# கணக்கியல் புள்ளியியல்

## துணைப்பாடம்

### (இரண்டாம் பகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

திருமதி **கிருட்டிணவேணி அருணாசலம்**, எம்.ஏ., பி.ஈடி.,
கணிதப் பேராசிரியை,
இராணி மேரிக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—591

# கணக்கியல் புள்ளியியல்

## துணைப்பாடம்

(இரண்டாம் பகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

திருமதி கிருட்டிணவேணி அருணாசலம், எம்.ஏ., பி.ஈடி.,
கணிதப் பேராசிரியை,
இராணி மேரிக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—November, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 591

© Tamilnadu Textbook Society

# MATHEMATICAL STATISTICS

## (Ancillary)—Part II

Tmt. Krishnaveni Arunachalam

Price Rs. 13-60

*Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.*

*Printed by*
Muthukumaran Press,
Madras-1.

## அணிந்துரை

**திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்**
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினூன் காண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P. U. C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**கணக்கியல் புள்ளியியல் —துணைப்பாடம்**' (இரண்டாம் பகுதி) என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **591**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **626** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின் உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

**இரா. நெடுஞ்செழியன்**

# பொருளடக்கம்


| | | | பக்கம் |
|---|---|---|---|
| 1. | வளைகோடு பொருத்துதல் | ... | 1 |
| 2. | ஒட்டுறவு | ... | 41 |
| 3. | பண்புகளின் உறவு | ... | 126 |
| 4. | இடைச் செருகல் | ... | 155 |
| 5. | கூறுகளின் கொள்கைகள்—பெருங்கூறுகள் | ... | 191 |
| 6. | சிறு கூறுகளுக்கான மிகைத் தன்மைச் சோதனைகள் | ... | 278 |
| 7. | கைவர்க்கச் சோதனை | ... | 303 |
| 8. | பல்வகைக் கூறுகளும், அவற்றின் கணக்கியல் பண்புகளும் | ... | 338 |
| 9. | மதிப்பியல் | ... | 362 |
| 10. | பரவற்படி பகுப்பாய்வு, சோதனைத் திட்ட முறை | ... | 401 |
| 11. | செயல்முறைப் புள்ளியியல் | ... | 448 |
| | மடக்கைகள் | ... | 542 |
| | எதிர்மடக்கைகள் | ... | 544 |
| | இயல்நிலைவரையில் பரப்புப்பட்டியல் | ... | 546 |
| | இயல்நிலைவரையின் நிலைத்தூரங்களின் பட்டியல் | ... | 547 |
| | Significant Points of $\chi^2$ | ... | 548 |
| | $t$-அட்டவணை | ... | 549 |
| | F-அட்டவணை | ... | 550 |
| | மேற்கோள் நூற்பட்டியல் | ... | 551 |
| | கலைச்சொற்கள் | ... | 552 |

# 1. வளைகோடு பொருத்துதல்

## (Curve Fitting)

மையப் போக்களவைகள், பரவுகை அளவைகள், கோட்டளவைகள் போன்றன, புள்ளி விவரங்களைப் பற்றிய எல்லா விளக்கங்களையும் தருவதில்லை. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைச் சிதைவுபடுத்தாது, அப்படியே ஒரு சார்புத் தொடர்பினைக் காணுதல் வேண்டும். இச் சார்பினை எல்லாக் கணிப்புகளும் நிறைவுபடுத்தாமல் இருக்கலாம். இருப்பினும், அதனைக் கொண்டு, இந்த இராசிகள் அடங்கிய முழுமைத் தொகுதியின் அமைப்பை ஓரளவு ஊகிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கணிதத்தில் ஒரு மாணவரது மதிப்பெண் $x$ எனவும், இயற்பியலில் $y$ எனவும் கொண்டு, 50 பேர் அடங்கியுள்ள கூறில் $3y=2x-7$ என்ற சார்பு பெரும்பான்மையான மாணவரின் மதிப்பெண்களிடையே காணப்பட்டால், அத் தொடர்பு முழுமைத் தொகுதியிலும் இருக்கக்கூடும் எனக் கொள்கிறோம். இம் மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது மற்றொரு மாறியின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக் கணக்கிட உதவுகிறது. மாறியின் நேரில் காணும் மதிப்புக்கும், எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாடுகள், கூறுகளின் கணிப்புப் பிழையைத் தவிர, கூறுகளுக்கே இயல்பாக உள்ள ஏற்றவிறக்கப் பிழைகள் மூலம் ஏற்படுகின்றன.

புள்ளி விவரங்களில் மாறிகளின் இடையே காணப்படும் சார்பு தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடே பொருத்தப்படவேண்டிய வளைகோடாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்தின் தன்மைக்கேற்றவாறு ஒரு நேர்கோட்டையோ, அல்லது ஒரு பரவளையத்தையோ அல்லது வேறு ஏதேனும் ஒரு வளைகோட்டையோ பொருத்தலாம்.

ஒட்டுறவுடைய இரு மாறிகளின் பரவலிலும், காலத்தைச் சார்பிலா மாறியாகக் கொண்ட காலத் தொடர்வரிசையிலும், வளை கோட்டைப் பொருத்தும் முறை பெரிதும் கையாளப்படுகிறது. ஒரு தொழிற்சாலையில் 10 ஆண்டுகளின் $[x]$ உற்பத்தி $[y]$ தரப் பட்டிருக்கும்போது, ஒரு வளைகோட்டைப் பொருத்தி, அதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேறு ஏதேனும் ஓர் ஆண்டுக்குரிய உற்பத்தியைக் கணக்கிடுகின்றோம். ஒரு மாறியைக் கொண்ட விவரங்களுக்கு இம் முறை பயன்படாது.

ஒரு மாறியின் நிகழ்வெண் பரவல்களை, நேரடியாக நிகழ் வெண் வரை அல்லது நிகழ்வெண் பலகோணத்திற்குப் பொருத்தப் பட்ட நிகழ்வெண் வரை, ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்ஸான் பரவல், இயல்நிலைப் பரவல் போன்றவற்றிற்குப் பொருத்தி வரைகளைக் கண்டுள்ளோம். மேலும், அளவிடற்குரிய பண்புகள் காணப்படும் விவரங்களுக்குமட்டுமே வளைகோட்டைப் பொருத்தமுடியும்.

(1) எனவே வளைகோட்டைப் பொருத்துவதால் (i) கணிப்புப் பிழைகளும் (errors of observation), (ii) கூறின் ஏற்ற இறக்கங் களும் (fluctuations of sampling) அற்ற நிலையில், பெறப்படும் கூறின் பண்புகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிகிறோம்.

(2) வளைகோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து $x$ கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது, $y$-ன் மதிப்பையோ, அல்லது $y$ கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது $x$-ன் மதிப்பையோ தோராயமாகக் கணக் கிடலாம்.

**வரைபடம் மூலம் வளைகோடு பொருத்துதல்**

ஒட்டுறவு (correlated) கொண்ட இரு மாறிகளைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், இரு செங்குத்துக் கோடுகளை அச்சுகளாகக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறித்திடலாம்.

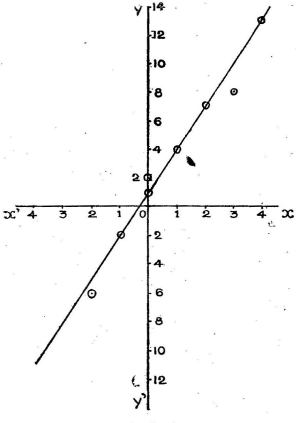
புள்ளிகளைக் குறித்தவுடன் ஒரு மெல்லிய நூலை ஒரு முனையில் கெட்டியாகப் பிடித்துக்கொண்டு வரைபடத்தின் மீது மெதுவாக நகர்த்திக்கொண்டே சென்றால் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில், இந்தப் புள்ளிகளில் பெரும்பான்மையானவை அக் கோட்டின்மீதோ, மிக அண்மையிலோ இருக்கும். இப்போது நூல் உள்ள இடத்தில் நேர்கோடு வரைந்தால், அது பொருத்தமான நேர் கோடு எனக் கொள்ளலாம். இம் முறை பார்வையால் மட்டும் உத்தேசமாகக் கண்டுபிடிக்கப்படுவதால், முற்றிலும் சரியான தெனக் கூறமுடியாது. மேலும், புள்ளிகள் சிதறிக் கிடந்தால் ஒவ்வொருவரும் ஒவ்வொரு மாதிரியான நேர்கோட்டைப் பொருத்தமுடையதெனத் தீர்மானிக்கலாம். சில சமயங்களில்

நேர்கோட்டிற்குப் பதிலாகப் பரவளையம் அல்லது வேறு வரை கூடப் பொருத்தமானதாக இருக்கலாம். இவற்றை வரைபட மூல மாகப் பொருத்துவது இயலாது. எனவே, வளைகோடு பொருத்தச் சிதறல் விளக்கப் படத்தைப் பயன்படுத்துதல், புள்ளிகளின் போக்குப்பற்றி ஓரளவு குத்துமதிப்பான கருத்துக் கிடைப்பதற்குத் தான் வழிகோலும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டை வரை படத்தில் பொருத்துக.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | —6 | —2 | 2 | 4 | 7 | 8 | 13 |




படம் 1—1.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் 5 நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்றன. ஒன்று நேர்கோட்டின் மேலேயும், மற்றொன்று

அதற்குக் கீழேயும் உள்ளது. எனவே, வரையப்பட்டுள்ள நேர் கோடு பொருத்தமானதெனக் கொள்ளலாம். இதன் $x$ வெட்டுத் துண்டும் $y$ வெட்டுத் துண்டும் முறையே $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ ஆதலால்

$$\text{இதன் சமன்பாடு } \frac{x}{-\frac{1}{3}} + \frac{y}{1} = 1$$

$$y = 3x + 1 \text{ ஆகும்.}$$

**குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை** (Principle of Least Squares)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $n$ ராசிகள் $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$ ...$(x_n, y_n)$ என்க. விவரங்களுக்குப் பொருந்தும் வரை $y = f(x)$ என்க.

$y'_1 = f(x_1)$ ; $y'_2 = f(x_2)$ ; ......... $y'_n = f(x_n)$ எனக் கொள்வோம்.

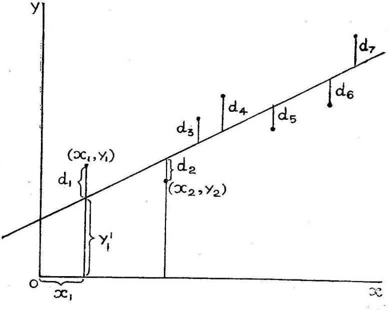
$d_1 = y_1 - y'_1$ ; $d_2 = y_2 - y'_2$ ; இவற்றை எச்சங்கள் (residuals) என்கிறோம்.

$E = \Sigma d_1^2$ என்க. $E$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுமாறு $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இதுவே குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையாகும்.

அதாவது, எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பாகிய $y'_1$-க்கும், நேரில் கண்ட $y_1$-க்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு நேர்க்குறி அல்லது எதிர்க்குறி கொண்டதாக, அல்லது பூச்சியமாகவும் இருக்கலாம். எவ்வாறு இருப்பினும், $d_1 = y_1 - y'_1$ என்பது கணக்கியல் மதிப்பிலிருந்து ஏற்படும் விலக்கம் அல்லது பிழையாகும். எனவே, ஒவ்வொரு கணிப்பிற்கும் பிழையினை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டும்போது, பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் கிடைக்கிறது. நாம் எடுத்துக்கொண்டுள்ள வரை மிகச் சிறந்த பொருத்தமுடையதாக அமையவேண்டுமெனில், இப் பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறவேண்டும்.

படம் 1-2, ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதில், இக் கொள்கையைப் பயன்படுத்துவதைக் காட்டுகிறது.

$y$ அச்சுக்கு இணையாக நேர்கோட்டிலிருந்து புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரங்கள் எச்சங்கள் ஆகும்.




படம் 1—2.

தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருந்தும் வரையை $x = f(y)$ எனக் கொண்டோமானால் $d_1$, $d_2$ ……… என்பவை $x$ அச்சுக்கு இணையாக அளக்கப்படுகின்றன.

**தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துதல்**

$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ …….. $(x_n, y_n)$ என்பவை இராசிகளின் $n$ மதிப்புகள். நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = ax + b$ என்க.

$$E = \Sigma d_1^2 = \Sigma (y_1 - y'_1)^2 = \Sigma [y_1 - (ax_1 + b)]^2$$

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின்படி, $E$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற, வகை நுண் கணிதத்தின்படி

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \Sigma - 2x_1 [y_1 - (ax_1 + b)] = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \Sigma - 2 [y_1 - (ax_1 + b)] = 0 \qquad \text{... (2)}$$

(1)-லிருந்து, $\Sigma[-2x_1 y_1 + 2ax_1^2 + 2x_1 b] = 0$

$$a \Sigma x_1^2 + b \Sigma x_1 = \Sigma x_1 y_1$$

அடிக்குறியை ஒதுக்க,

$a \Sigma x^2 + b \Sigma x = \Sigma xy$ என வரும்.

இதுபோன்று (2)-லிருந்து, $a \Sigma x + nb = \Sigma y$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\Sigma y = a \Sigma x + nb, \ \Sigma xy = a \Sigma x^2 + b \Sigma x$$

என்ற இவ்விரு சமன்பாடுகளும், குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின் அடிப்படையில், நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகள் $a$, $b$-ன் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கின்றன. இவை 'இயல் சமன்பாடுகள்' (normal equations) எனப்படுகின்றன.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துக.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $y$ | 32 | 45 | 56 | 78 | 94 | 112 | 136 |

**தீர்வு**

நேர்கோட்டு வரையின் சமன்பாட்டை $y = ax + b$ எனக் கொள்வோம்.

மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் அல்லது இயல் சமன்பாடுகள்;

$$\Sigma y = a \Sigma x + nb$$

$$\Sigma xy = a \Sigma x^2 + b \Sigma x$$

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 32 | 1 | 32 |
| 2 | 45 | 4 | 90 |
| 3 | 56 | 9 | 168 |
| 4 | 78 | 16 | 312 |
| 5 | 94 | 25 | 470 |
| 6 | 112 | 36 | 672 |
| 7 | 136 | 49 | 952 |
| 28 | 553 | 140 | 2696 |

$553 = 28a + 7b$

$2696 = 140a + 28b$

இவற்றைத் தீர்வுகாண $a = 17{\cdot}285,\ b = 9{\cdot}86$

∴ நேர்கோட்டு வரையின் சமன்பாடு

$y = 17{\cdot}285\,x + 9.86$

எட்டாவது ஆண்டின் விற்பனையைக் கணக்கிட மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $x = 8$ என்று பிரதியிட்டு, $y$-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$y = 17{\cdot}285 \times 8 + 9{\cdot}86 = 148{\cdot}14$

எட்டாவது ஆண்டின் விற்பனை மதிப்பு $= 148{\cdot}14$ (இலட்ச ரூபாயில்)

**மூலப்புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைச் சுருக்கு முறையில் காணல்**

| $x$ | $y$ | $x'$ | $y'$ | $x'^2$ | $x'y'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32 | −3 | −62 | 9 | 186 |
| 2 | 45 | −2 | −49 | 4 | 98 |
| 3 | 56 | −1 | −38 | 1 | 38 |
| 4 | 78 | 0 | −16 | 0 | 0 |
| 5 | 94 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 112 | 2 | 18 | 4 | 36 |
| 7 | 136 | 3 | 42 | 9 | 126 |
| | | 0 | −105 | 28 | 484 |

நேர்கோட்டு வரையின் சமன்பாட்டை $y = ax + b$ எனக் கொள்வோம்.

$x' = x - 4, \quad y' = y - 94.$

மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் :

$\Sigma y' = a\Sigma x' + nb$

$\Sigma x'y' = a\,\Sigma x'^2 + b\,\Sigma x'$

$-105 = 7c \quad \therefore \quad c = -15$

$484 = 2^{\circ}a, \quad \therefore \quad a = 17{\cdot}285$

$\therefore$ நேர்கோட்டு வரையின் சமன்பாடு

$y' = 17{\cdot}285\, x' - 15$ [இங்கு $x' = x - 4;\ y' = y - 94$]

$y - 94 = 17{\cdot}285\,(x - 4) - 15$

$y = 17{\cdot}285\, x + 9{\cdot}86$

$\therefore$ 8 ஆவது ஆண்டின் விற்பனை

$y = 17{\cdot}215 \times 8 + 9{\cdot}86 = 148{\cdot}14$ (இலட்ச ரூபாயில்)

**இரு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கேற்ற ஒரு பரவளையத்தை அல்லது ஓர் ஈரடுக்குச் சமன்பாட்டைப் பொருத்துதல் (Fitting a Parabola)**

$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) \ldots\ldots (x_n, y_n)$ என்பன தொடர்புடைய, நேரில் கண்ட, $n$ ஜதை மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். இவற்றுக்கு $y = ax^2 + bx + c$ என்ற பரவளையத்தைப் பொருத்துவோம்.

$E = \Sigma d_1^2 = \quad [y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)\,]^2$

$E$-ன் மீச்சிறு மதிப்புக்கு

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

அதனால் $\dfrac{\partial E}{\partial a} = \Sigma - 2x_1^2\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \Sigma - 2x_1\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)\,] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \Sigma - 2\quad [y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)\,] = 0$$

இதனைச் சுருக்கக் கீழ்க்கண்ட மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$a\,\Sigma x^4 + b\,\Sigma x^3 + c\,\Sigma x^2 = \Sigma x^2 y.$$

$$a\,\Sigma x^3 + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x = \Sigma xy.$$

$$a\,\Sigma x^2 + b\,\Sigma x + n\,c = \Sigma y.$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண $a, b, c$ என்ற மாறிலிகள் கிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1 :**

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு பரவளையத்தைப் பொருத்துக.

| $x$ | $y$ | $x'$ | $x'^2$ | $x'^3$ | $x'^4$ | $x'y$ | $x'^2y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | —2 | 4 | —8 | 16 | —6 | 12 |
| 3 | 10 | —1 | 1 | —1 | 1 | —10 | 10 |
| 5 | 36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 77 | 1 | 1 | 1 | 1 | 77 | 77 |
| 9 | 150 | 2 | 4 | 8 | 16 | 300 | 600 |
| | 276 | 0 | 10 | 0 | 34 | 361 | 699 |

**தீர்வு :**

ஈருடுக்குச் சமன்பாட்டை $y = ax'^2 + bx' + c$ எனக் கொள்வோம். மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma y = a \Sigma x'^2 + b \Sigma x' + nc$$
$$\Sigma x'y = a \Sigma x'^3 + b \Sigma x'^2 + c \Sigma x'$$
$$\Sigma x'^2 y = a \Sigma x'^4 + b \Sigma x'^3 + c \Sigma x'^2$$

$$276 = 10a + 5c \qquad a = 10{\cdot}5$$
$$361 = 10b \qquad b = 36{\cdot}1$$
$$699 = 34a + 10c \qquad c = 53{\cdot}1$$

ஈருடுக்குச் சமன்பாடு $y = 10{\cdot}5x'^2 + 36{\cdot}1x' + 53{\cdot}1$

[ இங்கு $x' = \frac{x - 5}{2}$ ]

$$y = 10{\cdot}5 \frac{(x - 5)^2}{4} + 36{\cdot}1 \frac{(x - 5)}{2} + 53{\cdot}1$$

$$4y = 10{\cdot}5\,(x - 5)^2 + 72{\cdot}2\,(x - 5) + 212{\cdot}4$$

$$4y = 10{\cdot}5\,x^2 - 105x + 72{\cdot}2x + 262{\cdot}5 - 361$$

$$4y = 10{\cdot}5\,x^2 - 32{\cdot}8\,x + 133{\cdot}9$$

**எடுத்துக்காட்டு 2 :**

ஒரு கம்பெனியில் கிடைத்த 5 ஆண்டு இலாபங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களுக்கு ஒரு பரவளையத்தைப் பொருத்தி, அதிலிருந்து 1966ஆம்ஆண்டின் இலாபத்தைக் காண்க.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ($X$) ஆண்டு : | 1960, | 1961, | 1962, | 1963, | 1964 |
| ($Y$) இலாபம் (இலட்சங்களில்): | 12 | 14 | 15 | 19 | 25 |

| $x'$ | $y'$ | $x'y'$ | $x'^2$ | $x'^2y'$ | $x'^3$ | $x'^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −2 | −3 | 6 | 4 | −12 | −8 | 16 |
| −1 | −1 | 1 | 1 | −1 | −1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 20 | 4 | 40 | 8 | 16 |
| 0 | 10 | 31 | 10 | 31 | 0 | 34 |

பொருத்தப்படும் பரவளையம் $y = ax^2 + bx + c$ என்க.

**இயல் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட,**

$34a + 10c = 31$ ... (1)

$10b = 31$

$b = 3{\cdot}1$ ... (2)

$10a + 5c = 10$ ... (3)

$(3) \times 2 = 20a + 10c = 20$ ... (4)

$(1) - (4) = 14a = 11$

$$a = \frac{11}{14} = {\cdot}7857$$

$10 \times {\cdot}7857 + 5c = 10$

$$5c = 10 - 7{\cdot}857 = 2{\cdot}143$$
$$c = {\cdot}4286$$
$$y' = {\cdot}7857\, y'^2 + 3{\cdot}1\, x + {\cdot}4286$$
$$y - 15 = {\cdot}7857\,(x - 1962)^2 + 3{\cdot}1(x - 1962) + {\cdot}4286 \quad \ldots \quad (5)$$

1966—ல் கிடைக்கும் இலாபத்தைப் பெற,

$x = 1966$ என (5)—ல் பிரதியிட,

$y - 15 = {\cdot}7857\,[1966-1962] + 3{\cdot}1\,[1960-1962] + {\cdot}4286$

$y =$ ரூ 40 ·3998 (இலட்சங்கள்)

**கொடுக்கப்பட்ட இரு மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குகந்த ஓர் அடுக்கு வளைகோட்டைப் (Exponential curve) பொருத்துதல்**

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ என்பவை $(x, y)$ மாறிகளின் $n$ ஜதை மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும் சிதறல் வரைபடத்தில் இப் புள்ளிகளின் போக்கு அடுக்குச் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப் படும் $x$ ஐச் சார்பிலா மாறியாகவும், $y$ ஐ $x$ ஐச் சார்ந்துள்ள மாறியாகவும் கொண்டால், $x$-ல் $y$-ன் அடுக்குச் சமன்பாடு $y = Ae^{Bx}$ என்று ஆகும்.

இரு புறங்களிலும் லாகிருதம் எடுத்தால்,

$\log y = \log A + (B \log e)\, x$ என்று ஆகும்.

இது $y = Mx + c$ என்ற சமன்பாட்டை ஒத்துள்ளது இங்கு $y = \log y$ ; $M = B \log e$; $c = \log A$; இவ் விவரங்களை ஒரு பக்க லாகிருத அல்லது விகித வரைபடத் தாளில் குறிப்போமானால், விவரங்களின் போக்கை ஒரு நேர்கோட்டால் கணக்கிடலாம். இதன் மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma\, y = M\, \Sigma x + n\, c$$
$$\Sigma xy = M\, \Sigma x^2 + c\, \Sigma\, x$$

இவற்றைத் தீர்வுகாண $M$, $C$-ன் மதிப்புகள் வரும் அதிலிருந்து $A$, $B$-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

**ஒருபக்க லாகிருதத் தாள் அல்லது விகித வரைபடம் (Semilogarithmic Graph Paper or Ratio Chart)**

இதுவரை நாம் சாதாரண அளவுகோலைக் கொண்டு வரையப் படுகின்ற பல்வேறு வகையான வரைபடங்களைப் பற்றிப்

பார்த்தோம். இத்தகைய வரைபடங்கள், ஒரு காலத்திலிருந்து மற்றொரு காலத்திற்கு, மாறியின் மதிப்புகளிலுள்ள தனி மாற்றங்களை (absolute changes) எடுத்துக்காட்டுகின்றன. எனவே, ஒரு தொழிற்சாலையின் இலாபங்கள் 3 ஆண்டுகளில் ரூ. 1000-லிருந்து ரூ. 2000-க்கும், ரூ 2000-லிருந்து ரூ. 3000-க்கும் உயர்ந்தால், சாதாரண அளவுகோலில் (கூட்டு அளவுகோல்) புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டிலமைந்து, ஒரு காலத்திலிருந்து மற்றொரு காலத்திற்குள்ள தனி மாற்றங்களைக் காட்டும். இங்கு இலாபம் ஒவ்வோர் ஆண்டும் ரூ. 1000 ஆகும். சில சமயங்களில் ஒரு மாறியில் ஏற்படக்கூடிய தனி மாற்றத்தின் மதிப்பில் அக்கறை கொள்ளாமல், மாறியானது எந்த வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது அல்லது குறைகிறது என்பதில் அக்கறை கொள்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் மக்கள்தொகையின் அதிகரிப்பை எடுத்துக்கொள்ளாமல், மக்கள்தொகையின் அதிகரிப்பின் வீதத்தைத்தான் எடுத்துக்கொள்கிறோம். இதே போல் ஒரு தொழிற்சாலையின் விற்பனை, இலாபங்கள், உற்பத்தி போன்றவற்றைக் கவனிக்கும்போது, இவற்றின் தனி மாற்றங்களின் மதிப்புகள் முக்கியமானவை அல்ல. இலாபங்கள், விற்பனை போன்றவற்றின் அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் வீதங்களே முக்கியமானவை. மாற்றங்களின் வீதங்களை நாம் காணும்போது, சாதாரண அளவுகோல் குறைந்த அளவில்தான் பயன்படும். இத்தகைய சமயங்களில் நாம் லாகிருத அல்லது விகித அளவுகோலைப் பயன்படுத்தலாம். விகித அளவுகோலில் சம உயரத் தூரங்கள் சமவீத மாற்றங்களை அல்லது சம சதவீத மாற்றங்களைக் குறிக்கின்றன.

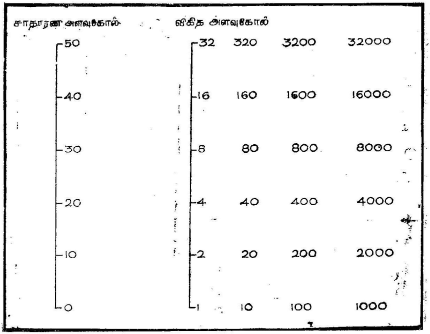
**சாதாரண அளவுகோலும், விகித அளவுகோலும் (Ratio *vs* Arithmetic Scale)**

சாதாரண அளவுகோலுக்கும், விகித அளவு கோலுக்குமுள்ள வேறுபாடுகள் பின்வருமாறு :

(1) சாதாரண அளவுகோலில் சம வேறுபாடுகள் சம தூரங்களில் அளக்கப்படுகின்றன. எனவே, தனிமாற்றங்களை அளவிட முடிகிறது. ஆனால், விகித அளவுகோலில், அளவுகட்கு இடையிலுள்ள வேறுபாடு சமவிகித மாற்றங்களை அளவிடுகிறது. இதைப் பின்வரும் (படம் 1—3) எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

பின்வரும் படத்திலிருந்து சாதாரண அளவுகோலானது கூட்டுத் தொடரின் அடிப்படையிலும், விகித அளவுகோலானது பெருக்குத் தொடரின் அடிப்படையிலும் அமைந்திருத்தலைக் காணலாம்.

(2) சாதாரண அளவுகோல் தனிமாற்றங்களை அறிவிக்கும். ஆனால், விகித அனவுகோல் மாறுவீதத்தையோ அல்லது சார்ந்த வீதத்தையோதான் அறிவிக்கும். வளர்ச்சியைக் காட்டுகின்ற பல




படம் 1—3.

கணக்குகளில், சாதாரண வரைதாளில் காட்டப்படும் தனி மாற்றங்கள் நம்மைத் தவறான முடிவுக்குக் கொண்டு சென்று விடும். ஆனால், விகித அளவுகோல் நம்மை இவ்வாறு தவறான முடிவுக்குச் செல்லாதவாறு தடுக்கிறது. விகித அளவுகோலின் பொருத்தமான தன்மையினைப் பின்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்:

| ஆண்டுகள் | கோதுமை உற்பத்தி (மில்லியன் டன்களில்) | தனி அதிகரிப்பு (absolute increase) | அதிகரிப்பு சதவீதம் |
|---|---|---|---|
| 1960 | 10 | — | — |
| 1961 | 20 | 10 | 100·0 |
| 1962 | 30 | 10 | 50·0 |
| 1963 | 40 | 10 | 33·3 |
| 1964 | 50 | 10 | 25·0 |
| 1965 | 60 | 10 | 20·0 |
| 1966 | 70 | 10 | 16·0 |

எனவே, தனி அதிகரிப்புகள் மாறிலியாக இருந்தபோதிலும் அதிகரிப்பு வீதங்கள் குறைந்துகொண்டே வருகின்றன. வளர்ந்து வரும் தொழில்களில் ஒவ்வோர் ஆண்டும் இலாபங்கள் அதிகரித்துக் கொண்டே செல்லலாம். ஆனால், தொழிலின் வளர்ச்சிவீதம் குறையலாம். இத்தகைய சமயங்களில் தனிமாற்றங்களை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் தவறான முடிவுகட்குக் கொண்டு சென்று விடும். இதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின்மூலம் விளங்க வைக்கலாம். இரு நிறுவனங்கள் நான்கு ஆண்டுக்கால இடை வெளியில் அடைந்த மொத்த இலாபங்கள் ரூ. 40,000 எனக் கொண்டு, பின்வரும் பட்டியல் அவற்றை ஒப்புநோக்குகிறது.

| ஆண்டு | | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 |
|---|---|---|---|---|---|
| இலாபங்கள் [ரூ. 1000-த்தில்] | *A* | 10 | 20 | 40 | 50 |
| | *B* | 70 | 80 | 100 | 110 |
| தனி அதிகரிப்பு [ரூ. 1000-த்தில்] | *A* | — | 10 | 20 | 10 |
| | *B* | — | 10 | 20 | 10 |
| அதிகரிப்பின் சதவீதங்கள் [முந்தின ஆண்டிலிருந்து ஒவ்வோர் ஆண்டின்] | *A* | — | 100 | 100 | 25 |
| | *B* | — | 14 | 25 | 10 |

நாம் தனி இலாபங்களை ஒப்பிடுவோமானால், இலாபங்களின் அதிகரிப்பு, இரு நிறுவனங்களிலும் ஒன்றாக இருக்கும் ஒரே காரணத்தால், இரு நிறுவனங்களிலும் முதலீடு செய்வதால் ஒரே வகையான பலன்களே கிடைக்கும் என்று சொல்லலாம். ஆனால், விவரங்களை நுட்பமாக ஆராயும்போது முதலீடு செய்வதற்கு *A* நிறுவனமே சிறந்தது. ஏனெனில், *B* நிறுவனத்தை ஒப்பிட்டு நோக்கும்போது *A* நிறுவனத்தில் இலாபங்களின் அதிகரிப்பு வீதம் அதிகமாக இருக்கிறது. எனவே, தனி மாற்றங்களைவிட வீதமாற்றங்கள் முதன்மையான இடம் பெறு மிடங்களில், எடுத்துக்காட்டாக மக்கள்தொகை, உற்பத்தி, விற்பனைகள், இலாபங்கள், தேசிய வருமானம் போன்றவற்றில் லாகிருத வரைதாள்கள் அதிகப் பயன்களைக் கொடுக்கின்றன.

(3) ஒரே வரைபடத்தில் பலவகைப்பட்ட வீதமாற்றங்களைப் பல்வேறுபட்ட புள்ளியியல் அளவுகளுக்கு ஒப்பிட்டு நோக்குவதற்கு விகித அளவுகோலால் இயலும். எனவே, ஒரே வரைதாளில் அநேக வரைவரைகளை அமைத்து அவற்றின் போக்குகளை (trends) ஆராயலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மக்கள்தொகை, விவசாயப்பொருள்களின் உற்பத்தி, விலைகள், தேசிய வருமானம், வேலைவாய்ப்பு போன்றனவற்றின் வரைகளின் போக்குகளை ஒரே ஒரு வரைதாளின் மூலம் வரைந்து ஆராயலாம்.

(4) விகித அளவுகோலில், $y$ ஆயம் பூச்சியத்திலிருந்து ஆரம்பிக்காமல் ஒன்றிலிருந்து ஆரம்பிக்கிறது. ஆனால், சாதாரண அளவுகோலில் $y$ ஆயம் பூச்சியத்திலிருந்து ஆரம்பிக்கிறது. ஒரு பக்க லாகிருதத் தாள்களில் அளவுகள் பூச்சியத்திலிருந்து ஆரம்பிக்காமல் ஒன்றிலிருந்து ஆரம்பிக்கக் காரணம் 1-ன் லாகிருதம் 0. அதாவது, ஒன்று ஆதியிலேயே குறிக்கப்படுகிறது. பூச்சியத்துக்கோ குறைமதிப்புகளுக்கோ லாகிருதம் இல்லாத காரணத்தால் அத்தகைய மதிப்புகளை இதில் குறிக்க இயலாது.

(5) லாகிருத வரைதாளில் சீரான அதிகரிப்பின் வீதத்தையோ குறைப்பின் வீதத்தையோ எளிதில் கண்டுகொள்ளலாம். இதன் இந்தப் பண்பானது புறச்செருகலில் (extrapolation) அதிகம் பயன்படுகிறது. விலையின் உயர்வு அல்லது வீழ்ச்சி, ஒரே வீதத்தில் இருக்கும் என்று கொண்டு தொழில்பற்றிய உண்மைகளை முன்னமே அனுமானிக்க ஒரு சிலரால் முடிகிறது.

(6) மாறிகளின் மிகப்பெரிய மதிப்புகளை, சாதாரண வரைதாளைவிட விகித வரைதாளில் குறிப்பதே சாலச் சிறந்ததாகும்.

(7) விவரங்களின் பொருளை விகித அளவுகோலில் கோடுகளின் திசைகளிலிருந்தும், சாதாரண அளவுகோலில் கோடுகளின் நிலைகளிலிருந்தும் அறிந்துகொள்ளலாம்.

**ஒருபக்க லாகிருதத் தாளை அமைக்கும் முறை**

பின்வரும் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பின்பற்றி நாம் ஒரு பக்க லாகிருதத் தாளை அமைக்கலாம்.

(1) சாதாரண அளவுகோலைக் கொண்டே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் லாகிருத மதிப்புகளைக் குறித்தல்.

(2) ஒருபக்க லாகிருதத் தாளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் குறித்தல்.

முதன் முறையைக் கையாளும்போது, லாகிருதப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகட்கும் லாகிருதங்களைக் காணவேண்டும். இந்த லாகிருதங்களைச் சாதாரண அளவு கோலின் $y$ ஆயத்தில் குறித்துக்கொண்டு, பல புள்ளிகளையும், நேர்கோடுகளால் இணைத்துப் பெறப்படுவதே தேவையான வளைவரையாகும்.

இரண்டாவது முறையைக் கையாளும்போது மாறியின் மதிப்புகளின் லாகிருதங்களைக் கணகிட வேண்டுவதில்லை. ஒரு பக்க லாகிருதத் தாளில் உண்மையான மதிப்புகளே குறிக்கப் பட்டிருக்கும். முதன் முறையுடன் இதை ஒப்பிட்டு நோக்கும் போது இரு புள்ளிகளைக் குறிக்க எளிதாகவும் வசதியாகவுமிருக்கும். ஏனெனில், இங்கு மதிப்புகளுக்கு லாகிருதங்களைக் கணக்கிட வேண்டுவதில்லை. இதனால் காலமும் அதிகம் செலவிட வேண்டுவதில்லை.

மேற்கூறிய முறைகளைப் பின்பற்றித் தயாரிக்கப்படும் வரை தாளை ஒருபக்க லாகிருதத் தாள் என வழங்குகின்றனர். ஏனெனில், இதன் நெட்டு அளவானது விகிதக் கோட்பாட்டைப் பின்பற்றியும், கிடை அளவானது கூட்டுக் கொள்கையைப் பின்பற்றியும் அமைந்துள்ளது. இரு அளவுகளும், சில சமயங் களில் லாகிருத அளவுகளால் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். இத்தகைய வரைதாளை இருபக்க லாகிருதத் தாள் (Double Logarithmic Graph) என வழங்குகிறோம். ஒருபக்க லாகிருதத் தாளிலிருந்து இதைத் தெளிவாக வேறுபடுத்திக் காட்ட 'லாகிருதத் தாள்' என்றே இது வழங்கப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு**

இந்திய ரிசர்வ் வங்கியில் விற்பனையான தங்கப் பத்திரங்களின் விற்பனைகளைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது :

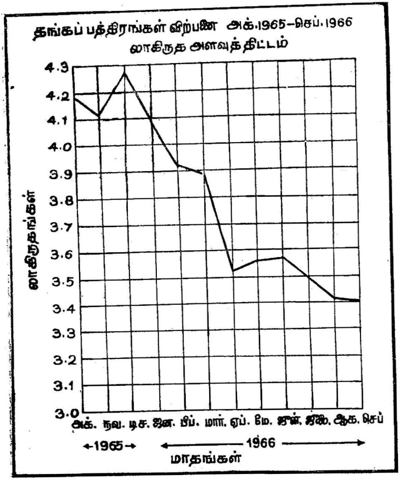
| மாதங்கள் | | விற்பனை (1000 ரூபாய் களில்) | மாதங்கள் | | விற்பனை (1000 ரூபாய் களில்) |
|---|---|---|---|---|---|
| அக்டோபர் | 1965 | 15,560 | ஏப்ரல் | 1966 | 3,250 |
| நவம்பர் | 1965 | 13,170 | மே | 1966 | 3,570 |
| டிசம்பர் | 1965 | 18,740 | ஜூன் | 1966 | 3,620 |
| ஜனவரி | 1966 | 12,450 | ஜூலை | 1966 | 3,140 |
| பிப்ரவரி | 1966 | 8,320 | ஆகஸ்டு | 1966 | 2,540 |
| மார்ச் | 1966 | 7,540 | செப்டம்பர் | 1966 | 2,540 |

**முன்கூறிய விவரங்களை வரைதாளிலுள்ள லாகிருத அளவிலாவது அல்லது சாதாரணத் தாளிலாவது குறிக்க.**

**தீர்வு :**

**கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு லாகிருதங்களைக் கண்டு அவற்றைச் சாதாரண அளவுகோலில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.**

| மாதங்கள் | | ரூ. ('000) | லாகிருதம் |
|---|---|---|---|
| அக்டோபர் | 1965 | 15,560 | 4·1920 |
| நவம்பர் | 1965 | 13,170 | 4·1200 |
| டிசம்பர் | 1965 | 18,740 | 4·2727 |
| ஜனவரி | 1966 | 12,450 | 4·0952 |
| பிப்ரவரி | 1966 | 8,320 | 3·9201 |
| மார்ச் | 1966 | 7,540 | 3·8774 |
| ஏப்ரல் | 1966 | 3,250 | 3·5119 |
| மே | 1966 | 3,570 | 3·5527 |
| ஜூன் | 1966 | 3,620 | 3·4969 |
| ஜூலை | 1966 | 3,140 | 3·4832 |
| ஆகஸ்டு | 1966 | 2,580 | 3·4116 |
| செப்டம்பர் | 1966 | 2,540 | 3·4048 |




படம் 1—4.

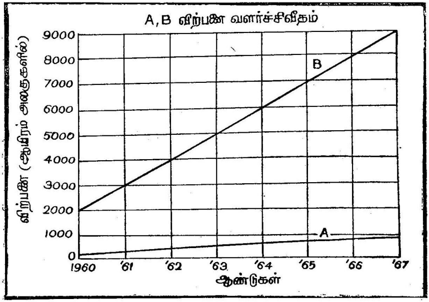
**எடுத்துக்காட்டு :**

1960 — 1967 வரை *A*, *B* என்ற இரு கம்பெனிகளின் விற்பனை அளவுகள் பின்பக்கம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. விவரங்களை வரைதாளில் குறிக்க.

| ஆண்டுகள் | கம்பெனி *A*-ன் விற்பனை (ஆயிரங்களில்) | கம்பெனி *B*-ன் விற்பனை (ஆயிரங்களில்) |
|---|---|---|
| 1960 | 200 | 2,000 |
| 1961 | 300 | 3,000 |
| 1962 | 400 | 4,000 |
| 1963 | 500 | 5,000 |
| 1964 | 600 | 6,000 |
| 1965 | 700 | 7,000 |
| 1966 | 800 | 8,000 |
| 1967 | 900 | 9,000 |

**விடை**

நாம் விவரங்களை இருவகை வரைதாள்களிலும் வரைவோம். பின்பு அவற்றை ஒப்பிடுவோம். பின்வருவது சாதாரண வரைதாளில் வரைந்த வரைபடமாகும்.




படம் 1—5.

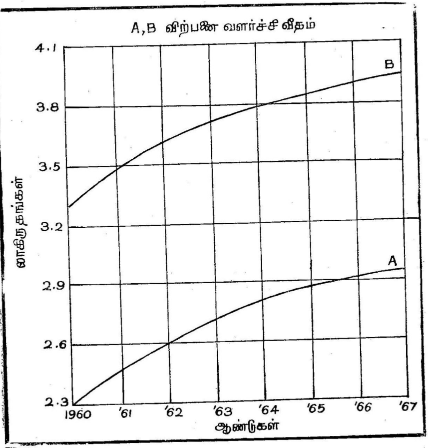
விகித அளவுகோலில் விவரங்களைப் பொருத்துவதற்கு நாம் மதிப்புகளின் லாகிருதங்களைக் காணவேண்டும்.

| ஆண்டுகள் | கம்பெனி $A$-ன் விற்பனை (ஆயிரங்களில்) | லாகிருதங்கள் | கம்பெனி $B$-ன் விற்பனை (ஆயிரங்களில்) | லாகிருதங்கள் |
|---|---|---|---|---|
| 1960 | 200 | 2·3010 | 2,000 | 3·3010 |
| 1961 | 300 | 2·4771 | 3,000 | 3·4771 |
| 1962 | 400 | 2·6021 | 4,000 | 3·6021 |
| 1963 | 500 | 2·6990 | 5,000 | 3·6990 |
| 1964 | 600 | 2·7782 | 6,000 | 3·7782 |
| 1965 | 700 | 2·8451 | 7,000 | 3·8451 |
| 1966 | 800 | 2·9031 | 8,000 | 3·9031 |
| 1967 | 900 | 2·9542 | 9,000 | 3 9542 |

இந்த விவரங்களுக்கு அடுத்தபக்கத்தில் கண்ட வரைபடம் பொருத்தப்பட்டுள்ளது (படம் 1—6).

இரு வரைபடங்களையும் (படம் 1—5, படம் 1—6) ஒப்பிட்டு நோக்கும்போது சாதாரண வரைதாள், கம்பெனி $B$-ன் முன்னேற்றத்தின் வீதம் கம்பெனி $A$ஐக் காட்டிலும் அதிகமெனக் காட்டுகிறது. ஆனால், விவரங்களை விகித வரைதாளில் குறிக்கும்போது இரு கம்பெனிகளின் வளர்ச்சி வீதமும் ஒன்றே என இது காட்டுகிறது. உண்மையில் கம்பெனி $A$-ன் அளவீடுகள் 100 ஆகவும், கம்பெனி $B$-ன் அளவீடுகள் 1000 ஆகவும் ஒவ்வோர் ஆண்டும் ஏறிக்கொண்டே செல்கின்றன. ஆனால் இது கம்பெனி $B$ கம்பெனி $A$ஐப் போல 10 மடங்கு முன்னேறிக்கொண்டு செல்கிறதெனும் தவறான கருத்தைத் தோற்றுவிக்க ஏதுவாகிறது. எப்படியிருந்த போதிலும், தனி மாற்றங்களை ஒப்பிடும்போதுதான் இந்த முடிவு எடுக்கப்படுகிறது. சார் மாற்றங்களை ஒப்பிடும்போது வளர்ச்சியின் வேகம் A, B என்ற இரு நிறுவனங்களிலும் ஒன்றே என்பதை வரைபடம் B தெளிவாகக் காட்டுகிறது.

**லாகிருத வளைவரைகளை ஆராய்தல்**




படம் 1 – 6.

நாம் லாகிருத வளைவரைகளை எச்சரிக்கையுடன் **ஆராய்ந்து** முடிவு கூறவேண்டும். ஏனெனில், தவறான முடிவுகளைக் கொடுக்கக்கூடிய வாய்ப்புகள் ஏற்படலாம். லாகிருத **வளைவரை களைப்** பற்றி ஆராயும்போது கீழ்க்கண்ட சில முக்கியமான கருத்துகளை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

**(1) வளைவரையானது மேல் நோக்கி உயர்ந்துகொண்டே சென்றால், அது வீதத்தின் அதிகரிப்பைக் குறிக்கும்.**

**(2) வளைவரையானது கீழ்நோக்கித் தாழ்ந்துகொண்டே வந்தால், அது வீதத்தின் குறைவைக் காட்டும்.**

**(3) வளைவரையானது நேர்கோடெனில் வீதமானது மாறிலி யாக இருக்கும். அதாவது வீதம் ஒரே சீராக இருக்கும்.**

(4) வளைவரையானது உயர்ந்துகொண்டே நேர்கோட்டிற்கு மிக அருகில் நெருங்கினுல், அது வளர்ச்சி ஒரே சீரான வீதத்தை நெருங்குவதைக் காட்டும்.

(5) வளைவரையானது தாழ்ந்துகொண்டே நேர்கோட்டிற்கு மிக அருகில் நெருங்கினுல், அது தாழ்ச்சியின் ஒரே சீரான வீதத்தை நெருங்கும்.

(6) வளைவரையில் ஒரு பகுதி மற்றொரு பகுதியைவிட சரிவுள்ளதாக இருந்தால் பிந்தியதைவிட முந்தியதில் வீதமானது வேகமாக இருக்கும்.

(7) ஒரே விகித வரைதாளில் இரு வளைவரைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகச் சென்ருல், சம சதவீத மாற்றத்தை அவை குறிக்கும்.

(8) ஒரே விகித வரைதாளில் ஒரு வளைவரை மற்றொன்றை விடச் சரிவுள்ளதாக இருந்தால், பிந்தியதைவிட முந்தியதில் வீதமானது வேகமாக இருக்கும்.

**விகித வரைபடங்களின் பயன்கள்**

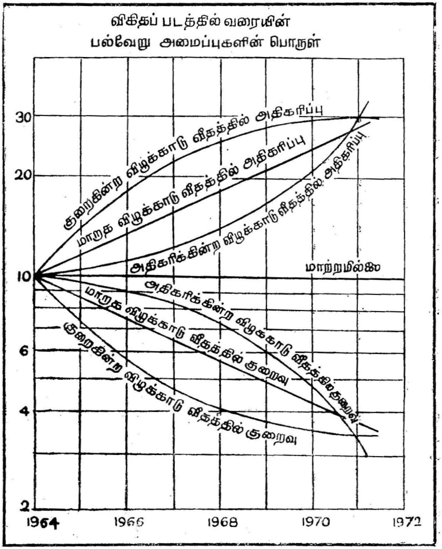
நான்கு வகையான ஒப்பு நோக்குதல்களுக்கு விகித வரைபடமானது பயன்படுகிறது.

(1) இது ஒரே சீரான சத வீத வளர்ச்சியை ஒரு நேர்கோடாகக் காட்டுகிறது. ஒவ்வோர் ஆண்டும் விற்பனைகள் 10% வீதம் அதிகரிப்பது விகித வரைபடத்தில் நேர்கோடாகக் காணப்படுகிறது. நேர்கோட்டிலிருந்து வளைவரையானது விலகிச் செல்லுமேயானுல், அது அதற்கிணைந்த வளர்ச்சி அல்லது தாழ்ச்சி வீதத்தைக் காட்டும். பின்வரும் வரைபடம் இதை விளக்குகின்றது (படம் 1—7)

நிறுவனங்களின் உற்பத்தியின் வரைபடத்தை விகித வரைபடத்தில் கவனித்தோமானுல் அவைகள் கடந்த கால வளர்ச்சி வேகத்தையே கொண்டுள்ளனவா, அல்லவா என்பதனை முடிவு செய்யலாம். மேலும், நிறுவனங்களின் வளர்ச்சியின் வரலாற்றுக்குக் காரணமானவற்றைத் தெரிந்து கொண்டால், ஆராய்பவர்கள் கடந்த காலப் போக்குகளிலிருந்து எதிர் காலத்திற்குத் தேவையானவற்றை முன்பே கண்டறிந்து சொல்லலாம்.

(2) சாதாரண வரைதாள்களைக் காட்டிலும் இருவளைவரைகளின் ஏற்றத் தாழ்வுகளையோ அல்லது சார் வளர்ச்சியையோ இதில் நன்கு ஒப்புநோக்கலாம். ஏனெனில், இணையான கோடுகள்

விகித வரைபடத்தில் எல்லா இடங்களிலும் ஒரே சீரான சதவீத மாற்றத்தைக் குறிக்கின்றன. அதிக சரிவுகள் உயர்ந்த விகிதங்களைக் குறிக்கின்றன.




படம் 1—7.

(3) சதவீதங்களை அல்லது விகிதங்களை நேரடியாக நிலைக்குத்து அளவுகோலிலிருந்து அறிந்து கொண்டு அவற்றை வரைபட ஆராய்விற்குப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

(4) அளவுகளில் பல் வேறு விதமாக மாறுபட்டுள்ள தொடர்களின் ஒப்புநோக்குதல்களுக்கு விகித அளவுகோலானது மிகவும் பயன்படுகிறது.

**விகித வரைபடங்களின் குறைகள்**

ஒரு பக்க லாகிருத தாள்கள் மிகவும் வேண்டத்தக்கவையாக இருந்தபோதிலும், வணிகத்தொழில் துறைகளில் இவற்றை அதிகமாகப் பயன்படுத்துவதில்லை. இத்தகைய வரைபடங்களில் பின்வருவன ஒரு சில குறைகளாகும்:

(1) இவற்றைப் பாமரர்கள் புரிந்துகொள்வது கடினம். எனவே, விளக்கங்களுக்கு இவை பயன்படமாட்டா. சாதாரண வரைதாளே நன்கு காட்டும்.

(2) பூச்சியம் அல்லது குறை குறியுடைய மதிப்புகளை, விகித வரைதாள்களில் குறிக்க இயலாது.

(3) மொத்த மதிப்பின் பல்வேறு பகுதிகளைப் பற்றி இதைப் பயன்படுத்தி ஆராய இயலாது.

(4) விகித வரைபடங்களை நன்கு புரிந்துகொண்டு சரியான முடிவிற்கு வர ஆழ்ந்த அறிவு தேவை. கவனக் குறைவால் தவருன முடிவுகளுக்கு வரநேரிடும்.

(5) விகித அளவுகோலில் தனி மாற்றங்களை அளவிட முடியாது.

இத்தகைய குறைகள் இருக்கும் காரணத்தால்தான் இவை ஒரு சில நிபந்தனைகளின்படி அதிக பயனுள்ளதாக இருந்த போதிலும் சாதாரண வரைதாளில் காட்டமுடியாத படங்களை மட்டும் வரைவதற்கு இத்தகைய வரைதாள்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

**எடுத்துக் காட்டு :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $Y$ | 14 | 27 | 40 | 55 | 68 | 30 |

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு $Y = Ae^{Bx}$ என்ற வரையைப் பொருத்துக.

$$y = Ae^{Bx}$$
$$\log y = \log A + B \times \log e$$
$$= \log A + (B \log e)\, x$$

இது $y = mx + C$ என்ற சமன்பாட்டைப் போல் அமைந்துள்ளது.

இங்கு $y = \log Y$, $m = B \log e$, $C = \log A$.

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma y = m \Sigma X + nC$$

$$\Sigma xY = m \Sigma X^2 + C \Sigma X.$$

| $X =$ | $Y$ | $y = \log Y$ | $xy$ | $x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 1·1461 | 1·1461 | 1 |
| 2 | 27 | 1.4314 | 2 8628 | 4 |
| 3 | 40 | 1.6021 | 4·8063 | 9 |
| 4 | 55 | 1. 404 | 6·9616 | 16 |
| 5 | 68 | 1·8325 | 9.1625 | 25 |
| 6 | 30 | 1.4771 | 8.8626 | 36 |
| 21 | | 9.2296 | 33·8019 | 91 |

இயல் சமன்பாடுகளில் மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$21m + 6C = 9.2296 \quad \ldots \quad (1)$$

$$91m + 21C = 33.8019 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(1) \times 13 = 273m + 78C = 119{\cdot}9848 \quad \ldots \quad (3)$$

$$(2) \times 3 = 273m + 63C = 101.4057 \quad \ldots \quad (4)$$

$$(3) - (4) \quad 15C = 18.5791 \quad \therefore \; C = 1.2386.$$

$$21m + 7.4316 = 9.2296$$

$$\therefore \; m = \frac{1.7980}{21}$$

$$C = \log A = 1{\cdot}2386 \quad \therefore \; A = 17{\cdot}32$$

$$m = B \log_{10} e$$

$= B \times 0{\cdot}4343$

$B = 0.1972$

∴ வரையின் சமன்பாடு

$y = 17.32e^{0{\cdot}1972x}$

**கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு** $y = ab^x$ **என்ற வடிவ வளை கோட்டினைப் பொருத்துக.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு | $x$ — | 1901 | 1911 | 1921 | 1931 | 1941 | 1951 | 1961 |
| மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்) | $y$ — | 193 | 209 | 216 | 235 | 263 | 301 | 337 |

| $x$ | $y$ | $\log y = Y$ | $x'$ $\frac{x - 1931}{10}$ | $x^2$ | $x' \log y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1901 | 193 | 2·2856 | −3 | 9 | —6·8468 |
| 1911 | 209 | 2·3201 | —2 | 4 | —4·6402 |
| 1921 | 216 | 2·3345 | —1 | 1 | —2·3345 |
| 1931 | 235 | 2·3711 | 0 | 0 | 0 |
| 1941 | 263 | 2·4200 | 1 | 1 | 2·4200 |
| 1951 | 301 | 2·4786 | 2 | 4 | 4·9572 |
| 1961 | 337 | 2·5276 | 3 | 9 | 7·5828 |
| 13517 | 1754 | 16·7375 | 0 | 28 | 1·1284 |

$y = ab^x$.

$\log y = \log a + x \log b$.

இதில் $\log y = Y$; $\log a = C$; $\log b = m$.

அதாவது நாம் $y = mx + C$ என்ற வடிவ வளைக்கோட்டைப் பொருத்த வேண்டியது. $x = \frac{x - 1931}{10}$

இதன் மீச்சிறு படிவழிச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma \; Y = m \Sigma X^1 + n C.$$

$$\Sigma X'Y = m \Sigma X^2 + C \Sigma X'.$$

$$\therefore \quad 16{\cdot}7375 = 7C. \qquad C = 2{\cdot}39107$$

$$28m = 1{\cdot}1285 \quad \therefore \quad m = \frac{1{\cdot}1285}{28} = {\cdot}04031$$

$$\therefore \quad Y = {\cdot}0403\, x' + 2{\cdot}39107.$$

$$\log \; a = C = 2{\cdot}39107.$$

$$a = \text{Antilog } C = \text{Antilog } 2{\cdot}39107. = 246{\cdot}1$$

$$\log \; b = m = {\cdot}04031.$$

$$b = \text{Antilog } m = \text{Antilog } {\cdot}04031 = 1{\cdot}097$$

ஆகவே, மேற்கண்ட பரவலுக்கு $y = (246{\cdot}1)(1{\cdot}090)^x$ என்ற வடிவ வளைகோடு பொருந்தும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு $y = bc^x$ என்னும் வளையைப் பொருத்துக.

| ஆண்டு $X$ | 1951 | 1952 | 1953 | 1954 | 1955 | 1956 | 1957 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| உற்பத்தி (டன்களில்) $Y$ | 201 | 263 | 314 | 395 | 427 | 504 | 612 |

$y = bc^x$ [செ.ப 1973]

$$\log y = \log b + x \log C$$

$$Y = BX + B \begin{bmatrix} Y = \log y. \\ X = x \end{bmatrix}$$

$$B = \log b \;\therefore\; b = \text{antilog } B$$

$$A = \log c \;\therefore\; c = \text{antilog } A$$

இயல் சமன்பாடுகள்,

$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x = \Sigma xy$$

$$a \Sigma x + nb = \Sigma y$$

$A = 1954$ என்பது மூலமாக இருக்கட்டும். $\therefore X' = X - 1954$

| $X$ | $Y$ | $X'$ $X - 1954$ | $X'^2$ | $X'Y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1951 | 2·3032 | —3 | 9 | – 6·9096 |
| 1952 | 2·4200 | —2 | 4 | —4·8400 |
| 1953 | 2·4969 | —1 | 1 | —2·4969 |
| 1954 | 2·5966 | 0 | 0 | 0 |
| 1955 | 2·6304 | 1 | 1 | 2·6304 |
| 1956 | 2·7024 | 2 | 4 | 5·4048 |
| 1957 | 2·7868 | 3 | 9 | 8·3604 |
| | 17·9363 | 0 | 28 | 2·1491 |

மதிப்புகளை இயல் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டால்,

$\therefore \; 28a = 2·1491$

$a = \frac{2·1491}{28}$

$= ·07674$

$7b = 17·9363$

$b = 2·5623$

$\therefore \; Y = ·07674\,X + 2·5623$ என்பது சமன்பாடு ஆகும்.

$Y = (1·193)^{x'} \; 0·365·1$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$$y = (1·193)^{x - 1954} \cdot (365·1)$$

**கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு $y = ax^m$ என்ற வரையைப் பொருத்துதல் :**

இரு பக்கங்களிலும் 10 ஐ மடக்கை அடியாகக் கொண்டால்

$\log y = \log a + \log (x)^m$

$\log y = \log a + m \log x$

$X = \log x, \quad Y = \log y$ எனக் கொண்டால்

சமன்பாடு $Y = aX + b$ என்ற நேர்கோட்டு அமைப்பை அடைகிறது.

இங்கு $a = m.$

$b = \log a.$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு $y = ax^n$ என்ற வரையைப் பொருத்துக.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ | 4 | 2·8 | 2·0 | 1·6 | 1·2 |

| $x$ | $y$ | $\log x$ $X$ | $\log y$ $Y$ | $X^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 0·6990 | 0·6021 | ·4887 | ·4209 |
| 6 | 2·8 | 0·7782 | C·4472 | ·6056 | ·3480 |
| 7 | 2·0 | 0·8451 | C·3010 | ·7148 | · 545 |
| 8 | 1·6 | 0·9031 | 0·2041 | .8155 | ·1843 |
| 9 | 1·1 | 0·9542 | 0·0792 | ·9103 | ·07556 |
| | | 4·1796 | 1·6336 | 3·5349 | 1·28326 |

$y = ax^n \quad \therefore \quad \log y = \log a + n \log x$

$Y = C + mX$ இதில் $Y = \log y.\ X = \log x.$

$C = \log a.\ \ n = m.$

அதாவது நாம் $Y = mX + C$ என்ற வடிவ வளைகோட்டைப் பொருத்தவேண்டியது. இதன் மீச்சிறுபடி வழிச்சமன்பாடுகள்

$$\Sigma Y = m \Sigma X + nC$$
$$\Sigma x Y = m \Sigma X^2 + C \Sigma X$$

$$\therefore \quad 1{\cdot}6336 = m\, 4{\cdot}1796 + 5C \qquad \ldots (1)$$
$$1{\cdot}28326 = m\, 3{\cdot}5349 + 4{\cdot}1796C \qquad \ldots (2)$$

இவற்றைத் தீர்த்தால், $m = -2.132$.
$C = 2{\cdot}128$.

$$\therefore \quad n = m = -2{\cdot}132 \qquad + C = + \log a = 2{\cdot}128$$
$$\therefore \quad a = 134{\cdot}3$$

ஆகவே, மேற்கண்ட பரவலுக்கு $y = (134{\cdot}3)\, x^{-2{\cdot}132}$ என்ற வடிவ வளைகோடு பொருந்தும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

வருமானங்களின் முழுப்பரவலின் வரை $yx^{\alpha} = k$-ன் மாறிகளைக் குறைந்த வர்க்க முறையின் மூலம் காண்க. **$x$**, வருமானத்தின் வீச்சை 1000 ரூபாயிலும், $y$ மனிதர்களின் எண்ணிக்கை 100-லும் தருகிறது.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5—10 | 10—15 | 15—20 | 20—25 | 25—35 | 35—45 |
| $y$ | 75 | 19 | 8 | 4·2 | 4·1 | 2 |

30,000 — 40,000 என்ற இடைவெளியில் அமைந்து இருக்கும் மனிதர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

$$Yx^{\alpha} = k$$
$$\log y + \alpha \log x = \log k$$

$Y = \log y$, எனவும் $X = \log x$ எனவும் கொள்வோம்

$$Y = \log k - \alpha X$$

இதில், $-\alpha = m$, $C = \log k$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad Y = mX + C$$

இயல் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma Y = m \Sigma \Sigma X + nC \qquad \ldots (1)$$
$$\Sigma XY = m \Sigma X^2 + C \Sigma X \qquad \ldots (2)$$

| $x$ | $y$ | $X = \log x$ | $Y = \log y$ | $XY$ | $X^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7·5 | 75 | 0·8751 | 1·8751 | 0.6409 | 0.7658 |
| 12·5 | 19 | 1·0969 | 1.2788 | 1.4027 | 1·2032 |
| 17·5 | 8 | 1·2430 | 0 9031 | 1·1226 | 1.5450 |
| 22·5 | 4·2 | 1·3522 | 0 6232 | 0 8427 | 1·8284 |
| 30·0 | 4·1 | 1·4701 | 0·6128 | 0·9052 | 2·1818 |
| 40·0 | 2 | 1·6021 | 0.3010 | 0·4822 | 2·5667 |
| | | 7·6454 | 5·5940 | 6·3963 | 10·0909 |

எனவே,

$5.5940 = 7\,646m + 6C$ ... (1)

$5.3963 = 10{\cdot}0909m + 7.6464B$ ... (2)

(1) $\times$ 7.6464, $42{\cdot}7740 = 58{\cdot}4674m + 45{\cdot}8784C$ ... (3)

(2) $\times$ 6 $38{\cdot}3778 = 60.5454m + 45.8784C$ ... (4)

(3) − (4) $4{\cdot}3962 = 2\,0780m$

$\therefore \quad m = -2{\cdot}1156$

(1) —ல் $m$-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$5.5940 = -16{\cdot}1767 + 6C$$

$$6C = 21.7707$$

$$C = \frac{21{\cdot}7707}{6} = 3{\cdot}62845$$

$$\log k = C = 3.6285 \quad \therefore \quad k = 4256$$

$$m = -\alpha = -2.1156$$

$$\alpha = 2.1156.$$

$Y = -2.1156\,X + 3.6285$

$\log y = -2.1156 \log x + 3.6285$

$x = 35$ என மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$\log x = \log 35 = 1.5441$

$\log y = -2.1156 \times 1.5441 + 3.6285 = 0.3617$

$\therefore \quad y = 2{\cdot}3$

30,000 - 40,00) என்ற இடைவெளியில் அமையும் நபர்கள் = 2300.

$k = 4256, \qquad \alpha = 2.1156.$

**விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை** (Sum of the Squares of the Residuals)

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையில் ஒரே வகையான பல வரைகளில் மிகச் சிறந்த பொருத்தமுடைய வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்கிறோம். முற்றிலும் சரியான பொருத்தமாய் இருந்தால், ஒவ்வொரு விலக்கமும் பூச்சியமாக இருக்குமாதலால், விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையும் பூச்சியமாக இருக்கும். எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரத்துக்கு ஒரு வரை எவ்வளவு அண்மையில் பொருந்துகிறது என்பதை அறிய, விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், இலட்சிய மதிப்பாகிய பூச்சியத்திற்கு எவ்வளவு அருகில் உள்ளது என ஆராய்கிறோம்.

$$R = \Sigma [\, y - (a + \ x + cx^2 + \dots\dots\dots)]^2$$

$$= \Sigma [\, y - (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots ] \ \ [\, y - (\, a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots)]$$

$$= \Sigma\, y [\, y - (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots)]$$

$$- \Sigma (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots) \ \ [\, y - (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots)]$$

$$\Sigma (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots) \ \ [y - (a + bx + cx^2 + \dots)]$$

$$= a [\Sigma\, y - (a + bx + cx^2 + \dots\dots)] + b [\Sigma\, xy - x (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots)]$$

$$+ c [\Sigma\, x^2 y - ax^2 + bx^3 + cx \ \dots\dots\dots] + \dots\dots\dots + 0$$

ஏனெனில் ஒவ்வோர் உறுப்பும்,

$\Sigma\, x^k [y - (a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots)] = 0$ என்ற இயல் சமன்பாடுகளை ஒத்துள்ளன.

எனவே $R = \Sigma\, y^2 - a \Sigma\, y - b \Sigma\, yx - c \Sigma\, yx^2$

வளைகோட்டைப் பொருத்தும்போதே, $\Sigma y^2$ தவிர மற்ற எல்லாக் கூட்டுத் தொகைகளையும் கணக்கிட்டுள்ளதால், $R$-ன் மதிப்பை எளிதில் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பரிசோதனைச்சாலையில், கொடுக்கப்பட்ட நிறையுள்ள ஒரு வாயுவின் கன அளவின் பலவேறு மதிப்புகளுக்கு ஒத்த அழுத்தத்தின் ($P$) பல வேறு மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. $PV^{\gamma} = C$ என்ற வரையைப் பொருத்துக. $V = 100$ க.அங் இருக்கும்போது $P$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

இருபக்க லாகிருதத்தாளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் படம் வரைந்து, அதன் மூலமும் $\gamma$, C-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

| $V$ (கன அளவு (கன அங்குலங்களில்) | $P$ (அழுத்தம்) ஒரு சதுர அங்குலத்துக்கு (பவுண்டுகளில்) |
|---|---|
| 54·3 | 61·2 |
| 61·8 | 49·5 |
| 72·4 | 37·6 |
| 88·7 | 28·4 |
| 118·6 | 19·2 |
| 194.0 | 10·1 |

$PV^{\gamma} = C$

$\log P + \gamma \log V = \log C$

$\log P = \log V - \gamma \log C$

$X = \log V, \quad Y = \log P$ என்க.

$Y = aX + b$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இங்கு $b = \log C$ ; $\quad a = -\gamma$

| | log $V = X$ | log $P = Y$ | $X^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1·7348 | 1·7868 | 3·0095 | 3·0997 |
| | 1·7910 | 1·6946 | 3·2077 | 3·0350 |
| | 1 597 | 1·5752 | 3·4585 | 2·9294 |
| | 1·9479 | 1·4533 | 3·7943 | 2·8309 |
| | 2·0741 | 1·2833 | 4·3019 | 2·6617 |
| | 2·2878 | 1·0043 | 5·2340 | 2·2976 |
| மொத்தம் | 11·6953 | 8·7975 | 23·0059 | 16·8543 |

எனவே இயல் சமன்பாடுகள்

$$8{\cdot}7975 = a \times 11{\cdot}6953 + 6\,b$$

$$16{\cdot}8543 = a \times 23{\cdot}0059 + b \times 11{\cdot}6953$$

இவற்றிற்குத் தீர்வு கண்டால்,

$$a = -\ 1{\cdot}4,\ b = 4{\cdot}2$$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனால் $b = 4{\cdot}2 = \log C$

$$\therefore\ PV^{1\cdot 4} = 16{,}000$$

$$V = 100$$

$$P = 25{\cdot}1^2 \text{ பவு/ச. அங்.}$$

இரு பக்க லாகிருதத்தாளில் $PV$-ன் பல்வேறு மதிப்புகளைக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறித்துள்ளோம். $PV^r = C$ என்ற வரை இரு பக்க லாகிருதத் தாளில் $Y = ax + b$ என்ற ஒரு நேர் கோட்டின் வடிவில் அமைந்துள்ளது.

$\log P + \gamma \log V = \log C$ என்பது $\log P = \log C - \gamma \log V$ ஆகிறது.

கோட்டின் சாய்வு $= a = -1{\cdot}4 \left( \text{தோராயமாக } \frac{AB}{AC} \right)$

ஆனால்,

$$a = -\gamma \qquad \therefore \quad \gamma = 1{\cdot}4$$

$V = 100$ ஆக இருக்கும்போது, $P = 25$ என வரைபடத்தில் இருந்து கிடைக்கிறது. (தோராயமாக)

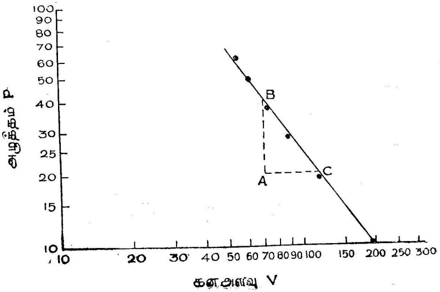
$$\log P = \log C - \gamma \log V$$

$$\log 25 = \log C - 1.4 \log 100$$

$$2\ (1{\cdot}4) + 1{\cdot}4 = \log C$$

$$4{\cdot}2 = \log C = b$$

$$\therefore \quad C = \text{anti log } 4{\cdot}2$$




படம் 1—8.

எனவே, வரையின் சமன்பாடு

$$P_v{}^{1\,4} = 16{,}000$$

**நேர்கோட்டு அமைப்பில் சமன்பாடுகளை மாற்றி அமைத்தல் :**

(1) $y = ax^2 + bx. \therefore \frac{y}{x} = ax + b. \quad X = x, \quad Y = \frac{y}{x}$

என்க

(2) $y = b + \frac{a}{x}$ $X = \frac{1}{x}, Y = y$

(3) $x^2 y = bx^2 + a$ (அதாவது] $y = b + \frac{a}{x^2}$,

$X = \frac{1}{x^2}, Y = y$

(4) $y = a + bxy,\ X = xy,\ Y = y$

(5) $y = ax + b.10$, $\frac{y}{x} = a + b\frac{10^x}{x}$, $X = \frac{10^x}{x}$, $Y = \frac{x}{y}$

(6) $y = ax + b \log_{10} x$ $\frac{y}{x} = a + \frac{b \log_{10} x}{x}$

$$X = \frac{\log_1 x}{x},\ Y = \frac{y}{x}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$y = ax + b\cdot 2^x$ என்ற வரையைப் பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்துக.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y$ | 34 | 57 | 150 | 252 |

**தீர்வு :**

$y = ax + b\cdot 2^x$ .. $\frac{y}{x} = a + b\frac{2^x}{x}, X = \frac{2^x}{x}, Y = \frac{y}{x}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 2·7 | 6·4 | 10·7 |
| Y | 17 | 19 | 30 | 42 |

இதனைப் பொருத்தப் பாதி சராசரி முறையைப் பின்பற்றுகிறோம். அதாவது விவரங்களை ஏறக்குறைய சமமான இரு தொகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொள்கிறோம். அவற்றின் சராசரிகளை $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ எனக் கண்டால் இப்புள்ளிகளைப் படத்தில் குறித்து, ஒரு நேர் கோட்டால் சேர்க்கலாம். $y = a+bx$ எனும் சமன்பாட்டில், $\bar{y}_1 = a + b\bar{x}_1$, $\bar{y}_2 = a \times b\bar{x}_2$ எனப் பிரதியிட்டு, $a$, $b$ ஐக் காண்கிறோம். விவரங்களை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்து,

$\bar{X}_1 = 2{\cdot}35,\ \bar{X}_2 = 8{\cdot}55,$
$\bar{Y}_1 = 8{\cdot}55,\ \bar{Y}_2 = 36$

$a + 8{\cdot}55\ b = 36$

$\therefore a + 2\ 35\ b = 18$

∴ சமன்மாடுகளுக்குத் தீர்வுகண்டு, $a = 10{\cdot}2,\ b = 2{\cdot}9$ எனப் பெறுகிறோம்.

தேவையான சமன்பாடு $= 10{\cdot}2x + 2{\cdot}9\ (2^x)$

## பயிற்சி

(1) பட்டியலில் கண்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர் கோட்டைப் பொருத்துக.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | |
| $y$ : | 10 | 14 | 19 | 25 | 31 | 36 | 39 | $[y = 9{\cdot}56 + 1{\cdot}02x]$ |

(2) பின்வரும் விவரங்களின் போக்கை ஒரு நேர் கோட்டுச் சமன்பாட்டால் வரையறுக்க.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு | : | 1916 | 1917 | 1918 | 1919 | 1920 | 1921 |
| உற்பத்தி (டன்களில்) | : | 110·2 | 143·3 | 143·3 | 134·5 | 138·0 | 55·0 |
| ஆண்டு | : | 1922 | 1923 | 1924 | 1925 | | |
| உற்பத்தி (டன்களில்) | : | 74·0 | 129·0 | 150·0 | 14·0 | | |

1926 ஆம் ஆண்டில் உற்பத்தியின் மதிப்பைக் காண்க.

(3) $y = a + bx$ என்ற நேர்கோட்டைப் பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்துக

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| $y$ : | 1 | 1·8 | 3·3 | 4·5 | 6·3 | $[x = 0{\cdot}72 + 133\ ]$ |

(4) $x$ - மாறியைச் சார்பிலா மாறியாக எடுத்து, $x$-ன் ஈருறுப்புக் கோவைகளில் $y$ சார்புடையதாகக் கொண்டு, கீழ்க் காணும் விவரங்களுக்கு ஒரு பரவளையத்தைப் (Parabola) பொருத்துக.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ : | 2 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 11 | 10 | 9 |

$[y = 10{\cdot}0002 + {\cdot}85\ (x-5).267\ (x-5)^2$
$V = x - 5,\ V = y-7$ எனக் கொள்ளவும்.$]$

(5) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒருவகைப் பூவிலுள்ள இதழ்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. மிகப் பொருத்தமான $y = ac^{bx}$ என்ற வடிவ வளைகோட்டினைக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| இதழ்களின் எண்ணிக்கை : | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| பூக்களின் எண்ணிக்கை : | 133 | 55 | 23 | 7 | 2 | 2 |

(6) $y = Ax^{\gamma}$ என்ற வளைகோட்டைப் பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்துக.

(i)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 10 | 100 | 1000 |
| $y$ : | 32·5 | 49·8 | 96·7 | 54·2 |

[$y=24{\cdot}48x^{0{\cdot}395}$]

(ii)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ : | 2 | 4·5 | 8 | 12·5 |

[விடை $y=(0{\cdot}5129)x^{1{\cdot}96}$

(7) $y = ax^b$ என்ற வளைகோட்டைப் பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருத்துக.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ : | 3·99 | 4·25 | 6·10 | 67·9 | 7·50 | 7·50 |

$y \simeq 3x^{\frac{1}{2}}$

(8) $y = ka^{bx}$ என்ற வளைகோட்டைப் பின்வரும் விவரங்களுக்குக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ஒவ்வொரு குடும்பத்திலும் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை : | 151 | 100 | 61 | 50 | 20 | 8 |

(9) $x, y$ — மாறிகளின் 9 ஜதை மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் போக்கை $y = a + bx + cx^2$ என்ற வளைகோட்டால் விவரிக்க. அவற்றை வரைபடத்தாளில் புள்ளிகளாக அமைக்க.

(1, 2) ; (2, 6) ; (3, 7) ; (4, 8) ; (5, 10) ; (6, 11) ; (7, 11) (8, 10) ; (9, 9) [$y = 10.002 + .85\,(x - 5) - .2668\,(x - 5)$]

(10) ஒரு நாட்டின் பருத்தி உற்பத்தியின் விவரங்கள் பின் வருமாறு.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு : | 1931 | 1932 | 1933 | 1934 | 1935 |
| உற்பத்தி (மில்லியன் பேல்களில்) : | 17·1 | 13·0 | 13·0 | 9·6 | 10·6 |
| ஆண்டு : | 1936 | 1937 | | | |
| உற்பத்தி மில்லியன் (பேல்களில்) : | 12·4 | 18·2 | | | |

விவரங்களின் போக்கை பரவளை கோட்டால் (Parabola) வரையறுக்க. 1938ஆம் ஆண்டின் உற்பத்தியை மதிப்பிடுக.

(11) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு மிகப் பொருத்தமான $y = Ae^{Bx}$ வடிவ வளைகோட்டினைக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ : | 14 | 27 | 40 | 55 | 60 | 300 |

[$y = 8.039e^{0.5261x}$]

(12) $y = ae^{bx}$ என்ற வளைகோட்டைக் கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்குப் பொருத்துக.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 2 | 4 | 6 |
| $y$ : | 1 | 1) | 100 | 1000 |

[$y = e^{1·151x}$]

(13) (i) $y = k\,ae^{bx}$ என்ற வளைகோட்டைக் கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு காண்க :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 5 | 10 | 5 | 20 | 25 |
| $y$ : | 820 | 1600 | 3500 | 4000 | 4750 |

(ii) பின்வரும் விவரங்களுக்குக் குறைந்த வர்க்க முறையில் $y = ax^2 + bx + c$ என்ற வளைவைப் பொருத்துக. $y$-ன் அளவை மதிப்பிடுக.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| $y$ | 213 | 252 | 265 | 239 | 178 | 109 | 90 |

$x = 17$ எனின், $y$-ன் அளவை மதிப்பிடுக. (செ.ப. 1974)

(14) $y = 3.849e^{0 \cdot 7366x}$ என்ற வளைகோட்டைப் பின்வரும் செய்திகள் பெற்றுள்ளனவா எனக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ | 14 | 27 | 40 | 55 | 68 | 300 |

(15) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குக் குறைந்த வர்க்க முறையில் எப்படி $y = A \times B$ என்ற வளைவைப் பொருத்துகிறாய்? அதற்காக நீ மேற்கொள்ளும் உட்கருத்துகள் யாவை ?

[செ.ப. 1974]

# 2. ஒட்டுறவு

## (Correlation)

தை மாதத்தில் நெல் அறுவடை ஆவதால், அரிசியின் விலை ஓரளவு குறைந்துள்ளதை நாம் அறிவோம். அதுபோன்று மழைக் காலத்தில், தேவை அதிகரிப்பதால், குடைகளின் விலையும், குளிர் காலத்தில் கம்பளி ஆடைகளின் விலையும் அதிகரிக்கின்றன. எனவே, ஒரு பொருளின் உற்பத்தி அதிகரிக்க அதிகரிக்க அதன் விலை குறைந்துகொண்டே செல்வதையும், ஒரு பொருளின் தேவை அதிகரிக்க, அதிகரிக்க அதன் விலை அதிகரிப்பதையும் நாம் காண்கின்றோம். இவ்வாறே பல சூழ்நிலைகளில் இருமாறிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பு கொண்டு மாற்றங்களை ஏற்பதை 'உடன்தொடர்பு' அல்லது 'ஒட்டுறவு' (correlation) என்கிறோம். ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, மற்றொரு மாறியின் மதிப்பும் அதிகரித்துக்கொண்டே சென்றால், ஒட்டுறவை நேர் மறை ஒட்டுறவு, அல்லது 'நேரிடைத் தொடர்பு' (positive correlation) என்கிறோம். இதுபோன்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் ஒன்றாகக் குறைந்தாலும் ஒட்டுறவு நேர்மறையானதுதான்.

கணவரது வயது அதிகரிக்க அதிகரிக்க, அவர்களின் மனைவியரது வயது அதிகரிப்பதையும், இளம் கணவருக்கு இளம் மனைவியர் இருப்பதையும் கொண்டு கணவன்—மனைவியர் வயது நேர் மறை ஒட்டுறவுடையன (positively correlated) எனப்படுகிறது.

ஒரு மாறியின் மதிப்பு கூடிக்கொண்டே செல்லும்போது, அதன் விளைவாக மற்றொரு மாறியின் மதிப்பு குறைந்துகொண்டே சென்றாலும் அல்லது முதல் மாறியின் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே செல்லும்போது, இரண்டாவது மாறியின் மதிப்பு கூடிக்கொண்டே சென்றாலும் இரு மாறிகளும் ஒட்டுறவு உடையவைதான். ஆனால், இவை எதிரிடைத் தொடர்புடையவை

அல்லது ஒட்டுறவுடையவை (negativly correlated) (எ-டு): (பசுக்களின் வயது, அவை தரும் பாலின் அளவு) (பருவமழை, மின் வெட்டு).

எனவே, ஒரு மாறியின் மதிப்பில் ஏற்படும் கூடுதலின் விளைவாக அதனுடன் காரணகாரிய தொடர்புடைய மற்றொரு மாறியின் மதிப்பில் ஏற்படும் கூடுதலோ அல்லது குறைவோஇரு மாறிகளின் ஒட்டுறவு எனலாம்.

உணவுப் பொருள்களின் விலையும், சாப்பாட்டுச் செலவும் காரணத் தொடர்புள்ளன (causal relationship). வருமானவரி அதிகரிப்பும், உயிர் ஒப்பந்தக் கழகத்தில் (life insurance) சேர்வோரது எண்ணிக்கையும் காரணகாரியத் தொடர்புடையவை. ஆனால், சிற்சில சமயங்களில் காரணத் தொடர்பற்ற இரண்டு மாறிகள் பார்ப்பதற்குத் தொடர்புடையன போலத் தோன்றும். எடுத்துக்காட்டாக, அமெரிக்க டாலரின் மதிப்பும், படிப்பில் பின் தங்கிய மாணவனது மதிப்பெண்களும் ஒன்றாகக் குறைந்து கொண்டே வரலாம். அதுபோல் மருத்துவச்சாலையில் சேர்க்கப்படும் நோயாளிகளின் எண்ணிக்கையும், நாட்டில் விற்பனையாகும் செய்தித் தாள்களின் எண்ணிக்கையும் ஒரேசமயம் கூடிக் கொண்டே செல்லலாம். எனவே இவற்றை உடன் தொடர்புடையன எனக் கொள்ள முடியாது. ஒன்றின் அடிப்படையில் மற்றொன்று இல்லை. இவ்வாறு காரணகாரியத் தொடர்பின்றி, கூடிக் குறைந்து வரும் மதிப்புகளைக் கொண்டு, தோற்றத்தில் மட்டும் ஒட்டுறவு உடையனவாகக் காணப்படும் மாறிகளின் தொடர்பு, போலித் தொடர்பு (spurious correlation) அல்லது பொருளற்றத் தொடர்பு (nonsense correlation) எனப்படுகிறது.

இரு மாறிகளிடையே உள்ள ஒட்டுறவைக் காண கீழ்க்காணும் முறைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன

(1) சிதறல் விளக்கப்படம் வரைதல்.

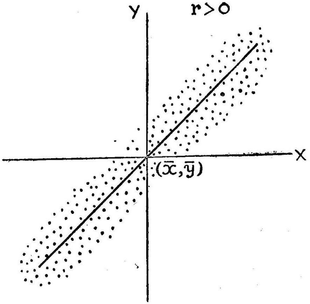
(2) வரைபடம் வரைதல்

(3) பியர்ஸன் ஒட்டுறவுக்கெழு காணுதல்

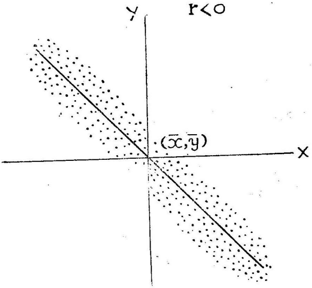
## (1) சிதறல் விளக்கப் படம் (Scatter Diagram)

$(x_1, y_1)$. $(x_2, y_2)$...$(x_n, y_n$ என்பவை $x$, $y$ என்ற இருமாறிகளின் $n$ ஜோடி மதிப்புகள். வரைபடத்தாளில் $x,y$ அச்சுகளை வரைந்து, மேற்கண்ட $n$ புள்ளிகளையும் குறித்துக் கொள்ளவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள சீர்படா விவரங்களில் காணப்படும் $n$ ஜோடி மதிப்புகளையும், $n$ புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ள வரைபடமே சிதறல் விளக்கப்படமாகும். புள்ளிகள் படத்தில் சிதறி அல்லது

பரவி அமைந்திருக்கும் நிலையிலிருந்து, அவை எவ்வாறு உடன் தொடர்பு கொண்டவை என அறியலாம்.




படம் 2—1.
சிதறல் விளக்கப் படம் (நேரிடை உறவு)




படம் 2-2.
சிதறல் விளக்கப் படம் (எதிரிடை உறவு)

**(2) வரைபட மூலம் ஒட்டுறவைக் காணுதல்**

$X$ மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகளையும், ஒரு வரையின் மூலமாகவும், $Y$ மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகளையும் மற்றொரு வரையின் மூலமாகவும் குறிக்கின்றோம். இவ்விரு வரைகளும் மேல் நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ ஒரே திசையில் சென்றால், உடன் தொடர்பு நேரிடையானது என்கிறோம் வரைகள் எதிர்த் திசையில் சென்றால், மாறிகளிடை எதிரிடைத் தொடர்பு காணப் படுகிறது என்கிறோம்.

பொதுவாகக் காலத் தொடர் வரிசையில் காணப்படும் புள்ளி விவரங்களில் இத்தகைய முறை ஒட்டுறவைக் காண உதவுகிறது.

**(3) பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக்கெழு** (Pearson's Correlation co-efficient) :

$x, y$ மாறிகளின் தனித்த மாற்றத்தை மட்டும் அவற்றின் பரவற்படிகள் முறையே $\sigma x^2$, $\sigma y^2$ எடுத்துக் கூறுகின்ற . ஆனால் $\frac{1}{n}\Sigma(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ என்பது $x, y$ மாறிகளின் இணைவிலகலை அல்லது உடன்மாற்றத்தைத் (covariation) தருகிறது. எனவே, $\frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ என்பது 'இணைப்பரவற்படி' அல்லது 'உடன் மாறுபாடு' (co-variance) எனப்படுகிறது. இதனை $p_{x}$, எனக் குறிக்கிறோம்.

$p_{xy}$ $x, y$-ன் அலகுகளைப் பொறுத்து அமைவதால் அது தனி எண் அல்ல. எனவே, உடன் தொடர்பின் அளவாக, அலகுகளால் பாதிக்கப்படாத ஒரு கெழுவைப் பெற $x, y$-ன் இணைப்பரவற்படியை, $x, y$ ன் திட்ட விலக்கங்களின் பெருக்குத் தொகையால் வகுக்கிறோம். எனவே, பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r = \frac{p_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{n}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2, \frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2 \; \Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$r$-ன் மதிப்பு $-1$-லிருந்து $+1$ வரையுள்ள இடைவெளியில் இருக்கும் என்று பின்வரும் பகுதியில் நிறுவப்படுகிறது.

$r = +1$ மாறிகள் முழுமையான நேரிடைத் தொடர்புடையன.

$r > 0$ மாறிகள் நேரிடைத் தொடர்புடையன.

$r = 0$ மாறிகள் உடன் தொடர்பற்றவை.

$r < 0$ மாறிகள் எதிரிடைத் தொடர்புடயவை.

$r = -1$ மாறிகள் முழுமையான எதிரிடைத் தொடர்புடையவை.

இரு மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளை நிகழ்வெண் பட்டியலில் பல பிரிவுகளிடையெ அமைத்துக்கொண்டால் 'இரு மாறி நிகழ்வெண் பட்டியல்' (Bivariate frequency table) கிடைக்கிறது. இதனை 'உடன் தொடர்புப் பட்டியல்' (Correlation table) அல்லது 'இருவழி நிகழ்வெண் பட்டியல்' (Twoway frequency table) என்றும் சொல்கிறோம்.

இரு வழி நிகழ்வெண் பட்டியலில் $r = \frac{p}{\sigma x \cdot \sigma y}$

$$= \frac{\Sigma f_{xy} (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma f_x (x-\bar{x})^2 \ \Sigma f_y (y-\bar{y})^2}}$$

சீர்படா விவரங்களுக்கான $r$-ன் வாய்பாட்டில், ஆங்காங்கு $x$, $y$-க்கான நிகழ்வெண்களினால் பெருக்கினால், இவ்வாய்பாடு கிடைக்கிறது.

**ஒட்டுறவுக்கெழுவின் பயன்கள் :** ஒட்டுறவுகெழு கல்வி, உளவியல் துறைகளில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. (மாணவரது அறிவுக் கூர்மை கெழு, கல்வித் தேர்ச்சி) (குடிப்பிறப்பு, பழக்க வழக்கங்கள்) (பயிலும் முறைகள், நினைவுத்திறன்) போன்ற பண்புகளிடையே உள்ள இடை உறவைக் கணக்கிடப்பெரிதும் உதவுகிறது. வணிகத்துறையில் (விளம்பரச் செலவு, விற்பனை அளவு) பொருள்களின் உற்பத்தித்திறன் (தொழிலாளரது சிறப்புப் பயிற்சி, வயது) (உடல், மனநிலை) முதலியவற்றோடு பொறுத்து அமையும் நிலை இவற்றை ஆராயப் பெரிதும் உதவுகிறது. இவ்வாறே சமூகப் பிரச்சினைகளில் (வேலையின்மை, வறுமை) (மக்களின் கல்வித் திறன், பொருளாதார உயர்வு) போன்றவற்றில் தொடர்பு காண உடன் தொடர்புக்கெழு பெரிதும் உதவுகிறது.

$\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பவை $x$, $y$ மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளாயின், வரைபடத்தில் $\bar{x}$, $\bar{y}$ ஐக் குறித்துக்கொண்டு, அதன் வழியாக $x$ அச்சுக்கும், $y$-அச்சுக்கும் இணையாக இரு செங்குத்துக் கோடுகள்

வரைவோம் இவை வரைபடத்தை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் $P_r(x_r, y_r)$ என்ற புள்ளி முதற்காற் பகுதியில் வந்தால், $x - \bar{x}$, $y_r - \bar{y}$ இரண்டும் நேர்க்குறி உடையவை ஆதலால், அவற்றின் பெருக்குத் தொகை $(x - \bar{x})$ $(y_r - \bar{y})$-ம் நேர்க்குறியுடையது. அதுபோல மூன்றும் காற் பகுதியில் வந்தால் $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$ இரண்டும் எதிர்க்குறியுடையவை. எனவே, $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ நேர்க்குறியை உடையதாகிவிடுகிறது.

இரண்டாம் காற் பகுதியில் $x - \bar{x}$ எதிர்க்குறியுடையது. $y_r - \bar{y}$ நேர்க்குறியுடையது. நான்காம் காற் பகுதியில் $x - \bar{x}$ நேர்க்குறியையும், $y - \bar{y}$ எதிர்க்குறியையும் பெறுகின்றன. எனவே. இவ்விரு நிலைகளிலும் $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$, எதிர்க்குறி பெறுகிறது.

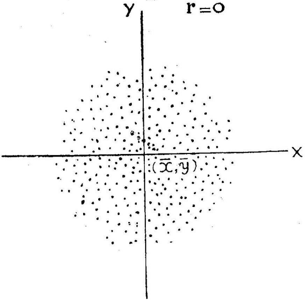
எனவே, சிதறல் விளக்கப் படத்தில் முதல், மூன்றும் கால் பகுதிகளில் பெரும்பான்மையான புள்ளிகள் காணப்பட்டால்

$$\sum_{r=1}^{n} (x_r = \bar{x})(y - \bar{y})$$ என்ற கூட்டுத் தொகையில், குறை மதிப்புக் கொண்ட பெருக்கற்பலனைவிட நேர் மதிப்புடைய பெருக்கற்பலன்தான் அதிகமாயிருக்கும். எனவே $\Sigma(x - \bar{x})$ $(y_r - \bar{y})$ 0. மாறிகள் நேரிடை உறவுடையவை. இது போன்று பெருவாரியான புள்ளிகள் இரண்டாம், நான்காம் காற் பகுதிகளில் காணப்பட்டால்,

$$\sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$$ [குறைகுறி உடைய பெருக்கற் பலன் அதிகம் உள்ளதால்] குறைகுறி உடையதாகி விடுகிறது. மாறிகள் எதிரிடை உறவுடையவை.

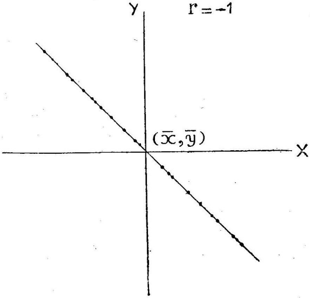
சிதறல் படத்தின் நான்கு பகுதிகளிலும் புள்ளிகள் காணப் பட்டால், மாறிகள் ஒட்டுறவற்றவை (Independent) ஆகிவிடுகிறது $\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 0$ ஆகி விடுகிறது.

சிதறல் படத்தின் புள்ளிகள் யாவும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்தால் உடன் தொடர்பு முழுமையாக உள்ளது என்கிறோம்.



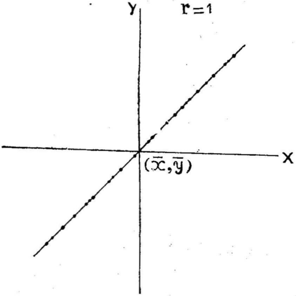

படம் 2—3.
சிதறல் விளக்கப்படம் (ஒட்டுறவின்மை)

இக் கோடு முதல், மூன்றும் காற்பகுதிகளின் சமவெட்டியாக அமைந்தால் முழுமை நேரிடை உறவு உடையவை (Perfect posi-




படம் 2-4.
சிதறல் விளக்கப்படம் (முழுமை எதிரிடை உறவு)

tive correlation) எனவும் புள்ளிகள் காணப்படும் நேர்கோடு இரண்டாம், நான்காம் காற்பகுதிகளின் சமவெட்டியாக இருந்தால் மாறிகள், முழுமை எதிரிடை உறவு (Perfect Negative Correlation) உடையவை எனவும் கூறப்படுகின்றன.




படம் 2-5
சிதறல் விளக்கப் படம் (முழுமை நேரிடை உறவு)

முழுமைத் தொடர்பில் மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே விகிதத்தில் மாறுகின்றன.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரமும், பரப்பளவும் ($A = \pi r^2$) முழுமை நேரிடைத் தொடர்புடையவை. மாறுவெப்பநிலையில், வாயுவின் அழுத்தமும், கன அளவும் முழுமை எதிரிடைத் தொடர்பு கொண்டவை. $\left(P \propto \frac{1}{V}\right)$.

எனவே, சிதறல் விளக்கப் படம் இரு மாறிகட்கிடையே உள்ள தொடர்பை அறிவதற்கு முதற்படியாக உள்ளது. விரைவிலும், எளிய முறையிலும், உடன் தொடர்பைக் கணக்கிடும் தேர்ச்சியற்றோரும், புரிந்துகொள்ள உதவுகிறது. மாறிகளின் உச்ச மதிப்புகள் இவற்றை அவ்வளவு பாதிப்பதில்லை.

ஆனால், சிதறல் விளக்கப் படத்தைக் கொண்டு ஒட்டுறவு நேரிடையானதா அல்லது எதிரிடையானதா ; அதிக அளவு

உடையதா அல்லது குறைந்த அளவு உடையதா என்பதை மட்டும் புள்ளிகளின் போக்கிலிருந்து உணரலாம். ஆனால், ஒட்டுறவின் சரியான மதிப்பைக் கணக்கியலாகக் காண்பதுபோல் சிதறல் விளக்கப் படம் மூலம் சரியாகத் தீர்மானிக்க இயலாது.

**சுருக்கு வழியில் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காணுதல்**

$x$, $y$ என்ற மாறிகளுக்கு முறையே $A$, $B$ என்ற மூலப் புள்ளிகளைக் கொள்வோம். ஆகவே,

$$\begin{aligned}\Sigma (x - A)(y - B) &= \Sigma\, [(x - \bar{x}) + (\bar{x} - A)]\,[(y - \bar{y}) + (\bar{y} - B)].\\ &= \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) + (\bar{x} - A)\, \Sigma (y - \bar{y})\\ &\quad + (\bar{y} - B)\, \Sigma (x - \bar{x}) + \Sigma (\bar{y} - B)(\bar{x} - A)\end{aligned}$$

இதில் $\Sigma (x - \bar{x}) = 0$; $\Sigma (y - \bar{y}) = 0$. ஏனெனில் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \Sigma (x - A)(y - B) = \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) + \Sigma (\bar{y} - B)(\bar{x} - A)$$

இருபுறமும் $N$ ஆல் வகுத்தால்

$$\Sigma \frac{(x - A)(y - B)}{N} = \Sigma \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N} + \frac{N(\bar{y} - B)(\bar{x} - A)}{N}$$

$A$, $B$ என்ற மூலப் புள்ளிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட, $x$, $y$ என்ற மாறிகளின் இணை விலகலை $p'$ என எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும், $d_1 = (\bar{x} - A)$ என்றும், $d_2 = (\bar{y} - B)$ என்றும் கொள்வோம்.

ஆகவே $p' = p + d_1 d_2$. $\therefore \; p = p' - d_1 d_2$.

$A$, $B$-யிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $S_1$, $S_2$ என்பவை முறையே $x$-$y$-ன் வர்க்க மூலச்சராசரி, வர்க்க விலக்கங்களாக இருந்தால்

$$\sigma_x = \sqrt{s_1^2 - d_1^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{s_2^2 - d_2^2}$$

$$\text{ஆகவே } r = \frac{p' - d_1 d_2}{\sqrt{s_1^2 - d_1^2}\;\sqrt{s_2^2 - d_2^2}} \qquad \cdots (1)$$

$A$-யும் $B$-யும் பூஜ்யமாக இருந்தால்,

$$p' = \Sigma \frac{xy}{N}, d_1 = \bar{x}, d_2 = \bar{y}.$$

$$r = \Sigma \frac{xy - N\bar{x}\bar{y}}{N\sigma_x\sigma_y}$$

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காணும்போது $x, y$ க்கு வசதியான மூலப் புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு விலக்கங்களைக் காண்பதால், கணக்கிடுதல் எளிதாகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$x$ : 10, 16, 13, 12, 15, 17, 14.

$y$ : 20, 33, 25, 27, 26, 30, 30.

| $x$ | $y$ | $x-A$ | $y-B$ | $(x-A)^2$ | $(y-B)^2$ | $(x-A)(y-B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | −3 | −10 | 9 | 100 | 30 |
| 16 | 33 | 3 | 3 | 9 | 9 | 9 |
| 13 | 25 | −0 | −5 | 0 | 25 | 0 |
| 12 | 27 | −1 | −3 | 1 | 9 | 3 |
| 15 | 26 | 2 | −4 | 4 | 16 | −6 |
| 17 | 30 | 4 | 0 | 16 | 0 | 0 |
| 14 | 30 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 6 | −19 | 40 | 159 | 34 |

$$\sigma_x^2 = \frac{(x-A)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma(x-B)}{n}\right)^2$$

$$= \frac{40}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{244}{49}$$

$\sigma_x = 2{\cdot}231.$

$$\sigma_y^2 = \frac{159}{7} - \left(\frac{-19}{7}\right)^2 = \frac{1113 - 361}{49} = \frac{752}{49}$$

$\sigma_y = 3{\cdot}936$

$$P = \frac{1}{n}\Sigma (x - A)(y - B) - d_1 d_2,$$

இங்கு $d_1 = \frac{\Sigma (x - A)}{n}$ , $d_2 = \frac{\Sigma (y - B)}{n}$

$$= \frac{34}{7} - \left[\frac{6 \times (-19)}{49}\right] = \frac{352}{49} = 7{\cdot}183$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{7{\cdot}183}{2{\cdot}231 \times 3{\cdot}936}$$

$= {\cdot}8179.$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் பட்டியல் வயதுப் பிரிவுகளுக்கேற்றவாறு, 65 மாணவர்கள் பொது அறிவுத் தேர்வில் வாங்கியுள்ள மதிப் பெண்களைத் தருகிறது. வயதிற்கும், பொது அறிவுக்குமுள்ள தொடர்பைக் கணக்கிடுக. (B. Com. '66)

| தேர்வின் மதிப்பெண்கள் | வயது (ஆண்டுகளில்) 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 200 — 250 | 4 | 4 | 2 | 1 |
| 250 — 300 | 3 | 5 | 4 | 2 |
| 300 — 350 | 2 | 6 | 6 | 5 |
| 350 — 400 | 1 | 4 | 6 | 8 |

**தீர்வு :**

வயது $= x$; மதிப்பெண்கள் $= y$ எனக் கொள்வோம்.

| x-ன் மைய மதிப்பு (1) / y-ன் மைய மதிப்பு (1) | 19 | 20 [0] | 21 | 22 | $f_y$ (2) | Y (3) | $f_y Y$ (4) | $f_y Y^2$ (5) | $\Sigma f_{yx} XY$ (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 225 | 4 [1] | 4 [0] | 2 [-1] | 1 [-2] | 11 | -1 | -11 | 11 | 0 |
| 275 | 3 [0] | 5 [0] | 4 [0] | 2 [0] | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 325 | 2 [-1] | 6 [0] | 8 [1] | 5 [2] | 21 | 1 | 21 | 21 | 16 |
| 375 | 1 [-2] | 4 [0] | 6 [2] | 8 [4] | 19 | 2 | 38 | 76 | 42 |
| $f_x$ (2) | 10 | 19 | 20 | 16 | 65 | | 48 | 108 | 58 |
| X (3) | -1 | 0 | 1 | 2 | | | | | |
| $f_x X$ (4) | -10 | 0 | 20 | 32 | 42 | | | | |
| $f_x X^2$ (5) | 10 | 0 | 20 | 64 | 94 | | | | |
| $\Sigma f_{xy} XY$ (6) | 0 | 0 | 18 | 40 | 58 | | | | |

சரி பார்த்தல்

**விளக்கம்**

கொடுத்துள்ள பட்டியலிலிருந்து $x$-ன் மைய மதிப்புகளையும், $y$-ன் மைய மதிப்புகளையும் எழுதிக்கொண்டு வேறொரு பட்டியல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

$f_x$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட $x$-ன் மதிப்பிற்கு, நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகையைத் தருகிறது.

$$f_{19} = f_{19,225} + f_{19,275} + f_{19,325} + f_{19,375}$$
$$= 4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

இதுபோலவே $f_y$ என்பது, ஒரு குறிப்பிட்ட $y$-ன் மதிப்பிற்கு நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத் தொகையைத் தருகிறது.

$$f_{275} = f_{275,19} + f_{275,20} + f_{275,21} + f_{275,22}$$
$$= 3 + 5 + 4 + 2 = 14$$

$$X = \frac{x-20}{1}; \quad Y = \frac{y-275}{50}$$

அதாவது $x$-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒரு வசதியான மூலம் $A$-ஐ எடுத்துக் கொண்டு, அதிலிருந்து $x$-ன் விலக்கங்களை $x$ ன் பிரிவு இடைவெளியால் வகுத்துக் கிடைப்பதே $X$ ஆகும்

இதுபோலவே $y$-க்கும், ஒரு வசதியான மூலம் $B$ஐ எடுத்துக் கொண்டு, அதிலிருந்து $y$-ன் விலக்கங்களை $y$-ன் பிரிவு இடைவெளியால் வகுத்தால் $Y$ கிடைக்கும்.

இவை முறையே நெட்டு வரிசை (2), கிடை வரிசை (2)-ல். காணப்படுகின்றன. 4 ஆவது நெட்டுப்பிரிவு $f_y \cdot Y$, 2ஆவது நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள, (3)ஆவது நெட்டுப்பிரிவிலுள்ள ஒவ்வொரு சிற்றறை எண்ணையும், அதற்கொத்த $Y$ மதிப்பால் பெருக்கிக் கிடைப்பது.

(5)ஆவது நெட்டுப்பிரிவு $f_y \cdot y^2$. இது ஒவ்வொரு $f_y$. $Y$ ஐயும், $Y$ யையும் பெருக்கினுல் கிடைக்கும்.

இதுபோன்றே கிடைப்பிரிவுகளிலும் $f_x X$, $f_x X^2$ என்ற வற்றை எழுதிக்கொள்ள வேண்டும்.

ஒவ்வொரு சிற்றறையிலும் நடுவிலே காணப்படும் எண் அந்தச் சிற்றறைக்குரிய நிகழ் வெண்ணுகும். மூலையில் அடைப்புக்குள் காணப்படும் எண் அந்தச் சிற்றறைக்குரிய $X$ $Y$, விலக்கங்களின் பெருக்குத்தொகை யாகும். எடுத்துக்காட்டாக, மேல் வரிசையில் முதல் சிற்றறையில் $X$-ன் மதிப்பு — 1. $Y$-ன் மதிப்பு — 1.

எனவே $XY = -1 \times -1 = +1$.

6ஆவது நெட்டுப்பிரிவில் உள்ள எண்கள், ஒவ்வொரு வரிசைலும் உள்ள எல்லாச் சிற்றறைகளுக்கும் $f_{xy}$ ஐ $XY$ ஆல் பெருக்கி வந்தவற்றைக் கூட்டியதால் கிடைத்தவையாகும்.

ஒரு நெட்டுப் பிரிவு முழுவதிலுமுள்ள சிற்றறைகளுக்கு, ஒவ்வொரு சிற்றறையின் நிகழ்வெண் $f_{xy}$ஐ $XY$ ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையே 6ஆவது கிடைப் பிரிவில் காணப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 6ஆவது கிடைப் பிரிவில், முதல் எண்ணுக உள்ளது பூச்சியமாகும்

$$4 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times -1 + 1 \times -2 = 0.$$

$\Sigma f_{xy} XY = \Sigma f_{yx} YX$. ஏனெனில், ஒன்றில் நெட்டு வரிசை யாகவும், மற்றென்றில் கிடை வரிசையாகவும் எல்லா சிற்றறை

களுக்கான நிகழ்வெண்களையும், அவற்றின் விலக்கங்களின் பெருக்கங்களையும் பெருக்கி வந்த எண்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டுள்ளோம்.

$\Sigma f_{y} YX$ ம், $f_{r} YX$ ம் ஒரே எண்ணிக்கை வந்தால்—நமது கணக்கீடு சரியாக உள்ளது எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

$$r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma_x \sigma_y}.$$

$A$, $B$ஐ $x$, $y$-ன் மூலப்புள்ளிகளாகக் கொண்டு, $C_1$, $C_2$ என்ற பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளங்களானால்,

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma f (x_i - A)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_r (x - A)}{N}\right)^2$$

$$= C_1^2 \left[\frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2\right]$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma f (y - B)^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f (y - B)}{N}\right]^2$$

$$= C_2^2 \left[\frac{\Sigma f_r y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_r y}{N}\right)^2\right]$$

$$p = \frac{\Sigma f (x_i - A(y - B)}{N}$$

$$- \left[\frac{\Sigma f_r (x - A) \cdot f_r (y - B)}{N}\right]$$

$$= C_1 C_2 \left[\frac{\Sigma f_y xy}{N} - \frac{\Sigma f x}{N} \frac{f_r y}{N}\right]$$

$$r = \frac{p C_1 C_2}{\sigma_x \sigma_y C_1 C_2} = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y}$$

பிரிவு இடைவெளிகளின் அலகுகளில்,

$$p = \frac{58}{65} - \frac{48}{65} \cdot \frac{42}{65} = .8923 - .4771 = \cdot 4152$$

$$\sigma_x^2 = \frac{108}{65} - \left(\frac{48}{65}\right)^2 = 1{\cdot}662 - .545 = 1{\cdot}117$$

$$\sigma_y^2 = \frac{94}{65} - \left(\frac{42}{65}\right)^2 = 1{\cdot}446 - {\cdot}418 = 1.028$$

$$r = \frac{{\cdot}4152}{\sqrt{(1{\cdot}117)(1{\cdot}028)}} = {\cdot}\mathbf{3857}$$

**கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.**

| $x$ ↓   $y$ → | 41–45 | 36—40 | 31—35 | 26—30 | 21—25 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1—5 | — | — | — | 9 | 15 |
| 6—10 | — | — | 10 | 11 | — |
| 11—15 | — | 7 | 9 | 4 | — |
| 16—20 | — | 13 | 5 | — | — |
| 21—25 | 14 | 3 | — | — | — |

| x \ Y | 43 | 38 | 33 | 28 | 23 | $f_x$ | X | $f_x X$ | $f_x X^2$ | $\Sigma f_{xy} XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | 9 [2] | 15 [4] | 24 | -2 | -48 | 96 | 78 |
| 8 | | | 10 [0] | 11 [1] | | 21 | -1 | -21 | 21 | 11 |
| 13 | | 7 [0] | 9 [0] | 4 [0] | | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | | 13 [1] | 5 [0] | | | 18 | 1 | 18 | 18 | 13 |
| 23 | 14 [4] | 3 [2] | | | | 17 | 2 | 34 | 68 | 62 |
| $f_y$ | 14 | 23 | 24 | 24 | 15 | 100 | 0 | -17 | 203 | 164 |
| Y | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | 0 | | | | |
| $f_y Y$ | 28 | 23 | 0 | -24 | -30 | -3 | | | | |
| $f_y Y^2$ | 56 | 23 | 0 | 24 | 60 | 163 | | | | |
| $\Sigma f_{xy} XY$ | 56 | 19 | 0 | 29 | 60 | 164 | | | | |

சரி பார்த்தல்

$$d_1 = \frac{17}{100} = -17. \quad d_2 = -\frac{3}{100} = -\cdot 03$$

$$\sigma_x^2 = \frac{203}{100} - \frac{(17)^2}{10^2} = \frac{20300-289}{10002} = \frac{20021}{10000} = 2.00011$$

$$\sigma_y^2 = \frac{163}{10} - \left(\frac{3}{100}\right)^2 - \frac{16300-9}{10^2} = \frac{16291}{10^2}$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{20011}}{100}; \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{16291}}{100}$$

$$p = \frac{164}{100} - \left(\frac{-17}{100}\right)\left(\frac{-3}{100}\right) = \frac{16349}{10000}.$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{16349}{\sqrt{20011} \cdot \sqrt{16291}} = \cdot 9057.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$x$, $y$-ன் இரு வழி நிகழ்வெண் பரவல் பின்வருமாறு :

| $x$ \ $y$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | $n_{11}$ | $n_{12}$ |
| $y_2$ | $n_{21}$ | $n_{22}$ |

$x$, $y$-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$= \frac{n_{11}\,n_{22} - n_{21}\,n_{12}}{\sqrt{(n_{12}+n_{22})(n_{11}+n_{21})(n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22})}}.$$

என நிறுவுக.

**தீர்வு :**

$$X = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad Y = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ என்க.}$$

| Y \ X | $X_1$ | $X_2$ | $f_y$ | $Y$ | $f_y \cdot Y$ | $f_y Y^2$ | $\Sigma f_{xy} YX$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | $n_{11}$ [0] | $n_{12}$ [0] | $n_{11}+n_{22}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_2$ | $n_{21}$ [0] | $n_{22}$ [1] | $n_{21}+n_{22}$ | 1 | $n_{21}+n_{22}$ | $n_{21}+n_{22}$ | $n_{22}$ |
| $f_x$ | $n_{11}+n_{21}$ | $n_{12}+n_{22}$ | N | | | | |
| $X$ | 0 | 1 | | | | | |
| $f_x X$ | 0 | $n_{12}+n_{22}$ | | | | | |
| $f_x X^2$ | 0 | $n_{12}+n_{22}$ | | | | | |
| $\Sigma f_{xy} XY$ | 0 | $n_{22}$ | | | | | |

சரி பார்த்தல்

$$r = \frac{P}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma f(x)\, X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f(x)\, X}{N}\right)^2$$

$$= \frac{(n_{12}+n_{22})^2\ (n_{12}+n_{22})(n_{11}+n_{21}) - (n_{12}+n_{22})^2}{N^2}$$

$$\therefore\ \sigma_x = \frac{\sqrt{(n_{12}+n_{22})(n_{11}+n_{21})}}{N}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma f\ (y)\ Y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f\ Y}{N}\right)^2 = \frac{n_{21}+n_{22}}{N} - \frac{(n_{21}+n_{22})^2}{N^2}$$

$$= \frac{(n_{21}+n_{22})^2 (n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22}) - (n_{21}+n_{22})^2}{N^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{(n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22})}}{N}$$

$$P = \frac{n_{22}(n_{11}+n_{21}+n_{12}+n_{22}) - (n_{12}+n_{22})(n_{21}+n_{22})}{N^2}$$

$$= \frac{n_{11}\, n_{22} - n_{21}\, n_{12}}{N^2}$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{n_{11}\, n_{22} - n_{21}\, n_{12}}{N^2}$$

$$\times \frac{N^2}{\sqrt{(n_{12}+n_{22})\,(n_{11}+n_{21})\,(n_{11}+n_{12})\,(n_{21}+n_{22})}}$$

$$= \frac{n_{11}\, n_{22} - n_{21}\, n_{12}}{\sqrt{(n_{12}+n_{22})\,(n_{11}+n_{21})\,(n_{11}+n_{12})\,(n_{21}+n_{22})}}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$x$, $y$ என்கிற இரு சார்பற்ற மாறிகளின் பரவற்படிகள் முறையே 2, 3 ஆனால், $\xi = 3x + 2y$, $\eta = 3x - y$ என்பவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க (செ.ப. 1973).

**தீர்வு :**

$$\xi = 3x + 2y$$

$$\eta = 3x - y$$

$$\bar{\xi} = \frac{\Sigma\, 3x + 2y}{n} = \frac{3\Sigma x}{n} + \frac{2\Sigma y}{n} = 3\bar{x} + 2\bar{y}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\Sigma\, 3x - y}{n} = \frac{3\Sigma x}{n} - \frac{\Sigma y}{n} = 3\bar{x} - \bar{y}$$

$$\sigma_\xi = \frac{\Sigma(\xi - \bar{\xi})^2}{n} = \frac{\Sigma\,[3\,(x-\bar{x}) + 2\,(y-\bar{y})]^2}{n}$$

$$= 9\,\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{n} + \frac{4\,\Sigma\,(y-\bar{y})^2}{n} + \frac{12\,\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n}$$

$$\sigma_\xi^2 = 9 = \sigma_x^2 + 4\,\sigma_y^2 + 12\,p_{xy}$$

இதுபோலவே,

$$\sigma_\eta^2 = 9\,\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 6\,p_{xy}$$

$x$, $y$ மாறிகள் சார்பற்றவையாதலால், $p_{xy} = 0$

$$\sigma_\xi^2 = 36 + 36 = 72$$

$$\sigma_\eta^2 = 36 + 9 = 45$$

$$p_{\xi\eta} = \frac{\Sigma(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta})}{n}$$

$$= \Sigma[3(x-\bar{x}) + 2(y-\bar{y})] \; ([3\xi Yx - \bar{x}) - (y - \bar{y})]$$

$$= \frac{\Sigma[9(x-\bar{x})^2 + 3(x-\bar{x})(y-\bar{y}) - 2(\bar{y}-\bar{y})^2]}{n}$$

$$= \frac{9\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} + \frac{3 \quad (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} - \frac{2\Sigma(y-9)}{n}$$

$$9\sigma_x^2 + 3p_{xy} - 2\sigma_y^2 \qquad (p_{xy} = 0)$$

$$= 36 - 18 = 18$$

$$\therefore \quad r = \frac{p\Sigma\eta}{\sigma\xi\,\sigma\eta} = \frac{18}{\sqrt{72 \times 45}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{\cdot}3162$$

**மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள், மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள்** [Regression Lines and Regression Co-efficients]

$(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ ... $(x, y)$ என்ற சீர்படாவிவரங்களுக்குக் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையினுல், $y = mx + c$) என்ற ஒரு நேர் கோட்டைப் பொருத்துவோம். ஆகவே, அதன் மீச்சிறு படிவழிச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$m\Sigma x + nc = \Sigma y \qquad \ldots (1)$$

$$m\Sigma x_2 + c\Sigma x = \Sigma xy \qquad \ldots (2)$$

முதல் சமன்பாட்டை $n$ ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{m\Sigma x}{n} + \frac{nc}{n} = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$m\bar{x} + c = \bar{Y}$$

எனவே நேர் கோடு $y = mx + c$, $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியாகச் செல்கிறது என்பதை இது காட்டுகிறது.

மூலப்புள்ளியின் $(\bar{x}, \bar{y})$ க்கு மாற்றி

$$(x - \bar{x}) = X, \; (y - \bar{y}) = Y$$

எனப் பிரதியிட்டால் $c = 0$ ஆவதால், சமன்பாடு (2)

$$m\Sigma X^2 = \Sigma XY$$

என்ருகிறது.

இதை $n$ ஆல் வகுத்தால்

$$m \frac{\Sigma X^2}{n} = \frac{XY}{n}; \quad m\sigma x^2 = p$$

எனவே $m = \frac{P}{\sigma_x^2}$

$Y = \frac{P}{\sigma_x^2} X$ என்ற நேர்கோடு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குப் பொருந்தும். அதாவது

$$(y - \bar{y}) = \frac{P}{\sigma_x^2} = (x - \bar{x}) \quad \ldots (1)$$

இது $x$ என்ற மாறியின் மேல் $y$ன் தொடர்புக் கோடு (Regression line of $y$ on $x$) ஆனால் $p = r\,\sigma_x\,\sigma_y$

$$\text{ஆகவே } (y - \bar{y}) = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \quad \ldots (2)$$

$$\frac{(y - \bar{y})}{\sigma_y} = r\frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x} \quad \ldots (3)$$

விவரங்களுக்கு இதுபோலவே நாம் $x = my + c$ என்ற நேர் கோட்டினைப் பொருத்தியிருந்தோமானால் நமக்குக் கீழ்க் கண்டவாறு ஒரு தொடர்பு கோடு கிடைக்கும்.

$$\text{அதாவது } (x - \bar{x}) = \frac{P}{\ _2}(y - \bar{y}) \quad \ldots (4)$$

இதனை $y$ என்ற மாறியின்மேல் $x$—ன் தொடர்புக் கோடு (Regression line of $x$ on $y$) என்கிறோம்.

$$P = r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$(x - \bar{x}) = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \quad \ldots (5)$$

$$\frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x} = \frac{r(y - \bar{y})}{\sigma_y} \quad \ldots (6)$$

நாம் $y = mx + c$, அல்லது $x = my + c$ என்ற நேர் கோட்டினைப் பொருத்தினோமானால் நமக்கு முறையே (1), (4) என்ற இரு தொடர்புக் கோடுகள் கிடைக்கும்.

இதில் $\frac{P}{\sigma_x^2}$ ; $\frac{P}{\sigma_y^2}$ என்பவைகள் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள் [Regression Co-efficients]. எனப்படும்.

$\frac{P}{\sigma_x^2} = b_1, \frac{P}{\sigma_y^2} = b_2$ எனக் குறிப்போம்.

**மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள், மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள் இவற்றின் பண்புகள்**

(1) ஒட்டுறவுக் கெழு அளவைகளின் அலகுகளைப் பொறுத்து அமையவில்லை. ஆனால், தொடர்புக் கெழுக்கள் $b_1, b_2$, என்பவை $x, y$-ன் அலகுகளைப் பொறுத்தவை.

(2) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கின்றன. $[\bar{x}, \bar{y}]$ இரு மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் குறிக்கின்றன.

(3) சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் $b_1 = \frac{P}{\sigma_x^2} = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$ என்பது $x$ அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து 1 அலகு அதிகரிக்கும்போது, $y$ அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அதிகரிக் ம் வீதத்தைத் தருகிறது. இதுபோலவே சமன்பாடுகள் (4), (5 -ல் $b_2 = \frac{P}{\sigma_y^2} = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$ $y$ அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து 1 அலகு அதிகரிக்கும்போது, $x$ அதன் கூட்டு சராசரியிலிருந்து அதிகரிக்கும் வீதத்தைத் தருகிறது.

மேலும் (3), (6) என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$ என்பது $x$-னுடைய கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டு அதனுடைய திட்ட விலக்க அலகுகளால் அளக்கப்பட்ட விலக்கங்களைக் குறிக்கிறது. அது போலவே $\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$ என்பது $y$-யினுடைய கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டு $y$யினுடைய திட்ட விலக்க அலகுகளால் அளக்கப் படும் விலக்கங்களைக் குறிக்கிறது. ஆகவே $r$ என்பது $x$-னுடைய கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்கள் அதிகரிக்கும் வீதத்தை அளக்கிறது. அது போல (6)-ல் $r$, $y$யினுடைய கூட்டுச் சாரசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களில் ஓர் அலகு அதிகரிக்கும் பொழுது $x$-னுடைய கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து

எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்கள் அதிகரிக்கும் வீதத்தை அளிக்கிறது. [விலக்கங்கள் அவற்றின் திட்ட விலக்க அலகுகளின் அளக்கப் படுகின்றன.]

$$(4) \quad b_1 b_2 = \left[\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\right]\left[\frac{r\sigma_x}{\sigma_y}\right] = r^2$$

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள் இரண்டையும் கொண்டு $r$-னுடைய குறியைத் தீர்மானிக்கவேண்டும். அதாவது,

$b_1 = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$, $b_2 = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}$ என்ற இரு சமன்பாடுகளையும் $r$-னுடைய குறி நிறைவுபடுத்தவேண்டும்.

(5) **மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை :**

$x$-ன் மேல் $y$-ன் உறவுக் கோட்டிலிருந்து $y$-ன் மதிப்பிற்கும் அதன் மெய்யான மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு $d$ எனில், $\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$ என்பது $y$ மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை ஆகும். இது $y$ மதிப்பீட்டின் பிழைகளின் திட்டவிலக்கமாகும். இதனை $S_y$ எனக் குறிக்கிறோம்.

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

$$S_y^2 = \frac{\Sigma d^2}{N}; \quad N S_y^2 = \Sigma d^2 = \Sigma\left[y - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}X\right]^2$$

இதில் $Y = y - \bar{y}$; $X = x - \bar{x}$;

$$N S_y^2 = \Sigma y^2 - \frac{2r\sigma_y \Sigma XY}{\sigma_x} + \frac{r^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\Sigma X^2$$

$$N S_y^2 = N\sigma_y^2 - \frac{2r\sigma_y \cdot r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{r^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2}N\sigma_x^2.$$

$$= N\sigma_y^2\{1 - 2r^2 + r^2\}$$

$$= N\sigma_y^2\{1 - r^2\}$$

$$S_y^2 = \sigma_y^2\{1 - r^2\}$$

$S^2$, $\sigma^2$, வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகள் ஆனதால் நேர் எண்கள். ஆகவே $1 - r^2$ என்பதும் ஒரு நேர் எண்.

$$1 - r^2 \geq 0$$

$$r^2 \leq 1$$

அதாவது $-1 \leq r \leq +1$.

**ஆகவே ஒட்டுறவுக் கெழுவின் தனி மதிப்பு, ஒன்றைவிட ஒரு பொழுதும் கூடுதலாக இருக்காது.**

அதுபோல $y$-ன் மேல் $x$-ன் உறவுக் கோட்டிலிருந்து $S_x$-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கிறோம். ஆகவே $S_x$ என்பது $x$ மதிப்பீட்டின் பிழைகளின் திட்ட விலக்கமாகும்.

$$S^2 = \sigma_x^2 \; [1 - r^2]$$

$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ என்பன தலைகீழ் எண்களாக இருப்பதால் இரண்டில் ஒரு மதிப்பு ஒன்றைவிடக் குறைவாகத்தான் இருக்க வேண்டும். மேலும், $r$ ஒன்றைவிடக் குறைவானது. எனவே,

$$b_1 = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}, \; b_2 = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}$$

என்ற இந்த இரண்டில் ஒரு கெழு எப்படியும் ஒன்றைவிடக் குறைவானதாக இருக்கும்.

(6) $r = +1$ ஆக இருக்கும்பொழுது மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றி விடுகின்றன.

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$$ இது மாறிகளின் பொதுவான தொடர்புக் கோடு ஆகும். இதனுடைய சரிவு $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ; இது நேர் மறை எண் ஆகும். ஆகவே, இந்தக் கோடு $x$ அச்சுடன் நேர்திசையில் குறுங் கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. எனவே, இந்தக் கோணம் $= \tan \frac{+\sigma_y}{\sigma_x}$ ; $\sigma_x = \sigma_y$ என்று இருக்கும்பொழுது சிதறல் படத்தில் இந்தக் கோணம் 45° ஆக இருக்கும். இம்மாதிரி இருக்கும்பொழுது இரு மாறிகளும் நேர்மறையான உறவை உடையன. அதுபோலவே $r = -1$ ஆக இருக்கும்பொழுது மாறிகள், தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டும் ஒன்று சேருகின்றன.

இந்தப்பொதுவான கோடு $\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} = -\frac{(y-\bar{y})}{\sigma_y}$ ; இதனுடைய சரிவு $= -\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ; இது எதிர்மறை எண்ணாகும். இந்தக் கோடு $x+$ அச்சுடன் நேர்திசையில் விரிகோணம் அமைக்கிறது. இந்தக் கோணம் $= \tan\left(-\frac{\sigma_{y'}}{\sigma_x}\right)$. இவ்வாறு இருக்கும்பொழுது இரு மாறிகளும் எதிர் மறையான உறவை உடையவை. $r = 0$ ஆக இருக்கும்பொழுது தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டும் $y = \bar{y}$; $x = \bar{x}$ என்ற இரு கோடுகளாக மாறுகின்றன. இந்தக் கோடுகள் $\bar{x}, \bar{y}$ வழியாகச் செல்கின்றன. மேலும், இந்தக் கோடுகள் முறையே $x$, $y$ அச்சுகளுக்கு இணையாய் உள்ளன. இவ்வாறு இருக்கும்பொழுது இரு மாறிகளும் தொடர்பு அற்றவை

(7) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் :

$$(y-\bar{y}) = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}) \qquad \ldots (1)$$

$$(x-\bar{x}) = \frac{r\,\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y}) \qquad \ldots (2)$$

இவற்றின் சரிவுகள் முறையே $\frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$, $\frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ இந்த இரு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ளே குறுங்கோணத்தை $\theta$ என்று கொண்டோமானால்,

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{\frac{r\sigma_y}{\sigma_x} - \frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}$$

$$= \pm\frac{1-r^2}{r} \times \frac{\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

இதிலிருந்து $r = \pm 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது $\theta = 0$; மேலும் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றுகின்றன. $r=0$ ஆக இருக்கும்பொழுது $\tan\theta = \infty$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$. ஆகவே, மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துக் கோடுகளாக இருக்கும்.

$(y - \bar{y}) = \frac{P}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ என்ற சமன்பாட்டில் $x$ சார்பற்ற மாறியாகவும், $y$, $x$ ஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு பொருளின் உற்பத்தியின் அளவை $x$ எனவும் அதன் விலையை $y$ எனவும் கொள்வோம். $x$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது: அதற்கு ஒத்த $y$-ன் மதிப்பை இச் சமன்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

மற்றொரு தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடாகிய $(x - \bar{x}) = \frac{P}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$-ல் நாம் $y$ மாறியைச் சார்பற்றதாகவும் $x$ மாறியை $y$-ஐச் சார்ந்து இருப்பதாகவும் கொள்கிறோம். ஆகவே, $y$-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், இதன்மூலம் $x$-ன் மதிப்பைக் காணலாம் இரு மாறிகளும் ஒன்றையொன்று சார்ந்து இருந்தால் நாம் இரண்டு தொடர்புக் கோட்டுச் சமன்பாடுகளையும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளபோது, உறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. $y = 70$ எனின் $x$-ன் மதிப்பையும், $x = 68$ எனின், $y$ஐயும் காண்க.

$$\bar{x} = 65,\ \sigma_x = (\cdot 5,\quad \bar{y} = 67,\ \sigma_y = 3\cdot 5,\ \sigma_{x-y} = 3\cdot$$

$$\sigma^2_{x-y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y - 2 \times \sigma_x \sigma_y$$

$$9\cdot 61 = 0\cdot 25 + 12\cdot 25 - 2P$$

$$P = 1\cdot 455.$$

உறவுக் கோடுகள், $x - 65 = \frac{1\cdot 445}{12\cdot 25}[y - 67]$

$$x = \cdot 118y + 59\cdot 095$$

$y = 70$ எனின் $x = \cdot 118 \times 70 + 59\cdot 095 = \mathbf{67\cdot 355}$

$$y - 67 = \frac{1\cdot 445}{\cdot 25}(x - 65)$$

$$y = 5\cdot 74x - 306\cdot 1$$

$x = 68$ எனில், $y = 5\cdot 74 \times 68 - 306\cdot 1$

$$= \mathbf{83\cdot 22}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும் மாறிகளின் உறவுக் கோட்டினையும் காண்க.

| $x$ | 1 | 2 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 |

(ஏப்ரல்'66)

| $x$ | $y$ | $(x-A)$ | $(y-B)$ | $(x-A)\times(y-B)$ | $(x-A)^2$ | $(y-B)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | −4 | −3 | 12 | 16 | 9 |
| 2 | 8 | −3 | −4 | 12 | 9 | 16 |
| 3 | 10 | −2 | −2 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 12 | −1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 11 | 0 | −1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 14 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 8 | 16 | 3 | 4 | 12 | 9 | 16 |
| 9 | 15 | 4 | 3 | 12 | 16 | 9 |
| | | 0 | 0 | 57 | 60 | 60 |

$A = 5,\ B = 12$

$\bar{x} = 5,\ \bar{y} = \frac{108}{9} = 12$

$P = \Sigma \frac{(x - A)(y - B)}{n} = \frac{57}{9} = 6{\cdot}3$

$d_1 = 0 = d_2$

$P = 6{\cdot}3$

$$\sigma_x^2 = \Sigma \frac{(x-A)^2}{n} - d_1^2 = \frac{60}{9} = 6{\cdot}7$$

$$\sigma_x = \sqrt{6{\cdot}7}$$

$$\sigma_y^2 = \Sigma \frac{(y-B)^2}{n} - d_2^2 = \frac{60}{9} = 6{\cdot}7$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{6{\cdot}7} = 2{\cdot}6$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{6{\cdot}3}{6{\cdot}7} = {\cdot}9401$$

$x$-ன் மேல் $y$-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-12}{2{\cdot}6} = \frac{{\cdot}9401\,(x-5)}{2{\cdot}6}$$

அதாவது $y - 12 = 9401\,(x-5)$

$y$-ன் மேல் $x$-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$x - 5 = {\cdot}9401\,(y-12)$

$x$, $y$ என்ற இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு $r$ என்றால் $(5-2y)$, $(3x+4)$ என்ற மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழுவைக் கண்டுபிடிக்க. [1974 செ.ப.க.]

**தீர்வு :**

$u = 5 - 2y$, $r = 3x + 4$ என்க.

$$\bar{u} = \Sigma \frac{u}{n} = \Sigma \frac{(5-2y)}{n} = 5 - 2\bar{y}.$$

இதுபோன்றே

$$\bar{v} = 3\bar{x} + 4.$$

$$\sigma_u^2 = \Sigma \frac{(u-\bar{u})^2}{n} = \frac{\Sigma\,[(5-2y)-(5-2\bar{y})]^2}{n}$$

$$= \frac{4\,\Sigma\,(y-\bar{y})^2}{n} = 4\sigma_y^2.$$

$$\therefore\ \sigma_v = 2\sigma_y$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\Sigma\,(v-\bar{v})^2}{n} = \frac{\Sigma\,[(3x+4)-(3\bar{x}+4)]^2}{n}$$

$$= \frac{9\,\Sigma\,(x - \bar{x})^2}{n} = 9\sigma_x^2.$$

$$\therefore \quad \sigma_v = 3\,\sigma_x.$$

$$P_{uv} = \frac{\Sigma\,(u - \bar{u})\,(v - \bar{v})}{n} = \frac{-6\,\Sigma\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{n}$$

$$= -6\,P_{xy}$$

$$r_{uv} = \frac{P_{uv}}{\sigma_u \cdot \sigma_v}$$

$$r_{uv} = \frac{P_{uv}}{\sigma_u \cdot \sigma_v} - \frac{6\,P_{xy}}{3\,\sigma_x \cdot 2\,\sigma_y}$$

$$= -\,\gamma_{xy}.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$x = 4y + 5$, $y = kx + 4$ என்பவை முறையே $y$-ன் மேல் $x$-ன் உடன்தொடர்புக் கோடும், $x$-ன் மேல் $y$-ன் உடன் தொடர்புக் கோடும் ஆகும். $0 < 4k < 1$ எனக் காட்டுக.

$k = \frac{1}{16}$ ஆனால், இரு மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளையும் அவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும் காண்க.

**தீர்வு :**

$$b_{yx} = k\,; \quad b_{xy} = 4.$$

$$\therefore \quad r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = 4k$$

$r^2$ என்பது ஓர் மெய்யெண்ணின் வர்க்கமாக இருப்பதால், $r^2 > 0$. மேலும் $0 < r^2 < 1$.

$$\therefore \quad 0 < 4k < 1.$$

$k = \frac{1}{16}$ ஆனால், உடன் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்.

$$x = 4y + 5$$

$$16y = x + 64$$

இவற்றிற்குத் தீர்வு கண்டால், $\bar{x} = 28$, $\bar{y} = 5{\cdot}75$

$$r^2 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$r = 0{\cdot}5$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$X$-ன் பரவற்படி 9. தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் (i) $4x - 5y + 33 = 0$ (ii) $20x - 9y - 107 = 0$ $y$-ன் கூட்டுச்சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க. $x$, $y$ இவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக. (ஏப்ரல் '69)

$x$-ன் மேல் $y$-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டினை

$$4x \quad 5y + 33 = 0$$

எனக் கொள்க.

$y$-ன் மேல் $x$-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டினை

$$20x - 9y - 107 = 0$$

எனக் கொள்க.

$$5y = 4x + 33$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{33}{5} \qquad b_1 = \frac{4}{5}$$

$$20x = 9y + 107$$

$$x = \frac{9}{20}y + \frac{107}{20} \qquad b_2 = \frac{9}{20}$$

$$b_1 b_2 = \frac{4}{5} \times \frac{9}{20} = \frac{9}{25} < 1$$

[குறிப்பு ; சமன்பாடுகளை மாற்றி எடுத்திருந்தால் $b_1 b_2 > 1$ எனவரும். எனவே $b_1 b_2 < 1$ எனுமாறு, உறவுக் கோடுகளை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.]

