பகுப்பாய்வு

ஆசிரியர்

பேராசிரியர் எஸ். நாராயணன், எம்.ஏ.

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—874

பகுப்பாய்வு

ஆசிரியர்

பேராசிரியர் **எஸ். நாராயணன்**, எம்.ஏ.,

(ஓய்வுபெற்ற பேராசிரியர்)

9, பஜுல்லா ரோடு,

சென்னை-17.

தமிழ்நாட்டுப்

பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

First Edition — March, 1982
Number of Copies — 1000
T. N. T. B. S. (C.P.) No. 874

© Government of Tamilnadu

ANALYSIS

PROF. S NARAYANAN

Price Rs. 15-50

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social W are (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by :
Metro Printers & Packaging Industry,
Madras-29.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்விமொழியாக ஆக்கி இருபத்தோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டுசெய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைக் காமராசர் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டு தோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

அகராதியியல், அரசியல், இயற்பியல், உயிரியல், உளவியல், கணிதவியல், சட்டவியல், தாவரவியல், புவியமைப்பியல், புவியியல், புள்ளியியல், பொருளியல், பொறியியல், மனையியல், மெய்ப்பொருளியல், வரலாற்றியல், வானியல், விலங்கியல், வேதியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **பகுப்பாய்வு** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **874** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **909** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயிலவேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளர வேண்டும் என்பதுதான். 'எங்கும் தமிழ்; எதிலும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1.	மெய் எண்கள்	... 1
2.	எல்லைப் புள்ளிகள் தொடர்முறைகள்	... 26
3.	முடிவில்லாத் தொடர்கள்	... 50
4.	சார்புகள், உறவுகள்	... 84
5.	வகையிடல்	... 122
6.	வரையறுத்த தொகையீடு	... 159
7.	பன்மாறித் தொகைகள்	... 183
8.	மாறிகளின் மாற்றம்	... 230
9.	தகாத் தொகைகள் பீட்டா, காமாச் சார்புகள்	... 238

1. மெய் எண்கள்

ξ 1-1.

கணிதமுறைப் பகுப்பாய்வில் எண்களின் தன்மை களையும் அவற்றின் விளைவுகளையும் ஆராய்கின்றோம். நீளம், பரப்பு, இடைநிலை (betweeness), உள் (within), புறம் (without), தொடர்ச்சி (continuity) போன்ற கோட்பாடுகளை எண்களின் மூலமாகவே விவரிக்க முற்படுகின்றோம். ஆகவே முழு எண், விகிதமுறு எண், விகிதமுறா எண் என்ற மெய் எண் களின் பாகுபாடுகளை நன்கு அறிந்துகொள்ளுதல் இன்றி யமையாததாகும்.

ξ 1-1·1. $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ என்பது மிகை முழு எண்களைக் கொண்ட கணமாகும்.

$Z = \{\ldots, -3 -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ என்பது முழு எண்களைக் கொண்ட கணம்.

$Q = \{x/x = p/q, p, q, \in z; q \neq 0\}$ என்ற கணம் விகித முறு எண்களைக் கொண்ட கணமாகும்.

[$p, q, q \neq 0$ என்ற இரண்டு முழு எண்களின் விகிதமாகக் குறிப்பிடக்கூடிய எண் விகிதமுறு எண் (rational number) எனப்படும்.]

N என்ற கணம் கூட்டல், பெருக்கல் என்னும் செயல்களைப் பொறுத்து அடைவுப் பண்பைப் (closure property) பெற்றிருக் கிறது. ஆனால் கழித்தல், வகுத்தல் என்னும் செயல்களைப் பொறுத்து N அடைவுப் பண்பைப் பெறவில்லை. கழித்தலில் அடைவுப் பண்பைப் பெறுதல்வேண்டிக்குறை முழு எண்களும் (negative numbers), பூச்சியமில்லாத எண்ணால் வகுத்தலில் அடைவுப் பண்பு பெறவேண்டி விகிதமுறு எண்களும் தேவைப் பட்டன.

ξ 1-1.2. விகிதமுறு எண் கணத்தின் பின்வரும் குணங்கள் அடிப்படைத் தன்மை வாய்ந்தவை :

(பின்வருவனவற்றில் $a, b, c, \ldots$ என்பன விகிதமுறு எண்களைக் குறிப்பிடும்.)

1. வரிசை

(i) a, b என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் எனின் $a>b$ அல்லது $a=b$ அல்லது $a<b$ என இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) $a>b$, $b>c$ எனின் $a>c$.

(iii) $a<b$ எனின் $a<c<b$ என்னுமாறு 'c' என்ற விகிதமுறு எண்ணை நாம் காண இயலும்.

(எடுத்துக்காட்டாக $c = \dfrac{a+b}{2}$ எனின் $a<c<b$.

$0<k<1$ எனின் $\dfrac{a+kb}{1+k}$ என்னும் எண் எப்பொழுதும் a, b-க்கு இடையே அமைந்துள்ளது.)

இந்தப் பண்பினால், விகிதமுறு எண்களின் கணம் அடர்ந்திருக்கின்றது (dense) எனக் கொள்வோம்.

2. கூட்டல்

a, b என்பன இரு விகிதமுறு எண் எனின், $a+b$-யும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். கூட்டலின் தன்மைகளாவன:

(i) $a+b=b+a$ (பரிமாற்றுப் பண்பு).

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (சேர்ப்புப் பண்பு).

(iii) 0 என்ற உறுப்பு.

$a+0=0+a=a$ என வருமாறு அமைந்துள்ளது. ['0' கூட்டலின் ஒருமை (identity) எண் ஆகும்.]

(iv) 'a' என்ற ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணிற்கும் $-a$ என்ற எண் $a+(-a) = (-a)+a = 0$ என வருமாறு அமைந்துள்ளது. $-a$ என்பது 'a'-ன் கூட்டல் எதிர் எண் (additive inverse) அல்லது 'a'-ன் எதிர்மறை (negative) எண் ஆகும்.

(v) $a<b$ எனின் $a+b<b+c$ ஆகும்.

3. பெருக்கல்

a, b விகிதமுறு எண்களெனின், ab–யும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் (அடைவுப் பண்பு). பெருக்கலின் தன்மைகளாவன:

(i) $ab=ba$ (பரிமாற்றுப் பண்பு).

(ii) $(ab)c=a(bc)$ (சேர்ப்புப் பண்பு).

(iii) $a.1=1.a=a$ (1 என்பது பெருக்கலில் ஒருமை எண்ணாகும். 1 என்பதை ஒன்று என்றழைப்போம்).

(iv) $a \neq 0$ எனின், a^{-1} என்பது $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ என வருமாறு அமைகின்றது.

a^{-1} என்பது 'a'–ன் பெருக்கல் எதிர் எண் (multiplicative inverse or reciprocal) எனப்படும்.

(v) $a(b+c)=ab+ac$ (பங்கீட்டுவிதி).

(vi) $a>b$, $c>0$ எனின் $ac>bc$.

4. ஆர்க்கிமிடிஸ் பண்பு

$a>b$ எனின், $nb>a$ என வருமாறு n என்ற மிகை முழு எண்ணை நாம் காணலாம்.

பயிற்சி I

விகிதமுறு எண்களின் மேற்கூறிய பண்புகளை மாத்திரம் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(1) $a(-b) = -(ab)$.

(2) $(-a)(-b)=ab$.

(3) $a+x=b$ என்னுமாறு, ஒரேஒரு x தானுள்ளது.

(4) $b \neq 0$ எனின், $ax=b$ என்னுமாறு, ஒரேஒரு x தானுள்ளது.

¶ 1-2. விகிதமுறு எண்களின் வெட்டுகள்

விகிதமுறு எண்களைப் பின்வருமாறு L, R என்ற இரு பிரிவுகளாகப் பிரிப்போம்:

(i) ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எண்கள் உள்ளன.

(ii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஏதாவதொரு பிரிவில் காணப்படும்.

(iii) L-ல் காணப்படும் ஒவ்வோர் எண்ணும் R-ல் காணப்படும் ஒவ்வோர் எண்ணையும்விடச் சிறியது. அதாவது, $a \in L$, $b \in R$ எனின், $a<b$ ஆகும். இத்தகைய பாகுபாடு ஒரு டெடிகிண்டின் வெட்டு (Dedekind Section or cut) எனப்படும். இதனை (L, R) எனக் குறிப்போம்.

L என்பதை வெட்டின் கீழ்ப்பிரிவு எனவும், R என்பதை L-ன் மேற்பிரிவு என்றும் குறிப்போம்.

(L, R) ஒரு பிரிவு எனின், $a \in L$, $b<a$ (a, b விகிதமுறு எண்கள்) எனின், $b \in L$. அவ்வாறே $c \in R$, $d>c$ ஆனால் $d \in R$ (நிறுவல் தருக).

§ 1-2.1. **வெட்டுகளில் மூவகை உள்ளன:** (i) p, x என்பன விகிதமுறு எண்கள் $x<p \Rightarrow x \in L$; $x \geqslant p \Rightarrow x \in R$.

(L, R) § 1·2-ல் கொடுக்கப்பட்ட மூன்று நிபந்தனைகட்கும் உட்படுதல் காண்க.

இங்கு L பிரிவில் மீப்பெரு எண் எதுவுமில்லை; R வகுப்பின் மீச்சிறு எண் p ஆகும். (L, R) என்னும் இவ்வெட்டு p என்ற விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும்.

(ii) p, x ஒரு விகிதமுறு எண்கள்; $x \geqslant p \Rightarrow x \in L$;

$x>p \Rightarrow x \in R$. (L, R) என்பது வெட்டின் அடிக்கோள்களைப் பின்பற்றுவது தெளிவு. இங்கு p என்பது L பிரிவில் மீப்பெரு எண்; R பிரிவில் மீச்சிறு எண் எதுவுமில்லை.

(iii) L பிரிவில் மீப்பெரு எண்ணும் R பிரிவில் மீச்சிறு எண்ணும் இல்லாதிருத்தல்.

எடுத்துக்காட்டாக, L என்பது எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்களையும் 0, 2-ஐவிடக் குறைவான வர்க்கத்தைக்கொண்ட மிகை விகிதமுறு எண்களையும்கொண்ட கணம் எனக் கொள்வோம்; R என்பது 2ஐவிட அதிகமான வர்க்கத்தைக் கொண்ட மிகை விகிதமுறு எண்களைக்கொண்ட கணம்; (L, R) என்னும் இவ்வெட்டில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் விட்டுப்போகவில்லை.

இதனை நிறுவுவதற்கு 2-ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண் இல்லை என்று காண்பித்தால் போதுமானது.

முடியுமானால், p/q என்னும் விகிதமுறு எண் $\frac{p^2}{q^2} = 2$ என்னு

மாறு அமையட்டும்.

p, q இவ்விரண்டிற்கும் பொதுக்காரணி ஏதுமில்லை என்று கொள்வோம்.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

ஆகவே p^2 என்பது இரட்டைப்படை எண். அதாவது, p என்பது இரட்டைப்படை எண். $p=2m$ என்க (m ஒரு முழு எண்). எனவே, $p^2 = 4m^2 \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ ஓர் இரட்டைப்படை எண். அதாவது q ஓர் இரட்டைப்படை எண். எனவே p, q இவற்றிற்கு 2 பொதுக்காரணியாக அமைகின்றது. இது ஒரு முரண்பாடு (p, q-க்குப் பொதுக்காரணி ஏதுமில்லை என்பது நமது எடுகோள்). எனவே 2-ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண் இல்லை என்பது தெரிவு.

$k\ (>0)$ என்பது L பிரிவின் மீப்பெரு எண்ணானால், $k^2 < 2$.

$\frac{4+3k}{3+2k}$ ஒரு மிகை எண்.

$$2 - \left(\frac{4+3k}{3+2k}\right) = \frac{2-k^2}{(3+2k)^2} > 0.$$

எனவே $\left(\frac{4+3k}{3+2k}\right)^2 < 2$. ஆதலால் $\frac{4+3k}{3+2k} \in L$.

மேலும் $\frac{4+3k}{3+2k}\ k = \frac{2(2-k^2)}{3+2k} > 0$.

எனவே $\frac{4+3k}{3k+2k} > k$.

ஆதலால் k என்பது L பிரிவின் மீப்பெரு எண் என்பது தவறாகிறது. எனவே, L பிரிவின் மீப்பெரு எண் இருத்தல் இயலாது.

இவ்வாறே R பிரிவின் மீச்சிறு எண் ஏதுமில்லை எனவும் நிறுவலாம்.

L பிரிவிற்கு ஒரு மீப்பெரு எண்ணும், R பிரிவிற்கு ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் ஒருங்கே இருத்தல் இயலாது. ஏனெனில், இவ்வாறு இரு எண்கள் இருந்தால் இவற்றிற்கு இடையே உள்ள

எந்த விகிதமுறு எண்ணும் L, R இவ்விரண்டிலும் விட்டுப் போயிருக்கும். ஆகவே (L, R) ஒரு வெட்டாகாது.

ξ 1-2.2. மேற்கூறியவற்றால் ஒரு விகிதமுறு எண் இருவகை வெட்டுகளால் குறிப்பிடப்படக்கூடும் என்று புலனாகிறது. ஆனால், மெய்யெண்களின் இயல்பை நன்கு விளக்குவதற்கு ஓர் எண்ணிற்குப் பொருத்தமாக ஒரேஒரு வெட்டுதான் எனக் கொள்ளுதல் பொருத்தமுள்ளது. ஆகவே, வெட்டின் வரையறையைப் பின்வருமாறு மாற்றியமைப்பது அவசியமாகின்றது. L பிரிவில் மீப்பெரு எண் இல்லை என்று வலியுறுத்துகிறோம். ஆகவே,

(i) L, R என்ற இருபிரிவுகளாக விகிதமுறு எண்களைப் பிரிக்கலாம்; ஒவ்வொன்றிலும் உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஏதேனும் ஒரு பிரிவில் காணலாம்.

(iii) L பிரிவில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் R பிரிவில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணையும்விடச் சிறியது.

(iv) L பிரிவில் மீப்பெரு எண் ஏதுமில்லை.

குறிப்பு: விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதி L பிரிவாக அமையவேண்டுமெனின்,

(i) எல்லா விகிதமுறு எண்களும் அதில் இருக்கக்கூடாது.

(ii) அதற்கு ஒரு மீப்பெரு எண் இருத்தல் கூடாது.

(iii) அந்தத் தொகுதியைச் சார்ந்த எந்த விகிதமுறு எண்ணையும்விடச் சிறியதாயுள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களும் அதில் இருத்தல் வேண்டும்.

இத்தகைய தொகுதியைச் சேரா எல்லா விகிதமுறு எண்களும் Lஐக் கீழ்ப்பிரிவாகக் கொண்டவெட்டின்மேற்பிரிவாகும்.

ξ 1-2.3. தேற்றம்: (L, R) ஒரு வெட்டு என்க; $k>0$ ஒரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் (எத்தனை சிறியதானாலும் சரி) எனின், $x \in L$; $y \in R$; $y-x = k$ என வருமாறு x, y என்ற இரு எண்களை நம்மால் காண இயலும்.

நிறுவல்

$a \in L$; $b \in R$; $b - a > k$ என அமையுமாறு இரு எண்களைக் கருதுக.

ஆர்க்கிமிடிஸின் பண்பின்படி,

$nk > b - a$ என்னுமாறு n என்ற ஒரு மிகை முழு எண் உள்ளது.

அதாவது, $b < a + nk$.

எனவே a, $a + k$, $a + 2k$; ......, $a + nk$ என்ற வரிசையில் $a \in L$; $a + nk \in R$. ஆகவே, இந்த வரிசையில் $a + nk \in L$ ஆகவும் $a + (n+1)\ k \in R$ ஆகவும் அமையுமாறு இரு அடுத்துள்ள எண்கள் இருத்தல் வேண்டும்.

$a + nk = x$; $a + (n+1)k = y$ எனின், x, y என்பது நாம் காண விரும்பிய எண்களாகும்.

§ 1-3.

வரையறை 1: விகிதமுறு எண்களின் வெட்டு ஒரு மெய் எண் எனப்படும்.

வரையறை 2: R பிரிவில் மீச்சிறு எண் அமையப்பெற்ற பிரிவு ஒரு விகிதமுறு மெய் எண்ணாகும்; R பிரிவில் மீச்சிறு எண் அமையப்பெறாத வெட்டு ஒரு விகிதமுறா எண் (Irrational number) ஆகும்.

x என்பது R பிரிவின் மீச்சிறு எண்ணெனின், (L, R) என்ற விகிதமுறு மெய் எண் x என்ற விகிதமுறு எண்ணிற்குப் பொருந்துவதாகும்.

x என்ற விகிதமுறு எண்ணிற்குப் பொருத்தமான விகிதமுறு மெய்யெண்ணை $\overline{x}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு: விகிதமுறு எண்களின் கணத்திற்கும் விகிதமுறு மெய்யெண்களின் கணத்திற்கும் ஓர் ஒன்று—ஒன்றுப் பொருத்தம் (1 - 1 correspondence) உள்ளது.

§ 1-4. மெய்யெண்களில் வரிசை உறவு

$\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$; $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ என்பன இரு மெய் எண்கள் எனின், பின்வரும் குணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று விலக்குந் தன்மை வாய்ந்தவை.

(i) L_1 என்பது L_2-ன் தகு உட்கணம்.

(ii) L_2 என்பது L_1-ன் தகு உட்கணம்.

(iii) $L_1 = L_2$.

வரையறை

$L_1 \subset L_2$; $L_2 \neq L_2$ எனின் $\alpha_1 < \alpha_2$ (α_1,α_2-ஐவிடச் சிறியது).

$L_2 \subset L_1$; $L_2 \neq L_1$ எனின் $\alpha_1 > \alpha_2$ (α_1, α_2-ஐவிடப் பெரியது).

$L_1 = L_2$ எனின் $\alpha_1 = \alpha_2$ (α_1, α_2 இரண்டும் சமம்).

பயிற்சி II

(i) $\alpha_1 > \alpha_2$ எனில், $\alpha_2 < \alpha_1$.

(ii) $\alpha_1 > \alpha_2$ எனில் $L_1 \cap R_2$ என்ற கணம் கணக்கிலடங்கா எண்களைக் கொண்டது என்று நிறுவுக.

§ 1-5.

R பிரிவின் மிகச் சிறிய எண் 0 எனில், $\overline{0}$ என்ற விகிதமுறு மெய்யெண் பூச்சியம் என்ற மெய்யெண்ணாகும். ($\overline{0}$ என்பது $\overline{0}$ உடன் பொருந்திய மெய்யெண்) $\overline{\alpha} < \overline{0}$ எனில் $\overline{\alpha}$ ஒரு குறை மெய்யெண்ணாகும். $\overline{\alpha} > \overline{0}$ எனில் $\overline{\alpha}$ ஒரு மிகை மெய்யெண்ணாகும்.

குறிப்பு : ஒரு மெய்யெண் மிகை எண்ணானால் L பிரிவில் ஒரு மிகை எண்ணாவது இருத்தல் வேண்டும்; இவ்வாறே R பிரிவில் ஒரு குறை எண்ணாவது இருந்தால்தான் மெய்யெண் குறை எண் ஆகும்.

§ 1-6.

α, β, γ என்ற மெய்யெண்களில் $\alpha < \beta$; $\beta < \gamma$ எனின், $\alpha < \gamma$ ஆகும்.

நிறுவல்

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$; $\beta \equiv (L_2, R_2)$; $\equiv \gamma\ (L_3, R_3)$ என்க.

$\alpha < \beta$ ஆதலால், $L_1 \subset L_2$;

$\beta > \gamma$ ஆதலால், $L_2 \subset L_3$.

ஆகவே $L_1 \subset L_3$.

மேலும் L_2-ல் இல்லாத ஓர் உறுப்பாவது L_3-ல் இருத்தல் வேண்டும். இது L_1-லும் இருக்கமுடியாது. (அன்றி இவ்

வுறுப்பு L_1-ல் இருந்தால் $L_1 \subset L_2$ ஆதலின் அது L_2-ல் இருத்தல் வேண்டும்.) ஆகவே L_1 என்பது L_3-ன் தகு உட்கணம். எனவே $\alpha < \gamma$.

பயிற்சி III

ஒவ்வொரு குறை எண்ணும் ஒவ்வொரு மிகை எண்ணை விடச் சிறியது என நிறுவுக.

ξ 1-7. தேற்றம்

$\alpha \equiv (L, R)$ **என்க;** $a_1 \in L$, $a_2 \in R$ **எனின்,** $\overline{a_1} < \alpha$; $\overline{a_2} \geqslant \alpha$.

நிறுவல்

$\overline{a_1} \equiv (L_1 \cdot R_1)$; $\overline{a_2} \equiv (L_2, R_2)$ என்க.

a_1, a_2 என்பன முறையே R_1, R_2 பிரிவுகளின் மீச்சிறு எண்களாகும். $a_1 \in L$, எனவே a_1-ஐவிடச் சிறிய ஒவ்வோர் எண் L-லிருக்கும்.

ஆகவே $x \in L_1 \Rightarrow x \in L$. $\therefore L_1 \subset L$.

எனவே $\overline{a_1} < \alpha$.

a_2 என்பது R வகுப்பின் மீச்சிறு எண் எனின் $L = L_1$.

$\therefore \overline{a_2} = \alpha$.

a_2, R-ன் மீச்சிறு எண் அன்று எனின் $R_1 < R$ எனவும்.

ஆகவே $L \subset L_1$ எனவும் நிறுவலாம். எனவே $\alpha < \overline{a}_2$.

ξ 1-8. தேற்றம்

இரு வெவ்வேறான மெய்யெண்களுக்கிடையே அளவிலடங்கா மெய்யெண்கள் அமைந்துள்ளன.

நிறுவல்

$\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$; $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ என்பன இரு வெவ்வேறான மெய்யெண்கள் என்க. $\alpha_1 < \alpha_2$ என்று கொள்வோம். எனவே $L_1 \subset L_2$. ஆதலால் L_2-வில் L_1-ஐச் சேராத கணக்கிலடங்கா விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. இவ்வெண்கள் அனைத்தும் R_1-ல் இருக்கும். 'a' என்பது இவ்வெண்களில் ஒன்று எனின்,

$$\alpha_1 < \overline{a} < \alpha_2.$$

தேற்றம் :

a_1, a_2 இரு விகிதமுறு எண்கள் என்க.

(i) $a_1 < a_2$ எனின் $\overline{a_1} < \overline{a_2}$

(ii) $a_1 = a_2$ எனின் $\overline{a_1} = \overline{a_2}$

(iii) $a_1 > a_2$ எனின் $\overline{a_1} > \overline{a_2}$

நிறுவல்

$a_1 < a_2$ என்க. $\overline{a_1} \equiv (L_1, R_1)$; $\overline{a_2} \equiv (L_2, R_2)$

$x \in L_1$ எனின் $x < a_1 < a_2$ (x ஒரு விகிதமுறு எண்)

$\therefore x \in L_2$. ஆகவே $L_1 < L_2$.

$a_1 < x < a_2$ எனின், $x \notin L_1$; $x \in L_2$ $\therefore L_1 \neq L_2$.

$\therefore L_1$ என்பது L_2-வின் ஒரு தகு உட்கணம். $\therefore \overline{a_1} < \overline{a_2}$.

(ii), (iii) என்பனவற்றின் நிறுவல்கள் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளன.

§ 1-9. கூட்டல்

$\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$; $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ என்க.

$L = \{x+y / x \in L_1;\ y \in L_2;\ x, y$ விகிதமுறு எண்கள்$\}$ என்க.

$L \neq \phi$ என்பது தெளிவு. $x_1 \in R_1$; $y_1 \in R_2$ எனின் $x + y \notin L$.

$a_1 \in L_1$; $a_2 \in L_2$ என்க.

$a_1 + a_2 = a$ என்க.

$b < a$ எனின், $b = a - x$ என்னுமாறு ஒரு மிகை விகிதமுறு எண் உள்ளது.

$b = a - x = a_1 + a_2 - x = (a_1 - x) + a_2$

$a_1 \in L_1$ ஆதலின் $a_1 - x \in L_1$; $a_2 \in L_2$

ஆகவே $b = a_1 - x + a_2 \in L$

எனவே a-ஐவிடக் குறைந்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் L-ல் அமைந்திருக்கும்.

மேலும், L_1, L_2-வில் மீப்பெரு எண்கள் இல்லையாதலின் L-லும் மீப்பெரு எண் இல்லை. ஆகவே L என்பது ஒரு வெட்டின் கீழ்ப்பிரிவாக அமையமுடியும். R என்பது L-ல் அமையாத விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட கணமாயின், (L, R) ஒரு வெட்டாகும். இந்த வெட்டு (L_1, R_1), (L_2, R_2) என்ற வெட்டுகளின் கூட்டுத்தொகையென வரையறுக்கப் படுகிறது.

அதாவது $(L, R) = (L_1, R_1) + (L_2, R_2) \equiv \alpha_1 + \alpha_2$.

ξ 1-10.

$\alpha \equiv (L, R)$ என்பது ஒரு மெய்யெண்,

$L_1 = \{-x/x \in R;\ x$ — R-ன் மீச்சிறு எண் அன்று$\}$ என்க.

$L_1 \neq \phi$; L_1-ல் மீப்பெரு எண்ணும் இல்லை. $a \in L_1$ என்க.

b என்பது a-ஐவிடச் சிறிய விகிதமுறு எண் எனின், $-b > -a$

$-(-a) = a$ ஆதலின், $-a \in R$

$-b > -a$ ஆதலின், $-b \in R$

எனவே $-(-b) \in L_1$; அதாவது $b \in L_1$.

$R_1 = \{x/x \in L_1;\ x \ \ x$ ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$ எனின் $(L\ R_1)$ ஒரு வெட்டு. இந்த வெட்டுக் குறிப்பிடும் மெய்யெண் $-\alpha$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

ξ 1-10.1. α, β மெய்யெண்கள் எனின், $\alpha + (-\beta)$ என்பது $\alpha - \beta$ என அழைக்கப்பெறும்.

ξ 1-11. கூட்டலின் அடிப்படைப் பண்புகள்

$\alpha = (L_1, R_1)$; $\beta = (L_2, R_2)$: $\gamma = (L_3, R_3)$ என்க. பின்வரும் பண்புகள் மனத்தில் வைக்கற்பாலன.

A_1 : மாற்றுப் பண்பு

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

$a_1 \in L_1$; $a_2 \in L_2$ எனின் $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$.

எனவே $L = \{a_1 + L_2/a_1 \in L_1;\ a_2 \in L_2\}$ என்ற கணமும்

$L^1 = \{a_2 + L_1/a_2 \in L_2;\ a_1 \in L_1\}$ என்ற கணமும் சமம். ஆகவே L, L^1-ஐ கீழ்ப்பிரிவுகளாகக் கொண்ட மெய்யெண்கள் சமம்.

A_2 : சேர்ப்புப் பண்பு

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$a_1 \in L_1;\ a_2 \in L_2;\ a_3 \in L_3$ எனின், $a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3$ என்பதிலிருந்து இப் பண்பு பெறப்படுகிறது. (விரிவான நிறுவல் சுலபமாய்க் கிடைக்கும்.)

A_3 : கூட்டலொருமையின் உண்மை

$$\alpha + \bar{0} = \alpha.$$

நிறுவல்

$\bar{0} \equiv (L', R')$ எனின், 0 என்பது R'-ன் மீச்சிறு எண்ணாகும். $\alpha = (L_1, R_1)$; $\alpha + \bar{0} = (L, R)$ எனின், $L = L_1$ என்று நிறுவுவோம்.

$a \in L$ எனில், $a = a_1 + a'\ (a_1 \in L_1;\ a' \in L')$ இதில் a' ஒரு குறை எண். எனவே $a < a_1$. $a \in L \Rightarrow a \in L_1$. அதாவது $L \subset L_1 \ldots (1)$

இப்பொழுது a_1 என்பது L_1-ல் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். L_1-ல் மீப்பெரு எண் இல்லை.

ஆகவே $a_1 + k \in L_1$ என்னுமாறு k என்ற மிகை விகிதமுறு எண் ஒன்றை நாம் காண இயலும்.

$k > 0$ ஆதலின், $-k < 0$; எனவே $-k \in L'$.

$a_1 = (a_1 + k) + (-k) \in L.$

எனவே $a_1 \in L_1 \Rightarrow a_1 \in L$; எனவே $L_1 \subset L_1 \quad \ldots \quad (2)$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து $L = L_1$ என்பது தெளிவு. ஆகவே $\alpha + \bar{0} = \alpha$ என்பது தெளிவாகிறது.

A_4 : கூட்டல் எதிர் எண் உண்மை

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$; $-\alpha \equiv (L, R)$ என்க.

$\alpha + (-\alpha) \equiv (L', R')$ எனின் R'-ன் மீச்சிறு எண் 0 என நிறுவுவோம்.

$L' \equiv \{a_1 + (-b) / a_1 \in L_1;\ b_1 \in R_1;\ b,\ R_1$-ன் மீச்சிறு எண் அன்று$\}$.

$a_1 < b_1$ ஆதலில்,

$a_1 - b_1 < 0$. எனவே L'-ன் எல்லா உறுப்புகளும் குறை எண்களே. k என்பது ஏதேனுமொரு குறை விகித முறு எண் எனின், $-k$ மிகை எண்.

எனவே $a_1 \in L_1$; $b_1 \in R_1$;

$b_1 - a_1 = -k$ என்னுமாறு a_1, b_1 என்ற இரு எண்களை நாம் காண இயலும். ஆதலின் $a_1 + (-b_1) = k$.

அதாவது $k \in L'$.

ஆகவே L^1 என்பது **எல்லாக்** குறை விகிதமுறு எண்களையும் கொண்ட கணம். ஆகையால் 0 என்பது R'-ன் மீச்சிறு எண்ணாகும்,

A_5 : $\alpha > \beta$ எனின் $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$; $\beta \equiv (L_2, R_2)$; $\gamma = (L_3, R_3)$ என்க.

$\alpha + \gamma \equiv (L', R')$; $\beta + \gamma \equiv (L'', R'')$ எனின்,

$L' = \{a_1 + a_3 / a_1 \in L_1 ;\ a_3 \in L_3\}$

$L'' = \{a_2 + a_3 / a_2 \in L_2;\ a_3 \in L_3\}$

$\alpha > \beta$ ஆதலின் $L_1 > L_2$

எனவே $a_2 \in L_2 \Rightarrow a_2 \in L_1$

எனவே $a_2 + a_3 \in L'' \Rightarrow a_2 + a_3 \in L'$

$\therefore L'' \subset L'$.

$a_1 \in L_1$; $a_1 \notin L_2$ எனின் $a_1 \in R_2$

$a_1' \in L_1$; $a_1' > a_1$ எனின் $\xi = a_1' - a_1$ ஒரு மிகை விகிதமுறு எண்.

எனவே $b_3 - a_3 = \xi$ என்னுமாறு $a_3 \in L_3$; $b \in R_3$ காண முடியும்.

இப்பொழுது $a' + a_3 = a_1 + \xi + b_3 - \xi = a_1 + b_3$
$a' + a_3 \in L'$; $a_1 + b_3 \in R''$ ($\because$ $a_1 \in R_2$; $b_3 \in P_3$)

$a'_1 + a_3 = a_1 + b_3 \Rightarrow L'$-ன் ஓர் உறுப்பு R''-ல் அமைந்துள்ளது. எனவே L'' என்பது L'-ன் ஒரு தகு உட்கணம்.

எனவே $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

ξ 1-12. மெய்யெண்களின் பெருக்குத்தொகை

வரையறை :

$\alpha_1 \equiv (L_1, R_1;)$ $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ என்பன இருமிகை மெய்யெண்கள் என்க.

$L = \{x/x$ ஒரு குறை விகிதமுறு எண் அல்லது $x = 0$ அல்லது $x = pq$; $p, q > 0$; $p \in L_1$; $q \in L_2\}$

(L, R) என்பது L-ஐக் கீழ்ப்பிரிவாகக் கொண்ட கணம் எனில், $\alpha_1 \alpha_2 \equiv (L, R)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\alpha > 0$; $\beta < 0$ எனில், $-\beta > 0$ ஆகும்.

$\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)]$ என்றும், $\alpha < 0$, $\beta > 0$ எனில்
$\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta]$ எனவும் கொள்வோம்.

α, β இவையிரண்டும் குறையெண் எனில்
$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$ ஆகும்.

α, β இவ்விரண்டில் ஏதேனும் ஒன்றோ அல்லது இவ்விரண்டுமோ பூச்சியமெனில் $\alpha\beta = \bar{0}$

ξ-12.1. பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்ணின் தலைகீழ்

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$ ஒரு மிகை மெய்யெண் என்க. (L, R) என்னும் பிரிவைப் பின்வருமாறு நிர்ணயித்திடுக; எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்கள், பூச்சியம், R_1 வகுப்பில் மீச்சிறு

எண் இருந்தால் அதைத் தவிர மற்ற எண்களின் தலைகீழ்—இவை அனைத்தையும் கொண்ட கணம் L.

$$a>0;\ a \in L \text{ எனில் } \frac{1}{a} \in R_1.$$

மேலும் $b>0$; $b<a$ எனில் $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. எனவே $\frac{1}{b} \in R_1$.

அதாவது, $b \in L$. R என்பது L-ல் அல்லாத விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட கணம் என்றால் (L, R) ஒரு வெட்டு என்று எளிதில் நிறுவலாம்.

(L, R) என்னும் வெட்டு (L_1, R_1)-ன் தலைகீழ் (reciprocal) என வரையறுக்கப்படுகிறது. (L, R)-ஐ, α^{-1} எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$\alpha < \bar{0}$ எனில் $\alpha^{-1} = -[(-\alpha)^{-1}]$ என வரையறுத்திடுவோம்.

$\beta \neq \bar{0}$ எனில், $\alpha\beta^{-1}$ என்பதனை $\frac{\alpha}{\beta}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

§ 1-12.2. பெருக்கலின் அடிப்படைப் பண்புகள்

M_1: $\alpha\beta = \beta\alpha$ (மாற்றுப் பண்பு).

M_2: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (சேர்ப்புப் பண்பு).

(குறிப்பு: மேற்கூறிய இரு பண்புகளுக்கும், பெருக்கலின் வரையறையிலிருந்து நிறுவல் தருக)

M_3: **பெருக்கல் ஒருமை எண்:** $\alpha\top = \alpha$.

நிறுவல்

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$; $\top = (L_2, R_2)$; $\alpha\top = (L, R)$ என்க.

1 என்பது R_2-ன் மீச்சிறு எண்.

எனவே $L_2 = \{x/x :$ விகிதமுறு எண்; $x<1\}$

முதலில் $\alpha>0$ என்க.

$a_1, a_2>0;\ a_1 \in L,\ a_2 \in L_2$ எனின் $a_1 a_2 \in L$. மேலும் $a_2<1 \ \therefore\ a_1 a_2 < a_1 \cdot 1 = a_1$.

எனவே $a_1 a_2 \in L_1$. ஆதலின் $L \subset L_1$.

இப்பொழுது $a_1>0;\ a_1 \in L_1;\ a_2>a_1;\ a_2 \in L_1$ எனின் $\frac{a_1}{a_2}<1$. எனவே $\frac{a_1}{a_2} \in L_2$.

மேலும் $a_1 = a_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$.

இதில் $a_2 \in L_2;\ \frac{a_1}{a_2} \in L_2;\ a_2>0;\ \frac{a_1}{a_2}>0$

ஆதலால் $a_1 \in L$.

எனவே $L_1 \subset L$.

$\therefore\ L \subset L_1;\ L_1 \subset L \Rightarrow L = L_1$.

ஆகவே $\alpha\, \mathrm{T} = \alpha$.

இரண்டாவதாக, $\alpha<0$ எனில், $-\alpha>0$.

முதற்பகுதி நிறுவலின்படி, $(-\alpha)\cdot \mathrm{T} = -\alpha$

எனவே $-(-\alpha).\mathrm{T} = -(-\alpha)$

அதாவது$-[-(\alpha \cdot \mathrm{T})] = -(-\alpha)$

ஆகையால் $\alpha \cdot \mathrm{T} = \alpha$.

குறிப்பு: T என்பது மெய்யெண்களின் பெருக்கல் ஒருமை எண் ஆகின்றது.

M_4: பெருக்கலில் எதிர்எண் அமைப்பு: $\alpha \neq 0,\ \alpha.\alpha^{-1} = \mathrm{T}$.

நிறுவல்

(i) $\alpha>0$ என்போம்.

$\alpha \equiv (L_1, R_1);\ \alpha^{-1} \equiv (L, R);\ \alpha\alpha^{-1} \equiv (L', R')$ என்க,

$a_1>0,\ a_1 \in L_1;\ b_1 \in R_1$ (b_1, R_1-ன் மீச்சிறு எண்ணன்று)

எனின், $\frac{1}{b}$, $\in L$; $\frac{1}{b} > 0$.

எனவே, L^1-ன் மிகை உறுப்புகள் $\frac{a_1}{b_1}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். மேலும் $a_1, < b_1$.

$\therefore \frac{a_1}{b_1} < 1$, எனவே $a \in L$ எனில் $a < 1$. k என்பது 1ஐ விடச் சிறிய விகிதமுறும் எண் எனில், $\frac{a_1}{b^1} = k$ என்னுமாறு $a_1 \in L_1$, $b_1 \in R_1$ கண்டுபிடிக்க இயலும்.

$R = \frac{a_1}{b_1} = a_1 \frac{1}{b_1}$ எனவே $R \in L$.

அதாவது 1 என்பது R^1-ன் மீச்சிறு எண்ணாகும்.

ஆகவே $(L^1, R^1) \equiv 1$.

(ii) $\alpha < 0$ எனில் $-\alpha > 0$.

எனவே $\alpha^{-1} < 0$; $(-\alpha)^{-1} > 0$.

ஆகையால் $\alpha\alpha^{-1} = (-\alpha) -\alpha)^{-1} = \top$.

குறிப்பு : α^{-1} என்பது α-ன் பெருக்கல் எதிர் எண் ஆகும்.

$\alpha\alpha^{-1} = 1$ என்பதால் α^{-1}ஐ $\frac{1}{\alpha}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

M_5: ஒரியல்புப் பண்பு: $\alpha < \beta$; $\gamma > 0$ எனில் $\alpha\gamma < \beta\gamma$

(i) முதலில் $\alpha, \beta > 0$ என்போம்.

$\alpha \equiv (L_1, R_1)$; $\beta \equiv (L_2, R_2)$; $\gamma \equiv (L_3, R_3)$.

$\alpha\gamma \equiv (L, R)$; $\beta\gamma \equiv (L^1, R^1)$

குறை விகிதமுறும் எண்களும் பூச்சியமும் L_1 L^1 இரண்டிலும் அடங்கியுள்ளன. $\alpha < \beta$ ஆதலால், L_1-ன் ஒவ்வொரு உருப்பும்L^1, லும் L_2விலுமிருப்பதால் L-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் இருக்கும்.

$a_2 > 0$; $a_2 \in L_2$; $a_2 \in L_1$ ஆக இருக்கட்டும். L_2வில் மீப்பெரு எண் இல்லையாதலால், $a_2{}^1 \in L_2$, $a_2, a_2{}^1 > a_2$ எனுமாறு காணக்கிடைக்கும்: $a_2, a_2{}^1 \in R_1$.

$\frac{a_2}{a_2} = k$ எனின் $k > 1$.

எனவே $\frac{b_3}{a_3} = k$ என்னுமாற $a_3 \in L_3$; $b_3 \in R_3$ காண இயலும்.

$a_2{}^1\, a_3 = ka_2a_3 = a_2\,(ka_3) = a_2\, b_3.$

$a_2{}^1 > 0;\ a_2{}^1 \in L_2;\ a_3 > 0;\ a_3 \in L_3.$

$\therefore\ a_2{}^1\, a_3 \in L^1$ அல்லது $a_2\, b_3 \in L_1$.

மேலும் $a_2 \in R_1;\ b_3 \in R_3$.

$\because\ a_2\, b_3 \in R.$ எனவே $a_3\, b_3 \in L.$

$\because\ L, L^1$-ன் தகு உட்கணம்.

ஆதலின் $\alpha\gamma < \beta\gamma$

(ii) α, β இரண்டும் குறை எண்கள் எனில், $-\alpha, -\beta$ இரண்டும் மிகை எண்கள்.

$\alpha < \beta$ எனில் $-\alpha > -\beta$; அதாவது $-\beta < -\alpha$.

எனவே (i)-ன்படி, $-\beta\gamma < -\alpha\gamma$

அதாவது, $-(-\beta\gamma) > -(-\alpha\gamma)$

$\beta\gamma > \alpha\gamma$

(iii) $\alpha < 0$, $\beta > 0$ எனில், $\alpha\gamma < 0$; $\beta\gamma < 0$.

எனவே $\alpha\gamma < \beta\gamma$ என்பது வெளிப்படை.

M_6: இரு விகிதமுறும் மெய்யெண்களின் பெருக்குத்துகை அவற்றுடன் இசைந்த விகிதமுறும் எண்களின் பெருக்குத் தொகையுடன் இசைந்த மெய் விகிதமுறும் எண்ணாகும்.

அதாவது a, b விகிதமுறும் எண்கள் எனில், $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}.$

(i) $a,\ b > 0$ என்க. $\overline{a} \equiv (L_1,\ R_1)$; $\overline{b} \equiv (L_2,\ R_2)$ $\overline{a.b} \equiv (L, R)$ என்க.

$x > 0;\ x \in L_1;\ y > 0:\ y \in L_2$ எனில்,

$xy > 0;\ xy \in L$

மேலும் $x < a;\ y < b$

$\therefore\ xy < ab$ எனவே L-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் abஐ விடச் சிறியது.

இப்பொழுது $abk<ab$; $k>0$ எனில், $k<1$;

$$k = \frac{1+k}{2} \quad \frac{2k}{1+k}$$

$k<1$; ஆதலின், $\frac{1+k}{2}<1$; $\frac{2k}{1+k}<1$.

$$\therefore \quad abk = a\left(\frac{1+k}{2}\right) \left(b\, \frac{2k}{1+k}\right)$$

$$\therefore \quad a\left(\frac{1+k}{2}\right)<a;\ b\left(\frac{2k}{1+k}\right)<b,\ a\left(\frac{1+k}{2}\right) \in L_1;$$

$$b\left(\frac{2k}{1+k}\right) \in L_2$$

$\therefore$ $abk \in L$. அதாவது abஐ விடச் சிறிய எந்த எண்ணும் L-ல் இருக்கும். ஆகவே ab R பிரிவின் மீச்சிறு எண்ணாகும்.

எனவே, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$.

(இதைப் பயன்படுத்தி, $a<0$, $b<0$ ஆனாலும் $a<0$, $b>0$ ஆனாலும் $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ என நிறுவுக.)

M_7 பங்கீட்டுவிதி: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

$\alpha \equiv (L_1 R_1)$; $\beta \equiv (L_2, R_2)$; $\gamma \equiv (L_3, R_3)$; $\alpha(\beta+\gamma) \equiv (L, R)$ $\alpha\beta+\alpha\gamma = (L_3, R_3)$ என்க.

α, β, γ மிகை மெய்யெண்கள் என்று கொள்வோம்.

எல்லாக் குறை விகிதமுறும் எண்களும், பூச்சியமும் L, L^1 என்ற இரு பிரிவிலும் காணப்படும்.

a_1, $a_1{}^1$ L_1-ன் மிகை உறுப்பாகவும் a_2, L_3-ன் ஏதேனும் ஒரு மிகை உறுப்பாகவும் a_3, L_3-ன் ஏதேனும் மிகை உறுப்பாகவும் இருக்கும்பொழுது, L-ன் உறுப்புகள் $a_1(a_2+a_3)$ என்ற அமைப்பிலும் L^1-ன் உறுப்புகள் $a_1a_2+a_1a_3$ என்ற அமைப்பிலும் உள்ளன.

$a_1(a_2+a_3)=a_1a_2+a_1a_3$ ஆதலின் $a_1{}^1=a_1$ எனக் கொண்டால் L-ன் ஒவ்வொரு மிகை உறுப்பும் L_1-ல் இருப்பதைக் காணலாம். இவ்வாறே $a_1{}^1=a$ எனில்,

L^1-ன் $a_1a_2+a_1{}^1a_3$ என்ற உறுப்படி L-ல் இருப்பது தெளிவு.

$a_1 > a_1{}^1$ எனில் $\frac{a_1}{a_1} < 1.$

$a_1a_3 = a_1{}^1\left[\left(\frac{a^{-}}{a_1}\right) a_3\right]$

இப்பொழுது, $\frac{a_1'}{a_1} a_3 < a_3 \quad \left(\because \frac{a_1'}{a_1} < 1.\right)$

எனவே $\frac{a_1'}{a_1} a_3$, L_3-ல் அமையும்.

$\frac{a_1{}^1}{a_1} a_3 = a_3'$ எனில், $a_1a_2+a_1'a_3 = a_1a_2+a_1a_3' = a_1\left(a_2+a_3'\right)$

எனவே L^1-ன் ஒவ்வொரு மிகை உறுப்பும் L-ல் காணப்படும்.

எனவே $L \equiv L^1$. ஆதலின் $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ (1)

இப்பொழுது $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$ என நிறுவுவோம்.

(i) $\beta=\gamma$ எனில் $\beta-\gamma=\bar{0}$. $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\bar{0}=\bar{0}$.
$\alpha\beta-\alpha\gamma=\alpha\beta-\alpha\beta-\alpha\beta=\bar{0}$; எனவே $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$.

(ii) $\beta>\gamma$ எனின் $\beta-\gamma>0$

எனவே $\alpha\beta=\alpha\,[\gamma+(\beta-\gamma)] = \alpha\gamma+\alpha(\beta-\gamma)$.

ஆகவே $\alpha\beta-\alpha\gamma$

$$=[\alpha\gamma+\alpha(\beta-\gamma)]-\alpha\gamma$$

$=\alpha(\beta-\gamma)$ (சேர்ப்பு விதியைட் பயன்படுத்தி)

(iii) $\beta<\gamma$ எனின் $\beta-\gamma<0$ அதாவது $\gamma-\beta<0$

(ii)-ன்படி $\alpha(\gamma-\beta)=\alpha\gamma-\alpha\beta$.

$$\alpha(\beta-\gamma)=\alpha[-(\gamma-\beta)]=-\alpha(\gamma-\beta)$$
$$=-(\alpha\gamma-\alpha\beta)=\alpha\beta-\alpha\gamma. \quad (2)$$

(1), (2)ஐப் பயன்படுத்தி α, β, γ மிகை அல்லது குறை எண்களாய் எவ்வகையில் அமைந்த போதும் (மொத்தம் எட்டு வகைகள் உள்ளன), $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ என நிறுவலாம்.

§ 1.12.3: பின்வரும் தேற்றங்கள் பெருக்கப் பண்பு களைப் பயன்படுத்தி எளிதில் நிறுவப்படக்கூடியவை.

(i) α, β இரு மெய்யெண்கள் ($\alpha\neq\bar{0}$) எனில் $\alpha x=\beta$ என்னுமாறு x என்னும் மெய்யெண் ஒன்று உள்ளது.

(ii) ஒரு பூச்சியமில்லாத விகிதமுறும் மெய்யெண்ணின் தலைகீழ் ஒரு விகிதமுறும் மெய்யெண்ணாகும்.

(iii) இரு விகிதமுறும் மெய்யெண்களின் விகிதம் ஒரு விகிதமுறும் மெய்யெண்ணாகும், மேலும், a,b ($b\neq0$) இரு விகிதமுறும் எண்கள் எனில்,

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

§ 1·13: எண் அளவு அல்லது மட்டு (Modulus)

α ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனில்

α-ன் எண் அளவு (அல்லது மட்டு) பின்வரும் சார்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha<0 \text{ எனில்} \\ 0, & \alpha=0 \quad ,, \\ -\alpha, & \alpha<0 \quad ,, \end{cases}$$

குறிப்பு :

(i) எல்லா மெய்யெண்களின் எண் அளவுகளும் மிகை எண்களே.

(ii) $|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$

(iii) $|\alpha|<k$ எனில், $-k<\alpha<k$.

[(ii), (iii) எளிதில் நிறுவலாம்.]

§ 1,13.1: தேற்றம்; $|\alpha+\beta|\leq|\alpha+|\beta|$

நிருபணம்:

$$\alpha > 0 \text{ எனில் } \alpha = |\alpha|$$

$$\alpha < 0 \text{ எனில் } \alpha = -|\alpha|$$

எனவே α ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனில்,
$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

இவ்வாறே, $-|\beta| \leqslant \beta \geqslant |\beta|$

ஆதலின், $-(|\alpha| + |\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha| + |\beta|$

அதாவது, $|\alpha+\beta \leq |\alpha| + |\beta|$

ξ 1.13.2: தேற்றம்; $|\alpha-\beta| \leq |\alpha| - |\beta|$

நிருபணம்:

$\alpha = (\alpha-\beta)+\beta$

$\therefore \quad |\alpha| = |(\alpha-\beta)+\beta|$

$\leqslant |\alpha-\beta| + |\beta|$

அதாவது, $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha-\beta|$

எனவே, $|\alpha-\beta| \leq |\alpha| - |\beta|$

ξ 1.13.3: தேற்றம்: $|\alpha-\beta| < \gamma$ எனின்,
$\beta-\gamma < \alpha < \beta+\gamma$.

$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$ என்பதிலிருந்து இத்தேற்றத்தை சுலபமாக நிறுவலாம்.

ξ 1.13.4: தேற்றம்: $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$

(i) α, β மிகை எண்கள் எனின்,

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = |\alpha|\,|\beta|$$

(ii) α, β இரண்டும் குறை எண்கள் எனின்,

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = |\alpha|\,|\beta|$$

(iii) $\alpha > 0;\ \beta < 0$ எனின் $\alpha\beta < 0$.

எனவே $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$

$$= -[-(\alpha)(-\beta)]$$

$$= \alpha(-\beta) = |\alpha|\ |\beta|$$

இவ்வாறே, $\alpha<0, \beta>0$ எனினும், $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$

§ 1.13.5: **தேற்றம்:** $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ (நிருபணம் தருக.)

§ 1-14: டெடிகிண்டின் தேற்றம்.

எல்லா மெய்யெண்களும் L, R என்றும் இரு பிரிவுகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு பிரிக்கப்படுகின்றனவென்று கொள்வோம்.

(*i*) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உறுப்புகள் உள்ளன.

(*ii*) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் இரண்டில் ஒரு பிரிவில் காணப்படும்.

(*iii*) L-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் R-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் விடச் சிறியது. எனின் L வகுப்பின் ஒரு மீப்பெரு எண்ணோ அல்லது R வகுப்பின் ஒரு மீச்சிறு எண்ணோ காணப்படும்.

நிருபணம் : L-ன் எல்லா விகிதமுறு எண்களும் L_1 என்ற பிரிவையும் R-ன் எல்லா விகிதமுறு எண்களும் R_1 என்ற பிரிவையும் அமைக்கட்டும்.

a என்பது L_1 பிரிவின் மீப்பெரு எண் எனில் $\bar{a}$ என்ற மெய்யெண் L-பிரிவில் அமையும். $\bar{a}$, L பிரிவின் மீப்பெரு எண் என நிறுவுவோம்.

அவ்வாறில்லையெனில் α என்பது L பிரிவின் மீப்பெரு எண்ணாக இருக்கட்டும். எனில், $\bar{a}$க்கும் αக்கும் இடையே முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுடைய விகிதமுறும் மெய்யெண்கள் உள்ளன. அவற்றில் $\bar{b}$ ஒரு எண் என்க.

அதாவது, $\bar{a}<\bar{b}<\alpha$.

$\alpha \in L$; $\bar{b}<\alpha$ ஆதலின் $\bar{b} \in L$. எனவே $b \in L_1$.

மேலும் $\bar{a}<\bar{b}$. ஆதலின் $a<b$.

ஆனால் நமது எடுகோளின்படி a L_1-ன் மீப்பெரு எண் இம்முரண்பாடு $\bar{a}$, L-ன் மீப்பெரு எண் இல்லை என்பதைப் பொய் என நிறுவுவதால், $\bar{a}$ L-ன் மீப்பெரு எண் ஆகும் என்பது தெளிவு.

இவ்வாறே, b, R_1 வகுப்பின் மீச்சிறு எண் எனின், $\bar{b}$, R_1 வகுப்பின் மீச்சிறு எண்ணாகும்.

