தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் — 104

புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-II

(வடிவக்கணிதம்—ஆயவடிவக்கணிதம்)

கு. இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
முதல்வர்,
சர் தியாகராய கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

First Edition—July, 1968.

B.T.P. No. 164.

© Bureau of Tamil Publications

MATHEMATICS for P.U.C

K. RAJAGOPALAN

Price Rs. 4-50

Printed by
WELDUN PRESS,
146, Thiruvotriyur High Road,
Washermanpet, Madras-21,

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஏழு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—II' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 164 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 199 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலைமண்டபத்தில் கொலு வீற்றிருக்கிறாள். எனவே, இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக! உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்.

பொருளடக்கம்

பக்கம்

பாகம்—III—வடிவக் கணிதம்

1. விகிதமும், விகிதசமமும் ... 1

2, வடிவொத்த அல்லது உருவொப்பு முக்கோணங்கள் ... 13

3. ஒருங்கு கூடுவதும், நேர்வரைத் தன்மையும் ... 45

4. முக்கோணங்களின் தன்மைகள் ... 5

5. கலைச் சொற்கள் ... 74

பாகம்—IV—இரு பரிமாண பகுமுறை
வடிவக் கணிதம் ... 80

1. தொலைவுகள், விகிதங்கள், பரப்பளவுகள் ... 85

2. இயங்குவரைகளும் அவற்றின் சமன்பாடுகளும் ... 97

3. நேர்க்கோடுகள் ... 100

4. வட்டம் ... 141

விடைகள் ... 162

கலைச் சொற்கள் ... 168

வினாத் தாள் ... 177

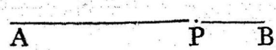
பாகம்-III—வடிவக்கணிதம் (Geometry)

I. விகிதமும், விகிதசமமும்

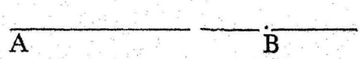
நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளின் இராசிக்குறிகள் (signs of segments):

வடிவக்கணிதப் படிப்பில் எந்த நேர்க்கோட்டிற்கும் ஒரு விவரணத்தைக் கொடுக்கின்றோம். A, B என்னும் இரு புள்ளிகள் Aயிலிருந்து Bக்கு வரைந்த நேர்க்கோட்டின்மேல் கிடப்பனவானால், AB என்ற துண்டு Aயிலிருந்து Bக்கு உள்ள தூரத்தைக் குறிப்பதாகும். BAஎன்பது —ABயைக் குறிக்கும். எனவே AB+BA=0 ஆகும்.

துண்டுகளின் விகிதங்கள் (Ratios of segments): (உட்புற, வெளிப்புற பிரித்தல்)



P என்னும் புள்ளி ABயின்மேல் எங்கேனும் இருக்குமானால் $\frac{AP}{PB}$ என்பது ABஐ P வகுக்கும் விதத்தை விளக்குவதாகும். இவ்வகையில் APயும் PBயும் ஒரே இராசிக்குறியுடையனவாகும். ஆகவே, AP/PB தனராசிக் குறியுடையதாகும்.



P ஆனது ABக்கும் புறத்தே இடம் பெறுமானால், P ஆனது ABயை வெளிப்புறத்தே விபாகம் செய்வதாகும். இவ்வகையில் APயும் PBயும் எதிர்நிலை இராசிக்குறிகளையுடையனவாகும். ஆகவே, $\frac{AP}{PB}$ என்னும் விகிதம் ருணராசியதாகும்.

தேற்றம் 1

கொடுத்துள்ளதொரு நேர்க்கோட்டை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளியில் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் உட்புறத்திலோ, வெளிப்புறத்திலோ பிரிக்க இயலாது.

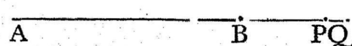
AB என்பது கொடுத்த கோடாகவும், P என்பது அதனைக் கொடுத்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகவுங் கொள்க.

கொடுத்த விகிதம் தனராசியானால், உள்ளேயும், ருணராசியானால், வெளியிலேயும் பிரிக்கும் புள்ளி விளங்கும்.

நிரூபிக்க வேண்டுவது : வேறெப்புள்ளியும் கொடுத்த விகிதத்தில் ABயைப் பிரிக்க இயலாதென்பது.

முடியுமானால், ABஐ கொடுத்த விகிதத்தில் பிரிப்பதாக வேறொரு புள்ளி Q இருப்பதாகக் கொண்டால்,

அப்பொழுது, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ (கொள்கைப்படி)



$$\therefore \quad \frac{AP}{PB} + 1 = \frac{AQ}{QB} + 1$$

அதாவது $\frac{AP+PB}{PB} = \frac{AQ+QB}{QB}$

(அஃது) $\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{QB}$ (இரண்டு படங்களிலும், துண்டுகளின் திசை ராசிகளையும் நோக்கி)

$\therefore$ PB=QB இது Pயும் Qயும் உடன் இணைந்த வழியல்லது சாத்தியமல்ல. ஆகவே, தேற்றம் நிரூபணமாயிற்றும்.

ஹார்மோனிக் பகுப்பு (Harmonic Section)

P, Q என்பன AB என்னும் நேர்க்கோட்டை உள்ளேயும் வெளியி லேயும் ஒரே விகிதத்தில் பகுப்பனவானுல், அதாவது

$$\frac{AQ}{QB} = -\frac{AP}{PB} \text{ அல்லது, } \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

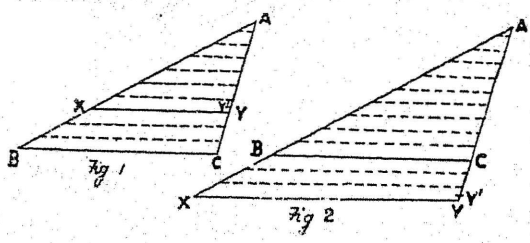
அதாவது, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{}$ ஆனுல்,

அப்பொழுது Pயும் Qயும் ABயை ஹார்மோனிக் பகுப்புச் செய்வன எனப்படும்.

பயிற்சி: AB என்னும் கோடானது உள்ளே Pயிடத்தும் வெளியே Q இடத்தும் $l : m$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டால், PQ ஆனது A, B என்னுமிடங்களில் எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கப் பட்டிருக்குமெனக் காண்க.

தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடானது மற்ற இரண்டு பக்கங்களையோ அவற்றின் நீட்டங் களையோ விகிதசமத்தில் பிரிக்கும்.



ABC என்பதொரு முக்கோணமாகவும், BCக்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடானது AB, AC என்னும் பக்கங்களை X, Y என்னும் இடங்களில் முதல் படத்தில் காட்டியபடி உள்ளேயும், இரண்டாம் படத்தில் கண்டபடி வெளியிலேயும் வெட்டுவதாகுக.

$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ என்று நிரூபிக்கப்படவேண்டும்.

நிரூபணம் :

X ஆனது ABயை $m : n$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிப்பதாகட்டும். (m, n என்பன முழு எண்களாகட்டும்.)

AXஐ m சமபாகங்களாகப் பிரிக்க.

அப்பொழுது XB என்பது அப்படிப்பட்ட n சமபாகங்களாகப் பிரிக்கப்படலாம். இப்பகுப்புப் புள்ளிகள் வழியாக் BCக்கு இணை கோடுகள் வரைக.

அப்பொழுது, இவ்விணைகோடுகளெல்லாம், AY, YC என்பவற்றைத் தமக்குள் ஒன்றற்கொன்று சமமாகிய பாகங்களாகப் பிரிக்கும். இவற்றுள் AY ஆனது m சமபாகங்களையும், YC என்பது அப்படிப்பட்ட n சமபாகங்களையும் கொண்டு நிற்கும்.

ஆகவே, $AY : YC = m : n$

$\therefore \quad AX : XB = AY : YC$

மறுதலையாக,

ஒரு கோடானது ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை விகிதசமத்தில் பிரித்தால், அது மூன்ருவது பக்கத்திற்கு இணையாகும். (Parallel)

XY ஆனது ABC என்னும் முக்கோணத்தின் AB, AC என்னும் பக்கங்களை $AX : XB = AY : YC$ என்றமையும்படி விகிதசமத்தில் பிரிப்பதாகட்டும்.

BCக்கு XY ஆனது இணைகோடாகுமென நிரூபிக்க வேண்டும்.

XY ஆனது BCக்கு இணைகோடாகாக்கால், XY′ என்பதை BCக்கு இணையாக ACயை Y′ என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாக வரைக.

அப்பொழுது, மேற்கண்ட தேற்றப்படி

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY'}{Y'C}$$

கொடுக்கப்பட்டபடி, $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$

$$\therefore \quad \frac{AY}{YC} = \frac{AY'}{Y'C}$$

∴ Yயும் Y'ம் ACஐ ஒரே விகிதத்தில் பிரிப்பனவாகும். முதல் தேற்றத்தின்படி இது அசாத்தியமாகும்.

∴ Yயும் Y'ம் தம்முள் இணைந்து நிற்க வேண்டும்.

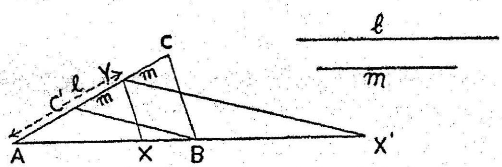
அதாவது XY || BC

பயிற்சி

1. கொடுத்ததொரு கோட்டினைக் குறித்த விகிதத்தில் உள்ளேயும் புறத்தேயும் பிரிக்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினா)

AB என்பது அகத்தும் புறத்தும் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட வேண்டியதொரு நேர்க்கோடாகுக. l, m என்னும் இரண்டு நீளக்கோடுகளைக் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் நிற்கத் தக்கனவாக எடுத்துக் கொள்.

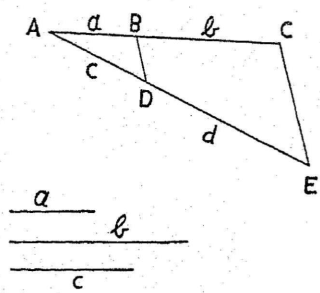


A யின் வழியாக AB யோடு சவுகரியமானதொரு கோணங்கொண்டு நிற்குமாறு AC என்னும் நேர்க்கோட்டை வரைக. அதனிடத்து AY=l; YC=m என்று அளவுறும்படி இரண்டு துண்டுகளைக் கொள்க. CB ஐச் சேர். CB க்கு இணையாக வரையும் YX என்னுங்கோடு AB ஐ X என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகக் குறிக்க. இப்பொழுது X என்பது பெறவேண்டிய உள்வெட்டுப் புள்ளியாகும்.

முன்னைப் போல செய்யுமிடத்து AY யின் கண் YC'=m ஆம்படி அளவறுத்துக் கொள்க. (படத்தைக் காண்க) C'B யைச் சேர்த்து அதற்கு இணையாக YX' என்னும் கோட்டை வரைந்து, அது AB யின் நீட்டத்தை வெட்டுமிடத்தை X' என்று குறிக்கொள். இப்பொழுது X' என்பது பெறவேண்டிய புறவெட்டுப் புள்ளியாகும்.

2. கொடுக்கப்பட்ட a, b, c என்னும் நீளங்களுக்குரிய விகித சமத்தின் நான்காவது உறுப்பினது நீளத்தைக் கண்டறிக.

(குறிப்பு: $a : b = c : x$ ஆனால், x என்பது a, b, c ன் நான்காவது விகிதசம வுறுப்பெனப்படும்)



AC, AD என்னும் இரண்டு நேர்க்கோடுகள் தம்மிடைய் சவுகரிய மானதொரு கோணத்தை அடக்கிக் கொண்டு நிற்குமாறு வரைக. AC வழியே AB$=a$, BC$=b$ என அளவறுத்துக் கொள்க. AD வழியே AD$=c$ என அளவுறுத்துக் கொள்க. BDயைச் சேர்த்து, அதற்கு இணையாக C யின் வழியாக வரையுங்கோடு AD யின் நீட்டிப்பை E என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாகக் குறி. இப்பொழுது AB : BC= AD : DE ஆதலின், கொடுத்த மூன்று அளவுகளுக்கு DE ஆனது நான்காவது விகிதசம வுறுப்பாகும்.

3. கொடுக்கப்பட்ட a, b என்னும் இரண்டு நீளங்களுக்குரிய விகித சமத்தின் மூன்றுவது உறுப்பினது நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

(குறிப்பு: $a : b = b : x$ ஆனால் x ஆனது a, b க்களின் விகித சமத்தில் மூன்றுவது உறுப்பெனப்படும்.)

4. மூன்றோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோ நிற்கின்ற இணைக் கோடுகள் தம்மைக் குறுக்கிட்டுச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளை ஒரே விகிதத்தில் வெட்டும் எனக் காட்டுக.

5. 9·3″ சுற்றளவுள்ள முக்கோணத்தை அதன் பக்கங்கள் 4 : 5 : 7 என்னும் விகிதத்தில் கிடக்குமாறு அமைக்க.

6. P என்னும் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லுகையில் வேறிரண்டு கோடுகளால் அடைக்கப்பட்ட பொழுது துண்டிக்கப்பட்ட பகுதிகள் குறித்த விகிதத்தில் இருக்கும்படியொரு கோட்டினை வரைக.

7. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AP, AQ என்னும் செங்குத்துக் கோடுகள் முறையே B, C என்னும் கோணங்களின் சமவெட்டிகளுக்கு வரையப்பட்டால், PQ யும் BC யும் இணைக் கோடுகளாமென நிரூபிக்க.

8. ABCD என்னும் சரிவக (Trapezium) த்தில் AB ∥ CD ; AC, BD என்னும் மூலைவிட்டங்கள் 0 என்னுமிடத்தில் குறுக்கிடுகின்றன. AO : OC = BO : OD என்று நிரூபி.

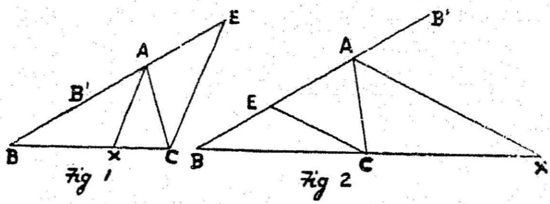
9. ABC, DBC என்னும் முக்கோணங்கள் BC என்னும் பொதுவான அடிக்கோட்டின் மேல் நிற்கின்றன, BCயின் மேல் E என்னும் யாதேனுமோர் புள்ளியிலிருந்து BA, BDக்களுக்கு இணையாக இழுக்கப்பட்ட கோடுகள் AC, DCக்களை முறையே F, G என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன என்றால் FG, AD என்பன இணைக்கோடுகளாமெனக் காட்டுக.

10. P என்னும் புள்ளி வழியாக இழுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகளுள் ஒன்றின்மேல் A, B, C என்னும் புள்ளிகள் கொள்ளப்பட்டன. மற்ற கோட்டின்மேல் நிற்கும் A′, B′, C′ என்னும் புள்ளிகள், BC′ CA′ என்பன முறையே B′C, C′A க்களுக்கு இணைக் கோடுகளாகுமாறு பெறப்பட்டன என்றால், AB′ ஆனது A′Bக்கு இணைக்கோடாகுமெனக் காட்டுக.

11. ஒரு நேர்க்கோடு, முக்கோணம் ABC ன் BC, CA, AB பக்கங்களை முறையே D, E, F ல் வெட்டும்பொழுது AB, ACயுடன் சமகோணங்கள் ஏற்படுத்துகிறதென்றால் BD : CD = BF : CE என நிரூபி.

தேற்றம் 3

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக்கோணமானது உள்ளேயாயினும் அல்லது வெளியேயாயினும் இரு சமன்கூறிடப்பட்டால், அச் சம வெட்டியானது அடிப்பக்கத்தை உள்ளேயாயினும் வெளியேயாயினும் துணிக்கும் பகுதிகள் மற்ற இரண்டு பக்கங்களுக்குள்ள விகிதத்தையே பெற்று நிற்கும்.



$\triangle$ABC ல் **AX** ஆனது $\angle$BAC ஐ உள்பாகத்தில் இருசமமாக வெட்டுவதாகட்டும் (படம் 1); படம் 2ல் AX ஆனது வெளிப்புற $\angle$**BAC** ஐ இருசமமாக வெட்டுவதாகட்டும்.

நிரூபிக்கவேண்டுவது : இவ்விரு வகைகளிலும் BX : XC= BA : AC.

Cயின் வழியாக XAக்கு வரையும் CE என்னும் இணைக்கோடானது **BAC** யை (அல்லது **BA**யின் நீட்டத்தை) E ல் சந்திப்பதாகட்டும் (படம் 1.) ABயில் B′ என்பதொரு புள்ளியை A யையடுத்து Eக்கு எதிர்மருங்கில் (on the opposite side) இருக்கும்படி எடுக்கப்பட்டதாகுக.

நிரூபணம் :

$\angle$**AEC** = B′AX (இசைக்கோணங்கள்)

= $\angle$XAC (கொடுக்கப்பட்டது)

= ஒன்றுவிட்ட $\angle$ACE

∴ **AE** = AC.

மறுபடியும், ∵ **XA** ∥ CE

∴ BX : **XC** = BA : AE = BA : AC.

மறுதலைத் தேற்றம் :

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் உள்ளேயோ அல்லது வெளியிலேயோ மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டால், அப்பிரிவிடத்துப் புள்ளியை உச்சியோடு இணைக்குங் கோடானது அவ வுச்சிக்கோணத்தை உள்ளேயோ அல்லது வெளியிலேயோ இருசமமாக வெட்டும்.

BC ஆனது X என்னுமிடத்தில் படம் 1ல் காட்டியபடி உள்ளேயும், படம் 2ல் உள்ளபடி வெளியிலேயும் $BX : XC = BA : AC$ என்றமையும்படி வெட்டுவதாகுக.

நிரூபிக்கவேண்டுவது : AX ஆனது $\angle A$ யை உள்ளேயோ அல்லது வெளியிலேயோ இருசமமாக வெட்டுகின்றதென்பது,

நிரூபணம் :

AX ஆனது $\angle A$யின் சமவெட்டி அல்லாக்கால், $\angle A$யைச் சமமாக வெட்டும்படி AX′ ஐ வரைக.

அப்பொழுது, மேற்கண்ட தேற்றப்படி,

$BX' : X'C = BA : AC$ எனப்பெறுகின்றோம்,

ஆனால், $BX : XC = BA : AC$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \quad BX' : X'C = BX : XC$

$\therefore$ X′ ஆனது X உடன் ஒருங்கு கூடுவதாகும்.

$\therefore$ AX ஆனது $\angle A$ யின் இருசமவெட்டியாகும்.

பயிற்சி

1. ABCD என்னும் நாற்கரத்தில், A, C என்னும் கோணங்களுடைய சமவெட்டிகள் BDயின் மேல் கூடுகின்றன. B, D என்னும் கோணங்களின் சமவெட்டிகள் ACயின் மேல் சந்திக்குமென நிரூபிக்க.

2. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் A என்னும் கோணத்தின் மவெட்டி BCஐ D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. DE என்னும்

கோடு ACக்கு இணையாக ABயை E என்னுமிடத்திலும், DF என்னும் கோடு ABக்கு இணையாக ACஐ F என்னுமிடத்திலும் சந்திக்கும்படி யிழுக்கப்பட்டன. $BE : CF = AB^2 : AC^2$ என்று நிரூபி.

3. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AD என்னும் நடுக்கோடு BC ஐ D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. ADB, ADC என்னும் கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகள் AB, AC க்களை முறையே P, Q என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. PQ ஆனது BCக்கு இணைக் கோடாகுமென நிரூபிக்க.

4 ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் அமையுமானால், அப்புள்ளியின் நியம ரேகை (Locus) ஒரு வட்டத்தின் பகுதியாகுமென நிரூபி. [இவ் வட்டம் அபலோனியஸ் வட்டமெனப்படும்.]

5. $AB = 3{\cdot}2''$; $\angle C = 75^\circ$; $AC : BC = 5 : 3$ என்றவற்றைக் கொண்டு ABC என்னும் முக்கோணத்தை வரைக.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் 2″, 3″ ஆகும். இவற்றின் இடைக்கோணத்தின் உள் சமவெட்டி 2″மும், வெளிச்சம வெட்டி 2·5″ மும் நீளமுடையனவாகும் அம் முககோணத்தை அமைக்க.

7. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் ∠Aயின் உள்சமவெட்டி BC ஐ X என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. BC=10·5 செ.மீ; AB:AC =5 : 2, AX=5·4 செ. மீ. என்றறியப்பட்டால், அம் முக்கோணத்தை வரைந்து AB, ACக்களின் நீளங்களைக் கண்டறிக.

8. ஒரு அடிக்கோட்டின்மேல் நிற்பதாகவும், கொடுக்கப்பட்ட தொரு கோடு உச்சிக்கோணத்தின் சமவெட்டியாக அமையவும் ஒரு முக்கோணத்தை வரைவதெப்படியெனக காட்டுக.

9. ஒரு இணைகரத்தின் (Parallelogram) பக்கங்கள் 3·5″ ம் 2·7″ ம் ஆம். அவற்றின் மூலைவிட்டங்களின் விகிதம் 2 : 1 ஆம். இவற்றைக்கொண்டு இணைகரத்தை அமைக்க.

10. ஒரு வட்டமானது பிறிதொரு வட்டத்தை உட்பக்கத்தில் P என்னும் இடத்தில் தொடுகிறது. உள்வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு

(tangent) வெளிவட்டத்தை B, C என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றது. PB : PC = AB : AC என்று நிரூபி.

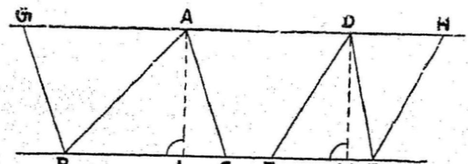
(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினா) (P. U. C. 57' செ.)

11. ABC என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்தில் B நேர்க்கோணமாகும்: ∠A = 60° ஆம். ∠A யின் உள்சமவெட்டியானது BC யை முச்சமக் கூற்று (trisection)ப் புள்ளியொன்றினிடத்தில் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

12. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் A ஒரு நேர்க்கோணம். AB : AC = 3 : 4 I, உள்வட்ட மையம். AI, BC ஐ D ல் சந்தித்தால் AI : DI = 7 ; 5 என நிரூபி.

தேற்றம் 4

சம குத்துயரங்கள் (altitudes) உடைய முக்கோணங்களும் இணைகரங்களும் (Parallelograms) ஒன்றற்கொன்று தத்தம் அடிப் பக்கங்களின் விகிதத்தில் இருக்கும்.



முக்கோணங்கள் ABC, DEF ஆவன சம குத்துயரங்கள் (AL = DM) உடையன. GC, EH ஆகிய இணைகரங்களும் சமகுத்துயரங்கள் (AL = DM) உடையன.

நிரூபிக்கவேண்டுவன :

(i) $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$

(ii) இணைகரம் GC : இணைகரம் EH = BC : EF

நிரூபணம் :

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.AL}{\frac{1}{2}EF.DM} = \frac{BC}{EF} \qquad (\because \ AL = DM)$$

மேலும் $$\frac{\text{இணைகரம் } GC}{\text{இணைகரம் } EH} = \frac{BC.AL}{EF.DM} = \frac{BC}{EF} \qquad (\because \ AL = DM)$$

பயிற்சி

1. ஒரே அடிக்கோட்டின்மேல் நிற்கும் முக்கோணங்கள் அல்லது இணைகரங்களின் பரப்புக்கள் அவற்றின் குத்துயரங்களின் விசுதத்திற் கொத்திருக்குமென நிருபிக்க.

2 ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக் கோணத்தையும் அதன் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் மையக் கோடு (Median) அம் முககோணத்தின் பரப்பை இருசமமாக்குமெனக் காட்டுக.

3. O என்பது ஒரு முக்கோணத்திலுள்ளே யிருக்கும் புள்ளி யாகும். AO, BO, CO கள் எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. ஆகவே,

(i) $\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}$ (ii) $\frac{OD}{AD} = \frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}$

(iii) $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$ (iv) $\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$

எனக் காட்டுக.

4. நான்காந் தேற்றத்தை உபயோகித்து 2 ம், 3 ம் தேற்றங்களை நிருபிக்க.

5. ABCD என்னும் இணைகரத்தில் AB $\parallel$ CD; AC, BD க்கள் O என்னுமிடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளுகின்றன. AD யும், BC யும் P என்னுமிடத்தில் சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டன. OP ஆனது AB யையும் CD யையும் சமமாக வெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

II. வடிவொத்த அல்லது உருவொப்பு முக்கோணங்கள் (Similar Triangles)

இரண்டு முக்கோணங்களுள்,

(1) ஒரு முச்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களை மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களோடு வரிசையாக எடுத்து நோக்குங்கால் அவை யொன்றுக்கொன்று சமமாக அமைந்திருக்கும் பொழுதும்,

(2) சமனொத்த கோண்ங்களை அகப்படுத்தி நிற்கும் பக்கங்கள் விகிதசமமெய்தி நின்றபொழுதும் அவை உருவொப்புடையனவாகும்.

ABC, DEF என்னும் முக்கோணங்களுள்

(1) $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$ ஆகும்பொழுதும்

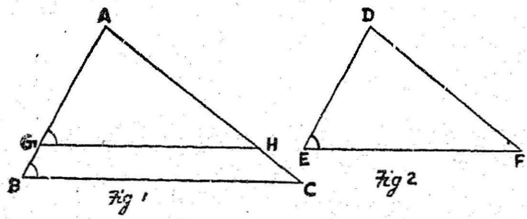
(2) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ஆகும் பொழுதும்

அவை உருவொத்துக் காணப்படும்.

ஐந்தாம் தேற்றத்தாலும் அதன் மறுதலை (Converse) த் தேற்றத்தாலும், இரண்டு முக்கோணங்கள் சமனொத்த கோணங்களை யுடையனவானால், அவற்றின் இசைப்பக்கங்கள் விகிதசமம் பட்டு நிற்கவும், இதற்கு மறுதலையும் பொருந்தி நிற்கவும் காணப்படும். ஆகவே, இரண்டு முக்கோணங்கள் உருவொத்துக் கிடப்பதனை மெய்ப்பித்தற்கு இவ்விரண்டு நிபந்தனைகளுள் ஏதேனும் ஒன்று பொருந்தி நிற்குமெனக் காட்டினாலே போதுமானதாகும். முக்கோணங்களாகிய வடிவங்கள் மட்டுமே இத்தன்மை வாய்ந்து நிற்பனவாகும்.

தேற்றம் 5

இரண்டு முக்கோணங்கள் சமகோண (Equiangular) முடைய வையானல் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் (Corresponding sides) விகித சமத்தில் இருக்கும்.



ABC, DEF என்னும் இரண்டு முக்கோணங்கள் $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ எனக்கொண்டுள்ளன வாகுக.

நிரூபிக்க வேண்டுவது :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

நிருபணம் :

AB யின் மேல், AG=DE ஆம்படி G என்னும் புள்ளியையும்; AC யின் மேல் AH = DF ஆகும்படி H என்னும் புள்ளியையும் எடு. அப்பொழுது,

$\because$ $\angle A = \angle D$; AG=DE ; AH=DF (வரைதல்)

$\because$ $\triangle AGH$ ம் $\triangle DEF$ ம் சருவசமமாகும்.

$\therefore$ $\angle AGH = \angle DEF$

$= \angle ABC$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore$ GH ஆனது BC க்கு இணைக் கோடாகும்.

$\therefore$ $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$; அதாவது, $\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DF}$

இவ்வாறே, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ என நிரூபிக்கக் கூடும்,

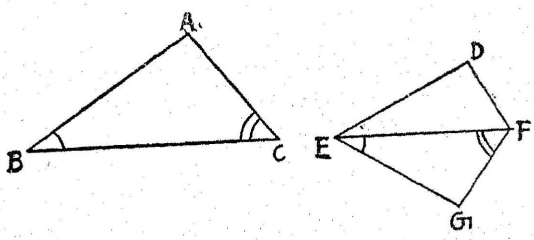
$$\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

அதாவது, இசைப் பக்கங்கள் விகித சமத்திலுள்ளனவாம்.

குறிப்பு : இங்கு எடுத்துக்கொண்ட முக்கோணங்கள் சமகோண முடையனவாகக் கொடுக்கப்பட்டதால், அவற்றின் இசைப்பக்கங்கள் விகிதசமத்திலிருப்பதாக நாம் இப்பொழுது நிரூபித்தோம். இத் தன்மையில் அவை **வடிவொத்த** (Similar) **முக்கோணங்களெனக்** கொள்ளப்படும்.

மறுதலையாக :

இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் விகிதசமமுற்று நின்ருல் அம் முக்கோணங்கள் சமகோணமுடையனவாம்.



ABC, DEF என்னும் இரண்டு முக்கோணங்களில்

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$ ஆகட்டும்.

நிரூபிக்கவேண்டுவது : இம் முக்கோணங்கள் சமகோண முடையன என்பது.

அமைப்பு முறை : FE ல் E என்னுமிடத்தில் $\angle B$ க்குச் சமமாக $\angle FEG$ ஐ வரைக. இவ்வாறு வரையுங்கால் ED ம் EG ம் EF க்கு எதிர்மருங்கில் இருப்பனவாகுக. EF ல் F என்னுமிடத்தில் முன் போலவே $\angle EFG = C$ என உண்டாக வரைக.

$\therefore$ எஞ்சிய $\angle EGF$ = எஞ்சிய $\angle A$.

நிருபணம் :

$\triangle ABC$, $\triangle EFG$ ஆவன ஒன்றுக்கொன்று சமகோணமுடைமையால் (நாம் வரைதல் முறைப்படி)

$$\therefore \qquad \frac{AB}{GE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FG} \qquad (1)$$

ஆனல், $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளன (2)

(1), (2) களிலிருந்து $GE=DE$, $FG=FD$ என நாம் பெறுகின்றேம்,

பிறகு, GEF, DEF என்னும் முக்கோணங்களின

$GE=DE$

$GF=DF$ ஆதலால்

EF பொது

∴ முக்கோணங்கள் இரண்டும் சருவசமமாகும்.

$$\therefore \qquad \angle DEF=\angle GEF$$

$$=\angle B \quad \text{(வரைதல்)}$$

இதனேடு, $\angle DFE=\angle GFE$

$$=\angle C \quad \text{(வரைதலால்)}$$

∴ எஞ்சிய $\angle D=\angle A$

அதாவது, $\triangle DEF$ ஆனது $\triangle ABC$ க்குச் சமகோணம் உடையதாகும்.

தேற்றம் 6

இரண்டு முக்கோணங்கள் ஒன்றனது இரண்டு பக்கங்கள் மற்றதனுடைய இரண்டு பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாகவும், அப்பக்கங்களுக்கு உள்ளடங்கிய கோணங்கள் சமமாகவும் இருந்தால், அம்முக்கோணங்கள் வடிவொத்தனவாகும்.

தேற்றம் 5ல் கண்ட ABC, DEF என்னும் முக்கோணங்களில் $\angle A=\angle D$ம் ; $AB : DE=AC : DF$ம் ஆகுக.

நிரூபிக்கவேண்டுவது : $\triangle ABC$யும் $\triangle DEF$ம் வடிவொப்புடையன வென

நிருபணம் :

AB, ACக்களில் AG=DE; AH=DF என்றமையும்படி G, H என்னும் புள்ளிகளைக் கொள்க.

$\angle A = \angle D$ ஆதலால். $\triangle AGH$ ஆனது புதிய நிலையில் $\triangle DEF$ஐக் காட்டுவதாகின்றது.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டபடி, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

அதாவது $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$ ஆகும்.

ஆகவே,

GH ஆனது BCக்கு இணைக்கோடாகும்.

$\therefore$ $\triangle AGH$ ஆனது $\triangle ABC$க்குச் சமகோணமுடையதாகும்.

அதாவது, $\triangle DEF$ ஆனது $\triangle ABC$க்குச் சமகோணமுடையதாகும்.

$\therefore$ இசைப் பக்கங்கள் விகிதசமத்திலிருப்பனவாம்.

$\therefore$ ABC, DEF என்பன வடிவொப்பனவாம் (Similar)

பயிற்சி

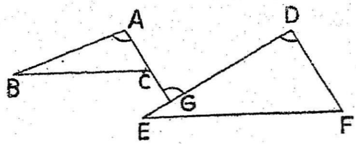
(i) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு முறையாக ஒன்றற்கொன்று இணைக்கோடுகளாகவேனும் குத்துக்கோடுகளாகவேனும் இருந்தால், அவையிரண்டும் உருவொப்புடைய முக்கோணங்களாகுமென நிரூபிக்க.

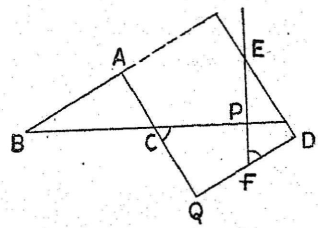
வகை 1.

ABC, DEF என்னும் முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் முறையே ஒன்றற்கொன்று இணைக்கோடுகளாவனவாம்.

அதாவது, AB ∥ DE; BC ∥ EF; CA ∥ DF.

AC ஆனது DE ஐ G என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகக் கொள்ளுவோம்.





அப்பொழுது, $\angle A = \angle CGD$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)
$= \angle D$ (,,)

இவ்வாறே, $\angle B = \angle E$: $\angle C = \angle F$ ஆகும். இவற்றுன் $\triangle ABC$யும் $\triangle DEF$ ம் சமகோணமுடையனவாய் உருவொப்பு உறுவனவாம்.

வகை 2.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ன் பக்கங்கள் ஒன்றற்கொன்று முறையே குத்துக்கோடுகளாய் அமையக் கிடப்பனவாம். அதாவது, $AB \perp DE$; $BC \perp EF$; $CA \perp FD$ ஆம். BC ம் EF ம் P என்னுமிடத்திலும் AC யும் DF ம் Q என்னுமிடத்திலும் சந்திப்பனவாகுக. PC QF என்னும் உருவம் வட்ட நாற்கரமாகும்.

$\therefore \quad \angle F =$ உள்ளெதிர் $\angle PCQ$

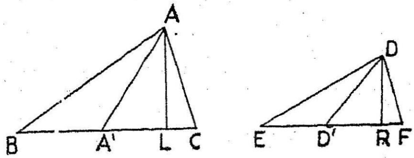
$=$ நேரெதிர் $\angle C$

இவ்வாறே, $\angle D = \angle A$; $\angle E = \angle B$ ஆம்.

ஆகவே, இரு முக்கோணங்களும் சமவொத்தக் கோணங்களுடைமையால் அவை ஒத்த உருவினவாகும்.

(ii) இரண்டு முக்கோணங்கள் உருவொப்புடையனவாஞல் அவற்றின் (மையக்கோடுகள், குத்துயரக் கோடுகள் (altitudes), உள் வட்டத்தின் ஆரங்கள், சுற்று வட்டங்களின் ஆரங்கள் என்பன போன்ற) இசைக்கோடுகள் இசைப் புக்கங்களின் விகிதத்தில் விளங்கும்.

ABC, DEF என்பன இரண்டு உருவொத்த முக்கோணங்களாகுக.



1. AA', DD' என்பன நடுவரைகளானால், $\frac{AA'}{DD'} = \frac{AB}{DE}$ என நிரூபித்தல்.

நிரூபணம் : ABA', DED' என்னும் முக்கோணங்களுள்,

$$\frac{BA'}{ED'} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}EF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$$ (△ ABC, ||| △ DEF ஆதலின்)

மேலும், $\angle B = \angle E$

$\therefore$ △ABA' ||| △DED'

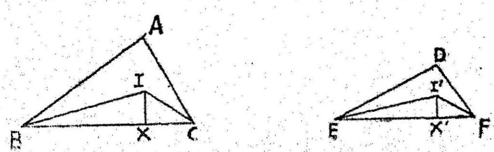
ஆகவே, $\frac{AA'}{DD'} = \frac{AB}{DE}$

(ii) AL, DR என்பன குத்துயர் கோடுகளாகுக.

$\frac{AL}{DR} = \frac{AB}{DE}$ என நிரூபித்தல்.

ABL, DER என்னும் முக்கோணங்கள் சமகோணமுடையனவாம் ஆகவே, அவை உருவொத்தனவாம்.

$$\therefore \frac{AL}{DR} = \frac{AB}{DE}$$



(iii) I, I′ என்பன உள் தொடுவட்ட ஆரங்களாகுக. IX, IX என்பன முறையே BC, EFகளுக்கு வரைந்த குத்துக் கோடுகளாகுக. அப்பொழுது, IXம் I′X′ம் உள்வட்ட ஆரங்களாகும்.

△BICம், △EI′Fம் உருவொத்தனவாம். IXம் I′X′ம் அவற்றின் குத்துயர் கோடுகளாம்,

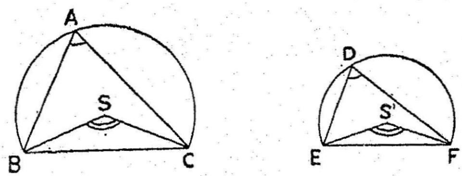
$$\therefore \frac{IX}{I'X'} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$$

(iv) S, S′ என்பன வெளிச் சுற்று வட்டங்களின் மையங்களாகுக.

BS=SC; ES′=S′F

அவற்றோடு ∠BSC=2∠A=2∠D=∠ES′F

ஆகவே, BSC, ES′F என்னும் முக்கோணங்களில்



$\frac{BS}{ES'} = \frac{SC}{S'F}$ம் ∠BSC = ∠ES′F.

∴ BSC, ES′F என்னும் முக்கோணங்க்ள் உருவொப்புடையன வாகும்.

ஆகவே, $\frac{SB}{S'E} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

2 ஒரு மேசையின்மேல் ஐந்தங்குலம் ஆரமுள்ள பந்துருண்டை யொன்று கிடக்கின்றது. 15″ அடிவிட்டமுள்ள கூருருளை (cone) ஒன்று அப்பந்தைச் சரியாக உள்ளடக்கிக்கொண்டு நிற்குமாறு வைக்கப்படுமானல், அதன் உயரத்தைக் கண்டறிக.

3. AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும். A, B என்னு மிடங்களில் அமைந்த தொடு கோடுகள் அவ்வட்டப் பகுதியின் மேலுள்ள C என்னும் புள்ளியிடத்தில் வரைந்த தொடுகோட்டினை D, E என்னும் இடங்களில் சந்திக்கின்றன. BD ஆனது C யிலிருந்து

AEக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டை சமமாக வெட்டுமென நிரூபிக்க.

BD, OC, AEக்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பன (concurrent) வாம் எனவும் நிரூபிக்க.

4. I, I_1, I_2, I_3 என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்ட வெளிவட்டங்களின் ஆரங்களாகுமானால், $AI.A^1 = AB.AC = AI_3.AI_3$ எனக் காட்டுக.

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்திற்கு A என்னுமிடத்தில் வரைந்த தொடுகோடானது BCயின் நீட்சியை D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. $BD : CD = AB^2 : CA^2$ எனக் காட்டுக.

(P.U.C. '58 செ)

6. AE என்பது ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தினுடைய ∠A யைச் சமமாக வெட்டிக்கொண்டு BCயை E என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. O. O′ என்பன ABE, ACE என்னும் முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்ட மையங்களானால், $\frac{OE}{O'E} = \frac{BE}{CE}$ என்று நிரூபி.