$x$, $y$-க்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு $\pm \sqrt{b_1 b_2}$

$$= \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} = \pm .6$$

$\frac{p}{\sigma_x^2}$, $\frac{p}{\sigma_y^2}$ இரண்டும் நேர் மறை. எனவே $p$-ம், $r$-ம் நேர்மறை.

$$\therefore \quad r = 0{\cdot}6$$

$$\frac{p}{\sigma_x^2} = \frac{4}{5} \quad p = \sigma_x^2 \frac{4}{5} = \frac{36}{5} \qquad (\because \; \sigma_x^2 = 9)$$

$$\frac{p}{\sigma_y^2} = \frac{9}{20}$$

$$\therefore \frac{36}{5\sigma_y^2} = \frac{9}{20}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{36 \times 20}{5 \times 9} = 16 \quad \therefore \quad \sigma_y = 4.$$

உறவுக்கோடுகள்

$20x - 25y + 165 = 0$

$20x - 9y - 107 = 0$ ஐத் தீர்வு கண்டால், $x = 13$, $y = 17$

எனவே $x$-ன் கூட்டுச்சராசரி $= 13$

$y$-ன் கூட்டுச் சராசரி $= 17$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$X, Y$ என்னும் இரு மாறிகளது தொடர்பினை ஆராய்ந்ததில் 20 உருவ அளவு கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்புக்கூறு $X, Y$-ன் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே (20, 5), (30, 4) எனக் கொடுக்கிறது. 30 உருவ அளவு கொண்ட வேறொரு சம வாய்ப்புக் கூறு $X$-க்கு கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே (15, 3) என்றும், $Y$-க்கு அவை முறையே (20, 4) என்றும் தருகிறது. முதல், இரண்டாம் கூறுகளின் $X, Y$-களுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் முறையே 0·5, 0 6 ஆகும். இரு கூறுகளையும் ஒன்றுக்கிய 50 உருவ அளவு கொண்ட கூறினுக்கு $X$; $Y$-களின் கூட்டுச்சராசரிகள், திட்ட விலக்கங்கள் அவற்றிற் கிடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு :**

இரு கூறுகளின் உருவ அளவுகள் $n_1, n_2$ ஆகவும், கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ஆகவும், திட்ட விலக்கங்கள் $\sigma_1, \sigma_2$ ஆகவுமிருந்தால், இரு கூறுகளையும் ஒன்றுக்கிய கூறின் கூட்டுச் சராசரி ($\bar{x}$), திட்டவிலக்கம் ($\sigma$) என்பன பின்வருமாறு.

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + n_2(\bar{x} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

இரு கூறுகளையும் ஒன்றுக்கிய கூறில், $X$-ன் கூட்டுச்சராசரி

$$= \frac{20 \times 20 + 30 \times 15}{20 + 30} = 17$$

இரு கூறுகளையும் ஒன்றுக்கிய கூறில், $Y$-ன் கூட்டுச்சராசரி

$$= \frac{20 \times 30 + 30 \times 20}{20 + 30}$$

$$= \frac{1200}{50} = 24.$$

இணைந்த கூறில்,

$$\sigma_x^2 = \frac{20 \times 5^2 + 30 \times 3^2}{2 + 30} + \frac{20\,(17-20)^2 + 30\,(17-15)^2}{20 + 30}$$

$$= \frac{70}{50} = 21\cdot4$$

இணைந்த கூறில்,

$$\sigma_y^2 = \frac{20 \times 4^2 + 30 \times 4^2}{20+30} + \frac{20\,(24-30)^2 + 30\,(24-20)^2}{20 + 30}$$

$$= \frac{2000}{50} = 40.$$

இணைந்த கூறில், $x$-ன் திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{2.14} = 4\cdot626$

இணைந்த கூறில் $y$ ன் திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{40} = 6.325$

வரையறையின்படி, $r = \dfrac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}$

இரு கூறுகளையும் ஒன்றுக்கிய கூறின் $r$ ஐத் தீர்மானிக்க, நாம் $n, \Sigma, \Sigma, \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})$ ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்த வேண்டும். $\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$ ஐத்தவிர மற்ற அனைத்தும் நமக்குத் தெரியும்

$$\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \Sigma xy - \Sigma x\bar{y} - \Sigma \bar{x}y + \Sigma \bar{x}\bar{y}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ என்பன மாறிலிகள்; மேலும்

$$\frac{\Sigma x}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\Sigma y}{n} = \bar{y}$$

$$\therefore \quad \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = \Sigma xy - \bar{y}\,\Sigma x - \bar{x}\,\Sigma y + n\bar{x}\bar{y}$$

$$= \Sigma xy - \bar{y}\,n\bar{x} - \bar{x}\,n\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}$$

$$= \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}$$

இணைந்த கூறின் $\bar{x}, \bar{y}$ தெரியும். எனவே ஒன்ருக்கப்பட்ட கூறின் $\Sigma xy$ ஐ நாம் கணக்கிடவேண்டும். இதை ஒவ்வொரு கூறிற்கும் $\Sigma xy$ ஐ கண்டபின்பு கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$r = \frac{\Sigma (x \quad \bar{x})(y - \bar{y})}{n\, \sigma_x\, \sigma_y} = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\, \sigma_x\, \sigma_y}$$

∴ முதற் கூறிலிருந்து

$$0{\cdot}5 = \frac{\Sigma xy - 20 \times 30 \times 20}{20 \times 5 \times 4}$$

அல்லது $40 \times 0{\cdot}5 = \Sigma xy - 1.000$

$\Sigma xy = 12{,}200$

இரண்டாவது கூறிலிருந்து,

$$0{\cdot}6 = \frac{\Sigma xy - 30 \times 15 \times 20}{30 \times 3 \times 4}$$

$0{\cdot}6 \times 360 = \Sigma xy \quad 9000$

$\Sigma xy = 9216$

எனவே இரு கூறுகளையும் ஒன்ருக்கிய கூறின்

$\Sigma xy = 12{,}200 + 9{,}216 = 21416.$

$$\therefore \text{ இணைந்த கூறின் } r = \frac{21416 - 50 \times 17 \times 24}{50 \times 4{\cdot}626 \times 6{\cdot}325}$$

$$= \frac{21416 - 20400}{1463}$$

$$r = \frac{1\ 16}{1463} = 0{\cdot}69.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒட்டுறவுக்கெழு எப்போதும் ஒன்றின் எண் மதிப்பைவிட அதிகரிக்காது என நிறுவுக :

$x, y$ என்னும் இருமாறிகளின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளை $\bar{x}, \bar{y}$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

$x^1 = x - \bar{x},\ y = y - \bar{y}$ என்க.

எந்த உண்மை மாறி $a'$-க்கும், $(ax' - y')^2 \geq 0$ நிகழ்தகவு எதிர்மறையாக இல்லாததாலும் பூச்சிய எதிர்மறை எண்களின் கூடுதல் எதிர்மறை எண்ணுக இருப்பதாலும், நமக்கு

$$E(ax' - y')^2 = \sum_j p_j\,(ax_j - y_j)^2 \geq 0$$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore\quad a^2E\,(x'^2) + E(y'^2) - 2aE\,(x'y') \geq 0$$

$$a = \frac{E\,(x'\,y')}{E\,(x'^2)}$$ என்க.

$$\therefore\quad E\,(y')^2 \geq \frac{[E(x'y')]^2}{E(x'^2)}$$

அதாவது $1 \geq \left[\dfrac{E(x'y')}{\sqrt{\Sigma(x'^2)(\Sigma y'^2)}}\right]^2$

$$= \left[\frac{E(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{E(x-\bar{x})^2E(y-\bar{y})^2}}\right]^2$$

$$= (rxy)^2.$$

$$|\,rxy\,| \leq 1$$

அல்லது

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு இருமாறிப் பரவலில், $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. இரு உறவுக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் $\tan^{-1}3$. கூட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma.$$

இரு உறவுக்கோடுகளின் இடையே உள்ள கோணம் $\theta$ ஆனால்,

$$\tan\theta = -\frac{(1-r^2)}{r}\;\frac{\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}$$

$$= \frac{-(1-r^2)}{r}\;\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}$$

$$3 = -\frac{(1-r^2)}{2r}$$

$$r^2 - 6r - 1 = 0$$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$$

$\therefore \quad r = 3 \pm \sqrt{10}. \quad [\because \quad 3 + \sqrt{10} > 1].$

**எடுத்துக்காட்டு :**

(அ) இரு சார்பிலா மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூச்சியம் எனக்காட்டுக.

(ஆ) இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூச்சிய மானால், அவை சார்பற்றவை எனக் கூறமுடியுமா ? எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

**தீர்வு :**

$x$ $y$ என்ற இரு சார்பிலா மாறிகளின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு களை $\bar{x}$, $\bar{y}$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

$$x, y\text{-ன் இணைபரவற்படி} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$$
$$= E[xy - \bar{x}y - \bar{y}x + \bar{x}\bar{y}]$$
$$= E(xy) - \bar{x}\,E(y) - \bar{y}\,E(x) + \bar{x}\bar{y}$$
$$= E(xy) - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$$
$$= E(xy) - \bar{x}\bar{y}$$

$x$, $y$ என்பவை சார்பிலா மாறிகளாதலால்,

$$E(xy) = E(x)\,E(y)$$
$$= \bar{x}\bar{y}$$

$$\therefore x, y\text{-ன் இணைவிலகல்} = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$\therefore \quad r_{xy} = 0.$$

**தீர்வு :**

$r = 0$ ஆனால், மாறிகள் சார்பற்று இருக்கவேண்டுமென்பது அவசியமில்லை. பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இதை விளக்கலாம்.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y = x^2$ : | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $xy$ : | $-27$ | $-8$ | $-1$ | 0 | 1 | 8 | 2 |

இங்கு $\Sigma x = 0 = \Sigma xy$

$$\therefore \quad r\,xy = \frac{\Sigma\, xy - \frac{1}{N}(\;x\;(\;y)}{\sqrt{(\;x^2) - \frac{1}{N}(\;x)^2}\;\sqrt{\;y^2 - \frac{1}{N}\;y^2}} = 0$$

**மற்ரோர் எடுத்துக்காட்டு :**

$x\,(-1,\,1)$ என்ற இடைவெளியில் சீரான பரவலைத் தழுவுகிறது.

$Y = X^2,\; dp = \frac{1}{2}\,dx$ எனில்

$$E\,(X) = \int_{-1}^{1} x\;\frac{1}{2}\,dx = 0$$

$$E\,(Y) = \int_{-1}^{1} x^2\;\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$E\,(XY)\;E\,(X^3) = \int_{-1}^{1} x^3\;\frac{1}{2}\,dx = 0$$

$$\therefore \quad r_{xy} = E\,(XY) = E\,(X)\;E\,(y) = 0,$$

$Y = X^2$ என்ற தொடர்பு இருந்தும், $r_{xy} = 0$.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கோதுமை உற்பத்திக்கும் மழை பெய்யும் அளவுக்குமிடையேயான உறவினை ஆராயும் சோதனையின் போது கீழ்க்கண்ட புள்ளியியல் கெழுக்கள் பெறப்பட்டன.

| | (உற்பத்தி—பவுண்டுகளில்) (ஓர் ஏக்கரில்) | (மழை அளவு) (அங்குலங்களில்) |
|---|---|---|
| கூட்டுச்சராசரி: | 985·0 | 12.8 |
| திட்ட விலக்கம்: | 70.1 | 1·6 |

உற்பத்திக்கும் மழை அளவுக்குமிடையேயான $r = 0{\cdot}25$.

மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து (i) ஆண்டு மழை அளவு 9.2″ ஆக இருக்கும்போது ஓர் ஏக்கரில் கோதுமை உற்பத்தி (ii) ஓர் ஏக்கரில் கோதுமை உற்பத்தி 1400 பவுண்டு ஆக இருக்கும்போது ஆண்டு மழை அளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு :**

$y$ என்னும் மாறி உற்பத்தியையும், $x$ என்னும் மாறி ஆண்டு மழை அளவையும் குறிக்கட்டும்.

$$\bar{x} = 12\cdot8 \,.\, \bar{y} = 985\cdot0$$

$$\sigma x = 1\cdot6 \quad \sigma y = 70\cdot1$$

$$r\,xy = 0\cdot52$$

$$\therefore \quad b\,yx = \frac{(0\cdot52)(70\cdot1)}{1\cdot6} = 22\cdot7825$$

$$b\,xy = \frac{(0\cdot52)(1\cdot6)}{70\cdot1} = 0\cdot01187.$$

உறவுக்கோடு $y-985 = 22\cdot7825\,(x-12\cdot8)$-ல் $x=9\cdot2$ எனில், $y=902.983$ பவு.

$x - 13.8 = 01187\,(y-985)$-ல், $y = 1400$ எனில், $x = 17.7''$

**எடுத்துக்காட்டு :**

10 கணிப்புகளிலிருந்து இரு மாறிகள் $x, y$ ஐப் பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

$\Sigma x = 130. \quad \Sigma y = 220 \quad \Sigma x^2 = 2288 \quad \Sigma y^2 = 5506$

$\Sigma xy = 3467$ $x$-ன் மேல் $y$-ன் உடன் தொடர்புக் கோட்டினைக் காண்க.

$x = 16$ எனின், $y$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$x$-ன் மேல் $y$-ன் உடன் தொடர்புக்கோட்டின் சமன்பாட்டை $y = a + bx$ என்க. $a, b$ என்பவற்றை,

$$\Sigma y = na + b\,\Sigma x$$

$\Sigma xy = a\,\Sigma x + h\,\Sigma x^2$ என்னும் இயல்நிலைச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

மதிப்புகளை ஈடு செய்தால்,

$220 = 10a + 130b$ அல்லது $22 = a + 13b$ ... (1)

$3467 = 130a + 2288\,b$ ... (2)

(1), (2)-களைத் தீர்த்தால், $a = 8{\cdot}8,\ b = 1{\cdot}015$

எனவே, $x$-ன் மேல் $y$-ன் உடன் தொடர்பு கோட்டுச் சமன்பாடு $y = 8{\cdot}8 + 1{\cdot}015x$

$\therefore\ x = 16$ ஆக இருக்கும்போது, $y$-ன் மதிப்பு

$8{\cdot}8 + 1{\cdot}015 \times 16 = 8{\cdot}8 + 16{\cdot}240 = 25{\cdot}04$

**எடுத்துக்காட்டு :**

இரு உடன் தொடர்புக்கோட்டுக் கெழுக்களின் கூட்டுச்சராசரி யானது எப்போதும் $r$ ஐவிடக் குறைவாக இருக்காதென நிறுவுக.

இரு உடன் தொடர்புக்கோட்டுக் கெழுக்கள் $\frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$, $\frac{r\,\sigma_x}{\sigma_y}$ ஆகும்.

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} + r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}}{2}$

எனவே நாம் நிறுவவேண்டியது

$\frac{1}{2}\left[\frac{r\sigma_y}{\sigma_x} + \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}\right] \nless r$ ஆகும்.

அதாவது $\frac{1}{2}\left[\frac{r\,\sigma_y{}^2 + r\,\sigma_x{}^2}{\sigma_x\ \sigma_y}\right] \nless r$ என நிறுவ வேண்டும்.

அதாவது $\dfrac{r\,[\sigma_y{}^2 + \sigma_x{}^2]}{2\,\sigma_x\,\sigma_y} \nless r$

அதாவது $r\,(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2) \nless 2\,\sigma_x\,\sigma_y\,r$

அதாவது $r\,[\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\,\sigma_x\,\sigma_y] \nless 0$

அதாவது $\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\,\sigma_x\sigma_y \nless 0$

$(\sigma_x - \sigma_y)^2 \nless 0$

இது நாம் அறிந்ததே. ஏனெனில், ஒரு மெய்எண்ணின் வர்க்கம் எதிர்மறை எண்ணாக இருக்கமுடியாது. எனவே, இரு உடன் தொடர்புக்கோட்டுக் கெழுக்களினது சராசரி எப்போதும் $r$ஐ விடக் குறைவாக இருக்காது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$aX + bY + c = 0$ என்னும் தொடர்பால் $X$, $Y$ என்பன தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு $+1$ அல்லது $-1$ என நிறுவுக.

$X$, $Y$ என்பவற்றின் பல்வேறு மதிப்புகளை $X_1$ $X_2$, ... $X_h$ எனவும், $Y_1$, $Y_2$ ... $Y_h$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பில் ஈடு செய்தால்,

$aX_1 + bY_1 + c = 0$, $aX_2 + bY_2 + c = 0$ ... (1)

இவை யாவற்றையும் கூட்ட.

$$a\,\Sigma X + b\,\Sigma Y + nc = 0$$

அதாவது $\dfrac{a\,X}{n} + \dfrac{b\,Y}{n} + \dfrac{nc}{n} = 0$

$$a\bar{X} + b\bar{Y} + c = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$(2) - (1) = aX_1 + bY_1 + c - (a\bar{X} + b\bar{Y} + c) = 0$$

அதாவது $a(X_1 - \bar{X}) + b(Y_1 - \bar{Y}) = 0$, $a(X_2 - \bar{X}) + b(Y_2 - \bar{Y}) = 0$

$x, y$ என்பன $X, Y$-ன் கூட்டுச்சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களைக் குறிக்குமானால், இந்த விலக்கங்களெல்லாம் $ax + by = 0$ என்னும் தொடர்பால் தொடர்புபடுத்தப் பட்டிருப்பதை நாம் காணலாம்.

அதாவது $ax = -by$

$$\therefore \quad x = \frac{-b}{a} \cdot y$$

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \dfrac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}}$

$x$-ன் மதிப்பை ஈடுசெய்தல்,

$$r = \frac{\Sigma y \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) y}{\sqrt{\Sigma \left(-\frac{b}{a}\, y\right)^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a} \Sigma y^2}{\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 \Sigma y^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a} \Sigma y^2}{\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2} \times \Sigma y^2}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}}$$

$a, b$ எந்தக் குறியைக் கொண்டிருந்தபோதிலும், தொகுதி எப்போதும் நேர் எண்ணாக ஆகும்.

$a, b$ என்பன ஒரே குறியைக் கொண்டிருந்தால், பகுதி எதிர் எண் ஆகும். எனவே, $r$-ன் மதிப்பு $= -1$.

$a, b$ என்பன எதிர்எதிரான குறிகளைக் கொண்டு இருந்தால், பகுதி நேர் எண்ணாக அமையும். எனவே, $r$-ன்மதிப்பு $= +1$.

**எடுத்துக்காட்டு :**

**விளக்கம் தருக**

" $x$, $y$-களுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழுவும், $x$, $y$-க்களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவும் சமமெனில், $yz$-களைப் பொறுத்த $x$-ன் அதிகரிப்பு வீதங்களும் சமம் " என நிறுவுக.

ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஒரு மாறியைப் பொறுத்த மற்றொரு மாறியின் அதிகரிப்பு வீதத்தைக் கொடுக்காது. இதை உடன் தொடர்புக் கோட்டுக் கெழுவினால் பெறலாம்.

$x$, $y$-களின் உடன் தொடர்புக் கோட்டுக் கெழு $= r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$xz$-களின் உடன் தொடர்புக் கோட்டுக் கெழு $= r_{xz} \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$

$rxy$-ம் $rxz$-ம் சமம் என்றால் கூட, இரு உடன் தொடர்புக் கோட்டுக் கெழுக்களும் சமமாகாது. இவற்றின் மதிப்புகள்

$\sigma y$, $\sigma z$ ஐச்சார்ந்துள்ளன. $\sigma y$ ம், $\sigma z$-ம் சமமானால், கொடுக்கப் பட்ட வரையறை சரியானது. ஏனெனில் $y = \sigma z$ எனில், இரு உடன் தொடர்புக்கோட்டுக் கெழுக்களும் சமமாகும், அப்போது ஒரு மாறியைப் பொறுத்த மற்றொரு மாறியின் அதிகரிப்பு வீதம் இரண்டு கோடுகளிலும் சமமாக இருக்கும். $\sigma y$ ம் $\sigma z$ ம் வெவ்வேறானால், கொடுக்கப்பட்ட முடிவு தவறானதாக அமையும்.

**$x$, $y$, $x-y$ ன் திட்டவிலக்கங்களின் மூலம் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காணுதல்**

$Z = x - y$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{n} = \frac{\Sigma\, x - y}{n} = \frac{\Sigma\, x}{n} - \frac{\Sigma\, y}{n} = \bar{x} - \bar{y}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\Sigma\,(z - \bar{z})^2}{n} = \frac{\Sigma\,[\,(x - y) - (\bar{x} - \bar{y})\,]^2}{n}$$

$$= \frac{\Sigma\,[\,(x - \bar{x}) - (y - \bar{y})\,]^2}{n}$$

$$= \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2}{n} + \frac{\Sigma\,(y - \bar{y})^2}{n} - 2\,\frac{\Sigma(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{n}$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2P = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$\therefore\ 2r\,\sigma_x \cdot \sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2$$

$$\therefore\ r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\,\sigma x\,\sigma y}$$

**ஸ்பியர்மென் தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Spearman Rank Correlation Co-efficient)**

(அறிவு, நினைவுத்திறன்), (அழகு, சுறுசுறுப்புத் தன்மை) போன்ற பண்புகளிடையே உறவினைக் காண முற்படும்போது அவற்றை அளக்க இயலாவிடினும், பண்பின் தன்மைக்கேற்ப நபர்களை வரிசைப்படுத்தலாம். இவ்வாறு தரப்படுத்தி, தரங்கட்கிடையே (Ranks) ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காணும் கருத்தினைப் பேராசிரியர் ஸ்பியர்மென் புகுத்தியுள்ளார்.

அழகு, நடனம், இசைப் போட்டிகளில் பங்கு பெறுவோருக்கு நான்கு நீதிபதிகள் வழங்கிடும் தரங்களிடை ஒட்டுறவுக்கெழு காண்பதன்மூலம் அவர்களுக்கு ரசனையில் பொதுத்தன்மை உண்டா என ஆராயலாம்.

கணிதம், புள்ளியியல் என்ற இரு பாடங்களில் ஒரு வகுப்பிலுள்ள 20 மாணவர் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் தெரியாவிடினும், இரு பாடங்களில் அவர்களது தரங்கள் அல்லது மதிப்பிடங்கள்மட்டும் தெரிந்திருந்தால் அவற்றின் இடையே உள்ள உறவைக் கண்டு அதிலிருந்து பாடங்களில் அவர்களது மதிப்பெண்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை ஊகிக்கலாம்

$x_i$ கணிதத்தில் $i$ ஆவது மாணவர் பெற்றுள்ள தரமாகவும், $y_i$ புள்ளியியலில் அவர் பெற்றுள்ள தரமாகவும் இருக்கட்டும். $x$, $y$ என்பனவற்றின் மதிப்புகள் 1 முதல் 20 வரை உள்ள எண்களில்தான் இருக்கும்.

**தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காணுதல்**

$x$, $y$ என்ற இரு மாறிகளின் $n$ மதிப்புகளைத் தரப்படுத்திய பட்டியலில், $x$-ன் தரங்களை ஏறு வரிசையிலும், அவற்றிற்கொத்த $y$-ன் தரங்களை அவற்றிற்கு எதிரேயும் எழுதியுள்ளோம்.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 7 |
| 3 | 2 |
| 4 | $n$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$ | 15 |

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + \ldots\ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$y$-லும், 1-லிருந்து $n$ வரையுள்ள எண்கள் வேறு வரிசையில் மட்டும் காணப்படுவதால் $\bar{y} = \frac{n+1}{2}$

$Sx^2$ [பூச்சியத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்டது]

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{\sigma n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$$

$$= \frac{(n+1)\ [(4n+2) - 3n - 3]}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

இதுபோலவே $\sigma_y^2 = \frac{n^2-1}{12}$

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma^2(x-y)}{2\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

மேற்கண்ட வாய்பாட்டில் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்

$$\rho = \frac{\frac{1}{12}(n^2-1) + \frac{1}{12}(n^2-1) - \Sigma\frac{(x-y)^2}{n}}{2\sqrt{\frac{1}{12}(n^2-1)}\ \sqrt{\frac{1}{12}(n^2-1)}}$$

$$= 1 - \frac{\sigma\ \Sigma(x-y)^2}{n(n^2-1)}$$

இதில் $(x - y) = d$ என்று கொள்வோம்.

$$\rho = 1 - \frac{\sigma\ \Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

இந்த வாய்பாடு தர ஒட்டுறவைக் கணக்கிட உதவுகிறது.

## $\rho$-ன் பண்புகள்

இரு மாறிகளின் தரங்கள் ஒன்றுகவேயிருந்தால் ஒவ்வொரு $d$-ம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, $\rho = 1 - 0 = 1$. இரு மாறிகளும் முழுமையான, நேர்மறையான தொடர்பு கொண்டவை எனத் தெரிகின்றது. $y$-ன் மாறிகள் $n(n-1)\ (n-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ என்று தலைகீழாகத் தரத்தைப் பெற்றிருந்தால்,அது முழுமையான எதிர்மறையான தொடர்பு கொண்டவை எனத் தெரிகின்றது.

$$\Sigma d^2 = (1-n)^2 + [2-(n-1)]^2 + [3-(n-2)]^2 + \ldots$$

$$= (n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + \ldots\ n$$

உறுப்புகள் வரை.

$$= \sum_{r=1}^{n} [n-(2r-1)]^2 = \sum_{r=1}^{n} [(n+1) - 2r]^2$$

$$= n(n+1)^2 \quad 4(n+1) \sum_{r=1}^{n} r + 4 \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= n(n+1)^2 - 4(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

மேலுள்ளவற்றைச் சுருக்கும்பொழுது,

$\Sigma d^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}$ என வரும்.

$$\rho = 1 - \frac{6n(n^2-1)}{3n(n^2-1)} = 1 - 2 = -1$$

ஆகவே, தர ஒட்டுறவுக் கெழுவும் $1 \leq \rho \leq +1$ என்ற சமனின்மையை நிறைவு செய்கிறது.

**தரங்களில் சமநிலை (tie) காணப்படும்போது மேற்கொள்ள வேண்டிய திருத்தம் :**

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இராசிகளின் மதிப்புகள் ஒன்றாக இருக்கும்போது அவற்றின் தரங்களில் சமநிலை காணப் படுகிறது.

$x$-ல் காணப்படும் தரங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7 ... இருந்தால் இரு இராசிகள் 6 ஆவது தரத்துக்குரியவை எனத் தெரிகிறது. எனவே தரத்தை 6, 6 என எழுதாமல் $\frac{6+7}{2} = 6{\cdot}5$ எனக் கொண்டு, 6·5, 6·5 எனக் குறிக்கிறோம். எனவே, அடுத்த மதிப்பிடம் 7 ஆக இராமல் 8 ஆக மாறிவிடுகிறது.

இதுபோல 10 ஆவது மதிப்பிடத்தில் மூன்று ராசிகள் இருந்தால் 10, 11, 12 எனக் கொண்டு அவற்றின் சராசரியாகிய

$\frac{10+11+12}{3} = 11$ஐ மூன்று இராசிகளுக்கும், 11, 11, 11 எனத் தந்து விடுகிறேம். அடுத்த மதிப்பிடம் 13 ஆக இருக்கும். இம் முறையில் தரங்களின் மொத்தமும் அதனுல் கூட்டுச் சராசரியும் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனுல், திட்டவிலக்கம் பாதிக்கப் படுகிறது. எனவே. இதனை ஓரளவு திருத்துவதற்காக, கூட்டுத் தொகை $\Sigma d^2$ உடன் $(d = x - y)$, ஒவ்வொரு சமநிலைத் தரத்திலும் உள்ள இராசிகளின் எண்ணிக்கை $t$ ஆனுல், $\frac{t - t}{12}$ கூட்டுகிறேம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு வேலைக்கு மனு செய்த 10 பட்டதாரிகளை இரு குழுக்கள் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்படுத்தின. தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

| பட்டதாரி எண் | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ முதற் குழு வழங்கிய தரம் | $x$ | 3 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 8 | 9 | 10 | 7 |
| $y$ இரண்டாம் குழு வழங்கிய தரம் | $y$ | 5 | 4 | 7 | 2 | 3 | 1 | 9 | 6 | 8 | 10 |

| பட்டதாரி எண் | $x$ | $y$ | $x - y$ $d$ | $(x - y)^2$ $d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | —2 | 4 |
| 2 | 6 | 4 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 7 | —2 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| 5 | 1 | 3 | —2 | 4 |
| 6 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | —1 | 1 |
| 8 | 9 | 6 | 3 | 9 |
| 9 | 10 | 8 | 2 | 4 |
| 10 | 7 | 10 | —3 | 9 |
| | | | | 44 |

$$\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma(x - y)^2}{n\,(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 44}{10\,(10^2 - 1)} = 0{\cdot}73$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

10 மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

| கணிதம் | புள்ளியல் | (கணிதத் தரம் $x$) | (புள்ளியியல் தரம் $y$) | $x - y$ | $(x - y)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 62 | 4 | 5 | —1 | 1 |
| 74 | 58 | 6 | 7 | —1 | 1 |
| 75 | 68 | 2·5 | 3·5 | —1 | 1 |
| 50 | 45 | 9 | 10 | - 1 | 1 |
| 64 | 81 | 6 | 1 | 5 | 25 |
| 80 | 60 | 1 | 6 | —5 | 25 |
| 75 | 68 | 2.5 | 3·5 | - 1 | 1 |
| 40 | 48 | 10 | 9 | 1 | 1 |
| 55 | 50 | 8 | 8 | 0 | 0 |
| 64 | 70 | 6 | 2 | 4 | 16 |
| | | | | | 72 |

தரங்களில் சம நிலை உள்ளதால், $x$ ன் தரங்களுக்குத் திருத்தம்

$$= \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{3^3 - 3}{12} = 2{\cdot}5$$

$Y$-ன் தரங்களுக்கான திருத்தம் $= \frac{2^3 - 2}{12} = 0{\cdot}5$

$$\rho = 1 - 6\left[\frac{\Sigma d^2 + 2{\cdot}5 + 5}{10 \times 99}\right]$$

$$= {\cdot}545$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களில் இருந்து ஒட்டுறவைக் கணக்கிடுக.

செடியின் உயரம் : 15 20 21 8 16 22 14 12 20 17
(செ மீ.) Y.

விதையின் எடை : 2 3 4 3 2 5 2 3 4 2
(மி. கி.) X.

**தீர்வு :**

| $x$ | $y$ | $x-A$. $A = 15$ | $y-B$ $B=2$. | $(x\ A)^2$ | $(y-B)^2$ | $(x\ A)(y-B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 3 | 5 | 1 | 25 | 1 | 5 |
| 21 | 4 | 6 | 2 | 36 | 4 | 12 |
| 18 | 3 | 3 | 1 | 9 | 1 | 3 |
| 16 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 22 | 5 | 7 | 3 | 49 | 9 | 21 |
| 14 | 2 | —1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 17 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 20 | 4 | 5 | 2 | 25 | 4 | 10 |
| 17 | 2 | 2 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| | | 30 | 10 | 154 | 20 | 53 |

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dr}{n} = 15 + \frac{30}{10} = 18$$

$$\bar{y} = +2 + \frac{10}{10} = 3.$$

$$\sigma_x^2 = \frac{154}{10} - 9 = 6.4$$

$$\sigma_y^2 = 2 - 1 = 1$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma (x - A)(y - B) N d_1 d_2}{n \sigma_x \sigma_y}$$

$$P = \frac{1}{10} \times 53 - 3$$

$$= 5{\cdot}3 - 3 = 2{\cdot}3.$$

$$r = \frac{2{\cdot}3}{\sqrt{6.4}} = {\cdot}9090$$

$$y - 1 = {\cdot}9090 \cdot \frac{1}{\sqrt{6.4}}\ x - 18$$

$$y = {\cdot}3593x - 5{\cdot}459.$$

**ஒத்த விலக்கக்கெழு** (Co-efficient of Concurrent deviation)

உடன் தொடர்பைக் காணும் பல முறைகளில் இம் முறை மிகவும் எளிதான ஒன்ருகும். இம் முறையின்படி, மாற்றம் அல்லது விலக்கத்தின் திசை முந்திய மதிப்புகளிலிருந்து அறியப் படுகிறது. மையப்போக்கின் எந்த அளவையும் இதில் பயன் படுத்துவதில்லை.

$$r = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c - n}{n}\right)}$$ என்ற வாய்பாட்டைப் பின்வரும் முறையில் பயன்படுத்துகிருேம் :

(i) $x$ மாறியின் மாற்றத்தின் திசையைக் குறித்துக்கொள்ள, $x$ மாறியின் முதல் மதிப்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு இரண் டாவது மதிப்பு அதிகரிக்கிறதா அல்லது குறைகிறதா அல்லது மாறிலியாக இருக்கிறதா எனக் கவனிக்கவேண்டும். மதிப்பானது முந்திய மதிப்புடன் ஒப்பிடும்போது அதிகரித்து இருந்தால் $+$ என அதற்கெதிராக குறிக்கவும். அது குறைந்திருந்தால் — எனக் குறிக்கவும். அதிகரிப்போ, குறைப்போ எதுவுமில்லாமல் இருந் தால் $=$ எனஅம்மதிப்பிற் கெதிராகக் குறிக்கவும். இதே முறையே மற்ற மதிப்புகளின் திசைகளைக் குறிப்பதற்கும் பயன்படுத்தவும். மாற்றத்தின் $x$-ன் குறியினை $Dx$ என்க.

(ii) (i)-ல் கூறிய முறைப்படியே $y$ மாறியின் மாற்றத்தின் திசையைக் குறிக்கவும். இந்த நெட்டுப்பிரிவு $Dy$ ஆகும்.

(iii) குறிகளை நன்கு ஆராய்ந்தபிறகு $Dx$ ஐயும் $Dy$ஐயும் பெருக்கவும்.

(iv) இரு மாறிகளின் மதிப்புகளிலும் ஒரே மாதிரியான குறிகளைக் கொண்டவை. ஒத்த விலக்கங்கள், அவற்றின் எண்ணிக்கை $C$ ($D_x\ D_y$ல் உள்ள நேர்க்குறிகளின் எண்ணிக்கை) ஆகும்.

$r$-ன் குறியானது $\dfrac{2c-n}{n}$ -ன் குறியைச் சார்ந்துள்ளது.

$\dfrac{2c-n}{n}$ குறையாக இருந்தால், வர்க்க மூலத்தினுள் இருக்கும் குறை

குறியோடு இந்தக் குறை மதிப்பைப் பெருக்கினால் மூலத்தினுள் இருக்கும் மதிப்பு நேர்மதிப்பாகும் ஆனால் $r$ குறை எண்ணாக இருக்கும் $\frac{2c-n}{n}$ நேர் எண் எனில், $r$ நேர்குறியிலமையும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விபரத்திற்கு ஒத்த விலக்கக் கெழுவைக் காண்க.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு : | 1943 | 1944 | 1945 | 1946 | 1947 | 1948 | 1949 | 1950 | 1951 |
| உற்பத்தி : | 160 | 164 | 172 | 182 | 166 | 170 | 178 | 192 | 186 |
| விலை : | 292 | 280 | 260 | 234 | 266 | 254 | 230 | 130 | 200 |

**தீர்வு :**

ஒத்த விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

| ஆண்டு | உற்பத்தி $(x)$ | $Dx$ | விலை $(y$ | $Dy$ | $Dx \times Dy$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1943 | 160 | | 292 | | |
| 1944 | 164 | + | 280 | — | — |
| 1945 | 172 | + | 260 | — | — |
| 1946 | 182 | + | 234 | — | — |
| 1947 | 166 | — | 266 | + | — |
| 1948 | 170 | + | 254 | — | — |
| 1949 | 178 | + | 230 | — | — |
| 1950 | 192 | + | 130 | — | — |
| 1951 | 186 | — | 200 | + | — |
| | | | | | $C = 0$ |

$n = 8$. $C = 0$ [ஏனெனில் எந்த ஜோடியும் ஒரே விதமான குறியைக் கொண்டிருக்கவில்லை.]

$$\therefore \quad r = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c - n}{n}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2 \times 0 - 8}{8}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{-(-1)} = -\sqrt{1} = -1$$

இது முழுமையான எதிர் மறை ஒட்டுறவைக் காட்டுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு பொருளின் விலையைப் பற்றிய விவரங்கள் இரு நகரங்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

| | கல்கத்தா | பம்பாய் |
|---|---|---|
| சராசரி விலை | ரூ. 64 | ரூ. 6·6 |
| திட்டவிலக்கம் | ரூ. 1·5 | ரூ 3·5 |

ஒட்டுறவுக் கெழு = — 0·6

இந்த விவரங்களிலிருந்து கல்கத்தாவில் அப்பொருளின் விலை ரூ. 68 ஆக இருந்தால், அதன் பம்பாய் விலையை மதிப்பிடுக.

[ஏப்ரல் '72]

$\bar{x}$ = ரூ. 64 $\bar{y}$ = ரூ. 66, $\sigma_x = 1{\cdot}95$ ரூ, $\sigma_y = 3{\cdot}5$ ரூ, $r = -0{\cdot}6$.

$\therefore$ $x = 68$ எனில், $y$-ன் மதிப்பு என்ன என்பதை நாம் கணக்கிட வேண்டும்.

$x$-ன் மேல் $y$-ன் உறவுக்கோடு

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = \frac{r}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$\therefore$ $x = 68$ எனில்,

$$y - 66 = -1{\cdot}4\,(68 - 64)$$

$$= -1{\cdot}4 \times 4 = -5{\cdot}6$$

$$\therefore \quad y = 66 - 5{\cdot}6 = 60{\cdot}4$$

$\therefore$ கல்கத்தாவில் பொருளின் விலை ரூ. 68 ஆக இருந்தால், பம்பாயில் அதன் விலை ரூ. 60·40.

எடுத்துக்காட்டு :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 |
| $y$ | 90 | 81 | 99 | 108 | 126 | 117 | 135 |

ஒத்த விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

| $x$ | $y$ | நேர் எதிர்மறை விலக்கங்கள் $Dx$ | $Dy$ | $Dx\ Dy$ |
|---|---|---|---|---|
| 58 | 90 | + | — | — |
| 60 | 81 | + | + | + |
| 62 | 99 | + | + | + |
| 64 | 108 | + | + | + |
| 66 | 126 | + | — | — |
| 68 | 117 | + | + | + |
| 70 | 135 | + | + | + |

$n$ = விலக்கங்களின் எண்ணிக்கை = 6

$C = Dx, Dy$-களிலுள்ள ஒத்த விலக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதாவது $Dx \times Dy$-யிலுள்ள நேர்குறிகளின் எண்ணிக்கை = 4

ஒத்த விலக்கக்கெழு, $r = \pm \sqrt{\pm \frac{2c - n}{n}}$

$$= \pm \sqrt{\frac{\pm 2 \times 4 - 6}{6}}$$

$$= \sqrt{\pm \frac{2}{6}}$$

$2C$-$n$ நேர் எண்ணுதலின், எதிர்க்குறியை ஒதுக்கிவிட்டால்,

$$r = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\cdot 3333} = 0{\cdot}577$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட விவரத்திற்கு ஒத்த விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ | 25 | 16 | 9 | 5 | 1 | 0 |

ஒத்த விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

| $x$ | $y$ | நேர் எதிர் மறை விலக்கங்கள் $Dx$ | $Dy$ | $Dx \times Dy$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | + | | — |
| 2 | 16 | + | — | |
| 3 | 9 | + | — | |
| 4 | 5 | + | — | |
| 5 | 1 | + | | |
| 6 | 0 | + | — | — |
| | $n = 5$ | | | |

$C = Dx \times Dy$யிலுள்ள நேர்குறிகளின் எண்ணிக்கை $= 0$.

$$r = \pm \sqrt{\pm \frac{2C - n}{n}} = \pm \sqrt{\pm \frac{2 \times 0 - 5}{5}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{-5}{5}}$$

$$r = -\sqrt{-\left(\frac{-5}{5}\right)} = -\sqrt{1} = -1 \cdot 0$$

$\therefore \; r = -1.$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு குரல் சோதனையில் போட்டியிடுபவர்கள் 1 பேரை மூன்று நீதிபதிகள் தரப்படுத்திக் கொடுத்த விவரங்கள் பின்வரும் வரிசைகளில் அமைந்துள்ளன :

முதலாம் நீதிபதி : 1, 6, 5, 10, 3, 2, 4, 9, 7, 8

இரண்டாம் நீதிபதி : 3, 5, 8, 4, 7, 10, 2, 1, 6, 7

மூன்றும் நீதிபதி : 6, 4, 9, 8, 1, 2, 3, 10, 5, 7

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல் :

| போட்டி இடுபவர் களின் எண் | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_1-R_2 = d_12$, | $R_1-R_3 = d_13$ | $R_2-R_3 = d_23$ | $d_12^2$ | $d_13^2$ | $d_23^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 6 | −2 | −5 | −3 | 4 | 25 | 9 |
| 2 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | 5 | 8 | 9 | −3 | −4 | −1 | 9 | 16 | 1 |
| 4 | 10 | 4 | 8 | 6 | 2 | −4 | 36 | 4 | 16 |
| 5 | 3 | 7 | 1 | −4 | 2 | 6 | 16 | 4 | 36 |
| 6 | 2 | 10 | 2 | −8 | 0 | 8 | 64 | 0 | 64 |
| 7 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | −1 | 4 | 1 | 1 |
| 8 | 9 | 1 | 10 | 8 | −1 | −9 | 64 | 1 | 81 |
| 9 | 7 | 6 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| 10 | 8 | 7 | 7 | −1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| மொத்தம் | | | | | | | 200 | 60 | 214 |

தர ஒட்டுறவுக் கெழு $= 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

முதலாம், இரண்டாம் நீதிபதிகளுக்கிடையேயுள்ள தர ஒட்டுறவுக் கெழு

$$= 1 - \frac{6 \times 200}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 20}{99}$$

$$= 1 - \frac{40}{33}$$

$$= -0.212$$

முதலாம், மூன்றும் நீதிபதிகளுக்கிடையேயான தர ஒட்டுறவுக் கெழு $= 1 - \frac{6 \times 60}{10 \times 99} = 1 - \frac{4}{11} = 0.636$

இரண்டாம், மூன்றும் நீதிபதிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு $= 1 - \frac{6 \times 214}{10 \times 99} = 1 - \frac{241}{165} = -\cdot 0297$

ஆகவே, முதலாம் நீதிபதிக்கும், இரண்டாம் நீதிபதிக்குமிடையேயான ஒட்டுறவு, குறை எண்ணுக உள்ளது. எனவே, குரல்சோதனையைப்பொறுத்தவரையில் அவர்களுடைய கருத்துகள் முற்றிலும் எதிரானவை. இவைபோல் இரண்டாம்,மூன்றும் நீதிபதிகளுடைய கருத்துகளும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரானவை. ஆனால், முதலாம் நீதிபதியின் கருத்துகளும் மூன்றும் நீதிபதியின் கருத்துகளும் ஒரே தன்மை வாய்ந்தவை. ஏனெனில், அவர்களின் தர ஒட்டுறவு ஒரு நேர் எண்ணுகும். எனவே, அவர்களுடைய விருப்பு, வெறுப்புகள் பொதுவாக ஒரேதன்மை வாய்ந்தவை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$x$, $y$, $z$ என்பவை மூன்று தனிப்பட்ட மாறிகளது கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களைக் குறிக்கின்றன. அவைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் சமம். $12x + 5y - 4z$ என்னும் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

$\Sigma XY = 3$, $\Sigma YZ = 4$, $\Sigma XZ = 2$, $\sigma_x = 3$, $\sigma_y = 3$, $\sigma = 1$. $N = 10$ என்றால், முடிவு என்னவாக இருக்கும் ?

**தீர்வு :**

$X, Y, Z,$ என்பன கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்கள் எனில்,

$X$-ன் பரவற்படி$=\frac{\Sigma X^2}{N}$,

$Y$-ன் பரவற்படி$=\frac{\Sigma Y^2}{N}$,

$Z$-ன் பரவற்படி$=\frac{\Sigma Z^2}{N}$

இந்த மூன்று திட்ட விலக்கங்களும் சமம்.

$$\frac{\Sigma X^2}{N}=\frac{\Sigma Y^2}{N}=\frac{\Sigma Z^2}{N}$$

$$\Sigma X^2=\Sigma Y^2=\Sigma Z^2$$

மூன்று மாறிகளும் உடன் தொடர்பற்றவை

எனவே, அவற்றிற்கிடையே காணும் ஒட்டுறவுக் கெழு வானது பூச்சியமாகும்.

$$r_{xy}=r_{yz}=r_{zx}=0$$

$$\frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2\ \Sigma Y^2}}=\frac{\Sigma YZ}{\sqrt{\Sigma Y^2\times\Sigma Z^2}}$$

$$=\frac{\Sigma ZX}{\sqrt{\Sigma Z^2\times\Sigma\times 2}}=0$$

அதாவது $\Sigma XY=\Sigma YZ=\Sigma ZX=0$

$X, Y, Z$ என்பவை கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களைக் குறிப்பதால், $12X+5Y$, $3Y-4Z$ என்னும் மதிப்புக் களும் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களையே குறிக்கும்.

∴ $12X+5Y$-க்கும் $3Y-4Z$-க்குமிடையேயான $p$-ன் மதிப்பு

$$=\frac{\Sigma(12X+5Y),(3Y-4Z)^2}{\sqrt{\Sigma(12X+5Y)^2}\times\sqrt{\Sigma(3Y-4Z)^2}}$$

$$=\frac{\Sigma[36XY+15Y^2-48XZ-20YZ]}{\sqrt{\Sigma(144X^2+25Y^2+120XY)}\times\sqrt{\Sigma(9Y^2+16Z^2-24YZ)}}$$

$$r = \frac{36\,\Sigma XY + 15\,\Sigma Y^2 - 48\,\Sigma XZ - 20\,\Sigma YZ}{\sqrt{[144\,\Sigma X^2 + 25\,\Sigma Y^2 + 120\,\Sigma XY]} \sqrt{\times [9\,\Sigma Y^2 + 16\,\Sigma Z^2 - 24\,\Sigma YZ]}} \quad \ldots (1)$$

இதில் $\Sigma XY = \Sigma YZ = \Sigma ZX = 0$ என்னும் மதிப்பையும் $\Sigma X^2 = \Sigma Y^2 = \Sigma Z^2$ என்பதையும் ஈடு செய்தால்,

$$r = \frac{15\,\Sigma X^2}{\sqrt{(144\,\Sigma X^2 + 25\,\Sigma X^2)(9\,\Sigma X^2 + 16\,\Sigma X^2)}}$$

$$= \frac{15\,\Sigma X^2}{13 \times 5 \times \Sigma X^2} = \frac{15}{13 \times 5} = \frac{3}{13} = 0.23$$

$\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$-ன் மதிப்புக்களை மேற்கூறிய மதிப்புகளில் ஈடு செய்தால்,

$$2^2 = \frac{\Sigma X^2}{10} \qquad \therefore \ \Sigma X^2 = 40$$

$$3^2 = \frac{\Sigma Y^2}{10} \qquad \therefore \ \Sigma Y^2 = 90$$

$$1^2 = \frac{\Sigma Z^2}{10}$$ அதாவது $\Sigma Z^2 = 10$.

$\Sigma X^2$ $\Sigma Y^2$, $\Sigma Z^2$, $\Sigma XY$, $\Sigma YZ$, $\Sigma ZX$-ன் மதிப்புகளை (1)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$r = \frac{36 \times 3 + 15 \times 90 - 48 \times 2 - 20 \times 4}{\sqrt{(144 \times 40 + 25 \times 90 + 120 \times 3)\ (9 \times 90 + 16 \times 10 + 24 \times 4)}}$$

$$= \frac{108 + 1350 - 96 - 80}{\sqrt{(5760 + 2250 + 360)\ (810 + 160 - 96)}}$$

$$= \frac{1282}{\sqrt{8370 \times 874}}$$

$$= 0.474$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 10 மாணவர்கள் கணிதத்திலும் புள்ளியியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் கொடுக்கிறது. ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| கணிதம் : | 45 | 70 | 65 | 30 | 90 | 40 | 50 | 75 | 85 | 6) |
| புள்ளியல் : | 35 | 9 | 70 | 40 | 95 | 4) | 60 | 80 | 80 | 50 |

**தீர்வு :**

கணிதத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களை $X$ என்றும், புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களை $Y$ என்றும் குறிக்க. $x$-க்கு 60ஐ மூலப் புள்ளியாகவும், $y$ க்கு 65ஐ மூலப் புள்ளியாகவும் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

கணக்கிடுதலைச் சுலபமாக்க, விலக்கங்களை 5 ஆல் வகுத்திடலாம். ($X$, $Y$ இரு மாறிகளின் மதிப்புகளிலும் பொதுக் காரணி 5 ஆக உள்ளது).

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x^2}{n}\right) = \frac{140}{10} - \left(\frac{2}{10}\right)$$

$$= 14 - 0{\cdot}04 = 13{\cdot}96$$

$$\sigma y^2 = \frac{\sigma_y^2}{n} - \left(\frac{\sigma_y^2}{n}\right)^2 = \frac{176}{10} - \left(\frac{-2}{10}\right)^2$$

$$= 17{\cdot}6 - 0{\cdot}04 = 17{\cdot}56$$

$$\sigma x{-}y^2 = \frac{\sigma_a^2}{n} - \left(\frac{\Sigma a}{n}\right)^2 = \frac{36}{10} - \left(\frac{-6}{10}\right)^2$$

$$= 3{\cdot}6 - 0{\cdot}36 = 3{\cdot}24$$

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}}{2\sigma \quad \sigma_y}$$

$$= \frac{13{\cdot}96 + 17{\cdot}56 \quad 3{\cdot}24}{2\sqrt{13{\cdot}96 \times 17{\cdot}56}}$$

$$= \frac{28{\cdot}28}{2 \times 15{\cdot}66}$$

$$= \frac{14{\cdot}14}{15{\cdot}66}$$

$$= 0{\cdot}903.$$

| $X$ | $Y$ | $X-Y$ | $\frac{X-60}{5}=x'$ | $x'^2$ | $\frac{Y-65}{5}=y'$ | $y'^2$ | $\frac{X-Y}{5}=a$ | $a^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 35 | 10 | —3 | 9 | —6 | 36 | 2 | 4 |
| 70 | 90 | —20 | 2 | 4 | 5 | 25 | —4 | 16 |
| 65 | 70 | — 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | —1 | 1 |
| 30 | 40 | —10 | —6 | 36 | —5 | 25 | —2 | 4 |
| 90 | 95 | — 5 | 6 | 36 | 6 | 36 | —1 | 1 |
| 40 | 40 | 0 | —4 | 16 | —5 | 25 | 0 | 0 |
| 50 | 60 | —10 | —2 | 4 | —1 | 1 | —2 | 4 |
| 75 | 80 | — 5 | 3 | 9 | 3 | 9 | —1 | 1 |
| 85 | 80 | 5 | 5 | 25 | 3 | 9 | 1 | 1 |
| 60 | 50 | 10 | 0 | 0 | —3 | 9 | 2 | 4 |
| மொத்தம் | | | 2 | 140 | —2 | 176 | —6 | 36 |

**கொடுக்கப்பெற்ற விவரங்களுக்கு உடன்தொடர்புக் கோடுகளைப் பெறுதல்**

ஓர் இரட்டைமாறி உடன் தொடர்புப் பட்டியலுக்கு (A bi-variate correlation table) உடன் தொடர்புக் கோடுகளை நாம் பின் வரும் முறையைச் செயல்படுத்திப் பெறவேண்டும். நெட்டுப் பிரிவுகளின் கூடுதல்களை $f$. என்றும். ஒவ்வொரு நெட்டுப் பிரிவு களின் கூட்டுச் சராசரியையும் $\bar{y}_x$ என்றும் குறி. எனவே அந்த நெட்டுப் பிரிவுக்கு $fx\cdot \ \bar{y} x = \Sigma fxy\cdot y$. மேலும், நெட்டுப்பிரிவு களின் கூட்டுச்சராசரிகள் $\bar{y}x$ ஒரு நேர்கோட்டைச் சுற்றிச் சுழன்று அமைந்துள்ளன எனக் கொள்வோம். அதாவது மாறிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் போக்கைப் பெற்றிருக்கும்,. மேலும். கூறில் அதிக மதிப்புகள் இருப்பதாகக்கொண்டு, நெட்டுப் பிரிவு களின் கூட்டுச்சராசரிகளில் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்து முழுமைத் தொகுதியைப் பிரதிபலிக்கின்றன என்றும், நேர் கோட்டிலிருந்து கூட்டுச்சராசரியின் விலக்கங்கள் கூறு பண்பு களின் ஏற்ற இறக்கங்களால்தான் ஏற்படுகின்றன என்றும் கொள்வோம். இதன் அடிப்படையில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் அந்தந்த நெட்டுப் பிரிவுக்குரிய மொத்த அலைவெண் $f$ ஆல் நிறையிடப்படுகிறது எனக்கொண்டு $(x, \bar{y}x)$ என்னும் புள்ளி களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துவோம்.

$y = mx + c$ நாம் பொருத்தவேண்டிய நேர்கோடாக இருக்கட்டும்.

எச்சம் (Residual) $= \bar{y}_x - (mx + c)$

$$E = \sum_x f_x [\bar{y}_x - (mx + c]^2$$ எனக் கொள்வோம்.

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி, $E$ சிறுமமாவதற்குரிய நிபந்தனைகள் $\frac{\partial E}{\partial m} = 0$ ; $\frac{\partial E}{\partial c} = 0$. ஆகும்.

இரண்டாவது நிபந்தனை, $\sum_x f_x[\bar{y}_x - (mx + c)]. - 1 = 0$

என்பதனைக் கொடுக்கும்.

அதாவது, $$\sum_x f_x\bar{y}_x = m\sum_x f_x\cdot x = c\sum_x f_x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_{x} f_x = N$$ மொத்த அலைவெண்

$$\therefore \quad \sum_{x} f_x \cdot x = N\bar{x}$$

மேலும் $$\sum_{x} f_x \bar{y}_x = \sum_{x} \sum_{y} f_{x \cdot y} y.$$

$$= \sum_{y} \sum_{x} f_{\cdot y} \cdot y$$

$$= \sum_{y} f_y \cdot y$$

$$= N\bar{y}.$$

சமன்பாடு (1) ஐ $N$ஆல் வகுக்க, $\bar{y} = mx + c$. $\bar{x}, \bar{y}$ என்பன முழுப்பட்டியலுக்குமான மாறிகளின் கூட்டுச்சராசரிகளாகும். இது, நேர்கோடானது $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியாகச் செல்கிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. ஆதியை $(\bar{x}, \bar{y})$ க்கு மாற்றி, $y_x = \bar{y}_x - \bar{y}$ என்றும், $X = x - \bar{x}$ என்றும் கொண்டால், கணக்கானது ஒவ்வொரு புள்ளியையும் $f$-க்கு நிறையிடப்பட்ட $(X, \bar{Y}_x)$ எனும் விவரத்துக்கு $Y = m X$ என்னும் நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதாக அமையும்.

இப்போது, $$E = \sum_{x} f_x (\bar{Y}_x - mX)^2$$

இது $\frac{dE}{dm} = 0$ ஆக இருக்கும்போது சிறுமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $$-2 \sum f_x [\bar{Y}_x - mX]X = 0.$$

அதவாது, $$m \sum_{x} f_x X^2 = \sum_{x} f_x \bar{Y}_x X$$

வலது கைப்பக்கம் $$= \sum_{x} \sum_{y} f_{xy} YX = N. P.$$

இங்கு $\sum_{x}\sum_{y} f_{xy} = N$ மொத்த அலைவெண்.

இடது கைப்பக்கம் $= m \cdot N\sigma_x^2 = N \cdot P$

$$\therefore \quad m = \frac{p}{\sigma_x^2}$$

எனவே, பொருத்தவேண்டிய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\bar{Y}_x = \frac{p}{\sigma_x^2} X$ அதாவது, $\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{p}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$. இச் சமன்பாட்டிலிருந்து, $x$-ன் மதிப்பு தரப்பட்டுள்ளதால் அந்த நெட்டுப் பிரிவின் $y$ களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

மாணவரது வயதிற்கும், அவர் பெற்றுள்ள மதிப்பெண் களுக்கும் இடையுறவைக்காணும், முன்பு தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக் காட்டிற்கு உறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\bar{x} = 20 + \frac{42 \times 1}{65} = 2.646$$

$$\bar{y} = 275 + \frac{48 \times 1}{(5} = 275.7384$$

$$r = \cdot 3857$$

$\therefore$ உறவுக் கோட்டின் சமன்பாடுகள்,

$$y - 275 \cdot 7384 = \cdot 3857 \times \frac{1 \cdot 028}{1 \cdot 117} (x - 2 \cdot 646)$$

$$x = 2.646 = \cdot 3857 \times \frac{1 \cdot 117}{1 \cdot 028} (y - 275 \cdot 7384)$$

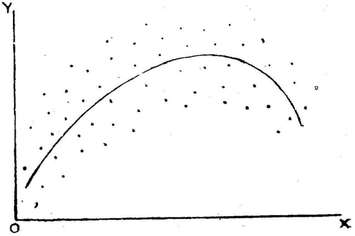
$$y = 275 \cdot 7384 + \cdot 355 (x - 2 \cdot 646)$$

$$x = 2 \cdot 646 + \cdot 4191 (y - 275 \cdot 7384)$$

**உடன் தொடர்பு விகிதம் (Correlation Ratio)**

ஒட்டுறவுடைய இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் அமைந்த சிதறல் விளக்கப்படத்திலுள்ள புள்ளிகளுக்கு, மிகப் பொருத்த

முடைய வரையாக, சிலபோது, நேர்கோடு அமையாது. புள்ளிகள் ஒரு வளைவரையைச் சுற்றி அமையலாம். இது போது அவற்றின் இடையுறவைக் கணக்கிட உதவுவது 'ஒட்டுறவு விகிதம்' (Correlation Ratio) ஆகும்




படம் 2 6

சிறு குழந்தைகளின் உடல்திறன், வளரவளர அதிகரித்துக் கொண்டே செல்கிறது. ஆனால், ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையை அடைந்தவுடன், வளர்ச்சி அதிகமின்றி, நாளடைவில் வயதாக வயதாகச் சக்தி குறைந்துகொண்டே வருகிறது. இதுபோன்றே நினைவுத் திறனும் அதிகரித்துக் கொண்டே சென்று, குறிப்பிட்ட நிலைக்குப் பிறகு, சிறிது சிறிதாகக் குறைந்து வருதலைக் காண்கின்றோம். இந்நிலைகளில் ஒட்டுறவுக்கெழு $\gamma$-ஐ விட ஒட்டுறவு விகிதம் $\eta_{xy}$ ஐப் பயன்படுத்துகிறோம்.

உடன் தொடர்பு விகிதம் எப்போதுமே நேர்குறியைக் கொண்டதாக இருக்கும். இதனைச் சீர்படா விவரங்களுக்குப் (raw data) பொருத்தமுடியாது. மாறிகளின் உறவு நேர்க் கோட்டில் அமையாதபோது $r$ பூச்சியத்திற்கருகே அமைந்தால் கூட, உடன் தொடர்பை $\eta$ நன்கு சுட்டிக் காட்டும். மேலும், நேர்கோட்டில் உறவு அமையும் தன்மையினைச் சோதிக்கவும் இது பயன்படுகிறது. $r^2 \leq \eta^2 \leq 1$ என நிறுவலாம். எனவே, $\eta^2 - \eta^2$ ஐ உறவுத்தன்மையினை ஆராயப் பயன்படுத்தலாம்.

$\eta^2 - r^2 > \frac{11 \cdot 5}{N}$ என இருந்தால், உறவு வளைவுத்தன்மை உடையதெனக் கொண்டு, உடன் தொடர்பு விகிதத்தைப் பயன் படுத்த வேண்டும்.

**உடன் தொடர்பு விகிதம்** (Correlation Ratios)

$x$-ன் மேல் $y$-ன் தொடர்பு கோட்டிலிருந்து பெறும் $y$-ன் எச்சங்களின் திட்டவிலக்கத்தை $S$ எனக் குறிப்போம். இதை $y$-ன் திட்டப்பிழை எனவும் வழங்கலாம்.

எனவே, $S_y^2 = \sigma_y (1 - r^2)$.

$$r = \pm \left(1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (1)$$

முழுப்பட்டியலையும் எடுத்துக்கொண்டு, ஒவ்வோர் அறை அலை வெண்ணுக்கும் அதன் நெட்டுப் பிரிவு கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள எச்சங்களின் திட்ட விலக்கம் $S_y^1$ என இருக்கட்டும். ஒவ்வொரு நெட்டுப் பிரிவிற்கும் ($x$-மாறிலி) எச்சங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\sum\limits_y f_{xy} (y-\bar{y}_x)^2$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ முழுப்பட்டியலுக்கும் } S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_x \sum_y f \;(y-\bar{y}_x)^2 \dots (2)$$

நெட்டுப்பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் சமமானால் அந்த நேர்கோடே உடன் தொடர்புக் கோடாக அமையும். அப்போது $S'_y{}^2 = S_y^2$. பொதுவாக, கூட்டுச் சராசரிகள் எப்போதும் சமமாக இல்லாததால், இந்த இரண்டு கூடுதல்களும் சமமாக இருக்கமாட்டா. மேலும், ஒவ்வொரு நெட்டுப் பிரிவிற்குள்ளும் $S_y'^2$ என்பது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதலாகும். எனவே, இதை எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் கிடைக்கும் விலக்கங்களின் கூடுதலுடன் ஒப்பிடும்போது, இது சிறுமமாக இருக்கும்.

$$S'^2 = S^2$$

$$\text{மேலும் } \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \leq 1 \text{ என்பதால், } \frac{S_y^2}{S^2} \leq 1$$

$$\eta_{yx}^2 = \left(1 - \frac{S_y'^2}{\sigma^2}\right) \quad \dots (3)$$

என்க.

பின்பு $\eta_{yx}$ என்பதை $x$-ன் மேல் $y$-ன் உடன் தொடர்பு விகிதம் என வழங்குகிறோம். உடன் தொடர்பு வரையானது நேர்கோடாக

இல்லாதபோது இதனை வளைகோட்டு உடன் தொடர்பை அளக்கப் பயன்படுத்தலாம். இதேபோல் $y$-ன் மேல் $x$-ன் உடன் தொடர்பு விகிதம் $\eta_{xy}$ என வழங்கப்படுகிறது.

$$\eta_{xy}^2 = \left(1 - \frac{S_x'^2}{\sigma_x^2}\right) \quad \cdots (4)$$

$S_y'^2 \le S_y^2$ என்பதால்

$$1 - \frac{S_y'^2}{\sigma_y^2} \ge 1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

அதாவது $\eta_{yx}^2 \ge r^2$. மேலும் $\eta_{xy}^2 \le 1$.

எனவே, $r^2 \le \eta_{yx}^2$. இதேபோல் $r^2 \le \eta_{yx}^2 \le 1$ என நிறுவலாம்.

**ஒட்டுறவு விகிதத்தை இரு திட்ட விலக்கங்களின் விகிதமாகக் கொள்ளுதல் :**

$x$ நெட்டுப்பிரிவிலுள்ள $y$ களின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}_x$ என்க.

$$\frac{1}{N}\sum_x f_x \bar{y}_x = \frac{1}{N}\sum_x \sum_y f_{xy} \cdot y = \frac{1}{N}\sum_y \sum_x f_{xy}$$

$$y = \frac{1}{N}\sum f_y \cdot y = \bar{y}$$

எனவே, இச் சராசரிகளுக்கு, அந்தந்த நெட்டுப்பிரிவிலுள்ள நிகழ்வெண்களை எடையிட்ட சராசரியே, $y$-ன் பொதுச்சராசரி ஆகும்.

$\sigma_{my}$ என்பது, நெட்டுப்பிரிவிலுள்ள கூட்டுச்சராசரிகளுக்குப் பொதுக் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}$-லிருந்து, ஒவ்வொன்றுக்கும் நிகழ்வெண் $f$ ஐ எடையாகத்தந்த திட்ட விலக்கமாகும்; $\sigma_y$ என்பது, முழுப் பட்டியலிலும் $y$-ன் திட்டவிலக்கமெனில்,

$$N\sigma_y^2 = \sum_y f_y (y - \bar{y})^2, \text{ } y \text{ வரிசையின் மொத்தம் } f_y.$$

$$= \sum_y \sum_x f_{xy} (y - \bar{y})^2 \text{ (ஒவ்வொரு சிற்றறையின் கூட்டுத்தொகையை எடுத்துக்கொண்டால்)}$$

$$= \sum_x \sum_y f_x (y - \bar{y})^2 = \sum_x \sum_y f_{xy} [ (y - \bar{y}_x) + (\bar{y}_x - \bar{y}) ]^2$$

$$= \sum_x \sum_y f_{xy} [ (y - \bar{y}_x)^2 + (\bar{y}_x - \bar{y})^2 + 2 (y - \bar{y}_x) (\bar{y}_x - \bar{y}) ]$$

$$= N S'^2_y + N \sigma_{my}^2 + \sum_x 2 (\bar{y} - \bar{y}) \sum_y f_{x} (y - \bar{y}_x)$$

$$= N S'^2_y + N \sigma_{my}^2 + \sum_x 2 (\bar{y}_x - \bar{y}) \times 0$$

$$[\because \ \Sigma f_{xy} (y - \bar{y}_x) = 0]$$

$$\therefore \ N \sigma_y^2 = N S'^2_y + N \sigma_{my}^2$$

$$\therefore \ \sigma_y^2 = S'^2_y + \sigma_{my}^2$$

$$\eta\, yx^2 = \left[ 1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \right] = \left[ 1 - \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{my}^2}{\sigma^2} \right] = \frac{\sigma_{my}^2}{\sigma_y^2}$$

$\eta_{yx} = \dfrac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$, இங்கு $\sigma_{my}$, பொதுக் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}$-லிருந்து நெட்டுப் பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கு அந்தந்த நெட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணை ($f_x$) எடையாகக் கொண்டு கணக்கிட்ட திட்ட விலக்கமாகும்.

இதுபோன்றே, $\eta_{xy} = \dfrac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$, இங்கு $\sigma_{mx}$ வரிசைகளின் சராசரிகளுக்குப் பொதுச்சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து, அந்தந்த வரிசையின் நிகழ்வெண்ணை ($f_y$) எடையாகத் தந்து கணக்கிடப்படுகிற திட்ட விலக்கமாகும்.

**குறிப்பு :** $\eta_{xy}$, $\eta_{yx}$ இரண்டும் எப்போதுமே நேர்குறி உடையவை. $\eta_{yx} = 0$, ($\sigma_{my} = 0$ ஆக இருக்கும்போதுதான்), $\eta_{yx} = 1$, $\sigma_{my} = \sigma_y$ ஆக இருக்கும்போது மட்டும். $\therefore 0 < \eta > 1$

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியல், 210 கணிப்புகளுக்கு, $x$, $y$ என்ற இரு மாறிகளின் அளவைகள் பற்றிய விவரங்களைத் தருகின்றன. $x$-ன் மீது $y$-ன் ஒட்டுறவு விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

| YX | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | — | — | — | 4 | 3 |
| 1 | | | 18 | 36 | 9 |
| 2 | | 12 | 54 | 36 | 3 |
| 3 | 1 | 12 | 18 | 4 | — |

$y$ வரிசைகளின் சராசரிகளையும் $\sigma_y$ யையும் கணக்கிடல்

| | x=0 | | x = 1 | | x = 2 | | x=3 | | x=4 | | எல்லா y-க்கும் | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f$ | $f_y$ | $f$ | $f_y$ | $f$ | $f_y$ | $f$ | $f$ | $f$ | $f_y$ | $f$ | $f_y$ | $f_y$ |
| 0 | | | | | | | 4 | 0 | 3 | 0 | 7 | 0 | 0 |
| 1 | | | | | 18 | 18 | 36 | 36 | 9 | 9 | 63 | 63 | 63 |
| 2 | | | 12 | 24 | 54 | 108 | 36 | 72 | 3 | 6 | 105 | 210 | 420 |
| 3 | 1 | 3 | 12 | 36 | 18 | 54 | 4 | 12 | — | — | 35 | 105 | 315 |
| மொத்தம் | 1 | 3 | 24 | 60 | 90 | 180 | 80 | 120 | 15 | 15 | 210 | 378 | 798 |

∴ எல்லா $y$-களின் சராசரி $(\bar{y}) = \frac{378}{210} = 1{\cdot}8$

$y$ வரிசைகளின் சராசரிகளின், எடையிட்ட திட்டவிலக்கம் காணல்.

| $x$ | $y$-ன் நிகழ் வெண் $(f)$ | $y$-ன் மொத்தம் $T_i$ | $y$-ன் சராசரி $\bar{y}$ $(T_i \mid f_i)$ | $y - y_i = d_i$ | $d_i^2$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 3·0 | + 1·2 | 1·44 | 1·44 |
| 1 | 24 | 6 | 2·5 | + 0·7 | 0·49 | 11·79 |
| 2 | 90 | 180 | 2·0 | + 0·2 | 0·04 | 3·60 |
| 3 | 80 | 120 | 1·5 | + 0·3 | 0·09 | 7·20 |
| 4 | 15 | 15 | 1·0 | — ·8 | 0·64 | 9·60 |
| | 210 | | | | | 33·60 |

எடையிட்ட திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{\Sigma f\ d^2}{\Sigma\ f_i}}$

$= \sqrt{\frac{33{\cdot}6}{210}} = 0{\cdot}4$

எல்லா $y$-களின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{\Sigma f y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f y}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{3{\cdot}8 - 3{\cdot}\ 4}$

$= 0{\cdot}7483$

$\therefore$ ஒட்டுறவு விகிதம் $= \frac{0{\cdot}4}{0{\cdot}7483} = 0{\cdot}5345$

**ஒட்டுறவுக் கெழுவும், நிகழ்திறப் பிழையும்**

ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மதிப்பினை ஆராய்ந்து முடிவு காண்பதற்கு நிகழ்திறப் பிழை உதவுகிறது. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் நிகழ்திறப் பிழை (Probable error)

$$= {\cdot}6745\ \frac{(1 - r^2)}{\sqrt{n}}$$

இங்கு $r$ ஒட்டுறவுக்கெழு, $n$, ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) $r$-ன் மதிப்பு நிகழ்திறப் பிழையைவிடக் குறைவாக இருந்தால், ஒட்டுறவு இல்லையென்றே சொல்லலாம். அதாவது $r$-ன் மதிப்பு பொருட்படுத்தத்தக்கதல்ல.

(2) $r$-ன் மதிப்பு, 6 மடங்கு நிகழ்திறப் பிழையைவிட அதிகமாக இருந்தால் மாறிகளிடையே பொருட்படுத்தத்தக்க உறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்.

(3) $\rho = r \pm$ நிகழ்திறப் பிழை. அதாவது 25 ஜோடி மதிப்புகளுடைய கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு $p = {\cdot}62$ எனில், முழுமைத்தொகுதியின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$\rho = {\cdot}62 \pm \frac{{\cdot}6745\ [1 - ({\cdot}62)^2]}{\sqrt{25}}$$

பொதுவாக $r$-ன் மதிப்பு ·00 லிருந்து $\pm$ ·20 எனில், ஒட்டுறவு பொருட்படுத்தத் தக்கதல்ல.

$r = \pm \cdot 20$ லிருந்து $\pm \cdot 40$ எனில் ஒட்டுறவு மிகக் குறைவாக உள்ளது.

$r = \pm \cdot 40$ லிருந்து $\pm \cdot 70$ எனில் ஒட்டுறவு பொருட்படுத்தத் தக்கது.

$r = \pm \cdot 70$ லிருந்து $\pm 1 \cdot 00$ எனில் ஒட்டுறவு மிக உயர்ந்த அளவில் உள்ளது.

இப் பாகுபாடு பொதுவான முறையிலே அமைகிறது. சிற்சில சமயங்களில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் தன்மைக்கு ஏற்றவாறு $r = \cdot 60$ என்னும்போதுகூட மிக உயர்ந்த ஒட்டுறவாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனல், ஒரு அறிவுக்கூர்மைச் சோதனையில் வினக்களுக்கிடையே உள்ள உறவு, $\cdot 85 - \cdot 95$ என்று இருக்கும்போதுதான் ஒட்டுறவு மிக உயர்ந்ததாகக் கொள்ளப்படுகிறது. பொதுவாக, மாறிகளின் தன்மைக்கு ஏற்றவாறும் எந்த நோக்கத்திற்காகவும் $r$ கணக்கிடப்படுகிறது என்பதைப் பொறுத்தும், தொகுதியின் மாறுபாட்டைப் பொறுத்தும் அமைகிறது.

### உடன் தொடர்புக்கும், உறவுக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு

உடன் தொடர்பு, $X$, $Y$ என்ற இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள உடன்தொடர்பின் தன்மையினை மட்டும் அளக்கிறது. ஆனல், உறவுக் கோடுகள் மூலம், ஒரு மாறியில் ஏற்படும் குறிப்பிட்ட மாற்றத்தின்மூலம், மற்ருெரு மாறியில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றத்தின் அளவைத் தீர்மானிக்க முடிகிறது.

உறவுக் கோடுகளின் மூலம், காரணகாரியத் தொடர்பு, உடன் தொடர்புக் கெழுவைவிட, அதிகமாக வெளிப்படுகிறது அதாவது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உடன் தொடர்பு காணப் படுவது அவற்றிற்கிடையே உண்மையிலேயே, காரணகாரியத் தொடர்பு இல்லாமலேயே நிகழலாம்.

### எடுத்துக்காட்டு

(ஊதிய உயர்வு, வெப்பநிலை அதிகரிப்பு). ஆனல் உறவுக் கோடுகளில், ஒரு மாறி சார்பற்றதாகவும், மற்ருெரு மாறி முதல் சார்ப்பற்ற மாறியைச் சார்ந்துள்ளதாகவும் அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, விளைச்சலைச் சார்பற்ற மாறி $x$ எனக் கொண்டால், விலையைச் சார்புள்ள மாறி $y$ ஆகக் கொள்கிருேம்.

**பலதர இடைத் தொடர்பு** (Multiple Correlation)

இரு மாறிகளில் ஒன்றில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் விளைவாக மற்றொன்றில் மாற்றம் ஏற்படுமாயின் அவை உடன் தொடர்புடைய மாறிகள் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(தந்தையின் உயரம், மகனின் உயரம்) (பொருளின் விலை; உற்பத்தி அளவு) இவற்றிக்கிடையே உள்ள தொடர்பை பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடுகிறது. ஆனால், சிற்சில சமயங்களில் பல்வேறு மாறிகளிடையே. இடையுறவு காணப்பட்டு ஒரு மாறியின் மதிப்பானது பல்வேறு மாறிகளின் மதிப்புகளினால் பாதிக்கப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பொருளின் விலை ($x_1$), உற்பத்தி அளவு ($x_2$) வெளிநாடுகளிலிருந்து இறக்குமதியாகும் அளவு ($x$), உருவாக்கும் முறையில் தோன்றியுள்ள மாற்றம் ($x_4$) போன்ற பல்வேறு மாறிகளால் பாதிக்கப்படுகிறது. இதுபோலவே, ஓர் ஏக்கரின் விளைச்சல் ($x_1$), விதையின் தன்மை ($_2$) பயன் படுத்தப்பட்ட உரத்தின் தன்மை ($x_3$) நிலத்தின் தன்மை ($x_4$) நீர்வசதி ($x_5$) வெப்பநிலை ($x_6$) இதுபோன்ற பல்வேறு மாறிகளைப் பொறுத்து அமைகிறது. எனவே, ஒரு குழுவிலுள்ள பல்வேறு மாறிகளால் வேறொரு மாறியில் ஏற்படும் இணைந்த மாற்றத்தைக் காண்பதே பலதர இடைத் தொடர்பாகும். (Multiple Correlation).

இதனை $r$ 1,2, 3 ... ... $n$ என்ற பலதர இடைத் தொடர்புக் கெழுவினால் அளந்திடலாம். இங்கு 1 என்பது சார்ந்த மாறி 2, 3 ... ... $n$ என்பவை மற்ற சார்பற்ற மாறிகள். இது போன்றே முதற்படி உறவை, 2 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளுக்கு விரித்துக் கூறி அவற்றின்மூலம் சார்புள்ள மாறியின் மதிப்பைத் தோராயமாகக்கூறுவது பலதர உறவாகும் (multiple regression).

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியலில் 10 மாணவர் உயரங்கள், அவர்களின் தந்தையின் உயரங்கள் அவர்களின் தாயார்களின் உயரங்கள் (அங்குலங்களில்) தரப்பட்டுள்ளன.

பின்வரும் விவரங்களுக்கு $x_1$, $x_2$ வின் மேல் $x_1$-னின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

| மாணவர் எண்ணிக்கை (1) | உயரம் (2) | தந்தையின் உயரம் (3) | தாயின் உயரம் (4) | $x_1{}^2$ (5) | $x_2{}^2$ (6) | $x_3{}^2$ (7) | $x_{1\cdot 2}$ (8) | $x_{1\cdot 3}$ (9) | $x_{2\cdot 3}$ (10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 48 | 47 | 45 | 2304 | 2209 | 2025 | 2256 | 2160 | 2115 |
| 2. | 49 | 50 | 48 | 2401 | 2500 | 2304 | 2450 | 2352 | 2400 |
| 3. | 50 | 52 | 50 | 2500 | 2704 | 2500 | 2600 | 2500 | 2600 |
| 4. | 51 | 50 | 51 | 2601 | 250 ) | 2601 | 2550 | 2601 | 2550 |
| 5. | 52 | 48 | 50 | 2704 | 2304 | 2500 | 2496 | 2600 | 2400 |
| 6. | 53 | 55 | 52 | 28 9 | 3025 | 2704 | 2915 | 2756 | 2860 |
| 7. | 54 | 54 | 51 | 2916 | 2916 | 2601 | 2916 | 2754 | 2754 |
| 8. | 55 | 53 | 55 | 3025 | 2809 | 3026 | 2915 | 3025 | 2915 |
| 9. | 56 | 55 | 54 | 3136 | 3025 | 2916 | 3080 | 3024 | 29·0 |
| 10 | 62 | 56 | 54 | 3844 | 3136 | 2916 | 3472 | 3348 | 3024 |
| $\Sigma n = 10$ | 530 | 520 | 51) | 28240 | 27128 | 26092 | 27650 | 27120 | 26588 |

**தீர்வு :**

கூட்டுச் சராசரி :

(1) $\bar{x}_1 = \frac{530}{10} = 3.$

$\bar{x}_2 = \frac{520}{10} = 52.$

$\bar{x}_3 = \frac{510}{10} = 51.$

(2) $\sigma_1 = \sqrt{n\ \Sigma x_1{}^2 - (\Sigma x_1)^2}$

$= \frac{\sqrt{10 \times 28240 - (530)^2}}{10}$

$= \frac{\sqrt{282400 - 280900}}{10}$

$= \frac{\sqrt{150}}{10} = \frac{38 \cdot 8}{10} = 3{\cdot}88.$

$\sigma_2 = \frac{\sqrt{10 \times 27128 - 520^2}}{10}$

$= \frac{\sqrt{271280 - 270400}}{10}$

$= \frac{\sqrt{880}}{10} = \frac{29{\cdot}67}{10} = 2{\cdot}97$

$\sigma_3 = \frac{\sqrt{10 \times 26092 - 510^2}}{10}$

$= \frac{\sqrt{260920 - 260100}}{10}$

$= \frac{\sqrt{820}}{10} = \frac{28{\cdot}64}{10} = 2{\cdot}86$

ஒட்டுறவுக்கெழு :

$$r_{12} = \frac{n\,\Sigma x_{1\cdot 2} - \Sigma x_1\,\Sigma x_2}{\sqrt{n\,\Sigma x_1^2 - (\Sigma x_1)^2}\;\sqrt{n\,\Sigma x_2^2 - (\Sigma x_2)^2}}$$

$$= \frac{10 \times 27650 - 530 \times 520}{38{\cdot}8 \times 29.67}$$

$$= \frac{276500 - 275600}{1151 \cdot 196}$$

$$= \frac{900}{1141 \cdot 196} = 0{\cdot}78$$

$$r_{13} = \frac{10 \times 27120 - 530 \times 510}{38{\cdot}8 \times 28{\cdot}64}$$

$$= \frac{271200 - 270300}{1111 \cdot 232}$$

$$= \frac{900}{1111 \cdot 232} = 0\ 81.$$

$$r_{23} = \frac{10 \times 265\ 8 - 520 \times 510}{29{\cdot}67 \times 28{\cdot}64}$$

$$= \frac{265880 - 265200}{849{\cdot}7488}$$

$$= \frac{680}{849 \cdot 7488} = 0{\cdot}8$$

**பல்தர இடைத் தொடர்புக்கெழு** (Multiple Correlation Co-efficient)

$$r/_{1\cdot 23} = \sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2 \quad 2\, r_{22}\, r_{13}\, r_2 \quad ^2}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}78^2 + 0{\cdot}81^2 - 2 \times 0{\cdot}78 \times 0{\cdot}81 \times 0{\cdot}8}{1 - 0{\cdot}8^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}6084 + 0{\cdot}6561 - 1{\cdot}01088}{1 - 0{\cdot}64}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}25362}{0.36}} = 0{\cdot}8392$$

பலதர உறவுச் சமன்பாடு: பின்வரும் வாய்பாட்டின் மூலம் அறியப் படுவது

$$x_{123} = a + b_{12\cdot3}\, x_2 + b_{13\cdot2}\, x$$

$$a = \bar{x}_1 - b_{12\cdot3}\,\bar{x}_2 - b_{13\cdot2}\,\bar{x}_3$$

$$b_{12\cdot3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \times r_{12} - r_{13} \times r_{23}$$

$$b_{13\cdot2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \times \frac{r_{13} - r_{12} \times r_{23}}{1 - r_2{}^2}$$

$$b_{12\cdot3} = \frac{3\cdot88}{2\cdot97} \times \frac{0\cdot71 - 0\cdot81 \times 0\cdot8}{1.08^2}$$

$$= \frac{3.88}{2.97} \times \frac{0\cdot78 - 0\cdot648}{0\cdot36} = \frac{3\cdot88 \times \cdot132}{2.97 \times 4\cdot36}$$

$$= \frac{0\cdot51216}{1\cdot0692} = 0\cdot4793$$

$$b_{13\cdot2} = \frac{3\cdot88}{2\ 86} \times \frac{0\cdot81 - 0\cdot78 \times 0.8}{1 - 0\cdot8^2}$$

$$= \frac{3.88}{2\cdot86} \times \frac{0\ 81 - 0\cdot624}{0\cdot36} = \frac{3\cdot88 \times 0\cdot186}{2\cdot86 \times 0\cdot36}$$

$$= \frac{0\cdot72168}{1\cdot0296} = 0\cdot7$$

$$a = \bar{x}_1 - b_{12\cdot3}\,\bar{x}_2 - b_{13\cdot2}\,\bar{x}_3$$

$$= 53.0\ 4793 \times 52 - 0.7 \times 51$$

$$= 53 - 24\cdot9236 - 35\cdot7 = -\ 7\cdot6236$$

$$= x_{1\cdot23} = a + b_{12\cdot3}\, x_2 + b_{13\cdot2}\, x_3$$

$$= -\ 7.6236 + 0\cdot4774\, x_2 + 0\cdot7\, x_3$$

∴ $x_2$, $x_3$ யின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது $x_1$-ன் மதிப்பை முன் கூட்டியே அறியலாம்.

**பகுதித் தொடர்புக் கெழு** (Partial Correlation Co-efficient)

பகுதித் தொடர்பில் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டாலும், இரு மாறிகள் ஒன்றையொன்று மாற்றம் ஏற்படுத்துவதாகக் கொள்கிறோம்.

(எ.கா) நெல் விளைச்சல், மழை அளவு, அன்றாடவெப்பநிலை என்ற மூன்று மாறிகளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது, மழை அளவுக்கும் விளைச்சலுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை, சராசரி அன்றாட வெப்பநிலையை மாறிலியாக எடுத்துக்கொண்டோமானால், அது பகுதித் தொடர்பாகிறது. மற்ற மாறிகளின் விளைவை மாறாதவையாகக் கொண்டு ஒரு சார்பற்ற மாறிக்கும் மற்றொரு சார்புள்ள மாறிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை ஆராய்வதுதான் பகுதித் தொடர்பாகும்.

பலதரத் தொடர்பில் சார்ந்தமாறி $y$-க்கும் சார்பற்றமாறிகள் $x_1$ $x_2$, $x_3$... $n$ என்ற எல்லா மாறிகளையும் ஒன்றாகக்கொண்டு அவற்றிக்கு உள்ள, தொடர்பை ஆராய்கிறோம்.

ஆனால், பகுதித்தொடர்பில், $y$-க்கும் $x_1$,$x_2$, ...... $n$-ல் ஒரு மாறியைமட்டும் எடுத்துக் கொண்டு, மற்ற மாறிகளின் விளைவை நீக்கிவிட்டுக் கணக்கிடுகிறோம்.

**பகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு**

$x_3$ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு $x_1$, $x_2$என்ற இரு மாறிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை ஆராயும் பகுதித் தெடார்புக் கெழு

$$r_{12\cdot 3} = \frac{r_{12} - r_{13}\cdot r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\ \sqrt{1-r_{23}{}^2}}$$

இதுபோலவே $r_{13\cdot 2} = \dfrac{r_{13} - (r_{12})(r_{23})}{\sqrt{1 - r_{12}{}^2}\sqrt{1 - r_{23}{}^2}}$

$r_{13\cdot 2}$ என்பது $x_2$வை மாறிலியாகக் கொண்டு $x_1$, $x_3$ இடையே உள்ள பகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு.

$$r_{23\cdot 1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}{}^2}\sqrt{1 - r_{13}{}^2}}$$ என்பது

$x_1$ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு $x_2$, $x_3$க்கு இடையேயுள்ள பகுதி தொடர்புக் கெழு.

$r_{12\cdot 34}$, $r_{13\cdot 24}$ முதலானவை இரண்டாம் வரிசை கெழுக்களாக கருதப்படுகின்றன (இருமாறிகள் மாறிலிகாளகக் கருதப்படுகிறது) இரு மாறிகளுக்குமட்டும் இடையே உள்ள உறவுக்கெழுவைப் பூச்சிய வரிசை எனக் கொள்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு மும்மாறிப் பரவலில் $r_{12} = 0.7$ $r_{23} = 0.4$, $r_{31} = 0.61$ $r_{23\cdot1}$, $r_{12\cdot3}$, $r_{13\cdot2}$ன்மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$\frac{r_{23\cdot1} r_{23} - r_{12} r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{13}^2}}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்

$$r_{23\cdot1} = \frac{\cdot4 - \cdot7 \times \cdot61}{\sqrt{1-(\cdot7)^2}\sqrt{1 - r_{13}^2}}$$

$$= \frac{.4 - \cdot427}{\sqrt{.5}\sqrt{1 - \cdot372}}$$

$$= \frac{- \cdot027}{\cdot714 \times \cdot793}$$

$$= - \cdot048$$

$$r_{13\cdot2} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{\cdot61 - (\cdot7)(\cdot4)}{\sqrt{1 - (\cdot7)^2}\sqrt{1 - (\cdot4)^2}}$$

$$= \frac{\cdot33}{\sqrt{\cdot15}\sqrt{\cdot84}} = \frac{\cdot33}{\cdot714 \times \cdot916} = \mathbf{.505}$$

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{-r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{\cdot7 - (\cdot61 \times \cdot4)}{\sqrt{1 - (\cdot61)^2}\sqrt{1 - (\cdot4)^2}}$$

$$= \frac{\cdot7 - 224}{\sqrt{1\cdot372}\sqrt{1 - \cdot16}} = \frac{\cdot456}{\sqrt{\cdot627 \times 84}} = \mathbf{\cdot627}$$

**இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல்** (Bivariate Normal Distribution)

ஒரு மாறிக்கான இயல்நிலைப் பரவலை இரு மாறிகளுக்குப் பொதுப்படுத்துவது இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலாகும். இதை

நிறுவுவதற்குக் கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

(i) $X$-ன் மேல் $Y$-ன் உறவுக்கோடு ஒரு படியுடையது. எனவே, கூட்டுச்சராசரியின் ஒவ்வொரு வரிசையும் $Y = \gamma \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ என்ற உறவுக்கோட்டின்மேல் அமைகிறது. $Y$-ன் கூட்டுச் சராசரி அல்லது எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $\frac{\gamma \sigma_2}{\sigma_1}$ $X$-ல், $X$-ன் மதிப்புகளுக்குத் தக கிடைக்கிறது.

(ii) கூட்டுச்சராசரியும், பரவற்படியும் ஒவ்வொரு வரிசை அமைப்பிலும் சமமாக இருக்கும் எனவே, $Y$-ன் பொது பரவற்படி மதிப்பு ஒவ்வொரு வரிசையிலும் $\sigma_2^2 (1 - \gamma^2)$ என்பதன் மூலம் கிடைக்கிறது ($\gamma$ என்பது ஒட்டுறவுக் கெழு).

(iii) $Y$-ன் பரவல் பல்வேறு வரிசையமைப்புகளில் இயல் நிலையாக இருக்கும். அந்த மாறிகளில் ஒன்று ($X$) கூட்டுசராசரி பூச்சியமாகவும், திட்டவிலக்கம் $\sigma$ ஆகவும் இருக்கும்படி இயல் நிலைப் பரவலில் அமைந்திருந்தால் சமவாய்ப்பு மாறி $X$-ன் மதிப்பு $dx$ என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$dP = g(n)\, dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1}\, e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right)} dn$$ என்னும்படி அமைகிறது.

நெட்டுப் பிரிவில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் $Y$-ன் மதிப்பு $dy$ என்ற சிறிய இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $h\left(\frac{y}{x}\right) dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \gamma^2}}\, e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2 (1-\gamma^2)} \left(y - \gamma x \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right]}$$

என்னும்படி அமைகிறது.

$X$, $Y$-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு வகையீடு $dP(x, y)$

$$= g(x) \cdot h\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{(1-\gamma^2)}}\; e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2}\cdot x^2\right]}$$

$$\times\, e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\gamma^2)}\left(y-\gamma\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{1-\gamma^2}} \times e^{\left[-\frac{1}{2(1-\gamma^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\gamma\, xy}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]}$$

ஆதியை $(m_1, m_2)$-க்கு மாற்ற

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{1-\gamma^2}}$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1(1-\gamma^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2\gamma\frac{(x-m_1)(x-m_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(y\,m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$

இங்கு $m_1$, $m_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ $(> 0)$, $\gamma$ $(-1 < \gamma < 1)$ என்பவை பரவலின் 5 பண்பலகுகள்.

இது இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பாகும். $X$, $Y$ என்ற மாறிகள் இயல்பாக உறவு கொண்டுள்ளன. $Z=f(xy)$ என்பது இயல்நிலை ஒட்டுறவுப் புறப்பகுதி (Normal correlation surface) எனப்படும்.

இயல்நிலை ஒட்டுறவுப் புறப்பகுதியின் சில பண்புகளை இங்குக் காண்போம்.

(i) விளிம்பு பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = K\int_{\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{y}{\sigma y}-\frac{\rho x}{\sigma x}\right)^2+\frac{x^2(1-\rho^2)}{\sigma x^2}\right\}\right]dy$$

$$K = \frac{1}{2\pi\,\sigma_x \cdot \sigma_y\,\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$g(x) = K\,exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\,\frac{x^2(1-\rho^2)}{\sigma^2}\right\}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y}{\sigma_y}-\frac{\rho x}{\sigma x}\right)\right\} dy$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y}{\sigma_y}-\frac{\rho x}{\sigma_x}\right) \text{ என்க.}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y}\,dy.$$

$$g(x) = K\,exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma'^2}\right)\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma_x^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

இந்தத் தொகையின் மதிப்பு 1.

$$\therefore\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma_x^2}\right)$$

(ii) மாறிகளின் உறவு நேர்கோட்டமைப்பை உடையது.

$\eta x$ = கொடுக்கப்பட்ட $x$-க்கு $y$-ன் சராசரி மதிப்பு என்க.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x, y)}{g(x)}\,dy.$$

$$= K \frac{1}{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x \cdot \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right] ydy$$

$$= K \frac{1}{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left( \frac{y}{\sigma_y} - \frac{\rho x}{\sigma_x} \right)^2 + \frac{x^2(1-\rho^2)}{\sigma_x^2} \right\} \right] ydy$$

$$= K \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot exp\left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp \left\{ -\frac{\left( \frac{y}{\sigma_y} - \frac{\rho x}{\sigma_x} \right)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} ydy$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{y}{\sigma_y} - \frac{\rho x}{\sigma_x} \right)$$ என்க.

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y} dy.$$

$$= K \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x \int_{-\infty}^{\infty} exp\left( -\frac{t^2}{2} \right)$$

$$\left[ \sqrt{1-\rho^2}\, t + \frac{\rho x}{\sigma_x} \right] \sigma_y \cdot \sqrt{1-\rho^2}\, \sigma_y \, dt$$

$$\eta_x = K \cdot \sqrt{2\pi}\, \sigma_x \sqrt{1-\rho^2}\, \sigma_y$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} exp\left( -\frac{t^2}{2} \right) t \sqrt{1-\rho^2}\, dt + \frac{\rho x\, \sigma_x}{\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left( -\frac{t^2}{2} \right) dt \right\}.$$

ஆனால் $\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) t\, dt = 0$

$$\therefore \quad \eta_x = \frac{1}{2\pi\, \sigma_x \cdot \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \frac{\rho x\, \sigma_y}{\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= \left(\frac{\rho\, \sigma_y}{\sigma_x}\right) x.$$

∴ உறவு நேர்க்கோட்டமைப்பை உடையது.

(iii) ஒவ்வொரு வரிசையும் (each array) இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளது.

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{\sqrt{2\pi}\, \sigma_x \cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\, \sigma_x \cdot \sigma_y \sqrt{1-p^2}}\; exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}\, e - \frac{2\,exy}{\sigma_x \cdot \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

$$= \frac{e\; p\left(\frac{x^2}{2\,\sigma_x^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}}\; exp$$

$$\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{y}{\sigma_y} - \frac{\rho x}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{x^2(1-\rho^2)}{\sigma_x^2}\right]$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{{}^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\,\sqrt{1-\rho^2}}\exp$$

$$\left[-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{y}{\sigma_y}-\frac{\rho x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\,\sqrt{1-\rho^2}}\, e\,p$$

$$\left[-\left(y-\frac{\rho\,\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2 \Big/ 2\,\sigma_y^2\,(1-\rho^2)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y'}\exp\left[-(y-\eta_x)^2 \Big/ \frac{2}{2\,\sigma_y'^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y'}\exp\left[-(y-\eta_x)^2 \Big/ 2\,\sigma_y'^2\right]$$

இங்கு $\sigma_y' = \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$

∴ ஒவ்வொரு வரிசையும், $\sigma_x$-ஐக் கூட்டுச்சராசரியாகவும், $\sigma'_y$ திட்டவிலக்கமாகவும் உடைய இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

$\sigma'_y$, $x$-ஐச் சார்ந்து அமையாதலால், எல்லா வரிசைகளுக்கும் ஒரே பரவற்படி.

### பயிற்சி

(1) தந்தை, மகன் உயரங்களைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது. ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| தந்தையின் உயரம் (அங்குலத்தில்) | 65 | 66 | 67 | 67 | 68 | 69 | 71 | 72 | 73. |
| மகன் உயரம் (அங்குலத்தில்) | 67 | 68 | 64 | 68 | 72 | 70 | 7 | 69 | 70. |

மாறிகளின் உறவுக் கோடுகளைக் காண்க. தந்தையின் உயரம் 67·5″ என்னும்போது மகனின் உயரம் என்ன ?

[விடை : $r = \cdot 525$, $\bar{y} - 68\cdot 5 = 424\,(x - 68\cdot 25)$, $x - 6\cdot 25 = 525\,(\bar{y} - 68\cdot 5)$ $x = 67\cdot 5''$ என்னும்போது $y = 68\cdot 18''$.]

(2) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணகிடுக.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ : | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 |

$x$, $y$ ன் ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. $x$ன் மதிப்பு 6·2 எனில் $y$-ன் மதிப்பு என்ன ?

[விடை : $r = \cdot 95$, $y - 12 = \cdot 95\ (x - 5)$, $x - 5 = \cdot 95\ (y - 12)$ ; $x = 6\cdot 2$ எனில் $y = 13\cdot 14$ ]

(3) கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தில் $x$, $y$-களின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 5 | 15 | 12 | 13 | 6 |
| $y$ | 13 | 16 | 28 | 22 | 24 | 12 |

[விடை : $r = \cdot 94$]

(4) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 100 மனிதர்களின், உயரம், பருமனைக் காட்டும் இருவழி அலைவுப் பரவலாகும்

பருமன் (பவுண்டில்)

| $y$ \ $x$ | 80 — 90 | 90 — 100 | 100 - 100 | 110 — 120 | 120 — 130 |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 — 55 | 1 | 3 | 7 | 5 | 2 |
| 55 — 60 | 2 | 4 | 10 | 7 | 4 |
| 60 — 65 | — | 3 | 8 | 6 | 3 |
| 65 — 70 | 4 | 15 | 37 | 28 | 16 |

—பருமனுக்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

(5) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டும் $x$, $y$ன் உறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

| $y$ \ $x$ | 41 — 45 | 36 — 40 | 31 — 35 | 26 — 30 | 21 — 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 — 5 | — | — | — | 9 | 15 |
| 6 — 10 | — | — | 10 | 11 | — |
| 11 — 15 | — | 7 | 9 | 4 | — |
| 16 — 20 | — | 13 | 5 | — | — |
| 21 — 25 | 14 | 3 | — | — | — |

(6) ஓர் அழகுப் போட்டியில் 10 தங்கைகளுக்கு $A$, $B$ என்ற இரு நீதிபதிகள் அளித்த தரமதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இரு நீதிபதிகளும் பொதுவான அழகுக் கண்ணோட்டமுடைய வர்களா என்பதை ஆய்க :

$A$ : 6, 4, 3, 1, 2, 7, 9, 8, 10, 5

$B$ : 4, 1, 6, 7, 5, 8, 10, 9, 3, 2

(7) ஓர் அரையாண்டுத் தேர்வில் 15 மாணவர்களுக்கு $x$, $y$ என்ற இரு நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டு உள்ளன. மதிப்பெண்களிடையே தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

$A$ : 36, 42, 35, 29, 45, 53, 48, 40, 35, 37, 44, 53, 62, 41, 25

$B$ : 68, 59, 46, 84 48, 59, 60, 45, 54, 53, 58, 8`, 75, 64, 70.

(8) $x$, $y$. உறவுள்ள இருமாறிகள் $u = x + y$; $v = x - y$: $u$, $v$ களுக்கிடையே உள்ள உறவுக் கெழுவினை, அவ்விரு மாறி களின் திட்ட விலக்கங்களில் காண்க. $\left[\text{விடை } \frac{\sigma^2 - \sigma^2 x}{\sigma^2 + \sigma,^2}\right]$

(செ. ப.)

(9) (அ) 60 ஜோடி மதிப்புகளுக்கு இரு உறவுக்கோடுகள் : $5x = 6y + 24$; [ப.96]

$1000y = 768x - 3608$. ஒட்டுறவுக் கெழு யாது ?

(ஆ) ஓர் உறவுப் பட்டியல் தரும் உறவுக் கோடுகள்;

$x + 2y = 5, \quad 2x + 3y = 8$, $x, y$-ன் உறவுக் கெழுவினைக் காண்க. $\bar{x}, \bar{y}$ யாவை ?

(10) (அ) கீழ்க்கண்ட புள்ளி விபரத்திற்கேற்ற உறவுக் கோடுகளை காண்க.

$$n = 25, \Sigma x = 125, \Sigma x^2 = 65`, \Sigma y^2 = 46, \Sigma xy = 50.8$$

(ஆ) $x$, $y$ன் உறவுக்கெழு '$r$' உறவுக் கோடுகள் $3x + 2y = 26$. $6x + y = 31$. உறவுக்கெழுவினைக் காண்க. $x$, $y$களின் கூட்டுச்சராசரிகளையும் காண்க. ($\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 7$, $r = -.5$)

(11) (அ) $3x = 4y + 9$; $1^{\varsigma}y = 6x + 7$ என்பவை உறவுக் கோடுகள் $x$, $y$ களின் கூட்டுச்சராசரிகளையும், பரவற்படி விகிதத்தையும் காண்க.

(ஆ) $x$, $y$-களின் பரவற்படிகளின் கூடுதல் 8 எனில், $x$, $y$ களின் ஒட்டுறவுக்கெழு யாது ?

(இ) $\Sigma x = 436$ $\Sigma u^2 = 24,640$. $\Sigma xy = 26,796$ $\Sigma y = 479$ $\Sigma y^2 = 29,184$ $n = 8$. $\bar{x}$, $y$, $\sigma_x$, $\sigma_,$, $\sigma_y$, $r$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(12) $x, y$ என்பவை இரு மாறிகள். $\bar{x} = \bar{y}$. அவற்றின் உறவுக்கோடுகள் $y = ax + b$ $x = a'y + b'$ எனில், $b(1 - a') = b'(1 - a')$ என நிறுவுக. இவற்றிலிருந்து $\bar{x}$ ன் மதிப்பையும், உறவுக் கெழுவின மதிப்பையும் காண்க. ஒட்டுறவுக் கெழு என்ன என்பதனை வரைந்து பொருள் தருக. அது எண்ணிக்கையில் ஒன்றிற்கு மேற்படாது என நிறுவுக. (மார்ச் 1974 செ.ப)

(13) (அ) $x, y$ உறவற்ற இருமாறிகள் $x, y$-ன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே$\sigma_x \sigma_y$ என்றால் $\sigma_x + y^2 = \sigma_x - y^2$ $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ என நிறுவுக.

(ஆ) $x$, $y$ என்பன தொடர்புள்ள இரு ராண்டம் மாறிகள் ஆனால் $\sigma_x^2 - y\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2b\sigma_x \sigma_y$ எனக் காட்டு (செ. ப.1974)

இந்த வாய்பாட்டை பயன்படுத்தி $r\,xy = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x^2 - y/2r\sigma_x \sigma_y$ என நிறுவுக. தம்பதிகளின் வயதுகளுக்கிடையே காணும் ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் காண்க.

$x$ — கணவனின் வயதைக் குறிப்பிடும் மாறி.

$y$ — மனைவியின் வயதைக் குறிப்பிடும் மாறி.

$x$ : 22, 24, 24, 26, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37

$y$ : 18 20, 20, 24, 22, 27, 21, 29, 27, 27, 31, 30, 32

(14) $x$ மாறியின் பரவற்படி 9 எனவும், தொடர்புக் கோடுகள் $4x - 5y + 33 = 0$, $20x - 9y - 107 = 0$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டால், $y$ மாறியின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம், ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$(\bar{y} = 17, \sigma y = 4, r = \frac{3}{5})$

$S_x$, $S_y$-ன் மதிப்புகள் யாவை ?

$(S_x = 2\frac{2}{5} . S_y = \frac{3}{5} .)$

(15) $x$ ,$y$ என்ற இரு சார்பற்ற மாறிகளின் கூட்டுச்சராசரி களின் முறையே 5, 10; பரவற்படிகள் முறையே 4. 9; மாறிகள் $u = 3 + 4y$ $v = 3x - y$ சார்பற்றவை எனக் காட்டுக.

(16) இரு தேர்வுகளில் மாணவரது மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| தேர்வு I | 1 | 13 | 17 | 14 | 18 | 12 | 20 | 16 | 18 | 17 | 19 | 21 |
| தேர்வு II | 18 | 16 | 18 | 15 | 19 | 16 | 18 | 15 | 21 | 17 | 18 | 20 |

ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும், தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும் காண்க.

(17) $x$, $y$க் கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு $r$ என்றால் $2x + 3$, $4-3y$—க்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க. $[\sigma 2x + 3, 4\text{-}3y = -r]$ (செ. ப. 67)

(18) மூன்று மாறிகளுக்கு இரண்டிரண்டாக ஒட்டுறவுக் கெழுக்களைக் கணக்கிட்டதில், $r_{12} = 0{\cdot}8$, $r = _{13} = -0.7$, $r_{23} = -0{\cdot}9$ என வருகிறது. $x_2, x_3$—ன் மீது $x_1$—ன் பல்தர இடைத்தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க. $r_{12}$. என்ன ?

[விடை · $R_{1\cdot 23} = 0.80$, $r_{12\cdot 3} = {\cdot}54$]

(19) "கல்வித்தேர்ச்சி" குறித்து, 450 மாணவர் கொண்ட கூறு ஒன்றின்மீது நடத்திய ஆராய்ச்சியில் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன,

| | | |
|---|---|---|
| $X_1$ = சிறப்பு மதிப்பெண்கள் | $X_2$ = பொது அறிவு | $X$ = படிக்கும் கால அளவு |
| $\bar{X}_1 = 18\ 5$ | $\bar{X}_2 = 1\cdot 0{\cdot}6$ | $\bar{X}_3 = 24$ |
| $\sigma_1 = 11{\cdot}2$ | $\sigma_2 = 15.8$ | $\sigma_2 = 6$ |
| $r_{123} = 0{\cdot}60$ | $r_{13} = .32$ | $r_2 = -0{\cdot}35$ |

பொது அறிவிற்கும், சிறப்பு மதிப்பெண்களுக்கும் (ஒவ்வொரு வாரமும் படிப்பிற்காகச்செலவிடும் கால அறிவு மாறிலியாக உள்ள போது) இடையே உள்ள தொடர்புக் கெழுக்களைக் காண்க.

[விடை $r_{12\cdot 3} = 0{\cdot}80$ ; $r_{1\cdot 2} = 0{\cdot}71$, $r_{2\cdot 1} = -0{\cdot}721$]

(20) ஓர் இருமாறிப்பரவலில் உறவுக்கோடுகளின் சமன் பாடுகள் $x$ $4y = 1, 9$ $y = 44.$ $r,$ $\sigma:\sigma_y$ முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி இவற்றைக் காண்க.

[விடை : $\frac{r\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{1}{9}$, $\frac{r\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{6}$, $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{3}{2}$

$\bar{x} = 5, \bar{y} = 1$]

(21) $X, Y$ என்பன முறையே $(1, -2)$ சராசரிகளாகவும், $(1, 2)$ பரவற்படிகளாகவும், $0{\cdot}6$ உடன் தொடர்புக் கெழுவும் கொண்ட இயல்நிலை மாறிகளானல், இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலின் அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க. $X = 0{\cdot}3$ எனின், $y$ நிபந்தனை மாறியின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

# 3. பண்புகளின் உறவு

## (Association of Attributes)

பொதுவாகப் பாகுபடுத்தலை இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். சமயம், பால் போன்ற தன்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகுபடுத்தலைத் தன்மை அளவைப் பாகுபாடு (qualitative), வயது, வருவாய் போன்ற எண் அளவையினை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகுபாட்டினை எண் அளவைப் பாகுபாடு (quantitative) எனக் கொள்ளலாம். இத்தன்மையளவைப் பாகுபாடே பண்பு அளவைப் பாகுபாடு என்றும் கூறப்படும்.

கல்வியுடைய தன்மை, நிலமுடைய தன்மை, மணமான தன்மை, புத்திக்கூர்மைத் தன்மை போன்ற தன்மைகளைப் பண்புகள் (attributes) எனப் புள்ளியியலில் குறிக்கின்றோம். இத்தகு பண்புகளை $A, B, C,$ ........ என்ற எழுத்துகளாலும், அப் பண்புகளற்ற கல்லாத்தன்மை, நிலமில்லாத்தன்மை, மணமாகாத்தன்மை, புத்தி கூர்மையற்ற தன்மை போன்ற எதிர் மறைத்தன்மைகளை $\alpha, \beta, \gamma,$ ...... என்ற எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுகின்றோம். $A$ என்ற தன்மையைக் கொண்ட தனி நபர்கள் அனைவரையும், $A$ இனத்தைச் சேர்ந்தவர்கள் என்கிறோம். அதாவது $A$ பண்பினைக் கொண்டவர்களை $(A)$ எனக் குறிக்கின்றோம்; $\alpha$ தன்மை உடைய நபர்களை $(\alpha)$ என்று குறிக்கிறோம். $A$யும், $\alpha$வும் ஒன்றுக் கொன்று எதிர் மறையாதலால் $(A\alpha)$ இருக்க முடியாது.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பண்புகளைப் பெற்றவர்களை, அதற்கேற்ற எழுத்துகளை அருகருகில் எழுதுவதன் மூலம் குறிக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக, $A$ உயரத்தையும், $B$ புத்திகூர்மையையும் குறிப்பதாக நின்றால், உயரமான, புத்திக் கூர்மைஉள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கையை $(AB)$ என்று குறிக்கிறோம். ஆய்வுத் தொகையிலுள்ள மொத்த எண்ணிக்கை $N$ எனில்,

$N = (A) + (\alpha) = (B) + (\ \ ) = (C) + (\gamma)$ என்பது எளிதில் புலனாகும்.

மேலும் $N = (AB) + (A\ \ ) + (\ \ B) + (\alpha\beta)$

$$(A) = (AB) + (A\ \ ),\ (B) = (AB) + (\alpha B)$$

$(A), (B), (\alpha)$ முதலியன ஓரினப் பண்பலைவெண்கள்

$(AB); (A\beta), (\alpha\beta)$ ... என்பன ஈரினப் பண்பலைவெண்கள்

$(ABC); (A\beta C); (A\beta\gamma)$ ... என்பன மூவினப் பண்பலை வெண்கள்

$N$ ஆனது பூச்சிய இன அலைவெண்ணாகும்.

ஈரினப் பண்பலைவெண்ணை மூவினப் பண்பலைவெண்களின் கூடுதலாகவும் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $(AB) = (ABC) + (AB\gamma)$ அதாவது $A$, $B$ என்ற இரண்டு தன்மைகளையும் கொண்டவர்களை, $A$, $B$, $C$ என்ற மூன்று தன்மைகளையும் கொண்டவர்கள் $+$ $A$, $B$, $\gamma$ என்ற மூன்று தன்மைகளைக் கொண்டவர்கள் என்று இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

**புள்ளி விவரத்தின் மெய்நிலை (Consistency of Statistical Data)**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரங்கள் மெய்யானதாக இருக்க வேண்டுமெனில், பண்பலை வெண்கள் பூச்சியமாகவோ, நேர் மறை எண்களாகவோ இருத்தல் வேண்டும். அவை எதிர் மறை எண்களாக இருத்தல் கூடாது. புள்ளி விவரத்தின் மெய் நிலையை ஆராய அலைவெண்கள் யாவும் நேர்மறை எண்களே என்று நிறுவினால் போதுமானது.

ஓர் முழுமைத் தொகுதியை உள்ள மொத்த எண்ணிக்கை $N$ ஆனல், அதில் $(A)$ பண்பு கொண்டவர்களை $(A)$ என்கிறோம். எனவே $AN = (A)$; இதேபோன்று $\alpha N = (\alpha)$

$$(A) + (\alpha) = N \cdot A + \alpha \cdot N = (A + \alpha) N$$

$$\text{ஆனால் } N = (A) \cdot (\alpha)$$

$$\therefore \quad (A + \alpha) = 1 \cdot \quad \alpha = 1 - A \text{ அல்லது } A = 1 - \alpha$$

மேலும் $(\alpha\beta) = \alpha\beta \cdot N$

$$= (1 - A)(1 - B) N = (1 - A - B + AB) N$$

$$= N - (A) - (B) + (AB)$$

$$(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma \, . \, N = (1-A)(1-B)(1-C)\, N$$
$$= (1-A-BC+AB+AC+BC-ABC)\, N$$
$$= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(AC)+(BC)-(ABC)$$

எடுத்துக்காட்டு :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களினின்று, மற்றப் பண்பளவெண்களைக் காண்க.

$$N = 50, \quad (A) = 35, \quad (B) = 35, \quad (AB) = 15$$

தீர்வு :

மற்ற பண்பளவெண்கள் $(\alpha)$, $(\beta)$ $(A\beta)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha B)$

$$(\alpha) = N - (A) = 50 - 25 = 25$$
$$(B) = N - (B) = 50 - 35 = 15$$
$$(A\beta) = (A) - (AB) = 5 - 15 = 10$$
$$(\alpha B) = (B) - (AB) = 35 - 15 = 20$$
$$(\alpha\beta) = (\alpha) - (\alpha B) = 25 - 20 = 5$$

$(\alpha\beta)$ ஐ மற்றொரு முறையிலும் காணலாம்

$$(\alpha\beta) = N-(A)-(B)+AB = 50-25-35+15 = 5$$

எடுத்துக்காட்டு :

$N = 1000$; $(A) = 525$; $(B) = 312$; $(C) = 41$; $(A\beta) = 483$;

$(A\gamma) = 378$; $(B\gamma) = 226$; $(ABC) = 25$ இப் புள்ளி விபரத்தின் மெய்த் தன்மையை ஆய்க (அல.ப.)

தீர்வு :

$$(\alpha\beta\gamma) = (1-A)(1-B)(1-C\;\; N$$
$$= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(AC)+(BC)-(ABC)$$
$$= N-(A)-(B)-(C)+[(A)-(A\beta)] + [(A)-(A\gamma)] + [(B)-(B\gamma] - (ABC)$$
$$= 1000-525-312-410+525-483+525 - 378+312-226-25$$
$$= 3$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விபரம் மெய்யானது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$(A) + 76; (B) = 170; C = 96; (AB) = 59.$

$N = 200$

$BC = 70; (AC) = 39; (ABC) = 25$ மூவினப் பண்பலை வெண்களைக் காண்க

$$(AB\gamma) = (AB) - (ABC) = 59 - 25 = 34$$

$$(A\beta C) = (AC) - (ABC) = 39 - 25 = 14$$

$$(\alpha BC) = (BC) - (ABC) = 70 - 25 = 45$$

$$(A\beta\gamma) = (A) - (AB) = (AC) + (ABC)$$
$$= 76 - 59 - 39 + 25 = 3$$

$$(\alpha\beta\gamma) = (B) - (AB) - (BC) + (ABC)$$
$$= 170 - 59 - 70 + 25 = 66$$

$$(\alpha\beta C) = (C) - (AC) - (BC) + (ABC)$$
$$= 96 - 39 - 70 + 25 = 12.$$

$$(\alpha\beta r) = N - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) + (BC) - (ABC)$$
$$= 200 - 76 - 170 - 96 + 59 + 39 + 70 - 25 = 1.$$

[குறிப்பு : புள்ளி விவரங்களின் மெய்த்தன்மையை ஆராய எந்தப் பிரிவின் அலைவெண்ணும் எதிர்க்குறியுடையதாக இருக்க லாகாது எனக் கூறினோம். எல்லா பண்பலைவெண்களையும், இறுதிப் பிரிவு அலைவெண்களின்மூலம் எடுத்துக்கூற இயலு மாதலால், புள்ளிவிவரங்கள் ஒன்றோடொன்று முரண்பாடாக இல்லாமலிருப்பதை உறுதியாக்க, எல்லா இறுதிப் பிரிவு அலை வெண்களையும் எதிர்க்குறி அற்றவை என நிறுவலாம்.]

(i) ஒரு பண்பினை மட்டும் எடுத்துக்கொள்ளும்போது,

(அ) $A \nless 0$

(ஆ) $(A) \ngtr N, \alpha \nless 0$

(ii) இரு பண்புகளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது,

(அ) $(AB) \nless 0$

(ஆ) $(AB) \ngtr A$ [இவ்வாறு இல்லையெனில் $(A\beta)$ எதிர்க்குறி உடையதாகும்.]

(இ) $(AB) \ngtr (B)$ [இவ்வாறு இல்லையெனில் $(\alpha\beta)$ எதிர்க்குறி உடையதாகும்.]

(ஈ) $(AB) \nless (A) + (B) - N$ [இல்லாவிடில் $(\alpha\beta)$ எதிர்க்குறி உடையதாகும்.]

மேலும், இரு பண்புகளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது,

$(A) \nless 0, (B) \nless 0$

$(A) \ngtr N, (B) \ngtr N$ என்ற நிபந்தனைகளும் திருப்தி செய்யப்படுகின்றன.

(iii) 3 பண்புகளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது, பின்வரும் சமனிலிகளைப் பயன்படுத்தவேண்டும். இல்லையெனில் வலப்புறத்தே தரப்பட்டுள்ள அலைவெண் எதிர்க்குறி உடையதாகிவிடும்.

| | | |
|---|---|---|
| (அ) | $(ABC) \nless 0$ | $(ABC)$ |
| (ஆ) | $(ABC) \nless (AB) + (AC) - (A)$ | $(ABr)$ |
| (இ) | $(ABC) \nless (AB) + (BC) - (B)$ | $(\alpha Br)$ |
| (ஈ) | $(ABC) \nless (AC) + (BC) - (C)$ | $(\alpha\beta C)$ |
| (உ) | $(ABC) \ngtr (AB)$ | $(ABr)$ |
| (ஊ) | $(ABC) \ngtr (AC)$ | $(A\beta C)$ |
| (எ) | $(ABC) \ngtr (BC)$ | $(\alpha\beta C)$ |
| (ஏ) | $(ABC) \ngtr (AB)+(BC)+(CA)-(A)-(B)-(C) + N$ | $(\alpha\beta r)$ |

சமனிலிகள் (அ), (ஏ) ஐக் கொண்டு,

$(AB) + (AC) + (BC) \nless (A) + (B) + (C) - N$ எனப் பெறலாம்.

(ஆ), (எ) யிலிருந்து, $(AB) + AC) - (BC) \ngtr (A)$

இதுபோன்றே, $(AB) + (AC) - (BC) \ngtr (B)$

$(AC) + (BC) - (AB) \ngtr (C)$

மற்றப் பிரிவு அலைவெண்களைப் பற்றிய முழுவிவரமும் தெரிய வேண்டுமாயின், $2^n$பிரிவு அலைவெண்கள் அறியப்படவேண்டும்.

எல்லா தனிப்பட்ட நேர் அலைவெண்களும் தெரிந்தால், ஏனைய அலைவெண்கள் முழுமையும் அறியலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை முழுமையாக அறிந்திராவிடில், குறிப்பிட்ட எல்லை களுக்குள், பிரிவு அலைவெண்கள் காணப்படுவதைக் கண்டறிய லாம்.

**பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை** (Independence of Attributes)

இரு பண்புகளுக்கு, ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு இல்லை யெனில், அந்த இரு பண்புகளைத் தொடர்பிலாப் பண்புகள் அல்லது சார்பிலாப் பண்புகள் என்கிறோம். $A, B$ இரு தொடர் பிலாப் பண்புகளைக் குறிக்கட்டும். அவை யிரண்டும் தொடர் பிலாப் பண்புகள் எனக் கொள்வதால் $A$-ல் $B$-ன் விகிதசமமும், $B$-ல் $A$-ன் விகித சமமும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $$\frac{(A\,B)}{(B)} = \frac{(A\,\beta)}{(\beta)}$$

$$\frac{(A\,B) + (A\,\beta)}{(B) + (\beta)} = \frac{(A)}{N}$$

$$\therefore \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A)}{N}$$

அதாவது $N$-ல் $A$-ன் விகிதசமமும், $B$-ல் $A$-ன் விகித சமமும் சமம். அதாவது $B$ தன்மை இருப்பதனுல் $A$ தன்மை கொண்டோர்களின் எண்ணிக்கை கூடவோ, அன்றிக் குறையவோ செய்யாது.

$$(AB) = \frac{(A)\,(B)}{N} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N}\,\frac{(B)}{N}$$

$\frac{(A)}{N}$ என்பது ஆய்வுத்தொகையிலுள்ள மொத்த எண்ணிக்கை $N$-ல், $A$ பண்பு நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு. இதேபோன்று $\frac{(B)}{N}$ என்பது $N$-ல், $B$ பண்பு நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு. எனவே, $A$-ம், $B$-ம் சார்பற்ற பண்புகளாக இருக்கும்பொழுது $A$-ம் $B$-ம் சேர்ந்து நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, [$N$-ல், $A$ பண்பு நிகழ்வதற் குரிய நிகழ்தகவு $X$ $N$-ல், $B$ பண்பு நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவிற்குச் சமம்.]

$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(AB)}{(\beta)}$ எனில் கீழ்க்காணும் தொடர்புகளை நாம் எளிதில் நிறுவலாம்.

$$\frac{(\alpha B)}{(B)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\beta)};\quad \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha\ )}{(\alpha)};\quad \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)};$$

**தேற்றம்**

$N$ மொத்த எண்ணிக்கையாக இருக்கும்பொழுது $m$ பண்புகளுக்கு $(ABC......$ $m$ உறுப்புகள்$) \geq [(A) + (B) + (C) + ......] - (m-1) N$

**நிறுவுதல்**

$(\alpha\beta) \geq 0$[ ∴ எப் பண்பளவெண்ணும் எதிர்மறையன்று.]

அதாவது $(1-A)\ (1-B)\ N \geq O$

$$N\ \ (A) - (B) + (AB) \geq 0$$

$$(AB) \geq (A) + (B) - N \qquad (1)$$

இதனை முழுமைத் தொகுதி $C$-க்குப் பொருத்தும்போது,

$$(ABC) \geq (AC) + (BC) - (C) \qquad ...\ (2)$$

ஆனால் $\left.\begin{array}{l}(AC) \geq (A) + (C) - N \\ (BC) \geq (B) + (C)\ - N\end{array}\right\}$ தொடர்பு (1)-ன் படி.

இவற்றைத் தொடர்பு (2)-ல் பிரதி செய்ய

$$(ABC) \geq (A) + (B) + (C) - 2N$$

இதனை $m$ பண்புகளுக்கு விளக்க

$$(ABC......) \geq (A) + (B) + (C) + ......(m-1)\ N$$

**எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :**

ஒரு தேர்வில் 70% மாணவர்கள் கணிதத்திலும், 95% தமிழிலும், 60% ஆங்கிலத்திலும் தேர்ச்சி பெறுகின்றனர். குறைந்தது எவ்வளவு பேர் அத் தேர்வில் தேர்ச்சி பெறுகின்றனர்?

ஆங்கிலத்தில் தேர்ச்சியை $A$ என்க.

தமிழில் தேர்ச்சியை $B$ என்க.

கணிதத்தில் தேர்ச்சியை $C$ என்க.

$(ABC) \geq (A) + (B) + (C) - 2N$

அதாவது $(ABC) \geq 60 + 95 + 70 - 200$

$(ABC) \geq 25$

குறைந்தது 25% மாணவர்கள் எல்லாப்பாடங்களிலும் தேர்ச்சி பெற்றிருக்க வேண்டும்

**பண்புகளின் உறவு (Association of Attributes)**

இரு பண்புகள் தொடர்பிலாப் பண்புகளாக இல்லாமல் இருந்தால், அந்த இரு பண்புகளுக்கிடையே உறவு உண்டு என்பதாகும் அச்சமயத்தில்

$$\frac{(AB)}{(B)} \neq \frac{(AB)}{(\cdot)} \text{ அல்லது } \frac{(AB)}{(B)} \neq \frac{(A)}{N}$$

$\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A)}{N}$ (i) அல்லது. $\frac{(AB)}{(B)} < \frac{(A)}{N}$ (ii) இருக்க வேண்டும்.

(i) முதல் கட்டுப்பாட்டில் $N$-ல், $A$-ன் விகித சமம், $B$-ல் $A$-ன் விகித சமத்தைவிடக் குறைவானது. $B$ இருப்பதனால் $A$ ன் எண்ணிக்கை கூடுகிறது. $A$-க்கும் $B$-க்கும் நேரிடைத் தொடர்பு உண்டு.

(ii) ஆவதில் $N$-ல், $A$-யின் விகித சமம், $B$-யில் $A$-யின் விகித சமத்தைவிட அதிகமானது. $B$ இருப்பதனால் $A$ யின் எண்ணிக்கை குறைகிறது. $A$-க்கும் $B$-க்கும் எதிரிடைத் தொடர்பு உண்டு.

$$\delta = (AB) - \frac{(A)(B)}{N} \text{ எனக் குறித்தால்,}$$

$A$, $B$ தொடர்பிலாப் பண்புகள் எனில் $\delta = 0$

$A$, $B$ நேரிடைத் தொடர்புள்ள பண்புகள் எனில் $\delta > 0$

$A$, $B$ எதிரிடைத் தொடர்புள்ள பண்புகள் எனில் $\delta < 0$

**எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :**

பின்வரும் விவரங்களில் $A$-க்கும், $B$-க்கும் இடையே எத்தகைய தொடர்பு உள்ளது எனக் காண்க.

$$(A) = 120,\ (B) = 150,\ (AB) = 40$$
$$N = 400$$

$$\frac{(A)(B)}{N} = \frac{120 \times 15}{40} = 45; \quad (AB) = 40$$

$$\therefore \quad (AB) < \frac{(A)(B)}{N}$$

எனவே $A$-ம் $B$-ம் எதிர்மறைத் தொடர்புடையன.

$a_{\text{,}} = 150, (b) = 210, (ab) = 70, N = 500$

$a$-க்கும், $b$-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்.

$$(ab = 7 \cdot \frac{(a)(b)}{N} = \frac{50 \times 210}{500} = 63.$$

$(ab) < \frac{(a)(b)}{N}$. எனவே $a$-ம், $b$-ம் நேர்மறைத் தொடர்புடையன.

**பண்புறவுக் கெழுக்கள்**

(1) யூல் (Yule) பண்பு உறவுக்கெழு :

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

இங்கு $Q$ ஆனது, கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலில் குறுக்கே பெருக்கிக் கண்ட இரு உறுப்புகளின் வேறுபாடு தொகுதியாகவும், அவற்றின் கூடுதல் பகுதியாகவும் கொண்டுள்ளது.

| பண்பு | $A$ | $\alpha$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| $B$ | $(AB)$ | $(\alpha B)$ | $(B)$ |
| $\beta$ | $(A\beta)$ | $(\alpha\beta)$ | $(\beta)$ |
| மொத்தம் | $(A)$ | $(\alpha)$ | $N$ |

$$\delta = (AB) - \frac{(A)(B)}{N} = \frac{N(AB) - (A)(B)}{N}$$

$$= \frac{[AB + A\beta + (\alpha B) + \alpha\beta](AB) - [(AB][(AB)(\alpha B)]}{N}$$

$$= \frac{1}{N}[(AB)(\alpha B) - (A\beta)(\alpha\beta)]$$

$Q$-ன் தொகுதியும், $\delta$-ன் தொகுதியும் ஒன்றே. இவற்றின் பகுதிகள் நேராக இருப்பதனால், இவற்றின் குறி தொகுதியைப் பொறுத்தது. எனவே, இரு பண்புகளும், எதிரிடைத் தொடர்பு தொடர்பிலா, நேரிடைப் பண்புகளாக முறையே $Q \lessgtr 0$ ஆக இருக்கும்பொழுது இருக்கும். இக் கெழு $-1 \leq Q \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கும்.

$Q = -1$ எனில் $A, B$ முழு எதிர் உறவுடையன— $| < Q < 0$ எனில், $A, B$ எதிர்மறை உறவுடையன. $0 < Q < 1$ யெனில், $A, B$ நேர்மறை உறவுடையன. $Q = 0$ யெனில், $A, B$ உறவற்றவை. $Q = 1$ எனில் $A, B$ முழுவுறவுடையன.

ஒவ்வொரு $A$-ம், $B$ ஆக இருக்கும்பொழுது $A, B$ பண்புகள் முழுமையானத் தொடர்புடைய பண்புகள் என்று கூறப்படும். $(A\beta) = 0$

$$\text{இந் நிலையில் } Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (AB)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha\beta)}$$

$$= \frac{(AB)(\alpha\beta)}{(AB)(\alpha\beta)} = +1$$

ஒவ்வொரு $A$-ம் $\beta$ எனில், $(AB) = 0 \cdot 12)$ $\therefore$ $Q = -1$

$$\text{பிறிதொரு கெழு } R = \frac{\sqrt{(AB(\alpha\beta)} - \sqrt{(A\beta)(\alpha\beta)}}{\sqrt{(AB)(\alpha\beta)} + \sqrt{(A\beta)(\alpha\beta)}}$$

$$Q = \frac{2R}{1 + R^2} \text{ என நிறுவலாம்.}$$

$Q$வைப் போன்றே, $R$-ன் மதிப்பிலிருந்தும் $A, B$-ன் உறவைக் காணலாம்.

$Q = 0$ எனில் $R = 0$

$Q < 0$ எனில் $R < 0$

$Q > 0$ எனில் $R > 0$

$Q = 1$ எனில் $R = 1$

$Q = -1$ எனில் $R = -1$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு**

கீழக்கண்ட பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ள இரு பண்புகளில் $Q, R$ கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

| பண்புகள் | $A$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| $B$ | 16 | 10 |
| $\beta$ | 12 | 8 |

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (AB)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)} = \frac{128 - 120}{128 + 120}$$

$$= \frac{1}{31} = \cdot 032255$$

$$R = \frac{\sqrt{64} - \sqrt{60}}{\sqrt{64} + \sqrt{60}} = \frac{8 - 7.746}{8 + 7.746} = \frac{.254}{15.746}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் பட்டியலினின்று தந்தையின் புத்திகூர்மைக்கும், மகனின் புத்தி கூர்மைக்கும் உள்ள கெழுவினைக் காண்க· (அ.ப)

புத்திக் கூர்மை உள்ள தந்தையும் மகனும் = 248.
புத்திகூர்மை உள்ள தந்தையும், புத்தி கூர்மையற்ற மகனும் = 81.

புத்திக் கூர்மையற்ற தந்தையும், புத்தி கூர்மையுள்ள மகனும் = 92.

புத்திக் கூர்மையற்ற தந்தையும் மகனும் = 579.

புத்திக் கூர்மையுள்ள தந்தையை $A$ எனவும், மகனை $B$ எனவும் கொள்வோம். புத்திக்கூர்மையற்ற தந்தையை $\alpha$ எனவும், மகனை $\beta$ எனவும் கொள்வோம்.

$$(AB) = 248; \ (A\beta) = 81; \ (\alpha B) = 92; \ (\alpha\beta) = 579$$

$$\text{பண்பு உறவுக் கெழு } Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{248 \times 579 - 81 \times 92}{248 \times 579 + 81 \times 92} = 0.9$$

$A$-க்கும், $B$-க்குமிடையே உயர்ந்த நேர் மறைத் தொடர்பு உள்ளது.

**பண்புகளின் பகுதித் தொடர்பு** (Partial Association of Attributes)

$C$ என்ற ஒரு பண்போடு இணைத்து $A$-ம், $B$-ம், உறவு பெற்றால் $A, B$ ஆகியன பகுதித் தொடர்பு உடையன எனக் கூறுகிறோம்.

$(ABC) > \frac{(AC)(BC)}{N}$ எனில் $A, B$ ஆகியன நேர்த் தொடர்புடையன என்றும்,

$(ABC) < \frac{(AC)(BC)}{N}$ எனில், அவை எதிர்த் தொடர்புடையன என்றும் கூறுகிறோம்.

$$Q_{AB.C} = \frac{(ABC)(\alpha\beta C) - (A\beta C)(\alpha BC)}{(ABC)(\alpha\beta C) + (A\beta C)(\alpha BC)}$$

$Q$-ன், ஒவ்வொரு அடைப்புக் குறியினுள்ளும், $C$ஐச் சேர்த்தால் $N = 200$ பகுதித் தொடர்புக் கெழுகிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$(A) = 76$. $(B) = 170$, $(C) = 96$. $(AB) = 59$, $(BC) = 70$
$(CA) = 39$, $(ABC) = 25$ எனில், $Q_{AB\cdot C}$ ஐக் காண்.

எல்லா மூவினப் பண்பலை வெண்களையும் காண்க.

**விடை**

$$(AB\gamma) = (AB) - (ABC) = 59 - 25 = 34$$
$$(A\beta C) = (AC) - (ABC) = 39 - 25 = 14$$
$$(\alpha BC) = (BC) - (ABC) = 70 - 25 = 45$$
$$(A\beta\gamma) = (A\beta) - (A\beta C) = [(A) - (AB)] - (A\beta C) = 76 - 59 - 14 = 3$$
$$(\alpha B\gamma) = (\alpha B) - (\alpha BC) = [(B) - (AB)] - (\alpha BC) = 170 - 59 - 45 = 66$$
$$(\alpha\beta C) = (\alpha C) - (\alpha BC) = [(C) - (AC)] - (\alpha BC) = 96 - 39 - 45 = 12$$
$$(\alpha\beta\gamma) = N - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) + (BC) - (ABC)$$
$$= 200 - 76 - 170 - 96 + 59 + 70 + 39 - 25$$
$$= 368 - 367$$
$$= 1.$$

$$Q_{AB\cdot C} = \frac{(ABC)(\alpha\beta C) - (A\beta C)(\alpha BC)}{(ABC)(\alpha\beta C) + (A\beta C)(\alpha BC)}$$
$$= \frac{25 \times 12 - 14 \times 45}{25 \times 12 + 14 \times 45}$$
$$= \frac{300 - 630}{300 + 630} = \frac{-330}{930} = -\cdot 3548$$

எனவே $C$ யுடன் இணைந்து, $A$-ம் $B$-ம் எதிர்மறைப் பகுதித் தொடர்புடையன.

**நேர்வுப் பட்டியல்** (Contingency Table) :

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மொத்த நபர்களை $A$ பண்பு உடையவர்கள், $A$ பண்பு அற்றவர்கள் என்று இரண்டு வகைகளாக மட்டும் பிரிக்கப்படாமல் $A_1$, $A_2$, $A_3$,......... என்ற பல வகைகளாகவும், அவற்றில் ஒவ்வொன்றும் $B_1$, $B_2$......... என்ற வகையாகவும் பிரிக்கப்பட்டால், அத் தொகுதி 'நேர்வுப் பட்டியல்' எனப்படும்.

