புள்ளியியல் முறைகள்

துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

செ. **அரங்கநாதன்,** எம்.எஸ். (ஃபிளோரிடா),
பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—509

புள்ளியியல் முறைகள்

துணைப்பாடம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

செ. அரங்கநாதன், எம்.எஸ். (ஃபிளோரிடா),
பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—October, 1973

T.N.T.B.S.*(C.P.) No. 509

© Tamil Nadu Text Book Society

Statistical Methods—Ancillary

J. RANGANATHAN

Price Rs. 9-85

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road, Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்று ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'புள்ளியியல் முறைகள் (துணைப் பாடம்)'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **509** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **544** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

நன்றியுரை

'ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற புத்தகத்திலிருந்து t-பட்டியலையும், கைவர்க்கப் பட்டியலையும் எடுத்துள்ளோம். அப் புத்தகத்தின் ஆசிரியர் சர் ஃபிஷர் அவர்களுக்கும், அதனை வெளியிடுதற்கு அனுமதி தந்த எடின்பர்க் நகரத்தைச் சார்ந்த ஆலிவர் பாய்ட் லிமிட்டெட் நிறுவனத்தாருக்கும் எமது நன்றி உரித்தாகுக.

'புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற புத்தகத்தின் ஐந்தாம் பதிப்பிலிருந்து F-பட்டியலை எடுத்து இங்குச் சேர்த்துள்ளோம். அதன் ஆசிரியர் பேராசிரியர் G. W. ஸ்னிடிகர் அவர்களுக்கும், அதனை வெளியிடுதற்கு அனுமதி வழங்கிய ஐவோ ஸ்டேட் யூனிவர்ஸிடி பிரஸ் நிறுவனத்தாருக்கும் எமது நன்றி உரித்தாகுக.

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. அறிமுகம் ... 1
2. புள்ளிவிவரங்களைத் திரட்டுதலும், பட்டியல் அமைத்தலும் ... 3
3. விளக்கப் படங்களும் வரைபடங்களும் ... 24
4. மையப்போக்கு அளவைகள் ... 56
5. சிதறல் அளவைகள் ... 86
6. கோட்ட அளவைகளும், தட்டை அளவைகளும் 122
7. ஒட்டுறவு, பல்தர ஒட்டுறவு, பகுதி ஒட்டுறவு ... 132
8. தொடர்புப் போக்கு ... 186
9. நிகழ் தகவு ... 201
10. ஈருறுப்புப் பரவல் ... 225
11. பாய்சான் பரவல் ... 261
12. இயல்நிலைப் பரவல் ... 284
13. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகள் ... 330
14. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வும், செய்முறைத் திட்டங்களும் ... 393

அட்டவணைகள்

I. இயல்நிலைப் பரவல்—நிலைத்தூரமும் பரப்பும்... 448
II. கைவர்க்கப் பரவலின் நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் 452
III. t-பரவலின் நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் ... 454
IV. F-பரவலின் 1% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் ... 456
V. F-பரவலின் 2·5% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் ... 458
VI. F-பரவலின் 5% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் ... 460
VII. அடுக்குக்குறி சார்பலன் மதிப்புகள் ... 462
VIII. சம வாய்ப்பு எண்கள் ... 464

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ... 467
கலைச்சொற்கள் ... 469

1. அறிமுகம்

செய்திகளைத் தெளிவுற எடுத்தளிக்க எண்கள் பேருதவி யாக உள்ளன என்பது மறுக்க முடியாத ஓர் உண்மையாகும். கடந்த அறுபது ஆண்டுகளில் தமிழ் நாட்டின் மக்கள்தொகை பெருகியுள்ளது எனக் குறிப்பிடுவதைக் காட்டிலும் 1911, 1971 ஆகிய ஆண்டுகளில் மக்கள்தொகை முறையே 20·3, 41·1 மில்லியன்கள் என எண்கள் வாயிலாகக் குறிப்பிடும்போது மக்கள்தொகைப் பெருக்கத்தைப் பற்றி தெளிவான கருத்தை நாம் பெற இயலுகிறது. இது போன்றே, பசுமைப் புரட்சியின் வெற்றி, ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களின் விளைவாக ஏற்பட்டுள்ள சமூகப் பொருளாதார முன்னேற்றம் போன்ற வற்றை எண்களைக் கொண்டு வெளிப்படுத்தலாம் என்பது கண்கூடு.

செய்திக் குறிப்புகளை எண்கள் வாயிலாக எடுத்தளிக்கும் போது, அந்த எண்களைப் ''புள்ளி விவரங்கள்'' (Statistical Data) என அழைக்கிறோம். நாட்டின் மக்கள்தொகை, வருமானம், விலைகளின் ஏற்ற இறக்கங்கள், பொருள்களின் உற்பத்தி, இன்ன பிற செய்திகளைக் குறிப்பிடும் புள்ளி விவரங்கள் நாம் அறிந்ததே. குவியலாக இருக்கும் வெற்று எண்களைப் புள்ளி விவரங்கள் எனக் கூறுவதற்கில்லை. அவ் வெண்கள் யாதேனும் செய்திகளை வெளிப்படுத்தும் வகையில் அமைந்திருப்பின், அவைகளைப் புள்ளி விவரங்கள் என்கிறோம்.

புள்ளி விவரங்களைத் திரட்டவும், திரட்டிய விவரங்களைப் பகுத்தாயவும், பகுத்தாய்ந்து கிடைக்கப் பெற்ற விளைவுகளைக் கொண்டு உண்மைகளை உய்த்துணரவும் கையாளப்படும் பல்வேறுான முறைகள் புள்ளியியல் முறைகள் என வழங்கப்படு கின்றன.

ஒரு பிரச்சினை அல்லது சிக்கலைப்பற்றி தெள்ளத் தெளிவாக அறிந்துகொள்ள புள்ளி விவரங்கள் துணைபுரிகின்றன. தேவையான புள்ளி விவரங்களைச் சிக்கனமாகவும், நம்பகமான வழிகளிலும் திரட்டுவதற்குப் புள்ளியியல் முறைகள் கையாளப் படுகின்றன. திரட்டப்படும் புள்ளி விவரங்கள், ஓர் எண் குவியலாக இருக்குமாதலால், மேலெழுந்தவாரியாக நோக்கும் போது, அவைகளில் உள்ளடங்கிய செய்திகள் எளிதில் புலப்படா. எனவே, அவைகளைப் பாகுபடுத்தி, பகுப்பாய்வு செய்து முக்கியப் பண்புகளைப் பற்றிய செய்திகளை வெளிக் கொணர்வது மிகவும் பயனுள்ளதாகிறது. புள்ளி விவரங்களைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் பல்வேறு புள்ளியியல் முறைகள் உள்ளன. முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் கூறு வாயிலாகக் கிடைக்கப்பெறும் விவரங்களைக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளை மதிப்பீடு செய்யவும், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளைப் பற்றிய எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யவும் கையாளப்படும் உய்த்துணர்வு முறையைப் புள்ளியியலின் சிகரம் எனக் கூறுவது மிகையாகாது.

புள்ளியியல் முறைகள், பொருளியல், வணிகவியல், உயிரியல், மருத்துவவியல், இயற்பியல், வானவியல், உளவியல் போன்ற பல்வேறு துறைகளிலும் பெருவாரியாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

2. புள்ளி விவரங்களைத் திரட்டுதலும், பட்டியல் அமைத்தலும்

புள்ளி விவரங்களைத் திரட்டுதல்

ஒரு பிரச்சினை அல்லது சிக்கலைப் பற்றித் தெரிந்துகொள்ள, புள்ளியல் ஆய்வு மிக்க பயன் தரும் ஒன்ருக இருப்பது நாம் யாவரும் அறிந்ததே. கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைப் பற்றி ஆய்வு நடத்த புள்ளி விவரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. தேவையான இப் புள்ளி விவரங்களைத் திரட்டக் கையாளும் வழிமுறைகளைப் பற்றி இப்போது நாம் காண்போம்.

புள்ளி விவரங்களைத் திரட்ட முற்படும்போது, தேவையான புள்ளி விவரங்கள் எவையெவை, அவைகளை எப்படித் திரட்டுவது, இப் பணியை எத்தனை நாள்களில் அல்லது மாதங்களில் முடிப்பது, இதற்காகும் பொருட் செலவு எவ்வளவு ஆகியவைகளைப் பற்றி திட்டவட்டமாகத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இதற்கு அடிப்படையாக அமைவது ஆய்வின் குறிக்கோளாகும். ஆய்வின் குறிக்கோள் தெளிவாக அமையுமிடத்து, தேவையான புள்ளி விவரங்களைப் பற்றியும், அவைகளைத்திரட்ட மேற்கொள்ளும் வழிகளைப் பற்றியும் கால அளவு, பொருட் செலவு பற்றியும், சிந்தித்துத் தக்க முடிவெடுப்பது என்பது எளிதாகிறது.

ஆய்வுக்குத் தேவையான புள்ளி விவரங்களை நேரடியாகவோ அல்லது ஏற்கெனவே சேகரித்து வெளியிடப்பட்ட விவரங்களிலிருந்தோ திரட்டலாம். நேரிடையாகத் திரட்டப் படும் செய்திக் குறிப்புகள் முதல்நிலை விவரங்கள் (Primary data) எனவும், ஏற்கெனவே சேகரித்து வெளியிடப்பட்ட விவரங்களி

லிருந்து எடுத்துக்கொள்ளப்படும் செய்திக்குறிப்புகள் இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் (Secondary data) எனவும் வழங்கப்படுகின்றன.

மத்திய, மாநில அரசுகளின் பலதுறைகள், தொழில் நிறுவனங்கள், வணிகச்சபைகள், ஆராய்ச்சிக்கூடங்கள், வங்கிகள் இன்ன பிற நிறுவனங்கள், ஒவ்வொன்றும் அதனதனைச்சார்ந்த புள்ளி விவரங்களை வெளியிடுகின்றன. இவ்வாறு வெளியாகும் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து செய்திக்குறிப்புகளைத் திரட்டுமுன், வெளியிடப்பட்டுள்ள விவரங்கள் எவ்வாறு தொகுக்கப்பட்டன, எந்த நோக்கத்திற்காகத் திரட்டப்பட்டன, அவைகளைப் பயன் படுத்துவது ஆய்வுக்கு ஏற்றதா இல்லையா எனப் பரிசீலனை செய்யவேண்டும். மேலும் அவைகளின் தரம், துல்லியத் தன்மை ஆகியவைகளைப்பற்றி தெரிந்து கொண்டு, தக்கவாறு பயன்படுத்த வேண்டும். மேற்கூறியவற்றையெல்லாம் கருத்திற்கொள்ளாமல், இரண்டாம் நிலை விவரங்களைத்திரட்டி ஆய்வு செய்வது பாராட்டத்தக்கதல்ல.

புள்ளி விவரங்களை நேரடியாகத்திரட்டும் முறையைப் புள்ளியியல் அளவெடுப்பு (Statistical Survey) முறை என்கிறோம். புள்ளியியல் அளவெடுப்பில் முதற்கண் அளவெடுப்பின் நோக்கத்தை ஐயந்திரிபின்றிக் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். தெளிவான நோக்கமானது, அளவெடுப்பின் செய்முறைத் திட்டத்தைச் சீரிய முறையில் உருவாக்க வல்லது. அடுத்ததாக, அளவெடுப்புக்கு உட்பட்டுள்ள ஆய்வுக்களம் (Field of enquiry) நன்கு வரையறுக்கப்பட வேண்டும். பிறகு, அளவெடுப்பில் பயன் படுத்தப்பட வேண்டிய சொற்றொடர்களுக்குத் தெளிவான பொருள் விளக்கத்தையும், அலகுகளைப் (Units) பற்றிய போதுமான விளக்கத்தையும் கொடுக்கவேண்டும். அடுத்து, அளவெடுப்புக்கு உள்ளாகும் உறுப்புகள் யாவை என வரையறுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

அளவெடுப்பில், முழுமைத் தொகுதியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் இடம் பெறுமெனில், அதை முழுக் கணிப்பு அளவெடுப்பு (Census Survey) எனவும், முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்த சில உறுப்புகள் மட்டுமே இடம் பெறுமெனில், அதைக் கூறு அளவெடுப்பு (Sample Survey) எனவும் அழைக்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியில் இடம்பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருப்பின், முழுக் கணிப்பு அளவெடுப்பு நடத்த அதிகப் பொருட் செலவும், நீண்ட காலமும் அதிக

வசதிகளும் வேண்டியிருக்கும். ஆனால், குறைந்த பொருள் செலவில், குறுகிய காலத்தில் சில வசதிகளுடன், கூறு அளவெடுப்பு ஒன்றினை நாம் மேற்கொள்ள முடியும். எனவே, பொருட்செலவு, கால அளவு ஆகியவைகளைப் பொறுத்து, முழுக்கணிப்பு அளவெடுப்பையோ அல்லது கூறு அளவெடுப்பையோ நாம் மேற்கொள்ளலாம்.

கூறு அளவெடுப்பு நடத்த விழையும்போது, கூறு உறுப்புகள் முழுமைத் தொகுதியை நன்கு பிரதிபலிக்கும் வண்ணம் அமைந்திருப்பது மிக முக்கியமாகும். சமவாய்ப்புக் கூறு (Random sample), படுகைக் கூறு (Stratified sample), முறையான கூறு (Systematic sample), பன்னிலைக் கூறு (Multi stage sample) ஆகியவைகள், நடைமுறையில் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கக் கையாளப்படும் முக்கிய முறைகளாகும்.

முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் கூறில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருப்பின், அங்ஙனம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறை சமவாய்ப்புக்கூறு என அழைக்கிறோம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் 600 உறுப்புகளிலிருந்து 10 உறுப்புகள் அடங்கிய சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்கும் முறையை இப்போது விளக்குவோம். முதலில் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் சீட்டுகளில் எழுதி, அச் சீட்டுகளை ஒரு பெட்டியில் இடுவோம். பெட்டியை நன்கு குலுக்கி அதிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்து, அதில் எழுதியுள்ள எண்ணைக் குறித்துக்கொண்டு, சீட்டைப் பெட்டியில் சேர்த்துவிடுவோம். இவ்வாறு திரும்பத்திரும்ப சீட்டு எடுத்து வெவ்வேறான 10 எண்களைப் பெறுவோம். இவ்வெண்கள் குறிப்பிடும் உறுப்புகளே தேவையான கூறு உறுப்புகள் ஆகும். இங்குக் கையாளப்பட்ட முறை குலுக்கல் முறை (Lottery Method) என அழைக்கப்படுகிறது.

சமவாய்ப்புக் கூறெடுக்க ராண்டம் எண்கள் பட்டியலைப் பயன்படுத்தலாம். ராண்டம் எண்கள் பட்டியல்கள் டிப்பெட், ஃபிஷர், கெண்டால், ஸ்மித் முதலிய பல்வேறு புள்ளியியல் வல்லுநர்களால் தொகுத்து அளிக்கப்படுகின்றன.

முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகள் ஒரே படித்தானவையெனில் (Homgenoeous), அளவெடுப்பு நடத்த சமவாய்ப்புக் கூறு சிறந்ததாகும். ஆனால், பலப்படித்தான (Hetrogeneous) உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறானது முழுமைத் தொகுதியை

நன்கு பிரதிபலிக்கும்படியாக அமைவதற்கு வாய்ப்பு குறைவாத லால், அத்தகைய சமயங்களில் படுகைக் கூறு தேர்ந்தேடுத்தல் மேலானதாகும். பலப்படித்தான முழுமைத் தொகுதியை, ஒரேபடித்தான உறுப்புகள் கொண்ட படுகைகளாகப் (Strata) பிரித்து, பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும், சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் உறுப்புகள்கொண்ட கூறைப் படுகைக் கூறு என அழைக்கிறோம்.

முறையான கூறெடுக்கும் முறையானது சமவாய்ப்புக் கூறெடுக்கும் முறை, படுகைக் கூறெடுக்கும் முறை ஆகியவைகளை விட எளிதானது. 1000 உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 50 உறுப்புகளை, முறையான கூறெடுக்கும் முறையில் தேர்ந்தெடுக்க முதலில் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் 1 முதல் 1000 வரையான முழு எண்களைக் கொண்டு குறிப்பிடுவோம். பிறகு 1 முதல் 20 வரையான முழு எண்களில் ஓர் எண்ணைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுப்போம். அவ்வெண் 12 எனில் இத்துடன் தொடர்ச்சியாக 20ஐக் கூட்டும் பொழுது, 12, 32, 52, 72, 92, 112 ... 972, 992 ஆகிய 50 எண்களைப் பெறுவோம். இவ் வெண்கள் குறிப்பிடும் உறுப்புகள் அடங்கிய கூறு ‘முறையான கூறு’ எனப்படுகிறது.

இப்போது பன்னிலைக் கூறெடுக்கும் முறையை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம். ஒரு மாநிலத்தில் உறையும் குடும்பங்கள் அடங்கிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சில குடும்பங்களைத் தேர்ந்தேடுப்பதாகக் கொள்வோம். முதலில் மாநிலத்தில் உள்ள மாவட்டங்களிலிருந்து, சம வாய்ப்பு முறையில் சில மாவட்டங்களைத் தேர்ந்தெடுப்போம்; பிறகு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் சில ஊர்களைத் தேர்ந்தெடுப்போம். அதன்பிறகு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வோர் ஊரிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் சில தெருக்களைத் தெர்ந்தெடுப்போம். இறுதியாக, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு தெருவிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் சில குடும்பங்களைத் தேர்ந்தெடுப்போம். இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட குடும்பங்கள் அடங்கிய கூறைப் பன்னிலைக்கூறு என அழைக்கிறோம்.

ஆகவே, கூறு அளவெடுப்பு நடத்த முற்படும்போது ஆய்வின் நோக்கத்திற்கும் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைக்கும்

ஏற்றவாறு கூறு உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கத் தீர்மானித்துக் கொள்கிறோம்.

புள்ளியியல் அளவெடுப்பில் அடுத்தபடியாக, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உறுப்புகளைப் பற்றிய தேவையான செய்திக் குறிப்புகளைப் பெறுவதற்கு ஏதுவாக ஒரு வினாப்பட்டியல் அமைக்க வேண்டும். வினாப்பட்டியலில் இடம் பெறும் வினாக்கள் தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் இருப்பது மேலானது. எளிதில் புரிந்து கொண்டு திட்டவட்டமான விடைகளை அளிப்பதற்கு ஏற்றபடி வினாக்களை அமைப்பது சிறந்தது. 'ஆம்' 'இல்லை' என்பன போன்ற ஓரிரு வார்த்தைகளில் அல்லது எண் மதிப்புகளில் விடையளிக்கத்தக்கபடி வினாக்கள் இருப்பது விரும்பத்தக்கது. செய்தி அளிப்பவரின் உள்ளத்தைப் புண்படுத்தும் படியாகவோ, சமய நெறிகளைப் பாதிக்கும் படியாகவோ வினாக்களை அமைக்கக் கூடாது. பிரச்சினையைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளுவதற்கான அடிப்படைச் செய்திக் குறிப்புகள் யாவும் வினாப்பட்டியல் வாயிலாகப் பெற வேண்டியிருப்பதால், இப் பட்டியலைச் சீரிய முறையில் அமைப்பது முக்கியப் பணியாகும்.

அடுத்தபடியாக, செய்திகளைச் சேகரிக்கக் கையாளும் முறைபற்றி முடிவு செய்யவேண்டும். அளவெடுப்பு மிகச்சிறியதாகவும், தனி நபர் ஒருவரால் எளிதில் விவரங்களைச் சேகரிக்கக் கூடியதாகவும் இருப்பின், ஆய்வாளரே தேவையான புள்ளி விவரங்களை நேரடியாகச் சேகரிப்பது நல்லதாகும். பெரிய அளவெடுப்புகளில் விவரங்களைத் திரட்ட, பல உதவியாளர்களை நியமித்து, அவர்களைக் கொண்டு சேகரிப்பது இரண்டாவது முறையாகும். இங்கு உதவியாளர்கள், அளவெடுப்பில் அடங்கியிருக்கும் உறுப்புகளை அல்லது நபர்களைப் பற்றிய செய்திக் குறிப்புகளை வினாப்பட்டியல் வாயிலாகப் பெறவேண்டும். இப் பணியில் ஈடுபடும் உதவியாளர்கள், அளவெடுப்பின் நோக்கம், வினாப் பட்டியலில் இடம்பெறும் வினாக்கள் ஆகியவைகளைப்பற்றி நன்கு அறிந்து கொள்ளவேண்டும். அப்பொழுதுதான் செய்தி அளிப்பவர்கள் எழுப்பும் ஐயப்பாடுகளைப் போக்கி உண்மையான, நம்பகமான விவரங்களைப் பெற இயலும். நன்கு சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் அளவெடுப்பின் வெற்றிக்கு அடிகோலியாக அமைந்துள்ளபடியால், தகுதியும் திறமையும் கொண்டவர்களை உதவியாளர்களாக நியமித்து அவர்களுக்கு விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் பயிற்சி அளிப்பது மேலானது.

வினாப்பட்டியலை அஞ்சல் வாயிலாக, அளவெடுப்பில் அடங்கியுள்ள நபர்களுக்கு அனுப்பி, அவர்களிடமிருந்து செய்தி

களைச் சேகரிப்பது மற்றொரு முறையாகும். செய்தியளிப்பவர்கள் வினாக்களைப் படித்து விடையளிக்க முடியுமிடத்துதான் இம் முறையைப் பயன்படுத்த வியலும். மேலும், வினாப்பட்டியலைப் பெறும் நபர்கள் அனைவரும் விடைகளைத்திருப்பி அனுப்புவார்கள் என எதிர்பார்க்க முடியாது. எனவே, நூறு நபர்களிடமிருந்து செய்திக் குறிப்புகளைச் சேகரிக்க விரும்பும்போது நூற்றுஐம்பது அல்லது இரு நூறு நபர்களுக்கு வினாப்பட்டியலை அனுப்பி அவர்களை, விடைகளைத்திருப்பி அனுப்ப வேண்டி ஒரு முறைக்குப் பலமுறை நினைவூட்ட வேண்டியிருக்கும். ஆகவே, புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறை பற்றிய முடிவு அளவெடுப்பைச் சார்ந்து அமைகிறது.

பட்டியல் அமைத்தல்

ஒரு பிரச்சினைப்பற்றி ஆய்வு நடத்த, சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் எண் குவியலாக அமையுமாதலால், அவைகள் வெளிப்படுத்தும் செய்திகளை அந்நிலையிலேயே எளிதாக அறிய இயலாது. புள்ளி விவரங்களை வகைப்படுத்தி, பட்டியலில் அமைக்கும்போது அவைகள் வெளிப்படுத்தும் செய்திகளைத் தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் பெற ஏதுவாகிறது. எனவே, புள்ளி விவரங்களை, அவைகளின் தன்மைக்கேற்றவாறு பாகுபடுத்தி, பட்டியலில் அமைப்பது முக்கியப் பணியாகும்.

புள்ளி விவரங்கள் பண்பின் அடிப்படையிலோ அல்லது எண் அளவையின் அடிப்படையிலோ பெறப்படுகின்றன. நபரை ஆண், பெண் எனவோ, நகர்ப்புறத்தார், நாட்டுப்புறத்தார் எனவோ, வேலையில் உள்ளவர், வேலையற்றவர், போதிய வேலையில்லாதவர் எனவோ பிரித்துப் பெறப்படும் செய்திக் குறிப்புக்களைப் பண்பின் அடிப்படையில் பெறும் விவரங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாகக் கூறலாம். குடும்பத்திலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை, வருமானம், பயிர் விளைச்சல், வெப்ப அளவு, நபரின் உயரம், பண்டத்தின் விலை முதலியன எண் அளவையில் பெறப்படுகின்றன.

புள்ளி விவரங்களை, ஓரிரு பண்பினங்கள் குறித்து வகைப்படுத்தி அமைக்கப்படும் பட்டியல் எளிதானதாகவும், பல பண்பினங்களை வெளிப்படுத்தும்படியாக அமைக்கப்படும் பட்டியல் சிக்கலானதாகவும் இருக்கும். தலைப்புகளையும், துணைத் தலைப்புகளையும் பட்டியல்கள் உரிய முறையில் பெற்றிருக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாகச் சில பட்டியல்கள் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன ;

பட்டியல் 2 - 1.

தமிழ் நாட்டின் மக்கள் தொகை: 1901—1971

ஆண்டு	மக்கள் தொகை (மில்லியனில்)
1901	19.3
1911	20.9
1921	21.6
1931	23.5
1941	26.3
1951	30.3
1961	33.7
1971	41.1

பட்டியல் 2 - 2.

1970 — 71ஆம் ஆண்டிற்கான தமிழ்நாட்டின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி விவரங்கள் (கோடி ரூபாய்களில்)

நாடுகள்	ஏற்றுமதி	இறக்குமதி
அமெரிக்கா	6.65	65.07
இங்கிலாந்து	24.46	19.64
சோவியத் யூனியன்	18.73	7.61
ஜப்பான்	18.96	10.45
மேற்கு ஜெர்மனி	3.77	14.68
இதர நாடுகள்	68.12	72.74
மொத்தம்	140.69	190.19

பட்டியல் 2 - 3.

A, *B*, *C*, *D* என்னும் நான்கு நகரங்களில் ஆரம்ப, நடுத்தர, உயர் நிலைப் பள்ளிகளில் பயிலும் மாணவ, மாணவியர்களின் எண்ணிக்கை விவரங்களைக் கொண்ட பட்டியல்.

நகரங்கள்	ஆரம்பப் பள்ளி			நடுத்தரப் பள்ளி			உயர் நிலைப்பள்ளி		
	மாணவர்	மாணவியர்	மொத்தம்	மாணவர்	மாணவியர்	மொத்தம்	மாணவர்	மாணவியர்	மொத்தம்
A	26370	18740	45110	7210	3450	10660	3860	1630	5510
B	16510	9590	26100	3430	1330	4780	1590	450	2040
C	29240	22210	51450	8510	4680	13190	4730	2240	6970
D	20530	12800	33330	4810	2100	6910	2010	670	2680

இப்போது எண் அளவைகளில் கிடைக்கப்பெறும் புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபடுத்தி அலைவெண் பட்டியலில் அமைப்பதைப்பற்றி காண்போம்.

100 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு அமைகின்றது எனக்கொள்வோம்:

5	0	3	4	4	3	1	3	3	3	3
3	2	2	3	2	1	2	1	1	4	4
6	4	0	7	0	2	5	2	2	2	2
2	1	3	2	5	3	4	4	4	1	0
1	2	1	1	2	2	3	5	1	2	4
2	5	0	5	1	6	2	3	2		
0	2	2	2	2	3	1	4	0		
3	3	1	1	3	4	3	1	1		
2	1	6	0	2	2	5	5	1		
1	4	3	4	0	3	2	4	3		

பாகுபடுத்தாத இப் புள்ளி விவரங்களை நோக்கும்போது விளக்கமான செய்தியேதும் புலப்படாது. ஆனால், இவைகளைப் பாகுபடுத்தி, குழந்தையில்லாத குடும்பங்கள் ஒன்பது எனவும், ஒரு குழந்தையுடைய குடும்பங்கள் இருபது எனவும், இரு குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் இருபத்தாறு என்றும், மூன்று குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் பத்தொன்பது என்றும், நான்கு குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் பதினான்கு எனவும், ஐந்து குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் எட்டு எனவும், ஆறு குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் மூன்று என்றும், ஏழு குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்கள் ஒன்று எனவும் குறிப்பிடும்போது, பட்டியலில் அடைந்துள்ள செய்தியை ஓரளவுக்குத் தெளிவாக அறிய முடிகிறது.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள 100 குடும்பங்களில் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபடுத்தும் முறையை விளக்குவோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்கள் 0 முதல் 7 வரையுள்ள முழு எண்களாக இருக்கின்றன. எனவே, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ஆகிய முழு எண்களைக் குறிப்பிடும் எட்டு பிரிவுகளைக் கொண்ட பட்டியலை எடுத்துக்கொள்வோம். பிறகு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள 100 எண்களில் ஒவ்வொன்றும் எந்தப் பிரிவுக்கு உரியதாகிறதோ, அப் பிரிவுக்கு எதிராக ஓர் அலைவெண்குறி (Tally Mark)யைக் குறித்திடுவோம். ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள அலைவெண் குறிகளின் எண்ணிக்கையை அப் பிரிவின் அலைவெண் (Frequency) என்கிறோம்.

பட்டியல் 2-4.

பிரிவு	அலைவெண் குறி	அலைவெண்
0	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷	26
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	19
4	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14
5	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
6	𝍷𝍷𝍷	3
7	𝍷	1
	மொத்தம்	100

இப்போது 9. 20, 26, 19, 14, 8, 3, 1 ஆகிய அலைவெண்கள் முறையே 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 எண்ணிக்கையுள்ள குழந்தைகளைக் கொண்டுள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றன. குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைகொண்டு குடும்பங்களைப் பாகுபடுத்தி, பட்டியல் அமைத்து, அப் பட்டியலை அலைவுப்பட்டியல் என அழைக்கிறோம்.

பட்டியல் 2–5.

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0	9
1	20
2	26
3	19
4	14
5	8
6	3
7	1
மொத்தம்	100

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 80 நபர்களின் **உயர மதிப்புகள்** (சென்டிமீட்டர்களில்) பற்றிய புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபடுத்தி அலைவெண் பட்டியலில் அமைப்பதுபற்றி இப்போது காண்போம்.

152	155	160	164	173	166	168	163
167	161	170	171	166	151	162	150
158	172	151	163	157	162	153	167
171	156	169	178	161	170	166	161
162	160	165	164	146	153	175	169
160	157	161	173	171	174	169	176
163	159	166	152	153	164	173	166
159	148	175	167	167	172	162	158
168	162	167	156	177	165	165	163
157	169	158	162	158	156	178	172

இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளில் மிகப் பெரிய மதிப்பு 178, ஆகவும் மிகச்சிறிய மதிப்பு 146 ஆகவும் அமைகின்றன. எனவே, 80 நபர்களின் உயர மதிப்புகள் இடைவெளி (146, 178)யில் அடங்கியுள்ளன என்கிறோம். இப்போது அலைவெண் பட்டியல் அமைப்பதற்கு ஏதுவாக 145 முதல் 149 வரை, 150 முதல் 154 வரை, 155 முதல் 159 வரை, 160 முதல் 164 வரை, 165 முதல் 169 வரை, 170 முதல் 174 வரை, 175 முதல் 179 வரை ஆகிய பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்துக் கொள்வோம். இவைகளை முறையே 145-149, 150-154, 155-159, 160-164, 165-169, 170-174, 175-179 எனக்குறிப்பிட்டு ஒரு பட்டியலில் அமைக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள 80 மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் எந்தப் பிரிவு இடைவெளிக்குரியதோ அப்

பட்டியல் 2-6.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்குறி	அலைவெண்
145—149	||	2
150—154	卌 |||	8
155—159	卌 卌 |||	13
160—164	卌 卌 卌 卌	20
165—169	卌 卌 卌 ||||	19
170—174	卌 卌 ||	12
175—179	卌 |	6
	மொத்தம்	80

பிரிவுக்கு எதிராக அலைவெண்குறியை இடுகிறோம். ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள அலைவெண் குறிகளின் எண்ணிக்கை, அப் பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்ணாகும். எனவே, 80 நபர்களின்

உயரமதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட அலைவெண் பட்டியல் பின்வருமாறு அமையும்.

பட்டியல் 2-7.

உயரம் பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை
145—149	2
150—154	8
155—159	13
160—164	20
165—169	19
170—174	12
175—179	6

இங்கு அலைவுப்பட்டியல் அமைப்பதற்கு ஏதுவாகப்பிரிவு இடைவெளிகளை 146—149, 150—154, 155—159, 160—164, 165—169, 170—174 175—179 என எடுத்துக் கொண்டோம். இவைகளைத் திறந்த பிரிவு இடைவெளிகள் (Open class Intervals) என அழைக்கிறோம். 144·5—149·5, 149·5—154·5, 154·5—159·5, 159·5— 164·5, 164·5—169·5, 169·5—17·5, 174·5—179·5 முதலான மூடிய பிரிவு (Closed class intervals) இடைவெளி களைக் குறிப்பிடுகின்றன. மூடிய பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட அலைவெண் பட்டியலைத்தான் புள்ளியியல் பகுப்பாய் வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம்.

பொதுவாக, கீழ் எல்லை மதிப்பு, மேல் எல்லை மதிப்பு ஆகிய இரு மதிப்புகளைக்கொண்டு ஒரு பிரிவு இடைவெளியைக் குறிப்பிடுகிறோம். சில சமயங்களில் பிரிவு இடைவெளியைக் குறிப்பிட அதன் மைய மதிப்பைப் பயன்படுத்துகிறோம். 80 நபர் களின் உயர மதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட அலைவெண் பட்டி யலைப் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளைக் கொண்டு அடுத்தபக்கத்தில் கீண்டவாறு வெளிப்படுத்தலாம்.

பட்டியல் 2-8.

உயரம் பிரிவு மைய மதிப்பு	நபர்களின் எண்ணிக்கை
147	2
152	8
157	13
162	20
167	19
172	12
177	6

புள்ளி விவரங்களைப் பயன்படுத்தி, அலைவெண் பட்டியலில் அமைக்கும்போது, விவரங்களின் தன்மையைப் பொறுத்து பிரிவு இடைவெளிகளை எடுத்துக்கொள்கிறோம். பொதுவாகப் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையை ஐந்துக்கு மேற்பட்டும், பதினைந்துக்குக் குறைவாகவும் அமைத்துக்கொள்கிறோம்.

அலைவெண்பரவலைக்கொண்டு குவிவு அலைவெண்பட்டியல் (Cumulative frequency table) அமைப்பதைப் பற்றி இப்போது காண்போம். 80 நபர்களின் உயர மதிப்புகளுக்கான அலைவெண் பரவலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

பட்டியல் 2-9.

உயரம் பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை
144·5—149·5	2
149·5—154·5	8
154·5—159·5	13
159·5—164·5	20
164·5—169·5	19
169·5—174·5	12
174·5—179·5	6

இப்பரவலிலிருந்து

பட்டியல் 2-10.

உயரம் 144.5-க்கு குறைவாக உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை	0	=0
உயரம் 149·5 ,, ,,	2	=2
உயரம் 154·5 ,, ,,	2+8	=10
உயரம் 159·5 ,, ,,	2+8+13=10+13	=23
உயரம் 164·5 ,, ,,	2+8+13+20=23+20	=43
உயரம் 169·5 ,, ,,	2+8+13+20+19=43+19	=62
உயரம் 174·5 ,, ,,	2+8+13+20+19+12=62+12	=74
உயரம் 179·5 ,, ,,	2+8+13+20+19+12+6=74+6	=80

எனக் கணக்கிடுகிறோம். இவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டலாம்.

பட்டியல் 2-11.

உயரம்	குவிவு அலைவெண்
144 5-க்குக் குறைவான	0
149·5 ,,	2
154·5 ,,	10
159·5 ,,	23
164·5 ,,	43
169·5 ,,	62
174·5 ,,	74
179·5 ,,	80

இதனைக் கீழினக் குவிவு அலைவெண் பரவல் (Less than Cumulative distribution) என அழைக்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பட்டியலிலிருந்து,

பட்டியல் 2-12.

உயரம் 144·5 க்கு மேலாக உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை	2+8+13+20+19+12+6=80
உயரம் 149·5 ,, ,,	8+13+20+19+12+6=80−2=78
உயரம் 154·5 ,, ,,	13+20+19+12+6=78−8=70
உயரம் 159·5 ,, ,,	20+19+12+6=70−13=57
உயரம் 164·5 ,, ,,	19+12+6=57−20=37
உயரம் 169·5 ,, ,,	12+6=37−19=18
உயரம் 174·5 ,, ,,	6=18−12= 6
உயரம் 179·5 ,, ,,	6−6= 0

எனக் கணக்கிடுகிறோம். இவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைக்கலாம்.

பட்டியல் 2-13.

உயரம்	குவிவு அலைவெண்
144·5-க்குமேலான	80
149·5 ,,	78
154·5 ,,	70
159·5 ,,	57
164·5 ,,	37
169·5 ,,	18
174·5 ,,	6
179·5 ,,	0

இதனை மேலினக் குவிவு அலைவெண் பரவல் (Greater than Cumulative frequency distribution) என அழைக்கிறோம்.

பயிற்சி

(1) ஒரு புத்தகத்தில் 40 பக்கங்களிலுள்ள அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

4	2	2	1	0	3	1	1
1	3	4	0	1	1	2	3
2	5	0	3	3	4	0	0
0	1	1	2	2	2	4	2
1	0	3	1	5	0	2	1

இவைகளுக்கேற்றதான அலைவெண் பரவலை அமைக்க.

(2) 30 குடும்பங்கள் ஒரு மாதம் துய்க்கும் அரிசியின் அளவு (கிலோகிராம்களில்) பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பிரிவு இடைவெளிகளை 10—19, 20—29...என எடுத்துக்கொண்டு இவைகளை ஓர் அலைவெண் பட்டியலில் அமைக்க.

30	20	14	52	24	33	56
45	24	37	21	43	25	11
33	19	26	31	42	34	37
41	15	47	21	38	26	44
28	12					

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 106 மாணவர்களின் எடை (கிலோகிராம்களில்) விவரங்களுக்கு, 35—39, 40—44, 45—49..... ஆகியவைகளைப் பிரிவு இடைவெளிகளாகக் கொண்டு அலைவெண் பரவல் ஒன்றை அமைக்க:

65	63	61	67	6[illegible]	61	63	66	39	61	69
66	36	58	61	67	60	71	65	52	71	62
62	69	63	60	69	76	50	40	45	57	58
57	61	66	65	54	62	47	50	64	59	67
53	65	55	62	53	64	60	61	59	64	54
62	57	69	58	62	62	63	60	55	66	56
71	46	64	59	6[illegible]	55	62	57	63	50	57
57	63	71	66	63	62	67	50	62	63	58
55	35	61	69	54	68	57	61	58	56	39
60	58	55	50	53	55	57				

(4) 100 செடிகளின் உயர மதிப்புகள் (அங்குலங்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

7·8	9·6	9·4	7·6	9·5	9·2	7·7	9·6	9·2	7·4
9·8	8·2	9·0	8·9	7·8	10·1	8·2	9·1	10·6	9·6
8·9	11·1	9·1	9·2	8·7	10·8	9·6	4·6	7·7	9·3
7·1	9·5	11·0	8·7	8·0	8·3	9·7	8·9	10·0	7·4
7·9	8·7	9·4	9·8	6·5	9·3	10·7	11·6	7·4	13·1
7·4	8·7	8·3	9·1	10·9	9·6	8·9	9·1	7·2	8·3
7·2	8·9	8·7	10·0	12·2	10·1	8·0	9·8	5·6	8·2
6·6	9·1	8·9	8·6	9·5	8·9	10·6	9·8	6·8	8·5
8·7	6·1	9·9	8·8	9·1	6·4	8·3	10·4	9·3	7·9
8·2	8·7	9·7	7·6	6·0	9·8	8·4	6·8	9·3	9·5

இவ்விவரங்களுக்கான அலைவெண் பரவல் ஒன்றை அமைக்க.

(5) கீழே இடம் பெறும் 40 இரும்புக்கம்பிகளின் சுற்றளவு மதிப்பு (அங்குலங்களில்) புள்ளிவிவரங்களை

0.585—0.589, 0.590—0.594, 0.595—0.599, ...

0.625—0.629 ஆகிய பிரிவு இடைவெளிகளையுடைய அலைவுப் பரவலில் பாகுபடுத்துக.

0·607	0·619	0·596	0·600	0·610	0·628
0·609	0·590	0·612	0·627	0·607	0·599
0·612	0·605	0·592	0·618	0·595	0·623
0.616	0·603	0·611	0·596	0·623	0·608
0·604	0·613	0·598	0·622	0·600	0·606
0·593	0·608	0·601	0·586	0·589	0·602
0·620	0·603	0·614	0·602		

(6) ஓர் உளவியல் சோதனையில் 200 நபர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

125	134	68	60	144	95	132	120	105	150
135	128	108	102	108	82	173	133	118	21
49	181	162	96	163	135	108	193	89	88
125	174	97	118	85	66	129	87	79	111
134	162	73	77	100	96	112	140	189	91
59	110	122	159	95	87	169	103	46	126
159	154	128	144	103	153	91	140	187	139
127	106	113	115	105	120	84	126	130	148
102	62	105	194	103	185	76	113	89	130
173	177	114	162	104	81	112	201	76	107

134	161	104	138	144	113	93	159	125	209
119	112	122	138	95	152	119	170	146	70
93	92	26	105	178	96	131	72	91	132
144	102	140	88	96	113	149	102	121	76
156	136	124	116	172	108	132	125	84	140
154	141	192	79	113	88	150	169	117	90
118	148	157	150	69	148	119	93	116	103
105	133	104	57	148	112	55	140	88	76
100	117	113	92	125	122	73	128	161	188
142	121	96	124	103	128	97	146	95	97

இவ் விவரங்களை 10 பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட அலைவுப் பரவலில் அமைக்கவும்.

(7) ஒரு கூட்டுறவு பண்டக சாலையில் அன்றாட விற்பனை மதிப்புகள் (ரூபாய்களில்), 120 நாட்களுக்கு கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கு ஏற்றதான அலைவெண் பரவல் ஒன்றை அமைக்கவும்.

1250	1140	1065	1340	785	1740
875	1675	1040	865	540	935
1640	1140	840	1000	1140	1085
2190	1965	1465	1650	1615	1355
1040	1015	1440	1040	1510	1470
810	1230	850	1090	1015	1375
699	1540	690	1240	1610	915
1100	2760	1145	440	840	1890
840	1760	865	5 5	1070	2100
1040	890	1305	1640	1785	780

785	1170	1355	995	1385	925
2475	1283	915	1385	1040	775
2340	1495	1865	1895	1485	865
740	545	1150	2390	640	1040
1185	565	1980	1500	1085	515
2040	985	1440	1165	465	1140
1075	1635	1210	885	885	990
1640	1510	740	1440	505	670
620	940	1355	2640	840	1665
2640	975	1440	1015	1270	1355

3. விளக்கப்படங்களும் வரைபடங்களும்

பொதுவாக நம்மில் பலருக்கு, குவியலாகத் தோன்றும் புள்ளி விவரங்களின் மேல் நாட்டம் ஏற்படுவதில்லை. ஆனால் படங்கள் எல்லோருடைய பார்வையையும் ஈர்க்குமாதலால், புள்ளி விவரங்களை ''விளக்கப் படங்கள்'' வாயிலாக எடுத்தளிக்கும்போது, யாவரும் விரும்பிச் செய்திகளை அறிந்து கொள்ள ஏதுவாகிறது. புள்ளியியல் விளக்கப்படங்களில் முக்கியமானவை பட்டை விளக்கப்படம் (Bar diagram), வட்ட விளக்கப்படம் (Pie diagram), உருவ விளக்கப்படம் (Pictogram), புள்ளி விவர நிலப்படம் (Statistiical map) ஆகியனவாம். அலைவெண் செவ்வகம் (Histogram) அலைவெண் பலகோணம் (Frequency Polygon), அலைவெண் வளைகோடு, ஓகைவ் (Ogive) முதலியவை புள்ளியியல் வரைபடங்களில் முக்கியமானவைகளாகும்.

பட்டை விளக்கப்படம் (Bar diagram):

இப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட எண் மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் உருப்படுத்தும்படி, சம அகலமுள்ள செவ்வகப் பட்டைகள் நிலைக்குத்தாகவோ அல்லது கிடையாகவோ சமமான இடைவெளியில் வரையப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பட்டையின் நீளமும் அது உருப்படுத்தும் எண் மதிப்பின் விகித சமனாக அமைக்கப்படுகிறது.

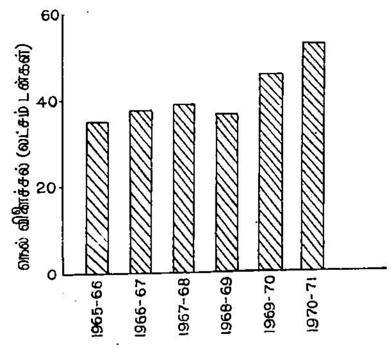
படம் 3–1-ல் வரையப்பட்டுள்ள பட்டை விளக்கப்படம் பட்டியல் 3–1-ல் இடம்பெறும் தமிழ்நாட்டின் நெல் விளைச்சல் புள்ளி விவரங்களைக் காட்டுகிறது.

பட்டியல் 3-1.

தமிழ் நாட்டின் நெல் விளைச்சல்

ஆண்டு	நெல் விளைச்சல் (இலட்சம் டன்கள்)
1965-66	35·2
1966-67	37·9
1967-68	38·5
1968-69	36·6
1969-70	45 5
1970-71	53·0

பட்டை விளக்கப் படம்

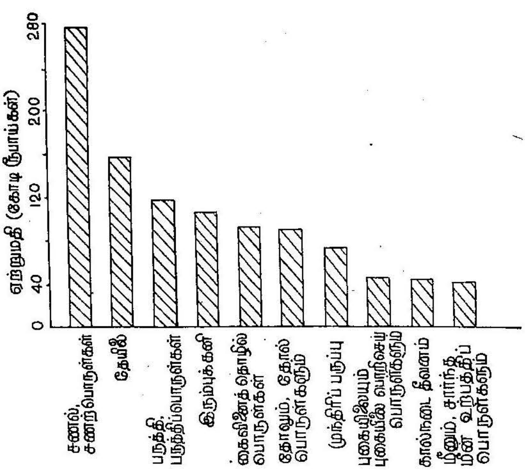


படம் 3-1.

1971 - 72-ம் ஆண்டு இந்தியாவின் முக்கிய ஏற்றுமதி பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் 3-2-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 3–2.

ஏற்றுமதி மதிப்புகள்	(கோடி ரூபாய்கள்)
சணல், சணல் பொருள்கள்	276·33
தேயிலை	156·31
பருத்தி, பருத்திப் பொருள்கள்	118·67
இரும்புக்கனி	104·70
கைவினைத் தொழிற்பொருள்கள்	91·00
தோல், தோல் பொருள்கள்	90·77
முந்திரிப் பருப்பு	61·34
புகையிலை, புகையிலை ஆக்கப் பொருள்கள்	45·08
கால் நடைத்தீவனம்	43·97
மீன், மீன்சார்ந்த உற்பத்திப் பொருள்கன்	41·39.



படம் 3-2.

இதற்கான **பட்டை விளக்கப்படம்** மேலே படம். 3-2–ல் தரப்பட்டுள்ளது.

தமிழ் நாட்டில் 1963 — 64 ஆண்டு முதல் 1969 — 70 வரை ஆயுள் பாதுகாப்பு நிறுவனத்தின் முதலீடுகளைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் 3-3—ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 3 - 3

ஆயுள் பாதுகாப்பு நிறுவனத்தின் முதலீடுகள் (இலட்சம் ரூபாய்கள்)

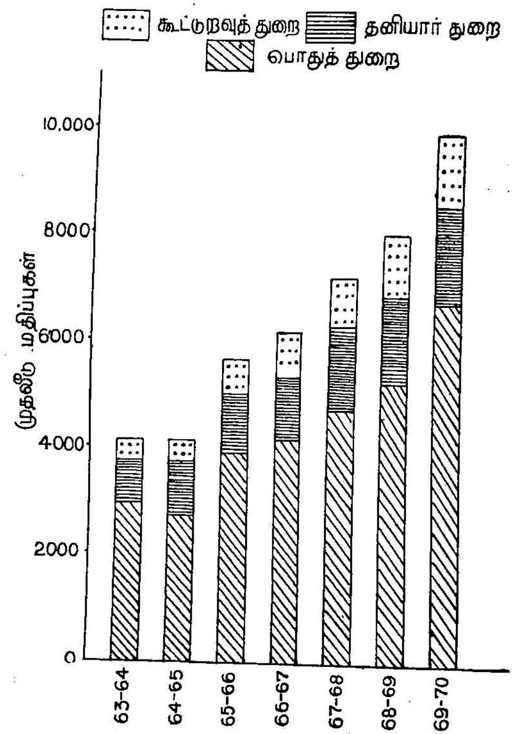
[அடைப்புக் குறிகளுள் சதவீதங்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன]

ஆண்டு	பொதுத் துறை	தனியார் துறை	கூட்டுறவுத் துறை	(மொத்தம்)
1963 — 64	2858 (70.8)	788 (19.5)	389 (9.7)	4035 (100.0)
1964 — 65	2780 (66.5)	888 (21.3)	510 (12.2)	4178 (100.0)
1965 — 66	3970 (69.5)	1077 (18.8)	667 (11.7)	5714 (100.0)
1966 — 67	4182 (67.8)	1183 (19.2)	804 (13.0)	6169 (100.0)
1967 — 68	4726 (65.7)	1533 (21.3)	938 (13.0)	7197 (100.0)
1968 — 69	5276 (65.8)	1621 (20.2)	1121 (14.0)	8018 (100.0)
1969 — 70	6767 (68.[illegible])	1752 (17.7)	1358 (13.8)	9877 (100.0)

இதில் ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் பொதுத்துறை, தனியார்த் துறை, கூட்டுறவுத்துறை ஆகிய மூன்று துறைகளிலும் செய்யப் பட்டுள்ள முதலீடு விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, பட்டை விளக்கப் படத்தில் ஆண்டின் மொத்த முதலீடு மதிப்பை உருப்படுத்தும் செவ்வகப் பட்டையை மூன்று பகுதி களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு துறையிலும் செய்யப்பட்ட முதலீட்டு விவரத்தையும் உருப்படுத்துகிறோம். இவ்வாறு

அமைக்கப்பட்டப் படத்தைப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம் (Composite Bar diagram) என அழைக்கிறோம்.)

பல் அங்க பட்டை விளக்கப்படம்



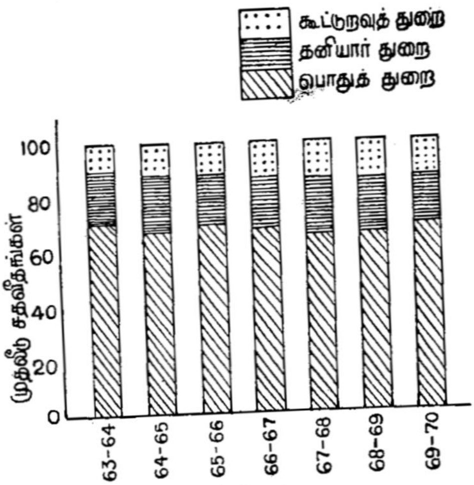
படம் 3—3.

படம் 3 – 3-ல் வரையப்பட்டுள்ள பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படம் பட்டியல் 3 - 3-ல் இடம் பெறும் ஆயுள் பாது காப்பு நிறுவனத்தின் முதலீடு புள்ளி விவரங்களை உருப்படுத்து கிறது.

இப்போது ஒவ்வோர் ஆண்டிலும், பொதுத்துறை, தனியார் துறை, கூட்டுறவுத் துறை ஆகியவைகளில் செய்யப் பட்டுள்ள முதலீட்டு மதிப்புகளை ஆண்டு மொத்த மதிப்பின் சதவீதமாகக் கணக்கிடப்பட்டு பட்டியல் 3 - 3-ல் அடைப்பு

களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன படம் 3 - 4-ல் இடம் பெறும் சதவீதப் பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம் (Percentage Composite Bar diagram) பட்டியல் 3 - 3இல் இடம் பெறும் சதவீத மதிப்புகளை உருப்படுத்தும்படி அமைகிறது.

சதவீத பல் அங்க பட்டை விளக்கப்படம்



படம் 3 - 4.

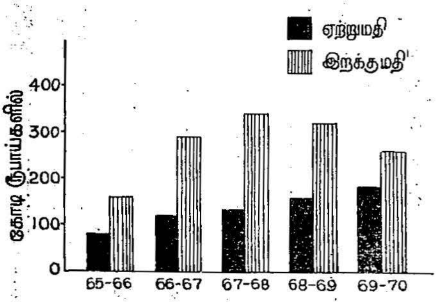
பட்டியல் 3— 4.

தமிழ் நாட்டின் ஏற்றுமதி இறக்குமதி பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் (கோடி ரூபாய்கள்)

ஆண்டு	ஏற்றுமதி	இறக்குமதி
1965 — 66	79	166
1966 — 67	120	290
1967 — 68	130	340
1968 — 69	156	320
1969 — 70	193	259

1965 - 66ஆம் ஆண்டு முதல் 1969 – 70ஆம் ஆண்டு வரை தமிழ் நாட்டின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் 3 - 4-ல் இடம் பெறுகின்றன. ஒவ்வோர் ஆண்டுக்கான ஏற்றுமதி, இறக்குமதி மதிப்புகளை உருப்படுத்தும்படி செவ்வகப் பட்டைகளை இணைத்து வரைகிறோம். இவ்வாறான படத்தை இணைப்பட்டை விளக்கப்படம் என அழைக்கிறோம். படம் 3 - 5-ல் இடம் பெறும் இணைப்பட்டை விளக்கப்படம் பட்டியல் 3 - 4-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் காட்டுகிறது.

இணைப் பட்டை விளக்கப் படம்



படம் 3 - 5.

வட்ட விளக்கப் படம் (Pie diagram)

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் எண் மதிப்பு பல பகுதிகளைக் குறிப்பிடும் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாக அமைகிறது எனக் கொள்வோம். இப்போது மொத்த மதிப்பை ஒரு வட்டத்தாலும், பகுதி மதிப்புகளை அந்த வட்டத்தைக் கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்தும் உருப்படுத்தலாம். இங்கு ஒவ்வொரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோணமும் அது வகுப்படுத்தும் மதிப்பின் விகிதச் சமனாக அமைக்கப்படுகிறது. மொத்த மதிப்பு 360° என்னும் அடிப்படையில் ஒவ்வொரு பகுதியின் மதிப்பையும் அதற்கேற்ற டிகிரிகளாக மாற்றி அமைக்க வேண்டும். இவ்வாறான படத்தை வட்ட விளக்கப்படம் என அழைக்கிறோம்.

படம் 3 - 6-ல் வரையப்பட்டுள்ள வட்ட விளக்கப் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல் (3 – 5-ல்) 1972 – 73ஆம்

ஆண்டு தமிழ் நாட்டின் வரவு — செலவுத் திட்டச் செலவின் மதிப்பீடுகளுக்கான புள்ளி விவரங்களைக் காட்டுகிறது.

பட்டியல 3–5.

வரவு - செலவுத் திட்டச் செலவின் மதிப்பீடுகள் (லட்சம் ரூபாய்கள்)

செலவினம்		மதிப்பீடு
வேளாண்மையும் அதைச்சார்ந்த செயல் திட்டமும்:		2122
கூட்டுறவு, சமுதாய வளர்ச்சி	:	330
நீர்ப்பாசனம், மின் சக்தி	:	4083
தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	:	880
போக்கு வரத்து, செய்தித் தொடர்பு	:	618
சமூக சேவை	:	3575
பிற இனங்கள்	:	55
மொத்தம்	:	11663

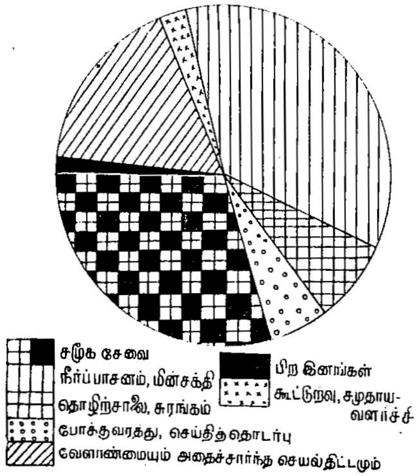
மேலே குறிக்கப்பட்டுள்ள பகுதி மதிப்புகளை உருப்படுத்தும் வட்டப்பகுதியின் கோண அளவுகள் கீழ்க்கண்டனவாகும்.

பட்டியல் 3-6

பகுதி	கோணப்பகுதி டிகிரிகள்	
வேளாண்மையும் அதைச்சார்ந்த செயல் திட்டமும்	$= \frac{212}{11663} \times 360 =$	66
கூட்டுறவு சமுதாய வளர்ச்சி	$= \frac{330}{11663} \times 360 =$	10
நீர்ப்பாசனம், மின்சக்தி	$\frac{4083}{11663} \times 360 =$	126
தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	$\frac{880}{11663} \times 360 =$	27
போக்கு வரத்து, செய்தித் தொடர்பு	$\frac{618}{11663} \times 360 =$	19
சமூகச்சேவை	$\frac{3565}{11663} \times 360 =$	110
பிற இனங்கள்	$\frac{55}{11663} \times 360 =$	2
மொத்தம்		360

பல்வேறு வரிகள் வாயிலாக மத்திய அரசுக்கு கிடைத்த வருவாய்ப்பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் 3-7–ல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

வட்ட விளக்கப்படம்



படம் 3-6.

பட்டியல் 3–7.

வரிவருவாய் மதிப்புகள் (கோடி ரூபாய்கள்)

இனம்	ஆண்டுகள் 1950-51	1955-56	1960-61	1965-66	1970-71
வருமானவரி	132·73	131·35	167·38	271·80	438·01
நிருவனவரி	40·49	37·04	111·05	304·84	342·00
சுங்கவரி	157·15	166·70	170·03	538·97	465·00
மத்திய ஆயத்தீர்வை	67·54	145·25	416·35	789·92	1814·40
பிற வரிகள்	6·61	4·72	44·40	47·14	67·63
மொத்தம்	404 52	2440·62	3269·82	3918·33	5097·75

இம் மதிப்புகளை வட்ட விளக்கப் படமாக அமைக்க, முதலில் ஒவ்வோர் ஆண்டின் மொத்த வருவாய் மதிப்பை உருப்படுத்த ஒரு வட்டம் வரைகிறோம். வட்டத்தின் ஆரத்தை மொத்த வருவாய் மதிப்பின் வர்க்கமூலத்தின் விகிதச் சமனுக எடுத்துக் கொள்கிறோம். பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டின் பலவேறு இனங்களின் மதிப்புகளை உருப்படுத்த ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் ஏற்றவாறு வட்டக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறோம். வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் டிகிரிகள் பட்டியல் 3-8-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 3-8.

வட்டக்கோணப்பகுதிகளின் டிகிரிகள்

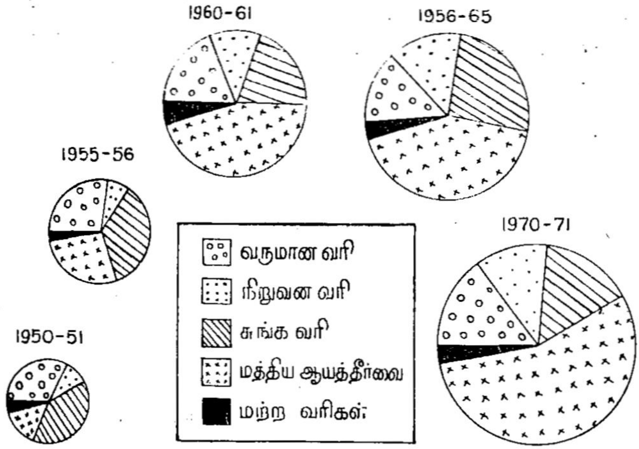
இனம்	1950-51	1955-56	1960-61	1965-66	1970-71
வருமானவரி	10	15	15	8	10
நிறுவனவரி	52	47	65	95	120
சுங்கவரி	40	52	45	25	32
மத்திய ஆயத் தீர்வை	53	92	70	126	140
பிற வரிகள்	205	154	165	106	58
மொத்தம்	360	360	360	360	360

படம் 3-7-ல் வரையப்பட்டுள்ள வட்டவிளக்கப்படம், பட்டியல் 3-7-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரி வருவாய் புள்ளி விவரங்களைக் காட்டுகிறது.

உருவ விளக்கப்படம் (Pictogram)

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை உருப்படுத்த அம் மதிப்புகள் குறிப்பிடும் பொருள்கள் அல்லது செய்திகளுக்கேற்ற உருவப் படங்கள் வரைகிறோம்

வட்ட விளக்கப் படம்



படம் 3-7.

1971ஆம் ஆண்டில் உத்தரப்பிரதேசம், பீஹார், தமிழ்நாடு, மைசூர், கேரளம் ஆகிய மாநிலங்களின் மக்கள்தொகைப் பற்றி புள்ளி விவரங்கள், பட்டியல் 3-9-ல் இடம் பெறுகின்றன. இதற்கான உருவ விளக்கப்படம் படம் (3-8)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

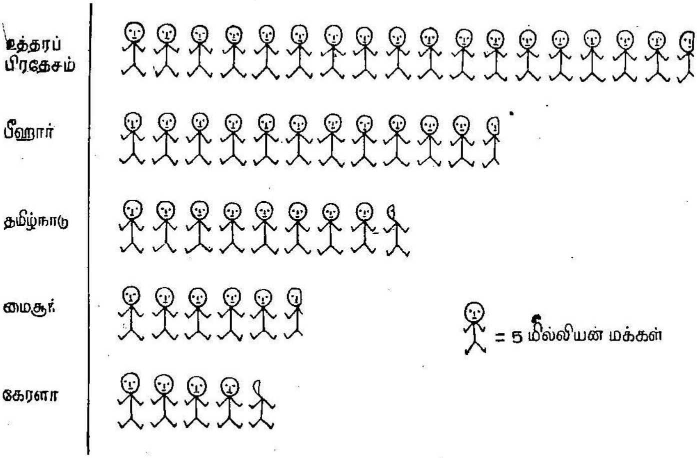
பட்டியல் 3-9.

மக்கள் தொகை புள்ளிவிவரங்கள் —1971

மாநிலம்	மக்கள்தொகை (மில்லியன்கள்)
உத்திரப் பிரதேசம்	88·30
பீஹார்	56.39
தமிழ்நாடு	41·10
மைசூர்	29·22
கேரளம்	21·28

1960-61-ம் ஆண்டின் விலை மதிப்புகளின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்பட்ட தமிழ் நாட்டின் வருமானப்புள்ளி விவரங்கள் கீழ்க்கண்டவைகளாகின்றன.

உருவ விளக்கப் படம்



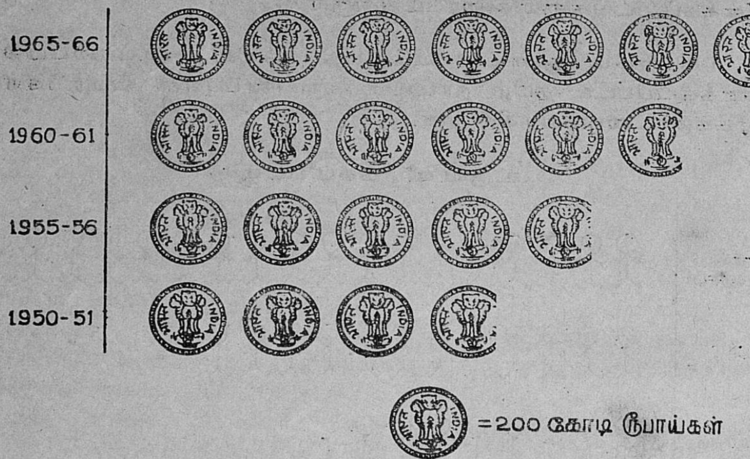
படம் 3-8.

பட்டியல் 3.10

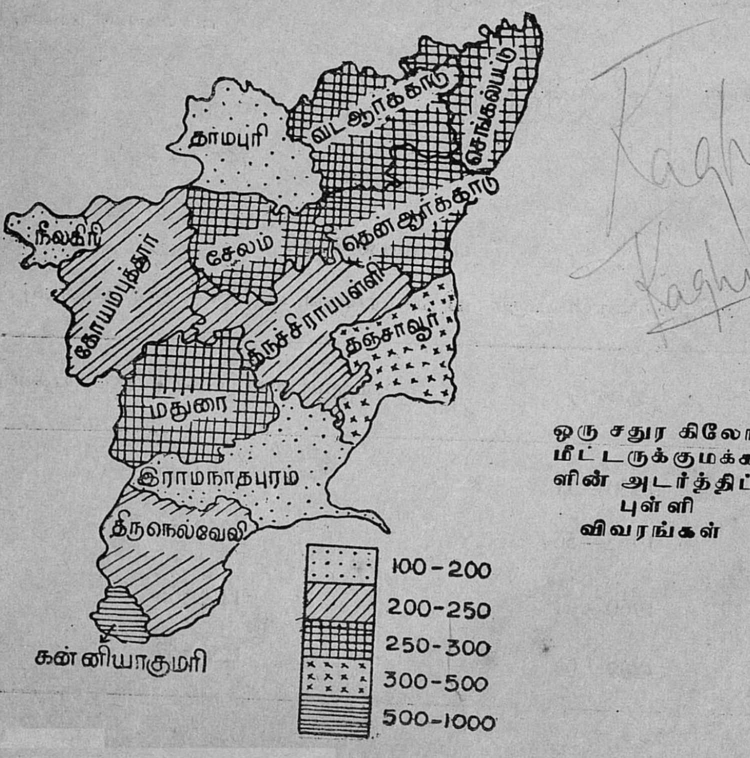
தமிழ்நாட்டின் வருமான விவரங்கள் : [1960–61 விலைகளில்]

ஆண்டு	வருமானம் (கோடி ரூபாய்கள்)
1950—51	774·92
1955—56	963·54
1960—61	1129·56
1965—66	1291·57

உருவ விளக்கப்படம் (படம் 3-9.)



புள்ளி விவர நிலப்படம் (படம் 3-10.)



படம் 3 9–ல் வரையப்பட்டுள்ள உருவ விளக்கப்படம் பட்டியல் 3 10–ல் இடம் பெறும் புள்ளி விவரங்களைக்காட்டுகிறது.

புள்ளி விவர நிலப்படம் (Statistical Map)

நில இயலைச் சார்ந்து அமையும் புள்ளி விவரங்களை அவைகளுக்கு ஏற்றவாறு ஒரு நிலப்படத்தில் குறிப்பிட்டு அமைப்பதைப் புள்ளி விவர நிலப்படம் என அழைக்கிறோம்.

பட்டியல் 3-11-ல் 1961–ம் ஆண்டு மக்கள் தொகைக் கணிப்புப்படி தமிழ் நாட்டின் மாவட்டங்கள் (சென்னை நீங்கலாக) ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு சதுர கிலோ மீட்டருக்கான மக்கள் செறிவு (Population Density) பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளுக்கு ஏற்றதான புள்ளிவிவர நிலப்படம் படம் 3–10-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது (பக்கம் 36).

பட்டியல் 3–11.

மக்கள் செறிவு பற்றிய புள்ளி விவரங்கள்

மாவட்டம்	ஒரு சதுர கிலோமீட்டரில் மக்கள் செறிவு
	நபர்கள்
செங்கல்பட்டு	269
வட ஆற்காடு	259
தென் ஆற்காடு	280
சேலம்	286
தர்மபுரி	138
கோயம்பத்தூர்	228
நீலகிரி	161
மதுரை	255
திருச்சிராப்பள்ளி	224
தஞ்சாவூர்	335
இராமநாதபுரம்	194
திருநெல்வேலி	239
கன்னியாகுமரி	596

1969-70-ம் ஆண்டில் மதிய உணவு திட்டத்தில் பயனுற்ற பள்ளிக் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைப் புள்ளி விவரங்கள் மாநில வாரியாகக் கீழே (பட்டியல் 3-'2-ல்) கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 3-12.

மதிய உணவுத்திட்டத்தில் பயனுற்ற பள்ளிக் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை விவரங்கள் : 1969-70

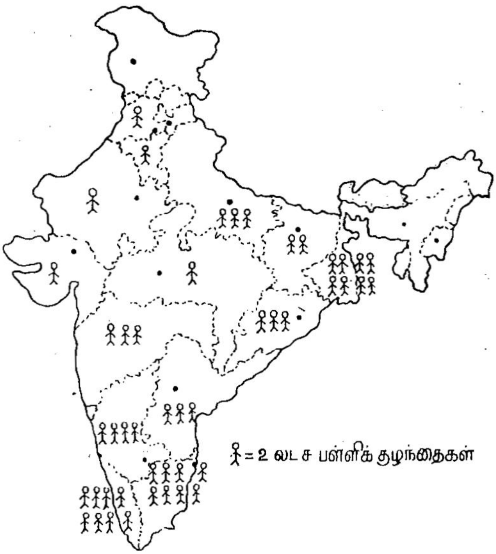
மாநிலம்	பள்ளிக்குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை (லட்சம்)
1. தமிழ்நாடு	16·00
2. கேரளம்	16·00
3. ஆந்திரப் பிரதேசம்	6·00
4. மைசூர்	8·00
5. ஒரிசா	5·95
6. மத்தியப் பிரதேசம்	2·25
7. உத்திரப் பிரதேசம்	6·50
8. ராஜஸ்தான்	3·50
9. பஞ்சாப்	3·00
10. குஜராத்	2·40
11. பீஹார்	5·00
12. மகாராஷ்டிரம்	6·00
13. மேற்கு வங்காளம்	15·60
14. அரியானா	2·50

இதற்கான புள்ளி விவர நிலப்படம் படம் 3-11-ல் இடம் பெறுகிறது.

அலைவெண் செவ்வகப் படம் (Histogram)

அலைவெண்பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களை வரை படங்கள் வாயிலாக அமைக்கும் முறைகளில் அலைவெண்

புள்ளி விவர நிலப்படம்



படம் 3-11.

செவ்வகப் படம், அலைவெண் பலகோணம், அலைவெண் வளைகோடு, ஒகைவ் ஆகியன முக்கியமானவை. வரைபடத்தில் X-ஆயத்தில் தக்க அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு பிரிவு இடை வெளிகளைக் குறிக்கிறோம். Y-ஆயத்தில் அலை வெண்களைக் குறிப்பதற்குகந்த அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். பிறகு X-ஆயத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேல் அப்பிரிவு அலைவெண் மதிப்பை உருப்படுத்தும்படி செவ்வகத்தை வரைகிறோம். இவ்வாறு செவ்வகங்கள் வரையப்பெற்றுள்ள படத்தை அலை வெண்செவ்வகப் படம் என்கிறோம்.

அலைவுப் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் சம நீளமுள்ளவைகளாக அமையாவிடில், ஒவ்வொரு பிரிவை உருப்படுத்தும் செவ்வகத்தின் உயரத்தை, அப்பிரிவுக்குரிய மதிப்பின் விகிதச் சமனாக அமைத்து அலைவண் செவ்வகப்படம் பெறுகிறோம்.

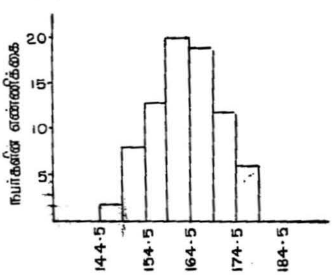
படம் (3-12)-ல் இடம்பெறும் அலைவெண் செவ்வகப்படம் பட்டியல் 3-13-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலை உருப்படுத்துகின்றது.

பட்டியல்3-13.

80 நபர்களின் உயரமதிப்புகளுக்கான அலைவுப்பரவல்

உயரம்–பிரிவு இடைவெளி (செ.மீ.)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
144·5—149·5	2
149·5—154·5	8
154·5—159·5	13
159·5—164·5	20
164·5—169·5	19
169·5—174·5	12
174·5—179·5	6

அலைவெண் செவ்வகம்



உயரம் (சென்டி மீட்டர்களில்)
படம் 3-12.

பட்டியல் 3.14-ல் இடம் பெறும் அலைவுப் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகள் சம நீள மில்லாதவையாகும். இங்கு முதலிரண்டு பிரிவு இடை வெளிகளின் நீளம் 1000 ஆகவும்,

மூன்ருவது, நான்காவது பிரிவுகளின் நீளம் 2000 ஆகவும், ஐந்தாவது பிரிவின் நீளம் 3000 ஆகவும், ஆருவது பிரிவின் நீளம் 5000 ஆகவும் உள்ளன.

பட்டியல் 3-14.

98 குடும்பங்களுக்கான ஆண்டு வருமானங்களுக்கான அலைவெண் பட்டியல்.

வருமானம் (ரூபாய்கள்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
1000 - 2000	15
2000— 3000	19
3000— 5000	24
5000— 7000	18
7000—10000	12
10000—15000	10
மொத்தம்	98

நீள மதிப்பு 1000ஐ ஓர் அலகு (unit) எனக் கொள்ளும் போது, பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் முறையே 1, 1, 2, 2, 3, 5 அலகுகள் ஆகின்றன. இப்போது பிரிவுகளுக்குரிய அலைவெண்களை முறையே 1, 1, 2, 2, 3, 5 ஆகிய மதிப்புகளால் வகுத்து, ஒவ்வொரு பிரிவிற்குமுரிய விகிதச்சமன் மதிப்பைப் பெற்று அம்மதிப்புகளைப் பட்டியல் (3-15)-ல் அமைக்கிருேம்.

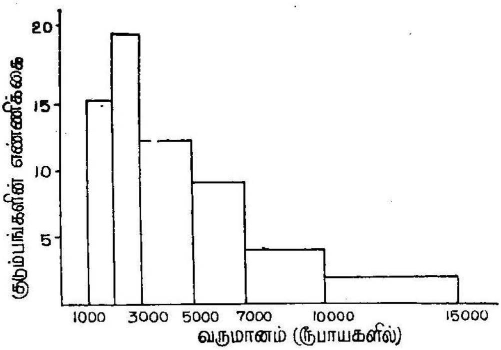
பட்டியல் 3-15.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	அலைவெண்களின் விகிதச் சமன்
1000 – 2000	15	15/1 = 15
2000—3000	19	19/1 = 19
3000—5000	24	24/2 = 12
5000—7000	18	18/2 = 9
7000—10000	12	12/3 = 4
10000—15000	10	10/5 = 2

இப்போது, ஒவ்வொரு பிரிவை உருப்படுத்தும் உயரத்தை, அப்பிரிவின் விகிதச் சமனுக அமைத்து அலைவெண் செவ்வகப் படம் பெறுகிறேம்.

பட்டியல் 3-14 ல் கொடுக்கப்பட்ட **சமமிலா பிரிவு** இடைவெளிகளைக்கொண்ட அலைவுப் பரவலுக்கான அலைவெண் செவ்வகப்படம், படம். 3-13-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அலைவெண் செவ்வகம்



படம் 3-13.

அலைவெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

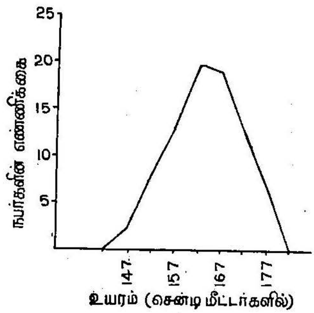
வரை படத்தில் அலைவுப் பரவலின் இடைவெளிகளைக் குறிக்க X ஆயத்தில் தக்க அளவுத் திட்டத்தையும், அலைவெண்களைக் குறிப்பதற்குகந்த அளவுத் திட்டத்தை Y ஆயத்திலும் எடுத்துக் கொள்கிறேம். பிறகு, ஒவ்வொரு பிரிவு மையப்புள்ளி, அப்பிரிவின் அலைவெண் ஆகிய இணைந்த உருப்படுத்துப் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறேம்.

அலைவெண் பட்டியலில் உள்ள முதல் பிரிவு இடைவெளிக்கு முன்னதாக ஒரு பிரிவு இடைவெளியை எடுத்துக் கொள்வோமெனில், அதன் அலைவெண் பூச்சியமாகும். வரை படத்தில், இப்பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு, பூச்சிய அலைவெண் ஆகியவைகளை உருப்படுத்தும் புள்ளியைக் குறிப்போம். இது போன்று அலைவெண் பட்டியலில் உள்ள கடைசி பிரிவு இடைவெளிக்குப் பின்னதாக ஒரு பிரிவு இடைவெளியை

எடுத்துக் கொள்வோமெனில் அதன் அலைவெண் பூச்சிய மாகும்.

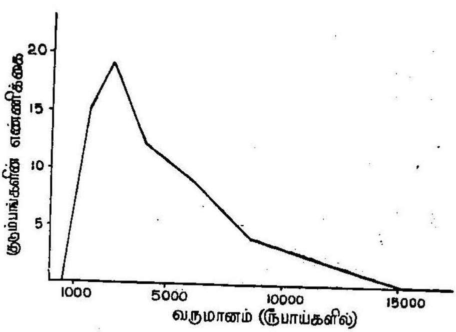
வரை படத்தில் இப்பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு, பூச்சிய அலைவெண் ஆகியவைகளை உருப்படுத்தும் புள்ளியைக் குறிப்போம். இப்போது, வரை படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள அடுத்தடுத்த புள்ளிகளை நேர்க்கோடிட்டுச் சேர்க்கிறோம். இங்ஙனம் அடைந்த படத்தை அலைவெண் பலகோணம் என்கிறோம்.

அலைவெண் பலகோணம்



படம் 3-14.

அலைவெண் பலகோணம்



படம் 3-15

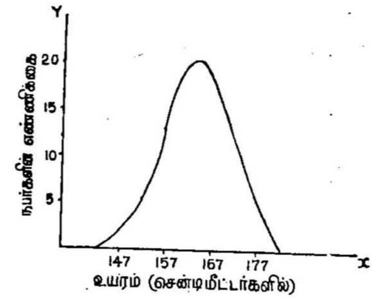
பட்டியல் 3-13, 3-14 ஆகியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவல்களுக்கான அலைவெண் பல கோணங்கள் முறையே படம் 3-14, படம் 3-15 ஆகியவைகளில் காட்டப் பட்டுள்ளன.

அலைவெண் வளைகோடு (Frequency curve)

அலைவெண் பலகோணம் வரையக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் பொருட்டு பொருத்தமாக வரையப்படும் வளைகோட்டை அலைவெண் வளைகோடு என்கிறோம்.

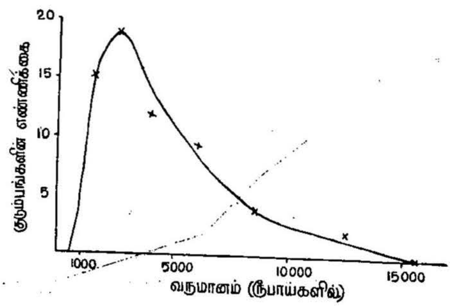
பட்டியல் 3–13, 3–14 ஆகியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலுக்கான அலைவெண் வளைகோடுகள் முறையே படம் 3–16, படம் 3–17 ஆகியவைகளில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

அலைவெண் வளைகோடு



படம் 3-16.

அலைவெண் வளைகோடு



படம் 3-17.

ஒகைவ் (Ogive)

குவிவு அலைவெண் பரவலை வரைப்படத்தில் அமைக்கும்போது ஒகைவ் பெறுகிறோம். இப்போது, ஒகைவ் வரைவது பற்றி பட்டியல் 3–16–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள குவிவு அலைவெண் பரவல் வாயிலாகக் காண்போம்.

பட்டியல் 3–16.

80 நபர்களின் உயர மதிப்புகளுக்கான கீழின குவிவு அலை வெண் பரவல்.

உயரம் (செ.மீ.)	கீழினக் குவிவு அலைவெண்
144·5-க்குக் குறைவான	0
149·5-க்குக் குறைவான	2
154·5-க்குக் குறைவான	10
159·5-க்குக் குறைவான	23
164·5-க்குக் குறைவான	43
169·5-க்குக் குறைவான	62
174·5-க்குக் குறைவான	74
179·5-க்குக் குறைவான	80

வரைப்படத்தில் X ஆயத்தில் பிரிவு இடைவெளிகளைக் குறிப்பதற்குத் தக்க அளவுத் திட்டத்தையும், Y ஆயத்தில் குவிவு அலைவெண்களைக் குறிப்பதற்குத் தக்க அளவுத் திட்டத்தையும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். பிறகு குவிவு அலைவெண் பட்டியலிலுள்ள கீழ்க்காணும்,

(144·5 , 0)
(149·5 , 2)
(154·5 , 10)
(159·5 , 23)
(164·5 , 43)
(169·5 , 62)
(174·5 , 74)
(179·5 , 80)

எட்டு இணை எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் உருப்படுத்தும்படி புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து, அடுத்தடுத்த புள்ளிகளை நேர்க் கோடிட்டுச் சேர்க்கிறோம். இதைக் கீழின ஓகைவ்

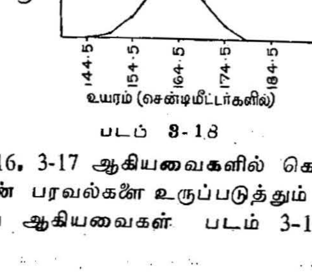
(Less than Ogive) என்கிறோம். இவ்வாறே மேலினக் குவிவு அலைவெண் பட்டியலிலுள்ள எட்டு இணை எண்களைக்கொண்டு வரையப்படும் படத்தை மேலின ஓகைவ் (Greater than Ogive) என்கிறோம்.

பட்டியல் 3–17.

80 நபர்களின் உயர மதிப்புகளுக்கான மேலின குவிவு அலைவெண் பரவல்.

உயர மதிப்பு (செ.மீ.)	மேலினக் குவிவு அலைவெண்
144·5-க்கு அதிகமான	80
149·5-க்கு அதிகமான	78
154·5-க்கு அதிகமான	70
159·5-க்கு அதிகமான	57
164·5-க்கு அதிகமான	37
169·5-க்கு அதிகமான	18
174·5-க்கு அதிகமான	6
179·5-க்கு அதிகமான	0

ஓகைவ்



படம் 3-18

பட்டியல் 3-16, 3-17 ஆகியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள குவிவு அலைவெண் பரவல்களை உருப்படுத்தும் கீழின ஓகைவ், மேலின ஓகைவ் ஆகியவைகள் படம் 3-18-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பயிற்சி

(1) 1968—69 ஆம் ஆண்டில் குஜராத், அரியானா, மத்தியப் பிரதேசம், ஒரிசா, தமிழ்நாடு ஆகிய மாநிலங்களின் கரும்பு விளைச்சல் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

கரும்பு விளைச்சல்

மாநிலம்	ஒரு ஹெக்டேருக்கான சராசரி விளைச்சல் (கிலோ கிராம்)
குஜராத்	4,773
அரியானா	4,183
மத்தியப் பிரதேசம்	2,556
ஒரிசா	5,779
தமிழ்நாடு	8,169

இவ்விவரங்களுக்கான பட்டை விளக்கப் படத்தை வரைக.

(2) தமிழ் நாட்டிலிருந்து சிங்கப்பூர், மலேசியா, கிழக்கு ஆப்பிரிக்கா ஆகிய நாடுகளுக்கு ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட கைத் தறித் துணிகள் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	கைத்தறித் துணி ஏற்றுமதி (1000 மீட்டர்களில்)
1965 - 66	19,622
1966—67	15,827
1967—68	12,369
1968 69	10,681
1969 70	14,055

இவ்விவரங்களுக்கேற்ற பட்டை விளக்கப் படம் ஒன்றை வரைக.

(3) இந்தியப் பஞ்சாலைகள் பயன்படுத்திய உள் நாட்டு, அயல்நாட்டுப் பஞ்சு அளவுகள் பற்றிய கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கேற்ற இணைப் பட்டை விளக்கப் படம் ஒன்றை வரைக.

ஆண்டு	பயன்படுத்தப்பட்ட அளவு (1000 பேல்களில்) உள்நாட்டுப் பஞ்சு	அயல் நாட்டுப் பஞ்சு.
1947–48	2864	1347
1951–52	2987	1084
1965–66	5209	612
1968–69	5604	595

(4) தமிழ் நாட்டிலிருந்து ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட தோல், புகையிலை, இரும்புக்கனி, மைகா ஆகியவை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஏற்றுமதி (லட்சரூபாய்களில்)

	1966 - 67	1967–68	1968–69	1969–70
தோல்	4722	4513	5978	6659
புகையிலை	1427	2363	2008	2167
இரும்புக்கனி	1052	1115	1402	1409
மைகா	176	205	174	184

இவ்விவரங்களுக்கான பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம், சதவீத பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படம் ஆகியவைகளை வரைக.

(5) மூன்றுதொழிற்சாலைகளில் வேலை செய்யும்தொழிலாளர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்குரிய பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படம், சதவீத பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம் ஆகியவைகளை வரைக.

தொழிற்சாலை	வேலைசெய்வோர்		
	ஆண்	பெண்	சிறுவர்கள்
I	322	119	30
II	419	105	29
III	317	115	21

(6) பல்வேறு ஆண்டுகளில் தமிழ்நாட்டில் பல துறைகளில் துய்க்கப்பட்ட மின்சக்தியின் விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன :

மின்சக்தி துய்ப்பு விவரங்கள்

(மில்லியன் யூனிட்டுகளில்)

இனம்	1950–51	1956–57	1960-61	1966–67	1970-71
இல்லங்கள்	25	77	100	153	247
வணிகத் துறை	21	38	91	190	332
தொழிற் துறை	187	343	766	1603	2475
நீர்ப் பாசனம்	44	126	366	762	1241
மற்றவைகள்	348	325	442	682	762
மொத்தம்	625	909	1765	3360	5057

இவ் விவரங்களுக்கான (1) பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படம், (2) சதவீதப் பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படம் ஆகியவைகளை வரைக.

(7) *A*, *B*, *C* என்னும் மூன்று குடும்பங்களின் ஒரு மாத செலவு பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பின் வருமாறு :

செலவினம்	குடும்பங்கள் *A*	*B*	*C*
உணவு	120	100	300
உடை	50	25	150
வீட்டு வாடகை	85	45	144
எரி பொருள்	30	20	96
பல்வகை	15	10	110
மொத்தம்	300	200	800

இவ்விவரங்களுக்கான வட்ட விளக்கப்படம் ஒன்றை வரைக.

(8) ஒரு நாட்டின் செலவினங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்குரிய வட்ட விளக்கப் படம் ஒன்றை வரைக.

இனம்	செலவுத் தொகை (ரூ. இலட்சத்தில்)
கல்வி	6539
மருத்துவம்	1554
விவசாயம்	1607
தொழில்கள்	369

(9) 1971 — 72-ல் பல்வேறு நாடுகளிலிருந்து இந்தியாவிற்கு இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் மதிப்பு விவரங்கள் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

நாடு	இறக்குமதி (கோடி ரூபாய்களில்)
அமெரிக்கா	416.82
இங்கிலாந்து	216.86
ஜப்பான்	161.57
ரஷ்யா	81.66
மேற்கு ஜெர்மனி	123.90
கனடா	112.81
ஈரான்	126.38

இவ்விவரங்களுக்கு ஏற்றதான வட்ட விளக்கப் படம் வரைக.