7. Iயின் வழியாக AIக்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோடு AB, AC என்பவற்றை முறையே D, E என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றது. $BD.CE = ID^2$ எனக் காட்டுக.

8. CA, CB என்பன ஒரு வட்டத்திற்கு A, B என்னுமிடங்களில் அமைந்த தொடுகோடுகளாகும். E என்பது A வழியாகச் செல்லும் AD என்னும் விட்டதித்திற்கு B என்னுமிடத்திலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் அடியாகும். ∠CBEக்கு BA, BDக்கள் சம வெட்டிகளாமெனக் காட்டுக.

(P.U.C. 58 ஏ)

9, ABCD என்பதொரு இணைகரம். ABக்கு இணைக்கோட்டின் மேல் PQ க்கள் உள்ளன. PAயும், QBயும் R என்னுமிடத்திலும் PDயும் QCயும் S என்னுமிடத்திலும் சந்திக்கின்றன. RS ம் AD யும் இணைக்கோடுகளாமெனக் காட்டுக.

10. PM, QN என்பன P, Q என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ABக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளாகும். PN,ம் QMம் R என்னுமிடத்தில வெட்டிககொள்ளுகின்றன. RS என்பது ABக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடாகுமானல், PS, QS என்பன ABயோடு சமகோணங்களை அமைத்து நிற்கின்றனவென்றும், SR ஆனது ∠PSQ ஐச் சமமாக வெட்டுகின்றதென்றும் நிருபிக்க.

11. ABC என்னும் இருசமபக்க முக்கோணமானது A என்னுமிடத்தில் நேர்க்கோணம் அமைந்துள்ளதாகும். P என்பது ABயின் மேல் உள்ளதொரு புள்ளியாகும். Aக்கு எதிரிலுள்ள BC என்னும் கோட்டிற்கு BD : BC = AP : AC என்றமைதற்குப் போதிய நீளமுள்ளதாம்படி BD என்னும் செங்குத்துக்கோடு வரையப்பட்டது. CPD என்பது நோக்கோணமாகுமென்றும், CP = DP என்றும் நிருபி.

12. ABC என்பது ஒரு இருசமபக்க முக்கோணமாகும். AB, ACக்களை B, C என்னுமிடங்களில் தொடுமாறு ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டது. அவ்வட்டத்தின்மேல் யாதேனும் P என்னுமொரு புள்ளியிலிருந்து PL, PM, PN என்னும் செங்குத்துக்கோடுகள் முறையே AB, AC, BC என்பவற்றிற்கு வரையப்பட்டன. $PL.PM = PN^2$ என்று நிருபி. இதற்கு மறுதலை (converse)த் தேற்றத்தைக் கூறி நிருபணம் செய்க.

13. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களின் பெருக்கற்பலனது, மூன்ருவது பக்கத்திற்கு இட்ட குத்துயரமும், சுற்ற வட்டத்தின் விட்டமும் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகுமென நிருபிக்க. ஆகவே, $R = \frac{abc}{4\triangle}$ என்று நிருபிக்க.

14. ஒரு ABC என்னும் முக்கோணத்தில் A என்னும் கோணத்தின் AD என்னும் சமவெட்டியானது BCஐ D என்னுமிடத்திலும், சுற்று வட்டத்தை E என்னுமிடத்திலும் சந்திக்குமானல், $AB \cdot AC = AD.AE = AD^2 + BD.DC$ என்று நிருபி. வெளிச் சமவெட்டிக்குரிய பலனைக் கூறி நிருபிக்க.

15. ABCDEF என்னும் வட்டத்தில் AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியூடே செல்லும் நாண்கள் (chords) ஆகும்.

$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$ என்று நிரூபி.

16. PQR என்னும் முக்கோணத்தில், PD என்பது QR க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டது. இப் PD ஆனது QD, DRகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகுமானால், P என்பதொரு நேர்க்கோணமாகு மென நிரூபிக்க. இதன் மறுதலைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபிக்க.

(P.U.C.='58 ஏப்ரல்)

17. r_1, r_2 என்னும் ஆரங்களையுடைய இரண்டு வட்டங்கள் A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டிக்கொண்டு நிற்கின்றன. A வழியாகச் செல்லுவதொரு கோடு வட்டத்தை மீண்டும் P, Q என்னுமிடங்களில் சந்திக்குமானால், $BP : BQ = r_1 : r_2$ என்று நிரூபிக்க.

18. ABCD என்னும் சரிவகத்தில் (trapezium) AB ∥ CD. AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் O என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றன. O மூலமாக ABக்கு வரைந்த இணைக்கோடொன்று ADஐ P என்னு மிடத்திலும், BCஐ Q என்னுமிடத்திலும் வெட்டுவதாகின்றது. என்றால், PO=OQ என்று நிரூபி.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

19. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 9.3 செ. மீ. அதனிரண்டு பக்கங்கள் 4 : 5 என்னும் விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றினிடைப்படு கோணம் 30° ஆகும். முக்கோணத்தை வரைந்து, உன்னுடைய அமைப்பு முறையை நிரூபி.

20. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் A என்னும் கோணத்தின் உள்சமவெட்டியின்மேல் O என்னும் புள்ளி ஒன்று, ABக்கும் ACக்கும் விகிதசம இடையுறுப்பாக AO என்பது அமைவுறுமாறு கண்டு கொள்ளப்பட்டது. $AB : AC = OB^2 : OC^2$ என நிரூபிக்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினா)

21. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் $\angle B > \angle C$ ஆம். M என்பது BCயின் நடுப்புள்ளியாகும். Γ ஆனது முக்கோணத்தின் தளத்தின்கண் (plane), $\angle BMA = \angle AM\Gamma$ என்றும், $AM^2 = MB.B\Gamma$ என்றும் அமையுமாறு உள்ளதொரு புள்ளியாகும் எனின்,

(i) $\triangle$BMA ஆனது $\triangle$AMTக்கு உருவொப்புடைய தென்றும், $\angle$BAT$=\angle$CMA என்றும்,

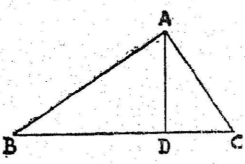
(ii) $\triangle$BAT ஆனது $\triangle$CMAக்கு உருவொப்புடைய தென்றும், $\angle$CBT$=\angle$B$-\angle$C என்றும் காட்டுக

22. PQ என்ற கோடு X, Y என்ற புள்ளிகளில் ஒரே தகவில் பிரிக்கப்படுகிறது. XY, A என்ற புள்ளியில் ஒரு நேர்க்கோணத்தை எதிர்கொள்கிறது என்றால், AX, AY, $\angle$PAQன் இரு சமவெட்டிகள் என நிரூபி.

23. ABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம். ABன் மையக் குத்துக்கோடு BCஐ Dல் சந்திக்குமானால், BC.BD$=$BA^2 என நிரூபி.

தேற்றம் 7

$\triangle$ABC என்னும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் A என்னும் செங்கோணத்திலிருந்து BCக்கு ADஐ செங்குத்தாக வரைந்தால் (i) AD ஆனது BD, DCகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகும். (ii) BA ஆனது BD, BCகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகும். (iii) CA ஆனது CB, CDகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகும்.



(i) BAD, CAD என்னும் முக்கோணங்களில்

$\angle$BDA$=\angle$CDA (நேர்க்கோணங்களாதலால்)

$\angle$BAD$=\angle$ACD (ஒவ்வொன்றும் $\angle$CADக்கு நிரப்புக் கோண மாதலால்)

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தனவாம்.

$\therefore$ DB : DA$=$DA : DC

$\therefore$ விவரணப்படி DA ஆனது DB, DCகளுக்கு **விகிதசம இடையுறுப்பாகும்.**

$\therefore \quad DA^2 = DB.DC$ (i)

(ii) ABD, ABC என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle BDA = \angle BAC$ (நேர்க்கோணங்களாதலின்)

$\angle B$ ஆனது இரண்டனுக்கும் பொது

∴ முக்கோணங்கள் வடிவொத்தனவாம்,

$\therefore \quad BD : BA = BA : BC$

$\therefore \quad BA^2 = BD.BC$ (ii)

(iii) ACD, ABC என்னும் முக்கோணங்களில்,

$\angle ADC = \angle BAC$ (நேர்க்கோணங்களாயிருத்தலின்)

$\angle C$ இரண்டனுக்கும் பொது

∴ இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தனவாம்.

ஆகவே, $CD : CA = CA : CB$

$\therefore \quad CA^2 = CD.CB$ (iii)

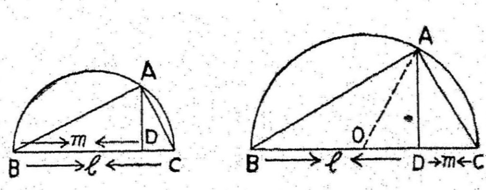
கிளை : மேற்கண்ட பலன்களிலிருந்து பிதாகொரஸின் தேற்றம் வருவிக்கப்படலாம்.

(ii), (iii) களில் பெற்ற பலன்களிலிருந்து

$$BA^2 + CA^2 = BD.BC + CD.CB = BC\,(BD + CD)$$
$$= BC.BC = BC^2$$

பயிற்சி

(i) **கொடுத்த l, m என்னும் நீளங்களின் விகிதச்சம இடையுறுப்பைக் கண்டறிதல் :**



கொடுத்த நீளங்களுள் பெரியதற்குச் சமமாக BCயை $= l$ வரைக BCயின்கண் BD$=m$ உண்டாக வெட்டிக் கொள்க. BCயின்மேல் ஒரு அரைவட்டம் வரைக. Dயினிடத்து BCக்குச் செங்குத்தாக வரையுங் கோடு இவ்வட்டத்தின் பகுதியை A என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாகக் குறிக்க. AB என்பதன் நீளமே பெறவேண்டிய விகிதச்சம இடையுறுப் புக்கு ஒப்பதாகும்.

நிரூபணம் :

$\triangle$BDA ||| $\triangle$ABC

$\therefore \quad \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{CB}$ ஆம். $\qquad \therefore \quad AB^2 = BD\ BC$

வேறு செய்வகை : படம் 2ல் கண்டபடி lக்குச் சமமாக BDயை வரைக. BDயை DC$=m$ஆம்படி Cக்கு நீட்டுக. BCயை விட்டமாகக் கொண்டு ஓர் அரைவட்டம் வரைக இதனை BCக்கு D வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு A என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாகுக. AD என்பதே பெறவேண்டிய விகிதச்சம இடையுறுப்பாகும்

நிரூபணம் :

$\triangle$BAD ||| $\triangle$DAC

$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$ ஆம். ஆகவே, $AD^2 = BD.DC$

(ii) $\sqrt{3}$யைப் பெற வடிவக்கணித செய்வகையைத் தருக.

$\sqrt{3}$ ஆனது 3க்கும் 1க்கும் விகிதச்சம இடையுறுப்பாகும்.

(iii) கொடுத்த இரண்டு நீளங்களுக்கு விகிதச்சம மூன்றுவது உறுப் பைக் கண்டறிதல் :

கொடுத்த நீளங்களுள் ஒன்றனுக்குச் சமமாக BDஐ வரைக D என்னுமிடத்தில் BDக்குச் செங்குத்தாகவும், இரண்டாவது நீளத்திற்குச் சமமாகவும், DAயை வரைக. BAயைச் சேர்க்க. BDயை C என்னு மிடத்தில் வெட்டுமாறு AC என்னுங்கோட்டை BAக்குச் செங்குத்தாக வரைக. அப்பொழுது DC ஆவதே பெறவேண்டிய நீளமாகும்.

நிரூபணம் :

$\triangle DBA ||| \triangle DAC$

$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$; ஆகவே, $AD^2 = BD.DC$

2. வடிவ கணித (geometry) முறையால் $\sqrt{21}$க்கு மதிப்பறிக.

3. AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டமும், C என்பது அவ் வட்டத்தின் பகுதியின் மேலுள்ளதொரு புள்ளியுமாகும். ABயின்மேல் எடுத்த யாதேனுமொரு P என்னும் புள்ளியிலிருந்து ABக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடானது CA, CBக்களையும் வட்டத்தின் பகுதியையும் முறையே D, E, F என்னுமிடங்களில் வெட்டுமாறு வரையப்பட்டது என்றால் $PF^2 = PD.PE$ என்று நிரூபி.

4. ஒரு வட்டத்தில் AB என்பதொரு விட்டமும், PQ என்பதொரு நாணும் ஆகும். A என்னுமிடத்தில் வரைந்த தொடுகோடானது BP, BQக்களை முறையே R, S என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றது. $BP.BR = BQ.BS = AB^2$ என்றும், P, Q, R, S என்பன ஒரு வட்டத்தின்மேல் நிற்பனவாமென்றும் நிரூபிக்க.

5. ஒன்றையொன்று வெளிப்புறத்தில் தொட்டு நிற்கும் இரண்டு வட்டங்களின் பொதுத் தொடு கோடானது அவற்றிற்குரிய விட்டங் களுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பு (mean proportional) ஆகுமென நிரு பிக்க,

6. ஒரு வட்டத்திற்கு A என்னுமிடத்தில் நிற்கும் தொடு கோடா னது வேறு இரண்டு இணைத்தொடுகோடு (parallel tangents)களை B, C என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றது. வட்டத்தின் மையம் O ஆனல், $OA^2 = AB.AC$ என்று நிரூபி.

7. A என்னும் முனையில் நேர்க்கோணம் அமையப்பெற்றதொரு முக்கோணத்தில், Aயின் வழித்தாகிய குத்துயரக்கோடு (altitude)ம், $\angle A$யின் உள் சம வெட்டியும் BCஐ முறையே D, E என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன என்றால், $BE^2 : CE^2 = BD : DC$ என நிரூபிக்க.

8. PQR என்ற முக்கோணத்தில், QRகுச் செங்குத்தாக PD வரையப்படுகிறது. QD, DRன் தொடர் விகிதசம இடையுறுப்பாக PD அமைந்தால், $\angle P$ ஒரு நேர்க்கோணம் என நிரூபி.

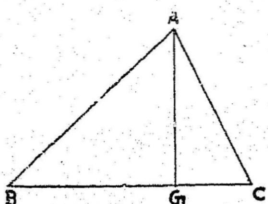
9. $\triangle ABC$ என்னும் நேர்க்கோண முக்கோணத்தில் A என்னும் நேர்க்கோணத்திலிருந்து BCக்கு செங்குத்தாக AD வரையப்படுகிறது.

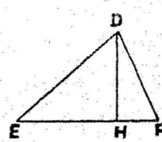
$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$ என நிரூபி.

தேற்றம் 8

வடிவொத்த (similar) முக்கோணங்களின் பரப்புகள், அவற்றினது இசைப்பக்கங்களுடைய வர்க்கங்களின் விகிதசமத்தில் உள்ளன.

ABC, DEF என்பன இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களாகுக. இவற்றுள் BC, EF ஆனவை இசைப் பக்கங்களாகும்.





நிரூபித்தல்: $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2}$

AGயும், DHம் முறையே BC, EFகளுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளாகுக.

நிரூபணம்:

அப்பொழுது $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC\ AG}{\frac{1}{2}EF.DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH}$

இனி, $\angle B = \angle E$ (ABC, DEF என்னும் வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து) இதனோடு $\angle G = \angle H$ (நேர்க்கோணங்களாதலால்)

∴ ABG, DEH என்னும் முக்கோணங்கள் சமகோண (equiangular) முடையனவாகும்.

$$\therefore \quad \frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE}$$

$$= \frac{BC}{EF}$$ (ABC, DEF என்னும் வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து)

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

பயிற்சி

1. உருவொப்புடைய முக்கோணங்களின் பரப்புகள் அவற்றின் இசைக்கோடுகள் (corresponding lines) ஆகிய மையக் கோடுகள் (medians) குத்துயரக்கோடுள் (altitudes), கோணச் சமவெட்டிகள், சுற்றுவட்டங்களின் ஆரங்கள், உள்தொடுவட்டங்களின் ஆரங்கள் (in radii) ; வெளித் தொடு வட்டங்களின் ஆரங்கள் (ex-radii) என்பவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் விகிதசமமாக இருக்கும்.

2. (*a*) ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் உருவொப்புடைய முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் கர்ணத்தின் மேலுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு ஏனைய இரண்டின் கூட்டுப் பரப்புக்குச் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

(*b*) ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் முச்சம பக்க (equilateral) முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன அவற்றுள் கர்ணத்தின் மேல் நிற்பதன் பரப்பானது ஏனைய இரண்டினது கூட்டுப்பரப்புக்குச் சமமாகும் என்று நிரூபிக்க.

(*c*) இரண்டு உருவொப்புடைய முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டவிடத்து, அவற்றின் (i) கூட்டுப் பரப்புக்குச் சமமாகவும் (ii) பரப்புகளின் வித்தியாசத்திற் கொப்பான பரப்பளவுடையதாயும் அவற்றோடு உருவொப்புடையதாயுமுள்ள முக்கோணத்தை எவ்வாறமைக்கலாகுமெனக் காட்டுக.

3. ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்ட (diagonal) மானது இரண்டு பக்கங்களுக்குள் அடங்கி நிற்கும் கோணத்திற்குச் சமவெட்டியாகவும்,

அப்பக்கங்களுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பு (mean proportional) ஆகவும் நிற்குமானல், மற்ற மூலவிட்டத்தின் துண்டித்தபாகங்கள் ஏனை பக்கங்களுக்கு இருபடி விகிதம் (duplicate ratios) ஆகுமெனக் காட்டுக.

4. AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும். வட்டத்தின் மேலுள்ள C என்னும் யாதேனும்மொரு புள்ளியிடத்தில் நிற்கும் தொடு கோட்டிற்கு AM, BN என்பன செங்குத்துக் கோடுகளாய் வரையப் பட்டன. $\triangle ABC = \triangle ACM + \triangle CBN$ எனக் காட்டுக.

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் ABயின் மேலுள்ள D என்ப தொரு புள்ளியை AD=3BD என்றமையுமாறு கொள்ளப்பட்டது. DQ, DP என்பன முறையே BC, CAகளுக்கு இணைகோடுகளாய் வரையப்பட்டன, DQCP என்னும் இணைகரத்தின் (parallelogram) பரப்பு$=\frac{3}{8}\triangle ABC$ என்று காட்டுக.

6. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்திற்கு A என்னுமிடத்தில் வரைந்த தொடுகோடானது BCயின் நீட்டத்தை D என்னுமிடத்தில் சந்தித்தால், $BD : CD = AB^2 : AC^2$ என்று காட்டுக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு) (P.U.C. 58 செ.)

7. PA, PB என்பன ஒருவட்டத்தின் மேலுள்ள தேகர் புள்ளியிலிருந்து, அவ்வட்டத்தினுள்ளிருக்கும் பிறிதொரு பொது மைய (concentric) வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடு கோடுகளாகும், AB, PB என்பன வெளிவட்டத்தை C, D என்னுமிடங்களில் வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டால் $CB : CA = CD^2 : CP^2$ என்று காட்டுக.

8. இரண்டுவெட்டங்கள் A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டிக் கொண்டு நிற்கின்றன. என்னுமிடத்தில் வரைந்த தொடு கோடு அவ் வட்டங்களை மீண்டும் X, Y என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன.

$$\frac{\triangle ABX}{\triangle ABY} = \frac{AB^2 + BX^2}{AB^2 + BY^2}$$ என்று நிரூபிக்க

9. ஒரு வட்டத்தினுள் வரைந்த ஒழுங்கமை அறுகோணத்தின் (Regular Hexagon) பரப்பானது அதன் வெளிப்புறத்தில் வரைந்த ஒழுங்கமை அறுகோணத்தின் பரப்பில் முக்காற்பங்காகுமெனத் காட்டுக.

10. இரண்டு முக்கோணங்களோ அல்லது இணைகரங்களோ ஒன்றின் ஒரு கோணம் மற்றதன் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவோ அல்லது மிகை நிரப் (Supplementary) பாகவோ இருந்தால், அவற்றின் பரப்புகள் அச்சம அல்லது மிகைநிரப்புக் கோணங்களை உள்ளடக்கிக் கொண்டிருக்கும் பக்கங்களின் பெருக்கற்பலனுக்கு விகிதசமம் அமைந்து விளங்குவன வாகும்.

11, இரண்டு வட்டங்கள் வெளிப்புரமாக A என்ற புள்ளியில் தொட்டுக்கொள்கின்றன. அவைகளை B, C என்னும் புள்ளிகளில் தொடும் ஒரு பொதுத் தொடு கோடு (common tangent) மையப்பிணைக் கோட்டை (line of centres) S என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது,

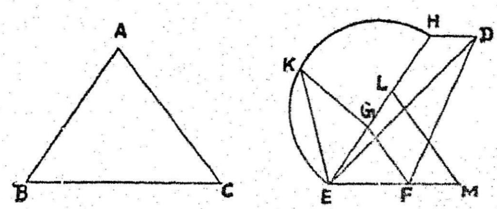
$\triangle SBA : \triangle SCA = AB^2 : AC^2$ என நிரூபி.

12. A என்ற புள்ளியில் செங்கோணம் கொண்ட ABC என்ற முக்கோணத்தில், AE கர்ணத்திற்கு செங்குத்தாக வரையப்படுகிறது.

$\angle$ Aயின் இரு சமவெட்டி BC ஐDல் சந்திக்கிறது. $BE : EC = BD^2 : DC^2$ என்று நிரூபி.

(ii) வடிவக்கணித அமைப்புகள்
(Geometrical Constructions)

1. கொடுத்த ABC என்னும் முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்தும் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது முக்கோணம் DEFக்கு பரப்பு ஒத்தும் உள்ளதாக ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்க.



EFன்மேல் $\triangle$ ABCக்கு வடிவொத்ததாக EFG என்னும் முக்கோணத்தை வரைக. Dயின் வழியாக, EFக்கு இணையாக வரையும் DH என்னுங்கோடு EGயையல்லது அதன் நீட்டத்தை H என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகச் செய்க. EG, EHகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகும்படி EKஐ அளவறுக்க. EHல் இருந்து EKக்குச் சமமாக ELஐ வெட்டுக,

L வழியாக GFக்கு வரையும் LM என்னும் இணைக்கோடு EFஐ M என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாக நிறுத்துக. அப்பொழுது ELM என்பதே பெறவேண்டிய முக்கோணமாகும்.

நிரூபணம்:

$\because$ LM ∥ GF

$\therefore$ △ELM ||| △EFG

அன்றியும், △EFGயும் △ABCயும் வடிவொத்தனவாகும்.

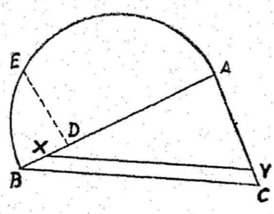
ஆகவே, △ELM=△DEF என்று காட்டினாலே போதும்.

இப்பொழுது, $\frac{\triangle ELM}{\triangle EGF}=\frac{EL^2}{EG^2}=\frac{EG.EH}{EG^2}$

$$=\frac{EH}{EG}=\frac{\triangle EHF}{\triangle EGF}=\frac{\triangle EDF}{\triangle EGF}$$

$\therefore$ △ELM=△EDF

2. கொடுத்த ABC என்னும்முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்து அதன் பரப்பில் $\frac{l}{m}$ பங்கு பரப்புக்கொள்ளுமாறு ஒரு முக்கோணத்தை வரைக.



கொடுத்த முக்கோணத்தில் AB என்னும் பக்கத்தின்மேல் (அவசியமானல் அதன் நீட்டத்தில்) $\frac{AD}{AB}=\frac{l}{m}$ என்றமையுமாறு D என்பதொரு புள்ளியைக் கண்டறிக.

AD, ABகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாக AEஐக் கண்டறிக.

ABயிலிருந்து AEக்குச் சமமாக AXஐ வெட்டிக் கொள்க,

Xன் வழியாக ACஐ Y என்னுமிடத்தில் சந்திக்கும்படி BCக்கு இணையாக XY என்பதொரு கோட்டினை வரைக.

அப்பொழுது வரும் AXY என்னும் முக்கோணமே பெறவேண்டிய தொன்ருகும்.

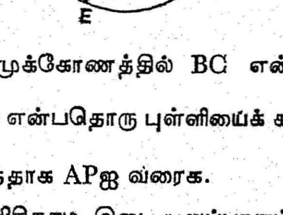
எங்ஙனமெனில்,

$$\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC}=\frac{AX^2}{AB^2}=\frac{AE^2}{AB^2}=\frac{AD.AB}{AB^2}=\frac{AD}{AB}=\frac{l}{m}$$

குறிப்பு: நாம் இப்பொழுது △ABCக்கு வடிவொத்ததாகவும், △ADCக்குப் பரப்பு ஒத்ததாகவும் உள்ளதொரு முக்கோணத்தை அமைத்தோம். இவ்வமைப்பு முறை முன்னே காட்டியதற்கு ஒப்பதே யாகும்.

பயிற்சி: ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரைவதொரு கோட்டினுல் அதனை $l:m$ என்னும் விகிதத்தில் பரப்பளவு கொள்ளும் இரண்டு துண்டுகளாகப் பிரிக்க.

3. கொடுக்கப்பட்ட ABC என்னும் முக்கோணத்திலிருந்து BCக்குச் செங்குத்தாக வரையுமொரு கோட்டினுல் அதன் பரப்பில் $\frac{l}{m}$ பங்குள்ளதொரு முக்கோணத்தை வெட்டியெடுக்க.



ABC என்னும் முக்கோணத்தில் BC என்னும் பக்கத்தின்

$\frac{BD}{BC}=\frac{l}{m}$ ஆகும்படி D என்பதொரு புள்ளியைக் காண்க.

BCக்குச் செங்குத்தாக APஐ வரைக.

BD, BPகளுக்கு விகிதசம இடையுறுப்பாகும்படி BEஐக் காண்

BCயிலிருந்து BEக்குச் சமமாக BXஐ வெட்டிக் கொள்க. X

யாக BCக்குச் செங்குத்தாகவோ அல்லது APக்கு இணையாகவோ

என்னுங் கோட்டினை வரைக. அப்பொழுது BXY என்பதுவே பெற வேண்டிய முக்கோணமாகும்.

எவ்வாறெனில்,
$$\frac{\triangle BXY}{\triangle ABC}=\frac{\triangle BXY}{\triangle ABP}\cdot\frac{\triangle ABP}{\triangle ABC}$$
$$=\frac{BX^2}{BP^2}\times\frac{BP}{BC}$$
$$=\frac{BD.BP}{BP^2}\cdot\frac{BP}{BC}$$
$$=\frac{BD}{BC}=\frac{l}{m}$$

பயிற்சி

1. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் $\angle B=100°$; $BC=2\cdot5$ செ.மீ.; $AB=2$ செ.மீ.; ஆகும் PQR என்னும் வேறொரு முக்கோணத்தில் $\angle Q=70°$; $QR=4$ செ.மீ.: $PQ=5$ செ.மீ.; ஆகும். $\triangle ABC$க்கு உருவொப்புடையதாகவும், $\triangle PQR$க்குப் பரப்பொப்பதாகவும் இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்க.

2. ABCஎன்னும் முக்கோணத்தில் $AB=5$ செ.மீ.; $BC=8$ செ.மீ.; $CA=6$ செ.மீ.; ஆகும்.

(i) $\triangle ABC$க்கு உருவொப்பதாகவும், அதற்குப் பாதி பரப்புள்ளதாகவும் முக்கோணம் வரைக (ii) $\triangle ABC$க்கும் உருவொப்பதாகவும், அதற்கு $\frac{2}{3}$ பரப்புள்ளதாகவும் ஒரு முக்கோணம் வரைக.

3. பரப்பு 10 சதுர அங்குலமும், பக்கங்களின் 5 ; 7 : 9 என்னும் விகிதமும் பெறுமாறு ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்க.

4. $PQ=2\cdot5''$, $QR=3''$, $\angle Q=40°$ அமையக்கொண்ட PQR என்னும் முக்கோணத்திற்கு ஒத்த பரம்புடைய தோரு முச்சம பக்க (equilateral) முக்கோணத்தை அமைக்க.

5. 3 அங்குல பக்க முள்ள முச்சம பக்க முக்கோணத்தின் பரப்புக்குச் சமமாகவும், பக்கங்கள் $5\cdot9\cdot7$ என்னும் விகிதத்தில் நிற்பதாகவும் கிடக்கும்படி ABC என்னும் முக்கோணத்தை வரைக.

6. ஒரு முக்கோணத்தைப் பக்க நீளங்கள் ·5″, 2″, 1·6″ ஆகப் பெறுமாறு வரைந்து அதன் பரப்புக்கு $\frac{3}{2}$ பங்குடையதொரு முச்சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்க,

7. AB Cஎன்னும் ஒரு முக்கோணத்தை AB=4·2 செ.மீ.; AC=5·3 செ.மீ. ∠A= ∠62° எனப் பெறுமாறு வரைந்து, அதற்குஉருவொப்தாகியும், மிகப்பெரிய பக்கமானது ஏனைய இரண்டு பக்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு 1·2 செ·மீ.; குறைவுறக் கொள்ளுவதாகவும் விளங்கும் முக்கோணத்தை வரைக.

8. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 3, 5, 7 செ. மீட்டர்களாகும். அம்முக்கோணத்தின் பரப்பை மிகப்பெரிய பக்கத்திற்கு வரைந்த (i) செங்குத்துக் கோட்டாலும் (ii) இணைக்கோட்டாலும் இருசமமாகப் பிரிக்க.

9. $a:b:c=9:7:5$யும், $a+b+c=5{\cdot}6''$ ஆகுமானல், அம் முக்கோணத்தை வரைந்து அதன் பரப்பை BCக்குச் (i) செங்குத்தாகவும் (ii) இணையாகவும் அமையுங்கோடுகளால் இருசமமாகப் பிரிக்க.

10. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே, 5, 12, 13 செ. மீட்டர்களாவனவாம். அதன் பரப்பை மிகம்பெரிய பக்கத்திற்கு அமையும் இணைக்கோடொன்ருல் எப்படி முச்சமமாகப் பிரிக்கலாமெனக் காட்டுக.

11. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 9·3 செ.மீ. ஆகும். அதன் இருபக்கங்கள் 4 : 5 விகிதத்தில் உள்ளன. இவ்விரு பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்டகோணம் ς0° என்ருல், முக்கோணத்தை அமைத்து, உனது வ்ரைவு முறையையும் நிருபி.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

(iii) வடிவொதத பலகோணங்கள்

(Similar Polygons)

இரண்டு பலகோண உருவங்கள்

(i) சமகோணமுடையனவானுல்

(ii) இசைப்பக்க்ங்கள் விகிதசமம் பெறுவனவானுல் அவை வடிவொத்தன (simiiaa) வாகும்,

இவ்விரண்டு நிபந்தனைகளும் இன்றியமையாதனவாகும் என்பதை குறிக்கொள்க. உதாரணமாக,

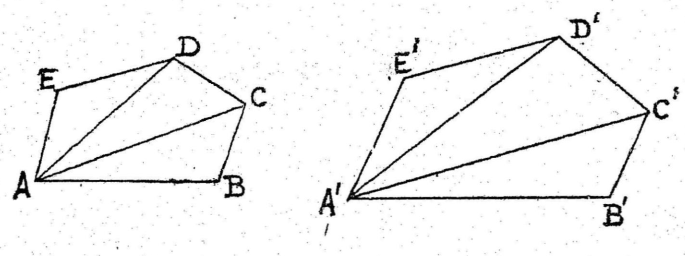
(i) ஒரு சதுரமும், ஒரு செவ்வகமும் சமகோணமுடையனவாகிய இடத்தும் வடிவொத்தனவல்ல.

(ii) ஒரு சதுரமும், ஒரு சாய்வு சதுரமும் **(rhombus), அவற்றின்** பக்கங்கள் விகிதசமமுற்று விளங்கி நிறபனவாயினும், **ஒத்த** வடிவம் உடையனவாகுமாறில்லை.

இரண்டு வடிவொத்த பலகோண உருவங்களை **அவற்றின் இசைப்** பக்கங்கள் ஒன்றற்கொன்று இணையாக **அமையும்படி** நிறுத்தினுல் **அவை நேரொக்க நிறுத்தப்பட்டன** (similarly placed) **அல்லது** homothetic வெனப்படும்.

தேற்றம் 9

இரண்டு வடிவொத்த பலகோணங்களின் (polygons) **பரப்புகள் யாதேனுமொரு ஜோடியிசைப் பக்கங்களின்** வர்க்கங்களுக்கு **ஒப்ப இருக்கும்.**



ABCDEF, A′B′C′D′E′ம் இரண்டு வடிவொத்த பலகோணங்களாகுக.

நிரூபிக்க வேண்டுவது : $\dfrac{\text{ABCDE பலகோணத்தின் பரப்பு}}{\text{A'B'C'D'E' பலகோணத்தின் பரப்பு}} = \dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

அமைப்பு முறை : முதல் **பலகோணத்தின்** ஏனைய முனைகளோடு Aயையும், **இவ்வாறே இரண்டாம் பலகோணத்தில் A′ஐயுஞ் சேர்க்க,**

நிரூபணம் :

ABC, A′B′C′ என்னும் முக்கோணங்களில் $\angle B = \angle B'$
(பலகோணங்கள் ||| ஆதலின்)

இதனோடு, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (பலகோணங்கள் ||| ஆதலின்)

$\therefore$ $\triangle ABC$யும் $\triangle A'B'C'$யும் வடிவொத்தனவாம்.

$\therefore$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ (பலகோணங்கள் ||| ஆதலின்)

$\therefore$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$

$\angle ACB = \angle A'C'B'$ ($\triangle ABC$யும் $\triangle A'B'C'$யும் ||| ஆதலின்)

$\angle BCD = \angle B'C'D'$ (பலகோணங்கள் ||| ஆதலின்)

$\therefore$ $\angle BCD - \angle ACB = \angle B'C'D' - \angle A'C'B'$

$\therefore$ $\angle ACD = \angle A'C'D'$

$\therefore$ ACD, A′C′D′ என்னும் முக்கோணங்கள் ||| ஆம்.

இவ்வாறே, ADE, A′D′E′ என்பன |||. இவ்வாறே பிறவும் ஆம்.

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2}$$

$$= \frac{AB^2}{A'B'^2}$$ (பல்கோணங்கள் ||| ஆதலின்)

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D''E} = \frac{DE^2}{D'E'^2}$$

$$= \frac{AB^2}{A'B'^2}$$ (பல்கோணங்கள் ||| ஆதலின்)

$$\therefore \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \ldots\ldots$$

$$= \frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \ldots\ldots}{\triangle A'B'C' + A'C'D' + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{ABCD \ldots\ldots \text{ பல்கோணத்தின் பரப்பு}}{A'B'C'D' \ldots\ldots \text{ பல்கோணத்தின் பரப்பு}}$$

பயிற்சி

1. யாவையேனும் இரண்டு உருவொப்புடைய பல் கோணங் (polygons) களின் சுற்றளவானது அவற்றின் ஜோடியான இசைப்பக்ங்க களின் விகிதத்திலிருக்கு மென நிரூபிக்க.

2. ABCDE என்னும் பல் கோணத்திற்கு உருவவ்ாப்புடையதும், கொடுக்கப்பட்ட MN என்னும் கோட்டினை ABக்கு இசைப்பக்கமாகத் தன்னிடத்துக் கொண்டுள்ளதுமாகிய பல்கோணத்தை வரைக.

3. ஒன்றற்கொன்று உருவொப்புடைய மூன்று பல்கோணவுரு வங்களை ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் அமைத்தால், கர்ணத்தின் மேல்நிற்கும் பல்கோணத்தின் பரப்பு ஏனைய இரண்டு பக்கங்களின் மேல் நிற்பவற்றின் கூட்டுப்பரப்புக்குச் சமமாகு மெனக் காட்டுக.

4. ஒருவட்டத்தின் புறத்தே தொட்டுநிற்கும் அறுகோணத்தின் பரப்பானது உள்ளடங்கி நிற்கும் அறுகோணத்தின் பரப்புக்கு $\frac{4}{3}$ மடங் காகுமெனக் காட்டுக.

5. இரண்டு உருவொப்புடைய பல்கோணங்களுள் ஒன்று வட்டச் சார்பு (cyclic) உடையதானுல் மற்றொன்றும் வட்டச்சார்புடைய தேயாகும் எனநிரூபிக்க. அவற்றின் பரப்புகள் அவற்றின் சுற்று வட்டத்து ஆரங்களின் வர்க்கப்படி விகிதம் பெறு மெனக்காட்டுக.

6. (i) கொடுக்கப்பட்டதொரு நாற்கோட்டுருவத்துடன் உருவ மொத்தும், அதன்பரப்பில் $\frac{P}{Q}$ பரப்புப் பெற்றும் நிற்கும்படி யோருரு வத்தை வரைக.

(ii) P என்னும் பல்கோணத்தோடு உருவம் ஒத்தும், Q என்னும் பல்கோணத்தோடு பரப்பு ஒத்தும் நிற்கக்கூடியதாக ஒருபல்கோணத்தை அமைக்க,

7. 4″ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் உட்புறத்திலும் வெளிப்புறத்திலும் முறையே ABCDEF, PQRSTU என்னும் ஒழுங்கமை அறுகோணங்கள் அமைந்திருக்கின்றன. இவற்றின் பரப்புக்களின் வித்தியாசத்தையே தனக்குப் பரப்பளவாகக் கொண்டு நிற்கும் ஒரு ஒழுங்கமை அறு கோணத்தை அமைக்க.

8. ABCD என்னும் நாற்கரத்தில் AB=2·2″, BC=2·9″, CD=3·2″, AD=1·9″, $\angle$ABC=100° ஆக அமைந்துள்ளன, இதன் பரப்பில் பாதியளவுடையதாய், இதனோடு உருவொப்புதாபுள்ள நாற் கரத்தை வரைந்து அதன் பக்கங்களை அளந்தறிக.

9. உருவத்தால் ஒத்தும், பரப்பால் ஒவ்வாதும் உள்ள இரண்டு பல்கோணங்களை நேரொக்க நிறுததிஞல் (similarly placed) அவற்றின் இசை முனைகளை முறையாக இணைக்குங்கோடுகள் ஒரு புள்ளியிடத்துக் கூடுந்தன்மையைப் பெறுமென நிரூபிக்க.

10. யாதேனும் ஒருபுள்ளியை ஒருபல்கோணத்தின் முனைகளோடு இணைக்கும் கோடுகள் உள்ளேனும் புறத்தேனும் ஒரே விகிதத்தில் பகுக்கப்படுமாஞல், அப்பகுப்புப் புள்ளிகளை யெல்லாம் ஒழுங்காகச் சேர்க்கவரும் பல்கோணமானது முன்னின்ற பல்கோணத்தோடு உரு வொப்பதும் நேர் ஒக்க நிறுத்தப்பட்டதும் ஆகும்.

11. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் P, Q, R என்பன உள் வட்டமானது பக்கங்களைத் தொடும் இடங்களாகும். I_1 ; I_2 ; I_3 என்பன வெளித்தொருவட்டங்களின் மையங்களாஞல் PI_1, QI_2, RI_3 என்பன ஒருபுள்ளியிடத்தில் கூடுதனவாகுமெனக் காட்டுக.

12. ஒருகொடுத்த முக்கோணத்துள் வேருெருமுக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையான பக்கங்களுடைய தொரு முக்கோணத்தை வரைக.