$A$ என்ற பண்பு $A_1$, $A_2$, $A_3$......... என்ற பல துணைப் பண்புகளை உடையதாக இருக்கலாம். $A$ என்பதைக் கல்வி நிலை எனக் கொண்டால், எழுதப் படிக்கத் தெரியாதவர் பள்ளி இறுதி வகுப்புத் தேறியவர், புகுமுக வகுப்புத் தேறியவர், பட்டப்படிப்புப் படித்தவர் என்பதை $A_1$, $A_2$, $A_3$ என்று குறிப்பிடலாம். இதே போன்று $B$ பண்புகளின் துணைப் பண்புகள் $B_1$, $B_2$,......... எனக் கொள்வோம். இவ்விரு, தலைப் பண்புகளை அவற்றோடு இணைந்த துணைப் பண்புகளோடு கொண்டு அமைக்கப்படும் பட்டியலுக்கு நேர்வுப் பட்டியல் என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக, ஆய்வுத் தொகையில் உள்ள மொத்த எண்ணிக்கையை சமயவாரியாக நான்கு பிரிவுகளாகவும், அவற்றுள் கல்வி வாயிலாக மூன்று பிரிவுகளாகவும் பிரித்தால், $4 \times 3 = 12$ வகையான கூட்டுத் தொகுதிகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | $(A_1 B_1)$ | — | — | — | $(B_1)$ |
| $B_2$ | — | — | $(A_3 B_2)$ | — | $(B_2)$ |
| $B_3$ | — | $(A_2 B_3)$ | — | — | $(B_3)$ |
| மொத்தம் | $(A_1)$ | $(A_2)$ | $(A_3)$ | $(A_4)$ | $N$ |

இதற்குப் பதிலாக $A$ என்னும் பண்பை $A_1$, $A_2$,.........$A_m$ என $m$ பிரிவுகளாகவும், $B$ என்னும் பண்பை $B_1$, $B_2$,.........$B_n$ என $n$ பிரிவுகளாகவும் பிரித்து ஒரு தேர்வுப் பட்டியலை அமைக்கலாம். அப்போது $mn$ சிற்றறைகளைக் கொண்ட பட்டியல்

கிடைக்கிறது கிடைநிலை வரிசைகளில் வரும் அலை வெண்கள் எல்லாம் ஒரு படியுள்ளதாகவும், அட்டவணையின் கடைக் கோடியில் மொத்த மதிப்பாகவும் வருகின்றன.

## நேர்வுப் பட்டியல் கெழு அல்லது இணைப்புக் கெழு (Co-efficient of Contingency)

$r$, $s$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$(Ar\ Bs) = \frac{(A_r)(B_s)}{N}$ என்று அமையுமானால் $A$, $B$ பண்புகள் உறவற்றன எனக் கொள்கிறோம். $A_r$, $B_s$ என்பன உறவற்றிருக்கும்போது, அவை இயல்பாகச் சேர்ந்து வரக்கூடிய எண்ணிக்கை, $\frac{(Ar)(Bs)}{N}$ என்பதை $(A_r\ B_s)$ எனக் கொள்வோம் ஆக, உண்மையாக ஏற்படக்கூடிய எண்ணிக்கை $(Ar\ Bs)$-க்கும் $(Ar\ Bs)^{c}$-க்கும் உள்ள வேறுபாடு $\delta_{rs}$ என்று குறிக்கப்படும்.

$$\text{எனவே, } \delta_{rs} = (A_r\ B_s) - (A_r\ B_s)_0$$

$$= (A_r\ B_s) - \frac{(A_r)(B_s)}{N}$$

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_e)^2}{f}\ \Sigma\Sigma \frac{(A_r\ B_s)^2}{(A_r\ B_s)_0}$$ என வரையறுக்கிறோம்.

இங்கு $f$ என்பது நேரில் காணும் நிகழ்வெண் ; $f_e$ எதிர்பார்க்கப் படும் நிகழ்வெண்.

$\phi^2 = \frac{\chi^2}{N}$, $\chi^2$-ன் கூட்டுச்சராசரி, "சராசரி வர்க்க இணைப்பு" எனப்படும். கணக்கில் நிகழ்வெண்ணும், நேரில் காணும் நிகழ்வெண்ணும் ஒன்றாகவே இருந்தால், $\chi^2$-ம் $\phi^2$-ம் பூச்சியம் ஆகிவிடும். $\chi^2$-ம், $\phi^2$-ம் வரும் போதும் எதிர் எண்ணாக இருக்க முடியாது. இச் சராசரி வர்க்க இணைப்பை அளக்கக் கார்ல்டியர்ஸன் சராசரி வர்க்க இணைப்புக் கெழு $C$ஐ அமைத்துள்ளார்.

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} = \sqrt{\frac{N\phi^2}{N + N\phi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{1 + \phi^2}}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

' $X/2$ ' நேர்வுப் பட்டியலில் இருமடி நிகழ்வெண்களை $a, b, c, d$ எனக்கொண்டால்

$$\chi^2 = \frac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$ என்று நிறுவுக.

| | $A$ | $\alpha$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| $B$ | $a$ | $b$ | $(a+b)$ |
| $\beta$ | $c$ | $d$ | $(c+d)$ |
| மொத்தம் | $(a+c)$ | $(b+d)$ | $(a+b+c+d)$ |

**தீர்வு :**

$$(AB) = a;\ (A\beta) = c;\ (B\alpha) = b;\ (\alpha\beta) = d$$

$A$, $B$ பண்புகள் உறவற்றன எனக் கொண்டால், அவை இயல்பாகச் சேர்ந்துண்டாகும் எண்ணிக்கை

$$(AB)_0 = \frac{(A)(B)}{N}$$

$$\delta = (AB) - \frac{(A)(B)}{N}$$

$$= a - \frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}$$

$$= \frac{a^2+ab+ac+ad-a^2-cb-ab-ac}{a+b+c+d} = \frac{ad-bc}{N}$$

$$\chi^2 = \frac{\delta^2}{(AB)_0} + \frac{\delta^2}{(A\beta)_0} + \frac{\delta^2}{(\alpha B)_0} + \frac{\delta^2}{(\alpha\beta)_0}$$

$$= \delta^2 \left[\frac{1}{(AB)_0} + \frac{1}{(A\beta)_0} + \frac{1}{(\alpha B)_0} + \frac{1}{(\alpha\beta)_0}\right]$$

$$= \delta^2 \left[ \frac{N}{(A)(B)} + \frac{N}{(A)(\beta)} + \frac{N}{(\alpha)(B)} + \frac{N}{(\alpha)(\beta)} \right]$$

$$= N\delta^2 \left[ \frac{(\beta) + (B)}{(A)(B)(\beta)} + \frac{(\beta) + (B)}{(\alpha)(B)(\beta)} \right]$$

$$= N\delta^2 \left[ \frac{N[(\alpha) + (A)]}{(A)(B)(\alpha)(\beta)} \right]$$

$$= \frac{N\delta^2 \cdot N^2}{(A)(B)(\alpha)(\beta)} = \frac{N \cdot (N\delta)^2}{(A)(B)(\alpha)(\beta)}$$

$$= \frac{N(ad - bc)^2}{(a+b)(b+c)(b+d)(c+d)}$$

$$= \frac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(b+c)(b+d)(c+d)}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

*B* பண்பு காணாத இடங்களைவிட, *B* பண்பு காணுமிடங்களில் *A* பண்பு மிகுந்த விகிதாசாரத்தில் நிகழ்கிறது எனில், பண்பு *A* காணாத இடங்களைவிட, *A* காணுமிடங்களில் *B* மிகுந்த விகிதாசாரத்தில் நிகழும் எனக் காட்டுக. (செ.ப.)

**தீர்வு :**

$$\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(\beta)} \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).}$$

$$\therefore \frac{(\beta)}{(B)} > \frac{(A\beta)}{(AB)}$$

$$1 + \frac{(\beta)}{(B)} > 1 + \frac{(A\beta)}{(AB)}$$

$$\therefore \frac{(B) + (\beta)}{(B)} > \frac{(AB) + (A\beta)}{(AB)}$$

அதாவது,

$$\frac{(N)}{(B)} > \frac{(A)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{N}{(A)} > \frac{(B)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{N}{(A)} - 1 > \frac{(B)}{(AB)} - 1$$

அதாவது,

$$\frac{N-(A)}{(A)} > \frac{(B)-(AB)}{(AB)}$$

$$\frac{(\alpha)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{\alpha}$$ இதுவே நிறுவவேண்டியதாகும்.

**எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :**

இரு நகரங்களில் காபி குடிக்கும் பழக்கத்தைக் கூறுமுறைப் படி ஆராய்ந்ததில் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன:

நகரம் $x$ : ஆண்கள் 50% ; காபி குடிப்பவர்கள் 30% ; காபி குடிப்பவர்களில் ஆண்கள் 18%.

நகரம் $y$ : ஆண்கள் 45% ; காபி குடிப்பவர்கள் 25% ; காபி குடிப்பவர்களில் ஆண்கள் 16%

இனத்திற்கும் காபி குடிப்பதற்கும் ஏதேனும் உறவு உண்டா? அப்படியிருந்தால் எந்த நகரத்தில் காபி குடிப்பவர்கள் அதிகம்?

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கூறு முறைப்படி ஆராய்வதால், உறவினைக் கண்டுபிடிக்க, $\chi^2$ சோதனையைப்பயன்படுத்த வேண்டும். மேற்கண்ட விபரத்திற்கேற்ற இரு நேர்வுப்பட்டியல்களும் ஒரே மாதிரியான வரிசையிலமைந்திருப்பதால், பண்புகளின் உறவினை ஒப்பிட, இணைப்புக் கெழு $C$ சிறந்தது. $(A)$ ஆண்களையும் $(B)$ காபி குடிப்பவர்களையும் குறிக்கட்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட விபரத்திற்கு நேர்வுப்பட்டியலை அமைத்துத் தெரியாத அவ்வெண்களைக் கூட்டல், கழித்தல் முறையில் கணக்கிட்டால், நமக்குப் பின் வருவன கிடைக்கும்:

| | நகரம் A ஆண்கள் (A) | பெண்கள் (d) | மொத்தம் | நகரம் B ஆண்கள் (A) | பெண்கள் (d) | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| காபி குடிப்பவர்கள் (B) | 18 | 12 | 30 | 16 | 9 | 25 |
| காபி குடிக்காதவர்கள் ($\beta$) | 32 | 38 | 70 | 29 | 46 | 75 |
| மொத்தம் | 50 | 50 | 100 | 45 | 55 | 100 |

காபி குடிப்பதற்கும், இனத்திற்கும் எந்த வித உறவுமில்லை யென வைத்துக் கொள்வோம். இதன்படி எதிர்பார்க்கும் அலை வெண்களின் மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்:

| | நகரம் X நேரில் கண்ட மதிப்பு (O) | எதிர்ப் பார்த்த மதிப்பு (E) | $\frac{(O-E)^2}{E}$ | நகரம் Y நேரில் கண்ட மதிப்பு (O) | எதிர்ப் பார்த்த மதிப்பு (E) | $\frac{(O-E)^2}{(E)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | 18 | 15 | 0·6 0 | 16 | 11·25 | 2·005 |
| A$\beta$ | 32 | 35 | 0·257 | 29 | 33·75 | 0·669 |
| $\alpha$B | 12 | 15 | 0·600 | 9 | 13·75 | 1·641 |
| $\alpha\beta$ | 38 | 35 | 0·257 | 46 | 41·25 | 0·547 |
| மொத்தம் | 100 | 100 | 1·714 | 100 | 100 | 4·862 |

நகரம் $A$-க்கு $\chi^2 = \frac{\Sigma(O-E)^2}{E}$

$= 1{\cdot}714.$

நகரம் $B$-க்கு $\chi^2 = \frac{\Sigma(O-E)^2}{E}$

$= 4{\cdot}862$

வரையற்ற பாகைகள் $= (2-1)(2-1) = 1.$

பட்டியலில் 5% நிகழ்தகவுக்கேற்ற $\chi^2$ன் மதிப்பு $= 3{\cdot}84$-

(1) நகரம் $X$-க்கு, $X^2$-ன் கணக்கியல் மதிப்பு பட்டியல் மதிப்பை விடக் குறைவு. எனவே, எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ள லாம்- அதாவது எந்த வித உறவும் கிடையாது. (2) நகரம் $Y$-க்கு, கணக்கியல் மதிப்பு, பட்டியல் மதிப்பைவிட அதிகம். எனவே உறவே இல்லையெனும் எடுகோளை நிராகரித்து விடலாம். அதாவது இனத்திற்கும் காபி குடிப்பதற்கும் உறவு உண்டு.

$$\text{இணைப்புக் கெழு } C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}$$

நகரம் $X$-க்கு,

$$C = \sqrt{\frac{1{\cdot}714}{100+1{\cdot}714}} = \sqrt{\frac{1{\cdot}774}{101{\cdot}714}} = 0{\cdot}13$$

நகரம் $Y$-க்கு,

$$C = \sqrt{\frac{4{\cdot}862}{100+4{\cdot}862}} = \sqrt{\frac{4{\cdot}862}{104{\cdot}86}} = 0{\cdot}22$$

நகரம் $Y$-க்கு இணைப்புக் கெழு அதிகமாக இருப்பதால், நகரம் $Y$-ல் இனத்திற்கும் காபி குடிப்பதற்கும் அதிக அளவு உறவு உண்டு.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விபரங்களுக்கு, (1) $Q_{AB\cdot C_2}$ (2) $Q_{AB\cdot\gamma}$ (3) $Q_{AB}$ (4) $Q_{AC}$ காண்க.

$(ABC) = 100,\ (AB\gamma) = 110,\ (A\beta C) = 105,\ (A\beta\gamma) = 95,$
$(\alpha BC) = 107,\ (\alpha B\gamma) = 55,\ (\alpha\beta C) = 86,\ (\alpha\beta\gamma) = 89.$

$$\text{(i)}\ \left(Q_{AB.C}\right) = \frac{(ABC)(\alpha\beta C) - (A\beta C)(\alpha BC)}{(ABC)(\alpha\beta C) + (A\beta C)(\alpha BC)}$$

$$= \frac{100 \times 86 - 105 \times 107}{100 \times 86 + 105 \times 107}$$

$$= \frac{-2635}{19835} = -0{\cdot}1328.$$

$$\text{(ii)}\ \left(Q_{AB.\gamma}\right) = \frac{(AB\gamma)(\alpha\beta\gamma) - (A\beta\gamma)(\alpha B\gamma)}{(AB\gamma)(\alpha\beta\gamma) + (A\beta\gamma)(\alpha B\gamma)}$$

$$= \frac{110 \times 89 - 95 \times 55}{110 \times 89 + 95 \times 55}$$

$$= \frac{4565}{15015}$$

$$= \mathbf{0.3040}$$

இப்போது,

$$(AB) = (ABC) + (AB\gamma) = 100 + 110 = 210$$
$$(\alpha\beta) = (\alpha\beta C) + (\alpha\beta\gamma) = 86 + 89 = 175$$
$$(A\beta) = (A\beta C) + (A\beta\gamma) = 105 + 95 = 200$$
$$(\alpha B) = (\alpha BC) + (\alpha B\gamma) = 107 + 55 = 162$$
$$(AC) = (ABC) + (A\beta C) = 100 + 105 = 205$$
$$(\alpha\gamma) = (\alpha B\gamma) + (\alpha\beta\gamma) = 55 + 89 = 144$$
$$(A\gamma) = (AB\gamma) + (A\beta\gamma) = 110 + 95 = 205$$
$$(\alpha C) = (\alpha BC) + (\alpha\beta C) = 107 + 86 = 193$$

$$\therefore\ Q_{AB} = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{210 \times 175 - 200 \times 162}{210 \times 175 + 200 \times 162}$$

$$= \frac{4350}{69150}$$

$$= 0{\cdot}0629$$

$$Q_{AC} = \frac{(AC)(\alpha\gamma) - (A\gamma)(\alpha C)}{(AC)(\alpha\gamma) + (A\gamma)(\alpha C)}$$

$$= \frac{205 \times 144 - 205 \times 193}{205 \times 144 + 205 \times 193}$$

$$= \frac{-10045}{69085}$$

$$= -0{\cdot}1454$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு கடும் போரில் போருக்குப்பின் வீரர்களில் 70% பேர் குறைந்தபட்சம் ஒரு கண்ணையிழந்தவர்களாகவும், 75% பேர் குறைந்தபட்சம் ஒரு காதையிழந்தவர்களாகவும், 80% பேர் குறைந்தபட்சம் ஒரு காலையிழந்தவர்களாகவும், 85%பேர் குறைந்த பட்சம் ஒரு கையையிழந்தவர்களாகவும் இருந்தனர். குறைந்த பட்சம் எத்தனை சதவீதம் பேர் நான்கையும் இழந்தவர்களாக இருப்பர் ?

கண், காது, கால் கை யிழந்தவர்களை முறையே $(A)$, $(B)$, $(C)$, $(D)$ எனக் குறித்தால்,

$(A) \geq {\cdot}7\ N$

$(B) \geq {\cdot}75\ N$

$(C) \geq {\cdot}8\ N$

$(D) \geq {\cdot}85\ N$

$(A\ B\ C\ D)$-ன் குறைந்தபட்ச மதிப்பை நாம் காண வேண்டும்.

கொடுத்துள்ள மதிப்புகளை ஈடு செய்தால்,

$$(ABCD) \geq {\cdot}7N + {\cdot}75N + {\cdot}8N + {\cdot}85N - 3N$$

$$(ABCD) \geq 3{\cdot}1\ N - 3N$$

அதாவது, $(ABCD) \geq 0{\cdot}1\ N$

எனவே கண், காது, கால், கை நான்கையும் இழந்தவர்கள் குறைந்தபட்சம் 10% பேர் இருப்பர்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$(AB)^2 + (\alpha\beta)^2 - (\alpha B)^2 - (A\beta)^2$$

$$= [(A) - (\alpha)] \quad [(B) - (\beta)] + 2N\delta$$ எனக் காட்டு.

வலக்கைப்பக்கம்

$$= \{(A) - (\alpha)\} \{(B) - (\beta)\} + 2N \left\{(AB) - \frac{(A)(B)}{N}\right\}$$

$$= \{[(AB) + (A\beta)] - [(\alpha B) + (\alpha\beta)]\} \{[(AB) + (\alpha B)] - [(A\beta) + (\alpha\beta)]\} + 2N(AB) - 2(A)(B)$$

$$= \{(AB) - (\alpha\beta)\}^2 - \{(A\beta) - (\alpha B)\}^2 + 2[(A) + (\alpha)](AB) - 2(A)(B)$$

$$= \{(AB) - (\beta\alpha)\}^2 - \{(A\beta) - (\alpha B)\}^2 + 2(A)[(AB) - (B)] = 2(\alpha)(AB)$$

$$= \{(AB) - (\alpha\beta)\}^2 - \{(A\beta) - (\alpha B)\}^2 - 2\{(AB) + (A\beta)\}(\alpha B) + 2\{(\alpha B) + (\alpha\beta)\}(AB)$$

$$= (AB)^2 + (\alpha\beta)^2 - (A\beta)^2 - (\alpha\beta)^2$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட விவரத்திலிருந்து அம்மைகுத்துவது, அம்மை நோயிலிருந்து தடுக்கும் என்பதைக் கூறமுடியுமா ?

அம்மை பரவிய சூழ்நிலையிலுள்ள 1482 பேரில், 368 பேர் அம்மையால் தாக்கப்பட்டனர்; 1482 பேரில், 343 பேர் அம்மை தடுக்கும் ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்கள். இவர்களில் 35 பேர் மட்டும்தாம் அம்மையால் தாக்கப்பட்டனர். [ I.A S. 1967 ]

**விடை**

$(A)$, $(B)$ என்பன, முறையே அம்மை குத்தியவர்களையும் அம்மையால் தாக்கப்பட்டவர்களையும் குறிக்கட்டும்.

$$N = 1482 \; ; \quad (AB) = 35 \; ; \quad (A) = 343 \; ; \quad (B) = 368$$

$$(AB)_0 = \frac{(A)(B)}{N} = \frac{343 \times 368}{1482} = 85{\cdot}2$$

$(AB) < (AB)$, $\therefore$ உறவு எதிர்மறையானது.

மேற்கண்ட விவரத்திலிருந்து, அம்மை குத்துவது, அம்மை நோய் வருவதைத் தடுக்கும் எனக் கூறலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$\frac{(A)}{N} = x = \frac{(B)}{N} = \frac{(C)}{3N}\text{-ம்}, \frac{(AB)}{N} = \frac{(AC)}{N} = \frac{(BC)}{N} = y\text{-ம்}$$

ஆனால், $x$-ன் மதிப்போ $y$-ன் மதிப்போ $\frac{1}{4}$-க்கு அதிகமாகாது என நிறுவுக.

**தீர்வு :**

$(BC) \geq (B) + (C) - N$

எனவே, $y \geq 5x - 1$ ... (1)

மேலும் $(AB) \leq A$

$y \leq x$ ... (2)

(1), (2)-லிருந்து, $x \geq y \geq 5x - 1$

$\therefore$ $x \geq 5x - 1$

$x \leq \frac{1}{4}$

$y \leq x \leq \frac{1}{4}$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$(A) = (B) = (C) = \frac{N}{2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$A$-ல் 80% பேர் $B$-க்கள். $A$-ல் 75% பேர் $C$-க்கள். $B$-லுள்ள $C$-க்களின் சதவீத எல்லைகளைக் காண்க.

**விடை**

$(AB) = (0{\cdot}8)(A) = 0{\cdot}4N$

$(AC) = 0{\cdot}75\ (A) + 375\ N$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$(BC)$-ன் எல்லைகளைப் பெறவேண்டும்.

$$(AB) + (AC) - (BC) \leq (A)$$

$$\therefore \quad (BC) \geq (AB) + (AC) - (A)$$

$$= 0{\cdot}4\,N + 0{\cdot}375\,N - 0{\cdot}5\,N = {\cdot}275\,N$$

$$\therefore \quad (BC) \geq 0{\cdot}275\,N = 0{\cdot}55\,(B)$$

மேலும்,

$$(BC) \leq (B) - (AB) + (AC)$$

$$= 0{\cdot}5\,N - 0{\cdot}4\,N + 0{\cdot}375\,N$$

$$= 0{\cdot}475\,N$$

$$\therefore \quad (BC) \leq 0{\cdot}475\,N = (0{\cdot}95)\,(B)$$

$$\therefore \quad (BC) \leq {\cdot}95\,(B)$$

எனவே,

$$0{\cdot}55 \leq \frac{(BC)}{(B)} \leq 0{\cdot}95$$

எனவே $B$-ல், $C$-க்களின் சதவீத எல்லைகள் 55%-ம், 95%-ம் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு தேர்வில் போட்டியிட்ட 600 பட்டதாரிகளுள், மாணவர்கள் மாணவிகளைவிட 96 பேர் அதிகம். நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெற்றவர்கள், நேர்முகத்தேர்விற்குத் தகுதி பெறாதவர்களைவிட 310 பேர் அதிகம். நேர்முகத் தேர்வில் கலந்துகொண்ட அறிவியல் பட்டதாரிகள் 300 பேர். கலைத்துறைப் பட்டதாரி மாணவிகளில் 25 பேர் நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெறாதவர்கள். கலைத்துறைப் பட்டதாரிகள் மொத்தம் 135. அவர்களுள் தகுதி பெறாதவர்கள் 33 பேர்கள் மட்டுமே. நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெறாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 18.

(i) நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) போட்டித் தேர்வில் கலந்துகொண்ட அறிவியல் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(iii) நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெற்ற அறிவியல் பட்ட தாரி மாணவிகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க. [I.A.S. 53]

$A, B, C$ என்பன முறையே மாணவர், நேர்முகத் தேர்விற்குத் தகுதி பெற்றவர், அறிவியல் மாணவ, மாணவிகள் ஆகியவர்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$N = 600 \;;\; (A)-(\alpha) = 96;\; (B)-(\beta) = 310$$

$$(ABC) = 300;\; (\alpha\beta\gamma) = 25$$

$$(\gamma) = 135;\quad (\beta\gamma) = 33;\; (A\beta) = 18.$$

$N = (A)+(\alpha) = 600 = (B)+(\beta) = (C)+(\gamma)$ என்பதால்,

$(A) = 348;\; (\alpha) = 252;\; (B) = 455;\; (\beta) = 145;\; (C) = 465.$

(i) $(AB) = (A) - (A\beta) = 348 - 18 = \mathbf{330}$

(ii) $(AC) = (ABC) + (A\beta C) = (ABC) + (A\beta) - (AB\gamma)$

$$= (ABC) + (A\beta) - (\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma)$$

$$= 300 + 18 - 33 + 25 = \mathbf{310}$$

(iii) $(\alpha BC) = (BC) - (ABC) = \{1-\beta\}\ \{1-\gamma\}\ N - (ABC)$

$$= N - (\gamma) - (\beta) + (\beta\gamma) - (ABC)$$

$$= 600 - 135 - 145 + 33 - 300 = \mathbf{53}$$

### பயிற்சி

1. *a*) மது அருந்துபவர்களில் 99% இளமையில் இறந்து விடுகின்றனர். எனவே, வாழ்விற்கு மது தீங்கானது; இக் கூற்றினை ஆய்க. (செ.ப.)

(*b*) 1948-ல் ஏற்பட்ட சாலை விபத்துகளில் 4513 பேர் மாண்டனர்.

1957-ல் நடந்த சாலை விபத்துகளில் 5250 பேர் மாண்டனர்.

'இந்தக் கால இடைவெளிகளில் பெண் காரோட்டிகள் அதிகரித்தனர். எனவே, பெண்கள் மோசமான காரோட்டிகள்.' —இக் கூற்றினை ஆய்க. (M. A. டெல்லி, 1954)

2. $(AB) = 733$ ; $(A\beta) = 840$
$(\alpha B) = 699$ ; $(\alpha\beta) = 783$

மொத்த எண்ணிக்கை $N$ஐயும், நேர்மறை, எதிர்மறைப் பண்பலைவெண்களையும் காண்க.

[விடை : $(A) = 1573$ ; $(\alpha) = 1482$ ; $(B) = 1432$ ; $(\beta) = 1623$ ; $N = 3055$]

3. கீழ்க்கண்ட பண்பலைவெண்களைக் கொண்டு, இரண்டாம் பண்பலை வெண்களைக் காண்க.

$(\alpha\beta\gamma) = 45$ ; $(\alpha BC) = 37$ ; $(\alpha B\gamma) = 28$ ; $(ABC) = 20$ ;
$(AB\gamma) = 27$ ; $(A\beta C) = 39$ ; $(A\beta\gamma) = 46$ ; $(\alpha\beta C) = 33$

[விடை : $(AB) = 47$; $(A\beta) = 85$; $(\alpha B) = 65$; $(\alpha\beta) = 78$; $AC) = 59$; $(A\gamma) = 73$; $(\alpha C) = 70$; $(\alpha\gamma) = 73$; $(BC) = 57$; $(B\gamma) = 55$; $(\beta C) = 72$ ; $(\beta\gamma) = 91$ ].

4. $N = 1000$ ; $(A) = 525$ ; $(B) = 312$ ; $(C) = 470$ ; $(A\beta) = 483$ ; $(AC) = 378$ ; $(BC) = 226$ ; $(ABC) = 25$. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரம் மெய்யானதா என்று ஆய்க.
[விடை : $(\alpha\beta\gamma = -109)$ மெய்யானதன்று.]

5. ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வாளர் 1000 நபர்களை ஆராய்ந்ததில் "811 பேர் சாக்லேட்டை விரும்புகின்றனர்; 725 பேர் மிட்டாய்களை விரும்புகின்றனர்; 418 பேர் வேகவைத்த இனிப்புப் பண்டங்களை விரும்புகின்றனர் ; 348 பேர் மிட்டாயுடன் வேகவைத்த இனிப்புப் பண்டங்களை விரும்புகின்றனர்; 297 பேர் மூன்றையும் விரும்புகின்றனர்," என்று முடிவு செய்தார். இக் கூற்று தவறுனது என்று காட்டுக.

6. ஒரு சோதனையில் கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் பெறப்படுகின்றன :

$N = 400$ ; $(B) = 300$ ; $(AB) = 216$ ; $(A\beta) = 25$.

$A$-க்கும் $B$-க்கும் உள்ள உறவினைக் காண்க.
[விடை : நேர் உறவு]

7. அடுத்த பக்கத்திலுள்ள பட்டியலிலிருந்து மருந்திற்கும் நோய்த் தடுப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

| | துன்புற்றோர் | துன்புறாதோர் |
|---|---|---|
| தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்கள் | 12 | 26 |
| போட்டுக் கொள்ளாத வர்கள் | 16 | 6 |

(I.A.S.)

[விடை : (தடுப்பு ஊசி நோயைத் தடுப்பதில் சக்திவாய்ந்தது.)]

8. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தந்தை, மகன் கண்களின் நிற உறவினைக் காண்க.

மகன் கண் நிறம்

| | | கருமை | சாம்பல் நிறம் |
|---|---|---|---|
| தந்தை கண் நிறம | கருமை | 230 | 150 |
| | சாம்பல் நிறம் | 150 | 470 |

(அல.ப.)

9. கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தந்தை, மகன் கண்களின் நிற உறவினைக் காண்க.

மகன் கண் நிறம்

| | | சாம்பல் | கருமை |
|---|---|---|---|
| தந்தை கண் நிறம் | சாம்பல் | 471 | 151 |
| | கருமை | 148 | 230 |

மகனின் கண் நிறத்திற்கும், தந்தையின் கண் நிறத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

10. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குப் பண்புறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

| | | சகோதரர்கள் | |
|---|---|---|---|
| | | நல்ல தன்மையினர் | மோசம் |
| சகோதரிகள் | நல்ல தன்மையினர் | 1230 | 530 |
| | மோசம் | 850 | 980 |

11. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையினின்று, தரப்படும் பயிற்சிக்கும் தேர்ச்சிக்கும் உள்ள பண்புறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

| | வெற்றி | தோல்வி | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆசிரியர் கல்லூரி | 58 | 42 | 100 |
| பல்கலைக் கழகம் | 49 | 51 | 100 |
| மொத்தம் | 107 | 93 | 200 |

(அல.ப.)

12. $(A) = (B) = (C) = \frac{N}{2} = 50$

$(AB) = 30$; $(AC) = 25$. $BC$ எந்த எல்லைகளுக்குள் விழும் ? (செ.ப.)

13. $(A) = 55$; $(B) = 60$; $(AB) = 30$; $N = 100$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ் விவரங்களினின்று $2 \times 2$ பட்டியலை அமை.

14. இலைகளின் தன்மையையும், பூக்களின் நிறத்தையும் கொண்டு 160 செடிகள் கீழ்க்கண்டவாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளன :

| | சீரான இலைகள் | வளைந்த இலைகள் |
|---|---|---|
| வெண்மையான பூக்கள் | 99 | 36 |
| சிவந்த பூக்கள் | 20 | 5 |

பூக்களின் நிறம் சீரான இலைகளுடன் சார்பற்றது என்பதை ஆய்க.

15. ஒரு பல்கலைக் கழகத் தேர்வில் ஆங்கிலத்தில் 72% தேர்ச்சி பெறுகின்றனர். இரண்டாம் மொழிப் பாடத்தில் 89% தேறுகின்றனர். 67% விருப்பப் பாடங்களில் தேறுகின்றனர். அத் தேர்வில் குறைந்தது எவ்வளவு சதவிகிதம் தேறுவர் எனக் காண்க. (செ.ப.)

16. 'கூட்டுறவு', 'ஒட்டுறவு' என்னும் கருத்துகளை விளக்குக. அவை எவ்வாறு மதிப்பிடப்படுகின்றன? பொருள் படுத்தப்படுகின்றன? கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து உரோமத்தின் நிறத்திற்கும் கண்ணின் நிறத்திற்கும் ஏதாவது கூட்டுறவு உள்ளதா என ஆராய்க.

| | | கண் நிறம் | |
|---|---|---|---|
| | | கறுப்பு | தவிட்டு நிறம் |
| உரோமத்தின் நிறம் | கறுப்பு | 25 | 10 |
| | சிவப்பு | 12 | 38 |

(ஏப்ரல் 1974, செ.ப.க.)

# 4. இடைச்செருகல்

## (Interpolation)

$x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி $x$-ன் மதிப்புகளுக்குகேற்ப மற்றொரு மாறி $y$-ன் மதிப்புகள் $y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots y_n$ என இருக்கட்டும். மேலும் $x, y$-க்கிடையே $y = f(x)$ எனும் முறையில் ஒரு தொடர்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது $x, y$ இவற்றின் $(n+1)$ ஜதை மதிப்புகளே கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$-ன் அமைப்பு நமக்குத் தெரியாது. இடைச்செருகல் முறையில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள $(n+1)$ ஜதை மதிப்புகள் கொண்டு ஒரு மாறியின் இம் மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பிற்கு ஏற்பச் சார்பின் மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

இடைச்செருகலில்,

(i) வரைபடம் மூலம் இடைமதிப்பைக் காணுதல்.

(ii) விகிதங்களைக் கொண்டு இடையில் வரும் மதிப்புகளைக் காணுதல்.

(iii) நியூட்டன் இடைச் செருகல் முறை.

(iv) லெக்ராஞ்ஜ் இடைச்செருகல் முறை.

இவைபோன்ற பல முறைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

**வரைபடம் மூலம் இடையில் வரும் மதிப்புகளைக் காணுதல்**

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots x_n, y_n$ என்ற $n$ ஜதை மதிப்புகள் $(x,y)$ மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். தகுந்த நிலை, கிடை அச்சுகளை வரையறுத்து $x,y$) மாறிகளின் மதிப்புகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறிக்கலாம். இப் புள்ளிகளின் போக்கைக்கொண்டு, $x$-ன் இருமதிப்புகளுக்கிடையில்உள்ள மதிப்பிற்குகந்த $y$மதிப்பை ஏறக்குறைய வரைபடத்திலிருந்துஅறியலாம். இதுவே வரைபடம் மூலம் இடைமதிப்புகளைக் காணும் முறை.

**விகிதங்களைக் கொண்டு இடைமதிப்புக் காணுதல்**

நேர்கோட்டின் துணைகொண்டு, வரைபடம் மூலம் இடைமதிப்பை அறிதலே, நேர்கோட்டு இடைச்செருகல் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு குறிப்பிட்ட மதிப்பீடுகளை எடுத்துக் கொண்டால் அவற்றிற்கிடையில் உள்ள ஏற்றம் நிலையானதாக இருக்கும் எனக் கொள்கிறோம். அதனை நாம் ஒரு நேர்கோட்டு வரையின் மூலம் குறிக்கிறோம். $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ என்பனவற்றைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை அறிவிக்கும் இரு புள்ளிகளாகக் கொள்கிறோம். இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $x_1$, $x_2$-க்கிடையில் உள்ள $x$-ன் மதிப்பிற்குகந்த $y$-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும்

கோட்டின் சமன்பாட்டை $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ என எழுதலாம்.

இதனால் $y = y_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$ என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து $x$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்குமுகந்த $y$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு தேர்வில் 300 பேர் 30%-க்கு அதிகமாகவும், 200 பேர் 40%-க்கு அதிகமாகவும் மதிப்பெண்கள் பெற்றிருந்தனர். எத்தனை பேர் 50%-க்குமேல் மதிப்பெண்கள் பெற்றனர் எனக் காண்க.

இங்கு $x_1 = 30$; $y_1 = 300$; $x_2 = 40$; $y_2 = 200$; $x = 50$

$$y = 300 + \frac{(50 - 30)}{(40 - 30)}(200 - 300)$$

$$= 300 - 200$$

$$= 100$$

100 பேர் 50%-க்கு மேல் மதிப்பெண்கள் பெற்றிருந்தனர். அடுத்து, பரவளையத்தைப் பொருத்துவதன் மூலமும், $n$-படி பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பொருத்துவதன் மூலமும் இடைமதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

$\triangle$, $E$ — செயலிகள் (Operators)

$x$-ஒரு சார்பிலா மாறியாகவும், $y$, $x$ஐச் சார்ந்த சார்பலனுகவும் இருந்து $y = f(x)$ என வரையறுக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். $x$-ன் அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் $(a)$, $(a+h)$, ... எனவும், அவற்றிற்குகந்த $y$-ன் மதிப்புகள் $f(a)$, $f(a+h)$, ... எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம்.

இவ்வாறெனில், $f(a+h) - f(a)$, $f(a+2h) - f(a+h)$, ... முதலியன $f(x)$-ன் முதல் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும். பொதுவாக, $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$ எனக் குறிக்கப்படும். அடுத்தடுத்த முதல் வேறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடுகள், இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

சங்கேதக் குறியீட்டில் இது $\triangle^2 f(x) \equiv \triangle[\triangle f(x)]$ என எழுதப்படும்.

$$\begin{aligned} \text{மேலும் } \triangle^2 f(x) &= \triangle f(x+h) - \triangle f(x) \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{இதேபோன்று } &= \triangle^2 f(x+h) = \triangle f(x+2h) - \triangle f(x+h) \\ &= f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h) \end{aligned}$$

இதேபோன்று மூன்றும், நான்காம் நிலை வேறுபாடுகளையும் அறியலாம். இவை, முறையே $\triangle^3 f(x)$, $\triangle^4 f(x)$ என எழுதப்படும். எனவே, வேறுபாடுகளை வரையறுக்கும் வாய்பாடு

$$\triangle^k f(x) \equiv \triangle[\triangle^{k-1} f(x)].$$

இப்போது இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகளை எவ்வாறு சார்பின் வெவ்வேறு மதிப்பு மூலம் குறிப்பிடலாம் என மேலே பார்த்தோம். இதேமுறையில் குறிப்பிட்ட எந்நிலை வேறுபாடுகளையும் முழுவதுமாகச் சார்பின் மதிப்புகள் மூலம் எழுதலாம்.

$f(x) = x^2 + x + 1$ என இருந்தால்,

$$\begin{aligned} \triangle f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= [(x+h)^2 + (x+h) + 1] - (x^2 + x + 1) \\ &= 2xh + h^2 + h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle^2 f(x) &= \triangle[\triangle f(x)] = \triangle(2xh + h^2 + h) \\ &= 2h(x+h) + h^2 + h - (2xh + h^2 + h) \\ &= 2h^2 \end{aligned}$$

$\Delta$ செயலி நிறைவேற்றும் நியதிகள்

(1) $\Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$.

நிருபணம்

$$\Delta [f(x) + g(x)] = f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]$$

[இங்கு $h$-என்பது $x$-ன் அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள சீரான இடைவெளியைக் குறிக்கும்.]

$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

(2) $\Delta [Cf(x)] = C\Delta f(x)$. { $c$-மாறிலி }

நிருபணம்

$$\Delta [Cf(x)] = Cf(x+h) - Cf(x)$$

$$= C[f(x+h) - f(x)]$$

$$= C\Delta f(x)$$

[குறிப்பு : $\Delta [g(x) \cdot f(x)] \neq g(x) \Delta f(x)$]

(3) $\Delta^m \cdot \Delta^n f(x) = \Delta^{m+n} f(x)$

நிருபணம்

$\Delta^m \cdot \Delta^n f(x) = \Delta^m (\Delta \cdot \Delta \ldots\ldots n$ தடவைகள்$) f(x)$

$= (\Delta \cdot \Delta \ldots\ldots m$ தடவைகள்$) (\Delta \cdot \Delta \ldots\ldots n$ தடவைகள்$) f(x)$

$= \Delta^{m+n} f(x)$

$E$ என்ற செயலி பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

$Ef(x) = f(x+h)$

அதாவது வரிசையாகப் பல மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்பிற்கு $E$ஐப் பயன்படுத்த, அதன் அடுத்த மதிப்பு வரும்.

$E$ ஐ மறுமுறை பயன்படுத்த $E[Ef(x)] = E^2 f(x)$. இவ்வாறே $E$-ன் மற்ற படிகளையும் வரையறுக்கலாம். $f(a), f(a+h), \ldots\ldots$ என்பன அடுத்தடுத்து வரும் $f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் குறித்தால்,

$$E f(a) = f(a+h)$$

$$E f(a+h) = f(a+2h)$$

.....................................

பொதுவாக $Ef(a+kh) = f(a+\overline{k+1}\, h)$

$$E^2 f(x) = f(x+2h)$$

$$E^3 f(x) = f(x+3h)$$

.....................................

$$(E_n f(x) = f(x+nh)$$

$E$ என்னும் செயலி நிறைவேற்றும் நியதிகள்

$$E[f(x)+g(x)] = E f(x) + E g(x)$$

நிரூபணம்

$$E[f(x)+g(x)] = f(x+h) + g(x+h)$$

$$= Ef(x) + E g(x)$$

(4) $E[Cf(x)] = C \cdot E f(x)$

நிரூபணம்

$$E C f(x) = C f(x+h) = C \cdot E f(x)$$

(5) $E^m \cdot E^n f(x) = E^{m+n} f(x)$

நிரூபணம்

$$E^m E^n f(x) = E^m f(x+nh)$$

$$= f(x+mh+nh)$$

$$= f[x+(m+n)h]$$

$$= E^{m+n} f(x)$$

$\triangle$, $E$ இயக்கிகளுக்குள்ள தொடர்பு

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= E f(x) - f(x)$$

$$\therefore \triangle f(x) = (E-1) f(x)$$

$\triangle \equiv E - 1$ அல்லது $E \equiv 1 + \triangle$ ஆகும்.

$f(x)$ என்பது $x$-ன் '$n$' படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறிக்குமானால், $f(x)$-ன் '$n$' ஆவது நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும்.

**நிரூபணம்**

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots a_n$ எனக் கொள்வோம். (இங்கு $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n$ இவை $x$ சாராத மாறிலிகள்)

$h$ வேறுபாட்டு இடைவெளி எனில்,

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= [a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \ldots\ldots a_n]$$

$$- [a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots a_n]$$

$$= a_0[x^n + nC_1x^{n-1}h + \ldots h^n] + a_1[x^{n-1} + n-1\,C_1x^{n-2}h + \ldots h^{n-1}] + a_2(\ldots\ldots) + \ldots\ldots a_n$$

$$-(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_n]$$

$$= a_0nhx^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \ldots\ldots b_n$$

$b_2, b_3, \ldots\ldots b_n$ என்பன மாறிலிகளாகும்.

எனவே, $f(x)$, $n$-படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில்,

$\triangle f(x)$-ன் படி $(n-1)$ ஆகிறது.

மேலும், $\triangle^2 f(x) = \triangle[\triangle f(x)]$

$$= [a_0n(x+h)^{n-1} + b_2(x+h)^{n-2} + \ldots b_n]$$

$$- [a_0nhx^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots b_n]$$

$$= a_0n(n-1)h^2x^{n-2} + C\ x^{n-3} + \ldots + C_n.$$

$C_3, C_4 \ldots C_n$ என்பன மாறிலிகளாகும்.

$\therefore\ \triangle^2 f(x)$-ன் படி '$(n-2)$' ஆகிறது.

இவ்வாறே $\triangle^n f(x)$-ன் படி '$(n-n)$'. அதாவது பூச்சியம் ஆகும்.

$$\therefore\ \triangle^n f(x) = a_0n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot1\cdot h^n$$

$$= a_0n!\,h^n$$

$$\therefore\ \triangle^{n+1} f(x) = \triangle[\triangle^n f(x)]$$

$$= \triangle[a_0n!\,h^n] = 0$$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(1) $u_0 = 3,\ u_1 = 12,\ u_2 = 18,\ u_3 = 200,\ u_4 = 100,\ u_5 = 8$. எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து $\Delta^5 u_0$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\Delta \equiv E - 1$$

$$\therefore \quad \Delta^5 u_0 \equiv (E-1)^5 u_0$$

ஆனால் $(E-1)^5 u_0 = (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1) u_0$

$$= u_5 - 5u_4 + 10u_3 - 10u_2 + 5u_1 - u_0$$

$$= 8 - 500 + 2000 - 180 + 60 - 3$$

$$= 1385$$

(2) $\Delta\, ab^{cx}$-ன் மதிப்புக் காண்க.

பிரிவு இடை வெளியை $h$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \Delta\, ab^{cx} = ab^{cx+h} - ab^{cx}.$$

$$= ab^{cx}\,[b^{ch} - 1]$$

(3) பிரிவு இடைவெளி 'ஒன்று' ஆக இருக்கும்பொழுது $\Delta^2 x^3$-ன் மதிப்பு காண்க.

$$\Delta^2 x^3 = \Delta\,(\Delta x^3)$$

$$= \Delta\,[(x+1)^3 - x^3]$$

$$= \Delta\,[3x^2 + 3x + 1]$$

$$= 3\,\Delta x^2 + 3\,\Delta x + 0$$

$$= 3\,[(x+1)^2 - x^2] + 3\,[x + 1 - x]$$

$$= 6x + 3 + 3 = 6(x+1)$$

(4) பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து விட்டுப்போன உறுப்பைக் காண்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 1 | 3 | 9 | × | 81 | 243 |

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதனால் $\Delta^4 y_0$ ஒரு மாறிலி.

$$\therefore \Delta [\Delta^4 y_0] = \Delta^5 y_0 = 0$$

$$\Delta^5 y_0 \equiv (E-1)^5 y_0 = (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1) y_0$$

$$= 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$243 - 45 + 10y_3 - 90 + 15 - 1 = 0$$

$$10 y_3 = 238$$

$$y_3 = 23{\cdot}8$$

**வேறுபாடுகளை அறிவிக்கும் பட்டியல்** (Difference Table)

பொதுவாக சார்பலனின் பல மதிப்புகள் வரிசையாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறுபாடுகளைக் கணக்கிடலாம். பட்டியல் வருமாறு :

| $u$ | $\Delta u$ | $\Delta^2 n$ | $\Delta^3 u$ | $\Delta^4 u$ | $\Delta^5 u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_0$ | | | | | |
| | $\Delta u_0$ | | | | |
| $u_1$ | | $\Delta^2 u_0$ | | | |
| | $\Delta u_1$ | | $\Delta^3 u_0$ | | |
| $u_2$ | | $\Delta^2 u_1$ | | $\Delta^4 u_0$ | |
| | $\Delta u_2$ | | $\Delta^3 u_1$ | | $\Delta^5 u_0$ |
| $u_3$ | | $\Delta^2 u_2$ | | $\Delta^4 u_1$ | |
| | $\Delta u_3$ | | $\Delta^3 u_2$ | | |
| $u_4$ | | $\Delta^2 u_3$ | | | |
| | $\Delta u_4$ | | | | |
| $u_5$ | | | | | |

இங்கு $u_0$ என்பது முதன்மைக் கோவையைக் குறிக்கும். $\Delta u_0, \Delta u_{20}$ ... என்பன முதன்மை வேறுபாடுகளைக்குறிக்கும். இவ் வேறுபாடுகள் முன்னேக்கு வேறுபாடுகள், பின்னேக்கு வேறு பாடுகள் என்று இருவகைப்படும். இவ்வேறுபாடுகளைக் கொண்டு

நியூட்டன் இரண்டு இடைச் செருகல் வாய்பாடுகளை வரையறுதுள்ளார்.

முன்னோக்கு வேறுபாடுகளால் வரையறுக்கப்பட்ட நியூட்டனின் இடைச் செருகல் வாய்பாடு,

$$(x_0, y_0), (x_0 + h, y_1) (x_0 + 2h, y_2) \ldots (x_0 + nh, y_n)$$

$(n + 1)$ ஜதை மதிப்புகளாக இருக்கட்டும். இவை $(x, y)$ மாறிகளின் ஜதை மதிப்புகள்.

இதில் $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$

$y_2 = f(x_0 + 2h) \ldots$ எனப் பிரதிசெய்தால்

$\triangle \; y_0 = y_1 - y_0$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $y_1 = y_0 + \triangle y_0 = (1 + \triangle) y_0$

$f(x_0 + h) = (1 + \triangle) f(x_0)$

இதேபோன்று $\triangle^2 \; y_0 = y_2 - 2 y_1 + + y_0$

$$y_2 = \triangle^2 y_0 + 2(1 + \triangle) y_0 - y_0$$

$$= (1 + 2\triangle + \triangle^2) y_0$$

$$= (1 + \triangle)^2 y_0$$

பொதுவாக $f(x + nh) = (1 + \triangle)^n f(x_0)$

$$= f(x_0) + \frac{n}{1!} \triangle f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!} \triangle^2 f(x_0) + \ldots\ldots$$

இதனை நாம் மற்றொரு முறையிலும் நிரூபிக்கலாம்.

$E \equiv 1 + \Delta$

$E^n f(x_0) = (1 + \triangle)^n f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0 + nh = f(x_0) + \frac{n}{1!} \triangle f(x_0)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \triangle f(x_0) + \ldots \triangle^n f(x_0)$$

இச் சமன்பாட்டை, $n$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும், முழு எண் ஆகவோ, பின்னமாகவோ இருந்தாலும்கூடப் பயன்படுத்தலாம். $n$-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திற்கு அதிகமாக இருக்கும்பொழுது இவ் வாய்பாடு சரியாகப் பொருந்துகிறது. $n$-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திற்குக்

குறைவாகவோ, அல்லது பின்ன எண்ணுகவோ இருக்குமானுல், வாய்பாட்டின் வலது புறத்தில் வரும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரையற்றதாகும். அப்பொழுது இவ் வாய்பாடு ஏறக்குறைய உண்மையானதாகும். ஆனுல், உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரையற்றதாகும்பொழுது, சில உறுப்புகள் மிகவும் சிறியதாகின்றன. அவற்றின் நீக்கத்தை நாம் பொருட்படுத்துவதில்லை.

$x$, சீரான இடைவெளிகளைக் கொண்ட $a, a+h, a+2h$ ......$a+nh$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கும்பொழுது அவற்றிற்குகந்த $y$-ன் மதிப்புகளை $f(a), f(a+h), \dots f(a+nh)$ எனக்கொள்வோம். $x$ இங்குச் சார்பிலா மாறியாகவும், $y$, $x$ ஐச் சார்ந்த $y=f(x)$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பலனுகவும் இருக்கட்டும்.

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)(x-\overline{a+h})$$
$$+ A_3(x-a)(x-\overline{a+h})(x-\overline{a+2h}) + \dots +$$
$$A_n(x-a)\dots(x-\overline{a+\overline{n-1}h}) \qquad \dots\dots (1)$$

என்ற $n$ படி பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு $P_n(a) = f(a), P_n(a+h) = f(a+h), \dots\dots\dots$
$P_n(a+nh) = f(a+nh)$

இதன்மூலம் $A_0, A_1, A_2, \dots\dots A_n$ என்ற மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் காண்கிருேம்.

சமன்பாடு (1)-ல் $x=a$ என்று பிரதி செய்தால்

$P_n(a) = f(a) = A_0$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore \quad A_0 = f(a),$

சமன்பாடு (1)-ல் $x = a+h$ என்று பிரதிசெய்தால்,

$P_n(a+h) = f(a+h) = A_0 + A_1 h$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad A_1 = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\triangle f(a)}{h}$$

சமன்பாடு (1)-ல், $x = a+2h$ என்று பிரதி செய்தால் $P_n(a+2h) = f(a+2h) = A_0 + 2A_1 \,.\, h + 2A_2 \,.\, h^2$ எனக் கிடைக்கும்.

$$A_2 = \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(a)}{2h^2}$$

மேற்கண்டவாறே சமன்பாடு (i)—ல் $x = a + 3h$ என்று

பிரதி செய்தால் $A_3 = \dfrac{\Delta^3 f(a)}{6\, h^3} = \dfrac{\Delta^3 f(a)}{3!\, h^3}$ என வரும்.

பொதுவாக $A_r = \dfrac{\Delta^r f(a)}{r!\, h^r}$

$$\therefore P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)\overline{x-a+h}}{2h^2}\Delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{(x-a)(\overline{x-a+h}) \ldots\ldots (\overline{x-a+n-1h})}{n!\, h^n}\Delta^n f(a)$$

$\dfrac{x-a}{h} = u$ என்று மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$f(a+hu) = f(a) + u\Delta f(a) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \ldots$$

$$+ \frac{u(u-1) - (u-r+1)}{r!}\Delta^r f(a).$$ எனக் கிடைக்கும்.

இதுவே நியூட்டன் முன்னேக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரம் ஆகும்.

[குறிப்பு: இவ்வாய்பாட்டின் உதவியால் $a \leq x \leq a + nh$ என்றமையுமாறு உள்ள $x$ மதிப்பிற்கேற்ப இடைச்செருகல் காணப் பயன்படுத்தலாம். ஆனல், பொதுவாக இவ் வாய்பாட்டை $a \leq x \leq a + h$, மேலும் $a-h \leq x \leq a$ என்ற இடைவெளிகளுக்கிடையே அமைந்த $x$-மதிப்புக்கு ஏற்ப $f(x)$ மதிப்பைக் காணப் பயன் படுத்துகிறேம். மேலும், வேறுபாட்டு அட்டவணையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பத்தியில் உள்ள வேறுபாடுகள் மாறிலி எனில் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட சார்பு ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இந்நிலையில் சார்பின் சரியான அமைப்பைக் காண இயலும்.]

நியூட்டன் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி $x = 1\cdot5$ என இருக்கும்போது $y$-ன் மதிப்பைப் பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு காண்.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 858·3 | 869·6 | 880·9 | 892·3 | 903·6 |

இங்கு 5 ஜதை மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே $y$ ஐ, $x$-ன் 4ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையால் வரையறுக்கலாம்

**வேறுபாடுகளை அறிவிக்கும் பட்டியல் :**

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 858·3 | | | | |
| | | 11·3 | | | |
| 1 | 869·6 | | 0 | | |
| | | 1·3 | | 1 | |
| 2 | 880·9 | | 1 | | —·3 |
| | | 11·4 | | | |
| 3 | 892·3 | | | —.2 | |
| | | 11·3 | —.1 | | |
| 4 | 903·6 | | | | |

$$\text{இங்கு } u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1\cdot5 - 0}{1} = 1\cdot5$$

நியூட்டன் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்

$$y = y_0 + u \,\Delta\, y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \ldots\ldots$$

$$y = 858\cdot3 + (1\cdot5)\,(11\cdot3) + \frac{(1\cdot5)\,(\cdot5)}{2!} \times 0$$

$$+ \frac{(1\cdot5)\,(1\cdot5)\,(-\cdot5)}{3!} \times .1$$

$$+ (1\cdot5)\,\frac{(\cdot5)\,(-\cdot5)\,(-1\cdot5)}{4!}\,(-\cdot3)$$

$= 858{\cdot}3 + 16{\cdot}95 - {\cdot}0625 - {\cdot}00703125$

$= 875{\cdot}2367\ 1875 = 875{\cdot}24$ (தோராயமாக)

கீழ் நோக்கிய வேறுபாடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டு $(n+1)$ ஐதை மதிப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு இடைச் செருகல் வாய்பாட்டை வரையறுத்தல்.

$x$ சீரான இடைவெளிகளைக் கொண்ட $a, a+h, a+2h \ldots\ldots$ $a+nh$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கும்பொழுது அவற்றிற்குகந்த $y$-ன் மதிப்புகளை $f(a), f(a+h) \ \ldots f(a+nh)$ எனக் கொள்வோம். $P_n\ (x)$ என்ற $n$படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கீழ்க்கண்ட வாறு வரையறுப்போம்.

$$P_n(x) = A_0 + A_1\,(x - \overline{a+h})$$
$$+ A_2\,(x - \overline{a+nh})\,(x - \overline{a+n-1h})$$
$$+ A^3\,(x - \overline{a+nh})\,(x - \overline{a+n-1\,h})$$
$$+ A_3\,(x - \overline{a+nh})\,(x - \overline{a+n-1\,h})\,(x - \overline{a+n-2h})$$
$$+ \ldots + A\,(x - \overline{a+nh}) \quad [x - (a + n - \overline{n-1}\,h)] \ \ldots(1)$$

இங்கு $P_n\,(a+rh) = f(a+rh)\ (r = 0, 1, \ldots n)$

சமன்பாடு 1 ல் $x = a + 2h$ எனப் பிரதிசெய்தால்,

$$Pn\,(a+nh) = f(a+nh) = A_0$$

சமன்பாடு 1 ல் $x = a + \overline{n-1}\,h$ எனப் பிரதிசெய்தால்,

$$Pn\,(a + \overline{n-h1}) = f(a + \overline{n-1}h) = A_0 + A_1(-h)$$
$$hA_1 = f(a+nh) - f(a+\overline{n-1}\,h) = \Delta f(a + \overline{n-1}\,h)$$

சமன்பாடு 1-ல் $x = a + n - 2h$ எனப் பிரதி செய்தால்

$$P_n\,(a + \overline{n-2}\,h) = f(a + \overline{n-2}\,h) = A_0 + A_1\,(-2h) + A_2\,(-h)\,(-2h).$$

$$2h^2 A_2 = f(a + \overline{n-2}\,h) + 2f\,(a+nh) - 2f\,(a + \overline{n-1}\,h) \quad f(a+nh)$$

$$= \Delta^2 f(a + n - 2\,h)$$

$$A_2 = \frac{\Delta^2 f(a + \overline{n-2}\,h)}{2h}$$

இதேபோன்று $A_3 = \dfrac{\Delta^3 f(a+\overline{n-3}\,h)}{3!\,h^3}$

பொதுவாக $A_r = \dfrac{\Delta^r f(a+\overline{n-r}\,h)}{r!\,h^r}$

$$P_n(x) = f(a+nh)$$

$$+ \frac{\Delta f(a+\overline{n-1}\,h)}{h}(x-\overline{a+nh})$$

$$+ \frac{\Delta^2 f(a+\overline{n-2}\,h)}{2!\,h^2}$$

$$\times (x-\overline{a+nh})(x-\overline{a+\overline{n-1}\,h}) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(a+\overline{n-1}\,h)}{n!\,h^n}(x-\overline{a+nh})$$

$$\ldots\ldots\left[x-(a+\overline{n-n-1}\,h)\right]$$

$\dfrac{x-\overline{a+nh}}{h} = u$ என்று பிரதி செய்ய

$$P_n(x) = f(a+nh) + u\,\Delta f(a+\overline{n-1}\,h) +$$

$$\frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 f(a+\overline{n-2}\,h)$$

$$+ \ldots \frac{u(u+1)\ldots(u+\overline{r-1})}{r!}\Delta^r f(a+\overline{n-r}\,h)$$

$$+ \ldots + \Delta^n f(a)\cdot\frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

தேர்வு ஒன்றில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் பின்வருமாறு:

| மதிப்பெண்கள் | 0 — 19 | 20 — 39 | 40 — 59 | 60—79 | 80 — 99 |
|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 41 | 62 | 65 | 50 | 17 |

70-க்கும் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

மேற்கண்ட 5 ஜதை மதிப்புகளைப் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டவும்.

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ | $\Delta^4 f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20-க்குக் கீழ் | 41 | | | | |
| 40-க்குக் கீழ் | 103 | 62 | 3 | | |
| 60-க்குக் கீழ் | 168 | 65 | | —18 | |
| 80-க்குக் கீழ் | 218 | 50 | —15 | —18 | 0 |
| 100-க்குக் கீழ் | 235 | 17 | —33 | | |

$$235 - 25{\cdot}5 - 12{\cdot}375 + 1{\cdot}101 = 198$$

$$u = \frac{x - \overline{a + h}}{h} = \frac{70 - 100}{20} = -1{\cdot}5.$$

$$P_n(x) = f(a + nh) + u\,\Delta f(a + \overline{n - 1}\,h) + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 f(a + \overline{n - 2}\,h) + \ldots$$

$$= 235 + (-1{\cdot}5)\,17 + \frac{(-1{\cdot}5)(-{\cdot}5)(-33)}{2!}$$

$$+ \frac{(1{\cdot}5)(-{\cdot}5)(.5)}{3!} \times -18$$

$$= 235 - 25{\cdot}5 \quad 12{\cdot}375 + 1{\cdot}101 = 198 \text{(தோராயமாக)}$$

**லெக்ராஞ்சு இடைச் செருகல் வாய்பாடு (Lagrange's Formula for Interpolation)**

$(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ……… $(x_n, y_n)$ என்பன $x$, $y$-மாறிகளின் $(n+1)$ ஜதை மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். $x$ மாறியைச் சார்பிலா மாறியாகவும், $y$-மாறியை $x$-ல் சார்புடையதாகவும் கொள்ளவும். $x$-ன் $x_0$, $x_1$, $x_2$, …… மதிப்புகளுக்குகந்த $y$-ன் மதிப்பை $f(x_0)$, $f(x_1)$, ……… எனக் கொள்வோம். இங்கு $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ மதிப்புகள் ஒரே சீரான இடைவெளிகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு இல்லை. $(n+1)$ ஜதை மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், சார்பலனை $x$-மாறியின் '$n$' படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்வோம்.

$$f(x) = A_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)$$
$$+ A_1 (x - x_0)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)$$
$$+ A_2 (x - x_0)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)$$
$$+ \ldots\ldots A_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1})$$

மேலே கண்ட சமன்பாட்டில் $x = x_0$ என்றி பிரதி செய்ய

$$f(x_0) = A_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_n)$$

$$A_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_n)}$$

$x = x_1$ என்று பிரதி செய்ய

$$f(x_1) = A_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_1 - x_n)$$

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x\ )(x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_1 - x_n)}$$

பொதுவாக,

$$A\ = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots\ldots (x_n - x_{\ -1})}$$

$A_1$, $A_2$, ... $A_n$-ன் மதிப்புகளைச் சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தும் போது

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)\, x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_n)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_1 - x_n)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots\ldots (x_2 - x_n)} f(x_2)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots\ldots (x_n - x_{n-1})} f(x_n)$$

இதுவே லெக்ரான்சு இடைச் செருகல் வாய்பாடு ஆகும்.

சார்பிலா மாறி சீரற்ற பிரிவு இடைவெளிகளைப் பெற்றிருந்தாலும் கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம். வாய்பாட்டை வரையறுப்பதில், இரு மாறிகளில் எதையேனும் சார்பிலா மாறியாகக் கொள்ளலாம். எடுத்துக் காட்டாக $y$ மாறியைச் சார்பிலா மாறியாகக் கொண்டு $x$ மாறியை

$y$ஐச் சார்ந்த சார்பலனுகைக் கொண்டு $y$-ல் படிகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் வரையறுத்தால்,

$$P(y) = \frac{(y - y_1)(y - y_2) \ldots\ldots (y - y_n)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) \ldots\ldots (y_0 - y_n)} x_0$$

$$+ \frac{(y - y_0)(y - y_2) \ldots\ldots (y - y_n)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2) \ldots\ldots (y_1 - y_n)} x_1 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(y - y_0)(y - y_1) \ldots\ldots (y - y_{n-1})}{(y_n - y_0)(y_n - y_1) \ldots\ldots (y_n - y_{n-1})} x_n$$

ஆகும்.

நியூட்டன் இடைச் செருகல் வாய்பாட்டைப் போல வேறு வாய்பாடுகளை அறிவிக்கும் பட்டியல் இங்குத் தேவைப்படுவதில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$y_0, y_1, y_2, y_4, y_5, y_6$ என்பன ஒரு கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளாக இருக்குமேயானால்,

$y_3 = {\cdot}05\ (y_0 + y_6) - {\cdot}3\ (y_1 + y_5) + {\cdot}75\ (y_2 + y_4)$

என நிறுவுக.

$$y_3 = \frac{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)}{(0-1)(0-2)(0-4)(0-5)(0-6)} y_0$$

$$+ \frac{(3-0)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)}{(1-0)(1-2)(1-4)(1-5)(1-6)} y_1$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-4)(3-5)(3-6)}{(2-0)(2-1)(2-4)(2-5)(2-6)} y_2$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-5)(3-6)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-5)(4-6)} y_4$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)(3-6)}{(0-0)(5-1)(5-2)(5-4)(5-6)} y_5$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}{(6-0)(5-1)(6-2)(6-4)(6-5)} y_6$$

$$= \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot -2 \cdot -3}{-1 \cdot -2 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6} y_0$$

$$+ \frac{3 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3}{1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -4 \cdot -5} y_1 + \frac{3 \cdot 2 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3}{2 \cdot 1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4} y_2$$

$$+ \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot -2 \cdot -3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot -1 \cdot -2} y_4$$

$$+ \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot -1} y_5 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot -2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} y_0$$

$$= \frac{1}{20}(y_0 + y_6) - \frac{3}{10}(y_1 + y_5) + \frac{3}{4}(y_2 + y_4)$$

$$= .5\,(y_0 + y_6) - .3\,(y_1 + y_5) + .75\,(y_2 + y_4)$$

**வகுத்த வேறுபாடுகள் (Divided Differences)**

$x$ ஒரு மார்பிலா மாறியாகவும், $y$, $x$ ஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் இருக்கட்டும். சார்பலன் $y = f(x)$ என்று வரையறுக்கப் பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். சார்பலனின் மதிப்பு, சீரான இடைவெளியைக் கொண்ட சார்பின் மாறிக்குக் கொடுக்கப் படாமல் இருக்கும்பொழுது நியூட்டன் இடைச் செருகல் சூத்தி ரத்தை நாம் கையாளமுடியாது. இந்நிலையில் நாம் வகுத்தல் வேறுபாடுகளைச் செயற் படுத்தலாம். $y = f(x)$ என்ற சார்பலனைக் கருதுவோம்.

$x = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற இடத்தில் $f(x)$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்குப் பிரிவு இடைவெளிகள், அதாவது $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_n - x_{n-1}$ முதலியன சீராக இருக்க வேண்டும் என்ற நியதி இல்லை.

$f(x)$-ன் $x_0$, $x_1$ என்ற சார்பில் மாறியின் மதிப்புகளுக்கான முதல் நிலை வகுத்த வேறுபாடுகளை

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$ என வரையறுக்கிறோம்

இதேபோன்று $f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$f(x)$ன் மதிப்பு $x_0$, $x_1$, $x_2$ என்ற இடங்களில் கொடுத்துள்ள போது இரண்டாவது நிலை வகுத்த வேறுபாடுகளை,

$f(x_0, x_1, x_2) = f\dfrac{(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$ என வரையறுக்கிறோம்.

மூன்றாவது நிலை வகுத்த வேறுபாடுகள்

$f(x_0, x_1, x_2, x_3,) \dfrac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x\ )}{x_0 - x_3}$ என்ற

சமன்பாட்டிலிருந்து கொடுக்கப்படுகின்றது.

பொதுவாக, $f(x)$-ன் $n$ ஆவது நிலை வகுத்த வேறுபாடுகள் $f(x_0, x_1, \ldots\ldots x\ )$

$$= \frac{f(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) - f(x_1, x_2, - x_n)}{x_0 - x_n}$$

என்று வரையறுக்கப் படுகின்றது.

நியூட்டனின் வகுத்த வேறுபாடு வாய்பாடு

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_0) \quad \ldots \quad (1)$$

$$f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, ___}{x - x_1}$$

எனவே, $f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)\ f(x, x_0 x_1)$

$$\ldots \quad (2)$$

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2) \quad \ldots \quad (3)$$

$$f(x, x_0, x_1 \ldots\ldots x_{n-1}) = f(x_0, x_1, \ldots x_n) + (x - x_n) f(x, x_0, \ldots x_n - n + 1)$$

(2) ஆவது சமன்பாட்டிலிருந்து அடுத்தடுத்த சமன்பாடுகளை முறையே $(x - x_0)$; $(x - x_0)\ (x - x_1)$, $(x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)$, …… $(x - x_0)(x \quad x_1) \ldots (x - x_{n-1})$ ஆல் பெருக்கி $(n + 1)$ சமன்பாடுகளையும் கூட்டினால் கிடைப்பது

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \ldots\ldots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) f(x_0, x_1, \ldots\ldots x_{n-1})$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) f(x_0, x_1, \ldots x\ );$$

இங்கு $f(x)$ ஒரு $n$-ம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கொண்டால் $f(x)$-ன் $n$-ம் நிலை வகுத்த வேறுபாடுகள் மாறிலி ஆதலால், இதன் $(n+1)$ஆம் நிலை வகுத்த வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும். எனவே, மேற்குறித்த சமன்பாட்டில்

$$f(x_0, x_1, \ldots\ldots x_n) = 0$$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1)$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots\ldots$$
$$(x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n)$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x\ ) f(x_0\ x_1 - .x_{-1})$$

இதுவே நியூட்டனின் வகுத்த வேறுபாடுகளுக்கான வாய்பாடு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$a, b, c, d$ ஐ மாறியாகக்கொண்ட சார்பலன் $\left(\frac{1}{x}\right)$ என்ற வாறு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் அச் சார்பலனின் மூன்றுவது நிலை வகுத்த வேறுபாடுகள் $\frac{-1}{abcd}$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு :**

$$(a, b) = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{a - b} = \frac{b - a}{ab(a - b)} = \frac{-1}{ab}$$

$$f(a, b, c) = \frac{f(ab) - f(bc)}{a - c} = \frac{\frac{1-}{ab} - \frac{-1}{ac}}{a - c}$$

$$= \frac{\frac{1}{bc} - \frac{1}{ab}}{a - c} = \frac{ab - bc}{ab\,c\,(a - c} = \frac{b(a - c)}{(a - c)ab^2c} = \frac{1}{abc}$$

$$f(a, b, c, d) = \frac{f(abc)\quad f(bcd)}{a - d}$$

$$= \frac{\frac{1}{abc} - \frac{1}{bcd}}{a-d} = \frac{bc(d-a)}{ab^2c^2d(a-d)}$$

$$= \frac{-1}{abcd}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$y_{35} = 1175$, $y_{35 \cdot 5} = 1280$, $y_{39 \cdot 5} = 2180$, $y_{40 \cdot 5} = 2420$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது $y_{40}$—ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

| | முதல் நிலை வகுத்த வேறுபாடு | 2 ஆவது நிலை வகுத்த வேறுபாடு | 3 ஆவது நிலை வகுத்த வேறுபாடு |
|---|---|---|---|
| $y_{35}$ 1175 | | | |
| | 210 | | |
| $y_{35 \cdot 5}$ 1280 | | 3.33 | |
| | 225 | | —·06 |
| $y_{39 \cdot 5}$ 2180 | | 3 | |
| | 240 | | |
| $y_{40 \cdot 5}$ 2420 | | | |

நியூட்டனின் வகுத்த வேறுபாடு வாய்பாடு

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) +$

$y_{40 \cdot 5} = 1175 + (40-35)\, 210 + (40-35)\, (40-35 \cdot 5)\, 3.33 \ldots$

$+ (40-35)\, (40-35.5)\, (40-39.5)\, (-.06)$

$= 1175 + 1050 + 74 \cdot 925 - \cdot 675$

$= 2299 \cdot 25.$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$u_0 + u_8 = x$, $u_1 + u_7 = y$. $u_2 + u_6 = Z$, $u_3 + u_5 = t$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது $u_4$-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$u$-ன் 8 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் $u$, $x$-ல் அமைந்த 7-ம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \Delta^8 u_x = 0.$$

அதாவது $(E - 1)^8 u_0 = 0.$

$$u_8 - 8c_1 u_7 + 8c_2 u_6 - 8c_3 u_5 + 8c_4 u_4 - 8c_5 u_3 + 8c_6 u_2 - 8c_7 u_1 + u_0 = 0.$$

$$u_8 - 8u_7 + 28u_6 - 56 u_5 + 70 u_4 - 56 u_3 + 28 u_2 - 8 u_1 + u_0 = 0.$$

$$(u_0 + u_8) - 8 (u_1 + u_7) + 28 (u_2 + u_6) - 56 (u_3 + u_5) + 70 u_4 = 0.$$

$$x - 8y + 28 Z - 56t + 70 u_4 = 0$$

$$u_4 = \frac{-1}{70} [x - 8y + 28 Z - 56t]$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$C$ ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்பொழுது $u_x = \sin x$ என்றால், $\Delta^2 u_x = CE u_x$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு :**

$$u_x = \sin x.$$

$$\Delta \quad u_x = \sin (x + h) - \sin x$$

$$= 2 \sin\frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\frac{h}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)$$

இதேபோன்று,

$$\Delta^2 u_x = 2 \sin\frac{h}{2} \Delta \sin \left(x + \frac{\pi + h}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\frac{h}{2}\left[\left(\sin x + \frac{\pi + h}{2} + h\right) - \left(\sin x + \frac{\pi + h}{2}\right)\right]$$

$$= 2 \sin\frac{h}{2}\left[2\sin\frac{h}{2}\cos x + \frac{\pi + 2h}{2}\right]$$

$$= 4 \sin^2\frac{h}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi + 2h}{2}\right)$$

$$= 4 \sin^2\frac{h}{2} \sin\left((x + 2 . \frac{\pi + h}{2}\right)$$

$$= 4 \sin^2\frac{h}{2} \sin(\pi + x + h)$$

$$= -4 \sin^2\frac{h}{2} \sin(x + h)$$

$= C \sin (x + h)$ என்க.

$= C E \sin x$

$= C Eu_x$.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(32)$ஐ கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடுக.

| $x$ | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 152 | —84 | 65 | 72 | —47 |

**தீர்வு :**

$$f(32) = \frac{(32-25)(32-30)(32-35)(32-40)}{(20-25)(20-30)(20-35)(20-40)} \times 152$$

$$+ \frac{(32-20)(32-30)(32-35)(32-40)}{(25-20)(25-30)(25-35)(25-40)} \times -84$$

$$+ \frac{(32-20)(32-25)(32-35)(32-40)}{(30-20)(30-25)(30-35)(30-40)} \times 65$$

$$+ \frac{(32-20)(32-25)(32-30)(32-40)}{(35-20)(35-25)(35-30)(35-40)} \times 72$$

$$+\frac{(32-20)(32-25)(32-30)(32-35)}{(40-20)(40-25)(40-30)(40-35)}\times -47$$

$$=\frac{7.2\ -3.\ -8}{5.-10.-15.-20}\,152+\frac{12.2.-3.-8}{5.-5.\ 10.-15}(-84)$$

$$+\frac{12.7.-3.-8}{10.5.-5.-1}\,65+\frac{12.7.2.-8}{15.10.5.-5}\,.72$$

$$+\frac{12.7.2.-3}{20.15.10.5}\,(-47)$$

$$=3\cdot 40\,48+12\cdot 9024+52\cdot 3800+25\,8048+1\cdot 5792$$

$$=96\cdot 0712.$$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு சார்பற்ற மாறி 3, 7, 9, 10 என்ற 4 மதிப்புகளை ஏற்கும் போது ஒரு சார்பின் நேரில் காணப்பட்ட மதிப்புகள் முறையே 168, 120, 72, 63. சார்பற்ற மாறியின் மதிப்பு 6 ஆக இருக்கும் போது, சார்பின் சிறந்த மதிப்பீடு என்ன ? (I. A. S.)

தீர்வு :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| $Y$ | 168 | ? | 120 | 72 | 63 |

லெக்ராஞ்சின் வாய்பாட்டில், $x_0 = 3$, $x_1 = 7$, $x_2 = 9$, $x_3 = 10$, $x = 6$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$Y = Y_0 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$

$$Y_1 \times \frac{(x_0-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x\ )(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$Y_2 \times \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$

$$Y_3 \times \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

$$Y = 168\frac{(6-7)(6-9)(6-10)}{(3-7)(3-9)(3-10)}$$

$$+ 120\frac{(6-3)(6-9)(6-10).}{(7-3)(7-9)(7-10).}$$

$$+ 72\frac{(6-3)(6-7)(6-10)}{(9-3)(9-7)(9-10)}$$

$$+ 73\frac{(6-3)(6-7)(6-9)}{(10-3)(10-7)(10-9)}$$

$$Y = 168\frac{-1 \times -3 \times -4}{-4 \times -6 \times -7} + 120\frac{3 \times -3 \times -4}{4 \times -2 \times -3}$$

$$+ 72\frac{3 \times -1 \times -4}{6 \times 2 \times -4} - 63 \times \frac{3 \times -1 \times -3}{7 \times 3 \times 1.}$$

$= \mathbf{147.}$

எனவே, சார்பற்ற மாறியின் மதிப்பு 6 ஆக இருக்கும்போது, சார்பின் மதிப்பீடு 147 ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு சோப்புத் தொழிற்சாலையில் 460 ஊழியர்களுக்குக் கொடுக்கப்படும் வார ஊழியங்களின் விவரம் வருமாறு:

| ரூபாய் | | ஊழியர்கள் |
|---|---|---|
| 40-க்கு | மேற்படாத | 212 |
| 45 ” | ” | 296 |
| 50 ” | ” | 368 |
| 55 ” | ” | 429 |
| 60 ” | ” | 460 |
| 65 ” | ” | 481 |
| 70 ” | ” | 490 |
| 75 ” | ” | 492 |

நியூட்டன் முறையைப் பின்பற்றி 42 ரூபாய்க்கு அதிகமாக ஆனால், 45 ரூபாய்க்கு மேற்படாத தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை இடைச் செருகல் மூலம் காண்க.

| ஊதியம் (கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரம்பிற்கு மேற்படாத) | ஊழியர்கள் $f(x)$ | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ | $\Delta^4 f(x)$ | $\Delta^5 f(x)$ | $\Delta^6 f(x)$ | $\Delta^7 f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 212 | | | | | | | |
| | | 84 | | | | | | |
| 45 | 296 | | —12 | | | | | |
| | | 72 | | 1 | | | | |
| 50 | 368 | | —11 | | —20 | | | |
| | | 61 | | —19 | | 59 | | |
| 55 | 429 | | —30 | | 39 | | —120 | |
| | | 31 | | +20 | | —61 | | 210 |
| 60 | 460 | | —10 | | —22 | | + 90 | |
| | | 21 | | — 2 | | 29 | | |
| 65 | 481 | | —12 | | 7 | | | |
| | | 9 | | 5 | | | | |
| 70 | 490 | | —7 | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| 75 | 492 | | | | | | | |

$$x = \frac{42-40}{5} = \frac{2}{5} = \cdot 4$$

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{(xx-1)}{2!}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 u_0$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 u_0$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}\Delta^5 u_0$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ x-5)}{6!}\Delta^6 u_0$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x\ \ 5)(x-6)}{7!}\Delta^7 u_0$$

$$= 212 + 0\cdot 4 \times 84 + \frac{0\cdot 4(\cdot 4-1)}{2!}(-12)$$

$$+ \frac{\cdot 4(4-1)(\cdot 4-2)}{3!} \times 1$$

$$+ \frac{\cdot 4(\cdot 4-1)(\cdot 4-2)(\cdot 5-3)}{4!}(-20)$$

$$+ \frac{\cdot 4(\cdot 4-1)(\cdot 4-2)(\cdot 4-3)(\cdot 4-4)}{5!}\ 59$$

$$+ \frac{\cdot 4(\cdot 4-1)(\cdot 4-2)(\cdot 4-3)(\cdot 4-4)(4\cdot -5)}{6!}(-120)$$

$$+ \frac{\cdot 4(\cdot 4-1)(\cdot 4\ \ 2)(\cdot 4-3)(\cdot 4-4)(\cdot 4-5)(\cdot 4-6)}{7!}\ 210$$

$$= 212 + 33\cdot 6 + 1\cdot 44 + 0\cdot 06 + 0\cdot 83 + 1\cdot 83 + 1.77 + 2\cdot 75 + 3\cdot 85$$

$$= 256\cdot 30$$

$$= 256.$$

எனவே, ரூ. 42-க்கு மேற்படாமல் ஊதியம் வாங்குவோரின் எண்ணிக்கை 256.

ஆனால், ரூ 45-க்கு மேற்படாமல் ஊதியம் வாங்குவோரின் எண்ணிக்கை 296.

எனவே ரூ 52-க்கும் மேல் ரூ 42-க்கும் இடையே ஊதியம் பெறுவோரின் எண்ணிக்கை.

$$= 296 - 156 = 40.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

(i) $u_x = x^3$ என இருந்தால் $[x, y, z] = x + y + z$ எனவும்,

$u_x = \frac{1}{x}$ என இருந்தால் $(x, y, z,) = \frac{1}{xyz}$ எனவும் காட்டுக.

**தீர்வு :**

(i) $u_x = x^3$

$$\therefore (x, y) = \frac{u_x - u_y}{x - y} = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

$$= x^2 + xy + y^2$$

$$\therefore (x, y, z) = \frac{(x, y) - (y, 2)}{x - z}$$

$$= \frac{1}{x - z}[(x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2)]$$

$$= \frac{1}{x - z}[(x - z)(x + y + z)]$$

$$= x + y + z.$$

(ii) $u_x = \frac{1}{x} \therefore (x, y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x - y} = -\frac{1}{xy}$

$$\therefore (x,y,z) = \frac{(x, y) - (y, z)}{x - z} = \frac{1}{x - z}\left[\frac{1}{yz} - \frac{1}{xy}\right]$$

$$= \frac{1}{xyz}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$u_2 = 15,\ u_5 = 72,\ u_6 = 103,\ u_{10} = 287$ இதிலிருந்து $u_x$-ன் மதிப்பையும் $u_{15}$-ன் மதிப்பையும் காண்க.

**தீர்வு :**

வேறுபாடுகளின் பட்டியலிலிருந்து

| $x$ | $u$ | $\triangle$ | $\triangle^2$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 15 | | |
| | | $\frac{57}{3} = 19$ | |
| 5 | 72 | | $\frac{12}{3} = 4$ |
| | | $\frac{31}{1} = 31$ | |
| 6 | 103 | | $\frac{15}{5} = 3$ |
| | | $\frac{184}{4} = 46$ | |
| 10 | 287 | | |

$$\therefore u_x = 15 + (x - 2) . 19 + (x - 2)(x - 5) .3$$

$$= 3x^2 - 2x + 7$$

$$u_1 = 15 + (15 - 2) .19 + (15 - 2)(15 - 5) .3$$

$$= 15 + 13 \times 19 + 13 \times 10 \times 3 = \mathbf{652}.$$

**எடுத்துக்காட்டு**

$u_{1\cdot5} = 21\cdot3,\quad u_{4\cdot2} = 37.8,\quad n_6 = 42\cdot7,\quad u_{7\cdot5} = 50\cdot1,$ $u_8 = 51\cdot6$, என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து $u_5$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

| $x$ : | 1·5 | 4·2 | 5 | 6 | 7·5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_x$ : | 21·3 | 37.8 | — | 42·7 | 50·1 | 51·6 |

**தீர்வு :**

லெக்ராஞ்சின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$$u_5 = \frac{(5 - 4\cdot2)(5 - 6)(5 - 7\cdot5)(5 - 8)}{(1\cdot5 - 4\cdot2)(1\cdot5 - 6)(1,5 - 7\cdot5)(1\cdot5 - 8)} \ (21\cdot3$$

$$+\frac{(5-1\cdot5)(5-6)(5-7\cdot5)(5-8)}{(4\cdot2-1\cdot5)(4\cdot2-6)(4\cdot2-7\cdot5)(4\cdot2-8)}(37\cdot8)$$

$$+\frac{(5-1\cdot5)(5-4.2)(5-7\cdot5)(5-8)}{(6-1\cdot5)(6-4\cdot2)(6-7\cdot5)(6-8)}(42\cdot7)$$

$$+\frac{(5-1\cdot5)(5-4\cdot2)(5-7\cdot6)(5-8)}{(7\cdot5-1\cdot5)(7\cdot5-4\cdot2)(7\cdot5-6)(7\cdot5-8)}50\cdot1$$

$$+\frac{(5-1.5)(5-4\cdot2)(5-7\cdot5)(5-6)}{(8-1\cdot5)(8-4\cdot2)(8-7\cdot5)(8-6)}(51\cdot6)$$

$$= -\cdot2698 + 16.29 + 36\cdot9 - 28\cdot3 + 14\cdot62$$

$$= \mathbf{39\cdot2402}$$

**எடுத்துக்காட்டு:**

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் இருந்து விடுபட்ட உறுப்பினைக் காண்க.

| வருடம் : | 1950 | 1955 | 1960 | 1965 | 1970 |
|---|---|---|---|---|---|
| துணியின் விற்பனை கஜ கணக்கில் (லட்சத்தில்) | 250 | 285 | 324 | — | 444 |

[வேறுபாட்டு அட்டவணையை அடுத்த பக்கத்திற் காண்க.]

4 ஆவது வேறுபாடு மாறிலியாதலால், மூன்றுவது படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்கும்.

$$\therefore\quad \Delta^4 f(x) = 0$$

$$\therefore\quad 1522 - 4f(1965) = 0.$$

$$4f(1965) = 1522.$$

$$f(1965) = 380\cdot5$$

1965 ஆம் ஆண்டு விற்பனை **380·5** இலட்சங்கள்.

**தீர்வு :**

வேறுபாட்டு அட்டவணை:

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ | $\Delta^4 f(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1950 | | | | | |
| | 250 | | | | |
| | | 35 | | | |
| 1955 | | | 8 | $f(1965) - 379$ | $1522 - 4f(1965)$ |
| | 285 | | | | |
| | | 43 | | | |
| 1960 | | | | | |
| | | | $f(1965) - 371$ | | |
| | 328 | | | | |
| | | $f(1965) - 328$ | | $1143 - 3f(1965)$ | |
| 1965 | $f(1965)$ | | $772 - 2f(1965)$ | | |
| | | $444 - f(1965)$ | | | |
| 1970 | 444 | | $f(x)$ | | |

எடுத்துக்காட்டு :

லெக்ராஞ்சின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து $u_3 = 168$, $u_7 = 120$, $u_9 = 72$, $u_{10} = 63$ எனும்போது $u_6$, $u_8$-ன் மதிப்புகளைக் காண்.

**தீர்வு :**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 3 | 7 | 9 | 10. |
| $u_x =$ | 168 | 120 | 72 | 63. |

லெக்ராஞ்சின் சூத்திரத்தின்படி

$$u_x = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_n)} \times f(x_0)$$

$$+ \ldots\ldots \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})} \times f(x_n)$$

$$u_6 = \frac{(6-7)(6-9)(6-10)}{(3-7)(3-9)(3-10)} 168 + \frac{(6-3)(6-9)(6-10)}{(7-3)(7-9)(7-10)} 120$$

$$+ \frac{(6-3)(6-7)(6-10)}{(9-3)(9-7)(9-10)} 72$$

$$+ \frac{(6-3)(6-7)(6-9)}{(10-3)(10-7)(10-9)} (63)$$

$$= 12 + 180 - 72 + 27 = 147 \quad \therefore \quad u_6 = \mathbf{147.}$$

$$u_8 = \frac{(8-7)(8-9)(8-10)}{(3-7)(3-9)(3-10)} 168$$

$$+ \frac{(8-3)(8-9)(8-10)}{(7-3)(7-9)(7-10)} (120)$$

$$+ \frac{(8-3)(8-7)(8-10)}{(9-3)(9-7)(9-10)} (72)$$

$$+ \frac{(8-3)(8-7)(8-9)}{(10-3)(10-7)(10-9)} (63)$$

$$u_8 = -12 + 50 + 60 - 15 = \mathbf{83.}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து விடுபட்ட உறுப்புகளைக் கண்டுபிடி.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 2 | 10 | 12 | 15 | 23 |
| $y$ : | 15·7 | 14·2 | ... | 13·5 | 130 |

**தீர்வு :**

லெக்ரான்ஜின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$$f(12) = \frac{(12-10)(12-15)(12-23)}{(2-10)(2-15)(2-23)}(15.7) + \frac{(12-2)(12-15)(12-23)}{(10-2)(10-15)(10-23)}(14\cdot3)$$

$$+ \frac{(12-2)(12-10)(12-23)}{(15-10)(15-2)(15-23)}(13.5) + \frac{(12-2)(12-10)(12-15)}{21.\ 13.\ 18}(13)$$

$$= -\frac{172\cdot7}{364} + \frac{471\cdot9}{52} + \frac{148\cdot5}{26} - \frac{5}{14}$$

$$= -\cdot51 + 9\cdot1 + 5\cdot7 - \cdot36 = 13\cdot93.$$

$\therefore y_{12} = \mathbf{13.93}$

**பயிற்சி**

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து 22 வயதில் எதிர்பார்க்கும் ஆயுளைக் காண்க. இதற்கான வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் போது மேற்கொள்ளவேண்டிய தற்கோள்களை விவரமாகக் கூறுக.

| வயது | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் (ஆண்டில்) | 34·4 | 32·2 | 29·1 | 26·0 | 23·1 | 20·4 |

(I.A.S. 1965)

[**விடை :** 22 வயதாக இருக்கும்போது எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் 27·85 ஆண்டுகள்.]

(2) இரு இடங்களுக்கு இடையே பயணம் செய்யும் நபர்களின் எண்ணிக்கையும், அதற்குரிய கட்டணமும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| கட்டணம் (பைசாவில்) : | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்) : | 30 | 40 | 30 | 30 | 20 | 20 |

8 பைசா என கட்டணம் இருக்கும்போது, பயணம் செய்வோரின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக. வரைபடத்தின் மூலமும் மதிப்பைக் காண்க.

(3) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகையைத் தருகிறது:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டுகள் | 1911 | 1921 | 1931 | 1941 | 1951 |
| மக்கள் தொகை (1000-த்தில்) | 115 | 125 | 140 | 170 | 225 |

வரைபடத்தின் உதவியால் 1924ஆம் ஆண்டுக்குரிய மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

[ விடை : 1924-ல் மதிப்பிடப் பட்ட மக்கள்தொகை 130 ஆயிரங்கள்.]

(4) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள log $X$-ன் மதிப்புகளில் இருந்து log 557·4-ன் மதிப்பைக் காண்க.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 555 | 556 | 557 | 558 |
| log $X$ | 2·7404 | 2·7482 | 2·7559 | 2·7634 |

[ விடை : 2·7589 ]

(5) இடைச் செருகல் மூலம், 1950-க்குரிய குறியீட்டு எண்ணைக் காண்க.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு : | 1948 | 1949 | 1951 | 1952 |
| குறியீட்டெண் : | 100 | 107 | 157 | 212 |

[ சென்னை B. Com :, AP 1961 ] [ விடை : 124 ]

(6) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியலில் இருந்து, 30 வயதுக்குக் கீழ் உடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையை, லெக்ராஞ்சின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி இடைச் செருகல் மூலம் கணக்கிடுக.

நபர்களின் எண்ணிக்கை 193·5 : 880 933 1636 221 830

[சென்னை B. Com. 1965]

(7) 35 ஆண்டுகளுக்கு கீழே உள்ள குற்றவாளிகளின் சதவீதத்தைக் காண்க

| வயது | | குற்றவாளிகளின் சதவீத, எண்ணிக்கை |
|---|---|---|
| 25 | ஆண்டுகளுக்கு கீழ் | 52·0 |
| 30 | ,, ,, | 67·3 |
| 40 | ,, ,, | 84·1 |
| 50 | ,, ,, | 94·4 |

[விடை : 77·4% ]

(8) முதல் பன்னிரண்டு மாதங்களில் குழந்தைகளின் இயல்பான எடையைக் கீழேயுள்ள பட்டியல் தருகிறது :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| வயது (மாதங்களில்) | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 |
| எடை (பவுண்டு) | $7\frac{1}{2}$ | $10\frac{1}{2}$ | 15 | 16 | 18 | 21 |

7 மாதக் குழந்தையின் எடையைக் காண்க.

[விடை : 15·7 பவுண்டு]

(9) கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $Y$ | 1 | 3 | 9 | — | 81 |

[I. A. S. 1952] [விடை = 31]

(10) இடைச் செருகலின் வாய்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி, sin 52°-ன் மதிப்பைக் கீழேயுள்ள விவரங்களைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

$\sin 45° = 0{\cdot}70\ 711 \qquad \sin 55° = 0\ 8192$

$\sin 50° = 0{\cdot}76\ 601 \qquad \sin 60° = 0{\cdot}8660$

[விடை 0·7880]

(11) கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து, சார்பின் அமைப்பு $f(x)$ ஐக் காண்க

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ : | 0 | 1 | 2 | 5 |
| $f(x)$ : | 2 | 3 | 12 | 147 |

[விடை $f(x) = X^3 + X^2 - X + 2$]

(12) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 1960 ஆம் ஆண்டிற்கான விற்பனையைக் கணக்கிடுக.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு : | 1957 | 1958 | 1959 | 1961 | 1962 |
| நடந்த விற்பனை : | 150 | 235 | 368 | 525 | 780 |

[செ. ப. க. B. Com, 1964]

[விடை : 450]

(13) கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து, ரூ 20-லிருந்து ரூ. 25-க்குள் உள்ள வருவாய்க் குழுக்குள் (income group) அடங்குபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

| வருவாய்: | ரூ. 10-க்குக் கீழே | ரூ. 20-க்குக் கீழே | ரூ. 30 க்குக் கீழே | ரூ. 40-க்குக் கீழே | ரூ. 50-க்குக் கீழே |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆட்களின் எண்ணிக்கை: | 20 | 45 | 115 | 210 | 325 |

[விடை : 31].

(14) கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணை I. A. S. தேர்விற்குச் சென்ற போட்டியாளர்களின் மதிப்பெண்களின் விவரத்தைத் தருகிறது. 60%-க்கு மேல் வாங்கிய போட்டியாளர் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்

| மதிப் பெண்கள் 200-க்கு | போட்டியாளர்களின் எண்ணிக்கை. |
|---|---|
| 50-க்கு மேல் | 130 |
| 72 „ | 126 |
| 90 „ | 80 |
| 110 „ | 36 |
| 140 „ | 14 |

[விடை: 24]

# 5. கூறுகளின் கொள்கைகள் —பெருங் கூறுகள்

(Sampling Theories)

பெரும்பாலான புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகளில் முழுமைத் தொகுதியில் (Population) உள்ள எல்லா இராசிகளையும் ஆராய்வதற்குப்பதிலாக ஒரு கூறினைத் (Sample) தேர்ந்தெடுத்து, அதனை ஆராய்ந்து ஒரு முடிவுக்கு வருவது வழக்கில் உள்ளது. அன்றாட வாழ்க்கையிலேயே நாம் இக் கொள்கையினை நம்மை அறியாமலேயே கடைப்பிடித்து வருகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) ஒரு கடையில் அரிசி வாங்கும் போது, ஒரு கை நிறைய அரிசி எடுத்துப்பார்த்து அதன் தன்மையை ஆராய்ந்து அதிலிருந்து மூட்டை முழுவதிலுமுள்ள அரிசியின் தன்மையைப் பற்றிய முடிவுக்கு வருகிறோம்.

இதுபோன்றே,

(2) 100 மாம்பழங்கள் நிறைந்த ஒரு கூடையை வாங்கும் போது அதில் ஏதேனும் ஒரு பழத்தைச் சுவை பார்த்து அக் கூடை மாம்பழங்களுக்கும் அதே சுவைதான் இருக்கும் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். கூடையில் உள்ள ஒவ்வொரு மாம்பழத்தையும் நறுக்கிச் சுவைத்துப் பார்த்தால் இறுதியில் கூடையில் மாம்பழமே இராது.

(3) தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியான மின் விளக்குகள் எரியக்கூடிய நேரத்தினைக் கணக்கிட ஒரு சில விளக்குகளை மட்டும் எரியவிட்டுப் பார்க்கமுடியுமே தவிர, எல்லா விளக்குகளையும் எரிய விட்டு முடிவிற்கு வருதல் இயலாது.

இதுபோன்றே,

(4) ஒரு மனிதரின் உடலின் தன்மையைப்பற்றி ஆராயும்போது செய்யப்படும் இரத்தப் பரிசோதனைக்கு, அவர் உடலில் உள்ள சில துளி இரத்தமே போதுமானது. அம் முடிவில் திருப்தி அடையாமல் மேலும் மேலும் உடலிலிருந்து இரத்தம் எடுத்து முழுமைக் கணிப்பு முறையில் ஆராய முற்பட்டால் அம் மனிதரின் உயிர் என்னவது ?

எனவே, ஒரே தன்மையுள்ள பல பொருள்களின் இயல்பினை அறியவேண்டிவரும்போது அவை அனைத்தையும் ஒன்ருக எடுத்துக்கொள்ளாமல் அனைத்திற்கும் மாதிரியாக சிறு பகுதி ஒன்றை எடுத்து ஆராயலாம். புள்ளி விவரங்களை விரைவில், திருத்தமாக, மலிவான முறையில் பெறுவதற்குக் கூறு முறை (sampling) ஒரு பயனுள்ள கருவி ஆகும்.

**முழுமைத் தொகுதி**

புள்ளியியலில், முழுமைத் தொகுதி என்பது மனிதர்கள் அடங்கிய தொகுதியை மட்டும் குறிப்பிடுவதல்ல. இஃது ஏதேனும் ஒரு பொதுத் தன்மையுள்ள பல்வேறு நபர்கள் அல்லது பொருள்கள் அல்லது பண்புகள் இவற்றின் பெரும் தொகுதியே. முழுமைத்தொகுதியின் உறுப்பாக ஒரு தனிப்பட்ட நபர் அல்லது நபர்களின் தொகுதி அல்லது பண்புகள் கருதப்படுகின்றன.

**எடுத்துக்காட்டு :**

| | முழுமைத் தொகுதி | சிறு அங்கம் (Elementary unit) | பொதுப் பண்புகள் |
|---|---|---|---|
| (1) | ஒரு நகரத்தில் உள்ள வீடுகள் | ஒவ்வொரு வீடும் | அறைகளின் எண்ணிக்கை, நபர்களின் எண்ணிக்கை, சுவர்களில் தீட்டப்பட்ட நிறங்கள், பரப்பளவு முதலியன. |
| (2) | மின் விளக்குகள் | ஒவ்வொரு விளக்கும் | விளக்குகளின் ஆயுட்காலம், எரியக் கூடிய திறன், ஒளியின் தன்மை, பழுதுள்ள விளக்குகளின் எண்ணிக்கை முதலியன. |
| (3) | ஒரு கல்லூரி மாணவர்கள் | ஒவ்வொரு மாணவரும் | அறிவுக் கூர்மை, நிறை, உயரம், தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண், மாதாந்திரச் செலவு முதலியன. |

**முழுமைத் தொகுதியின் வகைகள்**

முழுமைத் தொகுதிகள் வரையுற்றதாகவோ, வரையற்ற தாகவோ, உண்மையானதாகவோ அல்லது கற்பனையான தாகவோ இருக்கலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்கள், ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள செடிகள், ஒரு தெருவில் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கை என்பவை வரையுற்ற முழுமைத் தொகுதிகள். ஏனெனில், இவற்றில் உள்ள தனித்தனி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுற்றதாக இருக்கும்.

இதற்கு மாருக, ஒரு குறிப்பிட்ட விஞடியில் உலகின் பலபகுதி களில் உள்ள வெப்பநிலை, ஒரு பெரும் காட்டில் உள்ள மரங்களின் இலைகளின் எண்ணிக்கை, சூழ்நிலையில் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் காணப்படும் அழுத்தங்கள் போன்றவை முடிவற்ற எண்ணிக்கை உடைய உறுப்புகளைக் கொண்டதால், இவை வரையற்ற முழுமைத் தொகுதிகளாகும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் கணிப்புகள் உண்மையிலேயே நிகழக்கூடிய அல்லது நேரில் காணக்கூடியவையாய் இருந்தால் அது மெய்யான முழுமைத் தொகுதி (Real population) ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மெரீனு கடற்கரைக்கு வரும் கார் களின் எண்ணிக்கை.

ஒரு புள்ளியியல் அறிஞர், சில கொள்கைகளை விளக்குவதற் காக, உண்மையிலேயே நிகழாமல் தாளிலே மட்டும் குறித்துக் கொள்ளத்தக்க சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் போன்று, கற்பனையில் நிகழக்கூடிய அல்லது காணக்கூடிய கணிப்புகளின் தொகுதியே கற்பனை முழுமைத்தொகுதி (Hypothetical population) ஆகும்.

(எ-டு) ஒரு பகடையை 7000 முறை வீசும்போது கிடைக்கக் கூடிய விளைவுகளின் பெரும் தொகுதி.

**முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள் :** ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் தனி அங்கங்களின் தன்மைகளைக் குறிக்கும் மதிப்பு களின் எந்தச் சார்பையும் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை (parameter) என்கிறோம் (எ-டு) கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் கால்மக் கோட்டளவை முதலியன.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அதன் ஒரு குறிப்பிட்ட தன்மையினைப் பற்றிய முடிவுக்கு வருவதற்குச் சில விதிகள் அல்லது திட்டங்களோடு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறு பகுதியே கூறுகும். இது முழுமைத் தொகுதியின் உண்மையான பிரதிநிதியாக கருதப்படுகிறது.

**முழுக்கணிப்பு முறையும், கூறெடுத்தல் முறையும்** (Census Method and Sampling Method)

முழுக்கணிப்பு முறையில் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஆராய்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(1) 10 ஆண்டுகட்கு ஒரு முறை நடக்கும் மக்கள் கணிப்பு. இம் முறையில் நம் நாட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு குடிமகனையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு அவனது தொழில், கல்வி நிலை, வருவாய், குடும்பத்தின் அளவு போன்ற பல்வேறு பண்புகளை ஆராய்ந்து முடிவுக்கு வருகிறோம்.

(2) ஒரு கல்லூரியில் மாணவர்களைச் சேர்க்கும்போது மருத்துவர் ஒவ்வொரு மாணவரது உயரம், நிறை, உடல்நலம் பற்றி ஆராய்கிறோம்.

முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியைமட்டும் எடுத்து அதிலுள்ள உறுப்புகளைமட்டும் ஆராய்ந்து அதன் மூலம், முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை அறிய முயலும் முறை **கூறெடுத்தல் முறை** (Sampling method) எனப்படும்.

முழுக்கணிப்பு முறையில் விவரங்களைச் சேகரிக்க நீண்ட நாள்களாகும். ஆய்வாளர்கள் எண்ணிக்கையும் அதிகம். சில வேளைகளில் முழுக்கணிப்பு முறையில் விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கு மாதக் கணக்கில் ஆகிவிடுகிறது. நாள் சென்று கிடைக்கும் முடிவு பயன் அற்றதாகிவிடலாம். சில சூழ்நிலைகளில் கூறெடுத்தல் முறை ஒன்றைத்தான் பின்பற்றவேண்டி இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு பாத்திரத்தில் உள்ள அரிசி வெந்துவிட்டதா என்று பார்ப்பதற்கு ஒவ்வொரு சோறுக நசுக்கிப் பார்த்தால், கடைசியில், சாப்பிட சோற்றுக்குப் பதில் கஞ்சிதான் மிஞ்சும். எனவே, இத்தகைய அழிவுச் சோதனைகளில் கூறெடுத்தல் முறை ஒன்றே ஏற்றதாகும். நாம் எடுக்கும் கூறு எவ்வளவுக்கெவ்வளவு முழுமைத்தொகுதியை ஒத்துள்ளதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு

அதன் முடிவுகளும் பயன் தரும். குறிப்பாக, சிறந்ததொரு கூறினை ஒரு சிறிய புகைப்படமாகக் கொண்டால், அதில் பெரிய தாக உள்ள முழுமைத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு பண்பும் அதே விகிதத்தில் பிரதிபலிக்கப்பட்டுக் காணப்படும்.

**கூறு முறையின் நன்மைகள்**

கூறு முறையில் விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் கீழ்க்கண்ட நன்மைகள் ஏற்படுகின்றன :

(1) **குறைந்த செலவு :** கூறில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக உள்ளதால், அவற்றைப் பற்றிய விவரங்களை ஆராய்வதற்கான செலவு குறைகிறது.

(2) **சிறந்த முடிவுகள் :** விவரங்களைச் சேகரிப்போருக்குத் தரும் பயிற்சி, அளவுகளில் ஏற்படும் பிழைகள், விவரங்களை ஆராய்வதில் ஏற்படும் குறைகள், விளக்கங்களில் போதிய தெளிவு இல்லாமலிருத்தல் போன்ற குறைகளைப் பெருமளவு நீக்கிவிட்டு நல்ல தேர்ச்சிபெற்ற ஒருசில ஆய்வாளர்கள் பொறுப்பில், கூறு முறையில் விவரங்களைச் சேகரிக்கவிட்டால் அவை சிறந்த பலன்களைத் தரும்.

(3) கூறெடுத்தல் முறையில் ஆய்விற்காகச் செலவிடும் காலம் குறைகிறது ; முழுமைத் தொகுதியில் ஒரு பகுதியை மட்டும் ஆராய்வதால் கூறு முறையில் விவரங்கள் மிக விரைவில் கிடைக்கின்றன.

(4) முடிவுகள் பல சூழ்நிலைகளுக்கும் ஒத்ததாய் இருக்கும் பல்வேறு கோணங்களில் ஆராய, ஆய்வாளர்கள் மிகச் சிறந்த தேர்ச்சி பெற்றவர்களாயும், கூறு முறைக்கேற்ற தனிப்பட்ட கருவிகளை உடையவராய் இருத்தலே இதன் காரணமாகும்.

(5) **கூறு முறை ஒன்றைத்தான் பின்பற்றக் கூடிய சூழ்நிலை :** ஒரு பகடை அல்லது நாணயத்தை வீசும் சோதனைகளில் கற்பனை முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா வீச்சுகளையும் நம்மால் செய்துபார்க்க முடியாது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யுடைய சோதனைகளில் நாணயத்தை அல்லது பகடையை வீசி, அதிலிருந்து முறையே தலைகளின் எண்ணிக்கையையோ, அல்லது ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதையோ நாம் ஆராய்கிறோம்.

(6) **முடிவுகளின் நுட்ப அளவு :** நன்கு திட்டமிடப்பட்டு மேற்கொள்ளும் கூறு முறையில் கூறின் முடிவுகளில் காணப்படும் பிழையின் மதிப்பீட்டையும், நுட்ப அளவின் தன்மையினையும் முன்பே தீர்மானித்துவிடலாம்.

**கூறுகளின் வகைகள்**

(1) **சமவாய்ப்புக் கூறு** (Random Sample): முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்குரிய வாய்ப்பு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மற்ற எந்த உறுப்புக்கும் உள்ளதுபோல் சமமாக இருந்தால், அது **சமவாய்ப்புக் கூறு** எனப்படுகிறது.

(2) **சாதாரண சமவாய்ப்புக் கூறு** (Simple Random Sample): கூறில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்குரிய வாய்ப்பு ஒரே மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டும். இதற்கு முழுமை தொகுதி முடிவற்றதாகவோ அல்லது மிகப் பெரும் எண்ணிக்கை உடைய உறுப்புகளைக் கொண்டதாகவோ இருக்கவேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு வகுப்பில் 4 மாணவர்கள் இருந்தால் ஒரு மாணவரைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவரை மறுபடியும் குழுவில் சேர்க்காது இரண்டாவதாக ஒரு மாணவரை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{3}$. இவ்விரு மாணவரும் கொண்ட கூறு ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறுக்கு எடுத்துக்காட்டு. ஆனால், இஃது ஒரு சாதாரண சம வாய்ப்புக் கூறு ஆகாது. ஏனெனில், மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ என மாறுபடுகிறது. இதற்கு மாறுகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவரை மீண்டும் குழுவில் சேர்த்துவிட்டால், 2ஆவது மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்க நிகழ் தகவு $\frac{1}{4}$. இப்போது இது ஒரு சாதாரண சம வாய்ப்புக் கூருகிறது. வகுப்பில் 4 மாணவருக்குப் பதில் 500 மாணவர்கள் இருந்தால், இவர்களை ஒருவர் பின் ஒருவராகத் தேர்ந்தெடுக்க நிகழ் தகவுகள் முறையே $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{499}$. இவற்றுக் கிடைப்பட்ட வேறு பாடு பொருட்படுத்தத்தக்க அளவு அதிகம் இல்லை. எனவே,

இங்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் 2 மாணவரையும் ஒரு சாதாரண சம வாய்ப்புக் கூறு (Simple random sample) எனலாம்.

**சமவாய்ப்பு கூறைத் தேர்ந்தெடுப்பது எப்படி ?**

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து உறுப்புகளை இங்கொன்றும், அங்கொன்றுமாகத் தேர்ந்தெடுத்தால் அது சமவாய்ப்புக் கூருகாது. எவ்வளவு முயன்ருலும், ஒரு கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, அறிந்தோ அறியாமலோ ஒரு தலைச்சார்பு ஏற்பட்டு விடுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

5 மாணவரிடம் ஒன்றிலிருந்து 100 வரை உள்ள எண்களில் ஏதேனும் 10 எண்களை எழுதச் சொன்னுல் அவர்களது ஒவ்வொரு பட்டியலிலும் ஏதேனும் ஓர் எண் மற்ற எண்களைவிட அதிகமாக வந்திருப்பதைக் காணலாம். எனவே, சமவாய்ப்புக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குப் பல முறைகளை மேற்கொள்ளு கிருேம்.

(1) **குலுக்கல் முறை** (Lottery Method) : ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வுக்கு 100 பேரில் எவரேனும் ஐவரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமானுல் ஒவ்வொருவருக்கும் ஓர் எண்ணை ஒரு சீட்டில் குறிப்பிட்டு அந்தச் சீட்டுகள் யாவற்றையும் ஒரு கலத்தில் இட்டு நன்கு குலுக்கிய பின் அதிலிருந்து 5 சீட்டுகளை எடுத்து அவற்றிற் குரிய நபர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதே ராண்டம் கூறு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பண்டையக் காலத்தில் குடவோலைத் தேர்தல் முறை இவ்வாறு சமவாய்ப்புக் கூறுகளைத் தரவல்லதாக உள்ளது. அதுபோன்றே, அரசாங்கத்தாரால் நடத்தப்படும் பரிசுச்சீட்டுக் குலுக்கல் முறையில், பரிசுகள் முற்றிலும் வாய்ப்பைப் பொறுத்துக் கிடைப்பதற்கு இம்முறையே பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(2) **ஒழுங்கு நிலைக் கூறு முறையாகக் கூறெடுத்தல்** (Systematic Sample): முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளுக்கு 1, 2, 3, ...... என வரிசையாக எண்கள் கொடுத்திடலாம். பிறகு, அவற்றில் ஏதேனும் ஓர் எண்ணைத் தொடக்கமாகக் கொண்டு கூறின் அளவுக்கு ஏற்றவாறு, $n$ ஆவது எண்ணை எடுத்தால் கிடைக்கும் கூறு ஒழுங்கு கூறு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(1) ஒரு நகரத்தில் உள்ள 10,000 மக்களில் 150 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டுமாயின் அந்த நகரமக்களின் விவரங்கள் அடங்கிய பட்டியலிலிருந்து ஏதேனும் ஓர் எண்ணைத் துவக்க எண்ணாகக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 43 ஐ எடுத்துக் கொண்டால் அதிலிருந்து ஒவ்வொரு 67 ஆவது எண்ணையும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அதாவது 43, 110, 177 ...... என்ற எண்களை உடைய மக்கள் அக் கூறில் காணப்படுவார்கள். இத்தகைய கூறுகளில் இடைவெளி $n$ (இங்கு 67) எத்தகைய தனித்துவமும் பொருந்தியதாக இருக்கக் கூடாது.

(2) ஒரு தொழிற்சாலையின் முதலாளி 7 நாள்களுக்கு ஒரு முறையே தன் தொழிற்சாலையை மேற்பார்வையிட வந்தால் ஒவ்வொரு நாளும் அவரால் குறிப்பிட்ட ஒரு தொழிலாளர் தொகுதி வேலை செய்வதைத் தான் மேற்பார்வையிட முடியும். இது சமவாய்ப்புக் கூறு ஆகாது. இதுபோன்றே ஒரு தெருவில் உள்ள 50 ஆவது வீடுகளை எடுத்துக் கொண்டால் அத்தகைய 50 ஆவது வீடுகள் ஓரத்தே அமைந்த நிலப் பகுதிகளில் அவை ஓரளவு வசதி படைத்தவர்களுடையதாகத்தான் அமையும். இந் நிலையில் இது சமவாய்ப்புக் கூறாகாது.

(3) **ராண்டம் எண்களின் பட்டியல்** (Table of Random Numbers) : சமவாய்ப்புக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குச் சிக்கனமானதும், எளியதானதும் ஆன முறை ராண்டம் எண்களின் பட்டியலைப் பயன்படுத்தல் ஆகும்.

**டிப்பெட் ராண்டம் எண்களின் பட்டியல்** (Tippet table of Radom Numbers): டிப்பெட் (Tippet) என்பவர் மக்கள்கணிப்பு அறிக்கைகளிலிருந்து 41600 எண்கள் எடுத்து, அவற்றிலிருந்து 104000, ஆயிரமாவது இட எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றினை ஒரு பட்டியலாக அமைத்துள்ளார்.

**ஃபிஷர், யேட் தொடர்கள்** (Fisher, Yate's Series) : இவை 300 பிரிவுகள் அடங்கிய 15 000 பத்தாவது இடமுள்ள எண்களைக் கொண்டவை.

தாம்ஸனின் 20 எண்கள் கொண்ட லாகிருதப் பட்டியலில் இருந்து எடுக்கப்பெற்று அவற்றில் எண் 6 அதிகமாக இருந்தால் திருத்தம் செய்யப்பட்டு அமைக்கப்பட்டவை.

**கெண்டால், பேபிங்டன் எண்கள் :** இவர்களது ராண்டம் எண்களின் பட்டியல் 2, 4, இடமுடைய 100,000 எண்கள்

அடங்கியவை. அவற்றில் ஒவ்வொன்றிலும் 1000 எண்கள் அடங்கிய தனிப் பகுதி உள்ளன. இவற்றை இதற்காகவே தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் இயந்திரத்திலிருந்து பெறுகிறோம்.

**கணக்கு :** 825 எண்ணிக்கையுடைய முழுமைத்தொகுதியி லிருந்து திருப்பிப் போடப்படாமல் 7 அளவுடைய ஒரு கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எண்களை 0 1, ...... 825 எனக் குறிப்போம். பிறகு ராண்டம் எண்களின் பட்டியலிலி ருந்து 100 ஆவது இடமுள்ள எண்களின் ஏதேனும் ஓர் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து இடவலமாக அல்லது நெட்டுக் குத்தாக, 825-க்கு மேல் உள்ள எண்களை விட்டு விட்டு 825-க்குக்குறைவான, 3 ஸ்தானமுள்ள எண்களைத்தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டே செல்ல வேண்டும்: இவ்வாறு 7 எண்கள் கிடைத்த வுடன் நிறுத்திக்கொள்ளவும். இந்த எண்களுக்கு உரிய உறுப்புகளைக் கொண்டதே தேவையான சமவாய்ப்பு கூறுகும். ஏற்கெனவே ஒருமுறை வந்த எண்களை மறுமுறையும் எடுப்பதில்லை. ஃபிஷர், யேட்-ன் பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் 25 எண்கள் கிடைத்துள்ளன.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 04 | 28 | 50 | 13 | 92 |
| 31 | 64 | 94 | 20 | 96 |
| 86 | 23 | 36 | 82 | 58 |
| 79 | 24 | 68 | 66 | 86 |
| 45 | 13 | 42 | 65 | 29 |

042, 316, 792, 451, 494, 468, 342.

மேற்காணும் எண்களுக்குரிய 7 உறுப்புகளே நமக்குத் தேவையான கூறுகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஆயிரம் அளவுகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் எண்களின் அட்டவணையைக் கொண்டு பதிலமர்த்தாமல் (Without replacement) பத்து அளவுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரித் தேர்வு எடுக்கும் முறையை விளக்குக. (செ. ப. க. 1974).

**தீர்வு :**

1000 அளவுகளிலிருந்து 10 அளவுகளைப் பின்வரும் இருமுறைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

**முறை I**

ராண்டம் எண்களின் அட்டவணையில் ஏதேனும் ஓர் எண்ணில் துவங்கி, 1000-த்திற்கு மேற்பட்ட எண்களை நீக்கி விட்டுப் பத்து எண்களை எடுக்கலாம். ஆனால், இம் முறையில் மிகப் பெருமளவில் ராண்டம் எண்களை ஒதுக்கிவிட வேண்டி இருக்கும். எனவே, பின்வரும் முறையை மேற்கொள்ளலாம்.

**முறை II**

4 இலக்கமுள்ள 10 எண்களை, எதனையும் அதன் மதிப்பைப் பொறுத்து ஒதுக்கிவிடாது, சமவாய்ப்பு எண்களின் பட்டியலி லிருந்து தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவை 4698, 4253, 3290 0503, 3162, 1737, 7704, 9810, 5242, 4917 என இருக்கட்டும். நம்மிடம் 1000 மதிப்புகளே உள்ளதாய், மேற்கூறிய ஒவ்வொரு எண்ணையும், 1000ஆல் வகுத்து, மீதம் வரும் எண்ணைத் தேர்ந் தெடுக்கும் மதிப்புக்குரியதாய்க் கொள்வோம். எண் 1000 கிடைத் தால், நமது கூறில் 1000ஆவது உறுப்பை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

இம் முறையில் நமக்கு மேற்கூறிய ராண்டம் எண்களி லிருந்து 698, 253, 290, 503, 162, 737, 704, 810 242, 917 ஆகிய எண்கள் கிடைக்கின்றன. இவற்றிற்குரிய 10 உறுப்புகளைக் கொண்டதே நமது கூருகும்.

நேரடியாகவே 3 இலக்கமுள்ள எண்களைத் தேர்ந்து எடுக்காமல், இவ்வாறு எடுப்பதற்குக் காரணம் என்னவெனில், நமது முழுமைத் தொகுதியில் எண் 1000-க்கு உரிய உறுப்பும், உள்ளது. 3 இலக்கம் உள்ள எண்களை மட்டும் எடுத்தால், இதனை அறவே ஒதுக்கி விடவேண்டிய நிலை ஏற்படும்.

**நோக்குடைய கூறுகள் (Purposive Samples)**

சம வாய்ப்பு முறையினின்று சிறிது மாறுபட்டு, ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்துடன் சேகரிக்கப்படும் கூறுகளே **நோக்கு உடைய கூறுகளாம்.** இவற்றில் முக்கியமானவை. (1) படுகைக் கூறுகள். (2) பலநிலைக் கூறுகள் (3) அளவுடைக் கூறுகள். சில குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளில், சமவாய்ப்புக் கூறுகளைவிட இவை அதிகம் பயன்தரவல்லவை.

**படுகைக் கூறுகள்** (Stratified Samples)

முழுமைத் தொகுதி ஒருபடித்தான தன்மையை உடைய தாயிருந்தால், அதனின்று நேரடியாகச் சமவாய்ப்புக் கூறு எடுத்தல் முழுமைத் தொகுதியைப் பிரதிபலிக்க இயலும். ஆயின் முழுமைத் தொகுதி பலதரப்பட்ட உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், அவ்வுறுப்பு களில் ஒத்த பண்புகளுக்கேற்றவாறு, படுகைகளை அமைத்து ஒவ்வொரு சமபடித்தான படுகையிலிருந்தும் உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்தால் பெறப்படும் கூறு **படுகைக் கூருகும்.** எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு மாவட்டத்திலுள்ள பள்ளிகளின் ஒரு கூறைத் தேர்ந் தெடுத்து ஆய்வு நடத்த எண்ணும்போது, பள்ளிகளை உயர்நிலைப் பள்ளிகள், நடுநிலைப் பள்ளிகள், துவக்கப்பள்ளிகள் எனப் பிரிப்ப தோடு, அவற்றையே அரசினர் நடத்தும் பள்ளிகள், தனியார் நிறுவனங்கள் என்ற பிரிவில் கொண்டு ஒவ்வொரு படுகையிலும் சமவாய்ப்பு முறையில் பள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும். இது **படுகைசமவாய்ப்புக்கூறு** (Stratified Random Sample)ஆகும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும், அப் படுகையின் மொத்த பள்ளிகளின் மதிப்பிற்கேற்றவாறு கூறின் உறுப்புகளைப் பங்கிட்டுப் பள்ளிகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்தால் அது பெரிதும் பயன்தரவல்லது. நாட்டின் நலன் குறித்து மேற்கொள்ளப்படும் திட்டங்கள், சமூகப் பிரச்சினையில் ஏற்படுத்தும் புதுமைகள் போன்றவற்றில் பலதரப்பட்ட மக்களது கருத்துகளை அறியப் படுகைக் கூறெடுத்தல் முறை மேற்கொள்ளப் படுகிறது.

**பல நிலைக் கூறுகள்** (Multi Stage Samples)

மாதிரி அளவெடுப்பின் சோதனைக்களம் மிகப் பெரியதாக இருக்கும்போது, கூறெடுத்தலைப் பலநிலைகளில் பிரித்துச் செய்தல், செலவினைப் பெரிதும் குறைக்கிறது.

இந்தியாவில் விளையும் நெல்லின் அளவினைப் பற்றிய மதிப் பீட்டைக் காணக் கீழ்க்காணும் முறையில் கூறு எடுக்கலாம்.

(1) முதல் நிலை உறுப்புகளாக இந்தியாவினை 40 அல்லது 50 பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் 10 பகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

(2) இரண்டாம் நிலை உறுப்புகளாகக் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு பகுதியிலும், ராண்டம் முறையில் மாவட்டங்களை, அப்பகுதியின் மொத்த மாவட்டங்களின் எண்ணிக்கைக்கேற்ற வாறு பங்கிட்டு, தேர்ந்தெடுத்தல்.

(3) மூன்றும் நிலை உறுப்புகளாக, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலும் உள்ள கிராமங்களைச் சமவாய்ப்பு

முறையில் தேர்ந்தெடுத்தல். எடுத்துக்காட்டாக 0 பகுதிகளில் ஒன்றாகத் தமிழ்நாடு வந்திருந்தால், அதில் உள்ள மாவட்டங்களில் ஏதேனும் ஐந்தைத் தேர்ந்தெடுத்து, அந்த மாவட்டத்திலொன்று திருச்சிராப்பள்ளியாக இருந்தால், அங்குள்ள கிராமங்களில் சமவாய்ப்பு முறையில் வயலூர், லால்குடி, திரு ஈங்கோய்மலை போன்ற 3 கிராமங்கள் கிடைக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

(4) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கிராமத்திலும், நெல் விளையும் நிலங்களில் ஐந்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் நான்காம் நிலை உறுப்புகள்.

(5) கிடைத்துள்ள நிலங்களிலும், ஒவ்வொன்றின் இரு நிலப் பகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் ஐந்தாம் நிலை உறுப்புகள்.

இவ்வாறு நாட்டின் ஒவ்வொரு பெரும் பகுதியினின்றும் இறுதியாகப் பல நிலைகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறு நிலப் பகுதிகளே நாம் அளவெடுப்பதற்குரிய கூறின் உறுப்புகளாகும்.

பலநிலைக் கூறுகளில் சிலவற்றை இரு நிலைகளிலேயே நிறுத்தி விடலாம். ஐந்திற்கு மேற்பட்ட நிலைகளையும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

இவ்வகையில் இந்தியா முழுவதிலுமுள்ள நெல் விளையும் நிலப்பகுதிகள் அனைத்தினைப் பற்றிய விவரங்களும் தேவையில்லை, முதனிலை உறுப்புகளில் இரண்டாம் நிலையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவற்றிற்கு மட்டுமே விவரங்கள் தேவை, இவ்வாறே இறுதியில் நமக்குக் கிடைத்துள்ள ஐந்தாம் நிலை உறுப்புகளாகிய சிறு நிலப்பகுதிகளைப்பற்றி ஆராய்ந்தால் போதுமானதால் அளவெடுப்பு எளியதாகவும், செலவு குறைந்தும் காணப் படுகிறது.

**பல்நிலைக் கூறுகளின் தன்மைகள் :**

(1) இக் கூறுகள் மிகுந்த கட்டுப்பாடுடையவை அல்ல.

(2) எல்லா உறுப்புகளைப்பற்றிய விவரங்கள் இல்லாமையால் ஆய்வில் ஏற்படும் செலவு குறைகிறது.

(3) ஏதேனும் ஒரு நிலையில் ஒரு புறச்சார்பால் பிழை ஏற்பட்டால், அது ஒவ்வொரு நிலையிலும் வளர்ந்துகொண்டே சென்று விடுகிறது. எனவே, பல நிலைக்கூறுகள் மற்ற ஒரு நிலைக் கூறுகளைப்போல் அத்துணைச் சிறப்புடையவை அல்ல.

**அளவுடைக் கூறுகள்** (Quota Samples)

நுகர்வோரது கருத்தறியவும், பொது மக்களது கருத்தரங்குகளிலும் அமெரிக்காவில் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுவன, அளவுடைக் கூறுகள். ராண்டம் படுகைக் கூறிலிருந்து ஒரு சிறிதே மாறுபட்டவை இக் கூறுகள். படுகைக் கூறில், முழுமைத் தொகுதியை ஒரு படித்தான பல்வேறு படுகைகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒரு ராண்டம் கூறு எடுக்கப் படுகிறது. கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் பட்டியல் ஆய்வாளரிடம் தரப்படுகிறது. அளவுடைக் கூறெடுத்தலில், ஆய்வாளரிடம் அதே படுகையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வேறு சில உறுப்புகளை உடைய வேறு ஒரு பட்டியலும் தரப்படுகிறது. தக்க காரணங்களால், முதல் பட்டியலின் உறுப்புகள் அளவெடுக்க இயலாத போது தன்னிடமுள்ள இரண்டாவது பட்டியலிலிருந்தும் சில உறுப்புகளை எடுத்துக் கொண்டு, ஆய்வாளர் தனக்குக் கொடுக்கப் பட்ட மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைச் சரியாக்கிக் கொள் கிறார். இம் முறையில் ஆய்வாளர் மிகத்திறனும், ஒரு புறச்சார் பற்றவருமாக இருந்தால்தான், இரண்டாம் பட்டியலிலிருந்து அவர் எண்ணிக்கையை நிரப்புவதற்காக எடுக்கும் ராசிகள், கூறின் சமவாய்த் தன்மையைப் பாதிக்காது.

**கல்லூரி அறிவியல் முன்னேற்றப் பணிகளின் அடிப்படையில் கல்வித்தகுதிக்கும், புரியும் பணிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பின் ஆராயும் மாதிரி அளவெடுப்பு**

நகர்ப்புறத்தில் கல்வித் தகுதிக்கும் புரியும் பணிக்கும் இடையே தொடர்பு என்பது எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பிரச்சினையாகும். இதற்குச் சென்னை நகரம் களமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, சென்னை நகரில் உள்ள கல்லூரி ஒன்றின் மாணவரால், பல்நிலை சம வாய்ப்புக்கூறு முறைப்படி அளவெடுப்பு 1971-ல் நடத்தப்பட்டது.

சென்னை, நகராட்சி வரையறுத்துள்ளபடி, 120 பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. இதிலிருந்து 5% கூறு, அதாவது 6 பகுதிகள், ராண்டம் எண்களின் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டன. அவற்றின் எண்களாவன 3, 7, 32, 85, 86, 108. ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் உள்ள தெருக்களில் 10% சீட்டுக் குலுக்கல் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. ஒவ்வொரு தெருவிலும் ஏறக்குறைய 20% வீடுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. (3ஆவது வீட்டிலிருந்து துவங்கி, ஒவ்வொரு 5ஆவது வீடும் தேர்ந் தெடுக்கப்பட்டது). தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட வீடுகளிலுள்ள, 21 வயது, அதற்குமேற்பட்ட எல்லாக் குடும்ப உறுப்பினர்களிடமும்

விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. இவ்வாறு சமவாய்ப்பு எண்கள் குலுக்கல் முறை, முறையாகக் கூறு எடுத்தல் ஆகிய எல்லா முறைகளும் மேற்கொள்ளப்பட்டன. பின்வரும் வினாப்பட்டியல் (12 வினாக்கள்) பயன்படுத்தப்பட்டு, சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் பல பட்டியல்களிலே வகைப்படுத்தப்பட்டு, முடிவுகள் காணப்பட்டன

**கல்வித் தகுதிக்கும் புரியும் பணிக்கும் உள்ள தொடர்பை அறிவதற்கான கூறு அளவெடுப்பு (Sample Survey)**

**பட்டியல்—1.**

மாநகராட்சி கோட்ட எண் ........ வீட்டின் எண் ☐

தெருவின் பெயர் ..........

(1) குடும்பத் தலைவரின் பெயர் ..........

(2) (அ) குடும்பத்திலுள்ள வயது வந்த நபரின் பெயர் ........

(ஆ) அவருக்கும் குடும்பத் தலைவருக்கும் உள்ள தொடர்பு ..........

(3) கல்வித் தகுதிகள் ..........
(பூர்த்தி செய்த கல்வித்துறை, பெற்ற பட்டங்கள்) ..........

(4) சிறப்புத் தகுதி பெற்ற துறை ..........

(5) தற்போது புரியும் பணியும், அலுவலக முகவரியும் ..........

(6) தற்போது புரியும் பணிகளும் அவற்றிற்குரிய கால அளவைகளும் ..........

(7) வேறு ஏதேனும் துணைத்தொழில்கள் (i) ........
(ii) ........

(8) தற்போதைய வேலையைச் செய்வதற்கான குறிப்பிட்ட காரணங்கள் ..........

(9) மேற்குறிப்பிட்ட நபர் தாம் விரும்பும் தொழில் புரிவதற்காக. ..........

(i) உலகில் (ii) நாட்டில், (iii) மாநிலத்தில் வேறு ஏதேனும் பகுதிக்குச் சென்று பணிபுரிய விரும்புவாரா? (i)........ (ii)........ (iii)........

## பட்டியல் — 2.

| தொழில் | மருத்துவம் | | பொறியியல் | | நிர்வாகம் | | சட்டத்துறை | | கல்வி கற்பித்தல் | | எழுத்தர் | | நுட்பத்திறன் படைத்தோர் | | நுட்பத்திறன் அற்றோர் | | தினக்கூலி பெறுவோர் | | வேலை அற்றோர் | | வர்த்தகமும் தொழிற் துறையும் | | ஆராய்ச்சி | | பத்திரிகை ஆசிரியர் | | மொத்தம் | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| கல்வித்தகுதிகள் | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ | ஆ | பெ |
| பட்டதாரிகள் (தொழில் நுட்பம், தொழிற்கல்வி) | 3 | 1 | 4 | | 2 | | 3 | | 7 | 2 | | | 1 | | | | | | 4 | | | | 1 | | | | 25 | 3 |
| பட்டதாரிகள் (பொதுப்பிரிவு) | 1 | | 1 | | 4 | | | | 4 | 2 | 22 | 1 | 3 | | | | | | 8 | 2 | 5 | | 1 | | 1 | | 50 | 5 |
| டிப்ளமா பெற்றவர்கள் (ஆசிரியப் பயிற்சியும் தட்டெழுத்துப் பயிற்சியும் உட்பட) | 1 | | 5 | | | | | | 5 | 14 | 1 | 6 | 7 | 1 | | | | | 2 | 5 | | | | | | | 21 | 21 |

| தொழில் | மருத்துவம் | | பொறியியல் | | நிர்வாகம் | | சட்டத்துறை | | கல்வி கற்பித்தல் | | எழுத்தர் | | நுட்பத்திறன் படைத்தோர் | | நுட்பத்திறன் அற்றோர் | | தினக்கூலி பெறுவோர் | | வேலை அற்றோர் | | வர்த்தகமும் தொழிற் துறையும் | | ஆராய்ச்சி | | பத்திரிகை ஆசிரியர் | | மொத்தம் | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பள்ளியிறுதி வகுப்பை முடித்தவர்கள் | | | 2 | | 6 | | | | 1 | 2 | 93 | 9 | 26 | 1 | 23 | | | | 49 | 58 | 46 | | | | 2 | | 248 | 70 |
| உயர்நிலைப் பள்ளியில் படித்தவர்கள் | 1 | | | | | | | | | | 15 | 1 | 35 | | 65 | 1 | 11 | | 29 | 157 | 51 | 2 | | | | | 207 | 161 |
| ஆரம்பக் கல்வி பெற்றவர்கள் | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | 4 | | 16 | | 68 | 1 | 18 | | 38 | 207 | 47 | 1 | | | | | 193 | 210 |
| கல்வி அறிவு அற்றோர் | | | | | | | | | | | | | 5 | | 2) | 2 | 22 | | 23 | 210 | 15 | 6 | | | | | 84 | 218 |
| மொத்தம் | 7 | 1 | 12 | | 12 | | 3. | | 18 | 21 | 135 | 12 | 93 | 2 | 176 | 4 | 51 | | 152 | 639 | 164 | 9 | | | 3 | | 828 | 688 |

பட்டியல்—3.

கல்வியறிவு பெற்ற ஆண்களும் பெண்களும்

| | கல்வியறிவு பெற்றவர்கள் | கல்வியறிவு பெருதவர்கள் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆண்கள் | 744 | 84 | 828 |
| பெண்கள் | 470 | 218 | 688 |
| மொத்தம் | 1214 | 302 | 1516 |

பட்டியல்—4.

ஆண், பெண்பாலாரில் வேலையற்றோரின் எண்ணிக்கை.

| | வேலை செய்வோர் | வேலையற்ருேர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆண்கள் | 676 | 152 | 828 |
| பெண்கள் | 49 | 639 | 688 |
| மொத்தம் | 725 | 791 | 1516 |

பட்டியல்—5.

