தொகுமுறை வரைகணிதம்

- மகாதேவன் (ஆர்)

தொகுமுறை வரைகணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆர். மகாதேவன்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—194

தொகுமுறை வரைகணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்
ஆர். மகாதேவன்,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1969

B.T.P. No. 194

© Bureau of Tamil Publications

Pure Geometry for B.Sc.
R. Mahadevan

Net Price Rs. 2-00
(NO DISCOUNT)

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-5

அணிந்துரை

(திரு. செ. மாதவன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாண வர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P. U. C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழி லேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகை யில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்ப தற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக் கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரியமுறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவி யியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளி யியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**தொகுமுறை வரைகணிதம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 194ஆவது வெளியீடாகும். இது வரை 229 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர் களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் ; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித் தாகுக.

செ. மாதவன்

நூன்முகம்

'தொகுமுறை வரைகணிதத்'தின் முறை பண்டைக் கிரேக்கர்களால் வகுக்கப்பட்டது. இம் முறையின் சிறப்பை யூக்லிதரது (Euclid) 'அடிப்படை' எனப் பொருள்படும் 'Elements' எனும் நூல் தொகுப்பால் காணலாம். ஒருசில எடுகோள்கள் (Postulates), ஒருசில விதிகள், விளக்கங்கள், இவற்றை மட்டும் ஆதாரமாகக் கொண்டு, அவற்றிற்கோ அல்லது ஒன்றற்கொன்றே, முரணில்லாத முடிவுகளைக் கோவையாக இம்முறை காண்கிறது. இத்தகைய ஆய்வு முறை, கல்விக்குப் பெரும்பயனளிக்கத்தக்கது எனக் கருதி, யூக்லிதரது முறைவடிவ கணிதம் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளாக மேலைநாடெங்கும் பயிலப்பட்டு வந்தது.

இச் சிறு நூலில் பதினேழாம் நூற்றுண்டுக்குப் பிறகு இம்முறையில் கண்ட தேற்றங்கள் சிலவற்றைக் கோவையாகக் காட்டியுள்ளோம். கனவடிவ கணிதத் தேற்றங்கள் யூகிலிதரது 'Elements' எனும் நூல் தொகுப்பின் பதினொன்றும் நூலில் காணலாம். மாணவர்கள், முடிவுகளைவிட அவற்றைக் காணும் முறையே பயிலத் தகுந்தது என மனதில் கொண்டு பயனுறுவார்களென நம்புகிறோம்.

'நூல் ஆசிரியன்'

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	நியமப் பாதை	...	1
2.	இசைப்புள்ளி வரிசையும் கோட்டுக் கற்றையும்	...	10
3.	வட்டங்களின் ஆர்மானிக்குப் பண்புகள்	...	30
4.	இரு வட்டங்களின் அச்சு	...	49
5.	போன்மை மையங்கள்	...	68
6.	தன்மாற்றம்	...	76
7.	கனவடிவ கணிதம்	...	97

1. நியமப் பாதை

சில நியதிகட்கு உட்பட்டு ஒரு புள்ளி இயங்கினால், அதன் பாதை, நியமப்பாதை (Locus) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சில கூறு வோம் :

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை, ஒரு வட்டமாகும்.

2. இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரமாக இருக்க இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை அவ்விரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுக்குத்துக் கோடாகும்.

3. இரண்டு கோடுகளிலிருந்து சமதூரமாக இருக்க இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை, அந்தக் கோடுகளிடையே உள்ள கோணங் களின் இரு சம வெட்டிகளாகும்.

4. ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தில் இருக்கும்படி இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை, கோட்டிற்கு இருபுறமும் அந்த தூரத்தில் உள்ள இரண்டு இணைகோடுகளாகும்.

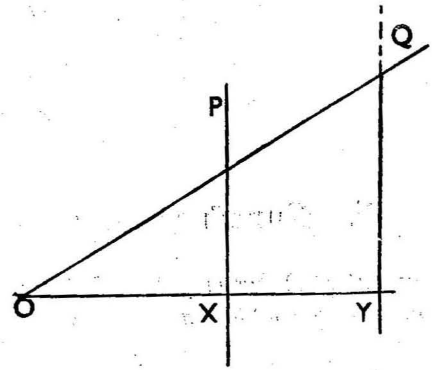
5. இரண்டு புள்ளிகள், இயங்கும் புள்ளியில், ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தைத் தாங்கினால் இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்ட வில்லாகும்.

இவ்வாறு நியமப்பாதை (i) ஒரு வரையாகலாம் (ii) அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரையும் ஆகலாம் (iii) அல்லது ஒரு வரையின் ஒரு பகுதி மட்டும் ஆகலாம். எவ்வாறாயினும் (i) நியதிக்குட்படும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் நியமப்பாதையில் அமையும் (ii) நியமப்பாதை யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் நியதிக்குட்பட்டிருக்கும்.

தேற்றம் 1

O என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி. P என்பது இயங்கும் புள்ளி. OPயில் $OP : OQ$ ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருக்கு மாறு கொள்ள (i) P ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கினால் Qவின்

நியமப்பாதை அதற்கு இணையான ஒரு கோடாகும். (ii) P ஒரு வட்டத்தில் இயங்கினால், Qவின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.



படம் 1.

(i) AB எனும் கோட்டில் P இயங்குகிறது.
ABக்குக் குத்தாக OX என்னும் கோடு வரைக.
$OP : OQ = k$ எனும்படி OPயில் Q எனும் புள்ளியைக் கொள்க.
OXக்கு QY எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

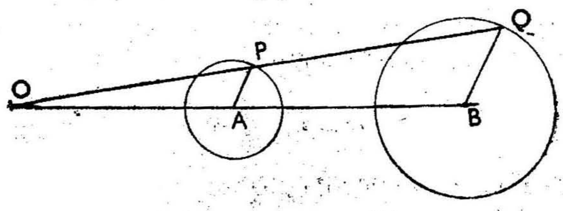
நிருபணம் : $\angle OYQ = 90° = \angle OXP$

$\therefore \quad QY \parallel^{l} PX$

$\therefore \quad \Delta\, OQY \;|||\; \Delta\, OPX$

$\therefore \quad \dfrac{OX}{OY} = \dfrac{OP}{OQ} = k$

Q எங்கிருப்பினும் X நிலையான புள்ளி. Oவும் நிலையானது. $\therefore$ Yயும் OX எனும் நிலையான கோட்டில் நிலையான புள்ளியாகும். $\angle OYQ = 90°$ ஆனதால், Qவின் நியமப்பாதை OXக்கு Yயில் உள்ள குத்துக் கோடாகும். அதாவது ABக்கு Y வழியுள்ள இணைகோடாகும்.



படம் 2.

(ii) P என்ற புள்ளி, Aஐ மையமாகவும் 'a' நீளமுள்ள ஆரமுடைய வட்டத்தில் இயங்கினல்

வரைதல் : PA, OAஐ ஒன்று சேர்க்க.

Q வழி PAக்கு QB எனும் இணைகோடு வரைக; OAஐ, இந்தக்கோடு Bயில் சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம் : $\because PA \parallel QB \quad \therefore \triangle OAP \parallel\!\!\!\parallel \triangle OBQ$

$$\therefore \quad \frac{AP}{BQ} = \frac{OA}{OB} = \frac{OP}{OQ} = k$$

ஆனல் O, A நிலையான புள்ளிகள்

$\therefore$ Bயும் நிலையான புள்ளி.

$$BQ = \frac{1}{k}.AP = \frac{a}{k}$$

$\therefore$ Bயிலிருந்து குறிப்பிட்ட தூரத்தில் Q இயங்குகிறது.

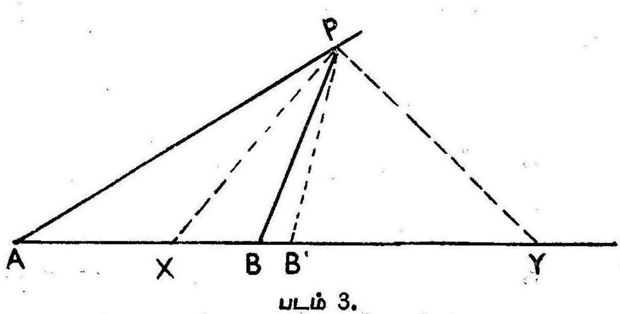
$\therefore$ Qயின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

குறிப்பு : P ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களில் நகர்ந்தால் Q ஒத்த வடிவுடைய ஒரு பலகோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களில் நகரும்.

தேற்றம் 2

(அப்போலோனியஸ் வட்டம்)

இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்துள்ள தூரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.



படம் 3.

கொள்கை : A, B இரு புள்ளிகள்.

$PA : PB = l : m$ எனும்படி புள்ளி P அமைகிறது.

நிரூபிக்க : P இந்த நியதிக்குட்பட்டு இயங்கினால் அதன் நியமப் பாதை ஒரு வட்டம் என.

வரைதல் : $\angle APB$ என்ற கோணத்தின் உள் வெளிச் சம வெட்டிகள் வரைக. அவை ABஐ X, Y என்ற புள்ளிகளில் முறையே சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம் : $AX : XB = AP : PB = AY : BY = l : m$

$\therefore$ ABயில் X, Y என்பவை P எங்கிருப்பினும் நிலையான புள்ளிகளாகும்.

அன்றியும் $\angle XPY = 90°$

$\therefore$ Pயின் நியமப்பாதை ABஐ $l : m$ எனும் விகிதத்தில் உள்ளாகவும் புறம்பாகவும் பிரிக்கின்ற X, Y எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

(ii) இவ்வட்டத்தில் P அமைந்தால் $PA : PB = l : m$ என நிரூபிக்கவேண்டும்.

(இயன்றால்) $\angle XPB' = \angle APX$ எனும்படி PB'ஐ வரைக. இது ABஐ B'ல் வெட்டட்டும்.

$\because$ $\angle XPY = 90°$ $\therefore$ PY எனும் கோடு $\angle APB'$யின் வெளிச் சமவெட்டியாகும்.

$$\therefore \frac{AX}{XB'} = \frac{AP}{PB'} = \frac{AY}{B'Y} \quad \text{(அளவிலும் குறியிலும்)}$$

$$\therefore \frac{AX}{AY} = \frac{XB'}{B'Y}$$

ஆனால் $$\frac{AX}{AY} = \frac{XB}{BY}$$

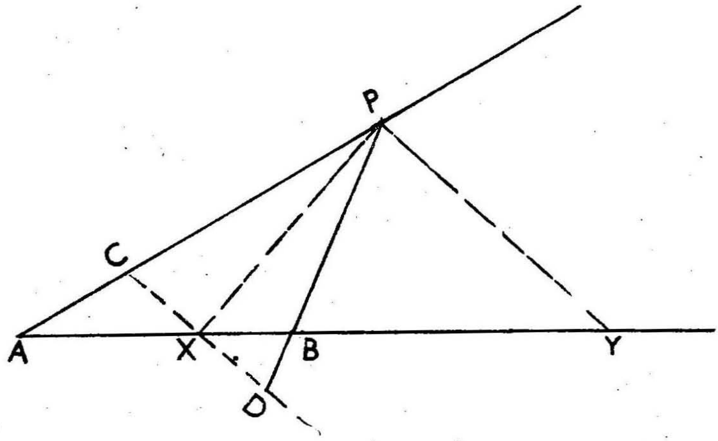
$$\therefore \frac{XB'}{B'Y} = \frac{XB}{BY} \quad \text{(அளவிலும் குறியிலும்)}$$

$\therefore$ B' எனும் புள்ளி Bயுடன் பொருந்துகிறது.

$\therefore$ PX, PY எனும் கோடுகள் $\angle APB$யின் உள், வெளிச் சமவெட்டிகள்

$\therefore$ $\boldsymbol{PA : PB = AX : XB = l : m}$ ஆகிறது.

மாற்று நிரூபணம் : (ii) X வழி PYக்கு இணையாக, CXD எனும் கோடு வரையவும். இது PAஐ Cயிலும் PBஐ Dயிலும் வெட்டட்டும்.



படம் 4.

$$\therefore \quad \frac{CX}{PY} = \frac{AX}{AY} = \frac{XB}{BY} = \frac{XD}{PY}$$

$\therefore \quad CX = XD$

$\angle PXC = \angle PXD = 90^\circ$

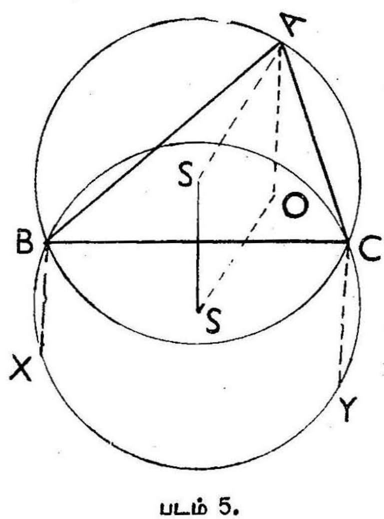
$\therefore \quad PC = PD \qquad [\because XPY = 90^\circ \quad CX \parallel^l PY]$

$\angle APB$ஐ PX சம வெட்டுகிறது.

$\therefore \quad \boldsymbol{PA : PB = AX : XB = l : m.}$

தேற்றம் 3

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கமும், எதிர்கோணமும் தரப்பட்டால் (i) அதன் குத்துமையம் (ii) உள் தொடு வட்டமையம் (iii) வெளித் தொடு வட்டமையங்கள் (iv) மையக்கோட்டு சந்தி இவற்றின் நியமப்பாதைகள் வட்டவிற்களாகும்.



படம் 5.

கொள்கை : ABC என்ற முக்கோணத்தில் பக்கம் BCயும் கோணம் Aயும் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) நிறுவ : அதன் குத்துமையத்தின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டவில் என.

வரைதல் : BCயும், கோணம் Aயும் தரப்பட்டதால் Aயின் நியமப் பாதை, BCயின் மேல் A எனும் கோணத்தைத் தாங்கும் வட்டவில் BAC ஆகும். இதை வரைக. வட்டமையம் S ஆகுக. ஆகவே A எங்கிருப்பினும் சுற்று வட்டமையம் ஒன்றே. ABCயின் குத்துமையம் O ஆகுக. BCக்கு SA' எனும் குத்துக்கோடு வரைந்து அதை S'க்கு $SA=AS'$ எனும் படி நீட்டு. $S'O$ஐ ஒன்று சேர்.

நிரூபணம் : $S'S \parallel AO$ (இரண்டும் $\perp BC$)

$SS'=AO$ ($\because SA'=\frac{1}{2}AO$)

$SS'OA$ இணைகரம்

$\therefore S'O=SA$ ஆனால் S' ஒரு நிலைப்புள்ளி.

$\therefore$ Oவின் நியமப்பாதை, S'ஐ மையமாகவும் SA நீளமுள்ள ஆரமுள்ள வட்டமாகும்.

SA எனும் ஆரம் வட்டவில் CABயில் சுழலும்போது அதே அளவுள்ள வட்டவில்லில் S_1Oவும் சுழல்கிறது. ஆகவே Oவின் நியமப்பாதை இந்த வட்டவில்லாகும். [இந்த வட்டவில்லில் $XBCY$ என்ற பாகம், வில் BACக்குச் சமமாக இருக்கும் BCக்கு BX, CY என்பவை குத்துக்கோடுகள்.]

(ii) உள்தொடு வட்டமையத்தின் நியமப்பாதை

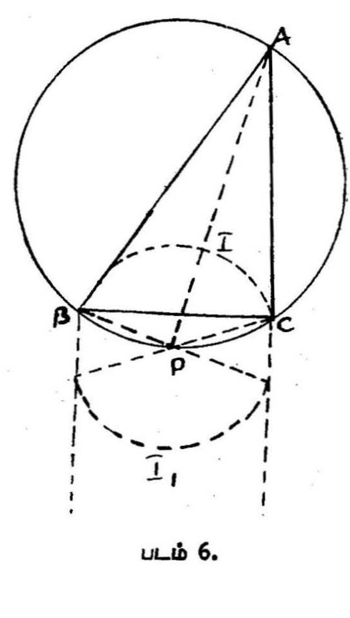
$I, I_1 I_2 I_3$ என்பவை முக்கோணம் ABயின் உள், வெளித்தொடு வட்டமையங்களாகுக.

உள் சமவெட்டி, BAC என்ற கோணத்தின் வில் BCஐ Pயில் வெட்டட்டும்.

$\therefore$ BCயின் நடுப்புள்ளி P ஆகும் அன்றியும் $IBI_1=90°$.

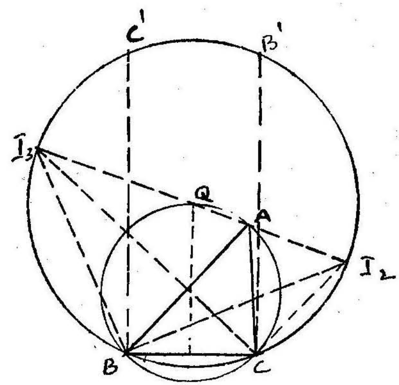
$\therefore PI=PI_1=PB.$

$\therefore$ I, I_1இன் நியமப்பாதை Pஐ மையமாகவும் PB ஆர நீளமுள்ள வட்டத்தில் அமைகிறது. அவற்றுள், Iயின் நியமப்பாதை A உள்ள பக்கம் அமையும் வில்லாகும். ஆகவே I_1யின் நியமப்பாதையும் இதற்கு எதிர்ப்புறமாக அமையும் சம வட்டவில்லாகும்.



படம் 6.

வெளித்தொடு வட்டமையங்களின் நியமப்பாதை



படம் 7.

△ ABCயின் சுற்றுவட்டம் △ $I_1 \, I_3 \, I_3$யின் 9 புள்ளி வட்டமாகும்.

∴ இந்த வட்டம் $I_2 \, I_3$யின் நடுப்புள்ளி Q வழிச் செல்லும்.

அன்றியும் $\underline{|I_3BI_2} = \underline{|I_3CI_2} = 90°$

∴ $QI_2 = QI_3 = QB = QC$

∴ வட்டம் ABCயில், வட்டவில் BCயின் நடுப்புள்ளி Q.

ஆகவே A எங்கிருப்பினும் Q நிலையானது.

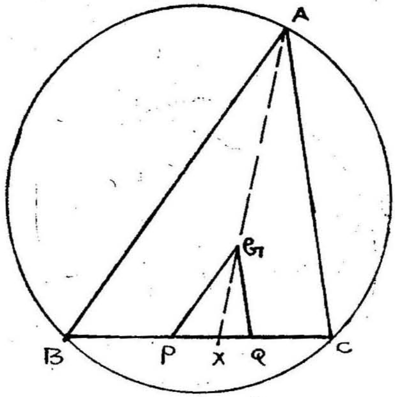
∴ I_3, I_2 என்ற இரு புள்ளிகள், Qவை மையமாகவும், QBஐ ஆரமாகவுடைய வட்டத்தில் அமைகின்றன.

இந்த வட்டத்தில் I_3யின் நியமப்பாதை எந்தப் பகுதி, I_2யின் நியமப்பாதை எந்தப் பகுதி என்பதைப் பார்ப்போம்.

A எனும் புள்ளி Bயை வட்டம் ABCயில் நெருங்கும்போது I_3யும் அதன் நியமப்பாதை வட்டத்தில் Bயை நெருங்குகிறது. BQவைச் சேர்க்கும் கோடு நியமப்பாதை வட்டத்தை B'ல் வெட்டினுல் I_2வின் நிலை B' ஆகும். ∴ $BCB' = 90°$ அதேபோல CQவைச் சேர்க்கும் கோடு வட்டத்தை C'ல் வெட்டினுல் $CBC' = 90°$

∴ I_3ன் நியமப்பாதை BC'ல் அமையும் வில் I_2ன் நியமப்பாதை CB'ல் அமையும் வில் எனக் காண்கிறேம்.

(iv) மையக்கோட்டுச் சந்தியின் நியமப்பாதை



படம் 8.

முக்கோணம் ABC ; BC தரப்பட்டுள்ளது $\angle A$ தரப்பட்டுள்ளது. $\therefore$ Aயின் நியமப்பாதை BCயின் மேல் அமையும் $\angle BAC$ எனும் கோணம் அமையும் வட்ட வில்லாகும். BCயின் நடுப்புள்ளி X ஆகுக.

$\therefore$ X ஒரு நிலைப்புள்ளி Δ ABCயின் மையக்கோட்டுச் சந்தி G ஆகுக. $\therefore$ G எனும் புள்ளி XAல் $XG : XA = 1 : 3$ எனும் விகிதத்தில் இருக்குமாறு அமைகிறது.

$\therefore$ A வட்டவில் CABயில் நகரும்போது Gயும் $\frac{1}{3}$ ஆர நீளமுள்ள வட்டவில்லில் நகருகிறது.

[மாற்று நிரூபணம் : $GP \parallel^l AB$, $GQ \parallel^l AC$ என வரைக. இவை BCஐ PGQ வில் வெட்டடும்.

$$\therefore \frac{XP}{XB} = \frac{XG}{XA} = \frac{XQ}{XC} = \frac{1}{3} \qquad [\therefore BP = PQ = QC]$$

$\therefore$ PQ நிலைப்புள்ளிகள் $\angle PGQ = \angle BAC$

$\therefore$ Gஇன் நியமப்பாதை PQ வில் மேல் $\angle A$ அமையுமாறு உள்ள வட்ட வில்லாகும்.]

பயிற்சி 1

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பும், அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் தரப்பட்டால், மையக்கோட்டுச் சந்தியின் நியமப்பாதை, அந்தப் பக்கத்திற்கு இணையான கோடு என நிறுவுக.

2. ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பும், ஒரு பக்கமும் தரப்பட்டால், மூலை விட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

3. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC என்ற பக்கமும், B என்ற கோணமும் தரப்பட்டால், மையக்கோட்டுச் சந்தியின் நியமப்பாதை என்ன?

4. ஒரு முக்கோணம் ABCயில் BC, ACயின் நீட்சியில் புள்ளிகள் P, Q என்பவை $BP : PC = AQ : AC$ எனும்படி அமைகின்றன. AP, BQ எனும் கோடுகள் R எனும் புள்ளியில் சந்தித்தால் அது BQன் நடுப்புள்ளி எனக்காட்டு. Rன் நியமப்பாதை என்ன?

5. கீழ்வரும் அளவுகளும் புள்ளியும் தரப்பட்டால் முக்கோணம் ABC அமைக்கும் வகையைக் கூறுக.

(i) பக்கம் a, கோணம் A, உள் தொடு வட்ட மையம்.

(ii) பக்கம் a, கோணம் A, குத்துச்சந்தி அல்லது மையக் கோட்டுச் சந்தி இவையின் பக்கம் a லிருந்துள்ள தூரம்.

(iii) பக்கம் a, கோணம் A, $\angle NBC$ எனும் கோணம் CN, ஒன்பது புள்ளி வட்ட மையம்.

6. ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள AB எனும் கோட்டுத்துண்டு OA, OB எனும் கோட்டில் நுனிகள் இருக்குமாறு நகர்ந்தால் $\triangle OAB$யின் குத்துச்சந்தியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டத்தில் அமைகிறது எனக் காட்டு.

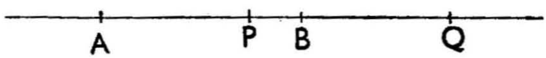
7. ஒரே கோட்டமையும் AB, BC எனும் துண்டுகள் ஒரு புள்ளியில் சமகோணத்தைத் தாங்குகின்றன என்ருல் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன?

8. A, B, C என்பவை ஒரு கோடமையும் புள்ளிகள் $PA : PB : PC = l : m : n$ எனும்படி Pஐக் காணும் வகையைக் காண்க.

9. ABC என்ற முக்கோணத்தினுள் $PA : PB : PC = l : m : n$ எனும்படி அமையும் Pஐக் காணும் வகையைக் கூறுக.

2. இசைப் புள்ளி வரிசையும் கோட்டுக் கற்றையும்

புள்ளி வரிசை: ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளைப் புள்ளி வரிசை (Range of points) என்கிறோம். $A, B, C, D, E, \ldots$ எனும் புள்ளிகள் ஒரு * கோட்டமைவனவாயின், புள்ளி வரிசையை $(A, B, C, D, E \ldots\ldots)$ எனக் குறிப்போம்.



படம் 9.

குறுக்குத்தகவு: A, P, B, Q என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகுக. P எனும் புள்ளி, AB ஐ $AP : PB$ என்ற தகவிலும் (Ratio), Q எனும் புள்ளி, $AQ : QB$ என்ற தகவிலும் பிரிக்கிறது. இவற்றின் தகவு $\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB}$ ஆகும். இந்த மதிப்பை (AB, PQ) எனக் குறிப்போம்.

$$\therefore (AB, PQ) = \frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} = \frac{AP \cdot QB}{AQ \cdot PB} = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$

$$\therefore (AB, PQ) = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$

[**குறிப்பு 1:** நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் ஒரே திசையாயின் ஒரே குறியுடையவையாகும். எதிர்த் திசையாயின் எதிர்க் குறியுடையவை. இதனால் $QB = -BQ$, எனவும் $PB = -BP$ எனவும் வருகிறது.

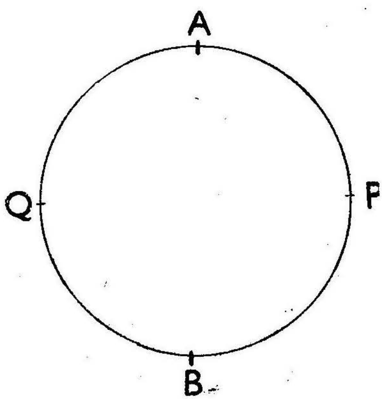
$$\therefore \frac{QB}{PB} = \frac{-BQ}{-BP} = \frac{BQ}{BP}$$ ஆகும்.]

* நேர்கோட்டைக் கோடு என்றே இனிமேல் சொல்வோம்.

குறிப்பு 2: (AB, PQ) எனும் மதிப்பு, $APBQ$ என்ற புள்ளி வரிசையின் 'குறுக்குத்தகவு' (Cross ratio) எனப் படும்.

குறிப்பு 3: குறுக்குத்தகவை $(APBQ)$ எனவும் குறிப்பது வழக்கம். நாம் இந்நூலில் இந்தக் குறியீட்டைக் கையாள்வோம்.

குறிப்பு 4: $(APBQ)$இன் மதிப்பை எழுதக் கீழ்வரும் உத்தியைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு வட்டத்தில் புள்ளிகளை முறையாக வலஞ்சுழியாகக் குறிப்போம். புள்ளிகளை வலஞ்சுழியாகக் கொள்ளக் குறுக்குத்தகவின் தொகுதியும், இடஞ்சுழியாகக் கொள்ள, பகுதியும் வருகிறது.



படம் 10.

இசைப்புள்ளி வரிசை (Harmonic Range) A, P, B, Q, என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகுக. புள்ளி வரிசையின் குறுக்குத்தகவு $(APBQ) = -1$ என்றால், A, P, B, Q என்ற புள்ளி வரிசை **இசைப்புள்ளி** வரிசை எனப் பெயர்படும்.

குறிப்பு 1: $(APBQ) = -1$

$$\therefore \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} = -1$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = -\frac{AQ}{BQ}$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

∴ ***AB*** எனும் கோட்டுத்துண்டை, ***P, Q*** எனும் புள்ளிகள் உள்ளீடாகவும், புறம்பாகவும் முறையே ஒரே விகிதத்தி பிரிக்கின்றன.

இந்தப் பண்பையே இசைப்புள்ளி வரிசைக்கு விளக்கமாக கொள்வதும் உண்டு.

குறிப்பு 3 : ABஐ P, Q எனும் புள்ளிகள் "ஆர்மானிக்"காகப் பிரி கின்றன எனக் கூறப்படும்.

குறிப்பு 4 : P எனும் புள்ளி, ABக்கு, Qவின் இசைத் துணைப்புள்ளி எனப்படும். Q எனும் புள்ளி, Pயின் இசைத் துணை புள்ளி எனப்படும். அதாவது P, Q எனும் புள்ளிகள் ABக்கு ஒன்றற்கொன்று இசைத் துணைப் புள்ளிகளாகும்

தேற்றம் 4

AB*ஐ *P, Q ஆர்மானிக்காகப் பிரித்தால் ***PQ***வை ***A, B*** எனும் புள்ளிகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கும்.

நிறுவுகை (Proof) : $(APBQ) = -1$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{-AQ}{QB}$$

$$\therefore \frac{AP}{AQ} = \frac{-PB}{QB}$$

$$\therefore \frac{PA}{AQ} = \frac{-PB}{BQ}$$

∴ PQவை, A, B, எனும் புள்ளிகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கின்றன.

குறிப்பு 1 : ABக்கு P, Q எனும் புள்ளிகள் இசைத் துணைப் புள்ளி களானால், PQக்கு, A, B எனும் புள்ளிகள் இசைத் துணைப் புள்ளிகளாகும்.

குறிப்பு 2 : AP, AB, AQ எனும் துண்டுகள், ஆர்மானிக்குத் தொடரில் உள்ளன என நிறுவ முடியும்.

$AP = p \quad AB = b \quad AQ = q$ நீளமாகுக.

$\therefore PB = AB - AP = b - p$

$BQ = AQ - AB = q - b$

$(APBQ) = -1$ ஆனதால்

$\frac{AP}{PB} = \frac{-AQ}{QB}$ ஆனால் $QB = -BQ$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} \qquad \therefore \qquad \frac{p}{b-p} = \frac{q}{q-b}$$

$$\therefore Pq - Pb = bq - pq$$

$$\therefore 2pq = bq + bp$$

pqb ஆல் வகுக்க.

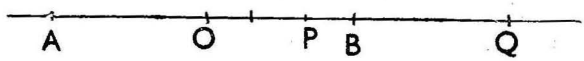
$$\frac{2}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\therefore \frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$

$\therefore$ AP, AB, AQ ஆர்மானிக்குத் தொடரில் உள்ளன.

தேற்றம் 5

ABஐ, P, Q எனும் புள்ளிகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரித்தால், Oஎனும் புள்ளி ABயின் நடுப்புள்ளியுமானால் $OP.OQ = OA^2 = OB^2$ ஆகும்.



படம் 11.

நிரூபணம் : $\frac{AP}{BP} = \frac{-AQ}{QB}$ (கொள்கை)

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$$

$$\therefore \frac{AO+OP}{OB-OP} = \frac{AO+OQ}{OQ-OB}$$

$OB = AO$ ஆனதால்

$$\frac{AO+OP}{AO-OP} = \frac{AO+OQ}{OQ-AO}$$

$$\therefore \frac{2AO}{2OP} = \frac{2OQ}{2AO}$$

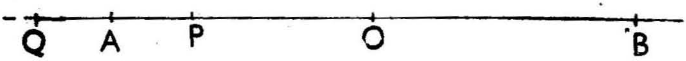
$$\therefore OP.OQ = AO^2$$

$$\therefore OP.OQ = OA^2 = OB^2 \qquad (2\cdot1)$$

வழிகளைத் திருப்ப, தேற்றத்தின் மறுதலை வருகிறது. அதாவது **$APBQ$ என்ற புள்ளி வரிசையில் ABயின் நடுப்புள்ளி Oஆகவும், $OP.OQ = OA^2$ ஆகவுமானால் ABஐ, P, Qஎனும் புள்ளிகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கும்.**

குறிப்பு : இந்தத் தேற்றமும் அதன் மறுதலையும் உத்திக் கணக்கு களில் (Riders) மிகவும் பயன்படுத்தப்படுவனவாகும்.

இசை துணைப்புள்ளிகளின் நிலை :



படம் 12.

(a) ABக்கு P, Q என்பவை இசை துணைப் புள்ளிகளாகுக ABயின் நடுப்புள்ளி Oஆகுக. $\therefore$ $OP.OQ = OA^2 (= OB^2)$ என நிறுவி யுள்ளோம். OA^2 வர்க்கமாதலால் நேரெண்ணாகும். $\therefore$ $OP.OQ$வும் நேரெண்ணாகிறது. $\therefore$ OP, OQ என்பவை ஒரே திசையுடையவை $\therefore$ P, Qஎனும் துணைப் புள்ளிகள், ABயின் நடுப்புள்ளியான Oவுக்கு ஒரே திசையில், அதாவது ஒரே பக்கத்தில் அமைகிறது.

(b) Pஇன் நிலைமாற, Qஇன் நிலை எவ்வாறு மாறுகிறதெனப் பார்ப்போம். $OQ = \dfrac{OA^2}{OP}$

(i) Pஎனும் புள்ளி Aயுடன் பொருந்தினால் $OP = OA$ $\therefore$ $OQ = OA$, Qவும் Aயுடன் பொருந்துகிறது. அதாவது $(APBQ) = -1$ என்று சொல்வது போல $(AABA) = -1$ என ஆகிறது. (2·2)

(ii) P, Aயிலிருந்து நீங்கி Oவை நோக்கி நகரட்டும் $\therefore$ $OP < OA$ $\therefore$ $OQ > OA$; Q, Aக்கு இடமாக, ABயின் புறம்பாக அமைகிறது.