13. இரண்டங்குலம் ஆரமுள்ள வட்டத்தினுள்ளே ஒருமுக் கோணத்தை அதன் பக்கங்களின் விகிதம் 4 : 5 : 7 என்றமையும்படி வரைக,

14. ஒருமுக்கோணத்தின் $\angle A = 50°$, $AB : AC = 2 : 3$; உள் வட்டத்தின் ஆரம் $= 0{\cdot}8''$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளன, அம்முக் கோணத்தை அமைக்க.

15. ABCD என்னும் நாற்கரத்திற்கு வடிவொத்ததும் நேரொக்க நிறுத்தப்பட்டது மாகிய ஒரு நாற்கரத்தை, AB, BC, CD, களுக்கு இசையான அதன் பக்கங்கள் முறையே ஒருகோட்டினிடமாகாத P, Q, R என்னும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுதல் உண்டாம்படி அமைக்க.

16. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 5, 6, 7 செ.மீ. நீள முள்ளனவாம். இதனுள் PQRS என்னும் ஒரு செவ்வகத்தை (rectangle) வரையுங்கால் P என்பது ABயின் மேலும், Q என்பது ACயின் மேலும் நிற்கவும் RS என்பது BCயின் உடனுகவும் $PQ : PS = 5 : 3$ என்று அமையயும் செய்க.

17. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் $\angle A = 90°$; $b = 3{\cdot}5''$; $c = 3''$ ஆம். அதனுள் ஒரு சாய்வு சதுரத்தை (rhombus) வரையுங்கால் அதன் ஒரு கோணம் 80° ஆகவும், அதனெருபக்கம் ABயின் மேலே படிந்து இருக்கும்படி யாகவும் அமைக்க.

18. இரண்டங்குல ஆரமுள்ள வட்டத்திலுள்ள வட்டகோணப் பகுதியில் வட்டமையத்திடத்திலுள்ள கோணம் 50° இவ்வட்டகோப் பகுதியினுள் அதன் வில்லின்மேன் இரண்டு முனைகள் நிற்குமாறு ஒரு சாய்வு சதுரத்தை அமைக்க.

19. இரண்டங்குலநாணும், அரையங்குல வுயரமுள்ள நாண் வெட்டுத் துண்டினுள் (segment) ஒரு சதுரத்தை வரைக.

20. மூன்றங்குல ஆரமுள்ள வட்டத்திலுள்ள வட்டகோணப் பகுதியில் (sector) வட்டமையத்திலுள்ள கோணம் 60°. அதனுள் ஒரு சதுரத்தை வரையுங்கால் அதனெருபக்கம் ஒரு ஆரத்தின் மேல் படிந்திருக்குமாறு அமைக்க.

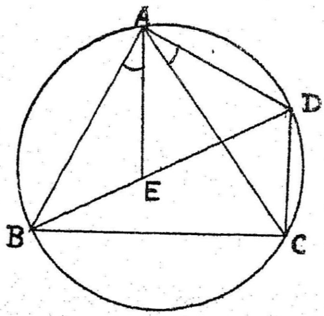
தேற்றம் 10

இடால்மியின் தேற்றம் (Ptolemys Theorem)

ஒருவட்டநாற்கரத்தில் (cyclic quadrilateral) எதிர் எதிர் ஜோடிப் பக்கங்களின் கூட்டுப்பெருக்கற்பலன் மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும்.

(அல்லது)

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் எதிர்,எதிர் ஜோடிப்பக்கங்களால் தாங்கி நிற்கும் செவ்வகங்களின் கூட்டுப்பலன் அதன் மூலைவிட்டங்களால் தாங்கப்படும் செவ்வகத்திற்கு சமமாகும்.



ABCD என்பது நாற்கரம் ஆகுக.

நிரூபிக்க வேண்டுவது :

AB.CD+BC·AD=AC.BD.

அமைப்பு முறை :

∠BAE=∠CAD என்றாகும்படி AE ஐ வரைக.

AE ஆனது BD ஐ E என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகுக.

நிரூபணம் :

ABE, ACD என்னும் முக்கோணங்களில்

∠BAE=∠CAD (அமைப்பு)

∠ABE=∠ACD (ஒரே நாண் வெட்டுத் துண்டுகளிலுள்ள கோணங்கள்)

$\therefore$ ABE, ACD என்னும் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தனவாம்

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$$

$$\therefore \quad AB.CD=AC.BE \qquad \ldots\ldots \quad (i)$$

மறுபடியும்' ABC, AED என்னும் முக்கோணங்களில்

$\angle BAC=\angle EAD$ [BAE, CAD என்னும் சமகோணங்களோடு $\angle EAC$ ஐக் கூட்ட.]

இதனோடு, $\angle ACB=\angle ADE$ (அதே நாண் வெட்டுத் துண்டில்)

$\therefore$ $\triangle ABC$ ஆனது $\triangle AED$க்கு வடிவொத்ததாகும்.

ஆகவே, $\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{AD}$

$$\therefore \quad BC.AD=ED.AC \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

(i) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட

$$AB.CD+BC.AD=AC\,(BE+ED)=AC.BD$$

பயிற்சி

ஒரு அநாவட்ட (not cyclic) நாற்கரத்தில், எதிர் ஜதை (opposite pair)ப் பக்கங்களின் கூட்டு பெருக்கற்பலன் மூலை விட்டங்களின் பெருக்கற்பலனுக்கு அதிகப்பட்டிருக்குமென நிரூபிக்க.

2. ABCD என்னும் வட்ட நாற்கரத்தில் $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$; $AC=y$; $BD=x$ எனக் கொண்டால் $\dfrac{x}{y}=\dfrac{ab+cd}{ad+bc}$ என்று நிரூபி.

3. ABCD என்னும் வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு Q என்றும், சுற்று வட்டத்தின் ஆரம் R என்றும் கொண்டால்

$$R^2=\frac{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}{16Q^2}$$ என்று நிறுவுக.

4. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் முறையே 2·5, 5·2, 6·0, 3·9 அங்குலங்களாகும். அதன் மூலைவிட்டங்கள், சுற்று வட்டத்தின் ஆரம், பரப்பு ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் R என்பது சுற்று வ்ட்டத்தின் ஆரத்தைக் குறிப்பதாகும். AB, AC என்பவற்றிற்கு B, C என்னும் இடங்களில் வரைந்த BP, CP என்னுஞ் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று P என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றன. AB PC+AC PB=2R.BC.

6. ABC என்பதொரு முக்கோணம். BCD என்பது Aக்கு எதிர் நிற்கும் பக்கத்தின்மேல் அமைந்ததொரு முச்சமபக்க முக்கோணம். AD ஆனது BCD என்னும் வட்டத்தை P என்னுமிடத்தில் கூடுவதானல்

(i) AD=AP+BP+CP

(ii) PA+PB+PC<QA+QB+QC (இங்கு Q என்பது ABC என்னும் முக்கோணத்திலுள்ளே இருக்கும் ஒரு புள்ளியாகும்).

7. (a) P என்பது ABC என்னும் முச்சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் BC என்னும் சிறு வில் (minor arc)லின் மேலுள்ளதொரு புள்ளியாகும். PA=PB+PC எனக் காட்டுக.

(b) ABC என்பது ஒரு முச்சமபக்க முக்கோணமாகும், ஒரு புள்ளியானது B, Cக்களிலிருந்து காணப்படும் கூட்டுத் தூரமானது Cயிலிருந்து காணப்படும் தூரத்திற்குச் சமமாகவே இருக்கும்படி நகர்ந்து செல்லுமாயின், அப்புள்ளியின் நியமரேகை (locus)யைக் கண்டறிக.

8. (a) ஒரு வட்டத்தில் AB என்பது நிலைபேறுன (fixed) நாணுகும். DE என்பது ABக்குச் செங்குத்தாகிய விட்டமாகும், P என்பது AEB என்னும் வில்லின் மேலுள்ளதொரு புள்ளியாகும். PA+PB ஆனது PDக்கு ஏற்ப வேறுபடுவதாகுமென நிரூபிக்க. ஆகவே, PA=PB ஆகும்பொழுது, PA+PBயின் மதிப்பு அதிகபட்சமாகுமெனக் காட்டுக.

(b) ABCD என்பது ஒரு வட்டத்தினுள் அமைக்கப்பட்ட நாற்கரமாகும். BD என்பது ABC என்னுங் கோணத்தை இரு சமமாக வெட்டுகின்றது. A, C என்பன நிலைநிற்கும் புள்ளிகளும், B என்பது

இடம் பெயர்த்தலுடையதொரு புள்ளியுமாகும். அங்ஙனமாக, (AB+BC) : BD என்பதொரு நிலையான விகிதமாகுமெனக் காட்டு.

9. AB, AC என்பவற்றைச் சமபக்கங்களாகவுடைய ABC என்னும் முக்கோணமானது O என்பதை மையமாகவுடைய வட்டத்தினுள் அமைந்துள்ளது. D என்பது BC என்னும் வில்லின் நடுப்புள்ளியாகும். P என்பது A இடம் பெற்று நிற்கும் நாண் வெட்டுத் துண்டி (segment)ன் மேலுள்ளதொரு புள்ளியாகும். (BP+CP) AO=AC.PD என்று காட்டுக.

10. ABCD என்பதோர் இணைகரமாகும். ABC வழியாகச் செல்லும் வட்டமானது ADஐ P என்னுமிடத்தில் வெட்டுகின்றது. $AB^2 \sim AC^2 = AP.AD$ என நிருபிக்க.

11. A, B என்பன ஒரு வட்டதகின்மேல் நிலைநிற்கும் இரண்டு புள்ளிகளாகும். அவற்றின் வழியாக, இரண்டு இணையான நாண்களை வரையுங்கால், அந்நாண்களின் நீளங்கள் நின்று அடைக்கும் செவ்வகம் ஒரு சதுரத்திற்குச் சமமாகுமாறு கண்டமைக்க.

12. (a) ஒரு ஒழுங்கமை ஐங்கோணத்திற்குரிய மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

(b) P என்பது ABCDE என்னும் ஒழுங்கமை ஐங்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் AB என்னும் சிறு நாணின்மேல் நிற்பதொரு புள்ளியாகும். PA+PB+PD=PC+PE என்று நிருபிக்க.

(c) P என்பது ABCDEF என்னும் ஒழுங்கமை அறுகோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தில் AB என்னும் சிறு நாணின்மேல் நிற்பதொரு புள்ளியாகும். PA+PB+PC+PF=PD+PE என்று நிருபி.

13. a, b, c, d என்பவற்றை முறையே பக்கங்களாகக் கொண்டதொரு நாற்கரத்தின் சுற்று வட்டத்தின் விட்டம் d ஆனல்,

$d^3 = d^2(a^2+b^2+c^2)+2abc$ என்று காட்டுக.

14. ABCD என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரமாகும். AE என்பது BDக்கு இணைகோடாகும், AB.BC+AD.DC=BD CE என்று காட்டுக.

15. ஒரு வட்டத்திற்கு PCD என்னும் வெட்டுக்கோடும், PA, PB என்னும் தொடுகோடுகளும் வரையப்பட்டால், AB.CD=2AC.BD ஆகுமெனக் காட்டுக.

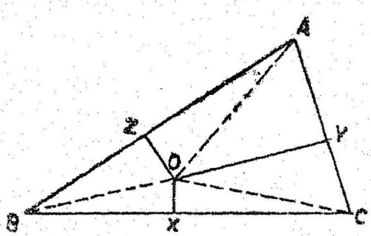
III. ஒருங்கு கூடுவதும், நேர்வரைத் தன்மையும் (Concurrence and Collinearity)

தேற்றம் 11

ABC என்னும் முக்கோணத்தில் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு அவற்றின் மேலுள்ள X, Y, Z என்னும் புள்ளியிடங்களில் நிற்கும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒருங்கு கூடுவனவானால், அப்பொழுது

$$BX^2+CY^2+AZ^2=CX^2+AY^2+BZ^2$$

அல்லது $BX^2-CX^2+CY^2-AY^2+AZ^2-BZ^2=0$ ஆகும்.



X, Y, Z என்னுமிடங்கள் நிறுத்திய செங்குத்துக் கோடுகள் O என்ற விடத்தில் கூடுவனவாகுக: OB, OC OAக்களைச் சேர்க்க.

நிரூபணம்:

$$BX^2-XC^2=(OB^2-OX^2)-(OC^2-OX^2)$$
$$=OB^2-OC^2$$

இவ்வாறே, $CY^2 - YA^2 = OC^2 - OA^2$

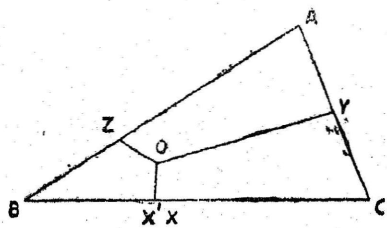
,, $AZ^2 - ZB^2 = OA^2 - OB^2$

இவற்றைக் கூட்ட, $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$

அல்லது, $BX^2 + CY^2 + AZ^2 = XC^2 + YA^2 + ZB^2$

மறுதலையாக,

ஒரு முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களில் $BX^2 + CY^2 + AZ^2 = CX^2 + AY^2 + BZ^2$ என்றமையும்படி X, Y, Z என்னும்புள்ளிகள் நிற்குமானுல்,அப்பொழுது அப்பக்கங்களுக்குஅப்புள்ளியிடங்களில் அமையும் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒருங்கு கூடுவனவாம்



Y, Z என்னுமிடங்களில் நிற்கும் செங்குத்துக்கோடுகள் O என்னுமிடத்தில் கூடுவனவாகுக. Oவிலிருந்து BCக்குச் செங்குத்துக் கோடொன்று வரைக. இது BCஐ X என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகும். அவ்வாருகாவிட்டால், அது BCஐ X′ என்னுமிடத்தில் சந்திப்தாகுக.

அப்பொழுது நாம்

$BX'^2 - X'C^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = O$ எனப் பெறுகின்ரேம்.

கொடுக்கப்பட்டபடி

$BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = O$ ஆகும்,

ஆகவே, $BX'^2 - X'C^2 = BX^2 - XC^2$

அதாவது, $(BX' + X'C)\ (BX' - X'C) = (BX + XC)\ BX - XC)$

,, $BC\ (BX' - X'C) = BC\ (BX - XC)$

$\therefore\ BX' - X'C = BX - XC$

மேலும், $BX'+X'C=BX+XC$ (ஒவ்வொன்றும் $=BC$)

இவற்றைக் கூட்ட $2BX'=2BX$

$\therefore$ $BX'=BX$ $\therefore$ X'ம், Xம் ஒரே புள்ளியாகும்.

$\therefore$ OX ஆனது BCக்குச் செங்குத்தாகும்.

குறிப்பு :

X, Y, Z என்னும் புள்ளிகள் BC, CA, ABக்களை உள்ளேதான் பிரிக்கவேண்டுமென்னும் கட்டுப்பாடில்லை. அவை உள்ளேயாகிலும், வெளியேயாகிலும் பிரிக்கலாம். அவற்றிற்கேற்ப Oன் இருக்கை வேறுபடும். மாணவர்கள் வெளிப்புறப் பிரிவுகளுக்கு ஏற்ற படங்களை வரைந்து அவ்வகைகளிலும் இத்தேற்றத்தின் உண்மையைக் காண வேண்டும்.

பயிற்சி

1. நிரூபிக்க :

(i) ஒரு முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் செங்குத்துச் சமவெட்டிகள் (perpendicular bisectors) ஒரு புள்ளியில் கூடும்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தில் குத்துயர் கோடுகள் (altitudes) ஒரு புள்ளியில் சேரும்.

2. ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொண்டு நிற்கும் மூன்று வட்டங்களின் பொது நாண்கள் ஒன்று கூடும்.

3. மூன்று வட்டங்களுள் இரண்டிரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு நின்றால், அவற்றின் பொதுத் தொடுகோடுகள் ஒன்று சேரும்.

4. (a) ஒரு முககோணத்தில் E, F என்பன CA, AB என்னும் பக்கங்களின்மேல் நிற்கும் BE, CF என்னும் குத்துயர் கோடுகளின் அடிகளாகும். ABC என்னும் சுற்று வட்டத்திற்கு A என்னுமிடத்தில் வரையும் தொடு கோட்டிற்கு EF ஆனது இணைகோடாகுமெனக் காட்டுக.

(b) ABC என்னும் முக்கோணத்தில் DEF என்பது பாத முக்கோண (pedal triangle)மாகும். A, B, Cக்களிலிருந்து EF, FD, DE களுக்கு முறையே வரையும் செங்குத்துக்கோடுகள் △ABCன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் கூடுவனவாகுமென நிரூபிக்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் தளத்தில் (plane) யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகிய Pயிலிருந்து BC, CA, ABகளுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் முறையே X, Y, Z என்பனவாகும். பிறகு, A, B, Cக்களிலிருந்து முறையே YZ, ZX, XYகளுக்கு வரைந்த செங் குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடுமென நிரூபிக்க.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் வெளித் தொடு வட்டங்கள் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களைத் தொடுமிடங்கள் முறையே X_1, Y_1, Z_1 ஆம். இத்தொடுமிடங்களில் நிற்கும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒன்று கூடுமெனக் காட்டுக.

7. ABC, PQR என்னும் இரண்டு முக்கோணங்கள், A, B, Cக்களி லிருந்து QR, RP, PQகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒன்று கூடுமாறு அமைந்துள்ளன. P, Q, Rகளிலிருந்து BC, CA, ABகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒன்றுகூடுமென நிரூபி.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

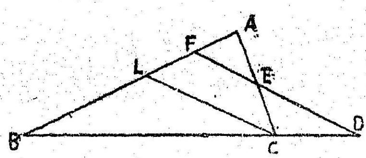
மேனிலாஸ் (Menelaus) தேற்றம்

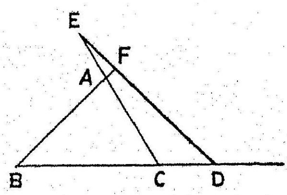
தேற்றம் 12

ஒரு முக்கோணத்தில் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை ஏதேனுமொரு குறுக்கு வெட்டுக்கோடு (transversal) D, E, F என்னுமிடங்களில் சந்தித்தால், அப்பொழுது

AF.BD.CE=AE.BF.CD அல்லது

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$$





குறுக்குக்கோடு எல்லாப் பக்கங்களையும் வெளிப்புறத்திலேனும், அல்லது ஒரு பக்கத்தை மட்டும் வெளிப்புறத்திலும் வெட்டலாம். முதல் வகையில் $\frac{BD}{DC}$, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{AF}{FB}$ என்பவற்றுள் ஒவ்வொரு விகிதமும் ருணராசியதாகும். ஆனால் பின்வகையில், ஒரேவொரு விகிதமட்டும் ருணராசியதாகும். இவ்விருவகையிலும் விகிதங்களின் பெருக்கற்பலன் ருணராசியாகும்.

அமைப்பு: DEFக்கு இணையாக CLஐ வரைந்து அது ABஐ L என்னும் இடத்தில் வெட்டுவதாகக் கொள்.

இப்பொழுது, $\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{FL}$ (பருமனிலும் குறியிலும்) இணைகளாதலால்

$$\frac{CE}{EA}=\frac{LF}{FA}\ (\quad ,, \quad)\quad ,,$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BF}{FL}\cdot\frac{LF}{FA}\cdot\frac{AF}{FB}$$

$$=\frac{BF}{FB}\cdot\frac{LF}{FL}\cdot\frac{AF}{FA}$$

$$=(-1)\,(-1)\,(-1)$$

$=-1$ (துண்டுகளின் திசைக் குறிகளையும் அநுசரிக்க)

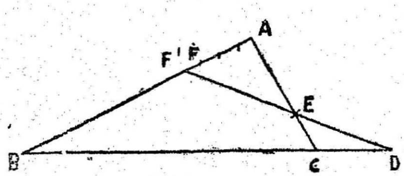
$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$$

இப்பலனுனது, AF.BD.CE=AE.BF.CD என்னும் வடிவிலும் அமைக்கப்படலாம்.

மறுதலையாக,

ABC என்னும் முக்கோணத்தில் D, E, F என்னும் புள்ளிகள் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின்மேல்

AF.BD.CE=AE.BF.CD என்றமையும்படி நின்றால், D, E, F என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் இடம் பெறும்.



கொடுத்தபடி

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

DEஐ இணை. அது F வழியாகச் செல்லாவிட்டால் ABஐ F′ என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாகக் கொள்.

அப்பொழுது நாம்,

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1$$ எனப் பெறுகின்றோம்.

$$\therefore \quad \frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$$

அதாவது, Fம் F'ம் ABயை ஒரே விகிதத்தில் பிரித்து நிற்கும். இது அசாத்தியமாகும்.

$\therefore$ F வழியாக DE செல்லுகின்றதாகும்.

$\therefore$ D, E, F என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் இடம் பெறும்.

பயிற்சி

1. $\triangle$ABCல் D, E என்பன BC, CAக்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும் AD, யும் BEயும் G என்னுமிடத்தில் வெட்டிக்கொண்டால், AG : GD $=$BG : GE$=$2 : 1 என்று காட்டுக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினு)

2. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு கோணங்களின் உள்சமவெட்டிகளும், மூன்றுவது கோணத்தின் வெளிச்சம வெட்டியும் தத்தம் எதிர் பக்கங்களைச் சந்திக்குமிடங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் நிற்பனவாம் என நிரூபி.

3. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று வெளிக்கோணங்களின் சம வெட்டிகள் தத்தம் எதிர்ப் பக்கங்களை ஒரு நேர்க்கோட்டில் நிற்றலையுடைய புள்ளியிடங்களில் சந்திக்குமென நிரூபி.

4. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் P, Q, R என்பன A, B, C களுக்கு எதிர்நிலையிலுள்ள வெளித்தொடுவட்டங்களின் மையங்களாகும். QR ஆனது BCஐL என்னுமிடத்திலும், BP ஆனது CAயை M என்னுமிடத்தில், PQ ஆனது ABயை N என்னுமிடத்திலும் சந்தித்தால், L, M, N ஆவன ஒரு நேர்க்கோட்டில் இடம்பெறுமென்று நிரூபு.

5. ஒருநாற்கரத்தின் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்களை ஒரு நேர்க்கோடு P, Q, R, S என்னுமிடங்களில் ஊட றுக்கின்றது

MARA PUBLIC

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$ என்று நிரூபி.

6. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AB என்னும் பக்கத்தின் மேல் P, Q என்னும் இரண்டுபுள்ளிகள் 6 PQ = 3AP = 2 QB என்று அமையுமாறு நிற்கின்றன. R, S என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் 6 RS = 3 SC = 2AR என்று அமையுமாறு ACயின் மேல் நிற்கின்றன. PR, QS என்பன BCயின் நீட்டத்தின் மேல் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் என்று நிரூபி.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்திற்கு அதன் கோண முனையிடங்களில் வரையுந்தொடுகோடுகள் எதிர்பக்கங்களை யொரு கோட்டில் நிற்றலையுடைய புள்ளியிடங்களில் சந்திக்குமென நிரூபி.

8. ஒரு முக்கோணத்தில் உள்தொடுவட்டம் AB ஐ Z என்னுமிடத்திலும், Aக்கு எதிருறும் வெளித் தொடுவட்டம் ACயின் நீட்டத்தை Y என்னுமிடத்திலும் சந்திக்கின்றன BC ஆனது ZY ஐ ஏனையிரண்டு பக்கங்களின் விகிதத்தில் ஊடறுக்குமெனக் காட்டுக.

9. DEF என்பது ABC என்னும் முக்கோணத்தின் பாதமுக்கோணமாகும். EF, FD, DEக்கள் BC, CB ABக்களை முறையே P, Q, R என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. P, Q, R என்பவை யொரு நேர்க்கோட்டின் மேல் நிற்கும் என நிரூபி.

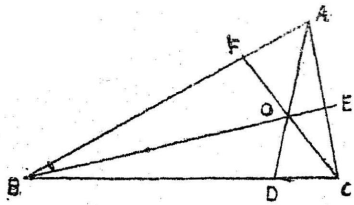
தேற்றம் 13

(Ceva's Theorem)

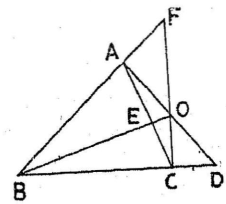
ஏதேனுமொருபுள்ளியை ஒரு முக்கோணத்தின் A, B, Cஎன்னும் முனைகளோடு சேர்க்குங்கோடுகள் அவற்றின் எதிர்பக்கங்களை D, E, F என்னுமிடங்களில் கூடுமானால், அப்பொழுது

AF . BD . CE = EA . FB . DC

அல்லது, $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = +1$



படம் 1.



படம் 2.

மூன்று கோடுகளும் O வழியாகச் செல்லுவன வாகுக. முக்கோணத்தினுள் O இருந்தால் மூன்று விகிதங்களுள் ஒவ்வொன்றும் தனராசியாகும். O ஆனது முக்கோணத்திற்கு வெளியேயிருந்தால், ஒரு விகிதம் தனராசியாகவும், ஏனைய இரண்டு ருணராசியாகவுமிருக்கும்.

∴ எந்தவ்கையிலும் மூன்று விகிதங்களின் பெருக்கற்பலன் தன ராசியே யாகும்.

இப்பொழுது, $\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle BAD}{\triangle DAC}$ (முக்கோணங்கள் சமகுத்துயரங்கள் உடைமையால்)

$$=\frac{\triangle BOD}{\triangle DOC}$$ (முக்கோணங்கள் சமகுத்துயரங்கவி உடைமையால்)

$$=\frac{\triangle BAD-\triangle BOD}{\triangle DAC-\triangle DOC}$$

$$=\frac{\triangle BOA}{\triangle COA}$$

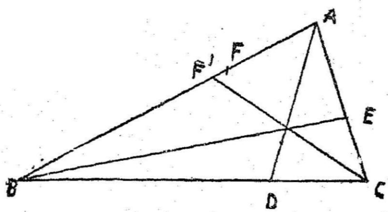
இவ்வாறே, $\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}$

$\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle COA}{\triangle BOC}$ ஆம்

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=+1$$

மறுதலையாக,

ஒரு முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின் மேல் D, E, F என்னும்புள்ளிகள் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ என்றமையுமாறு இருந்தன எனில், AD, BE, CF ஆவன ஒருபுள்ளியிடத்துச் சந்திக்கும்.



AD, BE ஆவன O என்னுமிடத்தில் குறுக்கிடுவன வாகுக; CO வைச் சேர்த்து நீட்டுக. அது AB ஐ F என்னுமிடத்தில் வெட்டும். CO ஆனது F ன் வழியாகச் செல்லாதாயின், அது AB யை F′ என்னுமிடத்தில் வெட்டுவதாகட்டும்.

அப்பொழுது கேவாஸ் (ceva) தேற்றப்படி நாம்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = +1$$ எனப்பெறுகின்றோம்,

ஆனால், கொடுத்தபடி,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$$ ஆகும்,

ஆகவே,

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$$

அதாவது, F ம், F′ ம் AB யை ஒரே விகிதத்தில் பிரிப்பனவாகும். இது F′ ம் F ம் ஒன்றாக இணைந்த வழியல்லது சாத்தியமாகாது.

∴ AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியிடத்துக் கூடிச் செல்லுவனவாகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு முக்கோணத்தில் (i) நடுக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியின் வழிச் செல்லும், (ii) கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகள் ஒன்றையொன்று ஓரிடத்தில் சந்திக்கும் (iii) இரண்டு கோணங்களின் வெளிச் சமவெட்டி களும் மூன்றுவது கோணத்தின் உள் சமவெட்டியும் ஒருங்கு கூடும் என நிரூபிக்க.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளையும், எதிர்ப்பக்கங்களில் உள் வட்டம் தொடுமிடங்களையும் இணைக்குங் கோடுகள் ஒருங்கே சந்திக்குமென நிரூபி.

3. ஒரு முக்கோணத்தில் A, B, C என்னும் முனைகளுக்கு எதிர் நிற்கும் வெளி வட்டங்கள் BC, CA, AB க்களை X, Y, Z என்னுமிடங்களில் தொடுமாறுல், AX, BY, CZ என்பன ஒருங்கு சந்திப்பனவாம் எனக் காட்டுக.

4. ஒரு வட்டமானது ABC என்னும் முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை D, D_1 : E, E_1 : F, F_1 என்னுமிடங்களில் ஊடறுத்துநிற்கின்றது. AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியின் வழிச் செல்லுமாயின், AD_1, BF_1, CF_1 ஆவனவும் ஒரு புள்ளியில் கூடுவனவாகும். (பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் D, E, F என்னும் புள்ளிகளால் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்கள் BD : DC=2 : 5 ; CE : EA=15:2; AF : FB=1 : 3 என்னும் நியமம் அமையத் துண்டிக்கப்பட்டால், AD, BE, CF என்பன ஒன்று கூடுமென நிரூபி.

6. ஒரு முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்னும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியாகச்சென்று BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை முறையே D, E, F என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. EF, FD, DE ஆவன BC, CA, AB என்பவற்றை X, Y, Z என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. X, Y, Z என்பன வொரு கோட்டில்மேல் நிற்கும் என நிரூபி.

7. O என்பது ABC என்னும் முக்கோணத்தின் AD என்னும் நடுவரையின் மேலுள்ளதொரு புள்ளியாகும். BO, CO என்பன தமக்கு எதிர்ப் பக்கங்களை X,Y என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. XY ம் BC ம் இணைகோடுகளாமென நிரூபிகக. இதன் மறுதலையையும் நிரூபிக்க.

8. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியில் சந்தித்துச் செல்லும் கோடுகளாகும். BC, CA, AB களின் நடுப் புள்ளிகளின் வழியாக முறையே AD, BE, CF களுக்கு வரையும் இணைக்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்புடையவன வாகுமெனக் காட்டுக.

9. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்னும் சந்திப்புக் கோடுகள் எதிர்ப்பக்கங்களை D, E, F என்னுமிடங்களில் முறையே கூடுவனவாகும். BC, CA, AB க்களின் நடுப்புள்ளிகளை AD, BE, CF என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளோடு சேர்க்குங்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிடத்தில் கூடிநிற்கக் கடவனவாம் எனக் காட்டுக.

10. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்பன ஓரிடத்துச் சந்திப்புடைய கோடுகளாம். P, Q, R என்பன முறையே EF, FD, DE க்களின் நடுப்புள்ளிகளானால், AP, BQ, CR ஆனவை சந்திப்புடைய கோடுகளாமெனக் காட்டுக.

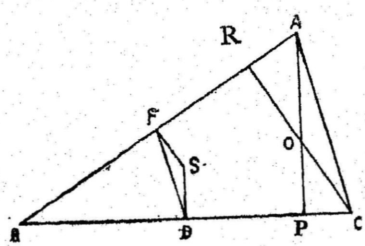
11. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின் மேல் DBC, ECA, FAB என்பன வெளிப்புறத்தில் வரையப்பட்ட சமபக்க முக்கோணங்களாகும். AD, BE, CF என்பன சந்திப்புடைய கோடுகளாகுமெனக் காட்டுக.

IV. முக்கோணங்களின் தன்மைகள்

(Properties of triangles)

தேற்றம் 14

ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிடத்தில் கூடும். இப்புள்ளியிலிருந்து ஒவ்வொரு முனைக்குமுள்ள தூரமானது, இம் முனைக்கு எதிர்ப் பக்கத்திலிருந்து சுற்றுவட்ட மையத்திற்கு உள்ள தூரத்திற்கு இரு மடங்காகும்.



AP, BQ, CR என்பன முக்கோணத்தின் குத்துயர் கோடுகளாகுக.

இப்பொழுது $BP^2-CP^2=(AB^2-AP^2)-(AC^2-AP^2)$

$$=AB^2-AC^2$$

இவ்வாறே, $CQ^2-QA^2=CB^2-BA^2$

$$AR^2-RB^2=AC^2-BC^2$$

இவற்றைக் கூட்ட, $BP^2-PC^2+CQ^2-QA^2+AR^2-RB^2=0$.

ஆகவே, P, Q, R என்னுமிடங்களில் பக்கங்களுக்கு அமைந்த செங்குத்துக் கோடுகள் சந்திப்பனவாகும்.

இவைகள், குத்துயர் கோடுகள் (Altitudes) ஆதலின், குத்துயர் கோடுகள் ஒருங்கு கூடுவனவாகும்.

இச் சந்திப்பு இடம் குத்துச்சந்தி (Ortho centre) எனப்படும். இது 'O' என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

சுற்று வட்டத்தின் மையம் S எனக் குறிக்கப்படுவதாகுக. D, F என்பது BC, AB க்களின் நடுப்புள்ளியாகுக.

இனி, $AO = 2SD$ எனக்காட்ட வேண்டப்படுவதாகின்றது.

SD, SF, DF களைச் சேர்க்க.

$\triangle AOC$ ன் பக்கங்கள் $\triangle SDF$ ன் பக்கங்களுக்கு முறையே இணைக் கோடுகளாகும்.

$\therefore \quad \triangle AOC \parallel\!| \triangle SDF$

$$\therefore \quad \frac{AO}{SD} = \frac{CO}{SF} = \frac{AC}{DF}$$

ஆனால், $AC = 2DF$

$\therefore \quad AO = 2SD$

இவ்வாறே, $CO = 2SF$

$BO = 2SE$ ஆகும். E என்பது CA யின் நடுப்புள்ளியாகும்.

பயிற்சி

1. $\triangle ABC$ யின் AD என்னும் குத்துயரம் (Altitude) சுற்று வட்டத்தைப் P என்னுமிடத்தில் சந்திக்குமானால், O என்பது குத்துச் சந்தி (Ortho centre) யானால், $OD = DP$ என நிரூபி.

2. $AO = AS$ ஆனால், $\angle A = 60^\circ$ என்று நிரூபி.

3. முக்கோணத்தின் சுற்ற வட்டத்தின் ஆரம் R ஆனல், $AO^2+BC^2=4R^2$ என நிரூபி.

4. AS ம் OD ம் X என்னுமிடத்தில் கூடினல், △AOX ன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி (Centroid) யானது △ABC க்கு உள்ளதேயாகும். மேலும் X ஆனது ABC என்னும் வட்டத்தின்மேல் நிற்பதாகவும் நிரூபி.

5. ABC என்பதொரு குறுங்கோண முக்கோணமாகும். AO, BO, CO ஆவன முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தை X, Y, Z என்னுமிடங்களில் சந்திக்கின்றன. O என்பது △XYZ ன் உள் வட்டமையம் ஆகுமெனக் காட்டுக.

6. OA வை விட்டமாகக் கொண்டு வரைந்த வட்டமானது சுற்று வட்டத்தை K என்னுமிடத்தில் வெட்டினல், KO ஆனது BC யின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

7. BOC, COA, AOB என்னும் முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டமையங்களாகிய O_1, O_2, O_3 என்பன O விலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளன வென்றும், $O_1O_2O_3$, ABC என்னும் முக்கோணங்கள் சருவசமமாவன வென்றும், S என்பது $\triangle O_1O_2O_3$ ன் குத்துச் சந்தியாய் நிற்கின்றதென்றும் காட்டுக.

8. OD, OE, OF என்பன DX=OD; EY=OE, FZ=OF ஆகுமாறு முறையே X, Y, Z க்கு நீட்டப்பட்டால், X, Y, Z என்னும் அனைத்தும் △ABC ன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் கிடப்பதாகக் காட்டுக. மேலும், △XYZ=△ABC என்றும் காட்டுக.

9. கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டவற்றைக் கொண்டு முக்கோணத்தை வரைக:

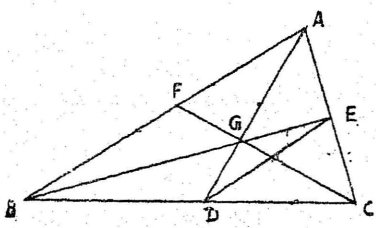
(i) குத்துச் சந்தி (Or thocentre), சுற்றுவட்டமையம் (Circumcentre), ஒரு கோண முனை.

(ii) குத்துச் சந்தி, சுற்றுவட்டமையம், அடிக்கோட்டின் நடுப்புள்ளி.

10. முக்கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் அதன் சுற்று வட்டத்தை P, Q, R என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. முக்கோணம் ABC ன் உள் வட்டமையம், முக்கோணம் PQR ன் லம்பமையம் (Orthocentre) ஆகுமெனக் காண்பி.

தேற்றம் 15

ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் ஒருங்கு கூடுவன வாகும். இப்புள்ளியானது ஒவ்வொரு மையக்கோட்டினையும், சுற்று வட்டமையத்தோடு குத்துச் சந்தியைச் சேர்க்குங் கோட்டினையும் முக்கூறு படுத்துமொரு புள்ளியாகும்.



ABC என்னும் முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்பன மையக் கோடுகள் ஆகுக.

நிரூபிக்க வேண்டுவது, அவைகள் ஒருங்கு கூடுவன வென்பதும், கூடும் புள்ளியானது மையக் கோடுகளையும், சுற்றுவட்ட மையத்தினையும், குத்துச் சந்தியையும் இணைக்கும் கோட்டினையும் முக்கூறுபடுத்தும் என்பதுமாம்.

D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB க்களின் நடுப்புள்ளி களானல்,

$$\frac{BD}{DC} = +1; \frac{CE}{EA} = +1; \frac{AF}{FB} = +1$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$$

கேவாஸ் (Kevas) தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி AD, BE, CF என்பன ஒருங்கு சேருவனவாகும்.

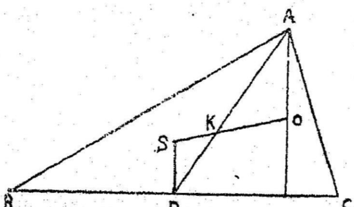
இம் மையக்கோடுகள், சந்திக்கும் இடம் G எனப்படுவதாகுக, DE ஐச்சேர் அப்பொழுது, DE யும் AB யும் இணைகோடுக ளாதலின், ABG, GDE என்னும் முக்கோணங்கள் வடிவொத் தனவாகும்.

$$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore AG : GD = 2 : 1$$

∴ G ஆனது AD என்னும் மையக்கோட்டை முக்கூறு படுத்தா நிற்கின்றது. இவ்வாறே, G ஆனது மற்ற மையக்கோடுகளையும் முக்கூறு படுத்தும்.

△ ABC யில் S என்பது சுற்றுவட்ட மையம் ஆகவும், O என்ப துகுத்துச் சந்தி (Orthocentre) ஆகவும், D என்பது BC யின் நடுப் புள்ளியாகவும் கொள்ளப்படுவன வாகுக.



SO வைச் சேர்த்து AD ஐ K என்னுமிடத்தில் சந்திப்பதாகக் குறிக்க.

நிரூபிக்க வேண்டுவது, K என்பது முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (Centroid) அதாவது, K என்பது G யே யாகு மென்பது.

நிரூபனம் :

$$SD \parallel AO$$

$$\therefore \triangle AKO \,|||\, \triangle SKD,$$

$$\therefore \text{[illegible]} = \frac{KO}{SK} = \frac{AO}{SD}$$

இப்பொழுது, $\frac{AO}{SD} = \frac{2}{1}$ (தேற்றம் 14)

$\therefore \quad \frac{AK}{KD} = \frac{2}{1}$

அதாவது, K ஆனது AD என்னும் மையக் கோட்டை 2 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதாகும்.