பட்டதாரிகளில் வேலையற்ருேர்

| | வேலை செய்வோர் | வேலையற்ருேர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| பட்டதாரிகள் (தொழில் துறை) | 24 | 4 | 28 |
| பட்டதாரிகள் (பொதுப் பிரிவு) | 45* | 10 | 55 |
| மொத்தம் | 69 | 14 | 83 |

* 5 பேர் சொந்தமாகத் தொழில்புரிவோர்

## பட்டியல்—6.

பட்டதாரிகளில் தொழில் நுட்பக் கல்வித் தகுதியும், தொழில் நுட்ப வேலையும் உடையவர்.

| | தனிப்பட்ட வேலை | பொதுவான வேலை | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| சிறப்புக் கல்வித் தகுதி (தொழில் பட்டம்) | 23 | 1 | 24 |
| பொதுக் கல்வித் தகுதி (பொது பட்டம்) | 14 | 26 | 40 |
| மொத்தம் | 37 | 27 | 64 |

## பட்டியல்—7.

மெட்ரிக் படித்தவர்கள், டிப்ளமா பெற்றவர்கள் இடையே தொழில் நுட்பப் பயிற்சிக்கும், வேலைக்கும் உள்ள தொடர்பு.

| | வேலை செய்வோர் | | வேலை அற்ருேர் | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| | ஆண்கள் | பெண்கள் | ஆண்கள் | பெண்கள் | |
| டிப்ளமா பெற்றவர் களும், பயிற்சி பெற்றுத் தொழில் புரிவோரும் | 19 | 16 | 2 | 5 | 42 |
| மெட்ரிக் படித்த மற்றவர்கள் | 199 | 12 | 49 | 58 | 318 |
| மொத்தம் | 218 | 28 | 51 | 63 | 360 |

பட்டியல்—8.

பள்ளியிறுதி வகுப்புவரை படிக்காதவர்களிடையே வேலைக்குச் செல்லும் ஆண்களின் எண்ணிக்கை

| | வேலை செய்வோர் | வேலையற்றோர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| பள்ளிக்குச் சென்றவர் | 333 | 67 | 400 |
| பள்ளிக்குச் செல்லாதவர் | 62 | 22 | 84 |
| மொத்தம் | 395 | 89 | 484 |

பட்டியல்—9.

சொந்தமாகத் தொழில் புரியும் நபர்கள்

| | மொத்தம் | | தானே தொழில் புரிவோர் | |
|---|---|---|---|---|
| | ஆண்கள் | பெண்கள் | ஆண்கள் | பெண்கள் |
| பட்டதாரிகள் | 75 | 8 | 5 | — |
| டிப்ளமா பெற்றவர்கள், பள்ளியிறுதி வகுப்பு முடித்தவர்கள் | 269 | 91 | 46 | — |
| பள்ளிக்குச் சென்றவர்கள் | 400 | 371 | 98 | 3 |
| கல்வியறிவு பெருதோர் | 84 | 218 | 15 | 6 |
| மொத்தம் | 828 | 688 | 164 | 9 |

## பட்டியல்—10.

பொழுதுபோக்குகள்

| பொழுதுபோக்கு | நபர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| (1) துண்கலைகள் | 20 |
| (2) விளையாட்டுகள் | 60 |
| (3) தோட்டக்கலை | 2 |
| (4) சித்திரம் வரைதல் | 8 |
| (5) இசை | 9 |
| (6) நூல்களைப் படித்தல் | 165 |
| (7) மற்றவை | 57 |
| மொத்தம் | 321 |

## பட்டியல்—11.

வேலை செய்யும் இடத்திலிருந்து வசிக்கும் இடத்திற்கு உள்ள தூரங்களின் பரவல்

| தூரம் (கி. மீ-ல்) | வேலை செய்வோரின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 0—2 | 396 |
| 2 5 | 183 |
| 5—10 | 123 |
| 10—20 | 31 |
| 20—40 | 8 |
| மொத்தம் | 741 |

**அளவெடுப்பின்மூலம் கிடைத்த சில முக்கிய விவரங்கள்**

(1) படித்த ஆண்களில் வேலையற்றோர் 18·36%; பெண்களில் 92·88% என இருப்பினும், பெண்களில் பெரும்பாலோர் குடும்பப் பொறுப்பில் அமர்ந்து விடுகின்றனர்.

(2) கல்வி பயின்ற ஆண்களின் விகிதசமத்திற்கும் பெண்களின் விகிதசமத்திற்கும் பொருட்படுத்தத்தக்க வேறுபாடுள்ளது.

(3) தொழில் துறையில் வேலையற்ற பட்டதாரிகள் 14·29% ; பொதுப்பட்ட துறையில் வேலையற்றோர் சதவீதம் 18·18% இவ் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத் தக்கதல்ல என மிகைத் தன்மை ஆராயும் சோதனைகளிலிருந்து தெரிகிறது.

(4) பட்டதாரிகளில், தொழில் நுட்பக் கல்வித் தகுதிக்கும், தொழில் நுட்பவேலைக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புக்கெழு ·86.

(5) 7·83 % தங்களது முன்னோரது தொழிலைப் புரிகின்றனர். 62 6% தாங்கள்புரியும் பணிக்குத் தற்செயலாகவந்தவர்கள். 6·35% மட்டுமே தங்கள் பணிகளில் உண்மையிலேயே விருப்பம் கொண்டவர்கள்.

(6) 7·52% மட்டும்தான் தங்கள் தொழிலுக்கு எங்கு வேண்டுமானாலும் செல்லத் தயாராய் உள்ளனர். 78·87% நபர்களுக்குக் குறிப்பிடத் தக்கதாய் எந்தப் பொழுதுபோக்குமே இல்லை.

## பயிற்சி

(1) முழுக்கணிப்பு முறைக்கும், கூறு முறைக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளைக் கூறி, அவற்றின் இணைத் தராதரங்களை ஆராய்க.

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் உள்ள 9 கிராமங்கள் முறையே 793, 170, 970, 657 1721, 1603 864, 383 826, நிலப் பகுதிகள்கொண்டவை. இவற்றிலிருந்து 6 நிலப்பகுதிகளைத்தேர்ந் தெடுக்க 7358, 922, 4112, 3596, 633, 3999 என்ற சமவாய்ப்பு எண்களை எவ்வாறு பயன்படுத்துவாய் எனக் கூறுக.

(3) $N$ உறுப்புகளை உடைய ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து திருப்பிப் போடப்படா நிலையில் ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப் படுகிறது.

(a) $K$ ஆவது முறையில் $u_1$ என்ற குறிப்பிட்ட உறுப்பு எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{N}(K = 1 \dots n)$.

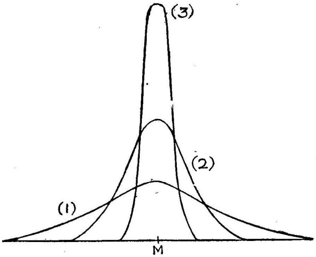
(b) ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு, கூறில் வருவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{n}{N}$,

(c) வரிசைப்படுத்திய கூறுகளின் எண்ணிக்கை $NP_n$ எனவும், வரிசைப்படுத்தாத கூறுகளின் எண்ணிக்கை $NC_n$ எனவும் நிறுவுக.

**கூறுப் பரவல்கள் (Sampling Distributions)** கூறின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம், கால்மான விலக்கம், இடைநிலை போன்ற புள்ளியியல் அளவைகள் கூறு பண்பளவைகள் எனப்படுகின்றன. 1000 மாணவர்களடங்கிய ஒரு கல்லூரியில் 60 மாணவர்களடங்கிய ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறினைக் எடுத்துக் கொள்வோம் : கல்லூரி மாணவரது சராசரி உயரம் காண இக் கூறின் கூட்டுச்சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு கூறினை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வதற்குப் பதிலாக, 60 பேர் அடங்கிய பல்வேறு கூறுகளை முழுமைத் தொகுதி யிலிருந்து எடுத்து, அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றிலிருந்து கிடைக்கக் கூடிய முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் மதிப்பீடு இன்னும் சிறந்ததாக அமையும். ஒவ்வொன்றிலும் 60பேர் அடங்கிய 45 கூறுகளைஎடுத்துக்கொள்வோம். கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \ldots \bar{x}_{45}$ என இருக்கட்டும். இந்த 45 கூட்டுச்சராசரிகளும்எண்களின் தொகுதியாகும். இதனை ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் மாற்றியமைத்தால் கிடைக்கும் பரவல் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-ன் கூறுப்பரவல் (Sampling distribution of mean) எனப்படும். முழுமைதொகுதியின் பரவல் இயல்நிலையாக அமையாவிடினும்கூட, கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரியின் பரவல் இயல்நிலையாகவே அமையும். கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகள் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரிக்கு மிக அண்மையில் இருக்கும் ; அதாவது முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி உயரம் 62·4" அங்குலமானால், கூறுகளின் சராசரி உயரங்கள் 62", 62·1", 62·6 62·35 ... என்றவாறு இருக்கும்.

இதுபோலவே எடுக்கப்பட்ட 45 கூறுகளின் மதிப்புகளுக்கும், தனித்தனியே திட்ட விலக்கங்களைக் காணலாம். கூறுகளின் திட்டவிலக்கங்களை ஒரு நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி அமைத்தால் நமக்குத் திட்டவிலக்கத்தின் கூறு பரவல் (Sampling distribution of standard deviation) கிடைக்கிறது. இதுபோலவே, கூறுகளின் மற்ற பண்பளவைகளாகிய இடைநிலை, கால்மான விலக்கம், சராசரி விலக்கம் போன்றவற்றை நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றியமைத்தால் முறையே இடைநிலை, கால்மான விலக்கம், சராசரி விலக்கம்

இவற்றின் கூறுப் பரவல்கள் கிடைக்கும். கூறுப் பரவல்கள் முழுமைத்தொகுதியின் பண்பளவைச் சுற்றி மிக நெருங்கிப் பரவி இருக்கும். குறைந்தது 30 இராசிகளாவது உடைய கூறுகளின் கூறுப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலைத் தோராயமாகவாவது தழுவுகின்றன.




படம் 5—1.

**திட்டப்பிழை** (Standard Error)

ஒவ்வொன்றிலும் 60 மாணவர்கள் கொண்ட கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரி உயரங்கள் 62", 62·1", 62·6", 62·35" ... எனக் கொள்வோம். முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி 62·4". கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிக்கும், உண்மையான கூட்டுச் சராசரிக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு சமவாய்ப்புக் கூறு முறையினால் ஏற்படும் பிழை அல்லது ராண்டம் பிழை எனப்படும். [கூறுகளுக்கே இயல்பாக உள்ள ஏற்ற இறக்கங்களால் ஏற்படும் வாய்ப்புக் காரணமாக ஏற்படும் பிழைகளே ராண்டம் பிழைகள்.]

இப் பிழைகளில் சில நேர்ம எண்களாகவும், சில எதிர்மறை எண்களாகவும் இருக்கும். பிழைகளின் வர்க்கங்களை எடுத்துக்கொண்டோமானால், அவை யாவும் நேர்க்குறி உடையன வாகும். பிழைகளின் வர்க்கங்களின் சராசரி மதிப்பு $= \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (\bar{x}_{15} - \bar{x})^2}{45}$. இங்கு $\bar{x}_1$ என்பது முதல் கூறின் கூட்டுசராசரி. $\bar{x}$ என்பது கூட்டுச்

சராசரியின் கூறு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி. இது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியே. எனவே, $\sqrt{\frac{\Sigma(x - x)^2}{n}}$ என்பது பிழைகளின் வர்க்கங்களின் சராசரியின் வர்க்கமூலம். இங்கு பல்வேறு கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகளுக்கும் அவற்றின் கூறு பரவலின் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் எடுக்கப் படுவதால் இது **கூறுப் பரவலின திட்டவிலக்கம** எனப்படுகிறது. முழுமைத்தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma$-விலிருந்து, இதனை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்காக இது **கூட்டுச்சராசரியின் திட்டப் பிழை**, $\sigma_M$ அல்லது $\sigma_{\bar{x}}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோன்றே திட்டவிலக்கத்தின் திட்டப்பிழையாவது, திட்டவிலக்கத்தின் கூறு பரவலின் திட்டவிலக்கமாகும். இதை $\sigma_\sigma$ எனக் குறிக்கிறோம். இவ்வாறே கால்மான விலக்கம், இடைநிலை, நூற்றுமானங்கள் போன்றவற்றின் திட்டப்பிழைகள் அவற்றின் கூறுப் பரவலின் திட்டவிலக்கங்களாகும். எனவே, ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறுப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் 'அப் புள்ளியியல் அளவையின் திட்டப்பிழையாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

**கூட்டுச்சராசரியின் திட்டப் பிழை** (Standard Error of the Mean)

$x$ மாறியின், $n$ ராசிகள் கொண்ட ஒரு கூறினை எடுத்துக் கொள்வோம். கண்டறியப்பட்ட இராசிகளின் மதிப்புகளை $n$ தனித் தனி அட்டைகளில் $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$ எனப் பதிவு செய்து கொள்வோம் ஒவ்வொன்றும் $n$ அளவு கொண்ட இத்தகைய பல பெருங்கூறுகளை ஒவ்வொரு கூறின் முதல் இராசியின் மதிப்பை முதல் அட்டையிலும், 2ஆம் இராசியின் மதிப்பை 2ஆம் அட்டையிலும் குறிக்கவேண்டும். இதுபோன்றே $n$ அட்டைகளுக்குரிய கணிப்புகள் குறிக்கப் படுதல் வேண்டும். முதல் அட்டையில் குறிக்கப்பட்ட கணிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் $\sigma x_1$ என்க. ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, ஒவ்வொரு அட்டையிலும் பெரிய அளவில் கணிப்புகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுவதால், ஒவ்வோர் அட்டையிலும், குறிக்கப்பட்ட கணிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் முழுமைத் தொகுதியினுடையதைப் போலவே இருக்கும். முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma$ ஆதலால், $\sigma_1 = \sigma$. இதுபோலவே $\sigma_{x_2} = \sigma \dots\dots \sigma_{x_n} = \sigma$

$$\sigma = \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \dots\dots \sigma_{x_n}.$$

$X = x_1 + x_2 + x + \dots\dots + x_n$ என இருக்கட்டும். கூறு சாதாரண சமவாய்ப்புக் கூறாக இருப்பதால் $x_1, x_2 \dots x_n$ சார்பற்றவை. எனவே, $\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots\dots + \sigma_{x_n}^2$.

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2$$
$$= n\sigma^2.$$

எனவே $\sigma_X = \sigma\sqrt{n}.$

$\bar{x}$ என்பது கூறின் கூட்டுச் சராசரியாக இருக்கும்போது,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{X}{n}.$$

∴ கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழை,

$$= \frac{(X)}{n} \text{ -ன் திட்ட விலக்கம்}$$

$$= \frac{X\text{-ன் திட்ட விலக்கம்}}{n}$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{n}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டின் திட்டப்பிழை**

திட்ட விலக்கம் $\sigma_1$ ஆகவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, $n_1$ அளவுடைய கூறின் இராசியை $x_1$ என்க. $x_2$ என்பது $\sigma_2$ வைத் திட்ட விலக்கமாக உடைய வேறொரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் $n_2$ அளவுடைய கூறின் இராசியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

கூறுகளின் கூட்டுச் சாரசரிகள் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்க. அவை உடன் தொடர்பற்ற சமவாய்ப்புக் கூறுகள் ஆதலால்,

$$\sigma^2_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma_1^2}{n} \qquad \sigma^2_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

**கிளைத்தேற்றம்**

திட்ட விலக்கம் $\sigma$ வைக் கொண்ட ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரு கூறுகளும் எடுக்கப்பட்டால், அவை உடன் தொடர்பற்றவையாய் இருப்பதால்,

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

**சில கூறு பரவல்களுக்குரிய திட்டப்பிழைகள்**

| கூறுப் பரவல் | திட்டப்பிழை | குறிப்புகள் |
|---|---|---|
| கூட்டுச்சராசரிகள் | $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ | பெருங் கூறுகளுக்கும், சிறு கூறுகளுக்கும் இது பொருந்தும் ; $N \geq 30$ ஆக இருக்கும்போது, முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலைப் பரவலில் அமையாதபோதும் கூட சராசரிகளின் கூறுப் பரவல் ஏறக்குறைய இயல் நிலைப்பரவலாகவே அமையும். $\bar{x}$ ன் கூட்டுச்சராசரி = முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி. |
| விகிதம் | $\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \sqrt{\frac{pq}{N}}$ | கூட்டுச்சராசரியின் கூறு பரவல் போன்றே விகிதங்களின் கூறு பரவலும் அமையும். கூறுகளின் விகிதங்களின் கூட்டுச்சராசரி = முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம். |
| திட்டவிலக்கங்கள் | (1) $\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$<br>(2) $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}}$ | $N \geq 100$ ஆக இருக்கும்போது, திட்ட விலக்கத்தின் கூறு பரவல் ஏறக்குறைய இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருக்கும் திட்ட விலக்கத்தின் திட்டப் பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (பரவல் ஏறக்குறைய இயல் நிலைப்பரவலில் அமைந்திருக்கும்போது) $= \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}}$ (பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாக இல்லாதபோது, இயல் நிலை $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$ ஆதலால், (2), (1) ஆக மாறுகிறது. $N \geq 100$ ஆக இருக்கும்போது, திட்ட விலக்கங்களின் சராசரி = முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம். |

| | | |
|---|---|---|
| இடை நிலைகள் | $\sigma_{\text{இடைநிலை}} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2N}} = \frac{1.2533\,\sigma}{\sqrt{N}}$ | $N \geq 30$ ஆக இருக்கும்போது இடைநிலையின் கூறு பரவல் ஏறத்தாழ இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருக்கும் இடைநிலையின் கூட்டுச்சராசரி = முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலை. |
| முதல், மூன்றும் கால்மானங்கள் | $\sigma_{Q_1} = \sigma_{Q_3} = \frac{1.3626\sigma}{\sqrt{N}}$ | கால்மானங்களின் கூறுபரவலும் இடைநிலையைப் போன்றே அமையும். கீழ் கால்மானத்தின் கூட்டுச் சராசரி முழுமைத் தொகுதியின் கீழ் கால்மானம் மேல் கால்மானத்தின் கூட்டுச்சராசரி = முழுமைத் தொகுதியின் மேல்கால்மானம். |
| பத்து மானங்கள் | $\sigma_{D_1} = \sigma_{D_9} = \frac{1.7094\,\sigma}{\sqrt{N}}$<br>$\sigma_{D_2} = \sigma_{D_8} = \frac{1.4288\,\sigma}{\sqrt{N}}$<br>$\sigma_{D_3} = \sigma_{D_7} = \frac{1.3180\,\sigma}{\sqrt{N}}$<br>$\sigma_{D_4} = \sigma_{D_6} = \frac{1.2680\,\sigma}{\sqrt{N}}$ | இடைநிலையைப் போன்றே பத்து மானங்களின் கூறுப் பரவல் அமைகிறது. முதல் பத்து மானம், 2 ஆவது பத்துமானம், 9ஆவது பத்துமானம் இவற்றின் கூட்டுச்சராசரி முறையே முழுமைத்தொகுதியின் முதல் 2ஆம்...9ஆம் பத்துமானங்களுக்கு ஏறக்குறைய சமம். |
| அரைக்கால்மான வீச்சு | $\sigma_Q = \frac{0.7867\,\sigma}{\sqrt{N}}$ | இடைநிலையைப் போன்றே இதன் கூறுப் பரவலும் அமையும். கால்மான வீச்சின் கூட்டுச்சராசரி ஏறக்குறைய முழுமைத் தொகுதியின் கால்மானத்திற்குச் சமம். |

| கூறுப் பரவல் | திட்டப்பிழை | குறிப்புகள் |
| --- | --- | --- |
| பரவற்படிகள் | (1) $\sigma_{S}^{2} = \sigma^{2} \sqrt{\frac{2}{N}}$ | திட்ட விலக்கத்திற்குரிய விளக்கங்களே இதற்கும் பொருந்தும். |
| | (2) $\sigma_{S}^{2} = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N}}$ | பரவற்படியின் கூட்டுச்சராசரி $= \sigma^2 (N-1) / N$. $N$-ன் மதிப்பு பெரியதாக இருக்கும்போது, இது ஏறக்குறைய $\sigma^2$-க்கு சமமாகச் இருக்கும். |
| மாறுபாட்டுக்கெழு | $\sigma_V = \frac{V}{\sqrt{2N}} = \sqrt{1+2V^2}$ | $N \geq 100$ ஆக இருக்கும்போது இயல்நிலை அல்லது ஏறத்தாழ இயல்நிலைப்பரவலில் அமைந்திருக்கும் பரவல்களுக்கும், மாறுபாட்டுக் கெழுவின் திட்டப் பிழை $\sigma_V = \frac{V}{\sqrt{2N}} \times \sqrt{1+2V^2}$ |

**எடுத்துக்காட்டு**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் 2, 3, 6, 8, 11 என்ற ஐந்து எண்கள் உள்ளன. எடுக்கப்படும் எண்கள் மீண்டும் முழுமைத் தொகுதியில் சேர்க்கப்படும் நிலையில், அளவு 2 ஆக உள்ள எல்லாக் கூறுகளையும் எடுத்துக் கொண்டு (அ) முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி (ஆ) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் (இ) கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுபரவலின் கூட்டுச் சராசரி (ஈ) கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுபரவலின் திட்ட விலக்கம் இவற்றைக் காண்க.

$$(\text{அ})\ \mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6{\cdot}0$$

$$(\text{ஆ})\ \sigma^2 = \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+9+0+4+25}{5} = 10{\cdot}8$$

$$\sigma = 3{\cdot}29$$

(இ) இங்கு 5 (5) = 25 கூறுகள், (ஒவ்வொன்றிலும் 2 எண்கள் உடையவை) எடுக்க முடியும். ஏனெனில், முதல் தடவை எடுக்கப்படும் 5 எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று 2 ஆவது தடவை எடுக்கப்படும் 5 எண்களில் ஏதேனும் ஓர் எண்ணுடன் பொருத்த இயலும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (2, 2) | (2, 3) | (2, 6) | (2, 8) | (2, 11) |
| (3, 2) | (3, 3) | (3, 6) | (3, 8) | (3, 11) |
| (6, 2) | (6, 3) | (6, 6) | (6, 8) | (6, 11) |
| (8, 2) | (8, 3) | (8, 6) | (8, 8) | (8, 11) |
| (11, 2) | (11, 3) | (11, 3) | (11, 8) | (11, 11) |

இவற்றிற்குரிய கூறுகளின் சராசரிகள்:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2·0 | 2·5 | 4·0 | 5·0 | 6·5 |
| | 2·5 | 3·0 | 4·5 | 5·5 | 7·0 |
| (1) | 4·0 | 4·5 | 6·0 | 7·0 | 8·5 |
| | 5·0 | 5·5 | 7·0 | 8·0 | 9·5 |
| | 6·5 | 7·0 | 8·5 | 9 5 | 11·0 |

சராசரிகளின் கூறுபரவலின் சராசரி =

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\text{(1)-ல் உள்ள எல்லாக் கூறு சராசரிகளின் கூட்டுத்தொகை}}{25}$$

$$= \frac{150}{25}$$

$$= 6 \cdot 0.$$

இதிலிருந்து $\mu_{\bar{x}} = \mu$ எனத் தெரிகிறது.

(ஈ) (1)-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணிலிருந்தும் சராசரி 6ஐக் கழித்து, அவற்றின் இருமடியைக் காணவேண்டும். இவ்வாறு கிடைத்த 25 எண்களையும் கூட்டி, அவற்றை 25ஆல் வகுத்தால், சராசரிகளின் கூறுபரவலின் பரவற்படியான $\sigma_{\bar{x}}^2$ கிடைக்கும்.

எனவே, $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{135}{25} = 5 \cdot 40$

எனவே, $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2 \cdot 32.$

எனவே, எடுக்கப்படும் கூறு திருப்பிப் போடப்படும் நிலையிலோ, அல்லது முழுமைத்தொகுதி வரையற்றதாக இருக்கும்போதோ,

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 4$$

மேற்கண்ட கணக்கில் எடுக்கப்படும் உறுப்பு, திருப்பிப் போடா நிலையில் மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு :**

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் இவை இரண்டும் முன்போலவே, முறையே 6, 3·29 என இருக்கும்.

எடுக்கப்படும் எண்கள் திருப்பிப் போடப்படாத நிலையில் ஒவ்வொன்றிலும் 2 எண்கள் உடைய $5\ C_2 = 10$ கூறுகளுள்ளன; அவையாவன:

(2 3), (2, 6), (2, 8), (2, 11), (3, 6 , (3, 8), (3, 11), (6, 8) (6, 11), (8, 11),

எடுத்துக்காட்டாக (2, 3) என்பது (3, 2) ஆகக் கொள்ளப் படுகிறது.

இக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள்,

2·5, 4·0, 5·0, 6·5, 4·5, 5·5, 7·0, 7·0, 8·5, 9·5.

கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுபரவலின் கூட்டுச்சராசரி =

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{2{\cdot}5+4{\cdot}0+5{\cdot}0+6{\cdot}5+4{\cdot}5+5{\cdot}5+7{\cdot}0+7{\cdot}0+8{\cdot}5+9{\cdot}5}{10} = 6.$$

இதிலிருந்து $\mu_{\bar{x}} = \mu$ எனத் தெரிகிறது.

கூட்டுச்சராசரிகளின் கூறுப்பரவலின் பரவற்படி =

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \; (2{\cdot}5-6{\cdot}0)^2 + 4{\cdot}0-6{\cdot}0)^2+(5{\cdot}0-6{\cdot}0)^2 + \ldots + (9{\cdot}5-6{\cdot}0)^2$$

$= 4.05$

$\sigma_{\bar{x}} = 2{\cdot}01$. இதிலிருந்து $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{N_p - N}{N_p - 1}\right)$ எனத் தெரிகிறது. அதாவது $\frac{10{\cdot}8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 4{\cdot}05$.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து, ஒவ்வொன்றிலும் 4 மாணவர்கள் அடங்கிய (திருப்பிச் சேர்க்கப்படுதல்) 30 சமவாய்ப்புக் கூறுகளை ராண்டம் எண்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு தேர்ந்தெடுப்பாய் ?

கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுபரவலின் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக. இவற்றை அவற்றின் கணக்கியல் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுக.

| உயரம் | நிகழ்வெண் |
|---|---|
| 60 — 62 | 5 |
| 63 — 65 | 18 |
| 66 — 68 | 42 |
| 69 — 71 | 27 |
| 72 — 74 | 8 |

**தீர்வு :**

| உயரம் | நிகழ்வெண் | கூறுகளின் எண் |
|---|---|---|
| 60 — 62 | 5 | 00 — 04 |
| 63 — 65 | 18 | 05 — 22 |
| 66 — 68 | 42 | 23 - 64 |
| 69 — 71 | 27 | 65 — 91 |
| 72 — 74 | 8 | 92 — 99 |

100 மாணவர்களில் ஒவ்வொரு மாணவரையும் இரண்டு இலக்கமுள்ள எண்களால் குறிப்பிடுவோம். 00, 01, 02,......99. எனவே 60 — 62 அங்குலங்களுக்கு இடையே உள்ள 5 மாணவர்களது எண்கள் 00, 1, 02, 03, 04 என அமைகின்றன. 63 — 65 அங்குலங்களுக்கு இடையே உயரங்களைக் கொண்ட மாணவர்களின் எண்கள் 05 — 22 என அமைகின்றன. ஒவ்வொரு மாணவரது எண்ணும் ஒரு கூறு எண் ஆகிறது. ராண்டம் எண்களின் பட்டியலில் இருந்து முதல் வரியில் தொடர்ந்து வரும் எண்களாகிய, 51, 77, 27 46, 40 போன்றவற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே, 51 என்பது உயரம் 66 — 68 அங்குலங்களுக்கு இடையே உள்ள ஒரு மாணவரைக் குறிக்கிறது. இந்தப் பிரிவின் மைய மதிப்பாகிய 67 அங்குலமாகக் கொள்ளலாம்.

இவ்வாறே 77, 27, 46 என்ற எண்கள் முறையே 70, 67, 67 அங்குலங்கள் உயரங்களைத் தருகின்றன. இவ்வாறு பின்வரும் பட்டியலில் 30 கூறுகளுக்கும், உயரங்களும், சராசரி உயரமும், கணக்கிடப்பட்டுத் தரப்பட்டுள்ளன.

**பட்டியல்—I.**

| எடுக்கப்பட்ட கூறின் எண் (அ) | அவற்றிற்குரிய உயரங்கள் (ஆ) | சராசரி உயரம் (இ) |
|---|---|---|
| (1) 51, 77, 27, 46 | 67, 70, 67, 67 | 67·75 |
| (2) 40, 42 33, 12 | 67, 67, 67, 64 | 66·25 |
| (3) 90, 44, 46, 62 | 70, 67, 67, 67 | 67·75 |
| (4) 16, 28, 98, 93 | 64, 67, 73, 73 | 69·25 |
| (5) 58, 20, 41, 86 | 67, 64, 67, 70 | 67·00 |

| (அ) | (ஆ) | (இ) |
|---|---|---|
| (6) 19, 64, 08, 70 | 64, 67, 64, 70 | 66·25 |
| (7) 56, 24, 03, 32 | 67, 67 61, 67 | 65·50 |
| (8) 34, 91, 83, 58 | 67, 70, 70, 67 | 68·50 |
| (9) 70, 65, 68, 21 | 70, 70, 70, 64 | 68·50 |
| (10) 96, 02, 13, 87 | 73, 61, 64, 70 | 67·00 |
| (11) 76, 10, 51, 08 | 70, 64, 67, 64 | 66·25 |
| (12) 63, 97, 45, 39 | 67, 73, 67, 67 | 68·50 |
| (13) 05, 81, 45, 93 | 64, 70, 67, 73 | 68·50 |
| (14) 96, 01, 73, 52 | 73, 61, 70, 67 | 67·75 |
| (15) 07, 82, 54, 24 | 64, 70, 67, 67 | 67·00 |
| (16) 11, 64, 55, 58 | 64, 67, 67 67 | 66·25 |
| (17) 70, 56, 97, 43 | 70, 67, 73, 67 | 69·25 |
| (18) 74 28, 93, 50 | 70, 67, 73, 67 | 69·25 |
| (19) 79, 42, 71, 30 | 70, 67, 70, 67 | 68·50 |
| (20) 58, 60, 21, 33 | 67, 67, 64, 67 | 66·25 |
| (21) 75, 79, 74, 54 | 70, 70, 70, 67 | 69·25 |
| (22) 06, 31, 04, 18 | 64, 67, 61, 64 | 64·00 |
| (23) 67, 07, 12, 97 | 70, 64, 64, 73 | 67·75 |
| (24) 31, 71, 69, 88 | 67, 70, 70, 70 | 69·25 |
| (25) 11, 64, 21, 87 | 64, 67, 64, 70 | 66·25 |
| (26) 03, 58, 57, 93 | 61, 67, 67, 73 | 67·00 |
| (27) 53, 81, 93, 88 | 67, 70, 73, 70 | 70·00 |
| (28) 23, 22, 96, 79 | 67, 64, 73, 70 | 68·50 |
| (29) 98, 56, 59, 36 | 73, 67, 67, 67 | 68·50 |
| (30) 08, 15, 08, 84 | 64, 64, 64, 70 | 65·50 |

பட்டியல்—II.

| கூறு சராசரி | குறியீடு | $f$ | $d$ | $fd$ | $fd^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 64·00 | 1 | 1 | —4 | —4 | 16 |
| 64·75 | 0 | 0 | —3 | 0 | 0 |
| 65·50 | 11 | 2 | —2 | —4 | 8 |
| 66·25 | ~~1111~~ 1 | 6 | —1 | —6 | 6 |
| *A* 67·00 | 1111 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 67·75 | 1111 | 4 | 1 | 4 | 4 |
| 68·50 | ~~1111~~ 11 | 7 | 2 | 14 | 28 |
| 69·25 | ~~1111~~ | 5 | 3 | 15 | 45 |
| 70·00 | 1 | 1 | 4 | 4 | 16 |
| | | $\Sigma f = N = 30$ | | $\Sigma fd^2 = 23$ | $\Sigma fd^2 = 123$ |

பட்டியல் II கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகளின் நிகழ்வெண் பரவலைத் தருகிறது. இது சராசரிகளின் கூறுப்பரவலாகும். இக் கூறுப்பரவலின்

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = A + \frac{C\,\Sigma f d}{N}$$

$$= 67{\cdot}00 + \frac{({\cdot}75)\,(23)}{30} = 67{\cdot}58''$$

$$= C\sqrt{\frac{\Sigma f r d r^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f r d r}{N}\right]^2}$$

$$= {\cdot}75\sqrt{\frac{123}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} = 1{\cdot}41''$$

கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறுப்பரவலின் கணக்கியல் சராசரியைக் கணக்கிடுதல்

| மையமதிப்பு | நிகழ்வெண் | $d$ | $fd$ | $f{\cdot}d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 61 | 5 | −2 | − 10 | 20 |
| 64 | 18 | −1 | − 18 | 18 |
| $A \leftarrow$ 67 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 70 | 27 | 1 | 27 | 27 |
| 73 | 8 | 2 | 16 | 32 |
| | | | + 15 | 97 |

$$M = A + \frac{C \Sigma f d}{N}$$

அதாவது $67 + \frac{3 \times 15}{100} = 67 + \frac{9}{20} = 67{\cdot}45''$

$$\sigma^2 = C^2 \left[ \Sigma \frac{fd^2}{N} - \Sigma \left( \frac{fd}{N} \right)^2 \right]$$

$$= 3^2 \left[ \frac{97}{100} - \left( \frac{15}{100} \right)^2 \right]$$

முழுமைத்தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $3 \cdot \sqrt{0{\cdot}9475} = 2{\cdot}92''$

கூட்டுச்சராசரியின் கூறுப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

$$= \frac{2{\cdot}92}{\sqrt{4}}$$

$= \mathbf{1{\cdot}46}$ அங்.

கூட்டுச் சராசரிகளின் கூறு பரவலின் கணக்கிடப்பட்ட சராசரி, 67·45. அதன் கணக்கியல் மதிப்பான 67·58- லிருந்து சிறிதளவே மாறுபடுகிறது. இதுபோன்றே கூறுப்பரவலின் திட்டவிலக்கம் 1·41 அங். அதன் கணக்கியல் மதிப்பான 1·46- லிருந்து சிறிது மாறுபடுகிறது. கூறின் அளவு சிறியதாக இருப்பதாலும், 30 கூறுகள் மட்டுமே எடுக்கப்படுவதாலும் இவ்வேறுபாடுகள் காணப்படுகின்றன.

**மிகைத் தன்மையைச் சோதித்தல் (Tests of Significance)**

கூறும் கொள்கையின் முக்கியமான பகுதி மிகைத் தன்மையைச் சோதித்தல் ஆகும். இதிலிருந்து, நேரில் கண்ட , கூறினுடைய பண்பளவைக்கும், அப் பண்பளவையின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புக்கும் இடையிலுள்ள வேறுபாட்டையோ, அல்லது இரு கூறுகளின் பண்பளவைகட்கு இடையிலுள்ள வேறுபாட்டையோ, மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்லது வாய்ப்புகூறுகளின் ஏற்ற இறக்கப் பிழைகளால் மட்டுமே ஏற்பட்டது எனத் தீர்மானிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தை 150 முறை வீசுவதாகக் கொள்வோம். தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்கதவு $\frac{1}{2}$ ஆதலால் நாம் எதிர்பார்க்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை 75. ஆனால், ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையில் சரியாக 75 தலைகள் கிடைக்காமல் இருக்கலாம். நாம் நாணயத்தை 150 முறை வீசும்போது 82 தலைகளோ அல்லது 65 தலைகளோ கிடைக்கலாம். இவ்வாறு எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புக்கும் நேரில் காணும் மதிப்புக்கும் இடையிலுள்ள வேறுபாட்டை எந்த அளவுவரை மிகைத்தன்மையற்றது என ஒதுக்கி விடலாம் ; எந்த அளவுக்கு அதிகமானல் அதனை மிகைத்தன்மையுடையது எனக்கொண்டு நாணயத்தின் ஒரு தலைசார்பற்ற தன்மையைக் குறித்து ஐயம் கொள்ளலாம் என்று தீர்மானிக்க இம் மிகைத்தன்மைச் சோதனைகள் உதவுகின்றன. இதுபோலவே, ஒரு கல்லூரியில், பொதுவாக, பல்கலைக் கழகத்தேர்வுகளில் தேர்ச்சி பெறுவோரின் சதவீதம் 90% ஆகவும், ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டின் 96% தேர்ச்சியும் மாணவர்கள் பெற்றிருந்தால் அவ்வாண்டு தேர்ச்சியில் ஏற்பட்ட அதிகரிப்பாகிய 6% உண்மையிலேயே மாணவர்கள் அவ்வாண்டு குறிப்பிடும் வகையில் சிறந்து விளங்கியதைக் குறிக்கின்றதா, அல்லது முற்றிலும் வாய்ப்பின் காரணமாக இவ்வதிகரிப்பு ஏற்பட்டுள்ளதா எனவும் தீர்மானித்தல் வேண்டும்.

பெரும்பான்மையான நிலைகளில், அனுபவத்தின் மூலமாகவோ அல்லது கணக்கியல் தேற்றங்களின் முடிவாகவோ $x$ மாறியின் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளதை நாம் அறிவோம். எனவே, $x$ என்பது $N(m, \sigma)$ மாறியானல் இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ என நாம் அறிவோம். எனவே, $P[m-2\sigma < x < m+2\sigma] = \cdot 9554$. அதாவது, 5%-க்கும்

குறைவான நிலைகளில்தான் நேரில் காணும் மதிப்புக்கும் ($x$), எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்புக்கும் ($m$) இடைப்பட்ட வேறுபாடு $2\sigma$ ஐவிட அதிகமாக இருக்கும். எனவே, நாம் நேரில் கணிக்கும் ஓர் இராசியின் மதிப்பு அதன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பாகிய $m$ஐவிட $2\sigma$-க்கும் அதிகமாக வேறுபாடு உடையதாக இருந்தால், இது அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறாக இருத்தல் மிக அரிது என உணர்கிறோம். நாணயத்தின் எடுத்துக்காட்டில், தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆக உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இந்த நாணயம் வராதிருந்திருக்கலாம். அதாவது, நாணயம் ஒரு புறச் சாய்வுடையதாக இருக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம் இவ்வாறே, கல்லூரி மாணவரின் 96 தேர்ச்சி மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததென நிறுவப்படின், அவ்வாண்டு மாணவருக்கு, இதர ஆண்டுகளில் கல்லூரியிலிருந்து அனுப்பப்பட்டோரைவிடத் தனிச் சிறப்பு உள்ளது என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். இத்தகைய கூறுகளின் (statements) நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவு வரையை (level of probability) [இங்கு .05] அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் சொல்கின்றோம். கூறு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதல்ல என்று ஒரேயடியாகக் கூறாமல் "95% நிலைகளில் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கும், கூறின் பண்பளவைக்கும் வேறுபாடு இருந்திருக்க வாய்ப்பு இல்லை. எனவே, 5% ல் வரையில், நாம் நேரில் காணும் மதிப்பு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது", எனக்கொண்டு அதனை முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பாக ஏற்காது தள்ளி விடுகின்றோம். எனவே, ஓர் இராசியை ஏற்றுக்கொள்வதற்கோ, ஏற்காது மறுப்பதற்கோ நாம் பயன்படுத்தும் நிகழ்தகவு வரையே, மிகைத்தன்மை வரை (level of significance) எனப்படுகிறது. எனவே $t = \left| \frac{x - m}{\sigma} \right| > 2$ என இருப்பின் வேறுபாடு $|x - m|$ 5% வரையில் மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது என்கிறோம். இயல்நிலைப் பரவலின் பட்டியலில் இருந்து 5% வரையைக் காண $t$-ன் மதிப்பு 1·96 ஆக இருப்பிலும், கணக்கிடும் வசதிக்காக இதனை 2 எனக் கொள்வோம்.

### இல் எனும் எடுகோள் (Null Hypothesis)

மிகைத்தன்மை சோதனைகளில் முதலில் ஓர் எடுகோளை எடுத்துக் கொள்கிறோம். நேரில் காணும் மதிப்புக்கும், எதிர்பார்க்கப்படும் மதிபுக்கும் இடையேயுள்ள உண்மையான வேறுபாடு

பூச்சியம் எனவும், நாம் காணும் வேறுபாடு, ராண்டம் பிழைகளினுல் ஏற்பட்ட வேறுபாடே என்பதாகும். இந்த இல் என்னும் எடுகோளை $[Ho]$ எனக் குறிப்பதுண்டு. ஒரு கூறின் பண்பளவைக்கும், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கும் இடையில் உண்மையில் வேறுபாடில்லை என்றும், அல்லது இரு கூறுகளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது இரு கூறுகளின் பண்பளவைகளுக்கு மிடையேயுள்ள உண்மையான வேறுபாடு பூச்சியம் என்றும் கொள்கிறோம். மிகைத்தன்மை சோதனைகளைப் பயன்படுத்தி, ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவு வரையில் இந்த எடுகோளை ஏற்கவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்கிறோம்.

**பிழைகளின் இரு வகைகள் (Two Types of Errors)**

ஒரு புள்ளியியல் கொள்கையைச் சோதிக்கும்போது இரு வகையான பிழைகள் ஏற்படக்கூடும். (1) கொள்கை சரியானதாக இருக்கும்போது நமது சோதனை அதனை நிராகரித்தல் ; அதனை (2) கொள்கை தவருனதாக இருக்கும்போது நமது சோதனை அதனை ஏற்றுக் கொள்ளுதல். இவை முறையே முதலாம் வகைப் பிழை (Type I error), இரண்டாம் வகைப் பிழை (Type II error) எனப் படுகின்றன. முதலாம் வகைப் பிழையின் நிகழ்தகவு அதாவது ஒரு சரியான கொள்கையைத் தவருனதென நிராகரிப்பதற்கான வாய்ப்பு, சோதனையில் மேற்கொள்ளும் மிகைதன்மைவரை $\alpha$ ஆகும். இவ்வாறு 5% வரையில் சரியான கொள்கைகளில் சரியாக 5 சதவீதத்தை அவை உண்மையானதாக இருப்பினும் ஒதுக்கிவிடுகிறோம். வாய்ப்பின் காரணமாகமட்டும் 100 நிலைகளில் 5 நிலைகள் $t$ பண்பளவை 1·96ஐவிட அதிகமாக இருக்கும். இந்த 5% முதலாம் வகைப் பிழையின் அளவாகக் கொள்ளப் படுகிறது. எனவே, 5 சதவீதத்தில் $\bar{x}$, $m - \frac{1\cdot96\,\sigma}{\sqrt{n}}$, $m + \frac{1\cdot96\,\sigma}{\sqrt{n}}$ என்ற ஏற்றுக்கொள்ளும் வீச்சில் (acceptance region) அமைந்தால் $m$ ஐக் கூட்டுச்சராசரியாகவும் $\sigma$-வைத் திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $\bar{x}$ வந்ததாக ஏற்றுக்கொள்கிறோம். ஆனுல், $\bar{x}$ இந்த வீச்சிற்கு வெளியே இருந்தால், கொள்கையினை நிராகரித்து விடுகிறோம். எனவே நிராகரிக்கும் வீச்சு (rejection range) $\bar{x} < m - 1\cdot96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ அல்லது $\bar{x} > m + 1\cdot96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. உண்மையிலேயே பொருட்படுத்தத்தக்க வேறுபாடு இல்லாதிருக்கும்போது வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததாகக் கொண்டு இல் என்னும் எடுகோளை நாம் நிராகரிக்கும்போது முதலாம் வகைப் பிழை ஏற்படுகிறது.

உண்மையிலேயே பொருட்படுத்தத்தக்க வேறுபாடு இருக்கும் போது வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல எனக் கொண்டு, இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ளும்போது இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்படுகிறது

| | $H$ ஐ ஏற்பது | $H$-ஐ நிராகரிப்பது |
|---|---|---|
| எடுகோள் $H$ சரியானது | சரியான முடிவு | முதலாம் வகைப் பிழை |
| எடுகோள் $H$ தவருனது | இரண்டாம் வகைப் பிழை | சரியான முடிவு |

சோதனையில் நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் மிகைத்தன்மை வரையினுல் முதலாம் வகைப் பிழை முன்கூட்டியே தீர்மானிக்கப் படுகிறது. 5% வரையில் கொள்கைகளைக் கூட 100-க்கு 5 நிலை களில் $t > 1{\cdot}96$ ஆக இருப்பின் நிராகரித்து விடுகிறோம். ஏனெனில் உண்மையான கொள்கைகளில்கூட $t > 1{\cdot}96$ ஆக இருக்க ·05 நிகழ்தகவு உள்ளது. எனவே, மிகைத்தன்மை வரை யிணைக் குறைப்பதன் மூலம் முதலாம் வகைப் பிழையை எவ்வளவு சிறிதாக மாற்ற விரும்பினுலும் அவ்வளவு சிறியதாக ஆக்கி விடலாம். 1% வரையைப் பயன்படுத்தினோமானுல் $t$—ன் மதிப்பு 1·96-லிருந்து 2·58 ஆக மாறிவிடுகிறது. ஆனுல், இவ்வாறு செய் வதால் ஒரு தவருன கொள்கையை ஏற்பதற்கான வாய்ப்பு அதிகரிக் கிறது. எனவே ஒரே சமயத்தில் இரு பிழைகளையும் குறைத்தல் இயலாது.

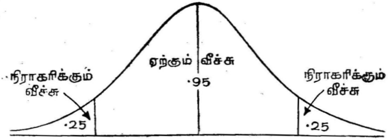
பொதுவாக, ஆராய்ச்சிக் கொள்கைகளில் இரண்டாம் வகைப் பிழையைவிட முதலாம் வகைப் பிழையைக் குறைத்தல் இன்றியமை யாதது.

**ஒரு வால்பகுதி, இரு வால்பகுதி சோதனைகள்** (One Tailed and Two Tailed Tests) :

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியின் பண்பளவை $t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ இரு பக்கத்திலும் முறையே பெறக்கூடிய மீப்பெரு,

மீச்சிறு மதிப்புகளை அறிய விரும்பும்போது, பரவலின் இரு வால் பகுதிகளையும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். எனவே, இவை இரு வால் பகுதி சோதனைகள் எனப்படுகின்றன.

கூட்டுச் சராசரியின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள உச்ச மதிப்புகள் மட்டும் பெரும்பான்மையான சமயங்களில் அறிய பரவலின் ஒரு வால் பகுதியை மட்டுமே அறிந்துகொள்ளும் தேவை ஏற்படலாம். எடுத்துக்காட்டாக, விதைகளை விதைப்பதில் ஒரு முறை மற்றொரு முறையைவிட மேலானதா எனமட்டும் ஆராய முற்படும்போது (ஒரு முறை மற்றொரு முறையைவிடத் தரத்தில் சிறந்ததா அல்லது குறைந்ததா என ஆராய்வதிலிருந்து இது மாறுபட்டது) நாம் பரவலின் ஒரு வால் பகுதியை மட்டுமே ஆராய்கிறோம். இவை ஒருவால்பகுதி அல்லது ஒரு பக்க சோதனைகள் (One tailed test or one sided tests) எனப்படுகின்றன. இந்நிலைகளில் தீர்மானிக்கும் வீச்சு (Critical region) பரவலின் ஒரு பக்கத்தில், மிகைத்தன்மை வரைக்குச் சமமான பரப்பை உடையது.




படம் 5—2.

வலது பக்கத்திலுள்ள பரப்புமட்டுமே 5% ஆதலால், மேற் காணும் படத்தில் ஏற்றுக் கொள்ளும் வீச்சு

$$\bar{x} < m + 1{\cdot}645\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ஆகவும், நிராகரிக்கும் வீச்சு

$$\bar{x} > m + 1{\cdot}645\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ஆகவும் இருக்கும்.

*t*-சோதனைகளில், இரு வால்பகுதிகள் சோதனைகளில் தீர்மானிக்கும் மதிப்புகள் (Critical values) $t > t\ {\cdot}05$ ஒரு வால்பகுதி சோதனையில் $t > t{\cdot}10$ ஆகும்.

| மிகைத்தன்மை வரை | ·10 | ·05 | 01 | ·005 | ·002 |
|---|---|---|---|---|---|
| ஒரு வால் பகுதிச் சோதனைகளில் $t$-ன் தீர்மானிக்கும் மதிப்புகள் | —1·28 (அ) 1·28 | —1·645 (அ) 1·645 | —2·33 (அ) 2·33 | —2·58 (அ) 2.58 | —2·88 (அ) 2·88 |
| இரு வால் பகுதிச் சோதனைகளில் $t$-ன் தீர்மானிக்கும் மதிப்புகள் | —1·645, 1·645 | —1·96, 1·96 | — 2·58, 2·58 | —2·81 2·81 | —3.08 3·08 |

**கொள்கைகளைச் சோதித்தல்** (Tests of Hypothesis)

கூறுகள் தரும் விவரங்களிலிருந்து, பெரும்பான்மையான நிலைகளில் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகள் குறித்து முடிவுக்கு வருகிறோம். இவை புள்ளியியல் முடிவுகள் (statistical decisions) எனப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, கூறுகள் தரும் விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு குறிப்பிட்ட உரம் மற்றோர் உரத்தை விடச் சிறந்த விளைச்சலைத் தருகிறதா? குறிப்பிட்ட ஒரு மருந்து உண்மையிலேயே நோயைக் குணப்படுத்துவதில் சிறந்து விளங்குகிறதா? ஒரு பகடை சமச்சீராய் உள்ளதா? இவை போன்ற கொள்கைகளை ஆராய்ந்து, முடிவுக்கு வருகிறோம்.

இத்தகைய முடிவுகளுக்கு வரும்போது, அவை சார்ந்துள்ள முழுமைத்தொகுதிகளைப் பற்றிய சில எடுகோள்களை ஏற்கிறோம். அவை பெரும்பாலும் முழுமைத் தொகுதிகள் தழுவுகின்ற நிகழ்தகவுப் பரவல்களைப் பற்றிய கூறுகளாக இருக்கும். இந்தப் புள்ளியியல் கொள்கைகள் சரியானவையா அல்லது தவறானவையா எனச் சோதித்தலே நம் நோக்கமாகும்.

**புள்ளியியல் கொள்கை** (Statistical Hypothesis)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்வெண் சார்பைப்பற்றிய ஒரு தற்கோள், எடுத்துக்காட்டாக $f(x, \theta) = \theta . e^{-\theta x}$ என்ற விதியை $\theta = 3$ என்ற மதிப்புடன், $X$ தழுவுகிறது என்பது புள்ளியியல் கொள்கை.

**எளிய, கூட்டுக் கொள்கைகள்** (Simple and Composite Hypothesis)

எடுத்துக் கொள்ளும் ஒரு கொள்கையின் மூலம், நிகழ்வெண் சார்பின் அமைப்பும், அதிலுள்ள பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் யாவும் தெரிந்தால் அது எளிய கொள்கையாகும். $f(x, m\ \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ல் $m = 2$, $\sigma = 1.5$ என்பது எளிய கொள்கை ஆகும். $\sigma = 1.5$ மட்டும் தரப்பட்டிருந்தால், அது கூட்டுக் கொள்கை ஆகும்.

புள்ளியியல் கொள்கையைச் சோதிக்கும்போது, பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம். கொள்கையை உண்மையான தெனக் கொண்டு, கூறுவெளி $S$ஐ $R, A$ எனும் இரு நிரப்புப் பகுதி களாகப் பிரித்துக்கொண்டு, $P[E \in R] = \alpha$ காண்கிறோம். கண்டறிந்த மதிப்பு $E$, $R$-ல் காணப்பட்டால், கொள்கையை மறுக்கிறோம். $E$, $A$-ல் காணப்பட்டால், கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். $A$ ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி, $R$, நிராகரிக்கும் பகுதி எனப்படுகின்றன.

ஒரு புள்ளியியல் சோதனையில் பின்பற்றும் பல்வேறு நிலைகள்:

(1) $H_0$ (இல்-எனும் எடுகோள்) அமைக்கப்படுகிறது.

(2) முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து, ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்படுகிறது.

(3) $X$ என்ற, ஏற்றதொரு புள்ளியியல் அளவைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

(4) $X$-ன் கூறுப் பரவலையும், மிகைத்தன்மை வரை ($\alpha$) வையும் பொறுத்து, $X_0$-ன் வீச்சு $A, R$ என இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

(5) புள்ளியல் அளவை $X_0$, $A$-யில் காணப்பட்டால், $H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. அது $R$-ல் காணப்பட்டால், $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(i) $H_0 : a = 60$, $H_1 : a > 60$, $\alpha = \cdot 05$, $\bar{x} = 62$, $n = 64$ $\sigma = 5$ எனத் தரப்பட்டுள்ளபோது, இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியைப் பற்றிய கொள்கையைச் சோதிக்கவும்.

விடை

(i) $X_0 = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{62 - 60}{\frac{5}{\sqrt{64}}} = 3{\cdot}2$

$X_0 > 1{\cdot}65$ ஆதலால், $X_0 \in R$.

$\therefore$ $H_0$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

**திறன்சார்பு (Power Function)**

$P\,[E \in R/H_1]$ என்பது, மாற்றுக் கொள்கை $H_1$ஐப் பொறுத்து அமையும், தீர்மானிக்கும் பகுதியின் திறன்சார்பு எனப்படுகிறது.

திறன் $= 1 - T$ இரண்டாம் வகைப் பிழை.

$\because$ இரண்டாம் வகைப் பிழை சிறுமமாக இருக்கும்போது, திறன் பெருமமாயிருக்கும்.

ஒரு மாற்றுக் கொள்கை $H_1$-க்குப் பதிலாக, மாற்றுக் கொள்கைகள் $H_1$-ன் தொடராகக் கருதலாம். $P\,[E \in R/H_1]$ என்பது $H_1$ அதாவது $H_1$-லிலுள்ள $\theta$-ன் சார்பாகக் கருதப் படுகிறது.

$\therefore$ $P\,[E \in R/H_1] = P\,(\theta)$

இது சோதனையின் திறன்சார்பு ஆகும்.

**வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மை காணும் சோதனைகள்: (பெருங் கூறுகள்)**

**I. ஓர் இராசியின் நேரில் கண்ட மதிப்பிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பிற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத்தன்மையை ஆராய்தல்.**

ஓர் அறுமுகப்பகடையை 120 முறை வீசும்பொழுது, புள்ளி முகம் "5" 26 முறை கிடைக்கிறது. கணக்கியல் மதிப்பின்படி, புள்ளிமுகம் 5 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6}$. எனவே, கணக் கியல் மதிப்பு (புள்ளிமுகம் 5 எதிர்பார்க்கப்படும் தடவைகள்) $120 \times \frac{1}{6} = 20$. இதுபோல ஓர் இராசியின் எதிர்பார்க்கப்படும்

மதிப்பு, $a$ எனவும், அதன் கணக்கியல் மதிப்பு $x$ எனவும் இருப்பின் இயல்நிலை விதியின்படி, $P(a - 2\sigma < x < a + 2\sigma) = \cdot 9545$, இங்கு $\sigma$ முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கமாகும். எனவே 5% நிலைகளுக்கும் குறைவாகவே, எதிர்ப்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $a$ யிலிருந்து, நேரில் காணும் மதிப்பு $x$ன் வேறுபாடு $2\sigma$ வை விட அதிகமாகவே இருக்கும். எனவே $t = \frac{|x - a|}{\sigma} > 2$ எனில், வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது. $t < 2$ எனில் 5% வரையில் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்கதல்ல என்னும் முடிவுக்கு வருகிறோம். இதுபோன்று $P(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = \cdot 9973$. எனவே, $t > 3$ எனில் வேறுபாடு 1% வரையில் கூட மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது எனவும், $t < 3$ எனில் வேறுபாடு 1% வரையில் மிகைத்தன்மை அற்றது எனவும் முடிவுக்கு வருகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு**

ஓர் அறுமுகப்பகடை 324 முறை வீசப்படுகிறது. அதில் 181 முறை ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைக்கிறது. அந்தப் பகடை ஒரு புறச் சாய்வற்றது எனக் குறிப்பிடத்தக்கதா ?

**தீர்வு**

பகடையை ஒரு முறை வீசும் போது 1, 3, 5 என்ற 3 ஒற்றைப் படை எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கும். இதற்கான நிகழ்தகவு $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

எனவே, கணக்கியல் நிகழ்வெண் $= 324 \times \frac{1}{2} = 162$

கண்டறியப்பட்ட மதிப்பு $= 181$

$$\therefore \quad t = \frac{181 - 162}{\sqrt{324 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 2 \cdot 1 \quad \left[\sigma = \sqrt{npq} \text{ ஈருறுப்புப் பரவலின்படி}\right]$$

$t > 2$. எனவே வேறுபாடு 5% வரையில் பொருட்படுத்தத் தக்கது. ஆயின் $t < 3$ ஆதலால், 1% வரையில் வேறுபாடு மிகைத்தன்மை அற்றது ; அதாவது 5% வரையில், பகடையை ஒரு புறச் சாய்வுற்றது எனவும், 1%வரையில் ஒருபுறச் சாய்வற்றது எனவும் கூறலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு பள்ளியில் உள்ள மாணவரின் எடைகளின் கூட்டுச் சராசரி 140 பவுண்டு; திட்ட விலக்கம் 5 பவுண்டு என கணக்கிடப் பட்டது. தற்செயலாக ஒரு மாணவரின் எடையை அளவிட்டதில் 120 பவுண்டு என வந்தது. எடையில் வேற்றுமை, வாய்ப்புக் காரணத்தால் ஏற்பட்டது எனக் கூறமுடியுமா ?

**தீர்வு :**

**எடுகோள் :**

எடைகளின் வேற்றுமை மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல என்க.

கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $= 140$

நேரிடையாகக் கண்ட மதிப்பு $= 120$

திட்ட விலக்கம் $= 5$ $\quad t = \dfrac{|140 - 120|}{5} = \dfrac{20}{5} = 4$

$t > 2$. எனவே எடையில் வேற்றுமை வாய்ப்புக் காரணத்தால் ஏற்பட்டது அல்ல எனக் கூறலாம். 5% வரையில் எடுகோளை ஏற்கிறோம்

**II. கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும்: முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்.**

$\bar{x}$ஐக் கூட்டுச் சராசரியாக உடைய கூறின் அளவு $n$. இது $a$ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\sigma$ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது. $n$ அளவுடைய பல்வேறு கூறுகளை இம் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுத்துக் கொண்டோமானால், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளின் $\bar{x}$ம் இயல்நிலைப் பரவலை $a$ கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்டு தழுவுகின்றது.

$$\therefore \quad t = \frac{(\bar{x} - a)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ இயல்நிலைப் பரவலைக் கூட்டுச் சராசரி 0,

திட்ட விலக்கம் $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எனக்கொண்டு தழுவுகின்றது.

$t = 2$ எனில், 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை உடையது என்றும், $t > 2$ எனில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை அற்றது என்னும் கொள்ளவேண்டும். முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma$ அறியப்படா நிலையில், கூறின் திட்ட விலக்கம் $s$-யை அதன் மதிப்பீடாகக் கொள்ளவேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

144 அளவு கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு, கூறின் சராசரி உயரம் 5'5" திட்டவிலக்கம் 2·5" • சராசரி உயரம் 5'6" கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, இக் கூறு வந்தது அல்ல எனக் காட்டுக.

**தீர்வு :**

திட்ட விலக்கம்

$$= 2{\cdot}5''\ m = 5'6' = a,\ \bar{x} = 5'5'',\ n = 144$$

$$t = \frac{\dfrac{|5'6'' - 5'5''|}{2{\cdot}5}}{\sqrt{144}} = \frac{\dfrac{1''}{2{\cdot}5}}{12} = \frac{12''}{2{\cdot}5''} = 12 \times \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$= 4{\cdot}8 > 3$$

$t > 3$ ஆதலால் 1% வரையில்கூட வேறுபாடு பொருட்படுத்துமளவு உள்ளது. எனவே, கூறு 5'6" சராசரி உயரமாக கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தது அல்ல.

### III (அ) இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கு இடைப்பட்ட வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்

$n_1$, $n_2$ அளவுகளுடைய இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ • இவ்விரு கூறுகளும் கூட்டுச் சராசரி $a$, திட்ட விலக்கம் $\sigma$ எனக் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன எனக் கொள்வோம். $n$, அளவுடைய, முதற் கூறு கூட்டுச் சராசரி $a$-ம் திட்ட விலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ எனக் கொண்டு இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றுகிறது. இதேபோன்று $n_2$ அளவுடைய இரண்டாவது கூறு, கூட்டுச் சராசரி $a$ ஆகவும் திட்ட விலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ உடன் இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றுகிறது. எனவே $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ மாறி, '0' கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கம்

$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}$ எனக் கொண்டு இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்று கிறது.

எனவே $t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ என்பது சராசரி '0' ஆகவும் திட்ட விலக்கம் 1 ஆகவும் கொண்டு இயல்நிலை விதியைப் பின் பற்றுகிறது. எனவே, 5% மிகைத் தன்மை வரையில் $t \geq 2$ எனில், வேறுபாடு மிகைத் தன்மை உடையது. $t < 2$ எனில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மையற்றது எனவும் கூறலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 16, திட்ட விலக்கம் 3. இத் தொகுதியிலிருந்து பிறக்கும் 49, 64 எண்ணிக் கைகள் கொண்ட இரண்டு கூறுகளின் கூட்டு சராசரிகள் முறையே 15, 18 என்றால் இந்தச் கூட்டுச் சராசரிகளின் வேற்றுமை குறிப் பிடத் தக்கதா ? (1974 செ.ப.க.)

**தீர்வு :**

**எடுகோள் :**

இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் இடையே குறிப்பிடத் தக்க வேற்றுமை இல்லை எனக் கொள்வோம்.

$\bar{x}_1 = 15,\ \bar{x}_2 = 18,\ n_1 = 49,\ n_2 = 64\ \ \sigma = 3$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{|15 - 18|}{3\sqrt{\frac{1}{49} + \frac{1}{64}}}$$

$$= \frac{3}{3 \times \sqrt{\frac{64 + 49}{64 \times 49}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{133}{3136}}} = 5.267 > 3$$

∴ நமது எடுகோள் 1% வரையில்கூட ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

சிறுவர்களின் அறிவுக் கூர்மையையை அறிவதற்காக ஆய்வு ஒன்று நடத்தியதல் அறிவுக் கூர்மை எண்களின் திட்ட விலக்கம் 35 எனத் தெரிந்தது.

120 சிறுவர்களைப் பரிசோதித்ததில் அவர்களுக்குரிய அறிவுக் கூர்மை எண்களின் சராசரி 125 எனவும், 100 சிறுமியர்களைப் பரிசோதித்ததில் சராசரி 130 எனவும் வந்தால் இச் சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்கவும்.

சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை $= n_1 = 120.$

சிறுமியர்களின் எண்ணிக்கை $= n_2 = 100.$

$\bar{x}_1 + 125, \bar{x}_2 = 130 \qquad \sigma = 35$

$$t = \frac{|25 - 130|}{35\sqrt{\frac{1}{120} + \frac{1}{100}}} = \frac{10}{7}\sqrt{\frac{120}{220}} = 1{\cdot}055$$

$t < 2$ எனவே 5% மிகைத் தன்மை வரையில் சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

**III (ஆ) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma$ அறியப்படாத நிலையில் இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ இவற்றுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்**

$s_1$, $s_2$ என்பவை கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களையும் $n_1$, $n_2$ என்பவை அவற்றின் அளவுகளையும் குறிக்கட்டும். எனவே,

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ ல், $\sigma$-ன் மதிப்பீடான

$$\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$ ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}\right)\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} - 2\right)}}$$

பெருங் கூறுகளில் $\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_1 - 2} \simeq 1$

எனவே, $t = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_2} + \dfrac{s_2^2}{n_1}}}$

இது கூட்டுச் சராசரி 0, திட்ட விலக்கம் — 1 எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது. எனவே, $|t| \geq 2$ ஆனால் 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது என்றும், $|t| < 2$ ஆனால், வேறுபாடு மிகைத் தன்மையற்றது எனவும் கூறலாம்.

இரு கூறுகளும் வெவ்வேறு திட்ட விலக்கங்கள் கொண்ட இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து வந்ததாகக் கொள்வோம். முதல் கூறின் திட்டவிலக்கம் $s_1$ ஐப் பயன்படுத்தி முதல் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பீடு $s_1$. இதே போன்று 2ஆவது கூறின் திட்ட விலக்கம் மூலம் இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பீடு $s_2$

எனவே $\bar{x}_1$-ன் திட்டப் பிழை $\dfrac{s_1}{(n_1)}$ $\bar{x}_2$-ன் திட்டப்பிழை $\dfrac{s_2}{\sqrt{n_2}}$

எனவே $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$-ன் திட்டப் பிழை $\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}.$$

$|t| \geq 2$ ஆனால் 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை என்றும், $|t| < 2$ ஆனால், மிகைத் தன்மையற்றது என்றும் தீர்மானிக்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு சிறப்பு அங்காடியில் பொருள்களை வாங்கும் 490 ஆண்களின் வாரச் சராசரி செலவு ரூ 54·3 திட்ட விலக்கம் ரூ 17·5. 450 பெண்களின் வார சராசரி ரூ. 50·6; திட்ட விலக்கம் ரூ. 18. அச்சிறப்பு அங்காடியில் பொருள்களை வாங்குவதில் ஆண்களுக்கும் பெண்களுக்கும் இடையே பொருள்படுத்தத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா ?

**தீர்வு :**

பொருள்களை வாங்குவதில் ஆண்களுக்கும் பெண்களுக்கும் இடையே பொருள்படுத்தத்தக்க வேறுபாடில்லை எனக் கொள்வோம்.

$\bar{x}_1 = 54 \cdot 3$ ; $\bar{x}_2 = 50 \cdot 6$, $s_1 = 17 \cdot 5$ $s_2 = 18$, $n_1 = 490$
$n_2 = 450$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}} = \frac{54 \cdot 3 - 50 \cdot 6}{\sqrt{\frac{(17 \cdot 5)_2}{450} + \frac{(18)^2}{490}}}$$

$$= \frac{3 \cdot 7}{\sqrt{\cdot 6805 + \cdot 6613}}$$

$$= \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 15} = 3 \cdot 218 > 3$$

1% வரையில் கூட வேறுபாடு பொருள்படுத்தத் தக்கது.

எனவே, ஆண்களுக்கும் பெண்களுக்கும் இடையே பொருள்கள் வாங்குவதில் வேறுபாடு உள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

21 வயதிற்கு மேற்பட்ட ஆண்களின் இரு சம வாய்ப்புக் கூறுகள் இரு நாடுகளில் இருந்து எடுக்கப்பட்டன. அவை தரும் விவரங்கள் வருமாறு :

| | நாடு $A$ | நாடு $B$ |
|---|---|---|
| சராசரி உயரம் : | 67·42 | 67·25 |
| திட்ட விலக்கம் : | 2·58 | 2·5 |
| கணிப்புகளின் எண்ணிக்கை | 1000 | 1200 |

சராசரி உயரங்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு பொருட்படுத்தத் தக்கதா ?

**தீர்வு :**

**எடுகோள் :**

இரு கூறுகளின் சராசரி உயரங்களுக்கிடையே பொருள்படுத்தத் தக்க வேறுபாடு இல்லை எனக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$\bar{x}_1 = 67 \cdot 42$ $\bar{x}_2 = 67 \cdot 25$
$n_1 = 1000$. $n_2 = 1200$
$s_1 = 2 \cdot 58$ $s_2 = 2 \cdot 5$.

$$= \frac{(167{\cdot}42 - 67{\cdot}25)}{\sqrt{\frac{(2{\cdot}58)^2}{1000} + \frac{(2{\cdot}5)^2}{1200}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}17}{\sqrt{{\cdot}011863}} = \frac{0{\cdot}17}{0{\cdot}1089} = 1{\cdot}561$$

$t$ 2 ; எனவே, 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது அன்று.

எனவே, இரு நாடுகளிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்ட ஆண்களின் சமவாய்ப்புக் கூறுகளின் சராசரிகளுக்கிடையே வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்கதல்ல.

### IV. நேரிடையாகக் கண்ட விகிதத்திற்கும் முழுமைத் தொகுதியில் வரும் விகிதத்திற்கும் உள்ள வேற்றுமையை ஆராய்தல்

ஒரு முயற்சியில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $P$ எனக் கொள்வோம். $n$ முயற்சிகளில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி 0, 1, 2 ...... $x \cdot n$ தடவைகள் ஏற்படுவதற்குரிய நிகழ் தகவுகளை முறையே $(q+p)^n$ என்ற பிரிவின் அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புகள் வரையறுக்கின்றன. எனவே, ஈருறுப்புப் பரவல் அமைப்பைக் கொண்டு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி இயல்பாக நிகழ் வதற்குரிய எண்ணிக்கையை $np$ எனவும், திட்ட விலக்கத்தை $npq$ எனவும் அறிவோம். குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி $x$ தடவைகள் ஏற்பட்டால் அதற்குரிய விகிதம் $\frac{x}{n}$ ஆகும். அதன் எதிர்ப் பார்க்கப்படும் விகிதம் $\frac{np}{n} = p$ எனவும், திட்ட விலக்கம் $\frac{\sqrt{npq}}{n} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ எனவும் அறிதல் வேண்டும். $t = \frac{|p - p'|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ என்பதில் $t$-ன் மதிப்பைக் கொண்டு வேற்றுமையின் மிகைத் தன்மையை அறியலாம்

### இரு விகிதங்களில் ஏற்படும் வேற்றுமையை ஆராய்தல்

முழுமைத் தொகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்புடையவர்களின் விகிதம் $p$ எனவும், இரு கூறுகளில் அவ்விகிதங்கள் $p_1$, $p^2$ எனவும் கொண்டால் $t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$ — இருகூறுகளின் விகிதங்களின்

வேற்றுமையை ஆராயும்போது முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம் $p$ அறியப்படா நிலையில்

$$t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$$ எனும் வாய்பாட்டில் $p$-ன் மதிப்பை

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$ என்பதன்மூலம் கணக்கிட்டுப் பிரதியிடல் வேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் ஆண், பெண் பாலருக்குரிய விகிதம் 1 : 1 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஆய்வாளர் 100 நபர்களை மாதிரித் தேர்வின் அடிப்படையில் எடுத்துப் பார்த்ததில் 58 ஆண்களும், 42 பெண்களும் இருந்தனர். ஆய்வின் தன்மை குறித்துச் சந்தேகம் கொள்வதற்கு இடமுள்ளதா ?

முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்பாலருக்குரிய விகிதம் ($p$) என்போம் :

$$P = \frac{1}{2} \therefore q = 1 - p = \frac{1}{2},\ n = 100$$

$$p = \frac{58}{100} = .58$$

$$\therefore t = \frac{|0.5 - 0.58|}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{100}}} = 1.6$$

$t < 2$ ஆதலால், ஆய்வாளரைச் சந்தேகிப்பதற்கு இடமில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

இரு நகரங்களில் முறையே 600, 900 நபர்களைப் பேட்டி கண்டதில் 400, 450 பேர்கள் சிகரெட் குடிப்பதாகத் தெரியவந்தது. சிகரெட் குடிப்பதின் விகிதங்கள் குறிப்பிடத்தக்க வேற்றுமையைப் பெற்றுள்ளனவா எனக் காண்க.

$$p_1 = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$n_1 = 600, n_2 = 900, p_1 = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{450}{900} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p = \frac{600 \times \frac{2}{3} + 900 \times \frac{1}{2}}{600 + 900} = \frac{17}{30}; \quad q = \frac{13}{30}$$

$$t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}} = \frac{\left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\frac{\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{30}}{600} + \frac{\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{20}}{900}}}$$

$$= \frac{30}{6\sqrt{17 \cdot 13\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{900}\right)}} = 6 \cdot 382$$

$t > 2$; எனவே 5% மிகைத்தன்மை வரையில், இரு நகரங்களில் சிகரெட் குடிப்பதன் விகிதங்கள், குறிப்பிடத் தக்க அளவு வேற்றுமை பெற்றுள்ளன.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு பொருள் இரு வெவ்வேறு வழி முறைகளில் தயாரிக்கப் படுகிறது. இம் முறைகளிலிருந்து முறையே 80, 70 அளவுடைய சமவாய்ப்புக்கூறுகளில் குறைபாடுள்ள விகிதங்கள் 0·15, 0·10 என்று தெரிய வருகிறது. இவ்விரண்டு வழி முறைகளும் குறிப்பிடத்தக்க முறையில் வேறுபடுகிறது என்பதற்குச் சான்று உள்ளதா ?

இவ்விரு வழி முறைகளும் குறிப்பிடத்தக்க முறையில் வேறுபடவில்லை என்க.

$$p_1 = 0 \cdot 15, \quad q_1 = 0 \cdot 85, \quad n_1 = 80$$

$$p_2 = 0 \cdot 10, \quad q_2 = 0 \cdot 90, \quad n_2 = 70$$

$$t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}, \text{ இங்கு } p = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

$$p = \frac{0 \cdot 15 \times 80 + 0 \cdot 10 \times 70}{80 + 70} = \frac{19}{150} = 0 \cdot 1267 = 0 \cdot 13$$

$$\therefore \quad q = 1 - p = 0{\cdot}87$$

$$\therefore \quad t = \frac{|0{\cdot}15 - 0{\cdot}10|}{\sqrt{\frac{0{\cdot}13 \times 0{\cdot}87}{80} + \frac{0{\cdot}13 \times {\cdot}87}{70}}}$$

$$= \frac{|{\cdot}05|}{\sqrt{{\cdot}001414 + 0{\cdot}1615}} = {\cdot}9084$$

$t < 1{\cdot}96$; எனவே, 5% வரையில் ஆராயும்போது இருவழி முறைகளும் குறிபிடத்தக்க முறையில் வேறுபடவில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு குறிப்பிட்ட வியாதிக்கு ஒரு புதிய மருந்து 80% பலன் தருகிறது. 120 நோயாளிகளுக்குக் கொடுத்ததில் ஒரு பிரிவில் 90 பேர்களுக்குப் பலன் கிடைத்தது. மற்றொரு பிரிவில் 9 நோயாளிகளுக்குக் கொடுத்ததில் 71 பேர்களுக்குப் பலன் கிடைத்தது. பலன் கிடைப்பதில் உள்ள விகிதத்தின் வித்தியாசத்தில் முக்கியத்துவம் உள்ளதா ? [ஏப்ரல் 1974 செ. ப. க.]

**தீர்வு :**

$$p = \frac{80}{100};\ q = \frac{20}{100}\ \ p_1 = \frac{90}{120};\ p_2 = \frac{71}{90}$$

$$n_1 = 120;\ n_2 = 90$$

$$t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_1}}}$$ என்ற வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

## V. (அ) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மிகைத்தன்மையை ஆராய்தல்

கூறின் கணிப்புகளிலிருந்து கிடைக்கும் ஒட்டுறவுக்கெழு $r$ ; $p$ முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு. $n$ கூறில் உள்ள இராசிகளின் எண்ணிக்கை,

$$t = \left( \frac{r - p}{\frac{1 - p^2}{\sqrt{n}}} \right)$$ ; $n$ பெரியதாகவும், $p$ சிறியதாகவும் இருக்கும்போது இதனைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

400 ஜோடி மதிப்புள்ள சமவாய்ப்புக் கூறில் $r = 0{\cdot}4$. இது முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவு உடையதைக் காட்டுகிறதா?

**தீர்வு :**

$$f = 0,\ r = 0.4,\ n = 400,\ t = 4\ \frac{1-0}{\sqrt{400}} = {\cdot}4 \times 20 = 8$$

$t > 2$, முழுமைத் தொகுதி ஒட்டுறவற்றதல்ல.

**(ஆ) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு அதிகமாக இருக்கும்போது இரு ஒட்டுறவுக்கெழுக்களின் இடையே உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத்தன்மையை ஆராய்தல் :**

ஒட்டுறவுக் கெழு $r$-ன் மதிப்பு அதிகமாக இருக்கும்போது $t = \dfrac{|r-p|}{\dfrac{1-p^2}{\sqrt{n}}}$ எனும் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தக்கூடாது.

இதற்கு பிஷர் (Fisher) என்பவர் கீழ்க்கண்ட முறையை மேற்கொள்ளுகிறார் :

$$Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r},\ Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+\rho}{1-\rho}$$ என்றால்,

$Z$ என்பது $Z'$ ஐ க்கூட்டிடையாகவும், $\dfrac{1}{\sqrt{n-3}}$ ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது.

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பு $p$-லிருந்து கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r$ பொருட்படுத்தத் தக்கஅளவு மாறுபடுகிறதா என்பதனைக் காண $t = \dfrac{|Z-Z'|}{\dfrac{1}{\sqrt{n-3}}}$

$t \geq 2$ என இருந்தால், வேறுபாடு மிகைத்தன்மை உடையது $t<2$ ஆக இருந்தால் மிகைத் தன்மையற்றது.

இரு கூறுகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் $r_1$, $r_2$ ஆக இருக்கும் போது அவற்றினிடையே உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத்தன்மையினை அறிய:

$$t = \frac{|Z_1 - Z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_2-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$

இங்கு $Z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

| குழு | குழுவின் இராசிகளின் எண்ணிக்கை | எடைக்கும் உயரத்திற்கும் உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு |
|---|---|---|
| *A* | 28 | 0·8596 |
| *B* | 14 | 0·8227 |

ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வேறுபாடு பொருட்படுத்துமளவு உள்ளதா?

$n_1 = 28;\ n_2 = 14;\ r_1 = \cdot 8596;\ r_2 = \cdot 8227$

$$Z_1 = \frac{1}{2}\log\frac{1+.8596}{1-.8596} = 1{\cdot}292$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\log\frac{1+.8227}{1-\cdot 8227} = 1{\cdot}1652$$

$$t = \frac{|Z_1 - Z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3.}}}$$

$$= \frac{|1.292 - 1.1652|}{\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{11}}} = .35\,5$$

$t < 2$; எனவே 5% மிகைதன்மை வரையில் ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்க அளவு உடையது அல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு**

ஓர் இரு மாறி இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 5 ஜோடிகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு .78 எனக் கணக்கிடப்படுகிறது. 32 ஜோடிகள் கொண்ட மற்ரெரு கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0.88 இரு ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும் தன்மையினை ஆராய்க (செ.ப.க).

**தீர்வு :**

**எடுகோள்**

2 முழுமைத் தொகுதிகளின் ஒட்டுறவுகெழுக்களில் பொருட் படுத்தத்தக்க மாறுபாடு இல்லை என்க.

$$t = \frac{|Z_1 - Z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1 -} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \log e \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1}$$

$$= \frac{1}{2} \log e \frac{1 \cdot 78}{1 - 0 \cdot 78}$$

$$= \frac{1}{2} \log e \frac{1 \cdot 78}{\cdot 22}$$

$$= \frac{1}{2} \log 10 \frac{1 \cdot 78}{0 \cdot 22} \cdot \log_e 10$$

$$= [2 \cdot 2504 - 1 \cdot 3424] \times 1 \cdot 1513$$

$$= 0 \cdot 9080 \times 1 \cdot 1513 = 1 \cdot 045$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \rho_2}{1 - \rho_2}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cdot 88}{1 - \cdot 88}$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot 2742 - 1 \cdot 0792] \times 2 \cdot 3029$$

$$= 1 \cdot 1950 \times 1 \cdot 1513 = 1 \cdot 381$$

$$t = \frac{|1 \cdot 045 - 1 \cdot 381|}{\sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{29}}}$$

$$= \frac{0 \cdot 336}{\sqrt{0 \cdot 04545 + 0 \cdot 3448}} = 1 \cdot 888 < 2 \cdot$$

$\therefore$ 5% வரையில் எடுகோள் சரியானதெனக் கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு இருமாறி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 25 ஜோடிகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0·78 எனக்கணக்கிடப்படுகிறது. 32 ஜோடிகள் கொண்ட மற்றொரு கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0·88· இரு ஒட்டுறவுக்கெழுக்களின் சமமாக இருக்கும் தன்மையினை ஆராய்க. (செ.ப'க )

**தீர்வு :**

**எடுகோள்:** 2 முழுமைத்தொகுதிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழுக்களில் பொருட்படுத்தத்தக்க மாறுபாடு இல்லை.

$$t = \frac{| Z_1 - Z_2 |}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \log e \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1}$$

$$= \frac{1}{2} \log e \frac{1 \cdot 78}{1 - 0 \cdot 78}$$

$$= \frac{1}{2} \log e \frac{1 \cdot 78}{\cdot 22}$$

$$= \frac{1}{2} \log_{10} \frac{1 \cdot 78}{0 \cdot 22} \cdot \log e^{10}.$$

$$= [2 \cdot 2504 - 1 \cdot 3424] \times 1 \cdot 1513$$

$$= 0 \cdot 9080 \times 1 \cdot 1513$$

$$= 1 \cdot 045$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1{\cdot}88}{1 - {\cdot}88}$$

$$= \frac{1}{2} [2{\cdot}2742 - 1{\cdot}0792] \times 2{\cdot}3020$$

$$= 1{\cdot}1950 \times 1{\cdot}1513$$

$$= 1{\cdot}381$$

$$t = \frac{|1{\cdot}045 - 1{\cdot}381|}{\sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{29}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}336}{\sqrt{0{\cdot}04545 + 0{\cdot}03448}} = 1{\cdot}188 < 2.$$

∴ 5% வரையில் எடுகோள் சரியானதெனக் கொள்ளலாம்.

**திட்ட விலக்கத்தின் மிகைத்தன்மையை ஆராய்தல்**

(அ) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும் $(\sigma)^2$, கூறின் திட்ட விலக்கம் $s$-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை அளக்க $t = \frac{|\sigma - s|}{\frac{\sigma}{\sqrt{(2n)}}}$ முன்போலவே $t < 2$ எனில், வேறுபாடு 5% வரையில் மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததல்ல. $t \geq 2$ எனில், வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது.

**எடுத்துக்காட்டு**

72 இராசிகளுடைய ஒரு சம வாய்ப்புக்கூறின் திட்டவிலக்கம் 3 2" இதனைத் திட்டவிலக்கம் 3·1" உடைய முழுமைத்தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது எனக் கொள்ளலாமா? [செ·ப·க]

**தீர்வு :**

$$t = \frac{|\sigma - s|}{\frac{\sigma}{\sqrt{(2n)}}} = \frac{3{\cdot}2 - 3{\cdot}1}{\frac{3{\cdot}1}{\sqrt{144}}} = \frac{0{\cdot}1 \times 12}{3{\cdot}1} = \frac{1{\cdot}2}{3{\cdot}1} =< 2$$

∴ கூறினைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்ததாகக் கொள்ளலாம்.

**(ஆ) இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்கள் $s_1$, $s_2$ ஆனால் அவற்றிக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்**

(1) முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma$ கொடுக்கப் பட்டிருந்தால்,

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$$

(2) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma$ அறியப்படா நிலையில் $\sigma = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ எனப்பி ரதியிட்டு, $n_1$, $n_2$ பெரிய அளவுகளாக இருப்பதால், $n_1 + n_2 \simeq n_1 + n_2 - 2$ என்பதால்,

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_2} + \frac{s_2^2}{2n_1}}}$$

[இங்கு இரு கூறுகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.]

(3) இரு கூறுகளும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கருதும்போது,

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

1000 அளவுடைய ஒரு கூறின் திட்ட விலக்கம் 2·6. 500 அளவுடைய மற்றொரு கூறின் திட்ட விலக்கம் 2·7 இரு கூறுகளும் ஒரே திட்ட விலக்கத்தையுடைய முழுமைத் தொகுதி களிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன எனக்கொள்ளலாமா ?

**தீர்வு :**

$s_1 = 2{\cdot}6$ ; $s_2 = 2{\cdot}7$, $n_1 = 1000$, $n_2 = 500$. இரு கூறுகளும் ஒரே திட்ட விலக்கமுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக் கப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_2} + \frac{s_2^2}{2n_1}}} = \frac{|2{\cdot}6 - 2{\cdot}7|}{\sqrt{\frac{2{\cdot}6^2}{1000} + \frac{2{\cdot}7^2}{2000}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}1}{0{\cdot}102} = 0{\cdot}9 < 2.$$

இரு கூறுகளும் ஒரே திட்ட விலக்கமுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தவை எனக் கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

150, 250 அளவுடைய இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 15·3, 13·8 இவை இரண்டும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தவை எனில், கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததா?

$$t = \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}} = \frac{15\cdot3 - 13\cdot8}{\sqrt{\frac{(15\cdot3)^2}{300} + \frac{(13\cdot8)^2}{500}}}$$

$$t = \frac{1\cdot5}{\sqrt{\frac{234\cdot09}{300} + \frac{190\cdot44}{500}}} = \frac{1\cdot5}{\sqrt{0\cdot7803 + 0\cdot3802}}$$

$$= \frac{1.5}{\sqrt{1\cdot1612}} < 2$$

∴ கூறுகள் வேறுபாடு வாய்ந்தனவல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு நாணயத்தை 400 முறை வீசும் போது 220 தலைகள் கிடைக்கின்றன. நாணயம் ஒரு தலைச்சார்பற்றதா என ஆராய்க. 5% மிகைத்தன்மை வரையைப் பயன்படுத்துக (செ.ப.'72)

$$p = \frac{1}{2} = 0\cdot5.$$

$$p' = \frac{220}{400} = \frac{22}{40} = \frac{2\cdot2}{4} = 0\cdot55$$

$$t = \frac{|p - p|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{220 - 200}{\sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{20}{10} = 2.$$

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{400}} = \sqrt{\frac{1}{1600}} = \frac{1}{40}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1\cdot50 - .551}{\frac{1}{40}}$$

$= 05 \times 40 = 2.$

$t > 1{\cdot}96$

எனவே, 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது. ஆனால், 1% வரையில் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத் தக்கதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு :

72 இராசிகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் திட்ட விலக்கம் 3·6. இக் கூறு பரவற்படி 11·2 ஆக் உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளதா என ஆராய்க.

$\sigma = \sqrt{11{\cdot}2} = 3{\cdot}347$

$s = 3{\cdot}6$

$$t = \frac{|\sigma - s|}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}} = \frac{3\cdot 6 - 3\cdot 347}{\frac{3\cdot 347}{\sqrt{144}}} = 0{\cdot}9072 < 2{\cdot}$$

5% வரையில் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்கதல்ல.

எனவே, இக் கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு :

(அ) முறையாகக் கூறு எடுத்தல் (Systematic random sample) என்பதிலிருந்து நீ என்ன அறிகிறாய் ?

(ஆ) ஒரு வகுப்பில் வரிசைக்குப் பத்தாக 6 வரிசைகளில் உள்ள 60 மாணக்கர்களின் உயரங்கள் (அங்குலத்தில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டிருகின்றன. [ செ·ப. க. 1974 ]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60, | 58, | 63, | 62, | 65, | 62, | 61, | 66, | 63, | 60 |
| 60, | 65, | 61, | 63, | 61 | 60, | 65, | 61, | 57, | 62 |
| 66, | 62, | 64 | 59, | 64 | 64, | 61, | 60, | 67, | 65 |
| 63, | 64, | 62, | 63, | 63 | 55, | 63, | 64, | 62, | 64 |
| 59, | 62, | 61, | 66, | 61, | 63, | 61, | 63, | 64, | 62 |
| 64, | 61, | 65, | 61, | 60 | 61, | 66, | 59, | 68, | 65 |

கீழ்க்கண்டவற்றைத் தக்க விளக்கங்களுடன் காண்க

(1) 6 அளவுகள் கொண்ட ஒரு முறையான கூறு

(2) 6 அளவுகள் கொண்ட ஒரு சிக்கல் இல்லாத சமவாய்ப்புக் கூறு (Simple Random Sample).

(3) இரு கூறுகளின் சராசரிகள், பரவற்படிகள்.

(செ.ப.க. 1974).

**தீர்வு :**

(அ) தேர்ந்தெடுப்பதற்கு வசதியாக, வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை 01, 02. ... ... 09, 10, 11 ... ... 60 என எண்களைக் கொண்டு குறிப்பிடலாம்.

(ஆ) கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து முறையான கூறு எடுக்கப் பின்வரும் முறையை மேற்கொள்ளுகிறேம்

(1) $\frac{N}{n} = \frac{\text{மொத்த மாணவரின் எண்ணிக்கை}}{\text{கூறிலுள்ள மாணவரின் எண்ணிக்கை}} = \frac{60}{6}$

எனவே 1-லிருந்து 10 வரை உள்ள எண்களில் ஏதேனும் ஒன்றை எடுத்துக் கொண்டு (இதனைக் குலுக்கல் முறையில் தீர்மானிக்கலாம்) பிறகு அதிலிருந்து ஒவ்வொரு பத்தாவது எண்ணைத் தேர்தெடுக்கலாம் எடுத்துக்காட்டாக, துவக்க எண் 7 என இருந்தால் 07,17,27,37,47,57 என்ற எண்களைக் கொண்ட மாணவரது உயரம் அடங்கிய கூறு, முறையாக எடுத்த கூருகும். (அவை) 58", 61", 64 , 61", 63 , 65" ஆகும்.

(2) சமவாய்ப்பு எண்கள் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி, 6 சமவாய்ப்பு எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். பட்டியலில் எண்களை வரிசையாக அடுக்கும்பொழுது, 60-க்கு மேல் வரும் எண்களை ஒதுக்கிவிட்டு அடுத்து வரும் எண்களைக் கொண்டு, 6 எண்கள் கிடைத்தவுடன் அவற்றிக்குரிய மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுத்தால்,அது சிக்கலில்லாத சமவாய்ப்புக் கூருகும். எடுத்துக்காட்டாக, பட்டியலில் வரும் எண்கள் 15, 63, 06, 47, 59, 57, 13, என்பவையானல் 63 ஐ ஒதுக்கி விட்டு மீதமுள்ள எண்களுக்குரிய மாணவர்களின் உயரங்களைக் கொண்ட கூறே சிக்கலில்லாத சமவாய்ப்பு கூருகும்.

அவையாவன : 64"; 64", 63", 62", 65", 63" ஆகும்.

(3) முறையான கூறின் சராசரி = 62"

சமவாய்ப்புக் கூறின் சராசரி = 63·5"

முறையான கூறின் பரவற்படி $= \frac{\Sigma (x - 62)^2}{6} = 5{\cdot}33$

சமவாய்ப்புக்கூறின் பரவற்படி $= \frac{\Sigma (x - 63{\cdot}5)^2}{6}$

$= \frac{5{\cdot}5}{6} = {\cdot}916$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் 2·67 செமீ. 64 அளவுடைய கூறின் சராசரி (1) முழுமைத் தொகுதி சராசரியிலிருந்து $\frac{3}{4}$ செமீ. அல்லது அதற்கு அதிகமாக வேறுபடுவதற்கு, (2) $\frac{3}{4}$ செமீ. அல்லது அதற்கு அதிகமாக முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியைவிட அதிகமாக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவென்ன ?

கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{\cdot}67}{\sqrt{64}} = 0{\cdot}334$

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0{\cdot}75}{0{\cdot}334} = 2{\cdot}25$$

(i) கூறின் கூட்டுச் சாரசரி முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து 0·75 செமீ. அல்லது அதற்கதிகமாக மாறுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \int_{-\infty}^{-2{\cdot}25} \phi(t)\, dt + \int_{2{\cdot}25}^{\infty} \phi(t)\, dt = 2 \times .0123$

$= {\cdot}\mathbf{0246}$

(ii) முழுமைத் தொகுதியின் சாரசரியிலிருந்து,

கூறின் சராசரி 0·75 செமீ ஐவிட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \int_{2{\cdot}25}^{\infty} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}5 - \int_{0}^{2{\cdot}25} \phi(t)\, dt = \mathbf{0{\cdot}0123}$$

**நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval)**

இடைவெளி மதிப்பீட்டில் பண்பளவை ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவோடு $(L_1, L_2)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதாகக் கிடைக்கிறது. அதனை $P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1 - \alpha$ என எழுதலாம். [$\theta$ என்பது பண்பளவை]. $(L_1, L_2)$-ன் மதிப்பை $\theta$-ன் $(1 - \alpha)$ 100% நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம்.

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ என்பது $f(X; \theta)$ஐ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகக்கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறு என்க. $u$ என்ற மாறி, கூறின் கணிப்புகளையும் $\theta$ வையும் சார்ந்தது. $u$-ன் கூறு பரவல் $\theta$-ன் சார்பற்றது. $g(u)$ என்பது $u$-ன் அடர்த்திச் சார்பு; கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு $(1 - \alpha)$-க்கு,

$$\int_{u_1}^{\infty} g(u)\, du = (1 - \alpha) \qquad \ldots (1)$$

$$\text{அல்லது} \int_{u_1}^{u_2} g(u)\, du = (1 - \alpha) \qquad \ldots (2)$$

என $u_1$-ஐக் காணலாம். (1)-லிருந்து $P(u \geq u_1) = 1 - \alpha$. இச் சமனின்மையை $(u \geq u_1)$-ஐ $P(\theta \geq t_1) = 1 - \alpha$ அல்லது $P(\theta \leq t_1) = 1 - \alpha$ என எழுதலாம்.

எனவே, இப்போது நம்பிக்கைக் கூற்று $P(\theta \geq t_1) = 1 - \alpha$ அல்லது $P(\theta \leq t_1) = 1 - \alpha$.

இதுபோலவே (2)-லிருந்து $P(u_1 \leq u \leq u_2) = 1 - \alpha$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதனை $P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = 1 - \alpha$ ... (3)
என்ற முறையில் எழுதுகின்றோம். இங்கு,

$(t_1, t_2)$ என்பது $\theta$-ன் $(1 - \alpha)$ 100% நம்பிக்கை இடைவெளி ஆகும்.

$(1 - \alpha)$ என்பது நம்பிக்கைக் கெழு எனப்படும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1 :**

600 மாம்பழங்கள் கொண்ட ஒரு கூறில் 60 மாம்பழங்கள் அழுகியவைகளாக உள்ளன. அழுகிய பழங்களின் சதவீதம் எந்த வீச்சுக்குள் அமையும் என்பதைக் காண்க.

அழுகிய மாம்பழங்களின் விகிதம் $p$ என்க. $X$ என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி. அது $n$ முயற்சிகளில் கிடைத்த வெற்றிகளைக் குறித்தால், $X$ என்பது தோராயமாக $N(np, \sqrt{npq})$

$$\therefore \frac{X}{n} \text{ என்பது } N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$\therefore \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \text{ என்பது தோராயமாக } N(0, 1)$$

இயல்நிலை வரையின் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து

$$P\left\{\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq 3\right\} = 0{\cdot}9973$$

$$P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 3\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} = 0{\cdot}9973$$

$$P\left\{\left|p - \frac{X}{n}\right| \leq 3\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} = 0{\cdot}9973$$

$$P\ \frac{X}{n} - 3\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq p \leq \frac{X}{n} + 3\sqrt{\frac{pq}{n}} = {\cdot}9973$$

இதில் $p$-க்குப்பதிலாக அதன் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு $\frac{X}{n}$ ஐப் பயன்படுத்துவோம்

$$\frac{X}{n} = \frac{60}{600} = 0{\cdot}1$$

$$\therefore P\left\{0{\cdot}1 - 3\sqrt{\frac{(0{\cdot}1)(0{\cdot}9)}{600}} \leq p \leq 0{\cdot}1 + 3\sqrt{\frac{(0{\cdot}1)(0{\cdot}9)}{600}}\right\} = {\cdot}9973$$

$${\cdot}063 \leq p \leq {\cdot}137$$

$\therefore$ $P$-யின் 99·73% நம்பிக்கை இடைவெளி 6·3, 13·7

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ என்பது $N(m, \sigma)$ என்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக்

கூறுகும். இங்கு $m$, $\sigma$-ன் மதிப்புகள் தெரியும்; $\sigma$-ன் $100\ (1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி காணல் :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$ என்பது $(n-1)$ கட்டின்மைக் கூறுகளுடைய ஒரு $\chi^2$ மாறி.

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ என்பது $\chi^2$ பரவலின் $100 \times \frac{\alpha}{2}$, $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ ஆவது நூற்றுமானங்கள் என்க.

$$\therefore\ P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \le \sum \frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$\sigma^2$-ன் $100\ (1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left[\sum \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \sum \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$(X_1, X_2 \ldots\ldots X_n)$ என்ற சமவாய்ப்புக் கூறில் $X$ என்பது $\theta$-ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட அடுக்குக்குறி மாறி. $\theta$-ன் $100\ (1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடை வெளி காணல் :

$X$-ன் அடர்த்திச்சார்பு $f(X) = \theta \cdot e^{-\theta X}$, $(X \ge \theta)$

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t} = \frac{1}{1-\frac{t}{\theta}}$$

$$\therefore\ M_{n\bar{X}}(t) = [M(t)]^n = \left(1-\frac{t}{\theta}\right)^{-n}$$

$$\therefore\ M_{2\theta n\bar{X}}(t) = (1-2t)^{-n}$$

$\therefore\ 2_{\theta n \bar{X}}$ என்பது $n$ கட்டின்மைக் கூறுகள் கொண்ட $\chi^2$ சமவாய்ப்பு மாறி.

$\therefore$ $\chi^2_{1-\alpha}$ என்பது $\chi^2$ பரவலின் $100(1-\alpha)$ ஆவது நூற்றுமானம் என்றால்,

$$P[2\,\theta\, n\,\bar{X} \leq \chi^2{1-\alpha}] = 1-\alpha$$

$$\text{அல்லது}\quad P\left(\theta \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha}}{2n\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$X$ என்ற சமவாய்ப்பு மாறி $\gamma$ என்ற பண்பளவையுடன் அடுக்குக்குறிப் பரவலைத் தழுவுகிறது. 10 உருவ அளவுள்ள சமவாய்ப்புக் கூறில் $\sum_{i=1}^{10} X_i = 9635$. $n$-ன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

$\gamma$-என்ற பண்பளவை கொண்ட அடுக்குக் குறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}$ ஆனால், $2\gamma n\bar{x}$ என்பது $2n$ கட்டின்மைக் கூறுகளுடைய $\chi^2$ மாறியாகும். இங்கு $n = 10$, 20 கட்டின்மைக் கூறுகளுக்கு 25 ஆவது நூற்றுமானத்தின் $\chi^2{\cdot 95} = 31{\cdot}4$

$$\gamma\text{-ன் 95\% நம்பிக்கை எல்லை} = \left[\frac{\lambda^2 \cdot 95}{2n\bar{X}} = \frac{31\,.\,4}{2\,(9635)}\right]$$

$$= 0 \cdot 0163$$

$X_1, X_{12} \ldots\ldots X_{1n_1}$; $X_{21}, X_{22} \ldots\ldots X_{2n_2}$ என்பவை $N\; m_1, \sigma_1)$ $N(m_2, \sigma_2)$ என்ற இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட இரு சமவாய்ப்புக் கூறுகள் என்க.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\left[\text{இங்கு } S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X})^2,\right.$$

$$\left[S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\bar{X})^2\right]$$

என்பது $n_1 - 2$, $n_2 - 2$ கட்டின்மைக் கூறுகளுடைய $F$ பரவலாகும்.

$F_1$, $F_2$ என்பது $F$-ன் இரண்டு மதிப்புகளாக

$$\int_{F_1}^{F_2} f\ (F) \cdot dF = 1 - \alpha$$

என்னுமாறு இருக்கின்றது. $f(F)$ என்பது $F$-ன் அடர்த்திச் சார்பு.

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-ன் $100\ (1 - \alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_1},\ \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_2} \right)$$ ஆகும்.

**தேற்றம்**

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ என்பது கூட்டுச் சராசரி $m$, பரவற்படி $\sigma^2$ ஆக உள்ள ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு: இங்கு $m$-ன், மதிப்பு தெரியாது. $m$-ன் $(1 - \alpha)\ 100\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி காணல் :

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ என்பது இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி $N\ (m,\ \sigma)$-யிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகையால்;

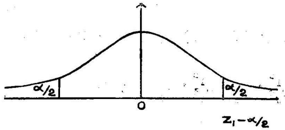
$$\bar{x} \text{ என்பது } N\left(m,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ என்பது } N\,(0,1)$$

$Z_{1 - \frac{\alpha}{2}}$ என்பது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் $100\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ ஆவது நூற்றுமானம் என்க.

$$P\left\{ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{ -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1-\alpha$$




படம் 5—3.

$$P\left\{ -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-m \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{ +\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1-\alpha$$

[குறிப்பு : (1) மேலேயுள்ள நம்பிக்கை இடைவெளி, இரு பக்க மைய நம்பிக்கை இடைவெளி எனப்படும்.]

பொதுவாக.

$Z_{1-\beta}$, $Z_{1-\alpha+\beta}$ என்பது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைப்பரவலின் 100 $(1-\beta)$, 100 $(1-\alpha+\beta)$ ஆவது நூற்று மானங்கள். $(\beta < \alpha)$ என்றால்,

$$P\left\{ \bar{X} - Z_{1-\alpha+\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + Z_{1-\beta} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$= 1-\alpha$ எனக் காட்டலாம் இது ‘இருபக்க, மையமல்லாத (non-central) நம்பிக்கை இடைவெளி’ எனப்படும்.

(2) ஒரு பக்க நம்பிக்கை இடைவெளி காண மேலேயுள்ள எடுத்துக் காட்டிலிருந்து,

$$P\left\{m \leq \bar{X} + Z_{1-\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{m \geq \bar{X} - Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

என எழுதலாம்.

சிற்சில சூழ்நிலைகளில், பண்பளவையின் உண்மையான மதிப்பைவிட, அதிகமாக மதிப்பிடுவது, குறைவாக மதிப்பிடுவதை விட ஆபத்தானதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, மருந்துகளின் தயாரிப்பில், போதையூட்டக்கூடிய மருந்துப் பொருள்கள் சரியான அளவிலிருந்து, குறைவாக இருப்பதைவிட, அதிகமாக இருப்பது நல்லதல்ல. இந் நிலைகளில், $L_1$, $L_2$ காணும்போது

$P(\theta \leq L_2) = 1$, $P(\theta \geq L_1) = 1-\alpha$ எனுமாறு $L_1$ $L_2$ ஐக் காண்கிறேம்

**தேற்றம்**

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ என்பது $N(m, \sigma)$-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு என்க. இங்கு $m$, $\sigma$-ன் மதிப்பு தெரியாது என்க. அப்போது $m$—ன் $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை இடைவெளி காணல்.

$\sigma^2$ தெரியாதாகையால், $\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ என்பது $(n-1)$ கட்டின்

மைக் கூறுகளுடன் $t$ பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. $\left[S = \sqrt{\dfrac{ns^2}{n-1}}\right.$, $s$ கூறின் திட்டவிலக்கம்

$$P\left\{-t_{1-\frac{1}{2}\alpha} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{1-\frac{1}{2}\alpha}\right\} = 1-\alpha$$

$$= P\left\{\bar{X} - t_{1-\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + t_{1-\frac{1}{2}\alpha}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஓர் இயல்நிலைப்பரவலின் சராசரி 0.1, திட்டவிலக்கம் 2·1 900 அளவு கொண்ட எளிய கூறின் சராசரி எதிர்க்குறியை உடையதாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

$m = 0{\cdot}1, \sigma = 2{\cdot}1, n = 900.$

**தீர்வு :**

$$\therefore t = \frac{\dfrac{|\bar{x} - 0.1|}{2{\cdot}1}}{\sqrt{900}} \sim N(0,1)$$

$$\bar{x} = 0.07 + 0.1$$

$$\therefore P\ (\bar{x} < 0) = P\left(t < \frac{-10}{7}\right)$$

$$= P[t > 1.43]$$

$$= 0.5 - p\ (0 < t < 1.43)$$

$= 0.5 - 0.4236$ [இயல்நிலை பரப்புப் பட்டியலி லிருந்து]

$$= 0.0764$$

**எடுத்துக்காட்டு**

ஒருபுறச் சாய்வுடைய நாணயம் ஒன்று 400 முறை சுண்டப் படுகிறது. இதில் 240 முறை தலைகள் கிடைக்கின்றன. தலைகளின் நேரில் கண்ட விகிதத்தின் திட்டபிழையைக் காண்க. நாணயத்தின் ஒரு வீச்சில் தலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு .53-க்கும் ·67-க்கும் இடையில் அமைகிறது என நிறுவுக.

[டெல்லி B.Sc. (Hons)]

தலைகளின் நேரில் கண்ட விகிதம் $= \frac{240}{400} = 0.6$

∴ தலைகளின் நேரில் கண்ட விகிதத்தின் திட்டப்பிழை

$$\sqrt{\frac{0{\cdot}6 \times 0.4}{400}} = 0{\cdot}0245$$

∴ நாணயத்தை ஒருமுறை வீசும்போது தலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு அமையும் எல்லை $= 0.6 \mp 3\ (0.0245)$

$= 0.5265, 0.6735 =$ **·53, ·67.**

**எடுத்துக்காட்டு :**

18,000 குடும்பங்கள் வாழும் ஒரு தொகுதியிலிருந்து 840 குடும்பங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இவற்றுள்ளாக, ரூ 50 அல்லது அதற்குக் குறைவான மாத வருமானமுள்ளவையாக 206 குடும்பங்கள் உள்ளன. 18,000 குடும்பங்களில் மாதவருமானம் ரூ50-ம், அதற்குக் குறைவாகவும் எத்தனை குடும்பங்களின் வருமானம் இருக்கும்? மதிப்பீட்டை எந்த எல்லைகளுக்குக் கூறலாம்?

$p$ என்பது அப்பகுதியில் வாழும் 50 ரூபாய் அல்லது அதற்குக் கீழ் வருமானம் உடைய குடும்பங்களின் விகிதம் ஆகும்.

$$\text{கூறிலிருந்து } p\text{-ன் மதிப்பீடு} = \frac{206}{840} = \frac{103}{420} = \cdot .245$$

ரூ 50 அல்லது அதற்குக்கீழ் வருமானம் உடைய குடும்பங்களின் விகிதங்களின் திட்டப் பிழையின் மதிப்பீடு

$$= \sqrt{\frac{103}{420}\left(1 - \frac{103}{420}\right) \cdot \frac{1}{840}} \sim 0{\cdot}015$$

எனவே $P$-ன் இயலத்தக்க எல்லைகள் $= 0.245 \times 3\ (.015)$

அதாவது, 0•20, 0•29

50 ரூபாய் அல்லது அதற்குக் கீழ் வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையின் எல்லைகள் 3600-ம், 5220-ம் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு வியாபாரி 1000 பொருள்களடங்கிய ஒரு தொகுதியிலிருந்து 100 பொருள்களடங்கிய ஒரு கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்கிறார். அவற்றில் ஆயிரம் ரூ. பெறுமானமுள்ள 50 முதல்தரப் பொருள்களையும், ஆயிரம் ரூ. 4 பெறுமானமுள்ள 30 இரண்டாம் தரப் பொருள்களையும், ஆயிரம் ரூ. 3பெறுமானமுள்ள 20 மூன்றும் தரப் பொருள்களையும் காண்கிறார். முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பை எந்த எல்லைகளுக்குள் நிர்ணயிக்க வேண்டும்?

**முதல் தரம்**

$$\text{பொருள்களின் விகிதம்} = \frac{50}{100} = 0.5$$

∴ பொருள்களின் விகிதங்களின் திட்டப்பிழை

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(0{\cdot}5)\ (0{\cdot}5)} = 0{\cdot}\ 5$$

∴ பொருள்களின் எல்லைகள், $[0{\cdot}5 \pm 3\,(0{\cdot}05)]$ ஆகும்.

அதாவது, 0·35, 0·65

**இரண்டாம் தரம்**

பொருட்களின் விகிதம் $= \frac{30}{100} = 0{\cdot}3$

∴ விகிதத்தின் திட்டப்பிழை $\sqrt{\frac{(0{\cdot}3)\,(0.7)}{100}} = 0{\cdot}0458$

விகிதத்துக்குரிய எல்லைகள் $= {\cdot}3 \mp 3\,(0{\cdot}0458)$

$= 0{\cdot}1626,\ 0{\cdot}4374$

**மூன்றும் தரம்**

விகிதம் $= \frac{20}{100} = 0{\cdot}2$

விகிதத்தின் திட்டப் பிழை $= \sqrt{\frac{(0.2)\,(0.8)}{100}} = 0{\cdot}04$

விகிதத்திற்கு உரிய எல்லைகள் $= 0{\cdot}2 \pm 3\,(0{\cdot}04)$

$= 0{\cdot}08,\ 0{\cdot}32$

முழுமைத் தொகுதிக்குத் தரக்கூடிய மீப்பெருமதிப்பு, முதல் தரப் பொருள்களுக்கு மீப்பெரு மதிப்பையும், மூன்றும் தரப் பொருள்களுக்கு மீச்சிறு மதிப்பையும் தருவதாகும்

முதல்தரப் பொருள்களின் விகிதம் $= 0{\cdot}65$

மூன்றுந்தரப் பொருள்களின் விகிதம் $= 0{\cdot}08$

இரண்டாம்தரப் பொருள்களின் விகிதம் $= 1-(0{\cdot}65 + 0{\cdot}08)$

$0{\cdot}27$

தொகுதியின் மீப்பெரு மதிப்பு $= (0{\cdot}65)5 + (0{\cdot}27)4 + (0{\cdot}08)3$

$= 4{\cdot}57$ ரூபாய்.

முழுமைத் தொகுதிக்குத்தரக்கூடிய மீச்சிறு மதிப்பு முதல் தரப் பொருள்களுக்கு மீச்சிறு மதிப்பையும், மூன்றும் தரப் பொருள் களுக்கு மீப்பெருமதிப்பையும் தருவதாகும்.

முதல் தரப்பொருள்களின் கீழ் எல்லை $= 0{\cdot}35$;

மூன்றும் தரம் பொருள்களின் கீழ் எல்லை $= 0{\cdot}32$

இரண்டாம் தரப் பொருள்களின் விகிதம்

$$= 1 - (0{\cdot}35 + 0{\cdot}32) = 0{\cdot}33$$

தொகுதியின் மீச்சிறு மதிப்பு $= (0{\cdot}35)5 + (0{\cdot}33)4 + (0{\cdot}32)3$

$= 4{\cdot}03$ ரூபாய்

∴ தொகுதியின் மதிப்பின் எல்லைகள் ரூ. 4·03, ரூ. 4·57

**எடுத்துக்காட்டு :**

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு, திட்ட விலக்கத்தில் 25%-க்குள் வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு ·95 என்னும்படி ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் கூறின் உருவ அளவைத் தேவையான அளவு பெரியதாக எடுத்துக்கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியைத் தீர்மானிக்க விரும்புகிறார். அவர் கூறை எவ்வளவு பெரியதாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும் ?

$n$ என்பது கூறின் உருவ அளவாக இருக்கட்டும்.

$$P\{\, |\bar{x} - m| \le 0{\cdot}25\,\sigma \,\} = 0.95$$

$$P\{\, |t| \le {\cdot}25\sqrt{n} \,\} = 0{\cdot}95$$

$$P\{\, 0 < t < 0{\cdot}25\sqrt{n} \,\} = 0\ 4750$$

$$\therefore\ 0{\cdot}25\sqrt{n} = 1{\cdot}95$$

$$\therefore\ n\quad 62.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்த ஆண்களின் உயரங்களின் திட்ட விலக்கம் 2.48′. ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் 100 மாணவர்களின் உயரங்கள் அளக்கப்பட்டன. அவர்களின் சராசரி உயரம் 68·52 எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. பல்கலைக் கழக மாணவர்களின் சராசரி உயரத்தின் 98% நம்பிக்கை எல்லைகளைத் தீர்மானிக்கவும்.

**தீர்வு :**

இங்கு $\bar{x} = 68{\cdot}52$ $\sigma = 2{\cdot}48$, $n = 100$, மாணவரது சராசரி உயரம் $= M$ என்க.

கூறின் கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப்பிழை $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}248$

$$t = \frac{\bar{x} - M}{\text{திட்டப் பிழை}} = \frac{68{\cdot}52 - M}{0{\cdot}248}$$

$P\{\,|t| < 2{\cdot}33\,\} = 0{\cdot}98$ [இயல்நிலைப் பட்டியலிலிருந்து]

$$\left|\frac{68{\cdot}52 - M}{0{\cdot}248}\right| < 2.33$$

அதாவது $67{\cdot}94 < M < 69{\cdot}098$

∴ $M$-ன் 98% நம்பிக்கை எல்லைகள் 67·9″, 69·1″.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு 50 ஜோடி மதிப்புகள் உடையன அதன் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·89 ; முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·84 ஆக இருப்பதாக எடுத்துக்கொள்ள இயலுமா ?

$$Z = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + 8{\cdot}9}{1 - 8{\cdot}9}$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1{\cdot}89}{{\cdot}11} \times 2{\cdot}3026$$

$$= \frac{1}{2}[1{\cdot}2351]\,[2{\cdot}3026]\,[1{\cdot}1513]$$

$$= 1{\cdot}421$$

$$Z^1 = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho}{1-\rho} = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+{\cdot}84}{1-{\cdot}84}$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1{\cdot}84}{{\cdot}16} \times 2{\cdot}0326$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{\cdot}0607 \times 2{\cdot}3026 = 1{\cdot}221$$

$$t = \frac{|Z - Z'|}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = \frac{|1{\cdot}421 - 1{\cdot}221|}{\frac{1}{\sqrt{47}}}$$

$$= {\cdot}200 \times \sqrt{47} = {\cdot}200 \times 6{\cdot}857 = 1{\cdot}371$$

$t < 2$ ஆதலால், 5% மிகைத்தன்மை வரையில் வேறுபாடு இருப்பதால் ஒட்டுறவுக்கெழு ·84 இருப்பதாக எடுத்துக்கொள்ள இயலும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

1600 ஜோடி மதிப்புகளுடைய ஓர் இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·5; 0·6ஐ ஒட்டுறவுக் கெழுவாக உடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு எடுக்கப் பட்டிருக்க முடியுமா என ஆராய்க.

**தீர்வு :**

$n = 1600, \quad r = 0.5$

$$t = \frac{|r - \rho|}{\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}} = \frac{|\cdot5 - \cdot6|}{\frac{1-(\cdot6)^2}{\sqrt{1600}}} = \frac{\cdot1}{\frac{\cdot64}{\sqrt{1600}}} = 6\cdot25$$

$t > 3$. எனவே, வேறுபாடு 1% மிகைத்தன்மை வரையில் கூட பொருட்படுத்தத் தக்க அளவில் உள்ளது. இக் கூறு கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்க முடியாது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

90 ஜோடி மதிப்புகளுடைய ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறில் தந்தைக்கும் மகனுக்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு 0·4. இது முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவுக்கெழு உடையதை எடுத்துக்காட்டுகிறதா ?

**தீர்வு:**

முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவு பூச்சியம் என்க.

$p = 0 ; r = \cdot4 ; n = 900$

$$t = \frac{r - \rho}{\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}} = \frac{\cdot4}{\frac{1}{\sqrt{900}}} = \frac{\cdot4}{\frac{1}{\sqrt{30}}} = .4 \times 30 = 12$$

வேறுபாடு பெருமளவில் மிகைத்தன்மை உடையதாகக் காணப்படுகிறது. எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவுக் கெழு பூச்சியம் என நாம் எடுத்துக் கொண்டது சரியல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

600, 400 அளவுள்ள இரண்டு சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் திட்ட விலக்கம் 3·8, 5·2 எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது

ஒரே திட்ட விலக்கத்தை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரு கூறுகளும் எடுக்கப்பட்டுள்ளனவா என ஆராய்க.

$$t = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$s_1 = 3.8,\ s_2 = 5{\cdot}2,\ n_1 = 600,\ n_2 = 400.$

$$t = \frac{|3{\cdot}8 - 5.2|}{\left[\frac{(3{\cdot}8)^2}{600} + \frac{(5{\cdot}2)^2}{400}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1{\cdot}4}{\sqrt{\frac{14{\cdot}44}{600} + \frac{27{\cdot}04}{400}}}$$

$$= \frac{1{\cdot}4}{\sqrt{0{\cdot}09165}} = 4{\cdot}625$$

$t > 3$; எனவே, வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது· முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் சமமானது அல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு மாநிலத்தில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட 1,200 நபர்கள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் சராசரி வருமானம் மாதத்திற்கு ரூ. 40. அதன் திட்ட விலக்கம் மாதத்திற்கு ரூ. 24 மற்றொரு மாநிலத்தில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட 1,600 நபர்கள் கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் மாதசராசரி வருமானம் ரூ. 36· இரு மாநிலங் களிலும் சராசரி வருமானத்தின் மதிப்பு மாறுபடுகின்றதா என ஆராய்க.

$n_1 = 1200,\ \bar{x}_1 = 40,\ s_1 = 24,$

$n_2 = 1600,\ \bar{x}_2 = 36,\ s_2 = 32.$

$$\therefore\ t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\therefore\ t = \frac{4}{\sqrt{\frac{(24)^2}{1200} + \frac{(32)^2}{1600}}} = 3{\cdot}78$$

$t > 3$. எனவே 1% வரையில்கூட, இரு மாநிலங்களிலும் சராசரி வருமானங்களின் வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

இரு முழுமைத்தொகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரிகள் சமம். ஆனுல், ஒன்றின் திட்டவிலக்கம், மற்றதன் திட்டவிலக்கத்தைப் போல் இருமடங்காகும். ஒவ்வொன்றிலும் எண்ணிக்கை 4500 உடைய கூறுகளின், கூட்டுச்சராசரிக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு ஒருபோதும் 0 1 $\sigma$ஐ விட அதிகமாக இராது என நிறுவுக. மேலும், இவ் வேறுபாடு, ·05 $\sigma$ஐ விட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. இங்கு $\sigma$ என்பது குறைந்த மதிப்புடைய திட்டவிலக்கம் ஆகும்.

$m$ என்பது பொதுச் சராசரியாகவும், $\sigma, 2\sigma$ என்பன இரு முழுமைத்தொகுதிகளின் திட்டவிலக்கங்களாகவும் இருக்கட்டும். $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ என்பன கூறுகளின் சராசரிகளாகக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{4500} + \frac{(2\sigma)^2}{4500}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{\sigma}{30}}$$

$$|t| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\frac{\sigma}{\sqrt{30}}} < 3$$ [எல்லா நிலைகளிலும் நிகழக்கூடியது ]

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < \frac{\sigma}{10} = 0{\cdot}1\,\sigma$$

$$\begin{aligned} P\{\,|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 0{\cdot}056\,\} &= P\{\,|t| > 1{\cdot}5\,\} \\ &= 1 - P\{\,|t| < 1{\cdot}5\,\} \\ &= 1 - 2P\{\,0 < t < 1{\cdot}5\,\} \\ &= 1 - 2\,(0{\cdot}4332) \\ &= 0{\cdot}1336 \end{aligned}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒருதலைச் சார்பற்ற நாணயம் ஒன்று $n'$ முறைகள் வீசப்படுகிறது. தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·49-க்கும், 0·5-க்கும் இடையே இருக்கவேண்டுமாயின், 90% நம்பிக்கை எல்லையுடன் இந்த நிகழ்தகவைப் பெற, $n'$-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

ஒரு வீச்சில் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ தலைக்கான விகிதத்தின் திட்டப்பிழை $= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}}$

$p$ என்பது தலை கிடைப்பதற்கான, நேரில் கண்ட விகிதம் எனக் கொள்வோம். $= \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$$t = \frac{t\ |\ 1 - 0{\cdot}5\ |}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

$$P\{\ |\,t\,|\ < 1{\cdot}6\ 5\} = 0{\cdot}9$$

எனவே, $\frac{|\,p - 0{\cdot}5\,|}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} < 1{\cdot}645$ என இருக்கும்படியாக '$n$'-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$$0{\cdot}5 - \frac{1{\cdot}645}{2\sqrt{n}} < p < 0{\cdot}5 + \frac{1{\cdot}645}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore\quad 0{\cdot}5 - \frac{1{\cdot}645}{2\sqrt{n}} = 0{\cdot}49 \qquad \dots\ (1)$$

$$0{\cdot}5 + \frac{1\ 645}{2\sqrt{n}} = 0{\cdot}51 \qquad \dots\ (2)$$

(2) — (1)

$$\frac{1{\cdot}645}{\sqrt{n}} = 0{\cdot}02$$

$$\therefore\quad n = 6762$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு குறிப்பிட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியும் அப் பரவலில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட 100 அளவுடைய கூறுகளின் சராசரியின் திட்டப்பிழையும் சமமாக இருக்கின்றன. அப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 25 அளவு கொண்ட கூறின் கூட்டுச்சராசரி எதிர்க் குறியைக் கொண்டதாக இருப்பதற்கு உரிய நிகழ்தகவு யாது ?

**தீர்வு :**

$n, 0$ என்பன முறையே முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{எனவே } m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{10}$$

25 அளவுடைய கூறின் சராசரி $\bar{x}$ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}} = \frac{\bar{x} - \frac{\sigma}{10}}{\frac{\sigma}{5}}$$

$$t = \frac{5\bar{x}}{\sigma} - \frac{1}{2} \sim N(0, 1)$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sigma}{5} t + \frac{\sigma}{10}$$

$$\therefore \quad P(\bar{x} < 0) = P\left(\frac{\sigma}{5} t < \frac{\sigma}{10} < 0\right)$$

$$= P\left(t < -\frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(t > \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0{\cdot}5 - P\left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0{\cdot}5 - (0.1915)$$

$$= 0{\cdot}3085 \text{ (பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து)}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

30, 45 ஜோடிகள் மதிப்புள்ள இரு சம வாய்ப்புக் கூறுகளின் இரு மாறிகளுக்கு இடையே ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் சார்பற்ற மதிப்பீடுகள் 0·82, 0·56. வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்க. முதல் கூறினைப் பற்றிய முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவுக்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$t = \frac{|Z_1 - Z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$

$$Z = \frac{1}{2} \log \frac{1.82}{1-.8}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{182}{18}$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot 2601 - 1 \cdot 2553] \times 2 \cdot 303$$

$$= \cdot 5024 \times 2 \cdot 303 = 1 \cdot 157.$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cdot 56}{1 - \cdot 56}$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot 1931 - 1 \cdot 6435] \times 2 \cdot 303$$

$$= \frac{\cdot 5496}{2} \times 2 \cdot 303 = 0 \cdot 6330$$

$$= \frac{|1 \cdot 157 - 0.6330|}{\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{42}}} = 2 \cdot 124$$

$t < 3$ எனவே, வேறுபாடு 1% வரையில் மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல.

$$r = 0 \cdot 82$$

$$\therefore \quad Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1 + 0 \cdot 82}{1 - 0 \cdot 82}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 \cdot 82}{1 - 0 \cdot 82}$$

$$= \frac{1}{2} \log_e \frac{182}{18}$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot 2601 - 12 \cdot 553] \times 2.303$$

$$= 0{\cdot}5024 \times 2{\cdot}303$$

$$Z = 1{\cdot}157$$

$$Z' = Z \mp 1{\cdot}96 \times \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$= 1{\cdot}157 \mp 1{\cdot}96 \times \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$= 1{\cdot}157 \mp 0{\cdot}386$$

$$= 0{\cdot}771, \quad 1{\cdot}543$$

$$Z' = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} = 0{\cdot}771$$

$$\log \frac{1+\rho}{1-\rho} = 2 \times 0{\cdot}771$$

$$\frac{1+\rho}{1-\rho} = e^{2 \times 0{\cdot}771}$$

$$= e^{1{\cdot}542}$$

மேலும், $Z' = 1{\cdot}543$

$$\frac{1}{2}\log \frac{1+\rho}{1-\rho} = 1.543$$

$$\log \frac{1+\rho}{1-\rho} = 3{\cdot}086$$

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = e^{3{\cdot}086}$$

இவற்றிலிருந்து $\rho$-ன் எல்லைகளைக் காணலாம்.

### பயிற்சி

(1) வெள்ளை, கறுப்புப் பந்துகள் சம எண்ணிக்கையில் காணப்படும் ஒரு பையிலிருந்து, பந்துகள் ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கப்பட்டு மீண்டும் போடப்படுகின்றன. இவ்வாறு 2000 முறைகள் பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதில், 1200 கறுப்புப்

பந்துகளும், 900 வெள்ளைப் பந்துகளும் கிடைக்கின்றன இத் தேர்வு ஒருதலைச்சார்பைக் கொண்டதா ? [விடை : ஆம்]

(2) ஓர் அலுவலகத்தின் தலைமையதிகாரி, காரியதரிசிகளாகப் பணிபுரியும் திருமணமாகாத பெண்களில் 80% வேலையில் அமர்ந்து 2 வருடங்களில் திருமணம் ஆகி வேலையை விட்டு விடுகின்றனர் என்கிறார். இத்தகைய 200 காரியதரிசிகளில் 112 பேர் வேலையில் அமர்ந்து 2 ஆண்டுகளில் திருமணம் ஆகி வேலையை விட்டு விடுகின்றனர் என்றால் அதிகாரியின் கூற்றினை 5% மிகைத் தன்மை வரையில் ஆராய்க. [விடை : கூற்று தவறானது]

(3) ஒரு பெரும் தொகுதியிலுள்ள 400 மாம்பழங்களில் 50 அழுகிய பழங்கள், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அழுகிய மாம்பழங்களின் சதவீதத்தை அறிந்து, அது எந்த எல்லைகளுக்குள் இருக்கும் எனக் காண்க [விடை : 7·5% 17·5%]

(4) ஒருவர் 100 தக்காளிக் கூடைகளை வாங்குகிறார். சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 100 தக்காளிகளில் காணப்பட்ட 40 முதல் தரத் தக்காளிகள், ஒரு கூடை ரூ. 10 பெறுமானதாகவும், 25 இரண்டாம் தரத் தக்காளிகள், கூடை ரூ. 7 பெறுமானதாகவும், 20 மூன்றும் தரத் தக்காளிகள், கூடை ரு. 5 பெறுமானதாகவும், கூடை ரூ. 4 பெறுமானமுள்ள 15 நான்காம் தரத் தக்காளிகளும் இருந்தன. தக்காளிகளின் விலையின் மேல், கீழ் எல்லைகளைக் காண்க.

(5) 6500 முறைகள் 12 பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. புள்ளி முகம் 4, 5 அல்லது 6 கிடைப்பது வெற்றியாகக் காணும்போது வெற்றியின் விகிதம் 0·5016 ஆனால் விகிதத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க. கணக்கியல் விகிதத்திற்கும் நேரடியாகக் கணிக்கப்பட்ட விகிதத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்க. காணப்பட்ட (1) சராசரி (2) விகிதம் ஆகியவற்றின் முக்கியத்துவத்தைக் காணும் சோதனையை விளக்குக. (ஏப்ரல் 1974 செ.ப.க)

$$\left[\; p = \frac{1}{2};\ p' = \cdot 5016;\ t = \frac{p - p^1}{\sqrt{p\frac{q}{n}}} \;\right]$$

(7) கூட்டுச்சராசரி 162 ; திட்ட விலக்கம் 4·16 ஆக உள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 100 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு

தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. கூறின் கூட்டுச்சராசரி 162·23 வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா ?

(8) 400 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் சாரசரி உயரம் 64·47 அங்குலம் எனக் கணக்கிடப்படுகிறது. கூட்டுச் சராசரி உயரம் 67·39 அங்குலம்.; திட்ட விலக்கம் 1·30 அங்குலமுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து இது எடுக்கப்பட்டதா என்பதை ஆய்க.

(9) 1000, 2000 எண்ணிக்கைகள் உள்ள இரு பெரிய மாதிரிக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 67·5 ; 68·0". இவ்விரு மாதிரிகளும் திட்ட விலக்கம் 2·5 உள்ள ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்கக்கூடுமா என்பதைப் பரிசோதிக்க.

(10) இரு பிரிவு சிறுவர், சிறுமியர்களுக்கான புத்திக் கூர்மைச் சோதனைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதை ஆய்க

| | கூட்டுச்சராசரி | திட்டவிலக்கம் | உருவ அளவு |
|---|---|---|---|
| சிறுமியர் | 84 | 10 | 121 |
| சிறுவர் | 81 | 12 | 81 |

(11) இரு வேறுபட்ட வேலைப்பாட்டின் தன்மையால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரே மாதிரியான செங்கற்களின் வலிமை கீழ்க்கண்ட முடிவுகளுடன் சோதனை செய்யப் பட்டது :

| | வேலைப்பாட்டின் தன்மை I | வேலைப்பாட்டின் தன்மை II |
|---|---|---|
| இயைபிலா மாதிரியிலுள்ள எண்ணிக்கை | 300 | 270 |
| சராசரி வலிமை பவுண்டுகளில் (ஒரு ச. அங்) | 990 | 11,000 |
| திட்டவிலக்கம் பவு. (ஒரு ச. அங்) | 240 | 202 |

சராசரிகளுக்குள் உள்ளவேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா?

(12) 450 எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் திட்டவிலக்கம் 10·9 செ·மீ. திட்டவிலக்கம் 12 செ·மீ ஆக உள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு தேர்த்தெடுக்கப்பட்டதென்பதை ஆராய்க·

(13) 1000 பண்ணைகளுள்ள ஓர் இயைபிலா மாதிரிக் கூறின் கோதுமை உற்பத்தியின் திட்டவிலக்கம் 192 பவுண்டு. 1000 பண்ணைகளுள்ள மற்றொரு இயைபிலா மாதிரிக் கூறின் திட்ட விலக்கம் 224 பவுண்டு. திட்டவிலக்கங்களின் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா ?

(14) ஒரு மாவட்டத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 கிராமங்கள், 200 கிராமங்கள் கொண்ட மாதிரிக்கூறுகளில் ஒரு ஏக்கரில் விளைந்த கோதுமை உற்பத்தியின் கூட்டுச்சராசரிகள் முறையே 513 பவு., 530 பவு., இவற்றின் உற்பத்தியின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 40 பவு., 30 பவு. இரு கூறுகளின் உற்பத்தியின் கூட்டுச்சராசரிகளுக்குள் உள்ள வேறுபாட்டை ஆய்க. 95 நம்பிக்கை இடைவெளியைச் சராசரி உற்பத்தி வேறு பாட்டிற்குக் கண்டுபிடிக்க.

(15) இரு பகுதிகளில் விளைந்த உற்பத்தியின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கங்கள் ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (i) இருவகைப் பகுதிகளின் உற்பத்தியின் சராசரிகளுக்குள் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உண்டா என்றும்; (ii) உற்பத்தியின் திட்ட விலக்கங்களுக்கிடையே வேறுபாடு உண்டா என்றும் ஆய்க.

| | 40 பகுதிகளைக் கொண்ட வகை | 60 பகுதிகளைக் கொண்ட வகை |
|---|---|---|
| கூட்டுச்சராசரி உற்பத்தி (ஒவ்வொரு பகுதிக்கும்) | 1258 பவு. | 1243 பவு. |
| திட்டவிலக்கம் (ஒவ்வொரு பகுதிக்கும்) | 34 பவு | 28 பவு |

(16) மருத்துவம் பயிலும் 640 மாணவர்களின் உயரங்களைக் கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச்சராசரி 67·85" ; திட்ட விலக்கம் 2·56". பொறியியல் பயிலும் 160 மாணவர்களின் உயரங்களைக் கொண்ட மற்றொரு சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி 68·52"; திட்ட விலக்கம். 2·82" இந்த விவரங்கள், சராசரியாக பொறியியல் மாணவர்கள் மருத்துவ மாணவர்களைவிட உயர மாணவர்கள் என்பதை அறிவிக்கின்றதா?

(17) இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட, எண்ணிக்கைகள் 640, 720 கொண்ட இரு சம வாய்ப்புக் கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 4·6, 6·2 இரு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே திட்ட விலக்கங்கள் கொண்டனவா என்பதை ஆராய்க.

(18) ஒரு பகடை 9000 முறை வீசப்பட்டது. 3 அல்லது 4 என்று குறித்த பக்கங்கள் 3,240 முறைகள் வந்தன. பகடை பிறழ்ச்சியில்லாப் பண்பை (unbiased) பெற்றிருக்கும் எனக் கருத முடியாதெனக் காட்டுக. 3 அல்லது 4 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவின் எல்லைகளையும் காண்க.

(19) ஒரு பழக் குவியலிலிருந்து 500 அன்னாசிப் பழங்களைக் கொண்ட இயைபிலா மாதிரிக்கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது. அவற்றில் 65 பழங்கள் அழுகிவிட்டன. அழுகிய பழங்களைக் கொண்ட பழக்குவியலில் திட்டப்பிழை ·01 எனக் காட்டுக. பழக்குவியலில் அழுகிய அன்னாசிப் பழங்களின் சதவீதம் 8·5-க்கும் 17·5-க்குமிடையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

(20) ஒரு மாநிலத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 600 உயர் நிலைப்பள்ளி மாணவர்களில் 400 பேர் பேனா பயன்படுத்துவதாக அறியப்பட்டது. பக்கத்து மாநிலத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட 900 மாணவர்களில் 450 பேர் பேனா பயன்படுத்துவதாக அறியப்பட்டது. இரு மாநிலங்களின் பேனாக்கள் பயன்படுத்தும் மாணவரிடையே பழக்கங்களில், குறிப்பிடத்தக்க வேற்றுமை யுண்டா என ஆராய்க.

(21) *A* என்ற பெரிய நகரத்திலிருந்து இயைபிலா மாதிரிக் கூருகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 900 பள்ளி மாணவர்களின் 20% பேர் பார்வைக் குறைவுள்ளவர்கள்; வேறொருநகரமான *B*-லிருந்து இயைபிலா மாதிரிக் கூருகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1000 பள்ளி மாணவர்களில் 15·5% பேர் அதே குறையுள்ளவர்கள். இரு விகிதங்களுககுமுள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா?

(22) 900 ஜோடி மதிப்புகளைக் கொண்ட மாதிரிக் கூறிலுள்ள தந்தை, மகன் இவர்களின் உயரங்களின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·3. முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவிலிருந்து இது வேறுபட்டிருக்கிறதா என்பதை ஆய்க.