(iii) P, Oவை அணுகும்போது OPயின் அளவு பூச்சியத்தை அணுகுகிறது. $\therefore$ OQஇன் மதிப்பு மிகப் பெரிதாகிறது. ஆகவே, P, Oவுடன் பொருந்தும்போது, அதன் ஆர்மானிக்குத் துணைப்புள்ளி என்ன என்று கூறுவது தேவையாகிறது Oவின் இசை துணைப்புள்ளி, ABயில் உள்ள *கந்தழிப் புள்ளி (Point at infinity) என்கிறோம். இவ்வாறு ஒரு நேர்கோட்டில் "கந்தழிப் புள்ளி" எனும் புள்ளி ஒன்று உளது ; ஒரு நேர்கோட்டிற்கு ஒரே ஒரு கந்தழிப் புள்ளி உள்ளது எனும் கருத்து (Concept) உருவாகிறது. ஆகவே "**ABயின் நடுப் புள்ளியின் இசை துணைப்புள்ளி, அதில் உள்ள கந்தழிப் புள்ளி யாகும்.**"

ABயின் நடுப்புள்ளி, கோட்டில் உள்ள கந்தழிப் புள்ளியின் இசை துணைப் புள்ளியாகும். (2·3)

இக்கருத்து, வரை கணிதத்தில் அடிக்கடிப் பயன்படுவதாகும்.

* கந்தழி என்றால் கடவுள் எனப் பொருளும் உண்டு. அப்பாற் கடந்தவர் அல்லது முற்றும் கடந்தவர் எனும் பொருளில் வரும்.

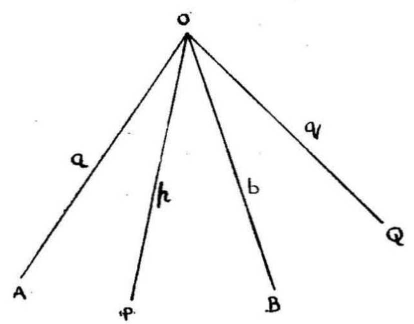
['கந்தழி' என்பதை ∞ எனும் குறியீட்டால் காட்டுவோம். Q கந்தழிப் புள்ளியானுல், $Q\infty$ எனக் குறிப்போம். $\therefore (AOBQ\infty) = -1$ என ஆகிறது].

(v) P, பின்னும் Oவிலிருந்து Bஐ நோக்கி நகரும்போது அதன் துணைப்புள்ளி Q, ABக்குப் புறம்பாக, Bயின் வலது பக்கத்தில் அமையும். P, Bயுடன் பொருந்தும்போது Oவும் Bயுடன் பொருந்துகிறது. அதாவது $(ABBB) = -1$ என வருகிறது. இவ்வாறு Pயின் நிலை ABயில் Aயிலிருந்து Bக்கு மாறும்போது, அதன் துணைப்புள்ளியாகிய Qவின் நிலை எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை விளக்கினேம்.

கோட்டுக்கற்றை : ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும் கோட்டுத் தொகுதியைக் கோட்டுக்கற்றை (Pencils of lines) எனக் கூறுகிறேம். புள்ளிகளை A, B, C எனும் எழுத்துக்களால் குறிப்பது போன்று கோடுகளை, a, b, c எனப் பெயரிட்டழைப்போம். (இங்கு a, b, c என்பவை அல்ஜீப்ரா எண்கள் அல்ல என்பது கவனிக்கத் தக்கது). O என்ற புள்ளிவழி a, b, c, d எனும் கோடுகள் சென்றுல், O அந்தக் கோட்டுக்கற்றையின் முனை (Vertex of the pencil) எனப் படும். கோட்டுக்கற்றையை $O(a, b, c, \ldots\ldots)$ எனக் குறிப்போம். OA, OB, OC என்பவை கோடுகளானுல், கற்றையை $O(ABC\ldots)$ எனவும் குறிப்போம்.

கோட்டுக்கற்றையின் குறுக்குத் தகவு :

a, p, b, q என்பவை Oஎனும் புள்ளிவழிக் கோடுகளாகுக. $O(apbq)$ எனும் கோட்டுக்கற்றையின் குறுக்குத் தகவு $\dfrac{\sin \widehat{ap} \cdot \sin \widehat{bq}}{\sin \widehat{aq} \cdot \sin \widehat{bp}}$ எனப்படும்.



படம் 13.

[$\widehat{ap}$ என்றுல் a, p எனும் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் aஎனும் கோட்டுடன் p ஏற்படுத்தும் கோணம் ஆகும்.]

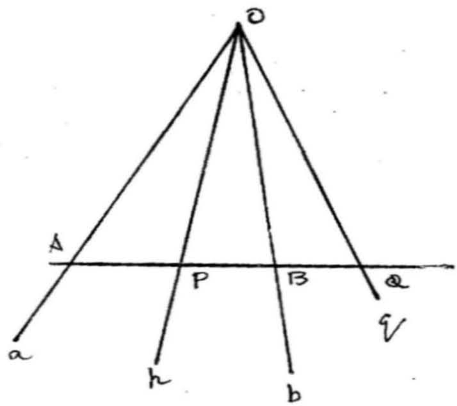
கோடுகளை OA, OD, OB, OQ எனக் குறித்தால் குறுக்குத் தகவு $\dfrac{\sin A\hat{O}P \cdot \sin B\hat{O}Q}{\sin A\hat{O}Q \cdot \sin B\hat{O}P}$ ஆகும். இதை $O(apbq)$ எனவோ அல்லது $O(APBQ)$ எனவோ குறிப்பது வழக்கம்.

இசைக் கோட்டுக்கற்றை : (Harmonic pencil):

$O(apbq) = -1$ ஆனல், அது இசைக் கோட்டுக்கற்றை எனப்படும்

தேற்றம் 6

இசைக் கோட்டுக்கற்றை ஒரு குறுக்கு வெட்டியை வெட்டும் புள்ளிகள் இசைப் புள்ளி வரிசையாக அமையும்.



படம் 14.

கொள்கை : $O(apbq) = -1$ ஆகுக.

யாதாமொரு குறுக்குவெட்டியை, முறையே A, P, B, Q எனும் புள்ளிகளின் அதன் கோடுகள் a, p, b, q வெட்டட்டும்.

நிரூபிக்க : $(APBQ) = -1$ என.

நிரூபணம் : $(APBQ) = \dfrac{AP.BQ}{AQ.BP}$

$$= \frac{\Delta AOP.\Delta BOQ}{\Delta AOQ.\Delta BOP}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\, OA.OP \sin \hat{ap} \cdot \frac{1}{2}\, OB.OQ \sin \hat{bq}}{\frac{1}{2}\, OA.OQ \sin \hat{aq} \cdot \frac{1}{2}\, OB.OP \sin \hat{bp}}$$

$$= \frac{\sin \hat{ap} \cdot \sin \hat{bq}}{\sin \hat{aq} \cdot \sin \hat{bp}}$$

$$= O(apbq)$$

ஆனால் $O(ahbq) = -1$

$\therefore \quad (APBQ) = -1$

அதாவது A, P, B, Q என்பது இசைப்புள்ளி வரிசை ஆகும்.

குறிப்பு 1 : இன்னொரு குறுக்குவெட்டியை, A', P', B', Q', எனும் புள்ளிகளில் வெட்டினால் $(A'P'B'Q') = (APBQ) = -1$ என வருகிறது.

குறிப்பு 2 : ஒரு இசைப்புள்ளி வரிசையில் அமையும் புள்ளிகளை, யாதாமொரு புள்ளியுடன் சேர்க்கவரும் கோட்டுக்கற்றை இசைக் கோட்டுக்கற்றை எனவும் வருகிறது.

குறிப்பு 3 : மேற்கூறியவை, இசைப் பண்புடைய புள்ளிவரிசை. கோட்டுக்கற்றை, மட்டுக்குமன்றி, குறுக்குத்தகவு யாதாயினும் பொருந்தும் எனவும் தெரிகிறது.

குறிப்பு 4 : $O(apbq)$ எனும் கோட்டுக்கற்றை ஒரு குறுக்கு வெட்டியை $APBQ$ எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இந்தப் புள்ளிகளை, O' எனும் புள்ளியுடன் சேர்க்க. $O'(APBQ)$ எனும் கோட்டுக்கற்றை வருகிறது. இந்தக் கோட்டுக் கற்றை, இன்னொரு குறுக்கு வெட்டியை $(A'P'B'Q')$ எனும் புள்ளி வரிசையில் வெட்டுகிறது, என்றால்

$$O(apbq) = O'(A'P'B'Q') \, [=(APBQ)]$$

என வருகிறது. இதேபோல்

$$(APBQ) = O'(A'P'B'Q') = (A'P'B'Q')$$

என வருகிறது. இவ்வாறு மேற்கூறிய வரைதல் மூலம் (By construction), குறுக்குத்தகவின் மதிப்புமாறாமல் நிற்கிறது.

மேற்கூறிய வரைதல் முறை ‘வீச்சிடல்’ (Projecting) எனப் படும். ‘வீச்சிடலால்’, கோட்டுக்கற்றையினதோ அல்லது புள்ளி வரிசையினதோ, குறுக்குத்தகவு மாறாமல் நிற்கிறது. குறிப்பாக, இசைக் கோட்டுக்கற்றைகளும், புள்ளிவரிசைகளும், வீச்சிடலால் மாறுவதில்லை எனவும் தெரிகிறது. இவ்வாறு வரும் கோட்டுக் கற்றைகளை ‘வீச்சு’க் கற்றைகள் என்றும் (Projective Pencils), புள்ளி வரிசைகளை ‘வீச்சு’ வரிசைகள் என்றும் (Projective Ranges) கூறப்படுகிறது. இங்கு $O(apbq)$, $O'(A'P'B'Q')$ வீச்சில் அமை

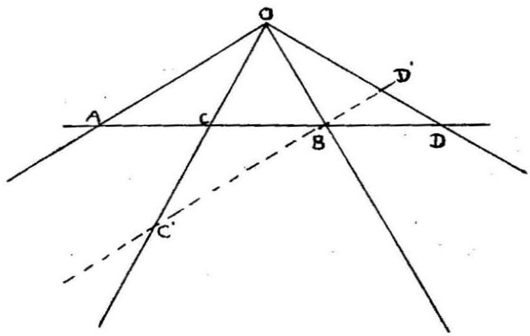
கின்றன. அதேபோல $(ABCD)$யும் $(A'B'C'D')$யும் வீச்சி அமையும் புள்ளி வரிசைகளாகும்.

வீச்சில் அமையும் புள்ளி வரிசைகளின் குறுக்குத்தகவுக சமமாக இருக்கும்.

வீச்சில் அமையும் கோட்டுக் கற்றைகளின் குறுக்குத்தகவுக சமமாக இருக்கும்.

தேற்றம் 7

$O(ACBD)$ எனும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையில் AO, B ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால், அவை COD எனு கோணத்தின் உள், வெளிச் சமவெட்டிகளாகும்.



படம் 15.

கொள்கை : (i) $O(ACBD)$ என்பது இசைக் கோட்டுக் கற்றை.

∴ $O(ACBD) = -1$

(ii) $OA \perp OB$ (அதாவது $\angle AOB = 90°$)

நிரூபிக்க : $\angle COB = \angle BOD$.

வரைதல் : B வழி OAக்கு இணைகோடு வரைக. அது OD, OCஐ D', C' எனும் புள்ளிகளின் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : ∵ $D'C' \parallel OA$, இரு இணைகோடுகளும் ஒரே கந்தழிப் புள்ளியைப் பொதுவில் உடையன. கந்தழிப் புள்ளியை $A'\infty$ எனக் குறிப்போம்.

∴ $O(ACBD)$ எனும் கோட்டுக் கற்றையால் $D'C'$ எனும் குறுக்குவெட்டியில் $A'\infty C'BD'$ எனும் புள்ளிவரிசை ஏற்படுகிறது.

$\therefore$ $(A'\infty C'BD') = O(ACBD) = -1.$
B, கந்தழிப் புள்ளி A'ஐயின் இசைத் துணைப்புள்ளி யாதலால் $C'D'$இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

[2·3 பார்க்கவும்]

$\therefore$ $C'B = BD'$

முக்கோணங்கள் $OC'B$, OBD'இல்

$BC' = BD'$

$OB = OB$

$\angle OBC' = \angle OBD = 90°$ $C : D'C' \parallel^{l} OA$

$OB \perp^{r} OA$ ஆதலால்

$\therefore$ $\triangle OC'B \equiv \triangle OBD'$

$\therefore$ $\angle C'OB = \angle D'OB$

OB எனும் கோடு $\angle COD$யின் ஒரு சமவெட்டி யாகும்; $\boldsymbol{OA \perp^{r} OB}$ ஆதலால் அது மற்றொரு சம வெட்டியாகும்.

குறிப்பு :

மாற்று நிரூபணம் : $\because$ $AO \parallel^{l} C'D'$

$$\because \frac{AC}{CB} = \frac{AO}{C'B}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BD'}$$

ஆனால் $(ACBD) = O(ACBD) = -1$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \boldsymbol{C'B = BD'} \qquad \text{(i)}$$

$\because$ $C'D' \parallel^{l} AO$ $\qquad \therefore$ $OBD' = AOB =$

ஆனால் $OB \perp^{r} OA$ $\qquad AOB = 90°$ $\qquad \therefore$ $OBD' = 90°$

$\therefore$ $OBC' = 90°$

முக்கோணங்கள் OBC', OBD'ல்

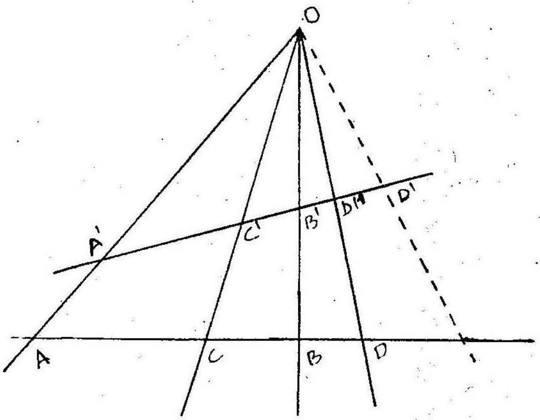
$\therefore$ $BC' = BD'$; $\quad OBD' = OBC' = 90°$, $\quad OB$ பொது ஆதலால் அவை சர்வசமம்.

$\therefore$ $\angle C'OB = \angle D'OB$

$\therefore$ OB எனும் கோடு $\angle COD$யின் ஒரு சமவெட்டியாகும். $OA \perp^{r} OB$ ஆதலால், அது மற்றொரு சமவெட்டியாகும்.

தேற்றம் 8

$(ACBD)$, $(A'C'B'D')$ எனும் இரண்டு கோடுகளில் அமையும் இசைப்புள்ளி வரிசைகளில் AA', BB', CC' ஒரு புள்ளி வழிச் சென்ருல், DD' உம் அதே புள்ளிவழிச் செல்லும்.



படம் **16.**

கொள்கை : (i) $(ACBD) = (A'C'B'D')$

(ii) AA'; CC'; BB'; எனும் கோடுகள் O வழிச் செல்கின்றன.

நிரூபிக்க : DD' எனும் கோடும் O வழிச் செல்லும் என.

வரைதல் : DD' O வழிச் செல்லவில்லை எனில், ODஐச் சேர்க்கவும். OD, $A'C'$ எனும் கோட்டை D'' எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

நிருபணம் : $(ACBD) = O(ACBD)$

$= (A'C'B'D'')$

ஆனல் $(ACBD) = (A'C'B'D')$

$\therefore (A'C'B'D'') = (A'C'B'D')$

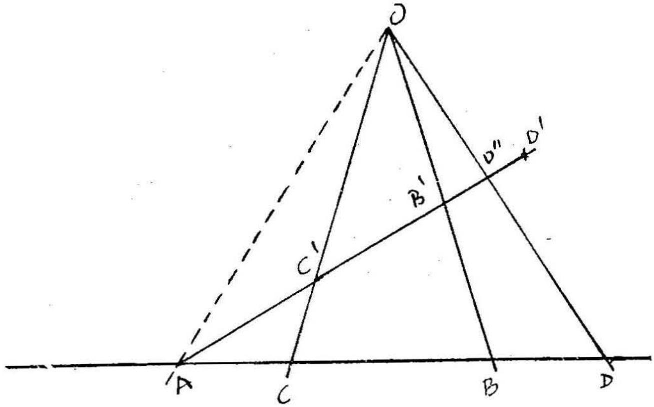
$$\therefore \frac{A'C'.B'D''}{A'D''.B'C'} = \frac{A'C'.B'D'}{A'D'.B'C'}$$

$$\therefore \frac{B'D''}{D''A'} = \frac{B'D'}{D'A'}$$

ஆனல் $B'A'$ எனும் துண்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் ஒரே புள்ளியில் மட்டுமே பிரிக்க முடியுமாதலால் D'', D' எனும் புள்ளிகள் ஒன்றே D'', D' உடன் பொருந்துகிறது. அதாவது DD' எனும் கோடும் O வழிச் செல்கிறது.

கிளைத்தேற்றம் :

வேறு வேறு கோடுகளில் அமையும் இரண்டு இசைப்புள்ளி வரிசைகளுக்கு ஒரு ஒத்த புள்ளி பொதுவானல் மற்ற ஒத்த புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்



படம் 17.

கொள்கை : $(ACBD) = (A\ \ C'\ B'\ D) = -1$

நிரூபிக்க : CC', BB', DD' ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளென

வரைதல் : CC', BB' எனும் கோடுகள் Oவில் வெட்டட்டும். OAவை ஒன்று சேர்க்கவும் OD எனும் கோடு D' வழிச் செல்லாதாயின் AC' எனும் கோட்டை D''ல் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : $(ACBD) = O(ACBD)$

$= (AC'\ B'\ D'')$

ஆனல் $(ACBD) = (AC'\ B'\ D')$ (15)

$\therefore$ $(A\ C'\ B'\ D'') = (A\ C'\ B'\ D')$

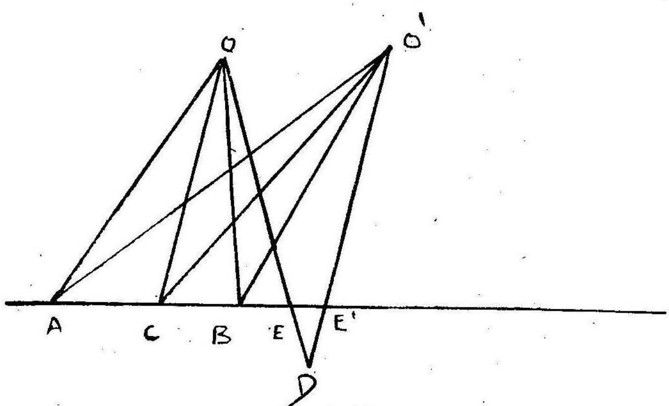
$\therefore$ D'', D' உடன் பொருந்துகிறது.

$\therefore$ DD' எனும் கோடும் CC', BB' உடன் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடாகிறது.

[**குறிப்பு :** இந்தக் கிளைத்தேற்றம், உத்திக் கணக்குகளில் ‘ கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் ’ எனக் காட்டப் பயன்படுகிறது.]

தேற்றம் 9

$O(ACBD)$, $O'(ACBD)$ என்ற இரு இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளில், A, C, B என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாயின், D எனும் புள்ளியும் அதே கோட்டில் அமையும் புள்ளியாகும்.



படம் 18.

நிருபணம்: A, C, B எனும் புள்ளிகள் அமையும் கோடு ODஐ Eலும், O' Dஐ Eலும் வெட்டட்டும்.

$(ACBE) = O(ACBE)$

$= O(ACBD)$ ஆனால் $O(ACBD) = -1$

$\therefore \; (ACBE) = -1$

அதேபோல $(ACBE') = O'(ACB = E') = O'(ACBD) = -1$

$\therefore \; (ACBE) = (ACBE')$

$$\therefore \; \frac{AC.BE}{AE.BC} = \frac{AC.BE'}{AE'.BC}$$

$$\therefore \; \frac{BE}{EA} = \frac{BE'}{E'A} \qquad (16)$$

$\therefore$ E, E' எனும் புள்ளிகள் ஒன்றே, அதாவது D ஆகும்.

$\therefore$ D எனும் புள்ளியும் A, C, B அமையும் கோட்டில் உள்ளது.

கிளைத்தேற்றம் :

வேறு வேறு முனைகளையுடைய இரண்டு இசைக் கோட்டுக் கற்றைகளில், இரண்டிற்கும் ஒரு கோடு பொதுவானல், மற்ற ஒத்த கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளி களாகும்.

இதன் நிரூபணம், தேற்றத்தின் நிரூபணம் போன்றதே.

தேற்றம்

$(ACBD) = (ADBC)$ ஆனல்

$(ACBD) = -1$ ஆகும்

அதாவது $(ACBD)$ இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்

நிரூபணம் : $(ACBD) = (ADBC)$

$$\therefore \frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{AD.BC}{AC.BD}$$

$$\therefore \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AD^2}{DB^2}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \pm\frac{AD}{DB}$$

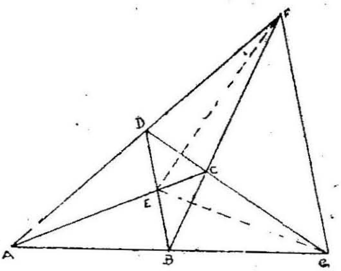
$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$ என்ருல் Cயும், Dயும் வெவ்வேறு புள்ளி களல்ல.

$$\therefore \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

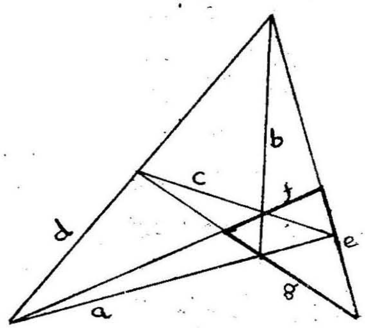
$$\therefore (ACBD) = -1$$

அதேபோல $O(acbd) = O(adbc)$ எனின் $O(acbd)$ என்பது இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும். (17)

முழு நாற்கோணமும், முழு நாற்கரமும்
(Complete quadrangle and quadrilateral)



படம் 19.



படம் 20.

முழு நாற்கோணம்

மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமையாத, நான்கு புள்ளி அமைப்பு முழு நாற்கோணம் எனப்படும்.

நான்கு புள்ளிகள் A, B, C, D ஆகுக.

இரு இரு புள்ளிகளாக இணைக்க மூன்று ஜோடிக் கோடுகள் வரும். அவை மூன்று ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்களெனப்படும். அவையாவன:

$AB, CD; AC, BD; AD, BC;$

[AB என்றால் A, B எனும் இரு புள்ளிகள் தரும் கோடு எனப் பொருளாம்.]

முழு நாற்கரம்

மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியல்லாத நான்கு கோட்டமைப்பு முழு நாற்கரம் எனப்படும்.

நான்கு கோடுகள் a, b, c, d ஆகுக.

இரு இரு கோடுகள் சந்திக்க மூன்று ஜோடிப் புள்ளிகள் வரும். அவை மூன்று ஜோடி எதிர் முனைகளெனப்படும். அவையாவன:

$\widehat{ab}, \widehat{cd}; \widehat{ac}, \widehat{bd}; \widehat{ad}, \widehat{bc};$

[$\widehat{ab}$ என்றால், a, b எனும் இரு கோடுகள் தரும் புள்ளி எனப் பொருளாம்.]

முழுநாற் கோணம்

மூன்று ஜோடிப் பக்கங்கள் மூன்று புள்ளிகளைத் தருகின்றன.

$AB, CD \rightarrow G$
$AC, BD \rightarrow E$
$AD, BC \rightarrow F$
மூன்று) புள்ளிகள்

இவை மூலைப் புள்ளிகள் (diagonal points) எனப்படும். மூன்று மூலைப் புள்ளிகள் ஏற்படுத்தும் முக்கோணம், நாற்கோணத்தின் இசை முக்கோணம் எனப்படும்.

முழுநாற்கரம்

மூன்று ஜோடி முனைகள், மூன்று கோடுகளைத் தருகின்றன. அவை யாவன :

$\widehat{ab}, \widehat{cd} \rightarrow g$
$\widehat{ac}, \widehat{bd} \rightarrow e$
$\widehat{ad}, \widehat{bc} \rightarrow f$
மூன்று கோடுகள்

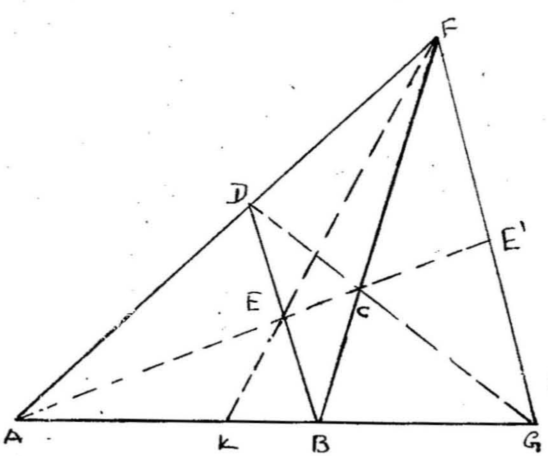
இவை மூலைக் கோடுகள் (diagonal lines) எனப்படும். மூன்று மூலைக்கோடுகள் ஏற்படுத்தும் முக்கோணம் நாற்கரத்தின் இசை முக்கோணம் எனப்படும்.

முழு நாற்கோணம், முழு நாற்கரம் இவற்றின் ஆர்மானிக்குப் பண்பு

தேற்றம் 10

(i) ஒரு நாற்கோணத்தின் இரு எதிர்ப்பக்கங்களும், அவை சந்திக்கும் புள்ளி வழி அமையும் இசை முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும், இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(ii) ஒரு முழு நாற்கரத்தின் இரு எதிர் முனைகளும், அவைகளைச் சேர்க்கும் கோட்டில் அமையும், இசை முக்கோணத்தின் இரு முனைகளும், இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்.



படம் 21.

கொள்கை : $ABCD$ ஒரு முழு நாற்கோணம் ; E, F, G அதன் மூலைப் புள்ளிகள். FEG என்ற முக்கோணம் இசை முக்கோணம் ; FE எனும் கோடு ABஐ Kல் வெட்டட்டும்.

(i) நிறுவ : $F(AEBG) = -1$ என.

நிரூபணம் : முக்கோணம் FABயில், சேவாத்தேற்றப்படி

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$$

மெனிலாஸ் தேற்றப்படி

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=-1$$

$$\therefore \quad \frac{AK}{KB}=\frac{-AG}{GB}$$

$$\therefore \quad (AKBG) = -1$$

$$\therefore \quad F(AKBG) = -1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{F(AEBG) = -1}$$

(ii) படத்தை முழு நாற்கரமெனக் கொண்டால் A, C அதன் எதிர்முனைகளாகும் ; ACஐ FG E'ல் வெட்டட்டும்

$\therefore$ E, E' என்பவை நாற்கரத்து ஆர்மானிக்கு முக்கோணத்தின் இருமுனைகளாகும்.

நிறுவ : $(AECE') = -1$

நிரூபணம் : முன் நிரூபித்தபடி

$F(AEBG) = -1$

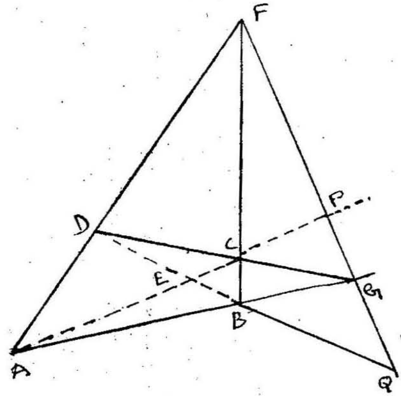
$\therefore$ AC என்ற குறுக்கு வெட்டியில் அமையும் புள்ளி வரிசை $\boldsymbol{(AECE')} = -1$

(ii) வதில் நாற்கரத்தின் மூலைக்கோடு AC_1ஐ மற்றிரு மூலைக்கோடுகள் BD, FG என்பவை E, E^1ல் வெட்டு கின்றன.

ஆகவே தேற்றத்தைக் கீழ்வருமாறு கூறுவது வழக்கம்.

'ஒரு முழு நாற்கரத்தின் ஒரு மூலைக்கோட்டை மற்றிரு மூலைக் கோடுகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கும்.'

மாற்று நிரூபணம் :



படம் 22

$ABCD$ என்பதை நாற்கரமாகக் கொள்வோம்.

AC, BD, FG அதன் மூலைக்கோடுகள்.

ACஐ BD, FG எனும் கோடுகள் E, Pயில் வெட்டுகின்றன.

BD, FG எனும் கோடுகள் Qல் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

நிரூபணம் : $(AECP) = F(AECP) = (DEBQ) = G(DEBQ)$

$\therefore$ $(AECP) = (CEAP)$ AC என்ற குறுக்கு வெட்டியில் புள்ளி வரிசை

$\therefore$ $(AECP) = -1$

நேர்கோடு மட்டும் வரைதல் வழி, இருபுள்ளிகளுக்கு, அவற்றுடன் ஒரு கோடமைப்புள்ளி ஒன்றின் இசைத்துணைப் புள்ளி காணல் முறை :

(படம் 21 பார்க்க)

A, B இரு புள்ளிகளாகுக.

அவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டில் G மற்றொரு புள்ளியாகுக.

A, Bக்கு Gயின் இசைத்துணைப் புள்ளியை கோடுகள் மட்டும் வரைந்து காண :

முறை : F ஏதேனும் புள்ளியாகுக.

FA, FBஐச் சேர்க்கவும்.

G வழி ஏதேனும் ஒரு கோடு FB, FAஐ C, D எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

AC, BDஐச் சேர்க்கவும்.

இவை Eயில் வெட்டட்டும்.

F, Eஐச் சேர்க்கும் கோடு ABயை Kல் வெட்டட்டும். அப்போது ABக்கு Gயின் இசைத்துணைப் புள்ளி K ஆகும்.

[நிரூபணம்: தேற்றம் 10ல் காணவும்.]

பயிற்சி 2

1. $(ACBD) = -1$ என்றால், AC, AB, AD ஆர்மானிக்குத் தொடரில் உள்ளன எனக் காட்டு.

2. AB எனும் துண்டை CD ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கிறது. P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால் $\frac{2PB}{AB} = \frac{PC}{AC} + \frac{PD}{AD}$ என நிறுவுக.

3. $(ACBD)$ என்ற இசைப் புள்ளிவரிசையில் ABயின் நடுப் புள்ளி O என்றால்,

(i) $DA \cdot DB = DC \cdot DO$

(ii) $AB \cdot CD = 2AD \cdot CB = 2AC \cdot BD$

4. இரண்டு வட்டங்கள் BCயில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. ஒரு பொதுத் தொடுகோடு அவற்றை PQவில் தொடுகின்றன. அதை BC வழிச் செல்லும் விட்டம் LMல் வெட்டுகிறது. PQவை LM ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கிறது எனக் காட்டு.

5. முக்கோணம் ABCயில், வழக்கமான குறியீட்டைக் கையாள $A(BC\,;\,II_2)$; $A(OH\,;\,II_2)$ இவை இசைக்கோட்டுக் கற்றைகள் எனக் காட்டு.

6. $ABCD$ ஒரு இணைகரம். BDக்கு இணையாக AE வரையப் படுகிறது. $A(EBCD) = -1$ என நிரூபி.

7. ஒரு வட்டத்தில் அமையும் நான்கு புள்ளிகள், வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் இசைக்கோட்டுக் கற்றையை ஏற்படுத்தினால் வட்டத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும், இசைக்கோட்டுக் கற்றைகளை ஏற்படுத்துகிற தென நிறுவுக.

8. ஒரு வட்டத்தின் நான்கு தொடுகோடுகள் யாதேனும் ஒரு தொடுகோட்டில் இசைபுள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்தினால், மற்றத் தொடுகோடுகளிலும் அவ்வாறே இசைபுள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்தும் எனக் காட்டு.

9. PQ, AB என்பவை ஒரு வட்டத்தின் இணை நாண்களாகும். ABயின் நடுப்புள்ளி C. PC வட்டத்தை மீண்டும் Rல் வெட்டுகிறது. Qவில் வரையப்படும் தொடுகோடு QT எனில் $Q(ARBT)$ இசைக் கோட்டுக் கற்றை எனக் காட்டு.

10. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு விட்டம்; AP யாதேனும் ஒரு நாண். A, Pயில் உள்ள தொடுகோடுகள் Oவில் வெட்டுகின்றன. Pயிலிருந்து ABக்கு PR குத்துக்கோடானால் PRஐ BC சமமாக வெட்டுகிறதெனக் காட்டு.

11. OC, OD எனும் கோடுகளை P, Qவில் வெட்டும்படி A வழி கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. APQவில் $\frac{1}{AR}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}$ எனும் படி புள்ளி Rஐக் கொண்டால் கோடுகள் மாறும்போது Rன் நியமப் பாதையும் ஒரு கோடு எனக் காட்டு.

12. P, Q, R, S என்பவை ஒரு வட்டத்தின் யாதேனும் ஒரு புள்ளியில் இசைக்கோட்டுக் கற்றையை ஏற்படுத்தும் புள்ளிகள் (இசை வட்ட வரிசைப் புள்ளிகள்). PQ, RS ; RP ; QS ; PSஇல் அமையும் தொடுகோடுகள். Q, Rஇல் உள்ள தொடுகோடுகள், இவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனக் காட்டு.

13. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC நிலையாகவும் A ஒரு கோட்டில் நகருவதாகவும் உள்ளது. இன்னொரு குறிப்பிட்ட கோடு AB, ACஐ P, Qவிலும் வெட்டுகின்றன. BQ, CP இவை வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடெனக் காட்டு.

14. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BCக்கு இணையான PQ எனும் கோடு ABஐ Pயிலும் AQவை Qவிலும் வெட்டுகிறது. CP, BQ, Rல் வெட்டிக்கொள்கிறது. AP, BCயின் மையக்கோடு எனக் காட்டு.

