கணித இ

டாக்டர் அ. தன

டாக்டர் கி. பி

தமிழ்நாட்டுப் ப

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—763

கணித இயற்பியல்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்கள் :

டாக்டர் அ. தனலட்சுமி, எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி., பிஎச்.டி.,
பேராசிரியர், இயற்பியல்துறைத் தலைவர்,
சீதாலட்சுமி இராமசாமி கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி.

டாக்டர் கி. பிரேமா,
விரிவுரையாளர் இயற்பியல்துறை,
சீதாலட்சுமி இராமசாமி கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—September, 1977
Number of copies—2,000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 763

© Government of Tamilnadu

ELEMENTS OF MATHEMATICAL PHYSICS

DR. A. DHANALAKSHMI AND DR. K. PREMA

Price Rs. 7-95

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
ELANGOVAN PRINTERS
23, Muthu Mudali Street, Royapettah,
Madras-600 014.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டு கள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற் றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறை வும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர் களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சி யைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சி யைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணித வியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றுன **கணித இயற்பியல்** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **763** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **798** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் ‘மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட’த்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். ‘எதிலும் தமிழ் ; எங்கும் தமிழ்’ என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்த தாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவி களுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	வெக்டார் பகுப்பாய்வு	...	1
2.	அணிக்கோவைகள்	...	114
3.	அணிகள்	...	134
4.	கந்தழித் தொடர்முறைகள், தொடர்கள்	...	175
5.	சிக்கல் எண்கள், சிக்கல் மாறிகள்	...	241
6.	நிகழ்திறமும் பிழைக்கொள்கையும்	...	272
மேற்கோள் நூற்பட்டியல்		...	315
கலைச்சொற்கள்		...	317

1. வெக்டார் பகுப்பாய்வு

தொடக்கவுரை

1. வெக்டாரின் இயற்கணிதம்

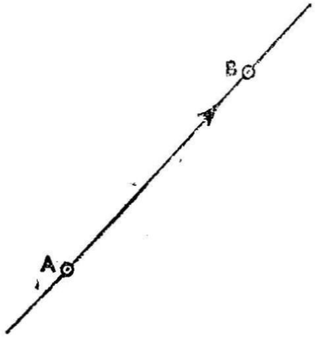
எந்திரவியல், செயல்முறை கணிதம் போன்ற தலைப்புகளின் கீழுள்ள சில முக்கியமான கணக்கு முறைகளை ஆய்வதற்கு அமைந்துள்ள பல வழிகளில் ஒன்ருக வெக்டார் அமைந்துள்ளது.

இயற்பியலிலும், வேறு பல துறைகளிலும் நாம் காணும் அளவுகளை, கணியங்களை இருவகைப் படுத்தலாம். அவையாவன: (1) ஸ்கேலார் அளவு, (2) வெக்டார் அளவு. ஒருசில கணியங்கள் எண் மதிப்பு மட்டிலும் (magnitude) தெரிந்தாலே அறுதியிட்டு நிர்ணயிக்கத் தக்கனவாயிருக்கின்றன. மூவளவை வெளியில் (3-dimensional space) அவற்றின் திசை என்னவென்று அறிய வேண்டியதில்லை. உதாரணமாக, ஒரு பொருளின் நிறை அல்லது பொருண்மை (mass), நீளம், கன அளவு, உஷ்ணநிலை, வேகம் (speed) போன்றவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இம்மாதிரி கணியங்களைத் திசையிலி (scalar) என்கிருேம். இவைகளை ஏதோ ஓர் அளவு கோல் அல்லது அலகு (unit) கொண்டு அளந்து, அவ்வளவினை ஒரு மெய் எண்ணுல் குறிக்கிருேம். இதற்கு மாருக எண் மதிப்போடு திசையும் சேர்ந்து குறிப்பிட்டால் மட்டுமே உண்மையான பொருள் கொடுக்கும் வேறு சில கணியங்களும் உள்ளன. அவற்றினை வெக்டார் (vector) என்கிருேம். இதற்கு உதாரணமாக, திசை வேகம் (velocity), முடுக்கம் (acceleration), விசை (force) போன்றவற்றினைக் குறிப்பிடலாம்.

திசையிலிகளை முழுமையாகக் குறிப்பிடுவதற்கு (1) திசையிலி அலகையும், (2) குறிப்பிட்ட திசையிலி கணியம் எவ்வளவு திசையிலி அலகைக் கொண்டுள்ளது என்றும் அறிய வேண்டும். ஆனுல், வெக்டார்களைக் குறிப்பிடுவதற்கு (1) வெக்டார் அலகு, (2) குறிப்பிட்ட வெக்டார் கணியம் எவ்வளவு வெக்டார் அலகுகளைக் கொண்டுள்ளது என்ற அறிவு, (3) திசைபற்றிய குறிப்பு ஆகிய மூன்றும் தேவைப்படுகின்றன.

1-01. திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் (Directed line segments)

வெக்டாரைக் குறிக்கும் முறை : வெறும் அளவுகளிலிருந்து வெக்டாரை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்காக, நாம் அவ்வெழுத்து களின்மீது தலைக்கோடிட்டுக் காட்டலாம். படத்தின் மூலம் ஒரு வெக்டாரைக் குறிக்க, திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டினைப் பயன்படுத்தலாம். ஆரம்பப் புள்ளி முற்றுப் புள்ளி களால் வரையறுக்கப்பட்ட, நேர்கோட்டின் எந்த ஒரு பகுதியும் திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டு எனக் கூறப்படும்.



படம் 1

படம் (1)-ல் காட்டியுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டு $\overline{AB}$, A-யினை ஆரம்பப் புள்ளி யாகவும், B-யினை முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்டு, A-யிலிருந்து B-க்கு என்ற திசையுணர்வையும், AB என்ற அளவினையும் கொண்டு விளங்குவதால் $\overline{AB}$, ஒரு வெக்டாரைக் குறிக்கிறது. A-ஐயும், B-ஐயும் இடம் மாற்றினால் இரண்டும் ஒரே திசை நேர்க் கோட்டினைக் குறிக்காது. $\overline{AB}$, ஒரு திசையைக் குறித்தால், $\overline{BA}$ மற்றொரு திசையைக் குறிக்கும். ஆனால், அவை அளவில் மட்டும் சமமாய் இருக்கும்.

திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டுகளின் சிறப் பியல்புகள் :

ஒவ்வொரு திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டும் பின்வரும் மூன்று இயல்புகளைக் கொண்டுள்ளது : (1) நீளம், (2) ஆதாரம் (support), (3) திசையுணர்வு (sense).

1. நீளம் : திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டின் நீள மானது $|\overline{AB}|$ என்று குறிக்கப்படும். இதிலிருந்து $\overline{AB}$-யும் $\overline{BA}$-யும் ஒரே நீளமுள்ளவை எனத் தெளிவாகத் தெரிகிறது.

$$|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$$

2. ஆதாரம் : திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டு எந்த நேர்கோட்டின் பகுதியாக அமைகிறதோ, அந்த நேர் கோடு ஆதாரக் கோடு அல்லது ஆதாரம் எனப்படும்.

3. திசையுணர்வு : $\overline{AB}$-யின் திசையுணர்வு, A-யிலிருந்து B-ஆகவும், $\overline{BA}$-யின் திசையுணர்வு B-யிலிருந்து A-ஆகவும் அமைகிறது. அதாவது நேர்கோட்டுத் துண்டின் திசையுணர்வு, அதன் ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து, முடிவுப் புள்ளியின் திசையில் அமைகிறது. எனவே, $\overline{AB}$-யும், $\overline{BA}$-யும் ஒரே நீளமும் ஆதாரமும் உள்ளனவாயும், ஆனல் வெவ்வேறு திசையுணர்வுகளைக் கொண் டனவாயும் இருக்கின்றன.

1-02. வெக்டாரின் வகைகள்

1. ஓரலகு வெக்டார் (Unit vector) : ஒரு வெக்டாரின் எண் மதிப்பு ஒருமை (1) என்று இருந்தால், அவ் வெக்டாரை ஓரலகு வெக்டார் என்கிறோம். $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, எனும் வெக்டார்களின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டார்கள் முறையே $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}, \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}$ ஆகும். இவற்றை $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

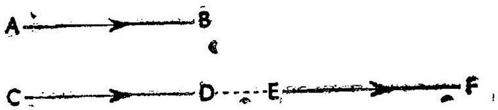
2. சுழி வெக்டார் (Null vector or zero vector): எண் மதிப்பு சுழியமாக உள்ள வெக்டார் சுழி வெக்டார் எனப்படும். இதன் ஆரம்பப் புள்ளியும் முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றியிருக்கும். எனவே, இதன் திசை நிர்ணயிக்க இயலாது.

3. ஒத்த வெக்டார்கள் (Like vectors) : இணையான தாங்கும் கோடுகளையுடைய வெக்டார்கள் ஒத்த வெக்டார்கள் எனப்படும்.

4. சம வெக்டார்கள் (Equal vectors): ஒரே அளவான எண் மதிப்பும் ஒரே திசையும் கொண்ட வெக்டார்கள் சம வெக்டார் கள் எனப்படும்.

படம் 2-ல் $AB = CD = EF$ எனும்படியும், $AB \parallel CD \parallel EF$ எனும்படியும் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

$$\therefore \quad \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$$



படம் 2

5. எதிர்மறை வெக்டார் (Negative vector) : $\bar{a}$ எனும் வெக்டாரின் எண்மதிப்பும், $\bar{a}$-ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையும் உடைய வெக்டாரைக் $\bar{a}$-ன் எதிர்மறை வெக்டார் என்கிறோம். இதனை $(-\bar{a})$ எனக் குறிக்கிறோம்.

6. கட்டிலா வெக்டார் (Free vector) : கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டாரின் தாங்கும் கோட்டிற்கு இணையாக மூவளவை வெளியில், எத்தனையோ கோடுகள் வரைய இயலும். அக் கோடுகளில் எடுக்கப்படும், திசைக் குறியிட்ட கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாரின் எண் மதிப்பிற்குச் சமநீளமுள்ள, நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் அனைத்தும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாருக்குச் சமம். எனவே, வெக்டாரின் ஆரம்பப் புள்ளி குறிப்பிடப்படாத வரையிலும், அவ் வெக்டாரைக் கட்டிலா வெக்டார் (free vector) என்கிறோம்.

7. அறுதியிட்ட வெக்டார் (Localised vector) : வெக்டாரின் ஆரம்பப் புள்ளி அறுதியிட்டுக் கூறப்பட்டு விட்டால், அப் புள்ளி வழியே, கொடுக்கப்பட்ட எண் மதிப்பும் திசையும் கொண்டதாய் ஒரேயொரு வெக்டார்தான் வரைய இயலும். எனவே, இவ்வகை வெக்டார்களை அறுதியிட்ட வெக்டார்கள் என்கிறோம்.

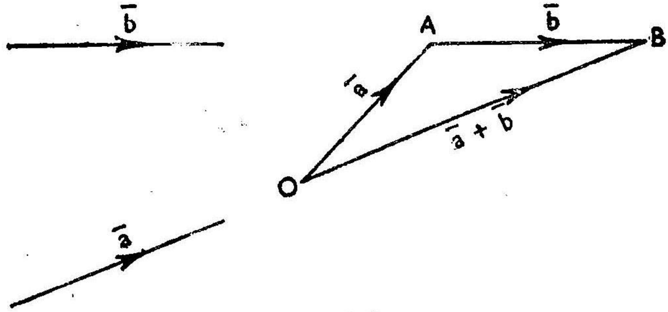
8. தலைகீழ் வெக்டார் (Reciprocal vector) : $\bar{a}$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டாரின் திசையில் அமைந்து ஆனால் எண்ணளவு $\frac{1}{|\bar{a}|}$ கொண்ட ஒரு வெக்டாரை $(\bar{a})^{-1}$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\bar{a} = a\hat{a} \text{ எனில், } (\bar{a})^{-1} = \frac{\hat{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{a}}{a^2}.$$

1-03. வெக்டார் இயற்கணிதம்

(1) வெக்டார் கூட்டல் : $\bar{a}\ \bar{b}$ என்பவை கூட்டப்படவேண்டிய இரண்டு வெக்டார்களாக இருக்கட்டும். O என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து வெக்டார் $\bar{a}$-க்குச் சமமான வெக்டார் $\overline{OA}$-யும், வெக்டார்

$\overline{OA}$-ன் முற்றுப்புள்ளி A-ஐ ஆரம்பப் புள்ளியாகக்கொண்டு வெக்டார் $\overline{b}$-க்குச் சமமான வெக்டார் $\overrightarrow{AB}$-ஐயும் வரைந்துகொள் (படம் 3).



படம் 3

O, B என்ற இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டினால் இணைத்தால் வரும் வெக்டார் $\overrightarrow{OB}$, வெக்டார்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$ இவையிரண்டின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

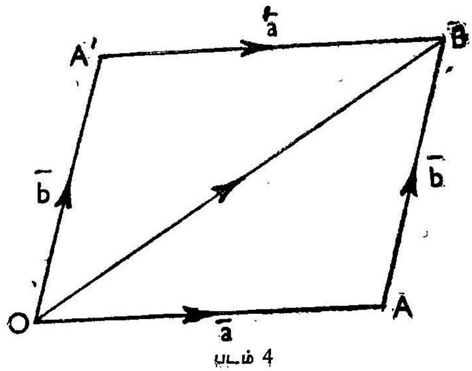
$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}$$

இதை வெக்டார் கூட்டல் வாய்பாடு எனலாம்.

(அ) வெக்டார்களின் கூட்டல் மாற்று விதிக்கு உட்பட்டது. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

$\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$ ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore \ \bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$



படம் 4

OA-யும், AB-யும் அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக்கொண்டு $OABA'$ என்ற ஓர் இணைகரம் வரைந்துகொள், (படம் 4). இப்பொழுது $\overline{OA'} = \overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{A'B} = \overline{OA} = \bar{a}$.

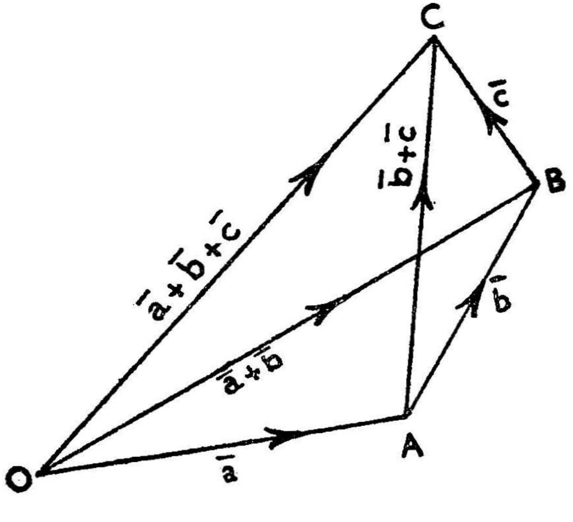
$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB} = \overline{OA'} + \overline{A'B} = \bar{b} + \bar{a}$$

எனவே, வெக்டார்களின் கூட்டல் மாற்று விதிக்கு உட்பட்டது என அறிகிறோம்.

(ஆ) வெக்டார்களின் கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டது. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.

O என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள் (படம் 5). $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{c}$.

$$\bar{b} + \bar{c} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$



படம் 5

ஆனல் $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$

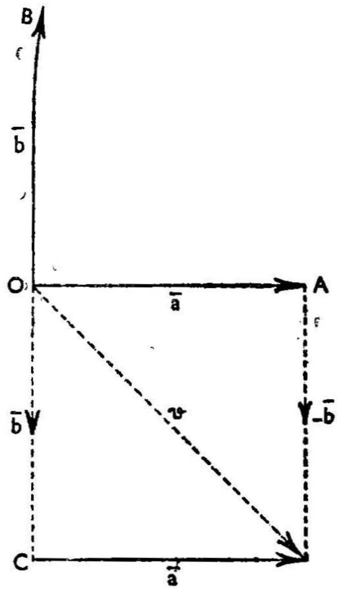
மேலும், $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

எனவே $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$

இதிலிருந்து $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{OC} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

அல்லது $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ என்பது வெளிப்படை.

(2) வெக்டார் கழித்தல் : $\bar{b}$ என்ற வெக்டாரை, வெக்டார் $\bar{a}$-யிலிருந்து கழிப்பது, வெக்டார் $\bar{a}$-யுடன் வெக்டார் $\bar{b}$-யின் எதிர் வெக்டாரான $(-\bar{b})$ ஐக் கூட்டுவதற்குச் சமமாகும். அதாவது $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = \bar{v}$. இந்தக் கழித்தல் முறையைப் படம் 6 விளக்குகிறது. இதில் வெக்டார் $\bar{b}$-யின் எதிர் வெக்டார் வரையப்பட்டு, வெக்டாரின் கூட்டு விதி பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.



படம் 6

(3) வெக்டாரை ஒரு திசையிலியால் பெருக்கல் : n, $\bar{a}$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட ஒரு திசையிலியாகவும் ஒரு வெக்டாராகவும் முறையே கொள்ளவும். இவற்றின் பெருக்குத் தொகையான $n\,\bar{a}$, கீழ்க்குறிப்பிட்டுள்ள பண்புகளைக் கொண்ட ஒரு வெக்டாராகும்.

(அ) வெக்டார் $n\bar{a}$-யின் ஆதாரம், வெக்டார் $\bar{a}$-யினுடைய ஆதாரமாகவோ அல்லது அதன் இணை ஆதாரமாகவோ இருக்கும்.

(ஆ) வெக்டார் $n\bar{a}$-யின் நீளம்

$$|n\bar{a}| = n\,|\bar{a}| \quad \text{ஆகும்.}$$

இதிலிருந்து n-ன் நேர், எதிர் தன்மைக் கேற்ப (அதன் சுழி மதிப்பு உள்பட) வெக்டார் $n\bar{a}$-யின் நீளம், (n) அல்லது $(-n)$ தடவைகள் $\bar{a}$-யின் நீளத்தைக் கொண்டுள்ளது.

(இ) n-ன் நேர், எதிர் தன்மைக்கேற்ப, வெக்டார் $n\bar{a}$-யின் திசையுணர்வு, வெக்டார் $\bar{a}$-யின் திசையுணர்வுக்கு நேராகவோ எதிராகவோ அமையும்.

மேலே வரையறுக்கப்பட்ட விதிகளிலிருந்து பின்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்:

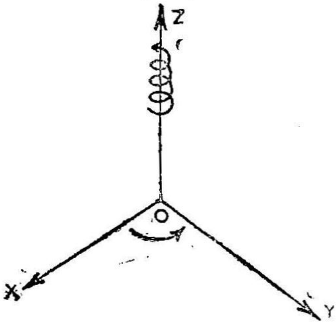
(i) $(mn)\ \bar{a} = m\ (n\bar{a})$

(ii) $0\ \bar{a} = 0$, அதாவது சுழியை வெக்டார் $\bar{a}$ ஆல் பெருக்கினுல் சுழி வெக்டார் கிடைக்கும்.

(iii) $1\ \bar{a} = \bar{a}$.

1-04. வலக்கை, இடக்கை திருகு மரபுகள்

படம் 7-ல் உள்ள OX, OY, OZ என்ற நேர்கோடுகள், புள்ளி O-விலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வரையப்பட்டதாகக் கொள். இவை வலக்கை திருகு மரபை ஒட்டிய குத்துக் கோடுகள் எனப்படும். OX என்னும் அச்சை OY-யுடன் சேர்க்கத் திருகுவதுபோல் ஒரு சாதாரண இரும்புத் திருகின் முனை OZ என்னும் அச்சின் முனையுள்ள திசையில் நகரும். சீசா மூடிகள் இத்தகைய திருகு போன்றவையாகும்.



படம் 7

வலக்கையில் உள்ள சுண்டு விரல், மோதிர விரல் இவைகளை மடக்கிக் கொள்ளவும்: நடு விரலைக் கைக்குக் குத்தாகக் கொண்டு மற்றிரு விரல்களை விரித்துக் கொண்டோமென்ருல் கட்டை விரல் X-அச்சையும், ஆள்காட்டி விரல் Y-அச்சையும், நடுவிரல் Z-அச்சையும் குறிக்கும்.

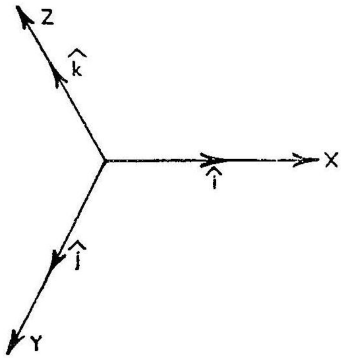
இதே மாதிரி, இடக்கை திருகு முறையையும் பயன்படுத்தி ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள மூன்று அச்சுகளை வரைந்து கொள்ளலாம்.

1-05. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ எனும் அலகு வெக்டார்கள்

வழக்கத்திலுள்ள அலகு வெக்டார்கள், வலக்கை திருகு மரபைப்பற்றி வரையப்பட்ட கார்டீசியின் குறியீட்டு அச்சுகளின் திசைகளைக்கொண்டுள்ளது (படம் 8).

$\hat{i}$ என்ற அலகு வெக்டார் கிடைநிலை முறையின் நேர் X-அச்சு திசையைக் கொண்டுள்ளது, $\hat{j}$ என்ற அலகு வெக்டார் நேர் Y-அச்சுத் திசையையும் $\hat{k}$ என்ற அலகு வெக்டார் நேர் Z-அச்சுத் திசையையும் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வெக்டாரும், எந்தத் திசையுணர்வைக் கொண்டிருந்தாலும், அது அதனுடைய எண் மதிப்பு, அந்தத் திசையின் அலகு வெக்டார் ஆகிய இவை இரண்டின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதப்படும்.

$$\bar{A} = a\hat{k} \qquad \dots(1)$$



படம் 8

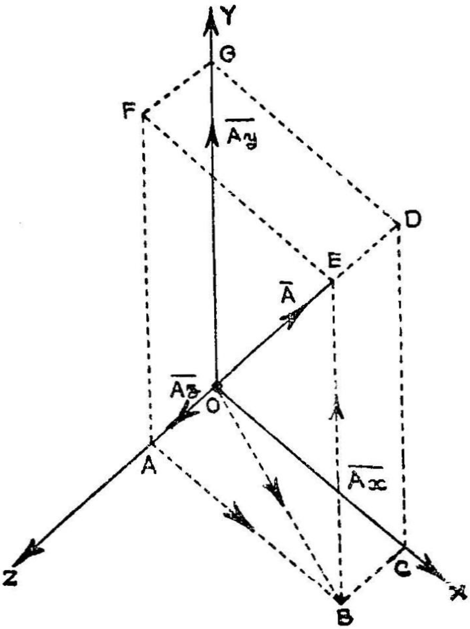
இங்கு $\hat{k}$ என்பது $\bar{A}$-யின் திசையிலுள்ள அலகு வெக்டாராகும். a என்பது வெக்டார் $\bar{A}$-ன் எண் மதிப்பாகும்.

வெக்டாரின் கூறுகள் : எந்த வெக்டார்களின் கூட்டுத்தொகை வெக்டார் $\bar{A}$ என்று வருகிறதோ அந்த வெக்டார்கள் வெக்டார் A-யின் கூறுகள் எனப்படும். வழக்கத்தில் உள்ள கூறுகள் X, Y, Z ஆகிய கிடைநிலை அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ளவை. இவை வெக்டாரின் **நீள் சதுரக் கூறுகள்** எனப்படும். இவை X, Y, Z தளங்களின்மீது படிவிக்கப்பட்ட எறிவு படிவங்களாகும் (projection).

OX என்ற அச்சை OY என்ற அச்சை நோக்கி, அச்சு OZஐப் பற்றிச் சுற்றினால் ஒரு வலக்கைத் திருகின் முனை OZ-ன் நேர்திசையின் வழியே நகரும். இதனை மனத்திற்கொண்டு OZ-ன் நேர் திசை குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இது மாதிரியே மற்ற அச்சுகளான OY, OZ இவை இரண்டின் நேர்திசைகளையும் குறித்துக்கொள்ளலாம்,

இந்த நேர் திசைகளைக் குறிப்பிடுகையில் X, Y, Z இவைகளை வட்ட வரிசையில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

படம் 9-ல் புள்ளி O என்பதை வெக்டார் $\bar{A}$-யின் ஒரு முனை யாகக் கொள். ஒரு நீள்சதுர இணைகரத்தினை, அதன் மூன்று



படம் 9

ஓரங்களும் முக்கிய அச்சுகளான OX, OY, OZ இவைகளின் மேல் இருக்கும் புள்ளி O-வைச் சந்திக்குபடி வரை. இதனை வரையும் போது வெக்டார் $\bar{A}$ படம் 9-ல் உள்ள, புள்ளி E-வழியே செல்லும் மூலை விட்டமாக அமைய வேண்டும். படத்திலிருந்து

$$= \overline{OB} + \overline{BE}$$

$$\bar{A} = \overline{OE} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BE}$$

$$= \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OG}$$

$$= \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z \qquad \ldots(2)$$

இங்கு $\overline{A}_x$, $\overline{A}_y$, $\overline{A}_z$ என்பவை வெக்டார் $\overline{A}$-யின் வெக்டார் கூறுகளாகும்.

a_x, a_y, a_z என்பவை $\overline{A}_x$, $\overline{A}_y$, $\overline{A}_z$ என்ற வெக்டார் கூறுகளின் எண் மதிப்பாக முறையே கொண்டால் சமன்பாடு (1)-ன் படி,

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_x &= ax\,\hat{i} \\ A_y &= ay\,\hat{j} \\ \overline{A}_z &= az\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

என்று எழுதலாம்.

ஆகையால், $\overline{A} = \hat{i}\, a_x + \hat{j}\, a_y + \hat{k}\, a_z$ ... (4)

1-06. வெக்டாரின் திசைக் கொசைன் விதி

வெக்டார் $\overline{A}$, X, Y, Z அச்சுகள் இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை முறையே (A, x), (A, y), (A, z) என்று கொண்டால், படம் 9-லிருந்து

$$a_x = |\overline{A}| \cos (A, x) \quad \ldots (5a)$$

$$a_y = |\overline{A}| \cos (A, y) \quad \ldots (5b)$$

$$a_z = |\overline{A}| \cos (A, z) \quad \ldots (5c)$$

என்று எழுதலாம். இந்தச் சமன்பாடுகளின் இருமடிகளைக் கண்டு பிடித்துக் கூட்டினுல்

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overline{A}|^2 [\cos^2(A, x) + \cos^2(A, y) + \cos^2 (A, z)]$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

ஆனுல், $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = OA^2 + AB^2 + BE^2 = OE^2 = |\overline{A}|^2$

எனவே

$$\cos^2 (A, x) + \cos^2 (A, y) + \cos^2 (A, z) = 1 \quad \ldots (6)$$

இது வெக்டாரின் திசைக் கொசைன் விதி (Direction Cosine Law) எனப்படும்.

சமன்பாடு (5)-ன்படி,

$$a_x \cos(A, x) = |\bar{A}| \cos^2(A, x)$$
$$a_y \cos(A, y) = |\bar{A}| \cos^2(A, y)$$
$$a_z \cos(A, z) = |\bar{A}| \cos^2(A, z)$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளைக் கூட்டிச் சமன்பாடு (6)ஐப் பயன்படுத்தி,

$$|\bar{A}| = a_x \cos(A, x) + a_y \cos(A, y) + a_z \cos(A, z) \quad \ldots \quad (7)$$

என எழுதலாம்.

$\cos(A, x)$, $\cos(A, y)$, $\mathrm{ccos}(A, z)$ ஆகியவை முறையே வெக்டார் A-யின் X, Y, Z திசைக் கொசைன்கள் எனக் கூறப் படும். இவற்றை l, m, n என்ற எழுத்துகளால் முறையே குறிப் பிட்டால்,

$|\bar{A}| = l\bar{a}_x + ma_y + na_z$ என எழுதலாம். $\hat{S}$ என்பது வெக் டார் $\bar{A}$-யின் திசையிலுள்ள அலகு வெக்டாரானல்

$$\hat{S} = \hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n \quad \ldots \quad (8)$$

அதாவது, அலகு வெக்டார் $\hat{S}$ ஐயும், X, Y, Z திசையிலுள்ள அலகு வெக்டார்கள் $\hat{i}$, $\hat{j}$, k ஐயும் இணைக்கும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

பொதுவாக, எந்த ஒரு வெக்டாரிணையும் $\bar{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

1-07. வெக்டாரின் புள்ளிப் பெருக்கல் (Dot product)

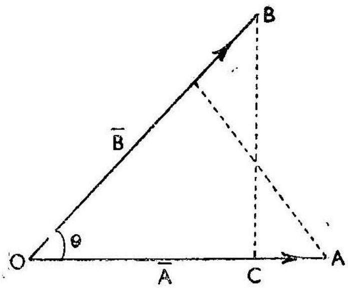
இரண்டு வெக்டார்களின் பெருக்கற் பலன் ஒரு திசையிலியாக அமையும். இந்தப் பெருக்கற் தொகையின் எண் மதிப்பானது, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டார்களின் எண் மதிப்புகள் இவையிரண்டின் இடையிலுள்ள கோணத்தின் கொசைன் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும். இரண்டு வெக்டார்களுக்கு இடையே ஒரு புள்ளி குறிக்கப்பட்டிருந்தால், அது அந்த வெக்டார்களின் புள்ளிப் பெருக்கலைக் குறிக்கும்.

அதாவது $\bar{A}.\bar{B} = |\bar{A}|\,|\bar{B}| \cos(\bar{A}, \bar{B})$

$= (OA)(OB) \cos\theta$

$= \overline{OA} \cdot \overline{OC}$

எனவே, இரண்டு வெக்டார்களின் புள்ளிப் பெருக்குத் தொகையானது, முதல் வெக்டாரின் எண் மதிப்பை அதன் திசையிலுள்ள இரண்டாவது வெக்டாரின் கூற்றினுல் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும்.