இப்பொழுது L_1-ல் மீப்பெரு எண்ணும் R_1-ன் மீச்சிறு எண்ணும் இல்லை என்று கொள்வோம். (L_1, R_1) இந்நிலையில் ஒரு விகிதமுறா எண்ணைக் குறிக்கும். இதனை α என்போம், α L-வகுப்பிலோ அல்லது R வகுப்பிலோ அமையும். $\alpha \in L$ எனில், α, L-ன் மீப்பெரு எண்ணாகும். அவ்வாறில்லையெனில் α^1 என்பது L-ல் மீப்பெரு எண்ணாகட்டும். $\bar{a}$ என்பது α, α^1க்கு இடையே அமைந்ததொரு விகிதமுறும் எண் எனில்

$$\alpha < \bar{a} < \alpha^1$$

$\bar{a} \in L$ ஆதலின் $a \in L_1$

எனவே $(L_1, R_1) \equiv \alpha$ என்ற வெட்டில், αவை விட பெரிய மெய்யெண்ணான $\bar{a}$ L_1 பிரிவில் அமைந்துள்ளது. இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே $\alpha \in L$ எனில், α, L-ன் மீப்பெரு எண்ணாக அமைதல் வேண்டும். இவ்வாறே $\alpha \in R$ எனில், α, R-ன் மீச்சிறு எண்ணாக அமைதல் வேண்டும்.

§ 1-15. மெய்யெண் கோடு (Linear Continuum)

ஏதேனும் ஒரு கிடைநேர்க்கோட்டை எடுத்துக்கொண்டு அதில் O, U என்னும் இரு புள்ளிகளை O-ன் வலப்பக்கத்தில் U இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம். Oவிலிருந்து U உள்ள பக்கத்தை கோட்டின் மிகைப் பகுதி என்றும், மறுபக்கத்தை குறைந் பகுதி எனவும் அழைப்போம். O, U என முறையே O, 1 என்ற இரு எண்களையும் குறிக்கட்டும். p/q $(q>0)$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை Oவிலிருந்து OU-ன் qவில் ஒரு பகுதிக்குச் சமமான p இடைவெளிகளைக் கடந்து (p மிகை எண்ணனின் மிகைப் பக்கத்திலும், p குறை எண் எனில் எதிர்பக்கத்திலும் கடக்கவேண்டும்) அடையும் P என்ற புள்ளியால் குறிப்பிடலாம்.

இத்தகைய அமைப்பில் $a<b$ எனில் a, b-ன் இடப்பக்கத்தில் அமைவதைக் காணலாம். இத்தகைய கோட்டில் விகிதமுறும்

எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைத் தவிர மற்றப் புள்ளிகளும் காணப்படும்.

OUஐப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரத்தின் மூலை விட்டத்திற்குச் சமமாக இக்கோட்டில் OQ எடுத்துக்கொண்டால் Q ஒரு விகிதமுறும் எண்ணைக் குறிக்காது. இவ்வாறே $OR = \frac{m}{n} OQ$ என அமையுமாறு வரும் புள்ளிகளும் விகிதமுறும் எண்களைக் குறிக்கா. (காரணம் தருக) ஆகவே விகிதமுறும் எண்கள் மாத்திரம் நேர்கோட்டின் எல்லாப் புள்ளிகளையும் குறித்திட இயலாது.

(L, R) ஒரு வெட்டு என்க, மேற்கூறிய நேர்க்கோட்டமைப்பில் P என்னும் புள்ளி, L பிரிவில் அமைந்த புள்ளிகள் Pக்கு இடப்புறமும் R பிரிவின் அமைந்த புள்ளிகள் Pக்கு வலப்புலத்திலும் அமையுமாறு எடுக்கப்பட்டால், P ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும். மறுதலையாக இக்கோட்டில் P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில் Pக்கு இடப்புறம் அமைந்த விகிதமுறும் புள்ளிகள் L பிரிவையும் Pக்கு வலப்புறம் உள்ள விகிதமுறும் புள்ளிகள் R பிரிவையும் அமைப்பதாகக் கொண்டால் (P விகிதமுறும் எண் எனிவ் P, R-பிரிவில் அமையும்.) (L, R) ஒரு வெட்டு ஆகும். எனவே P ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும். இந்த நேர்க்கோட்டமைப்பைக் **கூட்டுத் தொடர்ச்சி** என அழைக்கிறோம்.

2. எல்லைப் புள்ளிகள் தொடர் முறைகள்

ξ 2-1. இடைவெளிகள்

a, b என்பன இரு மெய்யெண்கள் $(a<b)$ எனில்,

(i) $\{x/a\leq x\leq b\}$ என்ற கணம் ஒரு மூடிய இடைவெளி (closed interval) எனப்படும். இதனை $[a, b]$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $\{x/a<x<b\}$ என்ற கணம் ஒரு திறந்த இடைவெளி (open interval) ஆகும். இதனை (a, b) எனக் குறிப்போம்.

(iii) $[a, b) = \{x/a\leqslant x<b\}$,
$(a, b] = \{x/a<x\leqslant b\}$ என்பன ஒருபுறம் மூடிய (அல்லது ஒருபுறம் திறந்த) இடைவெளிகளாகும்.

ξ 2-2. கணங்களின் எல்லைகள் (வரம்புகள்)

S என்பது மெய்யெண் கணத்தின் உட்கணமாக இருக்கட்டும். 'a' என்ற மெய்யெண் $x\in S\Rightarrow x\geq a$ என அமையுமாயின், S கீழ்வரம்புடையது எனப்படும்; 'a' S-ன் ஒரு கீழ் எல்லை (வரம்பு) எனப்படும். இவ்வாறே 'a' என்னும் மெய்யெண் $x\in S\Rightarrow x\leqslant b$ என அமையுமாயின், S மேல் வரம்புடையது எனவும்; b, S-ன் ஒரு மேல்வரம்பு எனவும் அழைக்கப்படும்.

மேலும், கீழும் வரம்பையுடைய கணம் **வரம்புள்ள** (bounded) கணம் எனப்படும்.

ξ 2-2.1. ஒரு கணத்தின் மேல் வரம்புகளில் மிகச் சிறிய எண் **மீச்சிறு மேல்வரம்பு** எனப்படும். இவ்வாறே கீழ்வரம்பு களில் மிகப் பெரிய எண் **மீப்பெரு கீழ்வரம்பு** எனப்படும்.

(i) 'm' ஒரு கணத்தின் ஏதேனும் மீச்சிறுமேல் வரம்பு என்க. 'b' ஒரு கணத்தின் ஏதேனும் நடு மேல்வரம்பு எனின், $m \leqslant b$.

(ii) 'l' ஒரு கணத்தின் மீப்பெரு கீழ்வரம்பென்க. 'a' என்பது கணத்தின் ஏதேனுமொரு கீழ்வரம்பு எனின் $l \geqslant a$.

(iii) மீப்பெரு கீழ்வரம்போ அல்லது மீச்சிறு மேல் வரம்போ கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கவேண்டு மென்பது இல்லை.

(iv) l ஒரு கணத்தின் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு எனின் $\epsilon < 0$ என்ற எந்த எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், $(l, l+\epsilon)$ என்ற இடைவெளில் கணத்தின் ஓர் உறுப்பேனும் அமைதல் வேண்டும். (அவ்வாறில்லையெனில் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு lஐ விட பெரியதாகும்.)

(v) இவ்வாறே m கணத்தின் மீச்சிறு மேல்வரம்பு எனின் $(m-\epsilon, m)$ என்ற இடைவெளியில் கணத்தின் ஒரு உறுப்பாகிலும் இருத்தல்வேண்டும்.

§ 2-3. எல்லைப் புள்ளிகள்

ஒரு கணத்தில் ξ என்ற புள்ளி $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ என்ற அருகாமையில் $(\epsilon > 0)$ முடிவில்லாத உறுப்புகள் இருக்குமெனில் ξ அந்தக் கணத்தின் ஒரு **எல்லைப் புள்ளி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

1. $\left\{ x \mid x = \pm \ 1 + \frac{1}{n} \right\}$ என்ற கணத்தில் 1, −1 என்பவை எல்லைப் புள்ளிகள்.

2. $\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \ m, n, p \in N \right\}$ என்ற கணத்தில் எல்லைப் புள்ளிகள், Oவும் $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ $(m, n \in N)$ என்னும் அமைப்பில் உள்ள எண்களும் ஆகும்.

3. $\left\{ 1, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\ldots \frac{1}{n}, \ldots \right\}$ என்ற கணத்தில் O என்பது எல்லைப் புள்ளி.

(குறிப்பு: O என்பது கணத்தின் உறுப்பில்லை என்பதைக் காண்க.)

ξ 2-3.1 குறிப்பு

ξ என்பது A என்ற கணத்தின் எல்லைப் புள்ளி எனில், $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ என்ற இடை வெளியில் A-ன் ஒரு உறுப்பாவது இருத்தல் வேண்டும். அவ்வாறே எந்த மிகை ξக்கும் $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$-ல் Aன் ஒரு உறுப்பேனும் இருந்தால்தான் ξ, Aன் எல்லைப் புள்ளி ஆகும். (நிரூபணம் தருக.)

ξ 2-3·2 வரையறை

A என்ற கணத்தின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் கொண்ட கணம் A-ன் வழிவந்த கணம் (derived set) எனப்படும். அதனை A^1எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

ξ 2-3.3 போல்ஸோனா—வியர்ஸ்ட்ராஸ் தேற்றம்

ஒவ்வொரு வரம்புடைய முடிவில்லாக் கணத்திலும் ஒரு எல்லைப் புள்ளி உண்டு.

நிரூபணம்

A ஒரு வரம்புள்ள முடிவில்லா கணமாகவிருக்கட்டும் A வரம்புள்ளது எனில் $A C [a, b]$ ஆகுமாறு $[a,b]$ என்றும் முடிய இடைவெளியை நாம் காண இயலும்.

S என்னும் கணத்தைப் பின்வருமாறு அமைத்திடுக.

$S = \{x / x$ஐ விடக் குறைவான A-ன் உறுப்புகள் உயர்ந்த பட்சம் அறுதியான எண்ணிக்கையுடையது.$\}$

$S \neq \phi$; ஏனெனில் $a \in S$.

மேலும் b, S-ன் ஒரு மேல்வரம்மாகும்.

எனவே S வரம்புடைய கணம்

ξ என்பது S-ன் மீச்சிறு மேல்வரம்பாக இருக்கட்டும்.

ξ, A-ன் ஒரு எல்லைப் புள்ளி என நிறுவுவோம்.

(a_1, b_1) என்னும் இடைவெளி ξ-ன் B என்ற அருகாமையில் அமைந்திருக்கட்டும்.

$a_1 < \xi$ ஆதலின் a_1, S-ன் மேல்வரம்பாக இருக்க இயலாது. எனவே $a < \eta \leq \xi$, $\eta \in S$ என்னுமாறு ஒரு η ஒன்று உள்ளது. $\eta \in S$ ஆதலால் η, A-ன் ஒரு முடிவுள்ள (finite) எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புகளைக் காட்டிலும்தான் அதிகமாயுள்ளது. $b > \xi$; எனவே b, S-ன் ஒரு மேல்வரம்பாகும். ஆயினும் B, S-ன் ஒரு உறுப்பல்ல. எனவே, bயை விடக் குறைவான Aயின் உறுப்புக்கள் முடிவில்லாதவை.

மேலும் aஐ விடக் குறைவான A-ன் உறுப்புக்கள் அறுதியான எண்ணிக்கையுடையவை. எனவே (a, b)-ல் முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புகள் உள்ளன. ஆகவே ξ ஒரு எல்லைப் புள்ளியாகும்.

வரையறை

மூடிய கணம்: ஒரு கணத்தின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவும் அந்தக் கணத்தின் உறுப்புக்களாயின், அந்தக் கணம் **மூடியகணம்** ஆகும்.

அதாவது, $A = A^1$ எனின், A ஒரு முடியகணமாகும்.

ξ 3. சார்புகள்

A, B இருகணங்கள் என்க. B-ன் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் இயைபாக B-ன் ஒரு உறுப்பை இணைக்கும் விதியை Aயிலிருந்து Bயின் மேல் வரையறுக்கப்பட்ட **சார்பு** என்கிறோம் A என்றும் கணத்தைச் சார்பின் **அரங்கம்** (domain) எனவும் சார்பு மதிப்புக் களரியான B-ன் உறுப்புக்களை சார்பின் **வீச்சுகம்** (Range) எனவும் அழைப்போம். பகுப்பாய்வில் A, B இரண்டையுமே மெய்யெண்களின் **கணங்களாகக்** கொள்வோம். A-ன் x என்னும் மெய்யெண்ணின் சார்பு மதிப்பு $y \in B$ எனின்

yஐ $f(x)$ எனவும், சார்பினை f (அல்லது g, h, ϕ, F... போன்ற எழுத்துக்கள்) என்று கூறுவோம். சார்பின் வீச்சு $\{f(x);\ x \in A\}$ என்னும் கணத்தில் நிர்ணயிக்கப்படும்.

§ 3-1. தொடரினம்: தொடர்முறை (Sequence)

இயல் எண்கள் (Natural numbers) கணத்தை அரங்கமாக்க கொண்ட சார்பு ஒரு தொடர்முறை எனப்படும்.

$f(n), n \in N$ என்னும் தொடர் முறையை

$\{a_n\}$, $(a_n = f(n);\ n \in N)$எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

(i) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots \ldots \ldots \qquad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(ii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots \ldots \ldots \qquad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

(iii) $1, -1, 1, -1, -1 \ldots \ldots \ldots a_n = (-1)^{n-1}$

(iv) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots \ldots \ldots\ a_n = (-1)^{n-1} n$

§ 3-1.1 வரம்புள்ள தொடரினங்கள்

$\{a_n\}$ ஒரு தொடர்முறை என்க.

$n \in N$, $k \leq a_n \leq K$ என வருமாறு k, K என்னும் எண்கள் இருக்குமேயானால் $\{a_n\}$ ஒரு வரம்புள்ள தொடர்முறையாகும்

எடுத்துக்காட்டு

(i) $a_n = (\frac{2}{3})^{n-1}$ எனில் $\{a_n\}$ வரம்புள்ளது. ஏனெனில் $0 \leq a_n < 1\ (n \in N)$

(ii) $a_n = \underline{|n}$ எனில் $\{a_n\}$ வரம்பற்றது.

பயிற்சி IV

பின்வரும் தொடர்முறைகள் வரம்புள்ளானவா என்று ஆய்க:

(i) $1^2, 2^2, 3^2 \ldots \ldots$

(ii) $\text{Sin}\ \pi/2, \text{Sin}\ 2\pi/2, \text{Sin}\ 3\pi/2 \ldots \ldots$

(iii) $1, -2, 3, -4, \ldots \ldots$

[விடைகள்: (i) வரம்பற்றது (ii) வரம்புள்ளது (iii) வரம்பற்றது]

ξ 3-1.2 தொடரினத்தின் எல்லைப் புள்ளிகள்

$\{a_n\}$ என்ற தொடர்முறையின் எண்ணிலடங்கா உறுப்புக்கள் $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ என்றும் இடைவெளியில் அமைந்திருப்பின்,

ξ என்பது $\{a_n\}$-ன் ஒரு எல்லைப் புள்ளியாகும்.

இவ்வாறன்றி $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ என்ற இடைவெளியில் அறுதியாக எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புகளே அமைந்திருக்குமாயின் ξ, $\{a_n\}$-ன் எல்லைப்புள்ளியாகமாட்டாது,

எடுத்துக்காட்டு

(i) $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ $(p>0)$ ஆனால் O என்பது $\{a_n\}$-ன் ஒரே எல்லைப் புள்ளி யாகும்.

(ii) $a_n = 1+(-1)^n$ எனில், 0, 2 என்பன $\{a_n\}$-ன் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

ξ 3-2. தேற்றம்

ஒவ்வொரு வரம்புள்ள தொடரினத்திற்கும் ஒரு எல்லைப் புள்ளி உண்டு.

$\{a_n\}$ என்பது ஒரு தொடர்முறை என்க.

இதன் வீச்சு A என்க;

(i) A அறுதியான (முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுடைய) உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணம் எனில், A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளில் ஒன்றேனும் எண்ணற்ற முறை வருதல் வேண்டும். இதனை ξ எனின், $(\xi-\epsilon, \xi+\epsilon)$ என்ற இடைவெளியில் $\{a_n\}$-ன் எண்ணற்ற உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே ξ ஒரு எல்லைப் புள்ளியாகும்.

(ii) A ஒரு முடிவில்லாக் கணம் எனில், $\{a_n\}$ வரம்புள்ளதாகையால், Aயும் வரம்புள்ளதே, எனவே போல்ஸோனா—வியர்ஸ்ட்ராஸ் தேற்றத்தின்படி Aயில்

ஒரு எல்லைப் புள்ளியேனும் நிச்சயம் உண்டு. இது η எனில் $(\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ என்னும் இடைவெளியில், A-ன் முடிவிலடங்கா உறுப்புக்கவ் உள்ளன. அதாவது n-ன் முடிவில்லா எண்ணிக்கையுடைய மதிப்புக்களுக்கு $a_n \in (\eta-\epsilon, \eta+\epsilon)$ எனவே, η $\{a_n\}$ன் எல்லைப் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு

g, G என்பன $\{a_n\}$ ன் மிகச் சிறிய, மிகப் பெரிய எல்லைப் புள்ளிகள் எனின், gயை $\{a_n\}$-ன் **கீழ் எல்லைப் புள்ளி** (lower limit of indetermination) Gஐ $\{a_n\}$-ன் **மேல் புள்ளி** (Upper limit of indetermination) எனவும் அழைப்பது வழக்கம்.

g எல்லை a_n எனவும்; G எல்லை a_n எனவும் குறிக்கப் படும்.

§ 3-3. குவித் தொடரினங்கள் (ஒருங்குத் தொடரினங்கள்)

ஒரே ஒரு எல்லையை மாத்திரம் கொண்ட தொடரினம் குவித் தொடரினம் (ஒருங்குத்தொடரினம்) எனப்படும். இத்த எல்லைப் புள்ளி l எனில் எல்லை $n \to \infty$ $a_n = l$ என வரும். மேலும் l $\{a_n\}$-ன் எல்லைப் புள்ளி எனப்படும்.

§ 3.31 தேற்றம் : $\{a_n\}$ என்ற தொடரினம் l என்ற எல்லைப் புள்ளியைக் கொண்டிருப்பதற்கு ஒரு தேவையானதும் போது மான நிபந்தனை, கொடுத்துள்ள ஒவ்வொரு $\epsilon(>o)$க்கு பொருத்தமாக $m \in N$, $n \leqslant m$ எனில் $|a_n - l) < \epsilon$ என வருமாறு இருப்பதாகும்.

நிரூபணம் :

(i) **நிபந்தனை தேவையானது.**

$\{a_n\}$, lஐ நோக்கிக் குவிகிறது என்போம். அதாவது (a) $\{a_n\}$ வரம்புள்ளது (b) l என்பது $\{a_n\}$ன் ஒரே எல்லைப் புள்ளி. எனவே $\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், nன் அறுதி யான மதிப்புகளுக்குதான் $a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)$. இவ்வாறு $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ என்ற இடைவெளியைச் சாராத உறுப்புகளின் மிகப் பெரிய கீழ்க்குறி $m=1$ எனில், $n > m \Rightarrow a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$.

அதாவது, $n \geqslant m$ எனில் $|a_n - l| < \epsilon$.

(ii) **நிபந்தனை போதுமானது,**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனையைக் கொண்டு நாம் பின் வருவனவற்றை நிறுவுவோம்:

(a) $\{a_n\}$ வரம்புள்ளது.

(b) l, $\{a_n\}$-ன் ஒரு எல்லைப் புள்ளி.

(c) $\{a_n\}$-ல் வேறொரு எல்லைப் புள்ளியும் இல்லை.

$\epsilon = 1$ எனக் கொண்டால், p என்ற எண்ணை, $n > p$ எனில் $|a_n - l| < 1$ என வருமாறு நாம் காண இயலும். அதாவது $a > p$ எனில், $a_n \in (l-1, l+1)$

$\{l=1, a_1, a_2, - ap_{-1}\}$ என்ற கணத்தின் மிகச் சிறிய எண் k ஆகவும், $\{l+1, a_1, a_2 - ap_{-1}\}$ என்ற உறுப்பின் மிகப் பெரிய என் K ஆகவும் இருந்தால்,

n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $k \leqslant a_n \leqslant K$ என்பது தெளிவு.

எனவே $\{a_n\}$ வரம்புள்ள கணம்.

எல்லா மிகை ϵக்கும், $n \geqslant m$ எனில்

$|a_n - l| < \epsilon$ என வருவதால், l ஒரு எல்லைப் புள்ளி யாகும்.

முடியுமானால் l^1 $\{a_n\}$-ன் மற்றொரு எல்லைப் புள்ளியா யிருக்கட்டும். $l^1 > l$ எனில், $\epsilon = \frac{1}{2}(l^1 - l)$ எனக் கொண்டு, $l^1 = l+2 > \epsilon > l = \epsilon$ என ஆகிறது.

இப்பொழுது, $n \geqslant m$ எனில் $a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$ என அமையு மாறு m என்றும் ஓர் எண் உள்ளது. (நாம் ஒப்புக்கொண்ட நிபந்தனையின்படி) எனவே, $l+\epsilon$ ஐ விடப் பெரிய $\{a_n\}$-ன் உறுப்புகள் அறுதியான எண்ணிக்கையுடையவை. எனவே $(l^1 - \epsilon, l^1 + \epsilon)$ என்ற இடைவெளியில் ஓர் அறுதியான எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புக்களே காணப்படும். எனவே l^1 ஓர் எல்லைப்புள்ளியாக மாட்டாது.

ஆகவே l, $\{a_n\}$-ன் ஒரே எல்லைப் புள்ளியாகும். எனவே $\{a_n\}$, lஐ நோக்கி ஒருங்குகின்றது.

§ 4. கோஷியின் பொதுக் குவிக் கொள்கை (Cauchy's Principle of Convergence):

$\{a_n\}$ என்னும் தொடரினம் ஒருங்குவதற்கு, கொடுக்கப் பட்ட எந்த மிகை ϵ-க்கும் பொருத்தமாக m என்னும் முழு

எண், $n \geq m$, $\geq p \geq o$, $| a_n+p - a_n | < \epsilon$ என வருமாறு இருப்பது. ஒரு தேவையான, போதுமான நிபந்தனையாகும்.

நிருபணம்:

(i) **நிபந்தனை தேவையானது:**

$\{u_n\}$ என்னும் தொடரினம் lஐ நோக்கி ஒருங்கட்டும் எனில் $\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்ட நிலையில், $n > m$ எனில் $| a_n - l | < \epsilon_2$ ஆகுமாறு m உள்ளது.

இந்நிலையில், $n+p>m$; ஆதலின்

$$| a_{n+p} - l | < \frac{\leq}{2}$$

எனவே $| a_{n+p} - a_n | \epsilon$

$$= | (a_n+p-l| - (a_n - l) |$$

$$< | a_n+p-l | + | a_n - l |$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(ii) **நிபந்தனை போதுமானது.**

இந்தப் பகுதியின் நிருபணத்தில் முதலாவதாக கொடுத்துள்ள நிபந்தனையால் $\{a_n\}$ வரம்புள்ளது என்றும்; இரண்டாவதாக இந்த வரம்புள்ள தொடரினத்தில் ஒரே ஒரு எல்லைப் புள்ளிதான் உண்டென்றும் நிறுவுவோம்.

$\epsilon = 1$ எனக் கொண்டு, $n \geq r, p > o$ எனில்

$$| a_{n+p} - a_n | < 1$$

ஆகுமாறு r என்றும் மிகை முழு எண் உள்ளது.

எனவே, $p \geq o$ எனில் $| ar+p - a_n | < 1.$

அதாவது, $p > o$ எனில்,

$$a_{r-1} < a_{r+p} < a_{r+1}$$

$k=\{a_n-1, a_1, a_2,\ldots a_{n-1}\}$ என்ற கணத்தின் மீச்சிறு உறுப்பாகவும், $K=\{a_n+1, a_1, a_1 \ldots ar_1\}$ என்ற கணத்தின் மீப்பெரு உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும்.

இதனால் $k \leqslant a_n \leqslant k, \forall n$ என ஆகிறது.

அதாவது $\{a_n\}$ வரம்புடைய கணமாகும்.

ஆதலால் $\{a_n\}$க்கு ஒரு ஒரு எல்லைப் புள்ளியேனும் உண்டு. முடியுமானுல் l, l^1 என்பன இரு எல்லைப் புள்ளிகளாக இருக்கட்டும்.

$\epsilon>0$ கொடுக்கப்பட்டால், $n>m$, $p \geqslant 0$ எனின்

$|a_{n+p}-a_n| < \frac{\epsilon}{3}$ என mஐ காணலாம்.

l ஓர் எல்லைப் புள்ளியாதலால்,

$|a_{m_1}-l| < \frac{\epsilon}{3}$ என வருமாறு $n_1 \geqslant m$ காண இயலும்.

மேலும் l^1 ஓர் எல்லைப் புள்ளியாதலால்

$m_2 \geqslant m$ எனில் $|a_{m_2}-l| < \frac{\epsilon}{3}$ என வருமாறு m_2 ஐ காண இயலும்.

$m_1, m_2 > m$ ஆனால்

$|a_{m_1}-a_{m_2}| < \frac{\epsilon}{3}$ (கொடுத்துள்ள கோஷி நிபந்தனைப் படி)

எனவே,

$$|l-l^1| = |l-a_{m_1}+am_1{}^{-}am_2+am_2-l^1|$$

$$\leqslant |l-a_m|+|a_{m_1}-a_{m_2}|+|a_{m_2}-l^1|$$

ϵ_1 எதைச்சையாதலின், $l=l^1$ என முடிவு கிடைக்கிறது எனவே $\{a_n\}$க்கு ஒரே ஒரு எல்லைப் புள்ளிதான் உண்டு அதாவது $\{a_n\}$ இந்த எல்லைப் புள்ளியை நோக்கிக் குவிகிறது.

§ 5 எல்லைகளின் இயற்கணிதம்

§ 5-1 தேற்றம்

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்ற தொடரினங்களில், எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, எல்லை $\lim_{n\leftarrow\infty} b_n = l'$ எனின்,

(i) எல்லை $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = l+l'$

(ii) எல்லை எல்லை $\lim_{n\to 8}(a_n - b_n) = l - l'$

(iii) எல்லை $a_n\, b_n = ll'$

(iv) $l' \neq o$ எனின், எல்லை $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{b_n} = \frac{l}{l^1}$

நிருபணம்

$\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், m_1, m^2 என்னும் முழு எண்களை

$n \geqslant m_1$ எனில் $| a_n - l | < \frac{\epsilon}{2}$ ஆகவும்

$n > m_2$ எனில் $| b_n - l^1 | < \frac{\epsilon}{2}$ ஆகவும்

காண இயலும். எனவே m_1 என்பது m_1, m_2 இவற்றில் பெரியதானின்,

(i) $n \geqslant m \Rightarrow | (a_n+b_n) - (l+l^1 |$

$= | (a_n - l) + (b_n - l^1) |$

$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

ஆதலால், எல்லை $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = l+l^1$

(ii) அதே நிபந்தனையின் கீழ்

$n \geqslant m \Rightarrow | (a_n - b_n) - (l - l^1 |$

$= (a_n - l) - (b_n - l^1) |$

$< | a_n - l | + | b_n - l^1 |$

$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$

எனவே எல்லை $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = l - l^1$

(iii) $a_n b_n - ll^1 = a_n(b_n - l^1) + l^1(a_n - l)$

$$\therefore \mid a_n\, b_n - ll^1) = \mid a_n(b_n - l) + l^1(c_n - l) \mid$$

$\leqslant \mid a_n\ (ln\text{-}l^1) \mid + \mid l^1(a_n\text{-}l) \mid$

$\leqslant \mid a_n \mid \ \mid l_n l^1 \mid + \mid l^1 \mid \ \mid a_n\text{-}l \mid$

$\{a_n\}$ ஒருங்கு தொடரிணம் ஆதலால், வரம்புள்ளது.

$\forall_n, \mid a_n \mid \leqslant K$

எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = l^1$, எல்லை $\lim_{n\to\infty} b_n = l^1$ ஆதலின்,

m_1, m_2 என்னும் முழு என்கள்

$n \geqslant m_1$ எனில், $\mid a_n\text{-}l \mid < \dfrac{\epsilon}{2 \mid l_1 \mid}$ ஆகவும்

$n \geqslant m_2$ எனில், $\mid l_n\text{-}l^1 \mid < \dfrac{\epsilon}{2K}$ எனவும் காண இயலும்.

m என்பது m_1, m_2 இவற்றில் பெரியது எனில்,

$n \geqslant m \Rightarrow \mid a_n\, b_n\text{-}ll^1 \mid$

$\leqslant \mid a_n \mid \ \mid b_n - l' \mid + \mid l'' \mid \ \mid a_n\text{-}l \mid$

$< K. \quad \dfrac{\epsilon}{2K} + \mid l^1 \dfrac{\epsilon}{2 \mid l^1 \mid} \mid$

$= \epsilon.$

எனவே எல்லை $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = ll'$

(iv) $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{l}{l^1} = \dfrac{l^1 a_n\text{-}lb_n}{b_n l^1} = \dfrac{l^1(a_n\text{-}l)\text{-}l(l_n\text{-}l^1)}{b_n l^1}$

$$\therefore \frac{a_n}{l_n} - \frac{l}{l^1} \leqslant \frac{|l^1|\ |a_n - l| + |l|\ |b_n - l^1|}{|l_n|\ |l^1}$$

$\{b_n\} \to l^1 \neq 0 \therefore m$, என்றும் மிகை முழு எண்

$n \geqslant m$, எனில், $|b_n - l^1| = \frac{l^1}{2}$ ஆகுமாறு காண இயலும்.

அதாவது $n \geqslant m_1$, $|l^1| - |l_n| \leqslant |b_n - l - < \frac{1}{2}|l^1|$

i-e $\frac{1}{2}|l^1| < |b_n|$

எனவே $n \geqslant m$, எனில்

$$\left|\frac{a_n}{l_n} = \frac{i}{l^1}\right| \leqslant \frac{|l^1|\ |a_n - l| + |l| - b_n - l^1|}{|b_n|\ |l'|}$$

[சமன்பாடு (1)ன்படி]

$$= \frac{|l^1|\ |a_n - l| + |l|\ |b_n - 1^1|}{\frac{l'^2}{2}}$$ [சமன்பாடு (2)ன் படி

$$\leqslant \frac{2}{|l^1|} |a_n - l| + 2\left|\frac{|l| + 1}{|l^1|^2}\right| b_n - l'|$$

$\in > O$ எனில், $n \geqslant m_2$ எனில் $|a_n - l| < \frac{|l^1|}{4} \in$ எனவும்,

$n \geqslant m_3$ எனில் $|b_n - 1^1| < \frac{|l^1|}{4(|l| + 1}$ எனவும்,

ஆகுமாறு m_2, m_3 என்னும் மிகை முழு எண்கள் காண இயலும். m என்பது m_1, m_2, m_3 என்பனவற்றின் மிகப் பெரிய எண் எனில்,

$$n \geqslant m \geqslant m \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{l^1}\right|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

எனவே எல்லை $n \to \infty$ $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{l^1}$

குறிப்பு:

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினங்களாயமையாத போதிலும் $\{a_n+b_n\}$ ஒருங்குணம்.

எடுத்துக்காட்டு

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ $\forall\, n \in N$ எனில்

$a_n+b_n = o \;\forall n \in N$

அதாவது $\{a_n+b_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினம்.

எனினும் $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினங்களல்ல.

ξ 5.2 தேற்றம்

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ என்பவன ஒருங்குத் தொடரினங்கள்;

$\forall\, n$, $a_n \leqslant b_n$ எனில், எல்லை $a_n \leqslant$ எல்லை b^n
$n \to \infty$

நிருபணம்:

எல்லை $a_n = l$; எல்லை $b_n = l^1$ என்க.

(i) $l > l^1$ எனில், $l - l^1 = 3\epsilon$ ஆக இருக்கட்டும்.

இவ்வாறாயின், $(l-\epsilon,\ l+\epsilon) \cap (l^1-\epsilon, l^1+\epsilon) = \phi$

$$l^1+\epsilon < l-\epsilon$$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினங்கள் ஆதலின் $n \geqslant m$ எனில் $a_n \in$ $(l-\epsilon,\ (l+\epsilon)$, $b_n \in (l^1-\epsilon, l^1+\epsilon)$ என அமையுமாறு m காண இயலும்

எனவே, $n \geqslant m$ எனில், $b_n < l^1+\epsilon < l-\epsilon a_n$.

அதாவது $b_n < a_n$.

இது ஒரு முரண்பாடு: எனவே $l \not> l^1$

ஆகவே $l \leqslant l^1$.

பயிற்சி IV

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ என்ற ஒருங்குத்த் தொடரினங்களில்

(i) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$; (ii) எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n =$ எல்லை $\lim_{n\to\infty} c_n = l$ எனில்,

எல்லை $\lim_{n\to\infty} b_n = l$ என்று நிரூபி.

ξ 6. ஓரியல்புத் தொடரினங்கள் (Monotonic Sequences):

$\forall n \in N$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ எனின் $\{a_n\}$ ஏறுமுகத் தொடரினம் (monotonic increasing sequence) எனவும், $\forall n \in N$, $a_{n+1} n \leqslant a_n$ எனில் $\}a_n\}$ இறங்குமுகத் தொடரினம் (monotonic decreasing sequence) எனவும் வழங்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $a_n = 3n+2$ எனில் $\{a_n\}$ ஏறுமுகத் தொடரினம்.

(ii) $a_n = 2 + \frac{3}{n}$ எனில் $\{a_n\}$ இறங்குமுகத் தொடரினம்.

ξ 6.1 தேற்றம்

ஓர் ஓரியல்புத் தொடரினம் குவிவதற்குத் தேவையான போதுமான ஒரு நிபந்தனை அந்தத் தொடரினம் வரம்புள்ளதா யிருத்தல் ஆகும்.

நிரூபணம்:

(i) **நிபந்தனை தேவையானது:**

எல்லா ஒருங்குத் தொடரினங்களும் வரம்புள்ளவை. எனவே ஓரியல்பு ஒருங்குத் தொடரினங்களும் வரம்புள்ளவை தான்.

(ii) **நிபந்தனை போதுமானது:**

$[a_n]$ ஏறுமுகமானதும் வரம்புடையதும் ஆயின், l என்பது அதன் மீச்சிறு மேல் வரம்பாயிருக்கட்டும்.

$\epsilon > 0$ கொடுக்கப்பட்டதாயின், $n \geqslant m$ எனில், $a_n > l - \epsilon$ ஆகுமாறு ஒரு m உள்ளது.

$[a_n]$ ஏறுமுகத்தது ஆதலில்,

$n \geqslant m$ எனில், $a_n \geqslant a_m$

எனவே $n \geqslant m$ எனில், $a_n \geqslant l - \epsilon$

மேலும், $a_n \leqslant l < l + \epsilon \; \forall n \geqslant m.$

எனவே, $n \geqslant m \Rightarrow a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$

அதாவது $n \geqslant m \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

$\therefore$ எல்லை $a_n = l.$
$n \to \infty$

இவ்வாறே $\{b_n\}$ வரம்புள்ள இறங்குமுகத் தொடரினமாயின் $\{b_n\}$ அதின் மீப்பெரு கீழ்வரம்பை நோக்கி ஒருங்குகின்றது என்று நிறுவலாம்.

ξ **6.2 தேற்றம்:** ஒரு வரம்பற்ற ஓரியல்புத் தொடரினம் $+\infty$ அல்லது $-\infty$க்கு விரிக்கின்றது.

நிரூபணம்

$\{a_n\}$ ஒரு வரம்பற்ற ஏறுமுகத் தொடரினம் என்க.

A என்பது ஒரு (பெரிய) முழு எண்ணாக இருக்கட்டும் $\{a_n\}$ வரம்பற்றதாகையால்,

$a_E \geqslant A$ ஆகுமாறு m என்ற ஒரு மிகை முழு எண் உள்ளது. (இல்லாவிட்டால் $a_n < A \; \forall_n$ என ஆகும்; அதாவது $\{a_n\}$ வரம் புள்ளதாகும்.)

$\{a_n\}$ ஏறுமுகத்ததாகையால், $n \geqslant m$, $a_n > a_m > A$. அதாவது $\{a_n\}$, ∞ நோக்கி விரிகின்றது.

இவ்வாறே $\{a_n\}$ ஒரு வரம்பற்ற இறங்குமுகத் தொடரினமெனில் $\{a_n\}$ $-\infty$ஐ நோக்கி விரிகின்றது என நிறுவலாம்.

குறிப்பு :

வரம்புள்ள குவிதல் இல்லாத தொடரினம். அளவான ஊசலாட்டம் (இத்தகைய தொடரினத்திற்கு இரு எல்லைப் புள்ளிகளேனும் இருத்தல் வேண்டும்')

வரம்பற்ற தொடரினங்களில் (i) ∞ஐ நோக்கி விரிதல் (ii) $-\infty$ஐ நோக்கி விரிதல் (iii) அளவற்ற ஊசலாட்டம் என்னும் மூவகைத் தன்மைகளில் ஒன்று காணப்படும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. எல்லை $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

$$a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\frac{+n}{n^2}$$

$$=\frac{1+2+\quad+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$\epsilon>o$, முன்னமேயே கொடுக்கப்பட்டதெனின்,

$$|a_n-\tfrac{1}{2}|=\frac{1}{2n}<\epsilon,\left(n>\frac{1}{2\epsilon}\text{ எனின்}\right)$$

எனவே எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$.

2. எல்லை $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=1$ என நிறுவுக.

$n>3$ எனில்,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}\ \frac{+n(n-1)}{1-2}\frac{1}{n^2}\ \frac{+n(n-1)(n-2)}{1-2-3}\ \frac{1}{n^3}+$$

($n+13$ உறுப்புகளுள்ளன.)

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$<1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1.2.3}+\quad\cdots\cdots\cdots\to(n+1)$$

உறுப்புகள்.

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2-1}}+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$=3.<n.$

எனவே $n \geqslant 3$ எனில் $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant n.$

அதாவது $n^{n+1} \geqslant (n+1)^n$

ஆகவே $n^{\frac{1}{n}} \geqslant (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore \quad a_n > a_{n+1}.$

எனவே $[a_n]$, மூன்றாவது உறுப்பிலிருந்து இறங்கு முகத்தது.

மேலும், $a_n = n^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 \;\forall n.$

அதாவது $\{a_n\}$ 1ஐ கீழ்வரம்பாகக் கொண்டது.

எனவே $\{a_n\}$ ஓர் ஒருங்குத் தொடரினமாகும்.

$\therefore \quad \epsilon > o$ கொடுக்கபட்டதாயிருந்தால்,

$$(1+\epsilon)^n = 1+n\epsilon+\frac{n(n-1)}{1-2}\epsilon^2+ \;\ldots\;\ldots$$

$$> 1+n\epsilon+\frac{(n-1)}{1\cdot 2}\epsilon^2 \;\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$> \frac{n(n-1)}{1.2}\epsilon^2 > n; \left(\frac{n-1}{2} > \frac{1}{\epsilon^2}\right.$ ஆகுமானால் அதாவது $\left. n > \frac{2}{\epsilon^2}+1 \right)$

எனவே $1+\epsilon > n^{\frac{1}{n}}, \;\forall n > \frac{2}{\epsilon^2}+1$

$\therefore \quad \left| n^{\frac{1}{n}}-1 \right| < \epsilon \;\forall n > \frac{2}{\epsilon^2}+1.$

எனவே $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$

3. அடுக்குக்குறி எல்லை

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ எனில் $\{a_n\}$ ஒரு ஒருங்கு தொடரினம்.

(இதன் எல்லை e எனக் குறிக்கப்படும்.)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$+ \ldots \ldots \rightarrow (n+1)$ உறுப்புகள்)

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{n}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\ \ldots$$

$\rightarrow (n+1)$ உறுப்புகள் (1)

இவ்வாறே,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$+ \ldots \ldots \ldots \rightarrow (n+2)$ உறுப்புகள் R

$\Lambda < n$ எனில்

$$\frac{\Lambda}{n} > \frac{\Lambda}{n+1}$$

$$\therefore -\frac{\Lambda}{n} < -\frac{\Lambda}{n+1}$$

$$\therefore 1-\frac{\Lambda}{1} < 1-\frac{\Lambda}{n+1} \quad (\Lambda = 1, 2, \ldots\ldots\ )$$

எனவே $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\ldots\right)\left(1-\frac{\Lambda}{n}\right)$

$$< \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\wedge}{n+1}\right)-$$

ஆகையால் மூன்றாவது உறுப்பிலிருந்து (2)-ன் வலப் பக்கத்திலிருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பும் (1)ன் வலப்பக்கத்திலிருக்கும் இசைந்த உறுப்பை விடப் பெரியது; (2)-ன் முதல் இரண்டு உறுப்புக்களும் (1)-ன் முதல் இரண்டு உறுப்புகளுக்குச் சமம்; மேலும் (2)-ல் $(n+2)$ மிகை உறுப்புகளும், (1)-ல் $(n+1)$ உறுப்புகளும் உள்ளது.

எனவே $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$$\therefore \quad a_{n+1} > a_n.$$

அதாவது $\{a_n\}$ ஓர் ஏறுமுகத் தொடரிசை.

மேலும் (1)-ல் கண்டபடி, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3} + \cdots\cdots$$

$$< 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3} + \cdots\cdots \rightarrow (n+1) \text{ உறுப்புகள்}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \cdots\cdots \rightarrow \infty \text{ வரை}$$

$$= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

அதாவது $\{a_n\}$ என்ற ஏறுமுகத் தொடரினத்தின்மேல் வரம்புள்ளது. எனவே $\{a_n\}$ ஒருங்கு தொடராகும்.

4. $\{a_n\}$ என்ற தொடரினத்தில், $n \geqslant m$ எனில் $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < k < 1$ எனில் எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| |a_n|$$

$$< k^{n-m} |a_m| = \frac{|a_m| k^n}{k^m} = \lambda k^n \left(\lambda = \frac{|a_m|}{k^m}\right)$$

$$< \epsilon \left[n > \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ எனின் } \right]$$

அதாவது எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

5. எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ எனின், எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + - + a_n}{n} = l$ என்று நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$a_n = b_n + l$ என்க எல்லை $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. எனவே m என்றும் மிகை எண்ணை $n > m$ எனில் $|b_n| < \frac{\epsilon}{2}$ என வருமாறு எடுத்துக் கொள்ள இயலும்.

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{n} + \frac{b_{m+1} + b_{m+2} b_m \ldots + b_n}{n}$$

எனவே, $\left|\frac{b_1 + {}_2 + \ldots + b_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right| +$

$$\frac{|b_{m+1}| + \ldots + |b_n|}{n}$$

இப்பொழுது $\frac{|b_{m}+1|+\ldots+|b_n|}{n} \leqslant \frac{\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\ldots\rightarrow(n-m)}{n}$

உறுப்புகள் $= \frac{n-m}{n}\,\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$

m_1 என்றும் மிகை என், $e>m_1>m$ எனில்

$\left|\frac{b_1+\ldots\ldots bm}{n}\right| < \frac{\epsilon}{2}$ என வருமாறு காண இயலும்.

[$\therefore$ $b_1+b_2+\quad+b_m$ அறுதியான உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.]

எனவே (1)-லிருந்து

$$\left|\frac{b_1+b_2+\quad+b^n}{n}\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

அதாவது எல்லை $\frac{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n}{n}=O$ என ஆகிறது.

$n\rightarrow\infty$

இப்பொழுது $\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+b_n}{n}=\frac{(b_1+l)+(b_2+l)+\ldots+(b_n+l)}{n}$

$$=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}+l$$

எனவே எல்லை $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ = எல்லை $\frac{b_1+b_2\ldots+b_n}{n}+$

$n\rightarrow\infty$ $\qquad$ $n\rightarrow\infty$

6. $a_{n+1}=\sqrt{k+a_n}$ (k, a_1 மிகை எண்கள்) எனில், $\{a_n\}$, $x^2-x-k=o$ என்னும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தை நோக்கி ஒருங்குகிறது என்று நிறுவுக.

$a_{n+1} \gtrless a_n$ ஆவதற்கு,

$a^2{}_{n+1} \gtrless a^2{}_n$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது, $k+a_n \gtrless k+a_{n-1}$,,

,, $a_n \gtrless a_n - 1$,,

,, $a_2 \gtrless a_1$ ஆகவேண்டும்.

$a_2 \gtrless a_1$ ஆவதற்கு, $a^2 \gtrless a_1{}^2$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது $a_1+k \gtrless a_1{}^2$,,

ஆகையால் $a_1{}^2 - a_1 - k \lessgtr O$.

$a_1{}^2 - a_1 - k = o$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-\propto, \beta$ $(\propto, \beta > o)$,

$(a_1 + \propto (a_1 - \beta) \lessgtr O$ ஆகவேண்டும்.

ஆனால் $a_1 + \propto > o$ $\therefore$ $a_1 > o; \propto > o$.

எனவே $a_1 - \beta \lessgtr o$ ஆகவேண்டும்.

$a_1 \geqslant \beta$ எனில், $a_{n+1} < a_n$; அதாவது $\{a_n\}$ இறங்குமுகத்தது.

மேலும் $a^2{}_{n+1} - a_n{}^2 = a_n + k - a_n{}^2$

$$= -(a_n{}^2 a_n + k)$$

$$= -(a_n + \propto)\,(a_n - \beta)$$

எனவே $a_n - \beta = \dfrac{a^2{}_n - a^2{}_{n+1}}{a_n + \propto}$

$$< \frac{a^2{}_n - a^2{}_{n+1}}{1+\propto}$$ $\because$ $\{a_n\}$-ம் அதனால் $\{a_n{}^2\}$ம் குவித் தொடரினம்.

$\therefore$ $\lim_{n \to \infty}$ எல்லையை $< \in$ (n போதுமளவு அதிகரித்தால்)

இவ்வாறே $a_1 \leqslant \beta$ எனில் $\{a_n\}$ ஏறும்முகத்தது எனவும்.

$$\beta - a_n < \frac{a^2{}_{n+1} - a_n{}^2}{a_1 + \beta}$$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_n = \beta$ எனவும் நிருவலாம்.

பயிற்சிகள் V

1. கோஷியின் ஒருங்குதல் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ எனில், $\{a_n\}$ ஒரு விரித்தொடரினம் என்று நிறுவுக.

2. $|x| < |$ எனில் $a_n = x^n$ என அமைந்த $\{a_n\}$ என்னும் தொடரினத்தின் எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_n = o$ என நிறுவுக,

3. 'a' ஒரு மாறிலி எனில் எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\angle n} = o$ என நிறுவுக

4, $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ எனில், $\{a_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினம் என்று காண்பி.

5. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \ldots + \frac{1}{n+n}$ எனில், $\{a_n\}$ ஏறு முகத்தது எனவும் ஒருங்குகின்றது எனவும் நிறுவுக.

6. $U_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $u_1 = 1$ எனில் எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

7. $\{U_n\}$, lஐ நோக்கிக் குவிகின்றதென்றால்,

$\{|U_n|\}$, $|l|$ ஐ நோக்கி ஒருங்குகின்றது என நிறுவுக.

3. முடிவில்லாத் தொடர்கள்

§ 3-1 வரையறை

$\{a_n\}$ ஒரு தொடரினம் எனின்,

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ எனக் குறிப்பிடப்படுவது ஒரு முடிவில்லாத் தொடராகும். இதனை $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்றும் குறிப்பிடலாம். இத் தொடரில்

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{1}^{n} a_n$$ என்க.

$\{s_n\}$ என்பது கொடுத்துள்ள தொடரின் பகுதி கூட்டுத் தொகை எனப்படும்.

$\{s_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினமானால் (Convergent Sequence) $\sum^{\infty} a_n$ ஒருங்குத் தொடர் எனப்படும். எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ எனில்,

s என்பது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற முடிவில்லாத் தொடரின் கூட்டுத்தொகை எனப்படும்.

§ 3-2 தொடர்களின் தன்மைகள்

ஒருங்காத் தொடர்கள் நால்வகைப்படும்.

(i) $+\infty$ ஐ நோக்கி விரியும் தொடர்கள்

(ii) $-\infty$ ஐ நோக்கி விரியும் தொடர்கள்

(iii) அளவான ஊசலாட்டம் கொண்டவை

(iv) அளவில்லா ஊசலாட்டம் கொண்டவை

§ 3-3-1 மிகை உறுப்புக்களை மட்டும் கொண்ட தொடர்கள்

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-ல் $a_n \geqslant 0 \ \forall_n$ எனின்,

$\{s_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ ஓர் ஏறுமுகத் தொடரினம்; ஏனெனில் $s_{n+1} - s_n = a_n \geqslant 0$.

எனவே, $\{s_n\}$, s என்றும் எல்லைக்கு ஒருங்கும்; அல்லது $+\infty$ ஐ நோக்கி விரியும். இத் தொடர்களுக்கு ஊசலாட்டம் இல்லை.

குறிப்பு

மிகை உறுப்புத் தொடர் ஒன்று ஒருங்குவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான ஒரு நிபந்தனை $\{s_n\}$ வரம்புள்ளதாயிருத்தல். (நிருபணம் தருக.)

§ 3-3-3 பெருக்குத்தொடர்

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ என்ற தொடர் $(x > o)$; $(o \leqslant x < 1)$ எனின் ஒருங்கும்; $x \geqslant 1$ எனில் விரியும்.

நிருபணம்

(i) $o \leqslant x < 1$ எனில்,

$$sn = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

எனவே $s_n \leqslant \frac{1}{1-x}, \forall n$

ஆகவே, $\{s_n\}$ என்ற ஏறுமுகத் தொடரின் மேல்வரம்புள்ளது. எனவே $\{s_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினமாகும்.

(ii) $x=1$ எனின் $s_n = n$; எனவே $s_n = \infty$. அதாவது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ விரித்தொடர்.

ξ 3-4 ஒப்புநோக்கும் சோதனைகள்

ξ 3-4-1 தேற்றம்

$\sum a_n$, $\sum b_n$ என்ற இரு மிகை உறுப்புத் தொடர்களில் $\sum b_n$ ஒருங்குத் தொடராயிருந்து $n \geqslant m$ எனில், $a_n \leqslant b_n$ எனின், $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

நிருபணம்

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

$s_n^1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ என்க.

$a_1 + a_2 + \dots + a_m = k$,

$b_1 + b_2 + \quad + b_m = k^1$ என்க.

$n > m$ ஆதலால்,

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n.$$

$\therefore \quad s_n - k \leqslant s_n^1 - k^1$

$\therefore \quad s_n \leqslant s_n^1 + k - k^1.$

$\sum b_n$ ஒருங்குகின்றமையால்

$\{s_n^1\} \leqslant l, \ \forall n \geqslant m.$

எனவே $s_n \leqslant s_n^1 + k - k^1$

$\leqslant l + k - k^1.$

$\therefore \quad \{s_n\}$ வரம்புள்ள ஏறுமுகத் தொடர்ச்சி

ஆதலால் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

§ 3-4-2 தேற்றம் 2

$\sum a_n$, $\sum b_n$ என்ற இரு மிகை உறுப்புத்தொடர்களில் $\sum b_n$ விரித்தொடர்; $a_n \geqslant b_n, \ \forall n \geqslant m$ எனில் $\sum a_n$ விரித்தொடராகும்.

நிருபணம்

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \ s_n^1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_n;$

$k = a_1 + a^2 + \ldots + a_m; \ k^1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$ என்க.

$\therefore \quad a_n \geqslant b_n \ \forall n \geqslant m, \ a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$

$\geqslant b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n$

$\therefore \quad s_n - k \geqslant s_n^1 - k^1$

ஆகவே, $s_n \geqslant s_n^1 + k - k^1$

$\therefore$ எல்லை $s_n \geqslant$ எல்லை $s_n^1 + k - k^1$.
$n \to \infty$ $\quad$ $u \to \infty$

ஆனால் எல்லை $s_n^1 = \infty$ ($\therefore \sum b_n$ விரித்தொடராதலால்)
$n \to \infty$

$\therefore$ எல்லை $s_n = \infty$.
$n \to \infty$

$\therefore$ $\sum a_n$ விரித்தொடராகும்.

ξ 3-4-3தேற்றம் 3

$\sum a_n$, $\sum_n$ என்ற மிகை உறுப்புத் தொடர்களில் எல்லை $n \to \infty$ $\frac{a_n}{b_n} = k \pm o$ எனின், $\sum a_n$, $\sum b_n$ இரண்டும் ஒன்றாகவே ஒருங்கும் அல்லது விரியும்.

நிருபணம்

$a_n > o$. $b_n > o$ ஆதலின்,

$k > o$ ஆகும்.

$O < \in < k$ எனில்,

$_n \geqslant m$ ஆகும்பொழுது $\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \in$ ஆக m காண முடியும்.

$\therefore$ $n \geqslant m$ எனில், $k - \in < \frac{a_n}{b_n} < l + \in$

அதாவது $(k - \in)\, b_n < a_n < (l + \in)\, b_n$, $n \geqslant m$ எனில்

$\therefore$ $\sum b_n$ ஒருங்குத் தொடர் எனில், $\sum(l+\epsilon)\, b_n$-ம் ஓர் ஒருங்குத்தொடர் ஆகும். எனவே ஒப்பு நோக்கும் சோதனையின் ($\sum$ 3.4.1)படி $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர் ஆகிறது.