15. ABC என்பது ஒரு முக்கோணம். K ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி. K வழி ஒரு கோடு BC, CA, ABஐ P, Q, Rல் சந்திக்கிறது. P, Q, R, K இசைப்புள்ளி வரிசையாக அமைய எத்தனை கோடுகள் உள்ளன ?

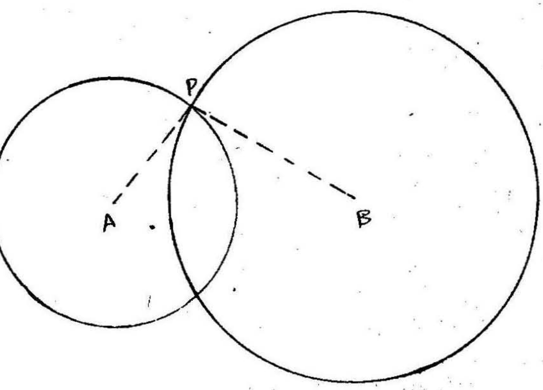
16. ஒரு முக்கோணத்தில் சுற்றுவட்ட மையம் மையக்கோட்டுச் சந்தி, ஒன்பது புள்ளிவட்டமையம். மையக்குத்து சந்தி இவை இசைப் புள்ளி வரிசை எனக் காட்டு.

17. DPQ, DRS என்ற D வழிக் கோடுகள், APR, AQS எனும் A வழிக் கோடுகளை நிலையாகக் கொண்டு கோடுகளை மாற்றினால் PS, QR இவை வெட்டும் புள்ளியின் நியமரேகை என்ன ?

18. AD எனும் கோடு BCஐ Cயில் சந்திக்கிறது. BCயில் உள்ள E எனும் புள்ளி வழிச் செல்லும் AE எனும் கோடு BDஐக் Qவில் வெட்டுகிறது. CQ, ED எனும் கோடுகள் Rல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. BP, AD எனும் கோடுகள் Pல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. E எனும் புள்ளி BCயில் நகரும்போது P நிலைப்புள்ளி என நிரூபி.

3. வட்டங்களின் ஆர்மானிக்குப் பண்புகள்
(Harmonic Properties of Circles)
குத்துவட்டங்கள்
(Orthogonal Circles)

A எனும் புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டத்தை $\odot(A)$ எனக் குறிப்போம்.



படம் 28.

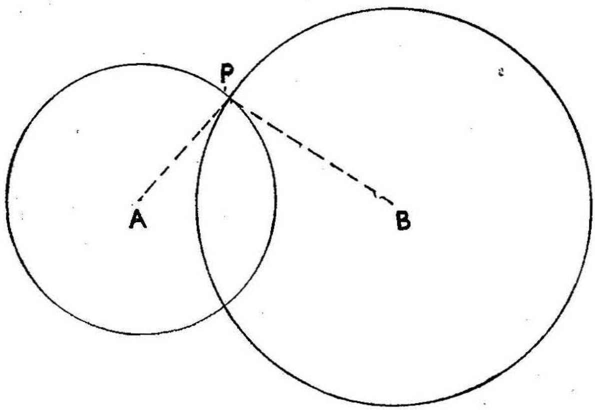
$\odot(A)$, $\odot(B)$ P எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். வட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் என்பது P எனும் புள்ளியில் வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமாகும்.

ஆனல் தொடுகோடுகள் முறையே AP, BPக்குக் குத்தாகும்.

$\therefore$ அவற்றிடையேயுள்ள கோணம் $\angle APB$க்குச் சமம்.

$\therefore$ இரண்டு வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம், அவை வெட்டும் புள்ளிக்கு வரையப்படும் ஆரங்களிடையேயுள்ள கோணமாகும்.

வெட்டுங்கோணம், செங்கோணமாயின், வட்டங்கள் குத்து வட்டங்கள் எனப்படும். $\odot(A) \perp^r \odot(B)$ ஆக அமைந்து Pயில் வெட்டினால் $\angle APB = 90°$ ஆகும். $PB \perp^r AP$ ஆனதால் PB $\odot(A)$க் குத் தொடுகோடாகும். அதேபோல PA $\odot(B)$க்குத் தொடுகோடாகும்.



படம் 24.

(i) ஆகவே இரண்டு வட்டங்களில் ஒன்றன் மையத்தி னின்று மற்ற வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோட்டின் நீளம், ஆரத் திற்குச் சமமானால், இரண்டு வட்டங்களும் குத்தாகும்.

(ii) மறுதலையாக, இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானால், ஒன்றன் மையத்தினின்று மற்றதற்குள்ள தொடு கோட்டின் நீளம், அந்த வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது $\odot(A)$, $\odot(B)$ இருவட்டங்கள் ஆகுக.

$\odot(A)$யின் ஆரம் a ஆகுக.

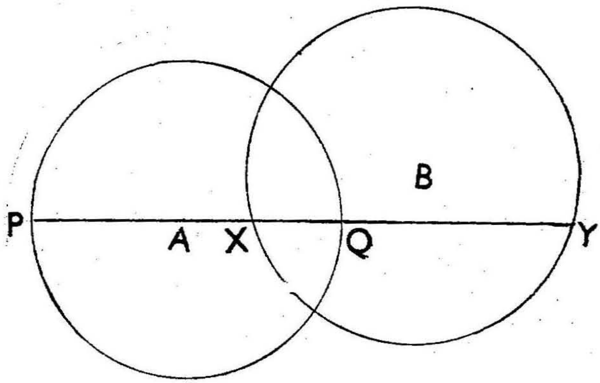
Aயிலிருந்து $\odot(B)$க்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளம் t_A ஆகுக.

(i) $t_A = a$ என்றால் $\odot(A) \perp^r \odot(B)$

(ii) $\odot(A) \perp^r \odot(B)$ என்றால் $t_A = a$

தேற்றம் 11

இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானல், ஒன்றன் விட்டத்தை மற்றது ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கும்.



படம் 25.

கொள்கை : (i) $\odot(A) \perp^r \odot(B)$

(Aஐ மையமாகவுடைய வட்டமும் Bஐ மையமாக வுடைய வட்டமும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.)

(ii) $\odot(A)$யின் விட்டம் PQவை $\odot(B)$, XY எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $(PXQY) = -1$

நிரூபணம் : வட்டங்கள் Tயில் வெட்டட்டும்.

$\odot(A) \perp^r \odot(B)$ ஆதலால்

AT, வட்டம் (B)க்குத் தொடுகோடு.

$\therefore AX.AY = AT^2$

$= AQ^2$ ($\because AQ = AT$ வட்ட ஆரம்)

ஆனல் PQ விட்டம் ஆதலால் PQஇன் நடுப்புள்ளி A ஆகும். அதாவது $AP = AQ$.

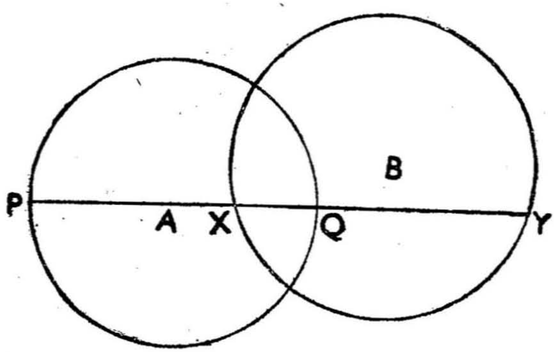
$\therefore PQ$வை X, Y எனும் புள்ளிகள் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கின்றன. (தேற்றம் 5)

$\therefore \mathbf{(PXQY) = -1}$

தேற்றம் 12

(மறுதலை)

இரண்டு வட்டங்களில், ஒன்றன் விட்டத்தை மற்றது ஆர்மானிக்காகப் பிரித்தால் அவை குத்து வட்டங்களாகும்.



படம் 26.

கொள்கை : (i) $\odot(A)$யின் விட்டம் PQவை $\odot(B)$ X, Yயில் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கிறது.
அதாவது $(PXQY) = -1$

நிரூபிக்க : $\odot(A) \perp^r \odot(B)$.

நிரூபணம் : வட்டங்கள் Tயில் வெட்டட்டும்.

$(PXQY) = -1$

ஆனல் $AP = AQ$ [PQ விட்டம் A மையமாதலால்]

$\therefore$ $AX.AY = AP^2$

ஆனல் $AX.AY = t_A{}^2$

[$t_A = A$யிலிருந்து வட்டம் (B)க்குள்ள தொடுகோட்டு நீளம்.]

$\therefore$ $t_A = AP =$ வட்டஆரம்.

$\therefore$ வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

ஒரு வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் : ஒரு வட்டத்தின் விட்ட நுனிகளுடன் இசைப்புள்ளி வரிசையில் அமையும் இரு புள்ளிகள் அந்த வட்டத்திற்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் (Inverse points for

the circle) எனப்படும். படம் 25ல், Aஐ மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு PQ விட்டமாகும், X, Y எனும் புள்ளிகளுடன் PQ இசைப் புள்ளி வரிசையில் அமைகின்றன. அதாவது $(PXQY)=-1$; ஆகவே XY வட்டத்திற்கு **தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.**

இவ்வாறு அமையும்போது PQவின் நடுப்புள்ளி வட்ட மையம் A ஆகும்.

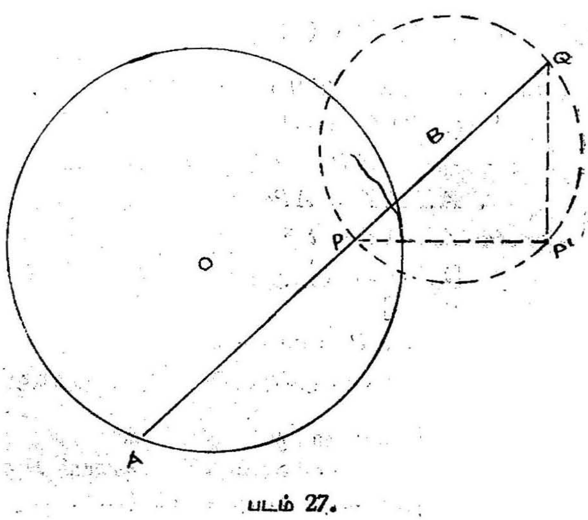
$$\therefore \ AX.AY=a^2 \quad (\text{வட்ட ஆரம்}=a)$$

இந்தத் தொடர்பைத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகட்கு விளக்கமாகக் கொள்வதும் உண்டு. அதாவது Aஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தில் $AX.AY=a^2$ (a வட்ட ஆரம்) எனும்படி X, Y புள்ளிகள் அமைந்தால் அவை வட்டத்தின் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளெனப் படும். PQ அந்த விட்டத்தின் நுனிகளானால் $(PXQY)=-1$ ஆகும்.

இசைக்கோடும், இசைப்புள்ளியும்
(Poles and Polars)

தேற்றம் 13

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழி ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் நாண் முனைகளுக்குள்ள, புள்ளியின் இசைத் துணைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடாகும்.



படம் 27.

கொள்கை : (i) O எனும் புள்ளியை மையமாகவும் a எனும் நீளமுள்ள ஆரமும் உள்ள வட்டம் $\odot (O)$
(ii) P என்பது ஒரு புள்ளி.
(iii) P வழி AB ஏதேனுமொரு நாண், அதில் ABக்கு Pயின் இசைத் துணைப் புள்ளி Q.

நிரூபிக்க : AB மாறும் போது (ஆனால் P வழியே சென்று) Qவின் இயங்குவழி ஒரு நேர்கோடெனா.

வரைதல் : OPக்கு QP' எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

நிரூபணம் : $(APBQ) = -1$;
$\because$ $PP'Q = 90°$
$\therefore$ PQவை விட்டமாகவுடைய வட்டம் P' வழிச் செல்கிறது. அதன் விட்டமாகிய PQவை வட்டம் $\odot (O)$ ABயில் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கிறது.
$\therefore$ $\odot (O) \perp \odot PP'Q$.

$\therefore$ Oவிலிருந்து, வட்டம் $PP'Q$விற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் நீளம் அதன் ஆரம் r ஆகும். ஆனால் தொடுகோட்டின் நீளம் $= \sqrt{OP.OP'}$.

$$\therefore \quad OP.OP' = r^2$$

$\therefore$ Q எங்கு இருப்பினும் அதிலிருந்து OPக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் அடி P' நிலையானது.

$\therefore$ Qவின் நியமப்பாதை OPக்கு P'ல் அமையும் குத்துக்கோடாகும்.

குறிப்பு 1 : $(APBQ) = -1$ என்றால் PQவை விட்டமாகவுடைய வட்டம் AB வழி வட்டங்களுக்குக் குத்தாகவுள்ளது எனும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

குறிப்பு 2 : Qவின் நியமப்பாதையாகிய நேர்கோடு வட்டத்திற்கு Pயின் இசைக்கோடு (Polar) எனப்படும். P, அந்தக் கோட்டின் இசைப் புள்ளி (Pole) எனப்படும்.

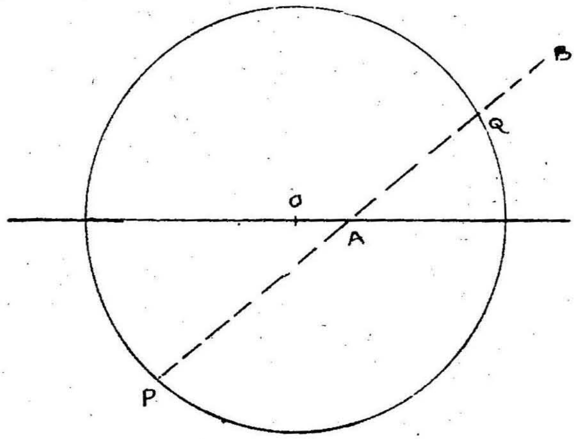
குறிப்பு 3 : $OP.OP' = r^2$ ஆவதால் P, P' எனும் புள்ளிகள் வட்டத்திற்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.

ஆகவே Oவை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு Pயின் இசைக்கோடு, OP எனும் கோட்டிற்கு Pயின் தன் மாற்றுப் புள்ளியில் குத்தாக அமையும் கோடாகும் எனத் தெரிகிறது.

மறுதலையாக Pயின் இசைக்கோடு OPயை Pயின் தன் மாற்றுப் புள்ளியாகிய P'ல் வெட்டுகிறது எனவும் தெளிவாகிறது.

தேற்றம் 14

ஒரு வட்டத்திற்கு *A* எனும் புள்ளியின் இசைக்கோடு B வழிச் செல்லுமாயின், Bயின் இசைக்கோடு *A* வழிச் செல்லும்.



படம் 28.

கொள்கை : *A* என்பது ஒரு புள்ளி. வட்டம் (O)க்கு அதன் இசைக்கோடு *B* வழிச் செல்கிறது.

நிரூபிக்க : *B*இன் இசைக்கோடு *A* வழிச் செல்லும் என.

வரைதல் : *AB*ஐச் சேர்க்கும் கோடு, வட்டத்தை *PQ* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : *B* எனும் புள்ளி *A*யின் இசைக்கோட்டில் அமைவதால், *PQ*வுக்கு *A*யின் இசைத் துணைப் புள்ளியாகும்.

∴ *PQ*வுக்கு *B*யின் இசைத் துணைப்புள்ளி *A* ஆகும்.

∴ இசைக்கோட்டின் விளக்கப்படி, *A* எனும் புள்ளி *B*யின் இசைக்கோட்டில் அமைகிறது.

அதாவது *B*யின் இசைக்கோடு *A* எனும் புள்ளி வழிச் செல்லுகிறது.

குறிப்பு : ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடு இன்னொரு புள்ளி வழிச் செல்லுமாயின், இரு புள்ளிகளும் ஒன்றற்கொன்று துணையியப் புள்ளிகள் (Conjugate points) எனப்படும். ஆகவே ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோட்டில் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் அதன் துணையியப் புள்ளியாகும்.

தேற்றம் 15

[தேற்றம் 14ன் இருபான்மை நெறித் தேற்றம்]
[Dual Theorem of Theorem 14]

ஒரு வட்டத்திற்கு 'a' எனும் கோட்டின் இசைப் புள்ளி, 'b' எனும் கோட்டில் அமைந்தால், bஇன் இசைப் புள்ளி, 'a'யில் அமையும்.

'a'இன் இசைப்புள்ளி A ஆகுக

'b'இன் இசைப் புள்ளி B ஆகுக

∴ Aயின் இசைக்கோடு 'a' ஆகும்

Bயின் இசைக்கோடு 'b' ஆகும்

A எனும் புள்ளி bல் அமைந்துள்ளது (கொள்கை)

அதாவது Bயின் இசைக்கோடாகிய b, A வழிச் செல்கிறது.

∴ Aஇன் இசைக்கோடு 'a' B வழிச் செல்லும்.

∴ bஇன் இசைப்புள்ளி B, 'a'இல் அமையும்.

குறிப்பு: ஒரு கோட்டின் இசைப்புள்ளி இன்னொரு கோட்டில் அமைந்தால், இரு கோடுகள் ஒன்றற்கொன்று துணையிய கோடுகள் (Conjugate lines) எனப்படும்.

குறிப்பு 1: **இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் இசைப் புள்ளி, அப்புள்ளிகளின் இசைக்கோடுகளின் சந்தி யாகும்.**

A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகள் முறையே a, b ஆகுக.

a, b சந்திக்கும் புள்ளி L ஆகுக.

Aயின் இசைக்கோடு a, L வழிச் செல்வதால் Lஇன் இசைக்கோடு A வழிச் செல்ல வேண்டும்.

Bயின் இசைக்கோடு bயும் L வழிச் செல்வதால், Lஇன் இசைக் கோடு B வழியும் செல்ல வேண்டும்.

∴ Lஇன் இசைக்கோடு $A\,B$ ஆகும். அதாவது $A\,B$யின் இசைப்புள்ளி L ஆகும்.

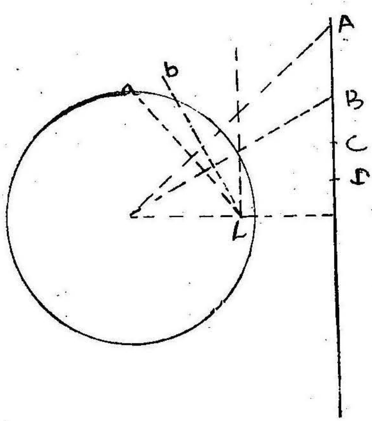
A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டை $A\,B$ எனக் குறிப்பது போன்று a, b எனும் இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை $\widehat{ab}$ என்று குறிப்போம். அப்போது ABயின் இசைப்புள்ளி $\widehat{ab}$ என வருகிறது. $\widehat{ab}$யின் இசைக்கோடு AB எனவுமாறுகிறது.

குறிப்பு 2: அதாவது இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இசைக்கோடு, அவற்றின் இசைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு (1) (2) ஒன்றற்கொன்று இருபான்மை நெறிப்பண்பெனக் காண்கிறோம்.

தேற்றம் 16

நான்கு புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் இசைப்புள்ளி வரிசையானால், ஒரு வட்டத்திற்கு அவற்றின் இசைக் கோடுகள் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாக அமையும்.



படம் 29.

$ABCD$ எனும் புள்ளிகள் l எனும் கோட்டில் அமைகின்றன. O என்பது ஒரு வட்டத்தின் மையம். L எனும் புள்ளி l எனும் கோட்டின் இசைப்புள்ளியாகுக.

$\therefore$ Lஇன் இசைக்கோடு 'l', A, B, C, D எனும் புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால், A, B, C, D எனும் புள்ளிகளின் இசைக்கோடுகள் a, b, c, d என்பவை L வழிச் செல்லும் கோடுகளாகும். இவ்வாறு ஒரு கோடமைப்புள்ளிகளின் இசைக்கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகின்றன.

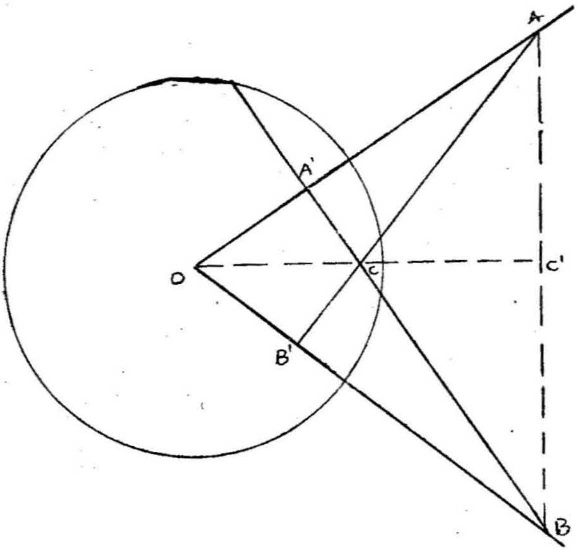
அன்றியும் $a \perp OA$ $b \perp^r OB$, $c \perp^r OC$ $d \perp OD$ $\therefore$ $(a\ b\ c\ d)$ எனும் கற்றையும் $O(ABCD)$ எனும் கற்றையும் சம கோணங்களை அடக்கியுள்ள கோட்டுக் கற்றையாகும்.

$\therefore (abcd) = O\,(ABCD) = (ABCD)$

$\therefore (ABCD) = -1$ என்றால் $L\,(abcd) = -1$ ஆகிறது.

தன்னிசை முக்கோணம் : ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், எதிர் முனைகளின் இசைக் கோடுகளானால், அத்தகைய முக்கோணம் வட்டத்திற்கு **தன்னிசை முக்கோணம்** (self conjugate triangle) எனப்படும். முக்கோணத்திற்கு வட்டம் தன்னிசை வட்டம் (Polar circle) எனப்படும்.

ஒரு வட்டம் தரப்பட்டால் அத்தகைய முக்கோணம் உளதா என்பதை ஆராய்வோம்.



படம் 30.

O எனும் புள்ளியை மையமாகவும் r ஆரமும் உள்ள வட்டத்தைக் கொள்வோம்.

Aயாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகுக. அதன் இசைக்கோடு 'a' ஆகுக.

OAக்கு Aயின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகிய A^1ல் "a" குத்தாக அமையும். [$\therefore OA.OA' = r^2$]

'a'ல் B எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் கொள்க.

Aயின் இசைக்கோடு B வழிச் செல்வதால் Bயின் இசைக்கோடு A வழிச் செல்ல வேண்டும். அத்துடன் OBக்குக் குத்தாகவும் இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ OBக்கு AB^1 எனும் குத்துக் கோடு வரைக. இது Bயின் இசைக்கோடு b ஆகும்.

B', Bயின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகும் [$\therefore OB.OB' = r^2$] bயும் aயும் Cயில் சந்திக்கட்டும்.

$\therefore$ C, ABயின் இசைப் புள்ளியாகும்.

$\therefore$ BC, CA, AB முறையே A, B, Cயின் இசைக் கோடுகளெனத் தெளிவாகிறது.

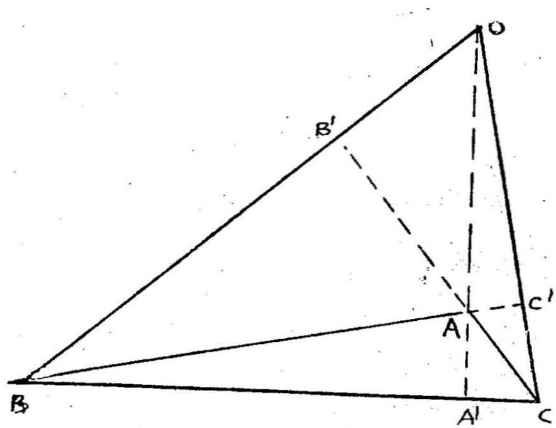
குறிப்பு 1: A தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாதலாலும் A-ன் இசைக்கோட்டில் B ஏதேனும் ஒரு புள்ளி ஆதலாலும், வட்டம் தரப்பட்டால் மிகப் பலத் தன்னிசை முக்கோணங்கள் காண முடியும் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு 2: OA, OB, OC எனும் கோடுகள் BC, CA, ABக்குக் குத்துக் கோடுகளாதலால், வட்டமையம் முக்கோணத்தின் குத்து சந்தி (Ortho centre) எனவும் தெரிகிறது.

குறிப்பு 3: $OA.OA' = OB.OB' = r^2$ என வருவதால் A, A'; B, B'; Oவுக்கு ஒரே புறமாக அமைகின்றன. அதாவது குத்துச் சந்தி முக்கோணத்திற்கு வெளியே அமைகிறது.

$\therefore$ முக்கோணம் விரிகோண முக்கோணம் எனவும் தெரிகிறது.

தன்னிசை வட்டம் (Polar circle):



படம் 31.

ABC விரிகோண முக்கோணமாகுக.

AA'; BB'; CC' எதிர் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளாகுக. அவை O எனும் குத்து சந்தியில் சந்திக்கின்றன.

$AA'\ CC'$; $AA'\ BB'$; $BB'\ CC'$ இவை வட்ட நாற்கரங்களாத லின் $OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = k^2$ (ஆகுக).

Oவை மையமாகவும் k நீள ஆரமுள்ள வட்டத்திற்கு BC, OAக்கு A'யின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகிய A'ல் அமையும் குத்துக் கோடாகும்.

∴ வட்டத்திற்கு Aயின் இசைக்கோடு BC ஆகும். இதே போன்று, B, Cயின் இசைக் கோடுகள், முறையே CA, AB ஆகும்.

∴ இந்த வட்டத்திற்கு, ABC தன்னிசை முக்கோணமாகும். ஆகவே,

(i) விரிகோண முக்கோணம் தரப்பட்டால் அது ஒரே ஒரு வட்டத்திற்கு மட்டும் தன்னிசை முக்கோணமாகிறது. அத்தகைய வட்டத்தின் பெயர் முக்கோணத்தின் தன்னிசை வட்டம் (Polar circle of the triangle) எனப்படும்.

(ii) முக்கோணம் குறுங்கோணமானால் O, முக்கோணத்திற்குள் அமையும். $OA{\cdot}OA'$ எதிரெண்ணுகும். ஏனெனில் OA, OA' எதிரெதிர்த் திசையுடையவை. ∴ தன்னிசை வட்ட ஆரவர்க்கம் $OA{\cdot}OA'$ எதிரெண். ∴ ஆரம் கற்பனை நீளமுடையது (Imaginary radius) ஆனல் மையம் மெய்ப் புள்ளியாகும். ஆகவே தன்னிசை வட்டம் உள்ளது. ஆனல் அது கற்பனை வட்டம் என்கிறோம். [அதாவது நெறித் தொடர்ச்சிக் கொள்கையால், இங்கும் வட்டம் உள்ளது என்கிறோம்.]

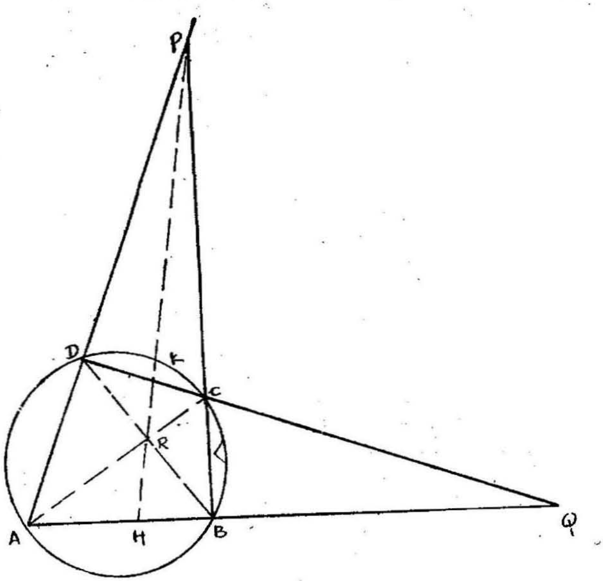
(iii) ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle A = 90'$ ஆனல் தன்னிசை வட்ட ஆரம் $=0$, குத்து சந்தி A. ∴ தன்னிசை வட்டம் A எனும் புள்ளி வட்டம் (Point circle) ஆகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் தன்னிசை வட்டம் வரைய. (படம் 30 பார்க்கவும்).

ABC முக்கோணம் ஆகுக. இதற்குத் தன்னிசை வட்டம் மெய் வட்டமானல் ஒரு கோணம் விரிகோணமாதல் வேண்டும். A எனும் கோணம் விரிகோணமாகுக. முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகள் AA', BB', CC' எதிர்பக்கங்களை A', B', C'யில் சந்திக்கவும். O எனும் புள்ளி குத்துமையம் ஆகுக. OA, OA' எனும் நீளங்களுக்குப் பெருக்கிடை (Geometric mean) காண்க. அது OL ஆகுக. Oவை மையமாகவும், OL எனும் நீளம் ஆரமுள்ள வட்டம் வரையப் படின் அது முக்கோணத்தின் தன்னிசை வட்டமாகும்.

தேற்றம் 17

ஒரு வட்டத்தில் வரையப்பெறும் முழு நாற்கோணத்தின் இசை முக்கோணம், வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.



படம் 32.

கொள்கை : வட்டத்தில் அமையும் நான்கு புள்ளிகள் $ABCD$ யால் ஆன நாற்கோணத்தின் இசை முக்கோணம் PQR ஆகும்.

நிரூபிக்க : PQR வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமென

வரைதல் : PR, ABஐ Hலும், CDஐ Kஇலும் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : முழு நாற்கோணத்தின் ஆர்மானிக்குப் பண்பின்படி $P\,(ARBQ) = -1$

$\therefore$ $(DKCQ) = -1$; $(AHBQ) = -1$

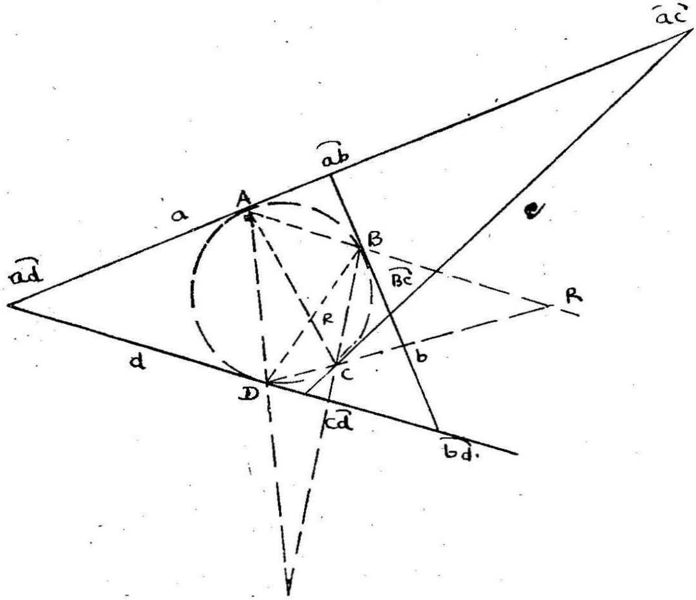
$\therefore$ AB, DC என்பவை Q வழி நாண்களாகும். இவற்றில் Qவின் இசைத் துணைப்புள்ளிகள் H, K ஆகும். ஆகவே இவை Qவின் இசைக்கோட்டில் அமையும்.

$\therefore$ Qவின் இசைக்கோடு HK. அதாவது
Qவின் இசைக்கோடு PR. இதேபோல
Pயின் இசைக்கோடு QP
Rயின் இசைக்கோடு PQ

$\therefore$ வட்டத்திற்கு PQR தன்னிசை முக்கோணமாகும்.

தேற்றம் 18

ஒரு முழு நாற்கரத்தின் நான்கு கோடுகள் ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளாக அமைந்தால், அதன் இசை முக்கோணம் வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.



படம் 33.

கொள்கை : $a, b. c, d$ எனும் கோடுகள் ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளாகும்.

நிரூபிக்க : $abcd$ என்ற நாற்கரத்தின் இசை முக்கோணம் வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமெனை.

நிரூபணம் : $a, b. c, d$ என்பவை வட்டத்தை A, B, C, D என்ற புள்ளியில் தொடட்டும். $ABCD$யின் இசை முக்கோணம் PQR ஆகுக.

∴ வட்டத்திற்கு PQR தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும். PA, PR, PB, PQ என்பவை ஒரு புள்ளி P, வழிக் கோடுகள்.

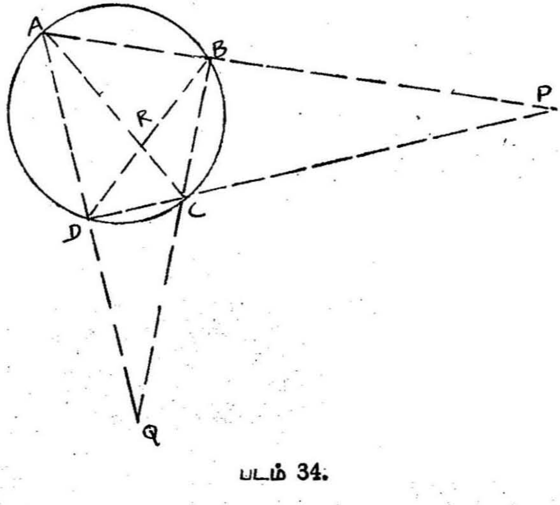
∴ அவற்றின் இசைப்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப்புள்ளி களாகும்.

இசைப் புள்ளிகளாவன : $\widehat{ad}$, Q, $\widehat{bc}$, R ஆகும்.

∴ நாற்கோட்டத்தின் மூலைக்கோடு $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ இவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு, அதாவது QR ஆகிறது. இதே போல மற்ற மூலைக்கோடுகள் RP, PQ என்பவை யாம். ஆகவே நாற்கரத்தின் இசை முக்கோணமும் PQR ஆகிறது. இது வட்டத்திற்கு தன்னிசை முக்கோணம் என்று முன்னரே சொன்னோம்.