படம் 10

இரண்டு வெக்டார்கள் ஒரே திசையிலிருந்தால் அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணத்தின் கொசைன் +1 என்ற மதிப்பையும் எதிர்த் திசையிலிருந்தால் −1 என்ற மதிப்பையும், நேர்க்குத்தாக இருந்தால் 0 என்ற மதிப்பையும் ஏற்கும்.

மேற் கூறப்பட்ட பண்புகளைப் பயன்படுத்தி,

$$\bar{B}.\bar{A} = |\bar{B}|\ |\bar{A}| \cos(-\theta)$$

$$= |\bar{B}|\ |\bar{A}| \cos\theta = \bar{A}\,.\,\bar{B}$$

இது பெருக்கலின் (இன) மாற்று விதி (Commutative Law) எனப்படும். எனவே, புள்ளிப் பெருக்குத் தொகை வெக்டார்களின் இடச்சார்பற்றது என அறிகிரும்.

$\bar{A}=0$ அல்லது $\bar{B}=0$ அல்லது $\theta=\frac{\pi}{2}$ ஆக இருந்தால் $\bar{A}.\bar{B}=0$ ஆகும். $\bar{A}, \bar{B}$ இவையிரண்டும் இணை வெக்டார்களாக இருந்தால் (அதாவது $\theta=0$), $\bar{A}\,.\,\bar{B} = |\bar{A}|\ |\bar{B}|$.

$\bar{B}=\bar{A}$ ஆனுல்

$$\bar{A}.\bar{B}=\bar{A}\,.\bar{A}=|\bar{A}|^2$$

எனவே $|\bar{A}| = \sqrt{\bar{A}.\bar{A}}$

$\bar{A}$, $\bar{B}$ இவையிரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம்

$\theta = \cos^{-1} \dfrac{\bar{A}.\bar{B}}{|\bar{A}|\ |\bar{B}|}$ என எழுதப்படும்.

மேற் கூறப்பட்ட பண்புகளை, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகு வெக்டார்களுக்குப் பயன்படுத்தினால்,

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$$

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$ என்று கிடைக்கும்.

வெக்டார் A, வெக்டார் $\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$ இவையிரண்டின் புள்ளிப் பெருக்குத் தொகையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் (படம் 11).

$$\bar{A}.(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) = \bar{A}.\overline{OD} = Q$$

இங்கு $\overline{OD} = \bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$

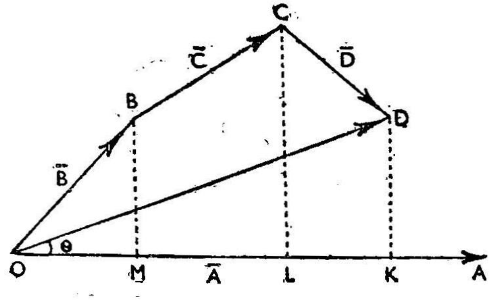
எனவே $Q = \bar{A}.\overline{OD}$

$$= |\bar{A}|\ |\overline{OD}| \cos\theta$$

$$\bar{A}.(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) = |\bar{A}|\ |\overline{OK}|$$

$$= |\bar{A}|\,(|\overline{OM}| + |\overline{ML}| + |\overline{LK}|)$$

$$= |\bar{A}|\ |\overline{OM}| + |\bar{A}|\ |\overline{ML}| + |\bar{A}|\ |\overline{LK}|$$



படம் 11

அல்லது

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})=\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}.\bar{B}+\bar{A}\cdot\bar{D}$$

எனவே, புள்ளிப் பெருக்குத் தொகையானது கூடுதலின்கீழ் வகுத்தமைகிறது. இதனையே, பொதுவாக

$$(\bar{A}+\bar{B}+...).(\bar{N}+\bar{O}+...)=\bar{A}.\bar{N}+\bar{A}.\bar{O}+...\bar{B}.\bar{N}$$
$$+\bar{B}.\bar{O}+...$$

என்று எழுதலாம்.

$$\bar{V}=\bar{A}+\bar{B} \text{ ஆனால்}$$

$$\bar{V}.\bar{V}=|\bar{V}|^2=V^2=(\bar{A}+\bar{B}).(\bar{A}+\bar{B})$$
$$=\bar{A}.\bar{A}+2\,\bar{A}.\bar{B}+\bar{B}.\bar{B}$$
$$=A^2+2\,AB\cos\theta+B^2$$

இங்கு θ என்பது வெக்டார்கள் $\bar{A}$, $\bar{B}$-க்கு இடையேயுள்ள கோணமாகும்.

வெக்டார்கள் $\bar{A}$, $\bar{B}$ ஐ அவைகளின் கூறுகள்மூலம் குறித்தால்

$$\bar{A}=\hat{i}\,A_x+\hat{j}\,A_y+\hat{k}\,A_z$$

$$\bar{B}=\hat{i}\,B_x+\hat{j}\,B_y+\hat{k}\,B_z$$

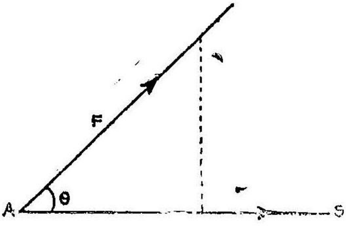
$$\bar{A}.\bar{B}=(\hat{i}\,A_x+\hat{j}\,A_y+\hat{k}\,A_z).(\hat{i}\,B_x+\hat{j}\,B_y+\hat{k}\,B_z)$$
$$=A_x\,B_x+A_y\,B_y+A_z\,B_z.$$

ஆகவே, இரண்டு வெக்டார்களின் புள்ளிப் பெருக்குத் தொகை அவைகளின் X, Y, Z அச்சுக்கூறுகளை முறையே பெருக்கிக் கூட்டுவதற்குச் சமமாகும்.

1-08. வெக்டார் புள்ளிப்பெருக்கலின் பயன்கள்

(அ) செயல் : வெக்டாரின் புள்ளிப் பெருக்கலை எந்திர வேலையில் (mechanical work) பயன்படுத்துவதன்மூலம் சுலபமாக விளக்கலாம்.

படம் 12-ல் விசை செயல்படும் புள்ளி A, இடப்பெயர்ச்சி (displacement) அடைகிறதென்று கொள்வோம். இந்த இடப் பெயர்ச்சியின் எண் மதிப்பு, திசை இவற்றினை வெக்டார் $\bar{S}$ ஆல் குறிக்கலாம். இப் பொழுது இந்த விசை செய் யும் வேலையானது, இடப் பெயர்ச்சி, இதன் திசையி லுள்ள விசையின் கூறு ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகை என வரையறுக்கப் படுகிறது. அதாவது



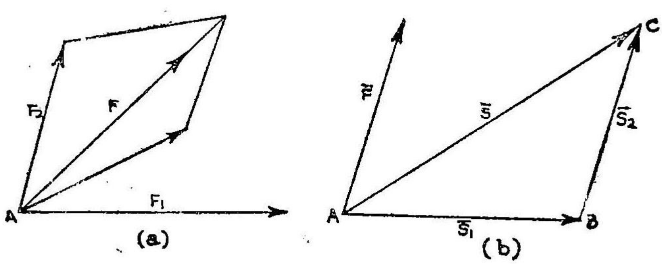
படம் 12

$$\text{செயல்} = |\bar{S}|\ |\bar{F}| \cos\theta = \bar{F}\cdot\bar{S}.$$

இங்கு θ என்பது வெக்டார்கள் $\bar{S}$, $\bar{F}$-ன் இடையே உள்ள கோணம். $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ என்பதுஒரே புள்ளியில் செயல்படும் இரண்டு விசைக ளானுல் [படம் 13(a)] அவற்றின் தொகுபயன் விசையை $\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2$ என்று எழுதலாம். வகுத்தமைவு விதியை உபயோகித்து

$$\bar{F}\ .\ \bar{S}=(\bar{F}_1+\bar{F}_2).\bar{S}=\bar{F}_1.\bar{S}+\bar{F}_2.S$$

என்று காணலாம். இந்தச் சமன்பாட்டின்மூலம் தொகுபயன் விசையின் செயல், தனித்தனி விசைகளின் செயல்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம் என்று தெரிகிறது. பொதுவாக, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்படும்போது, அவை



படம் 13

ஒவ்வொன்றும் செய்யும் செயல்களின் மொத்த அளவு, அவ் விசை களின் தொகுபயன் விசையின் செயலுக்குச் சமம் என வரை யறுக்கலாம்.

ஒரு நிலையான விசை $\bar{F}$-ன் செயல் படும் புள்ளி A, இரண்டு தொடர்ச்சியான இடப்பெயர்ச்சிகளை (படம் 13b) (அதாவது $\bar{S}_1 = \bar{AB}$, $\bar{S}_2 = \bar{BC}$) அடையும் பொழுது, வெக்டாரின் வகுத்தமைவு விதியைப் பயன்படுத்தி

$\bar{F} \cdot \bar{S_1} + \bar{F} \cdot \bar{S}_2 = \bar{F} \cdot (S_1 + S_2)$ என்று எழுதலாம். ஆகவே, விசை செயல்படும் புள்ளி, A-யிலிருந்து B-க்கும், B-யிலிருந்து C-க்கும் இடப்பெயர்ச்சி அடையும்போது விசை $\bar{F}$ செய்யும் தனித் தனி செயல்களின் கூட்டுத்தொகை, அந்த புள்ளி A-யிலிருந்து C-க்கு இடப்பெயர்ச்சி அடையும்போது விசை $\bar{F}$-செய்யும் செயலுக்குச் சமமாகும். இதே மாதிரி விசை $\bar{F}$–செயல்படும் புள்ளி A, பல தொடர்ச்சியான இடப்பெயர்ச்சிகளை அடைந்து J-ஐ அடையும் போது $\bar{F}$- செய்யும் தனித்தனி செயல்களின் கூட்டுத் தொகை அப்புள்ளியானது A-யிலிருந்து ஒரே இடப்பெயர்ச்சியின் மூலம் J-யை அடைய செய்யும் செயலுக்குச் சமம் என்று பொதுவாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி :

$$(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}),\ (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

என்ற இரு விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படும்போது அது $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, $(5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})$ என்ற புள்ளிக்கு நகருகிறது. இந்த விசைகளால் செய்யப்பட்ட மொத்த செயலைக் கணக்கிடு (total work).

விசை செயல்படும் புள்ளி O, B-க்கு நகர்ந்தால்

$$OB = (5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

எனவே, விசைகள் செய்யும் வேலை

$$= [(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})] . (4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= [7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}]. \quad [4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}]$$

$= 24 + 4 + 8 =$ **40** அலகுகள்

(ஆ) மாயவேலை : (Virtual work)

O என்ற புள்ளியில் உள்ள துகள்மீது செயல்படும் $\bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots \bar{F}n$ என்ற விசைகள் சம நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம், துகள் $\delta\bar{l}$ என்ற இடப்பெயர்ச்சி அடையும்போது செய்யப்படும் வேலை

$$= (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}n).\ \delta\bar{l}$$

விசைகள் சம நிலையில் இருப்பதால்

$$(\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}n) = O$$

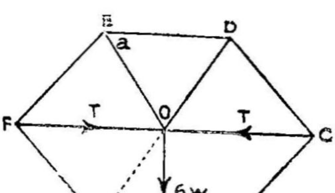
இதிலிருந்து மாய வேலை கொள்கையை பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

சம நிலையிலுள்ள விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் போது, அது மிகச் சிறிய இடப்பெயர்ச்சி அடையுமானால், இந்த விசைகள் செய்யும் மொத்த வேலை சுழியமாகும்.

குறிப்பு :—விசைகள் ஒரு விறைப்பான (rigid) பொருளின்மீது செயல்படுமானாலும் இந்த கொள்கை பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு :

படம் 14-ல் $ABCDEF$ என்பது, ஒன்றுக்கொன்று இணைக்கப் பட்ட W என்ற எடையினை உடைய ஆறு சம அளவுள்ள கோல் களைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட ஒரு ஒழுங்கான அறுகோண மாக இருக்கட்டும். AB என்ற பக்கம், ஒரு சமதளத்தில் பொருந்தி, அறுகோணம் $ABCDEF$ ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் நிலையாக நிற்கிறது என்று கொள்வோம். C, F என்ற மூலைகள் ஒரு மெல்லிய கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டால் அதன் இழுவிசை (tension) $W\sqrt{3}$ என்று நிருபி.



படம் 14

A-ஐ தோற்றுவாயாகக்கொண்டு $\hat{i}, \hat{j}$ என்ற ஓரலகுகள் AB-யின் திசையிலும் அதற்கு செங்குத்துத் திசையிலும் முறையே உள்ள தாகக்கொள். $6W$ என்ற எடை அறுகோணத்தின் மையமான O-வில் செயல்படுகிறது.

$O, F, C,$ இவற்றின் நிலை (position) வெக்டார்கள்.

$$a \cos \theta \, \hat{i} + a \sin \theta \, \hat{j}$$

$$-a \cos \theta \, \hat{i} + a \sin \theta \, \hat{j},$$

$(a + a \cos \theta) \, \hat{i} + (a \sin \theta) \, \hat{j}$ ஆகும்.

எனவே மாய வேலையின் சமன்பாடு

$$-6 W \hat{j} . \delta (a \cos \theta \, \hat{i} + a \sin \theta \, \hat{i})$$

$$+ T \hat{i} . \delta (-a \cos \theta \, \hat{i} + a \sin \theta \, \hat{j})$$

$$+ (-T \, \hat{i}) . \delta [(a + a \cos \theta) \, \hat{i} + a \sin \theta \, \hat{j}]$$

$$= 0.$$

அல்லது,

$$-6 W \cos \theta \, \delta \theta + T \sin \theta \, \delta \theta + T \sin \theta \, \delta \theta$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad T = 3 W \cot \theta$$

$$\theta = 60^\circ$$

எனவே $T = 3W \cot 60 = \sqrt{3} \, W$

பயிற்சி 1 :

$A B C D$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று இணைக்கப்பட்ட சம அளவுள்ள, எடை யில்லாத 4 கோல்களை பக்கங்களாகக்கொண்ட ஒரு சாய் சதுரமாக இருக்கட்டும். C-என்ற புள்ளியில் குடை W இணைக்கப்பட்டு இந்த சாய் சதுரம் A-யிலிருந்து தொங்க விடப் படும்போது $W\sqrt{3}$ என்ற தாக்கு விசை BD என்ற மூலை விட்டம் வழியே செயல்படும் என காண்பி.

பயிற்சி 2 :

ஒன்றுக்கொன்று இணைக்கப்பட்ட, நான்கு சீரான (uniform கோல்கள் $ABCD$ என்ற இணைகரத்தின் பக்கங்களாக அமைகின் றன என்று கொள். இணைகரத்தின் உரு மாருமலிருக்க A, C என்ற புள்ளிகள் ஒரு கயிற்றினல் இணைக்கப்பட்டு, இந்த இணைகரம் A-யிலிருந்து தொங்கவிடப்படும் பொது கயிற்றிலுள்ள இழு விசை (tension) இணைகரத்தின் எடையில் பாதி என்று நிருபி.

1.09. வெக்டாரின் வெக்டார் பெருக்கல் :

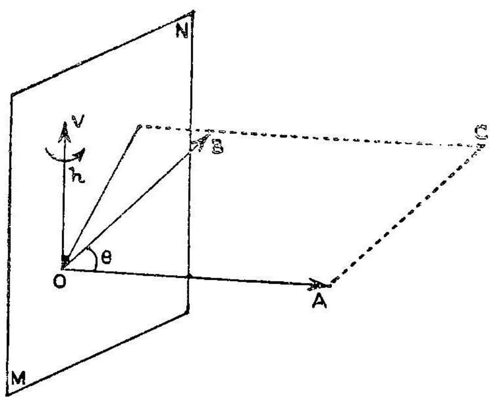
இரண்டு வெக்டார்களின் வெக்டார் பெருக்குத் தொகை (vector products) ஒரு வெக்டாராக அமைகிறது. இதன் எண் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டார்களின் எண்ணளவுகள், இவையிரண்டின் இடையிலுள்ள கோணத்தின் சைன் (sine) ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{V} = \hat{v} \, |\bar{A}| \; |B| \quad \sin \theta$$

அதாவது $|\bar{V}| = |\bar{A}| \; |\bar{B}| \; \sin \theta$

இங்கு வெக்டார் $\hat{v}$ என்பது வெக்டார் $\bar{V}$ திசையில் கருதப்படும் அலகு வெக்டாராகும்.

இதன் திசை $\bar{A}, \bar{B}$ உள்ள தளத்துக்கு செங்குத்தாக இருக்கிறது.



படம் 15

அதாவது வெக்டார் $\bar{A}$-ஐ $\bar{V}$-ஐ அச்சாகக்கொண்டு, $\theta°$ நேர் திசையில் சுற்றினால், $\bar{B}$-யின் இடத்தை அடையும். (படம்.15)

$h = |\bar{B}| \sin \theta$ என்பது இணைகரம் $OACB$-யின் குத்துயரம் ஆதலால் $\bar{A} \times \bar{B}$-யின் எண் மதிப்பு இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்கு சமமாகும்.

$$|\bar{B} \times \bar{A}| = |\bar{A} \times \bar{B}|$$

அதாவது, $\bar{B} \times \bar{A}$-ன் எண்மதிப்பு $\bar{A} \times \bar{B}$-ன் எண் மதிப்புபாக இருக்கிறது. ஆனல் வெக்டார் $\bar{B}$, வெக்டார் $\bar{A}$-ன் இடத்தை அடைவதற்கு எதிர்த்திசையில் சுற்ற வேண்டியிருப்பதால்

$$\bar{B} \times \bar{A} = -\bar{A} \times \bar{B}$$

இதிலிருந்து வெக்டார்களின் பெருக்கல், இனமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதல்ல என அறிகிறோம்.

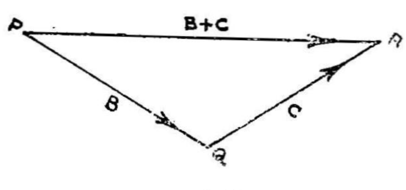
வெக்டார்கள் $\bar{A}$ $\bar{B}$ இணையாக இருந்தால் $\theta = O$ அல்லது 180° எனவே $\bar{A} \times \bar{B} = O$

மறுதலை :

$\bar{A} \times \bar{B} = O$ வானல் வெக்டார்கள் $\bar{A}$, $\bar{B}$ இவை யிரண்டில் ஏதாவதொன்று சுழியமாகவோ அல்லது இவை யிரண்டும் இணையாகவோ இருக்க வேண்டும்.

வெக்டார் $\bar{A}$-க்கு செங்குத்துத்தளமான MN-ல் வெக்டார் $\bar{B}$-யின் எறிவு படிவத்தை எடுத்து அதை OA-ஐ அச்சாகக் கொண்டு இடஞ்சுழியாக 90° சுழற்றி $|\bar{A}|$-ஆல் பெருக்கினல், $\bar{A} \times \bar{B}$ வெக்டார் கிடைக்கும்.

இந்த முறைப்படி வெக்டார் $\bar{A}$-யுடன் படம் 16-ல் உள்ள $\triangle PQR$-ன் பக்கங்களான வெக்டார்கள் $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{B}+\bar{C}$



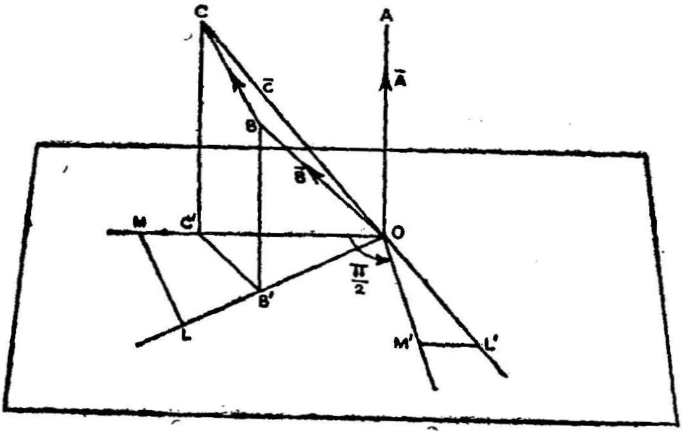
படம் 16

இவற்றின் வெக்டார் பெருக்குத் தொகையை எடுத்தால் அதன் விளைவாகக்கிடைக்கும் $\bar{A} \times \bar{B}$, $\bar{A} \times \bar{C}$, $\bar{A}$ $(\bar{B}+\bar{C})$ ஆகியவை வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக அமைகின்றன. ஆகவே

$$\bar{A} \times (\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{C}$$

$$(\bar{B}+\bar{C}) \times \bar{A} = \bar{B} \times \bar{A} + \bar{C} \times \bar{A}.$$

இந்த சமன்பாடுகள் வெக்டார் பெருக்கலின் வகுத்தமைவு விதியைக் குறிக்கின்றன. இதை படம் 17 தெளிவாக விளக்குகிறது. இந்த விதியை வெக்டார்களை இடம் மாற்றாமல் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டார் தொகுதிக்கும் பயன்படுத்தலாம்.



படம் 17

மேற் கூறிய பண்புகளிலிருந்து

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = O$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = \hat{k} \times \hat{j}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

என்ற அலகு வெக்டார்களின் சமன்பாடுகளை எழுதலாம் இவற்றினை பயன்படுத்தி, வெக்டார்களின் பெருக்குத் தொகையை அவற்றின் கூறுகளின் மூலம் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$\bar{A} = \hat{i}\, Ax + \hat{j}\, Ay + \hat{k}\, Az$$

$$\bar{B} = \hat{i}\, Bx + \hat{j}\, By + \hat{k}\, Bz$$

இப்பொழுது $(\hat{i}\ Ax + \hat{j}\ Ay + \hat{k}\ Az) \times (\hat{i}\ Bx + \hat{j}\ Bz + \hat{k}\ Bz)$

$$\hat{A} \times \hat{B} =$$

$$= \hat{i}\ (Ay\ Bz - Az\ By) + \hat{j}\ (Az\ Bx - Ax\ By)$$

$$+ \hat{k}\ (Ax\ By \mid Ay\ Bx)$$

இதையே அணிக்கோவை வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

மூன்று அல்லது அதற்கதிகமான வெக்டார்களின் பெருக்குத் தொகை.

A, B, C என்றி மூன்று வெக்டார்களின் திசையில் அல்லது வெக்டார் பெருக்கலின் மூலம் பின்வரும் மும்மடி பெருக்குத் தொகையை அமைக்கலாம்.

(1) $(\bar{A}\ .\ \bar{B})\ \bar{C}$

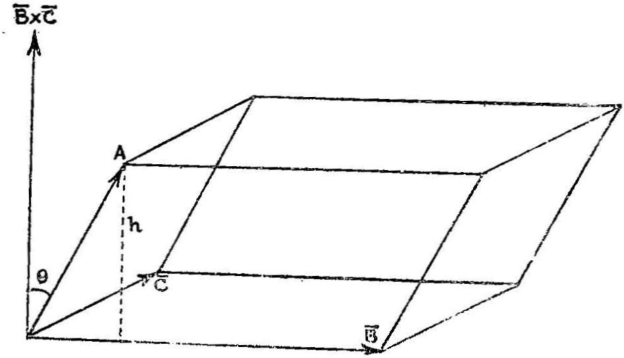
(2) $\bar{A}\ .\ (\bar{B} \times \bar{C})$

(3) $\bar{A} \times \bar{B} \times \bar{C}$

(1) $(\bar{A}\ .\ \bar{B})\ \bar{C}$ என்பது திசையிலி $\bar{A}\ .\ \bar{B}$, வெக்டார் C ஆகிய இரண்டின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

(2) $\bar{A}\ .\ (\bar{B} \times \bar{C})$ என்பது வெக்டார்கள் $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ இவற்றினை அடுத்தடுத்த விளிம்புகளாக உள்ள இணைகரத் திண்மத்தின் கன பரிமாணத்துக்கு சமமாகவுள்ள ஒரு திசையிலியாகும்.

படம் 18-லிருந்து $\bar{B} \times \bar{C}$ என்பது அடிதளத்துக்கு செங்குத்து வெக்டாராகிறது அதன் எண்மதிப்பு அடித்தளத்தின் பரப்பளவுக்கு



படம் 18

சமம். இதன் மீது வெக்டார் $\bar{A}$-ன் எறிவு படிவத்தினை எடுத்தால் அது இணைகரத்திண்மத்தின் குத்துயரத்துக்குச் சமம் (h) எனவே

$\bar{A} \cdot (\bar{B}\times\bar{C}) = h \ |\bar{B}\times\bar{C}|$ = இணைகரத் திண்மத்தின் கனபரிமாணம்.

படத்திலிருந்து,

$$\bar{A} \cdot (\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{B} \cdot (\bar{C}\times\bar{A}) = \bar{C} \cdot (\bar{A}\times\bar{B}) \ldots \ (1)$$

என்று அறியலாம்.

$$(\bar{A}\times\bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot (\bar{A}\times\bar{B})$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ன் மூலம்$(\bar{A}\times\bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot (\bar{B}\times\bar{C})$ என்று எழுதலாம். எனவே வெக்டாரின் திசையிலி மும்மடி பெருக்கலில் . யையும் × ஐயும் இடம் மாற்றலாம்.

சமன்பாடு (I)-ஐ

$$\bar{A} \cdot (\bar{B}\times\bar{C}) = \begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}$$ என்றும்

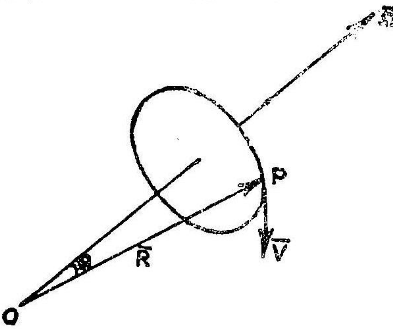
அணிக்கோவை வடிவத்தில் எழுதலாம்.

(3) $\bar{A}\times\bar{B}\times\bar{C}$ என்பது வெக்டார் $\bar{B}\times\bar{C}$-க்கும் வெக்டார் $\bar{A}$-க்கும் செங்குத்தாகவும், வெக்டார்கள் $\bar{B}$, $\bar{C}$ உள்ள தளத்திற்கு

இணையாகவும் உள்ளது. $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\, \bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\, \bar{C}$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

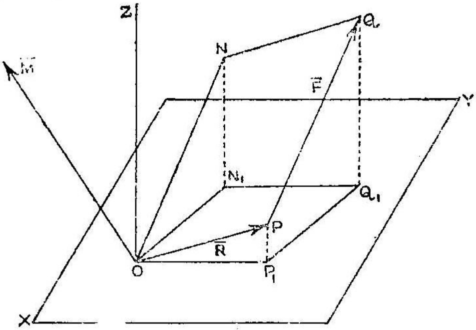
1.10அ. நிலையான அச்சுபற்றிய சுழற்றல் (Rotation about a fixed axis).

ஒரு திண்பொருள் O-வின் வழியே செல்லும் ஒரு அச்சை ω என்ற கோண வேகத்தில் சுற்றுகிறதெனக் கொள்வோம். படம் 19



படம் 19

அதன் கோண திசைவேகமான $\bar{\Omega}$-வின் எண் மதிப்பு ω ஆகும். ஒரு வலஞ்சுழி திருகாணி மேற் கூறியபடி சுற்றப் பட்டால் முன்னேறும் திசையே இந்த வெக்டாரின் திசையாகும். $\bar{R}$ என்பது O-விலிருந்து பொருளிலுள்ள P- என்ற புள்ளிக்கு வரையப்பட்ட வெக்டாராகக்கொள். இந்தப் புள்ளி P, $\omega\, |\bar{R}| \sin\theta$ என்ற வேகத்துடன் $|\bar{R}| \sin\theta$ என்பதை ஆரமாகக்கொண்ட வட்டத்தில் நகர்கியது ஆகையால் அதன் திசைவேகம் $\bar{V} = \bar{\Omega} \times \bar{R}$. இதன் எண்மதிப்பு $|\bar{V}| = |\bar{\Omega}|\; |\bar{R}| \sin\theta = \omega\, |\bar{R}| \sin\theta$. அதன்திசையும், வெக்டார் பெருக்கலின் வரையறைப்படி சரியாகவே அமைகிறது.



படம் 20

(ஆ) விசையின் திருப்புத்திறன் (Moment of a Porce)

கொடுக்கப்பட்ட பொருளில் P என்பதே $\bar{F}$ என்ற விசையின் செயல்படு புள்ளியாகக்கொள் படம் 20. $\bar{R}$ என்பது வேறொரு புள்ளி O-விலிருந்து P-க்கு வரையப்பட்ட வெக்டாராகக்கொள்• வெக்டார்கள் $\bar{R},\bar{F}$-ன் வெக்டார் பெருக்குத்தொகையான $\bar{M}=\bar{R}\times\bar{F}$ என்பது $\bar{F}$-ன் O பற்றிய திருப்புத்திறன் ஆகும். இந்த விசையானது, O-வின் வழியே செல்லும் O வெக்டார் $\bar{F}$ இவையுள்ள தளத்திற்கு செங்குத்தான அச்சை மையமாகக் கொண்டு பொருளை சுழற்று கிறது. $\bar{M}$-ன் திசை, இந்த அச்சின் நேர் திசையில் அமைகிறது, இதன் எண் மதிப்பு, விசை $\bar{F}$, அச்சிலிருந்து அதன் செங்குத்து தூரம் ஆகியவற்றின் கபருக்குத்தொகைச் சமம்.

விசை $\bar{F}$-ன், OZ என்ற அச்சுபற்றிய திருப்புத்திறன், OZ-ன் செங்குத்துத் தளமான $X\bar{Y}$-ல் F-ன் எறிவு படிவம் $(P_1 Q_1)$, $\bar{R}$-ன் எறிவு படிவம் OP_1, இவற்றின் பெருக்கித் தொகையென வரை யறுக் கப்படும்.

