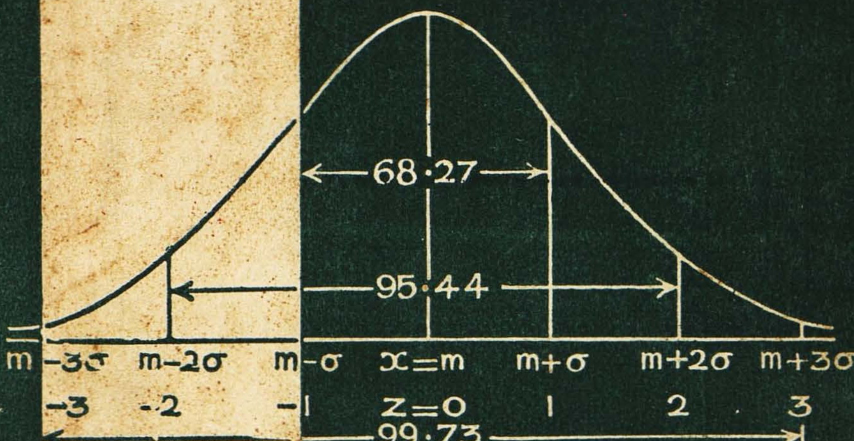
கணிதப் புள்ளியியல்

(MATHEMATICAL STATISTICS)

துரை. இரத்தினசபாபதி



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—August, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 492

© Tamil Nadu Text Book Society

MATHEMATICAL STATISTICS

D. RATNASABAPATHI

PRICE Rs. 11-00

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road, Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'கணிதப் புள்ளியியல்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **492**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **527** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. புள்ளியியல்–அறிமுகம் (Satistics-An Introduction) ... 1

2. சராசரி அளவுகள் (Measures of Averages) ... 5

3. சிதறல் அளவுகள் (Measures of Dispersion) ... 28

4. சமச்சீரின்மை, தட்டையளவு, திருப்பு திறன் (Skewness, Kurtosis, Moments) ... 54

5. ஊக அளவும், ராண்டம் மாறிகளின் பரவல்களும் (Probability and Distribution of Random Variables) ... 71

6. நிபந்தனை ஊக அளவும் புள்ளியியல் தற்சார்பும் (Conditional Probability and Satistical Independence) ... 135

7. சில சிறப்புப் பரவல்கள் (Some Special Distributions) ... 180

8. தொடர்ச்சிப் பரவல்கள் (Continuous Distributions) ... 236

9. மாறிகளின் உடன் தொடர்பும், தொடர்புப் போக்கும் (Correlation and Regression) ... 309

10. மாதிரிகளின் அறிமுறைத் தத்துவம் (Sampling Theory) ... 364

11. t, χ^2, F, z—முதலிய பரவல்கள் ... 396

12. சிறு மாதிரிகளின் சோதனைகள் (Small Sample Tests) ... 476

அட்டவணைகள் ... 534

மேற்கோள் நூல்களின் பட்டியல் (List of Reference Books) ... 546

கலைச்சொற்கள் ... 549

1. புள்ளியியல்—அறிமுகம்

(Statistics—An Introduction)

1-1. வரையறை

இப் புத்தகத்தைப் பற்றி முழுமையாக அறிவதற்கு முன்பு நாம் 'புள்ளியியல்' என்பது என்ன என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளுவோம். விவரங்களை எண் வடிவில் சேகரித்தலும், அவற்றைப் பாகுபடுத்தலும், ஆராய்தலும், அதன் மூலமாக முன்கூட்டியே வருங்காலத்தின் செய்திகளை விளக்குதலும் ஆகிய நான்கு கோட்பாடுகளை மையமாகக் கொண்டதே புள்ளியியலாகும். புள்ளியியலுக்குப் பல்வேறு ஆசிரியர்கள் பலவித மான விளக்கங்களைக் கொடுத்திருக்கின்றனர். முக்கியமாக பௌலி (Bowley) என்னும் ஆசிரியர் புள்ளியியலுக்குச் 'சராசரிகளின் அறிவியல்' என்றும், 'எண்களின் அறிவியல்' என்றும் விளக்கம் கூறுகிறார். பல்வேறு சூழ்நிலைகளால் குறிப்பிடத் தக்க அளவு மிகவும் பாதிக்கப்பட்ட எண்ணிக்கை அளவு விவரமே புள்ளியியல் என்பது யூல் (Yule) என்பவரின் கூற்றாகும்.

1-2. புள்ளியியலின் நோக்கங்கள்

புள்ளியியல், நிச்சயிக்க முடியாத நிலையில் உள்ளன வற்றைப் பற்றி ஒரு தீர்வான முடிவைத் தரும் கருவிகளை (tools) அல்லது அறிமுறைகளை (methods)க் கொண்டுள்ளது. இம் முறைகள் விஞ்ஞான ரீதியில் மட்டுமல்லாமல் வாணிக ரீதியிலும், தினசரி வாழ்க்கையிலும் பயன்படுகிறது. இன்றைய நாளில் புள்ளியியல் பயன்படாத துறை ஏதும் இல்லை எனத் திட்ட வட்டமாகக் கூறலாம். உண்மை நிலையை உருவகப் படங்களாகச் சேகரித்து அவற்றை ஆராய்தல் போன்ற புள்ளியியல் நுட்பங்கள் தவிர்க்க முடியாத கருவிகளாகத் தொழில் நிறுவனங்கள், அரசு, ஆராய்ச்சிக் கூடங்கள் முதலியவற்றில் பயன்படுத்தப்படுவதைக் கண்கூடாகக் காண்கிறோம்.

உய்ப்போரின் தேவைகளுக்கும் ஆசைகளுக்கும் ஏற்ப பொருள்களின் தரத்தையும் அளவையும் நிர்ணயிப்பதற்குத் தொழிற்சாலையின் செயற்குழுத் தலைவர்கள் மேன்மேலும் அதிகமாகப் புள்ளியியல் நுட்பங்களையே நாடுகின்றனர். அரசியல் வாதிகளும் சமுதாயச் சிற்பிகளும் தங்களின் அரசியல் சமூக நியதிகளை நிலைநாட்டுவதற்காகப் புள்ளி விவரங்களை மேற்கொள்ளுகின்றனர். நவீன புள்ளியியல் முறைகள் விஞ்ஞான ஆராய்ச்சிக்குப் பெரிதும் துணை புரிகின்றன.

புள்ளியியல், பொருளாதாரத்தின் அறிவியல் பாடமாக அமைந்துள்ளது. உயிரியல், உளவியல், விலங்கியல், வான வியல், மருத்துவ இயல் போன்ற துறைகளிலும், வேளாண்மைத் துறையிலும் புள்ளியியல் பெரிதும் பயன்படுகின்றது. உண்மை யாகச் சொல்லப் போனால், பல புள்ளியியல் கருவிகள் (முறை கள்) உயிரியல், வேளாண்மையியல் சோதனைகளின் போது தோன்றினவாம். பௌதிக – இயற்பியலின் சில அண்மை காலத் தத்துவங்கள் புள்ளியியல் கருத்துகளையே மையமாக்கி கொண்டுள்ளன.

1-3. புள்ளியியலின் அறிமுறை

புள்ளியியலின் அறிமுறை, பயன்முறைக் கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். தூய கணிதத்தின் முக்கிய பாடங்களில் ஒன்றான (நிகழ் தகவு) ஊக அளவுக் கொள்கையை (probability theory) அது விளக்குகிறது. அது மட்டுமன்றி சரிசம வாய்ப்புத் தத்து வங்கள், பல்வேறு தோராய மதிப்புத் தத்துவங்கள், எடு கோட்டுச் சோதனைத் தத்துவங்கள், மற்றும் முடிவு காண் தத்து வங்கள் இவற்றையும் புள்ளியியல் விளக்குகிறது.

புள்ளியியல் நிபுணர் ஆராய்ச்சியாளர்களுக்குத் தேவை யான (கருவிகளை) முறைகளைத் தயாரித்துக் கொடுப்பதில் ஈடு பட்டுள்ளார். ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனைக் கணக்கைப் பொறுத்தவரை அவர் சோதனை நிலைமைக்கு ஏற்ப சரியான ஒரு கணித மாடலை (Model)த் தயாரித்துக் கணித முறைப்படி ஆராய்ந்து, கடைசியாகத் தீர்வு காணும் முறையை வழி வகுக்கிறார். அவ்வேலையில் புள்ளியியல் அறிமுறைத் தத்துவங்கள் அவருக்கு உறுதுணை புரிகின்றன. அவர் புள்ளி யியல் அறிமுறையை விரிவுபடுத்தலிலும் ஈடுபட்டுள்ளார். புள்ளி யியல் உய்த்துணர்வு, சோதனைகளின் திட்ட அமைப்பு ஆகிய வற்றின் சில முக்கியப் பிரச்சினைகள் (problems) இன்னும் தீர்க்கப் படாமல் இருக்கின்றன. எனினும், கடந்த முப்பது ஆண்டுகளில்

புள்ளியியல் முறைகளில் ஏற்பட்ட பலவித அபிவிருத்திகளினுல் நல்லதொரு முன்னேற்றம் காணப்படுகின்றது.

புள்ளியியல் அறிமுறையின் வளர்ச்சியைக் கவனித்தால் ஜீவ நூல் ஆராய்ச்சியாளர்களின் முறையினுலேயே வளர்ச்சி யுற்றதாக முன்னரே குறிப்பிட்டோம். இது எப்படி எனில், அவர்களுக்குத் தேவையான அளவில் புள்ளியியல் முறைகள் வளர்ச்சி பெருமல் இருந்தன. இயற்கை நியதிப்படி எல்லாத் துறையிலுமே இதே போன்ற வளர்ச்சி இருந்த போதிலும், இந்தத் துறையில் இவ்வளர்ச்சி மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. ஊக அளவுக் கொள்கையின் இயற்கையான வளர்ச்சியே புள்ளி யியல் அறிமுறையாகும். இருந்தும், இந்தத் துறையில் ஆராய்ச்சி யாளர்கள் அதைக் கவனிக்கத் தவறி விட்டார்கள். இன்றும் புள்ளியியல் முறைகள் பல விஞ்ஞான சோதனைகளில் உப யோகப்படத் தகும் அளவிற்கு வளர்ச்சியுற இருக்கின்றன.

1-4. மூலக் கருத்துகள் (Fundamental Concepts)

(i) **முழுமைத் தொகுதி** (Population): இந்தச்சொற்கூறு மக்கள் தொகையை மட்டும் குறிப்பன அல்ல. இந்தப் 'புள்ளியியல் முழுமைத் தொகுதி' விசாலமான தன்மையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதிகளில் சில வரம்புள்ளதாகவும் (finite), சில வரம்பற்றதாகவும் (infinite) உள்ளன. இங்கு 'வரம்பற்ற' என்று நாம் குறிப்பிடுவது 'முடிவில்லாத' என்பதாகும். வரம்புள்ள முழுமைத் தொகுதி என்பது நிலையான எண்ணிக்கையுடைய பொருள்கள் அல்லது கூறுகளைத் தொகுப்பாகக் கொண்டதாகும். ஒரு தொழிற்சாலை யின் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை வரம்புள்ள முழுமைத் தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். ஒரு மரத்தின் இலைகளின் எண்ணிக்கை ஒரு வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதிக்கு (infinite population) எடுத்துக்காட்டாகும்.

(ii) **முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவு** (Parameter): ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட 'கூறும்' நமக்குத் தெரிந்திருந் தால். முழுமைத் தொகுதியை முழுமையாக விவரிக்கலாம். ஆனல், முக்கியமாக எல்லா முழுமைத் தொகுதிகளும் 'முழு மைத் தொகுதிப் பண்பளவு' எனப்படும் ஒரு சில எண்ணிக்கை அளவினுல் மட்டுமே முழுமையாக விளக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ (mean) தரவிலக்கம் σ (standard deviation) ஆகியன முழுமைத் தொகு திப் பண்பளவுகளாகும்.

மாதிரி (Sample)யின் சராசரி $\bar{x}$, தர விலக்கம் s என்பன 'மாதிரிப் பண்பளவை'களாகும் (கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளது).

(iii) **மாதிரி** (Sample) : மாதிரி என்பது புள்ளியியல் முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாகும். ஒரு புள்ளியியல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 'இங்கொன்றும் அங்கொன்றுமாக' 'ராண்டம்' (Random) முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பகுதியே 'மாதிரி' அல்லது 'ராண்டம் மாதிரி' என வழங்கப்படுகிறது. இது முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய மதிப்பீட்டையும், உய்த்துணர் தலையும் கண்டு பிடிக்க ஒரு மூல காரணியாக உதவுகிறது. புள்ளியியலின் முக்கியமான பண்புக் கூறுகளில் ஒன்ருனது, மாதிரியின் கோட்பாடுகளின் வளர்ச்சியாகும். இந்த வளர்ச்சி உத்திக் கணக்குகளில் போதிய (தகுதியான) மதிப்பீடுகளையும், உய்த்துணர்வுகளையும் கண்டுபிடிக்கப் பயன்படுகிறது. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 'ராண்டம்' முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகளின் எண்ணிக்கையை நாம் 'மாதிரியின் எண்ணிக்கை' என்கிருேம்.

(iv) **மாதிரிப் பண்பளவு** (Statistic) : மாதிரிகள், முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவுகளின் மதிப்பீட்டைக் கணிக்கச் சில விவரங்களைத் தருகின்றன. இந்த மதிப்பீட்டிற்காக மாதிரிகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட ஓர் எண்ணிக்கை அளவை '**மாதிரிப் பண்பளவு**' என நாம் வழங்குகிருேம். எடுத்துக்காட்டாக மாதிரிச் சராசரி $\bar{x}$ என்பது முழுமைத் தொகுதிச் சராசரி μஐ மதிப்பிடக்கூடிய ஒரு மாதிரிப் பண்பளவு ஆகும்.

2. சராசரி அளவுகள்

(Measures of Averages)

சராசரி என்பது ஒரு தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் சின்னமாகும். அத்தகைய எடுத்துக்காட்டு ஒரு பகிர்வின் நடுத்தர மதிப்பைக் குறிக்கக் கூடியதாகவும் உள்ளது. சராசரியை ஒரு பகிர்வின் மையநிலைப் போக்கைத் தெரிவிக்கும் அளவாகவும் கருதலாம். ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் எந்த அளவுகோலைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்பட்டிருக்கின்றதோ, அதே அளவுகோலால்தான் அதன் சராசரியும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

சராசரியில் பலவிதமான வகைகள் உண்டு. அவையாவன:

(1) கூட்டுச் சராசரி அல்லது 'சராசரி' (Arithmetic mean)

(2) இடைநிலைச் சராசரி (Median)

(3) முகடு (Mode)

(4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric mean)

(5) இசைச் சராசரி (ஹார்மோனிக் சராசரி) (Harmonic mean). இவற்றில் முதல் மூன்றும் புள்ளியியலில் முக்கிய இடம் பெற்றுள்ளன.

2-1. கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள உறுப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை மொத்த உறுப்புகளால் வகுத்துவரும் எண் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

X மாறியின் n மதிப்புகள் $X_1\ X_2, \ldots X_n$ என்றால், இதன் கூட்டுச் சராசரி $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

இங்கு $\sum$ என்பது ஒரு கூட்டல் குறியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

ஐந்து கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் 8, 3, 5, 12, 10 என்றால், இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

$$\overline{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி

இதை அலைவுப் பரவலின் சராசரி எனவும் கூறலாம் இனி மேல் சராசரி என்றால் அது கூட்டுச் சராசரியையே குறிக்கும் எனக் கொள்வோம்.

ஒவ்வோர் இடைவெளியிலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் 'பிரிவு அலைவெண்' (class interval) என வழங்குகிறோம். இவ்வலைவெண்கள் பிரிவு இடைவெளிகளின் நடு மதிப்புகளில் குவிந்து இருப்பதாகக் கொள்கிறோம். எனவே, $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற நடு மதிப்புகளுக்கான அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2 \ldots f_n$ என்றால்,

x_1 மதிப்புள்ள f_1 உறுப்புகள்,

x_2 மதிப்புள்ள f_2 உறுப்புகள்,

....

x_n மதிப்புள்ள f_n உறுப்புகள் உள்ளன என்று அர்த்தம். ஆகவே, X மாறியின் சராசரி

$$\overline{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N}\sum f_i x_i \quad (\because \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.

5, 8, 6, 2 என்ற மதிப்புக்கள் முறையே 3, 2, 4, 1 என்ற அலைவெண்களைக் கொண்டிருந்தால், அவற்றின் சராசரி

$$\bar{X} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 8 + 4 \times 6 + 1 \times 2}{3 + 2 + 4 + 1}$$

$$= \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5{\cdot}7$$

பளுவான கூட்டுச் சராசரி (Weighted arithmetic mean)

$x_1, x_2 \ldots x_k$ என்ற மாறிகளின் பளுக்கள் முறையே

$w_1, w_2 \ldots w_k$ என்றால், அவற்றின் பளுச் சராசரி

$$\bar{X}_{ப} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_k x_k}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} w_i \, x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} w_i}$$

கூட்டுச் சராசரியின் தன்மைகள்

(1) $x_1, x_2 \ldots x_n$ மாறிகளின் சராசரி $\bar{X}$ எனவும், ஒரு தோராய மதிப்பு A எனவும் கொண்டால்,

$$\bar{X} = \left[\frac{1}{N} \sum f_i (x_i - A)\right] + A$$

இங்கு $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \, x_i$ என நாம் வரையறுத்தோம்.

எனவே $\bar{X} = A + \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \, x_i - A$

$$= A + \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i - NA\right]$$

$$= A + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - A)$$

ஆகவே $\bar{X} = A + \frac{1}{N}\sum f_i (x_i - A)$ (நிரூபணமானது).

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் எப்போதும் பூச்சியமாக இருக்கும்.

அதாவது, $\Sigma f_i (x_i - \bar{x}) = 0$

எப்படி என்றால் $\sum f_i (x_i - \bar{x})$

$$= \sum f_i x_i - \sum f_i \bar{x}$$

$$= N\bar{x} - N\bar{x} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(3) தோராய மதிப்பு A என்பது $\bar{x}$-க்குச் சமமாக இருந்தால்தான், A-லிருந்து கழிக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதல் குறைந்த பட்சமாக இருக்கும்.

(4) f_1 எண்களின் சராசரி m_1 ஆகவும்

f_2 ... ... m_2 ...

....

f_k ... ... m_k ... இருந்தால்

எல்லா எண்களுடைய $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)$ கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots f_k m_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} \text{ ஆகும்.}$$

2-2. இடைநிலைச் சராசரி (Median)

கொடுக்கப்பட்ட உறுப்புக்களை அவற்றின் மதிப்பிற்குத் தக்கவாறு ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் [அதாவது ஓர் ஒழுங்கு வரிசையில்] அமைத்த மைய உறுப்பின் மதிப்பளவு 'இடை நிலை' எனப்படும்.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை N ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாகில், $\frac{N+1}{2}$ ஆவது இடம் மைய ஸ்தானத்தைக் குறிக்

கிறது. $N = 2K$ ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணுகில் மையத்தி லுள்ள x_k, x_{k+1} இரு உறுப்புகளின் சராசரியே இடை நிலையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

36, 72, 49, 45, 60, 33, 61, 70, 52 என்ற 9 எண்களின் இடைநிலையைக் காண இவ்வெண்களை ஏறு வரிசைப்படுத்தி அமைக்கிருேம்.

33, 36, 45, 49, [52,] 60, 61, 70, 72

இங்கு இடைநிலைச் சராசரி $= \frac{9 + 1}{2}$ = 5ஆவது இடத்தி லுள்ள எண்.

$= 52.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

முன் எடுத்துக்காட்டில் உள்ள 9 எண்களுடன் 87 என்ற மதிப்புள்ள 10ஆவது எண்ணையும் சேர்த்துக் கொண்டால், இந்த 10 எண்களில் இடைநிலை 5-வது, 6-வது இடங்களுக்கிடையில் அமைகிறது.

அதாவது இடைநிலை $= \frac{52 + 60}{2} = 56.$

அலைவெண் பரவலின் இடை நிலை (Median of a frequency distribution)

இந்த இடைநிலைக்கான சூத்திரம் :

$$Med. = \text{இடைநிலை} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

இங்கு $L =$ இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ்வரம்பு.

$N =$ அலைவெண்களின் மொத்தம்.

$m =$ இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் வரம்பிற்குள் மதிப்பு களையுடைய உறுப்புகளின் திரள் அலைவெண்

$f =$ இடைநிலை நிகழும் பிரிவின் அலைவெண்.

$c =$ இடைவெளித் தூரம்.

எனவே, மேற்கூறிய வாய்பாட்டைக் கொண்டு அலை வெண் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

கீழ்க்காணும் அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி ஆகிய இரண்டையும் கணிக்கவும்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
− 0.5 − 0.5	40
0.5 − 1.5	150
1.5 − 2.5	330
2.5 − 3.5	295
3.5 − 4.5	150
4.5 − 5.5	35
மொத்தம்	1000

இங்கு $N = 1000$

முதலில் இடைநிலையைக் கணிப்போம். கொடுத்துள்ள விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு பட்டியலைத் தயாரிப்போம்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	திரள் அலைவெண்
− 0.5 − 0.5	40	40
0.5 − 1.5	150	(190) $\rightarrow m$
$L \leftarrow$ (1.5) − 2.5	(330) $\rightarrow f$	520
2.5 − 3.5	295	815
3.5 − 4.5	150	965
4.5 − 5.5	35	1000
மொத்தம்	(1000) $\rightarrow N$	—

மேலே கண்டுள்ள வாய்பாட்டின்படி,

$$\text{இடைநிலை} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

இங்கு $L = 1.5$

$$\frac{N}{2} = 500$$

$$m = 190$$

$$f = 330$$

$$c = 1.0$$

$$\therefore \text{இடைநிலை} = 1.5 + \frac{500 - 190}{330} \times 1$$

$$= 1.5 + \frac{310}{330}$$

$$= 1.5 + 0.94 = \underline{2 \cdot 44}$$

அடுத்து இப்பரவலுக்கான கூட்டுச் சராசரியைக் கீழ்க் காணும் பட்டியலைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கலாம். $A = 2$

பிரிவு இடைவெளி C. I.	நடுமதிப்பு X	அலைவெண் f	$d = X_i - A$	$f d$
— 0.5 — 0.5	0.0	40	— 2	— 80
0.5 – 1.5	1.0	150	— 1	—150
1.5 — 2.5	2.0	330	0	0
2.5 — 3.5	3.0	295	1	295
3.5 — 4.5	4.0	150	2	300
4.5 — 5.5	5.0	35	3	105
மொத்தம்	—	1000	—	470

எனவே $\overline{X} = A + \frac{1}{N}\sum f_i (X_i - A)$ என்ற சூத்திரத்தின்

மூலம் $\overline{X}$–ன் மதிப்பு,

$$\overline{X} = 2 + \frac{1}{1000}\sum f_i\, d_i$$

$$= 2 + \frac{1}{1000} \times 470$$

$$= 2 + 0.470$$

$$= \underline{2.470}$$

2-3. முகடு (Mode)

ஒரு மாறியின் எந்த அளவானது பல தடவை நிகழுகிறதோ, அந்த அளவு 'முகடு' என வழங்கப்பெறுகிறது. இந்த அளவே பெரும்பாலும் நடைமுறையில் இருந்து வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 இந்த எண்களில் ஏனைய எண்களைக் காட்டிலும் 9 மிக அதிக தடவை வருகிறது. எனவே, இவ்வெண்களின் முகடு 9 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

3, 5, 8, 10, 10, 12, 15, 16 இவ்வெண்களில் முகடு என்பது இல்லை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 இவ்வெண்களில் 4, 7 என்ற இரண்டு முகடுகள் உள்ளன. இத் தொகுப்பு இரட்டை முகடு உள்ள ஒரு தொகுப்பு எனக் கூறலாம். ஒரே ஒரு முகடு உள்ள பரவலை ஒற்றை முகட்டுப் பரவல் என்று வழங்குகிறோம்.

அலைவெண் பரவலின் முகடு

உச்ச அலைவெண்ணுக்குரிய பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்டு முகடைக் கண்டு பிடிக்க அடுத்தப் பக்கத்தில் உள்ள சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்,

L = முகடு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் வரம்பு.

f_1 = முகடு பிரிவின் இடைவெளிக்கான அலைவெண்.

f_0 = முகடு பிரிவு இடைவெளிக்குத் சற்றே முந்திய இடைவெளிக்கான அலைவெண்.

f_2 = முகடு பிரிவு இடைவெளிக்குச் சற்றே பிந்திய இடைவெளிக்கான அலைவெண்.

c = இடைவெளித் தூரம்

என்றால், முகடுக்கான சமன்பாடு

$$\text{முகடு} = M_0 = L + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= L + \frac{c.(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

பின்வரும் அலைவெண் பரவலின் முகடைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவு அலைவெண்
30 — 34	3
35 — 39	5
40 — 44	8
45 — 49	10
50 — 54	7
55 — 59	5
60 — 64	2
மொத்தம்	40

இங்கு 29.5 — 34.5, 34.5 — 39.5, ... என்பன தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாகின்றன.

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	பிரிவு அலைவெண்
29.5 — 34.5	8
34.5 — 39.5	5
39.5 — 44.5	8
44.5 — 49.5	10
49.5 — 54.5	7
54.5 — 59.5	5
59.5 — 64.5	2
மொத்தம்	40

உச்ச அலைவெண் = 10

முகடுப் பிரிவு இடைவெளி : (44.5 — 49.5)

எனவே $L = 44.5$, $f_1 = 10$, $f_0 = 8$, $f_2 = 7$, $c = 5$

$$\text{முகடு} = L + \frac{c(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

$$= 44.5 + \frac{5(10-8)}{20-8-7}$$

$$= 44.5 + \frac{10}{5} = 46.5$$

அனுபவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவற்றிற்கான தொடர்பு

ஒரு சாதாரண சமச்சீரற்ற பரவலின் மேற்கூறிய மூன்று சராசரிகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை அனுபவ ரீதியில் அமைக்

கப்பட்ட கீழ்க்காணும் (வாய்பாட்டின்) சமன்பாட்டின் மூலம் காணலாம்.

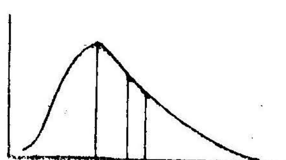
கூட்டுச் சராசரி — முகடு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை).

சுருக்கமாகக் கூறின்,

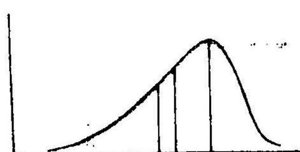
சராசரி — முகடு = 3 (சராசரி — இடைநிலை)

சமச் சீரான பரவலில் இம் மூன்று மையநிலைப் போக்கு அளவுகளும் சம அளவைப் பெறுகின்றன. ஆனால், சமச் சீரற்ற பரவலில் அவை ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடுகின்றன. எவையாகிலும் இரண்டு சராசரிகளின் அளவு தெரிந்திருப்பின், மூன்றாவது சராசரியின் அளவை இவ்வாய்பாட்டின் மூலம் கணக்கிடலாம்.

சமச் சீரற்ற பரவலில் மூன்று சராசரிகளின் நிலைகளையும் கீழ்க்கண்ட இரு படங்களும் நன்கு விளக்குகின்றன.



படம் 1.



படம் 2.

சமச் சீரற்ற பரவல்கள்.
மு. முகடு
இ. நி. இடைநிலை
கூ. கூட்டுச் சராசரி

2-4. பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean)

ஒரு மாதிரியின் மொத்த வளர்ச்சிக்குப் பதில் அதன் விகித வளர்ச்சிக்குச் சில சமயங்களில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கிறோம். அப்போது கூட்டுச் சராசரியைவிடப் பெருக்குச் சராசரி சிறந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

$x_1, x_2 \ldots x_n$ என்பன x-ன் n மதிப்புக்களாயின், அந்த n மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியை (GM,) அவ்வுறுப்பு மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் nஆவது வர்க்கமூலத்தால் வரையறுக்கிறோம்.

அதாவது $G.M.$ = பெ. ச. = $\sqrt[n]{x_1, x_2 \dots x_n}$

$$= (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)^{1/n}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

2, 4, 8 எண்களின் பெ. ச. = $\sqrt[3]{2 . 4 . 8} = (64)^{1/3} = 4$

அலைவெண்களின் பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2 \dots x_n$ என்ற n மாறிகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2 \dots f_n$ என்றால், அதன் பெருக்குச் சராசரி,

$$\text{பெ. ச.} = \left[x_1^{f_1}, x_2^{f_2} \dots x_n^{f_n} \right]^{1/N}$$

$$N = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

அதாவது,

$$\text{பெ. ச.} = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i} \right]^{\frac{1}{\sum f_i}}$$

இதை ''லாக்'' இரு பக்கமும் எடுத்தால்,

$$\log \text{பெ. ச.} = \frac{1}{\sum f_i} \log \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i} \right)$$

$$(\because \log A^t = t \log A)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \log \left(x_i^{f_i} \right)$$

$$\left[\because \log [\prod_{i=1}^{n} x_i] = \sum_{i=1}^{n} \log x_i \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i$$

எனவே, log பெ. ச. $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ கண்டு பிடித்து,

இதற்கான anti - log மதிப்பைப் பார்த்து எழுதினால் பெ. ச. வின் மதிப்பு கிடைக்கும்.

2-5. ஹார்மானிக் சராசரி (Harmonic Mean)

தரப்பட்டுள்ள எண்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்களை அமைத்து, அவற்றின் கூட்டிடை (கூட்டுச் சராசரி-கூ. ச.) யின் தலைகீழ் பின்னத்தை அவ்வெண்களின் ஹார்மானிக் சராசரி என்று கூறுகிறோம்.

x_1, x_2, x_n என்ற n மாறிகளின் தலைகீழ்ப் பின்னங்கள் முறையே $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}$ ஆகும்.

எனவே ஹார்மானிக் சராசரி (ஹா. ச.)

$$= \frac{1}{\text{தலைகீழ்ப் பின்னங்களின் கூ. ச.}}$$

$$H = \text{ஹா. ச.} = \frac{1}{\left[\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}\right]}$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$$

மாதிரி 10 :

2, 4, 8 எண்களின் ஹா. ச.

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \left(\frac{3}{\frac{4+2+1}{8}}\right) = \frac{24}{7} = 3.43$$

அலைவெண் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரி

$x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற மாறிகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2 \ldots f_n$ ஆனல்,

$$\text{இதன் ஹா. ச. } H = \frac{1}{\left[\frac{f_1\frac{1}{x_1}+f_2\frac{1}{x_2}+\ldots+f_n\frac{1}{x_n}}{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}\right]}$$

$$\text{அதாவது } H = \frac{N}{\left[f_1\frac{1}{x_1}+f_2\frac{1}{x_2}+\ldots+f_n\frac{1}{x_n}\right]}$$

$$= \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{1}{x_i}}$$

கூட்டுச் சராசரி (கூ. ச.), பெருக்குச் சராசரி (பெ. ச.), ஹார்மானிக் சராசரி (ஹா. ச.) இவற்றிற்கான தொடர்பு

சராசரிகள் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தை வரையறுக்கின்றன.

கூ. ச. ≥ பெ. ச. ≥ ஹா. ச.

நிரூபணம் : a, b என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\text{கூ. ச.} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{பெ. ச.} = \sqrt{a \cdot b} = (a\,b)^{1/2}$$

$$\text{ஹா. ச.} = \frac{2}{1/a + 1/b} = \frac{2ab}{a+b}$$

இப்போது $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ என்ற காரணி (factor)ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

(அதாவது) $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனவே, கூ. ச. ≥ பெ. ச. ... ... (i)

(1)-ன் இரு பக்கங்களிலும் $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ ஆல் பெருக்கக்

கிடைப்பது $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{(a+b)} \geq \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}}{a+b}$.

$$\frac{\sqrt{ab}}{2} \geq \frac{ab}{a+b}$$

அல்லது $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ ... ... (2)

எனவே, பெ. ச. ≥ ஹா. ச. ... ... (ii)

(i)ஐயும், (ii) ஐயும் சேர்த்து எழுதினால்,

கூ. ச. ≥ பெ. ச. ≥ ஹா. ச. என்பது நிரூபணமாகிறது.

2-6. கால்மானங்கள் (Quartiles)

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வரிசைப்படுத்தி அத் தொகுதியின் நடு மையமான மதிப்பை இடைநிலை என்று வழங்குகிறோம். இதே யோசனையைப் பயன்படுத்தி அந்தத் தொகுதியை நான்கு சரி சம பாகங்களாகப் பிரிப்போம். அந்த மதிப்புகளில்

Q_1, Q_2, Q_3 என்பன முதல், இரண்டாம், மூன்றும் கால் மானங்கள் என வழங்கப்பெறும்.

Q_1 = முதல் கால்மானம் = கீழ்க் கால்மானம் (Lower Quartile)

$$= L + \frac{\frac{N}{4} - m}{f_1} \cdot c$$

இந்தச் சூத்திரம் இடைநிலை சூத்திரத்தைப் போன்றே L, m, f, c என்ற எழுத்துகளைப் பெற்றுள்ள போதிலும், இந்த 'L'-க்கும் இடைநிலைக்கும் வேறுபாடு உண்டு.

இங்கு Q_1-க்கான

L = முதல் கால்மானப்பிரிவின் (பிரிவு இடைவெளியின்) கீழ் வரம்பு.

m = முதல் கால்மானப்பிரிவின் கீழ் வரம்பிற்குள்ளான மதிப்புகளை உடைய உறுப்புகளின் திரள் அலைவெண்.

f = முதல் கால்மானம் நிகழும் பிரிவின் அலைவெண்.

c = இடைவெளித்தூரம்.

N = மொத்த அலைவெண்கள்.

இந்த விளக்கத்துடன் Q_1ஐ மதிப்பிடலாம்.

இதேபோல Q_3 = மூன்றும் கால்மானம் = மேல் கால்மானம் (Upper Quartile)

$$Q_3 = L + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

இங்கும் முன்போலவே L, m, f இவை இடத்திற்கு தகுந்தபடி மாறுபடுகின்றன என்று அறிகிறோம்.

மேலும் Q_2 = Med = இடைநிலை எனவும் தெரிகிறது.

2–7. பதின்மங்கள், நூற்றுமானங்கள் (Deciles, Percentiles)

இதே போன்று கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியைப் பத்து சரி சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மதிப்புகளைப் 'பதின்மங்கள்'

(Deciles) எனவும், நூறு சரி சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் மதிப்புகளை 'நூற்றுமானங்கள்' (Percentiles) எனவும் குறிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$D_4 = L + \frac{\left(\frac{4N}{10} - m\right)}{f} . c$$

$$P_{53} = L + \frac{\left(\frac{53N}{100} - m\right)}{f} \cdot c$$

D_4 என்பது 4ஆவது பதின்மம் என்றும், P_{53} என்பது 53ஆவது நூற்றுமானம் என்றும் நாம் குறிக்கிறோம்.

இங்கு Q_1-க்கு $\frac{N}{4}$ மதிப்பையும்,

D_4-க்கு $\frac{4N}{10}$ மதிப்பையும்,

P_{53}-க்கு $\frac{53N}{100}$ மதிப்பையும் கணக்கில் கொண்டே

மேற்கூறிய Q_1, D_4, P_{53} மதிப்புகளைக் கணிக்கிறோம்.

மேலும், $D_5 = P_{50} = Q_2$

$P_{25} = Q_1$

$P_{75} = Q_3$

எனவும் புலனாகிறது.

கால்மானங்கள், பதின்மங்கள், நூற்றுமானங்கள் போன்ற சரி சமப் பிரிவுகளின் அளவை ஒரே சீராக 'மதிப்பளவை' எனக்கூறுகிறோம்.

மாதிரி 11:

ஒரு நகரத்தில் பிறந்த குழந்தைகள் நடக்க ஆரம்பிக்கும் வயதினைக் குறிக்கும் அலைவெண் பரவல் பட்டியல் அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

வயது x (மாதங்களில்)	8 to 8.9	9 to 9.9	10 to 10.9	11 to 11·9	12 to 12.9	13 to 13·9	14 to 14.9	15 to 15.9	16 to 16.9	17 to 17.9
குழந்தைகளின் எண் f	1	9	20	29	60	32	30	14	8	1

இப் பரவலுக்கான (1) முதல் பதின்மம்

(2) மூன்றும் கால்மானம்

(3) 90ஆவது நூற்றுமானம்

இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு : இடைவெளிகளை 7.95 to 8.95 8.95 to 9.95 என்றவாறு எடுத்துக் கொண்டு பட்டியல் தயார் செய்வோம்.

பிரிவு இடைவெளி (*C. I*)	அலைவெண் f	திரள் அலைவெண் $c.f.$
7.95 — 8.95	1	1
8.95 — 9.95	9	10
9.95 — 10.95	20	30
10.95 — 11.95	29	59
11.95 — 12·95	60	119
12.95 — 13.95	32	151
13.95 — 14.95	30	181
14.95 — 15.95	14	195
15.95 — 16.95	8	203
16.95 — 17.95	1	204
மொத்தம்	204	—

(1) முதல் பதின்மம்: $D_1 = L + \dfrac{\left(\dfrac{N}{10} - m\right)}{f} . c$

இங்கு $\dfrac{N}{10} = \dfrac{204}{10} = 20.4.$

எனவே இதற்கான $L = 9.95$

$m = 10$

$f = 20$

$c = 1$

$\therefore \quad D_1 = 9.95 + \dfrac{(20.4 - 10)}{20} \times 1.$

$= 9.95 + 0.52 = \underline{10.47}$ ... ... (i)

(2) மூன்றும் கால்மானம் : $Q_3 = L + \dfrac{\left(\dfrac{3N}{4} - m\right)}{f} . c$

இங்கு $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{612}{4} = \underline{153.}$

இதற்கான $L = 13.95$

$m = 151$

$f = 30$

$c = 1$

$\therefore \quad Q_3 = 13.95 + \dfrac{(153 - 151)}{30} . 1.$

$= 13.95 + \dfrac{2}{30}$

$$= 13.95 + 0.07$$

$$= \underline{14.02} \qquad \text{(ii)}$$

(3) 90ஆவது நூற்றுமானம்:

$$P_{90} = L + \frac{\left(\frac{90\,N}{100} - m\right)}{f} \times c.$$

$$\frac{90\,N}{100} = \frac{90 \times 204}{100} = 183.6.$$

இதற்கான $L = 14.95$

$m = 181$

$f = 14$

$c = 1.$

$$\therefore \quad P_{90} = 14.95 + \frac{(183.6 - 181.0)}{14} \times 1$$

$$= 14.95 + \frac{2.6}{14}$$

$$= 14.95 + 0.19 = \underline{15.14} \qquad \text{(iii)}$$

பயிற்சி

(1) கொடுக்கப்பட்ட 100 எண்களில் 20 நான்குகளும், 40 ஐந்துகளும், 30 ஆறுகளும், மீதி ஏழுகளும் இருந்தால் அவற்றின் சராசரியைக் காணவும்.

(2) ஓர் அலைவெண் பரவலின் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றை எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக. அவை மூன்றையும் ஒப்பிட்டு ஒவ்வொன்றையும் எவ்விடங்களில் பயன்படுத்தலாம் என்ற விளக்கம் தருக

(3) 10 வயதிலிருந்து 15 வயது வரை உள்ள மாணவர்களின் எடைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது. மாணவர்களின் எடைகளின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவற்றைக்காண்க,

எடை (பவுண்டு)	மாணவரின் எண்ணிக்கை
25 — 29	9
30 — 34	22
35 — 39	28
40 — 44	21
45 — 49	17
50 — 54	3
மொத்தம்	100

(4) கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து இடைநிலையையும் முகடையும் கணிக்கவும்.

ஆஜர் ஆகாத நாள்களின் எண்ணிக்கை	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
5-க்கும் குறைவான	29
10-க்கும் குறைவான	224
15 ,, ,,	465
20 ,, ,,	582
25 ,, ,,	628
30 ,, ,,	639
35 ,, ,,	645
40 ,, ,,	647
45 ,, ,,	650

(5) 245 தொழிலாளர்களுடைய கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இடைநிலை, கீழ்க்கால்மானம், மேல் கால்மானம், 8ஆவது பதின்மம், 55ஆவது நூற்றுமானம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

மாதக் கூலி (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை
1 — 2.99	6
3 — 4·99	53
5 — 6.99	85
7 — 8 99	56
9 — 10·99	21
11 — 12·99	16
13 — 14.99	4
15 — 16.99	4
மொத்தம்	245

(6) (i) கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து நுகர்ந்த அளவினை 'எடை' என்று வைத்துக்கொண்டு சராசரி கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) விலைகளுக்கான பளுவற்ற சராசரியைக் காண்க.

உணவுப் பொருள்கள்	நுகர்ந்த அளவு (பவுண்டுகளில்)	ஒரு பவுண்டின் விலை (ரூபாயில்)
மாவு	11.50	5.50
நெய்	5.60	58.25
சர்க்கரை	0.28	8.15
உருளைக்கிழங்கு	0.16	2.40
எண்ணெய்	0.35	20.00
மொத்தம்	17.89	94 30

(7) $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$ என்ற n–மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இடைநிலைச் சராசரிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(8) ஒரு மனிதன் n சமதூரங்களை $v_1, v_2, \ldots, v_n$ என்ற வேகங்களில் பயணம் செய்கிறான். அவனது சராசரி வேகம் $\dfrac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}$ ஐத் தாண்ட முடியாது என்று காண்பி.

(9) $\bar{x}_w$ என்பது w_i எடை கொண்ட x_i மாறிகளின் எடைச் சராசரியாகவும், $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} w_i\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_w)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j>i} w_i\, w_j\, (x_i - x_j)^2\right]$$

என்று நிரூபி.

(10) ஒரு வேலையை A, 4 மணி நேரங்களிலும், B 5 மணி நேரங்களிலும், C 6 மணி நேரங்களிலும் முடித்தால், அவர்களின் சராசரி வேலை விகிதத்தைக் காண்க.

3. சிதறல் அளவுகள்

(Measures of Dispersion)

சராசரி அளவுகள் பரவல்களின் முக்கியமான குணாதிசயங்களில் ஒன்றை மட்டும் விளக்குகிறது. ஒரு பரவலைக் கவனிக்கும்போது மாறிகள் மைய அளவுகளிலிருந்து எப்படி சிதறுபட்டிருக்கின்றன அல்லது எப்படிக் கூட்டமாக இருக்கின்றன என்பதை முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டும். ஆகவே, இரண்டு பரவல்களின் சராசரிகள் ஒரே மதிப்புள்ளவையாக இருப்பினும், அலைவுப் பரவல்கள் சராசரிகளைச் சுற்றிலும் சிதறி அமைவதில் வேறுபட்டிருக்கலாம். ஆதலால், சராசரி அளவுகோல்கள் மைய நிலைப் போக்கை விளக்குகின்றனவே தவிர சிதறலின் தன்மையை அறிய உதவுவதில்லை. ஓர் அலைவுப் பரவலில் உறுப்புகள் மைய நிலைப்போக்கு அளவுகளைச் சுற்றிலும் எவ்வாறு சிதறி அவற்றிலிருந்து மாறுபட்ட அளவுகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என்று அறிய, சில சிதறல் அளவுகளை இங்கு விளக்கிச் சிதறலின் தன்மைகளை அறிந்துகொள்வோம்.

சிதறல் அளவைகளில் நான்கு முக்கியமான அளவுகோல்களாவன:

(1) வீச்சு (Range)

(2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

(3) சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

(4) திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

3-1. வீச்சு (Range)

ஒரு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளில் பெருமத்திற்கும் சிறுமத்திற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டை அம்மாறியின் 'வீச்சு'

என வழங்குகிறோம். சிதறலை அளப்பதற்கு இது மிகச் சாதாரண அளவுகோல். இந்த வீச்சை எளிதில் கணக்கிடலாம். இந்த நிறையானது பல தொழிற்சாலைகளில் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. ஆனாலும், வீச்சு அளவைப் பயன்படுத்துவதில் பல இடையூறுகள் உள்ளன. வீச்சு அளவு இரண்டு கடைக்கோடி (extreme) உறுப்புகளின் மதிப்புகளைப் பொறுத்து இருக்கிறதே தவிர, மற்ற மதிப்புகளைப் பற்றி அறிவிப்பது இல்லை. ஆகவே, இந்நிறை எப்போதும் நிலையாக இருக்கும் எனச் சொல்ல முடியாது. இஃது ஓர் உயர்வான அளவு கோல் அல்ல.

3-2. கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

பரவல் முழுவதையும் நான்கு சரி சம பாகங்களாகப் பிரித்து, கீழ்க்கால்மானம் Q_1, மேல் கால்மானம் Q_3 ஆகிய இரண்டையும் கண்டு பிடிப்போம்.

$Q_3 - Q_1$ = இடைக் கால்மான வீச்சு ஆகும். இதனுடைய சரி பாதி அளவு $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = Q.D.$ இதை 'அரை இடைக் கால்மான வீச்சு' (Semi-Inter Quartile Range) அல்லது கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation) என வழங்குகின்றோம். இது பரவலின் மற்றொரு சிதறல் அளவாகும்.

கால்மான விலக்கம் (கா. வி.) கருத்து நிரம்பியதாகவும், எளிதில் விளங்கக்கூடியதாகவும் உள்ளது. இவ்விலக்கத்தை எளிதில் கணக்கிட முடியும். பரவலின் 50% (சதவீத) உறுப்புகளுக்கு இடமளித்து மதிப்பிடப்பட்டதாக உள்ளது. பொருளாதார, வாணிக, புள்ளி விவரக் கணக்கியல்களில் இது அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. கால் மானங்களைக் கணக்கிடப் பயன்படும் வாய்பாடுகளை பாடம் 2-ல் கவனித்தோம்.

$$Q_1 = L + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} . c$$

$$Q_3 = L + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)}{f} . c$$

(L, m, f, மதிப்புகள் Q_1-க்கும் Q_3-க்கும் வேறுபட்டவை எனவும் நாம் அறிவோம்.)

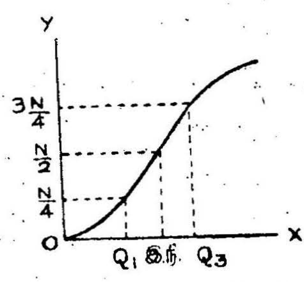
3-3. கீழ்இன 'ஓகைவ்'

வரைப்படம் மூலம் கால்மானங்களை மதிப்பிடுதல்

வரைப்படத்தாளில் X அச்சில், மேல் வரம்புகளுக்கும், Y அச்சில் முறையே அவற்றுக்கான திரள் அலைவெண்களுக்குமான புள்ளிகளை அமைத்துக் 'கீழ் இன ஓகைவ்' என்ற வளைகோடு வரையப்படுகிறது. இந்தப் படத்தில் Y அச்சில் திரள் அலைவெண்கள் $\frac{N}{4}, \frac{3N}{4}$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் வழியே X அச்சுக்கு இணைகோடுகள் வரையவும். அவை கீழ் இன ஓகைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் வழியே Y அச்சுக்கு இணை கோடுகள் வரைந்தால் அவை X அச்சுக்கோட்டை எந்த இடங்களில் சந்திக்கின்றனவோ, அந்த மதிப்புகள் முறையே Q_1, Q_3 ஆகும்.

இந்த ஓகைவ் வளைகோட்டு வரைபடம் மூலம் மற்ற பங்கு மதிப்பளவைகளையும் மேற்படி முறைப்படி கணிக்கலாம் எடுத்துக்காட்டாக இடைநிலை, 6ஆவது பதின்மம்; 72ஆவது நூற்றுமானம் இவைற்றையும் கணிக்கலாம்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டு வரைப்படம் கீழே வரையப்பட்டுள்ளது.



இ.நி = இடைநிலை அளவு
Q_1 = கீழ்கால்மான அளவு
Q_3 = மேல்கால்மான அளவு
N = மொத்த எண்ணிக்கை

படம் 3. கீழின ஓகைவ்

3-4. சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளின் கூட்டல் சிதறலின் ஓர் அளவைக்குப் பயன்படாது. ஏனென்றால், சில வேறுபாடுகள் பூச்சியத்துக்கு மேலாகவும் இருக்கும். அத்துடன் வேறுபாடுகளின் கூட்டல் பூச்சியம் ஆகும். ஆகவே, இவ்விரு வகையான வேறுபாடுகளுக்குச் சமவாய்ப்பு அளிப்பதற்காக வேறுபாடுகளை வெறும் தனி விலக்கங்களாகக் (absolute deviation) கருதுகின்றோம். x_r $\bar{x}$ இவற்றிற்குள்ள விலக்கத்தை (வெறும்) தனி விலக்கமாகக் கருத $|x_r - \bar{x}|$ என்ற குறியால் விளக்கு

கிறோம். இந்தத் தனி விலக்கங்களின் சராசரியையே 'சராசரி விலக்கம்' (Mean Deviation) என்று வழங்குகிறோம்.

$$ச. வி. = M. D. = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} |x_r - \bar{x}|.$$

அலைவெண் பரவலுக்கான சராசரி விலக்கம்

$x_1, x_2, \ldots x_n$. மாறிகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்றால் இம் மாறிகளுக்கான சராசரி விலக்கம்

$$ச. வி. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|, \quad இங்கு \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

இந்தச் சராசரி விலக்கம் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து கழிக்கப் பட்டதாகும். இதே போன்று இடைநிலையிலிருந்தும், முகடி லிருந்தும் கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கங்களையும் கீழ்க்கண்ட வாறு விவரிக்கலாம்.

Med என்பது இடைநிலையானால்,

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் = (Mean Deviation from Median)

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \text{Med}|.$$

அதே போன்று M_o என்பது முகடு என்றால்,

முகடிலிருந்து சராசரி விலக்கம் = (Mean Deviation from Mode)

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M_o|$$

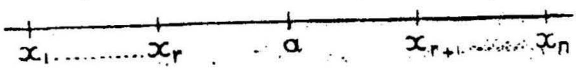
இடைநிலையிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கமே மற்ற எந்த மதிப்பிலிருந்தும் கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கத்தை விட மிகவும் குறைந்தது ஆகும்.

'a' என்ற மதிப்பிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$\therefore \text{ச. வி.} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,|x_i-a| = \frac{S}{N}$$

இங்கு $S = \sum_{i=1}^{n} f_i|x_i-a|.,\ N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

S மீச்சிறு (minimum) மதிப்பாக இருக்கும்போது, இச் சராசரி விலக்கமும் மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கும். அதாவது $S = \sum f_i\,|x_i - a|$, சிறுமமானால், 'a'-லிருந்து கழிக்கப்பட்ட ச. விலக்கமும் சிறுமமாகும் (minimum). S எப்போது சிறுமம் ஆகிறது என்று கவனிப்போம்.



படம் 3-(a)

$x_r < a < x_{r+1}$ ஆக இருக்கட்டும்.

அதாவது, $i=1, 2, \ldots r$ எனும்போது $x_i < a$

$i=r+1, r+2, \ldots n$ எனும்போது $x_i > a$.

$\therefore i = 1, 2 \ldots r$ என்றால், $x_i - a < 0$

$i = r+1, r+2, \ldots n$ என்றால், $x_i - a > 0$

$$S = \sum_{i=1}^{n} f_i\,|\,x_i - a\,|$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i\,|\,x_i - a\,| + \sum_{i=r+1}^{n} f_i\,|\,x_i - a\,|$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i\,(a-x_i) + \sum_{i=r+1}^{n} f_i\,(x_i - a)$$ [$\because$ முதல் கூட்டல் குறி உறுப்புகள் $(a-x_i) > 0$]

$$= \left[-\sum_{i=1}^{r} f_i x_i + \sum_{i=r+1}^{n} f_i x_i \right] + a\left[\sum_{i=1}^{r} f_i - \sum_{i=r+1}^{n} f_i \right]$$

$$= K + a\,[R_1 - R_2]$$

இங்கு $K = \left[-\sum_{i=1}^{r} f_i x_i + \sum_{i=r+1}^{n} f_i x_i \right]$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{r} f_i$$

$$R_2 = \sum_{i=r+1}^{n} f_i.$$

S சிறுமமாக இருப்பதற்குள்ள முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0$$

இங்கு $\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}[\,K + a\,(R_1 - R_2)] = \underline{R_1 - R_2 = 0.}$

$$\therefore \quad R_1 = R_2$$

அதாவது $\sum_{i=1}^{r} f_i = \sum_{i=r+1}^{n} f_i$

'a'க்கு முன் வரை உள்ள அலைவெண்களின் கூடுதல்

= 'a'க்குப்பின் உள்ள அலைவெண்களின் கூடுதல்

$\therefore \quad \frac{\partial s}{\partial a} = 0$ எனும் போது 'a' ஓர் இடைநிலையாகிறது.

இடைநிலையின் வலப் பக்கத்துக்கான 'a' மதிப்புகளுக்கு S என்பது 'a'-ன் ஏறும் சார்பலன் (increasing function).

இடைநிலையின் இடப் பக்கத்துக்கான 'a' மதிப்புகளுக்கு S என்பது 'a'-ன் இறங்கும் சார்பலன் (decreasing function)

மேலும் $\frac{\partial s}{\partial a} = 0$ என்பதால், இடைநிலை 'a'யேயாகும்.

எனவே, இடைநிலையிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கமே ஏனைய எந்த மதிப்பிலிருந்தும் கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கத்தை விட மிகக் குறைந்ததாகிறது என நிரூபிக்கப் பட்டது.

இதையே ஒரு தொடர் மாறிப்பரவலுக்கும் நிரூபிப்போம்.

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் (Probability density function)

$a < X < b$ எனும் போது, $f(x)$ என்றால், $x = A$-லிருந்து விலக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $M.D.(A)$ என்றால்,

$$M.D.(A) = \int_a^b |x - A| . f(x)dx$$ என வரையறுக்கிறோம்.

$$M.D.(A) = \int_c^A |x - A| f(x)d_x + \int_A^b |x - A| . f(x)d_x.$$

$$= \int_a^A (A - x) f(x) d_x + \int_A^b (x - a) f(x) d_x. \quad \dots (1)$$

$M.D.(A)$ சிறுமத்திற்கான A-ன் மதிப்பைக் காண முயலுவோம்.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M D(A)}{\partial A} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M D(A)}{\partial A^2} &> 0 \end{aligned}\right\}$$ என்பது முக்கிய நிபந்தனைகள்.

... ... (2)

தொகைக்குறியினுள் (under integral sign), (1) ஐ A-க்கு வகைப்படுத்தினால்.

$$\frac{\partial\, M\,D\,(A)}{\partial A} = \int_a^A f(x)\,d_x - \int_A^b f(x)\,d_x$$

$$= \int_a^A f(x)\,d_x = \left[1 - \int_A^b f(x)\,d_x \right]$$

$$\left[\because \int_a^b f(x)\,d_x = 1 \right]$$

$$= 2 \int_a^A f(x)\,d_x - 1.$$

$$= 2\,F(A) - 1 = 0.$$

$$\therefore\ F(A) = \frac{1}{2} = \int_a^A f(x)\,d_x.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial A^2} d \left[M\,D\,(A) \right] = \frac{\partial}{\partial A} \left[2\,F(A) - 1 \right] = 2\,f(A) > 0.$$

எனவே $\int_a^A f(x)\,d_x = \int_A^b f(x)\,d_x = \frac{1}{2}$

∴ A இடைநிலையாகும். நிரூபிக்கப்பட்டது.

இச் சராசரி விலக்கங்களில் 'இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கமே' சிறந்ததாகக் கருதப்படுகின்றது. ஏனெனில், மற்ற இரண்டையும் விட இதுவே குறைந்த வேறுபாட்டுடன் காணப்படுகிறது.

சராசரி விலக்கம் மாறிகளின் எல்லா மதிப்புகளையும் தழுவி வருவதால், இது ஒரு சிறந்த சிதறல் அளவையாகும். சராசரி விலக்கத்தைக் கணித முறைப்படி கண்டுபிடிப்பது சிறிது சிரமமாக உள்ளது.

மாதிரி 1.

2,4,5,8,11 எண்களின் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

$$\text{கூ.ச.} = \bar{x} = \frac{2+4+5+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

(i) கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து ச.வி. $= \frac{1}{n}\Sigma\ |x_i - \bar{x}|$

$$= \frac{|2-6|+|4-6|+|5-6|+|8-6|+|11-6|}{5}$$

$$= \frac{|-4|+|-2|+|-1|+|2|+|5|}{5} = \frac{4+2+1+2+5}{5}$$

$$= \frac{14}{5} = \underline{2.8}\ \text{(i)}$$

(ii) இடை நிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம்:

2,4,5,8,11 எண்களின் இடைநிலை = 5.

எனவே இடைநிலையிலிருந்து ச.வி $= \frac{1}{n}\sum |x_i - \text{Med}|$

$$= \frac{|2-5|+|4-5|+|5-5|+|8-5|+|11-5|}{5}$$

$$= \frac{|-3|+|-1|+|0|+|3|+|6|}{5} = \frac{3+1+3+6}{5}$$

$$= \frac{13}{5} = \underline{\underline{2.6\ \text{(ii)}}}$$

இ.நி.ச.விலக்கம், கூ.ச.வி.யைவிடக்குறைவாக உள்ளதைக் காண்கிறோம்.

3-5. **திட்டவிலக்கம்.** (Standard Deviation)

சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளின் வர்க்கத்தின் சராசரியை மாறுபாடு (Variance) என வழங்குகிறோம். மாறுபாட்டின் வர்க்கமூலமே திட்டவிலக்கம் (Standard deviation) என்பதாகும்.

மாறுபாட்டை விலக்கவர்க்கச் சராசரி, பரவற்படி எனவும் வழங்கலாம்.

x—ன் மாறுபாட்டிற்கான வாய்பாடு:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

எனவே, திட்டவிலக்கம் தி.வி. $= \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$.

திட்டவிலக்கத்தை σ—குறியால் வழங்குவது வழக்கம். இதை மூலச்சராசரி வர்க்கவிலக்கம் எனவும் கூறலாம். வழக்கத்தில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கத்தை σ என்றும், மாதிரிக்கூறின் திட்டவிலக்கத்தை s என்றும் வரையறுக்கிறோம்.

அலைவெண் பரவலின் திட்டவிலக்கம்

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற n மாறிகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்றால், இந்தப்பரவலின் திட்டவிலக்கம்.

$$\text{தி வி.} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

இங்கு $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

இவ்வலை வெண் பரவலின் மாறுபாடு

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma fi \ (xi - \bar{x})^2$$

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை மூலம் இதன் மதிப்பைக் கணிக்கலாம்.

பிரிவுக் குறிப் பெண் xi	பிரிவு அலை வெண் fi	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
x_1	f_1	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$f_1 (x_1 - \bar{x})^2$
x_2	f_2	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$f_2 (x_2 - \bar{x})^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	f_n	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$	$f_n (x_n - \bar{x})^2$
மொத்தம்	N	...	...	$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$

3–6. திட்டவிலக்கப் பண்புகள்

திட்டவிலக்கம்தான் எல்லாச் சிதறல் அளவைகளையும் விடச் சாலச்சிறந்ததாகும்.

(1). a என்பது ஒரு தோராய மதிப்பாயின்,

திட்ட.வி. $= s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} fi \ (x_i - a)^2}$ என்று கொள்ளவும்

இதேபோன்ற எல்லா திட்டவிலக்கங்களிலும் $a = \bar{x}$ ஆக இருக்கும் போதுள்ள திட்டவிலக்கமே குறைந்த பட்சமான மதிப்புப் பெற்றது. அதாவது ; கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளின் திட்டவிலக்கமே மற்ற எல்லாத்திட்ட விலக்கத்தையும் விடச் சிறுமமானது.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மாறிகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்று கொள்வோம்.

$\bar{x}$, σ முறையே x-ன் சராசரி திட்டவிலக்கமாகும். a-என்பது ஒரு தோராய மதிப்பு.

வாய்பாட்டின் மூலம்

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} fi\,(x_i - \bar{x})^2, \qquad \sum fi = N$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} fi\,[(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} fi\,[(x_i - a) - d]^2$$ (இங்கு $\bar{x} - a = d$ ஒரு மாறிலி அல்லது நிலையெண்).

$$= \frac{1}{N}\sum fi\,[(x_i - a)^2 + d^2 - 2d\,(xi - a)]$$

$$= \frac{1}{N}\sum fi\,(x_i - a)^2 + \frac{N.d^2}{N} - 2d.\frac{(N\bar{x} - Na)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum fi\,(x_i - a)^2 - d^2 \quad [\because \bar{x} - a = d]$$

$$= s^2 - d^2 \leq s^2$$ (ஏனெனில் $d^2 \geq 0$)

எனவே, $\sigma^2 = s^2 - d^2 \leq s^2$

$d = 0$, என்றால் $\sigma^2 = s^2$

அதாவது $\bar{x} - a = 0$ அதாவது $\bar{x} = a$ என்றால்

$\sigma^2 = s^2$ ஆகிறது.

அதாவது மாற்றி எழுதினால், $a = \bar{x}$ எனும் போது, $s^2 = \sigma^2$ ஆகிறது.

(2) திட்ட விலக்கம் சராசரி விலக்கத்தை விடக் கூடுதலானது.

அதாவது தி. வி. > ச. வி.

எனவே $\sigma^2 >$ (ச. வி.)^2

(அதாவது) $\frac{1}{N}\Sigma f_i\ (x_i - \bar{x})^2$

$$> \left[\frac{1}{N}\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid^2\right]^2$$

$$N\,\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 > \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$+ 2 \sum_{i \neq j} \mid x_i - \bar{x} \mid . \mid x_j - \bar{x} \mid . f_i f_j$$

$$(\Sigma f_i)(\sum u_i^2 f_i) > \Sigma u_i^2 f_i^2$$

$$+ 2 \sum_{i \neq j} u_i u_j f_i f_j, \quad [\because u_i = \mid x_i - \bar{x} \mid]$$

$$\Sigma f_i^2 u_i^2 + \sum_{i \neq j} (u_i^2 + u_j^2) f f_j$$

$$> \sum_{i \neq j} u_i^2 f_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} u_i u_j f_i f_j$$

$$\therefore \sum_{i \neq j} (u_i - u_j)^2 f_i f_j > 0$$

இங்கு $f_i > 0$, $f_j > 0$, $(u_i - u_j)^2 > 0$ என்பதால், கடைசி வரி உண்மையாகிறது. ஆகவே, மற்ற எல்லா வரிகளும் உண்மை. எனவே, திட்ட விலக்கம் சராசரி விலக்கத்தை விடக் கூடுதலானது என்பது புலனாகிறது.

(3) திட்ட விலக்கம் ஆதியினால் (origin) வேறுபடாது; ஆனால், அலகினால் (scale) வேறுபடும்.

A, *c* என்பன முறையே *x*-ன் ஆதியையும் அலகையும் குறிக்கட்டும்.

$u = \frac{x - A}{c}$ என்ற ஒரு புது மாறி அமைப்போம்.

$x = A + u \cdot c$

இதே போன்று $\bar{x} = A + \bar{u} \cdot c$ என்றும் அறிவோம்.

$$\left[\frac{\sum x}{n} = \frac{\Sigma A}{n} + \frac{\Sigma u.c.}{n}\right]$$

x–ன் மாறுபாடு,

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X - \bar{X})^2$

[இங்கு $E(X - \bar{X})^2$ என்பது $(X - \bar{X})^2$-ன் எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவு. இதன் விளக்கத்தைப் பிரிவு 5–7–ல் காணலாம்)

$$= E[(A + u.c) - (A + \bar{u}.c)]^2$$

$$= E[c(u - \bar{u})^2$$

$$= c^2 E(u - \bar{u})^2 = c^2 \text{Var}(u)$$

எனவே x–ன் தி. வி $= c \times u$-ன் தி. வி.

திட்ட விலக்கத்தின் இந்தப் பண்பை உபயோகித்து ஆதியையும் அலகையும் எடுத்துக் கொண்டு குறுக்கு முறையில் x மாறியின் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கலாம். அதற்கு முதலில் u மாறியின் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடித்து அதை இடைவெளித் தூரம் c–யினால் பெருக்கலாம்

(4) k மாதிரிகளை ஒன்று சேர்த்துக் கிடைக்கும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி திட்ட விலக்கத்தைக் கீழ்காணும் வாய்பாடு விளக்குகிறது.

$\bar{x}_i$, σ_i^2 என்பன முறையே n_i எண்கள் கொண்ட iஆவது மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கமாகவுக் கொள்வோம்.

எல்லா k மாதிரிகளையும் ஒன்று சேர்த்த தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, $d_i = \bar{x}_i - \bar{x}$, மொத்த அலைவெண் $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ என்றால்,

ஒன்று சேர்த்த திட்ட விலக்கத்தைக் கீழ்க்கண்ட வாய்ப்பாட்டின் மூலம் எழுதுவோம்.

$$N\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\sigma_i^2 + d_i^2)$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\sigma_i^2 + d_i^2)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

n_1, n_2 பருமனுள்ள இரு மாதிரிகளுக்கான சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, திட்ட விலக்கம் σ_1, σ_2 ஆகும். ஒன்று சேர்த்த தொகுதியின் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}^2}{n_1 + n_2}$$

இவ்வாறே தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை வரையறுக்கும் சமன்பாடு

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\sum_{i=1}^{n_1+n_2}(x_i - \bar{x})^2$$

$$(n_1 + n_2)\,\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}[(x_i - \bar{x}_1) + (\bar{x}_1 - \bar{x})]^2$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2}[x_j - \bar{x}_2) + (\bar{x}_2 - \bar{x})]^2$$

$$(n_1 + n_2)\,\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x}) + \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x}_2)^2$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + 2 \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x}_2)(\bar{x}_2 - \bar{x})$$

$$= n_1 \sigma^2 + n_1 d_1^2 + 0 + n_2 \sigma_2^2 + n_2 d_2^2 + 0$$

$$\left[\because \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1) = n_1 \bar{x}_1 - n_1 \bar{x}_1 = 0 \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x}_2) = n_2 \bar{x}_2 - n_2 \bar{x}_2 = 0 \right]$$

$$\therefore (n_1 + n_2)\,\sigma^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$$

இதை $\sigma^2 = \dfrac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2}{n_1 + n_2}$

$$+ \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

$$n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2$$

$$= n_1 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}^2 - 2\,\bar{x}_1 \bar{x})$$

$$+ n_2 (\bar{x}_2^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,\bar{x})$$

$$= n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 + (n_1 + n_2) \left(\frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} \right)$$

$$-2\left(\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)$$

$$=n_1\bar{x}_1^2+n_2\bar{x}_2^2-\frac{(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2}$$

$$=\frac{n_1(n_1+n_2)\bar{x}_1^2+n_2(n_1+n_2)\bar{x}_2^2-(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2)}$$

$$=\frac{n_1n_2\bar{x}_1^2+n_1n_2\bar{x}_2^2-2n_1n_2\bar{x}_1\bar{x}_2}{(n_1+n_2)}$$

$$=\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2$$

ஆகவே $\sigma^2=\dfrac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2}+\dfrac{n_1d_1^2+n_2d_2^2}{n_1+n_2}$

$$=\frac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2}+\frac{(n_1n_2)}{(n_1+n_2)^2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2$$

ஆதலால் இரு மாதிரிகளின் ஒன்று சேர்ந்த தொகுப்புக்குக் கண்டுபிடித்த திட்டவிலக்கம்

$$(n_1+n_2)\sigma^2=n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)$$

இதே போன்று K மாதிரிகளின் ஒன்று சேர்த்த தொகுப்புக்கான திட்ட விலக்கத்தையும் எழுதலாம்.

$$N\sigma^2=n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)+\dots+n_k(\sigma_k^2+d_k^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}n_i(\sigma_i^2+d_i^2)\qquad\left[\sum_{i=1}^{k}n_i=N\right]$$

மாதிரி 2:

இரு மாதிரிக் கூறுகளுக்கான விவரங்கள் பின் வருமாறு:

மாதிரி	I	II
பருமன் :	$n_1=20$	$n_2=30$
சராசரி :	$\bar{x}_1=25$	$\bar{x}_2=20$
மாறுபாடு :	$\sigma_1^2=5$	$\sigma_2^2=4$

இக் கூறுகளை ஒன்று சேர்த்து உண்டாக்கும் தொகுப்பின் கூட்டுச்சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடி.

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{20 \times 25 + 30 \times 20}{50} = 22$$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 3. \qquad d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = -2$$

ஆகவே $(n_1+n_2)\,\sigma^2 = n_1\,(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2\,(\sigma_2^2 + d_2^2)$

$$50\sigma^2 = 20\,(5+9) + 30\,(4+4)$$

$$= 520.$$

$$\sigma^2 = \frac{520}{50} = 10.4$$

எனவே தேவைப்பட்ட தி.வி. $\sigma = 3.22$

(5) இயல் நிலைப்பரவல்களில் [குறிப்பு: இயல் நிலைப்பரவலைப் பற்றி பிரிவு 8.4-ல். காணவும்]

(i) நூற்றுக்கு 68 பாகங்கள் (சுமாராக). $\bar{X} - \sigma$-க்கும்.

$\bar{X} + \sigma$-க்கும் இடையிலுள்ளன. (சராசரியின் இருபக்கங்களிலும் 1 தி.வி. இடைவெளி)

(ii) நூற்றுக்கு 95 பாகங்கள் (சுமாராக) $\bar{X} - 2\sigma$-க்கும்

$\bar{X} + 2\sigma$-க்கும் இடையிலுள்ளன. (சராசரியின் இருபக்கங்களிலும் 2 தி.வி. இடைவெளி)

(iii) நூற்றுக்கு 99 பாகங்கள் (சுமாராக) $\bar{X} - 3\sigma$-க்கும் $\bar{X} + 3\sigma$-க்கும் இடையிலுள்ளன.

(6) திட்டவிலக்கம், சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம் இவற்றிற்கான தொடர்பாடு:

சமச் சீரான பரவல்களில் (குறிப்பாக இயல் நிலைப்பரவலில்) தி. வி. ச. வி. கா.வி மூன்றும் கீழ்க் கண்ட சமன்பாட்டின் படி தொடர்புடையவையாகக் கருதப்படுகிறது.

$$ச.வி. = \frac{4}{5} = தி.வி.$$

$$கா.வி = \frac{2}{3} \cdot தி.வி.$$

அதாவது கா.வி, ச.வி, தி.வி. மூன்றும் 10: 12: 15 என்ற விகிதங்களில் உள்ளன. அவை கீழ்க்காணும் சமமின்மையில் உள்ளன.

$$கா.வி < ச.வி < தி.வி.$$

$$Q.D < M.D < S.D.$$

(7) எல்லாச் சிதறல் அளவுகளிலும் திட்டவிலக்கம்தான் மிகச் சிறந்தது ஆகும். மாதிரியிலுள்ள உறுப்பு மதிப்புகள் எல்லாவற்றையும் அனுசரித்து நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது. மாதிரிகளின் பிழை விலக்க முறைகளிலும் (Sampling errors) உடன் தொடர்புக் கெழுவை நிர்ணயிப்பதிலும், மாறிகளைத் தரப்படுத்துவதிலும் (Standardization) பயன்படுகிறது. இயல் நிலை வளைகோட்டுச்சமன்பாட்டில் திட்ட விலக்கம் ஒரு முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவையாகப் பயன்படுகிறது.

3–7. எளிய முறையில் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடும் வாய்பாடுகள்

(i) முதல் வகை எளிய வாய்பாடு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \bar{x})$$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

இதை வேறு விதமாகவும் கீழ்க்கண்டவாறு செயல் முறைக்கு உதவும் வகையில் எழுதலாம்.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x)^2}{n^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} [n (\sum x^2) - (\sum x)^2]$$

(ii) **அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்திற்கான எளிய வாய்பாடு**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i [x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \bar{x}]$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2 + \frac{N \bar{x}^2}{N} - \frac{2N \bar{x} . \bar{x}}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N} \right)^2$$

$$= \frac{1}{N^2} [N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2]$$

என எழுதலாம்.

(iii) **மற்றுமொரு எளிய வாய்பாடு**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i \left[(x_i - a) - (\bar{x} - a)\right]^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i \left[\frac{x_i - a}{c} - \frac{\bar{x} - a}{c}\right]^2 c^2$$

$$u_i = \frac{x_i - a}{c} \text{ என்றால் } \bar{u} = \frac{\bar{x} - a}{c}$$

$$\sigma^2 = c^2 \frac{1}{N} \sum f_i (u_i - \bar{u})^2$$

$$= c^2 \frac{1}{N^2} \left[N . \sum f_i u_i^2 - (\sum f_i u_i)^2\right]$$

மாதிரி 8 :

ஒரு நகரத்தின் 600 நடுத்தர வகுப்புக் குடும்பங்களின் மாதாந்திர வருமானப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

சராசரி வருமானத்தைக் கண்டுபிடித்துக் கால்மான, சராசரி, திட்ட விலக்கங்களைக் கணிக்கவும்.

மாதவருமானம் (ரூபாய்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை f
— 75	69
75 — 150	167
150 — 225	207
225 — 300	65
300 — 375	58
375 — 450	24
450 —	10

(i) **கால்மானங்களைக் காணல்**

இடைவெளி	அலைவெண்	திரள் அலைவெண்
0 — 75	69	69
75 — 150	167	236
150 — 225	207	443
225 — 300	65	508
300 — 375	58	566
375 — 450	24	590
450 — 525	10	600

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} . c$$

$$= 75 + \frac{150 - 69}{167} \times 75$$

$$= 75 + 36.38 = \underline{111.38}.$$

$$Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3N}{4} - m_3}{f_3} . c$$

$$= 225 + \frac{450 - 443}{65} \times 75$$

$$= 225 + 8.08 = \underline{233.08}.$$

எனவே கா. வி. $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{233.08 - 111.38}{2} = 60.85$.

(ii) திட்ட விலக்கம் கண்டு பிடித்தல்

x	f	u	fu	fu^2
37.50	69	— 2	— 138	276
112.50	167	— 1	— 167	167
187.50	207	0	0	0
262.50	65	1	65	65
337.50	58	2	116	232
412.50	24	3	72	216
487.50	10	4	40	160
மொத்தம்	600	—	—12	1116

$u = \dfrac{x - 187.50}{75}$ எனக் கொள்க.

$$\bar{u} = \frac{\sum fu}{N} = \frac{-12}{600} = -0.02$$

$$\bar{X} = A + C.\,\bar{u} = 187-50 - 0.02 \times 75$$

$$= 187.50 - 1.50 = \underline{186.00}$$

$$\sigma_x^2 = c^2.\,\sigma_u^2$$

$$= \frac{c^2}{N^2}\,[\,N(\sum fu)^2 - (\sum fu)^2]$$

$$= \frac{75^2}{600^2}\,[\,600 \times 1116 - (-12)^2\,]$$

$$= 1{\cdot}8596\,(75)^2.$$

$$\sigma_x = 75\sqrt{1.8596}$$

$$= \underline{102.0}$$

(iii) சராசரி விலக்கம் காணல்

X	f	$X-\bar{X}$	$\lvert X-\bar{X}\rvert$	$f\cdot\lvert X-\bar{X}\rvert$.
37 50	69	—138.50	148.50	10246.50
112.50	167	— 73.50	73.50	12274.50
187.50	207	1.50	1.50	310.50
262.50	65	76.50	76.50	4972.50
337.50	58	151.50	151.50	8787.00
412.50	24	226.50	22[illegible].50	5436.00
487.50	10	301.50	301.50	3015.00
மொத்தம்	600	—	—	45042.00

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ச. வி. = M. D. from Mean

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \, |x_i - \bar{x}|$$

$$= \frac{1}{600} \times 45042{\cdot}00$$

$$= \underline{75.07}.$$

குறுக்கு வழி முறைப்படி இச்சராசரி விலக்கத்தைக் கீழ்க் கண்ட வாய்பாட்டின் மூலம் கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$\text{ச. வி.} = \frac{1}{N}\left[\sum f_i \, |x_i - A| + (\bar{x} - A)(N_b - N_a)\right]$$

இங்கு $A = 187.50$ — $N_b = Q_3$ பிரிவு இடைவெளியில் திரள் அலைவெண்

$\sum f_i \, |x_i - A| = 587 \times 75$

$N = 443$

$N_a = N - N_b$

$= 600 - 443 = 157.$

$$\text{எனவே ச. வி.} = \frac{1}{600}[598 \times 75 - (1.5)(443 - 157)]$$

$$= \frac{44421}{600} = 74.04$$

பயிற்சி

(1) ஓர் அலைவெண் பரவலின் சிதறல்களை விளக்கும் பல முறைகளை விளக்கவும். அச் சிதறல் முறைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஒப்பிட்டு விவரிக்கவும்.

(2) ஒரு பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதற்கான ஓகைவ் வளைகோட்டை வரைந்து அதன் மூலமாக இடை நிலை, முதல், மூன்றும் கால்மானங்களைக் காணவும். கணித முறைப்படி இம் மூன்றையும் கணித்து அவற்றுடன் ஒப்பிடுக.

கிடைத்த மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
0 — 10	33
11 — 20	108
21 — 30	221
31 — 40	432
41 — 50	526
51 — 60	495
61 — 70	322
71 — 80	153
81 — 90	53
91 — 100	7
மொத்தம்	2350

(3) கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு (i) திட்ட விலக்கம் (ii) சராசரி விலக்கம் (iii) கால்மான விலக்கம் மூன்றையும் கணக்கிடவும்.

உயரங்கள் அங்குலத்தில்	பையன்களின் எண்ணிக்கை
56 — 58	1
58 — 50	18
60 — 62	50
62 — 64	142
64 — 66	219
66 — 68	134
68 — 70	28
70 — 72	7
72 — 74	1
மொத்தம்	600

(4) ஒரு பரவல் 200, 250, 300 அலைவெண்களைக் கொண்ட 3 தொகுதிகளைக் கொண்டது. அத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 25, 10, 15, திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 3, 4, 5 என்ருல் அத் தொகுதிகளை ஒன்று சேர்த்த பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 16 எனவும், திட்ட விலக்கம் 7.2 (தோராயமாக) எனவும் திருபித்துக் காட்டு.

(5) n இயற்கை எண்களுக்கான சராசரி, மாறுபாடு இவற்றைக் கணிக்கவும்.

(6) X, Y இரண்டு சார்பற்ற மாறிகளானல், σX^2, σY^2 முறையே இவற்றின் மாறுபாடுகள் என்ருல், $X+Y$, $X-Y$ இவற்றின் திட்ட விலக்கங்களைக் கண்டுபிடி.

(7) ஒரு கூட்டல் விருத்தி (Arithmetic progression) a, $a+d$, $a+2d$,......$a+2nd$ என்ருல், இதற்கான கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் இரண்டையும் கண்டு பிடித்துப் பின்னது முன்னதைவிட அதிகமாக உள்ளது என்று நிரூபிக்கவும்.

4. சமச் சீரின்மை, தட்டையளவு, திருப்புத்திறன்கள்

(Skewness, Kurtosis, Moments)

சமச் சீரின்மை, தட்டையளவுகளை விவரிக்கும் முன்னர், திருப்புத்திறன்களைப் பற்றி முதலில் ஆராய்வோம்.

4-1. திருப்புத் திறன்கள் (Moments)

x மாறியின் n மதிப்புகள் x_1, $x_2 \ldots x_n$ என்பன பிரிவு இடைவெளிகளின் நடு மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். f_1, $f_2 \cdots f_n$ என்பன முறையே அவற்றின் அலைவெண்கள் ஆகும்.

ஆதியை (origin) மூலமாகக் கொண்டு கணிக்கப்படும் முதல் திருப்புத்திறனை,

$$\mu_1' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

இதே போன்று 'a' என்ற தோராய மதிப்பை மூலமாகக் கொண்டு கணிக்கப்படும் முதல் திருப்புத்திறனை

$$\mu_1' = \frac{1}{N} f_i (x_i - a)$$

என எழுதலாம்.

இதே போல் பூச்சியத்தைச் சுற்றிய rஆவது திருப்புத்திறன்

$$\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i^r$$

'a'ஐச் சுற்றிய rஆவது திருப்புத்திறன்

$$\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a)^r \text{ எனப்படும்.}$$

இங்கு μ_r' என்பது rஆவது மையமற்ற திருப்புத்திறன் எனக் கூறப்படுகிறது.

மையமுள்ள திருப்புத்திறன்களை இதைப் போலவே வரையறுத்து எழுதலாம்.

அதாவது $\bar{x}$ கூட்டுச் சராசரியைச் சுற்றிய rஆவது திருப்புத்திறன் $\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r$ எனப்படுகிறது.

இந்த rஆவது மைய திருப்புத்திறனில் $r = 0, 1, 2, \ldots$ என்று சமனிட்டால் $\mu_o, \mu_1, \mu_2 \ldots$ போன்றவற்றின் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

$$r = 0 \quad \mu_o = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^0$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i = \frac{N}{N} = 1$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_o = 1} \text{ (எப்போதும்).}$$

$$r = 1 \quad \mu_1 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N} [N \bar{x} - N\bar{x}] = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_1 = 0} \text{ (எப்போதும்).}$$

$$r = 2 \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \text{Var}(x) = x\text{-ன் மாறுபாடு}$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_2 = \sigma^2}$$

மையமற்ற திருப்புத்திறன்,

$$\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i^r \text{ என்றால்,}$$

$$r = 0, \quad \mu_0' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 1$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_0' = 1} \text{ (எப்போதும்).}$$

$$r = 1. \quad \mu_1' = \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i' = \frac{1}{N} \sum f_i x_i = \bar{x}$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_1' = \bar{x}} \text{ (எப்போதும்).}$$

$$r = 2. \quad \mu'_2 = \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2$$

இப்போது μ_2ஐக் கவனிப்போம்.

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2}$$

மையத் திருப்புத்திறன்களை மையமற்ற திருப்புத்திறன்களின் வாயிலாகப் பெறுதல்

(x_i, f_i), $i = 1, 2 \ldots n$ என்பன ஓர் அலைவுப் பரவலைக் குறிக்கட்டும்.

N, a, $\bar{x}$ என்பன முறையே மாதிரிப் பரவலின் மொத்த அலைவெண்கள், எதேச்சை மூலம் (Arbitrary origin) சராசரி

ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும். ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தி மேற்கூறியவற்றுக்கான சமன்பாட்டை ஆராயலாம்.

$\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a)^r$ (எதேச்சை மூல திருப்புத்திறன்)

$\mu_r = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^r$ என்றும் நாம் அறிவோம்.

இப்போது μ_rஐக் கவனிப்போம்.

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \ (\bar{x}_i - \bar{x})^r$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i [(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^r$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \quad [\xi_i - d]^r$$ (இங்கு $x_i - a = \xi_i$; $\bar{x} - a = d$

$= \mu_1'$ ஆகும்.)

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i [\xi_i^r - \binom{r}{1} \xi_i^{r-1} + \binom{r}{2} \xi_i^{r-2} d^2$$

$$- \binom{r}{3} \xi_i^{r-3} d^3 + \ldots + \ldots$$

$$+ (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} \xi_i^{\overline{r-r-1}} d^{r-1} + (-1)^r . d^r]$$

$$= \left[\frac{1}{N} \Sigma f_i \ \xi_i^r - \binom{r}{1} d \frac{1}{N} \Sigma f_i \xi_i^{r-1} + \binom{r}{2} d^2 \frac{1}{N} \Sigma f_i \xi_i\right.$$

$$+ \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{1} d^{r-1} \frac{1}{N} \Sigma f_i \xi_i$$

$$+ (-1)^{r} . d.^{r} \frac{1}{N} \Sigma f_i \Big]$$

$$= \mu_r' - \binom{r}{1} d. \mu'_{r-1} + \binom{r}{2} d^2 \mu'_{r-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^{r-1} \binom{r}{1} d^{r-1} \mu_1' + (-1)^{r} d^r . 1$$

$$\left[\because \frac{1}{N} \Sigma f_i \xi_i^r = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a)^r = \mu'_r \right]$$

$$\therefore \mu_r = \mu_r{}^1 - \binom{r}{1} . \mu_1{}^1 . \mu_{r-1} + \binom{r}{2} (\mu_1')^2 \mu.'_{r-2}$$

$$- \binom{r}{3} (\mu'_1)^3 \mu'_{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^{r-1} . r . (\mu_1')^{r-1} . (\mu'_1)$$

$$+ (-1)^r . (\mu_1')^r$$

$$\left[\because d = \bar{x} - a = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a) = \mu'_1 \right]$$

எனவே, $\mu_r = \mu_r{}^1 - \binom{r}{1} \mu'_{r-1} \mu'_1 + \binom{r}{2} \mu'_{r-2} (\mu'_1)^2$

$$- \binom{r}{3} \mu_{r-3} . (\mu'_1)^3 + \ldots\ldots + (-1)^{r-1} (r-1) (\mu'_1)^r$$

என்று புலனாகிறது.

இச் சமன்பாட்டில் $r = 1, 2, 3, 4$ என்ற மதிப்புகளை இட்டால். $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$-ன் மதிப்புகளை அறியலாம்.

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1} \mu'_{r-1} \mu'_1 + \binom{r}{2} \overline{\mu'}_{r-2} (\mu'_1)^2$$

$$- \binom{r}{3} \mu_{r-3} (\mu'_1)^3$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{r-1}\ \mu(r-1) \cdot (\mu_1{}')^r.$$

$$r = 1, \quad \mu_1 = \mu_1{}^1 - \binom{1}{1} \mu'_0\, \mu_1{}'. \qquad (\text{இங்கு } \mu'_o = 1)$$

$$= \mu'_1 - \mu'_1 = \underline{0}$$

$$r = 2, \ \mu_2 = \mu'_2 - \binom{2}{1} \mu'_1 \cdot \mu'_1 + \binom{2}{2} \mu'_o\, (\mu'_1)^2.$$

$$= \mu'_2 - 2\,(\mu'_1)^2 + 1 \cdot (\mu'_1)^2$$

எனவே $\underline{\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2}$

$$r = 3, \quad \mu_3 = \mu'_3 - \binom{3}{1} \mu'_2\, \mu'_1 + \binom{3}{2} \mu'_1\,(\mu'_1)^2$$

$$-\binom{3}{} \mu'_o\,(\mu'_1)^3$$

$$= \mu'_3 - 3 \cdot \mu'_2\, \mu'_1 + 3\,(\mu'_1)^3 - (\mu'_1)^3.$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\, \mu_1{}' + 2\,(\mu_1{}')^3.}$$

$$r = 4, \quad \mu_4 = \mu'_4 - \binom{4}{1} \mu'_3\, \mu'_1 + \binom{4}{2} \mu_2{}^1\,(\mu'_1)^2$$

$$-\binom{4}{3} \mu'_1\,(\mu_1{}')^3 + \binom{4}{4} \mu_o{}' \cdot (\mu'_1)^4.$$

$$= \mu'_4 - 4 \cdot \mu'_3\, \mu'_1 + 6\,\mu'_2\,(\mu'_1)^2$$

$$-4\,(\mu'_1) + 1\ (\mu_1{}')^4.$$

$$\therefore \quad \underline{\mu'_4 = 4\,\mu'_3\, \mu'_1 + 6\,\mu'_2\,(\mu'_1)^2 - 3\,(\mu'_1)^4}.$$

எனவே முதல் நான்கு மையத் திருப்புத் திறன்களுக்கான சமன்பாடுகள் மையமற்ற திருப்புத் திறன்களின் வாயிலாகக் கிடைக்கின்றன. அவையாவன :

1. $\mu_1 = 0.$
2. $\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$
3. $\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\,\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$
4. $\mu_4 = \mu'_4 - 4\,\mu'_3\,\mu'_1 + 6\,\mu'_2\,(\mu'_1)^2 - 3\,(\mu'_1)^4.$

இதே போல மையமற்ற திருப்புத்திறன்களையும் மையத் திருப்புத்திறன்களின் மூலம் எழுதலாம்.

$$\mu'_r = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a)^r$$

$$= \frac{1}{N} f_i [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^r$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i [z_i + d]^r$$

(இங்கு $z_i = x_i - \bar{x}$

$d = \bar{x} - a = \mu'_1$.)

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i \left[z_i^r + \binom{r}{1} z_i^{r-1} d + \binom{r}{2} z_i^{r-2} d^2 + \ldots\ldots + \binom{r}{r-1} z_i \cdot d^{r-1} + \binom{r}{r} d^r\right]$$

$$= \mu_r + \binom{r}{1} \mu_{r-1} \cdot \mu'_1 + \binom{r}{2} \mu_{r-2} (\mu'_1)^2 + \ldots\ldots + \binom{r}{1} \mu_1 \cdot (\mu'_1)^{r-1} + (\mu'_1)^r.$$

[ஏனெனில், $\mu_r = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^r = \frac{1}{N} \sum f_i z_i^r$

$d = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - a) = \bar{x} - a = \mu'_1$]

எனவே,

$$\underline{\mu'_r = \mu_r + \binom{r}{1} \mu_{r-1} (\mu'_1) + \binom{r}{2} \mu_{r-2} (\mu'_1)^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \binom{r}{1} \mu_1 \cdot (\mu'_1)^{r-1} + (\mu'_1)^r.}$$

$\mu_1 = 0$ என நாம் அறிவோம்.

$r = 2, 3, 4,$ என சமனிட்டால்

$$\left.\begin{aligned} \mu'_2 &= \mu_2 + (\mu'_1)^2 \\ \mu'_3 &= \mu_3 \times 3\,\mu_2\,\mu'_1 + (\mu'_1)^3 \\ \mu'_4 &= \mu_4 + 4\,\mu_3\,.\,(\mu'_1) + 6\,\mu_2\,(\mu'_1)^2 + (\mu'_1)^4. \end{aligned}\right\} (4.3.4)$$

திருப்புத்திறன்களில், ஆதி, அலகு (origin, scale) மாற்றத்தால் ஏற்படும் விளைவு

x மாறியிலிருந்து u மாறியைக் கீழ்க்கண்டவாறு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$u = \dfrac{x - a}{h}$ [இங்கு a = எதேச்சை மூலம் அல்லது ஆதி.

h = அலகு.]

$x - a = h\,.\,u.$

$\bar{x} - a = h\,.\,\bar{u}.$

$x - \bar{x} = h\,(u - \bar{u})$

x-ன் rஆவது மையமற்ற திருப்புத்திறன்

$$\mu'_r\,(x) = \frac{1}{N} \sum f_i\,(x_i - a)^r$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i\,(h\,.\,u_i)^r = h^r.\,\frac{1}{N} \sum f_i\,u_i^r$$

$= h^r \times u$-ன் rஆவது மையமற்ற திருப்புத்திறன்.

எனவே, $\mu'_r\,(x) = h^r\,.\,\mu'_r\,(u).$

x-ன் rஆவது மையத் திருப்புத்திறன்

$$\mu_r\,(x) = \frac{1}{N} \sum f_i\,(x_i - \bar{x})^r$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i\,[h\,(u_i - \bar{u})]^r$$

$$= h^r \cdot \frac{1}{N} \sum f_i (u_i - \bar{u})^r$$

$= h^r \times u$-ன் rஆவது மையத் திருப்புத் திறன்.

$$\therefore \quad \mu_r(x) = h^r \cdot \mu_r(u).$$

இப்போது $a = \bar{x}$,

$\mu = \sigma_x$ என்றால்

$u = \dfrac{x - \mu}{\sigma_x}$ ஆகும்.

அதாவது u—மாறியின் பரவல் 0 சராசரியும் 1 திட்டவிலக்கமும் கொண்ட ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட (Standardised) தாக இருக்கும்.

u-மாறியை ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட மாறி என வழங்கலாம்

4-2. ஷெப்பர்டின் திருத்தங்கள் (Sheppard's Corrections)

ஒரு தொகுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலில், அலைவெண்கள் பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளிகளில் குவிந்து இருப்பதாக ஏற்றுக் கொண்டோம். இது ஒரு தோராயமான யூகமே.

(1) அலைவெண்பரவல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்போதும்.

(2) அலைவெண்கள் இருபக்கங்களிலும் 0 ஐ நோக்கிச் சரி செய்யும்போதும், சில திருப்புத்திறன்களுக்குத் திருத்தங்களை ஷெப்பர்டு என்பவர் நிரூபித்துள்ளார்.

μ'_1 (திருத்தப்பட்டது) $= \mu'_1$

μ_2 (திருத்தப்பட்டது) $= \mu_2 - \dfrac{h^2}{12}$

μ_3 (திருத்தப்பட்டது) $= \mu_3$

μ_4 (திருத்தப்பட்டது) $= \mu_4 - \dfrac{h^2}{2}\mu_2 + \dfrac{7}{240} h^4$

இங்கு h என்பது பிரிவு இடை வெளித் தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

வலப் பக்கத்திலுள்ள திருப்புத்திறன்கள் தொகுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட திருப்புத்திறன்களைக் குறிக்கின்றன.

தொகுக்கப்பட்ட விபரங்கள் தொடர்ச்சி மாறியைக் குறிப்பதாகவும், பரவல் அமைப்பு சமச்சீராகவும் ஒரு முகடைப் பெற்றதாகவும் இருக்கும் சமயங்களில்தான் ஷெப்பர்டின் திருத்தங்கள் மேற்கொள்ளப்படவேண்டும்.

மாதிரி 1:

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு முதல் நான்கு திருப்புத் திறன்களைக் கணிக்கவும்.

ஷெப்பர்டின் திருத்தங்களின் மூலம் திருத்தப்பட்ட திருப்புத் திறன்களைக்காண்க.

உயரம் அங்குலத்தில்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
61	5
64	18
67	42
70	27
73	8
மொத்தம்	100

தீர்வு

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	−2	5	−10	20	−40	80
64	−1	18	−18	18	−18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
மொத்தம்	–	$N=\sum f_i = 100$	15	97	33	253

$$\mu'_1 = c.\ \frac{\sum fu}{N} = 3.\ \left(\frac{15}{100}\right) = 0.45$$

$$\mu'_2 = c.^2\ \frac{\sum fu^2}{N} = 9\ \left(\frac{97}{100}\right) = 8.73$$

$$\mu'_3 = c^3.\ \frac{\sum fu^3}{N} = 27.\ \left(\frac{33}{100}\right) = 8.91$$

$$\mu'_4 = c^4.\ \frac{\sum fu^4}{N} = 81\cdot\ \left(\frac{253}{100}\right) = 204.93.$$

எனவே $\mu_1 = 0$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$= 8.73 - (0.45)^2$$

$$= 8.5275.$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\,\mu'_1 + 2\,(\mu'_1)^3$$

$$= 8.91 - 3\,(8.73)\,(0.45) + 2\,(0.45)^3$$

$$= -2.6932.$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\,\mu'_1 + 6\,\mu'_2\,(\mu'_1)^2 - 3\,(\mu'_1)^4$$

$$= 204.93 - 4\,(8.91)\,(0.45)$$

$$+ 6\,(8.73)\,(0.45)^2 - 3\,(0.45)^4$$

$$= 199.3759.$$

(ii) திருத்தப்பட்ட $\mu_2 = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$

$$= 8.5275 - \frac{3^2}{12}$$

$$= 7.7775.$$

$$\text{திருத்தப்பட்ட } \mu_4 = \mu_4 = \mu_4 - \frac{h^2}{2} \cdot \mu_2 + \frac{7}{240} h^4$$

$$= 199{\cdot}3759 - \frac{1}{12}(3)^2\,(8.5275) + \frac{7}{240}(3^4)$$

$$= 163{\cdot}3646.$$

μ_1, μ_3 இவற்றுக்குத் திருத்தங்கள் தேவை இல்லை.

4-8. சமச்சீரின்மை (கோட்டம்) (Skewness)

சமச்சீராக அமையாத அலைவுப் பரவலின் போக்கை, 'சமச்சீரின்மை' அல்லது 'கோட்டம்' என வழங்குகின்றோம். ஒரே சீரான பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒன்றும் சேருகின்றன. ஆனால், கோட்டமுள்ள பரவலின் வளைகோட்டின் உச்சிப்புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலை கோட்டுக்கு இரு புறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலைப் பெற்றிருக்காது. ஆகவே, பாதை சீரற்ற தன்மையில் இருக்கும்போது கூட்டுச் சராசரியும் இடைநிலையும் முகடிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையும் (கூட்டுச்சராசரியும் முகடும் ஒரே அளவாக இருந்தால், கோட்டம் பூச்சியம் என்றும், கூட்டிடை முகடை விட அதிகமாக இருந்தால் அப்பரவலை 'நேர் கோட்டப்பரவல்' (Positively Skewed Distribution) என்றும், குறைவாக இருப்பின் 'மாறு கோட்டப்பரவல்' (Negatively Skewed Distribution) என்றும் கூறுகின்றோம்.

கோட்டத்தின் தோராய வாய்பாடு:

கோட்டம் = (கூட்டிடை — முகடு)

= 3 (கூட்டுடை — இடைநிலை)

பியர்சனின் கோட்டக்கெழு (Pearson's Coefficient of Skewness)

$$\text{பி. கோ. கெழு} = \frac{\text{கூட்டிடை} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்.}}$$

பி. கோ. கெழு > 0 என்றால், பரவல் நேர்கோட்டம் படைத்தது எனவும்,

பி·கோ. கெழு < 0 என்ருல், பரவல் மாறுகோட்டம் படைத்தது எனவும்,

பி.கோ. கெழு $= 0$, என்ருல், பரவல் ஒரே சீரான தென வும் கொள்கிருேம்.

திட்டவிலக்கம் தெரியாத நிலையில், கால்மான விலக் கத்தைப் பயன்படுத்திக் கோட்டக் கெழுவின் அளவை அறிய லாம்.

Q_1, M, Q_3 என்பன முறையே முதல் கால்மானம், இடை வெளி, மூன்ரும் கால் மானத்தைக் குறித்தால், கால்மானக் கோட்டக் கெழு (Quartile Coefficient of Skewness)

$$\text{கா. கோ. கெழு} = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1};$$

(இங்கு $M = Q_2$ என அறிக.)

இதில் $Q_3 + Q_1 - 2Q_2 > 0$ ஆயின், நேர்கோட்டப் பரவல்

,, < 0 ஆயின், மாறுகோட்டப் பரவல்

,, $= 0$ ஆயின், சமச் சீரான பரவல்

என வழங்குகின்ருேம்.

மற்ருெரு முக்கியமான கோட்டக்கெழு இரண்டாம், மூன்ரும் மையத் திருப்புத்திறன்களைப் பயன்படுத்தி வரையறுக்கப் பட்டது.

μ_2, μ_3 என்பன முறையே இரண்டாம், மூன்ரும் மையக் திருப்புத்திறன்கள் என்ருல்,

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \text{ எனவும்,}$$

$\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1}$ எனவும் வரையறுப்போம்.

ஆகவே $\gamma_1 = + \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}}$ ஒரு கோட்டக் கெழுவாகும்.