∴ வட்டத்தைத் தொடும் கோடுகள் நான்கினால் அமையப்பெறும் நாற்கரத்தின் இசை முக்கோணம், வட்டத்திற்கு தன்னிசை முக்கோணம் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தில் வரையப்படும் நாற்கோணமும், நாற்கோண முனைகளில் வரையப்படும் நான்கு தொடுகோடுகளாகிய நாற்கரமும், ஒரே முக்கோணத்தை இசை முக்கோணமாக அமைந்துள்ளன என்றும், அந்த முக்கோணம், வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணம் என்றும், மேலே கூறிய தேற்றத்தின் நிரூபணத்தால் தெளிவாகிறது. இதையே தேற்றமாகக் கூறுவதும் உண்டு.



படம் 34.

கோடு வரைதல் வழி (By Ruler Construction) ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியின் இசைகோட்டை அமைத்தல்.

வட்டமும், P எனும் புள்ளியும் தரப்பட்டுள்ளது. வட்டத்திற்கு Pயின் இசைக்கோட்டை அமைக்க.

P வழி இருகோடுகள், வட்டத்தை முறையே A, B; C, D; யில் வெட்டும்படி வரைக. A, B, C, D, Pயில் சந்திக்கின்றன. AC, BC; AC, BDயில் Q, Rல் சந்திக்கட்டும். அப்போது PQR, நாற்கோணத்தின் இசை முக்கோணமாகும். ஆகவே வட்டத்திற்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும். $\therefore QR$, Pயின் இசைக்கோடாக அமைகிறது.

கோடு வரைதல் வழி (By ruler Construction) ஒரு வட்டத்திற்கு, ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளி காண.

'l' என்பது ஒரு கோடாகுக.

P_1, P_2 என இரு புள்ளிகளைக் கோட்டில் கொள்வோம். முன் சொன்னபடி, இவற்றின் இசைக்கோடுகள் $Q_1 R_1$; $Q_2 R_2$ வரைவோம். இவையிரண்டும் L எனும் புள்ளியில் வெட்டினால் lஇன் இசைப்புள்ளி L ஆகும். ஏனெனில் $P_1 P_2$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் இசைப்புள்ளி, அவற்றின் இசைக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ஆகும்.

'இருபான்மை நெறித்' தத்துவம்
(Principle of Duality)

இசைப் புள்ளி வரிசை, இசைக் கோட்டுக் கற்றை; முழு நாற்கோணம், முழு நாற்கரம் இவைபற்றிய தேற்றங்களை ஆராய்ந்தால் ஒரு உண்மை புலப்படும். அதாவது ஒவ்வொரு, 'புள்ளி, கோடு' தொடர்பைத் தரும் தேற்றத்திற்கும், ஒத்த 'கோடு, புள்ளி' தொடர்பைத்தரும் தேற்றங்கள் வரும். இந்த உண்மையை மேலும் இசைக் கோடுகள், இசைப் புள்ளிகள், இசைத் துணைப் புள்ளிகள், இசைத் துணைக் கோடுகள் இவைகளைப் படிக்கும்போதும் தென்படுகிறது. ஒத்த தொடர்புகளைக் கீழே கூறுவோம் :

	புள்ளி, கோடு தொடர்பு	கோடு புள்ளித் தொடர்பு
1	இருபுள்ளி வழிக்கோடு	இருகோடு சேரும் புள்ளி
2	AB எனும் கோடு	$\widehat{ab}$ எனும் புள்ளி
3	A எனும் புள்ளி l எனும் கோட்டில் அமையும்.	a எனும் கோடு L எனும் புள்ளி வழிச் செல்லும்
4	கோட்டில் அமையும் புள்ளி வரிசை	புள்ளி வழிக் கோட்டுக் கற்றை
5	இசைப் புள்ளி வரிசை	இசைக் கோட்டுக் கற்றை
6	ஒரு நாற்கோணம்	நாற்கரம்
7	வட்டத்தின்மேல் புள்ளி	வட்டத்தைத் தொடும் கோடு
8	இசைப்புள்ளி	இசைக்கோடு
9	இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் இசைப்புள்ளி, புள்ளிகளின் இசைக்கோடுகளின் சந்தி	இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இசைக்கோடு, கோடுகளின் இசைப்புள்ளி வழிக் கோடு

எனத் தேற்றங்கள் ஒத்து வருவதைக் காணலாம். ஆகவே 'புள்ளி கோடு தொடர்பு' நெறியை நிலைநாட்டினால் இந்தத் தத்துவப்படி 'கோடு, புள்ளி' தொடர்பும் நிலைநாட்டப்பட்டதாகக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டாய் : 'ஒரு வட்டத்திற்கு இரு துணையிய புள்ளிகளும் அவைகளைச் சேர்க்கும் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளும் இசைப் புள்ளி வரிசையாகும்' என்பது 'இசைக்கோட்டின் விளக்கத்திலிருந்து தெற்றெனத் தெளியும் உண்மையாகும்.

இதிலிருந்து வரும் 'இருபான்மை நெறி'த் தேற்றம் 'இரு இசைத் துணைக்கோடுகளும் அவை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள இரு தொடு கோடுகளும் 'இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்' என்பதாம். இதை நிறுவ வேற்று நிரூபணம் தேவையில்லை. முதல் தேற்றத்தை நிறுவி, 'இருபான்மை நெறியினால்,' இந்த உண்மை புலனாகிறது எனவும் நிலைநாட்டலாம்.

"நெறித் தொடர்ச்சி" தத்துவம்
(Principle of Continuity)

கணித விதியில் 'விலக்குகள்' (Exception) நேரிடா வண்ணம் தவிர்க்க 'நெறித் தொடர்ச்சி' எனும் கொள்கை புகுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாய், ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டலாம்; அல்லது தொடலாம், அல்லது வெட்டாமலும் இருக்கலாம், என மூன்று நிலைகள் வருகின்றன. இவ்வாறின்றி ஒரே விதியாகக் கூற வேண்டுமாயின் அதாவது விலக்குகளைத் தவிர்க்கவேண்டுமாயின் சில கருத்துக்களைப் புகுத்தவோ அல்லது உள்ள கருத்தின் பொருளை விரிவு படுத்தவோ தேவைப்படும். "ஒரு கோடு வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில்" வெட்டும் எனக்கூறி வெட்டும் புள்ளிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தினால் கோடு தொடு கோடெனப்படும். வெட்டாவிடில், மெய்ப் புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டவில்லையே ஒழிய, 'கற்பனைப் புள்ளிகளில்' வெட்டுகிறது எனக் கோட்டில் கற்பனைப் புள்ளிகளும் உள்ளன எனக் கூறுகிறோம். வரை கணிதத்தை இயற்கணிதம் வழி ஆராயும்போது 'எவ்வாறு கற்பனை எண்கள்' பயன்படுகின்றனவோ அதுபோன்று தொகு முறையில் ஆராயும்போது (Purely synthetic method) 'நெறித் தொடர்ச்சி'த் தத்துவம் பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாய் : வட்டத்தில் 'இரண்டு இசைத்துணைப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு' வட்டத்தால் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்பது ஓர் உண்மை. கோடு, வட்டத்தை வெட்டாவிட்டாலும், புள்ளிகள் உள்ளன. ஆனால் அவை மெய்ப்புள்ளிகளல்ல, 'கற்பனைப்புள்ளிகள்' என 'நெறித் தொடர்ச்சி'த் தத்துவம் விலக்கைத் தவிர்க்கிறது.

பயிற்சி

1. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியுள்ளது. PA PB வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள் வட்டத்தை A, Bயில், தொடுகின்றன. AB எனும் கோடு Pயின் இசைக்கோடு எனக் காட்டு.

2. வட்டத்தின் தளத்திலுள்ள P வழி நாண்களின் நுனிகளில் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் Pயின் இசைக்கோட்டில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டு.

3. வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியின் இசைக்கோடு, அங்குள்ள தொடுகோடாகும்.

4. (i) வட்டத்தின் விட்டத்தின் இசைப்புள்ளி யாது? (ii) வட்ட மையத்தின் இசைக்கோடு யாது?

5. ஒரு கோட்டில் உள்ள T எனும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் TP, TQ என்பவை தொடுகோடுகள். T கோட்டில் நிலைமாறும் போதும் PQ ஒரே ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டு.

6. O எனும் புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு P, Q என்பவை இசைத்துணைப் புள்ளிகள். ΔOPQவிற்கு PQவின் இசைப் புள்ளி குத்து சந்தி எனக் காட்டு.

7. இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொண்டால் பொது நாண் ஒரு வட்டத்திற்கு மற்ற வட்டமையத்தின் இசைக் கோடாகும்.

8. ஒரு வட்டத்தின் சமநீளமுள்ள நாண்களின் இசைப் புள்ளிகள் (அதே வட்டத்திற்கு) இன்னொரு வட்டத்தில் அமையும்.

9. BC, CA, ABயின் இசைப் புள்ளிகள் (ஒரு வட்டத்திற்கு) A', B', C' ஆனால் A, B, C என்பவை $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ இவற்றின் இசைப்புள்ளிகளாகும்.

10. ஒரு வட்டத்தில் A, B, C, D எனும் புள்ளிகள் வட்டத்தில் அமையும் ஆர்மானிக்குப் புள்ளி வரிசை என்றால் AC, BD என்பவை வட்டத்திற்கு இசைத் துணைக்கோடுகளாகும். மறுதலையைக் கூறி நிரூபிக்க.

11. ABC என்ற முக்கோணத்தின் உள் விட்டமையம் I; IA, IB, IC எனும் கோடுகளுக்கு Iல் குத்துக்கோடுகள் யாதேனும் தொடு கோட்டை (உள் தொடு வட்டத்தின்) P, Q, Rஇல் வெட்டுகின்றன. AP, BQ, CR ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளெனக் காட்டு.

12. ஒரு வட்டத்திற்கு P எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு இரு இசைத் துணைப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டின் சம வெட்டியானால் அப்புள்ளிகள் Pயில் செங்கோணம் தாங்குகிறது எனக் காட்டு.

13. P, R என்பவை ஒரு வட்டத்திற்கு இசைத் துணைப் புள்ளிகள். PA, QB என்பவை வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள் என்ருல் $PQ^2 = PA^2 + QB^2$.

14. $\triangle ABC$யின் சுற்றுவட்டத்திற்கு BCயின் இசைப்புள்ளி T. Aயில் உள்ள தொடுகோட்டிற்கு T வழி இணையாகவுள்ள கோடு AB, ACஐ D, Eயில் வெட்டுகிறது. $DT = TE$ என நிறுவுக.

15. ஒரு வட்ட நாண் ABஐ PQ எனும் இன்ஞெரு நாண் Cயில் சமக்கூறிடுகிறது. P, Qல் வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள் ABஐ H, Kஇல் வெட்டுகிறது. $CH = HK$ எனக்காண்க.

16. $ABCD$ எனும் நாற்கரம் ஒரு வட்டத்தைத் தொடுகிறது. AP, BQ, CR, DS என்பவை யாதேனும் ஒரு தொடுகோட்டுக்குள்ள குத்துக்கோடுகள். $AP.CR : BQ.DS$யின் மதிப்பு, தொடுகோடு மாறினும் மாருது எனக் காட்டு.

17. கோடு மட்டும் வரைதல்வழி ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு வரையும் வகையைக் காண்க.

18. ஒரு வட்டத்திற்கு PQ யாதேனுமொரு நாண் A எனும் புள்ளி வழிச் செல்லுகிறது. B எனும் மற்ருெரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை P, Qவுடன் சேர்க்கும் கோடுகள் வட்டத்தை மீண்டும் R, Sல் வெட்டுகின்றன. நாண் மாறும்போது, RS மாறும் எனவும் ஆனுல் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியே செல்லும் எனவும் காண்க.

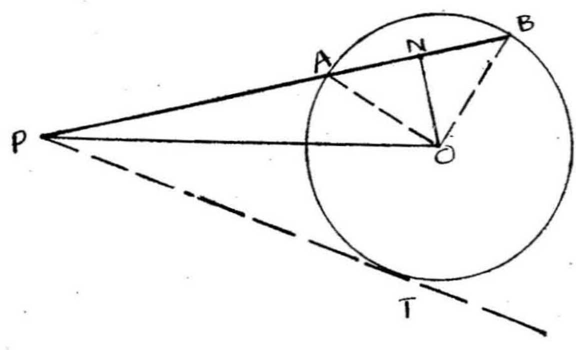
19. இரண்டு வெட்டும் வட்டங்களுக்குப் பொதுத் தன்னிசை முக்கோணம் யாது? வெட்டாத வட்டங்களுக்குப் பொதுத் தன்னிசை முக்கோணம் யாது?

20. AB, BC, CD, DA ஒரு வட்டத்திற்கு நான்கு தொடுகோடுகள். [A', B' C', D'] அவை வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகள். $A'D'$; $B'C'$ எனும் கோடுகள் Pயில் சந்தித்தால் $PO \perp AC$ எனக் காட்டு (O, வட்டமையம்)

4. இரு வட்டங்களின் அச்சு

ஒரு வட்டத்திற்குப் புள்ளியின் வர்க்கம்
(Power of a point with respect to a circle)

O என்ற புள்ளியை மையமாக 'r' நீளமுள்ள ஆரமுடைய வட்டம் ஒன்றைக் கொள்வோம்.



படம் 35.

P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக. வட்டத்திற்குப் Pயின் வர்க்க மெனப்படுவது Po^2-r^2 ஆகும்.

குறிப்பு: P வழி வரையப்படும் ஏதேனும் ஒரு வட்டத்தை A, B எனும் .புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். Oவிலிருந்து ABக்கு ON எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

$\therefore$ ABயின் நடுப்புள்ளி N ஆகும்.

$AN = NB = x$ ஆகுக.

$$\therefore PA.PB = (PN-x)(PN+x) = PN^2-x^2$$
$$= (PO^2-ON^2)-(AO^2-ON^2)$$
$$= PO^2-OA^2$$
$$= PO^2-r^2 = P\text{யின் வர்க்கம்.}$$

∴ P வழி விட்டத்திற்கு வரையப்படும் கோடு, விட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் Pயின் வர்க்க மாகிறது.

குறிப்பு: PT என்பது தொடுகோடானல்

$PT.PT = Po^2 - r^2$ ஆகிறது.

∴ புள்ளியின் வர்க்கம், புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோட்டு நீளத்தின் வர்க்கம் எனவும் தெரிகிறது.

குறிப்பு 3: புள்ளி வட்டத்திற்கு

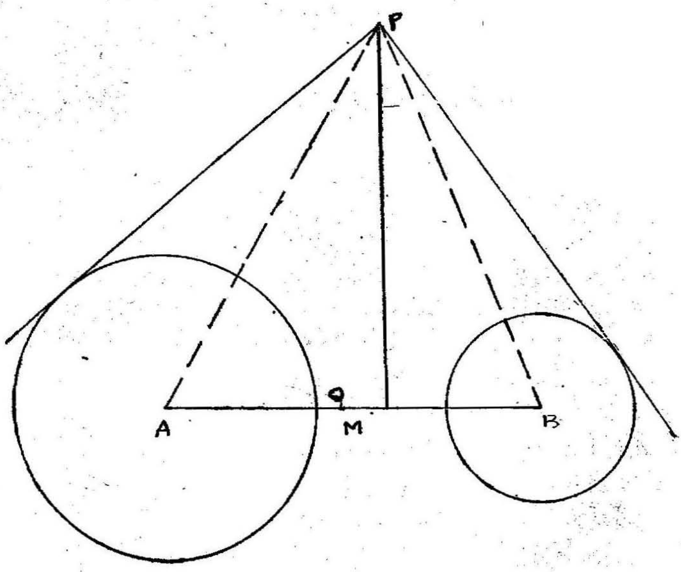
(i) வெளியே இருந்தால் வர்க்கம் நேரெண்.

(ii) வட்டத்தில் அமைந்தால் வர்க்கம் 0.

(iii) வட்டத்திற்குள் அமைந்தால் வர்க்கம் எதிரெண்ணுகும்.

தேற்றம் 19

இரண்டு வட்டங்களுக்கு, ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்கள் சமமாக இருக்கும்படி அது நகர்ந்தால், அதன் நியமப்பாதை, வட்டமையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோடாகும்.



படம் 36.

கொள்கை : (i) A, B என்ற புள்ளிகளை மையமாகவும் a, b நீள முள்ள ஆரங்களையும் முறையே உள்ள இரு வட்டங்கள்.

(ii) $PA^2-a^2=PB^2-b^2$ எனும்படி அமையும் P எனும் புள்ளி.

நிரூபிக்க : Pயின் நியமப்பாதை ABக்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோடு என

வரைதல் : ABக்கு PM எனும் குத்துக்கோடு வரைக. ABயின் நடுப்புள்ளி O ஆகுக.

நிரூபணம் : $PA^2-a^2 = PB^2-b^2$

$\therefore\ PA^2-PB^2 = a^2-b^2$

$\therefore\ (AM^2+MP^2)-(BM^2+MP^2) = a^2-b^2$

$(\because\ PM \perp^r AB)$

$\therefore\ AM^2-MB^2 = a^2-b^2$

$\therefore\ (AM+MB)(AM-MB) = a^2-b^2$

$\therefore\ AB \cdot 2.OM = a^2-b^2$

$$\therefore\ OM = \frac{a^2-b^2}{2\,AB}$$

$\therefore$ P மாறினுலும், ABக்கு அதன் குத்தடி M (foot of the perpendicular) நிலையானது.

$\therefore$ **Pயின் நியமப்பாதை, ABக்கு Mல் அமையும் குத்துக் கோடாகும்.**

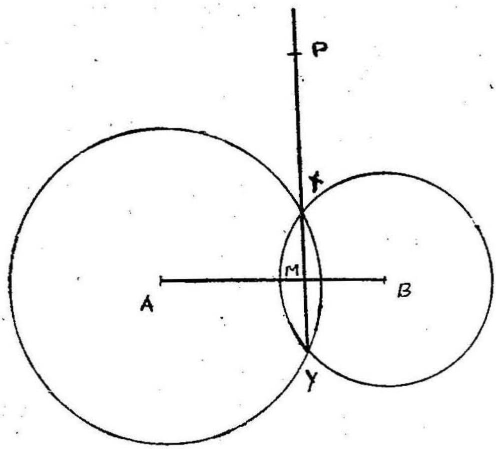
குறிப்பு 1 : இத்தகைய நியமப்பாதை, இருவட்டங்களின் 'சமத் தொடு கோட்டு அச்சு' (Radical axis) எனப்படும். ஏனெனில், புள்ளியின் வர்க்கம், தொடுகோட்டு நீள வர்க்கமாதலால், இக்கோட்டில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சம நீளமுள்ளவை.

குறிப்பு 2 : 'சமத் தொடுகோட்டு அச்சு' என்பதை இரு வட்டங் களின் "அச்சு" என்றே சுருக்கிக் கூறுவோம்.

குறிப்பு 3 : ABயில் $AM^2-MB^2 = a^2-b^2$ என அமையும் M எனும் புள்ளியில் ABக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு வட்டத் தின் அச்சாகிறது என்பதைக் காண்கிருேம்.

175043

குறிப்பு 4: இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால், அவற்றின் பொதுநாண், சமத்தொடு கோட்டச் சாகும். ஏனெனில் இரண்டு வட்டங்கள் X, Y எனும்



படம் 37.

புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். XYல் P யாதேனும் புள்ளியாகுக. வட்டங்கள் இரண்டிற்கும் Pயின் வர்க்கம் $PX \cdot PY$, சமமாதலால் P, வட்டங்களின் அச்சில் அமைகிறது. அதாவது X, Y வழிச் செல்லும் கோடு வட்டங்களின் அச்சாகும்.

மாற்று நிரூபணம்:

X, Y, என்ற புள்ளிகளின் வர்க்கங்கள், இரண்டு வட்டங்களுக்கும், பூச்சியம். ஆகவே அவை வட்டங்களின் அச்சில் அமைகின்றன.

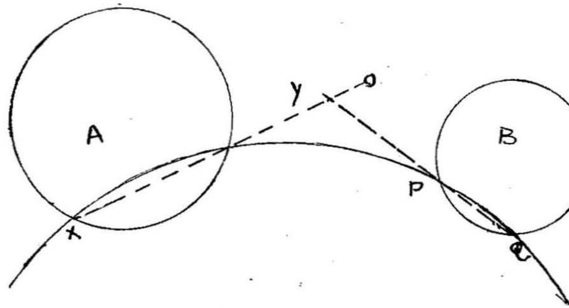
$\therefore$ X, Y வழிச் செல்லும் கோடு வட்டங்களின் அச்சாகும்.

குறிப்பு 5: வட்டம் (A) வட்டம் B இவை ஒன்றையொன்று உள்ளாகவோ அல்லது வெளியாகவோ Xல் தொட்டுக் கொண்டால் அவற்றின் அச்சு Xல் உள்ள பொதுத்தொடு கோடாகும்.

இரண்டு வட்டங்கள் தரப்படின், அவற்றின் அச்சை வரைய:

நிலை 1 (Case 1): இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று X, Y எனும் புள்ளிகளில் வெட்டினால், XY வழிச் செல்லும் கோடு வட்டங்களின் அச்சாகும்.

நிலை 2 (Case 2): **இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளாவிடில்** வட்டம் $\odot(A)$ $\odot(B)$ வெட்டிக் கொள்ளாமல் அமைகின்றன. இரண்டு வட்டங்களையும் முறையே X, Y; P, Q எனும் புள்ளிகளில் வெட்டும்படி இன்னொரு வட்டம் வரைக. அதன் மையம் C ஆகுக.



படம் 38.

PQ, XY என்பவை O எனும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

இன்னொரு வட்டம் $\odot(C_1)$ P_1 Q_1 X_1 Y_1 வெட்டும்படி வரைக. P_1, X_1, Y_2 எனும் கோடுகள் O_1இல் சந்திக்கட்டும். அப்போது $\odot(A)$ $\odot(B)$ இவற்றின் அச்சு O, O_1, வழிச் செல்லும் கோடாகும்.

நிரூபணம்: Oவிலிருந்து $\odot(A)$, $\odot(B)$, $\odot(C)$க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளம் முறையே t_A, t_B, t_C ஆகுக.

$\odot(A)$ $\odot(C)$யின் அச்சு XY ஆகும்

O எனும் புள்ளி XYல் அமைவதால் $t_A=t_C$

இதே போல $t_B=t_C$

$\therefore$ $t_A=t_B$

$\therefore$ $\odot(A)$, $\odot(B)$ எனும் வட்டங்களின் அச்சிலும் O அமைகிறது.

அதாவது $\odot(A)$, $\odot(B)$, $\odot(C)$ என்ற **மூன்று வட்டங்களை, இரண்டிரண்டாகக் கொள்ள வரும் மூன்று அச்சுக்கள், பொதுவாக, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.** அத்தகைய புள்ளி $\odot$, **மூன்று வட்டங்களின் அச்சுசந்தி** (Radical Centre) எனப்படும். அதே போல் $\odot A$, $\odot B$, $\odot C_1$யின், அச்சுசந்தி O_1 ஆகும்.

$\therefore$ O, O_1 எனும் புள்ளிகள் $\odot(A)$, $\odot(B)$ எனும் வட்டங்களின் அச்சில் அமைகின்றன. அதாவது OO_1 வழிச் செல்லும் கோடு அவற்றின் அச்சாகும்.

குறிப்பு 1: ⊙ (A), ⊙ (B), ⊙ (C) என மூன்று வட்டங்கள் தரப் பட்டால், அவைகளை இரண்டிரண்டு வட்டங்களாகக் கொள்ள வரும் மூன்று அச்சுக்கள், பொதுவாக, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என ஒரு தேற்றத்தை இங்கு கண்டோம்.

குறிப்பு 2: 'பொதுவாக' எனக் கூறுவதால் சிறப்பு விதி விலக்குகள் உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது. வட்டமையங்கள், A, B, C ஒரு கோடமைவன ஆயின், அச்சுக்கள் மூன்றும் ABCக்குக் குத்தாக அமையும். ஆகவே அவை இணைகோடுகளாம். அவைகள் மூன்றிற்கும் ஒரே கந்தழிப்புள்ளி (Point at infinity or ideal point) உள்ளது. இங்கு அச்சுசந்தி கந்தழிப்புள்ளி ஆகிறது.

குறிப்பு 3: மற்றொரு விதி விலக்கையும் காட்டுவோம். இரண்டு வட்டங்கள் XY எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். XY வழி இன்னுமொரு வட்டம் வரைக. இங்கு மூன்று வட்டங்களில், இரண்டிரண்டாக வட்டங்களைக் கொண் டாலும் XY வழிச் செல்லும் கோடே பொது அச்சாக வருகிறது. மூன்று வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்கள் (Coaxal circles) எனப்படும். இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளாவிடினும் இத்தகைய நிலை ஏற்படுமா என்பதைப் பற்றியும் மற்றும் பல விவரங்களையும் 'ஓரச்சு வட்டங்கள்' எனும் பிரிவில் காண்போம்.

ஓரச்சு வட்டங்கள்
(Coaxal circles)

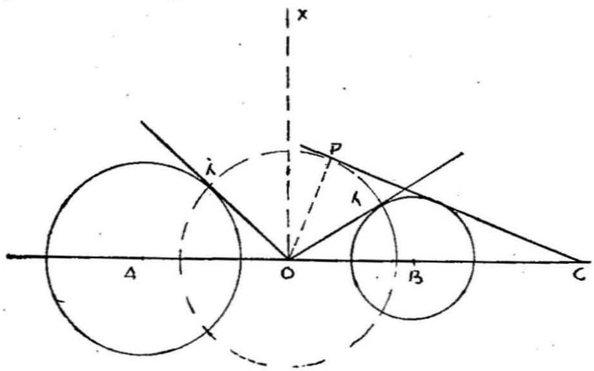
ஒரு வட்டத் தொகுதியில் எந்த இரு வட்டங்களாயினும், ஒரே கோடு அவற்றின் அச்சாக அமைந்தால், அது ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி எனப்படும்.

இரண்டு வட்டங்கள், ஒரு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியை நிச்சயிக்கும் :

நிலை 1: இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று XY எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். அவற்றின் அச்சு X, Y வழிச் செல்லும் கோடாகும். X, Y எனும் இரு புள்ளிகள் வழி பலப்பல வட்டங்கள் வரையலாம். இவ்வட்டத் தொகுதியில், எந்த இரண்டு வட்டத்தைக் கொண்டாலும், அவற்றின் அச்சு XY எனும் ஒரே கோடாகும். இவ்வாறு இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாக அமைகின்றன.

வட்ட மையங்கள் யாவும் XYயின் நடுக்குத்துக்கோட்டில் அமையும். அவற்றுள் மிகச் சிறிய வட்டம் XYஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம். இத்தகைய ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி வெட்டிக் கொள்ளும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி (System of intersecting Coaxal Circles) எனப்படும்.

நிலை 2: A, Bஐ மையங்களாகிய இரு வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளாத வட்டங்களாகுக.



படம் 39.

அவற்றின் அச்சு OX, ABஐ Oவில் வெட்டட்டும். Oவிலிருந்து $\odot B$, $\odot A$க்கு $\odot T$, $\odot T'$ எனும் தொடுகோடுகள் வரைக. Oவை மையமாகவும் OTஐ ஆரமாகவும் வட்டம் வரைக. இந்த வட்டத்திற்கு P எனும் புள்ளியில் PC எனும் தொடுகோடு வரைக. PC, ABஐ Cயில் வெட்டட்டும். Cஐ மையாகமாகவும் CP ஆரமாகவும் வட்டம் வரைக. இந்த வட்டம் C, மற்றிருவட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாக அமையும்.

நிரூபணம்: வட்டம் Cக்கு Oவிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு OP ஆகும்.

$OP = OT = OT'$

$\therefore$ Oவிலிருந்து மூன்று வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

$\therefore$ O எனும் புள்ளி $\odot A$, $\odot C$யின் அச்சிலும் $\odot B$, $\odot C$யின் அச்சிலும் உள்ளது. ஆனல் O, வட்ட மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டில் உள்ளது.

$\therefore$ $\odot A$, $\odot C$ன் அச்சு ACக்கு Oவில் உள்ள குத்துக்கோடாகிய OX ஆகும். இதுவே $\odot B$, $\odot C$யின் அச்சுமாகும். ஆகவே மூன்றும் ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.

Oவை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் P எனும் புள்ளியை பல இடங்களில் கொள்ள $\odot A$, $\odot B$யுடன் ஒரே அச்சை உடைய பல வட்டங்கள் வரையலாம். இவையாவும் சேர்ந்து ஓரச்சுவட்டத் தொகுதி எனப்படும்.

குறிப்பு 1 : இத்தகைய வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாதனவாதலால் வெட்டா ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி (Non-intersecting system of circles) எனப்படும்.

குறிப்பு 2 : Oவை மையமாகவுடைய வட்டம் வட்டமையங்கள் அமையும் கோட்டை (ABஐ) L, L' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். P எனும் புள்ளி Lல் அமைந்தால் அங்குள்ள தொடுகோடு ABஐ Lல் வெட்டுகிறது. ஆகவே L எனும் புள்ளியும் பூச்சிய ஆரமுள்ள வட்டமாகவும், வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்ததாக அமைகிறது. இதேபோல L' எனும் புள்ளியும் வட்டத் தொகுதியின் புள்ளி வட்டமாகும்.

குறிப்பு 3 : Oவை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் எந்தத் தொடுகோடும் L, L' எனும் புள்ளிகளுக்கிடையே ABஐ வெட்டாது. ஏனெனில் அது வட்டத்தின் உட்புறமாகும். ஆகவே ஓரச்சு வட்ட மையங்களுக்கு L, L' எல்லைப் புள்ளிகளாகிறது. ஆகவே இவை ஓரச்சு வட்டத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting points) எனப்படும்.

குறிப்பு 4 : வெட்டாத ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிக்கு மட்டுமே மெய் எல்லைப் புள்ளிகளுள்ளன. அவை வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த பூச்சிய ஆரமுடைய புள்ளி வட்டங்கள் என்பதும் கவனிக்கத்தக்கது.

குறிப்பு 5 : பொது அச்சில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக. அப்போது Pயிலிருந்து ஓரச்சுத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் நீளம் சமமாக இருக்கும். L, L' எனும் எல்லைப் புள்ளிகளையும் இவ் வட்டத் தொகுதியின் புள்ளி வட்டங்களாக கருதுவதால், தொடுகோட்டின் நீளம் PL, PL'க்குச் சமம் என்பதுவும் கவனிக்கத்தக்கது.

குத்துவட்டங்கள் (Orthogonal circles) :

(i) இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக அமைய, ஒன்றன் மையத்தினின்று மற்றதற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளம் வட்ட ஆரத்திற்குச் சமம்.

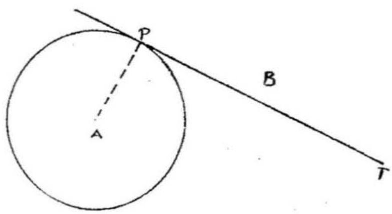
(ii) இரண்டு வட்டங்கள் குத்தானால் ஒன்றன் விட்டத்தை மற்றது ஆர்மனிக்காகப் பிரிக்கும்.

(iii) $(APBQ) = -1$, ABயை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், PQ வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவையும், குத்தாக வெட்டும். இவைகளைப் பயன்படுத்திக் குத்துவட்டங்களை மேலும் ஆராய்வோம்.

ஒரு வட்டத்திற்குக் குத்துவட்டம் வரைய :

⊙ (A)க்குக் குத்துவட்டம் வரைய, வட்டத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி Pயைக் கொள்க.

PT என்பது அங்கு வரையப்படும் தொடுகோடாகுக. PT என்ற கோட்டில், யாதேனும் ஒரு புள்ளி Bஐக் கொள்க. Bயை மையமாகவும்,



படம் 40.

BP ஆரமாகவுமுடைய வட்டம் ⊙(A)க்குக் குத்தாகும். ஏனெனில் ⊙ (A)க்கு வட்ட ஆரம் BP தொடுகோடு; அதேபோல ⊙ (B)க்கு வட்ட ஆரம் AP தொடுகோடு.

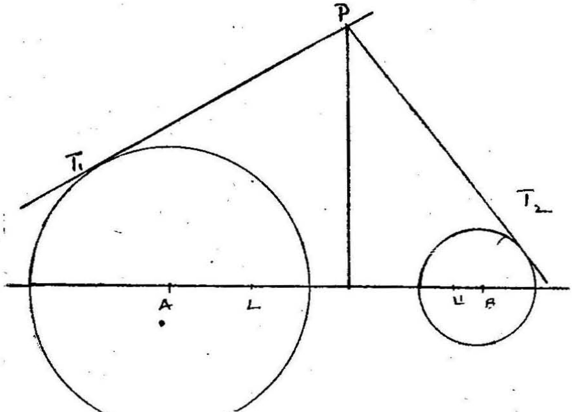
தேற்றம் 20

(i) இரண்டு வட்டங்களுக்குப் பொதுக்குத்தாய் அமையும் வட்டங்களின் மையங்கள், அவ்வட்டங்களின் அச்சில் அமையும்.

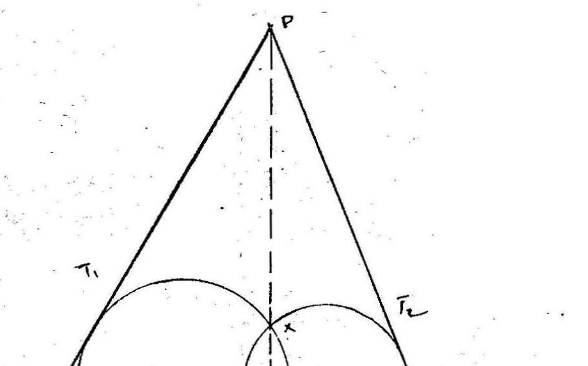
(ii) பொதுக்குத்து வட்டங்கள், ஓரச்சு வட்டத் தொகுதி யாகும்.

