,135

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு சேமிப்புக்கணக்கில் ஒவ்வொரு மாதம் முதல்தேதி ரூ.80 போடப்படுகிறது. வங்கி 5% தனிவட்டி கொடுக்கும்போது 3 ஆண்டுகளுக்குப்பின் கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவாக இருக்கும்?

2. ரூ.325, 65 நாட்களுக்கும் ரூ.475, 100 நாட்களுக்கும் மற்றும் ரூ.550, 82 நாட்களுக்கும் வருடத்திற்கு 6% வட்டி வீதத்தில் வைப்பு நிதியில் போட்டால் கிடைக்கும் மொத்த வட்டி எவ்வளவு?

3. ஒரு குறிப்பிட்ட சிட்டைக்கு 3 மாதத் தவணைக்கு ரூ.3-ஐ வங்கி லாபமாகப் பெறுகிறது. வட்டிவீதம் 8% என்றால், சிட்டையின் தொகை எவ்வளவு?

4. ரூ.5000க்கு, வருட வட்டி 6% என்றால் 3 வருடத்திற்குக் கிடைக்கும் கூட்டுவட்டி எவ்வளவு?

5. ஒருவர் தன்னுடைய 12 வயது மகள் பேரிலும் 14 வயது மகன் பேரிலும் ரூ.50,000-யைப் பிரித்து வங்கியில் வைப்புநிதியில் போட விரும்புகிறார். அவர் தன் பிள்ளைகள் 18 வயது அடையும்போது இருவரும் சம தொகை பெற விரும்புகிறார். ஆகையால், அவர் எப்படி வங்கியில் 6% கூட்டுவட்டி கொடுக்கும்போது இருபாகமாகப் பிரித்து போடுவார் என எதிர்பார்க்கலாம்.

கூட்டுத்தொடர், பெருக்குத்தொடர் பயன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு நிர்வாகம் தன்னுடைய நிறுவனத்தின் வளர்ச்சி மற்றும் ஆய்வுச் செலவிற்கு ஆண்டொன்றுக்கு ரூ.20,000 கூடுதலாக செலவு செய்கிறது. முதல்வருடம் இந்தச் செயல்பாட்டிற்கு ரூ.75,000 ஒதுக்குகிறது. 6 வருடம் கழித்து நிர்வாகம் செய்யும் மொத்தச் செலவு என்ன?

முதல் வருடம் செலவழிக்கும் தொகை ரூ.75,000

ஒவ்வொரு வருடமும் உயர்த்தும் தொகை ரூ.20,000

கணக்கின்படி முதல் வருடம் செலவழிக்கும் தொகை a என்க.

ஒவ்வொரு வருடமும் செலவழிக்கும் அதிகத்தொகை d என்க.

$a = 75,000$

$d = 20,000$

∴ முதல் வருடச்செலவு = a

2வது வருடச்செலவு = $a + d$

3வது வருடச்செலவு = $a + 2d$

4வது வருடச்செலவு = $a + 3d$

5வது வருடச்செலவு = $a + 4d$

6வது வருடச்செலவு = $a + 5d$

மொத்தச்செலவு = $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+5d)$

$$= \frac{n}{2}\left[2a + \overline{n-1}\,d\right]$$

$$= \frac{6}{2}\left[2 \times 75{,}000 + 6-1 \times 20{,}000\right]$$

= ரூ.7,50,000

எடுத்துக்காட்டு 2

ரூ.*3500*-ஐ ஒருவர் கடனாகப்பெற்று, *23* தவணைகளில் ரூ.*150*ம், கடைசித்தவணையில் ரூ.*50* செலுத்துவதாக ஒப்புக்கொள்கிறார். ஆண்டுக்கு 5% தனிவட்டி என்ற விகிதத்தில், 25வது தவணையாகச் செலுத்தும் தொகை எவ்வளவாக இருக்கும்.