4-4· (iii) தட்டையளவு (Kurtosis)

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுடன் ஒப்பிடப்படும் மற்றொரு பரவலின் உச்சியின் அளவையே (peakedness), தட்டையளவு (Kurtosis) எனக் கூறுகிறோம்·

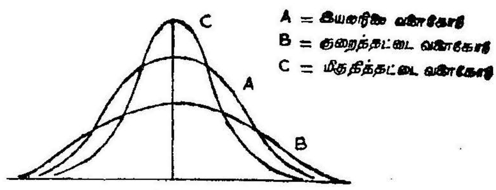
ஓர் அலைவெண் பரவல் சமச் சீராக இருப்பினும், இயல் நிலைப் பரவலைக் காட்டிலும் குறைவான அல்லது மிகையான தட்டையுடையதாகவோ இருக்கலாம்· இந்தத் தட்டையளவை β_2 என்ற மதிப்பின் மூலம் குறிக்கலாம். இங்கு μ_2, μ_4 என்பன முறையே இரண்டாம், நான்காம் மையத் திருப்புத்திறன்கள் என்றால்,

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$\gamma_2 = \beta_2 - 3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இங்கு γ_2 தட்டையளவை நிர்ணயிக்கிறது.

ஒரு பரவலில் γ_2-வை 'தட்டையளவின் மிகுதி' (Excess of Kurtosis) அல்லது 'மிகுதி' (excess) என்று வழங்குகின்றோம்.



படம் 4.

$\gamma_2 < 0$ என்றால், பரவலின் வளைகோட்டைக் 'குறைத் தட்டை வளைகோடு' (Platy - kurtic curve) என்றும், $\gamma_2 > 0$ என்றால் 'மிகுதித் தட்டை வளைகோடு' (Lepto kurtic curve) என்றும், $\gamma_2 = 0$ என்றால் 'இயல்நிலை வளைகோடு' (Normal curve) என்றும் கூறுகிறோம்.

பயிற்சி

(1) ஒரு கணிதத் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப் பெண்களின் கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குக் கோட்டம், தட்டையளவு கள் எல்லாவற்றையும் (தெரிந்த வாய்பாடுகளுக்கு) கணிக்கவும்.

அதாவது (i) பியர்சன் கோட்டக் கெழு

(ii) கால்மான கோட்டக் கெழு

(iii) திருப்புத்திறன்களை ஒட்டிய கோட்டக் கெழு

(iv) ,, ,, ,, தட்டையளவு

ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

மதிப்பெண்கள் (கணிதம்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 — 9	4
10 — 19	6
20 — 29	13
30 — 39	26
40 — 49	20
50 — 59	14
60 — 69	8
70 — 79	5
80 — 89	3
90 — 99	1
மொத்தம்	100

(2) *A*, *B* இரு தொகுதிகளுக்கான புள்ளியியல் கிலை யெண்கள் அடுத்தப் பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

		A	B
இடைநிலை	...	19.64	24.46
கீழ்க் கால்மானம்	...	13.46	15.64
மேல் கால்மானம்	...	25.94	37.76

A, B இவற்றுக்கான சிதறல், கோட்ட மதிப்புகளைப் பற்றி ஆராய்க.

(3) ஓர் அலைவெண் பரவலில் கோட்டம், தட்டையளவு பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு எழுதுக. அவை இரண்டும் எவ்வாறு அளவிடப்படுகின்றன?

(4) மையமற்ற திருப்புத்திறன்களைப் கொண்டு r ஆவது மையமுள்ள திருப்புத்திறனைக் காணும் சூத்திரத்தை நிரூபிக்கவும்.

(5) ஒரு மாறியின் பரவலில், 2 என்ற மதிப்பைச் சுற்றிய முதல் மூன்று திருப்புத்திறன்கள் முறையே 1, 16, — 40 என்றால், அம்மாறியின் சராசரி 3, மாறுபாடு 15, $\mu_3 = -86$ என்று நிரூபணம் செய்க.

$x = 0$ஐச் சுற்றியுள்ள முதல் மூன்று திருப்புத்திறன்களும் முறையே 3, 24, 76 எனக் காண்பிக்கவும்.

(6) ஒரு மாறியின் பரவலில், 3ஐச் சுற்றியுள்ள முதல் நான்கு திருப்புத்திறன்கள் முறையே 0.68, 2.64, 4.54, 15.74 என்றால், அம்மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு, மூன்றும், நான்காம் மையத் திருப்புத்திறன்களைக் காண்க.

(7) 25 உயரங்களுக்கான ஒரு பரவலின் மூலம்,

$$\text{சராசரி} = 54.23''$$
$$\text{திட்ட விலக்கம்} = 2.79''$$
$$\beta_1 = 0.54$$
$$\beta_2 = 3.16$$

என்று அறிகிறோம். இப்பரவலைச் சரி பார்க்கும்போது, 63.9'', 48.8'' என்ற மதிப்புகள் தவறென்றும் முறையே 50.4'', 62.3'' ஆக இருத்தல் வேண்டும் என்று தெரிய வருகிறது. தவற்றை நீக்கிச் சரி செய்து பிறகு சரியான சராசரி, திட்ட விலக்கம், β_1, β_2 மதிப்புகளைக் கண்டு பிடித்து எழுது.

(8) ஒரு தொடர் மாறிப் பரவலில், x மாறி (0, 2) வீச்சில் இருந்து, அதன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் (probability density function) $f(x) = \dfrac{3x(2-x)}{4}$ என்றால்,

அப்பரவலின் (i) சராசரி $=1$

(ii) மாறுபாடு $= \frac{1}{5}$

கொண்ட சமச் சீரான பரவல் என்று கண்டு பிடுக்கவும்.

$x=0$ஐச் சுற்றிய 2ஆவது, மூன்ருவது திருப்புத்திறன்கள் முறையே $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ என்று நிரூபித்து $\mu_3 = 0$ எனவும் காண்கவும்.

(9) $0, 1, 2, 3 \ldots n$ எனும் மதிப்புகள் முறையே ஈருறுப்புக் கெழுக்கான $1, n, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots n, 1$ என்ற அலைவெண்களைச் சார்ந்திருந்தால், அப்பரவலின் சராசரி $\frac{n}{2}$ எனவும், $x=0$ஐக் கொண்ட 2ஆவது திருப்புத்திறன் $\frac{n(n+1)}{4}$ எனவும், மாறுபாடு $\frac{1}{4}n$ எனவும் காண்கவும்.

(10) பொதுவான முறையில் $\beta_2 \geq 1$ என்று நிரூபி. மேலும் கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு β_1, β_2 மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடி.

கூலிகள் (Wages)	தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை
< 30	65
30 — 40	153
40 — 50	192
50 — 60	97
60 — 70	62
70 — 80	25
>80	6
—	—
மொத்தம்	600

5. ஊக அளவும் ராண்டம் மாறிகளின் பரவல்களும்

(Probability and Distribution of Random Variables)

5-1. ஊக அளவு அல்லது நிகழ்தகவு

வாய்ப்பின் பயன்களைப் பற்றி வலியுறுத்தும் ஊக அளவுக் கொள்கையானது பயன் முறைக் கணிதத்தின் ஒரு கிளை யாகும். இந்த ஊக அளவுக் கருத்தானது சுமார் 1660ஆம் வருடத்திலேயே முதலில் வாய்ப்பின் விளையாட்டுகளை மேற் கொண்டு புகுத்தப்பட்டது. பாஸ்கல், ஃபெர்மட், ஜேம்ஸ் பெர்னௌலி முதலானோர் இக்கொள்கையை மேலும் வளர்ச்சி யுறச் செய்தார்கள். சரி சம வாய்ப்பின் நிபந்தனையை பெர்னௌலி விளக்கினார். கணக்கியல் ஊக அளவினை முதலில் பெர்னௌலி விளக்கினார். பின்னர் லாப்லேஸ் மற்றும் பல புள்ளியியல் நிபுணர்கள் இவ் விளக்கத்தைப் பின்பற்றினர் புள்ளியியல் கொள்கை முழுக்க முழுக்க ஊக அளவுக் கொள் கையையே சார்ந்தது ஆகும். ஆதலின், ஊக அளவைப் பற்றி விளக்கமாக இங்கு ஆராய்வோம்.

நிறைய விசாரணைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யப்பட்டு தான் முடிவெடுக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக மருத்து வச் சோதனைகளில், ஒரு மருந்தின் சக்தி (வேகம்)யைப்பற்றி அறிய முற்படுகிறோம். அதே போல ஒரு பொருளாதார நிபுணர் குறிப்பிட்ட மூன்று பொருள்களின் விலைகளை வேறுபட்ட காலங் களில் நிர்ணயிக்க முற்படுகின்றார். அல்லது விவசாய நிபுணர் ஒருவர் ஒரு பருப்பு தானியத்திற்கு எந்தவிதமான இரசாயன உரம் பலன்தரும் என்று தீர்மானிக்க விரும்புகிறார். ஆகவே, ஓர் ஆய்வாளர் செய்திகளைத் திரட்டுவதற்கு

எப்போதும் சோதனையில் ஈடுபடுகிறுர். ஒவ்வொரு சோதனை யிலும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுகிறது. சில நிபந்தனையின் கீழ் நடத்தப்படும் சோதனையின் மூலம் அடையும் ஒரு தீர்மான முடிவையே நிகழ்ச்சி என்போம்.

ஊக அளவை விளக்கு முன்னர் சில குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி களை இங்கு விளக்குவோம்.

5-1-1. சரி சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)

இரண்டு எதிர்பாராத நிலையிலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒவ் வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு சரிசமமாக இருக்குமாயின், அந்நிகழ்ச்சிகளைச் 'சரி சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச் சிகள்' என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரே சீரான 1, 2, 3, 4, 5, 6 இலக்கமிட்ட 6 பக்கங்களுடைய ஒரு பகடையை உருட்டும்போது, ஏதாவது ஒரு பக்கம் மேல் வரக்கூடும். எப்பக்கம் வேண்டுமானுலும் வரலாமாயின், அந்த 6 நிகழ்ச்சி களும் சரி சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும்.

5-1-2. ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exhaustive events)

இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவது ஒன்று நிகழும் போது மற்ற நிகழ்ச்சி ஏற்படாதவாறு தடைப்படுமேயானுல், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளையும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பொருந் திய நிகழ்ச்சிகள் எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு காசைச் சுண்டி தலை விழுந்தால், பூ விழாது. பூ விழுந்தால் தலை விழாது. ஆகவே, தலை விழு வதோ, பூ விழுவதோ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி களாகும்.

5-1-3. பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events)

நிகழ்ச்சிகள் யாவற்றையும் பூரணமாகக் கவனிக்கப்படு கையில், அவற்றில் ஏதாவது ஒன்று நிச்சயமாக நிகழுமானுல், அந்த நிகழ்ச்சிகளைப் 'பூரணமான நிகழ்ச்சிகள்' என வழங்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு காசைச் சுண்டினுல் இரு நிகழ்ச்சி கள்தாம் ஏற்படும். (1) தலை விழுவது, (2) பூ விழுவது.

இவை இரண்டில் ஏதாவது ஒன்று நிச்சயமாக நடக்கும். ஆகவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளையும் 'பூரணமான நிகழ்ச்சிகள்' என்கிறோம்.

5-1-4. கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்

இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒருமிக்க (ஒரே சமயத்தில்) நடந்தால் அவற்றைக் 'கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்' என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக இரு பகடைகளை உருட்டுவோம். 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று பக்கங்களுக்கு எண்களிட்டோமானால், இரு பகடைகளையும் உருட்டும் போது முதல் பகடையில், ஆறு எண்களில் ஏதாவது ஓர் எண்ணும், அதே சமயத்தில் இரண்டாம் பகடையிலும் ஆறு எண்களில் ஏதாவது ஓர் எண்ணும் வெளிப்படும். இந்நிகழ்ச்சி 'கூட்டு நிகழ்ச்சி' எனப் பெயர் பெறும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் இரு வகைப்படும். அவை: (i) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள், (ii) சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

5-1-5. (i) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, மற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதைப் பாதிக்காமலிருக்குமானால், நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் 'சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்' எனக் கருதப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக இரு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டினால் முதல் பகடையில் எந்த எண் விழுந்தாலும் இரண்டாம் பகடையில் விழும் எண்ணைப் பாதிக்காது. ஆகவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

5-1-6. (ii) சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events)

மேலே கூறிய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று பாதிக்குமானால், அவை சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பையில் 5 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இரு பந்துகள் தனித்தனியே பையிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. முதல் பந்து எடுக்கப்பட்டவுடன், பையில் திரும்ப வைக்கப்படாமல் இருந்தால் இரண்டாம் பந்தின் நிகழ்ச்சி முதல் பந்தின் நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்தே அமையும். ஆகவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் 'சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள்' ஆகும்.

மேலே குறிக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் விளக்கங்கள் ஊக அளவைப்பற்றி நன்கு அறிந்து கொள்ள உதவுகின்றன.

5-2-1. கணக்கியல் ஊக அளவு (Mathematical Probability or Apriori Probability)

ஒரு காசைச் சுண்டி தலையோ பூவோ விழும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் ஊக அளவு $\frac{1}{2}$ எனக் கொள்கிறோம். இந்த ஊக அளவு 1ஐ இரு நிகழ்ச்சிகளுக்குமான சரி சமமாகப் பகிர்ந்து தருகிறோம். மேலும், நிகழ்ச்சிகள் (விளைவுகள்) எல்லா விதங்களிலும் நிகழுவதை ஆராய்ந்து ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் ஊக அளவானது தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

ஒரு முயற்சியில் (trial) ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு நிகழ்ந்தால் அதனை வெற்றி (success) எனவும், மற்ற விளைவுகள் யாவும் நிகழாததால் அவற்றைத் தோல்விகள் எனவும் கருதுவது வழக்கம். ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு m தடவைகள் நிகழுவதற்குரியதாகவும் (வெற்றிகள்) n தடவைகள் நிகழ முடியாததாகவும் (தோல்விகள்) இருந்து, சம வாய்ப்புகளுள்ள மொத்த $m+n$ நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று நிகழ, மற்றவை தடைப்பட்டால், அக் குறிப்பிட்ட (நிகழ்ச்சி) விளைவின் (அதாவது வெற்றியின்) ஊக அளவு $= \frac{m}{m+n}$ ஆகும்.

வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை p எனவும்,

தோல்விக்குரிய ... q எனவும் கொண்டால்,

$$p = \frac{m}{m+n}$$

$$q = \frac{n}{m+n}$$

எனவே $p + q = \frac{m+n}{m+n} = 1 =$ மொத்த ஊக அளவு.

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, ஏற்படாமலிருப்பது ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகளை முன்கூட்டியே தெரிவிக்கப்படுவதானல், இவ்வித ஊக அளவைக் 'கணக்கியல் ஊக அளவு' என்கிறோம்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை படைத்த, சமச்சீரான வாய்ப்புள்ள, பூரணமான n வகைகளில் E என்ற

விளைவு ஏற்படச் சாதகமான r வகைகள் இருப்பின், E விளைவுக்கான கணக்கியல் ஊக அளவு $\frac{r}{n}$ ஆகும்.

அதாவது E-ன் கணக்கியல் ஊக அளவு,

$$= \frac{\text{சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

5-2-2. புள்ளியியல் ஊக அளவு (Statistical Probability or Aposteriori probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி எத்தனை தடவைகள் வெற்றியாகவும் தோல்வியாகவும் நிகழக்கூடும் என்று முன்கூட்டியே தெரியாமலிருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில், முயற்சியைப் பல தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்து அவற்றின் மூலம் நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதற்குரிய ஊக அளவைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு கணக்கிடும் ஊக அளவைப் 'புள்ளியியல் ஊக அளவு' எனலாம்.

5-3. ராண்டம் சோதனையும், மாதிரிக் கணமும் (Random Experiment and Sample Space)

ஒரு சோதனையில் என்ன நிகழும் என்பதை முன்கூட்டியே பூரணமாக அறிய முடியாத சூழ்நிலையில் இருப்பினும், நிகழ்ச்சிகள் நிகழுவதற்கு முன்னுலேயே, ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் தொகுப்புகளைத் திட்டவட்டமாக வரையறுக்கலாம் எனக் கொள்வோம். இவ்வகையான சோதனைகளை, தரப்பட்ட சில நிபந்தனைகளுக்கேற்ப (under some conditions) திரும்பத் திரும்பச் செய்தால், அதை 'ராண்டம் சோதனை' என்கிறோம். நிகழக்கூடிய ஒவ்வொரு விளைவின் தொகுப்பை 'சோதனைக் கணம்' (Experimental space) அல்லது 'மாதிரிக் கணம்' (Sample space) என வழங்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு காசைச் சுண்டி விட்டால் தலை விழும் நிகழ்ச்சியை H என்றும், பூ விழும் நிகழ்ச்சியை T என்றும் கொள்வோம். அதே நிபந்தனைகளில் இச் சோதனையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால், இந்தக் 'காசைச் சுண்டுதல்' ஒரு ராண்டம் சோதனைக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

இச் சோதனையில் H, T என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பே 'மாதிரிக் கணம்' என வழங்கலாம். A ஒரு மாதிரி

பூதகணம் எனவும், A என்பது A-ன் ஒரு பகுதிக்கணம் எனவும் கொள்வோம்.

ஒரு சோதனையில் A-ல் ஒரு விளைவு இருந்தால், 'A நிகழ்ச்சி' (Event A) நடந்ததாகச் சொல்கிறோம்.

ராண்டம் சோதனைகளை N தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்து, f தடவைகள் 'A நிகழ்ச்சி' நடந்திருக்குமானால், $\frac{f}{N}$ என்ற விகிதத்தை A நிகழ்ச்சிக்கான சார்பு அலைவெண் (relative frequency) எனலாம். N சிறியதாக இருந்தால், சார்பு அலைவெண் மதிப்பு சரியாக இராது. N பெரிதாக பெரிதாக, சார்பு அலைவெண் நிலையான மதிப்பாக ஆகும். இதை 'p' என்கிறோம். எனவே, A நிகழ்ச்சிக்கான ஊக அளவு $= p$.

மாதிரி 1 :

2 பகடைகளை உருட்டியபின் இரு பகடைகளும் காட்டும் எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 7 என்றால், A என்பது (1 6) (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) என்ற 6 நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பு ஆகும்.

$$N = 400$$

f = ஏழு என்ற கூட்டலுக்கான அலைவெண் = 60 என்றால்

சார்பு அலைவெண் $= \frac{60}{400} = 0.15$

ஆகவே, Aஐச் சார்ந்த ஒரு மதிப்பு p என்றால், $p \doteqdot 0.15$ ஆகும். (அதாவது p-ன் தோராய மதிப்பு 0.15 ஆகும்.)

ஊக அளவினை வரையறுத்து அளவிடுவது பொதுவாகக் கடினமானதால், கணங்களின் இயற்கணிதம் (Algebra of sets) மூலம் அவற்றை எளிதாக அளவிட முடியும்.

5-4. கணங்களின் இயற்கணிதம் (Algebra of Sets)

முதல் 10 எண்களைக் கொண்ட கணம்

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ஆகும்.

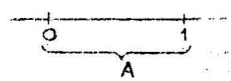
இங்கு, 4.3, 17 என்பன இக் கணத்தைச் சேராதவை. 5 என்ற எண் கணத்தில் உள்ளது.

ஒரு பொருள் (object) ஒரு **கணத்தில் இருந்தால்**, அப் பொருள் **அக்கணத்தின்** ஓர் உறுப்பு (element) ஆகும்.

பொதுவாக எண்களின் கணங்கள் அல்லது புள்ளிகளின் கணங்கள் நமக்குப் பயன்படுகின்றன.

(i) $A : \{x; \leq x \leq 1\}$ என்பது x புள்ளிகளின் **ஒருபடிக் கணம் ஆகும்**. (one dimensional set).

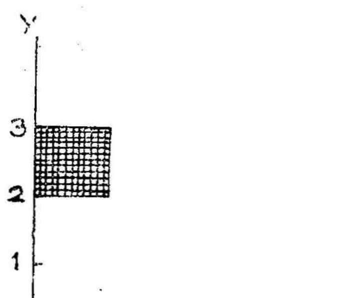
இங்கு x மாறி $(0, 1)$ இடைவெளியில் உள்ள எல்லா மதிப்பு களையும் கொள்கிறது. (படம் 5-(1) காண்க)



படம் 5-(1).

(ii) இதே போல $A : \{(x, y)\ 0 \leq x \leq 1, \quad 2 \leq y \leq 3\}$ என்பது ஒரு (x, y) ஜதையான புள்ளிகளின் இரு **படிக் கணமாகும்** (two – dimensional set).

$0 \leq x \leq 1,\ 2 \leq y \leq 3$ என்ற இடைவெளிகளில் உள்ள எல்லா மதிப்புகளும் கணத்தின் நிகழ்ச்சிகளாகும். [படம் 5-(2). **காண்க**]



படம் 5-(2).

வரையறை 1 :

A_1 கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A_2 கணத்தின் உறுப் பாயின், A_1 என்பது A_2 கணத்தின் உபகணமாகும். இதை

$A_1 \subset A_2$ என்றும் $A_2 \subset A_1$ இருந்தால், இரு கணங்களும் ஒரே மாதிரியான உறுப்புக்களைப் பெற்றிருக்கும். ஆகவே $A_1 = A_2$

மாதிரி 1:

$$A_1 = \{x;\ 0 \leq x \leq 1\}$$

$$A_2 = \{x;\ -2 \leq x \leq 3\}$$ என்றால்

A_1 கணம் A_2-ன் உபகணமாகும். $A_1 \subset A_2$.

மாதிரி 2:

$A_1 :\ \{(x, y);\ 0 \leq x = y \leq 2\}$

$A_2 :\ \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ என்றால்

$A_1 \subset A_2$.

A_2-ன் உபகணம் A_1 ஆகும்.

வரையறை 2:

A-ல் ஓர் உறுப்பும் இல்லையாகில், A என்பது பூச்சிய கணம் எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இதை $A = 0$ என எழுதலாம்.

வரையறை 3:

A_1, A_2 இருகணங்களாயின் $A_1 \cup A_2$ என்பது இரு கணங்களின் பிணைப்பு (union) ஆகும்.

இக் கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளும் குறைந்த பட்சம் A_1, A_2 கணங்களில் ஏதாவது ஒன்றின் உறுப்புகளாக இருக்க வேண்டும்.

வரையறை 4:

A_1, A_2 இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் அடங்கிய கணம் $A_1 \cap A_2$ எனப்படும். இதை A_1, A_2 கணங்களின் வெட்டு (inter section) எனக் கூறுகிறோம்.

[**குறிப்பு:** இதேபோல $A_1, A_2 \ldots A_k$ என்ற k கணங்களின் பிணைப்பு $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k$ எனவும், இக் கணங்களின் வெட்டு $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k$ எனவும் வழங்கப்படுகிறது.]

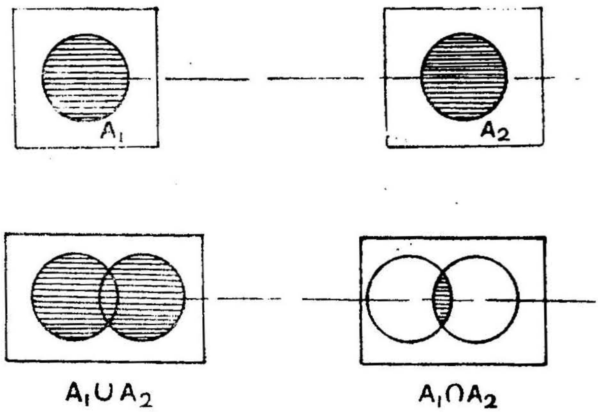
மாதிரி 3 :

$$A_1 : \{ x; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$A_2 : \{ x; x = 3, 4, 5, 6 \} \text{ என்றால்}$$

$$A_1 \cup A_2 : \{ x; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A_1 \cap A_2 : \{ x; x = 3, 4, 5 \}$$

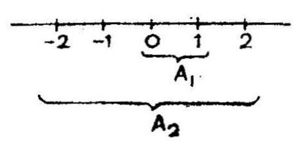


படம் 6-(1).
வெண் படங்கள்

மாதிரி 4 :

$$A_1 : \{ x; 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$A_2 : \{ x; -2 \leq x \leq 2 \} \text{ என்றால்}$$



படம் 6-(2),

$$\text{படத்தின் மூலம் } A_1 \cup A_2 = A_2$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1$$

என்று நன்கு விளங்குகின்றது.

மாதிரி 5 :

(i) $A_2 = 0$ ஆயின் $A_1 \cup A_2 = A_1$ ஆகும். இங்கு A_2 ஒரு பூச்சிய கணம் ஆகும். இஃது ஒவ்வொரு A_1 கணத்துக்கும் பொருந்தும்.

(ii) A என்ற ஒவ்வொரு கணத்துக்கும் $A \cup A = A$ என்ற சமன்பாடு பொருந்தும்.

மாதிரி 6 :

$$A_1 : \{ (x, y) ; (x, y) = (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$$

$$A_2 : \{ (x, y) ; (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 2) \}$$

என்று இருந்தால் $A_1 \cap A_2 = \{ (x, y) ; (x, y) = (1, 1) \}$

மாதிரி 7 :

A என்ற ஒவ்வொரு கணத்துக்கும்

$$A \cap A = A$$

$A \cap 0 = 0$ ஆகும்.

இங்கு 0 என்பது பூச்சிய கணமாகும்.

மாதிரி 8 :

$A_i = \{ x ; 0 < x < \frac{1}{i} \}$ $i = 1, 2, 3, \ldots \infty$ என்றால்,

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = 0$. ஏனெனில், $A_1, A_2, A_3 \ldots$ என்ற கணங்களில் பொதுவான மதிப்பு ஒன்றுமே இல்லை.

$i = 1, 2$ என்றால்

$$A_1 = \{ x ; 0 < x < \tfrac{1}{1} \}$$

$$A_2 = \{ x ; 0 < x < \tfrac{1}{2} \}$$

$$A_1 \cap A_2 = A_2.$$

$i = 1, 2, 3$ என்றால்

$$A_3 = \{ x ; 0 < x < \tfrac{1}{3} \}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3.$$

இதே போல $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_4$

$(\because A_4 = \{ x ; 0 < x < \tfrac{1}{4} \})$

முடிவிலி கணங்களின் வெட்டு

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap = 0$ பூச்சியமாகத் தானிருக்கவேண்டும்.

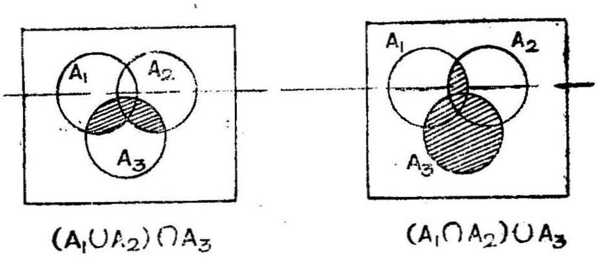
ஏனென்றால், $(0 < x < \frac{1}{i})$, இடைவெளியானது $i \to \infty$ எனும்போது பூச்சியத்தை ஒட்டியே இருக்கிறது.

மாதிரி 9 :

A_1, A_2, A_3 மூன்று கணங்களை ஒன்றையொன்று வெட்டும் கணங்களாகக் கொண்டால்,

$(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ என்ற உபகணத்தையும்

$(A_1 \cap A_2) \cup A_3$ என்ற உபகணத்தையும் வெண் படங்கள் மூலம் கீழே விளக்கலாம்.



படம் 7.
வெண் படங்கள்

ஒரு கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளின் முழுமையையும் சில சமயம் கவனிப்போம். இக் கணத்தைப் 'பூதகணம்' என வழங்குவோம்.

மாதிரி 10:

ஒரு காசை 4 தடவைகள் சுண்டும் போது தலை விழும் எண்ணிக்கையை x எனக் குறிப்பிட்டால், $x = 0, 1, 2, 3, 4$ என்ற ஏதாவது ஓர் எண்ணைக் குறிக்கும்.

இங்கு **A** என்ற பூதகணம் $\mathbf{A} = \{x; x = 0, 1, 2, 3, 4\}$

வரையறை 6:

A என்ற பூத கணத்தின் உபகணம் A ஆனால் A-ல் இல்லாததும் **A**-ல் இருப்பதுமான உறுப்புகளைக் கொண்ட உபகணத்தை **A-ன் கண நிரப்பி** (Complement of A) என்கிறோம். இதை A^* என்று குறிக்கலாம்.

மாதிரி 11:

$$\mathbf{A} = \{ x; x = 1, 2, 3. 4, 5, 6 \}$$

$A = \{ x; x = 1, 3, 6 \}$ என்றால்

$A^* = A$-ன் கண நிரப்பி $= \{x; x = 2, 4, 5\}$ ஆகும்.

மாதிரி 12:

$A \subset \mathbf{A}$ என்றால்

$$A \cup A^* = \mathbf{A}$$

$$A \cap A^* = O$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$A \cap \mathbf{A} = A$$

$(A^*)^* = A$ என்பது எளிதில் புலனாகிறது.

பயிற்சி

(1) கீழே காணும் A_1, A_2 கணங்களுக்கு $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $A_1 = \{ x; x = 1, 4, 5 \}$, $A_2 = \{ x; x = 3, 4, 5 \}$

(ii) $A_1 = \{ x; 0 < x < 2 \}$, $A_2 = \{ x; 1 \leq x < 3 \}$

(iii) $A_1 = \{ (x, y); 1 < x < 3, 1 < y < 3 \}$,

$A_2 = \{ (x, y); 2 < x < 4, 2 < y < 4 \}$.

(2) $\mathbf{A}$ கணத்திற்கு ஏற்ற A_1 உபகணத்தின் நிரப்பி A_1^* ஐக் காணவும்.

(i) $\mathbf{A} = \{ x; 1 < x < 3 \}$, $A_1 : \{ x; 2.25 \leq x < 3 \}$

(ii) $A = \{ (x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1 \}$,

$$A_1 = \{ (x, y);\ x^2 + y^2 = 1 \}.$$

(3) வெண் படங்களின் மூலம் கீழ்க்கண்டவற்றை ஒப்பிடவும்.

(i) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ஐயும், $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$ஐயும்.

(ii) $(A_1 \cap A_2)^*$ஐயும், $(A_1^* \cup A_2^*)$ஐயும்.

(iii) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ஐயும், $(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$ஐயும்.

தேற்றம் 1:

C_1, C_2 என்பன X-ன் உபகணங்களாயின்,

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$$

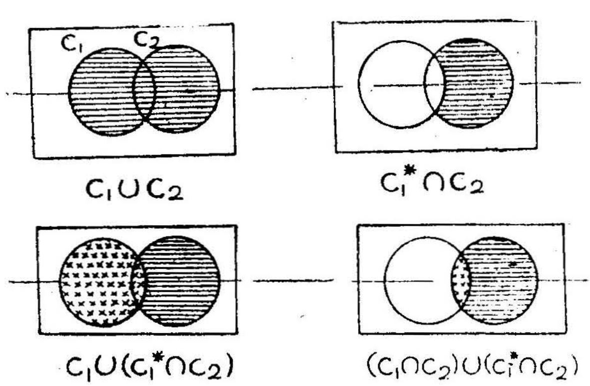
[இங்கு $P(C_1 \cup C_2)$ (என்பது $C_1 \cup C_2$) ன்-ஊக அளவு.]

நிரூபணம்:

$C_1 \cup C_2$, C_2 என்ற ஒவ்வொரு கணத்தையும் வெட்டுப் படாத உபகணங்களின் பிணைப்பு என்று கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$C_1 \cup C_2 = C_1 \cup (C_1^* \cap C_2)$$

$$C_2 = (C_1 \cap C_2) \cup (C_1^* \cap C_2)$$



படம் 8.
வெண் படங்கள்

$$P\cdot(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_1^* \cap C_2)$$

$$(PC_2) = P(C_1 \cap C_2) + P(C_1^* \cap C_2)$$

$$P(C^*_1 \cup C_2) = P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$$

எனவே, $P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$

ஆதலால் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி 13 :

C என்ற மாதிரி கணம் இரண்டு பகடைகளை உருட்டும் போது ஏற்படும் எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்டது.

C கணத்தில் 36 உறுப்புகள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றின் ஊக அளவும் 1/36 ஆகும்.

இங்கு $C_1 = \{ C; c = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1) \}$

$$= C_2 = \{ C; c = (1, 2), (2, 2), (3, 2) \}$$

$$P(C_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(C_2) = \frac{3}{86}.$$

$$P(C_1 \cup C_2) = \frac{8}{36}; \; P(C_1 \cap C_2) = 0.$$

வரையறை 7:

(i) $P(C)$ என்பது C கணத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட உபகணத்துக்கு வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பாகுலும்,

(ii) $P(C) \geq 0$

(iii) $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + \cdots$

(இங்கு C_i உபகணங்கள் எந்த இரு உபகணங்களுக்கும் பொதுவான எந்த ஓர் உறுப்பையும் கொள்ளாமல் இருக்கிறது.)

மேலும்,

(iv) $P(C) = 1$ என்றும்.

$P(C)$ என்பதை ஊக அளவு கணச் சார்பலன் (Probability set function) என்று கூறலாம். ஒரு ராண்டம் சோதனையின் எல்லா விதமான நிகழ்ச்சிகளையும் கொண்ட கணத்தை 'மாதிரி கணம்' என்றும்,அதை $\mathbf{C}$ எனவும் வழங்கலாம். $\mathbf{C}$-ன் உபகணம் C என்றால், $P(C)$ என்பது ராண்டம் சோதனையின் நிகழ்ச்சி C-ன் ஓர் உறுப்பாக இருப்பதற்கான ஊக அளவாகும். எனவே, இந்த $P(C)$ யைக் கணச் சார்பலனின் ஊக அளவு எனக் கூறுகின்றோம்.

(1) $\mathbf{C}$-ன் உபகணம் C என்றால்,

$$P(C) = 1 - P(C^*)$$

$$\mathbf{C} = C \cup C^*$$

$$C \cap C^* = 0$$

$$P(\mathbf{C}) = P(C \cup C^*)$$

$$= P(C) + P(C^*) - P(C \cap C^*)$$

$$\therefore P(C) + P(C^*) = 1$$

ஆகவே $P(C) = 1 - P(C^*)$.

(2) $P(0) = 0$.

ஏனெனில் $C = 0$ எனில், $C^* = \mathbf{C}$.

$$P(\mathbf{C}) = P(C) + P(C^*)$$

$$= P(C) + P(\mathbf{C})$$

$$P(C) = 0$$

அதாவது $P(0) = 0$.

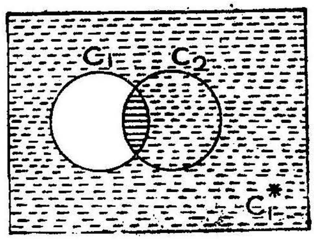
(3) $\mathbf{C}$-ன் உபகணங்கள் C_1 C_2 என்பன $C_1 \subset C_2$ என்றவாறு இருக்கட்டும்.

எனவே $P(C_1) \leq P(C_2)$.

$$C_2 = C_1 \cup (C^*_1 \cap C_2)$$

$C_1 \cap (C^*_1 \cap C_2) = 0.$

$\therefore P(C_2) = P(C_1) + P(C^*_1 \cap C_2)$



படம் 9.

ஆனல் $P(C^*_1 \cap C_2) \geq 0$

ஆதலால் $P(C_2) \geq P(C_1)$

$\therefore P(C_1) \leq P(C_2)$

(4) $C \subset \mathbf{C}$- ஒவ்வோர் உபகணத்துக்கும்

$(0) \leq P(C) \leq 1.$

நிரூபணம் $0 \subset C \subset \mathbf{C}$ – என்பதால்

$P(0) \leq P(C) \leq P(\mathbf{C})$

$P(0) = 0, P(\mathbf{C}) = 1$ எனநாம் அறிவோம்.

எனவே $0 \leq P(-C) \leq 1$

மாதிரி 14 :

2 காசுகளைச் சுண்டி விட்டால் மொத்தம் 4 நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படும் கணம் $\mathbf{C}$ என்றல்,

$\mathbf{C} : \{ C ; C = (H, H), (H, T(, (T, H), (T, T) \}$ ஆகும்.

(H: தலை விழுவது, T = பூ விழுவது)

ஒவ்வொன்றின் ஊக அளவும் $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

$C_1 = \{ C ; c = (H, H), (H, T) \}$

$C_2 = \{ C ; c = (H, H), (T, H) \}$

$P(C_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

$P(C_2) = \frac{1}{2}$

$P . (C_1 \cap C_2) = \frac{1}{4}.$

$P(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

தேற்றம் 2 :

A என்ற மாதிரி கணத்தில் $A_1, A_2, \ldots\ldots A_k$ என்பன k ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பொருந்திய உபகணங்கள் (mutually exclusive sets) என்றால்,

(i) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_k)$ ஆகும்.

அவை ஒன்றுக்கொன்று விலக்கும் தன்மை பெருத உப கணங்கள் என்றால்,

$$\text{(ii)} \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$$- \sum_{\substack{i<i=1 \\ i \neq j}}^{k} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{i<j<l=1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{k-1} . (A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_k).$$

நிருபணம்

(i) இங்கு $A_i \cap A_j = 0_a \quad A_i \cap A_j \cap A_k = 0 \ldots\ldots$

$(i \neq j) \qquad (i \neq j \neq k)$

எனவே $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$.

(ii) இதை நிரூபிக்க தேற்றம் 1 பயன்படுகிறது.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

இதே போல

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = [A_1 \cup (A_2 \cup A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3) - P[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)]$$

(தேற்றம் 1ஐப் பயன்படுத்தி)

இங்கு

$$P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) = P(A_2 \cap A_3)$$

$$P[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)] = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3)$$

$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

எனவே,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + [P(A_2)$$

$$+ P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)] - [P(A_1 \cap A_2$$

$$+ P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

இதே போல 4 அல்லது மேற்பட்ட உபகணங்களின் பிணைப்பிற்கு ஊக அளவு நியதியை எழுதலாம்.

ஆகவே,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$$- \sum_{i < j=1}^{k} (A_i \cup A_j)$$

$$+ \sum_{i < j < l=1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_l)$$

$$+ \ldots\ldots + (-1^{k-1}) (A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_k)$$

5-1. ராண்டம் மாறியின் பரவலும், ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனும் (Distribution of Random Variables & Probability Density Function).

A கணத்தில் X என்ற ராண்டம் மாறியை எடுத்துக் கொள்வோம். A-ன் உபகணம் A யாகில்,

$P(A) = P_r(X \epsilon A)$ யுடைய ஊக அளவை நிர்ணயிக்கலாம். A-ன் பல்வேறு உபகணங்களில் X மாறி எவ்வாறு பரவியுள்ளது என்பதை இந்த ஊக அளவின் மூலம் அறியலாம். இப்போது நாம் ராண்டம் மாறிகளை ஆராய்ந்து அவற்றின் பரவல்களை விளக்குவோம். மிகவும் எளிய முறையில் சொல்லப்போனால், இதை **ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்** (probability density function) (p.d. f.) என வழங்கலாம். இச் சார்பலன் இரு வகைப்படும்: (i) தனித்த வகை (Discrete type); (ii) தொடர்ச்சியான வகை (continuous type). முதலில் ஒரு தனித்த வகை ராண்டம் மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனைக் (ஊ. அ. சா.) காண்போம்.

தனித்த வகை ராண்டம் மாறி (Random Variable of a discrete type)

ஒவ்வொரு வரம்புள்ள இடைவெளியிலும், வரம்புள்ள எண்ணிக்கை கொண்ட புள்ளிகளைத் தன் உறுப்புகளாக A கணம் கொண்டிருந்தால், A கணத்தைப் 'புள்ளிகளின் கணம்' எனக் கூறலாம். அப்படிப்பட்ட ஒருபடித்தான A கணத்தின் உபகணம் A என்றால், A என்பது தனித்த புள்ளிகளைக் கொண்ட கணமாகும்.

$x \epsilon A$ என்றால், $f(x) > 0$ என்ற அளவில், $f(x)$ என்ற சார்பலனைக் காண்போம்,

இங்கு $\sum\limits_{A} f(x) = 1$ ஆகும்.

ஊக அளவு கணச் சார்பலன் $P(A)$ஐ $f(x)$ சார்பலன் மூலமாக எழுதினால்,

$$P(A) = P_r(X \epsilon A) = \sum_{A} f(x)$$

X என்பது தனித்த வகையைச் சேர்ந்த ராண்டம் மாறியாகிறது. ஆகவே X தனித்த வகையைச் சேர்ந்த பரவலில் அமைகிறது.

மாதிரி 15 :

A : $\{x, x = 0, 1, 2, 3\}$ என்றால் X மாறி தனித்த வகையைச் சேர்ந்தது. $P(A) = \sum\limits_{A} f(x)$ ஆக இருக்கட்டும்.

இங்கு $f(x) = \frac{3!}{x!\,(3-x)!}(\frac{1}{2})^3, \quad x \epsilon A$

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1.$$

$$f(0) = \frac{3!}{0!\ 3!} \cdot (\tfrac{1}{2})^3 = (\tfrac{1}{2})^3.$$

$$f(1) = \frac{3!}{1!\ 2!}(\tfrac{1}{2})^3 = 3\,(\tfrac{1}{2})^3.$$

$$f(2) = \frac{3!}{2!\ 1!}(\tfrac{1}{2})^3 = 3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3$$

$$f(3) = \frac{3!}{3!\ 0!}(\tfrac{1}{2})^3 = 1 \cdot (\tfrac{1}{2})^3.$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{3} f(x) = (\tfrac{1}{2})^3\,[1 + 3 + 3 + 1] = 1.$$

இங்கு $A = \{x \,;\, x = 0, 1\}$ என்றால்,

$$P_r[X \epsilon A] = \frac{3!}{0!\ 3!}(\tfrac{1}{2}) + \frac{3!}{1!\ 2!}(\tfrac{1}{2})^3$$

$$= f(0) + f(1) = (\tfrac{1}{2})^3(1 + 3) = \frac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

மாதிரி 16 :

தனித்த வகை ராண்டம் மாறி X-ன் கணம்

$$A : \{ X_n \; ; \; x = 1, 2, 3, \ldots\ldots \}$$ எனவும்

$f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $x \epsilon A$ எனவும் இருப்பின்

$P_r (x \epsilon A_1) = \sum_{A_1} f(x)$ ஆகும்.

இங்கு $A_1 = \{ x \; ; \; x = 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots \}$ என்றால்

$$P_r (x \epsilon A_1) = (\tfrac{1}{2})^1 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^5 + (\tfrac{1}{2})^7 + \ldots\ldots$$

$$= (\tfrac{1}{2}) [1 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^4 + (\tfrac{1}{2})^6 + \ldots\ldots]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} .$$

(ii) தொடர்ச்சி வகை ராண்டம் மாறி
(Continuous Type of Random Variables)

ஒரு படித்தான **A** கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) $f(x) > 0, \quad x \epsilon A$

(ii) A-ன் உபகணமான ஒவ்வொரு முடிவுள்ள இடைவெளியிலும் (finite interval), தொடர்ச்சியின்மைகளின் ஒரு முடிவுடைய எண்ணிக்கையை $f(x)$ கொண்டிருந்தால், (if f (x) has a finite number of discontinuities in every finite interval that is a subset of **A**). **A** கணம், கீழ்க்கண்ட ரீமான் - தொகையைச் (Riemann - integral) சார்ந்து விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\int_{\mathbf{A}} f(x)\, dx = 1.$$

A என்ற மாறியின் கணத்தில் $A \subset \mathbf{A}$ என்ற அளவில், $P(A)$ஐ $f(x)$ மூலமாக எழுதினால்,

$$P(A) = P_r (X \epsilon A) = \int_{A} f(x)\, dx.$$

இத்தகைய X மாறியை ஒரு 'தொடர்வகை ராண்டம் மாறி' எனக்கூறலாம்.

மாதிரி 17 :

A கணம் $\mathbf{A} = \{ x; 0 < x < \infty \}$

$f(x) = e^{-x}$, $x \epsilon \mathbf{A}$ என்றால் X-என்ற தொடர் வகை ராண்டம் மாறிக்கு,

$$P_r (X \epsilon A) = \int_A f(x)\, dx = \int_A e^{-x}\, dx$$

இப்போது $A = \{ x; 0 < x < 1 \}$, எனில்,

$$P_r (X \epsilon A) = \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

$$= \Big[-e^{-x} \Big]_0^1$$

$$= \underline{1 - e^{-1}.}$$

மாதிரி 18 :

A கணம் $\mathbf{A} : \{ x; 0 < x < \infty \}$

$f(x) = c\, x. e^{-x}$, $x \epsilon \mathbf{A}$, என்பது ஓர் ஊ. அ. சார்பலனானால், c-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\int_{\mathbf{A}} f(x)\, dx = 1 \quad \text{(ஏனெனில் } f(x) \text{ ஓர் ஊ. அ. சா.).}$$

$$c. \int_0^\infty x, e^{-x}\, dx = 1$$

எனவே $$c^{-1} = \int_0^\infty x. e^{-x}\, dx$$

$$= \Big[-x\, e^{-x} \Big]_0^\infty + \int_0^\infty 1. e^{-x}. dx$$

$$= 0 + \Big[-e^{-x} \Big]_0^{\infty}$$

$$= 0 - (-1) = 1.$$

எனவே $c^{-1} = 1$, $c = 1$ ஆகும்.

ஆதலால் $\underline{f(x) = 1.\, x e^{-x} = x.\, e^{-x},\ x \in A}$, ஆகும்.

மாதிரி 19 :

$$A : \{ x;\ o < x < 1 \}$$

$f(x) = c\, x^3,\ x \in A$, என்பது ஓர் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஆகும்.

$$\int_A f(x)\, dx = \int_0^1 c\, x^3\, dx = 1 \quad \text{ஆகும்,}$$

$$\therefore c^{-1} = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \left(\tfrac{1}{4} - 0 \right) = \tfrac{1}{4}.$$

அதாவது $c = 4$.

எனவே $f(x) = 4\, x^3$ என்பது சரியான ஊ. அ. சா. ஆகும்.

ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் (Probability Density function)

இதிலிருந்து X மாறி தனித்த வகை ராண்டம் மாறியானாலும், $P_r\,(x \in A)$ என்ற ஊக அளவு முழுக்க முழுக்க $f(x)$ சார்பலனையே சார்ந்துள்ளது. இரு வகைகளிலும் $f(x)$ஐ X மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச்சார்பலன் (ஊ. அ. சா.) என்று வழங்குவோம்.

இந்த X மாறியின் ஊ. அ. சார்பலனின் கருத்துச் சாயலை (notion) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ராண்டம் மாறிகளின் ஊ. அ. சார்பலனின் கருத்துச் சாயலுக்கு நீட்டிப்போம் (விரிவு படுத்துவோம்). சில குறிப்பிட்ட வரம்புகளுடன் (restrictions) A கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$A \subset \mathbf{A}$ என்றால், X, Y என்ற இருமாறிகளுக்குமான $P(A)$ ஆனது $P(A) = P_r [(X, Y) \epsilon A] = \sum_{\mathbf{A}} \sum f(x, y)$

(தனித்த வகைக்கானது)

அல்லது

$$P(A) = P_r [(X, Y) \epsilon A] = \int_{\mathbf{A}} \int f(x, y)\, dx\, dy$$

(தொடர் வகைக்கானது)

இந்த இருவகைகளிலும் $f(x, y)$ என்பது X, Y இரு ராண்டம் மாறிகளின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஆகும்.

ஒவ்வொரு வகையிலும் $P(\mathbf{A}) = 1$.

முழுதும் பொதுப்படையான முறையில் இதையே எழுதலாம்.

$X_1, X_2, \ldots X_3$ என்ற n ராண்டம் மாறிகளின் ஊக அளவு கணச் சார்பலன் (probability set function) $P(A)$, $A \subset \mathbf{A}$ என்றால்

$$P(A) = P_r [(X_1, X_2, \ldots X_n) \epsilon A]$$

$$= \sum_{\mathbf{A}} \sum \ldots \sum f(x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ (தனித்த வகைக்கானது).}$$

$$P(A) = P_r [(X_1, X_2 \ldots X_n) \epsilon A] = \int \int_{\mathbf{A}} \ldots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

$dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ (தொடர் வகைக்கானது)

இங்கு எப்போதும் முக்கியமாகக் கவனிக்கவேண்டிய குறிப்புகள் :

(i) $\mathbf{A}$ என்ற கணத்தின் மேலுள்ள ஊ. அ. சா. $f > 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். [ஒரு மாறி ஊ. அ. சா. வானாலும், பல மாறிகளின் ஊ. அ. சா. வானாலும்.]

(ii) $\sum \sum \ldots \sum f = 1$ அல்லது $\int \int \ldots \int f\, dx = 1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

தனித்த அல்லது தொடர்வகை ராண்டம் மாறிகளை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால், நம் கருத்துப் பாங்கை இன்னும் எளிதான முறையில் விளக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, தொடர்வகை ராண்டம் மாறி X-ன்

$\mathbf{A}$ கணம் $\mathbf{A} : \{ x ; 0 < x < \infty \}$ என்றால், X-ன் ஊ.அ.சா. $f(x) = \epsilon^{-x}, x \epsilon \mathbf{A}$ என்றால், நாம் X-ன் ஊ. அ. சார்பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி வரையறுத்தாலும், X-ன் பரவல் மாறாமல் அதேபோல் இருக்கும்.

$$f(x) = \epsilon^{-x}, 0 < \epsilon < \infty$$

$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளும்.)}$$

இவ்விதம் எழுதிக் கொண்டு X-ன் ஊ·அ·சாவைக் கவனிப் போம்·

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} o.\, dx + \int_{0}^{\infty} \epsilon^{-x}\, dx = 1. \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே, $\int_{\mathbf{A}} f(x)dx$ என்பதைப் பொருள் மாறுபடாதவாறு

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ என்று மாற்றிக் குறிக்கலாம்.

இதேபோல, $\iint_{\mathbf{A}} f(x,y)\, dx\, dy$ஐ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(xy)\, dx\, dy$ என எழுதலாம்.

தனித்த வகை ராண்டம் மாறிகளுக்கான கோட்பாடுகளும் இதேபோல வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$\sum_{A} f(x)$ என்பதை $\sum_{x} f(x)$ என்றும்,

$\sum_{A} \sum f(x, y)$ என்பதை $\sum_{y} \sum_{x}$ என்றும் எழுதலாம்.

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி X-ன் ஊ.அ.சா. $(f\,x)$,

A என்ற உபகணம் $A: \{ x;\ a < x < b \}$ என்றால்,

$$P(A) = P_r[X \epsilon A] = P_r[a < X < b] = \int_a^b f(x)\,dx$$ ஆகும்.

மேலும் $A: \{ x\ ;\ x = a \}$ என்றால்,

$$P(A) = P_r[X \epsilon A] = P_r[X = a] = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

இதேபோல $P(X = b) = 0$

$\therefore P_r\,(a < X < b) = P_r[a \leq X \leq b]$ ஆகும்.

இதனால் நாம் அறிவது யாதெனில், X-ன் பரவல் மாறா வண்ணம் X-ன் ஊ.அ. சார்பலனின் மதிப்பை, ஒரு தனிப்பட்ட புள்ளியில் மாற்றி எழுதலாம்.

அதாவது X-ன்-ஊ.அ.சா.

$$f(x) = \epsilon^{-x},\ 0 < x < \infty$$

$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா } x \text{ மதிப்புகளுக்கும்.)}$$

என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு, எந்த $P(A)$-ன் மதிப்பும் மாறா வண்ணம் எழுதலாம்.

$$f(x) = \epsilon^{-x},\ 0 \leq x \leq \infty$$

$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா } x \text{ மதிப்புகளுக்கும்.)}$$

இந்த இரு சார்பலன்களும் $x = 0$. என்ற மதிப்பில் மட்டுமே மாறுபடுகின்றன.

மேலும் $P_r(X = 0) = 0$.

எனவே பொதுவாகக் கூறினால், தொடர்மாறி X-ன் எந்த ஊ. அ. சார்பலன்களும் பூச்சியம் ஊக அளவைக் கொண்ட கணத்தில் மட்டுமே மாறுமாயின், அந்த இரு ஊக அளவு கணச்சார் பலன்களும் சரிசமமாக இருக்கும்.

[**குறிப்பு:** தனித்த ராண்டம் மாறிகளில் இந்தப் பண்பாட்டைக் காணமுடியாது. ஏனெனில், அந்தக் குறிப்பிட்ட புள்ளியினால், ஊ.அ.சா மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் X–ன் பரவலையும் மாற்றிவிடும்.]

கடைசியாக, ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் ஊ.அ.சா. விளக்கமாக வரையறுக்கப் பட்டிருந்தால், அம் மாறிகள் தனித்த மாறிகளா அல்லது தொடர்மாறிகளா என நாம் சோதித்து அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

(i) $f(x, y) = \dfrac{9}{4^{x+y}}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots \quad y = 1, 2, 3, \ldots$

$= 0,$ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்)

இங்கு $X\ Y$, இரு தனித்தவகை ராண்டம் மாறிகளின் ஊ.அ.சா ($b.d.f.$–) $f(x,y)$ ஆகும்

(ii) $f\ x, y = 4\, xy \cdot e^{-x^2 - y^2} \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$

$= 0,$ (மற்ற எல்லா மதிம்புகளுக்கும்.)

என்றால் $f(x, y)$ என்பது X, Y என்ற இரு தொடர்வகை ராண்டம் மாறிகளின் ஊ.அ.சா. ஆகும்.

ஏனெனில் (i)-ல் x, y மாறிகள் 1,2,3,... என்ற எண்களில் மட்டுமே $f(x,y)$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) –ல் $(0, \infty)$ இடைவெளியின் எல்லா மதிப்புக்களிலும் $f(x, y)$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 20:

X ராண்டம் மாறியின் ஊ.அ.சா.

$$f(x) = \frac{1}{x_2}, \qquad 1 < x < \infty$$

$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா } \infty \text{ மதிப்புகளுக்கும்.)}$$

என்றால் $P_r(1 < X < 2)$, $P_r(4 < X < 5)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

$A_1: \{x; 1 < x < 2\}$, $A_2 = \{x; 4 < X < 5\}$ என்று இருந்தால், $P(A_1 \cup A_2)$, $P(A_1 \cap A_2)$ இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

முதலில் $f(x)$ ஓர் ஊ.அ.சா. என நிரூபிப்போம். அதாவது

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = 1 \text{ என நிரூபிக்கவேண்டும்.}$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty (1/x^2)\,.\,dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^\infty = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$

$$= (0 + 1) = 1.$$

எனவே, $f(x)$ ஓர் ஊ. அ. சார்பலன்.

$$A_1 : \{X ; 1 < X < 2\}$$

$$P(A_1) = P_r[1 < X < 2] = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}.$$

$A_2 : \{x ; 4 < X < 5\}$

$$P(A_2) = P_r[4 < X < 5] = \left[-\frac{1}{x}\right]_4^5$$

$$= \left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}.$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P_r[1 < X < 2] + P_r[4 < X < 5]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{50}.$$

$$P[A_1 \cap A_2] = P_r\{X ; x = 0]$$

$= 0$, (ஏனெனில் A_1–க்கும், A_2–க்கும் பொதுவான உறுப்பு எதுவுமே கிடையாது.)

ஆனால் $A_3 = \{x ; \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\}$ என்ற உபகணமாகுமானால்,

$$A_1 \cap A_3 = \{x ; \tfrac{3}{2} < x < 2\}$$

ஏனெனில், A_1–க்கும் A_3–க்கும் பொதுவான உறுப்புகள் ($\frac{3}{2} < x < 2$) என்ற இடைவெளியில் உள்ளன.

$$P(A_1 \cap A_3) = \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3+4}{6} = \frac{1}{6}.$$

மாதிரி 21:

$$f(x, y) = 6x^2 y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

$$= 0, \text{ [மற்ற } (x, y) \text{ மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.]}$$

என்பது X, Y இரு ராண்டம் மாறிகளின் ஊ. அ. சா. என்றால், $P_r[0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{3} < Y < 2]$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$P_r[0 < X < \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{3} < Y < 2] = \int_{\frac{1}{3}}^{2} \int_{0}^{\frac{3}{4}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \int_{0}^{\frac{3}{4}} 6x^2 y\, dx\;\; dy + \int_{1}^{2} \int_{0}^{\frac{3}{4}} 0 \,.\, dx\;\; dy$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left(\int_{0}^{\frac{3}{4}} 6x^2 y\;\; dx \right) dy + 0.$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left[\frac{6^2 x^3 y}{3} \right]_{0}^{\frac{3}{4}} dy.$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left[2 \,.\, \left(\frac{3}{4}\right)^3 y \right] dy.$$

$$= \frac{27}{32} \,.\, \int_{\frac{1}{3}}^{1} y\, dy$$

$$= \frac{27}{32} \,.\, \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$= \frac{27}{32}\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{18}\right)$$

$$= \frac{27}{32} \cdot \frac{8}{18} = \frac{3}{8}.$$

பயிற்சி II

(1) X மாறிகளின் ஊ. அ. சா. $f(x)$

$$f(x) = c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x, \; x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்,) என்றால் c-ன் மதிப்பைக் காண்கவும்.

(2) $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்) என்றால்,

X மாறியின் ஊ. அ. சார்பலன் $f(x)$ என்று நிரூபி.

மேலும் $P_r\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right)$, $P_r\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$

இவற்றின் ஊக அளவுகளைக் கண்டுபிடி.

(3) X_1, X_2 மாறிகளின் ஊ. அ. சா.

$$f(x_1, x_2) = 4\, x_1\, x_2, \quad 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்) என்றால்,

(i) $P_r\left(0 < X_1 < \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4} < X_2 < 1\right)$

(ii) $P_r(X_1 = X_2)$

(iii) $P_r(X_1 < X_2)$

(iv) $P_r(X_1 \leq X_2)$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க,

(4) கீழ்க்கண்ட பரவல்களின் 'முகடை'க் கண்டு பிடிக்கவும் :

(a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$= 0,$ (மற்ற இடங்களில்.)

(b) $f(x) = 12\, x^2 (1 - x), \quad 0 < x < 1$

$= 0,$ (மற்ற இடங்களில்.)

(c) $f(x) = \frac{1}{2}\, x^2 \cdot e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$

$= 0$ (மற்ற இடங்களில்.)

[குறிப்பு : $[f'(x) = 0]_{x=a}$, $[f''(x) > 0]_{x=a}$ என்றால்,

a என்பது X பரவலின் முகடு ஆகும்.]

(5) கீழ்க்கண்ட பரவல்களின் 'இடை நிலை'யைக் காண்கவும் :

(a) $[f(x) = \frac{4!}{x!\,(4-x)!}\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$

$x = 0, 1, 2, 3, 4.$

$= 0$ (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.)

(b) $f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1$

$= 0,$ (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.)

(c) $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$

5-6. பரவல் சார்பலன் (Distribution Function)

A என்பது ஒரு படித்தான கணமானால், X மாறியின் ஊக அளவு கணச் சார்பலன் $P(A)$ என்று நாம் அறிவோம்.

$A : \{x; -\infty < X \leq x\}$ என இருக்கட்டும்.

இத்தகைய A கணங்களுக்கு

$$P(A) = P_r(X \epsilon A)$$
$$= P_r(X \leq x).$$

இந்த ஊக அளவு x என்ற புள்ளியைச் (மதிப்பை) சார்ந்து உள்ளது. இந்தப் புள்ளிச் சார்பலனை (point function) $F(x) = P_r(X \leq x)$ எனக் குறிக்கிறோம். இந்த $F(x)$ஐப் பரவல் சார்பலன் (distribution function) என்று வழங்கலாம். இதையே X மாறியின் **திரள் பரவல் சார்பலன்** (cumulative distribution function) என்கிறோம். சுருங்கக் கூறின் இஃது ஒரு தி. ப. சா. (c. d. f.) ஆகும்.

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \sum_{w \leq x} f(w) \text{ (தனித்த வகைக்கானது)}$$

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\, dw \text{ (தொடர் வகைக்கானது)}$$

இங்கு X மாறி தனித்தவகை மாறியானால், $F(X)$-ம் தனித்த வகைப்பட்ட தி. ப. சார்பலன்.

X மாறி தொடர் வகை மாறியாயின், $F(X)$-ம் தொடர் வகைப்பட்ட திரள் பரவல் சார்பலன்.

மாதிரி 22 :

தனித்த மாறி X-ன் ஊ. அ. சா. $f(x) = \frac{x}{6}$, $x = 1, 2, 3$

$= 0$ (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்) என்றால்

$$F(x) = 0, \quad x < 1$$
$$= \frac{1}{6}, \quad 1 \leq x < 2$$
$$= \frac{3}{6}, \quad 2 \leq x < 3$$
$$= 1, \quad 3 \leq x,$$

மாதிரி 23 (i):

தொடர் வகை ராண்டம் மாறி X-ன் ஊ. அ. சா.

$$f(x) = \frac{2}{x^3}, \quad 1 < x < \infty$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.)

இங்கு $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 .\, dx = 0, \quad x < 1.$

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{2}{w^3}\, dw = 1 - \frac{1}{x^2}, \; x \geq 1$$

அதாவது $1 \leq x < \infty$.

$F(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0.$

$F(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

$F(3) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$

$F(4) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$

$F(\infty) = 1 - \frac{1}{\infty^2} = 1.$

மேலும் $(-\infty, 1)$ இடைவெளியில் $f(x) = 0$ என்பதால்,

$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

என அறிகிறோம்.

இங்கு $F(\infty) = \lim_{n \to \infty} F(x)$

$F(-\infty) = \lim_{n \to -\infty} F(x)$

எனப்படும்.

தி. ப. சா. வின் குணப்பண்புகள் (Properties of c. d. f.)

(1) $0 \leq F(X) \leq 1$; ஏனெனில், $0 \leq P_r(X \leq x) \leq 1$

(2) $F(x)$ என்பது x-ன் குறையாத (nondecreasing) சார்பலன்; ஏனெனில் $x' < x''$ என்றால்,

$$\{x;\ x \le x''\} = \{x;\ x \le x'\} \cup \{x;\ x' < x \le x''\}$$

மேலும் $P_r(X - x'') = P_r(X \le x') + P_r(x' < X < Y'')$

அதாவது $F(x'') - F(x') = P_r(x' < X < x'') = 0$
(ஏனெனில், இது ஓர் ஊக அளவு)

$$\therefore \quad F(x'') \ge F(x')$$

எனவே $x' < x''$ என்றால், $F(x') \le F(x'')$

(3) $F(\infty) = 1;\ F(-\infty) = 0$

ஏனெனில் $\{x;\ x \le -\infty\}$ என்ற கணம் ஒரு படித்தான எல்லா மதிப்புகளையும் கொண்ட கணமாகும். அத்துடன் $\{x;\ x \le -\infty\}$ என்பது ஒரு பூச்சிய கணமாகும். (2)-ன் நிருபணத்தின் மூலமாக, $a < b$ ஆக இருப்பின்,

$P_r(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ என்று புலனாகிறது.

$P_r(X = b)$ என்ற ஊக அளவை $F(x)$ஐப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். h என்ற ஒரு நேர் எண்ணை எடுத்துக்கொண்டால்

$$\lim_{h \to 0} P_r[b - h < X \le b] = \lim_{h \to 0} [F(b) - F(b - h)]$$

தர்க்க ரீதியில் $\lim_{h \to 0} P_r(b - h < X \le b) = P_r(X = b)$

என்று அமைதல் வேண்டும். ஏனெனில் h பூச்சியத்தை அணுகும் போது, $\{x;\ b - h < X \le b\}$ என்ற x கணத்தின் எல்லை (limit), $x = b$ என்ற ஒரே புள்ளியைக் (மதிப்பை) கொண்டுள்ளது.

ஆகவே, $P_r(X = b) = F(b) - F(b-)$

இங்கு $F(b-)$ என்பது $X = b$ என்ற புள்ளியில் $F(x)$-ன் இடப்பக்க எல்லை (left-hand limit) ஆகும்.

எனவே தி. ப. சா. $F(x)$ ஆனது $x = b$ என்ற புள்ளியிலே தொடர்ச்சியாக இருந்தால் $F(b) = F(b-)$.

ஆகவே $P_r(X = b) = 0$

மாதிரி 23 (ii):

$f(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < X < 1$

$= 0,$ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்) $Y = X^2$ என்றால், இப்போது Y-ன் சார்பலனைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$P_r(Y \le y) = P_r(X^2 \le y) = P_r[-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}]$$

Y-ன் தி. ப. சா. $G(y) = P_r(Y \le y)$ என்றால்

$$G(y) = 0, \quad y < 0$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \tfrac{1}{2}\, dx = \sqrt{y}, \quad 0 \le y < 1$$

$$= 1, \quad 1 \le y.$$

Y ராண்டம் மாறி, தொடர் வகையைச் சேர்ந்ததால், Y-ன் ஊ. அ. சா. $g(y) = G'(y)$ [$g(y)$-ன் தொடர்புள்ள எல்லாப்புள்ளிகளிலும்].

எனவே $g(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1$

$= 0,$ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்)

இரு படித்தான கணம் A என்றால், X, Y இரு ராண்டம் மாறிகளின் ஊக அளவு கணச் சார்பலன் (ஊ. க. சா.) $P(A)$ எனக் கொள்வோம். A என்பது வரம்பற்ற கணமானால் (unbounded set)

$$A : \{(u, v);\ u \le x,\ v \le y\}$$

$$P(A) = P_r[(X, Y) \in A] = P_r[X \le x, Y \le y]$$

(x, y) புள்ளியின் சார்பலனை X, Y மாறிகளின் தி. ப. சா. என வழங்குகிறோம்.

அதாவது $F(x, y) = P_r[X \leq x, Y \leq y]$

எனவே X, Y இரண்டும் தொடர்வகை ராண்டம் மாறிகளானால், அவற்றின் ஊ. அ. சா. $f(x, y)$,

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v) \, du \, dv.$$

மேலும் $f(x, y)$ சார்பலனின் தொடர்ச்சிப் புள்ளிகளில்,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = f(x, y) \text{ என அறிகிறோம்}$$

இதே போல $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ என்ற n ராண்டம் மாறிகளின் தி.ப.சா.

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = P_r[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \ldots\ldots X_n \leq x_n] \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 24.

$$f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)}, \; 0 < x, y, z < \infty$$
$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்).}$$

என்பது X, Y, Z-ன் ஊ. அ. சா. என்றால்,

X, Y, Z-ன் தி. ப. சா.

$$F(x, y, z) = P_r[X \leq x, Y \leq y, Z \leq z]$$

$$= \int_0^z \int_0^y \int_0^x f(u, v, w) \, du \cdot dv \cdot dw.$$

$$= \int_0^z \int_0^y \int_0^x e^{-(u+v+w)} \, du \, dv \, dw$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 - e^{-z}),$$

$$0 < x, y, z < \infty.$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்.)

இங்கு $\dfrac{\partial^3 F(x, y, z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = f(x, y, z)$ ஆகும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பயிற்சி III

(1) கீழ்க் கண்டவற்றில் X மாறியின் நி. ப. சா.வைக் காண்கவும் :

(a) $f(x) = 1, \quad x = 0.$

$= 0$, (மற்ற எல்லா x மதிப்புக்களிலும்.)

(b) $f(x) = \dfrac{1}{3}, \quad x = -1, 0, 1.$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

(c) $f(x) = 3(1 - x)^2, \quad 0 < x < 1$

$= 1$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

(d) $f(x) = \dfrac{1}{3}, \quad 0 < x < 1$ அல்லது $2 < x < 4.$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

(2) பயிற்சி 1-ல் மேற்கூறிய கேள்விகளுக்கு, ஒவ்வொரு பரவலின் இடை நிலையைக் காண்க.

(3) X-ன் பரவல் சார்பலன்

$$F(x) = 0, \quad x < 0$$

$$= \frac{x+1}{2}, \quad 0 \leq x < 1$$

$$= 1, \quad 1 \leq x.$$

என்றால், இச்சார்பலனுக்கான வரைப்படம் வரைக.

மேலும், (i) $P_r(-3 < X < \frac{1}{2})$

(ii) $P_r(X = 0)$ இவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

5-7. கணக்கியல் எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு (Mathematical Expectation)

ராண்டம் மாறிகளின் பரவல்களைச் சார்ந்த தீர்வாய்வுகளில் மிகவும் பயன்படுவதான கருத்துப் படிவங்களில் (concepts) கணக்கியல் எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவும் ஒன்றாகும்.

X என்ற ராண்டம் மாறியின் ஊ. அ சா. $f(x)$ எனில், $u(X)$ என்பது Xன் ஒரு சார்பலன் என்றால், $u(X)$-ன் எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவைக் கீழ்க்கண்டாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$E[u(x)] = \int_{\infty}^{-\infty} u(x) \cdot f(x)\, dx \quad \text{(தொடர் வகைக்கானது)}$$

அல்லது

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) \cdot f(x) \quad \text{(தனித்த வகைக்கானது)}.$$

விளக்கம் : X-ன் ஊ. அ. சா. $f(x) = \frac{x}{3}$, $x = 1, 2$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புக்களில் எல்லாம்)

என்றும் $u(x) = 15 - 6x$ என்றும் கொள்வோம்.

ஆகவே, $u(X)$-ன் எதிர்பார்க்கத் தகும் அளவு $E[u(X)]$-ன் மதிப்பு

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) \cdot f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{2} (15 - 6x) \frac{x}{3}.$$

$$= (15 - 6)\frac{1}{3} + (15 - 12)\frac{2}{3}$$

$$= 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = \underline{5}$$

மூன்று ஒரே மாதிரியான வட்டத் தகடுகளை 1, 2, 2 என்று இலக்கமிட்டு ஒரு பெட்டிக்குள் போட்டுக் கலக்கவும். ஒரு விளையாட்டு வீரரைக் கண்ணைக் கட்டியவாறு பெட்டிக்குள்ளிருந்து ஒரு தகடை எடுக்கச் சொல்வோம். 1 இலக்கமிட்ட தகடை எடுத்தால், 9 ரூபாய்கள் பெறுவார். 2 இலக்கமிட்ட தகடைஎடுத்தால், 3 ரூபாய்கள் பெறுவார் எனக்கொள்வோம். ஆகவே, அவருக்கு 9 ரூபாய் பெற "$\frac{1}{3}$ உரிமையும்" (claim), 3 ரூபாய் பெற $\frac{2}{3}$ உரிமை'யும் உள்ளது.

அதனால், அவரது மொத்த உரிமை அல்லது எதிர்பார்க்கும் தொகை $= 9 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 3 + 2 =$ <u>5 ரூபாய்கள்</u>.

பொதுப்படையாகக் கூறினால், $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ என்ற n மாறிகளின் ஊ. அ. சா. $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ என்றால், $u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-ன் எதிர்பார்க்கத்தகும் அளவு (எ. அ.)

$$E[u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\ldots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots d_n.$$

(தொடர்வகைக்கானது)

அதே போல

$$E[u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)] = \sum_{x_n}\sum_{x_{n-1}}\ldots\sum_{x_1} u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \cdot \times$$

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n).$$

(தனித்த வகைக்கானது)

5·16. எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவின் (தன்மைகள்) பண்புகள் :

(i) k என்பது ஒழி நிலை எண் என்றால்,

$$E(k) = k.$$

எப்படி என்றால்; $u(X) = k$ எனக் கொள்க.

பிறகு $E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x)\, dx$

அதாவது $E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot f(x)\, dx$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= k \cdot 1 \quad (\because f(x) \text{ ஓர் ஊ. அ. சா.})$$

$$= k.$$

(ii) k ஒரு நிலை எண்ணென்றும், v என்பது x-ன் ஒரு சார்பலன் என்றும் கொள்வோம்.

பிறகு $E(kv) = k \cdot E(v)$.

தீர்வு : $u = kv$ என வைத்தால்,

$$E(u) = E(kv) = \int_{-\infty}^{\infty} k\, v(x)\, f(x)\, dx$$

$$= k \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, f(x)\, dx$$

$$= k \cdot E(v).$$

(iii) k_1, k_2 நிலை எண்களாகவும், v_1, v_2 x-ன் சார்பலன்களாகவும் இருக்கட்டும்.

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2.$$

$$E(u) = E(k_1 v_1 + k_2 v_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (k_1 + v_1 + k_1 v_2)\; f(x)\; dx$$

$$= k_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_1 \cdot f(x)\, dx$$

$$+ k_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_2\, f(x)\, dx$$

$$= k_1 \cdot E(v_1) + k_2\, E(v_2).$$

எனவே $E[k_1 v_1 + k_2 v_2] = k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2)$.

இதையே நீட்டித்தால்

$$E(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_p v_p)$$

$$= k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) + \dots + k_p E(v_p)$$

அல்லது $E[\sum_{i=1}^{p} k_i v_i] = \sum_{i=1}^{p} k_i [E(v_i)]$ ஆகும்.

மாதிரி 25:

X மாறிக்கான $f(x) = \dfrac{x+2}{18}, \; -2 < x < 4$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்) என்றால்,

$E(X)$, $E(X+2)^2$, $E[6X - 2(X+2)^2]$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(a) $E(X) = \int_{-2}^{4} x \cdot \frac{x+2}{18}\, dx$

$$= \frac{1}{18}\int_{-2}^{4} (x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{18}\left[\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2 . x^2}{2} \right) \right]_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{54}\left(x^3 + 3x^2 \right)_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{54}\left[(64 + 48) - (8 + 12) \right]$$

$$= \frac{112 - 4}{54} = \frac{108}{54} = 2$$

(b) $(E X + 2)^3 = \int_{-2}^{4} \frac{(x+2)^3 (x+2)}{18}\, dx$

$$= \frac{1}{18}\int_{-2}^{4} (x+2)^4\, dx$$

$x + 2 = y$ எனக் கொண்டால்

$dx = dy$

$x = -2$ என்றால், $y = 0$

$x = 4$ என்றால், $y = 6$

எனவே $E(x+2)^3 = \frac{1}{18}\int_{0}^{6} y^4\, dy$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{90}\,[6^5 - 0]$$

$$= \frac{1}{90}\,[36 \times 216]$$

$$= \frac{432}{5} = \underline{86.4}$$

(c) $E[6X - 2(X+2)^3]$

$= 6\,E(X) - 2\,E(X+2)^3$

$= 6 \times 2 - 2 \times 86{\cdot}4$

$= 12 - 172.8 = -\underline{160.8}$

மாதிரி 26 :

$f(x) = \frac{1}{5},\ x = 1, 2, 3, 4, 5$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)

என்றால், $E(X)$, $E(X^2)$ இவற்றைக் கண்டு பிடித்து அந்த மதிப்புகள் மூலம் $E(X+2)^2$ஐக் கணிக்கவும்.

இங்கு X ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி.

(i) $E(X) = \sum_{x=1}^{5} x \cdot \frac{1}{5}$.

$= 1.\frac{1}{5} + 2.\frac{1}{5} + 3.\frac{1}{5} + 4.\frac{1}{5} + 5\,\frac{1}{5}$

$= \frac{15}{3} = 3$

(ii) $E(X)^2 = \sum_{i=1}^{5} x^2\,\frac{1}{5}$

$$= \frac{1}{5}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

$$= \frac{1}{5}(55) = \underline{11}.$$

எனவே,

$$E(X+2)^2 = E(X^2 + 4X + 4)$$

$$= E(X^2) + 4E(X) + 4$$

$$= 11 + 4(3) + 4$$

$$= 11 + 12 + 4 = 27.$$

மாதிரி 27 :

X, Y மாறிகளின் ஊ. அ. சா.

$$f(x, y) = \frac{1}{3},\ (x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 1)$$

$$= 0,\ \text{(மற்ற மதிப்புகளில்) என்றால்,}$$

$E(X - \frac{1}{3})(Y - \frac{2}{3})$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

$$E(X - \tfrac{1}{3})(Y - 2/3) = \sum_{(x,y)} (x - \tfrac{1}{3})(y - \tfrac{2}{3})\tfrac{1}{3}$$

$$= (0 - \tfrac{1}{3})(0 - \tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})$$

$$+ (0 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})$$

$$+ (1 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})$$

$$= (-\tfrac{1}{3})(-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3})$$

$$+ (\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3})$$

$$= \frac{1}{27} - \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

மாதிரி 28 :

(X, Y) மாறிகளின் ஊ. அ. சா.

$$f(x, y) = 2,\quad 0 < x < y,\quad 0 < y < 1$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்)

என்றால், $u(X, Y) = X$

$v(X, Y) = Y$

$w(X, Y) = XY$ எனக் கொண்டால்,

$E[u(X, Y)] \quad E[v(X, Y)] \neq E[w(X, Y)]$ என்று நிரூபி.

இங்கு $E[u(X, Y)] = E(X) = \int_0^1 \int_0^y x \cdot 2 \cdot dx\, dy$

$$= \int_0^1 \left[2 \frac{x^2}{2}\right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 (y^2 - 0)\, dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$E[v(X, Y)] = E(Y) = \int_0^1 \int_0^y y \cdot 2 \cdot dx\, dy$

$$= \int_0^1 [2xy]_0^y\, dy$$

$$= \int_0^1 (2y^2 - 0)\, dy$$

$$= \left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E[w(X, Y)] = E(X, Y) = \int_0^1 \int_0^y x\,y \cdot 2 \,.\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y \cdot \frac{x^2}{2}\right)_0^y dy$$

$$= \int_0^1 (y^3 - 0)\, dy$$

$$= \frac{y^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

எனவே $E[u(X, Y)]\, E[v(X, Y)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

ஆனால், $E[w(X, Y)] = \frac{1}{4}$

எனவே,

$$E[u(X, Y)] \quad E[v(X, Y)] \neq E[w(X, Y)]$$

என்று புலனாகிறது.

பயிற்சிகள் VI.

(1) X மாறியின் ஊ. அ. சா.

$f(x) = 2(1 - x), \quad 0 < x < 1$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்) என்றால்,

$E(X)$, $E(X^2)$, $E(6X + 5X^2)$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(2) X தனித்த மாறியின் ஊ. அ. சா.

$$f(x) = \frac{x}{6},\ x = 1, 2, 3$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு)

என்றால், $E(X^2)$, $E(X^3 + 4X^2 + 3X + 5)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) X மாறியின் வா. அ. சா. $f(x) = + ve, x = -1, 0, 1,$
$= 0,$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு)

என்றால்

(i) $f(0) = \frac{1}{2}$ என்றால், $E(X^{2})$ கணிக்கவும்.

(ii) $f(0) = \frac{1}{2}; E(X) = \frac{1}{6}$ என்றால், $f(-1), f(+1)$ இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

சில சிறப்பான எதிர்பார்க்கத் தகும் அளவுகள் (Some Special Expectations)

தனித்த ராண்டம் மாறி X–ன் வா. அ. சா $f(x)$ எனக் கொள்வோம். X-ன் ஒரு சார்பலன் $u(X) = x$ என்றால்

$$E(X) = \sum_{x} x . f(x)$$

$$= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)$$

$= X$–ன் சாசரி மதிப்பு ஆகும்.

இதுவே X பரவலின் சராசரி மதிப்பு என்றும் வழங்கப் படும். ஒரு ராண்டம் மாறி X–ன் சராசரி மதிப்பு μ என்றால், $E(X) = \mu$ ஆகும்.

(இங்கு X தனித்த மாறியாகவோ அல்லது தொடர்மாறி யாகவோ இருக்கலாம்.)

மற்றொரு சிறப்பான எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு

$$u(X) = (X-\mu)^2$$

என்று எடுத்துக் கொண்டபோது கிடைப்பதாகும்.

$$E(X-\mu)^2 = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x)$$

$$= (x_1-\mu)^2 f(x_1) + (x_2-\mu)^2 f(x_2) + \ldots + (x_n-\mu)^2 f(x_n)$$

x_i–க்கும் μ–க்கும் உள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களையும். $f(x_i)$ ஐயும் பெருக்கியபின் அவற்றின் கூட்டுத்தொகையானது X மாறியின் 'மாறுபாடு' (Variance) எனப்பெறும். இதை σ^2 என வழங்குகிறோம்.

(5.18.1)

X தொடர்மாறிக்கு, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x.\,f(x)\,dx = \mu$ எனவும்

$$E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \text{ எனவும்}$$

வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, $E(x-\mu)^2 = \sigma^2$

$\sigma^2 = E(X-\mu)^2$

$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$

$= E(X^2) - 2\mu\, E(X) + \mu^2$

$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$

$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\therefore\ \underline{E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$

மூன்றாவது சிறப்பான எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு X மாறியின் **திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்** (தி.உ.சா) (Moment Generating Function MGF) ஆகும். h என்பது ஒரு நேர்எண் என்றால் t என்ற பண்பளவை $-h < t < h$ என்றவாறு இருந்தால்,

x-ன் தி.உ.சா. $= M_X(t) = E(e^{tx})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\,dx \text{ (தொடர்வகைக்கானது)}$$

அல்லது

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

(தனித்த வகைக்கானது).

$t = 0$ ஆனால், $M(0) = E(e^0) = E(1) = 1$.
அதாவது $M_X(0) = 1$.

ஒவ்வொரு பரவலும் ஒரு தி.உ.சா.வைக்கொண்டிருக்கும் எனக் கூறமுடியாது.

ஒரு தி.உ.சா., அது அமையப் பெறின், மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். ஒரு ராண்டம் மாறியின் பரவலுக்கு ஒரு தி.உ.சா. தான் உண்டு. அதேபோல ஒரு தி.உ.சா.வைக் கொண்டு அந்த மாறியின் பரவலைத் திட்டவட்டமாக நிர்ணயிக்க முடியும். அதேபோல இரண்டு ராண்டம் மாறிகள் ஒரே மாதிரியான தி.உ.சாவைக் கொண்டிருப்பின், அவை ஒரே பரவலைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும்.

ஒரு மாறியின் தி.உ.சா. கொடுக்கப்பட்டால், அம் மாறியின் பரவலைப் பூரணமாக நாம் நிர்ணயிக்கமுடியும். எடுத்துக் காட்டாக,

மாதிரி 29 :

$M_X(t) = \frac{1}{6}\, e^t + \frac{2}{6}\, e^{2t} + \frac{3}{6}\, e^{3t}$ எனக் கொள்வோம்.

இந்த $M_X(t)$ யானது தனித்த X மாறியின் தி.உ.சா. ஆகும். X–ன் ஊ.அ.சா. $f(x)$ என்றும், $a, b, c,$ என்பன X கணத்தின் தனித்த புள்ளிகளாகவும் கொள்வோம். (இங்கு $f(x) > 0$ என்று நாம் அறிவோம்).

$$M_X(t) = \sum e^{tx} f(x)$$

அல்லது

$$\frac{1}{6}\, e^t + \frac{2}{6}\, e^{2t} + \frac{3}{6}\, e^{3t} = f(a).\, e^{at} + f(b)\, e^{bt} + f(c)\, e^{ct}$$

இச் சமன்பாட்டினால், இடப்பக்க ஒவ்வோர் உறுப்பும் வலப்பக்க ஒவ்வொரு சரியான உறுப்புக்குச் சமமாகிறது.

$$\therefore\ a = 1,\ f(a) = f(1) = \frac{1}{6}$$

$$b = 2,\ f(b) = f(2) = \frac{2}{6}$$

$$c = 3, f(c) = f(3) = \frac{3}{6}$$

எனவே $f(x) = \frac{x}{6}$, $x = 1,2,3,$

$= 0$,(மற்ற மதிப்புகளுக்கு) என்று நிர்ணயிக்கப் படுகிறது.

மாதிரி 30 :

தொடர் ராண்டம் மாறி X-ன் தி.உ.சா. $M_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2}, < t < 1$ என்றால், X-ன் பரவலைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ... ... (1)

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx, \qquad t < 1 .$$

இதிலிருந்து X-ன் ஊ.அ.சா. $f(x)$ஐக் கண்டுபிடிப்பது கடினமே. இருப்பினும், x-ன் ஊ.அ.சா.

$$f(x) = x.\, e^{-x}, 0 < x < \infty$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்) ... (2)

என்றால் இதன் தி. உ. சா. $M_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$, $t < 1$.

ஆகவே, (1)ஐ தி. உ. சா.வாகக்கொண்ட ஊ. அ. சா $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ஆகும்.

மற்றும், ஒரு தி.உ. சா விலிருந்து மையமற்ற திருப்புத்திறன் களைக் கணிக்க முடியும்.

$-h < t < h$ என்ற இடைவெளியில், $M_X(t)$ வரையறுக்கப் பட்டிருந்தால், எல்லா வரிசைகளுடைய வகைக்கெழுக்களையும் (derivatives of all order) $t = 0$ என்ற புள்ளியில் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{d\, M(t)}{dt} = M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{(தொடர் வகைக் கானது)}$$

அல்லது $M'(t) = \sum_x x\, e^{tx}.\, f(x)\, dx$ (தனித்த வகைக் கானது)

$t = o$ என்றால், $M'(0) = E(X) = \mu$ ஆகும்.

$M(t)$-ன் இரண்டாம் வகைக்கெழு

$$M''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{tx} f(x) \text{ அல்லது } \sum_x x^2 e^{tx} f(x).$$

ஆகவே $M''(o) = E(X^2)$

இதனால் $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= M''(o) - [M'(o)]^2$$

எடுத்துக்காட்டாக $M(t) = (1-t)^{-2}$, $t < 1$ என்றால்

$$M'(t) = 2(1-t)^{-3}$$

$$M''(t) = 6(1-t)^{-4}.$$

ஆகவே $M'(o) = \mu = 2.$

$$M''(o) = E(X^2) = 6.$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= M''(o) - [M'(o)]^2$$

$$= 6 - 4 = 2.$$

இங்கு சராசரியும், மாறுபாடும் ஒரே மதிப்புடையனவாய் உள்ளன என்பதை அறியலாம்.

பொதுவாக, $M_X(t)$-ன் sஆவது வகைக்கெழு $M^{(s)}(t)$ என்றால்,

$M^{(s)}(o) = E(X^s)$ ஆகும்.

$$E(X^s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\, dx. \quad \text{(தொடர் வகைக்கானது)}$$

அல்லது

$$E(X^s) = \sum x^s f(x). \quad \text{(தனித்த வகைக்கானது)}$$

இங்கு $E(X^s) = s$ ஆவது **மையமற்றத் திருப்புத்திறன்** ஆகும். இப்படி $M_X(t)$யானது, $E(X^s)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ என்ற திருப்புத்திறன்களை உருவாக்குவதால், இதைத் திருப்புத்திறன் களை உருவாக்கும் சார்பலன் (தி. உ. சா.) என்று வழங்குகிறோம்.

X மாறியின் sஆவது வரிசைத் திருப்புத்திறன்களைச் சில சமயங்களில் X-ன் பரவலின் s ஆவது வரிசைத் திருப்புத் திறன்கள் என்றும் வழங்குகின்றோம்.

மாதிரி 31 :

X மாறியின் ஊ. அ. சா. $f(x) = 6x(1-x), \quad 0<x<1$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு)

என்றால், X-ன் சராசரி, மாறுபாடுகளைக் காணவும்.

X-ன் சராசரி : $E(X) = \mu = \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx.$

$$= \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\, dx$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$\therefore E(X) = 6\left[\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) - 0\right]$$

$$= 6\,\tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{2} = \underline{0.50}$$

X-ன் மாறுபாடு $= \sigma^2 = E(X-\mu)^2$

$$= E(X^2) - \mu^2.$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, 6x(1-x)\, dx$$

$$= 6. \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx.$$

$$= 6. \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= 6. \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{6}{20}.$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20} = \underline{0.05}.$$

மாதிரி 32 :

X–மாறியின் நி. அ. சா. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 < x < \infty$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்.)

இதற்கான சராசரி அமையப்பெறவில்லை (does not exist).

ஏனெனில்,

$$x\text{–ன் சராசரி} = \int_1^\infty x. \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx.$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\log_e b - \log_e 1 \right)$$

எனவே, இந்த மதிப்பு உள்ளதாக இல்லை (does not exist).

மாதிரி 33 :

X மாறியின் நி. அ. சா.

$$f(x) = (\tfrac{1}{2})^x, \qquad x = 1, 2, 3 \ldots$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்) என்றால், அதன் தி. உ. சா. சராசரி, மாறுபாடு இவற்றைக் காணவும்.

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} (\tfrac{1}{2})^x$$

$$= \tfrac{1}{2} e^t + (\tfrac{1}{2})^2 e^{2t} + (\tfrac{1}{2})^3 e^{3t} + \ldots + (\tfrac{1}{2})^r e^{rt} + \ldots$$

இங்கு $\frac{e^t}{2} < 1$ ஆகும்.

$$M_X(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} \cdot \left(\frac{e^t}{2}\right) + \left(\frac{e^t}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^t}{2}\right)^2 + \ldots \ldots \infty$$

$$= \frac{\frac{e^t}{2}}{\left(1 - \frac{e^t}{2}\right)} = \frac{e^t}{2 - e^t}$$

X-ன் சராசரி $E(X) = [M'(t)]_{t=0}$

$$= \left[\frac{(2 - e^t)\, e^t + e^t \cdot e^t}{(2 - e^t)^2}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{(2 - 1) \cdot 1 + 1}{(2 - 1)^2} = \frac{1 + 1}{1} = 2.$$

X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$= E(X^2) - 4.$$

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0}$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{2 e^t}{(2 - e^t)^2}\right] \right\}_{t=0}$$

$$= \left[\frac{(2 - e^t)^2 \cdot 2 e^t - 2 e^t \cdot 2 (2 - e^t) \cdot (-e^t)}{(2 - e^t)^4}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{(2 - 1)^2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 - 1)(-1)}{(2 - 1)^4}$$

$$= \frac{2 + 4}{1} = 6.$$

$$E(X - \mu^2)^2 = \sigma^2 = 6 - 4 = 2.$$

ஆகவே, X-ன் சராசரியும், மாறுபாடும் ஒரே மதிப்புடையன.

இன்னும் சில உயர் படிப்பு முறைகளில் நாம் தி. உ. சா. வைக் கணக்கிடவேண்டியதில்லை. ஏனெனில், பல பரவல்களுக்கு தி. உ. சா.வே கிடையாது. இருப்பினும் இதற்குப் பதிலாக X-பரவலின் சிறப்புச் சார்பலனை (சி. சா.) (Characteristic function C.F.) பயன்படுத்தலாம்.

i என்பது ஒரு மெய்யிலா எண் என்றால்,

$E(e^{itx}) = \phi(t)$ ஆகும்,

இங்கு $\phi(t)$ என்பது சி. சா. (C. F) என வழங்கப்படுகிறது.

ஒவ்வொரு பரவலுக்கும் ஒரே ஒரு சி. சா. உள்ளது. சி. சா. வுக்கும் தி. உ. சா.வுக்கும் உள்ள தொடர்பு யாதெனில்,

$\phi(t) =$ சி. சா.

$M(t) =$ தி. உ. சா.

இங்கு $\phi(t) = M(it)$ ஆகும்.

பயிற்சி V.

(1) X மாறியின் ஊ. அ. சா.

$$f(x) = \frac{3!}{x!\,(3-x)!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்) என்றால், X-ன் சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் காண்க.

(2) X-ன் மாறுபாடு அமையப்பெறின், கீழ்க்கண்ட சமமின்மையை நிரூபி :

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2$$

(3) X-மாறியின் சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ, $(-h < t < h)$-ல் தி. உ. சா. $M_X(t)$ என்றால், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி :

(a) $E\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.$

(b) $E\left[\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = 1$

(c) $E\left[\ exp\left\{ t\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right] = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$(-h\sigma < t < h\sigma)$-ல்.

(4) X-ன் ஊ. அ. சா. $f(x) = \frac{1}{3}, \quad -1 < X < 2$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)

என்றால், X-ன் தி. உ. சா.

$M_X(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3t}, \ t \neq 0$

$= 1, \ t = 0$ என்று நிரூபி.

(5) $X_1 X_2$ இரு ராண்டம் மாறிகளின் ஊ. அ. சா

$f(x_1, x_2) = 2x_1 \quad 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்) என்றால்,

(i) $E(X_1 + X_2)$

(ii) $E\{[(X_1 + X_2) - E(X_1 + X_2)]^2\}$ இவற்றைக் கணக்கிடவும்.

(6) X-ன் தி. உ. சா. $M(t)$ எனவும்

$\psi(t) = \log_e M(t)$ எனவும் இருந்தால்

பின் (i) $\psi'(0) = \mu$

(ii) $\psi''(0) = \sigma^2$ என நிரூபி.

(7) X மாறியின் தி. உ. சா. $M(t) = (1-t)^{-3}$ என்றால், X பரவலின் திருப்புத் திறன்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

5–9. செபிச்சேவின் சமமின்மைக் கோட்பாடு (Tchebychev's Inequality)

சில ஊக அளவுகளுக்கு மேல் எல்லை, கீழ் எல்லைகளைக் கண்டு பிடிக்க நாம் ஒரு தேற்றத்தை இங்கு நிரூபிப்போம். இந்த எல்லைகள் சரியாக ஊக அளவுகளுக்கு நெருங்கி இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

தேற்றம் 1 :

X ராண்டம் மாறியின் எதிர்மறையிலா சார்பலன் (non – negative function) u (X) எனக் கொள்வோம்.

$E[u(X)]$-ன் மதிப்பு அமையப் பெறின், ஒவ்வொரு நேர் நிலை எண் (positive constant) C-க்கும்,

$$P_r[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)}{C}$$

நிருபணம் : இங்கு X தொடர் ராண்டம் மாறியாக இருத்தல் அவசியம். தனித்த வகைக்கு இந்நிருபணம் பயன்படாது. $\int$-க்குப் பதிலாக Σ பயுன்படுத்தினுல் இந்த நிருபணம் பயன்படும்.

X-ன் வ. அ. சா. $f(x)$ எனவும், A கணம்

$A: \{x; u(x) \geq C\}$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\text{பிறகு } [u(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx$$

$$= \int_{A} u(x) f(x)\, dx + \int_{A} u(x) f(x)\, dx$$

வலப் பக்கமுள்ள ஒவ்வொரு தொகையும் எதிர்மறையிலா மதிப்பைக் கொண்டது. ஆகவே இடப் பக்கமுள்ள,

$E[u(x)] \geq$ ஏதாவது ஒரு தொகையின் மதிப்பு.

குறிப்பாக,

$$E[u(X)] \geq \int_{A} u(x) f(x)\, dx$$

இருப்பினும் $x \epsilon A$ என்றால், $u(x) \geq C$ ஆகும்.

ஆகவே $u(x)$-க்குப் பதிலாக cஐப் போடுவதால் $\int_A u(x)\, f(x)\, dx$ மதிப்பு அதிகமாகாது (ஏறுது).

எனவே, $E[u(x)] \geq c \int_A f(x)\, dx$

மேலும், $\int_A f(x)\, dx = P_r(x \in A)$

$= P_r[u(x) \geq c]$ ஆக இருப்பதால்,

$E[u(x)] \geq c\, P_r[u(x) \geq c]$ என்று புலனுகிறது.

ஆகவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

இத் தேற்றமானது பொதுப்படையான ஒரு 'சமமின்மை' யாகும். எனினும், இந்தச் சமமின்மையைக் கீழே தனியாக நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் 2:

ஒரு ராண்டம் மாறி X, நிலையான மாறுபாடு σ^2ஐக் கொண்ட ஓர் ஊக அளவுப் பரவலைக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

X-ன் சராசரி μ என்ருல், ஒவ்வொரு $k > 0$-க்கும்,

$P_r[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= (x-\mu)^2 \\ c &= k^2\sigma^2 \end{aligned}\right\}$$ எனக் கொள்வோம்.

முன் தேற்றத்தின்படி,

$$P[u(x) \geq c] \leq \frac{1}{c} E[u(X)]$$

எனவே $P[(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2] \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2\sigma^2}$

ஆனால் $E(X-\mu)=\sigma^2$

எனவே $P_r[|X-\mu| \geq k\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$

$\therefore \quad P_r[|X-\mu| \leq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது

மாதிரி 34:

X-ன் ஊ. அ. சா.

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad -\sqrt{3} < X < \sqrt{3}$

$= 0$, (மற்ற x மதிப்புகளில்)

இங்கு $\mu = E(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \, dx$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}[3-3] = 0$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 \, dx - 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3})^3 - (\sqrt{3})^3 \right]$$

$$= \frac{2(\sqrt{3})^3}{6\sqrt{3}} = 1$$

$\therefore \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1.$

இங்கு $k = \frac{3}{2}$ என்றால், சரியான ஊக அளவு

$$P_r[\,|X - \mu| \geq k\sigma\,] = P_r[\,|X| \geq \tfrac{3}{2}]$$

$$= 1 - \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\, dx$$

$$\therefore \quad P[\,|X - \mu| \geq \sigma] = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} [x]_{-3/2}^{3/2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{3}{2} - (3/2)}{2\sqrt{3}}$$

$$= 1 - \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

செபிச்சேவின் சமமின்மை மூலமாக, முன்னே கண்ட ஊக அளவு $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{9}$ என்ற உச்ச எல்லையைக்கொண்டுள்ளது.

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.134$ என்பதால், சரியான ஊக அளவு $\frac{4}{9}$ஐ விடக் கணிசமான அளவு குறைவாக இருக்கிறது.

$k = 2$ என்றால்,

$$P_r[\,|K - \mu| \geq 2\sigma] = P_r[\,|X| \geq 2]$$

$$= 1 - \int_{-2}^{2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= 1 - \left[\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx\right]$$

$$= 1 - (0 + 1 + 0)$$

[ஏனெனில் $(-2, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$ இடைவெளிகளில் $f(x) = 0$ அத்துடன் $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ இடைவெளியில் $f(x)$ ஓர் ஊ. அ. சா. ஆகும்.]

$$= 0$$

இந்த ஊக அளவும் உச்ச எல்லை $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$ஐ விடச் சிறியது.

அதாவது செபிச்சேவின் சமமின்மைப்படி,

$$P[\,|X - \mu| \geq 2\sigma] \leq \frac{1}{2^2}$$

$$0 \leq \frac{1}{4}$$

மாதிரி 35 :

தனித்த வகை சாண்டும் மாறி X ஆனது $-1, 0, 1$ என்ற புள்ளிகளில் $\frac{1}{8}, \frac{6}{8}, \frac{1}{8}$ என்ற ஊக அளவுகளை முறையே கொண்டிருந்தால் $\mu = 0$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ எனச் சரிபார்க்கவும்.

$$\mu = E(X) = (-1)\cdot\frac{1}{8} + (0)\cdot\frac{6}{8} + (1)\cdot\frac{1}{8}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

$$E(x^3) = (-(1)^3 \cdot \frac{1}{8}) + (0)^3 \cdot \frac{5}{8} + (1)^3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

மேலும் $k = 2$ என்றால், $k^2 = 4$.

$$P_r[|X - \mu| \geq k\sigma] = P_r[|X| \geq 1]$$

$$= P_r(X \geq 1) + P_r(-X > 1)$$

$$= P_r(X \geq 1) + P_r(X \leq -1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{k^2}.$$

இங்கு $P_r[|X - \mu| \geq k\sigma]$ என்ற ஊக அளவான உச்ச எல்லை $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$ ஐ அடைந்து விடுகிறது.