இது $OPQN$ என்ற இணைகரத்தின் XY-ல் வரையப்பட்ட எறிவு படிவமான $OP_1 Q_1 N_1$-ன் பரப்பளவுக்கு சமம் என தெளி வாகிறது. $OPQN$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பளவு, வெக்டார் $\bar{M}$-ன் எண் மதிப்பிற்குச் சமமாகவும், XY தளத்திற்கும் இதற்கும் இடையே உள்ள கோணம், வெக்டார் $\bar{M}$, OZ இவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணத்துக்கு சமமாகவும் இருப்பதால், XY தளத்தில் இந்த இணைகரத்தின் எறிவு படிவம், OZ-ல் வெக்டார் $\bar{M}$-ன் எறிவு படிவத்துக்கு சமம் எனக்காணலாம், இதிலுருந்து Oவின் வழியாக செல்லும் ஏதாவது ஓர் அச்சு பற்றிய, விசை $\bar{F}$-ன் திருப்புத்திறன் அந்த அச்சின் திசையிலுள்ள வெக்டார் $\bar{M}$-ன் கூறுக்கு சமம்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டால் அவைகளின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம், அவ்விசைகளின் தொகுபயன் விசையின் திருப்புத்திறனுக்கு சமமென்று, வெக்டாரின் வகுத்தமைவு விதியின் மூலம் காணலாம். ஏனெனில் விசைகள் $\bar{F}_1$. $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ $\bar{F}n$ என்பன P எனும் ஒரு புள்ளியில் செயல்படும்போது அவற்றின் தனித்தனி திருப்புத்திறன்கள்

$\overline{OP}\times\bar{F}_1+\overline{OP}\times\bar{F}_2$ ....., $\overline{OP}\times\bar{F}n$ ஆகும்.

ஆகவே திருப்புபுத்திறன்களின் மொத்தம்

$$\overline{OP}\times\bar{F}_1+\overline{OP}\times\bar{F}_2+\ \dots+\overline{OP}\times\bar{F}n$$

$$=O\bar{P}\times(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\dots+\bar{F}n)$$

$=\bar{R}\times\bar{F}$ இங்கு வெக்டார் $\bar{F}$ என்பது விசைகள்

$\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\dots,\ \bar{F}n$ களின் தொகுபயன் விசை ஆகும்.

O-வை தோற்றுவாயாகக் கொண்டு $\bar{F}=\hat{i}\times\hat{j}Y+\hat{k}Z$

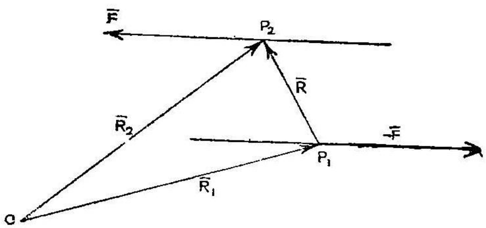
$\overline{OP}=\hat{i}x\div\hat{j}y+\hat{k}z$ என்க.

எனவே மொத்தத்திருப்புத்திறன்

$$M=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$

$$=(yZ-zY)\,\hat{i}+(zX-xZ)\,\hat{j}+(xY-yX)\,\hat{k}$$

இதில் $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ குணகங்கள் $OX,\ OY,\ OZ$ அச்சுகளைப்பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் முறையே $Mx,\ My,\ Mz$ ஆகும். எனவே ஏதேனும் ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் ஏதேனும் ஒரு கோட்டைப் பற்றி காண, அக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றிய திருப்புத்திறன் கண்டு, அதை அக்கோட்டின் திசையில் கூறுக பிரிக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒரு புள்ளி பற்றிய திருப்புத்திறன் என்பது ஒரு வெக்டாராகவும், ஒரு கோட்டைப்பற்றிய திருப்புத்திறன் ஓர் திசையிலியாகவும் அமைகிறது.



படம் 21

ஒரே எண் மதிப்பும் எதிர் திசைகளையும் கொண்ட $\bar{F},-\bar{F}$ என்ற இரு இணை விசைகளை ஒரு இரட்டை (couple) எனக் கூறு

வோம் படம் 21 P_1, P_2 எனபன $-\bar{F}$, $\bar{F}$ என்ற விசைகள் செயல் படும் கோடுகளிலுள்ள புள்ளிகளளாளுல் புள்ளி O பற்றிய இந்த இரட்டையின் திருப்புத்திறன் $\bar{R}_2 \times \bar{F} - \bar{R}_1 \times \bar{F} = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \times \bar{F}$ ஆகும். இங்கு வெக்டார்கள் $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ என்பன வெக்டார்கள் $\bar{OP}_1$, $\bar{OP}_2$ இவைகளைக் குறிக்கின்றன. $(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) = \bar{R}$ என்பது வெக்டார் $\bar{P_1P_2}$ ஆதலால் இந்த இரண்டையின் திருப்புத் திறனை எந்தப் புள்ளியினைப்பற்றி கணக்கிட்டாலும் $\bar{M} = \bar{R} \times \bar{F}$ என்ற ஒரே மதிப்பினை உடையதாகவே இருக்கும்.

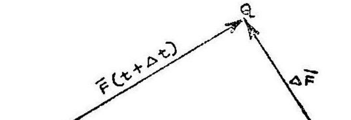
வெக்டார் நுண்கணிதம்

2. வகை நுண்கணிதம்

2.01. ஒரு திசையிலி மாறியின் வெக்டார் சார்பு

$\bar{F}$ எனும் வெக்டார் ஒரு திசையிலி மாறி t-ன் மாறுதல்களுக் கேற்ப, தானும் மாறுமாளுல், அதனை அந்த திசையிலியின் வெக் டார் சார்பு, அதாவது $\bar{F}(t)$ என்கிறோம்.

படம் 22-ல் $\bar{OP} = \bar{F}(t)$ என்க. இது தொடர்ச்சியான தாகவும், t-ன் ஒரு மதிப்புக்கு வெக்டார் $\bar{OP}$ க்கு ஒரு மதிப்பு மட்டிலுமே கொடுக்கும், ஒரு மதிப்புடைய சார்பு என்பதாயும் கொள்வோம். t-எனும் மாறி, $t + \Delta t$ என மாறும்போது வெக்டார் $\bar{OP}$ என்பது வெக்டார் $\bar{OQ}$ ஆக மாறுகிறது எனக் கொள் வோம். அதாவது $\bar{OQ} = \bar{F}(t + \Delta t)$. t, $(t \Delta t)$ ஆக மாறும்போது, $(\bar{F}(t)$-ன் பெருக்கமான



படம் 22

$$\Delta \bar{F} = \bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t) = \bar{PQ} \text{ ஆகும்.}$$

Δt திசையிலியாதலால், $\dfrac{\Delta \bar{F}}{\Delta t} = \dfrac{\bar{PQ}}{\Delta t}$

என்பது $\overline{PQ}$ வழி செல்லும் ஒரு வெக்டாராகும். $\triangle t$ன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது, இந்த வெக்டாரின் எல்லை மதிப்பான

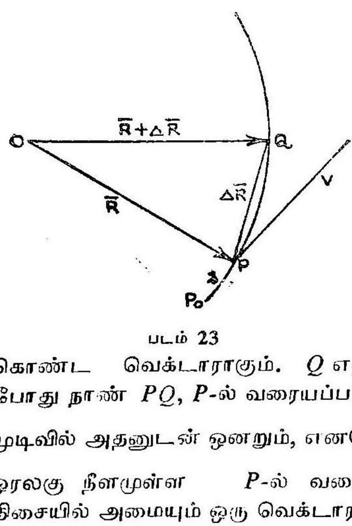
$$\frac{d\overline{F}}{dt} = \underset{\triangle t \to O}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle \overline{F}}{\triangle t}$$

வெக்டார் $\overline{F}$-ன் t-ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு எனப்படும்.

குறிப்பாக, t என்பது நேரமானால் $\frac{d\overline{F}}{dt}$ என்பது வெக்டார் $\overline{F}$-ன் மாறுவீதம் எனப்படும்.

2.02. ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசை வேகம் :

படம் 23-ல் $\overline{R} = \overline{OP}$ என்பது, நிலைப்புள்ளியி (fixed point) லிருந்து, ஒரு வளைகோட்டில் நகரும் புள்ளியான P-க்கு வரையப் பட்ட வெக்டாராகவும் s என்பது நிலைப்புள்ளி P_o-க்கும் P-க்கும் இடையேயுள்ள தூரமாகவும் கொள்வோம். P, Q-க்கு நகரும்போது $\triangle R$ என்பது PQ ஆகும். $\frac{\triangle R}{\triangle s}$ என்பது நாண் (chord) PQ வழி செல்லும் $\frac{\triangle R}{\triangle s} = \frac{\text{நாண்}}{\text{வில்}}$ $\left(\frac{\text{chord}}{\text{Arc}}\right)$ என்ற நீளத்தைக் கொண்ட வெக்டாராகும். Q எனும் புள்ளி P-ஐ நெருங்கும் போது நாண் PQ, P-ல் வரையப்படும் தொடு கோட்டினை நெருங்கி முடிவில் அதனுடன் ஒன்றும், எனவே, $\frac{dR}{ds}$ என்ற எல்லை மதிப்பு ஓரலகு நீளமுள்ள P-ல் வரையப்படும் தொடு கோட்டின் திசையில் அமையும் ஒரு வெக்டாராகும். t என்பது நேரமானால் $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ என்பது $|V| = \frac{ds}{dt}$ என்ற எண்மதிப்பு கொண்ட தொடு கோட்டின் வழி செல்லும் ஒரு வெக்டார் என்பதால், $V = \frac{dV}{dt}$-ஐ P-யின் திசை வேகம் என வரையறுக்கலாம்.



படம் 23

$A = \frac{dR}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2}$ என்பது P-யின் முடுக்கம் ஆகும்.

வெக்டார்களின் கூட்டல் 'பெருக்கல் இவைகளின் வகைக் கெழுக்களைக் கண்டு பிடிக்கும்போது, நுண்கணிதத்தில் பயன் படுத்தப்படும் வரையறைகளையே பயன் படுத்தலாம். ஆனால் இங்கு ராசிகளின் வரிசை (order) மாற்றக் கூடாது.

சான்றாக, வெக்டார்கள் $\bar{A}$‘ $\bar{B}, \bar{C}$ என்பன t-யின் சார்புள்ள தாகவும் $C = A \times B$...(1) எனவும் இருக்கட்டும்.

இங்கு வெக்டார்கள் $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ என்பன $\triangle\bar{A}, \triangle\bar{B}, \triangle\bar{C}$ என்ற பெருக்கங்களை அடைந்தால்

$$\bar{C} + \triangle\bar{C} = (\bar{A} + \triangle\bar{A}) \times (\bar{B} + \triangle\bar{B})$$

$$= \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \triangle\bar{B} + \triangle\bar{A} \times \bar{B} + \triangle\bar{A} + \triangle\bar{B} \ldots \ldots (2)$$

சகன்பாடு(2)-லிருந்து (1)ஐக் கழிக்க $\triangle\bar{C} = \bar{A} \times \triangle\bar{B} + \triangle\bar{A} \times \bar{B} + \triangle A \times \triangle B$ என கிடைக்கும். இந்த சமன் பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் $\triangle$t ஆல் வகுத்து எல்லை மதிப்பினைக் கண்டால்

$$\frac{d\bar{c}}{d\mathrm{t}} = \bar{A} \times \frac{d\bar{B}}{d\mathrm{t}} + \frac{d\bar{A}}{d\mathrm{t}} \times \bar{B}$$

இதன் வலப்பக்க உறுப்புக்களில் வெக்டார் A, B-யின் இடங்கள் சமன் பாடு (1)-ல் உள்ளபடியே மாறாமல் உள்ளன.

2.03. (அ) திசையிலி மும்மடி பெருக்குத் தொகையின் வகைக் கெழுகாணல் (Differentiation of scalar triple product) :

$$V = \bar{A} \, . \, [\bar{B} \times \bar{C}]$$

$$\bar{V} + \triangle\bar{V} = [\bar{A} + \triangle\bar{A}] \, ; \, \left\{ [\bar{B} + \triangle\bar{B}] \times [\bar{C} + \triangle\bar{C}] \right\}$$

$$= [\bar{A} + \triangle\bar{A}] \, . \, \Big\} \, \bar{B} \times \bar{C} + \bar{B} \times \triangle\bar{C} + \triangle\bar{B} \times \bar{C}$$

$$= \bar{A} \, .[\bar{B} \times \bar{C}] + \triangle\bar{A} \, . \, [\bar{B} \times \bar{C}] + \bar{A} \, . \, [\triangle\bar{B} \times \bar{C}]$$

$$+ \bar{A} \, \bar{B}, [\times \triangle\bar{C}] + \triangle\bar{A} \, . \, [\triangle\bar{B} \times \bar{C}] + \triangle\bar{A} \, . \, [\bar{B} \times \triangle\bar{C}]$$

$$\therefore \quad \triangle\bar{V} = \triangle\bar{A} \, . \, [\bar{B} \times \bar{C}] + \bar{A} \, . \, [\triangle\bar{B} \times \bar{C}] + \bar{A} \, . \, [\bar{B} \times \triangle\bar{C}]$$

இங்கு சிறு உறுப்புகள் (small terms) நீக்கப்பட்டுள்ளன.

எனவே,

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{A}}{dt} .]\bar{B}\times\bar{C}]+\bar{A} . \left[\frac{d\bar{B}}{dt}\times\bar{C}\right]+\bar{A} . \left[\bar{B}\times\frac{d\bar{c}}{dt}\right]$$

(ஆ) வெக்டாரின் மும்மடி பெருக்குத் தொகையின் வகைக் கெழு காணல் (Differentation of vector triple product):

$$\bar{V}=\bar{A}\times[\bar{B}\times\bar{C}]$$

$$\bar{V}+\triangle\bar{V}=[\bar{A}+\triangle\bar{A}]\times[(\bar{B}+\triangle\bar{B})\times(\bar{C}+\triangle\bar{C}]$$

$$=(\bar{A}+\triangle\bar{A})\times[\bar{B}\times\bar{C}+\bar{B}\times\triangle\bar{C}+\triangle\bar{B}\times\bar{C}]$$

$$=\bar{A}\times]\bar{B}\times\bar{C}]+\bar{A}\times[\triangle\bar{B}\times\bar{C}]+\bar{A}\times[\bar{B}\times\triangle\bar{C}]$$

$$+\triangle B\times[B\times AC]+\bar{A}\times]\triangle\bar{B}\times C]$$

$$+\triangle\bar{A}\times[\times\triangle\bar{B}\times\bar{C}]$$

சிறு உறுப்புகளை நீக்க $\triangle V=\triangle A\times[\bar{B}\times\bar{C}]+A\times[\triangle\bar{B}\times\bar{C}]$
$+AX[\bar{B}\times\bar{C}]$

$$\therefore \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{A}}{dt}\times[B\times C]+\bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt}\times C]$$

$$+\bar{A}\times[\bar{B}\times\frac{dC}{dt}].$$

2,04. வெக்டாரின் ஒருபடி வகைக்கெழு சமன்பாடு (Linear vector differential equations)

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேபட்ட வெக்டார் மாறிகள் அவற்றின் வகைக் கெழுக்கள் உள்ள ஒரு படிவகைக் கெழு சமன்பாடுகளை, திசையிலி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளைத்தீர்க்கும் முறையிலேயே தீர்க்கலாம். ஆனால் இங்கு தொகையீட்டு மாறிலிகள் வெக்டார் களாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு நகரும் துகளின் முடுக்கம் மாறிலியானால்' அதாவது
$\frac{d^2R}{dt^2}=\bar{A}$......(1)

ஆனால் இதன் தொகையீடு

$$\frac{dR}{dt}=\bar{V}=\bar{A}t+\bar{V}_0......(2)$$ ஆகும்.

இங்கு $\bar{V}_\circ$ என்பது ஒரு வெக்டார் மாறிலி நேரம். $t = O$ ஆக இருக்கும்போது இந்த மாறிலி $V_\circ$ - தொடக்க திசை வேகமாகிறது.

சமன் பாடு (2)-ன் தொகையீட்டைக் கண்டால் $R = \frac{1}{2} At + V_\circ t + R_\circ$ என்றுகிறது. இங்கு வெக்டார் $R_\circ$ என்பது நேரம் $t = O$ ஆகும்போது R-ன்வெக்டார் மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

வெக்டார்கள் $\bar{X}$, $\bar{Y}$ - என்பன நேரம் t-ஐ சார்ந்திருந்து $\frac{d\bar{X}}{dt} = k\bar{Y}$......(1) $\frac{d\bar{Y}}{dt} = -kX - \ldots$ (2) என்ற வகைக் கெழு சமன் பாடுகளின் மூலம் கட்டுப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். இங்கு k என்பது மாறிலி. சமன்பாடு (1)-ன் t-ஐப் பொறுத்தவகைக் கெழுவிணைக் கண்டு (2)-லிருந்து $\frac{dY}{dt}$-க்கு பிரதியிட்டால், $\frac{d^2X}{dt^2} + k^2X = O$ என கிடைக்கிறது. இதன் தீர்வு $\bar{X} = \bar{A} \sin kt + B \cos kt$ இங்கு $\bar{A}$, $\bar{B}$ என்பன வெக்டார் மாறிலிகள். இதனை சமன்பாடு (I)-ல் பிரதியிட $\bar{Y} = \bar{A} \cos kt - \bar{B} \sin kt$ என காணலாம்.

2.05. (a) **துகள் அல்லது துகள்களின் இயக்கம் :**

ஒரு நகரும் துகள் அல்லது புள்ளியின் பொருண்மை m-ஆகவும், $\bar{V}$ திசை வேகமாகவும் இருந்தால், $m\bar{V}$ என்பது. அதன் உந்தம் (momentum) எனப்படும். நியூட்டனின் இரண்டாவது இயக்கவிதி $\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F}$ என் எழுதப்படும். இங்கு $\bar{d}$ என்பது துகளின் மீது செயல்படும் விசையாகும். m - மாறிலியாக இருப்பதால் இதையே $m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}$ என எழுதலாம். இங்கு $\frac{dV}{dt}$ துகளின் முடுக்கமாகும்.

O என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து. நகரும் துகளுக்கு வரையப்பட்ட வெக்டார் $\bar{R}$ என்றால், O-வைப்பொறுத்து உந்தத்தின் திருப்புத்திறன் அல்லது கோண உந்தம் (angular momentum) $\bar{H} = \bar{R} \times mV = mR \times V$ என்ற வெக்டாராக வரையறுக்கலாம்.

$$V = \frac{dR}{dt}, V \times V = O \text{ என்பதால்}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{R} \times mV) = R \times \frac{d}{dt}(mV) + \frac{d\bar{R}}{dt} \times m\bar{V}$$

இங்கு M என்பது O-வைப் பொறுத்து விசை F-ன் திருப்புத்திறன் அல்லது இரட்டைத் திருப்புதிறன் (torque) ஆகும். அதாவது $dt = M$.

$m_1, m_2, \ldots, mn$ என்ற பொருண்மைகளையும் $V_1, V_2 \ldots, Vn$ என்ற திசை வேகங்களையும் கொண்ட n துகள்களின் மீது $F_1, F_2, \ldots Fn$ என்ற விசைகள் செயல் படுவதாகக் கொள்வோம் நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியை பயன்படுத்தி

$$\frac{d}{dt}(m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 + \ldots + m_n \bar{V}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots \bar{F}_n$$

என எழுதலாம்.

$F_1 + F_2 + \ldots + \bar{F}_n = \bar{F}$ என்பது இந்த துகள்களின் மீது செயல் படும் விசைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இது துகள்கள் ஒன்றுக்கொன்று செயல்படும்போது உண்டாகும் விசைகள் (உள் விசைகள்) வெளிப்பொருள்கள் இவைகளின் மீது செயல்படுத்தும் விசைகள் வெளி விசைகள் இவற்றின் கூடுதலாகும்.

நியூட்டனின் மூன்றுவது விதியின்படி உள் விசைகளின் கூட்டுத் தொகை சுழியமாகிறது. ஆகவே, F என்பது வெளி விசைகளின் கூடுதலாகும்.

2.05. (b) புவியீர்ப்பு புள்ளியின் இயக்கம் :

$\bar{R}_1, \bar{R}_2 \ldots \bar{R}_n$ என்ற வெக்டார்கள் O என்ற நிலைப்புள்ளியிருந்து $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ என்ற பொருண்மைகளைக் கொண்டதுகள் களுக்கு வரையப்பட்ட வெக்டார்களாகக் கொள்வோம்.

$$\bar{R}_c = \frac{m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2 + \ldots + m_n \bar{R}_n}{m_7 + m_2 + \ldots + m_n}$$

என்ற வெக்டார் O-விலிருந்து வரையப்பட்டால் இதன் இறுதிப் புள்ளியான C-ஆனது இந்தத் துகள்கள் தொகுதி (system)-யின் புவியீர்ப்புப் புள்ளி (centre of gravity) எனப்படும்.

இதையே,

$$m_1 \bar{R}_1 + m_3 \bar{R}_2 + \ldots m_n \bar{R}_n = m\bar{R}_c$$

என எழுதலாம். இங்கு $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ஆகும். இந்த சமன்பாட்டின் t-ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுவைக் கண்டால்

$m_1 \; V_1 + m_3 \; V_2 + \ldots\ldots + m_n \; \overline{V}_n = \dfrac{md \; \overline{R}_c}{dt} = m \, V_c$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு வெக்டார் V_c என்பது புவியீர்ப்பு புள்ளியின் திசை வேக மாகும், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி

$$\frac{d}{dt} \; (m \, \overline{V_c} = \overline{F}$$

எனவே புவியீர்ப்புப் புள்ளியானது துகள்களின் பொருண்மை களின் கூட்டுத் தொகையான m என்ற பொருண்னமயைக் கொண்ட ஒரு துகளைப்போல இந்தத் தொகுதியில் (system) செயல் படும் வெளிவிசைகளின் கூட்டுத்தொகையான $\overline{F}$ என்ற விசையால் செயல்படுத்தப்படுகிறது என அறிகிறோம்.

இந்த தொகுதி(system)-யின் ஒவ்வொரு துகளுக்கும்

$\dfrac{d\overline{H}}{dt} \; \overline{M}$ என சமன்பாட்டினை எழுதலாம்.

தொகுதியின் எல்லா துகள்களுக்கும் மொத்த மாகக் கருதப்படும் போது, $\dfrac{d\overline{H}_t}{dt} = \overline{M}_s$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\overline{H}_s = m_1 \; \overline{R}_1 \times \overline{V}_1 + m_2 \; \overline{R}_2 \times V_2 + \ldots\ldots + m_n \; \overline{R}_n \times \overline{V}_n$ என் பது துகள்களின் O-வைப் பொறுத்த கோண உந்தங்களின் (angular momentum) கூடுதல் ஆகும்.

$M_s = \overline{R}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{R}_2 \times \overline{F}_2 + \ldots\ldots + \overline{R}_n \times \overline{F}_n$ என்பது $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots\ldots \overline{F}_n$ என்ற விசைகளின் O-வைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களின் கூடுத லாகும்.

இதிலிருந்து O-வைப் பொறுத்த மொத்த கோண உந்த (angular momentum) மாறுவீதம் O-வைப் பொறுத்த, வெளி விசை களின் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்று தெரிகிறது.

நகரும் புவியீர்ப்பு புள்ளியைப் பொறுத்து துகள் m-ன் திசை வேகம் $\overline{V}_i - \overline{V}_c$, கோண உந்தம் $m_i \; (\overline{R}_i - \overline{R}_c) \times (\overline{V}_i - \overline{V}_c)$ ஆகும், எனவே, புவியீர்ப்புப் புள்ளியைப் பொறுத்த மொத்த கோண உந் தம் $\overline{H}c = \sum_i mi \; (\overline{R}i - \overline{R}c) \times (\overline{V}i - \overline{V}c)$. இதையே $Hc = H - m\overline{R}c \times \overline{V}c$ என எழுதலாம். இங்கு $\overline{H} = \overline{H}c + m\overline{R}c \times \overline{V}c$ ஆகும். அதாவது

துகள்களின் தொகுதி O-வைப் பொறுத்த கோண உந்தம் கீழ்க் கண்ட இரண்டு பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

(1) புவியீர்ப்புப் புள்ளியைப் பொறுத்த கோண உந்தம்.

(2) m என்ற பொருண்மையும் $\bar{V}c$ – என்ற திசைவேகமும் கொண்ட ஒரு துகளின் O-வைப் பொறுத்த கோண உந்தம்.

இதே மாதிரி, புவியீர்ப்புப் புள்ளியைப் பொறுத்த விசைகளின் திருப்புத்திறன் $Mc = \sum_i (\bar{R}i - \bar{R}c) \times Fi = M - \bar{R}c \times \bar{F}$

எனவே $\bar{M} = \bar{M}c + \bar{R}c \times \bar{F}$

விசைகளின், O-வைப் பொறுத்த மொத்த திருப்புத்திறன் பின் வரும் இரு பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

(1) விசைகளின் புவியீர்ப்புப் புள்ளியைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்

(2) புவியீர்ப்புப் புள்ளி வழியே செயல்படும் இணைவாக்க விளைவு விசையின் O-வைப் பொறுத்த திருப்புத்திறன்.

$$\bar{H} = \bar{H}c + m\bar{R}c \times \bar{V}c.$$

இதன் வகைக்கெழுவைக் கண்டு மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\frac{d\bar{H}c}{dt} = \bar{M}c$ என எழுதலாம்.

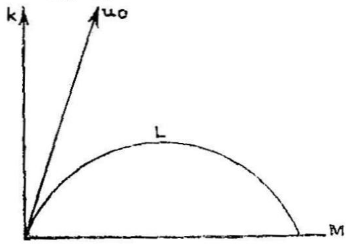
இதிலிருந்து கோண உந்தத்தின் மாற்றுவீதம் திருப்புத்திறன் களின் மொத்தத்திற்கு சமம் எனத் தெரிகிறது. எனவே கோண உந்தம், திருப்புத்திறன் இவைகளை O-என்ற நிலைப்புள்ளியை பொறுத்தோ அல்லது நகரும் புவியீர்ப்புப் புள்ளியை பொறுத்தோ கண்டாலும் இந்த சமன்பாடு பொருந்தும் எனத் தெரிகிறது.

2.06. புவியீர்ப்பு புலத்தில் (gravitational field) துகளின் இயக்கம் :

புவியீர்ப்பு சக்தி மட்டும் செயல்படும்போது m என்ற பொருண்மை உள்ள ஒரு துகளின் இயக்க சமன்பாட்டினை

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -mg\bar{k} \quad \ldots\ldots (1)$$ என்று எழுதலாம்.

இங்கு வெக்டார் $\overline{k}$ என்பது மேல் நோக்கி செங்குத்தாக வரையப்பட்ட ஒரு அலகு வெக்டாராகும். வெக்டார் r என்பது துகளின் ஆயத்தைக் குறிக்கும். படம் 24 சமன்பாடு (1)-ஐ



படம் 24

$\frac{d^3\overline{r}}{dt^2} = -g\overline{k}$ என்றும் எழுதலாம்.

$v = \frac{d\overline{r}}{dt}$ என்று கொண்டால்

$\frac{dv}{dt} = -g\overline{k}$ ஆகும்.

இதை தொகை படுத்தும்போது

$\overline{v} = -g\ t\ \overline{k} + b$ ... (2) என்று எழுதலாம்.

b ஒரு மாறிலி வெக்டாராகும்.

$t = O$ ஆக இருக்கும்போது $v = u_\circ$ என்றால் சமன்பாடு (2)-லிருந்து $b = u_\circ$ எனக் காணலாம்.

எனவே,

$$\overline{v} = \frac{dr}{dt} = u_\circ - g\ t\ \overline{k} \ldots\ldots (3)$$

இதன் தொகை காண,

$\overline{r} = t_\circ - \frac{1}{2}\ gt^2\ \overline{k} + \overline{c}$ என்றறிகிறோம்.

$t - O$ ஆக இருக்கும்போது $r = O$ என்றால் $c = O$.

எனவே $\overline{r} - \overline{u}_0 t - \frac{1}{2}\ gt^2\overline{k}$ ......(4)

சமன்பாடு (4)-லிருந்து இந்த துகளின் இயங்கு வரை (locus) புள்ளி O, வெக்டார்கள் $\overline{u}_\circ$, $\overline{k}$ இவைகளால் வரையறுக்கப்பட்ட தளத்தில் அமையும் ஒரு வளைவு கோடு என்று தெரிகிறது.

$t = O$ என்ற கணத்தில் இந்த துகளின் திசை வேகம் செங்குத்தாக வெக்டார் k-யின் திசையிலிருந்தால், அந்தக் கணத்தில் இந்த துகளின் நிலையானது O-வின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில், இது மாறாமல் இருக்கும் என சமன்பாடு (4)-லிருந்து தெரிகிறது,

வெக்டார்கள் $\bar{u}_o$, $\bar{k}$ இவைகளின் திசைகள் வெவ்வேறாக இருக்கும்போது இவற்றினை OX, OY திசைகளில் குறித்தால் நேரம் t-கணத்தில்

$$x = |\bar{u}_o|\, t$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\, g t^2 \quad \text{என்று ஆகிறது.}$$

இதிலிருந்து t-ஐ நீக்சி

$$y = -\tfrac{1}{2}\, \frac{g}{|\bar{u}_o|^2} \quad \text{என்று காணலாம்.}$$

எனவே, புவியீர்ப்பு களத்தில் தன்னிச்சையாக இயங்கும் துகளின் இயங்கு வரை ஒரு பரவளைவு (parabola) எனத் தெரிகிறது. இந்த இயங்கு வரை (locus)-யின் உச்சிப்புள்ளியின் திசைவேகத்தின் செங்குத்துக் கூறு சுழியமாகும். அதாவது $\bar{v} \,.\, k = O$. எனவே சமன்பாடு (3)-லிருந்து $(\bar{u}_o = g\, t\, \bar{k})\, \bar{k} = O$.

$$\therefore \quad t = \frac{\bar{u}_o \,.\, \bar{k}}{g}$$

இது துகள் உச்சிப் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரமாகும்.