முதல்மாதத்தில் ரூ.*3500*க்கு செலுத்தும் வட்டி

$$ரூ.\ \frac{3500 \times 5}{12 \times 100}$$

2வது மாத முதலில் அசல் = ரூ.3500 – 150 = 3350 ரூ

2வது மாதத்தில் ரூ.*3350*க்கு செலுத்தும் வட்டி $= ரூ.\ \frac{3350 \times 5}{12 \times 100}$

கடைசித் தவணையில் ரூ.*50*க்கு செலுத்தும் வட்டி $= ரூ.\ \frac{50 \times 5}{12 \times 100}$

$$\therefore \text{மொத்தவட்டி} = ரூ.\ \frac{3500 \times 5}{12 \times 100} + \frac{3350 \times 5}{12 \times 100} + \ldots\ldots + \frac{200 \times 5}{12 \times 100} + \frac{50 \times 5}{12 \times 100}$$

$$= ரூ.\frac{5}{12 \times 100}\left[3500 + 3350 + \ldots + 200 + 50\right]$$

$$= \frac{5}{12 \times 100}\left[\frac{24}{2}\left(2 \times 3500 + \overline{24-1}\,(150)\right)\right]$$

(24 உறுப்புகள் வரை)

$$= \frac{5}{100} \times 3350 = ரூ.177.50$$

மொத்தவட்டி 25வது தவணையாக செலுத்தும் தொகை ரூ.177.50

உள்ளீடு - வெளியீடு பகுப்பாய்வு (Input - Output Analysis)

ஒரு உற்பத்தித் திட்டத்தை n தொழிற்சாலைகளாக பிரித்து, ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் ஒரு பொருளை உற்பத்தி செய்வதாக வைத்துக் கொள்வோம். மேலும் ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்தி செய்யும் பொருளை இன்னொரு தொழிற்சாலை பயன்படுத்தும் என்ற கொள்கையையும் வைத்துக்கொள்வோம். இறுதித் தேவையை பூர்த்தி செய்வது போல, மற்ற தொழிற்சாலைகளின் தேவைகளையும் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும் நிலையில் ஒரு பொருள் இறுதி வடிவம் பெறும். உற்பத்தித் திட்டம் மாறாத நிலையில், இறுதித் தேவைகள் மாறினாலும் ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் உற்பத்தியை நிர்ணயிக்க வேண்டும்.

a_{ij} - i-வது தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் பொருள் j-வது தொழிற்சாலையில் உபயோகப்படுத்தும் போது ஏற்படும் செலவு ரூபாயில்

d, x - ரூபாய் மதிப்பில்

d_i - i-வது தொழிற்சாலையின் இறுதித்தேவை.

x_i - i-வது தொழிற்சாலையிலிருந்து மொத்த வெளியீடு (உற்பத்தி)

பின்வரும் அட்டவணையில் பார்ப்போம்.

	உபயோகிப்பாளர்									இறுதித் தொகை	மொத்த வெளியீடு
	1	2	3	....	j	.....	n				
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1j}	.....	a_{1n}			d_1	x_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2j}	.....	a_{2n}			d_2	x_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3j}	.....	a_{3n}			d_3	x_3
:											
i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	....	a_{ij}	.....	a_{in}			d_i	x_i
:											
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	....	a_{nj}	.....	a_{nn}			d_n	x_n

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்து,

$$x_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in} + d_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i$$

இதிலிருந்து x_i என்பது i-வது தொழிற்சாலையிலிருந்து வெளிவரும் மொத்த உற்பத்திப்பொருள்களின் மதிப்பு (ரூபாயில்)

தற்போது $\frac{a_{ij}}{x} = b_{ij}$ எனப் பிரதியிடுவோம்.

நாம் கிழ்க்கண்ட அணியை அமைப்போம்.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots\ldots b_{1j} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots\ldots b_{2j} \ldots\ldots b_{2n} \\ \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} \ldots\ldots\ldots b_{ij} \ldots\ldots b_{in} \\ \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$ என்ற உள்ளீடு - வெளியீடு அணி அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

Bx என்பது n தொழிற்சாலைகளில் ஒவ்வொன்றும் எல்லா 'n' தொழிற்சாலைகளுக்கும் அளிக்கும் உற்பத்திப் பொருள்களின் மதிப்பு (ரூபாயில்)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ . \\ d_n \end{pmatrix}$$ என்பது இறுதித்தேவை அணி

$$X = (1 - B)^{-1} D$$

D தெரிந்தால் X ஐ கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

PQ என்ற தொழிற்சாலைகளின் திட்டம் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (ரூபாய் லட்சத்தில்)

		உபயோகிப்பாளர்		இறுதித் தேவை	மொத்த வெளியீடு
		P	Q		
உற்பத்தியாளர்	P	14	6	8	28
	Q	7	18	11	36

இறுதித்தேவை Pக்கு 20 எனவும், Qக்கு 30 எனவும் மாறினால் வெளியீடை நிர்ணயிக்க வேண்டும்.