பயிற்சி VI

(1) X என்ற ராண்டம் மாறியின் சராசரி μ ஆகவும், $E[(X - \mu)^{2k}]$ என்பது அமையப் பெறவும் (exists) இருந்தால், அத்துடன் $c > 0$ என்றால்,

$$P_r[|X - \mu| \geq c] \leq E[X - \mu]^{2k} c^{2k}.$$

(2) $E(X) = 3$, $E(X^2) = 13$, என்றதான X ராண்டம் மாறியில் செபிச்சேவ் சமமின்மையைப் பயன்படுத்தி $P_r(-2 < X < 8)$ ஊக அளவுக்கான குறைந்த எல்லை (lower bound)யை நிர்ணயிக்கவும்.

(3) X மாறியின் தி. உ. சா. $-h < t < h$ என்ற இடைவெளியில், $M_X(t)$ என்றால்,

(i) $P_r(X \geq a) \leq e^{-at} \cdot M_X(t)$, $0 < t < h$

(ii) $P_r(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, $-h < t < 0$

என்றும் நிரூபி.

(4) X-ன் தி.உ.சா. $M(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$, $t \neq 0$

$M(0) = 1$ என்றால்,

கேள்வி (3)-ன் விளைவை (result)ப் பயன்படுத்தி

$P_r(X \geq 1) = 0$ என்றும்

$P_r(X \leqslant -1) = 0$ என்றும் காண்க.

(இங்கு h (எல்லையற்ற) முடிவிலியான (infinite) ஓர் எண் ஆகும்.

6. நிபந்தனை ஊக அளவும் புள்ளியியல் தற்சார்பும்

(Conditional Probability and Statistical Independence)

6–1. நிபந்தனை ஊக அளவு

C என்ற மாதிரி கணத்திலுள்ள உபகணம் C-க்கான ஊக அளவு கணச்சார்பலன் (ஊ.க.சா). $P(C)$–எனக்கொள்வோம். C_1 என்ற கணத்துக்கான ஊ.க.சா. $P(C_1) > 0$ எனக் கொள்வோம்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஏற்படும் உறுப்புகள் (மதிப்புகள்) C_1–ன் மதிப்புகளாக இருப்பின், சோதனையில் ஏற்பட்ட மதிப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக் கொள்வோம். இப்போது C_1 ஐ மாதிரி கணம் என வைத்துக் கொண்டு C-ன் மற்ற உபகணமான C_2-ன் ஊக அளவைக் கணக்கிடலாம். இந்த ஊக அளவானது C_1 வினைவின் எண்மானத்தைச் (Hypothesis) சார்ந்த C_2 வினைவின் '**நிபந்தனை ஊக அளவு**' ஆகும்.

அதாவது C_1 கொடுக்கப்பட்ட போது, C_2–ன் நிபந்தனை ஊக அளவு கணிக்கப்படுகிறது.

இதை $P(C_2 | C_1)$ என எழுதுகின்றோம். C_1-ன் மொத்த உறுப்புகளில் C_2-க்கும் பொதுவான உறுப்புகளை $C_1 \cap C_2$ என்று குறிக்கலாம்.

ஆகவே, $P(C_2/C_1) = P(C_1 \cap C_2/C_1)$ ஆகும். அத்துடன் $P(C_1/C_1) = 1$ என்பது நாம் அறிந்ததே. C_1 உபகணத்தைச் சார்ந்த C_1, $C_1 \cap C_2$ இரண்டுவினைவுகளின் ஊக அளவு விகித

மும், C கணத்தைச் சார்ந்த C_1, $C_1 \cap C_2$ இரண்டு விளைவுகளின் ஊக அளவு விகிதமும் சமமானவையாகும்.

$$\text{எனவே, } \frac{P(C_1 \cap C_2/C_1)}{P(C_1/C_1)} = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)}$$

$$\text{அல்லது } P(C_1 \cap C_2/C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)}$$

இங்கு (i) $P(C_1) > 0$

(ii) $P(C_2/C_1) \geq 0$

(iii) $P(C_1/C_1) = 1$ என்பன விரும்பத்தகும் நிபந்தனைகளாகும். அத்துடன் C_2, $C_3, \ldots C_k$ இவை யாவும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாத (disjoint) கணங்களானால்,

$$P[C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap \ldots \cap C_k/C_1]$$

$$= P(C_2/C_1) + P(C_3/C_1) + \ldots + P(C_k/C_1)$$

(வாசகர்கள் இதை நிரூபித்துக் கொள்ள விடப்பட்டது.) இதேபோல ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ராண்டம் மாறிகளின் கணம் A என்றால் (A கணம் C-ன் மேல் வரையறுக்கப் பட்டது), மேலும் A-ன் உபகணங்கள் A_1, A_2 என்றாலும், A_1-ன் விளைவு தரப்பட்டபின் A_2-ன் நிபந்தனை ஊக அளவை $P(A_2/A_1)$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு $(P\, A_1 > 0.)$

இந்த நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் (நி.ஊ.அ.சா) விளக்கத்திலிருந்து,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2/A_1)$$

$$\text{அல்லது } P(C_1 \cap C_2) = P(C_1).\ P(C_2/C_1)$$

இந்த வரையறையானது ஓர் ஊ க.சா.வைக் கொண்டுள்ள எந்தக் கணத்துக்கும் பொருந்தும்.

இதையே ஊக அளவுப் பெருக்கல் நியதி என்கூறுகிறோம் (Multiplication Law of Probability)

மாதிரி 1 :

ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 5 சீட்டுக்கள் ராண்டம் முறையில் (கட்டில் திரும்பச் சேர்க்காதவாறு) ஒருவருக்குக் கொடுக்கப்படுகிறது. அவரிடம் குறைந்த பட்சம் 4 டைமண்டுகள் இருப்பதாகக் கொண்டால் (C_1), அவர் கையிலிருக்கும் எல்லாச் சீட்டுகளும் டைமண்டுகள் (C_2) என்பதற்கான ஊக அளவு யாது?

$$\text{இங்கு } P(C_1) = \frac{\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{52}{5}}{\binom{52}{5}}$$

D = டைமண்டு என்றால்,

$$C_1 = \{ D;\ D = 4, 5 \}$$

$$C_2 = \{ D;\ D = 5 \}$$

$\therefore C_1 \cap C_2 = C_2$ ஆகும்.

$$P(C_2 | C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)} = \frac{P(C_2)}{P(C_1)}$$

$$\text{ஆனால் } P(C_2) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \text{ என்பதால்}$$

$$P(C_2/C_1) = \frac{\binom{13}{5}\Big/\binom{52}{5}}{\left[\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{52}{5}\right]\Big/\binom{52}{5}}$$

$$= \frac{\binom{13}{5}}{\binom{16}{4}\binom{39}{1} + \binom{52}{5}}$$

மாதிரி 2 ;

$$P(C_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(C_2|C_1) = \frac{5}{6}$$ என்றால்

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2 \mid C_1)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

பெருக்கல் நியதியை நாம் நீட்டிக்கலாம். மூன்று விளைவுகள் A_1, A_2, A_3–களுக்கான வெட்டு $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ என்றால்,

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3]$$

$$= P(A_2 \cap A_n) \cdot P[A_3/(A_1 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P[A_3 / (A_1 \cap A_2)]$$

$[\because P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$ ஆகும்.]

பயிற்சி I

(1) $P[c_1 \cap c_2 \cap c_3 \cap c_4] = P(c_1) \cdot P(c_2/A_1) \; P[c_3/(c_1 \cap c_2)] \times P[c_4 / (c_1 \cap c_2 \cap c_3)]$

என்று நிரூபிக்கவும்.

(2) ஒரு சீட்டுக்கட்டை நன்கு குலுக்கி ராண்டம் முறையில் (கட்டில் திரும்பச் சேர்க்காவண்ணம்) போடப்பட்ட சீட்டுகளில் ஒருவருக்கு உடைத்தான 13 சீட்டுக்களை எடுத்துக்கொள்வோம். அவருக்குக் குறைந்தது இரண்டு ராஜாக்களாவது இருக்கிறது என்ற அனுமானத்தை (எடுகோட்டை)ச் சார்ந்தவாறு குறைந்தது 3 ராஜாக்களாவது அவரிடம் இருப்பதற்கான நிபந்தனை வகை அளவைக் காண்க.

(3) $C_1, C_2, \ldots\ldots C_m$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று இணையாத தணங்கள் பூச்சியமற்ற வகை அளவுகளைக் கொண்டிருந்தால்,

மேலும் $C_1, C_2, \ldots\ldots C_m$ இவற்றின் பிணைப்பு (union) C என்ற கணமானால்,

$$P(C) = P(C_1).P(C/C_1) + P(C_2).\ P(C/C_2) + \ldots\ldots$$
$$+ P(C_m).P(C/C_m)$$ என்று நிரூபி.

இங்கு $P(C) > 0$ என்றால், கீழ்க்கண்ட 'பேயீஸ் சூத்திரத்தை' (Baye's Formula) நிரூபித்துக் காட்டுக.

$$P[C_i/C] = \frac{P(C_i)\ .\ P(C/C_i)}{P(C_1)\,P(C/C_1) + P(C_2)\,P(C/C_2) + \ldots\ldots + P(C_m)\,P(C/C_m)} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots m.$$

[குறிப்பு : $P(C)\ .\ P(C_i/C) = P(C_i).\ P(C/C_i)$]

(4) ஒரு பையில் 3 சிவப்பு பந்துகளும், 7 ஊதா பந்துக்களும், இரண்டாவது பையில் 6 சிவப்பு பந்துகளும், 8 ஊதா பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாவது ஒரு பையை ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுத்து, அதினுள்ளிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது.

(i) அப்பந்து சிவப்பு நிறம் என்பதற்கான வகை அளவைக் கணக்கிடு.

(ii) அப்பந்து சிவப்பு என்ற எடுகோட்டைச் சார்ந்து, இரண்டாவது பையிலிருந்து அப்பந்து எடுக்கப்பட்டதற்கான நிபந்தனை வகை அளவைக் கண்டுபிடி.

6-2. விளிம்புப் பரவலும், நிபந்தனைப் பரவலும் (Marginal and Conditional Distributions)

X_1, X_2 மாறிகளின் வ.அ.சா. $f(x_1\ x_2)$ எனக்கொள்வோம். நன்கு புரியும் பொருட்டு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ராண்டம் மாறிகள் வருமிடத்து இந்த வ.அ.சா. அல்லது தி.ப.சா.வை ஓர் இணைந்த வ. அ. சா. அல்லது இணைந்த தி. ப. சா. (joint p. d. f., or joint c.d.f) என வழங்குவோம்.

எனவே $f(x_1, x_2)$ என்பது $X_1\ X_2$ மாறிகளின் இணைந்த வ. அ. சா. ஆகும். (இ. வ. அ. சா.).

$a < X_1 < b$, என்ற வினாவை இப்போது கவனிப்போம். மேலே கூறிய வினாவானது,

$[a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty]$ என்ற விளைவு நிகழும் போதுதான் நிகழ முடியும்.

எனவே,

$$P_r[a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty] = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

(தொடர்வகைக் கானது)

அல்லது

$$P_r[a < X_1 < b, -\infty < X_2 < +\infty] = \sum_{a<X_1<b} \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

(தனித்த வகைக்கானது.)

இப்போது

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2$ அல்லது $\sum_{x_2} f(x_1, x_2)$ என்பது x_1 மாறியின் சார்பலனுக மட்டுமே காணப்படுகிறது. இதை $f_1(x_1)$ என்கிறோம்.

எனவே, ஒவ்வொரு $a < b$ க்கும்,

$$P_r[a < X_1 < b] = \int_a^b f_1(x)\, dx_1 \qquad \text{(தொடர் வகை)}$$

$$= \sum_{a<x_1<b} f_1(x_1) \qquad \text{(தனி வகை)}$$

இந்த X_1-க்கு மட்டுமான ஊ. அ. சா. $f_1(x_1)$ ஆகும். இங்கு ஒரு நிலையான x_1 மதிப்பில், எல்லா x_2 மதிப்புகளுக்கும் இணைந்த ஊ. அ. சா. $f(x_1, x_2)$ ஐத் தொகைப் படுத்தினுலோ அல்லது கூட்டினுலோ கிடைப்பது $f_1(x_1)$ ஆகும். அதனுல் இந்தந் தொகையை அல்லது கூட்டலை $x_1\, x_2$ — தளத்தின் **விளிம்பு** (Margin) எனக் கூறலாம். ஆகவே, $f_1(x_1)$ என்பது X_1-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனுகும். இதை வி. ஊ. அ. சா. (m. p. d. f.) என்போம்.

இதேபோல $f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$ (தொடர் வகை)

அல்லது

$$f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) \quad \text{(தனி வகை)}$$

எனவே $f_2(x_2)$ வானது X_2-ன் வி. ஊ. அ. சா. ஆகும்.

மாதிரி 3 :

X_1, X_2 மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா.

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \; 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1.$

$= 1,$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்)

என்றால்,

X_1-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா. யாது ?

X_2-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா என்ன ?

இங்கு X_1ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா.

$$f_1(x_1) = \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_2$$

$$= \left[x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \left(x_1 1 + \frac{(1)^2}{2} \right) - 0$$

$$= x_1 + \frac{1}{2}.$$

இதேபோல X_2-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா :

$$f_2(x_2) = \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_1$$

$$= \left[\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} + x_2\right) - 0$$

$$= x_2 + \frac{1}{2}$$

மாதிரி 4:

X_1, X_2 மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா.

$$f(x_1, x_2) = \frac{9}{4^{x_1 + x_2}}, \quad x_1 = 1, 2, 3, \ldots \infty, \quad x_2 = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புக்களில் எல்லாம்) என்றால்

X_1-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா.:

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{9}{4^{x_1 + x_2}}$$

$$= \frac{9}{4^{x_1}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1/4}{1 - 1/4}$$

(∵ ஜியோமிதித் தொடர்)

$$= \frac{1}{3}$$

எனவே $f_1(x_1) = \frac{9}{4^{x_1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4^{x_1}}$

இதே போன்று $f_2(x_2) = \frac{3}{4^{x_2}}$ ஆகும்.

மேலும் $P_r(X_1 = 3) = f(3, 1) + f(3, 2) + f(3, 3) + \ldots \infty$

$$= \frac{9}{4^{3+1}} + \frac{9}{4^{3+2}} + \frac{9}{4^{3+3}} + \ldots \infty$$

$$= \frac{9}{4^3}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \infty\right]$$

$$= \frac{9}{4^3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$$

இதையே X_1-ன் விளிம்பு ஊ. சா. வைப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம்.

$$P_r(X_1 = 3) = [f_1(X_1)]_{x_1 = 3}$$

$$= f_1(3)$$

$$= \left[\frac{3}{4^{x_1}}\right]_{x_1 = 3} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$$

$$P_r(X_2=2) = f(1, 2) + f(2, 2) + f(3, 2) + f(4, 2) + \ldots \infty$$

$$= \frac{9}{4^{1+2}} + \frac{9}{4^{2+2}} + \frac{9}{4^{3+2}} + \ldots$$

$$= \frac{9}{4^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \infty\right]$$

$$\therefore P_r(X_2 = 2) = \frac{9}{4^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$$

$$f_2(x_2) = \frac{3}{4^{x_2}}$$

$$P_r(x_2 = 2) = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}.$$

இப்போது நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனைக் கவனிப்போம்.

X_1, X_2 மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா. $f(x_1, x_2)$,

X_1-க்கு மட்டுமான விளிம்பு ஊ. அ. சா. $f_1(x_1)$,

X_2-க்கு மட்டுமான விளிம்பு ஊ. அ. சா. $f_2(x_2)$ எனவும் கொள்வோம்.

A_1 உபகணம்

A_1 : $\{(x_1, x_2);\ x_1 = x_1';\quad -\infty < x_2 < \infty\}$ எனவும்

A_2 உபகணம்

A_2 : $\{(x_1, x_2);\quad -\infty < x_1 < \infty;\ x_2 = x_2'\}$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore\ P(A_1 = P_r[x_1 = x_1'] = f_1(x_1') > 0$ என்றவாறு x_1' இருக்கிறது.

நிபந்தனை ஊக அளவின் வரையறைப்படி,

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{P_r[X_1 = x_1';\ X_2 = x_2']}{P_r[X_1 = x_1']}$$

$$= \frac{f(x_1', x_2')}{f_1(x_1)'}$$

அதாவது (x_1, x_2) ஏதாவது ஒரு புள்ளியானால், மேலும் $f_1(x_1) > 0$ என்றாலும், $X_1 = x_1$ என்று தரப்பட்ட பின்னர், $X_2 = x_2$ என்ற மதிப்புக்கான நிபந்தனை ஊக அளவு,

$$= \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \text{ ஆகும்.}$$

இந்த அளவு x_2-ன் ஒரு சார்பலனாகும். இதை $f(x_2/x_1)$, என வழங்குகின்றோம்.

$$\text{எனவே, } f(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)},\ f_1\ x_1\ p. > 0.$$

இந்த $f(x_2/x_1)$ ஓர் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனாகும். ஏனென்றால் எடுத்துக்காட்டாக தனித்த வகையில்,

$$\sum_{x_2} f(x_2/x_1) = \sum_{x_2} \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

$$= \frac{1}{f_1(x_1)} \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{f_1(x_1)}{f_1(x_1)} = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

ஆகவே, தனித்த வகை ராண்டம்மாறி $X_1 = x_1$ எனத் தரப் பட்டிருப்பின், தனி வகை ராண்டம் மாறி $X_2 = x_2$ மதிப்பிற்கான நிபந்தனை ஊ. அ. சார்பலனே $f(x_2/x_1)$ ஆகும்.

இதே போல $f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}, f_2(x_2) > 0$

என்பது $X_2 = x_2$ தரப்பட்டிருப்பின் $X_1 = x_1$-க்கான நிபந்தனை ஊ. அ. சா. ஆகும்.

இதைப் போன்றே X_1, X_2 இரண்டும் தொடர் ராண்டம் மாறிகளானால், அவற்றின் இணைந்த ஊ. அ. சா. $f(x_1, x_2)$ எனவும்,

X_1-க்கு மட்டுமான விளிம்பு ஊ. அ. சா. $f_1(x_1)$

X_2-க்கு மட்டுமான விளிம்பு ஊ. அ. ச. $f_2(x_2)$ எனவும் கொள்வோம்.

முன்னே குறிப்பிட்ட விளக்கப்படி $f_1(x_1) > 0$ எனும் போது,

$$(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \text{ ஆகிறது.}$$

மேலும், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2/x_1)\, dx_2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}\, d\, x_2$$

$$= \frac{1}{f_1(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, x_2)\, d\, x_2$$

$$= \frac{f_1(x_1)}{f_1(x_1)} = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

ஆகவே, $f(x_2/x_1)$ சார்பலன் ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் ஊ. அ. சா.வின் பொதுப்பண்பைப் பெற்றுள்ளது. எனவே தொடர் ராண்டம் மாறி $X_1 = x_1$ எனத் தரப்பட்ட பின், தொடர் ராண்டம் மாறி $X_2 = x_2$-க்கான நிபந்தனை ஊ. அ. சா. $f(x_2/x_1)$ ஆகும்.

$$\text{இதே போல}, f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)},\ f_2(x_2) > 0$$

எனவும் எழுதுகின்றோம்.

இரண்டு நிபந்தனை ஊ. அ. சார்பலன்களும் ஓர் ஊ. அ. சார்பலனின் எல்லாப் பொதுப் பண்புகளையும் பெற்றுள்ளன. ஆகவே, இந்த நிபந்தனை ஊ. அ. சார்பலன்களின் ஊக அளவுகளையும், எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவுகளையும் கணக்கிட முடியும்.

தொடர் வகை ராண்டம் மாறிகளுக்கு,

$$P_r[a < X_2 < b/X_1 = x_1] = \int_a^b f(x_2/x_1)\, d\, x_2 \text{ ஆகும்.}$$

இதையே $X_1 = x_1$ என்று தரப்பட்ட பின், $a < X_2 < b$-க்கான நிபந்தனை ஊக அளவு எனக் கூறுகிறோம்.

இதை $P_r[a > X_2 < b/x_1]$ என எழுதினாலும் தவறில்லை.

இதே மாதிரி,

$$P_r[c < X_1 < d/x_2] = \int_c^d f(x_1/x_2)\, d\, x_1 \text{ ஆகிறது.}$$

X_2-ன் ஒரு சாபலன் $u(X_2)$ என்றால்

$$E[u(X_2)/x_1] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_2) f(x_2/x_1)\, dx_2 \text{ ஆகும்.}$$

இதை $X = x_1$ எனத்தரப்பட்டபின் $u(X_2)$ சார்பலனின் '**நிபந்தனை எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவு, (நி.எ.அ)** (Conditional Expectation) என்று வழங்கலாம். குறிப்பாக

$X_1 = x_1$ தரப்பட்டபின், X_2-ன் நிபந்தனைச் சராசரி $= E(X_2/x_1)$

$X_1 = x_1$ தரப்பட்டபின், X_2-ன் நிபந்தனை மாறுபாடு

$= E\{[X_2 - E(X_2/x_1)]^2/x_1\}$ ஆகும்

$= E(X_2^2/x_1) - [E(x_2/x_1)]^2$ ஆகிறது.

இதேபோல, $u(X_1/x_2)$-க்கும் எழுதலாம். மேலும் தொகைக்குப் பதில் கூட்டலை உடயோகித்து, தனித்த வகைக்கான நிபந்தனை ஊக அளவுகளையும் நிபந்தனை எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவுகளையும் எழுத முடியும்.

மாதிரி 5:

X_1, X_2 இருமாறிகளின் இணைந்த ஊ.அ.சா:

$f(x_1, x_2) = 2,\ 0 < x_1 < x_2 < 1,$

$= 0,$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்)

என்றால்,

(i) $f_1(x_1) = \int_{x_1}^{1} 2 \cdot dx_2 = 2(1-x_1),\ 0 < x_1 < 1$

$= 0,$ **(மற்றமதிப்புகளுக்கு எல்லாம்.)**

$f_1(x_1) = 2(1-x_1)$ என்பது x_1-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

(ii) $f_2(x_2)$ = x_2-ன் நிபந்தனை ஊ.அ.சா.

$$= \int_0^{x_2} 2\, dx_1$$

$$\therefore f_2(x_2) = 2x_2, \quad 0 < x_2 < 1$$

= 0, (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.)

(iii) $f(x_1|x_2) = \dfrac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$

$$= \frac{2}{2x_2}$$

$$\therefore f(x_1/x_2) = \frac{1}{x_2}, \quad \begin{matrix} 0 < x_1 < x_2 \\ 0 < x_2 < x_1 \end{matrix}$$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

(iv) $E(X_1/x_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f(x_1/x_2)\, dx.$

$$= \int_0^{x_2} x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\, dx_1$$

$$= \frac{1}{x_2}\left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^{x_2}$$

X-ன் நிபந்தனைச் சராசரி $= \left\{ \dfrac{x_2}{2}, \quad 0 < x_2 < 1 \right.$

$$\therefore E(X_1/x_2) = \frac{x_2}{2}, \; 0 < x_2 < 1.$$

(v) X_1-ன் நிபந்தனை மாறுபாடு

$$= E\{[X_1 - E(X_1/x_2)]^2/x_2\}$$

$$= \int_0^{x_2} \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 f(x_1 / x_2)\, dx_1$$

$$= \int_0^{x_2} \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 \frac{1}{x_2}\, dx_1$$

$$= \int_0^{x_2} \left[x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 2\,\frac{x_1 x_2}{2}\right] \frac{1}{x_2}\, dx_1$$

$$= \left[\frac{1}{x_2}\left\{\frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^2 . x_1}{4} - \frac{x_2\, x_1^2}{2}\right\}_0^{x_2}\right]$$

எனவே X-ன் நிபந்தனை மாறுபாடு

$$= \frac{1}{x_2}\left\{\left[\frac{x_2^3}{3} + \frac{x_2^3}{4} - \frac{x_2^3}{2}\right] - 0\right\}$$

$$= \frac{x_2^3}{x_2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{x_2^2}{12}, \quad 0 < x_2 < 1$$

(vi) $P_r[o < X_1 < \frac{1}{2} / X_2 = \frac{3}{4}]$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x_1 / \tfrac{3}{4})\, dx_1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}\, dx_1. \quad \left[\because f(x_1 / x_2) = \frac{1}{x_2}\right.$$

$$\left. i.e, f(x_1 / x_2 = \tfrac{3}{4}) = \tfrac{4}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3} \cdot [\, x_1 \,]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(vii) $$P_r \left(0 < X_1 < \tfrac{1}{2} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_1 (x_1)\, dx_1$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2 (1 - x_1)\, dx_1$$

$$= 2 \left[x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= 2 . \frac{3}{8} = \frac{3}{4}.$$

எனவே, $P_r [\, 0 < X_1 < \tfrac{1}{2} \,] = \tfrac{3}{4} \neq \tfrac{2}{3}$

$$= P_r [\, 0 < X_1 < \tfrac{1}{2} \,/\, X_2 = \tfrac{3}{4} \,]$$

6-3. உடன் தொடர்புக் கெழு (Correlation Coefficient)

ஒரு மாதிரியிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே சமயத்தில் சில குணப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என நாம் அறிவோம். இக் குணங்களுக்குள்ள தொடர்பைப் பற்றி ஆராய அக் குணங்களை ஏற்கக்கூடிய உறுப்புகளின் மதிப்புகளுக்கான உடன் தொடர்பைக் கொண்டு வெளிப்படுத்துகின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பொருளின் உற்பத்தி குறையக்குறைய அதன் விலை அதிகரித்துக்கொண்டே போகும். இதே போல அதன் உற்பத்தி அதிகரிக்க, அதிகரிக்கப் பொதுவாக விலை குறைந்துவரும். இதேபோல எடுத்துக்காட்டாக அதிக உயரம் உள்ள மாணவர்கள் (நெட்டையர்கள்) அதிக எடை உள்ளவர்களாயும், குறைந்த உயரமானவர்கள் (குட்டையர்கள்) குறைந்த எடையுள்ளவர்களாகவும் இருக்கக் காண்கிறோம். ஆகையால், இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே சமயத்தில் அதிகரித்துக்கொண்டோ, அல்லது குறைந்துகொண்டோ

சென்றால், அம் மாறிகள் நேரான தொடர்பைப்பெற்றிருக்கின்றன என்றும், ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் அதிகமாக, அதிகமாக மற்றொன்றின் மதிப்புகள் குறைந்துகொண்டே வந்தால், அம் மாறிகள் எதிர்மறைத் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும் கூறுகின்றோம்.

இம் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை மட்டும் அறிந்தால் போதாது. அவை எந்த அளவுக்குத் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்பதைப் புள்ளியியல் வாயிலாக அறிய ஒரு கெழுவை வரையறுத்து அதன் மூலம் அறிகிறோம். இக் கெழுவை 'உடன் தொடர்புக்கெழு' (Correlation Coefficient) என்கிறோம். இனி இக் கெழு எவ்வாறு வரையறுக்கப்படுகிறது என்று கவனிப்போம்.

X, Y இரு மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா. $f(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$u(x, y)$ என்பது (x, y)-ன் ஒரு சார்பலன் என்றால், $E[u(X, y)]$ முன்பே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளபடி, $u(x, y)$ சார்பலனின் எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு ஆகும்.

$u(x, y) = x$ என்றால், $E(X) = \mu_1$ சராசரி எனவும்,

$u(x, y) = y$ என்றால், $E(X) = \mu_2 \ldots \quad \ldots$

$u(x, y) = (x - \mu_1)^2$ என்றால், $E(X - \mu_2)^2$

$= \text{மாறுபாடு } \sigma_1^2$

$u(x, y) = (y - \mu_2)^2$ என்றால், $E(Y - \mu_2)^2$

$= \text{மாறுபாடு } \sigma_2^2$ எனவும் அறிவோம்.

இப்போது, $E(X - \mu_1)(Y - \mu_2)$ஐக் கவனிப்போம்.

$$\begin{aligned}
E(X - \mu_1)(Y - \mu_2) &= E(XY - \mu_2 X - \mu_1 Y + \mu_1 \mu_2) \\
&= E(XY) - \mu_2 E(X) - \mu_1 E(Y) + \mu_1 \mu_2 \\
&= E(XY) - \mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_1 + \mu_1 \mu_2. \\
&= E(XY) - \mu_1 \mu_2.
\end{aligned}$$

இதையே $X\ Y$ இருமாறிகளின் உடன் மாறுபாடு (covariance) என வழங்குகிறோம்.

$\sigma_1\ \sigma_2 > 0$ என்றால்,

$P_{12} = \dfrac{E\,(X-\mu_1)\,(Y-\mu_2)}{\sigma_1\ \sigma_2}$ என்பது $X\ Y$ மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு (Correlation Coefficient) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

இரு மாறிகளின் உடன் மாறுபாட்டை, அம் மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களைப் பெருக்கிய தொகையால் வகுத்தால், அதுவே, X, Y மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு ஆகும்.

மாதிரி 6 :

X, Y மாறிகளின் இணைந்த வா. அ. சா.

$f(x, y) = 2,\ 0 < x < y,\ \ 0 < y < 1$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்) என்றால்

$$X\text{-ன் சராசரி} = \mu_1 = E(X) = \int_0^1 \int_0^y 2\,x .\ dx\ dy$$

$$= \int_0^1 \left. 2\ \frac{x^2}{2} \right)_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y^2\ dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Y-ன் சராசரி $= \mu_2 = E(Y)$

$$= \int_0^1 \int_0^y 2y\ .\ dx\ dy$$

$$= \int_0^1 \left[2\, x y \right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 2y^2 \, dy$$

$$= \left[2 \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\sigma_1^2 = E(X^2) - \mu_1^2 = \int_0^1 \int_0^y 2\, x^2 \, . \, dx\, dy - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \int_0^1 \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^y dy - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2}{12} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

$$\sigma_2^2 = E(Y^2) - \mu_2^2$$

$$= \int_0^1 \int_0^y 2\, y^2 \cdot dx\, dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \int_0^1 (2\, x\, y^2)_0^y \, . \, dy - \frac{4}{9}$$

$$= \int_0^1 2 \cdot y^3 \, dy - \frac{4}{9}$$

$$= \left[2 \cdot \frac{y^4}{4} \right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

X, Y-ன் உடன் மாறுபாடு :

$$= E(XY) - \mu_1 \mu_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx \, dy - \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2x^2 y}{2}\right]_0^y dy - \frac{2}{9}$$

$$= \int_0^1 y^3 \cdot dy - \frac{2}{9} = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}.$$

எனவே X, Y-ன் உடன் தொடர்புக்கெழு

$$P_{12} = \frac{X, Y\text{-ன் உடன் மாறுபாடு}}{\sqrt{[X\text{-ன் மாறுபாடு}]\,[Y\text{-ன் மாறுபாடு}]}}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

எனவே, $P_{12} = \underline{0.5}.$

[குறிப்பு : இரு ராண்டம் மாறிகளின் சில பரவல்களுக்கு ρ எனும் உடன் தொடர்புக் கெழு அந்த பரவலின் மிக உப

யோகமான பண்பாகக் காணப்படுகிறது. ρ-வைப்பற்றி மேலும் நுட்பமாகக் கவனித்தால் ρ-ன் மதிப்பானது $-1 \leq \rho \leq +1$ என்ற இடைவெளியில் அடங்குகிறது என அறியலாம். $\rho = 1$ என்றால், $Y = a + bx$ $(b > 0)$ என்ற சார்பலனுடன் ஒரு நேர் கோடு உருவாகிறது.]

X, Y இரு மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா.

$f(x, y)$ எனவும், X-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சா. $f_1(x)$ எனவும் கொள்வோம்.

$f_1(x) > 0$ என்ற புள்ளிகளில் $X = x$ என்று தரப்பட்ட பின், Y-ன் நிபந்தனை ஊ. அ. சா.

$f(y \mid x) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ ஆகும்.

இங்கு y-ன் நிபந்தனைச் சராசரி $E(y \mid x)$.

$$E(y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y \mid x)\, dy$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y)\, dx}{f_1(x)}$$ (தொடர் வகைக் கானது).

இந்த X-ன் நிபந்தனைச் சராசரியானது, x-க்கு மட்டுமே உரித்தான ஒரு சார்பலனாகும்.

இதை $\phi(x)$ என வழங்கலாம்.

இதேபோல $Y = y$ எனத் தரப்பட்டபின். X-ன் நிபந்தனை சராசரியானது, y-க்கு மட்டுமே உரித்தான ஒரு சார்பலனாகும். இதை $\psi(y)$ என வழங்குவோம். $\phi(x)$ என்பது x-ன் ஒரு நேர் கோட்டுச் சார்பலன் ஆனால், அதாவது $\phi(x) = a + bx$ என்றால், Y-ன் நிபந்தனைச் சராசரி x-ல் நேர்கோட்டில் சார்ந்துள்ளது (linear in x). வேறு விதமாகக் குறிப்பிட்டால், Y மாறி ஒரு நேர்கோட்டு நிபந்தனைச் சராசரியை (linear conditional mean)ப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறலாம்.

$\phi(x) = a + bx$ என்றால், a, b இவற்றின் மதிப்பைக் கீழே நிர்ணயிப்போம்.

X, Y-மாறிகளின் மாறுபாடுகள் σ_1^2, σ_2^2 முறையே என்று கொள்வோம்.

$$E(Y|x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\, dy}{f_1(x)}$$

$= a + bx$ என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே
$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y)\, dy = (a + bx) \cdot f_1(x)\text{-ன்}$$

இரு பக்கங்களையும் x-ன் மேல் தொகுத்தால் (integrate).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx) f_1(x)\, dx \quad \ldots(1)$$

அதாவது

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx + b. \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\, dx$$

$= a + b\, E(x)$ ஆகும்.

அதாவது $\mu_2 = a + b\mu_1$.

$$(\because [E(X) = \mu_1;\ E(Y) = \mu_2)] \quad \ldots \quad (2)$$

-ன் இருபக்கங்களையும் முதலில் xஆல் பெருக்கிப் பிறகு x-ன் மேல் தொகுத்தால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx) \cdot x \cdot f_1(x)\, dx$$

அதாவது $E(XY) = a \cdot E(X) + b\,E(X^2)$ ... ... (3)

X, Y-ன் உடன் மாறுபாடு

$C(X, Y) = E(XY) - \mu_1 \mu_2$ என்றும்,

X-ன் மாறுபாடு

$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_1^2$ என்றும் நாம் அறிவோம்.

மேலும் $C(X, Y) = \rho\,\sigma_1\,\sigma_2$

இவற்றை 3-ல் உபயோகித்தால்,

$\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 + \mu_1 \mu_2 = a\,\mu_1 + b\,(\sigma_1^2 + \mu_1^2)$ (4)

(2), (4) சார்பலன்களின் தீர்வின்படி

$$a = \mu_2 - \rho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \mu_1 \text{ எனவும்}$$

$$b = \rho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ எனவும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.}$$

எனவே $\phi(X) = E(Y/x)$

$$= \mu_2 + \rho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - \mu_1) \text{ ஆகிறது.}$$

இங்கு Y-ன் நிபந்தனைச் சராசரி X-ன் நேர்கோட்டுச் சார்பலனாகக் காணப்படுகிறது.

இதே போன்று $\psi(y) = E(x/y)$

$$= \mu_1 + \rho\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2) \text{ எனவும்,}$$

அறியலாம். இங்கு X-ன் நிபந்தனைச் சராசரி, Y-ன் நேர் கோட்டுச் சார்பலனுக்க் காணப்படுகிறது. அடுத்தபடியாக நிபந்தனைச் சராசரி வரி வடிவ வகைத்தானது (linear) என்ற

அனுமானத்தில் நிபந்தனைப் பரவலின் மாறுபாட்டை ஆராய்வோம்.

Y-ன் நிபந்தனை மாறுபாடு :

$E\{[Y - E(Y/x)]^2/x\}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[[y - \mu_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) \right]^2 f(y/x)\, dy$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[(y - \mu_2) - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) \right]^2 f(x, y)\, dy}{f_1(x)} \dots (5)$$

இது ஓர் எதிர்மறையிலா (non-negative variance) மாறுபாடு ஆகும். இத்துடன், இம்மாறுபாடு முடிந்தவரை (utmost) x-க்கு மட்டுமேயான ஒரு சார்பலன் ஆகும். அப்படியாயின் (5)ஐ முதலில் $f_1(x)$-ஆல் பெருக்கிப் பின்னர் x-ன் மேல் தொகுத்தால், கிடைக்கும் விளைவு எதிர்மறையிலாதது ஆகும்.

எனவே,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(y - \mu_2) - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) \right]^2$$

$$\cdot f(x, y)\, dy \,.\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(y - \mu_2)_2 + \frac{\rho^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2 \right.$$

$$\left. -2\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)(y - \mu_2) \right]$$

$$\times f(x, y)\, dy \,.\, dx.$$

$$= E(Y - \mu_2)^2 + \rho^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} E(X - \mu_1)^2$$

$$- 2 \frac{\rho \sigma_2}{\sigma_1} E (X - \mu_1) (Y - \mu_2).$$

$$= \sigma_2^2 + \frac{\rho^2 \sigma^2}{\sigma_1^2} \sigma_1^2 - 2 \frac{\rho \sigma_2}{\sigma_1} \rho \sigma_1 \sigma_2.$$

$$= \sigma_2^2 - \rho^2 \sigma^2 = \sigma_2^2 (1 - \rho_2^2) \geq 0.$$

மேலும், இம்மாறுபாட்டை $k (x)$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$E [k (x)] = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \geq 0.$$

அல்லது $\rho^2 \leq 1$

$\therefore$ $-1 \leq \rho \leq 1$ ஆகும்.

நிபந்தனைச் சராசரி வரி வடிவ வகையில் இல்லாவிடில் (non-linear) அங்கும் $-1 \leq \rho \leq 1$ என்ற சமமின்மை உண்மை யானது என்பதை நிருபித்தல் வாசகர்கள் பயிற்சிக்கு விடப் பட்டுள்ளது.

மேற்படி Y-ன் நிபந்தனை மாறுபாடு Y-ன் சார்பலனாக இல்லாமல், ஒரு நிலை எண் $k > 0$ ஆக இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

இப்போது kஐ $f_1 (x)$ஆல் பெருக்கி, பின்பு x-ன் மேல் தொகுத்தால், கிடைக்கும் விளைவு k-யே ஆகும்.

இங்கு $k = \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$.

எனவே, $X = x$ எனத் தரப்பட்ட பின், Y-ன் ஒவ்வொரு நிபந்தனைப் பரவலின் மாறுபாடும் $\sigma_2^2 (1 - \rho^2)$ ஆகிறது.

$\rho = 0$ எனில், Y-ன் ஒவ்வொரு நிபந்தனைப் பரவலின் மாறு பாடும், Y-ன் விளிம்புப் பரவலின் மாறுபாடு σ_2^2-க்கு சம மாகிறது. ஆனால், ρ^2 ஒன்று இலக்கத்தை அணுகும் போது Y-ன் நிபந்தனைப் பரவலின் மாறுபாடும் அந்த நெருக்கத்தை ஒட்டிக் குறைகிறது.

X, Y ராண்டம் மாறிகள் தனித்த வகையைச் சார்ந்திருப் பினும் மேற்கூறிய எல்லா விளைவுகளும் அவற்றிற்குப் பொருந்தும்.

X, Y மாறிகளின் இணைந்த பரவலுக்கான திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் (தி. உ. சா.)

t_1, t_2 என்ற பண்பளவைகள், முறையே $-h_1 < t_1 < h_1$, $-h_2 < t_2 < h_2$ என்றவாறு இருந்து, $E(e^{t_1 X + t_2 y})$ அமையப் பெற்றால்,

$$M(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 y})$$

இதுவே X, Y மாறிகளின் இணைந்த பரவலின் தி. உ. சா. என வழங்கப்படும்.

ஒரு ராண்டம் மாறிக்கு இருப்பது போலவே X, Y இரு மாறிகளின் தி. உ. சா. $M(t_1\ t_2)$ என்பது, X, Y இவற்றின் இணைந்த பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்கிறது. அத்துடன் X-ன் விளிம்புப் பரவல் Y-ன் விளிம்புப் பரவல் இரண்டையும்கூட நிர்ணயிக்கிறது.

மேலும் $M(t_1, 0) = E(e^{t_1 x}) = M(t_1)$

இதேபோல $M(0, t_2) = E(e^{t_2 y}) = M(t_2)$ ஆகிறது.

தொடர் வகை ராண்டம் மாறிகளில் கீழ்க்காணும் சமன்பாடு மிகவும் பயன்படுகிறது.

$$\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r\ \partial t_2^s}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s \cdot e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)\ dx\ dy$$

மேற்படி சமன்பாட்டில், $t_1 = 0 = t_2$ என்று சமனிட்டால்,

$$\left[\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r\ \partial t_2^s}\right]_{t_1 = t_2 = 0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s f(x, y)\ dx \cdot dy$$

$$= E(X^r \cdot Y^s)$$

$r = 1, \quad s = 0,$

$$E(X) = \frac{\partial M(0, 0)}{\partial t_1} = \mu_1$$

$r = 0, s = 1$ என்றால்,

$$\frac{\partial M(0, 0)}{\partial t_2} = E(Y) = \mu_2$$

$r = 2, \ s = 0$ என்றால்,

$$\frac{\partial^2 M(0, 0)}{\partial t_1^2} = E(X)$$

எனவே $\sigma_1^2 = E(X^2) - \mu_1^2$. ... ... (6)

$r = 0, \ s = 2$ என்றால்

$$\frac{\partial^2 M(0, 0)}{\partial t_2^2} = E(Y^2)$$

எனவே $\sigma_2^2 = E(Y^2) - X_2^2$

$r = 1, s = 1$ என்றால்,

$$\frac{\partial^2 M(0, 0)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = E(X, Y)$$

எனவே, $E(X - \mu_1)(Y - \mu_2) = E(XY) - \mu_1 \mu_2$

X, Y மாறிகள் தனித்த வகையைச் சார்ந்திருந்தாலும், சமன்பாடுகள் 6–ன் விளைவுகள் இதற்கும் பொருந்தும். இவற்றைக் கொண்டு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட முடியும். எனவே X, Y மாறிகளின் இணைப் பரவலின் தி. உ. சா. கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் மூலம் உடன் தொடர்புக் கெழுவை எளிதாகக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

மாதிரி 7 :

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_2}, \ 0 < x_1 < x_2 < \infty$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புக்களிலும்) என்றால்,

$$M(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} e^{-x_2} \, dx_2 \, dx_1.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t_1 x_1} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{t_2 x_2} \cdot e^{-x_2} dx_2 \right) dx_1.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t_1 x_1} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{-(1-t_2) x_2} dx_2 \right) dx_1.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t_1 x_1} \left[\frac{e^{-(1-t_2) x_2}}{-(1-t_2)} \right]_{x_1}^{\infty} dx_1$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{t_1 x_1 - (1-t_2) x_1}}{(1-t_2)} dx_1.$$

$$= \frac{1}{(1-t_2)} \int_0^{\infty} e^{-(1-t_1-t_2)x_1} x_1^{1-1} dx_1.$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{(1-t_1-t_2)} \frac{1}{(1-t_2)}$$

$$= \frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)}.$$

இங்கு $t_1 < 1$, $t_1 + t_2 < 1$ ஆகும்.

சமன்பாடுகள் 6ஐ உபயோகித்தால், μ_1, μ_2 σ_1^2, σ_2^2, $C(X_1, X_2)$ இவற்றைக் கணிக்கலாம்.

$$\mu_1 = E(X_1) = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}$$

$$= \left[(1-t_2)^{-1} (1-t_1-t_2)^{-2} \right]_{t_1=0=t_2} = 1.$$

$$\mu_2 = E(Y) = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2} =$$

$$= [(1-t_2)^{-1}(1-t_1-t_2)^{-2} + (1-t_2)^{-2}(1-t_1-t_2)^{-1}]_{t_1=0=t_2}$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

$$\sigma_1^2 = E(X_1^2) - \mu_1^2$$

$$= \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1^2} - \mu_1^2$$

$$= \Big[2(1-t_2)^{-1}(1-t_1-t_2)^{-3}\Big]_{t_1=t_2=0} \quad \dots \quad 1.$$

$$= 2 - 1 = 1.$$

$$\sigma_2^2 = E(X_2^2) - \mu_2^2$$

$$= \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_2^2} - \mu_2^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2}\Big[(1-t_2)^{-1}(1-t_1-t_2)^{-2} + (1-t_2)^{-2}(1-t_1-t_2)^{-1}\Big]_{t_1=t_2=0} - \mu_2^2$$

$$= [2(1-t_2)^{-1}(1-t_1-t_2)^{-3} + (1-t_2)^{-2}(1-t_1-t_2)^{-2} + (1-t_2)^{-2}(1-t_1-t_2)^{-2} + 2(1-t_2)^{-3}(1-t_1-t_2)^{-1}]_{t_1=t_2=0} - \mu_2^2$$

$$= (2 + 1 + 1 + 2) - 4 = 2.$$

$$E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) = E(X_1X_2) - \mu_1\mu_2$$

$$= \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} - 2.$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}[(1-t_2)^{-1}(1-t_1-t_2)^{-2} + (1-t_2)^{-2}(1-t_1-t_2)^{-1}]_{t_1=t_2=0} - 2$$

$$= [(1-t_2)^{-1}\, 2 .\, (1-t_1-t_2)^{-2} + (1-t_2)^{-2}\, (1-t_1-t_2)^{-2}] - 2 \quad t_1 = t_2 = 0$$

$$= (2+1) - 2 = 1.$$

ஆகவே, X, Y-ன் உடன் தொடர்புக் கெழு

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \tfrac{1}{2} = \underline{0.50.}$$

மேலும் X_1 X_2-ன் விளிம்புப் பரவல்களின் தி. உ. சா.க்கள் முறையே,

$$M(t_1, 0) = E(e^{t_1 x_1}) = \int_0^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} e^{t_1 x_1} . e^{-x_2}\, dx_2\, dx_1.$$

$$M(t_1, o) = \int_0^{\infty} e^{t_1 x_1} [-e^{-x_2}]_{x_1}^{\infty}\, dx_1$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t_1 x_1}\, e^{-x_1}\, dx_1.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1-t_1) x_1}\, dx_1. = \frac{1}{(1-t_1)}$$

இங்கு $t_1 < 1$.

இதேபோன்று

$$M(0, t_2) = E(e^{t_2 x_2}) = \int_0^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} e^{t_2 x_2} . e^{-x_2}\, dx_2\, dx_1.$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{-(1-t_2) x_2}\, dx_2 \right) dx_1.$$

$$= \int_0^\infty \left[- \frac{e^{-(1-t_2)x_2}}{(1-t_2)} \right]_{x_1}^{\infty} dx_1$$

$$= \frac{1}{1-t_2} \int_0^\infty e^{-(1-t_2)x_1} \, dx_1.$$

$$= \frac{1}{1-t_2} \left[- \frac{e^{-(1-t_2)x_1}}{(1-t_2)} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(1-t_2)^2}, \quad t_2 < 1.$$

இத்துடன் விளிம்புப் பரவல்கள்,

$$f_1(x_1) = \int_{x_1}^\infty e^{-x_2} \, dx_2 = \left[-e^{-x_2} \right]_{x_2}^\infty = e^{-x_1}$$

$$f_1(x_1) = e^{-x_1}, \quad 0 < x_1 < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)

$$f_2(x_2) = \int_0^{x_2} e^{-x_2} \, dx_1 = e^{-x_2} \int_0^{x_2} dx_1.$$

$$= e^{-x_2} [x_1]_0^{x_2} = x_2, e^{-x_2}$$

$$f_2(x_2) = x_2 e^{-x_2}, \quad 0 < x_2 < \infty$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களிலெல்லாம்.)

தீர்வுகள் யாவும் நிரூபிக்கப்பட்டன.

6-4. புள்ளியியல் தற்சார்பு (Statistical Independence)

X_1, X_2 மாறிகள் தொடர்வகை அல்லது தனித்தவகை ராண்டம் மாறிகளாகவும் $f(x_1, x_2)$ அவற்றின் இணைந்த

ஊ.அ. சார்பலன், $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ முறையே X_1, X_2-ன் சார் விளிம்பு ஊ.அ.சார்பலன்கள் ஆகவும் இருக்கட்டும். நிபந்தனை ஊக அளவுச் சார்பலனின் வரையறைப்படி,

$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) . f_2(x_2/x_1)$ என எழுதுகிறோம். சில சமயம் $f(x_2/x_1)$ சார்பலன் x_1 ஐச் சாராமல் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

தொடர்வகை ராண்டம் மாறிகளுக்கு, X_2–ன் நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2 / x_1) f_1(x_1)\, dx_1$$

$$= f(x_2/x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, dx_1$$

$$= f(x_2 | x_1) . 1 = f(x_2/x_1).$$

எனவே $f_2(x_2) = f(x_2 | x_1)$.

மேலும் $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) . f_2(x_2)$

அதாவது $X_1 = x_1$ எனத்தரப்பட்டபின், X_2–ன் நிபந்தனைப் பரவலானது, x_1 ஐப்பற்றிய எந்த அனுமானத்தையும் சாராமல் இருந்தால்,

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) . f_2(x_2)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு சரியாக இருக்கையில்மட்டுமே X_1, X_2 மாறிகளை, புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என வழங்குகிறோம். (Statistically Independent Variates). இம் மாறிகள் ராண்டம் மாறிகளேயாகும்.

மாதிரி 8:

X_1, X_2 இருமாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = 12\, x_1 x_2 \,(1-x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$

= 0, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்)

என்றால், இவை இரண்டும் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என்று நிரூபி.

நிரூபணம்:

X-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f_1(x_1) = \int_0^1 12\, x_1 x_2 (1-x_2)\, dx_2.$$

$$= 12x_1 \left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 12\, x_1 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 \right] = 12\, x_1 \cdot \frac{1}{6}$$

$\therefore f_1(x_1) = 2x_1,\ 0 < x_1 < 1.$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்.)

X_2-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f_2(x_2) = \int_0^1 12x_1 x_2 (1-x_2)\, dx_1$$

$$= 12\, x_2 (1-x_2) \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^1$$

$\therefore f_2(x_2) = 6x_2 (1-x_2),\ 0 < x_2 < 1$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெலாம்)

$$f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = 2x_1 \cdot 6x_2 (1-x_2)$$

$$= 12\, x_1 x_2 (1-x_2),\ 0 < x_1 < 1$$

$$0 < x_2 < 1$$

= 0 (மற்ற மதிப்புகளில்எல்லாம்.)

எனவே, $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ என்று புலனாகிறது. இதனால் $X_1\ X_2$ மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என்று நிரூபணமாகிறது.

மாதிரி 9 :

X_1, X_2 இரு ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த வகை அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = 2 \ldots e^{-x_1 - x_2}, \quad 0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < \infty$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்)}$$

என்றால், X_1, X_2 புள்ளியியலில் சார்ந்த (சார்புடைய) மாறிகள் என நிரூபி.

$$f_1(x_1) = \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-x_1} \cdot e^{-x_2} \, dx_2$$

$$= 2 \cdot e^{-x_1} \left[-e^{-x_2} \right]_0^{\infty}$$

$$= 2 \cdot e^{-x_1} (1 - 0) = \underline{2e} ^{-x_1}, \; 0 < x_1 < \infty.$$

$$f_2(x_2) = \int_0^{x_2} 2 e^{-x_1} e^{-x_2} \, dx_1.$$

$$= 2 \cdot e^{-x_2} \left[-e^{-x_1} \right]_0^{x_2}$$

$$= 2 \cdot e^{-x_2} \left[1 - e^{-x_2} \right), \quad 0 < x_2 < \infty.$$

எனவே, $f_1(x_1) \cdot f_2(\bar{x}_2)$

$$= 2 \cdot e^{-x_1} \; 2 \cdot e^{-x_2} (1 - e^{-x_2})$$

$$= 4 \cdot e^{-(x_1 + x_2)} (1 - e^{-x_2})$$

ஆனால், $f(x_1, x_2) = 2 \cdot \cdot e^{-(x_1 + x_2)}$

$\therefore \; f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$

பொதுப்பண்புகள்

(1) X_1, X_2 புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளாயினும், அவற்றின் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்கள் முறையே $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ என்றாலும், ஒவ்வொரு $a = b$-க்கும், $c = d$-க்கும் [a, b, c, d நிலை எண்கள்].

$$P_r[a < X_1 < b, \ c < X_2 < d]$$
$$= P_r[a < X_1 < b] \cdot P_r[c < X_2 < d]$$

நிரூபணம் :

X_1, X_2 இரண்டு புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளானதால்,

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

ஆகவே தொடர் வகையில்,

$$P_r[a < X_1 < b, \ c < X_2 < d]$$
$$= \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2 \, . \, dx_1.$$
$$= \int_a^b \int_c^d f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)\, dx_2 \, . \, dx_1$$
$$= \left[\int_c^b f_1(x_1)\, dx_1 \right] \left[\int_c^d f_2(x_2)\, dx_2 \right]$$
$$= P_r[a < X_1 < b] \, . \, P_r[c < X_2 < d]$$ ஆகிறது.

தனித்த வகையில்,

$$P_r[a < X_1 = b, \ c < X_2 < d] = \sum_{a<x_1<b} \ \sum_{c<X_2<d} f(x_1, x_2)$$
$$= \sum_{a<X_1<b} \ \sum_{c<X_2<d} f_1(x_1), \cdot f_2(x_2)$$

$$= \left[\sum_{a < X_1 < b} f_1(x_1) \right] \left[\sum_{c < X_2 < d} f_2(x_2) \right]$$

$$= [P_r(a < X_1 < b) \cdot [P_r(c < X_2 < d)]$$

மாதிரி 1 :

மாதிரி 8–ல் (பக்கம் 167) X_1 X_2 புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள்.

எனவே,

$$P_r \left[0 < X_1 < \frac{1}{2}, 0 < X_2 < \frac{1}{2} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 12\, x_1 x_2 (1 - x_2)\, dx_2 \cdot dx_1.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 12\, x_1 \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} \cdot dx_1.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 12\, x_1 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) dx_1.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x_1 \cdot dx_1 = \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$P_r \left[0 < X_1 < \tfrac{1}{2} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x_1) \cdot dx_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\, x_1 \cdot dx_1 = \left[2 \cdot \frac{x_1^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots (2)$$

$P_r \cdot [0 < X_2 < \frac{1}{2}]$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(x_2)\, dx_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} 6\, x_2 (1 - x_2)\, dx_2$$

$$= 6 \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{2} \ldots (3)$$

இங்கு (1) = (2) × (3).

எனவே,

$$P_r [a < X_1 < b,\ c < X_2 < d] = P_r [a < X_1 < b] \cdot P_r [c < X_2 < d].$$

பொதுப்பண்பு 2 :

புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் X_1, X_2, இவற்றின் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f_1(x_1), f_2(x_2)$ முறையே என்றால்,

X_1-க்கு மட்டுமான சார்பலன் $u(x_1)$ ஐயும்,

X_2-க்கும் மட்டுமான சார்பலன் $v(X_2$ ஐயும் பெருக்கிய தொகைக்கான எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவு, தனித் தனியே யான எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவுகளின் பெருக்கலாகும்.

அதாவது

$$E[u(X_1) \cdot v(x_2)] = E[u(X_1)] \cdot E[v(X_2)].$$

X_1, X_2 புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளானதால்,

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

எனவே

$$E[u(X_1)\, v(x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) \cdot v(x_2) \cdot f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) . v(x_2) \cdot f_1(x_1) f_2(x_2) \, dx_1 . dx_2$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) . f_1(x_1) \, dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(x_2) \; f_2(x_2) \, dx_2 \right]$$

$$= \{ E] u(x_1)] . \} \{ E . [v(x_2)] \}$$

பொதுப்பண்பு 3 :

X_1, X_2 ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x_1, x_2)$,

X_1, X_2,–ன் விளிம்பு ஊ· அ, சார்பலன்கள் முறையே $f(x_1)$, $f_1(x_2)$ எனக் கொள்வோம்.

X_1, X_2–ன் பரவலின் திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் $M(t_1, t_2)$ என இருக்கட்டும்.

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) . M(0, t_2)$$

என்று இருந்தால் மட்டுமே X_1, X_2 இரண்டும் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

நிருபணம் :

(i) X_1, X_2, இரண்டும் புள்ளியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளானல்,

$$M(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2})$$

$$= E\left(e^{t_1, X_1} . e^{t_2 X_2} \right)$$

$$= E\left(e^{t_1 X_1}\right) \cdot E\left(e^{t_2 X_2}\right)$$

(ஏனெனில், X_1, X_2, இரண்டும் சாற்பற்றவை)

$$= M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$$

(வரையறைப்படி)

= விளிம்புப் பரவலின் திருப்புத்திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன்களின் பெருக்குத் தொகை.

எனவே,

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2).$$

(ii) இதே போல $M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)\ M(0, t_2)$ என்றால் X_1, X_2 இரண்டும் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

X_1க்கான ஒரே ஒரு தி. உ. சா. $M(t_1, 0)$

$$M(t_1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1} f_1(x_1)\, dx_1.$$

$$\text{111 } ly, \quad M(0, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 x_2} f_2(x_2)\, dx_2:$$

$\therefore\ M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1} f_1(x_1)\, dx_1 \right]$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 x_2} f_2(x_2)\, dx_2 \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \, dx_1 \, dx_2. \quad \ldots (1)$$

மேலும், $M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$ எனத்தரப் பட்டுள்ளது. ... ... (2)

அத்துடன் f;

$$M(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2$$

ஆகும். ... ... (3)

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளின் மூலம்,

$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ என்பது புலனாகிறது.

எனவே X_1 X_2 இரண்டும் புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளாகும்.

இதே பொதுப் பண்புகள் தனித்த வகை மாறிகளுக்கும் பொருந்தும். அங்கு தொகுத்தல் குறிக்குப் பதிலாகக் கூட்டல் குறியை உபயோகித்துப் பண்புகளின் விளைவுகளை விளக்கலாம்.

$X_1, X_2 \ldots X_n$ என்ற n ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, விளிம்பு ஊ. அ. சார்பலன்கள் முறையே $f_1(x_1), f_2(x_2), f_n(x_n)$ எனவும் கொள்வோம். இங்கும் $f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ என்றால் மட்டுமே, $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று புள்ளியியலில் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளாகும்.

மேலும், பொதுப்பண்பு 1ஐ நீட்டித்தால்,

$$P_r[a_1 < X_1 < b_1,\ a_2 < X_2 < b_2 \ldots a_n < X_n < b_n]$$

$$= P_r[a_1 < X_1 < b_1] \cdot P_r[a_2 < X_2 < b_2] \ldots P_r[a_n < X_n < b_n].$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P_r [a_i < X_i < b_i]$$ ஆகும்.

பொதுப்பண்பு 2ஐ நீட்டித்தால்,

$$E [u_1 (X_1) \cdot u_2 (X_2) \ldots u_n (X_n)]$$
$$= E [u_1 (X_1)] \cdot E [u_2 (X_2)] \ldots E [u_n (X_n)]$$

இதைச் சுருக்கமாக எழுதினுல்,

$$E [\prod_{i=1}^{n} u_i (X_i) = \prod_{i=1}^{n} E [u_i (X_i)]$$

$X_1, X_2 \ldots X_n$-ன் இணைந்த பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன் $M (t_1, t_2 \ldots t_n)$ என்றுல், h_i என்ற ஒரு நேர் எண்ணுக்கு, $-h_i < t_i < h_i (i = 1, 2 \ldots n)$ என்ற இடை வெளியில்,

$$M (t_1, t_2 \ldots t_n) = E [e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n}]$$

இதை $X_1, X_2 \ldots X_n$ தி. உ. சார்பலன் எனவும் கூறலாம். இந்த தி. உ. சார்பலன் n மாறிகளின் இணைந்த பரவலை முழுக்க முழுக்க ஒரேயடியாக நிர்ணயிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக X_i-ன் விளிம்புப் பரவலின் தி. உ. சார் பலன் $M (0, 0, 0 \ldots t_i, 0, \ldots 0)$ $i = 1, 2, 3 \ldots n$ எனவும்,

X_i, X_j இரு மாறிகளின் விளிம்புப் பரவலின் தி. உ. சார் பலன் $M (0, 0, \ldots t_i, 0 \ldots t_j, 0, \ldots 0)$ எனவும்,

$[i=1, 2, \ldots n, j=1, 2, \ldots n, i \neq j]$ எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது பொதுப்பண்பு (3)ஐ நீட்டித்தால்,

$$M (t_1, t_2 \ldots t_n) = \prod_{i=1}^{n} M (0, 0, 0, t_i, 0, \ldots 0)$$

என்றுல் மட்டுமே, இந்த n மாறிகளும் அதாவது $X_1, X_2 \ldots X_n$ மாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று புள்ளியியலில் **சார்பற்ற** ராண்டம் மாறிகளாகும்.

X_1, X_2, X_3 மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என்றால், அவை இணைகளில் (சோடிகளில்) (pairwise) 'புள்ளியியலில் சார்பற்று' காணப்படுகின்றன.

[அதாவது X_i, X_j $(i \neq j, i.j = 1, 2, 3)$ இரண்டு புள்ளியியலும் சார்பற்றவை.]

ஆனால், இணைக்கு இணை சார்பற்ற தன்மை (pairwise independent) இருக்கும் மாறிகள், ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை (mutually independent) எனக் கூறிட முடியாது.

கீழ்க்கண்ட பர்ன்ஸ்டீனின் எடுத்துக்காட்டு (Bernstein's Example) இதை நன்கு விளக்கும்.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{4}, (x_1, x_2, x_3) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு என்றால்,)}$$

$i \neq j$ என்ற X_i X_j-ன் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்,

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \tfrac{1}{4}, (x_i, x_j) \in \{(0, 0), (0, 1) (1, 0), (1, 1)\}$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு,)}$$

அதே சமயத்தில்,

$$f_i(x_i) = \tfrac{1}{2}, \quad x_i = 0, 1$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு ஆகும்.)}$$

$i \neq j$ என்றால்,

$$f_{ij}(x_i, x_j) \equiv f_i(x_i) \cdot f_j(x_j)$$

ஆகவே X_i, X_j இரண்டும் புள்ளியியலில் சார்பற்றவை.

ஆனாலும்,

$$f(x_1, x_2, x_3) \neq f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3).$$

எனவே, X_1, X_2, X_3 மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று புள்ளியியலில் சார்புடைய மாறிகள் எனத் தெரிகிறது.

மாதிரி 10

X_1, X_2, X_3, X_4 நான்கு மாறிகளும் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகளானால், அவற்றின் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 16\, x_1, x_2, x_3, x_4,$$

$$0 < x_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$= 0, \text{ (மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்)}$$

, ன்றல்,

X_2, X_4 விளிம்பு ஊ. அ. சார்பலன்,

$$f_{24}(x_2, x_4) = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)\, dx_1\, dx_3$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 16\, x_1, x_2, x_3, x_4 \cdot dx_1\, dx_3$$

$$= 16\, x_2\, x_4 \cdot \int_0^1 x_3 \left(\int_0^1 x_1\, dx_1 \right) dx_3$$

$$P_{24}(x_2, x_4) = 16\, x_2\, x_4 \int_0^1 x_3 \cdot \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1 dx_3$$

$$= 16\, x_2\, x_4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_3^2}{2}\right]_0^1$$

$$\therefore\ f_{24}(x_2, x_4) = 4\, x_2\, x_4, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$0 < x_4 < 1$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்)}$$

மேலும் $X_2 = x_2, X_4 = x_4$ என்று தரப்பட்டபின் X_1, X_3-ன் நிபந்தனை ஊ. அ. சார்பலன்,

$$f(x_1, x_3/x_2\, x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{24}(x_2, x_4)}$$

$$= \frac{16\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4}{4\, x_2\, x_4} = 4\, x_1\, x_3$$

$$\therefore\quad f(x_1, x_3/x_2, x_4) = 4\, x_1, x_3 \quad 0 < x_1 < 1$$

$$0 < x_3 < 1$$

$$= 0, \text{(மற்ற எல்லா மதிப்புகளிலும்)}$$

பயிற்சி II.

(1) X_1, X_2-ன் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$= 0, \text{(மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்.)}$$

என்றால், X_1, X_2-ன் விளிம்பு ஊ. அ. சார்பலன்களைக் கணிக்கவும். X_1, X_2 இரு மாறிகளும் புள்ளியியலில் சார்புடையராண்டம் மாறிகள் என நிரூபிக்கவும்.

(2) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{16}$,

$$x_1 = 1, 2, 3, 4; \quad x_2 = 1, 2, 3, 4$$

$$= 0, \text{(மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்.)}$$

என்றால், X_1, X_2 மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

(3) $f(x_1, x_2) = 4x_1, (1 - x_2), \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$

$= 0,$ (மற்ற மதிப்புகளில்) என்றால்,

$P_r\,[0 < X_1 < \frac{1}{2}, \; 0 < X_2 < \frac{1}{3}$ மதிப்பைக் காண்க.

(4) $f(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2}, \quad 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty$

$= 0,$ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்,) என்றால்

X_1, X_2 மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகள் என நிரூபி.

மேலும் $E[e^{t(X_1+X_2)}] = (1-t)^{-2}$, $t < 1$ என்றும் நிரூபி.

(5) அத்தியாயத்தின் கடைசியில் குறிப்பிட்ட 'பர்ன்ஸ்டீன்' எடுத்துக்காட்டில் X_1, X_2, X_3 பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்,

$M(t_1, t_2, t_3)$ என்றால்,

$M(t_1, t_2, 0) = M(t_1, 0, 0) \cdot M(0, t_2, 0)$ எனவும்,

$M(t_1, 0, t_3) = M(t_1, 0, 0) \cdot M(0, 0, t_3)$ எனவும்,

$M(0, t_2, t_3) = M(0, t_2, 0) \cdot M(0, 0, t_3)$ எனவும் நிரூபித்துக் காட்டுக.

ஆனால் $M(t_1, t_2, t_3) \neq M(t_1, 0, 0) \cdot M(0, t_2, 0) \cdot M(0, 0, t_3)$

என்றும் நிரூபி.

இதன் மூலம் X_1, X_2, X_3 மூன்றும் சோடி சோடியாக (இணைக்கு இணையாக) மட்டுமே புள்ளியியலில் சார்பற்றவை என்றும், மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று புள்ளியியலில் சார்புடையவை என்றும் விளக்குக.

7. சில சிறப்புப் பரவல்கள்

(Some Special Distributions)

7–1. ஒன்று அல்லது இரு புள்ளிப் பரவல்கள் (Point Distributions)

மிகவும் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளக் கூடிய தனித்த பரவல். மொத்த திணிவுகளும் (total mass) ஒரே புள்ளி m-ல் சூழ்ந்திருக்கையில், ஏற்படும் பரவலாகும். இத்தகைய பரவலைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாறி Xஐ ஒரு மாறி என்று வழங்குவதே பொருந்தாத் ஒன்றுகும். ஏனெனில், அம் மாறி m என்ற மதிப்பைக் கொண்டிருப்பதற்கான ஊக அளவு 1 ஆகும். அத்துடன் மற்ற எந்த மதிப்பையும் கொண்டிருப்பதற்கான ஊக அளவு பூச்சியம் ஆகும். இப் பரவலின் சராசரி m என்ற மாறுபாடு 0 என்றும் வெளிப் படையாகவே தெரிகிறது. மேலும், இந்த ஒரே ஒரு ஒரு பரவலுக்கு மட்டுமே பூச்சியம் மாறுபாடு இருப்பதாக உணரலாம்.

மொத்த திணிவுகளும் இரு வேறு புள்ளிகளில் சூழ்ந்திருக்கையில் ஏற்படும் மற்றொரு பரவலைக் கவனிப்போம். X மாறியை, பொருத்தமுடைய ஆதி, (Origin) அலகு (Scale) களின் மூலம் மேற்படி புள்ளிகள் $X = 0$, $X = 1$ என்ற மதிப்புகளுக்குச் சரியாக இருக்கும் போது மாற்றியமைக்கலாம். [இப்போது $X = 1$ ல் காணப்படும் திணிவு எண்ணிக்கையை p எனவும், $X = 0$–ல் காணப்படும் திணிவு எண்ணிக்கையை $q = 1-p$ எனவும் கொள்வோம். இப் பரவலைக் கொண்ட X மாறியின் மதிப்புகள் 1, 0-க்கான ஊக அளவுகள் முறையே p, q ஆகும்]

எனவே X-ன் சராசரி, $\mu = E(X) = p.1 + q.0 = p$.

X-ன் மாறுபாடு $= \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$

$$= (p.1^2 + q.0^2) - p^2 = p - p^2$$

$$= p(1-p) = \underline{pq.}$$

X-ன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன், $M_X(t)$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0,1} e^{tx} f(x)$$

$$= e^{t.0}.q + e^{t.1}.p, \quad [\because \text{ இங்கு } f(0) = q, \; f(1) = p.]$$

$$= \underline{q + pe^t}$$

7–2 ஈருறுப்புப்பரவல் (Binomial distribution)

புள்ளியியல் தத்துவத்தின் செயல் முறைகளில் மிகவும் அடிக்கடி உபயோகமாகின்ற தனித்த பரவல்களில் ஈருறுப்புப் பரவலும் ஒன்றாகும். ஒரு சோதனையைத் திரும்பத்திரும்பச் செய்வதால் ஏற்படும் விளைவுகளை ஒட்டி இப் பரவல் அமைகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவின் ஊக அளவு அல்லது நிகழ்தகவு (Probability) 'p' எனக் கொள்வோம். அந்த விளைவானது, ஒரு புறச் சாய்வற்ற அல்லது பிறழ்ச்சியற்ற (unbiased) ஒரு காசைச் சுண்டி விடும்பொழுது தலை விழுவதற்கான விளைவாக இருக்கலாம். இதன் ஊக அளவு $p = \frac{1}{2}$ ஆகும். இதேபோல இரு சீரான பகடைகளை உருட்டிய பின் மொத்தம் 7 எண்ணிக்கை வருவதான விளைவாகவும் இருக்கலாம். இதன் ஊக அளவு $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. அல்லது நன்கு கலக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 5 சீட்டுக்கள் உருவப்பட்டால் (எடுக்கப்பட்டால்) 2–க்கு மேற் பட்ட ஏஸ்கள் (Aces) இருப்பதற்கான விளைவாகவும் இருக்கலாம். இதற்கான ஊக அளவு

$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

ஆகவே மிகவும் பொதுவாகக் கூறினால், எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவும் ஏற்பட்டதற்கான ஊக அளவு p எனக் கொண்

டால், அவ்விளைவு நிகழாதற்கான ஊக அளவு $q = 1 - p$ ஆகும். விளைவு நிகழ்ந்ததை 'வெற்றி' என்றும், நிகழாததைத் 'தோல்வி' என்றும் குறித்தால், வெற்றிக்கான ஊக அளவு p என்றும், தோல்விக்கான ஊக அளவு $q = 1 - p$ என்றும் அறிகிறோம்.

வரையறை 1:

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x)$,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots n, q = 1 - p$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்) என்றால், X மாறி ஓர் ஈருறுப்புப்பரவலில் அமைந்திருக்கிறது எனலாம். அத்தகைய $f(x)$ ஓர் ஈருறுப்பு ஊ.அ.சார்பலன் ஆகும்.

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலை $b(n, p)$ என்ற குறியில் வழங்குவோம். இங்கு. n, p இரண்டும் ஈருறுப்புப் பரவலின் 'பண்பளவுகள்' (parameter) ஆகும். ஒரு ராண்டம் சோதனையின் n முயற்சிகளில் (trials) x வெற்றிகள் கிட்டுவதற்கான ஊக அளவைக் காண்போம்.

n முயற்சிகளில் x வெற்றிகள் என்றால், $(n-x)$ தோல்விகள் என்பது யாவரும் அறிந்ததே. ஒரு வெற்றியின் ஊக அளவு p; அத்துடன் எல்லா முயற்சிகளும் சார்பற்றவை என்பதால் வெற்றிகளின் ஊக அளவு $= p.p \ldots x$ தடவைகள்

$$= p^x.$$

$(n-x)$ தோல்விகளின் ஊக அளவு $= q^{n-x}$

$\therefore$ n முயற்சிகளில் x வெற்றிகளும், $(n-x)$ தோல்விகளுக்குமான ஊக அளவு $= p^x . q^{n-x}$

இந்த வெற்றிகள், n முயற்சிகளில் 'ஏதாவது x' வெற்றிகளாக இருப்பதால், $\binom{n}{x}$ தடவைகளில் நிகழலாம். எனவே, x ராண்டம் மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; x =, 1, 2, \ldots n$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

இந்த $b(n, p)$ பரவலில், n ஒரு தனித்த பண்பளவை; ஏனெனில் $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ என்ற முழு எண் முயற்சிகள்தான் இருக்குமே தவிர $n = 2{\cdot}49$ முயற்சிகள் என்பது அர்த்தமற்றவை.

p ஒரு **தொடர்ப் பண்பளவை;** ஏனெனில் 0-க்கும், 1-க்கும் இடையில் எந்த ஒரு சிறிய மதிப்பையும் p எடுத்துக் **கொள்ளும்.**

எடுத்துக்காட்டாக,

$X \to p(10, 1/4)$ என்றால் X-ன் ஈருறுப்பு ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x) = \binom{10}{x} p^{x} q^{10-x}$$

$$= \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots 10$$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்)

என்று புலனாகிறது.

ஈருறுப்புப் பரவலின் திருப்புத் திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_X(t) = M(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{0}^{n} e^{tx} \cdot \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum \binom{n}{x} \left(pe^{t}\right)^{x} q^{n-x}$$

$$= \left(pe^{t} + q\right)^{n}, \quad q = 1 - p$$

X-ன் சராசரி, மாறுபாடு இவற்றை தி. உ. சா. மூலம் கணிக்கலாம்.

$$M'(t) = n \cdot \left[q + pe^{t}\right]^{n-1} \cdot (pe^{t})$$

$$\mu = X\text{-ன் சராசரி} = M'(0) = n(q+p)^{n-1} \cdot p = \underline{np} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$\sigma^2 = X\text{-ன் மாறுபாடு} = E(X^2) - \mu^2$$

$$= M''(0) - \mu^2$$

$$\therefore \quad M''(t) = n(n-1)\,pe^t\,(q+pe^t)^{n-2}(pe^t)$$

$$+ n(q+pe^t)^{n-1} \cdot (pe^t)$$

$$M''(t) = [M''(t)]_{t=0} = n(n-1) \cdot p \cdot 1 \cdot (q+p)^{n-2}\, p \cdot 1$$

$$+ n(q+p)^{n-1} \cdot p \cdot 1$$

$$= n(n-1)\,p^2 + np$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = X\text{-ன் மாறுபாடு} = n(n-1)\,p^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p) = \underline{npq} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

மாதிரி 1 :

ஒரு காசை 5 தடவைகள் சுண்டி விட்டால், (தலை விழுவதற்கான ஊக அளவை $\frac{1}{2}$ என நாம் இங்குக் கொண்டால்)

(i) சரியாக 3 தலைகள் வருவதற்கான,

(ii) குறைந்தது 3 தலைகள் வருவதற்கான,

(iii) அதிக பட்சம் 3 தலைகள் வருவதற்கான ஊக அளவுகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

மேலும், இப்பரவலின் தி. உ. சார்பலனைக் கண்டு பிடித்து, சராசரி, மாறுபாட்டைக் கணிக்கவும்.

தீர்வு :

இங்கு $X \rightarrow b\,(5, \frac{1}{2})$

(i) $X = 3$-க்கான ஊக அளவு

$$P_r(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

(ii) $X = 3$ அல்லது 4 அல்லது 5-க்கான ஊக அளவு,

$$P_r\,[X = 3] = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$+ \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$= \frac{51}{243}$$

(iii) $X = 0, 1, 2,$ அல்லது 3-க்கான ஊக அளவு,

$$P_r\,[X \leq 3] = 1 - P_r - [X \geq 3]$$

$$= 1 - P_r\,[X = 4 \text{ or } 5]$$

$$= 1 - [P_r\,(X = 4) + P_r\,(X = 5)]$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \right]$$

$$= 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243}.$$

இந்த ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான தி. உ. சார்பலன்,

$$M(t) = (q + pe^t)^n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^t\right)^5.$$

X-ன் சராசரி $= \mu = E(X) - np = 5 \cdot \frac{1}{3} = 1.67.$

X-ன் மாறுபாடு, $\sigma^2 = npq$

$$= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} = 1.11$$

மாதிரி 2:

X மாறியின் தி. உ. சார்பலன்

$M(t)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{t}\right)^{5}$ என்றால்

(i) $P_r(x=2 \text{ or } 3)$

(ii) X-ன் சராசரி

(iii) x-ன் மாறுபாடு இவற்றைக் கணக்கிடுக.

இங்கு $X \to b(5, \frac{2}{3})$ என்ற ஈறுருப்பு மாறி.

$\therefore$ X-ன் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}, \quad r=0,1,2,3,4,5$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்.)

$$P_r.[X=2 \text{ or } 3]=P_r[X=2]+P_r[X=3]$$

$$=\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$=\frac{120}{243}.$$

X-ன் சராசரி $\mu = E(X) = np = 5 \cdot \frac{2}{3}$.

$$=\frac{10}{3}=3.33.$$

X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = npq = 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9} = 1{\cdot}11$

மாதிரி 3:

$X \to b(n, p)$ என்றால்

$$E\left(\frac{X}{n}\right)=p$$

$E\left[\frac{X}{n} - p\right]^2 = \frac{pq}{n}$ என்று நிரூபி.

$E(X) = np$ என்று அறிவோம்.

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X) = \frac{np}{n} = p. \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$V\left(\frac{X}{n}\right) = E\left(\frac{X}{n} - p\right)^2 = \frac{1}{n^2} E(X - np)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot V(X)$$

$$= \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு

$f(x)$-ன் அடுத்தடுத்த (consecutive) மதிப்புகளின் விகிதம்

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\binom{n}{x+1} p^{x+1} q^{n-x-1}}{\binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}}$$

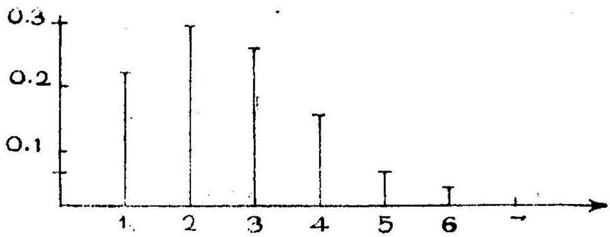
$$= \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q}$$

$x \leq np - q$ என்றால், $\frac{f(x+1)}{f(x)} \geq 1$

$x > np - q$ என்றால், $\frac{f(x+1)}{f(x)} < 1.$

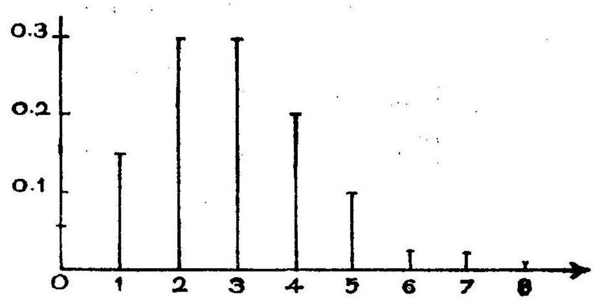
$np - q$ ஒரு முழு எண் (integer) இல்லாவிட்டால், $np - q$-க்கும் $(np - q + 1)$-க்கும் இடையிலுள்ள முழு எண் yஆக இருக்கட்டும். x மாறி 0-விலிருந்து y-க்குக் கூடும் பொழுது $f(x)$ ஊக அளவுகள் ஒரே சீராகக் கூடுகின்றன. ...

x மாறி y-லிருந்து n-க்குக் கூடும்போது, $f(x)$ ஊக அளவுகள் ஒரே சீராகக் குறைகின்றன. பரவலின் ஊக அளவுப் படங்கள் (கீழே காண்க) நிலைத் தூரங்கள் (ordinates) $x = y$ என்ற மதிப்புக்கு ஒரு தனி உச்சத்தைக் காட்டும். அந்த உச்சம் (maximum) பரவலின் முகட்டைச் சார்ந்ததாகும். $(np - q)$ ஒரு முழு எண்ணாகில், $x = np - q$, $x = np + p$ என்ற இரண்டு மதிப்புகளில் இரண்டு உச்ச நிலைத் தூரங்கள், (இரண்டு முகடுகளுக்காக) இருக்கும்.



படம் 10

ஓர் உச்ச கட்ட உறுப்புள்ள ஈருறுப்புப் பரவல் $P = \frac{1}{2}$; $n=7$.



படம் 11.

இரு உச்ச கட்ட உறுப்புகள் உள்ள ஈருறுப்புப் பரவல் $P = \frac{1}{3}$, $n = 8$.

ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துதல் (Fitting of a binomial distribution)

ஒரு மாதிரியின் மூலம் இதை விளக்குவோம்.

7 காசுகள் சுண்டப்பட்டு தலைகள் விழும் எண்ணிக்கை குறிக்கப்படுகிறது. இச் சோதனையை 128 தடவைகள் திரும்பத்

திரும்ப நிகழ்த்தியதில் கிடைத்த விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றைக் கொண்டு பிறழ்ச்சியற்ற காசுகளாயிருப்பின், ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	அலைவெண்கள்
0	7
1	6
2	19
3	35
4	30
5	23
6	7
7	1
மொத்தம்	128

இங்கு $N = 128;\ n = 7;\ p = \frac{1}{2};\ q = \frac{1}{2}$

x ஓர் ஈருறுப்பு மாறியாகில், அதன் (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} = \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}$$

ஆகவே,

$$b(x+1, n, p) = \binom{n}{x+1} p^{x+1} q^{n-x-1}$$ ஆகும்.

இப்போது,

$$\frac{b(x+1;\ n, p)}{b(x;\ n, p)} = \frac{\dfrac{n!}{(x+1)!\,(n-x-1)!}\, p^{x+1}\, q^{n-x-1}}{\dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\, q^{n-x}}$$

$$= \frac{(n-x)}{(x+1)} \cdot \frac{p}{q} .$$

$$\therefore \quad b(x+1; n, p) = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot b(x; n, p)$$

இதைப் பயன்படுத்தி எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் கணிக்கலாம்.

$$f(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot f(x)$$

இங்கு $f(x) = N.\ b\ (x;\ n,\ p)$.

$$f(0) = N \cdot q^n = 128.\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1.$$

$$f(1) = \frac{7-0}{0+1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot (1) \quad = 7.$$

$$f(2) = \frac{7-1}{2} \cdot 1 \cdot (7) \quad = 21.$$

$$f(3) = \frac{7-2}{3} \cdot 1 \cdot (21) \quad = 35.$$

$$f(4) = \frac{7-3}{4} \cdot 1 \cdot (35) \quad = 35$$

$$f(5) = \frac{7-4}{5} \cdot 1 \cdot (35) \quad = 21$$

$$f(6) = \frac{7-5}{6} \cdot 1 \cdot (21) \quad = 7$$

$$f(7) = \frac{7-6}{7} \cdot 1 \cdot (7) \quad = 1$$

எனவே, $\sum_{x=0}^{7} f(x) = 128 = N.$

இப்போது கண்டு அறிந்த அலைவெண்களையும் எதிர் பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களையும் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைப்போம். இதுவே ஈருறுப்புப் பரவலின் பொருத்துதலாகும்.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	கண்டுஅறிந்த அலைவெண்கள் O	எதிர்பார்க்கத் தக்க அலை வெண்கள் E
0	7	1
1	6	7
2	19	21
3	35	35
4	30	35
5	23	21
6	7	7
7	1	1
மொத்தம்	128	128

இங்கு $\sum_{i=1}^{n} 0_i = \sum_{i=1}^{n} E_i = 128$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

ஈருறுப்புத் திருப்புத்திறன்கள்:

$\mu_1{}^1 = \mu = np$ எனவும்

$\mu_2 = npq$ எனவும் நிருபிக்கப்பட்டது.

இதேபோல,

$\mu_3 = n\,pq\,(q-p)$,

$\mu_4 = npq\,[\,1+3\,(n-2)\,pq]$ என்றும்,

இதன் மூலம் கோட்ட அளவுகளும் தட்டையளவுகளும்

முறையே $\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$

$$\gamma_2 = \frac{1-6pq}{n\,pq}$$

எனவும் நிரூபிப்பதை வாசகர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப் பட்டது.

குறிப்பு 1:

(i) $p \geq \frac{1}{2}$ (or $<$) என்றால், $\gamma_1 \leq 0$ (or $<$) ஆகும்.

(ii) சோதனை முயற்சிகள் 'n' மிகவும் அதிகமாகப் போனால், γ_1, γ_2 இரண்டும் பூச்சியத்தை நெருங்கும்.

மாதிரி 4:

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு "ரோமனுவ்ஸ்கியின் கீழ்க் காணும் மறுதரவு தொடர்பை (recurrence relation) நிரூபிக்கவும்.

$$\mu_{t+2} = pq\left[n(t+1)\mu_t + \frac{d\mu_{t+1}}{dp}\right]$$

μ_t-ன் மதிப்பு $\mu_t = \sum \binom{n}{x} p^x q^{n-x} (x-np)^t$ ஆகும்.

எனவே,

$$d\mu_t = \sum \binom{n}{x} x.p^{x-1} q^{n-x} (x-np)^t$$

$$-\sum (n-x) \binom{n}{x} .p^x.\, q^{n-x-1} (x-np)^t$$

$$-nt \sum \binom{n}{x} p^x q^{n-x} (x-np)^{t-1}$$

$$\frac{d\mu_t}{dp} = \sum \left\{ \binom{n}{x} p^{x-1} q^{n-x-1} (x-np)^t [xq - np + xp] \right\}$$

$$- n t \cdot \mu_{t-1}$$

$$= \sum \binom{n}{x} p^{x-1} q^{n-x-1} (x-np)^{t+1} - n t \mu_{t-1}$$

எனவே,

$$pq \cdot \frac{d\mu_t}{dp} = \sum \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} (x-np)^{t+1}$$

$$- n p q t \cdot \mu_{t-1}$$

அல்லது,

$$p\,q \left[\frac{d\mu_t}{dp} + n t \mu_{t-1}\right] = \mu_{t+1}$$ ஆகும்.

இப்போது $t = t+1$ எனச் சமனிட்டால்

$$\underline{\mu_{t+2} = p\,q \left[\frac{d\mu_{t+1}}{dp} + n(t+1)\mu_t\right]}$$

இத் தொடர்பில் $t = 0, 1, 2$ என்று தொடர்ச்சியாக எடுத்தால்,

$$t = 0, \quad \mu_2 = p\,q \left[\frac{d\mu_1}{dp} + n \cdot \mu_0\right]$$

$$= p\,q\,[0 + n] \quad (\because \mu_0 = 1, \ \mu_1 = 0 \text{ இங்கு})$$

$$\underline{= n\,p\,q}$$

$$t = 1, \quad \mu_3 = p\,q \left[\frac{d\mu_2}{dp} + n \cdot 2\mu_1\right]$$

$$= p\,q \left[\frac{d}{dp}(n\,p\,q) + 0\right]$$

$$= p q (n q - n p)$$

$$= n p q (q - p) = n p q (1 - 2 p)$$

$t = 2$, $$\mu_4 = p q \left[\frac{d \mu_3}{d p} + n . 3 \mu_2 \right]$$

$$= p q \left[\{ n p q (-2) + n q (1 - 2 p) - n p (1 - 2 p) \} + 3 n . n p q \right]$$

$$= [p q - 2 n p q - 2 n p q + n q - n p + 2 n p^2 + 3 n^2 p q]$$

$$= p q [n (1 - 2p) + 2 n p^2 - 4 n p + 4 n p^2 + 3 n^2 p q]$$

$$= p q [n (6 p^2 - 6 p + 1) + 3 n . n p q]$$

$$= n p q [(1 - 6 p q) + 2 n p q]$$

$$\therefore \quad \mu_4 = n p q (1 - 6 p q) + 3 n^2 p^2 q^2.$$

ஆகவே $$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$= \frac{[n p q (1 - 2 p)]^2}{n^3 p^3 q^3}$$

$$= \frac{(q - p)^2}{n p q}$$

$$\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1} = \frac{q - p}{\sqrt{n p q}}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{n p q [1 - 6 p q] + 3 n^2 p^2 q^2}{n^2 p^2 q^2}$$

$$= 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}.$$

$$\therefore \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{1 - 6pq}{npq}.$$

$n \to \infty$ என்றால், $\beta_1 = \frac{(q-p)^2}{npq} \to 0$

$$\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \to 0$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq} \to 3$$

$$\gamma_2 = \frac{1 - 6pq}{npq} \to 0$$

$\therefore \quad n \to \infty$ என்றால் $\beta_1 \to 0, \quad \beta_2 \to 3$

$\gamma_1 \to 0, \quad \gamma_2 \to 0$ என்று புலனாகிறது.

பயிற்சி I

(1) ஈருறுப்பு ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x) = \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}, \quad x = 0, 1, 2 \ldots 7$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்) என்றால், இப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்,

$M(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^t\right)^7$ என்றும்

$\mu = \frac{7}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{7}{4}$ என்றும் நிருபி.

அத்துடன்,

(i) $P_r [0 \leq X \leq 1]$,

(ii) $P_r [X = 5]$ இவற்றின் மதிப்பையும் காண்க.

(2) பத்து காசுகளை ஒரே சமயத்தில் சுண்டி விட்டால் குறைந்தது ஏழு தலைகளாவது விழுவதற்கான ஊக அளவைக் கண்டுபிடி.

(3) ஐந்து சார்பற்ற முயற்சிகளைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் முறையே 1, 2 வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவு 0·4096, 0·2048 என்றால், அப் பரவலின் பண்பளவு pஐக் கண்டுபிடி.

(4) ஓர் ஈருறுப்பு ராண்டம் மாறி X–க்கு,

(i) $n = 6$

(ii) $P_r(X = 4) = \frac{1}{9} = P_r(X = 2)$ என்றால்,

X-ன் ஊக அளவு pஐக் கண்டுபிடி.

(5) $p = \frac{1}{4}$, $n = 7$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் முகட்டைக் கணிக்கவும்

(6) ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் β_1, β_2 மதிப்புகள் கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டால்,

$$\beta_1 = \frac{1}{15}, \quad \beta^2 = \frac{89}{50}, \; n = 100 \text{ என்றால்,}$$

அப் பரவலை நிர்ணயித்து பிறகு $p > q$ என்றால் $X = 8$–க்கான ஊக அளவைக் கணக்கிடுக.

(7) ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட ஈருறுப்பு மாறி $\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$–ன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலனைக் கண்டுபிடி.

$n \to \infty$ என்றால், தி. உ. சார்பலனின் மதிப்பு $exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ஐ அணுகுகிறது என்று நிரூபி.

(8) ஓர் ஈருறுப்பு ராண்டம் மாறியின் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x) = \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} p^{x} q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots n$$

$= 0,$ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்)

என்றால்,

$\text{Cov}\left(\frac{x}{n}, \frac{n-x}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}, \frac{n-x}{n}\right)$ இவற்றின் உடன்

மாறுபாடு $= -\frac{pq}{n}$ என்று நிரூபி.

7-3. மூன்று உறுப்புப் பரவல்

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ராண்டம் மாறிக்கும், ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொதுப்படுத்தி எழுத முடியும்.

n ஒரு நேர் எண் என்றால், a_1, a_2, a_3 என்பன நிலையான எண்களானால்,

$$\sum_{x=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n}{x_1!\, x_2!\, (n-x_1-x_2)!} a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot a_3^{n-x_1-x_2}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\, a_1^{x_1}}{x_1!\,(n-x_1)!}$$

$$\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{x_2!\,(n-x_1-x_2)!} a_2^{x_2} \cdot a_3^{n-x_1-x_2}$$

$$= \sum \frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)!} \quad a_1^{x_1} (a_2+a_3)^{n-x_1}$$

$= (a_1 + a_2 + a_3)^n$ ஆகும்.

இதை வைத்துக் கொண்டு ஒரு மூன்று உறுப்புப் பரவலை வரையறுப்போம்.

x_1, x_2 எதிர் மறையிலா முழு எண்கள், $x_1 + x_2 \leq n$,

p_1, p_2, p_3 மூன்றும் நேர்பின்னங்கள் (positive fractions)

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ எனவும் இருக்கட்டும்.

பிறகு X_1, X_2 என்ற தனித்த வகை ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ (n - x_1 - x_2)!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{n-x_1-x_2},$$

$$x_1 + x_2 \leq n$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்,)} \qquad \sum p_i = 1$$

$$p_i > 0$$

இதையே,

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3!}\ p_1^{x_1}\ p_2^{x_2}\ p_3^{x_3},$$

$$\sum x_i = 1$$

$$= 0 \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம)} \qquad \sum p_i = n$$

$$p_i > 0$$

எனவும் எழுதலாம்.

$$\sum_{1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} f(x_1, x_2) = (p_1 + p_2 + p_3)^n = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

இந்த இணைந்த ஊ.அ. சார்பலன் $f(x_1, x_2)$ ஐக் கொண்ட X_1, X_2 மாறிகளின் பரவலை ஒரு 'மூன்று உறுப்புப் பரவல்' என வழங்குகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $n = 4, k = 3, p_1 = 0.2, p_2 = 0.3,$ என்றால்

$$f(x_1, x_2) = \frac{4!}{x_1!\ x_2!\ (4 - x_1 - x_2)!} (0.2)^{x_1} (0.3)^{x_2} (0\ 5)^{4-x_1-x_2}$$

ஆகிறது.

இந்த மூன்று உறுப்புப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலனும், ஈருறுப்புப்பரவலின் தி.உ. சார்பலனைப் போலவே அமைகிறது.

$$M(t_1, t_2) = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n-x_1-x_2)!} \left(p_1 e^{t_1}\right)^{x_1} \left(p_2 e^{t_2}\right)^{x_2} \times p_3^{\,n-x_1-x_2}$$

$$= \left[p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 \right]^n,$$ (t_1, t_2-ன் எல்லா மெய்யான மதிப்புக்களுக்கும்).

X_1, X_2 மாறிகளின் விளிம்புப் பரவல்களின் தி.உ. சார்பலன்கள் முறையே

$$M(t_1, 0) = (p_1 e^{t_1} + p_2 + p_3)^n = [(1-p_1) + p_1 e^{t_1}]^n$$

$$M(0, t_2) = (p_1 + p_2 e^{t_2} + p_3)^n = [(1-p_2) + p_2 e^{t_2}]^n$$ ஆகும்.

இங்கு $M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$ என்றால், X_1, X_2 மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

இங்கு $X_1 \to b(n, p_1)$

$X_2 \to b(n, p_2)$ இரண்டும் சார்பற்றவை.

ஆகவே X_1, X_2-க்களின் சராசரி, மாறுபாடுகளாவன:

மாறிகள்	சராசரி	மாறுபாடு	குறிப்பு:
X_1	$\mu_1 = np_1$	$\sigma_1^2 = np_1(1-p_1)$	$1-p_1 = p_2 + p_3$
X_2	$\mu_2 = np_2$	$\sigma_2^2 = np_2(1-p_2)$	$1-p_2 = p_1 + p_3$

மேலும் $X_1 = x_1$ எனத் தரப்பட்டபின், X_2-ன் நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x_2/x_1) = \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!}{x_1!\; x_2!\; (n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{n-x_1-x_2}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n} \left[\frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)!}\; p_1^{x_1}\,(1-p_1)^{n-x_1}\right] \left[\frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}}{(1-p_1)^{n-x_1}}\right]$$

$$= 1 \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!\,(n-x_1-x_2)!} \cdot \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}$$

$$x_2 = 0, 1, 2, \ldots, (n-x_1)$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்.)

எனவே $X_1 = x_1$ எனத்தரப்பட்டபின், X_2-ன் நிபந்தனைப் பரவலை $x_2 \rightarrow b\left[(n-x_1), \frac{p_2}{1-p_1}\right]$ என வழங்கலாம்.

இந்த x_2-ன் சராசரி

$$E(X_2/x_1) = (n-x_1)\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இது ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு (linear equation).

இதேபோன்று $X_2 = x_2$ எனத்தரப்பட்டபின் X_1-ன் நிபந்தனைப் பரவலை $X_1 \rightarrow p\left[(n-x_2), \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)\right]$ என வழங்கலாம்.

X-ன் நிபந்தனைச்சராசரி

$$E[X_1/x_2]\,(n-x_2) = \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

$E(X_2/x_1)$, $E(X_1/x_2)$ சமன்பாடுகளின் வலப் பக்கத்திலுள்ள x_1 x_2-க்களின் கெழுக்களைப் பெருக்கிய தொகையானது, உடன் தொடர்புக்கெழுவின் வர்க்கமாகும்.

$$\therefore \rho^2 = \left(\frac{-p_2}{1-p_1}\right)\left(\frac{-p_1}{1-p_2}\right) = \frac{p_1\, p_2}{(1-p_1)\,(1-p_2)}$$

x_1, x_2-ன் கெழுக்கள் எதிர்மறையிலிருப்பதால் (—ve), ρ-ம் எதிர்மறையிலிருக்கும்.

ஆகவே,

$$\rho = -\sqrt{\frac{p_1\, p_2}{(1-p_1)\,(1-p_2)}}$$

7-4. பல உறுப்புப் பரவல் (Multinomial Distribution)

இப்பரவலை நீட்டித்து பல உறுப்புப் பரவலின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனை எழுதலாம்.

$X_1, X_2 \ldots X_{k-1}$ என்ற $(k-1)$ தனித்த வகை ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x_1, x_2 \ldots x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$$\sum x_i = n$$

$$\sum p_i = 1, \quad p_i > 0$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

ஏனெனில் $x_k = (n - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{k-1})$-ன் சுருக்கமாகும்.

இந்த பல உறுப்புப் பரவலின் தி. உ. சார்பலன்

$$M(t_1, t_2 \ldots t_{k-1})$$

$$= (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{k-1} e^{t_{k-1}} + p_k)^k$$

[எல்லா t_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ மெய்யான மதிப்புகளுக்கும்.]

$k = 4$ என்ற ஒரு பல உறுப்புப் பரவலின் இணைந்த தி. உ. சார்பலனைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$M(t_1, t_2, t_3) = \sum_{x_3=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_3} \sum_{x_1=0}^{n-x_3-x_2}$$

$$\frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3!\ x_4!} \left(p_1 e^{t_1}\right)^{x_1} \cdot \left(p_2 e^{t_2}\right)^{x_2} \cdot$$

$$\left(p_3 e^{t_3}\right)^{x_3} \cdot p_4^{x_4}.$$

இங்கு $x_4 = n - x_1 - x_2 - x_3$

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3.$$

$$M(t_1, t_2, t_3) = \left[p_4 + p_1 e^{t_1} + p_2\ e^{t_2}\ p_3 e^{t_3}\right]^n.$$

இங்கு $t_2 = t_3 = 0$ என்றால், X_1-ன் விளிம்புப் பரவல் n, p_1ஐப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாக ஆகிறது.

$$M(t_1, 0, 0) = (p_4 + p_1 e^{t_1} + p_2 + p_3)^n$$

$$= [(1 - p_1) + p_1 e^{t_1}]^n,$$

$1 - p_1 = p_2 + p_3 + p_4$ ஆகும்.