∴ K ஆனது G யே யாகும்.

$\therefore \quad \frac{KO}{SK}$, அதாவது $\frac{GO}{SG} = \frac{2}{1}$

∴ G ஆனது SO வையுங்கூட முக்கூறு படுத்துவதாகின்றது.

பயிற்சி

1. G என்பது △ DEF ன் நடுக் கோட்டுச் சந்தி (Centroid) யாகும்.

2. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு முக்கோணத்தை வரைக:

(i) மூன்று நடுக் கோடுகள் (Medians)

(ii) ஒருபக்கமும், இரண்டு நடுக்கோடுகளும்.

(iii) இரண்டு பக்கங்களும், ஒரு நடுக்கோடும்.

(iv) மையக்கோட்டுச் சந்தி, சுற்றுவட்ட மையம், ஒரு கோண முனை.

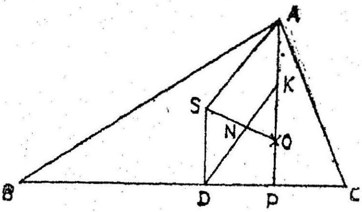
3. ஒரு முக்கோணத்தில் மைய (நடு)க் கோடுகளின் (Medians) கூட்டு நீளம், முக்கோணத்தின் சுற்றளவின் (1) முழு அளவுக்குக் குறைவாகவும், முக்காற் பங்குக்கு அதிகமாகவும் இருக்கும்.

4. ஒரு முக்கோணத்தில் O என்பது சுற்றவட்ட மையமும், H என்பதுகுத்துச் சந்தி (Orthocentre) யு மாகும் X என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி. AO ஆனது H ஐ P என்னுமிடத்தில் கூடுகிறது, △APH ன் நடுக்கோட்டுச் சந்தியானது △ABC யினுடையதே யாகு மெனக் காட்டுக. (பல்கலைக்கழக மாதிரிவினு)

தேற்றம் 16

ஒரு முக்கோணத்தின் முப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டமானது அம் முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகளின் பாதங்கள் வழியாகவும், குத்துச் சந்தியைக் கோண முனைகளோடு இணைக்குங்கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும். (ஒன்பது புள்ளி வட்டம்)

D, E, F என்பன பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகவும்; P, Q, R என்பன குத்து யரக்கோடுகளின் பாதங்களாகவும்; K, L, M என்பன முறையே AO, BO, CO க்களின் நடுப்புள்ளிகளாகவுங் கொள்க. இங்குக் குத்துயரச் சந்தியை O என்றும், சுற்றுவட்ட மையத்தை S என்றும் கொள்க.



நிரூபிக்க வேண்டுவது : D, E, F; P, Q, R; K, L, M என்னும் ஒன்பது புள்ளிகளும் ஒருவட்ட நேமியில் கிடப்பனவா மென்பது.

SA, SO, SD, DK, களைச் சேர்க்க; DK ஆனது SO வை N என்ற மிடத்தில் வெட்டுவதாகுக.

நிரூபணம் :

AO = 2 SD ம்; K என்பது AO ன் நடுப்புள்ளியு மாதலால்.

AK = SD யும், KO = SD யும் ஆகும்.

மேலும், AO ∥ SD.

∴ AKDS என்பதொரு இணைகரமாகும். SKOD யும் அவ்வாறேயாம்.

∴ DK = SA = R

∴ DK யும் SO வும் N என்னுமிடத்தில் ஒன்றையொன்று சமமாக வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன.

$$\therefore \quad DN = NK = \frac{R}{2}$$

KPD என்னும் முக்கோணத்தில் $\angle KPD = 90°$; N என்பது DK என்னும் கர்ணத்தின் நடுப் புள்ளியாகும்.

∴ DK ஐ விட்டமாகவைத்து வரையும் வட்டம் P யின் வழியாகச் செல்லுவதாகும். அதன் மையம் N என்னும் புள்ளியாகும், இது SO ன் நடுப்புள்ளியாதலால் நிலைப்பட்ட (fixed) புள்ளியாகும். இதன் ஆரம் NK ஆகும்.

$NK = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} R$. ஆதலின், அதன் நீளமும் மாருத தாகும். ஆகவே, N ஐ மையமாகவும், ஆரம் $\frac{1}{2}$ R ஆகவும் கொண்டதொரு நிலைப்பட்ட வட்டம் D, P, K வழிகளாகச் செல்லுவதாகும்,

இவ்வாறே, அதேவட்டம் E, Q, L வழியாகவும், F, R, M வழியாகவும் செல்லுகின்றதென நிரூபிக்கலாம்.

∴ ஒருவட்டமானது D, E, F, P, Q, R, K, L, M என்னும் நவப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுகின்றதாகும்.

இதன் மையம் N; ஆரம் $\frac{1}{2}$R ஆகும்.

பயிற்சி

1. DK, EL, FM என்பன ஒத்த நீளமுடையன வாயும், ஓரிடத்தில் ஊடறுத்து நிற்பனவாயும் உள்ளவையென நிரூபி.

2. ஒரு முக்கோணத்தில் சுற்றுவட்டமையம், நடுக்கோட்டுச் சந்தி, நவப் புள்ளி (வட்ட)மையம் (Nine point centre); குத்துச் சந்தி, (Orthocentre) ஆகியவை ஒரு கோட்டில் நிற்கும் எனக் காட்டுக. G, O ஆவன SN ஐ உள்ளேயும், வெளியிலும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்குமெனக் காட்டுக,

3. △ABC ஆனது A யிடத்தில் நேர்க் கோண முடையதாகும். நவப் புள்ளி வட்டம் (Nine point circle) சுற்றுவட்டத்தை Aயின் கண் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக,

4. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் மேலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியைக் குத்துச் சந்தியோடு இணைக்குங் கோட்டின் நடுப் புள்ளியானது நவப் புள்ளி வட்டத்தின் மேலுள்ள தெனக் காட்டுக. (பல்கலைக்கழக மாதிரிவினா)

5. QR ன் செங்குத்துச் சமவெட்டி (Perpendicular bisector) D, K என்பவற்றின் வழியாகச் செல்லுகிறதெனக் காட்டுக.

6. D, E, F என்பன ABC என்னும் முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும் P, Q, R என்பன குத்துயரக் கோடுகளின் (Altitudes) பாதங்களாகும். DP,EQ, FR என்பவற்றின் குத்துச் சம வெட்டிகள் (Perpendicular bisectors) ஒருங்கு சேரு மெனக் காட்டுக.

7. ABC என்னும் முக்கோணத்தில் E, F என்பன முறையே AC, AB க்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும். A, B களிலிருந்து BC, CA க்களுக்கு வரைந்த AX, BY என்னும் செங்குத்துக் கோடுகள் H என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றன. E, F, Y களின் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் BH ஐச் சமமாகத் துண்டிக்குமெனக் காட்டுக.

8. ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் S ஆகும். BC யில் S ன் பிரதிபிம்பம் S′ ஆனால், AS′ன் மையப்புள்ளி, △ABC ன் ஒன்பது புள்ளிவட்டத்தின் மையமாகுமென காட்டுக.

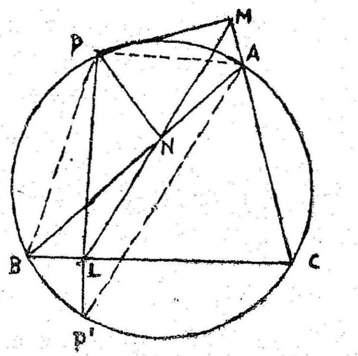
தேற்றம் 17

(சிம்ஸன் கோடு அல்லது பாதக்கோட்டின் தேற்றம்)

ஒரு முக்கோணத்தின் வட்டநேமியின் மேலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியிலிருந்து அதன் பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இருப்பனவாகும்.

ABC என்பது ஒரு முக்கோணமும், P, என்பது அதன் வட்டத்தின் நேமியின் மேலுள்ளதொரு புள்ளியும் ஆகுக.

L, M, N என்பன P யிலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் ஆகுக,



L, M, N என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் இருப்பனவாகுமென நிரூபித்தல் வேண்டுகின்றது.

PA, PB க்களைச் சேர்க்க.

நிரூபணம் :

∴ $\angle PMA =$ ஒரு நேர்க்கோணம்

$\angle PNA =$ ஒரு நேர்க்கோணம் (வரைவு)

∴ $\angle PMA + \angle PNA = 2$ நேர்க்கோணங்கள்

ஆகவே, PMAN என்பது வட்டத்தில் இருக்கைபெறும்.

∴ $\angle PNM = \angle PAM$ (PMAN என்னும் வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரே வட்டத் துண்டிலிருக்கும் கோணங்களாதலால்)

$= \angle PBC$ (PACB என்னும் வட்ட நாற்கரத்தின் உள்ளெதிர் கோணம்)

அதாவது, $= \angle PBL$

இப்பொழுது,

$\angle PLB = \angle PNB$ (வரைதல் முறையில் ஒவ்வொன்றும் நேர்க்கோணமாதலின்)

∴ PNLB வட்ட இருக்கையுறும்.

∴ $\angle PBL = 2$ நேர்க்கோணங்கள் $- \angle PNL$

∴ $\angle PNM = 2$ நேர்க்கோணங்கள் $- \angle PNL$

∴ $\angle PNM + \angle PNL = 2$ நேர்க்கோணங்கள்

∴ **LN, NM** என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் தொடர்புற்று நிற்பனவாம்,

விவரணம் :

LNM என்னுங் கோடு சிம்ஸன் கோடு அல்லது ABC என்னும் முக்கோணத்திற்குப் P யின் பாதக்கோடு எனப்படும்.

கிளை :

PL ஆனது மீண்டும் சுற்றுவட்டத்தின் நேமியை P′ என்னு மிடத்தில் சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டால், அப்பொழுது AP′ ஆனது P யின் பாதக் கோட்டுக்கு இணைக்கோடாகும்.

நிரூபணம் :

$\angle PP'A = \angle PBA$ (ABC என்னும் வட்டத்தின் அதே நாண் வெட்டுத் துண்டில் (Segment) நிற்கும் கோணங்களாகும்)

$= \angle PBN$

$= \angle PLN$(PBLN என்னும் நாற்கரத்தின் ஒரே நாண் வெட்டுத் துண்டில் நிற்குங்கோணங்களாதலின்)

$\therefore \quad AP' \parallel LM$

பயிற்சி

1. ஒருபுள்ளியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் நிற்பனவானுல் அப்புள்ளியானது அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட நேமியிலிருப்பதாகும்.

2. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டநேமியிலுள்ள தொரு புள்ளியின் பாதக்கோடானது, Aஎன்னுமிடத்தில் வரைந்ததொடு கோட்டிற்கு இணை (Parallel) யாகும்படி, அப்புள்ளியை அமைக்க.

3. △ABCன் சுற்றுவட்டத்தில் உள்ள PQ என்னும் நாணனது, BCக்கு இணையாக வரையப்பட்டிருந்தால், Pயின் பாதக்கோடு AQக்குச் செங்குத்தாக அமையுமென நிரூபிக்க.

4. Pயின் பாதச்கோடு Aயின் வழிச்செல்லும் விட்டத்திற்கு இணையாகுமானால் அப்பொழுது AP யானது BCக்கு இணையாகும்.

5. ABC என்னும் வட்டத்தின் நேமியில் நிற்கும் P, Q என்னும் இரண்டு புள்ளிகளின் பாதக்கோடுகளுக்கு இடையிலடங்கிய கோணமானது, வட்டநேமியில் PQ எதிர்கொண்டு நிற்கும் கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

6. PQ என்னும் கோடானதுABCஎன்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் BC ஆகிய பக்கத்திற்கு இணையாய், அதன் வட்டநேமியைப் P, Q என்னுமிடங்க்ளில் சந்திப்பதானால், P, Q க்களின் பாதக்கோடுகள் A யிலிருந்த BCக்கு அமைந்த செங்குத்துக் கோட்டின்மேல் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

7. P என்பது △ABCன் சுற்றுவட்டத்திலுளளதொரு புள்ளியாகும். H என்பது அம்முக்கோணத்தின் குத்துச் சந்தி (Orthocentre) யாகும். Pயின் பாதக்கோடு HAஐ K எனனுமிடத்தில் சந்தித்தால் HK ஆனது BCயிலிருந்து Pக்குள்ள செங்குத்துத் தூரத்திற்குச் சமமாகும். (பல்கலைக்கழக மாதிரிவினு)

8. Pயினது பாதக்கோடானது P யையும் முக்கோணத்தின் குத்துச்சந்தியையும் சேர்க்குங்கோட்டினை யிருசமமாக வெட்டுமெனக் காட்டுக.

9. ஒரு விட்டத்தின் முனைகளின் பாதக்கோடுகள் நவப்புள்ளி வட்டத்தின் நேமியில் குத்தெதிராக (at rt angles) வெட்டிக் கொள்ளும் என நிரூபி.

10. இரண்டு ஜோடி குறுக்குவெட்டுக் கோடுகளாலமையும் நான்கு முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிரூபிக்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினு)

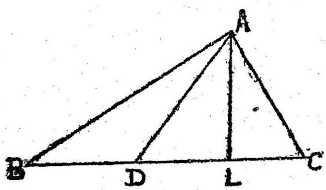
11. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு நாற்கரத்திற்கு இட்ட செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இடம் பெறுமானால், அப்புள்ளியை அமைப்பதெப்படியெனக் காட்டுக.

12. முக்கோணம் ABCன் பாத முக்கோணம் PQR ஆகும். BCன் நடுப்புள்ளி Dயிலிருந்து PQR பக்கங்களுக்கு செங்குத்துக் கோடுகள் எரைந்தால் அவைகளின் அடிகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையுமென காட்டுக.

தேற்றம் 18

ABC என்னும் முக்கோணத்தின் BC என்னும் பக்கமானது D என்னுமிடத்தில் $m.BD = n.DC$ என்றமையும்படி பிரிக்கப்பட்டால், அப்பொழுது,

$$m.AB^2 + n.AC^2 = (m+n)AD^2 + m.BD^2 + n.DC^2.$$



அமைப்புமுறை :

AL என்னும் குத்துயர் கோட்டை வரைக.

$\angle ADB$ விரிகோணமாகுக. அதனால் $\angle ADC$ குறுங்கோணமாகும்.

அப்பொழுது, $\angle ADB$ என்னும் விரிகோண முக்கோணத்திலிருந்து $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DL$ ஆம்.

$\therefore \quad mAB^2 = m.AD^2 + m.BD^2 + 2m.BD.DL$ ஆம்.

ADC என்னும் குறுங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC.DL$ எனப்பெறுகின்றோம்.

$\therefore \quad nAC^2 = n.AD^2 + n.DC^2 - 2n.DC.DL$ ஆம்.

$$\therefore \quad m.AB^2 + n.AC^2 = (m+n)AD^2 + m.BD^2 + n.DC^2 + 2DL.(mBD - n.DC)$$

$$= (m+n)AD^2 + m.BD^2 + n.DC^2$$

$[\because \quad m.BD = n.DC]$

கிளை :

D என்பது BCயின் நடுப்புள்ளியானால், $m=1=n$ ஆம். இப்பொழுது இத்தேற்றம் $AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^3$ ($\because BD=DC$) என்று ஒடுங்குவதாகும். இது அபலோனியஸ் (apollonius) தேற்றமென வழங்குகின்றது.

குறிப்பு : மேற்கண்ட தேற்றத்தின் பின்வரும் வடிவங்கள் சில சமயங்களில் பயனுள்ளவையாகும்.

(i) $m.BD=n.DC$ ஆனால், அப்பொழுது

$$m.AB^2+n.AC^2=(m+n)AD^2+\frac{mn}{m+n}BC^2.$$

(ii) BCயில் $BD=\frac{1}{n}BC$ ஆகுமாறு D என்பதொரு புள்ளியிருந்தால் அப்பொழுது,

$$(n-1)\ AB^2+AC^2=n.AD^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)BC^2.$$

இவ்வடிவங்களுக்கு மாணவர்கள் நிருபணங்களை அமைத்துக் கொள்ளுவாராக.

பயிற்சி

1. ABC என்னும் முக்கோணத்தின் BC என்னும் அடிப்பக்கத்தின் மேல் D என்னும் புள்ளியானது $BD:DC=5:4$ என்றமைய நிற்கின்றது. ADஐ யிணைத்துச் சுற்றுவட்டத்தை Eயில் சந்திக்கும்படி நீட்டினால், $4AB^2+5AC^2=9AD.AE$ என்றுநிரூபி.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கமும், மற்றைப் பக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையும் கொடுக்கப்பட்டால், உச்சிமுனையின் நியமப்பாதை (locus) ஒரு வட்டத்தின் நேமியாகுமென நிரூபி.

3. AB^2+AC^2, BC, AL என்னுங் குத்துயரக் கோடு என்பன கொடுக்கப்பட்டால் $\triangle ABC$ என்னும் முக்கோணத்தை வரைவதெப்படியெனக் காட்டுக.

4. ABCD என்பதொரு செவ்வகமும், P என்பது அதனுள் இருப்பதொரு புள்ளியுமாகும். $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ என நிருபி.

5. CD எனக் கொடுத்ததொரு கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் A, B என்னும் நிலைத்த புள்ளிகள் உள. CDயின்மேல் பிறிதொரு P என்னும் புள்ளியை $2PA^2+3PB^2$ என்பது குறைந்த பட்ட மதிப்பைப் பெறும் படி நிற்கத்தக்கதாகக் கண்டறிக.

6. A, B, C என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டிடத்தனவாகிய புள்ளிகளாம். P வேறொரு புள்ளியாகும்.

$PA^2 \cdot BC+PB^2 \cdot CA+PC^2 AB+BC.CA.AB=0$ என நிருபி. (ஸ்டுவர்ட்ஸ் தேற்றம்).

7. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தில், பின்வருவனவற்றை நிருபிக்க :

(i) BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் D, E, F என்பனவானல்,

$4(AD^2+BE^2+CF^2)=3(BC^2+CA^2+AB^2)$

(ii) $BC^2+CA^2+AB^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

(iii) $AB^2+AC^2=CB^2+GC^2+4GA^2$.

8. (i) G என்பது ABCன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி (centroid) யும், P என்பது பிறிதொரு புள்ளியுமானல்,

$PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2=$
$3PG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் மூலைகளிலிருந்து ஒரு புள்ளிக்குள்ள தூரங்களுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுப்பலன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கொள்ளும் படியாக இருக்க அப்புள்ளியை அமைக்க.

(iii) P என்னும் புள்ளியானது $PA^2+PB^2+PC^2$ ஒரு மாருத மதிப்புடையதாகுமாளுல் Pயின் நியமப் பாதையைக் கண்டறிக.

9. ABC என்னும் முச்சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் நேமியின்மேல் P என்பதொரு புள்ளி நிற்குமாளுல்

(i) $PA^2+PB^2+PC^2=2BC^2$

(ii) $PA^2+PB^2+PC^2=6R^2$ என நிறுபி.

(R என்பது $\triangle ABC$ யின் சுற்றவட்டதின் ஆரமாகும்)

10. ஒரு இணைகரத்தில் பக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப் பலனது மூலைவிட்டங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப் பலனுக்குச் சமமாகுமென நிறுபி.

11. ஒரு நாற்கரத்தில் நான்கு பக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப் பலனது, மூலைவிட்டங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப்பலனேடு, அம் மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினது வர்க்கத்தின் நான்கு மடங்கையும் சேர்க்க வந்ததற்குச் சமமாகுமென நிறுபிக்க,

12. ஒரு நாற்கரத்தில் நான்கு பக்கங்களது வர்க்கத்தின் கூட்டுப் பலன் மூலை விட்டங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப் பலனுக்குச் சமமா யிருந்தால் அந்த நாற்கரமானது ஓர் இணைகரமே யாகுமென நிறுபி.

13. ABCD என்பதொரு நாற்கரம். அதனுள் எதிர்ப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளும, மூலை விட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் ஒன்றையொன்று சமமாக வெட்டிக் கொள்ளுமென நிறுபி.

இச் சமவெட்டுச் சந்திப்புப் புள்ளியை G எனக்கொண்டு, P என வேருேர் புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4PG^2$$

என நிறுபி.

14. ஒரு நாற்கரத்தினுள் நிற்கும் புள்ளிக்கும் கோணத்தின் முனைகளுக்குமுள்ள தூரங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுப்பலன் மிகக் குறைந்த பட்ச மதிப்புடையதாயிருக்கும்படி அப்புள்ளியை அமைக்க.

15. 13-வது கணக்கில் a, b, c, d, x, y என்பன ஒரு நாற்கரத்தினுடைய பக்கங்களின் நீளங்களையும் மூலை விட்டங்களின் நீளங்களையும் குறிக்குமானால்,

$GA^2+GB^2+GC^2+GD^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+y^2)$ என நிரூபி.

16. I என்பது $\triangle ABC$ ன் உள்தொடு வட்டமையாகும். P பிறிதொரு புள்ளியாகும். எனின்

$a \cdot PA^2+b \cdot PB^2+c \cdot PC^2 = a \cdot IA^2+b \cdot IB^2+c \cdot IC^2+(a+b+c)PI^2$ என நிரூபி.

ஆகவே, $a \cdot PA^2+b \cdot PB^2+c \cdot PC^2$ ன் குறைந்த பட்ச மதிப்பையும், அம்மதிப்பு மாறுபடாத விடத்து P யின் நியமப்பாதையையும் கண்டறிக.

17. PQ என்பது ஒரு வட்டத்தின் நிலைபெயரும் நாணாகும். அது O என்னும் நிலைத்த புள்ளியிடத்தில் ஒரு நேர்க்கோணத்தை எதிர்கொண்டு நிற்பதாயின், O விலிருந்து PQ க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டினது நியமப்பாதை ஒரு வட்டத்தின் நேமியாகுமெனக் காட்டுக.

கலைச் சொற்கள்

Geometry (ஜியோமிதி) வடிவக் கணிதம்

Adjacent	அடுத்துள்ள
Adjacent angle	அடுத்துள்ள கோணம்
Adjacent side	அடுத்துள்ள பக்கம்
Alternate	ஒன்றுவிட்ட
Alternate angle	ஒன்றுவிட்ட கோணம்
Altitude	குத்துக்கோடு, குத்துயரம்
Angle	கோணம்
,, Acute	குறுங்கோணம்
,, Adjacent	அடுத்துள கோணம்
,, Alternate	ஒன்று விட்டகோணம்
,, Arms oftan	கோண புயங்கள்
,, Base	அடிக்கோணம்
,, Complementary	நிரப்புக் கோணம்
,, Correspcnding	ஒத்த கோணம்
,, Exterior	வெளிக் கோணம்
,, interior	உட்கோணம்
,, interior opposite	உள் எதிர்கோணம்
,, obtuse	விரிகோணம்
,, opposite	எதிர்கோணம்
,, Plane	சமதளக் கோணம்
,, Re-entrant	உள்-உறுகோணம்

,, Reflex	பின்வளைகோணம்
,, Right	செங்கோணம் ; லம்பகோணம்
,, Straight	நேர்க்கோணம்
,, Supplementary	மிகை நிரப்பு-கோணம்
,, Vertex of an	கோண உச்சி
,, Vertical	உச்சிக்கோணம்
,, Vertically opposite	குத்தெதிர்கோணம்
Arc	வில்
Major Arc	பெருவில்
Minor Arc	சிறுவில்
Axiom	வெளிப்படை உண்மை
Bisect	இருசமக் கூறிடு
Bisector	இருசமவெட்டி
Central	மைய
Centre	மையம் ; (வட்ட)
,, Circum	சுற்றுவட்ட மையம்
,, Ex	வெளிவட்ட மையம்
,, In	உள்வட்ட மையம்
,, ortho	லம்பமையம் : குத்துச் சந்தி ; செங்கோட்டு மையம்
Centroid	மையக்கோட்டுக் சந்தி ; நடுக்கோட்டு மையம்
Chord	நாண்
Chord of contact	தொடு நாண்
Circle	வட்டம்
,, Circumscribed	சுற்றுவட்டம்
,, Concentric	பொதுமைய வட்டம்
,, Escribed	வெளி வட்டம்
,, Inscribed	உள் வட்டம்
,, Nine point	ஒன்பது-புள்ளிவட்டம்
,, segment of	வட்டத் துண்டம்
,, semi	அரை வட்டம்
Circumscribe	சுற்றிவரை
Clockwise	வலஞ்சுழியாக

Coaxal	பொது அச்சுள்ள
Collinear	நேர்-வரை (யிலுள்ள)
Collinearity	நேர்-வரைத் தன்மை
Common tangent, Direct	பொதுத் தொடுகோடு : நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடு ; பொதுத் தொடு வரை
Common tangent, Transverse	குறுக்குப் பொதுத்தொடு கோடு
Complementary	நிரப்பும்
Concentric	பொதுமைய
Concur	சந்தி
Concurrence	சந்திப்பு
Concurrency, point of	சந்திப்புப் புள்ளி
Concurrent	(ஒரு புள்ளியில்) சந்திக்கும்
Concyclic	ஒரு பரிதியிலுள்ள
Congruence	சர்வசமம்
Congruent	சர்வசம
Construct	அமை
Construction	அமைப்பு ; வரைவு முறை
Contact	தொடுதல்
Contact point	தொடுபுள்ளி
Converse	மறுதலை
Conversely	மறுதலையாக
Coplanar	ஒருதள ; ஒருதளத்துள்ள
Corollary	கிளைத் தேற்றம் ; துணைமுடிவு
Correspond	ஒத்திரு
Corresponding angle	ஒத்தகோணம்
Corresponding side	ஒத்த பக்கம்
Counter clockwise	இடஞ்சுழியாக
Cyclic	வட்ட
Data	எடுகோள் ; தரவு
Decagon	தசகோணம்
Deduction	பகுத்தறிமுறை
Define	வரையறு ; இலக்கணம் கூறு
Describe	வரை ; விளக்கிக் கூறு

Diagonal	மூலைவிட்டம்
Diagram	வரிப்படம் : விளக்கப்படம்
Diameter	விட்டம்
Dodecagon	பன்னிருகோணம்
Draw	வரை
Enunciation	விவரணம்
Equal in all respects	சர்வசமம்
Equiangular	சமகோண
Equidistant	சமதூர
Equilateral	சமபக்க
Equivalent	சமம்
Escribe	வெளியேவரை
Extremities	முனைப்புள்ளிகள்
Rectilineal figure	நேர்க்கோட்டு உருவம்
Regular figure	ஒழுங்கு உருவம்
Figures similar	ஒத்த உருவங்கள்
Heptagon	எழுகோணம்
Hexagon	அறுகோணம்
Homologous	வைப்பொத்த
Hypotenuse	கர்ணம்
Hypothesis	கற்பிதக் கொள்கை
Hypothetical construcion	கற்பித அமைப்பு
Identical	சர்வசம ; முழுதும் ஒத்த
Image	பிம்பம் ; எதிருருவம்
Point at infinity	அனந்தப் புள்ளி
Inscribe	உள்ளே வரை
Intercept	வெட்டுத்துண்டு : குறுக்கீடு
Point of Intersection	வெட்டுப்புள்ளி
Intersection	வெட்டுதல்
Irregular	ஒழுங்கற்ற
Isosceles	இருசமபக்க
Locus	நியமப்பாதை : இயங்குவரை
Median	மையக் கோடு, நடுக்கோடு
Nine point circle	ஒன்பது புள்ளிவட்டம்

Nonagon	நவகோணம்
Normal	குத்துக்கோடு : லம்பம்
Orthocentre	செங்கோட்டு மையம், லம்ப மையம், குத்துச் சந்தி
Octagon	எண்கோணம்
Pair	இணை, ஜதை
Parallel	ஒரு போகு, சமாந்தர, இணை
Parallelogram	இணைகரம்
Pedal	பாத
Pedal line	பாதக்கோடு
Pedal triangle	பாத முக்கோணம்; செவ்வடி முக்கோணம்
Pentagon	ஐங்கோணம்
Perimeter	சுற்றளவு
Perpendicular	செங்குத்துக் கோடு ; லம்பம்
Perpendicular bisector	மையக்குத்துக் கோடு
Plane	தளம்
Polygon	பலகோணம்
Postulate	ஒப்புக்கோள்
Produce	நீட்டு
Property	தன்மை
Protractor	பாகைமானி
Quadrilateral	நாற்கரம்
Ratio	விகிதம் ; தகவு
Radius eircum	சுற்று வட்ட ஆரம்
,, In	உள் வட்ட ஆரம்
Rectangle	செவ்வகம்
Rectilineal figure	நேர்க்கோட்டு வடிவம்
Reductio ad absurdam	அபத்த முடிவு
Regular	ஒழுங்கான
Rhombus	சாய்சதுரம்
Secant	வெட்டுக்கோடு ; வெட்டு வரை
Sector	வட்டக்கோணப்பகுதி
Segment	நாண் (வெட்டுத்துண்டு)

,, Alternate	ஒன்றுவிட்ட துண்டு
,, Major	பெருந்துண்டு
,, Minor	சிறு துண்டு
,, (of a circle)	வட்டத்துண்டு
,, st. line	நேர்க்கோட்டுத் துண்டு
Semi circle	அரை விட்டம்
Side	பக்கம்
Similar	வடிவொத்த
Similarity	வடிவொப்புமை
Similitude	வடிவொப்புமை
Subtend	எதிர்கொள்
Superposition	மேற்பொருத்த வைத்தல்
Supplementary	மிகை நிரப்பும்
Tangent	தொடுகோடு ; தொடுவரை
Theorem	தேற்றம்
Transversal	குறுக்குவெட்டி
Trapezium	சரிவகம்
Triangle	△, முக்கோணம்
,, Acuteangled	குறுங்கோண முக்கோணம்
,, Equilateral	சமபக்க முக்கோணம்
,, Excentral	வெளிமைய முக்கோணம்
,, Isosceles	இருசமபக்க முக்கோணம்
,, Right angled	செங்கோண முக்கோணம்
,, Scalene	அசமபக்க முக்கோணம்
Trisect	முச்சமக் கூறிடு
Vertically opposite	குத்தெதிர்
Vertex	கோண உச்சி, முனை

பாகம் IV—இருபரிமாண பகுமுறை*

வடிவக் கணிதம்

(Analytical Geometry of two Dimensions)

அல்லது ஆயவடிவக் கணிதம்

(Coordinate Geometry)

முகவுரை

1. பகுமுறை வடிவக் கணிதத்தில் வடிவங்களின் பண்புகளை இயற்கணித முறைகளை யுபயோகித்துப் படிக்கிறோம். வடிவமென்பது ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை (வளைவரை : curve) யாலாகியது என்னுங் கருத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். ஒரு புள்ளியின் நிலையை யிரண்டு தொலையெண்களால் குறிப்பிட்டு, அதனை யொரு நிபந்தனையுட் படுத்து இயக்குமிடத்து வரும் பாதையே நியமப்பாதையாகும். அந்நிபந்தனையோர் இயற்கணித சமன்பாடாகக் கொள்ளப்படும். இதனை யாராய நாம் எய்தக் கிடக்கும் வடிவங்களின் பல்வகைப் பண்புகள் வெளியாகும்.

*வடிவக் கணிதத்தின் பண்புகளைத் தொகுமுறையிலோ (Synthetic Method), அல்லது பகுமுறையிலோ (Analytical Method) ஆராயலாம். இவ்வாராய்வு முறைக்கேற்பத் தொகுமுறை வடிவக்கணிதம் என்றும் பகுமுறை வடிவக்கணித முறையென்றும் இருபிரிவுகள் உளவாகும். ஏற்கெனவே இருபரிமாணத் தொகு முறை கணிதத்தில் (Twodimensional Synthetic Geometry) வடிவங்களின் பண்புகளைப் பார்த்தனம். இப்பொழுது அம்முறைக்கு வேறான பகுமுறையில் வடிவக் கணிதத்தை யாராயப் புகுவோம்,

இவ்வாறு, நேர்க்கோடு, வட்டம் முதலாகிய வடிவங்களின் பண்புகள் இயற்கணித சமன்பாடுகளைக் கொண்டு ஆராயப்படும். இம் முறையை டேக்கார்ட் (Descartes) என்னும் பிரஞ்சு கணிதப் பேரறிஞர் முதன் முதலில் வகுத்தமைத்தார்.

இடேக் கார்டால் அமைக்கப்பட்டமையால் இதற்குக் **கார்டீஷியன்** (Cartesian) முறை யென்னும் பெயர் வழங்குவதாயிற்று. இதில் இயற்கணிதத்தில் வரும் தத்துவங்கள் பெரும்பான்மையாகப் பயிலுவதால், இஃது **இயற்கணித வடிவக்கணிதம் அல்லது இயல் வடிவக் கணிதம்** (Algebraic Geometry) எனவும் வழங்கப்படுகிறது.

2. செவ்வக அச்சுத்தூரங்கள் (Rectangular Coordinates)

X′OX, Y′OY என்ற இரு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் ஒன்றை யொன்று செங்குத்தாக ஊடறுத்துக் கொண்டு நிற்கும் படிவரைக.

சாதாரணமாக, X′OX கிடைக்கோடு அல்லது படுக்கைக் கோடாகவும் Y′OY நிலைக்குத்துக் கோடாகவும் (Vertical) அமையும்படி வரைவது வழக்கம்.

X′OX ஆவது X ஆயம் அல்லது X அச்சு என்றும், Y′OY ஆவது Y ஆயம் அல்லது Y-அச்சு எனப்படும்.

X அச்சும் Y அச்சும் சந்தித்து ஊடறுத்துக்கொள்ளும் இடம் ஆதி (Origin) எனப்படும்.

X′OX லும், அதற்கு ஒரு போகாக நிற்கும் நேர்க்கோடுகளிலும் OX திசை வழியே கொள்ளப்படும் அளவைகள் தனராசி (Positive) யாகவும், OX′ திசைவழியே கொள்ளப்படுவன ருணராசி (Negative) யாகவும் கருதப்படும்.

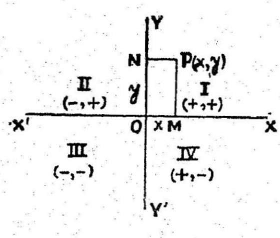
இதைப்போலவே, Y′OY யிலும் அதற்கு ஒரு போகாக நிற்கும் நேர்க் கோடுகளிலும் OY திசைவழியே கொள்ளப்படுவன தனராசி யாகவும், OY′ திசைவழியே கொள்ளப்படுவன ருணராசியாகவும் கருதப்படும்.

X'OX, Y'OY என்னும் இரண்டு அச்சுகள் அல்லது ஆயங்கள் அவை பொருந்தியுள்ள சமதளத்தை நான்கு கால்வட்டப் பகுதிகளாகப் (Quadrants) பிரிக்கக் காண்கின்றோம்.

அதே தளத்தில் உள்ள P என்ற புள்ளியின் வழியாக X'OX, Y'OY என்னும் ஆயங்களுக்கு முறையே PN, PM என்ற ஒருபோகு கோடுகள் (Parallels) வரைக. அச்சுகள் செங்குத்தாக வரையப் பட்டிருப்பதால் PM, PN கள் முறையே X'OX க்கும், Y'OY க்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும்.

P என்ற புள்ளியை நிர்ணயிக்க 2 அளவுகள் தேவைப்படும். அதாவது Y அச்சிலிருந்து X அச்சுக்கு ஒருபோகாகவுள்ள NP ன் அளவும், திசையையொட்டி, அதன் இராசிக் குறியும், இதேபோல் X அச்சிலிருந்து Y அச்சுக்கு ஒரு போகாகவுள்ள MP ன் அளவும், குறியும் தெரிந்துகொண்டால், P என்ற புள்ளியைச் சரியாக நிர்ணயிக்கலாம். இந்த NP, MP அல்லது OM, MP யின் அளவுகளும் திசையொட்டியவற்றின் குறிகளும் P நிற்குமிடத்தை நிர்ணயிக்கப் போதுமானவையாகும்.

இவற்றுள் X ஆயத்திற்கு ஒரு போகான OM, P ன் X-ஆயத் தொலை (X Coordinate) எனப்படும். இதைப் P யின் கிடை அச்சுத் தூரம் (abscissa) என்றுங் கூறுவர்.



Y ஆயத்திற்கு ஒரு போகான MP யானது இவ்வாறே Y ஆயத் தொலை யெனப்படும். இதை P யின் நிலை அச்சுத்தூரம் (ordinate) என்றுங் கூறுவர். இந்த ஆயத் தொலைகள் (^{x}p, ^{y}p) என்றும் எழுதப் படும். எனவே, **P** என்னும் புள்ளி (x, y) என்று குறிக்கப்படலாயிற்று. **ஆதியின் ஆயத்தொலைகள் (0,0) ஆதலை யறிக.**

ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் எந்த மதிப்பையுங் கொள்ளலாம். அத் தொலைகளின் இராசிக குறிகள் அவை அமையும் கால்

வட்டங்களை யொட்டிப் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி யறியப்படும். இங்ஙனம், ஒரு புள்ளியை யிரண்டு ஆயத்தொலைகளைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப் படுமாதலால் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளிருப்பின் அவற்றை (x_1, y_1); (x_2, y_2) ......; என்னும் அச்சுத் தொலைகளால் குறிப்பர்.

குறிப்பு 1: அச்சுகள் செங்குத்தாக வரையப்பட வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆயினும், செவ்வக அச்சுகளை மேற்கொண்டால், கணக்கீடுகளில் வாய்பாடுகளும், பலன்களும் எளிய முறையில் உருவாகும். இச்செவ்வ்க அச்சமைப்பு கார்டியன் முறையை யொட்டிய தாகும். ஆகவே இது செவ்வகக் கார்டியன் முறை (Retangular Cartesian System) எனப்படும்.

குறிப்பு 2: கீழே வரும் அத்தியாயங்களில் தேற்றங்களின் நிருபணம் சாதாரணமாக முதல் கால் வட்டப் பகுதிகளில் வரைந்த படங்களிலிருந்து காணப்படும். ஆயினும், ஆயத்தொலைகளுக்கு உரிய குறிகளையும் எடுப்பின், சமதளத்தில் வ்ரையக்கூடிய எல்லாப் படங்களுக்கும் தேற்றங்களின் நிருபணம் பொருந்தும்.

உதாரணமாக ஒரு நேர்க்கோட்டில் O, M, N என்பவை ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளானால்,

(i) $MN = -NM$

(ii) $MN = ON - OM$

என்ற விவரணம் கோட்டில் O, M, N என்ற புள்ளிகளின் எல்லாநிலை களுக்கும் பொருந்தும்.

குறிப்பு 3: மாணவர்கள் வெவ்வேறு கால்வ்ட்டப்பகுதியில் படங்கள் வரைந்து ஒவ்வொரு தேற்றத்தின் உண்மையையும் அனைத்துப் படங்களுக்கும் பொருந்தும் என்று காணவேண்டும்.

பயிற்சி

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளைக் குறி:

$$(-2, 3): \quad (-4, -5): \quad (3, 2): \quad (1\tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{4})$$

2. ABC என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் நிற்கும் மூன்று புள்ளிகளாயின், $AB+BC+CA=0$ என்ற உண்மையானது நேர்க்கோட்டில் இடம் பெறும் A, B, C ன் எல்லா நிலைகளுக்கும் ஏற்புடையதாகுமெனக் காண்பி.