எறிவுப் புள்ளி வழியே செல்லும் சமதளத்தில், துகளின் இயங்கு வரையின் இறுதிப் புள்ளியுல் $\bar{r} \,.\, \bar{k} = O$ ஆகும்.

$$\text{அதாவது} \quad (\bar{u}_o t - \tfrac{1}{2}\, g t^2) \,.\, \bar{k} = O$$

$$t = O \quad \text{அல்லது} \quad \frac{2\, \bar{u}_o \,.\, \bar{k}}{g}.$$

$$\text{எனவே} \quad t = 2\, \frac{\bar{u}_o \,,\, \bar{k}}{g} \quad \text{என்பது}$$

துகள் இறுதிப்புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் ஆகும்.

பயிற்சி :

இயங்கு வரை பரவளைவின் உச்சிப்புள்ளி, இறுதிப்புள்ளி இவற்றின் வெக்டார் நிலைகளைக் கணக்கிடு.

2.07. சீரியல்பான இயக்கம் : (Simple harmonic motion)

ஒரு துகளின்மீது செலுத்தப்படும் விசையின் எண் மதிப்பு, ஒரு நிலைப் புள்ளியிலிருந்து துகளுக்குள்ள இடப்பெயர்ச்சியைப்

பொறுத்தும், விசையின் திசை நிலைப்புள்ளியை நோக்கியும் இருந்தால் அதன் இயக்கம் சீரியல்பான இயக்கம் எனப்படும். இந்த இயக்கத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\mu\bar{r} \ldots\ldots (1)$$

இங்கு வெக்டார் r என்பது துகளின் வெக்டார் நிலையாரும் μ என்பது விகித சம மாறிலி.

இதன் பொதுத் தீர்வு

$$\bar{r} = \bar{a}\cos\sqrt{\mu}t + \bar{b}\sin\sqrt{\mu}\,t \ldots\ldots (2)$$

இங்கு $\bar{a}$, $\bar{b}$ என்பவை மாறிலி வெக்டார்கள் ஆகும்.
இதன் வகைக் கெழு

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = -\sqrt{\mu}\,\bar{a}\sin\sqrt{\mu}\,t + \sqrt{\mu}\,b\cos\sqrt{\mu}\,t \ldots\ldots (3)$$

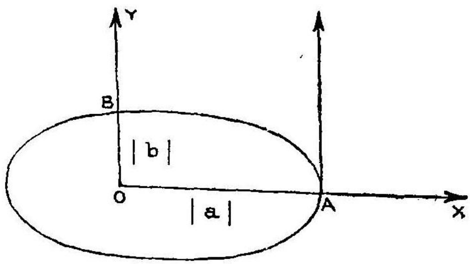
$t = O$ – என்ற கணத்தில், சமன்பாடுகள் (2), (3)-லிருந்து

$r = \bar{a}$

$\bar{v} = \sqrt{\mu}\,\bar{b}$ என்று அறிகிறோம்.

$\bar{a}, \bar{b}$ ஐ $\overline{OX}, \overline{OY}$ வழியே எடுத்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (2)-லிருந்து இந்த துகளின் இயங்கு வரையின் எந்த புள்ளியிலும்

$x = |\bar{a}|\cos\sqrt{\mu}\,\bar{t}$, $y = |\bar{b}|\sin\sqrt{\mu}\,t$
என்று அறிகிறோம்.



படம் 25

எனவே $\frac{x^2}{|\bar{a}|^2}+\frac{y^2}{|\bar{b}|^2}=1$ என்று எழுதலாம். அல்லது $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டம் (ellipse) துகளின் இயங்கு வரை எனத் தெரிகிறது. படம் 25.

சமன்பாடுகள் (2) (3)-லிருந்து $\bar{r}$, $\bar{v}$ என்பன t-யின் திரும்பு9 சார்புகள் எனத் தெரிகிறது.

சுழற்சி நேரம் $=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ அதாவது $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ நேரத்தில் துகள், இந்த நீள் வட்டத்தை ஒருமுறை வரையும்.

பயிற்சி :

ஒரு துகளின் முடுக்கம் $t\geq O$ என்ற கணத்தில் $\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=e^{-t}\ i=6\ (t+1)\ \hat{j}+3\ (\sin t)\ \hat{k}$ ஆனுல் $\bar{v}$, $\bar{r}$-ஐக் கணக்கிடு. இங்கு துகளின் திசை வேகமும், நிலையும் $t=O$-த்தில் சுழியம் என எடுத்துக் கொள்.

2.08. பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Partial differentiations)

$\bar{V}$ என்பது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசையிலி மாறிகளின் வெக்டார் சார்பனால், $\bar{V}$-ன் வகைக்கெழுக்கள் ஒவ்வொரு மாறியைப் பொறுத்தும் காண இயலும். அவ்வாறு காணும்போது மற்ற ஒரு மாறியைத் தவிர மாறிகளை மாறிலிகளாகக் கருத வேண்டும். இவ்வாறு காணப் பட்ட வகைக் கெழுக்கள் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் எனப்படும்.

$\bar{V}=\bar{f}\ (x, y, z)$ ஆனுல்

$$\frac{\partial V}{\partial x}= \underset{\triangle x\to O}{\text{எல்லை}}\ \frac{\bar{f}\,(x+\triangle x,\ y,\ z)-\bar{f}\,(x,\ y,\ z)}{\triangle x}$$

இதே மாதிரி $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ என்ற பகுதி வகைக் கெழுக்களையும் எழுதலாம். எனவே,

$$d\bar{V}=\frac{V}{\partial x}\ dx+\frac{\partial V}{\partial y}\ dy+\frac{\partial V}{\partial z}\ dz$$

$$r=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z \text{ என்ருல்}$$

ஆனுல்

$$\hat{i}\ dx+\hat{j}\ dy+\hat{k}\ dz$$

எனவே

$$dV = \left[\hat{i}\frac{\partial \bar{V}}{dx} + \hat{j}\frac{d\bar{V}}{dy} + \hat{k}\frac{d\bar{V}}{dz} \right]. \quad [\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz]$$

$$= \left[(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad d\bar{r} \right] V$$

$\nabla = \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ என்பது ஒரு இயக்கியானுல் (operator)

$$d\bar{V} = \nabla V \,.\, dr \text{ அல்லது}$$

$$d\bar{V} = (\triangle\,,\, dr)\,\bar{V} \ldots\ldots (1) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு ∇ என்பது ஒரு செயற்பாட்டினைக் குறிக்கும் குறியீட்டு வெக்டாராகும் 'டெல்' (del) என அழைக்கப்படும் இந்த வெக்டார் முதன் முதலில் ஹேமில்டன் (Hamilton) என்பவரால் நடை முறையில் புகுத்தப்பட்டது. மற்ற வெக்டார்களைப் பொறுத்து எல்லா விதி முறைகளுக்கும் இது ஒத்து வருகிறது. இதனைப் பயன் படுத்தி சரிவு அல்லது வாட்டம் (gradient). பாய்வு (divergence , சுழல் (curl) எனும் மூன்று கணியங்களை வரை யறுக்கலாம். $\triangle$ன் கூறுகள் $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ வழியே $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{dy}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ என்ற குறியீட்டு அளவுகளாகும். $\dfrac{d}{dx}$ என்பது திசையிலி நுண்கணிதத்தில் வகைக்கெழு காணும் செயல்பாட்டைக் குறிப்பது போன்று, வெக்டார் நுண்கணிதத்தில் ∇ அமைகிறது. அதாவது $\nabla V = \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k\dfrac{\partial V}{\partial z}$

2.09. திசையிலிகளமும், வெக்டார்களமும் (Scalar and vector fields)

மூவளவை வெளியில் (three dimensional space) R என்னும் ஒரு பகுதியை region) எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஏதாவதொரு இயற்பியல் பண்புடன் தொடர்புடையதெனக் கொள்வோம். இவ்வியற்பியல் பண்பு ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தகுந்தவாறு மாறுகிருற்போலும், வரை யறுக்கப்பட்ட மதிப்பினை உடையதாயும் இருக்குமாறு எழுதப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் R எனும் மூவளவை வெளியின் பகுதி புலம். எனப்படும்.

புலங்களை 'திசையிலி புலம்'. 'வெக்டார் புலம்' என இரு வகையாக பிரிக்கலாம். இயற்பியல் பண்பை எழுதும் சார்பு

திசையிலு சார்பாயின் 'திசையிலி புலம்' என்றும் வெக்டார் 'சார்பாயின் வெக்டார் புலம்' என்றும் அழைக்கப்படும். இவ்வாறு திசையிலி புலத்தில் இயற்பியல் பண்பு, திசையிலி சார்பினுல் கொடுக்கப்படும். புலத்தின் பல்வேறு புள்ளிகளின் இத்திசையிலியின் மதிப்பு மாறுபடும். அதாவது P எனும் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் அதன் மதிப்பு அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைச் சார்ந்து அமையும்; எனவே இயற்பியற் பண்பைக் காட்டும் இம்மாறி ஒரு புள்ளியின் நிலையைச் சார்ந்து அமைவதால், இதனை "திசையிலிப் புள்ளி சார்பு" (scalar point function) என அழைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, சூடாக்கப்பட்ட பொருள் ஒன்றில் சூட்டின் பரவல் நிலையை ஆராயும்போது, வெவ்வேறு புள்ளிகளில் உள்ள வெப்பநிலையைக் காட்டும் சார்பு, "திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பா"கும். பொருள் இடம் கொண்டுள்ள பகுதி வெளிதிசையிலிப் புலமாகும். இதே போன்று, பொருள் அடர்த்திப் பரவலை காட்டும் சார்பு (distribution of density), மின்சார நிலைசக்தி முதலியன (potential), வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி வெளியினேடு ஒரு இயற்பியற் பண்பை தொடர்புபடுத்திக் காட்டுவது ஒரு வெக்டார் சார்பானுல், அப்புலம் வெக்டார் புலம் எனப்படும் எனக் கண்டோம்.

எடுத்துக் காட்டாக, இயங்கிக் கொண்டிருக்கும், பாய்மம்' (fluid) ஒன்றின் பல்வேறு புள்ளிகளின் திசை வேகங்களைக் குறிக்கும் சார்புகள் வெக்டார் சார்களாகும். எனவே அப்பாய்மம் இடம் கொண்டுள்ள பகுதி வெக்டார் புலம் எனப்படும். ஓவ்வொரு புள்ளியிலும் பாய் மத்தின் திசை வேகம் ஒரு தொடர்ச்சியான வெக்டார் சார்பாகும். (continuous vector function) ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அப்பாய் மத்தின் திசை வேகம் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையும், அளவும் கொண்டதாயும், புலம் முழுவதிலும் புள்ளிக்குப் புள்ளிதிசையிலும் அளவிலும் அது தொடர்ச்சியாக மாறுபடுவதாயும் அமைகிறது. இவ்வாறு இயற்பியற் பண்பு ஒன்றினை புள்ளியின் நிலைக்குத் தக்கவாறு தொடர்ச்சியாக மாறக் கூடிய வெக்டார் சார்பாக எழுதுவதைத்தான் "வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு, (vector point function) என்கிறோம்.

2.10. (அ) திசையிலிப்புள்ளிச் சார்பின் சரிவு ; (Gradient of a scalar function)

$S(x, y, z$ என்பது மூவளவை வெளியில் ஏதோ ஒரு புள்ளிக்குப் பொருந்தும் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்புஎனக் கொள்வோம்.

அப்படியானால் $\left(\hat{i}\frac{\partial s}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial s}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial s}{\partial z}\right)$ எனும் வெக்டார். S-ன் சரிவு எனப்படும். இதனை 'சரிவு S' (grad S) எனக் கூறலாம். இந்த புதிய வெக்டாரை வரை யறை செய்ய $\frac{\partial S}{\partial z}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ என்ற பகுதி வகைக் கெழுக்களைக்காண இயல வேண்டும். $S\,(x, y, z)$ எனும் சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் (continuous) வகைக் கெழுக்காண (differentiable) தகுதியுள்ளதாயும் அமைகின்ற பகுதி முழுவதிலும் இம்மாதிரி 'சரிவு S' எனும் வெக்டார் காண இயலும்.

எனவே சரிவு $S=\hat{i}\frac{\partial S}{\partial x}+j\frac{\partial S}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}=\triangle S$.. ...(1)

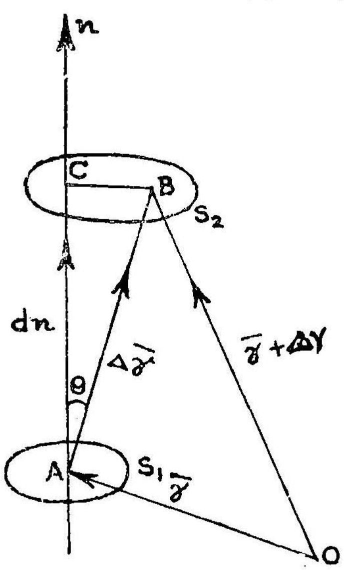
இது ஒரு வெக்டார் களத்தை வரையறுக்கிறது.

S என்பது ஒரு மாறிலியானால்

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial S}{\partial x}=O.$$ எனவே சரிவு $S=O$

(ஆ) சரிவு S-ன் வடிவகணித விளக்கம் :

ஒரு திசையிலிகளத்தில் S_1, S_2 என்ற அருகேயுள்ள மேற்பரப்புகளை (Surfaces) எடுத்துக் கொள்வோம் படம் 26. இவைகள் முறையே S, $S\triangle S$ என்ற திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகளை உடையதாக இருக்கட்டும். எனவே திசையிலிச் சார்பின் மதிப்பு S_1-ல் உள்ள A என்ற எந்த ஒரு புள்ளியிலும் S ஆகவும், S_2-ல் உள்ள B என்ற எந்த ஒரு புள்ளியிலும் $S+ds$ ஆகவும் இருக்கும். O என்பது அச்சுத் தோற்றுவாயானால்



படம் 26

$$\overline{OA}=\overline{r}\ ;\ \overline{OB}=r+\triangle\overline{r}$$

எனவே

$$\overline{AB}=\triangle\overline{r}$$

A-ல் ஃ அதன் வழிச்செல்லும் மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் நேர் குத்துகோடு

(nor-mal) வழிச்செல்லும் மேற்பரப்பினை C-ல் வெட்டும். எனவே S_1, S_2-வின் இடையை உள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் AC ஆகும். இதன் நீளம் dn. இது AC-ன் நேர்குத்து திசையில் அமைந்துள்ளது, A என்ற புள்ளியில் வெக்டார் AB திசையில் S-ன் மாறு வீதம் $\frac{\partial S}{\partial r}$ ஆகும். $\frac{\partial S}{\partial n}$ என்பது A-ல் வெளி நோக்கிய நேர்க்குத்துக் கோட்டின் வழியே S-ன் மாறு வீதம் ஆகும்.

$$\angle \quad BAC = \theta \text{ எனில்}$$

$$AB \cos\theta = AC$$

அதாவது $\triangle r \cos\theta = \triangle An$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{\triangle r \to 0} \frac{\triangle n}{\triangle r} = \cos\theta$$

$$\text{எனவே} \quad \frac{\partial S}{\partial r} = \text{எல்லை} \frac{\triangle S}{\triangle r}$$

$$= \text{எல்லை} \frac{\triangle S}{\triangle n} \cdot \frac{\triangle n}{\triangle r}$$

$$= \frac{\partial n}{\partial n} \cos\theta$$

$$\cos\theta \mid < \mid \text{ ஆகையால் } \frac{\partial S}{\partial r} < \frac{\partial S}{\partial n}$$

அதாவது AB-ன் வழியே S-ன் மாறும் வீதம், A-ல் வரையப் படும் நேர்குத்துக்கோட்டின் வழியே மாறும் வீதத்தை விடக்குறை வாகும். AB என்ற திசை நம் விருப்பிற்கேற்ப எடுத்துக் கொண்ட தாகவும். எனவே, எந்தவொரு புள்ளியிலும் S-ன மாறும் வீதம் அப் புள்ளியில் வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியேதான் மிகக் கூடுதலாய் அமைகிறது.

A-ல் வரையப்படும் செங்கோட்டின் வழியமைந்த ஒரலகு வெக் டார் $\hat{n}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்படியானல்} \quad \triangle n = \hat{n} \cdot \triangle \bar{r} \text{ ஆகும்.}$$

$$= \frac{\triangle S}{\triangle n} \triangle n$$

$$\text{மேலும்} \; \triangle S = \frac{\triangle S}{\triangle n} \hat{n} \cdot \triangle \bar{r}$$

$$\text{எனவே } ds = \frac{\partial s}{\partial n} \hat{n} \cdot d\bar{r} \quad \ldots \quad (2)$$

இதையே சமன்பாடு (1)-ன் மூலம்

$$dS = \triangle S \,.\, d\bar{r} \ldots\ldots (3)$$

எனவும் எழுதலாம்.

எனவே சமன்பாடுகள் (2) (3)-லிருந்து

$\nabla S \frac{\partial S}{\partial n} \hat{n}$ எனத் தெரிகிறது.

அதாவது $\triangle S$ என்பது $\hat{n}$-ன் திசையில் $\frac{\partial S}{\partial n}$ எனும் எண் மதிப்புடன் அமைந்த வெக்டாராகும். $\frac{\partial S}{\partial n}$ என்பது A-ல S-ன் மிகப் பெரும் மாறுவீதம் (greatest rate of increase) ஆகும். இவ்வாறு ∇S-ன் விளக்கமானது கீழ் வருமாறு கொடுக்கப்படும். திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு $S\,(x, y, z)$-ன் சரிவு என்பது $S\,(x, y, z) = C$ எனும் மேற்பரப்பிற்கு அது அதிகரிக்கும் திசையில் வரையப்படும் நேர்குத்திக் கோட்டின் திசையில் அமைந்த ஒரு வெக்டாராகும். அதன் அளவு அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் மீப்பெரும்மாறு வீதம் (maximum rate of increase) ஆகும். மேலும் $\frac{\partial S}{\partial n} = \frac{\partial S}{\partial n} \cos\theta$ ஆகையால், எத்திசையிலும் சார்பின் திசை வகைக்கெழு அத்திசையில் சார்பின் சரிவின் வீழ்ச்சிஏகு சமமாகும்.

(இ) முக்கியமான சில வழி முடிவுகள் :

(1) திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகளின் கூட்டலின் சரிவு, தனித் தனிச் சார்புகளின் கூட்டலுக்கு சமம். u, v என்பன திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகள் எனில் $\nabla\,(n+v) \approx \nabla u + \nabla v$ ஏனெனில்

$$\nabla\,(u+v) = i\frac{\partial}{\partial x}\,(u+v) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(u+v) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\,(u+v),$$

$$\left(\hat{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial v} + \hat{k}\,\frac{\partial n}{\partial z}\right) + \left(\hat{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{v}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla u + \triangle v.$$

(2) இரு சார்புகளின் பெருக்கலின் சரிவு காணும் முறை :

$$\triangle\,(uv) = \quad \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(uv+)\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\,(nv)$$

$$= A\left\{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \hat{j}\,\left\{u\,\frac{\partial v}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$+ \hat{k}\,\left\{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$= u\left(\hat{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial v}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$+ v\left(\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= u\nabla v+v\ \nabla u.$$

(3) சார்பின் சார்புக்குச் சரிவு காணும் முறை;

$v=f(u)$ எனக் கொள்வோம்.

u என்பது x, y, z-ன் சார்பு

$$\nabla v = \nabla f(u)$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f\ (u)$$

$$= f'\ (u)\ \left[\hat{i}\frac{\partial n}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial u}{\eta x}+\hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$= f'\ (u)\ \triangle u$$

இங்கு $f'\ (u)$ என்பது $\frac{d}{du}\ [f\ (a)\ ]$ என்பதனைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறு சாதாரண வகைக் கெழு காணும் விதிமுறைகளை $\bar{V}$ பின் பற்றுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\bar{r}=\hat{i}\,x+\hat{j}\,y+\hat{k}z,\quad |\,\bar{r}\,|=\hat{r},$ வெக்டார் $\hat{r}$ என்பது வெக்டார் $\bar{r}$-ன் திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டார் எனில், (1) $\nabla r=$

(2) $= \frac{-\hat{r}}{r^2}$ என நிரூபி.

(1) $\hat{r}=\hat{i}\ x+\hat{j}\ y+\hat{k}\ z$

$$\therefore\quad \bar{r}\,.\,\bar{r}=(x^2+y^2+z^2)=r^2$$

$$\therefore\quad 2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \text{ அதாவது } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

இதே மாதிரி $\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$ ஆகும்.

எனவே $\triangle r = \hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}$

$$= \hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{k}\frac{z}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\hat{r} + \hat{r}.$$

(2) $\triangle \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\partial y}\right) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$= \frac{-1}{r^2}\left[\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{-1}{r^2}\hat{r}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$A\ (x, y, z)$ எனும் புள்ளியை தோற்றுவாய் அல்லது ஆதியுடன் இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் r எனவும், A-யின் வெக்டார் நிலை $\vec{r}$ எனவும் இருந்தால் $\triangle\ (r^n) = nr^{n-2}\ \bar{r}$ என நிரூபி.

A-ன் அச்சு தூரங்கள் (x, y, z) ஆகையால் $\bar{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$\vec{i}\ \cdot\ \bar{r} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\therefore\ \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{x}{r}\ ;\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\ ;\ \frac{\partial r}{dz} = \frac{z}{r}.$$

$$\therefore\ \triangle r^n)\left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)r^\triangle$$

$$= n\ r^{n-1}\ \left\{\hat{i}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right\}$$

$$= n\ r^{n-1}\ \left\{\frac{xi + yj + \hat{k}z}{r}\right\} = n\ r^{n-2}\bar{r}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

(1, 1, 3) என்னும் புள்ளியில் $u = xyz^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம் எவ்வளவு ?

ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம், அப் புள்ளியில் அச்சார்பின் சரிவினுல், திசையிலும் மதிப்பாலும் குறிக் கப்பெறும்.

$$\therefore \quad -\triangle u = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\right) xyz^2$$

$$= \hat{i}\,yz + \hat{j}\,xy^2 + \hat{k}\,2\,xyz$$

எனவே (1, 1, 3) எனும் புள்ளியில் இதன் மதிப்பு $9\hat{i} + 9\hat{j} + 6\hat{k}$ கும்.

$$\therefore \quad \text{மதிப்பு} = |\,9\,\hat{i} + 9\,\hat{j} + 6\,\hat{k}\,| = \sqrt{81 + 81 + 36} = \sqrt{198}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$x^2y + z = 3, \quad x \log z - y^2 = -3$$

என்ற வளை பரப்புகளை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளில் ஒன் ருன (−1, 2, 1)-ல் இப்பரப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்ன ?

வெட்டும் புள்ளியில் பரப்புகளுக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடுகளுக்கிடைப்பக்க கோணம் தான் பரப்புகளுக்கு இடைப் பட்டகோண மாகும்,

தளத்திற்கு நேர்குத்தான ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n} = \frac{\nabla S}{-\,|\nabla S\,|}$ ஆகும்:

$x^2y + z = 3$ என்ற தளத்திற்கு

$$\triangle S = \hat{i}\,2\,xy + \hat{j}\,x^2 + \hat{k}$$

$$\therefore \quad \text{ஓரலகு வெக்டார் } n, = \frac{\hat{i}\,2\,xy + \hat{j}\,x^2 + \hat{k}}{\sqrt{4x^2y^2 + x^4 + 1}}$$

$(-1, 2, 1)$-ல் இவ்வெக்டார் $\frac{-4\,\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{18}}$ ஆகும்.

இதே மாதிரி $x \log z - y^2 + 4 = 0$ என்ற பரப்பிற்கு நேர்குத்தான ஓரலகு வெக்டார், $(-1, 2, 1,)$-ல்

$$\hat{n}_2 = \frac{-4\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{17}}$$ ஆகும்.

கருதப்பட்டிருக்கிற வெட்டிக் கொண்டிரும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை தளங்களின் சமன்பாடுகளில் பிரிதியிட்டால், மாறுப்பட்ட குறியீடுடைய மதிப்புகள் கருவதால் வளை பரப்புகளில் ஒன்றின் உள்ளேயும், மற்றதின் வெளியிலுமாக தோற்றுவாய் அல்லது ஆதி அமைகிறது. எனவே வெக்டார் $\hat{n}_2$ குறியீட்டை மாற்றிக்கொண்டு வெக்டார் n க்கும் வெக்டார் $\hat{n}_2$-க்கும் அடைப்பட்டக் கோணமான θ-வைக் காண வேண்டும்.

$$\cos\theta = \hat{n}, \hat{n} = \left(\frac{-4i + j + k}{\sqrt{18}}\right) . \left(\frac{4j + k}{\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{306}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{306}}$$ ஆகும்.

2.11. (அ) வெக்டார் சார்பின் பாய்வு: (Divergence of a vector function)

$\bar{F}$ என்பது வெக்டார் புலம் ஒன்றில், வரை யறுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு காணத்தக்க ஒரு வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு எனக் கொள்வோம். அப்படியானால் புலத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y, z)-இலும் $\bar{F}$-ன் மதிப்பு கிடைப்பதுடன், அப்புள்ளியில் அச்சாபின் வகைக்கெழுவும் காணத்தக்க நிலையில் அச்சார்பு அமையும் இந்நிலையில் $\nabla . \bar{F}$ என்பது ஒரு திசையிலியைக் கொடுக்கும். அதுவே $\bar{F}$-ன் பாய்வு எனப்படும். F என்பது $\hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F$. என்றிருந்தால்

$$\triangle . \bar{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \left(\hat{i} F_1 + \hat{j} + F_2 + \hat{k} F_3\right)$$

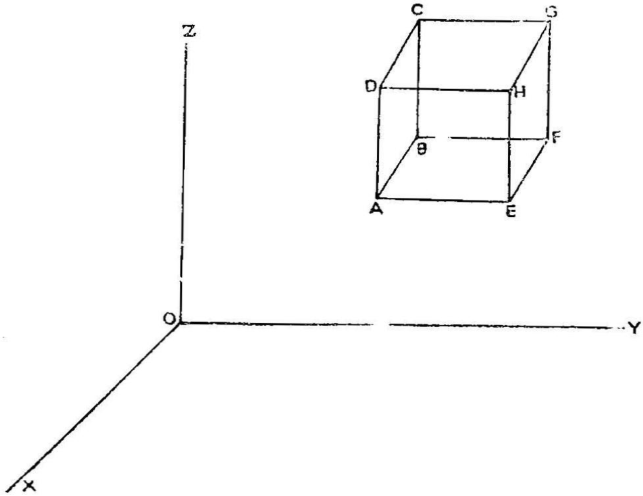
$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

இவ் வாய்ப்பாடு $\bar{F}$ எனும் வெக்டார் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பாய்வு காண பயன்படும்,

(ஆ) ஒரு வெக்டாரின் பாய்வுக்கு இயற்பியல் விளக்கம் (Physical interpretation of a divergence of a vector)

மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில், இயங்கும் பாய்மம் நிரம்பியுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$A\ (x,\ y,\ z)$ எனும் புள்ளியில் பாய்மத்தின் திசை வேகம் $\bar{V}=\hat{i}\,Vx+\hat{j}Vy+\hat{k}\,Vz$ எனும் வெக்டார் சார்பினுல் குறிக்கப்பெறும் எனக் கொள்வோம் படம் 27.



படம் 27

A-ல் ஒரு முனையை உடையதும், dx, dy, dz என்ற நீளங்களை விளிம்புகளாய் கொண்டதுமான ஒரு செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்திண்மத்தின் ஒரு முகத்தின் வழியாக, ஓரலகு நேரத்தில் பாயும், பாய்மத்தின் தோராய அளவு, அம்முகத்தின் பரப்பினை, அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் பாய்மத்தின் திசை வேகத்தினுல் பெருக்கினுல் கிடைக்கும். படத்தில் காட்டிய வாறு $ABCD$ என்ற முகத்தின் வழியே உள் நுழையும் பாய்ம அளவு $\triangle x\ \triangle z\ Vy_t$ ($ABCD$ எனும் தளம் XOZ எனும் தளத்

திற்கு இணையாயிருப்பதால் Vx, Vz என்ற திசை வேகக் கூறுகள் $ABCD$-யின் வழி பாயும், பாய்மத்தின் அளவை பாதிப்பதில்லை). $EFGH$ என்ற முகத்தின் வழியே வெளியேறும் அளவு $\Delta x\ \Delta z\ \Delta y + \Delta y = \Delta x\ \Delta z\ (Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y}\ \Delta y)$ எனவே OY-க்கு செங்குத்தான இரு முகங்களின் வழி பாய்வதினுல் ஏற்படும் குறைவு (decrease)

$$= \Delta x\ \Delta z\ (Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y}\ \Delta y) - \Delta x\ \Delta z\ Vy$$

$$= \frac{\partial Vy}{\partial y}\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

இதே போன்று OZ-க்கு, OX-க்குச் செங்குத்துத் தளங்களின் வழி பாய்வதாலும் $\frac{\partial Vz}{\partial z}\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ $\frac{\partial Vx}{\partial x}\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ எனும் குறைவுகள் ஏற்படும். எனவே செவ்வக இணைகரத்தின் மத்திலுள்ள பாய்ம அளவில் ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் குறைவு

$$\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\right) \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

∴ ஓரலகு கன அளவில், ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் குறைவு

$$= \left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vy}{\partial y}\right) \frac{\Delta x\ \Delta y\ \Delta z}{\Delta x\ \Delta y\ \Delta z}$$

$$= \frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}$$

இது தான் $\bar{V}$ எனும் வெக்டார் சார்பின் பாய்வு என வரையறுக்கப்பட்டது எனவே $\bar{V}$ என்பது ஒரு பாய்மத்தின் திசைவேகத்தினைக் குறிக்கும் வெக்டார் எனில் $\Delta . \bar{V}$ அல்லது $\bar{V}$-ன் பாய்வு என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஓரலகு நேரத்தில், ஓரலகு கன அளவில் அப் பாய்மம் என்ன விகிதத்தில் பாய்கிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. இது போன்று விளக்கம் வேறு வெக்டார் களங்களுக்கும் பொருந்தும். எடுத்துக்காட்டாக $\bar{V}$ என்பது மின் விசைப் பாய்வையே

அல்லது வெப்பம் பாயும் வேகத்தையோ குறித்தால் $\triangle . \bar{V}$ என்பது ஓரலகு நேரத்தில், ஓரலவு கன அளவிற்கு எவ்வளவு மின் விசை பாய்கிறது அல்லது எந்த விகிதத்தில் வெப்பம் வெளியேற்றப் படு கிறது என்பதைக் காட்டும்.