ஆகவே, X_1-ன் நிபந்தனைப் பரவல் $X_1 \rightarrow b(n, p_1)$

இதன் சராசரி $= E(X_1) = n\,p_1$.

$M(t_1, t_2, t_3)$-ல் $t_3 = 0$ எனின், X_1, X_2 இரண்டிற்கும் சேர்த்த விளிம்புப் பரவல் ஒரு மூன்று உறுப்புப் பரவலாகும்.

(வாசகர் நிரூபணத்துக்கு இது விடப்பட்டுள்ளது.)

பயிற்சி II.

(1) X_1, X_2 இரண்டு மாறிகளும் ஒரு மூன்று உறுப்புப் பரவலில் அமைந்திருந்தால், அதன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலனை வகைப்படுத்தி (differentiate) X_1, X_2-ன் உடன் மாறுபாடு $= -p_1 p_2$ எனக் காட்டுக.

(2) $X \rightarrow b(2, p)$, $Y \rightarrow b(4, p)$ என்றால்,

மேலும் $P_r[X \geq 1] = \frac{5}{9}$ என்றால், $P_r[Y \geq 1]$ஐக் கணக்கிடவும்.

(3) X_1, X_2-ன் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x_1, x_2) = \binom{x_1}{x_2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{x_1}{15}\right),$$

$$x_2 = 0, 1, 2, \ldots x_1$$

$$x_1 = 1, 2, 3, 4, 5$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு) என்றால்,

(i) $E(X_2)$

(ii) $E(X_2/x_1)$

இவற்றைக் காணவும்.

7-5. பாய்சான் பரவல் (Poisson Distribution)

வெற்றியின் ஊக அளவு p (அல்லது q) மிகச் சிறிதாயிருந்து, n-ன் மதிப்பு மிக அதிகமாக இருந்து அதே சமயம் $np = \lambda$ நிலையான எண் ஆக இருந்தால், ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்சான் பரவலை அணுகுகிறது எனக் கூறலாம்.

X மாறியின் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots 2, \ldots \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்.)

என்றவாறு இருப்பின், X மாறி ஒரு பாய்சான் மாறி என வழங்கப்படும். X மாறி ஒரு பாய்சான் பரவலில் அமைந்துள்ளது.

$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^r}{\gamma!} + \ldots \infty$ என்று நாம் அறிவோம்.

ஆகவே, $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

$$= e^{-\lambda} . \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} . e^{\lambda} = 1$$ என்பதால்.

$f(x)$ ஓர் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

இங்கு x தனித்த வகை ராண்டம் மாறி.

இப்போது ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்து எவ்வாறு பாய்சான் பரவல் கிடைக்கிறது என்று ஆராய்வோம்.

ஈருறுப்புப் பரவலில் x வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவு

$$f(x) = P_r(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$\lambda = np$ என்பதால், $p = \frac{\lambda}{n}$.

$$\therefore \quad P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}{n^x} \frac{n!}{(n-x)!}$$

$n \to \infty$ எனும் போது,

$$\lim_{n \to \infty} P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \cdot \frac{1}{n^x} \cdot \frac{n!}{(n-x)!} \right]$$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ என்று எக்ஸ்பொனன்ஷியல் தேற்றம் மூலமாக நாம் அறிவோம்.

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = (1 - 0)^{-x} = 1$, ஏனெனில் $\frac{\lambda}{n} \to 0$.

எனவே $\lim_{n \to \infty} P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$.

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n^x} \cdot \frac{n!}{(n-x)!} \right]$$

இங்கு $[n!]$ -க்கான 'ஸ்டர்லிங்'கின் தோராய சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$n! \doteqdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+1/2}.$$

$$\lim_{n \to \infty} P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+1/2}}{n^x \cdot \sqrt{2\pi}\, e^{-(n-x)} \cdot (n-x)^{n-x+1/2}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

(தொடர்ச்சி அடுத்தபக்கம்)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\cdot e^{-n}\cdot n^{n+1/2}}{n^{x}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-n}\cdot e^{x}\, n^{n+1/2}\cdot n^{-x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{1/2-x}}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x}\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-x+1/2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\cdot\frac{1}{e^{x}\cdot e^{-x}\cdot 1}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},$$

(x முடிவுடையதாக இருப்பதால்)

ஆகவே 0, 1, 2 ... வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவுகள் முறையே $e^{-\lambda}$, $e^{-\lambda}\lambda$, $e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}$, ... ஆகும்.

இதையே

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x=0,1,2\ldots\ \lambda>0$$

$$=0,\ \text{(மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்)}$$

என வழங்குகிறோம்.

ஆதலால் ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல், மிகச் சிறிய p, மிகப் பெரிய n, அதே சமயம் $np=\lambda$ ஒரு நிலை எண் என்றால், பாய்சான் பரவலை அணுகுகிறது என விளக்கப்பட்டது. பாய்சான் பரவல் λ என்ற ஒரே ஒரு பண்பளவைக் கொண்டுள்ளது.

பாய்சான் மாறிகளின் எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) அச்சில் வெளிவந்த ஒரு புத்தகத்தின் ஒரு பக்கத்தில் காணப்படும் அச்சுப் பிழைகள்.

(2) நூறு ஆணிகள் கொண்ட ஒரு பெட்டியில் காணப்பட்ட சரியில்லாத (குறையுள்ள) ஆணிகளின் எண்ணிக்கை.

(3) ஒரு நூதன (அதிசயமான) வியாதியால் ஓர் ஊரில் குறிப்பிட்ட வருடத்தில் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

(4) மாரடைப்பினுல், t காலத்தில் ஏற்பட்ட சாவுகளின் (தற்கொலைகளின்) எண்ணிக்கை.

(5) t நேரத்தில், ஒரு குறிப்பிட்ட தெருவைக் கடந்து செல்லும் ஊர்திகளின் எண்ணிக்கை முதலியன.

பாய்சான் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x).$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (\lambda e^{t})^{x}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{t}}$$

$$= e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

எனவே, எல்லா மெய்யான t மதிப்புகளுக்கும்

$$M(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)} \text{ ஆகும்.}$$

$$M'(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)} (\lambda e^{t})$$

$$X\text{-ன் சராசரி } \mu = E(X) = M'(0) = e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda$$

$$= 1 \cdot \lambda = \lambda$$

$$M''(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)} \cdot (\lambda e^{t})(\lambda e^{t}) + \lambda e^{t} \cdot e^{\lambda(e^{t}-1)}.$$

$$M''(0) = e^{\lambda(1-1)} \lambda \cdot 1 \cdot \lambda \cdot 1 \cdot + \lambda \cdot 1 \cdot e^{\lambda(1-1)}$$

$$= \lambda^2 + \lambda.$$

$$\therefore \quad \mu_2' = \lambda^2 + \lambda$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$\therefore$ X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = \lambda$

எனவே,

பாய்சான் பரவல்களில் சராசரியும் மாறுபாடும் $(\mu = \sigma^2)$ சமமானவை.

தி. உ. சார்பலன் மூலம் μ_3, μ_4ஐயும் கண்டுபிடித்து β_1, β_2, γ_1, γ_2 இவற்றின் மதிப்புகளையும் எழுதலாம்.

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2} = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{np}} \to 0,$$

($n \to \infty$ எனும் போது)

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 3 + \frac{1}{\lambda} - 3 = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{np} \to 0 \qquad (\quad ,, \quad)$$

எனவே, $n \to \infty$ எனும் போது, $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$.

அதாவது X மாறி ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும்.

மாதிரி 5 :

ஒரு பாய்சான் ராண்டம் மாறி X-க்கு

$P_r(X=1) = P_r(X=2)$ என்றால்,

$P(X=4)$ அளவைக் கண்டு பிடி.

$X \to P(\lambda)$ என்றால்,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

$= 0$, (மற்ற மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்)

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!} = \lambda \cdot e^{-\lambda}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2} = \frac{\lambda}{2} \cdot P(X=1)$$

$P(X=2) = P(X=1)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே,

$$\frac{\lambda}{2} \cdot P(X=1) = P(X=1).$$

$$\therefore \lambda = 2$$

$$\text{ஆகவே } f(x) = \frac{e^{-2}\, 2^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2 \ldots \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).

$$\text{இங்கு } P_r(X=4) = \frac{e^{-2}\, 2^{4}}{4!} = \frac{e^{-2} \cdot 16}{24} = \frac{2}{3} \cdot e^{-2}$$

ஆகிறது.

பாய்சான் பரவலைக் பொருத்துதல்

கீழ்க்கண்ட ஒரு மாறியின் பரவலுக்கு, ஒரு **பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி,** எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

x	0	1	2	3	4	5	மொத்தம்
f	237	127	35	1	0	0	400

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{127 + 70 + 3}{40} = 0.50 = \lambda$$

x–ன் மாறி ஒரு பாய்சான் மாறியானல், x–ன் (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.50}(0.50)^{x}}{x!},$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

$$p(x+1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{\lambda}{x+1} \cdot p(x).$$

$f(x) = N \cdot p(x)$ என்றால்

$f(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot f(x)$ ஆகும்.

$$\therefore f(x) = 400\left[\frac{e^{-0.5}(0.5)^{x}}{x!}\right]$$

$$f(0) = 400 \left[e^{-0.5} \right] = 400 \times 0.6065 = 242.63 \simeq 243,$$

$$f(1) = \frac{\lambda}{x+1} . f(0) = \frac{0.5}{1} f(0) = \frac{242.63}{2}$$

$$= 121.30 \simeq 121$$

$$f(2) = \frac{0.5}{2} . f(1) = \frac{121.30}{4} = 30.32 \simeq 30.$$

$$f(3) = \frac{0.5}{3} . f(2) = \frac{30.32}{6} = 5.05 \simeq 5.$$

$$f(4) = \frac{0.5}{4} . f(3) = \frac{5.05}{8} = 0.64 \simeq 1$$

$$f(5) = \frac{0.5}{5} . f(4) = \frac{0.64}{10} = 0.064 \simeq 0.$$

எனவே, $\sum_{x=0}^{5} f(x) = 400$

எனவே, கண்டு அறிந்த அலைவெண்களையும் எதிர்பார்க்கத் தக்க அலைவெண்களையும் அட்டவணைப்படுத்தி தீர்வு காணலாம்.

கண்டறிந்த அலைவெண்	237	127	35	1	0	0	400
எதிர்பார்க்கத் தக்க அலைவெண்	243	121	30	5	1	0	400

பாய்சான் பரவலின் கூட்டல் நியதி (Additive property)

X_1, X_2 இரு மாறிகளும் சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகளாக இருக்கட்டும். இவற்றின் சராசரிகள் முறையே λ_1, λ_2 என்றால்,

(X_1+X_2) என்ற மாறி $(\lambda_1+\lambda_2)$ சராசரியைக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் மாறியே யாகும்.

$$X_1 \rightarrow p(\lambda_1)$$

$$X_2 \rightarrow p(\lambda_2)$$

X_1ன் தி.உ.சார்பலன் $M_{X_1}(t)$

$$= e^{\lambda_1 (e^t-1)}$$

X_2-ன் தி.உ.சார்பலன் $M_{X_2}(t) = e^{\lambda_2 (e^t-1)}$

X_1, X_2 இரண்டும் சார்பற்றவையாதலால்,

$$M_{X_1+X_2}(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right]$$

$$= E\left[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}\right]$$

$$= E\left[e^{tX_1}\right] \cdot E\left[e^{tX_2}\right]$$

$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

$$= e^{\lambda_1(e^t-1)} \, e^{\lambda_2(e^t-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

வலப்பக்கம் ஒரு பாய்சான் பரவலின் தி.உ.சார்பலனாக உள்ளது. எனவே (X_1+X_2) மாறியானது, $(\lambda_1 \lambda_2)$ ஐச் சராசரியாகக் கொண்டஒரு பாய்சான் பரவல் என நிரூபணமாகிறது.

இதையே நீட்டித்தால் $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்ற n சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகள் முறையே $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ என்ற சராசரியுடனிருந்தால்,

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \text{ மாறியானது } \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \text{ ஐச் சராசரியாகக்}$$

கொண்ட ஒரு பாய்சான் மாறியாகும்

பாய்சான் பரவலின் முகடு

$f(x)$-ன் அடுத்தடுத்த (Consecutive) மதிப்புக்களின் விகித மானது $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ என்றால், X பாய்சான் மாறிக்கான

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}/(x+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!} = \frac{\lambda}{x+1}$$

இங்கு $\lambda \leq x+1$ என்றால், $f(x+1) \leq f(x)$.

இதேபோல $$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!}{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}/(x-1)!} = \frac{\lambda}{x}$$

இங்கு $\lambda \geq x$ என்றால், $f(x) \geq f(x-1)$.

∴ முகடு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r-1}}{(r-1)!} \leq \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} \geq \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r+1}}{(r+1)!}$$

இதைத் தீர்வு கண்டால், $r \leq \lambda$, $r+1 \geq \lambda$ என்று கிடைக் கிறது. அதாவது $\lambda-1 \leq r \leq \lambda$ ஆகும். λ ஒரு முழு எண் இல்லை என்றால், $(\lambda-1)$-க்கும் λ-க்கும் இடையினுள்ள முழு எண் தான் ''முகடு'' ஆகும். λ ஒரு முழு என்றால், $(\lambda-1)$-க் கும் λ-க்குமான ஊக அளவுகள் சமமானதால், எதைவேண்டு மானாலும் முகடாகக் கருதலாம். இங்கு 'இரு முகடுகள்' உள்ளன.

X_1, X_2 இருமாறிகளும் சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகளாகவும் λ_1, λ_2 முறையே அவற்றின் சராசரிகளாகவும் இருந்தால், (X_1-X_2) ஒரு பாய்சான் மாறியாகாது.

ஏனெனில் (X_1-X_2)-ன் தி.உ. சார்பலை எடுத்துக் கொண் டால்

$$M_{X_1-X_2}(t) = M_{X_1+(-X_2)}(t)$$

$$= M_{X_1}(t).\quad M_{(-_1 X)}(t)$$

$$= M_{X_1}(t).\, M_{X_2}(-t)\ [\because M_{aX}(t) = M_X(at)$$

ஆகும்]

$$= e^{\lambda_1(e^t-1)}\ e^{\lambda_2(e^{-t}-1)}$$

$$= e^{\lambda_1(e^t-1) + \lambda_2(e^{-t}-1)}$$

இதை $e^{k(e^t-1)}$ என்ற பாணியில் எழுதமுடியாது. ஆகவே (X_1-X_2) ஒரு பாய்சான் மாறியல்ல என்று கூறுகிறோம்

மாதிரி 6:

ஒரு பாய்சான் பரவலுக்கு $X=1$, $X=2$ இரு இடங்களில் 'இரட்டை முகடு' உள்ளது என்றால், $X=1$ அல்லது 2 மதிப்பு களுக்கான ஊக அளவு யாது?

இரட்டை முகடுகள் $x = \lambda - 1$, $x = \lambda$ என்ற இரு இடங் களில் இருக்கும் என நாம் முன்னமேயே விளக்கினோம்.

எனவே $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ என்றால்

$$f(1) = f(2)$$

$$\therefore \frac{e^{-\lambda}.\ \lambda^{1}}{1!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}$$

$$1 = \frac{\lambda}{2};\quad \underline{\underline{\lambda = 2}}.$$

எனவே $f(x) = \dfrac{e^{-2}\, 2^{x}}{x!}$

$$P_r(X = 1 \text{ அல்லது } X = 2) = P_r(X = 1) + P_r(X = 2)$$

$$= e^{-2}.\ 2 + \frac{e^{-2}.\ 2^{2}}{2} = \underline{\underline{4\, e^{-2}}}$$

மாதிரி 7 :

X மாறி λ சராசரியைக் கொண்ட பாய்சான் மாறியானல் $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட பாய்சான் மாறி என்று நிரூபி. அதன் தி. உ. சார்பலனைக் கண்டு பிடித்து, $n \leftarrow \infty$ என்றால், இந்த தி. உ. சா. $exp\left[\frac{t^2}{2}\right]$ஐ அணுகுகிறது என்று நிரூபி.

$$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

$$E\ (Y) = \left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} E(X-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - \lambda) = 0.$$

$$V\ (Y) = E\left[\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\lambda} E(X-\lambda)^2 = \frac{1}{\lambda}. V\ (X) = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

X என்பது பாய்சான் மாறியானதால்,

$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட பாய்சான் மாறி.

Y-ன் தி. உ. சார்பலன்,

$$M_y(t) = E(e^{ty}) = E\left[e^{t\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right]$$

$$= e^{-\sqrt{\lambda t}} . E . \left(e^{\frac{tX}{\sqrt{\lambda}}}\right)$$

$$= e^{\sqrt{\lambda}.t} M_{\frac{X}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t} M_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$= e^{-\sqrt{\lambda}.t} e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)}$$

$$\left[\because \ M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \text{ ஆகும்.}\right]$$

ஆகவே $\log M_y(t) = -\sqrt{\lambda}\ t + \lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)$

$$= -\sqrt{\lambda}\ t + \lambda\left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\lambda} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{t^3}{\lambda^{3/2}} + \dots\right) 1\right]$$

$$= -\sqrt{\lambda}\,t + \sqrt{\lambda}t - + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{3!}\ \frac{t^3}{\sqrt{\lambda}} + \dots$$

எனவே $\lim\limits_{n\to\infty} \log M_y(t) =$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3!}\ \frac{t^3}{\sqrt{np}} + \dots\right]$$

$$= \frac{t^2}{2}. \qquad (\therefore \ \lambda = np)$$

எனவே $\log M_y(t) \to \frac{t^2}{2}$, $n \to \infty$ எனும் போது,

$$\therefore \quad M_y(t) \to e^{t^2/2}$$

மாதிரி 8 :

ஈருறுப்புப் பரவலின் முதல் 4 மையத் திருப்புத்திறன்களிலிருந்து பாய்சான் பரவலின் முதல் நான்கு மையத் திருப்புத் திறன்களைக் கண்டுபிடி.

ஈருறுப்புத் திருப்புத் திறன்களின் முதல் 4 திருப்புத்திறன் களாவன :

$\mu_1 = 0$, சராசரி $\mu_1' = n\,p$

$\mu_2 = n\,p\,q$

$\mu_3 = n\,p\,q\,(q - p)$

$\mu_4 = 3\,n^2\,p^2\,q^2 + n\,p\,q\,(1 - 6\,p\,q)$

கீழே கண்ட நிபந்தனைகளுடன், ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு பாய்சான் பரவலாகிறது என நாம் அறிவோம்.

(i) $n \to \infty$

(ii) $p \to 0$

(iii) $n\,p = \lambda$, ஒரு நிலையெண்.

இவற்றைக் கொண்டு பாய்சான் பரவலின் முதல் 4 மையத் திருப்புத்திறன்களைக் காணலாம்.

$\mu_1 = 0$

சராசரி $\mu_1' = \lim\limits_{n \to \infty} n\,p = \lambda$.

$\mu = \lim\,(n\,p\,q)$

$= (\lim \,.\, n\,p)\;(\lim\,.\,q) = \lambda\,.\,1 = \lambda$.

$\mu_3 = \lim\,[n\,p\,q\,(q - p)]$

$= [\lim n\,p\,q]\,.\,[\lim\,(q - p)]$

$= \lambda\,.\,1\,.\,[1 - 0] = \lambda$.

$\mu_4 = \lim\,[3\,(n\,p)^2\,.\,q^2 + n\,p\,.\,q\,(1 - 6\,p\,q)]$

$= 3\,\lambda^2\,.\,1 + \lambda\,.\,1\,.\,(1 - 6\,.\,0\,.\,1) = 3\,\lambda^2 + \lambda$.

$$\left[\because\; p = \frac{\lambda}{n} \to 0 \qquad q = 1 - \frac{\lambda}{n} \to 1.\right]$$

மாதிரி 9:

X_1, X_2 இரு மாறிகளும் சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகளானால் $(X_1 + X_2)$ கொடுக்கப்பட்டபின், X_1-ன் நிபந்தனைப்பரவல் ஓர் ஈருறுப்புப்பரவல் என நிரூபி.

X_1, X_2 மாறிகள், λ_1, λ_2 ஐச் சராசரியாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற பாய்சான் மாறிகளானால்,

$(X_1 + X_2)$ மாறியும் $(\lambda_1 + \lambda_2)$ சராசரியுடன் கூடிய ஒரு பாய்சான் மாறியாகும்.

$$f(X_1 = x_1 / X_1 + X_2 = n) = \frac{f(X_1 = x_1, X_1 + X_2 = n)}{f(X_1 + X_2 = n)}$$

ஆகும்.

அதாவது

$$P_r[X_1 = x_1 / X_1 + X_2 = n] = \frac{P_r[X_1 = x_1 ; X_2 = n - x_1]}{P_r[X_1 + X_2 = n]}$$

X_1, X_2 இரண்டும் சார்பற்றவையாதலால்,

$$P_r[X_1 = x_1 / X_1 + X_2 = n] = \frac{\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \cdot \dfrac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-x_1}}{(n-x_1)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-x_1}$$

$$= \binom{n}{x_1} p^{x_1} \cdot q^{n-x_1}$$

இங்கு $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$; $q = 1 - p = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

எனவே $X_1 + X_2 = n$ எனத்தரப்பட்டபின் X_1ன் நிபந்தனைப் பரவல் n, $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ என்ற பண்பளவைகளைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாகிறது.

மாதிரி 10:

காரை (ஊர்தியை) வாடகைக்கு விடும் நிறுவனம் ஒன்று தினமும் 2 கார்களை வாடகைக்கு விடுகிறது. ஒவ்வொரு நாளும் 1 காருக்கான தேவைகளின் எண்ணிக்கை (No. of demands). 1.5 என்ற சராசரியைக் கொண்ட ஒரு பாய்சான் பரவல் என்றால்,

(i) ஒரு காரும் உபயோகமாகாத நாள்கள் விகிதத்தையும்,

(ii) சில தேவைகள் மறுக்கப் படக்கூடிய நாள்கள் விகிதத்தையும் கணக்கிடுக.

$$\text{இங்கு } f(x) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}$$

(i) ஒரு காரும் உபயோகமாகத நாள்களின் விகிதம்

$$= P_r(x = 0) = e^{-1 \cdot 5}$$

(ii) சில தேவை மறுக்கப் படக் கூடிய நாள்களின் விகிதம்

$$= P_r[X > 2]$$

$$= 1 - P_r[X \leq 2]$$

$$= 1 - \{P_r[X = 0] + P_r[X = 1] + P_r[X = 2]\}$$

$$= 1 - e^{1.5}\left[[1 + 1.5 + \frac{1(.5)^2}{2}\right]; \left(e^{-1 \cdot 5} = 0.2231\right)$$

$$= 0.1931.$$

மாதிரி 11:

ஓர் ஆஸ்பத்திரியில் 50 நோயாளிகள் தினமும் அனுமதிக்கப்படுகின்றனர். சராசரியாக, நூற்றில் மூவருக்குச் சிறப்பு வசதிகளுடன் கூடிய சிறப்பு அறை (ஸ்பெஷல் அறை) தேவைப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட நாள் காலையில், அப்படிப்பட்ட மூன்று அறைகள் காலியாக உள்ளன எனத் தெரிகிறது. 50 நோயாளிகள் அனுமதிக்கப்படுவார்கள் என்றால், மூன்றுக்கு மேற்பட்ட நபர்கள் சிறப்பு அறைகளை நாடுவதற்கான ஊக அளவு யாது?

சிறப்பு அறையை ஒருவன் விரும்புவதற்கான ஊக அளவு

$$p = \frac{3}{100} = 0.03.$$

$$n = 50 \; ; \; \lambda = np = 50 \times 0.03 = \underline{1.5}$$

p குறைவாக இருப்பதால், பாய்சான் பரவலை உபயோகிக்கிறோம்.

x நோயாளிகள் சிறப்பு அறைகளை விரும்புவதற்கான

ஊக அளவு $P_r \; (X = x) \; \frac{e^{-1.5}}{x!} (1.5)^x , \quad x = 0,1,2,\ldots$

மூன்றுக்கு மேற்பட்ட நோயாளிகள் சிறப்பு அறையை விரும்புவதற்கான ஊக அளவு $= P_r \, [X > 3]$

$$P_r \, [X > 3] = 1 - P_r \, [X \leq 3]$$

$$= 1 - P_r \, (X = 1) - P_r \, (X = 2) - P_r (X = 3) - P_r \, (X = 0)$$

$$= 1 - e^{-1.5} \sum_{x=0}^{3} \frac{(1.5)^x}{x!} \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி III.

(1) பாய்சான் பரவலுக்கான மறுதரவு தத்துவத்தை நிரூபி.

$$\mu_{r+1} = m \left[r. \, \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dm} \right]$$

இதன் மூலம் பரவலின் கோட்ட அளவையும் தட்டையளவையும் கண்டுபிடி.

(2) டாக்சி டிரைவர்களால் ஓர் ஆண்டில் ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை சரசாரி 3 ஐக் கொண்ட பாய்சான் பரவலைச் சார்ந்து இருந்தால், ஒரு 1000 டாக்சி டிரைவர்களில் ஓர் ஆண்டில் ஒரு விபத்துக்கும் காரணமாகாத டிரைவர்களின் எண்ணிக்கையையும், 3-க்கு மேற்பட்ட விபத்துகளுக்குக் காரணமான டிரைவர்களின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கிடுக.

(3) λ சராசரியைக் கொண்ட ஒரு X மாறியின் பாய்சான் பரவலின்

(i) $E(X^2) = \lambda . E(X+1)$

(ii) $\lambda = 1$ என்றால், $E[|X-1|] = \frac{2}{e}$ என்றும் நிரூபி.

(மைசூர் B.Sc. 1969)

(4) $i = 1, 2, \ldots n$ என்றவாறு, X_i சார்பற்ற மாறிகள் λ_i சராசரியைக் கொண்ட பாய்சான் மாறிகளாயின், $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ என்ற மாறி $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ஐச் சராசரியாகக் கொண்ட பாய்சான் மாறி என நிரூபி.

(அண்ணுமலை M.Sc., 1962)

7–6. எதிர்மறை ஈருறுப்புப்பரவல் (Negative Binomial Distribution)

ஈருறுப்புப்பரவலில் சில மாற்றங்களுடன் இங்கு ஆராய்ந்தால், 'எதிர்மறை ஈருறுப்புப்பரவல்' கிடைக்கிறது.

ஒரு சோதனையின் n முயற்சிகளைத் தொடர்ச்சியாக ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றும் சார்பற்றவை.

(ii) முயற்சிக்கு முயற்சி வெற்றியின் ஊக அளவு p ஆனது ஒரு நிலை எண் என்று அனுமானித்தால்,

$(x+r)$ முயற்சிகளில் சரியாக r வெற்றிகளும் x தோல்விகளும் பெறுவதற்கான ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x,r)$ என்றால்,

$$f(x,r) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r . q^x, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0, \text{ (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்).}$$

சரியாக x வெற்றிகள் பெற வேண்டுமாயின், கடைசி முயற்சி ஒரு வெற்றியாக அமைய வேண்டும். இதற்கான ஊக

அளவு p ஆகும். ஏனெனில், அத்துடன் நம் முயற்சியை நாம் நிறுத்திக் கொள்கிறோம். அதாவது மீதமுள்ள $(x+r-1)$ முயற்சிகளில் $(r-1)$ வெற்றிகள் ஏற்படவேண்டும்.

$$\text{அதற்கான ஊக அளவு} = \binom{x+r-1}{r-1} p^{r-1} q^{x} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $(x+r)$ முயற்சிகளில் r வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவு

$$P_r(x,r) = \left[\binom{x+r-1}{r-1} p^{r-1} q^{x} \right] . [p]$$

$$= \binom{x+r-1}{r-1} p^{r} . q^{x}.$$

$$\text{இங்கு } \binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x}$$

$$= \frac{(x+r-1)(x+r-2) \cdots\cdots (r+1) r.}{x!}$$

$$= (-1)^{x} \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\cdots\cdots[-r-(x-2)][-r-(x-1)]}{x!}$$

$$= (-1)^{x} \binom{-r}{x}$$

$$\text{எனவே } f(x,r) = (-1)^{x} \binom{-r}{x} p^{r} q^{x}.$$

$$= \binom{-r}{x} p^{r} (-q)^{x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} f(x,r) = p^{r} . \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^{x}$$

$$= p^{r} (1-q)^{-r} = p^{r} p^{-r} = 1.$$

ஆகவே $f(x, r)$ என்பது x என்ற தனித்த எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன். இந்த x-ன் பரவலின் 'பாஸ்கலின் பரவல்' என்றும் வழங்கலாம்.

எதிர் மறை ஈருறுப்புப்பரவலின் தி.உ. சார்பலன்.

$$M_X(t) = E(\epsilon^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x,r)$$

$$p = \frac{1}{Q}, \quad q = \frac{P}{Q} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$1 = p+q = \frac{1}{Q}+\frac{P}{Q} = \frac{1+P}{Q}$$

$$\therefore \; 1+P=Q \text{ எனவே } \underline{Q-P=1}$$

$$\text{எனவே } f(x,r) = \binom{x+r-1}{r-1} Q^{-r} \left(\frac{P}{Q}\right)^x$$

$$= \binom{-r}{x} Q^{-r} \left(\frac{P}{Q}\right)^x$$

$$\text{மேலும் } M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x,r)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} Q^{-r} \left(\frac{-P e^{t}}{Q}\right)^x$$

$$= [Q-Pe^t]^{-r}.$$

இப்போது $\mu' = M'(0)$

$$M'(t) = Pe^t \cdot r\,(Q-Pe^t)^{-r-1}$$

$$\therefore M'(0) = rP.1.1. = rP = r(1+Q)$$

$$= r\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{r(p+1)}{p}.$$

$\therefore$ X-ன் சராசரி $\mu = \mu \dfrac{r(P+1)}{P}$

$$M''(t) = rP.\, e^{t}(-r-1)\,(Q-P\,e^{t})^{-r-2}\,(-P\,e^{t})$$

$$+\,(Q-Pe^{t})^{-r-1}\; rP\,e^{t}$$

$$\therefore \mu_2' = M''(0) = r\,P.\,e^{0}.\,(-r-1)\,(Q-Pe^{0})^{r-2}.(-P.e^{0})$$

$$+\,(Q\,Pe^{0})^{-r-1} \qquad r\,P\,e^{0}$$

$$= r\,P\,(r+1)\,P + rP\cdot = r(r+1)\,P^{2} + rP.$$

$$\mu_2 = \mu_2 - \mu^{2}$$

$$= r(r+1)\,P^{2} + rP - rP^{2}.$$

$$= r\,P^{2} + rP = rP(1+P) = rPQ$$

$$= r\,\frac{P+1}{P}\;\;\frac{1}{P}$$

$$= r\,\frac{P+1}{P^{2}}$$

$Q > 1$ என்பதால், $rPQ > rP$.

அதாவது x-ன் மாறுபாடு$>$X-ன் சராசரி. இது இப் பரவலின் ஒரு முக்கிய விளைவாகும்.

7–7. ஜியோமிதிப் பரவல்

எதிர்மறை ஈருறுப்புப்பரவலில் $k=1$ என்றால், அது ஜியோமிதிப் பரவலாகிறது.

ஒரு சோதனையில் முதல் வெற்றிக்கு முந்திய தோல்விகளின் எண்ணிக்கை x எனில், x என்ற ராண்டம் மாறியின் வாக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$f(x) = q^x p, \; x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \; q = 1 - p$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புக்களில் எல்லாம்) என்றால் $\sum f(x) = \sum q^x p = p(1-q)^{-1} = 1$. எனவே $f(x)$ ஓர் ஊ. அ. சார்பலன் தான். இப்பரவல் p என்ற ஒரே ஒரு பண்பளவைக் கொண்டுள்ளது.

X மாறியின் தி.உ. சார்பலன்

$$M(t) = \sum e^{tx} q^x \cdot p = p \sum (qe^t)^x$$

$$\therefore M(t) = p.\,(1 - qe^t)^{-1}$$

$$M'(t) = -p\,(1 - qe^t)^{-2}\,(-qe^t)$$

$$M'(o) = -p\,(1-q)^{-2}\,(-q)$$

$$= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$. எனவே X-ன் சராசரி $= \frac{q}{p}$

X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

$$= M''(o) - \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

$$M''(t) = \left[\frac{d}{dt} M'(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[pqe^t\,(1-qe^t)^{-2}\right]_{t=o}$$

$$= pq\Big[e^t\,(-2)\,(1-qe^t)^{-3}\,(-qe^t)$$

$$+ e^t\,(1-qe^t)^{-2}\Big]$$

$$\therefore M''(o) = pq\left[2q\,(1-q)^{-3} + (1-q)^{-2}\right]$$

$$= pq\left[\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right]$$

$$= 2\,\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

எனவே X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = \left(\frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^2$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q}{p}\left[\frac{q}{p} + 1\right]$$

$$= \frac{q}{p^2}(q+p) = \frac{q}{p^2}$$ ஆகும்.

7-8. ஒரு சீரான பரவல் அல்லது செவ்வகப் பரவல் (Uniform distribution or Rectangular Distribution)

$X_1, X_2 \ldots X_n$ என்ற n ராண்டம் மாறிகள் $\frac{1}{n}$ என்ற அதே ஊக அளவுடன் இருப்பின், X-ன் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்). இப்போது ஒரு சீரான பரவலில் அமைகிறது எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு காசைச் சுண்டும் போதும் ஒரு பகடையை உருட்டும்போதும் ஏற்படுகிற விளைவுகள் ஒரு சீரான பரவலில் அல்லதுசெவ்வகப் பரவலில் அமைந்திருக்கும்.

மாதிரி 12 :

X_1, X_2 என்ற இரு சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் ஒரே ஜியோமிதிப் பரவலைப் பெற்றிருப்பின், $X_1 + X_2 = k$ எனத் தரப்பட்டிருந்தால் X_1-ன் நிபந்தனைப் பரவல் ஒரு சீரான பரவல் என்பதை நிரூபி.

X_1, X_2-ன் ஊ. அ. சார்பலன்கள் முறையே $f(x_1)$, $f(x_2)$ என்றால்,

$f(x_1) = f(x_2) = p \cdot q^r, \quad r = 0, 1, 2, 3 \ldots X_1 + X_2 = k$ எனத் தரப்பட்ட பின்,

$X_1 = s$ என்பதற்கான நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x_1/x_1 + x_2) = \frac{f(x_1, x_1 + x_2)}{f_1(x_1 + x_2)}$$

அதாவது, ஊக அளவில் எழுதினல்,

$$P_r[X_1 = s/X_1 + X_2 = k] = \frac{P_r[X_1 = s, X_1 + X_2 = k]}{P_r[X_1 + X_2 = k]}$$

$$= \frac{P_r[X_1 = s, X_2 \ X_2 = k - s]}{\sum_{t=0}^{k} P(X_1 = t, X_2 = k - t)}$$

$$= \frac{P_r(X_1 = s) \cdot P_r(X_2 = k - s)}{\sum_{t=0}^{k} P_r(X_1 = t). P_r(X_2 = k - t)}$$

(ஏனெனில் X_1, X_2 இரண்டும் சார்பற்றவை)

ஆகவே,

$$P_r(X_1 = s/X_1 X_2 = k) = \frac{p \cdot q^s \cdot p \cdot q^{k-s}}{\sum_{t=0}^{k} [p\, qt \cdot p \cdot q^{k-t}]}$$

$$= \frac{p^2 q^k}{\sum_{t=0}^{k} p^2 q^k} = \frac{p^2 q^k}{(k+1) p^2 q^k}$$

$$= \frac{0}{k+1}, s = 0, 1, 2 \ldots$$

ஆகவே $X_1 + X_2 = k$ எனத் தரப்பட்ட பின், X_1-ன் நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x_1/x_1 + x_2) = \frac{1}{k+1}, \quad s = 0, 1, 2 \ldots$$

$$= 0, \text{ (மற்ற இடங்களில்).}$$

இது ஒரு சீரான (செவ்வகப்) பரவல் ஆகும்.

7-9. ஹைபர் — ஜியோமிதிப் பரவல் (Hyper—Geometric Distribution)

ஒரு பைக்குள் a சிவப்பு, b கறுப்புப் பந்துகள் இருந்து, நாம் ராண்டம் முறையில் n பந்துகளை (பையினுள் திரும்பப் போடாத வாறு) பையிலிருந்து எடுத்தால், அவற்றில் x சிவப்பு பந்துகள் இருப்பதற்கான ஊக அளவு,

$$h[r; n, a, b] = P_r[X = x] = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}, x = 0, 1, 2 \ldots n$$

$$= 0, \text{(மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்)}$$

இந்த ஊக அளவு அட்டத்திச் சார்பலனைக் கொண்ட x மாறி ஒரு 'மட்டு மீறிய ஜியோமிதிப் பரவலி'ல் அமைகிறது எனக் கூறலாம்.

a சிவப்பு பந்துகளில் x சிவப்பு பந்துகளை $\binom{a}{x}$ முறைகளிலும், b கறுப்புப் பந்துகளில் $(n - x)$ கறுப்பு பந்துகளை $\binom{b}{n-x}$ முறைகளிலும் எடுக்க முடியும். ஆகவே, n பந்துகளில் r சிவப்பு பந்துகளாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவு $= \binom{a}{x}\binom{b}{n-x}$ ஆகும்.

இங்கு $0 \le x \le n$, $0 \le x \le a$, $0 \le n - x \le b$ என்ற சமமின்மைகள் விளக்கப்படுகின்றன.

மட்டுமீறிய ஜியோமிதிப் பரவலின் திருப்புத்திறன்கள்

$$E(X) = \mu_1' = \sum_{x=0}^{n} x. \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^{n} x \frac{a!}{x!\,(a-x)!} \binom{b}{n-x}$$

$$= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^{n} \frac{(a-1)!}{(x-1)!\,(a-x)!} \cdot \binom{b}{n-x}$$

$$= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{a-1}{x-1} \binom{b}{n-x}$$

$$= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^{n-1} \binom{a-1}{y} \binom{b}{n-y-1}$$

$$[\because \; x-1 = y \to (0, n-1)]$$

$$= \frac{a}{\binom{a+b}{n}} \cdot \binom{a+b-1}{n-1}$$

எப்படியெனில்,

$(1+x)^{a} (x+1)^{b} = (1+x)^{a+b}$ சமன்பாட்டில் x^{n} –ன் கெழுக்களை இரு பக்கமும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{a}{r} \cdot \binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}$$

ஆகவே $E(X) = n \cdot \frac{a}{a+b}$

சிவப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான ஊக அளவே, வெற்றியின் ஊக அளவு p எனில், $p = \frac{a}{a+b}$ ஆகும்.

எனவே $E(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} = n\,p.$

X–ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= E(X^2) - n^2 p^2.$

$E(X^2) = [X(X-1)] + E(X)$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$$

$$= \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{n}} \cdot \sum_{x=2}^{n} \frac{(a-2)!}{(x-2)!\,(a-x)!}\binom{b}{n-x}$$

$$= \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{n}} \sum_{y=0}^{n-2} \binom{a-2}{y} \cdot \binom{b}{n-y-2}$$

[ஏனெனில் $x-2=y \rightarrow (0, n-2)$]

$$= \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{n}} \binom{a+b-2}{n-2}$$

$$= \frac{a(a-1) \cdot n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

எனவே $E(X^2) = \dfrac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

$$+ n \cdot \frac{a}{a+b}$$

மாறுபாடு $\sigma^2 = E(X^2) - n^2 \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$

$$= \frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$+ n\frac{a}{a+b} - n^2 \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{na}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

$$[(a-1)(n-1)(a+b) + (a+b)(a+b-1) - na(a+b-1)]$$

$$= \frac{n\,a}{(a+b)^2\,(a+b-1)} \left[(a+b)(n\,a-a-n+1) + (a+b)(a+b-1) - n\,a\,(a+b-1)\right]$$

$$= \frac{n\,a}{(a+b)^2 \cdot (a+b-1)} \cdot \left[-n\,a - n\,b + a\,b + b^2 + n\,a\right]$$

$$= \frac{n\,a\,b\,(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

$$= \frac{n\,a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1}$$

$$= npq \cdot \left(\frac{a+b-n}{a+b-1}\right).$$

எனவே X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = npq \cdot \left(\frac{a+b-n}{a+b-1}\right).$

$a+b=c$ ஆனது முடிவிலியை அணுகும்போது, மட்டுமீறிய ஜியோமுதிப்பரவல் ஓர் ஈருறுப்புப்பரவலை அணுகுகிறது. எப்படியென்றால்,

$$f(x) = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{n-x}}{\binom{c}{n}}$$

$$= \frac{a!}{x!\,(a-x)!} \cdot \frac{b!}{(n-x)!\,(b-n+x)!} \cdot \frac{n!\,(c-n)!}{c!}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-x+1)}{x!} \cdot \frac{b(b-1)(b-2)\ldots.(b-n+x+1)}{(n-x)!}$$

$$\times \frac{n!}{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-n+1)!}$$

$$\therefore f(x) = \binom{n}{x} \cdot \frac{\left\{\frac{a}{c}\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{2}{c}\right)\cdots\left(\frac{a}{c}-\frac{x-1}{c}\right)\right\} \left\{\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{b}{c}-\frac{2}{c}\right)\cdots\left(\frac{b}{c}-\frac{n-x-1}{c}\right)\right\}}{\frac{c}{c}\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{2}{c}\right)\left(1-\frac{3}{c}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{c}\right)}$$

இங்கு $\frac{a}{c} = p, \; 1 - \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = q$ என்றும் கொள்க

c ஒரு முடிவிலியை அணுகினால்,

$$\lim_{c \to \infty} \left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c}\right) = p \cdot \quad \text{இங்கு} \quad \frac{i}{c} \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

அதனால்,

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot \underbrace{p \cdot p \ldots\ldots p}_{x \text{ தடவைகள்}} \cdot \underbrace{q \cdot q \ldots\ldots q}_{(n-x) \text{ தடவைகள்}}$$

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

இது ஓர் ஈருறுப்புப்பரவலின் ஊ. அ. சார்பலனாகும்.

ஆகவே $c = a + b$ ஒரு முடிவிலியை அணுகும்போது, மட்டு மீறிய பரவல் ஒரு ஈருறுப்புப்பரவலை அணுகுகிறது.

மாதிரி 13 :

நூறு தக்காளிகள் கொண்ட ஒரு கூடையில் 20 அழுகிய (கெட்டுப்போன) தக்காளிகள் உள்ளன. ராண்டம் முறையில் (திரும்பவும் கூடையினுள் போடப்படாமல்) (without replacement), 15 தக்காளிகள் கூடையிலிருந்து பொறுக்கி எடுக்கப் பட்டால், அந்த மாதிரியில்

(i) சரியாக 2 அழுகிய தக்காளிகள் இருப்பதற்கான

(ii) குறைந்த பட்சம் 2 ,, ,, ,,

(iii) அதிக பட்சம் 2 ,, ,, ,,

ஊக அளவுகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

100 தக்காளிகளில், 80 நல்லவை, 20 கெட்டவை என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) (15-ல் 13 நல்லவை, 2 கெட்டவை)

அதாவது 80 நல்லவனவற்றில் 13-ம், 20 கெட்டவற்றில் 2-ம்

$$\text{கிடைப்பதற்கான ஊக அளவு} = \frac{\binom{20}{2}\binom{80}{13}}{\binom{100}{15}}$$

(ii) குறைந்த பட்சம் 2 என்ருல், மாதிரியில் எடுக்கப்பட்ட 15 தக்காளிகளில் அழுகியவற்றின் எண்ணிக்கை 2, 3, 4. ......, 14, 15 ஆகவும் இருக்கலாம்,

$$\text{அதற்கான ஊக அளவு} = \sum_{=2}^{15} \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$$

$$= \sum_{x=2}^{15} \frac{\binom{20}{x}\binom{80}{15-x}}{\binom{100}{15}}$$

$$= 1 - Pr\cdot(X=0,1)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{\binom{20}{x}\binom{80}{15-x}}{\binom{100}{15}}$$

$$= 1 - \left[\frac{\binom{20}{0}\binom{80}{15} + \binom{20}{1}\binom{80}{14}}{\binom{100}{15}} \right]$$

$$= 1 - \frac{\binom{80}{15} - 20 \cdot \binom{80}{14}}{\binom{100}{15}} \text{ ஆகும்.}$$

(iii) அதிகபட்சம் 2 அழுகியவை என்ருல் $x = 0, 1, 2$ என்று பொருள்.

$Pr\ [X = 0, 1,$ அல்லது $2]$

$$= \frac{\binom{20}{0}\binom{80}{15} + \binom{20}{1}\binom{80}{14} + \binom{20}{2}\binom{80}{13}}{\binom{100}{15}}$$

மாதிரி 14 :

நன்கு கலக்கப்பட்ட 52 சீட்டுக்களை உடைய ஒரு கட்டிலிருந்து (திரும்பச் சேர்க்காதவாறு) ராண்டம் முறையில் 2 சீட்டுக்கள் உருவப்பட்டால், 2 ஏஸ் (Ace) கிடைப்பதற்கான ஊக அளவு யாது ?

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் மொத்தமாக 4 Ace-கள் உள்ளன. ஆகவே 52 சீட்டுக்களை, 4 Ace-கள் ஒரு பகுதியாகவும், மீதி 48 (Ace அல்லாத) சீட்டுக்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் பிரிக்கலாம்.

$a = 4, \quad b = 48, \quad a + b = 52, \quad n = 2$

ஆகவே, 2 சீட்டுக்களும் Ace என்ருல், அதன் ஊக அளவு

$$Pr\ (X = 2) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{2-x}}{\binom{52}{2}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{0}}{\binom{52}{2}}$$

$$= \frac{4.3}{1.5} \cdot \frac{1.2}{51.52} = \frac{1}{221}.$$

பயிற்சி IV.

(1) ஓர் எதிர் மறை ஈருறுப்புப் பரவலுக்கான 'கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கத்தை' நிர்ணயிக்கவும்.

(2) ஒரு தம்பதி, ஓர் ஆண் மகவு தங்களுக்குப் பிறக்கும் வரை, குழந்தைகளை ஈன்றெடுக்க முடிவு செய்கின்றனர். அவர்களுக்கு உண்டாகும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் யாது? அவர்கள் குலத்தில் ஆண் மகவுக்கான ஊக அளவு $\frac{1}{2}$ என்றால், முதல் ஆண் மகவு பிறக்கும் முன்பாக எத்தனை குழந்தைகள் பெற வேண்டும் என்பதற்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவைக் கணக்கிடுக.

(3) 12 அம்பாஸிடர் கார்களையும், 8 பியட் கார்களையும் கொண்ட ஒரு வாடகை டாக்ஸி நிறுவனத்தில், 5 கார்கள் (ரிப்பேர்) பழுது என்றால், மேலும் அம்பாஸிடர் கார் பழுதாவதற்கான ஊக அளவும், பியட் கார் பழுதாவதற்கான ஊக அளவும் சமமாயின், அந்த ஐந்தில்

(i) மூன்று அம்பாஸிடர் 2 பியட் கார்கள் என்பதற்கான ஊக அளவு என்ன?

(ii) குறைந்தது 3 அம்பாஸிடர் கார்களாவது பழுதாக இருந்தால், அதற்கான ஊக அளவு என்ன?

(iii) எல்லா ஐந்து கார்களும் ஒரே வகையைச் சேர்ந்த (same make) தற்கான ஊக அளவையும் கணக்கிடு.

(4) ஒரு குறி பார்ப்பவரின் (நிமித்தகரின்) வருவதுரைத்தலின் ஊக அளவு 0.01 என்றால், அவரது 20ஆவது வருவதுரைத்தலானது 4ஆவது சரியான (நிகழ்ச்சி) சொல் என்றால் (4th Correct prediction), அதற்கான ஊக அளவைக் கண்டுபிடி.

(5) ஒரு நீச்சல்காரர், ஓர் ஏரியை முழுமையாக நீந்திக் கரை சேருவதுக்கான ஊக அளவு 0.4 என்றால்,

(i) 10ஆவது நீச்சல்காரர் ஏரியைக் கடக்கும் முதல் நபர் என்பதற்கான ஊக அளவு யாது?

(ii) அந்த 10ஆவது நீச்சல்காரர் 4ஆவது நபராக ஏரியைக் கடக்கிறார் என்பதற்கான ஊக அளவைக் கண்டுபிடி.

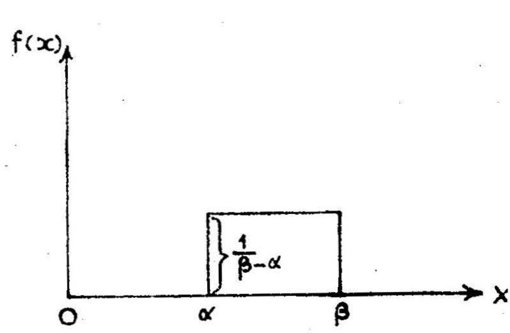
8. தொடர்ச்சிப் பரவல்கள்
(Continuous Distributions)

8–1. செவ்வகப் பரவல் (Rectangular Distribution)

தொடர்ச்சிப் பரவல்களின் சாதாரணமான ஒன்று ஒரு சீரான அல்லது செவ்வகப் பரவலாகும். X என்ற தொடர் ராண்டம் மாறியின் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \alpha < x < \beta, \quad \alpha > 0, \quad \alpha < \beta.$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்).



படம் 12.
செவ்வகப் பரவல்

இதை ஒரு சீரான பரவல், அல்லது செவ்வகப் பரவல் எனக் கூறுகிறோம்.

இப் பரவலுக்கு α, β என்ற இரு பண்பளவைகள் உள்ளன.

இவ்வரைப்படம் ஒரு செவ்வகத்தில் (நீண்ட சதுரத்தில்) உள்ளதாலேயே இதை ஒரு செவ்வகப் பரவல் என்கிறோம்.

திருப்புத்திறன்கள்

$$\mu_r' = E(x^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x^r \cdot \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x^r \cdot \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \frac{\beta^{r+1} - \alpha^{r+1}}{(\beta - \alpha)(r+1)}$$

எனவே $\mu_1' = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{(\beta - \alpha).\, 2} = \dfrac{\beta + \alpha}{2}.$

$$\mu_2' = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta - \alpha)} = \tfrac{1}{3}(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)$$

$\therefore$ X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = \dfrac{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}{3} - \dfrac{(\beta + \alpha)^2}{4}$

$$= \frac{4(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3(\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2)}{12}$$

$$= \frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2}{12} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

X-ன் திரள் பரவல் சார்பலன்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha}\Big[\, x \,\Big]_{\alpha}^{x} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\therefore \quad F(x) = (X \leq x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

8-2. அடுக்குப் பரவல் (Exponential Distribution)

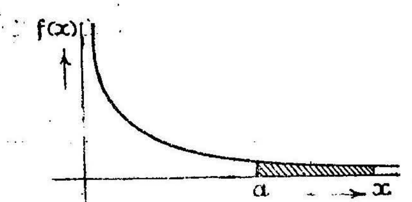
ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி X-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்

$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-x/\theta}$; $x > 0$; $\theta > 0$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்) என்றால் அந்த X மாறி அடுக்குப் பரவலில் அமைகிறது எனலாம்.

இப் பரவலில் θ என்ற ஒரு பண்பளவு உள்ளது.

கீழே காணும் வரைப்படம் இப் பரவலை நன்கு விளக்குகிறது.



படம் 18.
அடுக்குப் பரவல்

X-ன் திரள் சார்பலன்

$$F(x) = P_r\,[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x, \theta)\, dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\theta} \cdot e^{-x/\theta} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\frac{e^{-x/\theta}}{-1/\theta} \right]_0^x$$

$$= \left[-e^{-x/\theta} \right]_0^x = 1 - e^{-x/\theta}$$

எனவே $P_r(X \geq x) = 1 - F(x)$

$$= 1 - (1 - e^{-x/\theta}) = e^{-x/\theta}$$

$$\therefore \quad P_r \quad X \geq a) = e^{-a/\theta} \; .$$

இதை வரைப் படத்தில் கோடிட்ட பகுதியாகக் காட்டப் பட்டுள்ளது.

திருப்புத்திறன்கள்

r ஆவது மையம் தெரியாத திருப்புத்திறன் μ_r' என்றால்,

$$\mu_r' = E(x^r) = \int_0^\infty x^r \cdot f(x, \theta) \cdot dx$$

$$= \int_0^\infty x^r \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-x/\theta} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \int_0^\infty e^{-x/\theta} \cdot x^r \, dx$$

இங்கு $\frac{x}{\theta} = y$ எனக் கொண்டால்,

$x \to (0, \infty)$ என்றால் $y \to (0, \infty)$ ஆகிறது.

அத்துடன் $\frac{dx}{\theta} = dy$

$$x = \theta \cdot y.$$

எனவே $\mu_r' = \frac{1}{\theta} \cdot \int_0^\infty e^{-x/\theta} x^r \cdot dx$

$$= \int_0^\infty e^{-y} \cdot \theta^r \cdot y^r \, dy$$

$$= \theta^r \, \Gamma(r+1) \, ;$$

$$\left[\text{ஏனெனில் } \int_0^\infty e^{-y} y^{r-1} \, dy = \Gamma(r)\right]$$

$$= \theta^r \, (r!) \quad [\because \; \Gamma(r+1) = r!]$$

$r = 1$, என்றால், $\mu_1' = \theta' (1)! = \theta$

$r = 2$, என்றால் $\mu_2' = \theta^2 \cdot 2! = 2\theta^2$

X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \underline{\theta^2}.$

$\therefore$ X-ன் இந்தப் பரவலில் திட்ட விலக்கமும், சராசரியும் ஒரே மதிப்புடையவையாகும்.

[இதேபோல பாய்சான் பரவலில் $\mu = \lambda = \sigma$ என்பதை நாம் முன்பே கண்டோம்.]

இந்த அடுக்குப் பரவலின் β_1, β_2 மதிப்பை இப்போது கணக்கிடுவோம்.

$\mu_1' = \theta, \quad \mu_2 = 2\theta^2, \quad \mu_3' = 6\theta^3, \quad \mu_4' = 24\theta^4.$

எனவே $\mu_2 = \theta^2, \quad \mu_3 = 2\theta^3, \quad \mu_4 = 9\theta^4$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{4\theta^6}{\theta^6} = 4.$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{9\theta^4}{\theta^4} = 9.$$

எனவே $\beta_1 = 4; \quad \beta_2 = 9$

அடுக்குப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன் (M. G. F. of an Exponential Distribution)

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} \cdot e^{tx} \cdot e^{-x/\theta} \, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\theta}(1 - t\theta)x} \, dx$$

$y = \frac{1}{\theta}(1 - \theta t)x$ என்று கொள்வோம்.

$x = 0,$ என்றால் $y = 0$

$x = \infty,$ என்றால் $y = \infty$

எனவே $y \rightarrow (0, \infty)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta} \cdot (1 - t\theta)$$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{\theta} \cdot (1 - t\,\theta)\, dx.$$

அல்லது $\dfrac{dx}{\theta} = \dfrac{dy}{(1 - t\,\theta)}$.

$$\therefore \quad M_X(t) = \int_0^\infty e^{-y} (1 - t\,\theta)^{-1}\, dy.$$

$$= (1 - t\,\theta)^{-1} \cdot \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{1-1}\, dy$$

$$= (1 - t\,\theta)^{-1} \cdot \Gamma(1) = \underline{(1 - t\,\theta)^{-1}}.$$

இந்த M_X (t)-லிருந்தும் திருப்புத்திறன்களை கணக்கிடலாம்.

$$\mu_1' = [M'(t)]_{t=0} = [-(1 - t\theta)^{-2} \cdot (-\theta)]_{t=0}$$

$$= [\theta\,(1 - t\,\theta)^{-2}]_{t=0}$$

$$= \theta.$$

$$\mu_2' = [M''(t)]_{t=0} = [2\,\theta \cdot (1 - \theta\, t)^{-3} \cdot \theta]_{t=0} = 2\,\theta^2$$

$$\mu_3' = [M^{(3)}(t)]_{t=0}$$

$$= [2.3 \cdot \theta^3\,(1 - t\,\theta)^{-4}]_{t=0} = \underline{6\,\theta^3}$$

$$\mu_4' = (M^{(4)}(t)]_{t=0}$$

$$= [2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \theta^4 (1 - t\,\theta)^{-5}]_{t=0}$$

$$= 4!\ \theta^4$$

$$= \underline{24\ \theta^4}$$

மையம் தெரியாத திருப்புத் திறன்களிலிருந்து, மையத் திருப்புத்திறன்களைக் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்திக் கணக்கிடலாம்.

$$\mu_r = \mu_r' - \binom{r}{1} \mu_{r-1}'\ \mu_1' + \binom{r}{2} \mu'_{r-1} (\mu_1')^2$$

$$- \binom{r}{3} (\mu'_{r-3} (\mu_1')^3 + \ldots + (-1)^{r-2}$$

$$\binom{r}{1} \mu_1'\ (\mu_1')^{r-1} + (-1)^{r-1} \cdot (\mu_1')^r .$$

$$r = 2; \quad \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 2\,\theta^2 - \theta^2 = \theta^2.$$

$$r = 3; \quad \mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 3(\mu_1')^3 - (\mu_1')^3$$

$$= 6\,\theta^3 - 3.2\,\theta^2 \cdot \theta \cdot + 2 \cdot \theta^3.$$

$$= \underline{2\,\theta^3}$$

$$r = 4; \quad \mu_4 = \mu_4' - 4 \cdot \mu_3'\,\mu_1' + 6 \cdot \mu_2'\,(\mu_1')^2$$

$$- 4 \cdot \mu_1' \cdot (\mu_1')^3 + (\mu_1')^4$$

$$= 24\,\theta^4 - 4 \cdot 6\,\theta^3 \cdot \theta + 6 \cdot 2\,\theta^2 \cdot \theta^2 - 3\,\theta^4.$$

$= \underline{9\ \theta^4}$ ஆகின்றன.

8-3. காம்மாப் பரவல் (Gamma Distribution)

ஒரு தொடர் ராண்டம்மாறி X-ன் வகை அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x, \theta) = k \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x/\beta}, 0 < x < \infty, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்) என்றால், x மாறி ஒரு காம்மா மாறியாகும். இந்த x-ன் பரவலை 'காம்மாப் பரவல்' என வழங்கலாம். இங்கு k என்ற நிலை எண்ணின் மதிப்பை, அடர்த்திச் சார்பலனின் நிபந்தனை

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta)\, dx = 1$ மூலம் கண்டு பிடிப்போம்.

$$\text{இங்கு } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x/\beta}\, dx$$

$$\text{எனவே } \frac{1}{k} = \int_{0}^{\infty} e^{-x/\beta} \cdot x^{\alpha - 1}\, dx$$

$t = \frac{x}{\beta}$ என்றால், $x = \beta t$ | $x \to (0, \infty)$

$dt = \frac{1}{\beta} dx, \quad \therefore \quad dx = \beta \cdot dt.$ | என்றால் $t \to (0, \infty)$.

$$\therefore \int_0^{\infty} x^{\alpha - 1} e^{-x/\beta} dx$$

$$= \beta^{\alpha - 1} . \int_0^{\infty} e^{-t} . t^{\alpha - 1} . \beta . dt$$

$$= \beta^{\alpha} . \int_0^{\infty} e^{-t} . t^{\alpha - 1} dt$$

$$= \beta^{\alpha} . \Gamma(\alpha).$$

[இங்கு $\Gamma(\alpha)$ ஒரு காம்மா சார்பலின்.]

எனவே $k = \dfrac{1}{\beta^{\alpha} . \Gamma(\alpha)}$

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} . e^{-x/\beta} . x^{\alpha - 1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$\alpha, \beta > 0.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

இந்த காம்மாப் பரவல் ஒரு முக்கியப் பரவல் ஆகும்.

$\alpha = 1$ என்றால், இப்பரவல் அடுக்குப் பரவலாகிறது.

$\alpha = \dfrac{n}{2}$, $\beta = 2$ என்றால், ஒரு கை – வர்க்கப் பரவல் கிடைக்கிறது. இதைப்பற்றி மேலும் விரிவாகப் பின்னர் படிப்போம்.

காம்மாப் பரவலின் திருப்புத்திறன்கள்

$$\mu_1' = E(x)^{\gamma}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\gamma} f(x, \theta) \cdot dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\gamma} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x/\beta} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\gamma + \alpha - 1} e^{-x/\beta} dx$$

$t = \frac{x}{\beta}$ என்றால், $x = \beta \cdot t$; $dt = \frac{dx}{\beta}$.

$x \to (0, \infty)$ என்றால், $t \to (0, \infty)$ ஆகும்.

எனவே $\mu\gamma' = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$

$$\int_0^{\infty} \beta^{\gamma + \alpha - 1} \cdot t^{\gamma + \alpha - 1} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot dt$$

$$= \frac{\beta^{\gamma + \alpha}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\gamma + \alpha - 1} dt.$$

$$= \frac{\beta^{\gamma+\alpha}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha+\gamma)$$

$$= \frac{\beta^{\gamma} \cdot \Gamma(\alpha+\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\gamma = 1, \quad \mu_1' = \beta \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \beta \cdot \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} = \alpha \cdot \beta$$

$$\gamma = 2, \quad \mu_2' = \beta^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2 \cdot (\alpha+1)!}{(\alpha-1)!} = (\alpha+1)(\alpha) \cdot \beta^2.$$

X-ன் மாறுபாடு $\sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \underline{\alpha\beta^2}$$

X-ன் காம்மாப் பரவலுக்கான திரள் சார்பலன்

$F(x) = P\gamma\,(X \leq x)$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot e^{-x/\beta} \cdot x^{\alpha-1}\, dx$$

காம்மாப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$M_X(t) = E(e^{tx})$

$$\int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta} \cdot x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(1-t\beta)\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$y = \frac{1 - t\beta}{\beta}\, x$ என்றால்,

$$dy = \frac{1 - t\beta}{\beta} \cdot dx \left(\text{இங்கு } t < \frac{1}{\beta} \right)$$

$x \to (0, \infty)$

$y \to (0, \infty)$

$$\therefore \quad M_X(t) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\beta}{1 - t\beta} \right)^{\alpha - 1 + 1} y^{\alpha - 1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{(1 - t\beta)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \quad \Gamma(\alpha) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

$$= 1 + \alpha \cdot \beta t + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!} \cdot (\beta t)^2 + \dots$$

இங்கு $\frac{t^{\gamma}}{\gamma!}$ - ன் கெழுவே μ_γ' ஆகும்.

$\mu_1' = \alpha\beta.$

$\mu_2' = \alpha(\alpha + 1) \cdot \beta^2 \dots$ முதலியன.

அல்லது;

$$\mu_1' = [M'(t)]_{t=0}$$

$$= [\alpha \cdot (1 - \beta t)^{-(\alpha + 1)} \beta \cdot]_{t=0}' = \alpha\beta.$$

$$M_2' = M''(0) = [\alpha\beta(\alpha+1)(1-\beta\cdot 0)^{\alpha-2}\cdot\beta]$$

$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2. \qquad \therefore \mu_2 = \underline{\alpha\beta^2}$$

இதே போல மற்ற திருப்புத்திறன்களையும் கணிக்க முடியும்.

8-4. இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Distribution)

இன்றைய புள்ளியியல் ஆய்வில் மிகவும் முக்கியமான பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாகும். இதையே 'காஸ்ஸியன் பரவல்' (Gaussian Distribution) என்றும் வழங்கலாம். பல செய்முறை நிலைகளில் உள்ள புள்ளி விவரங்கள் தோராயமாக இயல்நிலையில் பரவியிருப்பதைக் காண்கிறோம். இயல்நிலையற்ற பரவல், ஒரு சாதாரண உருவ மாற்றத்தின் மூலம் இயல் நிலைப் பரவலாக அமைவதை நாம் காணுகிறோம்.

X எனும் தொடர் ராண்டம் மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x) = k\cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$0 < \sigma < \infty$$

என்றால், அது ஓர் இயல்நிலை மாறி.

X-ன் பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகிறது. இப் பரவலுக்கு μ, σ என்ற இரு பண்பளவுகள் உள்ளன. k என்ற நிலை எண்ணின் மதிப்பை $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்ற ன் பாட்டைக் கொண்டு கணிக்க முடியும்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\cdot dx = 1 \text{ எனில்,}$$

$$\frac{1}{k} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma 2}(x-\mu)^2}\,dx$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ என்றால், $dx = \sigma\, dt$

$x \rightarrow (-\infty, \infty)$

$t \rightarrow (-\infty, \infty)$

$$\therefore \frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} k\,.\,\sigma\,.\,e^{-t^2/2}\,dt$$

$e^{-t^2/2}$ ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பலன் (even function).

எனவே $\frac{1}{k} = 2\sigma.\int_0^{\infty} e^{-t^2_2}\,dt \quad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_0^{\infty}\right)$

$\frac{t^2}{2} = z$ என்றால் $t^2 = 2z$.

$2t\,dt = 2\,dz$

$$d\,t = \frac{1}{t}\,d\,z = \frac{1}{\sqrt{2z}}\,dz.$$

$t \rightarrow (0, \infty)$ என்றால், $z \rightarrow (0, \infty)$ ஆகும்.

$$\frac{1}{k} = 2\sigma \int_0^{\infty} e^{-z}.\ \frac{1}{\sqrt{2z}}\,dz.$$

$$= \sqrt{2}.\ \sigma.\int_0^{\infty} e^{-z}.\ z^{\frac{1}{2}-1}\,dz.$$

$$= \sqrt{2}.\ \sigma.\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sigma\sqrt{2\pi}.\ (\text{ஏனெனில் } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi})$$

$$\text{எனவே. } k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\ -\infty < x < \infty$$

இந்த இயல் நிலைப்பரவலை ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் அணுகும் தன்மை உடைத்தான பரவல் எனலாம். இதற்குக் கீழ் கண்ட நிபந்தனைகள் பொருந்த வேண்டும்:

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை முடிவிலியாக இருத்தல் வேண்டும். [அதாவது $n \to \infty$].

(ii) வெற்றியின் ஊக அளவோ (அல்லது தோல்வியின் ஊக அளவோ) மிகவும் குறைவாக இருக்கக் கூடாது. இப்போது ஓர் ஈருறுப்புப்பரவலை எடுத்துக்கொண்டு $n \to \infty$ ஆகும் போது இப் பரவல் எவ்வாறு இயல் நிலையை அணுகுகிறது எனக் காண்போம்.

ஈருறுப்புப்பரவலில் X மாறி, தனித்த மாறியாகும்.

$$X \to b\,(np, \sqrt{npq}), \qquad X = 0, 1, 2, \ldots\ldots n.$$

$Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ ஒரு தனித்த தரப்படுத்தப்பட்ட ஈருறுப்பு மாறி.

$X = 0$ என்றால், $Z = -\sqrt{\dfrac{np}{q}} \to -8$. ($n \to \infty$ ஆகும் போது)

$X = n$ என்றால், $Z = +\sqrt{\dfrac{np}{q}} \to +\infty$. ($n \to \infty$ ஆகும் போது).

ஆகவே n முடிவிலியை அணுகும் போது, Z-ம் அதனால் X-ம் ஒரு $(-\infty, \infty)$ வீச்சில் உள்ள ஒரு தொடர்மாறியாகிறது. அதன் பரவலும் ஒரு தொடர் பரவலாகிறது. இப்போது தரப்படுத்தப் பட்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார் பலன், $n \to \infty$ ஆகும் போது என்ன ஆகிறது என்று பார்ப் போம்.

X-ன் தி. உ. சார்பலன் $M_X(t) = (q+p_e t)^n$ என்றால்

Z-ன் தி. உ. சார்பலன் $M_X(t) = M_{\frac{x-np}{\sqrt{npq}}}(t)$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} M_x\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= e^{-\sqrt{\frac{np}{q}}\,t}\left[q+pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right]^n$$

ஆகிறது.

எனவே $\log M_z(t) = -\sqrt{\frac{np}{q}}\,t + n.\log\left[1-p+pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right]$

$$= -\sqrt{\frac{np}{q}}\,t + n.\log\left[1+p\,(e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}-1)\right]$$

$(e^{\frac{t}{\sqrt{nvq}}}-1)$

$$= \left[\left(1+\frac{t}{\sqrt{npq}}+\frac{t^2}{2!}.\frac{1}{npq}+\frac{t^3}{3!}\frac{1}{(npq)^{\frac{3}{2}}}+\ldots\ldots\right)-1\right]$$

$p.(e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}-1)$

$$= \left[\sqrt{\frac{p}{nq}}.\,t+\frac{t^2}{2!}.\frac{1}{nq}+\frac{t^3}{3!}.\frac{1}{(nq)^{\frac{3}{2}}}.\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}+\ldots\right] = Y \text{ என்க.}$$

எனவே $n\log\left[1+p\,(e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}-1\right]$

$= n\log(1+Y)$

$$= n\left[r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \cdots\cdots \right]$$

$$= n\left\{ \left[\sqrt{\frac{p}{nq}}\, t + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{nq} + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{(nq)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} + \cdots \right] \right.$$

$$- \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{p}{nb}} \cdot t + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{nq} + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{(nq)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} + \cdots\cdots \right]^2$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right\}.$$

$$= \sqrt{\frac{np}{q}} \cdot t + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{np}{nq}\, t^2 + O\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{np}{q}} \cdot t + \frac{t^2}{2!}\left[\frac{1}{q} - \frac{p}{q} \right] + O\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right]$$

எனவே $\log M_z(t)$

$$= -\sqrt{\frac{np}{q}}\, t + \sqrt{\frac{np}{q}}\, t + \frac{t^2}{2}\left[\frac{1-p}{q} \right] + O\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= \frac{t^2}{2} + O\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right].$$

இப்போது $n \to \infty$ என்றால், $\log M_z(t) \to \dfrac{t^2}{2}$.

அதாவது $M_z(t) \to exp\,[t^2/2]$.

Z-ன் தி.உ. சார்பலன் ஒருதரப் படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் தி. உ. சார்பலனை ஒத்து இருக்கிறது. மேலும், ஒரு மாறியின் தி. உ. சார்பலனிலிருந்து அம் மாறியின் பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்கலாம். எனவே, இங்கு Z ஓர் இயல் நிலை மாறியாகிறது.

அதாவது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட ஈருறுப்பு மாறி n முடிவிலியை அணுகும்போது, ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறியாகிறது.

எனவே $n \to \infty$ என்றால், ஈருறுப்புப்பரவல், இயல் நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது என்பது நிரூபணமாகிறது.

இதேபோன்று λ சராசரியைக் கொண்ட ஒரு தனித்த பாய்சான் மாறியும் n முடிவிலியை அணுகும்போது, ஓர் (தொடர் மாறி) இயல் நிலை மாறியை அணுகுகிறது. $(\lambda = np)$.

$X \to p\,(\lambda)$ என்றால்,

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}},$$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட பாய்சான் மாறி.

X-ன் தி. உ. சார்பலன் $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ என்றால்,

Z-ன் தி. உ. சார்பலன்

$$Mz\,(t) = M_{\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{-\sqrt{\lambda}\,t} \cdot M_x\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$= e^{-\sqrt{\lambda}\,t} \cdot e^{= (e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1)}$$

$$\log M_z(t) = -\sqrt{\ }X\,t = (e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1).$$

$$= \lambda\,(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1)$$

$$= \lambda\left\{\left[x + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{t^2}{\lambda} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{t^3}{\lambda^{3/2}} + \cdots\right] - x\right\}$$

$$= \sqrt{\lambda}\, t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \cdots$$

$\lambda = np$ என்று மதிப்பிட,

$$\log M_z(t) = -\sqrt{np}\,.\,t + \sqrt{np} \cdot t$$

$$+ \frac{t^2}{2!} \cdot + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{\sqrt{np}} + \cdots$$

$$= \frac{t^2}{2!} + 0\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

$n \to \infty$ என்றால், $\log M_z(t) \to \frac{t^2}{2}$.

$$\therefore \quad M_z(t) \to e^{t^2/2}$$

எனவே Z-ன் தி. உ. சார்பலன் ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியின் தி. உ. சார்பலன் என்பதால், Z ஒரு தரப் படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியாகும். ஆகவே X மாறி, n முடிவிலியை அணுகும் போது இயல்நிலை மாறியாகவும், X-ன் பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாகவும் அமைகிறது.

இத்தகைய இயல்நிலைப் பரவலின் தி. உ. சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$0 < \sigma < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).

இங்கு X-ன் சராசரி μ எனவும், X-ன் மாறுபாடு σ^2 எனவும் அறியலாம்.

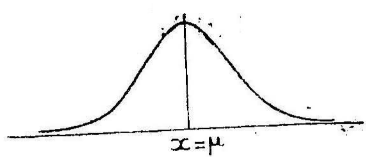
இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கிய பண்புகளும், இயல்நிலை ஊக அளவு வளைகோடும் (Chief properties of Normal Distribution & Normal Probability Curve)

X மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு முறையே μ, σ^2 என்றால் X-ன் ஊக அளவு வளைகோடு;

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{2}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$; -\infty < x < \infty$$

ஆகும்.



படம் 14.
இயல்நிலைப் பரவல்

(1) $X = \mu$ என்ற நேர்கோட்டில் இவ் வளைகோடு சமச்சீராக உள்ளது.

(2) இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒரே இடத்தில் பொருந்தியுள்ளன.

(3) எண்ணளவில் (numerically) x மாறி கூடுகையில், (x) வேகமாகக் குறைகிறது. ($X = \mu$ என்ற புள்ளியில் ஊக அளவு உச்சமாக உள்ளது.)

(4) $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 3$ என உள்ளது.

(5) $\mu_{2r+1} = 0$

$\mu_{2r} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2r-3)(2r-1)\,\sigma^{2r}$ }

$r = 0, 1, 2, \ldots$

(6) இயல் மாறிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமும் (linear combination) ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும்.

(7) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி $M.D. = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \doteqdot \frac{4}{5}\,\sigma$ (தோராயமாக).

(8) X அச்சு இவ் வளைகோட்டுக்கு ஒரு தொலை தொடு கோடு (அணுகு கோடு) (asymptote) ஆகும்.

இயல்நிலைப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = z$ என்றால்; $x = \mu + \sigma z$; $dx = \sigma \cdot dz$

$x \to (-\infty, \infty)$; எனவே $z \to (-\infty, \infty)$.

$$\therefore\ M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+\sigma z)} \cdot e^{-z^2/2}\, dz.$$

$$= e^{\mu t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z^2 - 2t\sigma z]}\, dz.$$

$$= e^{\mu t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z^2 - 2t\sigma z + t^2\sigma^2] + \frac{t^2 z^2}{2}}\, dz.$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z - t\sigma)^2} dz$$

$u = z - t\sigma$ என்றால், $du = dz$.

$z \to (-\infty, \infty)$ என்றால் $u \to (-\infty, \infty)$.

$$\therefore \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \cdot 1.$$

எனவே X-ன் தி. உ. சார்பலன் $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$

இயல்நிலைப் பரவலின் குமுலண்ட்டுகளை (Cumulants) உருவாக்கும் சார்பலன் : (C. G. F.)

X-ன் கு. உ. சார்பலன்

$K_X(t) = \log M_X(t)$ (வரையறைப்படி)

$$= \log [e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}]$$

$$= \mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2.$$

K_1 = முதல் குமுலண்ட் = சாரசரி = $K_X(t)$-ல் t-ன் கெழு = μ.

K_2 = 2ஆவது குமுலண்ட் = மாறுபாடு = $K_X(t)$-ல் $\frac{t^2}{2!}$-ன் கெழு = σ^2

$K_r = K_X(t)$-ல் $\frac{t^r}{r!}$-ன் கெழு $= 0$, $r = 3, 4 \ldots$

எனவே $K_3 = K_4 = \ldots = 0$.

மேலும் $\mu_3 = K_3 = 0$

$$\mu_4 = K_4 + 3K_2^2 = 0 + 3\sigma^4 = 3\sigma^4$$

எனவே $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3 \text{ என்றாகிறது.}$$

X என்ற ராண்டம் இயல்நிலை மாறியானது $N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 > 0$ என்றால், $W = \frac{X - \mu}{\sigma}$ மாறி $N(0,1)$ ஒரு தரப்படுத்தப் பட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

$\sigma > 0$ என்பதால், W-ன் பரவல் சார்பலன் $G(\omega)$

$$G(\omega) = P_r[W \leq \omega] = P_r\left[\frac{X \mu}{\sigma} \leq \omega\right]$$

$$= P_r[X \leq \mu + \sigma\omega]$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu + \sigma\omega} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ என்றால் $dx = \sigma\, dy$.

$$x = -\infty;\quad y = \frac{-\infty - \mu}{\sigma} = -\infty.$$

$$x = \omega\sigma + \mu;\quad y = \frac{\omega\sigma + \mu - \mu}{\sigma} = \frac{\omega\sigma}{\sigma} = \omega$$

$\therefore\ y \to (-\infty, \omega)$.

ஆதலால் $G(\omega) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$

தொடர் ராண்டம் மாறி W-ன் பரவல் சார்பலனின் வகைக்கெழு $G'(\omega)$ = W-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $g(\omega)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad G'(\omega) = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2} d\omega \qquad -\infty < \omega < \infty.$$

எனவே $W \rightarrow N(0, 1)$

W ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி என்று நிருபணமாகிறது.

X-ன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$$

இப்போது $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ என்றால்,

Z–ன் தி. உ. சார்பலன் $M_z(t)$ ஆகும்.

$$M_z(t) = M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$$

$$= E\left[{}^{t\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)} \right]$$

$$= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} \cdot M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$= e^{\mu t/\sigma} \cdot e^{\mu t/\sigma + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{\sigma^2}\right] \cdot \sigma^2}$$

$$= e^{-\frac{\mu t}{\sigma} + \frac{\mu t}{\sigma} + \frac{1}{2} t^2}$$

$$= e^{t^2/2}$$

எனவே தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி Z-ன்

$$\text{தி. உ. சா.} = M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

இயல் நிலைப்பரவலின் திருப்புத் திறன்கள் (Moments)

$(2r+1)$ஆவது மையத் திருப்புத்திறன்

$$M_{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^{2r+1} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2r+1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx.$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = z$ எனக் கொள்வோம். $x-\mu = \sigma z$.

$dx = \sigma . dz$

$x = -\infty ;\quad z = \frac{-\infty-\mu}{\sigma} = -\infty.$

$x = +\infty ;\quad z = \frac{+\infty-\mu}{\sigma} = +\infty$

$z \to (-\infty, \infty).$

$$\therefore \mu_{2r+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z)^{2r+1} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{\sigma^{2r+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2r+1} e^{-z^2/2} dz.$$

$= 0$ (ஏனெனில், $z^{2r+1} e^{-z^2/2}$ என்ற தொகைச் சார்பு (integrand) ஒரு z-ன் ஒற்றைப் படைச் சார்பலன்).

$$\mu_{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2r} \, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2r} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \, dx.$$

$$= \frac{\sigma^{2r}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{\infty} z^{2r} \cdot e^{-z^2/2} \, dz. \quad \left(\because z = \frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

$$= \frac{\sigma^{2r}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} z^{2r} \cdot e^{-z^2/2} \, dz.$$

[ஏனெனில் $z^{2r} e^{-z^2/2}$ ஓர் இரட்டைப்படை தொகைச் சார்பு].

$$\mu_{2r} = \frac{2 \cdot \sigma^{2r}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} (2t)^{r} \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2t}} ;$$

$$\left[\therefore \frac{z^2}{2} = t \right]$$

$$= \frac{2^{r} \cdot \sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} t^{r+\frac{1}{2}-1} e^{-t} \cdot dt$$

$$= \frac{2^{r} \cdot \sigma^{2r}}{\Gamma(1/2)} \cdot \Gamma(r+1/2)$$

$$= \frac{2^{r} \cdot \sigma^{2r}}{\Gamma(1/2)} \cdot (r-\tfrac{1}{2})(r-\tfrac{3}{2}) \cdots$$

$$\cdots \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2).$$

$$= 2^r \cdot \sigma^{2r} \cdot \left(\frac{2r-1}{2}\right) \left(\frac{2r-3}{2}\right) \left(\frac{2r-5}{2}\right) \cdots \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2r-3)(2r-1)}{2^r} \cdot 2^r \sigma^{2r}$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_{2r} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2r-3)(2r-1) \cdot \sigma^{2r}.}$$

இங்கு,

$r = 0$, என்றால் $\mu_0 = 1$

$r = 1$, $\quad \mu_2 = 1 \cdot \sigma^2 = \sigma^2$

$r = 2$, $\quad \mu_4 \; 1 \cdot 3 \cdot \sigma^4 = 3\sigma^4$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0. \quad (\because \quad \mu_3 = 0)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3.$$

$$r_1 = +\sqrt{\beta_1} = 0$$

$$r_2 = \beta_2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

எனவே இயல்நிலைப் பரவலுக்கு எப்போதும்

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

சார்பற்ற n ராண்டம் மாறிகள் $X_1, X, \ldots X_n$ ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன எனக் கொள்வோம். அவற்றின் சராசரி, மாறுபாடு முறையே μ_i, σ_i^2 என்று இருக்கட்டும்.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$ என நாம் அறிவோம்.

ஆகவே $X_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i^2)$ என்றால்

$(i = 1, 2, \ldots n)$

$$M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2} t^2 \sigma_i^2}$$

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ஒருபடிச் சேர்மானமாக இருக்கட்டும்.

(இங்கு $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்பன n நிலை எண்கள்)

$Y = \sum a_i X_i$-ன் தி. உ. சார்பலன் $(M.G.F.)$

$$M_y(t) = M_{\sum a_i X_i}(t)$$

$$= M_{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots a_n X_n}(t)$$

$$= M_{a_1 X_1}(t) \cdot M_{a_2 X_2}(t) \cdot M_{a_3 X_3}(t) \ldots M_{a_n X_n}(t)$$

($\because$ $X_1, X_2 \ldots X_n$ எல்லாம் சார்பற்றவை.)

$$= M_{X_1}(a_1 t) \cdot M_{X_2}(a_2 t) \ldots M_{X_n}(a_n t)$$

($\because$ $M_{cX}(t) = M_X(ct)$ என நாம் முன்பே அறிவோம்.)

எல்லா $i = 1, 2, 3 \ldots n$-க்கும்,

$M_{X_i}(a_i t) = e^{\mu_i a_i t + \frac{1}{2} t^2 \cdot a_i^2 \sigma_i^2}$ என்பதால்

$$M_y(t) = M_{\sum a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[e^{\mu_i a_i t + \frac{1}{2} t^2 \cdot a_i^2 \sigma_i^2} \right]$$

$$M_y(t) = e^{\sum \mu_i a_i t + \frac{1}{2} \sum t^2 a_i^2 \sigma_i^2}.$$

$$= e^{(\sum a_i \mu_i) t + \frac{1}{2} (\sum a_i^2 \sigma_i^2) t^2}$$

இது ஓர் இயல்நிலை மாறியின் தி. உ. சார்பலனை ஒத்து உள்ளது. எனவே $Y = \sum a_i X_i$ ஓர் இயல்நிலை மாறி. இதன் சராசரி $(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i)$; மாறுபாடு $= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

$$\text{எனவே } Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \frown N(\sum a_i \mu_i, \ \sum a_i^2 \sigma_i^2)$$

இங்கு (i) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ என்றால்

$$Y = \sum X_i \frown N(\sum \mu_i, \ \sum \sigma_i^2)$$

(ii) மேலும் $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$ } (எல்லா i-க்கும்) என்றால்

$$\sum X_i \frown N(n\mu, n\sigma^2)$$

(i) இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டல் நியதியை (additiv property) நிர்ணயிக்கிறது.

அதாவது $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்பன μ_i, σ_i^2-களை சராசரிகளாகவும், மாறுபாடுகளாகவும் கொண்ட n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளானால், இந்த n மாறிகளின் கூட்டலும் ஓர் இயல்நிலை மாறிகளாகும்.

(iii) $X_i \to N(\mu, \sigma^2)$ எல்லா $i = 1, 2, 3, \ldots n$-க்கும் என்றால்,

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$ என்றும் கொண்டால்,

$$\sum a_i X_i = \frac{1}{n} \sum X_i = \bar{X} \frown$$

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \right]$$

அதாவது $\bar{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

இதனல் கிடைக்கும் முக்கிய விளைவு (result) : X_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ என்பன μ சராசரியையும், σ^2 மாறுபாட்டையும் கொண்ட சர்வ சமமாகப் பரவப்பட்ட (identically distributed) சார்பற்ற மாறிகளானுல், அவற்றின் சராசரி $\bar{X}$-ம் μ சராசரியையும், $\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)$ மாறுபர்ட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை மாறியேயாகும்.

அதாவது $X_i \backsim N(\mu, \sigma^2)$ என்ருல்

$$\bar{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ ஆகும்}$$

(iv) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_3 = 0 = a_4 = \ldots a_n$ என்ருல்

$$\sum a_i X_i = X_1 + X_2 \backsim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma^2 + \sigma_2^2)$$

(இங்கு X_1, X_2 சார்பற்ற மாறிகள்)

(v) $a_1 = 1, \ a_2 = -1, \ a_3 = 0 = a_4 = \ldots a_n$ என்ருல்

$$\Sigma a_i X_i = X_1 - X_2 \backsim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \text{ ஆகும்.}$$

(இங்கு X_1 X_2 இரண்டும் சார்பற்றவை)

இயல்நிலைப் பரவலுக்கான சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation of a Normal Distribution)

$$\left.\begin{array}{l}\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து} \\ \text{கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்}\end{array}\right\} = \text{M. D.} \quad \text{ச. வி.}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| \cdot f(x)\, dx$$

$$M.D. = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ என்ருல், $(x-\mu) = \sigma\,|z|$. ; $dx = \sigma\, dz$.

$$ச. வி. = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot |z| \cdot e^{-z^2/2} \cdot \sigma \cdot dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \int_{\infty}^{\infty} |z| \cdot e^{-z^2/2} dz.$$

[$\because\ |z| \cdot e^{-z^2/2}$ ஓர் இரட்டைபடைச் சார்பலன்]

$(0, \infty)$ இடைவெளியில் $|z| = z$ என்பதால்,

$$ச. வி. = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma \cdot \int_0^{\infty} z \cdot e^{-z^2/2} dz$$

$\dfrac{z^2}{2} = t$ என்ருல், $\dfrac{2z\,dz}{2} = dt$

$z \to (0, \infty)$ எனவே $t \to (0, \infty)$ என்பதால்,

$$ச. வி. = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma\,(1-0)$$

$$\simeq \frac{4}{5}\sigma; \text{ (தோராயமாக).}$$

எனவே சராசரி விலக்கம் $\doteqdot \frac{4}{5}\sigma$

இயல்நிலைப் பரவலின் முகடு (Mode of a Normal Distribution)

$f(x)$ உச்சமான மதிப்புக்கான x-ன் மதிப்பு ''முகடு'' எனப்படும்.

(i) $[f'(x)]_{x=x_1} = 0;$

(ii) $[f''(x)]_{x=x_1} < 0$ என இருந்தால்,

$f(x)$-ன் உச்ச மதிப்பு காண முடியும். அதுவே $f(x_1)$ ஆகும்.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$ எனக் கொள்வோம்.

$$\log f(x) = c - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2.$$ (c ஒரு நிலை எண்).

இதை வகைப்படுத்தினால் (differentiate),

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2}\cdot(x-\mu)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)\cdot f(x) = 0$$ என்றால்

$\underline{x = \mu}$ ஆகும்.

மேலும்,

$$[f''](x)_{x=\mu} = -\frac{1}{\sigma^2}[1\cdot f(x) + (x-\mu)f'(x)]_{x=}$$

$$= -\frac{f(x)}{\sigma^2}\left[1 + \frac{(x-\mu)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]_{x=\mu}$$

$$= -\frac{f(x)}{\sigma^2}\cdot\left[1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] = -\frac{f(\mu)}{\sigma^2} < 0$$

∴ $f'(x) = 0$ சமன்பாடு $x = \mu$ என்ற முகட்டைத் தருகிறது.

இயல் நிலைப் பரவலின் இடைநிலை (Median of a Normal Distribution)

இடைநிலை = Med என்றால்

$$\int_{-\infty}^{\text{Med}} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} = \int_{\text{Med}}^{-\infty} f(x)\,dx.$$

$\int_{-\infty}^{\text{Med}} f(x)\,dx$ஐ எடுத்துக் கவனிப்போம்.

$$\tfrac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\text{Med}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx.$$

இங்கு x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி μ என்றால்,

$$= \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\text{Med}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx.$$

$= I_1 + I_2$ என்க.

$$I_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx.$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ என்றால் $dx = \sigma . dz.$

$x = -\infty; \quad z = \frac{-\infty - \mu}{\sigma} = -\infty.$

$x = \mu; \quad z = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0.$

$x \to (-\infty, \mu)$ என்றால் $z \to (-\infty, 0)$

எனவே, $I_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} \sigma\, dz.$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

(ஏனெனில் $\int_{-\infty}^{0} \phi(z)\, dz = \int_{0}^{\infty} \phi(z)\, dz$

இங்கு z ஓர் இயல் நிலைமாறியானதால்.)

$\frac{z^2}{2} = t$ என்றால், $z\, dz = dt$; $dz = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$

$z \to (0, \infty)$ என்றால் $t \to (0, \infty)$.

எனவே, $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t} . \frac{dt}{\sqrt{2t}}$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} . t^{\frac{1}{2}-1} dt = \tfrac{1}{2} . \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} . \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

ஆனல் $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$ என்று அறிவோம்.

இங்கு $I_1 = \frac{1}{2}$ என்பதால் $I_2 = 0$ ஆகும்.

அதாவது

$$I_2 = \int_{\mu}^{Med} f(x)\, dx = 0$$

$f(x)$ சார்பலன் (μ, Med) இடைவெளியில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதால், இங்கு μ = Med என்ருல் மட்டுமே $I_2 = 0$ ஆகும்.

எனவே, μ = Med.

அதாவது சராசரி = இடைநிலே என்ற புள்ளியில்தான் $I_2 = 0$.

∴ X–என்ற இயல் நிலே மாறியின் சராசரி = μ = இடைநிலே

நிகழக்கூடிய பிழை (Probable Error) அல்லது **கால்மான வீச்சு**

λ என்பது ஒரு பிழை மதிப்பு எனக்கொள்வோம்.

இப்போது X-மாறி ஒரு $N(\mu, \sigma^2)$எனக் கொண்டால், ($\mu - \lambda$, $\mu + \lambda$) இடைவெளிக்குள் '**λ** என்ற ஒரு பிழை' நிகழக் கூடிய ஊக அளவும், ஷெ (மேற்கூறிய) இடைவெளிக்கு அப்பால் ஒரு பிழை நிகழக் கூடிய ஊக அளவும் ஒன்றேயாகில், அந்தப் பிழையை 'நிகழக் கூடிய பிழை' அல்லது ஊகப் பிழை (Probable Error) எனக் கூறுகிருேம்.

அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட **λ** பிழை, ஷெ இடைவெளிக்கு உள்ளே அல்லது வெளியே விழக்கூடிய ஊக அளவு சரிசமமாக இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுவதால்,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mu-\lambda}^{\mu+\lambda} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ என்றால்; $dx = \sigma\, dz.$

$x = \mu - \lambda$, என்றால் $z = \frac{\mu-\lambda-\mu}{\sigma} = -\frac{\lambda}{\sigma}$

$x = \mu + \lambda$, என்றால் $z = \frac{\mu+\lambda-\mu}{\sigma} = \frac{\lambda}{\sigma}$

எனவே $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda/\sigma}^{\lambda/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz = \tfrac{1}{2}$

அதாவது $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2 \cdot \int_0^{\lambda/2} e^{-z^2/2}\,dz = \tfrac{1}{2}$

[ஏனெனில் z இயல்நிலை மாறியானதால்

$$\int_{-\lambda/\sigma}^{\lambda/\sigma} = \int_{-\lambda/\sigma}^{0} + \int_{0}^{\lambda/\sigma} = \int_{0}^{\lambda/\sigma} + \int_{0}^{\lambda/\sigma} = 2\cdot\int_{0}^{\lambda/\sigma}\ ]$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\lambda/2} e^{-z^2/2}\,dz = \tfrac{1}{4} = 0.25$$

$\frac{\lambda}{\sigma}$-க்கான மதிப்பை இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவு அட்டவணையிலிருந்து கண்டால், 0.25-க்கான $\frac{\lambda}{\sigma}$-ன் மதிப்பு $= 0.6745$ என அறிவோம்.

எனவே $\frac{\lambda}{\sigma} = 0.6745 \simeq \frac{2}{3}$.

ஆதலால் ஊகப் பிழை $\lambda \doteqdot \frac{2}{3}\sigma$ (தோராயமாக)

இதன் மூலம் முதல் கால்மானம் $Q_1 = \mu - \lambda$

$$= \mu - \tfrac{2}{3}\sigma = \mu - 0.6745\,\sigma.$$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = \mu + \lambda = \mu + 0.6745\,\sigma.$

கால்மான வீச்சு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{(\mu + 0.6745\,\sigma) - (\mu - 0.6745\,\sigma)}{2}$$

$$= 0.6745\,\sigma$$

$$= \frac{2}{3}\sigma. \text{ (தோராயமாக)}$$

பரப்பளவுப் பண்பு

$X \to N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$(X = \mu, \quad X = x_1)$ இடைவெளியில் X ராண்டம் மாறியின் ஊக அளவு

$$= P_r[\mu < X < x_1] = \int_{\mu}^{x_1} f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu}^{x_1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx.$$

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ என்றால், $dx = \sigma\, dz$.

$X = \mu$ என்றால், $z = 0$ ஆகிறது.

$X = x_1$ என்றால், $z = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = z_1$ ஆகிறது.

எனவே $P_r\,[\mu < X < x_1] = P_r\,[0 < Z < z_1]$

$$= \int_0^{z_1} e^{-z_1{}^2/2}\,dz$$

$$= \int_0^{z_1} \phi(z)\,dz$$

இங்கு $\phi(z)$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட ராண்டம் இயல்நிலை மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

$\int_0^{x_1} \phi(z)\,dz$ என்பது 'இயல்நிலை ஊக அளவுத் தொகை'

(Normal Probability intergral) எனப்படுகிறது.

$(Z = 0, \quad Z = z_1)$ என்ற நிலைத் தூரங்களின் இடையில், தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை வளைகோட்டினுள் ஏற்படும் பரப்பு அளவை இத் தொகை காட்டுகிறது.

இப் பரப்பளவுகள் 0·01 இடைவெளிகளில் z_1-ன் பல மதிப்புகளுக்கு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது (அட்டவணை கடைசியில் காண்க).

குறிப்பாக இங்கு மூன்று (ஊக அளவுகளை) நிகழ் தகவுகளைக் கணக்கிடுவோம்.

(i) $P_r\,[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx$

அல்லது $P_r\,[-1 < Z < 1]$

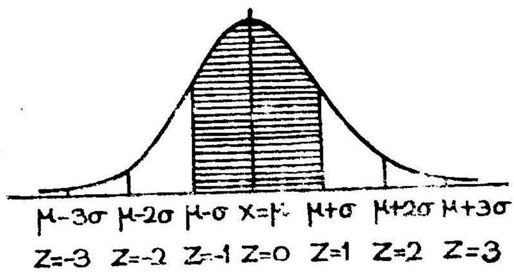
$$= \int_{-1}^{1} \phi(z)\,dz \quad \left(\because \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \phi(z)\, dz \text{ (சமச் சீரானதால்)}$$

$$= 2 \times 0.3413 \text{ (பரப்பளவு அட்டவணையிலிருந்து)}$$

$$= \underline{0.6826}.$$

அதாவது 68.26 சதவிகித அளவு (பரப்பானது) X–ன் மதிப்பு $\mu \pm \sigma$ இடைவெளியில் காணப்படுகிறது.



படம் 15.

இதே போல,

(ii) $P_r[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] = P_r[-2 < Z < 2]$

$$= 2 \cdot \int_0^2 \phi(z)\, dz$$

$$= 2 \times 0.4772$$

$$= \underline{0.9544}$$

அதாவது 95.44 % சதவிகித அளவு X-ன் மதிப்பு $\mu \pm 2\sigma$ இடைவெளியில் காணப்படும்.

(ii) மேலும் $P_r[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma]$

$$= P_r[-3 < Z < 3]$$

$$= 2 \int_{0}^{3} \phi(z)\, dz$$

$$= 2 \times 0.49865$$

$$= 0.9973.$$

அதாவது 99.73 சதவிகித அளவு X-ன் மதிப்பு $\mu \pm 3\sigma$ இடைவெளியில் உள்ளது.

ஆகவே, அறிமுறைப்படி (தத்துவப்படி) இயல்நிலை $(-\infty, \infty)$ இடைவெளியில் இருப்பதாகக் கொள்ளப்பட்ட போதிலும், $\mu \pm 3\sigma$ இடைவெளியிலேயே (முக்காலும்) அம் மாறி இருக்க வேண்டும் என நாம் எதிர்பார்க்கிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவம் (Importance of the Normal Distribution)

முதன் முதலில் 1773 ஆம் ஆண்டில் ஓர் ஆங்கில கணக்கியல் நிபுணர் டீ-மாய்வர் (De-moivre) ஒரு கணித நூலில் இந்த இயல்நிலைப் பரவலை வரையறுத்தார். ஈருறுப்புப் பரவலானது $n \to \infty$ என்ற போது, இயல்நிலைப் பரவலை அணுகும் விதத்தை இவர் கண்டறிந்து, வாய்ப்புக்கூறு விளையாட்டுக்களில் உண்டாகும் வினாக்களுக்கு இதைப் பயன்படுத்தினார். வானவியலில் பிழைகளின் பரவலாக, 19ஆம் நூற்றாண்டின் ஆரம்பத்தில் இது திரும்பவும் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. காஸ் (Gauss) என்ற பேராசிரியர் இயல்நிலைப் பரவலை ஆராய்ந்து உண்டாக்கியதால் இதை 'காஸ்ஸியன் பரவல்' (Gaussian Distribution) என்றும் வழங்குகிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவல் புள்ளியியல் தத்துவங்களில் ஒரு முக்கியமான பணியை ஆற்றுகிறது.

(1) செய்முறையில் (உண்டாகிற) காணப்படும் எல்லாப் பரவல்களும் (எடுத்துக்காட்டாக ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்சான், மட்டுமீறிய ஜியோமிதிப் பரவல் முதலியன) இயல் நிலைப் பரவலைப் பெரிதும் ஒத்திருக்கின்றன (இயல்நிலைப் பரவலுக்குத் தோராயமாக்கப்படுகின்றன).

(2) ஸ்டூடன்டின் t, ஸ்நெடெக்கரின் F, கை–வர்க்கப் பரவல்கள் முதலியனவும் விரிந்த மாதிரிகளுக்கு (large samples) இயல்நிலையை அணுகுகின்றன.