$a_{11} = 14 \quad a_{12} = 6 \quad d_1 = 8 \quad x_1 = 28$

$a_{21} = 7 \quad a_{22} = 18 \quad d_2 = 11 \quad x_2 = 36$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$| I - B | = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{24}$$

$$(I - B)^{-1} = \frac{24}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = (I - B)^{-1} D = \frac{24}{5} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \end{pmatrix}$$

கொடுத்த விவரங்கள் சரிபார்க்கப்பட்டது.

புதிய தேவை வெக்டர் $D = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

$$X = (I - B)^{-1} D = \frac{24}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{24}{5}\begin{pmatrix}15\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72\\96\end{pmatrix}$$

P, Q என்ற தொழிற்சாலைகள் 72, 96 (லட்சத்தில் ரூபாயில்) மதிப்புள்ள பொருட்களை உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு பொருளாதாரத் திட்டத்தில் A மற்றும் B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் அளிப்பு மற்றும் தேவை நிலைகள் (ரூபாய் லட்சத்தில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

		உபயோகிப்பாளர்		இறுதித் தேவை	மொத்த வெளியீடு
		A	B		
உற்பத்தி	A	15	10	10	35
யாளர்	B	20	30	15	65

இறுதித்தேவை Aக்கு 12, Bக்கு 18 மாறினால் மொத்த உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

2. ஒரு பொருளாதாரத் திட்டத்தில் A, B மற்றும் C என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகளின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (ரூபாய் லட்சக்கணக்கில்)

		உபயோகிப்பாளர்			இறுதித் தேவை	மொத்த வெளியீடு
		A	B	C		
	A	80	100	100	40	320
உற்பத்தியாளர்	B	80	200	60	60	400
	C	80	100	100	20	300

இறுதித்தேவை Aக்கு 10, Bக்கு 40, Cக்கு 20 மாறினால் மொத்த உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை (Annuity)

வரையறை

தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகை என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையைச் சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு ஆண்டுக் கொருமுறை (அல்லது) குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு ஒரு தடவை செலுத்துவது என்பதாகும்.

தொடர் தவணைப் பங்கீட்டுத்தொகை (Perpetual Annuity)

கணக்கிலடங்கா காலத்திற்குத் தொடர்ந்து கிடைக்கும் தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகையினை, தொடர் தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகை என அழைப்பர்.

தற்போதைய மதிப்பு (Present Value)

ஒரு தொகை ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டி வீதத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு முதலீடு செய்து, அந்த காலத்திற்குப்பின் வட்டியுடன் கிடைக்கும் தொகையைத்தான் தற்போதைய மதிப்பு எனக்கூறுவர்.

P - தற்போதைய மதிப்பு   r - வட்டி விகிதம்

A - n வருடத்திற்குப்பின் கிடைக்கும் தொகை

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

அல்லது $$P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

தொடர் தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகையின் தற்போதைய மதிப்பு $= \dfrac{100\,A}{r}$

எடுத்துக்காட்டு

10% கூட்டு வட்டி விகிதத்தில் *10* ஆண்டுகளுக்கு *4000* செலுத்தினால் கிடைக்கும் தவணைப்பங்கீட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

$$\text{கிடைக்கும் தொகை} = 4000 + \left(1+\frac{10}{100}\right)^9 + 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^8 + \ldots + 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^1 + 4000$$

$$\left[\because \left(1+\frac{10}{100}\right) = 1.1\right]$$

$$= 4000\,[1 + 1.1 + 1.1^2 + \ldots + 1.1^9]$$

$$= 4000\left[\frac{1.1^{10}-1}{1.1-1}\right]$$ (பெருக்குத் தொடர் கூட்டுத் தொகை வாய்ப்பாடு)

$$= \text{Rs.}63760$$

$$\left[\, y = (1.1)10 \Rightarrow \log y = 10 \log 1.1 = .414 \quad y = \text{Antilog } .414 = 2.594 \,\right]$$

எடுத்துக்காட்டாக

ஒரு நபர் தன்னுடைய முழுச்சொத்தையும் விற்று ரூ.*20,000* கிடைக்கின்றது. கிடைத்த ரூபாயை 5% கூட்டுவட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் வைப்புநிதியில் போடுகிறார். பின் வருடத்திற்கு ரூ.*1800* தன்னுடைய சொந்த செலவிற்காக எடுப்பதற்கு ஒப்பந்தம் செய்து கொள்ளுகிறார். முதலாண்டு இறுதியிலிருந்து ரூ.*1800*ஐ செலவிற்கு எடுத்து கொண்டால் 17வது வருடம் இறுதியில் அவர் பணம் முழுவதும் செலவாகிவிடும் என கணக்கிட்டுப்பார்.