I. தொலைவுகள், விகிதங்கள், பரப்பளவுகள்

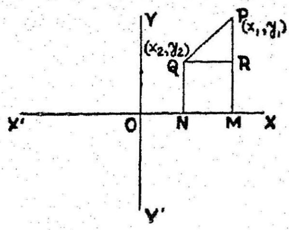
(Distances, Ratios and Areas)

1. இருபுள்ளிகளின் இடைப் பட்ட தொலை

$P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்ட 2 புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

PQன் தூரத்தைக் கணக்கிட சூத்திரம் காணல் :

PM, QN, QRஇவற்றைப் படத்திற்காண்பதுபோல ஆயங்களுக்கு ஒருபோகாக வரை.



$$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$$

$$RP = MP - MR = MP = NQ = y_1 - y_2$$

$\angle QRP = 90^\circ$ ஆகும்

$\therefore$ QRP என்னும் செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$PQ^2 = QR^2 + RP^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y)^2}$$

கிளை :

ஆதியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ன் தொலை

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

விளக்க மாதிரிகள் :

மாதிரி 1. $A(1, -2)$, $B(3,2)$; $C(6,8)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள என நிறுவுக. $AB : BC$ன் விகிதத்தையும் காண்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினு)

முதற்படியாக ஆயங்களை வரைந்து புள்ளிகளைக் குறி

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{(6-1)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$AB + BC = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad AB + BC = AC$$

ஆதலின், A, B, C ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன

மேலும், $AB : BC = 2\sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 2 : 3$

மததிரி 2: $(0, -1)$; $(2, 1)$: $(0, 3)$; $(-2, 1)$ என்ற புள்ளிகளால் அமைந்தபடம் ஒரு சதுரமாகுமென நிறுவுக :

முதற்படியாக, ஆயங்களைவரைந்து புள்ளிகளைக் குறிக்க.

$A(0, -1)$; $B(2, 1)$; $C(0, 3)$; $D(-2, 1)$ எனக் கொள்ளின்

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$CD = \sqrt{(0+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$DA = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

மேலும் $AC = \sqrt{(0-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16} = 4$

$$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 = 8 + 8 = 16$$

$$AC^2 = 4^2 = 16$$

ஆதலின் $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore \quad \angle ABC$ ஒரு செங்கோணம்

AB=BC=CD=DA என அமைவதாலும், ∠ABC ஒரு செங் கோணம் ஆதலாலும், ABCD ஒரு சதுரமாகும்.

குறிப்பு : AB=BC=CD=DA எனக் காட்டியபின். AC=BD என நிறுவினால் ABCD ஒரு சதுரமென ஆகும்.

பயிற்சி 1·1

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் இணைப்புள்ளிகட்கும் (pair of points) இடைப்பட்ட தொலை வினைக் காண்க :—

(i) (2,−1); (−3,4). (ii) (1,3); (2,5) (iii) (0,−2); (−3,1)

(iv) (−1,−3); (−5,−4)

[விடை : (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) $3\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{17}$]

2. (9, 3); (7,−1); (1,−1) என்ற புள்ளிகள் (4, 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி : முதன் மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

[விடை : 5]

3. (i) (2, 4); (2, 6); $(2+\sqrt{3}, 5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(ii) (1, 1); (4, 5); (0, 8); (−3, 4) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த படம் ஒரு சதுரமாகுமெனக் காண்பி.

(iii) (2,−2); (8,4); (5,7), (−1, 1) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த வடிவம் ஒரு செவ்வகம் என நிரூபி.

(iv) (1, 2); (2,−1); (5, 3); (4, 6) என்ற புள்ளிகளால அமைந்த வடிவம் ஒரு இணைகரம் (parallelogram) எனக்காண்பி.

(v) (4, 2); (2,−2); $(3+2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணம் எத்தன்மையது?

4. (−2, 5); (3,−4), (7, 10) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணமென நிறுவுக.

5. (5, 2) ; (6, —15) என்ற புள்ளிகள் ஆதியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிர்கொள்கின்றன என நிரூபி.

6. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருக்குமெனவும், AB ஐ C எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனவும் காண்க:

(i) A(1, 3) ; B(2, 7) ; C(—2, —9)

[விடை 3 : 4 புறம்]

(ii) A(1, 1) ; B(3, —1) ; C(—2, 4)

[விடை 3 : 5 புறம்]

7. பின்வரும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையத்தின் (circumcentre) ஆயங்கள் யாவை?

(i) (—2, 3) ; (2, —1) ; (4, 0)

[விடை: 3/2, 5/2]

(ii) (1, 3) ; (2, —4) ; (—3, 1)

[விடை: $\frac{1}{3}$, —2/3]

8. (1, —2) ; (—2, 3) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளி சம தூரத்தில் இருக்கிறது. ஆதியிலிருந்து அதன் தூரம் $2\sqrt{2}$. அந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் யாவை?

[விடை: (2, 2) அல்லது ($\frac{46}{17}$, $\frac{14}{17}$)]

9. ஒரு சதுரத்தின் எதிர் முனைகளின் அச்சுத்தூரங்கள் (2, 5) ; (6,1) ஆனால், அதன் பக்கத்தின் நீளம் என்ன?

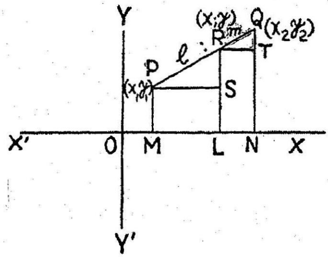
[விடை: 4]

(10) (1, 1) ; (—1, —1) ; (x, y) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணம் சமபக்கமாயின் x, y ன் மதிப்பினைக் காண்க.

[விடை; $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ அல்லது $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$]

2. ஒரு நேர்க்கோட்டை கொடுத்துள்ள விகிதப்படி பிரித்தல்:

$P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காணல்



R என்ற புள்ளி PQ ஐ $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

R ன் ஆயத்தொலைகளைக் காணவேண்டும். R ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனக் கொள்க.

PM, QN, RL இவற்றை படத்திற் காண்பது போல் y அச்சுக்கு ஒரு போகாகவும், PS, RT, x அச்சுக்கு ஒரு போகாகவும் வரை.

$$PS = ML = x - x_1 ; \quad RT = LN = x_2 - x$$

$$SR = y - y_1 ; \quad TQ = y_2 - y$$

PSR, RTQ வடிவொத்த (Similar) முக்கோணங்கள் ஆதலின்

$$\frac{PS}{RT} = \frac{SR}{TQ} = \frac{PR}{RQ}$$

அஃதாவது, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{l}{m}$

$$\therefore \quad m(x - x_1) = l(x_2 - x)$$

$$\therefore \quad mx + lx = lx_2 + mx_1$$

$$\therefore \quad x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$$

இது போன்றே $y = \dfrac{ly_2 + my_1}{l + m}$

$\therefore$ R ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \dfrac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$

குறிப்பு :— PQ என்ற கோட்டில் R புறத்தே இருப்பின், PR, RQ வேறுபட்ட குறியுடையனவாய் இருக்கும். ஆதலின் PR : RQ என்ற விகிதம் $l:-m$ அல்லது $-l:m$ என்று கொள்ள வேண்டும்.

கிளை 1

(x_1, y_1): (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப் புள்ளியின் ஆயஎண்கள் $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

கிளை 2

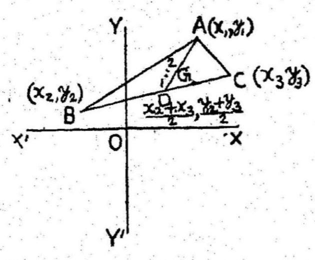
(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுமையம் அல்லது மையக்கோட்டுச்சந்தி (Centroid) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ஆகும்.

A (x_1, y_1); B (x_2, y_2); C (x_3, y_3) எனக் கொள்வோம்.

D, BCயின் மையப்புள்ளி ஆனல், Dயின் ஆயஎண்கள் $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ ஆகும். மையக்கோட்டுச் சந்தியை G எனக் குறிப்பிடுவோம். G, AD ல் அமையும்.

மேலும் AG : GD=2 : 1 ஆகும்.

∴ G ன் ஆயஎண்கள்



$$x=\frac{1.x_1+2.\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}; y=\frac{1.y_1+2.\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

மாதிரி ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று அடுத்தடுத்த முனைகள் (8,5); (4,7); (−5,5) என்ற புள்ளிகளாகும். அந்த இணைகரத்தின் நான்காவது முனையின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரிவினா)

A (8,5); B (4,7); C (−5,5) என்றும், நான்காவது முனை D (x, y) என்றும் கொள்க.

ACயின் மையப்புள்ளி $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

BDயின் மையப்புள்ளி $\frac{x+4}{2}, \frac{y+7}{2}$

ABCD ஒரு இணைகரமாதலின், AC, BD ஒன்றையொன்று இரு சமபாகமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன,

(அ-து) AC, BD இவற்றின் மையப்புள்ளி ஒன்றே.

$\therefore \quad \frac{x+4}{2} = \frac{3}{2}; \quad \frac{y+7}{2} = 5$

∴ இணைகரத்தின் நான்காவது முனை (−1, 3) ஆகும்,

பயிற்சி 1·2

1. (i) A (−1,−3); B (2,4) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை 4 : 3 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளும், புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

[விடை: $(\frac{5}{7}, 1)$; (11,25)]

(ii) P (−1,2); Q (4,−5) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை 2 : 3 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளும், புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

[விடை: $(1, -\frac{4}{5})$; (−11,16)]

2. A (2,4); B (−4,6); C (6,0) என்ற புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனின், BCயின் மையப்புள்ளியாக Dன் ஆயத்தொலைகள் யாவை? ADஐ 2 : 1 விகிதத்தில் உள்ளும், புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

[விடை: D (1,3); $(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$; (0,2)]

3. A(1,2): B(3, —1) என்னும் புள்ளிகளைச்சேர்க்குங் கோட்டில் C என்னும் புள்ளி உள்ளது AC=3AB ஆனால், Cன் ஆயத் தொலைகள் யாவை?

[விடை : (7, —7)]

4. (4,2), (2, —2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை இரு சமக்கூறிடும் புள்ளி (—1,4): (5, —2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை முச்சமக் கூறிடும் எனக் காண்பி.

5. (1,2); (5,4) புள்ளிகளைச்சேர்க்கும் கோட்டினையும், (—5, —1), (3,3) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினையும் (7,5) புள்ளி ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனக் காண்பி.

6. (i) (—6,8); (8, —6) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

[விடை : $(-\frac{5}{2},\frac{9}{2};)$ (1,11); $(\frac{9}{2},-\frac{5}{2})$]

(ii) அதே கோட்டினை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் யாவை?

[விடை : $(-\frac{4}{3};\ \frac{10}{3})$ $(\frac{10}{3},-\frac{4}{3})$]

7. (1,2); (2, —1); (5,3); (4,6) என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த படம் ஒரு இணைகரமென நிறுவுக.

8. (8,2); (4,10); (—2,4); (—4, —4) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைகளாகும். எதிர்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளும், மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடும் ஒன்றையொன்று இருசமபாகமாக வெட்டிக்கொள்ளுமென நிறுவுக.

9. (1,3); (7, —4); (—1, —3) என்ற புள்ளிகள் ஒரு முக் கோணத்தின் உச்சிகள் எனின்,

(i) அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் என்ன?

[விடை : (7/3—4/3)]

(ii) அம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடு

(iii) அம்முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகளின் (medians) நீளங்களைக் கணக்கிடு.

(iv) மையப் புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பக்கங் களின் நீளங்களையும் கணக்கிடு.

10. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் (3, −1), (−2, 3), அதன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆதி எனின், மூன்றாவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

11. (−7, −3); (5, 10) ஒரு இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த முனைகளாகும் அதன் மூலை வரைகள் (4, 2) புள்ளியில் வெட்டிக்கொண்டால், எஞ்சிய இரு முனைகளின் ஆயத்தொலைகள் யாவை?

12. (2, 1); (−1, 1); (−5, 3) என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகளாயின், (−1, 1) புள்ளிக்கு எதிரிலுள்ள நான்காவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

13. AB என்னும் கோட்டில் உள்ள P என்ற புள்ளி அக்கோட்டை AP : PB = 3 : 4 விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது. A, P யின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (−1, 2); (3, −5) எனின், B யின் ஆயத்தொலைகளைக் கண்டுபிடி.

14. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் (7, 2); (1, 6). அதன் நடுக்கோட்டு மையம் (4, 6) எனின், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

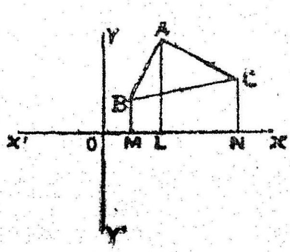
15. (1, −3); (−1, −5) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்குங் கோட்டை (7, 3) என்ற புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்று காண்க.

16. ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைச் இணைக்கும் கோடு மூன்றாம் பக்கத்தில் பாதிக்குச் சமம் என்று நிறுவுக.

3. பரப்பளவுகள்:

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்று கொள்வோம்.



OX க்கு நேர்க்குத்தாக AL, BM, CN ஐ வரை.

$\triangle ABC$ ன் பரப்பு=சரிவகம் (Trapezium) BMLA

+ ,, ALNC

− ,, BMNC

சரிவ்கம் BMLA ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}(AL+BM)\times ML=$

$\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$

இதுபோன்றே சரிவகம் ALNC ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)$

,, ,, BMNC ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)+\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3)$$

இதனைச் சுருக்கின்

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$

$$=\frac{1}{2}\ \{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

கிளை 1 :

$\triangle AOB$ ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$

கிளை 2 :

(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியம் ஆனால், இப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிருக்கும்.

கிளை 3 :

ABCD என்ற நாற்கரத்தின் பரப்பு$=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4)$$

குறிப்பு: ஒரு படத்தை சுற்றிவரும் பொழுது அப்படம் இட மிருப்பின் பரப்பின் அளவு தன எண்ணுகவும், வலமிருப்பின் ரிண எண்ணுகவும் கருதப்படுவது வழக்கம்.

ஒரு படத்தின் பரப்பைக் காண்பதற்கு முன், அதன் மூலைகளைக் குறித்து அந்த உச்சிகளின் வரிசைக் கிரமம் இடஞ்சுழியாக (anticlockwise) க் கொண்டால் அதனுல் ஏற்படும் பரப்பளவு தன எண்ணுக அமையும்.

மாதிரி: (2, 3) : (−3, −5) : (−1, 9) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன?

A(2, 3): B(−3, −5): C(−1, 9) எனக் கொள்ளின்,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}[2(-5-9)-3(9-3)-1(3+5)] \text{ சதுர அலகுகள்}$$

$$= -27 \text{ சதுர அலகுகள் (square units)}$$

விடை ருண எண்ணுக வருவது உச்சிகளை நாம் எடுத்துக் கொண்ட வரிசைக் கிரமம் வலஞ்சுழியாக (clockwise) அமைந்துள்ளது என்பதையே குறிக்கிறது. (புள்ளிகளைக் குறித்து சரிபார்) இதே புள்ளிகளின் வரிசைக் கிரமத்தை இடஞ்சுழியாக எடுத்திருந்தால் விடை தன எண்ணுகக் கிட்டும்—செய்து பார்.

பயிற்சி 1·3

1. பின் வரும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணங் களின் பரப்பினைக் காண்க:

(i) (1, 3) ; (−7, 6) ; (5, −1)

[விடை: 10 ச. அலகுகள்]

(ii) (1, −2) ; (−5, 1) ; (1, 4)

[விடை 18 ச. அலகுகள்]

(iii) (2, 1) ; (3, 2) ; (4, −1)

[விடை: 2 ச. அலகுகள்]

2. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பினைக் காண்க :

(i) $(-1, 6)$; $(-3, -9)$; $(5, -8)$; $(3, 9)$

[விடை : 96 ச. அலகுகள்]

(ii) $(0, 0)$; $(2, 1)$; $(1, 2)$; $(3, 3)$

[விடை : 3 ச. அலகுகள்]

(iii) $(1, 1)$; $(3, 4)$; $(5, -2)$; $(4, -7)$

[விடை : $20\frac{1}{2}$ ச. அலகுகள்]

3. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் என நிறுவுக.

(i) $(2. 3)$; $(4, 1)$; $(7, -2)$

(ii) $(1, 8)$; $(3, 0)$; $(4. -4)$

(iii) $(1, 4)$; $(-1, 10)$; $(2, 1)$; $(4, -5)$

(iv) $(a, b+c)$; $(b, c+a)$; $(c, a+b)$

4. $(3, 2)$; $(1, 3)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில், (x, y) என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளி இருப்பின், x, y இவற்றின் தொடர்பு என்ன ?

[விடை : $x+2y=7$]

5. $(x_1, 3)$; $(-2, 3)$; $(4, -5)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 40 சதுர அலகுகள் (square units) எனின், x-ன் மதிப்பென்ன ?

[விடை : 8 அல்லது -12]

6. $(1, 8)$; $(3, 0)$; $(a, -4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைந்தால், 'a' ன் மதிப்பென்ன ?

[விடை : 4]

II. இயங்கு வரைகளும் அவற்றின் சமன்பாடுகளும்

Loci and their equations.

1. ஒரு புள்ளி ஒரு விதிக்கிணங்க பல நிலைகள் எய்தினால், அப் புள்ளியின் பல நிலைகள் ஓர் இயங்கு வரையில் அமையும். அப்புள்ளியின் x, y ஆயத்தொலைகளை ஒரு சமன் பாட்டினால் குறிப்பிட முடியும். இச் சமன்பாடு அந்த புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு எனப்படும், இச் சமன்பாடு அந்த இயங்குவரையில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளுக்குப் பொருந்தியும், ஏனைய புள்ளிகளுக்கு பொருத்த மின்றியும் காணப்படும். இந்த சமன் பாட்டினை ஆராய்ந்தால், அது குறிக்கும் நியமப் பாதையின் பண்புகள் வெளியாகும்.

குறிப்பு: தாறுமாறுக உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளுக்கு ஒரு சமன்பாடு காணுதல் இயலாது.

2. கீழ்வருவனவற்றை நிரூபி:

(i) x ஆயத்தின் சமன்பாடு $y=0$.

(ii) x ஆயத்தோடு ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு $y=c$, [c என்பது ஒரு மாறிலி]

(iii) y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x=0$,

(iv) y ஆயத்தோடு ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$, [c என்பது ஒரு மாறிலி].

(v) XOY கோணத்தின் சமவெட்டி $y=x$

(vi) X′OY கோணத்தின் சமவெட்டி $y=-x$

3. **விளக்க மாதிரி :** $(-1,2)$, $(2,-1)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை $2:1$ விகிதத்தில் இருப்பின் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

இவ்விதிக்கிணங்கிய புள்ளிகளில் ஒன்று $P(x, y)$ என்று கொள்க. கொடுத்த புள்ளிகள் முறையே A, B என்று குறிப்பிடு

$P(x, y)$ க்கும் $A(-1, 2)$க்கும் உள்ள தொலை $=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$P(x, y)$ க்கும் $B(2, -1)$ க்கும் உள்ள் தொலை $=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

கணக்கின்படி, $PA : PB=2 : 1$

(அ-து) $PA=2\ PB$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கங்காண,

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4\ \{(x-2)^2+(y+1)^2\}$$

இதைச் சுருக்குமிடத்து, $x^2+y^2-6x+4y+5=0$ எனவரும்.

பயிற்சி 2

1. $(3,-4)$; $(-1,2)$ புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளி யொன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனின், x, y இடை உள்ள சம்பந்தத்தைத் குறிக்கும் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $3x+2y=1$]

2. $(-2,3)$ புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை 5 ஆயின; அதன் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு $x^2+y^2+4x-6y-12\ \ 0$ என்று காண்பி.

3. $(4,-5)$; $(3,2)$ புள்ளிகளுக்குச் சமதொலைவில் இருக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை $x-y=2$ என்று நிறுவுக.

4. $(0, 2)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலை, t ஆயத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தொலையைப்போல் மும்மடங்கு ஆனல், அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு $x^2-8y^2-4y+4=0$ என நிறுவுக,

5. A (a, o) ; B $(-a, o)$ நிலைப்புள்ளிகள். பின்வரும் விதிகளின் படி இயங்கும் P புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன் பாட்டினைக் காண்க ;

(i) $PA^2 - PB^2 = K.$

[விடை ; $4ax + K = 0$]

(ii) $PA^2 + PB^2 = 2K^2$

[விடை : $x^2 + a^2 = K^2$]

(iii) $PA = K \cdot PB$

[விடை : $(x-a^2) + y^2 = K^2 \ \{(x+a^2) + y^2\}$]

6. ABC என்ற முக்கோணத்தின் முனைகளான A, B முறையே $(-2, 3)$; $(4, -5)$ ஆகும். C வழியே செல்லும் மையக் கோட்டின் நீளம் 5 ஆனால், C யின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

[விடை : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$]

III. நேர்க்கோடுகள்

1. ஒரு நேர்க்கோட்டின் 'சாய்வு வீதம்' (Slope or Gradient)

AB என்ற ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்தை A என்னும் புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B என்னும் புள்ளியிலும் சந்திக்கட்டும். x ஆயத்திற்கு மேல் பகுதியில், அதே நேர்க்கோட்டில் P என்ற புள்ளியைக் குறி. AX லிருந்து இடஞ்சுழியாக $\angle XAP$ ஐ அளந்து, θ என்று குறிப்பிடு. x ஆயத்துடன் AB ன் சாய்வு (inclination) $\angle XAP \equiv \theta$ எனப்படும்.

$\tan\theta =$ சாய்வு வீதம் (gradient or slope) எனப்படும்.

$\tan\theta = m$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

2. ஒரு புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு நகருங்கால் அது ஒரு வளைவரையில் (curve) அமையும். அவ்வளை வரையில் உள்ள புள்ளிகளின் x, y ஆயத்தொலைகள் வெவ்வேறு ஆயினும், அப்புள்ளிகள் ஒரு விதிக் கிணங்க அமைவதால், அவைகளின் ஆயத்தொலைகளுக்குள் ஒரு நிரந்தரமான சம்பந்தம் காணப்படும். இந்தச் சம்பந்தம் அந்தப் புள்ளியின் இயங்குவரை அல்லது நியமப் பாதையின் சமன்பாடு ஆகும்.

ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்க இரு கட்டுப் பாடுகள் தேவை. எடுத்துக் காட்டாக, கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரே நேர்க் கோடுதான் வரையலாம். இந்த இரு கட்டுப்பாடுகளை உணர்த்தும் வகையில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டில் தம்முள் தொடர்பற்ற இரு எண்கள் இருக்கும்.

3. ஒரு நேர்க்கோட்டை நிர்ணயிக்க அல்லது குறிப்பிட இரண்டு [illegible]வயாவதுடன் அவையே போதுமானதாகும்,

RA PUBLIC LIBR

இவ்வாறாக ஒரு கோட்டின் அம்சங்களில் கீழ்க்கண்ட யாதேனும் ஒரு வகைக் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றைக் கொண்டு கோடு நிர்ண யிக்கப்படுவதால், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டை எளிதில் காணலாம்.

(i) கோட்டின் சாய்வு வீதமும், y அச்சில் அதன் வெட்டுத் துண்டும்.

(ii) கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்.

(iii) கோட்டின் சாய்வு வீதமும், அதன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியும்.

(iv) x அச்சுடன் கூடி, கோட்டின் சாய்வு, கோட்டின் மேலுள்ள குறிப்பிட்ட புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள், கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கும் குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கும் இடைப் பட்டதூரம்.

(v) இரு ஆயங்களில் கோடு உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டு களின் அளவுகள்.

(vi) ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அளவும், அச்செங்குத்துக்கோடு x அச்சுடன் கூடி உண்டாக்கும் கோணத்தின் அளவும்.

குறிப்பு : இன்னும் வேறு வகைகளிலும் கோட்டை நிர்ணயிக்கக் கூடுமானாலும், மேலே கூறிய வகைகளே முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை.

4. கோட்டின் சமன்பாடு : 6 வகைகளில் காணல்

(i) **வெட்டுத் துண்டு—சாய்வுவீத வடிவம் :—(Intercept—slope form) ஒரு கோட்டின் சாய்வு வீதம், y ஆயததில் அது வெட்டும் துண்டு இவை வாயிலாக நேர்க் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல்:** கொடுக்கப்பட்ட AB என்ற கோடு x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வு 'θ' ஆகவும், y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் துண்டு 'c' ஆகவும் அமையட்டும்.

P(x, y) அந்தக் கோட்டில் உள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க.

P யின் நிலை அச்சுதூரமாகிய PM ஐ வரை. ON ஐ AB க்கு ஒரு போகாகவரை. அது MP ஐ N ல் சந்திக்கட்டும்.

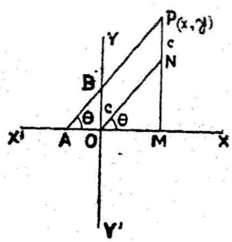
அப்பொழுது, $\angle XON=\theta$ (ஒத்தகோணம்)

$NP=OB=c$

$\therefore \quad MN=MP-NP=y-c; \quad OM=x.$

திரிகோண மிதியிலிருந்து, $\dfrac{MN}{OM}=\tan\theta$

அஃதாவது, $\dfrac{y-c}{x}=\tan\theta$



$\therefore \quad y-c=\tan\theta\,.\,x$

$\therefore \quad y=\tan\theta\,.\,x+c$

அ∴து, $y=mx+c$. இந்த சம்பந்தம் கோட்டில் உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளுக்கு பொருந்து மாகையால், இதுவே நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

கிளை 1 :

ஆதி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx$ ஆகும்.

கிளை 2 :

x ஆயத்திற்கு ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு $y=c$ ஆகும்.

[$\because \quad \theta=0; \quad \tan\theta=0;$ அஃதாவது $m=0$]

கிளை 3 ;

x ஆயத்தின் சமன்பாடு $y=0$ ஆம்.

கிளை 4 :

y ஆயத்தோடு ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$ ஆகும்.

கிளை 5 :

y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x=0$.

கிளை 6 :

$y=m_1x+c$, $y=m_2x+c$, $y=m_3x+c$ என்பன y ஆயத்தில் ஒரே புள்ளி வழிசெல்லும் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

கிளை 7 : $y=mx+c_1$, $y=mx+c_2$, $y=mx+c_3$....... என்பன ஒரு போகு கோர்டுகளாகும்.

பயிற்சி 3·1

1. பின்வரும் கோடுகளின் சாய்வு வீதங்களையும், அவை y ஆயத்தில் வெட்டும் துண்டுகளையும் காண்க.

(i) $y=-2x-3$ (ii) $2x+5y-4=0$

(iii) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4$ (iv) $\frac{x-1}{y-2}=\frac{3}{4}$

2. ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்துடன் 60° சாய்ந்து, y ஆயத்தில் வெட்டுத்துண்டு 2 அலகுகள் ஏற்படுத்துகிறது. அதன் சமன் பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $y=\sqrt{3}x+2$]

3. x ஆயத்துடன் 150° சாய்ந்து, $y=\sqrt{3}$ அலகுகள் வெட்டுத் துண்டு ஏற்படுத்தும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கண்டறிக.

[விடை : $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$]

4. ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+c$ வடிவில் உள்ளது. சமன்பாட்டில் உள்ள (i) m மாறினால் (ii) c மாறினால், நேர்க்கோடு சம தளத்தில் எவ்வாறு நகரும் எனக் காண்க.

5. $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-4$, $y=\sqrt{3}x+3$ என்ற கோடுகள் x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுகள் என்ன ? இதிலிருந்து அக்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

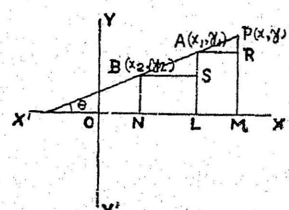
[விடை : 30°, 60°, 30°]

6. 'O' ஆதியும், A (0.10) என்ற புள்ளியுமாம், முக்கோணம் OAB சமபக்கமாக அமையும் வகையில் இரண்டாம் கால்வட்டப் பகுதியில் B என்ற புள்ளியை நிர்ணயிக்கவும். மேலும், ∠OAB ன் இருசம வெட்டியின் சமன் பாட்டினையும் காண்க.

[விடை : $(5\sqrt{3}, 5)$: $\sqrt{3}x-y+10=0$]

(ii) இருபுள்ளி வடிவம்: குறித்த இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

குறித்த புள்ளிகள் A (x_1, y_1) : B (x_2, y_2) என்று கொள்வோம். அவற்றின் வழிச்செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளில் யாதேனும் ஒன்று P (x, y) என்று கொள்க. AL, BN, PM என்ற நிலை அச்சு தூரங்கள் வரை. AR, BS இவற்றை OXக்கு ஒரு போகாக வரை.



PAR, ABS வடிவொத்த முக்கோணங்கள் என்று எளிதிற் காணலாம்

$$\therefore \quad \frac{AR}{BS}=\frac{RP}{SA}$$

இங்கு, $AR=LM=OM-OL=x-x_1$

$BS=NL=OL-ON=x_1-x_2$

$RP=MP-MR=MP-LA=y-y_1$

$SA=LA-LS=LA-NB=y_1-y_2$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

இதுவே நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு 1 : x ஆயத்துடன் AB ன் சாய்வு ‘θ’ ஆனல்,

$$\tan\theta = \tan\angle ABS = \frac{SA}{BS} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

∴ (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{\text{இரு புள்ளிகளின் } y \text{ ஆயத்தொலைகளின் வித்தியாசம்}}{\text{,, } x \text{ ஆயத்தொலைகளின் வித்தியாசம்}}$$

குறிப்பு 2 : பிறிதொரு முறை :

கோட்டின் சமன் பாடு $y = mx + c$ (i) எனக் கொள்க.

(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) இக்கோட்டில் அமைவதால்,

$$y_1 = mx_1 + c \text{ (ii)}$$

$$y_2 = mx_2 + c \text{ (iii) ஆகும்}$$

$$\text{(i)} - \text{(ii)}, \; y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ (iv)}$$

$$\text{(ii)} - \text{(iii)}, \; y_1 - y_2 = m\,(x_1 - x_2) \text{ (v)}$$

$$\frac{\text{(iv)}}{\text{(v)}}, \; \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

குறிப்பு 3: ஆதியையும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியையும் சேர்க்குங் கோட்டின் சமன்பாடு $y = \dfrac{y_1}{x_1}\, x$ ஆகும்.

குறிப்பு 4 : (x_3, y_3) என்ற புள்ளி A (x_1, y_1) ; B (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டில் அமைய, AB ன் சமன்பாட்டில், x, y க்குப் பதிலாக x_3, y_3 யைப் பிரதியிட்டால் இருபக்கமும் சமனுற்று நிற்கவேண்டும்.

∴ தேவையான நிபந்தனை $\dfrac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2}$

இந்த 3 புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டிலமையத் தேவையான நிபந்தனையை AB ன் சாய்வு வீதம், AC யின் சாய்வு வீதம் ஆகியவற்றைச் சமமாக்கியும் பெறலாம்.

பிறிதொரு முறை : இப்புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைவதால் இவைகளாலேற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியத்திற்குச் சமமாகும். இவ்வாறும் தேவையான நிபந்தனையைப் பெறலாம் [வெவ்வேறு முறைகளினால் கிடைக்கும் பலன் ஒன்றேயென்று சரிபார்]

பயிற்சி 3·2

1. பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

(i) (2, 3) : (7, 5) (ii) (−2, 3) ; (7, −15)

(iii) (3, −4) ; (−1, 6) (iv) (−3, −6) ; (−2, −1)

ஒவ்வொரு கோட்டின் சாய்வு வீதத்தையும் கணக்கிடு.

2. (5, 1) ; (1, −1) ; (11, 4) என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைகின்றன என நிரூபி. அக்கோட்டின் சாய்வு வீதத்தையுங் காண்க.

[விடை : $\frac{1}{2}$]

3. (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் (x_3, y_3) நிற்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனையைக் காண்க.

[விடை : $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$]

4. (2, 3); (5, 2); (6, 5) என்ற புள்ளிகளாலமைந்த முக்கோணம் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணமாமென நிறுவி, அதன் கர்ணத்திற்குரிய சமன்பாட்டையும் அமைக்க.

[விடை : $x-2y+4=0$]

5. (−2, −1) ; (1, 0) ; (4, 3) ; (1, 2) என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் முனைகளென நிறுவுக.

6. (4, 5) என்ற புள்ளி வழியே சென்று y அச்சில் $+3$ வெட்டுத் துண்டினை யேற்படுத்தும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $x-2y+6=0$]

7. (2, 3) என்ற புள்ளி வழியே சென்று x ஆயத்தில் -4 வெட்டுத் துண்டு செய்யும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $5x-8y+20=0$]

8. (3, 3); (2, -7) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் சாய்வு வீதத்தையும் எழுதுக.

[விடை : $10x-y=27$; 10

9. A(-1, -1); B(3, -1); C(5,5) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளாயின், A வழியே செல்லும் மையக்கோட்டின், சாய்வு வீதத்தைக் காண்க. [விடை : $\frac{3}{5}$]

10. (5, 3); (3, 1); (4, 11) என்ற புள்ளிகளாலமைந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குரிய சமன்பாடுகளையும், மையக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

11. P(a, b) என்ற புள்ளி $6x-y=1$ என்னும் கோட்டிலும் Q(b, a) என்ற புள்ளி $2x-5y=5$ என்னும் கோட்டிலும் உள்ளன. PQ யை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

[விடை : $x+y=6$]

12. $3x-2y+4=0$ என்னுங்கோடு (1, -2); (-3, 8) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை எத்தகவில் பிரிக்கும் ?

[விடை : 11 ; 21]

13. (-2, 3); (3, -4) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்குங்கோடு x ஆயத்தால் எத்தகவில் பிரிக்கப்படுகிறது ?

[விடை : 3 : 4]

14. $x-y-2=0$ என்ற கோடு (3, -1); (8, 9) புள்ளிகளையிணைக்குங் கோட்டினை 2 : 3 என்னுந்தகவில் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.

15. $Ax+By+C=0$ கோடு P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினை எத்தகவுப்படி பிரிக்கும் ?

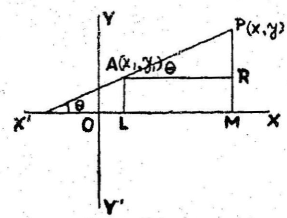
[விடை : $-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$]

16. $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=4$ கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட நீள் சதுரத்தின் மூல வரைகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை : $x-y+2=0$; $x+y-5=0$]

(iii) புள்ளிவழிச் சாய்வுநிலை வடிவம் (The point slope form)

(x_1, y_1) புள்ளி வழியே குறித்த m சாய்வு வீதத்தில் விளங்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிதல் :



கொடுத்த $A(x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் AP என்னுங்கோடு X ஆயத்திடுேடு θ கோணம் அடக்கிக்கொண்டு m சாய்வு $(\tan\theta)$ நிலையெய்தி நிற்பதாகட்டும்.

$P(x, y)$ என்பது மேற்கண்டவாறு அமைந்து நிற்கும் கோட்டின் மேல் கிடக்கும் யாதேனுமொரு புள்ளியாகட்டும்.

X ஆயத்திற்கு A, P க்களிலிருந்து AL, PM என்னுஞ் செங்குத்துக் கோடுகளையும், A யிலிருந்து PM க்கு AR என்னுஞ் செங்குத்துக் கோடொன்றினையும் வரைக. அது PM ஐ R இடத்தில் சந்திப்பதாகுக.

இப்பொழுது,

$$AR = LM = OM - OL = x - x_1$$

$$RP = MP - MR = MP - LA = y - y_1$$

$$\therefore \frac{RP}{AR} = \tan\theta$$ ($\because$ $\angle PAR = \theta$, AR ம் X ஆயமும் ஒரு போகாதலின்)

$$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1} = \tan\theta = m$$

இச் சம்பந்தம், கோட்டில் கொள்ளும் எந்தப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளுக்கும் பொருந்துமாதலால், இதுவே நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாதற்குச் செல்லும்.

பிறிதொரு முறை: கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+c$ (i) எனக் கொள்க: இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$y_1=mx_1+c$ (ii) ஆகும்

$\therefore \quad y-y_1=m(x-x_1)$ ஆகும் [(i)—(ii)]

கிளை 1 :

ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx$ ஆகும்.

கிளை 2 :

ஆதியையும், (x_1, y_1) என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு $y=\frac{y_1}{x_1}x$ ஆகும்.

பயிற்சி 3·3

1. (4, 5) என்னும் புள்ளி வழியே சென்று x அச்சுடன் $60°$ கோணத்தை யுண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை: $\sqrt{3}x-y=4\sqrt{3}-5$]

2. கீழே குறிப்பிட்ட புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லுவனவாகவும் கொடுத்த சாய்வு நிலைகளுக்குப் பொருந்த அமைந்திருப்பனவாகவும் இருக்கக்கூடிய நேர்க் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) புள்ளி (—2, 3), x ஆயத்துடன் அடக்கிநிற்கும் கோணம் $135°$

(ii) ,, (0,—3), ,, $120°$

(iii) ,, (—3,—2). ,, $150°$

(iv) ,, (1,4) ,, $45°$

(v) ,, (—5, 1) ,, $30°$

3. a க்கு என்ன மதிப்பானுலும் $y-3=a\,(x-2)$ என்ற சமன் பாட்டினுல் குறிக்கப்பட்டதொரு நேர்க்கோடு ஒரு நிலேயான புள்ளி வழியாகச் செல்லத்தக்க தாகுமென நிரூபி.

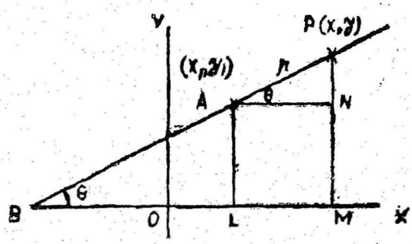
அக்கோடு (4, 5) என்ற மற்ருெரு புள்ளி வழியாகவும் செல்லுவ தானுல் a யின் மதிப்பென்ன ?

[விடை : (2, 3) : $a=1$]

(iv) சமச்சீர் வடிவம் (Symmetric Form)

(x_1, y_1) என்னும் நிலேத்ததொரு புள்ளி வழியாக θ கோணச் சாய்வில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r,$ என்னும் சமச்சீர்வடிவு கொள்ளும்.

இங்கு 'r' என்பது, அக்கோட்டிலேயே (x, y) என்னும் யாதேனு மொரு புள்ளி, (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து கண்ணுறும் தொலே வாகும்.



கொடுக்கப்பட்ட நிலேயான புள்ளி A (x_1, y_1) ஆகுக. A யின் வழியாகச் சென்று x ஆயத்தோடு θ சாய்வு கொள்ளும் கோடு AB ஆகுக.

அக்கோட்டின்மேல் (x, y) என்பதோர் யாதேனுமொரு புள்ளி $AP=r$ ஆகுமாறு நிற்பதாகக் கொள்க. X ஆயத்திற்கு PM, AL என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளேயும், MP க்கு AN என்னும் செங் குத்துக்கோட்டையும் வரைக.