செயலி $\triangle$ ஒரு மாற்றமிலி. எனவே பாய்வும் கூட ஒரு மாற்ற மிலியாகும். பாய்மத்தின் ஒரு புள்ளியில் பாய்வு (+) ஆக இருந் தால், பாய்மம் விரிவடைகிறது என்றோ அல்லது அதன் அடர்த்தி அப்புள்ளியின் நேரத்தைச் சார்ந்து குறைகிறது என்றோ கொள்ள வேண்டும். அப்புள்ளி பாய்மத்தின் "மூலம்" (source) ஆகும். பாய்வு (−) ஆக இருந்தால் பாய்மம் சுருங்குகிறது என்றோ அல் லது அதன் அடர்த்தி அந்த புள்ளியில் அதிகமாகிறது என்றோ கொள்ள வேண்டும். எனவே அப்புள்ளியை "எதிர் மூலம்" அல் லது "உறிஞ்சி" (sink) எனக் கூறலாம். ஒரு பாய்மத்தில் உள் நுழையும் பாயமும் (flux) வெளிவரும் பாயமும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருந்தால் பாய்வு $\bar{V} = \triangle . \bar{V} = O$ ஆகும். இவ்வாறு பாய் மத்தி மூலமோ அல்லது உறிஞ்சியோ இல்லாதிருந்தால், அதனை "இறுகாத் தன்மை" உள்ள (incompressible) பாய்மம் எனக் கூற லாம். $\triangle . \bar{V} = O$ என்ற சமன்பாட்டினை இறுகாத் தன்மையுள்ள பாய்மங்களின் "தொடர்ச்சிச்சமன்பாடு" (equation of continuity) என்கிறோம். இந் நியதிக்கு உட்பட்ட வெக்டார்களை "வரிச் சுருள் உருளை வெக்டார்கள்" (solenoidal vectors) என்கிறோம்.

2.12. (அ) ஒரு வெக்டாரின் சுழல் (Curl of a vector)

$\bar{F}(x, y, z)$ என்பது மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில் ஒவ் வொரு புள்ளியிலும் வரையறுக்கப்பட்டதும், வகைக் கெழுக்காணத் தக்கதுமான, ஒரு வெக்டார் புள்ளிச் சார்பு எனில் $\triangle \times \bar{F}$, என்ற $\bar{F}$-ன் "சுழல்" என அழைக்கப்படும்.

$\bar{F} = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3$ எனில்,

$$\triangle \times \bar{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) + (\hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_5)$$

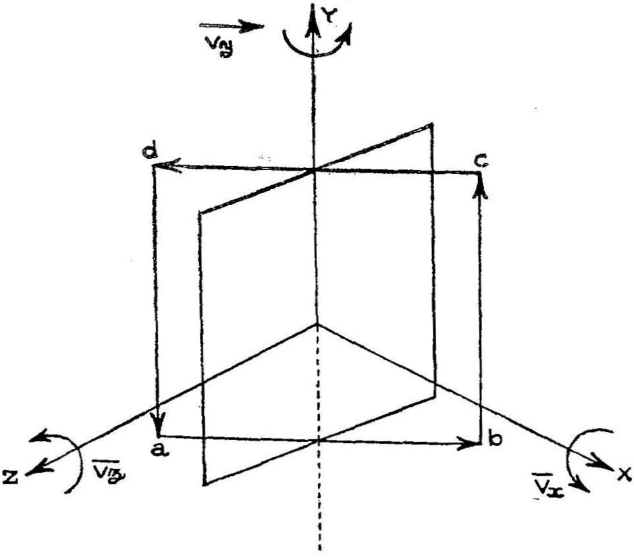
$$= \hat{i} \times \hat{j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) + \hat{j} + \hat{k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)$$

$$+ \hat{k} \times \hat{i}\left(\frac{\partial F.}{\partial z} \cdot\cdot \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(ஆ) வெக்டாரின் சுழலுக்கு இயற்பியல் விளக்கம் :



படம் 28

படம் 28-ல் உள்ளபடி Z-அச்சிற்கு, நேர்க்குத்தானதும் அதனைச் சுற்றி குறிப்பிட்ட அம்புக்குறியின் திசையில் வரையப்பட்ட

dx, dy என்ற பக்கங்களையுடையதுமான $abcd$ என்ற செவ்வகபரப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். dx, dy என்பன மிகமிகச் சிறிய மறையத் தகுந்த மதிப்பினைக் கொண்டவை (vanishingly small) எனவே எந்த ஒரு பக்கத்தின் மையப் புள்ளியிலும் வெட்டார் $\bar{V}$-ன் கூறின் (component) எண் மதிப்பு அந்தப் பக்கத்தில் அதன் சராசரி மதிப்புக்குச் சமம்.

ab, bc, dc, ad வழியே அதன் சராசரி மதிப்புகள் முறையே

$$Vx - \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vx}{\partial y}.\ \ dy,\ \ Vy + \tfrac{1}{2}\frac{\partial Vy}{\partial x}\ dx,$$

$$Vx + \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vx}{\partial y}\ \ dy, = Vy - \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vy}{\partial x}\ dx$$

ஆகும்.

படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள அம்புக்குறி திசையில் $abcd$ என்ற வடிவ விளிம்பு வரை அல்லது உருவரை (contour) வழியே கோட்டு வழித்தொகை (Line integral),

$$\left[(Vx - \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial V_2}{\partial y}\ dy) - (Vx + \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vx}{\partial y}\ dy\ \right].\ \ dx$$

$$+\left[(Vy + \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vy}{\partial x}.\ \ dy) - (Vy - \tfrac{1}{2}\ \frac{\partial Vy}{\partial x}\ dx\ \right].\ \ dy$$

$$-\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right).\ \ dy\ .\ dx.$$

ஆனால் $abcd$-ன் பரப்பளவு $dx\ .\ dy$ ஆகும். எனவே $abcd$-க்கு நேர்குத்தான திசையில் அதாவது Z-திசையில் ஓரளவு பரப்பளவுக்குக் கோட்டுவழித் தொகையானது.

$$\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right)\ \text{ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே சுழல் } z\bar{V} = \left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right)\hat{k}$$

இதே மாதிரி சுழல் $\bar{V} = \left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vy}{\partial x}\right)\hat{j}$

$$\text{சுழல் } x\bar{V} = \left(\frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial z}\right)\hat{i}$$

என எழுதலாம்.

$$\text{சுழல் } \bar{V} = \text{சுழல் }_x\bar{V} + \text{சுழல் }_y\bar{V} + \text{சுழல் }_z\bar{V}$$

$$\hat{i}\left(\frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{\partial y}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Vx & Vy & Vz \end{vmatrix} = \Delta \times \bar{V}$$

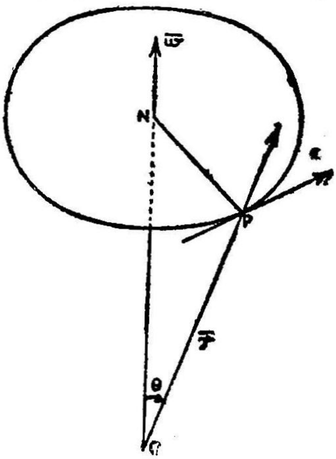
Δ மாற்ற மிலியாக இருப்பதால், 'சுழலும்' ஒரு மாற்ற மிலி யாகும்.

நீர்யியக்கு விசையியலில் (Hydrodynamics) பாய்மத்தின் "சுழற்சி" (rotation)-யைப் பற்றி அறிய இயக்கி "சுழலே" பயன் படுத்துவோம். ஆகவே சுழல் $\bar{V}$-ஐ சில சமயத்தில் "ரோட் V" (Rot $\bar{V}$) எனவும் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு கட்டிருக்கமான பொருள், இயக்கத்தில் இருக்கும் பொழுது எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அதன் சுழல் $\bar{V}$ [நேர் கோட்டு திசை வேகம் (linear velocity) ஆனது, அதன் கோணத்திசை வேகத்தின் (angular velocity) இரு மடங்கு என நிரூபி.

கட்டிருக்கப் பொருளானது ஒரு அச்சைச் சுற்றி செகண்டுக்கு ω ஆரையன்கள் (radians) என்ற ஒரே சீரான கோணதிசை வேகத்துடன் $(\overline{\omega})$ சுழல்வதாகக் கொள்வோம். இதன் எண் மதிப்பு ω ஆகவும், இதன் திசை சுழல் அச்சின் திசையாகவும் கொள்வோம். இவ்வச்சின் மீது O-எனும் ஒரு புள்ளியும், கட்டிருக்கப் பொருளில் P-என்றொரு புள்ளியும் எடுத்துக் கொள்வோம். PN என்பதை சுழல் அச்சுக்கு செங்குத்தாக வரைவோம், O-வை தோற்றுவாயாக அல்லது ஆதியாகக் (origin) கொண்டு $\overline{OP}=\overline{r}$ என்க. பொருள் சுழல்கையில் P-ஆனது N-ஐ மையமாகவும், NP-ஐ ஆரமாகவும் உடைய வட்டத்தில் நகரும். அதாவது OP.க்கு. ON-க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் $OP \sin\theta = r\sin\theta$ என்ற ஆரத்துடன் கூடிய வட்டத்தில் OPN என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக நகரும். எனவே P-யின் நேர்க்கோட்டு திசைவேகம் $NP.\omega = OP \sin\theta . \omega = \omega r \sin\theta$ இவ்வாறு P-யின் நேர்க்கோட்டு திசை வேகம் $\omega r\sin\theta$ என்ற எண் மதிப்புடன் OPN-க்கு செங்குத்தாக $\overline{\omega}, \overline{r}$-க்கு வலக்கை அமைப்புடனும் விளங்குவதால் $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}$.



படம் 29

$$\overline{r} = \hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$$

$\overline{\omega}=\overline{i}\,\omega_1+\overline{j}\,\omega_2+\overline{k}\,\omega_3$ ஆதலால்

$$\hat{i}\,\omega_1+\hat{j}\,\omega_2+\hat{k}\,\omega_3$$

$$\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(\omega_2 z - \omega_5\, y) + \hat{j}\,(\omega_3\, x - \omega_2 + \hat{k}\,(\omega_1\, y - \omega_2\, x)$$

ஆதலால் $\triangle \times \bar{V} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z = \omega_8 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\,(\omega_1 - O - O + \omega_1) + \hat{j}\,(\omega_2 - O - O + \omega_3)$$

$$+ \hat{k}\,(\omega_3 - O - O + \omega_6)$$

$$= \hat{i}\,2\,\omega_1 + \hat{j}\,2\,\omega_2 + \hat{k}\,2\,\mu_9 = 2\omega$$

அதாவது சுழல் $\bar{V} = 2\,\bar{\omega}$

ஆகவே கோண திசை வேகம்

$$\bar{\omega} = \tfrac{1}{2}\ \text{சுழல்}\,\bar{V}$$

இவ்விளக்கம் $\triangle \times \bar{V}$-ஐச் சுழல் $\bar{V}$ என்றழைப்பதின் பொருத்தத்தினையும் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\bar{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$ எனில்

பாய்வு $\bar{r} = 3$, சுழல் $\bar{r} = O$ என நிரூபி

பாய்வு $\bar{r} = \triangle\,\bar{r}$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\ \left(\hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3$$

சுழல் $\bar{r} = \bar{\triangle} \times \bar{r}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$= O$$

மேற்கண்ட இரு முடிவுகளும் வாய்பாடாக மனதிற்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{\hat{i}x + y\hat{j}}{x-y}$ என்ற கோவையின் சுழல் காண்க.

$\bar{V} = \frac{x}{x+y}\hat{i} + \frac{y}{x+y}\hat{j} + O\,.\,\hat{k}$ என இருக்கட்டும்

$$\text{சுழல் } V = \left(\frac{V\partial z}{\partial y} - \frac{\partial V y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial V x}{\partial z} - \frac{\partial V z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V y}{\partial x} - \frac{\partial V x}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

இங்கு $Vz = O$, $Vx = \frac{x}{x+y}$, $Vy = \frac{y}{x+y}$.

$$\therefore \text{ சுழல் } \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y} = O\,.\,\hat{i} + O\,.\,\hat{j} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x+y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right\}\hat{k}$$

$$= \left[-\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{x}{(x+y)^2}\right]k = \frac{x-y}{(x+y)^2}k$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x \cos z\,\hat{i} + y \log x\,\hat{j} - z^2\,\hat{k}$-யின் சுழல் காண்

சுழல் $[x \cos z\,\hat{i} + y \log x\,\hat{j} - z^2\hat{k}]$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(\log x)\right]\hat{i} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}(x \cos z) - \frac{\partial}{\partial x}(-z^2)\right]\hat{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(y \log x) - \frac{\partial}{\partial y}(x \cos z)\right]\hat{}$$

(ஏனெனில் $Vx = x \cos z$, $Vy = y \log x$, $Vz = z^2$)

$$= -x \sin z\,\hat{j} + \frac{y}{x}\hat{k}.$$

2.13. முக்கியமான விரிவு வாய்பாடுகள் (Formulae of expansion)

(a) பாய்வு சரிவு $S = \triangle . \triangle . \triangle S$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\ \left(\hat{i}\frac{\partial S}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial S}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S$$

எனவே பாய்வு சரிவு $= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle^2$

இதனை லேப்லாசின் இயக்கி (Laplace's operator) எனக் கூறுவோம்,

(b) சுழல் சரிவு $S = \triangle \times \triangleright S$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\left(\hat{i}\frac{\partial S}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial S}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial x} & \frac{\partial S}{\partial y} & \frac{\partial S}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\hat{i}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 S}{\partial z\,\partial y}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$\hat{k}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial y}\right)$$

$$=0.$$

(c) சரி பாய்வு $V = \triangle\ (\triangle .)\bar{V}$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{V}x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}s}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}z}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial^2 \mathrm{V}x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}z}{\partial x\partial z}\right)$$

$$=\left(\hat{j}\frac{\partial^2 \mathrm{V}x}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial^2 \mathrm{V}y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}z}{\partial y\partial z}\right)$$

$$=\left(\hat{k}\frac{\partial^2 \mathrm{V}x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^1 \mathrm{V}y}{\partial^2 \mathrm{V}y}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}z}{\partial z^2}\right)$$

இங்கு $\bar{V}$ என்பது ஒரு பாய்மத்தின் திசை வேகமானல் பாய்வு $\bar{V}$ என்பது ஒரு புள்ளியில், ஓரலவு நேரத்தில் அதன் அடர்த்தியின் திசையிலி மாறு வீதத்தையும், சரிவு பாய்வு $\bar{V}$ என்பது ஓரலகு

தூரத்தில் அடர்த்தியின் மிகப்பெரும் மாறு வீத வெக்டாரையும் குறிக்கின்றன.

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right). \left[\hat{i}\left(\frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vz}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vy}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 Vz}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Vy}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Vx}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 Vz}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Vy}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Vx}{\partial z \partial y}$$

$$= 0.$$

பாய்வு $\omega = O$ என்ருல்,

ω என்பது வரிச்சுருள் உருளை வெக்டார் புலத்தினைக் குறிக்கும் எனவே $(V)\ \bar{V}$ என்பது ஒரு வரிச் சுருள் உருளை வெக்டார் புலமாகும்.

(e) சுழல் (சுழல் $\bar{V}$) $= \triangle \times \triangle \times \bar{V}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial z} & \frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{\partial x} & \frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial^2 Vy}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Vx}{\partial y^2} \cdot - \frac{\partial^6 Vx}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z \partial x}\right]$$
$$+ \hat{j}\left[\frac{\partial^2 Vz}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Vy}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Vy}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Vx}{\partial x \partial y}\right]$$
$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial^2 Vx}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 Vz}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Vz}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 Vy}{\partial y \partial z}\right]$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\right)$$

$$+ \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\right)$$

$$+ \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial x} + \frac{\partial Vz}{\partial z}\right)$$

$$- \hat{i}\left(\frac{\partial^2 V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial z^2}\right)$$

$$- \hat{j}\left(\frac{\partial^3 Vy}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Vy}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z^2}\right)$$

$$- \hat{k}\left(\frac{\partial^3 Vz}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z^2}\right)$$

$$= \nabla\ (\nabla . \bar{V}) - \nabla^2 \bar{V}$$

$$= \text{சரிவு பாய்வு } \bar{V} - \nabla^3 \bar{V}$$

(f) $(\bar{u}.\nabla)\,\bar{V} = (ux\frac{\partial}{\partial x} + uy\frac{\partial}{\partial y} + uz\frac{\partial}{\partial z})\bar{V}$

$$= ux\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + uy\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + uz\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$$

$$\bar{V} = \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\ ;$$

$$(\bar{u}.\nabla)\,\bar{r} = ux\frac{\partial x\hat{i}}{\partial x} + uy\frac{\partial y\hat{j}}{\partial y} + uz\frac{\partial z\hat{k}}{\partial z}$$

$$= ux\,\hat{i} + uy\,\hat{j} + uz\,\hat{k}$$
$$= u.$$

எனவே $(u.\triangle)\ \bar{r} = \bar{u}$

(g) பாய்வு $(A \times B) = \triangle.(A \times B)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$$

$$[\ \hat{i}(Ay\,Bz - Az\,By) + \hat{j}(Az\,Bx - Ax\,Bz)$$
$$+ \hat{k}(Ax\,By - Ay\,Bx)$$

அல்லது பா $(\bar{A} \times \bar{B})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(Ay\ Bz - Az\ By) + \frac{\partial}{\partial y}(Az\ Bx - Ax\ Bz) + \frac{\partial}{\partial z}(Ax\ By - Ay\ Bx)$$

$$= \left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right) + By\left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right) - Bz\left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)$$

$$- Ax\left(\frac{\partial Bz}{\partial y} - \frac{\partial By}{\partial z}\right) - Ay\left(\frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial Bz}{\partial x}\right) - Az\left(\frac{\partial By}{\partial x} - \frac{\partial Bx}{\partial y}\right)$$

$$= (Bx\,\hat{i} + By\,\hat{j} + Bz\,\hat{k}).$$

$$\left[\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial By}{\partial x}\right)\hat{k}\right]$$

$$-(Ax\,\hat{i} + Ay\,\hat{j} + Az\,\hat{k}.$$

$$\left[\left(\frac{\partial Bz}{\partial y} - \frac{\partial By}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial Bx}{\partial x} - \frac{\partial Bz}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial By}{\partial y} - \frac{\partial B-}{\partial z}\right)\hat{k}\right.$$

$= \bar{B}$ (சுழல் $\bar{A}$) $- \bar{A}$.(சுழல் B).

$\therefore$ பாய்வு $(\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B}$.சுழல் $\bar{A} - \bar{A}$.சுழல் $\bar{B}$.

(h) சுழல் $(\bar{A} \times \bar{B}) = \triangle \times (A \times B)$.

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\bar{A} \times \bar{B})_z & (\bar{A} \times \bar{B})_y & (\bar{A} \times \bar{B}_z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ay\ Bz - By\ Az & Az\ Bx - Bz\ Ox & Ax\ By - Bx\ Ay \end{vmatrix}$$

எனவே

சுழல் $x\ (\bar{A} \times \bar{B})$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(Ax\ \ By - Bx\ \ Ay) - \frac{\partial}{\partial z}(AzBx - BzAx)\right]$$

$$= \hat{i}\Big(Ax\frac{\partial By}{\partial y} + By\frac{\partial Ax}{\partial y} - Bx\frac{\partial Ay}{\partial y} - Ay\frac{\partial Bx}{\partial y}$$

$$- Az\frac{\partial Bx}{\partial z} - Bx\frac{\partial \bar{A}z}{\partial z} + Bz\frac{\partial \bar{A}x}{\partial z} + Ax\frac{\partial Bz}{\partial z}\Big)$$

$$= \bar{A}x\left(\frac{\partial By}{\partial y} + \frac{\partial Bz}{\partial z}\right)\hat{i} - Bx\left(\frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right)\hat{i}$$

$$+ By\frac{\partial Ax}{\partial y}\hat{i} + Bz\frac{\partial Ax}{\partial z}\hat{i} - Ay\frac{\partial Bx}{\partial y}\hat{i} - Az\frac{\partial Bx}{\partial z}\hat{i}$$

சுழல் $x\ (\bar{A} \times \bar{B})$

$$= Ax\,\hat{i}\left[\frac{\partial Bx}{\partial x} + \frac{\partial By}{\partial y} + \frac{\partial Bz}{\partial z}\right]$$

$$- Bx\,\hat{i}\left[\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right]$$

$$+ \left[Bx\frac{\partial Ax}{\partial x}\hat{i} + By\frac{\partial \acute{A}x}{\partial y}\hat{i} + Bz\frac{\partial \bar{A}x}{\partial z}\hat{i}\right]$$

$$- \left[Ax\frac{\partial Bx}{\partial x} + Ay\frac{\partial Bx}{\partial y}\hat{i} + Az\frac{\partial Bx}{\partial z}\hat{i}\right]$$

$= Ax\ \hat{i}$ பாய்வு $\bar{B} - Bx\,\hat{i}$ பாய்வு $\bar{A} + \Big[Bx\ \hat{i}\frac{\partial Ax}{\partial x}$

$$+ By\frac{\partial Ax}{\partial y} + Bz\,\hat{i}\frac{\partial Ax}{\partial z}\Big]$$

$$- \left[Ax\,\hat{i}\frac{\partial Bx}{\partial x} + Ay\frac{\partial Bx}{\partial y} + Az\,\hat{i}\frac{\partial Bx}{\partial z}\right]$$

இது போலவே

சுழல்$_y$ $(\bar{A}\times\bar{B})$

$= A_y\, j$ பாய்வு $B - B_y\, j$ பாய்வு $A +$

$$\left[Bx\frac{\partial Ay}{\partial x}\hat{j}\right.$$

$$\left. + By\hat{j}\frac{\partial Ay}{\partial y} + Bz\hat{j}\frac{\partial By}{\partial z}\right]$$

$$- \left[Ax\hat{j}\frac{\partial By}{\partial y} + Ay\hat{j}\frac{\partial By}{\partial y} + Az\frac{\partial By}{\partial z}\right]$$

சுழல்$_z$ $(\bar{A}\times\bar{B}) = A_z\,\hat{k}$ பாய்வு $\bar{B} - B_z\hat{k}$ பாய்வு $\bar{A}$

$$+ \left[Bx\frac{\partial Az}{\partial x}\hat{k} + Ay\frac{\partial Az}{\partial y}\hat{k} + By\hat{k}\frac{\partial Az}{\partial z}\right]$$

$$- \left[Ax\hat{k}\frac{\partial Bz}{\partial x} + Ay\hat{k}\frac{\partial Bz}{\partial y} + Az\hat{k}\frac{\partial Bz}{\partial z}\right].$$

$\therefore$ சுழல் $(\bar{A}\times\bar{B}) = (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k})$ பாய்வு B

$- (B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k})$ பாய்வு A

$+ (\bar{B}$ சரிவு$)$ $\bar{B}$

சுழல் $(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{A}$ பாய்வு $\bar{B} = \bar{B}$ பாய்வு $\bar{A} + (\bar{B}$ சரிவு $\bar{A}$

$- (\bar{A}$ சரிவு $\bar{B})$.

(i) பாய்வு $(s\bar{A}) = \triangle.(s\bar{A})$

(s ஸ்கேலார்).

$= \triangle.(A_x\,\hat{i} + sA_y\,\hat{j} + sA_z\,\hat{k})$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\ (sAx\,\hat{i} + sAy\hat{j} + sAz\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(sAx) + \frac{\partial}{\partial y}(sAy) + \frac{\partial}{\partial z}(sAz)$$

$$= s\left[\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right] + Ax\frac{\partial s}{\partial x} + Ay\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$+ Az\frac{\partial s}{\partial y}$$

$= s$ பாய்வு $\vec{A} + (Ax\,\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}).$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial s}{\partial z}\hat{k}\right)$$

s பாய்வு $\vec{A} + \vec{A}.$சரிவு $+ s.$

$\therefore$ பாய்வு $(s\vec{A}) = s$ பாய்வு $\vec{A}\vec{A},$சரிவு $s.$

(j) சுழல் $s\vec{A} = \triangle \times (s\vec{A})$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{j}\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left[sAx\,\hat{i} + sAy\,\hat{j}s + \vec{A}z\,\hat{k}\right]$$

$\therefore$ சுழல்$x\ (s\vec{A})$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(sAz)\,\hat{i} - \frac{\partial}{\partial z}(sAz)\,\hat{i}$$

$$= s\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right)\hat{i} + Az\,\hat{i}\frac{\partial s}{\partial y} - Ay\frac{\partial s}{\partial z}\hat{i}$$

$$= s\left[\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right)\hat{i}\right] + \left(Az\frac{\partial s}{\partial y} - Ay\frac{\partial s}{\partial z}\right)\hat{i}$$

இது போன்றே

சுழல் y $(s\vec{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(Ax\frac{\partial s}{\partial z} - Az\frac{\partial s}{\partial x}\right)\hat{i}\right]$$

சுழல் $z\ (s\vec{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)\hat{k}\right] - \left[Ay\frac{\partial s}{\partial x} - Ax\frac{\partial s}{\partial y}\right]\hat{k}$$

எனவே

சுழல் $(s\vec{A})$

$$= s\left[\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Av}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)\hat{i}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)\hat{k}\right.$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial s}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(Ax\hat{i} = Ay\hat{j} + Az\hat{k}\right)$$

s சுழல் $\dot{A}+$(சரிவு $s)\times \bar{A}$

அல்லது

சுழல் $s\bar{A}) = s$ சுழல் $\bar{A} - Ax$ சரிவு s.

(k) சரிவு $(\bar{A},\bar{B}) = \triangle\ [A_x\ B_x + A_y\ B_y + A_z\ B_z]$.

$\therefore$ சரிவு$_x$ $(\bar{A}.\bar{B})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\ [A_x\ B_x + A_y\ B_y + A_z\ B_z]$$

$$= Ax\frac{\partial Bx}{\partial x} + Bx\frac{\partial Ax}{\partial x} + Ay\frac{\partial By}{\partial x} + By\frac{\partial Ay}{\partial x} + Az\frac{\partial Bz}{\partial x} + Bz\frac{\partial Az}{\partial x}$$

$$= \left[Ax\frac{\partial Bx}{\partial x} + Ay\frac{\partial Bx}{\partial y} + Az\frac{\partial Bx}{\partial z}\right] + \left[Bx\frac{\partial Ax}{\partial x} + By\frac{\partial Ax}{\partial y} + Az\frac{\partial Bz}{\partial z}\right]$$

$$+ Ay\frac{\partial By}{\partial x} + By\frac{\partial Ay}{\partial x} + Az\frac{\partial Bz}{\partial x} + Bz\frac{\partial Az}{\partial x} - Ay\frac{\partial Bx}{\partial y} - Az\frac{\partial Bx}{\partial z} - Ay\frac{\partial Ax}{\partial y} - Bz\frac{\partial Az}{\partial z}$$

$= \bar{A}$ சரிவு $Bx + \bar{B}$ சரிவு) $Ax + Ay\left(\frac{\partial By}{\partial x} - \frac{\partial Bx}{\partial y}\right)$

$$- By\left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ay}{\partial y}\right) - Az\left(\frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial Bz}{\partial x}\right) - Bz\left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)$$

எனவே

சரிவு $_x$ $(\bar{A}.\bar{B}) = (\dot{A}$ சரிவு) $\bar{B}_x + (\bar{B}$ சரிவு) $A_x + (\bar{A}\times$ சுழல் $\bar{B})_x$

$+(\bar{B}\times$ சுழல் $\bar{A})x$,

$$\text{சரிவு } (\bar{A}.\bar{B}) = (\bar{A} \text{ சரிவு})\bar{B} + (\bar{B} \text{ சரிவு})\, A + (\bar{A} \times \text{சுழல் } \bar{B}) + (\bar{B} \times \text{சுழல் } \bar{A})$$

எடுத்துக்காட்டு 1

A என்பது ஒரு மாறிலி அலகு வெக்டாரானால்

$\bar{A}.[\nabla\ (\bar{V}.\bar{A}) - \nabla \times (\bar{V} \times \bar{A}] = \nabla.\bar{V}$ என காண்பி.

$$\text{இ. ப.} = A.[\nabla(\bar{V}.\bar{A}) - \nabla \times (\bar{V} \times \bar{A})]$$

$$\bar{A}.[\bar{A} \text{ சரிவு}]\ \bar{V} + \bar{A}\,\triangle.\bar{V} - (A \text{ சரிவு})\ \bar{V} + \bar{A} \times \text{சுழல் } V]$$

$$= \nabla.\bar{V} + \bar{A}.(\bar{A} + \text{சுழல் } \bar{V})$$

$$= \nabla.\bar{V} + \bar{A}.[\bar{A} \times (\nabla \times \bar{V})] = \nabla.V.$$

எடுத்துக்காட்டு 2

U, W என்பன திசையிலிகாளானால்

சுழல் $(u \text{ சரிவு } W) = (\nabla u) \times (\triangle W)$ என நிரூபி.

$$\text{சுழல் } (u \text{ சரிவு } W) = \text{சுழல் } (u\bar{A})$$

$$= u \text{ சுழல் } \bar{A} - \bar{A} \times \text{சரிவு } u$$

$$= U \text{ சுழல் சரிவு } W - (\text{சரிவு } W) \times (\text{சரிவு } u)$$

$$= O - (\text{சரிவு } u) \times (\text{சரிவு } W)$$

$$= (\text{சரிவு } u) \times (\text{சரிவு } W)$$

$$= (\nabla u) \times (\nabla W)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 3

$\nabla.(s\nabla \times \bar{B}) = (\nabla \times \bar{B}.(\nabla s)$ என நிரூபி.

$$\text{இங்கு } \nabla.(s\nabla \times \bar{B}) = \text{பாய்வு } (s \text{ சுழல் } \bar{B})$$

$$= s \text{ பாய்வு சுழல் } \bar{B} - (\text{சுழல் } \bar{B} \times \text{சரிவு } s)$$

$$= O + (\text{சுழல் } \bar{B}).\ (\text{சரிவு } s)$$

$$\therefore \text{ பாய்வு சுழல் } B = O)$$

$$= (\nabla \times \bar{B}).(\nabla s)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4

$\nabla \times (s\nabla \times \bar{B}) = S\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) - (\nabla \times B) \times (\nabla s)$ என நிரூபி.