(23) இரு வழி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 52 ஜோடி மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக்கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இதன் ஒட்டுறவுக்கெழு ·65. இது ·61ஐ ஒட்டுறவுக் கெழுவாகக் கொண்ட முழுமைத் தாகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டிருக்கக் கூடுமா என்பதை ஆராய்க. $\rho$-ன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

(24) 45, 39 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட இரு மாதிரிக்கூறுகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் முறையே ·45 ம் ·38-ம் ஆகும். வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா?

# 6. சிறு கூறுகளுக்கான மிகைத் தன்மைச் சோதனைகள்

## ( Tests of Significance for Small Samples )

கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30-க்குக் குறைவாக இருக்கும்போது அதனைச் சிறுகூறு (small sample) எனக் கொள்கிறோம். பெருங்கூறுகளில், கூறின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் போன்ற புள்ளியியல் அளவுகளின் கூறுப் பரவல்கள் தோராயமாக இயல் நிலைப்பரவலைத் தழுவுகின்றன என நாம் அறிவோம். ஆனால், கூறுகள் சிறியவையாக இருக்கும்போது பெரும்பான்மையான நிலைகளில் கூறுப்பரவல்கள் இயல் நிலைப்பரவலைத் தழுவுவதில்லை. மேலும், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளைச் சிறு கூறுகளில் இருந்து மதிப்பிடுதலும் சரிவரப் பொருந்தாது. எனவே, கூறுகள் சிறியவையாக இருக்கும் போது அவற்றுக்கெனத் தனிப்பட்ட சோதனைகளைக் கொண்டு, வேறுபாடுகளின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல் வேண்டும்.

‘ $t$ ’-பரவலை ஒட்டிய சோதனைகள்

**(1) முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும், கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்**

பெருங் கூறுகளில் $t = \dfrac{|\bar{x} - m|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, என்னும் மாறி $N(0, 1)$ என நாம் அறிவோம். முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = s \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ · இங்கு ‘$s$’ கூறின் திட்டவிலக்கம்.

பெருங்கூறில் $\dfrac{n}{n-1} = 1$ எனக் கொள்ளலாம். எனவே ‘ $\sigma$ ’ அறியப்படா நிலையில் கூறின் திட்டவிலக்கத்தையே பயன்படுத்துகிறோம். ஆனால், சிறுகூறுகளில் $\dfrac{n}{n-1} \neq 1$,

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s.\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

இங்கு $t$-யின் கூறுப்பரவல் இயல் நிலைப்பரவலாக அமைவதில்லை. இது ஸ்டுடண்ட் '$t$' (Student '$t$') பரவலைத் தழுவுகிறது அதனுடைய சமன்பாடு

$$y = y_0\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\gamma + \frac{1}{2}} \quad [\text{இங்கு } \gamma = n - 1.]$$

இங்கு $\int_{-\infty}^{+\infty} y\ (t) = 1$ என இருக்குமாறு $\bar{y}_0$-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கிறோம் ($\gamma = n - 1$) என்பது கட்டின்மைக் கூறுகள் (Degrees of freedom) என வழங்கப்படுகிறது. இப் பரவலுக்குச் சிறுகூறுகளில் பெரும்பங்கு உள்ளதால் $\pm t$ என்னும் இடைவெளிக்கு வெளியே, $t$, $\gamma$-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு, மாற்றம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை ஃபிஷர் (Fisher) என்பவர் ஒரு பட்டியல் மூலமாகக் கணக்கிட்டுள்ளார்.

இந்தப் பட்டியலில் $n$ கட்டின்மைக் கூறைக் குறிக்கிறது. $t$-யின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்குக் கிடைக்கும் நிகழ்தகவு $P$-யின் மதிப்பு, 0.05 ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் வேறுபாடு பொருள்படுத்தத்தக்க அளவு உள்ளது என்கிறோம்.

$P < 0{\cdot}05$ ஆனல் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்க அளவு மிகைத்தன்மை உடையது அல்ல எனக் கூறுகிறோம். அதாவது நாம் கணக்கிடும் '$t$' யின் மதிப்புப் பட்டியலில் 0.05 நிகழ்தகவுக்குரிய $t$-யின் மதிப்பைவிடக் ($t_{\cdot05}$), குறைவாக இருந்தால் 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல எனக் கூறுகிறோம். கணக்கிடப்பட்ட $t$-யின் மதிப்பு $t_{\cdot05}$ ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது என்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 10 நபர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறார்கள். அவர்களின் உயரங்கள் முறையே 63, 63, 66, 67,

68, 69, 70, 70, 71, 71. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 69·9 அங்குலமாக இருக்க முடியுமா என ஆராய்க.

[கட்டின்மைக் கூறுகள் 9-க்கு $P [ \mid t \mid > 2{\cdot}262] = {\cdot}05$

**தீர்வு :**

$\bar{x} = 67{\cdot}8''$, $s = 2{\cdot}86''$ என்பவை மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு உரிய கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் ஆகும்.

$$t = \frac{\dfrac{\mid \bar{x} - m \mid}{s}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\mid 67{\cdot}8 - 69{\cdot}6 \mid}{2.16} \sqrt{9}$$

$$\mid t \mid = \frac{5.4}{2 \cdot 86} = 1{\cdot}89, \quad t_{\cdot 05} = 2{\cdot}262$$

$\therefore \mid t \mid < t_{\cdot 05}$. எனவே 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. அதாவது, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 69·6 அங்குலங்கள் எனக் கொள்வதில் தவறு ஒன்றுமில்லை.

**(2) இரு கூறுகளின் கூட்டிடைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராய்தல்**

பெருங் கூறுகளில் $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ என்பது $N(0,1)$ என நாம் அறிவோம்.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma$ அறியப்படா நிலையில் $s_1, s_2$ என்பவை கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களாக இருக்கும்போது

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2.}}$$

என்பது $s_1, s_2$ வை அடிப்படையாகக் கொண்ட $\sigma$-ன் மதிப்பீடு. $n_1, n_2$ பெரியவையாக இருக்கும்போது $(n_1 + n_2 - 2)$ வைத் தோராயமாக $(n_1 + n_2)$ எனக் கொள்கிறோம். ஆனால், சிறு கூறுகளில் அவ்வாறு எடுத்துக்கொள்ள இயலாது.

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$$

இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுவதில்லை.

இங்குக் கட்டின்மைக் கூறுகள், $= n_1 + n_2 - 2$ உடன் $t$, ஸ்டுடன்ட்ஸ் டி பரவலைத் தழுவுகிறது. பிஷர் அட்டவணையிலிருந்து $\pm$ t ஐ விட்டு வெளியே விலகல்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p$ கிடைக்கும். $p$ ·05 எனில், வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. $p <$ ·05 எனில், வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கது.

[குறிப்பு : (i) $n_1 = n_2 = n$ எனில் கட்டின்மைக் கூறுகள் $n + n - 2 = 2(n-1)$]

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n(s_1^2 + s_2^2)}{2(n-1)} \cdot \frac{2}{n}}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{\phantom{x}}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n-1}}}$$

(ii) இரு கூறுகளின் ராசிகளும் ஏதேனும் ஒரு வகையில் தொடர்புடையனவாக இருந்தால், ஜோடி மதிப்புகளின் வேறுபாடுகளைக் கண்டுபிடித்து, வேறுபாடுகளின் சராசரி பூஜ்யத்திலிருந்து பொருட்படுத்தத்தக்க அளவு மாறுகின்றதா என ஆராய்கிறோம்.

$x$, $y$ இரு கூறுகளின் இராசிகளைக் குறிப்பிட்டால், $Z = y - x$

$\bar{Z} = \bar{y} - \bar{x}$.

$$\therefore \quad t = \frac{\frac{|\bar{Z} - 0|}{s}}{\sqrt{n-1}}$$ கட்டின்மைக் கூறுகள் $(n-1)$

$s$, $z$-ன் திட்ட விலக்கம்.

**எடுத்துக்காட்டு**

9 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள்:

17, 27, 18, 25, 27, 29, 27, 23, 17

வேறு 8 மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்கள்:

16, 16, 20, 16, 20, 17, 15, 21

இரு மாணவர் தொகுதிகளிடையே பொருட்படுத்தத்தக்க வேறுபாடு உண்டா என ஆராய்க.

$A = 27$, $B = 16$ என்ற மூலப்புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

தீர்வு

| $x$ | $y$ | $x-A$ | $(y-B)$ | $(x-A)^2$ | $(y-B)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 16 | −10 | 0 | 100 | 0 |
| 27 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 20 | −9 | 4 | 81 | 16 |
| 25 | 16 | −2 | 0 | 4 | 0 |
| 27 | 20 | 0 | 4 | 0 | 16 |
| 29 | 17 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 27 | 15 | 0 | −1 | 0 | 1 |
| 23 | 21 | 4 | 5 | 16 | 25 |
| 17 | | −10 | | 100 | |
| | | −33 | 13 | 305 | 59 |

$\bar{x} = 23{\cdot}33$

$\bar{y} = 17{\cdot}625$

$$s_1^2 = \frac{\Sigma (x-A)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x-A}{n}\right)^2 = \frac{1656}{81} = 20{\cdot}45$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma (y-B)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y-B}{n}\right)^2 = \frac{303}{64} = 4{\cdot}73$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{23{\cdot}33 - 17{\cdot}625}{\sqrt{\frac{9 \times \frac{1656}{81} + 8 \times \frac{303}{64}}{9+8-2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right)}} = 3{\cdot}053$$

**கட்டின்மைக் கூறுகள்,** 15-க்கு *t*-ன் 5 வரையில் பட்டியல் மதிப்பு = 2·13

**கணக்கிட்ட** *t*-ன் மதிப்பு 3·053 > 2·13

எனவே, 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது. அதாவது இரு மாணவர் தொகுதியிடையே பொருட்படுத்தத்தக்க வேறுபாடு உள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

நிலங்கள் *A, B*-ல் ஐந்து ஆண்டுகளில் கிடைத்த விளைச்சலின் அளவு பின்வருமாறு :

| ஆண்டு | 1944 | 1945 | 1946 | 1947 | 1948 |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 28 | 16 | 17 | 26 | 31 |
| *B* | 24 | 15 | 18 | 22 | 25 |

(1) விளைச்சல் அளவில் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாடு இருக்கிறதா எனச் சோதிக்கவும்.

(2) *A* நிலத்தின் விளைச்சல் மேலே குறிப்பிட்ட ஐந்து ஆண்டுகளில், கிடைத்ததாகவும், *B* நிலத்தின் விளைச்சல் அளவை வேறு ஏதேனும் ஐந்து ஆண்டுகளில் கிடைத்ததாகவும் கொண்டு விளைச்சல் அளவில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இருக்கிறதா எனப் பார்க்கவும். (செ.ப.க. 1949)

**தீர்வு :**

(i) இங்கு ஆண்டுகள் ஒன்றாக இருப்பதால் *A, B*-ன் விளைச்சல்களின் இடையே தொடர்பிருக்கிறது. ஆகவே, குறிப்பில் உள்ள 2 ஆம் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம் *A, B* நிலங்களின் விளைச்சல்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு $Z$ எனில், கீழ்க்காணும் அளவுகள் கிடைக்கின்றன :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 28 | 16 | 17 | 26 | 31 |
| $y$ | 24 | 15 | 18 | 22 | 25 |
| $Z = x - y$ | 4 | 1 | —1 | 4 | 6 |

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{N} = \frac{14}{5} = 2 \cdot 8$$

$$S^2 = \frac{\Sigma Z^2}{n} - (Z)^2$$

$$= \frac{16+1+1+16+36}{5} - (2{\cdot}8)^2 = 6{\cdot}16$$

$$t = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{S^2}{N-1}}} = \frac{2{\cdot}8}{\sqrt{\frac{6{\cdot}16}{4}}} = \frac{5{\cdot}6}{\sqrt{6{\cdot}16}} = 2{\cdot}256$$

$p > {\cdot}05$. ஆகவே, வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

(ii) இங்கு ஆண்டுகளில் வேறுபாடு இருப்பதால் *A*, *B* விளைச்சல்களில் தொடர்பு இல்லை. ஆகவே, குறிப்பில் உள்ள முதல் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

$$\bar{x} = \frac{28+16+17+26+31}{5} = 23{\cdot}6$$

$$S_1^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{2966}{5} - (23{\cdot}6)^2$$

$$= 593{\cdot}2 - 556{\cdot}96 = 36{\cdot}24$$

$$\bar{y} = \frac{24+15+18+22+25}{5}$$

$$= \frac{104}{5} = 20{\cdot}8$$

$$S_2^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{Y}^2$$

$$= \frac{2234}{5} - (20{\cdot}8)^2$$

$$= 446{\cdot}80 - 432{\cdot}64 = 14{\cdot}16$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{N-1}}} = \frac{23{\cdot}6 - 20{\cdot}8}{\sqrt{\frac{36{\cdot}24 + 14{\cdot}16}{4}}}$$

$$= \frac{2\cdot8 \times 2}{\sqrt{5 \cdot 4}} = \frac{6\cdot5}{\sqrt{50.4}} = 0\cdot7889$$

$\gamma = 8$-க்கு $t = 0\cdot7889$-க்கு $p > \cdot05$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே, நிலங்கள் $A$, $B$-களுக்கிடையே விளைச்சலில் உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

11 பள்ளி மாணவர்க்குச் சித்திரம் வரைவதில் ஒரு தேர்வு நடத்தப்பட்டது. அவர்களுக்கு ஒரு மாதச் சிறப்புப் பயிற்சி அளிக்கப்பட்டு, மீண்டும் ஒரு 2ஆவது தேர்வு நடத்தப்பட்டது. அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள், மாணவர்கள் சிறப்புப் பயிற்சியால் நன்மை பெற்றனர் எனக் காட்டுகிறதா ?

| மாணவர் : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| முதல் தேர்வின் மதிப்பெண் : | 23 | 20 | 19 | 21 | 18 | 2) | 18 | 17 | 23 | 16 | 19 |
| 2ஆவதுதேர்வின் மதிப்பெண் : | 24 | 19 | 22 | 18 | 20 | 22 | 20 | 20 | 23 | 2) | 17 |

**தீர்வு :**

மாணவர்கள் சிறப்புப் பயிற்சியினால் நன்மை அடையவில்லை என்று 'இல்' எனும் எடுகோளை மேற்கொள்வோம். இதிலிருந்து, இரு தேர்வுகளிலும் மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களின் வேறுபாடு பூச்சியம் எனக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}},$$

இங்கு $\bar{d}$ என்பது மதிப்பெண்களின் வேறுபாடுகளின் சராசரியைக் குறிக்கிறது. $s$-என்பது வேறுபாடுகளின் திட்ட விலக்கத்தைக் குறிக்கிறது. கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை $= n - 1 = 10$.

| மாணவர்கள் | $x$ | $y$ | $d = y - x$ | $d - \bar{d}$ | $(d - \bar{d})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 23 | 24 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 19 | —1 | —2 | 4 |
| 3 | 19 | 22 | 3 | ·2 | 4 |
| 4 | 21 | 18 | – 3 | —4 | 16 |
| 5 | 18 | 20 | 2 | 1 | 1 |
| 6 | 20 | 22 | 2 | 1 | 1 |
| 7 | 18 | 20 | 3 | 1 | 1 |
| 8 | 17 | 20 | 3 | 2 | 4 |
| 9 | 23 | 23 | 0 | —1 | 1 |
| 10 | 16 | 20 | 4 | 3 | 9 |
| 11 | 19 | 17 | —2 | —3 | 9 |
| | | | $\Sigma d = 11$ | | $\Sigma (d-d)^2 = 50$ |

வேறுபாடுகளின் கூட்டுச்சராசரி $d = \frac{11}{11} = 1$

$$s^2 = \frac{50}{11} = t = \frac{\frac{\bar{d} - 0}{s}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1-0}{\sqrt{\frac{50}{11}}} \sqrt{10} = 1{\cdot}482$$

$\gamma = 10$

$t_{.05} = 2{\cdot}228$

$t < t_{\cdot 05.}$ எனவே, மாணவர்கள் சிறப்புப் பயிற்சியால் குறிப்பிடத்தக்க நன்மை பெற்றதற்கு ஆதாரமில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கூட்டுச்சராசரி 15 ஆக உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கீழ்க்காணும் கூறு எடுக்கப்பட்டிருக்குமா என ஆராய்க.

16, 18, 13, 11, 20, 22, 17, 19, 18, 15 [செ.ப.க.]

**தீர்வு :**

கூட்டுச்சராசரி 15 ஆக உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு எடுக்கப்பட்டிருப்பதாக கொள்வோம்.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 16 | 18 | 13 | 11 | 20 | 22 | 17 | 19 | 18 | 15 |
| $d_r = x - A$ | −4 | −2 | −7 | −9 | 0 | 2 | −3 | −1 | −2 | −5 |
| $d_r^2 = (x-A)^2$ | 16 | 4 | 49 | 81 | 0 | 4 | 9 | 1 | 4 | 25 |

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_r}{n}$$

$$= 20 - \frac{31}{30} = 20 - 3{\cdot}1 = 16{\cdot}9$$

$$\sigma^{E\,2} = \frac{n}{n-1} s^2$$

$$\therefore \quad t = \frac{(\bar{x} - m)}{\frac{\sigma E}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{|\bar{x} - m|}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

$$s^2 = \frac{193}{10} - \left(\frac{31}{10}\right)^2$$

$$= 19{\cdot}3 - 9{\cdot}61 = 9{\cdot}69$$

$$s = \sqrt{9{\cdot}69} = 3{\cdot}113$$

$$t = \frac{|\bar{x} - m|}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

$$= \frac{|16{\cdot}9 - 15|}{3{\cdot}113} \times \sqrt{9}$$

$$= \frac{1{\cdot}9}{3{\cdot}113} \times 3 = \frac{5{\cdot}7}{3{\cdot}113} = 1{\cdot}831$$

கட்டின்மைக் கூறுகள் 9க்கு $t_{.05} = 2{\cdot}262$. $t < t_{.05}$. எனவே கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்துள்ளது.

**(3) முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை வரைகளைக் காணுதல்**

ஒரு சிறு கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, திட்ட விலக்கம் $s$, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$. 95% நிலைகளில் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி இருக்கக்கூடிய இடைவெளியைக் காணக் கீழ்க்காணும் முறையினைப் பின்பற்றுகிறோம்.

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$$ , $t$ பரவலை $n - 1$ கட்டின்மைக் கூறுகளுடன் தழுவுகிறது.

$t$ பட்டியலைக் கொண்டு $P\{\,|t| > \alpha\,\} = {\cdot}05$

ஆக இருக்குமாறு $\alpha$-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம். எனவே, 100-க்கு 95 நிலைகளில் $-\alpha < t < \alpha$.

$$\text{எனவே}\quad \bar{x} - \frac{\alpha s}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{x} + \frac{\alpha s}{\sqrt{n-1}}$$

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் அறியப்படா நிலையில், $\left(\bar{x} - \dfrac{\alpha s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x} + \dfrac{\alpha s}{\sqrt{n-1}}\right)$ என்பவை 95% நம்பிக்கை வரைகளாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

14 உறுப்புகளுடைய ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 34·7, திட்ட விலக்கம் 8·7. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியின் 95% நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க,

$m$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டு சராசரி.

$$t = \frac{|\bar{x} - m|}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{|34{\cdot}7 - m|}{\dfrac{8{\cdot}7}{\sqrt{13}}}$$

கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை $14 - 1 = 13$.

$t$ பட்டியலிலிருந்து, கட்டின்மைக் கூறுகள்

13 ஆக இருக்கும்போது, $t_{.05} = 2{\cdot}16$

$$\therefore \quad \frac{34{\cdot}7 - m}{\frac{8{\cdot}7}{\sqrt{15}}} = \pm\, 2{\cdot}16$$

$$34{\cdot}7 - m \pm 2{\cdot}16 \times \frac{8{\cdot}7}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \quad m = 34{\cdot}7 \pm 5{\cdot}22$$

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கு 95% நம்பிக்கை வரைகள் 29·38, 39·92·

**சிறிய கூறுகளில் நேரிடையாகக் கண்டறிந்த உடன் தொடர்புக் கெழுவிற்குச் சிறப்பு காணும் சோதனையை அமைத்தல்**

ஒரு சிறிய கூறில் இரு மாறிகள் ஏற்கும் $n$ ஜதை மதிப்புகளைக் கொண்டு மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு அதை $r$ எனக் கொள்ளவும். எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டதோ அதில் இவ்விரு மாறிகளுக்கு இடையே தொடர்பில்லை என ஓர் எடுகோளை அமைத்துக் கண்டறிந்த $r$-ன் மதிப்பிற்கும் எடுகோள் மதிப்பான பூச்சியத்திற்கும் உள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கது அல்லது குறிப்பிடத் தக்கதல்ல எனக் காணுதல் வேண்டும்.

$$t = \frac{(-r - 0)\ \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

இங்குக் கட்டின்மைக் கூறுகள் $= \gamma = n - 2$

$t$ பட்டியலில் $\gamma = n - 2$-க்கு $t_{.05}$ காணவேண்டும். $t > t_{.05}$ ஆனல், 5% வரையில் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கது. $t < t_{.05}$ எனில், வேறுபாடு 5% வரையில் குறிப்பிடத் தக்கதல்ல. அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறு, உடன் தொடர்பற்ற இராசிகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்துள்ளது எனலாம்.

**கணக்கு**

25 ஜோடி மதிப்புகளுடைய ஒரு கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·37, முழுமைத் தொகுதியில் ஒட்டுறவு பூச்சியம் ஆக உள்ளதா என ஆராய்க.

$$t = r\frac{\sqrt{n-2}}{1-r^2} = \cdot 37\frac{\sqrt{25-2}}{\sqrt{1-(\cdot 37)^2}}$$

$$= \cdot 37\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{\cdot 8631}} = 1\cdot 91$$

வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை 23-க்கு, 5% வரையில் $t$-ன் மதிப்பு 2·069

நாம் கணக்கிட்ட $t$-ன் மதிப்பு, 2.069 ஐ விடக் குறைவாக உள்ளதால், $r$-ன் மதிப்பு மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததல்ல. எனவே, ஒட்டுறவுக் கெழு பூச்சியமாக உள்ள முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து, கூறு எடுக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(1) இருமாறிகள் கொண்ட ஓர் இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து, எடுக்கப்பட்ட 14 எண்ணிக்கை கொண்ட கூறு ஒன்றில் ஒட்டுறவுக் கெழு ·4 என இருந்தது. தொகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவிலிருந்து இது குறிப்பிடத்தக்கதா எனச் சோதனை செய்க.

$$n = 14$$

$$r = \cdot 4$$

$$t = r\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= \frac{(0\cdot 4)\sqrt{12}}{\sqrt{1-\cdot 16}} = \frac{0\cdot 4\sqrt{12}}{\sqrt{\cdot 84}} = 1\cdot 512$$

$$r = 12$$

$$p > \cdot 05$$

எனவே, ஒட்டுறவு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

(2) மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் 5% எல்லையில் முக்கியத்துவம் உள்ள $r$-ன் குறைந்த மதிப்பினைக் காண்க.

$n = 14$
$r = 12$

$t$-அட்டவணையிலிருந்து $p(|t| > 2.18)$ ஆனது ·05 ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n - 2} > 2{\cdot}18$$

$$\frac{r - 12}{1 - r^2} > 4{\cdot}7524$$

$$12\, r^2 \quad 4{\cdot}75\,(1 - \gamma^2)$$

$$16{\cdot}75\, r^2 > 4{\cdot}75$$

$$r^2 > \frac{4{\cdot}75}{16{\cdot}75} = 0{\cdot}5326$$

$$|\,r\,| > 0{\cdot}53$$

5% நிலையில் $r$-ன் குறைந்த மதிப்பு 0·53.

**உறவுக் கெழுவிற்கான சோதனை :** ஓர் இருமாறி இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறு $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ... $(x\ , y_n)$ ஆகும். கூறிலிருந்து, பெறப்படும் $x$-ன் மீது $y$-ன் உறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$y - \bar{y} + b\,(x - \bar{x})$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x_i$ என்னும் மதிப்பிற்கு, $y$ ன் மதிப்பீடு
$Y = \bar{y} + b\,(x - \bar{x})$ என்க.

$x$ ன் மீது $y$-ன் உறவுக் கெழு $\beta$ என்ற எடுகோளை ஆராய வேண்டும். $b$, $\beta$ இவற்றின் இடையே வேறுபாடு பொருட்படுத்தத் தக்கதாயில்லை என்ற எடுகோளைக் கொள்வோம்.

$$t = (b - \ \ ) \left[ \frac{(n-2) \sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y - Y_i)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

என்பது, $t$ பரவலை, $(n-2)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் தழுவுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு**

அளவு 30 கொண்ட ஒரு கூறில், $x$, 1, 2, 3 ... 30 என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. $\Sigma (x_i - \bar{x}) \quad (y_i - \bar{Y}) = 599{\cdot}62$, $\Sigma \; y - \bar{Y})^2 = 1020{\cdot}6$. $x$-ன் மீது $\bar{y}$-ன் உறவுக் கெழுவின் மிகைத்தன்மையை ஆராய்க.

**தீர்வு :**

$$\Sigma (x - \bar{x})^2 = \frac{n (n^2 - 1)}{12} = \frac{0 (899)}{12} = 2247{\cdot}5$$

$$b = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{Y}_i)}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2} = \frac{599{\cdot}62}{2247{\cdot}5} = 0{\cdot}2668$$

மேலும் $\Sigma (y - Y)^2 = \Sigma (y_i - \bar{x})^2 - b^2 \Sigma (x_i - \bar{x})^2$

$$= 1020{\cdot}6 - 159{\cdot}9 = 860{\cdot}59.$$

கணக்கின்படி $\beta = 0$.

$$t = (b - \beta) \left[ (n - 2) \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma (y_i - Y_i)^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$t$ பரவலை, $(n - 2)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் தழுவுகிறது.

$\gamma = 28$, $t = 2{\cdot}28$. 5% வரையில், வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது.

**தர ஒட்டுறவுக்கெழுவிற்கான மிகைத்தன்மையை ஆராய்தல்**

$n$ அளவுடைய ஒரு கூறிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட தரஒட்டுறவுக்கெழு $\rho$, பூச்சியத்தைத் தரஒட்டுறவுக்கெழுவாகக் கொண்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து வேறுபடும் தன்மையினை ஆராய, $(n - 2)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்டு, '$t$' பரவலைத் தழுவும் $t = \rho \left( \frac{n - 2}{1 - r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ என்பதைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

**கணக்கு :**

பின்வரும் தர ஒட்டுறவுக்கெழுவின் மிகைத்தன்மையை 5% வரையில் ஆராய்க.

$r = 0{\cdot}139$, $n = 10$ $[t = 0{\cdot}397]$, மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது.

$r = 0{\cdot}618$, $n = 20$ $[t = 3{\cdot}34]$

**$F$-சோதனை ($F$-test)**

**இரு பரவற்படிகளின் வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை அறிதல்**

இரு கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் மிகைத் தன்மையை ஆராயும்போது. இரு கூறுகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தவை, அல்லது சம பரவற்படியுள்ள இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என எடுத்துக் கொண்டோம். எனவே, இரு கூட்டுச் சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள பொருட்படுத்தத் தக்க வேறுபாடு, கூட்டுச் சராசரிகள் உண்மையிலேயே வேறுபட்டனவாக இல்லாதபோதுகூட, முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படிகள் சமமானவை அல்லாததால், வேறுபட்டவையாகக் காணப்படலாம்.

எனவே, இரு கூட்டுச் சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டை ஆராய்வதற்கு $t$ பரவலைப் பயன்படுத்து முன்பு முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படிகளின் சமத்தன்மையைப் பற்றி ஆராய்ந்து பார்த்தல் வேண்டும்.

$s_1^2$, $s_2^2$ என்பவை $n_1$, $n_2$ அளவுடைய இரு கூறுகளின் பரவற்படிகளானால் முழுமைத் தொகுதியினுடைய பரவற்படியின் மதிப்பீடுகள் முறையே $u^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$, $v^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}$ என அமையும். $v_1 = n_1 - 1$, $v_2 = n_2 - 1$ என்பவை இம் மதிப்பீடுகளின் கட்டின்மைக் கூறுகள்.

$u^2$, $v^2$ பொருட்படுத்தத் தக்க அளவு வேறுபடுகின்றனவா அல்லது இரு கூறுகளும், ஒரே முழுமைத் தொகுதி அல்லது ஒரே பரவற்படி $\sigma^2$ ஐக் கொண்ட இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்டனவா என ஆராய்தல் வேண்டும்

$$F = \frac{u^2}{v^2} = \frac{n_1 s_1^2/n_1 - 1}{n_2 s_2^2/n_2 - 1}$$

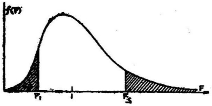
எனவே, $F$ பரவலின் கூறுப் பரவல்

$$y = f\ (F) = \frac{k \cdot F^{\frac{\nu_1 - 2}{2}}}{(\nu_1 F + \nu_2)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}$$

இங்கு $k$-ன் மதிப்பு $\int_0^{\alpha} f(F)\, dF = 1$,

என்பதிலிருந்து தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

இப் பரவலின் வரையைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையலாம் :




படம் 6—1

$u^2 = v^2$ ஆனால், $F = 1$.

கணக்கிடப்படும் $F$-ன்மதிப்பு 1-லிருந்து எவ்வளவு தூரம் விலகியுள்ளது என்பதை ஆராய்வதே நமது நோக்கம்.

$y = f(F)$ எனும் வரையில், $F_0$-க்கு வலப்புறத்தில் உள்ள பரப்பு $F > F_0$-க்கான நிகழ்தகவைத் தருகிறது.

$F_0$-க்குரிய நிகழ்தகவு ·05 ஆகத் தீர்மானிக்கப்பட்டால் அது $F$-ன் 5% புள்ளி என வழங்கப்படுகிறது. நாம் கணிக்கும் $F$-ன் மதிப்பு, $F_0$ ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் அதற்குரிய நிகழ்தகவு ·05 ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும். இந் நிலையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது.

$F > F_0$ ஆனால், நிகழ்தகவு $p > \cdot 05$. எனவே, வேறுபாடு பொருட்படுத்தத் தக்கதல்ல.

$F$ பட்டியலில் $\gamma_1$, $\gamma_2$ வின் பல்வேறு மதிப்புகட்கு 5%, 1% புள்ளிகள் உள்ளன. $u^2$ ஐ, இரு மதிப்பீடுகளில் பெரியதாக எடுத்துக்கொள்வதால் எப்போதும் $F > 1$. அதற்குரிய கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை $\gamma_1$.

நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் $F_0$ என்னும் புள்ளிபரவலின் ஒரு வால்பகுதியில் மட்டும் காணப்படுகிறது; மற்றொரு வால்பகுதியிலும் இன்னோர் எல்லைப்புள்ளி உள்ளது. எனவே, 5%, 1% புள்ளிகள் உண்மையிலேயே 10%, 2% மிகைத்தன்மை வரைகளைக் குறிக்கின்றன. நமக்கு 5% மிகைத்தன்மை வரை வேண்டுமாயின் $2\frac{1}{2}$% எல்லைப் புள்ளி $F_0$ ஐக் காணவேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

10, 8 அளவுடைய இரு சார்பற்ற கூறுகள் (இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை) கீழ்க்கண்ட விவரங்களைத் தருகின்றன :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| கூறு | 1 : | 16 | 13 | 12 | 15 | 16 | 14 | 10 | 13 | 11 | 14 |
| கூறு | 2 : | 12 | 14 | 10 | 13 | 12 | 13 | 14 | 12 | | |

கூறுகள் சமபரவற்படியுடைய முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையா என ஆராய்க. (செ.ப.க. ' 71)

**கொள்கை :** இரு கூறுகள் சமபரவற்படி உள்ள முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனக் கொள்வோம்.

$$\bar{x}_1 = \frac{134}{10} = 13{\cdot}4$$

$$u^2 = \frac{n_1\ s_1^2}{n_1 - 1} = \frac{10 \times 3{\cdot}64}{9} = 4{\cdot}04\ ;$$

$$s_1^2 = \Sigma\ \frac{(x - 13{\cdot}4)^2}{10} = 3{\cdot}64$$

$$\gamma_1 = n_1 - 1 = 9$$

$$y = \frac{100}{8} = 12{\cdot}5\ ;\ s_2^2 = \frac{\Sigma\,(y - 12{\cdot}5)^2}{8} = \frac{12}{8} = 1{\cdot}5$$

$$v^2 = \frac{n_2\ s_2^2}{n_2 - 1} = \frac{8 \times 1{\cdot}5}{7} = 1{\cdot}71\ ;\ \gamma_2 = n_2 - 1 = 7$$

$$F = \frac{u^2}{v^2} = \frac{4{\cdot}04}{1{\cdot}71} = 2{\cdot}4$$

வரையற்ற பாகைகள் (9, 7) ஆக இருக்கும்போது $F_{\cdot 05} = 3{\cdot}29$ $\therefore F < F_{\cdot 05}$. அதாவது கணக்கிடப்பட்ட $F$-ன் மதிப்பு, $F_0$ ஐவிடக் குறைவாக உள்ளது.

எனவே 5% வரையில், கொள்கை ஏற்றுக் கொள்ளப் படுகிறது. அதாவது இரு கூறுகளும் ஒரேபரவற்படியுடைய இரு இயல்நிலைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

இயல்நிலைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் அளவு 22, 15, 8, 13, 6, 11, 16, 9, 7.

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 10 ஆக உள்ள எடுகோளை ஆராய்க. [செ.ப.க.]

**தீர்வு :**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 22 | 15 | 8 | 13 | 6 | 11 | 16 | 9 | 7 |
| $x^2$: | 484 | 225 | 64 | 169 | 36 | 121 | 256 | 81 | 49 |

$\Sigma x = 107$ ; $\Sigma x^2 = 1485$

$$\sigma^2 = \frac{1485}{9} - \left(\frac{107}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1485}{9} - \frac{(11 \cdot 88)^2}{9}$$

$$= 165 - 141 \cdot 2$$

$$= 23 \cdot 8$$

$$t = \frac{|\bar{x} - m|}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}.$$

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 10 என்ற எடுகோளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{11 \cdot 88 - 10}{\frac{23 \cdot 8}{\sqrt{8}}}.$$

$$= \frac{1 \cdot 88 \times \sqrt{8}}{23 \cdot 8}$$

$$= 0 \cdot 2234$$

$$\gamma = 8$$

8 கட்டின்மைக் கூறுகளுக்கு

$$t_{.05} = 2 \cdot 31$$

$$t < t_{.05}.$$

எனவே, 5% வரையில் வேறுபாடு மிகைத் தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 10 எடுத்துக் கொண்ட எடுகோள் சரியானது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஓர் இயல்நிலைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 16 இராசிகள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 40·6 ; அதன் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 135 ; முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

$$n = 16. \qquad \bar{x} = 40{\cdot}6$$

கூறின் பரவற்படி $s^2 = \dfrac{135}{16} = 8{\cdot}4375$

15 கட்டின்மைக் கூறுகளுக்கு $t_{\cdot 05} = 2.13$. எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\bar{x} \pm t_{\cdot 05} \times$ திட்டப்பிழை என்ற இடை வெளியில் அமையும் (95% வரையில்)

$$\text{திட்டப்பிழை} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{8{\cdot}4375}}{\sqrt{15}}$$

$$= 0{\cdot}7499$$

$$\therefore \quad \bar{x} \pm 2{\cdot}13 \times 0{\cdot}7499$$

$$40{\cdot}6 \pm 2{\cdot}13 \times 0{\cdot}7499$$

$$40{\cdot}6 \pm 1{\cdot}597$$

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 39·003 — 42·197 என்ற இடைவெளியில் அமைகிறது.

[குறிப்பு : 98% நம்பிக்கை இடை வெளிகளாயின் கட்டின்மைக் கூறுகள் 15-க்கு, $t_{\cdot 02} = 2{\cdot}60$ ஆகும்.]

**எடுத்துக்காட்டு :**

1·8, 2.9, 1·4, 1·5 என்ற அளவுகள் கொண்ட ஒரு கூறும், 5·2, 8·6, 9·2, 3·3, — 1·6 என அளவுகள் கொண்ட மற்றொரு கூறும் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன. 0·05 வரையில் அக் கூறுகளின் பரவற்படிகள் சமமா என ஆராய்க.

தீர்வு :

| $x_1$ | $x_1^2$ | $x_2$ | $x_2^2$ |
|---|---|---|---|
| 1·8 | 3·24 | 5·2 | 27·04 |
| 2·9 | 8·41 | 8·6 | 73·96 |
| 1·4 | 1·96 | 9·2 | 84·64 |
| 1·5 | 2·25 | 3·3 | 10·89 |
| | | —1·6 | 2·56 |
| 7·6 | 15·86 | 24·7 | 199·09 |

$$s_1^2 = \frac{15\cdot 86}{4} - \left(\frac{7\cdot 6}{4}\right)^2$$

$$= 3\cdot 965 - (1\cdot 9)^2$$

$$= 3\cdot 965 - 3\cdot 61$$

$$= 0\cdot 355$$

$$s_2^2 = \frac{199\cdot 09}{5} - \left(\frac{24\cdot 7}{5}\right)^2$$

$$= \frac{199\cdot 09}{5} - (4\cdot 94)^2$$

$$= 15\cdot 4144.$$

$$s_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot s_1^2$$

$$= \frac{4 \times 0\cdot 355}{3} = 0\cdot 4733.$$

$$s_2^2 = \frac{5}{4} \times 15\cdot 4144 = 19\cdot 268$$

$F = \frac{u^2}{V^2} = \frac{19 \cdot 268}{0 \cdot 4733}$ [$u^2$ என்பது இரு பரவற்படிகளில் பெரிய மதிப்பைக் குறிக்கிறது.]

$= 40 \cdot 70$

$u^2$-க்கான கட்டின்மைக் கூறுகள் $= \gamma_1 = 4$

$V^2$-க்கான கட்டின்மைக் கூறுகள் $= \gamma_2 = 3$

$F_{\cdot 05} = 9 \cdot 12$

$F > F_{\cdot 05}$

இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் பரவற்படிகளும் சமமானவை அல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

புகையிலையில் நிக்கோடின் கலந்திருப்பதை மில்லி கிராம்களில் தரும் இரு கூறுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| கூறு 1 : | 24 | 26 | 21 | 27 | 24 |
| கூறு 2 : | 26 | 23 | 31 | 28 | 27 |

இரு கூறுகளும் ஒரே பரவற்படியைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதிகளில் இருந்து எடுக்கப்பட்டு உள்ளது என்ற எடுகோளை ஆராய்க.

**தீர்வு :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 24 | 26 | 21 | 27 | 24 | மொத்தம் |
| $x_1 - A$ | 0 | 2 | —3 | 3 | 0 | 2 |
| $(x_1 - A)^2$ | 0 | 4 | 9 | 9 | 0 | 22 |
| $x_2$ | 26 | 23 | 31 | 28 | 27 | மொத்தம் |
| $x_2 - B$ | —5 | —8 | 0 | —3 | —4 | —20 |
| $(x_2 - B)^2$ | 25 | 64 | 0 | 9 | 16 | 114 |

$s_1^2 = \frac{22}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$= 4 \cdot 24$

$$s_2^2 = \frac{114}{5} - \left(\frac{20}{5}\right)^2 \qquad u^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1} = 8\cdot5$$

$$= 22\cdot8 - 16 \qquad v^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1} = 5.3$$

$$= 6\cdot8$$

$$\therefore u^2 = 8\cdot5$$

$$v^2 = 5\cdot3$$

$$F = \frac{u^2}{v^2} = \frac{8\cdot5}{5\cdot3} = 1\cdot603$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 4$$

$$F_{\cdot 05} = 6\cdot39$$

$$F < F_{\cdot 05}$$

வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. அதாவது இரு கூறுகளும், ஒரே பரவற்படியைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதிகளில் இருந்து எடுக்கப்பட்டு உள்ளன.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழே இயல் நிலைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிறக்கும் இரு சார்பற்ற கூறுகளின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

கூறு 1 : 3 8 10 7 4 5 12

கூறு 2 : 5 13 15 9 7 12 16 18 20

இந்த விவரங்களிலிருந்து இந்தக் கூறுகளின் முழுமைத் தொகுதிகளின் பரவற்படிகள் சமமா என்று 5% மட்டத்தை வைத்துச் சோதனை செய்க. [செ.ப.க. 1974]

**தீர்வு :**

**எடுகோள் :**

பரவற்படிகள் சமம் இல்லை என்க.

| கூறு (1) $x_1$ | $x_1^2$ | கூறு (2) $x_2$ | $x_2^2$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 5 | 25 |
| 8 | 64 | 13 | 169 |
| 10 | 100 | 15 | 225 |
| 7 | 49 | 9 | 81 |
| 4 | 16 | 7 | 49 |
| 5 | 25 | 12 | 144 |
| 12 | 144 | 16 | 256 |
| | | 18 | 324 |
| 49 | 407 | 20 | 400 |
| | | 115 | 1673 |

$$s_1^2 = \frac{407}{7} - \left(\frac{49}{7}\right)^2 = 58{\cdot}142 - 49 = 9{\cdot}142$$

$$s_2^2 = \frac{1673}{9} - \left(\frac{115}{9}\right)^2 = \frac{15057-1320}{81} = \frac{1837}{81} = 22{\cdot}68$$

$$V^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1} = \frac{7 \times 9{\cdot}142}{6} = \frac{63{\cdot}994}{6} = 10{\cdot}6656$$

$$u^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n^2 - 1} = \frac{22.68 \times 9}{8} = \frac{51{\cdot}03}{2} = 25.525$$

$$F = \frac{u^2}{V^2} = \frac{25 \cdot 525}{10{\cdot}6656} = 2{\cdot}392$$

$$F_{\cdot 05} = 4{\cdot}15$$

$$F < F_{\cdot 05}.$$

எனவே, பரவற்படிகளிலே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை. 5% வரையில் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது.

**எடுத்துக்காட்டு:**

உருளைக் கிழங்கு சாகுபடி செய்யும் 4 சோதனைகளில் கைனேட்டைப் பயன்படுத்துவதைவிட பொட்டாசியம் சல்பேட்டைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும் அதிக விளைச்சல் வருமாறு: 11, 6, 30, 13. இரு பராமரிப்பு முறைகளில் எது சிறந்தது என ஆராய்க.

**தீர்வு:**

$$\frac{1}{x} = \frac{11+6+30+13}{4} = 15$$

($m = 0$ எனக் கொள்வோம்.)

$$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{163}{2} = 81{\cdot}5$$

$$t = \frac{x - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{15 - 0}{\frac{\sqrt{163}}{2 \times 3}} = 2{\cdot}878; \qquad \gamma = 3$$

$$\therefore\ t_{\cdot 05} = 3{\cdot}18$$

$t < t_{\cdot 05}$; ஆகவே, பராமரிப்பு முறைகளில் வேறுபாடு பொருட்படுத்தத்தக்கதல்ல.

# 7. கை வர்க்கச் சோதனை

## ($\chi^2$ Test)

ஒரு நாணயத்தை 80 முறைகள் வீசும்போது நிகழ்தகவின் விதியின்படி 40 தலைகளையும், 40 பூக்களையும் எதிர்பார்க்கிறோம் ஆனால், நாம் நாணயத்தை 80 முறை வீசிப்பார்க்கும் போது பெறப்படும் தலை, பூக்களின் எண்ணிக்கை கணக்கியல் மதிப்புகளுக்கு முற்றிலும் பொருந்துவதில்லை அவை முறையே 47, 33 ஆக இருக்கலாம். எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $f_e$ எனவும், நேரில் காணும் நிகழ்வெண் $f_0$ எனவும் கொண்டால்,

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$ என கை வர்க்கத்தை வரையறுக்கிறோம்.

ஒவ்வொரு $f_0$-ம், $f$-க்குச் சமமானால் $\chi^2 = 0$; $\chi^2$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க, அதிகரிக்கக் கணக்கியல் நிகழ்வெண்களும், நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்களும் பொருந்தும் தன்மை குறைந்து கொண்டே வருகிறது. $\chi^2$, கைவர்க்கப்பரவலை, $\gamma$-வரையற்ற பாகைகளுடன் (degrees of freedom) தழுவுகிறது. இங்கு $\gamma$ என்பது சார்பற்ற நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை யாகும்.

கை வர்க்கச் சோதனையை மேற்கொள்ளுமுன் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்:

(1) கூறின் உறுப்புகள் சார்பற்றவையாக இருக்க வேண்டும்

(2) நிகழ் வெண்களின் மொத்த மதிப்பு குறைந்தது 50ஆவது இருக்க வேண்டும்.

(3) $\Sigma f_0 = \Sigma f_e$ போன்ற, பிரிவு நிகழ்வெண்களைப் பற்றிய கட்டுப்பாடுகள் ஒருபடியில் உள்ளவையாக இருக்கவேண்டும்.

(4) $\Sigma \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$ கைவர்க்கப் பரவலைப் பின்பற்றுவதற்கு அடிப்படையாக $f_0 - f_e$ இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவவேண்டும். இதற்கு $\frac{f_0}{N}$-ன் விகிதம் மிகவும் சிறியதாக இருக்கக்கூடாது. எனவே, ஏதேனும் பிரிவு நிகழ்வெண் 5-க்குக் கீழ் இருந்தால், அதனை முன்பு அல்லது பின்பு வரும் பிரிவு நிகழ்வெண்ணுடன் சேர்த்து, அவ்வாறு கிடைத்த நிகழ்வெண் 5-க்கு மேல் உள்ளதாக அமைக்க வேண்டும்.

**'கை' வர்க்கச் சோதனையின் பயன்கள்**

வளைகோட்டுப் பொருத்தச் சிறப்பினை (Goodness of fit) அறிய இச் சோதனை பெரிதும் பயன்படுகிறது.

நம்மிடமுள்ள கூறு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதா எனக்'கை' வர்க்கச் சோதனை மூலம் அறியமுடிகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத்தொகுதி பாய்ஸான் பரவலைச் சார்ந்தது எனில், $f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம், கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களைக் காணலாம். நேரில் கணிக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண்கள் எல்லாமே கணக்கியல் நிகழ்வெண்களுக்குச் சமமாயிராது. இரண்டிற்குமிடையே வேறுபாடுகள் இருக்கத்தான் செய்யும். இந்த வேறுபாடுகளை அந்த எல்லைவரை கூறுகளின் ஏற்றவிறக்கப் பிழைகளால் ஏற்பட்டவை எனத் தள்ளிவிடவும். எந்த எல்லையை மீறினால் எடுத்துக்கொண்ட கொள்கையை (இங்குக் கூறு பாய்ஸான் பரவலைச் சார்ந்த முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளது என்பது) சந்தேகிக்கவேண்டும் என்றும் தீர்மானிக்க ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் முயல்கிறோம். பொதுவாக 5%, 1% வரையில் 'கை' வர்க்கப் பட்டியலில் காணும் $\chi^2$ மதிப்பு $\chi_0^2$. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குக் கணக்கிடப்படும் மதிப்பு $\chi^2$ ஐ விட அதிகமிருந்தால், இருவகை நிகழ்வெண்களுக்குமிடையே வேறுபாடு மிகைத்தன்மை உடையதன்று என முடிவுக்கு வருகிறோம்.

எனவே 5% வரையில் $\chi^2$ $\chi_0^2$ எனில், வேறுபாடு மிகைத் தன்மை உடையதன்று.

$\chi^2 > \chi_0^2$ எனில், வேறுபாடு மிகைத்

இங்கு $\Sigma f_o = \Sigma f_e = N$ என்பது ஒரு கட்டுப்பாடு (Constraint). மேலும், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை '$m$' கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடப்பட்டால், அதற்காக வரையற்ற பாகைகளில் ஒன்றைக் குறைத்திட வேண்டும். எனவே, வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(n - 2)$ ஆகிறது. இதுபோன்று, இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்த முற்படும்போது $m, \sigma$ என்ற இரு பண்பளவைகளுக்காகவும், $\Sigma f_o = \Sigma f_e = N$ என்று பொருந்துமாறு உள்ள கட்டுப்பாட்டிற்காகவும், வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $n - 3$ ஆகிறது. பொதுவாக, தனித்த நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை $n$ ஆக இருக்கும்போது, $n - (k + 1)$ என்பது வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை ; $k$ என்பது, கூறிலிருந்து தீர்மானிக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளின் எண்ணிக்கை.

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள், கூறின் மதிப்புகளிலிருந்து, கணக்கிடப்படா நிலையில்,

வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $\nu = n - 1$ மட்டுமே. இங்கு மொத்த நிகழ்வெண் $N$-க்காக மட்டுமே ஒரு வரையற்ற பாகை குறைக்கப்பட்டுள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :**

உயிரியல் கொள்கையின்படி பெற்றோரில் ஒருவர் $M$ பிரிவு இரத்தமுடையவராயும், மற்றொருவர் $N$ பிரிவு இரத்த முடையவராயும் இருந்தால் $M$, $MN$, $N$ என்ற மூன்று பிரிவுகளில் ஏதேனும் ஒரு பிரிவு இரத்தம் உடையவர்களாகத்தான் அவர்களது குழந்தைகள் இருப்பார்கள். இம் மூன்று பிரிவுகளிலும் காணப்படும் விகிதம் 1 : 2 : 1 என்று சராசரியாக அமையும். பெற்றோரில், $M$ பிரிவில் ஒருவர், $N$ பிரிவில் ஒருவர் உள்ள 300 குழந்தைகளில் 30% $M$ பிரிவையும், 45% $MN$ பிரிவையும், மீதியுள்ளோர் $N$ பிரிவையும் சார்ந்தவர்கள்.

$\chi^2$ சோதனையின் மூலம் கொள்கையை ஆராய்க. (I.A S.)

**தீர்வு :**

உயிரியல் கொள்கை உண்மையானதாயின் 300 குழந்தைகள் 1 : 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிறந்தால்,

| | |
|---|---|
| $M$ பிரிவைச் சார்ந்தவர்கள் | 75 |
| $MN$ பிரிவைச் சார்ந்தவர்கள் | 150 |
| $N$ பிரிவைச் சார்ந்தவர்கள் | 75 |

என வரும் .

நேரில்கண்ட நிகழ்வெண்கள்

*M* பிரிவைச் சார்ந்த குழந்தைகள் 90

*MN* பிரிவைச் சார்ந்த குழந்தைகள் 135

*N* பிரிவைச் சார்ந்த குழந்தைகள் 75

$$\chi^2 = \frac{\Sigma (f_o - f_e)^2}{f_e}$$

$$\chi^2 = \frac{(90 - 75)^2}{75} + \frac{(135 - 150)^2}{150} + \frac{(75 - 75)^2}{75}$$

$$= \frac{225}{75} + \frac{225}{150} + \frac{0}{75} = 4{\cdot}5$$

வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $3 - 1 = 2$

[ கணக்கியல் நிகழ்வெண்ணின் மொத்தமும், நேரில் காணும் நிகழ்வெண்களின் மொத்தமும் ஒன்றாக இருக்கும். 5% வரையில் பட்டியலிலிருந்து, வரையற்ற பாகைகள் 2ஆக இருக்கும்போது $\chi^2$-ன் பட்டியல் மதிப்பு $= 5{\cdot}991 \cdot (\chi_0^2)$]

எனவே நாம் கணக்கிட்ட $\chi^2 = 4.5 > 5{\cdot}991$

∴ இந்த உயிரியல் கொள்கை கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குப் பொருந்துகிறது எனும் முடிவுக்கு வரலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

5 குழந்தைகள் உடைய 320 குடும்பங்களைப் பற்றிய கூறு அளவெடுப்பில் கீழ்க்காணும் உண்மைகள் தெரிந்தன :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண் குழந்தையின் எண்ணிக்கை | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை | 14 | 56 | 110 | 88 | 40 | 12 |

ஆண், பெண் குழந்தைகள் இருவருக்கும் சம நிகழ்தகவு உண்டா என ஆராய்க.

**கொள்கை :** ‘ குழந்தைகளில் ஆண், பெண் பிறப்பு சம நிகழ்தகவுடன் இருக்கும். ’

$p$ = ஆண் குழந்தை பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{1}{2}$

$q$ = பெண் குழந்தை ,, ,, = $\frac{1}{2}$

$f(x+1) = \frac{n-r}{n+1}\,\frac{p}{q}\, f(x)$ என்பதில் $x = 0, 1, 2, 3, 4$ எனப் பிரதியிட்டு ஈருறுப்புப் பரவலின் மூலம் கணக்கியல் நிகழ் வெண்களைக் கணக்கிடுவதால், அவை முறையே

$$320\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$$ -ன் உறுப்புகளாக

10, 50, 100, 100, 50, 10 எனக் கிடைக்கின்றன.

| $f$ | $f$ | $\frac{(f_o - f_e)^2}{f}$ |
|---|---|---|
| 14 | 10 | 1·6 |
| 56 | 50 | 0·72 |
| 110 | 100 | 1 |
| 88 | 100 | 1·44 |
| 40 | 50 | 2 |
| 12 | 10 | ·4 |
| 320 | 320 | 7 16 |

5% வரையில் $\chi^2 = 11{\cdot}07 = \chi_0^2$

கணக்கிடப்பட்ட $\chi^2 = 7{\cdot}16$

$\chi^2 < \chi_0^2$. எனவே ஆண், பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பின் சம நிகழ்தகவுக் கொள்கை ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து, செய்திகள் பாய்ஸான் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இயைபிலா மாதிரிக் கூறின் உறுப்புகளா என்பதை ஆய்க.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| இறப்புகளின் எண்ணிக்கை $x$: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | மொத்தம் |
| அலைவெண்கள் $f$: | 122 | 60 | 15 | 2 | 1 | 200 |

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, $m = \frac{0+60+30+6+4}{200} = \frac{1}{2} = \cdot 5$

மாதிரிக் கூறு பாய்ஸான் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதென்னும் எடுகோளைக் கொண்டால், $x$ இறப்புகளுக்கான

கணக்கியல் அலைவெண்கள் $200 \times \frac{e^{-\cdot 5}}{r!} \times (\cdot 5)^r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4.$

$\therefore$ அலைவெண்கள் 122, 61, 15, 2, 0.

$\chi^2$ சோதனையைப் பயன்படுத்த, எந்தப் பிரிவு இடைவெளியும் 5-க்குக் குறைவான அலைவெண்ணைப் பெற்றிருக்கக் கூடாது. எனவே, கடைசி மூன்று பிரிவு இடைவெளிகளையும் ஒன்றாக இணைக்கிறோம்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| நேரில் கண்ட அலைவெண்கள் | : | 122 | 60 | 18 |
| கணக்கியலாகக் கண்ட அலைவெண்கள் | : | 122 | 61 | 17 |

$$\therefore \quad \chi^2 = \frac{(122-122)^2}{122} + \frac{(60-61)^2}{61} + \frac{(18-17)^2}{17}$$

$$= \frac{1}{61} + \frac{1}{17} = \cdot 07 \text{ (தோராயமாக)}$$

இங்குப் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை 3. ஆனால் மொத்த அலைவெண் $N$-க்காகவும், கூறிலிருந்து $m$ கணக்கிடப்பட்டதாலும், வரையற்ற பாகைகள் $= 3 - 2 = 1$.

வரையற்ற பாகை 1-க்கு, 5% நிகழ்தகவு அளவுக்கேற்ற $\chi^2$-ன் மதிப்பு $= 3 \cdot 84$.

$\therefore \quad \chi_0^2 = 3 \cdot 84.$

$\chi^2 = \cdot 07$

$\therefore \quad \chi^2 < \chi_0^2.$

எனவே நிகழ்வெண்களின் கணக்கியல் மதிப்புகளுக்கும் நேரில் கண்ட மதிப்பெண்களுக்கும் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கதாயில்லை. எனவே, பாய்ஸான் பரவலிலிருந்து கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டிருக்கக் கூடுமென்பதை ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

10,000 பேர்களுக்கு எடுத்த மார்பு சுற்றளவுகளை (அங்குலங்களில்) கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. அதற்கு ஓர் இயல்நிலை வளைகோட்டைப் பொருத்தி, கொடுக்கப்பட்ட பரவல் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தோந்தெடுக்கப்பட்ட இயைபிலா மாதிரியாகக் கொள்ளத் தக்கதா என ஆராய்க.

| பிரிவு இடை வெளி (அங் குலங்களில்) | 32·75 — 34·75 | 34·75 — | 36·75 — | 38·75 — | 40·75 — | 42·75 — | 44·75 — | 46·75 — |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| அலைவெண் | 41 | 463 | 1733 | 3760 | 3060 | 822 | 114 | 7 |

தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, $\bar{x} = 40 2084$, $\sigma = 2.0894$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இவற்றின் மூலம் இயல்நிலை வளைகோட்டின் கணக்கியல் அலைவெண்கள் முறையே 45, 440, 1935, 3606, 2862, 962, 141, 9.

$$\chi^2 = \frac{41 - 45)^2}{45} + \frac{(463 - 440)^2}{440} + \dots \frac{(7 - 9)^2}{9} = 68.9$$

நிகழ்வெண்களின் கூடுதலில் $N = \Sigma f_o = \Sigma f$ என்ற கட்டுப்பாடு உள்ளது. மேலும் $\bar{x}$, $\sigma$-க்களைக் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடுகிறோம்.

வரையற்ற பாகை $\gamma = 8 - 1 - 2 = 5$.

வரையற்ற பாகை 5-க்கு, 1% வரையில் கூட

$\chi^2$-ன் மதிப்பு = 15·09

∴ $\chi^2 > \chi^2_{.01}$. எனவே தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, இயல்நிலை வளைகோடு பொருத்தமற்றதாயுள்ளது.

II. கை வர்க்கச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி பண்புகளுக்கிடையே உள்ள உறவினைப் பற்றி ஆராயலாம்.

$$\chi^2 = \Sigma \frac{[A_m B_n - (A_m B_n)_0]^2}{(A_m B_n)_0}$$ என முன்பே நிறுவியுள்ளோம்.

இங்கு $(A_m B_n)$ என்பது ஒரு நேர்வு பட்டியலில் $m$ ஆவது நெட்டுப் பிரிவில், $n$ ஆவது கிடைப் பிரிவில் காணப்படும் நிகழ்வெண்.

$(A_m B_n)_0$ என்பது பண்புகள் உறவற்றவை என்ற அடிப்படையில் கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்.

$$(A_m B_n)_0 = \frac{(A_m)(B_n)}{N}.$$

இவ்வாறு ஒவ்வொரு சிற்றறைக்கும் கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் கண்டு $\chi^2$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடல் வேண்டும். $r$ கிடைப் பிரிவுகளும், $c$ நெட்டுப் பிரிவுகளும் உடைய ஒரு நேர்வுப்பட்டியலில், வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $= (r-1)(c-1)$.

ஒவ்வொரு கிடைப் பிரிவிற்கும் மொத்த மதிப்பு நிலையானது. எனவே, ஒவ்வொரு கிடைப் பிரிவிலும் $c-1$ சார்பற்ற நிகழ்வெண்கள் உள்ளன. கடைசி கிடைப் பிரிவுக்கு இது பொருந்தாது. கடைசி வரிசையிலுள்ள ஒவ்வொரு சிற்றறையின் நிகழ்வெண்ணும், நெட்டுப் பிரிவின் மொத்தம் — அந்நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள மற்றச் சிற்றறைகளின் மொத்த மதிப்பு என்ற வகையில் தீர்மானிக்கப்பட்டு விடுகிறது. எனவே $(c-1)$ சார்பற்ற நிகழ்வெண்களை உடைய $(r-1)$ கிடைப் பிரிவுகள்தான் உள்ளன எனவே வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $= (r-1)(c-1)$.

**யேட்டின் திருத்தம்** (Yate's Correction) : $2 \times 2$ இருவழிப்பட்டியலில் கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை $(2-1)(2-1) = 1$. ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வெண் ஐந்தைவிடக் குறைவாக இருந்தால் அதனை வேறொரு நிகழ்வெண்ணோடு சேர்த்துவிட்டால், கட்டின்மைக்கூறு ஒன்று குறைந்து, இறுதியில் $(1-1) = 0$ என ஆகிவிடுகிறது. இது பொருளற்றது. இந்நிலையில் 'யேட்' திருத்தத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்ணைவிட நேரில் காணும் நிகழ்வெண்

அதிகமாக இருந்தால், ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் 0·5 ஐக் கழிக்க வேண்டும். குறைவாக இருந்தால் 0·5 ஐக் கூட்டவேண்டும்.

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ |

இந்நேர்வுப் பட்டியலில் $a, d >$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் எனில், $b, c <$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்.

$a, d$ யிலிருந்து 0·5 ஐக் கழிக்க (அல்லது கூட்ட), $b, c$ யுடன் 0·5 ஐக் கூட்ட (அல்லது கழிக்க) மொத்த மதிப்புகள் மாருமல் இருக்கின்றன. எனவே, திருத்தப்பட்ட $\chi^2$-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு :

$$\chi^2 = \frac{N[(a \mp 0\cdot5)(d \mp 0\cdot5) - (b \pm 0\cdot5)(c \pm 0\cdot5)]^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

$$= \frac{N[(ad - bc \mp 0\cdot5(a+b+c+d)]^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

$$\chi^2 = \frac{N\left[\,|ad - bc| - \frac{N}{2}\right]^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

[குறிப்பு : (1) $N$ பெரியதாக இருக்கும்போது $\chi^2$-ன் மதிப்பில் யேட்டின் திருத்தம் மிகச்சிறிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும்.

(2) ஒவ்வொரு சிற்றறையின் நிகழ்வெண்ணும், ஐந்தைவிடக் குறைவாக இல்லாவிடினும், யேட்டின் திருத்தம் ஒவ்வொரு $2 \times 2$ பட்டியலுக்கும் செய்தல் விரும்பத்தக்கதேயாம்.

(3) $\chi^2$ ஒரு தொடர்மாறி என நாம் கருதும்போது, நிகழ்வெண்களின் பரவல் தொடர்ச்சியற்று இருப்பதால், இத் திருத்தம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சிற்றறையின் நிகழ்வெண் 42 எனில், அது 41·5-லிருந்து 42·5 வரை குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம்.]

**எடுத்துக்காட்டு :**

அடுத்தப் பக்கத்தில் கண்ட பட்டியல், வீட்டின் சூழ்நிலையையும், அங்கு வளரும் குழந்தையின் நிலைமையையும் காட்டுகிறது.

வீட்டின் சூழ்நிலை

| குழந்தையின் நிலைமை | சுத்தமான நிலை | அசுத்தமான நிலை |
|---|---|---|
| சுத்தமான நிலை | 75 | 45 |
| சுமாரான நிலை | 45 | 15 |
| அசுத்தமான நிலை | 30 | 40 |

இந்த விவரங்களிலிருந்து " வீட்டின் சூழ்நிலை, குழந்தையின் நிலைமையை வேறுபடுத்துகிறது," என்பதை ஆராய்க.

**விடை :**

வீட்டின் சூழ்நிலை

| குழந்தையின் நிலைமை | சுத்தமான நிலை | அசுத்தமான நிலை | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| சுத்தமான நிலை | 75 [72] | 45 [48] | 120 |
| சுமாரான நிலை | 45 [36] | 15 [24] | 60 |
| அசுத்தமான நிலை | 30 [42] | 40 [28] | 70 |
| மொத்தம் | 150 | 100 | 250 |

**எடுகோள் :**

வீட்டின் சூழ்நிலைக்கும், குழந்தையின் நிலைமைக்கும் தொடர்பு இல்லை எனக் கொள்வோம்.

வீடு சுத்தமான நிலை, குழந்தை நிலைமை சுத்தமான நிலையாக இருக்கக் கணக்கியல் நிகழ்வெண் $= \frac{120 \times 150}{250} = 72.$

வீடு அசுத்தமான நிலை, குழந்தை நிலைமை அசுத்தமான நிலை யின் கணக்கியல் நிகழ்வெண் $= \frac{100 \times 70}{250} = 28.$

இதுபோன்று மற்ற நிகழ்வெண்களின் கணக்கியல் மதிப்புகளைக் கண்டு அவற்றைப் பட்டியலில் குறிக்கவும்.

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \left[ \begin{array}{l} f_o = \text{நேரில் கண்ட மதிப்புகள்} \\ f_e = \text{கணக்கியல் மதிப்புகள்} \end{array} \right]$$

$$\chi^2 = \frac{(75-72)^2}{72} + \frac{(45-36)^2}{36} + \frac{(30-52)^2}{52}$$

$$+ \frac{(45-48)^2}{48} + \frac{(15-24)^2}{24} + \frac{(40-28)^2}{28}$$

$$= \frac{9}{72} + \frac{81}{36} + \frac{144}{52} + \frac{9}{48} + \frac{81}{24} + \frac{144}{28}$$

$$= 14{\cdot}51$$

வரையற்ற பாகை $\gamma = (2-1)(3-1) = 2$

$\chi^2$ பட்டியலில், வரையற்ற பாகை $\nu = 2$-க்கு, 5% நிகழ் தகவு அளவுக்கேற்ற $\chi_0{}^2 = 5{\cdot}99.$

$\chi^2 > \chi_0{}^2 \therefore$ வீட்டின் சூழ்நிலை, குழந்தையின் நிலை மையைப் பாதிக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

அடுத்த பக்கத்தில் கண்ட பட்டியல் மலேரியா தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்களைப் பற்றிய விவரங்களைத் தருகிறது.

| | தாக்கப் படாதவர் | தாக்கப் பட்டவர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொண்டவர் | 431 | 5 | 436 |
| தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொள்ளாதவர் | 291 | 9 | 300 |
| மொத்தம் | 722 | 14 | 736 |

நோயால் தாக்கப்படுவதற்கும் ஊசி போட்டுக் கொள்ளு வதற்கும் ஏதேனும் உறவு உண்டா என ஆய்க.

**தீர்வு :**

நிகழ்வெண்களின் கணக்கியல் மதிப்புகளை முதலில் காண்போம்.

ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்களில், தாக்கப் படாதவர்களின் கணக்கியல் மதிப்பு } $\frac{722 \times 436}{736}$

$= 427{\cdot}7$

ஊசி போட்டுக் கொள்ளாதவர்களில், தாக்கப் பட்டவர்களின் கணக்கியல் மதிப்பு } $\frac{14 \times 300}{736} = 5{\cdot}7$

அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் மதிப்புகள் கணக்கியல் மதிப்பு களையும், அடைப்புக்குள்ளில்லாதவை நேரில் கண்ட மதிப்பு களையும் குறிக்கட்டும்.

| | தாக்கப் பட்டவர் | தாக்கப் படாதவர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஊசி போட்டுக் கொண்டவர் | 431 (427·7) | 5 (8·3) | 436 |
| ஊசி போட்டுக் கொள்ளாதவர் | 291 (294·3) | 9 (5·7) | 300 |
| | 722 | 14 | 736 |

$$\chi^2 = \frac{(431 - 427{\cdot}7)^2}{427{\cdot}7} + \frac{(291 - 294{\cdot}3)^2}{294{\cdot}3} + \frac{(5 - 8{\cdot}3)^2}{8{\cdot}3} + \frac{(9 - 5{\cdot}7)^2}{5{\cdot}7}$$

$$= (3{\cdot}3)^2 \left[\frac{1}{427{\cdot}7} + \frac{1}{294{\cdot}3} + \frac{1}{8{\cdot}3} + \frac{1}{5{\cdot}7}\right] = 3{\cdot}28$$

வரையற்ற பாகை $\gamma = (2 - 1)\ (2 - 1) = 1$

வரையற்ற பாகை $\gamma$ = 1-க்கு 5% நிகழ்தகவுக்கேற்ற $\chi_0{}^2$-ன் மதிப்பு $= 3{\cdot}84$

$\therefore \quad \chi^2 < \chi_0{}^2$

ஆகையால் வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் மலேரியாவுக்கு எதிராக ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்களைப் பற்றிய முடிவுகளைத் தருகிறது :

| | தாக்கப்படாதவர் | தாக்கப்பட்டவர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| தடுப்பு மருந்து ஊசி போட்டுக் கொண்டவர் | 31 | 469 | 500 |
| தடுப்பு மருந்து ஊசி போட்டுக் கொள்ளாதவர் | 185 | 1,315 | 1,500 |
| மொத்தம் | 216 | 1,784 | 2,000 |

நோயால் தாக்கப்படுவதற்கும், ஊசி போட்டுக் கொள்ளு வதற்கும் ஏதேனும் உறவு உண்டா என ஆய்க [யேட்டின் (Yates) திருத்தத்தை மேற்கொள்ளவும்].

[வரையற்ற பாகை $\gamma$ = 1-க்கு 5% நிகழ்தகவுக் கேற்ற $\chi^2{}_0$ மதிப்பு $= 3{\cdot}84$]

$\chi^2$ [யேட்டின் (Yates) திருத்தத்தின் அடிப்படையில்]

$$= \frac{\{\,|\,31 \times 1315 - 185 \times 469\,| - 1000\}^2\, 2000}{(216)\,(1784)\,(500)\,(1500)}$$

$= 14{\cdot}01$

வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(2-1)(2-1) = 1$

$\chi_0^2 = 3{\cdot}84$. ஆகையால் $\chi^2 > \chi_0^2$.

எனவே, ஊசி போட்டுக்கொண்டால் நோயால் தாக்கப்படுவதில்லை எனத் தெரிகிறது.

**முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படியான $\sigma^2$-க்கு $\chi^2$ பரவலின் மூலம் நம்பிக்கை வரைகளைக் காணுதல்**

$x$ என்ற மாறி $\sigma^2$ ஐப் பரவற்படியாகக் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது; $n$ அளவுடைய சம வாய்ப்பு மாறியின் பரவற்படி $s^2$ ஆனால், $\frac{n\,s^2}{\sigma^2}$ $\chi^2$ பரவலை $n-1$ வரையற்ற பாகைகளுடன் தழுவுகிறது.

$n$ அளவுடைய ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பரவற்படி $s^2$ · வரையற்ற பாகைகள் $n-1$-க்குப் பட்டியலிலிருந்து $P\,[\chi^2 > \chi_1^2] = {\cdot}99$ எனவும், $P\,[\chi^2 > \chi_2^2] = {\cdot}01$ எனவும் இருக்குமாறு $\chi_1^2$, $\chi_2^2$ ஐக் காண்கிறோம்.

$$P\,[\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2] = {\cdot}98$$

$\frac{n\,s^2}{\sigma^2}$, $\chi^2$ பரவலை $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் தழுவுவதால், 98% நிலைகளில்

$$\chi_1^2 < \frac{n\,s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2 \text{ என அமையும்.}$$

அதாவது $\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{n\,s^2}{\chi_1^2}$

இவை $\sigma^2$-ன் 98% நம்பிக்கை வரைகள் எனப்படும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

10 மாணவருக்கு ஓர் அறிவுக் கூர்மைச் சோதனை தரப்பட்டு, அதில் அவர்களது சராசரி மதிப்பெண் 185 எனவும், திட்ட

விலக்கம் 33 எனவும் கணக்கிடப்பட்டது. முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படி $\sigma^2$-ன் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

$$n = 10, \quad \nu = 9, \quad s^2 = 33^2$$

$\chi^2$ பட்டியலிலிருந்து வரையற்ற பாகைகள் 9 ஆக இருக்கும் போது, $P(\chi^2 > \chi_1^2) = \cdot 99$ எனவும்,

$P(\chi^2 > \chi_2^2) = \cdot 01$ எனவும்

அமையுமாறு, $\chi_1^2$, $\chi_2^2$-ன் மதிப்புகளைக் காண்கிறோம்.

98% நம்பிக்கை வரைகள்

$$\frac{n\,s^2}{\chi_1^2} = \frac{10 \times 33^2}{2.09} = 5211$$

$$\frac{n\,s^2}{\chi_2^2} = \frac{10 \times 33^2}{21.67} = 502$$

$\therefore\ 502 < \sigma^2 < 5211.$ எனவே, $22\cdot4 < \sigma < 72\cdot2.$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு மிருகம் ஒரு குறிப்பிட்ட ஏதாவது வியாதியால் பீடிக்கப் பட நிகழ்தகவு ·20. ஒரு புது வகைத் தடுப்பு மருந்து 60 மிருகங் களுக்குத் தரப்பட்டது. அவற்றில் 5 மிருகங்களுக்கு வியாதி ஏற் பட்டது. 5% மிகைத்தன்மை வரையில், 'கை' வர்க்கச் சோதனையைப் பயன்படுத்திப் புதிய தடுப்பு மருந்தின் நோயினை எதிர்க்கும் சக்தியின் திறனைப் பற்றி ஆராய்க.

(செ.ப. 1969)

**தீர்வு :**

பொதுவாகத் தொத்து வியாதியால் பாதிக்கப்பட நிகழ்தகவு $= p = \cdot20$

பாதிக்கப்படாமலிருக்க நிகழ்தகவு $= q = 1 - \cdot20 = \cdot80$

தடுப்பு மருந்து தரப்பட்டும், வியாதி ஏற்பட்ட மிருகங்களின் எண்ணிக்கை $a = 5$; $b = 55$

தடுப்பு மருந்து தரப்பட்டு வியாதி ஏற்படாத மிருகங்களின் எண்ணிக்கை $a + b = n = 60$

**கொள்கை :** தடுப்பு மருந்து சக்தி வாய்ந்தது அல்ல என்க.

$p$, $q$ தரப்பட்டிருக்கும்போது.

$$\chi^2 = \frac{\left(a - \frac{pb}{q}\right)^2}{\frac{p}{q}N}$$

$$= \frac{\left(5 - \frac{\cdot 2 \times 55}{\cdot 8}\right)^2}{\frac{\cdot 2}{\cdot 8} \times 60} = \frac{\left(5 - \frac{55}{4}\right)^2}{15}$$

$$= 5 \cdot 104$$

இங்கு வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை 1.

$\nu = 1$ ஆக இருக்கும்போது, 5% வரையில்,

$\chi^2$-ன் மதிப்பு $= 3 \cdot 84 = \chi_0^2$

$$\chi^2 > \chi_0^2$$

எனவே, கொள்கை மறுக்கப்படுகிறது. மேற்காணும் புள்ளி விவரங்கள் புதிய தடுப்பு மருந்து சக்தி வாய்ந்தது என நிறுவு கின்றன.

**எடுத்துக்காட்டு :**

4 ஒருதலைச் சார்பற்ற நாணயங்களை 128 முறைகள் வீசிப் பெறப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கையைப் பின்வரும் பட்டியல் தருகிறது. நாணயத்தின் தன்மையை ஆராய எத்தகைய எடு கோளை எடுத்துக்கொள்வாய்? இதற்கான 'கை'வர்க்கத்தைக் ($\chi^2$) கணக்கிட்டு எவ்வாறு கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கையை நிர்ணயிப்பாய் என ஆராய்க. தேர்ந்தெடுத்த எடுகோளை ஆராய்க.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| தலைகளின் எண்ணிக்கை : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்கள் : | 10 | 30 | 50 | 30 | 8 |

எடுகோள் : நாணயம் ஒருதலைச் சார்பற்றது.

எனவே, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

$N(q+p)^n$ஐ விரித்து எழுதினால், கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைப் பெறலாம்.

$$128\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^4 = 128\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]$$

$$= 128\left[\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right]$$

∴ கணக்கியல் நிகழ்வெண்கள் : 8, 32, 48, 32; 8.

நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்கள் : 10, 30, 50, 30, 8.

$$\therefore\ \chi^2 = \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(30-32)^2}{32} + \frac{(50-48)^2}{48} + \frac{(30-32)^2}{32}$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{4}{32} + \frac{4}{48} + \frac{4}{32}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{8}{32} + \frac{4}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{6} = \cdot 833$$

$\nu = 1,\ \chi^2_{0\cdot 05} = 3\cdot 84$

$\chi^2 < \chi^2_{\cdot 05}$. எனவே, நாணயம் ஒருதலைச் சார்பற்றது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

15 ஆயிரம் இலக்கங்கள் ஒரு மடக்கைப் பட்டியலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டு, சமவாய்ப்பு எண்கள் பட்டியல் அமைக்கப்பட்டது ஒவ்வோர் இலக்கமும் பின்வரும் எண்ணிக்கையில் காணப் பட்டது. $\chi^2$ சோதனையைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வோர் இலக்கத் திற்கும், தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வாய்ப்பு சமமாக உள்ளது எனக் காட்டுக. வரையற்ற பாகை ஒன்பதிற்கு $\chi^2_{\cdot 05} = 6\cdot 911$.

| இலக்கம் : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் : | 1493 | 1441 | 1461 | 1552 | 1454 | 1454 | 1613 | 1491 | 1482 | 1519 |

பட்டியல்களில், இலக்கங்கள் சம எண்ணிக்கையில் காணப் படுகின்றன என்ற கொள்கையை எடுத்துக்கொண்டால், ஒவ்வோர் இலக்கத்திற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் யாவும்

$\frac{15000}{10} = 1500$ என வரும்.

$$\therefore \chi^2 = \frac{(1493 - 1500)^2}{1500} + \frac{(1441-1500)^2}{1500} + \dots \frac{(1519 - 1500)^2}{1500}$$

$$= \frac{1}{1500}[7^2 + 59^2 + 39^2 + 48^2 + 6^2 + 46^2 + 113^2 + 9^2 + 18^2 + 19^2]$$

$$= \frac{23042}{1500} = 15{\cdot}3613$$

$\therefore \chi^2 < \chi^2_{.05}$. எனவே, நாம் மேற்கொண்ட கொள்கை சரியானது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியலிலிருந்து தந்தையின் கண் நிறத்திற்கும், மகன் கண் நிறத்திற்கும் ஒற்றுமை உள்ளதா என ஆராய்க.

[செ. ப. க.]

| | | தந்தையின் கண் நிறம் | | |
|---|---|---|---|---|
| | | நீலம் | சிவப்பு | பழுப்பு |
| மகன் கண் நிறம் | நீலம் | 64 | 25 | 5 |
| | சிவப்பு | 30 | 32 | 20 |
| | பழுப்பு | 6 | 10 | 8 |

**தீர்வு :**

தந்தையின் கண் நிறத்திற்கும், மகனின் கண் நிறத்திற்கும் ஒற்றுமை இல்லை எனக் கொள்க. அவ்வாறு எனில் கணக்கியல் நிகழ்வெண்கள் முறையே,

$$\frac{100 \times 94}{200}, \frac{67 \times 94}{200}, \frac{33 \times 94}{200}, \frac{100 \times 82}{200}, \frac{67 \times 82}{200},$$

$\frac{33 \times 82}{200}, \frac{100 \times 24}{200}, \frac{67 \times 24}{200}, \frac{33 \times 24}{200}$ என ஆகும். இந்த மதிப்புகள் கீழே உள்ள பட்டியலில் அடைப்புக் குறியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | 64 (47) | 25 (31·49) | 5 (15·51) | 94 |
| $B_2$ | 30 (41) | 32 (27·47) | 20 (13·53) | 82 |
| $B_3$ | 6 (12) | 10 (8·04) | 8 (3·96) | 24 |
| மொத்தம் | 100 | 67 | 33 | 200 |

$$\chi^2 = \frac{\Sigma (f_0 - f_e)^2}{fe} = \frac{(64 - 47)^2}{47} + \frac{(25 - 31{\cdot}49)^2}{31{\cdot}49}$$

$$+ \frac{(5 - 15{\cdot}51)^2}{15{\cdot}51} + \frac{(30 - 41)^2}{41} + \frac{(32 - 27.47)^2}{27{\cdot}47} + \frac{(20 - 13{\cdot}53)^2}{13{\cdot}53}$$

$$+ \frac{(6 - 12)^2}{12} + \frac{(10 - 8{\cdot}04)^2}{8{\cdot}04} + \frac{(8 - 3{\cdot}96)^2}{3{\cdot}96}$$

$= 6{\cdot}135 + 1{\cdot}338 + 7{\cdot}122 + 2{\cdot}951 + .7469 + 3{\cdot}094 + 3$
$+ {\cdot}4778 + 4{\cdot}122 = 28{\cdot}9867$

$\chi^2_{\cdot 05} = 9{\cdot}49; \qquad \chi^2 > \chi^2_{\cdot 05}$

எனவே, தந்தையின் கண் நிறத்திற்கும் மகனின் கண் நிறத்திற்கும் ஒற்றுமை உண்டு.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பால், வேலையின் தன்மை என்கிற முறைகளில் 100 தொழிலாளர்களைப் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இவ்விரு தன்மைகளும் சார்பற்றிருக்கிறதா எனச் சோதனை செய்க. (செ.ப.க. 1974)

| | திறமை கொண்டவர் | திறமை அற்றவர் |
|---|---|---|
| ஆண் | 40 | 20 |
| பெண் | 10 | 30 |

(5 சதவீதத்தில் $\chi^2_{(1)} = 3{\cdot}841$)

**தீர்வு :**

கொள்கை : இரு தன்மைகளும் சார்பற்றவை என்க.

| | திறமை கொண்டவர் | திறமை அற்றவர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆண் | 40 | 20 | 60 |
| பெண் | 10 | 30 | 40 |
| மொத்தம் | 50 | 50 | 100 |

கணக்கியல் நிகழ்வெண்கள் முறையே,

$\frac{50 \times 60}{100}, \frac{50 \times 40}{100}, \frac{50 \times 60}{100}, \frac{50 \times 40}{100}$ ஆகும்.

| | திறமை கொண்டவர் | திறமை அற்றவர் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆண் | 30 | 30 | 60 |
| பெண் | 20 | 20 | 40 |
| மொத்தம் | 50 | 50 | 100 |

$$\chi^2 = \frac{(40-30)^2}{30} + \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(10-20)^2}{20}$$

$$+ \frac{(30-20)^2}{20} = 16{\cdot}67$$

வரையற்ற பாகை $(\nu) = (2-1)\,(2-1) = 1$

$\chi^2{}_{\cdot 05} = 3{\cdot}841$

$\chi^2 > \chi^2{}_{\cdot 05}$

எனவே, இரு தன்மைகளும் சார்புள்ளவை.

[குறிப்பு : $\chi^2$ (ஏட்ஸ் திருத்தத்தின் அடிப்படையில்)

$$= \frac{100\,[(40 \times 30 - 10 \times 20) - 50]^2}{50 \times 50 \times 60 \times 40}$$

$$= 15{\cdot}04.$$

$\chi^2 > \chi^2{}_{\cdot 05}$ ∴ பால், வேலையின் தன்மை இரண்டும் சார்புள்ளவை.]

**எடுத்துக்காட்டு :**

அடியிற்காணும் $2 \times n$ என்ற நேர்வுப் பட்டியலுக்குப் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

| | $A_1$ | $A_2$ | | $A_i$ | | $A_n$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | $a_1$ | $a_2$ | | $a_i$ | | $a_n$ | $a$ |
| $B_2$ | $b_1$ | $b_2$ | | $b_i$ | | $b_n$ | $b$ |
| மொத்தம் | $N_1$ | $N_2$ | | $N_i$ | | $N_n$ | $N$ |

**தீர்வு :**

$\chi^2$-ன் மதிப்பு,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \ (p_i - p)^2$$

இங்கு $p_i = \dfrac{a_i}{N_i}$, $p = \dfrac{a}{N}$, $w_i = \dfrac{N_i}{pq}$, $q = \dfrac{b}{N}$

$$q_i = 1 - p_i$$

**தீர்வு :**

$A_i B_1$-ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $= \dfrac{a N_i}{N}$

$A_i B_2$-ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $= \dfrac{b N_i}{N}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\left(\frac{a N_i}{N} - a_i\right)^2}{\frac{a N_i}{N}} + \frac{\left(\frac{b N_i}{N} - b_i\right)^2}{\frac{b N_i}{N}} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{NN_i}{a} \left(\frac{a_i}{N_i} - \frac{a}{N}\right)^2 + \frac{NN_i}{b} \left(\frac{b_i}{N_i} - \frac{b}{N}\right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{N_i}{p} (p_i - p)^2 + \frac{N_i}{q} (q_i - q)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{N_i}{p} (p_i - p)^2 + \frac{N_i}{p} (1 - p_i - 1 + p)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ N_i (p_i - p)^2 \left( \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{pq} (p_i - p)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i (p_i - p)^2$$

இங்கு $p_i = 1 - q$, $p = 1 - q$.

$t$, $F$ — பரவல்

**பயிற்சி**

(1) 10 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறிலுள்ள மாணவர்களின் அறிவுக் கூர்மைக்கெழுக்கள் (*I. Q.*) வருமாறு :

102, 109, 100, 97, 85, 90, 103, 112, 122, 72

சராசரி அறிவுக் கூர்மைக்கெழு 102 ஆக உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இது எடுக்கப்பட்டிருக்கக்கூடும் என்று சொல்ல முடியுமா ? முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

[விடை : கூறமுடியும் ; 92·2 ± 10·2]

(2) ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சம வாய்ப்புக் கூறு 22, 15, 8, 13, 6, 11, 16, 9, 7 என்ற மதிப்புகளைத் தருகிறது. "முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 10" என்னும் எடுகோளை ஆய்க.

(3) *A*, *B* என்ற இரு குதிரைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட பாதையில் ஓடுவதற்கான நேரங்கள் (விநாடிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டு உள்ளன :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| குதிரை *A* : | 28 | 30 | 32 | 33 | 33 | 29 | 34 |
| குதிரை *B* : | 29 | 30 | 30 | 24 | 27 | 29 | |

இரு குதிரைகளுக்கும் வேறுபாடு உண்டா என ஆய்க.

வரையற்ற பாகை 11-க்கு ஏற்ற 5% நிகழ்தகவுக்கிசைந்த $t$-ன் மதிப்பு 2·20. [விடை: $t = 2{\cdot}43$. வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கது.]

(4) இரு பிரிவு மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பு எண்கள் பின்வருமாறு :

முதல்பிரிவு : 18, 20, 36, 50, 49, 36, 34, 49 41

2-ம் பிரிவு : 29, 28, 26, 35, 30 44, 46.

இரு பிரிவு மாணவர்களும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வேற்றுமையை ஆய்க. 5% நிகழ்தகவுக்கேற்ற 14 வ. பா. க்கேற்ற $t$-ன் மதிப்பு = 2·14

[விடை : குறிப்பிடத் தக்கதல்ல]

(5) *A B* என்ற இரு வகையான மின்சார விளக்குகள் எரிந்த நேரங்களைக் கண்டு, பின்வரும் விவரங்கள் பதிவு செய்யப் பட்டிருந்தன :

| | கூறின் எண்ணிக்கை | கூட்டுச் சராசரி | மாற்றம் |
|---|---|---|---|
| *A* | 10 | 500 மணிகள் | 100 |
| *B* | 10 | 560 மணிகள் | 121 |

இரு சராசரிகளுக்குள் உள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா என ஆய்க.

[வரையற்ற பாகை $\nu$ = 18-க்கும் 5% நிகழ்தகவு அளவுக்கும் ஏற்ற $t$-ன் மதிப்பு = 2·1].

[விடை : வேற்றுமை மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கது.]

(6) 10 மாணவர்களுக்கு நினைவாற்றல் சோதனை கொடுக்கப் பட்டது. அதாவது ஒரு படத்தை ஒரு நிமிடம் பார்க்கும்படி கூறிவிட்டு, பின்பு படத்திலுள்ள பொருள்களின் பெயரைப் படத்தைப் பார்க்காமல் எழுதச்சொல்லி நினைவாற்றல் சோதிக்கப் பட்டது. பிறகு ஒரு வாரம் நினைவாற்றலுக்கென இவர்களுக்குப் பயிற்சி கொடுக்கப்பட்டது. மீண்டும் இதே சோதனையைச் செய்து முடிவுகளைக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுத்துள்ளார்கள். பயிற்சி, இவர்களுக்கு நினைவாற்றலில் ஏதேனும் முன்னேற்றத்தைத் தந்துள்ளதா என ஆய்க.

| மாணவர்கள் | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பயிற்சிக்கு முன் சோதனை I | 10 | 8 | 7 | 9 | 8 | 10 | 9 | 6 | 7 | 8 |
| பயிற்சிக்குப் பின் சோதனை II | 12 | 8 | 8 | 10 | 8 | 11 | 9 | 8 | 9 | 9 |

[விடை : $t = 3{\cdot}87$. மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கது.]

(7) ஓர் இரு மாறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 27 மதிப்புகளைக் கொண்ட கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு ·34. இது குறிப்பிடத்தக்க ஒட்டுறவுக் கெழுதானா ? 5%, 2% வரைகளுக்கு $\nu$-ன் குறைந்த பட்ச மதிப்புக்கள் என்ன ?

[விடை : குறிப்பிடத்தக்கதல்ல ; 0·38, 0·445]

(8) ஓர் இயந்திரம் 6 செ.மீ. நீளமுள்ள கம்பிகளை வெட்டுவதற்காக அமைக்கப்படுகிறது. அதிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட கம்பிகளில் 10 கம்பிகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்படுகிறது. அவற்றின் நீளங்கள் 6·2, 6·3, 6·1, 6·1, 5·8, 5·9, 5·8, 5·9, 5·6, 5·7. இயந்திரத்தின் அமைக்கப்பட்ட விதம் நம்பத்தகுந்ததா ?

[மதுரை '71]

[குறிப்பு: $$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{5{\cdot}94 - 6}{\sqrt{\frac{0{\cdot}464}{9}}} = {\cdot}8358$$

$\nu = 9$, $t_{\cdot 05} = 2.262$] [விடை : இயந்திரம் அமைக்கப்பட்ட விதம் நம்பத்தக்கது.]

(9) 12 நோயாளிகளுக்கு ஒரு வகைக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் கொடுக்கப்பட்டபிறகு அவர்களது இரத்த அழுத்த பின்வருமாறு அதிகரித்தது :

5, 2, 8, − 1, 3, 0. 6, — 2, 1, 5, 0, 4 இரத்த அழுத்தம் அதிகரிப்பதற்குக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் காரணமாக இருந்தது என முடிவு செய்யமுடியுமா என்று சோதனை செய்க.

[விடை : $t = 2{\cdot}347$ : வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது ஆகவே, இரத்த அழுத்த அதிகரிப்புக்குக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் காரணம் என முடிவு செய்யலாம்.]

(10) கீழ்க்காணும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி 60 கல்லூரிகளில் பணிபுரியும் ஆசிரியர்களின் வேலை அனுபவத்திற்கும் தேர்வு முடிவுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிடுக. விடையைப் பற்றிய குறிப்பை வரைக.

| | அனுபவமுள்ள ஆசிரியர்கள் | அனுபவமில்லாத ஆசிரியர்கள் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| நல்ல முடிவுகள் | 29 | 7 | 36 |
| மட்ட முடிவுகள் | 11 | 13 | 24 |
| மொத்தம் | 40 | 20 | 60 |

[ குறிப்பு, $\chi^2$ (Yates திருத்தல் அடிப்படையில்)

$$\frac{60\ \{\,|\,29 \times 13 \quad 11 \times 7\,|\, - 30\,\}^2}{40 \times 20 \times 36 \times 24}$$

$\gamma = 1, \chi^2{}_{\cdot 05} = 3{\cdot}84.\ \chi^2 > \chi^2{}_{\cdot 05}$ எனவே, ஆசிரியரின் அனுபவம், தேர்வின் முடிவுகளைப் பாதிக்கின்றன.]

(11) (a) பத்து மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவுக்கு நினைவு சோதனைப் போட்டி நடத்தப்பட்டது. பிறகு, ஒரு மாதப் பயிற்சிக்குப் பிறகு வேறொரு சோதனை நடத்தப்பட்டது. இரண்டு சோதனைகளிலும் பத்து மாணவர்களும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பயிற்சியினால் குறிப்பிடத்தக்க பயன் விளைந்துள்ளதா எனக் காண்க.

| மாணவர் : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| சோதனை 1 : | 8 | 6 | 5 | 9 | 6 | 8 | 11 | 7 | 6 | 3 |
| சோதனை 2 : | 12 | 9 | 10 | 15 | 7 | 9 | 20 | 17 | 15 | 7 |

(b) ஒவ்வொன்றிலும் பத்து மாணவர்கள் கொண்ட இரண்டு குழுவினரில் முதற்குழுவினரை ஒரு மாதப் பயிற்சிக்குப் பிறகும் கட்டுரைத் தேர்வுகள் எழுதச்செய்ததில் கீழ்க்காணும் மதிப்பெண்கள் கிடைத்தன :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| குழு $A$ : | 10 | 8 | 7 | 9 | 8 | 10 | 9 | 6 | 7 | 8 |
| குழு $B$ : | 12 | 8 | 8 | 10 | 8 | 11 | 9 | 8 | 9 | 9 |

பயிற்சினுல் குறிப்பிடத்தக்க முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளதா எனக் காண்க.

[விடை $t = 1{\cdot}64$, $\gamma = 18$ குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை.]

(c) 9, 7 அளவுள்ள இரண்டு ராண்டம் கூறுகளின் சராசரி, மற்ற மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

| | மாதிரி 1 | மாதிரி 2 |
|---|---|---|
| அளவு $n$ : | 9 | 7 |
| சராசரி $\bar{x}$ : | 196·40 | 198·82 |
| $\Sigma (x - \bar{x})^2$ : | 2694 | 18·73 |

இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து எடுக்கப்பட்டவையா என ஆய்க.

(12) (a) 11 எலிகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியில் அவற்றின் ரத்தத்தின் பசைத் தன்மையின் (Viscosity of blood) சராசரி 3·92, திட்ட விலக்கம் 0·61 என்ருல், இந்த மாதிரியைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu$ - க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லையைக் கணக்கிடுக.

(b) '$t$' புள்ளியியல் அலகின் பயன்களை விளக்குக.

(c) 39 இரட்டைப் பதிவுகள் கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறில் $\gamma = 0{\cdot}6$ எனக் காணப்பட்டது. இனத் தொகுதியில் $\rho = 0{\cdot}4$ என்ற இடையுறவு இருக்குமாருல், முன் சொல்லப்பட்ட கூறு அவ்வினத் தொகுதியில் ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு என நிறுவ முடியுமா?

(d) மாணவன் '$t$' ஐ வரையறுத்து, முக்கியத்துவச் சோதனைகளில் அதன் பயனை விவரிக்கவும். (செ.ப.க.)

(e) இரண்டு வெவ்வேறு முறைகளில் தயாரிக்கப்படும் தூய இரும்பின் கூறுகளின் உருகுநிலை (சென்டிகிரேடில்) வருமாறு :

*A* : 1439, 1519, 1518, 1512, 1512. 1514, 1489, 1508, 1508, 1494

*B* : 1509, 1494, 1512, 1483, 1507, 1491,

இரண்டு முறைகளும் ஒரே உருகுநிலையுள்ள இரும்பையே கொடுக்கின்றன என்ற எடுகோளை ஆராய்க.

(13) (a) முக்கியத்துவ ச் சோதனைகளில், $F$-பரவலின் முக்கிய உபயோகங்களையும் பயன்களையும் ஆராய்க.

'$F$', '$t$' பரவல்களுக்கு உள்ள தொடர்பை ஆராய்க.
[1974 செ.ப.க.]

(b) ஸ்டுடன்ஸ் — '$t$' என்றால் என்ன?

'$t$' பரவல் எந்த தற்கோள்களுடன் எவ்வாறு கீழ்க்கண்ட இடங்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது எனக் கூறுக.

கூறுகளின் சராசரியில் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா என அறிக.

காணப்பட்ட ஒட்டுறவுக் கெழு குறிப்பிடத்தக்கதா என அறிக.
[1974 செ.ப.க]

(14) '$n$ பதிவுகளைக் கொண்ட $t$—அளவை' என்ன என்பதை வரைந்து பொருள் தருக.
[1974 செ.ப.க]

இரண்டு தொகுதிகளின் பரவற்படிகள் $\sigma_1^2$ $\sigma_2^2$, சமமானவை என எவ்வாறு பரிசோதிப்பாய்?
[செ.ப.க 1974]

(15) ஒரு பெரிய இறக்குமதியில் 12 அளவுகள் கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்புக்கூறின் நீளங்கள் (அங்குலத்தின் 2 பகுதிகளில் பதிவானவை) 48, 46, 49, 46, 52, 45, 43, 47, 47, 46, 47, 50 ஆகும். இறக்குமதியின் சராசரி நீளம் 46 எனும் எடுகோளைப் பரிசோதனை செய்து பார்.
[1974 செ.ப.க.]

[குறிப்பு: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$

$\bar{x} = \frac{566}{12}$; $m = 46$, $n=12$, $\gamma = 11$]

(16) சம பரவற்படியுள்ள இரு இயல்நிலைப் பரவல்களிலிருந்து இரு சார்பற்ற கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

| கூறு | அளவு | கூட்டுச்சராசரி | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 23 4 | 2·5 |
| 2 | 12 | 24·9 | 2·8 |

கூட்டுச்சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததா என ஆராய்க.

[குறிப்பு: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

$$= \frac{23{\cdot}4 - 24{\cdot}6}{\sqrt{\dfrac{(16\ 2.5)^2 + 12\,(2{\cdot}8^2)}{16 + 12 - 2}\left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{12}\right)}}$$

$$|t| = \frac{1{\cdot}5}{\sqrt{\dfrac{10) + 94{\cdot}08}{25}({\cdot}0625 + {\cdot}0833)}} = 1{\cdot}41$$

$\gamma = 26$, $t_{\cdot 05} = 2{\cdot}056$ $\therefore$ $t < t_{\cdot 0}$ , வேறுபாடு மிகைத்தன்மை வாய்ந்ததல்ல.]

(17) கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து *A*, *B* என்னும் இரு தொழிற்சாலைகளின் வாரச் சம்பளங்கள் சமமான பரவற்படிகளுடன் உள்ளனவா என ஆராய்க.

| வாரச் சம்பளம் | தொழிலாளர்களின் தொழிற்சாலை *A* | எண்ணிக்கை தொழிற்சாலை *B* |
|---|---|---|
| 5—9 | 20 | 15 |
| 10—14 | 18 | 20 |
| 15—19 | 30 | 35 |
| 20—24 | 25 | 30 |
| 25—29 | 2 [illegible] | 18 |
| 30—34 | 15 | 17 |

[செ.ப.க. 1974]

[குறிப்பு : இரு கூறுகளுக்கும் பரவற்படிகள் கண்டு, பின்பு முழுமைத் தொகுதிகளின் பரவற்படிகள் $u^2$, $V^2$ எனின் $F = \dfrac{u^2}{V^2} \gtrless F_{\cdot 05}$ எனக் காண்க.]

(18) ஓர் இரு வழி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 18 ஜோடி மதிப்புகளைக் கொண்ட கூறுக்கு 5% வரைக்கேற்ற $\gamma$-ன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் காண்க.

(19) இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இரு இயைபிலா மாதிரிகளின் மதிப்புகள் வருமாறு :

மாதிரி I: 20, 16, 27, 26, 23, 22, 18, 24, 25, 19

மாதிரி II: 27 33. 42, 35, 32, 34, 38 28, 28, 41, 43, 30, 37.

இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் பரவற்படிகளைக் கண்டுபிடி. இரு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே பரவற்படியைக் கொண்டுள்ளனவா என்பதை ஆய்க.

[விடை: $F=2\cdot14$. வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. அதாவது மாதிரிகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டவை.]

(20) 9, 7 எண்ணிக்கைகளடங்கிய இரு தனித்த கூறுகளில் ஒரு மாறி (நீளம் அங்குலங்களில்) பெற்ற மதிப்புக்கள் பின் வருமாறு :

மாதிரி I : 15, 11, 13, 9, 12, 14, 12, 9, 11

மாதிரி II : 12, 10, 9, 11, 8, 7, 9.

மாற்றங்களுக்கிடையேயுள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதை ஆராய்க.

(21) இரண்டு தொகுதிகளிலுள்ள எலிக் குஞ்சுகளுக்கு $A$, $B$ என்ற இரு மருந்துகள் கொடுக்கப்பட்டன. அவைகள் காச நோயால் பீடிக்கப்பட்டன. பின்வரும் விவரங்கள் எத்தனை எலிக் குஞ்சுகள் மறுநாள் இறந்தன என்பதைக் கொடுக்கின்றன.

மருந்து $A$ : 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 12,

மருந்து $B$ : 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 17.

இந்தக் கூறுகள் ஒரே மாறுபாடு உடைய தொகுதிகளைச் சார்ந்தவை என்ற சூனிய எடுகோளை (அதாவது இல்லெனும் எடுகோளை) ஆராய்க.

[ம. ப. க., பி. எஸ்ஸி., ஏப்ரல், 1972]

[விடை : வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. அதாவது கொடுக்கப்பட்ட கூறுகள் ஒரே மாறுபாடு உடைய தொகுதிகளைச் சார்ந்தவை என்ற சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.]

**கை வர்க்கப் பரவல் ($\chi^2$-Distribution)**

**பயிற்சி**

(1) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பட்டியலிலிருந்து 200 இலக்கங்கள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. இலக்கங்களின் அலைவெண்கள் வருமாறு :

| இலக்கங்கள் | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண்கள் | 18 | 19 | 23 | 21 | 16 | 25 | 22 | 20 | 21 | 15 |

" இந்த உறுப்புகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பட்டியலில் இலக்கங்கள் சம அளவில் எடுக்கப்பட்டன" என்னும் எடுகோளை கை வர்க்கச் சோதனை மூலம் ஆய்க. [வரையற்ற பாகை 9-க்கும் 5% நிகழ்தகவு அளவுக்குமேற்ற $\chi^2$ன் மதிப்பு 16·92.]

[விடை: $\chi^2 = 4 \cdot 3$ ; எடுகோள் ஏற்கத்தக்கது.]

(2) ஒரு பகடை 600 முறைகள் வீசப்பட்டது. அவற்றின் அலைவெண்கள் பின்வருமாறு :

| எண்ணிக்கை : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் : | 96 | 97 | 104 | 103 | 98 | 102 | 600 |

பகடை பண்புள்ளதா என்பதை ஆய்க.

(3) ஒரே மாதிரியான 4 நாணயங்கள் 160 முறைகள் சுண்டப்பட்டன. சோதனையின் முடிவைக் கீழே காணலாம் :

| தலைகளின் எண்ணிக்கை : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் : | 8 | 32 | 55 | 50 | 15 |

இதற்கு ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்திக் கணக்கியல் மதிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை ஆய்க. [$\chi^2 = 7 \cdot 1417$; $\gamma = 4$; வேறுபாடு இல்லை.]

(4) ஜெர்மன் மாகாணங்களில் 14 ஆண்டுகளாகத் தற்கொலை புரிந்துகொண்ட பெண்களைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன :

| ஒரு மாகாணத்தில் ஓர் ஆண்டில் நடந்த தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நேரில் கண்ட அலைவெண்கள் | 9 | 19 | 17 | 20 | 15 | 11 | 8 | 2 | 3 | 5 | 3 | 112 |

இதற்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்திக் கணக்கியல் மதிப்புக்களுக்கும் நேரில் கண்ட மதிப்புகளுக்கும் வேற்றுமை யுண்டு எனக் காட்டுக.

[விடை : கணக்கியல் அலைவெண்கள் 3·5, 12·1, 21·0, 24.3, 21·1, 14·6, 8·5. $\chi^2 = 16.07$; $\gamma = 6$.

5-க்கும் குறைவான அலைவெண்களின் மதிப்பை அதற்கு முன்போ பின்போ உள்ள அலைவெண்ணுடன் சேர்த்துக் கொள்க.]

(5) கீழ்க்கண்ட விபரங்களுக்குக் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி ஒரு பரவளையத்தைப் பொருத்துக. இது நேர் கோட்டைவிட மிகச் சிறந்த பொருத்தமா என்பதை ஆய்க.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு : | 1897 | 1898 | 1899 | 1900 | 1901 |
| குறியீட்டெண் : | 100 | 101 | 104 | 104·5 | 111 |

[வரையற்ற பாகை 2 கொண்ட நேர்க்கோட்டின் $\chi^2 = \cdot086$ வரையற்ற பாகை கொண்ட பரவளையத்தின் $\chi^2 = \cdot0368$. இரண்டும் சம அளவு பொருத்தமுள்ளவை.]

(6) ஒரு $s \times t$ நேர்வுப் பட்டியலில் $\chi^2 = N(s-1)$ அல்லது $N(t-1)$ (எது குறைந்த மதிப்புடையதோ) எனக் காட்டுக.

[$i$ ஆவது நெட்டுப் பிரிவு, $j$ ஆவது கிடைப்பிரிவில் உள்ள எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $E_{ij}$ எனில், $E_{ij} = \frac{(A_i)(B_i)}{N}$.

நேரில் கண்ட நிகழ்வெண் $O_{ij}$ எனில், $O_{ij} \le A_i$, மேலும் $O_j \le B_j$

$$\chi^2 = \Sigma\Sigma \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{\Sigma\Sigma O_{ij}^2}{E_j} - N$$

$$= N\Sigma \frac{\Sigma O_j}{(A_i)} \cdot \frac{O_{ij}}{(B_j)} - N$$

$$\le N\left[\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \frac{O_{ij}}{A} - 1\right] \quad \left(\because \frac{O_{ij}}{B_i} < 1\right) \text{(அதாவது)}$$

$$\le N\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{A}{A_i}\right) - 1 \le N(s-1)\right]$$

(7) ஒரு வாரத்தில் பல நாள்களிலும் ஏற்பட்ட விமான விபத்துகளின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது. விபத்துகள் வாரத்தில் சம அளவாகப் பரவி உள்ளனவா என்பதை ஆராய்க.

| நாள்கள் | திங்கள் | செவ்வாய் | புதன் | வியாழன் | வெள்ளி | சனி | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| விபத்துகளின் எண்ணிக்கை | 14 | 16 | 12 | 11 | 9 | 14 | **84** |

[**விடை :** விபத்துக்கள் சம அளவுள்ளதாக உள்ளது.]

(8) விதைகளைப் பற்றிய சோதனையில் மெண்டல் (Mendel) பின்வரும் விபரங்களைப் பெற்றார் :

| | |
|---|---|
| உருண்டை மஞ்சளான விதைகள் | 315 |
| சுருங்கிய மஞ்சள் விதைகள் | 101 |
| உருண்டை பச்சையான விதைகள் | 108 |
| சுருங்கிய பச்சை விதைகள் | 32 |
| மொத்தம் | 556 |

9 : 3; 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் இவைகளிருப்பதாகக் கணக்கியல் மதிப்புகள் கூறுகின்றன. $\chi^2$ மதிப்பைக் காண்க. நேரில் கண்ட மதிப்புகளுக்கும் கணக்கியல் மதிப்புகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை ஆய்க.

[$\gamma = 3$-க்கு, $p = \cdot 95$-க்கு $\chi^2 = \cdot 35$, $p = \cdot 99$-க்கு $\chi^2 = \cdot 115$ $p = \cdot 9$-க்கு $\chi^2 = 6$]

[விடை : நேரில் கண்ட மதிப்புகளுக்கும் கணக்கியல் மதிப்புகளுக்கும் அதிக தொடர்பு உண்டு.]

(9) பின்வரும் விவரத்திலிருந்து ஊசி போட்டுக் கொள்ளுதலுக்கும் எலும்புருக்கி நோய்வராமல் தடுத்துக் கொள்ளுதலுக்கும் உள்ள உறவை ஆய்க.

| | எலும்புருக்கி நோயால் பாதிக்கப் பட்டவர் | எலும்புருக்கி நோயால் பாதிக்கப் படாதவர் |
|---|---|---|
| தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொண்டவர் | 12 | 26 |
| தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொள்ளாதவர். | 16 | 6 |

(10) கார் ஓட்டும் வேலைக்கு ஆள் எடுப்பதில் முதல், இறுதித் தேர்வுகளில் கிடைத்த விவரத்தைப் பின் வரும் பட்டியல் அறிவிக்கிறது:

| | | முதல் தேர்வு | |
|---|---|---|---|
| | | தேறியவர் | தேறாதவர் |
| இறுதித் தேர்வு | தேறியவர் | 605 | 135 |
| | தேறாதவர் | 195 | 65 |

முதல், இறுதித் தேர்வுகளுக்கிடையே உள்ள உறவை $\chi^2$ சோதனை மூலம் ஆய்க.

(11) ஒரு பகுதியிலிருந்து இயைபிலாமாதிரி முறைப்படி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 பேர்களின் கல்விநிலையைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் காணலாம்:

| | | நடுத்தரப் பள்ளி | உயர்நிலைப் பள்ளி | கல்லூரி | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| இனம் | ஆண் | 10 | 15 | 25 | 50 |
| | பெண் | 25 | 10 | 15 | 50 |
| | மொத்தம் | 35 | 25 | 40 | 100 |

கல்வி இனத்தைச் சார்ந்திருக்கிறதென உன்னால் கூறமுடியுமா ?

[$\gamma = 2$-க்கு 5% நிகழ்தகவுக்கு $\chi^2 = 5 \cdot 99$; 1% நிகழ்தகவுக்கு $\chi^2 = 9 \cdot 21$]

# 8. பல்வகைக் கூறுகளும், அவற்றின் கணக்கியல் பண்புகளும்

**குறியீடுகள்**

முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை அல்லது இராசிகளைப் பெரிய எழுத்துகளிலும், அவற்றுக்கொத்த கூறுகளின் இராசிகளைச் சிறிய எழுத்துகளிலும் குறிப்பது வழக்கம்.

முழுமைத்தொகுதியின் மொத்தம் $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$

($Y_i$, $N$ அளவுடைய முழுமைத்தொகுதியின் $i$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பைக் குறிக்கிறது.)

முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி

$$= \bar{Y} = \frac{1}{N}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

கூறின் இராசிகளின் மொத்த மதிப்பு

$$= y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

கூறின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

முழுமைத்தொகுதியின் மொத்த மதிப்பு, கூட்டுச்சராசரி போன்ற பண்பளவைகள் நமக்குத் தெரியாது. அவற்றிற்கு இணையான கூறின் அளவுகளிலிருந்து கண்ட மதிப்பீடுகளைக் கொண்டே நாம் அவற்றை அறிகிறோம்.

முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியின் மதிப்பீடு $\hat{\bar{Y}}$ என்றும், மொத்த மதிப்பின் மதிப்பீடு $\hat{Y}$ எனவும் குறிக்கப் படுகின்றன.

ஒரு நல்ல மதிப்பீட்டிற்கு இன்றியமையாத பல்வேறு தன்மைகளில் ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மை மிகவும் முக்கியமானது.

பல்வேறு வகையினைச் சார்ந்த கூறுகளின்மூலம் பெறும் மதிப்பீட்டுச் சார்புகளின் தன்மைகளையும், அவற்றின் பரவற்படிகளையும் வரும் பகுதிகளில் சில தேற்றங்கள் மூலம் காண்போம் :

**தேற்றம் (1) :**

ஒரு கூறின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}$, முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{Y}$-ன் ஒருபாற்சாரா மதிப்பீடு.

**நிறுவுதல் :**

வரையறையின்படி,

$$E(y) = \frac{\Sigma \bar{y}}{NC} = \frac{\Sigma (y_1 + y_2 + \dots + y)}{n \cdot \frac{N!}{n!\,(N-n)!}}$$

இங்குக் கூட்டுத் தொகை எல்லா $NC_n$ கூறுகளுக்கும் விரிவு படுத்தப்பட்டுள்ளது. இக் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிட எவ்வளவு கூறுகளில் $y_i$ என்ற குறிப்பிட்ட இராசி உள்ளது என்பதைக் காண்போம்.

$y_i$ஐ நீக்கியபிறகு மீதியுள்ள $N-1$ இராசிகளில், $n-1$ இராசிகளை எடுத்துக்கொண்டு, ஒவ்வொரு கூறிலும் $y$ ஐப் புகுத்தினோமானால், கூறுகளின் எண்ணிக்கை $N-1\,C_{n-1}$ ஆகும்.

எனவே $\Sigma (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

$$= \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\,(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N)$$

$$\therefore \quad E(\bar{y}) = \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\left[\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + 1/N}{n \cdot \frac{N!}{n!}}\right]$$

$$= \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N} = \bar{y}$$

$E(\bar{y}) = \bar{Y}$ ஆதலால்,

$\bar{y}$, $\bar{Y}$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு.

இதனை $\hat{\bar{Y}} = \bar{y}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

**கிளைத்தேற்றம் (1) :**

$\hat{Y} = N\bar{y}$ என்பது முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுத்தொகை $Y$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு.

**நிறுவுதல் :**

$$Y = N\bar{Y}$$

எனவே $\hat{Y} = N\hat{\bar{Y}}$

$$= N\bar{y} = N\frac{Y}{n}$$

ஏனெனில் $\bar{y}$ என்பது $\bar{Y}$-ன் மதிப்பீடாகக் கொள்ளப் படுகிறது.

**கிளைத்தேற்றம் (2) :**

ஒரு சாதாரண ராண்டம் கூறின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}$-ன் பரவற்படி $V(\bar{y})$ எனின்,

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

$$= \frac{S^2 (N-n)}{n \cdot N}$$

**நிறுவுதல் :**

$$V(\bar{y}) = \Sigma\frac{(\bar{y} - \bar{Y})^2}{Nc_n} \quad [Nc_n \text{ கூறுகள் இங்கு இருப்பதால்}]$$

$$= \frac{1}{Nc_n}\Sigma\left(\frac{y_1 + y_2 + \dots\dots y_n}{n} - \bar{Y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N_{c_n}\, n^2} \Sigma \{(y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) \ldots + (y_n - \bar{Y})\}^2$$

$$= \frac{1}{N_{c_n}\, n^2} \Sigma [\{ (y_1 - \bar{Y})^2 + (y_2 - \bar{Y})^2 + \ldots (y_n - \bar{Y})^2 ] + 2 \{ (y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + \ldots + (y_{n-1} - \bar{Y}) \} ]$$

$$= \frac{1}{N_{c_n}\, n^2} \Sigma (y_1 - \bar{Y})^2 + \ldots (y_n - \bar{Y})^2 + \frac{2}{N_{c_n}\, n^2} \Sigma \{(y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + \ldots + (y_{n-1} - \bar{Y})(y_n - \bar{Y})\}$$

$$= \frac{1}{N_{c_n}\, n^2}\, {}^{N-1}C_{n-1} [(Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \ldots + (Y_N - \bar{Y})^2] + \frac{2}{N_{c_n}\, n^2}\, {}^{N-2}C_{n-2} [(Y_1 - \bar{Y})(Y_2 - \bar{Y}) + \ldots (Y_{N-1} - \bar{Y})(Y_N - \bar{Y})]$$

$$= \frac{n}{N} \frac{1}{n^2} (N-1) S^2 + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \cdot \frac{1}{n^2} [\{ (Y_1 - \bar{Y}) + (Y_2 - \bar{Y}) + \ldots (Y_N - \bar{Y}) \}^2 - \{ (Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \ldots (Y_N - \bar{Y})^2 \}]$$

அதாவது $\frac{(N-1) S^2}{N} + \frac{(n-1)}{N(N-1)} [-(N-1) S^2]$

$$= \frac{(N-1) S^2}{N_n} \left\{ 1 - \frac{(n-1)}{N-1} \right\}$$

$$= \frac{(N-1) S^2}{N} \frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{(N-n) S^2}{N_n}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{S^2}{n} \frac{(N-n)}{N}$$

**கிளைத்தேற்றம் 1 :**

$\bar{y}$-ன் திட்டவிலக்கம், $\bar{y}$-ன் திட்டப்பிழை என்று வழங்கப்படுகிறது.

எனவே $\bar{y}$-ன் திட்டப்பிழை,

$$\sigma_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N}}$$

**கிளைத்தேற்றம் 2 :**

$\hat{Y} = N\bar{y}$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுத் தொகையின் மதிப்பீடு.

எனவே, $\hat{Y}$-ன் பரவற்படி,

$$V(\hat{Y}) = V(N\bar{y})$$
$$= E(N\bar{y} - N\bar{Y})^2$$
$$= N^2 E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$
$$= N^2 \frac{N-n}{N_n} S^2$$

**கிளைத்தேற்றம் 3 :**

$\hat{Y}$-ன் திட்டப்பிழை என்பது

$$\sigma_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{(N-n\ S^2 N^2}{N_n}}$$
$$= S \sqrt{\frac{N(N-n)}{n}}$$

**தேற்றம் 2 :**

ஒரு சாதாரண ராண்டம் கூறின் $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$

என்பது, $S^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Sigma(y - Y)^2}{(N-1)}$ -ன் ஒருபாற் சாரா மதிப்பீடு.

நிறுவுதல் :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{Y}) - (\bar{y} - \bar{Y})]^2$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2 + n(\bar{y} - \bar{Y})^2 - 2(\bar{y} - \bar{Y}) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y}) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{Y} = y_1 - Y + (y_2 - \bar{Y}) + \ldots (y_n - \bar{Y})$$

$$= n\bar{Y} - n\bar{Y} = n(\bar{y} - Y)$$

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2 + n(\bar{y} - \bar{Y})^2 - 2(\bar{y} - \bar{Y})\, n(\bar{y} - Y) \right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y)^2 - n(\bar{y} - Y)^2 \right]$$

$$E(s^2) = \frac{1}{(n-1)} \left[ E\left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2 \right\} - n\{E(\bar{y} - \bar{Y})^2\} \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[ \frac{N-1\, C_{n-1}}{N\, C_n} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 - n \frac{(N - n)\, s^2}{N_n} \right]$$

$$\because \quad E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = V(\bar{y})$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{n}{N}(N-1)\, S^2 - \frac{N}{N}\frac{n}{N} S^2\right]$$

$$= \frac{S^2}{(n-1)N}\, [n(N-1) - N + n]$$

$$= \frac{N S^2 (n-1)}{N(n-1)} = S^2$$

$E(s^2) = S^2$. எனவே $s^2$, $S^2$-ன் ஒருபாற்சாரா மதிப்பீடு.

[குறிப்பு : **வரையுற்ற முழுமைத் தொகுதி திருத்தம்** (Finite Poplution Correction)

$$V(\bar{y}) = \frac{(N-n)}{N}\,\frac{S^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(1 - \frac{n}{N}\right) S^2\right\}$$

முழுமைத்தொகுதி வரையுற்றதாக இருக்கும்பொழுது $\frac{n}{N}$ பூச்சியத்தை அடைகின்றது.

எனவே, வரையுற்ற முழுமைத் தொகுதியில், $\bar{y}$-ன் பரவற்படி கிடைக்க $\bar{Y}$-ன் பரவற்படியை $\frac{N-n}{N}$ஆல் பெருக்கவேண்டும். $\frac{N-n}{N}$ என்பது, 'வரையுற்ற முழுமைத் தொகுதி திருத்தம்' என வழங்கப் படுகின்றது.]

**படுகைக் கூறுகள் :** படுகைக் கூறில், $N$ இராசிகளை உடைய முழுமைத் தொகுதி முதலில், $N_1, N_2 \ldots\ldots N_L$ அலகுகள் உடைய சிறு தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இந்தச் சிறு தொகுதிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பற்றவை. அவை முற்றிலும் சேர்ந்து முழுமைத் தொகுதியினை உருவாக்குகின்றன.

$\therefore \quad N_1 + N_2 + \ldots N_L = N$. முழுமைத் தொகுதியின் சிறு பகுதிகள் படுகைகள் எனப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பிரிவிலு முள்ள எண்ணிக்கை $N_h$ தெரிந்திருப்பது நல்லது. படுகைகளைத் தீர்மானித்தவுடன் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒரு கூறு

எடுக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பல்வேறு படுகைகளிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்ட இராசிகள் சார்பற்றவை. படுகைகளுக்குள் காணப் படும் கூறுகளின் அளவுகள் $n_1, n_2 \ldots\ldots n_L$ எனப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பிரிவிலிருந்தும் ஒரு சாதாரண ராண்டம் கூறு எடுக்கப் பட்டால் கூறு 'படுகை ராண்டம் கூறு' (Stratified Random Sample) எனப்படுகிறது.

**குறியீடுகள் :**

$h$ எனும் அடிக்குறி படுகையையும், $i$ எனும் அடிக்குறி படுகை உறுப்பையும் குறிக்கிறது.

$N_h$ — மொத்த ராசிகளின் எண்ணிக்கை

$n_h$ — கூறிலுள்ள ராசிகளின் எண்ணிக்கை

$Y_{hi}$ — $i$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$\bar{Y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{Nh} y_{hi}}{N_h} = \text{உண்மைச் சராசரி.}$$

$$\bar{y}h = \frac{\sum_{h_h}^{n_h} y_{hi}}{n_h} = \text{கூறின் சராசரி}$$

$$S_h^2 = \sum_{i=1}^{N_h} \left(\frac{Y_{hi} - \bar{Y}_h}{N_h - 1}\right)^2 = \text{உண்மையான பரவற்படி.}$$

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நகரில் பொழுதுபோக்குக்காக ஒருவர் செலவிடும் பணத்தைப்பற்றிய மாதிரி அளவெடுப்பைப் பார்ப்போம் மொத்த நகர மக்களிலிருந்து கூறின் 60 நபர்களையும் எடுக்காமல், மக்களைச் செல்வமிக்கவர், நடுத்தரப் பிரிவினர், எளியவர் என்ற ஒரு படித்தான தன்மையுடைய பல படுகை களாகப் பிரித்துக் கொண்டு, மக்கள் தொகையில் அவர்களது விகிதம் 1 : 3 : 6 என இருந்தால், கூறிலுள்ள நபர்கள் 6, 18, 36 என இருக்குமாறு அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு படுகையிலும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நபர்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் இது 'ராண்டம் படுகைக் கூறு' (Stratified Random Sample) எனப்படுகிறது. முழுமைத்

தொகுதி ஒரு படித்தானதாக இராவிடில், அதன் பல்வேறு பகுதிகளுக்கும் முக்கியத்துவம் தருவதற்காகப் பல்வேறு சிறிய ஒரு படித்தான படுகைகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொன்றிலும் கூறின் ஒரு பகுதியை எடுக்கிறோம். பட்டதாரிகளிடை வேலை இல்லாத் திண்டாட்டத்தைப் பற்றிய ஆய்வு நடத்தும்போது, பட்டதாரிகளின் முழுமைத்தொகுதியை அப்படியே எடுத்துக்கொள்ளாமல் மருத்துவம், பொறியியல், கலைத்துறை, அறிவியல்துறை, வேளாண்மை போன்ற பல்வேறு படுகைகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அப் பல்வேறு பட்டதாரிகளின் விகிதங்களிலேயே கூறின் உறுப்புகளையும் பங்கிட்டால் இது 'விகிதப் பங்கீட்டு முறை' (Proportional allocation) எனப்படுகிறது.

அதாவது $\frac{n_i}{n} = \frac{N_n}{N}$.

எடுக்கப்பட்ட ராசிகள் திருப்பிப்போடப்படாத நிலையில் சாதாரண ராண்டம் கூறின் பரவற்படி

$$V(\bar{y}) = \frac{S^2}{n} \cdot \frac{(N-n)}{N}.$$

எனவே, கூறுமதிப்பீடு $\bar{y}$-ன் பரவற்படி, $S^2$-ன் நேர்விகிதத்திலும், கூறின் அளவின் எதிர் விகிதத்திலும் அளவு இருக்கும்; ஒரு மதிப்பீட்டின் திட்ப அளவு $\bar{y}$-ன் பரவற்படியின் எதிர் விகிதத்தில் உள்ளது.

எனவே, திட்பம் அதிகரிக்க, பரவற்படி குறைதல் வேண்டும்; இதற்கு,

(1) கூறின் அளவு அதிகமாக வேண்டும்.

(2) $S^2$ குறையவேண்டும் ; இதற்குப் படுகைகளின் ஒரு படித்தான தன்மை இன்மை (Heterogeneity) குறைக்கப்படவேண்டும்.

கூறின் அளவை ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குமேல் அதிகரிப்பது இயலாத செயல். ஏனெனில், அளவெடுப்பின் நேரமும், செலவும் அதிகமாகும். எனவே, மதிப்பீட்டின் திட்டத்தை அதிகரிக்க, சமபடித்தான தன்மையற்ற நிலையைக் குறைக்க, முழுமைத் தொகுதியினைப் ஒரு படித்தான பல்வேறு படுகைகளாகப் பிரித்துக் கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை பெரிதும் பயன்படுகிறது. சமூக, அரசியல் பிரச்சினைகள் பற்றிய கருத்துகளைப் பற்றிய அளவெடுப்

பிலும், 'நேயர் விருப்பம்' 'டெலிவிஷன் குழு' போன்றவைக்குக் கூறுகள் தேர்ந்தெடுப்பதில் இலண்டன் B.B.C. யிலும் ராண்டம் படுகைக் கூறு முறை மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

**படுகைக்கூறு முறையின் சிறப்புகள்**

(1) ஒரு படித்தான படுகைகளில் உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு குறைந்து காணப்படுவதால் அவற்றினுல் பெறும் மதிப்பீட்டின் திட்பம் அதிகரிக்கிறது.

(2) களச்சோதனைகளை மேற்பார்வையிடுவது எளிதாகவும் வசதியாகவும் உள்ளது. முழுமைத் தொகுதியின் படுகைகளாகிய ஒவ்வொரு சிறு பகுதியையும் சிறந்த முறையில் பரிசீலனை செய்யத் திறமைமிக்க ஒரு மேற்பார்வையாளரின் தனிப்பொறுப்பில் விடலாம்.

(3) கூறின் உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது ஏற்படும் சிக்கல்கள் முழுமைத் தொகுதியின் பல்வேறு தொகுதிகளில் பல் வேறு தன்மையுடையவை.

மக்களைப்பற்றி அளவெடுப்புகளில் விடுதிகளில் தங்குவோர், சிறைச்சாலைகளில் இருப்போர். மருத்துவச் சாலையில் உள்ளோர் எனப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்துவிடுவதால், அவ்வப்போது ஒவ்வொரு பிரிவினுள்ளும் ஏற்படும் சிக்கல்களை எளிதில் தீர்த்துக் கொள்ள முடிகிறது.

(4) உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது எளிதாகிறது. அவற்றைத் தனித்தனிப் படுகைகளில் கண்டுபிடிப்பதும், விவரங்களைச் சேகரிப்பதும் சிரமமின்றி முடிகிறது.

(5) விளுப்பட்டியலில் காணப்படும் தவறுகள் ஆய்வாளரது ஒருபுறச்சார்புடைமையாலோ அல்லது கவனக் குறைவாலோ ஏற்படும் பிழைகள், அளத்தல், கணக்கெடுத்தல் போன்றவற்றில் விளையக்கூடிய தவறுகள் போன்றவற்றுல் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளை இம் முறையில் பெருமளவில் குறைக்கலாம்

**தேற்றம் 3 :**

ஒவ்வொரு படுகையிலும் கூறு மதிப்பீடு $\bar{y}_h$ என்பது ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடாக இருந்தால், $\bar{y}_{st}$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{Y}$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு ஆகும்.

**நிறுவுதல் :**

$h$ ஆவது படுகையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y}_h$ என்பது $\bar{Y}_h$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடாக இருப்பதால்

$$E(\bar{y}_h) = \bar{Y}_h$$

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{y}_h}{N}$$

$$E(\bar{y}_s) = E\left[\sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{y}_h}{N}\right]$$

இங்கு $N = N_1 + N_2 + \dots N_l$

$$\therefore E(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h E(\bar{y}_h)}{N} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{y}_h}{N} = \bar{Y}$$

$\bar{y}_h$ மதிப்புகள் தனித்தனிப் படுகையில் $\bar{Y}_h$-ன் ஒரு பாற் சாரா மதிப்பீடுகளாகும்.

$$\therefore E(\bar{y}_h) = \bar{Y}_h$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} y_{hi}}{N} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{Y}_h}{N}$$

எனவே,

$$E(\bar{y}_{st}) = \bar{Y}.$$

**கிளைத் தேற்றம் :**

$\bar{y}_h$ என்பது ஒரு சாதாரண ராண்டம் கூறில் $\bar{Y}_h$-ன் ஒரு பாற் சாரா மதிப்பீடாகப் படுகைகளுக்குள்ளாக இருப்பதால், $\bar{y}_{st}$ என்பது படுகை ராண்டம் கூறின் $\bar{Y}$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடாகும்.

**தேற்றம் 6 :**

ஒரு படுகைக் கூறிற்கு, $\bar{y}_{st}$-ன் பரவற்படி

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2 V(\bar{y}_h)}{N^2}$$

இங்கு $V(\bar{y}_h) = E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2$

இந்தத் தேற்றத்தில் இரண்டு கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன (i) $\bar{y}_h$ என்பது $\bar{Y}_h$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடாக இருக்கவேண்டும். (ii) வெவ்வேறு படுகைகளிலிருந்து கூறுகள் சார்பற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படவேண்டும்.

**நிறுவுதல் :**

$$\bar{y}_{st} - \bar{Y} = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{y}_h}{N} - \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \bar{y}_h}{N}$$

$$= \Sigma \frac{N_h (\bar{y}_h - \bar{Y}_h)}{N}$$

$$(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 (\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2$$

$$+ \frac{1}{N^2} 2 \cdot \Sigma N_i N_j (\bar{y}_i - \bar{Y}_i)(\bar{y}_j - \bar{Y}_j)$$

இங்கு வலப்பக்க உறுப்பு எல்லாப் படுகை ஜோடிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

எல்லாக் கூறுகளுக்கும் சராசரி எடுக்கும்பொழுது இடப்பக்க உறுப்பு $\Sigma(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$ ஆகிறது

வலப்பக்கத்தில் முதல் உறுப்பு, $\Sigma N_h^2 E \frac{(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2}{N^2}$

இரண்டாவது உறுப்பிற்கு, வலதுபக்கத்தில், $i$ ஐ நிலையாக வைத்துக்கொண்டு, $j$-th படுகையின் கூறுகளைக் கூட்டினால் நமக்குக் கிடைப்பது, $2 \Sigma N_i \frac{(\bar{y}_i - \bar{Y}_i)}{N^2}$.

$E(\bar{y}_j - \bar{Y}_j) = 0$. $\bar{y}_j$ என்பது $\bar{Y}_j$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடாக இருப்பதால், $E(\bar{y}_j - \bar{Y}_j) = 0$

$$\therefore \quad V(\bar{y}_{st}) = \Sigma\, N_h^2\, E\frac{(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2}{N^2}$$

$$= \Sigma\, \frac{N^2\, V(\bar{y}_h)}{N^2}$$

$$V(\bar{y}_{st}) = \Sigma\, \frac{N_h^2\, V(\bar{y}_h)}{N^2}$$

**தேற்றம் 5 :**

படுகைக் கூறிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் மதிப்பீடு $\bar{y}_{st}$ ஆனால், $V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{n} N_h(N_h - n_h)\frac{S_h}{n_h}$

**நிறுவுதல் :**

படுகைகளிலுள்ள கூறுகள் சாதாரண ராண்டம் கூறுகளானால், $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{Nn} S^2$ என நாம் அறிவோம்.

$$V(\bar{y}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h - n_h} Sh^2$$

மேற்காணும் தேற்றத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^{h} \frac{Nh^2}{N^2}\, E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2$$

$$= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2\, V(\bar{y}_h)}{N^2}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2\, \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - n)} S_h^2$$

**கிளைத்தேற்றம் :**

கூறு பின்னங்கள் $\frac{N_h}{n_h}$ மிகவும் சிறியதாக, ஒதுக்கிவிடும் அளவுக்கு எல்லாப் படுகைகளிலும் இருந்தால்,

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h}$$

$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N}$ ஆனால், படுகைக் கூறுகளில் விகித சமப் பங்கீடு உள்ளது என அறிகிறோம்.

$n_h = \frac{n}{N} \cdot N_h$ என்பதை $V(\bar{y}_{st})$-ல் பிரதியிட்டால்,

$$V(\bar{y}_{st}) = \Sigma \frac{N_h S_h^2}{N_h} \left(\frac{N-n}{N}\right)$$

$$= \Sigma \frac{N-n}{N} \cdot \frac{N_h S_h^2}{N}.$$

(2) $\hat{Y}_{st} = N \bar{y}_{st}$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுத் தொகை $Y$-ன் மதிப்பீடாக இருந்தால்,

$$V(\hat{Y}_{st}) = \Sigma \frac{N_h (N_h - n_h)}{n_h} S_h^2$$

**உத்தமப் பங்கீடு** (Optimum Allocation)

$V(\hat{y}_{st})$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும் வகையில், ஒவ்வொரு படுகையிலும் கூறின் அளவைப் பங்கிட்டுக் கொடுத்தலை உத்தமப் பங்கீடு என்கிறோம்.

(1) கூறின் மொத்த அளவு ஒரு நிலையான எண்ணைக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது,

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட மொத்த செலவுக்கு, உத்தமப் பங்கீட்டு முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

**தேற்றம் 6:**

ராண்டம் படுகைக் கூறில், கூறின் மொத்த அளவு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக இருக்கும்போது, $n_h \propto N_h S_h$ என்ற வகையில் பங்கிடப்பட்டுள்ளபோது (உத்தமப் பங்கீட்டுமுறை) மதிப்பீட்டுச் சராசரி $\bar{y}_{st}$-ன் பரவற்படி மீச்சிறு மதிப்பை உடையதாக உள்ளது.