(10) 1966ஆம் ஆண்டு முதல் 1970ஆம் ஆண்டு வரை தமிழ்நாட்டில் பதிவு செய்யப்பட்ட மோட்டார் கார்களின் எண்ணிக்கை பின் வருமாறு :

ஆண்டு	மோட்டார் கார்களின் எண்ணிக்கை
1966	38,517
1967	42,947
1968	46,222
1969	50,074
1970	55,836

இவ்விவரங்களுக்கான உருவ விளக்கப் படம் ஒன்றை வரைக.

(11) 1971ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகைக் கணிப்பின் அடிப்படையில் பெற்ற சென்னை மாநிலத்தின் எழுத்தறிவுடையவர்கள் சதவீதம் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் மாவட்ட வாரியாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

மாவட்டங்கள்	எழுத்தறிவுடையவர்கள் சதவீதம்
செங்கற்பட்டு	39·05
வட ஆற்காடு	34·26
தென் ஆற்காடு	31·48
தருமபுரி	22·07
சேலம்	31·39
கோயம்புத்தூர்	38·81
நீலகிரி	47·27
மதுரை	41 60
திருச்சிராப்பள்ளி	37·44
தஞ்சாவூர்	39·85
இராமநாதபுரம்	39·53
திருநெல்வேலி	44 97
கன்னியாகுமரி	58 10

இவ்விவரங்களுக்கான புள்ளி விவர நிலப்படத்தை வரைக.

(12) அடுத்தப் பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலுக்குரிய செவ்வகப் படம் ஒன்றை வரைக.

பிரிவு	அலைவெண்
0 — 10	3
10 — 20	7
20 — 30	10
30 — 40	13
40 — 50	27
50 — 60	34
60 — 70	17
70 — 80	14
80 — 90	9
90 — 100	4
மொத்தம்	138

(13) 216 ஆண்களின் எடைகளுக்குரிய அலைவெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்குரிய அலைவெண் செவ்வகப் படத்தை வரைக.

எடை (பவுண்டு)	அலைவெண்
90 — 100	16
100 — 110	29
110 — 120	68
110 — 130	61
130 — 140	23
140 — 150	11
150 — 160	8
மொத்தம்	216

(14) 405 மணமான பெண்களின் வயதிற்கான அலைவெண் பரவல் கீழே இடம் பெறுகிறது. இவ்விவரங்களுக்குரிய அலைவெண் பல கோணத்தையும், வளைகோட்டையும் வரைக.

வயது	மணமான பெண்களின் எண்ணிக்கை
10 — 15	3
15 — 20	7
20 — 25	65
25 — 30	72
30 — 35	77
35 — 40	41
40 — 45	34
45 — 50	30
50 — 55	26
55 — 60	21
60 — 65	11
65 — 70	8
மொத்தம்	405

(15) 263 நபர்களின் வருமானப் பரவல் அடுத்தப் பக்கத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. இந்த பரவலுக்கான (i) செவ்வகப் படம் (ii) அலைவெண் பலகோணம் (iii) அலைவெண் வளைகோடு ஆகியவைகளை வரைக.

மாத வருமானம் (ரூபாய்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
100 — 120	16
120 — 140	24
140 — 160	29
160 — 200	33
200 — 240	61
240 — 300	43
300 — 400	40
400 — 500	17
மொத்தம்	263

(16) 200 நபர்களின் எடைகளைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்களுக்கான அலைவெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடை (பவுண்டுகளில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
85 — 90	2
90 — 95	7
95 — 100	20
100 — 105	36
105 — 110	48
110 — 115	52
115 — 120	23
120 — 125	8
125 — 130	4
மொத்தம்	200

இவ் விவரங்களுக்கான அலைவெண் செவ்வகப் படம், அலைவெண் பலகோணம், அலைவெண் வளைகோடு, கீழின ஒகைவ், மேலின ஒகைவ் ஆகியவற்றை வரைக.

4. மையப்போக்கு அளவைகள்

எண் குவியலாகத் தோன்றும் புள்ளி விவரங்களின் தன்மைகளையும், சிறப்பியல்புகளையும், எடுத்தளிக்கப் பயனுறும் புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு முறைகளில் சிலவற்றை இப்போது காண்போம். பொதுவாகப் புள்ளிவிவரக் குவியலிலுள்ள எண் மதிப்புகள் பல்வேறாக மாறுபட்டிருந்தாலும், யாதேனும் ஒரு மையமான மதிப்பைச்சுற்றி அமைவது அவைகளின் முக்கியமான தன்மையாகும். இதைக் குவியலின் மையப்போக்குத் தன்மை எனக் குறிப்பிடுகிறோம். குவியல் மதிப்புகளை எளிதாகவும், சுருக்கமாகவும் உருப்படுத்துவதற்கு மையப்போக்கு அளவை ஏதுவாகிறது கூட்டுச்சராசரி (Arithmetic Mean), இடைநிலை (Median), முகடு (Mode), பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean), ஹார்மோனிக் சராசரி (Harmonic Mean) ஆகியவை மையப்போக்கு அளவைகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவைகளைப் புள்ளியியல் சராசரிகள் (Statistical Averages) எனவும் அழைக்கிறோம்.

கூட்டுச்சராசரி

குவியலில் இடம் பெறும் எண் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறும் மதிப்பைக் குவியலின் கூட்டுச்சராசரி என்கிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு கூட்டுறவுப் பண்டக சாலையில் 7 நாள்களில் அன்றாட விற்பனையின் மதிப்புகள் (ரூபாய்களில்) 1010, 870, 830, 1120, 900, 940, 1050 எனில், இம் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

விற்பனை மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{1010+870+830+1120+900+940+1050}{7}$$

= 960 ஆகும்.

ஆதாவது கூட்டுறவுப் பண்டகசாலையின் அன்றாட சராசரி விற்பனை மதிப்பு ரூ. 960/— ஆகும்.

ஒரு குவியலில் 'N' மதிப்புகள் இடம் பெறுகின்றன எனக் கொள்வோம். அவைகளை X_1, X_2......X_N எனவும், கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது, கூட்டுச் சராசரியை

$$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+ \dots\dots\dots + X_N}{N} \qquad \dots(4\text{-}1)$$

என வரையறுக்கிறோம்.

கூட்டுத்தொகை $X_1+X_2+\dots\dots X_N$ ஐ $\sum X$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிடும்போது,

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \qquad \dots\dots(4\text{-}2)$$

என அமைகிறது. கூட்டுச் சராசரியை எளிதாகக் கணக்கிட பயனுறும் முறைகளை இப்போது காண்போம்.

முறை (1) : பண்டங்களின் அன்றாட விற்பனையின் மதிப்புகள் (ரூபாய்களில்) 1010, 870, 830, 1120 900, 940, 1050 ஆகியவைகள் ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு (Guess value) 900-லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்பை (deviation value) முதலில் கணக்கிடுகிறோம்.

1010 − 900	=	110
870 − 900	=	− 30
830 − 900	=	− 70
1120 − 900	=	220
900 − 900	=	0
940 − 900	=	40
1050 − 900	=	150

இப்போது விலகல் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{110+(-30)+(-70)+220+0+40+150}{7}$$

$$= 60$$

எனவே விற்பனை மதிப்புகளின் சராசரி } = குத்து மதிப்பு

+ விலகல் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= 900 + 60 = 960$$

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N$ ஆகிய மதிப்புகள், குத்து மதிப்பு A–லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகள் $(X_1-A), (X_2-A), (X_3-A), \ldots\ldots, (X_N-A)$ ஆகியவைகளை முறையே $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_N$ எனக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம்; X மதிப்புகளின் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும், விலகல் மதிப்புகளின் சராசரியை $\bar{Y}$ எனவும் குறிப்பிடும் போது $\bar{Y}$, A ஆகியவைகளைக் கொண்டு, $\bar{X}$-ஐ

$$X = A + \bar{Y} \quad \ldots \ldots \quad (4\text{-}3)$$

என வழங்குகிறோம்.

முறை (2) : பண்டகசாலையின் அன்றாட விற்பனை மதிப்புகள் 1010, 870, 830, 1120, 900, 940, 1050 ஆகியவைகள் ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு 900–லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகள் யாவும் 10–ன் மடங்காக உள்ளன. ஆகவே விலகல் மதிப்புகளை 10-ஆல் வகுத்து உருமாறிய மதிப்புகளைப் (Transformed values) பெறுகிறோம்.

விலகல் மதிப்பு	உருமாறிய மதிப்பு
1010 − 900 = 110	110/10 = 11
870 − 900 = − 30	−30/10 = − 3
830 − 900 = − 70	−70/10 = − 7
1120 − 900 = 220	220/10 = 22
900 − 900 = 0	0/10 = 0
940 − 900 = 40	40/10 = 4
1050 − 900 = 150	150/10 = 15

இப்போது உருமாறிய மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$=\frac{11+(-3)+(-7)+22+0+4+15}{7}$$

$$=6.$$

எனவே விற்பனை மதிப்புகளின் சராசரி

$$= \text{குத்து மதிப்பு} + \left[\left(\begin{matrix}\text{உருமாறிய மதிப்புகளின்} \\ \text{சராசரி}\end{matrix} \right) \times 10 \right]$$

$$= 900+(6\times 10)=960$$

$X_1, X_2, \ldots X_N$ ஆகிய மதிப்புகள் குத்து மதிப்பு A-லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகளை C-ஆல் வகுத்துப்பெற்ற உருமாறிய மதிப்புகளை

$$Z_1 = \frac{X_1 - A}{C}, \quad Z_2 = \frac{X_2 - A}{C}, \quad \ldots, Z_N = \frac{X_N - A}{C}$$

எனக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம். X மதிப்புகளின் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும், உருமாறிய மதிப்புகளின் சராசரியை $\bar{Z}$ எனவும் குறிப்பிடும்போது, A, C, Z ஆகியவைகளைக்கொண்டு $\bar{X}$-ஐ $\bar{X} = A + C\bar{Z}$ என வழங்குகிறோம். ... ... (4-4)

அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி : இப்போது அலைவுப் பரவலிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடும் முறைகளைப் பற்றி காண்போம்.

50 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு மாதத்துக்கும் பாலுக்காகச் செலவிட்ட தொகை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் (4–1)-ல், இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 4-1

செலவுத்தொகை (ரூபாய்கள்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
30—39	3
40—49	8
50—59	10
60—69	12
70—79	7
80—89	6
90—99	4
மொத்தம்	50

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பைப் பெற, ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு, அப்பிரிவின் அலைவெண் ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் கூட்டுத் தொகையை அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கவேண்டும்.

பட்டியல் 4-2

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவின் மைய மதிப்பு	அலைவெண்	மைய மதிப்பு × அலைவெண்
30—39	34·5	3	103·5
40—49	44·5	8	356·0
50—59	54·5	10	545·0
60—69	64·5	12	774·0
70—79	74·5	7	521·5
80—89	84·5	6	507·0
90—99	94·5	4	378·0
மொத்தம்	...	50	3185·0

$$\text{அலைவுப் பரவலின் சராசரி} = \frac{3185 \cdot 0}{50} = 63 \cdot 70$$

அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 குடும்பங்கள் பாலுக்காக ஒரு மாதம் செலவிட்ட தொகைகளின் சராசரி மதிப்பு ரூ. 63.7. ஆகும்.

இப்போது, அலைவுப் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை, X_1 , X_2 ,……………………, X_k எனவும் அவைகளின் அலைவெண்களை முறையே f_1, f_2, f_3, … …, f_k என்வும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பை

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \ldots\ldots + f_k X_k}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_k}$$

என வழங்குகிறோம். (4–5)

$f_1 X_1 + f_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + f_k X_k$ ஐ $\sum f X$ எனவும் $f_1 + f_2 \ldots \ldots f_k$ ஐ N எனவும் குறிப்பிடும்போது

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f X}{N} \qquad (4\text{–}6)$$

ஆக அமைகிறது.

பட்டியல் (4-1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை எளிய முறைகளில் கணக்கிடுவதுபற்றி இப்போது குறிப்பிடுவோம்.

முறை 1 : முதலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு 54·5–லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். பிறகு ஒவ்வொரு பிரிவுக்குரிய விலகல் மதிப்பு, அலைவெண் ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகைகளது கூட்டுத் தொகையை அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துப்பெறும் மதிப்பை, விலகல் மதிப்பு வாயிலாகப்பெறும் சராசரி எனக் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது,

அலைவுப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி = குத்து மதிப்பு + விலகல் மதிப்பு வாயிலாகப் பெறும் சராசரி.

என்கிறோம். தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட பட்டியல் 4-3 ஐ அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 4-3.

பிரிவின் மைய மதிப்பு	விலகல் மதிப்பு	அலைவெண்	விலகல் மதிப்பு X அலைவெண்
34·5	—20	3	—60
44·5	—10	8	—80
54·5	0	10	0
64·5	10	12	120
74·5	20	7	140
84·5	30	6	180
94·5	40	4	160
மொத்தம்	—	50	460

இங்கு,

விலகல் மதிப்பு வாயிலாகப் பெறும் சராசரி $\Big\} = \frac{460}{50} = 9{\cdot}20.$

எனவே அலைவுப் பரவலின் சராசரி $= 54{\cdot}50 + 9{\cdot}20 = 63{\cdot}70.$

எனவே, 50 குடும்பங்களின் ஒரு மாத பால்செலவுத் தொகைகளுக்கான சராசரி ரூ 63.70 ஆகும்.

இப்போது அலைவுப் பரவலில் பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_r$ ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு A-லிருந்து பெறும் விலக்க மதிப்புகளை அதாவது $(X_1—A)$, $(X_2 — A)$,...... $(X_k — A)$ ஆகியவைகளை முறையே Y_1, Y_2, ...Y_k எனவும், விலகல் மதிப்புகள் வாயிலாகப் பெறும் சராசரியை $\bar{Y}$ எனவும் குறிப்பிடும் போது, அலைவப் பரவலின் சராசரி $\bar{X}$ ஐ

$\bar{X} = A + \bar{Y}$ என வழங்கலாம். ... (4·7)

முறை 2 : முதலில், பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு 54·5-லிருந்து பெறும் விலகல் மதிப்புகள் 10–ன் மடங்காக உள்ளதால் அவைகளை 10-ஆல் வகுத்து உருமாறிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். பிறகு ஒவ்வொரு பிரிவுக்குரிய உருமாறிய மதிப்பு, அலைவெண் ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டு அவைகளின் கூட்டுத் தொகையை அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கும் மதிப்பை உருமாறிய மதிப்புகள் வாயிலாகப் பெறும் சராசரி எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது,

$$\left.\begin{array}{l}\text{அலைவுப் பரவலின்}\\ \text{கூட்டுச் சராசரி}\end{array}\right\} = \text{குத்து மதிப்பு} + \left[\begin{array}{c}\text{உரு மாறிய மதிப்பு வாயிலாகப்}\\ \text{பெறும் சராசரி}\end{array}\right] \times 10 \text{ ஆகும்.}$$

தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட பட்டியல் 4-4ஐ அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 4-4.

பிரிவு மைய மதிப்பு	உருமாறிய மதிப்பு	அலைவெண்	உருமாறிய மதிப்பு·X அலைவெண்
34·5	—2	3	—6
44·5	—1	8	—8
54·5	0	10	0
64·5	1	12	12
74·5	2	7	14
84·5	3	6	18
94·5	4	4	16
மொத்தம்	—	50	46

இங்கு,

$$\left.\begin{array}{l}\text{உருமாறிய மதிப்புகள்}\\ \text{வாயிலாகப் பெறும் சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{46}{50} = 0{\cdot}92$$

எனவே, அலைவுப்பரவலின் சராசரி $= 54{\cdot}50 + (0{\cdot}92 \times 10)$
$= 63.70$

இப்போது அலைவுப் பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் X_1, X_2, ..., X_k ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு A-லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகளை, C ஆல் வகுத்துப் பெறும் உருமாறிய மதிப்புகளை $Z_1 = \dfrac{X_1 - A}{C}$, $Z_2 = \dfrac{X_2 - A}{C}$, ..., $Z_k = \dfrac{X_k - A}{C}$ எனும் குறியீடுகளாலும், உருமாறிய மதிப்புகளின் வாயிலாகப் பெறும் சராசரியை $\bar{Z}$ $\left(= \dfrac{\Sigma f Z}{N}\right)$ எனவும், குறிப்பிடும் போது அலைவெண் பரவலின் சராசரி $\bar{X}$ஐ

$$\bar{X} = A + C\bar{Z} \quad \text{..................} \qquad (4\text{-}8)$$

என வழங்கலாம்.

கணக்கு :

100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய் புள்ளி விவரங்கள் பட்டியல் (4-5)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அலைவுப் பரவலின் சராசரியை வாய்ப்பாடுகள் (6), (7), (8) வாயிலாகக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 4-5.

வருவாய் (ரூபாய்கள்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
1000 — 2000	22
2000—3000	25
3000—5000	32
5000 — 7000	16
7000—10000	5
மொத்தம்	100

அலைவுப் பரவலின் சராசரியைப் பெறத் தேவையான தொகைகளைக் கணக்கிட்டு பட்டியல்(4-6)-ல் அமைத்திடுவோம்.

பட்டியல் 4–6.

(1) பிரிவின் மைய மதிப்பு X	(2) அலைவெண் f	(3) fX	(4) 2500 லிருந்து விலகல் மதிப்பு $Y = X - 2500$	(5) fY	(6) உருமாறிய மதிப்பு $z = \frac{X-2500}{500}$	(7) fz
1500	22	33000	—1000	—2200	—2	—44
2500	25	62500	0	0	0	0
4000	32	128000	1500	48000	3	96
6000	16	96000	3500	56000	7	112
8500	5	42500	6000	30000	12	60
மொத்தம்	100	362000	——	112000	——	224

இப்போது வாய்பாடு 4·6–ன் படி அலைவுப் பரவலின் சராசரி

$$\bar{X} = \frac{\sum f\,X}{N}$$

$$= \frac{362000}{100}$$

$$= \underline{3620}$$

வாய்பாடு (7)–ன் படி அலைவுப் பரவலின் சராசரி

$$\bar{X} = A + \bar{Y}$$

$$= 2500 + \left(\frac{112000}{100}\right)$$

$$= \underline{3620}$$

வாய்பாடு (8)-ன்படி அலைவுப் பரவலின் சராசரி

$$\bar{X} = A + C\bar{Z}$$

$$= 2500 + 500\left(\frac{224}{100}\right)$$

$$= \underline{3620}$$

வாய்பாடுகள் (4-6), (4-7), (4-8) வாயிலாகப்பெற்ற சராசரி மதிப்புகள் யாவும் 3620 ஆகவே அமைகின்றன. இவ்வாய்ப்பாடுகளுள் வாய்பாடு (4-8)ஐப் பயன்படுத்துவது எளிதாக அமைவதைக் கண்கூடாகக் கண்டோம்.

எனவே, பட்டியலில் (4-5)-ல் இடம்பெறும் 100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்க்கான சராசரி ரூ. 3620 ஆகும்.

கணக்கு : 200 திருகாணிகளின் விட்ட மதிப்புகளுக்கான (அங்குலங்களில்) அலைவெண் பரவல் பட்டியல் 4-7-ல் இடம் பெறுகிறது. இந்த அலைவுப்பரவலின் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 4-7.

விட்ட மதிப்பு இடைவெளி	திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை
0·200 – 0·209	18
0·210 – 0 219	49
0·220 – 0·229	60
0·230 – 0.239	52
0·240 – 0·249	21
மொத்தம்	200

முறை : அலைவுப்பரவலின் சராசரியை வாய்பாடுகள் (4–6), (4–8) வாயிலாகப் பெறத்தேவையான தொகைகளைக் கணக்கிட்டுப் பட்டியல் (4-8)–ல் அமைத்திடுவோம்.

பட்டியல் 4-8.

பிரிவின்மை மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	உருமாறிய மதிப்பு $Z=(X-0\cdot2245)\,100$	fz.
0·2045	18	3·6810	—2	—36
0·2145	49	10·5105	—1	—49
0·2245	60	13·4700	0	0
0·2345	52	12·1940	1	52
0·2445	21	5·1345	2	42
மொத்தம்	200	44·9900	—	9

இப்போது, வாய்பாடு 4-6-ன் படி அலைவுப் பரவலின்

$$\text{சராசரி}\quad \bar{X} = \frac{44\cdot9900}{200} = 0\cdot22495.$$

வாய்பாடு 4–8-ன் படி அலைவுப் பரவலின் சராசரி

$$\bar{X} = A + C\bar{Z} = 0\cdot2245 + \left(\frac{9}{200} \times \frac{1}{100}\right)$$

$$= 0\cdot22495.$$

எனவே, 200 திருகாணிகளின் விட்ட மதிப்புகளான சராசரி = 0·22495 ஆகும்.

இடைநிலை:

குவியல் எண் மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைக்கும் போது வரிசையை இரு சமப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் வண்ணம் வரிசையின் நடுவில் இடம் பெறும் மதிப்பை இடைநிலை என்கிறோம்.

ஒரு தொழிலாளி 5 வாரங்களில் பெற்ற ஊதிய மதிப்புகள் (ரூபாய்களில்) 23, 18, 21, 16, 20 என்போம்.

இம் மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில்

16, 18, 20, 21, 23 அமைக்கும் போது, வரிசையின் நடுவில் இடம் பெறும் மதிப்பு 20. எனவே, தொழிலாளியின் 5 வார ஊதிய மதிப்புகளின் இடைநிலை ரூ 20 ஆகும்.

ஓர் ஏக்கர் பரப்பளவான 6 நிலக் கூறுகளின் நெல் விளைச்சல் (பவுண்டுகளில்) புள்ளி விவரங்கள் 7350, 6970, 7540, 7120, 8090, 6850, என்போம்

மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில்

6850, 6970, 7120, 7350, 7540, 8090 என அமைக்கும் போது வரிசையின் நடுவில் 7120, 7350 ஆகிய இரு மதிப்புகள் இடம் பெறுகின்றன. இவ்விரு மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பு

$$\frac{7120 + 7350}{2} = 7235.$$

எனவே, நெல் விளைச்சல் மதிப்புகளின் இடைநிலை = 7235 பவுண்டுகள் ஆகும்.

குவியல் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை N ஒற்றைப்படை எனில், $K = \frac{N+1}{2}$ எனக் கொள்வோம். மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைக்கும் போது வரிசையின் K–வது இடத்தில் அமையும் மதிப்பை இடைநிலை என வரையறுக்கிறோம்.

குவியல் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை N இரட்டைப்படை எனில் $K = N/2$ எனக் கொள்வோம். மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்கும் போது, வரிசையின் K, $(K+1)$ ஆகிய இடங்களில் இடம் பெறும் மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பை இடைநிலை என வரையறுக்கிறோம்.

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை:

குவியல் மதிப்புகளைத் தொகுத்து அலைவெண் பரவலாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது, இடைநிலையைக் கணக்கிடும் முறையை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.

பட்டியல் (4–1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 குடும்பங்களின் ஒரு மாத பால் செலவுத் தொகை விவரங்களுக்கான அலைவெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்வோம். முதலில் இப்பரவலுக்கான கீழின குவிவு அலைவெண் பரவலை அமைத்துக் கொள்வோம்.

பட்டியல் 4-9.

பிரிவு இடைவெளி	அலை வெண்	பால் செலவுத் தொகை			குவிவு அலை வெண்
29·5—39·5	3	39·5 க்குக் குறைவாக			3
39·5—49·5	8	49·5	,,	,,	11
49·5—59·5	10	59·5	,,	,,	21
59·5—69·5	12	69·5	,,	,,	33
69·5—79·5	7	79·5	,,	,,	40
79·5—89·5	6	89·5	,,	,,	46
89·5—99·5	4	99·5	,,	,,	50

அலைவுப் பரவலில் இடம் பெறும் 50 மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைக்கும்போது 59.5-க்குக் குறைவாக 21 மதிப்புகளும், 69·5-க்குக் குறைவாக 33 மதிப்புகளும் இருப்பதால், வரிசையின் நடுவில் இடம்பெறும், (50/2 = 25) ஆவது மதிப்பானது 59.5-க்கு அதிகமாகவும் 69·5-க்குக் குறைவாகவும் அதாவது இடைவெளி (59·5—69 5) – ல் அமைகிறது. இவ்விடைவெளியை, இடை நிலைப் பிரிவு (Median class) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இடைநிலை மதிப்பைப் பெறுவதற்கான வாய்பாடு

$$\text{இடைநிலை} = L + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - m \right)}{f} \times I \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4\text{-}9)$$

ஆகும்.

இங்கு

N = அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.

L = இடை நிலைப்பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m = கீழ் எல்லை 'L' க்குக் குறைவான குவிவு அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை.

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்.

I = இடைநிலைப் பிரிவின் நீளம் ஆகியவைகளைக் குறிக்கின்றன.

இப்போது, நாம் எடுத்துக்கொண்ட அலைவுப் பரவலில்

$N = 50, \quad L = 59 \cdot 5, \quad m = 21, \quad f = 12, \quad I = 10.$

இம் மதிப்புகளை வாய்பாடு (4·9)-ல் இடும்போது

$$\text{இடைநிலை} = 59 \cdot 50 + \left(\frac{25 - 21}{12} \times 10\right)$$

$$= 59 \cdot 50 + 3 \cdot 33$$

$$= 62 \cdot 83$$

எனவே, 50 குடும்பங்களின் ஒரு மாத பால் செலவுத் தொகைகளின் இடைநிலை மதிப்பு ரூ. 62·83 ஆகும்.

கணக்கு :

பட்டியல் (4–5)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

முறை :

முதலில் பட்டியல் (4–5)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலுக்கான கீழின குவிவு அலைவுப் பரவலை அமைத்துக் கொள்வோம்.

பட்டியல் 4–10.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	வருவாய் மதிப்பு	குவிவு அலைவெண்
1000–2000	22	2000-க்குக் குறைவாக	22
2000–3000	25	3000-க்குக் குறைவாக	47
3000–5000	32	5000-க்குக் குறைவாக	79
5000–7000	16	7000-க்குக் குறைவாக	95
7000–10000	5	10000-க்குக் குறைவாக	100

அலைவுப் பரவலில் இடம் பெறும் 100 மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைக்கும்போது, வரிசையில் நடு இடம் பெறும் $\left(\frac{100}{2} = \right)$ 50ஆவது மதிப்பானது இடைவெளி (3000–5000)-ல் அடங்கியுள்ளது.

எனவே, இடைநிலைப் பிரிவானது (3000—5000) ஆகும்.

இப்போது,

$N = 100, L = 3000, m = 47, f = 32, I = 2000$; ஆகிய மதிப்புகளை வாய்ப்பாடு 4-9–ல் இடும்போது

$$\text{இடைநிலை} = 3000 + \left(\frac{50 - 47}{32} \times 2000\right)$$

$$= 3187{\cdot}50.$$

எனவே, 100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய் மதிப்பிற்கான இடைநிலை மதிப்பு ரூ 3187·50 ஆகும்.

வரைபடவாயிலாக இடைநிலையைப் பெறும் முறை :

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலைக்கொண்டு குவிவு அலைவுப் பரவல் பெற்று X — அச்சில் பிரிவு இடை வெளிகளுக்கும், Y — அச்சில் குவிவு அலைவெண்களுக்கும் ஏற்றதான அளவுத் திட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு கீழின ஓகைவ் வரைகிறோம். அலைவெண்களின் மொத்தம் N — எனில், Y — அச்சில் $N/2$ மதிப்பை உருப்படுத்தும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம். இப்போது இப் புள்ளி வழியாகவும், X —அச்சுக்கு இணையாகவும் அமையும் கோடு ஓகைவ்வை வெட்டும் புள்ளியைப் பெற்று அதிலிருந்து X—அச்சுக்கு ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடு வரைகிறோம். இந் நிலைக் குத்துக் கோடானது X — அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் மதிப்பை இடைநிலை என்கிறோம்.

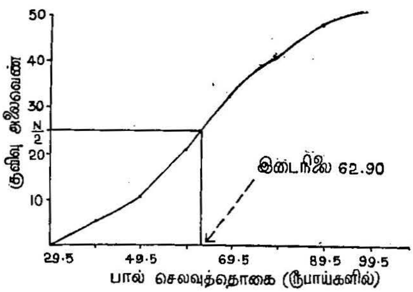
கணக்கு :

பட்டியல் (4-1)-ல் இடம்பெறும் அலைவுப் பரவலின் இடை நிலை மதிப்பை வரைபட வாயிலாகப் பெறுக.

முறை :

பட்டியல் (4-1)–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப்பரவலுக்கு வரையப்பட்ட ஓகைவ், படம் (4-1)-ல் இடம் பெறுகிறது,

இப்போது Y அச்சில் $\frac{50}{2}$, 25 ஆவது மதிப்பைக் குறிக்கும் புள்ளியிலிருந்து X— அச்சுக்கு இணையாகக் கோடு வரைந்து, அது ஓகைவ்வை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துக்

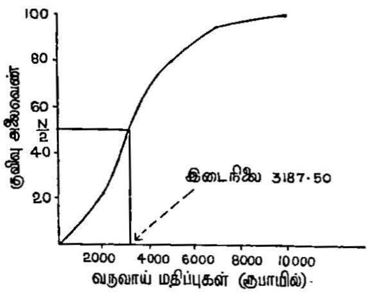


படம். 4-1.

கோட்டை X — அச்சுக்கு வரைகிறோம். இக் கோடு X— அச்சை 62·90 என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. எனவே, அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை 62·90 ஆகும்.

கணக்கு :

பட்டியல் (4–5)-ல் இடம்பெறும் அலைவுப்பரவலின் இடைநிலை மதிப்பை வரைபட வாயிலாகப் பெறுக.



படம். 4-2.

முறை :

பட்டியல் (4–5)–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப்பரவலுக்கு வரையப்பட்ட கீழின ஓகைவ், படம் 4-2-ல் இடம் பெறுகிறது

இப்போது Y அச்சில் $\left(\frac{100}{2} = 50\right)$ ஆவது மதிப்பைக் குறிக்கும் புள்ளியிலிருந்து X–அச்சுக்கு இணையாகக் கோடு வரைந்து அது ஓகைவ்வை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டை X-அச்சுக்கு வரைகிறோம். இக் கோடு X-அச்சை 3187·50 மதிப்புப் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. எனவே, அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை = 3187·50 ஆகும்.

முகடு :

குவியலின் எண்மதிப்புகளில் யாதேனும் ஒரு மதிப்பு மற்றவைகளைக் காட்டிலும் அதிக தடவைகள் இடம் பெறுமெனில், அம் மதிப்பை 'முகடு' என்கிறோம்.

14 பெட்டிகளில் அடைக்கப்பட்டிருக்கும் திருகாணிகளைச் சோதித்துப் பார்க்கும்போது, ஒவ்வொரு பெட்டியிலுள்ள குறையுடைய திருகாணிகளின் (Defective screws) எண்ணிக்கை 6, 4, 8, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 9, 7, 6, 9, 5 என்போம்.

இங்குள்ள மதிப்புகளில் அதிக தடவை இடம் பெறும் எண் 6.

எனவே,

குவியலின் முகடு = 6 ஆகும்.

அலைவெண் பரவலின் முகடு

எண்மதிப்புகளைத் தொகுத்து அமைக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலில் மிகப்பெரும் அலைவெண்களைப் பெற்றுள்ள அலைவுப் பிரிவை முகடு பிரிவு (Model class) என்கிறோம். முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லையை L எனவும், பிரிவு இடைவெளியின் நீளத்தை I எனவும், பிரிவின் மேற்புறமும் கீழ்ப்புறமும் அமைந்துள்ள பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே f_a, f_b எனவும் குறிப்பிடும்போது, முகடு பெறுவதற்கான வாய்ப்பாடு,

$$\text{முகடு} = L + \frac{I\,f_b}{f_a + f_b} \quad \ldots \quad (4-10)$$

ஆகும்.

கணக்கு : பட்டியல் (4-1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலின் முகடைக் காண்க.

பட்டியல் **(4-1)**–ல் இடம்பெறும் அலைவெண்களில் மிகப் பெரிய மதிப்பு 12 ஆகும். எனவே, முகடு இடைவெளி 59·5 – 69·5 என்கிறோம். இவ்விடைவெளிக்கு மேற்புறமுள்ள,

கீழ்ப்புறமுள்ள பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே 10, 7. எனவே, வாய்ப்பாடு (4-10).ன்படி,

$$\text{முகடு} = 59 \cdot 5 + \frac{10 \times 7}{10 + 7} = 63 \cdot 62 \text{ ஆகும்.}$$

கணக்கு :

பட்டியல் (4.7)-ல் கொடுக்கபபட்டுள்ள 200 திருகாணிகளின் விட்ட மதிப்புகளுக்கான அலைவெண்பரவலின் முகடைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் (4-7)-ல் இடம்பெறும் அலைவெண்களில் மிகப் பெரிய மதிப்பு 60 ஆகும். எனவே, முகடு பிரிவு இடைவெளி 0·2195 — 0·2295 என்கிறோம். இப் பிரிவுக்கு மேற்புறமும், கீழ்ப் புறமும் உள்ள பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே 49, 52. எனவே, வாய்ப்பாடு (4-10)-ன்படி,

$$\text{முகடு} = 0 \cdot 2195 + \left(\frac{0 \cdot 01 \times 52}{49 + 52} \right)$$

$$= 0 \cdot 21950 + 0 \cdot 00515 = 0 \cdot 22465 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள 200 திருகாணிகளின் விட்ட மதிப்புகளுக்கான முகடு 0·22465 ஆகும்.

வரை பட வாயிலாக முகடு பெறும் முறை:

X அச்சில் அலைவெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளையும், Y அச்சில் அலைவெண்களையும் குறிப்பிடுவதற்கேற்றதான அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு, அலைவு வளைகோடு (Frequency curve) வரைந்துகொள்ள வேண்டும். அலைவு வளைகோட்டின் உச்சப் புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு நிலைக் குத்துக் கோடு வரையும்போது, இது X அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் மதிப்பை முகடு என்கிறோம்.

பெருக்குச் சராசரி:

குவியலில் இடம்பெறும் N எண் மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டு அத் தொகையின் N — படி மூல (N^{th} root) மதிப்பைக் குவியலின் பெருக்குச் சராசரி என்கிறோம்.

8, 2, ஆகிய இரு மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி,

$= \sqrt[2]{8 \times 2} = 4$

3, 9, 1 ஆகிய மூன்று மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி.

$= \sqrt[3]{3 \times 9 \times 1} = 3$

குவியலில் இடம்பெறும் N மதிப்புகளை X_1, X_2............X_N எனவும், பெருக்குச் சராசரியை G எனவும் குறிப்பிடும்போது குவியலின் பெருக்குச் சராசரி வாய்பாடு,

$$G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_N} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4\text{-}11)$$

ஆகும். பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட முதலில் பெருக்குச் சராசரியின் மடக்கை மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடு கொண்டு பெறுகிறோம்.

$$\log G = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \ldots\ldots \log X_N}{N} \quad \ldots (4\text{-}12)$$

இப்போது இம் மதிப்பின் எதிர்மடக்கை மதிப்பு பெருக்குச் சராசரி ஆகும்.

கணக்கு :

1969, 1970-ம் ஆண்டுகளின் 6 பண்டங்களின் விலைகளில் ஏற்பட்ட மாறுபாட்டைக் குறிப்பிட, ஒவ்வொரு பண்டத்தின் 1970 ஆம் ஆண்டு விலையை, 1969 ஆம் ஆண்டு விலையின் சதவீதமாகக் கணக்கிட்டுக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

125, 117, 106, 112, 120, 126 இம் மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம்.

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு மதிப்பின் மடக்கை மதிப்பைப் பெற்று, அவற்றின் கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு	மடக்கை மதிப்பு
125	log 125 = 2·0934
117	log 117 = 2·0682
106	log 106 = 2·0253
112	log 112 = 2·0492
120	log 120 = 2·0792
126	log 126 = 2·1004

மடக்கை மதிப்புகளின் கூட்டு சராசரி

$$= \frac{12 \cdot 4157}{6} = 2 \cdot 0693$$

இப்போது, பெருக்குச் சராசரியை G எனக் குறிப்பிடும் போது,

$$\log G = 2 \cdot 0693$$

$\therefore$ பெருக்குச் சராசரி G = எதிர்மடக்கை (2·0693)

= 117·3 ஆகும்.

எனவே, 6 பண்டங்களின் விலை வேறுபாடு மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி 117·3 சதவீதமாகும்.

அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி :

அலைவுப் பரவலது பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$, எனவும், அப்பிரிவுகளுக்குரிய அலைவெண்களை $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_k$ எனவும், அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனவும், பெருக்குச் சராசரியை G எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது, அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி வாய்பாடு,

$$G = \sqrt[N]{X_1^{f_1} \, X_2^{f_2} \, X_3^{f_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, X_k^{f_k}} \ldots \ldots \quad (4\text{–}13)$$

ஆகும்.

பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட, முதலில் பெருக்குச் சராசரியின் மடக்கை மதிப்பைக் கீழ்கண்ட வாய்பாடு கொண்டு பெறுகிறோம்.

$$\log G = \frac{f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \ldots\ldots + f_k \log X_k}{N} \quad \ldots (4\text{–}14)$$

இப்போது இம்மதிப்பின் எதிர்மடக்கை மதிப்பை பெருக்குச் சராசரி என்கிறோம்.

கணக்கு :

அடுத்த பக்கத்தில் உள்ள அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 4-11.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
2–4	3
4–6	7
6–8	6
8–10	4
மொத்தம்	20

முறை :

பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடத் தேவையான மதிப்புகளைப் பட்டியல் 4–12–ல் அமைக்கிறேம்.

பட்டியல் 4–12.

பிரிவு மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	X-ன் மடக்கை மதிப்பு $\log X$	பெருக்குத் தொகை $f \log X$
3	3	0 4771	$3 \times 0{\cdot}4771 = 1{\cdot}4313$
5	7	0·6990	$7 \times 0{\cdot}6990 = 4{\cdot}8930$
7	6	0·8451	$6 \times 0{\cdot}8451 = 5{\cdot}0706$
9	4	0·9542	$4 \times 0{\cdot}9542 = 3{\cdot}8168$
மொத்தம்	20	—	15·2117

இப்போது அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியை G எனக் குறிப்பிடும்போது,

$$\log G = \frac{3 \log 3 + 7 \log 5 + 6 \log 7 + 4 \log 9}{20}$$

$$= \frac{15{\cdot}2117}{20} = 0.7606$$

இப்போது,

$$G = \text{எதிர்மடக்கை}\ (0{\cdot}7606)$$

$$= 5{\cdot}76$$

எனவே அலைவுப் பரவலின் பெருக்கல் சராசரி 5·76 ஆகும்.

ஹார்மானிக் சராசரி :

குவியலில் இடம்பெறும் N மதிப்புகளை $X_1, X_2, X_3,$ ……… ……, X_N எனவும், ஹார்மானிக் சராசரியை H எனவும் குறியீடுகளால் குறிக்கப்படும்போது, ஹார்மானிக் சராசரியை

$$H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots\cdots \frac{1}{X_N}} \qquad \ldots (4\text{–}15)$$

என வரையறுக்கலாம்.

கணக்கு :

ஒரு மோட்டார் முதலில் மணிக்கு 20 கிலோ மீட்டர்கள் வேகத்திலும், பிறகு 30 கிலோ மீட்டர்கள் வேகத்திலும், கடைசியாக 15 கிலோ மீட்டர் வேகத்திலும் ஓடுகிறது. வேக மதிப்புக்களின் ஹார் மானிக்க சராசரியைக் கணக்கிடுக.

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட 20, 30, 15, ஆகிய மூன்று மதிப்புகளின் ஹார்மானிக் சராசரி,

$$H = \frac{3}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15}} = \frac{3}{9/60} = 20.$$

எனவே மோட்டார் வேகத்தின் ஹார்மானிக் சராசரி 20 கிலோ மீட்டர்கள் ஆகும்.

கணக்கு :

ஒரு கடையில் A, B, C, D எனும் நான்கு வகை பழங்கள், A வகை ரூபாய்க்கு 10, B வகை ரூபாய்க்கு 20, C வகை ரூபாய்க்கு 12, D வகை ரூபாய்க்கு 15 என்ற வீதத்தில் விற்கப்படுகின்றன. இவ்விலைகளின் ஹார்மானிக் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட 10, 20, 12, 15 ஆகிய 4 மதிப்புகளின் ஹார்மானிக் சராசரி,

$$H = \frac{4}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}} = 13\tfrac{1}{3} = 13.33$$

பழங்களின் ஹார்மானிக் சராசரி விலை ரூபாய்க்கு 13 பழங்கள் என்று அமைகிறது.

அலைவுப் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரி:

அலைவுப் பரவலின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots X_k$ எனவும், பிரிவுகளுக்குரிய அலைவெண்களை $f_1, f_2, \ldots f_k$ எனவும், அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனவும், ஹார்மானிக் சராசரியை H எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது ஹார்மானிக் சராசரிக்கான வாய்பாடு,

$$H = \frac{N}{\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \cdots + \frac{f_k}{X_k}} \quad \ldots \quad (4\text{-}16)$$

ஆகும்.

பொருளியல், வணிகவியல் ஆகிய துறைகளில் பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகிய இரு சராசரிகள் பெருவாரியாகக் கையாளப்படுகின்றன.

கணக்கு : கீழ்க்காணும் அலைவுப் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 4–13.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
50 — 150	1
150 — 250	6
250 — 350	9
350 — 450	4
மொத்தம்	20

முறை : ஹார்மானிக் சராசரியைக் கணக்கிடத் தேவையான மதிப்புகளைப் பட்டியல் 4.14-ல் அமைகிறோம்.

பட்டியல் 4 – 14.

பிரிவின் மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	$\frac{f}{X}$
100	1	$\frac{1}{100} = 0.01$
200	6	$\frac{6}{200} = 0.03$
300	9	$\frac{9}{300} = 0.03$
400	4	$\frac{4}{400} = 0.01$
மொத்தம்	20	0.08

இப்போது, அலைவுப் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரியை H எனக் குறிப்பிடும்போது, வாய்பாடு 4–16–ன்படி

$$H = \frac{20}{\frac{1}{100} + \frac{6}{200} + \frac{9}{300} + \frac{4}{400}}$$

$$= \frac{20}{0.08}$$ (பட்டியல் 14–ன் 3ஆவது நிரலிலிருந்து)

$$= 250$$

எனவே, அலைவுப் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரி 250 ஆகும்.

பயிற்சி

(1) 10 நபர்களின் உயரம் (சென்டி. மீட்டர்களில்) பின்வருமாறு :

165, 173, 178, 164, 171, 176, 169, 180, 167, 162

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை முதலியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(2) கீழே இடம் பெறும் ஒரு குடும்பத்தின் மாத செலவுத் தொகை (ரூபாய்களில்) விவரங்களிலிருந்து கூட்டு சராசரி, இடைநிலை ஆகியவைகளைப் பெறுக.

460, 540, 420, 480, 510, 550, 400, 490, 520, 530, 450

(3) ஒரு தொழிற்சாலையில் 15 நாட்களில் ஒவ்வொரு நாளும் சீர்குலைவடைந்த இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கை விவரங்கள் கீழ் காண்பன.

9, 5, 13, 6, 7, 3, 5, 4, 12, 5, 7, 3, 11, 10, 5

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவை களைக் காண்க.

(4) ஒரு கடையின் 8 மாதங்களுக்கான விற்பனை மதிப்பு கள், ஒவ்வொரு மாத விற்பனையையும் அதற்கு முந்திய மாத விற்பனையின் சதவீதமாகக் கணக்கிட்டு, கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

126, 92, 116, 128, 102, 94, 110, 119

இவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

(5) ஒரு கிலோகிராம் எடை உருளைக்கிழங்கின் விலை (பைசாக்களில்) பற்றிய கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து ஹார்மானிக் சராசரியைக் கணக்கிடு.

60, 80, 75, 90, 85, 70;

(6) ஒரு கூறில் இடம் பெறும் 60 சிறுவர்களின் எடைப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

எடை (பவுண்டுகளில்)	சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை
20 — 24	7
25 — 29	13
30 — 34	21
35 — 39	15
40 — 45	4

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

(7) 100 நிறுவனங்களின் ஓராண்டு இலாபப் புள்ளி விவரங்கள் பின் வருமாறு :

இலாபம் (ஆயிரம் ரூபாய்களில்)		நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
10-க்குக் கீழ்	...	18
10 — 15	...	25
15 — 20	...	19
20 — 30	...	12
30 — 50	...	10
50 — 75	...	9
75-க்கு மேல்	...	7

பரவலின் இடைநிலை, முகடு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(8) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகியவற்றைக் காண்க.

பிரிவின் மைய மதிப்பு	அலைவெண்
9	2
12	5
15	8
18	10
21	9
24	3
27	3
மொத்தம்	40

(9) 50 ஊர்களில் பெய்த மழை பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

பெய்த மழை (செ. மீ. களில்)	ஊர்களின் எண்ணிக்கை
5 — 14	8
15 — 29	11
30 — 44	18
45 — 59	9
60 — 74	4
மொத்தம்	50

இவ்விவரங்களுக்கான கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு, ஹார்மானிக் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(10) 172 குடும்பங்களின் வீட்டு வாடகை பற்றிய செய்தியைத் தரும் அலைவெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

வாடகை (ரூபாய்களில்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
30 — 50	28
50 — 70	37
70 — 90	52
90 — 110	34
110 — 130	12
130 — 150	9
மொத்தம்	172

மேற்கண்ட அலைவெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு, ஹார்மானிக் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(11) 1970–71ஆம் ஆண்டில் 500 தொழில் நிறுவனங்களின் இலாப மதிப்புகள் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன:

இலாப மதிப்புகள் (1000 ரூபாய்களில்)	தொழில் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
5–10	61
10–15	135
15–20	146
20–30	92
30–50	49
50-ம் அதற்கு மேற்பட்டும்	17
மொத்தம்	500

(i) இவ்விவரங்களுக்கான இடைநிலைமதிப்பை (*a*) வாய்பாடு வாயிலாக (*b*) வரைபட வாயிலாக அடைக.

(ii) பரவலுக்கான முகடின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(12) *A*, *B* என்னும் இரு நிறுவனங்கள் ஒவ்வொன்றும் உற்பத்தி செய்த 120 மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரங்கள் பற்றிய விவரங்கள் பின் வருமாறு :

எரியும் நேரம்	விளக்குகளின் எண்ணிக்கை *A* நிறுவனம்	*B* நிறுவனம்
50–100	2	2
100–150	3	7
150–200	5	19
200–250	7	40
250–300	13	24
300–350	15	13
350–400	19	6
400–450	21	4
450–500	18	2
500–550	11	2
550–600	6	1

மேற்கண்ட இரு பரவல்கள் ஒவ்வொன்றின் (i) இடைநிலை மதிப்பை வரைபடத்தின் வாயிலாகக் கணக்கிடுக. (ii) கூட்டு சராசரி, முகடு, ஹார்மானிக் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(13) 40 தொழிலாளர்களின் வார ஊதியங்களுக்கான அலைவெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வார ஊதியம்	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
30–33	2
33—36	7
36—39	13
39—42	9
42—45	8
45—48	1
மொத்தம்	40

இப்பரவலின் கூட்டு சராசரி, முகடு, இடைநிலை ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(14) 80 ஆலைகளின் கரும்பிலிருந்து பெற்ற சர்க்கரையின் சதவீத மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் தரப்பட்டுள்ளன.

பிரிவு சதவீத மதிப்பு	ஆலைகளின் எண்ணிக்கை
8.0—8·4	5
8·4—8·8	13
8·8—9·2	20
9·2—9·6	21
9·6—10·0	12
10·0—10·4	9

பரவலின் கூட்டு சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவைகளைப் பெறுக.

5. சிதறல் அளவைகள்

புள்ளி விவரக் குவியலில் இடம்பெறும் எண் மதிப்புகள் பல்வேருக மாறுபட்டிருந்தாலும், அவைகளில் பெரும் பாலானவை யாதேனும் ஒரு மையமான மதிப்பைச் சுற்றி அமைந்திருக்கும் தன்மையைப்பற்றி முன்பு கண்டோம். இப்போது குவியல் மதிப்புகளின் மற்ெருரு முக்கியமான தன்மையாகிய சிதறல் (Scatter or Dispersion) பற்றி இப்போது காண்போம்.

A, *B* எனும் இரு மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தில் 5 மாதாந்திர தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்,

A : 100, 50, 40, 0, 60

B : 55, 48, 50, 45, 52 என்போம்.

இப் புள்ளி விவரங்களை ஆயும்போது *A*-ம், *B*-ம் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்கள் சமமானவைகளாக அமைகின்றன. இதைக்கொண்டு அவர்களிருவரும் கணித பாடத்தில் ஒரே தரமுடையவர்கள் எனக் கூறுவதில்லை. ஏனெனில், *A* - ன் மதிப்பெண்களில் ஒன்று 100 ஆகவும், மற்ெருன்று 0 ஆகவும், சராசரி மதிப்பு 50-லிருந்து மிகுதியாக வேறுபட்டுள்ளன; மாருக, *B*-ன் மதிப்பெண்கள் சராசரி மதிப்பிலிருந்து அவ்வள வாக வேறுபடாமல், சராசரிக்கு நெருக்கமாகவே அமைந் துள்ளன. *B* பெற்ற மதிப்பெண்களின் சிதறல் குறைவாகவும், *A* பெற்ற மதிப்பெண்களின் சிதறல் அதிகமாகவும் இருப்பதால், கணிதப் பாடத்தில் *A* ஐக் காட்டிலும் *B* மேலான தரமுடைய மாணவர் எனக்கூறுகிறேம். எனவே, எண் குவியல்களை ஒப்பிடுவதற்கு மதிப்புகளின் மையப்போக்குத் தன்மை மட்டு மல்லாமல், சிதறல் தன்மையும் ஏதுவாகின்றன. வீச்சு (Range),

திட்ட விலக்கம் (Standard deviation), சராசரி விலக்கம் (Average or Mean deviation), கால்மான விலக்கம் (Quartile deviation), மாறுபாடுக்கெழு (Coefficient of variation) ஆகியவை களைச் சிதறல் அளவைகள் என்கிறோம்.

வீச்சு :

சிதறல் அளவைகளில் மிக எளியதானது வீச்சாகும். குவியல் மதிப்புகளில் மிகப் பெரிய மதிப்பு (Maximum Value), மிகச்சிறிய மதிப்பு (Minimum Value) ஆகியவைகளின் வித்தியாசத்தை வீச்சு என்கிறோம்.

100, 50, 40, 0, 60 ஆகிய மதிப்புகளின் வீச்சு

= 100—0=100 ஆகவும்

55, 48, 50, 45, 52 ஆகிய மதிப்புகளின் வீச்சு

= 55—45=10 ஆகவும் அமையும்

திட்ட விலக்கம்

குவியல் மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் குவியல் சராசரியி லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்பின் வர்க்கங்களது கூட்டுச் சராசரியின் வர்க்க மூலத்தைத் திட்டவிலக்கம் என்கிறோம்.

குவியலில் இடம்பெறும் N மதிப்புகளை $X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_N$ எனவும், குவியலின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும், திட்ட விலக்கத்தை σ எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது, திட்ட விலக்க மதிப்பைப் பெறுதற்கான வாய்பாடு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Xi - \bar{X})^2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (5\text{-}1)$$

ஆகும்.

திட்டவிலக்கத்தின் வர்க்கத்தை மாறுபாடு (Variance) என்கிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு குடும்பம் ஒவ்வொரு மாதமும் துய்க்கும் சர்க்கரையின் அளவு (கிலோகிராம்கள்) பற்றிய 5 மாத புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

8, 10, 4, 7, 6. இம்மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடு.

முறை:

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{8 + 10 + 4 + 7 + 6}{5} = 7$$

வாய்ப்பாடு (5–1)–ன் படி திட்டவிலக்க மதிப்பு

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{5}\{(8-7)^2 + (10-7)^2 + (4-7)^2 + (7-7)^2 + (6-7)^2\}}$$

$= 2.$ ஆகும்.

வாய்பாடு (5.1) ஐ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma X^2 - \bar{X}^2} \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5\text{–}2)$$

என அமைக்கும் போது, திட்ட விலக்க மதிப்பைக் கணக்கிடுவது எளிதாக அமைகிறது.

கணக்கு:

8 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 8, 6, 10, 4, 8, 3, 5, 6 எனில், மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

முறை:

மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி $\left.\right\} = \dfrac{8+6+10+4+8+3+5+6}{8} = 6{\cdot}25$

முதலில் வாய்பாடு (5–1)–ன் படி திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

மதிப்பெண்	சராசரியிலிருந்து விலக்க மதிப்பு	விலகல் மதிப்பின் வர்க்கம்
8	1·75	3·0625
6	—0·25	0·0625
10	3·75	14·0625
4	—2 25	5·0625
8	1·75	3·0625
3	—3·25	10·5625
5	—1·25	1·5625
6	—0·25	0·0625
மொத்தம்	—0—	37·5000

$$\sigma = \sqrt{\frac{37\cdot5000}{8}} = 2\cdot17$$

அடுத்தபடியாக வாய்ப்பாடு (5·2)-ன் படி திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

மதிப்பெண்	மதிப்பெண்களின் வர்க்கம்
8	64
6	36
10	100
4	16
8	64
3	9
5	25
6	36
மொத்தம்	350

$$\sigma = \sqrt{\frac{350}{8} - (6 \cdot 25)^2} = 2 \cdot 17$$

இங்குத் திட்ட விலக்க மதிப்பை வாய்பாடு (5-1) ஐக் காட்டிலும் வாய்பாடு (5-2)-ன் துணைக்கொண்டு எளியதாகக் கணக்கிட இயலுவது கண் கூடு.

அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்

அலைவுப் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots \ldots \ldots, X_k$ எனவும், அலைவெண்களை $f_1, f_2, \ldots \ldots, f_k$ எனவும், அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனவும், அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும், பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை σ எனவும் குறிப்பிடும்போது, திட்ட விலக்க மதிப்பைப் பெறுவதற்கான வாய்பாடு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f (Xi - \bar{X})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5\text{-}3)$$

ஆகும்.

கணக்கு:

பட்டியல் (5-1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 20 மாணவர்கள் புள்ளியியல் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 5-1.

மதிப்பெண்களின் பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
0—20	1
20—40	4
40—60	9
60—80	6
மொத்தம்	20

முறை:

திட்ட விலக்கத்தைப் பெறத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு பட்டியல் (5–2) ஐ அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-2.

பிரிவுமைய மதிப்பு : X	அலைவெண் f	fX	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$
10	1	10	−40	1600	1500
30	4	120	−20	400	1600
50	9	450	0	0	0
70	6	420	20	400	2400
மொத்தம்	20	1000	—	—	5600

இப்போது $\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} = 50.$

வாய்பாடு (5–3)-ன் படி திட்டவிலக்க மதிப்பு

$$\sigma = \sqrt{\frac{5600}{20}}$$

$$= 16 \cdot 73$$

எனவே, அலைவுப்பரவலின் திட்டவிலக்க மதிப்பு 16·73 ஆகும்.

இபபோது வாய்பாடு (5-3)ஐ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum f X^2 - \bar{X}^2} \qquad \ldots\ldots(5\text{–}4)$$

என அமைத்து திட்டவிலக்கத்தை எளிதாகப் பெறலாம்.

பட்டியல் (5–1)-ல் இடம்பெறும் அலைவுப்பரவலின் திட்ட விலக்க மதிப்பை வாய்பாடு (5–4)ஐக் கொண்டு கணக்கிடு வோம்.

திட்டவிலக்க மதிப்பை வாய்பாடு (5–4)ஐக் கொண்டு கணக்கிடத் தேவையான மதிப்புகளைப் பட்டியல் (5–3)–ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-3.

பிரிவின் மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	fX^2
10	1	10	100
30	4	120	3600
50	9	450	22500
70	6	420	29400
மொத்தம்	20	1000	55600

இப்போது அலைவுப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு

$$\bar{X}=\frac{\Sigma f X}{N}=\frac{1000}{20}=50$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum f X^2}{N}-\bar{X}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{55600}{20}-(50)^2}$$

$$=16{\cdot}73.$$

எனவே அலைவுப்பரவலின் திட்டவிலக்கம் 16·73 ஆகும். இப்போது அலைவுப்பரவலின் திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிட துணைபுரியும் எளிய முறைகளைக்காண்போம்.

எளிய முறை : 1

அலைவுப்பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகள் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ எனவும், இவை ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு A-லிருந்து பெறும் விலகல் மதிபபுகளை அதாவது (X_1-A), (X_2-A), ... (X_k-A) ஆகியவைகளை முறையே $Y_1, Y_2 \ldots\ldots Y_k$ எனவும், விலகல் மதிப்புகள் வாயிலாகப் பெறும் திட்டவிலக்கத்தை σ_y எனவும், அலைவுப் பரவலின் திட்டவிலக்கத்தை σ_X எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது,

$$\sigma_x=\sigma_y \qquad \ldots \ldots (5\text{-}5)$$

ஆகும்.

கணக்கு : பட்டியல் (5–4)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 குடும்பங்களின் பால் செலவுத்தொகை புள்ளி விவரங்களின் அலைவுப் பரவலின் திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 5-4.

செலவுத்தொகை (ரூபாய்கள்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
30 - 39	3
40—49	8
50—59	10
60—69	12
70—79	7
80—89	6
90—99	4
மொத்தம்	50

முறை :

திட்ட விலக்கத்தை வாய்பாடு (5-3), வாய்ப்பாடு (5–5)களைக் கொண்டு பெறத்தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு முறையே பட்டியல் (5–5), (5–6) களில் கொடுக்கிறோம்.

பட்டியல் 5–5.

பிரிவின் மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	$(X-\bar{X})$	$f(X-\bar{X})^2$
34·5	3	103·5	—29·2	2557·92
44·5	8	356·0	—19·2	2949·12
54·5	10	545·0	9.2	846·40
64·5	12	774·0	0·8	7·68
74·5	7	521·5	10·8	816·48
84 5	6	507·0	20·8	2595·84
9.45	4	378·0	30 8	3794·56
மொத்தம்		3185·0	—	13568·00

இங்கு,

$$\bar{X} = \frac{3185{\cdot}00}{50} = 63.7$$

வாய்பாடு 5.3-ன் படி,

$$\sigma x^2 = \frac{1}{N} \sum f(X-\bar{X})^2 = \frac{13568{\cdot}00}{50} = 271{\cdot}36$$

எனவே,

$$\sigma x = \sqrt{271{\cdot}36} = 16{\cdot}47$$

எனவே, அலைவுப்பரவலில் இடம்பெறும் குடும்பங்களது பால் செலவுத் தொகைகளின் திட்டவிலக்கம் 16·47 ஆகும்.

பட்டியல் 5-6.

பிரிவின் மைய மதிப்பு	அலைவெண் f	குத்து மதிப்பு 64·5 லிருந்து விலகல்மதிப்பு $Y = X - 64{\cdot}5$	fY	fY^2
34·5	3	−30	−90	2700
44·5	8	−20	−160	3200
54·5	10	−10	−100	1000
64·5	12	-0-	—0—	—0—
74·5	7	10	70	700
84 5	6	20	120	2400
94·5	4	30	120	3600
மொத்தம்.	50	—	−40	13600

இங்கு

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma fY}{N} = -\frac{40}{50}$$

$$= -0{\cdot}80$$

இப்போது

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum f y^2 - \overline{Y}^2$$

$$= \frac{13600}{50} - (-0.80)^2$$

$$= 271 \cdot 36$$

$$\therefore \sigma y = \sqrt{271 \cdot 36} = 16 \cdot 47$$

வாய்பாடு (5–5)–ன் படி அலைவுப்பரவலின் திட்ட விலக்கம்

$$\sigma X = \sigma Y$$

$$= 16 \cdot 47.$$

எனவே, 50 குடும்பங்களது பால் செலவுத் தொகைகளின் திட்ட விலக்கம் ரூ. 16·47 ஆகும்.

எளிய முறை (2)

அலைவுப் பரவலது பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகளான $X_1, X_2, \ldots X_k$ ஆகியவைகள் ஒவ்வொன்றும் குத்து மதிப்பு A-லிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்புகளை C-ஆல் வகுத்துப் பெறும் உருமாறிய மதிப்புகளை

$$Z_1 = \frac{X_1 - A}{C}, Z_2 = \frac{X_2 - A}{C} \ldots \ldots, Z_k = \frac{X_k - A}{C}$$

எனக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம். உருமாறிய மதிப்புகளின் வாயிலாகப் பெறும் சராசரியை

$\overline{Z} = \frac{\sum fz}{N}$ எனக் குறிப்பிடும் போது அலைவுப் பரவலின்

திட்ட விலக்க வாய்ப்பாடு

$$\sigma X = C\,\sigma z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5\text{-}6)$$

ஆகும்.

கணக்கு :

பட்டியல் (3-4)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை வாய்பாடு (5–6)ஐக் கொண்டு கணக்கிடுக.

முறை :

திட்ட விலக்கத்தை வாய்பாடு (5-6)ஐக் கொண்டு பெறத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு பட்டியல் (5–7)ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-7.

பிரிவின் மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	உருமாறிய மதிப்பு $z = \frac{X-64\cdot5}{10}$	fz	fz^2
34·5	3	−3	−9	27
44·5	8	−2	−16	32
54·5	10	−1	−10	10
64·5	12	0	0	0
74 5	7	1	7	7
84·5	6	2	12	24
94·5	4	3	12	36
மொத்தம்	50	—	−4	136

இப்போது,

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma f Z}{N} = \frac{-4}{50} (= -0\cdot08)$$

$$\therefore \sigma z^2 = \frac{1}{N}\Sigma f Z^2 - \bar{Z}^2 = \frac{136}{50} - (-0\cdot08)^2$$

$$= 2\cdot7136$$

$$\sigma Z = \sqrt{2\cdot7136} = 1\cdot647.$$

வாய்பாடு (5-6)–ன் படி, அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்.

$$\sigma x = C\,\sigma z$$

$$= 10 \times 1\cdot647 = 16\cdot47$$

எனவே, 50 குடும்பங்களின் பால் செலவுத் தொகைகளது திட்ட விலக்க மதிப்பு 16·47 ஆகும்.

கணக்கு :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்ப் புள்ளி விவரங்களுக்கான அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை வாய்பாடுகள் (5-4), (5-6) வாயிலாகக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 5-8.

வருவாய் (ரூபாய்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
1000—2000	22
2000—3000	25
3000—5000	32
5000—7000	16
7000—10000	5
மொத்தம்	100

முறை :

திட்ட விலக்கத்தைப் பெறுவதற்குத் தேவையான மதிப்புகள் பட்டியல் (5-9), (5-10) முதலியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 5-9.

பிரிவின் மைய மதிப்பு	அலைவெண் f	fX	fX^2
1500	22	33000	4,95,00,000
2500	25	62500	15,62,50,000
4000	32	128000	51,20,00,000
6000	16	96000	57,60,00,000
8500	5	42500	36,12,50,000
மொத்தம்	100	362000	165,50,00,000

இப்போது $\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} = \frac{362000}{100} = 3620$

வாய்பாடு (5–4)-ன் படி திட்ட விலக்க மதிப்பு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1,655,000,000}{100} - (3620)^2}$$

$$= 1856 \cdot 23$$

எனவே, அலைவுப் பரவலில் இடம் பெறும் 100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்களுக்கான திட்ட விலக்க மதிப்பு ரூ. 1856.23 ஆகும்.

பட்டியல் 5-10.

பிரிவின் மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	உருமாறிய மதிப்பு $Z = \frac{X - 2500}{500}$	fz	fz^2
1500	22	—2	—44	88
2500	25	0	0	0
4000	32	3	96	288
6000	16	7	112	784
8500	5	12	60	720
மொத்தம்	100	—	224	1880

இப்போது $\bar{Z} = \frac{224}{100} = 2 \cdot 24$

$$\sigma z = \sqrt{\frac{1880}{100} - (2 \cdot 24)^2}$$

$$= 3 \cdot 71246$$

வாய்பாடு (5–6)–ன் படி அலைவுப் பரவலின் திட்டவிலக்க மதிப்பு.

$$\sigma_X = C\,\sigma_z$$
$$= 500 \times 3{\cdot}71246$$
$$= 1856{\cdot}23$$

எனவே 100 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்களுக்கான திட்ட விலக்க மதிப்பு ரூ· 1856·23 ஆகும்.

சராசரி விலக்கம் :

குவியல் மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து வேறுபடும் தனிவிலக்கல் (Absolute deviation) மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியைச் சராசரி விலக்கம் என்கிறோம்.

குவியலில் இடம்பெறும் N மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots, X_N$ எனவும், சராசரியை $\bar{X}$ எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடும்போது, சராசரி விலக்க மதிப்பைப் பெறுவதற்கான வாய்பாடு

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N}\sum |X-\bar{X}| \qquad \ldots \qquad (5\text{-}7)$$

ஆகும்.

கணக்கு :

8, 10, 4, 7, 6 ஆகிய மதிப்புகளின் சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

முறை :

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{8+10+4+7+6}{5} = 7$$

வாய்பாடு (5–7)-ன் படி சராசரி விலக்கம்

$$= \tfrac{1}{5}\{\,|8-7|+|10-7|+|4-7|+|7-7|+|6-7\,\}$$
$$= \tfrac{1}{5}\{\,1+3+3+0+1\,\} = 1{\cdot}6.$$

அலைவுப்பரவலின் சராசரி விலக்கம் :

அலைவுப்பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ எனவும், அலைவெண்களை முறையே $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$ எனவும், அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனவும், அலைவுப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ எனவும் குறிகளால் குறிப்பிடும்போது, சராசரி விலக்க மதிப்பைப் பெறுவதற்கான வாய்பாடு ,

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N}\ \Sigma f \mid X - \bar{X} \mid \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots\ldots(5\text{-}8)$$

கணக்கு :

பட்டியல் 5-1-ல் (பக்கம் 90) இடம்பெறும் 20 மாணவர்களின் புள்ளியியல் தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கான அலைவுப்பரவலின் சராசரி விலக்க மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

முறை :

சராசரி விலக்க மதிப்பைப் பெறுவதற்குத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுப் பட்டியல் (5-11)-ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-11.

பிரிவு மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	$\mid X-\bar{X} \mid$	$f \mid X-\bar{X} \mid$
10	1	10	40	40
30	4	120	20	80
50	9	450	0	0
70	6	420	20	120
மொத்தம்	20	1000	—	240

இப்போது,

$$\bar{X} = \frac{\sum f\ X}{N} = \frac{1000}{20} = 50$$

வாய்பாடு (5-8)-ன் படி,

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N}\sum f \mid X - \bar{X} \mid = \frac{240}{20} = 12$$

எனவே, 20 மாணவர்களின் புள்ளியியல் தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கான சராசரி விலக்கம் 12 ஆகும்.

கணக்கு :

பட்டியல் (5-4)–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 குடும்பங்களின் பால் செலவுத் தொகைகளுக்கான அலைவுப்பரவலின் சராசரி விலக்க மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

முறை :

சராசரி விலக்க மதிப்பைப் பெறுவதற்குத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளைப் பட்டியல் (5-12)-ல் இடுகிறோம்.

பட்டியல் 5–12.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	$\|X-\bar{X}\|$	$f\ \|X-\bar{X}\|$
34·5	3	103·5	29·2	87·6
44·5	8	356 0	19·2	153·6
54·5	10	545·0	9·2	92 0
64 5	12	774·0	0 8	9·6
74 5	7	521·5	10·8	75·6
84·5	6	507·0	20·8	124·8
94·5	4	378·0	30·8	123·2
மொத்தம்	50	3185·0	—	666·4

இப்போது $\bar{X} = \dfrac{3185.0}{50} = 63.7$

வாய்பாடு 5-8–ன்படி.

சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{666.4}{50} = 13.3$

எனவே, 50 குடும்பங்களது மாத பால் செலவுத் தொகைகளின் சராசரி விலக்கம் 13.3 ஆகும்.

கால்மான விலக்கம்:

குவியல் எண் மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைக்கும் போது, வரிசையை நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் வண்ணம் இடம் பெறும் மூன்று மதிப்புகளைக் கால்மானங்கள் (Quartiles) என்கிறோம். இவைகளை, முதல் கால்மானம், இரண்டாவது கால்மானம், மூன்றாவது கால்மானம் எனக் குறிப்பிடுகிறோம். குவியல் மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனக் கொள்ளும் போது, முதல் கால்மானத்திற்குக் குறைவாகவுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{4}$ ஆகவும், அதிகமாகவுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\frac{3}{4}N$ ஆகவும், மூன்றாவது கால்மானத்திற்குக் குறைவாகவுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\frac{3}{4}N$ ஆகவும் அதிகமாகவுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{4}$ ஆகவும் அமைகின்றன. (இரண்டாம் கால் மானக் குவியலின் இடைநிலை ஆகும்.)

இப்போது கால்மான விலக்கத்தை

$$= \frac{(\text{மூன்றாவது கால்மானம்}) - (\text{முதல் கால்மானம்})}{2}$$

என வரையறுக்கிறோம். ... ... (5-9)

கணக்கு :

ஒரு கூட்டுறவுப் பண்டக சாலையில் 15 நாட்களில் அன்றாட விற்பனை மதிப்புகள் (ரூபாய்களில்) 1010, 870, 830, 1120, 900, 940, 1050, 1000, 880, 1100, 950, 800, 1170, 990, 1090 எனில், இம் மதிப்புகளின் கால்மான விலக்கத்தைக் கணக்கிடு.

முதலில் விற்பனை மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் அமைப் போம்.

800, 830, 870, 880, 900, 940, 950, 990, 1000, 1010, 1050, 1090, 1100, 1120, 1170.

இப்போது, வரிசையின் நான்காவது, எட்டாவது, பன்னி ரண்டாவது இடங்களில் உள்ள 880, 990, 1090 ஆகிய மதிப்பு களை முறையே, முதல் கால்மானம், இடைநிலை, மூன்றாவது கால்மானம் என்கிறோம்.

கால்மான விலக்கம்

$$= \frac{(\text{மூன்றாவது கால்மானம்}) - (\text{முதல் கால்மானம்})}{2}$$

$$= \frac{1090 - 880}{2} = 105$$

எனவே, கூட்டுறவு பண்டகசாலையின் அன்றாட விற்பனை மதிப்புகளுக்கான கால்மான விலக்கம் ரூ. 105 ஆகும்.

அலைவுப் பரவலின் கால்மான விலக்கம்:

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலையைப் பெறும் முறையைப் பின்பற்றி முதல் கால்மானம், மூன்றாவது கால்மானம் ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

அலைவுப் பரவலின் அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை N எனக் கொள்வோம். குவிவு அலைவுப் பரவல் வாயிலாக $\left(\frac{N}{4}\right)$ ஆவது மதிப்பு இடம் பெறும் இடைவெளியைப் பெறுகிறோம். இப்பிரிவு இடைவெளியை முதல் கால்மானப் பிரிவு என்கிறோம். இப்போது முதல் கால்மான மதிப்புப் பெற வாய்பாடு

$$\text{முதல் கால்மானம்} = L + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} \times I \quad \ldots \quad (5\text{-}10)$$

ஆகும். இங்கு,

L = முதல் கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m = கீழ் எல்லை 'L'க்குக் குறைவான குவிவு அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை.

f = முதல் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை.

I = முதல் கால்மானப் பிரிவின் நீளம்

ஆகியவைகளைக் குறிக்கின்றன.

இது போலவே, குவிவு அலைவுப்பரவல் வாயிலாக $(\frac{3}{4}N)$ ஆவது மதிப்பு இடம் பெறும் மூன்றாவதுகால்மானப் பிரிவு

இடைவெளியைப் பெற்று கீழ்க்கண்ட வாய்பாடு கொண்டு மூன்றுவது கால்மான மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\text{மூன்றுவது கால்மானம்} = L + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)}{f} \times I$$

இங்கு, (5-11)

L = மூன்றுவது கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m = கீழ் எல்லை 'L'-க்குக் குறைவான குவிவு அலைவெண் களின் எண்ணிக்கை.

f = மூன்றும் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை.

I = மூன்றும் கால்மானப் பிரிவின் நீளம்.

ஆகியவைகளைக் குறிக்கின்றன.

இப்போது, அலைவெண் பரவலின் கால்மான விலக்கத்தை அலைவுப் பரவலின் கால்மான விலக்கம்

$$= \frac{(\text{மூன்றுவது கால்மானம்}) - (\text{முதல் கால்மானம்})}{2}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

கணக்கு :

பட்டியல் (5–4)–ல் [பக்கம் 93] கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 குடும்பங்களின்மாத பால் செலவுக்கான அலைவெண் பரவலின் கால்மானவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

முறை:

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலைக் கொண்டு பெற்ற குவிவு அலைவுப் பரவலைப் பட்டியல் (5–13)-ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-13.

பிரிவு இடைவெளி		குவிவு அலை வெண்கள்
29·5—39·5	39 5-க்குக் குறைவாக	3
39·5—49·5	49.5 ,,	11
49·5—59·5	59·5 ,,	21
59·5—69·5	69.5 ,,	33
69·5—79·5	79·5 ,,	40
79·5—89·5	89 5 ,,	46
89·5—99·5	99·5 ,,	50

இப்போது குவிவு அலைவுப் பரவல் வாயிலாக $\left(\frac{N}{4} = 12\cdot5\right)$ ஆவது மதிப்பு) அடங்கியிருக்கும் முதல் காலமானப் பிரிவு (49.5—59·5) ஆகவும், $\left(\frac{3N}{4} = 37\cdot5\right)$ ஆவது மதிப்பு அடங்கியிருக்கும் மூன்றுவது காலமானப் பிரிவு (69·5—79·5) ஆகவும் அமைகிறது.

வாய்பாடு (5-10)-ன் படி,

$$\text{முதல் கால் மானம்} = 49\cdot5 + \left(\frac{12\cdot5-11}{10}\right) \times 10$$

$$= 51\cdot0$$

வாய்பாடு (5-11)-ன் படி

$$\text{மூன்றுவது கால்மானம்} = 69\cdot5 + \left(\frac{37.5-33}{7}\right) \times 10$$

$$= 75\cdot9$$

எனவே,

$$\left.\begin{array}{r}\text{அலைவுப் பரவலின்}\\ \text{கால்மான விலக்கம்}\end{array}\right\} = \frac{75 \cdot 9 - 51 \cdot 0}{2} = 12 \cdot 45$$

ஆகும்.

கணக்கு:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலின் கால்மான மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 5-14.

மின்னணுக் குழல்களின் ஆயுள்கால (மணிகளில்) புள்ளி விவரங்களுக்கான பரவல்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
50-க்குக் குறைவாக	3
50—100	8
100 – 150	12
150 – 200	14
200—250	13
250 – 300	10
300 – 350	9
350 – 400	6
400 – 450	3
450—500	1
500—550	1
மொத்தம்	80

முறை:

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலைக் கொண்டு பெற்ற குவிவு அலைவுப் பரவலைப் பட்டியல் (5-15)-ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 5-15.

50-க்குக்	குறைவாக	குவிவு அலைவெண்	3
100	,,	,,	11
150	,,	,,	23
200	,,	,,	37
250	,,	,,	50
300	,,	,,	60
350	,,	,,	69
400	,,	,,	75
450	,,	,,	78
500	,,	,,	79
550	,,	,,	80

இப்போது, குவிவு அலைவுப் பரவல் வாயிலாக $\left(\frac{N}{4} = 20\right)$ ஆவது மதிப்பு அடங்கியிருக்கும் முதல் கால்மானப் பிரிவு (100 – 150) ஆகவும், $\left(\frac{3N}{4} = 60\right)$ ஆவது மதிப்பு அடங்கியிருக்கும் மூன்றாவது கால்மானப் பிரிவு (300 – 350) ஆகவும் அமைகிறது என அறியலாம்.

வாய்பாடு (5–10)-ன் படி,

$$\text{முதல் கால்மானம்} = 100 + \left(\frac{20-11}{12}\right) \times 50$$

வாய்பாடு (5–11)-ன் படி $= 137 \cdot 50$

$$\text{மூன்றாவது கால்மானம்} = 300 + \left(\frac{60-60}{19}\right) \times 50 = 300.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{எனவே, அலைவுப் பரவலின்}\\ \text{கால்மான விலக்கம்}\end{array}\right\} \frac{300{\cdot}0-137{\cdot}5}{2}=81{\cdot}25$$

எனவே, 80 மின்னணுக் குழல்களின் ஆயுள்கால மதிப்புகளுக்கான கால்மான விலக்கம் 81·25 மணிகள் ஆகும்.

வரைபட வாயிலாகக் கால்மான விலக்கத்தைப் பெறும் முறை :

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலைக் கொண்டு கீழினக் குவிவு அலைவுப் பரவல் பெற்று, X—அச்சில் பிரிவு இடைவெளிக்கும், Y — அச்சில் குவிவு அலைவெண்களுக்கும் ஏற்றதான அளவுத் திட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு கீழின ஓகைவ் வரைகிறோம். அலைவெண்களின் மொத்தம் N எனில் Y அச்சில் $\frac{N}{4}$, 3/4 N ஆகிய இரு மதிப்புகளை உருப்படுத்தும் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் வழியாகவும், X—அச்சுக்கு இணையாகவும் கோடுகள் வரைந்து, அவைகள் ஓகைவை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பெற்று, அவைகளிலிருந்து X— அச்சுக்கு நிலைக்குத்துக் கோடுகளை வரைகிறோம். இப்போது, நிலைக்குத்துக் கோடுகள் X -அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் மதிப்புகளை முறையே முதல் கால்மானம், மூன்றுவது கால்மானம் என்கிறோம். இவைகளிலிருந்து அலைவுப் பரவலின் கால்மான விலக்கத்தை,

$$\left.\begin{array}{r}\text{கால்மான}\\ \text{விலக்கம்}\end{array}\right\} = \frac{(\text{மூன்றுவது கால்மானம்})-(\text{முதல் கால்மானம்})}{2}$$

என்ற வாய்பாட்டின் துணைகொண்டு பெறலாம்.

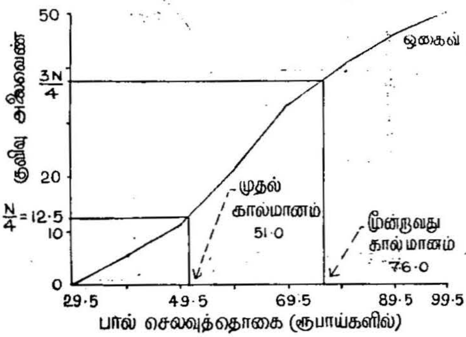
கணக்கு :

பட்டியல்கள் (5–4) (5-14) ஆகியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவல்களின் கால்மான விலக்க மதிப்புகளை வரைபடவாயிலாகப் பெறுக.

முறை :

(i) பட்டியல் (5·4)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலுக்கு வரையப்பட்ட ஓகைவ் படம் (5.5)–ல் இடம் பெறுகிறது.

இப்போது முதலில் Y அச்சில் $\frac{50}{4} = 12 \cdot 5$ ஆவது மதிப்பு, $3/4 \times 50 = 37 \cdot 5$ ஆவது மதிப்பு ஆகியவைகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து $X-$அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரை



படம் 5-1.

கிறோம். பிறகு, இக்கோடுகள் ஓகைவ் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து X-அச்சுக்கு நிலைக்குத்துக் கோடுகள் வரைகிறோம். இக் கோடுகள் X-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் மதிப்புகள் முறையே (51·0), (76·0) ஆக அமைகின்றன. இவைகள் முறையே பரவலின் முதல் கால்மானம், மூன்றுவது கால்மான மதிப்புகளாகும்.

எனவே,

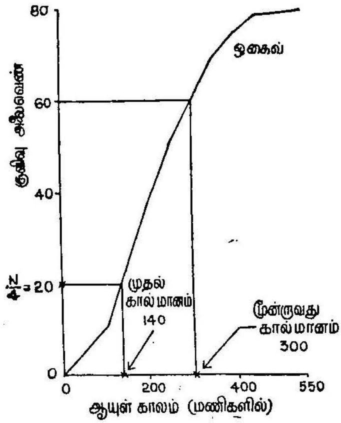
$$\left.\begin{array}{l}\text{பரவலின்}\\ \text{கால்மான}\\ \text{விலக்கம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{மூன்றாம் கால்மானம் — முதல் கால்மானம்}}{2}$$

$$= \frac{76 \cdot 0 - 51 \cdot 0}{2}$$

$$= 12 \cdot 5$$

(ii) பட்டியல் (5-14)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலின் ஓகைவ் படம் (5-2)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இப்போது வரைபட வாயிலாகப் பெறும் முதல் கால்மான, மூன்றாவது கால்மான மதிப்புகள் முறையே 140, 300 ஆகியவை களைக்கொண்டு



படம் 5-2.

$$\left.\begin{array}{c}\text{பரவலின் கால்மான}\\ \text{விலக்கம்}\end{array}\right\} = \frac{300 - 140}{2} = 80$$

எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

மாறுபாடுக் கெழு

குவியல் மதிப்புகள் எந்த அலகுகொண்டு அளவிடப் பட்டனவோ அதே அலகினால் மதிப்புகளின் சிதறல் அளவைகள் குறிக்கப்படுகின்றன. நபர்களின் உயரம் சென்டி மீட்டர்களில் அளவிடப் பட்டிருந்தால், இம்மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கத்தைச் சென்டிமீட்டர்களில் குறிக்கிறோம். எடை மதிப்புகள் கிலோ கிராம்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது சராசரி விலக்கத்தைக் கிலோகிராம்களில் தெரிவிக்கிறோம். வருவாய் புள்ளி விவரங்கள் ரூபாய்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கு மானால், கால்மான விலக்கத்தை ரூபாய்களில் குறிக்கிறோம். ஒரே அலகினால் அளவிடப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக்கொண்ட இரு குவியல்களின் வேறுபாடுகளை ஒப்பிட சிதறல் அளவைகள் ஏதுவாக உள்ளன என முன்பு குறிப்பிட்டோம். 5 வயது

சிறுவர்களின் உயர மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் 8·3 சென்டி மீட்டர்கள், 5 வயது சிறுமிகளின் உயர மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் 6·1 சென்டிமீட்டர்கள் எனில், சிறுவர்களின் உயர மதிப்புகள் சிறுமிகளின் உயர மதிப்புகளைக் காட்டிலும் அதிக மாக வேறுபட்டுள்ளன என கூறுகிறோம். இப்போது, வெவ்வேறு அலகுகளில் அளவிடப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்ட இரு குவியல்களின் வேறுபாடுகளை ஒப்பிடப் பயன் படும் மாறுபாடுக் கெழுவைக் காண்போம். திட்ட விலக் கத்தைக் கூட்டுச் சராசரியின் சதவீதமாகக் குறிப்பிடும்போது அதை மாறுபாடுக் கெழு என வழங்குகிறோம். இதைக் குறியீடு களால்

மாறுபாடுக் கெழு $= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு குழுவில் உள்ள நபர்களின் சராசரி உயரம் 135·0 செ. மீ., திட்ட விலக்கம் 10·5 செ. மீ ; அவர்களின் சராசரி எடை 40·0 கிலோகிராம்கள், திட்ட விலக்கம் 18·8 கி. கி. எனில், உயர மதிப்புகளின் வேறு பாட்டையும், எடை மதிப்புகளின் வேறுபாட்டையும் ஒப்பிடுக.

முறை :

உயர மதிப்புகளின் மாறுபாடுக் கெழு } $= \frac{10 \cdot 5 \times 100}{135 \cdot 0}$

$= 7 \cdot 8\%$

எடை மதிப்புகளின் மாறுபாடுக் கெழு } $= \frac{18 \cdot 0 \times 100}{40 \cdot 0}$

$= 45\%$

எனவே, உயர மதிப்புகளைக் காட்டிலும் எடை மதிப்புகள் அதிகமாக வேறுபட்டுள்ளன என்கிறோம்.

லாரன்சு வளைகோடு (Lorenz Curve)

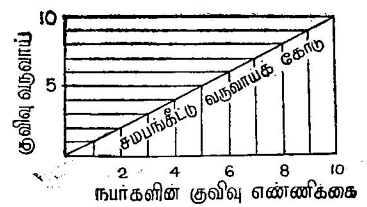
லாரன்சு வளைகோடு என்பது ஒகைவ் அல்லது குவிவு அலைவெண் பரவல் வளைகோட்டின் ஒரு வகையாகும்.

10 நபர்கள் ஒவ்வொருவரின் வருவாய் பத்து ரூபாய் எனக் கொள்வோம். இப்போது நபர்களின் குவிவு எண்ணிக்கையையும், அவர்கள் வருவாயின் குவிவு எண்ணிக்கையையும் கணக்கிடுகிறோம்.

நபர்களின் குவிவு எண்ணிக்கை	வருவாயின் குவிவு மதிப்பு (ரூபாய்கள்)
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100

வரைபடத்தில் *Y*–அச்சில் நபர்களின் குவிவு எண்ணிக்கையையும், *X*–அச்சில் ரூபாய்களின் குவிவு மதிப்பையும் குறிப்பிடும் அளவுத் திட்டத்தை அமைத்துக்கொண்டு (0, 0), (10, 1) (20, 2), (30, 3), (40, 4), (50, 5), (60, 6), (70, 7), (80, 8), (90, 9), (100, 10) ஆகிய 10 இணைந்த மதிப்புகளை உருப்படுத்தி 11 புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவைகள் யாவும் படம் 5.3-ல் காட்டியுள்ள *A B* என்னும் நேர்கோட்டில் அமைகின்றன. இதைச் சம பங்கீட்டு வருவாய்க் கோடு (Line of equal distribution of income) என அழைக்கிறோம். இக்கோடு ஒவ்வொரு நபரின் வருவாயும் சமமதிப்புடையது என்பதைக் குறிப்பிடும் படி அமைகிறது. இப்போது நபர்களின் வருவாய் மதிப்புகளில் ஏற்றத்தாழ்வு இருப்பின், இதை வெளிப்படுத்தும் வகையில் லாரன்சு வளைகோடு சமபங்கீட்டு வருவாய்க் கோட்டிலிருந்து

விலகி அமைந்திருக்கும். இதுபோன்று ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்கள் ஒவ்வொருவருடைய செல்வமும் சமம் எனில், அவர்களின் குவிவு எண்ணிக்கையையும் அதனுடன் இணைந்த குவிவு செல்வ மதிப்பையும் வரைபடத்தில் புள்ளிகளால் குறிப்பிடும்போது



படம் 5-3.