$\nabla \times (s\nabla \times \bar{B}) =$ சுழல் (s சுழல் $\bar{B}$)

$= s$ சுழல் சுழல் $\bar{B}$ – சுழல் $\bar{B} \times$ சரிவு s

$= s$ சரிவு $\bar{B} - s\nabla^{2-}\bar{B} - (\nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s)$

$= s$ சுழல் சுழல் $\bar{B} - \nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s)$

$= s\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) - (\nabla \times \bar{B}) \times (\nabla s).$

நிரூபிக்கப்பட்டது

எடுத்துக்காட்டு 5

$d\bar{V} = (d\bar{r}.\nabla)\bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}dt$ என நிரூபி.

ஒரு வெக்டார் $\bar{V}$, x, y, z, t-ன் சார்பானுல், அப்பொழுது

$$\partial \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}dt$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{dz}dz\right)\bar{V} + \frac{\partial V}{dt}dt$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(\hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz\right)$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$= (\nabla . d\bar{r})\bar{V} + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

2-14. வரிச்சுருள் உருளைப் புலமும், சுழற்சியில்லாத புலமும். (Solenoidal on Irrotational fields).

ஒரு வெக்டார் புலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு வெக்டாரின் பாய்வு சுழியமானுல் அக்களம் "வரிச்சுருள் உருளைக் களம்" எனப்படும் ஏற்கனவே பாய்வு (சுழல் $F) = O$, எனக் கண்டோம். எனவே V என்பது வேறொரு வெக்டார் சார்பு F-ன் சுழல் மதிப்பாய் இருக்கலாம்.

ஒரு வெக்டார் புலத்தில் ஒரு வெக்டாரின் சுழல் எல்லா புள்ளி களிலும் சுழியானுல் அப்புலம் சுழற்சியில்லாக்புலம் எனப்படும். சுழல் $V=O$ எனில் V, சுழற்சியில்லாக் புலம் ஒன்றினை நிர்ண யிக்கும்.

முன்பே சுழல் (சரிவு S) $=O$, என ஒரு திசையிலி சார்பு S-க்கு நிறுவினேம். அதைக் கொண்டு $\bar{V}$ ஒரு திசையிலா அளவுறுப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாக இருக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வரு கிறேம். இதிலிருந்து திசையிலி புலம் S-லிருந்து வெக்டார் புலம் V-யினை உருவாக்க முடியும் என அறிகிறேம். V என்பது "காப்பு நிலை வெக்டார் புலம்" (Conservative Vector field) எனப்படும்.

பயிற்சி

1. (a) நிரூபி. $\Delta(F+G)\equiv\Delta F+\Delta G$

   (b) $\Delta(FG)=F\Delta G+G\Delta F$

இங்கு F, G என்பன x, y, z-ன் வகைக்கெழு காணக்கூடிய திசையிலி சார்புகள்.

$$2.\ \phi - l_n\left(\frac{1}{|\bar{r}|}\right)$$

2. $\phi=\left(\dfrac{1}{|\bar{r}}\right)$ ஆனல் $\bar{\Delta}\,\phi$-ஐக் கண்டுபிடி

$\left[\text{விடை. (a)}\ \dfrac{r}{r^2},\ \text{(b)} = -\dfrac{\bar{r}}{r^3}\right].$

3. $A=x^2.2\,i\ -\ 2\,y^6\,z^2\,j\ +\ xy^3\,zk$ ஆனல் $(1, -1, 1)$-ல் $\Delta.A$-ஐக் கண்டுபிடி.

[விடை -3.]

4. $\Delta.(A+B)=\Delta.A+\Delta.B$

என நிரூபி.

5. $\Delta\times A=O$ ஆனல் $\Delta.(A\times r)$ஐக் கண்டுபிடி..

[விடை. சுழியம்]

6. $\bar{V}=(x+2y+az)\,\hat{i}+(bx+3y-z)\,\hat{j}+(4x+cy+2z)\,\hat{k}$ சுழற்சி யில்லாததானல், மாறிலிகள் a, b, c-ஐக் கண்டுபிடி.

[விடை. $a=4$, $b=2$, $c=-1$]

7. A, B இவை சுழற்சியில்லா வெக்டார்களானல் $A \times B$ வரிச் சுருள் உருஊ வெக்டார் என நிரூபி.

3. தொகை காணல் (Integratlon)

வகைக் கெழு காண்பதின் தலைகீழ் முறையே தொகை காணு தல் ஆகும். அதாவது r எனும் ஒரு வெக்டார் சார்பு திசையிலி மாறி t-யின் வெக்டார் சார்பை அதன் t-ஐப்பொறுத்த வகைக்கெழு $\bar{r}$ ஆக இருக்குமாறு கண்டுபிடிப்பதைத்தான் $\bar{r}$-ன் t ஒட்டிய தொகை காணுதல் என்கிறேம் $\bar{F}$ எனும் சார்பு, $\bar{r}$-ன் ஒரு தொகை எனவும், முதற் சார்பு (Primitive) எனவும் அழைக்கப்பெறும். இதனை

$F = \int r \; dt$ எனும் குறியீட்டினுல் குடிக்கிறேம். $\int$ என்பது தொகைகாணும் குறியீடு. t என்பது தொகைக்குரிய மாறிலி. $\bar{r}$ எனும் சார்பு "தொகை சார்பு" (Integranl) இத் தொடர்பின் பொருள்

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{r} \text{ என்பதாகும்.}$$

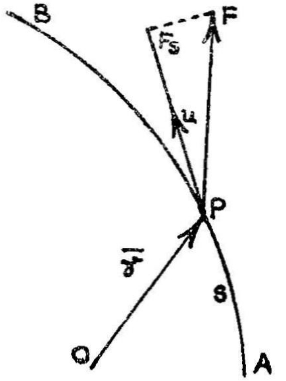
கோட்டு வழித்தொகை, பரப்பு வழித்தொகை, கன வழித் தொகை எனபன வெக்டார் பகுப்பாய்வில் முக்கியமானவை யாகும்.

3-01. கொட்டு வழித்தொகை (Line integral) தொடு கோட்டு வழித்தொகை

ஒரு வளை வரையையும், அவ்வளை வரையில் ஒரு நிலைப்புள்ளியி லிருந்து அளக்கப்படும், வில்லின் நீளம் S-ன் சார்பாக அமைந்த ஒரு வெக்டார் சார்பு F-யும் எடுத்துக் கொள்வோம். படம் 30 A, B எனும் இரு புள்ளிகள் இவ்வளைக் கோட்டின் மேல் $s = a$, $s = b$ எனும் மதிப்புக்களுக்குத் தகுந்த புள்ளிகள் என்க. வளைவரையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் ஓரலகு தொடுகோடு u என்க. அப்படியானல் $\bar{F}.\hat{u}$ என்பது அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் வழி F-ன் கூறு ஆகும்.

a, b எனும் இடைவெளியில் இக்கணியத்தின் s ஒட்டிய வரை யறுத்த தொகை F-ன், வளைவரை வழியான கோட்டு வழித்தொகை எனப்படும். (Line integral)

இதில் $\int_{\bar{a}}^{b} \bar{F}\,\hat{u}\,ds =$ எல்லை $\sum_{a}^{b} \bar{F}.\hat{u}\,\delta s$



படம் 30

இதையே $\int_{\bar{a}}^{b} \bar{F}.d\hat{r} =$ எல்லை $\sum_{a}^{b} \bar{F}\delta\bar{r}$ என்றும் எழுதலாம். இங்கு $\delta\, r$ எனும் நுண்ணிய வெக்டார் $\delta s\, u$ எனும் வெக்டாருக்குச் சமம். அது தொடு கோட்டுக்கு இணையானது. எடுத்துக்காட்டாக F என்பது ஒரு துகளின் கேல் செயல்படும் விசையினைக் குறித்தால், அத்துகள்.ஒரு வளைவரையின் மீது நகர் கையில் $\delta\, r$ எனும் இடப் பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த விசையினுல் செய்யப்படும் வேலை அளவு $F.\delta r$ ஆகும். எனவே வளைவரையிலுள்ள A, B எனும் இரு புள்ளி களுக்கிடையில் காணப்படும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகை, அத் துகள் A-யிலிருந்து F-க்கு L-ளுல் செய்யப்படும் மொத்த வேலை அளவினைக் குறிக்கும். F என்பது P என்னும் புள்ளியிலுள்ள மின் சார (அல்லது காந்த) புலச் செறிவை (intensity) குறித்தால் கோட்டு வழித்தொகை ஓரலகு மின் விசைச் செறுவினுல் (அல்லது துருவத்தினுல்) A-யிலிருந்து B-க்கு நகர்கையில் செய்யப்படும் வேலை அளவைக் குறிக்கிறது. அதாவது அவ்விரு வேறுபாட்டினைக் Potential difference) குறிக்கிறது.

பாய்ம இயக்கவியலில் V என்பது பாய்மத்றின் ஒரு புள்ளியின் திசை வேகத்தினைக் குறித்தால், பாய்மத்தில் வரையப்படும் மூடியு

வளை வரையினைச சுற்றிலும் எடுக்கப்படும் கோட்டு வழித் தொகை

$$\int \overline{V}.dr = \int \overline{V}.\hat{u}ps$$

என்பது, வளை வரையைச் சுற்றிலும் உள்ள சுழற்சி எனப்படும்.

$$\int \overline{F}.d\overline{r} = \int Fx\ dx + \int Fy\ dy + \int Fy\ dy$$

இதிலிருந்து $\int_A^B \overline{F}.d\overline{r} = -\int_B^A \overline{F}.d\overline{r}$ என காணலாம். ஏனெனில்

A-யிலிருந்து B நோக்கி நகர் செய்யப்படும் வேலை அளவைக் குறிக்கிறது. கையில் மிகையாகக் (+) கருதப்படும் dr, B-யிலிருந்து A நோக்கி நகர் கையில்— dr ஆகும்.

F எனும் சார்பு ஏதோவொரு திசையிலி புள்ளிச் சார்பு V-யின் சரிவு எனக் கொள்வோம். அப்படியானல்,

$$\int_A^B \overline{F}.d\overline{r} = \int^B \triangle V.d\overline{r} = \int_A^B dV \text{ ஆகும்.}$$

இத்தொகை $V_B = V_A$க்-குச் சமம் ஆகும். V எனும் சார்பு ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக அமைந்து ஒரு மூடியவளை வரையினைச் சுற்றி (closed contour) தொகைக் கணக்கிடப்பட்டால் ஆரம்பப் புள்ளியும் முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றி விடுவதால் $V_B - V_A = O$ என்ருகிவிடும்.

$$\text{அதாவது } \oint \triangle V.dr = O.$$

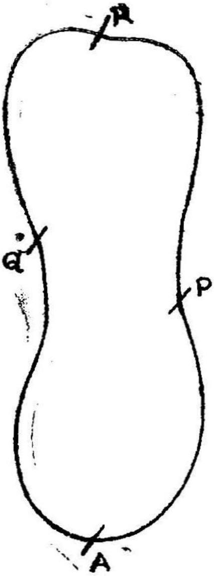
$APRQ$ என்ற ஒரு மூடிய வளை வரையை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 31).

(இதனைச் சுற்றிலும் F-ன் தோடு கோட்டு வழித்தொகை சுழியமாதலால்

$$\int_{APR} \overline{F}.d\,\overline{r} + \int_{RQA} \overline{F}.d\,\overline{r} = O$$

$$\int_{APR} \overline{F}.d\overline{r} = \int_{QR} \overline{F}.d\overline{r} = O$$

$$\therefore \int_{APR} \overline{F}.d\overline{r} = \int_{AQR} F\text{-}d\overline{r}.$$



படம் 31

இதுபோன்றே A-ஐயும் R-ஐயும் இணைக்கும் எந்த ஒரு வழி வரைக்கும் இது பொருந்தும். A ஒரு நிலையான புள்ளி, R ஒரு மாறும் புள்ளி எனவும் கொள்க. A-யிலிருந்து R வரை காணப்படும் தொடுகோட்டு வழித் தொகை, மதிப்பு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் பாதையைச் சார்ந்தில்லாதிருந்தால் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பாகும். இதனை V எனலாம்.

$\therefore \int_A^R \overline{R}.d\overline{r} = \mathrm{V}$ எனவே R-ல் ஏற்படும் சிறு இடப்பெயர்ச்சி $d\overline{r}$-க்குத் தக்க, V-ல் ஏற்படும் கூடுதல்

$$d\mathrm{V} = F.dr$$

ஆனல் $d\mathrm{V} = \triangle \mathrm{V}.dr$ எனக் கண்டோம்.

$\therefore$ dr-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்,

$$F.dr = \triangle \mathrm{V}.dr$$

$\therefore$ $F = \triangle \mathrm{V}$ ஆகும்.

அதாவது ஏதோ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு V-ன் சரிவுக்குச் சமமாகும். பொதுவாக $\int_A^B \overline{F}.d\overline{r}$ எனும் தொகை A-யிலிருந்து B-க்கு எப்பாதை வழி தொகை காணப்படுகிறது என்பதைச் சார்ந்து அமைகிறது. வேறு வேறு பாதைகளுக்கு வேறு வேறு தொகை கிடைக்கும். ஆனல் F ஒரு திசையிலிப்புள்ளிச் சார்பின் சரிவானல், எல்லாப் பாதைகளுக்கும்ஒரே தொகை மதிப்புத்தான்

கிடைக்கும். இவ்வாறு F-ன் கோட்டுவழித் தொகை, தொகை காண எடுத்துக்கொள்ளும் பாதையைச் சார்ந்திடாவிடில், அச்சார்பு ஒரு "காப்பு நிலப்புலத்தினை" (Conservative field) உருவாக்கு கிறது என்று சொல்கிறோம். அப்போது F ஒரு திசையிலிப் புள் ளிச் சார்பின் சரிவாகும்.

ஒரு காப்பு நிலைக் களத்தில் F என்பது ஒரு விசையானால்

$$\int_A^B \bar{F}.d\,\bar{r}$$

என்பது அது செய்யும் வேலையைக் குறிக்கிறது. $P_\circ$ என்பது ஒரு நிலைப் புள்ளியாகவும் $P\ (x, y, z)$ என்பது ஒரு மாறு புள்ளியாகவும் இருந்தால்

$$\phi\ (x, y, z) = \int_P^{P_\circ} \bar{F}.d\,\bar{r}$$

என்பது P-யிலுள்ள மின்னூட்ட அளவினைக் குறிக்கிறது. இது ஓரலகு பொருள் P-யிலிருந்து $P_\circ$-வுக்கு நகரும்பொழுது செய்யப் ப்டும் வேலைக்குச் சமம்.

$P_\circ$-வில் மின்னூட்ட அளவு சுழியமாகும்.

$$\underset{P_\circ \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_P^{P_e} \bar{F}.d\,\bar{r}$$

என்ற தொகையீடு ஒரு வரையறுத்த எல்லை மதிப்பினைப் பெறு கிறது. இதையே

$$\phi = \int_P^{\infty} \bar{F}.d\,\bar{r}$$

என எழுதலாம்.

இதன் வகைக்கெழுகாண

$$d\phi = -\bar{F}.d\,\bar{r}$$

என கிடைக்கிறது. மாறுபுள்ளி P கீழ் எல்லை மதிப்பாக இருப்பதால் $d\phi$ "—" குறியீடு பெறுகிறது.

$$d\phi = d\,\bar{r}.\triangle\phi$$

இந்த சமன்பாடுகள் dr-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துமாதலால்

$F = -\triangle\phi$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து ஒரு காப்பு நிலைக்களத்தில் விசையானது (–) மின்னூட்ட சரிவினுக்குச் சமம் என தெரிகிறது,

3-02. பரப்பு செங்கோட்டு வழித்தொகை அல்லது பரப்பு வழித் தொகை (Normal Surface Integral)

ஒரு வளை தளத்தினையும் (Curved Surface) அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முடிவுள்ள (finite) வரையறுத்த (definite) மதிப்பினையுடைய ஒரு வெக்டார் சார்பு F-ஐயும் எடுத்துக் கொள்வோம். தளத்தில் P எனும் புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோட்டிற்கு இணையான ஓரலகு வெக்டார் $\hat{n}$ என்க. இதன் திசைவளை தளம் மூடியாதாயிருப்பின் வெளி நோக்கியும் மூடாதாயிருப்பின் தளத்திற்கு ஒரு புறமாகவே எப்போதும் அமைந்ததாக இருக்கும் அப்படியானல் $\bar{F}.\hat{n}$ என்பது நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியாக $\bar{F}$-ன் கூறும். வளை தளப் பரப்பினை மிக நுண்ணிய மூலகப் பரப்புகளாகப் பிரிப்பதாயும் P-யினைச் சுற்றிமையும் நுண்ணியபரப்பு ∂A எனவும் கொள்வோம்.

$S = \sum \bar{F}.\ n\ \partial A$ எனும் கூட்டல் தளத்தில் எல்லா நுண்ணிய பரப்புகளுக்கும் எடுக்கபட்டால் நுண் பரப்புகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியையும் (infinity), ∂A சுழியத்தையும் நாடு கையில் Sன் மதிப்பு ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட எல்லையினை நெருங்கும். இவ் வெல்லை மதிப்பினைத் தான் கொடுக்கப்பட்ட வளை தளத்தின்மீது F-ன் பரப்பு வழித்தொகை அல்லது பரப்பு நேர்குத்துக்கோடு வழித் தொகை என்கிறோம். இதனை

$$\int \bar{F}.\hat{n}\, dA = \text{எல்லை} \sum \bar{F}.\hat{n}\ \partial A$$

என எழுதுகிறோம். உண்மையில் இது $\bar{F}.\hat{n}$ என்ல் திசையிலிச் சார்பின் பரப்பு வழித்தொகை யாகும். முன்பே நாம் பரப்புகளை வெக்டாரினல் குறிக்கும் முறை பற்றிக் குறிப்பிட்டுள்ளபடி, P-யில்

உள்ள ∂A என்ற பரப்பின் P-யில் வளை தளத்துக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் திசையில் அமைந்த $\partial A\hat{n}$ என்ற வெக்டார் குறிக்கும். $\partial \bar{A}$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு எனவே மேற் சொன்ன தொகையை

$$\int F.d\bar{A} = \text{எல்லை } \Sigma\, \bar{F}.\partial\bar{A}$$

என்றும் எழுதலாம். இங்கு தொகையைக்காண பயன் படுத்தும் மாறி பரம்பளவாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே ஒற்றைத் தொகையீடு இடப் பெற்றுள்ளது. சில நூல்களில் இரட்டைத் தொகையீட்டைப் பயன்படுத்துவர் அதாவது

$$\int\int_S \bar{F}.d\bar{A}$$

எனக் குறிப்பிடுவர். அடியில் எழுதப்பட்டுள்ள S என்பது அத் தளம் முழுவதும் தொகை காணப்படல் வேண்டும் என்தைக் குறிக்கும்.

3-03. பரப்பு வழித்தொகைகாணுதலின் இயற்பியல் விளக்கம்.

ஒரு பாய்மத்தில் ஏதோ ஒரு புள்ளியில் திசை **வேகம்** $\bar{F}$ எனக் கொள்வோம். அப்புள்ளியைச் சுற்றி ∂A என்ற நுண்ணிய பரப் பளவை எடுத்துக் கொள்வோம் அப்புள்ளியில் வளை தளத்திற்கு நேர்குத்துக் கோட்டின் திசை இணையான ஓரலகு கவக்டார் $\hat{n}$ எனில் $\bar{F}\hat{n}\,\partial A$ என்பது அந்த நுண்ணிய பரப்பளவுக்குச் நேர்குத்து திசையில் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய்ம அளவினைக் குறிக் சிறது. தொடுகோட்டு வழியான கூறு அந் நுண்ணிய பரப்பின் வழியே வெளியேறும் பாய்ம அளவை பாதிப்பதில்லை. எனவே அந்நுண்ணிய பரப்பின் வழி வெளியேறும் பாய்ம முழுவதும் அதற்கு நேர்குத்தான கோட்டின் திசையில் வெளியேறுவது தான் எனவே $\bar{F}.\hat{n}\,\partial A$ எனும் மதிப்பினை வளை தரப்பரப்பு முழுவதற்கும் கூட்டி தொகை கண்டால் அது, அப்பரப்பு முழுவதின் வழியே ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேனும் பாய்ம மொத்த அளவினைக் குறிக் கிறது. பொதுவாக $\int \bar{F}.\partial\bar{A}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளை தளப் பரப்பு முழுவதும் வழியே வெளிப்பாயும் F-ன் பாய் வினைக் குறிக் கிறது. F என்பது மின்விசை காந்தவிசை, புவியீர்ப்பு விசை வெப்

பப் பாய்வு முதலிய இயல் பியல் வெக்டார்களில் ஏதேனும் ஒன்ருக இருக்கலாம்.

பரப்பு வழித்தொகையில் ஒரு தேற்றம்

XY தளத்தில் வளைதளப்பரப்பு S-ன் எறிவு படிவம் R எனில்

$$\int\int \bar{A}.d\bar{s} = \int\int \bar{A}.\hat{n} \quad \frac{dx\, dy}{|\hat{n}.\hat{k}|}$$

நிரூபணம்

S என்ற வளைதளப் பரப்பில் P என்ற புள்ளியில் $\triangle SP$ என்ற நுண்ணிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொள்வோம், n என்பது இந்த பரப்புக்கு வெளிநோக்கிய ஓரலகு நேர்குத்துக்கோடாக இருக்கப் படும். இந்த பரப்பு S, xy தளத்திற்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்தருப் பதாகக் கொள்வோம்.

அப்படியானல் $\int\int_S A.d\bar{S}$ என்பது, N கந்தழியையும், $\triangle Sp$ சுழியத்தையும் அணுகும்போது $\sum_{p=1}^{N} \bar{A} p.\hat{n} \triangle Sp$ ன் மையத்தில் $\bar{A}$-யின் மதிப்பாகும் xy தளத்தின் நுண்ணிய பரப்பளவு $\triangle Sp$-ன் வீழல் $\triangle xp \triangle yp$ ஆகும். எனவே,

$\triangle xp \; \triangle yp = \triangle Sp \; Cos \; \theta = \triangle Sp \; \hat{n}.\hat{k}$ இங்கு $\hat{k}$ என்பது $\triangle xp \; \triangle yp$ க்கு வரையப்பட்ட ஓரலகு நேர்குத்துக் கோடாகும்.

எனவே $\triangle Sp = \dfrac{\triangle xp \triangle yp}{|\hat{n}\,\hat{k}|}$

$$\int\int_S A.\,d\,S = \underset{\substack{N \to \infty \\ \triangle Sp \to O}}{\text{எல்லை}} \sum_{P=1}^{N} Ap.\,\hat{n} \triangle \; Sp$$

$$\underset{\substack{N \to \infty \\ \triangle xp \to O \\ \triangle yp \to O}}{\text{எல்லை}} \sum \bar{A}p.\,\hat{n} \frac{\triangle xp \triangle yp}{|\hat{n}.\quad|}$$

$$\int\int_R \bar{A}.\,\hat{n} \quad \frac{dx\, dy}{\hat{n}.\,\hat{k}}$$

3.04. கன அளவு வழித்தொகை (The Volume Integration)

மூவளவை வெளியில், V என்ற கனபரிமாணத்தைக் கொண்ட மூடிய பரப்பளவை எடுத்துக் கொண்டால் $\iiint_V F\, dV$ என்பது ஒரு வெக்டார் சார்பு $\bar{F}$-ன் கன அளவு வழித்தொகை என வரையறுக்கப்படும்.

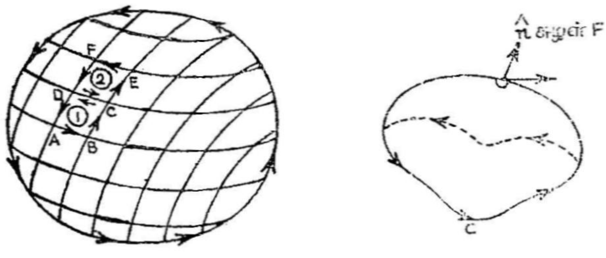
இதையே

$$\int_x\int_y\int_z \bar{F}\, dx\, dy\, dz = \int_x\int_y\int_z (\bar{i}\, F.x + \bar{z}\, F.y + \bar{k}\, F.z)\, dx\, dy\, dz$$

என்று எழுதலாம்.

3.05. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் (Stoke's Theorem) :

S என்ற திறந்த பரப்பின்மீது ஒரு சீரான (Uniform), முடிவுள்ள (finite) தொடர்ச்சியான வெக்டார் சார்பு $\bar{F}$-ன் சுழிபின் செங்கோட்டு வழக்கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, S-ன் வரம்பான மூடிய வரை C-யின் தொடுகோட்டு வழியான $\bar{F}$ தொகைக்கு சமமாகும். அதாவது ஒரு வளைதள பரப்பின் மேல் S என்ற திறந்த பரப்பின் வரம்பாக அமைந்த, தன்னைத்தானே வெட்டிக் கொள்ளாத ஒரு எளிய மூடிய வளைவரை C-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம் (படம் 32)



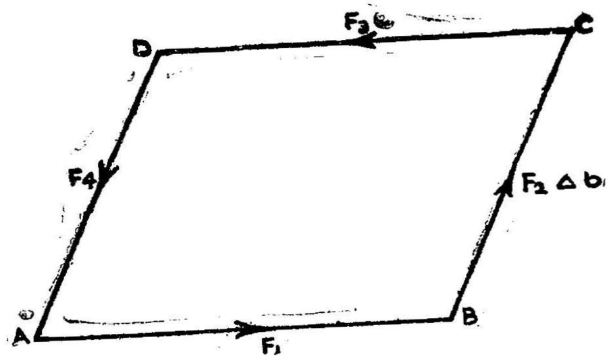
படம் 32.

இந்த பரப்பு S இரண்டு புறங்களை உடையது என்றும், இதனைப் படத்தில் காட்டியது போல வலை பின்னியதுபோல் கோடுகள் வரைந்து C யில் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்து சிறு சிறு இணைகரக் கட்டங்கள் எண்ணிறந்த அளவுக்கு உருவாக்கலாம் எனக் கொள்வோம்.

வளைதள பரப்புக்கு எத்திசையில் வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடு மிகை திசையில் உள்ளது என கொள்ளப்படுகிறதோ அச் நேர்குத்துக்கோடு வளை வரையினைச் (C ஐ) சுற்றும்போது இடக்கைப் பக்கம் அமைய வேண்டும். இவ்வாறிருந்தால் C யினை மிகைத் திசையில் சுற்றுவதாய் எடுத்துக் கொள்ளலாம். $\overline{nr}$ என்பது $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியில் மிகைத் திசையில் வரையப் பட்ட ஓரலகு நேர்குத்துக் கோடாகும். $\overline{F}(x, y, z)$ என்ற வெக் டார் சார்பும் அதன் வகைக் கெழுக்களும் S, C ஆகியவற்றில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை எனக் கொண்டால்.

$$\int_C \overline{F}.\, d\,\overline{r} = \int_S \times\ \overline{F}.\, d\,\overline{A}$$ என நிரூபிக்கலாம்.

படம் 33-ல் ஒரு சிறு கட்டம் பெரிதாக்கிக் காட்டப்பட்டுள்ளது புள்ளிக்குப்புள்ளி $\overline{F}$-ன் மதிப்பு மாறுவதால் $\overline{F}$-ன் சராசரி மதிப்பு கள் AB, BC, CD, DA-யில் முறையே $F_1\ F_2\ F_3\ F_4$ என இருக்



படம் 33.