$\sum b_n$ விரித்தொடர் எனில், $\sum(l-\epsilon)b_n$-ல் விரித்தொடர் ஆகும். $\forall n \geqslant m$ எனில்' $a_n \geqslant (l-\epsilon)b_n$.

$\therefore$ $\sum a_n$-ம் விரித்தொடர் ஆகும்.

ξ 3-4-4 குறிப்பு

ஒப்புநோக்குவதற்கு தன்மை முற்றும் தெரிந்த சில தொடர்கள் தேவை.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ என்னும் பெருக்குத்தொடரின் ஒருங்கல் பண்புகளை நாம் அறிவோம். (ξ 3.3.2-ஐப் பார்க்கவும்.)

(ii) இப்பொழுது இவ்வகையின் பயன்படக்கூடிய மற்றொரு தொடரைக் காண்போம்.

தேற்றம்

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ என்னும் தொடர் p > 1 எனில் ஒருங்கும்;

p < 1 எனில் விரியும்.

வகை (அ) p > 1 என்க.

$$sn = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

$$s_{2}n + 1_{-1} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)p$$

$$= \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{8^p} + \cdots \frac{1}{15^p}\right) + \cdot \left(\frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1})^p}\right)$$

$$< \frac{1}{p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots + \frac{2^n}{(2^n)^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{(2^p-1)^2} + \frac{1}{(2p-1)^3} + \dots + \frac{1}{(2p-1)^n}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

$$< \frac{2p-1}{2^{p-1}-1}, \quad \forall n$$

இப்பொழுது, $2^{n+1} - 1 > 2^n$

எனவே $s_{\substack{n+1 \\ 2-1}} - 1 > s_{2n} > s_n$.

எனவே $s_n < s_2{}^{n+1} - 1 < \frac{2p-1}{2^{p-1}-1}$

$\because$ $\{s_n\}$ வரம்புள்ள ஏறுமுகத் தொடர்ச்சி.

ஆதலால், $\sum a_n$ ஒருங்குத்தொடர்.

(ஆ) $p = 1$ என்க.

$$s_{n_2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2^n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots\cdots$$

$$= \frac{n}{2}$$

N என்பது ஒரு பெரிய எண் எனில்,

$n\geqslant 2N \Rightarrow s_n > N$.

எனவே $\{s_n\}$ வரம்பில்லாத ஏறுமுகத் தொடரினம்.

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

$\therefore \quad \sum \frac{1}{n}$ ஒரு விரித்தொடர்.

(இ) $p<1$ எனில் $n^p<n, \ \forall n>1$

$\because \quad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$

வகை (ஆ)-ன்படி $\sum \frac{1}{n}$ ஒரு விரித்தொடர்.

எனவே, § 3-4-2-ன்படி, $p<1$ எனில்,

$\sum \frac{1}{n^p}$ ஒரு விரித்தொடராகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

பின்வரும் தொடர்களின் ஒருங்குதலை ஆய்க.

1. $\sum \frac{2^n+7}{5^n+8}$

$a_n = \frac{2^n+7}{5^n+8}; \quad b_n = \frac{2^n}{5^n}$ என்க.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n+7}{5^n+8} \cdot \frac{5^n}{2^n} = \frac{2+7.2^{-n}}{1+8.5^{-n}}$$

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ $(2^{-n},\ 5^{-n} \to 0$ $n \to \infty$ எனின்)

$\sum b_n = \sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ஒரு பெருக்குத்தொடர். இதில் பொது

விகிதம் $\frac{2}{5} < 1$. எனவே $\sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ஒரு ஒருங்குத்தொடர்.

$\therefore$ § 3.4.3-ன்படி, $\sum a_n$-ம் ஒருங்குத் தொடராகும்.

2. $\sum \dfrac{2n+3}{(5n+3)(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

$a_n = \dfrac{2n+3}{(5n+3)(n+1)^{3/2}}$; $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ என்க.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+3}{(5n+3)(n+1)^{3/2}} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1}$$

$$= \frac{n(2+3/n)\, n^{\frac{3}{2}}}{n(5+3/n)\, n^{3/2}\, (1+1/n)^{3/2}}$$

$$= \frac{(2+3/n)}{(5+3/n)\,(1+1/n)^{3/2}}$$

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2}{5}$

$\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ - ஒருங்கும் தொடர் [ξ 3.4.4 (ii)]ஐப் பார்க்கவும்.

∴ $\sum a_n$-ம் ஒருங்குத் தொடராகும்.

3. $\sum \dfrac{n+1}{(n+2)\sqrt{n+3}}$

$a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)\sqrt{n+3}}$; $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ என்க.

எனின், $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(n+1)}{(n+2)} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} = \dfrac{1+1/n}{(1+2/n)(1+3/n)^{1/2}}$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ – ஒரு விரித்தொடர் [$\sum$ 3,4.4 (ii)]

$\therefore$ ξ 3.4.3 படி,

$\therefore$ $\sum a_n$-ம் ஒரு விரித்தொடராகும்.

(4) $\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}$$

$$= \frac{n+1-(n-1)}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ என்க.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{n\left[n^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]} \; n^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \text{ எனில்}$$

மேலும் $\sum b_n$ ஒருங்கும் தொடர் [ξ 3.4.4 (ii)படி]

$\therefore$ $\sum a_n$-ம் ஒருங்கும் தொடர் (ξ 3.4.3-ஐப் பார்க்கவும்.)

பயிற்சி VI

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{4n^2+3n+1}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

[விடைகள்: (i) ஒருங்குகிறது (ii) விரிகிறது.
(iii) ஒருங்குகிறது (iv) ஒருங்குகிறது]

‡ 3,4 5 தேற்றம் 4

$\sum a_n, \sum b_n$ என்ற மிகை உறுப்புத் தொடர்களில்,

(ii) $n \geqslant m$ எனில், $\frac{a_n+1}{a_n} \leqslant \frac{b_n+1}{b_n}$ என்றும்

(ii) $\sum b_n$ ஒருங்குத் தொடர் எனவும் இருந்தால், $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர் ஆகும்.

நிருபணம்:

$$s_n - a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$s_n{}^1 = b_1 + b_2 + \ldots b_n \text{ என்க,}$$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = k;\ b_1 + b_2 + \ldots b_m = k^1$ என்க.

$n \geqslant m$ எனில், $s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_m + a_{m+1} \ldots + a_n$

$$= k + a_{m+1}\left[1 + \frac{a_m+2}{a_{m+1}} + \ldots \frac{+a_n}{a_{m+1}}\right]$$

$$\frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} \quad \frac{a_{m+r-1}}{a_{m+r-2}} \ldots \frac{a_{m+1}}{a_m};\ r = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\leqslant \frac{b_m+r}{b_{m+r-1}} \quad \frac{b_m+r-1}{b_{m+r-2}} \ldots \frac{b_m+1}{b_m}$$

(கொடுத்துள்ள நிபந்தனைப்படி)

$$= \frac{b_m+r}{b_m}$$

∴ (1)-லிருந்து,

$$s_n \leqslant k+a_{m+1}\left[+\ 1 \frac{+b_{m+2}}{b_{m+1}} + \frac{b_{m+3}}{b_{m+1}} + \cdots \frac{+b_n}{b_{m+1}}\right]$$

$$k+\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}(s_n{}^1 - s_m{}^1)$$

$$= k + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}(s_n{}^1 - k^1)$$

$$\leqslant k + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}(s^1 - k^1)$$ [$s^1 = \sum b_n$-ன் கூட்டுத்

தொகை எனின்

∴ $\{s_n\}$ வரம்புள்ளது: மேலும் ஏறுமுகத்தது.

எனவே $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

ξ 3-4-5 தேற்றம் 5

$\sum a_n$' $\sum b_n$ என்ற இரு மிகை உறுப்புத் தொடர்களில்

(i) $\sum b_n$ விரித்தொடராயும் (ii) $n \geqslant m$ எனில்,

$\frac{a_n+1}{a_n} \geqslant \frac{b_n+1}{b_n}$ என்றும் இருந்தால்,

$\sum a_n$-ம் விரித்தொடராகும்.

(நிரூபணம் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.)

Σ 3-4-7 விகிதச் சோதனைகள்

டி ஆலம்பர்ட்டின் சோதனை (D' Alembert's Test)

தேற்றம் 1

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒரு மிகை உறுப்புத் தொடர்;

இதில் எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ என்க.

(i) $l<1$ எனில், $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர்;

(ii) $l>1$ எனில், $\sum a_n$ ஒரு விரித்தொடர்.

(iii) $l<1$.

எல்லை $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ஆதலின் கொடுத்துள்ள எந்த $\epsilon > o$ க்கும்

இயைபாக m என்னும் மிகை எண்ணை, $n \geqslant m$ எனில்,

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \epsilon$ என வருமாறு காண இயலும்.

அதாவது, $n \geqslant m$ எனில்,

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon \quad (1)$$

ϵ ஐ $l + \epsilon \leqslant k <$ ஆக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே $n \geqslant m$ எனில், $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1.$

$n > m$ எனில், $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m \left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} + \quad + \frac{a_n}{a_m} \right) \quad (-2)$

$$\frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} \quad \frac{a_{m+r-1}}{a_{m+r-2}} \dots \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

$< k^r, \ (r = 1, 1, \dots)$

எனவே, (2)–லிருந்து

$n \geq m$ எனில்,

$s_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + a_m (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-m})$

$< (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + a_m (1 + k + k^2 + \dots$ அந்தம் வரை$)$

$= (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + \frac{a_m}{1-k}$

எனவே $\{s_n\}$ என்ற ஏறுமுகத் தொடரினம் மேல்வரம்புள்ளது.

$\therefore \ \{s_n\}$ ஒருங்கும் தொடர்

ஆகவே Σa_n ஒருங்கும் தொடர்

(ii) $l > 1$ என்க:

(i)–ல் (1)ன்படி, $\epsilon < o$ கொடுக்கப்பட்டால், m என்னும் எண் $n \geq m$ எனில்,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon$ ஆகுமாறு காண இயலும்.

$1 < \alpha < l - \epsilon$ எனில்,

$$\frac{a_n+1}{a_n} > \alpha \quad \forall_n \geqslant m.$$

$$\therefore \; s_n = a_1 + a_2 + \ldots + am_{-1} + a_m + \ldots + a_n$$

$$> a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$a_m\left(1 + \frac{a_m+1}{a_m} + \ldots \frac{+a_n}{a_m}\right)$$

$$= a_m\left(1 + \frac{a_m+1}{a_m} + \frac{a_m+2}{a_m+1}\frac{a_m+1}{a_m} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{a_n}{a_{n-1}} \; \frac{a_{n-}1}{a_{n-}1} \; \frac{a_m+1}{a_n}\right)$$

$$> a_m(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-m})$$

$> a_m(1+1+ \ldots +1)$ ($n-m+1$ உறுப்புகள் வரை)

$$= (n-m+1)a_m$$

$$\therefore s_n > (n-m+1)a_m$$

எனவே $\{s_n\}$ மேல்வரம்பற்றது.

$\therefore \; \sum a_n$ விரித் தொடராகும்,

குறிப்பு

$l=1$ எனில் $\sum a_n$ ஒருங்குத்தொடராகவோ அல்லது விரித் தொடராகவோ அமையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ எனில், $\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$ எனில்)

ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ விரிவுத் தொடராகும்.

(ii) $a_n = \frac{1}{n^3}$ எனில், $\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to 1 \ (n \to \infty \text{ எனில்})$$

ஆனால் $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

ξ 3-4-8- தேற்றம்: 2

ராப்பே சோதனை (Raabe Test)

$\sum a_n$ என்ற மிகைஉறுப்புத் தொடரில்,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \left[\frac{a_n}{a_n+1} = 1 \right] = l \text{ என்க.}$$

(i) $l > 1$ எனில், ξa_n ஒருங்குத்தொடர்

(ii) $l < 1$ எனில், ξa_n விரித்தொடர்

நிருபணம்

(i) $l > 1$ என்க. $\in < o$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், m என்னும் எண் $n \geqslant m$ எனில்

$$l - \in < \left| \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right| < l + \in \ (1) \text{ என்னுமாறு காணலாம்.}$$

எனவே $n \geqslant m$ எனில், $n \left(\frac{a_n}{n+1} - 1 \right) > l - \in$

$l>1$ ஆதலின், $l-\epsilon>\alpha>1$ எனக் கொண்டால்,

$n>m$ எனில், $n\left[\frac{a_n}{a_n+1}-1\right]>\alpha$

$\Rightarrow na_n-na_{n+1}>\alpha a_n+1$

$\Rightarrow na_n-(n+1)a_n+1>(\alpha-1)a_{n+1}$

இதில் $n=m, m+1, m+2 \ldots n$ எனக் கொண்டால்,

$ma_m-(m+1)\, a_m=1>(\alpha-1)a_m+1$

$(m+1)a_{m+1}-(m+2)a_m+1>(\alpha-1)a_{m+2}$

$(m+2)a_m+2-(m+3)a_{m+3}>(\alpha-1)a_{m+3}$

$na_n-(n+1)\, a_{n+1}>(\alpha-1)a_{n+1}$

கூட்டினால், $ma_m-(n+1)a_n+1>(\alpha-1)$
$[a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n+1]$

$\Rightarrow(\alpha-1)\, s_{n+1}-s_m)<ma_m-(n+1)a_n+1.$

$<ma_m.$

எனவே $s_{n+1}-s_m<\frac{ma_m}{1-\alpha}$

$\therefore\quad s_n+1<s_m+\frac{ma_m}{1-\alpha}$

எனவே $\{s_n\}$ வரம்புடையது: ஏறுமுகமானது.

$\therefore\quad \sum a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

(ii) $l<1$.

(i)-ல் (1)லிருந்து, $l+\epsilon<1$ எனில்,

$$\forall n \geq m,\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_n+1}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_n-1}<\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{a_n-1}{a_n-2}>\frac{n-2}{n-1}$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m}>\frac{m}{m+1}$$

இவற்றைப் பெருக்கினால்,

$$\frac{a_n}{a_m}>\frac{m}{n}$$

எனவே $a_n>a_m\frac{m}{n}=\frac{k}{n}$

$\xi\ \frac{k}{n}$ ஒரு விரித்தொடராகும்.

எனவே $\sum a_n$-ம் விரித்தொடராகும்.

குறிப்பு

$l=1$ எனில் $\sum a_n$--ன் ஒருங்குத் தன்மை குறித்து ஒன்றும் சொல்வதற்கில்லை.

§ 3-4-9. கோஷியின் மூலச் சோதனை (Cauchy's Root Test)

$\sum a_n$ என்ற மிகை உறுப்புத் தொடரில் எல்லை $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = l$ என்க.

(i) $l<1$ எனில், $\sum a_n$ ஒருங்குத்தொடர்;

(ii) $l>1$ எனில், $\sum a_n$ ஒரு விரித்தொடர்.

நிருபணம்

$\underset{n\to\infty}{Lt}\, a_n^{\frac{1}{n}} = l$ ஆதலின், கொடுக்கப்பட்ட $\in >0$க்கு இயைபாக m என்னும் எண் $n\geq m$ எனில்,

$\left| a_n^{\frac{1}{n}} - l \right| < \in$ ஆகுமாறு உள்ளது.

$\therefore$ $n\geq m$ எனில், $l - \in < a_n^{\frac{1}{n}} < l + \in$

(i) $l<1$ என்க.

$n\geq m$ எனில், $a_n^{\frac{1}{n}} < l + \in$

$l<1$ ஆதலில், $l+\epsilon<k<1$ என்னுமாறு kஐ எடுத்துக் கொள்ள இயலும்.

எனவே $n \geqslant m$ எனில், $a_n^{\frac{1}{n}} < l+\epsilon$

அதாவது $a_n < k^n$

$\sum k^n$ $(k<1)$ என்றும் பெருக்குத் தொடருடன் ஒப்புநோக்க, $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர் என்பது தெளிவாகின்றது.

(ii) $l>1$.

$m \geqslant n$ எனில், $a_n^{\frac{1}{n}} > l-\epsilon > 1$

(ϵஐ $l-\epsilon<1$ ஆகுமாறு கொள்ளலாம்.)

அதாவது $a_n > 1 \quad \forall n \geqslant m$.

எனவே $s_n = s_{m+1} + (n-m)$

$\therefore$ $\{s_n\}$ வரம்பற்றது.

எனவே $\sum a_n$ விரித்தொடராகும்.

குறிப்பு

1. கோஷியின் ஒருங்கல்கொள்கையின்படி, $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர் எனில் $\{s_n\}$ ஒருங்குத் தொடரினம்.

எனவே $| s_{n+p} - s_n | < \epsilon \; \forall n>m, \; \forall p>o$.

($\epsilon>o$ முன்னமே கொடுக்கப்பட்ட எண்; m, ϵப் பொறுத்துக் காணப்படக்கூடிய எண்.)

$\therefore \quad | s_{n+1} - s_n | < \epsilon$.

எனவே $| a_n+1 | < \epsilon$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. இது $\sum a_n$ குவிவதற்காக தேவையான நிபந்தனை.

$a_n > 1$ ஆதலின் a_{n1} பூச்சியத்தை நோக்கி ஒருங்கவில்லை; ஆதலின் $\sum a_n$ ஒருங்க இயலாது; மேலும் $\sum a_n$ மிகை உறுப்புத் தொடர். எனவே $\sum a_n$ விரித்தொடர் என்றும் நிருபணத்தை நிறைவு செய்யலாம்.

ஆயினும் $a_n \to 0$ ஒரு போதுமான நிபந்தனையல்ல. எடுத்துக்காட்டாக $\sum \frac{1}{n}$ என்றும் தொடரில் $a_n \to 0$; ஆனால் $\sum \frac{1}{n}$ விரித்தொடர் என்று நாம் அறிவோம்.

2. மேற்கூறப்பட்ட தேற்றத்தில் $l = 1$ எனில் நம்மால் $\sum a_n$-ன் ஒருங்கலைப் பற்றி ஒன்றும் கூற இயலாது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\angle n}$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{\angle n}{\angle + 1} = \frac{1}{n+1}$$

எல்லை $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = 0 < 1$,

∴ $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர்.

2. $\sum \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)\,(n+3)}{n \quad n+2)} \frac{(n+3)^2}{(n+4)^2} = \frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^4\left(1+\frac{2}{n}\right)} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{4}{n}\Big)}$$

$\therefore$ எல்லை $\underset{n\to\infty}{} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$ எனவே டாலம் பர்ட் சோதனை

தெளிவு தரவில்லை.

$$n\left[\frac{a_n}{a_n+1} - 1\right]$$

$$= n\left[\frac{-4n^2 - 4a_n2}{(n+1)\,(n+3)^3}\right]$$

$\therefore$ எல்லை $n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = o < 1.$

$\therefore$ ராபே சோதனையின்படி, $\sum a_n$ விரித் தொடராகும்.

குறிப்பு

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\; a_n = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1.$$

ஆதலால் a_n பூச்சியத்தை நோக்கி ஒருங்கவில்லை.

எனவே $\sum a_n$ ஒருங்க இயலாது.

மேலும் $\sum a_n$ மிகைஉறுப்புத் தொடராதலின் விரித்தொடரே யாகும்.

(3) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1.3}{4-7} + \dfrac{1.3.5}{4.7.10} + \ldots \ldots$

$$a_n = \frac{1.3.5. \ \ldots (2n-1)}{4.7. \ \ldots \ 3n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)(2n+1)}{4.7. \ \ldots (3n+1)(3n+4)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{4}{n}}$$

$\therefore$ எல்லை $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{3} < 1.$

$\therefore$ $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடர்.

(4) $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} x^n > o.$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}} \quad x$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}} \quad x.$$

எல்லை $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x.$
$u \to \alpha$

$x<1$ எனில் $\sum a_n$ ஒருங்கும்.

$x<1$ எனில் $\sum a_n$ விரியும்.

$x=1$ எனில், $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ எனில்,

$\dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{\dfrac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}} \to 1 \ (n \to \infty)$ எனில்)

ஆனால் $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ விரித் தொடர்.

$\therefore \sum a_n$ விரித்தொடர் ஆகும்.

(5) $\sum \dfrac{\angle n}{n^n}$

$a_n = \dfrac{\lfloor n}{n^n}; \ a_n+1 = \dfrac{\lfloor n+1}{(n+1)^{n+1}}$

$\therefore \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\lfloor n} \ \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

$$= \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

எல்லை $\dfrac{a_n+1}{a_n} = \dfrac{1}{l} < 1.$

$\therefore$ ξa_n ஒருங்கும் தொடர்.

(6) $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ இங்கு $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}$$

$$\text{எல்லை}_{n\to\propto} a_n^{\frac{1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

$\therefore$ $\sum a_n$ ஒருங்கும் தொடர். (ξ 3.4.9-ன் படி)

பயிற்சி VII

பின்வரும் தொடர்களின் ஒருங்கலை ஆய்க.

1. $\sum_{n=1}^{\propto}\frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}$

2. $\sum\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....2n}x^n : x>o.$

3. $\sum\frac{(\angle n)^2}{\angle 2n}$

4. $\sum\frac{(\underline{|n^3})}{\underline{|n}}$

5. $1+\frac{2x}{\underline{|2}}+\frac{3^2x^2}{\underline{|3}}+\frac{4^3x^3}{\underline{|4}}$

[விடைகள் (1) விரிகிறது (2) $x<1$ எனில் ஒருங்குகிறது; $x\geq1$ விரிகிறது; (3) $|x|<2$ ஒருங்குகிறது; $x\leq2$ விரிகிறது; (4) ஒருங்குகிறது; (5) $x\leq\frac{1}{e}$ ஒருங்குகிறது; $x>\frac{1}{e}$ விரிகிறது,]

§ 3.5. உறுப்புகள் மிகை, குறை எண்களான தொடர்கள்,

இத்தகைய தொடர்களில் ஐவகைத் தன்மைகள் காணப்படும்.

(i) உறுப்புக்களின் மட்டுக்களாலான தொடர் ஒருங்குதல் (அறவொருங்கல், absolute conergence)

(ii) தொடர் ஒருங்குதல், ஆயினும் அறவொருங்கலின்மை

(iii) விரிதல் (iv) அளவான ஊசலாட்டம்

(v) அளவற்ற ஊசலாட்டம்

§ 3.5.1. வரையறை

ஒரு தொடரின் எந்த இரு அடுத்துள்ள உறுப்புக்களும் எதிர்க்குறியுடன் இருந்தால் அத்தொடர் ஆடற்றொடர் எனப்படும் (alternating series).

§ 3.5·2. தேற்றம்

ஒரு ஆடற்றொடரின் உறுப்புக்களின் மட்டுக்கள் பூச்சியத்தை நெருங்கும் இறங்கு தொடரினமாயின், அத் தொடர் ஒருங்கும் தொடராகும்.

நிரூபணம்

$a_1-a_2+a_3-a_4-a_5-a_6$ ... ... $(a_n>0;\ \forall n)$ ஒரு ஆடற்றொடர் என்க.

அதில் எல்லை $a_n=0$.
$u\to\infty$

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad \dots \quad + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \quad \dots \quad \dots \quad + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$> o$ (ஏனெனில் $a_n > a_{-1} \quad \therefore \quad a_{n} - a_{n-1} > o$)

மேலும் $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{n+2}) < s_{2n}$.

$\therefore$ $\{s_n\}$ ஒரு ஏறுமுகத் தொடரினம்.

மேலும் $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots \dots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a^1$

எனவே $\{s_n\}$ ஒருங்குத் தொடர்.

எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n} = l$ என்க.

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n} + \lim_{n \to \infty} a_{2n+1}$$

$= l + o$. ($n \to \infty$ எனில் $a_n \to o$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

எனவே n ஒற்றைப்படையாயினும் இரட்டைப்படையாயினும் எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_n = l$.

$\therefore$ $\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடர்.

ξ 3.6. அறவொருங்கல் (absolute convergence)

வரையறை: $\sum a_n$ என்னும் தொடர்; $\sum | a_n |$ ஒருங்குத் தொடரானால் அறவொருங்கலுடைத்தாகும்.

ξ 3.6.2 தேற்றம்

அறவொருங்கத்தொடர் ஒருங்குத் தொடராகும்.

நிரூபணம்

$\sum a_n$ ஒரு அறவொருங்கத்தொடராயின், $\sum |a_n|$ ஒழிங்குத் தொடர்.

$b_n = a_n + |a_n|$ எனின்,

$o \leq b_n \leq 2 |a_n|$

$\sum |a_n|$ ஒருங்குத் தொடராதலால், $\sum b_n$-ம் ஒருங்குத் தொடராகும்.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = l'; \sum_{1}^{8} b_n = l''; s_n = \sum_{1}^{n} a_n; s_n' = \sum^{n} |a_n|;$$

$$s''_n = \sum_{1}^{n} b_n \text{ எனில்,}$$

$$s''_n = s_n + s_n'$$

$$\therefore \; s_n = s_n'' - s_n'$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s''_n - \lim_{n\to\infty} s_n'$$

(எல்லை $= \lim$)

$$= l'' - l'$$

$\sum a_n$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

குறிப்பு

இதன் மறுதலை உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ ஒரு சொற்றொடர்; இதன் உறுப்புகளின் மட்டுக்கள் இறங்குமுகத் தொடராய் பூச்சியத்தை நெருங்குகின்றன. எனவே இது ஒரு ஒருங்குத் தொடராகும். (§ 3.5.2-ஐப் பார்க்கவும்)

ஆனால் இதன் உறுப்புகளின் மட்டுக்களாகிய தொடர் $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ இது ஒரு விரித்தொடர் என்பதை நாம் அறிவோம்.

$\sum a_n$ அறவொருங்கலாயில்லாமல் வெறும் ஒருங்கலாயிருப்பின் அது **நிபந்தனையொருங்கலுடைத்தது** (conditionally convergent) என்று கூறுகிறோம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$\therefore \quad |a_n| = \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$b_n = \frac{1}{n^2}$ எனில்

$$\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{n^2}{2n(2n-1)} \rightarrow \tfrac{1}{4} \; (n \rightarrow \infty \text{ எனில்})$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ ஒருங்குத் தொடராகும்.

$\therefore \sum |a_n|$ -ம் ஒருங்குத் தொடராகும்.

அதாவது $\sum a_n$ அறவொருங்கல் உடையது.

2. $\sum n^2 x^n{}_2$.

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \; \frac{a^{n+1}}{x^n} = \left(1+ \frac{1}{n}\right)^2 x$$

எல்லை $\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = |x|$.

(i) $|x|<1$ எனில், $\sum a_n$ அறவொருங்கல் உடையது.

(ii) $x>1$ எனில்; $\sum a_n$ விரித்தொடராகும்.

(iii) $x<1$ எனில், தொடர் $1+2^2+\ \dots\ +n^2+\dots\dots\dots\dots$

$u_n=n^2\to\infty$ ($n\to\infty$ எனில்)

எனவே $\sum a_n$ விரித்தொடர்.

(iv) $x\leqslant -1$ எனில், $\sum a_n$ அளவில்லா ஊசலாட்டம் உடையது.

3. $$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\lfloor n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{n+1}\,|x|$$

$$\text{எல்லை}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|.$$

(i) $|x|<1$ எனில், $\sum a_n$ அறவொருங்கலுடையது.

(ii) $|x|<1$ எனில், $\sum a_n$ விரித்தொடர்.

(iii) $x<1$ எனில், $\sum a_n$-ன் உறுப்புக்கள் குறை உறுப்புகள்.
எனவே $\sum a_n$ $-\infty$ ஐ நோக்கி விரியும் விரித்தொடர்.

(iv) $x=-1$ எனில் தொடர் $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots$ விரித்தொடர்

(v) $x>1$ எனில் இது ஒரு அளவில்லா ஊசல் தொடர்.

(vi) $x=+1$ எனில் $\sum a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ \dots$

இது ஒரு ஒருங்குத் தொடர் என்று முன்னமேயே பார்த்துள்ளோம்.

4. $1+\frac{m}{1}x+\ \frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+$

$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots\ldots$

என்ற ஈருறுப்புத் தொடர் $|x|<1$ எனில் அறவொருங்கல் உடையது என நிறுவுக.

$$a_n=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ \ldots\ \ldots\ (n-1)}x^{n-1}$$

$$a_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ \ldots\ n}x^n.$$

$$\therefore\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{m-n+1}{n}x\right|$$

$$=\left|\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x\right|$$

$$\therefore\quad \text{எல்லை}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|$$

$\therefore$ $|x|<1$ எனில் ஈறுப்புத் தொடர் அறவொருங்கல் உடையது.

பயிற்சி VIII

பின்வரும் தொடர்களின் அறவொருங்கலை ஆய்க:

1. $\frac{1}{2}+\frac{4x}{9}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+1}x^{n-1}+\ldots$

2. $1+\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{n^2}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{\sqrt{4}}+\ldots$

3. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n-1}x^{n-1}}{\underline{|n}}$

விடைகள்: (1) $|x|<1$ ஒருங்குகிறது;
$|x|>1$ விரிகிறது; $x=1$ விரிகிறது;
$x=-1$ ஒருங்குகிறது.

(2) $|x|<1$ ஒருங்குகிறது; $|x|>1$ விரிகிறது; $x=1$ விரிகிறது; $x=-1$ ஒருங்குகிறது; (3) $|x|<1$ ஒருங்குகிறது; $x=1$ ஒருங்குகிறது; $x=-1$ விரிகிறது; $|x|>1$ விரிகிறது; (4) $|x|<1$ ஒருங்குகிறது; $x=\pm 1$ ஒருங்குகிறது; $|x|>1$ விரிகிறது.

சார்புகள், உறவுகள்

§ 4.1. நாம் ஏற்கனவே சார்பின் வரையறையைப் பார்த்துள்ளோம். இப்பொழுது சார்புகளின் அடிப்படைத் தன்மையை சற்று விரிவாக ஆராய்வோம்.

A, *B* என்பன ஏதேனும் இரு கணங்கள் எனின், $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$ என்ற கணத்தை *A*, *B*யின் கார்ட்டிஸியன் (Cartesian) பெருக்கற்பலன் என்கிறோம், [(x, y) ஒரு வரிசைச் சோடி. அதாவது $(x, y) \pm (x, y)$].

$A\times B$-ன் உட்கணம் *A*யிலிருந்து *B*க்குக் கொள்ளப்பட்ட உறவு என்று வரையறுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $A=\{5, 6, 7, 8\}$, $B=\{1, 5, 9, 13\}$ *R* என்ற உறவை $\{(x, y) \mid x\in A, y\in B, x>y\}$ எனக் கொண்டால்

$$R=\{(5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (6, 5), (7, 5), (8, 5)\}$$

(ii) *A* என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என்க.

$R=\{(x, y) \mid x\in A. y\in A, 25x^2+36y^2<900\}$ என்பது

A-ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்டது உறவாகும்.

பொதுவாக கூறுமிடத்து, *R* என்ற உறவில் *A*-ல் *x*க்கு இயைந்த *B*-ன் உறுப்பு ஒன்றே ஒன்றாக இருக்கவேண்டுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக (x, y) மெய்யெண்கள் எனில் $\{(x, y) \mid x^2+y^2=25\}$ என்றும் உறவில் $x=3$ எனில், $y=\pm 5$ என வருகிறது. இவ்வாறில்லாமல், *A*யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் இயைபாக *B*-ல் ஒரே ஒரு உறுப்புத்தான் உண்டு என

அமையப்பெறும் உறவு பிணைக்கப்பட்ட சார்பாகும். இந்தப் பிணைப்பு ஏதோ ஒரு விதியின்படி இருக்காமல் இந்த விதியை A-யிலிருந்து B-க்குப் பிணைக்கப்பட்ட சார்பு என்று கூறுகின்றோம்.

A, சார்பின் அரங்கம் அல்லது மதிப்பகம் என்றும் B. சார்பின் துணை அரங்கம் என்றும் குறிப்பிடுவோம். A-யில் xக்குப் பொருத்தமாக B-யின் உறுப்பு y எனின், y, x-ன் பிம்பம் என்றும் குறிப்பிடுவோம். A-யின் உறுப்புகளை B-ன் உறுப்புகளுடன் பிணைக்கும்விதியை f என்றுகுறிப்பிட்டால், சார்பினை

$f : A \rightarrow B$ எனவும்,

A-யின் x என்ற உறுப்புக்குப் பொருத்தமான B-யின் உறுப்பு y எனில், yஐ x-ன் பிம்பம் எனவும், $f(x)$ எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

B-யில் A-யின் உறுப்புக்களின் பிம்பங்களாகிய உட்கணம் f-ன் வீச்சகம் என்று குறிப்பிடப்படும். f-ன் வீச்சகம் B எனில் f Aயிலிருந்து B-ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனப்படும். இத்தகைய சார்பில்

$x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ எனில்,

$f(x_1) \neq f(x_2)$ என ஆயின் f ஓர் ஒன்று—ஒன்றுச் சார்பாகும்.

பகுப்பாய்வில் நாம் அரங்கம் வீச்சகம் இரண்டுமே மெய்யெண் கணங்களாயிருக்கும் சார்புகளை ஆராய்வோம். குறிப்பாக, சார்புகளின் அரங்கம் மெய்யெண்களின் திறந்த அல்லது மூடிய இடைவெளிகளாயிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $f(x) = 1$, $\forall x \in R_1$ (R_1 என்பது எல்லா மெய்யெண் களையும் கொண்ட கணம்.)

இது ஒரு மாறிலிச் சார்பு. இதன் வீச்சகம் $\{1\}$ என்ற ஒருறுப்புச் சார்பு.

(ii) $f(x) = \begin{cases} o, & x \text{ விகிதமுறும் எண் எனில்,} \\ 1, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$

வீச்சகம் $\{o, 1\}$ என்ற ஈருறுப்புக் கணம்.

(iii) $x \in (-\infty, +\infty)$ எனில்,

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

இதன் வீச்சகம் வலப்பக்கமிருக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் தன்மையைப் பொருத்தது.

(iv) $f(x) = \sin x \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

இதன் வீச்சகம் $[-1, +1]$ என்ற இடைவெளி.

(v) $f(x) = e^x;\ x \in (-\infty, +\infty)$

இதன் வீச்சகம் $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளி.

குறிப்பு

(vi) ஒரு திரிகோணமிதிச் சார்பு.

(vii) ஒரு அடுக்குக்குறிச் சார்பு. இவை அதீயியற் சார்புகளுக்கு (Transcendental function) எடுத்துக் காட்டுகள்.

§ 4.2. வரம்புள்ள சார்புகள்

ஒரு சார்பின் வீச்சகம் வரம்புள்ளதாயின் அச்சார்பு வரம்புள்ளதாகும். $(0, \infty)$ஐ அரங்கமாகக் கொண்ட f என்றும் சார்பு.

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்,

$f(x)$ன் வரம்புகள் 0, 1 ஆகும். கீழ்வரம்பு, சார்பின் ஒரு மதிப்பாகும். மேல்வரம்பு அவ்வாறில்லை,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ எனில்} \\ O & x = o \quad ,, \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x)$ வரம்பற்றது.

ξ 4.3. எல்லைகள்

f என்னும் சார்பு 'a'ன் ஏதோ ஒரு அருகாமையில் எல்லா புள்ளிகளிலும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்று கொள்வோம். ('a'-ல் வரையறுக்கப்படவில்லையெனில் பரவாயில்லை) $\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொண்டு, $\eta > o$ என்ற எண்ணை $|x - a| < \eta$ எனில், $|f(x) - l| < \epsilon$ என வருமாறு காண இயலும் எனில்,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ என்று வரையறுக்கிறோம்.}$$

$$\text{அதாவது } x \in (a - \eta, a + \eta) \Rightarrow f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

எனில், $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ஆகும்.

குறிப்பு

(i) $x \in (a, a + \epsilon) \Rightarrow f(x) \in | l - \epsilon, l + \epsilon)$ எனில், l என்பது சார்புக்கு a-ன் வலப்புற எல்லை எனவும், $x \in (a - \epsilon, a) \Rightarrow f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ எனில் l என்பது சார்புக்கு 'a'-ன் இடப்புற எல்லை எனவும் வழங்கப் படும். இவற்றை

$$\lim_{x \to a+o} f(x) = f(a + o) \text{ எனவும்}$$

$$\lim_{x \to a-o} f(x) = f(a - o) \text{ எனவும் குறிப்பிடுவோம்.}$$

(ii) fக்கு, a என்ற புள்ளியில் இடப்புற, வலப்புற எல்லைகள் இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை.

(iii) எல்லை $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ஆக எப்பொழுதும் இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. அவ்வாறிருப்பின் 'a' f-ன் ஒரு தொடர்ச்சிப் புள்ளி ஆகும்.

(iv) m என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மிகை என் என்க இதற்கு இயைபாக η என்னும் எண் $|x-a| < \eta$ எனில் $f(x) < m$ என அமையுமாறு காண இயலுமெனில், $f(x)$ $+\infty$ஐ நோக்கி விரியும்; இவ்வாறே $|x-a| < \eta$ எனில் $f(x) < -m$ எனில் $f(x)$, $-\infty$ஐ நோக்கி விரியும்.

ξ 4.4.1. சார்பு எல்லைகளின் இயற்கணிதம்

$x \to a \Rightarrow f(x) \to \alpha;\ g(x) \to \beta$ எனில்

(i) $f(x) + g(x) \to \alpha + \beta$

(ii) $cf(x) \to c\alpha$

(iii) $f(x)\, g(x) \to f(\alpha)\, g(\alpha)$

(vi) $\dfrac{1}{f(x)} \to \dfrac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq o$ எனில்)

[V] x, βவை அணுகும்போது $f(x)$, $f(\beta)$ அணுகும் எனில் எல்லை $\lim_{x \to a} f[g(x)] = f[\lim_{x \to a} g(x)]$

(i), (ii), (iii), (iv) தொடர் முறையில் கையாளப்பட்ட வழிகளில் நிறுவலாம். எனவே அவற்றின் நிரூபணம் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளன.

(v)ன் நிரூபணம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x \to a$ எனில் $g(x) \to \beta$

$x \to \beta$ எனில் $f(x) \to f(\beta)$

ஆகவே, $\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், η_1, η_1 என்ற எண்கள் $| g(x) - \beta | < \eta_1$ எனில்

$| f[g(x)] - f(\beta) | < \epsilon$ என வருமாறும்,

$| x - a | < \eta$ எனில் $| g(x) - \beta | < \eta_1$ என வருமாறும் காண இயலும். இவ்விரண்டிலிருந்தும்

$| x - a | < \eta$ என்க.

$| f[g(x)] - f(\beta) | < \epsilon$ என்பது பெறப்படுகிறது.

எனவே $\lim_{x \to a} f[g(x)] = f(\beta) = f[\lim_{x \to a} g(x)]$ என்பது தெளிவாகிறது.

ξ 4.4.2. குறிப்பு

(i) $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta$ என்ற நிலையிலும் மேற்கூறிய முடிவுகள் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக (i)க்கு நிருபணம் பின்வருமாறு மாற்றி அமைக்கப்படல் வேண்டும்.

$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \alpha$; $g(x) - \beta$ ஆதலின்,

$\epsilon > o$க்கு இயைபாக X_1, X_2 என்றும் எண்கள்

$x \geqslant X_1$ எனில் $| f(x) - \alpha | < \frac{\epsilon}{2}$ எனவும்,

$x \geqslant X_2$ எனில் $| g(x) - \beta | < \frac{\epsilon}{2}$ எனவும் காணலாம்.

$\therefore$ X என்பது X_1, X_2-ல் பெரியது எனின்,

$x > X$ எனில் $| f(x) + g(x) - (\alpha + \beta) |$

$$< | f(x) - \alpha | + | g(x) - \beta |$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$ என வருகிறது.

இவ்வாறே, (ii,) (iii), (iv), (v)–ன் முடிவுகளும் நிருவப் படலாம்.

(ii) x அதிகரித்துக்கொண்டே போகும்போது

(அ) 'a' என்ற எல்லையை அணுகி, $g(x)$ $+\infty$ஐ நோக்கி அல்லது $-\infty$ஐ நோக்கி விரிந்தால், $f(x)+g(x)$-ம் $+\infty$ அல்லது $-\infty$ஐ நோக்கி விரியும். இவ்வாறன்னியில் $g(x)$ ஊசலாட்டம் கொண்டதனில், $f(x)+g(x)$-ம் ஊசலாட்டம் கொண்டதாகும்.

(ஆ) $f(x) \to \infty$; $g(x) \to \infty$ எனில் அல்லது அளவான ஊசலாட்டம் உடையது எனில் $f(x)+g(x) \to \infty$.

(இ) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to -\infty$ எனில், $f(x)+g(x)$ அளவான எல்லையை அடையலாம்; அல்லது $+\infty$ அல்லது $-\infty$யை நோக்கி விரியலாம்; அல்லது அளவாகவோ அன்றி அளவில்லாமலோ ஊசலாட்டம் உடையதாயிருக்கும்.

(ஈ) $f(x) \to +\infty$, $g(x)$ அளவற்ற ஊசலாட்டம் உடையதெனில் $f(x)+g(x)$ கந்தழியை (∞) நோக்கி விரியலாம்; அல்லது அளவற்ற ஊசலாட்டம் உடையதாயிருக்கலாம். ஆனால் முடிவுள்ள எல்லையை அணுகவோ அல்லது அளவான ஊசலாட்டம் கொண்டதாகவோ இருக்க இயலாது.

(உ) $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் அளவான ஊசலாட்டம் உடையது எனில் $f(x)+g(x)$ ஒரு அளவான எல்லையை நோக்கி ஒருங்கும்; அல்லது அளவான ஊசலாட்டம் உடையதாயிருக்கும்.

(ஊ) $f(x)$ அளவான ஊசலாட்டத்தையும் $g(x)$ அளவற்ற ஊசலாட்டத்தையும் கொண்டதெனில் $f(x)+g(x)$ அளவற்ற ஊசலாட்டம் கொண்டது.

(எ) $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் அளவற்ற ஊசலாட்டம் கொண்டதெனில் $f(x)+g(x)+\infty$ அல்லது $-\infty$ நோக்கி விரியும்; அல்லது அளவற்ற ஊசலாட்டம் உடையதாயிருக்கும்.

ξ 4.4.3. எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $f(x)=x$, $g(x)=-x$ எனில்

$f(x)+g(x)=o \ \forall x.$

எனவே எல்லை $fx()+g(x)=o.$

(ii) $f(x)=x^2$; $g(x)=-x$ எனில்
$f(x)+g(x)=x^2-x=x(x-1)$

எல்லை $\lim_{x\to\infty} f(x)+g(x)=\infty$

(iii) $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=-x$ எனில்

$f(x)+g(x)=\sin x$. இது அளவான ஊசலாட்டம் கொண்டது (வரம்புகள் ± 1).

(iv) $f(x)=x^2+(-1)^n x$; $g(x)=-x^2$ எனில்,

$f(x)+g(x)=(-1)^n$

இது அளவற்ற ஊசலாட்டம் கொண்டது.

(v) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$ எனில்

$f(x)+g(x)=x^2+\sin x\to\infty$ ($x\to\infty$ எனில்)

(vi) $f(x)=1+\sin x$, $g(x)=-\sin x$ எனில்

$f(x)+g(x)=2.$

எனவே எல்லை $\lim_{x\to\infty} f(x)+g(x)-2.$

(vii) $f(x)=\sin x$; $g(x)=\sin x$ எனில்
$f(x)+g(x)=2\sin x$ அளவுள்ள ஊசலாட்டம் உடையது

ξ 5. தொடர்ச்சி

பகுப்பாய்வில் தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகள் ஒரு முக்கிய மான இடத்தை வகிக்கின்றன. பொதுப்படையாகக் கூறுமிடத்து, மாறியின் ஒரு மதிப்பில் ஒரு சிறு வேறுபாடு ஏற்படும் பொழுது, சார்பின் மதிப்பிலும் வேறுபாடு சிறிதளவேயிருக்குமெனில், சார்பு அந்த மதிப்புக்கு இயைந்த புள்ளியின் தொடர்ச்சியுடையது என்று கூறுவோம். அவ்வாறின்றி, மாறியின் மதிப்பில் ஒரு சிறு வேறுபாடுக்கு இயைபாக சார்பின் மதிப்பில் கணிசமான அளவோ அல்லது மிக அதிகமான அளவே வேறுபாடு வரும் எனில், அப்புள்ளி தொடர்ச்சியுள்ள புள்ளி ஆக மாட்டது. தொடர்ச்சியைப் பின்வருமாறு திட்ட வட்டமாக வரையறுக்கிறோம்.

ξ 4.5. வரையறை

f என்னும் சார்பு ξ என்ற புள்ளியின் அருகாமையில் x, ξஐ நோக்கி அணுகும்போது, $f(x)$, $f(\xi)$ என்றும் எல்லையை அணுகுமாயின், f, ξ என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியுடையது·

அதாவது, $\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \to \xi + 0} f(x)$ எனில், f, ξ-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது.

இதிலிருந்து, $\epsilon > 0$ கொடுத்திருந்தால், $\eta(\epsilon)$

$|x - \xi| < \eta$ எனில் $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ என்னுமாருகொள்ள இயலும் என்பது தெளிவாகிறது.

குறிப்பு

ஒரு இடைவெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பு இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாய்க் கருதப்படும்.

ξ 4.5.1. எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $x \neq 1$ எனின்

$= k$ $x = 1$ எனின்,

$$\text{எல்லை}_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \text{எல்லை}_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

எனவே $k = 2$ எனில், f, 1 என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியுள்ளது. $k \not> 2$ எனில் $x = 1$ என்கிற புள்ளி f-ன் தொடர்ச்சியற்ற புள்ளி.

ξ 4.5.2. தொடர்ச்சியின்மையின் பாகுபாடுகள்

தொடர்ச்சியின்மை இரு வகைப்படும்.

$f(x)$, (a, b) என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டதெனக் கொள்வோம்.

(i) $C \in (a, b)$ என்ற புள்ளியில் $\text{எல்லை}_{x \to c} f(x) = f(c)$ ஆக இயலாதிருத்தல். இந்நிலை $f(c+o)$, $f(c-o$ இரண்டும் அமைந்திருந்து அவை சமமில்லாதிருந்தாலோ அல்லது $f(c+o)$, $f(c-o)$ இரண்டும் சமமாயிருந்தும் $f(c)$யினின்றும் வேறுபட்டிருந்தாலோ உருவகும். இரண்டாவது வகையில், $f(c)$ன் மதிப்பைத் தகுந்த முறையில் மாற்றி அமைப்பதன் மூலம் c-ல் f-ன் தொடர்ச்சியின்மை தவிர்க்கப்படக் கூடியது.

$f(c-o) = f(c)$ ஆனால் $f(c+o) \neq f(c)$ எனில் c-ல் ஒரு சாதாரண வலப்பக்கத் தொடர்ச்சியின்மையுள்ளது. இவ்வாறே

$f(c+o) = f(c)$; $(c-o) \pm f(c)$ எனில், c-ல் இடப்பக்கத் தொடர்ச்சியின்மையுள்ளது.

(ii) $c \in (a, b)$-ல் எல்லை $\lim_{x \to c} f(x)$ வரையறுக்கப்படாதிருத்தல்

இங்கு $f(c-o)$, $f(c+o)$ இரண்டுமே காணமுடியாதவை.

ξ 4.5.3. குறிப்பு

(i) $f(c+o)$, $f(c-o)$ இவ்விரண்டில் ஒன்று இல்லாதிருந்தால் f-ல் இருவகையும் **கலந்த தொடர்ச்சியின்மை** உள்ளது.

(ii) $f(c+o)$ அல்லது $f(c-o)$ அல்லது இரண்டும் கந்தழியை நோக்கி விரிந்தால், c-ல் f **கந்தழித் தொடர்ச்சியின்மை** உள்ளது.

(iii) $x \to c+o$ அல்லது $c-o$ என்ற நிலையில் f ஊசலாட்டமுடையது எனில் **தொடர்ச்சியின்மை ஊசலாட்டமுடையது** எனக் கூறலாம்.

ξ 4.5.4. எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $$f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x-c}}}$$

இங்கு $f(c-o)=1$; $f(c+o)=o$.

c-ல் f முதல் வகைத் தொடர்ச்சியின்மை கொண்டது

(ii) $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq o \\ o & x = o \text{ எனில்} \end{cases}$$

$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$; எனவே $\sin\frac{1}{x}$ வரம்புள்ளது.

$f(o+) = f(o-) = o$; $f(o) = o$.

எனவே o என்ற புள்ளியில் f தொடர்ச்சியுள்ளது.

x-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு f தொடர்ச்சியுள்ளது என்று என்று எளிதில் நிறுவலாம்.

(இங்கு $f(o)$ வரையறுக்கப்படாதிருந்தாலோ அன்றி $f(o) \neq o$ என்றிருந்தாலோ o. f-ன் தொடர்ச்சி o புள்ளி ஆக மாட்டாது.)

(iii) $f(x) = \underset{n \to \infty}{Lt} \frac{nx}{1+nx}$ எனில், o ஒரு தவிர்க்கக்கூடிய

தொடர்ச்சியின்மை (avoidable discontinuity)
எனவே o ஒரு தவிர்க்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை.

$$f \text{ஐ } f(x) = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{nx}{1+nx};\ x \neq o$$

$$= 1 \qquad x = o$$

என வரையறுத்திருந்தால் f, oவிலும் தொடர்ச்சி யுள்ளதாயிருக்கும்.

(vi) $f(x) = \frac{2}{\pi} \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \tan^{-1} nx$.

$n<o$ எனில், $t(x) = 1$; $n<o$ எனில் $t(x) = -1$; எனவே $f(+o) = 1$; $f(-o) = -1$. ஆதலால் o-ல் முதல் வகைத் தொடர்ச்சியின்மையுள்ளது.

[குறிப்பு: $f(x) = o$, $x = o$ எனின் இதே சார்பு டிரிஷ்லேயால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது.]

(v) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; o-ல் f $+1$, -1க்கிடையே அளவான

ஊசலாட்டமுடையது. ஆதலின் $f(+o)$, $f(-o)$ இரண்டுமே வரையறுக்கப்படவில்லை.

(vi) $f(x)=f(x)=\frac{1}{(x-c)^2}$ $x\neq c$ எனில்,

$f(c+o)=\infty$, $f(c-o)=\infty$.

ஆகையால் c-ல் f கந்தழித் தொடர்ச்சியின்மை அடைந்துள்ளது.

(vii) $f(x)=\frac{1}{x}\ sin\ \frac{1}{x}$

$sin\ \frac{1}{x}$ வரம்புள்ள சார்பு.

o என்ற புள்ளியில், $\frac{1}{x}\ sin\frac{1}{x}$ என்கிற சார்பு

$+\infty$, $-\infty$க்கிடையே ஊசலாட்டமுடையது.

(viii) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x \text{ விகிதமுறும் எண் எனில்,}\\ o, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்,}\end{cases}$

$f(x)$, விகிதமுறும் புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்றதாயும், விகிதமுறாத புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயிருக்கும்.

$x=\frac{p}{q}$ எனில் $(p, g\in N)$.

இதன் அருகாமையில் கணக்கிலடங்கா விகிதமுறா எண்கள் உள்ளன. இவற்றில் x ஒன்று எனில்,

$\epsilon=\frac{1}{10q}$ என எடுத்துக் கொண்டு

$$\left|f(x)-\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|o-\frac{1}{q}\right|=\frac{1}{q}\nless\epsilon.$$

எனவே f, p/q என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்றது, x_0 விகிதமுறா எண் எனக. $\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $q \leqslant \frac{1}{\epsilon}$ என்னுமாறு முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுடைய மதிப்புகள் மாத்திரம் qக்கு தரமுடியும். (q ஒரு மிகை முழு எண்)

η என்ற எண்ணை $|x - x_0| \leqslant \eta$ குறிக்கும் x_0-ன் அருகாமையில் $\frac{1}{q} \geqslant \epsilon$க்குச் சரியான $\frac{p}{q}$ போன்ற விகிதமுறும் எண்கள் இயலாதவாறு எடுத்துக்கொள்ளலாம். எனவே $|x - x_0| < \eta$ குறிப்பிடும் அருகாமையில் அமைந்த $\frac{p}{q}$ போன்ற விகிதமுறும் எண்களுக்கு

$\frac{1}{q} < \epsilon$. இந்த அருகாமையில் $|f(x) - f(x_0)|$

$$= \begin{cases} o - o = < \epsilon, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \\ \frac{1}{\eta} - o = < \epsilon, & x \text{ விகிதமுறாத எண் எனில்} \end{cases}$$

எனவே x_0, f-ன் ஒரு தொடர்ச்சிப் புள்ளி ஆகும்.