ரூ.*20,000*த்தின் தற்போதைய மதிப்பு 17 வருடத்திற்குப்பின் ரூ.*2,000*க்கு மேல் வரும் என்றிருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\frac{1800}{\left(1+\frac{5}{100}\right)} + \frac{1800}{\left(1+\frac{5^2}{100}\right)} + \ldots\ldots + \frac{1800}{\left(1+\frac{5^{17}}{100}\right)}$

$> \text{Rs.}20{,}000$

$$\frac{1800}{\left(1+\frac{5}{100}\right)} + \frac{1800}{\left(1+\frac{5^2}{100}\right)} + \ldots\ldots + \frac{1800}{\left(1+\frac{5^{17}}{100}\right)}$$

$$= \frac{1800}{1.05} + \frac{1800}{(1.05)^2} + \ldots\ldots + \frac{1800}{(1.05)^{17}} > \text{Rs.}20{,}000$$

இதைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஐந்து ஆண்டுகளில் செலுத்துகை ரூ.200 என்றிருக்கும் போது, கூட்டுவட்டி விகிதம் 4%ல் கிடைக்கும் உடனடி தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

$$A = P\left(1+\frac{A}{100}\right)^n$$

$$= 200\left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = 200 \times (1.04)^5$$

$$= \text{Rs. } 1080$$

குறிப்பு

தவணைப்பங்கிட்டுத் தொகைக்காண இன்னொரு வாய்ப்பாடு

$$A = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

r - வட்டிவிகிதம்

a = காலம் தொலுத்துகை

n = ஆண்டுகள் எண்ணிக்கை

A = தவணைப் பங்கிட்டு தொகை

எடுத்துக்காட்டு

தவணைப்பங்கிட்டுத் தொகை ரூ.*1000*, *10* செலுத்துகையில் 5% கூட்டுவட்டி மூலம் கிடைக்க வேண்டுமானால் ஆண்டு ஒன்றுக்கு எவ்வளவு செலுத்த வேண்டும்?

இங்கு $A = 1000 \quad n = 10 \quad r = 0.05 \left(\frac{5}{100}\right)$

$\therefore \; a = ?$

$$1000 = \frac{a}{0.05}\left[(1 + .05)^{10} - 1\right]$$

$$1000 \times 0.05 = a\,(1.627 - 1)$$

$$a = \frac{1000 \times .05}{0.627} = \text{(ரூ.79.75)}$$

ஆண்டொன்றுக்கு செலுத்தும் தொகை = ரூ.79.75

எடுத்துக்காட்டு

5% கூட்டுவட்டி விகிதத்தில் ஆண்டொன்றுக்கு ரூ.*50* வீதம் செலுத்தினால் எத்தனை ஆண்டுகளில் தவணைப் பங்கிட்டுத் தொகை ரூ.*1000* ஆக கிடைக்கும்?

$a = 50 \quad A = 1000 \quad r = \frac{5}{100} = .05 \quad n = ?$

$$A = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

$$1000 = \frac{50}{.05}\left[(1.05)^n - 1\right]$$

$$\frac{1000 \times .05}{50} = (1.05)^n - 1$$

$$(1.05)^n = 2$$

$$n \log (1.05) = \log 2$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.05} = \frac{0.3010}{0.0212}$$

$$= \frac{3010}{212} = 14.2$$

14 ஆண்டுகளில் தொகை ரூ.100க்கு சற்று குறைவாக இருக்கும்.

ஆனால் 15 ஆண்டுகளில் ரூ.1000க்கு அதிகமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு எந்திரம் ரூ.50,000க்கு வாங்கப்படுகிறது. எட்டு வருடத்தில் 10% வீ தத்தில் தேய்மானம் ஆகிறது. அந்த இழப்பை ஈடுகட்ட மூழ்கும் நிதி என்ற பெயரில் ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஏற்படுத்துகிறார்கள். ஒவ்வொரு ஆண்டும் செலுத்தும் தொகை 5% கூட்டுத்தொகை வட்டியில் சேருந்தொகை மொத்த தேய்மானத் தொகைக்கு சமமாக இருந்தால் வேண்டுமானால், எவ்வளவு தொகை செலுத்த வேண்டும்?