கட்டும், AC, BC, என்ற பக்கங்கள் முறையே $\triangle\,\overline{a}\ \triangle\,\overline{b}$ என்க.

$$\therefore \int_{ABCD} \overline{F}_0\, d\,\overline{r} = \overline{F}_{10}\,\triangle\,\overline{a} + \overline{F}_{20}\,\triangle\,\overline{b} + \overline{F}_{30}\,(-\triangle\,\overline{a}) + \overline{F}_4\,(-\triangle\overline{b})$$

$$= \triangle\,\overline{a}_0\,(\overline{F}_1 - \overline{F}_3) + \triangle\,\overline{b}\,(\overline{F}_2 - \overline{F}_4)$$

$$= \triangle\,\overline{b}_0\,(\overline{F}_2 - \overline{F}_4) + \triangle\,\overline{a}\,(\overline{F}_3 - \overline{F}_1)$$

$d\bar{r}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\bar{F}$ ஏற்படும் மாற்றம் $\triangle \bar{F}$ எனில்

$$\triangle \bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \triangle x \triangle \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \triangle y \triangle \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \triangle y$$

$$= \left(\triangle x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \triangle z \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{F}$$

$$= (\triangle \bar{r}. \triangle) \bar{F}$$

(ஏனெனில் $\triangle \bar{r} = \triangle x \hat{i} \triangle y\hat{j} + \triangle z\hat{k}$) எனவே $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றம் $\triangle \bar{F} = (\triangle \bar{r}, \triangle) \bar{F}$

$\therefore \bar{F}_3 - \bar{F}_1 = A D$ வழியே $\triangle \bar{b}$ எனும் சி று இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த, $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் மாற்றம் $= (\triangle \dot{b}_\circ \triangle) \bar{F}_\circ$

இதேபோல் $\bar{F}_2 - \bar{F}_4 = A B$ வழியே $\triangle \bar{a}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\bar{F}$ ல் ஏற்படும் மாற்றம்,

$$= (\triangle \bar{a}_0 \triangle) \bar{F}_\circ$$

$$\therefore \int_{ABCD} F_\circ \, d \, \bar{r} = \triangle \bar{b}_\circ (\triangle \bar{a}_0 \triangle) \bar{F} - \triangle \bar{a}_\circ (\nabla \, \mathrm{b}_0 \triangle) \bar{F}$$

$$= [\triangle \bar{b} \triangle \bar{a}.\nabla) - \triangle \bar{a} (\triangle \bar{b}. \nabla)]. \bar{F}$$

$$= \left\{ \nabla \bar{a} \times \nabla \bar{b}) \times \triangle \right\} \bar{F}$$

$$- (\triangle a \times \triangle \bar{b}). \triangle \times \bar{F}$$

[புள்ளிப் பெருக்கலையும் வெக்டார் பெருக்கலையும் இட மாற்றிக் கொள்ளலாம் என்ற விதிப்படி] ஆனல் $\nabla \bar{a} \times \nabla \bar{b}$ என்பது இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பு வெக்டாராகும். இதனை $\nabla \bar{A}$ என குறிக்கலாம்.

$$\therefore \int_{ABCD} F_\circ \, d \, \bar{r} = A.\nabla \times \bar{F} = \nabla \bar{F}. \nabla \bar{A}$$

இது போன்றே எல்லா சிறு கட்டங்களுக்கும் கோட்டு வழித் தொகையினைக் கண்டுபிடித்து கூட்ட வேண்டும். ஆனால் கோட்டு வழித்தொகைகளை அருகருகே உள்ள இணைகரங்களின் பக்கங் களின் வழியே காணும்போது ஒரு தடவை ஒரு திசையிலும், அண்டைக் கட்டத்தின் பக்கமாகக் கொண்டு தொகை காணு கையில் எதிர்த்திசையிலுமாக காணப்படுவதால், இதன் தொகை சுழியமாகிறது. ஆனால் வளை தளத்தின் வரம்பாக அமைந்த வளை வரையை ஒட்டிய சிறு கட்டங்களில் தொகை காணும்போது, வளை வரையின் பகுதியான சிறு சிறு துண்டுகளில் காணப்படும் தொகை கள் மட்டிலும் ஒரே தடவை ஒரே திசையில் காணப்பட்டுக் கூட்டப் படுகின்றன. எனவே மொத்த வளை தளப்பரப்பிலும் அமைந்த எல்லாக் கட்டங்களின் பக்கங்களின் வழியாகக் காணப்படும் கோட்டு வழித்தொகைகளின் கூட்டல் அந்த வரம்பான வளை வரையில் காணப்படும் கோட்டு வழித்தொகைக்குச் சமம்.

எனவே

$$\int_C \bar{F}.\, d\,\bar{r} = \int_S \triangle\, \bar{F}.\, d\,\bar{A}$$

இவ்வாறு ஸ்டோக்கின் தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: ஒரு வளைதளத்தின் வரம்பான வளைவரை ஒரு சம தளத்திலிருந்தால் $\int_S \nabla \times \bar{F}.\, d\,\bar{A} = \int_C \bar{F}.\, d\,\bar{r}$

அந்த சமதளத்தில் அவ்வளை வரை C–யினால் அடைக்கப் பெறும் சமதளப் பரப்பு வழித் தொகையும்

$\int_C \bar{F}.\, d\bar{r}$ என்றே ஆகும். எனவே

$\int_S \nabla \times \bar{F}.\, d\,\bar{A}$ என்ற தொகை ஒரு வளைதளப் பரப்பின்மீது காணப்படுமாயின் அவ்வளைதளப் பரப்பின் வரம்பு வளை வரை யினால் ஒரு சமதளத்தில் அடைக்கப்பெறும் பரப்பின்மீது பரப்பு வழித்தொகை கண்டால் போதும்.

3.06. காஸின் பாய்வுத்தோற்றம் (Gauss' Divergence theorem)

காஸின் பாய்வுத் தேற்றத்தின் மூலம் ஒரு கன வழித் தொகையைப் பரப்பு வழித்தொகையாக மாற்றலாம்.

V-எனும் கன பரிமாணத்தை மூடிய வளை தள பரப்பு S-ன் மீது $\bar{F}$ எனும் வெக்டார் சார்பின் செங்கோட்டு வழிக் கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, அம்மூடிய பரப்பினுள் உள்ள கன அளவு முழுமையிலும் எடுக்கப்பட்ட, அச்சார்பின் பாய்வு மதிப்பின் கன வழித் தொகைக்குச் சமம்.

அதாவது $\iiint_V (\nabla . \bar{A})\, d v = \iint_S \bar{A}.\, d \bar{S}$

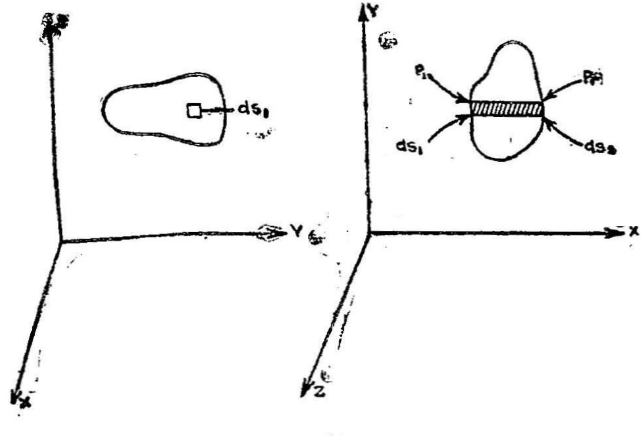
இதனை நிரூபிக்க இந்த சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்தை பின்வருமாறு விரிவாக்கலாம். அதாவது

$$\iiint (\nabla . \bar{A})\, d V = \iiint_V \left(\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_V \frac{\partial Ax}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint_V \frac{\partial Ay}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$$

$$+ \iiint_V \frac{\partial Az}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

இந்த சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்திலுள்ள முதல் தொகையீட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 34.

படம் 34-ல் P_1 $(x_1, y_1 z)$ லிருந்து $P_2 (x_2, y_1 z)$வரை நீளும் $dy\,dz$ என்ற பரப்பளவினை உடைய வரித்துண்டு (Strip) வழியே x பற்றிய தொகையீட்டைக் காணும்போது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\iiint_V \frac{\partial Ax}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint [Ax(x_2, y, z) - Ax(x_1, y, z)]\, dy\, dz$$

இங்கு (x_1, y, z), (x_2, y, z) என்பன P_1, P_2 ன் ஆயங்கள் ஆகும். P_1-ல் $dy\,dz = -dsx$. P_2-வில் $dy\,dz = dsx$

எனவே

$$\iiint_V \frac{\partial Ax}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Ax\, dsx$$

இங்கு வலது பக்கத்திலுள்ள பரப்பு வழித்தொகை V-ஐ மூடிய அந்த பரப்பு முழுவதிலும் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இதேமாதிரி

$$\iiint_V \frac{\partial Ay}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Ay\, ds\, y$$

$$\iiint_V \frac{\partial Az}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Az\, d\, sz$$

என எழுதலாம். எனவே இம்மூன்றினையும் கூட்ட

$$\iiint_V (\nabla . \bar{A})\, dV = \iint_S [Ax\, dSx + Ay\, dSy + Az\, dSz]$$

$$= \iint_S \bar{A} . d\,\bar{S}.$$

இவ்வாறு காஸின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

3.07. பாய்வுத் தேற்றத்தின் இயல்பியல் விளக்கம் :

$\bar{A}$ எனும் திசை வேகத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் பாய்மப் பகுதி ஒன்றினுள் மூடிய வளை தளப்பரப்பு S-ஒன்றினை எடுத்துக் கொண்டால், இப்பரப்பின் வழிச்செல்லும் பாய்மத்தின் அளவை இரு வழிகளில் கணக்கிடலாம்.

(1) பரப்பிற்கு நேர்குத்துக் கோட்டின் வழியில் வெளிப்பாயும் மொத்த அளவினைக் கணக்கிடலாம். இது

$\iint_S \bar{A}.\, d\,\bar{S}$ ஆகும்.

(2) வளைதள பரப்பினுள் முழு கன அளவிலுமாக ஓரலகு கன அளவிற்கு எவ்வளவு பாய்மம் பாய்கிறது என்பதை கணக்கிட்டும் அறியலாம். இது $\nabla .\, \bar{A}$ எனும் $\bar{A}$-யின் பாய்வு மதிப்பாகும்.

dv எனும் நுண் கன அளவின் வழியே ஒரு செகண்டில் பாயும் பாய்ம அளவு $\nabla .\, \bar{A}dv$ இதனை அக்கன அளவு முழுவதும் கண்டு கூட்டினால்

$\iiint_V \nabla .\bar{A}dv$ கிடைக்கும். இவ்விரண்டுஅளவுகளும் சமமாகையால்

$\iint_J \bar{A}.\, d\,\bar{S} = \iiint_V \nabla .\, \bar{A}dv$ என கிடைக்கிறது.

3.08. கிரீனின் தேற்றம் (Green's theorem)

$$\bar{A} = u \nabla w$$

இங்கு வெக்டார் புலம் $\bar{A}$ என்பது u என்ற திசையிலி சார்பு w என்ற மற்றேருரு திசையிலிச் சார்பின் சரிவு இவற்றின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதப்பட்டுள்ளது. $\bar{A}$ யின் பாய்வினை

$$\triangle .\, \bar{A} = \frac{\partial}{\partial x} A x + \frac{\partial}{\partial y} A y + \frac{\partial}{\partial z} A dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[u \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$= u \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\delta u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= u \nabla^2 w + \nabla u .\, \nabla w \qquad \ldots \quad (1)$$

என்று எழுதலாம்.

காஸின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கிரீனின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம். ஆகவே காஸ் தேற்றத்தின் இடப்பக்கத்தில்

$\nabla . \bar{A}$ க்கு பிரதியிட்டு

$$\iiint\limits_V (u\nabla^2 w + \nabla u.\nabla w)\, dv = \iint\limits_S (u.\nabla w) . ds \quad \ldots (2)$$

என்று எழுதலாம். இந்த மாற்றம் கீரின் தேற்றத்தின் முதல் வடிவம் எனக்கூறுவோம். சமன்பாடு (2)-ல் u, w-ஐ இடம் மாற்றி எழுதினுல்

$$\iiint\limits_V (w\nabla^2 u + \nabla w.\nabla u)\, dv = \iint\limits_S (w\nabla u) d.\bar{s} \quad \ldots (3)$$

கிடைக்கிறது.

(3)-ஐ (2)-லிருந்து கழிக்க

$$\iiint\limits_V (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)\, dv = \iint\limits_S (u\nabla w - w\nabla u).d\bar{s}$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதனை கிரீன் தேற்றத்தின் இரண்டாவது வடிவம் எனக் கூறுவோம்.

இந்த தேற்றம் மின் இயக்க இயலிலும், பாய்ம இயக்க இயலிலும் பெரிதும் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

3.09. ஒரு சமதளத்திலுள்ள பரப்பிற்கு பயன்படுத்தப்படும் கிரீனின் தேற்றம் :

C என்ற வளைவரையினையுடைய xy தளத்தில் S என்பது ஒரு பகுதியாயும் MN என்பவையும், அவற்றின் வகைக் கெழுக்களும், x, y-ல், தொடர்ச்சியானதாய் இருந்தால்

$$\oint (Mdx + Ndy) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, \partial y$$

என்று எழுதலாம். இங்கு C-ஐ மிகைத் திசையில் சுற்ற வேண்டும்.

நிரூபணம் : ஸ்டோக் தேற்றத்தின்படி

$\oint_C \bar{A}.d\bar{r} = \int\int_S (\bar{\nabla} \times \bar{A}).\hat{n}d\bar{s}$ ஆகும்.

C என்ற வளைவரை *XY* தளத்தில் வரையப்பட்டால்

$\hat{n}=\hat{k}$; $\bar{A} - \hat{i}\, Ax+\hat{j}\, Ay$ ஆகும்.

எனவே

$$\oint \bar{A}.d\bar{r} = \int\int_S (\bar{\Delta} \times \bar{A}).\hat{k}d\bar{s}$$

$Ax = M$; $Ay = N$ எனக் கொண்டால்

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{\partial N}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

ஆகும்.

எனவே

$$(\nabla \times \bar{A}).\hat{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$\bar{A}.d\bar{r} = Mdx + N\,dy$ ஆகும்.

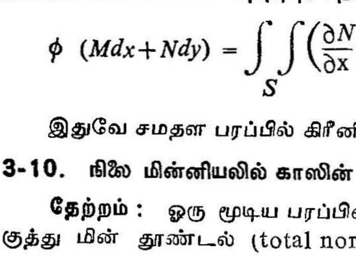
எனவே ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்

$$\oint (Mdx+Ndy) = \int\int_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$$

இதுவே சமதள பரப்பில் கிரீனின் தேற்ற மாகும்.

3-10. நிலை மின்னியலில் காஸின் தேற்றம் :

தேற்றம் : ஒரு மூடிய பரப்பின் வழிச் செல்லும் மொத்த நேர் குத்து மின் தூண்டல் (total normal electric induction), அந்த பரப்பளவிற்குள் அடங்கிய மின்னூட்டத்தின் 4π தடவைக்குச் சமம்.



படம் 35

நிரூபணம் : படம் 35-ல் *S* என்பது ஒரு மூடிய பரப்பளவாகவும், $\bar{r}$ என்பது வெக்டார் $\overline{OP}$ ஆகவும் இருக்கட்டும். *S*-ல் *ds* என்ற நுண்ணிய பரப்பளவை எடுத்துக்

கொள். இங்கு $\hat{n}$ என்பது ds-ன் மிகைத் திசையில் வரையப்பட்ட ஓரலகு நேர்குத்து வெக்டாராகும். dS-ல் இதன் வழியே செல்லும் நேர்குத்து மின்தூண்டலை $\bar{E}.\bar{ds}$ எனஎழுதலாம். இங்கு $\bar{E}$ என்பது P-ல் மின் செறிவாகும். அதாவது $E=\frac{q}{r^2}\hat{k}$, q என்பது Q-வில் உள்ள மின்னூட்டம், $\hat{k}$ என்பது $\bar{r}$-ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டார். அதாவது $\hat{k} - \frac{r}{|v|}$.

எனவே ds-ல் நேர் குத்து மின்தூண்டல்

$$=\frac{q}{r^5}\bar{r}.\bar{ds} = \frac{q}{r^5}\bar{r}.\hat{n}\,ds.$$

இதனை பயன்படுத்தி மூடிய பரப்பளவு வழி செல்லும் மொத்த நேர்க்குத்து மின் தூண்டலைக் கணக்கிடலாம்.

$$\therefore \quad S=\iint_S \frac{q}{r^3}\bar{r}.\hat{n}\,ds = q\iint_S \frac{\overline{r.\hat{n}}}{v^8}\,ds$$

காஸ் தேற்றத்தின்படி

$$\iint_S \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\,ds = \iiint_V div\left(\frac{r}{r^3}\right)dv \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் $\nabla\left(\bar{r}\right) = (\nabla\, r^{-3}).\,\bar{r}+\bar{r}^{-3}\,\nabla.\,\bar{r}$

$$= -3v^{-5}\,\bar{r},\bar{r}+3v^{-3}=0.$$

V என்ற கனபரிமானத்திற்குள் $r\neq O$ ஆக இருக்க வேண்டும் மேலும் தோற்றுவாய் அல்லது ஆதி O, V-க்கு வெளியே இருக்க வேண்டும்.

எனவே இந்த கன பரிமாணத்திற்கும் மின்னூட்டம் O-ஆக இருந்தால். இதனை மூடிய பரப்பின் வழிச் செல்லும் மொத்த நேர் குத்து மின்தூண்டல் சுழியமாகும்.

ஆத் O. S-க்குள் இருந்தால் O-வைச் சுற்றி, P என்ற ஆ ர திணையுயை Γ என்ற வட்டத்தை வரை. S, இவற்றின் இடையே

உள்ள பகுதியை T எனக் கூறுவோம். பாய்வுத் தேற்றத்தின்படி

$$\iint_{S+T} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{ds}\, ds = \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds + \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds$$

$$= \iiint_{T} \triangle \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right) dv = O$$

இங்கு T-க்குள் $r \neq 0$.

$$\therefore \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds = -\iint_{\Gamma} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds$$

Γ-ன் மேல் $r = P,\ \hat{n} = = \frac{\bar{r}}{P}$

எனவே $\frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3} \frac{\left(-\frac{\bar{r}}{P}\right).\bar{r}}{P^3} = \frac{= \bar{r}.\bar{r}}{P^4} = \frac{-P^2}{P^4} = -\frac{1}{P^2}$

$$\therefore \iint_{S} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds = -\iint_{\Gamma} \frac{\hat{n}.\bar{r}}{r^3}\, ds = -\iint_{\Gamma} \frac{ds}{P^2}$$

$$= \frac{1}{P^2} \iint_{\Gamma} ds$$

$$= \frac{4\pi\ P^2}{P^2}\ 4\pi$$

எனவே q என்ற மின்னூட்டத்தையுடைய கன்பரிமாணத்தைமூடிய S எனும் பரப்பின் வழியே செல்லும் மொத்த நேர்குத்து மின் தூண்டல்

$$= q \iint_{S} \frac{r.n}{r^3}\, ds = 4\pi\ q \text{ ஆகும்.}$$

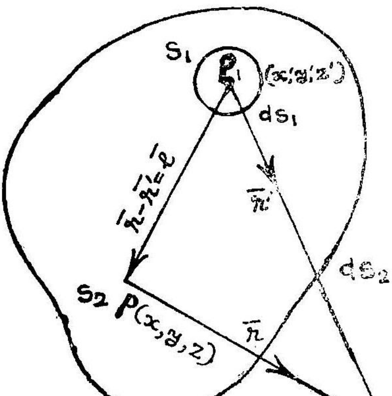
3-11. கிரீன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பாய்சான் (Poisson) சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல் :

பாய்சான் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $\triangle^2 Q = O$ என்பதாகும். இங்கு ϕ என்பது திசையிலி சார்பு, $\triangle^2$ என்பது லேப்லாஸின் செயலி. இந்த சமன்பாடு ஒரு படித்தானது அல்ல. பாய்சான் சமன் பாட்டை

$$\triangle^2 \phi = f(x, y, z)$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு f என்பது $x, y,$ z என்பவைகளின் திசையிலி சார்பு.

திசையிலி சார்பு $f(x, y,$ z) கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொண்டு $P'(x, y,$ z) என்ற காட்சிப் பதிவின் நிலைபுள்ளிக்கு (fixed point of observation) ϕ (x', y', z)-ஐத் தீர்ப்போம் $P(x, y, z)$ என்பதை மாறும் புள்ளியாகக் கொண்டு அதன் வழியில் தொகையீடுகளைக் காணுவோம் (படம் 36) நிலைப்புள்ளி P^1-ஐப் பற்றிய S_0 என்ற ஆர



படம் 36

முள்ள ஒரு கோள உட்குழிவினைக் (spherical cavity) கொண்ட V என்ற ஒரு கனபரிமாணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். S_1, S_2 என்பன அதன் உள், வெளிப் பரப்பளவுகளாக இருக்கட்டும்.

$$u = \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r'}|} = \frac{1}{l} \quad \ldots (1) \text{ என்க.}$$

இங்கு $\overline{OP}=\overline{r}$, $\overline{OP'}$ r'. $\overline{PP'}=\overline{l}$

என்பன, O என்னும் தோற்றுவாயைப் பொறுத்த வெக்டார்களாக இருக்கட்டும். இதிலிருந்து

$$u=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

எனவே

$$\nabla^2 u=\Delta^2 \frac{1}{l}=\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$
$$=O \qquad \ldots \quad (2)$$

என அறிகிறோம்.

இதிலிருந்து லேப்லாஸ் சமன்பாடு u-க்குப் பொருந்தும் எனத் தெரிகிறது. u, w இவற்றின், முதல், இரண்டாவது வகைக் கெழுக் கள் ஆகியவை தீர்வான தாகவும், தொடர்ச்சியான தாகவும் இருந்தால்,

$$\iiint_T (u\ \nabla^2 w-w\ \nabla^2 u)\ dv$$

$$=\iint_S (u\nabla w-w\ \nabla u).d\overline{S}$$

என கிரீனின் தேற்றத்தின்படி எழுதலாம். இதையே சமன்பாடு கள் (1) (2)-ஐப் பிரிதியிட்டு

$$\iiint_V \frac{\nabla^2 \omega}{l}\, dv=\iint_S \left[\frac{\nabla\omega}{l}-\omega\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right] d.S$$

என்று எழுதலாம், இங்கு $\omega=\phi$ என்றும் $\nabla^2\omega=f$ என்றும் கொண்டு

$$\iiint_V \frac{f(x,y,z)}{l}\ dv=\iint_S \left[\frac{\nabla\phi}{l}-\phi\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right].\ d\overline{S}$$

$$\ldots \quad (3)$$

என்று காணலாம்.

சமன்பாடு (3)-ன் வலப்பக்கத்தில் பரப்புத் தொகையீட்டினைக் காணும்போது, பரப்பளவுகள் S_1, S_2 இவைகளின் மேல் காண வேண்டும்.

$$\text{வலப்பக்கம்} = \iint_{S_1} \left[\frac{\nabla\phi}{l} - \phi\nabla\left(\frac{1}{l}\right)\right].d\bar{S}$$

$$+ \iint_{S_2} \left[\frac{\nabla\phi}{l} - \phi\nabla\left(\ 1\ \right)\right].d\bar{S}$$

$\iint_{S_1} \frac{\nabla\phi}{l} \,.\, d\bar{S}$ இதில் S_o சுழியத்தை நெருங்கும்போது

$\nabla\phi.d\bar{S} \rightarrow -\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{P_1} dS_1$ என்ருகிறது.

dS_1 உட்குழிவுக்கு உட்பக்கமாக இருப்பதால் இங்கு (—) குறி வருகிறது. எனவே

$$\iint_{S_1} \nabla\frac{\phi}{l}.\, d\bar{S}_1 \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{P_1} \frac{4\pi S_o^2}{S_o}$$

S_o சுழியத்தை நெருங்கும்போது இதன் வலப்பக்கம் $\rightarrow O$

$$\iint_{S_1} \phi\ \nabla\left(\frac{1}{l}\right).dS \rightarrow -\phi\Big|_{P^1}\left(-\frac{1}{S_o^2}\right)(-4\pi S_o^2)$$

$$= -4\pi\,\phi\,|_{P^1} = -4\pi\,\phi\,(x', y', z')$$

இப்பொழுது V என்ற கனபரிமாணம் சுந்தழியை நெருங்கும் போது, $\frac{1}{r}$-ஐப் போல் ϕ-யும் சுழியத்தை நெருங்குகிறது என்ற எல்லை நிபந்தனையை எடுத்துக் கொள்வோம்,

கந்தழியில் $\frac{\nabla\phi}{l}$-ம் $\phi\triangle\left(\frac{1}{l}\right)$ம்

$\frac{1}{r^3}$ என்ற மதிப்பினைப் பெறுகிறது. எனவே பரப்புத் தொகை யீட்டிற்குப் பிறகு இந்த இண்டும் $\frac{1}{n}$ என்ற மதிப்பினை உடையவைகளாக இருப்பதால் கந்தழியில் இவையிரண்டும் சுழிய மதிப்பைப் பெறுகின்றன,

எனவே இதன்படி

$$\iiint_V \frac{1}{l} f(x, y, z)\, dv = -4\pi\, \phi\, (x^1, y^1, z^1)$$

அல்லது

$$\phi\, (x^1_7\, y^1, z^1) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{|\bar{r} - \bar{r}^1|}\, dx\, dy\, dz$$

என்றுகிறது. இது பாய்சான் சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

3-12, பாய்ம இயக்கத்தில் வெக்டாரின் பயன் (Application to hydrodynamics) :

மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில் (x, y, z, t) என்னும் செறிவுடைய பாய்மம் நிரம்பியுள்ளதாகக் கொள்வோம். இப்பகுதியில் S என்ற மூடிய பரப்பிணை உடைய V என்னும் கனபரிமாணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். நேரம் t-ல் இக்கன பரிமாணத்துக்குள் உள்ள பாய்மத்தின் திண்மை $Q\ (t)$ எனக்கொள்வோம், அப்படியாஞல்

$$Q\ (t) = \iiint_V P\, dV \qquad \dots \quad (1)$$

$\bar{v}$ என்பது பாய்மத்தில் ஒரு துகளின் திசை வேகமாஞல், V-ல் உள்ள பாய்மத்தின் திண்மை,

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S (P\bar{v}).d\bar{S} \qquad \dots \quad (2)$$

என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

சமன்பாடு (1)-ன் நேரம்பற்றிய வகைக்கெழு கண்டு (2)-உடன் ஒப்பிட்டால்

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial P}{dt}\, dV - -\iint_S (P\bar{v}).d\bar{S} \qquad \dots \quad (3)$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆஞல் காஸின் தேற்றத்தின்படி

$$\iint (P\bar{v}).d\bar{S} = \iiint_V \nabla.(P\bar{v})\, dV \qquad \dots \quad (4)$$

இதனை (3)-ல் பிரதியிட

$$\iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla .(P\bar{V})\right] dV = 0 \qquad \dots \quad (5)$$

என்ருகிறது.

இங்கு தொகைச் சார்பு தொடர்ச்சி யுள்ளதாக இருப்பதாலும்' V என்ற கன பரிமானம் யாதா மொன்ருக இருப்பதாலும் சமன் பாடு (5)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla .(P\bar{v}) = O \qquad \dots \quad (6)$$

இதுபாய்ம இயலின் அடிப்படை சமன்பாடு ஆகும். இதையே பாய்ம இயலின் தொடர்ச்சி சமன்பாடு (equatiou of continuity) என்று கூறுவோம்.

பாய்மம் அமுக்கப்பட இயலாத தாயிருந்தால் அதன் செறிவு ஒரு மாறிலி ஆகிவிடும். அப்பொழுது

$$\frac{\partial P}{\partial t} = O = P\ (\triangle .\bar{v}) \qquad \dots \quad (7)$$

பாய்ம ஓட்டம் சுழற்சியில்லாததாயின்

$$\nabla \times \bar{v} = O \qquad \dots \quad (8)$$

ஆனல் வெக்டார் நுண்கணிதத்தின்படி

$$\bar{v} = \nabla O \qquad \dots \quad (9)$$

என்ருல் தான், $\nabla \times \bar{v} = O$ ஆகும். இங்கு ϕ என்பது ஒரு திசையிலி சார்பு. சமன்பாடு (7)-லிருந்து ஒரு இறுகாத் தன்மையுள்ள பாய் மத்திற்கு $\nabla .\bar{v} = O$ என காண்கிருேம். எனவே O என்பது திசை வேக அழுத்தம் (velocity potential) ஆகும். இது $\nabla .(\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = O$ என்ற சமன் பாட்டுக்குக் கட்டுப்படும்.

பாய்மத்தின் ஒரு நிலையான வரம்பில் திசை வேகத்துக்கு நேர்க் குத்துக்கூறு கிடையாது. எனவே சமன்பாடு (9)-ன்படி நேர் குத்துக் கோட்டின் வழியே ϕ-ன் மாறுவீதமான

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = O$$ ஆகிறது.

$H(x, y, z, t)$ என்ற சார்பு, பாய்மத்தில் ஒரு துகளின் அழுத்தம், செறிவு மற்ற எந்த ஒரு பண்பையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$\frac{\partial H}{\partial t}$ என்பது குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் H-ன் t பற்றிய மாறு வீதமாகும். H-ன் மொத்த வகைக்கெழு

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \times \frac{\partial H}{\partial z} dz \times \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\bar{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$$

$$\nabla H = \hat{i}\frac{\partial H}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial H}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial H}{\partial t}$$ என்பதால்

$$\bar{v}.H \Delta H = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{d_Z}{dt}$$

ஆகும் இதிலிருந்து

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}.(\nabla H) \qquad \ldots \quad (10)$$

என எழுதலாம்.

3-13. ஆய்லரின் இயக்க சமன்பாடு (Euler's equations of motion).

உராய்வு இல்லாத பாய்மத்தின் இயக்க சமன்பாட்டை அறிய, பாய்மத்தின் dx, dy, dz என்ற கனமரிமானம் உள்ள $P\,dx\,dy, dz$ என்ற திண்மை உடைய நுண்ணிய பகுதியில் (element) செயல் படும் விசைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். P என்பது பாய்மத்தின் அழுத்தமானல்

$$P\frac{dy}{dz} - (P + \frac{\partial P}{\partial x} : dx)\,dy\,dz = -\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

என்பது நுண்ணிய பகுதியில், x திசையில் செயல்படும் விசையாகும். $\bar{F}$ என்பது ஓரலகு திண்மையுள்ள பாய்மத்தின் மீது செயல்படும் புற விசையானல் $Fx\,P\,dx\,dy\,dz$ என்பது அந்த நுண்

ணிய பகுதியின் மேல் திசையில் செயல்படும் புறவிசையாகும் x திசையில் x இந்நுண்ணிய பகுதியின் முடுக்கம் $\frac{dv_x}{dt}$ ஆகும்.

எனவே நியூட்டனின் 2-வது விதிப்படி

$$\frac{dv_x}{dt} . P\, dx\, dy\, dz = F_x\, P\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

என்று எழுதலாம்.

இது மாதிரியே y, z திசைகளில் எழுதி ஆய்லரின்

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \frac{1}{P} \nabla P \quad \ldots \quad (11)$$

என்னும் இயக்க சமன்பாட்டை அடையலாம்.

ஆனல் சமன்பாடு (10)-ன்படி

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}.\nabla)\, \bar{v} \text{ ஆகும்} \quad \ldots \quad (12)$$

$$\text{ஆனல் } (\bar{v}.\nabla)\, \bar{v} = \tfrac{1}{2} \nabla v^2 + (\nabla \times \bar{v}) \times \bar{v} \quad \ldots \quad (13)$$

என அறிவோம்.