அப்பொழுது $\angle PAN=\theta$;

$$AN=LM=OM-OL=x-x_1$$

$$NP=MP-MN=MP-LA=y-y_1$$

இப்பொழுது

$$\sin \theta = \frac{NP}{AP} = \frac{y-y_1}{r} \quad \ldots \quad (1) \quad \therefore \quad \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots(2)$$

$$\cos \theta = \frac{AN}{AP} = \frac{x-x_1}{r} \quad \ldots \quad (3) \quad \therefore \quad \frac{x-x_1}{\cos\theta} = r \quad \ldots(4)$$

(2), (4) ல் இருந்து $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$ (5) எனப் பெறுகின்றோம்.

குறிப்பு : (1), (3) களிலிருந்து வகுத்தல் வகையால்

$\tan\theta = \frac{y-y_1}{x-x_1}$; அதாவது $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ எனப் பெறுகின்றோம்.

∴ எனவே முன்பே அறிந்துள்ளபடி ஒரு கோட்டின் புள்ளி வழிச் சாய்வு நிலை வடிவத்தில் $y-y_1 = m(x-x_1)$ என்னும் சமன்பாடு அமையும்.

குறிப்பு 2 : 5 ல் இருந்து கருதிக்கொண்ட யாதேனுமொரு புள்ளி (x,y) க்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளி(x_1, y_1) யிலிருந்து உள்ள தொலைவு r தெரியவரின், கருதிக்கொண்ட புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ என வுணரலாம்

விளக்க வுதாரணம் : (பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

(2, 3) என்ற புள்ளி வழித்தாகிய $2y = x$ என்னும் கோட்டிற்கு ஒரு போகாயுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டை $\frac{x-2}{\cos\theta} = \frac{y-3}{\sin\theta} = r$ என்ற வடிவில் எழுதுக இதைக்கொண்டு, $5x - 7y = 14$ என்னும் கோட்டிலிருந்து (2, 3) யின் தூரத்தை $2y = x$ என்னும் கோட்டிற்கு ஒரு போகாக அளந்தறிக.

கொடுத்த புள்ளி (2, 3)யை A எனக் குறிப்பிடு.

பெறவேண்டிய கோடு $2y = x$ க்கு ஒரு போகாகும்.

அதன் சாய்வு $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \; ; \; \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

பெறவேண்டிய கோட்டின் (AP) சமன்பாடு

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt5}}=\frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt5}}=r \qquad \ldots\ldots(i)$$

கொடுத்த கோட்டின் சமன்பாடு $5x-7y=14$ ஆம்......(2)

$AP=r$, என்க. அப்பொழுது $P\left(2+\frac{2r}{\sqrt5},\ 3+\frac{r}{\sqrt5}\right)$ ஆம்.

P ஆனது கொடுத்த கோட்டின் மேலும் அமைவதால்,

$$5\left(2+\frac{2r}{\sqrt5}\right)-7\left(3+\frac{r}{\sqrt5}\right)=14$$

$$10+\frac{10r}{\sqrt5}-21-\frac{7r}{\sqrt5}=14$$

$$\frac{3r}{\sqrt5}=25 \qquad \therefore \quad r=\frac{25\sqrt5}{3}.$$

AP யின் நீளத்தை யறிய வேறு வழி :

$2y=x$ க்கு ஒரு போகாய் A(2, 3) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $(x-2)-2(y-3)=0$ அல்லது $x-2y+4=0$ ஆகும். இதை $5x-7y-14=0$ ஒரு சேர்த்து விடுவிக்க, $P(\frac{56}{3},\ \frac{34}{3})$ எனவரும். ஆகவே AP யின் தூரம்

$$=\sqrt{\left(\frac{56}{3}-2\right)^2+\left(\frac{34}{3}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{50^2+25^2}{3^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{25^2(2^2+1^2)}{3^2}}=\frac{25\sqrt5}{3}\text{ ஆம்.}$$

பயிற்சி 3·4

1. (3,2) புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு வீதம் $\frac{3}{4}$. அக் கோட்டில் A யி லிருந்து 5 அலகுகள் தூருத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

[விடை : (7, 5)]

2. (4, 1) புள்ளிவழி x ஆயத்தோடு 135° பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டை வரைக. கோட்டின் வழி, (4, 1) புள்ளியி லிருந்து $3x-y=0$ கோட்டின் தொலே யென்ன ?

[விடை : $\frac{11\sqrt{2}}{4}$]

3. (4, 1) வழியே வரையப்படும் கோடும், $3x-y=0$ என்னும் கோடும் வெட்டும் புள்ளி (4. 1)ல் இருந்து. அதன்வழியே வரையப் பட்ட கோட்டில் $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ தூரத்திலிருந்தால், அக் கோட்டின் திசையைக் காண்க.

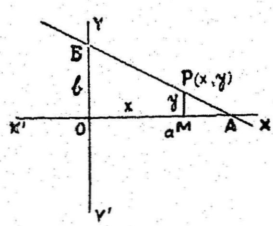
[விடை : 135°]

4. (1, 2) வழியே வரையப்படும் கோடும் $x+y=4$ என்னுங் கோடும் வெட்டும் புள்ளி, (1, 2) ல் இருந்து அதன் வழியே வரையப் பட்ட கோட்டில் $\sqrt{2}$ தூரத்திலிருந்தால், வரைந்த கோடுகளின் சாய்வு வீதங்களைக் காண்க.

[விடை :$-2\pm\sqrt{3}$]

(v) வெட்டுத்துண்டு பற்றிய வடிவம் (Intercept form)

ஆயங்களில் ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகளால் கோட்டின் சமன் பாட்டினைக் காணல்.



கொடுத்த AB என்னும் கோடு X, Y ஆயங்களை முறையே A, B என்னுமிடங்களில் சந்திப்பதனல் OA, OB என்னும் வெட்டுத் துண்டுகள் முறையே a, b அலகுகள் பெறுவனவாகுக.

இக் கோட்டில் P(x, y) என்னும் யாதேனுமொரு புள்ளியைக் குறித்து, அதிலிருந்து x ஆயத்திற்கு PM என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடு வரைக.

பிறகு, PMA, OBA என்னும் முக்கோணங்கள் ஒருபோகுக் கோடுகளால் அமைவுறுதலின் தம்மிடையே வடிவொத்தனவாகும்.

$$\therefore \quad \frac{MP}{OB} = \frac{MA}{OA}$$

அதாவது,

$$\frac{y}{b} = \frac{OA-OM}{OA} = \frac{a-x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

இத்தொடர்பு அக்கோட்டின் மேலுள்ள எப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளுக்கும் பொருந்துவதாகும். புறப்புள்ளிகள் இந்நியமத்திற்கு உட்படா. ஆதலின் மேலே வருவித்துக் கொண்ட சமன்பாடு கொடுத்த அளவுத் துண்டுகளை ஆயங்களில் வெட்டி நிற்கும் நேர்க் கோட்டிற்கு வாய்ப்பதாகும்.

பிறிதொரு முறை: A(a, 0); B(0, b) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் சமன்பாடு

$$\frac{x-a}{a-0} = \frac{y-0}{0-b} \qquad \text{[இருபுள்ளி வடிவம்]}$$

அதாவது,

$$\frac{x}{a} - 1 = -\frac{y}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

பயிற்சி 3·5

1. பின்வரும் நேர்கோடுகள் x, y ஆயங்களில் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்களை யறிக :

(i) $5x-7y=2$ (ii) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 2$ (iii) $\frac{2x-3}{4} = \frac{5y-1}{8}$

(iv) $2x+3y+5=0$ (v) $ax+by+c=0$,

2. ஒரு கோடானது x, y ஆயங்களில் முறையே $-2, 3$ என்னும் அலகுடைய துண்டுகளை உண்டாக்குமாயின் அதன் சமன்பாட்டையும், சாய்வுநிலை (slope) யையுங் காண்க. தவிர, அக்கோட்டால் இரு ஆயங்களுடைக்கிடையே அடைக்கப்பட்டு நிற்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பையும் கணித்தறிக.

3. ஒரு கோடானது $(-2, 3)$ வழிச் செல்லுங்கால் y ஆயத்தில் வெட்டும் துண்டின் அளவுக்கு மும்மடங்கு நீளமுடைய துண்டினை x ஆயத்தில் உண்டாக்கு மாறுல், அதன் சமன் பாட்டைக் காண்க.

[விடை: $x + 3y = 7$]

4. $(2, 2)$ புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு நேர்ச்கோடானது ஆயங்களில் வெட்டும் துண்டுகளின் கூட்டு நீளம் 9 அலகுகளாகுமெனின், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட இரு விடைகளையும் கண்டறிக.

[விடை: $x + 2y = 6$; $2x + y \quad 6$]

5. இரண்டு ஆயங்களுக்குள் இடைப்பட்டுக்கிடக்கும் பகுதி (x_1, y_1) என்றதனுல் சமமாகத் துணிக்கப்படுமெனின் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை} : \frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1\right]$$

6. ஒரு நேர்க்கோடானது OX ஆயத்தோடு கூடி 45° கோணத்தைப் பிறப்பித்துக் கொண்டு, $(3, -4)$ என்னும் புள்ளி வழியே செல்லுமாயின், அதனுல் ஆயங்களில் துண்டிக்கப்படும் பகுதிகளின் நீளங்களைக் காண்க.

[விடை: $7, -7$]

7. ஆயங்களின் இடைப்பட்டு, $(-2, 3)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் பகுதியை அப்புள்ளி $2 : 3$ தகவுக் கேற்பப் பிரிப்பின், அக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

[விடை: $9x - 4y + 30 = 0$]

8. $(2, 3)$ வழிச்செல்லும் கோடு, ஆயங்களை A, B என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $OA : OB = 5 : 4$ ஆனுல், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

[விடை: $4x + 5y = 23$]

9. $4x+3y=12$ என்னும் கோட்டில் ஆயங்களுக்கு இடைப் பட்ட பகுதியை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[விடை : $3y=8x$; $3y=2x$]

(vi) செங்குத்து வடிவம் (The Normal Form)

ஒரு கோட்டினது சமன்பாட்டை அதற்கு ஆதியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டையும், அச்செங்குத்துக் கோடு X ஆயத்தொடு அமைத்து நிற்கும் கோணத்தையுஞ் சார்த்திக் காணல்

சமன்பாடு காண நிற்கும் கோடு AB ஆகுக. இதற்கு ஆதி (O) யிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக்கோடு OP ஆகுக. $OL=p$ என்றும், அது X ஆயத்தோடு கொள்ளும் கோணம் α என்றும் கொள்க.

அக்கோட்டின் மேல் கண்ட P என்னும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) என்க.

P யிலிருந்து OX க்கு, PM என்னும் செங்குத்துக்கோட்டை வரைக. M லிருந்து OL க்கு MN என்னுஞ் செங்குத்துக்கோடு வரைக. MN க்கு P யிலிருந்து PK என்னுஞ் செங்குத்துக்கோடு வரைக.

இப்பொழுது OLPM என்பதொரு வட்ட நாற்கரமாகும்.

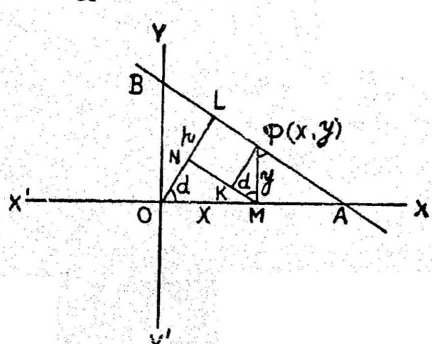
$\therefore \angle MPA =$ உள்ளெதிர் $\angle LOM = \alpha$

இனி, $\angle PMN = \angle MPA = \alpha$, (ஒன்று விட்டகோணங்களாதலின்)

Δ ONM த்திலிருந்து, $\frac{ON}{OM} = \cos\alpha$ எனப்பெறுகின்றோம்.

அதாவது $\frac{ON}{x} = \cos\alpha$

$\therefore ON = x\cos\alpha$.



$\triangle$ PKM த்திலிருந்து, $\frac{PK}{MP} = \sin \alpha$ எனப்பெறுகின்றோம்.

அதாவது, $\frac{PK}{y} = \sin \alpha$

$\therefore \quad PK = y \sin \alpha$

இப்பொழுது படத்தில் காட்டியபடி

$$p = ON + NL = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

$$\therefore \quad x \cos y + y \sin \alpha = p.$$

இத் தொடர்பானது AB யின் மேல் கொள்ளக் கிடக்கும் P என்னும் எப்புள்ளியினது ஆயத் தொலைவுகளுக்கும் பொருந்த நிற்றலின், இதுவே AB க்குரிய சமன்பாடாக அமையும் என்க

பிறிதொரு முறை :

முக்கோணம் OLA யிலிருந்து, $\frac{OA}{OL} = \sec \alpha$

$\therefore \quad OA = OL \sec \alpha = p \sec \alpha$

முக்கோணம் OLB யிலிருந்து, $\frac{OB}{OL} = \operatorname{cosec} \alpha$

$$\therefore \quad OB = OL \operatorname{cosec} \alpha = p \operatorname{cosec} \alpha.$$

$\therefore$ கோட்டின் சமன்பாடு, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$

அதாவது, $\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$

அதாவது, $\underline{x \cos \alpha + y \sin \alpha = p}$

விளக்க வுதாரணம் : $4x + 3y = 5$ என்றதனைச் செங்குத்து வடிவத்தில் எழுதி, அதற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளத்தையும் காண்க.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

$4x + 3y = 5$ என்பதனை

$\frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} x + \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} y = \frac{5}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$ என்றெழுதலாம்.

அதாவது, $\frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y = 1$

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$ எனக் கொள்ளின், $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ஆம்.

ஆகவே கொடுத்த சமன்பாடு, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$ என்றாகும்.

∴ ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடு, 1 அலகு நீளமுடையதாகும்.

பயிற்சி 3·6

பின் வரும் சமன்பாடுகளை $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ வகைக்கு மாற்றுக.

(i) $12x - 5y - 65 = 0$

(ii) $8x - 15y + 34 = 0$

(iii) $7x + 24y - 150 = 0$

(iv) $18x + 80y + 41 = 0$

ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் நேர்க் குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும, நேர்க்குத்துக் கோட்டிற்கும் x அச்சிற்கு மிடையிலுள்ள கோணத்தையும் கணக்கிடுக.

பயிற்சி 3·7

ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறித்து அமைவுறும் அறுவகைச் சமன் பாடுகளையும் ஒட்டிய பலவகைக் கணக்குகள்.

1. பின்வரும் கோடுகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்க:

(i) x அச்சுடன் 45° சாய்வு; y அச்சில் -3 அலகு வெட்டுத் துண்டு

(ii) ஆதி; $(-3, -5)$ களின் வழிச் செல்லுங்கோடு.

(iii) $(-1, -5)$; $(4, 7)$ வழிச் செல்லுங்கோடு, இக் கோட்டின் சாய்வு வீதத்தையும், இது ஆயங்களில் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளையும், ஆயங்களுக்கும் இக்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பையும் கணக்கிடுக.

(iv) x அச்சுடன் 135° சாய்வு; y அச்சில் 2 அலகு வெட்டுத்துண்டு.

(v) $(-2, 3)$ வழி; x அச்சுடன் 120° சாய்வு.

(vi) x ஆயத்தில் 5 அலகு வெட்டுத்துண்டு, $(2, -3)$ வழிச்சேறல்.

(vii) x ஆயத்தில் -3 அலகு வெட்டுத்துண்டு; y ஆயத்தில் 7 வெட்டுத்துண்டு.

(viii) $(2, 3)$ வழி; ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகள்.

(ix) $p=5; \alpha=120^\circ$

[விடை : $x-y\sqrt{3}+10=0$]

(x) $p=2; x=-45^\circ$

[விடை : $x-y=2\sqrt{2}$]

(xi) $p=3; \alpha=60^\circ$

[விடை : $x+y\sqrt{3}=6$]

(xii) $p=3; \alpha=210^\circ$

[விடை : $\sqrt{3}x+y+6=0$]

2. (3, 1); (5, −1) புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோடு ஆயங்களில் சம வெட்டுத்துண்டுகளைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

3. (1, 5); (5−3) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை (4, 6); (−1, −3) என்ற புள்ளிகளை சேர்க்கும்கோடு எத்தகவில் பிரிக்கிறது என்று காண்க.

[விடை : 11 : 27]

4. ஒரு நேர்க் கோட்டில் இரண்டு ஆயங்களுக்கு இடைப்பட்டுக் கிடக்கும் பகுதியின் நடுப்புள்ளி (−5, 4) ஆனால், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $4x-5y+40=0$]

5. ஒரு நேர்க்கோடு ஆயங்களை A, B என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. P(2,3) என்ற புள்ளி AB ஐ AP : PB - 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க

[விடை : $9x+4y=30$

6. (1, 11); (2, 15); (−3, −5) என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்க் கோட்டில் அமையும் எனக் காண்பி. அக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? அதனால் ஆயங்களில் ஏற்படும் வெட்டுத் துண்டுகளைக் கண்டறிக. இக் கோட்டிற்கும், ஆயங்களுக்கும் இடைப்பட்ட முக் கோணத்தின் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

[விடை : $4x-y+7=0; -\frac{7}{4}, 7; \frac{49}{8}$]

7. (2, 3); (−3, −4) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை இருசமக் கூறிட்டு x ஆயத்துடன் 120° சாய்வுற்றிருக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $2\sqrt{3}x+2y+1+\sqrt{3}=0$]

8. ஒரு நேர்க்கோடு x, y ஆயங்களில் தனராசி வெட்டுத் துண்டுகள் ஏற்படுத்தி $(-4, 9)$ புள்ளிவழி செல்லுகிறது. வெட்டுத் துண்டுகளின் கூட்டுத்தொகை 5 ஆனல், அக்கோட்டின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $3x+2y=6$]

5. (மேலே அங்கம் 3 (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) களில் கண்டபடி ஒரு நேர்க்கோட்டிற்குரிய சமன்பாடுகளைக் கருதுமிடத்து. அச்சமன்பாடு எந்த வடிவத்தில் குறிக்கப்பட்டாலும், அது x, y களின் ஒன்ருவது படியில் அமைந்த $ax+by+c=0$ என்ற வடிவத்தில் இருப்பதை அறியலாம்.

$ax+by+c=0$ என்ற வடிவமைந்த எச் சமன்பாடும் ஒரு நேர்க் கோட்டைக் குறித்து நிற்குமெனக் காட்டலாம்.

மாணவர்கள் இதனை வரைப்பட மூலமாக சரிபார்த்திருக்கின்றனர். பின்வருவது பகுமுறை நிருபணம் (Analytical Proof) ஆகும்.

A (x_1, y_1) என்னும் குறிப்பிட்ட புள்ளியொன்று $ax+by+c=0$ என்ற தொடர்புக்குப் பொருந்துவதாகுக.

அப்பொழுது $ax_1+by_1+c=0$ எனப்பெறுகின்ருேம். —(1)

P (x, y) என்ற வேருேர் புள்ளியானது அக் கோட்டின் மேல் உள்ளதாயின், $ax+by+c=0$ எனப் பெறுகின்ருேம் —(2)

$\therefore \quad a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ [(2)—(1) ஆல்]

$\therefore \quad \dfrac{y-y_1}{x-x_1}=-\dfrac{a}{b}=$ ஒரு மாருத எண்ணுகும்.

இது, கொடுத்த தொடர்புக்குப் பொருந்த நிற்கும் ஏதேனும் P (x, y) என்னும் புள்ளியைக் குறிப்பிட்ட A (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியோடு இணைத்து நிற்குமொரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வு நிலை யானது அக்கோட்டைப் பொருத்த மட்டில் நிலைபேருனதாகு மென்பதைக் காட்டுகின்றது. ஆகவே, நிலையானதொரு புள்ளியின் வழியாகக் குறிப்பிட்ட சாய்வுநிலையில் செல்லும் கோட்டிற்குரிய சமன் பாட்டுக்குப் பொருந்த நிற்பதொரு புள்ளி யக்கோட்டின் மேலேயே

தங்குவதாகும். ஆகவே, $ax+by+c=0$ என்னும் தொடர்புக்குப் பொருந்தி நிற்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையானது ஒரு நேர்க்கோடாகு மென்பது வலியுறும்

6. $ax+by+c=0$ என்னும் தொடர்பு.

(i) இத்தொடர்பு இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்டுள்ளது.

சமன்பாடானது நோக்குமிடத்து a, b, c என்னும் மூன்று மாறிலிகளைப் பெற்றிருந்தாலும், உண்மையில் தம்முள் தொடர்பற்ற இரண்டு மாறிலிகளையே யுடையதாகும். ஏனெனில், $c \neq 0$ ஆனால், சமன் பாட்டை c ஆல் வகுக்க $\frac{a}{c}x+\frac{by}{c}+1=0$ ஆகும்

(ii) சமன்பாட்டை வெட்டுத்துண்டு வடிவத்திலிடுதல்

$\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y+1=0$ அதாவது $\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y=-1$ எனப் பெற்றுள்ளோம்.

அதாவது, $$\frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)}=-1$$

அதாவது, $$\frac{x}{\left(-\frac{c}{a}\right)}+\frac{x}{\left(-\frac{c}{b}\right)}=1$$

ஆகவே. x. y ஆயங்களில் முறையே $-\frac{c}{a}$., $-\frac{c}{b}$ துண்டுகள் ஏற்படுதல் அறியக்கிடக்கின்றது.

(iii) வெட்டுச் சரிவு வடிவத்தில் எழுதுதல்

$ax+by+c=0$ அதாவது $by=-ax-c$.

$$\therefore \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

இதை, $y=mx+c$ யோடு ஒப்பிட்டு நோக்க, y ஆயத்தில் $-\frac{c}{b}$ வெட்டுத் துண்டு அமையவும், அக்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{a}{b}$ ஆகவும் காண்கின்றோம்.

(iv) **செங்குத்து வடிவத்தில் எழுதல்**

$ax+by=-c$: இதை $\sqrt{a^2+b^2}$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ என்று வரும்.}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha \text{ எனக் கொள்ளின், } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ஆகும்.

$-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ஐ p எனக் குறிப்பின், நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ என்ற வடிவில் அமையும்.

7. இரண்டு கோடுகளின் வெட்டு நிலை (Intersection of two lines)

$ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$ **என்னும் இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகாணல்.**

வெட்டுமிடம் (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி யாகுக.

அப்பொழுது $ax_1+by_1+c=0$ (i) ம்

$a'x_1+b'y_1+c'=0$ (ii) ம் ஆகும்

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் (x_1, y_1) பொருந்துவதாகவும் ஆகவே இவற்றை ஒரே சமயத்தில் விடுவிக்குங்கால், குறுக்குப் பெருக்கல் முறையால்,

$$\frac{x_1}{bc'-b'c}=\frac{y_1}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b} \text{ ஆம்}$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b};\ y_1=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b} \text{ ஆம்.}$$

இனி, (i) $ab'-a'b\neq 0$, ஆனால் அப்பொழுது (x_1, y_1) க்கு முடிவுடைய மதிப்புகள் கிடைக்கப் பெறுவோம்.

(ii) $ab'-a'b=0$ ஆகுமிடத்து, $bc'-b'c$; $ca'-c'a$ சுன்ன (0) மாகாவிடில் அப்பொழுது, (x_1, y_1) க்கு முடிவுடைய மதிப்புகள் கிடைக்கப் பெறு; அதாவது ஊடறுக்குமிடம் அநந்த தூரத்திலிருக்கும்;

அக் கோடுகள் ஒருபோகாய் அமையும். ஆகவே. இரண்டு நேர்க் கோடுகள் ஒரு போகாய் அமைவதற்கு $ab'-a'b=0$ அல்லது $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ (அ-து) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ என்னும் நிபந்தனை வேண்டப் படுகின்றதாகும்.

(iii) $ab'-a'b=0$ ம் $bc'-b'c=0$ ம் ஆனால், $ca'-c'a$ யும் அவற்றையொட்டித் தானுகவே சுன்னமாகும் அப்பொழுது, x_1ம் y_1ம் தேரா (indeterminate) மதிப்புடையனவாம். அப்பொழுது $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ஆம். அதாவது இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிப்பிடுவனவாகி, (x_1, y_1) ஐ நிச்சயித்தற்கு வெவ்வேருகிய இரண்டு சமன்பாடுகள் அமைவுறுதற்கு இடனின்றுகிப் போகும் என்க.

8. **மூன்று கோடுகளின் சந்திப்பு :** ஏதேனும் இரண்டு சமன் பாடுகளை விடுவிக்கவரும் ஆயத்தொலைகள் மூன்ருவது சமன் பாட்டிற்கும் பொருந்துமா என்று சோதித்தறித லொன்றே போதுமானதாகும்.

கோடுகளின் சமன்பாடு $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ என்று கொள்வோம்.

இம் முக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளி வழிச்செல்ல, முதல் கோடு மற்ற இருகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லவேண்டும்.

∴ பின் இருகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியாகிய $\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}$, $\frac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2}$ முதல் கோட்டில் அமையவேண்டும்.

அதாவது,

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

விளக்க வுதாரணங்கள் :

1. $x-4y-7=0$; $2y+x-1=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், (1, 2) யும் இணைக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

முதற்கண், $x-4y=7$, $x+2y=1$ என்னும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காணவேண்டும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின், $x=3, y=-1$ என்று வரும்.

$\therefore$ வெட்டுப்புள்ளி $(3,-1)$ ஆகும்.

எனவே $(3,-1)$; $(1, 2)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடு காணல் வேண்டும்.

அதன் சமன்பாடு $\dfrac{x-3}{3-1}=\dfrac{y-(-1)}{-1-2}$

அதாவது, $3x+2y=7$

2. $2x-3y+k=0$, $3x-4y-13=0$, $8x-11y-33=0$ என்பன ஓரிடத்துச் சந்திப்புடையனவானால், k ன் மதிப்பைக் காண்க.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

$$3x-4y=13 \qquad \text{(i)}$$
$$8x-11y=33 \qquad \text{(ii)}$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிக்க,

$x=11, y=5$ என வரும்.

ஆகையால், இவ்விரு கோடுகளும், $(11, 5)$ என்னுமிடத்தில் சந்திப்பனவாம்.

இனி, $2x-3y+k=0$ என்னும் கோடும் இதே புள்ளி வழி செல்ல வேண்டும்.

$\therefore$ $(11, 5)$ என்ற மதிப்புக்கள் $2x-3y+k=0$ க்கும் பொருந்த வேண்டும்.

ஆதலால், $2(11)-3(5)+k=0$

அதாவது, $7+k=0$

$\therefore$ $k=-7$

பயிற்சி 3·8

1. $3x+4y=13$; $2x-7y+1=0$; $5x-y=14$ என்பன ஒருங்கு சந்திப்பு உடையன வெனக் காட்டி, அச்சந்திப்பிடத்தையும் குறிப்பிடுக.

[விடை: $(3,1)$]

2. (i) $x-6y+a=0$; $2x+3y+4=0$: $x+4y+1=0$ ஆவன ஒருங்கு சந்திப்பு உறுவனவாதற்கு a ன் மதிப்பை யறிக.

[விடை : $a=5$]

(ii) $ax-y=1$: $x+2y=12$; $5x-ay+5=0$ ஒருங்கு சேருதற்கு 'a' ன் மதிப்பையறிக. சந்திப்பிடத்தின் ஆயத்தொலைகளையும் அறிக.

3. $3x+2y+1=0$, $x+y=3$ என்னுங் கோடுகளோடும், $y-x=1$; $y+2x+2=0$ என்னுங் கோடுகளும் சந்திப்புடைய கோட்டின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $5x+3y+5=0$]

4. $(-5, 2)$: $(4,-6)$: $(1, 7)$ என்னும் முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளுக்குரிய சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

5. ஆதியோடு $(2,-3)$ என்னும் புள்ளியை யிணைக்குங் கோடானது $4x+3y+2=0$: $6x+5y+6=0$ என்றவற்றோடு சந்திப் புடைய தெனக் காட்டுக.

6. பின்வரும் கோடுகளாகிய முக்கோணங்களின் பரப்பைக் கணக்கிடுக :

(i) $2x-y=0$; $x+2y=0$; $x=a$

[விடை ; $\frac{5a^2}{4}$ சதுர அலகுகள்]

(ii) $x-2y+5=0$; $7x+y-10=0$; $x+y+2=0$

[விடை ; 15 ச. அலகுகள்]

7. $3x+y+4=0$; $3x+4y-15=0$; $24x-7y-3=0$ என்னுங் கோடுகளால் அமையும் முக்கோணம் இருசமபக்க முடைத்து எனக் காட்டுக.

8. $2x+y=1$, $x+2y=1$, $2x+y=3$, $x+2y=2$ என்பவற்றால் அமைவுறுவது ஒரு சாய்வு சதுரம் (Rhombus) ஆகுமெனக் காட்டுக.

9. $3x-4y+1=0$, $2x-5y-1=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகளைப் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

[விடை: $x+y+2=0$]

10. $x+2y=5$; $x-y+1=0$; $2x+y=7$ என்னும் கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் (Centroid) ஆய்த் தொலைகளைக் காண்க.

[விடை: (2, 2)]

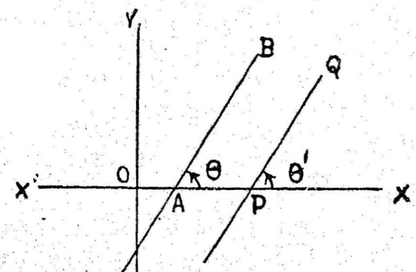
11. $2x-3y=1$, $x+y=3$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி, x ஆயத்தோடு கூடி $45°$ பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

[விடை: $x-y-1=0$]

9. இரண்டு கோடுகள் ஒரு போகாதற்கு நிபந்தனை (Condition for Parallelism of two straight lines)

இரண்டு கோடுகள் யாதேனுமொரு கோட்டுடன் சிறப்பாகX ஆயத்துடன் ஒரே சாய்வு கொள்ளுமானால் அவை யொரு போகுக்கோடுகளாகும்.

X ஆயத்துடன் தனராசித் திசையில் AB, PQ என்னும் கோடுகள் முறையே θ, θ' கோணங்களை ஏற்படுத்தி நிற்பனவாகுக.



ABயின் சாய்வு வீதம் $=\tan\theta=m$ (என்க)

PQ யின் சாய்வு வீதம் $=\tan\theta'=m'$ (என்க)

இப்பொழுது, AB யும் PQ யும் ஒரு போகானவையானால், அப்பொழுது $\theta=\theta'$

$\therefore \quad \tan\theta=\tan\theta'$

அதாவது $m=m'$.

இரண்டு கோடுகளின் சாய்வுகளும் சமமாகும்.

$\therefore \quad y=mx+c$; $y=m'x+c'$ என்னுங்கோடுகள் ஒருபோகாதற்கு நிபந்தனை $m=m'$ ஆகும்.

கிளை 1 ;

$ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$ என்பன ஒரு போகாய் அமைய வேண்டுமானல். அதற்குரிய நிபந்தனையானது.

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'} \text{ அல்லது } ab'-a'b=0 \text{ அல்லது } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \text{ ஆம்,}$$

கிளை 2 :

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ எனப் பெற்றேம். இத்தகவுகளை k எனக் கொள்ளின், $a=ka'$; $b=kb'$.

$$\therefore \quad a'=\frac{1}{k}a;\ b'=\frac{1}{k}.b$$

ஆகவே, $a'x+b'y+c'=0$ என்றகோடு $\frac{1}{k}ax+\frac{1}{k}by+c'=0$ என வரும்.

அதாவது, $ax+by+c'k=0$ எனவரும். $c'k$ஐ d எனக் கொள்ளின் கோட்டின் சமன்பாடு $ax+by+d=0$ ஆகும்.

$ax+by+c=0$ க்கு இணையாக உள்ளக் கோடு $ax+by+d=0$ என்றவடிவில் அமையும்.

கிளை 3 ;

(x_1, y_1) வழியாகச் சென்று $ax+by+c=0$ க்கு ஒரு போகாய் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y-y_1=-\frac{a}{b}(x-x_1)$ ஆம்,

இதைச் சுருக்க, $ax+by=ax_1+by_1$ எனவரும்.

குறிப்பு: எனவே, இருகோடுகள் இணையாக அமைவதற்கு அவற்றின் சமன்பாடுகளில் எண் உறுப்பில் மட்டும். வேற்றுமை இருந்தாற்போதும். இதனால், ஒரு கோட்டுக்கு ஒருபோகாக இருக்கும் மற்றொரு கோட்டின் சமன்பாடு எழுத எண் உறுப்பை மட்டும் மாற்றினாற் போதும்.

விளக்கவுதாரணங்கள் :

1. $x-2y-2=0$; $x+3y-4=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $3x+4y+5$ 0க்கு ஒரு போகான கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$x-2y-2=0$, $x+3y-4=0$ என்னும் இரு சமன் பாடுகளையும் தீர்வுகாண, $x=\frac{14}{5}$, $y=\frac{2}{5}$ என வரும்.

∴ இரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி $(\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$ ஆகும்,

∴ $3x+4y+5=0$ க்கு ஒரு போகாக $(\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$ புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடுகாண வேண்டும்.

$3x+4y+5=0$ க்கு ஒரு போகாக உள்ள எந்தக்கோடும் $3x+4y+c=0$ என்ற வடிவில் அமையும்.

இது $(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}$ புள்ளி வழி செல்ல வேண்டும்

$$\therefore \quad 3(\tfrac{14}{5})+4\ \tfrac{2}{5})+c=0$$

$$\tfrac{42}{5}+\tfrac{8}{5}+c=0 \qquad \therefore \quad c=-10$$

∴ தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு $3x+4y-10=0$ ஆகும்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளாவன : A (5,4); B (−7, −4) C (3, −2). P என்பது AB யின் நடுப்புள்ளியாகும். P யின் வழியாக BC க்கு ஒரு போகாகும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அது AC யைச் சமமாக வெட்டுவதாகவுங் கண்டறிக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

P யின் ஆயத்தொலைகள் $\frac{5+(-7)}{2}, \frac{4+(-4)}{2}$ ஆகும்.

(அதாவது) $(-1, 0)$ ஆகும்.

BC ன் சாய்வு வீதம் $= \frac{-4-(-2)}{-7-3} = \frac{-4+2}{-10} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$

P வழியாக BC க்கு இணையாக வரையும் கோடு PQ ஆகுக.

$\therefore$ PQ ன் சாய்வு வீதம் = BC ன் சாய்வு வீதம் $= \frac{1}{5}$ $[\because m=m']$
PQ, $P(-1, 0)$ வழி செல்கிறது.

$\therefore$ PQ ன் சமன்பாடு $y-0=\frac{1}{5}[x-(-1)]$

(புள்ளி, சாய்வுவீத வடிவம்)

(அதாவது) $5y=x+1$

AC யின் நடுப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $\frac{5+3}{2}, \frac{4+(-2)}{2}$ ஆகும்.

(அதாவது) $(4,1)$ ஆகும்.

$(4, 1)$ என்ற ஆயத் தொலைகள் $5y=x+1$ என்னும் PQ ன் சமன்பாட்டிற்கு பொருந்துவன வாகும்.

ஆகையால் PQ, AC ன் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும்.

பயிற்சி 3.9

1. $3x-4y+5=0$; $6x-8y+71=0$ என்பன ஒரு போகு ஆகுமெனநிரூபி.

2 $(2,3)$ வழியாக $2x-5y+14=0$க்கு ஒரு போகாய் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

[விடை : $[2x-5y+11=0]$

3. $(2,2)$ $(2,8)$, $(-6,2)$, என்பவற்றை முனைகளாகவுடைய முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்குங் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக. இக்கோடுகளுள் ஒவ்வொன்றும் எஞ்சிய பக்கங்களில் இசையெதிர் பக்கங்களுக்கு ஒரு போகானவையாமென நிரூபி.

4. $y+5=m(x-4)$ என்னும் சமன்பாட்டில் m பெறும் பலவித மதிப்புக்கேற்றவாறு கிடைக்கும் பலகோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் முறையை சுட்டிநிற்பதாகு மெனக் காட்டுக. இவ்வொழுங்கைச்சார்ந்ததாய் $x=5-2y$க்கு ஒருபோகாகும்நேர்க்கோட்டின் சமன் பாட்டைககாண்க.

[விடை: $x+2y+6=0$]

5. $x-7y+3$ 0, $x+y-2=0$ என்பவற்றின் சந்திப்பு வழியாகச் செல்லுஞ்சால்

(i) $2x+y+1=0$க்கு ஒரு போகாகவும்

(ii) y ஆயத்திற்கு ஒரு போகாகவும்

(iii) (3,4); (−2,−1) ஐச் சேர்க்குங் கோட்டிற்கு ஒரு போகாகவும் அமையும் கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக

6. (−3,−2); (5,−7) களைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன் பாட்டைக் கண்டறிக. இதற்கு ஒரு போகாய் (−2,3) வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் அமைக்க.

7. ஆயங்களின் −3,2 வெட்டுத்துண்டுகளை யுண்டாக்கும் நேர்க் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கண்டறிக. ஆதியின் வழியாக இதற்கு ஒரு போகாய் அமையும் கோட்டின் சமன்பாட்டியமைக்க.

8. x ஆயத்துடன் $60°$யை யமைத்துக்கொண்டு (1,3) வழியாகச் செல்லும் கோட்டினது சமன்பாட்டையும் இதற்கு ஒரு போகாய் (2,−2) வழிச் செல்லும் பிறிதொரு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

9. A(5,4); B(−7,−4); C(3,−2) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளாம், P என்பது ABயின் நடுப்புள்ளியாம். Pயின் வழியாக BCக்கு ஒரு போகா நிற்குங் கோடானது ACயை இருசமமாக ஊடறுக்குமெனக் காட்டுக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

10. ஒரு முக்கோணத்தில் A, B, C என்னும் முனைகள் முறையே (1,−2); (3,1); (−2,3) ஆகும். Aயின் வழியாக BCக்கு ஒரு போகாகுங் கோட்டின் சமன் பாட்டினைக் கண்டறிக.

[விடை: $2x+5y+8=0$]

11. $2x-7y=20$க்கு ஒரு போகாக y ஆயத்தில் -7 வெட்டுத துண்டு பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன் பாடு யாது ?

[விடை: $2x-7y=49$]

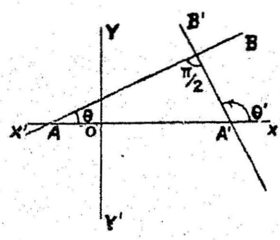
12. ஒரு இணைகரத்தின் இருபக்கங்கள் $4x+5y=0$, $7x+2y=0$. அதன் ஒரு மூல வரை $11x+7y=9$ எனின், ஏனைய இருபக்கங்களையும், மற்றொரு மூலவரையும் காண்க.

10. இரண்டு கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகளாதற்கு நிபந்தனை (Condition for perpendicularity of 2 st. lines)

$y=mx+c$; $y=m'x+c'$ **என்பன செங்குத்துக் கோடுகளாதற்கு நியமமாவது** $mm'=-1$ **ஆம்.**

$AB(y=mx+c)$; $A'B'(y=m'x+c')$ என்பன ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக கொள்ளுவன வாகுக.