சமபங்கீட்டு செல்வக் கோட்டினைப் (Line of equal distribution of wealth) பெறுகிறோம். அவ்வாறின்றி குழுவின் மொத்தச் சொத்துகளின் பெரும் பகுதி சில நபர்களிடம் ஒருமுகப்பட்டும் (concentrated), சிறு பகுதியே மற்ற நபர்களிடம் அமையப்பட்டும் இருப்பின், செல்வ நிலையானது சமபங்கீட்டிலிருந்து வேறுபடுவதை விளக்க லாரன்சு வளைகோடு பேருதவியாக உள்ளது.

லாரன்சு வளைகோடு வரையும் முறையைப் பட்டியல் 5-16-ல் உள்ள மாத வருவாய்ப்புள்ளி விவரங்களுக்கான அலைவுப் பரவல் வாயிலாக விளக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 5–16.

50 நபர்களின் வருவாய்ப் புள்ளிவிவரங்கள்

வருவாய் (ரூபாய்கள்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
35–45	10
45–55	16
55–65	12
65–95	8
95–125	4
மொத்தம்	50

முறை : முதலில் அலைவுப்பரவலின் 5 பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றின் மையமதிப்பு, அதற்குரிய அலைவெண் ஆகியவைகளின் பெருக்குறித் தொகைகளை

400, 800, 720, 640, 440 எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

அடுத்து, இப்பெருக்குத்தொகைகளின் குவிவு மதிப்புகளை

400, 1200, 1920, 2560, 3000 எனப் பெற்று, ஒவ்வொரு குவிவு மதிப்பையும் இறுதிக் குவிவு மதிப்பின் சதவீதங்களாக

13, 40, 64, 85, 100 எனக் கணக்கிடுகிறோம். இவைகளைக் குவிவு வருவாய் சதவீத மதிப்புகள் என்கிறோம்.

மூன்றுவதாக அலைவெண்களின் குவிவு மதிப்புகளை

10, 26, 38, 46, 50 என்று கணக்கிட்டு ஒவ்வொரு குவிவு அலைவெண் மதிப்பையும் மொத்த அலைவெண் மதிப்பின் சதவீதங்களாக

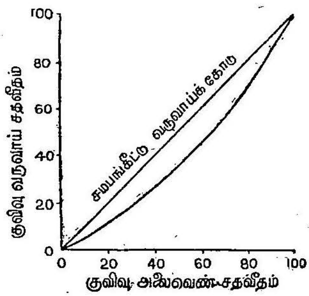
20, 52, 76, 92, 100 என்று கணக்கிடுகிறோம். இவைகளைக் குவிவு அலைவெண் சதவீத மதிப்புகள் என்கிறோம்.

இவ்வாறு படிப்படியாகக் கணக்கிடுவதற்கு ஏதுவாகப் பட்டியல் 5–17ஐ அமைத்துக்கொள்கிறோம்.

பட்டியல் 5–17.

பிரிவு மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	குவிவு வருவாய் மதிப்பு	குவிவு வருவாய் சதவீத மதிப்பு	குவிவு அலைவெண்	குவிவு அலைவெண் சதவீதம்
40	10	400	400	13	10	20
50	16	800	1200	40	26	52
60	12	720	1920	64	38	76
80	8	640	2560	85	46	92
110	4	440	3000	100	50	100

இப்போது வரைபடத்தில் Y–அச்சில் குவிவு வருவாய் சதவீத மதிப்புகளையும், X–அச்சில் குவிவு அலைவெண் சதவீத மதிப்புகளையும் குறிப்பிடுவதற்குரிய அளவுத்திட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு (0, 0), (20, 13), (52, 40), (76, 64), (92, 85),



படம் 5-4.

(100, 100) ஆகிய ஆறு இணை மதிப்புகளை உருப்படுத்தும் புள்ளிகளைக் குறித்து, அவைகளை ஒரு வளைகோடு வாயிலாக இணைத்து, லாரன்ஸ் வளைகோட்டைப் பெறுகிறோம்.

பயிற்சி

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதவருவாய்ப் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து (i) வீச்சு (ii) திட்டவிலக்கம் (iii) கால்மான விலக்கம் (iv) சராசரி விலக்கம் ஆகியவைகளைக் காண்க.

470, 3[illegible]0, 650, 530, 430, 810, 290, 570, [illegible], 610, 590.

(2) A, B ஆகிய இரு பங்கு (Share) [illegible]ன் விலை மதிப்புகளின் வேறுபாட்டைத் திட்ட விலக்க வாயி[illegible] ஒப்பிடுக.

A : 25, 19, 23, 30, 18, 21, 27

B : 13, 8, 12, 10, 6, 2, 11

(3) 30 மாணவர்களின் உயர மதிப்புகள் அடுத்த பக்கத்தில் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

உயரம் (சென்டிமீட்டர்களில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
154 – 156	1
156 – 158	2
158 – 160	7
160 – 162	9
162 – 164	8
164 – 166	3
மொத்தம்	30

பட்டியலின் திட்டவிலக்கம், சராசரி விலக்கம் ஆகியவை களைக் காண்க.

(4) 40 மாணவர்களும், 40 மாணவிகளும் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

பிரிவு இடைவெளி மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மாணவியர்களின் எண்ணிக்கை
10—20	2	0
20—30	9	4
30—40	13	8
40—50	11	15
50—60	4	9
60—70	1	4
மொத்தம்	40	40

மாணவர்கள், மாணவிகள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் வேறுபாட்டைத் திட்ட விலக்கத்தின் வாயிலாக ஒப்பிடுக.

(5) ஓர் ஊரின் மக்கள் தொகை பற்றிய விவரங்கள் வயது வாரியாக அடுத்த பக்கத்தில் காட்டியவாறு அமைகின்றன :

வயது	ஆண்கள் (ஆயிரங்கள்)	பெண்கள்
0— 5	3	2
5 −15	8	9
15—25	15	13
25—35	18	16
35—45	10	8
45—55	9	7
55—65	7	5
65-ம் அதற்கு மேலும்	4	6
மொத்தம்	75	66

ஆண்களின் வயது பரவல், பெண்களின் வயது பரவல் ஆகியவைகளுக்கான கால்மான விலக்கங்களை வரைபடம் வாயிலாக அடைக.

6) 110 இராணுவ வீரர்களின் எடை விவரங்கள் (கிலோ கிராம்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

எடை (கிலோகிராம்களில்)	இராணுவ வீரர்களின் எண்ணிக்கை
60 − 63	3
63 − 66	7
66 − 69	8
69 − 72	11
72—75	17
75 − 78	21
78 − 81	16
81—84	10
84—87	9
87— 90	8
மொத்தம்	110

இவ்விவரங்களுக்கான கால்மான விலக்கத்தை வரைபடம் வாயிலாகக் கணக்கிடுக.

(7) 120 நபர்களது கழுத்துச் சுற்றளவு(Neck circumference) (செ. மீட்டரில்) பற்றிய விவரங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன:

மைய மதிப்புகள்	அலைவெண்கள்
28	2
30	14
32	17
34	28
36	32
38	18
40	9
மொத்தம்	120

இவ்விவரங்களுக்கான (1) கால்மான விலக்கம், (2) சராசரி விலக்கம், (3) திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளின் மதிப்பை அடைக.

(8) (i) 4 ஆவது அத்தியாயத்தில் 9 ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் அலைவெண் பரவலுக்கான திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(ii) 4 ஆவது அத்தியாயத்தில் 12 ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் A, B எனும் இரு நிறுவனங்கள் தயாரிக்கும் மின்விளக்குகளின் எரியும் நேரங்களை மாறுபாட்டுக்கெழு வாயிலாக ஒப்பிடுக.

(iii) 4ஆவது அத்தியாயத்தில் 11ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் விவரங்களுக்கான கால்மான விலக்கத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(9) கிரிக்கெட் பந்தயத்தில் இரு ஆட்டக்காரர்கள் 10 ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு :

ஆட்டக்காரர் A	B
124	106
43	54
25	37
99	0
73	13
47	87
65	44
147	99
29	28
0	19

மேற்கண்ட விவரங்களை மாறுபாட்டுக்கெழு வாயிலாக ஒப்பிடுக.

(10) கீழ்க்கண்ட 56 நபர்களின் வருவாய்ப் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து (i) கால்மான விலக்கம் (ii) சராசரி விலக்கம் ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு வருவாய் (ரூபாய்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
500—1000	12
1000—2000	17
2000—3000	10
3000—5000	7
5000—7500	6
7500—10,000	4

(11) 88 மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரத்தைப்பற்றிய விவரங்கள் பின்வரும் அலைவுப் பரவலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எரியும் நேரம் (மணிகளில்)	மின் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை
300 – 375	7
375—450	8
450 – 525	11
525 – 600	14
600—675	20
675—750	16
750—825	9
825—900	3

பரவலின் கால்மான விலக்கத்தை வரைபடம் வாயிலாகப் பெறுக.

(12) 8 சிறுவர்களின் உயரம், எடை விவரங்கள் பின்வருமாறு :

உயரம் (அங்குலங்களில்) : 45, 50, 36, 54, 47, 46, 53, 38

எடை (பவுண்டுகளில்) : 32, 36, 30, 38, 35, 32, 31, 33

உயரம், எடை ஆகிய மாறிகளின் வேறுபாட்டை மாறுபாட்டுக்கெழு வாயிலாக ஒப்பிடுக.

(13) கூறுகளில் இடம்பெறும் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய புள்ளி விவரங்களைக்கொண்டு கணக்கிட்ட சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகள் அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ளன:

	கூறு I	கூறு II
சராசரி (ரூபாய்கள்) :	40	60
திட்டவிலக்கம் (ரூபாய்கள்):	8	10

மாறுபாட்டுக்கெழு வாயிலாகக் கூறுகளின் வேறுபாட்டை ஒப்பிடுக.

(14) கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் இடம்பெறும் A,B, ஆகிய இரு மாநிலங்களில் வசிக்கும் நபர்களின் செல்வ நிலைபற்றிய புள்ளி விவரங்களுக்கான லாரன்சு வளைகோடு வரைக.

செல்வநிலை (1,00,000 (ரூபாய்கள்) பிரிவு மைய மதிப்பு	நபர்களின் எண்ணிக்கை A	B
0·5	20	30
1·0	17	32
2·0	12	35
3 0	12	29
4·0	7	24
5·0	5	20
7·5	4	16
10·0	3	14
மொத்தம்	80	200

6. கோட்ட அளவைகளும், தட்டை அளவைகளும்

அலைவுப் பரவலின் தன்மையை விளக்கிடப் பயனுறும் மையப் போக்கு அளவைகள், சிதறல் அளவைகள் ஆகியவை களைப் பற்றி முன்பு கண்டோம். இப்போது அலைவுப் பரவலின் சம சீரான தன்மை அல்லது சம சீரற்றக் கோட்டத் தன்மையை அளவிடப் பயன்படும் கோட்ட அளவைகள், அலைவுப் பரவலின் உச்சி வளைவுத் தன்மையை அளவிடப் பயன்படும் தட்டை அளவைகள் ஆகியவைகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

கோட்டத் தன்மை (Skewness)

பரவலின் சமசீரற்ற தன்மையைக் கோட்டம் (Skewness) என்கிறோம். இதை அளவிட (i) பியர்சன் கோட்டக்கெழு (ii) கால்மானக் கோட்டக்கெழு (iii) பீட்டாக்கெழு ஆகிய கோட்ட அளவைகள் பயன்படுகின்றன.

பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவுக்கான வாய்பாடு:

$$\text{கோட்ட அளவை} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}} \quad \cdots \quad (6\text{-}1)$$

ஆகும்.

வாய்பாடு (6-1)ஐ

$$\text{கோட்ட அளவை} = \frac{3\,(\text{இடை நிலை} - \text{முகடு})}{\text{திட்ட விலக்கம்}} \quad \cdots \quad (6\text{-}2)$$

எனவும் வழங்கலாம்.

கால்மானக் கோட்டக் கெழுவுக்கான வாய்பாடு
கோட்ட அளவை

$$= \frac{\left(\begin{matrix}\text{முதல்}\\ \text{கால்மானம்}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{மூன்ருவது}\\ \text{கால்மானம்)}\end{matrix}\right) - (2 \times \text{இடைநிலை})}{(\text{மூன்ரும் கால்மானம்}) - (\text{முதல் கால்மானம்})}$$

ஆகும். ... ... (6-3)

அலைவுப் பரவலின் பிரிவு மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2, \ldots X_k$ எனவும், பிரிவு அலைவெண்களை $f_1, f_2, \ldots f_k$ எனவும் அலைவெண்களின் மொத்த மதிப்பை N எனவும், சராசரியை $\bar{X}$ எனவும் குறிப்பிடும்போது, பிரிவு மைய மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் சராசரியிலிருந்து வேறுபடும் விலகல் மதிப்பின் மூன்ரும்படி, பிரிவுக்குரிய அலைவெண் ஆகியவைகளது பெருக்குத் தொகைகளின் சராசரி

$$\frac{1}{N} \sum f (X - \bar{X})^3$$ ஆகும்.

இதைப் பரவலின் மூன்ருவதுபடி நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Third Central moment) என்கிறேம். பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை σ எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது பீட்டாக் கெழுவுக்கான வாய்பாடு,

$$\text{கோட்ட அளவை} = \frac{\frac{1}{N} \sum f (X - \bar{X})^3}{\sigma^3} \text{ ஆகும்.} \qquad (6-4)$$

கோட்ட அளவையின் மதிப்பு, மிகை எண்ணுக இருக்கும் பரவலை நேர்கோட்டப் பரவல் (positively skewed distribution) எனவும், குறை எண்ணுக இருக்கும் பரவலை எதிர்கோட்டப் பரவல் (negatively skewed distribution) எனவும், பூச்சியமாக இருக்கும் பரவலை சமச்சீர் பரவல் எனவும் அழைக்கிறேம்.

கணக்கு :

50 குடும்பங்களின் மாத பால் செலவு புள்ளி விவரங்களிலிருந்து பெற்ற சராசரி $\bar{X}$ = ரூ. 63.70

முகடு = ரூ. 63.62

திட்ட விலக்கம் = ரூ. 16.47

இம் மதிப்புகளிலிருந்து பியர்சன் கோட்ட அளவையைக் கணக்கிடுக.

முறை

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளிலிருந்து வாய்பாடு 61-ன்படி பியர்சன் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிறோம்.

கோட்ட அளவை,

$$= \frac{\text{சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}} = \frac{63.70 - 63.62}{16.47} = 0.005$$

ஆகும்.

எனவே, பால் செலவு புள்ளி விவரங்களின் அலைவுப் பரவலை கோட்ட அளவையை .005 ஆகப் பெற்றுள்ள நேர்கோட்டப் பரவல் என்கிறோம்.

கணக்கு

100 நபர்களின் வருவாய்ப் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து பெற்ற

முதல் கால்மானம் = ரூ. 1120.00

இடைநிலை = ரூ. 3093.75

மூன்றுவது கால்மானம் = ரூ. 3875.00

ஆகிய மதிப்புகளிலிருந்து கால்மானக் கோட்ட அளவையைக் கணக்கிடுக.

முறை

வாய்பாடு 6-3-ன்படி

கோட்ட அளவை

$$= \frac{\begin{pmatrix}\text{முதல்} \\ \text{கால்மானம்}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{மூன்றுவது} \\ \text{கால்மானம்}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 \times \text{இடை} \\ \text{நிலை}\end{pmatrix}}{(\text{மூன்றுவது கால்மானம்}) - (\text{முதல் கால்மானம்})}$$

$$= \frac{1120.00 + 3875.00 - (2 \times 3093.75)}{3875.00 - 1120.00}$$

$= 0.26.$ ஆகும்.

எனவே, வருவாய்ப்புள்ளி விவரங்களின் அலைவுப் பரவலை கோட்ட அளவையை 0.26 ஆகப் பெற்றுள்ள நேர்கோட்டப் பரவல் என்கிறோம்.

கணக்கு:

ஒரு தேர்வில் 20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான அலைவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பரவலின் பீட்டாக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 6–1.

மதிப்பெண்கள் பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
4 — 6	1
6 — 8	4
8 — 10	3
10 — 12	9
12 — 14	2
14 — 16	1
மொத்தம்	20

முறை:

அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கம், மூன்றுவது படிவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆகியவைகளைப் பெறத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுப் பட்டியல் (2)-ல் அமைப்போம்.

பட்டியல் 6—2.

பிரிவு மையமதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^3$
5	1	5	—5	25	25	—125
7	4	28	—3	9	36	—108
9	3	27	—1	1	3	—3
11	9	99	1	1	9	9
13	2	26	3	9	18	54
15	1	15	5	25	25	125
மொத்தம்	20	200	...	...	116	—48

இப்போது, $\bar{X} = \frac{200}{20} = 10$

$$\sigma = \sqrt{\frac{116}{20}} = 2.41$$

$$\frac{1}{N}\sum f(X - \bar{X})^3 = \frac{-48}{20} = -2.40.$$

ஆகவே,

வாய்பாடு (6–4)–ன்படி

$$\text{கோட்ட அளவை} = \frac{\frac{1}{N}\sum f(X - \bar{X})^3}{\sigma^3}$$

$$= \frac{-\ .40}{13\ 98} = -0.17.$$

எனவே, 20 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கான அலை வெண் பரவலைக், கோட்ட அளவையை 0.17 ஆகப் பெற்றுள்ள எதிர்கோட்டப் பரவல் என்கிறோம்.

உச்சி வளைவுத்தன்மை அல்லது கர்டோஸிஸ் (Kurtosis)

சமசீரான பரவல்களின் உச்சி வளைவுத் தன்மையை (Kurtosis) என்கிறோம். தட்டையளவைக் கணக்கிடுவதற்கான வாய்பாடு

$$\text{தட்டை அளவை} = \frac{\frac{1}{N}\sum f(X - \bar{X})^4}{\sigma^4}$$

ஆகும். இங்கு σ ஆனது திட்ட விலக்கத்தைக் குறிப்பிடுகிறது. ...... (6-5)

$\frac{1}{N}\sum f(X - \bar{X})^4$ என்பது, பரவல் பிரிவின் மைய மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் சராசரியிலிருந்து, வேறுபடும் விலக்க மதிப்பின் நான்காவதுபடி பிரிவுக்குரிய அலைவெண் அ[illegible]வைகளின் பெருக்குத் தொகையின் சராசரியைக் குறிப்பிடுகிறது. இதைப்

பரவலின் நான்காவதுபடி நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் சராசரியைக் குறிப்பிடுகிறது. இதைப் பரவலின் நான்காவதுபடி நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Fourth central moment) என அழைக்கிறோம்.

தட்டையளவையின் மதிப்பு 3-க்கு அதிகமாகக் கொண்ட பரவலைக் குறைத் தட்டைப் பரவல் (Leptocurtic distribution) எனவும்,3-க்குக் குறைவாகக் கொண்ட பரவலை மிகைத்தட்டைப் பரவல் (Platy kurtic distribution) எனவும் அழைக்கிறோம்.

ஒரு பரவலது தட்டையளவையின் மதிப்பு 3 எனில் அது இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

கணக்கு :

திருகாணிகள் அடைக்கப்பட்ட பெட்டிகளை, அவைகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள குறைபாடுடைய (Defective) திருகாணிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறித்துப் பாகுபடுத்தப்பட்ட அலைவுப் பரவல், பட்டியல் 6—3-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பரவலின் தட்டையளவையைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 6-3.

குறைபாடுடைய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை
4	4
5	11
6	20
7	30
8	20
9	11
10	4
மொத்தம்	100

முறை :

தட்டையளவைப் பெறத் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுப் பட்டியல் (6-4)-ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 6-4.

பிரிவு மைய மதிப்பு X	அலைவெண் f	fX	$(X-\bar{X})$	$f(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^3$	$f(X-\bar{X})^4$
4	4	16	—3	36	–108	324
5	11	55	—2	44	—88	176
6	20	120	—1	20	—20	20
7	30	210	0	0	0	0
8	20	60	1	20	20	20
9	11	99	2	44	88	176
10	4	40	3	36	108	324
மொத்தம்	100	700	—	200	0	1040

இப்போது, $\bar{X} = \frac{700}{100} = 7.$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200}{100}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{N} \Sigma f (X - \bar{X})^4 = \frac{1040}{100} = 10{\cdot}40.$$

வாய்பாடு (6-5)-ன் படி

$$\text{தட்டையளவை} = \frac{\frac{1}{N} \Sigma f (X - \bar{X})^4}{\sigma^4}$$

$$= \frac{10{\cdot}4}{4} = 2{\cdot}6. \text{ ஆகும்.}$$

தட்டையளவை, மதிப்பு 3-க்குக் குறைவாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட பரவலை மிகைத் தட்டைப் பரவல் என்கிறோம்.

கணக்கு :

ஓர் அலைவுப் பரவலிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகள் பின்வருமாறு.

திட்ட விலக்கம் = 3

மூன்ருவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை } = — 36

நான்காம் நடுவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை } = 405

இவைகளைக்கொண்டு பரவலின் கோட்ட அளவை, தட்ட அளவை ஆகிய மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

வாய்பாடு (6-4)-ன் படி

பரவலின் கோட்ட அளவை } =

$$\frac{\text{மூன்ருவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை}}{(\text{திட்ட விலக்கம்})^3}$$

$$= \frac{-36}{(3)^3}$$

$$= -1{\cdot}33$$

ஆகும்.

எனவே, அவ்வுப் பரவலானது 1·33ஐக் கோட்ட அளவையாகக்கொண்ட எதிர்கோட்டப் பரவலாகும்.

பரவலின் தட்டை அளவை

$$= \frac{\text{நான்காவது படி நடுவிலகக்கப் பெருக்குத் தொகை}}{(\text{திட்ட விலக்கம்})^4}$$

$$= \frac{405}{3^4}$$

= 5 ஆகும்

எனவே, கணக்கிட்ட தட்டையளவின் மதிப்பு 3–க்கு அதிகமாக இருப்பதால், அவ்வுப் பரவல் குறைத் தட்டைப் பரவலாகும்.

பயிற்சி

(1) 80 நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்க்கான பரவலின் சராசரி ரூ. 4120, இடைநிலை ரூ. 3360, திட்ட விலக்கம் ரூ. 1620 எனில் பரவலின் கோட்ட அளவையைக் கணக்கிடுக.

(2) மின் விளக்குகளில் எரியும் நேரத்திற்கான பரவலின்

சராசரி = 672 மணிகள்

முகடு = 740 மணிகள்

திட்ட விலக்கம் = 136 மணிகள்

எனில், பரவலின் கோட்ட அளவையைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு கூறு புள்ளி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்ட

முதல் கால்மானம் = 8·0

இடைநிலை = 10·0

மூன்றுவது கால்மானம் = 11·5

எனில், இம் மதிப்புகளைக்கொண்டு கூறு பரவலின் கோட்ட அளவையைப் பெறுக.

(4) கீழ்க்கண்ட பரவலின் கோட்ட அளவையான பீட்டாக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு மைய மதிப்பு	அலைவெண்
0	4
1	13
2	16
3	10
4	5
5	2
மொத்தம்	50

(5) ஓர் உளவியல் சோதனையில் 30 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பரவல் பின்வருமாறு :

பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
15—25	3
25—35	7
35—45	10
45—55	7
55—65	3
மொத்தம்	30

பரவலின் தட்டையளவைப் பெறுக.

(6) அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் = 4

மூன்றாவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை = 0·2

நான்காவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை = 50

எனில், இம் மதிப்புகளிலிருந்து கோட்ட அளவை, தட்டை அளவை ஆகியவைகளை அடைக.

(7) 4ஆவது அத்தியாயத்தில் 9ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் அலைவெண் பரவலுக்கான கோட்டை அளவுகளையும், தட்டை அளவையையும் கணக்கிடுக.

(8) 4ஆவது அத்தியாயத்தில் 12ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் A, B எனும் இரு நிறுவனங்கள் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரங்களுக்கான பரவல்களின் பீட்டாக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

(9) 4ஆவது அத்தியாயத்தில் 11ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் அலைவெண் பரவலுக்கான கால்மானக் கோட்டக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

7. ஒட்டுறவு, பல்தர ஒட்டுறவு, பகுதி ஒட்டுறவு

ஒட்டுறவு

ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அவைகளைக் கொண்டு ஆய்வு நடத்துவதற்குக் கையாளப்படும் முறைகளை, முன் அத்தியாயங்களில் கண்டோம். இங்கு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கொண்டு, அம் மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு அல்லது உறவைப்பற்றி ஆராயப் பேருதவியாக அமைந்துள்ள புள்ளியியல் முறைகளைக் காண்போம்.

ஒரு பண்டத்தின் விலை அதன் தேவையைப் பொறுத்து மாறுபட்டு அமைகிறது; தேவை அதிகரிக்கும் போது விலை அதிகரித்தும், தேவை குறையும்போது விலை குறைவதும் இயல்பு. பயிரின் விளைச்சலானது அப் பயிரை விளைவிப்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்பட்ட உரத்தின் அளவைச் சார்ந்துள்ளது. நபரின் உயரமும் எடையும் தொடர்புடைய மாறிகள். இங்ஙனம், ஒரு மாறியின் மதிப்புகளுக்கு இணையாக பிறிதொரு மாறியின் மதிப்புகள் வேறுபட்டு அமையின், அவ்விரு மாறிகளைத் தொடர்புடைய மாறிகள் என்கிறோம். மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு அல்லது உறவை 'ஒட்டுறவு' (Correlation) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். *A*, *B* எனும் இரு தொடர்புடைய மாறிகளில், *A*-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, *B*-ன் மதிப்பு அதிகரித்தும், *A*-ன் மதிப்பு குறையும்போது *B*-ன் மதிப்பு குறைந்தும் அமையின், அதாவது இரு மாறிகளின் இயக்கங்களும், (Movements) ஒரே இயல்புடைய போக்கில் அமையின், அம்மாறிகளுக்கு இடையே

உள்ள தொடர்பை நேரிடை ஒட்டுறவு (Positive correlation) எனவும், A-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது B-ன் மதிப்பு குறைந்தும், A-யின் மதிப்பு குறையும்போது B-ன் மதிப்பு அதிகரித்தும் அமையின், அதாவது மாறியின் இயக்கங்கள் எதிர்மாருனவையாக அமையின், அம் மாறிகளுக்கு இடையே யுள்ள தொடர்பை எதிர்மறை ஒட்டுறவு (Negative correlation) எனவும் அழைக்கிறோம். பண்டத்தின் தேவை, விலை; நபரின் எடை, உயரம் போன்ற இணை மாறிகள் நேரிடை ஒட்டுறவைப் பெற்றமைகின்றன. குடும்பத்தின் வருவாய், அக் குடும்பம் வருவாயில் உணவுக்காகச்செலவிடும் சதவீதம்; பண்டத்தின் உற்பத்தி விலை போன்ற இணை மாறிகள் எதிர்மறை ஒட்டுறவைப் பெற்றமைகின்றன. பொருளியல், வணிகவியல், உயிரியல், உளவியல், சமூகவியல் போன்ற பல அறிவியல் துறைகளில் மாறிகளின் தொடர்பை அளவிடப் பயன்படும் ஒட்டுறவு முறைகளைப்பற்றி இப்போது காண்போம்.

இரு மாறிகளின் தொடர்பை அறிய அவைகளின் இணைந்த மதிப்புகளை வரை படத்தில் இடுவது பயனுள்ளதாகும். முப்பது நபர்களின் உயரம், எடை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் பட்டியல் 7.1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் விவரங்களுக்கான வரைபடம் அமைப்பதைப் பற்றி இப் போது காண்போம்.

வரை படத்தில், X அச்சில் நபர்களின் உயரம், Y அச்சில் நபர்களின் எடை ஆகிய மதிப்புக்களைக் குறிப்பதற்கு ஏற்றதான அளவுத் திட்டங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் நபரின் உயரம், எடை மதிப்புகள் முறையே 66, 125 ஆகின்றன. இவைகளை உருப்படுத்தும்படி ஒரு புள்ளியை வரைபடத்தில் குறிப்போம். இவ்வாறே, ஒவ்வொரு நபரின் உயரம், எடை மதிப்புகளை உருப்படுத்தும் புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிப் போம். இப்போது கொடுக்கப்பட்ட 30 இணை மதிப்புக்களுக் கான புள்ளிகள் படம் (7-1)-ல் காண்க. இவ் வரைபடத்தைச் சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter diagram) என அழைக்கிறோம். சிதறல் விளக்கப்படத்திலிருந்து மாறிகளின் தொடர்பைப் பற்றிய பொதுவான செய்திகளை அறிய முடிகிறது.

சிதறல் விளக்கப்படத்தில் படம் (7-2.)உள்ள புள்ளிகள், படம் A-ல் காட்டியவாறு இடது கீழ்ப்புறமிருந்து வலது மேற்புறமாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டை ஒட்டி அமைந்திருப்பின், மாறிகள்

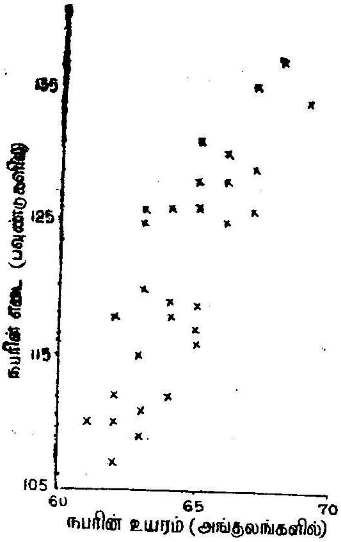
பட்டியல் 7-1

நபர்	உயரம் (அங்குலங்களில்)	எடை பவுண்(டு)களில்)	நபர்	உயரம் (அங்குலங்களில்)	எடை (பவுண்டுகளில்)
1	66	125	16	63	120
2	63	111	17	62	112
3	67	135	18	65	116
4	60	106	19	61	110
5	65	119	20	62	118
6	67	129	21	64	119
7	63	109	22	65	117
8	64	118	23	62	107
9	66	130	24	66	128
10	69	134	25	65	131
11	68	137	26	64	112
12	63	126	27	62	110
13	65	128	28	63	125
14	64	126	29	65	126
15	67	126	30	63	115

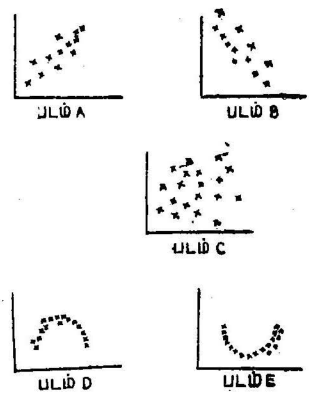
நேரிடைத் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்கிறோம்; புள்ளிகள் படம் *B*-ல் காட்டியவாறு இடது மேற்புறமிருந்து வலது கீழ்ப்புறம் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோட்டைச் சுற்றி அமைந்திருப்பின், மாறிகள் எதிர்மறைத் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்கிறோம். படம் *C*-ல் காட்டியுள்ளது போன்று புள்ளிகள் ஒழுங்கு முறையில்லாது பரவலாகச் சிதறி அமைந்திருப்பின், இரு மாறிகள் உறவு அற்றன என்கிறோம். படங்கள் *D*, *E*-ல் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் வளைகோடு ஒட்டுறவைக் (Curve Linear Correlation) குறிப்பிடுகின்றன.

மாறிகளின் ஒட்டுறவை அளவிடப் புள்ளியியல் பேரறிஞர் கார்ல் பியர்சன் (Karl Pearson) என்பவர் ஒட்டுறவுக் கெழு

சிதறல் விளக்கப்படங்கள்



படம் 7—1.



படம் 7—2.

என்னும் புள்ளியியல் அளவையை வரையறுத்துள்ளார். x, y-ன் n இணைந்த மதிப்புகள்,

$$x_1, \; y_1$$
$$x_2, \; y_2$$
$$x_3, \; y_3$$
$$x_4, \; y_4$$
$$\vdots \quad \vdots$$

x_n, y_n என்போம்.

x-ன் மதிப்புகளின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகிய மதிப்புகளை முறையே $\bar{x}$, s_x எனவும், y மதிப்புகளின் சராசரி திட்ட விலக்கம் ஆகிய மதிப்புகளை $\bar{y}$, s_y எனவும் குறிப்பிடுவோம். $\bar{x}$-லிருந்து x_i-ன் விலக்கம், $\bar{y}$-லிருந்து y_i-ன் விலக்கம் ஆகியு

வற்றின் பெருக்குத் தொகை $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ ஆகும் இவ் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் சராசரியை, x, y மாறிகளின் உடன்மாறுபாடு (Covariance) என அழைக்கிறோம். இதை C_{xy} எனக் குறிப்பிடும் போது, x, y மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு

$$C_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \quad (y_i - \bar{y})$$ ஆகும். இப்போது

x, y, மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r_{xy} = \frac{x, y \text{ மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு}}{(x\text{-ன் திட்ட விலக்கம்})(y\text{-ன் திட்ட விலக்கம்})}$$

$$= \frac{C_{xy}}{s_x \; s_y}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. இக்கெழுவின் மதிப்பு இடைவெளி $(-1, +1)$-ல் அமையும். ஒட்டுறவுக் கெழு r-ன் மதிப்பு $+1$ எனில், மாறிகள் 'நிறை நேரிடை ஒட்டுறவு, (Perfect positive correlation) கொண்டுள்ளன எனவும், $r = -1$ எனில், மாறிகள் நிறை எதிர்மறை ஒட்டுறவு (Perfect negative correlation) கொண்டுள்ளன எனவும், $r = 0$ எனில் மாறிகள் தொடர்பற்றன எனவும் விளக்கம் கூறுவோம். ஒட்டுறவுக் கெழு மிகை மதிப்பைப் (Positive value) பெறின், மாறிகள் நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன எனவும், அது குறை மதிப்பைப் (Negative value) பெறின் மாறிகள், எதிர் மறை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன எனவும் கருதுகிறோம். ஒட்டுறவுக் கெழுவின் தனி மதிப்பு (absolute value)

(i) இடைவெளி (0, 0.20)யில் அமையின், மாறிகள் புறக் கணிக்கத்தக்க உறவு (Negligible Relationship) கொண்டுள்ளன எனவும்,

(ii) இடைவெளி (0.20, 0.40)-ல் அமையின் மாறிகள் குறைந்த உறவு கொண்டுள்ளன எனவும்,

(iii) இடைவெளி(0.40, 0.70)-ல் அமையின் மாறிகள் கணிசமான உறவு (Substantial Relationship) கொண்டுள்ளன எனவும்,

(iv) இடைவெளி (0.70, 0.90)யில் அமையின் மாறிகள் மிகுதியான உறவு (High Correlation) கொண்டுள்ளன எனவும்,

(v) இடைவெளி (0.90, 1.00)-ல் அமையின் மாறிகள் பேரளவான உறவு (Very high correlation) கொண்டுள்ளன எனவும் விளக்கம் அளிக்கிறோம்.

கணக்கு 1 :

ஒரு பண்டத்தின் தேவை, விலை பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் 10 நாட்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நாள்	தேவை (அலகுகளில்)	விலை ரூ.
1	8	10
2	9	14
3	6	10
4	8	11
5	8	10
6	9	13
7	6	11
8	3	5
9	5	6
10	8	10

இம்மதிப்புகளைக் கொண்டு, பண்டத்தின் தேவை, விலை மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு கணக்கிடுக.

முறை :

பண்டத்தின் தேவை, விலை ஆகிய மாறிகளை முறையே x, y எனக் குறிப்பிடுவோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளைக் கொண்டு சராசரிகள் $\bar{x}$, $\bar{y}$, திட்ட விலக்கங்கள் s_x, s_y; உடன் மாறுபாடு C_{xy} ஆகியவைகளைக் கணக்கிட்டுப் பட்டியல் 7-2-ல் அமைப்போம்.

பட்டியல் 7-2.

	தேவை x (அலகுகளில்)	விலை y (ரு)	சராசரியிலிருந்து x-ன் விலகல் மதிப்பு	சராசரியிலிருந்து y-ன் விலகல் மதிப்பு	இணையான விலகல் மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகை $[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]$	x-விலகலின் வர்க்கம் $(x-\bar{x})^2$	y-விலகலின் வர்க்கம் $(y-\bar{y})^2$
	8	10	8—7= 1	10—10= 0	1× 0= 0	1	0
	9	14	9—7= 2	14—10= 4	2× 4= 8	4	16
	6	10	6—7= -1	10—10= 0	-1× 0= 0	1	0
	8	11	8—7= 1	11—10= 1	1× 1= 1	1	1
	8	10	8—7= 1	10—10= 0	1× 0= 0	1	0
	9	13	9—7= 2	13—10= 3	2× 3= 6	4	9
	6	11	6—7= -1	11—10= 1	-1× 1= -1	1	1
	3	5	3—7= -4	5—10= -5	-4×-5= 20	16	25
	5	6	5—7= -2	6—10= -4	-2×-4= 8	4	16
	8	10	8—7= 1	10—10= 0	1× 0= 0	1	0
மொத்தம்	70	100	...	...	44	34	68

இப்போது பட்டியல் 7.2-லிருந்து கீழ்க்கண்டவைகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{70}{10} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{100}{10} = 10$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{34}{10}} = 1{\cdot}84$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{68}{10}} = 2{\cdot}61$$

$$Cxy = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \frac{42}{10} = 4{\cdot}2$$

ஆகவே x, y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{s_x\, s_y} = \frac{4{\cdot}2}{1{\cdot}84 \times 2{\cdot}61} = 0{\cdot}87$$ ஆகும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து பண்டத்தின் தேவை, விலை, ஆகிய இணைமாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·87 என்கிறோம். இம் மதிப்பிலிருந்து மாறிகள் மிகுதியான நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன எனக் கூறுகிறோம். அதாவது

பண்டத்தின் தேவை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, அதற்கேற்றாற் போல் அதன் விலையும் அதிகரித்தும், தேவை குறையக் குறைய அதன் விலையும் ஏற்றவாறு குறைந்தும் அமைகின்றன என விளக்கம் பெறுகிறோம்.

மேலே எடுத்துக்கொண்ட கணக்கில் திட்ட விலக்கங்கள் s_x, s_y, உடன் மாற்றம் Cxy ஆகியவைகளைப் பட்டியல் 7–3–ல் உள்ள மதிப்புகள் வாயிலாகக் கணக்கிட்டு ஒட்டுறவுக் கெழுவை எளிதாகப் பெறலாம்.

பட்டியல் 7–3.

x	y	xy	x^2	y^2
8	10	80	64	100
9	14	126	81	196
6	10	60	36	100
8	11	88	64	121
8	10	80	64	100
9	13	117	81	169
6	11	66	36	121
3	5	15	9	25
5	6	30	25	36
8	10	80	64	100
70	100	742	524	1068
Σx	Σy	Σxy	Σx^2	Σy^2

ஆகவே;

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70}{10} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{100}{10} = 10$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}(x - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{524}{10} - 7^2}$$

$$= \sqrt{3 \cdot 40} = 1 \cdot 84$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1068}{10} - 10^2}$$

$$= \sqrt{6 \cdot 80} = 2 \cdot 61.$$

$$Cxy = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{742}{10} - 7 \times 10 = 4 \cdot 20 .$$

இப்போது,

$$r_{xy} = \frac{Cxy}{s_x s_y}$$

$$= \frac{4 \cdot 20}{1 \cdot 84 \times 2 \cdot 61} = 0 \cdot 87 .$$

கணக்கு 2 :

உருக்கு இரும்பு உற்பத்தி, விலை ஆகியவைகளின் புள்ளி விவரங்கள் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

உற்பத்தி (டன்களில்)	விலை (ரூபாய்களில்)
245	120
240	150
220	130
220	170
215	180

முறை:

இரும்பு உற்பத்தி, விலை ஆகிய மாறிகளை முறையே x, y எனக் குறிப்பிடுவோம். கொடுக்கப்பட்ட ஐந்து இணை மதிப்புக்களைக் கொண்டு சராசரிகளை $\bar{x}$, $\bar{y}$, கூறு திட்ட விலக்கங்கள் s_x, s_y, உடன் மாற்றம் Cxy, ஆகியவைகளைக் கணக்கிடத் தேவையான மதிப்புகளைப் பட்டியல் 7–4-ல் அமைப்போம்.

பட்டியல் 7-4.

	உற்பத்தி x	விலை y	x^2	y^2	xy
	245	120	60025	14400	29400
	240	150	57600	22500	36000
	220	130	48400	16900	28600
	220	170	48400	28900	37400
	215	180	46225	32400	38700
மொத்தம்	1140	750	260650	115100	170100

பட்டியல் 7–4-ல் பெறப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டு,

$$\bar{x} = \frac{1140}{5} = 228.$$

$$\bar{y} = \frac{750}{5} = 150$$

$$s_x = \sqrt{\frac{260650}{5} - (228)^2} = \sqrt{146}$$

$$= 12.08$$

$$s_y = \sqrt{\frac{115100}{5} - (150)^2} = \sqrt{520}$$

$$= 22.80$$

$$Cxy = \frac{170100}{5} - (228)(150)$$

$$= 34020 - 34200 = -180.0$$

ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

∴ ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு

$$r_{xy} = \frac{Cxy}{s_x s_y}$$

$$= \frac{-180}{(12.08)(22.80)}$$

$$= -0.65$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து இரும்பு உற்பத்தி, விலை ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு -0.65 என்கிறோம். இம்மதிப்பிலிருந்து, இரு மாறிகளும் கணிசமான எதிரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன என்கிறோம். அதாவது உற்பத்தி அதிகரிக்கும் போது விலை குறைந்தும், உற்பத்தி குறையும் போது விலை அதிகரித்தும் அமைகின்றன என விளக்கம் பெறுகிறோம்.

எளிய முறை:

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட 5 இணை மதிப்புகள் வாயிலாக இரும்பு உற்பத்தி, விலை ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பைக் கீழ்க்காணும் எளிய முறையில் கணக்கிடுகிறோம்.

x, y மாறி மதிப்புகளை

முறையே $u = \frac{x-200}{5}$, $v = \frac{y-100}{10}$

எனும் உருமாறிய மதிப்புகளாக அமைத்து u, v மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 7–5.

	x	y	u	v	u^2	v^2	uv
	245	120	9	2	81	4	18
	240	150	8	5	64	25	40
	220	130	4	3	16	9	12
	220	170	4	7	16	49	28
	215	180	3	8	9	64	24
மொத்தம்	—	—	28	25	186	151	122

இப்போது,

பட்டியல் 7–5–ன் வாயிலாக

$$\bar{u} = \frac{28}{5}$$

$$= 5{\cdot}6$$

$$\bar{v} = \frac{25}{5}$$

$$= 5{\cdot}0$$

$$s^2_u = \frac{186}{5} - (5{\cdot}6)^2$$

$$= 5{\cdot}84$$

$$s_u = \sqrt{5 \cdot 84}$$

$$= 2 \cdot 42$$

$$S^2_v = \frac{151}{5} - (5 \cdot 0)^2$$

$$= 5 \cdot 20$$

$$s_v = \sqrt{5 \cdot 20}$$

$$= 2 \cdot 28$$

$$C_{uv} = \frac{122}{5} - (5 \cdot 6)\ (5.0)$$

$$= -\ 3 \cdot 60$$

$$r_{uv} = \frac{C_{uv}}{s_u\ s_v}$$

$$= \frac{-\ 3 \cdot 60}{(2 \cdot 42)\ \ (2 \cdot 48)}$$

$$= -\ 0 \cdot 65.$$

எனவே, உரு மாறிய u, v மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிட்ட ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பு

$r_{uv} = -\ 0 \cdot 65$ ஆகும்.

இம்மதிப்பானது கொடுக்கப்பட்ட x, y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்புக்குச் சமமாக அமைகிறது. x, y மாறிகளை உருமாற்றி,

$$u = \frac{x - a}{c}$$

$$v = \frac{y - b}{d}$$

(a, b, c, d நிலை எண்கள்) மாறிகளாக அமைக்கும்போது u, v ஆகிய இணை மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பும் x, y ஆகிய இணைமாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பும் சமமாகும் என்பது கணக்கியல் முறைப்படி நிறுவப்பட்டுள்ள தேற்றமாகும். நிலை எண்கள் a, b, c, d-களை ஏற்றவாறு எடுத்துக்கொள்ளும்போது, x, y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பை உருமாற்றிய மாறிகள் u, v வாயிலாக எளிதான முறையில் பெறுகிறோம்.

இரு மாறி அலைவுப் பட்டியல்

ஒட்டுறவை ஆய்வதற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாய் இருப்பின், மாறிகளின் மதிப்புகளைப் பாகு படுத்தி அலைவுப்பட்டியல் அமைப்பது இன்றியமையாததாகும். ஒவ்வொரு மாறியின் மதிப்புகளுக்கும் ஏற்றதான பிரிவு இடைவெளிகளை அமைக்கிறோம். ஒரு மாறியின் பிரிவு இடைவெளிகளை நிரை (Rows)களாகவும், மற்ற மாறியின் இடைவெளிகளை நிரல்களாகவும் (Column) கொண்ட ஓர் இருவழிப் பட்டியல் (Two way Table) எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம். கூறு உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் அதன் இணை மதிப்புகளுக்கு உரியதான, பட்டியல் அறை (Cell) யில் பாகுபடுத்தி ஒவ்வொரு பட்டியல் அறையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை, அதாவது அலைவெண் மதிப்பைப் பெறுகிறோம். இவ்வாறு அமைத்த பட்டியலை இரு மாறி அலைவுப் பட்டியல் (Bivariate frequency table) என அழைக்கின்றோம்.

இப்போது, பட்டியல் 7-1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 30 மாணவர்களின் உயரம், எடை ஆகிய புள்ளி விவரங்களை அவைகளுக்கேற்ற இருமாறி அலைவுப் பட்டியலில் அமைப்பதைப் பற்றிக் காண்போம். முதலில் கொடுக்கப்பட்ட உயர மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளிகள், 60—61, 62—63, 64—65 66—67, 68—69 எனவும், எடை மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளிகள், 100—109, 110—119, 120—129, 130—139 எனவும் எடுத்துக்கொண்டு, உயரமாறி இடைவெளிகளை நிரைகளாகவும், எடைமாறி இடைவெளிகளை நிரல்களாகவும் கொண்ட பட்டியல் ஒன்றை (7-6)-ல் அமைப்போம். இப்பட்டியலில் ஐந்து நிரைகளும், நான்கு நிரல்களும் ஒன்று சேர்ந்து (5 × 4 = 20) இருபது அறைகளை (Cells) ஏற்படுத்துகின்றன. ஒவ்வோர் அறையும், உயரமாறி இடைவெளிகளில் ஒன்றையும், எடை மாறி இடைவெளிகளில் ஒன்றையும் குறிப்பிடும்படியாக அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, நான்காவது நிரையிலும், மூன்றாவது நிரலிலும் அமைந்

துள்ள அறையானது, உயர மாறி இடைவெளி 66—67 ஐயும், எடை மாறி இடைவெளி 120—129-யையும் குறிப்பிடுகின்றன.

பட்டியல் 7–6.

எடை → / உயரம் ↓	100 — 109	110 — 119	120 — 129	130 — 139	கூட்டுத் தொகை
60 — 61	ǀ 1	ǀ 1			2
62 — 63	ǀǀ 2	卌 5	ǀǀǀ 3		10
64 — 65		卌ǀ 6	ǀǀǀ 3	ǀ 1	10
66 — 67			ǀǀǀǀ 4	ǀǀ 2	6
68 — 69				ǀǀ 2	2
கூட்டுத் தொகை	3	12	10	5	30

முதல் நபரின் உயர மதிப்பான 66 பிரிவு இடைவெளி (66 — 67)லும், அந்நபரின் எடை மதிப்பான 125 பிரிவு இடைவெளி, 120 — 129-லும் அடங்கியிருப்பதால் இவ்விரு இடைவெளிகளைக் குறிப்பிடும் அறையில், அதாவது பட்டியலின் நான்காவது நிரையிலும் மூன்ருவது நிரலிலும் அமைந்துள்ள அறையில், ஓர் அலைவெண் குறி (Tally mark) யைக் குறிக்கிருேம். இவ்வாறே ஒவ்வொரு நபரின் உயரம், எடை ஆகிய இணை மதிப்புகள் உள்ளடங்கும் பிரிவு இடைவெளிகளுக்குப் பொருத்தமான அறையில் அலைவெண் குறியைக் குறிக்கிருேம். பிறகு, ஒவ்வோர் அறையில் உள்ள அலைவெண்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுகிருேம். இதை அறையின் அலைவெண் (Cell frequency) என்கிருேம். பட்டியலின் மூன்ருவது நிரையிலும், இரண்டாவது நிரலிலும் அமைந்துள்ள அறையின் அலைவெண் 6 ஆகும். இவ்வலைவெண் கொடுக்கப்

பட்ட 30 நபர்களில், 6 நபர்களின் உயரம், எடை மதிப்புகள் உயரமாறி இடைவெளி 66 — 67, எடைமாறி இடைவெளி 110 — 119 ஆகியவைகளைக் குறிப்பிடும் பட்டியல் அறையில் உள்ளடங்கி அமைவதைக் குறிப்பிடுகிறது. இதுபோன்று ஒவ்வோர் அறையின் அலைவெண்ணும், அவ்வறை குறிப்பிடும் இடைவெளிகளில் உள்ளடங்கிய உயரம், எடை மதிப்புகளைக் கொண்ட நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகும். பட்டியல் 7–1–ல் கொடுக்கப்பட்ட 30 நபர்களின் உயர, எடை மதிப்புகளுக்கு ஏற்றதாக அமைத்த இருமாறி அலைவுப் பட்டியலானது பட்டியல் 7-6-ல் இடம் பெறுகிறது. இப்போது இப் பட்டியலில் முதல் நிரையில் அமைந்துள்ள அறைகளது அலைவெண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம். இக்கூட்டுத் தொகையான 2 எனும் நிலையெண், கொடுக்கப்பட்டுள்ள 30 நபர்களில் இருவரின் உயர மதிப்புகள், இடைவெளி 60- 61–ன் அலைவெண்ணாக அமைகிறது. இது போன்று ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள அறைகளின் அலைவெண்களின் கூட்டுத்தொகை, அந்நிரை குறிப்பிடும் உயர மாறி இடைவெளியில், அடங்கியுள்ள அலைவெண்ணாக அமையும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட 30 நபர்களின் உயர மதிப்புகளுக்கான அலைவுப் பட்டியல் பின் வருமாறு :

பட்டியல் 7-7.

உயரம் பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை
60 — 61	2
62 — 63	10
64 — 65	10
66 — 67	6
68 — 69	2
மொத்தம்	30

பட்டியலில் ஒவ்வொரு நிரலிலுள்ள அறைகளது அலை வெண்களின் கூட்டுத்தொகை, அந்நிரல் குறிப்பிடும் எடை மாறி இடைவெளியில் உள்ளடங்கும் அலைவெண்ணாக அமைகிறது. கொடுக்கப்பட்ட 30 நபர்களின் எடை மதிப்புக்கான அலைவுப் பட்டியல்பின்வருமாறு :

பட்டியல் 7-8.

எடை பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை
100 — 109	3
110 — 119	12
120 — 129	10
130 — 139	5
மொத்தம்	30

இப்போதுஇரு மாறி அலைவுப் பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுக் கணக்கிடும் முறைபற்றி காண்போம். X மாறியின் K பிரிவு இடைவெளிகள் அலைவுப் பட்டியலின் நிரைகளையும், Y மாறியின் l பிரிவு இடைவெளிகள், பட்டியலின் நிரல்களையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். நிரை இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை $X_1, X_2 \ldots X_k$ எனவும், நிரல் இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளை $Y_1, Y_2 \ldots Y_l$ எனவும் கொள்வோம். அப்போது i நிரையிலும் j நிரலிலும் அமைந்துள்ள அறையானது $X = X_i$, $Y = Y_j$ ஆகிய மதிப்புகளைக் குறிப்பிடுகிறது என்போம். இவ்வறையின் அலைவெண் மதிப்பை f_{ij} எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு $i = 1, 2 \ldots k$; $j = 1, 2 \ldots l$ ஆகும். இப்போது X, Y மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு (Covariance) வாய்பாடு

$$C_{xy} = \frac{1}{N} \sum_j \sum_i f_{ij} (X_i - \overline{X})(Y_j - \overline{Y})$$

என அமைகிறது. இங்கு அலேவுப் பட்டியலின் மொத்த அலே வெண்களை N எனும் குறியீடும் X, Y மாறிகளின் சராசரியை முறையே $\bar{X}$, $\bar{Y}$ எனும் குறியீடுகளும் குறிக்கின்றன.

i நிரையில் இடம் பெறும் அறைகளின் அலேவெண்களின் கூட்டுத் தொகையை

$$\sum_{j} f_{ij} = p_i,\ i = 1, 2 \ldots k$$

எனவும், j நிரலில் இடம்பெறும் அறைகளது அலேவெண்களின் கூட்டுத்தொகையை

$$\Sigma f_{ij} = q_j,\ j = 1, 2 \ldots l$$

எனவும் குறிப்பிடும்போது X, Y மாறிகளின் அலேவுப்பரவல்கள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன.

பட்டியல் 7-9.

X மாறியின், பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு	அலே வெண்	Y மாறியின், பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு	அலே வெண்
X_1	p_1	Y_1	q_1
X_2	p_2	Y_2	q_2
X_3	p_3	Y_3	q_3
⋮	⋮	⋮	⋮
X_k	p_k	Yl	ql
மொத்தம்	N	மொத்தம்	N

இப்பரவல்களிலிருந்து X, Y மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களைப் பெறுகிறோம்.

$$X\text{-ன் திட்ட விலக்கம்} = s_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum p_i (X_i - \overline{X})^2}$$

$$Y\text{-ன் திட்ட விலக்கம்} = s_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum q_j (Y_j - \overline{Y})^2}$$

இப்போது X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r_{xy} = \frac{X, Y \text{ மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு}}{(X\text{-ன் திட்ட விலக்கம்})\ (Y\text{-ன் திட்ட விலக்கம்})}$$

$$= \frac{C_{xy}}{s_x\ s_y} = \frac{\frac{1}{N}\sum_i \sum_j f_{ij} (X_i - \overline{X})(Y_j - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum p_i (X_i - \overline{X})^2}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum q_j (Y_j - \overline{Y})^2}}$$

ஆகும்.

எளிய முறையில் ஒட்டுறவுக்கெழுவைக் கணக்கிட கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறி மதிப்புகளை உருமாற்றி

$$U = \frac{X - a}{C}\ ;\ V = \frac{Y - b}{d} \text{ என அமைப்போம்.}$$

a, b, c, d ஆகிய நிலையெண்களைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள X, Y மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற வகையில் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$X_i\text{-க்கு இணையான மதிப்பு} = U_i = \frac{Xi - a}{b},$$

$$i = 1, 2 \ldots \ldots K.$$

$$Y_i \text{ க்கு இணையான மதிப்பு} = V_j\ i = \frac{Y_j - b}{d},$$

$$j = 1, 2 \ldots \ldots l$$

இப்போது,

U, V மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r_{uv} = \frac{\frac{1}{N}\sum\sum f_{ij}(U_i - \overline{U})(V_j - \overline{V})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum p_i (U_i - \overline{U})^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum q_j (V_j - \overline{V})^2}}$$

ஆகும்.

உருமாறிய U, V ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவான r_{uv}-ன் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்ட X, Y-ன் மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பாக அமைகிறது. நடை முறையில் U, V மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு, U—ன் திட்டவிலக்கம், V-ன் திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளைக் கீழ்க்காணும் வாய்பாடுகள் கொண்டு எளிதாகக் கணக்கிடுகிறோம்.

U V மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு $= Cuv$

$$= \frac{1}{N}\sum_i\sum_j f_{ij}\ U_i\ V_j - \overline{U}\ \overline{V}$$

U—ன் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{1}{N}\sum p_i\ U_i^2 - \overline{U}^2}$

V-ன் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{1}{N}\sum q_j\ V_j^2 - \overline{V}^2}$

கணக்கு :

பட்டியல் 7-6—ல் இடம்பெறும் இருமாறி அலைவுப்பரவல் கொண்டு 30 நபர்களின் உயரம், எடை ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

முறை :

உயரத்தை X மாறி, எடையை Y மாறி ஆகியவற்றைக் கொண்டு குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது X மாறியின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகள் 60·5, 62·5, 64·5, 66·5, 68·5 ஆகவும், Y மாறியின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகள் 104·5, 114·5, 124·5, 134·5 ஆகவும் அமைகின்றன. x மாறியை உருமாற்றி, $U = \frac{X - 60{\cdot}5}{2}$ என எடுத்துக் கொள்ளும்போது, X மாறியின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகளுக்கு இணையான உருமாறிய U மாறி மதிப்புகள்

பட்டியல் 7–10.

	V	0	1	2	3	
U	X \ Y	100—109	110—119	120—129	130—139	மொத்த அலைவெண்
0	60—61	1 (0)	1 (0)			2
1	62—63	2 (0)	5 (1)	3 (2)		10
2	64—65		6 (2)	3 (4)	1 (6)	10
3	66—67			4 (6)	2 (9)	6
4	68—69				2 (12)	2
மொத்த அலைவெண்		3	12	10	5	30

முறையே 0, 1, 2, 3, 4 ஆகவும், Y மாறியை உருமாற்றி $V = \frac{Y - 104 \cdot 5}{10}$ என எடுத்துக்கொள்ளும்போது, Y மாறியின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகளுக்கு இணையான உருமாறிய V மாறி மதிப்புகள் முறையே 0, 1, 2, 3 ஆகவும் அமைகின்றன.

இப்போது U, V மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரி, திட்ட விலக்க மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\bar{U} = \frac{56}{30} = 1 \cdot 87 \;;$$

$$s_u^2 = \frac{136}{30} - (1\ 87)^2 = 1 \cdot 0364$$

$$s_u = \sqrt{1\ 0364} = 1 \cdot 02$$

U மாறி அலைவுப் பரவல்

பட்டியல் 7-11.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு U_i	அலைவெண் p_i	$p_i U_i$	$p_i U_i^2$
0	2	0	0
1	10	10	10
2	10	20	40
3	6	18	54
4	2	8	32
மொத்தம்	30	56	136

V மாறியின் அலைவுப் பரவல்

பட்டியல் 7-12.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு V_j	அலைவெண் q_j	$q_j V_j$	$q_j V_j^2$
0	3	0	0
1	12	12	12
2	10	20	40
3	5	15	45
மொத்தம்	30	47	97

$$\bar{v} = \frac{47}{30} = 1{\cdot}57$$

$$s^2_v = \frac{97}{30} - (1{\cdot}57)^2 = 0{\cdot}7684$$

$$s_v = \sqrt{0{\cdot}7684} = 0.88$$

அடுத்தபடியாக U, V மாறிகளின் உடன் மாறுபாட்டின் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடுகிறோம்.

பட்டியல் 7.10-ல் காட்டியவாறு ஒவ்வொரு அறையின் U, V மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையை கணக்கிட்டு அவ் வறையின் வலது கீழ்ப்புற மூலையில் அடைப்புக்களில் குறித்துக் கொள்ளுகிறோம். பிறகு இப்பெருக்குத் தொகையை, அறையின் அலைவெண் மதிப்புகொண்டு பெருக்கி, எல்லா அறைகளுக்கான கூட்டுத்தொகையான $\sum\Sigma fij\ Ui\ Vj$ஐப் பெறுகிறோம். இங்கு $\sum\Sigma fij\ Ui\ Vj = (1\times0) + (1\times0)+(2\times0) + (5\times1) + (3\times2) + (6\times2) + (3\times4) + (1\times6) + (4\times6) + (2\times9)+(2\times12) = 107$

இப்போது,

U, V மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு

$$C_{u,v} = \frac{1}{N}\sum\Sigma f_{ij}\,U_i\,V_j - \overline{U}\ \overline{V}$$

$$= \frac{107}{30} - (1 \cdot 87)\ (1 \cdot 57) = 0 \cdot 6308.$$

ஆகவே U, V மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r_{u,v} = \frac{C_{uv}}{s_u\,s_v} = \frac{0 \cdot 6308}{(1 \cdot 02)\ (0 \cdot 88)} = 0 \cdot 70$$

எனவே X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு $r_{xy} = 0 \cdot 70$ என்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து, நபர்களின் உயரம், எடை ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பு 0·70 ஆகும். இம்மதிப்பிலிருந்து மாறிகள் மிகுதியான நேரிடை உறவு கொண்டுள்ளன என்கிறோம்.

கணக்கு :

100 மாணவர்கள் புள்ளியியல், நிலயியல் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக

முறை : புள்ளியியல் தேர்வு மதிப்பெண்களை x மாறி, நிலயியல் தேர்வு மதிப்பெண்களை y மாறி ஆகியவைகளைக்

பட்டியல் 7-13.

நிலயியல் → / புள்ளியியல் ↓	25—35	35—45	45—55	55—65	மொத்தம்
0—20		2	5		7
20—40	1	4	1	2	8
40—60	4	10	13	5	32
60—80	2	15	18	4	39
80—100	4	4	6		14
மொத்தம்	11	35	43	11	100

பட்டியல் 7-14.

V → / U ↓	—2	—1	0	1	மொத்த அலைவெண்
—2		2 (2)	5 (0)		7
—1	1 (2)	4 (1)	1 (0)	2 (—1)	8
0	4 (0)	10 (0)	13 (0)	5 (0)	32
1	2 (—2)	15 (—1)	18 (0)	4 (1)	39
2	4 (—4)	4 (—2)	6 (0)		14
மொத்த அலைவெண்	11	35	43	11	100

கொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது x மாறிப் பிரிவு மைய மதிப்புகள் 10, 30, 50, 70, 90; y மாறிப்பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகள் 30, 40, 50, 60 ஆக அமைகின்றன. x மாறியை உரு மாற்றி $U=\frac{x-50}{20}$ என எடுத்துக்கொள்ளும்போது x மாறி பிரிவு இடைவெளி, மைய மதிப்புகளின் உருமாறிய மதிப்புகள் முறையே -2, -1, 0, 1, 2 ஆகவும், y மாறியை உருமாற்றி $V=\frac{y-50}{10}$ என எடுத்துக்கொள்ளும்போது, y மாறி பிரிவு இடைவெளி, மைய மதிப்புகளின் உருமாறிய மதிப்புகள் முறையே -2, -1, 0, 1 ஆகவும் அமைகின்றன.

இப்போது U, V மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரி, திட்ட விலக்க மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவோம்.

U மாறி அலைவுப் பரவல்

பட்டியல் 7-15.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிபபு	அலைவெண் p	pu	pu^2
-2	7	-14	28
-1	8	-8	8
0	32	0	0
1	39	39	39
2	14	28	56
மொத்தம்	100	45	131

$$\bar{U} = \frac{45}{100} = 0{\cdot}45$$

$$s^2_u = \frac{131}{100} - (0{\cdot}45)^2$$

$$= 1{\cdot}1075$$

$$s_u = \sqrt{1{\cdot}1075} = 1{\cdot}05$$

V மாறி அலைவுப்பரவல்

பட்டியல் 7–15.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு : V	அலைவெண் q	qV	qV^2
−2	11	−22	44
−1	35	−35	3ς
0	43	0	0
1	11	11	11
மொத்தம்	100	−46	90

$$\overline{V} = \frac{-46}{100} = -0{\cdot}46$$

$$s^2_v = \frac{90}{100} - \left(\frac{-46}{100}\right)^2 = \frac{90}{100} - (-0{\cdot}46)^2$$

$$= 0{\cdot}6884$$

$$s_v = \sqrt{0{\cdot}6884} = 0{\cdot}83.$$

அடுத்தபடியாக அலைவுப்பட்டியலின் ஒவ்வோர் அறையின் U, V மதிப்புகளின் பெருக்குத்தொகை கணக்கிட்டு அவ்வறையின் வலதுகீழ்ப்புற மூலையில் அடைப்புகளில் குறித்துக்கொள்கிறோம். (பட்டியம் 7.14) பிறகு இப்பெருக்குத் தொகையை அறையின் அலைவெண் மதிப்பு கொண்டு பெருக்கி எல்லா அறைகளுக்கான கூட்டுத்தொகை $\sum\sum f_{ij}\, U_i V_j$ஐப் பெறுகிறோம்.

இங்கு

$\sum \sum f_{ij}\; U_i\; V_j = (2\times2) + (5\times0) + (1\times2) + (4\times1) + (1\times0) + (2\times-1) + (4\times0) + (10\times0) + (13\times0) + (5\times0) + (2\times-2) + (15\times-1) + (18\times0) + (4\times1) + (4\times-4) + (4\times-2) + (6\times0) = -31.$

எனவே, u, v மாறிகளின் உடன் வேறுபாடு

$$C_{uv} = \frac{I}{N} \sum \sum f_{ij} U_i V_j - \bar{u}\,\bar{v}$$

$$= \frac{-31}{100} - (0{\cdot}45)\,(-0{\cdot}46)$$

$$= -0{\cdot}103$$

இப்போது U, V மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r_{uv} = \frac{C_{uv}}{s_{uv}}$$

$$= \frac{-0{\cdot}103}{(1{\cdot}05)(0{\cdot}83)}$$

$$= -0{\cdot}11$$

$\therefore\ r_{xy} = -0{\cdot}11$ ஆக அமையும்.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்ட ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பு $-0{\cdot}11$ ஆகும். இம் மதிப்பிலிருந்து x, y மாறிகள் புறக்கணிக்கத்தக்க உறவு (Negligible relationship) கொண்டுள்ளன என்கிறோம். அதாவது மாணவர்கள் புள்ளியியல் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களும், நிலயியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் குறிப்பிடத்தக்க அளவு தொடர்பு ஏதும் கொண்டிருக்கவில்லையென விளக்கம் கூறுகிறோம்.

(2) தர ஒட்டுறவு (Rank Correlation)

இரு மாறிகள் பெறும் இணையான மதிப்புகளைக்கொண்டு மாறிகளின் தொடர்பை அறிய ஒட்டுறவுக்கெழு பயனுறுவது பற்றி கண்டோம். மாறிகளின் மதிப்புகளைப் பெற இயலாத விடத்து, ஆனால் பண்பின் விவரங்கள் (qualitative data) பெறக்கூடிய சமயங்களில் அம்மாறிகளின் தொடர்பை அளவிட "தர ஒட்டுறவு" (Rank correlation method) துணை புரிகிறது.

பேசும் திறமை, பாடும் திறமை, அழகு முதலிய பண்பின் மாறிகளைக்கொண்டு கூறு உறுப்புகளைத் தரவாரியாக வரிசைப்படுத்தியுள்ளபோது, மாறிகளின் தொடர்பை அளவிடத் தர ஒட்டுறவுக்கெழு (Rank correlation coefficient) ஏதுவாக உள்ளது.

ஒரு கூறில் N உறுப்புகள் உள்ளன என்போம். இவ்வுறுப்புகளை X, Y ஆகிய இரு பண்புகள் குறித்து வரிசைப்படுத்தும் போது பெற்ற தர மதிப்புகள் அடுத்த பக்கத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 7-17

உறுப்பு	தர மதிப்புகள் பண்பு X	பண்பு Y
1	R_1	S_1
2	R_2	S_2
3	R_3	S_3
:	:	:
i	R_i	S_i
:	:	:
N	R_N	S_N

இப்போது உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றின் X பண்பு குறித்துப் பெற்ற தர மதிப்பு, Y பண்பு குறித்துப்பெற்ற தரமதிப்பு ஆகியவைகளின் வேறுபாட்டை (difference) $d_1, d_2, d_3, \ldots d_i, \ldots d_n$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

பட்டியல் 7-18

உறுப்பு	தர மதிப்புகளின் வேறுபாடு
1	$d_1 = R_1 - S_1$
2	$d_2 = R_2 - S_2$
3	$d_3 = R_3 - S_3$
:	: :
i	$d_i = R_i - S_i$
:	: :
N	$d_N = R_N - S_N$

X, Y மாறிகளின் தொடர்பை அளவிடக் கையாளப்படும் தர ஒட்டுறவுக்கெழுவை

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{1}^{n} d_i^2}{N(N^2-1)}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

கணக்கு :

பாடும் திறமை, ஓவியம் தீட்டும் திறமை ஆகியவைகளைப் பொறுத்து 8 நபர்கள் தரவாரியாக வரிசைப் படுத்தப்பட்ட போது, பெற்ற புள்ளி விவரங்கள் பின்வருமாறு :

பட்டியல் 7-19

நபர்	தர மதிப்புகள்	
	பாடும் திறமை	ஓவியம் தீட்டும் திறமை
A	3	4
B	6	1
C	1	3
D	5	6
E	8	2
F	2	5
G	7	8
H	4	7

இவ்விவரங்களைக்கொண்டு தர ஒட்டுறவுக்கெழுவின் அடிப்படையில் பண்புகளின் தொடர்பை ஆய்க.

முறை : 8 நபர்களுள் ஒவ்வொரு நபரின் பாடும்திறமை, ஓவியம் தீட்டும் திறமை ஆகியவைகளுக்கான தரமதிப்புகளின் வேறுபாட்டைக் கணக்கிட்டு, தர ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 7-20.

நபர்	தர மதிப்புகளின் வேறுபாடு : d	d^2
A	$3-4=-1$	1
B	$6-1=5$	25
C	$1-3=-2$	4
D	$5-6=-1$	1
E	$8-2=6$	36
F	$2-5=-3$	9
G	$7-8=-1$	1
H	$4-7=-3$	9
மொத்தம்		86

இங்குக் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $N=8$

$$\text{தர ஒட்டுறவுக்கெழு} = P = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(86)}{8(63)} = -0{\cdot}02.$$

இத் தர ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பு கொண்டு, நபர்களின் பாடும் திறமை, ஓவியம் வரையும் திறமை ஆகிய இரு பண்புகளும் தொடர்பற்றன என பொருள் விளக்கம் பெறுகிறோம்.

கணக்கு : ஒரு தேயிலைத் தூள் தயார் செய்யும் நிறுவனம் நடத்திய போட்டியில் பங்கெடுத்த X, Y என்ற இரு நபர்கள், 10 வகை தேயிலைத்தூள்களுக்கு அளித்த தர மதிப்புகளும், அந்த 10 வகை தேயிலைத் தூள்களின் உண்மையான தர மதிப்புகளும் அடுத்து வரும் அட்டவணையில் இடம்பெறுகின்றன.

பட்டியல் 7-21.

தேயிலைத்தூள்களின் உண்மையான தரமதிப்பு	நபர் X அளித்த தரமதிப்பு	நபர் Y அளித்த தர மதிப்பு
1	3	6
2	10	2
3	7	1
4	2	3
5	8	9
6	5	4
7	6	5
8	9	7
9	1	10
10	4	8

இப்புள்ளி விவரங்களைக்கொண்டு நபர்களின் தேயிலைத் தூள் வகைகளைத் தரப்படுத்தும் திறமையைக் குறித்து ஆராய்க.

முறை : நபர் X-ன் தர மதிப்புகள், தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகள் ஆகியவைகளின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், நபர் Y-ன் தர மதிப்புகள், தேயிலைவகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகள் ஆகியவற்றின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் கணக்கிடுகிறோம்.

நபர் X-ன் தர மதிப்புகள், தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகள் ஆகியவைகளுக்கிடையேயான தர ஒட்டுறவுக்கெழு

$$=P_X=1-\frac{6\,(185)}{99\times 10} = -0{\cdot}21.$$

நபர் Y-ன் தர மதிப்புகள், தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகள் ஆகிய இவைகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு

$$=P_y=1-\frac{6\,(60)}{10\times 99} =0{\cdot}64$$

தர ஒட்டுறவுக்கெழு $P_x= -0{\cdot}21$ ஆனது X-ன் தர மதிப்புகளும் தேயிலைவகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகளும் குறைந்த

பட்டியல் 7-22.

நபர் X-ன் தர மதிப்பு, கூறுகளின் உண்மையான தர மதிப்பு ஆகியவைகளின் வேறுபாட்டு வர்க்கம் d^2	நபர் Y-ன் தர மதிப்பு கூறுகளின் உண்மையான தர மதிப்பு ஆகியவைகளின் வேறுபாட்டு வர்க்கம் d^2
$(1-3)^2=4$	$(1-6)^2=25$
$(2-10)^2=64$	$(2-2)^2=0$
$(3-7)^2=16$	$(3-1)^2=4$
$(4-2)^2=4$	$(4-3)^2=1$
$(5-8)^2=9$	$(5-9)^2=16$
$(6-5)^2=1$	$(6-4)^2=4$
$(7-6)^2=1$	$(7-5)^2=4$
$(8-9)^2=1$	$(8-7)^2=1$
$(9-1)^2=64$	$(9-10)^2=1$
$(10-4)^2=36$	$(10-8)^2=4$
மொத்தம் 200	60

அளவில் எதிரிடையான உறவு கொண்டுள்ளது என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே, தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகளும், நபர் X தரப்படுத்திய தர மதிப்புகளும் குறைந்த அளவில் ஒன்றுக்கொன்று எதிரிடையாக வேறுபட்டுள்ளன என முடிவு செய்யலாம்.

தர ஒட்டுறவுக்கெழு $P_y=0{\cdot}64$ ஆனது Y-ன் தரமதிப்புகளும், தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகளும் கணிசமான அளவில் நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளது என்பதைக் குறிக்கிறது. அதாவது தேயிலை வகைகளின் உண்மையான தர மதிப்புகளும், நபர் Y தரப்படுத்திய மதிப்புகளும் கணிசமான அளவுக்கு ஒன்றுடன் ஒன்று நெருங்கியுள்ளன என முடிவு செய்யலாம்.

இப்போது மாறிகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், இம்மதிப்புகளுக்கு இணையான தர மதிப்புகளைப் பெற்று

பட்டியல் 7 — 23.

மாணவர்	மதிப்பெண்கள்	
	தமிழ்	கணிதம்
A	65	93
B	50	75
C	62	65
D	40	50
E	70	80

பட்டியல் 7 — 24.

மாணவர்	மதிப்பெண்கள்		தர மதிப்புகள்		தர மதிப்புகளின் வேறுபாட்டு வர்க்கம்
	தமிழ்	கணிதம்	தமிழ்	கணிதம்	
1	65	93	2	1	$(2-1)^2 = 1$
2	50	75	3	3	$(3-3)^2 = 0$
3	62	65	3	4	$(3-4)^2 = 1$
4	40	50	5	5	$(5-5)^2 = 0$
5	70	80	1	3	$(1-3)^2 = 4$
மொத்தம்	—	—	—	—	6

அத்தர மதிப்புகளின் அடிப்படையில் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவை அளவிடலாம். தர ஒட்டுறவுக் கெழுவானது எளிதில் கணிக்கப்படும் தன்மை பெற்றுள்ளபடியால், பல சமயங்களில் ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்குப் பதிலாக தர ஒட்டுறவு கெழுவானது பயன் படுத்தப்படுகின்றது.

கணக்கு :

5 மாணவர்களின் தமிழ், கணிதம் ஆகிய தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பட்டியல் 7-23-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன (பக்கம் 165).

இப்புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

முறை :

மாறிகளின் மதிப்புக்கு இணையான தர மதிப்புகளைப் பெற்று அவைகளின் வாயிலாகத் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைம் கணக்கிடுறோம் (பட்டியல் 7–24).

$$\text{தர ஒட்டுறவுக் கெழு } P = 1 - \left(\frac{6 \times 6}{5 \times 24}\right) = 0{\cdot}70$$

கணிதம், தமிழ் ஆகிய தேர்வுகளில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான தர ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு 0.7 ஆகும். இம் மதிப்பினைக் கொண்டு இரு மாறிகளும் கணிசமான அளவு நேரிடை உறவு கொண்டுள்ளன என முடிவு செய்யலாம்.

பகுதி ஒட்டுறவும், பல்தர ஒட்டுறவும் (Partial Correlation and Multiple Correlation)

இரு மாறிகளின் தொடர்பை அளவிட ஒட்டுறவுக் கெழு மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதுபற்றிமுன்பு கண்டோம். இப்போது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் தொடர்பை அறிந்து கொள்ள பயனுறும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பற்றி காண்போம்.

கோதுமை விளைச்சல், தட்ப வெப்ப நிலை (Temperature) ஆகிய மாறிகளின் உறவை ஆயும்போது, அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு 0·60 என்போம். இம் மதிப்பைக் கொண்டு, வெப்ப அளவு அதிகரிக்க, அதிகரிக்க கோதுமை அளவு அதிகரிக்கும் என உட்பொருள் விளக்கம் பெறுகிறோம்.

கோதுமை விளைச்சல் அளவில் மாற்றம் ஏற்படுத்தக் கூடிய அதாவது விளைச்சலைப் பாதிக்கும் காரணிகள் யாவும் நிலையாக (Constant) இருக்கும்போது, விளைச்சலுக்கும், வெப்ப அளவுக்கு மான ஒட்டுறவுக் கெழு + 0·60 எனில், மேற்கூறிய பொருள் விளக்கம் பொருத்தமானதுதான். விளைச்சலைப் பாதிக்கும் காரணிகள் நிலையாக இல்லாமல் மாறுபடும் போது, மேற்கூறிய பொருள் விளக்கம் உண்மை நிலைக்குப் புறம்பாக அமையக் கூடும். ஏனெனில், வெப்ப அளவு மாறியானது, கோதுமை விளைச்சலுடன் தொடர்பு அற்ற போதிலும் கூட, இவ்விரு மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் மழையளவுடன் உறவு கொண்டிருப்பதால், இதன் காரணமாகவே வெப்ப அளவுக்கும் விளைச்சலுக்கும் இடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு கணிசமான மதிப்பைப் பெற்றமையலாம். ஆகவே, இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பைக் கொண்டு மட்டுமே அவைகளின் உறவு பற்றிய முழுமையான கருத்துப் பெற முற்படுதல் சரியல்ல.

இரு மாறிகளின் உறவைப் பற்றி அறிய விழையும்போது, அம் மாறிகளுக்குப் பொதுவான காரணிகள் யாவையும், மாறுபடாமல் நிலையாக அமையும்படி செய்தல் இன்றியமையாதது. அவ்வாறு பொதுவான காரணிகள் யாவும் நிலையாக அமையப் பெருதவிடத்து, பொதுக் காரணிகளின் விளைவை ஒவ்வொரு மாறியிலிருந்தும் நீக்கி, விளைவு நீக்கப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டு பெறும் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது, மாறிகளின் உண்மைத் தொடர்பை நன்கு வெளிப்படுத்தும்படி அமையும். இவ்வாறு பெறும் ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு (Partial Correlation Coefficient) என அழைக்கிறோம்.

இப்போது X_1, X_2, X_3 ஆகிய மூன்று மாறிகளின் தொடர்பை ஆராய விழைவதாகக் கொள்வோம். X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை r_{12} எனவும், X_1, X_3 மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை r_{13} எனவும் X_2, X_3 மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை r_{23} எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம். X_1, X_2 ஆகிய மாறிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் X_3 மாறியின் விளைவை நீக்கிய பின் அவைகளின் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவான $r_{12.3}$ஐ

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})}\ \sqrt{(1 - r^2_{23})}}$$

எனவும்,

X_1, X_3 மாறிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும், X_2 மாறியின் விளைவை நீக்கியபின் அவைகளின் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவான $r_{13 \cdot 2}$ஐ

$$r_{13 \cdot 2} = \frac{r_{13} - r_{12}\, r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{12})}\, \sqrt{(1 - r^2_{23})}}$$

எனவும்,

X_2, X_3 மாறிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் X_1 மாறியின் விளைவை நீக்கியபின் அவைகளின் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவான $r_{23 \cdot 1}$ஐ

$$r_{23 \cdot 1} = \frac{r_{23} - r_{12}\, r_{13}}{\sqrt{(1 - r^2_{12})}\, \sqrt{(1 - r^2_{13})}}$$

எனவும் வரையறுக்கலாம்.

கணக்கு :

கோதுமை விளைச்சல் (X_1) வெப்பம் (X_2), மழை (X_3) ஆகிய மூன்று மாறிகளின் புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு கணக்கிட்ட ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் மதிப்புகள் பின்வருமாறு.

X_1, X_2 மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{12} = 0.6$

X_1, X_3 மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{13} = 0\ 8$

X_2, X_3 மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{23} = 0.7$

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக மழையின் விளைவை நீக்கிய பின், கோதுமை விளைச்சலுக்கும் வெப்ப அளவிற்கும் இடையேயுள்ள பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வரையறையின்படி,

$$r_{12 \cdot 3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})}\, \sqrt{(1 - r^2_{23})}}$$

$$= \frac{0 \cdot 6 - (0 \cdot 8)(0 \cdot 7)}{\sqrt{[1 - (0 \cdot 8)^2]}\ \sqrt{[1 - (0 \cdot 7)^2]}}$$

$$= \frac{0 \cdot 040}{0 \cdot 426} = 0.09$$

ஆகவே, பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பான 0·09 என்பது, பூச்சியத்தை நெருங்கியிருப்பதால் மழையின் விளைவை நீக்கியபின், கோதுமை விளைச்சல் அளவுக்கும், வெப்ப அளவுக்கும் இடையே தொடர்பு இல்லை என்கிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு பள்ளியில் படிக்கும் மாணவர்கள், கணக்கு. தமிழ், வரலாறு ஆகிய தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்புகள் கீழே இடம் பெறுகின்றன.

மாறிகள்	ஒட்டுறவுக்கெழு
கணிதத் தேர்வு மதிப்பெண் தமிழ்த் தேர்வு மதிப்பெண்	0·3
கணிதத் தேர்வு மதிப்பெண் வரலாற்றுத் தேர்வு மதிப்பெண்	—0·3
தமிழ்த் தேர்வு மதிப்பெண் வரலாற்றுத் தேர்வு மதிப்பெண்	0 6

இவைகளைக்கொண்டு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

இப்போது,

X_1 = கணக்குத் தேர்வு மதிப்பெண்

X_2 = தமிழ்த் தேர்வு மதிப்பெண்

X_3 = வரலாற்றுத் தேர்வு மதிப்பெண் எனக் குறிப்பிடும் போது,

$$r_{12} = 0{\cdot}3$$
$$r_{13} = -0{\cdot}3$$
$$r_{23} = 0{\cdot}6$$

ஆகின்றன.

இங்கு,

$$r_{12} = 0{\cdot}3$$

$$\therefore \sqrt{(1-r^2_{12})} = \sqrt{1-(0{\cdot}3)^2} = \sqrt{0{\cdot}91} = 0{\cdot}95$$

$$r_{13} = -0{\cdot}3,$$

$$\therefore \sqrt{(1-r^2_{13})} = \sqrt{1-(-0.3)^2} = \sqrt{0{\cdot}91} = 0{\cdot}95$$

$$r_{23} = 0{\cdot}6,$$

$$\therefore \sqrt{(1-r^2_{23})} = \sqrt{1-(0{\cdot}6)^2} = \sqrt{0{\cdot}64} = 0{\cdot}80$$

ஆகவே,

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\ \sqrt{1-r^2_{23}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}3 - (1-0{\cdot}3)\,(0{\cdot}6)}{\sqrt{1-(0{\cdot}3^2)}\ \sqrt{1-(0{\cdot}6)^2}}$$

$$= \frac{0{\cdot}480}{0{\cdot}760} = 0{\cdot}63$$

$$r_{13\cdot2} = \frac{r_{13} - r_{12}\, r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{32}}}$$

$$= \frac{-0{\cdot}3 - (0{\cdot}3)\,(0{\cdot}6)}{\sqrt{1-(0{\cdot}3)^2}\ \sqrt{1-(0{\cdot}6)^2}}$$

$$= \frac{-0{\cdot}48}{0{\cdot}76} = -0{\cdot}63$$

$$r_{23\cdot1} = \frac{r_{32} - r_{21}\, r_{31}}{\sqrt{1-r^2_{21}}\ \sqrt{1-r^2_{31}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}6 - (-0{\cdot}3)\,(0{\cdot}3)}{\sqrt{1-(-0{\cdot}3)^2}\,\sqrt{1-(0{\cdot}3)^2}}$$

$$= \frac{0{\cdot}69}{0{\cdot}91} = 0{\cdot}76$$

எனவே, மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வு, தமிழ்த் தேர்வு ஆகியவைகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான பகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு 0.63 ஆகவும், கணிதத் தேர்வு, வரலாற்றுத் தேர்வு ஆகியவைகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான பகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு — 0.63 ஆகவும் தமிழ்த் தேர்வு, வரலாற்றுத் தேர்வு ஆகியவைகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு 0·76 ஆகவும் அமைகின்றன.

பல்தர ஒட்டுறவு :

தொடர்புடைய மாறிகளை ஆய விழையும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி, பிறமாறிகளை ஒரு குழுவாகக்கொள்ளும் போது அக்குழுவின் கூட்டுவிளைவுடன் எங்ஙனம் உறவு கொண்டுள்ளது என அறிவது முக்கியமானதாகும். இவ்வுறவை அளவிட பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழு (Multiple correlation coefficient) பயனுள்ளதாக அமைகிறது.

இப்போது X_1, X_2, X_3 ஆகிய மூன்று மாறிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். X_1 மாறிக்கும், X_2, X_3 ஆகியவை ஒருங்கிணைந்த குழுவுக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவான $R_{1(23)}$ ஐ

$$R_{1(23)} = \sqrt{\frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}\, r_{13}\, r_{23}}{1 - r^2_{23}}}$$

எனவும்,

X_1, X_3 மாறிகள் ஒழுங்கிணைந்த குழுவுக்கும், X_2 மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழுவான $R_{2(13)}$ ஐ

$$R_{2(13)} = \sqrt{\frac{r^2_{21} + r^2_{23} - 2\, r_{21}\, r_{23}\, r_{13}}{1 - r^2_{13}}}$$

எனவும்,

X_1, X_2 மாறிகள் ஒழுங்கிணைந்த குழுவுக்கும் X_3 மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழுவ்ான $R_{3(12)}$ஐ

$$R_{3(12)} = \sqrt{\frac{r^2_{31} + r^2_{32} - 2\, r_{31}\, r_{32}\, r_{12}}{1 - r^2_{12}}}$$

எனவும் வரையறுக்கலாம்.