(iii) இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொண்டால் வெட்டும் புள்ளிகள், பொதுக்குத்து ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

(iv) இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டாவிடில் பொதுக்குத்து ஓரச்சு வட்டங்கள் வெட்டும் வட்டங்களாவதுடன், அவைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள், இரண்டு வட்டங்கள் நிச்சயிக்கும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகளாகும்.



படம் 41.



படம் 42.

(1) $\odot(A)$, $\odot(B)$ தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றிற்குப் பொதுக்குத்தாக ஒரு வட்டம் அமைந்தால், அதன் மையமாகிய Pயிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளம் $\odot$ (P)யின் ஆரத்திற்குச் சமமாக வேண்டும். $\therefore$ Pயிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளங்கள் சமம். $\therefore$ P வட்டங்களின் (சமத் தொடு

கோட்டு) அச்சில் அமைய வேண்டும். இவ்வாறு ⊙ (A), ⊙ (B) இவற்றிற்குப் பொதுக்குத்து வட்டமையங்கள், வட்டங்களின் அச்சில் அமையும். மறுதலையாக, வட்டங்களின் அச்சில் ஒரு புள்ளி Pஐக் கொண்டு, அதனின்று அவற்றில் ஒன்றிற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டை ஆரமாகவுடைய வட்டம், இரண்டு வட்டங்களையும் குத்தாக வெட்டும்.

(ii) வட்டம் ⊙ (A), ⊙ (B)ஐ குத்தாக வெட்டும் வட்டங்களில் ஏதேனும் இரண்டு வட்டங்கள் ⊙ (P), ⊙ (Q)ஐக் கொள்க. ⊙ A எனும் வட்டம் ⊙ (P), ⊙ (Q)க்கு குத்தானதால் Aயிலிருந்து இவற்றிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம். ⊙ P, ⊙ (Q) எனும் வட்டங்களின் அச்சில் A அமைகிறது. அதுபோன்று ⊙ (B)யின் மையம் Bயும் அமைகிறது. ∴ ⊙ (P) ⊙ (Q)இன் வட்ட அச்சு AB ஆகும். ∴ ⊙ (A), ⊙ (B) எனும் வட்டங்களுக்குப் பொதுக்குத்தாக அமையும் வட்டங்களில் எந்த இருவட்டமாயினும் அவற்றின் அச்சு AB ஆகும். ஆகவே பொதுக்குத்து வட்டங்கள், ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

(iii) ⊙ (A), ⊙ (B) இவை XY எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டால் X புள்ளியை புள்ளி வட்டமாகக் கருதலாம். இது இரண்டு வட்டங்களுக்கும் குத்துவட்ட மெனவும் கருதலாம். ஏனெனில் X எனும் மையத்துடன் பூச்சிய ஆரம் வட்டமெனக் கருதப்படுவதால் இதுபோன்று Yஐயும் பொதுக்குத்து வட்டங்களின் மற்றொரு புள்ளி வட்டமாகும். ∴ X, Y என்பவை பொதுக்குத்து ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

(iv) வட்டம் ⊙(A), ⊙(B) வெட்டிக்கொள்ளாவிடில் அவை நிச்சயிக்கும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் மெய்ப் புள்ளிகளாகும். அவை L, L' ஆகுக. வட்டங்களின் அச்சு LL'இன் நடுக்குத்துக் கோடாகும். அச்சில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ⊙(A)க்கு வரையப்படும் தொடுகோடு, ⊙(A), ⊙(B) நிச்சயிக்கும் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்குச் சமம். L, L' இத் தொகுதியைச் சேர்ந்த புள்ளிவட்டங்களாதலால், தொடு கோடு PL, PL'க்குச் சமம். ஆகவே Pஐ மையமாகவும் ⊙A, ⊙(B)க்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டை ஆரமுடைய வட்டம் L, L' வழிச்செல்லும். இவ்வாறு ⊙(A), ⊙(B)க் வரையப்படும் ஒவ்வொரு பொதுக்குத்து வட்டமும் LL' வழிச் செல்லும் வெட்டும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும். அவை வெட்டும் புள்ளிகள் LL', ⊙(A), ⊙(B) நிச்சயிக்கும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளி களாகும்.

மூன்று வட்டங்களுக்கும் குத்தான வட்டம்

(i) பொதுவாக, மூன்று வட்டங்களுக்கு ஒரே ஒரு வட்டம் குத்தாக அமையும்.

(ii) ஆனால் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வட்டங்கள் குத்தாக அமைந்தால், கணக்கில்லாக் குத்துவட்டங்கள் உள்ளன.

(iii) அவை யாவும் ஓரச்சுவட்டங்களாகும்.

(iv) மூன்று வட்டங்கள், இதற்குக் குத்து ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

(i) $\odot(A)$, $\odot(B)$, $\odot(C)$ மூன்று வட்டங்களாகுக. மூன்றிற்கும் $\odot(R)$ குத்தாக அமையவேண்டுமாயின், $\odot(A)$, $\odot(B)$; $\odot(B)$, $\odot(C)$; $\odot(C)$, $\odot(A)$ என வட்டங்களை இரண்டிரண்டாகக்கொள்ள வரும் மூன்று அச்சுகளில் அமையவேண்டும். ஆனால் பொதுவாக, இம் மூன்று அச்சுக்கள் அச்சு சந்தியில் (Radical centre) சந்திக்கின்றன. அச்சுசந்தி R ஆகுக; Rலிருந்து மூன்று வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமமாகும். ஆகவே மூன்று வட்டங்களுக்கும் குத்தாக அமையும் ஒரே வட்டம், Rஐ மையமாகவும், வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டை ஆரமாகவுமுடைய வட்டமாகும்.

$\odot(A)$, $\odot(B)$, $\odot(C)$யின் மையங்கள் நேர்கோட்டில் அமைந்தால், அச்சுசந்தி கந்தழிப் புள்ளியாகும். குத்துவட்டம், மையங்கள் வழிச் செல்லும் கோடாக மாறுகிறது.

(ii) A, B, Cஐ மையங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களை $\odot(P)$ $\odot(Q)$ எனும் வட்டங்கள் குத்தாக வெட்டும் எனக் கண்டால், P, Q எனும் புள்ளிகள், வட்டங்களை இரண்டிரண்டாகக் கொள்ளவரும் மூன்று அச்சுக் கோடுகளிலும் அமையவேண்டும். ஆகவே மூன்று அச்சுக்கள் வெவ்வேருக இருக்கமுடியாது. PQ எனும் கோடு, அவைகளின் பொது அச்சாக அமைகிறது.

$\therefore$ (a) $\odot(A)$, $\odot(B)$ $\odot(C)$ ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.

(b) A, B, C ஒரு கோடமைவன.

(c) A, B, C எனும் கோடும் PQ எனும் கோடும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

(iii) (d) PQ எனும் கோட்டில், உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் மையமாகவும், அதனின்றுள்ள தொடுகோட்டை ஆரமாகவும் உடைய வட்டங்கள் யாவும் $\odot(A)$, $\odot(B)$, $\odot(C)$ஐக் குத்தாக வெட்டும். இவ்வாறு கணக்கில்லா வட்டங்கள் உள்ளன.

(iv) இவ் வட்டத் தொகுதியின் எந்த இரண்டு வட்டங்களுக்கும் ABC எனும் கோடு அச்சாவதால், குத்துவட்டத் தொகுதியும் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும். ஆகவே இரண்டு வட்டத் தொகுதிகளும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

தேற்றம் 21

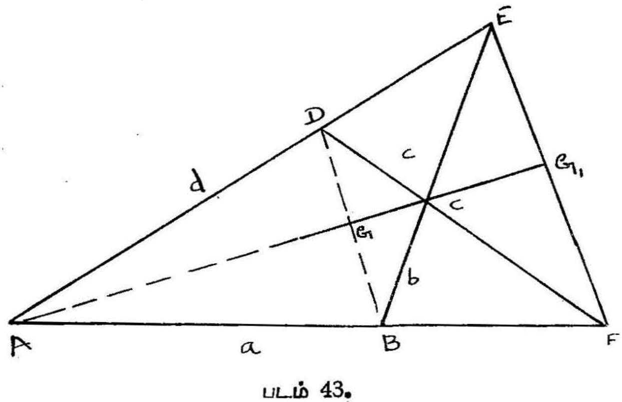
(i) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைக் கோடுகளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியாகும்.

(ii) மூலைக் கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன.

(iii) நான்கு கோடுகளை, மும்மூன்றாகக் கொள்ளவரும் நான்கு முக்கோணங்களின் தன்னிசை வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

(iv) நான்கு முக்கோணங்களின் குத்து சந்திகள் ஒரு கோடமைவன.

(v) இசை முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம் (Circum centre) இந்தக் கோட்டில் அமையும்.



படம் 43.

a, b, c, d என்ற நான்கு கோடுகளான நாற்கரம் அதன் எதிரெதிர் முனைகள் A, C; B, D; E, F ஆகுக. a, b, c என்ற கோடுகளான முக்கோணம் (படம் காண்க) BFC ஆகும்; a, b, dஆல் ஆன முக்கோணம் ABE; acdஆல் ஆன முக்கோணம் ADF; bcdஆல் ஆன முக்கோணம் DCE என நான்கு முக்கோணங்கள் உள்ளன. இவற்றுள் BFC என்ற முக்கோணத்தின் தன்னிசை வட்டத்திற்கு

BFC தன்னிசை முக்கோணமாகும். FC எனும் பக்கம் Bயின் இசைக் கோடாகிறது. இது D வழிச் செல்வதால், Bயும், Dயும் வட்டத்திற்கு துணையியப் புள்ளிகள்.

∴ BDஐ வட்டமாகவுடைய வட்டம் BCFஇன் தன்னிசை வட்டத்திற்குக் குத்தாகும். இதேபோன்று இதே வட்டத்திற்கு AC, EFஐ விட்டமாகவுடைய வட்டங்கள் குத்தாகும்.

மற்ற மூன்று முக்கோணங்களின் தன்னிசை வட்டங்களும் இதே போன்று AC, BD, EFஐ விட்டமாகவுடைய மூன்று வட்டங்களுக்குக் குத்தாக அமைகின்றன. மூன்று வட்டங்களுக்கு ஒன்றுக்குமேல் குத்து வட்டங்கள் உள்ளன. ஆதலால்,

(i) மூன்று வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.

(ii) அவற்றின் மையங்கள், அதாவது AC, BD, EFஇன் நடுப்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன.

(iii) குத்து வட்டங்களாகிய நான்கு தன்னிசை வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.

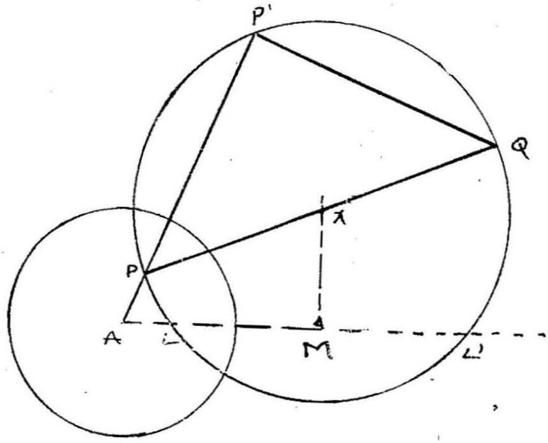
(iv) அவைகளின் மையங்கள்—நான்கு முக்கோணங்களின் குத்து சந்திகள்—அவையும் ஒரு கோடமைகின்றன.

(v) இரண்டு ஓரச்சு வட்டத் தொகுதிகளும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக அமைவதால், அவைகளின் மையங்கள் வழிக்கோடுகளும் குத்தாகின்றன.

(vi) EF எனும் மூலைக்கோடு, ACஐ G_1ல் வெட்டட்டும். ∴ $(AGCG_1)=-1$. ∴ ஆர்மானிக்கு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் GG_1 வழிச்செல்வதால் ACஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்திற்குக் குத்தாகிறது. இதேபோன்று மற்றிரு வட்டங்களுக்கும் குத்தாக அமைவதால், இந்தச் சுற்றுவட்டமும் தன்னிசை வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகிறது. ஆகவே இசை முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம், நான்கு முக்கோணங்களின் குத்துசந்திகளுடன் ஒரு கோடமைகிறது.

தேற்றம் 22

ஓரச்சு வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளாகும்.



படம் 44.

கொள்கை: $\odot(A)$ என்பது ஓரச்சு வட்டங்களின் ஒரு வட்டம். P என்பது ஒரு புள்ளி.

நிரூபிக்க: வட்டங்களுக்குப் Pயின் இசைக் கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளென.

வரைதல்: P வழி, ஓரச்சு வட்டங்களுக்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரே வட்டத்தை வரைக. PQ அதன் விட்டமாகுக.

நிரூபணம்: AP, குத்துவட்டத்தை P'யில் வெட்டட்டும்.

$\therefore$ $AP.AP' = AT^2$

[AT குத்து வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோடு.]

வட்டங்கள் குத்தானதால் $AT = r$ [$\odot$ Aயின் ஆரம்]

$\therefore$ $AP.AP' = r^2$

P, P' என்பவை வட்டத்திற்கு தன்மாற்றுப் புள்ளி

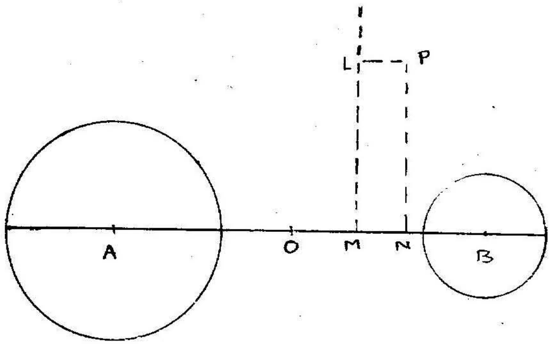
PQ விட்டமாதலால் $\angle PP'Q = 90°$.

$\therefore$ வட்டம் Aக்கு Pயின் இசைக்கோடு Q வழிச் செல்லுகிறது. ஓரச்சு வட்டம் யாதாயினும் Pவழி அதனைக் குத்தாக வெட்டும் ஒரே வட்டமாதலாலும், PQ அதன்விட்ட முனைகளாதலாலும். எல்லா வட்டங்களுக்கும் Pயின் இசைக்கோடுகள் Qவனும் புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளாகின்றன.

குறிப்பு 1: P, பொது அச்சில் அமைந்தால் Qவும் அச்சில் அமைகின்றது. ஆகவே அச்சில் உள்ள புள்ளியின் இசைக் கோடுகள் அச்சில் சந்திக்கின்றன.

தேற்றம் 23

இரு வட்டங்களுக்குள்ள, ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம், அவ்வட்டங்களின் அச்சுக்கு புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரத்துடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.



படம் 45.

கொள்கை: (i) A, Bயை மையங்களாகவும், a, b எனும் ஆர நீளங்களுள்ள இரு வட்டங்கள்.

(ii) ML அவற்றின் அச்சு

(iii) P, ஏதேனும் ஒரு புள்ளி; $PL \perp^r ML$

நிரூபிக்க: $PL \propto P$யின் வர்க்க வித்தியாசம்

வரைதல்: ABக்கு PN எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

நிருபணம்: $\odot(A)$க்கு Pயின் வர்க்கம் $= PA^2 - a^2$

$\odot(B)$க்கு Pயின் வர்க்கம் $= PB^2 - b^2$

$\therefore$ வர்க்க வித்தியாசம் $= (PA^2 - a^2) - (PB^2 - b^2)$

$= (PA^2 - PB^2) - (a^2 - b^2)$

$= (AN^2 - NB^2) - (AM^2 - MB^2)$

[தேற்றம் 19 பார்க்க]

$= 2\,AB.ON - 2\,AB.OM$

$= 2\,AB(ON - OM)$

$= 2\,AB.MN$

$= 2\,AB.PL$

$\therefore$ அச்சிலிருந்து Pயின் தூரமும், அதன் வர்க்க வித்தியாசமும் நேர் விகிதத்தில் உள்ளன.

குறிப்பு : P வட்டம் Bயில் அமைந்தால் Pயின் வர்க்க வித்தியாசம், OAக்குள்ள வர்க்கமாகும். அதாவது OAக்கு PQ தொடு கோடானால் PQ^2 ஆகும்.

$\therefore$ **$PQ^2 = 2\ AB.PL$** என வருகிறது.

தேற்றம் 24

இரண்டு வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியின் வர்க்கங்களின் விகிதம் மாருது இருக்கும்படி நகர்ந்தால் அதன் நியமப்பாதை வட்டங்களுடன் ஓரச்சாக அமையும் ஒரு வட்டமாகும்.

$\odot A$, $\odot(B)$ வட்டங்களாகுக. P ஒரு புள்ளியாகுக $\odot A$க்கு Pயின் வர்க்கம் $t_A{}^2$ $\odot B$க்கு Pயின் வர்க்கம் $t_B{}^2$ ஆகுக.

$t_A{}^2 : t_B{}^2$ நிலையானது. Pயின் வழி இருவட்டங்களுடன் ஓரச்சாக அமையும் ஒரே வட்டத்தை வரைக. அதன் மையம் C ஆகுக. PL என்பது பொது அச்சுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடாகுக.

$$\therefore\quad t_A{}^2 = 2\ PL.AC$$
$$t_B{}^2 = 2\ PL.BC$$
$$\therefore\quad AC : BC = t_A{}^2 : t_B{}^2$$

$\therefore$ P மாறினும் Cயின் நிலை மாருது.

$\therefore$ P எங்கிருப்பினும் அதன் வழிச் செல்லும் வட்டம், Cஐ மைய மாகவும் $\odot A$, $\odot B$யுடன் ஓரச்சு வட்டமாகவும் அமையும் வட்ட மாகும்.

தேற்றம் 24 (a)

(மறுதலை)

இரண்டு வட்டங்களுடன் ஓரச்சாக அமையும் மற்ருெரு வட்டத்தில் அமையும் புள்ளிகளின் இரண்டு வட்டங்களுக்குள்ள வர்க்கங்களின் விகிதம் நிலையாக இருக்கும்.

$\odot(A)$, $\odot(B)$ என்பவை A, B எனும் மையங்களையுடைய வட்டங் களாகுக. அவற்றுடன் ஓரச்சாக அமையும் வட்டம் Cஐ மையமாக வுடையதாகுக. P இந்த வட்டத்தில் ஏதேனும் புள்ளியாகுக. Pயி லிருந்து வட்டம் A, வட்டம் B இவற்றிற்குள்ள வர்க்கம் $t_A{}^2$, $t_B{}^2$ ஆகுக. பொது அச்சுக்கு PLஎனும் குத்துக்கோடு வரைக.

நிரூபணம் : $t_A{}^2 = 2\ PL.AC$

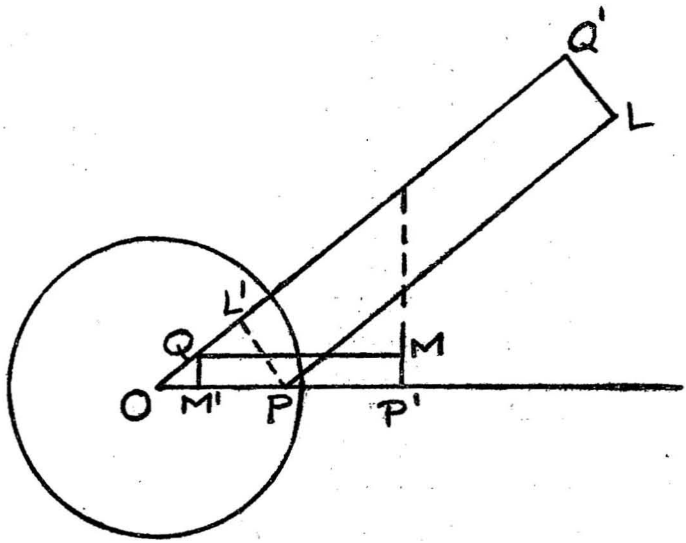
$t_B{}^2 = 2\ PL.BC$

$\therefore\quad t_A{}^2 : t_B{}^2 = AC : BC$

P வட்டம் (C)யில் எங்கிருப்பினும் வர்க்கங்களின் விகிதம் மாருத நிலைஎண் எனத் தெளிவாகிறது.

தேற்றம் 25 (சாலமன் தேற்றம்)

***P, Q* இரு புள்ளிகளாகுக. *O* என்பது ஒரு வட்டத்தின் மையம். *PL, QM* என்பவை முறையே *Q*வின் இசைக்கோடு, *P*ன் இசைக்கோடு இவற்றிற்குள்ள குத்துக்கோடுகள் என்றால் *OP* : *OQ* = *PL* : *QM* ஆகும்.**



படம் 46.

நிரூபணம் : Pயின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகுக.
Qவின் தன்மாற்றுப் புள்ளி Q' ஆகுக.
$PL' \perp OQ$ $QM' \perp OP$ ஆகுக
$OP.OP' = OQ.OQ' = r^2$ (1)
$\angle OM'Q = \angle OL'P = 90°$
$\therefore$ $M'PL'Q$ வட்ட நாற்கரம்
$\therefore$ $OP.OM' = OQ.OL'$ (2)
(1)—(2) $OP.M'P' = OQ.L'Q'$
$\therefore$ $OP : OQ = L'Q' : M'P'$
ஆனால் $L'Q' = PL$; $M'P' = QM$,
$\therefore$ $\mathbf{OP : OQ = PL : QM}$

குறிப்பு : இரு புள்ளிகளின் வட்டமையத்தினின்றுள்ள தூரங்களின் விகிதம் ஒன்றன் இசைக்கோட்டிலிருந்து மற்றதன் தூரங்களுக்குள்ள விகிதத்திற்குச் சமம் எனவும் கூறலாம்.

பயிற்சி

1. இரண்டு வட்டங்களுக்கு AB ஒரு பொதுத் தொடு கோடென்றால் ABஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் இரண்டிற்கும் குத்து வட்டம் எனக் காண்க.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BCயின் நடுப்புள்ளி X; Xலிருந்து $\angle A$யின் உள்ள சம வெட்டிக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு, உள்தொடு வட்டம், Aக்கு எதிருள்ள வெளித் தொடு வட்டம் இவற்றின் அச்சு எனக் காட்டு.

3. ΔABCயில் BC, CA, AB இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் X, Y, Z. XYZன் கோண சம வெட்டிகள் ΔABCயின் உள்தொடு வெளித்தொடு வட்டங்களை இரண்டிரண்டாகக் கொள்ள வரும் வட்டங்களின் அச்சுக்களாகும் எனக் காண்க.

4. ஒரு வட்டத்திற்கு DA, DB என்பவை தொடு கோடுகள். DA, OB இவற்றின் நடுப்புள்ளியைச் சேர்க்கும் கோட்டில் X யாதேனுமொரு புள்ளி என்றால் $XO = X$லிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டு நீளத்திற்குச் சமம் எனக் காட்டு.

5. இரு வட்டங்களுக்கு P எனும் புள்ளியின் (i) வர்க்கங்களின் கூடுதல் நிலையானால் அதன் நியமப்பாதை என்ன? (ii) வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் நிலையானால் அதன் நியமப்பாதை என்ன?

6. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டங்களின் அச்சு சந்தி முக்கோணத்தின் குத்து சந்தி என நிலைநாட்டு.

7. ஓரச்சு வட்டத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் L_1 L_2 தொகுதியின் இரு வட்டங்களை ஒரு கோடு PQவில் தொடுகிறது என்றால் $PL_1Q = PL_2Q = 90°$ எனக் காட்டு.

8. மேற் கணக்கில் PQ எனும் தொடுகோடு தொகுதியைச் சேர்ந்த இன்னொரு வட்டத்தை ABயில் வெட்டினால், L, P எனும் கோடு AL, Bயின் கோண சம வெட்டியாகும்.

9. A, B, C, D என்பவை ஒரு கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் ABஐயும் CDயும் ஆர்மானிக்காகப் பிரிக்கும் XY எனும் புள்ளிகளைக் காணும் வகையைக் கூறுக.

10. ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியில் அமையும்படியும் ஒரு கோட்டைத் தொடும்படியுமான வட்டம் வரையும் வகையைக் கூறுக. அத்தகைய வட்டங்கள் இரண்டு உள்ளன எனக் காட்டு.

11. இரண்டு வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகவும் இன்னொரு வட்டத்தைக் குத்தாக வெட்டும்படியும் உள்ள வட்டம் வரையும் வகையைக் காணவும். எத்தனை வட்டங்கள் இவ்வாறு வரையலாம்?

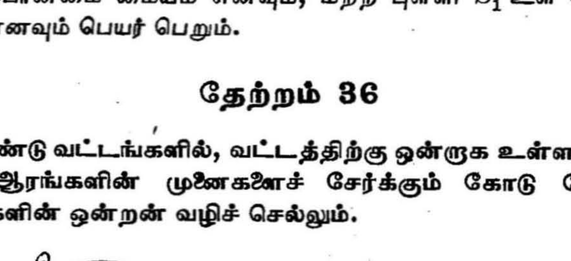
12. இரு வட்டங்களுடன் ஓரச்சாகவும் ஒரு வட்டத்தை தொடும்படியாகவும் உள்ள வட்டம் வரையும் வகையைக் காணவும்.

5. போன்மை மையங்கள்
(Centres of similitudes)

இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே AB ஆகுக. அவற்றின் ஆரங்கள் a, b ஆகுக. AB எனும் கோட்டுத் துண்டை S, S_1 எனும் புள்ளிகளில் வெளியாகவும் உள்ளாகவும் $a : b$ எனும் விகிதத்தில் பிரித்தால், S, S_1 எனும் புள்ளிகள் வட்டங்களின் போன்மை மையங்கள் (Centres of similitudes) எனப்படும். வெளிப் புள்ளி S, புறப்போன்மை மையம் எனவும், மற்ற புள்ளி S_1 உள் போன்மை மையம் எனவும் பெயர் பெறும்.

தேற்றம் 36

இரண்டு வட்டங்களில், வட்டத்திற்கு ஒன்ருக உள்ள இரண்டு இணை ஆரங்களின் முனைகளைச் சேர்க்கும் கோடு போன்மை மையங்களின் ஒன்றன் வழிச் செல்லும்.



படம் 47.

கொள்கை : வட்டம் $\odot(A)$, $\odot(B)$யில் முறையே AP, BP_1 (ஒரு திசை) இணை ஆரங்கள்.
AP, Bp_1 (எதிர்த்திசை) இணை ஆரங்கள்.

நிறுவ : PP_1 (அல்லது Pp_1) போன்மை மையம் வழிச் செல் கிறது என.

வரைதல் : (i) PP_1 மையங்களைச் சேர்க்கும் ABஐ S எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

(ii) Pp_1 அதே கோட்டை S_1ல் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : $AP \parallel BP_1$

$\therefore \quad \Delta ASP \,|||\, \Delta BSP_1$

$\therefore \quad \dfrac{AS}{BS} = \dfrac{AP}{BP_1} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore$ AP_1 BP யாதேனும் இணை ஆரங்களாயினும் ABஐ PP_1 ஒரே விகிதத்தில் S எனும் புள்ளியில் வெட்டு கிறது. ஆகவே PP_1 ABஐ வெட்டும் P புள்ளி நிலையானது. ABஐ S புறம்பாக ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிப்பதால் அது புறப்போன்மை மைய மாகும்.

$\therefore$ PP_1 வட்டங்களின் புறப்போன்மை மையம் வழிச் செல்கிறது.

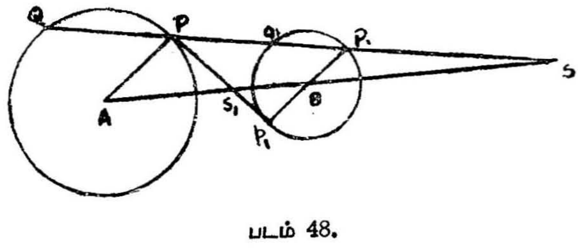
இதேபோல Pp_1 உட்போன்மை மையம் வழிச் செல்லும்.

குறிப்பு : வட்டங்களின் நேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகள் புறப் போன்மை மையமாகவும், குறுக்குப் பொதுத் தொடு கோடுகள் உட்போன்மை மையம் வழியாகவும் செல்லும்.

ஒத்த புள்ளிகளும் வேற்றுப் புள்ளிகளும் (Corresponding and non corresponding points) : படத்தில் PP_1 வட்டங்களை மீண்டும் θ Qவில் வெட்டினால் QQ_1 ; PP_1 எனும் புள்ளிகள் ஒன்றற் கொன்று ஒத்த புள்ளிகள் எனவும் PQ_1 ; QP_1 என்பவை வட்டங்களின் வேற்றுப் புள்ளிகளெனவும் அழைக்கப்படும்.

தேற்றம் 37

இரண்டு வட்டங்களின் போன்மை மையம் வழிச் செல்லும் யாதேனும் ஒரு கோடு வட்டங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் இரண் டிரண்டாக இரு இணை ஆரங்களின் முனைகளாகும்.



படம் 48.

கொள்கை : A_1 Bயை மையங்களாகவுடைய இரு வட்டங்கள். அவற்றின் ஆரங்கள் a, b ஆகுக. S வட்டத்தின் ஒரு போன்மை வட்டம் ஆகுக. S வழிச் செல்லும் யாதேனும் ஒரு கோடு வட்டம் (A)ஐ P_1 Qவிலும் வட்டம் (B)ஐ $(P_1\ Q_1)$இலும் வெட்டட்டும்.

நிறுவ : இவை இரண்டிரண்டாக இரு இணை ஆரங்களின் முனைகள் என.

நிரூபணம் : AP, BP_1 எனும் கோடுகளைக் கொள்வோம்.
ΔASP, ΔBSP_1 இவற்றில்

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AP}{BP_1}$$

உள்ளடங்குகோணம் $\angle ASP = \angle BSP_1$

ஆகவே மற்ற உள்ளடங்காக் கோணங்கள்

(i) $\angle APS = \angle BP_1S$ (ii) (அல்லது $\angle APS = 180 - \angle BP_1S$) முதல் சமன்பாட்டைக் கொண்டால்

$$AP \parallel BP_2$$

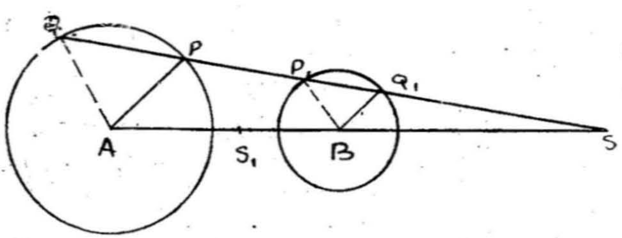
அன்றியும் $\angle AQP = \angle APQ$; $\angle BQ_1S = \angle BP_1Q_1$

$\therefore$ $\angle AQP = \angle BQ_1P_1$

$\therefore$ $\boldsymbol{AQ \parallel BQ_1}$

இவ்வாறு முனைகள் இரண்டிரண்டாக இணை ஆரங்களின் முனைகளாகின்றன.

(ii) இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கொண்டால் கீழ் வரும் படத்தின்படி அமையும்.



படம் 49.

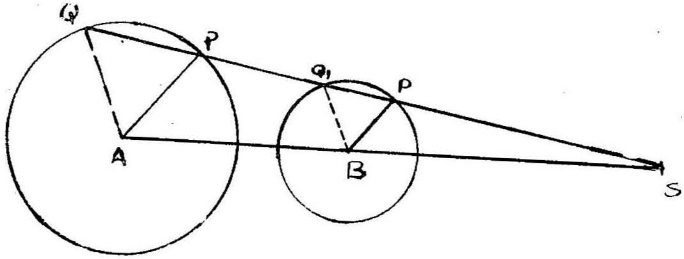
$$\angle APS = 180 - BP_1S = 180 - \angle BQP_1 = \angle BQ_1S$$

$\therefore$ $AP \parallel BQ_1$ இதிலிருந்து
$AQ \parallel BP_1$ எனவும் வரும்.

S வழிச் செல்லும் கோட்டிற்குக் கூறியவை யாவும் S_1 வழிச் செல்லும் கோடுகளுக்கும் இதே போலப் பொருந்தும்.

தேற்றம் 38

போன்மை மையத்தினின்று வேறு புள்ளிகளுக்குள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன், புள்ளிகள் மாறினும், மாருது.



படம் 50.

கொள்கை : வட்டம் (A), வட்டம் (B)யில்
AP_1 BP_1 இணை ஆரங்கள்
PP_1 வட்டங்களை மீண்டும் முறையே
QQ_1 வெட்டுகிறது. ABஐ Sல் வெட்டுகிறது.
∴ S போன்மை மையமாகும்.

நிறுவ : AP_1 BP_1 யாதேனும் இணை ஆரங்களாயினும் $SP.SQ_1 = SP_1.SQ_1$ என.

நிரூபணம் : $\Delta SAP ||| SBP_1$; $\Delta SAQ |||^r SBQ_1$

$$\therefore \quad \frac{SP}{SP_1} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{SP.SQ_1}{SP_1.SQ_1} = \frac{a}{b}$$

ஆனல் Sலிருந்து $\odot A$, $\odot B_1$க்குள்ள தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் t_A, t_B ஆகுக.