நிறுவுதல் :

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2} \Sigma N_h \frac{(N_h - n_h)}{n_h} S_h^2$$

$n_1 + n_2 + \dots n_L = n =$ ஒரு மாறிலி என்க.

$$\phi = \frac{1}{N^2} \Sigma \frac{N_h (N_h - n_h)}{n_h} S_h^2 + \lambda (n_1 + n_2 + \cdot + n_L - n)$$

[ $\lambda$, லெக்ராங்சின் பெருக்கும் எண் (Lagrange's multiplier)]

$\phi$ சிறுமமாய் இருக்க, $\frac{\partial \phi}{\partial n_h} = 0$

$$\therefore \; -\frac{1}{N^2} \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h^2} + \lambda = 0.$$

$$\lambda = \frac{N_h^2 S_h^2}{N^2 n_h^2} \qquad n_h = \frac{N_h S_h}{N \sqrt{\lambda}} \quad \dots (1)$$

$$\Sigma n_h = \frac{\Sigma N_h S_h}{N \sqrt{\lambda}}$$

$$n = \frac{\Sigma N_h S_h}{N \sqrt{\lambda}} \quad \dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{n_h}{n} = \frac{N_h S_h}{\Sigma N_h S_h}.$$

$$n_h = N_h S_h \left[\frac{n}{\Sigma N_h S_h}\right]$$

$\therefore$ $n_h \propto N_h S_h$ • (உத்தமப் பங்கீட்டு முறையில் படுகைக் கூறு அமைந்துள்ளது). எனவே, உத்தமப் பங்கீட்டு முறைக்கு, கூறின் மொத்த அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, வேறுபடு கின்ற படுகைகளில், ஒரு பெரிய கூறு தேவைப்படுகிறது.

**மொத்த செலவு இதுவெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, உத்தமப் பங்கீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தல்**

$h$ ஆவது பிரிவிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கான செலவும் $C_h$ என இருக்கட்டும். எனவே, $h$ ஆவது பிரிவின் மொத்த செலவு $n_h c_h$.

எனவே எல்லாப் பிரிவுகளுக்கும் இது $\Sigma n_h c_h$.

இதர செலவுகள் $a$

$a + \Sigma n_h C_h = [C =$ ஒரு மாறிலி.]

எனவே, $\frac{1}{N^2} \Sigma \frac{N_h (N_h - n_h) S_h^2}{n_h} + \lambda (a + \Sigma n_h c_h - C)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$nh$ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{N^2} \frac{N^2}{n_h^2} S_h^2 + \lambda (C_h) = 0.$$

$$\lambda = \frac{N_h^2 S_h^2}{N^2 C_h n_h^2}$$

$$nh = \frac{N_h S_h}{N \sqrt{C_h \lambda}}$$

எல்லாப் படுகைகளையும் கூட்டினால்,

$$n = \frac{\Sigma N_h S_h}{N \sqrt{\lambda} \Sigma \sqrt{c_h}}$$

$$\therefore \frac{n_h}{n} = \frac{N_h S_h}{\Sigma N_h S_h} \cdot \frac{\Sigma \sqrt{C_h}}{\sqrt{C_h}}.$$

$n_h$ ன் இம் மதிப்பிலிருந்து, கீழ்க்காணும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்:

(1) படுகை பெரியதாக இருக்கும்போதும்,

(2) படுகை மிகவும் மாறுபாடு உடையதாக இருக்கும்போதும்,

(3) படுகையில் கூறுமுறை வலிவாக இருக்கும்போதும் கூறைப் பெரியதாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

**ஒழுங்குக் கூறுகள் அல்லது முறையாகக் கூறெடுத்தல்** (Systematic Sampling)

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள $N$ உறுப்புகளையும் ஏதேனும் ஒரு வரிசையில் 1-லிருந்து $N$ வரை எண்களால் குறிப்பிட்டுக் கொள்

வோம். $n$ உறுப்புகளையுடைய கூறை எடுக்க முற்படும்போது முழுமைத் தொகுதியின் முதல் $k$ உறுப்புகளில் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பைச் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுத்து அதிலிருந்து ஒவ்வொரு $k$ ஆவது உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். $k = 30$ ஆகவும், முதல் உறுப்பு 17 ஆகவும் இருந்தால், பிற உறுப்புகள் $17 + 30 = 47, 77, 107, 137...$ என்ற எண்களை உடையவை. முதல் உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துவிட்டால், முழு கூறும் உடனடியாகத் தீர்மானிக்கப்பட்டுவிடுகிறது. இதனை ஒவ்வொரு $k$ ஆவது முறைக்கூறு என்கிறோம்.

ஒரு பள்ளியிலுள்ள 1500 மாணவர்களிலிருந்து 52 மாணவர்களுக்குக் குழந்தைகள் தினவிழாவில் கலந்துகொள்ள இலவச நுழைவுச்சீட்டுகள் வந்துள்ளன என்று கொள்வோம்.

$\frac{1500}{52} = 29$ (தோராயமாக). எனவே, மாணவர்களுக்கு 1-லிருந்து 1500 வரை எண்களைக் குறிப்பிட்டோ, அல்லது பதிவேட்டிலிருந்தோ முதல் 29 எண்களில் ஏதேனும் ஓர் எண்ணைச் சமவாய்ப்பு முறையில் 1 — 29 வரை சீட்டுகளில் எழுதிக் குலுக்கிப்போட்டுத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். இத் துவக்க எண் 15 ஆக இருந்தால் 15, 44, 73, ... என்ற வரிசையில் 52 எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிற்குரிய மாணவர்களுக்கு இலவச நுழைவுச்சீட்டுகளை வழங்கலாம்.

இம் முறைப்படிக் கூறெடுத்தலில் முதலில் துவங்கும் எண் முற்றிலும் சமவாய்ப்புமுறையிலும், அதிலிருந்து, ஒவ்வொரு $k$ஆவது உறுப்பும் எண்ணும்போது, $k$ எத்தகைய, காலவட்ட ஒழுங்குடைமையும் (periodicity) கொண்டிருக்கக்கூடாது. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு தொழிலதிபர், தம் தொழிற்சாலையை ஒவ்வொரு வெள்ளிக்கிழமையும் காலை 10 மணிக்கு மேற்பார்வையிட வருவாரானால், அந்த சமயத்தில் வேலைபார்க்கும் தொழிலாளரை மட்டுமோ, அன்றி அதுபோது உருவாகிக்கொண்டிருக்கின்ற பொருளின் நிலையைமட்டுமோ பார்க்க இயலும்.

ஓர் ஒழுங்குக் கூறை ஒவ்வொரு படுகையிலும் ஓர் உறுப்புடைய ராண்டம் படுகைக் கூருகக் கொள்ளலாம் ஒழுங்குக் கூறு முழுமைத் தொகுதியைப் பல்வேறு படுகைகளாகப் பிரித்துள்ளது. முதல் படுகையில் $k$ உறுப்புகளும், இரண்டாவது படுகையில் இரண்டாவது $k$ உறுப்புகளும் என இவ்வாறே பல படுகைகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஓர் உறுப்பு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது.

ஒழுங்குக் கூறில், படுகையில் காணப்படும் உறுப்புகள் ஒரே மதிப்பிடத்தைப் பெறுகின்றன ; ஆனால், படுகைக் கூறு முறையில் ஒவ்வொரு படுகையிலும் எடுக்கப்படும் உறுப்பின் இடம் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. மேலும், முழுமைத் தொகுதி முழுவதிலும், ஒழுங்குக் கூறின் உறுப்புகள், ஒரே சீராகப் பரவியுள்ளன.

எனவே. முறைப்படிக் கூறெடுத்தலில் கீழ்க்காணும் நன்மைகள் உண்டு:

(1) கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் எளிது.

(2) செலவிடும் நேரமும் குறைவு.

(3) சாதாரண ராண்டம் கூறைவிட, ஒழுங்குக் கூறின் மூலம் கிடைக்கும் மதிப்பீடு மிகவும் திட்பமுடையது. ஏனெனில், இங்கு முழுமைத் தொகுதியை $k$ படுகைகளாகப் பிரித்துக்கொண்டு, ஒவ்வொன்றிலும் ஓர் உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

(4) இம் முறையில் ஏற்படும் செலவு மிகக் குறைவு.

(5) ஒருபுறச் சாய்வு அல்லது பிழைகள் ஏற்பட வழியில்லை.

(6) உறுப்புகளின் மதிப்பிடங்கள் முழுமைத் தொகுதி முழுவதிலும் தீர்மானிக்கப்பட்டுவிடுவதால், கூறில் முழுமைத் தொகுதியின் எந்தப் பெரும் பகுதியும் (பிரதிநிதித்துவம் வழங்கப்படாமலிருக்க நேரிடாது) புறக்கணிக்கப்பட்டிராது.

**குறைகள் :** ஒவ்வொரு $k$ ஆவது உறுப்பு என்னும்போது, மிகவும் கட்டுப்பாடுடைய முறையாக ஆகிவிடுவதால், சோதனையின் நுட்பத்தன்மை (sensitivity) குறைந்துவிடுகிறது, மேலும் $k$-க்குக் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை இல்லாதிருத்தல் வேண்டும்.

$N = nk$ என்றுள்ள ஓர் ஒழுங்குக் கூறை எடுத்துக் கொள்வோம். $y_{ij}$, $i$ ஆவது கூறிலுள்ள $j$ ஆவது உறுப்பு. $\bar{y}_i$ என்பது, $i$ ஆவது கூறின் கூட்டுச் சராசரி ஆனால்,

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{N}$$

**தேற்றம் 7 :**

$\bar{y}$ என்பது $\bar{Y}$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு.

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{.j}}{n}$$

$$E(\bar{y}_i) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{N} = \bar{Y}$$

$\bar{y}$ என்பது பொதுவாக $\bar{y}_{sy}$ எனக் குறிக்கப்படும். (Systematic sample-ன் முதல் இரு எழுத்துகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.) $S^2$ *wsy* என்பது ஒரே கூறினுள் காணப்படும் இராசிகளின் பரவற்படியைக் குறிக்கிறது.

**தேற்றம் 8 :**

ஒரு படுகைக் கூறின் கூட்டுச் சராசரியின் பரவற்படி என்பது

$$V(\bar{y}_{sy}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{wsy}^2$$

$$\text{இங்கு } S_{wsy}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

**நிறுவுதல் :**

$$(N-1) S^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{n} (\bar{y}_{ij} - \bar{Y})^2.$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \bar{Y})^2.$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

$$+ \sum_{i=}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{Y})^2$$

$$+ \; 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}i) \; (\bar{y}t - \bar{Y})$$

$$= K(n-1) \, S_{wsy}^2 + \sum_{i=1}^{k} n \, (\bar{y}_i - \bar{Y})^2$$

$$+ \, 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i) \, (Y\bar{y}_i - \bar{Y})$$

$$(N-1) \, S^2 = K(n-1) \, S_{wsy}^2 + nk \, V(\bar{y}sy)$$

$$\left[ \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{Y}) \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i) = \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{Y}) \times 0 = 0 \right]$$

$$\therefore \quad V(\bar{y}_{sy}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{s,}^{\;2}. \quad (N = nk).$$

ஒழுங்குக் கூறின் கூட்டுச்சராசரி, சாதாரண சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச்சராசரியைவிட துல்லியமான அளவாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

$$V(\bar{y}_{sy}) < V(\bar{y}_s)$$

$$S_{wsy}^2 < S^2.$$

$$V(\bar{y}_{ran}) = \frac{N-n}{Nn} S^2.$$

$$V(\bar{y}_{sy}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{K(n-1)}{N} S_{wsy}^2$$

$$V(\bar{y}_{sy}) - V(\bar{y}_{ran}) = \frac{S^2}{N}\left(N - 1 - \frac{N-n}{n}\right) - \frac{K(n-1)}{N} S_{wsy}^2 < 0$$

அதாவது $S^2 \frac{K(n-1)}{N} < k \frac{(n-1)}{N} S_{wsy}^2 \quad \therefore \quad n = \frac{N}{k}$.

$S^2 < S_{wsy}^2$ எனில், ஒழுங்குக் கூறின் கூட்டுச்சராசரி சாதாரண சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச்சராசரியைவிடத் துல்லியமான அளவாக இருக்கும்.

**தேற்றம் 9 :**

ஒரு படுகைக்கூறின் பரவற்படி $\bar{y}_{st}$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு என்பது $\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \frac{(N_h - n_h)}{n_h} s_h^2$.

இங்கு $s_h^2 = \sum_{i=1}^{n_h} \frac{(y_{hi} - \bar{y}_h^2)}{n_h - 1}$.

$h$ஆவது படுகையிலிருந்து, தேர்ந்தெடுத்த கூறுனது சாதாரண ராண்டம் கூறுக இருப்பதால், முன்பு நிறுவிய 4ஆவது தேற்றத்தின்படி, $s_h^2$ என்பது $S_h^2$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடு.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு தொகுதி 3 படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, படுகைகளின் அளவுகளும், திட்ட விலக்கங்களும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

| படுகை | படுகை அளவு ($N_h$) | படுகை திட்ட விலக்கம் ($S_h$) |
|---|---|---|
| 1 | 125 | 15·6 |
| 2 | 50 | 27·2 |
| 3 | 25 | 40·5 |

கீழ்க்கண்ட முறைகளின்படி 50 அளவுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியை 3 படுகைகளுக்கும் பங்கிடுக :

(i) விகிதப் பங்கீடு, (ii) உத்தமப்பங்கீடு

**(i) விகிதப் பங்கீட்டு முறை**

$$n = 50 = n_1 + n_2 + n_3$$

$$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N}$$

$$\therefore \quad n_h = \frac{n}{N} Nh$$

எனவே $n_1 = \frac{50}{200} \times 125 = 31{\cdot}25 = 31$

$$n_2 = \frac{50}{200} \times 50 = 12{\cdot}5 = 13$$

$$n_3 = \frac{50 \times 25}{200} = 6{\cdot}25 = 6$$

**(ii) உத்தமப் பங்கீட்டு முறை**

$$\frac{n_h}{n} = \frac{N_h S_h}{\Sigma N^n S_h} \qquad \therefore \; n_h = n \cdot \frac{N_h S_h}{\Sigma N_h S_h.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma N_h S_h &= N_1 S_1 + N_2 S_2 + N_3 S_3 \\ &= 125 \times 15{\cdot}6 + 50 \times 27{\cdot}2 + 25 \times 40{\cdot}5 \\ &= 4323{\cdot}5 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{50 \times 1950}{4323{\cdot}5} = 22{\cdot}55 = 22$$

$$n_2 = \frac{50 \times 1360}{4323{\cdot}5} = 15{\cdot}72 = 16$$

$$n_3 = \frac{50 \times 1012{\cdot}5}{4323{\cdot}5} = 11{\cdot}7 = 12$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கூறு எடுப்பவர் ஒரு படுகைக் கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கிறார். இதற்கான 'களச்செலவுகள் (field cost) $\Sigma C_h n_h$ என்னுமாறு அமைகின்றன. இரு படுகைகளுக்கான அளவைகளின் முன் கூட்டியே மதிப்பீடுகள் பின்வருமாறு :

| படுகை | $W_h$ | $S_h$ | $C_h$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0·4 | 10 | ரூ. 4 |
| 2 | 0·6 | 20 | ரூ. 9 |

(1) $V(\bar{y}_{st})$ மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, மொத்த களச்செலவை மீச்சிறு மதிப்பாகக் கூடிய $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(2) $V(\bar{y}_{st}) = 1$ என்பது அமையுமாறு, உத்தமப் பங்கீட்டின் கீழ்க் கூறின் அளவைக் காண்க.

(3) மொத்த களச்செலவு எவ்வளவு ?

**தீர்வு :**

(1) உத்தம பங்கீட்டு மதிப்புகள் $\frac{n_1}{n}$ $\frac{n_2}{n}$ பின்வருமாறு தரப்படுகின்றன.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\frac{W_1 S_1}{\sqrt{C_1}}}{\frac{W_1 S_1}{\sqrt{C_1}} + \frac{W_2 S_2}{\sqrt{C_1}}} = \frac{(0{\cdot}4)(10)\ \sqrt{4}}{\frac{(0\ 4)(10)}{\sqrt{4}} + \frac{(0\ 6)(20)}{\sqrt{9}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{n_2}{n} = 1 - \frac{n_2}{n} = \frac{2}{3}$$

$$(2)\quad V(\bar{Y}_{st}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h}$$

$$\therefore\quad V(\bar{Y}_{st}) = 1$$

$$= \frac{0{\cdot}16 \times 100}{n_1} + \frac{0\ 36 \times 400}{n_2} = \frac{16}{n_1} + \frac{144}{n_2}$$

$$= \frac{16}{n_1} + \frac{144}{2n_1} \qquad n_2 = 2n_1,$$

$$= \frac{88}{n_1}\ i.e,\ n_1 = 88,\ n_2 = 176$$

$$\therefore\quad n = n_1 + n_2 = 264.$$

(3) மொத்தச் செலவு $= C_1 n_1 + C_2 n_2 =$ ரூ. $(4\times 88 + 9 \times 176) =$ ரூ. 1936.

[குறிப்பு : மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் $W_h = \frac{N_h}{N}$ என்பது படுகையின் எடையைக் குறிக்கிறது.]

$$= \frac{n_n}{n} = \frac{W_h S_n / \sqrt{C_h}}{\Sigma W_h S_h / \sqrt{C_h}}$$

## பயிற்சி

(1) 7 அளவுடைய சமவாய்ப்புக் கூறுகளைப் பின்வரும் முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(i) பந்துகளின் இரும்பு எடை — நிகழ்வெண்

| பந்துகளின் இரும்பு எடை | நிகழ்வெண் |
|---|---|
| 25·8 | 45 |
| 25·9 | 49 |
| 26·0 | 67 |
| 26·1 | 42 |
| 26·2 | 28 |

(ii) ஆங்கிலத்திலுள்ள 52 பெரிய, சிறிய எழுத்துகள்.

(2) $N = 6$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியில், $y$-ன் மதிப்புக்கள் 8, 3, 1, 11, 4, 7. அளவு 2 கொண்ட எல்லா எளிய சமவாய்ப்புக் கூறுகளுக்கும், கூறின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y}$ஐக் காண்க. $\bar{Y}$-ன் ஒருபாற்சாரா மதிப்பீடு $\bar{y}$ எனவும்,

அதன் பரவற்படி $\frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ எனவும் காட்டுக.

(3) பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து அளவு 24 உடைய கூறில் விகித உத்தமப் பங்கீடுகளைக் காண்க.

| படுகை | $N_h$ | $S_h$ |
|---|---|---|
| 1 | 16 | 163·3 |
| 2 | 48 | 58·55 |

(4) வினா இரண்டில் உள்ள முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்படும், அளவு 3 உடைய எல்லா எளிய ராண்டம் கூறுகளின் $s^2$ கணக்கிட்டு $E(s^2) = S^2$ எனக் காட்டுக.

# 9. மதிப்பியல்

## (Theory of Estimation)

$(x_1, x_2, x \ldots\ldots x)$ என்பது, $p(x, \theta_1, \theta_2 \ldots\ldots \theta_k)$ என்பதை நிகழ்தகவுச்சார்பாக உடைய ஒரு கூறுகும். இங்கு $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_k$ என்பவை முழுமைத்தொகுதியின் பண்பளவைகள். இவற்றினைக் கூறின் மதிப்புகளின் அடிப்படையில் மதிப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad e^{-} \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$ என்ற

நிகழ்தகவுச் சார்பைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலின் $m$, $\sigma$ என்ற இரு பண்பளவைகளை மதிப்பிடவேண்டும். முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கு மதிப்பீடாகக் கூறின் அளவுகளைக் கொண்டு எண்ணற்ற சார்புகளைக் கூறலாம். எடுத்துக்காட்டாக இயல்நிலைப் பரவலின் பண்பளவை $m$-க்கு, கூறின் கூட்டுச்சராசரி அல்லது இடைநிலையை மதிப்பீடாகக்கொள்ளலாம். இத்தகைய புள்ளியியல் அளவைகளில் (Statistics) சில வரையறைகளின்படி, மிகச் சிறந்த வற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையினை மதிப்பிடுதல் (Estimate) என்பது. முழுமைக் தொகுதியின் எண் மதிப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக $m = 25$ என்பது, $m$-ன் மதிப்பிடுதலாகும். ஆனால், $\bar{x}$, கூறின் கூட்டுச்சராசரி, பண்பளவை $m$-ன் மதிப்பீட்டுச் சார்பாகும் (Estimator). எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் பண் பளவைக்குக் கூறின் மதிப்புகள் கொண்ட பல்வேறு சார்புகளே மதிப்பீட்டுச் சார்புகளாகும்.

**புள்ளி மதிப்பீடு** (Point Estimation) : கூறின் மதிப்புகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கு ஒரு

தனிப்பட்ட மதிப்பைத் தோராயமாகக் கூறுவதே புள்ளி மதிப்பீடு ஆகும்.

**இடைவெளி மதிப்பீடு (Interval Esimation) :** பொதுவாக புள்ளி மதிப்பீடு, பண்பளவையின் சரியான மதிப்பைத் தருவதில்லை. எனவே, பண்பளவை '$\theta$' வை உள்ளடக்கிய ஓர் இடைவெளி $(a,b)$ ஐக்காண்பதே இதன்நோக்கம். இங்கு $(1-\alpha)$ என்ற குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவுடன் ,காணப்படும் இடைவெளியை மதிப்பிடுகிறோம். எனவே '$\alpha$' என்பது இந்த இடைவெளியில் '$\theta$' காணப்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு ஆகும்.

**மிகச்சிறந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பின் பண்புகள் :** ஃபிஷரின் கூற்றுக்கேற்ப ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பு கீழ்க்காணும் பண்புகளை யுடையதாக இருக்கவேண்டும்:

(1) ஒரே நிலையுடைய தன்மை. (Consistency)

(2) ஒரு தலைச்சார்பற்ற தன்மை. (Unbiasedness)

(2) இணைத்திறமை (Relative Efficiency)

(4) போதுமைத் தன்மை (Sufficiency)

(5) முற்றுப் பெற்ற தன்மை (Completeness)

(6) மாருத் தன்மை (Invariance)

**ஒரே நிலையுடைய அல்லது பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பு (Consistent Estimator):** முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அறியப்படா பண்பளவையை, கூறில் காணும் ராசிகளின் மதிப்பில் இருந்து கணக்கிட்டுக் கிடைக்கும் புள்ளியியல் அளவை, அதன் உண்மை யான மதிப்பிலிருந்து பெரும்பாலும் மாறுபடுகிறது. இருப்பினும் கூறினுடைய அளவு அதிகமாக அதிகமாக, மதிப்பீட்டுச் சார்பு பண்பளவையின் உண்மையான மதிப்பிற்கு அருகில் இருப்பதற் கான நிகழ்தகவு ஒன்றை அணுகுகிறது. அதாவது, கூறின் அளவு அதிகரித்தால் மதிப்பீட்டுச் சார்பின் துல்லியமான தன்மையும் அதிகரிக்கிறது.

**வரையறை**

முழுமைத் தொகுதியின் $\theta$ என்னும் பண்பளவையின் மதிப்பீட்டுச் சார்பு $t$ , ($\theta$-ன் மதிப்பீட்டுச் சார்பை $\hat{\theta}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்) $n$ முடிவிலியை அணுகும்போது. $\theta$-வை நோக்கி நிகழ்தகவு முறையில் குவிந்தால், அது ஒரே நிலையுடைய தன்மை அல்லது 'இசைவுத் தன்மை உடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பு' என

வழங்கப்படுகிறது: அதாவது $\epsilon$, $\eta$ என்ற இரு நேர்குறி எண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது (அவை எவ்வளவு சிறியவையாயினும் சரி) அவற்றைச் சார்ந்த $N$ என்ற நேர்முழு எண் $n > N$ எனும்போது $P[\,|t_n - \theta| < \epsilon] > 1 - \eta$ ஆகும் வகையில் கிடைக்குமாயின், $t_n$ என்ற மதிப்பீட்டுச் சார்பு பொருத்த முடைத்து என வரையறுக்கிறோம். அதாவது, $n$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க, $t$-க்கும், $\theta$-க்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு நிகழ்தகவு முறையில் குறைந்து கொண்டே வருகிறது என்பதை இசைவுத் தன்மை வலியுறுத்துகிறது.

**கணக்கு :**

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுத்த ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கு ஒரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பு எனக் காட்டுக.

**தீர்வு :**

$M$, $\sigma^2$ என்பவை முறையே இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, பரவற்படி என்க. இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட, $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற $n$ அளவுடைய சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$.

$$t = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ என்பது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி

$$\therefore\ P[\,|\bar{x} - M|\,] < \epsilon = P[\,|t| < \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$= P\left[-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} < t < \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{\sigma}} \cdot dt \cdot$$

$\eta$ எனும் எண் எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும் $\pm \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ என்ற இடை வெளியில் இயல்நிலை வரையின் அடியிலுள்ள பரப்பு

$1 - \eta$-வை விட அதிகமாக இருக்கும் வகையில், $n$-ன் மதிப்பை நாம் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில், கூறின் இடைநிலை, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரிக்கு ஒரு பொருத்தம் உடைய மதிப்பீட்டுச் சராசரி என நிறுவுக.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியை $M$ என்க. $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற சமவாய்ப்புக் கூறின் இடைநிலை $M$ ஆகும். எனவே பெருங் கூறுகளில் $t = \dfrac{M - M}{\sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ என்பது ஒரு தரப் படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

$$\text{எனவே,} \quad P\left[\,|M - M| < \epsilon\right] = P\,|t| < \frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$= P\left[-\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}} < t < \frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}}^{\frac{\epsilon\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$n$-ன் மதிப்பை மிகப் பெரியதாக்கினுல், இந் நிகழ்தகவின் மதிப்பை நாம் எவ்வளவு விரும்புகிறோமோ அவ்வளவு ஒன்றிற்கு அண்மையில் கொண்டு வரலாம். எனவே, கூறின் இடைநிலை, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பாகும்,

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(x, \mu) = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{1}{1+(x-\mu)^2}$ ($x$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்) என்பது கோஷி பரவலின் (Cauchy's distribution)

அடர்த்திச் சார்பு. இதிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச்சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பாக இராது என நிறுவுக.

**தீர்வு :**

கூறின் கூட்டுச்சராசரியின் பரவல் $f(\bar{x}) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(\bar{x}-\mu)^2}$

$\mu$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி ; $\bar{x}$ கூறின் கூட்டுச்சராசரி.

$$P\{ | \bar{x} - \mu | < \epsilon \} = \{ P | x - \mu | < \epsilon \}$$

இப்பரவலில் $\bar{x}$-ன் பரவல் $x$-னுடைய பரவலாகவே அமைந்து விடுவதால் $\bar{x}$-க்குப் பதிலாக $x$ ஐப் பிரதியிட்டுள்ளோம்.)

$$= P \; | t | < \epsilon$$
$$(t = x - \mu)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{dt}{1 + t^1} = \left[ \tan^{-1} t \right]_{-\epsilon}^{\epsilon} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \epsilon$$

இதில் $n$ காணப்படாததால், $n$ எவ்வளவு பெரியதாக இருந்தாலும் $P \; | \bar{x} - \mu < \epsilon; 1 - \eta$ வை விட ஒருபோதும் பெரியதாக இருக்கமுடியாது.

எனவே, கூறின் கூட்டுச்சராசரி ஒரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பாக இருக்கமுடியாது.

**ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீட்டுச் சார்புகள்** (Unbiased Estimators) : ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறுப்பரவலின் கூட்டுசராசரி, அதற்கான முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்குச் சமமாக இருந்தால், முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைக்கு இது 'ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு' (unbiased estimators) என்கிறோம். அவ்வாறில்லாவிடில், அஃது ஒருதலைச் சார்புடைய மதிப்பீடு ஆகும். $E(t_n) = \theta$ ஆனால், $(n = 1, 2 \ldots\ldots)$ $\theta$ எனும் பண்பளவையின் மதிப்பீட்டுச் சார்பான $t_n$, ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு என வழங்கப்படுகிறது. $E(t_n) > \theta$ ஆனால், ஒருதலைச் சார்புடைய தன்மை நேர்க்குறி உடையது எனவும், $E(t_n) < \theta$ ஆனால், ஒருதலைச் சார்புடையதன்மை குறைக்குறி உடையதென்றும் கூறுகிறோம். எல்லை $\underset{n \to \infty}{E(t_n)} = \theta$ ஆனால், $t_n$ ஈற்றணுக்கத்தில் (asymptolic) ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு எனலாம்.

ஒரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச்சார்பு எல்லையைக் காணுங்கால் ஒருதலைச் சார்பற்றது என்பது தெளிவு. ஆனால், வரையுற்ற அளவுடைய கூறுகளில் இது ஒருதலைச் சார்புடையதாக இருக்கலாம். இது ஒருதலைச் சார்புடையதாகவும், $n$ முடிவிலியை அணுகும்போது ஒருதலைச் சார்புடையதன்மை பூச்சியத்தை அணுகுகிறது என்றும் கொள்ளலாம். ஓர் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு பொருத்தம் உடையதாகவோ, பொருத்தமில்லாத தாகவோ இருப்பது கூறின் அளவு, அதிகரிக்க, அதிகரிக்க அதன் பரவல் கூட்டுச்சராசரியின் அருகிலே காணப்படுவதைப் பொறுத்துள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(1) $t$ என்பது $\theta$-ன் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு ; ஆனால், $t^2$ என்பது $\theta^2$-ன் ஒருதலைச் சார்புடைய மதிப்பீடு எனக் காட்டுக. $t$ ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு ஆதலால்

$$E(t) = \theta$$

$$\begin{aligned} V(t) = E[t-E]^2 = E[t-E(t)]^2 &= E[t-\theta]^2 \\ &= E(t^2)+E(\theta^2)-2\theta \cdot E(t) \\ &= E(t^2)+\theta^2-2\theta \cdot \theta \\ &= V(t) = E\ t^2) - \theta^2 \end{aligned}$$

ஆனால் $V(t) \neq 0$.

எனவே $E(t^2) - \theta^2 \neq 0$. $E(t^2) \neq \theta^2$

எனவே $t^2$, $\theta^2$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடு ஆகாது.

(2) $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்பவை, கூட்டுச்சராசரி 0, பரவற்படி $\sigma^2$ ஆக ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறுகும். $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i^2$ என்பது $\sigma^2$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடு என நிறுவுக

$$\sigma^2 = \Sigma \frac{(x - \theta)^2}{n}$$

$$= \Sigma \frac{x_i^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x^2$$

$$\therefore \quad E(s^2) = E\left[\sum_{1}^{n} \frac{x^2}{n}\right] = \sigma^2.$$

$s^2$, $\sigma^2$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

(3) $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ என்பது $M$ என்பதைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\sigma^2$ ஐப் பரவற்படியாகவும் உடைய ஓர் இயல் நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ஒரு கூறுகும்.

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} (x \quad \bar{x})^2$$

$\sigma^2$ என்னும் பண்பளவையின் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாகாது என நிறுவுக. மேலும், இது $\sigma^2$-ன் கந்தழி இடத்து ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாகும் என நிறுவுக.

$$E(s^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]$$

$$x_i - \bar{x} = x_i - M - \bar{x} + M$$

$$x_i - \bar{x})^2 = E\left[\sum_{1}^{n} \frac{1}{n}\{(x_i - M) - (\bar{x} - M)\}\right]^2$$

$$E(s^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - M)^2 - \frac{2}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - M)(\bar{x} - M) + \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(\bar{x} - M)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x - M)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x} - M)\right.$$

$$\left.\left\{\sum_{1}^{n}(x - M)\right] + (\bar{x} - M)^2\right\}$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - M)^2 - 2\,(\bar{x} - M)^2 + (\ - M)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - M)^2 - (\bar{x} - M)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\sum_{1}^{n}(x_i - M)^2\right] = E(\bar{x} - M)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\Sigma\,\sigma^2\right) - \sigma_{\bar{x}}^{\,2}$$

$$E(s^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$E(s^2) = \sigma^2\,\frac{(n-1)}{n} \quad \therefore\ E(s^2) \neq \sigma^2.$$

எனவே $s^2$ என்பது $\sigma^2$-ன் ஒரு தலைச்சார்புடைய மதிப்பீடகாது.

$n$ முடிவிலியை அணுகும்போது, $E(s^2) = \sigma^2$.

எனவே, $s^2$, $\sigma^2$-ன் (முடிவிலியிடத்து) ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாகும்.

(4) $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ என்பது $f(x) = \frac{1}{\theta}\cdot e^{-x/\theta}$ $(\theta > 1)$.

என்ற படிக்குறி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட

$n$ அளவுடைய ஒரு கூறுகும் $\bar{x}$ கூறின் கூட்டுச்சராசரியானால், $\bar{x}$, $\theta$வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

$$E(\bar{x}) = E\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right]$$

$$E(\bar{x}) = E(x)$$

$$= \int x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\, d\theta = \frac{1}{\theta}\left[x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}(-\theta)\right.$$

$$\left. + \theta \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\left(-\frac{1}{\theta}\right)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta}[-(-e^0)]$$

$$= \theta.$$

எனவே, $\bar{x}$ என்பது $\theta$வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாகும்.

## பயிற்சி

(1) ஓர் ஈறுருப்புச் சேர்க்கை நிகழ்தகவு சூழ்நிலையில் மீப்பெரு வாய்ப்பு முறையில் கண்ட வெற்றி காண $p$-ன் மதிப்பீடு ஒரு தலைச்சார்பற்றது என நிறுவுக.

(2) $f(x, \theta) = [(Nc_x) P^x (1-P)^{x-x}]$ $(x = 0, 1, 2, 3 \dots N)$.

$= 0$ வேறு இடங்களில் $(0 \quad P < 1.)$

$N$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப் பரவலில் $p$ பண்பளவை எனில், $p^2 + q$வின் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீட்டைக் காண்க.

**வினைத்திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்புகள் (Efficient Estimators)**

ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடுகளை மட்டுமே எடுத்துக் கொண்டாலே பொதுவாக, ஒரு பண்பளவைக்கு ஒன்றிற்கு மேல் பொருத்தமான மதிப்பீட்டுச் சார்புகள் இருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, $N(m, \sigma)$ ஆக உடைய ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில், பரவற்படி தெரிந்திருக்கும்போது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, $m$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற, பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுச் சார்பாகும். இது போன்றே கூறின் இடைநிலையும் $m$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற பொருத்தமுடைய மதிப்பீடாகும். எனவே, இவ்வாறு பொதுத் தன்மைகள் உடைய இரு மதிப்பீட்டுச்சார்புகளில் எதைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்று தீர்மானிப்பதற்கு இன்னும் வேறு ஏதேனும் நிபந்தனை இருக்கவேண்டும். மதிப்பீட்டுச் சார்புகளின் கூறுப் பரவல்களின் பரவற்படிகளைப் பொறுத்து அமையும் இத்தகைய தன்மையினை மதிப்பீட்டுச் சார்பின் திறன் (Efficiency of an estimate) என்கிறோம்.

$t_1$, $t_2$ என்பவை $\theta$ எனும் ஒரு பண்பளவையின் இரு மதிப்பீட்டுச் சார்புகள் $n$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $V(t_1)$ $V(t_2)$ என இருந்தால், கூறுகளுக்கும் $t_2$ ஐவிட $t_1$ மிகத்திறன் வாய்ந்தது எனலாம்.

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V(\text{இடைநிலை}) = \frac{\sigma^2}{n\frac{2}{\pi}} = \frac{\sigma^2 \pi}{2n}$$

$$= \frac{1{\cdot}57\ \sigma^2}{n}$$

எனவே, $V$ (கூட்டுச்சராசரி) $< V$ (இடைநிலை). ஆகையால் பெருங்கூறுகளில் கூறின் இடைநிலையைவிட, கூறின் கூட்டுச் சராசரி $m$-ன் மிகத் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீடு

ஒரு பண்பளவையின் பல்வேறு பொருத்தமான மதிப்பீட்டுச் சார்புகளில், வேறு எந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பைவிடக் கூறின் பரவற்படி சிறியதாக உள்ள மதிப்பீட்டுச் 'சார்பு மிகச்சிறந்த திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச்சார்பு' எனப்படுகிறது. இத்தகைய ஒரு மிகச் சிறந்த திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு மற்ற மதிப்பீட்டுச் சார்புகளின் திறனை அளக்கின்றோம்.

**வரையறை :**

$t_1$ என்பது $V_1$ ஐப் பரவற்படியாகக் கொண்ட மிகச் சிறந்த திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பு. $t_2$ என்பது $V_2$ ஐப் பரவற்படி படியாகக் கொண்ட மற்ெறாரு மதிப்பீட்டுச் சார்பாயின், $t_2$-ன் திறன் $E = \frac{V_1}{V_2} (E \ngtr 1)$

எடுத்துக்காட்டாக, இயல்நிலைக் கூறுகளில், கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, $m$-ன் மிகத்திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பு ஆனால், $n$-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு இடைநிலையின் திறன், $E = \frac{V(\bar{x})}{V(M)}$

$$= \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n}\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = \cdot 637 \text{ (1 ஐ விடக் குறைவானது).}$$

(மிகத்திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பின் திறன் E = 1).

**எடுத்துக்காட்டு :**

இயல்நிலைக் கூறுகளில் $V$ (சராசரி விலக்கம்) $= \frac{\sigma^2}{2n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$
(தோராயமாக)

$V$ (திட்ட விலக்கம்) $= \frac{\sigma^2}{2n}$

இணைத் திறமையைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$E = \frac{V \text{ (சராசரி விலக்கம்)}}{V \text{ (திட்ட விலக்கம்)}} = \frac{\frac{\sigma^2}{2n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}{\frac{\sigma^2}{2n}}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) < 1.$$

$$\therefore \quad E = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

கூட்டுச் சராசரி $m$, பரவற்படி $\sigma^2$ ஆக உடைய ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் $n$ அளவுடைய கூறுகளில் $t = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i$ என்பது $m$-ன் மதிப்பை மதிப்பிடுவதற்கு ஒரு தலைச் சார்பற்றது ஆயினும், மிகத் திறன் வாய்ந்தது என நிறுவுக. $\frac{t-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது கூட்டுச் சராசரி 0, பரவற்படி $\sigma^2$ ஆகவுடைய ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும் ($n$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு). எனவே, $t$ மிகத் திறன் வாய்ந்தது.

$$\text{மேலும்,}\; E(t) = E\left[\frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} E\left[\sum_{1}^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{n}{n+1} E\left[\sum_{1}^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{n}{n+1} E(\bar{x}) = \frac{mn}{x+1}$$

$E(t) \neq m$.

எனவே, $t$ என்பது $m$-ன் ஒரு தலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாகாது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$t$ என்பது $\theta$-வின் மிகச் சிறந்த மதிப்பீடாகவும், $t'_1$ குறைந்த திறன் $e$ யைக் கொண்ட மதிப்பீட்டு சார்பாகவும்; $t$, $t'$ இவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r$ எனில், $t''$ என்ற மதிப்பீட்டைப் பின்வருமாறு வரையறுத்து, $r = \sqrt{e}$ என நிறுவுக.

$(1 + e - 2r\sqrt{e})\, t'' \leq (1 - r\sqrt{e})\, t + (e - r\sqrt{e})\, t'$

**தீர்வு :**

$t, t'$ என்பவை $\theta$வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாக இருக்கட்டும்

$\therefore\ E(t) = E(t') = \theta$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பின் மூலம்

$$[(1 + e) - 2r\sqrt{e}]\, t'' = (1 - r\sqrt{e})\, t + (e - r\sqrt{e})\, t'$$

$$t'' = \frac{(1 - r\sqrt{e})\, t + (e - r\sqrt{e})\, t'}{[(1 + e) - 2r\sqrt{e}]}$$

$$= \frac{(1 - r\sqrt{e})\, E(t) + (e - r\sqrt{e})\, E(t)}{[(1 + e) - 2r\sqrt{e}]}$$

$$= \frac{(1 - r\sqrt{e})\, \theta + (e - r\sqrt{e})\, \theta}{(1 + e) - 2r\sqrt{e}} = \theta$$

மேலும், $[(1 + e) - 2r\sqrt{e}]^2\, V(t'') = (1 - r\sqrt{e})^2\, V(t)$

$+ (e - r\sqrt{e})^2\, V(t) + 2(1 - r\sqrt{e})(e - r\sqrt{e})\, \text{Cov}\,(t, t')$

வலப் பக்கம் $= (1 - r\sqrt{e})^2\, V(t) + (e - r\sqrt{e})^2\, \frac{1}{e}\, V(t)$

$$+ 2(1 - r\sqrt{e})(e - r\sqrt{e})\, r\sqrt{[V(t)\, V(t)]}$$

$$= (1 - r\sqrt{e})^2\, V(t) + (e - r\sqrt{e})^2\, \frac{1}{e}\, V(t)$$

$$+ 2r(1 - r\sqrt{e})(e - r\sqrt{e})\, \frac{V(t)}{\sqrt{e}}$$

ஏனெனில், $e = \frac{V(t)}{V(t)}$

$\therefore$ வலப் பக்கம் $= [(1 - r\sqrt{e})^2 + (\sqrt{e} - r)^2$

$$+ 2r(1 - r\sqrt{e})(\sqrt{e} - r)]\, V(t)$$

$$= (1 - r^2)\, [(1 + e) - 2r\sqrt{e}]\, V(t)$$

வலப் பக்கம் = இடப் பக்கம்

எனவே $(1 + e - 2r\sqrt{e})^2 V(t') = (1 - r^2)[(1 + e) - 2r\sqrt{e}] V(t)$

$$V(t') = \frac{(1 - r^2)\sqrt{(t)}}{(1 + e) - 2r\sqrt{e}} = \frac{(1 - r^2)\ V(t)}{(1 - r^2) + (r - \sqrt{e})^2}$$

$$V(t') \le V(t)$$

$t$, மிகச் சிறந்த மதிப்பீடாகும்; எனவே,

$$V(t) \le V(t')$$

$$V(t) = V(t')$$

$$(1 - r^2) = (1 - r^2) + (r - \sqrt{e})^2$$

$$r = \sqrt{e}.$$

**போதுமைத்தன்மை (Sufficiency)**

$\theta$ என்ற ஒரு பண்பளவை மாத்திரம் கொண்ட பரவலில் $\theta$-ன் மதிப்பீடுகளைக் கருத்தில் கொள்வோம். இம் மதிப்பீடுகள் எண்ணிறந்தவை. $x, x_2 \ldots x_n$ என்ற கூறின் மதிப்புகளைக் கொண்ட $L(x_1, x_2 \ldots x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$ என்பது **நிகழ்பாங்கு சார்பு** (likelihood function) என்று வழங்கப்படும். இந் நிகழ்பாங்குச் சார்பினை

$$L(x_1, x_2 \ldots x_n, \theta) = g(t_n, \theta) K(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

என எழுத இயலுமானால் $t$ என்பது போதுமான மதிப்பீட்டுச் சார்பு (sufficient estimates) எனக் கூறுகிறோம். அதாவது, வலப் பக்கத்தில் உள்ள இரண்டாவது சார்பில் $\theta$ இடம்பெறுத தால், $t_n$ -ன் போதுமான மதிப்பீட்டுச் சார்பு என வழங்கப் படும். சுருங்கக்கூறின் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை யைப் பற்றிய தேவையான விவரம் அனைத்தும் கூறில் அடங்கியி ருந்தால் $t$ போதுமான மதிப்பீட்டுச்சார்பாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை $m$ ஐ மதிப்பிடுவதற்கு, $\bar{x}$ ஒரு போதுமான மதிப்பீடு என நிறுவுக.

பாய்ஸான் பரவலில் $f(x, m) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!}$

$$\therefore L(x_1, x_2, \dots x_n, m) = \frac{e^{-m} \cdot m^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-m} \cdot m^{x_2}}{x_2!} \cdots \cdots \frac{e^{-m} m^{x_n}}{x!}$$

$$= e^{-nm} m^{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \frac{1}{x_1! x_2! \dots x_n!}$$

$$= [e^{-nm} \cdot m^{n\bar{x}}] \left[\frac{1}{x_1! x_2! \dots x!}\right]$$

$$= L_1(\bar{x}, m) L_2(x_1, x_2, \dots x_n)$$

எனவே, $L$-ஐ இரு பிரிவுகளாகப் பிரித்துள்ளோம். முதல் காரணியில் மதிப்பீட்டுச்சார்பு $\bar{x}$-ம் பண்பளவை $m$-ம், இரண்டாவது காரணியில் $m$ இல்லாது $x_1, x_2, \dots x_n$ மட்டும் உள்ளன. எனவே $m$ஐ மதிப்பிட $\bar{x}$ போதுமானது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஓர் இயல்நிலைப்பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறில்,

(i) $\sigma^2$ தெரிந்திருக்கும்போது $\bar{x}$, $m$-ன் போதுமான மதிப்பீடு என்றும்,

(ii) $m$ தெரிந்திருக்கும்போது $s^2 = \frac{1}{n} \Sigma \; x - \bar{x})^2$ என்பது $\sigma^2$-ன் போதுமான மதிப்பீடு ஆகாது என்றும் நிறுவுக.

நிகழ்பாங்குச் சார்பு $L(x_1, x_2, \dots\dots x_n, m)$

$$= f(x_1, m) \; f(x_2, m \; \dots \; f(x_n, \; m)$$

இயல்நிலைப்பரவலில் $f(x, m)$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$L(x_1, x_2, \dots x_{,}, m)$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-m)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2 + \cdots (x_n-m)^2]}$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x-m)^2}$$

$(x-m)^2 = [(x-\bar{x})+(\bar{x}-m)]^2$ என்க.

$$= (x_1-\bar{x})^2+(\bar{x}-m)^2+2(\bar{x}-m)(x-\bar{x})$$

$$\therefore \Sigma(x-m)^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2+n(\bar{x}-m)^2+0.$$

$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2$ ஆதலால்

$$\Sigma(x_i-m)^2 = ns^2+n(\bar{x}-m)^2$$

$$\therefore L(x_1, x_2, \ldots x_n, m)$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}[(\bar{x}-m)^2+s^2]}$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-m)^2} \cdot e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, m)$$

$$= \left[e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-m)^2}\right]\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}\right]$$

அதாவது நிகழ்பாங்குச் சார்பை இரு காரணிகளாகப் பிரித்துள்ளோம்.

முதல் காரணியில் மட்டும் மதிப்பீட்டுச்சார்பு $\bar{x}$-ம் பண்பளவை $m$-ம் இடம் பெற்றுள்ளன. எனவே, $\bar{x}$, $m$-ன் ஒரு போதுமான மதிப்பீட்டுச் சார்பாகும். இரண்டாவது காரணியிலும் $\sigma^2$ காணப் படுகிறது. எனவே, $s^2$, $\sigma^2$-ன் போதுமான மதிப்பீட்டுச் சார்பாகாது.

மதிப்பீடுகளைப் பெறுவதற்குப் பயன்படும் முறைகளில் இரு முக்கியமான முறைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம்:

**மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீட்டு முறை அல்லது மீப்பெரு வாய்ப்பு முறை (Maximum Likelihood Method)**

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற ஒன்றையொன்று சாராத மதிப்புகளைக் கொண்ட கூறு $f(x, \theta)$ என்னும் ஒரு பொதுப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாயின் அவற்றின் நிகழ்பாங்குச் சார்பு

$$L = f(x_1 \theta)\, f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$$

சமவாய்ப்பு மாறிகள் $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்பதற்குரிய வாய்ப்பினை $L$ தருகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கூறுக்கு $L$, பண்பளவை $\theta$-ன் ஒரு மாறி சார்பாக ஆகிறது.

மீப்பெரு நிகழ்பாங்குக் கொள்கையின்படி, $\theta$ ன் மதிப்பீட்டுச் சார்பாக நிகழ்பாங்குச் சார்பிற்கு மீப்பெரு மதிப்பை அளிக்க வல்ல $\hat{\theta}$ என்ற சார்பைக் கொள்ளவேணடும், இதற்குரிய

நிபந்தனைகள் $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ; $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$

$L$ மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்போது $\log L$ - ம், மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது என்ற உண்மை மிகவும் பயன்படுவதாகும்.

எனவே $(\log L)^1 = 0$

அதாவது $\dfrac{\partial}{\partial \theta} (\log) L = 0$

இது மீப்பெரு நிகழ்பாங்குச் சமன்பாடு எனக் கூறப்படுகிறது.

**மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகளின் பண்புகள்**

(1) க்ராமர்—ராவ் (Cramer-Rao) தேற்றத்தின்படி மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகள் பொருத்த முடையவை. ஏனெனில், $n$ முடிவிலியை அணுகும்போது நிகழ்பாங்குச்சார்பு $\dfrac{\partial}{\partial \theta} (\log L) = 0$,

என்பது $\theta_0$ என்ற உண்மையான மதிப்பிற்கு நிகழ்தகவு முறையில் குவிவதற்கு, நிகழ்தகவு ஒன்றை அணுகுகிறது.

(2) மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகள் மிகத் திறன் வாய்ந்தவை.

(3) மீச்சிறு வர்க்க விலக்கங்கள் உடையவை.

(4) ஈற்றணுக்கத்தில் ஒரு தலைச் சார்பற்றவை.

(5) இயல்நிலைப் பரவலை ஈற்றணுக்கமாகவுடையவை.

(6) போதுமானவை.

எனவே, மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகள் மிகவும் சிறந்தவை.

**எடுத்துக்காட்டு**

$(x_1, x_2 - x_n)$ என்பது $N(m,\sigma)$ என்ற ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சம வாய்ப்புக் கூறுகும். (i) $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரிந்திருக்கும்போது $m$-ன் (ii) $m$ தெரிந்திருக்கும்போது $\sigma^2$-ன்; (iii) $m, \sigma^2$ இரண்டின் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகளைக் காண்க.

நிகழ்பாங்குச் சார்பு $L = f(x_1, m, \sigma^2) f(x_2, m, \sigma^2) \ldots (x\ , m, \sigma)^2$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ldots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$

$$\therefore \log L = n \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{(-1)}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

$$= -n \log \sigma - n \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x - m)^2$$

$$= -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x - m)^2$$

**நிலை 1 :**

$\sigma^2$ தெரிந்திருக்கும்போது, $m$-ன் நிகழ்பாங்குச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial}{\partial m} (\log L) = 0.$$

அதாவது $\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} 2 (x_i - m) (-1) = 0.$

அதாவது $\sum_{i=1}^{n} (x_i - m) = 0.$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - nm = 0.$$

எனவே, $m = \frac{\Sigma x}{n} = \bar{x}$. (கூறின் கூட்டுச்சராசரி)

எனவே, கூறின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$, $m$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடாகும்.

**நிலை 2 :**

$m$ தெரிந்திருக்கும்போது $\sigma^2$-யை மதிப்பிடுவதற்கான நிகழ்பாங்குச்சார்பு $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\log L) = 0.$

அதாவது $-\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = 0.$

அதாவது $n - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{1}^{n} (x - m)^2 = 0$

எனவே $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - m)^2$

**நிலை 3 :**

$m, \sigma^2$ இரண்டையும் ஒரே சமயத்தில் தீர்மானிப்பதற்கான நிகழ்வாங்கு சமன்பாடுகள் $\frac{\partial}{\partial m} (\log L) = 0$; $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\log L) = 0$.

இவற்றிலிருந்து $\hat{m} = \bar{x}$ எனவும் அறிவோம்.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - \hat{m})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2$$

$$= s^2 \text{ (கூறின் பரவற்படி)}$$

குறிப்பு : $E(\hat{m}) = E(\bar{x}) = m.$

$E(\sigma^2) = E(s^2) \neq \sigma^2.$

எனவே, மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகள் எப்பொழுதும் ஒருபாற்சாரா மதிப்பீடுகளாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$n$ கூறு அளவுகளுடைய ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் பண்பளவை $m$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீட்டைக் காண்க.

பாய்ஸான் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $x_1, x_2, \ldots x$ என்ற $n$ அளவுகளையுடைய முழுமைத்தொகுதியின் நிகழ்பாங்குச் சார்பு.

$$L = \frac{e^{-m} m^{x1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-m} m^{x2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-m} m^{xn}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-nm} m^{x_1 + x_2 \dots x_n}}{x_1 ! \, x_2 ! \dots x_n !}$$

$$\log L = -nm + (x_1 + x_2 \dots x_n) \log m - \sum_{i=1}^{n} \log (x_i !)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} (\log L) = 0$$

$$\therefore \quad -n + \frac{1}{m} (x_1 + x_2 + \dots x_n) = 0.$$

$$\therefore \quad m = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$$

$$= \bar{x}$$

$\hat{m} = \bar{x}$ (கூறின் கூட்டுச்சராசரி).

பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை $m$-ன் மதிப்பீடாகிய கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ போதுமைத்தன்மை வாய்ந்தது என நிறுவுக.

$m$ஐப் பண்பளவையாகவுடைய பாய்ஸான் பரவலில் $\frac{\partial}{\partial m} (\log L) = 0.$

அதாவது $-n + \frac{n\bar{x}}{m} = n\left(\frac{\bar{x}}{m} - 1\right) g(\bar{x}, m)$

அதாவது $\bar{x}$, $m$-ல் ஒரு சார்பாகும்.

எனவே, $\bar{x}$, $m$-ன் போதுமான மதிப்பீடாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(x, \theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}$ என்னும் நிகழ்வெண் சார்பில் $x$ குறைக்குறி அல்லாத முழு எண் மதிப்புகளைப்பெறுகிறது. நேரில் கண்ட 6 மதிப்புகள் 6, 11, 4, 8, 7, 6. $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழ்வாங்கு மதிப்பீட்டுச் சார்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$L = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_2}}{x_2!}\ \dots\ \frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_n}}{x_n!}$$

$$= \frac{e^{-n\theta}\cdot\theta^{x_1+x_2+\dots x_n}}{x_1!\cdot x_2!\dots x_n!}$$

$$\log L = -n\theta + (x_1 + x_2 + \dots x_n)\log\theta - \log(x_1!\, x_2!\dots x_n!)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log L) = -n + \frac{(x_1 + x_2 + \dots x_n)}{\theta}$$

$$= 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 + \dots x_n = n\theta.$$

$$n\bar{x} = n\theta.$$

$$\therefore \bar{x} = \theta.$$

நேரில் கண்ட மதிப்புகட்கு $\theta$-ன் மதிப்பீடு$= \frac{6+11+4+7+6}{6}$

$$= 7.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$f(x,\theta) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}}{\theta\sqrt{2\pi}}\ (-d < x < d)$$

$\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீட்டைக் காண்க.

**தீர்வு :**

நிகழ்பாங்குச் சார்பு$= \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2\theta^2}}}{\theta\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{-\frac{x_2^2}{2\theta^2}}}{\theta\sqrt{2\pi}}\ \dots\ \frac{e^{-\frac{x_n^2}{2\theta^2}}}{\theta\sqrt{2\pi}}$

$$= \left[\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\right]^n e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)}$$

$$\log L = -n \log(\theta\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\theta^2}(x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2)$$

$$\log L = -n \log \theta\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2}(x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log L) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) = 0$$

$$\therefore\ n\theta^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$$

$$\therefore\ \theta = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

இது θ-ன் மீப்பெரு நிகழ் பாங்கு மதிப்பீடு

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(x) = nC_x p^x q^{n-x}$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலில் $p$-ன் மீப்பெரு நிகழ் பாங்கு மதிப்பீட்டைக் காண்க. மதிப்பீட்டின் பரவற்படியைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$f(x) = nC_x p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n$$

நிகழ் பாங்குச் சார்பு $L \equiv nC_x p^x (1-p)^{n-x}$

$$\log L = \log nCx + x\log p + (n-x)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = 0$$

$$\therefore\ \frac{x}{p} = \frac{n-x}{1-p} = \frac{x+(n-x)}{p+(1-p)} = \frac{n}{1}$$

$$\therefore\ \hat{p} = \frac{x}{n}$$

க்ராமர்—ராவின் சமனின்மையின் படி

$$\frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = -\frac{x}{p^2} - \frac{(n-x)}{(1-p)^2}$$

$$\frac{1}{\text{Var}(\hat{\theta})} = -n\,E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)$$

எனில் $V(\hat{p}) = -\dfrac{1}{E\left[\dfrac{\partial^2}{p^2}(\log L)\right]}$

$$= \frac{1}{E\left[\frac{x}{p^2} - \frac{n-x}{(1-p)^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{p^2}E(x) + \frac{n}{(1-p)^2}\frac{1}{(1-p)^2}E(x)}$$

$$= \frac{1}{\frac{nq}{p} + \frac{n}{q^2} - \frac{np}{q^2}} \quad \therefore \quad E(x) = npq, \quad 1-p = q$$

$$= \frac{pq}{n}$$

**விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின்மூலம் மதிப்பீடு காணுதல்**

இம் முறையைக் கண்டறிந்தவர் கார்ல் பியர்ஸன் (Karl-Pearson) என்பவர். $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k$ என்ற $k$ பண்பளவைகளை, உடைய முழுமைத் தொகுதியின் அடர்த்திச் சார்பு $f(x, \theta_1, \theta_2) \dots \theta_k)$, $x$-ன் ஆதியை ஒட்டிய $r$-வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $\mu_r'$ எனில்

$$\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)\, dx r = 1, 2, \dots k.$$

$$\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)\, dx$$

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)\, dx.$$

$$\mu_k^1 = \int_{-\infty}^{-\infty} x^k f(x, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)\, dx.$$

பொதுவாக, $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_k'$ பண்பளவைகள் $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$-ன் சார்புகளாகும். $x$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறுகும். மேற்கண்ட $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_k'$ காணப் படுகின்ற $k$ சமன்பாடுகளையும் தீர்வுகண்டு, $\mu_r'$ $(r = 1, 2, \ldots k)$ என்பவற்றைக் கூறுகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளால் பிரதியிடவேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு**

$$\hat{\theta}_i = \theta_i (\hat{\mu}_1', \hat{\mu}_2', \ldots \hat{\mu}_k')$$

$$= \theta (m_1', m_2', \ldots m_k') \qquad i = 1, 2, \ldots k$$

இங்கு $m'$ என்பது கூறில் ஆதியை ஒட்டிய $i$ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும்.

எனவே, விலக்குப் பெருக்குத் தொகை முறையின்படி $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots \hat{\theta}_k$ என்பவை $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$-ன் மதிப்பீடுகளாகும்.

குறிப்பிட்ட சில நிபந்தனைகட்குட்பட்டு, இம் முறையில் காணப்பட்ட மதிப்பீடுகள் (i) பொருத்தமுடையவை (ii) முடிவிலியிடத்து இயல் நிலைப்பரவலைச் சார்ந்தவை. ஆனால், பொதுவாகத் திறன் வாய்ந்தவை அல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(x, n, p) = nC\ p\ q^{n-x}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots n)$ என்பதில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் முறையில் பண்பளவை $P$-ன் மதிப்பீட்டைக் காண்க.

ஈருறுப்புப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ள $n$ அளவுடைய

ஒரு கூறு $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ கூறின் கூட்ச்சராசரி $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

ஈருறுப்பு முழுமைத் தொகுதியில் கூட்டுச்சராசரி $= E(x) = np$ எனவே, விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் முறையால் (திருப்பமுறை)

$$nP = \bar{x}$$

இதிலிருந்து $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ எனக் கிடைக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பியர்ஸனின் மூன்றும் வகைப் பரவலில் $\alpha$, $P$ஐ மதிப்பிடுக.

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} \quad 0 \leq e \leq \infty$$

$$\mu_1' = \int_0^{\infty} x f(x_1 \alpha, \beta)\, dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x . x^{\alpha - 1} e^{-\beta x} d_k$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha + 1 - 1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} . \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta^{\alpha + 1}} = \frac{\beta^{\alpha}\, \alpha\, \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha + 1}}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} .$$

$$\mu_2' = \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha + 1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha + 2 - 1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\beta^{\alpha + 2}} = \frac{\Gamma(\alpha + 1 + 1)}{\Gamma(\alpha)\, \beta^2}$$

$$= \frac{(\alpha + 1)\,\Gamma\,(\alpha + 1)}{\beta^2\,\Gamma\,(\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha\,(\alpha + 1)\,\Gamma\,(\alpha)}{\beta^2\,\Gamma\,(\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha\,(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

$$\mu_2' = \frac{\alpha\,(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

$$\frac{\mu_2'}{(\mu_1')^2} = \frac{\frac{\alpha\,(\alpha + 1)}{\beta^2}}{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{\alpha}\,.$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mu_2}{(\mu_1')^2} - 1 = \frac{\mu_2' - (\mu_1')^2}{(\mu_1')^2}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{(\mu_1)^2}{\mu_2' - (\mu_1')^2}, \quad \therefore\ \hat{\alpha} = \frac{(m_1')^2}{m_2' - (m_1')^2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu_1'} = \frac{\mu_1'}{\mu_2' - (\mu_1')^2} \quad \therefore\ \hat{\beta} = \frac{m_1'}{m_2' - (m_1')^2}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} + e^{-(x-b)^2/2\sigma^2} \right]$$

என்பதில் $a$, $b$, $\sigma$-ன் மதிப்பீடுகளை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை முறையில் காண்க.

**தீர்வு :**

$$(x) = \frac{1}{2}\,[\phi\,(x, a, \sigma) + \phi\,(x, b, \sigma)],$$

இங்கு $\phi\,(x, a, x) = N\ a, \sigma^2)$

$$\therefore \quad E(x) = \frac{1}{2}[N(a, \sigma^2)\text{-ல் } E(x) + N\ b, \sigma^2)\text{-ல் } E(n)]$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) = m \text{ என்க.} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$E(x-m)^2 = \frac{1}{2}[N(a, \sigma^2)\text{-ல் } E(x-m)^2 + N(b, \sigma^2)\text{-ல் } E(x-m)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[\{\sigma^2 + (m-a)^2\} + \{\sigma^2 + (m-b)^2\}]$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \sigma^2 + \frac{(a-b)^2}{4} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\mu_4 = E(x-m)^4 + 4E(x-a)^3(a-m)$$

$$+ 6E(x-a)^2(a-m)^2 + 4E(x-a)(a-m)^3 + (a-m)^4$$

வலப் பக்கத்தில் 2ஆவது, 4ஆவது உறுப்புகள் பூச்சியம் ஆகும்,

$$\therefore \quad E(x-m)^4 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2(a-m)^2 + (a-m)^4$$

$$\therefore \quad \mu_4 = 3\sigma^4 + \frac{3}{2}\sigma^2(a-b)^2 + \left(\frac{a-b}{16}\right)^4 \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

(i), (ii), (iii)-லிருந்து $a$, $b$, $\sigma$-ன் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம்.

**ஃபிஷர் சமனின்மை** (Fisher's Inequality)

$f(x, \theta)$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு. $T$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியியல் அளவை. $E(x)$, $x$-ன் எதிர் பார்த்தல் எனில்

ஃபிஷரின் சமனின்மை $V(T) \geq \dfrac{1}{n \cdot E\left(\dfrac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2}$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$f(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty,$$

என்பதில் $m$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடு $\bar{x}$ என்றும், அது மிகத் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீடு என்றும் காட்டுக.

**தீர்வு :**

$$L = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\Sigma(x-m)^2/2\sigma^2}$$

$$\log L = -n\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i - m)^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = \frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\,\Sigma(x_i - m)\cdot(-1) = 0$$

அதாவது $\Sigma(x_i - m) = 0$

$$\therefore \quad m = \Sigma\frac{xt}{} = \bar{x}$$

ஃபிஷர் சமனின்மைப்படி

$$V(t) \geq \frac{1}{n\cdot E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial m} = \frac{2(x-m)}{2\sigma^2}$$

$$\left(\frac{\partial \log f}{\partial m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(x-m)^2$$

$$E\left(\frac{\partial \log f}{\partial m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}E(x-m)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\cdot\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$V(t) \geq \frac{1}{n\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} = \frac{\sigma^2}{n} = V(\bar{x})$$

$\therefore \quad t = \bar{x}$ மீச்சிறு பரவற்படி உடையது.

எனவே, $\bar{x}$, $m$-ன் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பாகும்

**எடுத்துக்காட்டு :**

$t$, $\theta$-ன் மிகத்திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பாகவும் $t'$ திறன் $e$ஐக் கொண்ட மற்றொரு மதிப்பீட்டுச் சார்பாகவும் இருந்தால்,

$$V(t - t') = \left(\frac{1}{e} - 1\right)V(t)$$

**தீர்வு :**

$$e = \frac{V(t)}{V t')}$$

$$V(t - t) = V(t) + V(t') - 2\,\text{Cov}\,(t, t')$$

$t, t'$-க்கு இடை உறவுக்கெழு $r$ எனில்,

$$V(t - t') = V(t) + V(t') - 2r\sqrt{V\,t, V(t')}$$

$$= V(t) + V(t') - 2r\sqrt{V(t)}\sqrt{\frac{V(t)}{e}}$$

$$= 1 + \frac{1}{e} - \left(\frac{2r}{\sqrt{e}}\right) V(t)$$

$$V(t - t')\,P = \sqrt{e}\left(\frac{1}{e} - 1\right) V(t)$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$t$ மிகச் சிறந்த மதிப்பீட்டுச் சார்பாகவும், $t'$ குறைந்த திறன் $e$ ஐக் கொண்ட மதிப்பீட்டுச் சார்பாகவும், $t, t'$-க்கு இடையே ஒட்டுறவுக்கெழு $r$ ஆகவும் இருந்தால்,

$\text{Cov}\,(t - t') = 0$ என நிறுவுக.

**தீர்வு :**

$$e = \frac{V(t)}{V(t)}$$

$$V[t - (t - t')] = V(t) + V(t - t') - 2\,\text{Cov}\,[t_1\,(t - t')]$$

$$V(t') = V(t) + V(t) + V(t') - \text{Cov}\,(t, t') - 2\,\text{Cov}\,[t, (t - t)$$

$$\text{Cov}\,[t, (t - t')] = V(t) - \text{Cov}\,(t, t')$$

$$= V(t) - P\sqrt{[V\ t, V(t)]}$$

$$= V(t) - \sqrt{(e)}\,\frac{V(t)}{\sqrt{(e)}} = 0\ [\because r = \sqrt{e}]$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$t, t'$ என்பவை இரண்டும், $v$ஐப் பரவற்படியாகக் கொண்ட இரு மிகத் திறன் வாய்ந்த மதிப்பீட்டுச் சார்புகளாயின்,

$$V(t'') = \frac{1}{2} v (1 + r)$$

**தீர்வு :**

$$\text{Var}(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1^2 v(x_1) + a_2^2 v(x_2) + 2 a_1 a_2 \text{Cov}(x_1 x_2)$$

$$\therefore \quad v(t'') = V\left[\frac{1}{2}(t + t')\right] = \frac{1}{4} V(t) + \frac{1}{4} V(t') + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{Cov}\ t, t)$$

$$= \frac{1}{4} v + \frac{1}{4} v + \frac{1}{2} r \sqrt{[V(t) V(t')]}$$

$$= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} r v$$

$$= \frac{1}{2} v (1 + r)$$

**பெருங்கூறுகளுக்கு நம்பிக்கை இடைவெளிகள்**

$f(x, \theta)$ என்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய கூறின் நிகழ்பாங்குச் சார்பு $L$. சில பொது விதிகளின் படி ஈற்றணுக்கத்தில் கூட்டுச் சராசரி பூச்சியமாகவும், மாறுபாடு $V$ ஆகவும் உடைய இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும்.

$\therefore \dfrac{\frac{\partial \log L}{\partial \theta}}{\sqrt{V}}$ என்பது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

$\therefore \theta$-ன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை

$- 1{\cdot}96 \sqrt{V} \geq \dfrac{\partial \log L}{\partial \theta} \leq + 1.96 \sqrt{V}$ என்பதிலிருந்து பெறலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு**

$m$ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலில் $m$-ன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $= \frac{e^{-m} m}{n!}$

$$f(x, m) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

$$\frac{\partial \log t}{\partial m} = -1 + \frac{x}{m}$$

$$L = e^{-nm} \frac{m^{x_1} m^{x_2} \dots m^{x}}{x! \, x_2! \, x_n!}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = n + (\Sigma x) \frac{1}{m}$$

$$V\left(\frac{\partial \log L}{\partial m}\right) = n \cdot V\left(\frac{\partial \log f}{\partial m}\right)$$ [ $x_1, \dots x$ சமவாய்ப்புக் கூறு]

$$= n \cdot E\left(\frac{x}{m} - 1\right)^2$$

$$= n \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{x}{m} - 1\right)^2 \cdot \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

$$= \frac{n}{m^2} E(x-m)^2$$

$$\frac{n}{m^2} \cdot m = \frac{n}{m}$$

$$\therefore \frac{\frac{n\bar{x}}{m} - n}{\sqrt{\frac{n}{m}}} \quad \sqrt{\frac{n}{m}(\bar{x} \quad m)^2}$$ என்பது ஈற்றணுக்கத்தில் ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைமாறி.

$m$-ன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளி $(\bar{x} - m)\sqrt{n}$
$= \pm 1.96$ ஆல் தரப்படுகிறது.

$$(\bar{x}-m)^2 = \frac{3\cdot 84}{n} m$$

$$m^2 - \left(2\bar{x} + \frac{3\cdot 84}{n}\right) m + \bar{x}^2 = 0$$

$$m = \bar{x} + \frac{1\cdot 92}{n} \sqrt{\frac{3.84\,\bar{x}}{n} + \frac{3.69}{n^2}}$$

$$\therefore m = \bar{x} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}$; $0 \leq x \quad \theta$ என்ற செவ்வக முழுமைத் தொகுதியில் $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடு கூறின் மீப்பெரு உறுப்பு எனக் காட்டு.

**தீர்வு :**

$(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ என்பது ஒரு கூறு என்க. $i$ ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x_i < \theta$.

$L = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \times \ldots\ldots f(x\ , \theta) = \frac{1}{\theta^n}$ $L$ மீப்பெரு மதிப்படையும்போது, $\theta$ மீச்சிறு மதிப்படையும்.

எனவே, $x \quad \theta$ என்ற நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யும் $\theta$-ன் சிறிய மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

அந்த மதிப்பு $x$ ன் மிகப் பெரிய மதிப்பாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$x$ என்ற சமவாய்ப்பு மாறி $N(m, 1)$ என்ற பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது. $x < 0$ ஆக இருந்தாலும், இல்லாவிட்டாலும் $x$-ன் 10 கணிப்புகள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் 6-ல் $x < 0$. இந்த விவரங்களிலிருந்து $m$ ஐ மதிப்பிடுக.

**தீர்வு :**

$$P(x < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} \cdot dx$$

$x - m = y$ என்க.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = F(-m) = p \text{ என்க.}$$

கூறின் நிகழ்பாங்கு சார்பு $(L) = 10C_6\, p^6\, (1-p)^4$

$\log L = \log 10C_6 + 6 \log p + 4 \log (1-p)$

$$\frac{\partial \log L}{\partial m} = \frac{6p'}{p} + \frac{4(-p)'}{1-p} = 0 \quad \left( \therefore \text{ இங்கு } p' = \frac{dp}{dm} \right)$$

$$\therefore \frac{6p'}{p} = \frac{4p'}{1-p} = 10p$$

$\therefore \; p = \cdot 6$, அதாவது $F(-m) = \cdot 6$

அட்டவணையிலிருந்து $m = -\cdot 25$.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$(-a, a)$ எனும் இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள செவ்வகப்பரவலுக்கு, மீப்பெரு நிகழ்பாங்குச் சார்பு இருப்பதில்லை என நிறுவுக.

**தீர்வு :**

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a} \text{ [செவ்வகப் பரவலாதலால்]}$$

$$\therefore \; L = \left[\frac{1}{2a}\right]^n = [2a]^{-n}$$

$\therefore \; \log L = -n \log 2 - n \log a.$

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = -\frac{n}{a}$$

எனவே மீப்பெரு நிகழ்பாங்குச் சார்பு இருக்கமுடியாது.

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial a} = 0 \text{ எனின்}, \ \theta = \infty,\right.$$

$$\left. \text{ஆனால் } a = \infty \text{ ல்}, \ \frac{\partial^r \log L\text{-ம்}}{\partial a} 0, \text{ ஆகிறது.}\right]$$

## பயிற்சி

(1) பண்பலகுகளின் மதிப்பீட்டில், மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு முறையினைப் பயன்படுத்தலை விளக்குக. மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகளின் சில முக்கியப் பண்புகளைக் கூறுக. (அ. ப.)

(2) $X$எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி முறையே 0, 1 என்ற மதிப்புகளை நிகழ்தகவுகள் $p$, $1-p$யுடன் ஏற்கின்றது. $n$ அளவுடைய சமவாய்ப்புக் கூறைப் பயன்படுத்தி, $p$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீட்டைப் பெறுக.

(3) பின்வருவனவற்றிற்கு $\theta$-ன் மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகளைக் காண்க.

(i) $f(x.\ \theta) = \frac{1}{\theta} \quad e^{-x/\theta} \quad \bar{x} \geq 0,\ \theta > 0$

(ii) $f(\underline{x},\ \theta) = nc_x\ \theta\ \ (1 - \theta)^{-x}\ x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n.$

(4) மதிப்பீடுகளுக்குத் தேவையான சிறந்த பண்புகள் யாவை?

(5) இயல் நிலைப்பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறில் $\sigma^2$-ன் மதிப்பு தெரியும்போது $\mu$-ன் போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடு $\bar{x}$ எனக் காட்டுக. $\mu$ தெரியும் போது, $s^2 = \frac{1}{n}\ \Sigma\,(x - \bar{x})^2$ என்பது $\sigma'$-க்குரிய ஒரு போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடல்ல எனக்காட்டுக. $\sigma^2$-ன் போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடு யாது?

(6) (i) பண்பலகுகளின் மதிப்பீட்டில் திருப்பமுறை (Method of moments), உச்சமாக நிகழத்தகும் முறை (Method of maximum likelihood) ஆகியவற்றை விளக்குக.

(ii) $X$ என்ற மாறியின் ஊக அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

$$p(x ; m, p) = \frac{mp}{\Gamma(p)} X^{p-1} C^{mx}, X \geq 0$$

என்றால் $m$, $p$ இவற்றிற்குத் திருப்பமுறையின் மதிப் பீடுகள் காண்க. (செ.ப. 73)

(7) (i) 'நெருக்க அளவு' (Consistency), பாரபட்சமற்ற தன்மை (unbiasedness) என்கின்ற மதிப்பீடுகளின் பண்புகளை விளக்குக

தொகுதியின் சராசரிக்குக் கூறின் சராசரி நெருக்க அளவுடனும், பாரபட்சமற்ற தன்மையுடனும் இருக்கிறதென் பதைக் காட்டுக.

(ii) $n$ அளவுகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு, $N(a, \sigma^2)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால், $\sigma^2$-க்குப் பாரபட்சத் தன்மையற்ற மதிப்பீட்டைக் காண்க. (செ.ப. 1973)

(8) ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் கூறின் பரவற்படி, முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படியின் பொருத்தமான (Consistent) மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

(9) $E(t_n) = \theta_n - 0$, $V(t_n) \to 0$ ($n \to \infty$ எனும்போது) எனவாறு அமையும் மதிப்பீடாகிய $t_n$ ஒரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீடென நிறுவுக.

(10) $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ $(0 < x < \infty, 0 < \theta < \infty)$,

$= 0$ மற்றெங்கிலும் என்றுள்ளபோது, பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $n$ அளவுடைய ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி, $\theta$-ன் ஒரு தலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு எனவும், அதன் பரவற்படி $\frac{\theta^2}{n}$ எனவும் காட்டுக.

(11) பண்பலகுகளின் மதிப்பீட்டில், மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு முறையினை விளக்குக. மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீடுகளின் பண்புகளை விளக்குக

ஈருறுப்புப் பரவலில் '$p$-ன்' மீப்பெரு நிகழ்பாங்கு மதிப்பீட்டைக் காண்க. (செ.ப. 1973)

(12) $t$, $\theta$-ன் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடாயின், $t^2$, $\theta^2$-ன் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடெனக் காட்டுக.

{ குறிப்பு : $P[\,|t-\theta| < \epsilon] \to 1$, ($n \to \infty$ எனும் போது)

$P[-\epsilon < t-\theta < \epsilon] \to 1$

$P[(\theta - \epsilon^2) < t^2 < (\theta + t)^2] \to 1$

$P[\epsilon - 2\epsilon\theta < t^2 - \theta^2 < \epsilon^2 + 2\epsilon\theta] \to 1$

$P[-\beta < t^2 - \theta^2 < \beta] \to 1$, ($\epsilon$ சிறியதாதலால் $\beta$ சிறியது)

$P[\,|t^2 - \theta^2| < \beta] \to 1$, ($n \to \infty$ எனும் போது) }

(13) $s_1^2, s_2^2, \ldots s_r^2$ என்பவை, $n_1, n_2, \ldots n_r$ அளவுடைய சமவாய்ப்புக் கூறுகளின் மதிப்புகளின் மூலமாக கணக்கிடப் பட்ட கூறு பரவற்படிகள்.

$$T = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \ldots + n_r s_r^2}{a}$$ என்பது, $\sigma^2$-ன் ஒரு பாற்சாரா மதிப்பீடெனில், கூறு பெருங்கூறெனவும்,

$$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$ எனவும் இருக்கும்போது, $a$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

{ குறிப்பு : $$E(T) = E\left\{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \ldots\ldots n_r s_r^2}{a}\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\{E(n_1 s_1^2) + E(n_2 s_2^2) + \ldots\ldots + E(n_r s_r^2)\}$$

$$= \frac{1}{a}\{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2 + \ldots\ldots + (n_r - 1)\sigma^2\}$$

$$= \frac{1}{a}\{(n_1 + n_2 + \ldots + n_r) - r\}\sigma^2$$

$$= \sigma^2 \quad \{a = n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r$$ எனின் }

(14) ஒரு பொருத்தமுடைய ஒரே நிலையிடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீட்டு சார்பு ஒரு தலைச் சார்பற்றதாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக. (I. A.S., 71)

(15) $f(x, \theta) = \theta \cdot e^{-\theta x}$ என்ற நிகழ் வெண் சார்பில் பண்பளவை $\theta$-ன் மதிப்பீட்டைப் பெறுக. $x$-ன் 5 கணிப்புகள் $x_1 = 0{\cdot}9$, $x_2 = 1{\cdot}7$. $x_3 = 0{\cdot}4$, $x_4 = 0{\cdot}3$, $x_5 = 2{\cdot}4$ என்ற மதிப்புகளைத் தந்தால், $\hat{\theta}$ ஐக் காண்க. மேலும், உனது மதிப்பீட்டின் பரவற்படியையும் காண்க.

$$\left[\text{விடை}: \quad \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}, \ \hat{\theta} = \cdot 88, \ V(\theta) = \frac{\theta^2}{n}\right]$$

(16) $dp = \dfrac{1}{2 - e^{-\theta}} \, e^{-|x|} \, dx, \ -\theta \leq x \leq \theta$ என்ற பரவலுக்கு, $\theta$-ன் மீப்பெரு மதிப்பீடு, $|x_1|, |x_2|, \ldots\ldots |x_n|$ என்ற எண்களில் மிகப் பெரிய எண் என நிறுவுக.

(17) $(0, r)$ என்ற இடைவெளியில் சீராகப் பரவியுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி $X$ முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறு $0{\cdot}5$, $0\,6$, $0{\cdot}1$, $1{\cdot}3$, $0{\cdot}9$, $1{\cdot}6$, $0{\cdot}7$, $0{\cdot}9$, $1{\cdot}0$ என்ற மதிப்புகளைக் கொண்டது. பண்பளவை $r$-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மதிப்பீட்டுச் சார்பைக் காண்க.

(18) (i) $f(x, \theta) = \dfrac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$

(ii) $f(x, \theta) = \dfrac{1}{2} e^{-(x-\theta)} \ (\theta \leq x \leq \infty,$

$$-\infty \leq \theta \leq \infty \ (-\infty < x < 0)$$

என்ற நிகழ்தகவுச் சார்புகளைக் கொண்ட பரவல்களில் $\hat{\theta}$ காண்க.

[விடை : (i) $\hat{\theta} =$ இடைநிலை (ii) இராசிகளிலேயே மீச்சிறு மதிப்புடையது $x_1$.

(19) மதிப்பீடு, மதிப்பிடுதல் ஆகியவற்றைத் தக்க எடுத்துக்காட்டுகளுடன் வேறுபடுத்திக் காண்பி.

(20) புள்ளி மதிப்பீடுகளில், பாரபட்சமற்ற தன்மை, நெருக்க அளவு என்றால் என்ன? எல்லையுடைய பரவற்படி உள்ள ஒரு தொகுதியிலிருந்து $n$ அளவுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரிக் கூறின் சராசரி, தொகுதியின் சராசரிக்கு பாரபட்சமற்ற தன்மையுடனும் நெருக்க அளவுடனும் உள்ளது எனக் காண்பி. [1974 செ.ப.க.]

(21) மதிப்பீட்டில் உச்சமாக நிகழத்தக்க நிலை என்ற முறையை விளக்கி, அதன் முக்கியப் பண்புகளைக் கூறுக.

$$X\text{-ன் ஊக அளவு சார்பு} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad -\infty \leq X \leq \infty$$

என்றால் உச்சமாக நிகழும் முறையில் $\theta$ வின் மதிப்பீட்டையும், அந்த மதிப்பீட்டின் பரவற்படியையும் காண்க. [1974 செ.ப.க.]

# 10. பரவற்படி பகுப்பாய்வு,
## (Analysis of Variance)
# சோதனைத்திட்ட முறை
## (Design of Experiments)

**அறிவியல் சோதனைகளின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் (Principles of Scientific Experimentation)**

விஞ்ஞான வழிச்சோதனைகளில், வெகுவாக வளர்ந்து வரும் புள்ளியியல் முறைகளின் பயன்கள் அதிகரித்துள்ளன என்பதில் ஐயம் எதுவுமில்லை. புள்ளியல் முறைகளை மிகச் சிறந்த வகையில் பயன்படுத்தி ஒரு சோதனையை அறிவியல் வழியில் நடத்த, நாம் மனத்தில் கொள்ளவேண்டிய முக்கியமான தத்துவங்களைப் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம். இந்தக் கொள்கைவழிச் சோதனைகளை ஆய்ந்து நடத்த வழிவகைகளை ஆராயும்போதுமட்டுமல்லாது, சோதனையின் முடிவுகளைக் கருத்துரை வழங்கும்போதும் பயன் படுத்தவேண்டும்.

(1) ஒவ்வொரு சோதனையிலும் நாம் ஓர் எடுகோளை எடுத்துக் கொள்கிறோம். அது ஒரு சோதனை மூலம் சோதிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்கொள்ளும் எடுகோள் 'இல்' எனும் எடுகோளாக இருத்தல் வேண்டும். சோதனை, இது தவறெனக் காட்டினால் இதன் மூலம் ஒரு சரியான முடிவுக்கு நாம் வரலாம். ஒரு பயிருக்குப் பயன்படுத்தும் ஒரு முக்கிய உரத்தின் பயனைப்பற்றி சோதிப்பதாகக் கொள்வோம். இச் சோதனையில் இந்த உரமிட்டதனால் கண்ட வளர்ச்சி, உரமிடாமல் கண்ட வளர்ச்சியைவிட அதிகமாக இருப்பதாகவும், வளர்ச்சியினால் பாதிக்கும் மற்றக் காரணிகள் யாவும் உரமிட்ட, உரமிடாத பயிர்கள் இரண்டிற்கும் பொதுவாக உள்ளதாகவும் கொள்வோம். இங்கு நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் 'இல்' எனும் எடுகோள், உரமிட்டதால் வளர்ச்சியில் கண்ட வேறுபாடு பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு இல்லை என்பதாகும்.

சோதனை, வேறுபாடு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததெனக் காட்டினால், இந்த உரம் பயனளிக்கக்கூடியதென முடிவுக்கு வருவோம். அவ்வாறில்லாது வேறுபாடு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தல்ல எனக் காட்டினால் வேறுபாடு உரத்தினால் ஏற்பட்டதல்ல, பொதுவாக ஏற்படும், தற்செயலாக நேர்ந்த மாறுபாடே எனக் கொள்ளவேண்டும்.

(2) நடத்தப்படும் சோதனைகளில் பொதுவாகப் பல்வகைப் பட்ட மாறிகளை எதிர்பார்க்கலாம். குறிப்பிட்ட ஒரு மாறியினால் மற்றொரு மாறியின் மீது ஏற்படும் விளைவைச் சோதிக்க விரும்பினால் ஏனைய மாறிகளினால் ஏற்படும் விளைவுகள் நீக்கப்பட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,குறிப்பிட்ட ஓர் எரு பயன்படுத்தப் படுவதனால் ஒரு பயிரின் விளைச்சலில் கண்ட மாற்றத்தை அறிய விரும்பினால், விளைச்சலைப் பாதிக்கும் வெப்பநிலை, நிலத்தின் வளத்தில் காணும் வேறுபாடு, பராமரிப்பு முறை, நீர்வசதி, போன்ற மாறிகளைக் கட்டுப்படுத்த் வேண்டும் இங்கு எரு விளைச்சல் சோதனைக் குரிய மாறிகள் (experimental variables) எனவும், ஏனைய மாறிகள் புறமாறிகள் (extraneous variables) என வும் கூறப்படும். ஓர் இயற்பியல் சோதனையில் சோதனைக்குரிய மாறிகளின் உறவினைப்பற்றி அறிவதற்கு, சோதனைக் கூடத்தில் புறமாறிகளை; எடுத்துக்காட்டாக அழுத்தம், வெப்பநிலை போன்ற வற்றைக் கட்டுப்படுத்தவோ அல்லது நீக்கவோ முடியும். ஆனால், நிலச்சோதனைகளில் புறமாறிகளை நீக்கவோ (eliminate), சமப்படுத் தவோ (equalise), நடுநிலைப்படுத்தவோ (balance) எளிதில் இயலாது.

(3) நிலச் சோதனைகளுக்குப் பொதுவாகப் பின்பற்றப்படும் முறைகள் தலக்கட்டுப்பாடு (local control), சரி சமமாக்குதல் (equalisation), சமநிலைப் படுத்துதல் (balancing) எனப் பலவாக வழங்கப்படுகின்றன. ஓர் உரத்தினால் விளைச்சலில் கண்டபலனை அறிய விரும்பினால், இரு நிலப்பகுதிகளையோ அல்லது பல நிலப் பகுதிகளைக் கொண்ட இரு குழுக்களையோ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அன்னிய மாறிகள் சமமாகப் பங்குகொள்ளும் இரு நிலப் பகுதிகளில் (அல்லது நிலப் பகுதிகளைக்கொண்டஇரு குழுக் களில்) ஒன்றில் உரமிடப்படுகின்றது. மற்றதில் உரமிடப்பட வில்லை. உரமிட்ட பகுதி, 'சோதனைக்குரிய நிலப்பகுதி' (experimental plot) என்றும், உரமிடாத பகுதி 'கட்டுப்பட்ட நிலப்பகுதி' (control plot) எனவும் கூறப்படும்.

ஒவ்வொரு மாறியும் சமமான பலனை இரு பகுதிகளிலும் ஏற் படுத்துவதால் விளைச்சலில் அவை ஒவ்வொன்றின் பலனும் சம

மாக இருக்கும். எனவே, விளைச்சலில் காணும் மாறுபாடு உரம் பயன்படுத்துவதனால் மட்டுமே ஏற்பட்டதாய் இருத்தல்வேண்டும்.

**(4) நடு நிலையற்ற தன்மையினை நீக்குதல்**

எல்லாச் சோதனைகளிலும் பிழைக்கு மிகப்பெரிய மூலகாரண மாகவும், சோதனைகளின் முடிவு முழுவதையும் பாதிக்கக்கூடிய தாகவும் உள்ள நடுநிலையற்ற தன்மையை நீக்குதல் இன்றியமை யாததாகும். பல்வகை விதைகளையோ, அல்லது பலவிதமான பராமரிக்கும் முறைகளையோ ஒரு நிலப் பகுதிக்கு அல்லது நிலப் பகுதிகளின் குழுவிற்குப் பங்கீடு செய்கையில் சமவாய்ப்பு எண்களை (Random numbers) பயன்படுத்தியோ அல்லது குலுக்கல் முறையினைப் பயன்படுத்தியோ, பங்கிடவேண்டும். இந்த முறை சமவாய்ப்புப் படுத்துதல் (Randomization) எனப்படும். இந்த முறை எல்லா நில்ச்சோதனைகளிலும் மேற்கொள்ளப் படுகின்றது. கட்டுப்படுத்த முடியாத காரணிகளைச் சமப்படுத்துவது இதன் நோக்கமாகும். மொத்த நிலம் தொகுதிகளாகவும் (blocks) தொகுதிகள் சிறு பகுதிகளாகவும் (plots) பிரிக்கப்பட்டு ஒவ் வொன்றிலும் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பராமரிப்பு முறை சோதிக்கப்படுகிறது.

**(5) திரும்பச் செய்தல் (Replication)**

எல்லா வகையிலும் ஒப்பான இரு நிலப்பகுதிகள் உரமிட்டு சமமாகப் பராமரிக்கப்பட்டாலும் விளைச்சல் சமமாக இராது கட்டுப்பாட்டிற்கு அடங்காத தற்செயலாய் நேரும் காரணிகளின் காரணமாக ஏற்பட்ட விளைவே இந்த மாற்றம். இந்த மாற்றம் சம வாய்ப்புப் பிழை (Random error) எனப்படும். ஒரு சோதனைக் குரிய நிலப்பகுதி, ஒரு கட்டுப்பட்ட நிலப்பகுதி என்ற இரண்டிலி ருந்தும் கண்ட விளைச்சல், விளைச்சலின் வித்தியாசத்தைச் சோதிக்கத் தேவையான விவரங்களை ஐயமின்றிக் கொடுக்கும். ஆனால், இது நுண்ணிய மாற்றத்தினையும் காட்டுதற்கு ஏற்றதாக இராது. ஒவ்வொரு வகையிலும் குறைந்தது 5 நிலப்பகுதிகள் எடுத்து நம் சோதனையை அவற்றில் நடத்தினால், சோதனையின் நுட்ப மதிப்பீட்டுப் பண்பு அதிக அளவு கூடியிருக்கும், மேலும், பரவற்படி பகுப்பாய்வு முறையில் பரவற்படியின் மதிப்பீட்டைக் கணக்கிடக் குறைந்தது இரு நிலப்பகுதிகளாவது ஒவ்வொன்றிலும் தேவைப்படும். சம வாய்ப்புப் பிழையின் மூலம் கண்ட பரவற்படி மதிப்பீடே சரியானது என்பதால், நிலப்பகுதிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகப்படுத்துவது நல்லது கட்டுப்பட்ட நிலப்பகுதிக் குழுவிலிருந்து கண்ட பரவற்படி, சோதனைக்குரிய நிலப்பகுதி குழுவிலிருந்து பரவற்படியினை அளக்க உதவும், ஓர்

அளவு கோலாக அமைகிறது. நம்பிக்கைக்குகந்த பரவற்படி மதிப்பீடுகளைப் பெறவேண்டுமெனில், சமவாய்ப்பு முறையைப் புகுத்துவதிலும், முற்றிலும் சமவாய்ப்புடைய திட்ட அமைப்பு (completely randomised design) மிகவும் எளிய அமைப்பாகும்

**முற்றிலும் சமவாய்ப்புத் திட்டமுறை**

$t$-பராமரிப்பு முறைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க விரும்பும்போது, எடுத்துக்கொள்ளும் நிலப்பகுதிகள் $n$ ஆக இருக்கட்டும். $i$-ஆவது பராமரிப்பு முறை $n$ முறைகள் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தப் படுவதாக இருக்கட்டும். எனவே $\sum_{i=1}^{t} n = n$.

எண்கள் $i$-யிலிருந்து $n$ வரை, $n$ சீட்டுகளில் எழுதிக் கொண்டு, அவற்றைக் குலுக்கி எடுக்கப்படும் முதல் $n_1$ எண்கள், முதல் பராமரிப்புத் தரப்படவேண்டிய பகுதிகளைக் குறிக்கட்டும். அடுத்த $n_2$ எண்கள் 2 ஆவது பராமரிப்புத்தரப்படவேண்டிய பகுதிகளைக் குறிக்கட்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் திட்ட முறையினால், நிலப்பகுதிகள் ஒரு படித்தான தன்மை கொண்டனவாக உள்ளபோது அல்லது வேறுபடும் தன்மை தெரியாத போது சோதனை நடத்தப்படுகிறது. முற்றிலும் வாய்ப்பைப் பொறுத்தே பகுதிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதால், ராண்டம் எண்களின் பட்டியலையும் பயன்படுத்தலாம். இவ்வமைப்பினால் பின்வரும் பயன்கள் உண்டு:

(1) முற்றிலும் வளைந்துதரவல்ல தன்மை உடையது. பராமரிப்பு முறைக்குத் திரும்பச் செய்தலின் எண்ணிக்கையை விருப்பம்போல் மாற்றிக்கொள்ளலாம்.

(2) புள்ளியியல் ஆய்வு எளிதானது. சில பகுதிகளிலிருந்து முடிவுகள் தரப்படாமலோ, காணாமலோ இருக்கும்போது கூட இதனை மேற்கொள்ளலாம். வேறெந்த அமைப்பையும்விட, காணாத விவரங்களால் ஏற்படும் இழப்பு குறைவானது.

(3) சோதனைக்குள்ளாகும் பொருள்கள் ஒரே தன்மைத் தானவை ஆகவும், அளவில் கட்டுப்பட்டுள்ளனவாகவும் இருக்கும் போது இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

(4) கணிசமான அளவுப் பகுதிகள் சோதனையில் வீணாவதற்கு வாய்ப்புள்ளபோது இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

(5) முக்கியமாக, அரிதாக, சிறிதளவே கிடைக்கப்பெறும் சோதனை விவரங்கள் இருக்கும்போது, இவ்வமைப்பு பெரிதும் மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

**குறைகள் :** பராமரிப்பு முறைகளின் சமவாய்ப்புத் தன்மை குறித்துக் கட்டுப்பாடு ஏதுமில்லாததால், குறிப்பிட்ட ஒரு பராமரிப்பு முறையைப் பெறும் பகுதிகள், பிறிதொரு பராமரிப்பு முறையைப் பெறும் பகுதிகளை ஒத்து அமைகின்றனவா எனும் உறுதி கிடையாமையால், பகுதிகளுக்கு இடையே உள்ள மொத்த வேறுபாடும், சோதனையின் பிழையாக அமைகிறது. மேற்காணும் சோதனைப் பிழைகள் ஓரளவு நீங்கப்பெற்ற திட்ட அமைப்பாக, சமவாய்ப்புக் கட்டதிட்ட அமைப்பை ஆராய்வோம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு பயிரின் 9 வகைகளையும், 6 திரும்பச் செய்தல் முறைகளையும் கொண்ட, முற்றிலும் சமவாய்ப்புத் திட்ட முறையை எவ்வாறு அமைப்பாய் ?

**தீர்வு :**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலப்பகுதியை $9 \times 6$ என்ற செவ்வக வடிவிலோ அல்லது வேறு எந்த வசதியான வகையிலோ மாறு படும் தன்மைகளை முடிந்தவரை நீக்கிவிட்டு 54 சிறு பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்க. 1-ல் இருந்து 54 என அவற்றுக்கு எண்களைத் தருக. 1-ல் இருந்து 54 வரை, 54 சீட்டுகளில் எழுதிக்கொண்டு, சீட்டுகளைக் குலுக்கிய பிறகு எடுக்கப்படும் முதல் 6 சீட்டுகள், முதல் ரக விதை பயன்படுத்தவேண்டியபகுதிகளைத் தரும். அடுத்த 6 சீட்டுகள், 2ஆவது ரக விதை பயன்படுத்தவேண்டியபகுதிகளைத் தரும். இவ்வாறே முற்றிலும் சமவாய்ப்புத் திட்ட முறை அமைக்கப்படுகிறது.

## சமவாய்ப்புக்கட்ட திட்ட அமைப்பு
## (Randomised Block Design)

கோதுமையின் 3 வகைகளை, உரமிட்டுப் பராமரிக்கும் 5 முறைகளைக் கொண்டு சோதிக்க விரும்புவதாகக் கொள்வோம். இதற்கு எல்லா விதத்திலும் நில வளத்தினைப் பொறுத்து ஒரு படித்தான தன்மை வாய்ந்த ஒரு பெரிய நிலப் பகுதியிலிருந்து கட்டமான அல்லது செவ்வகமாக அமைந்த ஒரு நிலப் பகுதி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இதை 3 சம வரிசைகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 5 சம பகுதிகள் வருமாறு எடுத்துக் கொண்ட நிலப் பகுதி 15 சம அளவு கொண்ட நிலப் பகுதிகளாகப்

பிரிக்கப்படுகிறது. கோதுமையின் 3 வகைகள் வரிசைக்கு ஒன்ருகச் சமவாய்ப்பு முறையில் பயிரிடப்படுகின்றன. குலுக்கல் முறையைப் பின்பற்றியோ அல்லது சமவாய்ப்பு எண்கள் முறையைப் பின்பற்றியோ வகைகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. பின்பு ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள 5 சம பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு பராமரிக்கும் முறை சம வாய்ப்பு முறையில் தீர்மானித்த பிறகு சோதனை மேற்கொள்ளப்படுகிறது. சோதனை முடிந்த பிறகு, 15 நிலப் பகுதிகளில் கண்ட விளைச்சலின் அளவு ஒரு வரிசையில் ஐந்தாக மூன்று வரிசைகளில் ஒரு பட்டியல் தரப்படுகிறது இந்தப் பட்டியலில் நிரைகள் வகைகளையும் நிரல்கள் வெவ்வேறு பராமரிக்கும் முறைகளையும் குறிக்கும். கொடுத்த விவரம் ஆராயப்பட்டுப் பராமரிக்கும் முறைகளுக்கிடையே காணும் வேறுபாடு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா என அறியும் வகையில் முடிவெடுக்கப்படுகிறது.

ஒருவழிப் பாகுபாடு சோதனை நடத்தும்போதும் இம் முறையை மேற்கொள்ளலாம். இங்கு மற்ருெரு மாறியாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுவது நிலவளமாகும். எடுத்துக்காட்டாக கோதுமையின் 4 வகைகளைச் சோதிக்கவும், ஒவ்வொரு வகைக்கும் 3 நிலப் பகுதிகள் எடுக்க நாம் விரும்புவதாகக் கொள்வோம். இதற்கு மூன்று செவ்வக நிலப் பகுதிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு நிலப் பகுதியும் ஒரே மாதிரியான நிலவளம் கொண்டதாக இருத்தல் வேண்டும். நிலப் பகுதிக்கிடையே நிலவளம் வேறுபாடு இருக்கலாம். ஒவ்வொரு நிலப் பகுதியும் 4 பாகமாகப் பிரிக்கப்படடு, ஒவ்வொரு நிலப் பகுதிக்குரிய கோதுமையின் விதை சமவாய்ப்பு முறையில் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இம் முறைப்படி ஒவ்வொரு வகையும் ஒவ்வொரு நிலப் பகுதியில் இடமளிக்கப்படுவதைக் காணலாம். விளைச்சலின் 12 அளவுகள் ஒரு நிரையில் நான்கென 3 நிரைகளில் எழுதப்படுகிறது.

**இராசிகளின் புள்ளியியல் ஆய்வு:** முடிவுகளையெல்லாம் ஒழுங்குபடுத்திச் சோதனையின் அமைப்பு, மிகைத் தன்மை சோதனைக் கேற்ற பொருத்தமான முடிவுகள் ஆகியவற்றை ஒரு பட்டியலில் அமைக்கலாம். பல நிலப் பகுதிகளில் விளையும் விளைச்சலின் அளவுகள் தெரிந்தால் சோதனையின் அமைப்பை முடிவு செய்யலாம்.

இது நாம் ஒப்புநோக்குதற் பொருட்டு எடுத்துக் கொண்ட விதை வகைகளையும், ஒவ்வொரு வகையையும் திரும்பத் திரும்பப் போட்டுச் சோதனை செய்தலையும், நாம் இப்போது அமைத்துள்ள சமவாய்ப்புக் கட்ட திட்ட அமைப்பில் இவற்றை அமைக்கும்

விதத்தினையும் சார்ந்துள்ளது. எண் முறைப்படி இதன் அமைப்பு வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கையாலோ, அல்லது நிலப் பகுதிகளுக்கிடையோ அல்லது நிலப் பகுதியின் உட்பிரிவுகளுக் கிடையோ நாம் ஏற்படுத்தும் ஒப்பு நோக்குதல்களாலோ அளவிடப்படுகிறது. மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், 15 தொகுதி நிலப் பகுதிகளில், 14 சார்பற்ற ஒப்பு நோக்குதல்களை நாம் மேற் கொள்ளலாம். இந்தச் சார்பற்ற ஒப்பு நோக்குதல்களின் எண்ணிக்கை (i) வகைகளுக்கிடை (ii) தொகுதிகளுக்கிடை (iii) வகைகளுக்கிடையும் தொகுதிகளுக்கிடையும் ஏற்படுகின்ற பிழை என 3 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

**சமவாய்ப்புத் திட்டச் சோதனையில் பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்**

| வர்க்கங்களின் கூடுதல் | வரையற்ற பாகை |
|---|---|
| வகைகளுக்கிடை | 2 |
| தொகுதிகளுக்கிடை | 4 |
| பிழை | 14 — 6 = 8 |
| மொத்தம் | 14 |

**இலத்தீன் சதுர திட்ட அமைப்பு**

இம் முறையைப் பயன்படுத்தி இருவழிப் பாகுபாட்டிற்குத் தேவையான நிலப்பகுதியைக்கொண்டே மூவழிப்பாகுபாட்டுச் சோதனையை நடத்தலாம். கீழ்க்கண்ட சதுர திட்ட அமைப்பைக் காண்க.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *A* | *B* | *C* | *D* |
| *B* | *A* | *D* | *C* |
| *C* | *D* | *B* | *A* |
| *D* | *C* | *A* | *B* |

இதில் $A$ எழுத்து ஒவ்வொரு நிரையிலும், ஒவ்வொரு நிரலிலும் ஒரே முறை இடம் பெறுவதைக் காணலாம். மற்ற எழுத்துகளும் இது போன்றே உள்ளன. இதுபோல் 576 நான்கு வரிசை இலத்தீன் சதுரத் திட்ட அமைப்புகள் உண்டு. 5 வரிசைகளில் 1, 61, 280-ம், 6 வரிசையில் 73 கோடிக்கு அதிகமாகவும், உண்டு. மிகக்குறைந்த, ஆனால் தேவையான சதுர திட்ட அமைப்புகளை எல்லா வரிசையிலும் யேட்ஸ் (Yates) என்பவர் கண்டு பிடித்துள்ளார். இவர் புத்தகத்திலுள்ள $n$ வரிசை இலத்தீன் சதுரத் திட்ட அமைப்புகளிலிருந்து நிரை, நிரல்களை மாற்றி யமைத்து $n$ வரிசையிலுள்ள எல்லா இலத்தீன் சதுரத் திட்ட அமைப்புகளைப் பெறலாம். இலத்தீன் சதுரத் திட்ட அமைப்பைப் பயன்படுத்த வேண்டுமெனில், ஒவ்வொரு சோதனைக்குரிய மாறியின் காரணமாக எழும் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை சமமாய் இருத்தல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக உரமிட்டுப் பராமரிக்கும் முறைகள் 4 என எடுத்துக் கொண்டால், மற்ற இருமாறிகளுக்கும் இதே போல் 4 பிரிவுகள் இருக்க வேண்டும். பொதுவாக ஒவ்வொரு மாறியிலும் $n$ பிரிவுகள் இருப்பதாகக் கொண்டால், ஒரே மாதிரியான நிலவளம் கொண்ட கட்டமான நிலப்பகுதியைக் கொண்டு $n^2$ சம கட்டங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

எனவே ஒரு நிரையில், $n$ கட்டங்களும், ஒரு நிரலில் $n$ கட்டங்களும் இருக்கும். யேட்ஸ் (Yates) புத்தகத்திலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் $n$ வரிசை இலத்தின் சதுரத் திட்ட அமைப்பு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு நிரை, நிரல்கள் பலவாறு மாற்றியபிறகு கிடைக்கும் சதுரத்திட்ட அமைப்பிற்கேற்ப $A$, $B$, $C$-எழுத்துகள் $n^2$ பிரிவுகளுக்கு வழங்கப்படுகிறது. நிரைகள் ஒவ்வொன்றிலும் அதற்குரிய பராமரிக்கும் முறையைச் சமவாய்ப்பு முறையில் தீர்மானித்த பிறகு மேற்கொள்ளப்படுகிறது. அதேபோல் நிரல்கள் வெவ்வேறு வகைகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில் பெறுகின்றன. $A$, $B$, $C$ ... தெளிக்கப்போகும் பூச்சிமருந்தின் அளவுகளைக் குறித்தால், $A$ எழுத்து இடம் பெற்ற நிலப்பகுதிகளில் ஒரு வாரத்துக்கொரு முறையும், $B$ இடம் பெற்ற நிலப்பகுதியில் 10 நாள்களுக்கொரு முறையும், $C$ இடம் பெற்ற நிலப்பகுதிகளில் 13 நாள்களுக்கொரு முறையும் என இதுபோலப் பூச்சிமருந்து தெளிக்கப்படும். ஒரு மாறியின் துணைமாறி ஒன்றின்மேல் மற்ற இருமாறிகள் உண்டாக்கும் பலனைப்பற்றிக்கூறுவதற்கு உறுதியாக ஒரு நிலப்பகுதி இருப்பதை இம் முறையில் காணலாம். விளைச்சலின் அளவு கணக்கிட்டுத் தேர்ந்தெடுத்த சதுரத்திட்ட அமைப்பிலுள்ள எழுத்துகளுடன் அந்தந்த கட்டங்கள் குறிக்கும் நிலப்பகுதியின் விளைச்சலின் அளவு குறிக்கப்படுகிறது. இந்த விவரத்தைக்

கொண்டு பரவற்படி பகுப்பாய்வு முறையைப் பயன்படுத்தி மாறிகளினுல் ஏற்பட்ட விளைச்சலின் வேறுபாடு, முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனச் சோதிக்கப்படுகிறது.

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிலப்பகுதியின் நிலவளம் ஒன்றுபோல் அமையாவிடில் ஒரு மாறியினுல் ஏற்படும் பலனைச் சோதிக்கும் சோதனையில் இலத்தீன் சதுர அமைப்பைப் பயன்படுத்தலாம். இந்த ஒரு மாறியின் துணைப்பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை $n$ எனில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நிலப்பகுதி $n^2$ பிரிவுகளாகச் சமமாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இங்கு நிரல்களாகப் பிரிப்பதற்குக் காரணமாய் உள்ள மாறி 'நிரல்களுக்கிடையே காணப்படும் நிலவளத்தின் வேற்றுமை' எனவும், நிரைகளாகப் பிரிப்பதற்குக் காரணமாயுள்ள மாறி 'நிரைகளுக்கு இடையே காணப்படும் நிலவளத்தின் வேற்றுமை' எனவும் நாம் கொள்ளவேண்டும். எனவே, விளைச்சலின் அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சதுரப் பட்டியலிலிருந்து கணக்கிட்ட மொத்த மாறுபாட்டில் இருந்து நிரை, நிரல்களுக்கிடையே கண்ட மாறுபாட்டினை நீக்கியபிறகு வரும் மாறுபாடு தற்செயலாய் நேர்ந்த பிழை, மற்றும் சோதனைகளுக்குரிய மாறியினுல் மாறுபாடு ஆகிய இரண்டினையும் குறிக்கும். $F$ சோதனையின் மூலம் சோதனைக்குரிய மாறியினுல் ஏற்படும் மாறுபாடு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனச் சோதிக்கப்படுகிறது.

**சம வாய்ப்புக் கட்டதிட்ட அமைப்பு: இலத்தீன் சதுர திட்ட அமைப்பு ஒப்பிடல் :**

பல வழிகளில் சம வாய்ப்புக் கட்ட திட்ட அமைப்பு இலத்தீன் சதுர அமைப்பைவிட உயர்ந்தது. சமவாய்ப்பு கட்டதிட்ட அமைப்பில் பரந்த அளவினில் சோதனை செய்யமுடிகிறது. அதாவது 3 வகை நிலப்பகுதிகளை மேலும் பல சிறு உட்பிரிவுகளாக நாம் விரும்பும் எண்ணிக்கையின் அளவு பிரித்துக்கொள்ளலாம். ஆனுல், இலத்தீன் சதுர அமைப்பில் இவ்வாறு பிரிக்க இயலாது. சோதனைகளைத் திரும்பத்திரும்பச் செய்தால் (replication) எத்தகைய கட்டுப்பாடும் சமவாய்ப்புக் கட்டதிட்ட அமைப்பில் இல்லை. பரவற்படி ஆய்வைக்கூட மிக எளிதில் சரிக்கட்டி விடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஏதாவது ஒன்று அல்லது இரண்டு தொகுதிகளில் நோய்க்கிருமிகள் தாக்கினுல், அந்த தொகுதிகளை நீக்கிவிட்டு எத்தகைய குழப்பமும் இல்லாமல் பரவற்படி ஆய்வை மேற்கொள்ளலாம். ஆனுல், இலத்தீன் சதுர சோதனையிலிருந்து பெறப்படும் முடிவுகளுக்குச் சிக்கலான ஆய்வை மேற்கொள்ளவேண்டிவரும். களத்தில்கூட சம வாய்ப்புக் கட்டதிட்ட அமைப்பை நாம் எளிதாக மேற்கொள்ள

லாம். இவற்றைச் செவ்வக அல்லது சதுர களத்தில் அல்லது ஏதேனும் ஓர் அமைப்புள்ள களத்தில் அமைக்கலாம். ஆனால், இலத்தீன் சதுர அமைப்பில் களத்தின் உருவம் சதுர அல்லது செவ்வகமாக இருக்கவேண்டும். இலத்தீன் சதுர அமைப்பில் இரு திசைகளில் உரமாறுபாடுகள் ஒரே தன்மையான போக்குடையனவாக இருந்தால் (அதாவது மூலைவிட்டப் போக்கில் ஒரே தன்மை), மிகவும் சிறந்ததாகக் கருதப் படுகிறது. சில விவசாய ஆராய்ச்சிகளில் இலத்தீன் சதுர அமைப்பானது மிகவும் பயன்படுகிறது.

## பரவற்படி பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance)

ஒரு கூறினுடைய பரவற்படியைப் பல்வேறு பாகங்களாகப் பிரித்து, அவற்றின் ஒவ்வொரு பகுதியும் கூறினுடைய சிறு பகுதி அல்லது பிரிவின் தன்மையின் மூலம் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றமா என்பதை ஆராயும் முறையே பரவற்படி பகுப்பாய்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, சில மாவட்டங்களுக்கிடையே அரிசியின் விலையில் ஏற்படும் மாற்றத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். ராண்டம் முறையில் நான்கு மாவட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலும் ஒரே மாதிரியான தரமுடைய பத்து கடைகளில் அரிசியின் விலைகளைக் குறித்துக் கொள்வோம். விலையில் ஏற்படுகின்ற மொத்த மாற்றமானது சராசரி விலையிலிருந்து ஏனைய விலைகளின் வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டு கணக்கிடலாம். இவ்வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை இரு குறைக்குறி அல்லாத பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒரு பகுதி மாவட்டங்களின் சராசரி விலைகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுகிறது. இன்னொரு பகுதி ஒரே மாவட்டத்தினுள் இருக்கக்கூடிய விலைகளின் வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுகிறது. இது எல்லா மாவட்டங்களுக்கும் பொருந்தும். இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களின் மொத்த மாற்றத்தை அதனுடைய குறைக்குறி இல்லாத பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாகப் பிரிப்பதே பரவற்படியின் பகுப்பாய்வாகும்.

ஒவ்வொரு பகுதியும், ஒரு குறிப்பிட்ட, தனிப்பட்ட காரணத்தைக் கொண்டு ஏற்படுகிறது. இக் கருத்தினை முதலில் ஃபிஷர் (Fisher) என்பவர் 1960-ல் அறிமுகப்படுத்தினர்.

பரவற்படி பகுப்பாய்வு இரு பகுதிகளுடையது. முதல் பகுதியில் பல்வேறு மாற்றங்களின் காரணிகளைப் பிரித்து, அவற்றை மதிப்பிடுவது. இரண்டாவதில் '$F$' சோதனையைப்

பயன்படுத்த் இப் பரவற்படிகளின் பகுதிகள் எல்லாவற்றையும் இவற்றின் முழுமைத்தொகுதியின் ஒன்றுசேர்க்கப்பட்ட பரவற்படி எனும் கொள்கையை ஆராயவும், புள்ளி விவரங்களின் பல்வேறு கூறுகள் ஒரே மாதிரியான முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்டனவா என ஆராயவும் உதவுகின்றது.

ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் அநேக கூறுகள் பலவகைப்பட்ட புள்ளி விபர முடிவுகளைத் தருகின்றன. பரவுகை அளவைகளை நாம் முன்னமேயே அறிந்துள்ளோம். பரவற்படியும் அவற்றுள் ஒன்று. சம வாய்ப்புக் காரணங்களாலும், வேறு சில குறிப்பிட்ட காரணங்களாலும் விவரங்களில் மாறுபாடு ஏற்படுகிறது. எல்லா வகைகளிலும் ஒரே தன்மை கொண்ட நிலத்தின் சில பகுதிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரே வகையான விதை நெல், ஒரே தன்மையான உரங்கள், ஒரே வகையான கவனிப்பு என்ற அடிப்படைகளின் கீழ் நிலப்பகுதிகளில் நெல் விதைக்கப்படுகிறதெனக் கொள்வோம். இத்தகைய விதி முறைகளை நாம் கடைபிடித்துங் கூட ஒரு பகுதியில் ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த விளைவின் அளவை ஆராயும்போது விளைவு பகுதிக்குப் பகுதி வேறுபட்டிருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய மாறுபாட்டைச் 'சமவாய்ப்புக் காரணங்களாலான மாறுபாடு' (Random variation or Chance variation) அல்லது 'வாய்ப்புக் காரணங்களாலான மாறுபாடு' என்று கூறுகிறோம்.

ஒரே தன்மை கொண்ட நிலத்தை இரு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பிரிவையும் 5 பகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொள்க. இரு பெரும் பிரிவுகளிலும் இரு வேறுபட்ட உரங்களைப் போட்டு ஒரே தன்மையான கவனிப்பின்கீழ், ஒரே ரகமான விதைகளைப் பயிர் செய்து உற்பத்தி, அளவுகளைக் கணக்கிடுக. உற்பத்தி அளவில் இப்போது வேறுபாடு ஏற்பட்டால் அது உர வேறுபாட்டால்தான் ஏற்பட்டது, சமவாய்ப்பாலல்ல என்பதை எளிதில் தெரிந்துகொள்ளலாம். இந்த இருவகை உரங்களின் தன்மைகள் அதிக அளவு வேறுபட்டிருந்தால், ஒரு பகுதியில், ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த உற்பத்தி அளவு அதிகம் வேறுபடும். உற்பத்தி இப்போது இரு வேறுபட்ட குழுக்களாக (பிரிவுகளாக) ஒவ்வொன்றும் 5 மதிப்புக்களைப் பெற்றுள்ளதாகவும் உள்ளது.

இங்கு குழுக்களிலடங்கிய (within groups) மாறுபாடு சமவாய்ப்பால் ஏற்பட்டது. குழுக்களிடை (between groups) மாறுபாடு சமவாய்ப்பால் ஏற்பட்டதன்று. உரங்களின் மாறுபாட்டுத்

தன்மையால் ஏற்பட்டதாகும் இப்போது மேற்கூறிய விவரங்களில், இரு குழுக்களிடை மாறுபாட்டளவு, குழுக்களிலடங்கிய மாறுபாட்டளவு இரண்டுமே சமவாய்ப்புக் காரணங்களால் மட்டும் ஏற்பட்டதெனில், இவ்விரு மாறுபாடுகளின் விகிதம் 1 என எதிர் பார்க்கலாம். குழுக்களிலடங்கிய மாறுபாட்டளவு சமவாய்ப்புக் காரணங்களாலும், ஆனால் குழுவிற்கிடை மாறுபாட்டளவு சம வாய்ப்பல்லாத மற்றக் காரணங்களாலும் ஏற்பட்டன எனில், இவற்றின் விகிதம் ஒன்றிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும். எனவே, ''பரவற்படி ஆய்வு'' கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களின் மாறு பாட்டளவு சமவாய்ப்புக் காரணங்களால் மட்டும் ஏற்பட்டதா, அல்லது வேறு பல காரணங்களால் ஏற்பட்டதா என்பதைஅறியப் பயன்படுகிறது. மாறிகளின் கூறுகள் குழுக்களாக இருக்கும் போது நாம் இந்தப் பரவற்படி ஆய்வை நிகழ்த்தலாம்.

மற்ற குழுக்களின் பரவற்படியிலிருந்து, ஒரே குழுவிலுள்ள காரணத்தால் ஏற்பட்ட குழுவிலடங்கிய பரவற்படிக்கு உள்ள **விலக்கமே** பரவற்படி ஆய்வென ஆர். ஏ. பிஷர் என்பார் கூறுகின்றார். இம் முறைப்படி கூறுகளின் மொத்த மாறுபாட்டளவையைச் சில தனித்த காரணிகளாலும் எடுத்துச்கூற இயலா. வேறு பல காரணங்களாலும் ஏற்படக்கூடிய பல மாறுபாட்டளவைகளாகப் பிரிக்கலாம். முழுமைத் தொகுதியின் மாற்றத்தை இத்தகைய ஒவ்வொரு மாறுபாட்டளவும் கொடுக்கும். அதாவது, மொத்த மாறுபாட்டளவையை முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவைக் கொடுக்கக்கூடிய பிரிவு மாறுபாட்டளவைகளாகப் பிரித்துக் கணக்கிடுவதே பரவற்படி ஆய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும். '*t*' சோதனையானது இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்குள் உள்ள வேற்றுமையை ஆராயப் பயன்பட்டது. ஆனால், சில சமயங்களில் நம்மிடம் ஏராளமான கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரிகளிருந்து '' கூட்டுச் சராசரிகள் ஒரே தன்மை வாய்ந்தவை அல்லது அவற்றுள் வேற்றுமை குறிப்பிடத் தக்கதாயில்லை, '' என்னும் எடுகோளை எடுத்துக்கொள்ளும்போது நாம் மேற்கூறிய '*t*' சோதனையைப் பயன்படுத்தக் கூடாது. இத்தகைய சமயங்களில் ஆர். ஏ. பிஷர் கூறிய பரவற்படி ஆய்வைப் பயன்படுத்தி ஆய்வு செய்ய வேண்டும். அறிவியலில் உள்ள பல பிரிவுகளிலும் இந்தப் பரவற்படி ஆய்வு பயன்படுத்தப் படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக இருவகையான உரங்களைப்போட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட பயிரின் விளைவு, மக்களின் வயதுப் பிரிவுகளுக்குத் தகுந்தவாறு மருந்தின் விளைவு, ஒரு குறிப்பிட்ட நோயை நீக்கப் பலவகை மருந்துகளின் திறன் ஆகியவற்றின் ஆய்வைப் பரவற்படி ஆய்வைக் கொண்டு ஆராயலாம்.

## ஒருவழிப் பகுப்பாய்வு (One-way Classification)

ஒரே ஒரு சார்பற்ற மாறியைக் கொண்ட, மிக எளிதான ஒரு பகுப்பாய்வை இப்போது ஆராய்வோம்.

சம வாய்ப்புக்கூறு ஒன்றின் மாறிகளான $x$-ன் $n$ மதிப்புகளும், $h$ குழுக்களாகவும், ஒவ்வொரு குழுவும் $k$ உட்பிரிவுகளாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. அதாவது அவை $h$ கிடைப் பிரிவுகளாகவும், $k$ நெட்டுப் பிரிவுகளாகவும் பிரிக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. எடுத்துக்காட்டாக மாறியானது கோதுமையின் விலை எனில், குழுக்கள் மாதங்களையோ மாவட்டங்களையோ குறிக்கலாம். $x$ என்பதை $i$ஆவது கிடைப் பிரிவிலும் $j$ஆவது நெட்டுப் பிரிவிலும் உள்ள மதிப்பு எனக் கொள்வோம். $i$ என்ற எழுத்து கிடைப்பிரிவையும், $j$ நெட்டுப் பிரிவையும் குறிக்கட்டும். இதில் நாம் $N$ மதிப்புகளையும் பல குழுக்களாகப் பிரிக்கிறோம். இதுபோல ஒரே வகையான விதைகளின் உற்பத்தித் திறனைப் பலவகை உரங்கள் போட்டுக் காண்பதை எடுத்துக்காட்டாகக் கருதலாம்; இவ்வாறு பிரிப்பது தான் 'ஒரு வழி பகுப்பாய்வு.'

எடுத்துக்காட்டாக 6 வகைப்பட்ட 60 விதைகளின் உற்பத்தியை எடுத்துக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள விதைகளின் எண்ணிக்கை 10. இவற்றின் உற்பத்தியளவினைப் பின்வரும் பட்டியலில் அமைக்கலாம்.

| வகை → / விதை ↓ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | | | | $x_{16}$ |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| 10 | $x_{10,1}$ | $x_{10,2}$ | | | | $x_{10,6}$ |

$\bar{x}_{i\cdot}$ என்பது $i$ஆவது கிடைப்பிரிவின் கூட்டுச்சராசரி எனவும், $\bar{x}_{\cdot j}$ என்பது $j$ஆவது நெட்டுப்பிரிவின் கூட்டுச்சராசரி எனவும்,

கொள். $T$ என்பது $i$ஆவது கிடைப்பிரிவின் மொத்தத்தையும், $T_{\cdot j}$ என்பது ஆவது நெட்டுப்பிரிவின் மொத்தத்தையும், $\bar{x}$ என்பது பொதுக் கூட்டுச்சராசரியையும், $T$ என்பது மதிப்புகளின் மொத்தத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

| இராசிகள் | | கிடைப்பிரிவு மொத்தம் | கிடைப்பிரிவு கூட்டுச்சராசரி |
|---|---|---|---|
| | $x_{1,1}\ x_{1,2}\ \ldots\ldots\ x_{1}$ | $T_1$ | $\bar{x}_1$ |
| | $x_{2\ 1}\ x_{2,2}\ \ldots\ldots\ x_{2}$ | $T_2$ | $\bar{x}_2$ |
| | …… ……… | …… | …… |
| | …… ……… | …… | …… |
| | $x_{h1}\ \ x_{\ 2}\ \ldots\ldots\ x_{h}$ | $T_h$ | $\bar{x}_h$ |
| நெட்டுப்பிரிவு மொத்தம் | $T_{\cdot 1}\ T_{\cdot 2}\ \ldots\ldots\ T_{\cdot}$ | $T$ | $\bar{x}_{\cdot\cdot}$ |
| நெட்டுப்பிரிவு கூட்டுச்சராசரி | $\bar{x}_{\cdot 1}\ \ \bar{x}_{\cdot 2}\ \ldots\ldots\ \bar{x}_{\cdot k}$ | $\bar{x}_{\cdot\cdot}$ | |

மேலேயுள்ள பட்டியலிலிருந்து,

$T$ = $i$ஆவது கிடைப்பிரிவிலிலுள்ள இராசிகளின் மொத்தம்.

$$= x_{i\cdot 1} + x_{i\cdot 2} + x_{i\cdot i} + \ldots\ldots x_{i\cdot k}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$$

$T_{\cdot j}$ = $j$ஆவது நெட்டுப்பிரிவிலுள்ள இராசிகளின் மொத்தம்.

$$= x_{1j} + x_{2j} + \ldots x_{hj} = \sum_{i=1}^{h} x_{ij}$$

$T$ = $N$ இராசிகளின் மொத்தம்.

$$= (x_{1,1} + x_{1,2} + \ldots x_{1k}) + (x_{2,1} + x_{2,2} + \ldots\ldots x_{2}\ )$$
$$+ \ldots + (x_{h1} + x_{h2} + \ldots x_{hk}\ )$$

$$= T_1 + T_2 + \dots T_h$$

$$= \sum_{i=1}^{h} T$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} x$$

மேலும் $\bar{x}_i$ = $i$ஆவது கிடைப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{T_i}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$$

$\bar{x}_{i}$ = $j$ஆவது நெட்டுப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி.

$$= \frac{T_{\cdot j}}{h} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{h} x_{ij}.$$

$\bar{x}_{\cdot}$ = $N$ இராசிகளின் கூட்டுச் சராசரி.

$$= \frac{T}{N} = \frac{T}{hk} = \frac{1}{hk} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} x \ .$$

சராசரிக்குத் திருத்தமாக மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_i + \bar{x}_j - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2$$

$$+ 2 \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + k \sum_{i} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2$$

$$+ 2k \sum_{i} (\bar{x}_j - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + k \sum_{i} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 \quad \dots \quad (1)$$

ஏனெனில், $\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})$

$$= \sum_{i} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..}) \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)$$

$$= 0 \left\{ \text{ஏனெனில் } \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0 \right\}$$

கூட்டுச் சராசரி $m$, பரவற்படி $\sigma^2$, கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எல்லா $x_{ij}$-களும் வந்தன என்று கொண்டால், $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$ என்பது $(hk - 1)$ஐ வரையற்ற பாகையாகக் கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக அமையும் எனக் காட்டலாம்.

$$\frac{k}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{h} (\bar{x}_i - \bar{x}\ldots)^2$$ என்பது $(h-1)$ ஐ வரையற்ற பாகையாக கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக இருக்கும்.

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x - \bar{x}_i)^2$$ என்பது $hk - k)$ ஐ வரையற்ற பாகையாகக் கொண்ட $\chi^2$ பரவலாக இருக்கும்.

இரண்டாவது, மூன்றாவது கணக்கியல் மதிப்புகளின் விகிதத்தை $F$-சோதனையின் மூலம் ஆராயலாம்.

$$F = \frac{\sum_{i}^{h} K(\bar{x}_i - \bar{x}..)^2}{\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x - \bar{x}_i)^2} \times \frac{N \quad h}{h - 1}$$

$$\gamma_1 = h - 1. \quad \gamma_2 = N \quad h \quad N = hK.$$

$h - 1$, $N - h$ வரையற்ற பாகைகளுக்கேற்ற $F$-பட்டியலில் $F$-ன் மதிப்பானது கணக்கியலாகக்கண்ட $F$-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக இருந்தால், வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதாயில்லை.

(1)-ன் இடதுகைப் பக்கமுள்ள கோவை மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் என வழங்கப்படுகிறது. (1)-ன் வலதுகைப் பக்கமுள்ள முதல் உறுப்பு $i$ ஆவது பிரிவிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும், அதன் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலாகும். இந்த உறுப்பைக் குழுவிலடங்கிய மாறுபாட்டளவு எனக் கூறலாம். (1)-ன் வலக்கைப் பக்கமுள்ள கடைசி உறுப்பு மொத்தக் கூட்டுச்சராசரிக்கும் குழுக்களின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலாகும். இதனைக் குழுவிற்கிடை மாறுபாட்டளவு எனக் கூறலாம்.

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| மாறுபாட்டின் மூலம் | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | F |
|---|---|---|---|---|
| குழுவிற்கிடை | $h-1$ | $\sum_{i=1}^{h} k(\bar{x}_i-\bar{x})^2$ | $\sum_{i=1}^{h} \frac{k(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{h-1}$ | $\dfrac{\sum_{i=1}^{h} \frac{k(\bar{x}_i-\bar{x}^2)}{h-1}}{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} \frac{(x_j-\bar{x})^2}{N-h}}$ |
| குழுவிலடங்கிய | $N-h$ | $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x-\bar{x}_i)^2$ | $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}\frac{(x-\bar{x})^2}{N-h}$ | |
| மொத்தம் | $N-1$ | $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x-\bar{x})^2$ | | |

**குறிப்பு :** எல்லா வர்க்கங்களின் கூடுதலும் ஆதியைப் பொறுத்து மாறக்கூடியதல்ல.

**மொத்தத்தின் மூலம் வர்க்கங்களின் கூடுதல்**

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - 2\bar{x} \sum_i \sum_j x_{ij} + N\bar{x}^2.$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

குழுவிற்கிடை சராசரி வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_i K(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = K \sum_i \left( \frac{T_i}{K} - \frac{T}{hK} \right)^2$$

$$= \frac{\Sigma T_i^2}{K} - \frac{T^2}{N} .$$

குழுவிலடங்கிய சராசரி வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{\Sigma T_i^2}{K} .$$

= (மொத்தவர்க்கங்களின் கூடுதல்) — (குழுவிற்கிடை சராசரி வர்க்கங்களின் கூடுதல்).

(ஏனெனில் வர்க்கங்களின் கூடுதல் ஆதியைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை).

$\frac{T^2}{N}$ என்பதைத் திருத்தக் காரணி அல்லது திருத்த உறுப்பு என வழங்கலாம். ஏனெனில், சராசரியிலிருந்துதான் அளவுகளெல்லாம் எடுக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $A, B, C$ என்ற மூன்று வகையான கோதுமை 4 பகுதிகளில் விதைக்கப்பட்டது. ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த உற்பத்தியின் அளவுகள் (குவிண்டால்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 8 | 4 | 6 | 7 |
| $B$ | 7 | 5 | 5 | 3 |
| $C$ | 2 | 5 | 4 | 4 |

$A, B, C$-ன் உற்பத்தி அளவுகளுக்கிடையே வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதை ஆராய்க. வரையற்ற பாகைகள் 2, 9-க்கு ·05 நிகழ்தகவு அளவுக்கேற்ற $F$-ன் மதிப்பு 4·26 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு :

வெவ்வேறு வகையான கோதுமைப் பயிரால் விளைச்சலில் உண்மையில் மாறுதல் இல்லை என்ற இல்லெனும் எடுகோளை நாம் முதலில் எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இங்கு 3 கிடைப் பிரிவுகளும், 4 நெட்டுப்பிரிகளும் உள்ளன.

$$h = 3 \quad K = 4 \quad \therefore \quad N = 3 \times 4 = 12$$

$$T_1 = 8 + 4 + 6 + 7 = 25$$

$$T_2 = 7 + 5 + 5 + 3 = 20$$

$$T_3 = 2 + 5 + 4 + 4 = 15$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 25 + 20 + 15 = 60$$

$$\therefore \text{ திருத்தக் காரணி} = \frac{T^2}{N} = \frac{(60)^2}{12} = 300$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 8^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 5^2 + 5^2$$
$$3^2 + 2^2 + 5^2 + 4^2 + 4^2$$
$$= 64 + 16 + 36 + 49 + 49 + 25 + 25$$
$$+ 9 + 4 + 25 + 16 + 16$$
$$= 334$$

∴ மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் =

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= 334 - 300$$

$$= 34.$$

$$\frac{\Sigma T_j^2}{K} = \frac{1}{4}\left[25^2 + 20^2 + 15^2\right] = \frac{1250}{4} = 312{\cdot}5$$

கோதுமை வகைகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_j \frac{T_j^2}{K} - \frac{T^2}{N}.$$

$$= 312.5 - 300$$

$$= 12{\cdot}5$$

∴ வகைகளிலடங்கிய வர்க்களின் கூடுதல் = (மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்)

— (வகைகளுக்கிடை வ. கூடுதல்)

$$= 34 - 12{\cdot}5 = 21{\cdot}5.$$

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்.

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | F |
|---|---|---|---|---|
| வகைகளுக் கிடை | 2 | 12·5 | $\frac{12{\cdot}5}{2} = 6{\cdot}5$ | $F = \frac{6{\cdot}25}{2{\cdot}39}$ |
| வகைகளில டங்கிய | 9 | 21·5 | $\frac{21{\cdot}5}{9} = 2{\cdot}39$ | $= 2{\cdot}615$ |
| மொத்தம் | 11 | 34·0 | | |

வரையற்ற பாகைகள் 2, 9-க்கு 5% நிகழ்தகவு அளவுக் கேற்ற $F_0$-ன் மதிப்பு 4·26 ; அதாவது பரவற்படி பட்டியலிலுள்ள

$F$-ன் மதிப்பு இதைவிடக் குறைவு. அதனால் நம்முடைய எடுகோள் சரியானதல்ல என்பதற்கு ஆதாரமில்லை. எனவே, கோதுமை வகைகளுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேற்றுமை யில்லை என முடிவு செய்கின்றோம்.

(2) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 4 வரிசைகளிலுள்ள மின் விளக்குகள் எரிந்த நேரங்களை மணிகளில் தருகிறது:

| வரிசைகள் | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1600 | 1610 | 1650 | 1680 | 1700 | 1720 | 1800 | |
| 2 | 1580 | 1640 | 1640 | 1700 | 1750 | | | |
| 3 | 1460 | 1550 | 1600 | 1620 | 1650 | 1660 | 1740 | 1820 |
| 4 | 1510 | 1520 | 1530 | 1570 | 1600 | 1680 | | |

இவற்றிற்கு ஒரு பரவற்படி பட்டியலை அமைத்து மிகைத் தன்மை சோதனை இவற்றின் ஒரு படித்தான தன்மையை மறுக்க வில்லை எனக் காட்டுக.

**விடை :** ஆதியை 1640-க்கு மாற்றி ஒவ்வொரு மாறியையும் 10 ஆல் வகுத்தால், மேற்கூறிய விபரங்கள் பின் வருமாறு அமையும் :

| வரிசைகள் | | | | | | | | | $T_i$ | $\Sigma\Sigma x_{ij}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —4 | —3 | 1 | 4 | 6 | 8 | 16 | — | 28 | 398 |
| 2 | —6 | 0 | 0 | 6 | 11 | — | — | — | 11 | 193 |
| 3 | —18 | —9 | —4 | —2 | 0 | 2 | 10 | 18 | —3 | 853 |
| 4 | —13 | —12 | —11 | —7 | —4 | 4 | — | — | —43 | 515 |
| | | | | | | | | | —7 | 1959 |

நான்கு வரிசைகளிலுமுள்ள மின் விளக்குகள் ஒரே தன்மை வாய்ந்தவை என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$T = -7$. திருத்தக்காரணி $= \frac{T^2}{N} = \frac{(-7)^2}{26} = 1 \cdot 8846.$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \Sigma \Sigma x_{j}^{2} = 1959.$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \Sigma \Sigma x^{2}$ — (திருத்தக்காரணி)

$$= 1959 - 1{\cdot}8846.$$

$$= 1957{\cdot}1154.$$

வரிசைகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \sum_{i=1}^{4} \frac{T^2}{k}$ — திருத்தக்காரணி

$$= \left[\frac{(28)^2}{7} + \frac{(11)^2}{5} + \frac{(-3)^2}{8} + \frac{(-43)^2}{6}\right] - 1{\cdot}8846.$$

$$= 445{\cdot}4916 - 1{\cdot}8846$$

$$= 443{\cdot}6070.$$

∴ வரிசைகளிலடங்கிய வர்க்கங்களின் கூடுதல் } = (மொத்த வ. கூ.)