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனத்தின் விற்பனை மதிப்பு, வானொலி விளம்பரத் திற்குச் செலவிட்ட தொகை, செய்தித்தாள் விளம்பரத்திற்குச் செலவிட்ட தொகை ஆகியவைகளின் புள்ளி விவரங்களி லிருந்து கணக்கிட்ட ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் பின்வருமாறு :

விற்பனை மதிப்பு, வானொலி விளம்பரச் செலவுத் தொகை ஆகியவைகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0.8.

விற்பனை மதிப்பு, செய்தித்தாள் விளம்பரச் செலவுத் தொகை ஆகியவைகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0·7.

வானொலி விளம்பரச் செலவுத்தொகை, செய்தித்தாள் விளம்பரச் செலவுத்தொகை ஆகியவைகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·5

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக, வானொலி விளம்பரம், செய்தித் தாள் விளம்பரம் ஆகியவைகள் அடங்கிய குழுவுக்கும், விற் பனைக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழுவைக் கணக்கிடுக.

விற்பனை மதிப்பை X_1 எனவும், வானொலி விளம்பரச் செல வுத்தொகையை X_2 எனவும், செய்தித்தாள் விளம்பரச் செல வுத்தொகையை X_3 எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது,

$$r_{12} = 0{\cdot}8$$
$$r_{13} = 0{\cdot}7$$
$$r_{23} = 0{\cdot}5$$

ஆகின்றன. வரையறையின்படி, X_2, X_3 ஆகிய மாறிகளின் குழுவிற்கும், X_1 மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவான $R_{1(23)}$,

$$R_{1(23)} = \sqrt{\frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2 r_{12}\, r_{13}\, r_{23}}{1 - r^2_{23}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0{\cdot}8)^2 + (0{\cdot}7)^2 - 2\,(0{\cdot}8)\,(0{\cdot}7)\,(0{\cdot}5)}{1 - (0{\cdot}5)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}57}{0{\cdot}75}} = \sqrt{0{\cdot}76} = 0{\cdot}87$$

எனவே. விற்பனை மதிப்புக்கும், வானொலி விளம்பரம், செய்தித் தாள் விளம்பரம் அடங்கிய குழுவின் விளைவுக்கும் இடையே யான பல்தர ஒட்டுறவு மதிப்பு 0·87 ஆகும்.

கணக்கு :

ஓர் அளவெடுப்பில் திரட்டப்பட்ட புள்ளி விவரங்களி லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மகனின் உயரம், தந்தையின் உயரம் ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு } = 0·4

மகனின் உயரம், தாயின் உயரம் ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு } = 0·5

தந்தையின் உயரம், தாயின் உயரம் ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு } = 0·2

இவைகளைக்கொண்டு தந்தை உயரம், தாய் உயரம் ஆகிய மாறிகள் ஒருங்கிணைந்த குழுவிற்கும், மகனின் உயர மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

இப்போது,

X_1 = மகனின் உயரம்

X_2 = தந்தையின் உயரம்.

X_3 = தாயின் உயரம்

எனக் குறிப்பிடுவோமெனில்

$r_{12} = 0.4$

$r_{13} = 0{\cdot}5$

$r_{23} = 0{\cdot}3$

ஆகின்றன.

வரையறையின்படி X_2, X_3 ஆகிய மாறிகள் அடங்கிய குழு விற்கும், X_1 மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழு

$$R_1(23) = \sqrt{\frac{(0{\cdot}4)^2 + (0{\cdot}5)^2 - 2(0{\cdot}4)(0{\cdot}5)(0{\cdot}3)}{1-(0{\cdot}3)^2}}$$

$$= 0{\cdot}66$$

எனவே, தந்தையின் உயரம், தாயின் உயரம் ஆகிய மாறிகள் ஒருங்கிணைந்த குழுவின் விளைவுக்கும், மகனின் உயர மாறிக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழு 0·66 ஆகும்.

பயிற்சி :

(1) புகுமுக வகுப்பைச் சேர்ந்த 60 மாணவர்கள் பொருளாதாரம், வரலாறு ஆகிய பாடத் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

மதிப்பெண்கள் பொருளாதாரம்	மதிப்பெண்கள் வரலாறு	மதிப்பெண்கள் பொருளாதாரம்	மதிப்பெண்கள் வரலாறு
39	28	53	45
38	30	42	31
42	27	40	20
44	25	39	30
53	35	35	25
41	30	42	37
40	29	41	30
28	31	57	50
33	28	43	29
41	30	37	26
49	33	41	35
56	53	32	34
42	34	44	28
48	34	51	31
51	43	54	33

50	35	46	39
48	36	54	41
47	46	41	32
57	44	30	23
48	36	46	33
46	32	50	35
44	30	45	41
30	23	34	32
25	27	43	27
46	28	31	33
45	34	40	31
50	43	46	32
43	27	53	30
22	25	34	29
52	36	46	27

இவ் விவரங்களுக்கான (*i*) சிதறல் விளக்கப்படம் வரைக. (*ii*) இரு மாறி அலைவெண் பரவலை அமைக்க.

(2) சமூக — பொருளாதார ஆய்வு ஒன்றில் இடம் பெற்ற 50 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றின் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை (x), அக் குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றும் குடியிருக்கும் வீடுகளில் உள்ள அறைகளின் எண்ணிக்கை (y) பற்றிய விவரங்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் பகுதி I-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ் விவரங்களுக்கான (*i*) சிதறல் விளக்கப் படம் வரைக. (*ii*) இருமாறி அலைவெண் பரவலை அமைக்க.

(3) *A*, *B* என்னும் இரு உளவியல் சோதனைகளில் பங்கு கொண்ட 20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைப் பற்றிய விவரங்கள் அடுத்தப்பக்கத்தில் பகுதி II-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

I

x, y	x, y	x, y	x, y	x, y
3,5	4,5	5,6	3,6	3,7
2,6	2,3	3,4	2,5	5,6
4,7	4,5	2,5	3,3	4,6
3,4	5,7	4,4	4,8	5,5
2,4	4,4	5,5	2,4	2,4
2,5	4,6	3,6	5,5	4,6
3,4	5,4	5,7	5,7	3,5
5,5	3,5	4,5	4,4	5,8
4,7	4,6	3,5	3,5	2,3
2,5	4,5	4,7	4,6	5,7

II

A	*B*	*A*	*B*
260	30	249	20
236	20	265	22
245	23	257	19
286	25	272	29
248	28	266	24
252	21	256	20
261	28	243	16
273	19	278	23
247	20	263	26
2[illegible]8	28	260	28

(*i*) மேற்கண்ட விவரங்களுக்கான சிதறல் வரைபடத்தை வரைக (*ii*) சோதனை *A*-ன் மதிப்பெண்களுக்கான பிரிவு இடைவெளிகளை 230–244, 245—259, 260—274, 275—289 எனவும். சோதனை *B*-யின் மதிப்பெண்களுக்கான பிரிவு இடைவெளிகளை 17–20, 21–24, 25–28, 29—32 எனவும் கொண்டு இருமாறி அலைவெண் பரவல் ஒன்றை அமைத்து, ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(4) 50 நிறுவனங்களின் விற்பனை, இலாப மதிப்புகள் (ஆயிரம் ரூபாய்களில்) கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலில் பாகு படுத்தப்பட்டுள்ளன.

இலாப மதிப்புகள் / விற்பனை மதிப்புகள்	2—4	4—6	6—8	8—10
10—20	3	6	1	—
20—30	2	4	5	1
30—40	—	2	6	3
40—50	—	3	4	2
50—60	—	—	5	3

மேற்கண்ட இருமாறி அலைவெண் பரவலிலிருந்து மாறிகளது ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(5) 12 மாணவர்கள் கல்லூரித் தேர்விலும், பல்கலைக்கழகத் தேர்விலும் பெற்ற சதவீத மதிப்பெண்கள் அடுத்த பக்கத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) இவ்விவரங்களுக்கான சிதறல் படத்தை அமைக்க.

(ii) இவைகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டுப் பொருள் விளக்கம் கூறுக.

மாணவன்	சதவீத மதிப்பெண்கள்	
	கல்லூரித் தேர்வு	பல்கலைக்கழகத் தேர்வு
1	58	65
2	44	46
3	40	61
4	62	73
5	56	60
6	41	38
7	52	49
8	38	43
9	36	52
10	47	49
11	60	47
12	55	63

(6) அடுத்த பக்கத்தில் பட்டியல் *A*-ல் கண்ட மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டுப் பொருள் விளக்கம் தருக.

(7) பச்சைச் சணற்செடியின் உயரம், உலர்ந்தபின் அதன் எடை ஆகிய புள்ளி விவரங்கள் அடுத்த பக்கத்தில் *B*-ல் தரப் பட்டுள்ளன.

(*A*)

உணவுப்பண்டங்களுக்கான குறியீட்டெண்	உடைகளுக்கான குறியீட்டெண்
108	110
110	102
107	108
111	104
112	102
109	107
107	105
113	104
108	103
115	105

(*B*) பச்சைச் சணற் செடியின் உயரம் (செ. மீ.)

உலர்ந்த சணற் செடியின் எடை		120—140	140—160	160—180	180—200
	1— 4	5	2		
	4— 7	11	10	3	
	7—10			4	2
	10—13			1	2

மேற்கண்ட பட்டியலில் இடம்பெறும் இருமாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பெறுக.

(8) 30 நபர்களின் கழுத்துச் சுற்றளவு, எடை பற்றிய விவரங்கள் பின்வரும் இருமாறி அலைவெண் பட்டியல் *A*-ல் இடம் பெறுகிறது.

(*A*) எடை (கிலோகிராம்களில்)

கழுத்துச் சுற்றளவு (செ.மீ.களில்)

	45 — 50	50 — 55	55 — 60	60 — 65
30 — 32	2	4	1	0
32 — 34	5	6	2	1
34 — 36	4	1	1	3

(*B*)

விற்பனை யாளர்கள்	திறமைத் தேர்வு மதிப்பெண்கள்	விற்பனை மதிப்புகள்
1	46	22
2	25	11
3	43	21
4	30	10
5	44	20
6	33	16
7	37	15
8	43	22
9	35	12
10	41	21

முன் பக்கத்தில் உள்ள பட்டியல் A-ல் தரப்பட்டுள்ள கழுத்துச் சுற்றளவு, எடை ஆகியவைகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அதன் பொருள் விளக்கம் தருக.

(9) திறமைத் தேர்வில் 10 விற்பனையாளர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள், அவ் விற்பனையாளர்களின் முதலாண்டு விற்பனை மதிப்புகள் ஆகியவற்றைப் பற்றிய விவரங்கள் முன் பக்கம் பட்டியல் B-ல் தரப்பட்டுள்ளன.

இவ்விவரங்களுக்கான (i) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு பொருள் விளக்கம் தருக. (ii) தர ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(10) பள்ளி விளையாட்டுப் போட்டியின் போது 8 மாணவர்கள் நீளம் தாண்டுதல், உயரந் தாண்டுதல் ஆகிய பந்தயங்களில் பெற்ற தரங்கள் பின்வருமாறு :

மாணவர்கள்	தரங்கள்	
	நீளந் தாண்டுதல்	உயரந் தாண்டுதல்
A	5	6
B	3	5
C	2	3
D	1	7
E	8	4
F	4	2
G	7	8
H	6	1

இவ்விவரங்களுக்கான தர ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(11) நீச்சல் போட்டி, ஓட்டப் பந்தயம் ஆகியவற்றில் கலந்து கொண்ட பத்து நபர்களின் தரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

நபர்கள்	தரம்	
	ஓட்டப் பந்தயம்	நீச்சல் போட்டி
1	3	5
2	6	3
3	4	8
4	7	4
5	5	2
6	8	1
7	1	7
8	9	10
9	10	6
10	2	3

இவ்விவரங்களுக்கான தர ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(12) விரைவாக எழுதும் போட்டி, நினைவாற்றல் போட்டி ஆகியவற்றில் கலந்து கொண்ட 5 மாணவர்களின் தரங்கள் பின்வருமாறு :

மாணவர்கள்	தரங்கள்	
	விரைவாக எழுதும் போட்டி	நினைவாற்றல் போட்டி
A	4	1
B	3	5
C	2	2
D	5	4
E	1	3

நினைவாற்றலுக்கும், விரைவாக எழுதும் தன்மைக்கும் இடையேயுான தர ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(13) 10 நபர்களின் உயரம், எடை, கழுத்துச் சுற்றளவு ஆகிய புள்ளி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்ட ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்புகள் பின்வருமாறு :

இணைமாறிகள்	ஒட்டுவுறவுக் கெழு
உயரம், எடை	0.6
உயரம், கழுத்துச் சுற்றளவு	0.8
எடை, கழுத்துச் சுற்றளவு	0.2

இவைகளிலிருந்து,

(i) எடையை நிலையாகக் கொள்ளும் போது, உயரம், கழுத்துச் சுற்றளவு ஆகிய மாறிகளின் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவையும்,

(ii) உயரம், எடை ஆகிய மாறிகளை ஒரு குழுவாக அமைக்கும்போது, குழுவுக்கும், கழுத்துச் சுற்றளவுக்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

(14) X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{12} = 0.52$; X_1, X_3 ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{13} = -0.14$; X_2, X_3 ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r_{23} = 0.23$ முதலியவற்றைக் கொண்டு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் $r_{12\cdot3}, r_{13\cdot2}, r_{23\cdot1}$ ஆகியவைகளையும், பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுகள் $R_{1(23)}$, $R_{2(13)}$, $R_{3(12)}$ ஆகியவைகளையும் கணக்கிடுக.

(15) x, y, z என்னும் மூன்று உளவியல் சோதனைகளில் பங்கு கொண்ட 150 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் கணிக்கப்பட்ட விவரங்கள் பின்வருமாறு :

x, y ஆகியவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு $\} = r_{12} = .50$

y, z ஆகியவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் ெழு $\} = r_{23} = .20$

x, z ஆகியவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு $\} = r_{13} = -.35$

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு பகுதி, பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

(16) இரு பெண்கள் 6 வகை சவுக்காரக் கட்டிகளைக் முன் பக்கம் பட்டியலில் காட்டியவாறு தரப்படுத்தினர்.

இவற்றிற்கான தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பெற்றுப் பொருள் விளக்கம் கூறுக.

(17) 11 நிறுவனங்களின் ஓராண்டு விற்பனை மதிப்புகளும், நிகர லாப மதிப்புகளும் பின்வருமாறு :

சவுக்காரக்கட்டி வகை	தர மதிப்பு	
	பெண் X	பெண் Y
A	3	5
B	5	6
C	1	4
D	4	3
E	6	1
F	2	2

நிறுவனம்	விற்பனை (000 ரூபாய்கள்)	நிகர லாபம் (000 ரூபாய்கள்)
1	657	40.8
2	1574	69.0
3	796	41.2
4	1254	71.1
5	799	72.5
6	604	41.4
7	803	82.3
8	1171	85.3
9	804	81.7
10	2587	146.7
11	869	70.3

இம்மதிப்புகளுக்கான தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

8. தொடர்புப் போக்கு

இருமாறிகளின் தொடர்பைப் புள்ளியியல் முறையில் அளவிட ஒட்டுறவுக் கெழு பேருதவியாக இருப்பது பற்றி முன்பு கண்டோம். இப்போது தொடர்புடைய இருமாறிகளில் ஒரு மாறியின் குறிப்பிட்ட மதிப்பை மதிப்பிடப் பயன்படும் தொடர்புப் போக்கு முறை (Regression method) யைப் பற்றிக் காண்போம்.

தொடர்புடைய X, Y மாறிகளின் n இணையான மதிப்புகள் (Xi, Yi) $i = 1, 2, \ldots n$, என்போம். இம்மதிப்புகளைக் கொண்டு மாறிகளின் சராசரிகள் $\bar{X}$, $\bar{Y}$ எனவும், திட்ட விலக்கங்கள் s_x, s_y எனவும், ஒட்டுறவுக் கெழு r எனவும் கணக்கிடுவோம். மாறி X-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு இணையான Y-மாறியின் மதிப்பை மதிப்பிடக் கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$(Y-\bar{Y}) = \frac{r\,s_y}{s_x}(X-\bar{X}) \qquad \ldots\ldots (8\text{–}1)$$

இச் சமன்பாட்டை X-ன் மேல் Y தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு (Regression equation of Y on X) என அழைக்கிறோம். மாறி Y-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு இணையான X மாறியின் மதிப்பை மதிப்பிட

$$(X-\bar{X}) = \frac{r s_x}{s_y}\,(Y-\bar{Y}) \qquad \ldots\ldots (8\text{–}2)$$

என்ற Y-ன் மேல் X தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு (Regression equation of X on Y) பயன்படுகிறது. இவ்விரு சமன்பாடுகளையும், மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் (Regression equations) என்கிறோம். இவைகளைக் குறைந்த வர்க்க முறையில் (Method of Least Squares) பெறுகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு பண்டத்தின் தேவை, விலை ஆகிய மாறிகளின் 10 நாட்களுக்கான புள்ளி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகள் பின்வருமாறு :

பட்டியல் 8–1.

	தேவை	விலை
சராசரி :	7	10
திட்ட விலக்கம் :	1·84	2·61
மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு:	—	0 87

இம்மதிப்புகளைக்கொண்டு பண்டத்தின் தேவை 8 என்ற மதிப்பிற்கு இணையான விலைமதிப்பை மதிப்பிடுக.

முறை :

பண்டத்தின் தேவையை X மாறியாகவும், விலையை Y மாறியாகவும் குறிப்பிடுவோம். X-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு இணையான Y-ன் மதிப்பை மதிப்பிட, X-ன் மேல் Y தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடான,

$$(Y-\overline{Y}) = \frac{rs_y}{s_x}(X-\overline{X})$$ என்பது துணைபுரிகிறது.

இச்சமன்பாட்டில் $\overline{X} = 7$, $\overline{Y} = 10$, $s_X = 1{\cdot}84$, $s_y = 2{\cdot}61$ $r = 0\ 87$, $X = 8$ ஆகிய மதிப்புகளை இடும்போது,

$$(Y-10) = \frac{(0{\cdot}87)\,(2{\cdot}61)}{1{\cdot}84}(8-7)$$

அதாவது $Y-10 = 1{\cdot}23$

$\therefore\ Y = 11{\cdot}23$ ஆகும்.

எனவே $X = 8$ எனும் மதிப்புக்கு இணையான Y-ன் மதிப்பு 11·23 ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து

பண்டத்தின் தேவை 8 என்ற மதிப்பைப் பெறும்போது, அதன் விலை ரூ 11·23 ஆக அமையும்.

கணக்கு :

தந்தை, மகன்களின் உயரங்களைப்பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளைக்கொண்டு தந்தையின் உயரம் 70 அங்குலம் எனும்போது மகனின் உயரத்தையும், மகனின் உயரம் 67 அங்குலம் எனும்போது தந்தையின் உயரத்தையும் மதிப்பிடுக.

பட்டியல் 8-2.

தந்தை உயரம் (அங்)	மகன் உயரம் (அங்)
71	69
68	64
66	65
67	63
70	65
71	62
70	65
73	64
72	66
65	59
66	62

முறை :

தந்தையின் உயரத்தை x மாறியினைக் கொண்டும், மகனின் உயரத்தை y மாறியினைக் கொண்டும் குறிப்பிடுவோம். முதலில்

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 11 இணை x, y மதிப்புகளைக் கொண்டு சராசரிகள் $\bar{x}$, $\bar{y}$, திட்ட விலக்கங்கள் s_x, s_y ஒட்டுறவுக் கெழு r ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

பட்டியல் 8-3.

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
71	69	2	5	10	4	25
68	64	− 1	0	0	1	0
66	65	− 3	1	− 3	9	1
67	63	− 2	− 1	2	4	1
70	65	1	1	1	1	1
71	62	2	− 2	− 4	4	4
70	65	1	1	1	1	1
73	64	4	0	0	16	0
72	66	3	2	6	9	4
65	59	− 4	− 5	20	16	25
66	62	− 3	− 2	6	9	4
759	704	—	—	39	74	66

இப்போது,

$$\bar{x} = \frac{759}{11} = 69; \ \bar{y} = \frac{704}{11} = 64$$

$$s_x = \sqrt{\frac{74}{11}} = 2{\cdot}59$$

$$s_y = \sqrt{\frac{66}{11}} = 2{\cdot}45$$

$$Cxy = \sqrt{\frac{39}{11}} = 3{\cdot}5455$$

எனவே, ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{s_x\, s_y} = \frac{3{\cdot}5455}{(2{\cdot}45)\,({\cdot}259)}$$

$$= 0{\cdot}59.$$

$\bar{X} = 69$, $\bar{y} = 64$, $r = 0{\cdot}59$, $s_x = 2{\cdot}59$, $s_y = 2{\cdot}45$ ஆகிய மதிப்புகளை x-ன்மேல் y தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலும், y-ன் மேல் x தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலும் இடுகிறோம். x-ன் மேல் y தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு,

$$(y-64) = \frac{0{\cdot}59 \times 2{\cdot}45}{2{\cdot}59}\,(x-69)$$

$(y-64) = 0{\cdot}56\;(x-69)$ ஆகும். y-ன் மேல் x தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு, ... (1)

$$(x-69) = (0{\cdot}59)\,\frac{(2{\cdot}59)}{2{\cdot}45}\,(y-64)$$

$(x-69) = (0{\cdot}62)\,(y-64)$ ஆகும். ... ... (2)

தந்தையின் உயரம் 70 அங்குலம் எனும்போது, மகனின் உயரத்தை மதிப்பிட x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டில் அதாவது சமன்பாடு (1)-ல் $x = 70$ எனும் மதிப்பை இடுகிறோம். அப்போது $(y-64) = 0{\cdot}56\;(70-69)$ அதாவது $(y-64) = 0{\cdot}56$.

$$\therefore\; y = 64{\cdot}56$$

எனவே, தந்தையின் உயரம் 70 அங்குலம் எனும்போது மகனின் உயரம் 64·56 அங்குலம் என மதிப்பிடுகிறோம்.

மகனின் உயரம் 67 அங்குலம் எனில், தந்தையின் உயரத்தை மதிப்பிட y-ன் மேல் x தொடர்புப் போக்குச் சமன்

பாட்டில் அதாவது சமன்பாடு (2)-ல் $y = 67$ எனும் மதிப்பை இடுகிறோம்.

அப்போது,

$$(x - 69) = 0{\cdot}62 \ (67 - 64)$$

அதாவது, $x - 69 = 1.86.$

அதாவது, $x = 70{\cdot}86$ ஆகும். எனவே, மகனின் உயரம் 67 அங்குலம் எனும்போது, தந்தையின் உயரம் 70·86 அங்குலம் என மதிப்பிடுகிறோம்.

கணக்கு :

50 மாணவர்கள் கணிதம், புள்ளியியல் தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்காணும் இருமாறி அலைவுப் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இப்புள்ளி விவரங்களைக்கொண்டு மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

பட்டியல் 8-4.

கணிதம் → / புள்ளியியல் ↓	0–20	20–40	40–60	60–80	80-100	மொத்தம்
15–25	2	2				4
25–35	2	6	3			11
35–45	1	3	8	2		14
45–55		1	6	3	1	11
55–65			1	5	1	7
65–75				1	2	3
மொத்தம்	5	12	18	11	4	50

முறை:

புள்ளியியல் மதிப்பெண்களை x மாறியினைக் கொண்டும், கணித மதிப்பெண்களை y மாறியினைக் கொண்டும் குறிப்பிடு வோம். அப்போது x மாறியின் பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்புகள் 20, .0, 40, 50, 60, 70; y மாறி பிரிவு இடை வெளி மைய மதிப்புகள் 10, 30, 50, 70, 90 ஆக அமைகின்றன.

x மாறியை உருமாற்றி,

$U = \frac{x-40}{10}$ எனக் கொள்ளும்போது x மாறி பிரிவு இடைவெளி] மைய மதிப்புகளுக்கு இணையான U மாறி மதிப்பு கள் முறையே, —2,-1. 0. 1, 2, 3 ஆகவும், y மாறியை உருமாற்றி $V = \frac{y-50}{20}$ எடுத்துக் கொள்ளும்போது y மாறி பிரிவு இடை வெளி மைய மதிப்புகளுக்கு இணையான V மாறி மதிப்புகள் முறையே -2,-1, 0, 1, 2 ஆகவும் அமைகின்றன. மாற்றப்பட்ட இரு மாறி அலைவுப் பட்டியல் பின்வருமாறு அமையும்.

பட்டியல் 8-5.

$V \rightarrow$ / $U \downarrow$	—2	−1	0	1	2	மொத்தம்
−2	2 (4)	8 (2)	— (0)			4
−1	2 (2)	6 (1)	3 (0)			11
0	1 (0)	3 (0)	8 (0)	2 (0)		14
1		1 (−1)	6 (0)	3 (1)	1 (2)	11
2			1 (0)	5 (2)	1 (4)	7
3				1 (3)	2 (6)	3
மொத்தம்	5	12	18	11	4	50

இப்போது, U, V மாறிகளின் சராசரிகளான $\overline{U}, \overline{V}$ஐயும் திட்ட விலக்கங்களான s_u, s_vஐயும் கணக்கிடுவோம்.

U மாறி அலைவுப் பரவல்

பட்டியல் 8-6.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு U_i	அலைவெண் r_i	$p_i U_i$	$p_i U_i^2$
—2	4	—8	16
—1	11	—11	11
0	14	0	0
1	11	11	11
2	7	14	28
3	3	9	27
மொத்தம்	50	15	93

$$\overline{U} = \frac{15}{50} = 0{\cdot}30,\; sU^2 = \frac{93}{50}(0{\cdot}30)^2.$$

$$= 18{\cdot}51$$

$$\therefore\; s_u = \sqrt{18{\cdot}51} = 4{\cdot}30$$

$$\overline{V} = \frac{-3}{50} = -0{\cdot}06.\; s^2_v = \frac{59}{50} - (-0{\cdot}06)^2$$

$$= 11{\cdot}7964$$

$$s_v = \sqrt{11{\cdot}7964} = 3{\cdot}44.$$

V மாறி அலைவுப் பரவல்

பட்டியல் 8-7.

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு	அலைவெண் q_j	$q_j v_j$	$q_j v_j^2$
—2	5	—10	20
—1	12	—12	12
0	18	0	0
1	11	11	11
2	4	8	16
மொத்தம்	50	—3	59

அடுத்த பட்டியல் (8–2) வாயிலாக,

$$\sum_{j}\sum_{i} f_{ij}\, U_i\, V_j = (2\times4)+(8\times0)+(2\times0)$$

$$+(1\times-1)+(6\times0)+(3\times1)+(1\times2)$$

$$+(1\times0)+(5\times2)+(1\times4)+(1\times3)$$

$$+(1\times2)+(1\times0)+(5\times2)+(1\times4)$$

$$+(1\times3)+(2\times6)=55$$

எனவே U, V மாறிகளின் உடன் மாறுபாடு

$$C_{uv} = \frac{55}{50} - (0{\cdot}306)\ (-0{\cdot}06)$$

$$= 11{\cdot}0180 \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது U, V மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$r_{uv} = \frac{C_{uv}}{s_u\, s_v} = \frac{11{\cdot}0180}{(4{\cdot}30)(3{\cdot}44)} = 0{\cdot}80$ ஆகும். ஆகவே x, y மாறிகளின், அதாவது கணிதத்தேர்வு மதிப்பெண்கள், புள்ளியியல் தேர்வு மதிப்பெண்கள் ஆகியவைகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0·80 என்கிறோம்.

அடுத்து U, V மாறிகளின் சராசரி திட்ட விலக்க மதிப்புகளின் வாயிலாக x, y மாறிகளின் சராசரி, திட்டவிலக்க மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

$$\bar{x} = 40+10\bar{U} = 40+10\ (0{\cdot}03) = 40{\cdot}3$$

$$s_x = 10\ s_u = 10\ (4{\cdot}30) = 43.$$

$$\bar{y} = 50+20\bar{v} = 50+20\ (-0{\cdot}06) = 48{\cdot}8.$$

$$s_y = 20\ (s_v) = 20 \times (3{\cdot}44) = 73{\cdot}2.$$

இப்போது,

$\bar{x} = 40{\cdot}3$, $\bar{y} = 48{\cdot}8$, $s_x = 43{\cdot}0$, $s_y = 73{\cdot}2$, $r = 0{\cdot}80$ ஆகிய மதிப்புகளை மாறிகளின் தொடர்புப்போக்குச் சமன்பாடுகளில் இடுகிறோம்.

x-ன் மேல் y தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$(y-48{\cdot}8) = \frac{(0{\cdot}80)\ (73{\cdot}2)}{(43{\cdot}0)}\ (x-40{\cdot}3)$$

அதாவது $(y-48{\cdot}8) = (1{\cdot}36)\ (x-40{\cdot}3)$ y-ன் மேல் x தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$(x-40{\cdot}3) = (0.80)\frac{(43{\cdot}0)}{(73{\cdot}2)}(y-48{\cdot}8)$$

அதாவது $(x-40{\cdot}3) = 0.47\ (y-48{\cdot}8)$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து பெற்ற, கணிதத் தேர்வு மதிப்பெண்கள் புள்ளியியல் தேர்வு மதிப்பெண்கள் ஆகிய மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு அமையும்:

$$(y-48.8) = 1{\cdot}36\ (x-40{\cdot}3)$$

$$(x-40{\cdot}3) = 0{\cdot}47\ (y-48{\cdot}8)$$

பயிற்சிகள்

(1) 8 கடைகளில் ஒரு பண்டத்தின் விற்பனை விலை, அதன் விற்பனையளவு, விவரங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்போது,

கடை	விற்பனை விலை (ரூபாய்கள்)	விற்பனையளவு (கிலோ கிராம்கள்)
A	6·50	15
B	10·00	3
C	9·00	8
D	7·50	12
E	8·00	13
F	9·50	2
G	8·60	10
H	6·00	11

(*a*) மாறிகளின் தொடர்புப்போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(*b*) பண்டத்தின் விற்பனை விலை ரூ. 7 எனில், அதன் விற்பனையளவின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பையும்,

(*c*) பண்டத்தின் விற்பனையளவு 14 கி. கி. எனில் அதன் விற்பனையளவின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பையும் கணக்கிடுக.

(2) ஒரு சோதனையின்போது 10 நிலக் கூறுகளுக்குப் போடப்பட்ட உர அளவு, அந்நிலக் கூறுகளில் விளைந்த கோதுமை ஆகியவை பற்றிய கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து

(*i*) உர அளவு 9 பவுண்டுகள் எனும்போது எதிர்பார்க்கக் கூடிய விளைச்சல் அளவையும் (*ii*) விளைச்சல் அளவு 35 கிலோ கிராம்களுக்கு இணையான உர அளவு மதிப்பையும் பெறுக.

உர அளவு (பவுண்டு கள்)	விளைச்சல் (கிலோ கிராம்கள்)
6	7
11	15
13	33
5	20
8	25
7	19
12	30
18	17
12	22
8	11

(3) ஒரு விவசாயச் சோதனையின்போது பெற்ற நெல் விளைச்சலும் அவ் விளைச்சலுக்காகப் பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவும் அடுத்த பக்கத்தில்அட்டவணை *A*–ல் இடம் பெறுகின்றன :

(*i*) இவ் விவரங்களைச் சிதறல் வரைபடத்தில் இடுக. (*ii*) மாறிகளது தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடு களைப் பெறுக. (*iii*) x–ன் மதிப்பு 36 ஆக இருக்கும்போது y-ன் மதிப்பை மதிப்பிடுக.

(4) 8 கடைகளில் சேகரிக்கப்பட்ட தக்காளிப் பழத்தின் விற்பனை அளவு, விலை பற்றிய விவரங்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் அட்டவணை *B*–ல் கொடுககப்பட்டுள்ளன :

ஒரு கிலோ தக்காளி விலை 50 பைசாவாக இருக்கும்போது விற்பனை அளவின் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பை மதிப்பிடுக,

A

x நெல் விளைச்சல் (டன்களில்)	y நீரின் அளவு (அங்குலங்களில்)
14	6·3
20	6·7
26	7·3
32	8·4
38	9·1
44	9·7
50	9·4

B

கடைகள்	விற்பனை அளவு (கிலோ கிராம்களில்)	கிலோ ஒன்றின் விலை (பைசாக்களில்)
A	15	60
B	3	100
C	8	90
D	12	70
E	6	95
F	4	95
G	9	85
H	14	65

(5) (i) 7ஆவது அத்தியாத்தில் 4ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் இருமாறி அலைவெண் பரவல் விவரங்களுக்கான தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடுக.

(ii) 7ஆவது அத்தியாயத்தில் 8ஆவது பயிற்சியில் இடம் பெறும் இருமாறி அலைவெண் பரவல் விவரங்களுக்கான தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை அடைக.

(6) 50 குடும்பங்களின் மாத வருவாய், (ரூபாய்களில்), வருவாயிலிருந்து உணவிற்காகச் செலவு செய்யும் சதவீதம் ஆகிய விவரங்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

மாத வருவாய்

உணவிற்கானச் செலவு	150—200	200—250	250—300	300—350
38—42		3	7	6
42—46	1	10	8	
46—50	7	6	2	

மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் அடைக.

(7) உருளைக் கிழங்கின் உற்பத்தி, விலை ஆகியவைகளின் விவரங்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் இருமாறி அலைவுப் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

உற்பத்தியின் மதிப்பு 700 அலகுகள் எனும்போது அதற்கு இணையான விலை மதிப்பையும், விலை மதிப்பு ரூ. 45 எனும்போது அதற்கு இணையான உற்பத்தியின் மதிப்பையும் கணக்கிடுக.

உற்பத்தி (நூறு டன்கள்)

விலை (ரூபாய்கள்)	600–650	650–700	700–750	750–800	800–850
20—30				3	2
30—40			5	10	3
40—50		3	13	9	
50—60	1	4	5	2	

9. நிகழ்தகவு

அன்றாடப் பேச்சு வழக்கில் 'வாய்ப்பு' எனும் சொல் சரளமாகப் புழங்கி வருகின்றது. குறிப்பிட்ட சூழ்நிலையில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதைப்பற்றி ஐயப்பாடு தோன்றும் போதெல்லாம், அதை வெளிப்படுத்தும் வகையில் 'வாய்ப்பு' எனும் சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம். பொதுவாக நிகழ்ச்சிகளை இரு வகைகளாகப் பாகுபடுத்தலாம். கொடுக்கப்பட்ட அடிப்படைச் செய்திகளில் இருந்து உறுதியாக நிகழும் என முன் கூட்டியே குறிப்பிடக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் ஒருவகை; அவ்வாறின்றி, நிகழ்ந்தாலும் நிகழலாம் அல்லது நிகழாமலும் போகலாம் என ஐயப்பாட்டுடன் குறிப்பிடக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் இரண்டாவது வகை; ஒரு கல்லை மேல் நோக்கி எறிந்தால், அது உயரச் சென்று பிறகு கீழே வந்து விழுவது உறுதியாக நிகழும் நிகழ்ச்சி. ஒரு பாத்திரத்தில் உள்ள தண்ணீரைத் தொடர்ந்து சூடாக்கும் போது அது நீராவியாக மாறுவது உறுதியான நிகழ்ச்சி. வெள்ளை நிறப்பந்துகள் மட்டும் கொண்ட பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்து, கறுப்பு நிறமாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழாது. ஆனால், ஒரு கண்ணாடிக் குவளை கீழே விழுந்தால் அது உடைந்து தூளாகும் என்றோ அல்லது சேதம் ஏதும் இன்றி இருக்கும் என்றோ உறுதியாகக் கூறமுடியாது. கண்ணாடிக் குவளை 100 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து விழுந்தது எனவும், அது விழுந்த தரையில் கருங்கற்கள் பதிக்கப்பட்டுள்ளன எனவும் செய்திகள் தெரியும்போது, குவளை உடைந்து தூளாவதற்கு அதிகவாய்ப்புள்ளது என எதிர்பார்க்கலாம். கருமேகங்கள் வானத்தில் திரண்டுள்ளதால் மழை பெய்வது திண்ணம் எனக் கூறமுடியாது. வெள்ளை, கறுப்பு நிறப்பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்தின் நிறத்தைப்பற்றி உறுதியாக முன் கூட்டியே கூறமுடியாது; ஆனால், அப்பையில் 1 வெள்ளைப்பந்து, 99 கறுப்புப் பந்துகள் உள்ளன எனும் விவரம்

தெரியுமிடத்து, அதிலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்தின் நிறம்வெள்ளை யாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு குறைவு எனக் குறிப்பிடமுடியும். ஆகவே, ஒரு நிகழ்ச்சிஏற்படுவதைப்பற்றி உறுதியாகக்கூறமுடியாத சமயங்களில், அது நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பினைக் குறிப்பிட விழைகிறோம்; இவ்வாய்ப்பினை எண் வடிவில் வெளிப்படுத்தும் அளவையை நிகழ்தகவு என அழைக்கிறோம்.

நிகழ்தகவு வரையறை : ஒரு முயற்சி (Trial) யில் ஏற்படக்கூடிய மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கையை N என்போம். இவைகளில், 'A' எனும் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 'm' எனில், நிகழ்ச்சி A–ன் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{\text{நிகழ்ச்சி } A\text{-க்குச்சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{m}{N}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவின் மதிப்பானது (0, 1) என்ற இடைவெளியில் அடங்கிய பின்னமாகும். நிகழ்தகவு மதிப்பு 1 என்பது நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழ்வதையும், நிகழ்தகவு மதிப்பு 0 (பூச்சியம்) என்பது நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழாததையும் குறிக்கின்றன. ஒரு முயற்சியில் நிகழ்ச்சி A ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 'p' எனில், அந் நிகழ்ச்சி ஏற்படாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(1-p)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

நாணயத்தைச் சுண்டி யெறியும்போது அதன் 'தலை' பக்கமோ அல்லது 'பூ' பக்கமோ மேற்புறமாகத் தோன்றுமாதலால், நாணயத்தைச் சுண்டி யெறியும் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 2 ஆகும். இவைகளில் 'தலை' மேற்புறமாகத் தோன்றும் நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவு ஒன்றாகும். எனவே, நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது தலைமேற்புறமாகத் தோன்றும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு P (தலை) $= \frac{1}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

அறுமுகப்பகடையை உருட்டும்போது அதன் மேல் பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, 4, 5, 6

ஆகியவைகளில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்குமாதலால், இம் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 6. இவைகளில், மேல் பக்கத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையாக இருப்பதற்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 3. எனவே, அறுமுகப் பகடையை உருட்டும் போது மேல் பக்கத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

P (ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கைப் புள்ளிகள்) $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

கணக்கு : ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு உருவப் படும்போது (i) 'ஸ்பேட்' ஆக இருப்பதற்குரிய (ii) 'ஸ்பேட்' ஆக இல்லாதிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

52 சீட்டுகள் உள்ள கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு உருவப்படும் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 52. இவைகளில் உருவப்படும் சீட்டு 'ஸ்பேட்' ஆக இருப்பதற்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 13. எனவே சீட்டுக்கட்டிலிருந்து உருவப்படும் சீட்டு 'ஸ்பேட்' ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

P [ஸ்பேட்] $=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

இப்போது சீட்டுக்கட்டிலிருந்து உருவப்படும் சீட்டு ஸ்பேட் ஆக இல்லாதிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு,

P [ஸ்பேட் அல்லாதது]

$= 1-P$ [ஸ்பேட்]

$=1-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

கணக்கு : 5 வெள்ளை, 4 கறுப்புக் கோலிகள் கொண்ட பையிலிருந்து 2 கோலிகள் எடுக்கும்போது அவைகள் கறுப்பு நிறமாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

பையில் உள்ள கோலிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $=5+4=9$. 9 கோலிகளிலிருந்து இரு கோலிகளை எடுக்கும் முயற்சியின் விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $(9_{c2})=36$. எடுக்கும்

இருகோலிகள் கறுப்புநிறமாக இருப்பதற்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $4_{c_2} = 6$. எனவே தேவையான நிகழ்தகவு

$$P\ [\text{இரு கறுப்புக் கோலிகள்}] = \frac{4_{c_2}}{9_{c_2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

கணக்கு :

8 ஆண்கள், 12 பெண்கள் கொண்ட குழுவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 3 நபர்களுள் இரண்டு ஆண்களும் ஒரு பெண்ணும் இடம் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

குழுவில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை = 12 + 8 = 20

$$\left.\begin{array}{l}\text{20 நபர்களிலிருந்து 3 நபர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்}\\ \text{முயற்சிக்கான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}\end{array}\right\} = 20_{C_3}$$

$$= 1140$$

இப்போது, தேர்ந்தெடுக்கப்படும் 3 நபர்களில் 2 ஆண்கள் ஒரு பெண் அமைதற்குரிய

$$\left.\begin{array}{l}\text{விளைவுகளின்}\\ \text{எண்ணிக்கை}\end{array}\right\} = 8_{C_2} \times 12_{C_1}$$

$$= 28 \times 12 = 336$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு

$$P\,(\text{இரு ஆண்கள், ஒரு பெண்}) = \frac{336}{1140}$$

$$= \frac{28}{95}$$

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events)

ஒரு முயற்சியில் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளில் யாதேனும் ஒன்று ஏற்படும் போது அதே சமயத்தில் மற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஏற்பட முடியாதெனில் அந் நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டி யெறியும் முயற்சியில் தலைப்பக்கம் மேல் புறமாக விழும்போது, அதே சமயத்தில் பூப்

பக்கம் மேல் புறமாக விழ முடியாதாகையால் நாணயத்தைச் சுண்டி விடும் போது ஏற்படும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றை யொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகின்றன.

வெள்ளை, கறுப்பு, பச்சைப் பந்துகளைக் கொண்ட பையிலி ருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கும் போது, அது வெள்ளைப் பந்தாக மட்டுமோ அல்லது கறுப்புப் பந்தாக மட்டுமோ அல்லது பச்சைப் பந்தாக மட்டுமோ இருக்கக்கூடும். வெள்ளைப் பந்து எடுக்கப்படும் போது அதே சமயத்தில் பச்சைப் பந்தையோ அல்லது கறுப்புப் பந்தையோ எடுக்க முடியாதாகையால், பையி லிருந்து எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி, கறுப்பாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி, பச்சையாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி ஆகிய மூன்றும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்

கூட்டல் தேற்றம் 1:

A, B ஆகிய ஒன்றையொன்று விலக்கும் இரு நிகழ்ச்சி களில் A அல்லது B நிகழ்தகவானது A, B ஆகியவைகள் ஒவ் வொன்றும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை யாகும். இதை,

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

எனக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $P(AUB)$ என்பது நிகழ்ச்சி A அல்லது, நிகழ்ச்சி B நிகழ்வதற்கான நிகழ் தகவைக் குறிக்கிறது.

கணக்கு :

சீட்டுக் கட்டிலிருந்து உருவப்படும் ஒரு சீட்டு அரசனா கவோ அல்லது அரசியாகவோ அமைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

சீட்டுக் கட்டிலிருந்து உருவப்படும் சீட்டு அரசனாக இருக் கும் நிகழ்ச்சியை A எனவும், அச் சீட்டு அரசியாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை B எனவும் குறிப்பிடுவோம். இவ்விரண்டும் ஒன்றை யொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். இவை ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு :

$$P(A) = 4/52$$

$$P(B) = 4/52$$

ஆகின்றன. கூட்டல் தேற்றம் 1–ன்படி

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

$$= 4/52 + 4/52 = 2/13$$

எனவே சீட்டுக் கட்டிலிருந்து உருவப்படும் ஒரு சீட்டு அரசகுகைவோ அல்லது அரசியாகவோ அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 2/13 ஆகும்.

கணக்கு :

3 கணிதவியல், 4 புள்ளியியல், 4 இயற்பியல், 2 பொருளியல் புத்தகங்கள் அடங்கியுள்ள பெட்டியிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒருபுத்தகம் புள்ளியியல் அல்லதுபொருளியல் புத்தகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

பெட்டியிலிருந்து (i) ஒரு புள்ளியியல் புத்தகத்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,(\text{புள்ளியியல்}) = \frac{4}{13}$$

(ii) ஒரு பொருளியல் புத்தகத்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,(\text{பொருளியல்}) = 2/13$$

ஆகின்றன. எனவே, கூட்டல் தேற்றம் 1–ன்படி P (புள்ளியியல் அல்லது பொருளியல் புத்தகம்)

$$= \frac{4}{13} + 2/13 = 6/13$$

கூட்டல் தேற்றம் 2 :

A, B, C ஆகிய ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு அவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதற்கான நிகழ் தகவுகளின் கூட்டுத் தொகையேயாகும்.

இதை,

$$P\,[AUBUC] = P(A) + P(B) + P(C)$$

என குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $P(A \cup B \cup C)$ என்பது நிகழ்ச்சி A அல்லது நிகழ்ச்சி B அல்லது நிகழ்ச்சி C ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது.

கணக்கு :

3 வெள்ளைக் கோலிகள், 2 கறுப்புக் கோலிகள், 2 நீலக் கோலிகள், 4 பச்சைக் கோலிகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு கோலி எடுக்கும்போது அது வெள்ளை நிறம் அல்லது பச்சை நிறம் அல்லது நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலி

(i) வெள்ளை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,[\text{வெள்ளை}] = 3/14$$

(ii) பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,[\text{பச்சை}] = 4/14$$

(iii) நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,[\text{நீலம்}] = 2/14$$

கூட்டல் தேற்றம் 2–ன் படி

P [வெள்ளை அல்லது பச்சை அல்லது நீலம்]

$= P[\text{வெள்ளை}] + P\,[\text{பச்சை}] + P\,[\text{நீலம்}]$

$= 3/14 + 4/14 + 2/14 = 9/14$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $= 9/14$ ஆகும்.

கணக்கு :

சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் உருவப்படும் இரு சீட்டுகள் 'ஸ்பேட்', 'டைமண்ட்', 'கிளாவர்' ஆகிய வகைகளில் ஏதேனும் ஒரே வகையானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

52 சீட்டுகளில் ஒரே சமயத்தில் உருவப்படும் இருசீட்டுகளும், (i) ஸ்பேட் வகையைச் சேர்ந்தவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

P [ஸ்பேட்] = $13_{C2}/52_{C_2}$ = 1/17

(ii) டைமண்ட் வகையானவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

P [டைமண்ட்] = $13_{C2}/52_{C_2}$ = 1/17

(iii) கிளாவர் வகையைச் சேர்ந்தவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

P [கிளாவர்] = $13_{C2}/52_{C_2}$ = 1/17

கூட்டல் தேற்றம் 2–ன்படி.

P (ஸ்பேட் அல்லது டைமண்ட் அல்லது கிளாவர்)

= P [ஸ்பேட்] + P [டைமண்ட்] + P [கிளாவர்]

= 1/17 + 1/17 + 1/17 = 3/17.

கூட்டல் தேற்றம் 3 :

ஒன்றையொன்று விலக்காத A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளில், A அல்லது B நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு ஆனது A, B ஆகியவைகளின் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து, அவை இரண்டும் ஒருமித்து நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவைக் கழித்துப் பெறும் மதிப்பாகும். இதை,

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ எனக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $P(A \cap B)$ என்பது A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒருமித்து நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிப்பிடும்.

கணக்கு :

நன்கு குலுக்கப்பட்ட சீட்டு கட்டிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டு கறுப்பு நிறமாகவோ அல்லது அரசனாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

சீட்டுக் கட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் சீட்டு கறுப்பு நிறமாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை A எனவும் அச் சீட்டு அரசனாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை B எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இங்கு A, B நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்காதவை களாகும்.

இப்போது,

$$P[A] = \frac{26}{52}$$

$$P[B] = \frac{4}{52}$$

$$P[A \cap B] = 2/52$$ ஆகின்றன.

கூட்டல் தேற்றம் 3-ன்படி

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 26/52 + 4/52 - 2/52 = 28/52$$

எனவே, தேவையான நிகழ் தகவு $= 7/13$.

கணக்கு :

20 நபர்கள் கொண்ட குழு பற்றிய விவரங்கள் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

	கண்ணுடி அணிந்தவர்கள்	கண்ணுடி அணியாதவர்கள்	மொத்தம்
ஆண்கள்	7	5	12
பெண்கள்	6	2	8
மொத்தம்	13	7	20

இக் குழுவிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் படும் ஒரு நபர் பெண்ணுகவோ அல்லது கண்ணுடி அணியாத வராகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நபர் பெண்ணுக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\}$ $= P$ [பெண்] $= 8/20$

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நபர் கண்ணாடி அணியாதவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,[\text{கண்ணாடி அணியாதவர்}] = 7/20.$$

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நபர் பெண்ணாகவும், கண்ணாடி அணியாதவராகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,(\text{கண்ணாடி அணியாத பெண்}) = 2/20$$

கூட்டல் தேற்றம் 3–ன்படி,

$$P\,(\text{பெண் அல்லது கண்ணாடி அணியாதவர்})$$
$$= P\,(\text{பெண்}) + P\,(\text{கண்ணாடி அணியாதவர்})$$
$$- P\,(\text{கண்ணாடி அணியாத பெண்})$$
$$= 8/20 + 7/20 - 2/20 = 13/20$$

எனவே, தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு நபர் பெண்ணாகவோ அல்லது கண்ணாடி அணியாதவராகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 13/20$ ஆகும்

கூட்டல் தேற்றம் 4 :

A, B, C ஆகிய ஒன்றையொன்று விலக்கப்படாத நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P\,(A \cup B \cup C) = P\,(A) + P\,(B) + P\,(C) - P\,(A \cap B)$$
$$- P\,(B \cap C) - P(C \cap A) + P\,(A \cap B \cap C) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $P\,(A \cup B \cup C)$ எனும் குறியீடு நிகழ்ச்சி A அல்லது நிகழ்ச்சி B அல்லது நிகழ்ச்சி C ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவையும், $P\,(A \cap B \cap C)$ எனும் குறியீடு A, B, C ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் மூன்றும் ஒருமித்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவையும் குறிப்பிடுகின்றன.

கணக்கு :

100 சிறுவர்கள் கொண்ட குழுவின் விவரம் பின்வருமாறு:

கோளாறு	சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை
பார்வை	40
செவியுணர்வு	36
பேச்சு	20
பார்வையும் செவியுணர்வும்	14
பார்வையும் பேச்சும்	11
பேச்சும் செவியுணர்வும்	9
பார்வையும், செவியுணர்வும், பேச்சும்	5

இக் குழுவிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு சிறுவனைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவன் (*i*) ஏதேனும் ஒரு கோளாறு உடையவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு (*ii*) ஒரு கோளாறு மில்லாது இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடு.

பார்வைக் கோளாறு இருப்பதை நிகழ்ச்சி A எனவும், செவியுணர்வு கோளாறு இருப்பதை நிகழ்ச்சி B எனவும், பேச்சுக்கோளாறு இருப்பதை நிகழ்ச்சி C எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது

$$P(A) = 40/100$$
$$P(B) = 36/100$$
$$P(C) = 20/100$$
$$P(A \cap B) = 14/100$$
$$P(A \cap C) = 11/100$$
$$P(B \cap C) = 9/100$$
$$P(A \cap B \cap C) = 5/100$$

கூட்டல் தேற்றம் 4-ன் படி

$$P(A \cup B \cup C) = 40/100 + 36/100 \times 20/100 - 14/100 - 11/100 - 9/100 + 5/100$$

$= 67/100$ ஆகும்,

என்வே, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவன் ஏதேனுமொரு கோளாறுடையவனுக இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு 67/100 ஆகும்.

இப்போது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவன் கோளாறு ஒன்றையும் பெருது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1-67/100=33/100$ ஆகும்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events):

இரு நிகழ்ச்சிகளில், ஒன்று ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மற்றது ஏற்படுவதைச் சார்ந்திராதபோது அவைகளைச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

இரு நாணயங்களைச் சுண்டியெறியும்போது, ஒரு நாணயத்தின் 'தலை' மேற்புறமாக விழுவதற்கான நிகழ்தகவு மற்ற நாணயத்தின் 'தலை' அல்லது 'பூ' மேற்புறமாக விழுவதைச் சார்ந்திருப்பதில்லை. எனவே, இரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது ஏற்படக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை என்கிறோம். இரண்டு சீட்டுக் கட்டுகளை எடுத்துக்கொண்டு ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு சீட்டை உருவும்போது ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவைகளாகும்.

பெருக்கல் தேற்றம் 1:

A, B ஆகிய இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒருமித்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு A, B ஆகிய ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதற்கான நிகழ் தகவுகளின் பெருக்குத்தொகையாகும்.

இதைக் குறியீடுகளால் $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

கணக்கு :

நடு நிலையான இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது அவை ஒவ்வொன்றின் மேல்பக்கமும் ஐந்து புள்ளிகளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ் தகவு யாது ?

பகடைகளை உருட்டும்போது ஒரு பகடையின் மேல்பக்கம் ஐந்து புள்ளிகளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை A எனவும், மற்ற பகடையின் மேற்புறம் ஐந்து புள்ளிகளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை B எனவும் குறிப்பிடுவோம். இங்கு A, B நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவைகளாகும்.

இப்போது,

$$P(A) = 1/6$$

$$P(B) = 1/6$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$= 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

கணக்கு :

3 வெள்ளைக் கோலிகள், 4 கறுப்புக் கோலிகள் உள்ள பச்சைப் பையிலிருந்து ஒரு கோலியும், 5 வெள்ளைக் கோலிகள் 2 கறுப்புக் கோலிகள் உள்ள சிகப்புப் பையிலிருந்து ஒரு கோலியும் எடுக்கப்படும்போது அவைகள் வெள்ளைக் கோலி களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

பச்சைப் பையிலிருந்து வெள்ளைக் கோலி எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை X எனவும், சிகப்புப் பையிலிருந்து வெள்ளைக் கோலி எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை Y எனவும் குறிப்பிடுவோம். இங்கு X, Y நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவைகளாகும்.

இப்போது,

$$P(X) = 3/7$$

$$P(Y) = 5/7$$

பெருக்கல் தேற்றம் 1–ன் படி

$$P(X \cap Y) = P(X)\,P(Y)$$

$$= 3/7 \times 5/7 = 15/49$$

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு 15/49 ஆகும்.

சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events)

இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மற்றொன்று ஏற்படுவதைச் சார்ந்திருக்கும்போது, அவைகளைச் சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

வெள்ளை, கறுப்பு பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுப்பதை முதல் முயற்சி என்போம். முதல் முயற்சியில்

எடுத்த பந்தை பைக்குள் திரும்பச்சேர்க்காமல் மற்றொரு பந்து எடுப்பதை இரண்டாவது முயற்சி என்போம். இரண்டாவது முயற்சியில் வெள்ளைப் பந்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு முதல் முயற்சியில் ஏற்பட்ட நிகழ்ச்சியைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே இவ்விரு முயற்சிகளிலும் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் சார்புடையனவாகும்.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

A, B ஆகிய இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளில் A முன்பே ஏற்பட்டுள்ளது எனக்கொண்டு, அதன் பிறகு B ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை B-க்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

இதை,

$$P(B/A)$$

எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

சீட்டுக் கட்டிலிருந்து உருவப்பட்ட ஒரு சீட்டு கறுப்பு நிறமாக இருப்பதை நிகழ்ச்சி A எனவும், அது அரசனாக இருப்பதை நிகழ்ச்சி B எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது, A–ன் நிகழ்வு கறுப்பு நிறமுள்ள 26 சீட்டுக்களில் ஒன்று எடுக்கப்பட்டதைக் குறிக்கிறது. அங்ஙனம் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு அரசனாக அமைய சாதகமான நிகழ்வுகள் 2 ஆகும்.

$$\text{எனவே } P(B/A) = \frac{2}{26}$$

$$= 1/13 \text{ ஆகும்.}$$

பெருக்கல் தேற்றம் 3 :

A, B ஆகிய சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் ஒருமித்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) \text{ ஆகும்.}$$

கணக்கு :

5 வெள்ளைக் கோலிகள், 4 கறுப்புக் கோலிகள் உள்ள பையிலிருந்து முதலில் ஒரு கோலியை எடுத்து அதை பைக்குள் சேர்க்காமல் மீண்டும் ஒரு கோலியை எடுக்கும்போது அவ்விரு கோலிகளும் வெள்ளை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

முதலில் எடுக்கும் கோலி வெள்ளை நிறமாக இருப்பதை A எனவும், இரண்டாவதாக எடுக்கும் கோலி வெள்ளை நிறமாக இருப்பதை B எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது,

$$P(A) = 5/9; \; P(B/A) = 4/8$$

பெருக்கல் தோற்றம் 3–ன் படி

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$$

$$= 5/9 \times 4/8 = 5/18$$

எனவே தேவையான நிகழ் தகவு 5/18 ஆகும்.

கணக்கு :

ஒரு குழுவில் 60% ஆண்களும் 40% பெண்களும் உள்ளனர். இவர்களுள் 80% ஆண்களும் 60% பெண்களும் பட்டதாரிகள் எனில், குழுவிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு நபரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அந்நபர்

(i) பட்டதாரி ஆணாக,

(ii) பட்டதாரியல்லாத ஆணாக,

(iii) பட்டதாரி பெண்ணாக,

(iv) பட்டதாரியல்லாத பெண்ணாக, இருப்பதற்கான நிகழ் தகவுகள் யாவை ?

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு நபர் ஆணாக இருப்பதை நிகழ்ச்சி M எனவும், பெண்ணாக இருப்பதை நிகழ்ச்சி F என

வும், பட்டதாரியாக இருப்பதை நிகழ்ச்சி X எனவும், பட்டதாரி யல்லாதவராக இருப்பதை நிகழ்ச்சி Y எனவும் கொள்வோம். இப்போது,

$$P(M) = 60/100 \qquad P(F) = 40/100$$

$$P(X/M) = 80/100 \qquad P(X/F) = 60/100$$

$$P(Y/M) = 20/100 \qquad P(Y/F) = 40/100.$$

பெருக்கல் தேற்றம் 3-ன் படி தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகள்

(i) $P(M \cap X) = P(M)\,P(X/M) = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{48}{100} = \cdot 48$

(ii) $P(M \cap Y) = P(M)\,P(Y/M) = 60/100 \times \frac{20}{100} = \frac{12}{100} = \cdot 12$

(iii) $P(F \cap X) = P(F)\,P(X/F) = \frac{40}{100} \times 60/100 = \frac{24}{100} = \cdot 24$

(iv) $P(F \cap Y) = P(F)\,P(Y/F) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{16}{100} = \cdot 16$

ஆகின்றன.

பெருக்கல் தேற்றம் 4 :

A, B, C ஆகிய சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் இணைந்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, அவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகையாகும். இதை

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ எனக் குறுயீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம்.

கணக்கு : ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது 'தலை'யைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனக்கொள்க. அந் நாணயத்தை மூன்று முறைகள் சுண்டிவிடும்போது மூன்று முறைகளிலும் தலையைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

முதல் முறை சுண்டி எறியும்போது தலை நிகழும் நிகழ்ச்சியை A எனவும், இரண்டாம் முறை சுண்டிவிடும்போது தலை நிகழும் நிகழ்ச்சியை B எனவும், மூன்றும் முறை சுண்டி

எறியும்போது தலை நிகழும் நிகழ்ச்சியை C எனவும் குறிப்பிடு வோம். அப்போது A, B, C ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{3}$$

பெருக்கல் தேற்றம் 3-ன் படி

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

கணக்கு : மூன்று குடும்பங்களில் உள்ள ஆண் பெண் களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு.

குடும்பம்	ஆண்கள்	பெண்கள்
I	3	2
II	1	4
III	2	3

ஒவ்வொரு குடும்பத்தில் இருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நபரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, அம்மூவரில் இரு ஆண்களும் ஒரு பெண்ணும் இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் மூவரில் இரு ஆண்கள், ஒரு பெண் இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி கீழ்க்கண்ட அமைப்புகளில் ஏற் படுகின்றன :

குடும்பங்கள்

	I	II	III
அமைப்பு 1	ஆண்	ஆண்	பெண்
அமைப்பு 2	ஆண்	பெண்	ஆண்
அமைப்பு 3	பெண்	ஆண்	ஆண்

இம்மூன்று அமைப்புகளும் ஒன்றை ஒன்று விலக்குவன. இவைகளில் ஏதேனும் ஒன்று ஏற்படின் தேவையான நிகழ்ச்சியைப் பெறுகிறோம். எனவே கூட்டல் தேற்றம் 2-ன் படி

P (தேவையான நிகழ்ச்சி)

$= P$ [அமைப்பு 1] $+ P$ [அமைப்பு 2] $+ P$ [அமைப்பு 3]

இப்போது அமைப்பு 1 என்பது குடும்பம் I-லிருந்து ஓர் ஆணும், குடும்பம் II-லிருந்து ஓர் ஆணும், குடும்பம் III-லிருந்து ஒரு பெண்ணும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் இணைந்த நிகழ்ச்சிகளைக் குறிப்பிடுகிறது. மேற்கண்ட இம் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவைகளாகின்றன. ஆகவே, பெருக்கல் தேற்றம் 3-ன் படி

P [அமைப்பு 1] $= P$ [குடும்பம் I-லிருந்து ஆண்]

$\times P$ [குடும்பம் II-லிருந்து ஆண்]

$\times P$ [குடும்பம் III-லிருந்து பெண்]

$$=3/5\times 1/5\times 3/5=\frac{9}{125}$$

இவ்வாறே,

P (அமைப்பு 2) $=3/5\times4/5\times2/5=\frac{24}{125}$

P (அமைப்பு 3) $=2/5\times1/5\times2/5= 4/125$

ஆக அமைகின்றன. எனவே,

P (தேவையான நிகழ்ச்சி) $=P$ (அமைப்பு 1)

$+ P$ (அமைப்பு 2) $+P$ (அமைப்பு 3)

$$=\frac{9}{125}+\frac{24}{125}+\frac{4}{125}=\frac{37}{125}$$

பெருக்கல் தேற்றம் 4 :

A, B, C ஆகிய மூன்று சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் ஒருமித்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A\cap B\cap C)=P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB)$ ஆகும். நிகழ்ச்சி 'A' ஏற்பட்டது எனக்கொண்டு B ஏற்

படுவதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவை $P(B/A)$ எனவும், நிகழ்ச்சிகள் A, B ஆகிய இரண்டும் ஏற்பட்டன எனக்கொண்டு நிகழ்ச்சி C ஏற்படுவதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவை $P(C/AB)$ எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.

கணக்கு : 4 பச்சைப் பந்துகள், 6 மஞ்சள் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்பட்ட 3 பந்துகளில் இரண்டு பச்சையும் ஒரு மஞ்சளும் நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? (எடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பந்தும் பைக்குள் திரும்பச் சேர்க்கப்படவில்லை எனக் கொள்க)

தேவையான நிகழ்ச்சி ஒன்றையொன்று விலக்கும் மூன்று அமைப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு ஏற்படுகின்றன:

	முதல் பந்து	இரண்டாவது பந்து	மூன்றாவது பந்து
அமைப்பு 1	பச்சை	பச்சை	மஞ்சள்
அமைப்பு 2	பச்சை	மஞ்சள்	மஞ்சள்
அமைப்பு 3	மஞ்சள்	பச்சை	பச்சை

$$P\,[\text{தேவையான நிகழ்ச்சி}] = P\,[\text{அமைப்பு } 1]$$

$$+ P\,[\text{அமைப்பு } 2] + P\,[\text{அமைப்பு } 3]$$

இப்போது அமைப்பு 1 முதலாவதாக எடுத்த பந்து பச்சை நிறமாகவும், இரண்டாவதாக எடுத்த பந்து பச்சை நிறமாகவும், மூன்றாவதாக எடுத்த பந்து மஞ்சள் நிறமாகவும் இருப்பதற்கான இணைந்த நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கிறது. முதலாவது பந்து பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P\,[\text{முதல்பந்து பச்சை}] = \frac{4}{10}$$

முதலாவதாக எடுத்த பச்சைப் பந்தை பைக்குள் திரும்பச் சேர்க்காத போது, இரண்டாவதாக எடுத்த பந்து பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

P (இரண்டாவது பந்து பச்சை/முதலாவது பந்து பச்சை) $= 3/9$

முதலாவதாக, இரண்டாவதாக எடுத்த பச்சைப் பந்துகளைப் பைக்குள் திரும்பச் சேர்க்காமல் எடுத்த மூன்ருவது பந்து மஞ்சள் நிறமாக அமைதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

P(மூன்ருவது பந்து மஞ்சள்/முதலாவது பந்து பச்சை இரண்டாவது பந்து பச்சை)

$$= 6/8$$

பெருக்கல் தேற்றம் 4–ன்படி

P(அமைப்பு 1) = P (முதலாவது பந்து பச்சை நிறம்)

× P (இரண்டாவது பந்து பச்சை நிறம்/முதலாவது பந்து பச்சை நிறம்)

× P (மூன்ருவது பந்து மஞ்சள் நிறம்/முதலாவது, இரண்டாவது பந்துகள் பச்சை நிறம்)

$$= 4/10 \times 3/9 \times 6/8 = 1/10$$

இவ்வாறே, P (அமைப்பு 2) $= 4/10 \times 6/9 \times 3/8 = 1/10$

P (அமைப்பு 3) $= 6/10 \times 4/9 \times 3/8 = 1/10$

ஆகின்றன. எனவே,

P (தேவையான நிகழ்ச்சி)

= P (அமைப்பு 1) + P (அமைப்பு 2)

+ P (அமைப்பு 3)

$$= 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு $= 3/10$.

பயிற்சி

(1) 1, 2, 3 ... 15 ஆகிய எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள 15 சீட்டுகளைக் கொண்ட பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு (a) ஒற்றைப்படை எண்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்

தகவு (ii) இரட்டைப் படை எண்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(2) 4 வெள்ளை, 6 கறுப்பு கோலிகளைக் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் இரு கோலிகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) அவைகளில் ஒன்று வெள்ளை மற்றது கறுப்பாக (ii) அவைகள் இரண்டுமே கறுப்பாக (iii) அவைகள் இரண்டும் வெள்ளையாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து, ஒரே சமயத்தில் உருவப்படும் மூன்று சீட்டுகளும் 'டைமண்ட்' வகையானதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(4) நன்கு குலுக்கப்பட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து உருவப்படும் ஒரு சீட்டு ஏஸாகவோ அல்லது ஜாக்காகவோ அல்லது அரசராகவோ அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(5) ஒரு குழுவில் இடம் பெறும் 30 குழந்தைகளில் 9 ஆண் குழந்தைகளின் எடை எட்டு பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாகவும், 10 ஆண் குழந்தைகளின் எடை எட்டு பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாகவும், 6 பெண் குழந்தைகளின் எடை எட்டு பவுண்டுகளுக்கு குறைவாகவும், 5 பெண் குழந்தைகளின் எடை எட்டு பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாகவும் உள்ளன. இக்குழுவிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் ஒரு குழந்தை ஆணாகவோ அல்லது எட்டு பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக எடையுள்ளதாகவோ அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(6) இரு பகடைகளை உருட்டும்போது அவைகளின் மேற்புற முகங்களில் தோன்றும் புள்ளிகளின் கூட்டுத் தொகை 7 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(7) 4 நடு நிலையான நாணயங்களைச் சுண்டியெறியும் போது (i) குறைந்தது இரண்டு தலைகளைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு (ii) ஒரு தலையையும் பெறுதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(8) ஒரு அளவெடுப்பில் இடம் பெறும் 200 நபர்கள் ஒவ்வொருவரும் A, B, C எனும் மூன்று வாரப் பத்திரிகைகளைப் படிப்பது பற்றிய விவரங்கள் பின் வருமாறு :

வாரப் பத்திரிகை	படிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை
A	80
B	90
C	75
A-ம் B-ம்	54
A-ம் C-ம்	46
B-ம் C-ம்	51
A, B, C ஆகிய மூன்றும்	32

இவர்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் படும் ஒரு நபர் A, B, C ஆகியவைகளில் (i) ஏதேனும் ஒரு வாரப் பத்திரிகையைப் படிக்கிறவராக (ii) ஒன்றுகூட படிக் காதவராக நிகழ்தகவுகளைப் பெறுக.

(9) திருகாணிகளை உற்பத்தி செய்யும் இயந்திரம் சீர்குலை வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ எனக் கொள்க. ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள இத்தகைய நான்கு இயந்திரங்களுள் (i) அவை நான்கும் ஒரே சமயத்தில் சீர்குலைந்து போதற்கான நிகழ் தகவு (ii) இரண்டு அல்லது மூன்று இயந்திரங்கள் சீர்குலைவு அடைவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(10) ஒரு குழுவிலுள்ள மாணவர்களுள் 7, 8, 9, 10, 11 ஆகிய வயது நிரம்பியவர்களின் எண்ணிக்கை முறையே 4, 6, 3, 5, 2 ஆக அமைகிறது. குழுவிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு மாணவரின் வயது (i) 8 அல்லது 10 அல்லது 11 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு (ii) 9 அல்லது அதற்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(11) நன்கு கலைக்கப்பட்ட இரு சீட்டுக் கட்டுகள் ஒவ் வொன்றிலிருந்தும் ஒரு சீட்டை உருவும் போது அவை அரசர் களாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(12) ஒரு பையில் 3 வெள்ளை, 2 கறுப்பு, 5 மஞ்சள் பந்து கள் உள்ளன. இதிலிருந்து முறைக்கு ஒரு பந்து வீதமாக

3 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு முறையிலும் எடுக்கப்பட்ட பந்தை பைக்குள்

(i) திரும்பச் சேர்க்கும் நிலை,

(ii) திரும்பச் சேர்க்காத நிலை ஆகிய இவ்விரு நிலைகளில் எடுக்கப்பட்ட பந்துகள்,

(a) மூன்றும் வெள்ளை நிறமாக,

(b) மூன்றும் கறுப்பு நிறமாக,

(c) ஒரு வெள்ளை, ஒரு கறுப்பு, ஒரு மஞ்சள் நிறமாக அமைவதற்கான நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

(13) ஒரு குவியலில் உள்ள மின் விளக்குகள் ஒவ்வொன்றும் 1500 மணி நேரத்திற்கு மேல் எரிவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$ எனில் அக் குவியலிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 3 மின் விளக்குகளில் ஒன்றுகூட 1500 மணி நேரத்திற்கு மேல் எரியாதிருத்தற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(14) ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் 1000 மாணவர்களைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் பின் வருமாறு :

	குடும்பத்தின் ஆண்டு வருமானம்	
	ரூபாய் 2000-க்குக் கீழ்	ரூபாய் 2000-க்கு மேல்
நகர் புறத்தவர்	200	400
நாட்டுப் புறத்தவர்	100	300

இவ்வாயிரம் மாணவர்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒருவர்

(i) நாட்டுப்புறத்தவராக இருத்தற்கான நிகழ்தகவு,

(ii) நகர் புறத்தவர் அல்லது ரூ. 2000–க்குக் கீழ் வருமானமுள்ள குடும்பத்தினராக இருத்தற்கான நிகழ்தகவு,

(iii) நாட்டுப் புறத்தவராகவும் ரூ. 2000–க்கு மேலும் வருமானமுள்ள குடும்பத்தினராக இருத்தற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(15) நான்கு பகடைகள் வீசப்படும் போது,

(i) எல்லா பகடைகளிலும் 5 என்ற எண் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு,

(ii) பகடைகள் காட்டும் எண்கள் இரட்டைப்படையாக அமைதற்கான நிகழ்தகவு,

(iii) எல்லா பகடைகளிலும் ஒரே எண் தோன்றுதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(16) ஒரு நிறுவனத்தில் வேலை பார்க்கும் 50 நபர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் பின் வருமாறு:

	பட்டதாரிகள்	பட்டதாரி அல்லாதவர்கள்
ஆண்கள்	10	20
பெண்கள்	5	15

இவர்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் இரு நபர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது,

(i) அவர்களில் ஒருவர் ஆணாகவும், மற்றொருவர் பெண்ணாகவும் இருத்தலுக்கான நிகழ்தகவு;

(ii) ஒருவர் பட்டதாரியாகவும், மற்றவர் பட்டதாரி அல்லாதவராகவும் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு;

(iii) ஒருவர் ஆண் பட்டதாரியாகவும், மற்றவர் பட்டதாரி அல்லாத பெண்ணாகவும் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு;

(iv) ஒருவர் பெண் பட்டதாரியாகவும், மற்றவர் பட்டதாரி அல்லாத பெண்ணாகவும் அமைவதற்கான நிகழ் தகவு) ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

10. ஈருறுப்புப் பரவல்

புள்ளியியலில், முழுமைத் தொகுதிகளை விவரிக்கும் பரவல்களை நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளின் வாயிலாகப் பெறுகிறோம். இவ்வாறான பரவல்களை முழுமைத் தொகுதிகளின் கோட்பாடியலான பரவல்கள் (Theoretical Distributions) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். ஈருறுப்புப் பரவலானது, புள்ளியியலில் வழங்கப்படும் கோட்பாடியலான பரவல்களில் முக்கியமான தொன்றாகும்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது, 'தலை' அல்லது 'பூ' மேற்புறமாக விழுவது கண்கூடு. ஆகவே, நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் முயற்சியில் எதிர்கொள்ளும் விளைவுகள் 'தலை', 'பூ' என்கிறோம். நாணயம் நடுநிலையானதாயின் 'தலை', 'பூ' ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் மேற்புறமாகப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும். எனவே, நடுநிலையான நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டியெறியும் முயற்சியில் பெறும் விளைவுகளின் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் பட்டியல் 10-1-ல் காட்டிய வண்ணம் அமைகின்றன.

பட்டியல் 10–1.

விளைவு	நிகழ்தகவு
பூ	$\frac{1}{2}$
தலை	$\frac{1}{2}$
மொத்தம்	1

நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது மேற்புறமாகப்பெறும் 'தலை'-யின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடும்போது, முயற்சியின் விளைவு 'பூ' எனில், X-ன் மதிப்பு 0 ஆகவும், விளைவு 'தலை' எனில் X-ன் மதிப்பு 1 ஆகவும் அமையும். இப்போது பட்டியல் 10–1-ல் இடம்பெறும் நிகழ்தகவு மதிப்பு களைக் கீழே காட்டியவாறு வெளிப்படுத்துவோம்.

பட்டியல் 10-2.

'தலை'யின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	1/2
1	1/2
மொத்தம்	1

இதை ஈருறுப்புப் பரவல் என அழைக்கிறோம்.

ஒரு முயச்சியில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை 'p' எனவும், அது ஏற்படாதிருப்பதற்கான நிகழ் தகவை '$1 - p$' = 'q' எனவும், கொள்வோம். நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதன் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிடும் போது, $(X = 0)$ என்பது முயற்சியில் நிகழ்ச்சி ஏற்படாதிருப் பதையும், $(X = 1)$ என்பது அது ஏற்பட்டிருப்பதையும் குறிக்கும். இவைகளின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கீழ்கண்ட ஈருறுப்பு பரவலாக அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 10-3.

ஒரு முயற்சியில் நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு
0	q
1	p
மொத்தம்	1

இப்போது ஒரு நாணயத்தை இரு முறை சுண்டியெறியும் போது பெறும் விளைவுகளைக் காண்போம்.

பட்டியல் 10-4

விளைவு	முதல்முறை	இரண்டாம் முறை	நிகழ்தகவு
(i)	பூ	பூ	$\frac{1}{4}$
(ii)	பூ	தலை	$\frac{1}{4}$
(iii)	தலை	பூ	$\frac{1}{4}$
(vi)	தலை	தலை	$\frac{1}{4}$

நாணயம் நடு நிலையானது எனவும், அதைச் சுண்டியெறியும் முயற்சிகள் சார்பற்றன எனவும் கொள்வோம். அப்போது, ஒரு முயற்சியில் பூ அல்லது தலை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என அமைவதால், இரு முயற்சிகளிலும் 'பூ' பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு, பெருக்கல் தேற்றத்தின்படி, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ஆகும். அதாவது விளைவு (i) நேர்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$. இதுபோலவே, மற்ற விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் நேர்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். ஆகவே, ஒரு நடு நிலையான நாணயத்தை இரு சார்பற்ற முறைகள் சுண்டியெறியும்போது பெறும் விளைவுகளுக்கான நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகள் பட்டியல் 10–4-ல் கொடுத்துள்ளபடி அமைகின்றன. இப்போது, விளைவில் இடம்பெறும் 'தலை'களின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடும்போது, $(X=0)$ என்பது (பூ, பூ) எனும் விளைவையும், $(X=1)$ என்பது (பூ, தலை) அல்லது (தலை, பூ) எனும் விளைவையும், $(X=2)$ என்பது (தலை, தலை) எனும் விளைவையும் குறிக்கும்படி அமைகிறது. ஆகவே, $(X=0)$-ன் நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$, $(X=1)$-ன் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$, $(X=2)$-ன் நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ என்கிறோம். இந்நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கீழே பட்டியலில் அமைத்து,

பட்டியல் 10–5.

'தலை'களின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
மொத்தம்	1

ஈருறுப்புப் பரவல் என அழைக்கிறோம்.

ஒரு சோதனையில் இரு சார்பற்ற முயற்சிகள் இடம் பெறுகின்றன எனவும், ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 'p' எனவும், அது ஏற்படாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு '$1-p$'='q' எனவும் கொள்வோம். சோதனையில் நிகழும் நிகழ்ச்சியின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடும்போது, X ஆனது 0, 1, 2 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெற்று அமையும். $(X=0)$ என்பது சோதனையில் இடம்பெறும் இரு முயற்சிகளிலும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படவில்லையென்பதைக் குறிக்கிறது. முயற்சிகள் சார்பற்றவைகளாதலால், இரு முயற்சிகளிலும் நிகழ்ச்சி ஏற்படாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, பெருக்கல் தேற்றத்தின் படி, q^2 ஆகும். எனவே, $(X=0)$-ன் நிகழ்தகவு q^2. $(X=2)$ என்பது சோதனையில் இடம்பெறும் இரு முயற்சிகளிலும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்பட்டுள்ளதைக் குறிக்கிறது. இதன் நிகழ்தகவு p^2 ஆகும். எனவே, $(X=2)$-ன் நிகழ்தகவு p^2. $(X=1)$ என்பது சோதனையில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஒரு முறை நிகழ்வதைக் குறிக்கிறது. சோதனையில் (i) முதல் முயற்சியில் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்து இரண்டாவது முயற்சியில் அது நிகழாமலிருப்பது, (ii) முதல் முயற்சியில் நிகழாமல் இரண்டாவது முயற்சியில் அது நிகழ்வது ஆகிய இரு விளைவுகளையும், $(X=1)$ என்பது குறிப்பிடும். இவ்விரு விளைவுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையைப் பெற்றிருப்பதாலும், ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவும் $q\,p$ ஆக அமைவதாலும், கூட்டல் தேற்றத்தின் படி, $(X=1)$-ன் நிகழ்தகவு $pq+pq=2\,pq$. எனவே, சோதனையின் விளைவுகளுக்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 10-6

நிகழ்ச்சியின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு
0	q^2
1	$2qp$
2	p^2
மொத்தம்	1

இது ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

இப்போது, பட்டியல் (10–6)–ல் இடம் பெறும் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை, ஈருறுப்புக் கோவை $(q+pt)^2$-ன் விரிப்புத்தொடர் வாயிலாக அடைவதுபற்றி காண்போம்.

$(q+pt)^2 = q^2 + 2\,qpt + p^2 t^2$ இச் சமன்பாட்டின் வலது புறமுள்ள உறுப்புகள் முறையே t–ன் 0, 1, 2-ஆவது படிகளில் அமைகின்றன. இங்கு t^0, t^1, t^2 ஆகியவைகளின் கெழுக்கள் முறையே q^2, $2qp$, p^2 ஆகின்றன. இப்போது, q^2, $2qp$, p^2 ஆகியவைகள் முறையே $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$ ஆகியவைகளின் நிகழ் தகவுகள் என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே, $(q+pt)^2$ ஐ விரித்து எழுதும்போது, t-ன் கெழுக்கள் அதாவது t^0, t^1, t^2 ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் முறையே $(X=0)$, $(X=1)$, $(x=2)$ ஆகியவைகளுக்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளாக அமைகின்றன.

வெள்ளை, கறுப்பு பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/3 எனக்கொள்வோம். பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்து, நிறத்தைக் குறித்த பிறகு பைக்குத் திருப்பி விடுவதை ஒரு முயற்சி எனக் குறிப்பிடுவோம். இவ்வாருன இரு முயற்சிகள் இடம்பெறும் சோதனையில் பெறும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை அமைப்போம்.

$$\left.\begin{array}{c}\text{ஒரு முயற்சியில் வெள்ளைப்பந்தைப்}\\ \text{பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = p = 1/3$$

எனவே,

$$\left.\begin{array}{c}\text{முயற்சியில் வெள்ளைப் பந்தைப்}\\ \text{பெருதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = 1-p = 1-1/3 = 2/3.$$

சோதனையில் பெறும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்போம். இப்போது $(X=0)$, $(X=1)$,

$(X=2)$ ஆகியவைகளின் நிகழ்தகவுகளை $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,t\right)^2$ - ன்

விரிப்புத் தொடர் வாயிலாகப் பெறுகிரும்.

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,t\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)t + \left(\frac{1}{3}\right)^2 t^2$$

$(X=0)$ -ன் நிகழ்தகவு = ஈருறுப்புக்கோவை $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)^2$ விரிப்புத்தொடரில் t -ன் கெழு

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$(X=1)$-ன் நிகழ்தகவு = ஈருறுப்புக் கோவை $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)^2$ விரிப்புத்தொடரில் t -ன் கெழு.

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$(X=2)$-ன் நிகழ்தகவு = ஈருறுப்புக் கோவை $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^2$ - விரிப்புத் தொடரில் t^2-ன் கெழு

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

எனவே, சோதனையில் பெறுவதற்கான வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை பட்டியல் 10-7-ல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 10-7.

வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
1	$2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
மொத்தம்	1

இப்போது, ஒரு சோதனையில் மூன்று சார்பற்ற முயற்சிகள் இடம்பெறுகின்றன எனவும், ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் குறிப் பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 'p' எனவும், அது நிகழாமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு '$1-p$' = 'q' எனவும் கொள்வோம். சோதனையின்போது நிகழ்ச்சி நிகழ் வதின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோமெனில், $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$, $(X=3)$ ஆகியவைகளுக்கான நிகழ் தகவுகளை, ஈருறுப்புக் கோவை $(q+pt)^3$-ன் விரிப்புத்தொடர் உறுப்புகள் வாயிலாகப் பெறுகிறோம்.

$(q+pt)^3 = q^3 + {}^3C_1 q^2 pt + {}^3C_2 q p^2 t^2 + {}^3C_3 p^3 t^3$ இச் சமன்பாட்டின் வலப்புறத் தொடரில் t^0, t^1, t^2, t^3 ஆகியவை களின் கெழுக்கள் முறையே $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$, $(X=3)$ ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளாக அமைகின்றன. அதாவது,

$$P(X=0) = q^3$$

$$P(X=1) = {}^3C_1 q^2 p = 3q^2 p$$

$$P(X=2) = {}^3C_2 q p^2 = 3qp^2$$

$$P(X=3) = {}^3C_3 p^3 = p^3$$

இது போலவே, ஒரு சோதனையில் n சார்பற்ற முயற்சிகள் இடம் பெறுகின்றன எனவும், அம்முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 'p' எனவும், அது நிகழாமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு '$1-p$' = 'q' எனவும் கொள்வோம். சோதனையில் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிட்டு, $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$, ..., $(X=n)$ ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவுகளை ஈருறுப்புக் கோவை $(q+pt)^n$-ன் விரிப்புத்தொடரின் அடிப்படையில் பெறுகிறோம்.

$$(q+pt)^n = q^n + {}^nC_1 q^{n-1} p + {}^nC_2 q^{n-2} p^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_n p^n$$

இங்கு $t^0, t^1, t^2, \dots\dots, t^n$ ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் முறையே $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$; ...... $(X=n)$ ஆகியவைகளின் நிகழ் தகவுகளாக அமைகின்றன. அதாவது,

$$P(X=0) = q^n$$
$$P(X=1) = {}^nc_1\, q^{n-1}\, p$$
$$P(X=2) = {}^nc_2\, q^{n-2}\, p^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$P(X=r) = {}^nc_r\, q^{n-r}\, p^r$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$P(X=n) = {}^nc_n\, p^n$$

இம்மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைக்கிறோம்

பட்டியல் 10-8.

சோதனையில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு
0	q^n
1	${}^nc_1\, q^{n-1}\, p$
2	${}^nc_2\, q^{n-2}\, p^2$
$\vdots$	$\vdots$
r	${}^nc_r\, q^{n-r}\, p^r$
$\vdots$	$\vdots$
n	${}^nc_n\, p^n$

இப்பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலின் பொது வடிவம் என்கிறோம்.

சோதனையில் இடம்பெறும் சார்பற்ற முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 'n', முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 'p' ஆகியவைகளை ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் (Parameters) என அழைக்கிறோம்.

n, p ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின்

சராசரி $= n p$

திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{n p (1-p)}$

ஆகும்.

கணக்கு :

ஒரு நடுநிலையான நாணயத்தை 4 முறை சுண்டியெறியும்போது பெறும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை அடைக.

முறை :

நடுநிலையான நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டியெறியும்போது 'தலை' பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு } $p=\frac{1}{2}$

'தலை' பெறுமற்போவதற்கான நிகழ்தகவு } $=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

நாணயத்தை 4 முறை சுண்டியெறியும்போது பெறும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோமெனில், X-ன் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4 ஆகும்.

$(X=r)$-ன் நிகழ்தகவு $=$ ஈருறுப்புக்கோவை $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^4$ -ன் விரிப்புத் தொடரில் t^r-ன் கெழு

$$= {}^4c_r \left(\frac{1}{2}\right)^4, \; r=0, 1, 2, 3, 4$$

எனவே, தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் அடுத்த பக்கத்தில் பட்டியல் 10.9-ல் இடம் பெறுகிறது.