அப்போது $SP_1 \cdot SQ_1 = t_A{}^2$

$$\therefore \quad SP.SQ_1 = \frac{a}{b} t_B{}^2$$

ஆனல் $\dfrac{t_A}{t_B} = \dfrac{a}{b}$ [பொதுத் தொடுகோடு S வழிச் செல்வதால்]

$$\therefore \quad \boldsymbol{SP.SQ_1 = t_A t_B}$$

$t_A t_B$ மாரு மதிப்பாகும்.

ஆகவே வேறு புள்ளிகளுக்கு போன்மை மையத்தினின்றுள்ள தூரங்களின் பெருக்கற் பலன் (புள்ளிகள் மாறினும்) ஒன்ருகவே இருக்கிறது.

குறிப்பு 1 : S எனும் புள்ளியை மையமாகவும் $\sqrt{t_A t_B}$ எனும் ஆரமுள்ள வட்டத்திற்கு, P_1, Q_1 என்பவை மாற்றுப் புள்ளிகள் என்பது காண்க.

குறிப்பு 2 : இதே வட்டத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டால் Sஐ தன் மாற்றி மையமாகக் கொள்ள, $\odot A$யின் தன் மாற்று வட்டம் $\odot B$ ஆகவும் $\odot B$யின் தன் மாற்று வட்டம் $\odot A$ ஆகவும் வருகிறது. இம்முறையால் இரண்டு வட்டங்கள் Σ_1, Σ_2 தரப்பட Σ_1இன் தன் மாற்று Σ_2 ஆகிறது.

குறிப்பு: இரண்டு வட்டங்களைச் சம ஆர வட்டங்களாகத் தன் மாற்றிடும் முறையை இங்கே காணலாம்.

Sஐ மையமாகவும் $\sqrt{t_A t_B}$ ஆரமுமுடைய வட்டத்தை Σ என்போம்.

$\odot A$, $\odot B$ இந்த வட்டத்திற்கு மாற்று வட்டங்கள் (Inverses) Σஇன் மேல் O எனும் புள்ளியை தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க.

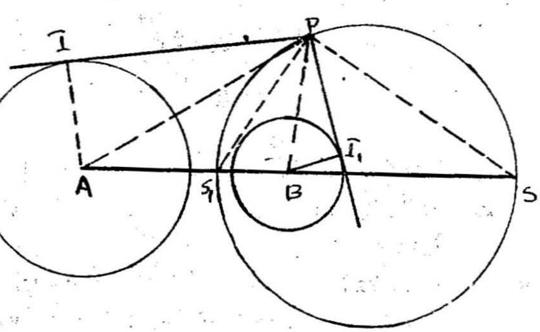
அப்போது Σயின் தன்மாற்று Σ' ஒரு நேர் கோடாகும். இதற்கு $\odot A$, $\odot B$யின் தன்மாற்றுகள் $\odot A'$, $\odot B'$ மாற்றுவரைகளாகும். Σ' நேர் கோடானதால் $\odot A'$, $\odot B'$ கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று பிரதி பலிப்பு (Image) ஆகும்.

$\therefore$ $\odot A'$, $\odot B'$ சம வட்டங்களாகும்.

போன்மை மைய வட்டம்: இரண்டு வட்டங்களின் இரு போன்மை மையங்களை விட்ட நுனிகளாகக் கொண்ட வட்டம் போன்மை மைய வட்டம் (Circle of similitude) எனப்படும்.

தேற்றம் 39

இரண்டு வட்டங்களும், அவற்றின் போன்மை மைய வட்டமும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.



படம் 51.

$\odot A$, $\odot B$ இரு வட்டங்கள். அவற்றின் ஆரங்கள் 'a', 'b' ஆகுக. A, B அவற்றின் மையங்கள்.

S, S_1 அவற்றின் போன்மை மையங்கள்.

SS_1ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளி.

வரைதல் : PT, PT_1 எனும் தொடு கோடுகள் $\odot A$, $\odot B$க்கு வரைக.

நிரூபணம் : $\frac{AS_1}{S_1B}=\frac{AS}{SB}$; $S_1PS=90°$

$\therefore$ PS_1, PS என்பவை $\angle APS$இன் உள் வெளிச் சம வெட்டிகள் $\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{AS_1}{S_1B}=\frac{a}{b}$

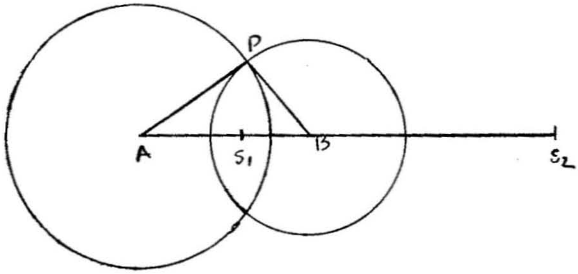
$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{AT}{BT'}$ அத்துடன் $\angle ATP=\angle BT'P=90°$

$\therefore \Delta APT \parallel\!| \Delta BPT_1$

$\therefore PT : PT_1 = PA : PB = a : b$

$\therefore$ Pயின் நியமப் பாதை ; அதாவது போன்மை மைய வட்டம் மற்றிரு வட்டங்களுடன் ஓரச்சு வட்டமாகும்.

மாற்று நிரூபணம் :



படம் 52.

$\odot(A_1)$ $\odot(B)$ P_1Qவில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும்.

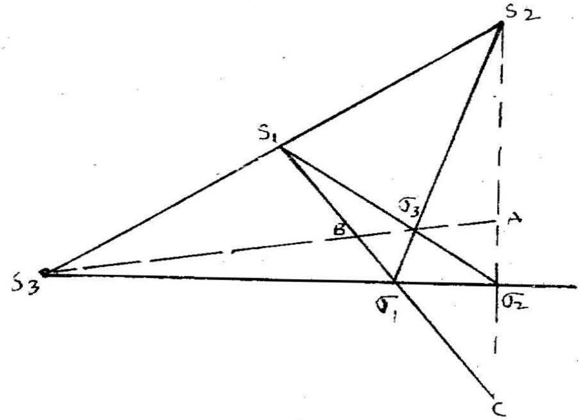
S_1S_1 போன்மை மையங்களாகுக.

$\therefore AS_1 : S_1B = a : b = AP : PB$; $AS : SB = AP : PB$

$\therefore PS_1$ PS_2 $\angle APB$யின் உள், வெளிச் சம வெட்டிகளாகும். $\therefore S_1S_2$ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் (போன்மை மைய வட்டம்) P வழிச் செல்லும். அதேபோல Q வழியும் செல்லும். ஆகவே மூன்று வட்டங்களும் ஓரச்சு வட்டங்களாகும் ; 'தொடர்ச்சி நெறி'த் தத்துவத் தால் வெட்டா வட்டங்களுக்கும் இந் நெறி பொருந்தும்).

தேற்றம் 40

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாகக் கொள்ளவரும் மூன்று போன்மை மைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.



படம் 53.

A, B, C வட்ட மையங்களாகுக.

a, b, c அவற்றின் ஆரங்களாகுக.

$\odot B$, $\odot C$யின் போன்மை மையங்கள் S_1, σ_1

$\odot C$, $\odot A$யின் போன்மை மையங்கள் S_2 σ_2

$\odot A$, $\odot B$யின் போன்மை மையங்கள் S_3 σ_3

S_1 S_2 S_2 புறப் போன்மை மையங்கள்.

σ_1 σ_2 σ_3 உள் போன்மை மையங்கள்.

$$\frac{BS_1}{S_1C}\cdot\frac{CS_2}{S_2A}\cdot\frac{AS_3}{S_3B}=\left(\frac{-b}{c}\right)\left(\frac{-c}{a}\right)\left(\frac{-a}{b}\right)=-1$$

$\therefore$ S_1 S_2 S_3 என்பவை ஒரு கோடமைவன.

$$\frac{BS_1}{S_1C}\cdot\frac{C\sigma_2}{\sigma_2A}\cdot\frac{A\sigma_3}{\sigma_3B}=\left(\frac{-b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=-1$$

$\therefore$ S_1 σ_2 σ_3 ஒரு கோடமைவன.

இதே போன்று

S_2 σ_3 σ_1; S_3 σ_1 σ_2 ஒரு கோடமைவன.

நான்கு கோடுகள் முழு நாற்கரம் ஆகிறது. அவைகளின் மூலைக் கோடுகள் $S_1 \sigma_1$; $S_2 \sigma_2$; $S_3 \sigma_3$ இவற்றை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் அதாவது மூன்று போன்மைமைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

(ஆகவே $\odot ABC$ இவற்றிற்குக் குத்து வட்டமாகும்).

பயிற்சி

1. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம், ஒன்பது புள்ளி வட்டம் இவற்றின் போன்மை மையங்கள், மையக் கோட்டுச் சந்தி, குத்து சந்தி எனக்காட்டு.

2. இரண்டு வட்டங்களை, ஒரு வட்டம் தொடும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, வட்டங்களின் போன்மை மையங்களின் ஒன்றன் வழிச் செல்கிறதென நிலைநாட்டு.

3. இரண்டு வட்டங்களின் போன்மை மையங்களில் ஒன்று ஒரு வட்டத்தினுள் அமைந்தால் அது மற்ற வட்டத்தினுள்ளும் அமைய வேண்டும்.

4. முக்கோணம் ABCயில், Aயின் இரு சமவெட்டி BCயை Dயில் வெட்டுகிறது. உள்தொடு வட்டத்திற்கும் Aக்கு எதிருள்ள வெளித்தொடு வட்டத்திற்குமான போன்மை மையங்கள் A, D எனும் புள்ளிகளாகும்.

5. இரு வட்டங்களின் ஒரு போன்மை மையம் வழி வட்டங்களை வெட்டும்படி ஒரு கோடு வரையப்படுகிறது. வேறு புள்ளிகளில் வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள், வட்டங்களின் அச்சுடன் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.

6. $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம் AC, BD வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி E; AD, BC வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி F. AB, CD என்பவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் போன்மை மைய வட்டத்திற்கு EF விட்டமாகும்.

7. இரு வட்டங்களின் மையப் புள்ளிகளும், அவற்றின் போன்மை மைய வட்டமும் ஓரச்சு வட்டங்களெனக் காட்டு.

6. தன்மாற்றம்
(Inversion)

விளக்கம்: 'தன்மாற்று நிகழ்ச்சி என்பது என்ன என்று விளக்குவோம்.

(A, B, C...........) என்பது ஒரு புள்ளித் தொகுதியாகுக:

O எனும் ஒரு புள்ளியைக் கொள்க; OAஐச் சேர்க்கும் கோட்டில் $OA.OA'=K$ எனும்படி A' எனும் புள்ளியைக் கொள்க. இது போன்று OB எனும் கோட்டில் $OB.OB'=K$ என B' எனும் புள்ளியைக் கொள்க. இவ்வாறு (A, B, C ....) எனும் புள்ளித் தொகுதியை (A' B' C' ....) யாக மாற்றுகிறோம். இந்த நிகழ்ச்சிக்கு, (இத்தகைய மாற்றத்திற்கு) (Transformation) 'தன் மாற்றம்' (Inversion) எனப் பெயராகும்.

குறிப்பு 1: O எனும் புள்ளிக்குத் '**தன்மாற்றி மையம்**' (Centre of inversion) எனப் பெயர்.

குறிப்பு 2: (A', B', C' ....) எனும் புள்ளிகள் Oவுக்கு (A, B, C ....)யின் **தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்** (inverse points) எனப் பெயர் பெறும்.

குறிப்பு 3: O எனும் புள்ளியை மையமாகவும் $\sqrt{K}$ எனும் ஆர நீள முள்ள வட்டத்திற்குத் **தன்மாற்றி விட்டம்** (Circle of inversion) எனப் பெயராகும்.

குறிப்பு 4: தன்மாற்றி வட்டத்திற்கு, AA'; BB'; CC'; ...... என்பவை தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

குறிப்பு 5: (A, B, C ......) எனும் தொகுதி, (A', B', C', ...) எனும் தொகுதியின் தன்மாற்றுத் தொகுதி என்பதையும் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 6: இவ்வாறு (A, B, C (......), (A', B', C' ......) என்பவை ஒன்றற்கொன்று தன்மாற்றுத் தொகுதிகளானல்

(i) AA'; BB'; CC'; ……… எனும் கோடுகள் O எனும் புள்ளிவழிக் கோடுகளாகவும்,

(ii) $OA.OA' = OB.OB' = OC.OC'$ ……… $= K$ எனவும் அமையும்.

குறிப்பு 7: K நேரெண்ணுனல் அதாவது r^2 ஆனுல்

(i) தன்மாற்றி வட்ட ஆரம் r; அது மெய்யான வட்டம் ஆகும். AA'; BB'; ……… என்பவை Oக்கு ஒரேபுறமாய் அமையும்.

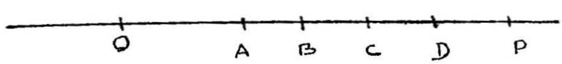
(ii) K எதிரெண்ணுனல், அதாவது $-r^2$ [என்றுல் தன்மாற்றி வட்டம் ஆரம் $\sqrt{-1}r$] அதாவது கற்பனை எண் (பொய் எண்). ஆகவே O எனும் மெய்ப்புள்ளியையுடைய, கற்பனை விட்டமாகத் தன்மாற்றி வட்டம் அமைகிறது. AA'; BB'; CC'; எனும் புள்ளிகள் Oவுக்கு எதிர் எதிர்புறமாக அமையும்.

குறிப்பு 8: P எனும் புள்ளி ஒரு நியமப்பாதை Σஐ வரைந்தால், அதன் தன்மாற்றுப்புள்ளி Σ' எனும் வரையை வரையும். Σஇன் தன்மாற்றுவரை Σ' எனப்படும். Σ, Σ' என்பவை Xஇல் வெட்டிக்கொண்டால், X தன்மாற்றி வட்டத்தில் அமையும் என்றும் புலனுகிறது. இனிமேல் தன்மாற்று நிகழ்ச்சியினுல் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் காண்போம்.

தேற்றம் 26

(i) தன்மாற்றி மையம் ஓர் கோட்டில் அமைந்தால், அந்தக் கோட்டின் தன்மாற்று வரை அதுவே.

(ii) அந்தக் கோட்டில் அமையும் நான்கு புள்ளிகள் கொண்ட புள்ளி வரிசையின் குறுக்குத்தகவுமாருது.



படம் 54.

(i) கோட்டில் P ஏதேனும் புள்ளி ஆகுக. தன்மாற்று மையம் O கோட்டில் அமைகிறது.

∴ Pயின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P'; OPயிலேயே $OP.OP' = K$ எனும்படி அமைகிறது. ஆகவே P கோட்டில் நகரும்போது, P'ம் அதே கோட்டில் நகருகிறது.

∴ ஒரு கோட்டின் தன்மாற்றுவரை, அதே கோட்டில் உள்ள தன் மாற்றி மையத்துக்கு, அதே கோடாகும்.

(ii) A, B, C, D என்ற கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் A', B', C', D' ஆகுக.

$$\therefore OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = OD.OD' = K$$

$$\text{ஆனால் } (ABCD) = \frac{AB.CD}{AD.CB} = \frac{(OB-OA).(OD-OC)}{(OD-OA).(OB-OC)}$$

$$\therefore (ABCD) = \frac{\left(\frac{K}{OB'} - \frac{K}{OA'}\right)\cdot\left(\frac{K}{OD'} - \frac{K}{OC'}\right)}{\left(\frac{K}{OD'} - \frac{K}{OA'}\right)\cdot\left(\frac{K}{OB'} - \frac{K}{OC'}\right)}$$

$$= \frac{(OA'-OB').(OC'-OD')}{(OA'-OD').(OC'-OB')}$$

$$= \frac{A'B'.C'D'}{A'D'.C'B'} = (A'B'C'D')$$

குறிப்பு 1: இசைப் புள்ளி வரிசை இசைப் புள்ளி வரிசையாக மாறுகிறது.

குறிப்பு 2: கோட்டில் P, Oவை நெருங்கும்போது அதன் தன் மாற்றுப்புள்ளி P', தொலைவில் செல்கிறது.

$\therefore P \to O$ ஆகும்போது $P' \to \infty$ என ஆகிறது.

$\therefore$ Oவின் தன்மாற்றுப்புள்ளி, கந்தழிப்புள்ளி ஆகும்.

இதேபோல கந்தழிப்புள்ளியின் (Point of infinity) தன் மாற்றுப்புள்ளி O ஆகும்.

குறிப்பு 3: P எனும் புள்ளி ABயின் நடுப்புள்ளி ஆகுக. கோட்டின் கந்தழிப்புள்ளி $Q\infty$ ஆகுக.

அப்போது $(APBQ\infty) = -1$; தன்மாற்றுக்குப்

பிறகு $(A'P'B'Q'\infty) = -1$ ஆனால் $Q'\infty = O$ ஆகும்

$\therefore (A'P'B'O) = -1$ என வரும்.

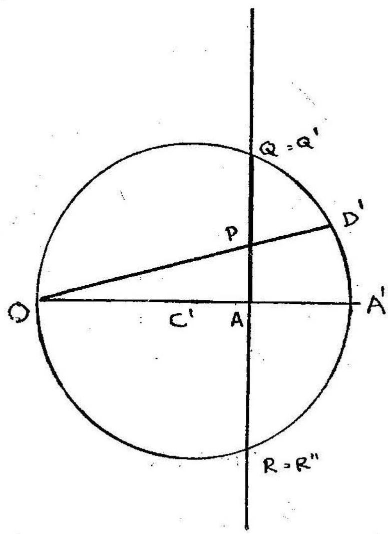
மறுதலையாக $(APBO) = -1$ ஆனால் தன்மாற்றுக்குப் பிறகு $A'B'$யின் நடுப்புள்ளியாக P' வருகிறது.

ஏனெனில் $(A'P'B'O') = -1$ ஆனால் Oவின் தன்மாற்றுப்புள்ளி O' கந்தழிப் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு 4: O வழிச் செல்லும் இசைக் கோட்டுக்கற்றை, இசைக் கற்றையாக இருக்கும். ஏனெனில் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் அதே கோடுகளாக மாறுவதால்.

தேற்றம் 27

தன்மாற்றி மையம், தன்னுள் இல்லாத கோட்டின் தன்மாற்று வரை, அந்த மையம் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டமாகும்.



படம் 55.

AP என்பது ஒரு கோடு; O என்பது அதன்மேல் இல்லாத ஒரு புள்ளி. Oவைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்வோம். P என்பது கோட்டில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி. அதன் தன்மாற்றுபுள்ளி P' ஆகுக;

$\therefore\ OP.OP' = K$; கோட்டிற்கு OA எனும் குத்துக் கோடுவரைக; Aயின் தன்மாற்றுப்புள்ளி A' ஆகுக.

$\therefore\ OA.OA' = K$; அன்றியும் கோட்டில் P எங்கிருப்பினும் A, A'ன் நிலை மாறுது.

$\because\ OP.OP' = OA.OA'$ $\quad \therefore\ AA'\ P'P$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்

$\therefore\ \angle OP'A' = \angle OAP$

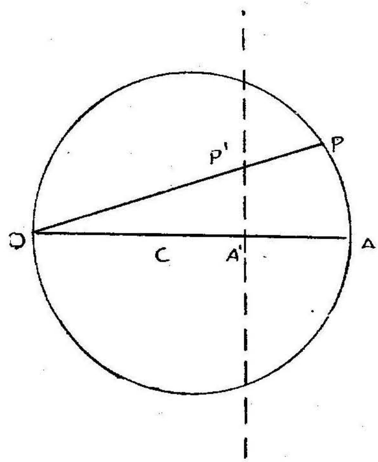
$= 90°$

$\therefore$ P கோட்டில் நகரும்போது, P' எனும் அதன் தன்மாற்றுப் புள்ளி, OA'ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்தில் நகருகிறது.

$\therefore$ கோட்டின் தன்மாற்றுவரை, O வழிச் செல்லும் வட்டமாகும்.

தேற்றம் 28

தன்மாற்றி மையம் ஒரு வட்டத்தின்மீது இருந்தால் அவ் வட்டத்தின் தன்மாற்றுவரை நேர்கோடாகும்.



படம் 56.

வட்டத்தின் மையம் C ஆகுக; தன்மாற்றி மையம் வட்டத்தின் மேல் உள்ளது. OC வட்டத்தை மறுபடியும் Aயில் வெட்டட்டும். Aயின் தன்மாற்றுப்புள்ளி A' ஆகுக.

$\therefore$ A', A, இவை நிலைப்புள்ளிகள்.

வட்டத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி P ஆகுக. Pயின் தன்மாற்றுப் புள்ளி P' ஆகுக. P வட்டத்தில் நகரும்போது P' நகரும் வரையைக் காணவேண்டும். $P'A'$ஐ ஒன்று சேர்க்கவும்.

$OP.OP' = OA.OA'$

$\therefore$ $A'APP'$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore$ $\angle OA'P' = \angle OPA$ ஆனால் $\angle OPA = 90°$

$\therefore$ $\angle OA'P' = 90°$

$\therefore$ P' எனும் புள்ளி OAக்கு A'இல் குத்தாகவுள்ள கோட்டில் நகருகிறது.

அதாவது தன்மாற்றிமையம், ஒரு வட்டத்தின் மீதிருந்தால், வட்டத்தின் தன்மாற்றுவரை O வழிச் செல்லும் விட்டத்திற்குக் குத்துக் கோடாகும்.

குறிப்பு: வட்டமையம் Cயின் தன்மாற்றுப்புள்ளி C' ஆகுக.

$$\therefore\ OC.OC' = R^2 = OA.OA'$$

ஆனல் $OA = 2OC$

$$\therefore\ OC.OC' = 2OC.OA'$$

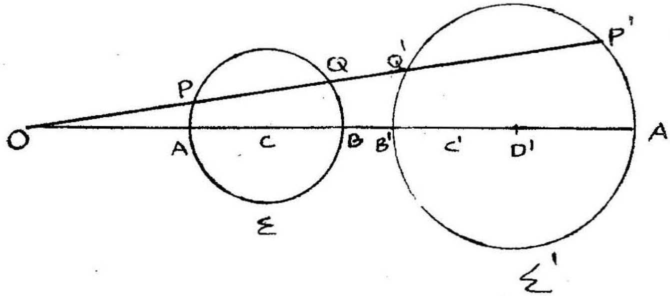
$$\therefore\ OC' = 2OA'$$

$$\therefore\ OA' = A'C'$$

∴ வட்டமையம், கோட்டில் Oவின் பிரதிபலிப்பாக (Image) மாறுகிறது.

தேற்றம் 29

தன்மாற்றி மையம், வட்டத்தின்மீது இல்லாவிடில் வட்டத்தின் தன்மாற்று மற்ருெரு வட்டமாகும்.



படம் 57.

C எனும் புள்ளியை மையமாகக்கொண்ட வட்டம் Σ ஆகுக. O தன்மாற்றிமையம் ஆகுக. P வட்டம் Σன்மீது ஒரு புள்ளி ஆகுக. Oவிலிருந்து Σக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளம் t' ஆகுக.

P' எனும் புள்ளி Pயின் தன்மாற்று, P வட்டம் Σல் நகரும்போது P' நகரும் வரையைக் காணவேண்டும். OP மீண்டும் வட்டம் Σஐ Qவில் வெட்டட்டும்.

இப்போது $OP.OP' = R^2$

ஆனல் $OP.OQ = t^2$

$$\therefore\ \frac{OP'}{OQ} = \frac{R^2}{t^2} \quad \text{(நிலைமதிப்பு)}$$

[P', Q மாறினும் விகிதம் மாருது]

ஆனல் P வட்டம் Σல் நகரும்போது Qம் Σல் நகருகிறது.

$OP' : OQ =$ நிலை மதிப்பானதால், P'ம் ஒரு வட்டத்தில் நகருகிறது. [தேற்றம் : 1 காண்க]

∴ O எனும் தன்மாற்றி மையத்திற்கு, வட்டம் Σன் தன்மாற்று வரை Σ' எனும் வட்டம் ஆகும்.

குறிப்பு 1:

வட்டம் Σம், அதன் தன்மாற்று வட்டம் Σ'ம் X, Y எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால், X, Y இவற்றின் தன்மாற்றுகள் முறையே X, Y எனும் புள்ளிகளே.

$\therefore \; OX^2 = R^2; \; OY^2 = R^2;$

$\therefore$ X, Y எனும் புள்ளிகள் Oவை மையமாகவும் R நீளமுள்ள ஆரமுடைய தன்மாற்றி வட்டத்திலும் அமையும்.

$\therefore$ தன்மாற்றி வட்டம், வட்டம் Σ, அதன் மாற்று Σ', எனும் மூன்று வட்டங்களும் XYஐ அச்சாகவுடைய ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

குறிப்பு 2:

O வழி உள்ள Σவின் விட்டம், AB ஆகுக. இந்தக் கோடு வட்டம் Σ'ஐ A', B'இல் வெட்டட்டும்.

$\therefore$ A, B இவற்றின் தன்மாற்றுகள் A', B' ஆகும். Σ வட்டத்தின் மையமாகிய Cயின் தன்மாற்றும் இதே கோட்டில் அமையும் C' ஆகுக. (படம் காண்க). கோட்டில் அமையும் கந்தழிப்புள்ளி $Q\infty$ ஆனால்

$$(ACBQ\infty) = -1). \qquad \therefore (A'C'B'O) = -1$$

$\therefore$ C', வட்டம் Σ'க்கு Oவின் தன்மாற்றுப் புள்ளியாகும். (inverse point of O for circle Σ')

குறிப்பு 3:

Σ எனும் வட்டத்திற்கு Oவின் தன்மாற்றுப் புள்ளி D ஆகுக.

$$\therefore (OADB) = -1;$$

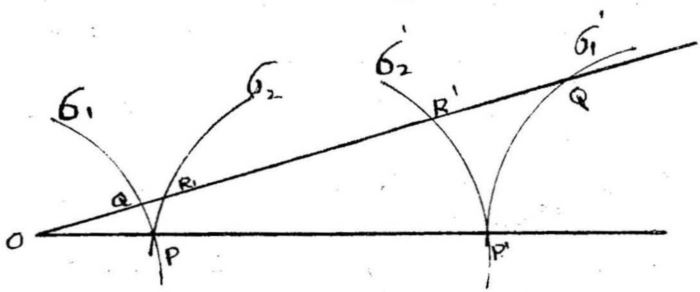
$$\therefore (Q\infty A'D'B') = -1$$

$\therefore$ D' எனும் புள்ளி $A'B'$யின் நடுப்புள்ளி. அதாவது வட்டம் Σ'இன் மையம்.

$\therefore$ Σக்கு Oவின் தன்மாற்றுப்புள்ளி Σ'இன் மையமாக மாறுகிறது.

தேற்றம் 30

இரண்டு வரைகள் எந்தக் கோணத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றனவோ, அதே கோணத்தில், அவற்றின் தன் மாற்றுவரைகள் வெட்டிக்கொள்கின்றன.



படம் 58

σ_1, σ_2 எனும் இரு வரைகள் Pயில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

O எனும் புள்ளி தன்மாற்றி மையமாகுக. σ_1, σ_2 எனும் வரைகளின் தன்மாற்றுகள் σ_1' σ_2' ஆகுக. அவற்றின் பொதுப்புள்ளி Pயின் தன்மாற்று P' ஆகும். $PP'O$ ஒரு கோடமைவனவும் $OP.OP' = R$ ஆகவும் அமையும்.

O வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு σ_1, σ_2 σ_1', σ_2' இவற்றை Q, R, Q', R' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். அப்போது Q, R இவற்றின் தன்மாற்றுகள் Q', R' ஆகும்.

$$\therefore\ OP.OP' = OQ.OQ'; \quad OP.OP' = OR.OR'$$

$\therefore$ $PP'Q'Q$ம் $PP'R'R$ம் வட்ட நாற்கரங்கள்.

$$\therefore\ \angle OQ'P' = \angle OPQ; \quad \angle OR'P' = \angle OPR$$

$$\therefore\ \angle OR'P' - \angle OQ'P' = \angle OPR - \angle OPQ$$

$$\therefore\ \angle R'P'Q' = \angle RQP$$

OQR எனும் கோடு OP எனும் கோட்டை அணுக PQ, PR $P'Q'$, $P'R'$ என்பவை முறையே σ_1, σ_2 $\sigma_1'\sigma_2'$ எனும் வரைகளுக்கு P, P' எனும் புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் ஆகின்றன.

$\therefore$ σ_1, σ_2 எனும் வரைகளுக்கு Pயில் உள்ள தொடுகோட்டிடைக் கோணம் $= \sigma_1'$, σ_2' எனும் தன்மாற்று வரைகளுக்கு P'யில் உள்ள தொடுகோட்டிடைக் கோணம்.

$\therefore$ இருவரைகள் வெட்டிக்கோணமும், அவற்றின் தன்மாற்றுக்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோணமும் சமம்.

குறிப்பு 1:

(i) இரண்டு வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம், அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டிடையே உள்ள கோணமாகும்.

(ii) ஒரு வட்டத்தை AB என்ற நாணில் ஒரு கோடு வெட்டினுல், கோட்டிற்கும் வட்டத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம், AB எனும் நாண் வட்ட வில்லில் தாங்கும் கோணமாகும்.

(iii) ஆகவே ஒரு வட்டமும், அதன் விட்டமும் ஒன்றையொன்று குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும்.

(iv) ஒரு வட்டத்திற்கும், அதன் தொடுகோட்டிற்குமிடையேயுள்ள கோணம் $0°$ ஆகும்.

(v) இரண்டு வட்டங்கள், தொடுவட்டங்களாயின் அவற்றிடையேயுள்ள கோணம் $0°$ ஆகும்.

(vi) இரண்டு இணைகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமும் $0°$ ஆகும்.

குறிப்பு 2: இரண்டு குத்துவட்டங்கள் Σ_1, Σ_2 P, Q எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும்.

(i) இரண்டு வட்டங்களிலும் அமையாத தன்மாற்றி மையத்திற்கு, இவற்றின் தன்மாற்று σ_1, σ_2 எனும் இரு குத்து வட்டங்களாகும்.

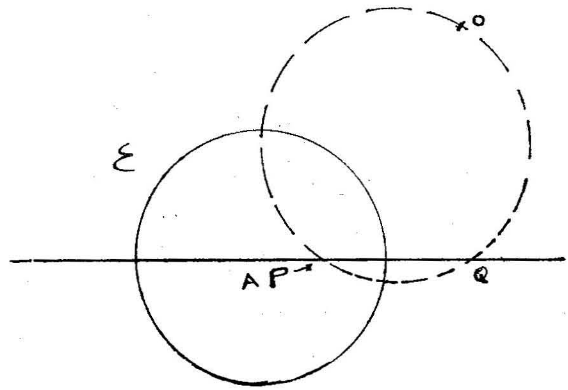
(ii) தன்மாற்றிமையம் Σ_1ல் அமைந்தால், Σ_1 எனும் வட்டம் σ_1 எனும் கோடாகும். Σ_2 எனும் வட்டம் σ_2 எனும் வட்டமாகும். Σ_1, Σ_2 இரண்டும் குத்து வட்டமாதலால், σ_1, σ_2 இரண்டும் குத்தாகும். அதாவது σ_2 எனும் வட்டத்தின் விட்டமாக σ_1 எனும் கோடு அமையும்.

(iii) தன்மாற்றிப் புள்ளியை, P ஆகக் கொண்டால் Σ_1, Σ_2 எனும் இரு வட்டங்களும் σ_1 σ_2 எனும் கோடுகளாகும்; $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$ ஆவதால் $\sigma_1 \perp^r \sigma_2$ என அமையும். அவை வெட்டும்புள்ளி Qவின் தன்மாற்ருன Q' எனும் புள்ளியாகும். இவ்வாறு இரண்டு குத்து வட்டங்களின், வெட்டுப்புள்ளி ஒன்றைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொண்டு மாற்றம் செய்தால், அவை ஒன்றற்கொன்று குத்தான இரு கோடுகளாக மாறுகின்றன.

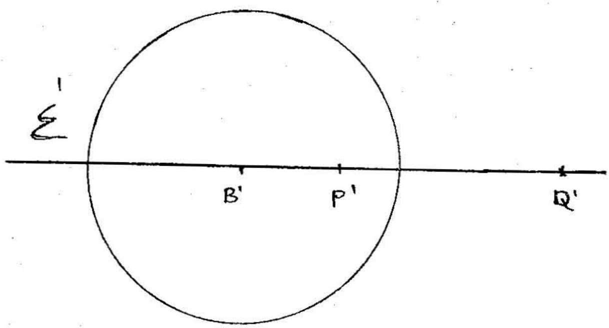
(iv) இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று P எனும் புள்ளியில் தொட்டால், Pஐத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்ள, வட்டங்களின் தன்மாற்று இரு இணைகோடுகளாகும்.

தேற்றம் 31

ஒரு வட்டமும், அதன் இரு தன்மாற்றுப் புள்ளிகளும் கொண்ட தொகுதியின் தன்மாற்று இன்னொரு வட்டமும் அதன் இரு தன்மாற்றுப் புள்ளிகளுமாகும்.



படம் 59.



படம் 60.

Σ என்பது Aஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம்; P, Q எனும் புள்ளிகள் இவ்வட்டத்திற்கு தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்.

O எனும் புள்ளியைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க. (i) P, Q இவற்றின் தன்மாற்று P', Q' ஆகுக. O வழிச் செல்லும் OPQ எனும் வட்டம் $P'Q'$ எனும் கோடாக மாறுகிறது. Σ எனும் வட்டம் Σ' ஆகிறது. $\odot OPQ \perp^r \Sigma$ ஆனதால் $P'Q' \perp^r \Sigma$ ஆகிறது. $\therefore$ $P'Q'$ எனும் கோடு Σ'இன் மையம் B' வழிச் செல்கிறது.