பயிற்சி IX

1. பின்வரும் சார்புகளின் தொடர்ச்சியை ஆய்க:—

(அ) $\frac{x^n - a^n}{n - a}$ (xமெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு)

(ஆ) $(x - a) \sin\left(\frac{1}{x - a}\right)$, $x \neq a$ எனில்

(இ) $cose\ x$ ($x = o$ என்ற புள்ளியில்)

(ஈ) $tan\ x$ (x-ன் மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு)

(உ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq o \\ k, & x = o \text{ எனில்} \end{cases}$

(ஊ) $\dfrac{1}{x-a}\, cosec\, (x-a)$ ($x = a$ என்கிற புள்ளியில்)

(எ) $\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ (x-ன் மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கு

[விடை:— (அ) $f(a) \neq na$ எனின் $x = a$ல் தொடர்ச்சியில்லாதது.

(ஆ) $f(a)$ வரையறுக்காவிட்டாலும் அல்லது $f(a) \neq o$ எனில், $x = a$ல் தொடர்ச்சியில்லாதது.

(இ) தொடர்ச்சியில்லாதது.

(ஈ) $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ புள்ளிகளைத் தவிர, தொடர்ச்சியுள்ளது.

(உ) $k = 1$ எனில் எங்கும் தொடர்ச்சியுள்ளது.

(ஊ) $x = a$ல் தொடச்சியில்லை.

(எ) எங்கும் தொடர்ச்சியுள்ளது.]

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ விகிதமுறும் எண் எனில்} \\ 0, & x \text{ விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$

f எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியற்றது என நிருவுக.

3. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq o \text{ எனில்} \\ o, & x = o \text{ எனில்} \end{cases}$

f, xன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தொடர்ச்சியுடையது என நிறுவுக.

4. $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ எனில்} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$ என்றும் புள்ளியில் f முதல் வகை தொடர்ச்சியின்மை உடையது என நிறுவுக.

f என்றும் சார்பு பின்வருமாறு நிறுவைப்படுகிறது:—

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ எனில்} \\ \frac{1}{2} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ \frac{3}{2} - x & \frac{1}{2} < x < 1 \text{ எனில்} \\ 1 & x = 1 \text{ எனில்} \end{cases}$$

$x = 0, \frac{1}{2}, 1$ என்னும் புள்ளியில் f தொடர்சியின்மையுடையதென்று நிருவுக.

ξ 4.6. தொடர்ச்சியுள்ள சார்புகளின் பண்புகள்

தேற்றம் I

f என்னும் சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையது எனில், கொடுத்திருக்கும் $\epsilon < 0$க்கு இயைபாக, $[a, b]$ என்ற இடைவெளியை முடிவான எண்ணிக்கையுடைய பகுதி இடைவெளிகளாக. x', x'' ஒரே பகுதி இடைவெளியைச் சார்ந்தது எனின் $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ என்னுமாறு பிரிக்கலாம்.

நிரூபணம்

கொடுத்திருக்கும் தேற்றம் தவறன்று கொள்க, $c = \frac{a+b}{2}$ எனில், $[a, c]$, $[c, b]$ என்று ஒன்றிலாவது தேற்றவ தவறாயிருக்க வேண்டும். இந்த இடைவெளியில் $[a_1, b_1]$ என்க. $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ எனில், $[a_1, b_1]$, $[c_1, b_1]$ என்ற இடைவெளிகளில் ஒன்றிலாவது

தேற்றம் தவறாயிருக்க வேண்டும். இதனை $[a_2, b_2]$ என்க. இம்முறையைத் தொடர்ந்து கடைபிடித்தால், நமக்கு ஒன்றுனுள் ஒன்றடங்கியதாக $[a, b]$, $[a_1 b_1]$ ... என்ற கூடு போன்ற அமைப்பு இடைவெளிகள் (nested intervals) கிடைக்கின்றன. எனவே இந்த இடைவெளிகளுக்குப் பொதுவாக ξ என்றும் ஒரு புள்ளியிலிருத்தல் வேண்டும். எனவே $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ என்ற தொடர் முறையும்; $b_1, b_2 \ldots b_n \ldots$ என்ற தொடர்முறையும் ξ என்றும் ஒரே எல்லையை அணுகுகின்றன. மேலும் $[a_n, b_n]$ என்ற இடைவெளிகளில் $(n \in N)$ கொடுத்திருக்கும் தேற்றம் தவறானது.

$\xi \neq a$; $\xi \neq b$ என்க. f, ξ என்றும் புள்ளியில் தொடர்ச்சி யுடையது, எனவே η என்றும் எண் $|x - \xi| < \eta$ எனில்,

$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ ஆகுமாறு கொள்ள இயலும்.

$b_n - a_n < \eta$ ஆகுமாறு nஐத் தெரிந்து எடுத்துக்கொள்ளு வோம். இந்நிலையில் $[a_n, b_n] \subset [\xi - \eta, \xi + \eta]$ எனவே, x' x'' $[a_n, b_n]$-ன் இரு புள்ளிகள் எனில்,

$$|f(x') - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f(x'') - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\therefore \ |f(x') - f(x'') = |\{f(x') - f(x)\} - \{f(x'') - f(\xi)\}|$$

$$\leqslant |f(x') - f(\xi)| + |f(x'') - f(\xi)|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{1} = \epsilon$$

இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே தேற்ற சரியாய்த்தானிருக்க வேண்டும். $\xi = a$ அல்லது $\xi = b$ எனினும், சிறு மாற்றங்களுடன் மேற்கூறிய நிரூபணம் செல்லும்.

ξ 4.6.2. கூடு போன்ற அமைப்பு இடைவெளித் தேற்றம்

$A_1, A_2 \ldots A_n, \ldots$ என்ற மூடிய இடைவெளிகளின் தொடரினம் $A_n \subset A_{n-1}$ என்னுமாறும், n கந்தழியை நெருங்கும் பொழுது A_n-ன் நீளம் oவை நெருங்குமாறும், அமைந்திருந் தால், ξ என்னும் புள்ளி அதன் ஒவ்வொரு அருகாமையிலும் ஒரு அறுதியான எண்ணிக்கையுடைய இடைவெளிகளைத் தவிர மற்றெல்லா இடைவெளிகளிலும் அமைந்திருக்குமாறு உள்ளது.

நிரூபணம்

$A_n = [a_n, b_n]$, என்க $(n \in N)$.

$A_n \subset A_{n-1}$ ஆதலின்

$a_{n-1} \leqslant a_n;\ b_{n-1} \geqslant b_n.$

எனவே $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ ஒரு ஏறுமுகத் தொடரினம். ஒவ்வொரு உறுப்பும் b_1ஐ விடச் சிறியது. எனவே

$$a_n \to \alpha < b_1$$

இவ்வாறே $\{b_n\}$ a_1ஐக் கீழே வரம்பாயுடைய இறங்குமுகத் தொடர்.

$\therefore\ b_n \to \beta > a_1$

$\therefore\ \epsilon < 0$ கொடுத்திருந்தால், γ_1, γ_2 என்ற எண்கள்

$n > \gamma_1$ எனில் $| a_n - \alpha | < \frac{\epsilon}{3}$ ஆகுமாறும்,

$n < \gamma$ எனில் $| b_n - \beta | < \frac{\epsilon}{3}$ ஆகுமாறும், அமைந்துள்ளன;

மேலும் A_n-ன் நீளம் $\to o$.

ஆதலின், γ_3 என்னும் எண் ஒன்று

$n<\gamma_3$ எனில் $|a_n-b_n|<\frac{\epsilon}{3}$ ஆகுமாறு உண்டு.

γ என்பது $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ என்பனவற்றின் பெரிய எண் எனில்,

$$n<\gamma \Rightarrow |\alpha-\beta| = |\alpha-a_n+a_n-b_n+b_n-\beta|$$

$$\leqslant |a_n\alpha| + |a_n-b_n| + |b_n-\beta|$$

$$<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

ϵ தன்னிச்சையுடையது ஆதலின், $\alpha=\beta$

இதுவே நாம் தேடும் ξ.

மேலும் எல்லை $\underset{n\to\infty}{} a_n=\xi=$ எல்லை $\underset{n\to\infty}{} b_n$ ஆதலால்

m என்றும் எண், $n\geqslant m$ எனில்,

a_n, b_n இவ்விரண்டுமே

$(\xi-h, \xi+h)$ என்றும் இடைவெளியில் இருக்குமாறு, காண இயலும்.

எனவே, $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ என்ற இடைவெளிகளைத் தவிர மற்றெல்லா இடைவெளிகளும் $(\xi-p, \xi+p)$ என்னும் ξ-ன் அருகாமையில் அமையும் $(p<0)$

ξ 4.63. தேற்றம்

ஒரு சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுடையது எனில், அது இந்த இடைவெளியில் வரம்புடையதாகும்.

நிருபணம்

$[a, b]$யை $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற புள்ளியில் x' $x''\in (x_{n-1}, x_n)$ எனில் $(x_1=a; \quad x_n=b)$ $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$ (ϵ

முன்னமேயே கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண்.) என அமையு மாறு அறுதியான எண்ணிக்கையுடைய பகுதி இடைவெளி களாகப் பிரித்துடுக.

$a \leqslant x \leqslant x_1$, எனில்,

$$|f(x)| = |f(a) - f(a) + f(x)$$

$$\leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)|$$

$$< |f(a)| + \epsilon$$

$x_1 < x \leqslant x_2$ எனில்

$$|f(x)| = |f(x_1) - f(x_1) + f(x)|$$

$$\leqslant |f(x_1)| + |f(x) - f(x_1)|$$

$$< |f(a)| + \epsilon + \epsilon = |f(a)| + 2\epsilon$$

இவ்வாறே, $x_2 < x \leqslant x_3$ எனில்,

$$|f(x)| < |f(a)| + 3\epsilon$$

$x_{n-1} \leqslant x < b$ எனில்,

$$|f(x)| < |f(a)| + n\epsilon$$

n அறுதியான எண் ஆதலால், $f(x)$, $[a, b]$-ல் வரம்புள்ளது என்று தெளிவாகிறது.

§ 4.7. சீரான தொடர்ச்சி (Uniform Continuity)

வரையறை

கொடுத்துள்ள $\epsilon > 0$க்குப் பொருத்தமாக η என்றும் மிகை எண் $|x - x_0| < \eta$ எனில், $|f(x) - f(x_0) < \epsilon$ ஆயின், $f(x)$, x_0 என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியுடையது என்று நாம் அறிவோம். இதில் η பொதுவாக ϵ, x_0-ன் மதிப்புக்களைப்

பொருத்தது. $[a, b]$-ன் எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் ஒரே η, ϵஐ மட்டுமே சார்ந்து காணப்பட இயலுமெனில், $f[a, b]$ என்றும் இடைவெளியில் **சீரான தொடர்ச்சியுடையது** என்று கூறுகிறோம்.

§ 4.71 தேற்றம்

ஒரு சார்பு ஒரு மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதெனில் அது அந்த இடைவெளியில் சீரான தொடர்ச்சியுடையது.

நிரூபணம்

$[a, b]$ என்றும் இடைவெளியை $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ என்றும் புள்ளிகளால் (x_{r-1}, x_r) $> = 1, 2, \ldots n$ $(x_0 = a;\ x_n = b)$ என்ற இடைவெளிகளாக n அறுதியுள்ள எண்) $x', x'' \in (x_{r-1}, x_r)$ எனில், $| fx)') - f(x)'') | < \frac{\epsilon}{2}$ $-(\epsilon < 0$ முன்னமேயே கொடுக்கப்பட்டது) என வருமாறு பிரித்திடுக.

η என்பதை $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots (b - x_{n-1})$ இவற்றில் மிகச் சிறியதைவிடச் சிறியதாக எடுத்துக்கொள்க.

$| x' - x'' | < \eta$ என்னுமாறு x', x'' என்ற புள்ளிகளை $[a, b]$ யிலிருந்து எடுத்துக்கொண்டோமானால், இந்தப் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒரே பகுதி இடைவெளியிலோ அன்றி அடுத்துள்ள இரு பகுதி இடைவெளிகளிலோ அமைந்திருக்கும்.

இரண்டும் ஒரே இடைவெளியில் அமைந்திருப்பின், (1)-ன்படி, $| f(x') - f(x'') | < \eta$. x', x'' என்ற இரண்டு புள்ளிகளும், (x_{r-1}, x_r), (x_r, x_{r+1}) என்னும் அடுத்தடுத்த பகுதி இடைவெளிகளில் அமைந்திருப்பின், $x_{r-1} < x' < x_n < x'' < x_{r+1}$.

$$\text{எனவே } | f(x') - f(x'') | = | f(x') - f(x_r) + f(x_r) - f(x') |$$
$$< | f(x') - f(x_r) | + | f(x_r) - f(x'') |$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

நம் வரையறையின்படி η எந்த நடு குறிப்பிட்டான புள்ளியின் மதிப்பையும் சார்ந்ததல்ல. எனவே f, $[a, b]$-ல் சீரான தொடர்ச்சியுடையது.

மாதிரிக் கணக்கு

$(0, 1)$ இடைவெளியில் $\sin\frac{1}{x}$ என்றும் சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். $\sin\frac{1}{x}$ இடைவெளி $0<x\leqslant1$ (0வில் திறந்ததும், 1ல் முடியதும்)யில் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு; ஆனால் $x=0$ என்கிற புள்ளியில் தொடர்ச்சியில்லாதது. ஆகையால் $(0, 1)$ல் $\sin\frac{1}{x}$ சீரான தொடர்ச்சியுள்ள சார்பல்ல. ஆனால் மேற்தேற்றத்தின்படி $\epsilon>0$ எவ்வளவு சிறியதாயினும், $(\epsilon, 1)$ என்கிற இடைவெளியில் $\sin\frac{1}{x}$ சீரான தொடர்ச்சியுள்ளது.

ξ 4.72 தேற்றம்

f, $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருந்தால், அதனுடைய வரம்புகளின் மதிப்புகளை இடைவெளியில் ஒரு புள்ளியிலாவது பெறும்.

f, $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு. $[a, b]$ல் f-ன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு m என்றும் மீச்சிறு மேல்வரம்பு M என்றும் கொள்க.

$[a. b]$ன் எந்தப் புள்ளியிலும் M என்ற மதிப்பை f பெறவில்லை என்று கொள்வோம். இவ்வாறெனில் $[a, b]$-ன் எந்தப் புள்ளியிலும் $M-f(x)\neq0$.

எனவே $\frac{1}{M-f(x)}$, $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியுள்ளது:

இதன்மேல் வரம்பு N எனில், $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

$$\frac{1}{M-f(x)} < N.$$

அதாவது $M - f(x) \geqslant \frac{1}{N}$

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{N}$$

எனவே M மீச்சிறு மேல்வரம்பு இல்லை என ஆகிறது. இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே, $[a, b]$-ல் ஒரு புள்ளியலாவது f, M என்ற மதிப்பைப் பெறவேண்டும். இவ்வாறே $[a, b]$-ல் ஒரு புள்ளியிலாவது f-ன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பின் மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

குறிப்பு

$[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் f-ன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு, மீச்சிறு மேல்வரம்பு m, M எனில் $M - m$ என்பது $[a, b]$யில் f-ன் **ஊசலாட்டம்** (oscillation) எனப்படும். இந்த வரையறையின் படி, ξ 6.2 தேற்றத்திலிருந்து, f, $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுள்ள தெனில், $[a, b]$ஐ (a, x_1), (x_1, x_2) ... (x_{n-1}, b) என்ற அறுதி யான எண்ணிக்கையுடைய இடைவெளியாய் ஒவ்வொன்றிலும் சார்பின் ஊசலாட்டம் ϵஐ விடச் சிறியது ($\epsilon < 0$, முன்னேயே கொடுக்கப்பட்டதென்று) ஆக இருக்குமாறு பிரிக்கலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

ξ 4.73 தேற்றம்

f என்னும் சார்பு $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுள்ளதாய், $f(a)$, $f(b)$ எதிர்க்குறிகள் உடையதாயிருப்பின், aக்கும் bக்குமிடையே ஒரு புள்ளியிலாவது f பூச்சிய மதிப்பைப் பெறுகின்றது.

நிரூபணம்

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ என்று கொள்வோம். f தொடர்ச்சியுள்ள தால், a-ன் ஒரு அருகாமையில் f குறை மதிப்புகளையும் b-ன் ஒரு அருகாமையில் f மிகை மதிப்புகளையும் பெற்றிருக்கும்.

$[a, b]$-ல் f மிகை மதிப்புக்களை பெற்றிருக்கும். x மதிப்புகளின் உட்கணத்தில் λ என்பது மீப்பெரு கீழ்வரம்பு என்க. $(a<\gamma<b)$ மீப்பொரு கீழ்வரம்பின் வரையறையின்படி $a\leqslant x<\lambda$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)\leqslant 0$. மேலும் λ-ல் f தொடர்ச்சி யுள்ளது. எனவே $f(\lambda)\leqslant 0$.

$f(\lambda)=-c(c>0)$ எனில், $f-\lambda$ல் தொடர்ச்சியுள்ளதால் c என்ற மிகை எண்ணை, $(x-\lambda\,|<\eta$ எனில் $|f(x)-f(\lambda)|<\eta$ ஆக காண இயலும்.

எனவே' $\lambda\ \lambda+\eta)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)<0$.

ஆகையால் λ, f-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு இயைத்த x மதிப்புகளின் மீப்பெரு கீழ்வரம்பாக இருத்தல் இயலாது. இது ஒரு முரண்பாடு.

எனவே $f\,\lambda)=0$ ஆகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

கிளைத் தேற்றம்

இதிலிருந்து $f(a)\neq f(b)$ எனில், $[a, b]$ல் f தொடர்ச்சியான தால், $[a,b]$ல் $f(a), f(b)$க்கிடையே ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரு புள்ளியிலேனும் f பெறும்.

k என்பது $f(a)$க்கும் $f(b)$க்கு மிடையே உள்ள ஒரு பதிப்பு எனில், $f(x)-k=\phi(x)$ என்க. மேற்கூறிய தேற்றத்தை $\phi(x)$க்குப் பயன்படுத்தி $f(x)$, k என்றும் மதிப்பை $[a, b]$ல் ஒரு புள்ளி யேனும் பெறுர் என நிறுவலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1' $$f(x)=\begin{cases} 0; & x=0 \text{ எனில்} \\ 2-x; & 0<x<2 \text{ எனில்} \\ 2; & x=2 \text{ எனில்} \end{cases}$$

சார்பு 0விலும் 2-லும் தொடர்ச்சியற்றது.

இதன் வரம்புகள் 0, 2. இந்த மதிப்புகளையும், அவை களின் நடுவேயுள்ள மதிப்புகளையும், [0, 2] என்ற இடைவெளி யில் ஒரு தரம் மட்டுமே பெறுகின்றது.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; \ x \neq 0 \text{ எனில்} \\ 0; \ x = 0 \quad ,, \end{cases}$

0 என்பது ஒரு தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி. 0ஐ உள் ளடங்கிய எந்த இடைவெளியிலும் (உதாரணமாக $- \leqslant x \leqslant 1$) இந்த சார்புக்கு மேல்வரம்போ, கீழ்வரம்போ இல்லை.

3. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}; \ x \neq 0 \text{ எனில்} \\ 0; \ x = 0 \text{ எனில்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பின் வரம்புகளைக் காண் கிறோம். η எவ்வளவு சிறிய மிகை எண்ணாயிருந்தாலும் சரி, $-\eta \leqslant x \leqslant \eta$ என்றும் இடைவெளியில் $f(x)$ன் வரம்புகள் ± 1 ஆகும். $-\eta$விலிருந்து η வரை xன் மதிப்பு ஏறும்பொழுது, $f(x)$ இந்த வரம்புகளின் மதிப்புகளை முடிவில்லாத தடவைகள் அடையக்கூடும். ± 1ன் நடுவேயுள்ளது மதிப்புகளையும் இவ்வாறே முடிவில்லாத தடவைகள் அடையக்கூடும். இருந்த பொழுதிலும் ஒரு தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளி.

பயிற்சி X

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; \ x \neq 0 \text{ எனில்} \\ 0; \ x = 0 \text{ எனில்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இச்சார்பின் வரம்புகளைக் காண்க.

$[-1, 1]$ என்ற முடிய இடைவெளியில் சார்பு தன் வரம்பு களை அடைகின்றதா என்று ஆய்க.

(விடை ; 0, ∞ ; 0ஐ அடைகிறது)

2. $f(x)=x-[x]$ எனின் f, x-ன் எல்லா முழு எண் மதிப்பு களுக்கும் தொடர்ச்சியற்றது என்று நிறுவுக. (0, 1) இடை வெளியில் வரம்புகளைக் காண்க. $f(x)$ தன்மேல் வரம்பை அடைகின்றதா?

3. $f(x)=\phi\begin{cases}0, & x \text{ விகிதமுறும் எண் எனில்}\\ q, & x=p/q;\ p, q\in N \text{ எனில்}\end{cases}$

fக்கு மேல்வரம்பு இல்லை என்றும் 0 கீழ்வரம்பு என்றும் நிருவுக.

ξ 4.81 ஒருமுகச் சார்புகள் (Monotonic functions

ξ 4·81 வரையறை

f என்னும் சார்பு $[a, b]$ல் வரையறுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம். (i) $a\leqslant x' < x''\leqslant b$ என்னும்போது (i) $f(x') \leqslant f(x'')$ என்றோ அன்றி (ii) $n\leqslant x'<x''\leqslant b$ எனில் $f(x')\geqslant f(x'')$ என்றோ இருப்பின் ஒரு முகச்சார்பாகும்.

(i) உண்மையெனில் f ஒரு ஏறுமுகச் சார்பு

(ii) உண்மையெனில் f ஒரு இறங்குமுகச் சார்பு.

ஒருமுகச்சார்புகள் முடிய அல்லது திறந்த இடைவெளி களில் வரையறுக்கப்படலாம்.

ξ 4.82 ஒருமுகச் சார்புகளின் பண்புகள்

ஒருமுகத் தொடரினத்தின் பண்புகளை ஒத்திருக்கின்றன; தொடரினங்களில் நிருபித்தவாறே பின்வரும் ஒருமுகச் சார்பு களுக்குப் பொருந்தும் தேற்றங்களை நிறுவலாம்.

(i) $x\geqslant a$ என்ற நிலையில் $f(x) \leqslant k$ (k ஒரு அறுதியான மாறிலி எண்) எனில் எல்லை $\lim_{n\to\infty} f(x)$ ஒன்று உண்டு;

அது kக்குச் சமமாகவோ அன்றி kவியை விடக் குறைவாகவோ இருக்கும்.

(ii) $x \leqslant a$ என்ற நிலையில் $f(x)$ ஏறுமுகச் சார்பாகவும் k என்னும் குறிப்பிட்ட எண்ணைவிட அதிகமாக இருப்பின் எல்லை $f(a)$ உண்டு; அது $\leqslant k$ ஆக
$x \to a$
இருக்கும்.

(iii) (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில ஏறுமுகச் சார்பு என்க. அந்த இடைவெளியில் $f(x) \geqslant k$ (k ஒரு குறிப்பிட்ட எண்) எனில், $f(a+o)$ உண்டு. அது kயை விட அதிகமாகவே அல்லது kககுச் சமமாகவோ இருக்கும்.

(iv) (a,b) என்கிற திறந்த இடைவெளியில் f ஏறுமுகத்தாயிருந்து $f(x) \leqslant k$ (k ஒரு குறிப்பிட்ட எண்) எனில், $f(b-o)$ உண்டு. அது kயை விடக் குறைவாகவோ அல்லது அதற்குச் சமமாகவோ இருக்கும்.

(i), (ii), (iii), (iv) தேற்றங்களை இறங்குமுகச் சார்புகளுக்கும் பொருத்தமாக மாற்றியமைக்கலாம்.

(iii), (iv)–லிருந்து (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் f ஒருமுகமாகவும் வரம்புள்ளதாகவும் இருக்குமானல், அதற்கு aயிலோ, bயிலோ அல்லது திறந்த இடைவெளியிலோ சாதாரண தொடர்ச்சியின்மைதான் இருக்கமுடியுமென்பது புலனாகிறது,

ஒரு திறந்த இடைவவளியில் $f(x)$ ஒருமுகமானதாயிருந்து வரம்புள்ளதென்று அறியப்படாதிருந்தால், இடைவெளியின் ஓரப் புள்ளிகளில் (End points) கந்தழியாகலாம். எடுத்துக் காட்டாக $f(x)=\frac{1}{x}$; $x \in (0, 1)$ எனில், f ஒருமுகச் சார்பு. ஆனால் வரம்புள்ளதல்ல.

ஒரு இடைவெளியில், f ஒருமுகச் சார்பாயிருக்குமெனில் அதன் தொடாச்சியின்மைப்புள்ளிகள். ஒரு முடிவுள்ள கணமாயிருக்கவேண்டுமென்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டுகள்

$$f(x)\begin{cases} 1, \left(\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right) \text{ எனில்} \\ \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2^2}<x\leqslant\frac{1}{2}\right) \text{ எனில்} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n}\right) \text{ எனில் } (n \text{ மிகைமுழுஎண்}) \\ 0, x=0 \text{ எனில்,} \end{cases}$$

என f வரையறுக்கப்பட்டால்,

இடைவெளி $[0, 1]$ல் f ஒரு ஏறுமுகச் சார்பு. இதற்கு $x=\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ என்ற புள்ளிகள் தொடர்ச்சியின்மை யுள்ளது.

§ 4.9 எதிர் சார்புகள்

தேற்றம்

f என்பது $[a, b]$ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியுள்ள கடுமையான ஒருமுகச் சார்பு (Strictly monotonic) எனில், அதற்கு ϕ என்னும் எதிர்சார்பு $f(a), f(b)$ஐ ஓரப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் கடுமை யான ஒருமுகப் பண்புகொண்டதாயும் அமைந்துள்ளது:

அதாவது f-ல் $x\in[a, b]$ன் பிம்பம் $y=f(x)$; $x=\phi(y)$ அதாவது ஒருங்கிணைந்த சார்பு.

$\phi[f]$ $\{\varphi(y)\}$ என்பது ஒருமைச் சார்பாகும் (identity function)

$fx1<x_3$ எனில், $f(x_1)<f(x_2)$ எனில் f கடுமையான ஏறு முகச் சார்பு; $x_1<x_2$ எனில் $f(x_1)>f(x_2)$ எனில் கடுமையான இறங்குமுகச் சார்பு எனப்படும்.

நிரூபணம்

$[a, b]$ல் f ஏறுமுகம் கொண்டதென்று கொள்வோம் (இறங்குமுகச் சார்புக்கு நிரூபணம் பின்வருவது போலவே சிறு மாற்றங்களுடன் அமையும்.)

f, $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் கடுமையான ஏறுமுகம் கொண்டதாயுமிருத்தலால், $f(a)$, $f(b)$ என்றும் மதிப்புக்களுக்கிடையே ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரேஒரு முறை f பெறுகின்றது. எனவே $f(a)=A$, $f(b)=B$ எனில், $[A, B$-ல் y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் பொருத்தமாக $[a, b]$-யில் x-ன் ஒரே ஒரு மதிப்புத்தான் உள்ளது. எனவே ϕ என்னும் எதிர்சார்பு ஒன்று (A, B)ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

ϕஏறுமுகச் சார்பு என்பது வெளிப்படை. $[a, b]$-யில் x_1 என்றுல் மதிப்பிற்குப் பொருத்தமான $[A, B]$-ன் உறுப்பு y_1 ஆக இருக்கட்டும், அதாவது $y_1=f(x_1)$ அல்லது $x_1=\phi(y_1)$.

$x_1-\in$, x_1+ $[a, b]$ல் இருக்குமாறு $\in$ என்ற ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கட்டும். இதற்குப் பொருத்தமான y மதிப்புகள் $y_1-\eta$, $y_2+\eta$ என்க. η_1, η_2 இவற்றில் சிறியது η எனில் $y\in(y_1-\eta, y_1+\eta)\Rightarrow x\in(x_1+\in, x_1+\in)$.

அதாவது $|y-y_1|<\eta$ எனில் $|x-x_1|<\in$

$\therefore$ $|\phi(y_1)—\varphi(y)|<\in$. எனவே, ϕ, y-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது.

$[A, B]$-ல் ϕ ஒவ்வொரு மதிப்பைப் பெறுவதாகும். அதற்கு இயைபாக $[a,b]$-ல் ஒரே ஒரு மதிப்பு உள்ளதாயும், ϕ, $[A,B]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது என்று நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு : ϕ-ன் வரைபடம் $y=x$ என்ற நேர்கோட்டில் f-ன் வரைபடத்தின் பிம்பம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$f(x)=x^2$ என $[0. \infty]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு. $[0, \infty]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது. ஏறுமுகம் கொண்டது. எனவே

அதின் எதிர்ச்சார்பு $\phi(y)=\sqrt{y}$ (மிகைமூலம்); $[o, \infty]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது, ஏறுமுகம் கொண்டது.

மாதிரிக் கணக்கு

$\frac{\sin x}{x}, \left(o \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ என்னும் இடைவெளியில் இறங்குமுகம் கொண்டதென்று நிறுவுக.

$f(x)=\frac{\sin}{x}$ எனில்,

$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+p)}{x+p}$ எனில்,

$(x+h) \sin x > x \sin(x+h)$ எனில்,

$= x(\sin x \cos h + \cos x \sin h)$ எனில்

$(x+h) \tan x > x(\tan x \cos h + \sin h)$ எனில்,

$\frac{\tan x}{x}(x+h-x \cos h) > \sin h$ எனில்,

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{\sin h}{h+x(1-\cos h)}$$

$\frac{\tan x}{x} > \frac{\sin h}{h}$ எனில்,

$o<x<\frac{\pi}{2};\ o<h<\frac{\pi}{2}$ எனில், $\frac{\tan}{x} > 1 > \frac{\sin x}{x}$ என்று நாம் அறிவோம். சமனிலி நிருபித்தாயுள்ளது.

oவிலிருந்து $\pi/2$ வரை x ஏறும்பொழுது, $\frac{\sin x}{x}$ 1விலிருந்து $\frac{2}{\pi}$ வரை இறங்குமுகமாயுள்ளது.

குறிப்பு

$\frac{\tan x}{x}$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ என்றும் இடைவெளியில் ஏறுமுகம் கொண்டது என நிறுவுக.

ξ 4.10. வரையறை

f, $[a, b]$-ல் வரையறைக்கப்பட்டுள்ளதெனக்கொள்க. $[a, b]$ என்ற இடைவெளியை $x_0(=a), x_1, x_2 \dots x_{r-1} \dots x_n(b)$ என்றும் புள்ளிகளில் n பகுதி இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கலாம். இந்தப் பிரிவினையை f என்று குறிப்போம். $[a, b]$-ன் எல்லாப் பிரிவினைகளையும் கொண்ட கணத்தை f என்போம்.

$$v(a, b, P) = \sum_{r=1}^{r=n} | f(x_r) - f(x_{r-1}) |$$ என்னும் கூட்டுத்தொகை

$[a, b]$-ல் f-ன் Pயுடன் இயைந்த மாற்றம் எனக் கூறப்படும்.

$$\sum_{r=1}^{n} | f(x_r) - f(x_{r-1}) |$$ -ன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு ஒரு அறுதியான எண் எனில், f, $[a, b]$-ல் **வரம்புள்ள மாற்றம்** கொண்டது வரையறுக்கிறோம்.

இந்த மேல்வரம்பு V எனில்,

ஏதேனும் ஒருவகைப் பிரிவினைக்காவது

$v(a, b\ P) > v - \epsilon$ (ϵ முன்னமே கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண்)

ξ 4.10.1. மிகை மாற்றங்கள்; குறைமாற்றங்கள்

P, $[a, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை என்க.

$$f(b) - f(a) = \sum_{r=1}^{n} [f(x_r) - f(x_{r-1})]$$

$$= \sum_1 + \sum_2$$ என்க.

$\sum_1$, என்பது $f(x_r)-f(x_{r-1})$-ன் மிகை மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை; $\sum_2$, $f(x_{r-1})$-ன் குறை மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை.

$\triangle = f(b) - f(a)$ என்க.

$\triangle_r = f(x_r) - f(x_{r-1})$ எனில்

$\triangle = f(b) - f(a) = \sum_1(\triangle_r) + \sum_2(\triangle_r)$

f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டது எனில்,

$\triangle \leqslant V(a, b)$.

மேலும் $\sum_1 (\triangle_r) - \sum_2(\triangle_r) \leqslant V(a, b)$

$\sum_1(\triangle_r) + \sum_2(\triangle_r) = \triangle \leqslant V(a, b)$

$\therefore \quad \sum_1(\triangle_r) \leqslant \frac{1}{2}(V + \triangle)$

$- \sum_2(\triangle_r) \leqslant \frac{1}{2} (V \triangle)$

எனவே $\sum_1 (\triangle r), - \sum_2(\triangle r)$ இரண்டும் $[a, b]$-ன் எல்லாப் பிரிவினைகளுக்கும் மேல்வரம்பு கொண்டவை.

$\epsilon > o$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், P என்றும் பிரிவினையை $\sum | \triangle r | > V - \epsilon$ என்னுமாறு எடுத்துக்கொள்க.

இப்பிரிவினைக்கு, $\sum_1(\triangle r) > \frac{1}{2} (V + \triangle - \epsilon)$

$$- \sum_2(\triangle r) = \frac{1}{2} (V - \triangle - \epsilon)$$

எனவே $\sum_1(\triangle_r)$, $- \sum_2(\triangle r)$-ன் மேல்வரம்புகள் $V + \triangle, V - \triangle$ ஆகும். இவற்றை ,P N எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$V = P + N$$

$$\triangle = P - N$$

$P-N$, V என்பவை $[a, b]$-ல் முறையே f-ன் மிகை குறை மொத்த மாற்றங்கள் என அழைக்கப்படும்.

ξ 4.10.2 தேற்றம்

ஒவ்வொரு வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்ட சார்பும் இரு ஏறுமுகச் சார்புகளின் வித்தியாசமாகக் குறிப்பிடக்கூடியது.

நிரூபணம்

$[a, b]$-ல் f ஒரு வரம்புள்ள மாற்றங் கொண்ட சார்பு என்க.

x (a, b)-ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியெனில், f, $[a, x]$-லும் வரம்புள்ள மாற்றங் கொண்டதே. $[a, x]$-ல் f-ன் மிகை, குறை, மொத்த மாற்றங்கள் $P(a, x)$, $-N(a, x)$, $V(a, x)$ எனில்,

$$V(a, x)=P(a, x)+N(a, x) \qquad (1)$$

$$f(x)-f(a)=P(a, x)-N(a, x) \qquad (2)$$

$$\therefore \quad f(x)=P(a, x)-N(a, x)+f(a)$$

$$=\{P(a, x)+f(a)+|f(a)|\}-\{N(a, x)+|f(a)|\}$$

$P(a, x)+f(a)+|f(a)|=P(a, x)$ அல்லது $P(a, x)+2|f(a)|$ இரண்டுமே ஏறுமுகங்கள் சார்புகள்தான்.

ஏனெனில் $x^1>x$ எனில்,

$$P(a, x')=\sum_1 [\Delta_r(a, x)]+\sum_1 [\Delta_r(x, x')]$$

$$\geqslant \sum_1[\Delta_r(a, x)]=P(a, x')$$

இவ்வாறே, $N(a, x')\geqslant N(a, x)$

குறிப்பு

(1) மேற்கூறிய நிரூபணம் $|f(a)|$க்கு பதிலாக k என்னும் மாறிலியை உபயோகித்தாலும் சரியாக இருக்கும்.

(2) மேற்கூறிய தேற்றத்தில், ஏறுமுகச் சார்புகள் என்பதிற்குப் பதிலாக இறங்குமுகச் சார்புகள் என்று

எடுத்துக்கொள்ளலாம். நிருபணத்தைச் சில மாறுதல்களுடன் அமைக்க இயலும்.

ξ 4.10.3 இதன் மறுதலை

இரண்டு ஏறுமுகச் சார்புகளின் வித்தியாசமாகக் கூறப்படக்கூடிய ஒவ்வொரு சார்பும் வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டவையே.

நிருபணம் : $f = F - G$ என்க.

F, G இரண்டும் ஏறுமுகச் சார்புகளாக இருக்கட்டும்.

$P = [a, b]$-ன் ஒரு பிரிவினை $(x_0, x_1 \ldots x_4$ எனப் புள்ளிகளில் எனில்)

$$\sum_{r=1}^{n} | f(x_r) - f(xr_{-1}) | \sum_{r=1} | [F(x_r) - F(xr_{-1}] - [G(xr) - G(xr_{-1})] -$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n} | F(xr) - F(x_{r_{-1}}) + \sum_{r=1}^{n} | G(xr) - G(x_{r_{-1}}) —$$

$$= \sum_{r=1}^{u} [F(x_r) - F(x_{r_{-1}})] + \sum_{r=1}^{n} [G(x_r) - G(x_{r_{-1}})$$

$\because$ (F, G ஏறுமுகச் சார்புகள்)

$$= [F(b) - F(a)] - [G(b) - G(a)]$$

$$= f(b) - f(a)$$

எனவே $[a, b]$-ல் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதாகும்.

குறிப்பு

1. மேலே நிருபிக்கப்பட்ட தேற்றங்களிலிருந்து, ஓர் இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு வரம்புள்ள தேவையானதும் போதுமானதுமுள்ள நிபந்தனை எனின் இச்சார்பை இரண்டு ஏறுமுகச் சார்புகளின் வித்தியாச

மாகக் குறிப்புகளின் வித்தியாசமாகக் குறிப்பிடக்கூடும் என்பது.

2. $f_1 = F_1 - G_1$; $f_2 = F_2 - G_2$ (F_1, F_2, G_1, G_2 இரண்டும் ஓர் ஏறுமுகத்தவை என்று கொள்வோம்.)
எனில்,

$$f_1 \pm f_2 = (F_1 - G_1) \pm (F_2 - G_2)$$

$$= (F_1 \pm F_2) - (G_1 \pm G_2)$$

$F_1 + F_2$, $G_1 + G_2$ இரண்டும் ஏறுமுகத்தவை.

$\therefore$ $f_1 + f_2$ வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டது.

மேலும், $f_1 f_2 = (F_1 - G_1)(F_2 - G_2)$

$$= (F_1 F_2 + G_1 G_1) - (F_1 G_2 + F_2 G_1)$$

$F_1 F_2 + G_1 G_2$, $F_1 G_2 + F_2 G_1$ இரண்டுமே வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டவை.

எனவே இரண்டு வரம்புள்ள சார்புகளின் கூட்டுத்தொகை, வித்தியாசம், பெருக்கல் தொகை— இவை யாவும் வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டுள்ளன.

§ 4.10.4 தேற்றம்

f என்னும் சார்பு $[a, c]$, $[c, b]$ $a < c < b$) என்னும் இடைவெளிகளில் வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டது எனின், அது $[a, b]$யிலும் வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதாகும்,

நிருபணம்

$[a, c]$யில் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டது.

$\therefore$ $P(a, x)$, $-N(a, x)$ என்பன f-ன் மிகை, குறை மாற்றங்கள் எனின்,

$F_1(x) = P(a, x) + f(a)$; $G_1(x) = N(a, x)$ என்பவையில் வரையறுக்கப்பட்டால்,

F_1, G_1 என்னும் இரு சார்புகளும் ஏறுமுகம் கொண்டவை.

மேலும், $[a, c]$யில்

$$f(x) = F_1(x) - G_1(x) \qquad (1)$$

இவ்வாறே, $[c, b]$யில் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதால்,

$$F_2(x) = P(c, x) + f(c) + k$$

$$G_2(x) = N(c, x) + k$$

எனில், F_2, G_2 இரண்டும் ஏறுமுகத்தன.

மேலும் $[c, b]$யில், $f(x) = F_2(x) - G_3(x)$ (2)

f, c-யில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

(1), (2)லிருந்து,

$$F_1(c) - G_1(c) = F_2(c) - G_1(c).$$

எனவே kஐ $G_1(c) = G_2(c)$ என எடுத்துக்கொண்டோமானால், $F_1(c) = F_2(c)$ ஆகும்.

∴ F, G என்னும் சார்புகள் $[a, b]$யில் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படட்டும்.

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a \leq x \leq c \text{ எனில்} \\ F_2(x), & c < x \leq b \quad ,, \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x), & a \leq x \leq c \quad ,, \\ G_2(x) & c < x \leq b \quad ,, \end{cases}$$

F, G என்பவை $[a, b]$யில் ஏறுமுகம் கொண்டவை.

மேலும், $[a, b]$யில், $f = F - G$.

∴ $[a, b]$யில் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டது.

ξ 4.10.5 தேற்றம்

$[a, b]$யில் f தொடர்ச்சியும், வரம்புள்ள மாற்றமும் கொண்டதாயிருக்கட்டும்.

$x \in [a, b]$ எனில், $V(a, x)$ $[a, x]$-ல் f-ன் மொத்த மாற்றமாயிருக்கட்டும்.

V, $[a, b]$ல் தொடர்ச்சியுள்ளது.

நிருபணம்

x என்பது $[a, b]$யில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

$\in$ ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் என்க.

$[a, c]$-ல் P என்னும் பிரிவினையை

$V(a, x, P) > V(a, x) - \in$ என்னுமாறு உண்டுபண்ண முடியும். x^1 என்பது x-ன் இடப்புற அருகாமையில் ஒரு புள்ளியெனில்,

$v(a, x', P) = v(a, x, P) - \mid f(x) - f(x_1)$

f, $[a. b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாகையால்,

x^1ஐ $\mid f(x^1) - f(x) \mid < \in$ ஆகுமாறு கொள்வோம்.

எனவே, $V(a, x^1) > v(a, x; P) > N(a, x) - 2\in$

மேலும், $V(a, x^1)$ (a, x)-ல் ஏறுமுகம் கொண்டது

$x^1 \to x - 0$ எனில், $V(a, v^1) \to V(a, x)$.

இவ்வாறே, x-ன் வலப்புற அருகாமையில் - x^1 எடுத்துக் கொண்டால் $x^1 \to x + o$ எனில்,

$V(x, x^1) \to V(a, x)$.

ஆகவே எல்லை $V(a, x^1) = V(a, x)$.
$x_1 \to x$

எனவே, $V(a, x)$, $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளது.

குறிப்பு

இவ்வாறே f, $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது எனில், $[a, b]$-ன் x என்ற எந்தப் புள்ளியிலும் $P(a, x)$, $N(a, x)$ இரண்டும் தொடர்ச்சியுள்ளதென்று நிறுவலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \text{ எனில்,}\end{cases}$$

[0, 1]-ல் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதல்ல என்று நிறுவுக.

[0, 1]-ன் பின்வரும் பிரிவினையைக் கருதுக.

$$\left\{0, \frac{2}{(2a+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \cdots \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right\}$$

$$\sin\frac{1}{x}=\begin{cases} \pm 1,\ x=\dfrac{2}{2r+1)\pi}\ (=x_{r-1}) \\ \pm 1, \dfrac{2}{(r-1)\pi}\ (x_r)\ r=2, 3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad |f(x_r)-f(x_{r-1})| = \left\{ \sin\frac{(2r-1)\pi}{2} - \sin\frac{(2r+1)\pi}{2} \right\}$$

$$n \qquad = |\ \pm 1-(\mp 1\ | = 2$$

$$\therefore \quad \sum |f(x_r)-f(x_{r-1})| = |\ \pm 1-0\ | \frac{+2+ \quad +2}{+\ |\sin 1-1\ |}$$

(*n* உறுப்புகள்)

$$=1+2n+|\sin 1-1| \rightarrow \infty,$$

n கந்தழிக்குச் செல்லும்போது.

எனவே [0, 1]-ல் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதல்ல.

பயிற்சி XI

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \text{ எனில்,}\end{cases}$$

[0, 1]-ல் f வரம்புள்ள மாற்றம் கொண்டதல்ல என்று நிறுவுக.

5. வகையிடல்

(Differentiation)

§ 5.1.1 வரையறை

$[a, b]$ என்றும் மூடிய இடைவெளியில் f வரையறுக்கப்பட்டதென்று கொள்வோம்.

x என்பது இந்த இடைவெளியில் ஏதேனும் உள் புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, $x' \neq x$ என்பது ஒரு வேறுபாட்டு விகிதம். இந்த விகிதம் x', xஐ அணுகும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை அணுகும் எனில், f, x-ல் **வகையிடக் கூடியது** என்றும், அந்த எல்லை x-ல் f-ன் **வகைக்கெழு** எனவும் வரையறுக்கப்படுகின்றது. அந்த எல்லை $f'(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

எனவே $f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$

இதனை $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ எனவும் எழுதலாம்.

வலப்புற வகைக்கெழு

$\lim_{x' \to x-0} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, உள்ளதாயிருந்தால், x-ல் f-ன் **வலப்புற வகைக்கெழு** எனக் குறிக்கப்படும்.

இவ்வாறே $\lim_{x' \to x-0} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, உள்ளதாயிருந்தால்,

x-ல் f-ன் **இடப்புற வகைக்கெழு** எனப்படும்; இது $f'(x-o$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

$f'(x-o)=f'(x+o)$ எனில்

f, x-ல் வகைப்படுத்தக்கூடியது; இந்த பொது மதிப்பு $f'(x$ ஆகும்.

f, $[a, b]$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைப்படுத்தக் கூடியது எனில் f, $[a, b]$யில் வகைப்படுத்தக்கூடியது எனப் படும். இந்நிலையில் $[a, b]$யின் மேல் f' என்னும் மற்றொரு சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x \in [a, b]$ எனின் x-ல் சார்பின் மதிப்பு $f'(x)$ ஆகும்.

f', f-ன் வகைகெழு எனப்படும்.

§ 5.1.2 பின்வரும் **தொடக்கத்திற்குரிய தேற்றங்களை** நிறுவுவோம்.

(i) $\forall x\ f(x)=k$ (k ஒரு மாறிலி எனின்), $f'(x)=o$.

$f(x)=k\ \forall x$

$\therefore\ f(x+h)=k.$

ஆகவே $f(x+h)-f(x)=k-k=o.$

$$\therefore\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=o.$$

$$\text{எல்லை}_{h\to o}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=o.$$

(ii) $f(x)=x\ \ \forall x$ எனில், $f'(x)=1$

$f(x+h)-f(x)=x+h-x=h$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{எல்லை}_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$\therefore$ f, x–ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் வகைப்படுத்தக் கூடியது.

(iii) **தேற்றம்**

f என்றும் சார்பு x_0-ல் அறுதியான (finite) வகைக் கெழு உடையதாயிருப்பின் f, x_0-ல் தொடர்ச்சி யுள்ளது.

நிரூபணம்

f, x_0-ல் அறுதியான வகைக்கெழு உடையது.

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x\to x_0} \frac{f(x)_0 - f(x_0)}{x - x_0} \text{ உள்ளது; அறுதியானது.}$$

இதை α என்க.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - fx_0)}{x - x_0} \; (x - x_0)$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \text{எல்லை}_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x)}{x - x_0} \text{ எல்லை } (x - x_=)$$

$$= \alpha . 0 = 0$$

$$\text{எனவே எல்லை}_{x\to x_0} f(x) - \text{எல்லை}_{x\to x_0} f(x_0) = 0$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$\therefore$ f, x_0–ல் தொடர்ச்சியுள்ளது.

குறிப்பு

இதன் மறுதலை உண்மையில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக (1) $f(x) = |x|$ என வரையறுக்கப் பட்ட சார்பு எனக் கருதுக.

இதில், $\lim\limits_{x\to 0}$ எல்லை $f(x) = |0| = 0 = f(0)$.

$\therefore$ f, 0 என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியுள்ளது. ஆனால்

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x>0 \text{ எனில்} \\ -x<0 & \text{எனில்} \end{cases}$$

எனவே எல்லை $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-(f0)}{x-0} = -1.$

$\therefore$ f, 0 என்னும் புள்ளியில் வகைப்படுத்தக்கூடியது அல்ல.

(2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

என்று வரையறுப்போம். இந்த சார்புக்கு $f'(0)$ அமையவில்லை

நிரூபணம்

$x=0$ என்கிற புள்ளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ளது என்று நிறுவுக,

$f'(x) =$ எல்லை $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h-f(0)}{h}$

$=$ எல்லை $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} =$ எல்லை $\lim\limits_{h\leftarrow 0} \sin\frac{1}{h}$

h பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது, $\sin\frac{1}{h}$ அளவிலுள்ள ஊசல் உள்ளது.

ஆகையால் $f'(0)$ அமையவில்லை.

$\therefore$ $f(x)$, o என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயிருந்தாலும், வகைப்படுத்தக்கூடியது அல்ல.

(3) $f(x)=\sqrt{x}\ (x\geqslant o)$ எதை எடுத்துக்கொள்வோம். $x\geqslant o$ என்கிற இடைவெளியில், $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ளது. ஆனல்

$$f'(0)=\underset{x\to+o}{\text{எல்லை}}\ \frac{\sqrt{x}-0}{x}=\underset{x\to+o}{\text{எல்லை}}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

$\therefore$ $f'(o)$ அமையவில்லை.

o என்னும் புள்ளியில், தொடர்ச்சியுள்ளதாயிருந்தாலும் $f(x)$ வகைப்படுத்தக்கூடியது அல்ல.

(4) $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq o)\\ o & (x=o)\end{cases}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

எல்லை $x^2\sin\frac{1}{x}=o$; $f(x)$ o- என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியுள்ளது.

நிருபணம்

$x\neq o$ எனில், $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x=o$ என்னும் புள்ளியில், $\sin\frac{1}{x}$; $\cos\frac{1}{x}$ வரையறுக்க முடியாது. ஆகையால் வகைக்கெழு விதிகள் பயன் கொடுக்க

வில்லை. அதனால், $f'(o)$ இல்லையென்று நிர்ணயம் பண்ண முடியாது.

$$f'(o) = \underset{h \to o}{\text{எல்லை}} \frac{f(h) - f(o)}{h} = \underset{h \to o}{\text{எல்லை}} \frac{h^2 \sin 1/h}{h} = o.$$

$\cos \frac{1}{x}$, $x = o$ அருகாமையில், ஊசலாடுவதால், $f'(x)$ ஒரு எல்லையும் நெருங்காது, $x \to o$ எனில்; இருந்தபோதிலும், $f'(o)$ பூச்சியம் என்கிற குறிப்பிட்ட மதிப்பை அடைகிறது.

ξ 5.1.3 வகைக்கெழுவின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

f, g என்றும் சார்புகள் $[a, b]$யில் வரையறுக்கப்பட்டு $[a, b]$யின் x என்ற எந்தப் புள்ளியிலும் வகைப்படுத்தக் கூடியது எனில், $f+g$, fg, f/g என்னும் சார்புகளும் x-ல் வகைப் படுத்தக்கூடும்.

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ii) $(fg)' x = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iii) $(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $[g(x) \neq 0$ எனில்)

நிரூபணம்

(i) $h = f + g$ எனில்,

$$h(x') - h(x) = f(x') + g(x') - f(x) - g(x)$$
$$= f(x') - f(x) + g(x') - g(x)$$

$$\therefore \frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} + \frac{g(x') - g(x)}{x' - x}$$

$$\therefore \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

$$+ \underset{x \to x}{\text{எல்லை}} \frac{g(x') - (gx)}{x' - x}$$

அதாவது, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

(இந்த எல்லைகள் இருக்கும் எனில்)

(ii) $h = fg$ என்க.

$$h(x') = h(x) = f(x')\, g(x') - f(x)\, g(x)$$

$$= [f(x') - f(x)]g(x') + f(x)[g(x') - g(x)]$$

$$\therefore \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\, g(x')$$

$$+ \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} f(x)$$

அதாவது, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

ஆகவே $(fg)'\,(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)g'(x)$

(iii) $h = \frac{f}{g}$; $g(x) \neq 0$ எனில்,

$$h(x') = h(x) = \frac{f(x')}{g(x')} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x')} [f(x')g(x) - f(x)g(x')$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x')} [g(x)\{f(x') - f(x)\} - f(x)\{g(x')g(x)\}]$$

$$\therefore \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}} \frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \underset{x' \to x}{\text{எளலை}} \frac{1}{g(x)g(x')} \times \underset{x' \to x}{\text{எல்லை}}$$

$$\therefore \lim_{x' \to x} \left[\frac{g(x)f(x') - f(x)}{x' - x} - f(x) \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} \right]$$

(எல்லை $x' \to x$)

$$\therefore \quad h'(x) = \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]$$

குறிப்பு

(அ) (ii)-ல் $g(x) = c, \ \forall a$ எனில், $g'(x) = o$

$$\therefore \quad h'(x) = f'(x)c + o.$$

எனவே $(cf)'(x) = cf(x)$.