— (வரிசைகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்)

$$= 1957{\cdot}1154 - 443{\cdot}6070$$

$$= 1513{\cdot}5084.$$

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | F |
|---|---|---|---|---|
| வரிசைகளுக்கிடை | 3 | 443·6070 | $\frac{443{\cdot}6070}{3}$ = 147·8690 | $\frac{147{\cdot}8690}{68{\cdot}796}$ = 2·15 |
| வரிசைகளில் அடங்கிய | 22 | 1513·50844 | $\frac{1513{\cdot}50844}{22}$ = 68·7958 | |
| மொத்தம் | 25 | 1957·1154 | | |

வரையற்ற பாகைகள்3, 22-க்கு, $F_{\cdot 05} = 3{\cdot}05$

வரையற்ற பாகைகள்3, 22-க்கு $F_{\cdot 01} = 4.82$.

5%, 1% வரைகளுக்கு நாம் கணக்கிட்ட $F$ $F_0$. எனவே, வேறுபாடு பொருட்படுத்தாது நாம் எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளலாம். அதாவது நான்கு வரிசைகளிலுமுள்ள மின்விளக்குகள் ஒரே தன்மை வாய்ந்தவை.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் உரங்களின் விளைவை ஆராய நடத்திய சோதனையின் முடிவுகளைத் தருகிறது. விவரங்களை ஆராய்ந்து உன்னுடைய முடிவுகளைக் கூறு.

| உரங்கள் | விளைச்சல் (கிலோ கிராம்களில்) | | | $Ti$ | $\Sigma \Sigma x_{ij}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| நைட்டிரேட் | 3 | 2 | — | 5 | 13 |
| பாஸ்பேட் | 3 | 3 | 4 | 10 | 34 |
| சாணம் | 2 | 5 | 2 | 9 | 33 |
| சல்பேட் | 4 | 2 | — | 6 | 20 |
| | | | | 30 | 100 |

வரையற்ற பாகை 3, 6-க்கு 5% நிகழ்தகவுக்கேற்ற $F$-ன் மதிப்பு $= 4{\cdot}757$.

4 வகையான உரங்கள் $h = 4$. ஆதலால் $N = 10$.

$T = 30$.

$$\text{திருத்தக் காரணி} = \frac{T^2}{N}$$

$$= \frac{(30)^2}{10} = 90$$

$\Sigma \Sigma x_{ij}^2 = 100$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \Sigma\Sigma x_{ij}^2$ — திருத்தக்காரணி.

$= 100 - 90 = 10$

$= 1.$

உரங்களுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \sum_{i=1}^{4} \frac{T_i^2}{n_i}$ — திருத்தக்காரணி

$$= \left[\frac{(5)^2}{2} + \frac{(10)^2}{3} + \frac{(9)^2}{3} + \frac{(6)^2}{3}\right] - 90$$

$= (12.5 + 33.33 + 27.18) - 90$

$= 90.83 - 90.$

$= .83$

உரங்களிலடங்கிய வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\}$ = (மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்)

— (உரங்களுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்)

$= 10 - .83$

$= 9.17$

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| உரங்களுக்கிடை | 3 | ·83 | $\frac{.83}{3} = .2766$ | $\frac{1.528}{.2766} = 5.524$ |
| உரங்களிலடங்கிய | 6 | 9·17 | $\frac{9.17}{6} = 1.528$ | |
| மொத்தம் | 9 | 10 | | |

வரையற்ற பாகை 6, 3-க்கு 5% நிகழ்தகவு அளக்கேற்ற $F_0$-ன் மதிப்பு 8·94 இது கணக்கிடப்பட்ட $F$-ன் மதிப்பைவிட அதிகம். (அதாவது $F < F_0$).

∴ உரங்களுக்கு இடையே வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. அதாவது உரங்கள் ஒரே படித்தான தன்மையைக் கொண்டன அல்ல என்பதற்கு ஆதாரமில்லை.

## இருவழிப் பகுப்பாய்வு (Two-way Classification)

இருவகைத் தன்மைகள் அல்லது குண இயல்புகளுக்கேற்ப விவரங்கள் பிரிக்கப்படுமானால் இருவழி என்று வழங்கப் படுகிறது.

ஒரு வழிப் பகுப்பாவில் $K$ வகை உரங்கள் ஒரே வகையான பயிருக்குப் பயன்படுத்தப்படும் நிலையைக் கண்டோம். இங்கு $K$ வகை உரங்கள் பலவகையான பயிர்களுக்குப் பயன்படுத்தப் படும் நிலையைக் காண்போம். இங்கு இராசிகளின் மதிப்புகள் ஒரே ஒரு காரணத்தால் மட்டும் மாறுவதில்லை. இரு காரணங்களால் அதாவது பண்புகளால் மாறுபடுகின்றது.

இங்கு $N =$ மொத்த ராசிகளின் எண்ணிக்கை

$$= hK$$

பகுப்பாய்வின் ஒரு தன்மையின் (பயிரின் வகை) $i$ஆவது பிரிவிற்கும் மற்றொரு தன்மையின் (உர வகை) $j$ஆவது பிரிவிற்கும் உள்ள இராசியின் மதிப்பை $x_{ij}$ எனக் குறிக்கலாம். அது $i$ஆவது கிடைப்பிரிவு, $j$ஆவது நெட்டுப்பிரிவிலடங்கும்.

இங்கு மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{..})^2$$

$$= \sum_i \sum_j [x_{ij} - \bar{x}_{i.} - {}_{.j} + \bar{x}_{..} + \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..} + \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}]^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

[ஏனெனில் குறுக்குப் பெருக்கு உறுப்புக்களின் மதிப்பு = 0]

$$= K \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2 + h \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

ஒவ்வொரு கிடைப் பிரிவும் $K$ இராசிகளைக் கொண்டு உள்ளதால், வர்க்கங்களின் கூடுதல் $K \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ என்பது கிடைப் பிரிவுகளுக்கிடையே ஏற்படும் வேறுபாட்டின் மாறுபாட்டைக் கொடுக்கும். அதாவது, கிடைப்பிரிவுகளால் குறிக்கப்பட்ட தன்மைகளின் (உரவகை) வேறுபாட்டால் உண்டாவதாகும். இங்கு இது கிடைப் பிரிவுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் என வழங்கப்படுகிறது.

இதேபோல் $h \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ என்பது நெட்டுப் பிரிவுகளுக்கிடையே ஏற்படும் வேறுபாட்டின் மாறுபாட்டைக் கொடுக்கும். இது நெட்டுப் பிரிவுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் என வழங்கப்படுகிறது.

$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ என்பது மீதி வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது பிழை வர்க்கங்களின் கூடுதல் என வழங்கப்படுகிறது.

பிர்வற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| மூலம் | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | $\frac{\text{வர்க்கங்களின் கூடுதல்}}{\text{வரையற்ற பாகை}}$ | F |
|---|---|---|---|---|
| கிடைப்பிரிவு | $h-1$ | $K\sum_i(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ | $S_1^2=\frac{\text{கிடைப்பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுறுதல்}}{h-1}$ | $F_{h-1,(h-1)(K-1)}=\frac{S_1^2}{S_3^2}$ |
| நெட்டுப் பிரிவு | $K\ \ 1$ | $h\sum_j(\bar{x}_{j\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ | $S_2^2=\frac{\text{நெட்டுப்பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுதல்}}{K-1}$ | |
| பிழை | $(h\ \ 1)(K-1)$ | $\sum_i\sum_j\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x}_{\cdot\cdot}^2$ | $S_3^2=\frac{\text{பிழை வர்க்கங்களின் கூடுதல்}}{(h-1)\ (K-1)}$ | $F_{K-1,(h-1)(K-1)}=\frac{S_2^2}{S_3^2}$ |
| மொத்தம் | $hK-1$ | $\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x})^2$ | | |

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு விவசாயச் சோதனையில் *A*, *B*, *C*, *D* என்ற ரக நெல் விதைகளை 3 விதமான உரங்கள் போட்டுப் பயிர் செய்யப் பட்டதில் கீழ்க்கண்ட படி விளைவு கிடைத்தது :

| உரம் | விதை ரகம் *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 105 | 98 | 104 | 107 |
| 2 | 112 | 101 | 98 | 109 |
| 3 | 107 | 95 | 110 | 97 |

விதை வேறுபாட்டையும் உர வேறுபாட்டையும் ஆராய ஒரு பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் தயாரிக்க.

**தீர்வு :**

104 ஐ ஆதியாக எடுத்துக் கொள்க.

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் வருமாறு :

| உரம் | விதை ரகம் *A* | *B* | *C* | *D* | கிடைப்பிரிவு மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | —6 | 0 | 3 | —2 |
| 2 | 8 | —3 | —6 | 5 | 4 |
| 3 | 3 | —9 | 6 | —7 | —7 |
| நெட்டுப் பிரிவு மொத்தம் | 12 | —18 | 0 | 1 | —5 |

$\therefore$ மொத்தம் $T = -5$ ; $h = 3$ ; $k = 4$ ; $N = 4 \times 3$
$= 12.$

$\therefore$ திருத்தக் காரணி $= \frac{T^2}{N} = \frac{25}{12} = 2{\cdot}08$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (1)^2 + (8)^2 + (3)^2 + \ldots\ldots + (5)^2 + (-7)^2$$

$$= 355.$$

$\therefore$ மொத்த மாறுபாட்டளவு $= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$

அதாவது மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = 355 - 2{\cdot}08 = 352{\cdot}92$

$$\sum_i \frac{T_{i}^2}{k} = \frac{(-2)^2 + (4)^2 + (-7)^2}{4}$$

$$= \frac{69}{4} = 17{\cdot}25$$

$\therefore$ கிடைப்பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \frac{\Sigma T_{i}^2}{h} - \frac{T^2}{N}$

$$= 17{\cdot}25 - 2{\cdot}08$$
$$= 15{\cdot}17$$

$$\frac{\Sigma T_{\cdot j}^2}{h} = \frac{(12)^2 + (-18)^2 + (0)^2 + (1)^2}{3} = \frac{469}{3}$$

$$= 156{\cdot}33$$

$\therefore$ நெட்டுப்பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \frac{\Sigma T_{\cdot j}^2}{k} - \frac{T^2}{N}$

$$= 156{\cdot}35 - 2{\cdot}08$$
$$= 154{\cdot}25$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூடுதல் = (மொத்த வர்க்களின் கூடுதல் [கிடைப்பிரிவு வ. கூ + நெட்டு வ. கூ]

$$= 352{\cdot}92 - [15{\cdot}17 + 154{\cdot}25]$$

$$= 183{\cdot}5$$

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| கிடைப்பிரிவு (உரம்) | 2 | 15·17 | $\frac{15{\cdot}17}{2} = 7{\cdot}59$ | ·2482 |
| நெட்டுப்பிரிவு (விதைரகம்) | 3 | 154·25 | $\frac{154{\cdot}25}{3}$ 51·42 | 1·682 |
| பிழை | 6 | 183·5 | $\frac{183{\cdot}5}{6} = 30{\cdot}58$ | |
| மொத்தம் | 11 | 354·92 | | |

$F$ பட்டியலில், $F_{6,2} = 19{\cdot}33$, $F_{8,6} = 4{\cdot}76$ இவையிரண்டும் பரவற்படி பட்டியிலிலுள்ள $F_{6,2}$ $F_{8,6}$ மதிப்புக்களைவிட அதிகம். விதை ரகத்திற்கும் உரத்திற்கும் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கதல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒவ்வொரு வகை வயதுப் பிரிவிற்கும் ஒரு நோயாளி வீதம் தேர்ந்தெடுத்து 4 வகையான வயதுப் பிரிவினர்களிடம் மருத்துவ சோதனை ஒன்று, $A$, $B$, $C$ என்ற மூன்று மருந்துகளால் தூங்கும் நேரம் அதிகப்படுகிறதா என்ற ஆய்விற்காக நடத்தப்பட்டது. வயது தூக்கத்தை அதிகப்படுத்துகிறதா என்பதை ஆய்க. மூன்று மருந்துகளும் ஒரே தன்மையான பயனை உடையனவா அல்லவா என்பதையும் பரிசோதி. 5% நிகழ்தகவு அளவுக்கு, $F_{2,6} = 5{\cdot}14$. $F_{,,6} = 4{\cdot}76$.

**தீர்வு :**

| வயதுப் பிரிவு → / மருந்து ↓ | 30—40 | 40—50 | 50—60 | 50—70 | கிடைப் பிரிவு மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 2·0 | 1·2 | 1·0 | 0·3 | 4·5 |
| *B* | 1·1 | 0·8 | 0·0 | —0·1 | 1·8 |
| *C* | 1·5 | 1·3 | 0·9 | 0·1 | 3·8 |
| நெட்டுப் பிரிவு மொத்தம் | 4·6 | 3·3 | 1·9 | 0·3 | 1 ·1 |

மொத்தம் $T = 10\cdot1.\quad k = 4.\quad h = 3.\quad N = 12.$

திருத்தக் காரணி $= \frac{T^2}{N} = \frac{(10\cdot1)^2}{12} = \frac{102\cdot01}{12} = 8\cdot50$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (2\cdot0)^2 + (1\cdot1)^2 + \ldots (-0\cdot1)^2$$

$$+ (0\cdot1)^2 = 13\cdot15$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$

$= 13\cdot15 - 8\cdot50$

$= 4\cdot65$

$$\sum_i \frac{T^2}{k} = \frac{(4\cdot5)^2 + (1\cdot8)^2 + (3\cdot8)^2}{4} = \frac{37\cdot93}{4} = 9\cdot4825$$

∴ கிடைப் பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \Sigma \frac{T_i^2}{k} - \frac{T^2}{N}$

$= 9\cdot4825 - 8\cdot50$

$= 0\cdot9825.$

$$\frac{\Sigma T._h^2}{h} = \frac{(4{\cdot}6)^2 + (3{\cdot}3)^2 + (1{\cdot}9)^2 + (0{\cdot}3)^2}{3}$$

$$= \frac{35.75}{3} = 11{\cdot}9167.$$

∴ நெட்டுப் பிரிவு வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{\Sigma T._j^2}{n} - \frac{T^2}{N}$$

$$= 11{\cdot}9167 - 8{\cdot}50$$

$$= 3{\cdot}4167.$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

= (மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்)

— [கிடைப்பிரிவு வ. கூ. + நெட்டுப் பிரிவு வ. கூ.]

$= 4{\cdot}65 - (0{\cdot}9825 + 3{\cdot}4167)$

$= 0{\cdot}2508.$

**பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்**

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| கிடைப்பிரிவு (மருந்து) | 2 | 0·9825 | $\frac{{\cdot}9825}{2} = {\cdot}4913$ | 11·75 |
| நெட்டுப் பிரிவு (வயது) | 3 | 3·4167 | $\frac{3{\cdot}4167}{3} = 1{\cdot}1389$ | 27·25 |
| பிழை | 6 | 0·2508 | $\frac{{\cdot}2508}{6} = 0{\cdot}0418$ | |
| மொத்தம் | 11 | 4·6500 | | |

$F$ பட்டியலில் $F_{2,6} = 5{\cdot}14$, $F_{3,6} = 4{\cdot}76$. இவையிரண்டும் பரவற்படி பட்டியலிலுள்ள $F_{2,6}$, $F_{3,6}$ மதிப்புகளைவிடக் குறைவு, அதனுல் மூன்று மருந்துகளும் தூக்கத்தை அதிகப்படுத்தும் விதத்தில் மாறுபட்டுள்ளன. இதேபோல் பல வகை வயதுப் பிரிவினர்களிடமும் தூங்குவதைப் பொறுத்தமட்டிலும் பல விதமான பயன்களை மருந்துகள் உண்டாக்குகின்றன எனக் கருதலாம்.

**இலத்தீன் சதுர அமைப்பிற்கான பரவற்படி ஆய்வு**

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட இலத்தீன் சதுர அமைப்பிற்கான (Latin Square Design) ஆய்வை நடத்துக.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 50 *A* | 70 *B* | 70 *C* | 80 *D* | 90 *E* |
| 70 *B* | 70 *C* | 80 *D* | 80 *E* | 50 *A* |
| 60 *C* | 50 *D* | 90 *E* | 80 *A* | 90 *B* |
| 50 *D* | 60 *E* | 80 *A* | 50 *B* | 70 *C* |
| 80 *E* | 90 *A* | 50 *B* | 70 *C* | 60 *D* |

**தீர்வு :**

70ஐ ஆதியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $T$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −20 *A* | 0 *B* | 0 *C* | 10 *D* | 20 *E* | 10 |
| 0 *B* | 0 *C* | 10 *D* | 10 *E* | −20 *A* | 0 |
| −10 *C* | −20 *D* | 20 *E* | 10 *A* | 20 *B* | 20 |
| −20 *D* | −10 *E* | 10 *A* | −20 *B* | 0 *C* | −40 |
| +10 *E* | 20 *A* | −20 *B* | 0 *C* | −10 *D* | 0 |
| −40 | −10 | 20 | 10 | 10 | −10 |

$T = -10. \quad N = 5 \times 5 = 25$

$$\sum_{i} \sum_{j} x_{ij}^2 = 4900$$

$$A = -20 - 20 + 10 + 10 + 20 = 0$$
$$B = 0 + 0 + 20 - 20 - 20 = -20$$
$$C = 0 + 0 + (-10) + 0 + 0 = -10$$
$$D = 10 + 10 - 20 - 20 - 10 = -30$$
$$E = 20 + 10 + 20 - 10 + 10 = 50$$

திருத்தக் காரணி $= \dfrac{T^2}{N} = \dfrac{(-10)^2}{25} = 4$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \sum \sum x_{ij}^2 - \dfrac{T^2}{N} = 4900 - 4$

$$= 4896.$$

கிடைப்பிரிவுகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{10^2 + 20^2 + (-40)^2}{5} - \frac{T^2}{N}$$
$$= \left[\frac{100 + 400 + 1600}{5}\right] - 4$$
$$= \frac{2100}{5} - 4 = 420 - 4 = 416$$

நெட்டுப்பிரிவுகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{(-40)^2 + (-10)^2 + (20)^2 + 10^2 + 10^2}{5} - 4$$
$$= \frac{1600 + 100 + 400 + 100 + 100}{5} - 4$$
$$= \frac{2300}{5} - 4 = 460 - 4 = 456.$$

பராமரிப்பு முறைகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2}{5} - \text{திருத்தக்காரணி}$$
$$= \frac{0^2 + (-20)^2 + (-10)^2 + (-30)^2 + (50)^2}{5} - 4$$
$$= \frac{400 + 100 + 900 + 2500}{5} - 4$$
$$= \frac{3900}{5} - 4 = 780 - 4 = 776.$$

பிழை $= 4896 - (416 + 456 + 776)$

$$= 4896 - 1648 = 3248.$$

**பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்**

| | வரையற்ற பாகை $d.f$ | வர்க்கங்களின் கூடுதல் $S.S.$ | சராசரி வர்க்கங்கள் $M.S.$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| நெட்டுப்பிரிவு | 4 | 416 | $\frac{416}{4} = 104$ | 0.3842 |
| கிடைப்பிரிவு | 4 | 456 | $\frac{456}{4} = 114$ | 0. 4213 |
| பராமரிப்பு முறை | 4 | 776 | $\frac{776}{4} = 194$ | 0·7169 |
| பிழை | 12 | 3248 | $\frac{3248}{12} = 270{\cdot}6$ | |
| மொத்தம் | 24 | 4896 | | |

வரையற்றபாகை 4, 12-க்கு 5% நிகழ்தகவு அளவுக்கேற்ற $F$ பட்டியலில் $F_0$-ன் மதிப்பு $= 3{\cdot}26$.

அதனுல் நெட்டுப்பிரிவு, கிடைப்பிரிவு, பராமரிப்புமுறை இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

**எடுத்துக்காட்டு :**

உற்பத்தியின் விளைவை ஆராய உரத்தை மாற்றியும் (5 வகைகள்) இரு செங்குத்துத் திசைகளில் மண்ணைமாற்றியும் லத்தீன் சதுர அமைப்பின்படி ஒரு விவசாயச் சோதனை நடத்தப் பட்டது. எழுத்துகள் உரங்களையும், நெட்டுப்பிரிவு, கிடைப் பிரிவுகள் இரு செங்குத்துத் திசைகளையும் குறிக்குமாறு முடிவுகள் கீழ்க்கண்ட லத்தீன் சதுர அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. உற்பத்தியில் இவை மாற்றத்தை ஏற்படுத்துகின்றனவா என்பதை ஆய்க.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 *A* | 10 *B* | 11 *C* | 9 *D* | 9 *E* |
| 10 *F* | 9 *C* | 14 *A* | 12 *B* | 11 *D* |
| 15 *B* | 8 *D* | 8 *E* | 10 *C* | 18 *A* |
| 12 *D* | 6 *E* | 13 *B* | 13 *A* | 12 *C* |
| 13 *C* | 11 *A* | 10 *D* | 7 *E* | 14 *B* |

**தீர்வு :**

(10ஐ ஆதியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்)

$T = 31. \qquad N = n^2 = 25$

$T_{i} = 16, -6, 6, 1, 14.$

$T_{\text{எழுத்துகள்}} = 22, 14, 5, 0, -10$

$T_{\cdot j} = 5, 6, 9, 6, 5.$

$$\text{திருத்தக்காரணி} = \frac{T^2}{N} = \frac{(31)^2}{25} = 38{\cdot}44$$

$$\sum_i \sum_j x^2 - \frac{T^2}{N} = 235 - 38{\cdot}4\text{ı} = 196{\cdot}56$$

$$\frac{\Sigma T^2}{n} - \frac{T^2}{N} = 05 - 38{\cdot}44 = 66\ 56$$

$$\frac{\Sigma T^2}{n} - \frac{T^2}{N} = 40{\cdot}6 - 38.44 = 2{\cdot}16$$

$$\frac{\Sigma T^2_{\text{எழுத்து}}}{n} - \frac{T^2}{N} = 161 - 38{\cdot}44 = 122{\cdot}56.$$

பிழை $= 5{\cdot}28$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \Sigma \Sigma x^2 - \frac{T^2}{T}$$

$$= 158 - 1 = 157.$$

கிடைப்பிரிவுகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + {}^2}{4} - \frac{T^2}{N}$$

$$= \frac{18}{4} - 1 = 4{\cdot}5 - 1 = 3{\cdot}5.$$

நெட்டுப்பிரிவுகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{(-2)^2 + 0^2 + 1^2 + (-3)^2}{4} - \frac{T^2}{N}$$

$$= \frac{14}{4} - 1 = 3{\cdot}5 - 1 = 2{\cdot}5$$

பராமரிப்புமுறைகளுக்கிடை வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Big\} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{4} - \frac{T^2}{N}$

$$= \frac{(-6)^2 + (-16)^2 + 1^2 + (17)^2}{4} - 1$$

$$= \frac{582}{4} - 1 = 145{\cdot}5 - 1$$

$$= 144{\cdot}5$$

பிழை $= 157 - (3{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 144{\cdot}5)$

$= 157 - (150{\cdot}5)$

$= 6{\cdot}5$

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| மாறுபாட்டின் மூலம் | வரையற்ற பாகை $d \cdot f \cdot$ | வர்க்கங்களின் கூடுதல் $S \cdot S \cdot$ | சராசரி வர்க்கங்கள் $M \cdot S \cdot$ | |
|---|---|---|---|---|
| நெட்டுப் பிரிவு | 3 | 2·5 | $\frac{2 \cdot 5}{3} = \cdot 833$ | ·7691 |
| கிடைப் பிரிவு | 3 | 3·5 | $\frac{3 \cdot 5}{3} = 1 \cdot 166$ | 1·077 |
| பராமரிப்பு முறை | 3 | 144·5 | $\frac{144 \cdot 5}{3} = 48 \cdot 166$ | 44·46 |
| பிழை | 6 | 6·5 | $\frac{6 \cdot 5}{6} = 1 \cdot 0833$ | |
| மொத்தம் | 15 | 157 | | |

$F$ பட்டியலில், $F_{8,6} = 4{\cdot}76$.

எனவே, நெட்டுப்பிரிவு, கிடைப்பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

பராமரிப்பு முறைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு மட்டுமே மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கது,

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்கண்ட இலத்தீன் சதுர அமைப்பிற்கான (Latin Square Design) ஆய்வை நடத்துக :

நெட்டுப் பிரிவு

| கிடைப் பிரிவு | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $A(12)$ | $D(20)$ | $C(16)$ | $B(10)$ |
| 2. | $D(18)$ | $A(14)$ | $B(11)$ | $C(14)$ |
| 3. | $B(12)$ | $C(15)$ | $D(19)$ | $A(13)$ |
| 4. | $C(16)$ | $B(11)$ | $A(15)$ | $D(20)$ |

(செ.ப.க. '72)

**தீர்வு :**

15 ஐ ஆதியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்.

| | | | | | $T_{i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | −3 $A$ | 5 $D$ | 1 $C$ | −5 $B$ | −2 |
| | 3 $D$ | −1 $A$ | −4 $B$ | −1 $D$ | −3 |
| | −3 $B$ | 0 $C$ | 4 $D$ | −2 $A$ | −1 |
| | 1 C | −4 $B$ | 0 $A$ | 5 $D$ | 2 |
| $T_{.j}$ | −2 | 0 | 1 | −3 | −4 |

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

| | வரையற்ற பாகை | வர்க்கங்களின் கூடுதல் | சராசரி வர்க்கங்கள் | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| நெட்டுப் பிரிவுகளுக்கிடையே | 4 | 66·56 | $\frac{66·56}{4} = 16·64$ | 37·8 |
| கிடைப் பிரிவுகளுக்கிடையே | 4 | 2·16 | $\frac{2·16}{4} = 0·54$ | 1·2 |
| பராமரிப்பு முறைகளுக்கிடையே | 4 | 122·56 | $\frac{122\ 56}{4} = 30·64$ | 69·6 |
| பிழை | 12 | 5·23 | $\frac{5·28}{4} = 0·44$ | |
| மொத்தம் | 24 | 196·56 | | |

$T = -4. \quad N = 4 \times 4 = 16.$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (-3)^2 + (3)^2 + \dots\dots + -2)^2 + (5)^2$$

$$= 158.$$

$A = -3 - 1 + 0 - 2 = -6$

$B = -3 - 4 - 4 - 5 = -16$

$C = 1 + 0 + 1 - 1 = 1$

$D = 3 + 5 + 4 + 5 = 17.$

திருத்தக் காரணி $= \dfrac{T^2}{N} = \dfrac{(-4)^2}{16} = 1$

வரையற்ற பாகை $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 12$-க்கு 5%, 1% நிகழ்தகவு அளவுகளுக்கேற்ற $F$-ன் மதிப்புகள் முறையே 3·26, 5·41. நெட்டுப் பிரிவுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு அதிக அளவில் குறிப்பிடத்தக்கது. பராமரிப்பு முறைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடும் குறிப்பிடத்தக்கது.

### பயிற்சி

(1) 4 வகையான கோதுமைப் பயிர் 3 பகுதிகளில் விதைக்கப் பட்டு அவை விளைந்த உற்பத்தியின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

| கோதுமை வகைகள் | பகுதிகள் | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| *A* | 10 | 9 | 8 |
| *B* | 7 | 7 | 6 |
| *C* | 8 | 5 | 4 |
| *D* | 5 | 4 | 4 |

கோதுமை வகைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டை ஆய்க.

[விடை : கோதுமை வகைகளுக்கிடையேயுள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கது.]

(2) கீழ்க்கண்ட பட்டியலை அடிப்படையாகக் கொண்டு இயந்திர ஓட்டத் தடைகளின் எண்ணிக்கைகள் (number of machine breakdowns) இயந்திர மாற்றங்களைச் சார்ந்துள்ளனவா என்பதை ஆய்க.

| இயந்திர மாற்றங்கள் | ஓட்டத்தடைகளின் எண்ணிக்கைகள் | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | *D* |
| I | 10 | 6 | 12 | 14 |
| II | 10 | 12 | 20 | 21 |
| III | 14 | 10 | 13 | 18 |

(3) ஆய்வாளர்கள் 6 பைகளிலுள்ள தூள்களின் கூறுகளில் உள்ள ஈரத்தன்மையை, ஒவ்வொருவரும் ஒவ்வொரு பையிலிருந்து ஒரு கூறு வீதம் எடுத்து ஆராய்ந்து விளைவுகளைப் பின் வருமாறு கொடுத்துள்ளனர்.

பைகள்

| ஆய்வாளர்கள் | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 10 | 9 | 10 | 11 | 11 |
| 2 | 12 | 11 | 9 | 11 | 10 | 10 |
| 3 | 11 | 10 | 9 | 12 | 11 | 10 |
| 4 | 12 | 11 | 11 | 14 | 12 | 10 |

இவற்றிற்கு ஒரு பரவற்படியை அமை. பைகளுக்கு இடையே குறிப்பிடத்தக்க வேற்றுமையுண்டா என ஆராய்க.

(4) ராண்டமாக்கப்பட்ட தொகுதி அமைப்பு மூலம் 'ஒரு விவசாயச் சோதனை *A*, *B*, *C* என்ற மூன்று வகையான கோதுமைகளின் உற்பத்தி அளவையறிய நடத்தப்பட்டது. ஒவ்வொரு தொகுதியும் மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு தொகுதியிலுள்ள பகுதிகளிலும் இயைபிலா முறைப்படி 3 வகை

கோதுமைகளும் பயிர் செய்யப்பட்டன. மொத்தம் 5 தொகுதிகள். இந்த அமைப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. பரவற்படி ஆய்வை நடத்துக.

| | | | | | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A 5 | C 3 | A 1 | B 4 | C 4 | 17 |
| | B 4 | A 2 | C 2 | A 5 | B 4 | 17 |
| | C 4 | B 0 | B 1 | C 5 | A 3 | 13 |
| மொத்தம் | 13 | 5 | 4 | 14 | 11 | 47 |

[விடை :- வகைகளுக்கிடை வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல, தொகுதிகளுக்கிடை குறிப்பிடத்தக்கது.]

(5) $B_1, B_2, B_3, B_4$ என்ற 4 வகை தானியங்களுக்கு $A_1, A_2, A_3$ என்ற 3 வகை உரங்களைப் போட்டு உற்பத்திகளின் அளவை ஆய்வு செய்ததில் பின்வரும் விபரங்கள் கிடைத்தன :

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 15 | 20 | 22 | 20 |
| $A_2$ | 20 | 30 | 32 | 28 |
| $A_3$ | 20 | 35 | 38 | 32 |

உரங்கள் ஒரே தன்மையான விளைவுகளை ஏற்படுத்துகின்றனவா? தானிய வகைகளுக்கிடையே வேறுபாடு எதுவும் இல்லையா?

(6) ( ) விதைகளின் வகைகளைச் சோதனை செய்ததில் கீழ்க்கண்ட இலத்தீன் சதுர அமைப்புக் கிடைத்தது. பரவற்படி பட்டியலை அமைத்து முடிவுகளைக் கூறுக.

(i)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 *A* | 9 *B* | 12 *C* | 11 *D* |
| 11 *C* | 12 *D* | 10 *A* | 10 *B* |
| 11 *D* | 9 *C* | 10 *B* | 11 *A* |
| 0 *B* | 13 *A* | 9 *D* | 11 *C* |

(ii)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 105 *A* | 95 *B* | 125 *C* | 115 *D* |
| 115 *C* | 125 *D* | 105 *A* | 105 *B* |
| 115 *D* | 95 *C* | 105 *B* | 11[illegible] *A* |
| 95 *B* | 135 *A* | 95 *D* | 115 *C* |

[தகுந்த ஆதியைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்க.]

(ii) தற்கோளைத் தெளிவாகக் கூறி, ஒவ்வொரு அறையிலும் ஒரு பதிவு கொண்ட இரு வகையிலும் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்குப் பரவற்படி பகுப்பாய்வு செய்யும் முறையை விளக்குக· [1974 செ.ப.க.]

(iii) ராண்டமாக்கப்பட்ட பரப்பு முறையைக் காட்டிலும், லத்தின் வர்க்க முறையின் நன்மைகள் யாவை?

வர்க்கத் தொகை, கட்டின்மைப்படி ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் 5 × 5 என்னும் லத்தீன் வர்க்கப் பரவற்படி பகுப்பாய்வின் அட்டவணையைத் தயாரிக்க. [1974 செ.ப.க.]

(7) $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ என்னும் இனத்தைச் சார்ந்த கால்நடைகள் $R_1$, $R_2$, $R_3$ என்னும் மூன்று வகையான உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளில் வளர்க்கப்பட்டன. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கால்நடைகளில் கூடிய எடை அளவுகள் பதிவு செய்யப்பட்டுப் பின்வரும் விவரங்களை கிடைத்தன :

| | $C_1$ | $C_2$ | $C.$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 46.5 | 62 | 41 | 45 |
| $R_2$ | 47.5 | 41·5 | 22 | 31·5 |
| $R$ | 5 | 40 | 25.5 | 28·5 |

(i) கால்நடைகளின் இனங்களிடையேயும் (ii) உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளிடையேயும் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா எனக் காண்க.

[விடை: (i) கால்நடைகளின் இனங்களிடையேயும், (ii) உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளிடையேயும் உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.]

(8) ஒரு மிகப்பெரிய நகரின் 4 வேறுபாடான பகுதிகளில் காற்று மண்டலமானது 4 வேறுபாடான உயரங்களில் கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு, ஒரு வகை இரசாயனப் பொருள் அக் காற்று மண்டலத்தில் உள்ளதா எனக் கண்டுபிடிக்க நான்கு விதமான சோதனைகள் நடத்தப்பட்டன. சோதனைகளின் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எழுத்துகள் பல்வேறு சோதனைகளைக் குறிக்கின்றன. காற்று மண்டலத்தில் இரசாயனப் பொருள்கள் இருப்பதானது (1) நகரின் 4 வித்தியாசமான பகுதிகளிலும் (2) நான்குவித உயரங்களிலும் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபடுகிறதா என்பதைக் கணிக்கவும்.

பகுதிகள்

| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| உயரங்கள் | 1 | *A* 8 | *B* 5·3 | *C* 4·1 | D 5 |
| | 2 | *D* 6·8 | *A* 4.9 | *B* 4·1 | *C* 3 2 |
| | 3 | *B* 6·3 | *C* 4·7 | *D* 4·0 | *A* 5 |
| | 4 | *C* 5·7 | *D* 3·3 | *A* 4·0 | *B* 4·2 |

[விடை: நகரின் பகுதிகளிடையே உள்ள வேறுபாடு 5 சதவீத நிலையில் குறிப்பிடத்தக்கது. உயரங்களிடையே வேறுபாடுகள் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல;]

(9) விவசாயத் துறைகளில் செய்நேர்த்திகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களிலும், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள திசைகளில் மண்வள மாறுபாடுகளிலும் விளைச்சலில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைக் கணிப்பதற்கு லத்தீன் சதுரத்திட்ட முறையில் சோதனை நடத்தப்பட்டுப் பின்வரும் முடிவுகள் கிடைத்தன. எழுத்துகள் செய்நேர்த்திகளையும் நிரைகளும், நிலங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளையும் குறிக்குமானால், விளைச்சல் ஏற்படும் மாறுதல்கள் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையா எனக் கணிக்கவும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *A* 7·4 | *D* 8·9 | *E* 5.8 | *B* 12.0 | *C* 14·3 |
| *C* 11·8 | *B* 6·5 | *A* 8.7 | *E* 7·6 | *D* 7·9 |
| *D* 10·1 | *C* 17·9 | *B* 9·0 | *A* 8.5 | *E* 7·1 |
| *E* 8.8 | *A* 10·1 | *C* 15·7 | *D* 11·1 | *B* 7·4 |
| *B* 11·8 | *E* 8·8 | *D* 14·3 | *C* 18·4 | *A* 10·1 |

[விடை: நிரல்களில் உள்ள மாறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. நிரைகளில் உள்ள மாறுபாடு 5 சதவீத நிலையில் குறிப்பிடத்தக்கது. செய்நேர்த்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.]

# 11. செயல்முறைப் புள்ளியியல்

## (i) காலத் தொடர் வரிசை (Time Series)

காலத் தொடர் வரிசையில் விலைகள், இலாபங்கள், உற்பத்தி, ஏற்றுமதி, வேலைவாய்ப்பு போன்றவற்றின் விவரங்கள் நாள் தோறும், மாதந்தோறும், காலாண்டுதோறும் அல்லது ஆண்டு தோறும் மாறுபடுவனவாகத் தரப்பட்டுள்ளன. காலத்தொடர் வரிசையில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அல்லது வேறுபாடுகளை அவற்றின் தன்மைக் கேற்ப 4 பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) நீண்ட காலப் போக்கு (Secular Trend)

(2) பருவ மாற்றம் (Seasonal Variation)

(3) சுழலும் மாற்றம் அல்லது சுழல் மாற்றம் (Cyclical Variation)

(4) ஒழுங்கற்ற மாற்றம் (Irregular Variation)

25 ஆண்டுகளில் ஒரு நிறுவனத்தில் தயாராகின்ற மின் விசிறிகளின் மாதாந்திர விற்பனை விவரங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். புதிய தொழிற்சாலைகள், கடைகள், கல்லூரிகள், திரைப்பட அரங்குகள் பெருமளவு திறக்கப்பட்டு உள்ளதாலும், மக்களின் வாழ்க்கைத் தரம் உயர்ந்து உள்ளதாலும், மின்விசிறி களின் விற்பனையில் ஓர் ஒழுங்கான வளர்ச்சி ஏற்பட்டிருப்பதைக் காண்கிறோம். இது நீண்ட காலப் போக்காகும்.

ஒவ்வோர் ஆண்டும் கோடைக்காலத் துவக்கத்தில் (ஏப்ரல், மே மாதங்களில்) விசிறிகளின் விற்பனை மிக அதிகமாகவும், குளிர்காலத்தில் (டிசம்பர், ஜனவரி மாதங்களில்) குறைவாகவும் இருக்கும். இத்தகைய மாற்றம் பருவ மாற்றம் ஆகும். 5 அல்லது 6 ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை கோடைக்காலத்தில் கூடத் தொழில் வளர்ச்சியின் மந்த நிலைமை காரண

மாகவோ, அல்லது குறிப்பிட்ட ரக விசிறிக்குப் பதிலாக வேறுபல நிறுவனங்களின் விசிறிகள் மக்களிடையே செல்வாக்குப் பெற்று விடுவதோலோ, விசிறிகளின் விற்பனை குறைந்து விடலாம். இது 'சுழல் மாற்றம்' ஆகும்.

சில நேரங்களில் எதிர்பாராது ஏற்படுகின்ற வேலை நிறுத்தம், விற்பனை வரி அதிகரிப்பு, மின்சார வெட்டு, இவற்றால் விசிறிகளின் விற்பனை பெருமளவில் எதிர்பாரா வகையில் பாதிக்கப் படலாம். இத்தகைய மாற்றம் 'ஒழுங்கற்ற மாற்றம்.'

மேற்கூறிய மாற்றங்கள் ஒவ்வொன்றும் காலத் தொடர் வரிசையைப் பாதிக்கின்றன. பொதுவாக இவை நான்கும் இணைந்து ஒன்றாகவே இயங்கலாம். எனவே ஆய்வாளர், காலத் தொடர் வரிசைகளில் காணப்படும் மாற்றங்களைப் பிரித்து ஒவ்வொரு போக்கினாலும் ஏற்படும் மாற்றத்தைத் தனித்துக் காண்பதே, 'காலத் தொடர் பகுப்பாய்வு'(Analysis of Time Series) எனப்படும்

**நீண்ட காலப் போக்கு** (Secular Trend)

தற்காலப் பொருளாதாரத் துறையில் வணிகம், தொழில் வளர்ச்சி குறிப்பிடத் தக்கதாய் உள்ளது. பெரும்பான்மையான காலத் தொடர்கள், மாதத்திற்கு மாதம், ஆண்டிற்கு ஆண்டு மாறுபட்டாலும் ஒரு நீண்ட இடைவெளியில் அவற்றின் போக்கைக் கவனித்தால் அது ஒரு தனித்தன்மையை உடையதாக இருக்கும். இப் போக்கு மேல்நோக்கியோ அல்லது கீழ் நோக்கியோ அல்லது கிடைக் கோட்டிலோ அமைகிறது. இது 'நீண்ட காலப்போக்கு' (long time trend) அல்லது அடிப்படைப் போக்கு அல்லது சார்பற்ற போக்கு (secular trend) எனப்படும். எனவே, தொடர்ந்து ஏற்படும் ஏற்றத்தையோ அல்லது இறக்கத்தையோ அல்லது தேக்க நிலையையோ இது சுட்டிக் காட்டுகிறது. ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகை பொதுவாக மேல் நோக்கிய நீண்ட காலப் போக்கைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு தொழில் துவக்கப்படும்போது முதலில் சிறிது சிறிதாக வளர்ச்சி யடைந்து, புதிய தயாரிப்பு முறைகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டபின் உற்பத்தியான பொருளின் தன்மையும் சிறந்த முறையில் அதிகரித்துப் பெரும் வளர்ச்சியை அடைகிறது. காலப்போக்கில் தொழில் முன்னேற்றம் உச்ச கட்டத்தையடைகிறது. பிறகு சிறிது சிறிதாக உற்பத்திப் பொருளின் தேவை. 'பழையன கழிதல் புதியன புகுதல்' என்ற மொழிக்கேற்பக் குறைந்து, தொழில் வளர்ச்சி பாதிக்கப்பட்டு, இறங்கு வரிசைப் போக்காக மாறி

விடுகிறது. இம் மாற்றங்கள் திடீரெனத் தன்மையை மாற்றிக் கொள்வதில்லை. எனவே, கடந்த காலத்தில் காணப்பட்ட போக்கு தற்போது காணப்பட்டும், வருங்காலத்திலும் ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவிற்கு மாறுதும் இருக்கும். காலத்தொடர் வரிசையின் நீண்டகாலப் போக்கை அளப்பதற்குப் பின்வரும் நான்கு முறைகள் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(1) விவரங்களை வரைபடத்தில் பார்த்த அளவில் தோராயமாக எளிய கோடிட்டுப் போக்கினைக் கண்டறிதல்.

(2) பாதி சராசரி முறை (Method of Semi Average)

(3) நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Average)

**(1) விவரங்களை வரைபடத்தில் பார்த்த அளவில் தோராயமாக எளிய கோடிடும் முறை**

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மாறியின் மதிப்புகளை $y$-அச்சிலும், காலத்தின் அளவினை $x$-அச்சிலும் எடுத்துக் கொண்டு புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்க வேண்டும். இவற்றில் பெரும்பான்மையான புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடிய ஒரு நேர்கோட்டை ஊகித்து அதனை வரைபடத்தின் ஊடே பொதுப்போக்கினைக் காட்டுகின்ற அளவில் வரையவேண்டும். கோட்டிற்குக் கீழுள்ள பரப்பு சமமாக இருக்கும் வகையில் நேர்கோடு அமையும்; இம் முறை மிக எளியது. கவனமாக இக் கோட்டை வரைந்தால், கணித வழி பொருந்தக் கூடிய போக்குக் கோட்டிற்கே, ஒரு நெருங்கிய கோடாக அமையும். ஒவ்வொரு வருடைய கருத்தைப் பொறுத்து, வெவ்வேறு கோடுகள் மதிப்பீடுகளாக அமையும். எனவே, ஒரு சிறந்த பொருத்தமுடைய கோட்டை வரைவதற்கு, ஆய்வாளருக்கு நல்ல அனுபவம் தேவை.

**(2) பாதி சராசரி முறை (Method of Semi Average)**

இம் முறையில் விவரங்கள் இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு, இரு பகுதிகளுக்கும் தனித்தனியே சராசரிகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. இச் சராசரிகளுக்கு உள்ள புள்ளிகளை இரு காலப் பகுதிகளில் மையப் புள்ளிகளுக்கு எதிரே குறிக்கப்பட்டு இவ்விரு புள்ளிகள் வழியே ஒரு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாக இருந்தால், அதனை சம எண்ணிக்கை ஆண்டுகள் கொண்ட இரு பகுதிகளாகப் பிரித்து, அவ்விருபகுதிகளின் சராசரிகளையும் கணக்கிட்டு, இரு காலப் பகுதிகளின் மையப்புள்ளிகளில்

மதிப்புகளை வரைபடத்தில் காட்டவேண்டும். 1961 — 68 என இருப்பின், 1961 — 64, 1965 — 68 என்ற இரு பகுதிகளின் மையப் புள்ளிகள் முறையே ஜூலை 1, 1962 எனவும், ஜூலை 1, 1966 எனவும் அமையும். தரப்பட்டுள்ள ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப் படையாக இருப்பின், எடுத்துக்காட்டாக 1961 — 69 ஆக இருந்தால், 1965 ஆம் ஆண்டை விட்டுவிட்டு, 1961 — 64, 1966 — 69 என்ற இரு பிரிவுகளாகப் பிரித்துக்கொள்ளலாம்.

பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பாதி சராசரி முறையில், போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக.

| ஆண்டு : | 1960 | '61 | '62 | '63 | '64 | '65 | '66 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| விற்பனை(ஆயிரத்தில்) : | 102 | 104 | 113 | 110 | 108 | 116 | 112 |

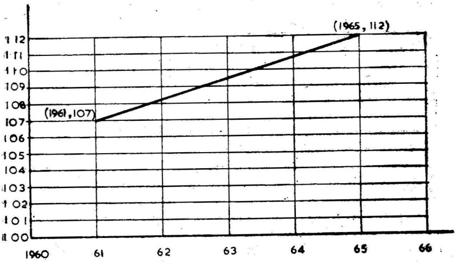
**தீர்வு :**

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருப்பதால், நடு ஆண்டை விட்டுவிட்டு,

$$\text{முதல் 3 ஆண்டுகளின் சராசரி} = \frac{102 + 104 + 113}{3} = 107$$

$$\text{கடைசி 3 ஆண்டுகளின் சராசரி} = \frac{108 + 116 + 112}{3} = 112$$

1961, 1965-க்கு எதிராக முறையே 107, 112 ஐக் குறித்து, இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டால் சேர்த்தால், போக்குக் கோடு கிடைக்கும்.




படம் 11—1

பாதி சராசரி முறையில் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துதல்

**(3) நகரும் சராசரி முறை** (Method of Moving Averages)

நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்திக் காலத் தொடரின் போக்கைத் தீர்மானிக்கும்போது பல ஆண்டுகளின் சராசரி மதிப்பு கணக்கிடப்பட்டு, இம் மதிப்பை இக் கால அளவின் நடு ஆண்டுக்கு உரியதாக எடுத்துக்கொள்கிறோம். இவ்வாறு சராசரி மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவதால், பொதுப் போக்கிலிருந்து, வருடாந்திர மதிப்புகளை, விலகி இருக்குமாறு ஏற்படும் காரணங்களைக் குறைத்து இழைத்து வரக்கூடிய ஒரு வளைவரை கிடைக்கிறது.

3 ஆண்டு நகரும் சராசரி, 4 ஆண்டு நகரும் சராசரி, 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி எனப் பல்வேறு கால அளவுகள் உடைய நகரும் சராசரிகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. பொதுவாக, இக் கால அளவுத்தொடரில் அடுத்தடுத்து மீப்பெரு மதிப்புகள் அல்லது இரு மீச்சிறு மதிப்புகள் இடையே உள்ள கால அளவு அல்லது அதன் மடங்காக இருத்தல் வேண்டும். 3ஆண்டுகளுக்கு உரிய நகரும் சராசரிக்கான வாய்பாடு $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}$, $\frac{x_3 + x_4 + x_5}{3}$ ... என அமையும். இங்கு $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ... கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலத் தொடரில் வரும் மதிப்புகளாகும். இதுபோன்றே 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$, $\frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{5}$, $\frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{5}$, ... என அமையும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

30 ஆண்டுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் மொத்த விலை குறியீட்டெண்ணின் காலத் தொடர் வரிசை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. நகரும் சராசரிகளுக்குத் தகுதியான கால அளவைக் குறிப்பிடுக. நீண்ட காலப்போக்கைக் கண்டு, போக்களவைகளில் இருந்து விலக்கங்களைக் காட்டுவதற்கு வரைபடம் வரைக.

1901-லிருந்து 30 ஆண்டுகளுக்கு குறியீட்டெண்கள் வருமாறு:

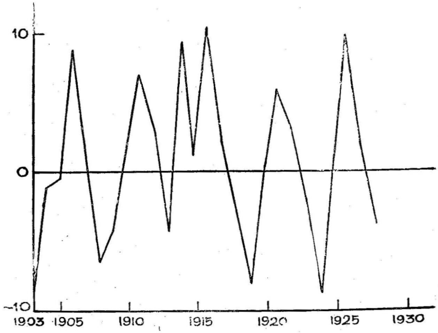
111, 103, 97, 106, 106, 109, 121, 114, 110, 114, 123, 130, 127, 121, 118, 118, 130, 141, 134, 130, 126, 135, 140, 142, 139, 139, 135, 146, 157, 150, 147, 143, 157.

**தீர்வு :**

| ஆண்டு | குறியீட்டெண் | 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி | போக்களவையிலிருந்து விலக்கம் |
|---|---|---|---|
| 1901 | 111 | | |
| 1902 | 103 | | |
| 1903 | 97 | 105·2 | — 8·2 |
| 1904 | 106 | 107·2 | — 1·2 |
| 1905 | 109 | 109·4 | — 0·4 |
| 1906 | 121 | 112·0 | + 9·0 |
| 1907 | 114 | 113·6 | + 0·4 |
| 1908 | 110 | 116·4 | — 6·4 |
| 1909 | 114 | 118·2 | — 4·2 |
| 1910 | 123 | 120·8 | + 2·2 |
| 1911 | 130 | 123·0 | + 7·0 |
| 1912 | 127 | 123·8 | + 3 2 |
| 1913 | 121 | 125·2 | — 4·2 |
| 1914 | 118 | 127·4 | + 9·4 |
| 1915 | 130 | 128·8 | + 1·2 |
| 1916 | 141 | 130·6 | + 10·4 |
| 1917 | 134 | 132·2 | + 1·8 |
| 1918 | 130 | 133·2 | — 3·2 |
| 1919 | 126 | 133·6 | — 7·6 |
| 1920 | 135 | 135·2 | — 0·2 |
| 1921 | 143 | 137·0 | + 6·0 |
| 1922 | 142 | 138·8 | + 3·2 |
| 1923 | 139 | 141·0 | — 2·0 |
| 1924 | 135 | 143·8 | — 8·8 |
| 1925 | 146 | 145·4 | + 0·6 |
| 1926 | 157 | 147·0 | + 10·0 |
| 1927 | 150 | 148·6 | + 1·4 |
| 1928 | 147 | 150·8 | — 3·8 |
| 1929 | 143 | | |
| 1930 | 157 | | |

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் 1901 முதல் 1905 வரையுள்ள ஆண்டுகளின் மதிப்புகள் 111, 103, 97, 106, 109 இவற்றைக் கூட்டி, நடு ஆண்டு ஆகிய 1903 ஆவது ஆண்டிற்கு எதிரே குறிக்கிறோம். இவ்வைந்தாண்டு மதிப்புகளையும் கூட்டி 5 ஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கும் சராசரி மதிப்பை 3 ஆவது ஆண்டிற்கு உரிய போக்கு மதிப்பாகக் கொள்கிறோம். இவ்வாறு செய்வதால், காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள ஒழுங்கற்ற, பருவகாலத்திற்கு உரிய அல்லது சுழற்சிக்கானப் போக்குகளைக் கணக்கிட உதவுகிறது. இவ்வாறே 11, 12, 13, 14, 15 ஆண்டுகளுக்கு உரிய நகரும் சராசரி கணக்கிடப்பட்டு, 13 ஆவது ஆண்டுக்கு எதிரே குறிக்கப்படுகிறது.

போக்களவையிலிருந்து உள்ள விலக்கங்கள் பின்வரும் வரைபடத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.




படம் 11—2.

போக்களவை விலக்கங்களின் வரைபடம்

நகரும் சராசரியின் கால அளவை இரட்டைப் படை ஆண்டுகளைக் கொண்டதாக இருந்தால், மையப்படுத்தப்பட்ட நான்காண்டு நகரும் சராசரியைக் காண்கிறோம். பின்வரும் எடுத்துக் காட்டில் 1961, 1962, 1963, 1964 ஆண்டுகளுக்கான, விளைச்சலின் மொத்த மதிப்பு 1962-க்கும் 1963-க்கும் இடையே

குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறே மற்ற 4 ஆண்டு நகரும் மொத்தங்களும், அவற்றை 4 ஆல் வகுத்து நகரும் சராசரிகளும் குறிக்கப்பட்டுகின்றன. கடைசி நெட்டுப் பிரிவில் 4 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டு உள்ளன. அதாவது முதல் இரு 4 ஆண்டு சராசரிகளின் சராசரி மதிப்புக் கணக்கிடப்பட்டு, அது 1963 ஆம் ஆண்டுக்கு எதிரே குறிக்கப் பட்டுள்ளது. இவ்வாறே 2 ஆவது, 3 ஆவது 4 ஆம் ஆண்டு சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டு, அவை 1964 ஆம் ஆண்டுக்கு எதிரே குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதுபோன்றே 1968ஆம் ஆண்டிற்கு உரிய 4 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி கணக்கிடப் பட்டுள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

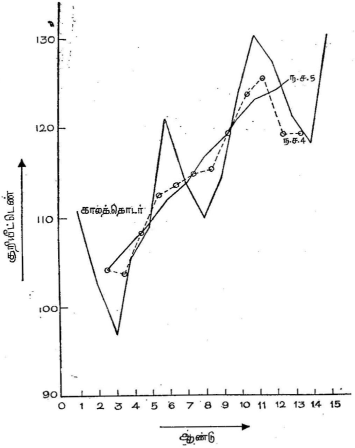
பின்வரும் விவரங்கள் 15 ஆண்டுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலைகளின் குறியீட்டு எண்களைக் குறிகின்றன. 5 ஆண்டுக் காலத்தைக் கொண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டுப் போக்களவைகளைக் காண்க. இவற்றை ஒரு வரை படத்தில் காட்டுக. அதே படத்தில் காலத்தொடரின் மதிப்பு களையும், 4 ஆண்டு நகரும் (மையப்படுத்தப்பட்ட) சராசரிகளையும் எடுத்துக் காட்டுக.

| காலம் | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| குறீயீட்டு எண்கள் | 111 | 103 | 97 | 106 | 109 | 121 | 114 | 110 | 114 | 123 | 130 | 127 | 121 | 113 | 130 |

**தீர்வு :**

| காலம் | குறியீட்டு எண் | 5 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் | நகரும் சராசரி |
|---|---|---|---|
| 1 | 111 | | |
| 2 | 103 | | |
| 3 | 97 | 111 + 103 + 97 + 106 + 109 = 526 | 105·2 |
| 4 | 106 | 103 + 97 + 106 + 109 + 121 = 536 | 107·2 |
| 5 | 109 | 97 + 106 + 09 + 121 + 114 = 547 | 109·4 |
| 6 | 121 | 106 + 109 + 121 + 114 + 110 = 560 | 112·0 |
| 7 | 114 | 109 + 121 + 114 + 110 + 114 = 568 | 113·6 |
| 8 | 110 | 121 + 114 + 110 + 114 + 123 = 582 | 116.4 |
| 9 | 114 | 114 + 110 + 114 + 123 + 130 = 591 | 118·2 |
| 10 | 123 | 110 + 114 + 123 + 130 + 127 = 604 | 120·8 |
| 11 | 130 | 114 + 123 + 130 + 127 + 121 = 615 | 123·0 |
| 12 | 127 | 123 + 130 + 127 + 121 + 118 = 619 | 123·3 |
| 13 | 121 | 130 + 127 + 121 + 118 + 130 = 626 | 125·2 |
| 14 | 118 | | |
| 15 | 130 | | |

| காலம் | குறியீட்டு எண் | 4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் | நகரும் சராசரி |
|---|---|---|---|
| 1 | 111 | | |
| 2 | 103 | 111 + 103 + 97 + 106 = 417 | 104·25 ($T_{2\cdot5}$) |
| 3 | 97 | 103 + 97 + 106 + 109 = 413 | 103·75 ($T_{3\cdot5}$) |
| 4 | 106 | 97 + 106 + 109 + 121 = 433 | 108·25 ($T_{4\cdot5}$) |
| 5 | 109 | 106 + 109 + 121 + 144 = 450 | 112·50 ($T_{5\cdot5}$) |
| 6 | 121 | 109 + 121 + 144 + 110 = 454 | 113·50 ($T_{6\cdot5}$) |
| 7 | 114 | 121 + 114 + 110 + 114 = 459 | 114·75 ($T_{7\cdot5}$) |
| 8 | 110 | 114 + 110 + 114 + 123 = 461 | 115·25 ($T_{8\cdot5}$) |
| 9 | 114 | 110 + 114 + 123 + 130 = 477 | 119·25 ($T_{9\cdot5}$) |
| 10 | 123 | 114 + 123 + 130 + 127 = 494 | 123·50 ($T_{10\cdot5}$) |
| 11 | 130 | 123 + 130 + 127 + 121 = 501 | 125·25 ($T_{11\cdot5}$) |
| 12 | 127 | 130 + 127 + 121 + 118 = 496 | 119 00 ($T_{12\cdot5}$) |
| 13 | 121 | 127 + 121 + 118 + 130 = 496 | 119·00 ($T_{13\cdot5}$) |
| 14 | 118 | | |
| 15 | 130 | | |




படம் 11—3.

**போக்களவைகளைக் காட்டும் வரைபடம்**

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் காலத்தொடர் வரிசைக்கு மையப்படுத்தப்பட்ட சராசரியைக் கணக்கிடுக-

| ஆண்டு | உற்பத்தி (டன்களில்) | ஆண்டு | உற்பத்தி (டன்களில்) |
|---|---|---|---|
| 1961 | 464 | 1966 | 540 |
| 1962 | 515 | 1967 | 557 |
| 1963 | 518 | 1968 | 571 |
| 1964 | 467 | 1969 | 586 |
| 1965 | 502 | 1970 | 612 |

**தீர்வு :**

மையப்படுத்தப்பட்ட 4 ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் கணக்கிடுதல் :

| ஆண்டு | உற்பத்தி (டன் களில்) | 4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் | 4 ஆண்டு சராசரி | மையப்படுத்தப்பட்ட 4ஆண்டு நகரும் சராசரி |
|---|---|---|---|---|
| 1961 | 464 | — | — | — |
| 1962 | 515 | — | — | — |
| | | 1964 | 491·0 | |
| 1963 | 518 | | | 495·7 |
| | | 2002 | 500·5 | |
| 1964 | 467 | | | 503·5 |
| | | 2027 | 506·75 | |
| 1965 | 502 | | | 511·6 |
| | | 2066 | 516·50 | |
| 1966 | 540 | | | 529·5 |
| | | 2170 | 542·50 | |
| 1967 | 557 | | | 553·0 |
| | | 2254 | 563·50 | |
| 1968 | 571 | | | 572·5 |
| | | 2326 | 581·50 | |
| 1969 | 586 | — | — | — |
| 1970 | 612 | — | — | — |

**நகரும் சராசரி முறையின் சிறப்புகள்**

(1) குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை முறையைவிடக் கணக்கிடுதலில் இம் முறை எளிது.

(2) விவரங்களுக்கு இன்னும் சில ஆண்டுகளின் மதிப்புகள் புதிதாகச் சேர்க்கப்பட்டால், மீண்டும் முதலிலிருந்து எல்லா வற்றையும் கணக்கிடத் தேவையில்லை.

(3) விவரங்களுக்குப் புள்ளியியல் அறிஞர்கள் தாமாகவே ஒரு கணிதச் சார்பைப் பொருத்துவதைவிட விவரங்களின் போக்கை ஒட்டியே நகரும் சராசரி அமைவதால் சிறந்ததாக அமைகிறது.

**குறைகள் :** (1) எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்களவை களைக் கணக்கிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக 3 ஆண்டு நகரும் சராசரியில் முதல் ஆண்டிற்கும், காலத்தொடரில் வரும் இறுதி ஆண்டிற்கும் போக்களவைகள் இல்லை. இதுபோன்றே 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளில் முதல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும், கடைசி இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும் போக்களவைகள் கணக்கிட இயலாது. ஆனால் பெரும்பான்மையான நிலைகளில் முதல், இறுதி ஆண்டுகளின் நிலவரத்தைப் பற்றித்தான் அதிகமாக ஆராய விரும்புகிறோம்.

(2) நகரும் சராசரியின் கால அளவைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் பெரும் கவனம் செலுத்தப்படவேண்டும். இதற்கென ஒரு குறிப்பிட்ட விதி முறை கிடையாது. ஆதலால், ஒவ்வொருவரும் தாமே ஒரு முடிவிற்கு வரவேண்டியுள்ளது.

(3) **நகரும் சராசரி முறை :** ஒரு கணிதச் சார்பின் மூலம் விவரங்கள் பொருத்தப்படாததால் எதிர்கால மதிப்புகளை எடுத்துக் கூற முடியாது.

(4) விவரங்களின் போக்கு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள போதும், சுழற்சிப் போக்குகள் ஒழுங்கான கால எல்லைக்குள் இருக்கும்போது மட்டுமே நகரும் சராசரி முறையைப் பயன் படுத்த முடியும்.

**குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்துதல்**

$y = a + bx$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது $y = a + bx + cx^2$ என்ற பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியோ குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை முறையில், விவரங்களின் தன்மைக் கேற்றவாறு வரைகளைப் பொருத்தலாம்.

நேர்கோட்டைப் பொருத்த, இயல் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma y = na + b \Sigma x, \Sigma xy = a \Sigma x + b \Sigma x^2.$$

எனவும், பரவளையத்தின் இயல் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma y = na + b \Sigma x + c \Sigma x^2,$$

$$\Sigma xy = a \Sigma x + b \Sigma x^2 + c \Sigma x^3,$$

$$\Sigma x^2 y = a \Sigma x^2 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^4,$$ எனவும் அமையும் என நாம் முன்பே கண்டுள்ளோம்.

**சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளின் போக்கு** (Cyclical fluctuations)

மிகச் சிறந்த முறையில் விற்பனையாகி வரும் ஒரு வியாபாரத் துறையில் ஒரு சில ஆண்டுகளில் பெருத்த மாறுபாடு ஏற்பட்டு, விற்பனை பெருமளவில் குறைந்துவிடுவதைக் காண்கின்றோம். இவ்வித சுழற்சிகளால் பொருள்களின் விலை, கூலி, மூலதனம் போன்றவை பெரிதும் பாதிக்கப்படும். இவ்வித சுழற்சிகளில் கால இடைவெளி பெரும்பாலும் ஓராண்டிற்கு மேற்பட்டே இருக்கும். ஆனால், பருவமாறுபாடுகளின் கால இடைவெளியைப் போல், சுழற்சிகளின் கால இடைவெளியை வரையறுத்துக் கூற முடியாது. இத்தகைய வியாபார ஏற்றத் தாழ்வுகள் ஒன்றை யொன்று ஒரு குறிப்பிட்ட ஒழுங்குநிலையுடன் பின் தொடர் கின்றன. வியாபாரத்தின் ஓர் உச்சக் கட்டத்திற்கும், அடுத்து வரும் உச்சக் கட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள கால அளவை 8—10 ஆண்டுகள் இருக்கலாம்.

ஒரு வர்த்தகச் சுழற்சியை உச்ச நிலை (prosperity), குறைந்து வருதல் (decline), இறக்க நிலை (depression), முன்னேற்றம் (improvement) என நான்கு கட்டங்களாகப் பிரிக்கலாம். வியாபாரத்தின் உச்ச நிலையில் வளர்ச்சி மிக அதிகமாக இருப்ப தால் பொருள்களுக்கு உயர்ந்த விலையும், பெருமளவு இலாபங் களும் எளிதில் கிடைக்கின்றன. எனவே, ஒரு சாதாரணத்தொழி லதிபர் கூடத்தம்மைப்பெரும் தொழில் மேதை என நம்பத் துவங்கு கிறார். பணப்புழக்கம் மிக அதிகமாகையில் தொழில் பெரிதும் விரிவடைந்து, தொழிலாளர்களின் ஊதியங்கள் அதிகரித்து தொழிற் திறமை குறையத் துவங்குகிறது. பண நெருக்கடியினால் வட்டி விகிதங்கள் அதிகரித்து, மக்களிடையே பணப்புழக்கம் குறையத் துவங்கியவுடன் தொழில் அதிபர்கள் தேவையான பணத்தைப் பெறுவதற்காக விலைவாசிகளைப் பெருமளவு குறைக்க நேரிடுகிறது. தொழில் துறையில் பெரும் நஷ்டங்கள் ஏற்பட்டுச் சிற்சில சமயங்களில் தொழிற்சாலைகளையே மூடக்கூடிய நிலை ஏற்படுகிறது. மீண்டும் பொருளாதார நெருக்கடி ஓரளவு

குறைந்தவுடன் தொழில் சீரமைக்கப்பட்டுச் சிறிது சிறிதாக முன்னேறத் துவங்குகிறது. இம் முன்னேற்றம் அதிகரித்த நிலையில் வியாபாரம் உச்சக் கட்டத்தை மீண்டும் அடைகிறது. இதுவே ஒரு வர்த்தகச் சுழற்சியாகும். ஒவ்வோர் ஆண்டிலும், குறிப்பிட்ட காலத்தில் வெப்பதட்ப நிலைகளைப் பொறுத்தோ, அல்லது, பழக்க வழக்கங்களைப் பொறுத்தோ ஏற்படும் மாறுபாடுகளே பருவ மாறுபாடுகள் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வோர் ஆண்டும் ஜூன் — ஆகஸ்டு மாதங்களில் புத்தகக் கடைகளில் விற்பனை பெருமளவில் உள்ளது. இதுபோன்றே ஒவ்வோர் ஆண்டும், தீபாவளி, இரம்சான், கிறிஸ்துமஸ், பொங்கல் போன்ற விழாக் காலங்களில் துணி விற்பனைப் பெருமளவாக உள்ளது. பருவ மாற்றம் நாள்தோறுமோ அல்லது வாரங்கள் தோறுமோகூட ஏற்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வொரு நாளும் பேருந்துகளில் காலை 9 — 11 மணி வரையிலும், மாலை 4 — 6 வரையிலும் கூட்டம் அதிகரித்தும், மற்ற நேரங்களில் குறைந்தும் இருக்கிறது. இது போன்றே வார விடுமுறை நாள்கள் ஆகிய சனி, ஞாயிறுகளில் நாடக, திரைப்பட அரங்குகளில் மற்ற நாள்களைவிட மக்கள் கூட்டம் அதிகமாக இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விவரங்கள் சில ஆண்டுகளில் இந்தியாவில் உற்பத்தியான நிலக்கரியின் அளவைத் தருகின்றன. ஒரு நேர் கோட்டைப் பொருத்திப் போக்களவைகளைக் கணக்கிட்டு வரை படத்தில் காட்டுக :

| ஆண்டுகள் | 1950 | 1951 | 1952 | 1953 | 1954 | 1955 | 1956 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| உற்பத்தி (மில்லியன் டன்களில்) | 33 | 35 | 36 | 37 | 37 | 38 | 40 |

| ஆண்டு | உற்பத்தி Yt | t× ஆண்டு 1953 | t · yt | $t^2$ | போக்கு மதிப்புகள் |
|---|---|---|---|---|---|
| 1950 | 33 | —3 | —99 | 9 | 33·57 |
| 1951 | 35 | —2 | —70 | 4 | 34·57 |
| 1952 | 36 | —1 | —36 | 1 | 35·57 |
| 1953 | 37 | 0 | 0 | 0 | 36·57 |
| 1954 | 37 | 1 | 37 | 1 | 37·57 |
| 1955 | 38 | 2 | 76 | 4 | 38·57 |
| 1956 | 40 | 3 | 120 | 9 | 39·57 |
| | 256 | 0 | | 28 | |

$$T_t = a + bt$$

$$\Sigma Y_t = na + b\,\Sigma t$$

$$\Sigma t Y_t = n\,\Sigma t + b\,\Sigma t^2$$

அதாவது, $256 = 7a + b\,(0)$ ... (1)

$28 = a\,(0) + (b \times 28)$ ... (2)

(1)-லிருந்து $a = \frac{256}{7} = 36{\cdot}57$

(2)-லிருந்து $b = \frac{28}{28} = 1$

எனவே $T_t = 36{\cdot}5 + t$

$$T_{50} = 36{\cdot}57 - 3 = 33{\cdot}57$$

$$T_{51} = 36{\cdot}57 - 2 = 34{\cdot}57$$

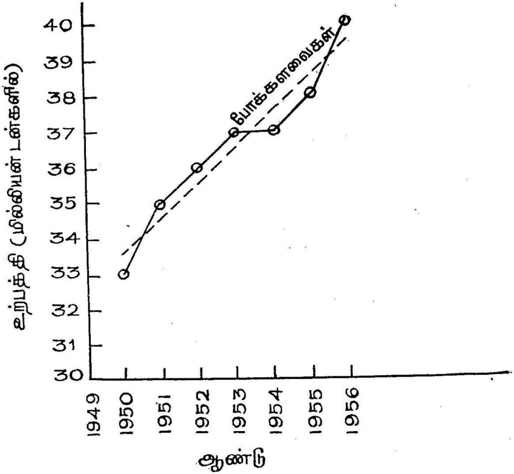
$$T_{52} = 36{\cdot}57 - 1 = 35{\cdot}57$$

$$T_{53} = 36{\cdot}57 - 0 = 36{\cdot}57$$

$$T_{54} = 36{\cdot}57 + 1 = 37{\cdot}57$$

$$T_{55} = 36{\cdot}57 + 2 = 38{\cdot}57$$

$$T_{56} = 36{\cdot}57 + 3 = 39{\cdot}57$$




படம் 11—4.

போக்களவைகளைக் காட்டும் வரை படம்

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியல், 4 ஆண்டுகளில், ஒவ்வொரு காற் பகுதிக்கும் ஒரு காய்கறி வியாபாரியின் விற்பனையைத் தருகிறது. (1) நகரும் சராசரி முறை (2) சங்கிலித்தொடர் விகிதங்கள் இவற்றைப் பயன்படுத்திப் பருவக்குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

| ஆண்டு | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| 1952 | 31 | 33 | 29 | 33 |
| 1953 | 34 | 28 | 31 | 38 |
| 1954 | 41 | 36 | 33 | 40 |
| 1955 | 46 | 45 | 42 | 46 |

**தீர்வு :**

| விற்பனை $y_t$ | $M.A.$ (4) | $M.A.$ (2) $T$ | $y_t/T \times 100$ |
|---|---|---|---|
| 31 | | | |
| 33 | 31·50 | | |
| | | 31·87 | |
| 29 | 32·25 | | 90·99 |
| | | 31·65 | |
| 33 | 31·05 | | 104·26 |
| | | 31·30 | |
| 34 | 31·55 | | 108·61 |
| | | 32·15 | |
| 28 | 32·75 | | 87·09 |
| | | 33·63 | |
| 31 | 34·50 | | 92·17 |
| | | 35·50 | |
| 38 | 36·50 | | 107·04 |
| | | 31·75 | |
| 41 | 37·00 | | 129·13 |
| | | 37·25 | |
| 36 | 37·50 | | 96·64 |
| | | 38·13 | |
| 33 | 38·75 | | 86·54 |
| | | 39·87 | |
| 40 | 41·00 | | 100·32 |
| | | 42·13 | |
| 46 | 43·25 | | 109·10 |
| | | 44·00 | |
| 45 | 44·75 | | 102·20 |
| 42 | | | |
| 46 | | | |

| ஆண்டு | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| 1952 | — | — | 90·99 | 104·26 |
| 1953 | 108·61 | 87·09 | 92·17 | 107·04 |
| 1954 | 129·13 | 96·64 | 86·54 | 100·34 |
| 1955 | 149·11 | 102·20 | — | — |
| மொத்தம் | 386·85 | 285·93 | 269·70 | 311·64 |
| $M_i$ | 115·61 | 95·31 | 89·90 | 103·88 |

$$\sum_{i=1}^{4} M = 404 \cdot 70$$

$$S_1 = 115 \cdot 61 \times \frac{400}{404 \cdot 70} = 114 \cdot 45$$

$$S_2 = 95 \cdot 31 \times 0 \cdot 99 = 94 \cdot 35$$

$$S_3 = 89 \cdot 90 \times 0 \cdot 99 = 89 \cdot 00$$

$$S_4 = 103 \cdot 88 \times 0 \cdot 99 = 102 \cdot 84$$

**சங்கிலித் தொடர் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துதல்**

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பை அதற்கு முன்னால் உள்ள மதிப்பால் வகுக்க. அதாவது, $\frac{y_t}{y_{t+1}} \times 100$.

| ஆண்டு | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| 1952 | — | 106·5 | 87·9 | 113·8 |
| 1953 | 103·0 | 82·4 | 110·7 | 122·6 |
| 1954 | 107·9 | 87·8 | 91·7 | 121·2 |
| 1955 | 115·0 | 97·8 | 93·3 | 109·5 |
| | 108·6 | 93·6 | 95·9 | 116·8 |
| சராசரி சங்கிலித் தொடர்புகள் | 100 | $\frac{93 \cdot 6 \times 100}{100} = 93 \cdot 6$ | $\frac{93 \cdot 6 \times 95 \cdot 9}{100} = 89 \cdot 73$ | $\frac{89 \cdot 73 \times 116 \cdot 8}{100} = 104 \cdot 9$ |
| | | | | $\frac{104 \cdot 9 \times 108 \cdot 6}{100} = 113.9$ |

போக்களவைக்கான திருத்தக் காரணி $= \frac{113 \cdot 9 - 100}{n}$

($n$ என்பது பருவங்களின் எண்ணிக்கை.)

$$\frac{113 \cdot 9 - 100}{4} = 3 \cdot 5$$

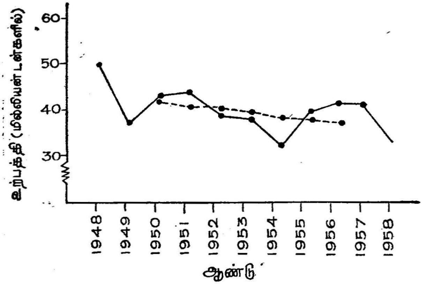
| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| போக்கிற்குத் திருத்தப் பட்ட சங்கிலித் தொடர்பின் சராசரி மதிப்புகள் | 100 | 93·6—3·5 = 90·1 | 89·73—7·0 = 82·73 | 104·9—10·5 = 94·4 |
| | $\frac{100\times400}{373\cdot4}$ | $\frac{90\cdot1\times400}{373\cdot4}$ | $\frac{82\cdot73\times400}{373\cdot4}$ | $\frac{94\cdot4\times400}{373\cdot4}$ |
| | 107·12 | 96·407 | 88·35 | 101·008 |

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியலில், ஒரு தொழிற்சாலையில் 10 ஆண்டுகளில் உற்பத்தியான இரும்பின் (1000 டன்களில்) அளவைத் தருகிறது. 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி கணக்கிட்டு, ஒரே வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களையும், நகரும் சராசரிகளையும் காட்டுக.

| ஆண்டு | 1948 | '49 | '50 | '51 | '52 | '53 | '54 | '55 | '56 | '57 | '58 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| இரும்பின் அளவு (1000 டன் களில்) | 50·0 | 36·5 | 43·0 | 44·5 | 38·9 | 38·1 | 32·6 | 38·7 | 41·7 | 41·1 | 33·8 |

| ஆண்டு | விவரம் | 5 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் | 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி |
|---|---|---|---|
| 1948 | 50·0 | | |
| 1949 | 36·5 | | |
| 1950 | 43·0 | 212·9 | 42·6 |
| 1951 | 44·5 | 201·0 | 40·2 |
| 1952 | 38·9 | 197·1 | 39·4 |
| 1953 | 38·1 | 192·8 | 39·6 |
| 1954 | 32·6 | 190·0 | 38·0 |
| 1955 | 38·7 | 192·2 | 38·4 |
| 1956 | 41·7 | 187·9 | 37·6 |
| 1957 | 41·1 | | |
| 1958 | 33·8 | | |




படம் 11—5.

படம் 11—5. விடுபட்ட கோடுகள் கொண்ட வரை, நகரும் சராசரிகளைத் தருகிறது. இதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் வரையைவிட ஏற்றத்தாழ்வுகள் குறைந்தது, இழைத்து வரையப் பட்டதாக உள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விவரங்களைப் பயன்படுத்தி, காலத்தொடர் வரிசையின் பருவ மாறுபாடுகளை எவ்வாறு தீர்மானிப்பாய் எனக் காட்டுக.

| ஆண்டு | கோடைக் காலம் | மழைக் காலம் | இலையுதிர் காலம் | குளிர் காலம் |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 81 | 62 | 119 |
| 2 | 33 | 104 | 86 | 171 |
| 3 | 42 | 153 | 99 | 221 |
| 4 | 56 | 172 | 129 | 235 |
| 5 | 57 | 201 | 136 | 302 |

பட்டியல் 1.

| ஆண்டும் பருவமும். | வரிசை | நான்கு நான்காக நகரும் மொத்தம். | 3-வது நெட்டுப்பிரிவில் உள்ள ராசிகளின் இரண்டிரண்டாக நகரும் மொத்தம். | நெட்டுப் பிரிவு 4-ல், 8 ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் போக்கு மதிப்புகள் | போக்கிலிருந்து விலக்கங்கள் நெ.பி. 5—நெ. பி. 2. | பருவமாறுபாடுகளுக் கான திருத்தம். | பருவங்களுக்கான மாற்றங்கள் திருத்தப் பட்ட வரிசை நெ. பி. 2+நெ. பி. 7. | ஒழுங்கற்ற மாற்றங் களின் எச்சம் நெ.பி. 8—நெ.பி. 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| I. கோடைக் காலம் | 30 | | | | | | | |
| மழைக் காலம் | 81 | | | | | | | |
| | | 292 | | | | | | |
| இலையுதிர் காலம் | 62 | | 587 | 73·4 | — 11·4 | + 19·1 | 81·1 | + 7·7 |
| | | 295 | | | | | | |
| குளிர்காலம் | 119 | | 613 | 76·6 | + 42·4 | — 68·4 | 50·6 | — 26·0 |
| | | 318 | | | | | | |
| II. கோடைக் காலம் | 33 | | 660 | 82·5 | — 49·5 | + 74·6 | 107·6 | + 25·1 |
| | | 342 | | | | | | |
| மழைக்காலம் | 104 | | 736 | 92·0 | + 12·0 | — 25·3 | 78·7 | — 13·3 |
| | | 394 | | | | | | |
| இலையுதிர் காலம் | 86 | | 797 | 99·6 | — 13·6 | + 19·1 | 105.1 | + 5·5 |
| | | 403 | | | | | | |
| குளிர்காலம் | 171 | | 855 | 106·9 | + 64·1 | — 68·4 | 102·6 | — 4·3 |
| | | 452 | | | | | | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| III. கோடைக் காலம் | 42 | | 917 | 114·6 | — 72·6 | + 74·6 | 116·6 | + 2·0 |
| மழைக் காலம் | 153 | 465 | 980 | 122·5 | + 30·5 | — 25·3 | 127·5 | — 5·2 |
| இலையுதிர் காலம் | 99 | 515 | 1044 | 130·5 | — 31·5 | + 19·1 | 118·1 | + 12·4 |
| குளிர்காலம் | 221 | 529 | 1077 | 134·6 | + 86·4 | — 68·4 | 152·6 | — 18·0 |
| IV. கோடைக் காலம் | 56 | 548 | 1126 | 140·8 | — 84·8 | + 74·6 | 130·6 | + 10·2 |
| மழைக் காலம் | 172 | 578 | 1170 | 146·3 | + 25·7 | — 25·3 | 146·7 | — 0·4 |
| இலையுதிர் காலம் | 129 | 592 | 1195 | 149·4 | — 20·4 | + 19·1 | 148·1 | + 1·3 |
| குளிர் காலம் | 235 | 603 | 1235 | 154·4 | + 80·6 | — 68·4 | 166·6 | — 12·2 |
| V கோடைக் காலம் | 67 | 632 | 1271 | 158·9 | — 91·9 | + 74·6 | 141·6 | + 17·3 |
| மழைக் காலம் | 201 | 639 | 1345 | 168·1 | + 32·9 | — 25·3 | 175·7 | — 7·6 |
| இலையுதிர் காலம் | 136 | 706 | | | | | | |
| குளிர் காலம் | 302 | | | | | | | |

பட்டியல் 2.

| ஆண்டு | பருவங்கள் | | | |
|---|---|---|---|---|
| | கோடைக் காலம் | மழைக் காலம் | இலையுதிர் காலம் | குளிர் காலம் |
| 1 | | | — 11·4 | + 42·4 |
| 2 | — 49·5 | + 12·0 | — 13·6 | + 64·1 |
| 3 | — 72·6 | + 30·5 | — 31·5 | + 86·4 |
| 4 | — 84·8 | + 25 7 | — 20·4 | + 80·6 |
| 5 | — 91·9 | + 32·9 | | |
| மொத்தம் | — 298·8 | +101·1 | — 76·9 | +273·5 |
| சராசரி | — 74·7 | +25·275 | — 19·225 | +68·375 |
| திருத்தப் பட்ட சராசரி | — 74·6 | +25·3 | — 19·1 | + 68·4 |

**விளக்கம் :** இத் தொடர் ஓர் ஆண்டிலுள்ள 4 பருவங்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ளதால், நான்கு நான்காக நகரும் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, பருவங்களால் ஏற்படும் மாற்றங்களை நீக்க வேண்டும். இத்தகைய நகரும் சராசரி காண்பதற்காக முதல் நான்கு மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை இரண்டாவது, 3ஆவது உறுப்புகளுக்கு இடையே எழுதப்படுகிறது. அடுத்த நகரும் மொத்தம், 3 ஆவது, 4ஆவது உறுப்புகளின் இடையே எழுதப்படுகிறது. இவ்வாறு, 3ஆவது நெட்டுப் பிரிவு நிரப்பப்படு கிறது 3ஆம் நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள நகரும் மொத்தங்களை, இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி, அவற்றை 3ஆவது நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு இடையே எழுதவேண்டும். எனவே, நெட்டுப் பிரிவு 4-ல் உள்ள முதல் நகரும் மொத்தம், 2ஆவது நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள 3ஆவது உறுப்பிற்கு எதிராக அமைந்து இருக்கும். இது எட்டு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை ஆதலால், இதன் மொத்தத்தை 8ஆல் வகுத்து 5ஆவது நெட்டுப்பிரிவில்

போக்களவைகளாக எழுதப்படுகிறது. நெட்டுப்பிரிவு 6 = 5ஆவது நெட்டுபிரிவு — 2ஆவது நெட்டுப்பிரிவு. பருவ மாற்றங்களைக் காண்பதற்காக 2 ஆவது பட்டியலைப் பயன்படுத்துகிறோம். 6ஆவது நெட்டுப் பிரிவிலுள்ள மதிப்புகள் ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் அதன் பருவத்திற்கும் ஏற்றவாறு எழுதப் பட்டுள்ளன. இது மீண்டும் கூட்டப்பட்டு, சராசரி கணக்கிடப் படுகிறது. இச் சராசரிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும். ஆனால், இது — 0·275 ஆகவுள்ளது. எனவே, ஒவ்வொரு சராசரிக்கும் $\frac{0 \cdot 275}{4} = 0 \cdot 069$ ஐக்கூட்டி, அதனை முதல் தசமத்தானத் திருத்தமாக எழுதவேண்டும். மேலும், இவ்வாறு திருத்தப்பட்ட சராசரிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆக இருத்தல் வேண்டும். அவ்வாறு இல்லாமையால் — 19·156 என்பது —19·1 ஆகத் திருத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, பருவ மாறுபாடுகள் முறையே — 74·6, + 25·3, — 19.1, + 68·4 ஆகும். இவை பருவ மாற்றங்களுக்கான திருத்தங்கள் ஆகும். இவை நெட்டுப்பிரிவு 7·ல் எழுதப்பட்டு உள்ளன. இவற்றை நெட்டுப் பிரிவு 2-ல் உள்ள கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுடன் கூட்டி நெட்டுப்பிரிவு 8-ல் உள்ள 'பருவங்களுக்கான மாற்றங்கள் திருத்தப்பட்ட வரிசை' கிடைக்கிறது. பருவ மாற்றங்களால் திருத்தப்பட்ட தொடரிலிருந்து, போக்களவைகளைக் கழித்தால் பெறப்படும் ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களின் எச்சம் 9ஆவது நெட்டுப் பிரிவில் தரப்பட்டுள்ளது.

**சுழற்சி மாற்றத்தை அளத்தல்** (Measurement of Cyclical Variation)

போக்களவைகளையும் பருவமாற்றங்களையும் கணக்கிட்டபிறகு காலத் தொடரில் உள்ள சுழல் போக்குகளை நம்மால் பகுத்துணர முடியும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் $T \times S \times C \times I$ என்பதன் மூலம் குறிக்கப்படுவதால், போக்களவைகளையும் பருவகால மாற்றங்களையும் நீக்கிவிட்டுச் சுழல், ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களைத் தீர்மானிக்கலாம்.

$T$ = Trend Value = போக்களவை
$S$ = Seasonal Variation = பருவமாற்றம்
$C$ = Cyclical Variation = சுழல் மாற்றம்
$I$ = Irregular Fluctuation = ஒழுங்கற்ற மாற்றம்

$$\frac{T \times S \times C \times I}{T \times S} = C \times I$$

மீதமுள்ள விவரங்கள் $C \times I$ ல் நகரும் சராசரி முறையின் மூலம் அதிக ஏற்ற இறக்கங்கள் மாற்றி அமைத்தபிறகு சராசரி

காணும்போது ஒழுங்கற்ற மாற்றம் நீக்கப்பட்டு, சுழல் மாற்றங்கள் மட்டும் எஞ்சியிருக்கும். இம் முறை எஞ்சி நிறுத்தப்படும் முறை (residual method) எனப்படுகிறது.

**ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களை அளத்தல்** (Measurement of Irregular Variations)

$$I = \frac{C \times I}{C}$$

என்பதன் மூலம் சுழல் மாற்றம் $C$ தெரிந்தபிறகு, காலத் தொடரில் உள்ள ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களைத் தனியே பிரித்தெடுக்கிறோம். ஆனால், இதிலிருந்து ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களை முற்றிலும் சரியாகக் கணக்கிட முடியாது. ஆனால், ஒழுங்கற்ற மாற்றங்கள் சிறிய அளவில் ஆயினும், சிறிது சிறிதாக ஒன்று சேர்ந்து சுழல் ஏனைய ஒழுங்கான மாற்றங்களாக மாறி விடுகிறது.

**பயிற்சி**

(1) கீழ்க்காணும் பட்டியல், ஓர் அஞ்சலகத்தில் ஒரு வாரத்தின் ஒவ்வொரு நாளும், தபாலில் சேர்க்கப்பட்ட கடிதங்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது. வாரத்தின் நாள்களைப் பொறுத்து, போக்களவைகளில் இருந்து, அன்றுட சராசரியின் மாறும் போக்கினைக் கணக்கிடுக.

| நாள்கள் | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| ஞாயிறு | 9 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| திங்கள் | 81 | 82 | 81 | 85 | 81 |
| செவ்வாய் | 85 | 90 | 75 | 91 | 93 |
| புதன் | 82 | 78 | 77 | 85 | 86 |
| வியாழன் | 76 | 84 | 70 | 81 | 85 |
| வெள்ளி | 90 | 97 | 92 | 90 | 91 |
| சனி | 38 | 43 | 41 | 48 | 60 |

(2) கீழ்க்காணும் பட்டியல், ஒரு காய்கறி விற்பனையாளரது, 5 ஆண்டுகளுக்கு, ஒவ்வொரு காலாண்டுக்கும் உரிய மொத்த விற்பனையைத் தருகிறது.

| ஆண்டு | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1952 | 31 | 33 | 29 | 33 |
| 1953 | 34 | 28 | 31 | 38 |
| 1954 | 41 | 36 | 33 | 40 |
| 1955 | 46 | 45 | 42 | 46 |
| 1956 | 43 | 41 | 42 | 43 |

பருவ மாறுபாடுகளுக்கான, திருத்தப்பட்ட காலத்தொடர் வரிசையையும், ஒழுங்கற்ற மாற்றங்களின் எச்சத்தையும் காண்க. போக்களவைகளிலிருந்து பருவ மாற்றங்களைக் காண்பதற்கு ஒரு பொருத்தமான வரைபடத்தையும் வரைக.

(3) (அ) பின்வரும் பட்டியல் 1949-லிருந்து 1958 வரை ஐக்கிய நாடுகளில் செலவான பருத்தியின் அளவை (1000 பேல்களில்) தருகிறது. (i) இரண்டாண்டு நகரும் சராசரி, (ii) மூன்றாண்டு நகரும் சராசரி, (iii) 4 ஆண்டு மையப்படுத்தப் பட்ட நகரும் சராசரி, (iv) 6 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி, (v) 2 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி இவற்றைக் கணக்கிடுக.

| ஆண்டு | செலவான பருத்தியின் அளவு | ஆண்டு | செலவான பருத்தியின் அளவு |
|---|---|---|---|
| 1949 | 656 | 1954 | 711 |
| 1950 | 804 | 1955 | 755 |
| 1951 | 836 | 1956 | 747 |
| 1952 | 765 | 1957 | 696 |
| 1953 | 777 | 1958 | 677 |

[விடை (i) 730, 820, 800, 771, 744, 733, 751, 722, 686.
(ii) 765, 802, 793, 751, 748, 738, 733, 707.
(iii) 780, 784, 762, 750, 737, 723.
(iv) 766, 770, 753, 734.
(v) 775, 810, 786, 758, 738, 742, 736, 704].

(ஆ) மேற்கண்ட கணக்கில் நகரும் சராசரிகளையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களையும் வரைபடத்தில் காட்டுக.

(இ) பாதிச் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி, போக்களவைகளைக் கணக்கிடுக.

(i) கூட்டுச் சராசரி (ii) இடைநிலை ஆகியவற்றைச் சராசரியாகப் பயன்படுத்துதல்.

[விடை (i) 788, 778, 768, 758, 747, 737, 727, 717, 707, 697
(ii) 803, 790, 777, 764, 751,
737, 724, 711, 698, 685].

(ஈ) குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி (அ)-வில் உள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துக. இதிலிருந்து போக்களவைகளைக் கணக்கிடுக.

[விடை: 1951, ஜனவரி 1ஐ ஆதியாகக் கொண்டு அரையாண்டுகளில், $X$ கணக்கிடப்பட்டால், $Y = 742{\cdot}4 - 3{\cdot}358\,x$ என்பது நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.
போக்களவைகள் : 758·0, 754·7, 751·3, 747·9, 744·6, 741·2, 737·9, 734·5, 731·1, 727·8].

(4) பின்வரும் பட்டியல் 1948-லிருந்து 1958 வரை ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியான நிலக்கரியின் அளவு 1000 டன்களில் தருகிறது. 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி கணக்கிட்டு ஒரு வரைபடத்தில், கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளையும், நகரும் சராசரிகளையும் காட்டுக.

| 1948 | '49 | '50 | '51 | '52 | '53 | '54 | '55 | '56 | '57 | '58 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55·0 | 37·3 | 42·0 | 44·1 | 38·9 | 37·1 | 32·6 | 38·7 | 41·7 | 41·6 | 33·8 |

## (ii) குறியீட்டெண்கள் (Index Numbers)

ஒரு பொருளின் விலையில் ஒரே ஆண்டிற்குள் ஏற்றத் தாழ்வுகள் ஏற்படுகின்றன. பொருளின் விலை, உற்பத்தி, தேவை, வாங்குவோரின் பொருளாதார நிலை இவையும் அப் பொருளின் விலையைப் பாதிக்கின்றன. இடத்திற்கு இடமும் பொருளின் விலை மாறுபடுகிறது. இவ்வாறு வாழ்க்கைத் தரம், விலைவாசிகள், தொழில் முன்னேற்றம் போன்ற பல்வேறு துறைகளில் காலத்தை ஒட்டி ஏற்படும் மாறுபாட்டை அளக்கப் பெரிதும் உதவுவன குறியீட்டெண்கள் (Index Numbers). செய்தித் தாள்கள் குறியீட்டெண்களை ஆதாரமாகக் கொண்டு உணவு உற்பத்தி, வாழ்க்கைச் செலவு, விலைவாசிகளின் நிலவரம் போன்றவை ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டோடு ஒப்பிடப்பட்டுப் பன்மடங்கு உயர்ந்து உள்ள அல்லது குறைந்துள்ள நிலையைக் கூறுகின்றன. குறியீட்டெண்கள் 'பொருளாதார நிலையின் பாரமானிகள்' (Economic Barometers) எனவும் சொல்லப்படுகின்றன.

**விலை விகிதம் (Price Relative)**

$Y$ என்னும் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகவும் (base year), $Y_k$ என்னும் ஆண்டை நடப்பாண்டாகவும் (current year) எடுத்துக் கொள்வோம். இவ்விரு ஆண்டுகளிலும் ஒரு 'பொருளின் விலைகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதமே 'விலை விகிதம்' எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு லிட்டர் பாலின்விலை 1967-ல் ரூ. 1-20 ஆகவும், 1973-ல் ரூ 1-50 ஆகவும் இருந்தால் அடிப்படையாண்டாகிய 1967ஐப் பொறுத்து 1973-ல் பாலின் விலை விகிதம் $\frac{1{\cdot}50}{1{\cdot}20} = \frac{5}{4}$ ஆகும். பொதுவாக $P_k$ என்பது நடப்பு ஆண்டில் ஒரு பொருளின் விலையாகவும், $P_o$ என்பது அடிப்படையாண்டில் அப் பொருளின் விலையாகவும் இருந்தால், $\frac{P_k}{P_o}$ என்பது அப் பொருளின் விலை விகிதம் ஆகும்.

இதனைச் சதவிகிதத்தில் குறித்தால், $\frac{P_k}{P_o} \times 100$ என்பது அடிப்படையாண்டில் பொருளின் விலை 120 ஆக இருந்தால் நடப்பாண்டில் அதன் விலையின் 'குறியீட்டெண்' ஆகும். 1967ஐப் பொறுத்து 1973-ல் பாலின் விலைக் குறியீட்டெண் 125.

குறியீட்டெண் என்பது விலைவிகிதங்களின் (Price-relatives) அல்லது அளவு விகிதங்களின் சராசரியே ஆகும். வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் என்பது உணவு, உடை, இருப்பிடம் போன்றவற்றால் பாதிக்கப்படுவதால் எல்லாப் பகுதிகளின் பயன்படுத்தும் அளவுகளையும் விலைகளின் மாற்றங்களையும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். அளவுகளின் அலகுகள், விலைவாசிகள் போன்றவை ஒரே மாதிரியாக அமையா. ஆதலால் அப்படியே விலைகளின் சராசரியைக் காணவியலாது. எடுத்துக்காட்டாக, நெய்யின் விலை கிலோவிலும், அரசியின் விலை லிட்டரிலும், துணியின் விலை மீட்டரிலும் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கலாம்.

1967ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு 1973-ல் நெய், அரிசி இவற்றின் விலை விகிதங்கள் முறையே 180%-ம், 160%-ம் ஆக இருந்தால் இவ்விரு பொருள்களுக்கும் உரிய விலைவிகிதம் $\frac{180 + 160}{2} = \frac{340}{2} = 170$ எனக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு விலைவிகிதங்களை அப்படியே எடுத்துக்கொண்டு சராசரி காண்பதை எளிய குறியீட்டெண் (Simple Index Number) என்கிறோம். வாழ்க்கைத் தரச் செலவை அரிசி, நெய் இவை இரண்டின் விலைகளும் ஒரே அளவில் பாதிப்பது இல்லை. நெய்யின் விலையைப் போல் அரிசியின் விலை 3 மடங்கு பாதிப்பதாகக் கொண்டால் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரியாக இருப்பது

$$\frac{1 \times 180 + 3 \times 160}{1 + 3} = \frac{180 + 480}{4} = \frac{660}{4} = 165\%.$$

இவ்வாறு பொருள்களின் முக்கியத்துவத்திற்குத் தகுந்தாற் போல் அவற்றிற்கு எடைகளை அளித்து, விலைவிகிதங்களின் சராசரியைக் காணுதல் 'எடையிட்ட குறியீட்டெண்'(Weighted Index Number) எனப்படும். கூட்டுச் சராசரியை மட்டுமன்றி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச்சராசரி இவற்றையும் பயன்படுத்திக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்குப் பல்வேறு எளிய குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

| வகை | அலகு | $p_0$ 1960 விலை (ரூ.) | $P_k$ 1970 விலை (ரூ.) |
|---|---|---|---|
| அரிசி | லிட்டர் | 1 — 25 | 2 — 75 |
| பருப்பு | லிட்டர் | 0 — 75 | 1 — 75 |
| சர்க்கரை | கிலோ | 1 — 25 | 1 — 75 |
| எண்ணெய் | லிட்டர் | 2 — 25 | 6 — 25 |
| காய்கறி | கிலோ | 0 — 50 | 0 — 70 |
| மொத்தம் | | 6 — 00 | 13 — 20 |

தீர்வு :

1970 ஆம் ஆண்டுக்குரிய எளிய கூட்டுக் குறியீட்டெண் (Simple aggregate index number)

$$\frac{\Sigma p_k}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{\text{1970-ல் கூட்டு மதிப்பு}}{\text{1960-ல் கூட்டு மதிப்பு}} \times 100$$

$$= \frac{13{\cdot}20}{6{\cdot}00} \times 100$$

$$= 220{\cdot}$$

1970ஆம் ஆண்டுக்குரிய விலைகளை $P_k$ எனவும், 1960-ல் அவற்றின் விலைகளை $P_0$ எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். $\frac{P_k}{P_0}$ என்னும் விகிதம் அப் பொருள்களின் விலை விகிதத்தையும், $\frac{P_k}{P_0} \times 100$ என்னும் விலை விகித சதவீதத்தையும் தருகிறது. எளிய குறியீட்டெண் என்பது சதவீதத்தில் குறிக்கப்பட்ட எல்லாப் பொருள்களின் விலை விகிதங்களின் சராசரி ஆகும்.

**கூட்டுச் சராசரி மூலம் எளிய குறியீட்டெண் :**

| வகை | 1960 விலை $P_0$ | 1970 விலை $P_K$ | விலை விகித சதவிகிதம் $I = \left(\frac{P_k}{P_0}\right) \times 100$ |
|---|---|---|---|
| அரிசி | 1·25 | 2·75 | $\frac{2·75}{1·25} \times 100 = 22\ ·0$ |
| பருப்பு | 0·75 | 1·75 | $\frac{1·75}{0·75} \times 100 = 233·3$ |
| சர்க்கரை | 1·25 | 1·75 | $\frac{1·75}{1·25} \times 100 = 140·0$ |
| எண்ணெய் | 2·25 | 6·25 | $\frac{6·25}{2·25} \times 100 = 277·7$ |
| காய்கறி | 0.50 | 0·70 | $\frac{0·70}{0·50} \times 100 = 140·0$ |
| மொத்தம் | 6·00 | 13·20 | $= 1011·0$ |

$N =$ மொத்த வகைகள் $= 5$

விலை விகித சதவிகிதங்களின் எண்ணிக்கை $= \Sigma\ I = 1011·0$

எளிய கூட்டுச் சராசரி குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma\ p_k/p_0}{n} \times 100$

$$= \frac{\text{விலை விகித சதவீதத்தின் கூட்டுத் தொகை}}{\text{மொத்த வகைகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1011}{5} = 202·2$$

**பெருக்கல் சராசரி மூலம் எளிய குறியீட்டெண்** (Simple Geometric Mean Index Number)

இதன் வாய்பாடு $= \left[\pi \left(\frac{p_k}{p_0}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

முதலில் விலை விகித சதவீதங்களின் மடக்கையைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல்

சராசரியின் லாகிருதம் ஆக இருக்கும். எனவே, இக் கூட்டுச் சராசரியின் எதிர்மடக்கை (antilog) எளிய குறியீட்டெண் ஆகும்.

| வகை | விலை விகித சதவீதம் | விலை விகித சதவீதத்தின் லாகிருதம் |
|---|---|---|
| அரிசி | 22 ·0 | 2·3424 |
| பருப்பு | 233·3 | 2·3680 |
| சர்க்கரை | 140·0 | 2·1461 |
| எண்ணெய் | 277·7 | 2·4436 |
| காய்கறி | 140·0 | 2·1461 |
| | | 11·4462 |

$G$ = எளிய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= \left[\pi \left(\frac{p_k}{p_o}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log \left(\frac{p_k}{p_o}\right)$$

$$= \frac{11 \cdot 4462}{5}$$

$$= 2 \cdot 28924.$$

$\therefore$ $G$ = எளிய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்
= எதிர்மடக்கை (2·2892)
= 194·6.

**இசைச் சராசரிமூலம் எளிய குறியீட்டெண்** (Simple Harmonic Mean Index Number)

**இதன் வாய்பாடு** $$\frac{n}{\sum \frac{p_o}{p_k}}$$

ஒவ்வொரு வகைக்கும் $\frac{1}{\frac{p_k}{p_o}} = \frac{p_o}{p_k}$ கண்டறிந்து அவற்றைக் கூட்டுக.

அவற்றின் கூட்டுத் தொகையை $N(=5)$ ஆல் வகுக்க. இது. விலை விகிதங்களின் தலைகீழ் மதிப்புகளின் (reciprocals) கூட்டுச் சராசரி ஆகும்.

| வகை | $P_o$ | $P_k$ | $\frac{1}{\frac{P_k}{P_o}} = \frac{P_o}{P_k}$ |
|---|---|---|---|
| அரிசி | 1·25 | 2·75 | $\frac{1.25}{2.75} = 0.4545$ |
| பருப்பு | 0·75 | 1·75 | $\frac{0.75}{1.75} = 0.4286$ |
| சர்க்கரை | 1·25 | 1·75 | $\frac{1.25}{1.65} = 0.7143$ |
| எண்ணெய் | 2·25 | 6·25 | $\frac{2.25}{5.25} = 0.3600$ |
| காய்கறி | 0·50 | 0·70 | $\frac{.50}{.70} = 0.7143$ |
| | | | 2·6717 |

$$\frac{\Sigma \frac{p_o}{p_k}}{n} = \frac{2.6717}{5}$$

$$= 0.5343$$

$\therefore$ எளிய இசைச் சராசரி குறியீட்டெண் $= \frac{n}{\Sigma \frac{p_k}{p_o}} = \frac{1}{0.5343}$

$$= \frac{10000}{5343}$$

$$= 1.871$$

$$= 1.871 \times 100 = 187.1.$$

**எடையிட்ட குறியீட்டெண்கள்** (Weighted Index Numbers)

ஒரு குறியீட்டெண்ணை அமைப்பதற்குப் பயன்படும் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஒரே விதமான முக்கியத்துவம் தர இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, மொத்த விலைக் குறியீட்டெண், பொது விலைவாசி மாற்றத்தில் ஏற்படுகின்ற சராசரி மாற்றத்தைத் தருகிறது. நாட்டில் விற்பனை ஆகும் பொருள்களில் ஏறக்குறைய 50% உணவுப்பொருள்களும், 35% வாழ்க்கைக்குத் தேவைக்கான உற்பத்திப் பொருள்களும், 15% தொழிலுக்குதவும் கச்சாப் பொருள்களுமாக இருப்பின், அவற்றின் விலைவாசிகள் அதே விகிதத்தில் குறியீட்டெண்ணைப் பாதிக்கின்றன. உணவுப் பொருள்களில் கூட, நெய், பழங்கள், சர்க்கரை போன்றவற்றை விட அரிசி கோதுமை, கேழ்வரகு போன்ற தானியங்களின் விலைகள் குறியீட்டெண்ணை அதிகம் பாதிக்கின்றன.

**எடுத்துக்காட்டு 2.**

பின்வருபவை ஒரு தொழிலாளர் குடும்பத்தின் விலைப் பட்டியலின் குழு குறியீட்டெண்களையும், குழு எடையளவுகளையும் தருகிறது. இதற்கான எடையிட்ட வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் அமைக்கவும்.

| குழுக்கள் | குறியீட்டெண் | எடை |
|---|---|---|
| உணவு | 352 | 48 |
| எரிபொருள் | 220 | 10 |
| உடை | 230 | 8 |
| வாடகை | 160 | 12 |
| இதர செலவுகள் | 190 | 15 |

**தீர்வு :**

| குழுக்கள் | குறியீட்டெண் | எடை | |
|---|---|---|---|
| | $X$ | $W$ | $WX$ |
| உணவு | 352 | 48 | 16896 |
| எரிபொருள் | 220 | 10 | 2200 |
| உடை | 230 | 8 | 1840 |
| வாடகை | 160 | 12 | 1920 |
| இதர செலவுகள் | 190 | 15 | 2850 |
| | | 93 | 25706 |

எடையிட்ட வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{25706}{93}$$

$$= 276{\cdot}408$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் குழுக்களின் முக்கியத்துவம் குறித்து எடைகள் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்போது, நடப்பு ஆண்டில் அல்லது அடிப்படை ஆண்டில் செல்விடப்பட்ட பணத்தையும் எடையாகக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.

$q_0$, $q_k$ என்பன முறையே அடிப்படையாண்டில், நடப்பு ஆண்டில் பயன்படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் அளவுகளாகும். எனவே, ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அடிப்படை ஆண்டில் செலவிடப்பட்ட தொகை $p_0q_0$ என்றும் நடப்பு ஆண்டில் செலவான தொகை $p_k$ $q_k$ என்றும், உள்ளன. இவற்றை நாம் எடைகளாக எடுத்துக் கொள்வது நல்லது. சிற்சில சமயங்களில் $p_0$ $q_k$ அல்லது $p_k$ $q_0$ இவற்றையும் எடைகளாக கொள்ளலாம்.

**லாஸ்பயரின் வாய்பாடு** (Laspeyre's Formula)

இது $p_0$ $q_0$ஐ எடையாகக் கொண்டு விலைவிகிதம் $\frac{p_k}{p_0}$ -ன் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி குறியீட்டெண் ஆகும்.

லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண் $= 100 \times \dfrac{\Sigma p_0 q_0 \cdot \dfrac{p_k}{p_0}}{\Sigma p_0 q_0}$

$$= 100 \frac{\Sigma p_k q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

**பாஷேயின் வாய்பாடு** (Paasche's Formula)

$p_0 q_k$ ஐ எடையாகக் கொண்டு $\dfrac{p_k}{p_0}$ -ன் எடையிட்ட கூட்டுச்

சராசரி $= 100 \times \dfrac{\Sigma p_0 p_k \cdot \dfrac{p_k}{q_0}}{\Sigma p_0 q_k}$

$$= 100 \times \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_0 q_k \cdot}$$

இதே வாய்பாட்டை, $p_k q_k$ ஐ எடையாகக் கொண்ட விலை விகிதங்களின், எடையிட்ட இசைச் சராசரியாகவும் பெறலாம்.

$$100 \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_k q_k \cdot \dfrac{p_0}{p_k}} = 100 \cdot \frac{\Sigma p_k q_k \cdot}{\Sigma p_0 q_k \cdot}$$

∴ **பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்** (Fisher's Ideal Index)

லாஸ்பயர், பாஷே (Paasche's) குறியீட்டெண்களின் பெருக்குச் சராசரியே, பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் ஆகும். எனவே, இதன் வாய்ப்பாடு

$$100 \times \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_0 q_k}}$$

**மார்ஷல், எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண்** (Marshall Edgeworth Formula)

இதற்கான வாய்பாடு $100 \dfrac{\Sigma p_k (q_0 + q_k)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_k)}$

இது அடிப்படை ஆண்டிலும், நடப்பு ஆண்டிலும் பயன்படும் அளவுகளின் கூட்டுத்தொகையை எடையாகக் கொண்ட விலைகளின் எடையிட்ட குறியீட்டெண் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

| உறுப்புஎண் | ஓர் அலகிற்கான விலை | | அளவுகள் | அலகுகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|---|---|---|
| | 1960 | 1965 | 1960 | 1965 |
| | ரூ. பை | ரூ. பை | | |
| 1 | 9—20 | 15—00 | 5 | 5 |
| 2 | 8—00 | 12—00 | 10 | 11 |
| 3 | 4—00 | 5—00 | 6 | 6 |
| 4 | 1—00 | 1—52 | 4 | 8 |

(சென்னை B. Com., 1967 S., மதுரை B. Com., 1969 S)

**தீர்வு :**

| உறுப்பு எண் | 1960 $p_0$ | $q_0$ | 1965 $p_k$ | $b_k$ | $p_0 q_0$ | $p_k q_k$ | $p_0 q_k$ | $p_k q_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9·20 | 5 | 15·00 | 5 | 46 | 75 | 46 | 75 |
| 2 | 8·00 | 10 | 12·00 | 11 | 80 | 132 | 80 | 120 |
| 3 | 4·00 | 6 | 5·00 | 6 | 24 | 30 | 24 | 30 |
| 4 | 1.00 | 8 | 1·00 | 8 | 4 | 10 | 8 | 5 |
| | மொத்தம் | | | | 154 | 247 | 166 | 230 |

(1) லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண் (Lasspeyre's Index Number)

$$= \frac{\Sigma p_k q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{230}{154} \times 100 = 149{\cdot}4$$

(2) பாஷேயின் குறியீட்டெண் (Paasche's Index Number)

$$= \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_0 q_k} \times 100$$

$$= \frac{247}{166} \times 100$$

$$= 149{\cdot}8$$

(2) ஃபிஷரின் குறியீட்டெண் (Fisher's Index Number)

$$= \sqrt{\text{லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்} \times \text{பாஷேயின் குறியீட்டெண்}}$$

$$= \sqrt{149{\cdot}4 \times 148{\cdot}8}$$

$$= 149{\cdot}0.$$

(4) மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண் (Marshall-Edgeworth Index Number)

$$= \frac{\Sigma p_k (q_0 + q_k)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_k)} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_k q_0 + \Sigma p_k q_k}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_k} \times 100$$

$$= \frac{230 + 247}{154 + 166} \times 100$$

$$= \frac{477}{320} \times 100$$

$$= 149{\cdot}0$$

(5) எடையிட்ட கூட்டுக்குறியீட்டெண் (Weighted Aggregate Index Number)

$$= \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{247}{154} \times 100$$

$$= 160{\cdot}4.$$

**கணக்கு :**

பின்வரும் புள்ளி விவரத்துக்குப் பலவகைக் குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

| | *A* | | *B* | | *C* | | *D* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு | விலை | அளவு | விலை | அளவு | விலை | அளவு | விலை | அளவு |
| 1939 | 4 | 1 | 1 | 10 | 20 | 2 | 10 | 5 |
| 1953 | 10 | 2 | 4 | 25 | 90 | 3 | 15 | 20 |

[ விடை : லாஸ்பயர் குறியீட்டெண் = 293·3
பார்ஷே ,, = 235·5
பிஷர் ,, = 262·8
மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் ,, = 250·6
எடையிட்ட மொத்த ,, = 663·4]

**ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணுக்குரிய சோதனைகள்**

ஒவ்வொரு சிறந்த குறியீட்டெண்ணும் கீழ்க்காணும் மூன்று சோதனைகளுக்குப் பொருந்தி இருத்தல் வேண்டும்:

(1) பொருள்களின் இடமாற்றுச் சோதனை (Commodity Reversal Test).

(2) காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test).

(3) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test).

எல்லாக் குறியீட்டெண்களும் இம் மூன்று சோதனைகளுக்குப் பொருந்தாமல் இருக்கலாம். இருப்பினும் பெரும்பான்மையான சோதனைகளுக்குப் பொருந்தினாலேயே போதுமானது. ஒரு பொருளுக்குப் பொருந்தும் ஒரு விதி ஒரு குழுவிலுள்ள பொருள்களை எல்லாம் ஒன்றாய்ச் சேர்த்துக் கருதினும் பொருந்தவேண்டும்.

**(1) பொருளின் இடமாற்றுச் சோதனை**

இதன்படி பொருள்களின் வரிசையை மாற்றியமைத்துக் கணக்கிட்டால், குறியீட்டெண் மதிப்பில் மாறாது இருத்தல் வேண்டும். எளிய குறியீட்டெண்கள் ஆயினும், எடையிட்ட குறியீட்டெண்களாயினும், எல்லாக் குறியீட்டெண்களும் பல்வேறு

பொருள்களின் விலை விகிதங்களின் சராசரிகளாகவே உள்ளன. பொருள்களின் வரிசைக்கிரமம் மாறினாலும், விலை விகிதங்களின் வரிசைதான் முன்பின்னாக மாறுமே தவிர அவற்றின் சராசரி மதிப்பு மாறாது. எனவே, எல்லாக் குறியீட்டெண்களும் இச் சோதனைக்குப் பொருந்துகின்றன.

**(2) காலமாற்றுச் சோதனை**

1965-ல் ரூ. 8 ஆக இருந்த ஒரு பொருளின் விலை 1973-ல் ரூ. 12 ஆக இருந்தால் 1965ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு நடப்பாண்டான 1973-ன் குறியீட்டெண் $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. இப்போது நடப்பாண்டை 1965 ஆகவும் அடிப்படையாண்டை, 1973 ஆகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே, 1973ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு, 1965-க்கான குறியீட்டெண் $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. இவ்விரு குறியீட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகை $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$. இவ்வாறு ஒரு பொருளுக்குப் பொருந்தும் விதி, குழுவிலுள்ள எல்லாப் பொருள்களுக்கும் பொருந்தினால் அக் குறியீட்டெண் காலமாற்றுச் சோதனைக்குக் கட்டுப்படுகிறது.

$Y_0$ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டால், நடப்பாண்டாகிய $Y_k$-ன் குறியீட்டெண் $I_0$ என்க. இதுபோல $I_0$ என்பது $Y_k$ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்ட $Y_0$-ன் குறியீட்டெண் ஆகும். காலமாற்றுச் சோதனையின்படி $I_{0k} \cdot I_0 = 1$ என இருக்கவேண்டும் அதாவது இரு ஆண்டுகளுக்கு, ஒன்றை அடிப்படையாண்டாகவும் மற்றொன்றை நடப்பாண்டாகவும் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்ணையும், இவ்வாண்டுகளை மாற்றியமைத்துக் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்ணையும் பெருக்கினால் கிடைக்கும் மதிப்பு ஒன்று (1) ஆகும்.

எளிய கூட்டுச்சராசரி குறியீட்டெண் கால மாற்றுச் சோதனைக்குக் கட்டுப்படுவதில்லை. ஏனெனில்,

$$I_{ok} = \frac{\Sigma \frac{p_k}{p_o}}{n}$$

$$I_{ko} = \frac{\Sigma \frac{p_o}{p_k}}{n}$$

எனவே (பொதுவாக) $I_{ok} \cdot I_{ko} = \dfrac{\Sigma \frac{p_k}{p_o}}{n} \times \dfrac{\Sigma \frac{p_o}{p_k}}{n} \neq 1$

எளிய பெருக்குச்சராசரி குறியீட்டெண் இச் சோதனைக்குக் கட்டுப் படுகிறது·

$$I_{ok} = \sqrt[n]{\Pi\left(\frac{p_k}{p_o}\right)}$$

$$I_{ko} = \sqrt[n]{\Pi\left(\frac{p_o}{p_k}\right)}$$

எனவே $$I_{ok} \cdot I_{ko} = \sqrt[n]{\Pi\left(\frac{p_k}{p_o}\right) \Pi\left(\frac{p_o}{p_k}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{1} = 1$$

லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்ணுக்கு,

$$I_{ok} \cdot I_{ko} = \frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \neq 1$$

பாஷேயின் குறியீட்டெண்ணுக்கு

$$I_{ok} \cdot I_{ko} = \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_k q_o} \neq 1$$

மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண்ணை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$I_{ok} \cdot I_{ko} = \frac{\Sigma p_k (q_o+q_k)}{\Sigma p_o (q_o+q_k)} \times \frac{\Sigma p_o (q_k+q_o)}{\Sigma p_k (q_k+q_o)} = 1$$

## (3) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

எடையிட்ட குறியீட்டெண்களுக்கு மட்டும் இச் சோதனை பொருந்தும். விலைகளின் குறியீட்டெண்ணை அளவுகளின் குறியீட்டு எண்ணுகவும் பயன்படுத்தலாம் என்பதே இதன் விதி. இதன்படி ஒரு குறியீட்டெண்ணின் வாய்பாட்டில் $p$-இடத்தில் $q$-வையும், $q$-இடத்தில் $p$ ஐயும் எழுதினுல், இவ்விரு குறியீட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகையும், இரு ஆண்டுகளிலும் மொத்த மதிப்புகளின் விகிதத்திற்கு சமமாகச் இருக்கும். அதாவது

$$I_{pq} \times I_{qp} = \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_o}$$

இதனை ‘ விலை, அளவு திருப்புச்சோதனை ’ எனவும் கூறலாம்.

லாஸ்பயரின் விலை குறியீட்டெண் $I_{pq} = \frac{\Sigma p_k\, q_o}{\Sigma p_o\, q_o}$

$p$ ஐயும், $q$-வையும் மாற்றி எழுதினல் $I_{qp} = \frac{\Sigma p_o\, q_k}{\Sigma p_o\, q_o}$

எனவே $I_{pq} \times I_{qp} = \frac{\Sigma p_k\, c_o}{\Sigma p_o\, q_o} \times \frac{\Sigma p_o\, q_k}{\Sigma p_o\, q_o}$

$$\neq \frac{\Sigma p_k\, q_k}{\Sigma p_o\, q_o}$$

எனவே, லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண் காரணி மாற்றுச் சோதனைக்கு உட்படாது.

பாஷேயின் விலைக் குறியீட்டெண் $I_{pq} = \frac{\Sigma p_k\, q_k}{\Sigma p_o\, q_k}$

$p$, $q$-வையும் மாற்றி எழுதினல் $I_{qp} = \frac{\Sigma q_k\, p_k}{\Sigma q_k\, {}_o}$

$$\therefore\ I_{pq} \cdot I_{qp} = \frac{\Sigma p_k\, q_k}{\Sigma p_o\, q_k} \times \frac{\Sigma q_k\, p_k}{\Sigma q_o\, p_k}$$

$$\neq \frac{\Sigma p_k\, q_k}{\Sigma p_o\, q_o}$$

∴ பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் இச் சோதனைக்குப் பொருந்துகிறது.

ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணுக்குரிய 3 சோதனைகளுக்கு ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கட்டுப்படுகிறது என நிறுவலாம்.

**(1) பொருள் மாற்றுச் சோதனை**

ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணின் வாய்பாட்டில்

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_k\, q_o}{\Sigma p_o\, q_o} \times \frac{\Sigma p_k\, q_o}{\Sigma p_k\, q_k}}$$

இரு கூட்டுத் தொகைகளின் விகிதங்களின் பெருக்கற் பலனே உள்ளது பெருக்கலும், கூட்டலும் மாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதால், பொருள்களின் வரிசை மாற்றம் இவற்றின் மொத்த மதிப்பை மாற்றுவதில்லை. எனவே, ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் பொருள் மாற்றுச் சோதனைக்கு உட்படுகிறது.

**(2) கால மாற்றுச் சோதனை**

$$I_{ok} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k\, q_o}{\Sigma p_o\, q_o} \times \frac{\Sigma p_k\, q_k}{\Sigma p_o\, q_k}}$$

$$I_{ok} = \sqrt{\frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_k q_o}}$$

$$\therefore \quad I_{ko} \times I_{ok} = 1$$

**(3) காரணி மாற்றுச் சோதனை**

$$I_{pq} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o \times \Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_o \times \Sigma p_o q_k}}$$

$$I_{pq} = \sqrt{\frac{\Sigma q_k p_o \times \Sigma q_k p_k}{\Sigma q_o r_o \times \Sigma q_o p_k}}$$

எனவே, $I_{pq} \cdot I_{qp} =$

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \cdot \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma r_o q_k}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_k p_o}{\Sigma q_o p_o} \times \frac{\Sigma q_k p_k}{\Sigma q_o p_k}}.$$

$$= \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_c}.$$

ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் காரணிமாற்றுச் சோதனைக்கு உட்படுகிறது.

பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து ஃபிஷரின் விழுமிய விலை குறியீட்டெண்ணைக் கண்டறிக.

| | அடிப்படை யாண்டு விலை | அடிப்படை யாண்டு அளவு (மணங்குகளில்) | நடப்பு ஆண்டு விலை | நடப்பு ஆண்டின் அளவு (மணங்குகளில்) |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 6 | 50 | 10 | 56 |
| *B* | 2 | 100 | 2 | 120 |
| *C* | 4 | 60 | 6 | 6 |
| *D* | 10 | 30 | 12 | 24 |
| *E* | 8 | 40 | 12 | 36 |

மேற்கண்ட விவரங்களில் இருந்து, காரணிமாற்றுச் சோதனையும், காலமாற்றுச் சோதனையும், ஃபிஷரின் விழுமிய வாய்பாட்டினால் சரி செய்யப்படுகிறது எனவும் நிறுவுக.

**தீர்வு :**

| பொருள் | அடிப்படை ஆண்டு | | நடப்பு ஆண்டு | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | விலை $p_0$ | அளவு $q_0$ | விலை $_k$ | அளவு $q_k$ | $p_0 q_0$ | $\Gamma_k q_0$ | $\Gamma_k q_k$ | $_0 q_k$ |
| *A* | 6 | 50 | 10 | 56 | 300 | 500 | 560 | 336 |
| *B* | 2 | 100 | 2 | 120 | 200 | 200 | 240 | 240 |
| *C* | 4 | 60 | 6 | 60 | 240 | 360 | 360 | 240 |
| *D* | 10 | 30 | 12 | 24 | 300 | 360 | 288 | 240 |
| *E* | 8 | 40 | 12 | 36 | 320 | 480 | 432 | 288 |
| | | | | மொத்தம் | 1360 | 1900 | 188 | 1344 |

ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்

$$I_{ok} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}}$$

$$= \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}} \times 100$$

$$= \sqrt{1{\cdot}396 \times 1{\cdot}398} \times 100 = 1{\cdot}397 \times 100 = 139{\cdot}7$$

காலமாற்றுச் சோதனையின்படி $I_{ok} \times I_{ko} = 1$ என வர வேண்டும்.

$$I_{ok} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}}$$

$$I_{ko} = \sqrt{\frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_k q_o}}$$

எனவே $I_{ok} \times I_{ko} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1880} \times \frac{1360}{1900}} = 1$

காரண மாற்றுச் சோதனையின்படி, $I_{pq} \times I_{qp} = \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_o}$

என வரவேண்டும்.

$$I_{pq} \times I_{qp} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k} \times \frac{\Sigma q_k p_o}{\Sigma q_o p_o} \frac{\Sigma q_k p_k}{\Sigma q_o p_k}}$$

$$= \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}} = \frac{1880}{1360}$$

## குறியீட்டெண்களை அமைக்கும்போது கருத்தில் கொள்ளவேண்டிய விதிமுறைகள்

குறியீட்டெண்களைக் கணிப்பதில் சில நடைமுறைக் கோட்பாடுகளில் கவனம் செலுத்தவேண்டும்.

### (1) குறியீட்டெண்களைக் கணிப்பதன் நோக்கம்

குறியீட்டெண்கள் தெளிவாக வரையறுக்கப் படவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக நடுத்தர வகுப்பைச் சேர்ந்தவர்களின்

வாழ்க்கை நிலவரத்தை அறிய மொத்தவிலைப் பட்டியலைப் பயன் படுத்துதல் கூடாது. மாருக, பொருள்களின் சில்லறை விலைகள், குடிக்கூலிக்காகச் செலவிடும் தொகை, எரிபொருள் செலவு போன்றவற்றின் விலைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் வரையறுக்கப் படவேண்டும், இதுபோலவே மொத்த விற்பனை விலையில் ஏற்றத் தாழ்வுகளை அளவிட மொத்த விலை குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

## (2) அடிப்படை ஆண்டைத் தேர்ந்து எடுத்தல்

இயல்பான சூழ்நிலையில், அமைதி நிலவும் ஆண்டே அடிப் படை ஆண்டாகத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரியது. இவ்வாண்டின் விலைவாசிகளின் நிலவரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் மற்ற ஆண்டுகளின் விலைகளில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளைக் கணக்கிட முற்படுகிறோம்.

எனவே, அடிப்படையாண்டு

(i) உற்பத்தி நெருக்கடி, பொருளாதாரப் பற்ருக்குறை போன்றவற்ருல் பாதிக்கப்படாமலிருக்கவேண்டும்.

(ii) பஞ்சம் வெள்ளம், அரசியல் குழப்பங்கள், வெளிநாட்டுப் போர்கள் போன்ற எதிர்பாராச் சம்பவங்களால் பாதிக்கப்படாத ஆண்டாக இருத்தல்வேண்டும். ஏனெனில், இத்தகைய நெருக் கடி நேரங்களில் பொதுவாக விலைவாசிகள் எதிர்பாராத அளவு உயர்ந்து விடும். ஆதலால் அவற்றை ஒப்பளவுகளாகக் கொள்ள முடியாது. எனவே, சில சமயங்களில் 3 அல்லது 4 ஆண்டுகளை ஒருசேர எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் விலைகளின் சராசரியைக் குறியீட்டெண் அமைப்பதற்குப் பயன்படுத்தலாம்.

## (3) சங்கிலித் தொடர்க் குறியீட்டெண்கள் (Chain Base Index Numbers)

ஒரே அடிப்படையாண்டைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்துவதை விட அடிப்படையாண்டை மாற்றி அமைத்தல் நன்மை பயக்கும். அறிவியல் பொருளாதார முன்னேற்றத்தால் 'பழையன கழிதல் புதியன புகுதல்' என்பதற்கேற்பப் பயன்படும் பொருள்களில் மாற்றங்கள் இருக்கலாம். எனவே, கணிப்பிலிருந்து மறைந்த பொருள்களை அவ்வப்போது அகற்றியும், புதிய பொருள்களைப் புகுத்தியும் கணக்கிட சங்கிலித் தொடர்க் குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன. ஒவ்வோர் ஆண்டின் விலையும் அதற்கு முந்தைய ஆண்டினை அடிப்படையாகக் கொண்டு, அதன்

விலையோடு ஒப்பிடப்படுகிறது. எனவே $Y_0$ என்ற அடிப்படை யாண்டைத் தொடர்ந்து வரும் பல்வேறு ஆண்டுகளின் விலை விகிதங்கள் $\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_2} \ldots$ இவை சங்கிலித் தொடர் விலை விகிதங்கள் எனப்படும். முதல் $K$ சங்கிலித் தொடர் விலை விகிதங்களின் பெருக்குத் தொகை $\frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \ldots \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P_k}{P_0}$ $= Y_0$ என்ற நிலையான அடிப்படையாண்டைப் பொறுத்து $K$ ஆவது விலை விகிதம். எனவே, சங்கிலித் தொடர்க் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்துவதால்,

(i) உற்பத்தி, பயன்படும் தன்மை, பொருள்களின் தன்மைகள் இவற்றில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அவ்வப்போது அறியலாம்;

(ii) தொழிலதிபர்கள் ஆண்டுக்காண்டு ஏற்படும் மாறுதல்களை ஒப்பிடுவதற்கு இவற்றைப் பயன்படுத்துகிறார்கள்;

(iii) தேவையற்றதாகவோ, வழக்கில் இல்லாததாகவோ இருக்கும் பொருளை அவ்வப்போது நீக்கிவிடலாம்;

(iv) முக்கியமாகப் பயன்படும் பொருள்களை அவ்வப்போது சேர்த்துக்கொள்ளலாம்;

(v) நடப்பாண்டின் நிலவரங்களுக்கு ஏற்ற வகையில் எடைகளை மாற்றியமைத்தல் இயலும்.

## (4) தக்க சராசரிகளைப் பயன்படுத்தல்

கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவது எளிது. ஆனால், இது காலமாற்றுச் சோதனைக்குக் கட்டுப்படுவதில்லை. இசைச் சராசரியும் கணக்கிடக் கடினமானதோடு காலமாற்றுச் சோதனைக்குப் பொருந்துவதில்லை. பெருக்குச் சராசரியும் அவ்வப் போது புதிய பொருள்களைச் சேர்த்துக் கொள்ளவும், பழைய பொருள்களை விட்டுவிடவும், இதன்பொருட்டு மீண்டும் கணக்கிடுதலை முழுமையாகத் திருப்பிச் செய்யாமல் இருக்கவும் இயலும். பெருக்குச் சராசரி காலமாற்றுச் சோதனைக்கு உட்படுவாதல், இதில் ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மை கிடையாது. எனவே, பெருக்குச் சராசரியைத் தேர்ந்து எடுக்கலாம்.

குறியீட்டெண்களில் காணப்படும் ஒருதலைச்சார்புப் பிழை :

$A$ கூட்டுச்சராசரியையும், $G$ பெருக்குச் சராசரியையும், $H$ இசைச் சராசரியையும் குறித்தால், $G > A > H$ என நாம் அறிவோம்.

எனவே குறியீட்டெண்களிலும்,

$$I_A \geq I_G \geqq I_H$$

நடப்பாண்டையும், அடிப்படை ஆண்டையும் மாற்றி அமைத்தால், பெறப்படும் குறியீட்டெண்கள் $I_{A'}, I_G , I_{H'}$ என்க.

$$\therefore \quad I_A \geq I_G \geq I_{H'}$$

எனவே $I_A\ I_{A'} \geq I_G\ I_{G'} \geq I_H\ I_{H'}$

ஆனால் $I_G\ I_{G'} \quad 1$ (∵ பெருக்குச்சராசரிக் குறியீட்டெண் காலத்திருப்புச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்துகிறது.)

$$\therefore \quad I_A\ I_{A'} > 1, \quad I_H\ I_{H'} \quad 1$$

அதாவது, கூட்டுச்சராசரிக் குறியீட்டெண்ணுக்கு, மேல் நோக்கிய ஒருதலைச் சார்பு (upward bias) உள்ளதெனவும், இசைச் சராசரி குறியீட்டெண்ணுக்குக் கீழ்நோக்கிய ஒருதலைச் சார்பு (downward bias) உள்ளதெனவும் கூறுகிறோம். எனவேதான் இவ்விரு குறியீட்டெண்களுக்கும் (லாஸ்பயர், பாஷேயின் குறியீட்டெண்கள்) பெருக்குச் சராசரி காண்பதால், ஒரு தலைச் சார்பு நீக்கப்பட்டு, ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கிடைக்கிறது.

**(5) எடைகள்**

விலைகளின் குறியீட்டெண்ணிற்கு உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் அளவை எடையாகக் கொள்ளலாம். உற்பத்தியைப் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் தெரியாவிடில் நாட்டில் விற்பனையாகும் பொருள்களின் அளவைப் பயன்படுத்தலாம். வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்ணிற்குக் குறிப்பிட்ட வகுப்பினரால் வாங்கப்பட்ட அல்லது பயன் படுத்தப்பட்ட பொருளின் அளவை எடையாகக் கொள்ளலாம். அடிப்படையாண்டு அல்லது நடப்பாண்டு

இவற்றின் விலைவாசிகளில் எவற்றைப் பற்றிய விவரங்கள் நன்கு தெரிகின்றனவோ அவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். பொதுவாகக் கூடுமானவரை எடைகளைப் பொருளின் அளவைவிடப் பொருளின் மதிப்பாகக் கொள்ளுதல் போதுமானது. ஏனெனில், அளவின் அலகுகள் பொருளுக்குத் தக்கவாறு மாறுபடலாம். எனவே, செலவிடும் பணத்தைப் போல் பயன்படும் பொருள்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இயலாது. எடைகளில் நிலையான எடைகளும், மாறு படும் எடைகளும் உண்டு. காலத்துக்குக் காலம் மாறுபடும் எடைகளில்தான் குறியீட்டெண்கள் பொருள்களின் அவ்வப்போதைய முக்கியத்துவத்தை ஓரளவு எடுத்துக்கூறும்.

## குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்

ஓர் அடிப்படையாண்டை மையமாகக் கொண்டு அதனோடு ஒரு மாறியில் ஏற்படுகின்ற மாற்றத்தை ஒப்பிட்டுக்கூறும் குறியீட்டெண் பல்வேறு துறையினருக்கும் புள்ளியியல் தரும் சிறந்த கருவியாகப் பயன்படுகிறது.

(1) விலைக் குறியீட்டெண்கள், விலைகளில் ஏற்படும் ஏற்ற இறக்கங்களை எடுத்துக்காட்டி வியாபாரத்தில் மேற்கொள்ளத் தக்க கொள்கைகளுக்கு ஆதாரமாக உள்ளன. ஓரளவு நிலையான அல்லது சிறிதளவு உயருகின்ற விலைவாசிகள் பொதுவாக நிலையான அல்லது சிறிதளவு உயருகின்ற விலைவாசிகள் பொது வாக நிலையான வியாபாரத்திற்குச் சாதகமாக உள்ளன. பொருள் களின் விலைவாசிகளின் திடீர் ஏற்ற இறக்கங்களை இவற்றின் மூலம் அறிந்து, அரசாங்கம் தொழிலுக்குத் தக்கவாறு தங்களது பொருளா தாரக் கொள்கைகளை மாற்றியமைத்துக் கொள்ளுகிறது.