(3) மேலும், ஒரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலில் இல்லா விடினும், மாதிரியின் சாதாரண உருவ மாற்றம் மூலம் அதை இயல்நிலைக்குக் கொண்டுவர முடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக X-ன் பரவல் கோட்டத்திலிருந்தால் (சமச்சீரற்று இருந்தால்), $\sqrt{X}$-ன் பரவல் இயல்நிலையில் அமைகிறது.

(4) எல்லா விரிந்த மாதிரிகளின் தத்துவங்களும் முழுக்க முழுக்க இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகளை ஒட்டியே அமைந்துள்ளன.

(5) பல மாதிரிப் பண்பளவைகளின் பரவல்கள் (எடுத்துக் காட்டாக மாதிரிச் சராசரி, மாதிரியின் மாறுபாடு முதலியன) விரிந்த மாதிரிகளுக்கு இயல்நிலையை அணுகுவதைக் காண்கிறோம். இயல்நிலை வளைகோடுகளின் உதவியால் இப் பரவல்களை நன்கு ஆராய முடிகிறது.

(6) மாதிரியின் எல்லா சிறப்புக் காண் சோதனைகளின் நிருபணங்களும் 'மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகள் இயல்நிலையில் உள்ளன' என்ற தற்கோளை அடிப்படையாகக் கொண்டு உள்ளன.

(7) புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டில் இயல்நிலைப் பரவல் மிகவும் பயன்படுகிறது.

இயல்நிலை வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அலைவெண் பரவலுக்கு உகந்த இயல்நிலை வளைகோட்டை இரு வகைகளில் பொருத்தலாம்.

(i) நிலைத் தூரம் $\phi(z)$ அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பொருத்தலாம்.

(ii) $\int_{-\infty}^{z_1} \phi(z)\, dz$ என்ற இயல்நிலைப் பரப்பளவு அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பொருத்தலாம்.

(1) x மாறியின் அலைவெண் பரவலிலிருந்து அதன் சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2-களைக் கணிக்கவும்.

(2) இவற்றைக் கொண்டு X-ன் இயல்நிலை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனை வரையறுக்கலாம்.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

இப்போது $y = N \cdot p(x)$, (இங்கு N = மொத்த அலைவெண்கள்.)

இச் சமன்பாடு பரவலுக்கு ஏற்ற இயல்நிலை வளை கோட்டை வரையறுக்கிறது.

(3) $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ என்றால், இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$
$$= \frac{N}{\sigma} \cdot \phi(z) \text{ என்றாகிறது.}$$

z-க்கேற்ற $\phi(z)$-ன் மதிப்புகளை z அட்டவணையிலிருந்து கண்டிடவும். இவை நிலைத் தூரங்களின் நீளங்களை ஊக அளவில் தெரிவிக்கின்றன. $\phi(z)$. கிடைத்த பின் y-ன் மதிப்புகளை,

$$y = \frac{N}{\sigma} \cdot \phi(z) \text{ மூலமாக அறியலாம்.}$$

(4) பின்னர் yஐ பிரிவு இடைவெளியின் நீளத்தால் பெருக்கினால் $y \times c$ = எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்கள் ஆகும்.

இவ்வாறாக இயல்நிலைப் பரவலை அமைத்து எதிர்பார்க்கத் தக்க அலைவெண்களைக் கணிக்கலாம்.

2ஆவது முறை : இயல்நிலைப் பரப்பளவு அட்டவணையை உபயோகித்து எதிர்பார்க்கத்தக்க ஊக அளவுகளைக் கணக்கிடுதல்.

(1) இங்குச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் இவற்றை அலைவெண் பரவலின் மூலம் கண்டறிந்து,

(2) X-ன் இயல்நிலை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனை எழுதலாம்.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(3) ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லைக்கான, தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியை z_i என்றால்,

$$z_i = \frac{x_i' - \mu}{\sigma} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $x_i' = i$ஆவது பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை.

(4) 'இயல்நிலை வளைகோட்டுப் பரப்பளவு' அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $z = z_i$ என்ற நிலைத் தூரத்திற்கு இடது பக்கத்தின் வளைகோட்டுப் பரப்பைக் கணக்கிடுவோம்.

(5) பிறகு அடுத்தடுத்த பிரிவு இடைவெளிகளுக்கான பரப்புகளைக் (Aஐ) கழித்தல் மூலம் காணுவோம்.

[அதாவது $A = \{\phi(z_i + 1) - \phi(z_i)\}\ i = 1, 2, 3 \ldots$]

(6) N மொத்த அலைவெண் என்றால், $N. A.$ = எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களாகும்.

இவ்வாறும் இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்தலாம்.

மாதிரி 1 :

கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு உகந்த ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாட்டைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

x மாறி	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	மொத்தம்
f அலைவெண்	1	7	15	22	35	43	38	20	13	5	1	200

$A = 14$ என்றால்

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{N} \cdot c = 14 + \frac{-15}{200} \times 2 = \underline{13.85}$$

$$\sigma^2 = X\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{1}{N}\sum f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= c^2\left[\frac{1}{N}\sum f_i u_i^2 - \bar{u}^2\right]$$

$$= 4 \times 3.6695$$

எனவே திட்ட விலக்கம் $\sigma = \underline{3.832}$

X-ன் இயல்நிலை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$p(x) = \frac{1}{3.832\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2 \times (3.832)^2}(x - 13.85)^2}$$

மேலும் $y = Np(x)$

$$= \frac{200}{3.832} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-13.85)^2}{2.(3.832)^2}}$$

$z = \dfrac{x - 13.85}{3.832}$ என்றால்,

$$y = \frac{200}{3.832} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

x	f	u	fu	fu^2	z	$\phi(3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3^2}{2}}$	எதிர்பார்க்கத் தகும் அலைவெண் $\frac{N}{\sigma} \phi(z). c.$
4	1	—5	— 5	25	— 2·5730	— 0.0145	1.5 = 2
6	7	—4	—28	112	— 2.0485	— 0.0535	5.6 = 6
8	15	— 3	—45	135	— 1.5270	— 0.1197	12.4 = 12
10	22	—2	—44	88	— 1·0050	— 0.2408	25.1 = 25
12	35	—1	—35	35	— 0.483	— 0·3549	37.0 = 37
!4	43	0	0	0	0.0039	— 0.3982	41.5 = 42
16	38	1	38	38	0.5610	— 0.3405	35.5 = 36
18	20	2	40	80	1·0830	— 0.2210	23.0 = 23
20	13	3	39	117	1.6050	— 0.1101	11.5 = 12
22	5	4	20	80	2.1270	— 0.0417	4.5 = 4
24	1	5	5	25	2.6490	— 0.0120	1.2 = 1.
மொத்தம்	200	—	—15	735	—	—	200

இங்கு $u = \dfrac{x - 14}{2}$.

$c = 2$

$N = 200$

இவ்விதமாக இயல்நிலைப் பரவல் பொருத்தப்பட்டு எதிர் பார்க்கத்தக்க அலைவெண்கள் கணிக்கப்படுகின்றன.

மாதிரி 2 :

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு உகந்த ஓர் இயல் நிலைப் பரவலைப் பொருத்தவும். இயல்நிலைப் பரப்பளவைப் பயன்படுத்தி எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்கள்
79 — 81	3
81 — 83	10
83 — 85	7
85 — 87	11
87 — 89	15
89 — 91	16
91 — 93	23
93 — 95	30
95 — 97	40
97 — 99	17
99 — 101	17
101 — 103	10
103 — 105	6
105 — 107	6
107 — 109	2
109 — 111	1
மொத்தம்	214

இதற்கான சராசரி = 93.934 எனவும், மாறுபாடு = 6.16 எனவும் கணக்கிட்டு அறியவும்.

எனவே x என்ற இயல்மாறியின் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$p(x) = \frac{1}{6.16\sqrt{2\pi}}\ exp.\left[-\frac{1}{2\times(6.16)^2}(x-93.934)^2\right]$$

$$-\infty < x < \infty$$

எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களின் கணிப்பு

பிரிவு இடைவெளி	$z = \frac{x^1-\mu}{\sigma}$	$\phi(z_1) - \int_{-\infty}^{z}\phi(z)\,dz$	$\phi(z_{i+1}) - \phi(z_i) = A$	எ. அலைவெண் $N \cdot A$.
79 — 81	— 2.4230	0.0078	0·0105	2 26 = 2
81 — 83	— 2·0990	0.0183	0.0206	4.28 = 4
83 — 85	— 1·7745	0 0384	0.0357	7·52 = 8
85 — 87	— 1.4499	0·0736	0.0578	12.38 = 12
87 — 89	— 1.1253	0.1314	0.0805	17.23 = 17
89 — 91	+ 0.08007	0.2139	0 1051	22·21 = 22
91 — 93	+ 0·04761	0·3157	0.1247	26.60 = 27
93 — 95	+ 0.1515	0.4404	0.1254	26.83 = 27
95 — 97	+ 0.1731	0.5638	0.1267	27.11 = 27
97 — 99	+ 0.4977	0·5915	0.1224	26.19 = 26
99 — 101	+ 0.8223	0.7939	0.0789	16.84 = 17
101 — 103	+ 1.1469	0.8729	0·0563	12.06 = 12
103 — 105	+ 1·4715	0.9293	0·0348	7.45 = 7
105 — 107	+ 1.7691	0.9641	0·0189	4.05 = 4
107 — 109	+ 2.1207	0.9830	0.0096	2.06 = 2
109 — 111	+ 2.4453	0.9927	0.0046	0.0097 –
மொத்தம்				214

x' = பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை.

இங்குக் கடைசி நிரல் எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் குறிக்கின்றது.

மாதிரி 3 :

$X \rightarrow N(\mu = 10, \sigma = 2)$ என்றால், X மாறி $(-3, 12)$ இடைவெளியில் அமைவதற்கான ஊக அளவு என்ன?

$$P_r[-3 < X < 12]$$

$$= \int_{-3}^{12} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2(4)} \cdot (x-10)^2} dx$$

$z = \frac{x-10}{2}$ என்றால்,

$$P[-6.5 < Z < 1] = \int_{-6.5}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \left[\int_{-6.5}^{0} + \int_{0}^{1} \right] \phi(z)\, dz.$$

$$= \left[\int_{0}^{6.5} + \int_{0}^{1} \right] \phi(z)\, dz.$$

$\left(\because \int_{-6.5}^{0} = \int_{0}^{6.5} \text{ சமச் சீரானது.} \right)$

$= 0.50 + 0.3413$ (அட்டவணை மூலமாக)

$= \underline{0.8413}$

மாதிரி 4 :

(a) $M_X(t) = e^{2t + 2t^2}$

(b) $M_X(t) = e^{8t^2}$

என்ற X–ன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்களிலிருந்து X–ன் பரவலைக் காணவும்.

(a) ஓர் இயல்நிலை மாறியின் தி. உ. சார்பலன்

$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ என நாம் அறிந்ததே.

தி. உ. சார்பலனின் அருந்தனிப் பண்பிலிருந்து

$$e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{2t + 2t^2}$$

எனவே $\mu = 2$

$$\frac{\sigma^2}{2} = 2. \quad \sigma^2 = 4. \quad \sigma = 2$$

$\therefore \; X \to N(2, 4)$. அதாவது X மாறி, சராசரி 2, மாறுபாடு 4 கொண்ட ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும்.

(b) $M_X(t) = e^{8t^2} = e^{0.t + \frac{1}{2} \cdot 16t^2} \equiv e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = 16.$$

$\therefore \; X \to N(\mu, \sigma^2) = N(0, 16)$

X ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது.

(a)-ல் X–ன் பரவல்

$$dP = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(4)} \cdot (x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}$$

(b)-ல் X–ன் பரவல்

$$dP = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(16)} \cdot (x-0)^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{32}x^2}.$$

மாதிரி 5 :

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்கு 10–லிருந்து விலக்கப்பட்ட முதலாவது திருப்புத்திறன் 40 எனவும், 50–லிருந்து விலக்கப்

பட்ட 4-வது திருப்புத்திறன் 48 எனவும் இருப்பின், அப் பரவலின் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் கணிக்கவும்.

(சென்னை சர்வகலாசாலை, 1961)

μ_1' (about 10) $= 40$

அதாவது $E(X - 10) = 40$

$E(X) - 10 = 40$

$E(X) = 50$ $\quad\therefore$ எனவே X-ன் சராசரி $= 50$

μ_4' (about 50) $= E(X - 50)^4 = 48$.

$\mu_4 = 48$

இயல்நிலை பரவலுக்கு $\mu_4 = 3\sigma^4 = 48$ ஆகும்.

எனவே $\sigma^4 = 16$

மாறுபாடு $\sigma^2 = 4$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 2$

மாதிரி 6:

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்குக் கால்மான விலக்கம் : சராசரி விலக்கம் : திட்ட விலக்கம் மூன்றும் தோராயமாக 10 : 12 : 15 என்ற விகிதத்திலுள்ளன என நிரூபி.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$

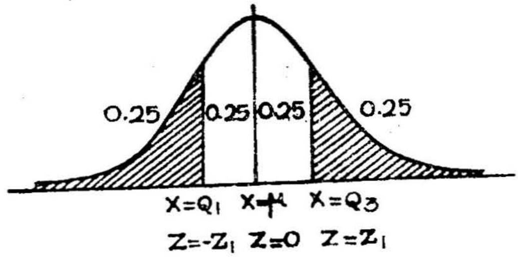
Q_1, Q_3 முறையே முதல், மூன்றும் கால்மானங்களாயின்,

$P_r[X < Q_1] = 0.25$

$P_r[X > Q_3] = 0.25$

$X = Q_3$. $\quad Z = \dfrac{Q_3 - \mu}{\sigma} = z_1$ என்க.

$X = Q_1 \quad Z = \dfrac{Q_1 - \mu}{\sigma} = -z_1$ என்க. (படத்தில் காண்க)



படம் 16.

$$\frac{Q_3 - Q_1}{\sigma} = z_1 - (-z_1) = z_1$$

எனவே, கால்மான விலக்கம் $Q.D.$ = கா. வி. = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

கா. வி. = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2\sigma z_1}{2} = \sigma . z_1$

$P\,[0 < Z < z_1] = 0.25$

அல்லது $z_1 \doteqdot 0.67$ (பரப்பரளவு அட்டவணையிலிருந்து)

எனவே, கா. வி. = $0.67\,\sigma \doteqdot \frac{2}{3}\,\sigma$.

மேலும், ச. வி. = $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \doteqdot \frac{4}{5}\,\sigma$ என்று முன்பே நிரூபித்தோம்.

எனவே, கா. வி : ச. வி. : தி. வி. : : $\frac{2}{3}\,\sigma : \frac{4}{5}\,\sigma : \sigma$.

: : 10 : 12 : 15 என்று நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி 7:

ஒரு சரியான இடைநிலைப் பரவலில் 7 சதவிகித உறுப்புகள் 35-க்குக் கீழேயும், 89 % சதவிகித உறுப்புகள் 63-க்குக் கீழேயும் இருந்தால், அப் பரவலின் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

$X \to N(\mu, \sigma^2)$

$P_r\,(X < 63) = 0.89.$

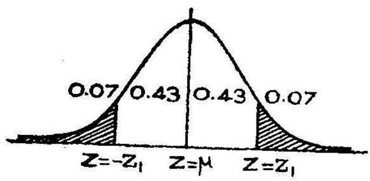
எனவே $P\,(X < 63) = 0.11$

அத்துடன் $P\,(X < 35) = 0.07$

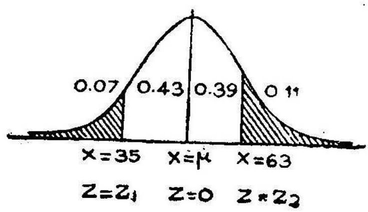
$X = 35$ என்ற மதிப்பு $X = \mu$-க்கும் இடது பக்கத்திலிருப்பதால், அதற்குச் சரியான $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$-ன் மதிப்பு ஓர் எதிர் மறை மதிப்பாகும்.

$$X = 35, \quad Z = \frac{35 - \mu}{\sigma} = -z_1$$

$X = 63, \quad Z = \frac{63 - \mu}{\sigma} = z_2$ என்று கொள்க.



படம் 17.



படம் 18.

$P_r(0 < Z < z_2) = 0.39$
$P_r(0 < Z < z_1) = 0.43$ } படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

பரப்பளவு அட்டவணையிலிருந்து $z_1 = 1.23$

$z_2 = 1.48$

என அறிகிறோம்.

$$\text{எனவே, } \frac{63 - \mu}{\sigma} = 1.23 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{35 - \mu}{\sigma} = -1.48. \quad \cdots \quad (2)$$

$(1) - (2)$; $\frac{28}{\sigma} = 2.71 \qquad \underline{\sigma = 10.33}$

எனவே $\mu = 35 + (1.48) \times (10.33)$

$= 50.3.$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} \mu &= 50.3 \\ \sigma &= 10.33 \end{aligned}}$$

கடைசியாகக் கீழே கண்ட அட்டவணையில் அதிகமாகப் பயன்படும் பரவல்களையும் அவற்றின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்களையும் விளக்கிடுவோம்.

பரவல்	பரவலின் நிகழ்தகவு (ஊக அளவு) அடர்த்திச் சார்பலன் (P. d. f.)	திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன் (M. G. F.)
(1) ஈருறுப்புப் பரவல்	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, \ldots n$ $= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)	$(q + pe^t)^n$
(2) பாய்சான் பரவல்	$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots \infty$ $= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)	$e^{\lambda (e^t - 1)}$
(3) எதிர் மறை ஈருறுப்புப் பரவல்	$f(x, r) = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r, q^x,$ $x = 0, 1, 2, \ldots \infty$ $= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)	$(Q - Pe^t)^{-r}$ $p = \dfrac{1}{Q} q = \dfrac{P}{Q}$ $Q - P = 1.$
(4) காம்மாப் பரவல்	$f(x) = \dfrac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ $x > 0.$ $= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்.)	$(1 - \beta t)^{-\alpha}.$
(5) அடுக்குப் பரவல்	$f(x) = \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0.$ $= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)	$(1 - \theta t)^{-1}.$
(6) இயல் நிலைப் பரவல்	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ $exp \left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right]$ $- \infty < x < \infty.$	$e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$

பயிற்சிகள் I.

(1) ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கிய பொதுப்பண்புகளை விளக்கி அதற்கான கணக்கியல் உருவை வருவிக்கவும். புள்ளி யியலில் இப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தை நன்கு விளக்குக.

(2) (a) எந்த நிபந்தனையில், எவ்வாறு ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது என்பதை விளக்குக.

(b) μ சராசரியும், σ திட்ட விலக்கமும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலுக்கு, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ என்று நிரூபி. மேலும், இடைநிலை யிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடவும்.

(3) இயல்நிலைப் பரவலை வரையறுத்து, (i) முகடு, (ii) இடைநிலை, (iii) β_1, (iv) β_2 மதிப்புகளைக் காண்க.

(4) $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ என இருக்கட்டும்.

$P_r(X < 89) = 0.90;$

$P_r(X < 94) = 0.95$ என்றால்

μ, σ^2 மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

(5) ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன் $M_X(t) = e^{3t + 8t^2}$ என்றால் $P_r(-1 < X < 9)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(6) $f(x) = c \cdot e^{-x^2 + 4x}$, $\infty < x < \infty$ என்றால், $f(x)$ ஓர் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனின் நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்தால், c-ன் மதிப்பு யாது?

(7) $X_1 \rightarrow N(0, \sigma_1^2)$

$X_2 \rightarrow N(0, \sigma_2^2)$

X_1, X_2 இரண்டும் சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளானால்,

$U = X_1 + X_2$

$V = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} X_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2$ என்ற U, V இரு மாறிகளும்,

ஒவ்வொன்றும் 0 சராசரியையும், $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ மாறுபாட்டையும் கொண்ட இரு சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள் என நிரூபித்துக் காட்டு.

(8) (a) 'இயல் நிலை வளைகோட்டின் கீழ்பரப்பு' அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி,

$$D_7 = \mu + 0{\cdot}525\,\sigma \text{ என்றும்}$$

$$P_{90} = \mu + 1.282\,\sigma \text{ என்றும் நிரூபி.}$$

(b) $X \rightarrow N(65, 25)$ என்றால் P_{90}–ன் மதிப்பு என்ன?

(9) சராசரி 0, மாறுபாடு 1ஐக் கொண்ட X மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறியானால்,

(i) x^2

(ii) e^{ax}

இவற்றின் சராசரி, மாறுபாடுகளைக் கணக்கிடுக.

(10) ஒரு x மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}, \quad x > 0$$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்) என்றால், அந்த மாறி ஒரு ('லாக் — நார்மல்') 'மடக்கை இயல்நிலைப் பரவலில்' இருப்பதாகக் கூறலாம். இப்போது x-ன் சராசரி, மாறுபாடு இவற்றைக் கணக்கிடவும்.

8–5. மாறிகளின் உருவ மாற்றங்கள்

சில சமயங்களில் புள்ளியியல் தத்துவத்தில் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாறியின் ஒரு சார்பலனுக்கான பரவலைப் அறிய விரும்புவோம். எடுத்துக்காட்டாக X ஒரு ராண்டம் மாறியானால், X^2–ன் பரவல் யாது? X ஒரு காம்மா மாறியானால், $3X + 5$–ன் பரவல் எப்படி இருக்கும்? இவற்றிற்கான தீர்வு

காண இப்போது மாறிகளின் உருவ மாற்றங்கள் பற்றிக் கீழே ஆராய்வோம்.

$y \subset f(x)$ என்ற சார்பலன் x–ன் வகைப்படுத்தப்பட்டதும், ஒரே முறை ஏறும் (அல்லது இறங்கும்) சார்பலன் (monotonic increasing function) Y – ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f_1(y)$

$$f_1(y) = f_2(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு X-ன் ஊ. அ. சார்பலன் $f_2(x)$ ஆகும்.

மாதிரி :

X மாறியின் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, \; 0 < x < \theta, \quad \theta > 0$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில்) என்றால்,}$$

$Y = 2X + 3$–ன் அடர்த்திச் சார்பலனைக் கணிக்கவும்.

$$y = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2. \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

எனவே,

$$f_1(y) = f_2(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{2}, \quad 3 < y < 2\theta + 3$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில்).}$$

மாதிரி 8 :

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2/2} \quad x > 0$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்) என்றால்

(i) $Y = X^2$

(ii) $Y = \log X$ இவற்றின் அடர்ந்திச் சார்பலன்கள் என்ன ?

$y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot = 2y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

எனவே $f_1(y) = J_2(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$

$$= (y^{1/2} \cdot e^{-y/2}) \cdot (\tfrac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot e^{-y/2}, \; 0 < y < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்).

(b) $y = \log_e x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{dy} = x = e^{y}$$

$$f_1(y) = f_2(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$f_2(x) = x \cdot e^{-x^2/2} \cdot$$

$$= e^{y} \cdot e^{-\frac{1}{2}(e^{2y})}$$

எனவே $f_1(y) = e^{y} \cdot e^{-\frac{1}{2} e^{2y}} \cdot e^{y} \cdot$

$$= e^{2y - \frac{1}{2} e^{2y}}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

மாதிரி 9 :

X மாறி ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியானால்,

$Y = X^2$ மாறி $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ஐப் பண்பளவுகளாகக் கொண்ட ஒரு காம்மா மாறி எனக் காண்க.

X ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி.

அதன் சார்பலன் $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$

$$y = x^2$$

$$\frac{dx}{dx} = 2x = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}$$

$$f_1(y) = f_2(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2} \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} \Big) \cdot 2,$$

(ஏனெனில் $f(x)$ ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பலனுதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 2 \int_{0}^{\infty}$$

எனவே 2ஆல் பெருக்குகிறோம்).

$$\therefore \quad f_1(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}/2 \ \Gamma(1/2)} e^{-y/2} \cdot y^{\frac{1}{2} - 1}, \quad y > 0$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).}$$

ஆகவே $Y = X^2$ என்பது $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ஐக் கொண்ட ஒரு காம்மா மாறியாகிறது.

Y-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$= 0$. (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்), என்ருல்

$y = -2 \log_e x$ மாறி, 2 இயக்கப் பாகைகளைக் கொண்ட (degrees of freedom) ஒரு கை-வர்க்க மாறி என்று நிரூபி.

$$y = -2 \log x \qquad x = e^{-y/2}$$

$$x \rightarrow (0, 1)$$

$$y \rightarrow (0, \infty)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}. \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = \tfrac{1}{2} \cdot x = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-y/2}$$

எனவே $f_1(y) = f_2(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$

$$f(x) = 1$$

எனவே $f_1(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2} = \frac{1}{2} e^{-y/2}, \quad 0 < y < \infty$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்).

$\therefore$ $Y = -2 \log X$-ன் பரவல், 2 இ. பாகைகளையுடைய ஒரு χ^2 பரவல்.

$$dP = \frac{1}{2^{2/2} \Gamma(\frac{2}{2})} \cdot e^{-y/2} y^{\frac{2}{2} - 1} dy, \qquad 0 < y < \infty$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \Gamma(1)} e^{-y/2} dy.$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{-y/2} dy$$

8-6. முதல் வகை பீட்டாப் பரவல் (Beta Distribution of the first kind)

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி X-ன் ஊ. அ. சார்பலன்,

$$f(x) = \frac{1}{\beta(m, n)} \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1}, \quad m < 0, \; n > 0, \; 0 < x < 1$$

= (0 மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்) என்றால், x மாறியை m, n இரு பண்புகளைக் கொண்ட ஒரு 'முதல் வகை பீட்டா மாறி' '$\beta_1(m, n)$' என்றும், இதற்கான பரவலை 'முதல் வகைப் பீட்டாப் பரவல்' என்றும் வழங்கலாம்.

திருப்புத்திறன்கள் :

$$\mu_r' = \frac{1}{\beta(m, n)} \cdot \int_0^1 x^r \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{\beta(m+r, n)}{\beta(m, n)}$$

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே,

$$\mu_r' = \frac{\Gamma(m+r)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+r)} \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+n) \cdot \Gamma(m+r)}{\Gamma(m)\,\Gamma(m+n+r)}$$

$$r=1; \; \mu_1' = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}$$

$$= \frac{m\,\Gamma(m) \cdot \Gamma(m+n)}{(m+n) \cdot \Gamma(m+n)\,\Gamma(m)} = \frac{m}{m+n}$$

$$r=2 \quad \mu_2' = \frac{\Gamma(m+2)\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n+2)\,\Gamma(m)}$$

$$= \frac{(m+1)\, m \quad \Gamma(m) \cdot \Gamma(m+n)}{(m+n+1)\,(m+n) \quad \Gamma(m+n) \cdot \Gamma(m)}$$

$$\mu_2' = \frac{m\,(m+1)}{(m+n)\,(m+n+1)}$$

எனவே, $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$= \frac{m\,(m+1)}{(m+n)\,(m+n+1)} - \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

$$= \frac{m\,n}{(m+n)^2 \cdot (m+n+1)}$$

8–7. இரண்டாம் வகைப் பீட்டாப் பரவல்

X மாறியின் (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார் பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\beta(m, n)} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}, \quad 0 < x < \infty, \; m, n > 0$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்), என்றால் X மாறியானது ஓர் இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறி எனவும், அதன் பரவல் ஓர் இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல் எனவும் வழங்கப்பெறுகிறது.

திருப்புத்திறன்கள் :

$$\mu_r' = \int_0^{\infty} x^r \cdot f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m, n)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{(m+r)-1}\, dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$= \frac{\beta(m+r, n-r)}{\beta(m, n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+r \quad \Gamma(n-r)}{\Gamma(m+n)} \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+r) \cdot \Gamma(n-r)}{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}$$

$r = 1;$ $$\mu_1' = \frac{\Gamma(m+1) \quad \Gamma(n-1)}{\Gamma(m) \quad \Gamma(n)}$$

$$= \frac{m \quad \Gamma(m) \quad \Gamma(n-1)}{(n-1) \quad \Gamma(m) \quad \Gamma(n-1)} = \frac{m}{n-1}$$

$$\therefore \quad \mu_1' = \frac{m}{n-1}.$$

$$\mu_2' = \frac{\Gamma(m+2) \quad \Gamma(n-2)}{\Gamma(m) \quad \Gamma(n)}$$

$$= \frac{(m+1)\, m \cdot \Gamma(m) \cdot \Gamma(n-2)}{(n-1)(n-2) \quad \Gamma(m) \quad \Gamma(n-2)}$$

$$= \frac{m(m+1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= \frac{m(m+1)}{(n-1) \quad (n-2)} - \left(\frac{m}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{m(m+n-1)}{(n-1)^2 \quad (n-2)}$$

மாதிரி 10:

$X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்,

$Y = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ மாறி ஒரு காம்மா மாறி $G(\frac{1}{2})$ ஆகும்.

X-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

$$-\infty < x < \infty$$

$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2$ என்றால் $\frac{x - \mu}{\sigma} = \sqrt{2y}$

$$\frac{dx}{dy} = \sigma \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} \cdot = \frac{\sigma}{\sqrt{2y}} .$$

$f(x)$ ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பலன் ஆனதால்,

x-க்கான $\int_{-\infty}^{\infty}$ தொகையானது y-க்கான $2\int_{0}^{\infty}$ தொகையாக ஆகிறது.

எனவே,

$$f_1(y) = f_2(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

அல்லது வேறுவிதமாக எழுதினால்,

$$\phi(y) = f(x) \cdot |J|, \quad |J| = \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y} .$$

$$\therefore \quad \phi(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2y}} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y} \cdot y^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)} e^{-y} \cdot y^{\frac{1}{2} - 1}, \quad 0 < y < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புக்களில் எல்லாம்).

எனவே $y = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ ஒரு G $(\frac{1}{2})$ மாறி என்று தெரிய வருகிறது.

மாதிரி 11:

X, Y என்பன, முறையே m, n பண்பளவுகளைக் கொண்ட இரண்டு சார்பற்ற காம்மா மாறிகளானல்,

$U = X + Y$ என்பது $(m+n)$ஐப் பண்பளவாகக் கொண்ட ஒரு காம்மா மாறி,

$V = \frac{X}{X+Y}$ மாறியானது m, n பண்பளவுகளைக் கொண்ட ஒரு முதல் வகை பீட்டா மாறி என நிரூபி.

அதாவது $X \rightarrow G(m)$

$Y \rightarrow G(n)$

X, Y இரண்டும் சார்பற்றவையாகில்,

$U = X + Y \rightarrow G(m+n)$

$V \quad \frac{X}{X+Y} \rightarrow \beta_1(m, n)$ மாறிகள் என நிரூபிக்கலாம்.

X-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f_1(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot e^{-x} \cdot x^{m-1}, 0 < x < \infty, \quad m > 0.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்).

Y-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f_2(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot e^{-y} y^{n-1},$$

$$0 < y < \infty, \quad n > 0$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்).

X, Y இரண்டும் சார்பற்றவை யாதலால்,

X, Y ன் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

$$f(x, y) = f_1(x) . f_2(y)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m) \; \Gamma(n)} \cdot e^{-(x+y)} \cdot x^{m-1} y^{n-1}$$

$$u = x+y$$

$$v = \frac{x}{x+y} = \frac{x}{u}$$

$$\therefore x = u\,v$$

$$y = u - x = u - u\,v = u(1-v)$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v \;\; 1-v \\ u \;\; -u \end{vmatrix} = |-u| = u$$

$x \to (0, \infty)$

$y \to (0, \infty)$ என்பதால்,

$u \to (0, \infty)$

$v \to (0, 1)$ என நாம் அறியலாம்.

எனவே, U, V-ன் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார் பலன்,

$$g(u, v) = f(x, y) \;|J|$$

$$= f[u\,v, u(1-v)] \;|J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\ \Gamma(n)} e^{-u} (u\,v)^{m-1}$$

$$[u(1-v)]^{n-1} \cdot |J|$$

$$= \frac{\Gamma(m)+(n)}{\Gamma(m)+\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\Gamma(m+n)}$$

$$\cdot\, e^{-u}\ u^{m+n-1}\ v^{m-1} \cdot (1-v)^{n-1}$$

$$= \left[\frac{1}{\Gamma(m+n)} \cdot e^{-u} \cdot v^{(m+n-1)}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\beta(m,n)} \cdot v^{m-1} (1-v)^{n-1}\right]$$

$$= g_1(u) \cdot g_2(v)$$

இங்கு $g_1(u) = \frac{1}{\Gamma(m+-n)} e^{-u} \cdot v^{m+n-1}$, $0 < u < \infty$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்)

$$g_2(v) = \frac{1}{\beta(m,n)} v^{m-1} (1-v)^{n-1}, \quad 0 < v < 1.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்).

இங்கு $g_1(u, v) = g_1(u) \cdot g_2(v)$ என்பதால் U, V இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகள் ஆகின்றன.

மேலும், U மாறி $(m+n)$ பண்பளவுடன் கூடிய ஒரு காம்மா மாறி.

V மாறி m, n இரு பண்பளவுகளைக் கொண்ட ஒரு முதல் வகைப் பீட்டா மாறி என்று நிரூபணமானது.

மாதிரி 12 :

m, n பண்பளவுகளைக் கொண்ட ராண்டம் மாறிகள் முறையே X_1, X_2 என்றால்,

$$U_1 = X_1 + X_2$$

$$U_2 = \frac{X_1}{X_2} \text{ என்றால்,}$$

இரண்டும் சார்பற்றவை என்றும்,

$$U_1 \to G\,(m + n)$$

$U_2 \to \beta_2\,(m, n)$ மாறிகள் என்றும் நிரூபி.

X_1, X_2 இரண்டும் சார்பற்ற காம்மாப் பரவலைச் சார்ந்திருப்பதால்,

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) . f_2(x_2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\ \Gamma(n)} . e^{-x} . x^{m-1} . e^{-y} . y^{n-1}, \quad 0 < x, y < \infty.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு) என்றாகும்.

$$u_1 = x_1 + x_2$$

$$u_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

$$1 + u_2 = 1 + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{u_1}{x_2}$$

$$\therefore\ x_2 = \frac{u_1}{1 + u_2}$$

எனவே $x_1 = u_2 . x_2$

$$\neq u_2 . \frac{u_1}{u_1 + u_2}$$

$$\neq \frac{u_1 \; u_2}{u_1 + u_2} = u_1 \left[1 - \frac{1}{1+u_2} \right]$$

$$x_1 = u_2 \cdot \frac{u_1}{1 + u_2}$$

$$= \frac{u_1 \; u_2}{1 + u_2} = u_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + u_2} \right]$$

$$|J| = \left| \frac{\partial \; (x_1 , x_2)}{\partial \; (u_1 , u_2)} \right|$$

$$= \left| \frac{- u_1}{(1 + u_2)^2} \right| = \frac{u_1}{(1 + u_2)^2}$$

$x_1 \to (0, \infty)$

$x_2 \to (0, \infty)$ என்பதால்

$\left.\begin{array}{l} u_1 \to (0, \infty) \\ u_2 \to (0, \infty) \end{array}\right\}$ என்று நாம் கண்டு அறியலாம்.

$$\therefore g\,(u_1 , u_2) = [\, f\,(x_1 , x_2). \; |J|$$

$$= f \left[\frac{u_1 \, u_2}{1 + u_2} \;,\; \frac{u_1}{1 + u_2} \right]. \; |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m) \; \Gamma(n)} \cdot e^{-u_1} \left(\frac{u_1 \; u_2}{1 + u_2} \right)^{m-1}$$

$$\times \left(\frac{u_1}{1 + u_2} \right)^{n-1} |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m) \quad \Gamma(n)} \; e^{-u_1} \; u_1^{\;m + n - 2}$$

$$\times \frac{u_2^{\;m-1}}{(1+u_2)^{\;m+n-2}} \cdot \frac{u_1}{(1 + u_2)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{\Gamma(m+n)} \cdot e^{-\mu_1} \cdot \mu_1^{m+n-1} \right]$$

$$\left[\frac{1}{\beta(m, n)} \cdot \frac{u_2^{m-1}}{(1+u_2)^{m+n}} \right]$$

$$0 < u_1 < \infty, \; 0 < u_2 < \infty$$

$$= g_1(u_1) \cdot g_2(u_2), \; 0 < U_1, \; U_2 < \infty.$$

$$= (0), \text{ (மற்ற மதிப்புகளுக்கு)}.$$

$g(u_1, u_2) = g_1(u_1)\, g_2(u_2)$ என்பதால் u_1, u_2 இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாகும். மேலும்,

U_1 மாறி ஒரு $G(m+n)$ மாறி எனவும்,

U_2 மாறி ஒரு $\beta_2(m, n)$ மாறி எனவும் நிரூபணமாகிறது.

மாதிரி 13:

n எண்ணிக்கைகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியைக் கீழ்க்கண்ட பரவலில் அமைந்துள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுத்தால் $\bar{X}$-ன் பரவலைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$f(x) = \frac{1}{a \cdot \Gamma(p)} e^{-x/a} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{p-1}, \quad 0 < x < \infty, \; a > 0, \; p > 0$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f(x)\, dx.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x/a} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{p-1} \frac{dx}{a}.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \int_0^\infty e^{-(1-at)\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a}\right)^{p-1} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-1(1-at)y}\, y^{p-1}\, dy. \quad \left(y = \frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{[1-at]^p} = (1-at)^{-p} .$$

$$M_{\bar{X}}(t) = M_{\frac{\Sigma X_i}{n}}(t) = M_{\Sigma X_i}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\left[\because M_{cX}(t) = M_X(ct) \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right),$$

($\because$ $X_1, X_2 \ldots X_n$ சார்பற்றவை)

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{at}{n}\right)^{-p}$$

$$= \left\{ \left[1 - \frac{at}{n}\right]^{-p} \right\}^n$$

(ஏனெனில் X_i–கள் எல்லாம் சர்வ சமமானவை.)

$$= \left(1 - \frac{at}{n}\right)^{-np}$$

$$= \left[1 - \frac{t}{\left(\frac{n}{a}\right)}\right]^{-np}$$

ஆகவே $\bar{X}$-ன் பரவலை $\bar{X}$ ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார் பலன் மூலம் விளக்கலாம்.

$\bar{X}$ ன் ஊ.அ.சார்பலன்

$$g(\bar{x}) = \frac{\left(\frac{n}{a}\right)^{np}}{\Gamma(np)} e^{-\left(\frac{n\bar{x}}{a}\right)} (\bar{x})^{np-1}, \quad 0 < \bar{x} < \infty$$

8-8. கோஷியின் பரவல் (Cauchy Distribution)

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறி X-ன் ஊ.அ.சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,[1 + (x-\mu)^2]} \cdot \; -\infty < x < \infty$$

என்றால் X மாறியை ஒரு 'கோஷி மாறி' என்றும், அதன் பரவல் ஒரு 'கோஷி பரவல்' என்றும் கூறலாம். இப் பரவல் புள்ளியியல் தத்துவத்தில் மிகவும் உபயோகமாகிறது.

$X = \mu$ என்ற புள்ளியைச் சுற்றி சமச்சீராக இதன் அடர்த்திச் சார்பலன் உள்ளது. எனவே, இப் பரவலின் இடைநிலை $X = \mu$ ஆகும். இது திருப்புத்திறன்கள் அமையாத ஒரு பரவல் ஆகும்.

மேலும் X_1, X_2 இரு சார்பற்ற தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறிகளானால், $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ மாறியானது ஒரு கோஷி மாறி.

அதாவது Y_1 ன் நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன் ஒரு கோஷி அடர்த்திச் சார்பலனாக இருக்கும். இப் பரவலுக்கான சராசரி

$$\mu_1{}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1 + (x-\mu)^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu+\mu)\, dx}{1 + (x-\mu)^2}$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-\mu)^2}\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)\, dx}{1+(x-\mu)^2}$$

$$= \mu + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, dy}{(1+y^2)}, \quad (Y = x-\mu).$$

இங்கு $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1+y^2}\, dy$ தொகையானது ஒரு முழுமையான ஒருங்கியாக (Completely convergent) இல்லாவிடினும்.

இதன் தலையாய மதிப்பு (Principal value) $\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \frac{y}{1+y^2}\, dy$ தொகை அமைந்து காணப்படுகிறது.

மேலும், இத் தொகையின் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது. எனவே,

$$\mu^1{}_1 = \mu + 0$$

ஆதலால், பொது நோக்கில், கோஷி பரவலின் சராசரி அமையப்பெறுது. கோஷியின் சராசரி அமைந்துள்ளதாக நாம் எடுத்துக்கொண்டால், அதன் மதிப்பு $X = \mu$-ல் அமைந்திருக்கும்.

இதன் ஊக அளவு வளை கோடு $X = \mu$ புள்ளியைச் சுற்றி சமச்சீராக இருப்பதால், சராசரி, இடை நிலை, முகடு மூன்றும் ஒரே இடத்தில் $(X = \mu)$ பொருந்துகின்றன. மேலும், X-ன் மாறுபாடு $\sigma^3 = E(x-\mu)^2$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{1+(\bar{x}-\mu)^2}\, dx$$

இங்கு σ^2 அமையப் பெறுது; ஏனென்றால், இத் தொகை ஒருங்கியற்ற தொகையாகும் (not cenvergent). எனவே $r \geq 2$-க்கு கோஷி பரவலின் μ_r மதிப்பு அமையப் பெறுது.

பயிற்சி II.

(1) X, Y இருமாறிகளும் $N\ (0,1)$ என்றமாறிகளாயின்,

(i) X^2

(ii) $X^2 + Y^2$

(iii) $\frac{X^2}{Y^2}$—ன் பரவல்களையும், அவற்றின் மாறுபாடுகளையும் கணக்கிடவும்

(2) X, Y இரு மாறிகளும் முறையே m, n இரு பண்பளவுகளைக் கொண்ட காம்மா மாறியானால்,

$$U = X + Y$$

$$V = \frac{X-Y}{X+Y}$$

என்ற இரு மாறிகளும் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

(3) X மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x) = 2x.\ e^{-x^2}, 0 < x < \infty$$

$$= 0\ ,\ (\text{மற்ற மதிப்புகளில்})\ \text{என்றால்}$$

$Y = X^2$-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனை நிர்ணயிக்கவும்.

(4) X மாறி $(-\pi/2, \pi/2)$ இடைவெளியில் ஒரு செவ்வகப் பரவலில் (ஒரே சீரான பரவலில்) அமைந்திருந்தால், $Y = \tan X$-ன் பரவல் ஒரு 'கோஷி' பரவல் (Cauchy Distribution) என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

9. மாறிகளின் உடன் தொடர்பும், தொடர்புப் போக்கும்

(Correlation and Regression)

9–1. மாறிகளின் உடன் தொடர்பு

ஒரு மாறியைப்பற்றிய பரவல்களை முந்திய அத்தியாயங்களில் அறிந்தது போல இரு மாறிப் பரவல்களை (Bivariate distns) அறிவதற்கு அவை தொடர்புடையவை என்ருல், அத் தொடர்பைப் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு குறிப்பிட்ட ஆட்களின் தொகுப்பில் அவர்களின் எடையையும் உயரத்தையும் அளந்து ஆராய்ந்தால், அது ஓர் இரு மாறிப் பரவல் எனப்படும். இத்தகைய இரு மாறிப்பரவலில் எடையும் உயரமும் ஒன்றுக் கொன்று தொடர்புடையதாக இருக்கிறதா என்று நாம் காண முற்படுவோம். ஒரு மாறியின் மாற்றம் மற்ற மாறியைப் பாதித்து, அதையும் மாற்றிஞல், அவ்விரு மாறிகளையும் 'தொடர்புள்ள மாறிகள்' என வழங்கலாம். இரு மாறிகளும் ஒரேதிசையில் மாறுபட்டால் (அதாவது ஒரு மாறி கூடி, மற்ற மாறியும் கூடிஞலோ, அல்லது ஒரு மாறி குறையும் போது மற்ற மாறியும் குறைந்தாலோ), அத் தொடர்பை 'நேரடித் தொடர்பு,' அல்லது "மிகைத் தொடர்பு" (Positive Correlation) என்கிருேம்.

இதேபோல, இவ்விரு மாறிகளும் எதிர்த் திசையில் மாறுபட்டால், அத் தொடர்பை 'எதிர் மறைத் தொடர்பு' (Negative-Correlation) என்று கூறலாம்.

X, Y என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு $r(X,Y)$ என்று வரையறுத்தால்,

$$r(X,y) = r_{X,y} \frac{\text{Cor}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} . = \frac{\text{Cor}(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$$ ஆகிறது.

எனவே $$r_{X,Y} = \frac{E(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sigma_X \ \sigma_Y} = E\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma}\right)\left(\frac{Y-\bar{Y}}{\sigma}\right)$$

உடன் தொடர்புக் கெழு $r_{X,Y}$ ஐ வேறு விதமாகவும் எழுதலாம். திருப்புத்திறன்களை உபயோகித்து இரு மாறிப் பரவலுக்கு எழுத μ^1_{rs}, μ_{rs} என்ற இரு விதமான திருப்புத்திறன்களை முதலில் இங்கு வரையறுப்போம்.

$$\mu'_{rs} = \sum_r \sum_s x^r \ y^s \ . f(x,y) \qquad \text{(தனித்த வகை)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x^r \ . y^s \ . f(x,y)\, dx \, . \, dy \qquad \text{(தொடர் வகை)}$$

அதே போல,

$$\mu_{rs} = \sum_r \sum_s (x-\bar{x})^r \ (y-\bar{y})^s . \quad f(x,y) \qquad \text{(தனித்த வகை)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^r \ . (y-\bar{y})^s \ f(x,y)\, dx, dy$$

(தொடர் வகை)

இங்கு $r = 1$, $s = 0$ என்றால்,

$$\mu'_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \, . f(x,y) \cdot dx\, dy = E(x) = \bar{x}$$

$r = 0$, $s = 1$,

$$\mu'_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x,y)\, dx \, . \, dy = E(y) = \bar{y} .$$

$r = 2, \quad s = 0$

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^0 \cdot f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \text{Var}(x) = \sigma_x^2$$

$r = 0, \quad s = 2,$

$$\mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^0 \cdot (y - \bar{y})^2 f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \text{Var}.(y) = \sigma_y^2.$$

$r = 1, \quad s = 1;$

$$\mu_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^1 f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \text{cor}(x, y) = \sigma\, xy = E(x - \bar{x})(y - \bar{y}).$$

(தனித்த வகைக்கும் இதே போல வரையறுக்கலாம்.)

ஆகவே $r_{X, Y} = \dfrac{\text{cor}(x, y)}{\sqrt{\sigma x^2 \cdot \sigma y^2}} = \dfrac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20} \cdot \mu_{02}}}$

மேலும் $r_{X, Y} = \dfrac{\text{cor}(X, Y)}{\sqrt{V(X)\, V(Y)}}$

$$= \frac{E(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{E(X - \bar{X})^2 \cdot E(Y - \bar{Y})^2}}$$

$$r_{x,y} = \frac{\frac{1}{N} \sum X Y - \bar{X}\, \bar{Y}}{\sqrt{\left[\frac{1}{N} \sum X^2 - \bar{X}^2\right] \left[\frac{1}{N} \sum Y^2 - \bar{Y}^2\right]}}$$

$$= \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum (X^2 - N\bar{X}^2)(\sum Y^2 - N\bar{Y}^2)}}$$

(சீர்படா விவரங்களுக்கு–Raw Data)

$$= \frac{[\sum f_{ij} X_i Y_j - N\bar{X}\bar{Y}]}{\sqrt{(\sum f_j X_i^2 - N\bar{X}^2)(\sum f_i Y_i^2 - N\bar{Y}^2)}}$$

(சீரான விவரங்களுக்குத் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு.) உடன்தொடர்புக் கெழுவானது, ஆதி, அலகுகளின் மாற்றங்களில் சார்பற்ற ஒரு கெழுவாகும்.

ஏனெனில் X, Y மாறிகளை உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$U = \frac{X - a}{b},$$

$$V = \frac{Y - c}{d} \text{ என்ற}$$

இரு மாறிகளின் உடன்தொடர்புக் கொழுவைக் காணலாம் (இங்கு a, b, c, d நிலை எண்களாகும்.)

$r_{X,Y} = r_{u,v}$ என நிரூபிக்கலாம்.

$$r_{u,v} = \frac{\text{cor}(U, V)}{\sqrt{V(U) \cdot V(V)}}$$

$$\text{cor}(U, V) = E[(u - \bar{u})(v - \bar{v})$$

$$= E\left[\frac{x - \bar{x}}{b} \cdot \frac{y - \bar{y}}{d}\right]$$

$$= \frac{1}{bd} \cdot E(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \quad \ldots\text{(i)}$$

$$V(U) = E(u - u)^2$$

$$= E\left(\frac{x - \bar{x}}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\text{Var}(x)$$

$$= \frac{1}{b^2} V(X) \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$V(V) = E(v - \bar{v}^2)$$

$$= E\left(\frac{y - \bar{y}}{d}\right)^2 = \frac{1}{d^2} \cdot V(Y) \qquad \ldots \text{(iii)}$$

எனவே $r_{u,v} = \dfrac{\text{cor}(U, V)}{\sqrt{V(U) \cdot V(V)}}$

$$= \frac{\frac{1}{bd}\text{cor}(X, Y)}{\sqrt{\frac{1}{b^2 d^2}} \cdot \sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 d^2}}{bd} \cdot r_{x,y}$$

$= r_{x,y}$; [b, d ஒரே குறி (sign) உடையதாய் இருந்தால்.)

$= -r_{x,y}$; (b, d, எதிர்க் குறியுடையதாக இருந்தால்.]

2. இரு சார்பற்ற மாறிகள் தொடர்பற்று உள்ளன.

X, Y இரு சார்பற்ற மாறிகளானல்,

$$\text{cor}(x, y) = E(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$$

$$= E(X - \bar{X}) : E(Y - \bar{Y}) = 0$$

எனவே $r_{X,Y} = \dfrac{\text{cor}(xy)}{\sqrt{V(X) \cdot V(\bar{Y})}} = 0$ ஆகிறது.

ஆதலால் இரு சார்பற்ற மாறிகள் தொடர்பற்றவை.

ஆனல், சார்புள்ள மாறிகள் தொடர்புடையவை என்று நிச்சயமாகக் கூறமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக, X மாறி $(-1, 1)$ இடைவெளியில் ஒரு 'ஒரு சீரான' பரவலில் அமைந்திருந்து, $Y = X^2$ என்ருல்,

Y மாறி, X மாறியை முழுதும் சார்ந்துள்ளது.

இங்கு X-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}, - < X < 1\cdot$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில்).}$$

இப்போது $\mu_x = E(x) = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\, x\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}$

$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\mu_y = E(Y) = E(x^2) = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\, x^2\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{6}\, x^3\right)_{-1}^{1} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{cor}(x, y) = E(X - 0)(Y - \tfrac{1}{3})$$

$$= E(x - 0)(x^2 - \tfrac{1}{3})$$

$$= E\left(x^3 - \frac{x}{3}\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^3 - x}{3}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6}\right]_{-1}^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{3x^4 - 2x^2}{12}\right]_{-1}^{-1}$$

$$= \frac{1}{24}\Big[(3 - 2) - (3 - 2)\Big] = 0$$

ஆகவே $\bar{X}$, Y இரண்டும் முழுதும் சார்புடையதாக இருந்த போதிலும் $r_{X, y} = 0$.

எனவே, சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரிகள் உடன் தொடர் பற்றவை ஆகும்.

உடன் தொடர்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் சார்பற்றவை யாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

X, Y மாறிகள் உடன் தொடர் பற்றவையானல்,

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ என நிரூபி.

[$V(X)$ என்பது X-ன் மாறுபாடு]

$$V(X+Y) = E[(x+y) - E(x+y)]^2$$

$$= E[(x+y) - (\bar{x}+\bar{y})]^2$$

$$= E[(x-\bar{x}) + (y-\bar{y})]^2$$

$$= E(x-\bar{x})^2 + E(y-\bar{y})^2 + 2E(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\,\text{Cor}(X,Y)$$

இங்கு X, Y இரண்டும் உடன் தொடர்பற்றவையாதலால்

$$\text{Cor}(X,Y) = 0.$$

எனவே $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

இதேபோல $V(X-Y) = V(X) + V(Y)$ ஆகும்.

X, Y உடன் தொடர்புடன் இருக்கையில்

$V(X+Y) = \sigma^2_{x+y}$ என்ருல்

$$\sigma^2_{x+y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\,\text{Cor}(x,y)$$

மேலும், $r = \dfrac{\text{Cor}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$ என்பதால்,

$\text{Cor}(x,y) = r \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$ ஆகும்.

$$\therefore\ V(X+Y) = \sigma^2{}_{x+y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\,r\,\sigma_x\,\sigma_Y.$$

அதாவது $2r\,\sigma_x\sigma_y = \sigma_{x+y}^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

$$\therefore\quad r = \frac{\sigma^2(x+y) - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2\sigma_x\,\sigma_y}.$$

எனவே σ_x^2, σ_y^2, σ_{x+y}^2 மதிப்புகளைக் கொண்டும் r-ன் மதிப்பை இச் சூத்திரத்தின் மூலம் கணிக்கலாம்.

X, Y மாறிகளுக்கு

$$x = X - \bar{X},$$

$$y = Y - \bar{Y} \text{ என்றும்}$$

$\sigma^2{}_x$, σ_y^2 முறையே இவற்றின் மாறுபாடு என்றும் கொள்வோம்.

(i). $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma x} - \frac{y_i}{\sigma y}\right)^2 = 2(1-r)$$

(ii) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma x} + \frac{y_i}{\sigma y}\right)^2 = 2(1+r)$$ என்றும் நிரூபி.

மேலும் $-1 \leq r \leq 1$ என்றும் நிரூபி.

(i) இ. பக்கம் $$= \frac{1}{N}\sum\left(\frac{x_i^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_i^2}{\sigma^2 y} - 2\,\frac{x_i\,y_i}{\sigma_r\ \sigma y}\right)$$

$$= \frac{\sigma x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\sigma y^2}{\sigma y^2} - \frac{2r\,\sigma x\,\sigma y}{\sigma_x\,\sigma\,y}$$

$$= 2(1-r). = \text{வ.பக்கம்}$$

(ii) இ. பக்கம் $$= \frac{1}{N}\sum\left(\frac{x_i^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_i^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\,x_i\,y_i}{\sigma_x\ \sigma y}\right)$$

$$= \frac{\sigma x^2}{\sigma x^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{2.r.\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma x\,\sigma_y}$$

$$= \underline{2(1 + r)} = \text{வ.பக்கம்.}$$

இப்போது $\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{x_i}{\sigma_x} - \frac{y_i}{\sigma_y}\right)^2 \geq 0$ ஏனெனில்,

இது ஒரு வாக்கங்களின் கூடுதல்.

அதாவது $2(1-r) \geq 0.$

$$1-r \geq 0$$

$$r \leq 1$$

இதைப் போல (ii) ஆவது மதிப்பும் எதிர் மறையற்றது.

$$2(1+r) \geq 0.$$

$$1+r \geq 0$$

$$r \geq -1$$

இரண்டையும் சேர்த்து எழுதினால் $-1 \leq r \leq 1$ என்பது புலனாகிறது.

9-2. மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு (Regression)

ஓர், இரு மாறிப் பரவலில், மாறிகள் தொடர்புடன் இருந்தால், இந்த இணை மாறிகளை (சோடி மாறிகளை) ப்புள்ளிகளின் மூலம், சிதறல் விளக்கப்படமாக அமைக்கலாம். அப் புள்ளிகள் ஏதேனும் ஒரு வளை கோட்டைச் சுற்றிச் சூழ்ந்திருப்பின், அந்த வளை கோட்டை 'தொடர்புப் போக்கு வளைகோடு' (Curve of-Regression) என வழங்கலாம். ஒரு மாறியின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைக் கொண்டு மற்ற மாறியின் சிறந்த மதிப்பீட்டு அளவைக் கண்டு பிடிக்கப் பயன்படும் நேர்கோடு ஒரு தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு ஆகும்.

X சார்பற்ற மாறியாகவும், Y ஒரு சார்புள்ள மாறியாகவும் இருக்கட்டும்.

X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y = a+b\,X$ ஆக இருக்கட்டும்.

a, b நிலை எண்களின் சிறந்த மதிப்பீட்டை (மிகக் குறைந்த வர்க்கமுறை) **மீச்சிறு வர்க்கமுறை** (Method of least squares) மூலம் நிர்ணயிக்கலாம்.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)^2 \text{ என்றால்}$$

$S = f(a, b)$ எனக் கொண்டு S-ன் சிறுமத்திற்கான (minimum) நிபந்தனைகளை

(i) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0$
(ii) $\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ } (முக்கியமான சார்பலன்கள்)

(iii) $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$

(iv) $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} > 0$ எனவும் வரையறுக்கலாம்.

இங்கு $\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0$ என்றால்

$$-2 \sum (y_i - a - b\,x_i) = 0$$

இங்கு $\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ என்றால்

$$-2 \sum y_i - a - bx_i)\, x_i = 0$$

அதாவது இங்கு இரண்டு ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன (Normal equations).

$$\sum (y_i - a - bx_i) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\sum x_i\,(y_i - a - bx_i) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டு, a, b-ன் மதிப்பீடுகளை அறியலாம்.

அதாவது $\sum y_i = na + b. \sum x_i \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$$\sum x_i\,y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) ஐ n-ஆல் வகுத்தால்

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

எனவே $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியின் வழியாக x-ன் மீது y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சார்பலன் செல்கிறது என்று அறிகிறோம்.

$$\mu_{11} = E(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= E(xy) - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \frac{1}{N}\sum x_i y_i = \mu_{11} + \bar{x}\bar{y}$$

மேலும், $\sigma x^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$ என்பதால் $\frac{1}{n}\sum x^2 = \sigma x^2 + \bar{x}^2$.

இப்போது (2)ஐ nஆல் வகுத்தால்

$$\frac{1}{n}\sum x_i y_i = a\bar{x} + b.\frac{1}{n}\sum x^2$$

$$\mu_{11} + \bar{x}\bar{y} = a\bar{x} + b(\sigma x^2 + \bar{x}^2)$$

$$= \bar{x}(a + b\bar{x}) + b.x^2.$$

$$= \bar{x}\,\bar{y} + b\,\sigma x^2$$

$$\therefore \mu_{11} = b\sigma x^2.$$

எனவே $b = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x} = \bar{y} - \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}.\bar{x}$$

$$b = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}. = \frac{x\,\sigma x\,\sigma y}{\sigma x^2} = r.\frac{\sigma y}{\sigma x}.$$

எனவே y-ன் சார்பலன்

$$\bar{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x$$

$$= \bar{y} - \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2} . \ \bar{x} + \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2} . x$$

$$(y - \bar{y}) = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2} (x - \bar{x})$$

$$\therefore \ (y - \bar{y}) = \frac{r \sigma y}{\sigma x} (x - \bar{x})$$

எனவே, x–ன் மீது y-ன் தொ. போ. சமன்பாடு (தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு)

$$(y - \bar{y}) = \frac{r \sigma y}{\sigma x} (x - \bar{x}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

y ஒரு சார்பிலா மாறி, x ஒரு சார்புள்ள மாறியாக இருந்தால்

y–ன் மீது x–ன் தொ. போ. சமன்பாடு.

$x = \alpha + \beta y$ ஆகும்.

முன்போல 'மீச் சிறு வர்க்க முறை' மூலம் α, β-ன் சிறந்த மதிப்பீட்டைக் கணித்து y-ன் மீதான x-ன் சமன்பாட்டை எழுதலாம்.

y-ன் மீது x-ன் தொ. போ. சமன்பாடு

$$(x - \bar{x}) = \frac{r \sigma x}{\sigma y} (y - \bar{y}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (B)$$

பொதுவாக, எப்போதும் இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

(i) X மீது Y–ன் சமன்பாடு.

(ii) Y மீது X–ன் சமன்பாடு.

ஏதாவது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட x-க்கான y-ன் மதிப்பீட்டைக் கணிக்க (i) ஐப் பயன்படுத்துகிறோம் (இங்கு x சார்பற்றது; y சார்புள்ளது). கொடுக்கப்பட்ட y-க்கான x-ன் மதிப்பீட்டை

y-ன் மீது x-ன் தொ. போ. சமன்பாட்டின் மூலம், அதாவது (ii)-ன் மூலம் கணிக்கலாம்.

(இங்கு y சார்பற்றது; x சார்புடையது.)

$r=1$, என்றால், $y-\bar{y}=\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma y}=\frac{x-\bar{x}}{\sigma x}.$$

இதேபோல

$$(x-\bar{x})=\frac{\sigma x}{\sigma y}(y-\bar{y})$$

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma x}=\frac{y-\bar{y}}{\sigma y}$$

இரண்டும் ஒன்றேயாதலால், ஒரே ஒரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு காணப்படுகிறது.

$r=-1$ என்றாலும், $\frac{y-\bar{y}}{\sigma y}=-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma x}\right)$

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma x}\right)=-\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma y}\right)$$

இரண்டுக்குப் பதில் ஒரே தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு காணப்படுகிறது.

தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள்

X-ன் மீது Y-ன் தொ. போ. கெழு $=b_{Xy}=\frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}=\frac{r\sigma y}{\sigma y}$.

Y-ன் மீது X-ன் தொ. போ. கெழு $=b_{xy}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_y{}^2}=\frac{r\sigma x}{\sigma y}$.

எனவே $b_{xy}\cdot b_{yx}=\frac{r\cdot\sigma y}{\sigma x}\cdot\frac{r\ \sigma x}{\sigma y}=r^2$.

$$\therefore r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy}.$$

$$r = \pm\sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}$$

அதாவது உடன்தொடர்புக்கெழு, தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் ஜியோமிதிச் சராசரியாகும்.

தொ. போ. கெழுக்கள் > 0 என்றால், $r > 0$ ஆகும்.

தொ. போ. கெழுக்கள் < 0 என்றால், $r < 0$ ஆகும்.

ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழு 1 இலக்கத்தைவிட அதிகமானால், மற்றொரு தொ. போ. கெழு 1 இலக்கத்தைவிடக் குறைவாக இருப்பதைக் காணலாம். ஏனெனில்,

$$b_{yx} \cdot b_{xy} = r^2 \leq 1$$

$\therefore \quad b_{yx} > 1$ எனில் $b_{xy} < 1$ என இருத்தல் அவசியம்.

இரு தொடர்புப்போக்கு சமன்பாடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம்

X-ன் மீது Y-ன் தொ. போ. சமன்பாடு,

$$y - \bar{y} = \frac{r\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x}) = m_1(x - \bar{x}) \text{ என்க.} \quad \ldots \quad (1)$$

Y-ன் மீது X-ன் தொ. போ. சமன்பாடு

$$x - \bar{x} = \frac{r\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$$

அதாவது $(y - \bar{y}) = \frac{\sigma y}{r\sigma x} \cdot (x - \bar{x}) = m_2(x - \bar{x})$ என்க.(2)

(1), (2) சமன்பாடுகளின் சரிவுகள் (slopes) முறையே

$$m_1 = \frac{r\sigma y}{\sigma x}$$

$$m_2 = \frac{\sigma y}{r\sigma x}$$

இரு சமன்பாடுகளுக்கிடையே காணப்படும் குறுங்கோணம் θ, என்றால்,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{r\sigma y}{\sigma x} - \frac{\sigma y}{r\sigma x}}{1 + \frac{r\sigma y}{r\sigma x} \cdot \frac{\sigma y}{r\sigma x}}$$

$$= \frac{r^2 - 1}{r} \cdot \frac{\sigma x \quad x y}{(\sigma x^2 + \sigma y^2)}$$

$$= \frac{1 - r^2}{r} \cdot \frac{\sigma x \quad \sigma y}{\sigma x^2 + \sigma y^2} \quad (\because r^2 \leq 1).$$

எனவே $\tan\theta = \frac{1 - r^2}{r} \cdot \frac{\sigma x \quad x y}{\sigma x^2 + \sigma y^2}$

(i) $r = \pm$ என்றால், $\tan\theta = 0, \theta = 0, \pi$

எனவே இரு சமன்பாடுகளும் ஒருங்கே பொருந்துகின்றன. அல்லது ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கின்றன.

இச் சமன்பாடுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ புள்ளி வழியே செல்வதால் இவை இணையாக இருக்க முடியாது. ஆகவே, இரண்டும் ஒருங்கே பொருந்துகின்றன.

(ii) $r = 0$ என்றால்,

$\tan\theta = \infty$. அதாவது $\theta = \pi/2$

எனவே இரு மாறிகளும் உடன் தொடர்பு இல்லாமல் இருப்பின், அவற்றின், சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும்.

y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை (Standard error of estimate of y)

x-ன் மீது y-ன் தொ. போ. சமன்பாடு

$$y - \bar{y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2}(x - \bar{x})$$

$$\therefore y = \bar{y} + \frac{\mu_{11}}{\sigma x_2}(x - \bar{x}).$$

கண்டறிந்த y மதிப்பிற்கும், எதிர்பார்க்கும் Y மதிப்பிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கக் கூட்டலை $n\,S_y^2$ என்றால்,

$$n\,S_y^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \left[\bar{y} - \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \right] \right\}$$

$$= \sum \left[(y_i - \bar{y}) - \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \right]$$

$$= \sum \left[(y_i - \bar{y})^2 + \frac{\mu_{11}^2}{\sigma_x^4} (x - \bar{x})^2 \right.$$

$$\left. - 2 \cdot \frac{\mu_{11}}{\sigma x^2} \; (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]$$

$$n\,S_y^2 = n \left[\sigma y^2 + \frac{\mu_{11}^2}{\sigma_x^4} \cdot \sigma x^2 - 2 \cdot \frac{\mu_{11}^2}{\sigma_x^2} \right]$$

$$= n \left[- \sigma y^2 \frac{\mu_{11}^2}{\sigma_x^2} \right]$$

$$= n \left[\sigma y^2 - \frac{r^2 \; \sigma y^2 \; \sigma x^2}{\sigma_x^2} \right]$$

$$= n \; \sigma y^2 (1 - r^2)$$

$$\therefore \quad S y^2 = \sigma y^2 (1 - r^2)$$

அல்லது y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை $= S_y = \sigma_y \sqrt{(1 - r^2)}$

இதே போல, x மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை $= S_x = \sigma_x \sqrt{(1 - r^2)}$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

$$S_y^2 = \sigma y^2 (1 - r) \geq 0$$

$$1 - r^2 \geq 0$$

$$r^2 \leq 1$$

அல்லது $-1 \leq r \leq 1$

குறிப்பு :

(i) $r = \pm 1$ என்றால்,

$$S_y^2 = 0$$

எனவே, எல்லாப் புள்ளிகளும் நேர்கோட்டில் அமைகின்றன.

(ii) $r = 0$ என்றால்

$$S_y = \sigma y^2$$

இங்கு எதிர்பார்க்கும் Y மதிப்புகள், Y-ன் சராசரியாக இருக்கும்.

$$Y_i = \bar{y}.$$

$$n\, S_y^2 = \Sigma\,(y_i - Y_i)^2$$

$$= \Sigma\,(y_i - \bar{y})^2$$

$$= n\,\sigma_y^2$$

$$\underline{S_y^2 = \sigma_y^2.}$$

உடன் தொடர்புக்கெழுவின் ஊகப்பிழை (Probable Error)

n இணை மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில், r என்பது உடன் தொடர்புக் கெழுவானால், அதன் ஊகப்பிழையைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

தரப்பிழை (Std. Error)

$$\text{S. E.} = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}} \text{ என்றால்,}$$

ஊகப்பிழை $= 0.6745 \times$ தரப்பிழை

$$= 0.6745 \times \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$$

கொடுக்கப்பட்ட உடன் தொடர்புக் கெழுவின் ஏற்புடைமையைச் (reliability) சோதிக்க இந்த ஊகப்பிழை பயன்படுகிறது.

9-3. **வரிசைத் தொடர்பு** (Rank Correlation)

இங்கு n நபர்களின் இரு குணப் பண்புகளை (A, B) அவர்களின் தகுதிகளின்படி வரிசைப்படுத்துவோம்.

இந்த வரிசை முறைகள் இரு பண்பளவுகளுக்கும் பொதுவில், வெவ்வேறாக மாறுபட்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக அழகிற்கும் அறிவிற்குமான தொடர்பைக் கவனித்தால், அழகான நபர் அறிவாற்றலுடன் இருக்க வேண்டுமென்ற அவசியம் இல்லை.

A, B என்ற இரு பண்புகளில் i-வது நபரின் வரிசைகள் (x_i, y_i) $i = 1, 2, 3 \ldots n$ என இருக்கட்டும்.

x_i-கள், y_i-கள் வரிசைகளுக்கிடையேயான உடன் தொடர்புக்கெழுவை, A-க்கும் B-க்குமான வரிசைத் தொடர்பு எனக் கூறலாம்.

சமநிலை வரிசை இல்லை (no tie) என்ற தற்கோளுடன் x, y மாறிகளின் மதிப்புகளை ஆராய்வோம்.

இங்கு x மாறி $1, 2, 3 \ldots n$ மதிப்புக்களையும், y மாறி இதே மதிப்புகளையும் வெவ்வேறு மாறுபட்ட இடங்களில் கொண்டிருக்கின்றன.

$$\text{எனவே } \bar{x} = \bar{y} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$x\text{-ன் மான் மாறுபாடு } \sigma x^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

$\sum x_i^2 =$ முதல் n இயற்கை எண்களின் இருபடிக் கூடுதல்.

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \quad \sigma x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\sigma n^2 = \frac{2(2n^2+3n+1)-3(n^2+2n+1)}{12}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}.$$

இதே போல $\sigma y^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$.

$x_i - y_i = d_i$ என்றால்,

$$d_i = (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})$$

$$\frac{1}{n}\sum d_i^2 = \frac{1}{n}\sum[(x_i-\bar{x}) - (y_i-\bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum[(x_i-\bar{x})^2 + (y_i-\bar{y})^2 - 2(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]$$

$$= \sigma x^2 + \sigma y^2 - 2\operatorname{cor}(x, y)$$

$$= \frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2-1}{12} - 2\operatorname{cor}(x, y).$$

$$\therefore\ 2\operatorname{cor}(x, y) = 2\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\sum d_i^2$$

$$\operatorname{cor}(x, y) = \frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2.$$

(x, y) வரிசைகளின் உடன் தொடர்புக்கெழு

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cor}(x, y)}{\sqrt{\sigma x^2 \cdot \sigma y^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{n^2-1}{12} - \dfrac{1}{2n}\sum d_i^2}{\sqrt{\left(\dfrac{n^2-1}{12}\right)\left(\dfrac{n^2-1}{12}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2}{\left(\frac{n^2-1}{12}\right)}$$

$$= 1 - \frac{12}{2n\ (n^2-1)} \sum d_i^2$$

$$= 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

இதையே x, y-ன் வரிசைத்தொடர்பு என்கிறோம். இதை 'ஸ்பியர்மேனின் உடன் தொடர்புக்கெழு' என்றும் வழங்கலாம்.

$d_i=0$ என்றால் (எல்லா i—க்கும்)

$r=1$ ஆகும்.

மாதிரி 1 :

இரு உடன் தொடர்பில்லாத ராண்டம் மாறிகள் X, Y-ன் சராசரி, மாறுபாடு முறையே 0, 0; σ_1^2, σ_2^2 என்றால்,

$u = x \cos\theta + y \sin\theta$

$v = x \sin\theta - y \cos\theta$. என்றால்

$$r_{u,v} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{[(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\sigma_1^2\ \sigma_2^2\ \operatorname{cosec}^2\ 2\alpha]^{\frac{1}{2}}}$$ என நிரூபி.

தீர்வு :

X, Y மாறிகள் தொடர்பிலா மாறிகள் ;

எனவே $\operatorname{cor}(x, y)=0 \qquad r_{X,Y} = 0$.

$u = x\cos\theta + y\sin\theta$.

$\bar{u} = \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta$

$\overline{u-\bar{u}=(x-\bar{x})\cos\theta + (y-\bar{y})\sin\theta}$.

u-ன் மாறுபாடு $= \sigma u^2 = E\ (u-\bar{u})^2$

$$= E[(x-\bar{x})\cos\theta+(y-\bar{y})\sin\theta]^2$$

$$= \sigma x^2\cos^2\theta+\sigma y^2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\ \text{cor}(x,y)$$

$$= \sigma x^2\cos^2\theta+\sigma y^2\sin\theta^2.$$

$$[\because \text{cor}(x,y)=0.]$$

$$\therefore \quad \sigma u^2=\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2^2\sin^2\theta.$$

III ly $\sigma v^2=E[v-v]^2$

$$=E[(x-\bar{x})\sin\theta-(y-\bar{y})\cos\theta]^2$$

$$=\sigma x^2\sin\theta+\sigma y^2\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta[\text{cor}(x,y)]$$

$$\sigma v^2=\sigma_1^2\sin^2\theta+\sigma_2^2.\cos^2\theta.$$

$$\text{cor}(u,v)=E[(u-\bar{u})(v-v)]$$

$$=E[(x-\bar{x})\cos\theta+(y-\bar{y})\sin\theta]$$

$$\times[(x-\bar{x})\sin\theta-(y-\bar{y})\cos\theta]$$

$$=\sigma x^2\cos\theta.\sin\theta-\cos^2\theta.\ \text{cor}(x,y)$$

$$+\sin^2\theta\cdot\text{cor}(x,y)-\sigma y^2.\sin\theta.\cos\theta.$$

$$=(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\sin\theta.\ \cos\theta.$$

$$\therefore \quad P_{u,v}=\frac{\text{cor}(u,v)}{\sqrt{V(u)\cdot V(v)}}$$

$$=\frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\sin\theta.\ \cos\theta}{[(\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2^2\sin^2\theta)(\sigma_1^2\sin^2\theta+\sigma_2^2\cos^2\theta)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma u^2.\sigma v^2=(\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2\sin^2\theta)(\sigma_1^2\sin^2\theta+\sigma_2^2\cos^2\theta).$$

$$=\sigma_1^4.\cos^2\theta.\ \sin^2\theta+\sigma_1^2\sigma_2^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$$

$$+\sigma_2^4.\ \cos^2\theta.\ \sin^2\theta.$$

$$=(\sigma_1^4+\sigma_2^4)\sin^2\theta.\cos^2\theta.+\sigma_1^2\sigma_2^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2$$

$$-2\sigma_1^2\sigma_2^2\sin^2\theta.\cos^2\theta.$$

$$=(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2\sin^2\theta.\ \cos^2\theta+\sigma_1\ \sigma_2^2.$$

$$\therefore \quad \rho^2 = \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 .\ \sin^2\theta .\ \cos^2\theta}{\sigma u^2 .\ \sigma v^2}$$

$$= \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 .\ \sin^2\theta .\ \cos^2\theta}{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 .\ \sin^2\theta .\ \cos^2\theta + \sigma_1^2\sigma_2^2}$$

$$= \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 .\ \dfrac{(\sin^2\theta)^2}{4}}{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 .\ \dfrac{(\sin^2\theta)^2}{4} + \sigma_1^2\sigma_2^2 .}$$

$$\rho^2 = \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2}{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 + 4\sigma_1^2\sigma_2^2 \operatorname{cosec}^2 2\theta}$$

$$\therefore \rho uv = \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)}{[(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 + 4\sigma_1^2\sigma_2^2 \operatorname{cosec}^2 2\theta]^{1/2}}$$

மாதிரி 2 :

X, Y ராண்டம் மாறிகள் இயல் நிலையில் இணைந்தவாறு பரவியிருந்தால்,

$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha .$

$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha .$ என இருக்கட்டும்.

$\tan 2\alpha = \dfrac{2r\, \sigma x \sigma y}{\sigma x^2 - \sigma y^2}$ என இருந்தால் u, v இரு மாறிகளும் உடன் தொடர்பில்லாத மாறிகள் என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

(இங்கு $r = r\ (x, y)$; $\sigma_x^2 = x$-ன் மாறுபாடு. $\sigma y^2 = y$-ன் மாறுபாடு)

$$\operatorname{cor}(u, v) = E[(u-\bar{u})(v-\bar{v})]$$

$$= E[(x-\bar{x})\cos\alpha + (y-\bar{y})\sin\alpha]$$

$$\times [(y-\bar{y})\cos\alpha - (x-\bar{x})\sin\alpha]$$

$$= \cos^2\alpha .\ \operatorname{cor}(x y) - \sigma x^2 \cos\alpha .\ \sin\alpha$$

$$+\sigma^2_y . \cos \alpha . \sin \alpha . - \sin^2 \alpha . \text{cor}(x, y)$$

$$= \cos 2\alpha . \text{cor}(x, y) - (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) . \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

$r_{u,v} = 0$ அதாவது cor $(n, v) = 0$ என்றால் மட்டுமே u-ம், v-ம் உடன் தொடர்பிலா மாறிகள்.

$\therefore$ cor $(u, v) = 0$ என்றால்

$$\cos 2\alpha . \text{cor}(x, y) = (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) . \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

$$\therefore \frac{2 \text{cor}(x, y)}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)} = \tan 2\alpha$$

எனவே, $\tan 2\alpha = \dfrac{2 r \sigma_x \sigma_y}{\sigma^2_x - \sigma^2_y}$

மாதிரி 3 :

ஒரே மாறுபாட்டைக் கொண்ட மூன்று தொடர்பற்ற மாறிகள் x_1, x_2, x_3 என்றால்,

$$u = x_1 + x_2$$

$$v = x_2 + x_3$$

u, v மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடலாம்.

$$u - \bar{u} = (x_1 - \bar{x}_1) + (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$v - \bar{v} = (x_2 - \bar{x}_2) + (x_3 - \bar{x}_3)$$

$r_{12} = 0 = r_{23} = r_{13}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\sigma_{12} = 0 = \sigma_{23} = \sigma_{13}$. (,,)

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2$ என்க. (,,)

$$\text{cor}\,(u\,,v) = [(u-\bar{u})\,(v-\bar{v})]$$

$$= E\,[(x_1-\bar{x}_1)+(x_2-\bar{x}_2)]$$

$$[(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x}_3)]$$

$$= \sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_2^2+\sigma_{23}$$

$$= \sigma_2^2 \text{ (ஏனெனில் } \sigma_{ij} = 0)$$

$$= \underline{\sigma^2} \quad (\sigma_i^2 = \sigma^2)$$

U-ன் மாறுபாடு $= \sigma u^2 = E\,(u-\bar{u})^2$

$$= E\,[(x_1-\bar{x}_1)+(x_2-\bar{x}_2)]^2$$

$$= \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1^2$$

$$= \sigma_1^2+\sigma_2^2 = \underline{2\sigma^2}.$$

v-ன் மாறுபாடு $= \sigma v^2 = E\,[v-\bar{v}]^2$

$$= E\,[(x_2-\bar{x}_2)+(x_3-\bar{x}_3)]^2$$

$$= \sigma_2^2+\sigma_3^2+2\,\sigma_{23}$$

$$= {}_2^2+\sigma_3^2 \quad (\therefore\ \sigma_{23}=0)$$

$$= \underline{2\sigma^2}\ .$$

எனவே $r_{v,\,v} = \dfrac{\text{cor}\,(u,\ v)}{\sigma u \cdot \sigma v}$.

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 \cdot 2\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

மாதிரி 4 :

x, y மாறிகளின் சராசரி 0, மாறுபாடுகள் σx^2, σy^2, உடன் தொடர்புக்கெழு r என்றால்

$$u = ax + by$$

$v = bx - ay$ இரண்டும் தொடர்பிலா மாறிகள் எனில்,

$\sigma u \cdot \sigma v = (a^2 + b^2)\, \sigma x \cdot \sigma y \cdot (1 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ என நிரூபி.

அணி முறைப்படி (matrix method)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} [u, v] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} [x\, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u^2 & u\,v \\ u\,v & v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 & x\,y \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\therefore E \begin{vmatrix} u^2 & u\,v \\ u\,v & v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}^2 . \; E \begin{vmatrix} x^2 & x\,y \\ xy & y^2 \end{vmatrix}$$

$$E\,(u^2 v^2 - 0) = (a^2 + b^2)^2\, [E\,(x^2 y^2) - E^2\,(x\,y)]$$

$$\sigma u^2\, \sigma v^2 = (a^2 + b^2)^2 . \,(\sigma x^2\, \sigma_y^2 - r^2\, \sigma x^2\, \sigma_y^2)$$

$$= (a^2 + b^2)^2\, \sigma x^2\, \sigma_y^2\, (1 - r^2)$$

எனவே $\sigma u \cdot \sigma v = (a^2 + b^2)\, \sigma_x \cdot \sigma_y\, \sqrt{(1 - r^2)}$
நிரூபிக்கப்பட்டது.

மாதிரி 5:

கீழே தரப்பட்டிருக்கும் அட்டவணை 10 மனிதர்களின் உயரத்தையும் (அங்குலத்தில்), எடையையும் (பவுண்டில்) காட்டுகிறது. உயரத்திற்கும் எடைக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக. மேலும் $\bar{X}$, $\bar{Y}$, σ_x, σ_y கண்டுபிடித்து தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

உயரம் (அங்)	68	69	65	70	71	73	67	66	62	69
எடை (பவு).	140	180	165	190	170	195	145	140	155	180

$A = 69.\quad B = 165$ எனக்கொண்டால்

$U = X - A = X - 69$ என்றும்

$V = Y - B = Y - 165$ என்றும் கொள்வோம்.

$r_{xy} = r_{u,v}$ என்பதால் $r_{u,v}$ ஐக் கணக்கிடுவோம்.

X_i	Y_i	U_i	V_i	U^2	V^2	UV
68	140	−1	−25	1	625	25
69	180	0	15	0	0	0
65	165	−4	0	16	225	0
70	190	1	25	1	625	25
71	170	2	5	4	25	10
73	195	4	30	16	900	120
67	145	−2	−20	4	400	40
66	140	−3	−25	9	625	75
62	155	−7	−10	49	100	70
69	180	0	15	0	225	0
மொத்தம்		−10	10	100	3750	365

$$r_{Xy} = \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{[(\sum X^2 - N\bar{X}^2)(\sum Y^2 - N\bar{Y}^2)]^{\frac{1}{2}}} \qquad N = 10.$$

$$= \frac{\sum UV - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{N.}}{\left[\sum U^2 - \frac{(\sum U)^2}{N}\right]^{1/2}\left[\sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{N}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{365 - (-10)(10)/10}{\left[100 - \frac{(-10)^2}{10}\right]^{\frac{1}{2}} \left[3750 - \frac{(10)^2}{10}\right]^{1/2}} = \underline{\underline{0.646.}}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_U^2 = \frac{1}{N} \sum U^2 - \bar{U}^2$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 100 - (1)^2 = 10 - 1 = \underline{\underline{9.}}$$

$$\underline{\sigma_x^2 = 9.} \qquad \therefore \qquad \underline{\sigma_x = 3.}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{N} \sum Y^2 - \bar{Y}^2$$

$$= \sigma_V^2 \frac{1}{N} \sum V^2 - \bar{V}^2$$

$$= \frac{1}{10} (3750) - (1)^2$$

$$= 375 - 1 = 374.$$

$$\underline{\sigma_Y^2 = 374} \qquad \therefore \qquad \underline{\sigma_Y = 19.34}$$

$$\bar{X} = 68 \; ; \; \bar{Y} = 166.$$

எனவே X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$(y - \bar{y}) = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$(y - 166) = \frac{0.646.\ (19.34)}{3}(x - 68)$$

$$\underline{3(y - 166) = (0.646)(19.34)(x - 68)} \qquad \ldots \text{(i)}$$

Y-ன் மீது X-ன் தொ.போ. சமன்பாடு

$$x - \bar{x} = \frac{r\,\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

$$x - 68 = \frac{0.646\ (3)}{19.34}\ (y - 166). \qquad \ldots \text{(ii)}$$

எனவே, $\bar{X} = 68$

$\bar{Y} = 166.$

$\sigma_x = 3$

$\sigma_y = 19.34$

$r_{xy} = 0.646.$

மாதிரி 6 :

ஒரு அறிவுத் திறனாய்வுப் போட்டியில் X, Y இரு பாடங்களில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைத் தொகுத்து உடன்தொடர்புப் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

X, Y பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கான உடன்தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடவும். இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் Y மதிப்பீட்டுக்கான தரப்பிழை என்ன ?

கணக்கு மதிப்பெண்கள்

பௌதிக மதிப்பெண்கள்	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	மொத்தம்
90–99				2	4	4	10
80–89			1	4	6	5	16
70–79			5	10	8	1	24
60–69	1	4	9	5	2		21
50–59	3	6	6	2			17
40–49	3	5	4				12
மொத்தம்	7	15	25	23	20	10	100

இங்கு X, Y மாறிகளின் உடன்தொடர்புக்கெழு

$$r_{X,Y} = \frac{N \sum f \cdot XY - (\sum f_X \cdot X)(\sum f\, Y_y)}{\sqrt{[N \sum f_X \cdot X^2 - (\sum f_X \cdot X)^2]\,[N \sum f_Y Y^2 - (\sum f_Y \cdot Y)^2]}}$$

$$u_x = \frac{X - A}{C} = \frac{X - 64 \cdot 5}{10}$$

$$u_Y = \frac{Y - B}{C_Y} = \frac{Y - 74 \cdot 5}{10}$$ என்று கொண்டால்

$r_{UX \cdot UY} = r_{X,Y}$ என நாம் முன்பே நிரூபித்ததால்,

$r_{UX \cdot UY}$ ஐக் கணக்கிடுவோம்.

$$r_{U_x, U_y} = \frac{N \sum f u_X u_Y - (\sum f_X \cdot u_X)(\sum f_Y u_Y)}{\left[N \sum f_X \cdot u_X^2 - (\sum f_X u_X)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[N \cdot \sum f_Y \cdot u_Y^2 - (\sum f_Y \cdot u_Y)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$N = \sum f_X = \sum f_Y = 100.$

இப்போது $\sum f_X$, $\sum f_X u_X$, $\sum f_X \cdot u_X^2$, $\sum f_Y$, $\sum f_Y \cdot u_Y$, $\sum f_Y u_Y^2$ $\sum f \cdot u_X u_Y$ இவற்றைக் கணக்கிட கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கிறோம்.

		கணித மதிப்பெண்கள் X									
	X	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5	f_y	$f_y u_y$	$f_y u_y^2$	Sum of corner numbers in each row
மொழித்திற மதிப்பெண்கள் Y: Y	u_x / u_y	−2	−1	0	1	2	3				
94.5	2				2 [4]	4 [16]	4 [24]	10	20	40	44
84.5	1			1 [0]	4 [4]	6 [12]	5 [15]	16	16	16	31
74.5	0			5 [0]	10 [0]	8 [0]	1 [0]	24	0	0	0
64.5	−1	1 [2]	4 [4]	9 [0]	5 [−5]	2 [−4]		21	−21	21	−3
54.5	−2	3 [12]	6 [12]	6 [0]	2 [−4]			17	−34	68	20
44.5	−3	3 [18]	5 [15]	4 [0]				12	−36	108	33
f_x		7	15	25	23	20	10	$\Sigma f_x = \Sigma f_y = N = 100.$	$\Sigma f_y u_y = -55$	$\Sigma f_y u_y^2 = 253$	$\Sigma f u_x u_y = 125$
$f_x u_x$		−14	−15	0	23	40	30	$\Sigma f_x u_x = 64$			
$f_x u_x^2$		28	15	0	23	80	90	$\Sigma f_x u_x^2 = 236$			
		32	31	0	−1	24	39	$\Sigma f u_x u_x = 125$			

இந்த அட்டவணையையும், சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தினால் r கிடைக்கிறது.

$$r = \frac{N\Sigma f u_X \cdot u_Y - (\sum f_X \cdot u_X) \cdot (\sum f_Y \cdot u_Y)}{\sqrt{[N\, \Sigma f_X \cdot u_X{}^2 - (\sum f_X \cdot u_X)^2] \cdot [N \cdot \sum f_Y \cdot u_Y{}^2 - (\sum f \cdot u_Y)^2]}}$$

$$= \frac{100\,(125) - (64)\,(-55)}{\sqrt{[(100)\,(236) - (64)^2] \cdot [(100)\,(253 - (-55)^2]}}$$

$$= \frac{16020}{\sqrt{(19504) \cdot (22275)}} = \underline{0 \cdot 7686.}$$

மேலும் X, Y-ன் திட்ட விலக்கங்களையும் கணிக்கலாம்.

$$\sigma_X = C_X . \sqrt{\frac{\sum f_X\, u_X{}^2}{N} - \left(\frac{\sum f_X\, u_X}{N}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2}$$

$$= \underline{13 \cdot 966}$$

$$\sigma_y = C_y . \sqrt{\frac{\sum f_Y \cdot u_Y{}^2}{N} - \left(\frac{\sum f_Y \cdot u_Y}{N}\right)^2}$$

$$= 0\sqrt{\frac{253}{100} - \left(\frac{-55}{100}\right)^2} = \underline{14 \cdot 925}$$

$$\bar{X} = A + C_X\, \frac{\sum f_X\, u_X}{N}$$

$$= 64.5 + 10 \cdot \frac{(64)}{100} = \underline{70.9.}$$

$$\overline{Y} = \beta + C_y . \frac{\Sigma f_y \,.\, U_y}{N}$$

$$= 74.5 + 10 \cdot \frac{(-55)}{100} \underline{= 69 \cdot 0}$$

எனவே $\bar{X}$, $\overline{Y}$, σ_X, σ_y, $r_{x,y}$ இவற்றின் மதிப்புகளை வைத்துக் கொண்டு இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

X-ன் மீது Y-ன் தொ. போ. சமன்பாடு

$$Y - \bar{Y} = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{X})$$

$$Y - 69.0 = \frac{(0.7686)\,(14.925)}{13.966}(X - 70.9)$$

அதாவது $Y - 69.0 = 0.821\,(X - 70.9)$ ... (i)

Y-ன் மீது X-ன் தொ. போ. சமன்பாடு

$$X - \bar{X} = \frac{r\,\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y})$$

$$(X - 70.9) = \frac{(0.7686)\,(13.966)}{14.925}(Y - 69.0)$$

அதாவது $X - 70.9 = 0.719\,(Y - 69.0)$

இங்கு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள்

$$b_{yX} = 0.821$$

$$b_{Xy} = 0.719$$

மேலும் $r = \sqrt{b_{yX} \cdot b_{Xy}}$ என்பதை மதிப்புகளைச் சமனிட்டுக் காண முடியும்.

$$r = \sqrt{(0.821)\,(0.719)} = 0.7686$$

மேலும், Y மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை $S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$ என்றால்,

$$\text{தரப்பிழை } S_y = (14.925)\sqrt{1 - (0.7686)^2} = 9.548$$

மாதிரி 7:

(a) இரு மாதிரிகளின் n_1, n_2

சராசரி $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$

திட்ட விலக்கம் $(\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1})$, $(\sigma_{x_2}, \sigma_{y_2})$

உடன் தொடர்புக்கெழு, r_1, r_2 என்றால், இரு மாதிரிகளையும் ஒன்றாகச் சேர்த்த கூட்டு மாதிரிக்கான உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கண்டுபிடி.

கூட்டு சேர்த்த மாதிரிக்கான சராசரி $(\bar{x}, \bar{y})$

,, ,, பருமன் $n = n_1 + n_2$

,, ,, திட்ட விலக்கம் (σ_x, σ_y)

,, ,, உடன்தொடர்புக்கெழு

r என்றால்,

மேலும் $dx_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$

$dx_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$

$dy_1 = \bar{y}_1 - \bar{y}$

$dy_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}$ என்றால்,

$$n\, r\, \sigma_x\, \sigma_y = n_1 r_1 \sigma_{x1} \sigma_{y1} + n_2 r_2 \sigma_{x2} \sigma_{y2} + n_1 dx_2\, dy_1 + n_2\, dx_1\, dy_2$$

என்ற சூத்திரத்தை நிரூபி.

(b) கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு கூட்டுச் சேர்த்தமாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

	மாதிரி I	மாதிரி II
மாதிரி பருமன் n	100	150
மாதிரி சராசரி $\bar{x}$	80	72
மாதிரி சராசரி $\bar{y}$	100	118
மாதிரி மாறுபாடு (σ_x^2)	10	12
மாதிரி மாறுபாடு (σ_y^2)	15	18
உடன் தொடர்புக்கெழு (r)	0.6	0.4

தீர்வு:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{y} = \frac{n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2}{n_1 + n_2}$$

$$n \sigma x^2 = n (\sigma x_1^2 + dx_1^2) + n_2 (\sigma x_2^2 + dx_2^2)$$

$$n \sigma y^2 = n (\sigma y_1^2 + dy_1^2) + n_2 (\sigma y_2^2 + dy_2^2)$$

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}_1)}{n_1 \cdot \sigma x_1 \sigma y_1}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n} (x_i - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}_2)}{n_2 \sigma x_2 \cdot \sigma y_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

கூட்டுச் சேர்த்த மாதிரிக்கு

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \sigma x \sigma y}$$

அதாவது $n r \cdot \sigma x \sigma y = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \ldots \quad \ldots (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n_1} [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x}_1 - \bar{x})]$$

$$[(y_i - \bar{y}) + (\bar{y}_1 - \bar{y})]$$

$$= \sum (x_i - \bar{x}_1) + (y_1 - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{y})$$

$$\sum (x_i - \bar{x}_1) + (\bar{x} - \bar{x}) \sum (y_i - \bar{y}_1)$$

$$+ n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}).$$

ஆனால் $\sum (x_i - \bar{x}_1) = 0$

$$\sum (y_i - \bar{y}_1) = 0$$

எனவே, $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$+ n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})(\bar{y}_1 - \bar{y})$$

$$= n_1 r_1 \sigma_{x1} \sigma_{y1} + n_1 . dx_1 . dy_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதே போல,

$$\sum_{=n_1+1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = n_2 r_2 \sigma_{x2} \sigma_{y2} + n_2 . dx_2 . dy_2 \ldots (4)$$

$$\therefore \quad n r \sigma_x \sigma_y = n_1 r_1 \sigma_{x1} \sigma_{y1} + n_2 r_2 \sigma_{x2} \sigma_{y2}$$

$$+ n_1 dx_1 . dy_1 . + n_2 dx_2 dy_2$$ நிரூபிக்கப்பட்டது... (5)

(b) கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை இச் சூத்திரத்தில் (5) சமனிட்டு r–ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\bar{x} = \frac{(100)(80) + (150)(72)}{250} = 75.2$$

$$\bar{y} = \frac{(100)(100) + (150)(118)}{250} = 110.8$$

$$dx_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 4.8$$

$$dy_1 = \bar{y}_1 - \bar{y} = 10.8$$

$$dx_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 3.2$$

$$dy_2 = \bar{y}_2 - \bar{y} = 7.2$$

$$n \sigma_x^2 = n_1 (\sigma_{x1}^2 + dx_1^2) + n_2 (\sigma x_2^2 + dx_2^2) = 6640$$

$$n \sigma_y^2 = n_1 (\sigma_{y1}^2 + dy_1^2) + n_2 (\sigma y_2^2 + dy_2^2) = 23640$$

எனவே,

$$r = \frac{n_1 r_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + n_2 r_2 \sigma_{x2} \cdot \sigma_{y_2} + n_1 dx_1 \cdot dy_1 + n_2 dx_2\, dy_2}{n\, \sigma_x\, \sigma_y}$$

$$= \frac{(100)(0.6)\sqrt{150} + 150 \cdot (0.4)\sqrt{216} + 100\,(10.8)\,(4{\cdot}8) + 150\,(3.2)\,(7.2)}{\sqrt{(6640)(23640)}}$$

$$= 0.8186.$$

மாதிரி 8:

16 மாணவர்களின் கணித, பௌதிக மதிப்பெண்களை வரிசைப்படுத்திக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கான வரிசை தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடவும்.

கணக்கில் வரிசைகள் (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
பௌதிகத்தில் வரிசைகள் (y)	1	10	3	4	5	7	2	6	8	11	15	9	14	12	16	13

வரிசைத் தொடர்பைக் காண உதவும் கெழு

$$P_{x,y} = 1 - 6\,\frac{\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)} \cdot \begin{bmatrix} d_i = x_i - y_i \\ n = 16 \end{bmatrix}$$

இங்கு $\sum_{i=1}^{16} d_i^2 = \sum_{i=1}^{16} (x_i - y_i)^2$

$= 0 + (-8)^2 + 0 + 0 + 0 + (-1)^2 + (5)^2 + (2)^2 + (1)^2$

$+ (-1)^2 + (-4)^2 + (3)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (3)^2$

$= 64 + 1 + 25 + 4 + 1 + 1 + 16 + 9 + 1 + 4 + 1 + 9$

$= 136$

எனவே $P_{x,\,y} = 1 - \dfrac{6 \times 136}{16\,(255)}$

$$= 1 - \tfrac{1}{5} = \tfrac{4}{5} = \underline{0.80}$$

பயிற்சி I

(1) 10 மாணவர்களின் கணிதம், புள்ளியியல் பாடங்களின் மதிப் பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.
கணிதம் மதிப்பெண்	75	30	60	80	53	35	15	40	38	48
புள்ளியியல் ,,	85	45	54	91	58	63	35	43	45	44

(மைசூர். 1967)

(*a*) இரு பாடங்களுக்கான உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணிக்க.

(*b*) இப்பரவலுக்குக்கான சிதறல் விளக்கப்படம் வரைக.

(2) கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்களைப்பயன்படுத்தி *X*, *Y*ன் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக :

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 548$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 21522$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 156$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1675$

$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 4883.$ $\qquad n = 160.$

(3) இரு மாறிகளின் 50 (இணை) சோடி மதிப்புகளிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட அளவுகள்·

$\bar{x} = 10 \quad \bar{y} = 6$

$\sigma_x = 3 \quad \sigma_y = 2 \quad r = 0.3$

மேற்கொண்டு ஆராய்ந்ததில் $x = 10$, $y = 6$ என்ற சோடி மதிப்புகள் தவறான மதிப்புகள் எனத் தெரிய வந்தது. இந்த மதிப்புகளை விலக்கிவிட்டு மீதியுள்ள 49 சோடி மதிப்புகளுக்கு r கண்டுபிடித்து முன்னைய r-லிருந்து இது எவ்வளவு வேறுபட்டுள்ளது எனக் காண்க.

(4) X, Y, Z என்ற மூன்று ராண்டம் மாறிகளுக்கு.

$E(X) = 10 = E(Y) = E(Z)$

$\sigma_X^2 = 1, \sigma_y^2 = 4, \sigma_z^2 = 9$

$r_{XY} = 0 \quad r_{XZ} = r_{YZ} = \frac{1}{4}$ என்றால்

(a) $E(X + Y - 2Z)$

(b) $\text{Cor}(3X, 5Z)$

(c) $\text{Var}(X - 2Z)$ இவற்றைக் கணிக்கவும்.