(ஆ) (ii), (iii)ஐப் பயன்படுத்தி,

n முழு எண் எனில் x^n-ன் வகைக்கெழு nx^{n-1} என நிறுவலாம். (n குறை எண் எனில், $x \neq o$ ஆக இருக்கவேண்டும்.) இதிலிருந்து x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், பகுதியைப் பூச்சியமாக்காத x-மதிப்புகளுக்கு விகிதச் சார்புகளும் வகைப்படுத்தக் கூடியவை என்று தெளிவாகிறது.

ξ 5.1.4 தேற்றம்

தொடர்விதி (சங்கிலி விதி Chain rule)

f என்னும் சார்பு $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாய், ஏதோ ஒரு $x \in [a, b]$யில் வகைக்கெழுக் கொண்டதாயிருக்கட்டும்; I என்பது f-ன் வீச்சகத்தை உள்ளடக்கிய இடைவெளி என்க; g என்னும் சார்பு I-ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்டு f-ன் வீச்சகத்தில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும், $f(x)$ என்னும் புள்ளியில் வகைக்கெழு கொண்டதாயும் இருக்கட்டும்.

$h(x) = g[f(x)] \ a \leqslant x \leqslant b$ எனில்,

h, x-ல் வகைக்கெழு கொண்டது.

$h'(x) = g'[f(x)] \, f'(x)$

நிருபணம்

$y=f(x)$ என்க.

x-ல் f-ன் வகைக்கெழு $f'(x)$ ஆதலால்,

$$\lim_{x'\to x} \frac{f(x')-fz}{x'-x} = f(x).$$

எனவே, x-ன் ஓர் அருகாமை x' அதில் இருக்கும் பொழுது $\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}=f'(x)+\eta_1(x)$ ஆகும்.

$x'\to x$ எனில், $\eta_1(x')\to o$.

அதாவது, $f(x')-f(x)=(x'-x)\ [f'(x)+\eta_1(x)]$

இவ்வாறே, $g(y')-g(y)=(y'-y)[g'y)+\eta_2(y)]$;

இதில் $y'\to gy$ எனில், $\eta_2{}'y\to o$.

$$\begin{aligned} \therefore\quad h(x')-h(x) &= g[f(x')]-g[f(x)] \\ &= g(y')-g(y) \\ &= (y'-y)[g'(y)+\eta_2/y^1)] \\ &= [f(x')-f(x)]\ [g'(y)+\eta_2(y^1)] \\ &= (x'-x)\ [f(x')-f(x)+\eta_1(x)] \\ &\qquad [g^1/y)+\eta_2(y^1)] \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{x'\to x} \frac{h(x')-h(x)}{x'-x} = \lim_{x'\to x}\ [f(x')-f(x)+\eta_1(x')]$$

$$[\lim_{x'\to x} [g'(y)+\eta_2(y^1)]$$

அதாவது, $h'(x) = f'(x)$ எல்லல $[g'(y) = \eta_2(y^1)]$
$y' \to y$

[f, x-ல் தொடர்ச்சியுள்ளதால்,
$x' \to x$ எனில் $f(x') \to f(x)$
அதாவது $y' \to y$]

$$= f'(x) g'(y)$$

$$= g'[f(x)] f'(x)$$

§ 5.2 வகைக்கெழுவின் குறி

f, $[a, b]$யில் வரையறுக்கப்பட்டது என்க.

x, $[a, b]$யின் ஓர் உட்புள்ளி என்றும்,

$f'(x)$ உள்ளது என்றும் கொள்க.

(i) $f'(x) > o$ என்க.

$$\text{எல்லை}_{x' \to x} \frac{f(x' - f(x)}{x' - x} = f'(x) > o$$

$\therefore$ $\in > o$, $f'(x)$ஐ விடச் சிறியதாய்க் கொடுக்கப்பட்டதாயின், δ என்றும் மிகை எண்ணை, $|x' - x| < \delta$ எனில்,

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x) \right| < \in$$ ஆகுமாறு கொள்ள இயலும்.

இந்நிலையில்,

$$f_{\prime}(x) - \in < \frac{f(x') - f(x')}{x' - x} < f'(x) - \in \ \forall x \in [x - \delta, x + \delta$$

$\therefore$ $\in < f'(x)$ ஆதலின்,

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > f'(x) - \in > o \ \forall a \in [x - \delta,\ x + \delta],\ x' \neq x.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} fx(') - f(x) > o, & x < x' \leqslant x+\delta \text{ எனில்;} \\ f(x') - f(x) < o, & x-\delta \leqslant x' < x \text{ எனில்} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x') > f(x); & x+\delta \geqslant x' > x \text{ எனில்} \\ f(x') < f(x); & x-\delta \leqslant x' < x \text{ எனில்} \end{cases}$$

அதாவது $f'(x) > o$ எனில் x-ன் ஓர் அருகாமையில் $f(x)$ ஏறுமுகத்தது.

(ii) $f'(x) < o$ என்க.

ϕ என்னும் சார்பை $\phi(x) = -f(x)$ என்னுமாறு வரையறுத்தால், $f'(x) < o \Rightarrow \phi'(x) > o$.

எனவே, x-ன் ஓர் அருகாமையில் ϕ ஏறுமுகத்தது $\Rightarrow f$ இறங்குமுகத்தது.

§ 5.3. ரோலின் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

$[a, b]$ஐ அரங்கமாகக் கொண்ட f என்னும் சார்பு

(i) மூடிய இடைவெளி $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாய்

(ii) திறந்த இடைவெளி (a, b)யில் வகைப்படுத்தக்கூடியதாய்

(iii) $f(a) = f(b)$ என்னுமாய் இருந்தால்

$f'(c) = o$ என்னுமாறு (a, b)-ல் 'c' என்னும் ஒரு மதிப்பாவது உள்ளது.

நிரூபணம்

f, $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளதாயிருப்பதால், வரம்புள்ளது; அது தன்மேல், கீழ்வரம்புகளை $[a, b]$-ல் அடைகின்றது. $[a, b]$-ல் f-ன் மேல்வரம்பு M ஆகவும் கீழ்வரம்பு m ஆகவும் இருக்கட்டும்,

$f(c) = M$ ஆகவும் $f(d) = m$ ஆகவும் இருக்குமாறு, c, d என்பன $[a, b]$-ல் $f(d) = m$ ஆகவும் இருக்குமாறு, c, d என்பன $[a, b]$-ல் உள் புள்ளிகளாயிருக்கட்டும்.

$M = m$ அல்லது $M \neq m$.

(i) $M = m$ எனில் $f(x) = M \quad \forall x \in [a, b]$

அதாவது, $f(x)$, $[a, b]$-ல் ஒரு மாறிலி.

$\therefore \quad f'(x) = o \quad \forall x \in [a, b]$

(ii) $M \neq m$ எனில், $f(a) = f(b)$

ஆதலால் M, m-ல் ஒன்றுவது $f(a)$, $f(b)$-னின்றும் மாறுபட்டிருக்க வேண்டும்.

$M \neq f(a)$ என்க.

$M = f(c)$ ஆக இருக்கட்டும்,

$M \neq f(a)$; $M \neq f(b)$, $M = f(c)$ ஆதலின்

$f(c) \neq f(a) \Rightarrow c \neq a$

இவ்வாறே $c \neq b$

$\therefore \quad c$-ல் f வகைக்கெழு உடையது.

$f'(c) = o$ என நிறுவுவோம்.

$f'(c > o \Rightarrow x \in [c, c+\delta]$ எனில்

$f(x) > f(c)$ ஆகுமாறு $\delta > o$ காணலாம்.

அதாவது $f(x) > M$, $x \in [c, c+\delta]$ எனில்,

ஆனால் M, f-ன் மேல் வரம்பாதலின்,

$f(x) \leqslant M$ இது ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore \quad f'(c) \ngtr o$

$f'(c) < o \Rightarrow x \in [c - \delta, c]$ எனில்

$f(x) > f(c) = M$.

ஆனால் $f(x) \leqslant M$. இதுவும் ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore \quad f'(c) = o$ ஆகத்தானிருக்க வேண்டும்.

கிளைத் தேற்றம்

$f(a)=f(b)=k$ என்னும்பொழுது மேல் தேற்றத்தை விரிக்க முடியும்.

$F(x)=f(x)-k$ எனில், மேல் தேற்றத்தின்படி,

$F'(x)=o,\ x\in(a,b)$ எனில்

$\therefore\ f'(x)=o,\ x\in(a,b).$

மாதிரிக் கணக்கு

ரோலின் தேற்றத்தை $f(x)=(x-a)^m\ (x-b)^n$ என்னும் பொழுது சோதனை செய்.

$f(x)=o,\ x=a,\ x=b$ எனில்

$f'x)=(x-)^{m-1}\ (x-b)^{n-1}\ [(m+n)x-mb=na)]$

$f'(x)=o,\ x+\dfrac{mb+na}{m+n}$ எனில்; அதாவது (a, b)-ல் ஒரு உள் புள்ளியில் $f'(x)=o$ ஆகிறது.

ξ 5.4. லாகிராஞ்சின் தேற்றம்

$[a, b]$ என்னும் மூடிய இடைவெளியை அரங்கமாகக் கொண்ட f என்னும் சார்பு (i) $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் (ii) $[a, b]$-ல் வகைக்கெழு உடையதாயும் இருக்கிறது எனில், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் c என்றும் ஒரு புள்ளி

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ என வருமாறு அமைந்துள்ளது.

நிரூபணம்

ϕ என்னும் சார்பை பின்வருமாறு வரையறுத்திடுவோம்:

$\phi(x)=f(x)+Ax$, இதில் A என்பது

$\phi(a)=\varphi(b)$ என அமையுமாறு உள்ள மாறிலியாக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad f(a)+Aa=f(b)+Ab$

அதாவது, $A=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ϕ,$[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது;

(a, b)-ல் வகைக்கெழு கொண்டது.

$\therefore$ ரோலின் தேற்றம் ϕக்குப் பயன்படுவது.

$\therefore$ (a, b)-ல் c என்றும் புள்ளி $\phi'(c)=o$ என்னுமாறு உள்ளது.

$\phi'(x)=f'(x)+A$.

$\therefore \quad \phi(c)=o$ எனில் $A=-f'(c)$

அல்லது $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

கிளைத் தேற்றங்கள்

(i) $[a, b]$-ஓ $f'(x)=o \,\forall x$ எனில், $f(x)$, $[a, b]$-ல் ஒரு மாறிலிச் சார்பாகும்.

(ii) $[a, b]$-ல் $f'(x)>o \,\forall x$ எனில், $f(x)$ ஒரு ஏறுமுகச் சார்பு..

(iii) $[a, b]$-ல் $f'(x)<o \,\forall x$ எனில், $f(x)$ ஒரு இறங்குமுகச் சார்பாகும்.

குறிப்பு

$b=a+h$ எனில் இத் தேற்றத்தின் முடிவை

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$; $(o<\theta<1)$ என எழுதலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) $f(x)$ ஒரு இருபடிக் கோவையெனின், $\theta=\frac{1}{2}$ என்று நிருவுக.

$f(x)=lx^2+mx+n$ எனில்,

$f'(x)=lx+m$

$\therefore \quad f(a+h)=l(a+h)^2+m(a+h)+n$
குறிப்பின்படி,

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h$

$\therefore \quad l(a+h)^2+m(a+h)+n-[la^2+ma+n]$

$=h[2l(a+\theta h)+m]$

அதாவது, $lh^2=2l\theta h^2$

$\therefore \quad \theta=\frac{1}{2}$

(2) $x>o$ எனில்,

$x<log(1+x)$ என்று நிறுவுக.

$f(x)=log(1+x)$ எனில்

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

குறிப்பின்படி, $f(x)=xf'(\theta x)$, $(o<\theta<1)$ எனில்

$f(0)+log(1+0)=0$

$$f'(\theta x)=\frac{1}{1+\theta x}$$

$$\therefore \quad log\,(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}$$

எப்பொழுதும், $1+\theta x>1$

$\therefore \quad log\,(1+x)<x$

§ 5.5. கோஷியின் இடைநிலைத் தேற்றம் (Cauchy's Mean Value Theorem)

f, g என்னும் சார்புகள் $[a, b]$யில் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் (a, b)யில் வகைபடுத்தக்கூடியதாயும் அமைந்து, (a, b)-யில் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $g'(x) \neq o$ எனில்,

(a, b)-ல் 'c' என்ற ஒரு மதிப்புக்காவது

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{f'(c)}, \text{ ஆகும்.}$$

நிரூபணம்

ϕ என்னும் சார்பை

$(x) = f(x) + Ag(x)$ என்னும் உறவால் நிர்ணயித்திடுக;

இதில் A என்னும் மாறிலி $\phi(a) = \phi(b)$ ஆக இருக்குமாறு அமைந்திருக்கட்டும்.

$\therefore\ [g(b) - (a)]\ \ A = -[f(b) - f(a)]$

$g(b) - g(a) \neq 0$, ஏனெனில்

$g(b) = g(a) \Rightarrow g$ 60-ல் தோற்றத்தின் நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்கிறது. ஆதலால், (a, b)-ல் ஒரு மதிப்பிற்காவது g பூச்சியமாகும். இது மூன்றாவதாகக் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு முரணாகும்.

$$\therefore\ A = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

$[a, b]$ யில் ϕ தொடர்ச்சியுள்ளது; (a, b)யில் வகைக்கெழு கொண்டது. மேலும் $\phi(a) = \phi(b)$ ஆதலின் ரோல் தோற்றத் தின் படி (a, b)-ல் என்னும் மதிப்பு $\phi'(c) = 0$ ஆகுமாறு உள்ளது.

$\phi'(c)=0 \Rightarrow 0=f'(c)+Ag'(c)$

அதாவது $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = -A = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

95·6 உயர்வகைக் கெழுக்கள்

f, $[a, b]$-ல் x என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழு கொண்டதாயிருக்கட்டும். அதாவது x-ன் அருகாமையில் f' தொடர்ச்சியுள்ளது.

f'க்கு x-ல் வகைக்கெழு உண்டு எனில்,

இந்த வகைக்கெழு $f''(x)$ எனப்படும்.

f''-ன் உண்மை f'-ன் தொடர்ச்சியை உறுதிப்படுத்துகிறது; இவ்வாறு f''-ன் வகைக் கெழு f''' என வரையறுக்கப்படும். நான்காவது, ஐந்தாவது.........வகைக்கெழுக்களும் இவ்வாறே வரையறுக்கப்படும். பொதுவாக; f^{n-1} x-ல் அமைந்திருக்குமானல், அதன் வகைக்கெழு அவ்வாறு ஒன்று இருக்குமானால், $f^n(x)$ எனப்படும்.

95-7 பொது இடைநிலைத் தோற்றம் (டெய்லரின் தேற்றம்)

நிருபணம்:

f என்னும் சார்புக்கு

(i) $[a, a+h]$ என்றும் இடைவெளியில் ($^{n-1}$) ஆவது வகைக் கெழு தொடர்ச்சியுள்ளது;

(ii) n-ஆவது வகைக்கெழு, f^n $(a, a+h)$ல் அமைந்துள்ளது எனில்,

(iii) P ஏதேனும் நடு மிகை எண் எனில், 0க்கும் 1க்கும் இடையே θ என்று ஒரு எண் எனில்,

$$f(a+h) = f(a)+\frac{h}{\underline{|1}}f'(o)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + \frac{h^{n}(1-\theta)^{n-p}}{\lfloor n-1\, p} f^{n}(a+\theta h \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

நிருபணம்:

$[a, a+h]$ல் f^{n-1}ன் தொடர்ச்சி $[a, a+h]$-ல் $f, f' f'', \ldots\ldots\ldots$ f^{n-1}-ன் தொடர்ச்சிகளை உறுதிப்படுத்துகின்றது.

ϕ என்னும் சார்பை

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x) f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{\angle 2} f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\angle n-1} f^{n-1}(x) + A(a+h-x)^p$$

என நிர்ணயித்து, A என்னும் மாறிலி

$\phi(a) = \phi(a+h)$ என அமையுமாறு தெரிந்திடுக.

அதாவது

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + Ah^p \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$ ஆகும்.

ϕ, $[a, a+h]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளது;

$(a, a+h)$-ல் வகைக்கெழு கொண்டது.

எனவே, ரோலின் தேற்றப்படி, $\phi'(a+\theta h) = o$ ஆகுமாறு $O \in (0, 1)$ உள்ளது.

ஆனால் $$\phi'(x) = \frac{[(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n}(x) - p^{A}(a+h-x)^{p-1}$$

$$\therefore \quad \phi'(a+\theta h) = o \Rightarrow \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{|\underline{n-1}} f^{n}(a+\theta h) - pA(1-\theta)^{p-1}h^{p-1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{n}(a+\theta h)}{p\, |\underline{n-1}}$$

$$(\theta \neq o,\ h \neq o)$$

Aயின் மதிப்பை (2)ல் பிரதியிட, நமக்குத் தேவையான தேற்றத்தின் முடிவு கிடைக்கிறது.

குறிப்பு

(i) $R_n = \dfrac{h^{n}(1-0)^{n-p}}{p\, |\underline{n-1}} f^{n}(a+\theta h)$ என்பது n உறுப்புக்களுக்குப் பின் அமைந்துள்ள டெய்லரின் மீதி என்று வழங்கப்படும்.

(ii) $p=1$ எனில்,

$$R_n = \frac{h^{n}(1-\theta)^{n-p}}{|\underline{n-1}} f^{n}(o+\theta h) \text{ என வரும்.}$$

இந்த அமைப்பில் மீதி கோஷியினால் நிறுவப்பட்டது

(iii) $p=n$ எனில், $R_n = \dfrac{h^{n}}{|\underline{n}} f^{n}(a+\theta h)$ இது லாகிராஞ்ச் கண்ட மீதி.

கிளைத் தேற்றங்கள்

(i) டெய்லரின் விரிவு

$x \in [a, a+h]$ என்க,

f, டெய்லரின் தேற்ற நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டால் $(a+h)$ஐ x எனக் கொண்டு,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{|\underline{1}} f_{i}(a) + \frac{(x-a)^{2}}{|\underline{2}} f''(a) + \ldots$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-1}(7)+\frac{(x-n)^{n}(1-\theta)^{n-p}}{p\,\underline{|n-1}} f^{n}(a+\theta-{}_{n-a})$$
$$(0<\theta<1) \quad (3)$$

என விரிவடையும். இது f-ன் டெய்லர் விரிவு.

(ii) மக்லாரின் தேற்றம்

(3)-ல், $a=o$ எனக் கொண்டால்,

$$f(x)=(o)+\frac{x}{|1} f'(o)+\frac{x^{2}}{\underline{|2}} f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-r}(x)$$

$$+\frac{x^{r}(1-\theta)^{n-p}}{p\,\underline{|n-1}} f^{n}(\theta x),$$

என, f^{n-1}, $[o, h]$-ல் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் (o, h)-ல் வகைக்கெழு கொண்டதாயும் இருந்தால், விரிவு பெறும்.

கடைசி உறுப்பு, லாகிராஞ்ச் முறைப்படி $\frac{x^{n}}{\underline{|n}} f^{n}(\theta x)$

என ஆகும்.

ξ 5.8. சார்புகளின் அடுக்குத்தொடர்கள்

f, $[a, a+h]$-ல் எல்லா வகைக்கெழுக்களையும் பெற்றிருப்பின்,

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{\underline{|1}} f'(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\underline{|n}} f^{n-1}(a)+R_{n}$$

$$=S_{n}+R_{n}.$$

என்பதில் $n\to\infty \Rightarrow R_{n}\to 0$ எனில்

எல்லை $S_{n}=f(a+h)$

எனவே $f(a+h)=f(a)+\frac{h}{\underline{|1}} f'(a)+\frac{h}{\underline{|2}} f'(a)+\ldots\ldots+\frac{h^{n}}{\underline{|n}} f^{n}(a)$

என்னும் கந்தழித் தொடர் $f(a+h)$க்கு ஒருங்குகின்றது.

இதிலிருந்து, f, $[0, x]$ என்றும் இடைவெளியில் எல்லா வகைக் கெழுக்களை பெற்றிருப்பின்,

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{\lfloor 1}f'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\ldots\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{n-1}(0)$$

எனவரும். இதில் எல்லை $\lim_{n\to\infty} Rn=0$ எனில்,

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{\lfloor 1}f'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^n(0)+\ldots$$

என முடிவிலித் தொடர் உருவம் பெருகிறது.

(i) $f(x)=e^x$ எனில், $f^n(x)=e^x$, $\forall n\in N: f^n(0)=1$

லாகிராஞ்சின் மீதி அமைப்பைப் பயன்படுத்தி

$$R_n=\frac{x^n}{\lfloor n}f^n(\theta x)=\frac{x^n}{\lfloor n}e^{x\theta}$$

எல்லை $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{\lfloor n}=0$; $e^{\theta x}$, x-ன் அளவான மதிப்புகளுக்கு வரம்புள்ளது.

எனவே $\lim_{n\to\infty} R_n=o$

$$\therefore e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x_2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\frac{x^n}{\lfloor n}+\ldots\ldots\ldots$$

(x முடிவுள்ள மதிப்புகளைப் பெறக்கூடும்)

(ii) $f(x)=\sin x$ எனில்

$$f^n(x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore f^n(o) = \begin{cases} \pm 1; & n = 2m \pm 1 \text{ எனில்} \\ 0; & n = 2m \text{ எனில் } (m \in N) \end{cases}$$

$$R_n = \frac{x^n}{\underline{|n}} f^n(\theta x) = \frac{x^n}{\underline{|n}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{x^n}{\underline{|n}} = o \text{ எனில், } \left|\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| < 1$$

$\because$ $n \to \infty$ எனில், $R_n \to o$.

$$\because \quad \sin x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} \cdots \cdots$$

(iii) $f(x) = \cos x$ எனில் $f^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(ii)-ல் போலவே $R_n \to o$, $n \to \infty$ எனில்

$$\text{மேலும் } f^n(o) = \begin{cases} 0, & n = 2m \pm 1 \text{ எனில்} \\ 1, & n = 4m \quad ,, \\ -1, & n = 4m+2 \quad ,, \end{cases}$$

$$m = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\therefore \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} \cdots \cdots$$

(iv) $f(x) = \log(1+x)$

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1} \underline{|n-1}}{(1+x)^n}; \; n > -1 \text{ எனில்,}$$

$$\therefore \quad f^n(o) = (-1)^{n-1} \underline{|n-1}$$

லாகிராஞ்சின் மீதி அமைப்பால்

$$R^n = \frac{x^n}{\underline{|n}} f^n(\theta x)$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\underline{|n}}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

(அ) $0 \leqslant x \leqslant 1$ எனில், $0 \leqslant \frac{x}{1+\theta x} < 1, \forall n > 0.$

$\frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$ எனில்,

$R_n \to 0,\ n \to \infty$ எனில்

(ஆ) $-1 < x < 0$ எனில்

கோஷியின் மீதி அமைப்பைப் பயன்படுத்தி

$$R_n = \frac{x^n}{\underline{|n-1}} (1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$$

$$= (-1)^{n-1}\ x^n \cdot \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{x+\theta x}\right)^{n-1}$$ என வருகிறது.

$$0 < \frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$$

மேலும் $\frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1\ |\ x\ |}$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ எனில்

$Rn \to o,\ n \to \infty$ எனில்

$\therefore\ -1 < x \leqslant 1$ எனில் மக்ளாரின் விதியைப் பயன்படுத்தி $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

என வருகிறது

ξ 5.9 தேரா அமைப்புகள்

தேற்றம் 1 : f, g **என்னும் சார்புகள்**

$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x)=0$, $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} g(x)=0$ **என்னு மாறும்.**

a-ல், f', g' **இரண்டுக்கும் வகைக்கெழு உள்ளவாறும் அமைந்திருந்தால்,**

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad [g'(a)\neq 0 \text{ எனில்}]$$

நிரூபணம்

f, g-க்கு 'a'-ல் வகைக்கெழு இருத்தலால் f, g இரண்டும் 'a'-ல் தொடர்ச்சியுள்ளவை.

$$\therefore \quad f(a)=g(a)=0.$$

$$f'(a)= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h)}{h}$$

இவ்வாறே, $g'(a) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{g(a+h)}{h}$

$$\therefore \quad \frac{f'(a)}{g'(a)} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

தேற்றம் 2

லாஹாஸ்பிடல் விதி

f, g **என்னும் இரண்டு சார்புகள்,**

(i) **எல்லை** $\underset{x\to a}{} f(x)=0$; **எல்லை** $\underset{x\to a}{} g(x)=0$;

(ii) $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ **என அமைந்திருந்தால்,**

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

நிரூபணம்

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow f,\ g\text{-க்கு}$$

a-ன் $(a-\delta,\ a+\delta)$ என்னும் ஏதோ ஓர் அண்மையில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைக்கெழு உண்டு; இந்தப் புள்ளிகளில் $g'(x) \neq 0$

$f(a) = g(a) = 0$ எனின் என்க. (இந்த எடுகோள் தேற்றத்தின் நிபந்தனைக்கோ, அல்லது முடிவுக்கோ முரண்பாடுள்ளதன்று.)

$x \in [a-\delta,\ a+\delta]$ எனில், கோஷியின் இடைநிலைத் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

[ξ, a-க்கும் x-க்கும் இடையே உள்ளது.]

$$\text{எனவே } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$= l$ ($\because$ $x \to a$ எனில் $\xi \to a$ என்பது தெளிவு.)

தேற்றம் 3

$f,\ g$ **என்னும் இரு சார்புகள்**

$\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$; $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ என வருமாறு

அமைந்திருந்தால்,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g'(x)} = l$$

நிரூபணம்

(i) முதலாவதாக $l = 0$ என்க.

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ அறுதியாயிருப்பதால்

f, g-க்கு $(a-\delta, a+\delta)$ என்னும் a-ன் ஏதோ ஓர் அண்மையில் x என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f'(x)$, $g'(x)$ உண்டு, $g'(x)\neq 0$ $(x\neq a)$.

$\therefore$ $(a, a+\delta)$ என்னும் இடைவெளியில், $g'(x)$ ஒரே குறியை உடையது. இவ்வாறே $(a-\delta, a)$ என்னும் இடைவெளியிலும் $g'(x)$ ஒரே குறியை உடையது. $g'(x)>0$ என்க; $\in>0$ என்க.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \text{ ஆதலின்}$$

$$\forall x\in(a, a+\delta), \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|<\frac{\in}{2} \text{ ஆகுமாறு}$$

$\delta_1<\delta(\delta_1>0)$ காண இயலும்.

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|<\frac{\in}{2}\Rightarrow -\tfrac{1}{2}\in g'(x)<f'(x)<\tfrac{1}{2}\in g'(x)$$

எனவே $x\in(a, a+\delta)$ எனின்,

$$-\tfrac{1}{2}\in[g(a+\delta_1)-g(x)]<[f(a+\delta_1)-f(x)]$$
$$<\tfrac{1}{2}\in[g(a+\delta_1)-g(x)]$$

$$\Rightarrow |f(a+\delta_1)-f(x)<\left|\frac{\in}{2}\right|g(a+\delta_1)-g(x)|$$

$$\Rightarrow -|f(a+\delta_1)|+|f(x)|<\frac{\in}{2}$$
$$[\,|g(a+\delta_1)|+|g(x)|\,]$$

$$\Rightarrow |f(x)|<\frac{\in}{2}[\,|g[(a+\delta_1)+|g(x)|\,]+|f(a+\delta_1)]$$

$$=\tfrac{1}{2}\in|g(x)|+k \quad (k, x\text{ஐச் சார்ந்ததன்று.})$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{\in}{2}+\frac{k}{|g(x)|}$$

$\lim_{x\to a}|g(x)|=\infty$ ஆதலின், $\forall x\in(a, a+\delta_2)$

$\delta_2 < \delta_1$ எனின், $\frac{k}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{2}$ ஆகுமாறு δ_2 காண இயலும்.

இந்நிலையில் $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

எனவே $\underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

இவ்வாறே $(a - \delta, a)$ என்னும் இடைவெளியைக் கருதி,

$\underset{x \to a-0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ என நிறுவலாம்.

எனவே, $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(ii) இரண்டாவதாக $l \neq 0$ என்க.

$\phi(x) = f(x) - lg(x)$ எனின்,

$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{\phi'(x)}{g'(x)} = \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right] = 0.$

எனவே முதல் வகையின்படி

$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{\phi(x)}{g(x)} = 0$

அதாவது, $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - l\right] = 0$

$\therefore \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. f, c-ல் வகைக்கெழு கொண்டதெனின் $[f'(c) \neq 0]$

(i) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}$ காண்க.

(ii) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{f(c-h)-f(c)}$ காண்க.

(i) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{h}$$

$f'(c+0)-f'(c-0)=f'(c)-f'(c)$ [$\because$ f, c-ல் வகைக் கெழு உடையது.]

$=0.$

(ii) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{f(c-h)-f(c)}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{hf'(c+\theta_1 h)}{hf'(c+\theta_2 h)} \quad [0<\theta_1<1;\ 0<\theta_2<1]$$

$$= \frac{f'(c+0)}{f'(c-0)} = \frac{f'(c)}{f'(c)} = 1.$$

2. $[a, a+h]$ என்னும் இடைவெளியில், லாகிராஞ்சியின் இடைநிலைத் தேற்றத்தைப் பின்வரும் சார்புகளுக்குப் பயன் படுத்தி, ஒவ்வொன்றிலும் வரும் θ-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $f(x)=e^x$ (ii) $f(x)=\log x$

(i) $f(x)=e^x$ எனில்,

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$$

$$\Rightarrow e^{a+h}-e^a=he^{a+\theta h}$$

$$\Rightarrow e^a(e^h-1)=he^ae^{\theta h}$$

$$\Rightarrow e^{\theta h}=\frac{e^h-1}{h}$$

$$\Rightarrow \theta h=\log\frac{(e^h-1)}{h}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{h}\log\frac{e^h-1}{h}.$$

(ii) $f(x)=\log x$ எனில், $f'(x)=\frac{1}{x}$

$$f(a+h)-f(a)=hf'(b+\theta h)$$

$$\Rightarrow \log(a+h)-\log a=\frac{h}{a+\theta h}$$

$$\Rightarrow \log\left(1+\frac{h}{a}\right)=\frac{1}{\frac{a}{h}+\theta}$$

$$\therefore\quad \theta+\frac{a}{h}=\frac{1}{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}$$

ஆகவே, $\theta=\frac{1}{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}-\frac{a}{h}.$

3. $x>0$ எனின், $\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ என்று நிறுவுக.

$f(x)=\log(1+x)$ எனின், $f'(x)=\frac{1}{1+x}$; $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$

மக்லாரின் தேற்றப்படி $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(\theta x)$.

எனவே, $\log(1+x)=0+x-\frac{x^2}{2}\frac{1!}{(1+\theta x)^2}$

$$\therefore \quad \log(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}$$

$$\because \quad \frac{1}{(1+\theta x)^2}<1,\ x-\log(1+x)=\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}<\frac{x^2}{2}$$

[ξ 5-4 கீழ் மாதிரிக் கணக்கு 2ஐயும் இதனுடன் இணைத்தால், $x>\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ என்று கிடைக்கும்.]

4. லாஹாஸ்பிடல் விதியைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் எல்லைகளைக் காண்க:

(i) $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\ \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x-8}$

(ii) $\underset{x\to \infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{e^x}{x}$

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\sin x-x}{x^3}$

(iv) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\ \frac{1-x}{\log x}$

(v) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{e^x+\sin x-1}{\log(1+x)}$

(vi) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\sin\log(1+x)}{\log(1+\sin x)}$

(vii) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$

(viii) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\log \sin 2x}{\log \sin x}$

(i) $\underset{x \to 2}{\text{எல்லை}} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x - 8} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \underset{x \to 2}{\text{எல்லை}} \dfrac{2x - 6}{2x + 2}$

$$= \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

(ii) $\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{e^x}{x} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{e^x}{1} = \infty$

(iii) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sin x - x}{x^3} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{-\sin x}{6x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ (மீண்டும் லாஹாஸ்பிடல் விதியைப் பயன்படுத்தி)

$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{-\cos x}{6}$ (,,)

$= -\frac{1}{6}$

(iv) $\underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} \dfrac{1 - x}{\log x} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} \dfrac{-1}{1/x}$

$= \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} -x = -1$

(v) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{e^x + \sin x - 1}{\log(1 + x)} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{e^x + \cos x}{\frac{1}{1+x}} = 2$$

(vi) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin \log(1+x)}{\log(1+\sin x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cos \log(1+x) \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+\sin x} \cos x}$$

$$= \frac{\frac{\cos \log 1}{1}}{\frac{\cos 0}{1+0}} = 1$$

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x} \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos - x \sin x}$$ (மீண்டும் லாஹாஸ்பிடல் விதியைப் பயன்படுத்தி)

$$= -\frac{0}{1} = 0$$

(viii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log \sin^2 x}{\log \sin x} \left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)$

$$\text{எல்லை}_{x\to 0} = \frac{\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x}$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos^2 x}{2\sin x \cos^2 x}$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

பயிற்சி XII

1. $f''(x)$ தொடர்ச்சியுள்ளதெனில்

$$\text{எல்லை}_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = f''(x)$$ என நிறுவுக.

2. $f(x)=x^3+x,\ a=3b=2$

$f(b)-f(a)=(b-a)f(c)$ என்னும் முடிவில், c-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. (i) $1+x<e^x$

(ii) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ என்று காண்க.

4. பின்வரும் எல்லைகளைக் கணித்திடுக:

(i) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}-2}{5x^2}$

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$

(iii) $\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{x^5}{e^x}$

(iv) $\underset{x \to 4}{\text{எல்லை}} \dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

(v) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(vi) $\underset{x \to \pi}{\text{எல்லை}} \dfrac{x\cos x+\pi}{\sin x}$

(vii) $\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+5x-2}$

(viii) $\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{e^x}{x^3}$

(ix) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\cot 2x}{\cot x}$

(x) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\log x^2}{\cot x^2}$

[விடைகள்: (2.) $c = \sqrt{\frac{7}{3}}$

4 (i) $\frac{9}{8}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) 0, (iv) $\frac{8}{9}$, (v) $\frac{1}{2}$, (vi) 1, (vii) $\frac{2}{3}$, (viii) ∞, (ix) $\frac{1}{2}$, (x) l]

ξ 5.10.1 மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள்

x_0 என்பது $[a, b]$-ன் உட்புள்ளியாக இருக்கட்டும். $f[a, b]$-ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்க.

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ என்றும் x_0-ன் ஏதோ ஓர் அண்மையில் $f(x_0) > f(x)$; $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ எனில், $f(x_0)$, f-ன் ஒரு மீப் பெரு மதிப்பாகும்.

இவ்வாறில்லாமல் $f(x_0) < f(x)$, $\forall x (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ எனில், $f(x_0)$, f-ன் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

x_0-ல், f மீச்சிறு மதிப்போ, மீப்பெரு மதிப்போ பெற்றிருந்தால், $f(x_0)$ ஒரு திரும்பு மதிப்பாகும்; x_0 ஒரு திரும்பு முனைப் புள்ளி எனப்படும்.

ξ 5.10.2 தேற்றம்

$f(x_0)$, f-ன் ஒரு திரும்பு மதிப்பாயின், $f'(x_0) = 0$; $f'(x_0)$ வகையிடத்தக்கதெனில்.

நிரூபணம்

$f'(x_0) \neq 0$ எனில், x_0-ன் ஒவ்வோர் அண்மையிலும், $f(x) > f(x_0)$ என்று மாறும், $f(x) < f(x_0)$ என்னு மாறும் புள்ளிகள் உள்ளன. இது, $f(x_0)$ திரும்பு புள்ளி என்னும் எடுகோளிற்கு முரண்பாடாகும்.

ξ 5.10.3 தேற்றம்

திரும்பு மதிப்பிற்குப் போதுமான நிபந்தனைகள்

x_0, $[a, b]$-ன் உட்புள்ளியாயிருக்கட்டும்.

f, $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு என்க.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$; $f^n(x_0) \neq 0$ என்க.

(f^n, x_0-ல் அமைந்துள்ளது.)

n ஒற்றைப்படை எண் எனில், x_o ஒரு திரும்பு முனைப் புள்ளி அன்று; n இரட்டைப்படை எண் எனில், $f(x_o)$ ஒரு திரும்பு மதிப்பாகும்; இந்நிலையில்,

$f^n(x_o)>0$ எனில், $f(x_o)$ f-ன் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பு;

$f^n(x_o)<0$ எனில், $f(x_o)f$-ன் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு.

நிரூபணம்

$$f'(x_o)=f''(x_o)= \ \dots \qquad =f^{n-1}(x_o)=0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow x_o$-ன் $(x_o-\delta, \ x_o+\delta)$ என்னும் இடைவெளியில் $f^1, f'' \dots f^{n-1}$ அமைந்துள்ளன.

$f^n\neq 0$; $f^n>0$ எனில்,

$(x_o-\delta, \ x_o+\delta)$ என்னும் இடைவெளி $(\delta<\delta_1)$

$$\left.\begin{array}{l} x_o-\delta<x<x_O \text{ எனின், } f^{n-1}(x)<f^{n-1}(x_o)=0 \text{ ஆகவும்} \\ x_o<x<x_o+\delta \text{ எனின், } f^{n-1}(x)>f^{n-1}(x_o)=0 \text{ எனவும்} \end{array}\right\} (2)$$

அமைந்துள்ளது.

$f^n(0)<0$ எனில்,

$$\left.\begin{array}{l} x_o-\delta<x<x_o \text{ எனில், } f^{n-1}(x)>f^{n-1}(x_o)=0 \\ x_o<x<x_o+\delta \text{ எனில், } f^{n-1}(x)<f^{n-1}(x_o)=0 \text{ எனவும்} \end{array}\right\} (3)$$

ஆகுமாறு $(x_o-\delta, \ x_o+\delta)$ அமைந்துள்ளது.

கொடுத்துள்ள நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி $|h|<\delta$ எனில், டெய்லரின் தேற்றப்படி,

$$f(x_o+h)=f(x_O)+hf'(x_o)+ \ \dots \ \dots \ + \frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-1}(x_o+\theta h)$$

$$\text{அதாவது } f(x_o)+h)-f(x_o)=\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-1}(x_o+\theta h) (1\text{-ன்படி})$$

$[x_o+\theta h\in(x_o-\delta, \ x_o+\delta)]$

n இரட்டைப்படை எண், $f^n(x_0)>0$ எனில்,

(2)-லிருந்து $f(x_0)+h)-f(x_0)<0$

எனவே $f(x_0)$ ஒரு மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

n இரட்டைப்படை எண், $f^n(x_0)<0$ எனில் (3)-லிருந்து $f(x_0+h)-f(x_0)<0.$

எனவே $f(x_0)$ ஒரு மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

n ஒற்றைப்படை எண் எனில், (2), (3) இவற்றிலிருந்து $f^n(x_0)\neq 0$ எனில், $f(x_0+h)-f(x_0)$ $(x_0-\delta, x_0)$ $(x_0, x_0+\delta)$ என்னும் இடைவெளிகளில் எதிர்க்குறிகள் உடையன. எனவே $f(x_0)$ ஒரு திரும்பு மதிப்பு ஆகமாட்டாது.

ξ 5.11. வகையீடுகள் (Differentials)

f என்னும் சார்பு $[a, b]$யில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கட்டும்; $x\in [a, b]$ என்க.

x-ல் சார்பின் மதிப்பு $f(x)$ ஆகும். இதனை y எனக் கொண்டால்,

$$f'(x)=\text{எல்லை}_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, x-ன் ஓர் அண்மையில்,

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=f'(x)+\alpha(\delta x)$$

$\alpha(\delta x)\to 0$, $\delta x\to 0$ எனில்

அதாவது $f(x+\delta x)-f(x)=f'(x)\delta x+\alpha(\delta x)\delta x.$

$f(x+\delta x)-f(x)$ஐ δy எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

எனவே $\delta y=f'(x)\delta x+\alpha(\delta x)\delta x$

இதில், $f'(x)\delta x$ முதல்நிலைச் சிறு மதிப்பு.

இது x-ல் f-ன் **வகையீடு** என வழங்கப்படும்.

இதனை df (அல்லது dy) எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எனவே, $d f(x)=f'(x)\delta x$

$f(x)=x$ எனில், $dx=1.\delta x$

எனவே $d f(x)=f'(x)dx.$

இது x-ல் காணப்படும் சிறு பிழைகளுக்குப் பொருத்தமாக f-ல் காணக்கூடிய பிழையைத் தோராயமாக அறிவதற்குப் பயன்படுகிறது.

6. வரையறுத்த தொகையீடு
(Definite Integral)

§ 6.1.1 தொகை காணக்கூடிய சார்பின் ரீமன் வரையறை

f என்பது $[a, b]$ என்னும் இடைவெளியில் வரையறுக்கப் பட்ட ஒரு வரம்புள்ள சார்பாயிருக்கட்டும். $[a, b]$ஐ, n பகுதி இடைவெளிகளாக $[a_1, x_1]$, $[x_1, x_2]$ ... ... $[x_{n-1}, b]$ பிரிப் போம்.

$(a < x_1 < x_2 < \ldots\ x_{n-1} < b)$

$[a, b]$ இடைவெளியில் $f(x)$-ன் மேல், கீழ் எல்லைகள், M, m ஆகவிருக்கட்டும். M_r, m_r என்பன $[x_{r-1}, x_r]$-ல் மேல், கீழ் வரம்புகளாயிருக்கட்டும். $a = x_o$, $b = x_n$ என்று வைத்துக்கொள் வோம்.

பின்வரும் வகையில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டுத் தொகைகள் S, s என்பனவற்றைக் கருதுவோம்:

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ \ldots\ \ldots\ + M_n(b - x_{n-1})$$

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ \ldots\ \ldots\ + m_n(b - x_{n-1})$$

இடைவெளி $[a, b]$ஐச் சிறிய பகுதி இடைவெளிகளாகப் பாகுபடுத்தும் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இயைபாக, கூட்டுத் தொகைகள் S, s இருக்கின்றன; எப்பொழுதும் $s \leqslant S$.

வெவ்வேறு சிறிய பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும் முறை களுக்கு, S-ல் குறிக்கப்படும் தொகைகளுக்கு ஒரு கீழ்வரம்பு இருக்கின்றது; ஏனென்றால் $S > m\ (b - a)$. அதேபோல் s-ல் குறிக்கப்படும் தொகைகளெல்லாம் $< M(b - a)$ ஆக இருப்ப தால், மேல் எல்லை உடையனவாயுள்ளன.

S-ல் குறிக்கப்படும் தொகைகளின் கீழ்வரம்பை J என்றும், s-ல் குறிக்கப்படும் தொகைகளின் வரம்பை I என்றும் குறிப்போம்.

$I=J$ எனின், $f(x)$ $[a, b]$ என்னும் இடைவெளியில் ரீமன் முறையில் தொகை காணக்கூடியது. இவ்வாறாயின் I அல்லது J-ன் மதிப்பு இடைவெளி$[a,b]$ல் $f(x)$-ன் வரையறுத்த தொகை என்று கூறுவோம். அதை $\int_a^b f(x)dx$ என்று குறிப்போம்.

ξ 6.1.2 வரைவிலக்கணம்

$[a, b]$ என்னும் இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு வரம்புள்ள சார்பான f, மேல் தொகை S-களின் கீழ்வரம்பும் கீழ்த் தொகை s-களின் மேல்வரம்பும் சமமாகும்படி இருந்தால் f, ரீமன் முறைப்படி தொகை காணக்கூடியது என்று கூறுகிறோம்.

மேற்கொடுத்த வரைவிலக்கணத்திலிருந்து, $\int_a^b f(x)d_n \ngtr S$ என்றும் $\nless s$ என்றும் தெளிவாக விளங்குகிறது. S, s வழக்கம் போல் குறிக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுத் தொகைகள்.

S, s-க்குப் பதிலாக நாம் பின்வரும் கோவைகள் உபயோகப் படுத்தலாம்.

$\xi_r \in (x_{r-1}, x_r)$ என்க; $r=1, 2 \ldots n$.

பின்வரும் தொகையைக் காண்போம்:

$$\sum = f(\xi_1)(x_1-a)+ \quad \ldots \quad \ldots \quad +f(\xi_r)(x_r-x_{r-1})+ \quad \ldots \quad \ldots \\ +f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

ஒவ்வொரு சிறிய பகுதி இடைவெளியிலும், $m_r \leqslant f(\xi_r) \leqslant M_r$ என வருவதால், $\sum$ என்கிற தொகை S, s இவற்றினிடையே அமைந்துள்ளது.

பகுதி இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை, n, ஒவ்வொரு பகுதி இடைவெளியின் நீளமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும் வகையில், கந்தழியை நெருங்குமானால், $(n \to \infty)$, S, s என்கிற

தொகைகள் ஒரே எல்லையை உடைத்தாயுள்ளன எனின்

$\int_a^b f(x)\, dx$ம் $\sum$வும் அதே எல்லையை உடைத்தாயுள்ளது.

ஆகவே, தொகை காணக்கூடிய f என்றும் சார்புக்கு n கந்தழியை நெருங்கும்பொழுது ($n \to \infty$), ஒவ்வொரு சிறு பகுதி இடைவெளியின் நீளம் பூச்சியத்தை நெருங்கும்; ξ_r என்பது (x_{r-1}, x_r)ல் xன் ஏதோவொரு மதிப்பு எனில்,

$$\sum_{r=1}^{n} (f(\xi_r)\,(x_r - x_{r-1}) \to \int_a^b f\ (x)dx$$

குறிப்பாக ξ என்பதை x_{r-1} அல்லது x_r ஆக தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

குறிப்பு

$[o, b]$ல் $f(x)$ வரம்புள்ள சார்பு என்கிற நிபந்தனை ஒன்று தான் நாம் வைத்திருக்கும் தற்கோள். இதனால் ஒவ்வொரு வரம்புள்ள சார்பும் தொகைக் காணக்கூடியதொன்றாகாது.

ξ 6.2 தேற்றம் $I < J$

$[a, b]$ இடைவெளியின் ஒரு பிரிவினையில் சிறு பகுதிகளின் முனைப் புள்ளிகள். $a, x_1, x_2 \ \ldots \ x_{n-1}, b$ ஆக இருக்கவும் இம்முறையின் கூட்டுத் தொகைகள் S, s யிருக்கவும்.

மேற்சொல்லப்பட்ட சிறு பகுதிகளையோ இடைவெளிகளின் சிலவற்றையோ எல்லாவற்றையோ மேலும் சிறு பகுதிகளாக வெட்டுவோம். இப்புதிய பாகுபாட்டின் சிறு பகுதிகளின் முனைப் புள்ளிகள்

$$a, y_1, y_2 \ldots y_{k-1}, x_1, y_n, y_{k+1}, \ldots y_{l-1}, x_2, y_{l+1} \ldots b$$

என்றிருக்கவும்.

மேற்கொண்ட முறையில் அடைந்துள்ள பிரிவில் முனை புள்ளிகள் முதலில் சொல்லப்பட்ட பிரிவின் முனைப் புள்ளிகளாக இருப்பின், மேற்சொல்லப்பட்ட பிரிவினை முதல் பிரிவினைக்கு அடுத்து வருகின்றதாக (consecutive)

கூறப்படும். இப்பிரிவினையின் மேல், கீழ் தொகைகளை $\sum$, σ என்று குறிக்கவும்.

(a, x_1) பிரிவிலிருந்து ஏற்படும் தொகைகள் S, $\sum$வுக்குரிய பங்கை ஒப்பிடுவோம். $f(x)$ன் மேல் கீழ் எல்லைகள் (a, y_1) பிரிவினில் M_1', m_1' ஆகவும் (y, y_2)ல் M_2' m_2' ஆகவுமிருப் பின், (a, x_1) இடைவெளியிலிருந்து ஏற்படும் $\sum$ன் பாகம் $M_1'(y_1 - a) + M_2'(y_2 - y_1) + \dots \dots + M_k^1(x_1 - y_{k-1})$ ... (1) ஆயுள்ளது.

ஆனால் M_1', M_2', ... M_k' ஒவ்வொன்றும் M_1ஐ விட பெரிதில்லை.

அதாவது தொகை $\sum$-ன் (a, x_1)லிருந்து $\ngtr M_1(x_1 - a)$

இதுபோல் $\sum$-ன் (x_1, x_2)லிருந்து ஏற்படும் பாகம் $\ngtr M_2(x_2 - x_1)$, etc.

கூட்டின், $\sum \leqslant S$ (2)

இதுபோல், $\sigma \geqslant s$ (3)

இப்பொழுது (a, b)ஐ ஏதாகினும் இரண்டு வழிகளில் பிரிப்போம். அவைகளை

$a, x_1, \dots x_{m-1}, b$ பொருத்தமுள்ள தொகைகள் S, s (i) என்றும்

$a, y_1, \dots y_{n-1}$ b பொருத்தமுள்ள தொகைகள் S' and s' (ii) என்றும் கருதுவோம்.

இவைகளிரண்டையும் மேற்பொருத்தினால், (i) (ii) இப் பிரிவுகளுக்கு அடுத்து வருகின்ற பிரிவு கிடைக்கும்; அவை களின் தொகைகள் $\sum$, σ என்று அழைப்போம்.

(2)-ன் மூலம், $\sum \leqslant S$; $\sigma \geqslant s$

தவிர, $\sum \leqslant S'$ and $\sigma \geqslant s'$

ஆனால் $\sum \geqslant \sigma$

$\therefore$ $s' \leqslant \sigma \leqslant \sum \leqslant S$; மேலும் $s \leqslant S'$

ஆகையால் (a, b)யின் எவ்விதப் பிரிவினாலேற்படும் தொகை S இப்பிரிவினாலேற்படும் அல்லது வேறு பிரிவினாலேற்படும் sஐ விட குறைவில்லை.

வேண்டிய அளவிற்கு I-ன் அருகே தொகை s-ம் Jக்கு சமீபத்தில் தொகை S-ம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$\therefore$ $I \leqslant J$. Jஐ விட I பெரிதாகவிருந்தால், ஏதொரு பிரிவினையில் $s > S$ என்று தொனிக்கும்.

§ 6.3, டார்போவின் தேற்றம்

நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் மிகச் சிறிய நேர் எண் ϵஐ சார்ந்து, மற்றொரு மிகை எண் η, வெவ்வேறு பிரிவினைகளிலும் எல்லா சிறு பகுதிகளின் நீளம் $\leqslant \epsilon$ யிருந்தால், கூட்டுத்தொகை S, Iஐ விட ϵக்கு குறைவாகப் பெரிதாகவும் and s, Iஐ விட ϵக்கு குறைவாகச் சிறியதாகவுமிருக்கும்படி அமைந்துள்ளது.

(அதாவது, இடைவெளியின் தரித்தல் முனைப் புள்ளிகளின் எண் வரையறாதளவு ஏறிக்கொண்டு போகுமெனில் சிறுப் பகுதிகளின் நீளம் பூச்சியத்தை நெருங்கும்பொழுது, தொகைகள் S, s இவைகள் J, Iகளை நெருங்கும்.)

S, sக்கு J, I கீழ் எல்லை, மேல்வரம்புகளாயிருப்பதால், இடைவெளி (a, b)ஐ பிரிக்கும் வகையில், ஒரு பிரிவினையை S, Jஐ விட $\frac{\epsilon}{2}$க்கும் குறைந்த அளவில் பெரிதாயிருக்கிறது. இப்பிரிவு முறையை $a_1\ a_2\ a_2 \ldots a_{p-1}$ என்று குறிப்போம்; இம்முறையைச் சார்ந்த தொகை S_1, s_1 ஆயிருக்கட்டும். (1)

$$\therefore\ S_1 < J + \frac{\epsilon}{2}$$

இப்பிரிவின் சிறு பகுதிகளின் நீளங்களின் மீச்சிறு மதிப்பு η வாயிருக்கட்டும்.

$a_2 = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, b$ என்கிற பிரிவினையில்

$| x_r - x_{r-1} | \leqslant \eta$ $(r = 1, 2 \ldots n)$யிருக்கட்டும். இப்பிரிவினையை சார்ந்த தொகைகள் S_2, s_2 ஆயிருக்கட்டும். (2)

(1)ன் மேல் (2)ஐ மேற்பொருத்தினால்,

$a, x_1, x_2, a_1, x_2, x_4, \ldots x_{n-1}, b$ மேலுள்ள பிரிவினை கிடைக்கும்; இதைச் சார்ந்த தொகைகள் S_3, s_3 ஆயிருக்கட்டும். (3)

மேற்சொல்லப்பட்ட பிரிவினை (3), வகைகள் (1), (2) இவைகளுக்கு அடுத்தடுத்திருக்கின்றன.

$\therefore \quad S_1 \geqslant S_3$ (ξ2ஐப் பார்க்கவும்.)