(2) தொழில் உற்பத்தியைப் பற்றிய குறியீட்டெண்கள் தொழில் முன்னேற்றத்தை நன்கு எடுத்துக்காட்டுகின்றன. ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களின் விளைவுகளைப் பற்றி ஆராய்தல், புதிய வரி விதித்தல், சலுகைகள் காட்டுதல், கடன் கொடுத்தல் போன்றவற்றிற்கு முன் கூட்டியே திட்டமிடவும், அரசாங்கத் திற்குப் பெரிதும் உதவுகிறது. தனிப்பட்டோர் தம் தொழிற் வளர்ச்சியினை ஒப்பிட்டுப் பார்த்திட இயலுகிறது.

(3) பங்கு மார்க்கெட் விலைகளின்
பங்குகளின் விலைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அவ்வப்போது எடுத்துக்காட்டி, இவற்றால் பொதுவாக விலைவாசியில் ஏற்படக் கூடிய மாற்றங்களையும் அறிய உதவுகிறது.

(4) வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்கள் பல்வேறு வகுப்பினருக்காக மாதிரி ஆய்வுகள் நடத்தப்பட்டுக் கணக்கிடப் படுகின்றன. அவற்றைத் தனி நபரது சராசரி வருமானத்துடன் ஒப்பிடுவதன் மூலம் வாழ்க்கைத் தரம் உயருகின்றதா அல்லது தாழ்கின்றதா என அறிய முடிகிறது. அலுவலகங்கள், வங்கிகள், தொழிற்சாலைகள் முதலியவற்றில் பணிபுரிவோரது பற்றுக்குறைப் படி (Dearness Allowance) அவ்வப்போது மாற்றி நிர்ணயிக்கவும், மக்களுக்கு நியாயமான, தேவைக்குத் தக்க ஊதியம் வழங்கவும், வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்கள் ஆதாரமாக உள்ளன. பணத்தின் வாங்கும் சக்தியில் ஏற்படக்கூடிய நீண்டகால மாற்றங்களை அளப்பதற்கும் விற்பனை, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி உள்நாட்டுத் தொழில் உற்பத்தி, வியாபார நிலவரங்கள் போன்றவற்றில் ஏற்படக்கூடிய பொதுவான போக்குகள், பருவ மாறுபாடுகள் வியாபாரச் சுழற்சிகள் முதலியவற்றை அறியவும் குறியீட்டு எண்கள் உதவுகின்றன.

**குறியீட்டு எண்களின் குறைகள்**

காலக் குறியீட்டெண்கள் ஓரளவு தோராயமாகத்தான் மாற்றங்களை அளக்கின்றன. அடிப்படையாண்டு தேர்ந்தெடுக்கப் படும் பொருள்கள், தரப்படும் எடைகள், தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சராசரி இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு நிலையில் குறையிருந்தால் குறியீட்டெண் மிகவும் பாதிக்கப்படும். ஒரு நோக்கத்திற்காகக் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்ணினை வேறொரு நோக்கத்திற் காகப் பயன்படுத்தக்கூடாது. எடுத்துக்காட்டாக, மொத்தவிலை குறியீட்டெண் பொதுவாக விலைவாசிகளில் ஏற்படக்கூடிய மாற்றங்களை அளந்திட உதவும். ஆனால், அவ்வெண் வாழ்க்கைத் தரத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாறுதல்களை அளந்திட உதவாது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலையான அடிப்படை குறியீட் டெண்களிலிருந்து (fixed base index), சங்கிலித் தொடர் குறியீட் டெண்களைக் காண்க.

| ஆண்டு | 1940 | 1941 | 1942 | 1943 | 1944 |
|---|---|---|---|---|---|
| நிலைக் குறியீட்டெண் | 267 | 275 | 280 | 290 | 320 |

(சென்னை B. Com. 1962 A)

**தீர்வு**

| வருடம் | நிலைக் குறியீட்டெண் | | சங்கிலிக் குறியீட்டெண் |
|---|---|---|---|
| 1940 | 267 | | 100 |
| 1941 | 275 | $\frac{275}{267} \times 100 = 103$ | 103 |
| 1942 | 280 | $\frac{280}{275} \times 100 = 101{\cdot}8$ | 101·8 |
| 1943 | 290 | $\frac{290}{280} \times 100 = 103{\cdot}6$ | 103·6 |
| 1944 | 320 | $\frac{320}{290} \times 100 = 110{\cdot}3$ | 110·3 |

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் சங்கிலித் தொடர் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களை (fixed base index) தயாரிக்க.

| ஆண்டு : | 1935 | 1936 | 1937 | 1938 | 1939 | 1940 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| சங்கிலிக் குறியீட்டெண் : | 94 | 104 | 104 | 93 | 104 | 102 |

**தீர்வு :**

| ஆண்டு | சங்கிலிக் குறியீட்டெண் | | நிலைக் குறியீட்டெண் |
|---|---|---|---|
| 1935 | 94 | ... ... ... | 94 |
| 1936 | 104 | $\frac{94}{100}\ 104 =$ ... ... | 97·7 |
| 1937 | 104 | $\frac{94}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot 104 = \frac{97{\cdot}7}{100} \times 104 =$ ... | 101·7 |
| 1938 | 93 | $\frac{94}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot 93 = \frac{101{\cdot}7}{100}\cdot 93 =$ ... | 94·5 |
| 1939 | 104 | $\frac{94}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot 104 = \frac{94.5}{100} 104 =$ | 97·4 |
| 1940 | 102 | $\frac{94}{100}\cdot\frac{04}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{104}{100}\cdot 102 = \frac{97{\cdot}4}{100}\cdot 102 =$ | 99·2 |

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் அளவுகள் ஒருசாதாரண தொழிலாள குடும்பத்தின் விலைப்பட்டியலின் குழு குறியீட்டெண்களையும் குழு எடையளவுகளையும் தருகிறது. இதிலிருந்து எடையிட்ட வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண் கண்டறிக.

| குழு | 1960 சனவரிக்குரிய குறியீட்டெண் *I* | எடைகள் *W* |
|---|---|---|
| உணவு | 152 | 48 |
| எரிபொருள் | 110 | 5 |
| உடை | 130 | 10 |
| வீட்டு வாடகை | 100 | 12 |
| இதர செலவுகள் | 80 | 15 |

**தீர்வு :**

வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டெண், 1960 ஜனவரி திங்களுக்குரிய குறியீட்டெண்களின் நிறையிட்ட சராசரி ஆகும்.

$$\frac{\Sigma\, IW}{\Sigma\, W} = \frac{152\times 48+110\times 5+130\times 10+100\times 12+80\times 15}{48+5+10+12+15}$$

$$= \frac{11546}{90} = \mathbf{128.29}$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

கீழ்க்காணும் நிலையான அடிப்படையாண்டுக் குறியீட்டெண்களைக் கொண்டு சங்கிலிக் குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

| ஆண்டு | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 |
|---|---|---|---|---|---|
| நிலையான அடிப்படை ஆண்டு குறியீட்டெண் | 425 | 446 | 457 | 480 | 496 |

**தீர்வு :**

1966 ஆம் ஆண்டுக்குரிய சங்கிலி அடிப்படை குறியீட்டெண்ணைக் கண்டறிய, 1965-க்கு உரிய குறியீட்டெண்ணை 100 ஆக எடுத்துக்கொள்வோம்.

1966-க்குரிய குறியீட்டெண் $= \frac{446}{425} \times 100 = 104{\cdot}9$

1967-க்குரிய சங்கிலிக்குறியீட்டெண் $= \frac{457}{446} \times 100 = 102{\cdot}4$

1968-க்குரிய சங்கிலிக்குறியீட்டெண் $= \frac{480}{457} \times 100 = 105{\cdot}1$

1969-க்குரிய சங்கிலிக்குறியீட்டெண் $= \frac{496}{480} \times 100 = 103{\cdot}4$

**பயிற்சி**

கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கு பிஷரின் குறியீட்டெண்ணைக் கண்டுபிடிக்க.

| | அடிப்படையாண்டு விலை | அளவு | நடப்பாண்டு விலை | அளவு |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 6 | 50 | 9 | 55 |
| *B* | 2 | 100 | 3 | 125 |
| *C* | 4 | 60 | 6 | 65 |
| *D* | 10 | 30 | 14 | 25. |

[விடை : 147.37]

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து, அடிப்படை சங்கிலிக் குறியீட்டெண்களைத் தயாரிக்க.

| ஆண்டு : | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| குறியீட்டு : எண் (1964 = 100) | 276 | 392 | 408 | 380 | 392 | 400 |

[பம்பாய், B. Com., 1968].

[Ans : 100, 104, 103, 93, 103, 102]

(3) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து, அளவுகளிலிருந்து வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக :

| வகை | விலை அடிப்படை ஆண்டு | நடப்பு ஆண்டு | எடைகள். |
|---|---|---|---|
| உணவு | 39 | 47 | 4 |
| உடை | 14 | 18 | 3 |
| எரிபொருள் | 8 | 12 | 1 |
| வீட்டுவாடகை | 22 | 15 | 2 |
| இதர செலவுகள் | 25 | 30 | 1 |

[விடை : 115·84], சென்னை B. Com., 1960].

(4) பின்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, 1970 ஏப்ரலுக்கான வாழ்க்கை தரக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

சாதாரண தொழிலாள குடும்பத்தின் விலைப் பட்டியல்

| குழு | எடை | குழுக் குறியீட்டெண் 1970 ஏப்பிரலுக்கானது |
|---|---|---|
| உணவு | 42 | 355 |
| எரிபொருள் | 8 | 275 |
| உடை | 10 | 312 |
| வாடகை | 15 | 240 |
| கல்வி, பொழுதுபோக்கு | 9 | 384 |
| மருத்துவம் | 4 | 256 |
| இதர செலவுகள் | 12 | 425 |

[மதுரை, M.A., 1972]

(5) (அ) பின்வரும் குழுக் குறியீட்டெண்களும், குழு எடையளவுகளும் ஒரு சாதாரணத் தொழிலாளர் குடும்பத்தின்

விலைப் பட்டியலில் இரு பிரிவுகள் ஆகும். இதற்கான எடையிட்ட வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

| குழு | குறியீட்டெண் | எடைகள் |
|---|---|---|
| உணவு | 352 | 48 |
| எரிபொருள் | 220 | 10 |
| உடை | 230 | 8 |
| வாடகை | 160 | 12 |
| இதர செலவுகள் | 190 | 15 |

[சென்னை, B. Com., 1962 S]

(6) பின்வரும் அட்டவணை இந்தியாவின் 4 முக்கியமான பயிர்களின் உற்பத்தி (டன்னில்), விலை (டன்னிற்கு) இவற்றின் விவரங்களைத் தருகிறது. இவை 1960 — 61, 1969 — 70 ஆண்டுகளுக்கானவை. 1960 — 61 என்ற ஆண்டை நடப்பாண்டாக எடுத்துக்கொண்டு 1969 — 70-க்கான ஃபிஷரின் விழுமியக் குறியீட்டெண்ணைக் கண்டறிக.

| | உற்பத்தி (டன்னில்) இலட்சத்தில்) | | விலை (டன்னிற்கு) ரூபாயில் | |
|---|---|---|---|---|
| | 1960—61 | 1969—70 | 1960—61 | 1969—70 |
| *A* | 250 | 300 | 150 | 30 |
| *B* | 100 | 120 | 120 | 200 |
| *C* | 20 | 30 | 600 | 1000 |
| *D* | 10 | 20 | 200 | 300 |

[மதுரை B. A., 1972 A]

(7) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து பிஷரின் விழுமியக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்க :

| | அடிப்படையாண்டு | | நடப்பு ஆண்டு | |
|---|---|---|---|---|
| | விலை | அளவு | விலை | அளவு |
| *A* | 16 | 50 | 40 | 56 |
| *B* | 12 | 100 | 12 | 12 |
| *C* | 14 | 60 | 16 | 60 |
| *D* | 10 | 30 | 12 | 24 |
| *E* | 18 | 40 | 22 | 36 |

(8) கீழ்க்கண்ட விவரங்களில் இருந்து 1929, 1930 ஆம் ஆண்டுக்கான மொத்த விற்பனை விலை குறியீட்டெண்ணை அமைக்க. 1928 ஐ அடிப்படையாண்டாக எடுத்துக்கொள்.

| பொருள் | மொத்த விற்பனை விலை (ரூபாயில்) ஒரு மணங்கிற்கு | | |
|---|---|---|---|
| | 1928 | 1929 | 1930 |
| அரிசி | 7·3 | 7·7 | 5 8 |
| கோதுமை | 7·7 | 5·5 | 3·6 |
| சிறுசணல் விதை | 7·0 | 8·0 | 6.5 |
| பருத்தி | 34·1 | 29·8 | 17·3 |
| புகையிலை | 17·3 | 17·1 | 14·5 |

(9) வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டெண்கள் எவ்வாறு கணக்கிடப் படுகின்றன என்று விவரி. அடிப்படையாண்டு, விலைகள், எடைகள் இவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது எத்தகைய முன்னெச்சரிக்கைகளைக் கருத்தில் கொள்வாய் ?

(10) கூட்டுச்செலவு முறையைப் (Aggregate Expenditure Method) பயன்படுத்தி, 1939 ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு 1940-க்கான வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண்ணைத் தயாரிக்க.

| பொருள் | $q_0$ | $p_0$ | அலகுகள் | $p_k$ |
|---|---|---|---|---|
| கோதுமை | 6 | 5·75 | மணங்கு | 6·00 |
| அரிசி | 6 | 5·00 | ” | 8·00 |
| பருப்பு | 1 | 6·00 | ” | 9·00 |
| சர்க்கரை | 1 | 20·00 | ” | 15·00 |
| நெய் | 4 | 2·00 | சேர் | 1·50 |
| உப்பு | 1 | 10·50 | மணங்கு | 8·00 |
| எண்ணெய் | 20 | 4·00 | சேர் | 4·75 |
| உடை | 50 | 0·50 | கஜம் | 0·75 |
| எரிபொருள் (விறகு) | 12 | 0·50 | மணங்கு | 1·00 |
| எரிபொருள் (மண்ணெண்ணெய்) | 1 | 4·00 | டின் | 5·12 |

(11) குறியீட்டெண் என்பது என்ன? காலத்திருப்புச் சோதனை, காரணிமாற்றுச் சோதனை என்பவை என்ன? அவற்றின் பயன்கள் யாவை?

(12) குறியீட்டெண் என்பது என்ன? ஒரு வாழ்க்கைதர குறியீட்டெண்ணைத் தயாரிப்பதற்கான வழிமுறைகளைக் கூறுக.

(13) ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் என்றால் என்ன? காலத்திருப்பு சோதனை, காரணிமாற்றுச் சோதனைஎன்பன யாவை? பின்வரும் விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்காகப் பயன்படும் ஒரு சரியான குறியீட்டெண்ணைக் கணிக்க.

| | அரிசி | | கோதுமை | | ஜவ்வரிசி | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ஆண்டு | விலை | அளவு | விலை | அளவு | விலை | அளவு |
| 1935 | 4 | 50 | 3 | 10 | 2 | 5 |
| 1945 | 10 | 40 | 8 | 8 | 4 | 4 |

[I. A. S.]

(14) சங்கிலி அடிப்படை முறையை விவரி. இதனை நிலையான அடிப்படை முறையோடு (fixed base method) ஒப்பிடுக.

(15) கீழே மூன்று பொருள்களின் வருடாந்தர உற்பத்தி பில்லியனில் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

| பொருள் | உற்பத்தி | | | எடைகள் |
|---|---|---|---|---|
| | 1935 | 1940 | 1941 | |
| *A* | 160 | 200 | 220 | 13 |
| *B* | 10 | 12 | 15 | 21 |
| *C* | 80 | 100 | 110 | 35 |

விலைவிகிதங்களுக்கான எளிய கூட்டுச் சராசரியையும், எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரியையும் பயன்படுத்தி, 1935ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு, 1940, 1941-க்கான அளவு குறியீட்டெண்களைக் (quantity index number) காண்க.

[M. Com., கல்கத்தா.]

(16) சிறு குறிப்பு வரைக :

(i) வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண் (Cost of living index)
(சென்னை B. Com. 1961 A) ;
(மதுரை B.A 1972 A, B Sc. 1968 A)

(ii) ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் (Fisher's ideal index)
(சென்னை B. Com., 1967 S)

(iii) காலமாற்றுச் சோதனை (Madras B. Com., 1963 A)

(17) (i) குறியீட்டெண்கள் என்றால் என்ன? குறியீட்டெண்களை அமைக்கும் முறையை விளக்குக.

(ii) காலத்தொடர் என்றால் என்ன? எடுத்துக்காட்டுகள் கொடு. முன்செல்லும் பாதையைக் கணக்கிட ஏதேனும் ஒரு முறையைக் கொடுக்கவும். (ஏப்ரல் 1974 செ.ப.க.)

## (iii) ஆயுட் பட்டியல்

**ஆயுட் பட்டியல்**

மக்களின் ஆயுட் காலத்தைக் கணிப்பதற்குப் பயன்படும் ஒரு கருவி ஆயுட் பட்டியலாகும். நாட்டில் அதிகரித்துள்ள மருத்துவ, சுகாதார வசதிகள் மூலம் மக்களிடையே சராசரி ஆயுள் பலம் அதிகமாகி உள்ளதா என்பதை மிகவும் ஆர்வத்துடன் ஆராய விரும்புகிறோம். மேலும் ஆயுள் ஒப்பந்த நிறுவனங்கள் மக்களின் பாலிசிகளின் கட்டணங்களைத் தீர்மானிப்பதற்கும் இவை பெரிதும் பயன்படுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட வயதுள்ள, ஒரு தனிப்பட்ட மனிதனின் உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவையும், மரணம் அடைவதற்கான நிகழ்தகவையும் வெவ்வேறு நாடுகளுக்கும், வெவ்வேறு சமூகங்களுக்கும், தனிப்பட்ட முறையில் இப் பட்டியல் தரக்கூடியது. பொதுவாக ஆயுள் அட்டவணை அமைப்பதில், வசதியை முன்னிட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் பிறந்த 100,000 குழந்தைகளை எடுத்து அவை ஒவ்வொரு வயதைத் தாண்டும் போதும் அவற்றில் உயிரோடு இருப்பவற்றைக் கணிப்பது வழக்கம். இவ்வாறு இந்த 1,00,000 மக்கள் எல்லோரும் இறக்கும் வரையில் கணிக்க வேண்டும். எனவே வசதியை முன்னிட்டு, (0) பூச்சிய வயதில் வாழ்வதாகக் கொள்ளும் 1,00,000 நபர்கள் $l_0$ எனக் குறிக்கப்படுகிறார்கள். இது பட்டியலின் 'மூலம்' (Radix) எனப்படுகிறது. சில பட்டியல்கள் $l_5$, $l_{20}$-யிலிருந்துகூடத் துவங்குகின்றன.

**வரையறைகள்**

(1) ஆயுட் பட்டியலின்படி $l$ என்பது $x$ வயதில் உயிர் வாழ்பவரின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது. $l_{x+n}$ என்பது $x+n$ வயதில் உயிர் வாழும் நபர்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது. இன்றைய தினம் 1-1-1973 எனக் கொள்வோம். 10 ஆண்டுகளுக்கு முன் அதாவது 1-1-1963 அன்று வாழ்ந்த $l_0$ நபர்களில் $l_{10}$ நபர்கள் இன்று உயிரோடு வாழ்கிருர்கள். இதுபோன்றே 1-1-1968 அன்று வாழ்ந்த $l_0$ மனிதர்களில் $l_5$ நபர்கள் இன்று உயிரோடு வாழ்கிருர்கள். இதுபோலவே இன்று உயிருடன் வாழும் $l_0$ நபர்களில் $l_{15}$ நபர்கள் 1-1-1988-ல் உயிர் வாழ்வார்கள் அல்லது இன்று வாழும் 20 வயது உடையோர், $l_{20}$ ல், 1-1-1983-ல் உயிர் வாழும் $l_{80}$ பேர் இன்னும் 10 ஆண்டுகள் உயிருடன் வாழ்வார்கள்.

(2) $np_x$ என்பது, $x$-வயதுடைய ஒருவர், இன்னும் $n$ ஆண்டுகள் உயிரோடு வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது. இன்று $x$ வயதுடன் உயிர் வாழும் $l$, நபர்களில், ($n$ ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு) $l_{x+n}$ நபர்கள் மட்டுமே $(x+n)$ வயது மட்டும் உயிர் வாழ்பவர்களாதலால்

$$np = \frac{l_{x+}}{l_x} \text{ என எழுதலாம்.}$$

(3) $p = 1\,p_x$ அதாவது இன்று $x$ வயது ஆகும் ஒருவர் இன்னும் ஓர் ஆண்டு உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவைத் தருகிறது.

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

(4) $q_x$ என்பது $x$ வயதுடைய ஒருவர் இன்னும் ஓர் ஆண்டில் இறப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தருகிறது இதனை மரண வீதம் (rate of mortality) என்று சொல்வதுண்டு.

$$p_x + q_x = 1,\ q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{\cdot} - l_{\cdot+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

(5) $d$ என்பது, $x$ வயதுடைய, $l_x$ நபர்களில், ஓர் ஆண்டில் இறக்கக்கூடிய நபர்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது.

$$d_x = l_x - l_{\cdot+1}.$$

(6) $l_w = 0$ என்னும்போது, $w$ என்பது, ஆயுட் பட்டியலில் கடைசியாகக் காணப்படும் வயது ஆகும், $l_0$ நபர்களில் ஒருவருமே இந்த வயது வரை உயிருடன் இருப்பதில்லை.

தேற்றங்கள் :

(1) $nP_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}$.

$$\therefore\ nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}$$

$$= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}.$$

(2) $$l_x = \sum_{r=x}^{\infty} d_r = \sum_{r=x}^{w-1} d_r.$$

$l_w = 0$ ஆதலால், $d_w = 0$.

$\therefore$ வலப் பக்கம் $= d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{w-1}$

$$= (l_x - l_{x+1}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) + \cdots$$
$$\cdots + (l_{w-1} - l_w)$$
$$= l_x - l_w = l_x. \qquad [\because\ l_w = 0].$$

$L_x$ என்பது, $(x, x+1)$ என்ற பிரிவில் அமைந்திருக்கும் வயதில், எந்த நேரத்திலும் உயிர் வாழும் நபர்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது. $x$ ஐக் காலத்தின் முழு எண் மதிப்பு களுக்கும் $t$ஐ காலத்தின் பின்ன மதிப்புகளுக்கும் பயன்படுத்து கிறோம். எனவே $L$ என்பது, இந்த நொடியில் உயிர் வாழும் $(x+t)$ வயதுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

இங்கு $0 \leq t \leq 1$. அதாவது

$l_{x+t}$-ன் எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt$$

$l_x$ குறிப்பிட்ட விதி எதையும் பின்பற்றுததால், இதனை தொகைப் படுத்த முடியாது. எனவே, அந்தக் குறிப்பிட்ட வருடத்தில் $l$ -ன் குறையும் வீதம் சீரானதாக இருப்பதாகக் கொள் வோம். ஓர் ஆண்டில், $l_x$ நபர்களில் $d_x$ நபர்கள் இறப்பர். எனவே காலம் $t$-யின் பின்ன மதிப்பில் $t\, d_x$ நபர்கள் இறப்பர்.

எனவே, $l_{x+t} = l_x - t\, d$

$$l_{x+\frac{1}{2}} = l_x - \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

$$\therefore\ L_x = \int_0^1 (l_x - t d_x)\, dt$$

$$= \left[ l_x\, t - \frac{t^2}{2}\, dx \right]_0^1$$

$$= l_x - \frac{dx}{2}$$

ஆனால் $d_x = l_x - l_{x+1}$

எனவே, $L_x = l_x - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+1})$

$$= \frac{1}{2}[l_x + l_{x+1}]$$

$$= l_{x+\frac{1}{2}}$$

**மரண வேகம்** (Force of Mortality)

இறப்பு அட்டவணையில் உள்ள ஒரு முக்கியமான அளவு **மரண வேகம்.** இறப்பு என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டு முடிந்த பின் நடக்கும் நிகழ்ச்சியன்று. எந்த நொடியிலும் நிகழக்கூடிய ஒன்றாகும். எனவே, உயிர் வாழ்வோர்களின் எண்ணிக்கை, இறப்பின் அளவுக்கேற்றவாறு, எப்போதும் குறைந்து செல்லும் ஓர் அளவாகவே இருக்கும். ஆகவே, உயிர் வாழ்வோர்களின் எண்ணிக்கை ஒவ்வொரு நொடிக்கும் கணிக்கக் கூடியது. ஆதலால், இது ஒரு தொடர் சார்பு ஆகும். இவ்வாறே மரணமும் தொடர்ந்து செல்லும் ஓர் அளவாகும். எனவே, $l_x$-ன் குறையும் வீதமே $x$-வயதில் மரண வீதமாகும்

$$\underset{t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{l_x - l_{x+1}}{t} = -\underset{t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{l_{x+1} - l_x}{t} = -\frac{d\, l_x}{d_x}$$

எனவே $\mu_x$ எனக் குறிக்கப்படும் மரண வேகமானது $x$ வயதுடைய ஒரு நபரின் மரண வீதமாகும்.

$$\text{எனவே } \mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\, l_x}{dx} = -\frac{d \log l_x}{dx}$$

$l$ என்பது ஒரு தொடர் சார்பாக இருந்தாலும், இதன் இயற்கணித வடிவ அமைப்பைப் பெற முடியாது. $x$-ன் ஒவ்வொரு முழு மதிப்பிற்கும் ஆயுட்பட்டியலிலிருந்து கிடைக்கும். $l_x$ ஐக் கொண்டு தோராய மதிப்புகளைத்தான் பெறமுடியும். எனவே $\mu_x$ ஐத் தோராயமாகத்தான் தீர்மானிக்க முடியும்.

**$l_x$-ன் மூன்று மதிப்புகளைக் கொண்டு $\mu_x$-ன் மதிப்பைத் தோராயமாகத் தீர்மானித்தல்**

$l_x$-ன் 3 மதிப்புகள் தெரிவதால், அதனை ஓர் இருபடிக் கோவையாகக் கருதலாம்.

$$l_x = a + bx + cx^2 \text{ என்க.}$$

$$\frac{d\,l_x}{d_x} = b + 2\,c\,x \qquad \therefore \quad \mu_x = -\frac{b + 2\,cx}{a + bx + cx^2}$$

கணக்கிடும் வசதிக்காக, கொடுக்கப்பட்டுள்ள வயது $x$ ஐ மூலமாகக் கொள்வோம். $l_{-1}$, $l_0$, $l_{+1}$ தரப்பட்டுள்ளபோது $\mu_0$-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

$$\mu_0 = \quad b/a \quad l_{-1} = a - b + c; \; l_0 = a \; ; \; l_{+1} = a + b + c$$

$$l_{+1} - l_{-1} = 2b \qquad \therefore \quad \mu_0 = \frac{l_{-1} - l_{+1}}{2 l_0}$$

$$\therefore \quad \mu_x = \frac{l_{-1} - l_{+1}}{2l}$$

**$l_x$-ன் 5 மதிப்புகளின் அடிப்படையில் $\mu$-ன் தோராய மதிப்பைக் காணுதல்.**

$l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\frac{d\,l_x}{d_x} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$$

$$\therefore \quad \mu_x = \frac{-b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

$$\therefore \quad \mu_0 = -b/a.$$

$\mu_0$-ஐ $l_{-2}$, $l_{-1}$, $l_0$, $l_{+1}$ $l_{+2}$ இவற்றின் மூலமாக எடுத்துக் கூற வேண்டும்.

$$l_{-1} = +a - b + c - d + e$$

$$l_{+1} = a + b + c + d + e$$

$$\therefore \quad l_{-1} - l_{+1} = -2b - 2d \qquad \dots (1)$$

$$l_{-2} = a - 2b + 4c - 8d + 16e$$
$$l_{+2} = a + 2b + 4c + 8d + 16e$$
$$l_{-2} - l_{+2} = -4b - 16d \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து

$$b = \frac{1}{12}[(l_{-2} - l_{+2}) - 8(l_{-1} - l_{+1})]$$

மேலும் $l_0 =$ :

$$\mu_0 = \frac{8(l_{-1} - l_{+1}) - (l_{-2} - l_{+2})}{12 l_0}$$

எனவே $\mu_x = \dfrac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 l_x}$

இவ்வாறு $l_x$ஐ உயர்படி கோவையாகக் கொண்டு மேன் மேலும் தோராய மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

**சராசரி ஆயுட்காலம்** (Average Expectation)

$x$ வயதுடைய $l_x$ நபர்களில் முதல் ஆண்டில் $d_x$ நபர்கள் இறப்பர். இரண்டாவது ஆண்டில் $d_{x+1}$ நபர்கள் இறப்பர் எனுமாறு அமையும். $x$ வயதுடைய $l_x$ நபர்களுக்கு இடையே பல்வேறு வயதுகளில் நிகழும் இறப்பிற்கான பரவலைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது:

| நிறைவான வயது $x$ | $x$ | $x+1$ | $x+2$ | ... | ... | $w$ | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| இறப்புகளின் எண்ணிக்கை $d_x$ | $d_x$ | $d_{x+1}$ | $d_{x+2}$ | ... | ... | $d_w$ | $l_x$ |

இப்பரவலின் சராசரி, $x$ - வயதுடைய ஒருவர் இறப்பின் போது உள்ள சராசரி வயதைத் தருகிறது எனவே, பின்வரும் பரவலின் சராசரி, $x$ வயதுடைய ஒருவர் உயிர் வாழப் போகும் சராசரி ஆயுட்காலத்தைத் தருகிறது.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | ......... | $w - x$ |
| $d_x$ | $d_{x+1}$ | $d_{x+2}$ | ......... | $d_w$ |

**சராசரி ஆயுட்காலம் — எதிர்பார்க்கும் ஆயுள்** (Mean-life-time — Expectation of life)

நாம் முன்னர் கூறிய சராசரி, கூட்டுச் சராசரியாக இருக்குமே யானல், சராசரி வயதைக் குறிக்கும். இது எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் என்றும் கூறப்படும். இதனை $e_x$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$e_x = \frac{(d_x \cdot 0) + (d_{x+1} \cdot 1) + (d_{x+2} \cdot 2) + \cdots\cdots}{d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{(l_{x+1} - l_{x+2}) + 2\,(l_{x+2} - l_{x+3}) + \cdots\cdots}{l_x}$$

எனவே $e_x = \dfrac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots\cdots}{l_x}$

இதிலிருந்து எதிர்பார்க்கும் ஆயுளை, $x$-வயதுடைய ஒருவர் பூர்த்தியாக வாழ்ந்த முழு ஆண்டுகளின் சராசரி எனலாம். இதனைக் கீழ்க்காணும் வகையில் நிறுவலாம்.

$x$ வயதுடைய $l_x$ நபர்களில், $l_{x+1}$ நபர்கள் ஒரு முழு ஆண்டு உயிரோடு வாழ்கின்றனர். $l_{x+2}$ நபர்கள் இன்னும் ஒரு முழு ஆண்டு உயிரோடு வாழ்கின்றனர். $l + 3$ நபர்கள் மேலும் ஒரு ஆண்டு உயிர் வாழ்கின்றனர் என இவ்வாறே அமையும். இந்த நபர்கள் உயிர் வாழ்ந்த ஆண்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$= l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots\, l_n$$

$x$ வயதுடைய ஒருவர் வாழ்ந்த ஆண்டுகளின் சராசரி எண்ணிக்கை

$$= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x},$$

இதைக் குறையுடைய சராசரி ஆயுள் என்கிறோம்.

**நிறையுடைய சராசரி ஆயுள்** (Complete Expectation of Life)

நாம் மேலே நிறுவிய வாய்பாட்டில், $d_x$ நபர்கள் 0 ஆண்டு களும், $d_{x+1}$ நபர்கள் 1 ஆண்டும், $d_{x+2}$ நபர்கள் 2 ஆண்டுகளும் வாழ்வார்கள் எனக் கொண்டோம். $x$ அதாவது $x$ வயதுடைய நபர்கள் வாழ்ந்த முழு ஆண்டுகளை மட்டும் பின் எடுத்துக் கொண்டோம். இந் நபர்கள் வாழ்ந்த ஆண்டின் பகுதிகளை எடுத்துக் கொள்ளவில்லை. ஆண்டு முழுவதும் மரணம் சீராக

ஒரே வீதத்தில் நிகழ்கிறது எனக் கொண்டால், ஆண்டின் முதல் பாதியில் நிகழக்கூடிய மரணங்களின் எண்ணிக்கை, ஆண்டின் இரண்டாவது பாதியில் நிகழக்கூடிய மரணங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும். அதாவது மரணம் ஏற்படும் ஆண்டில், $d$ நபர்கள், சராசரியாக $\frac{1}{2}$ ஆண்டு உயிர் வாழ்ந்திருப்பார்கள். 2ஆவது ஆண்டில் மரணம் அமையும் $d_{x+1}$ நபர்கள் சராசரியாக $1\frac{1}{2}$ ஆண்டுகள் வாழ்வார்கள்.

| $x$ வயதிற்குப் பிறகு வாழ்ந்த ஆண்டுகள் | $\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | ... | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| மரணங்களின் எண்ணிக்கை | $d_x$ | $d_{x+1}$ | $d_{x+2}$ | ... | ... |

இதன் சராசரி $\frac{1}{2} + e_x$ என நிறுவலாம். ஆண்டு முழுவதும் மரணங்கள் ஒரே சீரான வீதத்தில் நிகழ்கின்றன என்ற தற்கோளின் அடிப்படையில், கணக்கிடப்படும் எதிர்பார்க்கும் ஆயுள், நிறையுடைய சராசரி ஆயுள் எனப்படுகிறது. இதனை $e_x^{\circ}$ எனக் குறிகிறோம்.

$$e_x^{\circ} = \frac{1}{2} + e_x$$

**நடு ஆயுட் காலம் அல்லது உத்தேச ஆயுட் காலம்** (Median life-time or Probable life-time)

இடைநிலையைச் சராசரியாகக் கொண்டால் இதுவே நடுவாயுட் காலமாகும். இதனையே உத்தேச ஆயுட் காலம் என்றும் கூறலாம். $n$ என்பது நடுவாயுட் காலம்; ஆனால், இடைநிலையின் வரையறையிலிருந்து $(x + n)$ வயதுக்கு முன் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கையும், அவ்வயதிற்குப் பின் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

$$l_x - l_{x+n} = l_{x+n}, \text{ எனவே } \frac{l_{x+n}}{l} = \frac{1}{2}$$

இதிலிருந்து உத்தேச ஆயுட் காலம் என்பது, உயிர் வாழ்வதற்கு, நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும் ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

$p_x$, $q_x$, $e_x$ இவற்றைத் தொடர்புபடுத்திக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டை நிறுவலாம்:

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$$

$$q_x = \frac{1 - e_x + e_{x+1}}{1 + e_{x+1}}$$

$l_x e_x = l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$ என்பது நாம் அறிந்த வாய்பாடாகும்.

மேலும் $l_{x+1}$ ; $e_{x+1} = l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots$

எனவே $l_x e_x - l_{x+1} e_{x+1} = l_{x+1}$

$\therefore l_x e_x = l_{x+1} (1 + e_{x+1})$

அல்லது $\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$

$$q_x = 1 - p_x = \frac{1 - e_x + e_{x+1}}{1 + e_{x+1}}$$

## நிலையான சமூகம் (Stationary Community)

ஒரு சமூகத்தின் மக்கள்தொகை, மக்கள் வெளியேறினாலோ அல்லது வந்து குடியேறினாலோ பாதிக்கப்படாமல் இருந்தால், அச் சமூகம் நிலையான சமூகம் என்று கூறப்படும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நொடியில் நடைபெற்ற மக்கள் கணிப்பிலிருந்து அறியக்கூடிய $L_x$ என்பது, $x$, $x+1$ என்ற வயதுகளுக்கு இடையில் ஒரு நிலையான சமூகத்தில் உயிர்வாழும் நபர்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

$x$, $x+1$ என்ற வயதுகளுக்கு இடையில் இறப்புகள் ஆண்டு முழுவதும் ஒரே சீராகப் பரவியிருப்பதாகக் கொண்டு,

$L_x = l_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$ என நிறுவலாம்.

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 (l_x - td_x)\, dt \quad \left[ \because \frac{l_x - l_{x+t}}{t} = \frac{d_x}{1} \right]$$

$$= \left[ l_x \cdot t - d_x \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$= l_x - \frac{1}{2} d_x = l_{x+\frac{1}{2}}$$

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} (l_x - l_{x+1})$$

$$= \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$

$T$ என்பது ஒருநிலையான சமூகத்தில் எந்த நொடியிலும் உயிர் வாழும் $x$-வயதும் அதற்கு மேலும் வயதுமுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது.

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots L_\omega$$

$$= \int_0^\infty l_{x+t} \cdot dt.$$

$x$, $x+n$ என்ற வயதுகளுக்கு இடையில் எந்த நொடியிலும் அமைந்திருக்கும் முழுமைத் தொகுதி

$$= \int_0^n l_{x+t} \cdot dt = T_x - T_{x+n}.$$

முழுமைத் தொகுதிக்கு $x$, $x+n$ வயதுகளுக்கு இடையில் அமைந்திருக்கும் இறப்புகளின் எண்ணிக்கையின் விகிதம்

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}}$$

$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது இந்த விகிதம் $x$வயதின் மைய இறப்பு வீதம் (central death rate at age $x$) என்று கூறப்படும்.

இது $m_x$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

எனவே $m_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{T_x - T_{x+1}} = \dfrac{d_x}{L_x}$

$x$ வயதுடைய $l_x$ நபர்கள் உயிர்வாழ்ந்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \int_0^\infty l_{x+t}\, dt = T_x \text{ ஆதலால்}$$

நிறையுடைய சராசரி ஆயுள் $\overset{0}{e}_x = \frac{T_x}{e_x}$

$x$-ம் அதற்கு மேலும் உள்ள வயதுகளில் நிகழும் இறப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= dx + d_{x+1} + \dots = l_x$

$x$-ம் அதற்குமேல் வயதுமுடைய மொத்த முழுமைத் தொகுதி $= T_x$

$\therefore$ $x$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சராசரி இறப்பு வீதம் $\frac{l_x}{T_x} = \frac{1}{\overset{0}{e}_x}$

மைய இறப்பு வீதமே ஓர் ஆயுட் பட்டியலின் அமைப்பில் பெறக்கூடிய முக்கிய விளைவாகும்.

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{2\,(l_x - l_{x+1})}{(l_x + l_{x+1})}$$

$$m_x = \frac{2\,(1 - p_x)}{1 + p_x} = \frac{2\,q_x}{2 - q_x}$$

$$q_x = \frac{2\,m_x}{2 + m_x}$$

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}$$

## ஆயுட் பட்டியலை அமைக்கும் விதம்

ஆயுட் பட்டியலிலே முக்கியமான பகுதி; ஒவ்வொரு வயது $x$-ற்கும் உரிய மரணவீதம் $q_x$-ன் மதிப்புகளைத்தரும் நெட்டுப் பிரிவாகும். ஏதேனும் ஒரு வசதியான மூலம் (radix) பொதுவாக 1,00,000 பிறப்புகளை ($l_0$) எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$q_0, q_1, q_2 \dots$ முதலானவற்றை நாம் அறிந்தால் 0-விலிருந்து ஒரு வயதிற்குள் மரணமடையும் நபர்களின் எண்ணிக்கை $d_0$ என்பதை $d_0 = l_0, q_0$ என்ற தொடர்பின் மூலம் பெறலாம்.

$d_0$ஐ $l_0$-லிருந்து கழித்தால் $l_1$-ம், பிறகு ஒரு வயதிலிருந்து இரண்டு வயதிற்குள் இறக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை $d_1$-ம் $d_1 = l_1 \, q_1$ என்ற தொடரின் மூலம் கிடைக்கும். இப்போது $d_1$ஐ $l_1$-லிருந்து கழித்தால் $l_2$ கிடைக்கும். இவ்வாறே பட்டியலின் கடைசிவரை பூர்த்தி செய்யலாம்.

எனவே ஆயுட் பட்டியலில், எல்லா வயது $x$-க்கும் முதலில் $qx$-ன் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டுமானால் $qx = \frac{d_x}{l_x}$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து நம்மால் $qx$ஐப் பெறமுடியாது. ஏனெனில் $d_x$ தெரிந்திருந்தாலும், $x$ வயதுடைய நபர்களில் இந்த மரணம் அடைந்த $l_x$ நபர்களை நாம் அறியவில்லை. எனவே $\frac{d_x}{L_x} = m_x$ என்ற மைய இறப்பு விகிதத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். $d_x$, $l_x$ என்பவற்றை மரணப்பதிவேடுகளிலிருந்தும், மக்கட் கணிப்பு விவரங்களிலிருந்தும் அறியலாம்.

$mx$ மதிப்புகளிலிருந்து $qx = \frac{2\,mx}{2 + mx}$ என்ற தொடர்பின் மூலம் $qx$ பெறலாம். ஆயுட் பட்டியலில் வழக்கமாகக் காணப்படும் நெட்டுப்பிரிகள் $l_x$, $d_x$, $q_x$, $\mu_x$, $L_x$, $T$, $e_x$. முன்பே விளக்கியுள்ள தொடர்புகள் மூலம் மற்ற நெட்டுப்பிரிவுகளை நிரப்பலாம்.

**கணக்கு :**

பின்வரும் ஆயுட் பட்டியலில், காலி இடங்களை நிரப்புக:

| வயது | $l_x$ | $d_x$ | $p_x$ | $q_x$ | $L_x$ | $T_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 762227 | ? | ? | ? | ? | 27296732 |
| 31 | 758580 | | | | | ? |

**தீர்வு :**

$$x = 80, \; d_x = l_x - l_{x+1} = 762227 - 758580$$

$$= 3647$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{758580}{762227} = 0{\cdot}995$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - 0{\cdot}995 = 0{\cdot}005$$

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = \frac{762227 + 758580}{2}$$

$$= 760404$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

1931-ல் ஆண்டுகளுக்கான ஆயுட் பட்டியலில் 0, 1, 2, 3, 4, 5 என்ற வயதுகளுக்கான மரண விகிதங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. மூலத்தைப் பத்தாயிரம் எனக் கொண்டு $l_x$, $d_x$, $p_x$, $L_x$ மதிப்புகளைப் பல்வேறு வயதுகளுக்குக் கணக்கிடவும்.

0·2487, 0·0918, 0·0564, 0·0392, 0·0274, 0·0193.

**தீர்வு :**

$l_x q_x = d_x, l_{x+1} = l_x - d_x, p_x = 1 - q_x$

$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$ என்பவை ஆயுட் பட்டியலில் காணப்படும் பல்வேறு தொடர்புகள் $l_0 = 10{,}000$, $q_0 = 0{\cdot}2487$.

$$\therefore \quad d_0 = 10{,}000 \times 0{\cdot}2487 = 2487$$

$$p_0 = 1 - q_0 = 0{\cdot}7513$$

$$l_1 = l_0 - d_0 = 10000 - 2487 = 7513$$

எனவே $L_0 = (10000 + 7513)/2 = 8757$

இவ்வாறே மற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டால் பட்டியல் பின்வருமாறு வருகிறது :

| வயது | $l_x$ | $d_x$ | $q_x$ | $p_x$ | $L_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10,000 | 2487 | 0·2487 | 0·7513 | 8757 |
| 1 | 7513 | 690 | 0·0918 | 0·9082 | 7168 |
| 2 | 6823 | 385 | 0·0564 | 0·9436 | 6631 |
| 3 | 6438 | 252 | 0·0392 | 0·9608 | 6312 |
| 4 | 6186 | 169 | 0·0274 | 0·9726 | 6102 |
| 5 | 6017 | 116 | 0·0193 | 0·9807 | 5959 |
| 6 | 5901 | — | — | — | — |

**எடுத்துக்காட்டு :**

பின்வரும் பட்டியலை நிரப்புக :

| வயது ஆண்டுகளில் | $l_x$ | $d_x$ | $q_x$ | $p_x$ | $L_x$ | $T_x$ | $e^\circ x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12000 | — | — | — | — | — | — |
| 12 | 8000 | — | — | — | — | — | — |
| 13 | 6000 | — | — | — | — | — | — |
| 14 | 4000 | — | — | — | 3000 | — | — |

**தீர்வு :**

$d_x = l_x - l_{x+1}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$d_{11} = 12000 - 8000 = 4000$$

$$d_{12} = 8000 - 6000 = 2000$$

$$d_{13} = 6000 - 4000 = 2000$$

$q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - p_x$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$q_{11} = \frac{4000}{12000} = 0{\cdot}3333 \; ; \quad \therefore \quad p_{11} = 1 - q_{11} = 0{\cdot}6667$$

$$q_{12} = \frac{2000}{8000} = 0{\cdot}2500 \; ; \quad \therefore \quad p_{12} = 1 - q_{12} = 0{\cdot}7500$$

$$q_{13} = \frac{2000}{6000} = 0{\cdot}3333 \; ; \quad \therefore \quad p_{13} = 1 \quad q_{13} = 0{\cdot}6667$$

$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$L_{11} = \frac{12000 + 8000}{2} = 10{,}000.$$

$$L_{12} = \frac{8000 + 6000}{2} = 7{,}000$$

$$L_{13} = \frac{6000 + 4000}{2} = 5,000$$

$T_x = L_x + L_{x+1} + \cdots$, என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$T_{11} = L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14} = 23,000$$

$$T_{12} = L_{12} + L_{13} + L_{14} = 13,000$$

$$T_{13} = L_{13} + L_{14} = 6000$$

$$T_{14} = L_{14} = 5000$$

$e°x = \frac{T_x}{l_x}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$e°_{11} = \frac{25000}{12000} = 2·0833$$

$$e°_{12} = \frac{15000}{8000} = 1.8750$$

$$e°_{13} = \frac{8000}{5000} = 1·6000$$

$$e°_{14} = \frac{3000}{1000} = 3·0000$$

மேற்கண்டவாறு நிரப்பப்பட்ட ஆயுட்பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

| வயது ஆண்டு களில் | $l_x$ | $d_x$ | $p_x$ | $q_x$ | $L_x$ | $T_x$ | $e°x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12000 | 4000 | 0·3333 | 0·6667 | 13,000 | 25,000 | 2·0833 |
| 12 | 8000 | 2000 | 0·2500 | 0·7500 | 7,000 | 15,000 | 1·8750 |
| 13 | 6000 | 2000 | 0·3330 | 0·6667 | 5,000 | 8,000 | 1.6000 |
| 14 | 4000 | — | — | — | 3,000 | 3,000 | 3·0000 |

## பயிற்சி

$l_{89} = 722284$, $d_{85} = 4633$, $d_{8} = 4864$

(1) $d_{87} = 5091$ $d_{88} = 5319$ எனில் இரு வாய்பாடுகளையும் பயன்படுத்தி $\mu_{87}$ ஐக் கணக்கிடுக.

பின்வரும் பட்டியலில் காலியான இடங்களை நிரப்புக.

| $x$ | $l_x$ | $d_x$ | $p_x$ | $q_x$ | $L$ | $T_x$ | $e_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 793,435 | — | — | — | — | 3508 26 | — |
| 21 | 790,673 | | | | | — | |

(விடை) 2762, 0.9965, 0·0035, 792054, 3+289072 44·21

(2) $l_x$-ன் மதிப்புகள் பின்வருமாறு: ஆயுட் பட்டியலின் மற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

$x$ : 02, 103, 104, 105, 106, 107, 108

$l$ : 97, 59, 32, 75, 6, 2, 0

$l_{80} = 13987$, $d_{80} = 2{,}018$, $q_{81} = 0, 5649$, $p_{82} = 0{\cdot}83042$ எனக்கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது $l_{81}$, $l_{82}$, $l_{83}$ காண்க :

[விடை : 1,967, 10,076,8384]

## (iv.) புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு (Statistical Quality Control)

போட்டிகள் அதிகரித்து வரும் இக் காலத்தில் பொருள்களை உற்பத்திச் செய்யும்போது அதன் தரம் மிக உயர்ந்தாக இருக்குமாறு தொடர்ந்து கவனிப்பது ஒரு வணிகனின் இன்றியமையாத செயலாகும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட ஒரு பொருளின் தரம், விலை முதலியவற்றின் மீது நுகர்வோருக்கு ஒரு நன்னம்பிக்கை ஏற்பட்டால்தான் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் நன்கு விற்பனை ஆகும். நுகர்வோர் பொருளின் தரத்தில் திருப்தியடையாவிட்டாலும், அவர்களின் முறையீடுகளை உற்பத்தி செய்வோர் கவனிக்காவிட்டாலும், உற்பத்தி செய்வோர் அங்காடியில் தொடர்ந்து முன்னேறிய நிலையில் இருப்பது கடினம். எனவே, அவர் தம் பொருளின் தரத்தை உயர்த்த வேண்டுவது அவசியம். அவ்வாறு செய்யாவிடில் மிக நல்ல தரமுள்ள பொருள்களை உற்பத்தி செய்பவர்கள் அங்காடியில் நல்லதோர் இடத்தைப் பெற்று விடுவார்கள். இந் நிலையில் தரமல்லாத பொருள்களை உற்பத்தி செய்வோருடைய பொருள்கள் வாங்குவாரற்றுப் போய் விடும்.

பொருளின் தரம் கெடாதவாறு பாதுகாத்துத் தரத்தின் தன்மையை சிறப்பாக்குவது போட்டிகள் அதிகரித்து வரும் இந் நாளில் வணிகர்களுக்கு புதுமையான செயலன்று. ஒரு நல்ல பொருளை உற்பத்தி செய்ய உற்பத்தி செய்வோர் பல நூறு ஆண்டுகள் கூட முயன்றிருக்கலாம். அவ்வாறு முயன்று கடைசியில் மிகப் பொருத்தமான தரமுள்ள பொருள்களை உற்பத்தி செய்திருக்கலாம். இவ்வாறு உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் களின் தரத்தைப் பாதுகாப்பது இன்றியமையாதது.

தரத்தை ஒரு காட்டுப்பாட்டிற்குள் வைக்கப் புள்ளியியல் உதவும் முறைகளைப் பற்றி நாம் இங்குக் காண்போம். இத்தகு புள்ளியியல் முறைகள் W. A. ஸ்கூகார்ட் என்பவரால் பெரிதும் வளர்க்கப்பட்டன. அவர் இயற்பியல் ஆராய்ச்சிக்கான ஒரு சோதனையை ஆராய்ந்து கொண்டிருக்கும்போது அந்த எண்களில் ராண்டம் வேறுபாடுகள் கலந்திருப்பதைக் கண்டார். புள்ளியியல் முறையில் இந்த ராண்டம் மாறுபாடுகளுக்கு எல்லைக் கோடுகளை அமைத்து தரத்தில் தோன்றும் மாறுபாடுகளுக்குரிய காரணங்களைக் கண்டறிந்து இவற்றைப் பற்றி ஒரு நூல் எழுதி வெளியிட்டார்.

பொருளின் தரத்தை உயர்த்திய பின்புகூட தரத்தில் சில மாறுபாடுகள் தோன்றுவதைத் தவிர்க்க முடியாத காரணத்தால் தான் தரக் கட்டுப்பாட்டின் தேவை ஏற்பட்டது எடுத்துக் காட்டாக, ஓர் இயந்திரம் 2 செமீ. நீளமுள்ள தாழ்ப்பாள்களை நாளொன்றுக்கு 100000 வீதம் உற்பத்தி செய்கின்றதென வைத்துக் கொள்வோம். எவ்வளவுதான் நுணுக்கமான, பண் பட்ட முறைகளைப் பின்பற்றினாலும் எல்லாத் தாழ்ப்பாள்களும் 2 செமீ நீளமுடையனவாக இருக்குமெனக் கூற முடியாது. மிக நுட்பமாக அளக்கும் கருவியின் உதவியுடன் அவற்றை அளந்து பார்த்தோமானால், சில 2 செ.மீக்குக் குறைந்த நீளமுடையனவாக வும், சில 2 செமீக்கு அதிக நீளமுடையனவாகவும் இருப்பது திண்ணம். இங்குப் பொருள்களின் தரத்தில் மாறுபாடு தோன்று கின்றது. இவ்வாறு தோன்றும் மாறுபாடுகளுக்குச் சில காரணங்கள் இருக்கலாம். பொருளின் தரத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாடுகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். அவை எதிர்பாரா காரணங் களாலோ அன்றி குறிப்பிட்டுச் சொல்லத்தக்கக் காரணங்களாலோ ஏற்பட்டிருக்கலாம்.

(1) இயல்பான மாறுபாடுகள் (Chance Variations).

(2) குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்பட்ட மாறுபாடுகள் (Assignable Variations).

(1) **இயல்பான மாறுபாடுகள்** (Chance Variations)

பொருள்களை உற்பத்தி செய்யும்போது பொருள்களின் தரத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாடு ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்டிருந்தால் அத்தகைய மாறுபாடுகளுக்கு இயல்பான மாறுபாடுகள் எனப் பெயர். பொருள்களை உற்பத்தி செய்யும்போது இத்தகைய மாறுபாடுகள் தோன்றுவதைத் தடை செய்ய இயலாது. இத்தகைய மாறுபாடுகள் தவிர்க்க முடியாதவை. உற்பத்தி முறையில் தோன்றும் மாறுபாடுகள் இயல்பான மாறுபாடுகளால் மட்டும் தோன்றினால், உற்பத்தி முறை, புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டுடன் (Statistical control) இருக்கிறதெனச் செல்வார்.

(2) **குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள்** (Assignable Variations)

பொருள்களை உற்பத்தி செய்யும்போது பொருள்களின் தரத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாடுகள் ராண்டம் அல்லாத காரணங்களால் ஏற்பட்டால் அத்தகைய மாறுபாடுகள் குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்பட்ட மாறுபாடுகள் எனக் கூறுவர். இத்தகைய மாறுபாடுகள் மூலப்பொருள்களை மாற்றுவதாலோ, புதிய முறையில் செயல்படுவதாலோ, இயந்திரங்களை ஒழுங்காகப் பொருத்தாத காரணத்தாலோ அல்லது இயந்திரங்களிலுள்ள உடைந்த பகுதிகளாலோ, தோன்றும்.

இந்த இருவகை மாறுபாடுகளில் முதல் வகை மாறுபாட்டைப் பொறுத்த வரையில் எதுவும் செய்ய முடியாது. குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் தோன்றிய மாறுபாடுகளைக் மட்டும் கண்டு, அவற்றைத் திருத்த இயலும். எனவே, தரக்கட்டுப்பாட்டின் வெற்றி குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் விரைவில் கண்டு பிடிக்கப்படுவதில் இருக்கிறது. பொருள் பழுதடைவதற்கு முன்பே இத்தகைய மாறுபாடுகள் பெரும்பாலும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு விடுகின்றன.

பொருள்களின் தரத்தைக் கட்டுப்பாட்டில் அமையுமாறு செய்வதற்கு இரண்டு வழிகள் உள்ளன :

(1) 10 % சோதனை செய்தல். அதாவது உற்பத்தி செய்யப்பட்ட ஒவ்வொரு பொருளையும் பரிசோதித்துப் பார்க்கும் முறை.

(2) கூறுகளைப் பயன்படுத்துதல் அதாவது புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டைப் பின்பற்றுதல்.

முதல் முறையில் சோதனை செய்வது சில தொழில்களுக்குப் பொருந்தவே பொருந்தாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தொழிற் சாலையில் உற்பத்தியாகும் குழல் மின் விளக்குகள் அனைத்தையும் எரியவிட்டு அவற்றின் தரத்தைக் கணக்கிட முற்பட்டால், இறுதியில் விற்பதற்கு எதுவுமே இராது.

அது போல் இரும்புக் கம்பிகளின் இழு பலனைக் காண, உற்பத்தியாகும் அனைத்தையுமே உடைத் தெறிய இயலாது.

இரண்டாவது முறையில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக் கப்பட்ட கூறுகளின் தன்மைகளை ஆராய்ந்து முழுமைத் தொகுதி யிலுள்ள பொருள்களின் தரத்தை மதிப்பிடுகிறோம்.

உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் அனைத்தையும் மேற்பார்வை யிடுவது விரும்பத்தக்க முறையல்ல.

ஏனெனில்,

(i) இதனால் ஆகும் பொருள் செலவு மிக அதிகம்.

(ii) ஒவ்வொரு பொருளையும் ஆராய வேண்டியிருப்பதால், சிற்சில சமயங்களில், பரிசோதகரின் சிறிது கவனக் குறைவால் பழுதுள்ள பொருள்கள்கூடப் பார்வையிலிருந்து தப்பிவிடும்.

(iii) உற்பத்தி முழுமையும் முடிந்தவுடனே சோதனை நடத்தப்படுகிறது. ஆதலால் உற்பத்தி முறையின் குறைகளைக் கட்டுப்படுத்துதல் கடினம். இந் நிலையில் அதிக சிக்கனமானதும் செயல்படுத்த எளிதானதுமான 'புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு' ஒரு சிறந்த கருவியாகிறது.

'புள்ளியல் தரக் கட்டுப்பாடு' என்பது உற்பத்தியான ஒவ்வொரு பொருளையும் ஆராய்ந்து முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகளைக் கொண்டு பொருள்களின் தரம் எதிர்பார்க்கப்படும் எந்த அளவு பெறப்பட்டுள்ளது எனத் தீர்மானிக்கவும், வேறுபாடுகள் பொதுவாக எதிர்பார்க்கப்படும் எல்லைகளுக்குள்ளே ஏற்படுகின்றனவா அல்லவா என ஆராயவும் உதவிடும் புள்ளியியல் முறையாகும். இதன் மூலம் இயல்பான மாறுபாடுகளிலிருந்து, குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைப் பிரித்துக் கூற இயலுகிறது. இதன் உதவி கொண்டு உற்பத்தி முறையைக் கட்டுப்படுத்தி, பொருள்களின் வீண் சேதம் தவிர்க்கப்பட்டுத் தொழிலின் தரம் பாதுக்கப்படு கிறது. கணக்காளரது வேலையில் காணப்படும் பிழைகள்,

வாடிக்கையாளரது புகார்கள், விமானப் பயணச் சீட்டுகள் போன்ற பலவகைத் துறைகளிலும் புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டு முறை இன்று மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

**உற்பத்தி முறையைக் கட்டுபடுத்துதல்** (Process control), **ஏற்புடைக் கூறுகளை ஆராய்தல்** (Acceptance inspection or sampling inspection) என்ற இரு பெரும் பகுதிகளில் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

**முறைக் கட்டுப்பாடு** (Process Control)

பொருள்களின் தரத்தை ஒரே நிலையில் வைப்பதற்காக, புள்ளியியல் கருவிகளை உற்பத்திமுறையைக் கட்டுப்படுத்தப் பயன்படுத்துவதே 'முறைக் கட்டுப்பாடு' ஆகும். பொருள்களின் தர மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள் இருந்தால், உற்பத்தி முறைக் கட்டுப்பாட்டிற்குள் அமைந்துள்ளது என ஏற்றுக் கொள்கிறோம். அவ்வாறில்லாவிடில், வேறுபாட்டிற்கானத் தனிப்பட்ட காரணங்களைக் கண்டறிந்து, அவற்றை நீக்கி உற்பத்தி முறையைத் திருத்தி அமைக்க முற்படுகிறோம்.

தரக் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள் (Quality control charts), முறைக்கட்டுப்பாட்டினைச் செயல்படுத்த உதவிடும் புள்ளியியல் கருவிகளாகும்.

**ஏற்புடைக் கூறுகளை ஆராய்தல்** (Acceptance Inspection)

மூலப் பொருள் நிலையிலேயோ, பாதி உருவாகிய நிலையிலோ அல்லது முழு வடிவையும் பெற்ற நிலையிலோ பொருள்களின் தரம் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதாக உள்ளதா என ஆராய்வதே இதன் நோக்கமாகும். உற்பத்தியான பொருள்களின் ஒரு கூறின் தன்மையை, குறிப்பிட்ட புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி, சோதித்து, அதன் மூலம் அக் கூறு எடுக்கப்பட்ட பெருந் தொகுதியின் பண்பை மதிப்பிடுகிறோம். முறைக்கட்டுப்பாட்டில், பொருள்களை உருவாக்கும் திறனைப் பொறுத்து, தரங்களை அமைக்கிறோம். ஆனால், கூறுகளை ஆராயும் முறையில் எதிர்பார்க்கப் படும் தரம் அடிப்படையாக உள்ளது. பொருளின் முறைக்கட்டுப்பாட்டில் திரும்பத் திரும்பச் செய்யக் கூடிய ஒரே முறையினின்று உருவாகக் கூடிய எண்ணற்ற முடிவுகளே முழுமைத் தொகுதியாக உள்ளன. ஆனால் கூறுகளை ஆராய்வதில், உற்பத்தியான பொருள்களின் ஒரு வரையுற்ற தொகுதியே, முழுமைத் தொகுதியாக உள்ளது.

**தரக்கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படங்கள்** இவற்றைக் கண்டறிந்த டாக்டர். வால்டர் ஷேவர்ட் (Dr. Walter A Shewart) என்பவர் கூறியுள்ளபடி,

(1) தொழில் நிறுவனத்தார் தங்களது உற்பத்தி முறையில் எத்தகைய தரத்தை அடையவேண்டும் என்று குறிக்கோளை வரையறுக்கின்றன.

(2) அக் குறிக்கோளைப் பெறுவதற்காக உதவிடும் கருவியாக உதவுகின்றன.

(3) குறிக்கோளாகக் கொள்ளப்பட்ட தரம் பெறப்பட்டதா எனத் தீர்மானிக்க உதவுகின்றன.

எனவே, தரக்கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள் உருவாகப் போகும் பொருள்களின் தரத்தை வரையறுக்க, தரமுள்ள பொருள்களை உற்பத்தி செய்திட, உற்பத்தியான பொருள்களின் தரத்தை ஆராயப் பயன்படுகின்றன.

முன் கூட்டியே நன்கு வரையறுக்கப்ப ' டு எதிர்பார்க்கப்படும் தரத்திலிருந்து, உற்பத்தியான பொருள்களின் தரம் எந்த அளவு மாறுபடுகின்றது என்பதனைச் சுட்டிக்காட்ட உதவிடும் வரைபடங்களே தரக் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள். ஒரு தரக் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படத்தில் மூன்று கோடுகள் உள்ளன :

(1) பொருள்களின் எதிர்பார்க்கப்படுகின்ற தரத்தினைக் குறிக்கின்ற ஒரு மையக்கோடு.

(2) மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை (Upper control limit U. C. L.)

(3) கீழ்க்கட்டுப்பாட்டு எல்லை (Lower control limit-L.C.L.)

உற்பத்தியான பொருள்களிலிருந்து, தகுந்த அளவுள்ள கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு, வரைபடத்தில் குறிக்கப் படுகின்றன. கூறின் புள்ளிகள் கீழ்க்கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்கும், மேல்கட்டுப் பாட்டு எல்லைக்கும் இடையே அமையும் வரை. பொருள்களின் தரவேறுபாட்டைப் பற்றிக் கவலை கொள்ள வேண்டியதில்லை. கூறுகளிடையே காணப்படும் இத்தகைய வேறுபாடுகள் முற்றிலும் வாய்ப்பு அல்லது எதிர்பாராத காரணங்களால் ஏற்பட்டவையே.

கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு வெளியே கூறுபுள்ளிகள் காணப் படும் போதுதான், மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்டுச் சொல்லத் தகுந்த

காரணங்களால் ஏற்பட்டவை, அவற்றைப் புறக்கணிக்க இயலாது, உற்பத்தி முறையில் கவனம் செலுத்த வேண்டும் என்று வரை படங்கள் எச்சரிக்கின்றன.

நிர்ணயிக்கப்பட்ட தரத்தினைக் குறிக்கும் மையக் கோட்டிலிருந்து விலகி, ஆனால் கட்டுப்பாடு எல்லைக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கின்ற கூறின் தரமாறுபாடுகள் பொறுத்துக் கொள்ளப்படுவதால், எல்லைக் கோடுகளைப் பொறுமை எல்லைகள் (tolerance limits) எனவும் வழங்குவதுண்டு. இத்தகைய வரைபடங்களின் உதவியால், குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களின் மூலம் தரவேறுபாடு ஏற்படும்போது மட்டும், உற்பத்தி முறையில் அதற்கான திருத்தத்தைப் புகுத்திச் செயல்படுவதால், மற்ற நிலைகளில் பொருள், கால விரயம் ஆவது தடுக்கப்படுகிறது.

## கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைத் தீர்மானித்தல்

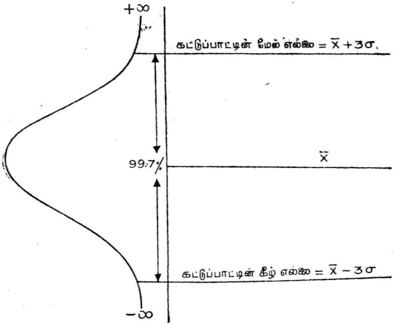
ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரே சமயத்தில் உருவாகின்ற பொருள்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகளுக்கிடையே காணப்படுகின்ற தரமாறுபாடுகளை ஆராய்வதற்கும் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்கள் ஒரே சீரான தரத்துடன் அமைகின்றனவா என ஆராய, பலவேறு சமயங்களில் உற்பத்தியான பொருள்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகளின் தரங்களை ஆராய்வதற்கும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் உதவுகின்றன. இவ்வெல்லைகளுக்கு வெளியே புள்ளிகள் காணப்பட்டால், முறையில் திருத்தம் ஏற்படுத்தி செயல்பட வேண்டியுள்ளதால், இவை செயல் எல்லைகள் (action limits) எனவும் வழங்கப்படுகின்றன.

முந்தைய, தற்போதைய உற்பத்தி விவரங்களிலிருந்தும், பெரிதும் நம்பத்தக்க புள்ளியியல் வாய்பாடுகள் கொண்டும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. பெரும்பாலான நிலைகளில் எல்லைக் கோடுகள், மையக் கோட்டின் இருபுறத்திலும் $3\sigma$ தூரத்தில் அமைந்திருக்கும். இங்கு $\sigma$ என்பது முன்பே தீர்மானிக்கப்பட்ட தரத்திலமைந்த பொருள்கள் அடங்கிய முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கமாகும். இயல் நிலைப் பரவலின் படி $M \pm 3\sigma$ இடைவெளியில் $99{\cdot}73\%$ இராசிகள் அடங்கிவிடுவதால், இத்தகைய எல்லைக் கோடுகள் நம்பத்தக்க முடிவுகளையே தரவல்லவை.

## கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்களின் வகைகள்

(1) $(\bar{x}, \sigma)$ கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள், $(\bar{x}, R)$ கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள். பொருள்களின் தர இயல்புகளுக்கான

[திருகுகளின் விட்டம் (செ. மீ.-ல்), குப்பிகளில் நிரப்பப்பட்டுள்ள தைலத்தின் எடை (மி. கிராமில்)] அளவுக் குறிப்புகள் நம்மிடை இருக்கும்போது இவை வரையப்படுகின்றன. இங்கு $\bar{X}$ = சராசரி, $\sigma$ = திட்டவிலக்கம் $R$ = வீச்செல்லை.




படம் 11—6.

(2) $\bar{X}$ மட்டிற்கான கட்டுப்பாட்டு வரைப்படம். ($\bar{X}$, $R$), அல்லது ($\bar{X}$ $\sigma$) வரைபடங்களிலிருந்து, $\sigma$ அல்லது $R$ஐ விட $\bar{X}$ஐப் பாதிக்கக் கூடிய காரணங்களால் மட்டும், கட்டுப்பாடு குறைகிறது எனத் தெரியவரும்போது, தனியாக $\bar{X}$-க்கான வரைபடம் வரையப்படுகிறது.

(3) $\bar{X}$ஐக் கட்டுப்படுத்துவது தேவையற்றது அல்லது அளவுக்கும் மீறிய பொருள் செலவைத்தரக்கூடியது எனத் தெரிய வரும்போது, $R$ அல்லது $\sigma$ மட்டிற்கான வரைபடம் வரையப் படுகிறது.

(4) $C$-கட்டுப்பாட்டு கோட்டுப் படம் உற்பத்தி ஆகும் பொருள்களின் விட்டம், இழுபலம், நீளம் முதலியவற்றைக் குறிப்பிட்ட அலகுகளில் அளக்கலாம். இத்தகைய அளக்கக் கூடிய தன்மைகளைத் தவிர, சில சமயங்களில் அளக்க இயலாத பண்புகளும் பொருள்களிடைக் காணப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

உற்பத்தி செய்யப்பட்டுள்ள கண்ணாடிக் குப்பிகளில் மூடிகள் நன்கு பொருந்துகின்றனவா, விரிசல் காணப்படுகிறதா, காற்றுக் குமிழிகள் உள்ளனவா என்பவற்றை ஆராய முற்படும் போது ஒவ்வொரு கூறிலும் காணப்படுகின்ற குறைகளின் எண்ணிக்கை $C$யைக் குறிக்கும் வரைபடம் வரையப்படுகிறது.

(5) $p$-கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படம் : இது கூறுகளில் காணப்படும் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்திற்கு ($p$) வரையப்படுகிறது.

மேற்கூறிய பல்வகைக் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள் குறித்து விவரமாகக் காண்போம்.

$\bar{X}$, $R$ **வரைபடங்கள் :** இவை இரண்டையும் ஒரே படமாகக் கொண்டு, பொருள்களின் அளக்கக் கூடிய தன்மைகளைக் கண்டறிவதற்குப் பயன்படுத்தலாம். இவை பொருள்களின் தரத்தின் சராசரி மதிப்பையும், உற்பத்தி முறையின் மாறுபடாத சீரான தன்மையையும் ஆராய்வதற்கு உதவுகின்றன.

ஒரு பொறியில் உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் $n$ அளவுடைய $k$ சமவாய்ப்புக் கூறுகளை எடுத்துக் கொள்வோம் (பொதுவாக $n$, 4 — 6-ஆம், $k$ ... 20ஆவது இருத்தல் நலம்). கூறுகளை உற்பத்திக் காலத்தில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு கூறுக்கும் $\bar{X}$, $\sigma$, $R$, $p$,$C$ போன்றவை கணக்கிடப்படுகின்றன.

| உப கூறு (Sub-sample) | தனிப்பட்ட மதிப்புகள் 1 2 ... $n$ | சராசரி | வீச்சு | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_{11}\ X_{12}\ ...\ X_{1n}$ | $\bar{X}_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{1j}}{n}$ | $R_1$ | $\sigma_1$ |
| 2 | $X_{21}\ X_{22}\ ...\ X_{2n}$ | $\bar{X}_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{2i}}{n}$ | $R_2$ | $\sigma_2$ |
| ⋮ | ⋮ ⋮ ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $k$ | $X_{1}\ X_{k2}\ ...\ X_{kn}$ | $\bar{X}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{kj}}{n}$ | $R_k$ | $\sigma_k$ |

**குறியீடுகள்:** $i$ஆவது குழுவிலுள்ள $j$ஆவது இராசி $X_{ij}$ என்க.

$$i = 1, 2 \ldots k, \; j = 1, 2 \ldots n.$$

$$\therefore \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \text{கூட்டுச் சராசரி } i\text{ஆவது குழு.}$$

$R_i = X_{ij}$ (மீப்பெரு) $- X_{ij}$ (மீச்சிறு) $= i$ஆவது குழுவின் வீச்சு.

$$\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} R_i = \text{எல்லா உப கூறுகளின் வீச்சுகளின்}$$

சராசரி.

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} = \bar{X}_i \text{ உப கூறுகளின் வீச்சுகளின் சராசரி.}$$

$\bar{X}'$ = உற்பத்தி முறையின் சராசரி

$\sigma_x'$ = $x$-ன் உற்பத்தி முறையின் திட்டவிலக்கம்

$\bar{R}'$ = உற்பத்தி முறையின் சராசரி வீச்சு.

$\sigma' R$ = உற்பத்தி முறையின் வீச்சின் திட்டவிலக்கம்.

**எடுத்துக்காட்டு**

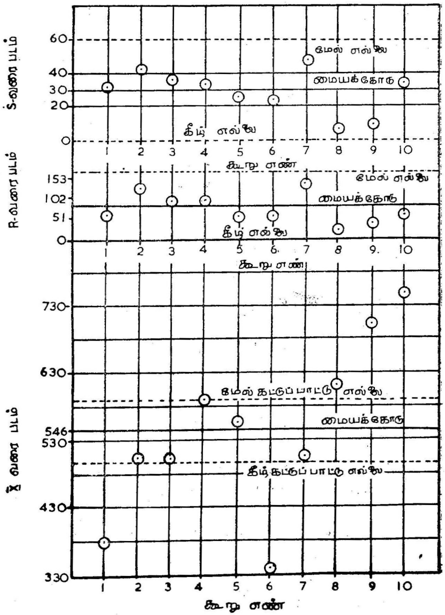
ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் உற்பத்தியில் 6 அளவுடைய 10 கூறுகளின் விவரங்களைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது.

| கூறு : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| சராசரி $\bar{X}$ : | 383 | 508 | 505 | 582 | 557 | 337 | 514 | 614 | 707 | 753 |
| திட்ட விலக்கம் (s) : | 30·5 | 41·6 | 39·5 | 32.2 | 27·4 | 24·2 | 48·7 | 8·9 | 13·1 | 33·9 |
| வீச்சு (R). | 95 | 128 | 100 | 91 | 68 | 65 | 148 | 28 | 37 | 80 |

$\bar{X}$-க்கு இரண்டு வழிகளில் எல்லைகளைக் கணக்கிட்டு, $\bar{x}$, $s$, $R$ இவற்றிற்கான கட்டுப்பாட்டுப் படங்களை வரைக. தொகுதியினுள்

காணப்படும் மாறுபாடு ஒரே தன்மை வாய்ந்ததா? எல்லாத் தொகுதிகளும் ஒரே தன்மை வாய்ந்தவை எனக் கொள்ளலாமா?

## கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்




படம் 11—7

தீர்வு :

$$R\text{-ன் சராசரி} = \Sigma \frac{R}{N} = \frac{840}{10} = 84{\cdot}0\text{-}R \text{ மையக் கோடு}$$

$$s\text{-ன் சராசரி} = \Sigma \frac{s}{N} = \frac{300}{10} = 30{\cdot}0\text{-}s\text{-ன் மையக்கோடு.}$$

$$\bar{X}\text{-ன் சராசரி} = \frac{5460}{10} = 546. \text{ அதாவது } \bar{X}\text{-ன் மையக்கோடு}$$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கத்தின் மதிப்பீட்டை இப்போது நாம் இரு வழிகளில் பெற முடியும். அதாவது $R$-ன் மதிப்பைக் கொண்டு ஒரு வழியிலும், $s$-ன் மதிப்பைக் கொண்டு மற்ருெரு வழியிலும் பெறமுடியும். அட்டவணைகளிலிருந்து, 6 அளவுடைய கூறுகளுக்கான $d_2$, $c_2$ இவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 2·534-ம், 0·8686-ம் ஆகும்.

$$d_2 = \frac{\bar{R}}{\sigma} \text{ அல்லது } \sigma = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{84{\cdot}0}{2{\cdot}534} = 33{\cdot}15.$$

$$c_2 = \frac{\bar{s}}{\sigma} \text{ அல்லது } \sigma = \frac{\bar{s}}{c_2} = \frac{30{\cdot}0}{0{\cdot}8686} = 34{\cdot}53.$$

$\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை $\left(\sigma_{\bar{x}}\right)$ என்பது $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ அல்லது $\frac{33{\cdot}15}{\sqrt{6}}$.

அதாவது 13·53. [வீச்சிலிருந்து மதிப்பீடும்).

$\frac{34{\cdot}53}{\sqrt{6}}$ அதாவது 14·1 (திட்ட விலக்கத்திலிருந்து மதிப்பீடும்).

எனவே $3\sigma$ எல்லை அதாவது 99·7% நம்பிக்கை எல்லைகளைப் பயன்படுத்திஞல், $\bar{X}$-ன் எல்லைகள், வீச்சை அடிப்படையாகக் கொண்டு,

$$\bar{X} \pm 3 \times \sigma\bar{x} = 546 \pm 3 \times 13{\cdot}53$$

அல்லது 586·6-லிருந்து 505·4 வரை.

திட்டவிலக்கத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டால், $\bar{X}$-ன் எல்லைகள் $546 \pm 3 \times 14{\cdot}1$

அல்லது 588·3 முதல் 503·7 வரை.

வீச்சிற்கான எல்லைகளை $D_3$, $D_4$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடலாம். 6 அளவுடைய கூறிற்கான $D_3$, $D_4$ இவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 0-வும், 2·004-ம் ஆகும். எனவே, வீச்சிற்கான எல்லைகள் 0-வும், $84 \times 2{\cdot}004 = 168{\cdot}3$-ம் ஆகும்.

$S$ வரைபடத்துக்கான எல்லைகளை $B_3$, $B_4$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடலாம். மேற்கூறிய அளவுடைய கூறுக்கு $B_3$, $B_4$ இவை முறையே 0·003-ம் 1·997-ம் ஆகும். எனவே, படத்திற்கான எல்லைகள் $30 \times {\cdot}003 = 0{\cdot}10$-ம், $30 \times 1{\cdot}997$ அதாவது 59·9-ம் ஆகும்.

தொகுதிக்குள் காணப்படும் மாறுபாடு சீரான தன்மை கொண்டதா, இல்லையா என்பது திட்டவிலக்கமும் வீச்சும், கட்டுப்பாட்டிற்குள் உள்ளதா, இல்லையா என்பதைப் பொறுத்து அமைகிறது. இதனை $S$-வரைபடம், $R$-வரைபடம் மூலம் அறியலாம். இந்த எடுத்துக்காட்டில், எல்லாக் கூறுப்புள்ளிகளும், $S$, $R$-கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்குள் இருப்பதால், தொகுதிக்குள் காணப்படும் வேறுபாடு வரையறைக்குள் அடங்கியுள்ளது எனலாம்.

எல்லாத் தொகுதிகளும் ஒரே தன்மைவாய்ந்தனவா அல்லவா என்பது, எல்லாக் கூறுகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தனவா, அல்லவா என்பதைப் பொறுத்து உள்ளது. இதனை $\bar{X}$-வரைபடத்திலிருந்து அறியலாம். படத்தில் 10 கூறுப் புள்ளிகளில் இரண்டு கீழ்க்கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்குக்கீழே உள்ளன. மூன்று புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு மேலே உள்ளன. எனவே, வரைபடத்திலிருந்து, கூறுகளின் சராசரிகள் தம்முள் மிகவும் வேறுபடுகின்றன என்றும், அவை ஒரே தன்மைவாய்ந்த தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என்றும் தெரிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு :**

உற்பத்திமுறை கட்டுப்பாட்டிற்குள் இருக்கும்பொழுது 10 அளவுடைய ஒவ்வொரு கூறிலும் குறைபாடுடைய பொருள்களின் எண்ணிக்கையின் சராசரி 1·2 ஆகும். 10 அளவுடைய பல்வேறு கூறுகளிலிருந்து தரக்கட்டுப்பாட்டு வரைபடத்தில் குறைபாடுள்ள பொருள்களைச் சோதிக்க எத்தகைய எல்லைகளை அமைப்பாய் ?

**தீர்வு :**

$$\left.\begin{array}{r}\text{குறைபாடுடைய பொருள்}\\ \text{களின் விகிதம்}\end{array}\right\} (p) = \frac{1{\cdot}2}{10} = 0{\cdot}12$$

| கூறிலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை (n) | சராசரிகளின் கோட்டுப்படம் கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணி. | | | தரவிலக்கங்களின் கோட்டுப் படங்கள் | | | | | விச்செல்லைகளின் கோட்டுப் படங்கள் | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | மையக் கோட்டுக் காரணிகள் | கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணிகள் | | | | மையக் கோட்டுக் காரணி | கட்டுப்பாடு எல்லைகளுக்கான காரணிகள் | | | |
| | $A$ | $A_1$ | $A_2$ | $C_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $d_2$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2·12 | 3·76 | 1·88 | 0·5642 | 0 | 1·84 | 0 | 3· 7 | 1·128 | 0 | 3·69 | 0 | 3·27 |
| 3 | 1·73 | 2·39 | 1·02 | 0·7236 | 0 | 1·86 | 0 | 2·57 | 1·693 | 0 | 4·36 | 0 | 2 57 |
| 4 | 1·50 | 1·88 | 0·73 | 0·7979 | 0 | 1·81 | 0 | 2·27 | 2·059 | 0 | 4·70 | 0 | 2·28 |
| 5 | 1·34 | 1·60 | 0·58 | 0 8407 | 0 | 1·86 | 0 | 2·09 | 2 326 | 0 | 4·92 | 0 | 2·11 |
| 6 | 1·22 | 1·41 | 0·48 | 0·8686 | ·03 | 1·71 | ·03 | 1·97 | 2·534 | 0 | 5·08 | 0 | 2·00 |
| 7 | 1·13 | 1·28 | 0·42 | 0·8882 | ·10 | 1·67 | ·12 | 1·88 | . ·704 | 0·20 | 5·20 | 0·08 | 1·92 |
| 8 | 1·06 | 1·17 | 0·37 | 0·9027 | ·17 | 1·64 | ·19 | 1·81 | 2·847 | 0·39 | 5·31 | 0·14 | 1·86 |
| 9 | 1·00 | 1·09 | 0·34 | 0·9139 | ·22 | 1·61 | ·24 | 1·76 | 2 970 | 0·55 | 5·39 | 0·18 | 1·82 |
| 10 | 0·95 | 1·03 | 0·31 | 0·9227 | ·26 | 1·58 | ·28 | 1·72 | 3.078 | 0·69 | 5·47 | 0·22 | 1·74 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0·90 | 0·97 | 0·29 | 0·9300 | ·30 | 1·56 | ·32 | 1·68 | 3·173 | 0·81 | 5·53 | 0·26 | 1·72 |
| 12 | 0·87 | 0·93 | 0·27 | 0·9359 | ·33 | 1·54 | ·35 | 1·65 | 3·258 | 0·92 | 5·59 | 0·28 | 1·69 |
| 13 | 0·83 | 0·88 | 0·25 | 0·94 0 | ·36 | 1·52 | ·38 | 1·62 | 3·336 | 0·03 | 5·65 | 0·81 | 1·67 |
| 14 | 0·80 | 0·85 | 0·24 | 0·9453 | ·38 | 1·51 | ·41 | 1 59 | 3·407 | 1·12 | 5·69 | 0·33 | 1·65 |
| 15 | 0·77 | 0·82 | 0·22 | 0·9490 | ·41 | 1·49 | ·43 | 1·57 | 3.472 | 1·21 | 5·74 | 0·35 | 1·64 |
| 16 | 0·75 | 0·79 | 0·21 | 0·9523 | ·43 | 1·48 | ·45 | 1·55 | 3·532 | 1·28 | 5·78 | 0·36 | 1·62 |
| 17 | 0·73 | 0·76 | 0·20 | 0·9551 | ·44 | 1·47 | ·47 | 1·53 | 3.588 | 1·36 | 5·82 | 0·38 | 1·61 |
| 18 | 0·71 | 0·74 | 0·19 | 0·9576 | ·46 | 1·45 | ·48 | 1·52 | 3.640 | 1·43 | 5·85 | 0·39 | 1·60 |
| 19 | 0·69 | 0·72 | 0·19 | 0·9599 | ·48 | 1.44 | ·50 | 1·50 | 3·689 | 1·49 | 5·89 | 0·40 | 1·59 |
| 20 | 0·67 | 0·70 | 0·18 | 0·9619 | ·49 | 1·43 | ·51 | 1·49 | 3·735 | 1·55 | 5·92 | 0·41 | |

∴ குறைபாடுடைய பொருள் களின் திட்டப்பிழை } $= \sqrt{npq}$

$= \sqrt{10 \times 0.12 \times 0{\cdot}88}$

$= \sqrt{1{\cdot}056} = 1.03$

வழக்கமாக $2\sigma$, $3\sigma$ எல்லைகளைக் கட்டுப்பாட்டுப் படத்தில் குறிக்க முடியும்.

குறைபாடுடைய பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கு உரிய வெளி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் = குறைபாடுடைய பொருள்களின் சராசரி எண்ணிக்கை $\pm 3 \times$ திட்டப்பிழை.

$= 1{\cdot}2 \pm 3 \times 1{\cdot}03 = 1{\cdot}2 \pm 3{\cdot}09$ அல்லது $4{\cdot}29$, 0.

உள்கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் = குறைபாடுடைய பொருள் களின் எண்ணிக்கை $\pm 2 \times$ திட்டப்பிழை.

$= 1.2 \pm 2 \times 1{\cdot}03 = 1{\cdot}2 \pm 2{\cdot}(6.$

அல்லது $3{\cdot}26$, 0.

**எடுத்துக்காட்டு :**

உலோகத் தகடுகளை உற்பத்தி செய்யும்போது, பின்வரும் எண்கள் 20 கூறுகளில் காணப்படும் குறைகளைத் தருகிறது. குறைகளின் எண்ணிக்கைக்கு $3\sigma$ எல்லைகளைக் காண்க. ($c$-வரைபடம்).

20, 19, 12, 16, 22, 29, 13, 17, 22, 26, 25, 18, 17, 13, 19, 15, 18, 22, 26, 27.

**தீர்வு :**

ஒவ்வொரு கூறிலும் உள்ள குறைகளின் ($c$) சராசரி எண்ணிக்கை } $= \frac{396}{20}$

$= 19{\cdot}8.$

$c$-யின் திட்டப்பிழை $= \sigma c = \sqrt{c} = \sqrt{19{\cdot}8}$

$= 4{\cdot}45.$

∴ $c$-படத்தின் $3\sigma$ எல்லைகள் $C \pm 3\sigma$

$= 19{\cdot}8 \pm 3 \times 4{\cdot}45 = 13{\cdot}2 \pm 13{\cdot}35$

$= 13{\cdot}35, \quad 6{\cdot}45.$

**கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்**

உற்பத்தி முறையின் சராசரி $\bar{X}'$, திட்டவிலக்கம் $\Sigma_x'$ தெரிந்திருக்கும்போது,

$\bar{X}$-வரைபடம்
- மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{X}' + \frac{3\sigma_x'}{\sqrt{n}} = \bar{X}' + A\sigma_x'$
- மையக்கோடு $\bar{X}'$
- கீழ்க் கட்டுப்பாடு எல்லை $\bar{X}' - \frac{3\sigma_x'}{\sqrt{n}} = \bar{X}' - A\sigma_x'$
- குறிக்கப்படுகின்ற புள்ளிகள் $\bar{X}_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, k.$

$R$-வரைபடம்
- மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{R}' + 3\sigma_R' = D_2\ \sigma_2'$
- மையக்கோடு $\bar{R}' = d_2\ \sigma_x'$
- கீழ்க் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{R}' - 3\sigma_R' = D_1\ \sigma_2'$
- குறிக்கப்படுகின்ற புள்ளிகள் $R_i,\ i = 1, 2 \ldots, k.$

(i) இங்கு மாறிலிகள் $A$, $D_1$, $D_2$, $d_2$ முதலியவை ஏதேனும் ஒரு கூறின் ஆய்வுப் பட்டியலில் தரப்பட்டிருக்கும் இவற்றினைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவு $n$-க்கு ஏற்றவாறு காணலாம்.

(ii) முழுமைத் தொகையின் பண்பு அளவுகளை அறியாத நிலையில் இம் மாறிலிகளை உற்பத்தி முறையில் கடந்த கால வரலாற்றிலிருந்து காணலாம். கூறுகளின் சராசரிகளின் சராசரியை $\bar{x}$, $x'$-ன் தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளலாம். உற்பத்தி முறையின் மாறுபடும் தன்மை $\sigma_x'$, $\bar{R}$ மூலமாக மதிப்பிடப் படுகிறது. ($\bar{x}$, $R$ இரு படங்களும் ஒன்றாகப் பயன்படுத்தபடும் பொழுது மட்டுமே) $\sigma_x'$-ன் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாக $\bar{R}$ கொள்ள இயலாதாகையால், இதனை ஒரு மாறிலியால் பெருக்கி ஒருதலை சார்பற்ற மதிப்பீட்டைப் பெறலாம்.

$\bar{X}$-வரைபடம்
- மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{\bar{X}} + A_2\ \bar{R}$
- மையக்கோடு $\bar{\bar{X}}$
- கீழ்க் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{X} - A_2\ \bar{R}$
- குறிக்கப்பட்டுள்ளபுள்ளிகள் $\bar{X}_{ij}\quad i = 1, 2, \ldots, k.$

$\bar{R}$-வரைபடம்
- மேல் கட்டுபாட்டுப் எல்லை $= D_4\ \bar{R}$
- மையக்கோடு $= \bar{R}$
- கீழ்க் கட்டுபாட்டுப் எல்லை $= D_3\ \bar{R}$
- குறிக்கப்படும் புள்ளிகள் $Ri = 1, 2 \ldots, k.$

$\bar{X}$ $\sigma$ **வரைபடங்கள் :**

$\bar{X}$, $\sigma$ வரைபடங்களையும் ஒன்ருகப் பயன்படுத்தலாம். முழுமைத்தொகுதியின் மதிப்புகள் தெரியும்பொழுது

$\bar{X}$ வரைபடம் { மேல் கட்டுபாட்டு எல்லை $\bar{X}' + A\sigma_x'$
மையக்கோடு $\bar{X}$
கீழ்க் கட்டுப்பாட்டு எல்லை $\bar{X}' A\sigma_x'$

$\sigma$ வரைபடம் { மேல் கட்டுபாட்டு எல்லை $B_2\ \sigma_x'$
மையக்கோடு $C_2\ \sigma_x'$
கீழ்க் கட்டுபாட்டு எல்லை $B, \sigma_x'$

$\bar{X}$ $\bar{R}$ வரைபடத்தையும் $\bar{X}$, $\sigma$ வரைபடத்தையும் ஒப்பிடுதல்

இங்கு $A_1 = \frac{3}{C_2}\ \sqrt{n}\quad A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

$$A_2 = \frac{3}{d_2}\ \sqrt{n}\quad B_1 = C_2\ B_3$$

$$B_2 = C_2\ B_4$$

**ஒற்றுமை**

(1) $R$ வரைபடமும், $\bar{X}$ வரைபடமும் உற்பத்தி முறையில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் ஒரே விதத்தில் காட்டுகின்றன.

(2) $n$-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு $R$, $\sigma$ இரண்டின் பரவல்களும் நேர்கோட்டமுடையன. $n$-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க $R$, $\sigma$-வின் கோட்டம் குறைகிறது.

(3) கூறின் அளவு மிகவும் சிறியதாக இருக்கும்பொழுது $R$ வரைபடத்தைப் பயன்படுத்துவது சிக்கனமானதாகவும், $\sigma$ வரைபடத்தைப்போலவே சிறப்பு வாய்ந்ததாகவும் அமைகிறது.

**வேற்றுமை**

(1) திட்டவிலக்கத்தைவிட எளிதாகக் கணக்கிடவும், விளக்கவும், சிக்கனமானதாகவும் வீச்சு அமைகிறது.

(2) $n$ $\sigma$-க்குக் குறைவாக இருக்கும்பொழுது $R$-ல் கீழ்க் கட்டுபாட்டு எல்லை எப்பொழுதும் பூச்சியமாகக் கொள்ளலாம்.

(3) பெருங் கூறுகளுக்கு $R$ வரைபடங்கள் $\sigma$ வரைபடங்களைப் போன்று பயன்தரத் தக்கதல்ல. ஏனெனில் $n > 12$ ஆகும்பொழுது $R$-ன் சிறப்புத் தன்மை குறைந்துகொண்டே வருகிறது.

**உற்பத்தி செய்வோருக்கு வரக்கூடிய தீங்கு** (Producer's Risk)

ஒரு பெருந் தொகுதியில் உற்பத்தி செய்யப்பட்டுள்ள பொருள்கள் அனைத்தும் குறிப்பிட்ட அளவுத் திட்டத்திற்கு முற்றிலும் பொருந்துமாறு அமைப்பது இயலாதது ஒன்றாகும். இப் பெருந்தொகுதியிலிருந்து, ஒவ்வொரு பொருளின் தன்மையையும் ஆராய்ந்து குறைபாடுள்ள வற்றின் உண்மையான விகித சமத்தை ஆராய இயலாததாதலால், கூறுகளிலிருந்து அது ஏறத்தாழக் கணக்கிடப்படுகிறது. பொருள்களின் உற்பத்தியின் முந்தைய வரலாற்றிலிருந்து அவற்றில் எதிர்பார்க்கக் கூடிய குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை தீர்மானிக்கப் படுகிறது. நாம் எடுத்துக் கொண்ட கூறிலுள்ள குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை இதனைவிடக் குறைவாக இருக்கு மானால், உற்பத்தியான பொருள்களின் தொகுதி ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. சில சமயங்களில் சோதனை செய்யப்படும் கூறுகளிலிருந்து பாதகமான முடிவு, அதாவது, உற்பத்தி செய்யப்பட்ட எல்லாப் பொருள்களும் குறைபாடுள்ளவை என்ற முடிவிற்கு வர வேண்டியிருக்கலாம். ஆனால், உண்மையில் அப் பொருள்கள் யாவும் தரத்தில் குறையாதனவாக இருக்கலாம். இருப்பினும் கூறுகளின் சோதனைகளின் முடிவின்படி உற்பத்தி செய்யப்பட்ட எல்லாப் பொருள்களுமே தரமற்றவை என ஒதுக்கி விடும் நிலை ஏற்படுகிறது. இவ்வாறு உண்மையில் தரமான பொருள்களாக உள்ளவற்றைத் தவறான கணிப்பின் மூலம் தரமற்றவை எனத் தீர்மானிப்பதனால், அப் பொருள்களை உற்பத்தி செய்வோருக்குப் பெரும் இழப்பு ஏற்படுகிறது. இதனை முதல் வகைப் பிழை $\alpha$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இதுவே உற்பத்தி செய்வோருக்கு வரக் கூடிய தீங்கு.

**நுகர்வோருக்கு வரக்கூடிய தீங்கு** (Consumer's Risk)

முன் கூறியதற்கு மாறாக, உண்மையிலேயே தரத்தில் குறைந்த பொருள்களின் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகளின் தவறான கணிப்பின் மூலம், அப் பொருள்களின் தொகுதி ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என்னும் பாதகமான முடிவு கிடைக்கலாம். இத் தவறான முடிவினை நம்பி, பொருள் தொகுதியை வாங்குவோர் பெருமளவில் இழப்பு அடைவர். இஃது இரண்டாம் வகைப் பிழை $\beta$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. இதுவே நுகர்வோருக்கு வரக்கூடிய தீங்காகும்.

உற்பத்தி செய்வோரது நலனும் நுகர்வோரது நலனும், ஒன்றுக்கொன்று முரணானவையல்ல. எவ்வாறு பொருளை

உற்பத்தி செய்பவர், தமது பொருளின் மீது தவருகக் குற்றம் சாட்டி, இதன் விற்பனையைப் பாதிக்கக்கூடிய நிலையைத் தடுக்க விரும்புகிருரோ, அவ்வாறே நுகர்வோர் தரங் குறைந்த பொருளை ஏமாந்து வாங்கக் கூடிய நிலை தமக்கு வரக்கூடாது என, அதனைத் தடுக்க விரும்புகிருர். எனவே, உற்பத்தி செய்வோர் நுகர்வோரது நம்பிக்கைக்கு உரிய வகையில் பொருள்களின் தரம் கெடாதவாறும் அதே சமயம் உற்பத்திச் செலவில் புதிய முறைகளைப் பின்பற்றிச் சிக்கனமுடனும் பொருள்களை உருவாக்குதல் இரு சாராருக்கும் நன்மை பயக்கும். நுகர்வோரது தேவைக்கேற்பப் பொருளை உற்பத்தி செய்து, அவர்களது திருப்தி மூலம் பெறப்படும் இலாபமே (Integrated Marketing) தற்போதைய விற்பனைத் துறையின் சிறப்பு நோக்கமாகும். இதற்கு எடுத்துக் காட்டாக திரு. ஹென்றிபோர்டு நுகர்வோரது கருத்தறிந்து செயல்பட மேற்கொண்ட முறையைக் கூறலாம். பொது மக்களிடமே "எந்த விலைக்குக் காரை வாங்குவது எளிதாக இருக்கும் என எதிர்பார்க்கிறீர்கள் ?" என்ற வினவிற்கு விடைகளை யறிந்து, அவற்றின் அடிப்படையில் காரின்விலை அமையுமாறு, அத்தகைய காரை உருவாக்குமாறு தமது உதவியாட்களைப் பணித்ததாகக் கூறப்படுகிறது.

## பயிற்சி

(1) கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்களின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக. [மதுரை 1971 செப்.]

(2) தரக் கட்டுப்பாட்டின் பொருள், முக்கியத்துவம் ஆகியவற்றினைப் பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக.

(3) ஒரு தொழிற்சாலையில் புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டுப் பிரிவு எவ்வாறு அமைக்கப்பட்டு இயங்குகிறதென்பதை விளக்கவும். [மதுரை 1966 செப்.]

(4) $\bar{X}$-க்கான கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படம் வரையும் முறையினை விளக்குக [மதுரை 971 செப்.]

(5) முழு இனத் தொகுதியின் (Population) தரவிலக்கம் (அ) தெரிந்த போது, (ஆ) அது தெரியாத போது சராசரிக்கும், வீச் செல்லைக்குமான கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படத்தை வரையும் முறையினை விளக்குக. [மதுரை 1971 செப்.]

(6) புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டின் பயன்களை விவரிக்கவும். [மதுரை 1971 ஏப்ரல்]

(7) மின் காப்பு எரியிழை (பத்து ஆம்பியர்) உற்பத்திசெய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில் 3 மின் காப்பு எரியிழை கொண்ட கூறுகள் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் இரண்டு நாள்கள் தொடர்ச்சியாக எடுக்கப் பட்டதில் பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ளபடி புள்ளி விவரம் கிடைக்கிறது :

| கூறுகளின் எண்ணிக்கை | மின்சாரம் (ஆம்பியரில்) | | | கூறுகளின் எண்ணிக்கை | மின்சாரம் (ஆம்பியரில்) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 10·2, | 10·1, | 10·3 | (9) | 10·0 | 9·8 | 9·8 |
| (2) | 9·7, | 9·9, | 10·4 | (10) | 9·8 | 9·7 | 10·0 |
| (3) | 10·6, | 10·1, | 9·9 | (11) | 10·1 | 10·1 | 10·1 |
| (4) | 10·1, | 9·8, | 10·3 | (12) | 10·3 | 10·2 | 10·3 |
| (5) | 9·8, | 10·0, | 10·2 | (13) | 10·0 | 10·2 | 10·0 |
| (6) | 10·2, | 10·1, | 10·0 | (14) | 10·0 | 10·1 | 10·2 |
| (7) | 9·5, | 10·1 | 9·7 | (15) | 10·1 | 10·4 | 10·1 |
| (8) | 9·9, | 9·9, | 9·7 | (16) | 10·5 | 10·2 | 10·4 |

தகுந்த கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள் வரைந்து உற்பத்தி முறை கட்டுப் பாட்டுக்குள் உள்ளதா எனக் காண்க.

[விடை : சராசரி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் 9·735, 10·387; வீச்செல்லைக் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் 0,0·921.]

(8) ஒருவகை விமானத்தில் பாகங்களை இணைத்தலில் ஏற்பட்ட குற்றங்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது :

| விமானத்தின் எண்ணிக்கை | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| இணைத்தலிலுள்ள குற்றங்கள் | 7 | 4 | 8 | 12 | 9 | 5 | 5 | 6 | 8 | 10 |

இப் புள்ளி விவரத்திற்கு $C$ மதிப்பு கணிக்கவும். கோட்டுப் படத்திற்கான கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை, $C = 7{\cdot}4$ ; மேல் எல்லை 15·56 ; கீழ் எல்லை 0.]

## மடக்கைகள்

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1318 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3433 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |

$$\log_e N = 2{\cdot}303 \log_{10} N.$$

## மடக்கைகள்

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9235 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9653 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |

$$\log_{10} N = \cdot 4343 \log_e N.$$

## எதிர் மடக்கைகள்

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| ·40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| ·49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

## எதிர் மடக்கைகள்

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ·51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| ·56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| ·61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | [illegible] |
| ·63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| ·67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| ·71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| ·72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| ·73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ·74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| ·77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| ·78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| ·79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| ·80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| ·81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| ·84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| ·85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| ·88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| ·89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| ·90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| ·93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| ·96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| ·97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| ·98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| ·99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |

இயல்நிலை வரையில் பரப்புப்பட்டியல் $\int_0^t \phi(t)\, dt.$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·0 | ·0000 | ·0040 | ·0080 | 0120 | ·0160 | ·0199 | ·0239 | ·0279 | ·0319 | ·0359 |
| ·1 | ·0398 | ·0438 | ·0478 | ·0515 | ·0557 | ·0596 | ·0636 | ·0675 | ·0714 | ·0753 |
| ·2 | ·0793 | ·0832 | ·0871 | ·0910 | .0948 | ·0987 | ·1026 | ·1064 | ·1103 | ·1141 |
| ·3 | ·1179 | ·1217 | ·1255 | ·1293 | ·1331 | ·1368 | ·1409 | ·1443 | ·1480 | ·1517 |
| ·4 | ·1554 | ·1591 | ·1628 | ·1664 | ·1700 | ·1736 | ·1772 | ·1808 | ·1844 | ·1879 |
| ·5 | ·1915 | ·1950 | ·1985 | ·2019 | ·2054 | ·2088 | ·2123 | ·2157 | ·2190 | ·2224 |
| ·6 | ·2257 | ·2291 | ·2324 | ·2357 | ·2389 | ·2422 | 2454 | ·2486 | ·2517 | ·2549 |
| ·7 | ·2580 | ·2611 | ·2642 | ·2 73 | ·2703 | ·2734 | ·2764 | ·2794 | ·2823 | ·2852 |
| ·8 | ·2881 | 2910 | ·2939 | ·2967 | ·2995 | ·3023 | ·3051 | ·3078 | ·3106 | ·3133 |
| ·9 | ·3159 | ·3186 | ·3212 | ·3238 | ·3264 | ·3289 | ·3315 | ·3340 | ·3365 | ·3389 |
| 1·0 | ·3413 | ·3438 | 3461 | ·3485 | ·3501 | ·3531 | ·3554 | ·3577 | ·3599 | ·3621 |
| 1·1 | ·3643 | ·3665 | 3686 | ·3708 | ·3729 | ·3749 | ·3770 | ·3790 | ·3810 | ·3830 |
| 1·2 | ·3849 | 3869 | ·3888 | ·3907 | ·3925 | ·3944 | ·3922 | ·3980 | ·3997 | ·4015 |
| 1·3 | ·4032 | 4049 | ·4066 | ·4082 | ·4096 | ·4115 | ·4131 | ·4147 | ·4162 | ·4177 |
| 1·4 | ·4192 | .4207 | ·4222 | ·4236 | ·4251 | ·4265 | ·4279 | ·4292 | ·4306 | ·4319 |
| 1·5 | ·4332 | ·4345 | ·4357 | ·4370 | ·4382 | ·4394 | ·4406 | ·4418 | ·4429 | ·4441 |
| 1·6 | ·4452 | ·4463 | ·4474 | ·4484 | ·4495 | ·4505 | ·4515 | .4525 | ·4535 | ·4545 |
| 1·7 | ·4554 | ·4564 | ·4573 | ·4582 | ·4591 | ·4599 | ·4608 | ·4616 | ·4625 | ·4633 |
| 1·8 | ·4641 | 4649 | ·4656 | ·4664 | ·4671 | ·4678 | 46 6 | ·4693 | .4699 | ·4706 |
| 1·9 | ·4713 | ·4719 | ·4726 | ·4732 | ·4738 | ·4744 | ·4750 | ·4756 | ·4761 | ·4767 |
| 2·0 | ·4772 | ·4778 | ·4783 | ·4788 | ·4793 | ·4798 | 4803 | ·4808 | 4812 | ·4817 |
| 2·1 | ·4821 | ·4825 | ·4830 | ·4834 | ·4838 | 4842 | ·4846 | ·4850 | ·4854 | ·4857 |
| 2·2 | ·4861 | ·4864 | ·4868 | ·4871 | ·4875 | ·4878 | ·4881 | ·4884 | ·4887 | ·4890 |
| 2·3 | ·4893 | ·4896 | ·4898 | .4901 | ·4904 | ·4906 | ·4909 | ·4911 | ·4913 | ·4916 |
| 2·4 | 4918 | ·4920 | ·4922 | ·4925 | ·4927 | 4929 | ·4931 | ·4932 | ·4934 | ·4936 |
| 2·5 | ·4938 | ·4940 | 4941 | ·4943 | ·4945 | 4946 | 4948 | ·4959 | 4951 | ·4952 |
| 2·6 | ·4853 | ·4955 | ·4956 | ·4957 | ·4959 | 4960 | ·4961 | ·4962 | ·4963 | .4964 |
| 2·7 | ·4965 | 4966 | ·4967 | ·4968 | ·4969 | .4970 | ·4971 | ·4972 | ·4973 | ·4974 |
| 2·8 | ·4974 | ·4975 | ·4976 | ·4977 | ·4977 | ·4978 | ·4979 | ·4979 | .4980 | ·4981 |
| 2·9 | ·4981 | ·4982 | ·4982 | ·4983 | ·4984 | ·4984 | ·4985 | ·4885 | ·4986 | ·4986 |
| 3·0 | ·4987 | ·4987 | ·4987 | ·4988 | ·4988 | 4989 | ·4989 | ·4989 | ·4990 | ·4990 |
| 3·1 | ·4990 | ·4991 | ·4991 | ·4991 | ·4992 | 4992 | .4992 | ·4992 | ·4993 | ·4993 |
| 3·2 | ·4993 | ·4993 | ·4994 | ·4994 | 4994 | .4994 | ·4994 | ·4995 | ·4995 | ·4995 |
| 3·3 | ·4995 | ·4995 | ·4995 | ·4996 | ·4996 | ·4996 | 4996 | ·4996 | ·4 96 | ·4997 |
| 3·4 | ·4997 | ·4997 | ·4997 | ·4997 | ·4997 | ·4997 | 4997 | ·4997 | ·4997 | ·4998 |
| 3·5 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 | ·4998 |
| 3·6 | ·4998 | ·4998 | 4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 |
| 3·7 | ·4999 | ·4999 | ·4998 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 |
| 3 8 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4999 | ·4969 | ·4999 | ·4999 | .4999 |
| 3·9 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | ·5000 | .5000 |

## இயல்நிலை வரையின் நிலைத்தூரங்களின் பட்டியல்

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

| t | ·00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | ·398 | ·3989 | ·3989 | ·3988 | ·3986 | ·398 | ·39 2 | ·3980 | ·3977 | ·3973 |
| 0·1 | ·3970 | ·3965 | ·3961 | ·3956 | 3951 | ·3945 | ;3939 | ·3932 | ·3925 | ·3918 |
| 0·2 | ·3910 | ·3902 | ·3894 | ·3885 | ·3876 | 3867 | .3857 | ·3847 | ·3836 | ·3825 |
| 0·3 | ·3814 | ·3802 | ·3790 | ·3778 | ·3765 | ·3752 | ·3739 | ·3725 | ·3712 | ·3697 |
| 0·4 | ·3683 | .3668 | .3653 | ·3637 | ·3621 | ·3 05 | ·3589 | ·3572 | ·3555 | ·3538 |
| 0·5 | ·3521 | ·3506 | ·3485 | ·3467 | ·3448 | ·3429 | ·3410 | ·3391 | ·3372 | ·3352 |
| 0·6 | ·3332 | ·3315 | ·3292 | ·3271 | ·3251 | ·3230 | ·3209 | ·3187 | ·3166 | ·3144 |
| 0·7 | ·3123 | ·3101 | ·3076 | ·3056 | ·3034 | ·3011 | ·2989 | ·2966 | ·2943 | ·2920 |
| 0·8 | ·2897 | ·2871 | ·2850 | ·2827 | ·2803 | ·2780 | ·2759 | ·2732 | ·2709 | ·2685 |
| 0·9 | ·2661 | ·2636 | ·2613 | ·2589 | ·2565 | ·2541 | ·2516 | ·2492 | ·2468 | ·2444 |
| 1·0 | ·2420 | ·2396 | ·2371 | ·2347 | ·2323 | ·2299 | ·2275 | ·2 51 | ·2227 | ·2203 |
| 1.1 | ·2179 | ·2155 | 2131 | ·2107 | 2083 | ·205 | ·2036 | ·2012 | ·1989 | ·1965 |
| 1·2 | ·1942 | ·1919 | .1895 | ·1872 | ·1849 | 1826 | .1804 | ·1781 | ·1758 | ·1736 |
| 1·3 | ·1714 | ·1691 | ·1669 | 1647 | ·1626 | ·1604 | ·1582 | ·1561 | ·1539 | ·1518 |
| 1·4 | ·1497 | ·1476 | ·1456 | ·1435 | ·1415 | ·1394 | ·1374 | ·1354 | ·1334 | ·1315 |
| 1·5 | 1295 | ·1276 | ·1257 | ·1238 | ·1219 | ·1200 | ·1182 | ·1163 | ·1145 | ·1127 |
| 1·6 | ·1109 | ·1092 | .1074 | ·1057 | ·1040 | ·1023 | ·1006 | ·0989 | .0973 | ·0957 |
| 1·7 | ·0940 | ·0925 | ·0909 | ·0893 | ·0878 | ·0863 | ·0848 | ·0833 | ·081 | ·0804 |
| 1·8 | ·0790 | ·0775 | ·0761 | ·0748 | ·0734 | 0721 | 0707 | 0694 | ·0681 | ·0669 |
| 1.9 | ·0656 | · 644 | ·0632 | ·0620 | ·0608 | ·0596 | ·0584 | ·0573 | ·0562 | ·0551 |
| 2·0 | ·0540 | ·0529 | 0519 | 0508 | ·0498 | ·0488 | ·0478 | 0468 | ·0459 | ·0449 |
| 2·1 | ·0440 | ·0431 | ·0422 | ·0413 | · 404 | ·0396 | ·0387 | ·0379 | ·0371 | ·0363 |
| 2·2 | 0355 | ·0347 | 0339 | ·0332 | ·0325 | ·0317 | ·0310 | ·0303 | ·0297 | ·0290 |
| 2·3 | ·0283 | ·0277 | ·0270 | ·0264 | ·0258 | ·0252 | ·0246 | ·0241 | ·0235 | ·0229 |
| 2·4 | ·0224 | ·0219 | ·0213 | ·0208 | ·0203 | ·0198 | ·0194 | ·0188 | ·0184 | 0180 |
| 2·5 | ·0175 | ·0171 | ·0167 | ·0163 | ·0158 | ·0154 | ·0151 | ·0147 | ·0143 | ·0139 |
| 2·6 | ·0136 | ·0132 | ·0129 | · 126 | ·0122 | ·0119 | ·0116 | 0113 | ·0110 | ·0107 |
| 2·7 | ·0104 | ·0101 | ·0099 | ·0095 | ·0093 | ·0091 | 0088 | 0086 | ·0084 | ·0081 |
| 2·8 | ·0079 | ·0077 | ·0075 | ·0073 | ·0071 | ·0069 | .0067 | ·0065 | ·0063 | ·0061 |
| 2·9 | ·0060 | ·0058 | ·0056 | ·0055 | ·0053 | ·0051 | ·0050 | ·0048 | ·0047 | ·0046 |
| 3·0 | .0044 | ·0043 | ·0042 | ·0040 | .0039 | ·0038 | ·0037 | ·0036 | ·0035 | ·0034 |
| 3·1 | .0033 | ·0032 | ·0031 | ·0030 | ·0029 | ·0028 | ·0027 | 0026 | ·00 5 | ·0025 |
| 3·2 | 0024 | ·0023 | ·0022 | ·0022 | ·0021 | ·0020 | ·0020 | 0019 | ·0018 | ·0018 |
| 3·3 | ·0017 | ·0017 | ·0016 | ·0016 | ·0015 | ·0015 | 0014 | ·0014 | ·0013 | ·0013 |
| 3·4 | ·0012 | ·0 12 | ·0012 | ·0011 | ·0011 | ·0010 | ·0010 | .0010 | ·0009 | .0009 |
| 3·5 | ·0009 | ·0008 | .0008 | ·00 8 | ·0008 | ·0007 | ·0007 | ·0007 | ·0007 | ·0006 |
| 3.6 | ·0006 | ·0006 | 0006 | ·0 05 | ·0005 | ·0005 | ·0005 | ·0005 | ·0005 | ·0004 |
| 3·7 | ·0004 | ·0004 | ·0004 | ·0004 | ·0004 | ·0004 | ·0003 | ·0003 | ·0003 | ·0003 |
| 3.8 | ·0003 | ·0003 | ·0003 | ·0003 | .0003 | ·0002 | ·0002 | ·0002 | ·0002 | ·0002 |
| 3·9 | .0002 | ·0002 | ·0002 | ·0002 | 0002 | .0002 | ·0002 | ·0002 | ·0001 | ·0001 |

## SIGNIFICANT POINTS OF $\chi^2$

| $\frac{\text{நிகழ்தகவு}}{\text{கட்டின்மை கூறு}}$ | $P = 099$ | 0·95 | 0·50 | 0·10 | 0·05 | 0·02 | 0·01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ·000157 | ·00393 | ·455 | 2·706 | 3·841 | 5·412 | 6·635 |
| 2 | ·0201 | ·103 | 1·386 | 4·605 | 5·991 | 7·824 | 9·210 |
| 3 | ·115 | ·352 | 2·366 | 6·251 | 7·815 | 9·837 | 11·341 |
| 4 | ·297 | ·711 | 3·357 | 7·779 | 9·488 | 11·668 | 13·277 |
| 5 | ·554 | 1·145 | 4·351 | 9·236 | 11·070 | 13·388 | 15·086 |
| 6 | ·872 | 1·635 | 5·348 | 10·645 | 12·592 | 15·033 | 16·812 |
| 7 | 1·239 | 2·167 | 6·346 | 12·017 | 14·067 | 16·622 | 18·475 |
| 8 | 1·646 | 2·733 | 7·344 | 13·362 | 15·507 | 18·168 | 20·090 |
| 9 | 2·088 | 3·325 | 8·343 | 14·684 | 16·919 | 19·679 | 21·666 |
| 10 | 2·558 | 3·940 | 9·342 | 15·987 | 18·307 | 21·161 | 23·209 |
| 11 | 3·053 | 4·575 | 10·341 | 17·275 | 19·675 | 22·618 | 24·725 |
| 12 | 3·571 | 5·226 | 11·340 | 18·549 | 21·026 | 24·054 | 26·217 |
| 13 | 4·107 | 5·892 | 12·340 | 19·812 | 22·362 | 25·472 | 27·688 |
| 14 | 4·660 | 6·571 | 13·339 | 21·064 | 23·685 | 26·873 | 29·141 |
| 15 | 5·229 | 7·261 | 14·339 | 22·307 | 24·996 | 28·259 | 30·578 |
| 16 | 5·812 | 7·962 | 15·338 | 23·542 | 26·296 | 29.633 | 32·000 |
| 17 | 6·408 | 8·672 | 16·338 | 24.769 | 27·587 | 30·995 | 33·409 |
| 18 | 7·015 | 9·390 | 17·338 | 25·989 | 28·869 | 32·346 | 34·805 |
| 19 | 7·633 | 10·117 | 18·338 | 27·204 | 30·144 | 33·687 | 36·191 |
| 20 | 8·260 | 10·851 | 19·337 | 28·412 | 31·410 | 35·020 | 37.566 |
| 21 | 8·897 | 11·591 | 20·337 | 29·615 | 32·671 | 36.343 | 38.932 |
| 22 | 9·542 | 12·338 | 21·337 | 30·813 | 33·924 | 37.659 | 40.289 |
| 23 | 10·196 | 13·091 | 22·337 | 32·007 | 35·172 | 38.968 | 41.638 |
| 24 | 10·856 | 13·848 | 23·337 | 33.196 | 36·415 | 40.270 | 42.980 |
| 25 | 11·524 | 14.611 | 24·337 | 34·382 | 37·652 | 41.566 | 44.314 |
| 26 | 12·198 | 15·379 | 25·336 | 35·563 | 38·885 | 42.856 | 45.642 |
| 27 | 12·879 | 16·151 | 26·336 | 36·741 | 40·113 | 44·140 | 46.963 |
| 28 | 13·565 | 16·928 | 27·336 | 37·916 | 41.337 | 45.419 | 48.279 |
| 29 | 14·256 | 17·708 | 28·336 | 39·087 | 42·557 | 46.693 | 49·588 |
| 30 | 14·953 | 18·493 | 29·336 | 40.256 | 43·773 | 47.962 | 50.892 |

$\gamma$ = கட்டின்மைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை.

## t-அட்டவணை

விலகல் ± t எல்லைக்கு வெளியே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு தரப்பட்டுள்ளது.

| p / r | நிகழ்தகவு | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0·50. | 0·10. | 0·05. | 0 02. | 0·01. | 0·001. |
| 1 | 1·00 | 6·31 | 12·71 | 31·82 | 63·66 | 636·62 |
| 2 | 0·82 | 2·92 | 4·30 | 6·97 | 9·93 | 31·60 |
| 3 | 0·77 | 2·35 | 3·18 | 4·54 | 5·84 | 13·94 |
| 4 | 0·74 | 2·13 | 2·77 | 3·75 | 4·60 | 8·61 |
| 5 | 0·73 | 2·02 | 2·57 | 3·37 | 4·03 | 6·86 |
| 6 | 0·72 | 1·94 | 2·45 | 3·14 | 3·71 | 5·96 |
| 7 | 0·71 | 1·90 | 2·36 | 3·00 | 3·50 | 5·41 |
| 8 | 0·71 | 1·86 | 2·31 | 2·90 | 3·36 | 5·04 |
| 9 | 0·70 | 1·83 | 2·26 | 2·82 | 3·25 | 4·78 |
| 10 | 0·70 | 1·81 | 2·23 | 2·76 | 3·17 | 4·59 |
| 11 | 0·70 | 1·80 | 2·20 | 2·72 | 3·11 | 4·44 |
| 12 | 0·70 | 1·78 | 2·18 | 2·68 | 3·06 | 4·33 |
| 13 | 0·69 | 1·77 | 2·16 | 2·65 | 3·01 | 4·22 |
| 14 | 0·69 | 1·76 | 2·15 | 2·62 | 2·98 | 4·14 |
| 15 | 0·69 | 1·75 | 2·13 | 2·60 | 2·95 | 4·07 |
| 16 | 0·69 | 1·75 | 2·12 | 2·58 | 2·92 | 4·02 |
| 17 | 0·69 | ·174 | 2·11 | 2·57 | 2·90 | 3·97 |
| 18 | 0·69 | 1·73 | 2·10 | 2·55 | 2·88 | 3·92 |
| 19 | 0·69 | 1·73 | 2·09 | 2·54 | 2·86 | 3·88 |
| 20 | 0·69 | 1·73 | 2·09 | 2·53 | 2·85 | 3·84 |
| 21 | 0·69 | 1·72 | 2·08 | 2·52 | 2·83 | 3·83 |
| 22 | 0·69 | 1·72 | 2·07 | 2·51 | 2·82 | 3·79 |
| 23 | 0·69 | 1·71 | 2·07 | 2·50 | 2·81 | 3·77 |
| 24 | 0·69 | 1·71 | 2·06 | 2.49 | 2·80 | 3·75 |
| 25 | 0·68 | 1·71 | 2·06 | 2·49 | 2·79 | 3·73 |
| 26 | 0·68 | 1·71 | 2·06 | 2·48 | 2·78 | 3·71 |
| 27 | 0·68 | 1·70 | 2·05 | 2·47 | 2·77 | 3·69 |
| 28 | 0·68 | 1·70 | 2·05 | 2·47 | 2·76 | 3·67 |
| 29 | 0·98 | 1·70 | 2.05 | 2·46 | 2·76 | 3·66 |
| 30 | 0·68 | 1·70 | 2·04 | 2·46 | 2·75 | 3·65 |
| ∞ | 0·67 | 1·65 | 1·96 | 2·33 | 2·58 | 3·65 |

## $F$-அட்டவணை

$F$-ன் 5% புள்ளிகள்.

| $v_1$ / $v_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161·4 | 199·5 | 216·7 | 224 6 | 230 2 | 34·0 | 238·9 | 243·9 | 249·0 | 254·3 |
| 2 | 18·51 | 9·00 | 19·16 | 19·25 | 19·30 | 19·33 | 19·37 | 19·41 | 19·45 | 19·50 |
| 3 | 10·13 | 9·55 | 9.28 | 9·12 | 9·01 | 8 94 | 8·84 | 8·74 | 8·64 | 8·53 |
| 4 | 7·71 | 6·94 | 6·59 | 6·39 | 6·26 | 6 16 | 6·04 | 5·91 | 5·77 | 5·63 |
| 5 | 6·61 | 5·79 | 5·41 | 5·19 | 5 05 | 4 95 | 4·82 | 4·68 | 4·53 | 4·36 |
| 6 | 5·99 | 5·14 | 4·76 | 4·53 | 4·39 | 4·28 | 4·15 | 4·00 | 3·84 | 3·67 |
| 7 | 5·59 | 4·74 | 4·35 | 4·12 | 3·97 | 3·87 | 3·73 | 3·57 | 3·41 | 3·23 |
| 8 | 5·32 | 4·46 | 4·07 | 3·84 | 3·69 | 3·58 | 3·44 | 3·28 | 3·12 | 2·93 |
| 9 | 5·12 | 4·26 | 3·86 | 3·63 | 3·49 | 3·36 | 3·23 | 3·07 | 2·90 | 2·71 |
| 10 | 4·96 | 4·10 | 3·71 | 3·48 | 3·33 | 3·22 | 3 07 | 2·91 | 2·74 | 2·54 |
| 11 | 4·80 | 3·98 | 3·59 | 3·36 | 3·20 | 3·09 | 2·95 | 2·79 | 2·61 | 2·40 |
| 12 | 4·75 | 3·88 | 3·49 | 3·26 | 3·11 | 3·00 | 2·85 | 2·69 | 2·50 | 2·30 |
| 13 | 4·67 | 3·80 | 3·41 | 3·18 | 3·02 | 2·92 | 2·77 | 2·60 | 2·42 | 2·21 |
| 14 | 4·60 | 3·74 | 3·34 | 3·11 | 2 96 | 2·85 | 2·70 | 2·53 | 2·35 | 2·13 |
| 15 | 4·54 | 3·68 | 3·29 | 3·06 | 2 90 | 2·79 | 2·64 | 2·48 | 2·29 | 2·07 |
| 16 | 4·49 | 3·63 | 3·24 | 3 01 | 2·85 | 2·74 | 2·59 | 2·42 | 2·24 | 2·01 |
| 17 | 4·45 | 3·59 | 3·20 | 2·96 | 2·81 | 2 70 | 2·55 | 2·38 | 2·19 | 1·96 |
| 18 | 4·41 | 3·55 | 3·16 | 2·93 | 2·77 | 2 66 | 2 51 | 2·34 | 2·15 | 1·92 |
| 19 | 4·38 | 3·52 | 3·13 | 2 90 | 2·74 | 2 63 | 2 48 | 2·31 | 2·11 | 1·88 |
| 20 | 4·35 | 3·49 | 3·10 | 2·87 | 2·71 | 2·60 | 2 45 | 2·28 | 2·08 | 1·84 |
| 21 | 4·32 | 3·47 | 3·07 | 2·84 | 2·68 | 2·57 | 2·42 | 2·25 | 2·05 | 1·81 |
| 22 | 4·30 | 3·43 | 3·05 | 2·82 | 2·66 | 2·55 | 2·40 | 2·23 | 2·03 | 1·78 |
| 23 | 4·28 | 3·42 | 3·03 | 2 80 | 2 64 | 2·53 | 2·38 | 2·20 | 2·00 | 1·76 |
| 24 | 4·25 | 3·40 | 3·01 | 2·78 | 2 62 | 2·51 | 2·36 | 2·18 | 1·98 | 1·73 |
| 25 | 4·24 | 3·38 | 2·99 | 2·76 | 2·6 | 2·49 | 2·34 | 2·16 | 1·96 | 1·71 |
| 26 | 4·22 | 3·37 | 2·98 | 2·74 | 2·59 | 2·47 | 2·32 | 2·15 | 1·95 | 1·69 |
| 27 | 4·21 | 3·35 | 2·96 | 2·73 | 2·57 | 2·46 | 2·30 | 2·13 | 1·93 | 1·67 |
| 28 | 4·20 | 3·34 | 2·95 | 2 71 | 2·56 | 2·44 | 2·29 | 2·12 | 1·91 | 1·65 |
| 29 | 4 18 | 3·33 | 2·93 | 2 70 | 2·54 | 2·43 | 2·2[illegible] | 2·10 | 1·90 | 1·64 |
| 30 | 4·17 | 3 32 | 2 92 | 2·69 | 2·53 | 2·42 | 2·27 | 2·09 | 1·89 | 1·62 |
| 40 | 4·08 | 3·23 | 2·84 | 2 61 | 2·45 | 2·34 | 2 18 | 2·00 | 1·79 | 1·51 |
| 60 | 4 00 | 3·15 | 2·76 | 2.52 | 2·37 | 2·25 | 2·10 | 1·92 | 1·72 | 1·39 |
| 120 | 3·92 | 3·06 | 2·68 | 2 45 | 2 29 | 2·17 | 2·02 | 1·83 | 1·61 | 1·25 |
| ∞ | 3·84 | 2·99 | 2·60 | 2·37 | 2·21 | 2 09 | 1·94 | 1·75 | 1·52 | 1·00 |

# BIBLIOGRAPHY


1. The Elements of Probability Theory and Some of its Applications—*Harald Cramer.*

2. Indroduction to the Theory of Statistics—*Mood and Graybill.*

3. Theory and Problems of Statistics—*Murra R. Spiegel.*

4. Indroduction to Mathematical Statistics—*P. G. Hoel.*

5. Introduction to Probability and Random Variables—*G. P. Wadsworth and J. G. Bryan.*

6. An introduction to Mathematical Statlstics—*H. Brunk.*

7. Introduction to Mathematical Statistics —*R. Hogg and A. Craig.*

8. Probability—*Uspersky.*

9. Sampling techniques—*Cochran.*

10. Mathematics of Statistics Vol I—*J. K. Kenney.*

11. Statistics—*L. H. C. Tippett.*

12. Introduction to Statistical Mathematics—*A. M. Mathai.*

13. Mathematical Statistics—*Gupta and Kapoor.*

14. Mathematical Statistics—*Kapoor and Saxena.*

15. Statistics—Theory and Practice—*Ghosh and Chaudhri.*

# கலைச்சொற்கள்

A

Absolute — தனி
Absolutely convergent series — அறவொருங்குந் தொடர்
Aggregate — மொத்தம், திரள்
Algebraic expression — இயற்கணிதக் கோவை
Analysis — பகுப்பாய்வு
Analysis of variance — பரவற்படி பகுப்பாய்வு
Analysis of time series — காலத்தொடர் வரிசையின் பகுப்பாய்வு
Association complete — முழுத் தொடர்பு
  Negative— — எதிர்த் தொடர்பு
  Partial— — பகுதித் தொடர்பு
Assumption — தற்கோள்
Attribute — பண்பு
Attribute independent — சாராப் பண்பு, தொடர்பில்லாப் பண்பு
  Positive— — நிறை பண்பு
  Negative— — குறை பண்பு

B

Base chain — தொடராண்டு அடிப்படை
  Changing — மாறு அடிப்படை
  Fixed— — நிலை அடிப்படை
Base angle— — அடிக்கோணம்
  ,, year— — அடிப்படை ஆண்டு
Best fit — மிகப் பொருத்தமான, உத்தமப் பொருத்தமான
Blocks — நிலத் தொகுதிகள்

## C

| | | |
|---|---|---|
| Cause and effect relationship | — | காரண விளைவுத் தொடர்பு |
| Census | — | மக்கள் கணிப்பு, முழுக்கணிப்பு |
| Chain index number | — | சங்கிலிக் குறியீட்டெண் |
| ,, relatives | — | சங்கிலிச் சார்புகள் |
| Chart control | — | கட்டுப்பாட்டு விளக்கப் படம் |
| Chart range | — | வீச்சு விளக்கப் படம் |
| Chi-square test | — | 'கை' வர்க்கச் சோதனை |
| Classification one way | — | ஒரு வழிப் பாகுபாடு |
| ,, manifold | — | பல் வழிப் பாகுபாடு |
| Coefficient of contingency | — | நேர்வு சார்புக் கெழு |
| ,, correlation | — | ஒட்டுறவுக் கெழு |
| ,, dispersion | — | சிதறல் கெழு |
| ,, regression | — | மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு |
| Colligation | — | இணைப்பு |
| Column | — | நெட்டுப்பிரிவு, நிரல் |
| Confidence limits | — | நம்பிக்கை எல்லைகள் |
| Consistency | — | பொருத்தமுடைய இசைவு |
| Constraint | — | கட்டுப்பாடு |
| Consumer | — | துய்ப்போர், நுகர்வோர் |
| Continuum | - | தொடரகம் |
| Correlation Partial | — | பகுதியிடை உறவு |
| ,, rank | — | வரிசை இடை உறவு, தர ஒட்டுறவு |
| Cost of living index number | — | வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண் |
| Critical | — | தீர்வுக்கட்டமான |
| Curve fitting | — | வளைவுக் கோட்டைப் பொருத்துல் |
| Curvilnear correlation | — | வளை கோட்டு மாறிகள் |

## D

| | | |
|---|---|---|
| Data observational | — | கண்டறிந்த விவரங்கள் |
| Declining trend | — | இறங்கும் போக்கு |
| Degrees of freedom | — | கட்டின்மைக் கூறுகள், சமன்பாட்டுப்படி |
| Design | — | திட்ட அமைப்பு, உருவ அமைப்பு |
| ,, of experiments | — | சோதனைத் திட்ட அமைப்பு |
| Diagram scatter | — | சிதறல் விளக்கப் படம் |

Divided difference — வகுத்த வேறுபாடு
Difference backward — பின்முக வேறுபாடு

E

Enumerator — கணிப்பாளர்
Equally likely — சரிசம வாய்ப்புள்ள
Equation normal — மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடு, இயல் சமன்பாடு
Error function — பிழைச் சார்பு
Normal curve— — இயல்நிலைப் பிழை வரை
Probable— — நிகழத்தக்க பிழை
Estimate — மதிப்பீடு
Estimate Interval — இடைவெளி மதிப்பீடு
Estimate point — புள்ளி மதிப்பீடு
Event conditional — நிபந்தனை நிகழ்ச்சி
Event dependent — சார்ந்த நிகழ்ச்சி

F

Factorial moments — காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்
Field enquiry survey — கள விசாரணைக் கணக்கெடுப்பு
Forecast — முன் கணிப்பு

G

Generalisation பொதுவுரை, பொது விதி

H

Hypothesis, testing of — எடுகோள் சோதனை
Hypothesis null — இல் எனும் எடுகோள்

I

Identical — சர்வசமம், ஒத்த
Independent event — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Invariance — மாற்ற மின்மை
Infinite population - வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
Infinitesimal — கழிநுண், அஃகெண்
Irregular fluctuations — ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகள்

L

Life Table — ஆயுட் பட்டியல்
Logarithmic chart — மடக்கைப் படம்

M

Median life time — நடு ஆயுட் காலம்
Method of least squares — மீச்சிறு படி முறை
Morbidity Statistics — நோய் விவரங்கள்

N

National sample survey — தேசிய மாதிரி அளவெடுப்பு
Net Income — நிகர வருமானம்
Numerical — எண்ணுக்குரிய

O

Observation — கண்டறிதல், கணிப்பு
One-tailed test — ஒரு பக்கச் சோதனை, ஒரு முனைச் சோதனை

P

Pairwise — இணை இணையாக
Parameter — முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை
Population — முழுமைத் தொகுதி
Price relative — விலை விகிதம்

Q

Qualitative — பண்பின் விவரங்கள்
Quality control — தரக் கட்டுப்பாடு
Quantity index — அளவுக் குறியீட்டெண்

R

Random — சமவாய்ப்புள்ள
Rank correlation — வரிசைத் தொடர்பு, தரத் தொடர்பு
Regression — மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு

S

Sample, large — பெருங்கூறு
,, small — சிறு கூறு
,, optimum — உத்தமக் கூறு

Sampling average — கூறுகளின் சராசரி
,, distribution — கூறு பரவல்
, error — கூறு பண்புகளின் பிழை
,, fluctuations — கூறு தேர்வின் ஏற்றத்தாழ்வுகள்

Sample multi-stage — பல் நிலைக் கூறு
,, purposive — நோக்குடைக் கூறு
,, representative — பிரதி நிதித்துவக் கூறு
Significance, test of — முக்கியத்துவ சோதனை
Standard deviaton — திட்ட விலக்கம்
Standard error — திட்டப் பிழை
Stratified random sample — படுகை சமவாய்ப்புக் கூறு

T

Tendency — இயல்பு
Tolerance limits — பொறுமை எல்லைகள்
Trend — போக்கு
Trend secular — நீள் காலப் போக்கு
Trend value — போக்கு மதிப்பு

U

Unit — அலகு
Unlimited — எல்லையற்ற
Upper confidence limit — மேல் நம்பிக்கை எல்லை
Upward trend — ஏறும் போக்கு

V

Value — மதிப்பு
Variable bi — இருமாறி
Variate multi — பல்மாறி

W

Weighted index number — நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Wholesale price — மொத்த விலை
,, index number — முழு விலைக் குறியீட்டெண்

Z

Zone — மண்டலம், வலயம்