(5) X, Y இரு மாறிகள் 0, சராசரியுடனும், ஒரே மாறுபாடு σ^2 – உடனும், 0, உடன் தொடர்புக் கெழுவுடனும் இருப்பின்,

$u = X \cos \alpha + y \sin \alpha$

$v = X \sin \alpha - y \cos \alpha$

மாறிகள் ஒரே மாறுபாட்டுடனும் (σ^2), பூச்சியம் உடன் தொடர்புக் கெழுவுடனும் இருக்கின்றன என நிரூபி.

(6) X, Y இரு சார்பிலா ராண்டம் மாறிகள்.

$U = X + Y$

$V = X - Y$ என்றால்

$r_{UV} = r^2_{XU} - r^2_{YU}$ என்று நிரூபி.

இங்கு r_{XU} = X-க்கும் U-க்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு.

(7) X_1, X_2, X_3 மூன்று தொடர்பில்லாத மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் m சராசரியுடனும், σ முறையே $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ மாறுபாடுகளுடனும் இருந்தால்,

$$U = \frac{X_1}{X_3},$$

$$V = \frac{X_2}{X_3}$$

U, V-ன் உடன் தொடர்புக் கெழு

$$r_{UV} = \frac{\sigma_3^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}$$ என்று நிருபி.

(8) 100 கணவர்கள் மனைவியர்களின் வயதுகளைக்கொண்ட கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து கணவர் வயதுக்கும் மனைவி வயதுக்கும் இடையே காணப்படும் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காணவும்.

கணவர் வயது / மனைவி வயது	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	மொத்தம்
15–25	5	9	3			17
25–35		10	25	2		37
35–45		1	12	2		15
45–55			4	16	5	25
55–65				4	2	6
மொத்தம்	5	20	44	24	7	100

(9) ஓர் இசைப்போட்டியில் பங்கு பெற்ற 10 போட்டியாளர்களை 2 நீதிபதிகள் கீழ்க்கண்ட முறையில் வரிசைப்

படுத்தியுள்ளனர். இதற்கான ஸ்பியர்மேனின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணித்து, இரு நீதிபதிகளும் அவர்களின் தரத்திலிருந்து மாறுபடுகின்றனரா என்று ஆராய்க.

நீதிபதி x	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
நீதிபதி y	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9

(10) இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளிடையே உள்ள கோணம் θ எனவும், உடன் தொடர்புக்கெழு r எனவும் இருந்தால், $\sin \theta < 1 - r^2$ என நிரூபித்துக் காட்டு.

(11) இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள்

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 3y = 8$$ என்ருல்

(i) x, y-ன் சராசரி

(ii) x, y-ன் உடன் தொடர்புக்கெழு

(iii) தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் விகிதம். இவற்றைக் கணக்கிடவும்.

9-4. இருமாறி இயல் நிலைப்பரவல் (Bivariate Normal Distribution)

X, Y இருமாறிகளின் கீழ்க்கண்ட சார்பலனை ஆராய்வோம்.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_3}} \; e^{-\frac{Q}{2}}$$

$$Q = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

$$-\infty < x < \infty,$$

$$-\infty < y < \infty,$$

$$\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,$$
$$-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty,$$
$$-1 < \rho < 1.$$

தற்சமயம் நிலை எண்களான $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ என்பன ஒரு பரவலின் பண்பளவுகள் என்று நமக்குத் தெரியாது. இந்த $f(x, y)$ ஓர் இணைந்த (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலனின் பொதுப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும் என்றுகூட நமக்குத் தெரியாது. இருந்தாலும் இப்போது

(i) $f(x, y)$ ஓர் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலன் என்றும்

(ii) $X \to N\ \mu_1, (\sigma_1^2);\ Y \to N\ (\mu_2,\ \sigma_2^2)$ பரவலில் உள்ளன என்றும்,

(iii) X, Y-ன் உடன் தொடர்புக்கெழு ρ என்றும் இங்கு நிரூபிப்போம்.

இத்தகைய இணைந்த ஒரு (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஓர் 'இருமாறி இயல்நிலைப்பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்' என வழங்கப்படும். அத்துடன் X, Y ராண்டம் மாறிகள் 'இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலை'ப் பெற்றுள்ளன எனக் கூறுகிறோம்.

எதிர்மறையற்ற சார்பலன் $f(x, y)$ ஓர் இணைந்த ஊ. அ சார்பலன் என்பதை இப்போது விளக்குவோம். சார்பலன் $f_1(x)$ ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுத்தால்,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$(1-\rho^2)\, q = \left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\rho_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\rho_1}\right)^2$$

இங்கு $b = \mu_2 + \rho\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

$$\text{எனவே } f_1(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2}}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2 \cdot \sqrt{1-\rho^2}}\,dy.$$

$f_1(x)$-க்கான கோவை (expression) யில் காணப்படும் தொகைச் சார்பை (integrand) b சராசரியும், $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ மாறுபாட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை அடர்த்திச் சார்பலன் எனக் கருதலாம். ஆதலால், அத் தொகையின் மதிப்பு 1 ஆகும்.

$$\therefore\ f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right],\ -\infty < x < \infty.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1 \text{ என்பதால்}$$

அந்த எதிர்மறைச்சார்பலன் $f(x, y)$ இரு தொடர்வகை ராண்டம் மாறிகள் X, Y-ன் இணைந்த ஊ. அ. சார்பலனாகும்.

அத்துடன் X-ன் விளிம்பு ஊ.அ. சார்பலன்தான் $f_1(x)$ என்பதும் புலனாகிறது. இங்கு X மாறி μ_1 சராசரியையும் σ_1^2 மாறுபாட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைமாறி. இதேபோல Y-ம் ஒரு $N(\mu_2\ \sigma_2^2)$ பரவலிலுள்ள ஒரு மாறி எனக் காண்கிறோம்

ஆகவே

$$f(x, y) = [f_1(x)]\ \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\ \sqrt{(1-\rho^2)}} \left\{ exp\left[-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]\right\}$$

$X = x$ எனத் தரப்பட்டபின், Y-ன் நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன்தான் மேலே காணப்படும் வலது பக்க இரண்டாம் உறுப்பாகும். அதாவது,

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\ \sqrt{(1-\rho^2)}}\left\{exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(y-b)^2\right]\right\}$$

Y-ன் நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன், $\mu + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ என்ற சராசரியையும், $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ என்ற மாறுபாட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப்பரவலேயாகும்.

எனவே, ஓர் இருமாறி இயல்நிலைப்பரவலுக்கு $X=x$ எனத் தரப்பட்டபின், Y-ன் நிபந்தனைச்சராசரி, x-ன் ஒரு படிக்குரியதாக உள்ளது.

அதாவது

$$E(Y|x)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

இங்கு X-ன் கெழு $\frac{\rho\sigma^2}{\sigma_1}$ என்பதாலும்,

σ_1, σ_2 முறையே X, σ-ன் திட்ட விலக்கங்களானதாலும் ρ என்பது X, σ-ன் உடன்தொடர்புக் கெழுவாகும்.

இதேபோல $Y=y$ எனத் தரப்பட்டபின் X-ன் நிபந்தனைப் பரவல் இயல் ஓர் நிலைப்பரவலேயாகும் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

இதன் நிபந்தனைச் சராசரி

$$E(X/y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

X-ன் மாறுபாடு $=\sigma_1^2(1-\rho^2)$.

$$\therefore\quad f(X/y)\longrightarrow N\left[\mu+\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right]$$

ஆகவே X, Y இரு மாறிகளின் இணைந்த அடர்த்திச்சார்பலன்

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}}\cdot exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

$$-\infty<x<\infty$$

$$-\infty<y<\infty$$

இங்கு $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ என்பன இப் பரவலுக்கான ஐந்து பண்பளவுகள் ஆகும்.

$-\infty < \mu_1 < \infty$

$-\infty < \mu_2 < \infty$

$\sigma_1 > 0$

$\sigma_2 > 0$

$-1 < \rho < 1$

இவ்வீச்சுக்களினுள் இப்பண்பளவுகள் அமைந்து இருக்கும்.

இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலின் திருப்புத்திறன்களை உருவாக்கும் சார்பலன் (MGF. of bivariate Normal Distribution)

X, Y மாறிகளின் இணைந்த பரவலுக்கான தி. உ. சார்பலன்

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = M(t_1, t_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)\, dx \cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} \cdot f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} f(y|x) \cdot dy \right] dx$$

(எல்லா t_1, t_2-ன் மெய்யான மதிப்புகளுக்கும்)

அடைப்புக்குள் உள்ள தொகை நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன் $f(y|x)$-ன் தி. உ. சார்பலன்

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} \cdot f(y|x)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1\ \rho^2)}\left\{y-\mu_2-\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\pi_1)\right\}^2\right]dy.$$

$X = x$ எனத் தரப்பட்டபின் Y-ன் நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன் $\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$ சராசரியையும், $\sigma_2(1-\rho^2)$ மாறுபாட்டையும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் இருப்பதால், இந்த நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலனின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y} f(y|x)\, dy$$

$$= exp\left\{t_2\left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right] + \frac{t_2^2}{2}\cdot\sigma_2^2(1-\sigma^2)\right\}$$

எனவே $M(t_1, t_2)$

$$= exp\left[t_2\mu_2 - t_2\rho\frac{\sigma_2}{1\sigma}\mu_1 + \frac{t_2^2}{2}\cdot\sigma_2^2(1-\sigma^2)\right]$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{\left[t_1 + t_2\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right]x\right\} f_1(x)\, dx.$$

ஆனல் $E(e^{tx}) = e^{\mu_1 t + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}$

(எல்லா மெய்யான t மதிப்புகளுக்கும்.)

இப்போது $t = (t_1 + t_2 \, P \frac{\sigma_2}{\sigma_1})$ என்று கொண்டால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(t_1 + t_2 \, P \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x \right)} . f_1(x) \, dz$$

$$= e^{\left(\mu_1 (t_1 + t_2 P \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) x \frac{\sigma_1^2}{2} \left(t_1 + t_2 \, \rho \, \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2}$$

எனவே, $M(t_1, t_2)$

$$= exp \left[t_2 \mu_2 - t_2 \, \rho \, \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 + \frac{t_2^2}{2} \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \right.$$

$$+ \mu_1 t_1 + \mu_1 t_2 \, P \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{t_1^2 \sigma_1^2}{2}$$

$$\left. + \frac{t^2 \sigma^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{2} + 2 t_1 t_2 \cdot P \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_1^2}{2} \right]$$

$$= exp \left[t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2 \rho \, t_1 t_2 \sigma_{12} + t_2^2 \rho_2^2}{2} \right.$$

$$= e^{t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2} \cdot e^{\frac{1}{2} (t_1^2 \sigma_1^2 + 2 t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2)}$$

(எல்லா $t_1 \, t_2$-ன் மெய்யான மதிப்புக்களுக்கும்)

எனவே

$$M(t_1, t_2) = e^{t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + \frac{1}{2} (t_1^2 \sigma_2^2 + 2 t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma \rho + t_1^2 \sigma_1^2)}$$

இப்போது $X \to N(0, 1)$

$Y \to N(0, 1)$ என்றால்

$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0$

$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 1$

என்று சமனிட்டபின்,

X, Y-ன் இணைந்த பரவலுக்கான தி. உ. சார்பலன்,

$$M(t_1, t_2) = e^{t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 + \frac{1}{2}[t_1^2 \cdot 1 + 2 t_1 t_2 \cdot 1 \sigma + t_2^2 \cdot 1]}$$

$$= e^{\frac{1}{2}[t_1^2 + 2 t_1 t_2 P + t_2^2]}.$$

(எல்லா t_1, t_2-ன் மெய்யான மதிப்புகளுக்கும்)

எனவே

$$M(t_1, t_2) = exp\left[t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + \frac{t_1^2 \sigma_1^2 + 2 P\sigma_1 \sigma_2 t_1 t_2 + t_2^2 \sigma_2^2}{2}\right]$$

இந்த தி. உ. சார்பலனில் $P = 0$ என்று கொண்டால்,

$$M(t_1, t_2) = exp\left[t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + \frac{t_1^2 \sigma_1^2 + t_2^2 \sigma_2^2}{2}\right]$$

$$= e^{t_1 \mu_1 + t_1^2 \frac{\sigma_1^2}{2}} \cdot e^{t_2 \mu_2 + \frac{t_2^2}{2} \sigma_2^2}$$

$$= M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2).$$

எனவே $\rho = 0$ ஆகும்போது, X, Y மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்றவை என அறிகிறோம்.

மறுதலையாக (conversely),

$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$ என்றால்,

$$e^{\rho \sigma_1 \sigma_2 t_1 t_2} = 1$$

இங்கு $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ என்பதால் $\rho = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, X, Y மாறிகள் முறையே μ_1, μ_2 சராசரி, σ_1^2, σ_2^2 மாறுபாடு ρ என்ற உடன் தொடர்புக் கெழுவைக்கொண்ட ஓர் இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருந்தால், $\rho = 0$ என்றால் மட்டுமே, X, Y மாறிகள் புள்ளியியலில் சார்பற்றவையாகும்.

முன்பு $\rho = 0$ என்றால் X, Y மாறிகள் சார்பற்றவைகளாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை எனக்கூறி இருந்தோம். ஆனால், அந்த இரு மாறிகளும் ஓர் இரு மாறிப் பரவலில் அமைந்து, $\rho = 0$ என்ற சமயத்தில் மட்டுமே, சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

மாதிரி 9 :

தரப்படுத்தப்பட்ட X, Y மாறிகளின் இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல்

$$f(x, y) = c \cdot exp\left[-\frac{1}{2(1-P^2)} \cdot (x^2 - 2Pxy + y^2)\right]$$

என்றால்

(i) இம் மாறிகளின் தி. உ. சார்பலன்

$M(t_1, t_2) = exp\left[\frac{1}{2}(t_1^2 + 2Pt_1t_2 + t_2^2)\right]$ என்று நிரூபி.

(ii) திருப்புத்திறன்கள் μ_{rs} கீழ்க்காணும் மறு தரவுத் தொடரில் அமைகிறது என விளக்குக.

$$\mu_{rs} = (r + s - 1) \cdot P \cdot \mu_{r-1, s-1} + (r-1)(s-1)$$

$$(1 - P^2) \cdot \mu_{(r-2)(s-2)}$$

(iii) $r + s = 0$ என்றால் $\mu_{rs} = 0$ எனவும்

(iv) $\mu_{31} = 3\rho$, $\mu_{22} = 1 + 2\rho^2$ எனவும் காண்க.

(அண்ணாமலை ச. கா. 1963)

(i) முன்பே நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டது.

(ii) $M(t_1, t_2) = exp.\left[\frac{t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{2}\right]$

$$\frac{\partial M}{\partial t_1} = M(t_1 + \rho t_2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t_2} = M(t_2 + \rho t_1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}[M(t_1 + \rho t_2)]$$

$$= M \cdot 1 + (t_1 + \rho t_2)^2 M$$

$$= M[(t_1 + P t_2)^2 + 1]$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_2^2} = M[(t_2 + P t_1)^2 + 1]$$

$\mu_{rs} = M(t_1, t_2)$-ன் பிரிவில் (expansion) $\frac{t_1^r t_2^s}{r!\, s!}$-ன் கெழு

$$\therefore M(t_1, t_2) = \exp\left[\tfrac{1}{2}(t_1^2 + 2P t_1 t_2 + t_2^2)\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{rs} \cdot \frac{t_1^{r} \cdot t_2^{s}}{r!\, s!}.$$

$$\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \sum\sum \mu_{rs} \cdot \frac{t_1^{r-1} \cdot t_2^{s-1}}{(r-1)!\,(s-1)!}$$

இப்போது,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial M}{\partial t_2}\right) \text{ என்றால்}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} [M (t_2 + P t_1)]$$

$$= M P + (t_2 + P t_1)(t_1 + P t_2) \cdot M$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 M}{\partial t_1 . \partial t_2} - \frac{\partial M}{\partial t_1} . P t_1 - \frac{\partial M}{\partial t_2} . P t_2$$

$$= M P + (t_2 + t_1 P)(t_1 + t_2 P) M - t_1 P(t_1 + t_2 P) M$$

$$- t_2 \rho (t_2 + t_1 \rho) M$$

$$= M [P + t_1 t_2 + t_2^2 P + t_1^2 P + t_1 t_2 \rho^2 - t_1^2 \rho$$

$$- t_1 t_2 \rho^2 - t_2^2 P - t_1 t_2 P]$$

$$= M [\rho + t_1 t_2 (1 - \rho^2)]$$

எனவே,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_1 . \partial t_2} = t_1 \rho . \frac{\partial M}{\partial t_1} + t_2 \rho . \frac{\partial M}{\partial t_2} + M \rho + M (1 - \rho^2) . t_1 t_2$$

இந்த சமன்பாட்டின்படி,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_1 . \partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} [e^{+ \frac{1}{2} (t_1^2 + 2 \rho t_1 t_2 + t_2^2)}]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} \cdot \left[\Sigma \Sigma \mu_{rs} . \frac{t_1^r . t_2^s}{r! \; s!} \right]$$ என்றால்,

$$\Sigma \Sigma \mu_{rs} . \frac{t_1^{r-1} \; t_2^{s-1}}{(r-1)! \; (s-1)!}$$

$$= \rho t_1 . \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{rs} . \frac{r . t_1^{r-1} \; t_2^s}{r! \; s!}$$

$$+ \rho t_2 . \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} \cdot \frac{s . t_1^{r} . t_2^{s-1}}{r!\ \ s!}$$

$$+ (1-\sigma^2)\, t_1\, t_2 \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} \cdot \frac{t_1^{r}\ t_2^{s}}{r!\ s!}$$

$$+ \sigma \cdot \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} . \frac{t_1^{r}\ t_2^{s}}{r!\ s!}$$

$$- \rho . \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} \cdot r . \frac{t_1^{r}\ t_2^{r}}{r!\ s!}$$

$$+ \rho . \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} . s . \frac{t_1^{r} \cdot t_2^{s}}{r!\ s!}$$

$$+ \rho . \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} . \frac{t_1^{r} . t_2^{s}}{r!\ s!}$$

$$+ (1-\rho^2) . \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \mu_{rs} . \frac{t_1^{r+1} . t_2^{s+1} \cdot}{(r+1)!\ (s+1)!}$$

$$. (r+1)\ (s+1)$$

$$= \rho \cdot \sum \sum (r-1)\, \mu_{r-1,\, s-1} \frac{t_1^{r-1}\ \ t_2^{s-1}}{(r-1)!\ (s-1)!}$$

$$+ \rho \sum \sum (s-1)\, \mu_{r-1,\, s-1} . \frac{t_1^{r-1,}\ \ t_2^{s-1}}{(r-1)!\ (s-1)!}$$

$$\rho + \sum \sum \mu_{r-1,\, s-1} . \frac{t_1^{r-1}\ \ t_2^{s-1}}{(r-1)!\ \ (s-1)}$$

$$+ (1 - P^2) \sum \sum (r - 1)(s - 1) .$$

$$\mu_{r-2, \; s-2} \frac{t_1^{r-1} \cdot t_2^{s-1}}{(r-1)!(s-1)!}$$

இங்கு $\frac{t_1^{r-1} \; t_2^{s-1}}{(r-1)! \; (s-1)!}$ கெழுக்களை இரு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டால்,

$$\mu_{rs} = P \cdot_{(r-1)} \cdot \mu_{r-1, \, s-1} + P_{(s-1)}$$

$$+ \mu_{r-1, \, s-1} + (1 - P^2) \cdot (r - 1)(s - 1)$$

$\mu_{r-2, \, s-2}$ ஆகிறது.

$$\therefore \quad \mu_{rs} = [P(r+s-1)] \, \mu_{r-1, \, s-1} + (1 - \sigma^2)(r - 1)$$

$(s-1) \cdot \mu_{r-2, \; s-2}$ நிரூபணமாகியது.

$r=3, \; s=1 \quad \mu_{31} = P(3) \cdot \mu_{20}$

$$= 3P \cdot \sigma x^2 = 3P \quad (\because \sigma x^2 = 1)$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_{31} = 3P.}$$

$r=2, \; s=2 \cdot \mu_{22} = 3P \cdot \mu_{11} + (1-\rho^2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \mu_{00} .$

$$= 3\rho^2 \sigma_x \sigma_y + (1-\rho^2) .$$

$$= 3P^2 + (1-P^2)$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_{22} = 1 + 2P^2.}$$

$\mu_{03} = \mu_{30} = 0 \quad (\because \mu_{10} = 0 = \mu_{10})$

$\mu_{12} = 2P \; \mu_{01} + 0 = 0.$

$\mu_{21} = 2P \; \mu_{10} + 0 = 0 \cdot$

$\mu_{23} 4 = + \mu_{12} + 1 \cdot 2 \, (1 - P^2) \mu_{01}$

$=0+0\cdot=0.$

இதேபோல $\mu_{21}=0$, $\mu_{32}=0$.

எனவே $r+s$ = ஒற்றைப்படை எண் என்றால்,

$(r-1)+(s-1)=$,, ,,

$(r-2)+(s-2)=$,, ,, ஆகும்.

$\therefore\quad \mu_{30}=\mu_{03}=0$

$\mu_{12}=\mu_{21}=0$

$\mu_{23}=\mu_{32}=0$ என்பதால்

$(r+s)$ ஒற்றைப்படை எண்ணாகில்,

$\underline{\mu_{rs}=0}$.

மாதிரி 10 :

X, Y இருமாறிகளும் முறையே 1, —2 சராசரியும், 1, 2 மாறுபாடு 0–6 உடன் தொடர்புக்கெழுவும் கொண்ட இயல்நிலை மாறிகளானால், இருமாறி இயல்நிலை அடர்த்திச் சார்பலன் $f(x, y)$ஐக் காண்க. $X=0{\cdot}3$ எனத்தரப்பட்டபின், Y நிபந்தனை மாறியின் மாறுபாட்டுக்கெழு (coefficient of variation) வைக் கணிக்கவும்.

X, Y மாறிகள் ஓர் இருமாறி இயல்நிலைப்பரவலைச் சார்ந்திருப்பின்,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\sigma^2}}\,exp\left[-\frac{1}{2(1-\sigma^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2P\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu^2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

கொடுக்கப்பட்ட $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma$–ன் மதிப்புகளை $f(r, s)$ ல் சமனிட்டால்,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\,(0{\cdot}8)}}\,exp\Big[-\frac{1}{1{\cdot}28}\Big\{(x-1)^2-(1{\cdot}2)\;(x-1)$$

$$\left(\frac{y+2}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{y+2}{\sqrt{2}}\right)^2\Big\}\Big]$$

X-ன் மீது ρ-ன் நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்திச் சார் பலன்

$$\phi(y/x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1-\rho^2)}}$$

$$\phi(y/X=0\cdot3)=\frac{e^{-\frac{1}{1\cdot28}\left[\frac{y+2}{\sqrt{2}}-0.60(\cdot3-1)\right]^2}}{\sqrt{2}.\ (0\cdot8)\ \sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{0\cdot5}{1.28}(y+2\cdot6)^2}}{(1\cdot13)\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore E[y/X=0\cdot3]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\ e^{-\frac{0\cdot5}{1\cdot28}(y+2\cdot6)^2}}{(1.13)\sqrt{2\pi}}dy=\underline{-2\cdot6}$$

மேலும் $V(Y/X=0\cdot3)=\sigma_y^2\ (1-\rho^2)$

$$=2\ [1-0\cdot6)^2]$$

$$=2\times0\cdot64=\underline{1\cdot28.}$$

எனவே X தரப்பட்டபின், Y நிபந்தனை மாறியின் மாறு

மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of variation) $=\frac{(\sigma Y/X)}{E(y/x)}\times 100$

$$=\frac{1\cdot13}{-2\cdot6}\times 100$$

$$\doteqdot\underline{-43\cdot5.}$$

மாதிரி 11 :

ஓர் இருமாறி இயல்நிலைப்பரவல்

$$f(x, y) = c \cdot e^{-\frac{2}{3}[4(x-2)^2 - 9\cdot6(x-2)(y-1) + 16(y-1)^2]} \quad \ldots (1)$$

$$-\infty < X, Y < \infty$$

என்றால் X, Y மாறிகளின் சராசரி, மாறுபாடு, உடன்தொடர்புக் கெழு இவற்றையும் X-ன் விளிம்புப்பரவலையும் காண்க.

X, Y மாறிகளின் இருமாறி இயல்நிலை (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\} \right] \ldots (2)$$

என்று நாம் அறிவோம்.

இந்த (1), (2) ன் exp. மதிப்பை ஒப்பிட்டால்,

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2P\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

$$= -\tfrac{2}{3}[4(x-2)^2 - 8\cdot0(x-2)(y-1) + 16(y-_1)^2]$$

என்பதால் $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = +1$ என்று தெரியவருகிறது.

$$\tfrac{2}{3}(4) = \frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\tfrac{2}{3}(16) = \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\tfrac{2}{3}(8\ 0) = \frac{2\sigma}{2\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{(3)}{(4)} ;\ \frac{1}{4} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$\frac{(5)}{(4)}$; $0\cdot5=2P\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=2\sigma\cdot\frac{1}{2}=P.$

$\therefore \rho=0.5$

(3) : $\frac{8}{3}=\frac{1}{2\sigma_1^2(0.75)}$

$1\cdot5\,\sigma_1^2\cdot8=3.$

$\sigma_1^2=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.\qquad \sigma_1=\frac{1}{2}.$

(6) : $\frac{1}{4}=\frac{\sigma_2^2}{\frac{1}{4}}$

$\sigma_2^2=\frac{1}{16}\qquad\qquad \sigma_2=\frac{1}{4}.$

Xன் விளிம்பு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$g(X)=\frac{e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}(x-2)^2}}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{e^{-2(x-2)^2}}{\sqrt{(2/\pi)}}\quad -\infty<x<\infty.$$

10. மாதிரிகளின் அறிமுறைத்தத்துவம்
(Sampling Theory)

ஒரு குறிப்பிட்ட குணப்பண்பை ஒரு விரிந்த முழுமைத் தொகுதியைக் கொண்டு ஆராய்வதற்கு, அம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியை ஒரு புள்ளியியல் நிபுணர் மேற்கொள்ளுகிறார். மாதிரியின் அந்தப் பண்பு அளவுகளைப் (Statistics) பற்றி அறிந்து அவற்றின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியின் குணப்பண்புகளை மதிப்பீடு செய்ய அவர் முயலுகிறார். ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் எல்லா நபர்களின் உயரங்களின் தொகுப்பை ''உயரங்களின் அகில கணம்'' (Universe) அல்லது 'உயரங்களின் முழுமைத் தொகுதி' என வழங்குகிறோம். பிறகு அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரி நபர்களின் உயரங்களின் தொகுப்பை 'உயரங்களின் மாதிரி' எனக் கூறலாம். இதேபோன்று எடைகளின் முழுமைத் தொகுதி, கூலிகளின் முழுமைத் தொகுதி முதலியனவற்றைக் கவனிக்கலாம். இம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து (தேர்ந்து) எடுக்கப்பட்ட 'மாதிரிகளின் அறிமுறை' யானது முதலில் மாதிரியின் பண்பளவுகளிலிருந்து (Statistics) முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவு (Parameters) மதிப்பீடு செய்வதிலும், பிறகு அந்த மதிப்பீட்டைக்கொண்டு உண்மை மதிப்புக்கும் மதிப்பீட்டுக்கும் இடையிலுள்ள வேறுபாட்டைச் சரி பார்ப்பதிலும் பயன்படுகிறது.

அந்த அறிமுறைக்கு அடிப்படையானது, ராண்டம் மாதிரித் தத்துவம் ஆகும். முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஓர் உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கையில், இதேபோன்ற ஒவ்வோர் உறுப்பும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்தகவு (ஊக அளவு) சமமாக இருப்பின், அப்படி எடுக்கப்பட்ட உறுப்புகளின் தொகுப்பை 'ராண்டம் மாதிரி' என வழங்குகிறோம்.

மாதிரியில் காணப்படும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை n என்ருல் இதை மாதிரியின் பருமன் எனக்கூறுகிறோம்.

N பருமனுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, n பருமனுள்ள ஒரு ராண்டம் மாதிரியை எடுப்பதாகக் கொள்வோம். இது போன்ற ^NC_n மாதிரிகளின் ஒவ்வொரு மாதிரியும் தேர்ந்தெடுக்கப்படக் கூடிய நிகழ்தகவு சமமாக இருந்தால், அந்த மாதிரி முறையை ஒரு 'ராண்டம் மாதிரி' எனக்கூறுதல் பொருந்தும்.

சாதாரண மாதிரி முறை (Simple Sampling)

சாதாரண மாதிரி ஒரு ராண்டம் மாதிரியாகும். இங்கு மாதிரிக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வோர் உறுப்பின் நிகழ்தகவு p என்ருல், இந்த நிகழ்தகவு முந்திய தேர்தெடுத்தல்களைச் சாராது இருக்கும் எனக் கொள்வோம். இப்படிப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியைச் 'சாதாரண மாதிரி முறை' எனக்கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிலையான நிகழ்தகவு p எனக் கொண்டால், ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் n பருமனுள்ள சாதாரண மாதிரியை, n சார்பற்ற முயற்சிகளின் தொகுப்புடன் ஒன்று படுத்தலாம். எனவே, சாதாரண மாதிரியில், முழுமைத் தொகுதி மிகப் பெரிதாக இருக்கவேண்டும். அல்லது அடுத்த தேர்ந்தெடுப்புக்கு முன்பு, முன்னுடியே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உறுப்பை, (வெற்றி அல்லது தோல்வியைக் குறித்துக் கொண்டு) முழுமைத் தொகுதியுடன் திரும்பச் சேர்த்துவிடவேண்டும். (இல்லாவிடில் p நிகழ் தகவு நிலையாக இருக்காது. மேலும், மாதிரியும் ஒரு ராண்டம் மாதிரியாக ஆகமுடியாது). இங்கு ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல், மாதிரியில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைகளுக்கான ஒரு மாதிரிப்பரவல் என வழங்கப்படுகிறது.

இதன் சராசரி np என்றும், மாறுபாடு npq என்றும் நாம் அறிவோம். அதாவது திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{npq}$.

இதையே மாதிரிப் பரவல்களில் **தரப்பிழை** (Standard Error) என்று கூறுகிறோம்.

எனவே வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையின் தரப்பிழை $= \sqrt{npq}$. ஒரு மாதிரியில் வெற்றிகளின் விகிதமானது.

$$\frac{\text{வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த முயற்சிகள்}} = \frac{x}{n} \text{ ஆகும்.}$$

இந்த விகிதத்தின் சராசரி $E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{np}{n} = p$.

$$n \quad ,, \quad \text{மாறுபாடு} = E\left[\frac{x}{n} - p\right]^2$$

$$= E\left(\frac{x - np}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}(x)$$

$$= \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}, \; q = 1-p$$

$$\therefore \text{ வெற்றிகளின் விகிதத்தரப்பிழை} = \sqrt{\frac{pq}{n}} .$$

மாதிரியில் காணப்படுகிற வெற்றிகளின் விகிதத் **திட்பம்**

$$\text{(Precision)} = \frac{1}{\text{தரப்பிழை}} = \sqrt{\frac{n}{pq}} .$$

விரிந்த மாதிரிகளும் (Large Samples), சோதனைக் காண் திறனும் (Test of Significance)

மாதிரியின் பருமன் n மிகப் பெரிதாகும் போது அதை ஒரு விரிந்த மாதிரி என்கிறோம்.

சிறப்புகாண் சோதனைகளை ஆராய்வதற்கு முன்பு சில வரையறைகளைக் கவனிப்போம்.

1. சூனிய எடுகோள் (Null Hypothesis)

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைப்பற்றிய ஒரு குறிப்பிட்ட விவரமே 'சூனிய எடுகோள்' எனப்படுகிறது. வேறுபாடற்ற (விலக்கம் இல்லாத) ஓர் எடுகோளைச் சூனிய எடுகோள் என்கிறோம். இதை H_0 என்று எழுதலாம்.

2. முழுமைத் தொகுதிப்பண்பளவு; மாதிரிப் பண்பளவு (Parameter, Statistic)

முன்பே வரையறுத்துள்ளபடி ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் புள்ளியியல் நிலை எண்களை 'முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவு' (Parameter) எனக் கூறுகிறோம். மாதிரியின் பண்பளவில் (Statistic) இருந்து இம் முழுமைத் தொகுதிப்பண்பளவு வேறுபட்ட தொன்று ஆகும். செய்முறையில் மாதிரி மதிப்புக்களைக் கொண்டு சராசரி $\bar{x}$, மாறுபாடு s^2 என்ற மாதிகளின் பண்பளவுகளைக் காணலாம். இந்த $\bar{x}$, s^2 என்ற மாதிரிப்பண்பளவுகளின் மூலம், முழுமைத் தொகுதியின் ஒத்திசைவான (Corresponding) சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2 இவற்றை மதிப்பிடலாம். இங்கு $\bar{x}$, s^2 என்பன மாதிரிப் பண்பளவுகள் என்றால், μ, σ^2 என்பன முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவுகள் ஆகும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து (Nc_n என்றவாறு) பல மாதிரிகளை எடுக்கலாம் என்பதால், ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் ஒரு மாதிரிப்பண்பளவு கிடைக்கிறது. மாதிரிக்கு மாதிரி இப் பண்பளவு வேறுபடலாம். எனவே, ஒரு பண்பளவுக்கு பல மாதிரி மதிப்புக்கள் (Sample values) இருக்கின்றன. இதைப் பற்றி ஆராய்வதே 'மாதிரி அறிமுறை' யின் அடிப்படைத் தத்துவமாகும்.

3. மாதிரி முறையில் பிழைகள் (Sampling Errors)

மாதிரியின் பண்பளவு மதிப்பைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைப்பற்றிய நம்பகமான உய்த்துணர்வைப் (Valid inference) பெற மாதிரி அறிமுறைத் தத்துவம் மிகவும் பயன்படுகிறது. நடைமுறையில், ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு மாதிரியை நன்கு ஆராய்ந்தபின், அந்த முழுமைத் தொகுதியை எடுத்துக் கொள்ள அல்லது தள்ளிவிடத் தீர்மானிக்கிறோம். இத் தீர்மானத்தின் போது நாம் இரு வகையான பிழைகளைச் செய்ய நேரிடலாம்.

(i) **முதல் வகைப் பிழை:** சூனிய எடுகோள் H_0 உண்மையாக இருந்தபோது, அதைத்தள்ளிவிடுவது (மறுப்பது) முதல் வகைப் பிழை எனப்படும்.

(ii) **இரண்டாம் வகைப் பிழை:** சூனிய எடுக்கோள் H_0 தவறாக இருந்தபோது, அதை எடுத்துக்கொள்வது இரண்டாம் வகைப் பிழையாகும்.

இரு பிழைகளிலும் முதல் வகைப்பிழையைவிட இரண்டாம் வகைப்பிழை மிகவும் ஆபத்தானது. புள்ளியியல் முறையில் இரு பிழைகளையும் ஒரேயடியாகக் குறைக்க முடியாது. ஏனெனில், ஒன்றைக் குறைத்தால் மற்றது கூடும்.

ஆகவே, முதல் வகைப் பிழையை ஒரு குறிப்பிட்ட மட்டத்தில் நிலையாக வைத்துக் கொண்டு, இரண்டாம் வகைப் பிழையை முடிந்த வரையில் குறைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(a) ஒரு நீதிபதி ஒரு குற்றவாளியை விடுதலை செய்வது முதல் வகைப் பிழை; அவர் ஒரு நிராபராதியைத் தண்டிப்பது இரண்டாம் வகைப் பிழையாகும்.

(b) ஓர் ஆசிரியர் ஒரு படிப்பில் மோசமான மாணவனைப் 'பாஸ்' செய்ய வைப்பது முதல் வகைப் பிழை; கெட்டிக்கார மாணவனை 'பெயில்' ஆகச் செய்வது இரண்டாம் வகைப் பிழை. இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் இரண்டாம் வகைப் பிழை முன்னதைவிட ஆபத்தானதாகும்.

P_r [முதல் வகைப் பிழை] = முதல் வகைப் பிழைக்கான நிகழ் தகவு

$$= \alpha$$

P_r [இரண்டாம் வகைப் பிழை] = β என வழங்குகிறோம்.

4. தீர்வு கட்டமான பகுதி (Critical Region)

ஒரு மாதிரி கணத்தில் சூனிய எடுகோளைத் (H_0) தள்ளி வைக்கப்படும் பகுதியைத் 'தீர்வு கட்டமான பகுதி' அல்லது (கெடுபிடியான பகுதி) 'மறுக்கப்படும் பகுதி' என்று வழங்குகிறோம்.

5. சிறப்பு காண் மட்டம் (Level of Significance)

ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் ஏதாவது ஒரு மதிப்பு 'கெடுபிடியான' பகுதியில் அமைந்திருப்பதற்கான நிகழ் தகவை (ஊக அளவை) 'சிறப்புகாண் மட்டம்' என்கிறோம். வேறுவிதமாகக் கூறினால், சிறப்புகாண் மட்டம் என்பது முதல் வகைப் பிழையின் மதிப்பளவு (size) ஆகும். புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனைகளில் இரு சிறப்பு காண் மட்டங்கள் பயன்படுகின்

றன (1) (5%) 5 சதவிகித சிறப்புகாண் மட்டம் (2) 1 சத விகித சிறப்பு காண் மட்டம்.

அதாவது,

$$P_r \left[\left| \frac{X - E(X)}{\sigma x} \right| \geq 1.96 \right] = 0{\cdot}05 \text{ என்றால்}$$

$$P_r [\,|\,X - \mu\,|\, \geq 1.96\,\sigma] = 0.05$$

[இங்கு $E(X) = \mu$; $\sigma_x = \sigma$]

எனவே $|\,X - \mu\,| \geq 1.96\,\sigma$ என்றால் 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் சூனிய எடுகோள் H_0 தள்ளிவிடப்படுகிறது (நிராகரிக்கப்படுகிறது என்றும் கூறலாம்).

$|\,X - \mu\,| < 1.96\,\sigma$ என்றால் H_0ஐ எடுத்துக் கொள்ளலாம் என்றுதான் கூற முடியும். 'H_0ஐ சரி என்று முழுதாக எடுத்துக் கொள்க' என்று நிச்சயமாகக் கூற முடியாது; ஏனென்றால், H_0ஐ வரையறுக்கும்போது 'ராண்டம் மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கங்களை ஒட்டி $|\,X - \mu\,|$ வேறுபாடு இருக்கலாம்' என்று கொள்கிறோம். மற்ற எந்த ஒரு காரணத்தாலும் இருக்கலாம் அல்லவா!

6. நம்பக எல்லை அல்லது நம்பிக்கை காட்டுகிற எல்லை (Confidence limit or fiducial limit)

$\bar{x}$ சராசரியைக் கொண்ட n பருமனுள்ள ஒரு விரிந்த ராண்டம் மாதிரியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\bar{x} \rightarrow N\left((\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$$ என்று நாம் முன்பே நிரூபித்தோம்.

இங்கு μ, σ^2 என்பன முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மாறுபாடு.

ஒரு குறிப்பிட்ட சதவிகிதத்தில் μ-ன் மதிப்பு எல்லைக்குள் அமைகிறது என ஆராய்வோம். அந்த எல்லையே 'அந்த சதவீத நம்பக எல்லை'யாகும்.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$ மாறி ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி

இங்கு μ-க்கான 95% சதவிகித நம்பக எல்லையைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டியிருந்தால்,

$$P_r[\,|z| < 1.96] = 0.95$$

அதாவது $P_r\left[\,|\bar{X} - \mu| < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$

எனவே μ-க்கான 95% நம்பக எல்லை

$$|\bar{X} - \mu| < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

அதாவது $\bar{X}\ \mu < 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu$$

மேலும் $-(\bar{X} - \mu) < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\mu < \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

எனவே 95% நம்பக எல்லை

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

அதாவது $\left(\bar{X} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ஆகிறது.

இதே போன்று 99% சதவிகித நம்பக எல்லை

$$\bar{X} \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

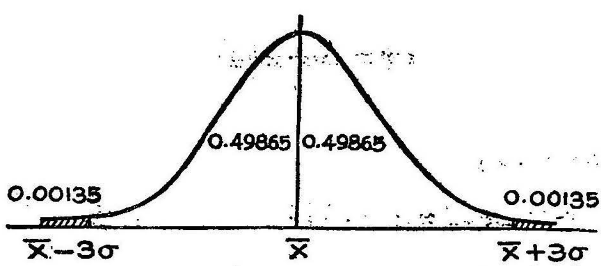
$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 95\%$ நம்பக கீழ் எல்லை.

$\bar{X} + 1{\cdot}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 95% நம்பக மேல் எல்லை.

1.96, 2.58 என்பன (95%, 99% நம்பக எல்லைக்கான, அல்லது 5%, 1% சிறப்புகாண் மட்டத்துக்கான z-ன் மதிப்புகள் இயல்நிலைப் பரவல் பரப்பளவு அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றவை.

10–2. விரிந்த மாதிரிகள்

n பெரிய பருமனுகில், ஈருறுப்புப் பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது என்று முன்பே நாம் கண்டோம். இரு பரவல்களிலும் ஒத்திசைவான இடைவெளிகளுக்கான நிகழ் தகவுகள் n விரிவடையும் போது சமத்துவத்தை அணுகுகின்றன என்பதே இதன் பொருள். σ^2 மாறுபாட்டைக் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை மாறியின் ஒரு ராண்டம் மதிப்பு சராசரியின் இரு பக்கங்களிலும் 3 σ-ஐக் கடந்த எல்லையில் அமைவதற்கான நிகழ் தகவு 0.0027 என நாம் முன்பு பார்த்தோம்.



படம் 19
விரிந்த மாதிரிகள்

அதாவது

$$P_r[\bar{X} - 3\sigma < \mu < \bar{X} + 3\sigma] = 0.9973$$

அல்லது $P_r[\,|\bar{X} - \mu| < 3\sigma] = 0.9973$

எனவே $P_r[\,|\bar{X} - \mu| \geq 3\sigma] = 0.0027$.

(இதைப் படம் விளக்குகிறது.)

இதே போல

$$P_r[\,|\bar{X} - \mu| \geq 2\sigma] = 0.0456.$$

அதாவது கிட்டத்தட்ட $4\frac{1}{2}\%$ மதிப்புகள் $\bar{X} \pm 2\sigma$ அளவுக்கு வெளியே இருப்பதைக் காணலாம்.

எனவே n விரிவடையும் போது, n பருமனுள்ள ஒரு சாதாரண மாதிரியில் வெற்றிகளுக்கான எண்ணிக்கை சராசரியிலிருந்து இரண்டு மடங்கு தரப்பிழைக்கு மேற்பட்டு விலகி இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(p = 0{\cdot}0456)$ மிகச் சிறியதாகும். அந்த விலக்கம் 3 தரப்பிழையைக் காட்டிலும் அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(p = 0{\cdot}0027)$ மிக மிகச் சிறிய தொன்றுகும்.

இதை மனத்தில் கொண்டு, ஒரு தரப்பட்ட விரிந்த மாதிரியானது ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சாதாரண ராண்டம் மாதிரி என்ற சூனிய எடுகோளைச் சோதிக்க முற்படுவோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பு (attribute) நிகழுவதற்கான சார்பு அலைவெண் p என்றும், விரிந்த மாதிரியின் பருமன் n என்றும் கொள்வோம்.

x என்பது வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை என்றால்,

$$E(x) = np$$

$$V(x) = npq$$

$$\therefore \quad x\text{-ன் தரப்பிழை} = \sqrt{npq}$$

ஒரு மாதிரியில் $(x - np)$ன் மதிப்பு $3\sqrt{npq}$ ஐ விட அதிகமானால், மேற்படி சூனிய எடுகோளின்படி, அந்நிகழ்ச்சி நம்புதற்கரிய (improbable) ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

அப்படி நடந்தாலோ, சூன்ய எடுகோள் பொருத்த மற்றது என்றும், எனவே, வேறுபாடு மிகவும் பொருளுடையதாக (significant) இருக்கிறது என்றும் முடிவுக்கு வருகிறோம். இத்தகைய சோதனைகள் உபயோகப்படுத்தப்பட்ட p-ன் மதிப்பு தவருக இருக்கலாம் அல்லது சாதாரண மாதிரியின் நிபந்தனைகள் கடைப்பிடிக்கப்படவில்லை என்ற சந்தேகத்தை நம்மிடம் ஏற்படுகிறது. $\bar{x}$ — μ வேறுபாடு 2 தரப்பிழைகளுக்குறைவாக இருந்தால் அவ்வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை எனக் கொள்ளலாம். 2 தரப்பிழைகளுக்கு மேற்பட்டு இருந்தால், பொருளுடைமையும் வேறுபாட்டையொட்டிக்கூடுகிறது. பொரு

ளுடைமை, பொருளுடைமை இல்லாத்தன்மை இரண்டிற்கு மான எல்லை, சரியாக வரையறுக்க முடிவதில்லை. எனினும்

$\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} < 2$ என்றால் வேறுபாடு பொருளுடையது இல்லை என்றும்

$\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} \geq 2$ என்றால் வேறுபாடு பொருளுடையதாக இருக்கிறது எனவும் குறிக்கலாம்.

இங்கு X எந்த மாறியானாலும் $\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)}$ ஒரு தரப்படுத்தப் பட்ட மாறி. அதிலும் n மிகவும் விரிவடைந்தால், $\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைமாறியாகக் கருதப்படுகிறது.

எனவே, $\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} \rightarrow N(0, 1)$.

சரியாகக் கூறின் $\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} < 1 \cdot 96$ என்றால், 5% சிறப்புக் காண் மட்டத்தில் (விலக்கம்) வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை எனக் கூறுகிறோம்.

$\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} \geq 1 \cdot 96$ என்றால், 5% சிறப்புக்காண் மட்டத்தில் விலக்கம் பொருளுடையதாக உள்ளது ஆகும்.

அதேபோல $\frac{X-E(X)}{S \cdot E(X)} > 2 \cdot 58$ என்றால், 1% சிறப்புக்காண் மட்டத்தில் பொருளுடையதாகும் அல்லது விலக்கம் மிகவும் பொருளுடையது எனக் கூறலாம்.

இந்த 1·96, 2 58 மதிப்புகள் இயல்நிலைப்பரவலில் முறையே சரியான 95%, 99% நம்பக எல்லைக்கான நிலைத்தூர மதிப்புகள் ஆகின்றன.

10-3. சிறப்புகாண் சோதனைகள்

ஒரு மாதிரியில் n ஒரு பெரிய எண்ணாகவும், x வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையாகவும் இருந்தால் $\frac{x}{n} = p^{\circ}$ எனக் கொள்க.

$$\frac{x}{n} \rightarrow N\left(p', \sqrt{\frac{pq'}{n}}\right)$$

இங்கு H_0 : p' = வெற்றியின் விகிதம் (முழுமைத் தொகுதியில்) என்க.

$$\text{எனவே } z = \frac{\frac{x}{n} - p'}{\sqrt{\frac{p'q'}{n}}} \rightarrow N(0, 1)$$

$|z| \geq 1{\cdot}96$ என்றால், $\frac{x}{n}$-க்கும் p-க்கும் ஆன வேறுபாடு 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கும்.

p வெற்றி விகிதத்தைக்கொண்ட மாதிரியானது, p'ஐ வெற்றி விகிதமாகக்கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாயின் p'-ன் 95% நம்பக எல்லையானது

$$p \pm 1{\cdot}96 \quad S{\cdot}E(p) = p \pm 1{\cdot}96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad (\text{இங்கு } q = 1 - p.)$$

விரிந்தமாதிரிகளின் ஒப்பீடு (Comparison of large samples)

P_1, P_2 எனும் இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து n_1, n_2 பருமனுள்ள இரு விரிந்த சாதாரண மாதிரிகளில் ஒரு பண்பின் பரவியுள்ளமையைச் (prevalence) சோதிக்க முற்படுவோம்.

இரு மாதிரிகளின் வெற்றிகளின் விகிதங்கள் முறையே p_1, p_2 என்றால் $(p_1 - p_2)$ விலக்கம், அந்த இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் இடையே ஒரு மெய்யான விலக்கத்துக்குப் பொருளுடையதா என ஆராய்வோம். p_1', p_2' என்பன முறையே முழுமைத் தொகுதிகளின் விகிதங்களாயின்,

$$E(p_1) = p_1'$$

$$E(p_2) = p_2'$$

$$\text{Var}(p_1) = \frac{p_1' q_1'}{n_1}$$

$$\text{Var}(p_2) = \frac{p_2' q_2'}{n_2}$$

$$\text{Var}\,(p_1-p_2)=\frac{p_1'\,q_1'}{n_1}+\frac{p_2'\,q_2}{n_2}$$

விரிந்த மாதிகளுக்கு p_1, p_2 இயல்நிலைப்பரவலை அணுகுவதால் p_1-p_2 மாறியும் ஓர் இயல்நிலைப்பரவலில் அமைகிறது.

$$\text{எனவே,}\ \frac{(p_1-p_2)-E\,(p_1-p_2)}{S{\cdot}E.\ (p_1-p_2)}\rightarrow N(0,\ 1)\ \text{ஆகும்.}$$

H_0 : சூனிய எடுகோள் $p_1'=p'_2=p'$ என்க.

அதாவது முழுமைத் தொகுதிகளில் விகிதங்கள் சமம் என்றால், மாதிரிகளிலும் விகிதங்கள் சமமாக இருக்கும். அதாவது மாதிரிகளின் விலக்கம் பொருளுடையதாக இருக்காது எனக் கொள்வோம்

$$\therefore\quad E\,(p_1-p_2)=E(p_1)-E\,(p_2)=p_1'-p_2'=0$$

$$V\,(p_1-p_2)=V\,(p_1)+V\,(p_2)\ (\because \text{மாதிரிகள் சார்பற்றவை.})$$

$$=\frac{p_1'\,q_1'}{n_1}+\frac{p_2'\,q_2'}{n_2}$$

$$=\frac{pq}{n_1}+\frac{pq}{n_2}$$

$$=pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

$\therefore$ விகிதங்களின் விலக்கத்துக்கான சோதனைப் பண்பளவு

$$z=\frac{(p_1-p_2)-E\,(p_1-p_2)}{S.E.\ (p_1-p_2)}$$

$$=\frac{(p_1-p_2)-0}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\longrightarrow N(0,\ 1)$$

p_1', p_2'-ன் மதிப்புக்கள் அறியாமல், இரண்டும் சமம் என்று தெரிந்த நிலையில் p_1, p_2 ஐக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் விகித மதிப்பீடு p ஐக் காணலாம்.

$$p=\frac{n_1\,p_1+n_2\,p_2}{n_1+n_2}$$

இது ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற (unbiased) மதிப்பீடாகும். இப்போது $z \geq 1 \cdot 96$ என்றால், 5% சி. கா. மட்டத்தில் விகிதங்களின் விலக்கம் பொருளுடையது என்று கூறி, H_0 சூனிய எடுகோளைத் தள்ளி விடலாம்.

எனவே, இந்த இரு மாறிகளும் சமவிகிதங்களுடன் கூடிய முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றவை அல்ல என்று கூறி முடிக்கிறோம்.

$z < 1 \cdot 96$ என்றால், 5% மட்டத்தில் மாதிரி விகிதங்களின் விலக்கம் $(p_1 - p_2)$ பொருளுடையதாக இல்லை. எனவே, இவ்விரு மாறிகளும் சமமுள்ள விகிதங்களுடன் கூடிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற மாதிரிகள் எனக் கூறலாம்.

இதேபோல $z = 2 \cdot 58$ என்றால், 1% மட்டத்தில் விலக்கம் பொருளுடையதாக இருக்கும்.

10-4. $p_1' \neq p_2'$ என்றால், முழுமைத் தொகுதிகளின் விகிதங்களின் விளக்கம், n_1, n_2 பருமனுள்ள இரு சாதாரண மாதிரிகளில் ஒளிந்து இருக்கும் வாய்ப்பு உண்டா எனச் சோதிக்க z சோதனைப் பண்பளவு பயன்படுகிறது.

$$z = \frac{(p_1 - p_2) - (p_1' - p')}{\sqrt{\frac{p_1' q_1'}{n_1} + \frac{p_2' q_2'}{n_2}}} \rightarrow N(0, 1)$$

மாதிரி விகிதங்கள் இங்குக் கொடுக்கப்படவில்லை. சூனிய எடுகோள் $Ho : p_1 = p_2$ என்றால், முழுமைத் தொகுதிகளின் விகிதங்களின் விலக்கத்தை மாதிரிகள் காண்பிக்காது என்று பொருள்.

$$\text{எனவே } |z| = \frac{|p_1' - p_2'|}{\sqrt{\frac{p_1' q_1'}{n_1} + \frac{p_2' q_2'}{n_2}}} \rightarrow N(0, 1).$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு பகடையை 9000 தடவைகள் உருட்டி விட்டால், 3240 தடவைகள், 1, அல்லது 2 இலக்கம் வருகிறது எனக் கொள்வோம். ராண்டம் முறையில் பகடை உருட்டி விடப்

பட்டதாகக் கொண்டால், அது ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற பகடையா எனச் சோதித்து அறிக.

$n = 9000$

1, அல்லது 2 வருவது வெற்றி எனக் கொண்டால், வெற்றிக்கான ஊக அளவு $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

Ho : பகடை பிறழ்ச்சியற்றது என்க.

எனவே $p = 1/3$, $q = 2/3$

x = வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை = 3240

$np = 9000 . \frac{1}{3} = 3000.$

$S. E. (x) = \sqrt{npq} = 9000 . \frac{1}{3} . \frac{2}{3}$

$= \sqrt{2000} = 44·73.$

எனவே $z = \frac{x - np}{\sqrt{n\,p\,q}} = \frac{3240 - 3000}{44·73}$

$= 5\ 36 > 2·58.$

எனவே 1% மட்டத்தில் Ho தள்ளி விடப்படுகிறது அல்லது நிராகரிக்கப்படுகிறது.

ஆகவே, அப் பகடை ஒரு தலைப்பட்ட (ஒரு சார்பான) பகடை என முடிவு கட்டுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு பெரிய ஆரஞ்சுப் பழக் குவியலில் இருந்து 400 ஆரஞ்சுகளை எடுத்தால், அவற்றில் 50 அழுகியதாக உள்ளது. அக் குவியலிலுள்ள அழுகிய ஆரஞ்சுகளின் சதவிகிதத்தை மதிப்பிடவும். மேலும், அச் சதவிகிதம் எந்த எல்லைக்குள் இருக்கும் எனக் கணக்கிடவும். அழுகிய ஆரஞ்சுகளின் விகிதம் $p = \frac{50}{400} = 1/8$ அதாவது $\frac{1}{8} \times 100 = 12·5\%$ பழங்கள் அழுகியுள்ளன. இச் சதவிகிதம் $[p \pm 1·96\ S. E. (p)] \times 100$ என்ற எல்லைக்குள் இருக்கும்.

$$S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{(\tfrac{1}{8})(7/8)/400}$$

$$= \frac{2\cdot64}{160} = 0\cdot0165.$$

எனவே 95% நம்பக எல்லை $[p \pm 1\ 96 \times 0\cdot0165]\%$

$$= [12\cdot5 \pm 1\cdot96 \times 1\cdot65]$$

$$= 12\cdot5 \pm 3\cdot24$$

$$= (9\cdot26,\quad 15\cdot74)$$

முழு நம்பக எல்லை $\div \left[p \pm 3\sqrt{\frac{pq}{n}} \right]\%$

$$= [12\cdot5 \pm 4\cdot95]$$

$$= (7\ 65,\quad 17\cdot45)$$

எனவே 7·7%க்கும் 17·5%க்கும் இடையில் அழுகிய ஆரஞ்சுகளின் சதவிகிதம் அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

A நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 600 நபர்களைக்கொண்ட ஒரு சாதாரண ராண்டம் மாதிரியில் 450 பேர் அரிசி சாப்பிடுவோர்; *B* நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 900 நபர்களைக் கொண்ட மற்றொரு ராண்டம் மாதிரியில் 450 பேர் அரிசி சாப்பிடுவோர் என்றால், அரிசி சாப்பிடுவோரின் விகிதத்தைப் பொறுத்தவரை *A* நகரமும் *B* நகரமும் மாறுபட்டதா, இல்லையா என விளக்கிடுக.

H_0 : $p_1' = p_2'$ அதாவது அரிசி சாப்பிடுவதைப் பொறுத்தவரையில், நகரங்கள் பொருளுடையதாக மாறவில்லை எனலாம்.

இங்கு $n^1 = 600, \quad n_1 p_1 = x_1 = 450$

$$n_2 = 900, \quad n_2 p_2 = x_2 = 450.$$

$$\therefore p_1 = \frac{450}{600} = \tfrac{3}{4} = 0\cdot75$$

$$p_2 = \frac{450}{900} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}50.$$

$Ho: p_1' = p_2' = p$ என்ற சூனிய எடுகோளின்படி,

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p\,q\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\text{இங்கு } p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{900}{1500} = 0{\cdot}60$$

$$q = 0{\cdot}40.$$

$$\therefore\ z = \frac{(0{\cdot}75 - 0{\cdot}50)}{\sqrt{(0\ 6)\,(0{\cdot}4)\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{900}\right)}}$$

$$= \frac{0{\cdot}25}{\sqrt{(0{\cdot}24)\left(\frac{15000}{540000}\right)}}$$

$$= \frac{0{\cdot}25}{0{\cdot}026} = \underline{9\ 6.}$$

இங்கு $z > 2.58$ என்பது 1% மட்டத்தில் H_0 நிராகரிக்கப் படுகிறது.

$(p_1 - p_2)$ வேறுபாடு பொருளுடையதாக உள்ளது. எனவே, A, B நகரங்கள் அரிசி சாப்பிடுவோரின் விகிதத்தைப் பொறுத்த வரை மாறுபட்டுள்ளது என உய்த்துணருகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

ஓர் ஆண்டில் A நகரத்தில் பிறந்த 956 குழந்தைகளில் 52.5% பெண் மகவுகள். B நகரத்தில் பிறந்த 450 குழந்தைகளில் 43.2% பெண் மகவுகள் எனருல், இந்த இரு நகரங்களிலும் பெண் மகவுகளின் விகித வேறுபாடு பொருளுடையதா என்று நிரூபி.

இங்கு $n_1 = 956$

$n_2 = 450.$

$p_1 = 0.525$

$p_2 = 0.432$

$Ho: p_1' = p_1' = p$ என்க.

அதாவது இரு நகரங்களிலும் பெண் மகவின் விகித வேறு பாடு பொருளுடையதாக இல்லை.

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow N(0,1)$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{(956)(0\ 525) + (450)(0.432)}{1406}$$

$\therefore p = 0{\cdot}4{:}6.$ எனவே $q = 0.504.$

$$z = \frac{0{\cdot}525 - 0.432}{\sqrt{(0.496)(0.504)\left(\frac{1}{956} + \frac{1}{450}\right)}} = \frac{0.093}{0.0286}$$

$= 3.257 > 2.58$

எனவே 1%மட்டத்தில் H_o நிராகரிக்கப்படுகிறது. ஆத லால், இரு நகரங்களிலும் பெண் மகவின் விகித வேறுபாடுகள் மிகவும் பொருளுடையதாக இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5:

இரு பெரிய (முழுமைத் தொகுதிகளில்) ஜனக்கணிப்புகளில் முறையே 30%, 25% நபர்கள் சுருள் முடியுடையவராக இருக் கிறார்கள் எனத் தெரிகிறது. இவற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட, முறையே 1200,900 பருமனுள்ள ராண்டம் மாதிரிகளில் இந்த வேறுபாடு மறைந்து காணப்படுகிறதா எனக் கண்டு பிடிக்கவும்.

$n_1 = 1200 \qquad p_1 = 0\ 30$

$n_2 = \ 900. \qquad p_2 = 0.25$

$H_o : p'_1 = p'_2$

அதாவது $(p_1 - p_2)$ விலக்கம் (வேறுபாடு) மாதிரிகளில் மறைந்துள்ளது என்பது சூனிய எடுகோள்.

$(p_1 - p_2)$-ன் தரப்பிழை

$$= \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{1200} + \frac{0.25 \times 0.75}{900}}$$

$$= 0.0195.$$

$$|z| = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

$$= \frac{0.05}{0.0195} > 1.96.$$

எனவே, 5% மட்டத்தில் சூனிய எடுகோள் நிராகரிக்கப் படுகிறது.

ஆதலால், மாதிரிகளில் $(p_1 - p_2)$ வேறுபாடு மறைந்து காணப்படவில்லை. அல்லது, மாதிரிகள் முழுமைத் தொகுதி விகிதங்களின் வேறுபாட்டை நன்கு காட்டுகின்றன.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n பருமனுள்ள மாதிரியின் சராசரி $\bar{x}$, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2 எனவும் கொள்வோம்.

H_0 : முழுமைத் தொகுதி இவற்றின் சராசரிகளின் வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இல்லை.

அதாவது இந்த மாதிரியானது, (μ, σ^2) எனப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாம்.

எனவே சோதனைப் பண்பளவு

$$t = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{S.E(\bar{x})} \rightarrow N(0, 1)$$

$$(t) = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n}\,|\bar{x} - \mu|}{\sigma}$$

இப்போது $|t| > 2 \cdot 58$ என்றால், H_0 ஐ 1% மட்டத்தில் நிராகரிக்கலாம்.

$|t| \geq 1.96$ என்றால், H_0ஐ 5% மட்டத்தில் நிராகரிக்கலாம்.

$|t| < 1.96$ என்றால், 5% மட்டத்தில் H_0 சூனிய எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுவதுமில்லை, முழுதாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுவதுமில்லை.

இங்குப் பொதுவாக நாம் கூறுவது என்னவென்றால், சராசரிகளின் வேறுபாடு 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை என்றால், இம்மாதிரி கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியாகக் காணப்படுகிறது.

இரு விரிந்த மாதிரிகளின் சராசரிகளை ஒப்பிடுதல்

n_1, n_2 பருமனுள்ள இரண்டு சார்பற்ற சாதாரணமான மாதிரிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இச் சராசரிகளின் வேறுபாடு பொருளுடையதா எனக் கண்டறிய கீழ்க்கண்ட சூனிய எடுகோளைக் கவனிப்போம்.

H_0 : வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை.

அதாவது இருமாதிரிகளும் σ திட்டவிலக்கத்தைக்கொண்ட ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனக் கருதலாம்.

$\bar{x}_1$-ன் தரப்பிழை $= S.E(\bar{x}_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

$\bar{x}_2$-ன் தரப்பிழை $= S.E(\bar{x}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

மாதிரிகள் சார்பற்றவையாதலால்,

$$\text{Var}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \text{Var}(\bar{x}_1) + \text{Var}(\bar{x}_2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$\therefore (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\text{-ன் தரப்பிழை} = \sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

எனவே, சராசரிகளை ஒப்பிட்டுப்பார்பதற்கான சோதனைப் பண்பளவு

$$|t| = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)|}{S \cdot E\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \rightarrow N(0, 1).$$

$$= \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0|}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad [\because E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu - \mu = 0)\ ]$$

$$|t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > 2{\cdot}58 \text{ என்றால் } H_0 \text{ எடுகோள்}$$

1% மட்டத்தில் நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$|t| > 1{\cdot}96$ என்றால், 5% மட்டத்தில் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1:

σ^2 தரப்படாவிடில், அல்லது தெரியாவிட்டால், மாதிரியிலிருந்து இதற்கான மதிப்பீட்டைக் கண்டு பிடித்து உபயோகிக்கலாம்.

இரு மாதிரிகளும் σ_1^2, σ_2^2 என்ற மாறுபாடுகளைக்கொண்ட இரு வெவ்வேறான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையானால், அந்த இரு மு. தொ. களும் இதே சராசரியைக் கொண்டுள்ளனவா என்று சோதித்து ஆராயலாம்.

இங்கும் $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் மாறுபாடு

$$\text{Var}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \text{Var}(\bar{x}_1) + \text{Var}(\bar{x}_2)$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

$$\therefore \quad |t| = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0|}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

$$= \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

$|t| > 2{\cdot}58$ எனில், 1% மட்டத்தில் H_o நிராகரிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 2:

σ_1^2, σ_2^2 தெரியாவிட்டால், விரிந்த மாதிரிகளிலிருந்து இதற்கான மதிப்பீட்டைக் கணித்து உபயோகிக்கலாம்.

விரிந்த மாதிரிகளில்

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

$$\div \sigma^2 \qquad \left(\because n \to \infty \text{ ஆகும்போது } \frac{1}{n} \to 0\right)$$

இதேபோன்று

$$E(s_1^2) = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)\sigma_1^2 \div \sigma_1^2$$

$$E(s_2^2) = \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)\sigma_2^2 \div \sigma_2^2.$$

குறிப்பு 1-க்கான சோதனைப்பண்பளவு

$$|t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

குறிப்பு 2–க்கான சோதனைப் பண்பளவு

$$|t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

எனவே,

(1) முழுமைத் தொகுதி $N(\mu, \sigma^2)$ $N(\mu, \sigma^2)$

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$

$$\therefore \quad |t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

(2) மு. தொ. $N(\mu_1, \sigma^2)$ $N(\mu_2, \sigma^2)$

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$

$$\therefore \quad |t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

(3) மு. தொ. $N(\mu, \sigma^2)$ $N(\mu, \sigma^2)$

(ஆனல் σ^2 தெரியாது)

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$
σ^2-ன் மதிப்பீடு	s^2		

$$\therefore \quad |t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s\,.\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

(4) மு. தொ. $N(\mu_1, \sigma^2)$ $N(\mu_2, \sigma^2)$

(σ^2 தெரியாது)

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$
σ^2-ன் மதிப்பீடு	s^2		

$$\therefore \quad |t| = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{s\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

(5) முழுமைத் தொகுதி $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$

$$\therefore \quad |t| = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}}$$

(6) மு. தொ. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

மாதிரி	S_1	(சார்பற்றவை)	S_2
பருமன்	n_1		n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$
σ^2-ன் மதிப்பீடு	s_1^2		s_2^2

$$\therefore \quad |t| = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

900 உறுப்பினர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் சராசரி 3.4 செ. மீ. என்றால். 3.25 செ. மீ. சராசரியும் 2.61 செ. மீ. திட்ட விலக்கமும் கொண்ட ஒரு பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியாக, மேற்படி மாதிரியைக் கருத இடம் உண்டா?

தரப்பட்டவை :

$n = 900$

$\bar{x} = 3.4$ செ. மீட்டர்

$\mu = 3.25$ செ. மீட்டர்

$\sigma = 2.61$ செ. மீ.

H_0: $\bar{x}$-க்கும் μ-க்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை. அதாவது இந்த மாதிரியானது, கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியாகும்.

எனவே $(t)' = \dfrac{\sqrt{n}\ |\bar{x} - \mu|}{\sigma}$

$$= \frac{\sqrt{900}\ .\ |3.4 - 3.25|}{2.61}$$

$$= \frac{30 \times 0.15}{2.51}$$

$$= 1.72 < 1.96$$

இங்கு $|t| < 1.96$ என்பதால் H_0 ஐ நிராகரிக்காமல் இருக்கலாம். அதாவது $\bar{x}$, μ இவற்றின் வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை.

∴ இந்த மாதிரி, கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியாகக் கருதப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

6400 ஆங்கிலேயர்களின் உயரம் பற்றிய ஒரு சாதாரண மாதிரியின் சராசரி 67.85″, திட்ட விலக்கம் 2.56″ என்றும், 1600 ஆஸ்திரேலியர்களின் உயரம் பற்றிய மற்றொரு சாதாரண மாதிரியின் சராசரி 68.55″, திட்ட விலக்கம் 2.52″ என்றும் இருந்தால், 'ஆஸ்திரேலியர்கள் பொதுவாக ஆங்கிலேயர்களை விட உயரமானவர்கள்' என்பதை மேற்படி விவரங்களைக் கொண்டு ஆராய்க.

S_1 : முதல் மாதிரி : $n_1 = 6300$

$$\bar{x}_1 = 67.85''$$

$$\sigma s_1 = 2.56''$$

S_2 : இரண்டாம் மாதிரி சார்பற்றதாகும்.

$$n_2 = 1600$$

$$\bar{x}_2 = 68.55''$$

$$\sigma s_2 = 2.52''$$

முதல் மாதிரிச் சராசரியின் தரப்பிழை $= \frac{s_1}{\sqrt{n_1}}$

இரண்டாம் ,, ,, ,, $= \frac{s_2}{\sqrt{n_2}}$

சராசரிகள் வேறுபாட்டின் தரப்பிழை $= \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

$$= \sqrt{\frac{2.56^2}{6400} + \frac{2.52^2}{1600}}$$

$$= 0.07''$$

$$\therefore \quad |t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{(n_2)}\right)}$$

$$= \frac{0.70}{0.07} = 10 > 2.58.$$

ஆகவே H_0 சூனிய எடுகோள் 1% மட்டத்திலேயே நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளும் சமமாக இல்லை. ஆஸ்திரேலியர்கள், பொதுவாகவே ஆங்கிலேயர்களைவிட உயரமானவர்கள்தான் என நிரூபணமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

மாணவர்களின் ஒரு பெரிய தொகுப்பில், ஓர் அறிவுத் திறனாய்வுச் சோதனை நடத்தப்பட்டதில் மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் 30 எனத் தெரிகிறது. 200 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுப்பில் சராசரி மதிப்பு 128 என்றும், 150 மாணவர்களைக் கொண்ட மற்றொரு தொகுப்பில் சராசரி மதிப்பு 135 என்றும் இருந்தால், அவ்விரு தொகுதிகளுக்கும் இடையே பொருளுடைய வேறுபாடு காணப்படுகிறதா என்று கண்டு பிடிக்கவும்.

$n_1 = 200 \qquad \bar{x}_1 = 128$

$n_2 = 150 \qquad \bar{x}_2 = 135$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 30$

H_0: 'இரு மாதிரித் தொகுப்புகளின் சராசரிகளின் வேறுபாடு பொருளுடையதாகத் தெரியவில்லை' என்பதாகும்.

$$\text{சோதனைப் பண்பளவு } |t| = \frac{|\bar{x} - \bar{x}|}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{|135 - 128|}{30\sqrt{\frac{1}{200} + \frac{1}{150}}}$$

$$= \frac{7}{3 \cdot 24} > 2.$$

எனவே, இந்த மாதிரித் தொகுப்புகளிடையே பொருளுடையதான வேறுபாடு காணப்படுகிறது.

இரு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு பொருளுடையதா என்று அறிய

$$|t| = \frac{|s-\sigma|}{S.E(s)}$$

இங்கு s-ன் தரப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

(இதன் நிருபணம் வாசகர்களுக்கு விடப்பட்டது).

$$\therefore \quad |t| = \frac{|s-\sigma|}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}} \rightarrow N(0, 1.)$$

இங்கு $|t| = \geq, 1{\cdot}96$ என்றால், 5% மட்டத்தில் வேறுபாடு (s-க்கும் σ-க்கும் உள்ள வேறுபாடு) பொருளுடையதாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

72 உறுப்புக்களைக்கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாறியின் திட்ட விலக்கம் 3·2″ என்றால் இந்த மாதிரியானது 3·1″ திட்ட விலக்கம் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரி என நிரூபி.

$$s - \sigma = 0{\cdot}1.''$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{3.1}{\sqrt{144}} = 0{\cdot}26.''$$

$$\therefore \quad |t| = \frac{|s-\sigma|}{\left[\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right]} = \frac{0{\cdot}10}{0{\cdot}26} < 1.$$

$\therefore$ H_0 நிராகரிக்கப்படவில்லை.

அதாவது இரு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை.

எனவே இந்த மாதிரி, கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிதான்.

காணப்படும் உடன்தொடர்புக்கெழுவின் பொருளுடைய தன்மை

முழுமைத் தொகுதியின் உ. தொ. கெழு P என்றும், மாதிரியின் உ. தொ. கெழு r என்றும், ρ சிறிய மதிப்புள்ளதாகவும் இருந்தால்,

$$\frac{r-\rho}{S.E(r)} \to N(0, 1) \text{ ஆகிறது.}$$

இங்கு r–ன் தரப்பிழை $= SE.(r) = \dfrac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$

Ho : இரண்டு உ. பொ. கெழுக்களின் வேறுபாடும் பொருளுடையதல்ல.

இதற்கான சோதனைப் பண்பளவு.

$$|t| = \frac{|r-\rho|}{\dfrac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}} > 1{\cdot}96 \text{ என்றால்,}$$

மாதிரி, முழுமைத் தொகுதியின் உ. தொ. கெழுக்களின் வேறுபாடு 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக உள்ளது என அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

ஒரு மாதிரியில் இரு தொடர்புள்ள மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·3, முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்புக்கெழு 0·25 என்றால், இரண்டு உ. தொ. கெழுக்களும் பொருளுடைய முறையில் வேறுபடுகின்றனவா என்று ஆராய்க. (இங்கு மாதிரியின் பருமன் 100 எனத் தரப்பட்டுள்ளது.)

Ho : வேறுபடவில்லை.

$r = 0{\cdot}3$

$\rho = 0{\cdot}25.$

$$\text{சோதனைப் பண்பளவு} = |z| = \frac{|r-\rho|}{\dfrac{(1-\rho^2)}{\sqrt{n}}} \to N(0, 1)$$

$$|z| = \frac{(0{\cdot}3 - 0{\cdot}25)}{\left[\frac{1-(0\ 25)^2}{\sqrt{100}}\right]} = \frac{0{\cdot}050}{0{\cdot}084} = 0{\cdot}53 < 1{\cdot}96.$$

$|z| < 1{\cdot}96$ என்பதால், வேறுபாடு பொருளுடையது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

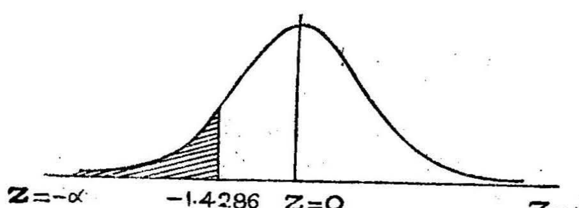
சராசரி 0·1, திட்ட விலக்கம் 2·1 உடன் கூடிய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 900 பருமனுள்ள ஒரு சாதாரண மாதிரி எடுக்கப்பட்டால், அதன் சராசரி எதிர் மறையாக இருப்பதன் நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

$\mu = 0{\cdot}1$

$\sigma = 2{\cdot}1,\ n = 900$ என்ருல்

$\bar{X} < 0$–க்கான நிகழ் தகவு

$$P_r\,(x < 0) = P_r\left\{\left[\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] < 0\right\}$$



படம் 20.

இங்கு $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow N(0,\ 1)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore P_r\left[\frac{\bar{x}-\mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} < 0\right]$$

$$= P_r \left\{ \left[z = \frac{\bar{x} - 0 \cdot 1}{\left(\frac{2 - 1}{30}\right)} < 0 \right\} \right.$$

$$= Pr \left[\bar{X} - 0 \cdot 1 = \frac{2 \cdot 1}{30} z < 0 \right]$$

$$= P_r \left[\bar{x} = 0 \cdot 1 = \frac{2 \cdot 1}{30} z < 0 \right]$$

$$= P_r \left[z < - \frac{0 \cdot 1}{0 \cdot 07} \right]$$

$$= P_r \left[z < - 1 \cdot 4286 \right] = 0 \cdot 5 - \int_0^{1 \cdot 4286} \phi(z)\, dz$$

$$= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 423$$

$= \underline{0 \cdot 077}$. (ஏனெனில் சமச்சீரானவை)

பயிற்சி I.

(1) கீழ்க்கண்டவற்றை விளக்குக :

(i) முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவு, மாதிரிப் பண்பளவு.

(ii) கெடுபிடியான பகுதி.

(iii) தரப்பிழை

(vi) முதல் வகை, இரண்டாம் வகைப்பட்ட பிழைகள்.

(v) சூனிய எடுகோள்.

(2) விரிந்த மாதிரிகள் அறிமுறையில் தரப்பிழைகளின் முக்கியத்துவத்தை விவரிக்கவும்.

ஒரு நிலையான வெற்றி ஊக அளவு p எனக்கொண்ட சார்பற்ற முயற்சிகளின் ஒரு தொகுப்பில், வெற்றி விகிதத்தின் தரப்பிழை $\frac{\sqrt{pq}}{n}$ என நிரூபி. $(q = 1 - p)$

(3) (*a*) ஒரு காசு 1 600 தடவைகள் சுண்டிவிடப்பட்ட போது 825 தடவைகள் தலை விழுந்தன. காசு பிறழ்ச்சியானதா எனச் சோதித்து ஆராய்க.

(*p*) ஒரு பகடையானது 324 தடவைகள் உருட்டப்பட்டு 181 தடவைகள் ஒற்றைப்படை எண்கள் வருமாயின், அது ஒரு 'சரியான' பகடையா எனச் சோதித்து உணரவும். அம் முடிவுக்கு வருகிற காரணத்தை கவனத்துடன் விளக்கவும்.

(*I A. S.* 1960)

(4) ஒரு பெருந் தொகுப்பிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 1000 ஆப்பிள்களில் 100 அழுகியவையாக உள்ளன. அத் தொகுப்பில் உள்ள ஆப்பிள்களின் சதவிகிதத்தை மதிப்பீடு செய்க. அத்துடன் அச் சதவிகிதம் எந்த எல்லைகளுக்குள் இருக்கும் எனவும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) ஒரு நகரத்தில் 800 மனிதர்களைக்கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 600 பேர் கறுப்பு முடி கொண்டவர்கள்; மற்ற நகரத்தில் 1000 மனிதர்களைக்கொண்ட மாதிரியில் 700 பேர் கறுப்பு முடி கொண்டவர்கள் என்றால், கறுப்பு முடி கொண்டவர்களின் விகித வேறுபாடு உத்தேசமாக 24 தடவைகள் விகித வேறுபாட்டுத் தாப்பிழையாக இருக்கும் என்று காட்டுக.

(6) ஒரு நகரத்தில் 900 பள்ளி மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 20% மாணவர்கள் ஒரு உடற்குறை கொண்டுள்ளனர். மற்ற *B* நகரத்தில், 1600 மாணவர்களின் ராண்டம் மாதிரியில், 18·5% மாணவர்கள் உடற்குறையுள்ளவர்கள் என்றால் விகிதங்களின் வேறுபாடு பொருளுடையதா எனச் சோதி.

(7) ஒரு முழுமைத் தொகுதி 6·52 சராசரி, 1·6 திட்டவிலக்கத்தையுடையது. 400 பருமனுள்ள ஒரு மாதிரியின் சராசரி 6·80 என்றால், இம்மாதிரி கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியா எனச் சோதித்து அறிக.

(8) 144 நபர்களைக்கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் சராசரி உயரம் 65″, திட்டவிலக்கம் 2·5″ என்றால், 66″ சராசரியுடன்கூடிய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியா என ஆராய்க.

(9) உடற்பயிற்சிப் போட்டியாளர்கள் தொகுப்பில் சராசரி உயரம் 67″, திட்டவிலக்கம் 1·5″ என்று தெரிகிறது. ஒரு கல்லூரி மாணவர் 70″ உயரமுள்ளவர் என்றால். அவர் ஒரு போட்டியாளர் அல்ல என்று முடிவு கட்டமுடியுமா ?

(10) 62 தொழிலாளர் குடும்பங்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் பால் நுகரும் அளவு சராசரி 12·8 பின்ட்டுகள், தி. வி. 5.6. பின்ட்டுகள் (pint) என்றும், மற்றொரு 113 நடுத்தரக் குடும்பங்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் அவை முறையே 15·9, 6·8 பின்ட்டுகள் என்றால், தொழிலாளர் குடும்பங்களுக்கும், நடுத்தர குடும்பங்களுக்கும் இதைப்பற்றி வேறுபாடு பொருளுடையதா எனச் சோதி.

(11) ஒரு மருத்துவ பரிசோதனையின்போது ஒரு கலாசாலையில் பயிலும் மாணவ மாணவிகளில் 1437 மாணவர்களில் 432 பேருக்கும், 441 மாணவிகளில் 152 பேருக்கும் கண்கோளாறு இருப்பது தெரிகிறது. (ஆண் பெண்) இனத்துக்கும் கண் கோளாறுக்கும் ஏதாவது தொடர்பு உண்டா என்று சோதித்து விளக்குக.

11. t, χ^2, F, z - முதலிய பரவல்கள்

11-1. கை-வர்க்கப் பரவல் (Distribution of χ^2)

ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியின் வர்க்கத்தை ஒரு 1 இயக்கப்பாகை (degree of freedom) கொண்ட ஒரு χ^2 மாறி 'கை வர்க்க மாறி' என்று வழங்குகின்றோம்.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ என்றால்

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$; z ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி.

எனவே $z^2 = \left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = \chi^2$ (1). இது ஒரு 1 இயக்கப்பாகை கூடிய ஒரு கை வர்க்க மாறி.

பொதுவாக X_i $(i=1, 2, 3, \ldots n)$ என்பன μ_i சராசரியையும், σ_i^2 மாறுபாட்டையும் கொண்ட சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளாயின்,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது n இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய ஒரு கை வர்க்க மாறி.

(1)-ன் கூட்டலிலுள்ள சார்பற்ற வர்க்கங்களின் எண்ணிக்கையை 'இயக்கப்பாகை' என்கிறோம். இம் மாறியின் பரவலை

திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலனைப் பயன்படுத்தி, தீர்மானிக்கலாம்.

$$X_i \rightarrow N(\mu, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

X_i மாறிகள் சார்பற்றவையானால்,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

இங்கு $z_i = \dfrac{\chi_i - \mu}{\sigma}$

X_i கள் சார்பற்றவையானதால் z_i களும் சார்பற்றவையாகும்.

$$M_{\chi^2}(t) = M_{\sum_{t-1}^{n} z_i^2}(t)$$

$$= M_{z_1^2}(t) \cdot M_{z_1^2}(t) \cdot M_{z_3^2}(t) \ldots\ldots\ldots M_{z_n^2}(t) \cdot$$

$$M_{\chi^2}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left[M_{z_i^2}(t) \right]$$

$$= \left[M_{z^2}(t) \right]^n$$

(ஏனெனில் எல்லா z—களும் சர்வ சமமானவை.)

இங்கு $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-p)^2}$ என்றால்

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$$

$$\therefore M_{z^2}(t) = E(e^{tz^2})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \phi(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} . e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-2t)\frac{z^2}{2}} . dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} . \frac{\sqrt{\pi}}{\left[\frac{1-2t}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left[\text{ஏனென்றால்} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right]$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore M_{\sum z_i^2}(t) = M_{\chi^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

இதன் தி. உ. சார்பலன் $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{n}{2}$ - வைப் பண்பளவுகளாகக்கொண்ட ஒரு காம்மா மாறியின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலனாகும்.

எனவே, χ^2-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$(\chi^2) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)}} \cdot e^{-\chi^2/2} ((\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < \chi^2 < \infty .$$

$= 0$, (மற்ற இடங்களில் எல்லாம்).

இந்த χ^2 மாறியின் பரவல் n இயக்கப் பாகைகளைக்கொண்ட ஒரு கை வர்க்கப் பரவல் என்று வழங்கப்படுகிறது.

$\frac{\chi^2}{2} = t$ என்றால், $\chi^2 = 2t$

$$d\chi^2 = 2\, dt$$

$\chi^2 \to (0, \infty)$ என்றால் $t \to (0, \infty)$ ஆகும்.

எனவே,

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-t} (2t)^{\frac{n}{2}-1}, \qquad 0 < t < \infty$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-t} \cdot t^{\frac{n}{2}-1}, \qquad 0 < t < \infty$$

எனவே $t = \frac{\chi^2}{2}$ ஒரு $\left(\frac{n}{2}\right)$ பண்பளவுடன் கூடிய ஒரு காம்மா மாறியாகும்.

$n = 2$ என்றால் χ^2 மாறி ஓர் அடுக்கு மாறியாகிறது.

$$f(\chi^2) = \frac{(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{2})} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{2}{2}-1}, \qquad 0 < \chi^2 < \infty$$

$\chi^2 = x$ என்றால்

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\cdot e^{-x/2} \qquad 0 < x < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

$\therefore$ x–ன் பரவல் ஓர் அடுக்குப் பரவல்

χ^2 பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_{\chi^2}(t) = E\left(e^{t\chi^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{t\chi^2}\cdot f(\chi^2)\cdot d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \int_0^\infty e^{t\chi^2}\cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\chi^2}\,(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\,d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

χ^2-ன் சராசரி $\mu_1' = [M'(t)]_{t=0}$

$$= \left[-\frac{n}{2}(1-2t)^{-\frac{n}{2}} (-2) \right]_{t=0} = n$$

χ^2-ன் மாறுபாடு $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$\mu_2' = [M''(t)]_{t=0}$

$$= \left[n \left(-\frac{n}{2} - 1 \right) (1-2t)^{-\frac{n}{2}-2} (-2) \right]_{t=0}$$

$$= \frac{n(n+2)}{2} \, 2.$$

எனவே, χ^2-ன் மாறுபாடு $= n(n+2) - n^2 = \underline{2n}$.

χ^2 பரவலின் கு. உ. சா. (குமுலண்டுகளை உருவாக்கும் சார்பலன்)

$K_{\chi^2}(t) = \log M_{\chi^2}(t)$

$$= -\frac{n}{2} \log (1-2t)$$

$$= \frac{n}{2} \left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + \cdots \right]$$

K_r = rஆவது குமுலண்ட்

$= K(t)$-ல் $\frac{t^r}{r!}$-ன் கெழு

$\therefore \quad K_r = n \cdot 2^{r-1} (r-1)!$

$$K_1 = \frac{n}{2} \cdot 2 = n$$

$$K_2 = \frac{4}{2} \cdot n = 2n$$

$$K_3 = \frac{2^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot = 8n$$

$$K_r = n \cdot 2^{r-2} \cdot (r-1)!$$

$\therefore$ சராசரி $K_1 = n$

மாறுபாடு $= K_2 = 2n = \mu_2$

$\mu_3 = K_3 = 8n$

$\mu_4 = K_4 + 3K_2^2 = 48n + 12n^2$

$$\therefore \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{8}{n} \to 0 \quad (n \to \infty \text{ அணுகும் போது})$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{48n + 12n^2}{4n^2} = 3 + \frac{12}{n} \to 3$$

($n \to \infty$ என்றால்)

ஆகவே இயக்கப் பாகை பெரிதான எண்ணாக இருந்தால் χ^2 பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகும்.

நடைமுறையில் 30-க்கு மேற்பட்ட n எண்ணுக்கு இயல்நிலைப் பரவலை அணுகும் χ^2-ன் தோராயம் சரியானதாகும்.

$n = 30$ வரைக்குமான 5%, 1% அளவுக்கான χ^2-ன் மதிப்புகளை இறுதி அட்டவணை கொடுக்கிறது.

χ^2 மாறிகளின் கூட்டல் நியதி (Additive property of χ^2)

χ_1^2, χ_2^2 இரு மாறிகளும் முறையே n_1, n_2 இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளானால் $\chi_1^2 + \chi_2^2$-ம், $(n_1 + n_2)$ஐ இயக்கப் பாகையாகக் கொண்ட

ஒரு கை வர்க்க மாறியாகும். இதையே கூட்டல் நியதி என்கிறோம்.

χ^2 வர்க்கப் பரவலின் திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

$$M_{\chi_1^2}(t) = (1-2t)^{\frac{-n_1}{2}}$$

$$M_{\chi_2^2}(t) = (1-2t)^{\frac{-n_2}{2}} \text{ ஆகும்.}$$

χ_1^2, χ_2^2 இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாதலால்,

$$M_{\chi_1^2 + \chi_2^2} = M_{\chi_1^2}(t) \cdot M_{\chi_2^2}(t)$$

(தி. உ. சார்பலன்களின் பண்பாகும்.)

$$= (1-2t)^{-n_1/2} \cdot (1-2t)^{-n_2/2}$$

$$= (1-2t)^{\frac{-n_1+n_2}{2}}$$

ஆகவே $\chi_1^2 + \chi_2^2$-ன் தி. உ. சார்பலனும் ஒரு χ^2-ன் தி. உ. சார்பலனை ஒத்துள்ளது.

மேலும் $\chi_1^2 + \chi_2^2$-ன் இயக்கப்பாகை $(n_1 + n_2)$ ஆகும்.

எனவே கூட்டல் நியதி நிருபணமாகிறது.

இதையே நீட்டித்து எழுதினால்,

χ_i^2-கள் $(i = 1, 2, 3, \ldots k)$ ஒவ்வொன்றும் முறையே $n_i (i = 1, 2, 3, \ldots k)$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளானால், அவற்றின் கூடுதல் $\sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$ மாறியும் $\sum_{i=1}^{k} n_i$ ஐ இயக்கப் பகையாகக்கொண்ட ஒரு கை வர்க்க மாறியாகும்.

அதாவது

$$M_{\sum_{i=1}^{k} \chi_i^2}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{\chi_i^2}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} (1-2t)^{-\frac{n_i}{2}}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{2}}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}\sum n_i.}$$

$\therefore \sum \chi_i^2$ மாறி ஒரு $\sum n_i$ ஐ இயக்கப் பாகையாகக் கொண்ட ஒரு கை வர்க்க மாறியாகும்.

$\chi_1^2, \chi_1^2 + \chi_2^2$ இரண்டும் முறையே n ; $n_1 + n_2$ இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய கை வர்க்க மாறிகளாயின், மேலும், χ_1^2, χ_2^2 இரண்டும் சார்பற்று இருந்தால், χ_2^2-ம் n இயக்கப் பாகை கொண்ட ஒரு கை வர்க்க மாறியாகும்.

$$\chi_1^2 \quad \chi_2^2 \rightarrow \chi^2_{n_1+n_2}.$$

$$\therefore M_{\chi_1^2+\chi_2^2}(t) = (1-2t)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}} \cdot (1-2t)^{-\frac{n_2}{2}}.$$

$$M_{\chi_1^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}}$$

χ_1^2, χ_2^2 இரண்டும் சார்பற்றவை யாதலால்,

$$M_{\chi_1^2 + \chi_2^2}(t) = M_{\chi_1^2}(t)\ M_{\chi_2^2}(t) \text{ என்பதால்}$$

$$M_{\chi_2^2}(t) = (1 - 2t)^{\frac{-n_2}{2}}.$$

எனவே χ_2^2 மாறி ஒரு n_2 இ. பா. கொண்ட ஒரு χ^2 மாறியாகும்.

$\chi^2 \to \chi^2 (n, \sqrt{2n})$ என்றால், n இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய χ^2 மாறியின் சராசரி n எனவும், திட்ட விலக்கம் $\sqrt{2n}$ எனவும் இருக்கிறது.

எனவே $z = \dfrac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}$ ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட χ^2 மாறி.

இதன் தி. உ. சார்பலன்.

$$M_z(t) = M_{\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}}(t) = E\left(e^{tz}\right)$$

$$= E\left[e^{t\left(\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}\right)} \right]$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} .\ E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}} \right)$$

$$= e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} .\ M\chi^2\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$= e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} .\left(1 - 2\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}\,.\,t.} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}\ \ \right)^{-\frac{n}{2}}.$$

$$\therefore \log M_z(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}\,t - \frac{n}{2}\log\left[1-\sqrt{\frac{2}{n}}\,.\,t\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{2}}\,.\,t + \frac{n}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{n}}\,.\,t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 t^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^3 t^3 + \ldots\ldots\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{2}}\,t + \sqrt{\frac{n}{2}}\,.\,t + \frac{1}{2}t^2 + 0\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{t^2}{2}, \;(n \rightarrow \infty \text{ என்றால்})$$

$$\therefore M_z(t) \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}}.$$

எனவே $n \rightarrow \infty$ என்றாகும்போது, z–ன் தி. உ. சார்பலன் ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியின் தி. உ. சார் பலனாகும்.

$$\therefore z \rightarrow \infty N(0, 1)$$

அதாவது தரப்படுத்தப்பட்ட χ^2 மாறி, தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியை அணுகுகிறது.

எனவே χ^2 மாறி $n \rightarrow \infty$ எனும்போது ஓர் இயல் நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

χ_1^2, χ_2^2 மாறிகள் முறையே n_1, n_2 இ. பா. களுடன் கூடிய இரு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறியானால்,

$$u = \frac{\chi_1^2}{\chi_1^2 + \chi_2^2}$$

$$v = \chi_1^2 + \chi_2^2$$

u, v இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகள் என்றும், u மாறி ஒரு $\beta_1\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ மாறி என்றும், v மாறி ஒரு $\chi^2\,(n_1+n_2)$ மாறி என்றும் நிரூபி.

χ_1^2, χ_2^2 சார்பற்றவையாதலால்,

$$f(\chi_1^2, \chi_2^2) = f_1(\chi_1^2) \cdot f_2(\chi_2^2)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \cdot e^{-\chi_1^2/2} \cdot (\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{-\frac{\chi_2^2}{2}} (\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1}$$

$$0 < \chi_1^2, \chi_2^2 < 1.$$

$$= c\, e^{-\frac{1}{2}(\chi_1^2 + \chi_2^2)} (\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} (\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1}$$

$g(u, v) = f(\chi_1^2 + \chi_2^2) \cdot |J|$ என்றாகும்.

$$= f(u\,v, v\,(1-u)] \cdot |J|.$$

எப்படி என்றால்,

$$u = \frac{\chi_1^2}{v}$$

$$uv = \chi_1^2$$

$$\chi_2^2 = v - \chi_1^2 = v - v\,u = v\,(1-u)$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(\chi_1^2, \chi_2^2)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & (1-u) \end{vmatrix} = v.$$

$\chi_1^2 \rightarrow (0, \infty)$

$\chi_2^2 \rightarrow (0, \infty)$ என்பதால்

$u \rightarrow (0, 1)$

$v \rightarrow (0, \infty)$ என்று காணப்படுகிறது.

u, v மாறிகளின் இணைந்த ஊ.அ. சார்பலன்

$$g(u, v) = c.\, e^{-\frac{v}{2}} \cdot (uv)^{\frac{n_1 - 1}{2}} [v(1-u)]^{\frac{n_2}{2} - 1} \cdot v.$$

$$= \left(c_1\, e^{-\frac{v}{2}} . v^{\frac{n_1+n_2}{2} - 1} \right) . \left(c_2 u^{\frac{n_1}{2} - 1} (1-u)^{\frac{n_2}{2} - 1} . \right)$$

$$0 < u < 1$$

$$0 < u < \infty$$

இங்கு $c = c_1 : c_2$

$$c = \frac{1}{2^{\frac{n_1 + n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$c_1 = \frac{1}{2^{\frac{n^1 + n_2}{2}} \Gamma \frac{n_1 + n_2}{2}} \; ; \; c_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

எனவே $g(u, v) = g_1(u) \cdot g_2(v)$

$$\text{இங்கு } g_1(u) = \frac{1}{\left(\frac{n_1}{2} \; \frac{n_2}{2}\right)} u^{\frac{n_1}{2} - 1} (1-u)^{\frac{n_2}{2} - 1}$$

$$0 < u < 1$$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புக்களில்).

$$g_2(v) = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} e^{-v} \cdot v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}$$

$0 < v < \infty.$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில்.)

$g(u,v) = g_1(u) \cdot g_2(v)$ என்பதாலும்

u, v இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகள் என்றும்

$u \rightarrow \beta_1\left(\frac{n_1}{2} \quad \frac{n_2}{2}\right)$ மாறி

$v \rightarrow \chi^2(n_1+n_2)$ மாறி என்றும் நிரூபணமாகிறது.

χ^2_1, χ^2_2 மாறிகள் முறையே n_1, n_2 இயக்கப்பாதைகளுடன் கூடிய இரு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளாயின்,

$u = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ மாறி ஒரு $\beta_2\left(\frac{n_1}{2}, \quad \frac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகும்.

$$f(\chi_1^2, \chi_2^2) = f_1(\chi_1^2) \cdot f_2(\chi_2^2)$$

$$= c \cdot e^{-\frac{\chi_1^2+\chi_2^2}{2}} \cdot (\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} (\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$0 < \chi_1^2, \chi_2^2 < \infty.$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளுக் கெல்லாம்).

இங்கு $c = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$

இங்கு $u = \frac{\chi^2_1}{\chi^2_2}$.

$V = \chi^2_2$ என்றால்

$$\left.\begin{aligned} \chi_1^2 &= u.v. \\ \chi_2^2 &= v. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

χ_1^2, χ_2^2 இருமாறிகளும் $(0, \infty)$ இடைவெளியில் உள்ளன.

u, v மாறிகளும் $(0, \infty)$-ல் உள்ளன என்று அறிகிறோம்.

$$|J| = \left|\frac{\partial (\chi_1^2, \chi_2^2)}{\partial (u_1 v)}\right| = \left| \begin{matrix} v & u \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| = v .$$

எனவே $g(u, v) = f(\chi_1^2, \chi_2^2) \cdot |J| \ldots \quad \ldots (3)$

$$= f(uv, v) \cdot |J|$$

$$g(u,v) = c.\, e^{\frac{-v(1+u)}{2}} (u\, v)^{\frac{n_1}{2}-1}\, v^{\frac{n_2}{2}-1}\, v \ldots\ldots (4)$$

$$0 < u, v < \infty.$$

u-ன் பரவலையும், u மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலனையும் இதன் மூலம் கண்டுபிடிக்க (4) ஐ, v மாறிக்குத் தொகுத்தால், u-ன் விளிம்புப் பரவலைக் காணலாம்.

$(0, \infty)$ இடைவெளியில் v மாறியைத் தொகுத்த பின்

u-ன் நிபந்தனை அடர்த்திச் சார்பலன்

$$g_1(u) = \int_0^\infty g(u,v)\, dv$$

$$= c \int_0^\infty e^{\frac{-v(1+v)}{2}}\, v^{\frac{n_1}{2}-1}\, v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\, dv$$

$$= c.\, u^{\frac{n_1}{2}-1} \int_0^\infty e^{-\frac{v(1+u)}{2}}\, v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\, dv$$

$$= \frac{u^{\frac{n_1}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_1}{2}\right)}{\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

$$\left[\text{ஏனெனில் } \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{\alpha^n}\right]$$

$$\text{எனவே } g_1(u) = \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{u^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

$$0 < u < \infty$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புக்களில் எல்லாம்).

எனவே $u = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ ஒரு $\beta_2\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகிறது.

11-2 மாதிரிச் சராசரி, மாதிரியின் மாறுபாடு, இவற்றின் இணைந்த பரவல் (Joint Distribution of Sample mean $\bar{x}$ and Sample variance s^2)

$x_i \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2 \ldots n$ என்ற n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவற்றின் இணைந்த பரவலைக் காண்போம்.