ஆனால் $S_1 < J + \frac{\epsilon}{2}$

$$\therefore \quad S_3 < J + \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

இப்பொழுது,

$$S_2 - S_3 = \sum[M(x_{r-1}, x_r)(x_r - x_{r-1}) - M(x_{r-1}, a_k, x^r)(a_k - x_{r-1}) - M(a_k, x_r)(x_r - a_k)]$$

$M(x', x'')$ என்பது இடைவெளி (x', x'')ல் $f(x)$ன் மேல் வரம்பு 2லுள்ள (x_{r-1}, x_r) யெனும் இடைவெளியில் $a_1, a_2 \quad a_{p-1}$ உட்புள்ளிகளாயிருந்தாய்; அதாவது முனைப் புள்ளிகளாக இல்லை எனின், $\sum$ என்பது இவ்வகை இடைவெளிகளைச் சார்ந்த கூட்டல்.

(1)ல் ஒவ்வொரு இடைவெளியின் நீளமும் $> \eta$; மேலும்

(2)ல் ஒவ்வொரு இடைவெளியின் நீளம் $\ngtr \eta$,

(2)ல் அடுத்தடுத்து வரும் x_pகளின் நடுவே இரண்டு a'க்கள் வரமுடியாது.

$\sum$ கூட்டலில், $(p-1)$ உறுப்புகளுக்கு மேலிருக்க முடியாது.

(a, b)ல் $| f(x) |$ ன் மேல் எல்லை A என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$S_2 - S_3$ஐ பின் வகையில் திருப்பி எழுதுவோம்.

$$S_2 - S_3\text{ஐ} = \sum[\{M(x_{r-1}, x_r) - M(x_{r-1})a_k)\}(a_k - x_{r-1}) + \{M(x_{r-1}, x_r) - M(a_k, x_r)(x_r - a_k)]$$

$M(x_{r-1}, x_r) - M(x_{r-1}, a_k)$யும் $M(x_{r-1}, x_r - M(a_k, x_r)$ம்

$\geqslant 0$; மேலும் அவை $2A$ஐ விட பெரிதல்ல, $(p \ngtr 2A)$

$$\therefore \quad S_2 - S_3 \leqslant 2A\sum(x_r - x_{r-1});$$

$\sum$ என்றும் கூட்டலில் $(p-1)$ உறுப்புகளுக்கு மேலிருக்க முடியாது; தவிர ஒவ்வொரு இடைவெளி $|x_r - x_{r-1}| \ngtr \eta$

எனவே, $S_2 - S_3 \leqslant 2(p-1)A\eta$.

ஆகையால், (4)லிருந்து, $S_2 < J + \frac{\epsilon}{2} + 2(p-1)A\eta$

இதுவரை நாம் ஒரே ஒரு நிபந்தனைதான் η–ன் பேரில் வைத்திருக்கிறோம், அதாவது (1)ல் சிறு பகுதிகளின் நீளங்கள் $> \eta$.

ηவை $2(p-1)\ A\eta < \frac{\epsilon}{2}$

i.e. $\eta < \frac{\epsilon}{4(p-1)A}$ என்று தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளு வோம்.

ηவை இப்படித் தேர்ந்தெடுத்தால், $S_2 < J + \epsilon$

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

s, Iக்கும் இதேபோல் நிரூபணம் தர இயலும். S, s இரண்டிற்கும் ஒரே ηஐ தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளலாம்; ஏனெனில் S, s–ன் தனி நிரூபணங்களிலுள்ள இரண்டு ηக்களில் சிறியதை இரண்டுக்கும் ηவாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

ξ 6.4 தொகை காணலுக்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள்

$f(a, b)$யில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு:

முன்னமே கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண் ϵக்கு சார்ந்து (a, b)-ன் ஏரு பிரிவினை ஒவ்வொரு சிறுஇடைவெளியும் ηவை விட சிறுதாகவோ, சமானாகவோ இருக்கும்பொழுது, $S-s<\epsilon$ ஆகுமாறு η என்னும் மிகை எண் உண்டு எனில், f தொகை காணக்கூடிய சார்பாகும்.

(i) $S-s<\epsilon$ எடுகோளானால்

ஆனால் $S \geqslant J;\ s \leqslant I$

$\therefore \quad J-I \leqslant S-s<\epsilon$

அதாவது $J=I$.

நிபந்தனை போதுமானது.

(ii) இப்பொழுது நிபந்தனை தேவையானது என்று நிரூபிப்போம்.

$f(x)$ என்கிற சார்பு (a, b)-ல் தொனகாணக்கூடியதாயின் $J=I$.

டார்போவின் தேற்றத்திற்கிணங்கி, கொடுக்கப்பட்ட ϵக்குச் சார்ந்து, (a, b) பிரிக்கும் ஒவ்வொரு பாகுபாட்டில் சிறு இடைவெளிகள் ηவை விட சிறிதாகவோ சமானமாகவோருக்கு மெனின்,

$S-J<\frac{\epsilon}{2};\ I-s<\frac{\epsilon}{2}$ ஆகுகாறு ηவை நாம் தேர்ந் தெடுக்க இயலும்.

எனவே $S-s=S-J+I-\epsilon$ ($I=J$ என்பதால்)

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.$$

§ 6.5 தொகை காணக்கூடிய சார்புகள்

(i) ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பும் தொகை காணக்கூடியது.

$f(x)$ இடைவெளி (a, b)ல் தொடர்ச்சி சார்பாயிருக்கட்டும். எனவே இது வரம்புகளுக்கும் அடங்கியது.

தொடர்ச்சி சார்புகளின் குணங்களால், மிகச் சிறிய யாதொமொரு மிகை எண் ϵக்குச் சார்ந்து (a, b)ஐ பிரிக்கும் ஒவவொரு வழியிலும் சிறு இடைவெளியின் நீளம் ηவை விடக்

குறைவாகவோ, சமானமாகவோ யிருக்குமெனின், சார்பு $f(x)$ன் ஊசல் $\in$ஐ விட குறைவுள்ளதாயிருக்கும்படி η என்ற மிகை எண் ஒன்று உள்ளது.

இத்தகைய பிரிவினையின் முனிப் புள்ளிகள்

$x_o = a,\ x_1,\ \ldots\ x_n = b$ என்றிருக்கட்டும்.

$S + \sum M_r(x_r - x_{r-1});\ s = \sum m_r(x_r - x_{r-1})$.

$\therefore\ S - s = \sum(M\text{r} - m_r)\ (x_r - x_{r-1})$

ஆனால் $M_r - m_r < \in$

ஆகையால் $S - \text{s} < \in \sum'\ (x_r - x_{r-1}) < \in\ (b - a)$

ξ 4வது தேற்றத்தின்படி, $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பு.

(ii) **ஒவ்வொரு வரம்புக்குட்பட்ட ஒருமுகச் சார்பும் தொகை காணக்கூடியது.**

$f(x)$ என்பது (a, b)ல் ஒரு வரம்புள்ள ஒருமுகச் சார்பாயிருக்கட்டும். $f(x)$ மாறிலி சார்பாயிருக்கும் வகை மிக எளிதானது. $f(x)$ ஒரே முறை ஏறும் சார்பாயிருக்கட்டும்.

(a, b)ஐ பிரிக்கும் வகை $a = x_0,\ x_1\ \ldots\ x_n = b$ என்று குறிப்போம்.

$f(x$ ஒரே முறை ஏறும் சார்பாயிருப்பதால்,

$S = f(x_1)\ (x_1 - a)\ +\ \ldots\ +\ f(x_r)\ (x_r - x_{r-1})\ +\ f)b)\ (b - x_{r-1}\};$

$s = f(a)\ (x_1 - a)\ +\ \ldots\ +\ f(x_{r-1})\ (x_r - x_{r-1}) + \ldots + f(x_{n-1})$
$(-bx_{n-1}\}$

சிறு இடைவெளிகளின் நீளம் ηவை விடச் சிறியதாயிருந்

$S - s = \sum\ [f(x_r) - f(x_r)_{-1})]\ (x_{r-1}]$

$\leqslant \eta\ \sum[f(x_r) - f(x_{r-1})]$

$\leqslant \eta\ [f(b) - f(a)]$

$(f(x_1),\ f(a),\ \ldots\ f(b),\ f(x_{n1})$ குறை சார்பாக இல்லாததால்)

η வை $\dfrac{\in}{f(b) - f(a)}$ ஐ விட சிறியதாகத் தேர்ந்தெடுப்போம்;

அதாவது $\eta < \dfrac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$

$\therefore \quad S - s < \epsilon.$

ξ 4 தேற்றத்தினால் f தேற்றத்தினால் $f(x)$ இடைவெளி (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியது.

கிளைத் தேற்றம்

வரம்புக்குட்பட்ட மாற்றம் கொண்டுள்ள சார்பை இரண்டு இரண்டு ஒரு முகச் சார்புகளின் வித்தியாசமாகக் காட்ட முடியுமாதலால், அது தொகை காணக்கூடியது.

(iii) (a, b) இடைவெளியில் ஒரு எல்லையுள்ள சார்பின் தொடர்ச்சியின்மையுள்ள முனைகள் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையான இடைவெளிகளுக்குள்ளடக்க முடிந்தால், சார்பு தொகை காணக்கூடியது; எப்போவெனின் இவ்விடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் ஒரு யாதாமொரு இணை எண்ணைவிடத் தாழ்ந்த தாழ்ந்ததாக இருக்கவேண்டும்.

ϵ என்பது மிகச் சிறிய யாதொமெரு மிகை எண்ணாயிருக்கட்டும். (a,b)-ல் $|f(x)$-ன் மேல் வரம்பு A என்று வைத்துக்கொள்வோம். நமது எடுகோளின்படி, $f(x)$-ன் தொடர்ச்சியின்மையுள்ள முனைகளை எண்ணிக்கையுள்ள இடைவெளிகளில் உள்ளடக்க முடியும். இவ்விடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் $\not> \dfrac{\epsilon}{4A}$ என்க.

$L - s = \sum (M_{r_1} - m_r)(x_r - x_{r_{-1}})$ என்பதால்,

தொடர்ச்சியின்மையில்லாத முனைகள் உள்ளடங்கிய இடைவெளிகளினாலேற்படும் $S - s$-ன் பங்கு $\not> 2A \times$ (இடைவெளிகளின் மொத்த நீளம்)

அதாவது $\not> 2A \dfrac{\epsilon}{4A} = \dfrac{\epsilon}{2}$

மீதியுள்ள அடைத்த இடைவெளிகளில் $f(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பாயிருக்கிறது. ஆகையால் $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பு. ஆகையால், (a,b)யின் இப்பாகத்தில் இடைவெளி

களாய் பிரிக்க முடியும். அங்கு $S-s<\frac{\epsilon}{2}$

இவ்விரண்டு இடைவெளிகளையும் சேர்க்கும்பொழுது $S-s<\epsilon$.

$\therefore$ (a, b)-ல் f தொகை காணக்கூடிய சார்பு.

(மேற்சொல்லப்பட்ட தொடர்ச்சியில்லாத முனைகள் சாதாரண தொடர்ச்சியில்லாத புள்ளிகளாயிருக்கவேண்டு மென்ற அவசியமில்லை. ஆனால் அவை முடிவில்லாத தொடர்ச்சியில்லாத முனைகளயிருக்க முடியாது. ஏனெனின், $f(x)$ வரம்புள்ள சார்பாயிருக்கிறது)

(iv) $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots (a_{p-1}, b)$ என்கிற ஒவ்வொரு பகுதியிலும், வரம்புள்ள $f(x)$ என்கிற சார்பு தொகை காணக்கூடியதாயிருந்தால், $f(x)$க்கு (a, b)ல் தொகை காணலாம்.

ஒவ்வொரு சிறு பகுதிகளிலும் $f(x)$ தொகை காணக்கூடியதாயிருப்பதால், (a, b)ஐ பகுதி இடைவெளிகளாக ஒவ்வொரு சிறு பகுதி (x_{r-1}, x_r)லும் $S-s<\frac{\epsilon}{p}$ ஆக இருக்குமாறு பிரிக்க

$\therefore$ மொத்தப் பிரிவில், $S-s<p\frac{\epsilon}{p}<\epsilon$.

$\therefore$ (a, b)-ல் $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பு.

கிளைத் தேற்றங்கள்

(a, b)ஐ எல்லையுள்ள திறந்த சிறிய இடைவெளிகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு சிறு பாகத்திலும், எல்லையுள்ள சார்பு f ஒரே முகச் சாரபாகவோ, தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாகவோ, இருந்தால் f, (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியது.

(v) வரம்புள்ள சார்பு $f(x)$ இடைவெளி (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியதாயிருந்தால், $|f(x)|$ம் (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியது.

ஒரே பிரிக்கும் வழியில்,

$|f(x)|$-ன் $S-s \not> f(x)$-ன் $S-s$.

கிளைத் தேற்றம்

மறுதலை உண்மையில்லை.

உதாரணம்

(0, 1) இடைவெளியில் விகிதமுறுகின்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)=1$ என்றும், விகிதமுறாத x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)=-1$ என்று இருக்கவும். $|f(x)|=1$ என்கிற சார்பு (0, 1)ல் தொகை காணக்கூடியது.

ஆனால் (0,1)-ல் $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பில்லை. ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் $f(x)$-ன் ஊசல் $=2$. ஆகையால் ϵ ஐ விட $S-s$ஐ சிறியதாகச் செய்ய முடியாது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

ξx.1.

$(0, m)$ என்கிற இடைவெளியில் (m ஒரு மிகை முழுஎண்) $f(x)=0$ x ஒரு முழு எண்ணாயிருந்தால் $f(x)=1$ x-ன் இதர மதிப்புகளுக்கு என்று வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x)$ ரீமான் நிர்ணயப்படி, தொகைக் காணக்கூடிய சார்பு.

$f(x)$-ன் தொடர்ச்சியிலலாத முனைகள் $x=1, 2, \ldots m$ என்ற மதிப்புகளில் ஏற்படுவதால், இம்முனைகளின் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவுள்ள எண். மேற்சொல்லப்பட்ட தொடர்ச்சியில்லாத முனைகளை ஒவ்வொன்றையும், $\frac{\epsilon}{m}$ ஐ விடச் சிறியதான இடைவெளியிலடைத்தால், இவ்விடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் ϵஐ விடச் சிறியது. ξ5 (vii)படி, $f(x)$ தொகை காணக் கூடிய சார்பு.

Ex. 2

விகிதமுறுகின்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)=0$; x-ன் விகித முறாத மதிப்புகளுக்கு $f(x)=1$ என்று வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x)$ எந்த முடிவுள்ள (a, b)-ன் இடைவெளியிலும் தொகை காண முடியாது.

(a, b)ஐ $x_0=a$, $x_1 \ldots x_{r-1}$, $x_n=b$ என்று பகுதி இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், $M=1$, $m=0$ ஆகயிருக்கும்

இடைவெளி (x_{r-1}, x_r) எவ்வளவு சிறியதாயிருந்தாலும், 1, 0 என்கிற மதிப்புகள் நேரும். $M_r = 1$, $m_r = 1$, $m_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots n)$.

$$S = \sum M_r \,(x_r - x_{r-1}) = 1\sum (x_r - x_{r-1}) = b - a$$

$$s = \sum m_r \,(x_1 - x_{r-1}) = 0$$

$$\therefore \quad S - s = b - a \not< \epsilon$$

$\therefore$ $f(x)$க்கு இடைவெளி (a, b)ல் தொகை காண முடியாது.

Ex. **3.**

$f(y)$ என்கிற சார்பு கீழ்க்கண்டபடி வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant \frac{1}{2_n} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$f(0) = 0.$$

முடிவில்லாத தொடர்ச்சியின்மை முனைகளிருந்தபொழுதிலும், $f(x)$ இடைவெளி $(0, 1)$ல் தொகை காணக்கூடியது.

$f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டதிலிருந்து,

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 1 \quad (\tfrac{1}{2} < x \leqslant 1)$$

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2^2} < x \leqslant \tfrac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n} < x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ஆகையால், $f(x)$ $(0, 1)$-ல் வரம்புள்ள ஏறும் சார்பாயிருக்கிறது.

§ 5 (ii)படி, $f(x)$க்கு தொகை காணக்கூடும்.

§ 6.6 $\int_a^b f(x)dx$ என்ற வரையறுத்த தொகையீட்டின் தன்மைகள்.

இடைவெளி (a, b)-ல் $f(x)$ எல்லையுள்ள தொகை காணக் கூடிய சார்பென்று வைத்துக்கொள்வோம்.)

I. $$\int_b^a f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$S, s, \int_a^b f(x)dx$ இவைகளை வரையறுக்கும்பொழுது,

$a<b$ என்று வைத்துக்கொண்டோம்.
$a>b$ ஆயிருந்தால், $a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ என்கிற இடைவெளிகளாய்ப் பிரிப்போம்.

$$\left.\begin{array}{l} S=M(x_1-a)+\ldots\ldots+M_n(b-x_{n-1}) \\ s=m_1(x_1-a)+\ldots\ldots+w_n(o-x_{n-1}) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

என்பவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

புதிய S-ம், $b, x_{n-1}, \ldots x_1, a$ என்கிற இடைவெளிகளிருந்து கிடைக்கும் S-ம் அளவில் ஒன்றே; குறியில் மாத்திரம் வேறுபாடிருக்கும்.

(1)ல் வரையறுக்கப்பட்ட S, s இருக்கின்றன.

வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடு இவ்விரண்டு தொகைகளின் பொது எல்லை.

II. $a<c<b$ எனில் $$\int_a^b f(x)\, 4x = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)dx$$

(a, b)ஐ இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கும் ஒரு பிரிவினையில் c முனைப் புள்ளியாய் இல்லாமலிருக்கட்டும். cஐ ஒரு கூடுதலான முனைப் புள்ளியாக நுழைப்பதால். தொகை S அதிகமாகாது. ஆகையால் (a, b)ஐ இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கும் ஒவ்வொரு பாகுபாட்டிலும் தொகை $S \nless \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இதேபோல், sஐ நோக்கும்பொழுது, ஒவ்வொரு பிரிக்கும்

பாகுபாட்டில், $s \ngtr \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1). (2)லிருந்து, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

III. $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரண்டு சார்புகளும் தொகை காணக்கூடியவையாயிருந்தால், $f(x)+g(x)$ தொகை காணக்கூடியது;

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(a, b)-ன் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கும் ஒரு பாகுபாட்டில், இடைவெளி (x_{r-1}, x_r)-ல் $M_r - m_r$, $M_r{}^1$, $m_r{}^1$ முறையே $f(x)$, $g(x)$-ன் வரம்புகளாகவும் $\overline{M}_r$, $\overline{m}_r{}^1$ அதே இடைவெளியில் $f(x)+g(x)$-ன் வரம்புகளாகவும் இருக்கவும்.

இடைவெளி, (x_{r-1}, x_r)-ல் மேல் வரையறையிலிருந்து $\overline{M}_r \leqslant M_r + M_r{}^1; \overline{m}_r \geqslant m_r + m_r{}^1$.

$f(x)$, $g(x)$ முறையே சார்ந்த மேல், கீழ் தொகைகள் (S, s), (S^1, s^1), $(\overline{S}, \overline{s})$ ஆயிருந்தால், $\overline{S} \leqslant S + S^1$; $\overline{s} \geqslant s + s^1$ (1)

(1)லிருந்து, $\overline{J} \leqslant J + J^1$; $\overline{I} \geqslant I + I^1$ (2)

ஆனால் $J = J$; $J^1 = I$ ஆகவே $\overline{J} = \overline{I}$

$\therefore f(x) + g(x)$ இடைவெளி (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியது.

மேலும் $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx +$
$\int_a^b g(x)dx$

IV. தொகை காணக்கூடிய சார்புகள் $f_1(x)$, $f_2(x)$-ன் பெருக்கல் ஒரு தொகை காணக்கூடிய சார்பு.

குறிப்பாக, $f(x)$. $f_2(x)$ இரண்டும் இடைவெளி (a, b)-ல் நேர் சார்புகளாகவிருக்கட்டும். இடைவெளி (x_{r-1}, x_r)-ல் $M_r, m_r; M_r^1, L_r^1; M_r^1, m_r^1$ எனவே $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)\ f_2(x$. என்கிற சார்புகளின மேல், கீழ் எல்லைகளாக இருக்கட்டும.

(a, b)ஐ பிரிக்கும் இடைவெளிகளில் (x_{r-1}, x_r) என்றும் பகுதி இடைவெளியில் (S, s), $S^1, s^1)$, $(\sum, \sigma)$ எனவே மேற் சொல்லப்பட்ட சார்புகளின் மேல், கீழ் கூட்டுத்தொகைகளாக விருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $\overline{M_r} - \overline{m_r} \leqslant M_r M_r^1 - m_r m_r \leqslant M_r$
$M_r(M_r^1 -) + m_r^1(M_r - m_r)$

ஆகையால், M, M^1 என்பவை (a, b)-ல் $f_1(x)$, $f_2(x)$-ன் எல்லைகளாக இருக்குமின்,

$\overline{M_r} - \overline{m_r} < M(M_r^1 - m_r^1) + M^1(M_r - m_r)$

$(x_r - x_{r-1})$ஆல் பெருக்கி பிறகு கூட்டினால்,

$\sum - \sigma \leqslant M(S^1 - s^1) + M^1(S - s)$

ஆனால் $f_1(x)$, $f_2(x)$ தொகை காணக்கூடியவாயிருப்பதால் $S - s < \epsilon$ and $S^1 - s^1 < \epsilon$.

$\therefore\ \sum - \sigma \to 0.$

ஆகையால் (a, b)யில் $f_1(x)\ f_2(x)$ தொகை காணக்கூடியது

துணை முடிபு

$f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்புகளாயிருந்தால், இவைகளைடங்கிய ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையும் தொகை காணக்கூடியதாயிருக்கும்.

V. $f(x) \geqslant g(x)$; மேலும் இவ்விரண்டு சார்புகளும் (a, b)-ல் தொகை காணக்கூடியவையாயிருந்தால்,

$$\int_a^b f(x)d_x \geqslant \int_a^b g(x)d_x$$

$\phi(x) = f(x) - g(x)$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.

அப்பொழுது $\phi(x) \geqslant 0$ (1)

(a, b)-ல் $\phi(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பு.

மேலும், (1)லிருந்து, $\int_a^b \phi(x)d_x \geqslant 0$

$$\therefore \int_a^b f(x)d_x \geqslant \int_a^b g(x)d_x.$$

கிளைத் தேற்றம்

(a, b)-ல் $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பாயிருந்தால் $\int_a^b |f(x)|\, d_x \leqslant \int_a^b f(x)dx$; மேலும் $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

(a, b)-ல் $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பாயிருந்தால், $|f(x)|$ ம் தொகை காணக்கூடியது. (ξ5, vI)ஐப் பார்க்கவும்.)

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

Vல் குறித்த தேற்றபடி, $\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)dx$

இரண்டாவது விளைவை நிரூபிக்க,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \quad (x \geqslant 0) \\ &= 0 \quad (x < 0) \\ f_2(x) &= -f(x) \quad (x) \leqslant 0) \\ &= 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

என்று வரையறுப்போம்.

அப்பொழுது $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$

மேலும் $|f(x)|=f_1(x)+f_2(x)$

$$\therefore \int_a^b f(x)d_x=\int_a^b f(x)d_x-\int_a^b f_2(x)d_x$$

ஆகவே, $$\left|\int_a^b f(x)d_x\right|\leqslant\left|\int_a^b f_1(x)d_x\right|+\left|\int_a^b f_2(x)d_x\right|$$

$$=\int_a^b f_1(x)d_x+\int_a^b f_2(x)d_x$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$ மிகை மதிப்புகளை மட்டும் கொண்ட சார்பா யிருப்பதால்

$$\therefore \int_a^b\left|f(x)\right|dx\leqslant\int_a^b\left\{f_1(x)+f_2(x)\right\}dx$$

$$\Rightarrow\int_b^a\left|f(x)\right|dx$$

ξ 6.7 முதல் இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம்

இடைவெளி (a, b)-ல், $f(x)$, $\psi(x)$ என்கிற சார்புகள் வரம்புள்ள தொகை காணக்கூடிய சார்புகளாயிருக்கட்டும். மேலும் $\psi(x)$ (a, b)-ல் ஒரே குறியுடன் கூடியதாயிருக்கட்டும். குறிப்பாக, (a, b)-ல் $\psi\ x>0$ ஆயிருக்கட்டும்.

(a, b)-ல் $f(x)$-ன் M, m என்பவை மேல், கீழ் வரம்பு களென்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.

வரையறைப்படி $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

$\psi(x)$ என்கிற மிகை காரணியால் பெருக்குவோம்.

அப்பொழுது, $m\psi(x)\leqslant f(x)\psi(x)\leqslant M\psi(x)$

$f(x)\psi(x)$ தொகை காணக்கூடியதால், ξ6 V-ன் படி,

$$m\int_b^a \psi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\psi(x)dx \leqslant M\int_a^b \psi(x)dx$$

μ என்கிற எண் m, Mன் நடுவேயிருந்தால், அதாவது, $m \leqslant \mu \leqslant M$ மேற்சொல்லப்பட்ட விளைவினால்

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx \quad \int_a^b \psi(x)dx \text{ என்று ஏற்படும்} \quad (1)$$

(a, b)-ல் $\psi(x)$ எதிர் சார்பாயிருந்தாலும், மேற்கூறிய விளைவு பொருந்தும்.

மேலும், (a, b)-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருந்தால், m, Mன் நடுமத்தியிலிருக்கும் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் $f(x)$ எடுத்துக்கொள்ளும்; குறிப்பாக $x=\xi$யாயிருக்கும்பொழுது $f(x)=\mu$. அதாவது $f(\xi)=\mu$

$$\therefore \int_a^b f(x)\psi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \psi(x)dx \; (a \leqslant \xi \leqslant b') \quad (4)$$

எனவே முதல் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை நாம் நிரூபித்துவிட்டோம்.

இடைவெளி (a, b)-ல், $f(x)$, $\psi(x)$ என்கிற சார்புகள் வரம்புள்ள தொகை காணக்கூடிய சார்புகளாயிருந்து, மேலும் $f(x)$ தொடர்ச்சி சார்பாயிருந்து, $\psi(x)$ ஒரே குறியுடன்கூடியதாயிருந்தால்,

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \psi(x)dx, \; (a \leqslant \xi \leqslant b$$

$f(x)$ தொடர்ச்சி சார்பாயில்லாவிட்டால், $f(\xi)$க்குப் பதிலாக M என்கிற எண்ணை, $(m = \mu \leqslant M)$ எழுதவேண்டும்.

எப்பொழுதும்போல், (a, b)ல் m, M, $f(x)$-ன் கீழ், மேல் எல்லைகள் குறிப்பாக, $\psi(x)=1$ என்று வைத்துக்கொண்டால்

(2)லிருந்து, $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ (a \leqslant \xi \leqslant b)$

என்று தொடரும்.

ξ 6.8 தொகை நுண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்.

தேற்றம் 1:

இடைவெளி (a, b)-ல், $f(x)$ வரம்புள்ள தொகை காணக் கூடிய சார்பாயிருந்தால்,

$F(x) = \int_a^b f(x)dx$ (a, b)ல் தொடர்ச்சி சார்பாயிருக்கும்.

$x+h$ இடைவெளியிலடங்கியிருந்தால்,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx$$

$$= \int_x^{x+h} f(x)dx$$

$= \mu h$ (ξ7ஐப் பார்க்கவும்)

$(m \leqslant \mu \leqslant M)$; வழக்கம்போல், M, m என்கிற எண்கள் இடைவெளி $(x, x+h)$ல் $f(x)$ன் மேல், கீழ் எல்லைகள்.

$\therefore$ (a, b)ல் $F(x)$ தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு.

தேற்றம் 2

(a, b)ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருந்தால், $F(x)$ன் வகைக்கெழு $f(x)$ ஆயிருக்கும்.

(a,b)ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருப்பதால்,

$F(x+h) - F(x) = hF(\xi); x \lesseqgtr \xi \lesseqgtr x+h$ (ξ7 (2)ஐப் பார்க்கவும்.)

h பூச்சியத்தை நெருங்கும்பொழுது $(h \to 0)$,

$f(\xi)$ன் எல்லை $f(x)$ ஆகும்.

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{F(x+h-F(x)}{h} = f(x)$$

அதாவது, $F^{A}(x) = f(x)$

குறிப்பு

1. இந்தத் தேற்றம் தொகைநுண் கணிதத்தில் அடிப்படி யான முக்கியத்துவம் அடைந்துள்ளது. இத்தேற்றத்தால் தொகை காணலை வகையிடலின் எதிர் செயலாக (inverse operation) கருதலாம்.

(a, b)ல் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருந்து, $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ குறிக்கப்பட்டால்,

$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ என்றிருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

ஏதேனுமொரு வழியில், ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள சார்பு $\phi(x)$ஐ கண்டுபிடிக்க முடிந்து, அந்த $\phi(x)$,

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = f(x)$$

என்கிற சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்யட்டும். அப்பொழுது

$\frac{d}{dx} [F(x) - \phi(x)] = 0$ என்றிருப்பதால், $f(x)$, $\phi(x)$க்கிடையே

ஒரு மாறா எண்தான் வித்தியாசமிருக்கும்.

$$\therefore \quad F(x) = \phi(x) + C$$

Cஐக் கண்டுபிடிக்க, xன் மதிப்பை a என்று வைத்துக் கொள்ளுவோம்.

$F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ஆயிருப்பதால்,

$$F(a)=\int_{a}^{x} f(x)dx=0 \;=\phi(a)dx+C$$

$$\therefore\; C=-\phi(a)$$

$$\therefore\; F(x)=\phi(x)-\phi(a)=\int_{a}^{x} f(x)dx$$

2. மேலும், ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியுள்ள சார்பும் மற்றொரு தொடர்ச்சியுள்ள சார்பின் வகைக்கெழு என்று ஏற்படும்; மேலே இரண்டாவது சொல்லப்பட்ட சார்பை மூலச்சார்பு (primitive) என்று கூறப்படும்.

பயிற்சிகள் XIII

1. (0, 1) என்கிற இடைவெளியில், $f(x)=3r^2x^2$ $\left(\frac{1}{r+1}<x\leqslant\frac{1}{r}\right)$ என்று வரையறுச்சுப்பட்டுள்ளது. (0, 1) இடைவெளியில் $f(x)$ தொகை காணக்கூடியதென்று நிரூபிக்கவும். மேலும் $\int_{0}^{1} f(x)dx$ ஐக் காண்க.

2. $$f(x)=\underset{p\to\infty}{\mathrm{Lt}}\frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{x}\right)^{p-1}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{x}\right)^{p+1}}\;(0<x<1)$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x)$ தொகை காணக்கூடிய சார்பு என்று நிரூபி.

3. $f(x)=\frac{n}{n+2}$, $\left(\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\right)$, $n=1, 2, \ldots$

மேலும் $f(0)=1$ என்று $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டால், (0, 1) என்கிற இடைவெளியில் $f(x)$ ரீமான முறைப்படி தொகை காணக்கூடியதென்றும், அந்த தொகை $\frac{1}{2}$ என்றும் நிரூபி.

4. இடைவெளி (0, 1)ல் கீழ்கண்டபடி $f(x)$ உரையறுக்கப் பட்டுள்ளது:

$$f(x)=\frac{1}{a^{r-1}},\quad \left(\frac{1}{a^r}<x\leqslant\frac{1}{a^{r-1}}\right),\ r=1,2,3$$

a என்பது 2ஐ விட பெரிய முழுவெண் $\int_0^1 f(x)dx$

என்ற தொகை இருக்கிறதென்றும் அதன் மதிப்பு $\frac{a}{a+h}$ என்றும் நிரூபி.

5. இடைவெளி (0, 1)ல், கீழ்கண்டபடி $f(x)$ வரையறுக் கப்பட்டுள்ளது:

x பூச்சிய மதிப்பில்லாத $\frac{p}{q}$ என்றும் விகிறமுறுகின்ற எண்ணாயிருக்கும்பொழுது p, qவிற்கு பொது காரணி இல்லாமலிருந்தால், $f(x)=\frac{p}{q}$; x விகிதமுறாத எண்ணாகவோ பூச்சியமாகவோயிருந்தால், $f(x)=0$ இடைவெளி (0. 1)ல் $f(x)$ தொகை காணக்கூடியசார்பென்று நிரூபி. மேலும் $\int_0^1 f(x)dx$ என்பதை மதிப்பிடு.

6. இடைவெளி $(-1, 1)$ல் $f(x)=x$; $\psi(x)\ e^x$ என்று எடுத்துக்கொண்டு, முதல் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தைச் சரிபார்,

7. பின் சொன்னபடி $f(x)$ஐ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:—

x விகிதமுறுகின்ற எண்ணாயிருந்தால், $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

x விகிதமுறாத எண்ணாயிருந்தால், $f(x) = 1 - x$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2};\ J = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

என்று நிரூபி. மேலும் $(0, 1)$ல் $f(x)$ தொகை காணமுடியாத சார்பென்று காட்டவும்.

8. இடைவெளி $(0, 2)$ல், $f(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:—

x விகித முறுகின்ற எண்ணாயிருந்தால், $f(x) = 1 - x^2$;

x விகிதமுறாத எண்ணாயிருந்தால், $f(x) = x - x^3$

மேல், கீழ் தொகைகளைக் காண்க,

9. இடைவெளி $(-1, 1)$ல், கீழ் சொன்னபடி $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:—

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$f(x) = 0 \quad (x = 0)$$

$f(x)$-ன் மூலம் $\frac{1}{2}x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, என்றும், ஆனால்

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ன் மதிப்பிடமுடியாதென்றும் காண்பி.

[இந்த உதாரணம் மூலத்திற்கும் (primitive) தொகைக்கும் (Integral) உள்ள வித்தியாசத்தை நன்கு வெளிப்படுத்துகிறது].

பன்மாறி தொகைகள்

(Multiple Integrals)

தொகை காணலை வகையிடலுக்கு எதிரிடைச் செயலாகவோ, கூட்டல் செய்கையாகவோக் கருதலாம்.

(a, b) என்கிற மூடிய ((closed interval) இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பாகயிருக்கட்டும். ஆகையால் இந்த இடைவெளியில் $f(x)$ வரம்புகளுக்குட்பட்ட சார்பாகும். $b>a$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம். இடைவெளி (a, b)ஐ பகுதிக்குரிய n சிறிய இடைவெளிகளாக பிரிப்போம். அவைகளை $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots \; b - x_{n-1}$ எனவே அழைப்போம் $a, x_1, \ldots b$ என்பன ஏறுகின்ற மதிப்பு வரிசையிலிருக்கட்டும். சிறிய பகுதியான (x_{r-1}, x_r)ல் ξ_r என்கிறது ஒரு புள்ளியாயிருக்கட்டும். $a = x_0$; $b = x_n$ என்று வைத்துக்கொண்டு, தொகை $f(\xi_1) \; (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \; (x_2 - x_1) + \; \ldots \; + \; f(\xi_n) \; x_n - x_{n-1})$ என்பதை ஆராய்வோம். n கந்தழியை எல்லையாகக்கொண்டபொழுது, இத்தொகை குறிப்பிட்ட எல்லையை நெருங்கும்; $n \to \infty$ என்பதால் ஒவ்வொரு சிறு இடைவெளியும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். நாம் ஏற்கனவே இந்த எல்லை குறிப்பிட்ட தொகை என்று பார்த்துள்ளோம்; அதை $\int_a^b f(x)dx$ என்று குறித்துள்ளோம். எளிய சார்புகளைக்களை இவ்வரையறையிலிருந்து மதிப்பீடு செய்வது சுலபமாகும். ஆகையால் $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ என்கிறதிலிருந்து தொகை மதிப்பீடு செய்கிறோம்.

ξ 2.1 இருமாறித் தொகையின் வரையறை

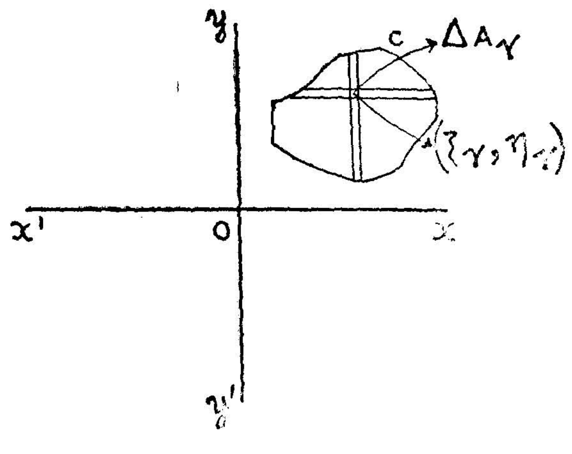
C என்னும் அடைத்த வளைகோட்டால் சுற்றப்பட்ட R என்கிற பகுதியில் (region) $f(x, y)$ என்கிற சார்பு xலும் yலும் தொடர்ச்சியான சார்பாயிருக்கட்டும். மேலும் $f(x, y)$ தொடர்ச்சி சார்பாயிருக்கட்டும். R என்கிற பகுதியை n சிறிய பகுதிகளாக $\triangle A_1, \triangle A_2 \ldots \triangle A_n$ என்று பிரிப்போம்.

சிறு பகுதி $\triangle A_r$ல் (ξ_r, η_r) என்கிற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$\sum_{r=1}^{r=n} f(\xi_r, \eta_r) \triangle A_r$ என்ற தொகையை ஆராய்வோம்.

n கந்தழியை எல்லையாகக் கொண்டால், $\triangle A_r \to 0$ $(r=1, 2 \ldots)$ இத்தொகையின் எல்லையை பகுதி Rல் இருமாறித் தொகை என்று வரையறுப்போம்.

$$\iint_R f(xy)dA = \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \sum_{r=1}^{r=n} f(\xi_r, \eta_r) \triangle A_r$$



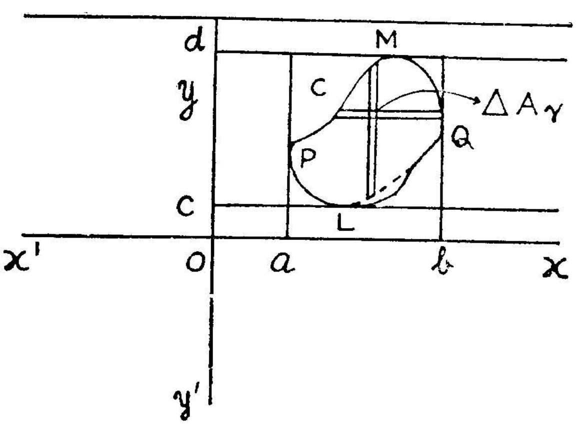
Rஐ தொகை காணல் பகுதியென்று அழைப்போம். எளிய தொகை காணச் செய்கையில் இடைவெளி (a, b)க்குப் பதிலாக R ஏற்பட்டுள்ளது.

சில சமயங்களில், இருமாறித் தொகையை

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

என்று எழுதுவதுண்டு.

§ 2.2 இருமாறித் தொகையின் மதிப்பீடு



வளைகோடு Cன் பேரில் L, M என்கிற புள்ளிகளில் மீச்சிறு தான, மீப்பெருதான நிலைத் தூரங்களிருக்கட்டும்; P, Q புள்ளிகளில் மீச்சிறு, மீப்பெருதான அச்சுத் தூரங்களிருக்கட்டும், LPM, LQM வளைக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $x=f_1(y)$, $x=f_2(y)$ என இருக்கட்டும்.

இடைவெளி (a, b)ஐ n சம பாகங்களாக பிரிப்போம்; y அச்சிற்கு இணையாக வெட்டுபுள்ளிகள் மூலம் கோடுகள் வரைவோம். y அச்சில் மேலுள்ள இடைவெளி (c, d)ஐ m சம பாகங்களாகப் பிரித்து, x அச்சிற்கு இணையாக வெட்டுப் புள்ளிகள் மூலம் கோடுகள் வரைவோம்.

அப்பொழுது பகுதி Rஐ $\triangle R_{rs}$ என்கிற உட்பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன; $\triangle R_{rs}$ என்பதின் பரப்பளவு

$\triangle A_{rs} = \triangle a_r . \triangle y_s$ என்றாகும்.

$\triangle R_s$ல் (ξ_{rs}, η_{rs}) என்பது ஏதாவதொரு புள்ளியா யிருக்கட்டும்.

தொகை $\sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=m} f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \triangle A_{rs}$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=m} f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \triangle x_r \triangle y_s$$ என்று எழுதலாம். (1)

இந்தக் கூட்டல் உறுப்புகளை r, sஐப் பொறுத்த வகையில் எந்த வரிசையிலும் செய்யலாம். உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகைகளை முதலில் நிரைகளுக்கு கண்டுபிடித்து பிறகு இக் கூட்டுத்தொகைகளை ஒன்று சேர்க்கலாம்.

தொகை (i)ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்:—

$$\sum_{s=1}^{m} \triangle y_s \ [\sum_{r=1}^{n} f[\xi_{rs}, \eta_{rs}) \triangle x_r]$$

ஆனால் எல்லை $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \triangle x_r = \int_{f_1(\eta_s)}^{f_2(\eta_s)} f(x, \eta_s \, dx_s$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} f(\xi_{rs}, \eta_{rs} = \int_{f_1(\eta_s)}^{f_2(\eta_s)} f(x, \eta_s) dx_s + \epsilon s;$$

n கந்தழியை எல்லையாகக் கொள்ளும்பொழுது,

$\xi_s \to 0$

மேலும் $\int_{f_1(\eta_s)}^{f_2(\eta_s)} f(x, \eta) dx$ என்கிறது η_sஐ சார்ந்திருக்கிறது.

அதை $F(\eta_s)$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.

அப்பொழுது (i)ல் குறித்த தொகை

$$\sum_{s=1}^{s=m} [F(\eta_s) + \epsilon_s] \triangle y_s$$

$$= \sum^{m} F(\eta_s) \triangle y_s + \sum^{m} \epsilon_s \triangle y_s \quad \ldots \text{(ii)}$$

என்றெழுதலாம்.

$$\text{எல்லை}_{m\to\infty} \sum_{s=1}^{m} F(\eta_s) \triangle y_s = \int_c^d F(y)dy$$

$$\therefore \sum_{s=1}^{m} F(\eta_s)\triangle y_s = \int_c^d F(y)dx + \epsilon$$

ஆகையால் (ii)ஐ $\int_c^d F(y)dy + \epsilon + \sum_{s=1}^{m} \epsilon_s \triangle y$ என்றெழுதலாம்.

இப்பொழுது m கந்தழியை நெருங்கட்டும்; மேற்சொன்ன கோவை $\int_c^d F(y)dx$ஐ நெருங்கும்; ஏனென்றால் (1) $\epsilon \to 0$

(ii) ϵ_sஐ ϵ_1ஐ விடச் சிறியதாகச் செய்யலாம்; $\epsilon_1 \to 0$

$$\text{ஆகையால்} \sum_{s=1}^{m} \epsilon_s \triangle y_s < \epsilon_1 \sum_{s=1}^{m} \triangle y_s \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad F(\eta_s) = \int_{f_1(\eta_s)}^{f_2(\eta_s)} f(x, \eta_s)dx$$

$$= \int_{f_1(\eta)}^{f_2(y)} f(x, y)dx$$

$\because$ தொகையீடு காணும்பொழுது yஐ மாறிலியாக கருதலாம். $n \to \infty$, $m \to \infty$ என்னும்பொழுது

(1) $\int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)dx\, dy$ என்றாகிறது.

ஆகையால் இருமாறித் தொகையை மதிப்பிடும்பொழுது $f(x, y)$ என்பதை xஐ மாத்திரம் சார்ந்ததாக கருதவேண்டும். yஐ மாறிலியாக வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்; $x = f_1(y)$லிருந்து $x = f_2(y)$ வரை முதலில் தொகையிடல் செய்து பிறகு கிடைக்கும் yஐ சார்ந்த சார்பை $y = c$யிலிருந்து $y = l$ வரை தொகை காண வேண்டும்.

இதேபோல் ஒவ்வொரு பத்தியிலும் தொகை கண்டு பிறகு அத்தொகைகளைக் கூட்டினால்,

$$\int_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy\, dx$$

முதலில் $f(x, y)$ஐ yஐ மட்டும் சார்ந்த சார்பாக கருதி, $\phi_1(x)$ லிருந்து $\phi_2(x)$ வரை தொகை காணவேண்டும்; இங்கு PLQ, PMQ வளைகோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்; பிறகு கிடைக்கும் xஐச் சார்ந்த சார்பை $x = a$யிலிருந்து $x = b$ வரை தொகை காண வேண்டும்.

துணை முடிவு

தொகை காணும் பகுதி $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ எல்லைகளுக்கடங்கின செவ்வகமாயிருந்தால்,

$$\int_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, dx$$

$$\text{அல்லது} = \int_c^d \int_a^b (x, y)dx\, dy$$

ஆகையால், மாறிலி எல்லைகளினுள், தொகை காணுகிற வரிசை முக்கியமில்லை.

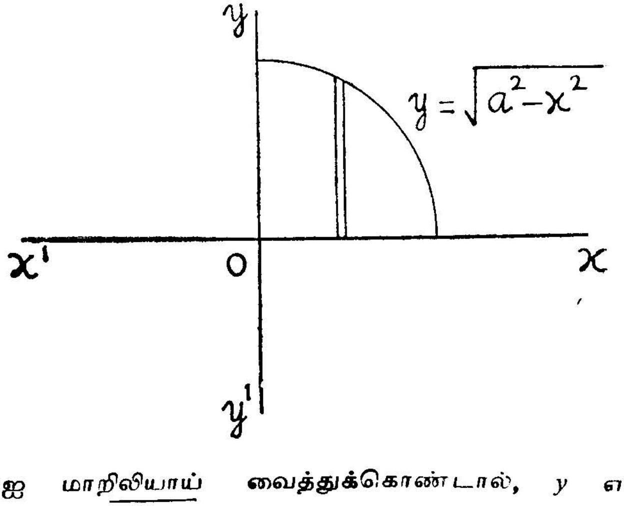
குறிப்பு

$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy\, dx$ என்கிறதை $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$,

$(x=a, x=b)$ என்ற எல்லைகளுக்கடங்கிய அரங்கத்தில் தொகை காண்கிறோம். இவ்வரிசையை மாற்றுவதற்கு, அரங்கத்தின் படத்தை வரைந்து தொகை காணவேண்டும். படத்திலிருந்து x, y-ன் எல்லைகளை நிர்ணயிக்க முடியும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $x^2+y^2=a^2$ என்கிற வட்டத்தின் மிகை கால் வட்டத்தை பகுதியாகக் கொண்டால், $\int\int xy\,dx\,dy$ என்பதை மதிப்பிடு.



xஐ மாறிலியாய் வைத்துக்கொண்டால், y என்பது 0விலிருந்து $\sqrt{a^2-x^2}$ வரை மாறும் முழு அரங்கத்தையும் வியாபிக்கவேண்டுமானால், xஐ 0விலிருந்து a வரை மாறவிட வேண்டும்.

$$\therefore \int\int xy\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$\int_0^a \frac{x(a^2-x^2)}{2}\,dx$$

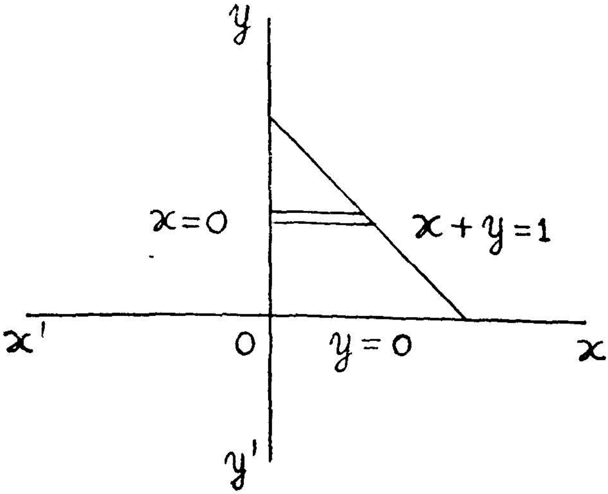
$$= \frac{a^4}{8}$$

2. $x, y \geqslant 0;\ x+y \leqslant 1$ என்கிற பகுதியில்

$\int\int (x^2+y^2)dx\,dy$ என்பதை மதிப்பீடு.

இந்த அரங்கம் $x=0,\ y=0,\ x+1$ என்கிற எல்லைகளைக் கொண்ட முக்கோணமாகும்.

$$\int\int (x^2+y^2)yx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy\,dx$$

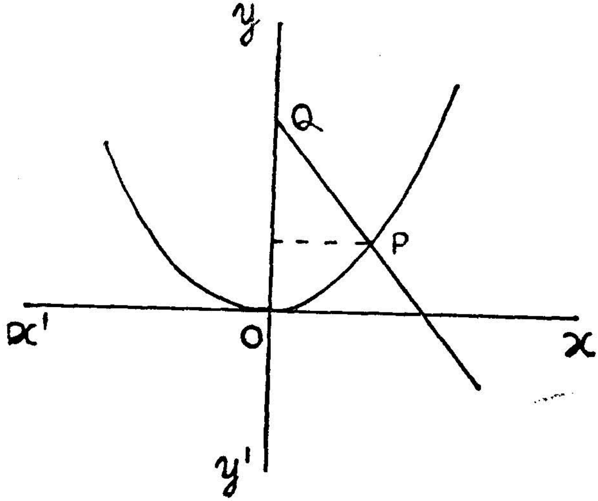


$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right\} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

3. $\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} xy\,dx\,dx$ என்கிற இருமாறித் தொகையில் காணும் வரிசையை மாற்றி மதிப்பீடு.



$\frac{x^2}{a}$ யிலிருந்து $2a-x$ வரை y மாறுகிறது. அதாவது, y வளைகோடுகள் $y=\frac{x^2}{a}$, $y=2a-x$ மத்தியிலே y அடங்கியுள்ளது; O விலிருந்து a வரை x மாறுகிறது. தொகை காணும் பகுதி OPQ ஆகும். தொகை காணும் வரிசையை மாற்றினால், முதலில் yஐ மாறிலியாக வைத்துக்கொண்டு, xஐ சார்ந்து தொகை காணுவோம். அதாவது x அச்சத்திற்கு இணையாக கோடுகள் போட்டு தொகை காணவேண்டும். மேற்சொல்லிய படி இப்பகுதியை பரப்பும் (covering) பொழுது, இக்கோடுகளின் முனைகள் நீண்டு $x+y=2a$ என்கிற நேர்கோடு வரையிலும் வளைகோடு $y=\frac{x^2}{a}$ வரையிலும் வருகின்றன. ஆகையால் இப்பகுதியை Pயின் மூலம் செல்லும் நேர்கோடு $y=a$ என்பதால் இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறோம்.

ஒரு பாகத்திற்கு Oவிலிருந்து $\sqrt{ay}$ வரை x மாறுகிறது. மற்றொரு பாகத்திற்கு O விலிருந்து $2a-y$ வரை x மாறுகிறது. முதல்பாகத்தில் O விலிருந்து a வரை மாறுகிறது; இரண்டாது பாகத்தில் O விலிருந்து $2a$ வரை y மாறுகிறது.

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} xy\,dx\,dy$$

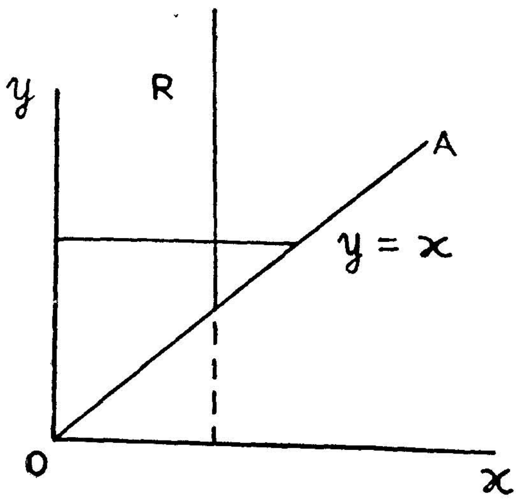
$$= \int_0^{\sqrt{xy}} xy\,dx\,dy + \int_0^{2a}\int_0^{2a-y} xy\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \left[\frac{yx^2}{2}\right]^{\sqrt{ay}} dy + \int_0^{2a}\left[\frac{x^2y}{2}\right]_0^{2a-y} dy$$

$$= \int_0^a \frac{ay^2}{x}\,dy + \int_0^{2a} (2-y)^2 y\,dy = \frac{3a^4}{8}$$

4. தொகை காணும் வரிசையை மாற்றி,

$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.



முதலில் yஐப் பொறுத்து xலிருந்து ∞ வரை தொகை காணவும்; பிறகு xஐ சார்ந்து Oலிருந்து ∞ வரை தொகை காணவும்.

y = x என்கிற நேர்கோடு OA என்றழைப்போம். தொகை காணும் பகுதி R என்பது OAக்கு மேலிருக்கிறது. தொகை காணும் வரிசையை மாற்றுவோம்.