கணக்கு :

வெள்ளை, கறுப்புப் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/3. ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கும் பந்தை பைக்குத் திருப்பிவிடும்படியாக ஐந்து முறைகள் பந்தை எடுக்கும்போது,

(i) ஒரு வெள்ளைப் பந்துகூட பெறுதிருப்பதற்கான

(ii) குறைந்தது இரு வெள்ளை பந்துகளையாவது பெறுவதற்கான

நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

ஐந்து முறைகளில், வெள்ளைப் பந்துக்களைப் பெறும் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 10-9.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1/16$
1	${}^4c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4/16$
2	${}^4c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6/16$
3	${}^4c_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4/16$
4	${}^4c_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1/16$
மொத்தம்	1

ஒரு முறை வெள்ளைப்பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/3, வெள்ளைப்பந்து எடுக்காது போவதற்கான நிகழ்தகவு 2/3 என்பதால், ஐந்து சார்பற்ற முறைகளில் பெறும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, 4, 5 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளை ஈருறுப்புக்கோவை $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)^5$ - ன் விரிப்புத்தொடர் வாயிலாகப் பெற்றுப் பட்டியலில் அமைக்கிறோம்.

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}^5c_1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) t$$

$$+ {}^5c_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 t^2$$

$$+ {}^5c_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 t^3$$

$$+ {}^5C_4 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4 t^4$$

$$+ {}^5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 t^5$$

பட்டியல் 10-10.

வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு	
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$= 0{\cdot}1317$
1	${}^5C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)$	$= 0{\cdot}3292$
2	${}^5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$= 0{\cdot}3292$
3	${}^5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$= 0{\cdot}1646$
4	${}^5C_4 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$= 0{\cdot}0412$
5	${}^5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5$	$= 0{\cdot}0041$
மொத்தம்		$1{\cdot}0000$

(i) இப்போது, ஒரு வெள்ளைப்பந்து கூடப் பெறுதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}1317$

(ii) குறைந்தது இரு வெள்ளைப் பந்துகளையாவது பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு = வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 2 அல்லது 3 அல்லது 4 அல்லது 5

ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

= (வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு) + (வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு) + (வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு) + (வெள்ளைப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை 5 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு),

$= 0{\cdot}3292 + 0{\cdot}1646 + 0{\cdot}0412 + 0{\cdot}0041$

$= 0{\cdot}5391$

கணக்கு :

பிறக்கும் குழந்தை பெண்ணாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 1/2 எனில், மருத்துவமனை ஒன்றில் ஒரே நாளில் பிறக்கும் 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை

(i) நான்கு அல்லது அதற்கு அதிகமானதாக

(ii) மூன்று அல்லது அதற்குக் குறைவானதாக

(iii) ஒன்று முதல் ஐந்து வரையிலானதாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

முதலில், 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெறுகிறோம்.

பிறக்கும் குழந்தை பெண்ணாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 1/2, பெண்ணாக அமையாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/2 என்பதால், ஒரு நாளில் பிறக்கும் 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிட்டு, X–பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^6$-ன் விரிப்புத்தொடர் வாயிலாக அடைகிறோம்.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^6 = \frac{1}{64}+\frac{6}{64}t+\frac{15}{64}t^2+\frac{20}{64}t^3+\frac{15}{24}t^4$$

$$+\frac{6}{64}t^5+\frac{1}{64}t^6$$

இச்சமன்பாட்டின் வலதுபுறத் தொடர் உறுப்புகளிலிருந்து,

$$P(X=0) = t^0 \text{—ன் கெழு} = 1/64$$

$$P(X=1) = t^1 \text{—ன் கெழு} = 6/64$$

$$P(X=2) = t^2 \text{—ன் கெழு} = 15/64$$

$$P(X=3) = t^3 \text{—ன் கெழு} = 20/64$$

$$P(X=4) = t^4 \text{—ன் கெழு} = 15/64$$

$$P(X=5) = t^5 \text{—ன் கெழு} = 6/64$$

$$P(X=6) = t^6 \text{—ன் கெழு} = 1/64$$

ஆகும். இம் மதிப்புகளைக் கொண்டு தேவையான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

(i) 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை நான்கு அல்லது அதற்கு அதிகமானதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $= P(X \geq 4)$

$$= P\{(X=4) \text{ அல்லது } (X=5) \text{ அல்லது } (X=6)\}$$

$$= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64}$$

$$= \frac{11}{32}$$

(ii) 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை மூன்று அல்லது அதற்குக் குறைவானதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $= P(X \leq 3)$

$$= P\begin{Bmatrix} (X=3) \text{ அல்லது } (X=2) \text{ அல்லது } (X=1) \\ \text{அல்லது } (X=0) \end{Bmatrix}$$

$$= P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$

$$= \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64}$$

$$= \frac{21}{32}$$

(iii) 6 குழந்தைகளுள் பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை ஒன்று முதல் ஐந்து வரையிலானதாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $\left.\right\} = P(1 \leq x \leq 5)$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=6)$$

$$= 1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{31}{32}$$

கணக்கு :

நடு நிலையான பகடையை உருட்டும்போது, ஆறு புள்ளிகளைக் கொண்ட பக்கம் மேற்புறமாக அமைவதை 'வெற்றி' எனக் கொள்க. நடு நிலையான மூன்று பகடைகளை உருட்டும் போது

(i) குறைந்தது இரு வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான

(ii) ஒன்று அல்லது அதற்குக் குறைவான வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

முதலில் மூன்று பகடைகளில் பெறக்கூடிய வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை,

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}t\right)^3 = \frac{125}{216} + \frac{75}{216}t + \frac{15}{216}t^2 + \frac{1}{216}t^3$$

விரிப்புத் தொடர் வாயிலாகப் பெற்றுக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 10 — 11.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$\frac{125}{216} = 0{\cdot}5787$
1	$\frac{75}{216} = 0{\cdot}3473$
2	$\frac{15}{216} = 0{\cdot}0694$
3	$\frac{1}{216} = 0{\cdot}0046$
மொத்தம்	1·0000

இப்போது,

(i) குறைந்தது இரு வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு = வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை 2 அல்லது 3 ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 0.0694 + 0.0046$$
$$= 0.0740$$

(ii) ஒன்று அல்லது அதற்குக் குறைவான வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு = 1 — {குறைந்தது இரு வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு}

$$= 1 - 0.0740$$
$$= 0.9260$$

கணக்கு :

ஒரு குழுவில் உள்ள நபர்களில் 20 சதவீதத்தினர் பார்வைக் கோளாறுடையவர்கள் எனில், அக்குழுவிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 25 நபர்களில் பார்வைக் கோளாறுடையவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்ட விலக்க மதிப்பு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

குழுவில் உள்ள நபர்களில் 20 சதவீதத்தினர் பார்வைக் கோளாறு உடையவர்கள் என்பதால், ஒரு நபரைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் அவர் பார்வைக் கோளாறு உடையவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 20/100 = 1/5 ஆகும்.

இப்போது, சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 25 நபர்களில் பார்வைக் கோளாறு உடையவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $= np$

$$= 25 \times \frac{1}{5} = 5$$

திட்ட விலக்க மதிப்பு $= \sqrt{np(1-p)}$

$$= \sqrt{25 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)}$$

$$= 2.$$

கணக்கு :

ஒரு நடுநிலையான நாணயத்தை 100 முறைகள் சுண்டி யெறியும்போது பெறுவதற்கான தலைகளின் எண்ணிக்கைக் கான சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

இங்கு நாணயம் நடுநிலையானதால் ஒருமுறை சுண்டியெறியும்போது 'தலை' பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = p = 1/2$

நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் முறைகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = n = 100$

எனவே, தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான

சராசரி $= np$

$$= 100\left(\tfrac{1}{2}\right) = 50$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

$$= \sqrt{100\,(\tfrac{1}{2})\,(1-\tfrac{1}{2})}$$

$$= 5$$

N உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 0, 1, 2 ... n ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு பரவல், n, p ஆகியவற்றை பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் என்போம். இப்போது, கூறு உறுப்புகளில்,

0 ஐ மதிப்பாகப் பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

1 ஐ மதிப்பாகப் பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

2 ஐ மதிப்பாகப் பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

⋮ ⋮

n ஐ மதிப்பாகப் பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை

ஆகியவைகள் கீழ்க் காட்டியவண்ணம் அமையும்.

பட்டியல் 10—12

மதிப்பு	உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை
0	$N(1-p)^n$
1	$N\,n_{c_1}(1-p)^{n-1}\,p$
2	$N\,n_{c_2}(1-p)^{n-2}\,p^2$
⋮	⋮
n	$N\,n_{C_n}\,p^n$

உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கையை 'எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்' என அழைக்கிறோம்.

கணக்கு :

ஆண், பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு விகிதம் 1 : 1 எனக் கொள்க. குடும்பத்திற்கு இரு குழந்தைகள் வீதம் அமைந்துள்ள 400 குடும்பங்களில்

(i) ஆண் குழந்தை பெறாத

(ii) ஒரு ஆண் குழந்தையைப் பெற்றுள்ள

(iii) இரு ஆண் குழந்தைகளைப் பெற்றுள்ள குடும்பங் களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை :

குடும்பம் பெற்றுள்ள இரு குழந்தைகளுள் ஆண் குழந்தை களின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோம். ஆண், பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு விகிதம் 1 : 1 எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளதால், ஒரு குழந்தை ஆணாக அமைவதற்கான நிகழ் தகவு 1/2 ஆகும். எனவே, X மாறியின் பரவல், $n = 2$, $p = 1/2$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈரு றுப்புப் பரவலாகும். ஈருறுப்புக் கோவை $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t)^2$-ன் விரிப்புத் தொடர் உறுப்புகளின் வாயிலாக ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ் தகவு மதிப்புகளைப பெறுகிறோம். இம் மதிப்புகளை, N-400ஐக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலை வெண்களைப் பட்டியல் 10 — 13-ல் காணலாம்.

பட்டியல் 10—13.

இரு குழந்தைகளுள் ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	100
1	$2c_1 (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}) = \frac{2}{4}$	200
0	$2c_2 (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	100
மொத்தம்	1	400

எனவே, 400 குடும்பங்களில்

(i) ஆண் குழந்தை பெருத குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை 100,

(ii) ஓர் ஆண் குழந்தையைப் பெற்றுள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை 200,

(iii) இரு ஆண் குழந்தைகளைப் பெற்றுள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை 100,

ஆக அமையும் என எதிர்பார்க்கிறோம்.

கணக்கு :

பாத்திக்கு 5 விதைகள் வீதம் 64 பாத்திகளில் விதைகள் விதைக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு விதையும் முளைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/2 எனில்,

(i) ஒரு விதைகூட முளைக்கப் பெருத பாத்திகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

(ii) ஒரு விதை மட்டும் முளைக்கப் பெற்ற பாத்திகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

(iii) நான்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விதைகள் முளைக்கப் பெற்ற பாத்திகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

பாத்தியில் விதைக்கப்படும் 5 விதைகளில் முளைக்கும் விதைகளின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோம். ஒரு விதை முளைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/2 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், X மாறியின் பரவல், $n = 5$, $p = 1/2$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும். இப் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை, $N = 64$ஐக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் கிடைக்கும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பட்டியல் 10—14–ல் அளிக்கிறோம்.

பட்டியல் 10 — 14

5 விதைகளில் முளைக்கப் பெற்ற விதைகளின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	$(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$	2
1	$5c_1\,(\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}$	10
2	$5c_2\,(\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32}$	20
3	$5c_3\,(\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32}$	20
4	$5c_4\,(\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}$	10
5	$5c_5\,(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$	2
மொத்தம்	1	64

எனவே, 64 பாத்திகளில்

(i) ஒரு விதைகூட முளைக்கப்பெறாத பாத்திகளின் எண்ணிக்கை 2,

(ii) ஒரு விதை மட்டும் முளைக்கப் பெற்ற பாத்திகளின் எண்ணிக்கை 10,

(iii) நான்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விதைகள் முளைக்கப் பெற்ற பாத்திகளின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

கணக்கு :

துப்பாக்கி கொண்டு சுடும்போது குண்டு இலக்கைத் தாக்குவதற்கான நிகழ்தகவு 3/10 எனக் கொள்க. 1000 நபர்கள் ஒவ்வொருவரும் 3 முறை சுடும்பொழுது

(i) மூன்று குண்டுகளும் இலக்கைத் தாக்கும்படி சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்; (ii) ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய குண்டுகள் இலக்கைத் தாக்கும்படி சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்; (iii) ஒரு குண்டுகூட இலக்கைத் தாக்காது போகுமாறு சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

ஒரு நபர் மூன்று முறை சுடும்போது இலக்கைத்தாக்கும் குண்டுகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது X பெறும் மதிப்புகள், 0, 1, 2, 3 ஆகின்றன. ஒரு குண்டு இலக்கைத் தாக்குவதற்கான நிகழ்தகவு $P = 3/10$. ஆகவே X மாறியின் பரவல் $n=3$, $P=1/2$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும். ஈருறுப்புக்கோவை $\left[\frac{7}{10} + \frac{3}{10}t\right]^3$-ன் விரிப்புத் தொடர் உறுப்புகள் கொண்டு ஈருறுப்புப் பரவல் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். இம்மதிப்புகளை $N = 1000$ ஐக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பாக்கும் அலைவெண்கள் பட்டியல் 10–15–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 10–15.

இலக்கைத்தாக்கிய குண்டுகளின் எண்ணிக்கை X	நிகழ்தகவு	நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	$\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$	343
1	$3\left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{441}{1000}$	441
2	$3\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{189}{1000}$	189
3	$\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$	27

இப்போது,

(i) 3 குண்டுகளும் இலக்கைத் தாக்கும்படி சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் = 27 (ii) ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையையுடைய குண்டுகள் இலக்கைத் தாக்கும்படி சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்

$$= 441 + 189 + 27 = 657$$

(iii) ஒரு குண்டுகூட இலக்கைத் தாக்காது போகும்படி சுடும் நபர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் 343.

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்விளக்குகள் 1000 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரிவதற்கான நிகழ்தகவு 1/3 ஆக அமைகிறது. பெட்டிக்கு 3 விளக்குகள் என்ற விதத்தில் அடைக்கப்பட்டுள்ள 270 பெட்டிகளில் (i) ஒரு விளக்குகூட 1000 மணி நேரம் எரியாமல் போகும் தன்மை பெற்றுள்ள பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

(ii) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளக்குகள் 1000 மணி நேரம் எரியும் தன்மை பெற்றுள்ளனவாக அமையும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

ஆகியவைகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

முறை :

ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் அடைக்கப்பட்டுள்ள விளக்குகளில் 1000 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரியும் தன்மை பெற்றுள்ள விளக்குகளின் எண்ணிக்கையை X எனக்கொள்வோம். இப்போது X பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3 ஆகின்றன.

மின் விளக்கானது 1000 மணிநேரம் எரிதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

பெட்டியில் இடம்பெறும் மின் விளக்குகளில் 1000 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரியும் தன்மை பெற்றுள்ள விளக்குகளின் எண்ணிக்கைக்கான பரவல் அதாவது X-ன் பரவல் $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவையாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும். இப் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை

ஈருறுப்புக்கோவை $(2/3 + \frac{1}{3} t)^3$-ன் விரிப்புத்தொடர் உறுப்புகள் கொண்டு பெறுகிறோம். இம்மதிப்புகளை $N = 270$ கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் பட்டியல் 10-16-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 10–16.

X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	$(2/3)^3 = 8/27$	80
1	$3\,(2/3)^2\,(1/3) = 12/27$	120
2	$3\,(2/3)\,(\frac{1}{3})^2 = 6/27$	60
3	$(1/3)^3 = 1/27$	10
மொத்தம்	1	270

எனவே, (i) ஒரு விளக்குகூட 1000 மணி நேரம் எரியாமற் போகும் தன்மைபெற்றுள்ளதாக அமையும் பெட்டிகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= 80$ ஆகவும் (ii) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளக்குகள் 1000 மணி நேரத்திற்கும் அதிகமாக எரியும் தன்மை பெற்று அமையும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை $= 60+10$

$= 70$ ஆகவும் அமையும்.

இப்போது கண்டறிந்த அலைவுப்பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கணக்கிடும் முறையைப்பற்றி விவரிப்போம்.

ஒரு கூறில் N உறுப்புகள் உள்ளன என்போம். இவ்வுறுப்புகளை X மாறியின் மதிப்புகள்கொண்டு பாகுபடுத்தும்போது கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலை பெறுவதாகக் கொள்வோம்.

மாறி	X :	0	1	2......	r	n	மொத்தம்
அலைவெண்	f :	f_0	f_1	f_2	f_r	f_n	N

இப் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துவதற்கு ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவை n, p-களின் மதிப்பீட்டைப் பெறவேண்டும். அலைவுப்பரவலின் சராசரி $\bar{X}$, திட்ட விலக்கம் s ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு இவைகளை முறையே ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி, திட்ட விலக்கங்களின் மதிப்பீடாகக்கொண்டு பண்பளவை n, p ஆகியவைகளை அடைகிறோம்.

(i) பண்பளவை n-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் கணக்கிடும் முறையை இப்போது காண்போம். n, p ஆகியவைகளைப் பண்பளவையாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np ஆகும். அலைவுப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு $\bar{X}$ ஐ npயுடன் சமன்படுத்துகிறோம்.

$$np = \bar{X} \therefore p = \bar{X}/n$$

$\bar{X}$, n ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக்கொண்டு பண்பளவை 'p'-ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம். இதை $\hat{p}$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம்.

இப்போது கண்டறிந்த அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் ஈருறுப்புப் பரவல்

$$({}^{n}c_{r})\,(1-\hat{p})^{n-r}\,(\hat{p})^{r},\ r = 0, 1, \ldots n.$$

ஆகும்.

பொருத்தப்படும் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை Nஆல் பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

(ii) பண்பளவை n-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்படாமலிருக்கும் போது, கண்டறிந்த அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்தும் முறையை இப்போது காண்போம்,

n, p-க்களைப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி $= n\,p$ ஆகவும்

மாறுபாடு $= n\,p\,(1-p)$ ஆகவும் அமைகின்றன,...

அலைவுப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு $\bar{X}$, மாறுபாடு s^2 ஆகிய வைகளை முறையே $n\,p$, $n\,p\,(1-p)$ முதலியவைகளுக்குச் சமன்படுத்துகிறோம்.

$$n\,p = \bar{X} \quad \text{... சமன்பாடு} \quad \ldots \quad (1)$$

$$n\,p\,(1-p) = s^2 \quad \text{... சமன்பாடு} \quad \ldots \quad (2)$$

இப்போது, சமன்பாடு (2)ஐ சமன்பாடு (1) கொண்டு வகுக்கும் போது

$$\frac{n\,p\,(1-p)}{n\,p} = s^2/\bar{X}$$

அதாவது $1 - p = s^2/\bar{X}$

$\therefore \quad p = 1 - s^2/\bar{X}$

$\bar{X}$–ன் மதிப்பை p–ன் மதிப்பால் வகுத்து n-ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம். (a) இம்மதிப்பு முழு எண்ணாக அமையின், இதையே n-ன் மதிப்பு என்கிறோம். (b) இம்மதிப்பு முழு எண்ணுடன் சேர்ந்த பின்னமாக அமையின், இதற்கு அடுத்த முழு எண்ணை n–ன் மதிப்பு என்கிறோம். இம் மதிப்பை $\hat{n}$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

இப்போது, பண்பளவை p–ன் திருத்தப்பட்ட மதிப்பை $\hat{p}$ எனக் குறிப்பிட்டு அதன் மதிப்பைச் சமன்பாடு

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{\hat{n}}$$

வாயிலாகப் பெறுகிறோம்.

இப்போது, அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் ஈருறுப்புப் பரவல்

$$\binom{\hat{n}}{c_r}\,(1-\hat{p})^{\hat{n}-r}\,(\hat{p})^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \hat{n}$$

ஆக அமையும்.

பொருத்தப்படும் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை Nஆல் பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்

கணக்கு :

மூன்று குழந்தைகளைப் பெற்றுள்ள 200 குடும்பங்கள் ஒரு சமூகப்பொருளாதார ஆய்வில் (Socio-economic Survey) இடம் பெறுகின்றன. குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றையும் அது பெற்றுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் பாகுபடுத்தும்போது கிடைத்த அலைவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

பட்டியல் 10-17.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0	24
1	76
2	74
3	26
மொத்தம்	200

முறை :

குடும்பம் பெற்றுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது X மாறி பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3 ஆகின்றன. இங்கு பொருத்தப்பட வேண்டிய ஈருறுப்புப் பரவலது n-ன் மதிப்பு 3 ஆகும். இப்போது, அலைவுப் பரவலின் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, அதன் வாயிலாகப் பண்பளவை 'p'-ன் மதிப்பைப் பெறுவோம்.

பட்டியல் 10-18.

X	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (f)	fX
0	24	0
1	76	76
2	74	148
3	26	78
மொத்தம்	200	302

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{302}{200} = 1\cdot51$$

$\therefore$ பண்பளவை 'p'-ன் மதிப்பீடு $\hat{p} = \bar{X}/n$

$$= \frac{1.51}{3} = 0\ 5 \text{ (தோராயமாக)}$$

எனவே, கண்டறிந்த அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்பட வேண்டிய ஈருறுப்புப் பரவல்

பட்டியல் 10-19.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	பொருத்தப்படும் ஈருறுப்புப் பரவல் $n = 3$ $p = \frac{1}{2}$ நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலை வெண்	கண்டறிந்த அலை வெண்
0	$\frac{1}{8}$	25	24
1	$\frac{3}{8}$	75	76
2	$\frac{3}{8}$	75	74
3	$\frac{1}{8}$	25	26
மொத்தம்	1	200	200

$$\binom{3}{r}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{8-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r} \quad r=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ r$$

ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலுக்கு மேற்கண்ட ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தும்போது பெற்ற நிகழ்தகவு மதிப்புகள் பட்டியல் 10 — 19-ல் இடம் பெறுகின்றன.

கணக்கு :

ஒரு குவியலில் உள்ள விதைகளில் சில சிவப்பு நிற மலர்களையும், மற்றவை வெண்மை நிற மலர்களையும் கொடுக்கின்றன எனக் கொள்க. தொட்டிக்கு 4 விதைகள் என்ற வீதத்தில் 64 தொட்டிகளில் விதைகள் விதைக்கப்பட்டன. தொட்டிகள் ஒவ்வொன்றையும் அது கொண்டுள்ள மலர்ச் செடிகளின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் பாகுபடுத்திய அலைவுப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் 10-20.

சிவப்பு நிற மலர்ச் செடிகளின் எண்ணிக்கை	தொட்டிகளின் எண்ணிக்கை
0	20
1	29
2	10
3	4
4	1

இப் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

முறை :

தொட்டியிலுள்ள 4 செடிகளில் சிவப்பு நிற மலர்ச் செடிகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது X மாறி பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4 ஆகின்றன.

இங்குப் பொருத்தப்பட வேண்டிய ஈருறுப்புப் பரவல் பண்பளவை n–ன் மதிப்பு 4 ஆகும். இப்போது கண்டறிந்த அலைவுப்பரவல் சராசரியின் வாயிலாகப் பண்பளவை 'p' மதிப்பைப் பெறுவோம்.

பட்டியல் 10–21.

X	தொட்டிகளின் எண்ணிக்கை f	fX
0	20	0
1	29	29
2	10	20
3	4	12
4	1	4
மொத்தம்	64	65

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{65}{64} = 1{\cdot}01$$

$$\text{பண்பளவை } p\text{-ன் மதிப்பு } \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n} = \frac{1{\cdot}01}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ (தோராயமாக)}$$

ஆகவே, அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் ஈருறுப்புப் பரவல்

$${}^4c_r \left(\tfrac{1}{4}\right)^r (1-1/4)^{4-r}, \; r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

ஆக அமையும்.

தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளும் அம்மதிப்புகளை $N = 64$ கொண்டு பெருக்கிக் கணக்கிட்ட எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களும் அடுத்தப் பக்கத்தில் பட்டியல் 10–22–ல் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 10-22.

சிவப்பு மலர்ச் செடிகளின் எண்ணிக்கை	பொருத்தப்படும் ஈருறுப்புப் பரவல் $n=4$, $p=\frac{1}{4}$ நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்	கண்டறிந்த அலைவெண்
0	$\binom{4}{0}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{81}{256}$	$20{\cdot}25 \simeq 20$	20
1	$\binom{4}{1}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{108}{256}$	$27{\cdot}00 \simeq 27$	29
2	$\binom{4}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{54}{256}$	$13{\cdot}50 \simeq 14$	10
3	$\binom{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{12}{256}$	$3{\cdot}00 \simeq 3$	4
4	$\binom{4}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}=\frac{1}{256}$	$0{\cdot}25 \simeq 0$	1
மொத்தம்		64·00	64

கணக்கு :

ஒரு கண்ணாடித் தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் கண்ணாடிக் குப்பிகள் பெட்டிக்கு 50 என்ற வீதத்தில் 100 பெட்டிகளில் அடைக்கப்படுகின்றன. பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள குப்பிகளை ஆய்வு செய்து விரிசல் கண்டுள்ள குப்பிகளின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில், பெட்டிகள் பாகுபடுத்தப்பட்டுக் அடுத்தப் பக்கத்தில் பட்டியல் 10–23-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இப பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுக.

பட்டியல் 10-23.

விரிச்சல் கண்டுள்ள குப்பிகளின் எண்ணிக்கை	பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை
0	32
1	42
2	20
3	6

முறை :

பெட்டியில் விரிசல் கண்டுள்ள குப்பிகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிடுவோம். கண்டறிந்த அலைவுப் பரவலின் சராசரி $\bar{X}$, மாறுபாடு s^2 ஆகிய மதிப்புகள் வாயிலாகப் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருருப்புப் பரவலின் பண்பளவை n, p-களின் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 10-24.

X	f	fX	fX^2
0	32	0	0
1	42	42	42
2	20	40	80
3	6	18	54
மொத்தம்	100	100	176

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{100}{100}$$

$$= 1$$

$$s^2 = \frac{\Sigma f X^2}{\Sigma f} - \bar{X}^2 = \frac{176}{100} - (1)^2$$

$$= 1{\cdot}76 - 1{\cdot}00$$

$$= 0{\cdot}76$$

இப்போது, $np = \bar{X} = 1$

$$np\,(1-p) = s^2 = 0{\cdot}76$$

ஆகவே, $1 - p = s^2/\bar{X}$

$$= \frac{0{\cdot}76}{1{\cdot}00}$$

$$= 0{\cdot}76$$

$$1 - 0{\cdot}76 = 0{\cdot}24$$

அடுத்து $n = \bar{X}/p$-ன் மதிப்பு $= \dfrac{1}{0{\cdot}24}$

$$= 4{\cdot}1$$

இம்மதிப்பு முழு எண்ணுடன் சேர்ந்த பின்னமாக அமைவதால், இதற்கு அடுத்த முழு எண் 5 ஐப் பண்பளவை n-ன் மதிப்பாகக் கொள்ளுகிறோம்.

அதாவது $\hat{n} = 5$

பண்பளவை p-ன் திருத்தப்பட்ட மதிப்பு

$$= \hat{p} = \bar{X}/\hat{n}^s$$

$$= 1/5$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் ஈறுப்புப் பரவல்

$${}^5c_r\,(-\tfrac{1}{5})^{5-r}\,(\tfrac{1}{5})^r,\ r = 0, 1, 2 \ldots 5$$

ஆக அமையும். பொருத்தப்படும் பரவல் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை $N = 100$ ஐக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம்

பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் பட்டியல் 10-25-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 10-25.

விரிசல் கண்டுள்ள குப்பிகளின் எண்ணிக்கை	பொருத்தப் படும் ஈருறுப்புப் பரவல் $n=5,\ p=1/5$ நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்	கண்டறிந்த அலைவெண்
0	0·3277	$32{\cdot}77 \simeq 33$	32
1	0·4096	$40{\cdot}96 \simeq 41$	42
2	0·2048	$20{\cdot}48 \simeq 20$	20
3	0·0512	$5{\cdot}12 \simeq 5$	6
4	0·0064	$0{\cdot}64 \simeq 1$	0
5	0·0003	$0{\cdot}03 \simeq 0$	0
மொத்தம்		100	100

பயிற்சி

(1) $n=4,\ p=\frac{1}{4}$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பெறுக.

(2) $n=3,\ p=\frac{1}{2}$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பெறுக.

(3) பூச்சிக் கொல்லி மருந்து தெளிக்கும் போது, பூச்சி இறப்பதற்கான நிகழ்தகவு 2/3 எனக் கொள்க. ஒரு சோதனையின் போது கண்ணாடிக் குப்பி ஒன்றுக்கு 4 என்ற வீதத்தில் 162 குப்பிகளில் பூச்சிகளை எடுத்துக் கொண்டு, குப்பிகளில் மருந்து தெளிக்கப்பட்டது. அப்போது, ஒரு பூச்சி கூட இறக்க நேரிடாத குப்பிகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு பூச்சி மட்டும் இறக்க நேரிடும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை, இரு பூச்சிகள் இறக்க நேரிடும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை, மூன்று பூச்சிகள் இறக்க

நேரிடும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவைகளின் எதிர் பார்க்கும் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக.

(4) ஒரு குவியலுவிள்ள திருகாணிகளில் 20% குறைபாடுடையன. பெட்டிக்கு 5 வீதம் 100 பெட்டிகளில் திருகாணிகள் அடைக்கப்படுகின்றன குறைபாடுடைய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு அமைவதற்கு வாய்ப்புடைய பெட்டிகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கையையும் குறைபாடுடைய திருகாணிகளேயில்லாத பெட்டிகளின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பிடுக.

(5) கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளைப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(i) $n = 20$, $p = 1/5$

(ii) $n = 30$, $p = 2/3$

(iii) $n = 120$, $p = 5/6$

(6) பூந் தொட்டிகளில் தொட்டிக்கு 10 என்ற வீதத்தில் விதைகள் விதைக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு விதையும் முளைத்ததற்கான நிகழ்தகவு 0·6 எனில், 4 அல்லது அதற்குக் குறைவாக விதைகள் முளைத்துள்ள தொட்டிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

(7) 5 நாணயங்கள் ஒருமித்து 20 தடவைகள் வீசப்பட்ட போது பெற்ற தலைகளின் எண்ணிக்கை விவரங்கள் பின் வருமாறு:

தலைகளின் எண்ணிக்கை	கண்டறிந்த அலைவெண்
0	1
1	1
2	4
3	7
4	5
5	2

இப் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளை அடைக.

(8) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்குரிய ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

X:	0	1	2	3	4
f:	18	35	30	13	4

(9) கீழ்க் கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை மதிப்பிடுக.

x	f
0	1
1	8
2	19
3	24
4	18
5	7
6	3
	80

(10) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 5 அல்லது 6 புள்ளிகளைப் பெறுவதை 'வெற்றி' எனக் கொண்டு சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டது. அச்சோதனையில் 8 பகடைகளை ஒருசேர 200 முறைகள் உருட்டியபோது பெற்ற வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான அலைவெண் பரவல் பின் வருமாறு:

x (வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை)	f (முறைகளின் எண்ணிக்கை)
0	13
1	27
2	51
3	55
4	37
5	12
6	4
7	1
8	0
	200

இவ்வலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதான ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை மதிப்பிடுக.

11. பாய்சான் பரவல்

புள்ளியியலில் வழங்கப்படும் கோட்பாடியலான பரவல்களுள் ஈருறுப்புப் பரவலைப்போன்றே சிறப்புப்பெற்ற பாய்சான் பரவலைப்பற்றி இங்குக்காண்போம்.

ஒரு முயற்சியைப் பலமுறைகள் திரும்பச் செய்வதாகக் கொள்வோம். இம்முயற்சிகள் யாவும் சார்பற்றவையெனவும், அவை ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு மிகக் குறைவு எனவும், மேற்கொள்ளும் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகம் எனவும் கொள்வோம். இப்போது, இம்முயற்சிகளில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழும் நிகழ்தலைக் குறிக்கும் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு கணிசமானதெனில், அக்குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவுப் பரவலானது 'பாய்சான் பரவல்' என வழங்கப்படுகிறது.

பாய்சான் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் தோராயம் எனவும் கருதுகிறோம். ஈருறுப்புப் பரவல் பண்பளவைகளான n, p ஆகியவைகளில் n-ன் மதிப்பு மிக அதிகமாகவும், p-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவும், அதே சமயத்தில் np-ன் மதிப்பு கணிசமாகவும் அமையும்போது, ஈருப்புப் பரவலானது பாய்சான் பரவலை அணுகுகிறது.

நடைமுறையில் பல்வேறு துறைகளில் பாய்சான் பரவல் கையாளப்படுகிறது. ஒரு நகரில் சாலை விபத்துக்குள்ளாகி இறக்கும் நிகழ்ச்சியை எடுத்துக் கொள்வோம். சாலையில் செல்லும் ஒவ்வொரு நபரும் விபத்துக்குள்ளாகி இறப்பதற்கு வாய்ப்பு உள்ளது. ஆனால், இவ்வாய்ப்பு மிகக் குறைவே. ஒவ்வொரு நாளும் பல்லாயிரக்கணக்கான மக்கள் நகரச்சாலைகளைப் பயன்படுத்துகின்ற காரணத்தால், நகர மக்களை ஒரு திரளாகக் கொள்ளும்போது, அவர்களுள் சாலை விபத்தால்

இறக்க நேரிடுபவர்களின் எண்ணிக்கை கணிசமாக அமையும் என எதிர்பார்க்கலாம். ஆகவே, சாலை விபத்துக் களால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான அலைவுப் பரவல் பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது.

புதியவகை வானொலிப் பெட்டியைப்பற்றி செய்தித் தாளில் விளம்பரம் செய்யப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். விளம்பரத்தைக் காணும் ஒவ்வொருவருக்கும் வானொலிப் பெட்டியை வாங்குவதற்கு வாய்ப்புள்ளது; ஆனால், இவ் வாய்ப்பு மிகக் குறைவானது. செய்தித்தாள் வாயிலாக விளம் பரத்தைக் காண்போரின் எண்ணிக்கை பல்லாயிரக்கணக்காக அமைவதால், விளம்பரம் காரணமாக விற்பனையாகும் வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை கணிசமானதாக அமை யும் என எதிர் பார்க்கலாம். எனவே, வானொலிப் பெட்டி விற்பனையின் எண்ணிக்கைகளுக்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பாய்சான் பரவல் கொண்டு பெறுகிறோம்.

ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் திருகாணி குறைபாடு டன் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.001 எனவும், அவ்வியந் திரம் ஒரு மணி நேரத்தில் உற்பத்திச் செய்யும் திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை 10,000 எனவும் கொள்வோம். இப்போது ஒவ் வொரு மணி நேரத்திலும் உற்பத்தி செய்யப்படும் திருகாணி களில் குறைபாடுடையவைகளின் எண்ணிக்கை கணிசமாக அமையும் என எதிர்பார்க்கலாம். எனவே, ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் உற்பத்தியாகும் குறைபாடுடைய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு பரவல் பாய்சான் பரவ லாகும்.

இப்போது 'n' சார்பற்ற முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறிப் பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 'p' என் போம். n-ன் மதிப்பு மிக அதிகமானதாகவும், p-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவானதாகவும், np-ன் மதிப்பு கணிசமானதாகவும் அமையுமெனில், அம்முயற்சிகளில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி $0, 1, 2, 3 \ldots r \ldots$ முறைகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பு கள் பின்வருமாறு (பட்டியல் 11–1):

இப்போது நிகழ்ச்சி நிகழ்வதின் எண்ணிக்கையை X எனும் மாறியால் குடுப்பிடும் போது, அம்மாறியானது $0, 1, 2, \ldots, r \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ் தகவுகளை,

பட்டியல் 11-1.

நிகழ்ச்சி நிகழ்வதின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	e^{-np}
1	$e^{-np}\ n\,p$
2	$e^{-np}\ \frac{(n\,p)^2}{2!}$
3	$e^{-np}\ \frac{(n\,p)^3}{3!}$
⋮	⋮
r	$e^{-np}\ \frac{(n\,p)^r}{r!}$
⋮	⋮

$$P\ (X = r) = e^{-np}\ \frac{(n\,p)^r}{r!},\quad r = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

என வழங்கலாம். இதைப் 'பாய்சான் பரவல்' என அழைக்கிறோம்.

பொதுவாக, $n\,p$ஐ m எனக் கொண்டு, பாய்சான் பரவலை

$$p\ (X = r) = e^{-m}\ \frac{m^r}{r!},\quad r = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

எனக் குறிக்கிறோம். இங்கு 'm' ஆனது பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை (Parameter) என அழைக்கப்படுகிறது.

mஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின்

$$\text{சராசரி} = m$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{m}$$

ஆகும்.

m-ன் பல மதிப்புகளுக்கு இணையான அடுக்குக்குறி சார்பலன் e^{-m}-ன் மதிப்புகள் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் (அட்டவணை V-ல்) இடம் பெறுகின்றன. இந்த அட்டவணை வாயிலாகப் பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவது பற்றி காண்போம்.

ஒரு நகரில் சாலைவிபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை $m = 0{\cdot}2$ ஆக அமையும் போது, பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவோம்.

நகரில் சாலை விபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது $(X = r)$ என்பது r நபர்கள் சாலை விபத்தால் இறக்க நேரிடும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

சாலை விபத்தால் r நபர்கள் இறத்தற்கான நிகழ்தகவு, அதாவது,

$$\left.\begin{array}{c}\text{நிகழ்ச்சி } (X = r)\text{-ன்} \\ \text{நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = p\,(X = r)$$

$$= e^{-0.2}\,\frac{(0.2)^r}{r!},\; r = 0, 1, 2 \ldots$$

ஆகும். இங்கு $e^{-0.2}$-ன் மதிப்பை அடுக்குக்குறி சார்பலன் அட்டவணையிலிருந்து

$$e^{-0.2} = 0.8187$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது,

$$\left.\begin{array}{c}\text{நிகழ்ச்சி } (X = 0)\text{-ன்} \\ \text{நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = p\,(X = 0) = e^{-0.2}\,\frac{(0.2)^0}{0!}$$

$$= e^{-0.2}$$

$$= 0.8187$$

$$\text{நிகழ்ச்சி } (X = 1) \text{ நிகழ்தகவு} = p\,(X = 1)$$

$$= e^{-0.2}\,\frac{(0.2)^1}{1!}$$

$$= 0.8187\,(0.2) = 0.1637$$

நிகழ்ச்சி $(X=2)$-ன் நிகழ்தகவு $= p\,(X=2)$

$$= e^{-0.2}\,\frac{(0\cdot 2)^2}{2!}$$

$$= 0.8187\,(0.02)$$

$$= 0.016374 = 0.0164$$

நிகழ்ச்சி $(X=3)$-ன் நிகழ்தகவு $= p\,(Y=3)$

$$= e^{-0.2}\,\frac{(0.2)^3}{3!}$$

$$0.8187\,(0.0013)$$

$$0.001064 = 0.0011$$

நிகழ்ச்சி $\left\{\begin{matrix}(X=4) \text{ அல்லது } (X=5) \\ \text{அல்லது } (X=6)\ \ldots\end{matrix}\right\}$-ன்

$$\text{நிகழ்தகவு} = P\,(x \geq 4)$$

$$= 1 - p\,(X \leq 3)$$

$$= 1 - \{p\,(X=3) + p\,(X=2) + p\,(X=1) + P\,(X=0)\}$$

$$= 1 - \{0.0011 + 0.0164 + 0.1637 + 0.8187\}$$

$$= 0.0001$$

எனவே, $m=0.2$ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் பட்டியல் 11-2-ல் காட்டியவாறு அமைகின்றன.

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை எளிதாகக் கணக்கிடும் முறையை இப்போது காண்போம். பாய்சான் பரவல் மாறியை X எனவும், மாறி X-ன் மதிப்பு r ஆக அமைவு

பட்டியல் 11-2.

சாலை விபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$e^{-0.2}\frac{(0.2)^0}{0!} = 0.8187$
1	$e^{-0.2}\frac{(0.2)^1}{1!} = 0.1637$
2	$e^{-0.2}\frac{(0.2)^2}{2!} = 0.0164$
3	$e^{-0.2}\frac{(0.2)^3}{3!} = 0.0011$
≥ 4	$\sum_{r=4}^{\infty} e^{-0.2}\frac{(0.2)^r}{r!} = 0.0001$
மொத்தம்	1.0000

தற்கான நிகழ்தகவை $P\ (X = r)$ எனவும் குறிப்பிடுவோம். அப்போது $p\,(X = 0)$–ன் மதிப்பு அடுக்குக் குறி சார்பலன் அட்டவணையிலிருந்து m–ன் மதிப்புக்கு இணையான e^{-m}–ன் மதிப்பாகும். மற்ற நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள்

$$p\,(X = 1) = m\ p\ (X = 0)$$

$$p\ (X = 2) = \frac{m}{2}\,p\ (X = 1)$$

$$p\ (X = 3) = \frac{m}{3}\,p\ (X = 2)$$

$$p\ (X = 4) = \frac{m}{4}\ p\ (X = 3)$$

$$p(X=5) = \frac{m}{5}\,p(X=4)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$p(X=r) = \frac{m}{r}\,p(X=r-1)$$

$$p(X \geq r+1) = 1 - \sum_{k=0}^{r} p(X=k)$$

வாயிலாகப் பெறுகிறோம்.

இம்முறையில், முன் எடுத்துக்காட்டில் கணக்கிட்ட நிகழ் தகவு மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அடைகிறோம்.

$$p(X=0) = e^{-0.2} = 0.8187 \text{ (அட்டவணையிலிருந்து)}$$

$$P(X=1) = m\,P(X=0)$$

$$= 0{\cdot}2\,(0{\cdot}8187)$$

$$= 0{\cdot}1637$$

$$P(X=2) = \frac{m}{2}\,P(X=1)$$

$$= \frac{0{\cdot}2}{2}\,(0{\cdot}1637) = 0{\cdot}0164$$

$$P(X=3) = \frac{m}{3}\,P(X=2)$$

$$= \frac{0{\cdot}2}{3}\,(0{\cdot}0164) = 0{\cdot}0011$$

$$P(X=4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} p(X=k)$$

$$= 1-(0{\cdot}8187+0{\cdot}1637+0{\cdot}0164+0{\cdot}0011)$$

$$= 0{\cdot}0001.$$

ஒரு கூறில் இடம்பெறும் N உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 0, 1, 2, … … ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு பரவல் m ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவல் என்போம். இப்போது கூறு உறுப்புகளில்,

0 ஐ மதிப்பாகப்பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

1 ஐ மதிப்பாகப்பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

2 ஐ மதிப்பாகப்பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

3 ஐ மதிப்பாகப்பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

⋮ ⋮ ⋮

r ஐ மதிப்பாகப்பெறும் உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

⋮ ⋮ ⋮

ஆகியவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 11-3.

மதிப்பு	உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை
0	Ne^{-m}
1	$Ne^{-m}\ m$
2	$Ne^{-m}\ m^2/2!$
3	$Ne^{-m}\ m^3/3!$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
r	$Ne^{-m}\ m^r/r!$
⋮	⋮
⋮	⋮

உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கையை எதிர் பார்க்கும் அலைவெண் (Expected frequency) என்கிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு நகரில் நாளொன்றுக்குச் சாலை விபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கை $m = 0 \cdot 2$ ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவல் எனில், நூறு நாட்களில் சாலைவிபத்தில்,

(i) ஒருவரும் இறந்து போகாத நாட்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை,

(ii) ஒருவர் மட்டும் இறந்துபோகும் நாட்களின் எதிர் பார்க்கும் எண்ணிக்கை

(iii) இருவர் அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவர் இறந்து போகும் நாட்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

நகரில் நாளொன்றுக்குச் சாலைவிபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கையை X மாறியால் குறிப்பிடுவோம். அப்போது X-ன் பரவல் $m = 0 \cdot 2$ ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவலாகும். இப்போது $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X \geq 2)$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட்டு,

பட்டியல் 11-4.

X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= 100\ X$ நிகழ்தகவு
0	$e^{-0 \cdot 2} = 0 \cdot 8137$	$81 \cdot 87 \simeq 82$
1	$e^{-0 \cdot 2}(0 \cdot 2) = 0 \cdot 1637$	$16 \cdot 37 \simeq 16$
≥ 2	$\sum_{2}^{\infty} \frac{e^{-0.2}(0 \cdot 2)^r}{r!} = 0 \cdot 0176$	$1 \cdot 76 \simeq 2$

இவைகள் ஒவ்வொன்றையும் $N = 100$ ஐக்கொண்டு பெருக்கும் போது தேவையான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 11-5

நாளொன்றுக்குச் சாலைவிபத்தால் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கை	எதிர்பார்க்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கை
0	82
1	16
≥ 2	2
மொத்தம்	100

கணக்கு :

ஒரு கடையில் அன்றாடம் விற்பனையாகும் வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையானது $m = 1$ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவல் எனக்கொண்டு (i) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு நாளில் விற்பனையாக வாய்ப்புள்ள பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, ≥ 3 ஆக அமைதற்கான நிகழ்தகவுகளையும்,

(ii) 200 நாள்களில், விற்பனையாகும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3 அல்லது அதற்கு அதிகமாக அமையும் நாட்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

முறை :

அன்றாடம் விற்பனையாகும் வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையை X மாறிகொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது X மாறியின் பரவல் $m = 1$ ஐப் பண்பளவையாகக்கொண்ட பாய்சான் பரவலாகும். இப்பரவலிலிருந்து தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$P(X = 0) = e^{-1} = 0{\cdot}3679$$

$$P(X = 1) = mP(X = 0) = 1\,(0{\cdot}3679) = 0{\cdot}3679$$

$$P(X = 2) = \frac{m}{2}\,P(X = 1) = \tfrac{1}{2}\,(0{\cdot}3679) = 0{\cdot}1840$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0{\cdot}3679 - 0{\cdot}3679 - 0{\cdot}1840 = 0\ 0802$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0{\cdot}3679 - 0{\cdot}3679 - 0{\cdot}1840$$

$$= 0{\cdot}0802 \text{ ஆகும்.}$$

இந்த நிகழ்தகவு மதிப்புகளை $N = 200$ ஐக்கொண்டு பெருக்கும்போது எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம். கணக்கிட்ட நிகழ்தகவு மதிப்புகளும், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களும் பட்டியல் 11-6-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 11-6.

விற்பனையாக சாத்தியமுள்ள பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு	எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்
0	$e^{-1}1^0/0! = 0{\cdot}3679$	74
1	$e^{-1}1^1/1! = 0{\cdot}3679$	74
2	$e^{-1}1^2/2! = 0{\cdot}1840$	36
≥ 3	$1-\sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1}1^k}{k} = 0{\cdot}0802$	16

கணக்கு :

ஒரு புத்தகத்தில் பக்கமொன்றுக்கான அச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் பாய்சான் பரவல் $m = 0{\cdot}5$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்டமைகிறதெனில், அப்புத்தகத்தில் உள்ள 500 பக்கங்களில் (i) அச்சுப் பிழையில்லாத பக்கங்களின் எண்ணிக்கை (ii) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பிழைகளைக்கொண்ட பக்கங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவைகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை:

பக்கமென்றுக்கான அச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கையை X-மாறி கொண்டு குறிப்பிடுவோம். அப்போது X-மாறியின்

பரவல் $m = 0 \cdot 5$ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாகும் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளும், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களும் பின் வருமாறு:

பட்டியல் **11**-7.

அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	$\frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{0}}{0!} = 0 \cdot 6065$	303
1	$\frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{1}}{1!} = 0 \cdot 3033$	152
2	$\frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{2}}{2!} = 0 \cdot 0758$	38
3	$\frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{3}}{3!} = 0 \cdot 0126$	6
4	$\frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{4}}{4!} = 0 \cdot 0016$	1
≥ 5	$1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0 \cdot 5}(0 \cdot 5)^{k}}{k!} = 0 \cdot 0002$	0
மொத்தம்	1·0000	500

$$P(X=0) = e^{-0 \cdot 5} = 0 \cdot 6065$$

$$P(X=1) = 0 \cdot 5\, P(X=0) = 0 \cdot 5(0 \cdot 6065)$$

$$= 0 \cdot 3033$$

$$P(X=2) = \frac{0{\cdot}5}{2} P(X=1) = 0{\cdot}25\,(0{\cdot}3033)$$

$$= 0{\cdot}0758$$

$$P(X=3) = \left(\frac{0{\cdot}5}{3}\right) P(X=2) = 0{\cdot}167\,(0{\cdot}0758)$$

$$= 0{\cdot}0_26$$

$$P(X=4) = \left(\frac{0{\cdot}5}{4}\right) P(X=3)\; 0\;125\,(0{\cdot}0126)$$

$$= 0{\cdot}0016$$

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(X=K) = 0{\cdot}0002.$$

எனவே, 500 பக்கங்கள் கொண்ட புத்தகத்தில்

(i) அச்சுப்பிழையற்ற பக்கங்களின் எதிர் பார்க்கும் அலைவெண் 303 ஆகவும்,

(ii) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பிழைகளைக் கொண்ட பக்கங்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $38+6+1 = 45$ ஆகவும் அமையும்.

இப்போது பாய்சான் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் தோராயம் எனக்குறிப்பிடுவதின் கருத்துபற்றி காண்போம்.

n, p ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் n ஆனது எண்ணிலியையும் p ஆனது பூச்சியத்தையும் அணுகும்போது, np- ஆனது கணிசமான மதிப்பாக அமையின் ஈருறுப்புப் பரவல், np-ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலை அணுகுகிறது.

X மாறியின் பரவலானது n, p ஆகியவைகளை பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் எனில், நிகழ்ச்சி $(x=r)$-ன் நிகழ்தகவு

$$P(X=r) = \binom{n}{r}(1-P)^{n-r} P^r$$

ஆகும். n–ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாகவும் p–ன் மதிப்பு மிகச்சிறிய தாகவும் இருப்பின்

$$P(X=r) \text{ ஆனது } \frac{e^{-nP}(nP)^r}{r!} \text{ ஐ}$$

அணுகுகிறது எனக் கணித முறையில் நிறுவப்படும் தேற்ற மாகும்.

இப்போது

$$\frac{e^{-nP}(nP)^r}{r!}$$ ஆனது npஐப் பண்பளவை

யாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலில் நிகழ்ச்சி $(X=r)$–ன் நிகழ் தகவு ஆகும்.

பட்டியல் 11-8-ல் $n=100$, $P=0\cdot01$ ஆகியவைகளைப் பண்பள வைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல், $nP=100\,(0\cdot01)=1$ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவல் ஆகிய வைகளின் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் நெருங்கி யமைவதைக் காண் கிறோம்.

பட்டியல் 11-8.

மாறி X எண் மதிப்பு	நிகழ்தகவு ஈருறுப்புப் பரவல் $n=100$, $P=0\cdot01$	பாய்சான் பரவல் $m=np=100\,(0\cdot01)=1$
0	0·3660	0·3579
1	0·3697	0·3679
2	0·1849	0·1839
3	0·0610	0·0613
4	0·0149	0·0153
5	0·0029	0·0031
≥ 6	0·0006	0·0006

இப்போது கண்டறிந்த அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதான பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கணக்கிடும் முறையைப்பற்றி விவரிப்போம்.

அலைவுப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு $\bar{X}$ஐப் பாய்சான் பரவலின் சராசரி m-க்குச் சமன் படுத்துவோம். எனவே, அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் பாய்சான் பரவல்

$$\frac{e^{-\bar{X}} (\bar{X})^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

ஆகும்.

$\bar{X}$ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை, மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 11-9.

தவறுகளின் எண்ணிக்கை	சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை
0	3
1	4
2	12
3	13
4	10
5	5
6	2
7	1

கணக்கு :

உச்சரிப்புப் போட்டியொன்றில 50 சிறுவர்கள் பங்கேற்றனர். அவர்கள் செய்த தவறுகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, ..., 7 எனப் பாகுபடுத்தப்பட்டு, முன் பக்கத்தில் உள்ள பட்டியல் 11-9-ல்கண்ட அலைவுப் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்பரவலுக்கு ஏற்றதான பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

தவறுகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப்பிட்டு, பரவலின் சராசரி மதிப்பைக் காண்போம்.

பட்டியல் 11-10.

X	f	fX
0	3	0
1	4	4
2	12	24
3	13	39
4	10	40
5	5	25
6	2	12
7	1	7
மொத்தம்	50	151

சராசரி $\bar{X} = \dfrac{\Sigma fX}{\Sigma f}$

$$= \frac{151}{50}$$

$$= 3{\cdot}01$$

$$= 3 \text{ (தோராயமாக).}$$

பட்டியல் 11-11.

தவறுகளின் எண்ணிக்கை	பாய்சான் பரவல் $m = 3$ நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்	கண்டறிந்த அலைவெண்
0	$\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0{\cdot}0497$	2	3
1	$\frac{e^{-3}3^{1}}{1!} = 0{\cdot}1494$	7	4
2	$\frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = 0{\cdot}2240$	11	12
3	$\frac{e^{-3}3^{3}}{3!} = 0{\cdot}2240$	11	13
4	$\frac{e^{-3}3^{4}}{4!} = 0{\cdot}1680$	8	10
5	$\frac{e^{-3}3^{5}}{5!} = 0{\cdot}1008$	5	5
6	$\frac{e^{-3}3^{6}}{6!} = 0{\cdot}0504$	3	2
≥ 7	$1-\sum_{k=0}^{6}\frac{e^{-3}3^{k}}{k!} = 0{\cdot}0335$	3	1

கணக்கிட்ட சராசரி மதிப்பு $\bar{X} = 3$ ஐப் பாய்சான் பரவல் பண்பளவை m-க்குச் சமன்படுத்துகிறோம். அதாவது $m = \bar{X} = 3$

எனக்கொள்ளுகிறோம். எனவே, அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் பாய்சான் பரவல்

$$\frac{e^{-3}(3)^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

ஆகும்.

பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை $N = 50$ ஐக் கொண்டு பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம்.

இரண்டாவது உலகப்போரின்போது ஒரு நகரத்தில் குண்டு வீச்சால் தாக்குண்ட ஆயிரம் பகுதிகளைப்பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

பட்டியல் 11-12.

விழுந்த குண்டுகளின் எண்ணிக்கை	பகுதிகளின் எண்ணிக்கை
0	953
1	44
2	2
3	1

பரவலுக்கு ஏற்றதான பாய்சான் அலைவுப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை :

அலைவுப் பரவலின் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 11-13.

X	f	fX
0	953	0
1	44	44
2	2	4
3	1	3
மொத்தம்	1000	51

$$\text{சராசரி } \bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

$$= \frac{51}{1000}$$

$$= 0{\cdot}051$$

$$= 0{\cdot}05 \text{ (தோராயமாக)}$$

சராசரி மதிப்பு $\bar{X} = 0{\cdot}05$ ஐப் பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை m-க்குச் சமன்படுத்துகிறோம். அதாவது $m = \bar{X} = 0{\cdot}05$ ஆகும்.

எனவே, அலைவுப்பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தும் பாய்சான் பரவல்

$$\frac{e^{-0{\cdot}05}(0{\cdot}05)^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots$$

ஆகும்.

கணக்கிட்ட நிகழ்தகவு மதிப்புகளும், எதிர்பார்க்கும் அலை வெண்களும் பட்டியல் 11-14-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 11-14.

விழுந்த குண்டுகளின் எண்ணிக்கை	பாய்சான் பரவல் $m = 3$ நிகழ்தகவு	எதிர் பார்க்கும் அலை வெண்	கண்ட றிந்த அலை வெண்
0	$e^{-\cdot 05} \dfrac{(\cdot 05)^0}{0!} = \cdot 9512$	951	953
1	$e^{-\cdot 05} \dfrac{(\cdot 05)^1}{1!} = \cdot 0476$	48	44
2	$e^{-\cdot 05} \dfrac{(\cdot 05)^2}{2!} = \cdot 0012$	1	2
≥ 3	$\cdot 0000$	0	1

பயிற்சி

(1) $m = 0{\cdot}8$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடவும்.

(2) X மாறியின் பரவல் $m = 4{\cdot}0$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அடையும்போது, (*i*) X-ன் மதிப்பு 2 அல்லது அதற்குக்குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

(*ii*) X-ன் மதிப்பு 6 அல்லது அதற்கு அதிகமாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவைகளைப் பெறுக.

(3) ஓர் அலகு பரப்பில் அமைய நேரிடும் பாக்டீரியா கிருமிகளின் எண்ணிக்கை $m = 3$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவல் பனில், சோதனைக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஓர் அலகுப்பரப்பில் கிருமிகளின் எண்ணிக்கை

4 அல்லது அதற்கு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(4) தொழிற்சாலையொன்றில் மாதமொன்றுக்கு ஏற்பட நேரிடும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கைக்கான பரவல் $m=4{\cdot}0$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவல் எனக்கொண்டு 20 மாதங்களில்,

(i) ஒரு விபத்துகூட ஏற்பட நேரிடாத மாதங்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை

(ii) ஒரு விபத்து மட்டும் ஏற்பட நேரிடும் மாதங்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை

(iii) நான்கு அல்லது அதற்குக் குறைவான விபத்துகள் ஏற்பட நேரிடும் மாதங்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை

(iv) ஐந்து அல்லது அதற்கு அதிகமான விபத்துகள் ஏற்பட நேரிடும் மாதங்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை ஆகியவைகளைக் காண்க.

(5) $m = 2$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடுக.

(6) $m = 4$ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை இரண்டு தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணக்கிடுக.

(7) $n = 50,\ p = 0{\cdot}03$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளைப் பாய்சான் பரவலின் அடிப்படையில் கிடைக்கப்பெறும் தோராய நிகழ்தகவு மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக.

(8) ஒரு தொலைபேசி இணைப்பகத்தில் காலை 10-00 மணி முதல் 10·05 மணி வரை, தொலைபேசி இணைப்புக்கான கோரிக்கைகளின் எண்ணிக்கை 3–பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாகஅமைகிறது எனில், அக்குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அவ்விணைப்பகம் மூன்று அல்லது அதற்குக் குறைவான கோரிக்கைகளைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவை அடைக.

(9) ஐந்நூறு நபர்களில் ஒருவர் கண்ணுடி அணிந்தவராக அமைகிருர் எனில், 5000 நபர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்றில் 5 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நபர்கள் கண்ணுடி அணிந்தவர்களாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

(10) ஒரு மருத்துவமனையில் 50 மாதங்களில் பிறந்த குழந்தைகளுள் ஊனமுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைப் பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

ஊனமுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	மாதங்களின் எண்ணிக்கை
0	25
1	17
2	6
3	1
4	1
மொத்தம்	50

இவ்விவரங்களுக்கு ஏற்ற பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(11) 100 பெட்டிகளில் அடைக்கப்பட்டுள்ள அனற்பொறி மூட்டும் அமைப்பு (Sparking·plug) களில் குறைபாடுடைய அமைப்புகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு :

குறைபாடுடையவைகளின் எண்ணிக்கை	பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை
0	23
1	32
2	25
3	13
4	6
5	1

இப்பரவலுக்குரிய பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

(12) கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதான பாய் சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுக.

மாறியின் மதிப்பு :	0	1	2	3
அலைவெண் :	27	15	3	3

(13) 300 ஊர்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஓர் ஆண்டில் தீ விபத்தினால் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கைப் பற்றிய பரவல் பின்வருமாறு :

இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை x	ஊர்களின் எண்ணிக்கை f
0	164
1	91
2	34
3	6
4	3
5	2
மொத்தம் 15	300

இவ்விவரங்களுக்கு ஏற்ற பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை மதிப்பிடுக.

12. இயல்நிலைப் பரவல்

(Normal Distribution)

புள்ளியியலில் கோட்பாடியலான பரவல்களுள் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது இயல்நிலைப் பரவலாகும். இப்பரவல் பொருளியல், உளவியல், உயிரியல், வானவியல் ஆகிய பல்வேறு துறைகளில் பெருவாரியாகக் கையாளப்படுகிறது.

அலைவுப் பரவல்களுக்கு வரை படங்கள் வரைவதுபற்றி முன்பு கண்டோம். அவைகளில் அலைவுப் பலகோணம் ஒன்றாகும். அலைவுப் பரவலில் இடம் பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைப் பேரளவாகவும், பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் மிகச் சிறிய அளவாகவும் கொள்ளும்போது, அலைவுப் பலகோணம் ஒரு சீரான வளைகோடு உருவத்தைப் பெறும். இவ்வளைகோட்டை அலைவெண் வளைகோடு (Frequency curve) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். நடைமுறையில் கையாளும் பெரும்பாலான பரவல்களின் அலைவெண் வளைகோடுகளின் தன்மைகளை இப்போது காண்போம்.

பரவலின் அலைவெண் வளைகோடு X அச்சின் இடது முனையில் ஆரம்பமாகி வலது முனையில் முடிகிறது. கணித கொள்கைப்படி, வளைகோடு X அச்சின் குறை முடிவிலி (Minus infinity)யில் ஆரம்பமாகி மிகை முடிவிலி (Plus infinity)யில் முடிகிறது எனக் கருதப்படுகிறது. ($-\infty$, $+\infty$ எனும் குறியீடுகளை முறையே குறை முடிவிலி, மிகை முடிவிலிகளைக் குறிப்பிடப் பயன்படுத்துகிறோம்.)

வளைகோட்டின் உயரம் X அச்சின் இடது முனையில் பூச்சியமாகவும், இடது முனையிலிருந்து வலப்பக்கம் போகப் போக வளைகோடு படிப்படியாக உயர்ந்து சென்று உச்சிநிலை அடைந்து

பிறகு படிப்படியாகக் குறைந்து வலது முனையில் உயரம் பூச்சியமாகவும் அமைகிறது. இத்தகைய அலைவெண் வளை கோடுகளில் ஒரு வகையே 'இயல்நிலைப் பரவல் வளைகோடு' என வழங்கப்படுகிறது. இவ்வளைகோட்டின் உயர மதிப்பைக் கணிதச் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

வாயிலாகக் குறிப்பிடுகிறோம்.

இங்கு, x = அலைப் பரவல் மாறியின் மதிப்பு,

y = மாறியின் மதிப்பு x–க்கு இணையொத்த அலைவுப் பரவல் வளைகோட்டின் உயரம் (Height) அல்லது நிலைத்தூரம் (Ordinate)

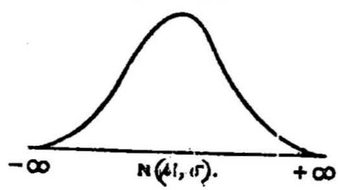
μ = பரவலின் சராசரி

σ = பரவலின் திட்ட விலக்கம்

$\pi = 3{\cdot}1416$

$e = 2.7183$ (அடுக்குக்குறி நிலையெண்)

இயல் நிலைப் பரவல்



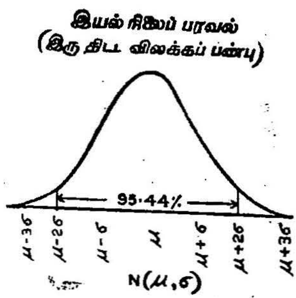
படம் 12- 1.

ஒரு பரவலின் அலைவெண் வளைகோடு மேலே குறிப்பிட்ட வளைகோட்டை ஒத்து அமையின் அப்பரவலை இயல்நிலைப் பரவல் (Normal distribution) என அழைக்கிறோம். சராசரி μ ஆகவும், திட்ட விலக்கம் σ ஆகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலை $N(\mu, \sigma)$ என்ற குறியீடு கொண்டு குறிப்பிடு கிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவல் வளைகோடு சமச்சீரான மணி வடிவை (Bell shaped) கொண்டதாகும்.

பரவலின் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவைகள் சம மதிப்புடையன.

பரவலில் இடம் பெறும் மதிப்புகளுள் 95·44 சதவீதம் அதாவது தோராயமாக 95 சதவீத மதிப்புகள் $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ என்ற இடைவெளியில் உள்ளடங்கியுள்ளன; இவ்விடை வெளியில் உள்ளடங்காத மதிப்புகள் 4.56 சதவீதம் அதாவது தோராயமாக 5 சதவீதமாகும். இதை இயல் நிலைப் பரவலின் இரு திட்ட விலக்கப் பண்பு (Two-sigma property) என வழங்குகிறோம்.



படம் 12-2.

பரவலின் 99.73 சதவீதம் அதாவது தோராயமாக 99 சதவீத மதிப்புகள் $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ என்ற இடைவெளியில் உள்ளடங்கியும், 0·27 சதவீதம் அதாவது தோராயமாக 1 சதவீத மதிப்புகள் இடைவெளிக்குப் புறத்தேயும் அமைவதையும் இயல்நிலைப் பரவலின் மூன்று திட்ட விலக்கப் பண்பு (Three-sigma property) என வழங்குகிறோம்.

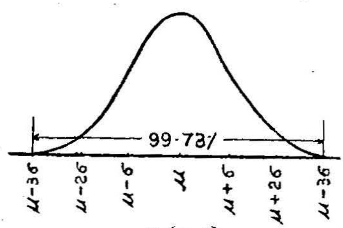
1000 நபர்களின் உயர மதிப்புகளுக்கான இயல்நிலை அலைவுப் பரவலின் சராசரி 67'', திட்ட விலக்கம் 2.5'' எனக் கொள்வோம். அப்போது,

அலைவுப் பரவலின் சராசரி = 67''

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை = 67''

அலைவுப் பரவலின் முகடு = 67'' ஆகும்.

இயல் நிலைப் பரவல
(மூன்று திட்ட விலக்கப் பண்பு)



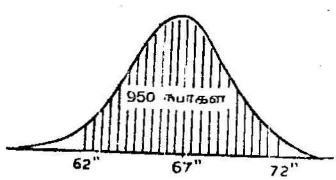
படம் 12-3.

$$\mu - 2\sigma = 67'' - 2\,(2.5'') = 62''$$

$$\mu + 2\sigma = 67'' - 2\,(2.5)'' = 72''$$

1000 நபர்களில் 95 சதவீதத்தினர் அதாவது 950 பேர்களின் உயரம் (62'', 72'') என்ற இடைவெளியில் அமையும். உயரத்தை 62'' குறைவாகவும், 72'' அதிகமாகவும் கொண்ட நபர்கள் 5 சதவீதத்தினர். அதாவது 50 பேர்களாகும்.

இயல் நிலைப் பரவல



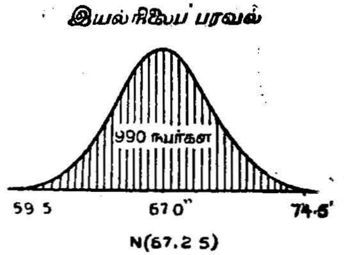
படம் 12-4.

$$\mu - 3\sigma = 67'' - 3\,(2.5'') = 59.5''$$

$$\mu + 3\sigma = 67'' + 3\,(2.5'') = 74.5''$$

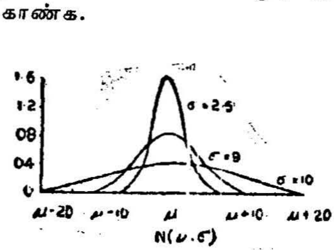
59.5 அங்குல உயரத்திற்கு அதிகமாகவும், 74.5 அங்குல உயரத்திற்குக் குறைவாகவும் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை 990. அதாவது 99 சதவீதமாகும்.

10 நபர்களின் உயரம் (59·5″, 74·5″) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தேயுள்ள மதிப்புகளாகும்.



படம் 12-5.

சராசரி μ, திட்ட விலக்கம் σ' ஆகியவைகள் இயல்நிலைப் பரவலின் பண்பளவைகள் (Parameters) என வழங்கப்படுகின்றன. பண்பளவைகளது மதிப்புகளின் அடிப்படையில் பரவலைப் பற்றிய முழுமையான செய்தியைப் பெறுகிறோம். சராசரியைச் சமமாக ஆனால் வெவ்வேறு திட்ட விலக்கங்களைப் பெற்றுள்ள மூன்று இயல்நிலை பரவல் வளைகோடுகளின் அமைப்புகளை படம் (12-5)-ல் காண்க.



படம் 12-6.

ஓர் உருப்பின் உண்மையான அளவுதனை (True Magnitude) மதிப்பிட விழைவதாகக் கொள்வோம். கட்டுப்படுத்தவியலாத பலவகையான ஏதுக்கள் (Multiplicity of causes) சிறு சிறு பிழைகளை ஏற்படுத்தக் கூடுமாதலால், அந்த அளவின் மதிப்பை

நாம் பல முறைகளில் அளவிடினும் அம் மதிப்புகள் சிறு, சிறு பிழைகளுடன் கூடியதாகவே அமையும். இங்ஙனம் கணித்த பல மதிப்புகளின் சராசரியை உண்மையான அளவின் மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம். இங்குப் பிழைகளுடன் சேர்ந்த மதிப்புகளின் பரவல் இயல் நிலைப் பரவல் என டிமாய்வ்ரே (De Moivre), காஸ் (Gauss), லாப்லேஸ் (Laplace) என்பவர்கள் கணிதக் கோட்பாடு வாயிலாக நிறுவியுள்ளனர். ஆகையால், இயல் நிலைப் பரவல், பிழைகளின் விதிக்கான பரவல் (Law of errors) எனவும் கொள்ளப்படுகிறது.

n, p ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலில் n–ன் மதிப்பு எண்ணிலியை அணுகும் போது, பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் npஐச் சராசரியாகவும், $\sqrt{np(1-p)}$ஐப் பரவலின் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அணுகுகிறது. எனவே, இயல் நிலைப் பரவலானது ஈருறுப்புப் பரவலின் தோராயம் என வழங்கப்படுகிறது. X-எனும் மாறியின் பரவல் n, p ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் எனக் கொள்வோம். இப்போது Xஐ உருமாற்றி

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

எனக் குறிப்பிடுவோம். n-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை அணுகும் போது, z-ன் பரவல் பூச்சியத்தைச் சராசரியாகவும், ஒன்றைத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவல் அதாவது $N(0, 1)$ ஆக அமையுமென்பது புள்ளியியல் தேற்றமாகும்.

$\mu = 0$ ஐச் சராசரியாகவும், $\sigma = 1$ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை, அதாவது $N(0, 1)$ஐத் திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் (Standard Normal Distribution) என அழைக்கிறோம். இப்பரவல் வளைக்கோட்டின் சமன்பாடு

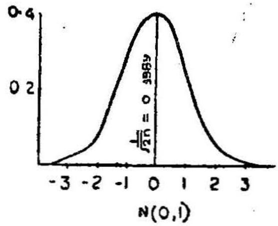
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(z^2)}$$

ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டில், z-ன் மதிப்பைப் பூச்சியம்எனக் கொள்ளும்போது, y-ன் மதிப்பு $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989$ ஆக அமைகிறது.

எனவே $(z = 0)$-க்கு இணையான y-ன் மதிப்பு அதாவது $(z = 0)$ ஆக இருக்கும் போது $N(0, 1)$ பரவல் வளை கோட்டின் உயரம் அல்லது நிலைத் தூரம் 0.3989 ஆகும். இம்

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்



படம் 12-7.

மதிப்பை $(z = 0)$-க்கு இணையான $N(0,1)$ பரவலின் உயரம் அல்லது நிலைத்தூரம் எனக் குறிப்பிடுகிறோம்

z-ன் பல மதிப்புகளுக்கு இணையான $N(0, 1)$ பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்புகள் அதாவது உயர மதிப்புகள் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. இம்மதிப்புகள் கொண்ட அட்டவணை இயல்நிலைப் பரவலின் நிலைத்தூர அட்டவணை (Tables of ordinate of Normal distributions) என வழங்கப்படுகிறது.

இவ்வட்டவணையின் சுருக்கம் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் (அட்டவணை I-ல்) இடம் பெறுகிறது.

அட்டவணை I-ல் z தலைப்பு கொண்ட நிரலில் மதிப்புகள் 0.0 முதல் 3.95 வரையுள்ளன. அடுத்த நிரல் 'நிலைத்தூரம்' எனும் தலைப்புடன் பல மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. இவ்விரு நிரல்களிலும் அமைந்துள்ள சில இணைந்த மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். (பட்டியல் அடுத்த பக்கம் பார்க்கவும்.)

இவைகள் z-ன் மதிப்பு 0·50 ஆக அமையும்போது $N(0, 1)$ பரவலின் நிலைத்தூரம் 0.3521 ஆகவும்,

z-ன் மதிப்பு 1.00 ஆக அமையும் போது $N(0.1)$ பரவலின் நிலைத்தூரம் 0.2420 ஆகவும்,

z	நிலைத்தூரம்
0·50	0·3521
1·00	0·2420
2·00	0·0540
3·50	0·0009

z-ன் மதிப்பு 2·00 ஆக அமையும்போது N (0,1) பரவலின் நிலைத்தூரம் 0.0540 ஆகவும்,

z–ன் மதிப்பு 3.50 ஆக அமையும்போது, N (0,1) பரவலின் நிலைத்தூரம் 0.0009 ஆகவும் அமைவதைக் குறிப்பிடுகின்றன.

திட்ட இயல்நிலைப் பரவலானது ($z = 0$) என்பதைக் குறித்துச் சமச்சீர் தன்மை பெற்று இருப்பதால் ($z = -a$) ஆக அமையும் போது பரவலின் நிலைத்தூரமானது z-ன் மதிப்பு $+a$ வாக அமையும்போதான நிலைத்தூர மதிப்புக்குச் சமமாக அமையும். எனவே, z-ன் எதிர்மறை மதிப்புகளுக்கு இணையான நிலைத்தூர மதிப்புகளைப் பெற விழையும் போது அவைகளை நேர்மறையாகக் கொண்டு அட்டவணை 1 வாயிலாக அடைகிறோம்.

z-ன் மதிப்பு $-$ 0.50 ஆக அமையும் போது, $z = 0.50$ எனக் கொண்டு நிலைத்தூர மதிப்பை அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{array}{l}(z = -0.50)\text{க்கான} \\ \text{நிலைத்தூரம்}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}(z = 0.50)\text{–க்கான} \\ \text{நிலைத்தூரம்}\end{array}$$

$$= 0.3521$$

இது போலவே,

$$\left.\begin{array}{l}(z = -1.00)\text{–க்கான} \\ \text{நிலைத்தூரம்}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}(z = 1.00)\text{-க்கான} \\ \text{நிலைத்தூரம்}\end{array}$$

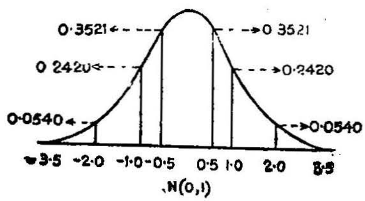
$$= 0.2420$$

(z = − 0·200)-க்கான நிலைத்தூரம் } = (z = 2·00)-க்கான நிலைத்தூரம்

= 0·0540

(z = − 3·50)-க்கான நிலைத்தூரம் } = (z = 3·50)-க்கான நிலைத்தூரம்

= 0·0009



படம் 12-8.

அட்டவணை I-ன் முதல் இரு நிரல்களைக்கொண்டு, திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் N (0, 1)-ன் நிலைத்தூர மதிப்புகளைப் பெறுவதுபற்றி இப்போது காண்போம்.

x மாறியின் பரவல் μஐச் சராசரியாகவும், σஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவல் எனில்,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ஆகும். x-ன் மதிப்பு a ஆக அமையும்போது N (μ, σ) பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்பு,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ஆகும். இங்கு $z = \frac{a - \mu}{\sigma}$ எனக் குறிப்பிடும்போது,

$$y = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$\therefore y\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2}$$

இச்சமன்பாட்டின் வலது புறக்கோவை, திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் நிலைத்தூரத்தை குறிக்கிறது. ஆகவே, $y\sigma$–ன் மதிப்பை அட்டவணை I கொண்டு பெறுகிறோம். இதை σஐக்கொண்டு வகுப்பதன் மூலம் தேவையான நிலைத்தூர மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

எனவே, X மாறியின் பரவல் $N(\mu, \sigma)$ எனில், $(x = a)$-ன் மதிப்புக்கான பரவலின் நிலைத்தூரம்

$$= \frac{1}{\sigma} \left\{ z = \left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \text{-ன் மதிப்புக்கான திட்ட இயல் நிலைப்பரவலின் நிலைத்தூரம்} \right\}$$

x மாறியின் பரவல் $N(50, 10)$ எனில், $(x = 60)$-ன் மதிப்புக்கான நிலைத்தூரம்

$$= \frac{1}{10} \left\{ z = \left(\frac{60 - 50}{10}\right) \text{-ன் மதிப்புக்கான } N(0, 1) \text{-ன் நிலைத்தூரம்} \right\}$$

$$= \frac{1}{10} \left\{ (z = 1)\text{-க்கான } N(0, 1)\text{-ன் நிலைத்தூரம்} \right\}$$

$$= \frac{1}{10} (0{\cdot}2420) = 0{\cdot}0242$$

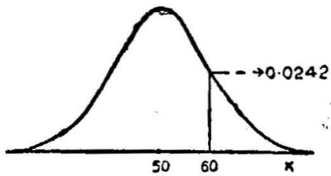
படம் 12·9ஐ அடுத்த பக்கத்தில் காணவும்.

x மாறியின் பரவல் $N(1000, 200)$ எனில் $(x = 600)$ – ன் மதிப்புகான நிலைத்தூரம்

$$= \frac{1}{200} \left\{ z = \left(\frac{600 - 1000}{200}\right) \text{– ன் மதிப்புக்கான } N(0, 1)\text{–ன் நிலைத்தூரம்} \right\}$$

$$= \frac{1}{200} \left[0{\cdot}0540 \right] = 0{\cdot}0003$$

x மாறியின் பரவல் $N(\mu, \sigma)$ எனக் கொள்வோம். x மாறியானது மதிப்பு 'a' ஐப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு, அதாவது நிகழ்ச்சி $(x = a)$–ன் நிகழ்தகவானது, $(x = a)$ - க்கான



படம் 12-9.

$N(\mu, \sigma)$ பரவலின் நிலைத்தூரமாகும். எனவே, இயல்நிலைப் பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்புகளின் வாயிலாகத் தேவையான நிகழ்தகவுகளைப் பெறுகிறோம்.

$N(50, 10)$ பரவலில், நிகழ்ச்சி $(x = 60)$–ன் நிகழ்தகவானது $(x = 60)$–ன் மதிப்புக்கான $N(50, 10)$ பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்பு 0·0242 ஆக அமையும்.

$N(1000, 200)$ பரவலில், நிகழ்ச்சி $(x = 600)$–ன் நிகழ்தகவானது $(x = 600)$–ன் மதிப்புக்கான N (1000, 200) பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்பு (0·0003) ஆக அமையும்.

கணக்கு :

ஓர் இயல் நிலைமாறி (Normal Variable)–ன் சராசரி 8, திட்ட விலக்கம் 2 எனில், இம் மாறி பூச்சியம் முதல் 16 வரையிலுள்ள முழு எண் மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை :

கொடுக்கப்பட்ட மாறியை X எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது இயல்நிலை மாறியின் வளைகோட்டிற்கான சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-8)^2}{2(2^2)}}$$

ஆகும்.

x மாறி 0, 1, 2, ... 16 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு முறையே $(x = 0)$, $(x = 1)$, $(x = 2)$......

($x = 16$) ஆகியவைகளுக்கான $N(8, 2)$ பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்புகளாகும். தேவையான நிலைத்தூர மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 12-1.

x	$z = \frac{x-8}{2}$	$N(0, 1)$ பரவலின் நிலைத்தூரம்	$N(8, 2)$ பரவலின் நிலைத்தூரம்	நிகழ்தகவு (இரு தசமத் தானங்களுக்குத் திருத்தமாக)
0	−4·0	0	0	0
1	−3·5	0·0009	0·0005	0
2	−3·0	0·0044	0·0022	0
3	−2·5	0·0175	0·0088	0.01
4	−2·0	0·0540	0·0270	0·03
5	−1·5	0·1295	0 0648	0·06
6	−1·0	0·2420	0·1210	0·12
7	−0·5	0·3521	0·1761	0·18
8	0·0	0·3989	0·1995	0·20
9	0·5	0·3521	0·1761	0·18
10	1·0	0·2420	0·1210	0·12
11	1 5	0·1295	0·0648	0·06
12	2·0	0·0540	0·0270	0 03
13	2·5	0·0175	0·0088	0·01
14	3·0	0 0044	0·0022	0
15	3·5	0·0009	0.0005	0
16	4·0	0	0	0

μஐச் சராசரியாகவும், σஐத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்டுள்ள ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து T உறுப்புக்களைக்கொண்ட ஒரு கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். இக்கூறில் ஓர் உறுப்பின் மதிப்பு 'a' ஆக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $N(\mu, \sigma)$ பரவலின் a-க்கான நிலைத்தூர மதிப்பாகும். இப்போது நிகழ்தகவு மதிப்பை Tஆல் பெருக்குவதன் மூலம் கூறில் இடம்பெறும் உறுப்புக்களுள், (a) எனும் மதிப்பைப்பெறும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை அடையலாம். இந்த எண்ணிக்கையை, T உறுப்புக்களுள் 'a' எனும் மதிப்பைப் பெறக்கூடிய உறுப்புக்களின் 'எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்' என வழங்குகிறோம்.

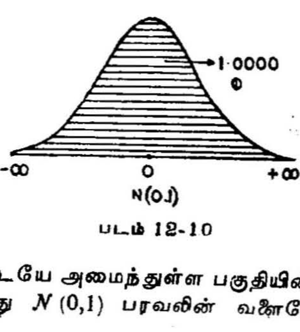
கணக்கு :

$N(8, 2)$ பரவலிலிருந்து 1000 உறுப்புக்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன எனில், கூறு உறுப்புக்களின் மதிப்புகள் 0 முதல் 16 வரையுள்ள முழு எண்களைப் பெறுவதற்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

முறை :

பரவலின் மாறியை X எனக் குறிப்பிடுவோம். அப்போது X-ன் பரவல் $N(8, 2)$ ஆகும். இப்பரவலின் $0, 1, 2 \ldots 16$, மதிப்புகளுக்கான நிலைத்தூர மதிப்புகள் அடுத்தப் பக்கத்தில் பட்டியல் 12-2-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளை $T = 1000$ ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் தேவையான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டு அவைகள் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

திட்ட இயல் நிலைப் பரவலின் வளைகோடு, X அச்சு ஆகிய



படம் 12-10

வைகளுக்கு இடையே அமைந்துள்ள பகுதியின் பரப்பு 1 என்போம், அதாவது $N(0,1)$ பரவலின் வளைகோட்டிற்குக் கீழ்,

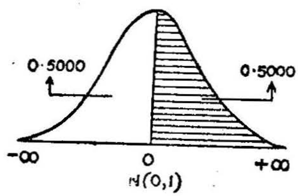
பட்டியல் 12-2.

X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் = 1000 × நிகழ்தகவு
0	0·0000	0
1	0·0005	1
2	0·0022	2
3	0·0088	9
4	0·0270	27
5	0·0648	65
6	0·1210	121
7	0·1761	176
8	0·1995	200
9	0·1761	176
10	0·1210	121
11	0·0648	65
12	0·0270	27
13	0·0088	9
14	0·0022	2
15	0·0005	1
16	0 0000	0

X அச்சில் $(-\infty, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு 1 என்பதாகும். இப் பரப்பைப் படம் (12-10)-ன் கோடிட்ட பகுதி காட்டுகிறது.

பரவல் வளைகோடு $(X = 0)$ஐக் குறித்து சமச்சீராக அமைவதால் $(0, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் பரவல் வளை

கோட்டிற்குக் கீழ் அமையும் பரப்பு 0·5 ஆகவும், $(-\infty, 0)$ எனும் இடைவெளியில் பரவல் வளைகோட்டின் கீழ் அமையும் பரப்பு 0·5 ஆகவும் அமைகிறது.



படம் 12-11.

பரவலின் சமச்சீர் தன்மைக் காரணமாக (a, b) எனும் இடைவெளியில் பரவல் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் அமைந்துள்ள பரப்பும் $(-b, -a)$ எனும் இடைவெளியில் பரவல் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் அமைந்துள்ள பரப்பும் சமமானவைகளாக அமையும்.

(a, b) எனும் இடைவெளியில் $N(0, 1)$ பரவல் வளைகோட்டின் கீழ் அமைந்துள்ள பரப்பு மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட்டு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. இம்மதிப்புகளைக் கொண்ட அட்டவணை 'இயல்நிலைப் பரவல் பரப்பு அட்டவணை' (Table of area of Normal distribution) என வழங்கப்படுகிறது. இவ்வட்டவணையின் சுருக்கம் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் (அட்டவணை I-ல்) இடம் பெறுகிறது.

அட்டவணை I-ல் முதல் நிரலில் z மதிப்புகள் உள்ளன. மூன்றுவது நிரலில் 'பரப்பு' எனும் தலைப்பின் கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள, $(0, z)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள மதிப்புகள் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பைக் குறிக்கின்றன. இப்போது முதலாவது, மூன்றுவது நிரல்களில் அமைந்துள்ள சில இணையான மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

z	பரப்பு
0.50	0.1915
1·00	0.3413
2.00	0.4772
3.50	0.4998

இவைகள் முறையே,

(0.0, 0.50) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0.1915 ஆகவும்,

(0.0, 1.0) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0·3413 ஆகவும்,

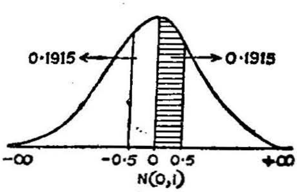
(0.0, 2.00) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு) = 0.4772 ஆகவும்,

(0.0, 3.50) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0·4998 ஆகவும்

அமைகின்றன என்பதைக் குறிக்கின்றன.

எனவே, அட்டவணை I-ன் நிரல் (1), நிரல் (3) ஆகியவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து $(0, z)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள, $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் சமச்சீரானபடியால் $(-z, 0)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு $(0, z)$ எனும் இடைவெளியில் அமையும் பரவலின் பரப்பாகும்.

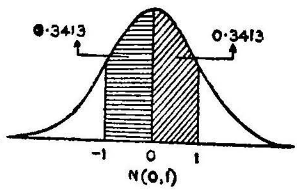


படம் 12-12.

ஆகவே,

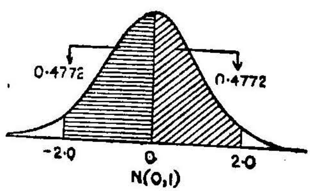
(— 0.50, 0.0) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு (0.0, 0.50) எனும் இடைவெளியில் அமையும் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0.1915. (படம் 12-12).

(– 1.00, 0 00) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு (0.00) எனும் இடைவெளியில் அமையும் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0.3413 (படம் 12.13)



படம் 12-13.