$Y = BX$ என்ற செங்குத்து உருமாற்றத்தை, B அணியின் முதல் நிரை (row) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ என்று இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். ... ... (3)

(இங்கு B அணி ஒரு செங்குத்து அணியாகிறது. $\therefore B' = B^{-1}$)

$$\text{(i)} \quad y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum x_i = \frac{n\bar{x}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\ \bar{x} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\text{(ii)} \quad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n\,\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + y_1^2$$

$$\therefore \quad y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = n\,s^2. \quad \ldots \quad (5)$$

இப்போது $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$ ஐக் கவனிப்போம்.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = (x - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \ldots (6)$$

$$= (y_1 \sqrt{n}\,\mu)^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 \quad \ldots \quad (7)$$

ஏனெனில் (6) $= \sum x_i^2 + n\,\mu^2 - 2\mu \sum x_i$

$$(7) = \sum y_i^2 + n\mu^2 - 2\mu \cdot \sqrt{n}\, y_1$$

இங்கு $\sum y_i^2 = \sum x_i^2$ என்று நாம் அறிந்ததே.

$$\sum x_i = n\bar{x} \cdot (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n}\,\bar{x}) = \sqrt{n} \cdot y_1$$

எனவே (6) = (7).

எனவே $x_1, x_2, \ldots x_n$-ன் இணைந்த அடர்த்தியானது.

$$c_1\, e^{-(x_1-\mu)^2/2\sigma^2} \cdot c_2 \cdot e^{-(x_2-\mu)^2/2\sigma^2} \ldots c_n \cdot e^{-(x_n-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\left[c_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,;\ (i = 1, 2, \ldots n)\right]$$

$$= c \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}\,;\ \left[c = \prod_{i=1}^{n} c_i = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\right]$$

இந்த அடர்த்தியானது

$$c \cdot e^{-[(y_1-\sqrt{n}\,\mu)^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2]/2\sigma^2}\text{-க்கு}$$

$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ சார்பற்ற முறையில் பரவியுள்ள மாறி உரு மாற்றப்படுகிறது.

எனவே $\sqrt{n}\,\bar{x} = y_1 \rightarrow N[\sqrt{n}\,\mu, \sigma^2]$

மேலும் $\dfrac{n s^2}{\sigma^2} = \dfrac{y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2(n-1)$

அதனால், $y_1 = \sqrt{n}\,\bar{x}$-ம், $\dfrac{n s^2}{\sigma^2}$ சார்பற்ற முறையில் பரவியுள்ளன.

அலகைச் சாதகப்படி மாற்றியமைத்தால் $\bar{x}$, s^2 இவற்றின் இணைந்த பரவல்

$$dP = N\left(\bar{x}/\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \cdot d\bar{x} \cdot \chi^2\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} / n-1\right) \cdot \frac{n}{\sigma^2} \cdot d(s^2)$$

$$= c \cdot e^{\frac{-n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot d\bar{x} \cdot e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \cdot (s^2)^{\frac{n-1}{2}} d(s^2)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$0 < s^2 < \infty$$

$\therefore$ $\bar{x}$, s^2-ன் இணைந்த பரவலையும், $\bar{x}$, s^2 இரு மாறிகளின் சார்பற்ற போக்கினையும் இங்குக் கண்டறிந்தோம்.

$\bar{x}$ மாறியின் தி. உ. சார்பலன்

$\bar{x}$-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right]$$

$$-\infty < \bar{x} < \infty$$

$\bar{x}$-ன் தி. உ. சார்பலன்

$$M_{\bar{x}}(t) = M_{\frac{\Sigma x_i}{n}}(t) = M_{\Sigma x_i}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}\left(\frac{t}{n}\right) \qquad (x_i\text{–கள் சார்பற்றவை})$$

$$= \left[M_x\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \qquad (x_i\text{-கள் சர்வ சமமானவை})$$

$$= \left[e^{\mu \cdot \frac{t}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{n^2} \cdot \sigma^2}\right]^n$$

$$= e^{\frac{n\mu t}{n} + n \cdot \frac{t^2 \sigma^2}{2n^2}}$$

$$= e^{(\mu)t + \frac{t^2}{2}\left[\frac{\sigma^2}{n}\right]}$$

∴ $\bar{X}$-ன் தி. உ. சார்பலன் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் தி. உ. சார்பலனை ஒத்துள்ளது.

மேலும் $\bar{X}$-ன் சராசரி μ

$\bar{X}$-ன் மாறுபாடு $\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\therefore \quad \bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \text{ ஆகும்.}$$

இதே போன்று s^2-ன் சராசரியையும் மாறுபாட்டையும் கீழே காண்போம்.

s^2-ன் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \cdot (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$0 < s^2 < \infty$$

$= 0$ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).

$$E(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty (s^2) \cdot e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} \cdot (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \, ds^2.$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-ns^2/2\sigma^2} \cdot (s^2)^{\frac{n+1}{2}-1} \, ds^2$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(ஏனெனில் $\int_0^\infty$ ஒரு காம்மாத்தொகை.)

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\therefore \quad E(s^2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

எனவே s^2 சராசரி $= \sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$n \to \infty$ என்றால் $\frac{1}{n} \to 0$.

$$E(s^2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2 \to \sigma^2.$$

மேலும் $E(s^2) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$ என்பதால்

$$E\left(\frac{ns^2}{n-1}\right) = \sigma^2$$

அதாவது $E\left[\frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2\right] = \sigma^2$

$$E(s^2) = \sigma^2. \left[S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$

s^2–ஐ σ^2–ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு எனலாம். இந்த s^2-ன் மதிப்பு சிறப்புகாண் சோதனைகளில் (சிறு மாதிரிகளுக்கு) மிகவும் பயன்படுகிறது. σ^2 தரப்படாத இடங்களில் சிறிய மாதிரிகளுக்கு s^2 ஐயே S^2 க்குப் பதிலாக உபயோகிக்கலாம்.

$$\mu_2' = E[(s^2)^2] = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty (s^2)^2 . e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1} d(s^2)$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} . \int_0^\infty e^{-ns^2/2\sigma^2} . (s^2)^{\frac{n+3}{2}-1} d(s)^2$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} . \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n+3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{4} . \frac{4\sigma^4}{n^2}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} . \sigma^4 - \frac{(n-1)^2}{n^2} . \sigma^4$$

$$= \frac{(n+1)[(n-1)-(n-1)]}{n^2}\sigma^4 . = \frac{2(n-1)}{n^2} . \sigma^4$$

எனவே (s^2)-ன் மாறுபாடு $= \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$.

$$= \frac{2}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^4.$$

X, Y மாறிகள் முறையே μ_1, μ_2 சராசரி, σ_1^2, σ_2^2 மாறுபாடு கொண்ட சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளானல்

$t = \frac{X-\mu_1}{Y-\mu_2}$ என்ற விகிதம் ஒரு கோஷி பரவலில் அமைவதை இப்போது காணலாம்.

$$f(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2 t^2)}, \qquad -\infty < t < \infty$$

என்பது கோஷி மாறி t-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்.

$$t = \frac{X - \mu_1}{Y - \mu_2}$$

$$\frac{\sigma_2^2 t^2}{\sigma_1^2} = \frac{(X - \mu_1)^2/\sigma_1^2}{(Y-\mu_2)^2/\sigma_2^2}$$

இவ் விகிதம் சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளின் வர்க்கங்களின் விகிதமாகும்.

தொகுதி (Numerator) $\frac{(X - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}$ என்பது 1 இ. பா. கொண்ட ஒரு χ^2 மாறி. $= \chi_1^2$, என்க.

பகுதி (Denominator) $\frac{(Y - \mu_2)^2}{\sigma^2}$ என்பது 1 இ. பா. கொண்ட சார்பற்ற மற்ருெரு χ^2 மாறி $= \chi_2^2$, என்க.

எனவே, $\frac{\sigma_2^2 t^2}{\sigma_1^2} = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$

$\rightarrow \beta_2 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ மாறி.

எனவே, $\frac{\sigma_2^2 t^2}{\sigma_1^2}$-ன் (ஊக அளவு) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$f\left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}},$$

$$0 < t < \infty$$

அதாவது நிகழ் தகவு வகையீடு (probability differential) $[dP = f(x)\, dx]$

$$dP = f\left(\frac{\sigma_2^2 + t^2}{\sigma_1^2}\right) \cdot d\left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)} d\left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$0 < \left(\frac{\sigma_2^2\ t^2}{\sigma_1^2}\right) < \infty$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(^1)\,\Gamma(^1)} \frac{\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} (t^2)^{\frac{1}{2}-1}\ \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\ t^2)}\, d\,(t^2)$$

$$\therefore d\,p = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_1\,\sigma_2\, t^{-1} \cdot d\,(t^2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\ t^2)},\ 0 < t^2 < \infty.$$

எனவே t-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\, t_2)},\ -\infty < t < \infty.$$

இங்கு $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ என்றால்

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+t^2)},\ -\infty < t < \infty.$$

இது ஒரு கோஷியின் அடர்த்திச் சார்பலனாகும் என்பது புலனாகிறது.

11-8. ஸ்டூடன்டின் 't'—பரவல்

நடைமுறையில் உபயோகப்படக் கூடிய மற்றொரு முக்கியமான பரவல் t-ன் பரவல் ஆகும். *W. S.* கோஸெட் என்பவர் "ஸ்டூடன்ட்" என்ற புனைப் பெயரில் 1908ஆம் ஆண்டில் இந்த t— பரவலைக் கண்டு பிடித்தார். ஃபிஷர் என்பவர் 1926–ல் இதைச் சரி செய்து இதன் பரவலை நிலைநிறுத்தினர். Y என்ற ராண்டம் மாறி ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறி எனவும், U என்ற ராண்டம் மாறி, k இயக்கப் பாதை கொண்ட ஒரு கை வர்க்க மாறி எனவும் இருக்கட்டும். மேலும் Y, U மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகளானால், அவற்றின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன் $f(y, u)$ என்றால்,

$$f(y, u) = g(y) . h(u).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\frac{-u}{2}},$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$0 < u < \infty.$$

$$= 0, \text{ (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).}$$

இப்போது ஒரு புதிய ராண்டம் மாறி tஐ வரையறுக்கலாம்.

$$t = \frac{y}{\sqrt{(u/k)}}$$

இந்த t–ன் மதிப்பு ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறிக்கும், சார்பற்ற முறையில் கை வர்க்கப் பரவலைப் பெற்றுள்ள மாறியின் வர்க்க மூலத்துக்குமான விகிதம் ஆகும்.

மாறிகளை உருவ மாற்றம் செய்து t-ன் பரவலைக் கண்டு பிடிப்போம்.

$t = \dfrac{y}{\left[\dfrac{u}{k}\right]^{1/2}}$; $z = u$ என்றால்

$y = \dfrac{t \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{k}}$

$u = z$

$\therefore \phi(t,z) = f(y,u) \cdot |J|$

$= f\left[\dfrac{t \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{k}}, z\right] \cdot |J|$

$|J| = \left|\dfrac{\partial(y, u)}{\partial(t, z)}\right|$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} & \dfrac{t}{\sqrt{k}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\dfrac{z}{k}}.$$

$$\therefore \phi(t,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot z^{\frac{k}{2}-1}\, e^{\frac{-z}{2}} \cdot e^{\frac{-t z}{k}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot z^{\frac{k+1}{2}-1}\, e^{\frac{-z}{2}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)}$$

$-\infty < t < \infty, 0 < z < \infty.$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லாம்.)

இப்போது t-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$\phi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t,z)\ dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} \phi(t, z)\ dz.$$

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k} \cdot 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\int_{0}^{\infty} z^{\frac{k+1}{2} - 1} e^{-\frac{z}{2}\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)} dz$$

$v = \frac{z}{2}\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)$ என்றால்

$$z = \frac{2v}{\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)}$$

$$dz = \frac{2}{\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)} \cdot dv$$

$z \to (0, \infty)$ என்றால், $v \to (0, \infty)$ ஆகிறது.

எனவே,

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot k}\ 2^{\frac{k}{2}}\ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{2}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)}\right]^{\frac{k+1}{2}} \cdot v^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)} e^{-v} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}},$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

ஆதலால் Y மாறி $N(0, 1)$ எனவும், U மாறி ஒரு $\chi^2(k)$ மாறி எனவும் இருந்தால், மேலும் இரண்டும் சார்பற்ற மாறிகளானல்,

$t = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{u}{k}\right)}}$ மாறியானது $\phi_1(t)$ஐ அதன் நிகழ்தகவு

அடர்த்திச் சார்பலனுகப் பெற்றுள்ளது என அறியலாம்.

இந்த t-ன் பரவலை 'ஸ்டூடன்ட்டின் 't' பரவல்' எனக் கூறுகிறோம் இப்பரவல் k இயக்கப் பாகைகளைக் கொண்ட பரவலாகும்.

t-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{(k)} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$t = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{u}{k}\right)}} \rightarrow t_k$$ இ. பா. என்ற t மாறியாகும்.

கை வர்க்க மாறியின் இயக்கப் பாகை k என்ற எண்ணைக் கொண்டே முழுக்க முழுக்க t பரவல் தீர்மானிக்கப்படுகிறது என அறியவும்.

$$P_r\,[T \leq t] = \int_{-\infty}^{t} \phi_1(t)\, dt.$$

t–ன் பரவல்: மற்றொரு விளக்க முறை

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற ராண்டம் n ராண்டம் மாறிகள் μ சராசரியும், σ^2 மாறுபாடும் உள்ள ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியாக இருக்கட்டும்.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$$ என வரையறுக்கவும்.

இங்கு $\bar{x}$ என்பது மாதிரிச் சராசரி

S^2 என்பது σ^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

இந்த t மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{v}\ .\ \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}},$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$v = (n-1)$$

என்றால், t–ன் பரவல்ஒரு **ஸ்டூடன்டின் t பரவல்** என வழங்கப்படுகிறது.

t மாறி, v இயக்கப் பாகைளுடன் கூடிய ஒரு t பரவலில் அமைந்திருக்கும்.

$$t^2 = \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{S^2}$$

$$= \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{\left(\frac{n s^2}{n-1}\right)}$$

$$\frac{t^2}{n-1} = \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n s^2} = \frac{(\bar{x} - \mu)^2 / \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}{n s^2/(\sigma^2)} = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$$

என்க.

தொகுதி $= \dfrac{(\bar{x} - \mu)^2}{\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)} = \bar{X}$-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறியின் வர்க்கம்.

இது ஒரு இ. பா. கொண்ட ஒரு χ^2 மாறி.

பகுதி $= \dfrac{n s^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \to \chi^2 (n-1)$

இது $(n-1)$ இயக்கப் பாகைகள் கொண்ட ஒரு χ^2 மாறி.

$\bar{x}$, s^2 பரவல்கள் சார்பற்றவையாதலின், χ_1^2, χ_2^2 பரவல்கள் சார்பற்றவை.

ஆகவே, இரு சார்பற்ற χ^2 பரவல்களின் விகிதம் ஓர் இரண்டாம் வகைப் பீட்டாப் பரவலில் அமைந்திருக்கும்.

$$\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} = \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n-1)} \to \beta_2 \left(\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \text{ மாறி}$$

$$\therefore \quad \frac{t^2}{v} \to \beta_2 \left(\tfrac{1}{2}, \frac{v}{2}\right) \text{ மாறி}$$

இதன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$f\left(\frac{t^2}{v}\right) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\left[1+\frac{t^2}{v}\right]^{\frac{v+1}{2}}}, \quad 0 < \frac{t^2}{v} < \infty$$

அதாவது,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{v}\cdot\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{t^2}{v}\right]^{\frac{v+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty$$

இங்கு $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2 தெரியாத நிலையில், S^2ஐ உபயோகப்படுத்தி t மாறியை விளக்குவது, 'ஸ்டூடன்டின் t மாறியின்' ஒரு சிறப்புப் பண்பாகும்.

இந்த t பரவல் $t = 0$ என்ற நேர்கோட்டை ஒட்டிய ஒரு சமச்சீரான பரவல்.

(t) கூடும் போது, $\dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)}$ வேகமாகக் குறைகிறது.

$t=0$ எனும் போது, t வளைகோட்டில் நிலைத்தூரம் மிகவும் உச்சமாக உள்ளது.

திறப்புத் திறன்கள் :

$\mu_{2r+1}=0$ ஏனெனில், t-ன் தொகைச் சார்பு ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பலன்.

$$\mu_{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2r} \phi_1(t)\, dt.$$

$$\therefore \quad \mu_{2r} = \mu_2'r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2r}}{\sqrt{k}.\ \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$= 2. \int_{0}^{\infty} \frac{(t^2)^{r}\left(\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot d\left(\frac{t^2}{k}\right)}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right), \left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$= \frac{k^{r}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{k}\right)^{r+\frac{1}{2}-1} d\left(\frac{t^2}{k}\right)}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$= \frac{k^r}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \beta\left(r+\frac{1}{2}, \frac{k}{2}-r\right)$$

$$= \frac{k^{r}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \Gamma\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{k^{r}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{k}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}$$

$$\therefore \quad \mu_{2r} = \frac{k^{r}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{2r-1}{2}\right)\left(\frac{2r-3}{2}\right)\left(\frac{2r-5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}r\right)}{\left(\frac{k-2}{2}\right)\left(\frac{k-4}{2}\right)\cdots\left(\frac{k-2r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}$$

$$\therefore \quad \mu_{2r} = \frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{(k-2)(k-4)(k-6)\ldots(k-2r)} . k^{r}$$

இதில் $r=1$, 2 எனச் சமனிட்டு அதன் மூலம் μ_2, μ_4 ஐக் கணிக்கலாம். இதிலிருந்து β_1, β_2 இவற்றைக் கணக்கிட்டு k

முடிவிலியை அணுகும்போது எப்படி t பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது எனக்காண்போம்.

$$r=1, \quad \mu_2 = \frac{k^1}{(k-2)}$$

$$= \frac{k}{k-2}$$

$$r=2, \quad \mu_4 = \frac{k^2 \, 1 \cdot 3 \cdot}{(k-2)\,(k-4)}$$

$$= \frac{3k^2}{(k-2)\,(k-4)}$$

$$\therefore \qquad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0 \quad (\because \; \mu_3 = 0)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3k^2/(k-2)\,(k-4)}{k^2/(k-2)^2} = \frac{3\,(k-2)}{k-4}$$

$$= \frac{3\,(1-2/k)}{(1-4/k)} \to 3 \quad (k \to \infty \text{ என்றால்})$$

$\therefore$ $k \to \infty$ எனும்போது t மாறி ஓர் இயல்நிலைப்பரவலை அணுகுகிறது.

$k=1$ என்றால் t பரவல் ஒரு கோஷி பரவலாகிறது.

இங்கு $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{k}.\; \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}} \quad -\infty < t < \infty.$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1+1}{2}}} \qquad -\infty < t < \infty.$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+t^2)}, \quad -\infty < t < \infty.$$

எனவே, t ஒரு கோஷி பரவலில் அமைவதைக் காணலாம்.

11-4. ஸ்நெடகரின் F பரவல் (Snedecor's Distribution)

m, n இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய இரு புள்ளியியலில் சார்பற்ற (Statistically independent) கை வர்க்க ராண்டம் மாறிகள் u, v என்றால், இவற்றின் விகிதம் ஒரு F மாறியாகும்.

$$F = \frac{(u/m)}{(v/n)}$$

u, v மாறிகளின் இணைந்த ஊ. அ. சா.

$$f(u,v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} \cdot u^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{(u+v)}{2}}$$

$$0 < u < \infty$$

$$0 < v < \infty.$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

u, v மாறிகளை உருவ மாற்றம் செய்தால்,

$$f = \frac{u/m}{v/n}, \quad z = v$$

$$\frac{u}{v} = \frac{m}{n} \cdot f$$

$$\therefore \quad u = \frac{m f}{n} . v = \frac{m f \cdot z}{n} \quad (\because v = z)$$

$$v = z.$$

$f \to (0, \infty)$, $z \to (0, \infty)$ என அறிகிறோம். ஜெக்கோபியன் (Jacobian).

$$|J| = \frac{\partial (u, v)}{\partial (f, z)} = \begin{vmatrix} \frac{m z}{n} & \frac{m f}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m z}{n}.$$

எனவே, $\phi(f, z) = f(u, v) \cdot |J|$

$$= f\left[\frac{mfz}{n}, z\right] \cdot |J|$$

$$\phi(f, z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{1}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} \left(\frac{mfz}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$\times z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{mfz}{n} + z\right]} \times \frac{mz}{n},$$

$$0 < f < \infty, 0 < z < \infty$$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

$$\therefore \phi(fz) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$f^{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{m+n}{2}-1}$$

$$\times \exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{m}{n}f + 1\right)\right],$$

$$0 < f, z < \infty$$

= 0, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

z-ன் மதிப்புக்களுக்குத் தொகை காணில், f-ன் விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் கிடைக்கும்.

எனவே,

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f, z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \,.\, dz + \int_{-0}^{\infty} \phi(f, z)\, dz \,.$$

$$= \int_{-0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} f^{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{m+n}{2}-1}$$

$$\times \exp.\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{m}{n} f + 1\right)\right] dz \,.$$

இங்கு $t = \frac{z}{2}\left(\frac{m}{n} f + 1\right)$ என்று சமனிட்டால்

$$z = \frac{2t}{\left(\frac{mf}{n} + 1\right)}$$

எனவே $dz = \frac{3}{\left(\frac{mf}{n} + 1\right)} dt$; இங்கு $t \to (0, \infty)$.

$$\therefore \phi_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \,.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left[\frac{2}{1 + \frac{mf}{n}}\right]^{\frac{m+n}{2}} t^{\frac{m+n}{2}-1} dt$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot f^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{2^{\frac{m+n}{2}}}{\left(1+\frac{mf}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

$$\therefore \phi_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{mf}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}},$$

$$0 < f < \infty .$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளுக்கெல்லாம்).

எனவே, m, n என்ற இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய சார் பற்ற கை வர்க்க மாறிகள் முறையே u, v என்றால்,

$F = \frac{u/m}{v/n}$ மாறி மேலே காணும் $\phi_1(f)$ என்ற, f-ன் ஊ. அ. சா. வைப் பெற்றிருக்கும்.

இந்த f மாறியின் பரவலை (F-பரவல்) 'ஸ்நெடகரின் F-பரவல்' என்று கூறுகின்றோம்.

இந்த F-ன் பரவல் m, n என்ற இரு பண்பளவைகளைக் கொண்டு குறிக்கப்படுகிறது. இந்தப் பண்பளவைகளை F-ன் இயக்கப்பாகைகள் (degrees of freedom) எனவும் வழங்க லாம். F-ன் தொகுதி (Numerator)யில் உள்ள u-மாறியின் இ. பா. mஐத்தான் முதலில் எழுதவேண்டும். குறிப்பிட்ட m, n, f மதிப்புகளுக்கான,

$P_r\,[F \le f] = \int_{-\infty}^{f} \phi_1(x)\,dx$ -ன் தோராய மதிப்புகளை இறுதி அட்டவணையில் காணலாம்.

F-ன் மற்றொரு விளக்கம் :

x_{1i} $(i = 1, 2 \ldots\ldots n_1)$

x_{2j} $(j = 1, 2, \ldots\ldots n_2)$

என்ற மதிப்புகள் σ^2 மாறுபாட்டுடன் கூடிய ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரிகளின் மதிப்புகள் எனக் கொள்வோம்.

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ மாதிரிகளின் சராசரிகளாகவும், $S_1{}^2$, $S_2{}^2$ மாதிரிகளின், σ^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளாகவும் இருக்கட்டும்.

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} x_{2j}$$

$$S_1{}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_1 i - \bar{x}_1)^2$$

$$= S_2{}^2 \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \text{ என்றால்,}$$

$$F = \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(n_1 - 1) F}{(n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1{}^2 / \sigma^2}{(n^2 - 1) S_2{}^2 / \sigma^2}$$

$$= \frac{n_1 s_1{}^2 / \sigma^2}{n_2 s_2{}^2 / \sigma^4}$$

$$= \frac{\chi_1^{-2}}{\chi_2{}^2} \text{ என்க.}$$

$n_1 - 1 = v_1$, $n_2 - 1 = v_2$ எனக் கொள்க.

இங்கு $\chi_1{}^2 \rightarrow \chi^2 v_1$ இ. பா.

$\chi_2{}^2 \rightarrow \chi^2 v_2$ இ. பா.

இரு மாதிரிகளும் சார்பற்றவை யாதலால்,

χ_1^2, χ_2^2 இரண்டும் சார்பற்ற χ^2 மாறிகள்.

எனவே இந்த χ^2-களின் விகிதம் $\dfrac{\chi_1^2}{\chi_2^2} = \dfrac{v_1 F}{v_2}$

ஒரு $\beta_2 \left(\dfrac{v_1}{2}, \dfrac{v_2}{2} \right)$ மாறியாகும்.

$\therefore$ $\dfrac{v_1 F}{v_2}$-ன் ஊ. அ. சார்பலன்,

$$g\left(\frac{v_1 F}{v_2}\right) = \frac{1}{\beta\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)} \frac{\left(\frac{v_1 F}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{v_1 F}{v_2}\right)^{\frac{v_1 + v_2}{2}}}$$

$$0 < \frac{v_1 F}{v_2} < \infty$$

அல்லது,

$$g(F) = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}}{\beta\left(\frac{v_1}{2} \; \frac{v_2}{2}\right)} \frac{F^{\frac{v_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{v_1 F}{v_2}\right)^{\frac{v_1 + v_2}{2}}}$$

$$0 < F < \infty.$$

$$= \frac{v_1^{\frac{v_1}{2}} \cdot v_2^{\frac{v_2}{2}}}{B\left(\frac{v_1}{2}, \right)\left(\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \frac{F^{\frac{v_1}{2} - 1}}{(v_2 + v_1 F)^{\frac{v_1 + v_2}{2}}},$$

$$0 < F < \infty \cdot$$

$= 0$, (மற்ற மதிப்புகளில் எல்லாம்).

திருப்புத் திறன்கள் :

$$\mu'_r = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{F^r \cdot F^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} dF.$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}+r}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m}{2}+r-1} d\,\frac{m}{n}F}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^r \cdot \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \beta\left(\frac{m}{2}+r, \frac{n}{2}-r\right)$$

$$\therefore \mu'_r = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^r \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}+r\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{2}+r-1\right)\left(\frac{m}{2}+r-2\right) \cdots\cdots \frac{m}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right) \cdots \left(\frac{n}{2}-v\right)\left(\frac{n}{2}-r\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^r$$

$$= \frac{(m+2r-2)\,(m+2r-4) \cdots\cdots (m+2)m}{(n-2)\,(n-4) \cdots\cdots\cdots (n-2r)} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^r.$$

$$r = 1;\ \mu_1' = \frac{m}{n-2} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{n-2}.$$

$$r = 2;\ \mu_2' = \frac{m\,(m+2)}{(n-2)\,(n-4)} \cdot \frac{n^2}{m^2}$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$= \frac{m(m+2)n^2}{m^2(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2}$$

$$= \frac{n_2[(m+2)(n-2) - m(n-4)]}{m(n-2)^2(n-4)}$$

$$= \frac{n^2[mn+2n-2m-4-mn+4m)]}{m(n-2)^2(n-4)}$$

$$= \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

$$\simeq 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

F-ன் பரவுல் σ^2 ஐச் சாற்பற்று உள்ளது. F வளைகோடு J வடிவுடன் ($n \leq 2$) அமைந்துள்ளது. $m > 2$ என்றால், மணி வடிவமாக (Bell Shaped) உள்ளது.

11-5 ஃபிஷரின் z-பரவல் (Fisher's Z- Distribution)

F-ன் பரவலிலிருந்து,

$Z = \frac{1}{2} \cdot \log_e F$ என்று சமனிட்டபின் Z-ன் ஊ. அ. சார்பலன்

$$f(Z) = \frac{2.\, m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, e^{mz}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left[n + m\, e^{2z}\right]^{\frac{m+2}{n}}}$$

$$-\infty < z < \infty$$

ஆகும்.

t, F பரவல்களுக்கான தொடர்பு

K இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய t மாறியின் வர்க்கமானது, 1, K இயக்கப் பாகைகளைக் கொண்ட ஒரு F பரவலில் அமைகிறது.

நிருபணம்

$F = t^2, m = 1, n = k$ என்று F–பரவலில் சமனிட்டால்,

$$\phi(F)\,dF = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \quad F^{\frac{m}{2}-1}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}\,dF$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (t^2)^{\frac{1}{2}-1}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)\left(1+\frac{1}{k}t^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}\,d(t^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}.\ \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

$$-\infty < \quad < \infty$$

$$= f(t)\,dt$$

எனவே, t ஒரு k இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய ஒரு மாறியாகும்.

பயிற்சி I.

(1) ஒரு χ^2 மாறியை வரையறுத்து அதன் ஊ.அ.சார் பலனைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

அதன் மூலம் χ^2 மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு இவற்றையும் கணிக்கவும்.

(2) X, Y மாதிரிகள் முறையே m, n இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய சார்பற்ற χ^2 மாறிகளானால்,

(i) $X+Y$

(ii) $\frac{X}{Y}$

(iii) $\frac{X}{X+Y}$

இவற்றின் பரவல்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(3) n இயக்கப்பாகைகள் கொண்ட ஒரு χ^2 பரவலுக்கான திருப்புத் திறன்களின் கீழ்க்காணும் மறுதரவுச் சார்பை (Recurrence relation) நிர்ணயிக்கவும்.

$$\mu_{r+1} = 2r\,(\mu_r + n\,\mu_{r-1}).$$

(4) X மாறி n இயக்கப் பாகைகள் கொண்ட ஒரு χ^2 மாறியானால், n மிகப் பெரிதாயின், $[\sqrt{2X} - \sqrt{2n}]$ ஓர் இயல் நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது என நிரூபி.

(5) X ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறியானால்,

$$t = \frac{x\sqrt{n}}{\chi^2}$$ -ன் பரவலைக் காண்க.

(இங்கு χ^2 ஒரு n இ.பா. கொண்ட χ^2 மாறி).

(6) n. இ. பா. உள்ள ஒரு t பரவலின் சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் கண்டுபிடிக்கவும். n மிகப் பெரிதாக ஆகும்போது, t மாறி ஓர் இயல் நிலைப்பரவலில் அமைகிறது என நிரூபி.

(7) F மாறி, v_1, v_2 பண்பளவைகளை கொண்ட F பரவலில் அமைந்தால், $\frac{1}{F}$ மாறி v_2, v_1 பண்பளவைகளைக் கொண்ட F பரவலில் அமைகிறது என நிரூபித்துக் காட்டுக.

(8) இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளினிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிக்கப் பயன்படும் t சோதனைப் பண்பளவை, அதைச் சார்ந்த தற்கோள்களுடன் விளக்குக.

(9) ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட X_1, $X_2, \ldots X_n$ என்ற n மதிப்புகளைக் கொண்ட ஒரு

ராண்டம் மாதிரியின் மாறுபாட்டுக்கான (s^2-க்கான) சராசரியையும், மாறுபாட்டையும் கண்டு பிடிக்கவும். n மிகப் பெரிதாகும் போது, அவை முறையே σ^2, $\frac{2\sigma^4}{n}$ என்ற மதிப்புகளை அணுகுகின்றது என்று நிரூபி.

11–6. மையம் தெரியாத t–பரவல்

y மாறி ஒரு $N(\mu, \sigma^2)$ மாறி, என்றும் $\frac{x}{\sigma}$ மாறி ஒரு சார்பற்ற $\chi^2(k)$ மாறி என்றும் கொள்வோம். பிறகு $t = \frac{y}{\sqrt{(x/k)}}$ மாறி ஒரு மையமற்ற ஸ்டூடன்டின் t-மாறி எனவும், அதன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்,

$$\phi(t|k,s) = \frac{k^{k/2}\, e^{-\delta^2/2}}{\Gamma(k/2)\,(k+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+s+1}{2}\right)$$

$$\frac{\delta^s}{s!} \cdot \left[\frac{2\;t^2}{k+t^2}\right]^{\frac{s}{2}}, \qquad \ldots \quad (1)$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$\delta = \mu/\sigma$$

ஆகவும் இருக்கும்.

y, x இரு மாறிகளின் இணைந்த பரவல்

$$f(x,y) = c_1\, e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}\; e^{-x/2\sigma^2}\; x^{\frac{k}{2}-1}\; dy \,.\, dx$$

இங்கு $c_1 = \left[\sqrt{2\pi}\,\sigma \,.\, \sigma^{k}\, 2^{k/2}\, \Gamma(k/2)\right]^{-1}$ ஆகும். .. (2)

$$\left.\begin{aligned} y &= r\,\sin\theta \\ x &= r^2\cos^2\theta \end{aligned}\right\}$$ என்ற உருமாற்றம் செய்யின், ... (3)

$$x + y^2 = r^2.$$

$$|J| = \left|\frac{\partial (r, y)}{\partial (r, \theta)}\right| \begin{vmatrix} 2r\cos^2\theta & -r^2 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2r^2\cos^3\theta + 2r^2\cos\theta\sin^2\theta$$

$$= 2r^2\cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= \underline{2r^2\cos\theta}.$$

$\rightarrow (0, \infty)$; $\theta \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ ஆகும்.

எனவே, $g(r, \theta) = f(x, y) \cdot |J|$

$$= f[r^2\cos^2\theta, \; r\sin\theta] \cdot |J|$$

$\therefore$ r, θ மாறிகளின் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்.

$$g(r, \theta) = c_1 \cdot e^{-\mu^2/2\sigma^2} \, e^{-(r^2 - 2\mu r\sin\theta)/2\sigma^2}$$

$$\times (r^2\cos^2\theta)^{\frac{\mu}{2} - 1} \qquad 2 \cdot r^2\cos\theta.$$

$$0 < r < \infty$$

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$= 0$, (மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்).

அதாவது,

$$g(r, \theta) = c_2 \cdot e^{-(r^2 - 2\mu r\sin\theta) - 2\sigma^2} \, r^k (\cos\theta)^{k-1}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

[இங்கு $c_2 = kc_1 e^{-\delta_2/_1} \therefore \frac{\mu}{?} = s$]

இங்கு $r\ \theta$ மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகள் அல்ல என்று அறிகிறோம்.

ஏனெனில்,

$$g(r, \theta) \neq g_1(r)\ g_2(\theta)$$

[$g_1(r)$, $g_2(\theta)$ இவை விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார் பலன்கள் என்றால்].

எனவே $exp[(\mu r \sin\theta)/\sigma^2]$ ஐ விரிவுபடுத்தி ஒரு முடிவிலித் தொடராக (infinite series) எழுதலாம்.

$$e^{(\mu r \sin\theta) | \sigma^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\mu r \sin\theta}{\sigma^2}\right)^s$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(\mu \sin\theta)^{s} r^s}{s!\ \sigma^{2s}}$$

எனவே (4) சமன்பாடு,

$$g(r, \theta) = c_2 . e^{-r^2/2\sigma} (\cos\theta)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu \sin\theta)^s r^{k+s}}{s! . \sigma^{2s}} \ldots\ldots (5)$$

r ஐப் பொறுத்த வரை, ஒவ்வோர் உறுப்பாக (5) ஐத் தொகுத்தால், θ மாறியின் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார் பலன் கிடைக்கிறது. எனவே, θ-ன் ஊ. அ. சார்பலன்

$$h(\theta) = \int_0^{\infty} c^2\ e^{-^2/_2\sigma^2} (\cos\theta)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu \sin\theta)^s}{s!\ \sigma^{2s}}\ r^{k+s}\ dr$$

$$h(\theta) = \int_0^{\infty} \left[c_2\ (\cos\theta)^{k-1} \sum \frac{(\mu \sin\theta)^s}{s!\ \sigma^{2s}}\right]$$

$$2^{-1} \, . e^{-r^2/2\sigma^2} (r^2)^{\frac{k+s+1}{2}-1} d(r^2)$$

$$[\therefore \; dr^2 = 2r\,dr; \; dr = 2^{-1} (r^2)^{-1/2} d(r)^2]$$

$$= 2^{-1} c_2 \, . (\cos\theta)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+s+1}{2}\right)$$

$$(2\sigma^2)^{\frac{k+s+1}{2}} \frac{(\delta \sin\theta)^s}{s!\, \sigma^s} .$$

$$= 2^{-1} \left[\sqrt{2\pi} \, . \, \sigma^{k+1} \, 2^{k/2} \, \Gamma\, k/2 \right]^{-1}$$

$$. e^{-\delta^2/2} \, . \, 2 (\cos\theta)^{k-1}$$

$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+s+1}{2}\right) 2^{\frac{k+s+1}{2}} \sigma^{k+s+1} . \frac{(\delta + \sin\theta)^s}{s!\, \sigma^s} .$$

$$= \frac{2^{\frac{k+1}{2}} \, . \, (\cos\theta)^{k-1}}{2^{\frac{k}{2}} \, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \, 2^{1/2} \sqrt{\pi}} e^{-\delta^2/2} .$$

$$\Sigma \, \Gamma\left(\frac{k+s+1}{2}\right) 2^{s/2} \frac{(\delta \sin\theta)^s}{S!}$$

($\delta = \frac{\mu}{2}$ என்று அறிக.)

$t = \sqrt{k}\tan\theta$ உருமாற்றம் செய்தால்,

$$\tan\theta = \frac{t}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{t^2}{k}$$

$$\sin^2\theta = \frac{t^2}{k}(1 - \sin^2\theta)$$

$$\sin^2\theta\left(1 + \frac{t^2}{k}\right) = \frac{t^2}{k}.$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \frac{t^2/k}{(1 + t^2/k)}$$

$$= \frac{t^2}{k + t^2}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta = (1 + t^2k)$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{(1 + t^2k)} = \frac{k}{(k + t^2)}$$

$$\tan\theta = \frac{t}{\sqrt{k}}$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta \cdot d\theta = \frac{dt}{\sqrt{k}}.$$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} \cdot \frac{dt}{\sqrt{k}}$$

$$= \frac{k\,dt}{\sqrt{k}\,(k + t^2)} = \frac{\sqrt{k}\,.\,dt}{(k+t^2)}$$

$$|J| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \frac{\sqrt{k}}{(k+t^2)}$$

$$\theta \rightarrow (0, \overset{-\pi/2}{} \pi/2)$$

$$t \rightarrow (-\infty, \infty).$$

$\therefore$ θ-விலிருந்து t-க்கு மாற்றம் செய்த பின், t-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)} e^{-\delta^2/2} \left(\frac{k}{k + t^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}.$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k + s + 1}{2}\right) 2^{s/2} \frac{\delta^s}{s!} \cdot \left[\frac{t^2}{t^2 + k}\right]^s \cdot \frac{\sqrt{k}}{(k+t^2)}$$

$$= \frac{k^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\delta^2/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2) \cdot (k + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\ \ + s + 1}{2}\right)\frac{\delta^s}{s!}\left(\frac{2\,t^2}{k + t^2}\right)^{\frac{s}{2}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$\delta = \frac{\mu}{\sigma}$$

எனவே t-ன் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஒரு மையம் தெரியாத t மாறியின் பரவலாக அமைகிறது.

இனி $\delta = 0$ என்றால், என்ன ஆகிறது என்று கவனிப்போம்.

$$\phi(t) = \frac{k^{k/2}\, e^{-\delta^2/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (k + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \cdot \frac{\delta^0}{0!} \cdot \left(\frac{2\,t^2}{k + t^2}\right)^0 \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k + s + 1}{2}\right)\frac{\delta^s}{s!}\left[\frac{2\,t^2}{k + t^2}\right]^{\frac{s}{2}} \right\}$$

இப்போது $\delta = 0$ எனச் சமனிட்டால்,

$$\phi(t) = \frac{k^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma(1/2)} \cdot \frac{1}{(k + t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \cdot$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \cdot 1 + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

இது ஒரு மையமுள்ள t-ன் அடர்த்திச் சார்பலன்.

எனவே $\delta = 0$ எனும் போது, $\mu = 0$ என்றால், மையமற்ற t பரவல் ஒரு மையமுள்ள t பரவலாக அமைகின்றது.

இனி ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் என்பதைச் சுருக்கமாக அடர்த்திச் சார்பலன் என்றே கூறுவோம்.

x-ன் பரவல் (Lemma)

x ஒரு $N(\mu_1 \ \sigma^2)$ மாறியானால் x^2-ன்பரவலைக்காண விழைவோம்.

X-ன் பரவல்

$$dp = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx, \ -\infty < x < \infty \quad \ldots (1)$$

$y = x^2$ எனக்கொள்க.

$dy = 2x\, dx.$

$x \to (-\infty, \infty)$ என்பதால் $y = x^2 \to (0, \infty)$ இடைவெளியில் உள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு y-க்கு இரண்டு x மதிப்புகள் உள்ளன. அதாவது $+x$, $-x$ என்பன.

$+x$-ல் உள்ள அடர்த்தியின் உருமாற்றம்

$$dp_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[y - 2\sqrt{y}\mu + \mu^2]/2\sigma^2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} \quad \ldots (2)$$

எனவும்

—xல் உள்ள அடர்த்தியின் உருமாற்றம்

$$dp_2 = \frac{1}{\sigma k 2\pi} e^{[y + 2kv\mu + \mu^2]/2\sigma^2} \frac{dy}{2ky} \quad \ldots (3)$$

எனவும் நாம் அறிகிறோம்.

(2), (3)-ன் கூடுதலே மொத்த ஊக அளவு வகையீடு (probability differential) ஆனதால்,

y-ன் பரவல்

$$dp_3 = dp_1 + dp_2$$

$$= \frac{1}{\sigma k \overline{2\pi}} e^{-y/2\sigma^2} \cdot e^{-(\mu^2/2\sigma^2)} \left[\frac{e^{\sqrt{y}.\mu/2\sigma^2} + e^{-\sqrt{y}\mu/2\sigma^2}}{2\sqrt{y}} .dy\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} e^{-(y + \mu^2)/2\sigma^2} \cos h\left[\frac{\sqrt{y}\,\mu/\sigma^2}{\sqrt{y}}\right] \cdot dy. \quad \ldots \ldots (4)$$

$\left(\text{ஏனெனில் } \frac{e^{X} + e^{-X}}{2} = \cos h\, X\right)$

$\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\infty$ என்பதால்,

$$\cos h \cdot \left[\frac{\sqrt{y}\mu}{\sigma^2}\right] = \left[\frac{e^{\frac{\sqrt{y}\mu}{\sigma 2}} + e^{-\frac{\sqrt{y}\mu}{\sigma 2}}}{2}\right]$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 . y + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^4 . y^2 + \frac{1}{6!}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^6 . y^3 + \ldots\ldots\right]$$

எனவே y-ன் பரவல்

$$dP_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\mu^2/2\sigma^2} \cdot e^{-\mu/2\sigma^2} \cdot y^{-1/2} .$$

$$\left[1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 y + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^4 y^2 + \cdots\cdots\right] dy \quad \ldots (5)$$

$$= e^{-\mu^2/2\sigma^2} \cdot \sum\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!} \cdot G\left(\frac{1}{2\sigma^2}, r+\tfrac{1}{2}, y\right) dy \ldots (6)$$

இங்கு $G\left(\frac{1}{2\sigma^2}, r+\frac{1}{2}, y\right)$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{r+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)} e^{-y/2\sigma^2} \cdot y^{r+\frac{1}{2}-1}$$

(6)-ல் $z_{r+1} = \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!} G\left(\frac{1}{2\sigma^2}, r+\frac{1}{2}; y\right)$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$r = 0$ என்றால், $z_1 = G\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2}, y\right)$

$$= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-y/2\sigma^2} \cdot y^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2\sigma^2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} . \quad \ldots (i)$$

$r = 1$ என்றால், $z_2 = \left(\frac{\mu}{2\sigma^2}\right) \cdot G\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{3}{2}, y\right)$

$$= \frac{\mu}{2\sigma^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(3/2)} \cdot e^{-y/2\sigma^2} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\mu^2}{2\cdot\sigma^2}\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\, e^{-y/2\sigma^2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-y/2\sigma^2}\cdot y\cdot y^{\frac{1}{2}}\ \ldots\text{(ii)}$$

$r=2$ என்றால், $z_3=\left(\frac{\mu}{2\sigma^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\, G\left(\frac{1}{2\sigma^2},\ \frac{5}{2}, y\right)$

$$=\left(\frac{\mu}{2\sigma^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{5/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(5/2)}\, e^{-y/2\sigma^2}\cdot y^{3/2}\cdot$$

$$z_3=\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}\, e^{-y/2\sigma^2}\, y^{3/2}.$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(\mu^2)^2}{(\sigma^2)^4}\cdot\frac{1}{3\cdot 2!}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y/2\sigma^2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^2$$

$$=\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^4\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y/2k^2}\, y^{-1/2}\cdot y^2\quad\ldots\text{(iii)}$$

எனவே (i), (ii), (iii) உறுப்புகளைச் சமனிட்டுப் பார்த்தால் (5)-ம், (6)-ம் (ஒன்றாக) சமமாக இருப்பதை அறிகிறோம்.

ஆதலால், $y=x^2$-ன் பரவல்

$$dp=e^{-\mu^2/2\sigma^2}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r\cdot\frac{1}{r!}\cdot G\left(\frac{1}{2\sigma^2},\ r+\frac{1}{2};\ y\right)dy.$$

$$0<y<\infty$$

11-7 மையம் தெரியாத χ^2-ன் பரவல் (Non-central χ^2-distribution)

$x_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ $(i=1, 2, 3, \ldots k)$ என்ற x_i மாறிகள் k சார்பற்ற இயல்நிலைமாறிகளாயின்,

$x = [\sum x_i^2 / \sigma^2]$-ன் பரவலைக் காண முற்படலாம்.

(i) $\mu_i = 0$ என்றால், (எல்லா i-மதிப்புகளுக்கும்)

$\frac{x_i^2}{\sigma^2}$ ஒரு χ^2 (1) மாறி. மேலும் k மாறிகளும் சார்பற்றவையாதலால் $x = \sum x_i^2/\sigma^2$ ஒரு χ^2 (k) மாறியாகிறது.

(ii) $\mu_i \neq 0$ என்றால், $x = [\sum x_i^2 / \sigma^2]$ ஒருமையற்ற கை வர்க்கப்பரவலைச் சாடுகிறது. இது எவ்வாறு மையமற்ற χ^2-பரவலில் அமைந்துள்ளது என்பதை விளக்கமாகக் கீழே காணலாம்.

$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 \ldots\ldots + \mu_k^2$ என்று இருக்கட்டும்.

$Y = B\ X$ என்ற செங்குத்து உருவமாற்றத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். செங்குத்து அணி B-ன முதல் வரிசை

$\left(\frac{\mu_1}{\mu}, \frac{\mu_2}{\mu} \ldots\ldots\ldots \frac{\mu_k}{\mu}\right)$ ஆக இருக்கட்டும்.

உருவ மாற்றம் செங்குத்தானலால்,

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i^2 + \mu_i^2 - 2x_i\mu_i)$$

$$= \sum x_i^2 + \sum \mu_i^2 - 2\sum x_i \mu_i$$

$$= \sum y_i^2 + \mu^2 - 2y_1\mu$$

எப்படி என்றால் செங்குத்து உருவ மாற்றத்தால்

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், $\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 = \mu^2$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$$\text{இங்கு } y_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu}, \frac{\mu_2}{\mu}, \ldots\ldots, \frac{\mu k}{\mu}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ xk \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \Sigma\, x_i\, \mu_i$$

எனவே $\Sigma x_i\, \mu_i = y_1\, \mu$.

$$\therefore \quad \Sigma\, (x_i - \mu_i)^2 = \sum_{i=2}^{k} y_i^2 + y_1^2 + \mu^2 - 2\, y_1\, \mu$$

$$= (y_1 - \mu)^2 + \sum_{i=2}^{k} y_i^2$$

இப்போது $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$-ன் இணைந்த ஊக அளவு அடர்த்தியைக் கவனித்தால்

$$c_1 \cdot exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma\,(x_i - \mu_i)^2\right] \text{ ஆனது}$$

$$c_1 \cdot exp\left[-\frac{1}{2\sigma}\left\{(y_1 - \mu)^2 + y_2^2 + \ldots y_k^2\right\}\right] \text{ என்ற ஊக}$$

அடர்த்தியாக மாறுகிறது.

எனவே $y_1,\ y_2 \ldots\ldots y_k$ என்பன k சார்பற்ற மாறிகள் எனவும், $E\,(y_1) = \mu$,

$E\,(y_i) = 0,\ i = 2, 3, \ldots\ldots k$ எனவும் நாம் அறிகிறோம்.

மேலும், $X'\,X \rightarrow Y'\,Y$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிப் பண்பளவு.

$$x = \frac{\sum x_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum y_i^2}{\sigma^2} = \frac{y_1^2}{\sigma^2} + \frac{y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_k^2}{\sigma^2}$$

$= u + v$ எனக் கொள்ளலாம்

எனவே $v \rightarrow \chi^2\,(k-1)$ மாறியாகும்.

அல்லது $v \rightarrow G\left(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2}\right)$ மாறி எனவும் கூறலாம்.

மேலும் u-ன் பரவலானது

$$dp_1 = e^{-\mu^2/2\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r G\left(\tfrac{1}{2}, r+\tfrac{1}{2}, u\right) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எப்படியெனில்,

$$\int_{y=\frac{x^2}{2\sigma^2}} N(x/\mu, \sigma^2)\, dx = e^{-\mu^2/2\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \cdot \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r \cdot G\left(\tfrac{1}{2}, r+\tfrac{1}{2}; y\right)$$

என்று சற்று முன்புதான் கண்டறிந்தோம்.

இப்போது u, v இருமாறிகளின் இணைந்த பரவலை எழுதலாம்.

$$dP = e^{-\mu^2/2\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r \cdot G\left(u / \tfrac{1}{2}, r+\tfrac{1}{2}\right) du.$$

$$\times\, G\left(v / \tfrac{1}{2}\, \frac{k-1}{2}\right) dv \quad \dots \quad (2)$$

மேலும் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பன சார்பற்ற காம்மா மாறிகளானால்,

$$\int_{x=x_1+x_2+\ldots n_n} G(x_1 / \alpha, p_1) \cdot G(x_2 / \alpha, p_2) \ldots\ldots G(x_n / \alpha, p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad \ldots(3)$$

$= G(x / \alpha, p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n)$ என நாம் அறிவோம்.

இந்த காம்மாப் பரவலின் கூட்டல் நியதியை உபயோகித்தால், $x = u + v$-ன் பரவல்

$$dP = e^{-\mu^2/2\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)^r G\left(x / \tfrac{1}{2}, r+\frac{k}{2}\right) dx \quad \ldots(4)$$

இதையே k இயக்கப்பாகைகளுடன் கூடிய ஒரு மையமற்ற கை வர்க்க மாறியின் பரவல் என வழங்குகிறோம்.

இங்கு $\lambda = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ என்றால், λ ஐ மையம் தெரியாத தன்மையுடைத்த பண்பளவு ஆகும். எனவே, இந்த χ^2 மாறியானது k, λ இரு பண்பளவுகளைக் கொண்ட ஒரு $\chi^2\ (k, \lambda)$ மாறியாகும்.

$\mu = 0$ எனும்போது, $\lambda = 0$ ஆகும். அப்போது இந்த மையமற்ற χ^2 மாறி ஒரு மையமுள்ள χ^2 மாறியாகிறது.

எனவே, (4)–ல் $\mu = 0$ என்று சமனிட்டால், சாதாரண மையமுள்ள χ^2–ன் பரவல் கிடைக்கிறது.

அதாவது,

$$dP = \left[e^{-\mu^2/2\sigma^2} \sum \frac{1}{r!} \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right)^r G\left(x/\tfrac{1}{2},\ r + \frac{k}{2}\right) dx \right]_{\mu = 0}$$

$$= \left\{ \left(e^{-\mu^2/2\sigma^2} \right) \left[G\left(x/\tfrac{1}{2},\ \frac{k}{2}\right) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right)^r G\left(x/\tfrac{1}{2},\ r + \frac{k}{2}\right) dx \right] \right\}_{\mu = 0}$$

$$= 1\ G\left(x/\tfrac{1}{2},\ \frac{k}{2}\right) d x$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-x/2}\ x^{\frac{k}{2} - 1}\ dx \qquad 0 < x < \infty$$

11-8 மையம் தெரியாத F–ன் பரவல் (Non - Central F distribution)

$\chi^2 \rightarrow \chi^2\ (k, \lambda)$, ஒரு மையம் தெரியாத χ^2 மாறி

$\chi_2^2 \rightarrow \chi_2(m)$ ஒரு மையமுள்ள χ^2 மாறி, இந்த இரண்டு χ^2 மாறிகளும் சார்பற்றவை எனக் கொள்வோம்.

$f = \dfrac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ என வரையறுப்போம்.

(i) $\lambda = 0$ என்றால், f மாறி மையமுள்ள இரு χ^2 மாறிகளின் விகிதமாக அமைந்து, f பரவல் ஒரு மையமுள்ள F பரவலைச் சாடும்.

அதாவது,

$$\int_{F=\frac{x_1}{x_2}} \chi^2 (x_1/k_1) \cdot \chi^2 (x_2/k_2)\ dx_1\ dx_2$$

$$= f\,(f/k_1, k_2)$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{k_1}{2} - 1}}{(1+f)^{\frac{k_1 + k_2}{2}}}, \quad 0 < f < \infty \quad \ldots(1)$$

(ii) $\lambda \neq 0$ என்றால், χ_1^2, χ_2^2–ன் இணைந்த அடர்த்தியானது,

$$dP = \left[e^{-\lambda^2/2} \cdot \Sigma \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!} \cdot G\left(\chi_1^2/\tfrac{1}{2}, r + \frac{k}{2}\right) d\,\chi_1^2 \right]$$

$$\times \left[G\left(\chi_2^2/\tfrac{1}{2}, \frac{m}{2}\right) \cdot d\,\chi_2^2 \right] \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots (2)$$

χ_1^2, χ_2^2 இரண்டும் சார்பற்றவையாதலால்,

$$\int_{f=\frac{x_1}{x_2}} G(\chi_1/\alpha, p_1) \cdot G(x_2/\alpha, p_2)\ dx_1\ dx_2 = f\,(\ f/2\,p_1, 2\,p_2)$$

$$= \frac{1}{\beta(p_1, p_2)} \cdot \frac{f^{p_1 - 1}}{(1+f)^{p_1 + p_2}}, \quad 0 < f < \infty \qquad \ldots (3)$$

(3)ஐ (2)–ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் பயன்படுத்தினால் f-ன் அடர்த்தி கிடைக்கிறது.

எனவே f-ன் பரவல்,

$$dP = e^{-\lambda^2/2} \cdot \sum \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!} \cdot$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + r\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{k}{2} + r - 1} \, df}{(1+f)^{r + \frac{k+m}{2}}}$$

$$0 < f < \infty$$

இதையே மையம் தெரியாத f-ன் பரவல் எனக் கூறுகிறோம்.

இந்த f மாறியை $f(k, m, \lambda)$ என்ற மூன்று பண்பளவுகளைக் கொண்டு குறிப்பிடுகிறோம்.

இதையே (மட்டுமீறிய) ஹைப்பர் ஜியோமிதிச் சார்பலன் (hyper geometric function) ${}_1F_1$ உருவத்திலும் எழுதலாம்.

$$dP = \frac{e^{-\lambda^2/2} \cdot \Gamma\left(\frac{k+m}{1}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \; \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{k}{2} - 1}}{(1+f)^{\frac{k+m}{2}}},$$

$${}_1F_1\left(\frac{k+m}{2} \cdot \frac{k}{2}, \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{f}{1+f}\right)$$

$$= f(f/k, m, \lambda).$$

இங்கு $_1F_1$ என்பது ஒரு முதல் வகை (மட்டு மீறிய) ஹைப்பர் ஜியோமிதிச் சார்பலனாகும்.

$$_1F_1(\alpha, \beta; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + r)} \cdot \frac{x^r}{r!} .$$

11.9 முழுமைத் தொகுதியில் $\rho \neq 0$ எனும்போது, n இணை மாறிகளை $[(X_i, Y_i) \;.\; i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n]$க் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில், **மாதிரி உடன் தொடர்புக் கெழு** (Sample Correlation Coefficient) **வின் பரவல்**

x, y என்பன இரு இயல் நிலை மாறிகளாக இருக்கட்டும்,

$x \rightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$y \rightarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$

x, y மாறிகளின் இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலானது.

$$dP = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] dx\, dy \ldots(1)$$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$.

$\bar{y} = \frac{1}{n}\Sigma y_i$.

$s_1^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$,

$s_2^2 = \frac{1}{n}\Sigma(y_i - \bar{y})^2$.

மேலும் $\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = r\, s_1 s_2$.

சமன்பாடு (1`-லிருந்து r, s^2_1, s^2_2 மாறிகளின் இணைந்த பரவலைக் காண முற்படுவோம்.

$$X = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \; ; \; Y = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \text{ என்று} \qquad \ldots \quad (2)$$

முதலில் உருமாற்றப்படுத்தி

$$\text{பிறகு } \xi = \frac{Y - P X}{\sqrt{1 - P^2}}, \; n = X \text{ என்று} \qquad \ldots \quad (3)$$

இரண்டாவது உருவமாற்றம் செய்தால்,

$$\xi^2 = \frac{Y^2 - 2P XY \times P^2 X^2}{1 - \rho^2} \; ; \; \eta^2 = \frac{(1 - P^2) X^2}{(1 - P^2)}$$

$$\therefore \; \xi^2 + \eta^2 = \frac{X^2 - 2 P XY \times X^2 Y^2}{(1 - P^2)} \text{ ஆகிறது.}$$

$$|J| = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (X, Y)}, \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \eta)} \right|$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1 - P^2)}$$

$$\phi (\xi, \eta) = f(x, y) \, . \, |J| \, .$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1 - P^2)}} \, . \, e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 \times \eta^2)} \quad \sigma_1 \sigma_2 \, . \sqrt{1 - P^2} \, .$$

$\therefore \xi . \eta$ மாறிகளின் இணைந்த பரவல்

$$d P = \frac{1}{2\pi} \, . \, e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 \times \eta^2)} \, d \xi \, . \, d \eta \qquad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots \ldots + \xi n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\, \bar{\xi} \\ u_2 &= \frac{\sum (\eta_i - \bar{\eta}) (\xi_i - \bar{\xi})}{\sqrt{\sum (\eta_i - \bar{\eta})^2}} \quad \text{எனவும்} \end{aligned} \right\} \qquad \ldots \quad (5)$$

மற்ற u_i-க்களை செங்குத்தான உருமாற்றத்திற் கேற்ப வரையறுப்போம்.

η_i களை இங்கு நிலை எண்களாகக்கொண்டு ξ_i-களுக்கான u_i-களை செங்குத்தான உருமாற்றம் மூலம் வரையறுக்கலாம்.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_1^2 + \sum_{2}^{n} u_i^2$$

$$= n\,\overline{\xi^2} \times \sum_{2}^{n} u_i^2$$

எனவே $\Sigma\ (\xi_i - \overline{\xi})^2 = \sum_{2}^{n} u_i^2 = u_2^2 + \sum_{3}^{n} u_i^2$

$$\xi_i - \overline{\xi} = \frac{\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{\sigma^2}\right) - \rho\left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{(1-\rho^2)}}$$

$$\sum (\xi_i - \overline{\xi})^2 = \frac{n}{(1-\rho^2)}\left[\frac{s_2^2}{\sigma_2^2} - 2\frac{\rho\, r\, s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\rho^2 s_1^2}{\sigma_1^2}\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$$= u_2^2 + \sum_{3}^{n} u_i^2$$

$$u_2 = \frac{\sum (\eta_i - \overline{\eta})(\xi_i - \xi)}{\sqrt{\sum (\eta_i - \overline{\eta})^2}}$$

$$\eta_i - \overline{\eta} = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_1}$$

$$\Sigma\,(\eta_i - \overline{\eta})^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\,\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\, s_1^2}{\sigma_1^2}$$

இப்போது $u_2 = \dfrac{\Sigma\,(\eta_i - \overline{\eta})\,(\xi_i - \xi)}{\left[\sum\,(\eta_i - \overline{\eta})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{\Sigma\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_1}\right)\left[\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_2}-\rho.\ \frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_1}\right]}{\sqrt{(1-\rho^2)}\sqrt{\Sigma\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{nrs_1\ s_2}{\sigma_1\ \sigma_2}-\rho.\ \frac{ns_1^2}{\sigma_1^2}}{\sqrt{(1-\rho^2)}.\ \sqrt{\frac{ns_1^2}{\sigma_1^2}}}$$

$$= \frac{\frac{ns_1}{\sigma_1}\ .\ \left[\frac{rs_2}{\sigma_2}-\rho\ \frac{s_1}{\sigma_1}\right]}{\sqrt{(1-\rho^2)}\cdot\sqrt{n}\ .\ \frac{s_1}{\sigma_1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-\rho^2)}}\left(\frac{rs_2}{\sigma_2}-\rho\ \frac{s_1}{\sigma_1}\right).$$

$$\therefore\qquad u_2^2 = \frac{n}{(1-\rho^2)}\left[r\ \frac{s_2}{\sigma_2}-\rho\ \frac{s_1}{\sigma_1}\right]^2 \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$\Sigma(\xi_i-\xi)^2 = \frac{n}{(1-\rho^2)}\left[\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\ \rho rs_1\ s_2}{\sigma_1\ \sigma_2}+\frac{\rho^2\ s_1^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$= u_2^2+\sum_{3}^{n} u_i^2.$$

$$\therefore\ \sum_{3}^{n} u_i^2 = \frac{n}{1-\rho^2}\left\{\left[\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho rs_1\ s_2}{\sigma_1\ \sigma_2}+\frac{\rho^2\ s_1^2}{\sigma_1^2}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{r^2s_2^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho rs_1\ s_2}{\sigma_1\ \sigma_2}+\frac{\rho^2\ s_1^2}{\sigma_1^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{n}{(1-\rho^2)}\ \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\ (1-r^2) \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

$$\therefore\quad u_1^2 = n\ \xi^2$$

$$u_2^2 = \frac{n}{1-\rho^2}.\ \left(\frac{rs_2}{\sigma_2}-\rho\ \frac{s_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$\sum_{i=3}^{n} u_i^2 = \frac{}{1-\rho^2} \cdot \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}(1-r^2)$$

u_3, u_4,... செங்குத்தான தன்மைக்கான நிபந்தனைகளைப் பெற்றிருக்கும்.

ξ_i-கள் சார்பற்ற தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறிகள் எனவே, u_i-களும் சார்பற்ற தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலை மாறிகளே.

எனவே, $u_2^2 = \chi_1^2$; ஒரு இ. பா. கொண்ட χ^2 மாறி.

$$\sum_{i=3}^{n} u_i^2 = \chi_2^2;$$ இது $(n-1)$ இ. பா. கொண்ட χ^2 மாறி.

எனவே, χ_1^2, χ_2^2, மற்றும் x_1, x_2, ... x_n-களுக்குமான இணைந்த பரவல்.

$$dP = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\chi_1/2} (\chi_1^2)^{\frac{1}{2}-1} \, d(\chi_1^2)$$

$$\times \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\frac{n-2}{2}} e^{-\chi_2^2/2} (\chi_2^2)^{\frac{n-2}{n}-1} \, d(\chi_2^2)$$

$$\times \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

இப்போது, $\chi_3^2 = \frac{ns_1^2}{\sigma_1^2}$ ஒரு χ^2 $(n-1)$ மாறி என வரையறுக்கவும்.

x_1, x_2, ... x_n இவற்றையொட்டி தொகுத்தால், χ_1^2, χ_2^2-களின் பரவல் கிடைக்கும். இதற்குப் பதில் χ_3^2 என எழுதினால், $\bar{x}_1^2$, χ_2^2, χ_3^2 மூன்றின் இணைந்த பரவலை எழுதலாம்.

$$dP = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(1/2)} e^{-\chi_1^2/2} (\chi_1^2)^{\frac{1}{2}-1} d(\chi_1^2)$$

$$\times \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\frac{n-2}{2}} e^{-\chi_2^2/2} (\chi_2^2)^{\frac{n-2}{2}-1} d(\chi_2^2)$$

$$\times \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\chi_3^2/2} (\chi_3^2)^{\frac{n-1}{2}-1} d(\chi_3^2)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

இதிலிருந்து s_1, s_2, r இவற்றின் இணைந்த பரவலை இங்கு நிர்ணயிப்போம்.

$$\chi_1^2 = \frac{n}{(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{rs_2}{\sigma_2} - \rho \frac{s_1}{\sigma}\right)^2$$

$$\chi_2^2 = \frac{n}{(1-\rho^2)} \cdot \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}(1-r^2)$$

$$\chi_3^2 = \frac{ns_1^2}{\sigma_1^2} .$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2)}{\partial(s_1, s_2, r)}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-2n\rho}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[\frac{rs_2}{\sigma_2} - \rho\frac{s_1}{\sigma_1}\right], & \frac{2nr}{\sigma_2(1-\rho^2)}\left[\cdots\cdots\right] & \frac{2ns_2}{\sigma_2(1-\rho^2)}\left[\cdots\cdots\right] \\ 0 & \frac{2ns_2(1-r^2)}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} & \frac{-2nr\, s_2^2}{\sigma_2^2(1-r^2)} \\ \frac{2ns_1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2ns_1\left[\frac{2ns_2(1-r^2)}{\sigma_2^2(1-P^2)}\cdot\frac{2ns_2}{\sigma_2(1-P^2)}\left(\frac{rs_2}{\sigma_2}-\frac{Ps_1}{\sigma_1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{4n^2r^2s_2^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)^2}\cdot\left(\frac{rs_2}{\sigma_2}-\frac{Ps_1}{\sigma_1}\right)\right]$$

$$= \frac{2ns_1}{\sigma_1^2}\cdot\frac{4n^2s_2^2}{\sigma_2^2(1-P_2)^2}\left(\frac{rs^2}{\sigma_2}-\frac{Ps_1}{\sigma_1}\right)(1-r^2+r^2)$$

$$= \frac{8n^3s_1s_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)^2}\left(\frac{rs_2}{\sigma 2}-\frac{\rho s_1}{\sigma_1}\right) \quad \text{---} \cdot \quad (11)$$

எனவே, $d\chi_1^2 \cdot d\chi_2^2 \cdot d\chi_3^2 = \frac{8n^3 s_1 s_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-P^2)^2}\left(\frac{rs_2}{\sigma_2}-\frac{Ps_1}{\sigma_1}\right)\cdot$

$dr \cdot ds_1 \cdot ds_2 .$

$$\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2 = \frac{n}{(1-P^2)}\left[\frac{r^2s_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{P^2s_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho rs_1s_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right.$$

$$\left.-\frac{r^2s_2^2}{\sigma_2^2}+(1-P^2)\frac{s_1}{\sigma_1^2}\right]$$

$$= \frac{n}{(1-P^2)}\left[\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{2Pr\,s_1s_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right]$$

ஆதலால்,

$$exp\left[-\tfrac{1}{2}(\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2)\right]$$

$$= exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho r s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right\}\right] \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$(\chi_1^2)^{-1/2}\,(\chi_1^2)^{\frac{n-4}{2}}\,(\chi_3^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\rho^2)}{n}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r s_2}{\sigma_2} - \frac{\rho s_1}{\sigma_1}\right)}$$

$$\frac{n^{\frac{n-4}{2}}}{(1-P^2)^{\frac{n-4}{2}}} \cdot \frac{s_2^{\,n-4}}{\sigma_2^{\,n-4}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\times \frac{n^{\frac{n-3}{2}}}{\sigma_1^{\,n-3}} \cdot s_1^{\,n-3}$$

$$= \frac{n^{n-4} \cdot (1-\rho^2)^{1/2} \cdot s_1^{\,n-3} \cdot s_2^{\,n-4} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{\sigma_1^{\,n-3}\,\sigma_2^{\,n-4}\,(1-P^2)^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{r s_2}{\sigma_2} - \frac{P s_1}{\sigma_1}\right)} \ldots\ldots(13)$$

எனவே r, s_1, s_2 இவற்றிற்கான இணைந்த பரவல்

$$dF = \frac{1}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)\,2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\frac{8n^3}{\sigma_1^{\,n-4}\,\sigma_2^{\,n-4}\,(1-\rho^2)^2} \cdot \frac{n^{n-4} \cdot (1-P^2)^{1/2}}{(1-\rho^2)^{\frac{n-4}{2}}}$$

$$\times (s_1 s_2)^{n-2} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \cdot exp \left[-\frac{n}{2(1-r^2)} \left\{ \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho r s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right\} \right] ds_1\, ds_2\, dr$$

$$0 < s_1, s_2 < \infty, \quad -1 < r > 1.$$

அதாவது,

$$dP = \frac{n^{n-1}}{2^{n-4}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{(s_1 s_2)^{n-2} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} \cdot (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$\exp\left[- \frac{n}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho r s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right\} \right]$$

$$ds_1 \cdot ds_2 \cdot dr$$

... ... (14)

இந்த முறையை ‘சாக்கின்ஸ் முறை’ (Sawkin's Method) என வழங்குகிறோம். இதே போல ‘குல்பேக்’ (Kullback) கின் முறையின் மூலமோ, விஷார்ட் (Wishart) பரவலின் மூலமோ இந்த s_1, s_2, r மூன்று மாறிகளின் இணைந்த பரவலைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எளிதாக இருக்க வேண்டுமென்பதால், பின் சொல்லப் பட்ட இரு முறைகளையும் இங்கு விளக்கவில்லை.

மேலே காணும் இணைப் பரவலிலிருந்து s_1, s_2—களுக்குத் தொகுத்தால், r-ன் பரவல் கிடைக்கிறது.

(14)-ல் exponential உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\exp\left[- \frac{n}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho r s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right\} \right]$$

$= \exp\left[-(\alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2)\right]$ எனக் கொள்ளவும்

... ... (15)

[இங்கு $\alpha = \dfrac{n}{2\sigma_1^2(1-P^2)}$

$$\beta = \frac{-nrP}{2\sigma_1\sigma_2(1-P^2)}$$

$$\gamma = \frac{n}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\ .\ ]$$

$$(15) \quad = e^{-\alpha s_1^2} \cdot e^{-2\beta s_1 s_2} \cdot e^{\gamma s_2^2}$$

$$= e^{-\alpha s_1^2}\, e^{-\gamma s_2^2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2\beta s_1 s_2)^v}{v!}$$

r மாறியின் பரவல்

$$dP = c_1 \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (s_1 s_2)^{n-2} \cdot e^{\frac{n}{2(1-P^2)}} \right]$$

$$\left[\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2Pr s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right] ds_1\, ds_2 \times dr \ \ldots \ (16)$$

இப்போது,

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (s_1 s_2)^{n-2}\, e^{-(\alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2)}$$

$ds_1\, ds_2$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$I = \sum_{v=0}^{\infty} \int_0^{\infty} s_1^{n-2+v} \cdot e^{-\alpha s_1^2}\, d s_1$$

$$\int_0^{\infty} s_2^{n-2+v} \cdot e^{-\gamma s_2^2}\, d s_2 \left[\frac{(-2\beta)^v}{v!}\ \right] -$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha s_1^2} (s_1^2)^{\frac{n-2+v}{2}} \frac{d(s_1^2)}{2 s_1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha X} \cdot X^{\frac{n-1+v}{2}-1} dX$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1+v}{2}\right)}{\alpha^{\frac{n-1+v}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1+v}{2}\right)}{\left[\frac{n}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right]^{\frac{n-1+v}{2}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

இதேபோல

$$\int_0^{\infty} s_2^{\,n-2+v} e^{-r s_2^2} ds_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1+v}{2}\right)}{\left[\frac{n}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right]^{\frac{n-1+v}{2}}} \qquad \ldots\ldots (18)$$

மேலும் (15)–ல் காணப்படும் C_1-ன் மதிப்பு (14)-ல் உள்ள நிலை எண்களாகும்.

இங்கு,

$\Gamma(x)\ \Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(2x) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2x-1}}$ என்ற (Duplication Formula) டூப்ளிகேஷன் சூத்திரத்தை உபயோகிக்கிறோம்.

$x = \frac{n-2}{2}$; $2x = n-2$

$x + \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$; $2x-1 = n-3$

$$\therefore\ \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n-2)}{2^{n-3}} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n-2)}{2^{n-3}} \qquad \ldots\ldots (19)$$

$$2^{n-3} \cdot \sqrt{\pi} \; \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) = \pi \; \Gamma(n-2).$$ ஆகிறது

எனவே r-மாறியின் பரவல்

$$d\rho = \frac{n^{n-1} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-3} \cdot \sqrt{\pi} \; \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

$$\Sigma \left[\frac{(n\, r\, P)}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1-\rho^2)}} \right]^{\nu} \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot$$

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1+\nu}{2}\right) \quad dr}{\left[\frac{n}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right] \cdot \left[\frac{n}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right]^{\frac{n-1+\nu}{2}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$= \frac{n^{n-1} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} \cdot (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}} \pi \; \Gamma(n-2)} \cdot$$

$$\Sigma \frac{n^{\nu}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{\nu} (1-\rho^2)^{\nu}} \frac{(rP)^{\nu}}{\nu!} \cdot$$

$$\times \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{n-1+\nu} \cdot (\sigma_1\sigma_2)^{n-1+\nu} \cdot (1-P^2)^{n-1+\nu}}{n^{n-1+\nu}} \Gamma\left(\frac{n-1+\nu}{2}\right) . dr$$

$$= \frac{2^{n-3} \cdot (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi \cdot \Gamma(n-2)} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma^2\left(\frac{n-1+\nu}{2}\right) \cdot \frac{(2\, Pr)^{\nu}}{\nu!} dr \ldots (21)$$

$$-1 < r < 1$$

இதுவே r-மாறியின் பரவலாகும்.

Case (ii) $P = 0$ ஆகும்போது, இது ஒரு $(n-2)$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய ஸ்டூடண்டின் t பரவலைச் சாடுகிறது.

$$dP = \frac{2^{n-3}}{\pi\,\Gamma(n-2)}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)dr \quad \ldots \quad (22)$$

(19)-ன் மூலம் $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-2)}{2^{n-3}} = \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)$

$$\frac{\pi\,\Gamma(n-2)}{2^{n-3}} = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).\ \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

எனவே,

$$dP = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)dr$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\ \frac{n-2}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\ dt \quad \ldots \ \ldots \quad (23)$$

$t = \dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$ என்று கொண்டால் (23) எப்படி அமைகிறது எனப் பார்ப்போம்.

$$\frac{t^2}{n-2} = \frac{r^2}{1-r^2}$$

$n - 2 = v$ என்றால், $\dfrac{t^2}{v} = \dfrac{r^2}{1-r^2} \rightarrow tv\ df.$

எனவே, இதன் பரவல்,

$$dP = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} \frac{\left(\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\left(1+\frac{t^2}{v}\right)\frac{v+1}{2}} d\left(\frac{t^2}{v}\right)$$

$$1+\frac{t^2}{v} = 1 + \frac{r^2}{1-r^2} = \frac{1}{(1-r^2)}$$

$$\frac{2t \cdot dt}{v} = \frac{(1-r^2)\ (2r) - r^2(-2r)}{(1-r^2)^2} = \frac{1}{(1-r_2)^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{t^2}{v}\right)}{dr} = \frac{1}{(1-r^2)^2}$$

$$\therefore dP = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \frac{\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)}{\left(1+\frac{r^2}{1-r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$dP = \frac{\left[\frac{(1-r^2)}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2r}{(1-r^2)^2} \cdot dr}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \qquad 0 < r < 1$$

$$= \frac{(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}-2}\, dr}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right)} \qquad -1 < r < 1$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\, dr \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (23)$$

$$-1 < r < 1$$

எனவே $P = 0$ எனும்போதும் $\rho \neq 0$ எனும்போதும் மாதிரியில் உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பரவலை முறையே (21), (23) மூலமாகக் காணலாம்.

11. 10. $P \neq 0$ எனும்போது மாதிரித் தொடர்புப் போக்குக் கெழு $b_2 = \frac{r s_2}{s_1}$ —ன் பரவல் (Distribution of Sample Regression Coefficient when $\beta_2 \neq 0$)

x-ன் மீது y-ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு $= b_2 \frac{r s_2}{s_1}$ ஆகும். முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு $P \neq 0$ என்றால், அதாவது தொடர்புப் போக்குக் கெழு $\beta_2 \neq 0$ என்றால், $\beta_1 = P \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; $\beta_2 = P \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ என இருக்கட்டும்.

இதேபோல மாதிரிக்கு $b_1 = \frac{r s_1}{s_1}$; $b_2 = \frac{r s_2}{s_1}$. b_2-ன் பரவலைக்காண $r, s_1 s_2$-ன் இணைந்த பரவலை எடுத்துக்கொள்கின்றோம்.

r, s_1, s_2-ன் இணைப்பரவல்

$$dP = \frac{n^{n-1}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} \cdot (1 - P^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi \, \Gamma(n-2)}$$

$$(s_1 \; s_2)^{n-2} (1 - r^2)^{\frac{n-4}{2}} .$$

$$\times \exp \left[- \frac{n}{2(1 - P^2)} \left\{ \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2 P r s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} \right\} \right] .$$

$$dr \cdot ds_1 \cdot ds_2$$

$b_2 = \frac{r s_2}{s_1}$; $s_1 = s_1$; $s_2 = s_2$ என்றால்

$$r = \frac{b_2 s_1}{s_2} .$$

$$\left|\frac{\partial (r, s_1, s_2)}{\partial (b_2, s_1, s_2)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{s_1}{s_2} & \frac{b_2}{s_2} & -\frac{b_2 s_1}{s_2^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_1}{s_2}.$$

$$dr \,.\, ds_1 \,.\, ds_2 = \frac{s_1}{s_2} \,.\, db_2 \,.\, ds_1 \,.\, ds_2.$$

இங்கு $b_2 \to (-\infty, \infty)$, $-1 < r < 1$.

$$0 < s_1 < \infty$$

$$s_1 \, |b_2| < s_2 < \infty.$$

b_2, s_1, s_2-ன் இணைப்பரவல்

$$dP = \frac{n^{n-1}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-2} \cdot (1-P^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi \cdot \Gamma(n-2)}$$

$$(s_1 s_2)^{n-2} \cdot \left[1 - \frac{b_2^2 s_1^2}{s_2^2}\right]^{\frac{n-4}{2}} \cdot \frac{s_1}{s_2} \cdot$$

$$exp\left[-\frac{n}{2(1-P^2)}\left\{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2 P b_2 s_1^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$ds_1 \cdot ds_2 \cdot db_2.$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} \cdot (1-P^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi \;\; \Gamma(n-2)} \cdot$$

$$s_1^{n-1} \cdot s_2 \, (s_2^2 - b_2^2 s_1^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{n}{2(1-P^2)}\left\{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{2 P b_2 S_1^2}{\sigma_1 \sigma_2}+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$d b_2 . ds_1 ds_2 .$$

$$| r | \leq 1$$

$$\left|\frac{b_2 s_1}{s_2}\right| \leq 1 \quad , \quad | b_2 | s_1 \leq s_2$$

எனவே s_2-ன் வீச்சு $[s_1 \mid b_2 \mid, \infty)$ ஆகும்.

s_2 மாறிகளைக் கொண்ட சார்பைத் தொகுத்தால்,

$$I = e^{-\left(\frac{n}{2(-P^2)} \cdot \frac{b_2^2 s_1^2}{\sigma_2^2}\right)} \int_{s_1 |b|}^{\infty} s_2 \cdot e^{-\frac{n}{2(1-P^2)}}$$

$$\left[\frac{s_2^2 - b_2^2 s_1^2}{\sigma_2^2}\right] \times (s_2^2 - b_2^2 s_1^2)^{\frac{n-4}{2}} . ds_2$$

$$I = e^{-\frac{n}{2(1-P^2)} \cdot \frac{b_2^2 s_1^2}{\sigma_2^2}} . \tfrac{1}{2} . \int_0^{\infty} e^{-\frac{nu}{2\sigma_2^2(1-P^2)}} . u^{\frac{n-2}{2}-1} du$$

$$[\because s_2^2 - b_2^2 s_1^2 = u \to (0, \infty)$$
$$d(s_2^2) = 2s_2 ds_2 = du]$$

$$= e^{-\frac{n}{2(1-P^2)} \cdot \frac{b_2^2 s_1^2}{\sigma_2^2}} . \tfrac{1}{2} . \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left[\frac{n}{2\sigma_2^2(1-P^2)}\right]^{\frac{n-2}{2}}}.$$

$$= c_1 . e^{-\frac{nb_2^2 s_1^2}{2\sigma_2^2(1-P^2)}};$$ இங்கு c_1 ஒரு நிலை எண் ஆகும். எனவே b_2, s_1 இரண்டின் இணைந்த பரவல்,

$$dP = c_2 \cdot s_1^{\,n-1} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2(1-P^2)}\left\{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2Pb_2s_1^2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{b_2^2\, s_1^2}{\sigma_1^2}\right\}\right] db_2 \cdot ds_1$$

$$= c_2 \cdot s_1^{\,n-1} \exp\left[-\frac{n}{2(1-P^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{2P\, b_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{b_2^2}{b_2^2}\right) s_1^2\right] ds_1 \cdot db_2.$$

s_1ஐ $(0,\infty)$ வீச்சில் தொகுத்தால், b_2-ன் பரவல் கிடைக்கும்

$$dP = c_2 \cdot db_2 \cdot \int_0^{\infty} s_1^{\,n-1}\, e^{-\alpha s_1^2}\, ds_1$$

$$\left[\text{இங்கு } \alpha = \frac{n}{2(1-P^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{2Pb_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{b_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

$$= c_2 \cdot db_2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (s_1^2)^{\frac{n-2}{2}} \cdot e^{-\alpha s_1^2}\, d(s_1^2)$$

$$= c_2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\, db_2$$

$$= c_3 \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\ \frac{2Pb_2}{\sigma_1\ \sigma_2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right]^{n/2}} \cdot db_2$$

$$= c_4 \cdot \frac{db_2}{\left[b_2^2 - 2P \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot b_2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right]^{n/2}}$$

$$dP = c_4 \cdot \frac{d\,b_2}{\left[\left(b_2^2 - 2P \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot b_2 + \frac{P^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) - \frac{P^2\,\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right]^{n/2}}$$

$\beta_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ எனச் சமனிட்டால்,

$$= c_4 \cdot \frac{d\, b^2}{\left[\left(b_2 - \beta_2\right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} (1 - \rho^2) \right]^{n/2}},$$

$$-\infty < b_2 < \infty$$

$$= f(b_2)\, d\, b_2$$

c_4-ன் மதிப்பை $f(b_2)$ ஓர் ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன் ஆனதால் b_2-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொகுத்து கணிக்கலாம்.

2 r படித்தான திருப்புத்திறன்

$$\mu_{2r} = c_4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_2 - \beta_2)^{2r}\, d\, b_2}{\left[(b_2 - \beta_2)^2 + \lambda^2\right]^{n/2}},$$

$$\lambda^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot (1 - \rho^2)$$

$$= 2 c_4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{b^{2r}}{(d^2 + \lambda^2)^{n/2}}\, d\, b \quad , \quad b = (b_2 - \beta_2) \text{ என்க.}$$

$\frac{b^2}{\lambda^2} = u$ என்றால் $b^2 = \lambda^2 \cdot u$

$$2\, b \cdot d\, b = \lambda^2 \cdot du$$

$$d\, b = \frac{\lambda^2 \cdot du}{2\, \lambda \cdot \sqrt{u}}$$

எனவே,

$$\mu_{2r} = 2 c_4 \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^2 u)^r}{\lambda\, n \cdot (1 - u)^{n/2}} \quad \frac{\lambda^2}{2\, \lambda \cdot \sqrt{u}}\, d\, u$$

$$= 2 \cdot c_4 \cdot \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{2r+1-n}{2}} \cdot \frac{u^{r-\frac{1}{2}}}{(1+u)^{\frac{n}{2}}}\, du.$$

$$= c_4 \cdot \lambda^{2r+1-n} \cdot \beta\left(r+\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2} - r\right)$$

$r = 0;\quad \mu_0 = 1 =$ மொத்த ஊக அளவு

$$= c_4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\, b_2}{\left[(b_2 - \beta_1)^2 + \lambda^2\right]^{n/2}}$$

எனவே $1 = c_4 \cdot \lambda^{1-n} \cdot \beta\left(\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$

$$c_4 = \frac{\lambda^{n-1}}{\beta\left(\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{n-1} \cdot (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\beta\left(\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)}$$

எனவே b_2ன் பரவல்

$$d\,P = c_4 \cdot \frac{db_2}{[(b_2 - \beta_2)^2 + \lambda^2]^{n/2}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1-P^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \cdot$$

$$\frac{d\,b_2}{\left[(b_2 - \beta_1)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1-P^2)\right]^{n/2}}$$

$$\therefore\ \mu_{2r} - C \cdot \lambda^{2r+1-n} \cdot \beta\left(r+\tfrac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) - r$$

$$r = 1,\ \mu_2 = C \cdot \lambda^{3-n} \cdot \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda^{n-1}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \cdot \lambda^{3-n} \cdot \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^2}{n-3} \cdot = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\,\frac{(1-P^2)}{n-3}.$$

எனவே b_2 ன் மாறுபாடு $\mu_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{(1-P^2)}{(n-3)}$.

$P = 0$ எனில்

$$dP = C_4 \cdot \frac{d\,b_2}{\left(b_2^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$P = 0$ எனில் $\beta_2 = 0$.

$$= \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{d\,b_2}{\left(b_2^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2}}$$

$$-\infty < b_2 < \infty$$

இங்கு b_2-ன் மாறுபாடு $= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{n-3}$ ஆகும்.

12. சிறு மாதிரிகளின் சோதனைகள்

(Small Sample Tests)

12-1. ஸ்டூடன்டின் t பரவலை ஒட்டிய சோதனைகள்

இங்குப் பொதுவாக $n < 30$ எனக் கொள்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2 தரப்படாவிடில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கும் அதிலிருந்து எடுக்கப்படும் (சிறு) மாதிரியின் சராசரிக்கும் இடையே காணப்படுகிற வேறுபாடு பொருளுடையதாக இருகிறதா என்று சோதித்து அறிய

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$ என்ற சோதனைப் பண்பளவை எடுத்துக்

கொள்வோம்.

இங்கு $\bar{x}$, μ முறையே மாதிரி, முழுமைத் தொகுதிச் சராசரிகள்,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$ = முழுமைத் தொகுதி σ^2

மாறுபாடு தரப்படாத போது, அதன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு.

n = (சிறு) மாதிரியின் பருமன்.

H_0: மாதிரிச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கும் இடையே காணப்படும் வேறுபாடு பொருளுடையது இல்லை எனக் கொள்கிறோம். அதாவது இந்த மாதிரியானது, கொடுக்

கப்பட்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியாகும் எனக் கொள்வோம். அப்படி இருப்பின், இரண்டு சராசரிகளுக்கு மிடையே வேறுபாடுகள் இருக்காது என்பதாகும்.

இச் சூனிய எடுகோளுடன் மேற்படி சோதனைப் பண்பளவைக் கணக்கிடுவோம்.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$ மாறி $(n-1)$ இயக்கப்பாகை கொண்ட

ஒரு ஸ்டூடன்டின் t பரவலைச் சாந்திருப்பதால், கொடுக்கப் பட்ட விவரங்களுக்கான t_0 மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அந்த மதிப்பையும், $(n-1)$ இயக்கப்பாகைகளுக்கு 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் t-ன் அட்டவணை மதிப்பு t_e ஐயும் ஒப்பிட்டுப்பார்க்க வேண்டும்.

$t_o \geq t_e$ என்றால் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$t_o < t_e$ என்றால் H_0 நிராகரிக்கபடவில்லை.

(அதாவது H_0 ஐ 5% மட்டத்தில் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.)

இங்கு t_e (0.05) = 5% மட்டத்தில் $(n-1)$ இ. பாகைக்கான t-ன் அட்டவணை மதிப்பு.

t_e (0.01) = 1% மட்டத்தில் $(n-1)$ இ.பாகைக் கான t-ன் அட்டவணை மதிப்பு.

(ii) σ^2 தரப்படாத ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகளின் வேறுபாடு பொருளுடையதாக உள்ளதா என்று இப்போது சோதிப்போம். சோதனைக்கான பண்பளவு

$$|t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\text{இங்கு } S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$= \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

இங்கு

முழுமைத் தொகுதி ($P\sigma^2$) (σ^2 தரப்படாதது)

மாதிரிகள் S_1 (சார்பற்றவை) S_2

பருமன்	n_1	n_2
சராசரி	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
மாதிரி மாறுபாடு	s_1^2	s_2^2
மாதிரியின் பிறழ்ச்சியற்ற σ^2-ன் மதிப்பீடு.	S_1^2	S_2^2.

முதல் மாதிரியின் மாறுபாட்டிலிருந்து முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடு σ^2-க்கான ஒரு மதிப்பீடு

$$n_1 s_1 = (n_1 - 1) \sigma^2 \text{ ஆகிறது.}$$

இதேபோல 2ஆவது மாதிரிக்கு $n_2 S_2^2 = (n_2 - 1) \sigma_2$

இரண்டு மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளைக் கொண்டு σ^2-ன் மதிப்பீடு அறியப்படுகிறது.

$$\sigma^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$= \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_.)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x}_2)$$

$(\bar{x}_1-x_2)$-ன் தரப்பிழைக்கான மதிப்பில் σ^2-க்குப்பதிலாக S^2 ஐ உபயோகிக்கிறோம். எப்படி என்றால்

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

$$= \frac{(n_1-1)\,S_1^2+(n_2-1)\,S_2^2}{(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{n_1+n^2}{n_1.n_2}\;.$$

$$= S^2.\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

எனவே $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$-க்கான தரப்பிழை $= S\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

$$t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow t_{n_1+n_2-2} \quad \text{என்பதால்}$$

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளின் மதிப்புகளிலிருந்து t மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து, (n_1+n_2-2) இயக்கப்பாகைக்கு 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் t-ன் அட்டவணையின் மதிப்பையும் பார்த்து இரண்டையும் ஒப்பிடவேண்டும்.

கண்டறிந்த $t \geq$ அட்டவணை t என்றால் Ho தள்ளிவிடப்படுகிறது.

$t_{க} < t_{அ}$ என்றால், Ho நிராகரிக்கபடவில்லை.

(iii) இரு மாதிரிகளின் அளவும் ஒரே அளவாக இருந்தால், அதாவது $n_1 = n_2 = n$ என்றிருந்தால், (2)ஆவது சோதனையை விட கீழ்க்கண்ட சோதனை பயனுள்ளதாக இருக்கும். இரு மாதிரிகளின் n மதிப்புகளை ஒன்றுக்கு நேராக மற்

ருென்று என எழுதி, இரண்டுக்கு வேறுபாட்டை d எனக்குறித்தால்,

$$t = \frac{\bar{d}-0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow t_{n-1} \text{ இ.பா}$$

இங்கு $S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma (d_i-\bar{d})^2$ ஆகிறது.

இச் சோதனை இரு மாதிரிகளுக்கான சோதனையானாலும், ஒரு மாதிரிக்கான சோதனைபோலவே, சோதனைப் பண்பளவைக் கண்டு பிடிக்கப்படுவதால், அதிக சிரமம் இல்லாமல் போய் விடுகிறது.

(iv) ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் உடன் தொடர்புக்கெழு r ஐச் சோதனையிடல்:

மாதிரியின் பருமன் n (சிறியது) ஆக இருக்கட்டும். இதற்கான சோதனைப் பண்பளவு

$$t = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)}}\sqrt{(n-2)} \rightarrow t_{n-2} \text{ இ.பா.}$$

இங்கு Ho: முழுமைத் தொகுதியில் பூச்சியம் உடன் தொடர்புக் கெழு $P = 0$ என்று கொள்கிருேம்.

அதாவது மாதிரியில் உடன் தொடர்புக் கெழு பூச்சியமில்லாவிட்டால், அது ராண்டம் மாதிரியின் ஏற்றத்தாழ்வினுல ஏற்பட்டிருக்கலாம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

இந்த சூனிய எடுகோளுடன் மேற்படி t மதிப்பைக் கண்டறிந்து 5% (1%) மட்டத்தில $(n-2)$ இ. பாகைக்கான t அட்டவணை மதிப்பையும் பார்த்து இரண்டையும் ஒப்பிடுகிருேம்.

$t_{க} \geq t_{அ}$ என்ருல், Hoஐ நிராகரிக்கிருேம். அதாவது முழுமைத் தொகுதியில் ஏதாவது உடன் தொடர்பு இருக்கிறது என்று முடிவு கட்டுகிருேம். அப்படி ஏதும் இல்லையானுல், இந்த மாதிரி, அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதில்லை என்று அறிகிருேம்.

12-2. ஃபிஷரின் Z-உருவமாற்றம்

முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக்கெழு P சிறியதாக இல்லாவிடில், n பெரிய எண் ஆனல், ஃபிஷர் ஒரு z-உருவமாற்றத்தின் மூலம் இயல்நிலைப் பரவல் தன்மையை இங்கு உபயோகப்படுத்துகின்றார்.

$z = \frac{1}{2} \cdot \log_e \left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ என்பது உருவமாற்றம்.

எனவே, $\xi = \frac{1}{2} \cdot \log e \left(\frac{1+P}{1-P}\right) = E(z)$

$$\text{Var}(z) = z\text{-ன் மாறுபாடு} = \frac{1}{n-3}$$

Ho: முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பு ρ என்பதே சூனிய எடுகோள்.

ஒரு விரிந்த மாதிரிக்கு,

$$t = \frac{z - \xi}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}} \to N(0, 1); \quad (n \to \infty \text{ என்றால்})$$

$t > 1{\cdot}96$ என்றால், *Ho* நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எனவே, முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பு காணப்படுகிறது. அல்லது இம்மாதிரியானது, P உடன் தொடர்புடன் கூடிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதல்ல என்று முடிக்கிறோம்.

n_1, n_2 பருமனுடைய இரு விரிந்த சாண்டம் மாதிரிகள் முறையே r_1, r_2 உடன் தொடர்புக் கெழுவுடன், ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தாலோ அல்லது ஒரே முழுமைத் தொகுதி உடன் தொடர்பு கொண்ட இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருந்தாலோ,

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot \log_e \left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)$$

$$V(z_1 - z_2)\text{-ன் மாறுபாடு} = V(z_1 - z_2)$$
$$= V(z_1) + V(z_2) - \text{Cor}(z_1, z_2)$$
$$= V(z_1) + V(z_2);$$ ஏனெனில், z_1, z_2 சார்பற்றவை.

$$V(z_1) = \frac{1}{n_1 - 3}$$

$$V(z_2) = \frac{1}{n_2 - 3}$$

எனவே, $V(z_1 - z_2) = \frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}$

அதனால் $(z_1 - z_2)$-ன் தரப்பிழை $= \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}$

ஆகிறது.

H_0 : இரு மாதிரிகளும் கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\left[\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}\right]^{\frac{1}{2}}} \rightarrow N(0, 1)$$

$|t| > 1{\cdot}96$ என்றால், H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

தொடர்புப் போக்குக் கெழுவிற்கான t சோதனை

X-ன் மீது Y-ன் முழுமைத் தொகுதி தொடர்புப் போக்குக் கெழு β ஆகக்கொண்ட ஓர் இரு மாறி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots n$, என்றும், மாதிரியில் காணப்படும் X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு b எனக்கொள்வோம். b, β இரு மதிப்புகளின் வேறுபாடு பொருளுடையதாக உள்ளதா எனச் சோதித்து அறிய H_0 : வேறுபாடுகள் பொருளுடையதில்லை எனக்கொள்க. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்கு X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$$

x மாறியில் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட x_i மதிப்புக்கான y_i-ன் மதிப்பீட்டை

$Y_i = \bar{y} + b(x - \bar{x})$ என எழுதலாம்.

$$\text{எனவே } t = (b - \beta) \left[\frac{(n-2)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2} \right] \rightarrow t_{n-2} \text{ இ. பா.}$$

ஆகிறது. இந்த t-ன் மதிப்பைக் கண்டறிந்து பிறகு 5% (1%) மட்டத்தில் $(n-2)$ இ. பாகையுடன் கூடிய அட்டவணை t-ன் மதிப்புடன் ஒப்பிட்டால், தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களின் வேறுபாடு பொருளுடையதா என்று அறியலாம்.

$t_{க} > t_{அ}$ என்றால் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது. b, β இரண்டின் வேறுபாடு இங்கு பொருளுடையதாக இருக்கும்.

12-8. நம்பக எல்லைகள்

(i) n சிறியதாக இருக்கும்போது, முழுமைத் தொகுதிச்சராசரியின் 95% நம்பக எல்லையைக் கணிக்கலாம்.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow t_{(n-2)} \text{ இ. பா. என்று நாம் அறிவோம்.}$$

95% நம்பக எல்லைக்கான நிகழ்தகவு :

$$p_r \left[\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| < t_{0\cdot05} \right] = 0\cdot05$$

$$p_r \left[|\bar{x} - \mu| < t_{0\cdot05} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = 0\cdot95$$

இப்போது $|\bar{x} - \mu| < t_{0\cdot05} \frac{S}{\sqrt{n}}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} - \mu < t_{0\cdot05} \frac{S}{\sqrt{n}} \\ \text{அத்துடன்} -(\bar{x} - \mu) < t_{0\cdot05} \frac{S}{\sqrt{n}} \end{array}\right\}$$

அதாவது $\bar{x}-t_{0\cdot05}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu$

மேலும், $\mu<\bar{x}+t_{0\cdot05}\frac{S}{\sqrt{n}}$.

இரண்டையும் சேர்த்து எழுதினுல்,

$$\bar{x}-t_{0\cdot05}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{0\cdot05}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

எனவே,

$$P_r\left[\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot05}<\mu<\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot05}\right]=0\cdot95 \text{ ஆகிறது}.$$

$\therefore$ μ-ன் 95% நம்பக எல்லை $\left(\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot05}\right)$

இதைப்போல μ-ன் 99% நம்பக எல்லை $\left(\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot01}\right)$ ஆகும்.

95% நம்பக எல்லையைக் கண்டுபிடிக்க S ஐ

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும் மேலும் $t_{0\cdot05}$ மதிப்பை $(n-1)$ இயக்கப்பாகைக்கு t அட்டவணை மூலம் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். பிறகு $\left[\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot05}\right]$ ஐக் கணக்கிடலாம்.

இதேபோல 99% நம்பக எல்லை $\left(\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0\cdot01}\right)$ யைக் கணக்கிடலாம்.

(ii) முழுமைத்தொகுதிகளின் சராசரிகளின் வேறுபாட்டுக்கான 95% நம்பக எல்லை

இரு மாதிரிகளின் சராசரிகள் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, பருமன்கள் n_1, n_2 எனவும் இருந்தால்

$$S^2 = \frac{(n_1-1)\, S_1^2 + (n_2-1)\, S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$$

$$= \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i}-\bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j}-\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2-2)}$$

முதல் மாதிரியின் உறுப்புகள் $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots x_{1n_1}$

இரண்டாம் ,, ,, $x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots x_{2n_2}$ என்றால் S^2-ன் மதிப்பு அறியமுடியும்.

மேலும் முழுமைத் தொகுதிச் சராசரிகள் μ_1, μ_2 என்றால்

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow t_{(n_1+n_2-2)}$$ இ. பா. கொண்ட

ஒரு t-பரவல் என நாம் அறிவோம்.