(ii) PQ வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவும் Σக்குக் குத்தாதலால் தன்மாற்றுக்குப் பிறகு $P'Q'$ வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவும் Σ'க்குக் குத்தாகின்றன. $\therefore$ $P'Q'$ எனும் புள்ளிகள் Σ^1க்கு இன்வர்ஸ் புள்ளிகளாகும்.

குறிப்பு : **மாற்று நிரூபணம் :** இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவும் ஒரு வட்டத்திற்குக் குத்தானால், அப் புள்ளிகள், வட்டத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகளாகும் என்பது ஒரு உண்மை. PQ வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவும் Σக்குக் குத்தாகவுள்ளன. ஏனெனில் Σக்கு P, Q தன்மாற்றுப் புள்ளிகள், மாற்று நிகழ்ச்சிக்குப் பிறகு $P'Q'$ வழி வட்டங்கள் Σ'க்குக் குத்து என வருகிறது. $\therefore$ $P'Q'$ என்பவை Σ'க்கு தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் எனக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு தேற்ற நிரூபணத்தின் இரண்டாம் பகுதியே போதுமான நிரூபணமாகிறது. முதல் பகுதி தேவையில்லை.

குறிப்பு 2 : தன்மாற்றி மையம், வட்டம் Σல் அமைந்தால் Σ', நேர் கோடாகிறது. $P'Q'$ வழிச் செல்லும் வட்டங்கள் யாவற்றிற்கும் இந்தக் கோடு விட்டமாகும். அதாவது வட்டங்களின் மையங்கள் Σ^1இல் அமையும் $\therefore$ Σ' எனும் கோடு $P'Q'$இன் மையக் குத்துக் கோடாகும். அதாவது P', Q' ஒன்றற்கொன்று கோட்டில் பிரதிபலிப்பாகும்.

தேற்றம் 32

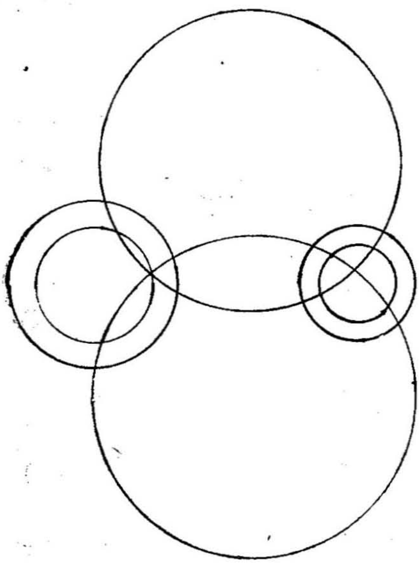
ஓரச்சு வட்டங்களின் தன்மாற்றுகள், ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளாகவோ, அல்லது பொது மைய வட்டங்களாகவோ ஆகும்படி மாற்றம் செய்ய முடியும்.

(i) வெட்டும் ஓரச்சு வட்டங்களைக் கொள்வோம். அவை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q ஆகுக. Pஐத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொண்டால், ஒவ்வொரு வட்டமும் P வழிச் செல்வதால், அவற்றின் தன்மாற்றுவரை நேர்கோடுகளாகும். ஒவ்வொரு வட்டமும் Q வழிச் செல்வதால், Qவின் தன்மாற்றுப் புள்ளியான Q^1 வழி அக்கோடுகள் செல்லவேண்டும். ஆகவே வெட்டும் ஓரச்சு வட்டங்களை, அவை வெட்டும் ஒரு புள்ளிக்கு தன்மாற்று நேரிட, ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாக மாறுகின்றன.

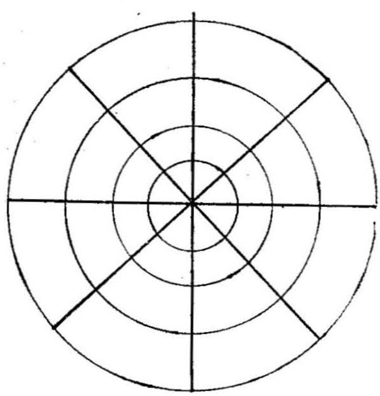
(ii) வெட்டாத ஓரச்சு வட்டங்களாயின், எல்லைப் புள்ளிகள் மெய்ப் புள்ளிகளாகும். அவை L_1, L_2 ஆகுக. ஒவ்வொரு வட்டத்

திற்கும் L_1, L_2 இன்வர்ஸ் புள்ளிகளாகும். ஒரு எல்லைப் புள்ளியை அதாவது L_1ஐத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்வோம் வட்டம் ஒவ்வொன்றும், இன்னொரு வட்டமாக மாறுகிறது. L_1, L_2 என்ற புள்ளிகளின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு தன்மாற்று வட்டத் திற்கும், இன்வர்ஸ் புள்ளிகளாகும். ஆனால் L_1இன் தன்மாற்றுப் புள்ளி கந்தழிப் புள்ளி. அதன் இன்வர்ஸ் வட்டமையம் ஆகவே L_2இன் தன் மாற்று எல்லா வட்டங்களுக்கும் மையமாகும். அதாவது வெட்டாத ஓரச்சு வட்டங்களை ஒரு எல்லைப் புள்ளிக்குத் தன்மாற்று செய்ய, பொதுமைய வட்டங்களாக மாறுகிறது.

[**மாற்று நிரூபணம் :** L_1, L_2 எனும் எல்லைப் புள்ளி வழிச் செல் லும் வட்டங்கள் யாவும், வெட்டாத ஓரச்சு வட்டங்களுக்குக் குத்தாகும்; L_1க்குத் தன்மாற்றுச் செய்ய, குத்து வட்டங்கள் யாவும் $L_2{}^1$ வழிச் செல்லும் கோடுகளாகின்றன. ஓரச்சு வட்டங்கள் இக்கோடுகளுக்குக் குத்து வட்டங்களாக மாறுகின்றன. ஆகவே கோடுகள் யாவும் இவற் றிற்கு விட்டங்கள் (diameters) ஆகும். ஆகவே குத்து வட்டங்களின் மையம் $L^1{}_2$ ஆகிறது. ∴ ஓரச்சு வட்டங்கள் பொதுமைய வட்டங் களாக மாறுகின்றன.]



படம் 61.



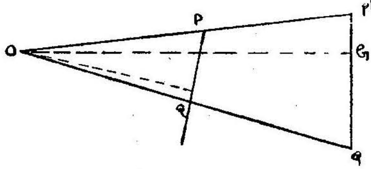
படம் 62.

தேற்றம் 33

O எனும் தன்மாற்றி மையத்திற்கு *P*, *Q* எனும் புள்ளிகளின் தன்மாற்றுக்கள் *P′*, *Q′* எனும் புள்ளிகள். *PQ*, *P′ Q′* எனும் கோட்டுத் துண்டுகளுக்கு, *O*விலிருந்து உள்ள தூரங்கள் முறையே,

$p_1\, p^1$ என்றால் $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{p'}{p} = \dfrac{R^2}{OP \cdot OQ} = \dfrac{OP' \cdot OQ'}{R^2}$

[*R* என்பது தன்மாற்றி வட்டத்தின் ஆர நீளம்].



படம் 63.

PQ, *P′ Q′*க்கு *OF*, *OG* எனும் குத்துக்கோடுகள் வரைக

$OF = p \qquad OG = p'$

PP′; *QQ′* இவை தன்மாற்றுப் புள்ளிகளாதலின்

$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ ∴ *PQQ′P′* வட்ட நாற்கரம்

$\therefore\ \angle OPQ = \angle OQ'P'; \quad \angle OQP = \angle OP'Q'$

$\therefore\ \Delta\, OPQ \parallel r\ \Delta\, OQ'P'$

$$\therefore\ \frac{OG}{OF} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{P'Q'}{PQ} \quad \therefore\ \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{p'}{p} \qquad \text{(i)}$$

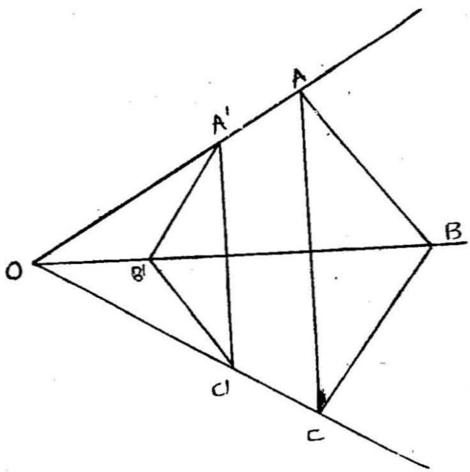
அன்றியும் $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{OQ'}{OP} = \dfrac{OQ' \cdot OQ}{OP \cdot OQ} = \dfrac{OQ' \cdot OP'}{OP \cdot OP'}$

$$\therefore\ \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{R^2}{OP \cdot OQ} = \frac{OP' \cdot OQ'}{R^2} \qquad \text{(ii)}$$

குறிப்பு : இந்தத் தேற்றத்தில் மட்டுமே, தூரம், நீளம் எனும் அளவுப் பண்புகள் (Metrical Properties) வந்தன. இது வரை வந்துள்ளவை விவரப் பண்புகளே. (Descriptive Properties)

தேற்றம் 34

ஒரு நாற்கரத்தில், இரு ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் உள்ளடக்கும் செவ்வகத்தின் கூடுதல், அதன் மூலைக்கோடுகள் உள்ளடக்கும் செவ்வகத்திற்குக் குறையாது.



படம் 64.

கொள்கை : $OABC$ ஒரு நாற்கரம். ஆனால் வட்ட நாற்கரமல்ல.

நிரூபிக்க : $OA.BC + OC.AB \leq OB.AC$

நிரூபணம் : O எனும் முனையைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க.

A, B, C இவற்றின் தன்மாற்றுக்கள் A' B' C' ஆகுக.

$$\therefore \quad AB = \frac{R^2}{OA'.OB'}.A'B'$$

$$BC = \frac{R^2}{OB'.OC'}.B'C'$$

$$CA = \frac{R^2}{OC'.OA'}.C'A'$$

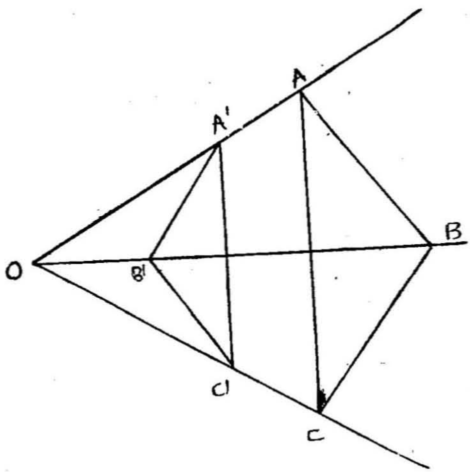
$$\therefore \quad OC.AB = \frac{R^2.OC}{OA'.OB'}.A'B' = \frac{R^2.OC.OC'}{OA'.OB'.OC'}.A'B'$$

$$\therefore \quad OC.AB = \frac{R^4}{OA'.OB'.OC'}.A'B' = KA'B'$$

$[K = R^4/OA'.OB'.OC']$

தேற்றம் 34

ஒரு நாற்கரத்தில், இரு ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் உள்ளடக்கும் செவ்வகத்தின் கூடுதல், அதன் மூலைக்கோடுகள் உள்ளடக்கும் செவ்வகத்திற்குக் குறையாது.



படம் 64.

கொள்கை : $OABC$ ஒரு நாற்கரம். ஆனால் வட்ட நாற்கரமல்ல.

நிரூபிக்க : $OA.BC + OC.AB \leq OB.AC$

நிரூபணம் : O எனும் முனையைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க.

A, B, C இவற்றின் தன்மாற்றுக்கள் A' B' C' ஆகுக.

$$\therefore \quad AB = \frac{R^2}{OA'.OB'}.A'B'$$

$$BC = \frac{R^2}{OB'.OC'}.B'C'$$

$$CA = \frac{R^2}{OC'.OA'}.C'A'$$

$$\therefore \quad OC.AB = \frac{R^2.OC}{OA'.OB'}.A'B' = \frac{R^2.OC.OC'}{OA'.OB'.OC'}.A'B'$$

$$\therefore \quad OC.AB = \frac{R^4}{OA'.OB'.OC'}.A'B' = KA'B'$$

$$[K = R^4/OA'.OB'.OC']$$

இதேபோல $OA.BC = K.B'C'$

$OB.CA = K.C'A'$

$\therefore \quad OA.BC+OC.AB \quad = K[B'C'+A'B']$

$> K.A'C'$

$> OB.CA$

$\therefore \quad \mathbf{OA.BC+OC.AB \quad > OB.AC}$

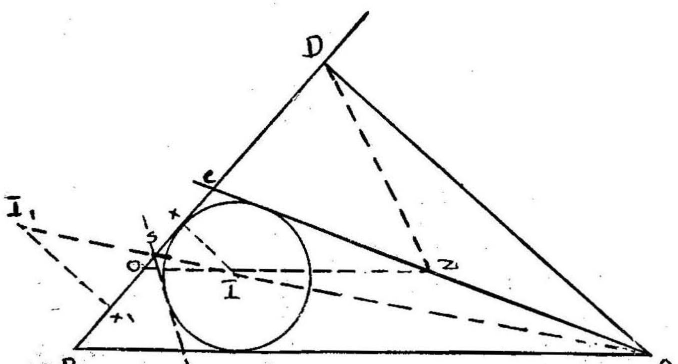
$OABC$ வட்ட நாற்கரமாயின் $A'B'C'$ ஒரு கோடமையும்.

அப்போது $B'C'+B'A' = C'A'$

அப்போது $\mathbf{OA.BC+OC.AB = OB.AC}$.

தேற்றம் 35

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டம், அதன் உள், வெளி வட்டங்களுக்குத் தொடு வட்டமாய் அமைகின்றது.



படம் 65.

ABC என்ற முக்கோணத்தில் உள்வட்டம் BCஐ Xஇல் தொடுகிறது. வெளிவட்டம் BCஐ X'இல் தொடுகிறது. AII_1, BCஐ Sஇல் வெட்டுகிறது. BCயின் நடுப்புள்ளி O; ACயின் நடுப்புள்ளி Z; BCக்கு AD குத்துக்கோடு. $\odot (I)$ $\odot (I_1)$ நான்காவது தொடுவரை SL ஆகுக. அது ABஐ Lல் வெட்டட்டும். OZஐ Kல் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : $BX' = CX \quad [= (s-c)]$

$BO = CO$

$\therefore \quad X'O = OX$

∴ Oவிலிருந்து உள்வட்டம் ⊙ (I), வெளிவட்டம் ⊙ (I_1)க்குள்ள தொடுகோட்டு நீளம் $OX=OX'$ ஆகும். ∴ Oஐ தன்மாற்றி மையமாகவும் OX ஆர நீளமுள்ள வட்டத்தைத் தன்மாற்றி வட்டமாகவும் கொள்ளவும். அப்போது ⊙ (I)யின் தன்மாற்று வட்டம் அதுவே. அதுபோல ⊙ (I_1)யின் தன்மாற்று வட்டமும் அதுவே. (i)

(ii) $(AISI_1)=-1$

இவற்றிலிருந்து BCக்குள்ள குத்தடிப் புள்ளிகளானல் ஆன புள்ளி வரிசை $(DXSX')=-1$. ஆனல் XX'இன் நடுப்புள்ளி O

∴ $OS.OD=OX^2=OX'$

∴ Dயின் தன்மாற்றுப் புள்ளி S ஆகும். ஆகவே ODZ வழிச் செல்லும் ஒன்பது புள்ளி வட்டம் S வழிச் செல்லும் ஒரு கோடாகும்.

அல்லாமலும் $\angle OKS = \angle BLS$ ($\because$ $OKZ \parallel BLA$)

$= \angle LSA + \angle LAS$

$= \angle ASC + \angle SAC$

$= \angle ZCD$

$= \angle CDZ$ ($\because$ $ZC=ZA=ZD$

$\because$ $CDA=90°$)

∴ $SKZD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்

∴ $OK.OZ=OS.OD=OX^2$

∴ Zன் தன்மாற்றுப்புள்ளி K ஆகும்.

∴ 9 புள்ளி வட்டத்தில் தன்மாற்றுகிய கோடு K வழியும் செல்கிறது.

∴ இந்தத் தன்மாற்று ⊙ (I), ⊙ (I_1)இன் நான்காவது தொடு கோடாகும்.

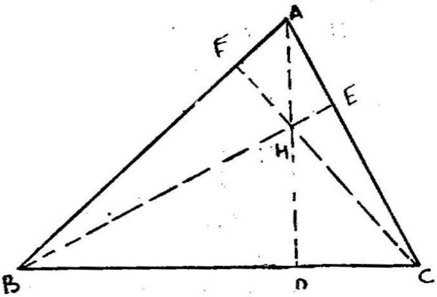
ஆகவே தன்மாற்றுக்கு முன் ஒன்பது புள்ளி வட்டம் ⊙ (I), ⊙ (I_1)ஐத் தொடவேண்டும்.

இது போன்று ⊙ (I_2), ⊙ (I_3)ஐயும் தொடவேண்டும்.

[இந்தத் தேற்றத்திற்கு ஃபோயர்பாக்ஸ் தேற்றம் (Feuerbachs) எனப் பெயராகும்.]

மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1: ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனும் தேற்றத்திலிருந்து, ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்குத் தன்மாற்று நிகழ்த்த வரும் தேற்றம் யாது?



படம் 66.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Oவைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்வோம். தன்மாற்று நேரிடுகிறது என்பதை → எனக் குறிப்போம்.

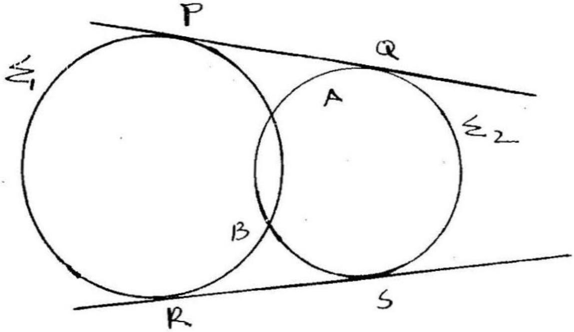
மாற்றத்திற்கு முன்		மாற்றத்திற்குப் பிறகு
AB, BC, CA, மூன்று கோடுகள்	→	$OA'B'$, $OB'C'$ $OC'A'$ எனும் O வழி மூன்று வட்டங்கள்
AD எனும் BCக்குக் குத்துக் கோடு	→	O, A' வழி ⊙ $OB'C'$க்குக் குத்து வட்டம் $OA'D'$
BE எனும் CAக்குக் குத்துக் கோடு	→	O, B' வழி ⊙ $OC'A'$க்குத் குத்து வட்டம் $OB'E'$
CF எனும் ABக்குக் குத்துக் கோடு	→	O C' வழி ⊙ $OA'B'$க்கு குத்து வட்டம் $OC'F'$
மூன்று கோடுகளும் H எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன	→	மூன்று குத்து வட்டங்களும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன

மாற்றத்திற்குப் பிறகு வந்ததைத் தொகுத்துக் கூறுவோம். "ஒரு புள்ளி O வழி வட்டங்கள் மூன்றனுள், ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும், மற்றிருவட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகவும், O வழியாகவும் சென்று, குத்தாக அமையும் வட்டங்கள் மூன்றும் மீண்டு ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். அதாவது ஓரச்சு வட்டங்களாகும்" எனும் தேற்றம் வருகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 2: A எனும் புள்ளியில் வெட்டும் இரு வட்டங்கள் ஒரு கோட்டை P, Q எனும் புள்ளிகளிலும், இன்னொரு கோட்டை R, S எனும் புள்ளிகளிலும் தொடுகின்றன. வட்டங்கள் PAQ, RAS, ஒன்றையொன்று Aயில் தொடும் வட்டங்கள் என நிரூபி.

நிரூபணம்: வட்டங்கள் Aயில் வெட்டிக் கொள்வதால் A எனும் புள்ளியைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்வோம்.

மாற்றத்திற்கு முன்



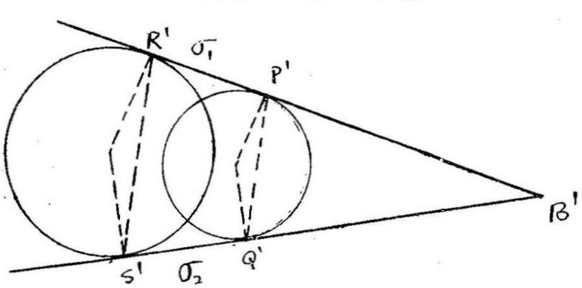
படம் 67.

வட்டங்கள் Σ_1, Σ_2 A, B வழிச் செல்பவை.

ஒரு கோட்டை PQவிலும் இன்னொரு கோட்டை RS இலும் தொடுகின்றன.

வட்டங்கள் PAQ, RAS ஒன்றையொன்று Aயில் தொடும் என நிரூபிக்க.

மாற்றத்திற்குப் பிறகு



படம் 68.

கோடுகள் σ_1 σ_2 B' வழிச் செல்பவை.

A வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தை $P'Q'$விலும், இன்னொரு வட்டத்தை $R'S'$லும் தொடுகின்றன.

கோடுகள் $P'Q'$, $R'S'$ ஒன்றற்கொன்று இணையென நிரூபிக்க.

ஆனால் $P'Q'$, $R'S'$ என்பவை இரண்டும் σ_1 σ_2 B எனும் கோடுகள் உள்ளடக்கும் கோணத்தின் சமவெட்டிக்குக் குத்துக்கோடு ளெனக் காணலாம். $\therefore P'Q' \parallel^e R'S'$ ஆகவே மாற்றத்திற்கு முன்னர் உள்ளதும் சரியே. அதாவது வட்டங்கள் PAQ, RAS, என்பவை A எனும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடுபவை ஆகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு வட்டத்தின் மையத்தைத் தன்மாற்றி மையம் ஆகக் கொண்டால், அதன் தன்மாற்று வரை என்ன?

2. ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு (i) ஒரு இணைகரத்தின் தன்மாற்று என்ன? (ii) புள்ளி இணைகரத்தின் ஒரு பக்கத்திலானல் என்ன? (iii) ஒரு முனையானல் என்ன?

3. (i) இரண்டு வட்டங்கள், அவைகளின் பொதுத்தொடு கோடுகள் இவற்றின் தன்மாற்று என்ன? (ii) தன்மாற்றி மையம் வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் ஒரு புள்ளியானல் தன்மாற்று என்ன? (iii) பொதுத் தொடுகோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளித் தன்மாற்றி மையமானல் என்ன?

4. கீழ்வரும் தேற்றங்களின் தன்மாற்றுத் தேற்றம் என்ன வருகிறது.

(i) ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியிலிருந்து புள்ளியிலிருந்து இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைய முடியும்.

(ii) மூன்று கோடுகளைத் தொடும்படி நான்கு வட்டங்கள் வரைய முடியும்.

(iii) இரண்டு கோடுகளைத் தொட்டு ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் படி இரண்டு வட்டங்களே வரைய முடியும்.

(iv) ஒரு புள்ளி வழி ஒரு கோட்டை ஒரு புள்ளியில் தொடும்படி ஒரு வட்டம் வரைய முடியும்.

5. மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் வட்டங்களெனில் மூன்று தொடும் புள்ளிகள் வழி வட்டம் மூன்றிற்கும் குத்தாகும். (குறிப்பு: ஒரு தொடும் புள்ளியைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்க.)

6. ABC என்ற முக்கோணத்தில் சுற்று வட்டத்தில் O எனும் புள்ளியைக் கொள்க. OA, OB, OC இவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் மற்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளெனக் காட்டு.

7. APB, CPD என்பவை ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள். வட்டங்கள் APC, BPD மீண்டும் Qவில் வெட்டுகின்றன. PQ

நிலையாகக் கொண்டு நாண்கள் மட்டும் மாறினால், Qவின் நியமப்பாதை என்ன?

8. இரண்டு வட்டங்கள் Aயில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. PQ, RS என்பவை பொதுத் தொடுகோடுகள். $\odot PAQ$, $\odot RAS$ Aயில் தொடும் வட்டங்கள் எனக் காட்டு.

9. $\odot PAB$, $\odot PCD$; இருகுத்து வட்டங்கள் $\odot PAD$, $\odot PBC$யும் இருகுத்து வட்டங்கள் என்றால் $\odot PAC$, $\odot PBD$யும் குத்து வட்டங்கள் எனக் காட்டு.

10. A, B, C, D ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள். A_1, B_1, C_1 என்பவை $\odot BCD$, $\odot CDA$, $\odot DAB$ எனும் வட்டங்களின் மையங்கள். A_1 எனும் புள்ளி ADயிலும், B_1 எனும் புள்ளி BDயிலும் அமைந்தால் C_1 எனும் புள்ளி CDயில் அமையும் எனக் காட்டு.

11. C, A, B, L எனும் நான்கு புள்ளிகளில் $\odot OAC$, $\odot OBC$ குத்து வட்டங்களானால் $\odot OAB$, $\odot ABC$யும் குத்து வட்டங்களெனக் காட்டு.

12. 'a' 'b' எனும் ஆரமுடைய இருவட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோட்டின் நீளம் t, தன்மாற்றிடவரும் வட்டங்களின் ஆரங்கள் a', b' பொதுத் தொடுகோட்டு நீளம் t' என்றால் $t^2 : ab = t^{2\prime} : a'b'$ என நிறுவுக.

13. முக்கோணம் ABCஐ, அதே வருமாறு எவ்வாறு தன் மாற்றிடுவது? சுற்று வட்டம், பக்கங்கள், ஒன்பது புள்ளிவட்டங்கள் இவற்றின் தன்மாற்றுக்கள் என்ன?

14. C_1, C_2 என்பவை இருகுத்து வட்டங்கள். A, A' என்பவை C_1க்கு இன்வர்ஸ் புள்ளிகள். B, B' என்பவை C_1க்கு இன்வர்ஸ் புள்ளிகள் எனக் காட்டு.

15. C_1 C_2 எனும் இருகுத்து வட்டங்களைத் தன்மாற்றி மையமாகக் கொள்ள, Σஎனும் வரையின் தன்மாற்றுக்கள் முறை Σ_1, Σ_2 ஆகும். C_2க்கு Σ_1ன் தன்மாற்றும் C_1க்கு Σ_2இன் தன்மாற்றும் ஒன்றே என நிரூபி.

16. C எனும் தன்மாற்றி வட்டத்திற்கு C_1, C_2 எனும் வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று தன்மாற்றானால் அவையிடையேயுள்ள கோணத்தை C சமக்கூறிடுகிறது எனக் காட்டு.

17. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து பக்கங்களுக்குள்ள குத்தடிப் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனும் தேற்றத்தை அப்புள்ளிக்குத் தன்மாற்று செய்ய வருவது யாது?

18. O எனும் புள்ளி வழியியுள்ள OX, OY எனும் கோடுகள் ஒரு கோட்டை X, Yல் வெட்டுகின்றன. $\angle XOY$ எனும் கோணம்

மாருதிருக்கும்படிக் கோடுகள் மாறுமானுல் ⊙ XOY ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

19. O, A_1, A_2, A_3 A_x என்பவை ஒரு வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் $\frac{A_1A_2}{OA_1.OA_2}+\frac{A_2A_3}{OA_2.OA_3}+\frac{A_{x-1}A_y}{OA_{y-1}.OA_x}=\frac{A_1A_x}{OA_1.OA_x}$ என நிறுவுக.

20. A, B, C என்பவை ஒரு கோடமையும் புள்ளிகள். $AOB=BOC=60°$ என O எனும் புள்ளியுள்ளது. $\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}$ என நிரூபி.

21. Q, R என்பவை இரண்டு வட்டங்களுக்கு P எனும் புள்ளியின் இன்வர்ஸ் புள்ளிகள். P ஒரு ஓரச்சுவட்டத்தில் நகர்ந்தால், QR ஒரு நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டு.

22. ஒரு வட்டத்திற்கு P, P' இன்வர்ஸ் புள்ளிகள். $QP'R$ என்பது வட்டத்தின் நாண் என்ருல் $\angle QPR$ எனும் கோணத்தை PP' சமக் கூறிடுகிறது எனக் காட்டு.

23. நான்கு சமநீளமுள்ள கம்பிகள் $PQRS$ எனும் சாய்சதுரமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. OQ, OS எனும் இருசம நீளமுள்ள கம்பிகள் அவற்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. Oவை நிலையாகக் கொண்டு Pயை ஒருவரையில் நகர்த்திஞல், R அதன் தன்மாற்றுவரையில் நகரும் எனக் காட்டு.

24. மூன்று வட்டங்களை அதே வட்டங்களாகத் தன்மாற்றிட, தன் மாற்றி மையம் காண்க.

25. மூன்று வட்டங்களைச் சமவட்டங்களாகத் தன்மாற்றி மையத்தைக் காணவும்.

7. கனவடிவ கணிதம்
(Solid Geometry)

சிலவரையறைகள் (Some defenitions):

1. தளம் (Plane): ஒரு பரப்பில் உள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, பரப்பில் முற்றும் அமைந்தால், அத்தகைய பரப்பு தளம் எனப்படும்.

குறிப்பு 1: ஆகவே ஒரு தளத்தை, ஒரு கோடு ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்கும். ஏனெனில் இரண்டு புள்ளிகள் கோட்டிற்கும், தளத்திற்கும் பொதுவானால், வரையறைப் படி கோடு முற்றிலும் தளத்தில் அமையவேண்டி வரும்.

குறிப்பு 2: கோட்டை எவ்வளவு தூரம் வேண்டுமானாலும் நீட்டலாம். அதுபோன்று தளத்தையும் எப்பக்கமும், எவ்வளவு தூரம் வேண்டுமாயினும் பரவச் செய்யலாம். இதுவும் வரையறையிலிருந்து தெளிவாகிறது. ஏனெனில் இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, எத்திசையில் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். ஆகவே எத்திசையிலும் நீட்டலாம்.

குறிப்பு 3: ஒரு கோடு எத்தனை தூரம் நீட்டினாலும் ஒரு தளத்தை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காவிடில் அந்தக்கோடு, தளத்திற்கு இணைகோடு எனப்படும்.

குறிப்பு 4: ஒரு கோடு ஒரு தளத்தை வெட்டும் புள்ளி வழி தளத்தில் அமையும் கோடுகள் யாவும், அந்தக் கோட்டுக்குக் குத்தாக அமைந்தால், கோடு, தளத்திற்குக் குத்துக் கோடு எனப்படும். (Normal to the plane அல்லது perpendicular to the plane.)

குறிப்பு 5: தளத்திற்குக் குத்தாகவோ, இணையாகவோ இல்லாத கோடு தளத்திற்குச் சாய்வில் உள்ள கோடு எனப்படும்.

குறிப்பு 6: இரண்டு தளப் பரப்புக்கள், எல்லாத் திசையில் பரவினுலும், ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாவிடில், அவை ஒன்றற்கொன்று இணை எனப்படும்.

பயிற்சி

1. AB, AC என்பவை ஒரு தளத்தில் அமையும் இரண்டு சம நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டுகளாகும். AD என்பது தளத்திற்குக் குத்துக்கோடு ஆனுல் $DB = DC$ என நிறுவுக.

2. ஒரு தளத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து தளத்தில் சமதூரத்தில் அமையும் புள்ளிகள், ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டு.

3. மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து, சமதூரத்தில், வெளியில் (in space) இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

எடுகோள் 1: ஒரு நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழி, ஒரே ஒரு தளம் உள்ளது.

எடுகோள் 2: இரண்டு தளங்கள் ஒரு புள்ளியில் மட்டுமாக வெட்டிக்கொள்ளாது.

குறிப்பு 1: இரண்டாவது எடுகோளிலிருந்து நாம் கீழ்க்கண்டவற்றை அறியலாம்.

(i) இரண்டு தளங்களுக்குப் பொதுவாக இரண்டு புள்ளிகளாவது இருக்கவேண்டும். அவ்வாறெனின், அவைகளைச் சேர்க்கும் கோடு, முற்றிலும் இரண்டு தளங்களிலும் அமையவேண்டும். அதாவது இரண்டு தளங்கள் ஒன்றையொன்று ஒரு நேர்கோட்டில் வெட்டிக்கொள்ளவேண்டும்.

(ii) மூன்று புள்ளிகள், இரண்டு தளங்களுக்குப் பொதுவானுல், அவை ஒரு கோட்டில் அமையாதனவாக இருக்கமுடியாது. ஏனெனில் முதல் எடுகோள்படி, மூன்று புள்ளிகள் வழி ஒரு தளம் மட்டுமே அமையமுடியும். வெவ்வேருக இரண்டு தளங்கள் அமையமுடியாது. ஆகவே இரண்டு தளங்கள் ஒரு கோட்டில் மட்டுமே வெட்டிக்கொள்ள முடியும். மூன்று பொதுப் புள்ளிகளோ (அதற்கு மேலோ) இருந்தால் அவையாவும் அந்தப் பொது நேர்கோட்டில் அமைவனவாக இருக்க வேண்டும்.

(iii) இரண்டு தளங்களுக்குப் பொதுப் புள்ளியே இல்லாவிடில், அவை இணைதளங்கள் என முன்னரே கூறியுள்ளோம்.

தேற்றம் 41

பொதுவாக மூன்று தளங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

P_1, P_2, P_3 என்பவை மூன்று தளங்களாகுக.