(— 2.00, 0.00) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு (0·00, 2.00) எனும் இடைவெளியில் அமையும் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு = 0.4772. (படம் 12.14)



படம் 12-14.

இப்போது, $N(0, 1)$ பரவலில் (a, b) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பின் மதிப்பை அட்டவணை I வாயிலாகப் பெறும் முறையைக் காண்போம். (இங்கு a, b ஆகியவைகள் நேர்மறை எண்கள் எனக் கொள்வோம்).

இடைவெளி (a, b)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு } = இடைவெளி $(0, b)$-ல் பரவலின் பரப்பு — இடைவெளி $(0, a)$-ல் பரவலின் பரப்பு

இங்கு $(0, b)$, $(0, a)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ள பரப்புகளை அட்டவணை I வாயிலாகப் பெற்றுத் தேவையான பரப்பை அடைகிறோம்.

இடைவெளி (1, 2)-ல் $N(0,1)$ பரவல் பரப்பு} = இடைவெளி (0, 2)-ல் பரவலின் பரப்பு − இடைவெளி (0, 1)-ல் பரவலின் பரப்பு

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

இடைவெளி (0.5, 3.5)-ல் $N(0,1)$ பரவல் பரப்பு} = இடைவெளி (0.0,3.5) பரவல் பரப்பு − இடைவெளி (0.0,0.5-ல் பரவல் பரப்பு

$$= 0.4997 - 0.1915 = 0.3082$$

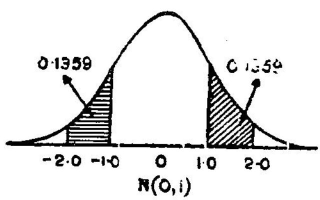
இடைவெளி (2,∞)-ல் $N(0,1)$ பரவல் பரப்பு} = இடைவெளி (0, ∞) பரவல் பரப்பு − இடைவெளி (0.0, 2.0) பரவல் பரப்பு

$$= 0.5000 - 0.4772 = 0.0228$$

இப்போது பரவல் சமச் சீராக உள்ளதால் $(-b, -a)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பு, (a, b) எனும் இடைவெளியில் அமையும் பரவல் பரப்பு ஆகியவைகள் சமமாக அமைகின்றன. அதாவது,

இடைவெளி $(-b, -a)$-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் மதிப்பு} = இடைவெளி (a, b)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு

ஆக அமையும்.



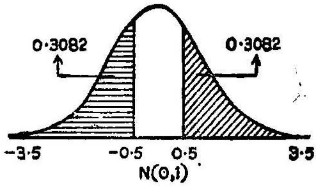
படம் 12.15

இடைவெளி (−2, −1)-ல் $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பு} = இடைவெளி (1, 2)-ல் பரவல் பரப்பு

$$= 0·1359$$

இடைவெளி (—3·5,—0·5)-ல் $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பு } = இடைவெளி (0.5, 3.5-ல் பரவல் பரப்பு

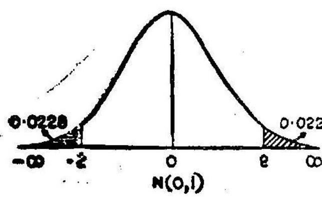
= 0.3082



படம் 12-16.

இடைவெளி (— ∞, − 2.0)-ல் $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பு } = இடைவெளி (2.0, ∞)-ல் பரவல் பரப்பு

= 0·0228



படம் 12-17

இப்போது, $N(0, 1)$ பரவலில் (c, d) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரவலின் மதிப்பை அட்டவணை Iஐக் கொண்டு பெறும் முறையைக் காண்போம். (இங்கு c ஆனது எதிர்மறை எண் எனவும், d ஆனது நேர்மறை எண் எனவும் கொள்வோம்.)

இடைவெளி (c, d)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு } = இடைவெளி $(c, 0)$-ல் பரவலின் பரப்பு + இடைவெளி $(0, d)$-ல் பரவலின் பரப்பு

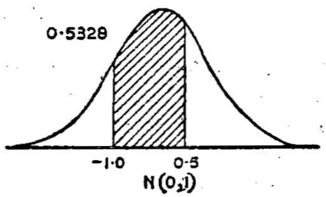
இங்கு $(c, 0)$, $(0, d)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ள பரப்புகளை அட்டவணை I வாயிலாகப் பெற்று தேவையான பரப்பை அடைகிறோம்.

ஆகவே,

இடைவெளி (— 1.00, 0.50)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	= இடைவெளி (— 1.00, 0.0)-ல் பரவலின் பரப்பு + இடைவெளி (0.0, 0.50)-ல் பரவலின் பரப்பு

= 0.3413 + 0.1915

= 0.5328



படம் 12-18.

இடைவெளி (— 2.00, 2.00)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	= இடைவெளி (— 2.00, 0.0)-ல் பரவலின் பரப்பு + இடைவெளி (0.0, 2.00)-ல் பரவலின் பரப்பு

= 0.4772 + 0.4772

= 0.9544

இடைவெளி (— 3.00, 3.00)-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	= இடைவெளி (— 3.00, 0.0)-ல் பரவலின் பரப்பு + இடைவெளி (0.0, 3.00)-ல் பரவலின் பரப்பு

= 0.4987 + 0.4987

= 0.9974

இப்போது இடைவெளி (a, b)-க்குப் புறத்தேயுள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	= 1 — {இடைவெளி (a,b)-ல் பரவலின் பரப்பு)}

ஆக அமையும்.

எனவே,

இடைவெளி (— 2.0, 2.0)-க்குப் புறத்தேயுள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	= 1 — [இடைவெளி (— 2.0, 2.0)-ல் பரவலின் பரப்பு]

$= 1 - 0.9544$

$= 0.0456$

இடைவெளி $(-3.0,\ 3.0)$-க்குப் புறத்தேயுள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு	$= 1 -$ [இடைவெளி $(-3.0,\ 3.0)$-ல் பரவலின் பரப்பு]

$= 1 - 0.9974$

$= 0.0026$

இதுவரையில் அட்டவணை Iஐக் கொண்டு இடைவெளி (a, b)-ல் அமைந்துள்ள திட்ட இயல்நிலைப்பரவல் பரப்பைக் கணக்கிடும் முறையைப் பற்றி கண்டோம். இப்போது இடைவெளி (x_1, x_2)-ல் அமைந்துள்ள இயல்நிலைப் பரவல் $N(\mu, \sigma)$-ன் பரப்பினைக் கணக்கிடும் முறையைக் காண்போம்.

X மாறியின் பரவல் $N\ (\mu, \sigma)$ எனக் கொள்வோம்.

X மாறியை உருமாற்றி $z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ எனும் மாறியாகக் கொள்ளும்போது z மாறியின் பரவல் $N(0, 1)$ ஆகும். மேலும் x_1-ன் உருமாறிய மதிப்பு

$z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma}$ ஆகவும், x_2-ன் உருமாறிய மதிப்பு $z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma}$ ஆகவும் அமைகின்றன.

(x_1, x_2) எனும் x மாறியின் இடைவெளியானது உருமாற்றியபின் (z_1, z_2) எனும் z மாறியின் இடைவெளியாக அமைகிறது. இப்போது இடைவெளி (x_1, x_2)-ல் அமைந்துள்ள $N(\mu, \sigma)$ பரவல் பரப்பும், இடைவெளி (z_1, z_2)-ல் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பும் சம மதிப்புடையனவாக அமையும். அட்டவணை I கொண்டு பெறும் இடைவெளி (z_1, z_2)-ல் அமைந்துள்ள இயல் நிலைப்பரவல் பரப்பானது இடைவெளி (x_1, x_2)-ல் அமையும் $N(\mu, \sigma)$ பரவலின் பரப்பாகும்.

கணக்கு :

50ஐச்சராசரியாகவும், 10ஐத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் கீழ்க்கண்ட இடைவெளிகளுள் அமைந்துள்ள பரப்புகளைப் பெறுக.

(i) (40, 60) எனும் இடைவெளி

(ii) (60, ∞) எனும் இடைவெளி

(iii) (−∞, 40) எனும் இடைவெளி.

முறை :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயல் நிலைப்பரவல் மாறியை X எனக் கொள்வோம். X மாறியை $z = \frac{x-50}{10}$ என்ற மாறியாக உரு மாற்றும்போது z-ன் பரவல் $N(0, 1)$ ஆகும். (i) இப்போது $x_1 = 40$, $x_2 = 60$ எனக்கொள்ளும்போது x_1-ன் உருமாறிய மதிப்பு $(z_1 = \frac{40-50}{10})$ ஆகவும், x_2-ன் உருமாறிய மதிப்பு $\left(z_2 = \frac{60-50}{10}\right)$ ஆகவும் அமைகிறது. x-ன் இடைவெளி (40, 60) ஆனது z-ன் இடைவெளி (−1, 1) ஆக மாறுகிறது. அட்டவணை I கொண்டு பெற்ற இடைவெளி (−1, 1)-ல் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு 0·6826 ஆகும்.

எனவே,

$$\left.\begin{array}{l}\text{இடைவெளி (40, 60)-ல் அமைந்}\\ \text{துள்ள } N(50, 10) \text{ பரவலின் பரப்பு}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{இடைவெளி (−1, 1)}\\ \text{-ல் } N(0, 1) \text{பரவலின்}\\ \text{பரப்பு} = 0{\cdot}6826.\end{array}$$

(ii) $x_1 = 60$, $x_2 = \infty$ எனக்கொள்ளும்போது x_1-ன் உருமாறிய மதிப்பு $(z_1 = \frac{60-50}{10})$ ஆகவும், x_2-ன் உருமாறிய மதிப்பு $(z_2 = \frac{\infty - 50}{10})$ ஆகவும் அமைகிறது. x-ன் இடைவெளி $(60, \infty)$ யானது z-ன் இடைவெளி $(1, \infty)$ ஆக மாறுகிறது. அட்டவணை I கொண்டு பெற்ற இடைவெளி $(1, \infty)$-ல் $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு 0·1587 ஆகும்.

எனவே,

$$\left.\begin{array}{l}\text{இடைவெளி } (60, \infty)\text{-ல்}\\ N(10, 50) \text{ பரவல் பரப்பு}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{இடைவெளி } (1, \infty)\text{-ல்}\\ N(0, 1) \text{ பரவலின் பரப்பு}\end{array}$$

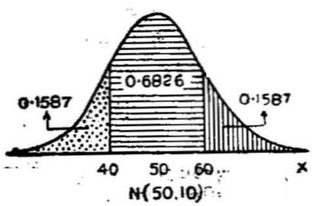
$$= 0{\cdot}1587.$$

(iii) $x_1 = -\infty$, $x_2 = 40$ எனக்கொள்ளும்போது x_1-ன் உருமாறிய மதிப்பு ($z_1 = \frac{-\infty - 50}{10}$) ஆகவும், x_2-ன் உருமாறிய மதிப்பு ($z_2 = \frac{40-50}{10}$) ஆகவும் அமைகின்றன. x-ன் இடைவெளி $(-\infty, 40)$ ஆனது z-ன் இடைவெளி $(-\infty, -1)$ ஆக மாறுகிறது. அட்டவணை I கொண்டு பெற்ற இடைவெளி $(-\infty, -1)$-ல் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$ பரவல் பரப்பு 0·1587 ஆகும்.

எனவே,

இடைவெளி $(-\infty, 40)$-ல் $N(50, 10)$ பரவலின் பரப்பு $\Big\}$ = இடைவெளி $(-\infty, -1)$-ல் $N(0,1)$ பரவலின் பரப்பு

= 0·1587 ஆகும்.



படம் 12-19.

x – மாறியின் பரவல் μ-வைச் சராசரியாகவும், σ-வைத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனக் கொள்வோம். x-மாறியின் மதிப்பு (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் உள்ளடங்கியிருத்தற்கான நிகழ்தகவு, அதாவது நிகழ்ச்சி $(x_1 \leq x \leq x_2)$-ன் நிகழ்தகவு, (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் $N(\mu, \sigma)$ - பரவலின் பரப்பு மதிப்பாகும். எனவே, இயல்நிலைமாறி ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் அமைந்துள்ள மதிப்புகளைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு, பரவலின் அக்குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பின் மதிப்பாக அமையும்.

μ-வைச் சராசரியாகவும், σ-வைத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்டுள்ள ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து T உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்படு

கிறது எனக்கொள்வோம். இக்கூறில், ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பின் மதிப்பு (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $N(\mu, \sigma)$ பரவலில் (x_1, x_2) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பின் மதிப்பாகும். இப்போது இந்நிகழ்தகவு மதிப்பை T ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் கூறில் இடம் பெறும் உறுப்புகளுள் (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறுகிறோம். இந்த எண்ணிக்கையை, T உறுப்புகளுள் (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறக்கூடிய உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் என வழங்குகிறோம்.

கணக்கு :

1000 சிறுவர்களின் எடை மதிப்புகள் 50 பவுண்டுகளை சராசரியாகவும், 10 பவுண்டுகளைத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்போது,

(a) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு சிறுவனின் எடை (i) 40 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக, (ii) 40 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக ஆனால் 60 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக (iii) 60 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளையும்,

(b) கூறில் இடம் பெறும் 1000 சிறுவர்களுள் (i) 40 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக, (ii) 40 பவுண்டுகளுக்கு மேலாக ஆனால் 60 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக (iii) 60 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக எடையைப் பெற்று இருப்பவர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடை மதிப்புகளுக்கான மாறியை x எனக் குறிப்பிடுவோம். அப்போது x-ன் பரவல் $N(50, 10)$ ஆகும்.

1000 சிறுவர்களுள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவனின் எடை 40 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை $(x \leq 40)$ அதாவது $(-\infty < x \leq 40)$ எனக் குறிப்பிடலாம். இந் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு, இடைவெளி $(-\infty, 40)$-ல் உள்ளடங்கும் $N\ (50, 10)$ பரவலின் பரப்பாகும்.

நிகழ்ச்சி $(-\infty < x \leq 40)$-ன் நிகழ்தகவு

$=x$-ன் இடைவெளி $(-\infty, 40)$-ல் $N(50, 10)$-ன் பரப்பு

$=z$-ன் இடைவெளி $(-\infty, 1)$-ல் $N(0, 1)$-ன் பரப்பு

$=0{\cdot}1587$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவனின் எடை 40பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக ஆனால் 60 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை $(40 \leqslant x < 60)$ எனக்குறிப்பிடலாம். இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு இடைவெளி $(40, 60)$-ல் உள்ளடங்கும் $N(50, 10)$ பரவலின் பரப்பாகும்.

நிகழ்ச்சி $(40 \leq x \leq 60)$-ன் நிகழ்தகவு

$=x$-ன் இடைவெளி $(40, 60)$-ல் $N(50, 10)$-ன் பரப்பு

$=z$-ன் இடைவெளி $(-1, 1)$-ல் $N(0, 1)$-ன் பரப்பு,

$=0{\cdot}6826$.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவனின் எடை 60 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை $(x \geq 60)$ அதாவது $(60 \leq x < \infty)$ எனக் குறிப்பிடலாம். இந் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு, இடைவெளி $(60, \infty)$-ல் உள்ளடங்கும் $N(50, 10)$ பரவலின் பரப்பாகும்.

நிகழ்ச்சி $(60 \leq x < \infty)$-ன் நிகழ்தகவு

$= x$-ன் இடைவெளி $(60, \infty)$-ல் $N(50, 10)$-ன் பரப்பு,

$= z$-ன் இடைவெளி $(1, \infty)$-ல் $N(0, 1)$-ன் பரப்பு

$= 0{\cdot}1587$.

(b) மாறியின் மதிப்பானது $(-\infty, 40)$ எனும் இடைவெளியில் உள்ளடங்குவதற்கான நிகழ்தகவை சிறுவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $(T=1000)$ பெருக்குவதன் மூலம் 1000 சிறுவர்களுள் 40 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவான எடை பெறுபவர்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்ணை அடைகிறோம் இதுபோலவே, மாறியின் மதிப்பானது $(40, 60)$, $(60, +\infty)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் உள்ளடங்குவதற்கான நிகழ்தகவு

பட்டியல் 12-3.

நிகழ்ச்சி	பிரிவு	நிகழ்தகவு
தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறுவனின் எடை		
(i) 40 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக	குறை முடிவிலிருந்து 40 வரை (—∞, 40)	0·1587
(ii) 40 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக, ஆனால் 60 பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக	40 முதல் 60 வரை (0, 60)	υ·6826
(iii) 60பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக	60 முதல் மிகை முடிவிலி வரை (60, ∞)	0·1587

மதிப்புகளை T–ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் முறையே 40 பவுண்டுகள் முதல் 60 பவுண்டுகள் வரையான எடையைப் பெறும் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை, 60 பவுண்டுகளுக்கு மேற்பட்ட

பட்டியல் 12-4.

(எடை பவுண்டுகளில்)	நிகழ்தகவு.	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் = நிகழ் தகவு × 1000
40–க்குக் குறைவாக	0·1587	159
40-க்கு அதிகமாகஆனால் 60–க்கு குறைவாக	0·6826	683
60–க்கு அதிகமாக	0·1587	159

எடையைப் பெறும் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றிற்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். அங்ஙனம் பெற்ற மதிப்புகள் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளன.

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரத்திற்கான பரவலானது 1000 மணி நேரத்தைச் சராசரியாகவும், 200 மணி நேரத்தைத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும். இந்நிறுவனம் விற்பனை செய்த 2000 மின் விளக்குகளில் 500 மணி நேரத்திற்குக் குறைவாக அல்லது 1500 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரியும் மின் விளக்குகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக.

முறை:

நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் விளக்குகளின் எரியும் நேரத்தை x மாறியால் குறிப்பிடுவோம். அப்போது x மாறியின் பரவல் $N(1000, 200)$ ஆகும்.

மின் விளக்கு 500 மணி நேரத்திற்குக் குறைவாக அல்லது 1500 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரியக்கூடிய நிகழ்ச்சியைப் ($x \leq 500$ அல்லது $x \geq 1500$) எனக்குறிப்பிடுகிறோம்.

நிகழ்ச்சி ($x \leq 500$ அல்லது $x \geq 1500$)-ன் நிகழ்தகவு

= நிகழ்ச்சி ($x \leq 500$) - ன் நிகழ்தகவு + நிகழ்ச்சி ($x \geq 1500$)-ன் நிகழ்தகவு

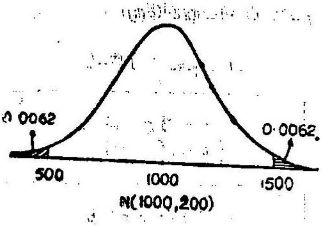
= $(-\infty, 500)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(1000, 200)$-ன் பரப்பு + $(1500, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(1000, 200)$-ன் பரப்பு

= $(-\infty, -2{\cdot}5)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$-ன் பரப்பு + $(2{\cdot}5, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(0, 1)$-ன் பரப்பு

= $0{\cdot}0062 + 0{\cdot}0062$

= $0{\cdot}0124$.

இம் மதிப்பை $T = 2000$ ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் தேவையான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.



படம் 12-20.

$$0 \cdot 0124 \times 2000 = 24.8 \simeq 25$$

எனவே, விற்பனை செய்யப்பட்ட 2000 மின் விளக்குகளில் 500 மணி நேரத்திற்குக் குறைவாக அல்லது 1500 மணி நேரத்திற்கு அதிகமாக எரியக்கூடிய விளக்குகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை 25 ஆகும்.

கணக்கு :

ஒரு கூட்டுறவுப் பண்டக சாலையில் அன்றாட விற்பனை மதிப்புகளுக்கான இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி ரூ. 5000 ஆகவும், திட்ட விலக்கம் ரூ. 1000 ஆகவும் அமையும்போது எடுத்துக்கொண்ட 100 நாட்களுள் விற்பனை மதிப்புகள் கீழ்க் கண்டவாறு அமையும். நாட்களின் எண்ணிக்கைக்கான எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

(i) ரூ. 3000-க்குக் குறைவாக

(ii) ரூ. 3000 முதல் ரூ. 4000 வரை

(iii) ரூ. 4000 முதல் ரூ. 5000 வரை

(iv) ரூ. 5000 முதல் ரூ. 6000 வரை

(v) ரூ. 6000 முதல் ரூ. 7000 வரை

(vi) ரூ. 7000-க்கு அதிகமாக.

முறை :

அன்றாட விற்பனை மதிப்பை 'x' மாறியால் குறிப்பிடும் போது x-ன் பரவல் $N(5000, 1000)$ ஆகும். x மாறியை

$z = \frac{x - 5000}{1000}$ என உருமாற்றியமைத்துத் தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

பட்டியல் 12–5.

x — மாறியின் இடைவெளி	மாறி z—ன் இடைவெளி	நிகழ்தகவு
≤ 3000	(−2)-க்குக்கீழ்	0 0228
3000—4000	(—2) லிருந்து (—1) வரை	0·1359
4000 – 5000	(—1) முதல் 0 வரை	0·3413
5000—6000	0 முதல் 1 வரை	0·3413
6000—7000	1 முதல் 2 வரை	0·1359
≥ 7000	2–க்கு மேல்	0·0228

இந் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை 100 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 12-6.

நாளொன்றுக்கு விற்பனை மதிப்பு (ரூபாய்களில்)	எதிர்பார்க்கும் நாள்களின் எண்ணிக்கை
3000–க்கு குறைவு	2
3000—4000	14
4000—5000	34
5000 – 6000	34
6000 – 7000	14
7000–க்கு மேல்	2
மொத்தம்	100

இப்போது X மாறியின் பரவலானது, n, p-களை பண்பளவை களாகக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் எனில் $(x = r)$-ன் நிகழ் தகவு

$$p\,(x = r) = {}^{n}c_{r}\,(1-p)^{n-r}\,p^{r}$$

ஆகும். np ஐச் சராசரியாகவும், $\sqrt{np\ (1-p)}$ ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும்கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் $(r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2})$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு மேற்கண்ட $p\,(x = r)$-ன் தோராயமாக அமையும் என்பது புள்ளியியல் தேற்றமாகும். ஆகவே, ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுகளுக் கான தோராய மதிப்புகளை இயல்நிலைப் பரவலின் அடிப் படையில் பெறலாம்.

X எனும் மாறியின் பரவல் $n = 16$, $p = \frac{1}{2}$ முதலியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப்பரவல் எனில்

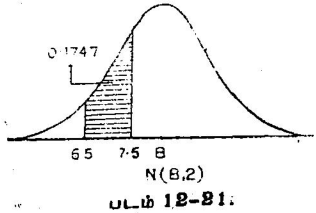
$$p\ (X = 7) = {}^{16}c_{7}\ (\tfrac{1}{2})^{9}\ (\tfrac{1}{2})^{7}$$

$$= 0{\cdot}1746$$

ஆகும்.

இங்கு, $np = 16 \times \frac{1}{2} = 8$ ஆகவும்,

$\sqrt{np\,(1-p)} = \sqrt{16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2$ ஆகவும் அமைகிறது. இப் போது 8 ஐச் சராசரியாகவும். 2 ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் $(7-\frac{1}{2}, 7+\frac{1}{2})$ எனும் இடை வெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு



படம் 12–21.

= இடைவெளி (6·5, 7·5)-ல் அமைந்துள்ள N (8, 2)-ன் பரப்பு

= 0·1747

இம்மதிப்பு மேற் கண்ட ஈருறுப்புப் பரவலில் p $(x=7)$ என்பதற்கான தோராய மதிப்பாக அமைவது கண்கூடு.

$n=16$, $p=\frac{1}{2}$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் நிகழ்தகவு மதிப்புகளும், இயல் நிலைப்பரவல் அடிப்படையில் பெற்ற தோராய மதிப்புகளும் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் இடம்பெறுகின்றன.

பட்டியல் 12-7.

மாறியின் மதிப்பு	இடைவெளி	இயல் நிலைப் பரவல் $\mu=8$, $\sigma=2$ நிகழ்தகவு	ஈருறுப்புப்பரவல் $n=16$, $p=\frac{1}{2}$ நிகழ்தகவு
0	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	0·0001	0·0000
1	$(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$	0·0005	0·0002
2	$(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$	0·0024	0·0018
3	$(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$	0·0092	0·0085
4	$(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$	0·0279	0·0278
5	$(4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$	0·0655	0·0667
6	$(5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$	0·1210	0·1222
7	$(6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$	0·1747	0·1746
8	$(7\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2})$	0·1974	0·1964
9	$(8\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2})$	0·1747	0·1746
10	$(9\frac{1}{2}, 10\frac{1}{2})$	0·1210	0·1222
11	$(10\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2})$	0·0655	0·0667
12	$(11\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2})$	0·0279	0·0278
13	$(12\frac{1}{2}, 13\frac{1}{2})$	0·0092	0·0085
14	$(13\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2})$	0·0024	0·0018
15	$(14\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2})$	0·0005	0·0002
16	$(15\frac{1}{2}, 16\frac{1}{2})$	0·0001	0·0000

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனம் தயார் செய்யும் வானொலிப் பெட்டிகளில் பத்தில் ஒன்று குறையுடையது (defective) எனத் துய்ப்போர்கள் திருப்பிக்கொடுத்து விடுகின்றனர் எனும்போது, விற்பனையாகும் 100 வானொலிப் பெட்டிகளில் குறையுடையன எனத் திருப்பப் படும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை (i) 16 அல்லது அதற்கு மேற் பட்டதாகவும் (ii) 5 அல்லது அதற்குக் குறைவானதாக அமை வதற்கான நிகழ்தகவுகளை இயல்நிலைப் பரவல் வாயிலாகப் பெறுக.

முறை :

விற்பனை செய்யப்பட்ட வானொலிப் பெட்டி குறையுடையது எனத் திருப்பப்படுவதற் கான நிகழ்தகவு $\Big\} = p = \frac{1}{10}$

விற்பனையான வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = n = 100$

விற்பனையான பெட்டிகளில் குறையுடையது எனத் திருப்பப் படும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையை X மாறி கொண்டு குறிப் பிடுவோம். அப்போது X மாறியானது $n = 100$, $p = \frac{1}{10}$ ஆகியவைகளைக்கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

(i) விற்பனையான 100 பெட்டிகளில் 16 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய பெட்டிகள் திருப்பப்படுவதற் கான நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 16) = \sum_{i=16}^{100} {}^{100}C_i \left(\frac{9}{10}\right)^{100-i} \left(\frac{1}{10}\right)^{i}$$

ஆகும். இதன் தோராயமான மதிப்பை இயல்நிலைப்பரவலின் அடிப்படையில் கணக்கிடுவோம்.

இங்கு, $np = 100\left(\frac{1}{10}\right) = 10$ ஆகவும்,

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} = 3$ ஆகவும் அமைகிறது,

எனவே, $p(X \geq 16)$-க்கான தோராய மதிப்பு $(15\frac{1}{2}, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(10, 3)$ பரவலின் பரப்பு,

= (1·8, ∞) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள

$N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு

= 0·0359

ஆகவே, விற்பனையான 100 வானொலிப் பெட்டிகளில் 16 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய பெட்டிகள் குறையுடையன எனத் திருப்பப்படுவதற்கான

நிகழ்தகவு (தோராயமாக) = 0·0359

(ii) விற்பனையான 100 பெட்டிகளில் 5–ம் அதற்குக் குறைவான எண்ணிக்கையுடைய பெட்டிகள் திருப்பப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பு,

$$p\,(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} {}^{100}C_i \left(\frac{9}{10}\right)^{100-i} \left(\frac{1}{10}\right)^{i}$$

ஆகும். இதன் தோராயமான மதிப்பை இயல் நிலைப் பரவலின் அடிப்படையில் கணக்கிடுவோம்.

$P(x \leqslant 5)$–க்கான தோராயமதிப்பு } = $(-\infty, 5\frac{1}{2})$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(10, 3)$ பரவலின் பரப்பு

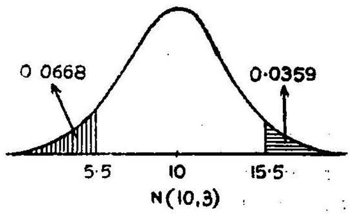
= $(-\infty, -1{\cdot}5)$ எனும் இடைவெளியில் அமைந்து $N(0, 1)$ பரவலின் பரப்பு

= 0·0668

ஆகவே, விற்பனையான 100 வானொலிப் பெட்டிகளில் 5 அல்லது அதற்குக் குறைந்த எண்ணிக்கையுடைய பெட்டிகள் குறையுடையன எனத் திருப்பப்படுவதற்கான

நிகழ்தகவு (தோராயமாக) = 0·0668

T உறுப்புக்களின் அடிப்படையில் பெற்ற, அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதான, இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடும் (i) நிலைத்தூர முறை (ii) பரப்புமுறை ஆகியவைகளை இப்போது காண்போம்.



படம் 12-22.

பரவல் மாறியை X-எனக் குறிப்பிடுவோம். பரவலின் சராசரி $\bar{X}$, திட்ட விலக்கம் s மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை இயல் நிலைப் பரவலது பண்பளவைகளின் மதிப்பீடாகக் கொண்டு, பரவலுக்குப் பொருத்தப்படும் அலைவெண் வளைகோட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடுகிறோம்.

$$y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$ என்போம்.

x கொள்ளும் மதிப்புகளுக்கான y-ன் மதிப்புகள் அதாவது x கொள்ளும் மதிப்புகளுக்கு இணையான $N(\bar{x}, s)$-ன் நிலைத்தூர மதிப்புகள், தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அளிக்கின்றன. இவற்றை Tஆல் பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்கான இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்தி, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறும் இம்முறை 'நிலைத்தூர முறை' என வழங்கப்படுகிறது.

கணக்கு :

ஓர் அளவெடுப்பின்போது இரண்டு குழந்தைகளைக் கொண்ட 100 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றும் பெற்றுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைக்கான அலைவெண் பரவல் அடுத்தப் பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் 12-8.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0	26
1	48
2	26

இந்த அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல்நிலைப் பரவலை நிலைத்தூர முறையில் பொருத்தி, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை :

ஒவ்வொரு குடும்பத்திலுமுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை x எனவும், குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையை f எனவும், குறிப்பிடுகிறோம். அலைவுப் பரவலின் சராசரி $\bar{x}$, திட்டவிலக்கம் s ஆகிய மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 12-9.

x	f	fx	fx^2
0	26	0	0
1	48	48	48
2	26	52	104
மொத்தம்	100	100	152

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{100}{100} = 1$$

$$s^2 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2 = \frac{152}{100} - (1)^2$$

$$= 1 \cdot 52 - 1 \cdot 00$$

$$= 0 \cdot 52$$

$$\therefore s = \sqrt{0.52}$$

$$= 0.72$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல்நிலைப்பரவல் வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{0.72\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2(0.72)^2}}$$

ஆகும்.

x மாறியின் 0, 1, 2 ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான $N(1, 0.72)$ பரவலின் நிலைத்தூர மதிப்புகள் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 12-10.

x	$z = \frac{x-1}{0.72}$	$N(0, 1)$ பரவலின் நிலைத்தூரம்	$N(1, 0.72)$ பரவலின் நிலைத்தூரம்
0	−1·4	0·1497	0·2079
1	0	0·3989	0·5485
2	1·4	0·1497	0·2079

நிலைத்தூர மதிப்புகளை, $T = 100$ ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பரப்பு முறை :

x-ன் மதிப்பு (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் அடைவதற்கான நிகழ்தகவு அதாவது, (x_1, x_2) எனும் இடைவெளியில் அமைந்துள்ள $N(x, s)$-ன் பரப்பு, தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அளிக்கின்றன. இவற்றை T ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறுகிறோம். இயல்

பட்டியல் 12-11.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை x	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $=100 \times$ நிலைத்தூரம்	அலைவெண் f
0	21	26
1	55	48
2	21	26

நிலைப்பரவலைப் பொருத்தி, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைப் பெறும் இம் முறை 'பரப்பு முறை' என வழங்கப்படுகிறது.

ஓர் அளவெடுப்பின்போது, இரண்டு குழந்தைகளைக் கொண்ட 100 குடும்பங்கள் ஒவ்வொன்றும் பெற்றுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைக்கான அலைவெண் பரவலை மீண்டும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

x	f
0	26
1	48
2	26

இப்பரவலின் சராசரி $\bar{x} = 1$, திட்ட விலக்கம் $s = 0{\cdot}72$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல் நிலைப் பரவல் வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{0{\cdot}72\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2(0{\cdot}72)^2}}$$

ஆகும்.

இப்போது, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ ஆகிய இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ள $N(1, 0{\cdot}72)$ பரவலின் மதிப்புகள் தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கொடுக்கின்றன.

பட்டியல் 12-12

x	x—ன் இடைவெளி	$z = \left(\frac{x-1}{0{\cdot}72}\right)$-ன் இடைவெளி	நிகழ்தகவு
0	$(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$	$(-2{\cdot}1, -0{\cdot}7)$	0·2241
1	$(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$	$(-0{\cdot}7, 0{\cdot}7)$	0·5160
2	$(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$	$(0{\cdot}7, 2{\cdot}1)$	0·2241

நிகழ்தகவு மதிப்புகளை $T = 100$ ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்கள் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 12-13.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை X	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் = 100 × நிகழ்தகவு	அலைவெண் f
0	22	26
1	52	48
2	22	26

கணக்கு:

300 பேர்களின் உயர மதிப்புகள் அடுத்த பக்கத்தில் அலைவுப் பரவலில் (பட்டியல் 12-14) இடம் பெறுகின்றன.

இதற்கு ஏற்றதான இயல் நிலைப்பரவலை (i) நிலைத்தூரமுறை (ii) பரப்பு முறை ஆகிய முறைகளில் பொருத்தி, எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

முறை:

உயர மதிப்புகளை x எனவும் நபர்களின் எண்ணிக்கையை f எனவும் குறிக்கிறோம். அலைவுப் பரவலின் சராசரி $\bar{x}$, திட்ட விலக்கம் s ஆகிய மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 12-14.

உயரம் (அங்குலங்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
62—64	10
64—66	78
66—68	129
68—70	68
70—72	15
மொத்தம்	300

பட்டியல் 12-15.

பிரிவு இடைவெளி	இடைவெளி மைய மதிப்பு x	f	$u=\frac{x-67}{2}$	fu	fu^2
62—64	63	10	−2	−20	40
64—66	65	78	−1	−78	78
66—68	67	129	0	0	0
68—70	69	68	1	68	68
70—72	71	15	2	30	60
மொத்தம்	—	300	—	0	246

$$\bar{u} = \frac{\sum fu}{n} = \frac{0}{300} = 0$$

$$\bar{x} = a + c\bar{u} = 67 + 2\,(0) = 67$$

$$s_u^2 = \frac{\sum f u^2}{n} - \bar{u}^2$$

$$= \frac{246}{300} - 0^2$$

$$= 0 \cdot 82$$

$$s_u = \sqrt{0 \cdot 82}$$

$$= 0 \cdot 91$$

$$s_x = c s_u = 2\,(0 \cdot 91)$$

$$= 1 \cdot 82$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப்பரவலுக்கு ஏற்றதாகப் பொருத்தப்படும் இயல் நிலைப் பரவல் வளை கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{1 \cdot 82 \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-67)^2}{2\,(1 \cdot 82)^2}}$$

ஆகும்.

நிலைத் தூர முறை:

X மாறியின் மதிப்பு 63, 65, 67, 69, 71 ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான y-ன் மதிப்புகள், அதாவது $N\,(67,\ 1 \cdot 82)$-ன் நிலைத் தூர மதிப்புகள் தேவையான நிகழ்தகவு மதிப்புகளை அளிக்கின்றன. இவைகளை $T = 300$ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைகிறோம். நிகழ்தகவு மதிப்புகள், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் ஆகியவைகள் அடுத்த பக்கத்தில் உள்ள பட்டயல் 12–16-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பரப்பு முறை :

இப்போது $(-\infty,\ 64)$, $(64-66)$, $(66-68)$, $(68-70)$, $(70,+\infty)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் அமைந்துள்ள $N\,(67,\ 1 \cdot 82)$ பரவலின் பரப்புகள் தேவையான நிகழ்தகவுகளைக் கொடுக்கின்றன. இந்த நிகழ்தகவு மதிப்புகளும், இவைகளை $T = 300$ ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் பெற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளும் பின் வரும் பட்டியல் 12–17–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 12-16

பிரிவு இடைவெளி மைய மதிப்பு x	உரு மாற்றிய $Z = \frac{x-67}{1\cdot82}$ மதிப்பு	$N(0, 1)$ பரவலின் நிலைத் தூரம்	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்	கண்டறிந்த அலைவெண்
63	—2·2	0·0355	0·0390	11·70	10
65	—1·1	0·2179	0·2395	71·85	78
67	0	0·3989	0·4384	131·52	129
69	1·1	0·2179	0·2395	71·85	**68**
71	2·2	0·0355	0·0390	11·70	15

பட்டியல் 12-17.

x மாறியின் இடைவெளி	$Z = \frac{x-67}{1\cdot82}$ மாறியின் இடைவெளி	Z—ன் இடைவெளியில் பரவல் பரப்பு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்	கண்டறிந்த அலைவெண்
64–க்குக் குறைவு	$(-\infty, -1\cdot6)$	0·0548	16·44	10
64—66	$(-1\cdot6, -0\cdot6)$	0·2195	65·85	78
66—68	$(-0\cdot6, 0\cdot6)$	0·4514	135·42	129
68—70	$(0\cdot6, 1\cdot6)$	0·2195	65·85	68
70–க்கு அதிகம்	$(1\cdot6, \infty)$	0·0548	16·44	15
மொத்தம்		1·0000	300·20	300

பயிற்சி

(1) ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் 5 ஐச் சராசரியாகவும், 2 ஐத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனில் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் படும் 30 உறுப்புகளுள்

(i) 3–க்குக் குறைவான

(ii) 4-க்கு அதிகமான ஆனால் 6-க்குக் குறைவான

(iii) 6·5–க்கு அதிகமான

மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ள உறுப்புகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

(2) x-ன் பரவல் 3 ஐச் சராசரியாகவும், 0·5 ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவல் எனில், கீழ்க் கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

(i) $p(x > 2)$

(ii) $P(2 < x < 3)$

(3) ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும்போது தலையைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவு 0·40 எனில், 10 முறைகள் நாணயத்தைச் சுண்டி விட்டபோது குறைந்த பட்சம் 8 முறைகள் தலையைப் பெறுதற்கான நிகழ்தகவை ஈருறுப்புப் பரவல், இயல் நிலைப் பரவல் ஆகியவைகளைக்கொண்டு கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

(4) $n = 8, p = \frac{1}{2}$ ஆகியவைகளைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை இயல்நிலைப் பரவலின் அடிப்படையில் கிடைக்கப்பெறும் தோராய நிகழ்தகவு மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக.

(5) 28 ஐச் சராசரியாகவும், 10 ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலை மாறி X-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைப் பெறுக.

(i) $X = 12$

(ii) $X = 30$

(iii) $X \leq 10$

(iv) $X \leq 32$

(v) $X \geq 15$

(vi) $5 \leq X \leq 25$

(vii) $27 \leq X \leq 32$

(6) ஒரு குழுவில் இடம்பெறும் சிறுவர்களின் நுண்ணறிவுக் கெழுவிற்கான பரவல் 80 ஐச் சராசரியாகவும், 12 ஐந் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனில், குழுவிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு சிறுவனின் நுண்ணறிவுக் கெழுவின் மதிப்பு

(i) 55-க்குக் குறைவாக

(ii) 55 முதல் 65 வரை

(iii) 65 முதல் 75 வரை

(iv) 75 முதல் 85 வரை

(v) 85 முதல் 95 வரை

(vi) 95 முதல் 105 வரை

(vii) 105 -க்கு அதிகமாக

அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(7) ஓர் இயந்திரத்தால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட முறுக்காணிகளின் விட்ட அளவிற்கான பரவல் 0·5 அங்குலத்தைச் சராசரியாகவும், 0.01 அங்குலத்தைத் திட்ட விலக்கமாகவும், கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனில், அவ்வியந்திரம் உற்பத்தி செய்த முறுக்காணிகளில்

(i) 0.45 அங்குலத்திற்கு குறைவான

(ii) 0.45 அங்குலம் முதல் 0·60 அங்குலம் வரையான

(iii) 0.60 அங்குலத்திற்கு அதிகமான விட்ட அளவுகள் கொண்டவைகளின் சதவீத மதிப்புகளைப் பெறுக

(8) ஒரு கிராமத்தில் மூன்று பேருக்கு ஒருவர் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர் எனக் கொள்க.

இக்கிராமத்திலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1800 பேர்களுள் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை

(i) 580-க்குக் குறைவாக

(ii) 580-க்கு அதிகமாக ஆனால் 620-க்குக் குறைவாக

(iii) 620-க்கு அதிகமாக அமைவதற்கான தோராய நிகழ்தகவு மதிப்புகளை இயல்நிலைப் பரவல் வாயிலாக அடைக.

(9) 50 மாணவர்களின் உயர மதிப்புகள் (அங்குலங்களில்) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் இடம் பெறுகின்றன.

உயரம்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
53 — 55	1
55 — 57	6
57 — 59	9
59 — 61	17
61 — 63	11
63 — 65	5
65 — 67	1
மொத்தம்	50

இப்பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல்நிலைப் பரவலைப் பரப்பு முறையில் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

(10) 60 மின்னணுக் குழல்களின் ஆயுள் காலத்திற்கான அலைவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு ஏற்றதான இயல்நிலைப் பரவலை நிலைத்தூர, பரப்பு ஆகிய இரு முறைகளில் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

ஆயுள் காலம் (மணிகள்)	மின்னணுக் குழல்களின் எண்ணிக்கை
330 — 350	6
350 — 370	7
370 — 390	11
390 — 410	12
410 — 430	10
430 — 450	9
450 — 470	5
மொத்தம்	60

(11) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல் நிலைப் பரவலை நிலைத்தூர, பரப்பு ஆகிய இரு முறைகளில் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை அடைக.

பிரிவு	அலைவெண்
0·15 — 0·55	2
0·55 — 0 95	8
0·95 — 1·35	14
1·35 — 1·75	15
1·75 — 2·15	7
2·15 — 2·55	4
மொத்தம்	50

(12) 100 நபர்களின் எடை மதிப்புகள் (கிலோகிராம் களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடை	நபர்களின் எண்ணிக்கை
59 — 62	1
62 — 65	2
65 — 68	7
68 — 71	16
71 — 74	24
74 — 77	22
77 — 80	17
80 — 83	8
83 — 86	3
மொத்தம்	100

இப் பரவலுக்கு ஏற்றதான இயல்நிலைப் பரவலைப் பரப்பு முறையில் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

13. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகள்

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, இடைநிலை, முகடு, திட்ட விலக்கம், கால்மான விலக்கம், விகிதம் ஆகியவைகள் அம்முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை எடுத்துரைக்கப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. இவைகளை 'முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைகள்' (Population parameters) என அழைக்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளும் தெரியுமிடத்து, அவைகளைக் கொண்டு பண்பளவைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம். இப்போது, முழுமைத் தொகுதியை அப்படியே ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளாமல், அதிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்த கூறின் உறுப்புகளைக் கொண்டு ஆய்வினை மேற்கொள்ளும் இடங்களில், கூறு விவரங்களின் அடிப்படையில் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளைப் பெறுவதற்குக் கையாளப்படும் முறைகள் 'புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு' முறைகள் என வழங்கப்படுகின்றன.

புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல் (Statistical Estimation), புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை (Statistical test of hypothesis) என்பன புள்ளியியல் உய்த்துணர்வின் இரு பகுதிகளாகும். கூறின் விவரங்களைக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளை மதிப்பிடக் கையாளப்படும் முறைகளைப் 'புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல்' பகுதியிலும், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளுக்கு ஊகமான மதிப்புகளைக் கொடுத்து இவ்வூகம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதா அல்லது மறுக்கத் தக்கதா எனக் கூறு விவரங்கள் வாயிலாகச் சோதிக்க மேற்கொள்ளப்படும் முறைகளைப் 'புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை' பகுதியிலும் காண்போம்.

கூறு விவரங்களைக் கொண்டு கணக்கிடும் அளவையைப் 'புள்ளியியல் பண்பளவை' (Statistic) என்கிறோம். கூறின் சராசரி, இடைநிலை, திட்ட விலக்கம், விகிதம், ஒட்டுறவுக் கெழு முதலியவை புள்ளியியல் பண்பளவைகளுக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும். புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பு கூறில் இடம் பெறும் மதிப்புகளைச் சார்ந்திருப்பதால், ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் அடிப்படையில் பெறும் ஒரே புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பு, கூறுக்கு கூறு வேறுபட்டு அமையும் என எதிர்பார்க்கலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 'n' உறுப்புகளைக் கொண்ட சம வாய்ப்புக் கூறு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து, உறுப்புகளின் மதிப்புகளைக் குறித்துக் கொண்டு அவ்வுறுப்புக்களை மீண்டும் முழுமைத் தொகுதியுடன் சேர்த்து விடுவதாகக் கொள்வோம். இவ்வாறு எண்ணிலி தடவைகள் திரும்பச் செய்து, 'n' உறுப்புகளைக் கொண்ட எண்ணிலி கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதாகக் கொள்வோம். தேர்ந்தெடுத்த ஒவ்வொரு கூறின் சராசரியையும் கணக்கிடும்பொழுது, எண்ணிலி சராசரி மதிப்புகளைப் பெறுவோம். இம்மதிப்புகளை ஓர் அலைவெண் பரவலாக அமைக்கும்போது பெறும் பரவலைச் 'சராசரியின் கூறு பரவல்' (Sampling distribution of the mean) என அழைக்கிறோம். தேர்ந்தெடுத்த கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரியையும் கணக்கிடுவது போலவே திட்ட விலக்கம், விகிதம், ஒட்டுறவுக் கெழு போன்ற ஏதேனுமொரு புள்ளியியல் பண்பளவையைக் கணக்கிட்டு, மதிப்புகளை ஓர் அலைவெண் பரவலாக அமைக்கும்பொழுது பெறும் பரவலை அந்தப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் கூறு பரவல் (Sampling distribution of the statistic) என அழைக்கிறோம். கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையான n-ன் மதிப்பு 30-க்கு அதிகமாக அமையப் பெற்றுள்ள கூறைப் பெருங்கூறு (large sample) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். பெருங்கூறுகளிலிருந்து கணக்கிட்டுப் பெற்ற புள்ளியியல் பண்பளவையின் கூறு பரவலானது, இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும் என்பது புள்ளியியல் தற்றமாகும். கூறு பரவலின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளுக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளைப் புள்ளியியல் கோட்பாடுகளின் வாயிலாகப் பெறுகிறோம். கூறு பரவலின் சராசரியைப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் 'எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு' எனவும், திட்ட விலக்கத்தைத் 'திட்டப் பிழை' எனவும் அழைக்கிறோம்.

μஐச் சராசரியாகவும், σஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புகளைக் கொண்ட பெருங்கூறுகளை சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும்போது :—

(i) கூறுகளின் சராசரிகளான $\bar{X}$-ன் பரவல் அதாவது சராசரியின் கூறு பரவல் μ ஐச் சராசரியாகவும், $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஐத் திட்டப் பிழையாகவும்,

(ii) கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களான s-ன் பரவல் அதாவது திட்ட விலக்கத்தின் கூறு பரவல் σஐ சராசரியாகவும், $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$-ஐத் திட்டப் பிழையாகவும் பெற்றமைகின்றன.

Pஐ முழுமைத் தொகுதியின் விகிதத்திற்கான மதிப்பாகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புகளைக் கொண்ட பெருங்கூறுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் போது, கூறுகளின் விகிதங்களான p-ன் பரவல் அதாவது விகிதத்தின் கூறுபரவல், Pஐச் சராசரியாகவும், $\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$ ஐத் திட்டப் பிழையாகவும் பெற்று அமைகிறது.

ρஐ ஒட்டுறவுக் கெழுவாகக் கொண்ட இரு மாறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, n உறுப்புகளைக் கொண்ட பெருங்கூறுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் போது, கூறுகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்களான r-ன் பரவல் அதாவது ஒட்டுறவுக் கெழுவின் கூறு பரவல், ρஐச் சராசரியாகவும், $\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$ ஐ திட்டப் பிழையாகவும் பெற்றமையும். புள்ளியியல் பண்பளவைகளின் கூறுப் பரவலுக்கான

பட்டியல் 13-1.

புள்ளியியல் பண்பளவை	சராசரி	திட்டப்பிழை
கூறின் சராசரி $\bar{X}$	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
கூறின் திட்ட விலக்கம் s	σ	$\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$
கூறின் விகிதம் p	P	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$
கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு r	ρ	$\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$

சராசரி, திட்டப்பிழை ஆகியவைகள் பட்டியலில் 13-1-ல் இடம் பெறுகின்றன.

பெருங்கூறின் வாயிலாகப் பெற்ற புள்ளியியல் பண்பளவைகளின் கூறு பரவல்கள் யாவும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவது, புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகளின் ஆதாரமாகும். 'a' ஐச் சராசரியாகவும், 'b' ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலின், அதாவது $N(a, b)$-ன் 95 சதவீத மதிப்புகள் $(a-1{\cdot}96\,b,\ a+1{\cdot}96\,b)$ என்ற இடைவெளியிலும், 99 சதவீத மதிப்புகள் $(a-2{\cdot}58\,b,\ a+2{\cdot}58\,b)$ என்ற இடைவெளியிலும் உள்ளடங்கியிருக்கும் தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டு புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல், புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை முறைகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. நடைமுறையில் $(a-1{\cdot}96\,b,\ a+1{\cdot}96\,b)$ என்ற இடைவெளிக்குப் பதிலாக, $(a-2\,b,\ a+2\,b)$ என்ற இடைவெளியையும், $(a-2{\cdot}58\,b,\ a+2{\cdot}58\,b)$ என்ற இடைவெளிக்குப் பதிலாக $(a-3b,\ a+3\,b)$ என்ற இடைவெளியையும் எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம்.

புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல் :

முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பளவையான θ-ன் மதிப்பு தெரியாதபோது, அதைக் கூறு உறுப்புக்களைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்ய, முதலில் ஏற்றதொரு புள்ளியியல் பண்பளவை $\hat{\theta}$ ஐ எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். எடுத்துக் கொண்ட $\hat{\theta}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு θ ஆக அமையவேண்டும். அடுத்து, $\hat{\theta}$-ன் திட்டப்பிழையை "தி. பி. $(\hat{\theta})$" எனக் குறிப்பிடுகிறோம். $\hat{\theta}-2$ தி.பி. $(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}+2$ தி.பி. $(\hat{\theta})$ ஆகியவைகளைக் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லைகளாகக் கொண்ட இடைவெளி ஒன்றை அமைத்து, முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை θ-ன் மதிப்பு இவ்விடை வெளிக்குள் அடங்கியுள்ளது என உய்த்துணர்ந்து முடிவு செய்கிறோம். இங்கு $[\hat{\theta}-2$ தி. பி. $(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}+2$ தி. பி. $(\hat{\theta})]$ எனும் இடைவெளியை, பண்பளவை θ-க்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval) என அழைக்கிறோம். இங்கு θ வுக்கான நம்பிக்கை எல்லை (Confidence limit) 95 சதவீதமாகும்.

$\hat{\theta}-3$ தி. பி. $(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}+3$ தி. பி $(\hat{\theta})$ ஆகியவைகளைக் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லையாகக் கொண்ட இடைவெளி ஒன்றை

அமைக்கும்போது, இதைப் பண்பளவை θ-வுக்கான 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி என அழைக்கிறோம். இங்கு θ-வுக்கான நம்பிக்கை எல்லை 99 சதவீதமாகும்.

சராசரிக்கு நம்பிக்கை இடைவெளி :

இப்போது முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையான சராசரி μ ஐ மதிப்பிட விழைகிறோம். கூறின் பண்பளவையான $\bar{X}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ ஆக அமைவதால், பண்பளவை μ ஐ மதிப்பீடு செய்ய ஏற்ற புள்ளியல் பண்பளவையாக $\bar{X}$ ஐ எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். எனவே, பண்பளவை μ-க்கான (*i*) 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி $(\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ஆகவும், (*ii*) 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி $(\bar{X} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு :

தேயிலைத் தோட்டத் தொழிலாளர்களது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 400 தொழிலாளர்கள் கொண்ட கூறு ஒன்றின் ஓராண்டு ஊதியப்புள்ளி விவரங்களுக்கான சராசரி ரூ 950 ஆக அமைகிறதெனில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மதிப்புக்கான 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி அமைக்க (இங்கு திட்ட விலக்கம் σ = ரூ. 200 எனக்கொள்க.)

முறை :

இங்கு $n = 400, \ \bar{X} = 950, \ \sigma = 200$

எனவே,

$$\left.\begin{matrix}\text{கூறு சராசரியின்}\\ \text{திட்டப்பிழை}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{200}{\sqrt{400}} = 10$$

சராசரி μ-வுக்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி கீழ் எல்லை

$$\bar{X} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 950 - 3\,(10) = 920 \text{ ஆகவும்,}$$

மேல் எல்லை,

$\bar{X} \times 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 950 + 3(10) = 930$ ஆகவும் அமைகின்றன. அதாவது, $920 \leq \mu \leq 980$. எனவே, தேயிலைத் தோட்டத் தொழிலாளர்களின் ஆண்டு சராசரி ஊதிய மதிப்பானது (920, 980) என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது என 99% நம்பிக்கை எல்லையில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரத்திற்கான திட்ட விலக்கத்தை 180 மணி எனக்கொள்வோம். இம்மின் விளக்கு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 36 விளக்குகளின் சராசரி எரியும் நேரம் 1200 மணியாக அமையும்போது இந் நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரத்திற்கான சராசரியின் 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

முறை :

இங்கு,

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$n = 36$
கூறு சராசரி	$\bar{X} = 1200$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம்	$\sigma = 180$

எனவே, $\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{180}{\sqrt{36}} = 30$

சராசரி μ-வின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்கான கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை மதிப்புகள் முறையே

$$\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1200 - 2(30) = 1140,$$

$$\bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1200 + 2(30) = 1260$$

ஆக அமைகின்றன. அதாவது,

$$1140 \leq \mu \leq 1260.$$

எனவே, நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகளின் சராசரி எரியும் நேரத்திற்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (1140, 1260) ஆகும்.

திட்ட விலக்கத்திற்கு நம்பிக்கை இடைவெளி :

இப்போது, முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையான திட்ட விலக்கம் σ ஐ மதிப்பிட விழைகிறோம். கூறின் திட்டவிலக்கம் s-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது σ ஆக அமைவதால், sஐ σ-வின் மதிப்பீட்டிற்கு ஏற்ற புள்ளியியல் பண்பளவையாகக் கொள்ளுகிறோம். s-ன் திட்டப்பிழை $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ ஆகும். இங்கு σ-ன் மதிப்பு தெரியாத காரணத்தால், $\frac{s}{\sqrt{2n}}$ ஐ s-ன் திட்டப் பிழையாகக் கொள்ளுகிறோம். எனவே, பண்பளவை σ-க்கான

(i) 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left(s - 2\frac{s}{\sqrt{2n}},\ s + 2\frac{s}{\sqrt{2n}} \right)$$

ஆகவும்,

(ii) 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left(s - 3\frac{s}{\sqrt{2n}},\ s + 3\frac{s}{\sqrt{2n}} \right)$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு :

ஓர் இயந்திரம் தயாரிக்கும் திருகாணிகளுள் 50 திருகாணிகளின் விட்டங்களுக்கான திட்ட விலக்கம் 4 மில்லி மீட்டர்கள் எனில், திருகாணிகளின் முழுமைத் தொகுதியில் விட்டங்களுக்கான திட்டவிலக்கத்தை மதிப்பிடுக.

முறை :

இங்கு,

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 50$

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 4$

எனவே, s-ன் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{s}{\sqrt{2n}} = \frac{4}{\sqrt{100}}$

$= 0{\cdot}4$

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை σ-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியின் கீழ் எல்லை,

$$s - 2\frac{s}{\sqrt{2n}} = 4{\cdot}0 - 2\,(0{\cdot}4) = 3{\cdot}2$$

ஆகவும், மேல் எல்லை,

$$s + 2\frac{s}{\sqrt{2n}} = 4{\cdot}0 + 2\,(0{\cdot}4) = 4{\cdot}8$$

ஆகவும் அமைகின்றன. அதாவது

$$3{\cdot}2 \leq \sigma \leq 4{\cdot}8$$

எனவே, முழுமைத் தொகுதியில் திருகாணிகளின் விட்டங்களுக்கான திட்டவிலக்கம் (3·2, 4·8) என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது என 95% நம்பிக்கை எல்லையில் உய்த்துணருகிறோம்.

விகிதத்திற்கு நம்பிக்கை இடைவெளி

இப்போது முழுமைத் தொகுதியின் விகிதமான P-யினை மதிப்பிட விழைவதாகக் கொள்வோம். கூறு விகிதம் p-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு P ஆக அமைவதால் P-யினை மதிப்பீடு செய்ய ஏற்ற புள்ளியியல் பண்பளவையாக p-யினை எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். p-ன் திட்டப்பிழை $\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$ ஆகும்.

இங்கு, P-ன் மதிப்பு தெரியாத காரணத்தால், $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$

என்பதை p-ன் திட்டப் பிழையாகக் கொள்வோம். எனவே, பண்பளவை P-க்கான

(i) 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\;,\quad p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

ஆகவும்;

(ii) 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left(p - 3\sqrt{\frac{(p\,1-p)}{n}}\ ,\ p + 3\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right)$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு :

ஒரு கோழிப் பண்ணையைச் சார்ந்த கோழிகள் ஒரு நாள் இட்ட முட்டைகளின் முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து 100 முட்டைகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்துச் சோதித்தபோது, 10 முட்டைகள் அழுகிப் போனவைகளாக இருந்தனவெனில், முழுமைத் தொகுதியின் அழுகல் முட்டைகளுக்கான விகிதத்தின் 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

முறை :

இங்கு,

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n = 100$

கூறில் அழுகிய முட்டைகளுக்கான விகிதம் $\Big\} = p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

எனவே,

$$p\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{P\,(1-P)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)}{100}}$$

$$= \frac{3}{100}$$

பண்பளவை P-யின் 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியின் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை மதிப்புகள் முறையே

$$p - 3\ \text{தி. பி}\ (p) = \frac{10}{100} - 3\left(\frac{3}{100}\right) = \frac{1}{100} = 0{\cdot}01$$

$$p + 3\ \text{தி. பி}\ (p) = \frac{10}{100} + 3\left(\frac{3}{100}\right) = \frac{19}{100} = 0{\cdot}19$$

ஆக அமைகின்றன. அதாவது $0{\cdot}01 \le p \le 0{\cdot}19$

எனவே, முழுமைத்தொகுதியின் அழுகல் முட்டைகளுக்கான விகிதமானது (0·01, 0·19) என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது என 99% நம்பிக்கை எல்லையில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு மாவட்டத்தைச் சார்ந்த 30,000 மாணவர்களிலிருந்து 1800 மாணவர்களைக்கொண்ட கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. இதில் 600 மாணவர்கள் பார்வைக் குறைபாடுடையவர்கள் எனில், முழுமைத்தொகுதியில் பார்வைக் குறைபாடுடையவர்களின் மிகக் குறைந்த, மிக அதிகமான எண்ணிக்கைகளுக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளைப் பெறுக.

முறை :

இங்கு,

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n = 1800$

கூறு விகிதம் $= p = \frac{600}{1800} = \frac{1}{3}$

எனவே, p-ன் திட்டப்பிழை $= \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{1800}} = \frac{1}{90}$

பண்பளவை P-க்கான 99 % நம்பிக்கை இடைவெளியின் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை மதிப்புகள் முறையே

$$p - 3 \text{ தி. பி. } (p) = \frac{1}{3} - 3\left(\frac{1}{90}\right) = \frac{9}{30}$$

$$p + 3 \text{ தி. பி. } (p) = \frac{1}{3} + 3\left(\frac{1}{90}\right) = \frac{11}{30}$$

ஆகின்றன. அதாவது, $\frac{9}{30} \leq P \leq \frac{11}{30}$

ஆகையால், மாவட்டத்தைச் சார்ந்த 30,000 மாணவர்களுள், பார்வைக் குறைபாடுடையவர்களின் (i) மிகக் குறைந்த எண்ணிக்கைக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$= 30000 \times \frac{9}{30} = 9000.$$

(ii) மிக அதிகமான எண்ணிக்கைக் கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $\Big\}$ $= 30000 \times \frac{11}{30} = 11000$

ஆக அமைகின்றன.

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

இப்போது, இருமாறி முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையான ஒட்டுறவுக் கெழு ρஐ மதிப்பிட விழைகிறோம். கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழுவான r-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு ρஆக அமைவதால் rஐ ρ-வின் மதிப்பீட்டிற்கு ஏற்ற புள்ளியியல் பண்பளவையாகக் கொள்கிறோம். r-ன் திட்டப் பிழை $\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$ ஆகும். இங்கு ρ-ன் மதிப்பு தெரியாத காரணத்தால், $\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ ஐ r-ன் திட்டப் பிழையாகக் கொள்கிறோம். எனவே, பண்பளவை ρ-க்கான

(i) 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left\{r-2\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right),\ r+2\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

ஆகவும்;

(ii) 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left\{r-3\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right),\ r+3\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு:

ஒரு கூறில் இடம் பெறும் 1000 நபர்களின் உயரம், எடை ஆகியவைகளின் இணை மதிப்புக்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழு 0·6 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்கான 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

முறை:

இங்கு,

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n = 1600$

$$\text{கூறு ஒட்டுறவுக் கெழு} = r = 0{\cdot}6$$

எனவே,

$$r\text{–ன் திட்டப் பிழை} = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}} = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} = \frac{1-(0{\cdot}6)^2}{\sqrt{1600}}$$

$$= 0{\cdot}016$$

பண்பளவை ρ-க்கான 99 சதவீத இடைவெளியின் கீழ் எல்லை, $r-3$ தி. பி $(r) = 0{\cdot}6-3\ (0{\cdot}016) = 0{\cdot}552$ ஆகவும்,

மேல் எல்லை, $r+3$ தி.பி $(r) = 0{\cdot}6+3\ (0{\cdot}016) = 0{\cdot}648$ ஆகவும் அமைகின்றன. அதாவது,

$$0{\cdot}552 \leq \rho \leq 0{\cdot}648$$

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது $(0{\cdot}552, 0{\cdot}648)$ என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது என 99% நம்பிக்கை எல்லையில் உய்த்துணருகிறோம்.

புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவின் மதிப்பு தெரியாதபோது, அது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையெண்ணாக இருக்கக் கூடும் என ஊகம் செய்து கொண்டு, அம்முழுமைத் தொகுயிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக அவ்வூகம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதா அல்லது மறுக்கத் தக்கதா எனச் சோதித்து உய்த்துணர ஏதுவான வழிமுறைகளைப் "புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனைகள்" என வழங்குகிறோம்.

கூறு உறுப்புகள் தங்களது முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்கும் வண்ணம் அமைகின்றன. ஆகையால் கூறின் அடிப்படையில் பெற்ற புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பு, அதையொத்த முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பை நெருங்கி அமையுமென பொதுவாக எதிர்பார்க்கிறோம். கூறின் சிறு சிறு அக மாற்றங்கள் காரணமாக புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பு, முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பிலிருந்து வேறுபடுகிறது. இத்தகைய வேறுபாடு பொதுவாகப் புறக்கணிக்கத்தக்க வகையில் அமைகிறது. எனவே, புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பு முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பை நெருங்கி அமைவதற்கு

அதிக வாய்ப்பையும், மிகையாக விலகியிருப்பதற்குக் குறைந்த வாய்ப்பையும் பெற்றுள்ளது என்கிறோம்.

இப்போது, முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கு ஓர் ஊகமான மதிப்பைக் கொடுத்து, அவ்வூகம் சரியானதா எனச் சோதிக்க முற்படுகிறோம். அம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற கூறின் பண்பளவை மதிப்பு, இவ்வூக மதிப்பிற்கு நெருங்கியமையுமெனில், இவ்விரு மதிப்புகளுக்கும் இடையே யுள்ள வித்தியாசத்தைக் கூறின் சிறு சிறு அக மாற்றங்கள் ஏற் படுத்தியதாகக் கொண்டு, ஊக மதிப்பையே முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையின் சரியான மதிப்பென முடிவு செய்கிறோம். அவ்வாறின்றி, ஊக மதிப்புக்கும், கூறின் புள்ளியியல் பண்பளவை மதிப்புக்கும் இடையேயுள்ள வேறு பாடு மிகையாக இருக்கும்போது, நமது ஊகம் தவறுனது, அதாவது ஊக மதிப்பு முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பாக அமைவதில்லை என முடிவு செய்கிறோம். இத்தகைய சோதனைகளைப் 'புள்ளியியல் எடுகோள்' சோதனைகள் என அழைக்கிறோம்.

முழுமைத் தொகுதியின் அலைவெண் பரவல், பண்பளவை கள் ஆகியவைகளைப் பற்றிய அனுமானங்களைப் புள்ளியியல் எடுகோள் (Statistical hypothesis) என்கிறோம். 25 வயது ஆண் களது உயர மதிப்புகளின் அலைவெண் பரவல் 65 அங்குலங் களைச் சராசரியாகவும், 3 அங்குலங்களைத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவல்; சாலைகளில் அன்றுடம் ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கைகளுக்கான அலைவெண்பரவல் 2ஐச் சராசரியாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவல்; தமிழ் நாட்டில் பிறக்கும் குழந்தைகளின் சராசரி பிறப்பு எடை 6·5 பவுண்டு கள்; ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் திருகாணிகளுடைய விட்டங்களின் திட்ட விலக்கம் 4 மில்லி மீட்டர்கள்; பள்ளிச் சிறுவர்களில் பார்வை குறைபாடுடையவர்களின் விகிதம் 0·3 ஆகியவைகள் புள்ளியியல் எடுகோள்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

முழுமை தொகுதியின் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பளவையை 'θ' எனக் குறிப்பிடுவோம். θ–ன் மதிப்பு தெரியாதபோது அதை θ_0 என ஊகமாகக் கொண்டு, இவ்வூகம் சரியானதா என அம்முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற கூறு வாயிலாகச் சோதிக்க முற்படுகிறோம். இச்சோதனையின்போது, $\theta = \theta_0$ என்பது சோதனைக்கான எடுகோளாக அமையும். இங்ஙனம்

சோதனைக்காக அமைத்துக் கொள்ளும் எடுகோளை மறுக்கத்தகு எடுகோள் (Null Hypothesis) அல்லது சோதனை எடுகோள் (Hypothesis to be tested) என அழைக்கிறோம்.

அடுத்து, சோதனை எடுகோளைச் சோதிக்கப் பொருத்தமான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். கூறின் அடிப்படையில் பெற்ற, θ-க்கு இணையான புள்ளியியல் பண்பளவையை $\hat{\theta}$ எனக் கொள்வோம். $\hat{\theta}$-ன் திட்டப்பிழையை "தி. பி. $(\hat{\theta})$" எனக் குறிப்பிடும்போது மேற்கண்ட $\theta = \theta_0$ எனும் எடுகோளைச் சோதித்ததற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\text{தி. பி. } (\hat{\theta})}$$

ஆக அமைகிறது.

இப்போது, $\theta = \theta_0$ எனும் எடுகோள் உண்மையெனில், சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி Z-ன் பரவல், திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அதாவது $N(0, 1)$ ஆக அமைகிறதென்பது புள்ளியியல் தேற்றமாகும். எனவே, திட்ட இயல்நிலைப் பரவலது 2 – திட்டவிலக்க, 3-திட்டவிலக்க தன்மைகளின் அடிப்படையில் சோதனைக்கான முடிவைப் பெறுகிறோம்.

கணக்கிடப்பட்ட Z-ன் தனி மதிப்பு 1·96-க்கு அதிகமாக அமையுமெனில், அதாவது Z-ன் மதிப்பு (—1·96, 1·96) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமையுமெனில், $\theta = \theta_0$ என்ற சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். Z-ன் தனி மதிப்பு 1·96-க்குக் குறைவாக அமையுமெனில், $\theta = \theta_0$ என்ற சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். இப்போது, Z-ன்பரவல் திட்ட இயல் நிலைப்பரவலாக அமைவதால், Z-ன் மதிப்பு (—1·96, 1·96) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 அதாவது 5 சதவீதமாகும். எனவே, $\theta = \theta_0$ என்ற சோதனை எடுகோள், Z-ன் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு வாயிலாக ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கதா அல்லதுமறுக்கத்தக்கதா என முடிவு செய்யும் இச்சோதனையை 5 சதவீத நிகழ்தகவு மட்டத்தில் (probability level) அல்லது மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் (level of significance) மேற்கொண்டதாகக் குறிப்பிடுகிறோம். நடைமுறையில் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் எடுகோள்

சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது, 1·96-க்குப் பதிலாக 2 ஐ Z உடன் ஒப்பிட்டு முடிவு செய்கிறோம்.

கணக்கிடப்பட்ட Z-ன் தனி மதிப்பு 2·58-க்கு அதிகமாக அமையுமெனில், $\theta = \theta_0$ எனும் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும்; 2·58-க்குக் குறைவாக அமையுமெனில், $\theta = \theta_0$ எனும் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும், 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். நடை முறையில் 2·58-க்குப் பதிலாக அதன் தோராய மதிப்பான 3 ஐ Z உடன் ஒப்பிட்டு முடிவு எடுக்கிறோம்.

சராசரிக்கான சோதனை :

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை n ஆகக்கொண்ட சம வாய்ப்புக் கூறின் சராசரி மதிப்பு $\bar{X}$ எனில், கூறு பிறந்த முழுமைத்தொகுதிக்கான சராசரியின் மதிப்பை μ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதிக்க முற்படுகிறோம்.

முதலில், கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியானது சராசரியின் மதிப்பு μ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

அடுத்து, சோதனை எடுகோளைச் சோதித்ததற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி Z ஐ

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\text{தி. பி. } (\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

என்று எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். (முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்க மதிப்பு σ கொடுக்கப்படாதபோது, கூறின் திட்ட விலக்க மதிப்பான s ஐ σ ஆகக் கொள்ளுகிறோம்).

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் Z-ன் தனி மதிப்பை, அதாவது $|Z|$ ஐக் கணக்கிடவேண்டும். இம்மதிப்பு K_α-விற்கு அதிகமாக அமையும்போது, சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும் போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணருகிறோம். 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது $\alpha = 0{\cdot}05$ ஆகவும்,

$K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்ளப்படும் சோதனைகளில் $\alpha = 0{\cdot}01$ ஆகவும், $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

கணக்கு :

ஒரு நிறுவனம், அது தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் சராசரியாக 1000 மணி நேரம் எரியுமென விளம்பரம் செய்கிறது. அந்நிறுவனம் தயாரித்த 100 மின் விளக்குகளின் எரியும் நேரம்பற்றிய விவரங்களைக்கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட சராசரி 980 மணி எனில், அவ்விளம்பரம் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கதா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. (மின் விளக்குகள் எரியும் நேரங்களுக்கான திட்ட விலக்கம் 150 மணி எனக் கொள்க).

முறை :

நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகளின் சராசரி எரியும் நேரம் 1000 மணி எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ளுகிறோம். இப்போது, சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ஆகும்.

இங்கு,

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu = 1000$

கூறின் சராசரி $\bar{X} = 980$

$\bar{X}$-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{150}{\sqrt{100}} = 15$

எனவே,

$$Z = \frac{980 - 1000}{15} = -1.33$$

$\therefore$ z-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 1.33$

கணக்கிடப்பட்ட $|Z|$-ன் மதிப்பு 2-க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம்.

ஆகையால், நிறுவனம் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் சராசரியாக 1000 மணி நேரம் எரியுமெனும் விளம்பரம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதாகும் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு மாநிலத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 400 பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் ஓராண்டிற்கான ஊதிய விவரங்களைப் பற்றிய கூறின் சராசரி ரூ. 2100 ஆகவும், திட்ட விலக்கம் ரூ. 500 ஆகவும் அமையுமெனில் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் முழுமைத் தொகுதிக்கான சராசரி ஊதியம் ரூ. 2000 ஆக அமையுமா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் முழுமைத் தொகுதிக்கான சராசரி ஊதியம் ரூ. 2000 எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது,

$$\mu = 2000$$

$$\bar{X} = 2100$$

$$n = 400$$

$$\bar{X}\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கமான σ–ன் மதிப்பு கொடுக்கப்படவில்லையாதலால், கூறின் திட்ட விலக்கமான $s = 500$ஐ σ–ன் மதிப்பாகக் கொள்கிறோம்.

எனவே,

$$\bar{X}\text{–ன் திட்டப் பிழை} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{500}{\sqrt{400}} = 25$$

∴ சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி Z-ன் மதிப்பு

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2100 - 20^{\cdot}0}{25} = 4$$

ஆகும். எனவே Z-ன் தனி மதிப்பு $= | Z | = 4$

$| Z |$-ன் மதிப்பு 3-க்கு அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம்.

ஆகையால், பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் முழுமைத் தொகுதிக்கான சராசரி ஊதியம் ரூ. 2000 ஆக அமையாது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

திட்ட விலக்கத்திற்கான சோதனை

உருவ அளவை n ஆகக்கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் திட்ட விலக்க மதிப்பு s எனில், முழுமைத் தொகுதிக்கான திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பை σ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை α % மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதிக்க விழைகிறோம்.

முதலில், முழுமைத் தொகுதியினது திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு σ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{s - \sigma}{\text{தி. பி. } (s)} = \frac{s - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}}$$

ஆகும்.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். இம்மதிப்பு K_{α}-விற்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும் போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணரு

கிறோம். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது α = ·05 ஆகவும், $K_{\alpha} = 2$ ஆகவும், 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது α = ·01 ஆகவும், $K_{\alpha} = 3$ ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு :

ஒரு கடையில் நாளொன்றுக்கு விற்பனையான அரிசியின் அளவு பற்றிய 200 நாள்களுக்கான விவரங்கள் சேகரிக்கப் பட்டன. இவ்விவரங்களின் திட்ட விலக்க மதிப்பு 30 கிலோ கிராம்கள் எனில், அரிசி விற்பனைக்கான முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை 40 கிலோ கிராம்கள் எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க மதிப்பு 40 கி. கி. எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு, முழுமைத் தொகுதி திட்ட விலக்கம் $\sigma = 40$

கூறின் திட்ட விலக்கம் $s = 30$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 200$

$$s\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{40}{\sqrt{400}} = 2$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{s - \sigma}{\text{தி. பி. }(s)} = \frac{30 - 40}{2} = -5$$

$$\therefore \; Z\text{-ன் தனி மதிப்பு} = |Z| = 5$$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 3-க்கு அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம்.

ஆகையால், முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 40 கி. கி. ஆக இராது என 1% மிகைத்தன்மைமட்டத்தில் ஊய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

நுண்ணிய எஃகு உருள் குண்டு (Ball bearings)களின் குவியலிலிருந்து 72 குண்டுகளைக் கொண்ட ஒரு கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. அவைகளின் விட்ட அளவுகளுக்கான திட்ட விலக்கம் 6.8 மில்லி மீட்டர்கள் எனில், குவியலின் திட்ட விலக்கத்தை 6 மில்லி மீட்டர்கள் எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

குவியலின் திட்ட விலக்கம் 6 மி. மீ. எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இங்கு,

குவியலின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 6.0$

கூறின் திட்ட விலக்கம் $s = 6.8$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 72$

$$s\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{6.0}{\sqrt{144}} = 0.5$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{s - \sigma}{\text{தி. பி.}\ (s)} = \frac{6.8 - 6.0}{0.5} = 1.60$$

ஆகும்.

$\therefore$ Z-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 1.60$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 2-க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம்.

ஆகவே, குவியலின் திட்ட விலக்கம் 6 மி. மீ. என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

விகிதத்திற்கான சோதனை

n உறுப்புகளைக் கொண்ட சம வாய்ப்புக் கூறில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்புடைய உறுப்புகளின் விகிதம் p எனில், கூறு பிறந்த

முழுமைத் தொகுதியில் அக்குறிப்பிட்ட பண்புக்கான விகிதத்தை P எனக் கொள்ளலாமா என்பதை α% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதிக்க முற்படுகிறோம்.

முதலில் கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியில் அக்குறிப்பிட்ட பண்புக்கான விகிதம் P எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனை புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{p - P}{\text{தி. பி.}\,(p)} = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

ஆகும்.

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் Z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். இம்மதிப்பு K_α-க்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணருகிறோம். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது $\alpha = 0{\cdot}05$ ஆகவும் $K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்ளப்படும் சோதனைகளில் $\alpha = 0.01$ ஆகவும், $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

கணக்கு :

தலைவலி போக்கும் மாத்திரையைத் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று, அது தயாரிக்கும் மாத்திரைகளைப் பயன்படுத்தும் போது, நூற்றுக்குத் தொண்ணூறு பேர் குணமடைவர் என விளம்பரம் செய்கிறது. அந்நிறுவனம் தயாரித்த மாத்திரையைப் பயன்படுத்திய 900 பேர்களில் 801 பேர்கள் குணமடைந்தனர் எனில், நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

$$\text{முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம் } P = 0.90$$

$$\text{கூறின் விகிதம் } p = \tfrac{801}{900} = 0.89$$

$$\text{கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை } n = 900$$

$$p\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.90(1.00-0.90)}{900}}$$

$$= 0.01$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{p - P}{\text{தி. பி. } (p)} = \frac{0.89 - 0.90}{0.01} = -1.00$$

$$\therefore \; Z\text{-ன் தனி மதிப்பு} = |Z| = 1.00$$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 2.00-க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகையால், நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதென 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு பழக் குவியலில் அழுகிய பழங்களின் சதவீதம் 5 என வியாபாரி கூறுகிறார். அப்பழங்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்த 76 பழங்களில் 10 பழங்கள் அழுகியவைகளாக இருந்தனவெனில், அவ் வியாபாரியின் கூற்று ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதா என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

முதலில், குவியலில் அழுகிய பழங்களின் விகிதம் 0.05 எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

$$\text{முழுமைத் தொகுதி விகிதம் } P = 0.05 = \frac{1}{20}$$

$$\text{கூறு விகிதம் } p = \frac{10}{76} = 0.13$$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 76$

$$p\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{20}(1-\frac{1}{20})}{76}}$$

$$= \frac{1}{40} = 0.025$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{p - P}{\text{தி. பி. }(p)} = \frac{0{\cdot}13 - 0.05}{0.025} = 3{\cdot}20$$

$$\therefore \quad Z\text{-ன் தனி மதிப்பு} = |Z| = 3{\cdot}20$$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 3-க்கு அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகையால், வியாபாரியின் கூற்று மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான சோதனை

இரு மாறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட n இணை மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r ஆக அமையும் போது, கூறு பிறந்த இரு மாறி முழு மைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை ρ ஆகக் கொள்ள லாமா எனச் சோதிக்க முற்படுகிறோம்.

முதலில் இவ்விரு மாறி முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம்.

இச்சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{r - \rho}{\text{தி}\cdot\text{பி. }(r)} = \frac{r - \rho}{\frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n}}}$$

ஆகும்.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படை யில், Z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். இம் மதிப்பு

K_α-க்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணருகிறோம். 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது $\alpha = 0.05$ ஆகவும், $K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற் கொள்ளப் படும் சோதனைகளில் $\alpha = 0.01$ ஆகவும், $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

கணக்கு :

ஒரு நகரத்திலிருந்து 144 குடும்பங்களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவைகள் ஒவ்வொன்றின் வருவாய், வருவாயில் உணவிற்காகச் செலவழித்த தொகையின் சதவீதம் ஆகிய இணை மதிப்புகள் சேகரிக்கப்பட்டன. இவ்விணை மதிப்புகளைக் கொண்ட கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு — 0.71 எனில், கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பை — 0.80 எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு —0.80 எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு $\rho = -0.80$

கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு $r = -0.71$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 144$

$$r \text{ ன் திட்டப் பிழை} = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}} = \frac{1-(-0.80)^2}{\sqrt{144}}$$

$$= 0.03$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{r-\rho}{\text{தி. பி.}(r)} = \frac{-0.71-(-0.80)}{0.03} = 3.00$$

$\therefore$ Z-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 3.00$

$|z|$-ன் மதிப்பு 3 ஆக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகையால், முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்பு — 0·80 என்பது மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

நுண்ணறிவு, ஆக்கத்திறன் ஆகிய உளவியல் சோதனைகளில் 256 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான ஒட்டுறவுக்கெழு 0·11 எனில், நுண்ணறிவு, ஆக்கத்திறன் ஆகிய உளவியல் மாறிகள் தொடர்பற்றவைகளா என்பதை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

நுண்ணறிவும் ஆக்கத்திறனும் தொடர்பற்ற மாறிகள் அதாவது முழுமைத் தொகுதியில் இவ்விரு மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு $\rho = 0$ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக்கெழு $\rho=0$

கூறு ஒட்டுறவுக்கெழு $r=0{\cdot}11$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n=256$

$$r\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}} = \frac{1-0^2}{\sqrt{256}} = \frac{1}{16}$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$z = \frac{r-\rho}{\text{தி.பி.}(r)} = \frac{0{\cdot}11}{0{\cdot}0625} = 1{\cdot}76$$

$$\therefore \quad z\text{-ன் தனி மதிப்பு} = |z| = 1{\cdot}76$$

$|z|$-ன் மதிப்பு 2-க்குக் குறைவாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகவே, நுண்ணறிவும், ஆக்கத்திறனும் தொடர்பற்ற மாறிகள் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை

σ_xஐத் திட்ட விலக்கமாகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட m உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறின் சராசரி $\bar{X}$ ஆகவும், σ_yஐத் திட்டவிலக்கமாகக், கொண்ட மற்றொரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறின் சராசரி $\bar{Y}$ ஆகவும் அமையுமெனில், இவ்விரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவைகளா என்பதை α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதிக்க விழைகிறோம்.

முதலில், கூறுகள் பிறந்த இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\text{தி.பி.}(\bar{X}-\bar{Y})} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m}+\frac{\sigma_y^2}{n}}}$$

ஆகும்.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். இம்மதிப்பு K_α-க்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது எனவும் உய்த்துணருகிறோம். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது $\alpha = 0.05$ ஆகவும், $K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்ளப்படும் சோதனையில் $\alpha = 0.01$ ஆகவும் $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்டவிலக்க மதிப்புகள் கொடுக்கப்படாதபோது, கூறுகளின் திட்டவிலக்க மதிப்புகளையே முழுமைத்தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்களின் மதிப்புகளாகக் கொண்டு சோதனையை நடத்துகிறோம்.

கணக்கு :

ஒரு கூறில் இடம்பெறும் 200 ஆண் குழந்தைகளின் பிறப்பு எடை மதிப்புகளுக்கான சராசரி 8·1 பவுண்டுகள் ஆகவும்,

மற்ருெரு கூறில் இடம் பெறும் 200 பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு எடை மதிப்புகளுக்கான சராசரி 8·8 பவுண்டுகள் ஆகவும் அமைகின்றன. கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதி களின் திட்டவிலக்கம் 1·5 பவுண்டு எனில், குழந்தைகளின் பிறப்பு எடைகளுக்கான முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவைகளா என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத் தில் சோதனை செய்க.

முறை :

முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்ளுகிருேம்.

இங்கு, $\bar{X} = 8\cdot1,\ \bar{Y} = 8\cdot8,\ \sigma_x = \sigma_y = 1\cdot5$

$$m = 200,\ n = 200$$

$$\text{தி.பி.}\ (\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} = \sqrt{\frac{(1.5)^2}{200} + \frac{(1\cdot5)^2}{200}}$$

$$= 0\cdot15$$

எனவே,

சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\text{தி.பி.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{8\cdot1 - 8\cdot8}{0\cdot15} = -4\cdot67$$

ஆகும்.

Z-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 4\cdot67$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 3-க்கு அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடு கோள் மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிருேம். ஆகையால், ஆண், பெண் குழந்தை களின் பிறப்பு எடைகளுக்கான முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவையல்ல என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிருேம்.

கணக்கு :

தோல் பதனிடுதல், தீப்பெட்டி தயாரித்தல் ஆகிய தொழில்களில் ஈடுபட்டுள்ள தொழிலாளர்களின் சராசரி வார

ஊதியங்கள் கணிசமாக வேறுபடுகின்றனவா எனக் கீழ்கண்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

	தோல் பதனிடும் தொழிலாளர்கள்	தீப்பெட்டி தயாரிக்கும் தொழிலாளர்கள்
கூறின் சராசரி	ரூ. 62	ரூ. 59
கூறின் திட்டவிலக்கம்	ரூ. 8	ரூ. 10
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	32	50

முறை :

முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

இங்கு $\bar{X} = 62, \quad \bar{Y} = 59, \quad s_x = 8, \quad s_y = 10$

$m = 32, \quad n = 50$

$$\text{தி.பி.}\,(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}$$

இங்கு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்களான σ_x, σ_y ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்படவில்லையாதலால், கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களான s_X, s_y ஆகியவைகளை முறையே σ_x, σ_y ஆகியவைகளின் மதிப்பீடுகளாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \text{தி.பி.}\,(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n}} = \sqrt{\frac{8^2}{32} + \frac{10^2}{50}}$$

$$= 2$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}} = \frac{62 - 59}{2} = 1{\cdot}5$$

ஆகும்.

$\therefore Z$-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 1{\cdot}5$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 2-க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகையால், தோல் பதனிடுதல், தீப்பெட்டி தயாரித்தல் ஆகிய தொழில்களில் ஈடுபட்டுள்ள தொழிலாளர்களின் சராசரி வார ஊதியங்கள் சமமானவை என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு திட்டவிலக்கங்களின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை

m உறுப்புகளைக்கொண்ட ஒரு கூறின் திட்டவிலக்க மதிப்பு s_x ஆகவும், n உறுப்புகளைக்கொண்ட மற்றொரு கூறின் திட்ட விலக்க மதிப்பு s_y ஆகவும் உள்ளதெனில், கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்டவிலக்க மதிப்புகள் சமமானவைகளா என்பதை α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதிக்க முற்படுகிறோம்.