இவை முறையே தனராசித் திசையில் X ஆயத்தோடு θ. θ' என்னுங் கோணங்களை $\tan\theta=m$, $\tan\theta'=m'$ என்றமையும்படி ஏற்படுத்திக் கொள்ளுவனவாக.



இப்பொழுது வடிவக் கணித வகையால், $\theta'=\frac{\pi}{2}+\theta$.

$$\therefore \quad \tan\theta'=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta=-\frac{1}{\tan\theta}$$

$\therefore \quad m'=-\frac{1}{m}$ அல்லது $mm'=-1$ அல்லது $mm'+1=0$.

இதுவே கோடுகள் செங்குத்துக்காக நிற்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையாம், அதாவது, இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றற்கொன்று நேர்க்குத்தாயின், ஒன்றன் சாய்வு வீதம் மற்றொன்றன் சாய்வு வீதத்தின் ருணராசி விலோமமாகும். (negative reciprocal)

கிளை 1 :

$ax+by+c=0$; ம் $a'x+b'y+c'=0$ ம் செங்குத்தாயிருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை $\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right)+1=0$

அதாவது, $aa'+bb'=0$.

கிளை 2 :

$ax+by+c=0$ க்குச் செங்குத்தாகி (x_1, y_1) வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடாவது $y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$

அதாவது, $bx-ay=bx_1-ay_1$

குறிப்பு : $ax+by+c=0$ க்குச் செங்குத்தாகி (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுங் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}$ என்றும் எழுதலாம். (இவ்வடிவம் கிளை 2 ல் இரு பக்கங்களையும் ab ஆல் வகுக்க வருவதாகும்)

விளக்க வுதாரணங்கள் :

1. **$8px+(2-3p)y+1=0$, $px+8y+7=0$ என்னும் கோடுகள் நேர்க்குத்தாக இருப்பின் p ன் மதிப்பு என்ன ?**

$ax+by+c=0$ ம், $a'x+b'y+c'=0$ ம் நேர்குத்தாக இருப்பின் $aa'+bb'=0$ ஆக அமைய வேண்டும்.

$\therefore$ இங்கு $a=8p$; $b=2-3p$

$a'=p$; $b'=8$

$\therefore$ $8p^2+8(2-3p)=0$ அதாவது, $p^2-3p+2=0$

$\therefore$ $p=1$ அல்லது 2

2. **$x-2y+4=0, 4x-3y+1=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழி $6x-5y-11=0$ க்கு நேர்குத்தான கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.**

$x-2y+4=0$, $4x-3y+1=0$ என்னும் சமன்பாடுகளை விடுவிக்க, $x=2$, $y=3$ என்று வரும்.

$6x-5y-11=0$ க்கு செங்குத்தாக (2, 3) வழிசெல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு, $5x+6y=5(2)+6(3)$ ஆகும்.

[$bx-ay=bx_1-ay_1$ காண்க]

அதாவது, $5x+6y=28$

3. ஆதியிலிருந்து ஒரு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் பாதத்தின் ஆய்த்தொலைகள் (3, −4) எனின், அக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

AB கொடுக்கப்பட்ட கோடாகவும், OL அதற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடாகவும் கொள்க.

L ன் ஆயத் தொலைகள் (3, −4)

$$\text{OL சாய்வு வீதம்} = \frac{0-(-4)}{0-3}$$

$$= \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

AB ம், OL ம் நேர்க்குத்துக் கோடுகளாக இருத்தலின், இவ்விரு கோடுகளின் 'm' களின் பெருக்குத் தொகை $=-1$ ஆகும்.

எனவே, AB ன் சாய்வுவீதம் 'm' என்றால்,

$$m \times -\tfrac{4}{3} = -1$$

$\therefore$ $m=\frac{3}{4}$ [அதாவது, OL ன் சாய்வு வீதத்தின் ருணராசி விலோமமாகும்]

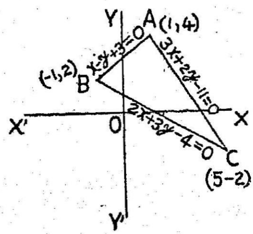
மேலும் AB, (3, −4) புள்ளிவழிச் செல்கிறது.

ஆகையால் AB ன் சமன்பாடு

$y-(-4)=\frac{3}{4}(x-3)$ ஆகும். [புள்ளி, சாய்வு வீத வடிவம்]

அதாவது, $3x-4y=25$

4. $2x+3y=4$, $x-y+3=0$, $3x+2y=11$ என்னும் கோடுகளால் அமைவுறும் முக்கோணத்தின் குத்துச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள் கண்டறிக. [பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு]



படத்தில் காட்டியபடி முக்கோணத்தை அமைத்து முனைகளின் ஆயத்தொலைகளைக் கண்டறியலாம்.

$x-y+3=0$, $3x+2y-11=0$ என்றவற்றை விடுவிக்க
A(1, 4) எனவரும்.

$x-y+3=0$, $2x+3y-4=0$ என்றவற்றை விடுவிக்க
B(−1, 2) எனவரும்.

$2x+3y-4=0$, $3x+2y-11=0$ என்றவற்றை விடுவிக்க
C(5, −2) எனவரும்.

A(1,4) லிருந்து BC, $2x+3y-4=0$ க்கு செங்குத்தாகிய கோட்டின் சமன்பாடு,

$3x-2y=3(1)-2(4)$ [$bx-ay=bx_1-ay_1$ காண்க]

(அதாவது) $3x-2y=-5$ ஆகும்

B(−1,2) யிலிருந்து AC க்குச் செங்குத்தாகிய கோட்டின் சமன்பாடு.

$2x-3y=2(-1)-3(2)$ ஆகும்.

(அதாவது) $2x-3y=-8$ ஆகும்.

இனி, $3x-2y=-5$; $2x-3y=-8$ இவற்றை விடுவிக்கக் குத்துச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}\right)$ என வருமாறறிக.

பயிற்சி 3.10

1. $4x-5y+6=0; 15x+12y+37=0$ என்னுங் கோடுகள் செங்குத்தானவை யென்று காட்டுக.

2. $(2,3)$ ன் வழியாக, $2x\ 5y+14=0$க்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை வரைக.

[விடை : $5x+2y=16$]

3. $(-3,1)$ வழியாகவும், $(-4,-3)$, $(2,-2)$ என்பவற்றைச் சேர்க்குங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லுங்கோட்டின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $6x+y+17\ \ 0$]

4. $y+5=m(x-4)$ என்னும் சமன் பாடு ஒரே சந்திப்புடைய பல கோடுகளை m பெறும் வெவ்வேறு மதிப்புகளால் குறிப்பிடுவதாகு மெனக் காட்டுக.

இவ் வொழுங்கில் $4x-3y+7=0$க்குச் செங்குத்தாவ தொரு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $3x+4y+8=0$]

5. $x-7y+3=0$; $x+y-2=0$ என்றவை சந்திக்குமிடத்தின் வழியாகச் செல்லுங்கால்

(i) $2x+y+1\ \ 0$க்குச் செங்குத்தாகவும்

(ii) x அச்சுக்கு ,,

(iii) y ,, ,,

(iv) $(3,4)$; $(-2-1)$ வற்றைச் சேர்க்குங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6. (i) ஆதியிலிருந்து $3y=5-4x$ க்குக் செங்குத்தாகுங் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவை சந்திக்குமிடத்தின் ஆயத்தொலைகளையும், அச்செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தையுங் கண்டறிக.

[விடை : $3x-4y=0$; $(4/5,\ 3/5)$: 1 அலகு]

(ii) $(-2,5)$ வழியாக $5x-3y-9=0$ க்குங் செங்குத்தாகி நிற்குங் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இப்புள்ளியிலிருந்து அக் கோட்டிற்குச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும், சந்திக்கு மிடத்தின் ஆயத்தொலைகளையுங் கண்டறிக.

[விடை: $3x+5y=19$; $(3,2)$; $\sqrt{34}$]

7. A $(4,1)$; B $(7,4)$; C $(5,2)$ என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும். A யிலிருந்து BC க்குச் செங்குத்தாகச் செல்லுங் கோட்டின் சமன்பாட்டையும், குத்துச் சந்தி (Ortho centre) யின் ஆயத் தொலைகளையுங் கண்டறிக.

[$x+3y=7$; $(1,2)$]

8. $(3, 4)$; $(5,2)$ —இவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டின் செங்குத்துச் சமவெட்டிக்குரிய சமன்பாட்டை காண்க.

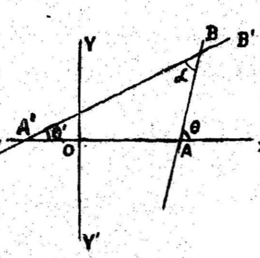
[விடை: $x-y=1$]

9. $(-2, 3)$; $(2,-1)$; $(4, 0)$ என்னும் முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் ஆயத் தொலைகளைக் குறிப்பிடுக. [விடை: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$]

10. $2x-y=0$; $x+2y=0$; $x=a$ என்னுங் கோடுகளால் அமைவுறும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

[விடை: $\frac{5a^2}{4}$ ச. அலகுகள்]

11. இரண்டு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தை யறிந்து, அவை செங்குத்தாகவும், ஒரு போகாகவும் அமைவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளையும் காண்க.



AB ($y=mx+c$); A′B′ ($y=m'x+c'$) என்னுங் கோடுகள் X ஆயத்தோடு முறையே θ, θ' என்னுங் கோணத்தை தனராசித் திசையில் ஏற்படுத்திக் கொண்டு நிற்பன வாகுக.

அப்பொழுது, $\tan\theta=m$ ம் $\tan\theta'=m'$ ம் ஆம்.

அவ்விரண்டு கோடுகளுக்கும் இடைப்படும் கோணம் α எனக் கொள்க.

இப்பொழுது, $\alpha=\theta-\theta'$ (வடிவக் கணிதத்தால் $\theta=\alpha+\theta'$)

$$\therefore\ \tan\alpha=\tan(\theta-\theta')=\frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1+\tan\theta\tan\theta'}$$

அதாவது $\tan\alpha=\dfrac{m-m'}{1+mm'}$

குறிப்பு : $\dfrac{m-m'}{1+mm}$ ருண ராசியானல், α என்பது விரிகோண மாகும்.

கிளை 1

கோடுகள் ஒரு போகானல், $\alpha=0$; $\therefore\ \tan\alpha=0$

(அதாவது) $\dfrac{m-m'}{1+mm'}=0$ $\quad\therefore\ \underline{m=m'}$

கோடுகள் செங்குத்துப்பட்டால் $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\ \cot\alpha=0\quad\therefore\ \frac{1+mm'}{m-m'}=0.$$

$$\therefore\ 1+mm'=0$$

$$\therefore\ \underline{mm'=-1}$$

கிளை 2 :

$ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$ என்னும் கோடுகளுக்கு இடைப் பட்ட α கோணத்தின் மதிப்பு $\tan\alpha=\dfrac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$, என்றதனல் கிடைக்கப்பெறும்.

$\underline{aa'+bb'=0}$ ஆனல், கோடுகள் செங்குத்துப்படும் என்றறிக.

பயிற்சி 3.11

1. $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-4$; $y=\sqrt{3}\,x+3$ என்னுங் கோடுகளுக்கு இடையி லுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : $30°$]

2. $(-1,-2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 2)$ என்பவற்றை முனைகளாகிய நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களுடைய சமன்பாடுகளையும், அவை யூடறுத்துக் கொள்ளும் இடத்தின் ஆயத்தொலைகளையும் அவற்றின் இடைப்பட்டடங்கியுள்ள கோணத்தையும் காண்க.

[விடை : $3x-2y=1$; $x+y=3$; $\frac{7}{5}, \frac{8}{5}$]

3. $2x-3y-1=0$; $x-5y+3=0$ என்னுமிவற்றின் இடையே அடங்கியுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : $\tan\theta=\frac{7}{17}$]

பயிற்சி 3·12

நேர்க்கோடுகள்: பலவகைக் கணக்குகள்

1. $(2,-2)$; $(-1,4)$ என்னும் புள்ளிகளை யிணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டையும், அது ஆயங்களைச் சந்திக்கும் A, B என்னுமிடங் களின் ஆயத்தொலைகளையும் காண்க. O என்பது ஆதியானுல், OAB என்னும் முக்கோணத்தின் பரப்பையறிக. AB க்கு ஒரு போகாகவும். செங்குத்தாகவும், ஆயத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன் பாடுகளையுங் காண்க.

2. $y=x$; $y=2-x$ என்னுங் கோடுகள் கொடுக்கப்பட்டனவாக (i) அவை வெட்டும் புள்ளி (ii) அப்புள்ளி வழியாக $y=4x+5$ க்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு (iii) $y=x$, $y=2-x$, $y=0$ என்னுங் கோடுகளால் உள்ளடங்கி நிற்கும் பரப்பு ஆகியவற்றை அறிக.

3. (i) $7y+x-23=0$; $5x+2y-16=0$ என்பன சந்திக்கும் புள்ளி, (ii) இப்புள்ளியை $(1,0)$ என்னும் மற்றொரு புள்ளி யோடு சேர்க்குங் கோட்டின் சமன்பாடு, (iii) ஆதியின் வழியாக (ii) ல் கண்ட கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகுங் கோட்டின் சமன்பாடு.

4. $2x+3y=1$, $3x-4y=6$ என்பன வெட்டிக் கொள்ளும் இடத்தின் வழியாக (i) $5x-y=0$ க்கு ஒரு போகாகவும், (ii) $x+2y=3$ க்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லும் கோடுகளின் சமன் பாடுகளைக் காண்க.

5. $x+3y=10$; $x+3y=20$; $3x+5=y$; $3x=y+5$ என்பவற்றால் அமைவுறும் செவ்வகத்தினுடைய மூலை விட்டங்களது சமன் பாடுகளையும், அவை யொன்றை யொன்று ஊடறுத்துக் கொள்ளும் புள்ளியையுங் காண்க.

6. ஆதியின் வழியாக $3x+2y=5$; $4x+3y=7$ என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாகுங் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இச் செங்குத்துக் கோடுகள் மேற் குறிப்பிட்ட கோடுகளைச் சந்திக்கும் இடங்களின் ஆயத் தொலைகளையும் அச் சந்திப்பிடங்களைச் சேர்க்குங் கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் அறிக.

7. $2x-3y+4=0$ என்பது AB யின் செங்குத்துச் சம வெட்டியாகும். A ஆவது (5, 6) என்னும் புள்ளியாயின், B யின் ஆயத் தொலைகளைக்குறிக்க.

8. $2x+3y+7=0$ என்ற கோட்டில் (0, 2) என்ற புள்ளியின் விம்பப் புள்ளியை (Image) க் காண்க.

9. A, B, C என்பன முறையே $(-7,-3)$; $(3,-5)$, $(5,10)$ என்னும் புள்ளிகளாம். AB, AC என்பன ஒரு இணைகரத்தின் இரு பக்கங்களாம். மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும், நான்காவது முனையின் ஆயத்தொலைகளையுங் காண்க. மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

10. $3y-4x+11=0$ ன் மேல் (3,2), $(-2,3)$ என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து சம தொலையில் நிற்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க.

11. ஒரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் $x+y+2=0$; $7x+y-10=0$; $2y=x+5$ என்னும் சமன்பாடுகளை யுடையனவாம். அம் முக்கோணத்தின் (i) சுற்றுவட்டமையம், (ii) மையக்கோட்டுச் சந்தி (centroid) ஆகியவற்றின் ஆயத்தொலைகளை அறிக.

12. $x+2y=0$; $4x+3y=5$; $3x+y=0$ என்றவற்றால் உருவமையும் முக்கோணத்தின் குத்துச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகளையும், மூன்று குத்துயரங்களின் நீளங்களையும் காண்க.

13. A (1, 2). B (6, 7) என்பவற்றைச் சேர்க்குங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், AB யின் மேல் 2 AC=3 CB என்ருகும்படி பகுத்து நிற்கும் C என்னும் புள்ளி வழியாகவும் செல்லுங் கோட்டின் சமன் பாட்டை வரைக.

14. $3x+y=0$; $3y+x$ 0; $3x+y=4$; $3y+x=4$ என்பவற்ருல் அமையும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தாக ஊடறுத்து நிற்குமெனக் காண்க.

15. ஒரு இணைகரத்தில் இரண்டு அயல் பக்கங்கள் $4x+5y=0$ம் $7+2y=0$ ம் ஆகும். ஒரு மூலை விட்டத்தின் சமன் பாடு $11x-7y=9$ ஆனல், மற்ருெரு மூலைவிட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், ஏனைய இரு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

16. A (2, 1); B (3, −2); C (−4, −1) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளாகும். A, B களின் வழியாக அவற்றெதிர் பக்கங்களுக்கு ஒரு போகுக்கோடுகள் D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கும்படி வரையப்பட்டன. ABCD யின் பரப்பை அளவிடுக.

17. (1, 2) வழியாகச் செல்லுங்கோடு $x+y=4$ என்னும் நேர்க் கோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளி, (1, 2) என்னும் புள்ளியிலிருந்து அதன் வழியே வரையப்படும் கோட்டில் $\sqrt{2}$ தொலையிலுள்ளதாகுமாஞல் அக் கோட்டின் சாய்வு வீதத்தைக் கண்டறிக.

18. ஒரு முக்கோணத்தின் இருமுனைகள் (3, −1); (−2, 3) என்னும் புள்ளியிடத்தனவாம். அதன் குத்துச்சந்தி ஆதியோடு ஒன்றி யுள்ளது, அதன் மூன்ருவது முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் கண்டறிக.

19. (1, $\frac{1}{2}$) என்னும் புள்ளிவழியாக (4, 5); (2, −8) என்னும் புள்ளிகளை யிணைக்கும் கோட்டிற்கு ஒன்று செங்குத்தாகவும், மற்ருென்று ஒரு போகாகவும் அமையும் இரண்டு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக. இக் கோடுகள் y ஆயத்தை வெட்டுங்கால் உண்டாகும் துண்டுகளின் நீளங்கள் என்ன?

20 $x+2y=9$, $3x-5y=5$, $ax+by=1$ கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லின் $5x+2y=1$ கோடு $(a\ b)$ வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

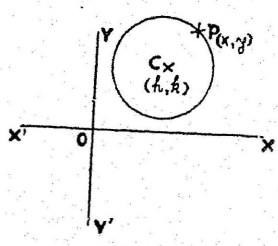
IV. வட்டம்

1. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாருத தொலேயுடைய ஒரு புள்ளிச் சுற்றி வருங்காலத்தில் அமையும் நியமவரையே வட்டமெனப்படும். இவ்வட்டத்திற்கு நிலையான புள்ளி மையமாகும். மாருத தொலே ஆரமாக அமையும்.

2. (h, k) என்னுமிடத்தில் மையத்தைக் கொண்டு, ஆரம் 'a' ஆகவுடைய வட்டத்திற்குச் சமன்பாடு காணுதல்.

C (h, k) மையமாகவும், 'a' அதன் ஆரமாகவுங் கொள்க.

P (x, y) என்பது வட்டத்தின் மேல் பெறக் கொண்ட ஏதேனுமொரு புள்ளியாகட்டும்,



அப்பொழுது, $CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ ... (தொலேச் சூத்திரம்)

P ஆனது வட்டத்தின்மேல் எங்கிருந்தாலும் CP எப்பொழுதும் 'a'க்குச் சமமாகவே இருக்கும்.

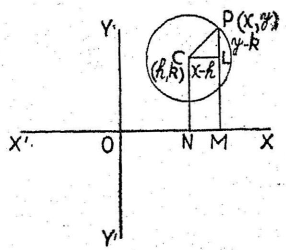
$\therefore \quad CP^2 = a^2$.

$\therefore \quad \underline{(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2}$.

இத்தொடர்பானது வட்டத்தின்மேல் தங்கும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்துவதாதலின், இதுவே வட்டத்திற்கு எவ்வகையானும் ஏற்புடைய சமன்பாடாகு மென்றறியப்படும்.

பிறிதொருமுறை

OXக்கு. PM, CN கோடுகளை நேர்குத்தாகவும், MPக்கு CL ஐ நேர்குத்தாகவும் வரைக



CL=NM=OM−ON=$x-h$

LP=MP−ML=MP−NC=$y-k$.

CLP முக்கோணத்தில் $CL^2+LP^2=CP^2$

(அஃது) $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

கிளை 1 வட்டத்தின்மையம் ஆதியிலிருந்தால். $h=k=0$ ஆம். அப்பொழுது வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ என்னும் எளியவடிவைக் கொள்ளும்.

கிளை 2 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ என்னும் தொடர்பை விரித்து நோக்குமிடத்து $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0$ எனவரும். இதனை $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனப் பொதுவடிவில் அமைத்துக் கொள்ளலாம். ஆகவே, ஒருவட்டத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்றே கொள்ளப்படு மென்பதறிக.

விளக்கவுதாரணங்கள்

1. (3,−2) புள்ளியை மையமாகவும், ஆரை 3 ஆகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இவ்வட்டம் (3,1) என்னும் புள்ளிவழிச் செல்லும் என்று காட்டுக :

வட்டமையத்தை C எனக்குறிப்பிடுவோம். P (x,y) வட்டப்பரிதியில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி ஆகின், CP=3 ஆகும்.

(அஃது) $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=3$

$\therefore \quad (x-3)^2+(y+2)^2=3^2$

இச்சம்பந்தம் வட்டப்பரிதியில் உள்ள எல்லாப்புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளுக்கும் பொருந்து மாதலின் இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

$x=3, y=1$ என்று சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

இடப்பக்கம் $=(3-3)^2+(1+2)^2=0+9=9=$ வலப்பக்கம்

$\therefore$ (3, 1) என்னும் புள்ளி வட்டப்பரிதியில் அமைகிறது.

2. (−7, 1) என்னும் புள்ளியின் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் (−4, −3) எனின், அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

வட்ட மையத்தை C என்றும், கொடுத்துள்ள (−7, 1) புள்ளியை A என்றும் குறிப்பிடுவோம்,

வட்டத்தின்ஆரை $=\text{CA}=\sqrt{(-7+4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{9+16}=5$

P (x, y) வட்டப்பரிதியிலுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகின்,

CP=CA (இது Pயின் எல்லா நிலைகளுக்கும் பொருந்தும்)

இப்பொழுது CP $=\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு, $\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}=5$ என வரும்

(அ-து) $(x+4)^2+(y+3)^2=5^2$

3. **$2x+3y=7$, $3x-2y=4$ என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் ஆகும். (−2, −3) வட்டப்பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளி எனின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் (−2, −3) வழிச்செல்லும் விட்டத்தில் (−2, −3)க்கு**

எதிராகிய விட்டமுனையில் வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத் தொடு கோட்டால் வெட்டப்படும் ஆயத் துண்டுகளையும், ஆயங்களாலும், அத்தொடு கோட்டாலும் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பையும் கண்டறிக.

விட்டங்கள் மையத்தின் வழிச் செல்வதால்,

$2x+3y=7$, $3x-2y=4$ என்பவற்றைத் தீர்வு கண்டால், மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் கிட்டும்.

ஆகவே மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் (2, 1) என வரும்,

வட்டம் A (−2, −3) வழிச் செல்வதால், வட்டத்தின் ஆரை= C (2, 1) ; A (−2, −3) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$=\sqrt{(2+2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{32}$$

ஆகையால் வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{32})^2$ ஆகும்.

(அ-து) $x^2+y^2-4x-2y-27=0$

A (−2, −3)க்கு எதிராகிய விட்ட முனை B (x, y) எனக் கொள்ளின், ABயின் நடுப்புள்ளியே, வட்டத்தின் மையமாகும்,

$$\therefore \quad \frac{x-2}{2}=2; \quad \frac{y-3}{2}=1$$

$\therefore \quad x=6 \; ; \; y=5.$

∴ A (−2, −3)க்கு எதிராகிய விட்டமுனை B **(6, 5) ஆகும்.**

B (6, 5) வழிச் செல்லும் ஆரையின் சாய்வு வீதம்

$$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5-1}{6-2}=\frac{4}{4}=1 \text{ ஆகும்.}$$

∴ இப் புள்ளி வழிச் செல்லும் தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் $=-1$ (தொடுகோடும், ஆரையும் செங்குத்தாவதால் $mm'=-1$)

$\therefore$ தொடு கோட்டின் சமன்பாடு, $y-5=-1\ (x-6)$

(அ-து) $x+y=11$.

(அ-து) $\frac{x}{11}+\frac{y}{11}=1$ (வெட்டுத் துண்டு வடிவத்தில் அமைக்க.)

$\therefore$ ஆகவே தொடுகோடு ஆயங்களில் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளின் அளவுகள், (11, 11) ஆகும்.

ஆயங்களாலும், தொடுகோட்டாலும் அமைக்கப்பட்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமாவதால்,

$$\text{அதன் பரப்பு}=\frac{1}{2}\times 11\times 11=\frac{121}{2}\ \text{ச. அலகுகள்.}$$

$$=60\cdot 5\ \text{ச. அலகுகள் ஆகும்.}$$

பயிற்சி 4·1

1. மையம் (3, −2), ஆரம் 3 ஆகவுடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைந்து, அது (3, 1)ன் வழியாகச் செல்லுகின்றதென்றுங் காட்டுக.

2. ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் (4, 3) ஆகுமானல் அதன் சமன்பாட்டை வரைக. ஆதியின் வழியாகிய ஆரத்தின் சாய்வு வீதத்தையும், ஆதியினிடத்து அதற்கு அமைந்திருக்கும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் வரைக.

3. (1, −2)ஐ மையமாகக்கொள்ளும் வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{2}$ ஆகும். இவ்வட்டத்தை $x+y=1$ என்னுங்கோடு தொட்டு நிற்பதாகக் காட்டுக.

4. (3, 4) ; (0, 5) ; (−3. −4) ; (−5, 0) என்னும் புள்ளிகள் ஆதியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின்மேல் கிடப்பதாகக் காட்டுக. இந்த வட்டத்தின் ஆரமென்ன ?

5. $x^2+y^2=25$ என்னும் வட்டத்தில் (3, 4) வழியாகச் செல்லும் ஆரத்தின் சாய்வு வீதத்தைக் காண்க. அப்புள்ளியிடத்தில் வட்டத்

திற்கு அமையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும், அத் தொடு கோடானது ஆயங்களில் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளையும் கண்டறிக.

6. $x+y=6$; $x+2y=4$ என்பவற்றை வட்டங்களாகவும், ஆரம் 10 அலகுகளாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

7. $2x+3y=8$: $5x-y=3$ என்பன விட்டங்களாகவும், $(-11,7)$ என்பது நேமியின் மேல் கிடக்கப்பெறும் புள்ளியாகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக. $(-11, 7)$க்கு எதிராகிய விட்டத்தின் முனையில் வரையும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத் தொடுகோட்டால் வெட்டப்படும் ஆயத் துண்டுகளையும், ஆயங்களாலும் அத் தொடு கோட்டாலும் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பையும் கண்டறிக.

8. $A(-8, 7)$; $B(2, -5)$களைச் சேர்க்குங் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரையும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக, A, B என்னுமிடங்களில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் வரைக.

9. ஒரு வட்டம் $(6, 0)$; $(0, 8)$ ஆதி என்றவற்றின் வழியாகச் செல்லுகின்றது. இதன் சமன்பாட்டையும் இதற்கு ஆதியிடத்தில் அமையுந் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் குறிக்க.

10. ஆதியின் வழியாகச் செல்லுங்கால் 3, 4 அலகுள்ள ஆயத் துண்டுகளை வெட்டா நிற்கும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

11. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு மூலை ஆதியாகும். மற்றவிரண்டு $(4, 0)$ $(0, 4)$ ஆகும். இச்சதுரத்தைச் சுற்றி நிற்கும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது? ஆதியிடத்தில் இவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படுந் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் குறிக்க.

12. $(0, 0)$; $(a, 0)$; (a, a) ; $(0, a)$ இவற்றின் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

3. மறுதலையாக, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது ஒருவட்டத்தைக் குறிப்பிடுவதாகக் காட்டி, அதன் மையத்தையும் ஆரத்தையும் அறிதல்

கொடுத்த தொடர்பு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

இதனை $x^2+y^2+2gx+2fy=-c$ என்றெழுதலாம்

இரண்டு பக்கங்களிலும் g^2+f^2 ஐக்கூட்ட

$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$ எனவரும்.

அதாவது, $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

,, $[x-(-g)]^2+[y-(-f)]^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

இப்பொழுது, இடப்பக்கத்திலுள்ளது (x, y) என்பதோர்புள்ளி $(-g, -f)$ என்னும் நிலையான புள்ளியிடத்திருக்கும் தொலையின் வர்க்கத்தைக் குறிப்பிடுகின்றதாகும். வலப்பக்கத்திலுள்ளது ஒரு நிலை யான பரிமாணத்தின் வர்க்கமாதலைக் காட்டுகின்றது.

ஆகவே, மேற்கண்டதிலிருந்து, கொடுத்த தொடர்புக்குப் பொருந்துவதாகும் எந்தப்புள்ளி (x, y)யும், $(-g, -f)$ என்னும் நிலை யான புள்ளியிலிருந்து மாறுபடாத தூரத்திலிருப்பது தெளிவாகின்றது.

∴ இச் சமன்பாடானது $(-g, -f)$ஐ மையமாகவும், $\sqrt{g^2+f^2-c}$ஐ ஆரமாகவும் கொண்டுள்ள வட்டத்தைக் குறிப்பதாகும்.

கிளை 1

இங்கு $g^2+f^2-c>0$ என்றிருந்தால்தான் ஆரைக்கு மெய் மதிப்பு வரும். $g^2+f^2-c=0$ என இருப்பின் ஆரையின் மதிப்பு சுன்ன மாகும். அந்நிலையில் இவ்வட்டம் $(-g, -f)$ புள்ளி நிலைக்கு ஒடுங்கும். $g^2+f^2-c<0$ ஆனல், ஆரையின் மதிப்பு கற்பனையாகும்.

ஆகவே வட்டமானது வாஸ்தவமானது, புள்ளிநிலைக்கு ஒடுங்கு வது, கற்பிதமானது என்பது $g^2+f^2+c >=< 0$க்கு ஏற்ப அமையும்

அதாவது $g^2+f^2-c>=<0$ என்பதற்கு ஏற்ப வட்டம் நிச, புள்ளி, கற்பனை ஆகும்.

கிளை 2

$ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ என்பதும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக் கும், எவ்வாறென்றுல், இதனை முற்றிலும் a ஆல்வகுக்க நியம ரூபத்து வந்தடையும்,

கிளை 3

x, yல் இருபடிச் சமன்பாட்டில் x^2, y^2 என்பன சமமான குணிதங்களைக் கொண்டும், xy வரும் உறுப்பு கரந்தும் (மறைந்தும்) இருந்தால் அஃது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

கிளை 4

cயின் பலவகை மதிப்புகளுக்கு ஒரேமைய வட்டங்கள் கிடைக்கப் பெறும்.

கிளை 5

வட்டம் ஆதியின் வழிச்சென்றுல் அதன் சமன்பாட்டில் தனியுறுப்பு இடம் பெற்று நில்லாது.

கிளை 6

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் சமன்பாடு மூன்று தனிப்பட்ட மாறிலிகளைக் கொண்டுள்ளது. இம் மாறிலிகள் ஒரு வட்டத்தை நிர்ணயிக்க மூன்று தனிப்பட்ட நிபந்தனைகள் வேண்டுமென்னும் வடிவக்கணித உண்மையை அனுசரித்து நிற்கின்றன. எனவே வட்டத்தை அமைப்பதற்குக் கொடுக்கும் நிபந்தனைகள் இம் மூன்று மாறிலிகளையும் நிர்ணயிப்பதற்குப் பயன்பட்டு நிற்கத்தக்கன வாதல் வேண்டும். உதாரணமாக, யாவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் அறியப் பட்டால் வட்டத்தை அமைக்கலாம்.

உதாரணங்கள் :

1. $5(x^2+y^2)+6(2x+y)-11=0$ என்னும் சமன்பாட்டையுடைய வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையுங் காண்க. இவ் வட்டத்தோடு ஏகமையங் கொண்டு ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

$5(x^2+y^2)+6(2x+y)-11=0$ என்னும் சமன்பாட்டை

$x^2+\frac{12x}{5}+y^2+\frac{6y}{5}=\frac{11}{5}$ என்றெழுதலாம்,

அதாவது $\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{36}{25}+\frac{9}{25}+\frac{55}{25}=4$

அதாவது $\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=2^2$

ஆகவே, வட்டத்தின் மையம் $(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$ யும் ஆரம் 2 ம் ஆம். இவ்வட்டத்தோடு பொதுமையங் கொள்ளும் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$5(x^2+y^2)+6(2x+y)+c=0$ ஆம்.

இஃது ஆயத்தின் வழியாகச் செல்லுதலால்.

$5(0+0)+6(0+0)+c=0$ ஆம்.

அதாவது $c=0$ ஆம்

$\therefore$ ஏகமைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $5(x^2+y^2)+6(2x+y)=0$ ஆகும்.

2. $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ என்னும் வட்டத்தில் $(-1, -3)$ என்பதொரு விட்டத்தின் முனையாகும். மற்ற முனையையும், அவ் விடத்தில் வரையும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினு)

விட்டத்தின் ஒருமுனை A $(-1, -3,)$; வட்டத்தின் மையம் C $(1, -3)$

B (x, y) என்பது மற்றொரு முனையானுல் AB க்கு C நடுப் புள்ளியாகும்,

ஆகவே,

C யின் x ஆயம் $\frac{x-1}{2}=1$ ஆம்

C யின் y ஆயம் $\frac{y-3}{2}=-3$ ஆம்

$\therefore$ $x=3$; $y=-3$ என வரும்

$\therefore$ B என்பது $(3, -3)$ என்னும் புள்ளியாகும்.

இனி, விட்டத்தின் சாய்வு வீதம் $\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right.$ என்றதை அநுசரிக்க$\left.\right)$

$$\frac{-3-(-3)}{-1-(3)}=\frac{0}{4}=0 \text{ ஆம்.}$$

$$=\tan 0^\circ \text{ ஆம்.}$$

$\therefore$ AB ஆனது X'OX ஆயத்திற்கு ஒரு போகாகும்.

$\therefore$ BΓ என்னுந் தொடுகோடு X ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாகும். அதாவது Y அச்சுக்கு ஒரு போகாகும்.

$\therefore$ அதன் சமன்பாடு $x=K$ என்றமையும் (K, ஒரு மாறிலி) இக்கோடு B (3, −3) வழிச் செல்லுதலால் K=3 ஆகும்.

$\therefore$ B என்னும் மறுமுனையில் அமையுந் தொடுகோடு $x=3$ ஆம்.

3. A, B என்பன $x^2+y^2+4x+12y-40=0$; $x^2+y^2-12x+2y+28=0$ என்னும் வட்டங்களின் மையங்களாகும், P என்பது அவைவெட்டிக் கொள்ளுமிடமாகும். $AB^2=AP^2+BP^2$ என்று காட்டுக.

(பல்கலைக்கழக மாதிரி வினா)

$x^2+y^2+4x+12y-40=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு மையம் A (−2, −6)

$$\text{ஆரம் } r_1=\sqrt{4+36+40}=\sqrt{80}$$

$x^2+y^2-12x+2y+28=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு மையம் B(6−1) ஆகும்.

$$\text{ஆரம் } r_2=\sqrt{36+1-28}=\sqrt{9}=3.$$

வட்டங்களைச் சோக்கும் AB என்னும் கோட்டின் நீளம்

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \text{ என்றபடி}$$

$$=\sqrt{\{[-2-6]^2+[-6-(-1)]^2\}}$$

$$=\sqrt{\{64+25\}}=\sqrt{89}.$$

இப்பொழுது $r_1=\sqrt{80}$; $r_2=\sqrt{9}$; $AB=\sqrt{89}$

இவ்வற்றால் $AB^2=89=80+9=r_1^2+r_2^2$ ஆம்.

அதுபற்றி $AB^2=AP^2+BP^2$ $\therefore$ APB என்னும் முக்கோணம் Pயில் செங்கோணம் கொண்டுள்ளது.

4. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்னும் நேர்க்கோடு ஆயங்களை A, B என்னும் இடங்களில் ஊடறுக்கின்றது. AB யை விட்டமாகக்கொண்டு வரையும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக. A, B, O என்பனவும் (1, 3) என்னும் புள்ளியும் ஒரு பரிதியிலமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

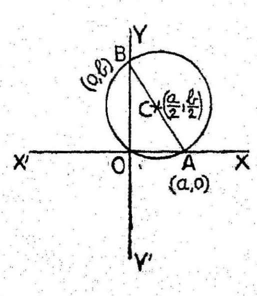
(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

AB என்னும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ஆதலின்.

X ஆயத்தில் $A(a, 0)$ ஆகவும், Y ஆயத்தில் $B(0, b)$ ஆகவும் இருக்கும்.

$\angle AOB=90°$, ஆதலின் AB யை விட்டமாகக் கொண்டு வரையும் வட்டம் $O(0, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதாகும்.

வட்டத்தின் மையம் AB யின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ஆகும்.



வட்டத்தின் ஆரம் $=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ என்றதை யொட்டி

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$x^2-ax+y^2-by=0$$

அதாவது $\quad x^2+y^2-ax-by=0$

இனி, $x^2+y^2-ax-by-0$ என்னும் சமன்பாட்டில் $x=1, y=3$ என்று பிரதியிட $1+9-a-3b=0$ அதாவது $a+3b-10=0$ ஆம்.

$\therefore$ A, B, O, (1, 3) என்பன ஒரே வட்ட நேமியிலிருப்பதற்கு $a+3b=10$ என்னும் நிபந்தனை வேண்டப்படும்.

5. (1, 1) ; (2, −1) ; (3, 2) என்னும் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினா)

வட்டத்தின் சமன்பா்டு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ஆகும்.

இது (1, 1) வழியாகச் செல்லுதலால் $1+1+2g+2f+c=0$
அதா்வது $2g+2f+c=-2 \quad (1)$

„ (2, −1) „ $4+1+4g-2f+c=0$
அதாவது $4g-2f+c=-5 \quad (2)$

„ (3, 2) „ $9+4+6g+4f+c=0$
அதாவது $6g+4f+c=-13 \quad (3)$

இனி, $2g+2f+c=-2$; $4g-2f+c=-5$; $6g+4f+c=-13$ என்றவற்றுள் இரண்டிரண்டாகத் தீர்வு காண

$g=-2\frac{1}{2}$; $f=-\frac{1}{2}$; $c=4$ ஆகக் கிடைக்கும்.

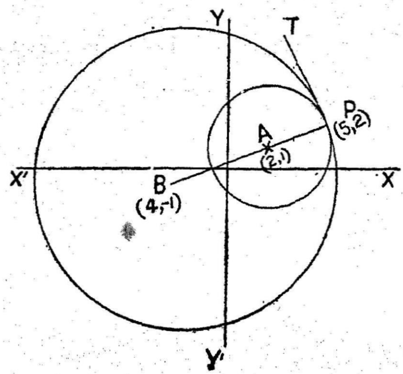
$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-5x-y+4=0$ ஆம்.