முதலில் y மாறிலியாக வைத்துக்கொள்வோம்; அப்பொழுது 0விலிருந்து y வரை x மாறுகிறது. பிறகு Rஐ நிரவுவதற்கு 0விலிருந்து ∞ வரை y மாறும்.

$$\therefore\ I = \int_0^\infty e^{-y}\frac{dy}{y}\int_0^y dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-y}\frac{dy}{y}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\times y\,dy = \int_0^\infty e^{-y}\,dy = \left(-e^{-y}\right)_0^\infty$$

$$= -0+1 = 1.$$

பயிற்சி XIV

1. கீழ் வரும் தொகைகளை மதிப்பிடு:—

(i) $\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)dx\,dy$ விடை $\frac{-ab}{3}(a^2+b^2)$

(ii) $\int_0^1\int_1^2 xy(x+y)dx\,dy$ (,, $\frac{5}{3}$)

(iii) $\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \frac{r\,dr\,d\theta}{(1^2+a^2)^2}$ (,, $\frac{\pi}{4a^2}$)

(iv) $\int_0^a\int_0^b x^2y^2(x+y)dy\,dx$ (,, $\frac{ab(a^3+1}{12}$)

(v) $\int_1^2\int_1^x xy^2\,dx\,dy$ (,, $\frac{9}{4}$)

(vi) $\int_0^a\int_0^x (x^3+y^3)dx\,dy$ (,, $\frac{a^5}{4}$)

(vii) $\int_0^2 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)dx\,dy$ (,, $\frac{136}{15}$)

(viii) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^3 dx\,dy$ (,, $\frac{2a^4}{15}$)

(ix) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{-\pi/2} (2\sin 2\theta+3\cos 2\theta)d\theta d\phi$ (,, π)

(x) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 d\theta dx$ (,, $\frac{32}{9}$)

(xi) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x^2 dxdy$ (,, $\frac{67}{60}$)

(xii) $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \sin\theta d\theta dr$ (,, $\frac{4\pi a^3}{3}$)

2. $\int\int xydxdy$ நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ன் காற்பகுதியில் மதிப்பிடு. (விடை $\frac{9}{2}$)

3. $\int\int (a^2-x^2)dxdy$ஐ அரைவட்டம் $x^2+y^2=a^2$ன்

நேற்காற் பகுதியில் மதிப்பீடு. (விடை $\frac{\pi a^4}{8}$)

பின்வரும் தொகைகளை எதிரே குறித்துள்ள பகுதியின் பேரில் மதிப்பிடு:—

(i) $\int\int x^2y^2dxdy\ \frac{a}{y}$; பகுதி வட்ட பரப்பு $x^2+y_2\leqslant 1$

(விடை $\frac{\pi}{24}$)

(ii) $\iint x^3 y\,dx\,dy$; பகுதி $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$

$\left(\text{விடை } \frac{a^4 b^2}{24}\right)$

(iii) $\iint y\,dx\,dy$; பகுதி பரவளைவு $x^2 = y$, நேர்கோடு $x + y = 2$ மத்தியின் பரப்பு $\left(\text{விடை } \frac{36}{5}\right)$

(iv) $\iint (x - y)\,dx\,dy$; பகுதி நேர்கோடு $y = x$, பரவளைவு $y = x^2$ நடுவிலுள்ள பரப்பு $\left(\text{விடை } \frac{1}{60}\right)$

(v) $\iint y\,dx\,dy$; பகுதி நேர்கோடு $y = x$, பரவளைவு $y = 4x - x^2$ நடுவிலுள்ள பரப்பு (விடை 10.8)

5. பின்வரும் தொகைளில் தொகை காணும் வரிசையை மாற்றி மதிப்பிடவும்:—

(i) $\int_0^a \int_y^a \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$ $\left(\text{விடை } \frac{\pi a}{4}\right)$

(ii) $\int_0^a \int_y^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy\,dx$

$\left[\text{விடை } \frac{a^2}{3} \log(\sqrt{2} + 1)\right]$

(iii) $\int_0^a \int_0^{2\sqrt{ax}} x^2\,dx\,dy$ $\left(\text{,, } \frac{4a^4}{7}\right)$

(iv) $\int_0^3 \int^{\sqrt{4-y}} (x + y)\,dy\,dx$ (,, 17.1)

(v) $\int_0^{4a}\int_{\frac{n^2}{4a}}^{2\sqrt{a}} dx\ dx$ $\left(,,\ \frac{16a^2}{3}\right)$

6. $\iint \sqrt{xy(1-x-y)}\,dx\,dy$ என்கிற தொகையை $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ என்கிற பகுதியின் மீது மதிப்பீடு

$\left(\text{விடை}\ \frac{2\pi}{105}\right)$

7. $\iint \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy$ என்கிற தொகையை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$ என்கிற பகுதியின்மீது மதிப்பீடு.

$\left(\text{விடை}\ \frac{8ab}{15}\right)$

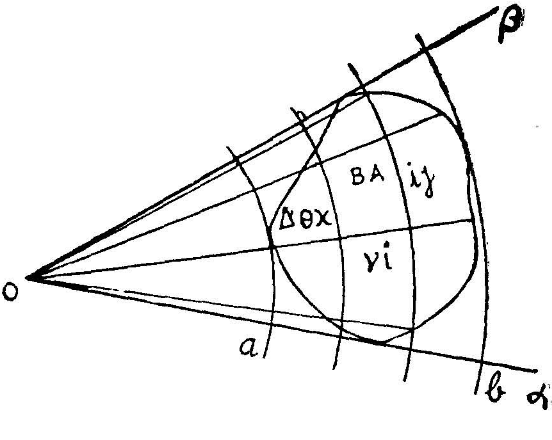
8. தொகை காணும் வரிசையை மாற்றி,

$$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)dy}{\sqrt{a-x)\ (x-y)}}=\pi[f(a)-f(0)]$$

என்று நிரூபி.

(கோண தூர கூறுகளில் இருமாறித் தொகை Double integral in polar coordinates)

கோண தூர கூறுகளை உபயோகிக்கும்பொழுது, பகுதி Rஐ பின்வரும் வழியில் பிரிக்கலாம். ஆதி புள்ளி மூலம் Rக்கு தொடு கோடுகள் வரையவேண்டும். ஆதியை மையம் கொண்ட Rஐ தொடு வட்ட விற்களையும் வரைக.



$r=a$விலிருந்து $r=b$ வரையிலுள்ள (a, b) என்கிற ஆரை இடைவெளியை m சம பாகங்களாக $\triangle r_i$ இடைவெளிகளில் ஓர்மைய வட்டங்களின் வில்களாகப் பிரிக்கவும். $\theta=\alpha$யிலிருந்து $\theta=\beta$ வரையிலுள்ள (α, β) என்கிற கோண இடைவெளியை n சம பாகங்களாக $\triangle\theta_j$ இடைவெளியில் ஆரை கோடுகளின் மூலம் பிரிக்கவும். இச்செய்கையால் R என்கிற பகுதியை கழி நுண் வளைகோட்டிற்குரிய செவ்வகங்களாகவும் பகுதிக்குரிய செவ்வகங்களாகவும் பிரித்துள்ளோம். $\triangle r_i$, $\triangle_j$ போதுமளவு சிறியதாயிருந்தால், இப்பகுதிகளின் பரப்பு மிகச் சிறியதாயிருக்கும்.

$$\triangle A_{ij}=\tfrac{1}{2}(r_i+\triangle r_i)^2\triangle\theta_j-\tfrac{1}{2}r_i^2\triangle\theta_j$$
$$=(r_i+\tfrac{1}{2}\triangle r_i)\triangle r_i.\triangle\theta_j$$

ஒவ்வொரு $\triangle A_{ij}$யிலும் P_{ij} என்கிற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்புள்ளிகளில், $f(r, \theta)$ சார்பின் மதிப்பை கண்டுபிடிப்போம். இந்த மதிப்பீடுகளுடன் $\triangle A_{ij}$யின் பெருக்கல் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகையை கண்டுபிடிப் போம். நமது சௌகரியத்திற்காக, P_{ij}ன் r கூறு $\xi_i=r_i+\dfrac{1}{2}\triangle r_i$ என்று வைத்துக்கொள்வோம். P_{ij}யின் θ கூறு η_j என்று குறிப் போம்.

அப்பொழுது எல்லை $\displaystyle\sum_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}^{} \sum_{ij} f(\xi_i, \eta_j)\,\xi_i\triangle r_i\triangle\theta_j$ஐ

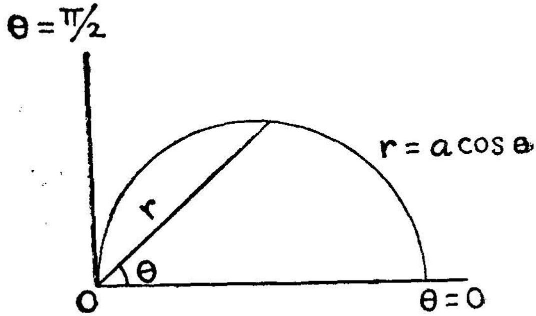
$$\iint_R f(r, \theta)rdrd\theta$$ என்று வரையறுப்போம்.

கோண தூர கூறுகளில் இருமாறித் தொகையை மதிப்பிட முதலில் θஐ மாறிலியாக வைத்துக்கொண்டு, $f(r, \theta)r$ஐ $r=f_1(\theta)$விலிருந்து $r=f_2(\theta)$ வரையில் மாறுவதாக வைத்துக் கொண்டு தொகை காணுவோம்; பிறகு கிடைக்கும் கோவையை θஐ αவிலிருந்து β வரை மாறுவதாக வைத்து தொகை காணுவோம்.

$$\therefore \iint_R f(r, \theta)rdr\,d\theta=\int_\alpha^\beta\left[\int_{r=f^1(\theta)}^{r=f_2(0)} rf(r, \theta)dr\right]d\theta$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. வட்டம் $r=a\cos\theta$வின் மேல் பாதியை பகுதியாகக் கொண்டால், $\iint r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta$ஐ மதிப்பிடு.



$$\iint r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{r=0}^{r=a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\tfrac{1}{3}(a^2-r^2)3/2 \right]_a^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{a^3(3\pi-4)}{18}$$

2. கோண தூர கூறுகளுக்கு மாற்றி $\iint (x^2+y^2)dy\,dx$ என்கிற தொகையை வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ என்ற பகுதியில் மதிப்பிடு.

$$\int\int (x^2+y^2)dy\, dx$$

$$= \int\int r^2 r dr\, d\theta \qquad (\text{வட்டம் } r=a) \text{ என்கிற பகுதி})$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \quad \int_0^{a} r^3 dr$$

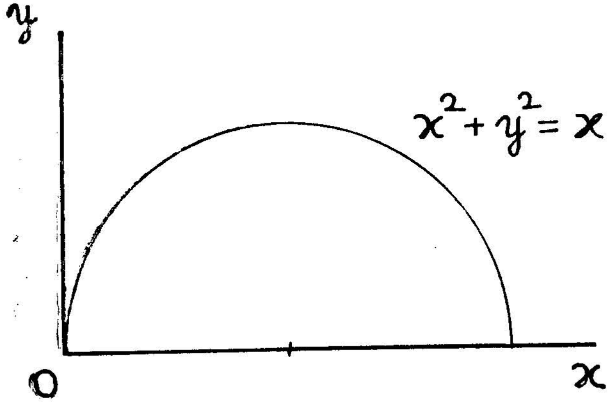
$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^a = \int^{2\pi} d\theta = \frac{\pi a^4}{2}$$

3. கோண தூர கூறுகளுக்கு மாற்றி

$$\int_0^1 \int_0^{(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{4xy}{x^2+y^2}\, e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

என்கிற தொகையை மதிப்பிடு,

தொகை காணும் பகுதி x அச்சுவிற்கு மேலிருக்கும் வட்டம் $x^2+y^2=x$. கோண தூர கூறுகளுக்கு மாற்றினால் $r=\cos\theta$; $\theta=0$, $\theta=\pi/2$ என்று மாறும்.



$$\therefore \text{ வேண்டிய தொகை} = \int_0^{\pi/2} 4\sin\theta\cos\theta\, e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{\cos\theta} - r^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \left(\frac{-e^{-r^2}}{2} \right)_0^{\cos\theta}$$

$$= 2\int^{\pi/2} (1 - e^{-\cos^2\theta}) \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= 2\left[\frac{\sin^2\theta - e^{-\cos^2\theta}}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left\{ 1 - (1 - e^{-1}) \right\} = e^{-1}$$

பயிற்சி XV

1. பின்வரும் தொகைகளை குறிக்கப்பட்ட பகுதிகளில் மதிப்பிடு:—

(i) $\int\int r^2 \sin^2\theta dr \, d\theta$ பகுதி $r = a \cos\theta$யின் பரப்பு

$\left[\text{விடை } \frac{\pi a^4}{128} \right]$

(ii) $\int\int r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta$ பகுதி lemniscate $r^2 = a^2 \cos^2\theta$ன் ஒரு தடம் $\left[\text{விடை } \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{16} \right]$

(iii) $\int\int \frac{rdr \, d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2}}$ „ „ $\left[\text{விடை } \frac{4 - \pi}{2} a \right]$

(vi) $\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta$ பகுதி இதயவுரு (நெஞ்சு வளைவு) $r = a(1 + \cos\theta)$ன் பரப்பு $\left[\text{விடை } \frac{4a^3}{3} \right]$

2. வட்டம் $r=2a\cos\theta$ வின் மேல் பாதி பரப்பில்

$$\iint e^{-r^2/a^2}\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta = \frac{a^2}{16}\left[3+\frac{1}{e^4}\right]$$

என்று நிரூபி.

3. போணதுர கூறுகளுக்கு மாற்றி பின்வரும் தொகைகளை காண்க:—

(i) $\iint xy(x^2+y^2)dxdy$; பகுதி வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ நேர்காற் பகுதி $\left[\text{விடை } \frac{a^6}{12}\right]$

(ii) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ $\left[\text{விடை } \frac{\pi}{4}\right]$

(iii) $\int_0^a \int_y^a \frac{x^2\, dy\, dx}{(x^2+y^2)3/2}$ $\left[\text{விடை } \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$

(iv) $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)dxdy$ $\left[\text{விடை } \frac{3\pi a^4}{4}\right]$

(v) $\int_0^a \int_y^a \frac{xdydx}{x^2+y^2}$ $\left[\text{விடை } \frac{\pi a}{4}\right]$

(vi) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x\, dx\, dy}{x^2+y^2}$ $\left[\text{விடை } \frac{\pi}{2}\right]$

(vii) $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ $\left[\text{விடை } \frac{\pi}{4a^2}\right]$

ξ 4. மும்மாறித் தொகைகள்

S என்கிற மேற்பரப்பில் அடங்கியுள்ள பகுதி Rல் x, yஐப் பொறுத்தவரையில் $f(x, y, z)$ ஒரு மதிப்புடைய தொடர்ச்சியுள்ள சார்பாயிருந்தால், இருமாறித் தொகையை போல மும்மாறித் தொகை வரையறுக்கப்படுகிறது. பகுதி Rஐ சிறிய பகுதிகள் $\triangle R_{rst}$யாகப் பிரிப்போம். $\triangle K_{rst}$ன் கனவளவு $\triangle V_{rst}$ எனறால், R பகுதியில் $f(xyz)$ன் மும்மாறித் தொகையை கீழ் கண்டவாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\int f(x, y, z)dV = \underset{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ p\to a}}{\text{எல்லை}} \sum_{\substack{r+1 \\ 3=1 \\ t+1}}^{\substack{r=n \\ p=m \\ t=p}} f(\xi_{rst}, \eta_{rst}, L_{rst})\triangle V_{rst}$$

மும்மாறித் தொகையை மதிப்பீடு செய்வதற்கு, பகுதி Rஐ அச்சுத்தளங்களுக்கு இணையாக தளங்கள் வரைந்து பிரிக்க வேண்டும்.

அப்பொழுது $\triangle V_{rst} = \triangle x_r \ \triangle y_s \ \triangle z_t$

தொகையின் உறுப்புகளை பொறுத்தமாக ஏற்பாடு செய்தால்,

$$\int_R f(x, y, z)dV = \int_{z_2}^{y_1} \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} \int_{\phi_1(y, z)}^{\phi_2(y, z)} f(x, y, z)dxdydz$$

என்று நிரூபணம் செய்யலாம்.

பரப்பு S-ன் சமன்பாட்டிலிருந்து, y_1, z_2, $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\phi_1(y, z)$, $\phi_2(y, z)$ என்கிற எல்லைகளைத் தீர்மானம் செய்ய முடியும்.

குறிப்பு 1

தொகை காணும் வரிசை கீழே கண்டபடி எழுதலாம்.

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{f_1(z)}^{f_2(z)}\int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2}\left[\int_{f_1(z)}^{f_2(z)}\left[\int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right]dy\right]dz$$

மேலே காண்பிக்கப்பட்ட தொகை காணும் வரிசையில் முதலில் உள்ளடங்கிய செவ்வகத்திலிருந்து ஆரம்பித்து வெளி செவ்வகத்திற்கு சென்று மதிப்பீடு காணவேண்டும்.

குறிப்பு 2

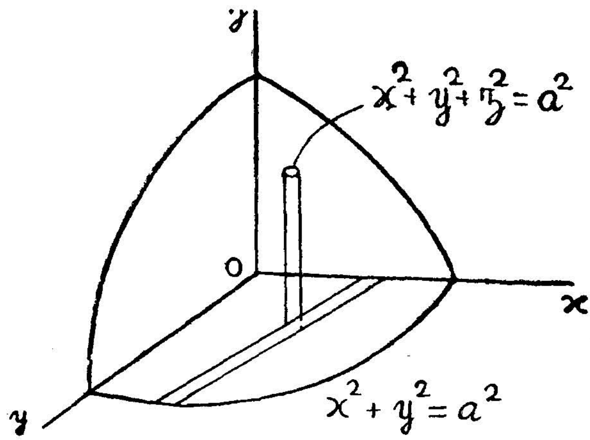
xஐ சார்ந்து தொகை காணும்பொழுது, y, zகளை மாறிலி களாக கருதவேண்டும்; yஐ சார்ந்து தொகை காணும்பொழுது zஐ மாறிலியாக எடுந்துக்கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு 3

எல்லைகளுடன் தொகை $\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், எல்லைகளின் மூலம் எவ்வரிசையில் மதிப்பிடவேண்டுமென்று தெளிவாக அறியலாம். எல்லைகள் மாறிலிகளாயில்லாவிட்டால், dx, dy, dz கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரிசையிலிருந்து தொகை காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

$x^2+y^2+z^2=a^2$ என்றும் கோளத்தின் நேர் அரைக்கால் பாகத்தில், $\int\int\int xyz(x^2+y_2+z^2)dxdydz$ஐ மதிப்பீடு செய்யவும்.



மேற்சொல்லப்பட்ட பகுதியில், zன் எல்லைகள்

$$0, \sqrt{a^2-x^2-y^2};$$

yன் எல்லைகள் $0, \sqrt{a^2-x^2}$;

xன் எல்லைகள் $0, \quad a$.

வேண்டிய தொகை =

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz(x^2+y^2+z^2)dz$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \left[(x^2+y^2)xy \frac{z^2}{2} + \frac{xyz^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \; [xya^4 - (x^2+y^2)^2]$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^a dx \left[x(a^4-x^4)\frac{y^2}{2} - 2x^3 \frac{y^4}{4} - x\frac{y^6}{6} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2^4} \int_0^a (a^2-x^2)^2 (2a^2+x^2)dx = \frac{a^8}{64}$$

பயிற்சி XVI

$x^2+y^2+z^2=a^2$ என்கிற கோளத்தின் மிகை அரைக்கால் பகுதியில், $\int\int\int xyz\,dx\,dy\,dz$ என்கிற தொகை காணவும்.

$$\left(\text{விடை } \frac{a^6}{148}\right)$$

2. பின்வரும் தொகைகளை குறிக்கப்பட்ட பகுதிகளில் மதிப்பீடு செய்யவும்.

(i) $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$; பகுதி தளங்கள் $r=z$ $y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ உள்ளடங்கிய கனவளவு

$$\left(\text{விடை } \tfrac{1}{2}\log 2-\frac{5}{16}\right)$$

(ii) $\int\int\int x^2yz\,dxdy$ பகுதி தளங்கள் $x=0,\ y=0,$ $z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ உள்ளடங்கிய நான்முகி

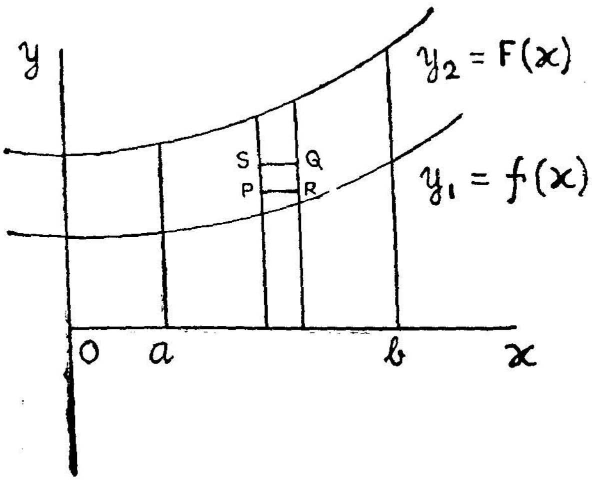
$$\left(\text{விடை } \frac{a^2b^2c^2}{25\,20}\right)$$

(iii) $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$; $x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0;$ $x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$

$$\left(\text{விடை } \frac{\pi^2}{8}\right)$$

3. தளங்கள் $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ உள்ளடங்கிய கனவளவில் $\int\int x^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,z^{-\frac{1}{2}}(1-x-y-z)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{4}$ என்பதை நிரூபி.

மடங்குத் தொகையீடுகளின் பயன்கள்



ξ 5.1 $x=a, x=b, y=(f), y=F(x)$ இவைகளின் உள்ளடங்கிய பரப்பை மதிப்பிடு.

P என்கிற புள்ளியின் கூறுகள் (x, y) என்றும் $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ என்றும் வைத்துக்கொள்ளுவோம். செவ்வகம் $PRQS$ன் பரப்பு $=\triangle x, \triangle y$. வளைவுகள் $y=f(x)$, $y=F(x)$, நேர்கோடுகள் $x=a$, $x=b$ இவைகளுக்கடங்கிய பரப்பை இம்மாதிரி செவ்வகங்களாகப் பிரித்து, பிறகு தொகை கண்டால், நமக்கு வேண்டிய பரப்பு கிடைக்கும்.

தற்காலிகமாக x, $\triangle x$ இவைகளை மாறிலிகளாக வைத்துக் கொண்டு y_1லிருந்து y_2 வரையிலுள்ள நிலைக்குத்திற்குரிய பரப்பை தொகை கண்டால். அப்பரப்பின் தொகை

$$= \text{எல்லை}_{\triangle y \to 0} \triangle x \sum_{\triangle y_1}^{y_2} \triangle y.$$

இதை $\triangle x \int_{y_1}^{y_2} dy$ என்று எழுதலாம்.

$x=a$விலிருந்து $x=b$ வரையிலுள்ள இப்படியிருக்கும் பரப்புகளைக் கூட்டினால்,

நமக்கு வேண்டிய பரப்பு = எல்லை $\sum_{a}^{b} \Delta x \int_{y_1}^{y_2} dy$ ($\Delta x \to 0$)

$$= \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= \int_a^b \int_{y_2}^{y_2} dy\, dx$$

ξ **5.2** இதேபோல், புவிஈர்ப்பு மையத்தின் கூறுகள் $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பவை

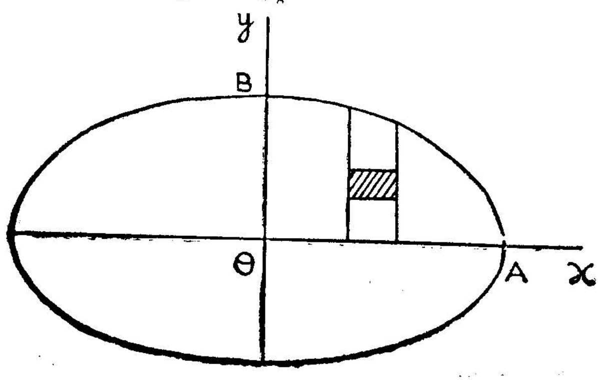
$$\bar{x} = \frac{\int\int x\, dx\, dy}{\int\int dx\, dx}; \quad y = \frac{\int\int y\, dx\, dy}{\int\int dx\, dy}$$

சூத்திரங்களால் கிடைக்கின்றன. மேற்சொன்ன தொகைதான் எல்லைகள் கொடுக்கப்பட்ட பரப்பை பகுதியாய் உடைத்துள்ளனவாயிருக்க வேண்டும்.

ξ **5.3** ஆதியிலிருந்து பரப்பின் ஒரு சிறிய பகுதியின் $(dx\ dy)$ தூரத்தின் வர்க்கம் x^2+y^2 ஆவதால், ஆதிமூலம் xy தளத்திற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட அச்சை சார்ந்த சடத்துவச் சுழல் திறன் $\int\int (x^2+y^2)dx\ dy$ என்கிற சூத்திரத்தால் தரப்படுகின்றது. இததொகை காணும்பொழுது, எல்லைகள் முழு பரப்பையும் நிரவச் செய்யவேணடும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_8} = 1$ பரப்பைக் கண்டுபிடி.



வேண்டிய பரப்பு = 4 (காற்பகுதியின் பரப்பு)
= 4 (AOBயின் பரப்பு)

தாற்காலிகமாக xஐ மாறிலி வைத்துக்கொண்டு, yஐ Oவிலிருந்து $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ வரை மாறட்டும்; பிறகு xஐ 0விலிருந்து a வரை மாறவிடுவோம்.

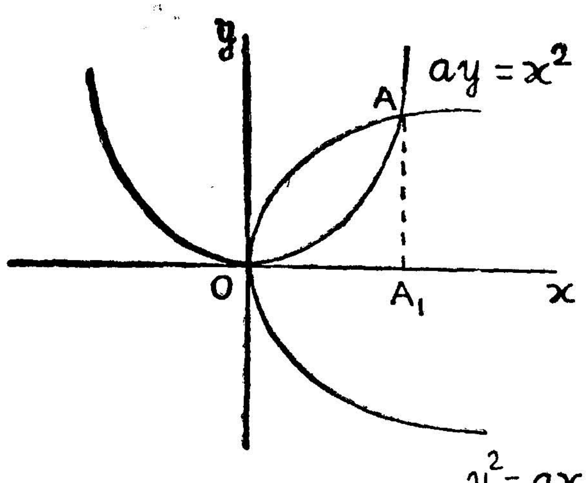
காற்பகுதி AOBயின் பரப்பு $= \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy$

$= \int_a^a dx \quad b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ($x = a \sin\theta$ என்று வைத்துக் கொள்ளுவோம்.)

$= b\int_0^{\pi/1} a\cos^2\theta d\theta = ab\pi/4$

நீள்வட்டத்தின் பரப்பு $= 4ab\pi/4 = \pi ab.$

a. பரவளைவுகள் $y^2 = ax$, $x^2 = ay$னுள்ளடங்கிய பரப்பின் புவிஈர்ப்பின் மையத்தைக் காண்க.



இப்பரவளைவுகளின் வெட்டும் புள்ளிகளின் கூறுகளை கண்டுபிடிப்போம். $\frac{x^4}{a^4} = ax$

அதாவது $x=o$, $x=a$

அப்பொழுது $y=o$, $y=a$

வெட்டும் புள்ளிகள் $O(o, o)$, $A(a, a)$

xஐ மாறிலியை வைத்துக்கொண்டால், yன் எல்லைகள் $\frac{x^2}{a}$ யிலிருந்து $\sqrt{ax}$ வரையிருக்கும்; பிறகு oவிலிருந்து a வரை o மாறும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_o^a dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}} dy}{\int_o^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} dy} = \frac{\int_o^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) x\, dx}{\int_o^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx}$$

$$= \frac{\frac{3}{20} a^3}{\frac{a^2}{3}} = \frac{9}{20} a$$

$$\bar{y} = \frac{\int_o^a y\, dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}} y\, dy}{\int_o^a dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}} dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_o^a \left(ax - \frac{x^4}{a}\right)}{a^2/3}$$

$$= \frac{9}{20} \frac{a^3}{a^2} = \frac{9a}{20}$$

3. ஒரு தளப்படலம்

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$ என்கிற நீள்வட்டத்தின் கால்பகுதி ஒரு சீராயில்லாத அடர்த்தியுடையதாயிருக்கிறது. (x, y) என்கிற புள்ளியின அடர்த்தி kxy என்றால், புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (k என்பது ஒரு மாறிலி.)

புவீஈர்ப்பு மையத்தின் கூறுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆக இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} k\,x\,y.\,x\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} k\,xy\,dx\,dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} k\,xy\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a}} k\,xy\,y\,dx\,dy}$$

$\bar{x}$ன் தொகுதி

$$= k \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2\,dx\,y\,dy$$

$$= k \int_0^a x^2 dx \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}$$

$$= \frac{kb^2}{2} \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{kb^2}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right]_0^a$$

$$= \frac{kb^2}{2} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) = \frac{ka^3b^2}{15}$$

$\bar{x}$ன் பகுதி

$$= k \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx$$

$$= \frac{kb^2}{2}\int_0^a x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{kb^2}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a$$

$$= \frac{ka^2b}{8}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{8a}{15}$$

சமச் சீரால், $\bar{y} = \dfrac{8b}{15}$

4. ஒரு சீரான அடர்த்தியுள்ள வட்ட தரைப்படலத்திற்கு அதன் ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்ட சடத்துவச் சுழல் திறனை மதிப்பிடு.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$.

அதின் ஒரு விட்டம் x அச்சாகிறது.

இந்த அச்சைக் கொண்ட சடத்துவச் சுழல் திறன்,

$= \int\int \rho dx\, dy.\, y^2$; ρ என்பது ஒரே சீரான அடர்த்தி.

xஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, yஐ $-\sqrt{a^2-x^2}$ டிலிருந்து $+\sqrt{a^2-x^2}$ வரை மாறவிடவேண்டும்; பிறகு xஐ $-a$விலிருந்து $+a$ வரை மாறவிடவேண்டும்.

வேண்டிய சடத்துவச் சுழல் திறன் $=\rho$

$$\rho\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy$$

$$= \rho\int_{-a}^{a} dx\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \rho \frac{2}{3}\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

$$= \frac{2\rho}{3}\ 2\int_{0}^{a} (a^2 - x_2)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

($x = a\ \sin\theta$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.)

$$= \frac{4\rho}{3}\int_{0}^{\pi/2} a^4 \cos^4\theta\ d\theta$$

$$= \frac{4\rho a^4}{3} - \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi\rho a^4}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$ (தளப்படலத்தின் திணிவு $M = \pi\rho a^2$)

பயிற்சி XVI

1 நேர்கோடுகள் $x = 0, y = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ உள்ளடங்கிய பரப்பை இருமாறித் தொகை காணல் வழியால் மதிப்பிடுக. (விடை $\frac{1}{2}ab$)

2. பரவளைவு $y = x(4 - x)$, x அச்சு இவைகளுக்குள் ளடங்கிய பரப்பை மதிப்பிடுக. (விடை $10\frac{2}{3}$)

3. அரை முப்படிப் பரவளைவு $y^2 = x^3$, நேர்கோடு $y = x$ இவைகளுக்குள்ளடங்கிய x அச்சிற்கு மேலிருக்கும் பரப்பைக் கண்டுபிடி. (விடை $\frac{1}{10}$)

4. வட்டம் $x^2 + y^2 = 10$, பரவளைவு $y^2 = 9x$ இவைகளுக் குள்ளடங்கிய பரப்பின் முதல் காற்பகுதியிலிருக்கும் பாகத்தைக் கண்டுபிடி. (விடை $6\frac{3}{4}$)

5. பரவளைவு $y^2 = 4 - x$, $y^2 = 4 - 4x$ இவைகளிடையுள்ள பரப்பை மதிப்பிடுக். (விடை 8)

6. பரவளைவு $y = 6x - x^2$, நேர்கோடு $y = x$னுள்ளடங்கிய பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (விடை $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$)

7. பரவளைவு $y^2=4ax$, x அச்சு, செவ்வகலம் இவை களுனடங்கிய பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை } \left(\frac{3a}{5}, \frac{3a}{4}\right)\right]$$

8. ஒரே சீரான $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்கிற நீள் வட்டத் துள்ளடங்கிய பரப்பின் பேரச்சை அச்சாகக் கொண்ட சடத் துவச் சுழல் திறனை மதிப்பிடுக.

9. நீள்வட்ட $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ காற்பகுதி வடிவமுள்ள படலத்தில், (x, y) என்கிற புள்ளியில் அடர்த்தி kxy என்றால், படலததின் திணிவைக் கண்டுபிடி.

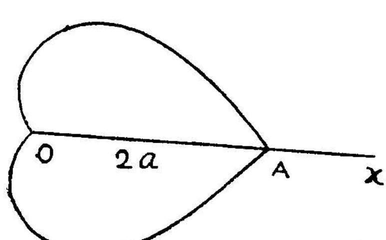
$$\left(\text{விடை } \frac{kb^2a^2}{8}\right)$$

§ 5.4 கோண தூர கூறுகளில் பரப்பு உறுப்பு $dA = r dr d\theta$ ஒரு வளை கோடிலுடங்கிய பகுதி Rன் பரப்பு $= \int\int r\, dr\, d\theta$

கோணதூர கூறுகளில், புவிஈர்ப்பு மையம், சடத்துவச் சுழல் திறன் தேக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளிலுள்ள சூத்திரங்களை பின்பற்றி ஆராயலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. இதயவுரு $r = a(1+\cos\theta)$ னுள்ளடங்கிய பரப்பை மதிப் பிடு வேண்டிய பரப்பு $= \int\int r dr d\theta$



θஐ மாறிலி வைத்துக்கொண்டால், rன் எல்லைகள் o, $a(1+\cos\theta)$ ஆகும்; பிறகு $-\pi$விலிருந்து π வரை θ மாற வேண்டும்.

$$\therefore \text{வேண்டிய பரப்பு} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{a(1+\int\theta)} rdr$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_{0}^{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{2a^2}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_{0}^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4a^2\int_{0}^{\pi/2} \cos^4\phi . 2\, d\phi$$

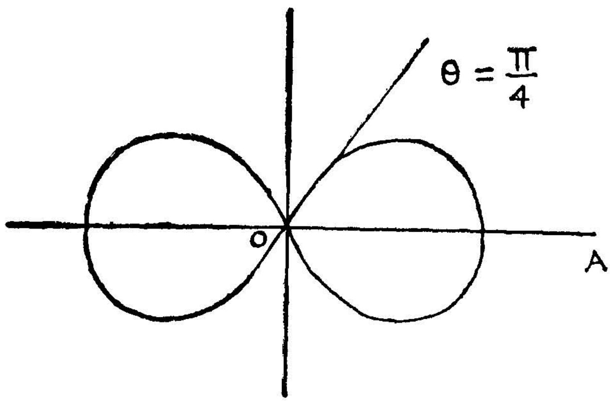
$\left(\frac{\theta}{2} = \phi \text{ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.}\right)$

$$= 8a^2 \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

2. லெம்னிஸ்கேட் (lemniscate) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ ன் ஒரு தடத்தின் புவிஈர்ப்பின் மையத்தைக் கண்டுபிடி.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்கிற வளைகோடு தொடக்கக் கோடைப் பற்றி சமச் சீராயுள்ளது. ஆகையால் ஒரு தடம் θன்

எல்லைகள் $\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ உள்ளடங்கியிருக்கும்.



வளைகோட்டின் சமச்சீரிலிருந்து, புவிஈர்ப்பு தொடக்கக் கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ளது. இப்புள்ளியின் ஆதிபுள்ளியிலிருந்து $\bar{x}$ தொலைவிலிருக்கட்டும்.

$$\bar{x} = \frac{\int\int x\,dy\,dx}{\int\int dy\,dx} = \frac{\int\int r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta}{\int\int r\,dr\,d\theta}$$

$$= \frac{\int\int r^2\cos\theta\,dr\,d\theta}{\int\int r\,dr\,d\theta}$$

θஐ மாறிலியாக வைத்துக்கொண்டு, rஐ 0விலிருந்து $a\sqrt{\cos 2\theta}$ வரை மாறவிடுவோம்; பிறகு θஐ $-\pi/4$விலிருந்து $\pi/4$ வரை மாறட்டும்.

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}}$$

$$= \frac{\frac{a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\cos 2\theta\right)^{3/2}_{-\pi/4}}{\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2a^4}{3}\int_{o}^{\pi/4} \left(1 - 2\sin^2\theta\right)^{3/2} \cos\theta d\theta}{\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^{\pi/4}_{-\pi/4}}$$

$$= \frac{8a}{3\sqrt{2}} \frac{\int_{o}^{\pi/2} \cos^4\phi d\phi}{[0-(-1)]}$$

[$\sqrt{2}\sin\theta = \sin\phi$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.]

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$$

பயிற்சி XVII

1. வட்டம் $r = 3a\cos\theta$ னுள்ளடங்கியதும் இதயவுருவி $r = a(1+\cos\theta)$விற்கு புறத்திலுள்ள பரப்பை மதிட்பிடுக.

(விடை πa^2)

2. வட்டங்கள் $r = a$, $r = 2\cos\theta$ மத்தியிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை} \quad a^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

3. இதயவுருவுகள் $r = a(1+\cos\theta)$, $r = a(1-\cos\theta)$ மத்தியி லுள்ள பரப்பை மதிப்பிடு.

$$\left(\text{விடை} \quad \frac{a^2(3\pi - 8)}{2}\right)$$

4. அரைவட்டமுள்ள படலத்தில், எல்லை விட்டத்திலிருந்துள்ள தூரத்தை சார்ந்து அடர்த்தி நேராக மாறுகிறது. இவ்விட்டத்திலிருந்து புவிஈர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

$$\left(\text{விடை } \frac{3\pi a}{16}\right)$$

5. $r^2 = a^2\cos 2\theta$வின் தளத்திற்கு தொடக்கக் கோடை அச்சாயுள்ள சடத்துவச் சுழல் திறனைக் காண்க.

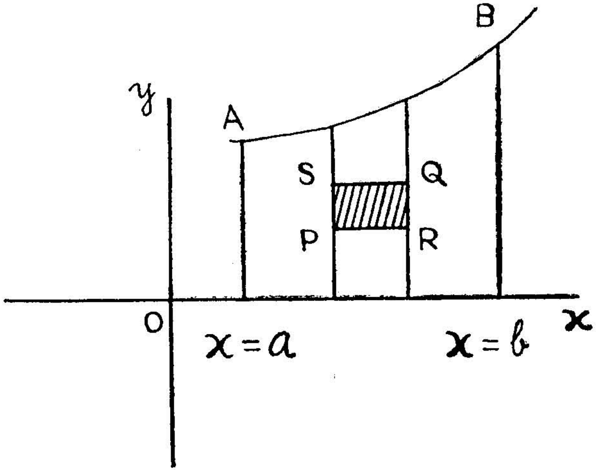
$$\left[\text{விடை } \frac{Ma^2}{48}(3\pi - 8)\right]$$

இதயவுரு $r = a(1+\cos\theta)$ உருவத்திலுள்ள படலத்தில் அடர்த்தி ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து தூரத்தை சார்ந்து நேராக மாறுகிறது, புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

$$\text{விடை } \left[\left(\frac{6a}{5}, 0\right)\right]$$

§ 6.1 சுற்றல் கனவளவு

படத்தில் AB என்ற வளைகோடு $y = f(x)$ன் ஒரு பிரிவு. x அச்சைச் சுற்றி AB சுற்றட்டும். P, Q என்கிற புள்ளிகளின் கூறுகள் (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ எனவேயிருக்கட்டும். $PRQS$ செவ்வகத்தைப் பூர்த்தி செய்வோம்.



இச்செவ்வகத்தின் பரப்பு $= \triangle x \triangle y$.

ஒரு முழுச் சுற்றலில் பரப்பு, *PRQS* கனவுருவத்தை பிறப்பிக்கிறது. இதன் கனவளவு $= \pi\{(y+\triangle y)^2 - y^2\}\triangle x$

$$= \pi[2y\triangle y\triangle x + (\triangle y)^2\triangle x]$$

$= 2\pi y.\triangle y.\triangle x$ (முதல் வரிசை கழிநுண்களை மாத்திரம் கருதும்பொழுது)

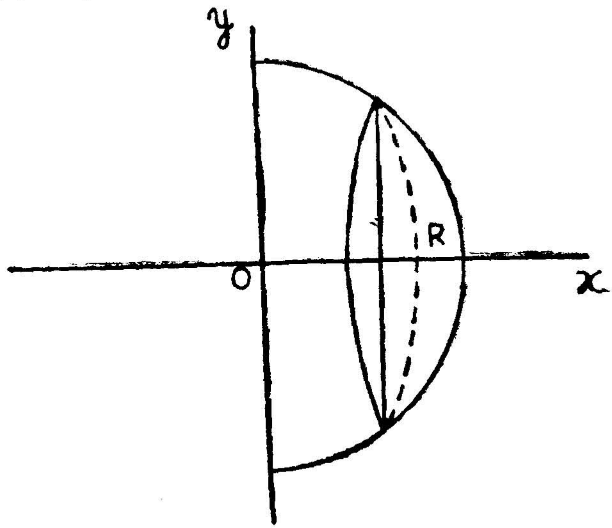
$$\text{மொத்த கனவளவு } V = \lim_{\triangle x\to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=0}^{y=f(x)} 2\pi y \triangle y.\triangle x$$

$$= 2\pi \int_a^b \int_0^{f(x)} y\,dy\,dx$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

a என்றும் ஆரம் உள்ள கோளத்தின் *h* உயரமுள்ள துண்டின் கனவளவு காண்க.

பிறப்பிக்கின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ என்க. இதன் மையம் ஆதிப்புள்ளி *x* அச்சு துண்டின் தளத்திற்கு செங்குத்தாயிருக்கட்டும்.



$$\text{துண்டின் கனவளவு} = 2\pi \int_{a-h}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx$$

$$= \int_{a-h}^{a} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \pi \int_{a-h}^{a} \left(a^2 - x^2 \right) dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{a-h}^{a}$$

$$= \frac{\pi h}{3} (3ah - h^2)$$

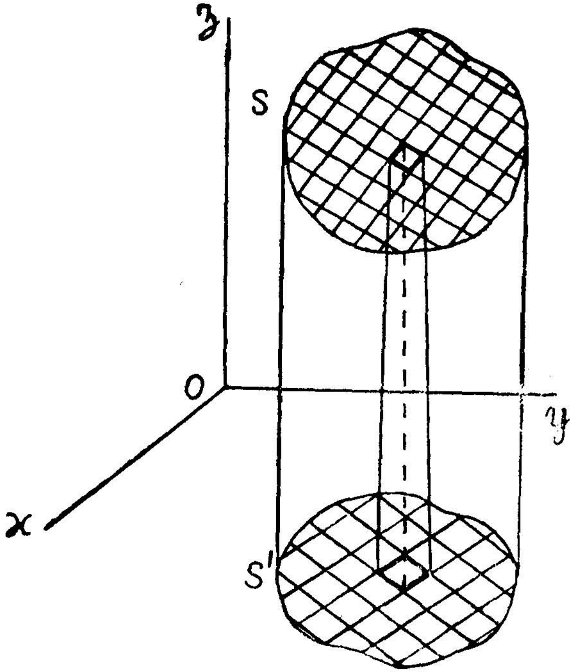
துணை முடிவு

$h = a$ அரைக்கோளத்தின் பருமன் $\frac{2\pi a^3}{3}$ ஆகும்.

ξ 6.2 திடப்பொருள்களின் கனவளவு இருமாறித் தொகைகளாகக் காணுதல்

$z = f(x, y)$ என்கிற மேற்பரப்பின் ஒரு பாகம் S என்க. xy தளத்தின் S^1 இதன் குத்துவீச்சு என்க.

S, S', சுற்றியுள்ள உருளைப் பரப்பு இவைகளுக்குள்ளடங்கிய திடப்பொருளின் கனவளவின் கோவையை காண்போம்.



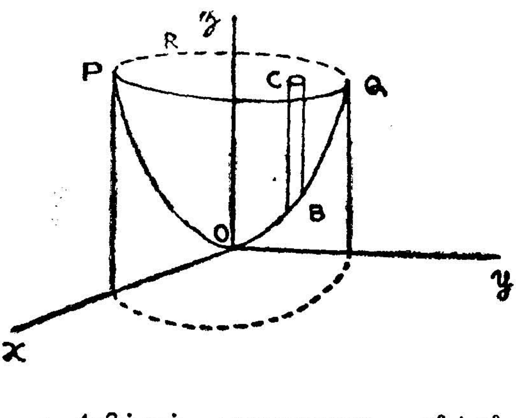
x, y அச்சுகளிற்கு இணைகோடுகளை வரைந்து பரப்பு S^1ஐ சிறிய செவ்வக பரப்புகள் $dxdy$ ஆகப் பிரிப்போம். இவை ஒவ்வொன்றையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு y அச்சிற்கு இணையாக கோடுகளை நீளமாக வைத்து பட்டகம் வரைவோம். S, S' நடுவேயுள்ள பட்டகத்தின் கனவளவு $= z\triangle x.\triangle y$.

$$\text{ஆகையால் மொத்த கனவளவு} = \lim_{\substack{\triangle x \to o \\ \triangle y \to o}} \sum\sum z\triangle x.\triangle y.$$

$\therefore \quad V = \int\int_S zxddy$, ($S'$ பரப்பில் தொகை காண வேண்டும்.)

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. சுற்றல் பரவளைவுரு $x^2+y^2=4z$ல் தளம் $z=4$ஆல் உள்ளடங்கிய கன அளவைக் காண்க.



தளம் $z=4$விற்கும் பரவளைவுரு $x^2+y^2=4z$விற்கும் நடுவேயுள்ள நீளம் $= BC = \left(4 - \frac{x^2+y^2}{4}\right)$

xy தளத்தின் மேல் PQRன் குத்துவீச்சு வட்டம் $x^2 - y^2 = 16$ ஆகும்.

$$\therefore \quad V = 4\int\int\left(4 - \frac{x^2+y^2}{4}\right) dydx$$

(வட்டம் $x^2+y^2=16$ன் மிகைகாற்பகுதியில் தொகை காண வேண்டும்.)

$$\therefore \quad V = 4\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \left(4 - \frac{x^2+y^2}{4}\right) dxdy$$

$$= 4\int_0^4 \left[4y - \frac{x^2y + \frac{y^3}{3}}{4}\right]_0^{\sqrt{16-x^2}}$$

$$= 4\int_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\left[16 - x^2 - \frac{16-x^2}{3}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^4 \left(16-x^2\right)^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \times 256\int_0^{\pi/2} 4\cos^4\theta d\theta$$ ($x = 4\sin\theta$ என்று வைத்துக்கொண்டால்)

$$= \frac{512}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} = 32\pi$$

2. உருளை $x^2+y^2=4$, தளங்கள் $y+z=4$, $z=0$ இவைகளுக்குள்ளடங்கிய கன அளவைக் காண்க.

வேண்டிய கன அளவு $= \int\int (4-y)dxdy$

$x^2 = 4 - y^2$;

ஆகவே $x = \pm\sqrt{4-y^2}$

$\therefore$ xன் எல்லைகள் $-\sqrt{4-y^2}$லிருந்து $+\sqrt{4-y^2}$ வரையிலும் yன் எல்லைகள் -2லிருந்து $+2$ வரையிலுமிருக்கும்.

$$\therefore \text{ கன அளவு } = \int_{-2}^{2} (4-y)2\sqrt{4-y^2}\, dy$$

$$= 8\int_{-2}^{2} \sqrt{4-y^2 dy} \quad \left(\int_{-2}^{2} y \sqrt{+y^2}\, dy = 0;\right.$$

ஏனென்றால் தொகைச் சார்பு $y\sqrt{1-y^2}$ ஒற்றை சார்பா யிருக்கிறது.)

$$\text{கன அளவு } = 16\int_{0}^{2} \sqrt{4-y^2}\, dy$$

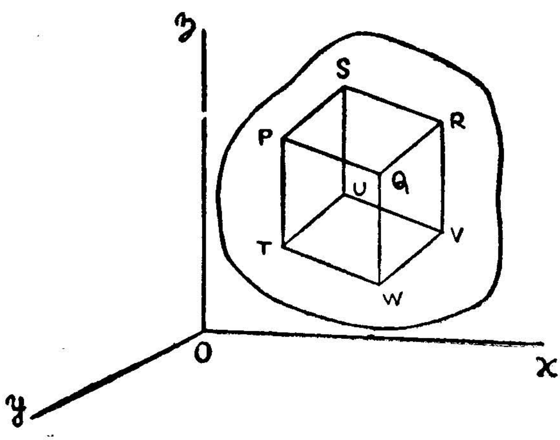
$$= 16\int_{0}^{\pi/4} \cos^2\theta d\theta$$

($y = 2\sin\theta$ என்று வைத்துக்கொண்டால்)

$= 16\pi.$

§ 6.3 கனஅளவை மும்மாறித் தொகையாகக் காணுதல்

$P(x, y, z)$ என்கிற புள்ளி என்க. அச்சுகளிற்கு இணை யாக $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ என்று நீளமுள்ள இணைகரத்தின் திண்மம் *PQRS TUVW* என்க.



இச்சிறிய திண்மத்தின் கனவளவை $\triangle v$ அதாவது $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம். ஆகையால்

மொத்த களவளவு = எல்லை $\sum\sum\sum \triangle x.\triangle y.\triangle z$
$\triangle x \to 0$
$\triangle y \to 0$
$\triangle z \to 0$

அதாவது $\int\int\int dx\, dy\, yz$ (தொகை காண எல்லைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அரங்கத்தினிலிருந்து தீர்மானிக்க வேண்டும்.)

மாதிரிக் கணக்கு

புள்ளி (x, y, z)ல் அடர்த்தி $\frac{k}{\sqrt{xyz}}$ எனின், $x=0$, $y=0$ $z=0$, $x+y+z$ என்கிற முகங்களைக் கொண்ட நான்முகியின் திணிவு $\frac{4\pi}{3}\ ka3/2$ என்று நிரூபி.

$$\text{வேண்டிய திணிவு} = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} \frac{k}{\sqrt{xyz}}\ dxdydz$$

$$= k\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{ax-} \frac{dy}{\sqrt{y}} \int_0^{a-x-y} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= k\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{y}}\ 2\sqrt{a-x-y}$$

[$y=(a-x)\sin^2\theta$ என்று வைத்துக்கொள்ளுவோம்.]

$$= 2k\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}(a-x)\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta d\theta$$

$$= 4k\ \frac{\pi}{4}\ .\ \frac{4}{3}\ a3/2 = \frac{4}{3}\ \pi k a^{\frac{3}{2}}$$

பயிற்சி XVII

1. $x=0, y=0, z=0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ என்கிற முகங்களைக் கொண்ட நான்முகியின் கண பரிமாணத்தைக் காண்க

$\left(\text{விடை}\ \frac{abc}{6}\right)$

மேற்சொன்ன கனபரிமாணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையத்தின் கூறுகள் யாவன? $\left(\text{விடை } \dfrac{a}{4}, \dfrac{b}{4}, \dfrac{c}{4}\right)$

2. a என்கிற ஆரத்தைக் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் மையம் மூலமாய் ஒரு வட்டமுள்ள துவாரம் (ஆரம் b) செய்யப் படின் கோளத்தின் மீதி பாகத்தின் கன அளவு யாது?

$$\left\{ \text{விடை } \frac{4\pi}{3} \left\{ a^3 - \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right\}$$

3. $z=0$ தளத்திற்கும் $x+y+z=a$ என்கிற தளத்திற்கும் நடுவேயுள்ள உருளை $x^2+y^2=a^2$ன் கன அளவைக் காண்க.

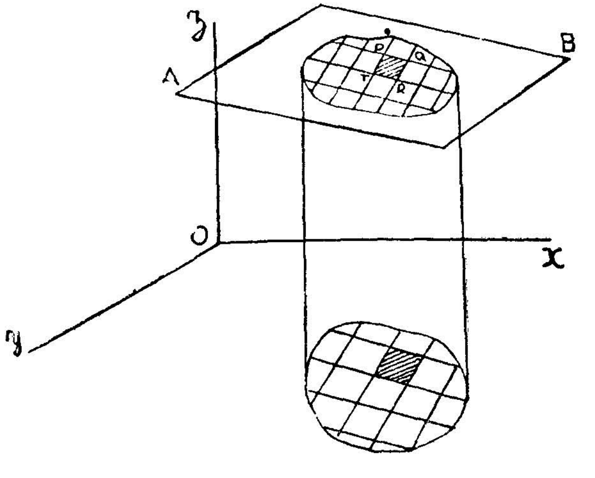
$$\left[\text{விடை } a^3 \left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

4. பரவளைவுருவு $z=x^2+y^2$ல் தளம் $z=2x$ வெட்டப் பட்டுள்ள கன அளவைக் காண்க.