$(\mu_1-\mu_2)$-ன் 95% நம்பக எல்லைக்கான ஊக அளவு :

$Pr\,[\,|\,t\,|\, < t_{0\cdot 05}] = 0\cdot 95$

(இங்கு $t_{0\cdot 05}$ = 5% மட்டத்தில் (n_1+n_2-2) இயக்கப்பாகைக் கான t-ன் அட்டவணை மதிப்பு)

$$Pr\left[\frac{|\,(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)\,|}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} < t_{0\cdot 05}\right] = 0\cdot 95$$

ஆகவே 95% நம்பக எல்லையை

$$|\,(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)\,| < t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

மூலமாகக் கண்டு பிடிக்கிறோம்.

அதாவது $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2) < t_{0\cdot 05} . S \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ ... (1)

மேலும் $-[\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)] < t_{0\cdot 05} \cdot S \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ ... (2)

அதாவது

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} < (\mu_1-\mu_2)$$

மேலும் $(\mu_1-\mu_2) < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

இரண்டையும் சேர்த்து எழுதினால்

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} < (\mu_1-\mu_2) < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

அதாவது $(\mu_1-\mu_2)$-ன் 95% நம்பக எல்லை,

$$\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) + t_{0\cdot 05}\, S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$ ஆகும்.

இதேபோல 99% நம்பக எல்லை

$$\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{0\cdot 01}\, S\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$ ஆகும்.

இங்கு $t_{0\cdot 01}$ = 1% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் (n_1+n_2-2) இயக்கப்பாகைக்கான t-ன் அட்டவணையின் மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 10 குழந்தைகளின் (I.Q.) நுண்ணறிவுக்கான ஈவு (Intelligent quotient)

100, 107, 101, 110, 70 120, 88, 83, 95, 98 என்றால் I.Q. 100 சராசரியாகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியே இந்த மாதிரி என்று கூற இயலுமா? சோதித்து உணர்க.

$H_0: \mu = 100$ என்க.

அதாவது $(x-\mu)$ வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை சோதனைப் பண்பளவு

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow t_{n-2} \text{ இ.பா.}$$

இங்கு $\bar{x}$, S^2 மதிப்புகள் கணிக்கப்படவேண்டும்.

$A = 100$ எனக் கொள்வோம்.

$x-A=X$ மதிப்புகளைக் கொண்டு $\bar{x}$, S^2 ஐக் கணக்கிடலாம்.

x	$x-A=X$	X^2
100	0	0
107	7	49
101	1	1
110	10	100
70	−30	900
120	20	400
88	−12	144
83	−17	289
95	−5	25
98	−2	4
972	−28	1912

$$\bar{x} = A + \frac{\sum X_i}{n} = 100 - \frac{28}{10} = \underline{97.2.}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} [\sum X_i^2 - n\bar{X}^2]$$

$$= \frac{1912-78.4}{9} = \frac{1833.6}{9} = 203.73.$$

$$\frac{S^2}{n} = 20.373. \quad \therefore \quad \frac{S}{\sqrt{n}} = 4.514$$

$Ho: \mu = 100$ என்ற சூன்ய எடுகோளின் படி

$$|t| = \frac{|\bar{x}-\mu|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{|97.2-100|}{4.514}$$

$$= \frac{2.8}{4.514} < 1.$$

ஆனால் 10–1=9 இயக்கப்பாகை கொண்ட (5%மட்டத்துக்கான) அட்டவணை t–ன் மதிப்பு 2.262

கண்டறிந்த $t = t_{க}$

அட்டவணை $t = t_{அ}$ என்றால்,

$$t_{க} < t_{அ}$$

∴ Ho நிராகரிக்கப்படவில்லை.

எனவே, 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் Ho ஐ எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

அதாவது தரப்பட்ட மாதிரி அளவுகள் $\mu = 100$ என்ற சராசரியுடன் கூடிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியாக அறிகிறோம். மேலும் μ–ன் 95% நம்பக எல்லையானது,

$$\bar{x} \pm t_{0.05} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 97.5 \pm 2.262 \times 4.514$$

$$= 9.75 \pm 10.21$$

$$= (86.99,\ 107.41)$$

இங்கு 100 என்ற மதிப்பு இந்த எல்லைக்குள் உள்ளதை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஓர் இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட 16 பருமனுள்ள ஒரு ராண்டம் மாதிரியிலிருந்து கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

$\bar{x} = 41.''$ in.

$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 135$ sq.in.

99% சதவீதத்தில் முழுமைத் தொகுதிச் சராசரி μ எந்த எல்லைக்குள் இருக்கவேண்டும்?

இங்கு $t_{0.01}$ = 1 %சிறப்புகாண் மட்டத்தில்

$n-1 = 15$ இ.பாகைக்கான t-ன் அட்ட வணை மதிப்பு

$$= 2.947$$

இங்கு $\frac{S^2}{n} = \frac{S^2}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} = \frac{135}{16.15}$

$$\therefore \frac{S^2}{n} = \frac{9}{16}. \quad \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{3}{4} = 0 \cdot 75.$$

எனவே μ-ன் 99% நம்பக எல்லை

$$\bar{x} \pm t_{0.01} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$= 41.5 \pm (2.947)(0.75)$

$= 41.5 \pm 2.21$

$= (39.29, 43.71)$

எனவே $39.29 < \mu < 43.71$.

எடுத்துக்காட்டு 3:

A உணவு கொடுக்கப்பட்ட 10 பன்றிக்குட்டிகளின் ர ண்டம் மாதிரிக்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட காலவரையில், ஏற்பட்ட எடை அதிகரிப்பு

6, 9, 8, 10, 7, 9, 8, 10, 12, 8, பவுண்டுகள் ஆகும். இதே போன்ற *B* உணவு தரப்பட்ட 8 பன்றிகளுக்கான மாதிரியில் எடை அதிகரிப்பு.

7, 10, 8, 9, 7, 8, 6, 9 பவுண்டுகள் என்றால்,

எடை அதிகரிப்பைப் பொறுத்தவரை. *A*, *B* இரு உணவு வகைகள் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபடுகின்றனவா என்று ஆராய்க.

மாதிரி 1:

$$\bar{x}_1 = 8.7$$

$$n_1 = 10$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1} x_{1i}^2 - \bar{x}_1^2 = \frac{783}{10} - (8.7)^2$$
$$= 2.61$$

மாதிரி 2-க்கான $\bar{x}_2 = 8$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{8} x_{2j}^2 - \bar{x}_2^2$$

$$= \frac{524}{8} - (8)^2 = 1.50$$

H_0 : இரு உணவு வகைகளும் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபடவில்லை.

$$\text{இதன்படி } |t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow t_{n_1+n_2-2} \text{ இ. பா.}$$

$$\text{இங்கு } s^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{26 \cdot 1 + 12}{16} = \frac{38.1}{16}$$

$$= 2.38 \text{ என்றால்}$$

$$|t| = \frac{8.7 - 8.0}{\sqrt{(2.38)\left(\frac{18}{80}\right)}}$$

$$= 0.9563 = t_{\text{க}}.$$

$(n_1 + n_2) - 2 = 16$ இயக்கப் பாகைக்கான (5% மட்டத்தில்) அட்டவணை t-ன் மதிப்பு — $t_{\text{அ}} = 2.12$

இங்கு $t_{\text{க}} < t_{\text{அ}}$ என்பதால் H_0 நிராகரிக்கப்படவில்லை.

எனவே இரு உணவு வகைகளும், (எடை அதிகரிப்பைப் பொறுத்தவரை) 5% மட்டத்தில் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபடவில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4:

எடுத்துக்காட்டு 3-ல் முதல் மாதிரியின் பருமன் 8 ஆனால், (அதாவது கடைசி இரண்டு மதிப்புகளை நீக்கி விட்டால்) இரு மாதிரிகளின் பருமனும் ஒரே சமமாக இருக்கும். இங்கு d சோதனை செய்யலாம்.

x_{i1}	x_{2i}	$d = x_{1i} - x_{2i}$	d^2
6	7	−1	1
9	10	−1	1
8	8	0	0
10	9	1	1
7	7	0	0
9	8	1	1
8	6	2	4
10	9	1	1
—	—	3	9

இங்கு $t = \dfrac{\bar{d} - 0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow t_{n-1}$. இ. பா.

$n_1 = n_2 = n = 8.$

$\bar{d} = \frac{3}{8} = 0.375.$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (d_i - \bar{d})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{8} \sum d_i^2 - (\bar{d})^2$$

$$= \frac{9}{8} - (\tfrac{3}{8})^2$$

$$= 1.125 - 0.141$$

$$= 0.984$$

$$S^2 = \frac{n s^2}{n-1} \; ; \; \frac{S^2}{n} = \frac{s^2}{n-1} = \frac{0.984}{7} = 0.1406.$$

$$\therefore \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{0\cdot1406} = 0.375$$

எனவே $t = \dfrac{\bar{d} - 0}{\left(\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{0.375}{0.375} = 1. = t_{க}$ என்க.

5% சிறப்புக்காண் மட்டத்தில் $n - 1 = 7$ இயக்கப் பாகைக்கான t-ன் அட்டவணை மதிப்பு $= t_{அ} = 2.36$.

$t_{க} < t_{அ}$ என்பதால் H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது (5% மட்டத்தில்).

எனவே, உணவு வகைகளில் வேறுபாடு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 27 ஜதை மாறிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் மாறியின் உடன் தொடர்புக் கெழு

(i) $r = 0.3$ என்றால்

(ii) $r = 0.6$ என்றால்

இந்த r மதிப்பு பொருளுடையதா எனச் சோதித்து அறிக.

(i) $r = 0.3$

H_0 : முழுமைத் தொகுதியில் பூச்சியம் உ. தொ. கெழு எனக் கொள்வோம்.

எனவே $|t| = \dfrac{|r|}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{(n-2)}\; t_{n-2}$ இ. பா.

$$t_{க} = \frac{0.3}{\sqrt{1 - .09}} \sqrt{25} = \frac{1.5}{\sqrt{0.91}} = 1.57$$

5% மட்டத்தில் 25 இ. பாகைக்கான $t_{அ} = 2{\cdot}06$

$t_{க} < t_{அ}$ என்பதால் $H_0 : P = 0$ என்ற சூனிய எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

(ii) $r = 0.6$ என்றால்

$$|t| = \frac{0.6}{\sqrt{1-0.36}}\sqrt{25} = \frac{3.0}{\sqrt{0.64}} = \frac{3.0}{0.8} = \underline{3.75.}$$

$t_{\text{க}} = 3.75 \quad t_{\text{அ}} = 2.06$

$t_{\text{க}} > t_{\text{அ}}$ என்பதால் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஓர் இரு மாறி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 18 (சோடி) இணை மாறிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கும் குறைந்த பட்ச அளவு r-ன் மதிப்பு யாது?

$n = 27$

5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $n-2 = 25$ இ. பாகைக்கான t-ன் அட்டவணை மதிப்பு $= t_{\text{அ}} = t_{0.05} = \underline{2.06}$

H_0 : $P = 0$ என்ற சூனிய எடுகோளின்படி

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2} \rightarrow t_{n-2} \text{ என்பதால்,}$$

கண்டு பிடிக்கப் பெறும் t-ன் மதிப்பு 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

$|t| > t_{0.05}$

அதாவது $\left|\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{(n-2)}\right| > t_{0.05}$

எனவே $\frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-2) > t^2_{0.05}$

$$\frac{r^2}{1-r^2} > \frac{t_{0.05}^2}{(n-2)}$$

அதாவது $\frac{r^2}{1-r^2} > \frac{(2.06)^2}{25}$

$$25\,r^2 > 4.24\,(1 - r^2)$$

$$\therefore \quad (25 + 4.24)\,r^2 > 4.24$$

$$29.24\,r^2 > 4.24$$

$$r^2 > \frac{4.24}{29.24}$$

அதாவது $r^2 > 0.145$

$$\underline{|\,r\,| > 0.381}$$

எனவே குறைந்த பட்ச $|\,r\,|$-ன் மதிப்பு = 0.381 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

28 சோடிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் உடன் தொடர்புக்கெழு 0.7 என்றால், z உருவ மாற்றத்தைப் பயன் படுத்தி இது,

(i) பூச்சியத்திலிருந்து ($\rho = 0$)

(ii) 0.5-லிருந்து ($\rho = 0.5$) பொருளுடைய விதத்தில் வேறு பட்டுள்ளதா என ஆராய்க.

(a $= 0\rho$);

எனவே $\xi = \frac{1}{2}\cdot\log_e\left(\frac{1+\rho}{1+\rho}\right) = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0.$

$r = 0.7$

$n = 28$

$$z = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1 = r}{1 - r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\log_e\left(\frac{1 + 0.7}{1 - 0.7}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\log_e\left(\frac{1.7}{0.3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \cdot 302585 \ \log_{10} \left(\frac{1 \cdot 7}{0 \cdot 3} \right)$$

$$= 1 \cdot 1513 \log_{10} (5 \cdot 5 \cdot 67)$$

$$= \underline{0 \cdot 87.}$$

$$\text{எனவே } | t | = \frac{z - \xi}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

$$= \frac{[0 \cdot 87 - 0]}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} \right)}} = 5 \, (0 \cdot 87)$$

$$= 4 \cdot 35 \, \lambda \, 2 \cdot 58 \text{ (1\% சிறப்புகாண் மட்டத்தில்)}$$

எனவே, பூச்சியம் உடன் தொடர்புக் கெழு என்ற முழுமைத் தொகுதி உடன் தொடர்பு தவறுனது.

அதாவது முழுமைத் தொகுதியில் உடன் தொடர்பு உள்ளது என்கிறோம்.

(ii) $P = 0 \cdot 5$

$z = 0 \cdot 87$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \log_e \left(\frac{1 \times 0 \cdot 5}{1 - 0 \cdot 5} \right) = 0 \cdot 55.$$

$$\text{எனவே } | t | = \frac{0 \cdot 87 - 0 \cdot 55}{\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$$= 1 \cdot 6 < 1 \cdot 96$$

∴ *Ho* நிராகரிக்கப்படவில்லை.

அதாவது $P = 0 \cdot 5$ என்ற முழுமைத் தொகுதியைச் சார்ந்தே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரம் எனத் தெரிய வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

23 சோடிகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் மாறிகள் 0·5 உடன் தொடர்புக் கெழுவுடனும், 28 சோடிகள் கொண்ட மற்றொரு மாதிரியின் மாறிகள் 0·8 உடன் தொடர்புக் கெழுவுடனும் காணப்பட்டால், இந்த இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்களும் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபட்டுள்ளனவா எனச் சோதித்து அறிக.

Ho : இரு மாதிரிகளும் இரு இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனக் கொள்ளலாம்.

$$z_1 = \tfrac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + r_1}{1 - r_1} \right)$$

$$z_2 = \tfrac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 \times r_2}{1 - r_2} \right)$$

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3} \right)}} \rightarrow N(0, 1)$$

இங்கு $n_1 = 23 \quad , \quad n_2 = 28.$

$$r_1 = 0{\cdot}5 \quad , \quad r_2 = 0{\cdot}8.$$

$$z_1 = \tfrac{1}{2} \times 2{\cdot}3027 \cdot \log_{10} \left(\frac{1{\cdot}5}{0{\cdot}5} \right)$$

$$= 0{\cdot}55.$$

$$z_2 = \tfrac{1}{2} \times 2{\cdot}3026. \log_{10} \left(\frac{1{\cdot}8}{0{\cdot}2} \right)$$

$$= 1{\cdot}10.$$

$$\therefore \mid t \mid = \frac{|0{\cdot}55 - 1{\cdot}10|}{\sqrt{\frac{1}{20} \times \frac{1}{25}}} = \frac{0\ 55}{\sqrt{\frac{45}{500}}}$$

$$= 1{\cdot}83 < 1{\cdot}96$$ (5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில்)

எனவே Ho மறுக்கப்படவில்லை.

∴ இவ்விரு மாறிகளும் ஒரே இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையாகும். அதாவது இரண்டு உடன் தொடர்புக் கெழுக்களும் பொருளுடைய வகையில் வேறுபடவில்லை என்று அறிகிறோம்.

பயிற்சி I

(1) 11 எலிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் அவற்றின் ரத்தத்தின் பசைத்தன்மை (Viscosity of blood) யின் சராசரி 3·92, திட்டவிலக்கம் 0·61 என்றால், இந்த மாதிரியைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ-க்கான 95% நம்பக எல்லையைக் கணக்கிடுக.

(2) 12 வியாதியஸ்தர்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்து கொடுக்கப்பட்டதில் ஏற்பட்ட ரத்தக் கொதிப்பு அதிகரிப்பின் விவரம் :

$$5, 2, 8, -1, 3, 0, 6, -2, 1, 5, 0, 4.$$

என்றால் அம் மருந்து சாப்பிட்டால் பொதுவாக ரத்தக் கொதிப்பு அதிகரிக்கும் என்று கூற முடியுமா? சோதனை செய்து கண்டறிக.

(3) 9, 7 பருமனுள்ள இரண்டு ராண்டம் மாதிரிகளின் சராசரி, மற்ற மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

	மாதிரி 1	மாதிரி 2.
1. பருமன் n :	9	7
2. சராசரி $\bar{x}$:	196·40	198·82
3. $\sum (x_i - \bar{x})^2$:	26·94	18·73

இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையா என ஆராய்க.

(4) A, B என்ற இரு மருந்துகளை 10 வியாதியஸ்தர்களுக்குத் தரப்பட்டபின் அவர்கள் அதிகமாகத் தூங்கிய மணிநேரம் அடுத்த பக்கத்தில் உள்ள அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அதிகமாகத் தூங்கிய மணி நேரங்கள்

வியாதியஸ்தர்	*A* மருந்து	*B* மருந்து
1	0·7	1·9
2	— 1·6	0·8
3	— 0·2	1·1
4	— 1·2	0·1
5	— 0·1	— 0·1
6	3·4	4·4
7	3·7	5·5
8	0·8	1·6
9	0·0	4 6
10	2·0	3·6

மருந்துகளின் சக்திகளுக்கிடையே வேறுபாடு பொருளுடையதாக உள்ளதா? சோதி.

(5) ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாலுமிகளின் உயரங்கள்

63, 65, 68, 69, 71, 72, அங்குலங்கள். மற்ஹெருரு ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 10 சிப்பாய்களின் உயரங்கள் 61, 62, 65, 66, 69, 69, 70, 71, 72, 73, என்ருல் இந்த விவரங்களிலிருந்து சிப்பாய்கள் பொதுவாக மாலுமிகளை விட உயரமானவர்கள் என்ற கூற்றை ஆய்க.

(6) ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் 18 இணைமாறிகளின் உடன் தொடர்புக்கெழு $r=0.72$ என்ருல், இந்த மாதிரியைப் பூச்சியம் உடன் தொடர்புக் கெழுக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்ள முடியுமா?

(7) மேற்படி மாதிரியை 0·5 உடன் தொடர்புக் கெழுக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாக எண்ணுவதற்கு வழி உண்டா? விவரிக்கவும்.

(8) ஒரு மாதிரியில் 39 சோடி மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0.69 என்றால், 0.8 உடன் தொடர்புக் கெழுக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிதான் அதுவா என விளக்குக. இங்கு P-க்கான 95% நம்பக எல்லையைக் கணக்கிடுக.

(9) ஒரு மாதிரியில் 28 இணை மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·8 என்றும், மற்றொரு 39 இணை மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0.7 என்றும் இருந்தால், இவ்விரு உடன் தொடர்புகள், பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபட்டு இருக்கின்றனவா? ஆராய்க.

12-4. χ^2—சோதனை (கை வர்க்கச் சோதனை)

χ^2—பரவல் புள்ளியியலில் நிறைய இடங்களில் பயன்படுகிறது.

(1) முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் தற்கோள் மதிப்பு $\sigma = \sigma_0^2$ என்பதைச் சோதிப்பதற்கும்,

(2) பொருத்தச் செம்மையை (Goodness of fit)ச் சோதிக்கவும்,

(3) குணப்பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையைச் சோதித்து அறியவும், χ^2 மாறி மிகவும் பயன்படுகிறது.

(4) மேலும், முழுமை மாறுபாடுகளின் சார்பற்ற மதிப்பீடுகளின் சமபடித்தான தன்மையை (Homogeneity)ச் சோதிப்பதற்கும்,

(5) முழுமை உடன் தொடர்புக் கெழுவின் சார்பற்ற மதிப்பீடுகளின் சமபடித்தான தன்மையைச் சோதித்து அறிவதற்கும் χ^2—மாறி பெரும்பாலும் பயன்படுகிறது.

இனி எவ்வாறு இந்த 5 வகைகளிலும் χ^2—மாறி பயன்படுகிறது என்பதைக் கீழே விளக்குவோம்.

(1) முழுமை மாறுபாட்டிற்கான χ^2— சோதனை

முழுமை மாறுபாடு $\sigma^2 = \sigma_0^2$ என்ற H_0: சூனிய எடுகோளை எடுத்துக் கொள்வோம். இதிலிருந்து, எடுக்கப்பட்ட மாதிரி மாறிகளுக்கான மாதிரி மாறுபாட்டைக் கொண்டு χ^2ஐ வரையறுத்தால்,

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \right]$$

$$= \frac{ns^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi^2 (n-1)$$

இந்த χ^2 மாறி ஒரு $(n-1)$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய ஒரு χ^2 என்பதால் தரப்பட்ட x_i மதிப்புகளிலிருந்து

$\chi^2_{க} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் $(n-1)$ இ.பாகைக்கான χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு $\chi^2_{அ}$ என்றால்,

$\chi^2_{க} \geq \chi^2_{அ}$ என்றால், H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$\chi^2_{க} < \chi^2_{அ}$ என்றால் H_0ஐ 5% மட்டத்தில் ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

12-5. σ^2-க்கான நம்பக எல்லை 95%

σ^2க்கான 95% நம்பக எல்லையை

$$P_r\left[\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right] = 0.95$$

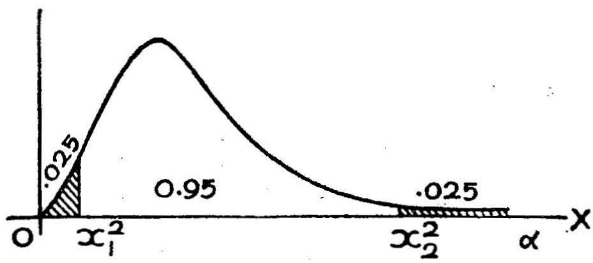
$$P_r\left[\frac{\chi_1^2}{ns^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi_2^2}{ns^2}\right] = 0.95$$

அதாவது $P_r\left[\frac{ns^2}{\chi_1^2} > \sigma^2 > \frac{ns^2}{\chi_2^2}\right] = 0{\cdot}95$

இதை வேறுவிதமாக எழுதினால்

$$P_r\left[\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right] = 0{\cdot}95$$

இங்கு $\chi_1^2 = 2\cdot5\%$ சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $(n-1)$ இயக் கப்பாகைக்கான இடது முனை χ^2.



படம் 21.

$\chi_2^2 = 2\cdot5\%$ சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $(n-1)$ இயக்கப்பாகைக் கான வலது முனை χ^2.

$$\therefore P_r\,[\,0 < \chi^2 < \chi_1^2\,] = 0\cdot025$$

$$P_r\,[\,\chi_2^2 < \chi^2 < \infty\,] = 0\cdot025$$

இத்தகைய χ_1^2, χ_2-க்களை அட்டவணை χ^2 மூலம் கண்டறிந்து சமனிட்டால் σ^2க்கான 95% நம்பக எல்லையானது

$$\left(\frac{ns^2}{\chi_2^2},\ \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

12-6. பொருத்துச் செம்மைக்கான சோதனை (Test of Goodness of Fit)

அறிமுறைக்கும் நடைமுறைக்கும் இடையே காணப்படும் வேறுபாடுகள் பொருளுடையவையா என்பதைச் சோதித்தறிந் திட உபயோகப்படுகிற இந்த "பொருத்துச் செம்மைக்கான χ^2 சோதனையை" கார்ல் பியர்ஸன் என்பவர் 1900ஆம் ஆண்டில் கண்டறிந்தார். இந்த வேறுபாட்டிற்கான காரணம் சந்தர்ப்ப வசத்தாலானதா அல்லது கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பொருத்துவதற்கான அறிமுறைகளின் பற்றுக் குறையினால் ஏற் பட்டதா எனக் காணுதற்கு இச் சோதனை பயன்படுகிறது. சோதனையில் கண்டறிந்த மதிப்புகளை (அலைவெண்களை) 0_i $(i=1, 2, 3, \ldots\ldots n)$ எனவும், அவற்றிற்கான அறிமுறை அலை

வெண்களை அதாவது எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களை முறையே E_i $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ எனவும் கொள்வோம். பிறகு

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right] \rightarrow \chi^2_{(n-1)\ \text{இ.பா.}} \text{ ஆகிறது.}$$

பேராசிரியர் ஃபிஷர் இச் சோதனையின் தகுதிக்கான நிபந்தனைகளை விளக்குகிறார்.

(i) மாதிரி அளவுகள் (மதிப்புகள்) சார்பற்றவையாக இருக்கவேண்டும்.

(ii) கட்ட அலைவெண்களுக்கான (cell frequencies) இறுக்கிகள் ஒரு படித்தானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\text{அதாவது } \sum_{i=1}^{n} O_i = \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

(iii) எந்த அறிமுறைக்கட்ட அலைவெண்களும் 5-க்குக் குறைந்து இருக்கக்கூடாது. அப்படிக்குறைந்து இருந்தால், அதை அதற்கு முன்னிருக்கும் அல்லது அதற்கு அடுத்த அலைவெண்ணுடன் கூட்டி 5-க்கு மேலாக ஆக்க வேண்டும். இப்படிச் சேர்த்தமைக்காக கடைசியில் இயக்கப்பாகைகளைச் சரி செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

A, B, C, D என்ற 4 தொகுதிகளில் 'பீன்ஸ்'ஸின் விகிதமானது 9 : 3 : 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது என அறிமுறை மூலம் அறிகிறோம்.

1600 பீன்ஸ்களில், ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையில், அந்த 4 தொகுதிகளுக்குமான எண்ணிக்கைகள் முறையே 882, 313, 287, 118 என்றால், சோதனையின் விளைவு, அறிமுறையை ஒத்து வருகிறதா எனச் சோதித்து ஆராய்க.

H_0 : 'A, B, C, D நால்வகைத் தொகுதிகளில் பீன்ஸ் 9 : 3 : 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன' எனக்கொள்வோம், கண்டறிந்த மதிப்புகள் O_1, O_2, O_3, O_4 என்றால்,

$O_1 = 882 \qquad E_1 = 1600 \times \frac{9}{16} = 900.$

$O_2 = 313 \qquad E_2 = 1600 \times \frac{3}{16} = 300.$

$O_3 = 287 \qquad E_3 = 1600 \times \frac{3}{16} = 300.$

$O_4 = 118 \qquad E_4 = 1600 \times \frac{1}{16} = 100.$

$\sum_{i=1}^{4} O_i = 1600 \qquad \sum_{i=1}^{4} E_i = 1600$

$$\therefore \chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{O_i^2}{E_i} - N$$ எனவும் எழுதலாம். $N = 1600.$

$$= \frac{(882-900)^2}{900} + \frac{(313-300)^2}{300} + \frac{(287-300)^2}{300}$$

$$+ \frac{(118-100)^2}{100}.$$

$$\therefore \chi^2_{க} = 0 \cdot 3600 + 0 \cdot 5633 + 0 \cdot 5633 + 3 \cdot 2400 = 4 \cdot 7266.$$

5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $4-1=3$ இயக்கப்பாகைக்கான χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு $= \chi^2_{அ}$

$$\chi^2_{அ} = 7 \cdot 815$$

$\chi^2_{க} < \chi^2_{அ}$ என்பதால் H_0 நிராகரிக்கப்படவில்லை. எனவே, அறிமுறைக்கும் நடைமுறைக்கும் நல்லதொரு தொடர்பு உள்ளது என அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

5 குழந்தைகள் கொண்ட 320 குடும்பங்களை ஆராய்ச்சி செய்ததில் அடுத்துவரும் விவரம் புலனாகிறது :

ஆண்பிள்ளை எண்ணிக்கை	5	4	3	2	1	0
பெண் பிள்ளை எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை.	14	56	110	88	40	12
					=	320

ஆண் அல்லது பெண் மகவு பிறப்பது சரிசம வாய்ப்பு உடைத்தது என்ற சூன்ய எடுகோளைச் சோதித்து உணர்க.

ஆண் மகவு பிறப்பதன் ஊக அளவு $= p$ என்க.

பெண் ,, ,, ,, $= q \ (q = 1 - p)$.

P_r [r ஆண் மகவு பிறப்புகள்] $= \binom{5}{r} p^{r} . q^{5-r}$.

$p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ என்பதால் $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ என்பதற்கான ஊக அளவுகளை $N = 320$ ஆல் பெருக்க $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$-க் கான எதிர்பார்க்கத்தக்க குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை E_i கிடைக்கவரும்.

$$p(r) = \binom{5}{r} = (\tfrac{1}{2})^{r} . (\tfrac{1}{2})^{5-r} = \binom{5}{r} (\tfrac{1}{2})^{5}$$ என்றால்

$p(0) = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$	$E(r = 0) = N . p(0) = 320 \cdot \frac{1}{32} = 10$
$p(r = 1) = \binom{5}{1} (\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}$	$E(r = 1) = N[p(1)] = 320 \times \frac{5}{32} = 50.$
$p(r = 2) = \binom{5}{1} (\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32}$	$E(r = 2) = 320 \times \frac{10}{32} = 100.$
$p(r = 3) = \binom{5}{3} (\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32}$	$E(r = 3) = 320 \times \frac{10}{32} = 100.$
$p(r = 4) = \binom{5}{4} (\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}$	$E(r = 4) = 320 \times \frac{5}{32} = 50.$
$p(r = 5) = \binom{5}{5} (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$	$E(r = 5) = 320 \times \frac{1}{32} = 10.$

O, E மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

O	E	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
14	10	16	1·60
56	50	36	0·72
110	100	100	1·00
88	100	144	1·44
40	50	100	2·00
12	10	4	0·40
320	320	—	7·16

$$\chi^2_{க} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\left[= \sum \frac{O_i}{E} - N \text{ என்றும் கூறலாம்.} \right]$$

$$= 7{\cdot}16$$

5 % சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $6-1=5$ இயக்கப் பாகைக்கான χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு $= \chi^2_{அ} = 11{\cdot}07$.

$\chi^2_{க} < \chi^2_{அ}$ என்பதால்.

ஆண், பெண் இரு பிறப்புகளும் சரிசமமானவை என்ற சூனிய எடுகோள் 5% மட்டத்தில் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது.

12-7. குணப் பண்புகளின் சார்பிலாத் தன்மை

A, B என்ற இரு குணப் பண்புகளை (attribute)க் கவனிப்போம். A ஐ, A_1, A_2,...A_r என்ற r சிறு பகுதிகளாகவும் B ஐ B_1, B_2,...B_s என்ற s சிறு பகுதிகளாகவும் பிரிக்கலாம்.

இதை ஒரு பல்வகைப் பிரிவு (Manifold classification) எனலாம்.

பல்வேறு கட்ட அலைவெண்கள்

$\frac{A}{B}$	A_1	A_2	A_3	A_4	....	A_i	....	Ar	மொத்தம்
B_1	$(A_1\ B_1)$	$(A_2\ B_1)$	$(A_3\ B_1)$	$(A_4\ B_1)$		$(A_i\ B_1)$		$(Ar\ B_1)$	(B_1)
B_2	$((A_1\ B_2$								(B_2)
B_3	$(A_1\ B_3)$								(B_3)
B_4	$(A_1\ B_4)$								(B_4)
⋮									⋮
B_j	$(A_1\ B_i)$					$(A_i\ B_j)$			(B_j)
⋮									⋮
B_s	$(A_1\ B_s)$					$(A_i\ B_s)$			(B_s)
மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)	....	(A_i)	....	(A_r)	N

இந்த பல்வேறு கட்ட அலைவெண்கள் மேலே காணும் அட்டவணையில் விளக்கப்படுகின்றன.

இதையே ஒரு '$(r \times s)$ **இணைப்பட்டியல்**' (Contingency table) என்கிறோம்.

இங்கு $\sum_{i=1}^{r} (A_i) = N$

$$\sum_{j=1}^{s} (\beta_j) = N$$

$(A_i), (\beta_j)$ யாவும் ஒரு படி அலைவெண்கள்

$(A_i \beta_j)$ ... இவை ஒருபடி அலைவெண்கள்.

இப்படிப்பட்ட குணப் பண்புகள் சார்பற்றவையா எனச் சோதிப்பதுதான் இங்கு நமது முக்கிய குறிகோள்.

இரு பண்புகளும் சார்பற்றவை என்றால்,

$$(A_i \beta_j) = \frac{(A_i) \cdot (\beta_j)}{N} \text{ ஆகும்.}$$

எப்படி எனில்,

$$p(A_i) = \frac{(A_i)}{N}$$

$$p(\beta_j) = \frac{(\beta_j)}{N}$$

$$p(A_i \beta_j) = p(A_i) \cdot p(\beta_j)$$

அதாவது $\frac{(A_i \beta_j)}{N} = \frac{(A_i)(\beta_j)}{N^2}$

எனவே $(A_i \beta_j) = \frac{(A_i) \cdot (\beta_j)}{N}$

அதாவது எதிர்பார்க்கும் $(A_i. \beta_j)$ அளவு $=$ $(A_i. \beta_j)_e$ என்றால்,

$$(A_i \beta_j)_e = \frac{(A_i)(\beta_j)}{N}$$

இச் சூத்திரத்தைக் கொண்டு $i = 1, 2, 3 \ldots r$,

$j = 1, 2, 3 \ldots s$ என்ற எல்லா கட்ட அலைவெண்கள் $(A_i \beta_j)$-க்கும் $(A_i \beta_j)_e$ஐக் கணக்கிடலாம்.

இந்த $(A_i \beta_j)_e$ஐக் கொண்ட ஓர் அட்டவணையை உருவாக்கினால், எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களின் அட்டவணை கிடைக்கும்.

பல்வேறு கட்ட அலைவெண்கள்

A / B	A_1	A_2	…	A_i	…	A_r	மொத்தம்
β_1	$(A_1 \beta_1)_e$	$(A_2 \beta_1)_e$		$(A_i \beta_1)_e$			(β_1)
β_2	$(A_1 \beta_2)_e$						(β_2)
β_3	$(A_1 \beta_8)_e$						(β_3)
							⋮
β_j	$(A_1 \beta_j)_e$			$(A_i \beta_j)_e$			(β_j)
							⋮
β_s							(β_s)
மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	…	(A_i)	…	(A_r)	N.

இரு இணைப் பட்டியல்களையும் கொண்டு,

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$ என்ற மதிப்பைக் காணலாம்.

இங்கு $O_{ij} = (A_i \beta_j)$ என்றால்

$$E_{ij} = (A_i \beta_j)_e = \frac{(A_i)(\beta)_j}{N}$$

$$\therefore \quad \chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{[(A_i \beta_j) - (A_i \beta_j)_e]^2}{(A_i \beta_j)_e} \rightarrow \chi^2$$

$(r - 1) \cdot (s - 1)$ இ. பா.

$r = 3, s = 5$ என்றால்,

இந்த χ^2 என்பது $(3 - 1)(5 - 1) = 2 \times 4 = 8$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய ஒரு χ^2 மாறியாகும்.

கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு $= \chi^2_{\text{க}}$ என்க.

$\chi^2_{\text{அ}} = 5\%$ மட்டத்தில் $(r - 1)(s - 1)$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு.

இப்போது $\chi^2_{\text{க}} \geq \chi^2_{\text{அ}}$ என்றால், 5% மட்டத்தில் 'இரு குணப் பண்புகளும் சார்பற்றவை' என்ற சூன்ய எடுகோள் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே, இவ்விரு பண்புகளும் சார்புடன் உள்ளன எனக் கூறலாம்.

இந்த χ^2 ஒரு $(r - 1)(s - 1)$ இயக்கப் பாகையுடன் கூடிய ஒரு χ^2 ஆக எவ்வாறு ஆகிறது என்பதைக் கீழே விளக்குவோம்.

$r \times s$ இணைப் பட்டியலில், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணிக்கையில், நிரை, நிரல் மொத்தங்கள், எல்லாம் சேர்த்த மொத்தம் ஆகிய மூன்றும் நிலையாக உள்ளன. r நிரல் மொத்தங்களும், s நிரை மொத்தங்களும், $(r + s)$ நிபந்தனைகளைக் கட்ட அலைவெண்களின் மீது விதிக்கிறது என்பதாலும், $\sum A_i = \sum \beta_j = N$ என்பதாலும், சார்பற்ற நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை $(r + s - 1)$ ஆக மாறுகிறது.

∴ மொத்த கட்ட அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை rs என்றால் χ^2-க்கான இயக்கப் பாகைகள்

$$= rs - (\text{நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை})$$

$$= rs - (r + s - 1)$$

$$= rs - r - s + 1 = (r - 1)(s - 1).$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

(I) (*a*) ஒரு பட்டப்படிப்புத் தேர்வில் கணிதம், ரசாயனம் பாடங்களிலும் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் தேறியவர், தேறாதவர் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதைக் கொண்டு இரு பாடங்களிலும் தேர்வு எழுதிய முறை சார்பற்றதா என்று சோதித்து ஆராய்க.

(i) (a) பிரிவில் உள்ள அட்டவணைக்கு எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை (4 × 4) இணைப்பட்டியலைத் தயார் செய்க.

(ii) (b) பிரிவில் உள்ள 3 × 4 இணைப் பட்டியலுக்கு χ^2 சோதனை செய்க.

4 × 4 இணைப்பட்டியல்

ரசாயனம்	கணிதம்				மொத்தம்
	I வகுப்பு	II வகுப்பு	III வகுப்பு பாஸ்	பெயில்	
முதல் வகுப்பு	20	60	50	20	150
II வகுப்பு	15	70	100	35	220
III வகுப்பு பாஸ்	10	40	85	15	150
பெயில்	5	30	15	30	80
மொத்தம்	50	200	250	100	600

(b) 3×4 இணைப்பட்டியல்

ரசாயனம்

கணிதம்	I வகுப்பு	II வகுப்பு	III வகுப்பு பாஸ்	பெயில்	மொத்தம்
I வகுப்பு	38	60	50	11	159
II வகுப்பு	24	70	100	27	221
பாஸ்	12	36	91	25	164
மொத்தம்	74	166	241	63	544

(a) பிரிவுக்கான தீர்வு

ரசாயனம், கணிதத்தில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் சார்பற்றவை என்ற H_0 சூனிய எடுகோளுடன், எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களைக் கொண்ட அட்டவணையைத் தயார் செய்வோம்.

இங்கு $(A_i\,B_j)_c = \frac{(A_i)\cdot(B_j)}{N}$, எல்லா i, j—க்களுக்கும். கணிதம் A பண்பு என்றும், ரசாயனம் B பண்பு எனவும் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $(A_1\,B_1)=20$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ (A_1\,B_1)_e = \frac{(A_1\,.\,B_1)}{N} = \frac{50\times 150}{600} = \frac{75}{6} = 12\cdot 5$$

$$(A_1\,B_2)_e = E\,(A_1\,B_2) = \frac{(A_1)\,(B_2)}{N} = \frac{50\times 220}{600} = 18\cdot 3$$

$$E(A_1\,B_3) = \frac{(A_1)\,(B_3)}{N} = \frac{50\times 150}{600} = 12\cdot 5$$

$$E\,(A_1\,B_4) = \frac{(A_1)\,(B_4)}{N} = \frac{50\times 80}{600} = 6\cdot 7$$

இதே போல,

$$E(A_2\ B_1) = \frac{(A_2)\ (B_1)}{N} = \frac{200 \times 150}{600} = 150$$

$E(A_2\ B_2) = 73{\cdot}3$

$E(A_2\ B_3) = 50$

$E(A_2\ B_4) = 26{\cdot}7$

$E(A_3\ B_1) = 62{\cdot}5$

$E(A_3\ B_2) = 91{\cdot}7$

$E(A_3\ B_3) = 62{\cdot}5$

$E(A_3\ B_4) = 33{\cdot}3$

$E(A_4\ B_1) = 25$

$E(A_4\ B_2) = 36{\cdot}7$

$E(A_4\ B_3) = 25$

$E(A_4\ B_4) = 13{\cdot}3$

இப்படிக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட எதிர்பார்க்கத்தக்க அலை வெண்களுக்கான 4×4 இணைப்பட்டியலை கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

4×4 இணைப்பட்டியல் (எதிர்பார்க்கத்தக்கது)

கணிதம்

க / ர (ரசாயனம்)	I வகுப்பு	II வகுப்பு	III வகுப்பு பாஸ்	பெயில்	மொத்தம்
I வகுப்பு	12·5	50·0	62·5	25 0	150 0
II வகுப்பு	18·3	73·3	91·7	36·7	220·0
III வகுப்பு	12 5	50·0	62·5	25·0	150·0
பெயில்	6.7	26·7	33·3	13·3	80·0
மொத்தம்	50·0	200·0	250·0	100.0	600·

இங்கு நிரல், நிரை, மொத்தங்களும், எல்லாவற்றுக்குமான மொத்தமும் மாருமல் அதே அளவாக உள்ளன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

(*b*) இரு பாடங்களிலும் பெற்ற (மதிப்பெண்கள்) வகுப்புகள் சார்பற்றவை என்ற H_0 சூனிய எடுகோளுடன் எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களின் பட்டியலைத் தயாரிப்போம்.

இங்கு ரசாயனம் A, கணிதம் B என்றால்,

$(A_1 B_1) = 38$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$E(A_1\ B_1) = \frac{(A_1)\ (B_1)}{N} = \frac{74 \times 159}{544} = 21\cdot 6$$

$$E(A_1\ B_1) = \frac{74 \times 221}{544} = 30\cdot 1$$

இதேபோல மற்ற எல்லா 10 எதிர்பார்க்கத்தக்க அலைவெண்களையும் கண்டு பிடித்து அட்டவணைப் படுத்துவோம்.

3 × 4 இணைப்பட்டியல்

ர / க	I வகுப்பு	II வகுப்பு	III வகுப்பு	பெயில்	மொத்தம்
I வகுப்பு	21·6	48·5	70·5	18·4	159·0
II வகுப்பு	30·1	67·5	97·8	25·6	221·0
III வகுப்பு	22·3	50·0	72.7	19·0	164·0
மொத்தம்	74 0	166·0	241·0	63·0	544.0

கொடுக்கப்பட்ட O (observed) பட்டியலின் அலைவெண்களையும், கணிக்கப்பட்ட E (expected) பட்டியலின் அலைவெண்களையும் கொண்டு χ^2-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(O - E)^2}{E}$$

$$= \sum_{i,\ j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

இங்கு $O_{ij} = (A_i \cdot B_j)$
$E_{ij} = E\,(A_i\ B_j)$.

$$= \sum \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - N. \qquad N = 544.$$

$$= \left[\frac{38^2}{21\cdot6} + \frac{24^2}{30\cdot1} + \frac{12^2}{22\cdot3} + \frac{60^2}{48\cdot5}\right.$$

$$+ \frac{70^2}{67\cdot5} + \frac{36^2}{50\cdot0} + \frac{50^2}{70\cdot5} + \frac{100^2}{97\cdot8}$$

$$\left. + \frac{91^2}{72\cdot7} + \frac{11^2}{18\cdot1} + \frac{27^2}{25\cdot6} + \frac{25^2}{19\cdot0}\right] - 544.$$

$= \mathbf{40\cdot7044.}$

$\therefore \chi^2_{க} = 40\cdot7044.$

$\chi^2_{அ}$ = 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் $v = (4-1)\ (3-1) = 6$ இயக்கப் பாகைகளுடன் கூடிய ஒரு χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு = **12·592.**

$\chi^2_{அ} > \chi^2_{க}$ என்பதால், *Ho* நிராகரிக்கப்படுகிறது. கண்டு பிடிக்கப்பட்ட χ^2-ன் மதிப்பு மிகவும் பொருளுடையதாக உள்ளது.

எனவே, இரு பாடங்களிலும் மாணவர் தகுதி சார்புள்ளதாகக் காணப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

ஒரு 2 × 2 இணைப் பட்டியலுக்கு

A / B	A	α	மொத்தம்
B	a	b	$a+b$
β	c	d	$c+d$
மொத்தம்	$a+c$	$b+d$	N

$N = a + b + c + d.$

$$\chi^2 = \frac{N\ (a d - b c)^2}{(a+b)\ (b+d)\ (a+b)\ (c+d)}$$ என்று நிரூபிக்கவும்.

A, B இரு குணப்பண்புகளும் சார்பற்றவை என்ற H_0 சூனிய எடுகோளின்படி,

a, b, c, d–ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$E(a) = \frac{(a+b)\quad(a+c)}{N}.$$

$$E(b) = \frac{(a+b)\quad(b+d)}{N}$$

$$E(c) = \frac{(c+d)\quad(a+c)}{N}$$

$$E(d) = \frac{(c+d)\quad(b+d)}{N}$$

எனவே, எதிர்பார்க்கத் தக்க மதிப்புகளுக்கான

2 × 2 இணைப்பட்டியல்

A / B	A	∝	மொத்தம்
B	$\frac{(a+b)\quad(b+c)}{N}$	$\frac{(a+b)\quad(b+p)}{N}$	$a+b$
β	$\frac{(c+d)\quad(a+c)}{N}$	$\frac{(c+d)\quad(b+d)}{N}$	$c+d$
மொத்தம்	$a+c$	$b+d$	N

$N=a+b+c+d$

ஆகவே,

$$\chi = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$= \frac{[a - E(a)]^2}{E(a)} + \frac{[b - E(b)]}{E(b)} + \frac{[c - E(c)]}{E(c)} + \frac{[d - E(d)]^2}{E(d)}$$

$$= \sum \frac{\left[a - \frac{(a+b)\ (a+c)}{N}\right]^2}{\frac{(a+b\ (a+c)}{N}}$$

$$a - E(a) = a - \frac{(a+b)(a+c)}{N}$$

$$= \frac{a(a+b+c+d) - (a^2 + ac + bc + ab)}{N}$$

$$= \frac{ad - bc}{N}.$$

$$b - E(b) = b - \frac{(a+b)(b+d)}{N}$$

$$= \frac{b(a+b+c+d) - (ac + ad + bd + b^2)}{N}$$

$$= \frac{-(ad - bc)}{N}.$$

இதேபோல

$$c - E(c) = \frac{-(ad - bc)}{N}$$

$$d - E(d) = \frac{ad - bc}{N}$$ என அறியலாம்.

ஆகவே,

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc)^2}{N^2}\left[\frac{1}{E(a)} + \frac{1}{E(b)} + \frac{1}{E(c)} + \frac{1}{E(d)}\right]$$

$$\frac{1}{E(a)} + \frac{1}{E(b)} = \frac{N}{(a+b)(a+c)} + \frac{N}{(a+b)(b+d)}$$

$$= N. \frac{(b+d)+(a+c)}{(a+b)(a+c)\cdot(b+d)}$$

$$= \frac{N^2}{(ab)(a+c)(b+d)}.$$

| | ly

$$\frac{1}{E(c)} + \frac{1}{E(d)} = \frac{N^2}{(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$$\therefore \left[\frac{1}{E(a)} + \frac{1}{E(b)}\right] + \left[\frac{1}{E(c)} + \frac{1}{E(d)}\right]$$

$$= N^2 \frac{1}{(a+b)(a+c)(b+d)} + \frac{1}{(a+b)(b+d)(c+d)}$$

$$= N^2 \left[\frac{(c+d)+(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d).}\right]$$

$$= \frac{N^3}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}.$$

எனவே $\chi^2 = \frac{(ad-bc^2)}{N^2} \cdot \frac{N^3}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$

$$= \frac{N(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

எடுத்துக்காட்டு 13:

கீழே தரப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து தந்தைகளின் கண்கள் நிறத்திற்கும் அவர்களது பிள்ளைகளின் கண்கள் நிறத்திற்கும் ஏதாவது தொடர்புள்ளதா எனச் சோதிக்கவும்.

பிள்ளையின் கண் நிறம்

தந்தையின் கண் நிறம்

பி / த	ஊதா நிறம்	ஊதா அற்ற நிறம்	மொத்தம்
ஊதா நிறம்	20	10	30
ஊதா அற்ற நிறம்	20	50	70
மொத்தம்	40	60	100

இரு நிறங்களுக்கும் தொடர்பு இல்லை; அவை சார்பற்றவை என்ற H_0 சூனிய எடுகோளின்படி எதிர்பார்க்கும் மதிப்புக்களைக் கணிக்கலாம்.

$\chi^2 = \dfrac{N\,(ad-bc)^2}{(a+b)\,(a+c)\,(b+d)\,(c+d)}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி χ^2–ன் மதிப்பைக் கணிக்கலாம்.

இங்கு $a = 20$

$b = 10$

$c = 20$

$d = 50$

$N = 100.$

$$\therefore\ \chi^2 = \frac{100\,(20\times 50-10\times 10)^2}{30\times 70\times 40\times 60} = 12.7$$

எனவே $\chi^2_{க} = 12.7$

$\chi^2_{அ}$ = அட்டவணை χ^2 மதிப்பு (0.05 மட்டத்தில், 1 இ. பா

= 3.841.

$\chi^2_{க} > \chi^2_{அ}$ என்பதால் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

∴ தந்தை, மகன் கண் நிறங்கள் சார்புடையவையாக உள்ளன.

12-8. யேட்சின் திருத்தம் (Yate's Correction)

ஒரு 2×2 இணைப்பட்டியலில் ஏதாவது ஓர் அலை வெண் 5–க்குக் குறைவாக இருந்தால், அதை மற்ற அலை வெண்ணுடன் இணைத்து χ^2 ஐக் கணிக்கலாம். இப்படிக் கணிப்பதால், χ^2 ஆனது 1—1 =0 இயக்கப்பாகை கொண்ட χ^2 ஆக மாறும். இது அர்த்தமற்றது என்பதால் இதற்கு யேட்சின் திருத்த முறையை மேற்கொள்ளலாம். அதாவது எந்த அலை வெண் மிகவும் குறைவாக உள்ளதோ அத்துடன் 0.5 ஐக் கூட்டி மற்ற அலைவெண்களையும் (நிரை மொத்தங்கள், நிரல் மொத்தங்கள், எல்லாம் சேர்த்த மொத்தம் யாவும் சிறிதும் மாறுபடாதபடி) சரிசெய்து எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக 'a' அலைவெண் 5-க்குக் குறைந்ததும் மற்ற மூன்று அலைவெண்களையும் விட மிகச் சிறியதுமாக இருந்

தால், யேட்சு திருத்தத்தின் மூலம், கீழ்க்கண்டவாறு 2×2 இணைப்பட்டியல் அமையப்பெறும்.

யேட்சின் திருத்த முறைப்படி
இணைப்பட்டியல்

...	A	α	...
B	a	b	$a+b$
β	c	d	$c+d$
...	$a+c$	$b+d$	N

இணைப்பட்டியல் 1

என்றால்

...	A	α	...
B	$a+\frac{1}{2}$	$b-\frac{1}{2}$	$a+b$
β	$c-\frac{1}{2}$	$d+\frac{1}{2}$	$c+d$
...	$a+c$	$b+d$	N

இணைப்பட்டியல் 2

இரண்டு இணைப்பட்டியல்களிலும் ஒரே விளிம்பு மொத்தங்கள் இருப்பதைக்காணலாம்.

இப்போது இணைப்பட்டியல் 2-க்கான χ^2ஐ முன்போலக் கணித்து χ^2 அட்டவணை மதிப்பைக் கொண்டு ஒப்பிட்டு பண்புகளின் சார்பற்ற, சார்புடைய தன்மையை முடிவு செய்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 14:

கீழ்க்கண்ட பட்டியலை ஆராய்வோம்.

...	இறந்தவர்கள்	இருப்பவர்கள்	மொத்தம்
ஊசிபோடப் பட்டவர்	2	10	12
ஊசிபோடப் படாதவர்கள்	8	4	12
மொத்தம்	10	14	24

இதில் மிகக் குறைந்த அலைவெண் = 2. எனவே இதை 2.5 என்று மாற்றி யேட்சு திருத்தப்படி இணைப்பட்டியல் அமைப்போம்.

	இறந்.	இருப்.	...
ஊசி	2·5	9·5	12
ஊசி இல்லை.	7·5	4·5	12
...	10	14	24

H_0 : வியாதியைப் போக்க ஊசி குத்துவது பயன்படாது.

$$\text{இதற்கான } \chi^2 = \frac{N\,(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$$= 24 \frac{\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}-\frac{19}{2}\cdot\frac{15}{2}\right]^2}{12.\ 12.\ 10.\ 14}$$

$$= \frac{24}{16}\ \frac{(45-285)^2}{12.\ 12.\ 10.\ 14}$$

$$\therefore\ \chi^2_{\text{க}} = \underline{4{\cdot}2857.}$$

5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் 1 இயக்கப் பாகைக்கான χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு, $\chi^2_{\text{அ}} = 3{\cdot}841.$

$\chi^2_{\text{க}} < \chi^2_{\text{அ}}$ என்பதால், H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எனவே, வியாதியைப் போக்க ஊசி குத்துவது பயன்படுகிறது என முடிவு கட்டுகிறோம்.

2 × 2 இணைப்பட்டியலின் [(திருத்தமான (Exact)] சரியான சோதனை

குணப் பண்புகளின் சார்பிலாத் தன்மையைச் சோதிக்கப் பயன்படத்தக்க χ^2 சோதனை ஒரு தோராய சோதனையாகும்.

சார்பிலாத் தன்மையை உய்த்துணரும் உண்மையான தன்மையை, திருத்தமான சோதனைதான் காட்டுகிறது. இச் சோதனை சிறிதளவு கடினமானதென்றாலும், χ^2 சோதனை சந்தேகத்திற்கு இடமாகும்போது இச் சோதனை நமக்குப் பயன் படுகிறது.

...	A	α	...
B	a	b	$a+b$
β	c	d	$c+d$
...	$a+c$	$b+d$	N

$$N = a + b + c + d$$

இந்தப் பட்டியலில், உள்ளே காணப்படும் அலைவெண்களை

$\dfrac{n!}{a!\ b!\ c!\ d!}$ விதங்களில் அமைக்கலாம். ... ... (1)

இரு பண்புகளும் சார்பற்றவையானால், விளிம்பு மொத்தங்கள் கிடைக்கப் பெறுவதற்கான மொத்த வழிகள்

$$\frac{n!}{(a+c)!\ (b+d)!} \cdot \frac{n!}{(a+b)!\ (c+d)!} \quad \text{..........} \quad (2)$$

எனவே, இத்தகைய பட்டியல் கிடைக்கப் பெறுவதற்கான வாய்ப்பு அளவு $= \dfrac{(1)}{(2)}$

$$= \frac{\dfrac{n!}{a!\ b!\ c!\ d!}}{\dfrac{n!}{(a+b)!\ (c+d)!} \cdot \dfrac{n!}{(a+d)!\ (c+d)!}}$$

$$= \frac{(a+c)!\ (b+d)!\ (a+b)!\ (c+d)!}{a!\ b!\ c!\ d!\ (a+c+b+d)}$$

... ... (3)

இதிலிருந்து $a = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ என்பதற்கான ஊக அளவுகளைக் கணிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

முன் எடுத்துக்காட்டில் ஊசி குத்தப்பட்டு இறந்தவர் 'a' என்றால், மேலும் $a = 2$ அல்லது 1 அல்லது 0 என்பதற்கான ஊக அளவு $= P_r(a = 2) \times P_r(a = 1) \times P_r(a = 0)$

$$= \frac{12!\ 12!\ 10!\ 14!}{2!\ 10!\ 8!\ 4!\ 24!} + \frac{12!\ 12!\ 10!\ 14!}{1!\ 11!\ 9!\ 3!\ 24!} + \frac{12!\ 12!\ 10!\ 14!}{0!\ 12!\ 10!\ 2!\ 24!}$$
$= 0.018.$

எனவே $a = 2, 1,$ அல்லது 0-க்கான ஊக அளவு இந்த திருத்தமான சோதனை மூலம் கணிக்கப்பட்டு இது 0·025-க்கு அதிகமாக இருந்தால் (இயல் நிலை வளை கோட்டின் ஒரு பக்க சோதனைக்கான சிறப்புகாண் மட்டம் 2.5%), சார்பிலாத் தன்மை H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

0.025-க்குக் குறைவாக இருந்தால் Ho நிராகரிக்கப்பட்டு இரு பண்புகளும் சார்புடையன எனத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

இங்கு $0·018 < 0·025$ என்பதால், Ho நிராகரிக்கப்பட்டு இரு பண்புகளும் சார்புடையதாகத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

அதாவது A : இருப்பவர்கள், α = இறந்தவர்கள்.

B : ஊசி போடப்பட்டவர்கள்; β = ஊசி போடப்படாதவர்கள் என்றால்,

A, B இரண்டும் சார்புடையவை.

அதாவது ஊசி குத்தியதால் வியாதி குணமடைந்து பிழைக்கிறார்கள் என்று நாம் உய்த்துணருகிறோம்.

12-9. பல சார்பற்ற முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடுகளின் மதிப்பீடுகளைச் சமமாக உள்ளனவா எனச் சோதித்தல்: பார்ட்லெட்டின் சோதனை (Bartlett's Test):

$S_1^2, S_2^2, \ldots\ldots S_k^2$ என்பன k சார்பற்ற மாதிரிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான பிறழ்ச்சியற்ற k மதிப்பீடுகள் என்று கொள்வோம்.

இவை முறையே $v_1, v_2, \ldots, v_k$ இயக்கப் பாகைகளைக் கொண்டதாக இருக்கட்டும்.

இந்த k மாதிரிகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்ற எடுகோளின் படி

$$S^2 = \frac{\sum v_i S_i^2}{\sum v_i} = \frac{\Sigma v_i S_i^2}{v} \quad (r = \sum_{i=1}^{k} v_i)$$

என்பதும் முழுமை மாறுபாடு σ^2 க்கான ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடாகும். ஏனெனில்,

$$E(S^2) = E\left[\frac{\Sigma v_i S_i^2}{v}\right]$$

$$= \frac{\sum v_i}{v} \cdot E(S^2) = \frac{v}{v} E(S^2) = \sigma^2.$$

பார்ட்லெட் என்பவர் கீழ்க்கண்ட சோதனைப் பண்பளவை $(k-1)$ இயக்கப் பாகைகொண்ட ஒரு χ^2 மாறி என வரையறுத்துள்ளார்.

அதாவது $M = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\left(\Sigma \frac{1}{v_i}\right) - \frac{1}{v}\right]$ என்றால்,

$$\frac{1}{M}\left[v \log_e S^2 - \sum_{i=1}^{k} v_i \log_e S_i^2\right] \to \chi^2 (k-1).$$

எனவே, இந்த χ^2 ஐக் கணித்து $\chi^2_{அ}$ உடன் ஒப்பிட்டுச் சோதிக்கலாம்.

$\chi^2_{அ}$ = 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில் $(k-1)$ இயக்கப் பாகை கொண்ட ஒரு χ^2-ன் அட்டவணை மதிப்பு.

இனி $\chi^2_{க} < \chi^2_{அ}$ என்றால் Ho நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

5 மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த அடுத்து வரும் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து இம் மாதிரிகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டனவா என்று சோதித்து ஆராய்க,

மாதிரிகள் i	பருமன் n_i	v_i	மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு s_i^2
1	6	5	3·8
2	9	8	4 4
3	7	6	8·1
4	8	7	1.9
5	5	4	9·4
—	—	30	—

$k = 5.$

H_0 : எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. அதாவது மாதிரிகளின் மாறுபாட்டு மதிப்பீடுகளின் வேறுபாடு பொருளுடையதல்ல.

$$\chi^2 = \frac{1}{M}\left[v \log_e S^2 - \sum_{i=1}^{k} v_i \log_e S_i^2 \right]$$

$$M = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\left(\sum \frac{1}{v_i}\right) - \frac{1}{v}\right]$$

$$= 1 + \tfrac{1}{12}\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{30}\right]$$

χ^2–ன் மதிப்பைக் கணித்தால் $\chi^2_{\text{க}} =$ [illegible]·45.

$\chi^2_{\text{அ}} = 9\cdot 49 = 5\%$ சிறப்புகாண் மட்டத்தில் 4 இயக்கப் பாகைக் கான χ^2–ன் அட்டவணை மதிப்பு.

$\chi^2_{\text{க}} < \chi^2_{\text{அ}}$. என்பதால் H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே, இந்த எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்ற முடிவுக்கு வருகின்றோம்.

12-10 பலசார்பற்ற உடன்தொடர்புக்கெழு மதிப்பீடுகள் சமமானவையா எனச் சோதித்தல்

$r_1, r_2, r_3 \ldots r_k$ என்பன k சார்பற்ற உடன் தொடர்புக்கெழு மதிப்பீடுகள் எனக் கொள்வோம். இவை யாவும் ஒரே இரு மாறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வருவதாக சூனிய எடு கோளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$i=1, 2, 3, \ldots k$ என்றவாறு

$$Z_i = \tfrac{1}{2}\, log_e \left(\frac{1+r_i}{1-r_i}\right)$$

$$Z = \frac{\sum (n_i-3)\, Z_i}{\sum (n_i-3)}$$ என்றும் கொள்வோம்.

விரிந்த மாதிரிகளுக்கு $z_1, z_2, z_3 \ldots z_k$ எல்லாம் ஒரே சராசரியைக் கொண்டவாறு இயல்நிலையில் பரவியிருக்கின்றன. ஆகவே, அவற்றின் கூட்டல் $\sum (n_i-3)\,(z_i-\bar{z})^2$ என்பது $(k-1)$ இயக்கப்பாகைகளுடன் கூடிய ஒரு χ^2 பரவலில் தோராயமாக அமைகிறது.

$$\chi^2 = \sum (n_i-3)\,(z_i-\bar{z})^2$$

$$= \sum (n_i- \;)\, z_i^2 - \frac{[\sum (n_i-3)\, z_i]^2}{\sum (n_i-3)}$$

சார்பற்ற தன்மையை இச் சோதனைப்பண்பளவு மூலம் சோதிக்கலாம்.

$\chi^2_{\text{க}} > \chi^2_{\text{அ}}$ என்றால் 5% நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

21, 30, 39, 26, 35 இணை மாறிகளைக்கொண்ட 5 சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் மதிப்பீடுகள் முறையே 0·39, 0·61, 0·43, 0·54, 0.48 என்றால், இம் மதிப்பீடுகள் சமபடித்தானதா என்று சோதித்து ஆராய்க. அப்படி இருப்பின் முழுமைத் தொகுதியில உடன்தொடர்புக்கெழுக்கான மதிப்பீட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

r_i	z_i	n_i-3	$(n_i-3)\,z_i$	$(n_i-3)\,z_i^2$
0·39	0·412	18	7·416	3·055
0·61	0·709	27	19·143	13·572
0·43	0·460	36	16·550	7·618
0·54	0·604	23	13·892	8·391
0·48	0·524	42	16·768	8·786
மொத்தம்	—	136	73·773	41·422

எனவே, $\chi^2 = \Sigma\,(n_i-3)\,(z_i-z)^2$

$$= \Sigma\,(n_i-3)\,z_i^2 - \frac{[\Sigma\,(n_i-3)\,z_i]^2}{\Sigma\,(n_i-3)}$$

$$\chi^2 = 41{\cdot}422 - \frac{(73{\cdot}779)^2}{136}$$

$$\doteqdot 1{\cdot}4\cdot$$

$$\chi^2_{\text{க}} = 1{\cdot}4$$

$$\chi^2_{\text{அ}} = 9.49.$$

$$\chi^2_{\text{க}} < \chi^2_{\text{அ}}.$$

$\therefore$ H_o ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே, உடன் தொடர்புக்கெழுக்கள் r_i, சமபடித்தானவை யாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

மேலும்,

$$\bar{z} = \frac{73{\cdot}779}{136}$$

$= 0{\cdot}5425$

$\hat{P}$ என்பது P–ன் மதிப்பீடு ஆனல்,

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}\, log_e \left(\frac{1+\hat{\rho}}{1+\hat{\rho}} \right)$$

$$_e+\bar{z} = \left(\frac{1+P}{1+\hat{P}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

அல்லது $_e2\bar{z}-1 = \dfrac{2\hat{P}}{(1-\hat{P}}$

அத்துடன் $_e2\bar{z}+1 = \dfrac{2}{1-\hat{P}}$

$$\therefore \quad \hat{P}\, \frac{e^2\bar{z}-1}{e^2\bar{z}+1} = \tan\ h\bar{z} = \tan h\ (0{\cdot}5425)$$

$= 0{\cdot}495.$

12–11. F–சோதனை : 'F—பரவலின் சோதனை.'

இரண்டு சிறிய மாதிரிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றின் பருமன்கள் முறையே n_1, n_2 ஆக இருக்கட்டும். இவ்விரு மாதிரிகளும் σ^2 மாறுபாட்டைக் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையாயின், σ^2 தெரியா நிலையில், அதற்கான பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளை இவ்விரு மாதிரிகளும் $S^2{}_1$, $S^2{}_2$–ன் வாயிலாகத் தருகின்றன.

இங்கு இம் மாதிரிகளின் மாறுபாடுகள் $S^2{}_1, S^2{}_2$ என்றாலும், அவற்றை எடுத்துக் கொள்ளாமல் அவற்றுக்குப் பதிலாக $S^2{}_1$, $S_2{}^2$ களைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

$x_{11}, x_{12} \ldots x_{1n_1}$ என்பன முதல் மாதிரியின் உறுப்புகள்.

$x_{21}, x_{22} \ldots x_{2n_2}$ என்பன இரண்டாம் மாதிரியின் உறுப்புகள் என்றும் கொண்டால்,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n^1 j} x_{2j}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \quad ; \quad S^2_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_i)^2$$

$$S^2_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \; ; \; S^2_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2$$

இப்போது $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F_{n1-1,\, n2-1}$ இ.பா

எனவே முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான இரு சார் பற்ற மதிப்பீடுகளின் விகிதத்தை சிறப்புக்காண் சோதனை மூலம் சோதிக்க F சோதனைப் பண்பளவு உபயோகப்படுகிறது.

Ho : இரண்டு மாதிரிகளின் σ^2 மதிப்பீடுகளாக S_1^2, S_2^2-க்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு 'பொருளுடையதல்ல. அதாவது இரண்டு மாதிரிகளும் σ^2ஐ மாறுபாடாகக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

இந்த சூன்ய எடுகோளின்படி, சோதனைப் பண்பளவு

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F\, v_1,\, v_2 \qquad \begin{aligned} v_1 &= n_1 - 1 \\ v_2 &= n_2 - 1 \end{aligned}$$

$$F_{\text{க}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$F_{\text{அ}} = 5\%$ சிறப்புகாண் மட்டத்தில் v_1, v_2 இலக்கப் பாகைகளுக்கான F-ன் அட்டவணை மதிப்பு.

இப்போது $F_{\text{க}} \geq F_{\text{அ}}$ என்றால், *Ho* நிராகரிக்கப்படுகிறது.

$F_{க} < F_{அ}$ எனில், H_o ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டு இரு மாதிரிகளும் σ^2 மாறுபாடு கொண்ட ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்று தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : இந்த F-ன் சோதனை பரவற்படி ஆய்வுகளுக்கும், (Analysis of Variance) மிகவும் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

8, 7 பருமன்களைக்கொண்ட இரு சார்பற்ற மாதிரிகளின் உறுப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகள் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபடுகின்றனவா என ஆராய்க.

மாதிரி 1 : 9, 11, 13, 11, 15, 9, 12, 14

மாதிரி 2 : 10, 12, 10, 14, 9, 8, 10

(B. Sc. Anc. April, 19 2)

$$\bar{x}_1 = \frac{94}{8} \qquad s_1{}^2 = \tfrac{1}{8}\,(1138) - \left(\frac{94}{8}\right)^2 = 4{\cdot}1875$$

$$\bar{x} = \frac{73}{7} \qquad s^{22} = \tfrac{1}{7}\,(785) - \left(\frac{73}{7}\right)^2 = 3{\cdot}8878.$$

$$\therefore \quad S_1{}^2 = \frac{n^1\ s_1{}^2}{(n_1 - 1)} = \frac{8 \times 4{\cdot}1875}{7} = 4{\cdot}786\cdot$$

$$S_2{}^2 = \frac{n_2\, s_2{}^2}{(n_1 - 1)} = \frac{7 \times 3{\cdot}8878}{6} = 4{\cdot}536.$$

$$\therefore \quad F_{க} = \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} = 1{\cdot}1211 \quad F_{அ} = (7,\ 6)$$ இ. பா. -க்கு 5% மட்டத்தில் அட்டவணை மதிப்பு.

$$\doteqdot 4{\cdot}22$$

இங்கு $F_{க} < F_{அ}$ என்பதால், இரு மதிப்பீடுகளும் பொருளுடைய விதத்தில் வேறுபடவில்லை.

பயிற்சி II

(1) 20 பருமனுள்ள ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 7·3 என்றால், இம்மாதிரி σ^2 மாறுபாட்டுடன் கூடிய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதென்றால், σ^2–க்கான 95% நம்பக எல்லையைக் கணக்கிடுக.

(2) 12 பருமனுள்ள ஒரு ராண்டம் மாதிரியின் மாறுபாடு 26·17 என்றால், இம்மாதிரியானது $\sigma^2 = 12$ என்ற மதிப்புடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதா எனச்சோதித்து ஆராய்க.

(3) ஐந்து காசுகள் ஒரே சமயத்தில், 3200 தடவைகள் சுண்டிவிடப்படுகின்றன. தலைகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, 4, 5 என்றதற்கான அலைவெண்கள் முறையே 80, 570, 1100, 900, 500, 50 என்றால், இவ்விவரங்களுக்கு ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்தியபின், பொருத்துச்செம்மைக்கான χ^2சோதனையைச் செய்து காசுகள் பிறழ்ச்சியற்றவையா எனக் கண்டுபிடி.

(4) பின்வரும் பட்டியலில் குற்றவாளிகளின் எடைகளும், அவர்களின் மனப்போக்கு நிலைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கை வர்க்கச்சோதனை மூலம் எடைக்கும், மன நிலைக்கும் ஏதாவது உறவு உண்டா என்று சோதித்து ஆராய்க.

மன நிலை	எடைகள் (பவுண்டில்)					
	90–120	120—30	130–140	140–150	>150	மொத்தம்
பொதுவான நிலை	25	75	90	100	120	410
உறுதியற்ற நிலை	20	15	30	15	10	90
மொத்தம்	45	90	120	115	130	500

(5) 200 மாணவர்கள் ஆங்கிலத்திலும் கணிதத்திலும் அவர்களின் திறமைக்கேற்ப பிரிக்கப்பட்டுள்ளனர். ஆங்கிலத்துக்

கும் கணிதத்திற்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா என்பதை χ^2 சோதனை மூலம் ஆராய்க.

		கணிதத்தில் தரப்பிரிவு			
		A_1 அதிக மதிப்பெண்	A_2 நடுத்தர மதிப்பெண்	A_3 குறை மதிப்பெண்	மொத்தம்
ஆங்கிலத்தில் தரப்பிரிவு	B_1 மேல் தரம்	35	20	10	65
	B_2 நடுத்தரம்	18	40	13	71
	B_3 கீழ்த்தரம்	9	15	40	64
	மொத்தம்	62	75	63	200

(6) கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து, குறைந்த வருமான முள்ளோர் நடுப்பகல் உணவை வீட்டில் உண்பதை விரும்பு கிறார்களா என்பதை χ^2 சோதனையால் காண்க.

வருமானம்	நடுப்பகல் உணவு அருந்துமிடம்		மொத்தம்
	வீட்டில்	விடுதியில்	
குறைந்த வருமானம்	400	300	700
அதிக வருமானம்	50	50	100
மொத்தம்	450	350	800

(7) மூன்று சார்பற்ற மாதிரிகளைப்பற்றிய சில விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

பருமன்	உறுப்பு மதிப்புகள்
5	24, 30, 37, 50, 74
9	30, 49, 50, 57, 76, 82, 85, 88, 98
3	36, 83, 90.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடுகளின் மதிப்பீடுகள் சமமானவையா என்று சோதித்து ஆராய்க. பார்ட்லெட்டின் சோதனைப் பண்பளவை உபயோகப்படுத்துக.

(8) நான்கு சார்பற்ற மாதிரிகளைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து, உடன்தொடர்புக்கெழுக்களின் மதிப்பீடுகள் சமபடித்தானதா எனச்சோதித்து ஆராய்க.

மாதிரி	பருமன்	உடன் தொடர்புக்கெழு
1	30	0 68
2	20	0·48
3	25	0.71
4	44	0·74

(9) ஒரு குறிப்பிட்ட காலவரையில், இரண்டு உணவுவகைகளினால் ஏற்பட்ட எடை அதிகரிப்பை, 10 மாணவர் தொகுதி கொண்ட இரு சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரிகளில் கீழே தரப்பட்டிருக்கிறது.

8, 5, 3, 6, 3, 2, 7, 6, 5, 7

4, 8, 6, 7, 5, 5, 4, 6, 4, 5

இவற்றுக்கான மாறுபாடுகள் பொருளுடைய வகையில் வேறுபடுகின்றனவா எனச் சோதிக்கவும்.

அட்டவணை 1: இயல் நிலை வளைகோட்டின் நிலைத்தூரங்கள்

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	0.7	.08	0.9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3737	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804

1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	·0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	·0241	.0235	.0229
2.4	0.224	.0219	.0213	.0208	·0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	0.175	.0171	.0167	.0163	·0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	0·136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	·0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	·0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	·0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046

தரப்படுத்தப்பட்ட x மாறிக்கு $z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ என்ற நிலைத்தூரங்கள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் F. யேட்சு இவர்களின் "Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research" Published by Oliver & Boyd, Edinburgh—லிருந்து, ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களது அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 2: இயல்நிலை வளைகோட்டின் பரப்பளவு

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2767	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3909	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4008	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706

1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4973	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4927	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4985	.4986

பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) R. A. ஃபிஷர்; பேராசிரியர் F. யேட்சு "Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" Published by Oliver & Boyd, Edinburg—விருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டது.

அட்டவணை. 8 ஸ்டூடண்ட் t-ன் பரவல்.

[n = இயக்கப் பாகைகள் pr = ஊக அளவுகள்.]

n/P_r	0.50	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.00	6.31	12.71	31.82	63.66	636.62
2	0.82	2.92	4.30	6.97	9.93	31.60
3	0.77	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94
4	0.74	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
5	0.73	2.02	2.57	3.37	4.03	6.96
6	0.72	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
7	0.71	1.90	2.37	3.00	3.50	5.41
8	0.71	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
9	0.70	1.83	2.26	2.80	3.25	4.78
10	0.70	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59
11	0.70	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44
12	0.70	1.78	2.18	2.68	3.06	4.32
13	0.69	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22
14	0.69	1.76	2.15	2.62	2.98	4.14
15	0.69	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07
16	0.69	1.75	2.12	2.58	2.92	4.02
17	0.69	1.74	2.11	2.59	2.90	3.97

18	0.69	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92
19	0.69	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88
20	0.69	1.73	2.09	2.54	2.8	8.85
21	0.69	1.72	2.08	2.52	2.83	3.83
22	0.69	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79
23	0.69	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77
24	0.69	1.71	2.06	2.49	2.80	3.75
25	0.68	1.71	2.06	2.49	2.79	3.73
26	0.68	1.71	2.06	2.48	2.78	3.71
27	0.68	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69
28	0.68	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67
29	0.68	1.70	2.05	2.46	2.76	3.66
30	0.68	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65
∞	0.67	1.65	1.96	2.43	2.58	3.29

பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) ஃபிஷர், பேராசிரியர் A. யேட்ச இவர்களின் Sa;istical Tables for Biological Agricultura and Medical Research "Published by Oliver & Boyel, Ediubrough-லிருந்து ஆசிரியர், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 4. கை வர்க்கப் பரவல்

[n = இயக்கப் பாகைகள் P_r = ஊக அளவுகள்]

n/P_r	0.95	0.50	0.10	0.05	0.01
1	0.004	0.46	2.71	3.84	6.64
2	0.103	1.39	4.00	5.99	9.21
3	0.35	2.37	6.25	7.82	11.34
4	0.71	3.36	7.78	9.49	13.28
5	1.14	4.35	9.24	11.07	15.09
6	1.64	5.35	10.64	12.59	16.81
7	2.17	6.35	12.02	14.07	18.48
8	2.73	7.34	13.36	15.51	20.09
9	2.32	8.34	14.68	16.92	21.67
10	3.94	9.34	15.99	18.31	23.21
11	4.58	10.34	17.28	19.68	24.72
12	5.23	11.34	18.55	21.03	26.22
13	5.89	12.34	19.81	22.36	27.69
14	6.57	13.34	21.06	23.68	29.14
15	7.26	14.34	22.31	25.00	30.58
16	7.96	15.34	23.54	26.30	32.00

17	8.67	16·34	24.77	27.59	33.41
18	9.39	17.34	25.99	28.87	34·80
19	10.12	18.34	27.20	30.14	36.19
20	10.85	19.34	28.41	31.41	37·57
21	11.59	20.34	29.62	32.67	38.93
22	12.34	21.34	30.81	33·92	40.29
23	13.09	22·34	32.01	35·17	41.64
24	13.85	23.34	33·20	36.42	42.98
25	14.71	24.34	34.38	37.65	44.31
26	15.38	25.34	35.56	38.88	45.64
27	16.15	26.34	36.74	40.11	46.66
28	16.93	27·34	37.92	41.84	48.28
29	17.71	28.34	39.09	42.56	49.59
30	18.49	29.34	40.26	43.77	50.89

பேராசிரியர் (காலஞ் சென்ற R. A. பிஷர், பேராசிரியர் F. யேட்சு இவர்களின் "Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research published by Olived Boyd" Edinburgh - லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியீட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 5 F-ன் பரவல்

(5% சிறப்புகாண் மட்டத்தில்) (n_1, n_2 = இயக்கப் பாகைகள்)

n_2/n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	5.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96

18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.03	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.52	1.00

பேராசிரியர் (காலஞ் சென்ற) R. A. ஃபிஷர், பேராசிரியர் F. யேட்சு இவர்களின் "Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research published by Oliver Boyd, Edinburgh"லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியிட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை-6.

F-ன் பரவல்

(1% சிறப்புக்காண் மட்டத்தில்)

[n_1 = இயக்கப்பாகைகள் , n_2 = இயக்கப்பாகைகள்]

n_1 / n_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98.49	99·00	99·17	99·25	99·30	99·33	99·36	99·42	99·46	99·50
3	34·12	30·81	29·46	28·71	28·24	27·91	27·49	27·05	26·60	26·12
4	21·20	18·00	16·69	15·98	15·52	15·21	14·80	14·37	13·93	13·46
5	16·26	13·27	12·06	11·39	10·97	10·67	10·29	9·89	9·47	9.02
6	13·74	10·92	9·78	9·15	8·75	8·47	8·10	7·72	7·31	6·88
7	12·25	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	6·84	6·47	6·07	5·65
8	11·26	8·65	7·59	7.01	6·63	6·37	6·03	5·67	5·28	4·86
9	10·56	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·47	5·11	4·73	4·31
10	10·04	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·06	4·71	4·33	3·91
11	9·65	7·20	6·22	5·67	5·32	5·07	4·74	4·40	4·02	3·60
12	9·33	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·50	4·16	3·78	3·36
13	9·07	6·70	5·74	5·20	4·86	4·62	4·30	3·96	3·59	3·16
14	8·86	6·51	5·56	5·03	4·69	4·46	4·14	3·80	3·43	3·00
15	8·68	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4.00	3·67	3·29	2·87

16	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	3·89	3·55	3·18	2·75
17	8·40	6·11	5·18	4·67	4·34	4·10	3·79	3·45	3·08	2·65
18	8·28	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·71	3·37	3·00	2·57
19	8·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·63	3·30	2·92	2·49
20	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·56	3·23	2·86	2·42
21	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·51	3·17	2·80	2·36
22	7·94	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·45	3·12	2·75	2·31
23	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·41	3·07	2·70	2·26
24	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·36	3·03	2·66	2·21
25	7·77	5·57	4·68	4·18	3·86	3·63	3·32	2·99	2·62	2·17
26	7·72	5·53	4·64	4·14	3·82	3·59	3·29	2·96	2·58	2·13
27	7·68	5·49	4·60	4·11	3·78	3·56	3·26	2·93	2·55	2·10
28	7·64	5·45	4·57	4·07	3·75	3·53	3·23	2·90	2·52	2·06
29	7·60	5·42	4·54	4·04	3·73	3·50	3·20	2·87	2·49	2·03
30	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·17	2·84	2·47	2·01
40	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	2·99	2·66	2·29	1·80
60	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·82	2·50	2·12	1·60
120	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·66	2·34	1·95	1·38
∞	6·64	4·60	3·78	3·32	3·02	2·80	2·51	2·18	1·79	1·00

பேராசிரியர் (காலஞ்சென்ற) R. A. ஃபிஷர். பேராசிரியர் யேட்சு இவர்களின் " Inatistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research" Published by Oliver & Boyd, Edinburgh"—லிருந்து ஆசிரியர்கள், வெளியீட்டோர்களின் அனுமதியுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

மேற்கோள் நூல்களின் பட்டியல்

(List of Reference Books)

1, H. D. Brunk — "An Introduction to Mathematical Statistics" Blaisdell Publishing Co., New York 1965.

2. Chakravarthy, Laha, Roy— "Hand book of methods of Applied Statistics." John Wiley & Sons, Inc. 1967.

3. Herald Cramer — "Elements of Probability Theory." John Wiley & Sons, Ny. 1955.

4. Feller — "Probability Theory and its applications. Vol. I" John Wiley & Sons, Ny. 1950.

5. J. E. Freund — "Mathematical Statistics." Prentice Hall, Ny. 1964.

6. S.C Gupta & V. K. Kapoor "Fundamentals of Mathematical Statistics" Sultan Chand & Co. II Edn,, 1970

7. P. G. Hoel — "Introduction to Mathematcal Statistics" John Wiley & Sons. Ny. 1964.

8. Hogg & Craig — "Introduction to Mathematica Statistics" The Macmillan & Co., III Edn., 1970.

9. M. G. Kendall & A. Stuart — "The Advanced Theory ol Statistics-Vol. I." Charlesf Griffin Co., London, 1958.

10. Kenney, & Keeping — " Mathematics of Statistics Part I" D. Von Nostrand Inc., Ny. 1959.

11. Kenney & Keeping — "Mathematics of Statistics Part II" D. Von Nostrand Inc. 1959

12. Mathai, A. M. — "Introduction to Statistical Mathematics" S. chand & Co., 1967.

13. Mood & Graybill — "Introduction to Theory of Statistics" Mc Graw Hill Book Co., Inc. Ny. 1963.

14. C. Radhakrishna Rao — "Advanced Statistical Methods in Biometric Research". John Wiley & Sons Inc., Ny. 1952.

15. C. Radhakrishna Rao — "Linear Statistical Inference and its applications." John Wiley & Sons, Inc., Ny. 1965.

16. Spiegel, Murray, R — "Theory and Problems of Statistics" Schaum Publishing Co., Ny. 1967.

17. H.M. Walker & J. Lew — "Statistical Inference" Holt, Rinehart & Winston Inc., Ny. 1953.

18. C. E. Weather Burn — " Mathematical Statistics" Cambridge at Univ. Press 1957.

19. S. S. Wilks — " Mathematical Statistics " Princeton Univ. Press. New Jersey, 1955.

20. G.U. Yule & M. G. Kendall — "Introduction to theory of Statistics" Charles Griffin & Co, 1953.

கலைச் சொற்கள்

A

Additive property — கூட்டல் நியதி
Aposteriori probability — பின்னறிந்த நிகழ்தகவு, (ஊக அளவு)
Apriori probability — முன் கூட்டிய ஊக அளவு
Allocation — பங்கீடு
Arithmetic Mean — கூட்டிடை, கூட்டுச் சராசரி
,, progression — கூட்டுத் தொடர்
Ascending order — ஏறுவரிசை
Association — தொடர்பு
,, of attributes — குணப்பண்புகளின் தொடர்பு
,, of coefficient of — தொடர்புக் கெழு
Attribute — குணப்பண்பு
Averages — சராசரிகள்
Axis — அச்சு

B

Bell-shaped — 'மணி' வடிவுடைய
Biased variate — பிறழ்ச்சியான மாறி
Binomial variate — ஈருறுப்பு மாறி
Bivariate — இரு மாறி
Boundary — வரம்பு

C

Census method — மக்கட் கணிப்பு, முழுமைத் தொகுதிக் கணிப்பு
Central tendency — மையநிலைப் போக்கு
Chance — வாய்ப்பு
Characteristic function — சிறப்புச் சார்பலன்

Class	—	பிரிவு, வகுப்பு
,, frequency	—	பிரிவு, அலைவெண்
,, intervel	—	பிரிவு, இடைவெளி
,, limit	—	பிரிவு எல்லை
Classification	—	பாகுபாடு, பிரிவினை
Classify	—	பாகுபடுத்து
Coefficient	—	கெழு
,, of assocication	—	தொடர்புக் கெழு
,, of dispersion	—	சிதறல் கெழு
,, of correlation	—	உடன் தொடர்புக்கெழு
,, of regression	—	தொடர்புப் போக்குக்கெழு
,, of skewness	—	கோட்டக் கெழு, சமச்சீரின்மைக்கெழு
,, of variation	—	மாறுபாட்டுக் கெழு
Compound event	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
Conditional Probability	—	நிபந்தனை ஊக அளவு
,, ,, density	—	நிபந்தனை ஊக அளவு அடர்த்தி
Cenfidence limit	—	நம்பக எல்லை
Constraint	—	இறுக்கி
Consumer	—	துய்ப்போர், நுகருவோர்
Centingency table	—	இணைப்பட்டியல்
Continuity	—	தொடர்ச்சி
Continuous variable	—	தொடர் மாறி
Continuous type	—	தொடர் வகை
Correlation	—	உடன் தொடர்பு
,, positive	—	நேரிடை உடன் தொடர்பு
,, negative	—	எதிர்மறை உடன் தொடர்பு
,, rank	—	வரிசைத் தொடர்பு
,, table	—	தொடர்புப் பட்டியல்
Covariance	—	உடன் மாறுபாடு
Critical	—	தீர்வு கட்டமான, 'கெடுபிடி' யான
,, region	—	தீர்வுகட்ட பகுதி, 'கெடுபிடி' யான பகுதி, மறுக்கப்படும் பகுதி
Cumulative	—	திரள்
,, distribution function	—	திரள் பரவல் சார்பலன்
,, frequency	—	திரள் அலைவெண்

,, frequency curve, 'less than —	கீழ் இனத்திரள் அலைவெண் வளை கோடு
,, frequency curve, greater than —	மேலினத் திரள் அலைவெண் வளைகோடு
Curve —	வளை கோடு
Curve-fitting —	வளை கோட்டைப் பொருத்துதல்

D

Data —	விவரங்கள்
,, primary —	முதனிலை விவரங்கள்
,, secondary —	இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
,, statistical —	புள்ளி விவரங்கள்
Decile —	பதின் மானம்
Degree —	பாகை
Degrees of freedom —	இயக்கப் பாகைகள்
Denominator —	பகுதி
Density —	அடர்த்தி
,, probability —	ஊக அளவு அடர்த்தி, நிகழ் தகவு அடர்த்தி
Dependent event —	சார்புடைய நிகழ்ச்சி
Derive —	வருவி
Descending order —	இறங்கு வரிசை
Design —	உருவ அமைப்பு, திட்ட அமைப்பு
Deviation —	வேறுபாடு, விலக்கம், கழிவு
,, mean —	சராசரி விலக்கம்
,, mean, from mean —	கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்
,, mean, from medium —	இடை நிலையிலிருந்து கழிக் கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக் கம்
,, mean, from mode —	முகடிலிருந்து கழிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்
,, quartile —	கால்மான விலக்கம்
,, standard —	தர விலக்கம்

Diagram, scatter	— சிதறல் விளக்கப்படம்
,, statistical	— புள்ளி விவர விளக்கப்படம்
Die	— பகடை
Differential	— வகையீடு
Discontinuons variable Discrete variable	— தொடர்பிலா மாறி, தனித்த வகை மாறி
Dispersion	— சிதறல்
,, measures of	— சிதறல் அளவைகள்
Distribution	— பரவல்
,, binomial	— ஈருறுப்புப் பரவல்
,, beta, of first kind	— முதல்வகை பீட்டாப் பரவல்
,, beta, of second kind	— இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல்
Distribution, bivariate normal	— இருமாறி இயல் நிலைப் பரவல்
,, continuous	— தொடர்ச்சியான பரவல்
,, discrete	— தனித்த பரவல்
,, exponential	— அடுக்குப் பரவல்
,, gamma	— காம்மாப் பரவல்
,, geometric	— ஜியோமிதிப் பரவல்
,, hypergeometric	— மட்டுமீறிய ஜியோமிதிப் பரவல்
,, multinomical	— பல உறுப்புப் பரவல்
,, negative binomial	— எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல்
,, normal	— இயல் நிலைப்பரவல்
,, Poisson	— பாய்ஸான் பரவல்
,, rectangular (uniform)	— செவ்வகப் பரவல், (ஒரே சீரான பரவல்)
,, sample correlation coefficient, r	— மாதிரி உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பரவல்
,, sample mean	— மாதிரிச் சராசரியின் பரவல்
,, sample regression coefficient, b_2	— மாதிரித் தொடர்புப்போக்குக் கெழுவின் பரவல்
,, trinomial	— மூன்று உறுப்புப் பரவல்

Distribution sample variance s^2 — மாதிரியின் மாறுபாட்டுப் பரவல்
,, of non-central t — மையமற்ற *t*–ன் பரவல்
,, of t-students' "t"— *t*–ன் பரவல் (ஸ்டுடன்டின் *t* பரவல்)
,, of χ^2 — χ^2 ன் பரவல், 'கை'வர்க்கப் பரவல்
,, of non-central χ^2 — மையமற்ற 'கை'வர்க்கப் பரவல்
,, of *F* — *F*-ன் பரவல்
,, of non-central F — மையமற்ற *F*-ன் பரவல்
,, of *z* — *z*-ன் பரவல்

E

Equally likely — சரிசம வாய்ப்புள்ள
Empirical formula — அனுபவ ரீதியில் உள்ள சூத்திரம்
Enquiry — கணக்கெடுப்பு
Enumertor — கணக்கெடுப்போர்
Error — பிழை
Establish — நிறுவு
Estimate — மதிப்பீடு
Evaluate — கணக்கிடு
Evaluation — கணக்கீடு
Even function — இரட்டைப் படைச் சார்பலன்
Event — நிகழ்ச்சி, விளைவு
,, dependent — சார்புடைய நிகழ்ச்சி
,, indepenpent — சார்பற்ற, (சார்பிலா) நிகழ்ச்சி
,, conditional — நிபந்தனை நிகழ்ச்சி
Expectation, Mathematical — கணக்கு முறைப்படி எதிர்பார்க்கத்தக்க அளவு
Expected value — எதிர்பார்க்கத் தக்க அளவு (மதிப்பு)

F

Factor — காரணி
Finite — முடிவுடைய, எல்லையுள்ள
Fit — இணைப்பு, பொருத்தல்
Fluctuation — ஏற்ற விறக்கம்
Forecast — முன் கணிப்பு
Frequency — அலைவெண்
,, curve — அலைவெண் வளைகோடு
,, cumulative — திரள் அலைவெண்
,, distribution — அலைவெண் பரவல்
Function — சார்பலன்

G

Greometric mean — ஜியோமிதிச் சராசரி
,, distribution — ஜியோமிதிப் பரவல்
,, progression — ஜியோமிதித்தொடர்
Graph — வரைப் படம்
Greater than Ogive — மேலின 'ஓகைவ்'
Group — தொகுதி, தொகுப்பு

H

Harmonic Mean — இசைச் சராசரி
,, progression — இசைத் தொடர்
Homogeneous — சம படித்தான, ஒரு படித் தான
Hypothesis — எடுகோள்
,, Null — சூன்ய எடுகோள்

I

Identical — சர்வ சமமுடைய
Individual — தனித்த
Inerence — உய்த்துணர்வு
Infinite — முடிவிலியான வரையற்ற, எல்லையற்ற
Infinity — முடிவிலி

Integral — தொகுப்பு
Interval — இடைவெளி
Item — உறுப்பு

J

J shaped — J வடிவுடைய

K

Kurtosis — தட்டையளவு
Kurtic, lepto — மிகைத்தட்டை
,, , platy — குறைத்தட்டை

L

Large samples — விரிந்த மாதிரிகள்
Least squares Method — மீச்சிறு வர்க்கமுறை
Less than Ogive — கீழின ஒகைவ்
Limit — எல்லை, வரம்பு
Linear constraint — நேர்கோட்டு இறுக்கி, ஒருபடி இறுக்கி
Logarithm — மடக்கை
Lower quartile — கீழ்க் கால்மானம்

M

Marginal probability — விளிம்பு ஊக அளவு (நிகழ் தகவு)
,, ,, density function விளிம்பு ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்
Maximum — உச்சம், பெருமம்
Mean — சராசரி
,, arithmetic — கூட்டுச் சராசரி
,, weighted — எடைச் சராசரி

Measures of central tendency — மையநிலைப் போக்கு அளவுகள்

,, of dispersion — சிதறல் அளவைகள்

,, of skewness — சமச்சீரின்மை அளவைகள், கோட்ட அளவைகள்

,, of kurtosis — தட்டை அளவைகள்

Medium — இடைநிலை

Minimum — சிறுமம், மிகக்குறைந்த

Mode — முகடு

,, uni-modal — ஒரு முகட்டு...

,, bi-modal — இரு முகட்டு...

Moments — திருப்புத் திறன்கள்

Moment Generating Function — திருப்புத்திறனை உருவாக்கும் சார்பலன்

Most probable — பெரும்பாலாக நிகழக்கூடிய

Mutually exclusive — ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை படைத்த

N

Negative binomial. — எதிர்மறை ஈருறுப்பு

Non-nagative function — எதிர்மறையிலா சார்பலன்

Normal curve — இயல் நிலை வளை கோடு

,, equation — ஒழுங்குச் சமன்பாடு

,, variates — இயல் நிலை மாறிகள்

,, population — இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதி.

,, probability curve — இயல் நிலை ஊக அளவு வளை கோடு

Null Hypothesis — சூன்ய எடுகோள்

O

Observation — கண்டறிதல்
Odd function — ஒற்றைப் படைச் சார்பலன்
Ogive curve — ஓகைவ் வளைகோடு
One-tailed test — ஒரு முனைச் சோதனை
Ordinate — நிலைத் தூரம்
Origin — மூலம், ஆதி

P

Paired variates — இணைந்த மாறிகள், சோடி மாறிகள்
pair wise — இணை இணையாக, சோடி சோடியாக
parameter — முழுமைத் தொகுதிப் பண்பளவு
pencentile — நூற்றுமானம்
population — முழுமைத் தொகுதி
probability — ஊக அளவு, நிகழ்தகவு
,, density function — ஊக அளவு அடர்த்திச் சார்பலன்
(p.d.f): — (ஊ.அ.சா)
,, mathematical — கணக்கியல் ஊக அளவு
,, statistical — புள்ளியியல் ஊக அளவு
Probable error — நிகழக் கூடிய பிழை

Q

Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quality Control — தரக் கட்டுப்பாடு
Quartile — கால் மானம்
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்

Quartile deviation — கால் மான விலக்கம்
,, range — கால்மான வீச்சு
,, ,, inter — இடைக் கால்மான வீச்சு
Questionnaire — வினுத்தாள்

R

Range — வீச்சு
Rank — வரிசை
,, Correlation — வரிசைத் தொடர்பு
Ratio — விகிதம்
Raw Data — சீர்படா விவரங்கள்
Recurrence Relation — மறுதரவு தொடர்பு
Regression — தொடர்புப் போக்கு
,, Coefficient — தொடர்புப் போக்குக் கெழு
,, equation — தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு
,, estimate — தொடர்புப் போக்கு மதிப்பீடு
,, linear — நேர்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு
Reliability — ஏற்புடைமை, நம்பகம்

S

Sample — மாதிரி
,, randum — ராண்டம் மாதிரி
Sampling error — மாதிரித் தேர்வின் பிழை
,, simple randum — சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை
scale — அலகு
schedule — வினுப் பட்டியல்
Shape — வடிவம்
Size — பருமம்
Small Samples — சிறிய மாதிரிகள்

Standard deviation — தரவிலக்கம்
Standardisation — தரப்படுத்துதல்
Standardised — தரப்படுத்தப்பட்ட
Statistic — மாதிரிப் பண்பளவு
Statistics — புள்ளியியல்
,, mathematical — கணிதப்புள்ளியியல்
Statistical methods — புள்ளியியல் அறி முறைகள்
,, inference — புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு
,, quality control — புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு
Symmetry — சமச் சீரான

T

Table — அட்டவணை
Tabulate — பட்டியல் அமை
Techniques — பொறி முறைகள்
Test — சோதனை
Test of significance — பொருளுடைமை சோதனை, சிறப்புகாண் சோதனை
Test χ^2 — கை வர்க்கச் சோதனை
,, students' t — *t*—சோதனை (ஸ்டுடன்டின் *t*) சோதனை
Tools — கருவிகள், சாதனங்கள்
Trial — முயற்சி
Two tailed test — இரு முனைச் சோதனை

U

Unbiased — பிறழ்ச்சி யற்ற
Uniform — ஒரு சீரான
Unit — அலகு
Upper quartile — மேல் கால் மானம்

V

Variance — மாறுபாடு
Variate, variable — மாறி

,,	continuous	—	தொடர் மாறி
,,	discrete	—	தனித்த மாறி
,,	dependent	—	சார்புள்ள மாறி
,,	independent	—	சார்பற்ற மாறி
,,	(uni—)	—	ஒரு மாறி
,,	(bi—)	—	இரு மாறி
,,	(multi—)	—	பல மாறி

X

χ^2	—	கை வர்க்கம்
χ^2-test	—	கை வர்க்கச் சோதனை

———

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

★

பின்வரும் பொருள்களில்

பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்

விரைவில் வெளிவரும்

கணிதம்	—	41 நூல்கள்
இயற்பியல்	—	28 ,,
வேதியியல்	—	89 ,,
தாவரவியல்	—	80 ,,
விலங்கியல்	—	40 ,,
பொறியியல்	—	50 ,,
வரலாறு	—	45 ,,
அரசியல்	—	34 ,,
பொருளாதாரம்	—	83 ,,
வணிகவியல்	—	36 ,,
புள்ளியியல்	—	16 ,,
உளவியல்	—	8 ,,
புவியியல்	—	18 ,,