6. $x^2+y^2-4x-2y-5=0$; $x^2+y^2+8x+2y-73=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கிடப்பனவாமென்று காட்டுக. தொடுமிடத்தில் நிற்கும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்க. (பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

$x^2+y^2-4x-2y-5=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் A ஆகவும், ஆரம் r_1 ஆகவும் கொள்க. அப்பொழுது

$A(-g,-f)$ என்றதனுன் $(2, 1)$ ஆகும்.

$r_1=\sqrt{g^2+f^2-c}$ என்றதனுன் $\sqrt{4+1+5}=\sqrt{10}$ ஆகும்.



$x^2+y^2+8x+2y-73=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு மையம் A ஆகவும், ஆரம் r_2 ஆகவுங் கொண்டால்.

B ஆனது $(-g,-f)$ என்றபடி $(-4,-1)$ ஆம்.

r_2 ஆனது $\sqrt{g^2+f^2-c}$ என்றபடி $\sqrt{16+1-(-73)}=\sqrt{90}$ ஆகும்.

மேல் A $(2, 1)$: B $(-4,-1)$ என்பவற்றின் தொலை $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ என்றபடி

$\sqrt{\{[2-(-4)]^2+[1-(-1)]^2\}}$ ஆகும்.

அதாவது, $\sqrt{[(2+4)^2+(1+1)^2]} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

இனி, இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உள்ளே தொட்டு நிற்க வேண்டுமானுல் ஆரங்களின் வித்தியாசம் மையக்கோட்டின் நீளத்திற்குச் சமமாதல் வேண்டும் அதாவது $AB=r_1\sim r_2$,

இனி $r_1 \sim r_2 = \sqrt{10} \sim \sqrt{90}$ அல்லது $\sqrt{10} \sim 3\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

AB யின் நீளம் $= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

∴ கொடுத்த வட்டங்கள் உள்ளே தொடு வட்டங்களாம்

P தொடுபுள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் அறிய

$$\frac{BP}{AP} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{1}$$

∴ P ஆனது BA யை வெளிபுறத்தில் 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதாகும்.

$$\therefore \quad P\left[\frac{3\times 2-1(-4)}{3-1};\ \frac{3(1)-1(-1)}{3-1}\right] \text{ ஆம்}$$

அதாவது, P (5,2) ஆம். இதுவே வட்டங்களின் தொடுமிடமாம்.

∴ AP யின் சாய்வு வீதம்

$$= \frac{\text{A, P க்களின் } y \text{ ஆயத் தொலைகளின் வித்தியாசம்}}{\text{A, P க்களின் } x \text{ ஆயத் தொலைகளின் வித்தியாசம்}}$$

$$= \frac{1-2}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

PT, தொடுகோடு AB க்குச் செங்குத்தாகும் ஆகவே தொடு கோட்டின் சாய்வு வீதம் -3 ஆதல் வேண்டும்.

∴ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y-2=-3\,(x-5)$

அல்லது $3x+y-17=0$ ஆம்.

பயிற்சி 4.2

1. (a, b) என்பதை மையமாகக் கொள்ளும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-2ax-2by-c=0$ ஆகுமெனக் காட்டி, அதன் ஆரத்தையும். கணித்தறிக.

2. $4x-y=17$ என்னுங்கோடு $x^2+y^2-8x+2y=10$ என்னும் வட்டத்தினுடைய மையத்தின் வழியாகச் செல்லுவதெனக் காட்டுக.

3. (i) $5x^2+5y^2+4x-8y=16$ என்னும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் கண்டறிக. இவ்வட்டத்தை $5x+2=0$ என்னுங் கோடு குறுக்கிடும் இடங்களைக் குறிக்க. இவ்வட்டத்தோடு பொது மையங்கொண்டு ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தினது சமன்பாட்டை அமைக்க.

(ii) $2x^2+2y^2-14x+10y+19=0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரை இவற்றினைக் காண்க.

4. $x^2+y^2+ax+by+9=0$ என்னும் வட்டத்தின் மையம் $(1,-3)$ ஆனால் அதன் ஆரத்தைக் காண்க.

5. (4,5) என்ற மையத்தையுடைய வட்டத்தின் நேமி $x^2+y^2+4x+6y=12$ என்னும் பிறிதொரு வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லுவதானால் அதன் சமன் பாட்டைக் காண்க.

6. ஒரு வட்டத்திற்கு $x^2+y^2-8x-6y-11=0$ என்பது சமன் பாடாகும். இதன் விட்டத்துள் X அச்சுக்கு ஒரு போகாக வுள்ளதின் சமன் பாட்டையும், இவ்விட்டம் வட்டத்தைச் சந்திக்கு மிடங்களின் ஆயத்தொலைகளையும் கண்டறிக.

7. ஒரு வட்டமானது ஆதியின் வழியாகவும். (6, 0); (0, 8) என்னும் புள்ளிகளின் வழியாகவும் செல்லுகின்றது. அதன் சமன் பாட்டையும், அதற்கு ஆதியிடத்தில் அமையுந் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

8. (1, 1); (2, −1); (3, 2) என்னும் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $x^2+y^2+2x+6y+6=0$; $x^2+y^2+5x+6y+15=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று தொடுவனவாகக் காட்டி, தொடு மிடத்தில் அமையுந் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

10. $x^2+y^2-14x+6y+9=0$ என்னும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் கண்டறிக. மேலும், (2, 1) வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், அவ்விட்டத்தால் சமமாக வெட்டப் படுவதாய் (2, 1) வழியாகச் செல்லும் நாணின் (chord) சமன் பாட்டையும் குறிப்பிடுக (1948M)

11. பின்வரும் புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு உள்புறத்திலா வெளிப்புறத்திலா வுள்ளனவெனக் கண்டறிக:

A(0, 1); B(5, 7); C(−1, −2); D(−2, 3). அவற்றுள் வெளிப்புறத்திலுள்ளதொரு புள்ளியிலிருந்து வரையுந்தொடு கோட்டின் நீளத்தைக் கண்டறிக.

12. $2x-3y-1=0$ என்னுங்கோடு $x^2+y^2-3x+y=0$ என்னும் வட்டத்துடன் வெட்டுறும் இடங்களின் ஆயத்தொலைகளை அறிக. இவ்வெட்டிடங்களும் ஆதியுங் கூடியமையும் முக்கோணத்தின பரப்பைக் கணக்கிடுக.

13. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்னும் வட்டத்திற்குரிய விட்டத்தின் ஒரு முனை (4, 1) ஆனுல், அதன் மற்றொரு முனையின் ஆயத் தொலைகளைக் கண்டறிக. அம்மறு முனையில் அமையுந்தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

14. $x^2+y^2-8x+12y+15=0$ என்னும் வட்டத்தோடு பொது மையங்கொண்டு (5, 4) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன் பாட்டைக் காண்டறிக.

15. (−1, −1); (0, −1); (−2, 0); (1, 1) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின்மேல் கிடப்பனவாயின் அவ்வட்டத்தின் சமன் பாட்டைக் காண்க. அதனோடு, அதன் மையத்தையும், ஆரத்தையும் அறிக.

16. $ax^2+ay^2=bx+cy$ என்னும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையுங் கண்டறிக.

17. $x^2+y^2-10x-4y-7=0$ என்னும் வட்டத்தினுள் (3, 4) என்பதனை நடுப்புள்ளியாக வுடைய நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க

18. (0, −8); (0, 9); (12, 0); (−6, 0) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின்மேல் தங்குவனவாமெனக் காட்டுக. இந்த வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் கண்டறிக.

19. (i) $x^2+y^2=400$; $x^2+y^2-10x-24y+120=0$ என்னும் வட்டங்கள் உள்ளே தொட்டு நிற்பன வென்றும் (ii) $x^2+y^2-4x+6y+8=0$; $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ ஆவன வெளியே தொட்டுக் கிடப்பனவென்றும் காட்டுக, ஒவ்வொரு வகையிலும் தொடுமிடத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் கண்டறிக.

20. A, B என்பன $x^2+y^2-2x+3y-7=0$; $x^2+y^2-16x-18y-4=0$ என்னும் வட்டங்களின் மையங்களாம். P என்பது அவை வெட்டிக் கொண்டு நிற்கும் புள்ளியாகும். $AB^2 = AP^2+BP^2$ எனக் காட்டுக.

4. ஒரு வட்டமானது (x_1, y_1); (x_2, y_2) க்கஃளச் சேர்க்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்டுள்ளதானல் அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறிதல்

$A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகள் விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொள்க. வட்டத்தின்மேல் $P(x, y)$ என்பதொரு புள்ளியானல் P எங்கு நின்றாலும், $\angle APB = 90°$ ஆகும்.

அதாவது PA, PB என்பன ஒற்றற்கொன்று எப்பொழுதும் செங்குத்துக்களாகும். ஆதலின், அவற்றின் சாய்வு வீதங்கள் பெருக்கற் பலன் ருணராசியாக வேண்டப்படும்.

இப்பொழுது PA யின் சாய்வு வீதம் $=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ ம்

PB யின் சாய்வு வீதம் $=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$ ம் ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1.$$

அதாவது $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

„ $(y-y_1)(y-y_2) + (x-x_1)(x-x_2)$

„ $\underline{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$

என்பதுவே பெறவேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

விளக்க வுதாரணம் :

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ என்னுங்கோடு ஆயங்கஃள A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டுகின்றதாகும். இந்த AB யை விட்டமாகக்கொண்டு வரையும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. ஆகவே, A, B, O, (1, 3) என்னும் புள்ளிகள் ஒருவட்ட நேமியில் நிற்பனவாதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க.

(பல்கலைக் கழக மாதிரி வினு)

AB யின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ஆகும்.

$\therefore$ A $(a, 0)$ என்னும் புள்ளியானது x ஆயத்தின் மேலும் வட்டத்தின் மேலுமுள்ளதாகும்.

B $(0, b)$ என்னும் புள்ளி y ஆயத்தின் மேலும் வட்டத்தின் மேலும் உள்ளதாகும்.

$\angle AOB=90°$ ஆதலால், AB யை விட்டமாகக் கொண்டு வரையும் வட்டமானது ஆதி $(0, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதாகின்றது.

இனி, வட்டத்தின் சமன்பாடாவது

$(x-a)(x-0)+(y-0)(y-b)=0$

அதாவது $x^2-ax+y^2-by=0$

,, $x^2-y^2-ax-by=0$

இனி, $(1, 3)$ என்னும் புள்ளி வட்டத்தின் மேல் கிடப்பதாயின் $x=1, y=3$ என்று பிரதியிடுமிடத்து $x^2+y^2-ax-by$ ன் மதிப்பு 0 ஆதல் வேண்டும். இதுவே காணவேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

இதற்கு, $1^2+3^2-a-3b=0$ ஆதல் வேண்டும்.

$10-(a+3b)=0$,,

$a+3b=10.$,,

பயிற்சி 4·3

1. ஒரு வட்டமானது $(3, 7)$, $(-5, 1)$ என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்குங்கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்டால் அதன் சமன்பாடு யாது? இப்புள்ளியிடங்களில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை வரைக.

2. ஒரு வட்டமானது $(6, 0)$; $(0, 8)$ என்னும் புள்ளிகளோடு ஆதியின் வழியாகவும் செல்லும்படி வரையப்பட்டால் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க. அதனோடு இவ்வட்டத்திற்கு ஆதியிடத்தில் அமைக்குந் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் வரைக. (1945 M)

3. ஒரு வட்டமானது ஆதியின் வழியாகச் சென்று 3, 4 அலகு களுடைய் துண்டுகளை ஆயங்க்ளில் ஊடறுக்குமானல் அதன் சமன் பாட்டை வரைக.

4. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு மூலை ஆதியும், மற்ற இரண்டு மூலைகள் (4, 0); (0, 4) என்னும் புள்ளிகளுமானல், இச் சதுரத்தின் சுற்று வ்ட்டத்தினுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டத்திற்கு ஆதியிடத்தில் வரையுந் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையுங் கண்டறிக.

5. (0, 0); $(a, 0)$; (a, a); $(0, a)$ இவற்றின் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

பயிற்சி 4·4

வட்டத்தைப் பற்றி பல்வகைக் கணக்குகள்

1. $x^2+y^2-10x-4y+24=0$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன் பாடாகுமெனக் காட்டுக. அதன் மையத்தின் வழியாக $3x+y=22$ என்னுங் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகுங் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்க இக்கோடுகள் ஊடறுக்குமிடத்தின் ஆயத்தொலைகள் யாவை? இவ்வட்டத்தால் $3x+y=22$ என்னுங் கோட்டிடையே துண்டிக்கப் படும் நாணினது நீளத்தையுங் காண்க.

2. (4, −10); (−8, 8) என்னுமிடங்களைச் சேர்க்குங் கோட் டிற்குச் செங்குத்துச் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக. $2x=y+5$ யின்மேல் மையம் அமையக்கொண்டு (4, −10); (−8, 8) என்னும் புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

3. A, B, K என்னும் புள்ளிகள் முறையே (10, 0); (−10, 0); (6, 0) ஆகும். O ஆதியாகும். AB யை விட்டமாகக் கொண்டு வ்ரையும் வட்டப்பாதி OY ஐ C என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது AB க்குக் K என்னுமிடத்தில் வரையுஞ் செங்குத்துக்கோடு BC ஐ L என்னுமிடத்தில் கூடுகின்றது. இவ்வட்டம் KL ஐ சமமாக வெட்டு கின்றதெனக் காட்டுக.

4. X ஆயத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு, (1, −2); (3, −4) என்னும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை வரைக.

5. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு (1, 7), (4, −2) என்னும் புள்ளிகளிடத்தில் பொருந்தும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டை வரைக. இத்தொடுகோடுகளாலும், தொடுமிடங்களினிடத்தவாகிய ஆரங்களாலும் உருவமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பைக் கணித்தறிக.

6. மூன்றலகு ஆரமுடையதொரு வட்டமானது X ஆயத்தை (2, 0) என்னுமிடத்தில் தொடுகின்றது. இவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டமானது Y ஆயத்தை ஒன்றற்கொன்று $2\sqrt{5}$ அலகுகள் விலகியுள்ள புள்ளியிடங்களில் வெட்டிச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

7. ஓரலகு ஆரமுடையதாய் (1, 1) : (2, 2) என்னும் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக. அத்தகைய வட்டங்கள் இரண்டுளவெனக் காட்டுக.

8. ஆயங்களிரண்டையுந் தொட்டுக்கொண்டு (9, 2) வழியாகச் செல்லும் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

9. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $x=2y$ ன் மேலுளதாக, அது (−1, 2) : (3, −2) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுகின்றது. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $y-2x=0$: $y-3x=0$: $y=5x+4$ என்னுங் கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்திற்குரிய சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. ஆயங்களை (h, o) : (o, h) என்னுமிடங்களில் தொட்டு நிற்கும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

12. X ஆயத்தின்மேல் மையங்கொண்டு (2, 3) ன் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம் 5 ஆகும், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

13. மையம் (h, k) ஆகப்பெற்று (α, β) புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வரைக.

14. $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ என்னும் வட்டத்தினுள் கிடக்கும் நாண் (2, 3) என்றதனை நடுப்புள்ளியாகப் பெறுமாறுல், அதன் நீளத்தை அறிக,

15. $x^2+y^2=25$ என்னும் வட்டத்தினுள் (1, 2) என்றதனை நடுப் புள்ளியாக வுடைய நாணின் சமன்பாட்டை வரைக.

16. (4, 7) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் நீளத்தை யறிக

17. $x+2y=0$, $x-3y+1=0$, $3x+y-5=0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

18. (7, 1), (6, 4), (−2, 4), (5, 5) புள்ளிகளால் அமைந்த நாற்கரம் ஒரு வட்ட நாற்கரமென நிறுவுக.

19. பின்வரும் புள்ளிகள் $3x^2+3y^2-26x-16y+61=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு உள்புறத்திலா, வெளிப்புறத்திலா வுள்ளனவெனக் கண்டறிக. (i) (3, 2) (ii) (2, 3) (iii) (−1, 2). வெளிப்புறத்தி லுள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையுந் தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் கண்டறிக.

20. (5, 4); (−7, −4); (3, −2) என்னும் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிக.

விடைகள்

பயிற்சி 3·1

1. (i) சாய்வு வீதம் $= -2$; y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $= -3$

   (ii) ,, $= -\frac{2}{5}$; ,, $= \frac{4}{5}$

   (iii) ,, $= \frac{3}{2}$; ,, $= -12$

   (iv) ,, $= \frac{4}{3}$; ,, $\frac{2}{3}$

பயிற்சி 3·2

1. (i) $2x-5y+11=0$, (ii) $2x+y+1=0$, (iii) $5x+2y=7$
   (iv) $5x-y+9=0$.

10. $10x-y=29$; $x-y=2$; $8x+y=43$ மூன்று பக்கங்களின் சமன்பாடுகள். $x=4$; $4x-y=11$; $2x+y=33$ மையக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்.

பயிற்சி 3 3

2. (i) $x+y=1$ (ii) $\sqrt{3}x+y+3=0$
   (iii) $x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+3=0$ (iv) $x-y+3=0$
   (v) $x-\sqrt{3}y+5+\sqrt{3}=0$ 3. $(2, 3)$; $a=1$

பயிற்சி 3·5

1. x, y ஆயங்களில் வெட்டுத் துண்டுகளின் அளவுகள் முறையே
   (i) $\frac{2}{5}, -\frac{2}{7}$ (ii) $6, -8$ (iii) $\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}$ (iv) $-\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}$

   (v) $-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}$

2. $3x-2y=-6$; சாய்வு வீதம் $=\frac{3}{2}$; பரப்பு 3 ச. அலகுகள்.

பயிற்சி 3·6

(i) $p=5$; $\cos\alpha=\frac{12}{13}$; $\sin\alpha=-\frac{5}{3}$.

(ii) $p=2$; $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$; $\sin\alpha=\frac{15}{17}$.

(iii) $p=6$; $\cos\alpha=\frac{7}{25}$; $\sin\alpha=\frac{24}{25}$.

(iv) $p=\frac{1}{2}$; $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$; $\sin\alpha=-\frac{40}{41}$

பயிற்சி 3·7

1. (i) $y=x-3$ (ii) $5x-3y=0$ (iii) $12x-5y=13$; $\frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$; $\frac{169}{120}$ (iv) $y=-x+2$

(v) $y-3=-\sqrt{3}(x+2)$ (vi) $x-y=5$

(vii) $7x-3y+21=0$ (viii) $x+y=5$

பயிற்சி 3·8

2. (ii) $a=3$; வெட்டும் புள்ளி $(2, 5)$; (அல்லது) $a=-\frac{35}{12}$; வெட்டும் புள்ளி $\left(-\frac{84}{19}, \frac{156}{19}\right)$

4. $x+5y=5$; $7x+4y=4$; $6x-y+1=0$; $(0, 1)$.

பயிற்சி 3·9

3. $y=5$; $3x-4y+14=0$; $x=-2$. 5. (i) $16x+8y-27=0$ (ii) $8y-5=0$ (iii) $4x-4y-3=0$.

6. $5x+8y+31=0$; $5x+8y-14=0$ 7. $2x-3y+6=0$; $2x-3y=0$ 8. $\sqrt{3}x-y+3-\sqrt{3}=0$; $\sqrt{3}x-y-2(1+\sqrt{3})=0$
12 $4x+5y=9$, $7x+2y=9$, $x=y$

பயிற்சி 3·10

5. (i) $8x-16y=1$ (ii) $8x-11=0$ (iii) $8y-5=0$

(iv) $x+y=2$

பயிற்சி 3·12

1. $2x+y=2$; A(1, 0) ; B(0, 2) ; 1 ச. அலகு (i) $2x+y=0$

2. (i) (1, 1), (ii) $x+4y=5$ (iii) 1 ச. அலகு.

3. (i) (2, 3) (ii) $3x-y=3$ (iii) $x+3y=0$.

4. (i) $5x-y=7$ (ii) $34x-17y=53$

5. $4x+2y=15$; $2x-4y+15=0$; $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

6. $2x-3y=0$; $3x-4y=7$; $(\frac{15}{13}, \frac{10}{13})$; $(\frac{28}{25}, \frac{21}{25})$:
$23x+11y=35$.

7. $(\frac{113}{13}, \frac{6}{13})$. 8. $(-4,-4)$

9. BD ன் சமன்பாடு $13x-12y=99$: CD ன் சமன்பாடு $x+5y=55$. நான்காவது முனை D(15, 8) ; $11\sqrt{5}$; $\sqrt{229}$.

10. $(-1,-5)$.

11. சுற்றுவட்டம் $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$; மையக்கோட்டுச் சந்தி (0, 0)

12. $(-4,-3)$; குத்துக்கோடுகளின் நீளம் 1, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\sqrt{5}$ அலகுகள்

13. $x-y+1=0$

15. $4x+5y=9$; $7x+2y=9$, $x=y$ · 16·20 ச. அலகுகள்

17. $-2\pm\sqrt{3}$ 18. $(-\frac{36}{7},-\frac{45}{7})$

19. (i) $13x-2y=12$ (ii) $4x+26y=17$
y ஆயத்தில் வெட்டுத்துண்டு :—6 ; $\frac{17}{26}$.

பயிற்சி 4·1

1. $x^2+y^2-6x+4y+4=0$

2. $x^2+y^2-8x-6y=0$; சாய்வுவீதம் $=\frac{3}{4}$; $4x+3y=0$

3. ஆரம் $=5$ அலகுகள் 4. $-\frac{4}{3}$; $3x-4y=25$; $\frac{25}{3}, -\frac{25}{4}$

5. $x^2+y^2-16x+4y-32=0$

6. $12x-5y=17$; $\frac{57}{4}$; $-\frac{171}{5}$; $243{\cdot}675$ ச. அலகுகள்

7. $x^2+y^2+x-2y-41=0$; $5x-12y+99=0$; $5x-12y-70=0$

8. $x^2+y^2-6x-8y=0$; $3x+4y=0$

9. $x^2+y^2-3x-4y=0$ 10. $x^2+y^2-4x-4y=0$; $y+x=0$

11. $x^2+y^2-4x-4y=0$ 12. $x^2+y^2-ax-ay=0$

பயிற்சி 4·2

1. $\sqrt{a^2+b^2+c}$

3. (i) $(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$; ஆரம் $=2$ அலகுகள்; $(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$; $(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$ $5x^2+5y^2+4x-8y=0$ (ii) $(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$; 3

4. 1 அலகு; 5. $x^2+y^2-8x-10y-59=0$

6. $y=3$; $(10, 3)$; $(-2, 3)$

7. $x^2+y^2-6x-8y=0$; $3x+4y=0$

8. $x^2+y^2-5x-y+4=0$ 9. $x=-3$

10. மையம் $(7-3)$; ஆரம் $=7$ அலகுகள்: $4x+5y=13$: $5x-4y=6$

11. A வட்டத்திற்கு உள்ளே; B வெளியே; தொடுகோட்டின் நீளம் $=\sqrt{74}$; C உள்ளே; D வெளியே; D யிலிருந்து தொடுகோடு $=5$ அலகுகள்

12. $(-\frac{1}{13}, -\frac{5}{13})$; $(2, 1)$; $\frac{9}{26}$

13. $(-2, -7)$; $3x+4y+34=0$

14. $x^2+y^2-8x+12y-49=0$

15. $x^2+y^2+x-y-2=0$; $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$; $\sqrt{\frac{5}{2}}$

16. $\left(\frac{b}{2a}, \frac{c}{2a}\right)$; $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$ 17. $x-y+1=0$

18. $(3, \frac{1}{2})$; $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ 19. $(\frac{100}{13}, \frac{240}{13})$; $(3, -1)$

பயிற்சி 4·3

1. $x^2+y^2+2x-8y-8=0$; $4x+3y=33$; $4x+3y+17=0$

2. $x^2+y^2-6x-8y=0$; $3x+4y=0$

3. $x^2+y^2-3x-4y=0$;

4. $x^2+y^2-4x-4y=0$; $x+y=0$

5. $x^2+y^2-ax-ay=0$

பயிற்சி 4·4

1. $x-3y+1=0$; $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2})$; $\sqrt{10}$ அலகுகள்

2. $2x-3y+1=0$; $x^2+y^2-8x-6y-144=0$

4. $x^2+y^2+10x+20y+25=0$; $x^2+y^2-6x+4y+9=0$

5. $y-7=0$; $3x-4y-20=0$; 75 ச. அலகுகள்

6. $x^2=y^2-4x-6y+4=0$

7. $x^2+y^2-4x-2y+4=0$; $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

8. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$; $x^2+y^2-34x-34y+289=0$

9. $x^2+y^2-4x-2y-5=0$ 10. $3x^2+3y^2-60x+40y\ \ 0$

11. $x^2+y^2-2hx-2hy+h^2=0$

12. $(x-6)^2+y^2=5^2$; $(x+2)^2+y^2=5^2$

13. $x^2+y^2-2hx-2ky+\alpha^2+\beta^2-2h\alpha-2k\beta=0$

14. $4\sqrt{2}$

15. $x+2y=5$

16. 4

17. $5x^2+5y^2-8x+4y-5=0$

19. (3, 2) வட்டத்திற்கு உள்ளே அமைகிறது; (2, 3) வட்டத்தின்மேல் இருக்கிறது. (−1, 2) வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ளது: (−1, 2) யிலிருந்து தொடுகோட்டின் நீளம் $=\sqrt{70/3}$

20. $7x^2+7y^2-30x+38y-37=0$

கலைச் சொற்கள்

(Analytical Geometry)

பகுமுறை வடிவக் கணிதம்

(அல்லது) ஆயத்தொலை வடிவக் கணிதம்

Abscissa	கிடை (அச்சுத்) தூரம்
Analytical Geometry	பகுமுறை வடிவக் கணிதம்
Axes of Co. ordinates	கிடை, நிலை அச்சுகள்; x, y அச்சுகள்
Axis	அச்சு ; ஆயம்
Bisector	இருசமவெட்டி
Centre	மையம்
Circumcentre	சுற்றுவட்ட மையம்
Excentre	வெளிவட்ட மையம்
Incentre	உள்வட்ட மையம்
Orthocentre	லம்பமையம் ; குத்துச்சந்தி ; செங்கோட்டு மையம்
Centroid	மையக்கோட்டுச் சந்தி ; நடுக்கோட்டு மையம்
Circle	வட்டம்
,, Circumscribed	சுற்றுவட்டம்
,, Concentric	பொது மையவட்டம்
,, Escribed	வெளி வட்டம்
,, Inscribed	உள் வ்ட்டம்

,, Nine point	ஒன்பது புள்ளி வட்டம்
,, Semi	அரைவட்டம்
Circumscribe	சுற்றிவரை
Collinear	நேர்வரை(யிலுள்ள)
Collinearity	நேர்வரைத் தன்மை
Concentric	பொதுமைய ; ஏகமைய்
Concur	சந்தி
Concurrence	சந்திப்பு
Concurrency, point of	சந்திப்புப் புள்ளி
Concurrent	(ஒரு புள்ளியில்) சந்திக்கும்
Concyclic	ஒரு பரிதியிலுள்ள
Condition	நிபந்தனை
Co. ordinates	அச்சுத்தூரங்கள்; ஆயத் தொலைக
Rectangular Co. ordinates	செவ்வக அச்சுத்தூரங்கள்
Co ordinate Geometry	ஆய வடிவ கணிதம்
Corollary	கிளைத்தேற்றம்
Curve	வளைவு : வளைகோடு
Cyclic	வட்ட
Define	வரையறு ; இலக்கணம் கூறு
Definition	வரையறை : இலக்கணம்
Diagonal	மூலைவிட்டம் ; மூலவரை
Diameter	விட்டம்
Directed numbers	திசை எண்கள்
Direction	திசை
Eliminant	நீக்கற்பலன்
Eliminate	நீக்கு
Elimination	நீக்கல்
Equation	சமகரணம், சமன்பாடு
Simultaneous Equation	ஒருங்கமைச் சமன்பாடு
Solution of an equation	சமன்பாட்டுத் தீர்வு
Simple (linear) equation	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Quadratic equation	இருபடிச் சமன்பாடு
Roots of an equation	சமன்பாட்டு மூலங்கள்
Side of an equation	(இட, வல) பக்கம்

Solve an equation	சமன்பாட்டைத் தீர்
Equidlstant	சமதூர
Equilateral	சமபக்க
Expression	கோவை
Extremities	முனைப் புள்ளிகள்
Gradient	சாய்வு வீதம்
Graph	வரைப்படம்
Horizontal	கிடை, கிடைக்கோடு— படுமட்டக்கோடு படுக்கைக் கோடு
Hypotenuse	கர்ணம்
Inclination	சாய்வு
Intercept	வெட்டுத் துண்டு ; குறுக்கீடு
Point of Intersection	வெட்டுப் புள்ளி
Intersection	வெட்டுதல்
Isosceles	இருசமபக்க
Locus	நியமப்பாதை ; இயங்குவரை
Quadrant	கால்வட்டப் பகுதி
Median	மையக்கோடு ; நடுக்கோடு
Nine point circle	ஒன்பது புள்ளிவட்டம்
Normal	குத்துக்கோடு ; லம்பம்
Oblique	சாய், சாய்ந்த
Ordinate	நிலை அச்சுத்தூரம் ; குத்தாயம்
Origin	ஆதி ; பிறப்பிடம்
Orthocentre	குத்துச்சந்தி ; லம்பமையம்
Orthogonal	செங்கோணமுள்ள
Pair	இணை, ஜதை
Parallel	ஒருபோகு, சமாந்தர ; இணை
Parallelogram	இணைகரம்
Perpendicular	செங்குத்துக்கோடு ; லம்பம்
Perpendicular bisector	மையக் குத்துக்கோடு
Analytical Proof	பகுமுறை நிரூபணம்
Quadrant	கால்வட்டம்
Quadrilateral	நாற்கரம்

Rectangle	செவ்வகம்
Rhombus	சாய் சதுரம்
Slope	சரிவு ; சாய்வுவீதம்
Substitute	பிரதியிடுதல்
Trisect	முச்சமக் கூறிடு
Vertical	நிலைக்குத்துக்கோடு
Vertex	கோண உச்சி ; முனை

(பல்கலைப்) புகுமுகத் தேர்வு, ஏப்ரல் 1966

வினாத்தாள் I

காலம்: $2\frac{1}{2}$ மணி　　　　　　　　　　　　மதிப்பெண் : 100

எப்பிரிவையும் அறவேவிலக்காமல் யாவையேனும் ஐந்து வினாக்களுக்கு விடை வரைக

எல்லா வினாக்களும் ஒத்த மதிப்பெண் உடையனவாம்.

பிரிவு A

1. (a) x^5-x^3+ax+b என்பது x^2+x-6 என்பதனால் சரியாக வகுபடுதற்கு a, b க்களின் மதிப்புக்களைக் கண்டறிக.

(b) காரணிப்படுத்துக; $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

(c) $a=p^x$; $b=q^x$; $a^y b^x=p^{2(x+y)}$ ஆனால் $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ எனக் காட்டுக.

2. (a) காட்டுக :

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}=2\frac{a^2}{b^2}$$

(b) $y=ab^{-x}$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு

(i) $x=0{\cdot}2$; $y=316$

(ii) $x=0{\cdot}4$; $y=126$ என்னுமிவை பொருந்துவன வாகில் a, b க்களின் மதிப்புக்களை நிர்ணயிக்க,

(c) $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}$ ஆனுல் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{(x+y+z)^2}{a^2+b^2+c^2}$ என நிரூபிக்க.

3. (a) $x^2-3x+5=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு α, β என்பன மூலங்கள் ஆகுமானுல், $\alpha^2+\beta : \beta^2+\alpha$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொள்ளும் சமன் பாட்டைக் காண்க.

(b) $x^2-px+q=0$ என்னும் சமன் பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்ற மூலத்தின் n ஆவது அடுக்காதற்கு நிபந்தனைக் கண்டறிக.

(c) வீடுவிக்க :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12} : \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{25}{144}.$$

4. (a) 298க்கு மேற்படாமல் 9 ஆல் வகுபடக் கூடிய எல்லா இயற்கை யெண்களின் கூட்டுப் பலனைக் காண்க.

(b) ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுக்குரிய மூன்று இலக்கங்கள் பெருக்கு விருத்தியிலுள்ளன. இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 13. அவ் வெண்ணேடு 792 ஐக் கூட்டினுல் அதன் இலக்கங்கள் திருப்பமுறும் அவ்வெண்ணைக் கண்டறிக.

(c) $1 . 2 . 4+2 . 3 . 5+3 . 4 . 6$ ......

இத்தொடரில் n உறுப்புக்களுக்குப் கூட்டுப் பலன் அறிக.

5. (a) அடிப்படைக் கொள்கைகளைத் தழுவி

$_nP_r=n. (n-1)_nP_{r-1}$ என நிரூபிக்க.

(b) ஒரு குடுப்பத்தின் நான்கு சகோதரர்களும், மூன்று சகோதரிகளும் நிழல் படம் எடுப்பதற்காக வரிசைப்பட அமர்த்தப் படுகிருர்கள் எல்லாச்சகோதரிகளும் ஒருங்கமரவேண்டுமானுல், இதனை எத்தனை வழிகளில் செய்யலாம்,

(c) n பக்கங்களையுடை பல்கோண வடிவத்தில் எத்தனை மூலைவிட்டங்களிருக்கும்? பல்கோணத்தின் மூலைகளைக் கூட்டுவதால் எத்தனை முக்கோணங்கள் அமையக் காணலாம்?

6. (a) $(1+ax)^n$ ன் விரிப்பில் முதல் மூன்றுறுப்புகள் முறையே $1,\ 6x,\ 6x^2$ என்பனவானால், a, x களின் மதிப்பைக் காண்க.

(b) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^8}\right)^{13}$ன் விரிப்பில் x^{11} ன் குணிதத்தைக் குறிப்பிடுக.

பிரிவு B

7. (a) ஒரு முக்கோணத்தில் (7, 2); (1, 6) என்பன முனைகளும் (4, 6) என்பது மையக்கோட்டுச் சந்தியுமானால், அதன் மூன்றாவது முனையைக் குறிப்பிடுக.

(b) (0, −1): (2, 1): (0, 3): (−2, 1) என்பன ஒருசதுரத்தின் மூலைகளாமென நிரூபிக்க.

8. (a) (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுவதாய், X ஆயத்தோடு θ கோணம் பிறப்பிப்பதாய் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன் பாட்டை $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r$ என்னும் வடிவத்தில் அமைக்கக் கூடுமெனக் காட்டுக.

(4, 1) என்னும் புள்ளிவழியாகச் செல்லும் கோடானது அப்புள்ளியிலிருந்து $\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$ தொலைவில் $3x-y=0$ என்னும் நேர்க்கோட்டை ஊடறுத்துச் செல்லுமானால் அதன் சமன் பாட்டைக் கண்டறிக.

9. (a) ஒருவட்டமானது X ஆயத்தில் மையத்தைப் பெற்று, 5 அலகு ஆரமுடையதாய் (2, 3) வழியாகச் செல்லுமானால் அதன் சமன் பாட்டைக் காண்க.

(b) $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ என்னும் வட்டத்தினுடைய நாண் (chord) ஒன்று (2, 3) ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்டிருக்குமானால் அதன் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

பல்கலைப் புகுமுகத்தேர்வு, மார்ச்சு 1966

கணிதம்—தாள் II

காலம் : $2\frac{1}{2}$ மணி　　　　　　　　　　மதிப்பெண் :

எப்பிரிவையும் தவிர்க்காமல் 5 வினாக்களுக்கு விடை வரைக.

எல்லா வினாக்களும் ஒத்த மதிப்பெண் பெறும்.

பிரிவு A

1. (*a*) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக்கோணமானது வெளிப் புறத்தில் இருசமமாகப் பிரிக்கப்பட்டால், அச்சமவெட்டியானது அடிக் கோட்டை வெளிப்புறத்தே மற்ற இரண்டு பக்கங்களுக்குடைய விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

(*b*) ஒரு முக்கோணத்தில் ∠Aயின் சமவெட்டி BC ஐ D என்னுமிடத்தில் சந்திக்கின்றது. ∠Bயின் சமவெட்டி AD ஐ I என்னு மிடத்தில் சந்திக்கின்றது. $AI : ID = b+c : a$ என்று நிரூபி.

2. (*a*) இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்புகள் ஒன்றற்கொன்று இசைப்பக்கங்களின் வர்க்கங்களுக் கேற்ப இருக்கும்.

(*b*) ஒரு முக்கோணத்தை அடிப்பக்கத்திற்குச் செங்குத் தாகும் கோட்டினால் இருசமமாகப் பிரிக்க.

3. (*a*) ஒரு குறுக்குவெட்டுக்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் BC. CA, AB என்னும் பக்கங்களை D, E, F என்னுமிடங்களில் ஊடறுத்து நிற்குமானால், $BD . CE \quad AF = -DC . EA . FB$ எனநிரூபி.

(*b*) ஒரு முக்கோணத்தின் முனையிடங்களில் அதன் சுற்று வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் அம்முனைகளுக்கு எதிர் பக்கங் களைச் சந்திக்கும் இடங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டின் மேல் நிற்பனவாகு மென நிரூபி.

4. (*a*) ஒரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டமானது குத்துயர் கோடுகளின் பாதங்கள் வழியாகவும், அதன் முனைகளை குத்துச்சந்தியோடு சேர்க்குங் கோடு களின் நடுப்புள்ளிகளின் வழியாகவும் செல்லுவதாகுமென நிரூபிக்க.

5. (*a*) $\triangle ABC$ யில் BC என்னும் அடிப்பக்கத்தில் D என்பதொரு புள்ளி $m . BD = n\ DC$ என்னும் பகுப்பு அமையுமாறு நிற்பதானுல் $m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)AD^2 + mBD^2 + nDC^2$ என நிரூபி.

(*b*) $\triangle ABC$ ல் G என்பது மையக்கோட்டுச் சந்தியும் P என்பது யாதேனுமொரு புள்ளியுமாகும்.

$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 \div GB^2 + GC^2 + 3PG^2$ என நிரூபி:

பிரிவு B

6. (i) (*a*) வடிவக்கணித முறையில் நிரூபி :

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(*b*) நிரூபிக்க :

$$\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2$$

(ii) $\cos^2 A + \cos^2(120 + A) + \cos^2(120 - A) = \frac{3}{2}$.

7. யாதேனுமொரு முக்கோணத்தில், வழக்கமான குறியீடுகளுடன், நிரூபிக்க :

(i) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a + b + c$

(ii) $abc = 4\Delta R$

(iii) $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$

8. (*a*) ஒரு முக்கோணத்தில் $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$ என்று நிரூபி.

(*b*) $a = 78$; $b = 56$; $c = 44$ என்பன கொண்டு முக்கோணத்தை விடுவிக்க.

9. (*a*) $A + B + C = 90°$ ஆனுல்.

$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$ என்று நிரூபி.

(*b*) ஒரு ஏரிக்குமேலே 200 அடி உயரத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து நோக்குகையில் ஒரு மேகத்தின் ஏற்றக் கோணம் 30° இருந்தபொழுது ஏரியில் தெரிந்த அதன் விம்பம் (reflection) 45° இறங்கு கோணத்திலிருந்ததானுல், அம்மேகமானது ஏரிக்குமேலே எவ்வளவு உயரத்தில் இருந்திருக்க வேண்டுமென்பதைக் கண்டறிக.

—:o:—