P_2, P_3 எனும் தளங்கள் தரும் கோடு l_1 ⎫
P_3, P_1 எனும் தளங்கள் தரும் கோடு l_2 ⎬ ஆகுக.
P_1, P_2 எனும் தளங்கள் தரும் கோடு l_3 ⎭

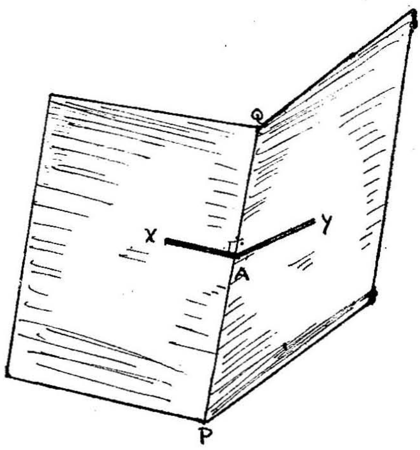
l_1 l_2 எனும் கோடுகள், ஒரே தளம் P_3யில் அமைவதால், (அவை இணையாக இல்லாவிடில்) ஒரு புள்ளி Xல் வெட்டிக்கொள்ளும்.

∴ X எனும் புள்ளி l_1இல் இருப்பதால் P_2, P_3 எனும் தளங்கள் இரண்டிலும் அமையவேண்டும்.

X எனும் புள்ளி l_2இல் இருப்பதால் P_3, P_1 எனும் தளங்களிலும் இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே X எனும் புள்ளி, P_1, P_2, P_3 மூன்று தளங்களுக்கு பொதுவான புள்ளியாகும். ஆகவே அது l_3 எனும் கோட்டிலும் அமையவேண்டும். இவ்வாறு மூன்று தளங்கள், (அவை வெட்டுங் கோடுகள் இணையாக இல்லாவிடில்) ஒரு புள்ளியைப் (ஒரே ஒரு புள்ளியை) பொதுவாகக் கொண்டுள்ளன.

தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம்



படம் 69.

இரண்டு தளங்கள் ஒன்றையொன்று PQ எனும் கோட்டில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். இந்தக் கோட்டில் A, ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக. ஒரு தளத்தில் PQவுக்குக் குத்தாக AX வரைக. மற்ற தளத்தில்

PQவுக்குக் குத்தாக AY வரைக. அப்போது தளத்திடையேயுள்ள கோணம், AX, AY. இவையிடையேயுள்ள கோணமாகும்.

$\angle XAY = 90°$ என்றால் தளங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்துத் தளங்கள் எனப்படும்.

தேற்றம் 42

ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு நேர்கோடுகள் வழி ஒரே ஒரு தளம் அமையும்.

AB, AC இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளாகுக.

இரண்டிற்கும் பொதுப்புள்ளி A; B என்பது ஒரு கோட்டில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி. C என்பது மற்ற கோட்டில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி.

A, B, C என்பவை ஒரு கோடமையாத மூன்று புள்ளிகளாதலின் அவை வழி ஒரே ஒரு தளம் உள்ளது.

ஆகவே AB, AC எனும் கோடுகள் இந்தத் தளத்தில் முற்றும் அமைகின்றன.

AB, AC வழி இன்னுமொரு தளமிருந்தால் இரண்டு தளங்கள் இரண்டு நேர்கோடுகளில் வெட்டுகின்றன என முரணுகை வரும். ஆகவே AB, AC வழி ஒரே ஒரு தளமுள்ளது.

குறிப்பு 1 : ஒரு நேர்கோடு, அதில் அமையாத ஒரு புள்ளி. இவை அமையும் வண்ணம் ஒரே ஒரு தளம் மட்டும் உள்ளது.

[ஏனெனில் AB நேர்கோடாகுக. C ஏதேனும் புள்ளியாகுக. ஆகவே AB, AC வழி ஒரே தளம் மட்டுமே உள்ளது.]

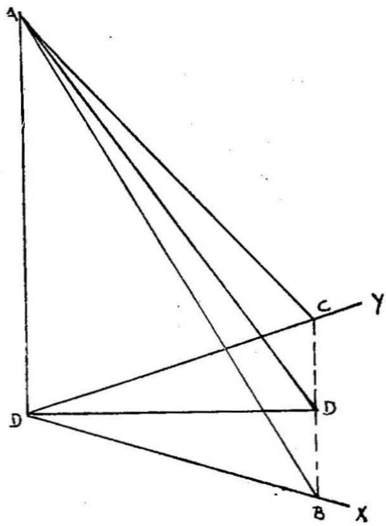
குறிப்பு 2 : இரண்டு இணைகோடுகள் வழி ஒரே ஒரு தளம் மட்டும் உள்ளது.

AB, CD இரு இணைகோடுகளாகுக. AB எனும் கோடு, C எனும் புள்ளி இவை வழி ஒரே ஒரு தளம் அமையும். இந்தத் தளத்தில் ABக்கு இணையாக ஒரு கோடு உள்ளது. அது CX ஆகுக. அப்போது C வழி, ABக்கு CX, CD என இரண்டு இணைகோடுகளைக் காண்கிறோம். 'ஒரு புள்ளி வழி ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக ஒரே ஒரு கோடு உள்ளது' எனும் எடுகோளுக்கு இது முரண் ஆகும். ஆகவே CX, CD என்பவை ஒரே கோடாகும். அதாவது ABC என்ற தளத்தில் CD அமைகிறது.

இரண்டு இணைகோடுகள் வழி ஒரே ஒரு தளமுள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

தேற்றம் 43

வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு கோடுகளுக்கு, அவை வெட்டும் புள்ளி வழிச் அமையும் குத்துக்கோடு, கோடுகள் அடக்கும் தளத் திற்கே குத்தாக அமையும்.



படம் 70.

கொள்கை : OX, OY என்பவை Oல் வெட்டிக்கொள்ளும் இரு கோடுகள். OA அவற்றிற்குக் குத்துகோடு.

நிறுவ : XOY என்ற தளத்திற்கே, OA குத்து என அதாவது O வழிச் செல்லும் XOY என்ற தளத்தில் உள்ள எல்லாக் கோடுகளும் OAக்குக் குத்தாக இருக்குமென.

வரைதல் : O வழி தளம் XOYஇல் யாதேனும் ஒரு கோடு OD வரைக : தளத்தில் ODக்கு Dயில் குத்தாகவுள்ள கோடு OXஐ Bயிலும் OYஐ Cயிலும் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : $\angle AOB$, $\angle AOC$ செங்கோணங்கள்

$$\therefore\ AB^2 - AC^2 = (AO^2 + OB^2) - (AO^2 + OC^2)$$
$$= OB^2 - OC^2$$
$$= (OD^2 + DB^2) - C(OD^2 + DC^2) \quad [\because \angle D = 90^\circ]$$
$$= DB^2 - DC^2$$

∴ A எனும் புள்ளி OAயில் எங்கிருப்பினும் AD, BCக்குக் குத்துக்கோடாகும்.

$$\therefore AD^2 = AB^2 - DB^2$$
$$= (OA^2 + OB^2) - (OB^2 - OD^2)$$
$$= OA^2 + OD^2$$

∴ $\angle AOD$ ஒரு செங்கோணமாகும்.

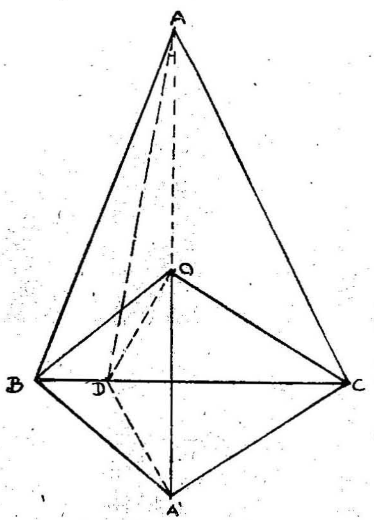
∴ OA, ODக்குக் குத்தாகிறது.

அதாவது OA, O வழிச் சென்று, தளம் XOYல் அமையும் ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் OA குத்தாக அமைகிறது.

∴ தளத்திற்கு OA எனும் கோடு குத்தாகும்.

[குறிப்பு : தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி O வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு கோட்டுடனும் செங்கோணம் ஏற்படுத்தும் கோடே தளத்திற்கு Oவில் உள்ள குத்துக்கோடு என வரையறுத்தோம். தேற்றத்தின்படி, இரண்டு கோடுகளுக்கும் மட்டும் குத்தாக ஒரு கோடு அமைந்தால், அது தளத்திற்கே குத்தாகும் எனக் காண்கிறோம்.]

மாற்று நிரூபணம் :



படம் 71.

கொள்கை : OB, OC என்ற இரு கோடுகளுக்கு OA குத்து.

நிறுவ : OBCயில் உள்ள O வழிச் செல்லும் கோடுகள் OAக்குக் குத்து என.

வரைதல் : OBC என்ற தளத்தில் உள்ள OD எனும் யாதேனும் ஒரு கோடு BCஐ Dயில் வெட்டட்டும். AOஐ A' எனும் புள்ளிக்கு $OA' = OA$ எனும்படி நீட்டு. B, D, C எனும் புள்ளிகளை A, A' எனும் புள்ளிகளுடன் நேர்கோட்டால் இணைக்கவும்.

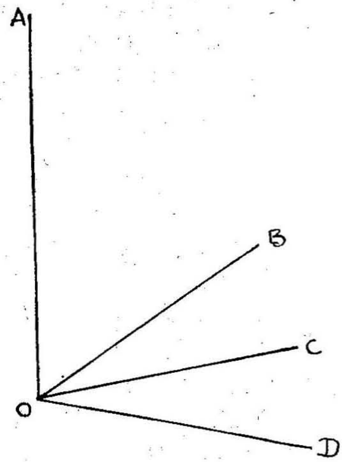
நிரூபணம் : $\Delta AC'B$, $A'OB$யில்
$AO = A'O$; OB பொது $\angle AOB = \angle A'OB$ $(= 90°)$
$\therefore$ $\boldsymbol{AB = A'B}$; அதேபோல $\boldsymbol{AC = A'C}$
ΔABC, $A'BC$யில்
$AB = A'B$, $AC = A'C$, BC பொதுப் பக்கம்
$\therefore$ $\Delta ABC \equiv \Delta A'BC$
$\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC$
ΔABD, $A'BD$யில் $AB = A'B$ BD பொது
$\angle ABD = \angle A'BD$ $(\because ABC = \angle A'BC)$
$\therefore$ $\Delta ABD \equiv \Delta \angle A'BD$
$\therefore$ $AD = A'D$.
இறுதியாக, ΔAOD, $\Delta A'OD$யில்
$AO = A'O$ (வரைதல்)
OD பொதுப் பக்கம்
$AD = A'D$
$\therefore$ $\Delta AOD \equiv \Delta A'OD$
$\therefore$ $\angle AOD = \angle A'OD$
$\therefore$ $\angle AOD$ செங்கோணம்.
$\therefore$ ODக்குக் குத்தாக AD அமைகிறது.
$\therefore$ BOC என்ற தளத்தில் O வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் OA குத்தாகும். அதாவது தளத்திற்கே குத்தாகும்.

பயிற்சி

1. ஆறு சதுரங்கள் உள்ளடக்கிய வடிவம், கன சதுரம் என்று விளக்கம் கூறிஞல், அதன் ஒவ்வொரு விளிம்பும், வடிவத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்குக் குத்து என நிறுவுக.

2. AB என்பது ஒரு நேர்கோடு, AC, AD அதற்குக் குத்துக் கோடுகள். BE, BF என்பவை ABக்குக் குத்துக்கோடுகள். தளங்கள் CAD, EBF இணை தளங்கள் என நிறுவுக.

குறிப்பு 1 : ஒரு கோட்டிற்கு ஒரு புள்ளியில் குத்தாக அமையும் கோடுகள் யாவும், ஒரே தளக்கோடுகள் ஆகும்.



படம் 72.

OA எனும் கோட்டிற்கு, OB, OC, CD......என்பவை குத்துக் கோடுகள்.

∴ BOC எனும் தளத்திற்கு OA குத்துக் கோடாகும். AOD, என்ற தளமும் BOC என்ற தளமும் OX எனும் கோட்டில் வெட்டிக் கொண்டால் AOக்கு OX குத்தாக வேண்டும். (படத்தில் OXஐ காட்டவில்லை). OX, AOD எனும் தளத்தில் அமைந்து AOக்கு O எனும் புள்ளியில் குத்தாகிறது. ஆனால் கொள்கைப்படி ODயும் அதே தளத்தில் AOக்குக் குத்தாகும். ஒரு தளத்தில் AOக்கு Oவில் OX. OD எனும் இரண்டு குத்துக்கோடுகள் இருக்க முடியாது. ஆகவே OX, ODயுடன் பொருந்துகிறது. அதாவது OD எனும் கோடும் BOC எனும் தளத்தில் அமைகிறது. இவ்வாறே ADக்கு Oவில் உள்ள எல்லாக் குத்துக்கோடுகளும் BOC எனும் தளத்திலேயே அமைகின்றன.

குறிப்பு 2 : செங்கோணம் AOBஐ OAஐச் சுற்றி சுழற்ற OB எனும் கோடு AOக்கு Oவில் குத்தான தளத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

குறிப்பு 3 : இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் அமையும் புள்ளிகள், அப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின், நடுக் குத்துத் தளத்தில் அமைகின்றன.

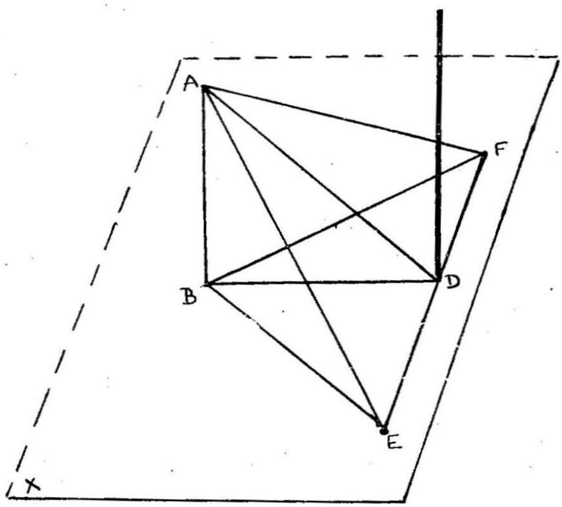
பயிற்சி

1. இரண்டு வெட்டிக் கொள்ளும் வட்டங்கள், அவற்றின் மையங்களைச் சேர்க்கும்கோட்டை அச்சாகச் கொண்டு சுழன்றால், அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் மையக் கோட்டுக்குக் குத்தான தளத்தில் அமைகின்றன எனக் காண்.

2. $PA^2 - PB^2 =$ நிலை எண் எனும்படி P எனும் புள்ளி நகர்ந்தால், அதன் நியமப்பாதை என்ன? (A, B நிலைப்புள்ளிகள்).

தேற்றம் 44

ஒரு தளத்திற்கு இரண்டு கோடுகள் குத்தானால் அவை ஒன்றற்கொன்று இணைகோடுகளாகும்.



படம் 78.

கொள்கை : AB, CD எனும் கோடுகள் X எனும் தளத்திற்கு B, D எனும் புள்ளிகளில் குத்தாகவுள்ளன.

நிறுவ : AB, CD இணைகோடுகளென.

வரைதல் : BDஐ கோட்டால் இணைக்கவும். BDக்குக் குத்தாக X எனும் தளத்தில் EF எனும் கோடு வரைக; $DE = DF$ ஆகுக. BE, BF, AE, AD, AF எனும் கோடுகள் வரைக.

நிரூபணம் : $\triangle ABE$, $\triangle ABF$ல்
AB பொது ; $BE = BF$ [B, EFன் நடுக்குத்துக் கோட்டில் அமைவதால்]
$\angle ABE = \angle ABF = 90°$
$\therefore$ $\triangle ABE \equiv \triangle ABF$
$\therefore$ $AE = AF$
$\triangle ADE \equiv \triangle ADF$ [$\because$ AD பொது $AE = AF$; $DE = DF$]
$\therefore$ $\angle ADE = \angle ADF$ $\therefore$ $AD \perp EF$
$\therefore$ EFக்கு Dயில் BD, AD, CD குத்துக் கோடுகள்.
$\therefore$ ABD என்ற தளத்தில் CDயும் அமைகிறது.
$\angle ABD = \angle BDC = 90°$ $\therefore$ $AB \parallel CD$.
AB, CD என்பவை இணைகோடுகள்.

குறிப்பு : OA ஒரு தளத்திற்கு Oவில் குத்தாகுக. EF தளத்தில் அமையும் ஏதேனும் ஒரு கோடாகுக. EFக்குத் தளத்தில் OD எனும் குத்துக்கோடு வரைந்தால் AD, EF ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும் என்பதையும் மேற்கூறிய தேற்றத்தில் காண்கிறோம்.

தேற்றம் 45

(மறுதலை)

இரண்டு இணைகோடுகளில் ஒன்று ஒரு தளத்திற்குக் குத்தானல், மற்றதும் தளத்திற்குக் குத்தாகும்.

(முந்திய படத்தைக் கொள்க)

கொள்கை : AB, CD என்பவை இரு இணைகோடுகள். X எனும் தளத்திற்கு AB, Bயில் குத்தாகவுள்ளது. CD எனும் கோடு தளத்தை Dயில் வெட்டுகிறது.

நிறுவ : தளத்திற்கு CDயும் குத்து என

வரைதல் : தளத்தில், BDக்கு D வழி EDF எனும் குத்துக் கோடு வரைக.
$DE = DF$ ஆகுக. BE, BF, AE, AD, AF எனும் கோடுகள் வரைக.

நிரூபணம் : EFஇன் நடுக்குத்துக் கோட்டில் B அமைவதால் $BE = BF$
$\triangle ABC \equiv \triangle ABF$ ($\because$ AB பொது $\angle ABF = \angle ABF = 90°$ $BE = BF$)

$\therefore$ $AE = AF$

$\triangle ADE$, $\triangle ADF$ல்

AD பொது $DE = DF$, $AE = AF$

$\therefore$ $\triangle ADE = \triangle ADF$

$\angle ADE = \angle ADF$ $\therefore$ $ED \perp AD$

ஆனால் $ED \perp BD$

$\therefore$ EF தளம் ABDக்குக் குத்தாகும்.

ஆனால் AB, CD இணைகோடுகளானதால் ABD தளத்தில் CD அமைகிறது.

$\therefore$ $ED \perp^r CD$.

AB, CD ஒரு தளத்தில் அமைவதாலும்

$AB \parallel CD$ ஆனதாலும் $\angle ABD + \angle CDB = 180°$

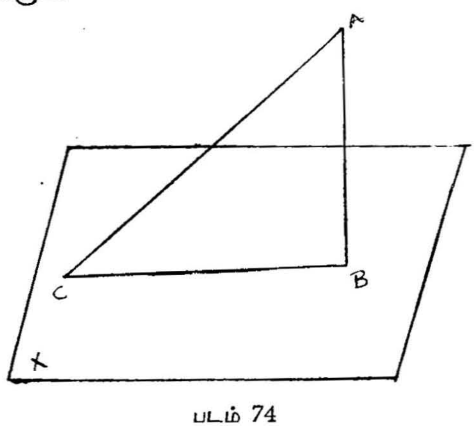
ஆனால் $\angle ABD = 90°$ $\therefore$ $\angle CDB = 90°$

$\therefore$ $BD \perp^r CD$.

$\therefore$ CD எனும் கோடு BD, DE எனும் கோடுகள் அமையும் தளத்திற்கு அதாவது X எனும் தளத்திற்குக் குத்தாகும்.

தேற்றம் 46

ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு தளத்திற்கு வரையப்படும் கோடுகள் யாவற்றிலும் மிகச் சிறியது, அதிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடாகும்.



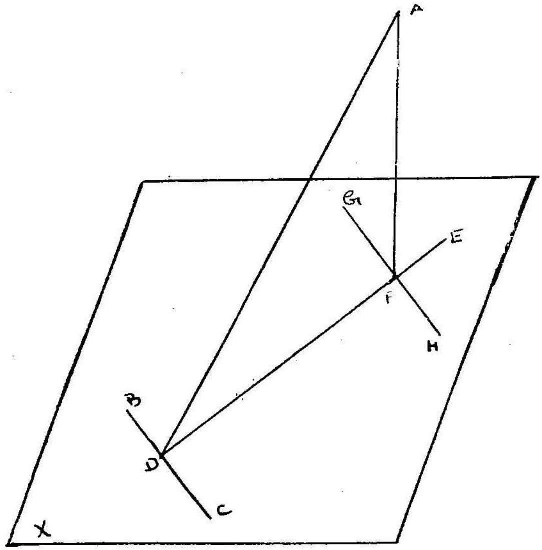
படம் 74

தளம் Xக்கு, Aயிலிருந்து AB குத்தாகுக. A வழி யாதேனும் ஒரு கோடு, AC தளத்தை Xல் சந்திக்கட்டும். BC தளத்தில் உள்ளதால் $\angle ABC =$ செங்கோணம்

$\therefore$ $AC > AB$.

தேற்றம் 47

ஒரு தளத்திற்கு (i) அதில் அமைாத புள்ளியிலிருந்து குத்துக் கோடு வரைய (ii) அதில் அமையும் புள்ளியில் குத்துக் கோடு வரைய.



படம் 75.

(i) தளம் X_1 அதில் அமையாத புள்ளி A.

Aயிலிருந்து Xக்குக் குத்துக்கோடு வரைய தளத்தில் BC எனும் ஏதேனும் ஒரு கோடு வரைக.

BCக்கு AD எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

தளத்தில் BCக்கு DE எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

DEக்கு AF எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

AF தளம் Xக்குக் குத்தாகும்.

நிரூபணம்: F வழி BCக்கு இணையாக GH வரைக.

$BC, \perp^r DE, BC \perp AD$ ஆனதால்

ADF எனும் தளத்திற்கு BC குத்தாகும்.

$GH \|^l BC$ ஆனதால் FH தளம் ADFக்குக் குத்தாகும்

$\therefore$ $AF \perp^r FH$ ஆனல் $AF \perp^r FE$

$\therefore$ AF தள FHEக்கு அதாவது தளம் Xக்குக் குத்தாகும்.

(ii) Xஎனும் தளத்தில் A அமைந்தால். தளத்திற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியைக் கொள்க. PM எனும் குத்துக்கோடு தளத்திற்கு வரைக. APM என்ற தளத்தில் PMக்கு இணையாக AF வரைக. AF வரைக. AF தளத்திற்குக் குத்தாகும்.

வெட்டாக் கோடுகள் (Skew lines) :

இரண்டு கோடுகள் வெட்டாவிடில், அவை ஒரே தளத்தில் அமையாதனவாகும்.

இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளிடையேயுள்ள கோணம், ஒரு கோட்டிற்கும், அதில் உள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளிவழி மற்ற கோட்டிற்கு வரையப்படும் இணை கோட்டிற்குமுள்ள கோணமாகும்.

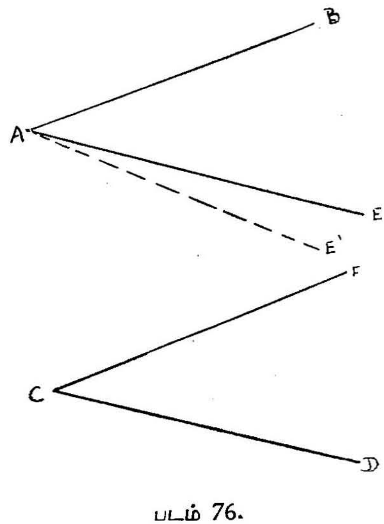
வெட்டாக் குத்துக்கோடுகள் : இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளிடையேயுள்ள கோணம் செங்கோணமானால், அவை வெட்டாக் குத்துக்கோடுகள் எனப்படும்.

தளமலா நாற்கரம் : (Skew quadrilateral)

நான்கு புள்ளிகள், ஒரே தளத்தில் அமையாதனவாயின், அவைகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகளான வடிவம் தளமலா நாற்கரம் எனப்படும்.

தேற்றம் 48

இரண்டு வெட்டாக் கோடுகள் வழியாக ஒரு சோடி இணைத் தளங்களே அமைக்கமுடியும்.



படம் 76.

AB, CD இரு வெட்டாக் கோடுகளாகுக.

EDக்கு இணையாக AE வரைக.

ABக்கு இணையாக CF வரைக.

$\therefore$ தளம் $BAE \parallel$ தளம் CDE.

AB வழி வேறொரு இணைதளமிருந்தால், அது $ACDE$ என்ற தளத்தை AE'ல் வெட்டட்டும்.

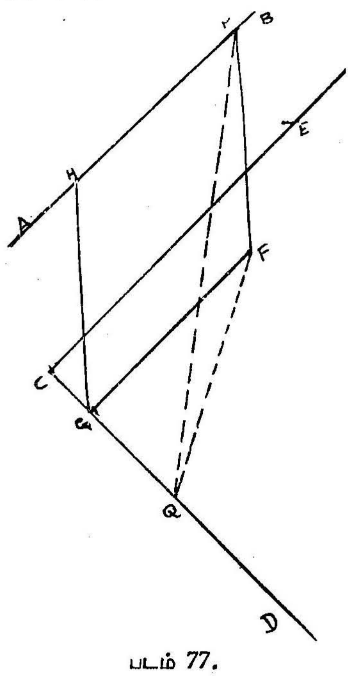
$\therefore$ $AE' \parallel CD$ என வருகிறது.

ஆகவே CDக்கு இணையாக A வழி ஒரே தளத்தில் AE, AE' என இருகோடுகள் உள்ளன என வருகிறது. இது இயலாதாகையால் AE, AE' என்பவை ஒரே கோடுதான்.

$\therefore$ AB, CD வழியாக இரண்டு தளங்களே ஒன்றற்கொன்று இணையாக உள்ளன.

தேற்றம் 49

(i) இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளுக்குப் பொதுக்குத்தாக ஒரே ஒரு கோடு உள்ளது. (ii) இதுவே, அந்தக் கோடுகளிடையே மிகச் சிறிய தூரத்தைத் தரும்.



படம் 77.

AB, CD என்பவை ஒரே தளத்தில் அமையாத இருகோடுகள். ABக்கு இணையாக CE எனும் கோடு வரைக. ABயில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி Pயிலிருந்து DCE எனும் தளத்திற்கு PF எனும் குத்துக் கோடு வரைக. CEக்கு இணையாகவுள்ள FGஎனும் கோடு CDஐ Gல் வெட்டட்டும்.

$\therefore FG \parallel AB$; $\therefore PF$க்கு இணையான GH எனும் கோடு ABஐ Hல் வெட்டட்டும்.

GH எனும் கோடு AB, CDக்குப் பொதுக்குத்துக்கோடு என நிரூபிப்போம்.

$HG \parallel PF$, $PF \perp^r$ தளம் DCE

$\therefore$ $HG \perp$ தளம் DCE

$\therefore$ $HG \perp CD$. $HG \perp GF$

அன்றியும் $HGFP$ ஒரு இணைகரம்.

$\therefore$ $GHP = GFH =$ செங்கோணம்.

$\therefore$ $GH \perp AB$.

இவ்வாறு AB, CDக்குப் பொதுவில் குத்தாக GH அமைவதைக் காண்கிறோம்.

வரைதல் முறையினால், GH எனும் ஒரே ஒரு பொதுக் குத்துக் கோடு உள்ளது என்பதுவும் தெளிவாகிறது.

(ii) CDயில் யாதேனுமொரு புள்ளி Q ஆகுக.

PQ, QF சேர்க்கவும்.

$\angle PFQ =$ செங்கோணம்.

$\therefore$ $PQ > PF$ ஆனால் $PF = GH$

$\therefore$ $PQ > GH$

$\therefore$ GH, இரு கோடுகளில் உள்ள புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் எந்தத் கோட்டைவிடச் சிறியதாகும்.

குறிப்பு 1 : இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளிடையேயுள்ள தூரம். அவை வழியுள்ள இணைதளங்களிடையேயுள்ள தூரம் எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : ஒரு தளத்திற்கு ஒரு கோடு இணையானால் தளத்தில் அதற்கு இணையாக அமையாத, மற்ற எல்லாக் கோடு களுக்குள்ள மிகச் சிறிய தூரம் ஒன்றாகவே (சமமாகவே) இருக்கும் எனவும் தெரிகிறது. (இதை நிறுவுக)

குறிப்பு 3: படத்தில் GHஇன் நடுப்புள்ளியையும் PQஇன் நடுப் புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோடு GHக்குக் குத்து என நிறுவுக.

குறிப்பு 4: P எனும் புள்ளி ABயிலும் Q எனும் புள்ளி CDயிலும் நகர, PQஇன் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதை யாது?

பயிற்சி

1. இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை, புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மையக்குத்துத் தளம் எனக் காண்க.

2. ஒரு தளத்தில் ABC என்பவை மூன்று புள்ளிகள். P எனும் புள்ளி ΔABCயினுள் உள்ளது. O வெளியே ஒரு புள்ளியானால் $OP < OA$, OB, OC என நிறுவுக.

3. இரண்டு தளங்களிலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை இரண்டு தளங்கள் எனவும் அவை ஒன்றற்கொன்று குத்துத் தளங்கள் எனவும் காட்டு.

4. ஒரு ஒழுங்கான நான்முகியின் (Regular tetrahedron) வெட்டாத இரு விளிம்புகளிடையேயுள்ள மிகச்சிறிய தூரம், அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேகரிக்கும் கோடு என நிறுவுக.

5. ஒரு கோடு வழித்தளங்களுக்கு, ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள குத்தடியின் (foot of the perpendicular) நியமப் பாதை என்ன?

6. OA, OB, OC என்பவை முறையே a, b, c நீளமுள்ள ஒன்றற்கொன்று குத்தான கோடுகள். வெட்டாத விளிம்புகளிடை உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

7. மேற்கூறிய கணக்கில் ABC எனும் தளத்திலிருந்து Oவின் தூரம் $abc \div \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ எனக் காட்டு.

8. $ABCD$ எனும் தளம் ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் அடித்தள மாகும். Cக்கு எதிர்முனை E. BDக்கு QX குத்தாகவுள்ளது. AXE எனும் தளத்திற்கு BD குத்து எனக் காட்டு. BED, $ABCD$ எனும் இரு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் என்ன?

9. OA, OB, OC ஒன்றற்கொன்று குத்தான கோடுகள். OH எனும் குத்துக்கோடு ABCக்கு வரையப்படுகிறது. ΔABCயின் குத்துமையம் H எனக் காட்டு.

10. σ, σ' எனும் இரு தளங்கள் AB எனும் கோட்டில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. l, m என்பவை ABக்குச் சமச்சாய்வில் σல் உள்ள

கோடுகள் σ'ல் அவற்றின் வீழல்களும் ABக்குச் சமச்சாய்வில் உள்ளன எனக் காட்டு.

11. ஒரு நான்குமுகியின் நான்கு முனைகளை, அவைகளின் எதிர் முக்கோணப் பக்கங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகளுடன் சேர்க்கும் நான்கு கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளெனவும், அப்புள்ளி கோடுகளை 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறதெனவும் காட்டு.

12. ஒரு நான்முகியின் 6 விளிம்புகளையும் தொடும் கோளத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிடுக.

13. ஒரு நான்முகியின் அடிப்பக்கம் ஒரு சமகோண முக்கோணம். உச்சிக் கோணங்கள் செங்கோணங்கள். அடிப்பக்கத்தின் மையத்தினின்று ஒரு பக்கத்திற்குள்ள தூரம் முனைவழி விளிம்பின் மூன்றில் ஒன்று எனக் காட்டு.

14. ஒரு கனசதுரத்தின் மூலைக்கோட்டிற்கும், அதை வெட்டாத விளிம்பிற்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

15. ஒரு நான்முகியின் இரு முனைகளிலிருந்து எதிர்ப் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் வெட்டிக்கொண்டால், மற்றிரு முனைகளிலிருந்து அவற்றின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும்.

கலைச்சொற்கள்

Centre of inversion	—	தன்மாற்றி மையம்
Centre of similitude	—	போன்மை மையம்
Coaxal circles	—	ஓரச்சு வட்டங்கள்
Complete quadrilateral	—	முழு நாற்கரம்
Complete quadrangle	—	முழு நாற்கோணம்
Conjugate points	—	துணையியப் புள்ளிகள்
Conjugate lines	—	துணையியக் கோடுகள்
Continuity principle of	—	தொடர்ச்சி நெறித் தத்துவம்
Cross ratio		குறுக்குத் தகவு
Diagonal line triangle	—	மூலைக் கோட்டு முக்கோணம்
Diagonal point triangle	—	மூலைப் புள்ளி முக்கோணம்
Duality, principle of	—	இருபான்மை நெறித் தத்துவம்
Harmonic Range	—	இசைப் புள்ளி வரிசை
Harmonic Pencil	—	இசைக் கோட்டுக் கற்றை
Harmonic triangle	—	இசை முக்கோணம்
Inverse points	—	தன்மாற்றுப் புள்ளிகள்
Inverse curve	—	தன்மாற்று வரை
Limiting points	—	எல்லைப் புள்ளிகள்
Orthogonal circles	—	குத்து வட்டங்கள்
Plane	—	தளம்
Point circle	—	புள்ளி வட்டம்
Pole of a line	—	கோட்டின் இசைப் புள்ளி
Polar of a point	—	புள்ளியின் இசைக் கோடு
Power of a point	—	புள்ளியின் வர்க்கம்
Radical axis	—	சமத்தொடு கோட்டச்சு
Radical centre	—	அச்சு சந்தி
Similitude centre of	—	போன்மை மையம்
Similitude cricle of	—	போன்மை மைய வட்டம்
Skew lines	—	வெட்டாக் கோடுகள்