எந்திரத்தின் மதிப்பு எட்டு ஆண்டுகளுக்கு பின்

$$= 50,000\left(1 - \frac{10}{100}\right)^{8}$$

$$= 50,000 \times (.9)^{8}$$

$$= 50,000 \times 0.43047$$

= ரூ.21,524 (தோராயமாக)

தேய்மானம் = ரூ.(50,000 – 21,524)

= ரூ.28476

இந்தத் தொகை மூழ்கும் நிதியில் இருக்கும் தொகைக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$A = \frac{a}{r}\left[(1 + r)^{n} - 1\right]$$

$A = 28476, \quad r = .05 \quad a = ? \quad n = 8$

$$28476 = \frac{a}{.05}\left[(1.05)^{8} - 1\right]$$

$$= \frac{a}{.05}(1.478 - 1)$$

$$a = \frac{28476 \times .05}{.478}$$

= Rs.2979 தோராயமாக

பயிற்சி வினாக்கள் I

1. ஓர் எந்திரத்தை வாங்க ஒருவருக்கு ரூ.24,000 தேவைப்படுகிறது. ஆகையால் அவர் சரிசமமான 8 தவணைகளில் சேமிக்க விரும்புகிறார். வங்கி அவருக்கு 5% கூட்டுவட்டி ஆண்டொன்றுக்குத் தருகிறது. முதல் ஆண்டின் இறுதியில் முதல் தவணையை வைப்பு நிதியில் செலுத்துகிறார் எனில் அவர் செலுத்தவேண்டிய தொகை எவ்வளவு?

2. 5% கூட்டுவட்டியில் ஒரு தொகை வைப்பு நிதியில் போடப்படுகிறது. அந்தத்தொகை ஆண்டொன்றுக்கு ரூ.300 வீதம் 7 தவணைகளாக திரும்பப்பெறப்படுகிறது. முதல் தொகை முதல் ஆண்டில் திரும்பப்பெறுகிறது எனில் வைப்புநிதியில் போடப்படும் தொகை எவ்வளவு?

3. ஆண்டொன்றுக்கு 6% கூட்டுவட்டியில் போடப்படும் தவணைப் பங்கிட்டுத்தொகையின் தற்போதைய மதிப்பு ரூ.700. ஆண்டொன்றுக்கு ரூ.50 தவணைப் பங்கிட்டுத்தொகை கிடைக்குமானால் எத்தனை தவணைகளின் முழுத்தொகையையும் பெறலாம்.

4. 50 வயது நிரம்பும் ஒருவர் ஆண்டொன்றுக்கு 8% கூட்டுவட்டி கிடைக்கும் வங்கியில் ஒரு தொகையை முதலீடு செய்ய விரும்புகிறார். அத்தொகையானது ஒவ்வொரு ஆண்டும் ரூ.1800 கிடைக்கும் வகையில் 20 ஆண்டுகளுக்கு கிடைக்க வேண்டும் என எண்ணுகிறார். மேலும் முதல் தொகை அவர் வேலைவிட்டு 58 வயது ஓய்வு பெறும்போது கிடைக்க விரும்புகிறார் எனில் எவ்வளவு தொகை முதலீடு செய்ய வேண்டும்?

பயிற்சி வினாக்கள் II

1. ஒரு உருப்படியை உற்பத்தி செய்ய ஒரு நிர்வாகம் ரூ.9 செலவழிக்கிறது. x உருப்படிக்களுக்கானச் செலவு $C = 0.1x^{3/2} + 3x + 8$ என்ற சார்பில் கொடுக்கப்படுகிறது. நிர்வாகத்திற்குக்

கிடைக்கும் மீப்பெரு இலாபம் எவ்வளவு? மீப்பெரு இலாபம் கிடைக்க எத்தனை உருப்படிகளை உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்?

2. இலாபம் P எனவும், விளம்பரச் செலவு x எனவும் இருந்தால் இரண்டிற்கும் உள்ள தொடர்பு $P = \frac{4000 \cdot x}{400 + x} - x$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. x-ன் எந்த மதிப்பு P-மீப்பெரு மதிப்பு கிடைக்கச் செய்யும் எனக்கண்டுபிடி.