5. $z=0$ தளத்திற்கு மேலும், உருளை $x^2+y^2=4$, கூம்பு $x^2+y^2=z^2$ இவைகளினுள்ளடங்கிய கனவளவைக் காண்க.

§ 7 வளை பரப்புகளின் பரப்புகள்

படத்தில் AB என்கிற மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $z=f(x, y)$ என்க.



இப்பரப்பின் மேலிருக்கும் S^1 என்கிற ஒரு பகுதியின் பரப்பைக் காணவேண்டியதென்று கொள்வோம். xy தளத்தின் மேல் Sன் செங்குத்து வீச்சு S^1 என்க.

x, y அச்சுக்களுக்கு இணையாக கோடுகள் வரைந்து, பரப்பு Sஐ சிறிய செவ்வகங்கள் $\triangle x$, $\triangle y$ பரப்புள்ளனவாகப் பிரிப்போம். $PQRT$ என்னும் சிறு பகுதியின் xy தளத்தின்மேல் செங்குத்து வீச்சு $\triangle x$, $\triangle y$ என ஆகும்.

$\triangle x \, \triangle y =$ ($PQRT$ன் பரப்பு). $\cos\alpha$ [தளம் xyக்கும் Pயினிலுள்ள தொடுதளத்திற்கு மிடையேயுள்ள கோணம் α என்க; அதாவது z அச்சிற்கும் Pயிலிருக்கும் தொடுதளத்திற்கு செங்குத்தான கோடிற்கும் உள்ள கோணம் α.]

$F(xyz) = 0$ என்கிற சமன்பாடைக் கொண்ட மேற்பரப்பிற்கு செங்குத்தாய் வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் திசை (Direction Cosines) $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$வைகளுக்கு விகித சமனாகும். ஏனெனில் $F(x, y, x) = f(x, y, z) - z = 0$.

$$\text{ஆகவே } \cos\alpha = \frac{1}{\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore PQRT\text{ன் பரப்பு} = \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \triangle x.\triangle y$$

$$\text{ஆகவே } S^1 = \lim_{\substack{\triangle x \to \\ \triangle y \to 0}} \sum\sum \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \triangle x.\triangle y$$

$$= \int\int\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dxdy;$$

இத்தொகையின் எல்லைகள் S^1 பகுதியின் xy தளத்தின் மேலுள்ள வீச்சைப் பொறுத்துள்ளன.

xz தளத்தின் மேல் S^1ன் வீச்சு S என்று வைத்துக்கொண்டால், மேற்கூறிய தொகை =

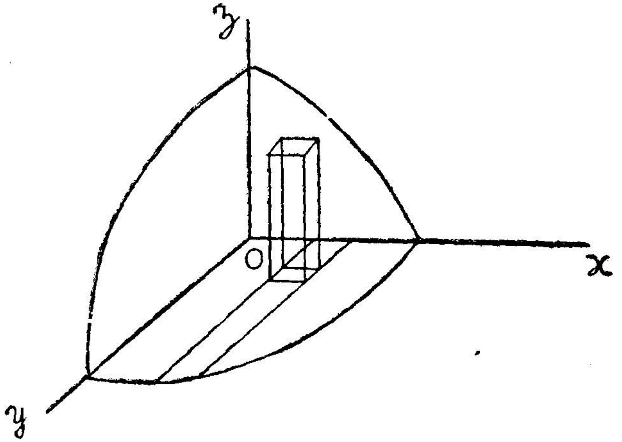
$$\int\int_S \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dzdx$$

எனவும், $\int\int_S \left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dzdy$ற்கும் சமம்.

(இங்கு yz தளத்தின் மேல் S^1ன் வீச்சு S என்று கொள்ளவும்.) என்று எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு

1. r ஆரமுள்ள கோளத்தின் வளை பரப்பின் பரப்பைக் காண்க.



கோளத்தின் மையம் ஆதி புள்ளியானால், அதன் சமன்பாடு $z^2+y^2+x^2=r^2$ எனவாகும். முதல் அரை கால் கோளத்தின் வளை பரப்பை நாம் எடுத்துக்கொள்ளுவோம். முழு கோளத்தின் வளை பரப்பில் இது $\frac{1}{8}$ ஆயிருக்கும், xy தளத்தின் பேரிலுள்ள இப்பரப்பின் குத்துவீச்சு. இத்தளத்திலுள்ள வட்டம் $x^2+y^2=r^2$ல் ஒரு காற்பகுதியாகும்.

ஆகையால் நமக்கு வேண்டிய பரப்பு

$$=\int\int\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right\}^{\frac{1}{2}} dydx$$

(இத்தொகையை வட்டம் $x^2+y^2=r^2$ன் மிகை காற்பகுதி காணவேண்டும்.)

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{z}\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}$$

∴ கோளத்தின் வளைபரப்பின் பரப்பு

$$=8\int\int\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1\right)^{\frac{1}{2}} dydx$$

$$=8\int\int\frac{(x^2-y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\,dydx$$

$$=8\int\int\frac{r}{z}\,dydx$$

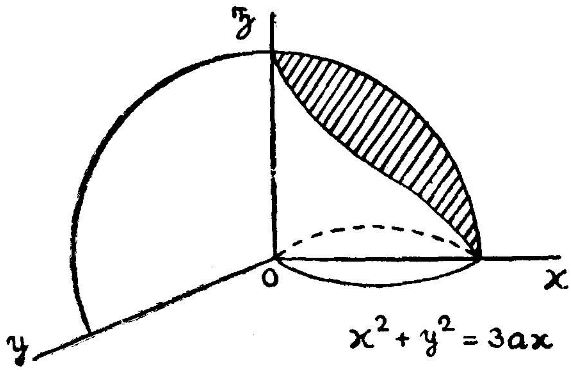
$$=8r\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$=8r\int_0^r dx\left[\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$=8r\int_0^r dx\;\; \pi/2 \;\; \underline{=4\pi r^2}$$

2. கோளம் $x^2+y^2+z^2=9a^2$ல் உருளை $x^2+y^2=3ax$ல் வெட்டப்பட்டுள்ள மேற்பரப்பின் பரப்பைக் காண்க.

xy தளத்தின் மேல் வேண்டப்பட்டுள்ள பரப்பு Sன் வீச்சு வட்டம் $x^2+y^2=3ax$ ஆகும்.



கோளத்தில் $z=\sqrt{9a^2-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{9a^2-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{9a^2-x^2-y^2}}$$

$$S=\iint_R\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\quad dxdy$$

R என்கிற பகுதி வட்டம் $x^2+y^2=3\cos x$, $z=0$ உள்ளடங்கிய பரப்பு)

$$\therefore\quad S=\iint_R\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{9a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint_R\frac{3a}{\sqrt{9a^2-x^2-y^2}}\quad dxdy$$

$$=3a\iint_R\frac{rdrd\theta}{\sqrt{9a^2-r^2}}$$

(கோணத் தூரக் கூறுகளுக்கு மாற்றவும்.)

கோணத் தூரக் கூறுகளில், வட்டத்தின் சமன்பாடு $r=3a\cos\theta$ பகுதி Rஐ வியாபிக்கவேண்டுமெனின், rன்

எல்லைகள் 0, $3a\cos\theta$, θன் எல்லைகள் $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$$S = 3a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{3a\cos\theta} \frac{rdr}{\sqrt{9a^2 - r^2}}$$

$$= 3a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-(9a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{3a\cos\theta} d\theta$$

$$= 3a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (3a - 3a\sin\theta) d\theta$$

$$= 9\pi a^2$$

பயிற்சி XVIII

1. கோளம் $x^2 + y^2 + z^2 = 16a^2$ல் உருளை $x^2 + y^2 = 4ax$ல் வெட்டுப்பட்டுள்ள பரப்பு $16a^2(\pi - 2)$ என்று நிரூபி.

2. உருளை $x^2 + y^2 = 3y$யினுள்ளும் xy தளத்திற்கு மேலுமுள்ள கூம்பு $x^2 + y^2 = 4z^2$ன் பரப்பைக் காண்க.

$\left(\text{விடை } \frac{9\sqrt{5}}{8} \pi a^2 \right)$

3. கூம்பு $z^2 = 3(x^2 + y^2)$னுள் உள்ள கோளம் $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$னின் பகுதியின் பரப்பை மதிப்பிடு.

(விடை 16π)

4. உருளைப் பரப்பின் முதற் அரைக்கால் பரப்பைக் காண்க. (விடை $2\pi^2(2 - \sqrt{3})$

5. உருளை $x^2 + y^2 = a^2$ தளம் $x + y + z = a$ னாலுள்ள வெட்டின் பரப்பு யாது?

8. மாறிகளின் மாற்றம்

§ 8.1 x, y, zலிருந்து u, v, wற்கு $x=f(u, v, w)$, $y=\phi(u, v, w)$, $z=\psi(u, v, w)$ என்கிற சமன்பாடுகளின் மூலம் செய்தால் சில பன்மாறித் தொகைகளை சுலபமாக மதிப்பீடு செய்ய இயலும்.

§ 8.2 ஜக்கோபியன் (Jacobian: அல்லது சார்பு அணிக்கோவை)

நுண் கணிதத்தில் பயின்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சார்பு முறைகளை மனத்தில்கொள்ளவேண்டும்.

§ 8.2.1. $u=f(x, y)$, $v=\phi(x, y)$ இரண்டு சார்புகளும் x, yல் தொடர்ச்சியுள்ளதாயின், $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ x, yல் தொடர்ச்சியுள்ளனவாயிருப்பின் எனக்கொண்டால்,

$$J\left(\begin{matrix} u, v \\ x, y \end{matrix}\right) \text{ அல்லது } \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

என்னும் அணிக்கோவை ஒரு ஜக்கோபியன் எனப்படும்.

இவ்வாறே $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ($x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மாறிகளின் சார்பு எனக்கொண்டால்,

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவை ஒரு ஜக்கோபியன் எனப்படும்.

ξ8.2.2 ஜக்கோபியன்களின் பெருக்கல் விதி (Rule for Multiplication of Jacobians)

$$\frac{\partial(u_1; 4_2, \dots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n} = \frac{\partial(u_1, u_2 \dots u_n)}{\partial(y_1, y_2 \dots y_n} \frac{\partial(y_1, y_2, \dots y_n)}{\partial(x_1, x_2, x_n)}$$

[இங்கு $u_r = f_r(y_1, y_2, \dots y_n) : y_s = \phi_s(x_1, x_2, \dots x_n)$ $r_f s = 1, 2 \dots n$ என்று கொள்க.]

நிரூபணம்

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = \frac{\partial u_r}{\partial y_1} \frac{\partial y}{\partial x_s} + \frac{\partial 4_r}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial u_r}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} \quad (1)$$

$r = 1, 2 \dots n$

$s = 1, 2 \dots n$

நிரூபிக்கவேண்டியதின் வலப்பக்கம்

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x^1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் விதியின்படி, இந்த இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் பலனாகிய அணிக்கோவையில் r-வரிசைக்கும் s- நிரலுக்கும் பொதுவான உறுப்பு (1)-ன் வலப்பக்கமாகும். எனவே இந்த அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் நிரூபிக்கவேண்டிய இடப்பக்கம்.

கிளைத் தேற்றம்

1. குறிப்பாக இரண்டு மாறிலிகளை மாத்திரம் ஆராய்ந்தால்,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial \xi, \eta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$$

2. (1)ல் $\xi = u$, $\eta = v$ என்று பிரதி செய்தால்

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)}$$

ஆனால்

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

எனவே $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$

J என்றும் ஜக்கோபியனின் நேர்மாறான ஜக்கோபியன் J^1 எனின், $JJ^1 = 1$ என்று நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

ξ 8.3 தேற்றம்

$$dx\, dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du dv$$

x, y என்பன ஒவ்வொன்றும் u, v என்ற மாறிகளின் சார்பு எனக் கொண்டால், u, v என்பன ஒவ்வொன்றும், x, y என்ற மாறிகளின் சார்பு எனக்கொள்ளலாம்.

[குறிப்பு:— இப்புத்தகத்தின் நோக்கில், இத்தேற்றத்தின் நிரூபணம் தேவையில்லை என்று விடப் பட்டது.]

குறிப்பு

1. x, y-ஐ r, θ என்றுள்ள கோணத்தூரக் கூறுகளுக்கு மாறுதல்களைச் செய்தால், $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore\ dxdy = r\, drd\theta.$$

இவ்வாறே, x, y, z-ஐ r, θ, ϕ என்றுள்ள r, θ, ϕ என்கிற கோளக்கூறுகளுக்கு மாற்ற சூத்திரங்கள்,

$$x = r \sin\theta \cos\phi_1$$
$$y = r \sin\theta \sin\theta,$$
$$z = r \cos\theta$$ அமைந்திருக்கின்றன.

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi & r \cos\phi \sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -r \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -r^2 \sin\theta.$$

$$\therefore \quad dx\, dy\, dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = -r^2 \sin\theta\, dr d\phi d\theta$$

ξ 8.4 இருமாறித் தொகை $\iint_R F(x, y) dx dy$-ல்

$x = f(u, v)$, $y = \phi(u, v)$ என்று பிரதி செய்யின்,

தொகை $\iint F[f(u, v), \phi(u, v)] \frac{\partial (x, y)}{\partial(u, v)} du dv$

என்று கிடைக்கும். u, v-ன் எல்லைகளை R பகுதியிலிருந்து நிர்ணயிக்கலாம்.

இவ்வாறே, $\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$-ல்

$x = f(u, v, w)$
$y = \phi(u, v, w)$
$z = \psi(u, v, w)$

என்று பிரதியீடு செய்யின்,

கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \int\int F(u, v, w) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dudvdw$$ என மாறும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $\int\int_{\triangle} [xy(1-x-y)]^{\frac{1}{2}} dxdy$ ($\triangle$ என்கிற முக்கோணம் $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ என்கிற பக்கங்களைக் கொண்டதெனில் $x+y=u$, $y=w$ என்று பிரதி செய்து, தொகையை மதிப்பிடுக.

$x+y=u$, $y=uv$.

$\therefore \quad x=u(1-v)$; $y=uv$.

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ கொண்ட பரப்பு, பக்கங்கள் $u=0$, $u=0$, $v=0$, $v=1$ என்றுள்ள சதுரத்தின் பரப்பாக மாறுகிறது.

$$\therefore \quad \int\int\int_{\triangle} [xy(1-x-y)]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

$$= \int\int_{\square} [u^2v(1-v)\ (1-u)]^{\frac{1}{2}} ududr$$

$$= \int_0^1\int_0^1 u^2(1-u)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}\ dudr$$

$$= \int_0^1 u^2(1-u)^{\frac{1}{2}}\ du \int_0^1 v^{\frac{1}{2}}\ (1-v)^{\frac{1}{2}}\ dv$$

$$= \beta(3, \tfrac{3}{2})\ \beta(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3+\frac{3}{2})}\ \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\,\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\,\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2\pi}{105}$$

2. பரவளைவுகள் $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = cy$, $x^2 = dy$ உள்ளடங்கிய வளைகோட்டிற்குரிய பரப்பை மதிப்பிடு.

$y^2 = u^3 x^2$; $x^2 = b^3 y$ என்று பிரதியிட்டால், $x = uv^2$, $y = u^2 v$ என்று கிடைக்கும்.

u-ன் எல்லைகள் $a^{\frac{1}{3}}$லிருந்து $b^{\frac{1}{3}}$ வரை

v-ன் எல்லைகள் $c^{\frac{1}{3}}$லிருந்து $d^{\frac{1}{3}}$ வரை என்று தெளிவாகிறது.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{vmatrix} = -3u^2v^2$$

∴ மதிப்பீடு செய்யவேண்டிய பரப்பு

$$= \int\int dxdy = \int_{v=c\frac{1}{3}}^{v=d\frac{1}{3}} \int_{u=a1/3}^{u=b1/3} Jdudv$$

$$= \int_{u=a1/3}^{v=d1/3} \int_{u=a1/3}^{u=b1/3} (-3u^2v^2)dudv$$

$$= -3\left(\frac{n^3}{3}\right)_{a1/3}^{b1/3} \left(\frac{v^3}{3}\right)_{c1/3}^{d1/3}$$

$$= -\frac{1}{3}(b-a)(d-c)$$

3. பகுதி D-ன் எல்லைகள் $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ எனின்,

$$\int\int_D e^{-x^2 - y^2}\, dxdy = \tfrac{1}{4}\pi\left(1 - e - R^2\right)$$

என்று காண்பி.

கோணதூரக் கூறுகளுக்கு மாற்றினால், $dxdy = rdrd\theta$; rன் எல்லைகள் oவிலிருந்து R வரை, θன் எல்லைகள் oவிலிருந்து $\pi/2$ வரை என ஆகும்.

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R$$

$$\tfrac{1}{2}(1-e^{-R^2})\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

4. கோளம் $x^2+y^2+z^2=a^2$-ன் அரைக்கால் வட்டத்தின் பேரில் தொகை $\iiint xyz\,dxdydz$-ஐக் காண்க.

x, y, zவிலிருந்து r, θ, ϕ என்றும் கோளக்கூறுகளுக்கு மாற்றுவோம்.

$$\therefore\ x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\therefore\ dxdydz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}\,drd\theta d\phi = -r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$$

கோளத்தின் அரைக்கால் பாகத்தைப் பரவி தொகை காணின்,

r-ன் எல்லைகள், 0விலிருந்து a வரை,

ϕ-ன் எல்லைகள் 0விலிருந்து $\pi/2$ வரை,

θ-ன் எல்லைகள் $\frac{\pi}{2}$ விலிருந்து 0 வரை, என ஆகும்.

$\therefore$ காணவேண்டிய தொகை

$$= \int_{r=0}^{r=a}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=\pi/2}^{0} r^3\sin^2\theta\cos\theta\,\sin\phi\cos\phi(-r^2\sin\theta)\,drd\theta d\phi$$

$$= \int_{r=0}^{r=a} r^5 dr \int_0^{\pi/2} \sin\phi \cos\phi \, d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \left(\frac{r^6}{6}\right)_0^a \left(\frac{\sin^2\phi}{2}\right)_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^4\theta}{4}\right)_0^{\pi/2} = \frac{a^6}{48}$$

பயிற்சி XIX

பின்வரும் தொகைகளை குறிப்பிட்ட தொகுதியில் மதிப்பிடுக.

1. $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$, Rன் எல்லை வளை வரைகள் $x^2-y^2=a$, $x^2-y^2=b$, $2xy=c$, $2xy=d$ $(0<a<b,\ 0<c<d;$ $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$ எனின்)

2. $\int\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ஐ $x=u$, $y=uv$ என்று பிரதி செய்து மதிப்பிடு.

3. $\iiint_V x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} (1-x-y-z)^{\frac{1}{2}} dxdydz$

V-ன் எல்லை தளங்களின் சமன்பாடுகள் $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. எனவே

4. $\iiint_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, V என்பது கோளம் $x^2+y^2+z^2=c^2$ன் பருமம் எனின்

5. $\iint_R (x+y)^2 dxdy$, R என்கிற இணைகரத்தின் பக்கங்கள் $x+y=0$, $x+y=2$, $3x-2y=0$, $3x-2y=3$ எனின்

[விடைகள்: 1. $\frac{1}{4}(b-a)(d-c)$ 2. $\frac{1}{6}[\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)]$
3. $\pi^2/4$ 4. $\frac{\pi^2}{4}\log 2$

9. தகாத் தொகைகள்
பீட்டா, காமா சார்புகள்
(Improper integrals; Beta and Gamma functions)

ξ 1.1 தகாத் தொகை இனங்கள்

$\int_a^b f(x)dx$ என்கிற தொகையை வரையறுக்கும்பொழுது, தொகை காணும் இடைவெளி $[a, b]$ல், $f(x)$ என்கிற தொகை சார்பை வரம்புக்குள்ளடங்கியதொன்று கொண்டோம். இப் பொழுது இரண்டு வகைகளை ஆராய்வோம். இவ்வகைகள் பின்வருமாறு:—

(i) இடைவெளி அளவில்லாதபடி ஏறுகின்றது; ஆனால் தொகைச் சார்ந்த வரம்புகுட்பட்டது.

(ii) தொகை காணும் இடைவெளியில், தொகை சார்புக்கு அளவான கந்தழித் தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளிகளிருக் கின்றன

ξ 1.2 முதல் வகை: தொகை கந்தழி எல்லை கொண்டது.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

a என்கிற குறிப்பிட்ட எண் எனில், α என்ற எண் $(\alpha > a)$ எனில், இடைவெளி (a, α)ல் $f(x)$ வரம்புக்களடங்கிய தொகை காணக்கூடிய சார்பு என்க. $\int_a^{x} f(x)dx$ஐ $\lim_{x \to \alpha}$ எல்லை

$\int_a^{x} f(x)dx$ (இந்த எல்லைக் காணமுடிந்தால்) என்று வரையறுப்போம். இந்த முடிவுள்ள எண்ணாக எல்லை இருக்குமானால் $\int_a^{x} f(x)dx$ஐ ஒரு அளவில்லாத தொகை என்றும் அது குவிகிறதென்றும் சொல்வோம்.

இதற்கு மாறாக, எல்லை $\int_{a}^{\infty} f(x)dx + \infty$க்கு விரிகிறது
$X \to \infty$

அல்லது வரையறுக்கப்படவில்லையென்று சொல்வோம். இதே மாதிரி $-\infty$க்கு விரிவதற்கு வரையறுக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \int$ எல்லை $_{X \to \infty} \int_{1}^{X} \frac{dx}{x^2}$ = எல்லை $_{X \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right)_{8}^{X}$

= எல்லை $_{X \to \infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$. இங்கு தொகை குவிகிறது.

2. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$ = எல்லை $_{X \to \infty} \int_{0}^{X} e^{-X} dx = \mathrm{Lt}_{X \to \infty} \left(-e^{-X} \right)_{0}^{X}$

= எல்லை $_{X \to \infty} \left(-e^{-X} + 1 \right) = 1$. இங்கும் தொகை ஒருங்குகிறது

$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2}$ = எல்லை $_{X \to \infty} \int_{0}^{X} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ = எல்லை $_{X \to \infty} \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \frac{x}{a} \right]_{0}^{X}$

= எல்லை $_{X \to \infty} \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \frac{X}{a} - 0 \right] = \frac{\pi}{2a}$; இங்கு தொகை குவிகிறது.

4. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ = எல்லை $_{X \to \infty} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ = எல்லை $\left(2\sqrt{x} \right)_{1}^{X}$

= 2 எல்லை $_{X \to \infty} (\sqrt{X} - 1)$

$= \infty$ இங்கு ∞க்கு விரிவாகிறது அல்லது இருக்கவில்லை.

5. $\int_{1}^{\infty} \log x \, dx$ = எல்லை $_{X \to \infty} \int_{1}^{X} \log x \, dx$ = எல்லை $_{X \to \infty} \left(x\log x - x \right)_{1}^{X}$

(பகுதிப்படுத்தி தொகை கண்டபின்)

$= \lim_{X\to\infty}$ எல்லை $[(X\log X - 1)+1 \to \infty]$ தொகை ∞க்கு விரிவா கிறது.

6. $\int_1^\infty \log\frac{1}{x}\,dx = \lim_{X\to\infty}$ எல்லை $\int_1^X \log\frac{1}{x}\,dx = -$எல்லை $\int_1^X \log x\,dx$

$=$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $(x\log x - x) = -$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $(X\log X - X+1) \to -\infty$

தொகை $-\infty$க்கு விரிகிறது.

7. $a>0$ எனில், $\int_a^\infty \sin x dx =$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $\int_a^X \sin x dx$

$=$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $\left(-\cos x\right)_a^\infty$ $=$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $(\cos X+\cos a)$

$\cos x$ ஓர் வரம்புள்ள சார்பு; ± 1க்குள்ளடங்கியது. ஆகையால் தொகைக்கு அளவுள்ள ஊசலாட்டமிருக்கிறது.

ξ 1.3 $-\infty$க்கு தொகை $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

b என்பது குறிப்பிட்ட எண் எனில், $X<b$ எனில், இடைவெளி $[x, b]$ல் $f(x)$ வரம்புக்குள்ளடங்கிய தொகை காணக் கூடிய சார்பாயிருந்தால், $\int_{-\infty}^b f(x)dx =$ எல்லை $_{X\to\infty}$ $\int_X^b f(x)dx$ (இந்த எல்லை காண முடிந்தால்) என்று வரையறுப்போம்.

$\int_{-X}^b f(x)dx$ஐ ஒரு அளவில்லாத தொகை என்றும், அது குவிகிறதென்றும் சொல்லுவோம். இதற்கு மாறாக, $\int_X^b f(x)dx$, $+\infty$க்கோ, $-\infty$க்கோ விரியலாம்; அல்லது அளவுள்ள அல்லது அளவில்லாத ஊசலாட்டமிருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $$\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \int_{X}^{0} e^{x}dx = \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \left(e^{x}\right)_{X}^{0}$$

$$= \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} (1 - e^{x}) = 1;$$ தொகை குவிகிறது.

2. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-3x)^2} = \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \int_{X}^{0} \frac{dx}{(1-3x)^2}$$

$$= \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{3}\left(1-3x\right)_{X}^{0}$$

$$= \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-3X}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$ தொகை ஒருங்குகிறது.

3. $$\int_{-\infty}^{0} \cos hx\, dx = \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \int_{\infty}^{0} \cos bx dx$$

$$= \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \left(\sin hx\right)_{X}^{0}$$

$$= 0 - \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \sin hX$$

$$= - \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \frac{e^{X} - e^{-X}}{2} = \infty$$ தொகை விரிவாகிறது.

4. $$\int_{-\infty}^{0} x \sin x\, dx = \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \int_{X}^{0} x \sin x dx$$

$$\underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} \left(-x\cos x + \sin x\right)_{X}^{0}$$ [பகுதிப்படுத்தி தொகை கண்டபின்]

$$= \underset{X\to-\infty}{\text{எல்லை}} (X\cos X - \sin X)$$

$\cos X$, $\sin X$ இவ்விரண்டும் ± 1க்கிடையே ஊசலாகும். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட தொகை அளவில்லாத ஊசலாட்டமுள்ளதாயிருக்கிறது.

§ 1 4 $-\infty$ யிலிருந்து ∞ வரை தொகைகள்:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-ம் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-ம் இரண்டும் குவிந்தால்

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ குவிகிறதன்று வரையறுப்போம்; அப்பொழுது இது முன்சொன்ன இரண்டு தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை எனப்படும்.

குறிப்பு

தொகையின் மதிப்பு பயன்படுத்திய Xஐ சாரவில்லை என்பதை கவனிக்கவேண்டும்.

மாதிரிக்கணக்கு

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ குவிகிறது என்று காண்க.

நிரூபணம்

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

§ 1.5 இரண்டாவது வகை; தொகை காணும் இடைவெளியில் சில புள்ளிகளில் தொகைச் சார்பு கந்தழி மதிப்பைப் பெறுவது.

(a) $[a, b]$-என்கிற சார்பில் $f(x)$ன் அளவற்றத் தொடர்ச்சியின்மை உள்ள ஒரே புள்ளி கீழ் எல்லை 'a' ஆயிருக்கட்டும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\in > 0$ எனில், $[a+\in, b]$ இடைவெளியில் $f(x)$ வரம்புள்ள தொகை காணக்கூடிய சார்பாயிருக்கட்டும்.

எல்லை $\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$ இருக்குமெனில், இதை $\int_{a}^{b} f(x)dx$ என்று குறிப்போம். இந்த எல்லை அமைந்திராவிட்டால், தொகை குவியவில்லையென்று கூறுவோம்.

(b) இவ்வாறே, மேல் எல்லை 'b' $f(x)$-ன் அளவற்ற தொடர்ச்சியின்மை உள்ள ஒரே புள்ளியாய் இருந்தால், மேலும் $f(x)$, $[a, b-\epsilon]$-ல் வரம்புள்ள தொகை காணக்கூடிய சார்பாயிருந்தால்,

எல்லை $\int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$ இருக்குமெனில், இதை

$\int_{a}^{b} f(x)dx$ என அழைப்போம்.

(c) a, b இரண்டும் அளவற்றத் தொடர்ச்சியின்மை உள்ள புள்ளிகளாயிருக்கட்டும்.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx \quad (a<c<b)$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

(d) c என்கிற உட்புள்ளியில் $(a<c<b)$, $f(x)$ அளவற்றத் தொடர்ச்சியின்மை அமைந்துள்ளது என்றிருக்கட்டும்,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \int_{c}^{c-\epsilon} f(x)dx + \text{எல்லை}_{\epsilon' \to 0} \int_{c+\epsilon'}^{b} f(x)dx$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

ϵ, ϵ' பூச்சியத்தை சார்பில்லாமல் நெருங்கும்பொழுது மேலே குறிப்பிட்ட எல்லைகள் சில சமயங்களில் அமைவதில்லை. ஆனால் $\epsilon = \epsilon'$ எனில், கோஷியினால் வரையறுக்கப்பட்ட முதல் தொகை என வழங்கப்படும்.

$$\text{தொகை } P\int_a^b f(x)dx = \text{எல்லை}_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx$$

$$+\text{எல்லை}_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$ என்று குறிக்கிறோம்; (எல்லைகள் அமைந்திருந்தால்)

(c) கந்தழியின் தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகள் $x_1, x_2 \ldots x_n$, $[a, b]$-ல் இருக்கட்டும்.

$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots x_n \leqslant b$ எனில்,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_n}^b f(x)dx,$$

வலது பக்கத்திலிருக்கும் தொகைகள் முன் கூறியபடி வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

குறிப்பு

$[a, b]$-ல், $f(x)$ வரம்புள்ள தொகை காணக்கூடிய சார்பெனின்,

$\int_a^b f(x)dx$ஐ **தகு தொகை** (proper imtegral) என்று கூறுவோம். $f(x)$-ற்கு கந்தழித் தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகள் அமையுமாயின், $\int_a^b f(x)dx$ஐ **தகாத தொகை** (improper integral) என்று சிலரால் வழங்கப்படும்.

மாதிரிக்கணக்குகள்

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ -ஐ ஆராய்வோம்.

0-ல் தொகை சார்பு தொடர்ச்சியில்லை வரையறைப்படி,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \text{எல்லை}_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ (இந்த எல்லை இருப்பின்)

$$= \text{எல்லை}\left(2\sqrt{x}\right)_\epsilon^1$$

$$2 \lim_{\epsilon \to 0} (1 - \sqrt{\epsilon}) = 2$$

(எல்லை = lim)

ஆகவே $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ குவிகிறது.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$-ஐ ஆராய்க.

தொகை சார்பு $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$க்கு $x = 1$ல் தொடர்ச்சியின்மையுள்ளது.

வரையறைப்படி,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(இந்த எல்லை இருப்பின்)

$$= \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \left(\sin^{-1} x \right)_0^{1-\epsilon}$$

$$= \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \sin^{-1}(1-\epsilon) = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகை குவிகிறது.

3. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$-ஐ ஆராய்க.

$x = 0$ தொகை சார்புக்கு தொடர்ச்சியில்லாத புள்ளி வரையறைப்படி,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \text{எல்லை}_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon^1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

(இந்த எல்லைகள் இருப்பின்)

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left(3x^{\frac{1}{3}} \right)_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon^1\to 0} \left(3x^{\frac{1}{3}} \right)_{\epsilon^1}^{1}$$

(மேலே உள்ள எல்லாச் சமன்பாடுகளிலும் $\lim$ என்பது பக்கத்தில் "எல்லை" என அச்சிடப்பட்டுள்ளது.)

$$3 = எல்லை_{\epsilon\to 0} \left(1 - \epsilon^{1/3}\right) + 3 எல்லை_{\epsilon^1\to 0} \left(1 - \epsilon^{1\,1/3}\right)$$

$= 3 + 3 = 6.$

4. $P\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ மதிப்பிடு.

$$P\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = எல்லை_{\epsilon\to 0} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x}$$

$$+ எல்லை_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x}$$ (இந்த எல்லைகள் இருப்பின்)

$$= எல்லை_{\epsilon\to 0} \left[\log(-x)\right]_{1}^{-\epsilon} + எல்லை_{\epsilon\to 0} \left(\log x\right)_{\epsilon}^{1}$$

$$= எல்லை_{\epsilon\to 0} \log\epsilon - எல்லை_{\epsilon\leftarrow 0} \log\epsilon = எல்லை_{\epsilon\to 0} \log\frac{\epsilon}{\epsilon}$$

$$= எல்லை \log 1 = 0$$

பயிற்சி XX

பின்வரும் தொகைகளின் குவிதலை ஆராய்க:—

(1) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

(2) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ $(a>0)$

(3) $\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2}$ $(a>0)$

(4) $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$

(5) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(7) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$

(8) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$

(9) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

ξ பீட்டா, காமா சார்புகள்

ξ 2.1 வரையறைகள்

(i) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ ($m>, n>0$ எனின்)

என்கிற தொகையை பீட்டா சார்பென்று கூறுவது வழக்கம். இதை $\beta(m, n)$ என்று எழுதுவோம்.

(ii) $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ $(n>0)$ என்கிற தொகையை காமா சார்பென்று அழைப்போம். அதை $\Gamma(n)$ எழுதுவது வழக்கம்.

ξ 2.2 காமா சார்பின் குவிதல்

$n>0$ எனில்,

$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ குவிகிறது.

$$\Gamma(n)=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

$\int_0^1 x^{n-1}e^{-x} = \text{எல்லை}_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ (இந்த எல்லை இருப்பின்)

x சிறியதாயிருக்கும்பொழுது, தொகை சார்பு x^{n-1}ஐப் போல் தன்மை வாய்ந்துள்ளது; $n>0$, இந்த எல்லை அமையும். இரண்டாவது தொகையில், $e^{x}>\frac{x^r}{\underline{|r}}$ (r ஒரு மிகை முழு எண் எனில்)

$$<\frac{x^{n+1}}{\underline{|r}} \quad (r>n+1 \text{ எனில்})$$

$$\therefore \quad x^{n-1}e^{-x}<\frac{|r}{x^r}$$

$\therefore \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ என்கிற குவியும் தொகையைப் போல்

ஒரு மாறிலி மடங்கைவிட $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ அதிகமாயிராது.

$\therefore \quad n>0$ எனில், $\Gamma(n)$ குவிகிறது.

குறிப்பு

பின்வரும் பக்கங்களில், $\beta(m, n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என்று நிருவுவோம்; ஆகையால் $\beta(m, n)$ $m>0$, $n>0$ எனின் குவிகிறது

§ 2.3 காமா சார்பின் மீட்சி சூத்திரம் (Recurrence formula of Gamma functions)

தேற்றம்

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx \quad (n>-1 \text{ எனின்})$$

$u=x^n$, $dv=e^{-x}dx$ என்று எடுத்துக்கொண்டு, பகுதிப் படுத்தித் தொகைக் கண்டால்

$$\Gamma(n+1)=\Big[-e^{-x}x^n\Big]_0^{\infty}-n\int_0^{\infty}-e^{-x}x^{n-1}dx.$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}x^n=0 \quad (n>0 \text{ எனில்})$$

$\therefore$ எல்லை $e^{-x}x^n$ = எல்லை $\frac{x^y}{e^x} = 0$

$$\therefore \quad \Gamma(n+1) = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$
$$= n\Gamma(n) \ (n>0 \text{ எனில்})$$

[குறிப்பு: $n>0$ எனில், மேற்கூறிய சூத்திரம் உண்மை]

கிளைத் தேற்றம் (i)

n ஒரு மிகை முழு எண் எனில்,

$\Gamma(n+1) = \underline{|n}$

நிருபணம்

மடங்குத் தேற்றத்தின்படி,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$
$$= n(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 1\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x}dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-x}dx$$
$$= \left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$
$$= 1$$

$\therefore \quad \Gamma(n+1) = \underline{|n}$

கிளைத் தேற்றம் (ii)

$\Gamma(n+a) = (n+a-1)(n+a-2)\ \ldots\ a\Gamma(a)$

(n ஒரு மிகை முழு எண் எனில்)

§ 3 பீட்டா சார்பின் தன்மைகள்

(i) $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

நிரூபணம்

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$x = 1 - y$ எனப் பிரதி செய்தால்,

$$\beta(m, n) = \int_1^0 (1-y)^{m-1}y^{n-1}(dy)$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy$$

$$= \beta(n, m)$$

[$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ என்கிற தன்மையிலிருந்து (i) தெளிவாகிறது]

(ii) $\beta(m, n)$ல் $x = \dfrac{y}{1+y}$ என்று பிரதியீடு செய்வோம்

$x = 0$ எனில், $y = 0$; $x = \infty$ எனில் $y = \infty$.

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{n-1}} \frac{1}{(1+y)^{n-1}} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

(iii) $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$-ல்,

$x = \sin^2\theta$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\beta(m, n) = \int^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{m-1} (1-\sin^2\theta)^{n-1} 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2\int^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

இதை $2I_{2m-1,\ 2n-1}$ என்று எழுதுவோம்.

$$\therefore \quad I_{m,n} = \tfrac{1}{2}\beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

§ 4 பீட்டா காமா சார்புகளின் உறவு (தொடர்பு)

தேற்றம்

$\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)(\Gamma n)}{\Gamma(m+n}$ என்று நிறுவுவோம்.

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1}e^{-x}xd$$

$x = t^2$ என்று பிரதி செய்தால்,

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} (t^2)^{m-1}e^{-t^2}2tdt$$

$$= 2\int_0^{\infty} t^{2m-1}e^{-t^2}dt$$

$\therefore \quad \Gamma(m) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}dx$ என எழுதலாம்.

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1}c^{-x^2}dy$$

$$\therefore \quad \Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_0^{\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} y^{2n-1}e^{-y^2}dy$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-}(x^2+y^2)dxdy$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ என்று பிரதியீடு செய்தால், $dxdy = rdrd\theta$

x, y-ன் எல்லைகள் 0-விலிருந்து ∞ வரையாயிருப்பதால்' x, y முதல் காற்பகுதி ஒரு புள்ளியின் கூறுகள்.

r-ன் எல்லைகள் 0விலிருந்து ∞ வரை,

θ-ன் எல்லைகள் 0விலிருந்து $\pi/2$ வரையாகும்.

$$\therefore \quad \Gamma(m)\ \Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2n+2m-1} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2n+2m-1} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2n+2m-1} dr \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

இப்பொழுது, $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m+2n-1} dr$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-t} dt \quad (r^2 = t \text{ என்று பிரதியீடு செய்தால்})$$

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma(m+n)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta = I_{2m-1,\ 2n-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\beta(m, n)$$

$$\therefore \quad \Gamma(m)\ \Gamma(n) = 4.\tfrac{1}{2}\beta(m, n)$$

$$= \Gamma(m+n)\ \beta(m, n)$$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

கிளைத் தேற்றங்கள்

(i) $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$m = n = \tfrac{1}{2}$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \beta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

ஆனால் $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^o\theta\cos^o\theta\, d\theta$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

$\Gamma(1) = 1$

$\therefore \left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = \pi$

ஆகவே $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(ii) $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$m = 1 - n$ என்று பிரதியீடு செய்க.

$\therefore\ \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \beta(n, 1-n)$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx \ [\xi 3\ (ii)]$$

$$= \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

[இந்த விளைவை நாம் உண்மை என்று கொள்வோம்.]

$n = \frac{1}{2}$ என்று பிரதி செய்தால்,

$$\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \frac{\pi}{\sin\pi/2}$$

(iii) $\xi 3$ (iii)ல் கிடைத்துள்ள சூத்திரம்

$\frac{1}{2}\beta(m, n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

$2m = p,\ 2n = q$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta\cos^{q-1}\theta dx = \tfrac{1}{2}\beta\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} \qquad (1)$$

(i)ல் $q=1$ என்று பிரதி செய்தால்,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \quad \xi 4\,(i) \qquad (2)$$

(i)ல் $p=q$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta\cos^{p-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(p)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2p-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}2\theta d\theta = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{2\Gamma(p)}$$

$2\theta=\phi$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\frac{1}{2p-1}\int_0^{\pi} \sin^{p-1}\phi d\phi \quad \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(p)}$$

(2)ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2p}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{(2)}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(p)}$$ கிடைக்கிறது.

அதாவது

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p-1}\ \Gamma(p) \qquad (3)$$

$p = 2n$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\Gamma(n)\ \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(2n)}{2^{2n-1}} \text{ என்று கிடைக்கும்.} \qquad (4)$$

$n = \frac{1}{4}$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\ \Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\pi$$

§ 5 காமா பீட்டா சார்புகளைப் பயன்படுத்தி சில தொகைகளைக் காணலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $\int_0^1 x^m \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx$, என்பதை மதிப்பிடு:

$\log \frac{1}{x} = t$ அதாவது $x = e^{-t}$ என்று பிரதி செய்தால்,

$$dx = -e^t dt$$

எனவே $\int_0^1 x^m\left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = \int_\infty^0 (e^{-t})^m t^n(-e^{-t})dx$

$$= \int_0^\infty e^{-(m+n)t} t^n dt$$

$(m+1)\ t = y$ என்று பிரதி செய்தால்; $dt = \frac{dy}{m+1}$

வேண்டிய தொகை $= \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^m}{(m+n)^n}\ \frac{1}{m+1} dy$

$$= \frac{1}{(m+1)^{n+1}}\ \Gamma(n+1)$$

2. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ஐ மதிப்பிடுக.

$x^2 = t$ அதாவது $2x = dt$ என்று'பிரதி செய்தால்,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. பின்வரும் தொகைகளைக் காண்க:—

(i) $\int_0^1 x^7(1-x)^8\,dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^5\theta\,d\theta$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10}\theta\,d\theta$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$

(i) $\int_0^1 x^7(1-x)^8\,dx = \beta(8, 9)$

$$= \frac{\Gamma(8)\,\Gamma(9)}{\Gamma(17)}$$

$$= \frac{\underline{|7}\;\underline{|8}}{\underline{|16}}$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^5\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\beta\left(\frac{7+1}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$

[§3 (iii)யின்படி]

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma(4)\,\Gamma(3)}{\Gamma(7)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\underline{|3}\;\underline{|2}}{\underline{|6}}$$

$$= \frac{1}{120}$$

$$\text{(iii)} \int_0^{\pi/2} \sin^{10}\theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

[ξ4 கிளைத்தேற்றம் 3(i)-ன்படி]

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\quad\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[\Gamma\frac{1}{2}]^2}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{9\cdot7\cdot5\cdot3}{64\cdot\underline{|5}}(\sqrt{\pi})^2$$

$$= \frac{63\pi}{512}$$

$$\text{(iv)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\Gamma\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})}$$

[ξ4 கிளைத்தேற்றம் 3(i)-ன் படி]

$$= \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{3}{4})\,\Gamma(\tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}$$

[ξ4 கிளைத்தேற்றம் (ii)-ன்படி]

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx$ என்னும் தொகையைக் காமாச் சார்பின் மூலம் மதிப்பிடு; குறிப்பாக $\int_0^1 x^5(1-x^3)^{16} dx$ - ன் மதிப்பைக் காண்க.

$x^n = y$; அதாவது, $nx^{n-1}dx = dy$ என்று பிரதியீடு செய்யின்,

$$\int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx = \int_0^1 y^{\frac{m}{n}} (1-y)^p \frac{dy}{ny^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{m-n+1}{n}} (1-y)^p dy$$

$$= \frac{1}{n}\beta\left(\frac{m-n+1}{n}+1, p+1\right)$$

$$= \frac{1}{n}\beta\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}$$

$$\therefore \int_0^1 x^5(1-x^3)^{10} dx = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{3}\right)\Gamma(10+1)}{\Gamma\left(\frac{5+1}{3}+10+1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(11)}{\Gamma(13)} = \frac{1}{396}$$

5. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta d\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{m+n}} = \frac{\beta(m, n)}{2a^m b^n}$$

என்று காண்க.

$\tan\theta = t$ என்று தொகையில் பிரதியீடு செய்யின்,

$$\text{தொகை} = \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{(a+b+2)^{m+n}} dt$$

$\sqrt{b}\, t = \sqrt{a\, y}$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\text{கொடுக்கப்பட்ட தொகை} = \frac{1}{2a^m b^n}\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$$= \frac{\beta(m, n)}{2a^m b^n}$$

பயிற்சி XXI

1. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \,..\, (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ என்று காண்க.

2. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \,..\, (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$ என்று நிரூபி.

3. $\frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p+1, q)}{p} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$ என்று காண்க.

4. பின்வரும் தொகைகளை மதிப்பீடு செய்க:

(i) $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx$

(ii) $\int_0^\infty e^{-x^3} dx$

(iii) $\int_0^\infty e^{-x^4} dx$

(iv) $\int_0^\infty x^4 e^{-x^4} dx$

(v) $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^6\theta \, d\theta$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta \cos^7\theta \, d\theta$

(vii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$

(viii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

(ix) $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(x) $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx$

5. பின்வரும் சமன்பாடுகளை சோதனை செய்க:

(i) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta = \pi$

(ii) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx \times \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}$

(iii) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}} \times \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(iv) $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)^3} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$

[**விடைகள் :** (i) $\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$ (ii) $\Gamma(\frac{4}{3})$ (iii) $\Gamma(\frac{5}{4})$

(iv) $\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{4})$ (v) $\frac{3\pi}{512}$ (vi) $\frac{1}{280}$

(vii) $\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\sqrt{\pi}$ (viii) $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}$

(ix) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$ (x) $\frac{8}{63}$]

§ 6. பன்மாறித் தொகைகளுக்குக் காமாச் சார்பின் உபயோகங்கள்

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. காமாச் சார்புகளைப் பொருத்தி

$$\iint x^p y^q dy\, dx \text{ ஐ}$$

முக்கோணப் பகுதி $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 1$ மேல் மதிப்பிடு.

முக்கோணத்தை OAB எனில், வெட்டுத்துண்டுகள் $OA=1$, $OB=1$ என ஆகும்.

$$\iint_{\triangle OAB} x^p y^q dx dy$$

$$= \int_0^1 x^p dx \int_0^{1-x} y^q dy$$

$$= \int_0^1 x^p dx \left[\frac{y^{q+1}}{q+1} \right]_0^{1-x}$$

$$= \frac{1}{q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx$$

$$= \frac{1}{q+1} \beta(p+1, q+2)$$

$$= \frac{1}{q+1} \frac{\Gamma(p+1)\ \Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\ \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+3)}$$

2. வட்டம் $x^2+y^2=a^2$-ன் மிகைக் காற்பகுதியின் மேல் $\iint x^p y^q dx\, dy$ ஐ காமாச் சார்புகளைப் பொருத்தி மதிப்பிடு.

(i) வட்டத்தின் பரப்பையும்

(ii) கால்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் கூறுகளையும் நிதானி.

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leqslant 1$ பகுதியின் எல்லைகளை நிர்ணயிக்கின்றன.

$\frac{x}{a} = X^{\frac{1}{2}}, \frac{y}{a} = Y^{\frac{1}{2}}$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$$\iint x^p y^q dx\ dy = \iint \left(aX^{\frac{1}{2}}\right)^p \left(aY^{\frac{1}{2}}\right)^q \tfrac{1}{2}aX^{-\frac{1}{2}} . \tfrac{1}{2}aY^{-\frac{1}{2}}\ dX\ dY$$

$$= \frac{a^{p+q+2}}{4} \iint X^{\frac{p-1}{2}}\ Y^{\frac{q-1}{2}} dXdY,$$

$$\left(\text{பகுதி } X \geqslant 0, Y \geqslant 0, X+Y \leqslant 1\right)$$

$$= \frac{a^{p+q+2}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)} \quad (1)$$

(i) வட்டத்தின் பரப்பு

$$= 4 \iint dx\ dy \quad (\text{பகுதி } x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant a^2)$$

(i)-ல் $p = 0$, $q = 0$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

வட்டத்தின் பரப்பு $= 4\frac{a^2}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \pi a^2$

(ii) காற்பகுதியின் புவிஈர்ப்பு மையம் ($\bar{x}, \bar{y}$) எனின்,

$$\bar{x} = \frac{\int\int xdy\ dx}{\int\int dy\ dx}; \quad \bar{y} = \frac{\int\int ydy\ dx}{\int\int dy\ dx}$$

(பகுதி வட்டத்தின் மிகைக்காற்பகுதி)

தொகுதியை மதிப்பிட, $p = 1$, $q = 0$ என்று (i)-ல் பிரதி செய்க.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{a^3}{4}\ \frac{\Gamma(1)\ \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{a}{\pi}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4a}{3\pi}$$

இவ்வாறே, $\bar{y} = \dfrac{4a}{3\pi}$

3. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x+y+z \leqslant 1$ இவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட நான்முகியின் பருமத்தின் பேரில்,

$\int\int\int x^p y^q z^r\ dx\ dy\ dz$-ஐ மதிப்பிடு.

மேற்சொல்லப்பட்ட தொகை

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^p y^q z^r\ dx\ dy\ dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^p y^q \left[\frac{z^{r+1}}{r+1}\right]_0^{1-x-y} dx\ dy$$

$$= \frac{1}{r+1} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^p y^q (1-x-y)^{r+1} dx\ dy$$

$x+y=u$, $y=uv$ என்று பிரதியீடு செய்யின்,

$x=u(1-v)$; $y=uv$ என ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & u \\ -u & u \end{vmatrix} = u$$

$$\therefore \quad dx\,dy = u\,du\,dv$$

$x=0$ எனின், $u(1-v)=0$, அதாவது $u=0$ அல்லது $v=1$. $y=0$ எனின், $uv=0$, அதாவது $u=0$. அல்லது $v=0$. $x+y=1$ எனின், $u=1$.

$x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ இவைகளால் வரையறுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $\triangle OAB$, uv தளத்தில் $u=0, u=1, v=0, v=1$ இவைகளுக்குள்ளடங்கிய பரப்பாக மாறுகிறது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \frac{1}{r+1}\int_0^1\int_0^1 u^p(1-v)^p\,(uv)^q\,(1-u)^{r+1}u\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{r+1}\int_0^1\int_0^1 u^{p+q+1}v^q(1-u)^{r+1}\,(1-v)^p du\,dv$$

$$= \frac{1}{r+1}\int_0^1 u^{p+q+1}(1-u)^{r+1}du \int_0^1 v^q(1-v)^p dv$$

$$= \frac{1}{r+1}\,\beta(p+q+2, r+2)\,\beta(q+1, p+1)$$

$$= \frac{1}{r+1}\,\frac{\Gamma(p+q+2)\;\Gamma(r+2)}{\Gamma(p+q+r+4)}\,\frac{\Gamma(q+1)\;\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+2)}$$

$$= \frac{1}{r+1}\,\frac{\Gamma(r+2)\;\Gamma(p+1)\;\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+4)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+4)}.$$

4. $$\int\int\int \frac{dx\ dy\ dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^2}{8}\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,$$

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ எனின்.)

$x^2 = X,\ y^2 = Y,\ z^2 = Z$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

காணவேண்டிய தொகை $= \frac{1}{8}\int\int\int \frac{dX\ dY\ dZ}{\sqrt{xyz}}(1-X-Y-z)^{-\frac{1}{2}}$

$(X > 0,\ Y > 0,\ Z > 0,\ X+Y+Z < 1)$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 X^{-\frac{1}{2}}dX \int_0^{1-x} Y^{-\frac{1}{2}}dY$$

$$\int_0^{1-x-y} Z^{-\frac{1}{2}}\ (1-X-Y-Z)^{\frac{1}{2}}dZ$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 X^{-\frac{1}{2}}dX \int_0^{1-x} Y^{-\frac{1}{2}}dY \int_0^{\pi/2} Zd\theta$$

$[Z = (1-X-Y)\sin^2\theta$ என்று பிரதியீடு செய்யின்$]$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 X^{-\frac{1}{2}}(1-X)^{\frac{1}{2}}dX$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \beta(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \frac{1}{2}\left[\ \Gamma(\tfrac{1}{2})\ \right]^2$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

பயிற்சி XXII

பின்வரும் (1—3) தொகைகளைக் குறிக்கப்பட்டுள்ள பகுதியில் மதிப்பிடுக:

1. $\iint x^p y^q dy\, dx \left(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant h\right)$

2. $\iint x^p y^q dy\, dx\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1)$

(i) நீள்வட்டத்தின் பரப்பையும்

(ii) நீள்வட்டத்தின் மிகைக் காற்பகுதியின் புவிஈர்ப்பு மையத்தின் கூறுகளையும்

(iii) x அச்சைப் பற்றிய சடத்துவச் சுழல்திறனையும் காண்க.

3. $\iint \sqrt{xy(1-x-y)}\ dx\, dy\ \ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1)$

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்கிற நீள்வளையக் கோளத்தின் பருமனைக் காண்க.

[விடைகள் : (1) $\dfrac{h^{p+q+2}\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+3)}$

(2) $\dfrac{a^{p+1} b^{q+1}}{4} \quad \dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+2\right)}$

(i) πab (ii) $\left[\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right]$ (iii) $\frac{1}{4}Mb^2$

(3) $\dfrac{2\pi}{105}$

(4) $\dfrac{4}{3}\pi abc$]