முதலில், கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்க மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கானச் சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி.

$$Z = \frac{s_x - s_y}{\text{தி. பி. } (s_x - s_y)} = \frac{s_x - s_y}{\sqrt{\frac{s_x^2}{2m} + \frac{s_y^2}{2n}}}$$

ஆகும்.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் Z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். இம்மதிப்பு K_α-க்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணருகிறோம். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது $\alpha = 0{\cdot}05$ ஆகவும், $K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்ளும் சோதனைகளில் $\alpha = 0{\cdot}01$ ஆகவும், $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

கணக்கு :

இரும்புக் கம்பிகள் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலை ஒன்றில், ஒரு நாள் பகல் பிரிவு (Day shift), இராப் பிரிவு (Night shift) நேரங்களில் தயாரிக்கப்பட்ட கம்பிகளின் விட்ட மதிப்புக்களுக் கான கூறுப்புள்ளி விவரங்கள் பின்வருமாறு.

	பகல் பிரிவு	**இராப்பிரிவு**
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	72	72
கூறு திட்டவிலக்கம்	9	12

இவ்விவரங்களைக்கொண்டு பகல், இராப் பிரிவுகளில் தயாரிக்கப்படும் கம்பிகளின் முழுமைத் தொகுதிகளுக்கான திட்டவிலக்க மதிப்புகள் சமமானவைகளா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

பகல், இராப் பிரிவுகளில் தயாரிக்கப்பட்ட கம்பிகளின் முழுமைத் தொகுதிகளுக்கான திட்டவிலக்க மதிப்புகள் சம மானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு, $s_x = 9 \quad , \quad s_y = 12$

$$m = 72 \quad , \quad n = 72$$

$$\text{தி. பி.}\ (s_X - s_y) = \sqrt{\frac{s_X^2}{2m} + \frac{s_y^2}{2n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9^2}{144} + \frac{12^2}{144}} = 1{\cdot}25$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$Z = \frac{s_x - s_y}{\text{தி. பி.}\ (s_x - s_y)} = \frac{9 - 12}{1{\cdot}25} = -2{\cdot}4$$

$\therefore Z$-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 2{\cdot}4$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 3·00–க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். எனவே, பகல்

இராப் பிரிவுகளில் தயாரிக்கப்பட்ட கம்பிகளின் முழுமைத் தொகுதிகளுக்கான திட்டவிலக்க மதிப்புகள் சமமானவை என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு விகிதங்களின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை :

m உறுப்புகளைக்கொண்ட கூறு ஒன்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட பண்புடைய உறுப்புகளின் விகிதம் p_1 ஆகவும், n உறுப்புகளைக் கொண்ட மற்றொரு கூறில் அக் குறிப்பிட்ட பண்புடைய உறுப்பு களின் விகிதம் p_2 ஆகவும் அமையும்போது, அக் கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளில், அக் குறிப்பிட்ட பண்புடைய உறுப்பு களின் விகிதங்கள் சமமானவைகளா என α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்ய விழைகிறோம்.

முதலில், கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளில் அக் குறிப்பிட்ட பண்பைப்பெற்ற உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சம மானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி.

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\text{தி. பி.}\ (p_1 - p_2)} = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{m+n}{mn}\right)}}$$

ஆகும். இங்கு $P = \dfrac{m p_1 + n p_2}{m + n}$ என அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் Z-ன் தனி மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். இம் மதிப்பு K_α-க்கு அதிகமாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் உய்த்துணரு கிறோம். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற் கொள்ளும்போது $\alpha = 0{\cdot}05$ ஆகவும் $K_\alpha = 2$ ஆகவும் அமையும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்ளும் சோதனைகளில் $\alpha = 0{\cdot}01$ ஆகவும், $K_\alpha = 3$ ஆகவும் அமையும்.

கணக்கு :

ஓர் அளவெடுப்பின்போது, A எனும் நகரத்தைச் சார்ந்த 300 நபர்களில், செய்தித்தாளை வாசிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை

105 ஆகவும், B எனும் நகரத்தைச் சார்ந்த 150 நபர்களில் செய்தித்தாளை வாசிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை 57 ஆகவும் அமைகிறது. இவ் விவரங்களைக்கொண்டு A, B நகரங்களைச் சார்ந்த முழுமைத்தொகுதிகளில் செய்தித்தாளை வாசிப்போரின் விகித மதிப்புகள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

A, B நகரங்களைச் சார்ந்த முழுமைத்தொகுதிகளில் செய்தித்தாளை வாசிப்போரின் விகித மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

A நகரத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறில் செய்தித்தாளை வாசிப்பவர்களின் விகித மதிப்பு

$$p_1 = \frac{105}{300}$$

$$= 0.35$$

B நகரத்லிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறில் செய்தித்தாளை வாசிப்பவர்களின் விகித மதிப்பு

$$p_2 = \frac{57}{150} = 0.38$$

$$P = \frac{mp_1 + np_2}{m + n} = \frac{105 + 57}{300 + 150} = \frac{162}{450} = 0.36$$

$$\text{தி. பி.}\ (p_1 - p_2) = \sqrt{P(1 - P)\left(\frac{m + n}{mn}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{100}\left(1 - \frac{36}{100}\right)\left(\frac{300 + 150}{300 \times 150}\right)}$$

$$= 0.048$$

எனவே, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\text{தி. பி.}\ (p_1 - p_2)} = \frac{0{\cdot}35 - 0{\cdot}38}{0{\cdot}048} = -0{\cdot}63$$

$\therefore Z$-ன் தனி மதிப்பு $= |Z| = 0{\cdot}63$

$|Z|$-ன் மதிப்பு 2·00-க்குக் குறைவாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். ஆகையால், A, B நகரங்களைச் சார்ந்த முழுமைத்தொகுதிகளில் செய்தித்தாளை வாசிப்போரின் விகித மதிப்புகள் சமமானவை என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

சிறு கூறுச் சோதனைகள்

பெருங் கூறு சோதனைகளை நடத்துவதற்கு இயல்நிலைப் பரவல் ஆதாரமாக அமைந்ததை முன்பு கண்டோம். கூறில் இடம்பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30-க்குக் குறைவாக அமையும் போது எடுகோள் சோதனைகளை மேற்கொள்ளுவதற்கு t, χ^2, F ஆகிய பரவல்கள் துணை புரிகின்றன.

t-பரவல்:

μஐச் சராசரியாகக் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட n உறுப்புகளைக் கொண்ட சிறு கூறின் சராசரி $\bar{X}$ ஆகவும், திட்ட விலக்கம் s ஆகவும் அமையும் போது, 't' எனும் புள்ளியியல் பண்பளவையை

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}$$

என வரையறுக்கிறோம். இப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் பரவல் வளைகோட்டிற்கானச் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\sqrt{n-1}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

ஆகும். மேற் கண்ட பரவல், $(n-1)$ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட 't'-பரவல் என வழங்கப்படுகிறது. இயல் நிலைப் பரவலைப் போலவே, t-பரவல் சமச்சீர் தன்மையைப் பெற்றமைகிறது.

t-ன் மதிப்பு$(-k, k)$ என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகள், சமன்பாடுப் படிகள் வாரியாக அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளன. இவ் வட்டவணையின் சுருக்கம் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் (அட்டவணை II-ல்) இடம் பெறுகிறது.

அட்டவணை II-ல் சமன்பாட்டுப்படி '1' எனக் குறிக்கப் பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '·10' எனக் குறிப் பிட்டிருக்கும் நிரலிலும் அமைந்துள்ள மதிப்பு 6·314 ஆகும். இவ் விவரங்களைக் கொண்டு, 1ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட t பரவலின் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் $(-6 \cdot 314, 6.314)$ என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள பரப்பு 0·10 ஆகும் என்பதை அறிகிறோம். இங்கு 6·314 ஆனது 1ஐச் சமன் பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட t-பரவலின் 10% நிகழ் தக்வுக்கான மதிப்பு அல்லது நிகழ் தகவுப் புள்ளி என வழங்கப்படுகிறது. 7ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட t-பரவலின் 5% நிகழ் தகவுக்கான மதிப்பை 2.635 என அட்டவணையிலிருந்து பெறு கிறோம். அதாவது, 7ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட t-பரவலில் t-ன் மதிப்பு $(-2 \cdot 635, 2 \cdot 635)$ என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 ஆகும்.

சராசரிக்கான சோதனை

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளைக் கொண்ட சிறு கூறின் சராசரி மதிப்பு $\bar{X}$ ஆகவும், திட்ட விலக்க மதிப்பு s ஆக வும் அமையும் போது, μஐ முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மதிப்பாகக் கொள்ளலாமா என்பதைச் சோதனை செய்ய முற் படுகிறோம்.

முதலில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மதிப்பு μ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனை புள்ளியியல் மாறி

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \text{ ஆகும்.}$$

சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியான t-ன் தனி மதிப்பை அதாவது $|t|$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். α% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளுகிறோமெனில்,

கணக்கிடப்பட்ட $|t|$-ன் மதிப்பை, $(n-1)$ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட t-பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு K-உடன் ஒப்பிடவேண்டும். இப்போது $|t|$-ன் மதிப்பு Kஐ விட அதிகமாக இருக்குமெனில், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், Kஐ விடக் குறைவாக இருக்குமெனில் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது எனவும் முடிவு செய்கிறோம்.

கணக்கு :

"50) கிராம் எடையுள்ள சர்க்கரை நிரப்பப்பட்டுள்ளது" எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் பைகளின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 10 பைகள் கொண்ட ஒரு கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. அக் கூறின் சராசரி 480 கிராம்கள், திட்டவிலக்கம் 15 கிராம்கள் எனில், பைகளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள செய்தி ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கதா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

பைகளில் நிரப்பப்பட்டுள்ள சர்க்கரை எடை 500 கிராம்கள் எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மதிப்பு	$\mu = 500$
கூறு சராசரி மதிப்பு	$\bar{X} = 480$
கூறு திட்டவிலக்க மதிப்பு	$s = 15$
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$n = 10$

ஆகும்.

சோதனைக்கானச் சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{480 - 500}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = -4{\cdot}00$$

$\therefore$ t-ன் தனி மதிப்பு $= |t| = 4{\cdot}00$

இங்கு $n - 1 = 10 - 1 = 9$.

1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால், $|t|$-ன் மதிப்பை, 9 ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட t - பரவலின் 1% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு 3·250 உடன் ஒப்பிடவேண்டும். $|t| = 4.00$ ஆனது 3·250 ஐ விட அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, பைகளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள செய்தி மறுக்கத்தக்கது என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சோதனை :

திட்ட விலக்கத்தைச் சமமாகக்கொண்ட இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும், ஒரு சிறு கூறு சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது எனவும், அவ்விரு கூறுகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, சராசரி திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகள் பின்வருமாறு எனவும் கொள்வோம்.

	முழுமைத் தொகுதி I	முழுமைத்தொகுதி II
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	m	n
கூறு சராசரி	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
கூறு திட்டவிலக்கம்	s_x	s_y

இம் மதிப்புகள் வாயிலாக, இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளும் சமமானவைகளா எனச் சோதனை செய்ய முற்படுகிறோம்.

முதலில், இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளும் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்வோம்.

இச் சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{m s_x^2 + n s_y^2}{m + n - 2} \cdot \dfrac{m + n}{m n}}}$$

ஆகும்.

சோதனைப்புள்ளியியல் மாறியான t-ன் தனி மதிப்பை அதாவது $|t|$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். ∝%

மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளுகிறோமெனில், கணக்கிடப்பட்ட $|t|$-ன் மதிப்பை, $(m+n-2)$ ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக்கொண்ட t-பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு K-உடன் ஒப்பிடவேண்டும். இப்போது $|t|$-ன் மதிப்பு K ஐ விட அதிகமாக இருக்குமெனில், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், K ஐ விடக் குறைவாக இருக்குமெனில் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது எனவும் முடிவு செய்கிறோம்.

கணக்கு :

உளவியல் சோதனை ஒன்றை நடத்தும் பொருட்டு ஒரு வகுப்பைச் சார்ந்த சிறுவர், சிறுமியர் முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் 8 சிறுவர்களையும் 10 சிறுமிகளையும் கொண்ட இரு கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கானச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகள் பின்வருமாறு :

	சிறுவர்கள்	சிறுமிகள்
கூறு சராசரி	32	28
கூறு திட்டவிலக்கம்	6	4

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக, முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

முழுமைத்தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு,

$\bar{X} = 32$, $\bar{y} = 28$, $s_x = 6$, $s_y = 4$

$m = 8$, $n = 10$ ஆகும்.

சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{m s_x^2 + n s_y^2}{m+n-2} \cdot \dfrac{m+n}{mn}}}$$

$$= \frac{32 - 28}{\sqrt{\frac{8 \times 6^2 + 10 \times 4^2}{8 + 10 - 2} \times \frac{8+10}{8 \times 10}}}$$

$$= \frac{4 \cdot 0}{2 \cdot 5} = 1 \cdot 60$$

ஆகும்.

$\therefore$ t-ன் தனி மதிப்பு $= |t| = 1 \cdot 60$

இங்கு $m + n - 2 = 8 + 10 - 2 = 16$

5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால், $|t|$-ன் மதிப்பை, 16ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட t-பரவலின் 5% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு 2·12 உடன் ஒப்பிடவேண்டும். $|t| = 1 \cdot 60$ ஆனது 2·12ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

χ^2 — பரவல் :

σஐத் திட்ட விலக்கமாகக் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட n உறுப்புகளைக்கொண்ட சிறு கூறின் திட்டவிலக்கம் s ஆக அமையும்போது, χ^2-எனும் புள்ளியியல் பண்பளவையை

$$\chi^2 = \frac{n s^2}{\sigma^2}$$

என வரையறுக்கிறோம். இப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் பரவல் வளைகோட்டிற்கானச் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

ஆகும். மேற்கண்ட பரவலை, $(n-1)$ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட χ^2-பரவல் (கை வர்க்கப் பரவல்) என வழங்குகிறோம்.

χ^2-ன் மதிப்பு (L, U) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகள் சமன்பாட்டுப் படிகள் வாரியாக அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவ் வட்டவணையின் சுருக்கம் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் (அட்டவணை III-ல்) இடம் பெறுகிறது. சமன்பாட்டுப்படி '1' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '·05' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரல்களிலும் அமைந்துள்ள L, U ஆகியவைகளின் இணை மதிப்புகள் ·004, 3·841 ஆகும். இவ் விவரங்கள், χ^2-பரவல் வளைகோட்டிற்குக் கீழே (·004, 3·841) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள பரப்பு 0·10 ஆகும் என்பதைக் குறிக்கிறது. அதாவது, χ^2-ன் மதிப்பு ·004-க்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 என்பதையும், 3·841-க்கு அதிகமாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 என்பதையும் குறிக்கின்றன. இங்கு ·004, 3·841 ஆகிய இணை மதிப்புகள், 1ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட χ^2 பரவலின் '10% நிகழ்தகவுக்கான இணை மதிப்புகள்' என வழங்கப்படுகின்றன. 5ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக்கொண்ட χ^2-பரவலின் 5% நிகழ்தகவுக்கான இணை மதிப்புகளை 0·831, 12·832 என அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். அதாவது, 5 ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட χ^2-பரவலில் χ^2-ன் மதிப்பு (0·831, 12·832) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு 0·05 ஆகும்.

திட்ட விலக்கத்திற்கான சோதனை :

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளைக்கொண்ட சிறு கூறின் திட்டவிலக்க மதிப்பு s ஆக அமையும்போது, σ ஐ முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்க மதிப்பாகக் கொள்ளலாமா என்பதைச் சோதனை செய்ய விழைகிறோம்.

முதலில், முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்க மதிப்பு σ எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம்.

இச் சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$\chi^2 = \frac{n s^2}{\sigma^2}$$

ஆகும். இப்போது, χ^2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம். α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளுகிறோமெனில், கணக்கிடப்பட்ட χ^2-ன் மதிப்பை, $(n-1)$ஐச் சமன்

பாட்டுப் படியாகக்கொண்ட χ^1–பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை இணை மதிப்புகள் L, U ஆகியவைகளுடன் ஒப்பிடவேண்டும்.

அதாவது, சமன்பாட்டுப்படி $(n-1)$ எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் $\frac{'\alpha'}{2}$ எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரல்களிலும் அமைந்துள்ள L, U ஆகியவைகளின் இணை மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடவேண்டும். χ^2–ன் மதிப்பு (L, U) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமையும்போது, சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், (L, U) என்ற இடைவெளிக்குள் அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது எனவும் முடிவு செய்கிறோம்.

கணக்கு:

கட்டடத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய மதிப்புகளுக்கான முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் ரூ 10 எனக் கூறப்படுகிறது. 20 கட்டடத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியப் புள்ளி விவரங்கள் அடங்கிய ஒரு கூறின் திட்ட விலக்கு மதிப்பு ரூ. 12 எனில் முழுமைத் தொகுதி, கூறு ஆகியவைகளின் திட்ட விலக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு மிகையானதா என 5% தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

முறை :

முழுமைத் தொகுதி, கூறு ஆகியவைகளின் திட்ட விலக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனச் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இங்கு, முழுமைத் தொகுதியின்

திட்ட விலக்க மதிப்பு $\sigma = 10$

கூறின் திட்ட விலக்க மதிப்பு $s = 12$

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 20$

எனவே, சோதனைப்புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \times 12^2}{10^2} = 28\cdot8$$

ஆகும்.

5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற் கொள்வதால், கணக்கிடப்பட்ட χ^2-ன் மதிப்பை, 19ஐ சமன் பாட்டுபடியாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலின் 5% நிகழ் தகவுக்கான அட்டவணை இணைமதிப்புகள் L, U ஆகியவைகளுடன் ஒப்பிட வேண்டும். அதாவது, சமன் பாட்டுப்படி '19' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '0.025' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரல்களிலும் அமைந்துள்ள L, U-க் களின் இணை மதிப்புகளான 8·907, 32·852 ஆகியவைகளுடன் ஒப்பிட வேண்டும். $\chi^2 = 28{\cdot}8$ ஆனது, (8·907, 32·852) என்ற இடைவெளியில் அமைவதால் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். ஆகவே, கட்டடத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய மதிப்புகளுக்கான முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் ரூ 10 என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

F–பரவல்:

திட்ட விலக்கத்தைச் சமமாகக் கொண்ட இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் சிறு கூறு ஒன்று சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அவ்விரு கூறுகளது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகள் பின் வருமாறு அமைகின்றன:

	முழுமைத் தொகுதி I	முழுமைத் தொகுதி II
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	m	n
கூறு திட்ட விலக்கம்	s_x	s_y

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு F எனும் புள்ளியியல் பண்பளவையை இரு மாறுபாடுகளின் விகிதமாகக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கிறோம்:

$$F = \frac{ms_x^2}{m-1} \bigg/ \frac{ns_y^2}{n-1}$$

இப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் பரவல் வளைகோட்டிற்கான சமன்பாடு

$$y = \frac{(m-1)^{\frac{m-1}{2}} (n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{B\left(\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \frac{F^{\frac{m-2}{2}}}{[(n-1)+(m-1)F]^{\frac{m+n-2}{2}}}$$

ஆகும். மேற்கண்ட பரவல் $(m-1)$, $(n-1)$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F–பரவல் என வழங்கப் படுகிறது.

F–ன் மதிப்பு, (k, ∞) என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகள், சமன்பாடுகள் வாரியாக அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவ் வட்டவணையின் சுருக்கம் புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் [அட்டவணை IV (*a*), IV (*b*), IV (*c*)] இடம் பெறுகிறது.

அட்டவணை IV (*a*)-ல் F பரவலின் 1% நிகழ் தகவு புள்ளிகள் சமன்பாட்டுப் படிகள் வாரியாக இடம் பெறுகின்றன. இவ்வட்டவணையில், சமன்பாட்டுப்படி $(m-1)$–ன் பல மதிப்புகள் நிரல்களின் தலைப்பாகவும், சமன்பாட்டுப்படி $(n-1)$-ன் பல மதிப்புகள் நிரைகளின் தலைப்பாகவும் அமைந்துள்ளன. $(m-1) = 5$ ஆகவும், $(n-1) = 3$ ஆகவும் இருக்கும் போது, 28·24 ஆனது அட்டவணை மதிப்பாக அமைகிறது. இவ் விவரங்கள், 5, 3 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F–பரவலின் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் $(28{\cdot}24, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு ·01 ஆகும் என்பதைக் குறிக்கின்றன. இங்கு 28·24 ஐ 5, 3 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 1% நிகழ்தகவுக்கான மதிப்பு அல்லது நிகழ் தகவுப் புள்ளி என வழங்குகிறோம். 6, 9 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 1% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு 5·80 ஆகும். அதாவது $(5{\cdot}80, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் 6, 9 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவல் வளை கோட்டிற்குக் கீழ் அமைந்துள்ள பரப்பு 0·01 ஆகும்.

அட்டவணை IV (*b*)-லிருந்து 6, 9 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F-பரவலின் 2·5% நிகழ் தகவுக்கான மதிப்பு 4·32 எனப் பெறுகிறோம். அதாவது, 6, 9 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F-பரவல் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் $(4{\cdot}32, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பு ·025 ஆகும்.

அட்டவணை IV (*c*)-லிருந்து 6, 9 ஆகியவைகளைச் சமன் பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட *F*–பரவலின் 5% நிகழ் தகவுக் கான மதிப்பு 3·37 என பெறுகிறோம். அதாவது 6, 9 ஆகிய வைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட *F*–பரவல் வளை கோட்டிற்குக் கீழ் (3·37, ∞) என்ற இடைவெளியில் அமைந் துள்ள பரப்பு ·05 ஆகும்.

இரு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை :

இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலி ருந்தும் சிறு கூறு ஒன்று சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக் கப்படுகிறது. அவ்விரு கூறுகளது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகள் பின் வருமாறு :

	முழுமைத் தொகுதி I	முழுமைத் தொகுதி II
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	m	n
கூறு திட்ட விலக்கம்	s_x	s_y

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு அவ்விரு முழுமைத் தொகுதி களின் திட்ட விலக்கங்கள் சமமானவைகளா எனச் சோதிக்க விழைகிறோம்.

முதலில், இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங் கள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

இப்போது, $$v = \frac{m\, s_x^2}{m-1},$$

$$w = \frac{n\, s_y^2}{n-1}$$

எனக் குறிப்பிடுவோம்.

(i) v–ன் மதிப்பு wஐவிட அதிகமாக அமையும் போது, அதாவது இரு மாறுபாடுகளில் v ஆனது பெரிய மதிப்புடைய

தாக அமையும் போது, சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F = \frac{v}{w}$$

ஆகும்.

இப்போது F-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வோமெனில், கணக்கிட்ட F–ன் மதிப்பை $(m-1)$, $(n-1)$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு K உடன் ஒப்பிட வேண்டும். அதாவது கணக்கிப்பட்ட F-ன் மதிப்ப, (K, ∞) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளதா எனப் பரிசீலிக்க வேண்டும். இப்போது கணக்கிடப்பட்ட F-ன் மதிப்பு K-க்கு அதிகமாக அமையும் போது, அதாவது (K, ∞) என்ற இடைவெளிக்குள் அமையும் போது, சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், K-க்கு குறைவாக அமையும் போது அதாவது, (K, ∞) என்ற இடைவெளிக்குப் புறத்தே அமையும் போது, சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது எனவும் முடிவு செய்கிறோம்.

(ii) w–ன் மதிப்பு vஐ விட அதிகமாக அமையும் போது, அதாவது இரு மாறுபாடுகளில் w ஆனது பெரிய மதிப்புடையதாக அமையும் போது, சோதனைக்கானச் சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F = \frac{w}{v}$$

ஆகும்.

இப்போது F-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வோமெனில், கணக்கிட்ட F–ன் மதிப்பை, $(n-1)$, $(m-1)$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாக கொண்ட F பரவலின் $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு K உடன் ஒப்பிட வேண்டும்.

கணக்கு :

A, B எனும் இரு வகை மின்னணுக் குழல் (Electron tubes) களின் ஆயுள் காலத்திற்கானத் திட்ட விலக்கங்கள் சமமான வைகளா எனக் கீழ்கண்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

	A	B
கூறு திட்ட விலக்கம்	24 மணி	30 மணி
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	9	6

முறை :

A, B ஆகிய இருவகை மின்னணுக் குழல்களின் ஆயுள் காலத்திற்கான திட்ட விலக்கங்கள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இப்போது,

$$v = \frac{m\, s_x^2}{m-1} = \frac{9 \times 24^2}{8} = 648$$

$$w = \frac{n\, s_y^2}{n-1} = \frac{6 \times 30^2}{5} = 1080$$

இங்கு w-ன் மதிப்பு v-ன் மதிப்பை விட பெரியதாக இருப்பதால், சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$F = \frac{w}{v} = \frac{1080}{648} = 1.67$$

10% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால், கணக்கிட்ட F-ன் மதிப்பை $(n-1) = 5$, $(m-1) = 8$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு $k = 3{\cdot}69$ உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு கணக்கிடப்பட்ட $F = 1.67$ ஆனது 3.69-க்குக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, *A, B* ஆகிய இரு வகை மின்னணுக் குழல்களின்

ஆயுள் காலத்திற்கானத் திட்ட விலக்கங்கள் சமமானவை என 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

இரு பள்ளிகளைச் சார்ந்த மாணவர்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒவ்வொரு கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அம் மாணவர்களின் எடை விவரங்கள் குறித்துக் கொள்ளப்பட்டன. கூறுகளின் திட்ட விலக்கம், உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகிய மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	முழுமைத் தொகுதி I	முழுமைத் தொகுதி II
கூறின் திட்ட விலக்கம்	8 பவுண்டுகள்	4 பவுண்டுகள்
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	15	12

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

இப்போது,

$$v = \frac{m\, s_x^2}{m-1} = \frac{15 \times 8^2}{14} = 68{\cdot}6$$

$$w = \frac{n\, s_y^2}{n-1} = \frac{12 \times 4^2}{11} = 17.5$$

இங்கு, v-ன் மதிப்பு w-ன் மதிப்பை விட அதிகமாக இருப்பதால், சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$F = \frac{v}{w} = \frac{68.6}{17.5} = 3.92$$ ஆகும்.

இப்போது, 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால், கணக்கிட்ட F-ன் மதிப்பை $(m-1) = 14$, $(n-1) = 11$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் $2\frac{1}{2}\%$ நிகழ்தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு 3.36 உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு $F = 3{\cdot}92$ ஆனது 3.36ஐவிட அதிகமாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் வேறுபடுகின்றன என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை

A எனும் மாறியை அதன் மதிப்பு அல்லது பண்பின் அடிப்படையில் $A_1, A_2, \ldots A_l$ ஆகிய l பிரிவுகளிலும், B எனும் மாறியை அதன் மதிப்பு அல்லது பண்பின் அடிப்படையில் $B_1, B_2, \ldots B_m$ ஆகிய m பிரிவுகளிலும் அமைப்பதாகக் கொள்வோம்.

இப்போது, இருவழிப் பட்டியல் ஒன்றில்

$A_1, A_2, \ldots A_l$ பிரிவுகளை நிரைகளிலும்,

$B_1, B_2, \ldots B_m$ பிரிவுகளை நிரல்களிலும்

அமைத்துக் கொள்ளும் போது $l \times m$ அறைகளைப் பெறுகிறோம். ஒரு கூறில் இடம்பெறும் N உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் A, B மாறிகளின் அடிப்படையில் அவைகளுக்குரிய அறையில் வகைப்படுத்துவோம். A_i நிரையிலும், B_j நிரலிலும் அமைந்துள்ள அறையை (i, j) அறை எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது, (i, j) அறையில் இடம் பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை n_{ij} எனக் குறிப்பிட்டு இருவழிப் பட்டியலை அடுத்த பக்கத்தில் அமைக்கிறோம். (பட்டியல் 13-2)

இதை A, B ஆகிய இரு மாறிகளுக்கான இணைப் பட்டியல் (Contingency table) என அழைக்கிறோம்.

இப்போது N உறுப்புகளை, A, B மாறிகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தி அமைக்கப்பட்ட ஓர் இணைப்பட்டியல் வாயிலாக A, B ஆகிய இரு மாறிகளின் சார்பற்ற தன்மையைச் சோதிக்க முற்படுகிறோம்.

பட்டியல் 13-2.

	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1m}
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2m}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{im}
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
A_l	n_{l1}	n_{l2}	...	n_{lj}	...	n_{lm}

முதலில் A, B ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ளுகிறோம். இச் சோதனைக்கானச் சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$V = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

ஆகும். இங்கு e_{ij} என்பது, இணைப் பட்டியலில் A_i பிரிவின் மொத்த அலைவெண், B_j பிரிவின் மொத்த அலைவெண் ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகையை Nஆல் வகுப்பதன் மூலம் பெறும் மதிப்பைக் குறிக்கிறது. இதை (i, j) அறையின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் (Expected frequency) என்கிறோம். இப்போது, A_i பிரிவில் அதாவது நிரை i-ல் இடம் பெறும் அறைகளுக்குரிய அலைவெண்களின் கூட்டுத் தொகையை

$$n_{i1} + n_{i2} + \dots + n_{im} = R_i$$

எனவும், B_j பிரிவில் அதாவது நிரல் j-ல் இடம் பெறும் அறைகளுக்குரிய அலைவெண்களின் கூட்டுத் தொகையை

$$n_{1j} + n_{2j} + \dots + n_{lj} = C_j$$

எனவும் குறிப்பிடும் போது, (i, j) அறையின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பு

$$e_{ij} = \frac{R_i C_j}{N}$$

ஆகும்.

சோதனை மாறி V-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். α% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள் வோமெனில், கணக்கிட்ட V-ன் மதிப்பை $[(l-1)(m-1)]$ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலின் அட்ட வணை மதிப்பான K உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு K ஆனது சமன்பாட்டுப்படி '$[(l-1)(m-1)]$' எனக் குறிப்பிட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் 'α' எனக் குறிப்பிட்டிருக்கும் நிரலிலும் அமைந்துள்ள அட்டவணை மதிப்பு U ஆக அமை கிறது. கணக்கிடப்பட்ட V-ன் மதிப்பு Kஐ விட அதிகமாக அமையும் போது, சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், Kஐவிடக் குறைவாக அமையும் போது, சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது எனவும் முடிவு செய்கிறோம்.

கணக்கு :

ஆக்கத்திறன் (Creativity), நுண்ணறிவு (Intelligence) பற்றிய உளவியல் சோதனைகளில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப் பெண் விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட இணைப் பட்டியலில் வகைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 13-3.

		ஆக்கத்திறன் மிகை	ஆக்கத்திறன் குறைவு
நுண்ணறிவு	மிகை	14	12
	குறைவு	11	13

இவ் விவரங்கள் வாயிலாக இரு மாறிகளும் சார்பற்ற னவா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்க.

முறை :

இரு மாறிகளும் சார்பற்றவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்கிறோம். இப்போது, இணைப் பட்டியலின் ஒவ்வோர் அறைக்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பைக் கணக்கிடுவோம்.

நிரை (1)-ன் அதாவது மிகை நுண்ணறிவு பிரிவின் மொத்த அலைவெண் $R_1 = 14 + 12 = 26$ ஆகவும், நிரை (2)-ன் அதாவது குறை நுண்ணறிவு பிரிவின் மொத்த அலைவெண் $R_2 = 11 + 13 = 24$ ஆகவும் அமைகின்றன.

நிரல் (1)-ன் அதாவது மிகை ஆக்கத் திறன் பிரிவின் மொத்த அலைவெண் $C_1 = 14 + 11 = 25$ ஆகவும், நிரல் (2)-ன் அதாவது குறை ஆக்கத்திறன் பிரிவின் மொத்த அலைவெண் $C_2 = 12 + 13 = 25$ ஆகவும் அமைகின்றன.

இப்போது,

(1, 1) அறையின் எதிர்பார்க்கும்

$$\text{அலைவெண் } e_{11} = \frac{R_1 C_1}{N}$$

$$= \frac{26 \times 25}{50} = 13$$

(1, 2) அறையின் எதிர்பார்க்கும்

$$\text{அலைவெண் } e_{12} = \frac{R_1 C_1}{N}$$

$$= \frac{26 \times 25}{50} = 13$$

(2, 1) அறையின் எதிர்பார்க்கும்

$$\text{அலைவெண் } e_{21} = \frac{R_2 C_1}{N}$$

$$= \frac{24 \times 25}{50} = 12$$

(2, 2) அறையின் எதிர்பார்க்கும்

$$\text{அலைவெண் } e_{21} = \frac{R_2 C_2}{N}$$

$$= \frac{24 \times 25}{50} = 12$$

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் பட்டியல்

பட்டியல் 13 4.

		ஆக்கத்திறன்	
		மிகை	குறைவு
நுண்ணறிவு	மிகை	13	13
	குறைவு	12	12

இப்போது, சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$V = \frac{(14-13)^2}{13} + \frac{(12-13)^2}{13} + \frac{(11-12)^2}{12} + \frac{(13-12)^2}{12}$$

$$= 0{\cdot}32$$

ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட இணைப்பட்டியலில் இரு நிரைகள் இருப்பதால் $l = 2$ ஆகவும், இரு நிரல்கள் இருப்பதால் $m = 2$ ஆகவும் அமையும். எனவே

$$[(l-1)(m-1)] = [(2-1) \times (2-1)] = 1$$

ஆகும்.

சோதனையை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்வதால், கணக்கிடப்பட்ட V–ன் மதிப்பை, சமன்பாட்டுப் படி '1' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '·05' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரலிலும் அமைந்துள்ள அட்டவணை மதிப்பு $U = 3{\cdot}841$ உடன் ஒப்பிடுகிறோம். $V = 0{\cdot}32$ – ஆனது 3·841 ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, ஆக்கத்திறன், நுண்ணறிவு ஆகிய உளவியல் மாறிகள் சார்பற்றவை என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

தலை முடியின் நிறம், கண்விழியின் நிறம் ஆகிய இரு பண்புகளின் அடிப்படையில் பாகுபடுத்தப்பட்டுள்ள 200 குழந்தைகளைப்பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு.

பட்டியல் 13-5.

		தலைமுடியின் நிறம்		
		கறுப்பு	காவிநிறம்	பழுப்பு
கண்விழியின் நிறம்	சாம்பல் அல்லது பச்சை	40	30	20
	காவிநிறம்	10	10	10
	நிலம்	50	20	10

இவ்விரு பண்புகளும் சார்பற்றனவா என்பதை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை :

குழந்தைகளின் தலைமுடியின் நிறம், கண்விழியின் நிறம் ஆகிய இரு பண்புகளும் சார்பற்றவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைக்கிறோம்.

இணைப்பட்டியலின் ஒவ்வொரு அறைக்கான எதிர் பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பைக் கணக்கிடுவோம்.

பட்டியல் 13-6.

		தலை முடியின் நிறம்			மொத்தம்
		கறுப்பு	காவிநிறம்	பழுப்பு	
கண்விழியின் நிறம்	சாம்பல் அல்லது பச்சை	$\frac{90\times100}{200}=45$	$\frac{90\times60}{200}=27$	$\frac{90\times40}{200}=18$	90
	காவி நிறம்	$\frac{30\times100}{200}=15$	$\frac{30\times60}{200}=9$	$\frac{30\times40}{200}=6$	30
	நீலம்	$\frac{80\times100}{200}=40$	$\frac{80\times60}{200}=24$	$\frac{80\times40}{200}=16$	80
மொத்தம்		100	60	40	200

இப்போது, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$V = \frac{(40-45)^2}{45} + \frac{(30-27)^2}{27} + \frac{(20-18)^2}{18}$$

$$+ \frac{(10-15)^2}{15} + \frac{(10-9)^2}{9} + \frac{(10-6)^2}{6}$$

$$+ \frac{(50-40)^2}{40} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(10-16)^2}{16}$$

$$= 10{\cdot}98$$

இணைப்பட்டியலில் இடம்பெறும் நிரைகளின் எண்ணிக்கை $l = 3$, நிரல்களின் எண்ணிக்கை. $m = 3$ ஆக இருப்பதால்,

$$[(l-1)(m-1)] = 2 \times 2 = 4$$

ஆகும்.

சோதனையை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்வதால், V-ன் மதிப்பை, சமன்பாட்டுப்படி '4' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '·05' எனக்குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரலிலும் அமைந்துள்ள அட்டவணை மதிப்பான $U = 9{\cdot}488$ உடன் ஒப்பிடுகிறோம். $V = 10{\cdot}98$ ஆனது 9·488 ஐ விட அதிகமாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, குழந்தைகளின் தலை முடியின் நிறம் கண்விழியின் நிறம் ஆகிய இரு பண்புகளும் சார்புடையதென 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு :

ஓர் ஆய்வில் இடம்பெறும் 500 குற்றவாளிகளின் உளநிலை (Mentality) எடை (weight) ஆகியவைகளைப்பற்றிய பாகுபடுத்தப்பட்ட விவரங்கள் அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (பட்டியல் 13-7).

இவ் விவரங்களைக்கொண்டு குற்றவாளிகளின் உளநிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

பட்டியல் 13-7.

		எடை (பவுண்டுகளில்)			
		130-க்கு குறைவு	130—140	140—150	150-க்கு அதிகம்
உளநிலை	இயல்பான	70	100	120	110
	பலவீனமான	30	25	30	15

முறை :

குற்றவாளிகளின் உள நிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றன எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்ளுகிறோம்.

இணைப்பட்டியலின் ஒவ்வோர் அறைக்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பைக் கணக்கிடுவோம். (பட்டியல் 13.8)

இப்போது, சோதனைப் புள்ளியியல் மாறியின் மதிப்பு

$$V = \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(100-100)^2}{100} + \frac{(120-120)^2}{120} + \frac{(110-100)^2}{100}$$

$$+ \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(25-25)^2}{25} + \frac{(30-30)^2}{30} + \frac{(15-25)^2}{25}$$

$= 11{\cdot}20$ ஆகும்.

இணைப்பட்டியலில் இடம்பெறும் நிரைகளின் எண்ணிக்கை $l = 2$, நிரல்களின் எண்ணிக்கை $m = 4$ ஆக அமைவதால், $[(l-1)(m-1)] = 1 \times 3 = 3$ ஆகும்.

சோதனையை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்வதால், V-ன் மதிப்பை, சமன்பாட்டுப்படி '3' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரையிலும், நிகழ்தகவு மட்டம் '·01' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் நிரலிலும் அமைந்துள்ள அட்டவணை மதிப்பு $U = 11{\cdot}341$ உடன் ஒப்பிடுகிறோம். $V = 11{\cdot}25$ ஆனது 11·341-க்கு மிக நெருக்கமாக அதாவது ஏறக்குறைய சமமாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது என முடிவு செய்கிறோம். எனவே, குற்றவாளிகளின்

பட்டியல் 13-8.

		எடை				
		130-க்குக் குறைவு	130—140	140—150	150-க்கு அதிகம்	மொத்தம்
உடல் நிலை	இயல்பான	$\frac{400 \times 100}{500} = 80$	$\frac{400 \times 125}{500} = 100$	$\frac{400 \times 150}{500} = 120$	$\frac{400 \times 125}{500} = 100$	400
	பலவீனமான	$\frac{100 \times 100}{500} = 20$	$\frac{100 \times 125}{500} = 25$	$\frac{100 \times 150}{500} = 30$	$\frac{100 \times 125}{500} = 25$	100
மொத்தம்		100	125	150	125	500

உள நிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றவை என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

பயிற்சி

(1) $\sigma=3$ ஐத் திட்டவிலக்கமாகக்கொண்ட ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 64 உறுப்புகளைக்கொண்ட கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. கூறின் சராசரி 16 எனில் 3 முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக் கான 95%, நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க.

(2) உளவியல் தேர்வில் ஒரு பள்ளியைச் சார்ந்த 300 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் திட்டவிலக்கம் 56 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கத்திற்கான 99%, நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க.

(3) ஒரு நாணயத்தை 450 முறைகள் சுண்டி எறிந்த போது 300 முறைகள் தலைப்பக்கம் மேல்நோக்கி விழுந்தது எனில், தலைப்பக்கம் மேல்நோக்கி விழுதற்கான 99 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க.

(4) விதைக்கப்பட்ட விதைகளுள் 30 சதவீதம் முளை விடுகின்றன என முன் அனுபவம் கூறுகிறது. 600 விதைகளை விதைத்தபோது அவைகளில் 125 விதைகள் முளைவிட்டன எனில், முளைவிட்ட விதைகளின் விகிதம் 0·30 எனும் எடுகோளை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(5) ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்த மரைகளிலிருந்து 120 மரைகளைக் கொண்ட கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. அவைகளுள் 5 மரைகள் பழுதள்ளவை எனில், மரைகளின் முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் பழுதுள்ள மரைகளுக்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க.

(6) ஒரு நாட்டின் 10 சதவீத மக்கள் 20–24 வயதுப் பிரிவைச் சேர்ந்தவர்கள். அந் நாட்டில் உள்ள ஓர் ஊரின் மக்கள் தொகை 20,000 ஆகவும், அவர்களுள் 20–24 வயதுப் பிரிவில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை 2,400 ஆகவும் அமைகிறது. இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நாடும் ஊரும் 20-24 வயதுடையவர்களின் விகிதத்தைப் பொறுத்தவரையில் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(7) (*a*) பசுவின் வயதுக்கும் பால் வழங்கும் தன்மைக்கும் இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவை ஆராயும் பொருட்டு 172 பசுக்களைக்கொண்ட சம வாய்ப்புக்கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அக் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·46 எனில், முழுமைத்தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

(7) (*b*) ஒரு பல்கலைக் கழகத்தைச்சார்ந்த 120 மாணவர்கள் ஆங்கிலம், புள்ளியியல் ஆகிய தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான ஒட்டுறவுக்கெழு 0·7 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

(8) ஒரு நிறுவனம் தான் தயாரிக்கும் மின்கலங்களை 30 மணி நேரங்கள் தொடர்ந்து உபயோகிக்கலாம் என விளம்பரம் செய்கிறது. அந்நிறுவனம் தயாரித்த 45 மின்கலங்களை சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து, அவைகளின் உபயோக நேரங்களுக்கான சராசரியைக் கணக்கிட்டபோது அதன் மதிப்பு 28 மணி நேரங்கள் எனில் அந்நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. (திட்ட விலக்கம் 5 மணி நேரம் எனக் கொள்க.)

(9) *A*, B என்ற இரு முறைகளில் தயாரிக்கும் மின்விளக்குகளது எரியும் நேரத்திற்கான சராசரிகள் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா எனக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

	கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	சராசரி	திட்டவிலக்கம்
A முறை	120	1482	92
B முறை	150	1601	104

(10) 16 ஐத் திட்ட விலக்கமாகக்கொண்ட இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பெற்ற இரு கூறுகளின் விவரங்கள் பின்வருமாறு:

	உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை	சராசரி
கூறு I	40	152
கூறு II	60	174

இவ் விவரங்களைக்கொண்டு இடம்பெறும் முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் வேறுபடுகின்றனவா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(11) 3 ஐத் திட்டவிலக்கமாகக்கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 16 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 17·5 ஆகவும், 4 ஐத் திட்ட விலக்க மாகக்கொண்ட மற்றொரு முழுமைத்தொகுதியிலிருந்த தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட 18 உறுப்புகளைக்கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 15 ஆகவும் அமைகிறது எனில், இவ்விரு முழுமைத் தொகுதி களின் சராசரிகள் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(12) 90 குழந்தைகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களில் 55 குழந்தைகளுக்கு பால் உணவும், மற்ற குழந்தைகளுக்குப் பழச்சாறு உணவும் அளிக்கப்பட்டு எடை அதிகரிப்புகள் பதிவு செய்யப்பட்டன. பால் உணவைப் பெற்ற குழந்தைகளது எடை அதிகரிப்பின் சராசரி 1·8 பவுண்டு ஆகவும், மற்ற குழந்தைகளது எடை அதிகரிப்பின் சராசரி 1·2 பவுண்டு ஆகவும் அமைகிறது. எடை அதிகரிப்பின் திட்டவிலக்கம் 0·5 பவுண்டு எனில், இவ் விரு உணவு வகைகளின் எடை அதி கரிக்கச் செய்யும் சக்தியை ஆய்க.

(13) திருகாணிகளது விட்டங்களின் திட்டவிலக்கம் 0·20 அங்குலமாக அமையலாம் எனக்கொண்டு ஓர் இயந்திரம் இயக்கப்படுகிறது. அவ் வியந்திரம் உற்பத்தி செய்த 50 திரு காணிகளது விட்டங்களின் திட்டவிலக்கம் 0·32 அங்குலம் எனில், அந்த இயந்திரம் சரியாக இயங்குகிறதா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(14) கணிதத் தேர்விலும், சரித்திரத்தேர்விலும் 88 மாண வர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·26. இவ் விவரத்தைக்கொண்டு பொதுவாக மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வில் பெறும் மதிப்பெண்கள் சரித்திரத் தேர்வில் பெறும் மதிப்பெண்களைச் சார்ந்தமையுமா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(15) இருமாறி முழுமைத் தொகுதியொன்றிலிருந்து தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட 103 உறுப்புகளைக்கொண்ட கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·63 எனில், அம் முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக்

கெழு 0·70 ஆக அமையுமா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(16) *A* என்ற நகரத்தில் 800 பேர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறினை ஆராய்ந்தபோது 500 பேர்கள் தேநீர் அருந்துபவர்களாகவும், *B* என்ற நகரத்தில் 1000 பேர்களைக்கொண்ட கூறு ஒன்றினை ஆராய்ந்தபோது 450 பேர்கள் தேநீர் அருந்துபவர்களாகவும் அமைந்தனர் எனில், இவ் விரு நகரமக்களும் தேநீர் அருந்தும் தன்மையில் வேறு படுகின்றனரா எனச் சோதனை செய்க. (1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில்).

(17) இரு திருகாணிக் குவியல்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகளுக்கான விவரங்கள் பின்வருமாறு:

	குவியல் I	குவியல் II
கூறில் இடம்பெறும் திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	40	60
குறைபாடுடைய திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	8	4

இவ் விவரங்கள் வாயிலாக, குறைபாடுடைய திருகாணிகளைப் பெற்றுள்ள தன்மையில் இவ்விரு குவியல்களும் வேறுபட்டுள்ளனவா என்பதை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(18) ஒரு நகரத்தைச் சார்ந்தவர்களின் உயரத்தை ஆராயும் பொருட்டு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 9 பேர்களைக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகள் முறையே 68·1″, 2.3″ ஆக அமைகின்றன. அந் நகர மக்களின் சராசரி உயரம் 68·9″ எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதா என்பதை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(19) ஐந்து உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறு வாயிலாகப் பெற்ற மாங்கனீசத்தின் உருகுநிலை பற்றிய சராசரி 1268°*C* திட்ட விலக்கம், .15°*C* எனில், மாங்கனீசத்தின் உருகுநிலையை 1260°*C* எனக் கொள்ளலாமா என்று 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(20) ஓராண்டு ஓவியக் கலையைப் பயின்ற மாணவ, மாணவிகளின் முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து 11 மாணவர்களையும் 8 மாணவிகளையும் கொண்ட இரு கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டன. ஆண்டுத் தேர்வில் இம் மாணவ, மாணவிகள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின் வருமாறு:

மதிப்பெண்கள்

மாணவர்:	23 20 19 21 18 20 18 17 21 16 19
மாணவியர்:	24 19 22 18 32 20 17 22

இக் கூறு விவரங்களைக் கொண்டு இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் கணிசமான முறையில் வேறு படுகின்றனவா எனச் சோதனை செய்க. (1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில்).

(21) இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட இரு கூறுகளின் சார்பற்ற உறுப்புகள் வாயிலாகப் பெற்ற விவரங்கள் பின் வருமாறு:

	கூறு I	கூறு II
சராசரி	78·9	86·3
திட்ட விலக்கம்	11·5	10·2
உருவ அளவு	18	11

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(22) ஒரு உரத்தின் உற்பத்தித் திறனை ஆராயும்பொருட்டு ஓர் ஏக்கர் பரப்பு கொண்ட ஒரே தன்மை வாய்ந்த 24 நிலக் கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. உரத்தைப்பெற்ற 12 நிலக் கூறுகளது விளைச்சல்களில் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகள் முறையே 980 பவுண்டுகள், 160 பவுண்டுகள் ஆகவும், உரத்தைப்பெறாத 12 நிலக்கூறுகளது விளைச்சல்களின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகள் முறையே 815 பவுண்டுகள், 180 பவுண்டுகள் ஆகவும் அமைகின்றன எனில், உரத்தின் உற்பத்தித் திறனை ஆய்க.

(23) 14 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறின் திட்டவிலக்கம் 4·7 எனில், இக் கூறு பிறந்த இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி

யின் திட்டவிலக்கம் 4·0 ஆக அமையுமா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(24) சர்க்கரையை ஒரு கிலோகிராம் எடையுள்ள சிப்பங்களாகக் (Packets) கட்ட ஓர் இயந்திரம் உபயோகப்படுத்தப் படுகிறது. அவ்வியந்திரத்தின் துணைகொண்டு பெற்ற சிப்பங்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 15 சிப்பங்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றின் திட்டவிலக்கம் 8·8 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் 10·0 ஆக அமையுமா எனச் சோதனை செய்க. (1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில்).

(25) *A*, *B* எனும் இருமுறைகளில் தயாரிக்கும் டயர்களின் தரத்தை ஆராய சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்படுகிறது. *A* முறையில் தயாரிக்கப்பட்ட டயர்களின் முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 20 டயர்களது உபயோக தூரத்தின் திட்டவிலக்கம் 4,200 கிலோ மீட்டர்களாகவும், *B* முறையில் தயாரிக்கப்பட்ட டயர்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுககப்பட்ட 18 டயர்களது உபயோக தூரத்தின் திட்டவிலக்கம் 2,800 கிலோ மீட்டர்களாகவும் அமைகின்றன எனில், இவ்விரு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்டவிலக்கங்கள் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா எனச் சோதனை செய்க. (5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில்).

(26) ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 26 உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறின் திட்டவிலக்கம் 1·9 ஆகவும், மற்றோர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 17 உறுப்புகளை கொண்ட கூறின் திட்டவிலக்கம் 1·2 ஆகவும் அமைகிறது எனில், இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்க மதிப்புகள் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(27) நீலம், பச்சை, மஞ்சள், சிவப்பு ஆகிய நான்கு வண்ணங்களை விரும்பும் தன்மை பற்றிய ஆய்வு ஒன்றை 500 பேர்களைக் கொண்டு நடத்திய போது பெற்ற விவரங்கள் பின்வரும் இணைப்பட்டியலில் இடம் பெறுகின்றது.

		வண்ணம்			
		நீலம்	பச்சை	மஞ்சள்	சிவப்பு
பால்	ஆண்	44	65	87	94
	பெண்	56	48	69	37

வண்ணங்களை விரும்பும் தன்மையில் இவ்விரு பாலரும் வேறுபடுகின்றனரா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(28) ஒரு கல்லூரியைச் சார்ந்த 40 மாணவர்களின் கல்விப் புலமை, விளையாட்டுத் திறமை ஆகியவற்றைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட 2 × 2 இணைப் பட்டியலில் இடம் பெறுகின்றன.

		கல்வி	
		புலமை யுடையவர்கள்	புலமை யற்றவர்கள்
விளையாட்டு	திறமை யுள்ளவர்கள்	11	14
	திறமை யற்றவர்கள்	10	5

கல்விப் புலமை, விளையாட்டுத் திறமை ஆகியவைகள் சார்பற்றனவா என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(29) தாதுரா (Datura) செடிகளைப்பற்றிய அடுத்த பக்கத்தில் உள்ளவிவரங்களைக் கொண்டு, அவைகளின் மலர் வண்ணமும் கனித் தன்மையும் தொடர்புடையவைகளா என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க,

		கனிகளின் தன்மை	
		சொர சொரப்பான	வழ வழப்பான
மலர் வண்ணம்	ஊதா	40	30
	வெண்மை	20	10

(30) தந்தை மகன்களின் மனப்போக்கு பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தந்தை, மகன்களின் மனப்போக்கு

		தந்தை		
		இனிய குணம்	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	முன் கோபம்
மகன்	இனிய குணம்	430	90	80
	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	50	40	60
	முன் கோபம்	20	70	160

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு, மேற்கூறிய பண்புகளைப் பொறுத்த வரையில், தந்தை மகன்களின் மனப்போக்கு சார்புடையதா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

14. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வும், செய்முறைத் திட்டங்களும்

மாறுபாட்டின் பகுப்பாய்வு (Analysis of variance)

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளைப் பற்றிய செய்திகளைக் கூறு விவரங்கள் வாயிலாகச் சோதிக்கத் துணை புரியும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகளில் சிலவற்றை முன்பகுதிகளில் விவரித்தோம். இரு கூறுகளின் விவரங்களைக் கொண்டு அக் கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா எனச் சோதிக்கும் வழி முறைகளை முன்பு கண்டோம். கூறுகளின் எண்ணிக்கை மூன்று அல்லது அதற்கு அதிகமாக அமையும் போது அவைகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா எனக் கூறு விவரங்களைக் கொண்டு சோதிக்கப் பயனுறும் 'மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு' முறைகளை இப்போது காண்போம்.

கண்டறிந்த மதிப்புகள் வேறுபட்டமைவதென்பது இயல்பான தொன்றும். இவ்வேறுபாட்டைப் பல காரணிகள் ஏற்படுத்தியிருக்கக்கூடும். கண்டறிந்த மதிப்புக்களின் மொத்த மாறுபாட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு காரணியும் ஏற்படுத்தும் மாறுபாட்டைப் பிரித்துப் பகுப்பாயும் முறையை 'மாறுபாட்டின் பகுப்பாய்வு' என வழங்குகிறோம்.

ஒரு வழி பாகுபாடு (One way classification) :

A எனும் காரணி A_1, A_2, ... A_k எனும் K பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். இப் பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா எனச் சோதிக்க,

A_1 பிரிவிலிருந்து n_1 உறுப்புகளைக்கொண்ட கூறு ஒன்றையும்,

A_2 பிரிவிலிருந்து n_2 உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றையும்

⋮ ⋮

A_k பிரிவிலிருந்து n_k உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறு ஒன்றையும் சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம். இவ் விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 14-1.

பிரிவு 1	பிரிவு 2	...	பிரிவு K
x_{11}	x_{21}	...	x_{k1}
x_{12}	x_{22}	...	x_{k2}
⋮	⋮	⋮	⋮
x_{1n1}	x_{2n2}	...	x_{knk}

இப் புள்ளி விவரங்களை ஒரு வழி பாகுபடுத்திய விவரங்கள் என அழைக்கிறோம். K கூறுகளின் மதிப்புகள் வாயிலாகக் கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா என உய்த்துணரக் கீழ்க்காணும் வழி முறையைக் கையாளுகிறோம்.

முதலில், கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். அதாவது, ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனக் கொள்கிறோம். அடுத்து, மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி ஆகியவைகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் அடிப்படையில் மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு பட்டியல் ஒன்றை அமைக்கிறோம்,

K கூறுகளின் மதிப்புக்களை ஒரு குழுவாகக் கொள்ளும் போது, குழுவின் உருவ அளவு $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$ என் போம். இக் குழுவின் சராசரியை $\bar{x}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

குழு மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் $\bar{x}$–லிருந்து பெறும் விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, அதாவது மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Total Sum of Squares)

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

ஆகும்.

$A_1, A_2 \ldots A_k$ ஆகிய கூறுகளின் சராசரிகளை முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k$ எனக் குறிப்பிடுவோம். கூறுச் சராசரிகள் ஒவ் வொன்றும் குழுச் சராசரியிலிருந்து பெறும் விலக்கத்தின் வர்க் கம், கூறில் இடம் பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகிய வைகளின் பெருக்குத்தொகைகளை கணக்கிட்டு அளவைகளின் கூட்டுதொகையை அடைய வேண்டும். இதைப் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை (Sum of Squares between classes) என அழைக்கிறோம்.

பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i \ (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \text{ ஆகும்}$$

மொத்த விலக்க வர்கங்களின் கூட்டுத் தொகை யிலிருந்து பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகையைக் கழிப்பதன் மூலம் பெற்ற மதிப்பை, பிரிவுகளுக்குள்ளேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Sum of Squares within classes) அல்லது பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Sum of squares due to Errors) என அழைக்கிறோம்.

பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

= மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

— பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \text{ ஆகும்.}$$

குழுவின் உருவ அளவு N என்பதால் மொத்த விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $(N-1)$ ஆகவும், பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை K என்பதால் பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $K-1$ ஆகவும் அமையும். பிழைகளின் விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $[(N-1)-(K-1)]=(N-K)$ எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

இப்போது, பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, பிழைகளுக்கிடையான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி ஆகியவைகளை

$$\left.\begin{array}{l}\text{பிரிவுகளுக்கிடையே}\\ \text{யான விலக்க வர்க்}\\ \text{கங்களின் சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{\text{பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}}{\text{பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சமன்பாட்டுப்படி}}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{பிழைகளுக்கான}\\ \text{விலக்க வர்க்கங்களின்}\\ \text{சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சமன்பாட்டுப்படி}}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

பட்டியல் 14-2.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம். (Source of variation)	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை. (Sum of Squares)	சமன் பாட்டுப் படி (Degrees of freedom)	விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி (Mean squaers)
பிரிவுகள்	$S_1^2=\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2$	$K-1$	$S_1^2/K-1$
பிழைகள்	$S_2^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$	$N-K$	$S_2^2/N-K$
மொத்தம்.	$S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x})^2$	$N-1$	...

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி,

$$F = \frac{\text{பிழைகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{S_1^2/(K-1)}{S_2^2/N-K}$$ ஆகும். F-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $(K-1)$ ஆகவும், பிழைகளின் விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $(N-K)$ ஆகவும் அமைவதால், F-ன் பரவல் $[(K-1), (N-K)]$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலாக அமையும். $\alpha\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது, $[(K-1), (N-K)]$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு Kஐப் பெற வேண்டும். கணக்கிட்ட F-ன் மதிப்பை K மதிப்புடன் ஒப்பிட வேண்டும். F-ன் மதிப்பு K-ன் மதிப்பை விட அதிகமாக அமையும் போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என $\alpha\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். அதாவது கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகள் அல்ல என $\alpha\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம். F-ன் மதிப்பு K-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமையும்போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என $\alpha\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். அதாவது கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவை என $\alpha\%$ மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

ஒரு நகரத்தின் A_1, A_2, A_3 எனும் பிரிவுகளில் நிறுவப்பட்டுள்ள கூட்டுறவுப் பண்டக சாலைகளின் நான்கு வார சர்க்கரை விற்பனை மதிப்புகள் அடுத்த பகக்த்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இப்புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு A_1, A_2, A_3 பிரிவுகளது சர்க்கரை விற்பனையின் சராசரி மதிப்புகள் வேறுபட்டுள்ளனவா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வோம்.

பட்டியல் 14-3.

A_1	A_2	A_3
12	17	14
6	8	12
12	20	8
10	15	10

முதலில் A_1, A_2, A_3 எனும் பிரிவுகளின் சர்க்கரை விற்பனைக்கான சராசரி மதிப்புக்கள் சமமானவை, அதாவது ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட மூன்று கூறுச் சராசரிகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். அடுத்து தேவையான மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு அவைகளை மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு பட்டியலில் அமைப்போம்.

பட்டியல் 14-4.

	A_1	A_2	A_3
	12	17	14
	6	8	12
	12	20	8
	10	15	10
மொத்தம்	40	60	44
சராசரி	10	15	11

ஆய்விற்கு எடுத்துக் கொண்ட மூன்று கூறுகளையும் ஒரு குழுவாகக் கொள்ளும் போது, குழுவின் உருவ அளவு 12 ஆகும்.

$$\text{குழுவின் சராசரி} = \frac{40 + 60 + 44}{12} = 12$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= (12-12)^2 + (16-12)^2 + (12-12)^2 + (10-12)^2 + (17-12)^2 + (8-12)^2 + (20-12)^2 + (15-12)^2 + (14-12)^2 + (8-12)^2 + (10-12)^2$$

$$= 178.$$

A_1, A_2, A_3 ஆகிய பிரிவுகளின் சராசரி மதிப்புகள் முறையே 10, 15, 11, ஆகின்றன. பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 4(10-12)^2 + 4(15-12)^2 + 4(11-12)^2$$

= 56 ஆகும்.

∴ பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = (மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை) − (பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை)

$$= 178-56=122.$$

குழுவின் உருவ அளவு 12 என்பதால் மொத்த விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி =12—1 = 11 ஆகும்.

பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 3 என்பதால், பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி

$$= 3-1 = 2$$

∴ பிழைகளின் விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுபடி = 11−2=9

எனவே,

$$\left.\begin{array}{r}\text{பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்}\\ \text{களின் சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{56}{2} = 28{\cdot}00$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின்}\\ \text{சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{122}{9} = 13{\cdot}56$$

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு பட்டியல்

பட்டியல் 14–5.

வேறு பாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க் கங்களின் கூட் டுத் தொகை	சமன் பாட்டுப் படி	விலக்க வர்க்கங் களின் சராசரி
பிரிவுகள்	56	2	28·00
பிழைகள்	122	9	13·56
மொத்தம்	178	11	...

சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F = \frac{\text{பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{28{\cdot}00}{13{\cdot}56}$$

$$= 2{\cdot}07$$

F-ன் பரவல் (2,9) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F–பரவலாகும். 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால் கணக்கிட்ட F–ன் மதிப்பை, (2, 9) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F–பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K=4{\cdot}26$ உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு கணக்கிடப்பட்ட F–ன் மதிப்பு K-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என 5%

மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்யலாம். எனவே, A_1, A_2, A_3 எனும் பிரிவுகளின் சர்க்கரை விற்பனைக்கான சராசரி மதிப்புகள் சமமானவை என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

A, B, C, D, எனும் நான்கு நிறுவனங்கள் தயார் செய்த மின் விளக்குக் குவியல்களிலிருந்து முறையே 4, 5, 6, 5 மின் விளக்குகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவைகள் எரிந்த நேரங்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 14-6.

நிறுவனங்கள்

A	B	C	D
1020	1020	1030	1050
1030	1030	1020	1050
1020	1040	1010	1040
1010	1020	1020	1060
	1040	1010	1050
		1030	

இம் மதிப்புகள் வாயிலாக, நிறுவனங்கள் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் எரியும் நேரத்தைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்வோம்.

கொடுக்கப் பட்டுள்ள மதிப்புகளை X-மதிப்புகளாகப் பின் வருமாறு உருமாற்றுவதன் மூலம் மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வை எளிதில் கையாளலாம்.

$$X = \frac{\text{கொடுக்கப் பட்டுள்ள மதிப்பு} - 1000}{10}$$

உரு மாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கள் பின் வரும் அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன.

பட்டியல் 14-7.

	A	B	C	D
	2	2	3	5
	3	3	2	5
	2	4	1	4
	1	2	2	6
		4	1	5
			3	
கூட்டுத் தொகை	8	15	12	25
சராசரி	2	3	2	5

முதலில் ஆய்வில் இடம் பெறும் A, B, C, D, எனும் நிறுவனங்கள் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் எரியும் நேரத்தைப் பொறுத்த வரையில் சமமானவை அதாவது ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப் பட்ட நான்கு கூறு சராசரிகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். பிறகு, உருமாற்றப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் ஒன்றை அமைப்போம்.

இப்போது நான்கு கூறுகளையும் ஒரு குழுவாகக் கொள்ளும் போது குழுவின் உருவ அளவு 20 ஆகும்.

$$\text{குழுவின் சராசரி} = \frac{8 + 12 + 15 + 25}{20}$$

$$= 60/20 = 3$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= (2-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2$

$+ (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2$

$+ (3-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2$

$+ (1-3)^2 + (3-3)^2$

$+ (5-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 (6-3)^2$

$+ (5-3)^2 = 41$

A, B, C, D நிறுவனங்கள் தயார் செய்த மின் விளக்கு கூறுகளின் சராசரிகள் முறையே 2, 3, 2, 5 ஆகின்றன. எனவே, நிறுவனங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= 4(2-3)^2 + 5(3-3)^2 + 6(2-3)^2 + 5(5-3)^2$

= 30 ஆகும்.

∴ பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = (மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை) − (நிறுவனங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை)

= 41 − 30 = 11

பட்டியல் 14-8.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சமன்பாட்டுப் படி	விலக்க வர்க்க கங்களின் சராசரி
நிறுவனங்கள்	30	3	10·00
பிழைகள்	11	16	0·69
மொத்தம்	41	19	—

சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F = \frac{\text{நிறுவனங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{10.00}{0.69}$$

$$= 14.49$$

F-ன் பரவல் (3, 16) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலாகும். 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தின் சோதனையை மேற்கொள்வதால் கணக்கிட்ட F-ன் மதிப்பை (3, 16) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 1% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 5.29$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். F–ன் மதிப்பு K-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செயவோம். எனவே, A, B, C, D எனும் நிறுவனங்கள் தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் எரியும் நேரத்தைப் பொறுத்த வரையில் வேறுபடுகின்றன என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில உய்த்துணரலாம்.

இருவழிப் பாகுபாடு (Two way Classifcation)

A எனும் காரணியின் K பிரிவுகள் $A_1, A_2 \ldots A_k$ எனவும், B எனும் காரணியின் r பிரிவுகள் $B_1, B_2 \ldots B_r$ எனவும் கொள்வோம். இப்போது இவ்விரு காரணிகளின் கலப்புப் பிரிவுகள் $(A_1\ B_1)$, $(A_2\ B_2) \ldots (A_1\ B_r)$, ... $(A_k\ B_1)$, $(A_k\ B_2) \ldots (A_k\ B_r)$ ஆகின்றன. ஒவ்வொரு கலப்புப் பிரிவிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மதிப்பு அடுத்த பக்கத்தில் உளள அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன.

இப்புள்ளி விவரங்களை இருவழிப் பாகுபாடு விவரங்கள் என அழைக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் வாயிலாக (i) $A_1, A_2, \ldots A_k$ பிரிவுகளின் சராசரிகள் தங்களுக்குள் வேறுபடுகின்றனவா எனவும், (ii) $B_1, B_2 \ldots B_r$ பிரிவுகளின் சராசரிகள் தங்களுக்குள் வேறுபடுகின்றனவா எனவும் சோதனை செய்து உய்த்துணர கீழ்க்காணும் வழி முறைகளைக் கையாளுகிறோம்.

பட்டியல் 14-9.

A காரணி

		A_1	A_2	A_3	…	…	…	…	A_K
	B_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	…	…	…	x_{1K}
B காரணி	B_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	…	…	…	x_{2K}
	B_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	…	…	…	x_{3K}
	⋮	⋮	⋮	⋮					⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮					⋮
	B_r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}	…	…	…	…	x_{rK}

முதலில்,

(i) A_1, A_2 … A_k பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவை

(ii) B_1, B_2 … B_r பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவை

எனும் இரு சோதனை எடுகோள்களை அமைத்துக் கொள்கிறோம். அதாவது A_1 பிரிவின் சராசரியான $\overline{a_1}$, A_2 பிரிவின் சராசரியான $\overline{a_2}$, … … … A_k பிரிவின் சராசரியான $\overline{a_k}$ ஆகியவைகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனவும், B_1 பிரிவின் சராசரியான $\overline{b_1}$, B_2 பிரிவின் சராசரியான $\overline{b_2}$……B_r பிரிவின் சராசரியான $\overline{b_r}$ ஆகியவைகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனவும் கொள்கிறோம்.

அடுத்து, மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை, A காரணியின் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி (Mean squares between classes of factor A), B காரணியின் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி (Mean squares between classes of factor B), பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி (Mean squares due to Errors) ஆகியவைகளின் துணை கொண்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் ஒன்றை அமைக்கிறோம்.

சோதனையில் இடம் பெறும் K_r மதிப்புகளை ஒரு குழுவாகக் கொள்ளும் போது அக் குழுவின் சராசரியை $\bar{x}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2 \text{ ஆகும்.}$$

பட்டியல் 14–10.

	A_1	A_2	... ...	A_k	சராசரி
B_1	x_{11}	x_{12}	... ...	x_{1k}	$\bar{b}_1$
B_2	x_{21}	x_{22}	... ...	x_{2k}	$\bar{b}_2$
B_3	x_{31}	x_{32}	... ...	x_{3k}	$\bar{b}_3$
⋮					
⋮					
⋮					
B_r	x_{r1}	x_{r2}	... ...	x_{rk}	$\bar{b}_r$
சராசரி	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	... ...	$\bar{a}_k$	$\bar{x}$

$A_1\ A_2 \ldots A_k$ பிரிவுகளைச் சார்ந்த கூறு சராசரிகள் முறையே $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_k$ எனக் குறிப்பிடுகிறேம். இவைகள் முறையே 1ஆவது, 2ஆவது, ... Kஆவது நிரல்களில் உள்ள மதிப்புகளின் சராசரிகளாகும். $B_1, B_2 \ldots B_r$ பிரிவுகளைச் சார்ந்த கூறு சராசரிகள் முறையே $\overline{b_1}, \overline{b_2} \ldots \overline{b_r}$ எனக் குறிப்பிடுகிறேம். இவைகள் முறையே 1ஆவது, 2ஆவது, 3 ஆவது ... r ஆவது நிரைகளில் உள்ள மதிப்புகளின் சராசரிகளாகும்.

இப்போது,

$$\left.\begin{array}{r}A \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான} \\ \text{விலக்க வர்க்கங்களின்} \\ \text{கூட்டுத் தொகை}\end{array}\right\} = r \sum_{j=1}^{k} (\bar{a}_j - \bar{x})^2$$

$$\left.\begin{array}{c}B \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான} \\ \text{விலக்க வர்க்கங்களின்} \\ \text{கூட்டுத் தொகை.}\end{array}\right\} = K \sum_{i=1}^{r} (\bar{b}_i - \bar{x})^2$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{பிழைகளுக்கான} \\ \text{விலக்க வர்க்கங்} \\ \text{களின் கூட்டுத்} \\ \text{தொகை}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}(\text{மொத்த விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}) \\ -(A \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}) \\ -(B \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை})\end{array}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2 - r \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2$$

$$- k \sum_{i=1}^{r} (b_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{a}_j - \bar{b}_i + \bar{x})^2 \text{ ஆகும்.}$$

குழுவின் உருவ அளவு $k\,r$ ஆக அமைவதால் மொத்த விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப் படி $(Kr-1)$ ஆகவும், A பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை K என்பதால் அப் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன் பாட்டுப்படி $(K-1)$ ஆகவும், B பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை r என்பதால், அப் பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங் களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி $(r-1)$ ஆகவும் அமையும். எனவே பிழைகளின் விலக்க வர்க்கங்களுக்குகான சமன்பாட்டுப்படி

$$= (Kr-1) - (K-1) - (r-1)$$

$$= (K-1)\ (r-1)$$

இப்போது,

$$\left.\begin{array}{c}A \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான} \\ \text{விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}\end{array}\right\} = \frac{A \text{ பிரிவுகளுககிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}}{A \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக் கான சமன்பாட்டுப்படி}}$$

$$= \frac{r \sum_{j=1}^{k} (\bar{a}_j - \bar{x})^2}{(K-1)}$$

B பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி } = B பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை / B பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்கவர்க்கங்களுக்கான சமன் பாட்டுப்படி

$$= \frac{K \sum_{i=1}^{r} (\bar{b}_i - \bar{x})^2}{(r-1)}$$

பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி } = பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை / பிழைகளின் விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன் பாட்டுப்படி

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{a}_j - \bar{b}_i + \bar{x})^2}{(k-1)(r-1)}$$

கணக்கிட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியலை அடுத்தபக்கத்தில் கண்டவாறு அமைப்போம்.

இப்போது A பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_1 = \frac{A\text{–பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்கங்களின் சாரசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{S_A^2/(K-1)}{S_E^2/(K-1)(r-1)}$$

இங்கு F_1-ன் பரவல் $[(K-1), (K-1)(r-1)]$ ஆகியவைகளைச் சமன் பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலாகும்.

F–ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

பட்டியல் 14-11.

வேறுபாடு களின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சமன் பாட்டுப் படி	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
A பிரிவுகள்	$S_A^2 = r\sum_{j=1}^{k}(\bar{a}_j-\bar{x})^2$	$(K-1)$	$S_A^2/K-1.$
B பிரிவுகள்	$S_B^2 = k\sum_{i=1}^{r}(\bar{b}_i-\bar{x})^2$	$(r-1)$	$S_B^2/r-1$
பிழைகள்	$S_E^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{a}_j-\bar{b}_i+\bar{x})^2$	$(K-1)$ $(r-1)$	$S_E^2/(K-1)$ $(r-1)$
மொத்தம்	$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x})^2$	...	...

$\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற் கொள்ளும் போது [$(K-1)$, $(K-1)$ $(r-1)$] ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ் வதற்கான அட்டவணை மதிப்பு K_1ஐப் பெற்று கணக்கிட்ட F_1-ன் மதிப்பை K_1-உடன் ஒப்பிட வேண்டும். F_1-ன் மதிப்பு K_1-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக அமையும் போது சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். அதாவது A பிரிவுகளின் சராசரிகள் வேறுபடு கின்றன என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணர லாம். F_1-ன் மதிப்பு K_1-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமையும் போது சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ள தக்கது என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்கிறோம். அதாவது A பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவை என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

B பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமானவை எனும் சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_2 = \frac{B \text{ பிரிவுகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{S_B^2/(r-1)}{S_E^2/(K-1)(r-1)}$$

இங்கு F_2-ன் பரவல் $[(r-1), (K-1)(r-1)]$ ஆகியவை களைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F-பரலாகும். F_2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற் கொள்ளும் போது $[(r-1), (K-1)(r-1)]$ ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் $\alpha\%$ நிகழ் தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு K_2 ஐப் பெற்று கணக்கிட்ட F_2-ன் மதிப்பை K_2-உடன் ஒப்பிட வேண்டும். F_2-ன் மதிப்பு K_2-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக அமையும்போது, சோதனை எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை வரையில் முடிவு செய்யலாம். அதாவது B பிரிவுகளின் சராசரிகள் வேறுபடுகின்றன என $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த் துணரலாம். F_2-ன் மதிப்பு K_2-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமையும் போது $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை எடுகோளை ஏற்று, B பிரிவுகளின் சராசரிகள் சமமானவை என உய்த்துணரலாம்.

நான்கு விற்பனையாளர்களுள் ஒவ்வொருவரும் மூன்று மாவட்டங்களில் விற்பனை செய்த சரக்குகளின் மதிப்புகளைப் பற்றிய ஒரு மாத புள்ளி விவரங்கள் (ஆயிரம் ரூபாய்களில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 14-12.

விற்பனையாளர்கள்

		A_1	A_2	A_3	A_4
மாவட்டங்கள்	B_1	3	7	3	3
	B_2	8	5	4	7
	B_3	10	6	8	8

இப் புள்ளி விவரங்கள் வாயிலாக சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்து விற்பனையாளர்களுக்கிடையே வேறுபாடு உள்ளதா எனவும், மாவட்டங்களுக்கிடையே வேறுபாடுள்ளதா எனவும், 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வோம்.

முதலில்,

(i) விற்பனையாளர்களுக்கிடையே சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்த வரையில் எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை, அதாவது ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட நான்கு விற்பனையாளர் களின் விற்பனை மதிப்புகளுக்கான சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகையானதல்ல எனவும்

(ii) மாவட்டங்களுக்கிடையே, சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்தவரையில் எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை. அதாவது ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட மூன்று மாவட்டங்களது விற்பனை மதிப்புகளான சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறு பாடு மிகையானதல்ல எனவும்

இரு சோதனை எடுகோள்களை அமைத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து, மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, விற்பனையாளர்களுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, மாவட்டங்களுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி ஆகியவை களைக் கணக்கிட்டு மாறுபாட்டுப் பாகுப்பாய்ப்வு பட்டியலை அமைப்போம்.

பட்டியல் 14-13.

	A_1	A_2	A_3	A_4	கூட்டுத் தொகை	சராசரி
B_1	3	7	3	3	16	4
B_2	8	5	4	7	24	6
B_3	10	6	8	8	32	8
கூட்டுத் தொகை	21	18	15	18	72	—
சராசரி	7	6	5	6	—	—

12 மதிப்புகளைக்கொண்ட குழுவின் சராசரி

$$= \frac{72}{12} = 6$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (3-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2$$
$$+ (6-6)^2 + (3-6)^2 + (4-6)^2 + (8-6)^2 + (3-6)^2$$
$$+ (7-6)^2 + (8-6)^2$$
$$= 62.$$

A_1, A_2, A_3, A_4 எனும் விற்பனையாளர்களின் சராசரி விற்பனை மதிப்புகள் முறையே 7, 6, 5, 6 ஆகின்றன. ஒவ்வொரு கூறின் உருவ அளவும் 3 ஆக இருப்பதால், விற்பனை யாளர்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$$= 3\,[(7-6)^2 + 3\,(6-6)^2 + 3\,(5-6)^2 + 3\,(6-6)^2]$$
$$= 6.$$

B_1, B_2, B_3 எனும் மாவட்டங்களின் சராசரி விற்பனை மதிப்புகள் முறையே 4, 6, 8 ஆகின்றன. இங்கு ஒவ்வொரு கூறின் உருவ அளவும் 4 ஆக இருப்பதால் மாவட்டங்களுக் கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 4\,(4-6)^2 + 4\,(6-6)^2 + 4\,(6-8)^2$$
$$= 32.$$

பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = (மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை)

— (விற்பனையாளர்களுக்கிடையே யான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை)

— (மாவட்டங்களுக்கிடையே யானவிலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$= 62 - 6 - 32 = 24.$$

குழுவின் உருவ அளவு 12 என்பதால் மொத்த விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி 12—1=1 ஆகவும், விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை 4 என்பதால் விற்பனையாளர்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி 3 ஆகவும், மாவட்டங்களின் எண்ணிக்கை 3 என்பதால் மாவட்டங்களுக்கிடையேயான வர்க்கங்களுக்கான சமன்பாட்டுப்படி 2 ஆகவும் அமையும். எனவே பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களுக்கானசமன்பாட்டுப்படி 6 எனக் கணக்கிட்டுப் பெறலாம்.

∴ விற்பனையாளர்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி $\Big\} = \frac{6}{3} = 2$

∴ மாவட்டங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி $\Big\} = \frac{32}{2} = 16$

∴ பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி $\Big\} = \frac{24}{6} = 4$

பட்டியல் 14-14.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	சமன் பாட்டுப் படி	விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி
விற்பனையாளர்கள்	6	3	
மாவட்டங்கள்	32	2	16
பிழைகள்	24	6	4
மொத்தம்	62	11	—

இப்போது, சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்தவரையில் விற்பனையாளர்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை எனும் சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி,

$$F_1 = \frac{\text{விற்பனையாளர்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{2}{4} = 0.50.$$

F_1-ன் பரவல் (3,6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால் கணக்கிட்ட F_1-ன் மதிப்பை (3,6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K_1 = 4{\cdot}76$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். F_1-ன் மதிப்பு K_1-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமைவதால் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை எடுகோளை ஏற்று, சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்தவரையில் விற்பனையாளர்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை என உய்த்துணரலாம்.

சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்தவரையில் மாவட்டங்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை எனும் சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_2 = \frac{\text{மாவட்டங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{16}{4}$$

$$= 4.$$

F_2-ன் பரவல் (2, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால் F_1-ன் மதிப்பை, (2, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K_2 = 5{\cdot}14$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். F_2-ன் மதிப்பானது K_2-ன் மதிப்பைவிடக் குறைவாக அமைவதால் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை எடுகோளை ஏற்று, சரக்கு விற்பனையைப் பொறுத்தவரையில் விற்பனையாளர்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை என உய்த்துணரலாம்.

ஒரு பஞ்சாலையில் M_1, M_2, M_3 எனும் மூன்று நூல் நூற்கும் இயந்திரங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் V_1, V_2, V_3 எனும் மூவகைப் பஞ்சுகொண்டு நூற்ற நூல்களின் இழு பலத்திற்கான புள்ளி விவரங்கள் (உருமாற்றிய மதிப்புகளில்) கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

பட்டியல் 14-15.

		இயந்திரங்கள்		
		M_1	M_2	M_3
பஞ்சு	V_1	6	5	4
வகைகள்	V_2	15	10	8
	V_3	15	15	12

இம் மதிப்புகள் வாயிலாக நூல்களின் இழு பலமானது (i) இயந்திரங்களிடையே வேறுபாடுள்ளதா எனவும், (ii) பஞ்சு வகைகளுக்கிடையே வேறுபட்டுள்ளனவா எனவும் 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வோம்.

முதலில்

(i) நூல்களின் இழு பலத்தைப் பொறுத்தவரையில், இயந்திரங்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை.

(ii) நூல்களின் இழுபலத்தைப் பொறுத்தவரையில் பஞ்சு வகைகளுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை எனும் இரு சோதனை எடுகோள்களை அமைத்துக்கொள்வோம்.

அடுத்து மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை இயந்திரங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, பஞ்சு வகைகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி, ஆகியவைகளைக் கணக்கிட்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் அமைக்கிறோம்.

பட்டியல் 14-16.

	M_1	M_2	M_3	சராசரி
V_1	6	5	4	5
V_2	15	10	8	11
V_3	15	15	12	14
சராசரி	12	10	8	—

9 மதிப்புகளைக்கொண்ட குழுவின் சராசரி

$$= \frac{90}{9} = 10.$$

இப்போது, மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்

தொகை $= (6-10)^2 + (15-10)^2 + (15-10)^2$

$+ (5-10)^2 + (10-10)^2 + (15-10)^2 + (4-10)^2$

$+ (8-10)^2 + (12-10)^2 = 160.$

இயந்திரங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 3\,(12-10)^2 + 3\,(10-10)^2 + 3\,(8-10)^2$

$= 24.$

பஞ்சு வகைகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 3\,(5-10)^2 + 3\,(11-10)^2 + 3\,(14-10)^2$

$= 126$

பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= 160-24-126 = 10$

பட்டியல் 14-17.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	சமன்பாட்டு படி	வர்க்கங்களின் சராசரி
இயந்திரங்கள்	24	2	12·00
பஞ்சு வகைகள்	126	2	63·00
பிழைகள்	10	4	2·50
மொத்தம்	160	8	—

முதல் சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_1 = \frac{\text{இயந்திரங்களுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{12.00}{2.50}$$

$$= 4.80.$$

F_1-ன் பரவல் (2, 4) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால், F_1-ன் மதிப்பை (2, 4) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 1% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K_1 = 18$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். F_1-ன் மதிப்பு K_1-ன் மதிப்பைவிட குறைவாக அமைவதால் சோதனை எடுகோளை ஏற்று, நூல்களின் இழுபலத்தைப் பொறுத்தவரையில் இயந்திரங்களுக்கிடையே எவ்வித வேறுபாடும் இல்லை என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

இரண்டாவது சோதனை எடுகோளைச் சோதித்தற்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_2 = \frac{\text{பஞ்சு வகைகளுக்கிடையேயான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{63{\cdot}00}{2{\cdot}50}$$

$$= 25{\cdot}20.$$

F_2-ன் பரவல் (2, 4) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால் F_2-ன் மதிப்பை (2, 4) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலின் 1% நிகழ்த்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K_2 = 18$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். F_2-ன் மதிப்பு K_2-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக அமைவதால் நூல்களின் இழுபலத்தைப் பொறுத்த வரையில் பஞ்சு வகைகள் வேறுபடுகின்றன என உய்த்துணரலாம்.

செய்முறைத் திட்டங்கள்

சோதனைகளை அமைத்து அவைகளின் அடிப்படையில் முடிவுகளைப் பெற முற்படும்போது, சோதனைகளின் அமைப்பு பற்றி திட்டமிட்ட முறை சரியானபடி அமையாவிடில் நல்ல முடிவுகளைப் பெறமுடியாது. எனவே, சோதனைகளைச் சீரிய முறையில் அமைத்தல் என்பது கவனம் செலுத்தப்பட வேண்டியதொன்றாகும். புள்ளியியல் முறைகள் சோதனைகளை நல்ல முறையில் அமைத்தற்குத் துணைபுரியும் தன்மை வாய்ந்தவை. இப்புள்ளியியல் முறைகளைக்கொண்டு அமைக்கப்படும் சோதனை வகைகள் ''செய்முறைத் திட்டங்கள்'' என வழங்கப்படுகின்றன.

A, B எனும் இரு நெல்வகைகளின் விளைச்சல் தன்மையை ஒப்பிடும் பொருட்டு, சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்படுகிறது எனக்கொள்வோம். ஓர் ஏக்கர் பரப்புள்ள இரண்டு நிலக்கூறுகளில் இவ்விரு நெல் வகைகளைப் பயிரிட்டபோது கிடைத்த விளைச்சல் விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. A வகையின் விளைச்சல் B வகையின் விளைச்சலைவிட அதிகமாக இருக்குமெனில், A வகை நெல்லானது B வகை நெல்லைவிட விளைச்சல் தன்மையில் மேலானது என முடிவு கொள்வது சரியா என்பதை ஆராய முற்படுகிறோம்.

இரு நெல் வகைகளின் தரமும் சமமாக அமைந்த போதிலும், அவைகள் பயிரிடப்பட்ட நிலக் கூறுகளது வளத் தன்மை வேறுபாடு காரணமாக விளைச்சலில் வித்தியாசம் ஏற்பட்டிருக்கலாம். மேலும், நிலங்களுக்குப் பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவு, பயிரிடும் முறைகள், உழுதலின் ஆழம், நிலங் களுக்கிட்ட உரங்களின் தரம், மழை பொழிவு போன்ற காரணிகள் விளைச்சலை வேறுபடுத்தியிருக்க வாய்ப்புண்டு. எனவே, விளைச்சல் வித்தியாசத்தைக் கண்டவுடன் A வகை யானது B வகையைவிட தரத்தில் உயர்ந்தது என முடி வெடுப்பது தவருனதாகும். ஆனல், ஒரே வளத்தன்மையைப் பெற்றுள்ள இரு நிலக்கூறுகளில் இவ்விரு நெல்வகைகளைப் பயிரிட்டு, பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவு, பயிரிட்ட முறை, உழுத ஆழம், இட்ட உரங்களின் தரம், மழைபொழிவு போன்றவைகள் ஒரே வண்ணம் அமையும்படி சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது A வகையின் விளைச்சல் B வகையின் விளைச்சலைக்காட்டிலும் அதிகமாக அமையுமெனில், A வகை நெல்லானது விளைச்சல் தன்மையில் உயர்ந்தது என முடிவு கொள்ளலாம்.