3. ஒரு நிர்வாகத்திற்கு வருவாய்ச் சார்பு R, $R = 10q$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. மற்றும் செலவுச்சார்பு C, $C = 10{,}000 + 50\left(\frac{q}{1000}\right)^2$ எனக்கொடுக்கப்படுகிறது. மீப்பெரு இலாபம் கிட்ட எவ்வளவு மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளும்?

4. ஒரு நிர்வாக உற்பத்தியாகும் உருப்படிகளை, ஒரு உருப்படியின் விலை p என விற்கும்போது, $p(x) = 300 - 4x$ என்ற சார்பில் தொடர்பைக் கொடுக்கிறது. அதே நேரத்தில் உற்பத்திச் செலவு சார்பு C, $C(x) = 500 + 28x$ எனக் கிடைக்கின்றது. x என்பது உற்பத்தியாகும் மொத்த உருப்படிகள். அதிகப்படியான இலாபம் பெற எவ்வளவு உருப்படிகளை உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்?

5. மொத்த வருவாய் R எனவும், உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் தேவை D எனவும் இருந்தால், $R = 15D - 2D^2 - D^3$ எனத் தொடர்பு கொடுக்கப்படுகிறது. $D = 2$ ஆக இருக்கும்போது Dஐப் பொறுத்து Rன் மாறும் வீதம் -6 என நிரூபி.

6. p என்பது ஒரு உருப்படியின் விலை, q - உருப்படிகளின் எண்ணிக்கை. தேவை சார்பு $p = \frac{150}{q^2 + 2} - 4$ என கொடுக்கப் படுகிறது. இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பை நிர்ணயம் செய்யவும்.

7. மொத்தச் செலவு சார்பு என்பது, நிர்வாகத்தினால் $C = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28 + 10$ என நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. x என்பது உற்பத்தியாகும் உருப்படிகள். ஒரு உருப்படிக்கு ரூ.2 என வரி செலுத்தப்படுகிறது. இதனை அவருடைய செலவில் உற்பத்தியாளர் சேர்த்துக்கொள்ளுகிறார். தேவை சார்பு $p = 2530 - 5x$ என நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. ரூ.p என்பது ஒரு உருப்படியின் விலை எனில் அதிகப்படியான இலாபம் என்னவெனக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு பொருளுக்குத் தேவைச்சமன்பாடு $x = 500 - 10y$ எனக்கொடுக்கப்படுகிறது. இதில் தேவை என்பது x கிலோவிலும், ஒரு கிலோ விலை y ரூபாயிலும் சொல்லப்படுகிறது. அளிப்புச் சார்பு S (s கிலோவில் கூறப்படுகிறது) $S = 25(y - 8)$ என்ற சமன்பாட்டில் தரப்படுகிறது. சமநிலைப்புள்ளி என்னவென்றும் தேவையான அளவு எவ்வளவென்றும் கண்டுபிடி. (சமநிலைப்புள்ளி என்பது தேவையும் அளிப்பும் சமமாக இருக்கும் புள்ளியாகும்).

9. தேவைவிதி $x = 10 - p$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $x = 4$; $p = 6$ என இருக்கும்போது தேவைவிதி மேற்கூறிய வாய்பாட்டினை திருப்தி செய்கிறது. விலை 5% கூடும்போது, தேவையின் குறைவு எவ்வளவு என்பதைக் கணக்கிட்டு, அதிலிருந்து தோராயமாக தேவை நெகிழ்ச்சியை காண்க. சரியான தேவை நிகழ்ச்சி மதிப்பை ஒப்பிடுக.

தீர்வு

புதிய விலை = ரூ.(6 + 5% = ரூ.630

புதிய தேவை = 10 – 630 = ரூ.3.70

தேவையின் குறைவு = 4 – 3.70 = .3

தேவையின் குறைவு சதவீதம் $= \frac{.3}{4} \times 100 = 7.5\%$

தோராயமாக தேவை நெகிழ்ச்சி $= \frac{\text{தேவையின் சதவீதம்}}{\text{விலையின் சதவீதம்}}$

$$= \frac{7.5}{5} = 1.5$$

தேவை நெகிழ்ச்சியின் சரியான மதிப்பு $= \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{6}{4}(-1)$

$= 1.5$ அளவில்

$$\left(\because x = 10 - p, \quad \frac{dx}{dp} = -1\right)$$