மேற்கண்ட சோதனையில் விளைச்சலானது, நெல்லின் வகை, நிலவளம், பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவு, பயிரிடும் முறை, உழுத ஆழம், இட்ட உரங்களின் தரம், மழை அளவு போன்ற பல காரணிகளைச் சார்ந்துள்ளது. இக்காரணி களுள் நெல்லின் வகை ஏற்படுத்திய விளைவு ஆய்வுக்கு எடுத் துக் கொள்ளப்பட்டது. எனவே நெல் வகையைச் சோதனைக் காரணி (Experimental Factor) என வழங்குகிறோம். சோத னையை மேற்கொள்ளும் பொருட்டு பயன்படுத்தும் இருநிலக் கூறுகளைச் சோதனை உறுப்புகள் (Experimental unit) எனவும், சோதனையின் போது பெற்ற விளைச்சலை சோதனையின் விளைவு (Response) எனவும் அழைக்கிறோம். சோதனைகளை மேற்கொள் ளும்போது, சோதனையில் மற்ற காரணிகளின் பாதிப்பைக் கட்டுப்படுத்திச் சோதனைக் காரணியானது சோதனை உறுப்பு களில் ஏற்படுத்தும் விளைவைத் துல்லிய முறையில் பெற 'செய் முறைத் திட்டங்கள்' துணைபுரிகின்றன.

சோதனையின்போது பெறும் புள்ளி விவரங்கள் சோதனைக் காரணியின் விளைவை மட்டும் வெளிப்படுத்தும் வகையில் சோதனையை அமையச்செய்வது செய்முறைத் திட்டத்தின் முக்கிய பணியாகும். நடைமுறையில் சோதனைக் காரணியைத்

தவிர மற்ற காரணிகள் சோதனையில் ஏற்படுத்தும் பாதிப்பை முழுமையாகக் கட்டுப்படுத்துதல் என்பது இயலாததொன்று கும். மேலும் சோதனைக்கு அப்பாற்பட்ட சில வெளிக்காரணி களும் சோதனையைப் பாதிக்க வாய்ப்புண்டு. இத்தகைய காரணிகள் சோதனைப் புள்ளி விவரங்களில் விளைவிக்கும் வேறு பாடுகளை ''சோதனைப்பிழை'' (Experimental Error) என வழங்குகிறோம்.

சோதனைகளின் போது பெறும் சோதனைப் புள்ளி விவரங்கள் ஒருதலைத் தன்மையைப் பெறுததாகவும், சோதனைப் பிழைக்கு ஏற்ற மதிப்பீட்டைத் வரும் வண்ணமும் செய்முறைத் திட்டத்தை அமைக்கவேண்டும். 'சமவாய்ப்பாக்குதல்'' (Randomization) எனும் கொள்கை இந்நோக்கிற்கு உறுதுணையாக அமைகிறது. சமவாய்ப்பாக்குதல் என்பது சோதனைக் காரணியைச் சோதனை உறுப்புகளுக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் வழங்குதலைக் குறிக்கின்றது. அதாவது ஒவ்வொரு சோதனை உறுப்பும் சோதனைக்காரணியைப் பெறுதற்கான வாய்ப்பானது சமமானதாக அமையவேண்டும்.

A, B எனும் இரு நெல் வகைகளின் விளைச்சல் தன்மையை ஒப்பிடுதற்கு ஒரே வளத்தன்மையைப் பெற்றுள்ள இரு நிலக் கூறுகளில் இந்நெல்வகைகள் பயிரிடப்பட்டன எனவும், சோதனைக் காரணியைத் தவிர மற்ற காரணிகள் கட்டுப் படுத்தப்பட்டன எனவும் கொள்ளும்போது, A வகையின் விளைச்சல் B வகையின் விளைச்சலைவிட அதிகமாக அமைகிறது எனக்கொள்வோம். சோதனையின்போது கட்டுப்படுத்த இய லாத காரணிகள் விளைச்சலில் வித்தியாசத்தை ஏற்படுத்தி யிருக்க வாய்ப்புண்டு. எனவே, விளைச்சல் வித்தியாசத்தைக் கொண்டு A வகையானது விளைச்சல் தன்மையில் உயர்ந்தது என முடிவு செய்யுமுன் இவ் வித்தியாசமானது கட்டுப்படுத்த இயலாத காரணிகளால் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடுமா என ஆராய வேண்டும். இந் நோக்கிற்கு விளைச்சல் விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் பயன்படுகிறது. மேற்கண்ட சோதனையில் A வகையின் ஒரு விளைச்சல் மதிப்பும், B வகையின் ஒரு விளைச்சல் மதிப்பும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு வகைக்கான ஒரு விளைச்சல் மதிப்பை மட்டும் கொண்டு விளைச்சல் விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைப்பெற இயலாதாகையால், பல விளைச்சல் மதிப்புக் களை பெறும் வண்ணம் சோதனையை அமைக்க வேண்டும். சோதனையை பல முறைகள் மேற் கொள்வதன் மூலம் பல விளைச்சல் மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இங்ஙனம் ஒரு சோதனை

யைப் பல முறைகள் மற்கொள்ளுதலானது "திரும்பச் செய்தல்" (Replication) என வழங்கப்படுகிறது.

முழுதும் சமவாய்ப்பாக்கப்பட்ட திட்டம் (Completely Randomised Design):

A, *B*, *C*, *D* எனும் நான்குவகைச் சோளங்களை அவைகளின் விளைச்சல்தன்மை கொண்டு ஒப்பிட்டு நோக்க சோதனை ஒன்றை அமைப்பதாகக்கொள்வோம். இச்சோதனையை நடத்த ஓர் ஏக்கர் பரப்புள்ள 11 நிலக் கூறுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்நிலக் கூறுகள் யாவும் வேறுபாடு ஏது மின்றி ஒரே தன்மையைப் பெற்றிருப்பின் "முழுதும் சம வாய்ப்பாக்கப்பட்ட திட்டத்தைக்" கையாளுதல் ஏற்றது. *A* வகையை இரு நிலக்கூறுகளிலும், *B* வகையை 4 நிலக் கூறுகளிலும், *C* வகையை மூன்று நிலக் கூறுகளிலும், *D* வகையை இரு நிலக் கூறுகளிலும் பயிரிட்டுச் சோதனையை மேற்கொள்வதாகக் கொள்வோம். சோதனையை நடத்து வதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் பதினொன்று நிலக்கூறுகள் ஒவ் வொன்றிலும் ஒவ்வொரு சோள வகையைச் சம வாய்ப்புடன் பயிரிடும்படி அமைப்பதுதான் இத்திட்டத்தின் தனிச் சிறப்பு. இப்போது நிலக்கூறுகளை 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 எனும் எண்கள் கொண்டு குறிப்பிடுவோம். ராண்டம் எண்கள் அட்டவணையிலிருந்து மூன்று இலக்க எண்களை எடுத்துக் கொண்டு, அந்த எண்களை 11 ஆல் வகுக்கும்போது பெறும் மீதிகளின் அடிப்படையில் நிலக் கூறுகளுக்குச் சோள வகைகளை வழங்குவோம். ராண்டம் அட்டவணையிலிருந்து எடுத்துக்கொண்ட மூன்று இலக்க எண்கள் கீழே இடம் பெறு கின்றன.

237	125	186	009
802	645	153	469
839	325	578	611
105	054	824	370
940	906	092	429
555	597	457	
838	411	892	

இவைகள் ஒவ்வொன்றையும் 11 ஆல் வகுக்கும்போது பெறும் மீதிகள் முறையே,

6, 10, 3, 6, 8, 5, 5, 2, 4, 7, 6, 10, 4, 3, 3,

10, 10, 6, 10, 4, 6, 1, 9, 7, 6, 7, 0.

ஆக அமைகின்றன. இவ்வரிசையில் 0 முதல் 10 வரையான எண்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே ஒரு முறை இடம் பெறும்படி அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

6, 10, 3, 6̸, 8, 5, 5̸, 2, 4, 7, 6̸, 10̸, 4̸, 3̸, 3̸

10̸, 10̸, 6̸, 10̸, 6̸, 1, 9, 7̸, 6̸, 7̸, 0.

இப்போது இவ்வெண்களைக்கொண்டு 6, 10 ஆகிய இரு நிலக் கூறுகளில் சோளவகை *A*ஐயும், 3, 8, 5, 2ஆகிய நிலக் கூறுகளில் சோள வகை *B*ஐயும், 4, 7, 1 ஆகிய நிலக் கூறுகளில் சோள வகை *C*ஐயும், 9, 11 ஆகிய நிலக் கூறுகளில் சோள வகை *D*ஐயும் பயிரிடும்படி திட்டம் அமைக்கப்படுகிறது. இத்திட்டத்தை "முழுதும் சம வாய்ப்பாக்கப்பட்ட திட்டம்" என வழங்குகிரேம்.

மேற்கண்ட திட்டத்தைக் கையாண்டு பெற்ற விளைச்சல் விவரங்களை "ஒரு வழிப்பாகுபாடு" முறைகொண்டு ஆராய்ந்து நான்கு சோள வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா என முடிவு செய்யலாம்.

மேலே கூறிய முறையில் செய்முறைத் திட்டத்தை அமைத்துச் சோதனையை மேற்கொண்டபோது பெற்ற விளைச்சல் புள்ளி விவரங்கள் பின் வருமாறு :

பட்டியல் 14-18.

A	*B*	*C*	D
98	88	104	116
102	92	106	104
	90		110
	90		

இவ்விளைச்சல் விபரங்களைக்கொண்டு நான்கு சோள வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையைப் பொறுத்தவரையில் வேறுபடுகின்றனவா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்வோம்.

இங்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட நான்கு சோள வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையைப் பொறுத்தவரையில் வேறுபாடற்றவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்வோம். அடுத்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள விளைச்சல் புள்ளி விவரங்களைக்கொண்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் ஒன்றை அமைப்போம்.

பட்டியல் 14-19.

	A	*B*	*C*	*D*
	98	88	104	116
	102	92	106	104
		90		110
		90		
மொத்தம்	200	360	210	330
சராசரி	100	90	105	110

இப்போது 11 விளைச்சல் மதிப்புக்களின்

$$\text{சராசரி} = \frac{200+360+210+330}{11}$$

$$= 100.$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (98-100)^2 + (102-100)^2 + (88-100)^2 + (92-100)^2 + (90-100)^2 + (90-100)^2 + (104-100)^2 + (106-100)^2 + (116-100)^2 + (104-100)^2 + (110-100)^2$$

$$= 840.$$

சோள வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 2(100-100)^2 + 4(90-100)^2 + 2(105-100)^2 + 3(110-100)^2$$

$$= 750$$

பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

= மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

— சோள வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 840-750$$

$$= 90.$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கான சமன்பாட்டுப்படி $=11-1=10$

சோள வகை விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக் கான சமன்பாட்டுப்படி $=4-1=3$.

∴ பிழை விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கான சமன்பாட்டுப்படி $= 10-3=7$.

இங்கு சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F = \frac{\text{சோள வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{250}{12 \cdot 86}$$

$= 19 \cdot 44$. ஆகும்.

பட்டியல் 14-20.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சமன் பாட்டுப்படி	விலக்க வர்க்கங் களின் சராசரி
சோள வகைகள்	750	3	250
பிழைகள்	90	7	12.86
மொத்தம்	840	10	

இப்போது F-ன் பரவல் (3, 7) ஆகியவைகளைச் சமன் பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்வதால் கணக்கிட்ட F-ன் மதிப்பை (3, 7) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ் தகவுக்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 4.35$ உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு கணக்கிடப்பட்ட F-ன் மதிப்பு K-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்வோம். எனவே, சோள வகைகள் விளைச்சல் தன்மையைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றன என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பு (Randomised Block Design):

சோதனை உறுப்புகள் ஒரே தன்மையானவைகளாக அமையும்போது முழுதும் சமவாய்ப்பாக்கப்பட்ட திட்டத்தை மேற்கொண்டோம். சோதனையில் இடம் பெறும் சோதனை உறுப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட தன்மையில் வேறுபட்டு அமையும்போது அதாவது சோதனை உறுப்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட காரணி வேறுபடுத்தும்போது ''சம வாய்ப்புக் கட்டுத் திட்டத்தின்'' துணை கொண்டு சோதனையை மேற் கொள்ளலாம்.

A, B, C, D எனும் நான்கு கோதுமை வகைகளின் விளைச்சல் தன்மையை ஒப்பிடும் பொருட்டுச் சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்படுகிறது எனவும், இச்சோதனையின் சோதனை] உறுப்புகளான நிலக் கூறுகளை வளத் தன்மையின் அடிப்படையில் F_1,

F_2, F_3 எனும் மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம் எனவும் கொள்வோம். இங்கு சோதனை உறுப்புகளை வளத் தன்மை எனும் காரணி வேறு படுத்துவதால் சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பின் துணை கொண்டு இச்சோதனையை அமைக்கலாம் இப்போது F_1 வகையில் நான்கு நிலக் கூறுகளை எடுத்துக் கொண்டு A, B, C, D எனும் கோதுமை வகைகளை இந்நான்கு நிலக் கூறுகளிலும் சமவாய்ப்பு முறையில் பயிரிடவேண்டும். இது போலவே F_2, F_3 வகைகளில், வகை ஒன்றுக்கு நான்கு நிலக் கூறுகளை எடுத்துக்கொண்டு அவைகளில் கோதுமை வகைகளை சம வாய்ப்பு முறையில் பயிரிட்டு விளைச்சல் விவரங்களைப்பெற வேண்டும். மேலே விவரித்த முறையில் செய்முறைத் திட்டத்தை அமைத்து சோதனையை மேற் கொண்டபோது பெற்ற விளைச்சல் புள்ளி விவரங்கள் பின் வருமாறு:

பட்டியல் 14–21.

		கோதுமை வகைகள்			
		A	B	C	D
நிலவகைகள்	F_1	1	3	3	9
	F_2	6	7	8	11
	F_3	2	5	10	7

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நான்கு கோதுமை வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையில் வேறுபட்டு அமைகின்றனவா என இருவழிப் பாகுபாடு முறை கொண்டு பின் வருமாறு சோதிக்கலாம்:

முதலில் நான்கு கோதுமை வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையில் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். அடுத்து மேலே கொடுக்கப் பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு மாறு பாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் ஒன்றை அமைப்போம்.

பட்டியல் 14-22.

		கோதுமை வகைகள் A	B	C	D	மொத்தம்
நிலவகைகள்	F_1	1	3	3	9	16
	F_2	6	7	8	11	32
	F_3	2	5	10	7	24
மொத்தம்		9	15	21	27	72

இங்கு 12 விளைச்சல் மதிப்புகளின் சராசரி

$$= \frac{72}{12} = 6$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= (1-6)^2 + (3-6)^2 + (3-6)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2$$
$$+ (7-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2 + (2-6)^2 + (5-6)^2$$
$$+ (10-6)^2 + (7-6)^2$$
$$= 116.$$

கோதுமை வகைகளுக்கான சராசரி விளைச்சல் மதிப்புகள்

A வகை $= \frac{9}{3} = 3.$

B வகை $= \frac{15}{3} = 5.$

C வகை $= \frac{21}{3} = 7$

D வகை $= \frac{27}{3} = 9$

கோதுமை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 3\,(3-6)^2 + 3\,(5-6)^2 + 3\,(7-6)^2 + 3\,(9-6)^2$$

$$= 60.$$

நிலவள வகைகளுக்கான சராசரி விளைச்சல் மதிப்புகள்:

$$F_1 \text{ வகை } = \frac{16}{4} = 4.$$

$$F_2 \text{ வகை } = \frac{32}{4} = 8.$$

$$F_3 \text{ வகை } = \frac{24}{4} = 6.$$

நிலவள வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 4\,(4-6)^2 + 4\,(8-6)^2 + 4\,(6-6)^2$$

$$= 32.$$

∴ பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை =

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

— கோதுமை வகைக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

— நிலவள வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 116 - 60 - 32$$

$$= 24.$$

பட்டியல் 14-23.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

வேறுபாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சமன் பாட்டுப்படி	விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி
கோதுமை வகைகள்	60	3	20
நில வகைகள்	32	2	16
பிழைகள்	24	6	4
மொத்தம்	116	11	—

இங்கு சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_1 = \frac{\text{கோதுமை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{20}{4}$$

$$= 5.$$

F_1-ன் பரவல் (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது கணக்கிட்ட F_1-ன் மதிப்பை (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 4.76$ உடன் ஒப்பிட வேண்டும்.

இங்கு $F_1 = 5$ ஆனது 4·76ஐவிட அதிகமாக அமைவதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என முடிவு செய்யலாம். எனவே, கோதுமை வகைகள் விளைச்சல் தன்மையைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றன என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

மேற்கண்ட சோதனையின்போது பெற்ற விவரங்களைக் கொண்டே சோதனை உறுப்புகளான நிலவகைகள் வளத் தன்மையைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும் சோதிக்கலாம். இங்கு நிலவகைகள் வளத்தன்மையைப் பொறுத்து சமமானவை என்பதே சோதனை எடுகோளாக அமையும்.

இச்சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_2 = \frac{\text{நிலவகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{16}{4}$$

$$= 4$$

F_2–ன் பரவல் (2, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது F_2–ன் மதிப்பை (2, 6 ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படிகளாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 5.14$ உடன் ஒப்பிட வேண்டும். இங்கு F_2–ன் மதிப்பு 5·14ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால் நிலவகைகள் வளத்தன்மையைப் பொறுத்து சமமானவை என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

லாடின் வர்க்கம் (Latin Square):

சோதனை உறுப்புகள் ஒரு தன்மையைக் குறித்து வேறுபட்டபோது "சமவாய்ப்பாக்கப்பட்ட கட்டுத்திட்ட அமைப்பின்" துணை கொண்டு சோதனையை மேற்கொண்டோம். சோதனை உறுப்புகள் இரு தன்மைகளைக் குறித்து வேறுபடும்போது மேற்கண்ட அமைப்பின் துணை கொண்டு சோதனையை நடத்த முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, நாம் முன்பு கண்ட A, B, C, D எனும் நான்கு கோதுமை வகைகளின் விளைச்சல் தன்மையைப் பற்றிய சோதனையில், சோதனை உறுப்புகளாகிய நிலக்கூறுகள் நிலவளம், மழைபொழிவு எனும் இரு காரணிகளைக் குறித்து வேறுபட்டு அமையும் போது கட்டுத்திட்ட அமைப்பின் துணைகொண்டு சோதனையை மேற்கொள்ள முடியாது. இங்ஙனம் சோதனை உறுப்புகள் இரு குறிப்பிட்ட காரணிகளைப் பொறுத்து வேறுபட்டு அமையும்போது 'லாடின் வர்க்கத் திட்ட அமைப்பின் துணை கொண்டு சோதனையை மேற்கொள்ளலாம்.

A, B, C, D எனும் நான்கு கோதுமை வகைகள் விளைச்சல் தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா என்பதைச் சோதிப்பதாகக்

கொள்வோம். இச்சோதனைக்குச் சோதனை உறுப்புகளாக அமையும் நிலக்கூறுகளை வளத்தன்மையின் அடிப்படையில் F_1, F_2, F_3, F_4 எனும் நான்கு வகைகளாகவும், மழை பொழி வின் அடிப்படையில் R_1, R_2, R_3, R_4 எனும் நான்கு வகைகளாக வும் பிரிக்கலாம் எனக் கொள்வோம்.

F_1 வகையில் முறையே R_1, R_2, R_3, R_4 எனும் மழை அளவு களைப் பெறும் நான்கு நிலக்கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது (F_1, R_1), (F_1, R_2), (F_1, R_3), (F_1, R_4) எனும் நான்கு கலவைகளைப் பெறுகிறோம். இது போலவே F_2 வகையில் R_1, R_2, R_3, R_4 எனும் மழையளவுகளைக் கொண்ட நான்கு நிலக்கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் (F_2, R_1), (F_2, R_2), (F_2, R_3), (F_2, R_4) எனும் நான்கு கலவைகளையும், F_3 வகை யில் R_1, R_2, R_3, R_4 எனும் மழையளவுகளைக் கொண்ட நான்கு நிலக்கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் (F_3, R_1), (F_3, R_2), $(F_3, R_3)(F_3, R_4)$, எனும் நான்கு கலவைகளையும் பெறலாம்.

இவ்வாறாக 16 நிலக்கூறுகளைச் சோதனைக்கு எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம்.

இப்போது F_1, F_2, F_3, F_4 ஆகியவைகளை நிரல்களிலும், R_1, R_2, R_3, R_4 ஆகியவைகளை நிரைகளிலும் அமைக்கும்போது பின்வரும் 4×4 அட்டவணையைப் பெறுவோம்.

பட்டியல் 14-24.

	F_1	F_2	F_3	F_4
R_1				
R_2				
R_3				
R_4				

இவ்வட்டவணையில் F_1 எனும் நிரலிலும், R_1 எனும் நிரையிலும் இடம் பெறும் அறை (F_1, R_1) எனும் நிலக் கூறினைக் குறிக்கின்றது. இதுபோலவே F_2 எனும் நிரலிலும், R_4 எனும் நிரையிலும் அமைந்துள்ள அறை (F_2, R_4) எனும் நிலக்கூறினைக் குறிக்கின்றது.

இப்பதினாறு நிலக்கூறுகளுக்கு A, B, C, D எனும் நான்கு விதை வகைகளை ஒவ்வொரு விதை வகையும், ஒவ்வொரு நிரலிலும், ஒவ்வொரு நிரையிலும், ஒரே ஒருமுறை தோன்றும் வண்ணம் சமவாய்ப்பு முறையில் பயிரிட வேண்டும். அதாவது மேற்கண்ட அட்டவணையில் A, B, C, D எனும் நான்கு எழுத்துக்களை ஒவ்வொரு நிரலிலும், ஒவ்வொரு நிரையிலும் ஒவ்வோர் எழுத்தும் ஒரே ஒருமுறை தோன்றும் வண்ணம் பின் வருமாறு அமைக்கவேண்டும்.

பட்டியல் 14-25.

	F_1	F_2	F_3	F_4
R_1	A	B	C	D
R_2	C	D	A	B
R_3	D	A	B	C
R_4	B	C	D	A

A வகை கோதுமையானது (F_1, R_1), (F_3, R_2), (F_2, R_3), (F_4, R_4) முதலிய நிலக்கூறுகளிலும், B வகை கோதுமையானது (F_2, R_1), (F_4, R_2), (F_3, R_3), (F_1, R_4), முதலிய நிலக்கூறுகளிலும், C வகை கோதுமையானது (F_3, R_1), (F_1, R_2), (F_4, R_3), (F_2, R_4) முதலிய நிலக்கூறுகளிலும் D வகை கோதுமையானது (F_4, R_1), (F_2, R_2), (F_1, R_3), (F_3, R_4) முதலிய நிலக்கூறுகளிலும் பயிரிடப்படும்படி சோதனையை அமைக்க வேண்டும் என்பதை மேற்கண்ட அட்டவணை குறிக்கின்றது.

மேலே விவரிக்கப்பட்ட சோதனைத் திட்டமானது 4×4 "லாடின் வர்க்கத் திட்ட அமைப்பு" என வழங்கப்படுகிறது.

பொதுவாக r நிரல்களையும் r நிரைகளையும் கொண்ட ஒரு சதுரத்தில், r உறுப்புகளுள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு நிரலிலும், ஒவ்வொரு நிரையிலும் ஒரே ஒரு முறை தோன்றும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்ட அமைவானது "$r \times r$ லாடின் வர்க்கம்" என வழங்கப்படுகிறது.

A, B, C, D எனும் நான்கு கோதுமை விதை வகைகளின் விளைச்சல் தன்மையைச் சோதிக்க மேலே விவரித்த 4×4 லாடின் வர்க்கத்தை அமைத்து சோதனையை நடத்திய போது கிடைத்த விளைச்சல் விவரங்கள் பின் வருமாறு : (உருமாற்றிய மதிப்புகள்)

பட்டியல் 14–26.

	F_1	F_2	F_3	F_4
R_1	*A* 8	*B* 5	*C* 4	*D* 3
R_2	*C* 6	*D* 2	*A* 5	*B* 3
R_3	*D* 6	*A* 9	*B* 4	*C* 5
R_4	*B* 4	*C* 4	*D* 7	*A* 5

இப்புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு *A, B, C, D* எனும் கோதுமை வகைகள் விளைச்சல் தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா என ஆய்வோம்.

A, B, C, D எனும் நான்கு கோதுமை வகைகளும் விளைச்சல் தன்மையைப் பொறுத்த வரையில் சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். பிறகு சோதனையின்போது பெற்ற புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் ஒன்றை அமைப்போம்.

பட்டியல் 14-27.

	F_1	F_2	F_3	F_4	கூட்டுத் தொகை
R_1	A 8	B 5	C 4	D 3	20
R_2	C 6	D 2	A 5	B 3	16
R_3	D 6	A 9	B 4	C 5	24
R_4	B 4	C 4	D 7	A 5	20
கூட்டுத் தொகை	24	20	20	16	80

பட்டியல் 14-28.

A	B	C	D
8	5	4	3
5	3	6	2
9	4	5	6
5	4	4	7
27	16	19	18

இப்போது, 16 விளைச்சல் மதிப்புகளின் சராசரி

$$= \frac{80}{16}$$

$$= 5.$$

மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (8-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2 + (6-5)^2$$
$$+ (2-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (6-5)^2 + (9-5)^2$$
$$+ (4-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2$$
$$+ (5-5)^2$$
$$= 52.$$

F_1, F_2, F_3, F_4 எனும் நிலவகைகளின் சராசரிகள் முறையே 6, 5, 5, 4 ஆகும். எனவே, நிலவகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 4(6-5)^2 + 4(5-5)^2 + 4(5-5)^2 + 4(4-5)^2$$
$$= 8.$$

R_1, R_2, R_3, R_4 எனும் மழை வகைகளின் சராசரிகள் முறையே 5, 4, 6, 5 ஆகும். எனவே, மழை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்கை

$$= 4(5-5)^2 + 4(4-5)^2 + 4(6-5)^2 + 4(5-5)^2$$
$$= 8.$$

A, B, C, D எனும் கோதுமை வகைகளுக்கான சராசரிகள் முறையே 6 3/4, 4, 4 3/4, 4 1/2 ஆகும்.

எனவே, கோதுமை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 4(6\,3/4-5)^2 + 4(4-5)^2 + 4(4\,3/4-5)^2 + 4(4\,1/2-5)^2$$
$$= 17.5$$

∴ பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

= மொத்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

— கோதுமை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

— நில வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

— மழை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= 52-8-8-17 \cdot 5$

$= 18 \cdot 5$

இப்போது மொத்த விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன் பாட்டுப்படி $= 16-1=15$.

கோதுமைவகை விலக்க வர்க்கங்களுக்கான சமன் பாட்டுப்படி $= 4-1=3$.

நிலவகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சமன் பாட்டுப்படி $= 4-1=3$.

மழையளவு வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சமன் பாட்டுப்படி $= 4-1=3$.

இவ்விவரங்களை மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியலில் கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்போம்.

சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_1 = \frac{\text{கோதுமை வகை விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{5 \cdot 83}{3 \cdot 08}$$

$$= 1 \cdot 89.$$

பட்டியல் 14-29.

வேறு பாடுகளின் மூலம்	விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சமன் பாட்டுப்படி	விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி
கோதுமை வகைகள்	17·5	3	5·83
நில வகைகள்	8	3	2·67
மழையளவு வகைகள்	8	3	2·67
பிழைகள்	18·5	6	3·08
மொத்தம்	52	15	—

F-ன் பரவல் (3, 6) ஆகியவற்றைச் சமன்பாட்டுப்படி களாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது கணக்கிடப் பட்ட F_1-ன் மதிப்பை (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 4·76$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். $F_1 = 1·89$ ஆனது 4·76 ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என முடிவு செய்யலாம். எனவே, நான்கு கோதுமை வகைகளும் விளைச் சல் தன்மையைப் பொறுத்தவரையில் சமமானவை என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் முடிவு செய்யலாம்.

மேற்கண்ட சோதனையின்போது பெற்ற விவரங்களைக் கொண்டே சோதனை உறுப்புகளான நிலக்கூறுகள் வளத் தன்மையைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும், மழை அளவைப் பொறுத்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும் கீழ்க் கண்டவாறு சோதிக்கலாம்.

நிலக்கூறுகள் வளத்தன்மையைப் பொறுத்து வேறுபடு கின்றனவா எனச் சோதிக்க முற்படும்போது, நான்கு வகை நிலங்களும் வளத்தன்மையைப் பொறுத்து சமமானவை எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

இச்சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_2 = \frac{\text{நில வகை விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{2 \cdot 67}{3 \cdot 08}$$

$$= 0 \cdot 87$$

F_2-ன் பரவலானது (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது கணக்கிடப் பட்ட F_2-ன் மதிப்பை (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப்படி களாகக் கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 4 \cdot 76$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும். $F_2 = 0 \cdot 87$ ஆனது 4·76 ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால், சோதனை எடுகோளை ஏற்று நிலவகைகள் வளத்தன்மையைப் பொறுத்து சமமானவை என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

நிலக்கூறுகள் மழைபொழிவைப் பொறுத்து வேறுபடு கின்றனவா என சோதனை செய்ய, நிலக்கூறுகள் சமமான மழை பொழிவினைப் பெறுகின்றன எனும் சோதனை எடுகோளை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். இச்சோதனைக்கான சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி

$$F_3 = \frac{\text{மழை வகைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}{\text{பிழைகளுக்கான விலக்க வர்க்கங்களின் சராசரி}}$$

$$= \frac{2 \cdot 67}{3 \cdot 08}$$

$$= 0 \cdot 87$$

F_3-ன் பரவலானது (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலாகும். 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனையை மேற்கொள்ளும்போது கணக்கிடப் பட்ட F_3-ன் மதிப்பை, (3, 6) ஆகியவைகளைச் சமன்பாட்டுப் படிகளாகக்கொண்ட F பரவலின் 5% நிகழ்தகவிற்கான அட்டவணை மதிப்பு $K = 4 \cdot 76$ உடன் ஒப்பிடவேண்டும்.

$F_3 = 0 \cdot 87$ ஆனது $4 \cdot 76$ ஐ விடக் குறைவாக அமைவதால் சோதனை எடுகோளை ஏற்று, நிலக்கூறுகள் மழை பொழிவைப் பொறுத்து சமமானவை என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரலாம்.

பயிற்சி

(1) A, B, C எனும் மூன்று வகை உணவுகளின் சக்தியை ஆராயும்பொருட்டு சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு வகை உணவையும் நான்குபன்றிகளுக்குக் கொடுத்தபோது அவைகள் பெற்ற எடை அதிகரிப்புப்பற்றிய விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன.

உணவு வகைகள்

A	B	G
8·8	15·8	10·3
17·8	17·3	18·3
12·3	16·8	11·3
15·3	22·8	15·3

மூன்று வகை உணவுகளும் எடை அதிகரிக்கச் செய்யும் தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா என சோதனை செய்க (1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில்).

(2) மூன்றுவகை கோதுமைகளை ஒப்பிடுகின்ற பரிசோதனைக்காக 15 ஏக்கர் நிலத்தை (மண் வளத்தில் வேறுபாடு இல்லை) எடுத்துக்கொண்டு, மூன்று வகைகளில் ஒவ்வொருவகையும் 5 ஏக்கர் நிலத்தில் பயிரிட்டபோது பெற்ற விளைச்சல் விவரங்கள் அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ளன. விளைச்சலைப்பொறுத்து கோதுமைவிதை வகைகளிடையே வேறுபாடுள்ளதா என 5 % மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

கோதுமை வகைகள்

A	B	C
36	57	50
33	53	41
48	43	47
41	54	42
20	48	46

(3) வேறுபட்ட 4 புள்ளியியல் பாடப்புத்தகங்களிலிருந்து, ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்திட்டத்திற்கான சிறந்த பாடப் புத்தகத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க ஒரு பேராசிரியர் முற்படுகிறார். 20 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களை நான்கு சமக் குழுக்களாக ராண்டம் முறையில் பிரிக்கின்றார். கொடுக்கப்பட்ட அந்த 4 பாடப் புத்தகங்களை ஒரு குழுவிற்கு ஒரு வகைப் புத்தகம் என ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்துப் படிக்கக் கொடுக்கிறார். 6 மாதங்களுக்குப் பிறகு நடத்தப்பட்ட தேர்வில் அம் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவ் விவரங்களைக்கொண்டு 4 பாடப் புத்தகங்கள் வேறுபடுகின்றனவா என 1% நிகழ்தகவு மட்டத்தில் ஆய்க.

பாடப்புத்தகங்கள்	மதிப்பெண்கள்				
A	60,	68,	68,	69,	60
B	41,	47,	54,	65,	32
C	54,	44,	51,	56,	47
D	44,	51,	69,	69,	55

(4) உருளைக்கிழங்கு விளைச்சலின்போது இடப்பட்ட மூன்று வகை உரங்களும் தரத்தில் குறிப்பிட்ட அளவு வேறு படுகின்றனவா எனப் பின்வரும்விளைச்சல் விவரங்களைக் (கிலோ கிராம்களில்) கொண்டு 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க

உர வகைகள்

M_1	M_2	M_3
5345	5330	5336
5350	5335	5355
5346	5348	5353

(5) இலக்கணத்தைக் கல்லூரி புகுமுக வகுப்பு மாணவர் களுக்குக் கற்பிக்க மூன்று வேறுபட்ட கற்பிக்கும் முறைகளை ஒரு கல்லூரி கையாண்டது. 18 மாணவர்களை மூன்று குழுக்களாகப் பிரித்து ஒரு குழுவிற்கு ஒரு முறை வீதம் அந்த மூன்று முறை களும் ஒரு வருடகாலம் அம்மாணவர்களுக்குப் போதிக்கப் பட்டன. வருட இறுதியில் நடந்த தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு:

கற்பிக்கும் முறைகள்

I	II	III
60	48	54
61	62	44
59	58	69
49	55	42
26	24	23
15	62	40

கற்பிக்கும் முறைகளிடையே வேறுபாடு உள்ளதா என ஆய்க.

(6) கீழே தரப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள், நான்கு வகை நெற்பயிர்களையும், மூன்று உர வகைகளையும் கொண்டு நடத்தப் பட்ட ஒரு விவசாய பரிசோதனையில் பயிர் விளைச்சலைக் குறிக் கின்றன. மாறுபாட்டுப் பட்டியல் அமைத்து நெற்பயிர் வகைகள் வேறுபடுகின்றனவா என 1% நிகழ்தகவு மட்டத்தில் ஆய்க.

		பயிர் வகைகள்			
		A	B	C	D
உர வகைகள்	L	5	2	4	7
	M	12	10	10	9
	N	7	5	2	3

(7) 5 ஆய்வாளர்கள் 3 பகுதிகளின் வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டு எண்களைத் தனித்தனியாக மதிப்பிடுகின்றனர். ஒவ்வோர் ஆய்வாளராலும் தனித்தனியாக மதிப்பிடப்பட்ட அந்த 3 பகுதிகளின் வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டு எண்கள் கீழே இடம் பெறுகின்றன.

	ஆய்வாளர்கள்				
	1	2	3	4	5
பகுதிகள்					
A	270	263	264	268	260
B	280	265	274	276	279
C	273	284	278	271	296

வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டு எண்களை மதிப்பிடும் நோக்கில் ஆய்வாளர்கள் கணிசமான முறையில் வேறுபடு கின்றனரா எனவும், வாழ்க்கைச் செலவைப் பொறுத்த வரையில் A, B, C என்ற 3 பகுதிகளும் கணிசமான முறையில் வேறுபடுகின்றனவா எனவும் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

(8) A, B, C, D எனும் நான்கு வகை மோட்டார் டயர் களின் தரத்தை ஒப்பிடும் பொருட்டு சோதனை ஒன்று மேற் கொள்ளப்படுகிறது. சோதனையில் இடம் பெறும் நான்கு வகை டயர்களையும் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நான்கு மோட்டார் வண்டிகளுக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் பொருத்தி, அவ்வண்டிகள் எவ்வளவு தூரம் டயரில் பழுதடை யாமல் ஓடுகின்றன என்ற விவரங்களின் அடிப்படையில் இச் சோதனை நடத்தப்படுகிறது. சாலையின் நிலையும் சோதனை யைப் பாதிக்குமாகையால், நான்கு வெவ்வேறு வகைச் சாலை களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவை ஒவ்வொன்றிலும் இந்நான்கு மோட்டார் வண்டிகளைச் செலுத்தி, அவைகள் டயரில் பழுத டையாமல் ஓடிய தூரங்களாலான விவரங்கள் (ஆயிரம் மைல் களில்) கீழே இடம் பெறுகின்றன. இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நான்கு வகை டயர்களும் தரத்தில் சமமானவைகளா எனவும், சாலை வகைகள் டயர்களின் தரத்தை வேறுபடுத்துகின்றனவா எனவும் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

		டயர் வகைகள்			
		A	B	C	D
சாலை வகைகள்	1	17	23	34	16
	2	26	35	28	17
	3	25	21	28	18
	4	29	37	38	18

(9) *A*, *B*, *C* எனும் மூன்று வகை ஓட்ஸ்களை (oats) ஒப்பிடும் பொருட்டு சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டது. வளத்தன்மையில் வேறுபடுகின்ற நான்கு வகை நிலங்களைத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு வகை நிலத்தையும் மூன்று பிரிவு களாகப் பிரித்து, அவை ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு வகை ஓட்ஸைப் பயிரிட்டபோது பெற்ற விளைச்சல் விவரங்கள் (புஷலில்) கீழ்க் கண்டவாறு அமைகின்றன.

		ஓட்ஸ் வகைகள்		
		A	*B*	*C*
நில வகைகள்	1	33	48	46
	2	36	41	40
	3	44	33	36
	4	42	45	37

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு, ஓட்ஸ் வகைகள் விளைச்சல் தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா எனவும், நில வகைகள் வளத்தன்மையில் வேறுபடுகின்றனவா எனவும் 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(10) பயிற்சி 8-ல் இடம் பெற்ற *A*, *B*, *C*, *D* எனும் நான்கு மோட்டார் டயர் வகைகள் பழுதடையாமல் செல்லும் தூர மானது டயர்களின் தரத்தையும், சாலை நிலையையும், சீதோஷ்ண நிலையையும் பொறுத்து வேறுபட வாய்ப்பு உண்டு எனும் அடிப்படையில் லாடின் வர்க்கம் ஒன்றை அமைத்து, சோதனையை மேற்கொண்ட போது பெற்ற விவரங்கள் பின் வருமாறு :

சாலை நிலைமை

சீதோஷ்ண நிலை	1	2	3	4
1	*A* 12	*B* 18	*C* 6	*D* 8
2	*C* 20	*A* 26	*D* 14	*B* 18
3	*D* 17	*C* 23	*B* 11	*A* 16
4	*B* 23	*D* 29	*A* 17	*C* 24

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு டயர் வகைள் பழுதடையாமல் செல்லும் தூரமானது

(1) டயர்களின் தரத்தைக்குறித்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும்,

(2) சாலை நிலையைக் குறித்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும்,

(3) சீதோஷ்ண நிலையைக்குறித்து வேறுபடுகின்றனவா எனவும்

5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

(11) மோட்டார் வண்டிகளை வாடகைக்கு விடும் நிறுவனம் ஒன்று மோட்டார் வண்டிகளை வாங்க முனைந்த போது, மோட்டார் வண்டிகளை உற்பத்தி செய்யும் *A*, *B*, *C* எனும் மூன்று நிறுவனங்கள் ஒரே விலைக்கு மோட்டார் வண்டிகளை விற்பனை செய்ய முன் வந்தன. இவைகளில் எந்நிறுவனத்தின் வண்டியை வாங்குவது என்பதைத் தீர்மானிக்கும் பொருட்டு சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டது. மூன்று வெவ்வேறு நகரங்களில், மூன்று ஓட்டுநர்களைக் கொண்டு இம் மோட்டார்

வண்டிகளை ஓட்டும்போது ஏற்படும் செலவுகளின் அடிப்படையில் சோதனையை மேற்கொள்வது என தீர்மானித்து லாடின் வர்க்கம் ஒன்று அமைக்கப்பட்டது. சோதனையின்போது, ஒரு மைலுக்கான சராசரி செலவு பற்றிய விவரங்கள் (ரூபாயில்) கீழ்க்கண்ட லாடின் வர்க்கத்தில் இடம் பெறுகிறது.

நகரங்கள்

ஓட்டுநர்கள்	1	2	3
I	5.8 *A*	6·2 *B*	7·6 *C*
II	4·8 *B*	7·5 *C*	10·3 *A*
III	7·4 *C*	11·2 *A*	7·0 *B*

மேற்கண்ட லாடின் வர்க்கத்திற்கான ஆய்வை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் மேற்கொள்க.

(12) *A*, *B*, *C*, *D* என்ற நான்கு வகை மாட்டுத் தீவனங்கள் பசுக்களின் பால் வழங்கும் தன்மையை வேறுபடுத்துகின்றனவா என ஆயும் பொருட்டு சோதனை ஒன்று மேற்கொள்ளப் பட்டது. ஒவ்வோர் இனத்திற்கும் நான்கு என்ற வீதத்தில் நான்கு இனங்களைச் சார்ந்த 16 பசுக்கள் சோதனை உறுப்புக்களாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. இங்குத் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட இனத்தின் நான்கு பசுக்களும் நான்கு வெவ்வேறு வயதுப் பிரிவுகளைச் சார்ந்தவை.

மேற்கண்ட சோதனை ஒரு 4×4 லாடின் வர்க்கத் திட்டத்தில் அமைக்கப்பட்டது. சோதனையின்போது பெற்ற விவரங்களான பசுக்கள் வழங்கிய பாலின் அளவுகள் (லிட்டரில்) பின்வரும் அட்டவணையில் இடம் பெறுகின்றன.

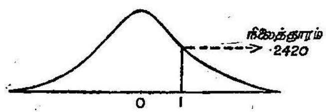
இனங்கள்

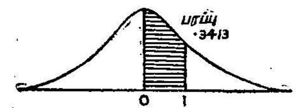
வயதுப் பிரிவுகள்	I	II	III	IV
1	*A* 126	*B* 122	*C* 120	*D* 123
2	*B* 121	*A* 128	*D* 121	*C* 119
3	*C* 114	*D* 118	*B* 123	*A* 127
4	*D* 120	*C* 118	*A* 124	*B* 122

மேற்கண்ட லாடின் வர்க்கத்துக்கான மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியலை அமைத்து வயதுப் பிரிவு, இனம், தீவனம் ஆகிய மூன்று காரணிகளும் பசுவின் பால் வழங்கும் தன்மையைக் கணிசமான முறையில் வேறுபடுத்துகின்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

அட்டவணை I

இயல்நிலை பரவல் — நிலைத்தூரமும், பரப்பும்

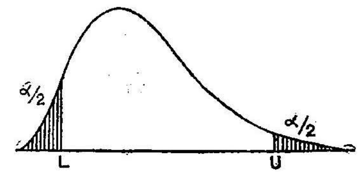




Z	நிலைத்தூரம்	பரப்பு		Z	நிலைத்தூரம்	பரப்பு
·00	·3989	·0000		2·00	·0540	·4772
·05	·3984	·0199		2·05	·0488	·4798
·10	·3970	·0398		2.10	·0440	·4821
·15	·3945	·0596		2·15	·0396	·4842
·20	·3910	·0893		2·20	·0355	·4861
·25	·3867	·0987		2·25	·0317	·4878
·30	·3814	·1179		2·30	·0283	·4893
·35	·3752	·1368		2·35	·0252	·4906
·40	·3683	·1554		2·40	·0224	·4918
·45	·3605	·1736		2·45	·0198	·4929

·50	·3521	·1915	2·50	·0175	·4938
·55	·3429	·2088	2·55	·0154	·4946
·60	·3332	·2257	2·60	·0136	·4953
·65	·3230	·2422	2·65	·0119	·4960
·70	·3123	·2580	2·70	·0104	·4965
·75	·3011	·2734	2·75	·0091	·4970
·80	·2897	·2881	2·80	·0079	·4974
·85	·2780	·3023	2·85	·0069	·4978
·90	·2661	·3159	2·90	·0060	·4981
·95	·2541	·3289	2·95	·0051	·4984
1·00	·2420	·3413	3·00	·0044	·4986
1·05	·2299	·3531	3·05	·0038	·4989
1·10	·2179	·3643	3·10	·0033	·4990
1·15	·2059	·3749	3·15	·0028	·4992
1·20	·1942	·3849	3·20	·0024	·4993
1·25	·1826	·3944	3·25	·0020	·4994
1·30	·1714	·4032	3·30	·0017	·4995
1·35	·1604	·4115	3·35	·0015	·4996
1·40	·1497	·4192	3·40	·0012	·4997
1·45	·1394	·4265	3·45	·0010	·4997
1·50	·1295	·4332	3·50	·0009	·4998
1·55	·1200	·4394	3·55	·0007	·4998

1·60	·1109	·4452		3·60	·0006	·4998
1·65	·1023	·4505		3·65	·0005	·4999
1·70	·0940	·4554		3·70	·0004	·4999
1·75	·0863	·4599		3·75	·0004	·4999
1·80	·0790	·4641		3·80	·0003	·4999
1·85	·0721	·4678		3·85	·0002	·4999
1·90	·0656	·4713		3·90	·0002	·5000
1·95	·0596	·4744		3·95	·0002	·5000



அட்டவணை II

கைவர்க்கப்பரவலின் நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

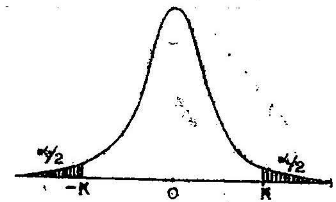
சமன்பாட்டுப் படிகள்	நிகழ்தகவு மட்டம்					
	L			*U*		
	·01	·025	·05	·05	·025	·01
1	0·000157	0·001	0·004	3·841	5·024	6·635
2	0·0201	0·051	0·103	5·991	7·378	9·210
3	0·115	0·216	0.352	7·815	9·348	11·345
4	0·297	0·484	0·711	9·488	11·143	13·277
5	0·554	0·831	1·145	11·070	12·832	15·086
6	0·872	1·237	1·635	12·592	14·449	16·812
7	1·239	1·690	2·167	14·067	16·013	18·475
8	1·646	2·180	2·733	15·507	17·535	20·090
9	2·088	2·700	3·325	16·919	19·023	21·666
10	2·558	3·247	3·940	18·307	20·483	23·209

11	3·053	3·816	4·575	19·675	21·920	24·725
12	3·571	4·404	5·226	21·026	23·337	26·217
13	4·107	5·009	5·892	22·362	24·736	27·688
14	4·660	5·629	6·571	23·685	26·119	29·141
15	5·229	6·262	7·261	24·996	27·488	30·578
16	5·812	6·908	7·962	26.296	28·845	32·000
17	6·408	7·564	8·672	27·587	30·191	33·409
18	7·015	8·231	9·390	28.869	31·526	34·805
19	7·633	8·907	10·117	30·144	32·852	36·191
20	8·260	9·591	10·851	31·410	34·170	37·566
21	8·897	10·283	11·591	32·671	35·479	38·932
22	9·542	10·982	12·338	33·924	36·781	40·289
23	10·196	11·688	13·091	35·172	38·076	41·638
24	10·856	12·401	13·848	36·415	39·364	42.980
25	11·524	13·120	14·611	37·652	40·646	44·314
26	12·198	13·844	15·379	38·885	41·923	45·642
27	12·879	14·573	16·151	40·113	43·194	46·963
28	13.565	15·308	16·928	41·337	44·461	48·278
29	14·256	16.047	17·708	42·557	45·722	49·588
30	14·953	16·791	18.493	43·773	46·979	50·892

நூல் ஆசிரியர், வெளியிடுவோர், எடின்பர்க் ஆலிவர் பாய்டு லிமிடெட் ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற புத்தகத்திலிருந்து இப்பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை III

T - பரவலின் நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்



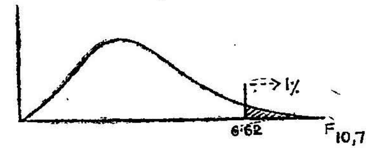
சமன்பாட்டுப் படிகள்	நிகழ்தகவு மட்டம்			
	·10	·05	·02	·01
1	6·314	12·706	31·821	63·657
2	2·920	4·303	6·965	9·925
3	2·353	3·182	4·541	5·841
4	2·132	2·776	3·747	4·604
5	2·015	2·571	3·365	4·032
6	1·943	2·447	3·143	3·707
7	1·895	2·365	2 998	3·499
8	1·860	2·306	2·896	3·355
9	1·833	2·262	2·821	3·250
10	1·812	2·228	2·764	3·169

11	1·796	2·201	2·718	3·106
12	1·782	2·179	2·681	3·055
13	1·771	2·160	2·650	3·012
14	1·761	2·145	2·624	2·977
15	1.753	2·131	2·602	2·947
16	1·746	2·120	2·583	2·921
17	1·740	2·110	2·567	2·898
18	1·734	2·101	2·552	2·878
19	1·729	2·093	2·539	2·861
20	1·725	2·086	2·528	2·845
21	1·721	2·080	2·518	2·831
22	1·717	2·074	2·508	2·819
23	1·714	2·069	2·500	2·807
24	1·711	2.064	2·492	2·797
25	1·708	2·060	2·485	2·787
26	1·706	2·056	2·479	2·779
27	1·703	2·052	2·473	2·771
28	1·701	2·048	2·467	2·763
29	1·699	2·045	2·462	2·756
30	1·697	2·042	2·457	2·750
∞	1·645	1·960	2·326	2·576

நூல் ஆசிரியர், வெளியீடுவோர், எடின்பர்க் ஆலிவர் பாய்டு லிமிடெட் ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்' என்ற புத்தகத்திலிருந்து இப்பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை IV

F – பரவலின் 1% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

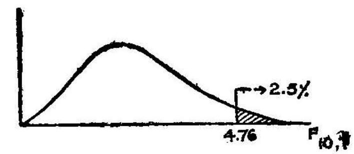


சமன்பாட்டுப்படி	பெரிய மாறுபாடுக்குரிய சமன்பாட்டுப்படி 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	30	∞
2	99·00	99·17	99·25	99·30	99·33	99·34	99·36	99·38	99·40	99·41	99·42	99·43	99·44	99·45	99·47	99·50
3	30·82	29·46	28·71	28·24	27·91	27·67	27·49	27·34	27·23	27·13	27·05	26·92	26·83	26·69	26·50	26·12
4	18·00	16·69	15·98	15·52	15·21	14·98	14·80	14·66	14·54	14·45	14·37	14·24	14·15	14·02	13·83	13·46
5	13·27	12·06	11·39	10·97	10·67	10·45	10·27	10·15	10·05	9·96	9·89	9·77	9·68	9·55	9·38	9·02
6	10·92	9·78	9·15	8·75	8·47	8·26	8·10	7·89	7·87	7·79	7·72	7·60	7·52	7·39	7·23	6·88
7	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	7·00	6·84	6·71	6·62	6·54	6·47	6·35	6·27	6·15	5·98	5·65

சிறிய மாறுபாட்டுக்குரிய																
8	8·65	7·59	7·01	6·63	6·37	6·19	6·03	5·91	5·82	5·74	5·67	5·56	5·48	5·36	5·20	4·86
9	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·62	5·47	5·35	5·26	5·18	5·11	5·00	4·92	4·80	4·64	4·31
10	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·21	5·06	4·95	4·85	4·78	4·71	4·60	4·52	4·41	4·25	3·91
11	7·20	6·22	5·67	5·32	5·07	4·88	4·74	4·63	4·54	4·46	4·40	4·29	4·21	4·10	3·94	3·60
12	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·65	4·50	4·39	4·30	4·22	4·16	4·05	3·98	3·86	3·70	3·36
13	6·70	5·74	5·20	4·86	4·62	4·44	4·30	4·19	4·10	4·02	3·96	3·85	3·78	3·67	3·51	3·16
14	6·51	5·56	5·03	4·69	4·46	4·28	4·14	4·03	3·94	3·86	3·80	3·70	3·62	3·51	3·34	3·00
15	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4·14	4·00	3·89	3·80	3·73	3·67	3·56	3·48	3·36	3·20	2·87
16	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·61	3·55	3·45	3·37	3·25	3·10	2·75
20	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·71	3·56	3·45	3·37	3·30	3·23	3·13	3·05	2·94	2·77	2·42
30	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·30	3·17	3·06	2·98	2·90	2·84	2·74	2·66	2·55	2·38	2·01
∞	4·60	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·24	2·18	2·07	1·99	1·87	1·69	1·00

அட்டவணை V

F - பரவலின் 2·5% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

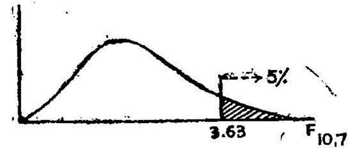


சமன்பாட்டுப்படி	பெரிய மாறுபாட்டுக்குரிய சமன்பாட்டுப்படி 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	30	∞
2	39·0	39·2	39·3	39·3	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·5
3	16·04	15·44	15·10	14·9	14·73	14.6	14·54	14·5	14·4	14·4	14·34	14·3	14·2	14·2	14.1	13·90
4	10.65	9·98	9·60	9·36	9·20	9·07	8·98	8·90	8·84	8·79	8·75	8·69	8·64	8·56	8·46	8·26
5	8·43	7·76	7·39	7·15	6.98	6·85	6·76	6·68	6·62	6·57	6·52	6·46	6·41	6·33	6·23	6·02
6	7·26	6·60	6·23	5·99	5·82	5·70	5·60	5·52	5·46	5·41	5·37	5.30	5·25	5·17	5·07	4·85
7	6·54	5·89	5·52	5·29	5·12	4·99	4·90	4·82	4·76	4·71	4·67	4·60	4·54	4·47	4·36	4·14

கீழ்ப்பாகப் படிக்குரிய																
8	6·06	5·42	5·05	4·82	4·65	4·53	4·43	4·36	4·30	4·24	4·20	4·13	4·08	4·00	3·89	3·67
9	5·72	5·08	4·72	4·48	4·32	4·20	4·10	4·03	3·96	3·91	3·87	3·80	3·74	3·67	3·56	3·33
10	5·46	4·83	4·47	4·24	4·07	3·95	3·85	3·78	3·72	3·66	3·62	3·55	3·50	3·42	3·31	3·08
11	5·26	4·63	4·28	4·04	3·88	3·76	3·66	3·59	3·53	3·47	3·43	3·36	3·30	3·23	3·12	2·88
12	5·10	4·47	4·12	3·89	3·73	3·61	3·51	3·44	3·37	3·32	3·28	3·21	3·15	3·07	2·96	2·72
13	4·97	4·35	4·00	3·77	3·60	3·48	3·39	3·31	3·25	3·20	3·15	3·08	3·03	2·95	2·84	2·60
14	4·86	4·24	3.89	3·66	3·50	3·38	3·29	3·21	3·15	3·09	3·05	2·98	2·92	2·84	2·73	2·49
15	4·76	4·15	3·80	3·58	3·41	3·29	3·20	3·12	3·06	3·01	2 96	2·89	2·84	2·76	2·64	2·40
16	4·69	4·08	3·73	3·50	3·34	3·22	3·10	3·05	2·99	2·93	2·89	2·82	2.76	2·68	2·57	2·32
20	4·46	3·86	3·51	3·29	3·13	3·01	2·91	2·84	2.77	2·72	2·68	2·60	2·55	2·46	2·35	2·09
30	4·18	3·59	3·25	3·03	2·87	2·75	2·65	2·57	2·51	2·46	2·41	2·34	2·28	2·20	2·07	1·79
∞	3·69	3·12	2·79	257	2.41	2·29	2·19	2·11	2·05	1·99	1·94	1·87	1·80	1·71	1·57	1·00

அட்டவணை VI

F- பரவலின் 5% நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்



சமன்பாட்டுப்படி	பெரிய மாறுபாடுக்குரிய சமன்பாட்டுப்படி															
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	30	∞
2	19·00	19·16	19·25	19·30	19·33	19·36	19·37	19·38	19·39	19·40	19·41	19·42	19·43	19·44	19·46	19·50
3	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·88	8·84	8·81	8·78	8·76	8·74	8·71	8·69	8·66	8·62	8·53
4	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·93	5·91	5·87	5·84	5·80	5·74	5·73
5	5·79	5·41	5 19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·78	4·74	4·70	4·68	4·64	4·60	4·56	4·50	4·36
6	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	2·03	4·00	3·96	3·92	3·87	3·81	3·67
7	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·63	3·60	3·57	3·52	3·49	3·44	3·38	3·23

சிறிய மாறுபாட்டுக்குரிய																
8	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·34	3·31	3·28	3 23	3·20	3·15	3·08	2·93
9	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3 18	3·13	3·10	3·07	3·02	2·98	2·93	2·86	2·71
10	4·10	3·71	3·48	3·33	3 22	3·14	3·07	3·02	2·97	2·94	2·91	2·86	2·82	2·77	2·70	2·54
11	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2.90	2·86	2·82	2·79	2·74	2·70	2·65	2·57	2·40
12	3·88	3·49	3·26	3·11	3·00	2 92	2·85	2·80	2·76	2·72	2·69	2·64	2 60	2·54	2·46	2·30
13	3·80	3·41	3·18	3·02	2·92	2·84	2·77	2·72	2·67	2·63	2·60	2·55	2·51	2·46	2·38	2·21
14	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·77	2·70	2·65	2.60	2·56	2·53	2·48	2·44	2·39	2·31	2·13
15	3·68	3·29	3·06	2·90	2 79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·51	2·48	2·42	2·38	2·33	2·25	2.07
16	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·45	2·42	2·37	2·33	2·28	2·20	2·01
20	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2.51	2·45	2·39	2.35	2·31	2·28	2·22	2·18	2·12	2·04	1·84
30	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·34	2·27	2·21	2·16	2·12	2·09	2·04	1·99	1·93	1·84	1·62
∞	2·99	2·60	2·37	2·21	2·09	2·01	1·91	1·88	1·83	1.79	1·75	1·69	1·64	1·57	1·46	1·00

அட்டவணை VII

அடுக்குக்குறி சார்பலன் மதிப்புகள்

x	e^{-x}	x	e^{-x}
0·1	0·9048	3·1	0·0450
0·2	0·8187	3·2	0·0408
0·3	0·7408	3·3	0·0369
0·4	0·6703	3·4	0·0334
0·5	0·6065	3·5	0·0302
0·6	0·5488	3·6	0·0273
0.7	0·4966	3·7	0·0247
0·8	0·4493	3·8	0·0224
0·9	0·4066	3·9	0·0202
1·0	0·3679	4·0	0·0183
1·1	0·3329	4·1	0·0166
1·2	0·3012	4·2	0·0150
1·3	0·2725	4·3	0·0136
1·4	0·2466	4·4	0·0123
1·5	0·2231	4·5	0·0111
1·6	0·2019	4·6	0·0101
1·7	0·1827	4·7	0·0091
1·8	0·1653	4·8	0·0082

1·9	0·1496	4·9	0·0074
2·0	0·1353	5·0	0·0067
2·1	0·1225	5·1	0·0061
2 2	0·1108	5·2	0·0055
2·3	0·1003	5·3	0·0050
2·4	0·0907	5·4	0·0045
2·5	0·0821	5·5	0·0041
2·6	0·ι743	5·6	0·0037
2·7	0·0672	5·7	0·0033
2·8	0 0608	5·8	0·0030
2·9	0·0550	5·9	0·0027
3·0	0·0498	6·0	0·0025

அட்டவணை VIII

சமவாய்ப்பு எண்கள்

23780	28391	05940	55583	81256
45325	05490	65974	11186	15357
88240	92547	89200	94696	11370
42789	69758	79701	29591	55968
97523	17264	82840	59556	37119
08853	59083	95137	76538	44155
80274	79932	44236	10089	44373
82805	21149	03425	17594	31427
64971	49055	95091	08367	28381
03606	46497	28626	87297	36568
67286	28749	81905	15038	38338
65670	72111	91884	66762	11428

14262	09513	25728	52539	86806
57375	85062	89178	08791	39342
39483	62469	30935	79270	91986
51206	65749	11885	49789	97091
70908	21506	16269	54558	18395
69944	65036	63213	56631	88862
94963	22581	17882	83538	31960
99286	45236	4 427	74321	67351
16075	20517	69980	18293	44047
73375	62251	58871	70174	52372
30487	38794	36079	23362	24902
69472	45950	18225	09899	87377
27703	83717	18913	66371	53629
67612	72738	26995	50933	92936
59042	37595	04931	73622	69902

59609	35653	15970	37681	96326
35354	65770	15365	41422	29451
79452	71674	30260	97303	31002
49867	89294	59232	31776	54919
16719	06144	82041	38332	64452
46970	45907	99238	74547	19704
35747	78956	11478	41195	58135
71838	07526	07985	60714	88627
24361	34534	70169	24805	63215
19278	17082	26997	32295	10894
58124	84721	23544	88548	65626
12025	16908	82841	24060	40285
50326	86370	91949	19017	83846

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

Allen, R. G. D., — 'Statistics for Economists'-Hutchinson & Co.,

Connoly, T. G. and Sluckin, W., — 'Statistical Methods for Social Social Sciences', Cleaver Home.

Croxton, F.E., and Cowden, D. J., — 'Applied General Statistics', Prentice—Hall Inc.,

Freund, J.E., and Williams F. J., — 'Modern Business Statistics', Prentice-Hall Inc.,

Garrett, H. E., — 'Statistics in Psychology and Education', Longmans, Green & Co.,

Hoel, P. G., — 'Introduction to Mathematical Statistics', John Wiley Co.,

Mills, F.C., — 'Statistical Methods'—Holt, Rinehart and Winston, Inc.,

Moroney, M. J., — 'Facts From Figures' Penguin Books.

Yamane, T., — Statistics, An Introductory Analysis. Harper & Row Inc.,

Yule, G. U., and Kendall, M. G., — 'An Introduction to the theory of Statistics', Charles Griffin & Co.,

கலைச்சொற்கள்

(தமிழ்—ஆங்கிலம்)

அ

அச்சு — Axis
அலகு — Unit
அலைவு — Frequency
அலைவெண் — Frequency
அலைவெண் குறி — Tally Mark
அலைவெண் செவ்வகப் படம் — Histogram
அலைவெண் பட்டியல் — Frequency table
அலைவெண் பரவல் — Frequency distribution
அலைவுப் பரவல் — Frequency distribution
அலைவெண் பலகோணம் — Frequency polygon
அலைவெண் வரைபடம் — Frequency graph
அலைவெண் வளைகோடு — Frequency curve
அளவின் விவரங்கள் — Quantitative data
அளவுத் திட்டம் — Scale
அளவெடுப்பு — Enquiry, Survey

ஆ

ஆயம் — Axis

இ

இடைநிலை — Median
இடைவெளி — Interval
இணைப்பட்டியல் — Contingency table
இயல்நிலைப் பரவல் — Normal distribution
இயல்நிலை வளைகோடு — Normal curve
இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் — Secondary data

இருமாறி முழுமைத்தொகுதி — Bivariate population
இருவழிப் பாகுபாடு — Two way classification
இறங்கு வரிசை — Descending order

ஈ

ஈருறுப்பு — Binomial
ஈருறுப்புக் கோவை — Binomial Expression
ஈருறுப்புப் பரவல் — Binomial distribution

உ

உடன் மாறுபாடு — Co-variance
உண்மையான பிரிவு இடைவெளி — True class interval
உய்த்துணர்வு — Inductive Inference
உருப்பு — Item
உருவ அளவு — Size
உருவ விளக்கப்படம் — Pictogram
உறுப்பு — Member

எ

எடுகோள் — Hypothesis
எடுகோள் சோதனை — Test of Hypothesis
எண்ணிலி — Infinity
எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு — Expected value
எதிர் மறை ஒட்டுறவு — Negative correlation

ஏ

ஏறு வரிசை — Ascending order

ஒ

ஒகைவ் — Ogive
ஒகைவ் வளைகோடு — Ogive curve
ஒட்டுறவு — Correlation
ஒட்டுறவுக் கெழு — Correlation coefficient
ஒட்டுறவுப் பட்டியல் — Correlation table
ஒப்பீடு — Comparison
ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் — Simultaneous equations
ஒருபடித்தான — Homogeneous
ஒருவழிப் பாகுபாடு — One way classification
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் — Mutually exclusive events

க

கணக்கிடுதல்	— Computation
கணித்தல்	— Computation
கண்டறிந்த விவரங்கள்	— Observed data
கணிப்பு	— Computation
கர்டோசிஸ்	— Kurtosis

கா

கால்மானம்	— Quartile
கால்மான விலக்கம்	— Quartile deviation

கீ

கீழ் எல்லை	— Lower limit
கீழ்க் கால்மானம்	— Lower Quartile
கீழின ஒகைவ்	— Less than ogive

கு

குவிவு அலைவெண்	— Cumulative frequency
குவிவுப் பரவல்	— Cumulative distribution
குவிவு வளைகோடு	— Cumulative curve

கூ

கூட்டுத் தொகை	— Sum
கூட்டுச் சராசரி	— Arithmetic Mean
கூட்டல் தேற்றம்	— Addition theorem
கூறு	— Sample
கூறு அளவெடுப்பு	— Sample Survey
கூறெடுத்தல்	— Sampling
கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்	— Sampling
கூறு சராசரி	— Sample-Mean
கூறுப் பண்பளவை	— Statistic
கூறுப் பரவல்	— Sampling distribution

கெ

கெழு	— Coefficient

கோ

கோட்ட அளவை	— Measures of Skewness
கோட்ட அளவைக்கெழு	— Coefficient of Skewness

கோட்டம் — Skewness
கோணம் — Angle
கோவை — Expression

ச

சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம் — Percentage Bar diagram
சதவீத பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படம் — Percentage composite Bar diagram
சதவீதம் — Percentage
சமச்சீர் — Symmetry
சமச்சீராக — Symmetrical
சமன்பாட்டுப்படி — Degrees of Freedom
சமன்பாடு — Equation
சமம் — Equivalent
சராசரி — Average
சராசரி விலக்கம் — Average deviation, Mean deviation
சம வாய்ப்பாக்குதல் — Randomisation
சம வாய்ப்பு — Random
சம வாய்ப்பு எண்கள் — Random Numbers
சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பு — Randomised Block design
சம வாய்ப்புக் கூறு — Random Sample
சம வாய்ப்புக் கூறு முறை — Random Sampling Method

சா

சாதகமான நிகழ்ச்சி — Favourable event
சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் — Dependent events
சார்புடைய மாறி — Dependent variate
சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை — Test for Independence
சார்பற்ற நிகழ்ச்சி — Independent event
சார்பற்ற மாறி — Independent variate

சி

சிதறல் — Dispersion, Scatter
சிதறல் அளவைகள் — Measures of dispersion
சிதறல் விளக்கப்படம் — Scatter diagram

சீ

சீரான பரவல் — Symmetrical distribution
சீரிலாப் பரவல் — Asymmetrical distribution

செ

செய்முறைத் திட்டம் — Experimental Design
செறிவு — Density

சோ

சோதனை — Test
சோதனை எடுகோள் — Test Hypothesis
சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி — Test statistic

த

தட்டை அளவை — Kurtosis
தர ஒட்டுறவு — Rank Correlation
தரப்படுத்துதல் — Classification
தரம் — Rank
தனி — Absolute
தனி விலக்கம் — Absolute Deviation

தி

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் — Standard Normal Distribution
திட்டப் பிழை — Standard Error
திட்ட விலக்கம் — Standard deviation
திரும்பச் செய்தல் — Replication

தொ

தொகுக்கப்படா விவரங்கள் — Raw data
தொடர்புப் போக்கு — Regression
தொடர்புப் போக்குக் கெழு — Regression Coefficient
தொடர்புப் போக்குச்சமன்பாடு — Regression equation

தோ

தோராயம் — Approximate

ந

நடுநிலையான — Unbiased
நம்பிக்கை வரை — Confidence limit

நி

நிகழ்ச்சி	—	Event
நிகழ் தகவு	—	Probability
நிரல்	—	Column
நிரை	—	Row

நூ

நூற்றுமானம்	—	Percentile

நே

நேரிடை ஒட்டுறவு	—	Positive correlation
நேர்க் கோட்டம்	—	Positive Skewness

ப

பகுதி ஒட்டுறவு	—	Partial correlation
பட்டியல்	—	Table
பட்டை விளக்கப் படம்	—	Bar diagram
படி	—	Power
படுகை	—	Stratum
படுகைக் கூறு முறை	—	Stratified Sampling
பண்பின் விவரங்கள்	—	Qualitative data
பல்அங்கப்பட்டைவிளக்கப்படம்	—	Composite Bar diagram
பல கட்டக் கூறு முறை	—	Multi Stage sampling method
பல்தர ஒட்டுறவு	—	Multiple correlation
பலபடித்தான	—	Heterogeneous
பரவல்	—	Distribution

பா

பாகுபடுத்து	—	Classify
பாகுபாடு	—	Classification
புாய்சான் பரவல்	—	Poisson Distribution

பி

பிரிவு	— Class
பிரிவு அலைவெண்	— Class frequency
பிரிவு இடைவெளி	— Class interval
பிரிவு எல்லை	— Class limit

பெ

பெருக்குச் சராசரி	— Geometric Mean
பெருங்கூறு	— Large Sample

பு

புள்ளியியல்	— Statistics
புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு	— Statistical Inference
புள்ளியியல் பண்பளவை	— Statistic
புள்ளி விவரங்கள்	— Statistical data
புள்ளி விவர விளக்கப்படம்	— Statistical Diagram
புள்ளி விவர நிலப்படம்	— Statistical Map

ம

மடக்கை	— Logarithm
முடிவிலி	— Infinity
மடக்கைத் தாள்	— Logarithmic paper
மணி வடிவமான	— Bell shaped
மதிப்பீடு	— Estimate
மறுக்கத்தகு எடுகோள்	— Null Hypothesis

மா

மாறுபாட்டுக் கெழு	— Coefficient of Variation
மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு	— Analysis of Variance
மாறுபாடு	— Variance
மாறி	— Variate, Variable

மி

மிகைத் தன்மைச் சோதனை — Test of Significance
மிகைத் தன்மை மட்டம் — Level of significance

மீ

மீச்சிறு — Minimum
மீப்பெரு — Maximum

மை

மையப் போக்கு — Central Tendency
மையப்போக்கு அளவைகள் — Measures of Central Tendency

மு

முதல் கால்மானம் — First quartile
முதனிலை விவரங்கள் — Primary data
முழுக்கணிப்பு முறை — Census method
முழுதும் சரிசம வாய்ப்பாக்கப்பட்ட திட்டம் — Completely randomised design
முழுமைத் தொகுதி — Population
முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை — Parameter

மூ

மூன்றும் கால்மானம் — Third quartile

மே

மேல் எல்லை — Upper limit
மேலின ஓகைவ் — Greater than ogive

லா

லாடின் வர்க்கம் — Latin Square
லாரன்சு வளைகோடு — Lorenz curve

வ

வளைகோடு — Curve
வளைகோட்டு ஒட்டுறவு — Curvi linear Correlation
வட்ட விளக்கப்படம் — Pie diagram
வரம்பற்ற முழுமைத்தொகுதி — Infinite population
வரைபடம் — Graph

வி

விலக்கம் — Deviation
விலக்கப் பெருக்குத் தொகை — Moment
விளக்கப்படம் — Diagram
விவரங்கள் — Data
வினாத்தொகுதி — Questionaire
வினாப் பட்டியல் — Questionaire

வீ

வீச்சு — Range
வீதம் — Rate

ஹா

ஹார்மானிக் சராசரி — Harmonic Mean

கலைச்சொற்கள்

(ஆங்கிலம்—தமிழ்)

A

Addition Theorem	—	கூட்டல் தேற்றம்
Addition Theorem of probability	—	நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்
Arithmetic Mean	—	கூட்டுச் சராசரி
Ascending Order	—	ஏறு வரிசை
Asymmetrical distribution	—	சீரிலாப் பரவல்
Averages	—	சராசரிகள்
Average deviation	—	சராசரி விலக்கம்
Axes	—	அச்சுகள், ஆயங்கள்

B

Bar diagram	—	பட்டை விளக்கப்படம்
Bar diagram, composite	—	பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம்
Bar diagram, percentage composite	—	சதவீதப் பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம்
Bell shaped	—	மணி வடிவமான
Binomial	—	ஈருறுப்பு
Binomial distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
Bivariate Frequency Distribution	—	இருமாறி அலைவுப் பரவல்

C

Census Method	—	முழுக்கணிப்பு முறை
Central tendency	—	மையப்போக்கு
Central tendency, measures of	—	மையப்போக்கு அளவைகள்
Class	—	பிரிவு
Class boundary (limit)	—	பிரிவு எல்லை
Class frequency	—	பிரிவு அலைவெண்
Class interval	—	பிரிவு இடைவெளி
Class interval, true	—	உண்மையான பிரிவு இடைவெளி
Classification	—	பாகுபாடு
Classification one-way	—	ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, two-way	—	இருவழிப் பாகுபாடு
,, three-way	—	மூவழிப் பாகுபாடு
Classify	—	பாகுபடுத்து
Coefficient	—	கெழு
,, of skewness	—	கோட்ட அளவைக்கெழு
,, ,, variation	—	மாறுபாட்டுக் கெழு
Compound event	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
Confidence limit	—	நம்பிக்கை எல்லை
,, ,, ,lower	—	கீழ் நம்பிக்கை எல்லை
,, ,, ,upper	—	மேல் நம்பிக்கை எல்லை
Contingency table	—	இணைப்பட்டியல்
Correlation	—	ஒட்டுறவு
,, , coefficient	—	ஒட்டுறவுக் கெழு
,, , multiple	—	பல்தர ஒட்டுறவு
,, , negative	—	எதிர்மறை ஒட்டுறவு
,, , partial	—	பகுதி ஒட்டுறவு
,, , positive	—	நேரிடை ஒட்டுறவு
,, , Rank	—	தர ஒட்டுறவு
,, , table	—	ஒட்டுறவுப் பட்டியல்
Covariance	—	உடன் மாறுபாடு

Cumulative	—	குவிவு
,, curve	—	குவிவு வளைகோடு
,, distribution	—	குவிவுப் பரவல்
,, frequency	—	குவிவு அலைவெண்
,, frequency curve	—	குவிவு அலைவெண் வளைகோடு
Cumulative frequency distribution of the less than type	—	கீழினக் குவிவு அலைவெண் பரவல்
Cumulative frequency distribution of the greater than type	—	மேலினக் குவிவு அலைவெண் பரவல்
Curve	—	வளைகோடு
Curve fitting	—	வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்
Curvi linear correlation	—	வளைகோட்டு ஒட்டுறவு

D

Data	—	விவரங்கள்
,, primary	—	முதனிலை விவரங்கள்
,, Secondary	—	இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
,, statistical	—	புள்ளி விவரங்கள்
Degree of freedom	—	சமன்பாட்டுப் படிகள்
Density	—	செறிவு
Dependent event	—	சார்புடைய நிகழ்ச்சி
Descending order	—	இறங்கு வரிசை
Design	—	திட்ட அமைப்பு
Deviation	—	விலக்கம்
,, absolute	—	தனி விலக்கம்
,, average	—	சராசரி விலக்கம்
,, mean	—	,, ,,
,, quartile	—	கால்மான விலக்கம்
,, standard	—	திட்ட விலக்கம்
Diagram	—	விளக்கப் படம்
,, bar	—	பட்டை விளக்கப்படம்
,, pie	—	வட்ட விளக்கப்படம்
,, scatter	—	சிதறல் விளக்கப்படம்
,, statistical	—	புள்ளி விவர விளக்கப்படம்

Die — பகடை
Dispersion — சிதறல்
,, measures — சிதறல் அளவைகள்
Distribution — பரவல்
Distribution binomial — ஈருறுப்புப் பரவல்
,, frequency — அலைவெண் பரவல்
,, normal — இயல்நிலைப் பரவல்
,, poisson — பாய்ஸான் பரவல்

E

Enquiry — அளவெடுப்பு
Enumerator — கணிப்பாளர்
Estimated value — மதிப்பளவை
Event — நிகழ்ச்சி
,, ,dependent — சார்புடைய நிகழ்ச்சி
,, ,favourable — சாதகமான நிகழ்ச்சி
,, ,independent — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Expected value — எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு
Experimental design — செய்முறைத் திட்டம்

F

Favourable event — சாதகமான நிகழ்ச்சி
Frequency — அலைவெண், அலைவு
,, curve — அலைவெண் வளைகோடு
,, cumulative — குவிவு அலைவெண்
,, Distribution — அலைவெண் பரவல்
,, Graph — அலைவெண் வரைபடம்
,, Grouped — தொகுப்பு அலைவுகள்
,, Polygon — அலைவெண் பலகோணம்
,, table — அலைவெண் பட்டியல்
Function — சார்பலன்

G

Geometric mean — பெருக்குச் சராசரி
Graph — வரைபடம்
Greater than ogive — மேலின ஓகைவ்

H

Harmonic Mean — ஹார்மோனிக் சராசரி
Heterogeneous — பலபடித்தான
Histogram — அலைவெண் செவ்வகப் படம்
Homogeneous — ஒரு படித்தான
Hypothesis — கருதுகோள், எடுகோள்

I

Independent — சார்பற்ற
,, event — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Inference — உய்த்துணர்வு
Infinity — கந்தழி, எண்ணிலி, முடிவிலி
Interval — இடைவெளி
Item — உறுப்பு, இனம், உருப்படி

K

Kurtosis — கர்ட்டோஸிஸ், தட்டை அளவை

L

Large sample — பெருங்கூறு
Least square method — குறைந்த வர்க்க முறை
Less than ogive — கீழின ஓகைவ்
Logarithm — மடக்கை
Logarithmic paper — மடக்கைத்தாள்
Lorenz curve — லாரென்சு வளைகோடு

Lower confidence limit — கீழ் நம்பிக்கை எல்லை
,, quartile — கீழ்க் கால்மானம்

M

Measures of Central tendency — மையப் போக்கு அளவைகள்
,, ,, dispersion — சிதறல் அளவைகள்
,, ,, skewness — கோட்ட அளவைகள்
Median — இடைநிலை
Minimum — மிகச்சிறு, மீச்சிறு
Moment — விளக்கப் பெருக்குத் தொகை
Multiple correlation — பல்தர ஒட்டுறவு
Multi-stage sample — பன்னிலைக் கூறு
Mutually exclusive events — ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

N

National Income — நாட்டு வருமானம்
Normal curve — இயல்நிலை வளைகோடு
,, distribution — இயல்நிலைப் பரவல்
Null hypothesis — மறுக்கத்தகு எடுகோள், சூனிய எடுகோள்

O

Observation — கண்டறிதல்
Observed data — கண்டறிந்த விவரங்கள்
Ogive — அலைவெண் குவிவு வளைகோடு
,, less than — கீழின ஒகைவ்
,, more than — மேலின ஒகைவ்
One way classification — ஒருவழிப் பாகுபாடு

P

Parameter — முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை

Partial Correlation — பகுதி ஒட்டுறவு
Percentage bar diagram — சதவிகிதப் பட்டை விளக்க படம்
Percentile — நூற்று மானம்
Perfect correlation — நிறை ஒட்டுறவு
Pictogram — உருவ விளக்கப்படம்
Pie diagram — வட்ட விளக்கப் படம்
Poisson distribution — பாய்ஸான் பரவல்
Population — முழுமைத் தொகுதி
,, infinite — வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
Positive skewness — நேர்க் கோட்டம்
Power — படி
Probability — நிகழ்தகவு

Q

Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்
Quartile — கால்மானம்
,, deviation — கால்மான விலக்கம்
,, first — முதல் கால்மானம்
,, third — மூன்றும் கால்மானம்
Questionaire — வினாப் பட்டியல்

R

Random Sample — சமவாய்ப்புக் கூறு
Random numbers — சமவாய்ப்பு எண்கள்
Random sampling method — சமவாய்ப்புக் கூறு முறை
Randomisation — சரி சமவாய்ப்பாக்குதல்
Randomised Block design — சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பு
Rank — தரம்
Range — வீச்சு
Rank Correlation — தர ஒட்டுறவு

Rates — விதங்கள்
Raw data — தொகுக்கப் படா விவரங்கள்
Regression — தொடர்புப் போக்கு
,, coefficient — தொடர்புப் போக்குக் கெழு
,, equation — தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு
Replication — திரும்பச் செய்தல்

S

Sample — கூறு
, average — கூறு சராசரி
,, random — சமவாய்ப்புக் கூறு
,, , multistage — பன்னிலைக் கூறு
,, , random — சமவாய்ப்புக் கூறு
,, , stratified — படுகைக் கூறு
,, , systematic — முறையுடைக் கூறு
Sampling distribution — கூறுப் பரவல்
Scale — அளவுத் திட்டம்
Scatter — சிதறல்
,, diagram — ,, விளக்கப் படம்
Schedule — வினுப் பட்டியல்
Secondary data — இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
Shape — வடிவம்
Skewness — கோட்டம்
,, , measures of — கோட்ட அளவைகள்
Standard deviation — திட்ட விலக்கம்
,, distribution — திட்டப் பரவல்
,, error — திட்டப் பிழை
Standardisation — தரப்படுத்துதல்
Statistic — புள்ளியியல் பண்பளவை
Statistical inference — புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு
Statistics — புள்ளியியல்
Strata — படுகை

Stratified sampling method	—	படுகைக் கூறு முறை
Symmetrical	—	சமச் சீரான
,, distribution	—	சீரான பரவல்
Symmetry	—	சமச் சீர்

T

Table	—	அட்டவணை, பட்டியல்
Tabulate	—	பட்டியலமை
Tally mark	—	அலைவெண் குறி
Test for Independence	—	சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை
,, of Significance	—	மிகைத் தன்மை சோதனை

U

Unbiased	—	நடுநிலையான
Unit	—	அலகு

V

Variate, Variable	—	மாறி
,, dependent	—	சார்புடை மாறி
,, Independent	—	சார்பற்ற மாறி
Variation	—	வேறுபாடு
Variance	—	மாறுபாடு

———

பிழைத்திருத்தம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
30	கீழிருந்து 8	வகுப்படுத்தும்	உருப்படுத்தும்.
32	கடைசி	மொத்தம் 404·52, 2440·62, 3269·82, 3918·33, 5077·75	மொத்தம் 404.52, 485.06, 909.21, 1952.67, 3127.04
42	கீழிருந்து 9	இணைந்த உருப்படுத்தும்	இணைந்த மதிப்புக்களை உருப்படுத்தும்
126	கீழிருந்து 9, 10	தன்மையை என்கிறோம்.	தன்மையை தட்டை அளவை எண்கிறோம்.
133	11	உற்பத்தி விலை	உற்பத்தி, விலை
136	6	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{n}$
138	பட்டியல் 7-2–ல கடைசி	44	42
141	1	$\frac{1}{n}(x - \bar{x})^2$	$\frac{1}{n} \Sigma (x - \bar{x})^2$
161	3	$\rho = 1 - 6 \frac{\sum_1^n d_i^2}{N(N^2-1)}$	$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma_1^N d_i^2}{N(N^2 - 1)}$
163	கீழிருந்து 8	185	200
165	பட்டியல் 7-24–ல் 2-வது வரி	$3, 3, (3 - 3)^2 = 0$	$4, 3, (4 - 3)^2 = 1.$
165	பட்டியல் 72-4–ல 5-வது வரி	$1, 3, (1 - 3)^2 = 4$	$1, 1, (1 - 2)^2 = 1.$
165	கடைசி	6	4.
166	16	$1 - \left(\frac{6 \times 6}{5 \times 24}\right) = 0{\cdot}70$	$1 - \left(\frac{6 \times 4}{5 \times 24}\right) = 0.80$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
166	18	0·70	0.80.
186	4	குறிப்பிட்ட மதிப்பை	குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு இணையான மற்ற மாறியின் மதிப்பை
193	கீழிருந்து 5,6	$su^2 = \frac{93}{50} (0{\cdot}30)^2 = 18{\cdot}51$	$S_u^2 = \frac{93}{50} - (0.30)^2 = 1.77$
202	12	$P(A) = \frac{\text{நிகழ்ச்சி....எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த...எண்ணிக்கை}} = \frac{m}{N}$	$P(A) = \frac{\text{நிகழ்ச்சி.........எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த.........எண்ணிக்கை}} = \frac{m}{N}$
207	6	பச்சை கோலிகள் உள்ள	பச்சைக் கோலிகள், 3 சிகப்புகோலிகள் உள்ள
230	2	t-ன் கெழு	t_0-ன் கெழு
	5	,,	t_1-ன் கெழு
237	2	t_n-ன் கெழு	t_0-ன் கெழு
234	10	முறைகளில்	முயற்சிகளில்
256	கீழிருந்து 3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{5-r}$	$\left(1-\frac{1}{5}\right)^{5-r}$
274	1	pr	p^r
292	6	$N(0, 1)$	$N(\mu, \sigma)$
333	கீழிருந்து 13	$\hat{\theta}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $\hat{\theta}$ ஆக	$\hat{\theta}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு θ ஆக

பக்கம் 191-ல் இடம் பெறும் கணக்கில் S_u, S_y, S_x S_y, c_{uv}, r ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை முறையே $S_u = 1.33$, $S_v = 1.08$, $S_x = 13.3$, $S_y = 21.6$, $c_{uv} = 1.118$, $r = 0.78$ என மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளவும்.

(பக்கம் 33) பட்டியல் 3.8-ல் இடம்பெறும் டிகிரிகளின் மதிப்புகளைத் திருத்திச் சரியாகக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளவும்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

★

பின்வரும் பொருள்களில்

பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்

விரைவில் வெளிவரும்

கணிதம்	—	41	நூல்கள்
இயற்பியல்	—	28	,,
வேதியியல்	—	89	,,
தாவரவியல்	—	80	,,
விலங்கியல்	—	40	,,
பொறியியல்	—	50	,,
வரலாறு	—	45	,,
அரசியல்	—	34	,,
பொருளாதாரம்	—	83	,,
வணிகவியல்	—	36	,,
புள்ளியியல்	—	16	,,
உளவியல்	—	8	,,
புவியியல்	—	18	,,