(12), (13)-ஐப் பயன் படுத்தி ஆய்லரின் இயக்க சமன்பாட்டைப் பின்வரும் வடிவத்தின் எழுதலாம்.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \nabla \bar{v}^2 + (\nabla \times \bar{v}) \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{P} \nabla P \quad \ldots \quad (14)$$

$\bar{F}$ காப்பு நிலை விசையாக இருந்தால் அதற்கு V என்ற அழுத்தம் உள்ளது.

$$\therefore \quad F = -\nabla V \text{ ஆகும்.}$$

பாய்மத்தின் இயக்கம் சுழற்சி யில்லாததாக இருந்தால்

$$\nabla \times \bar{v} = O, \; |\bar{v}| = \nabla \phi \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, சமன்பாடு (14)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\tfrac{1}{2}\nabla v^2+\nabla V+\frac{1}{P}\nabla P=O$$

அல்லது $\triangle\,\omega=O$ ... (15)

இங்கு $\omega=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+V+\frac{P}{P}$

ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில், dr என்பது பாய்மத்தில் யாதாமொரு வழியைத் குறித்தால்

$$d\bar{r}=\hat{i}\,dx+\hat{j}\,dy+\hat{k}\,dz \text{ ஆகும்.}$$

$$\nabla w.d\bar{r}=\left(\hat{i}\frac{\partial w}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial w}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial w}{\partial z}\right).(\hat{i}\,dx+\hat{j}\,dy+\hat{k}\,dz)$$

$$=\frac{\partial w}{dx}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$=dw=O \quad ... (16)$$

இந்த ஸ்கேலார் பெருக்கல் எழுத சமன்பாடு (15)–ஐ பயன் படுத்தியுள்ளோம்.

ஆனால் (16)-ன்படி $w=\beta(t)$ என்ருகிறது. அதாவது w, t-ன் சார்பு என்று எழுதுகிறோம்.

$$\text{அதாவது } \frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+V\,\triangle\,\frac{P}{P}$$

$$=\beta(t) \text{ ஆகும்.} \quad ... (17)$$

இதற்கு பெர்னுலியின் சமன் பாடு என்று பெயர்.

குறிப்பாக, P ஒரு மாறிலியாகவும் பாய்மத்தின் இயக்கம் சீரான தாகவும் இருந்தால் $\frac{\partial\phi}{\partial t}=$ ஆகிறது.

எனவே பெர்னுலியின் சமன்பாடு

$\frac{v^2}{2}+V+\frac{P}{P}=\beta$ என்ற வடிவத்தைப் பெறுகிறது. இப்

பொழுது β ஒரு மாறிலியாகும். இந்த சமன்பாட்டின் இயற்பியல் விளக்கம் பின்வருமாறு :

பாய்மத்தின் எல்லாப் புள்ளியிலும், அதன் ஓரலகு திண்மத்தின் இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் அழுத்த ஆற்றல் இவற்றின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

4-0. வளைவரைக் கூறுகள் (curniliner coordinates) :

கார்டிஷியன் கூற்றுத் தொகுதியில் மூவளவை வெளியில் P என்னும் எந்த புள்ளியும் (x, y, z) என்ற கூறுகளால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு (h, k, l) என்னும் புள்ளியானது, $x=h, y=k, z=l$) என்ற மூன்று தளங்களும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியென வரையறுக்கப்படுகிறது இத்த தளங்கள் இரட்டைகளாக எடுக்கும் போது ஒன்றுக்கொள்று நேர்குத்தாக (orthogonal) இருக்கின்றன.

பொதுவாக, மூவளவை வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியை $u_1=$ மாறிலி, $u_2=$ மாறிலி, $u_3=$ மாறிலி என்ற மூன்று பரப்புகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியென வரையறுக்கலாம். இந்த பரப்புகள் சமதள தளமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. இப்பொழுது நமக்கு வளைவரைக் கூற்றுத்தொகுதி கிடைக்கிறது. இதில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் (u_1, u_2, u^9) என்ற கூறுகாளல் குறிக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது P என்னு ஒரு புள்ளி $(x, y\ z)$ என்ற கார்டிஷியன் கூறுகளால் குறிக்கப்படுகிறதென்றும்

$$u_1 = u_1\,(x, y, z)$$
$$u_2 = u_2\,(x, y, z)$$
$$v_3 = u_3\,(x, y, z) \qquad \dots \quad (1)$$

என்ற மூன்று கணியங்களைத் தனி சிறப்புப் பட கண்டு பிடிக்க முடியுமென்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

இதற்கு சார்புகள் u_1, u_2, u_3 தொடர்ச்சி வகைக்கெழு காணக் கூடியதாக இருத்தல் வேண்டும். மேலும் u_1, u_2, u_3 வரையறுக்கப் படுகிற பகுதி முழுவதும்

$$\nabla u_1 \cdot \Delta u_2 \times u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial u} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial n_2}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial u} \\ \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial n_3}{\partial u} \end{vmatrix} \neq O \quad \dots (2)$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

அப்பொழுது (u_1, u_2, u_3) P-யின் வளைவரைக் கூறுகள் ஆகும். சமன்பாடு (1) வளைவரைக் கூறுகளிலிருந்து செவ்வகக் கூறுகளின் உருவ மாற்றத்தைக் கொடுக்கிறது.

அணிக்கோவை (சமன்பாடு 2) உருவ மாறுத்தின் ஜெகோபி யம் என அமைக்கப்படும். இது எளிமையாக

$$J \begin{pmatrix} n_1, n_2, u_3 \\ x, y, z \end{pmatrix}$$

என் குறிக்கப்படும்.

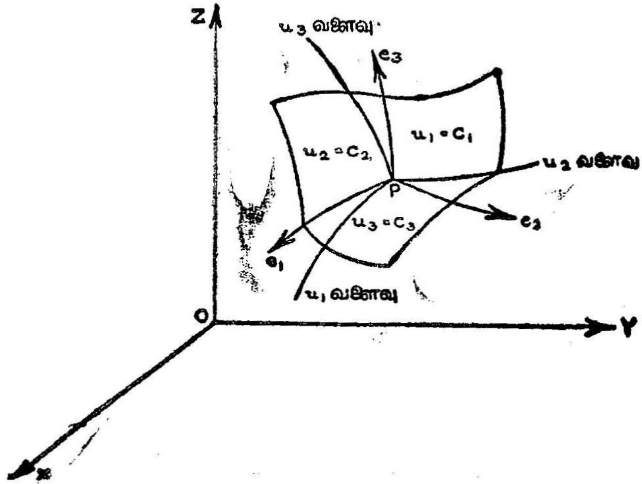
J-யின் மதிப்பு சுழியமாகாமலிருக்கும் தன்மை (x, y, z)-க்கும், (u_1, u_2, u_3)-க்கும் ஒன்றுக்கொன்முன ஒத்தியையை உறுதி செய் கிறது.

4-01. ஆயத்தொலை மேற் பரப்புகள், ஆயத் தொலை வளைகோடுகள் (co-ordinate surfaces, co-ordinate curves).

u_1 = மாறிலி, u_2 = மாறிலி, u_3 = மாறிலி என்பதால் மூவளவை வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். எனவே, மூவளவை வெளியில் கொடுக்கப்பட்ட P என்னும் புள்ளி வழியாக $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ என்ற மூன்று மேற் பரப்புகள் செல்லுகின்றன என் பது தெளிவாகிறது. இந்த மேற் பரப்புகளுக்கு ஆயத்தொலை மேற் பரப்புகள் எனப் பெயர். தனித்தனியாக இவைகளை u_1 மேற் பரப்பு u_2 மேற்பரப்பு, u_3 மேற்பரப்பு, எனக் கூறலாம்.

இரண்டு ஆயத் தொலை மேற் பரப்புகள் ஒரு வளை கோட்டில் வெட்டிக் கொள்வதால், புள்ளி P-யின் வழியே மூன்று வளைகோடு கள் செல்கின்றது. இவைகளுக்கு ஆயத்தொலை வளைகோடுகள், என்று பெயர். u_1 மட்டும் மாறுகின்ற வளைகோட்டுக்கு u_1 வளை

கோடு என்று பெயர். இதுபோன்றே u_2 வளைகோடும் u_3 வளை கோடும் வரையறுக்கபடுகின்றன.



படம் 37

குறிப்பு: ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் இரட்டையாக நேர் குத்தாக இருப்பதால், வளைவரைக் கூற்றுத் தொகுதி நேர்குத்தாக விருக்கிறது என கூறப்படும்.

4-02. அலகு தொடுகோடும் நேர்குத்து வெக்டாரும்.

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ என்பன அச்சுகளின் வழியே உள்ள அலகு வெக்டார்களானால், $P(x, y, z)$ என்னும் புள்ளியின் நிலை வெக்டார் $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ஆகும். இதை வளைவரைக் கூறுகள் (u_1, u_2, u_3) க்கு மாற்றி எழுதினால் $\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_3, u_2)$ ஆகும்.

u_1 வளை கோட்டின் வழியே u_1 மட்டுமே மாறுவதால் $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ என்பது P என்னும் புள்ளியில் வளை கோட்டின் தொடுகோட்டு வெக்டாராகும்.

$\left| \dfrac{\partial v}{\partial u_1} \right| = h$ எனக் கொண்டால்

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \Big/ \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \right| = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}$$

என்பது P என்னும் புள்ளியில், u_1 வளைகோட்டுக்கு ஓரலகு தொடு கோட்டு வெக்டாராகும். இது மாதிரியே

$$\hat{e} = \frac{1}{h_2}\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \quad / \quad \hat{e}_1 = \frac{1}{h_3}\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$$

என எழுதலாம்.

$$\text{இங்கு } h_2 = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} \right|$$

என்பன முறையே, P என்னும் புள்ளியில் u_2, u_3 வளை கோடு களுக்கு வரையப்பட்ட அலகு தொடுகோட்டு வெக்டாகளாகும்.

எனவே

$$\frac{\partial \bar{r}}{u\partial_1} = h_1 \hat{e}_1, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = h_3 \hat{e}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_{\text{௩}}} = h_3 \hat{e}_3$$

என கிடைக்கிறது h_1, h_2, h_3 எனும் எண்கள் அளவு முறைக்குரிய (metrical) கெழுக்கள் அல்லது அளவு காரணிகள் (scale factors) எனப்படும்.

புள்ளி P-யில், $u_1 = c_1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு, ∇u_1 நேர்குத்து வழியே உள்ளது. எனவே $\bar{E}_1 = \frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|}$ கொடுக்கப்பட்ட புள் ளியில், $u_1 = c_1$ என்ற மேற் பரப்புக்கு அலகு நேர்குத்து வெக்டா ராகும். இது போன்றே மற்ற இரு அலகு நேர்குத்து வெக்டார்களை யும் எழுதலாம்.

அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார் $\hat{e}$, $u_2 = c_2$, $u_3 = {}_3$ என்ற மேற் பரப்புகளுக்கு புள்ளி P-ல் வரையப்பட்ட இரண்டு தொடுகோட்டு தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோட்டின் வழியே அமைகிறது வளைவரைத் தொகுதி நேர்குத்தாக இருந்தால் தான், இது, P என் னும் புள்ளியில் $u_1 = c_1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு அலகு நேர்குத்தாக ஆகும்.

4-03. செங்குத்துக்கான நிபந்தனைகள் (orthogonality condition :

$\bar{r} = \bar{r}\ (u_1,\ u_2,\ u_3)$ ஆக இருக்கட்டும். இப்பொழுது $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3}$ ஆகியவை முறையே, P-என்னும் புள்ளியில் $u_1.\ n_2,\ u_3$ வளை கோடுகளின்வழி செல்லும் தொடுகோட்டு வெக்டார்களாகும். கூற்றுத் தொகுதி நேர்குத்தாக இருப்பதால் P வழி செல்லும் மூன்று மேற் பரப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக வெட்டின கொள்கின்றன். எனவே ஆயத் தொலை வளைகோடுகளுக்கு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள் இரட்டை இரட்டையாக செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இந்த நிபந்தனைக்குட் பட வேண்டுமானல்

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} = O,\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} - O,\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} = O$$

ஆக இருக்க வெண்டும்.

எனவே இவை நேர்குத்தாக இருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளாகும்.

4-04. வில்லின் நீளம், மூலக பருமன் (Elemental volume) :

$\bar{r} = \bar{r}\ (u_1,\ u_2,\ n_3)$ என்பதால்

$$\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1},\ du_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} .\ du_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial n_3} du_3$$

$$= h_1\ du_1\ \hat{e}_1 + h_2\ du_2\ \hat{e}_2 + h_3\ du_3\ \hat{e}_3$$

எனவே வில்லின் இரண்டு அடுத்தடுத்த புள்ளிகளுக்கடையிலுள்ள நீளம் ds,

$ds^2 = dr\ .\ dr$ ஆகும்.

$\hat{e}_1 . \hat{e}_2 = 0,\quad \hat{e}_2 . \hat{e}_3 = 0,\quad \hat{e}_3 . \hat{e}_1 = 0$
என்ற நேர்குத்து நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி

$$ds^2 = (h_1\ du_1\ \hat{e}_1 + h_2\ du_2\ \hat{e}_1 = h_3\ du_3\ \hat{e}_3).$$

$$(h_1\, dn_1\, \hat{e}_1 + h_2\, du_2\, \hat{e}_2 + h_3\, du_3\, \hat{e}_3$$
$$= h_1^2\, du_2^8 + h_2^2\, d\bar{u}_2^2 + h_3^2\, du_\omega^2$$

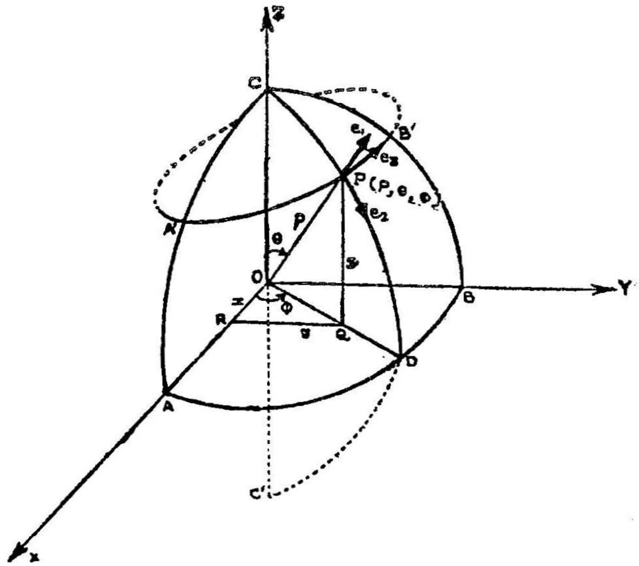
என எழுதலாம்.

u_1 - வளை கோட்டில், u_2, u_3 மாறிகளாததால், ஆயத் தொலை வளைகோடுகளின் வழியேயுள்ள வில்லின் நீளங்கள் முறையே

$$ds_1 = h_1\, du_1$$
$$ds_2 = h_2\, du_2$$
$$ds_3 = h_3\, du_3$$ ஆகும்.

மூலக பருமன் $dv = ds_1\, ds_2\, ds_3$
$= h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3$ ஆகும்.

4-05. கோளக் கூறுகள் (P, O, ϕ) (Spherical coordinates)



படம் 38

P = என்னும் புள்ளியின் கோளக் கூறுகள்

$P = QP$ என்பது தோற்றுவாய் O-லிருந்து P-க்கு உள்ள தூரம்.

θ என்பது OP-க்கும்

z அச்சுக்கும் இடையே உள்ள கோணம்.

ϕ என்பது XOZ, COD என்ற தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோண ஆகியவையாகும். (படம் 38).

XOY என்ற தளத்துக்கு நேர்குத்தாக, OD-ஐ Q-வில் சந்திக்கும் படி. PQ என்ற கோடு வரைX அச்சுக்கு நேர்குத்தாக QR வரை.

$$\angle PQR = 90^\circ - 0 \qquad \therefore \quad PQ = Z = P\cos\theta,$$

$$OQ = P\sin\theta$$

$$OR = x = OQ\cos\phi = P\sin\theta\cos\phi$$

$$RQ = y = OQ\sin\phi = P\sin\theta\sin\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2, = P^2\sin^2\theta\cos^2\phi + P^2\sin^2\theta\sin^2\phi$$
$$+ P^2\cos^2\theta = P^2$$

எனவே புள்ளி $P\,(P, \theta, \phi)$, O-ஐ மையமாகவும், P-வை ஆரமாக வும் கொண்ட கோள மேற் பரப்பின் மீது இருக்கிறது.

ஆயத்தொலை மேற்பரப்புகள் $P = c_1$, $\theta = c_2$ $\phi = c_3$ என்பன முறையே, O-ஐ மையமாகக் கொண்ட கோளங்கள் O-ஐ உச்சி யாகவும், OZ-ஐ அச்சாகவும் கொண்ட கூம்புகள், Z அச்சின் வழி செல்லும் தளங்கள் ஆகியவை ஆகும். இவை இரட்டை இரட் டையாக ϕ வளை கோடுகளிலும், P வளை கோடுகளிலும், O வளை கோடுகளிலும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இவை முறையே A 'B' போன்ற வட்டங்கள், OP போன்ற கோடுகள், $CPDC$ போன்ற அரை வட்டங்கள் ஆகும்.

அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள் $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ என்பன பின் வருமாறு கிடைக்கின்றன.

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$= P\sin\phi\cos\phi\,\hat{i} + P\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\text{எனவே } \hat{e}_1 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial P} \bigg/ \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial P}\right|$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}}{[\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2 + \cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sin\theta \cos\phi\, \hat{i} + \sin\theta \sin\phi\, \hat{j} + \cos\theta\, \hat{k},$$

$$\hat{l}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bigg/ \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right|$$

$$= \frac{P\cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + P\cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - P\sin\theta\,\hat{k}}{P\,[\cos^2\theta\cos^2\phi + sos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{l}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \bigg/ \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right|$$

$$= \frac{-P\sin\theta\sin\phi\,\hat{i} + P\sin\theta\cos\phi\,\hat{j}}{P\,[\sin^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

$$h_1 = \left| \frac{\partial \bar{r}}{du_1} \right|,\ h_2 - \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \right|,\ h_3 = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} \right|$$

என வரையறுக்கலாம்.

∵ கோளக் கூறுகளில் வில்லின் நீளம் ds,

$$ds^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2$$
$$= dl^2 + l^2\, d\theta^2 + l^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

மூலக பருமன் $dv = h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3$

$$= P^2 \sin^2\theta\, dP\, d\theta\, d\phi.$$

மேலும்

$$\hat{e} \cdot \hat{l}_2 = (\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$$
$$(\cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k})$$
$$= \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi$$
$$- \sin\theta\cos\theta = \theta,$$

$$\hat{l}_2 \cdot \hat{l}_1 = (\cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k})$$
$$\cdot (\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}) = 0$$

$$\hat{l}_3 \cdot \hat{l}_1 = (-\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}).$$

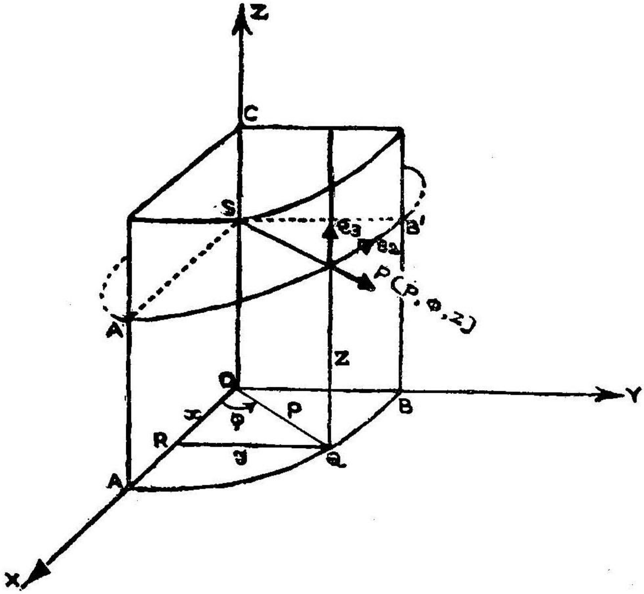
$$(\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}) = 0.$$

எனவே கோளக் கூறுகள் நேர்குத்தானவை.

4-06- உருளைக் கூறுகள் (P ϕ_1 z) cylindrical coordinates :

P என்பது (x, y, z) என்ற புள்ளியாகவும், P-யிலிருந்து XOY தளத்துக்கு வரையப்பட்ட நேர்குத்தினடி Q ஆகவும் இருக்கட்டும். $OQ = P$, $\angle XOQ - \phi$. இப்பொழுது (P, P) என்பன Q-வின் கோணதூரக் கூறுகள் ஆகும்.

$QP = z$ ஆதலால் D-யின் கூறுகள் (P, ϕ, z) ஆகும். இக்கூடு களுக்கு P-யின் உருளைக்கூறுகள் என்று பெயர்.



படம் 39

செங்கோண முக்கோணம் OQR- லிருந்து

$$OR = x = OQ\cos\phi = P\cos\phi$$

$$RQ = y = OQ\sin\phi = P\sin\phi.$$

எனவே உருளைக் கூறுகளும், செவ்வகக் கூறுகள் (x, y, z)-ம் பின்வரும் சமன் பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$x = P\cos\phi, \quad y = P\sin\phi, \quad z = z$$

இங்கு $P > O$, $O \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ ஆக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

$P = c_1$, $\phi = c_2$, $z = c_3$ ஆகிய ஆயத்தொலை மேற் பரப்புகள் முறையே OZ-ஐ பொதுவச் சாகவுள்ள உருளைகள், Z அச்சு வழியே செல்லும் தளங்கள், Z அச்சுக்கு செங்குத்தாகவுள்ள தளங்கள் ஆகியவையாகும். இவை இரட்டை இரட்டையாக Z வளை கோடுகளிலும், P வளை கோடுகளிலும் ϕ வளைக்கோடுகளிலும் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. அவை முறையே QP போன்ற நேர் கோடுகள் SP போன்ற நேர்கோடுகள் மேலும் $A'B'$ போன்ற வட்டங்கள் ஆகும்.

ம்-யில் அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்கள்

$\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ ஆகியவற்றைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = P\cos\phi\,\hat{i} + P\sin\phi\,\hat{j} + z\,\hat{k}.$$

$$\therefore \quad \hat{l}_1 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial P} \Big/ \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial P}\right| = \frac{\cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{k}}{[\cos^2\phi \,\triangle\, \sin^2\phi\,]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\theta\,\hat{i}\cos' + \sin\phi\,\hat{j}.$$

$$\hat{l}_1 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\phi} \Big/ \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\phi}\right| = \frac{-P\sin\phi\,\hat{i} + P\cos\phi\,\hat{j}}{P\,[\sin^2\phi + \cos^2\phi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

$$\hat{l}_3 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial z} \Big/ \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\phi}\right| = \hat{k}$$

இத் தொகுதிக்கு

$$u_1 = P, \quad u_2 = \phi, \quad u_3 = z, \quad \text{எனவே}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial P}\right| = 1, \quad h_2 = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\phi}\right| = P, \quad h_3 - \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\right| = 1$$

ஆகும்

எனவே, உருளைக்கூறுகளில் நீளம் ஆனது

$$ds^2 = h_1^2\, du_1^2\, h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2$$

$$= dl^2 + l^2\, d\phi^2 + dz^2$$

எனவும் மூலகப்பருமனே

$$dv = h_1\, h_2\, h_3\, du_1 \cdot du_2\, du_3 = \text{P}d\; ld\; \phi dz$$

எனவும் கிடைக்கின்றன.

மேலும்

$$\hat{l}_1 . \hat{l}_2 = (\cos\phi\, \hat{i} + \sin\phi\, \hat{j}) . (-\sin\phi\, \hat{i} \cos\phi\, \hat{j})$$

$$= \sin\phi\cos\phi + \sin\phi\cos\phi = 0.$$

$$\hat{l}_2 . \hat{l}_3\ (-\sin\phi\, \hat{i} + \cos\phi\, \hat{j}) . \hat{k} = 0$$

$$\hat{l}_3 . \hat{l}_1\ \hat{k} . (\cos\phi\, \hat{i} + \sin\phi\, \hat{j}) = 0.$$

எனவே உருளைக் கூற்றுத் தொகுதியும் நேர்குத்தான தாகும். (orthogonal).

4-07. வளைவரைக் கூறுகளில் வெக்டாரின் சரிவு, பாய்வு சுழல் ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள்.

(1) அ. F என்னும் திசையிலி நிலைச்சார்பு நேர்குத்து வளை வகைக்கூறுகள் $(u_1\ u_2\ u_3)$ஆல் குறிக்கப்படுகிறதென்று கொள்வோம். $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ என்பன ஆயத்தொலை வளை கோடுகளுக்கு அலகு தொடு கோட்டு வெக்டார்களாகும்.

∇F_1 - ஒரு வெக்டாராதலால், இதை

$$\nabla F = -f_1\, \hat{l}_1 + f_2\, \hat{l}_2 + f_3 \hat{l}_3$$

என அடிப்படை வெக்டார்கள் $\hat{e}_1, \hat{e}_2\, \hat{e}_3$ ஆகியவை மூலம் குறிப்பிட லாம். இங்கு f_1, f_2, f_3 என்பன திசையிலிகள்,

$$dF = \nabla F \cdot d\bar{r}$$

$$= (f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_1 + f_3 \hat{e}_3) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \partial u_1 + \frac{\partial t}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \bar{r}_3}{\partial u_3} du_3\right)$$

$$= (f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_1 + f_3 \hat{e}_3).$$
$$(h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3)$$
$$- f_1 h_1 du_1 + f_2 h_2 du_2 + f_3 h_3 du_3.$$

ஆனல்

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial F}{\partial u_3} du_3$$

எனவே

$$f_1 h_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}, f h_2 = \frac{\partial F}{\partial n_1}, f_3 h_3 = \frac{\partial F}{\partial u_3}$$

அல்லது

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial u_1}, \; f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{du_2}, \; f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{du_3}$$

என எழுதலாம்

இதிலிருந்து

$$\nabla F = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial u_1} \hat{e} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial u_3} \hat{e}$$

$$= \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_2} \frac{\partial F}{\partial u_3}$$

எனவே வளை வரைக் கூறுகளில் செயலி ∇ ஆனது.

$$\nabla = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

என கொடுக்கப்படுகிறது.

ஆ. $F = u_1, u_2\, u_3$ என அடுத்தடுத்துக் கொண்டால்

$$\nabla u_1 = \frac{\hat{e}_1}{h_1},\ \nabla u_2 = \frac{\hat{e}_2}{h_2},\ \nabla u_3 = \frac{\hat{e}_3}{h_3}$$

என கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து $= \ |\nabla ur| \ = \dfrac{1}{h_2},\ r = 1, 2, 3.$

ஏனெனில் $|\bar{e}r| = 1.$

இ. $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ என்பன அலகு நேர்குத்து வெக்டார்களின் வலக் கைத் தொகுதியை உருவாக்குவதால்

$$\hat{l}_1 = \hat{l}_2 \times \hat{l}_3,\ \hat{l}_2 = \hat{l}_2 \times \hat{l}_1,\ \hat{l}_3 = \hat{l}_1 \times \hat{l}_2$$

ஆனல்

$$\hat{l}_1 = h_1 \nabla u_1,\quad \hat{l}_2 = h_2\, \nabla u_2,\quad \hat{l}_3 = h_3\, \Delta u_3$$

எனவே, இவற்றை பிரதியிட

$$\hat{l}_1 = h_2 h_3\ \nabla u_3$$

$$\hat{l}_1 = h_3\, h_1\ \Delta u_3 \times \nabla u_1,\quad \hat{l}_3 = h_1\, h_2\ \nabla u_1 \times \nabla u_2$$

அல்லது

$$h_1\ \nabla u_1 = h_2\, h_3\ \nabla u_3 \times \nabla u_3 \text{ ஆகும்-}$$

இது போன்றே $h_2\ \nabla u_2,\ h_3\ \nabla u_3$ ஆகியவைகளுக்கும் எழுதலாம்.

(2) $\bar{F}$ என்பது வளை வரைக் கூறுகளில் (u_1, u_2, u_3) ஒரு வெக்டார் சார்பாக இருக்கட்டும். $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ என்பன அலகு தொடு கோட்டு வெக்டார்களாகும்.

$$\bar{F} = F_1\,\hat{l}_1 + F_2\,\hat{l}_2 + F_3\,\hat{l}_3$$

பாய்வு $\bar{F} = \nabla . \bar{F}$

$$= \nabla . [F_1 \hat{l}_1 + F_2 \hat{l}_2 + F_3 \hat{l}_3]$$

$$= \nabla . (F_1 \hat{l}_1 + \nabla . (F_2 \hat{l}_2) + \nabla . (F_3 \hat{l}_3)$$

$$\nabla . (F_1 \hat{l}) = \nabla . (F_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

$$\therefore \quad \hat{l}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

அதாவது

$$\nabla . (F_1 \hat{l_1}) = F_1 h_2 h_3 \nabla . (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$
$$+ \nabla u_2 \times \Delta n_3 . \Delta (F_1 h_2 h_3),$$

$$\therefore \quad \nabla . (f\bar{a}) = f \nabla . \bar{a} + \bar{a} . \nabla f$$

ஆனால்

$$\nabla^3 (\nabla . u_2 \times \nabla u_3)$$
$$= \nabla u_3 . \Delta \times \nabla u_2 - \nabla u_2 . \nabla \times \nabla u_3 = 0$$

சுழல் சரிவு $f = 0$).

எனவே

$$= \frac{\hat{e}_2}{h_2} \times \frac{\hat{e}_3}{h_3} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) \hat{e} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1 h_3) \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_6} F_1 h_2 h_3) \hat{e}_3 \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 . \hat{e}_1)$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3)$$

இது போன்றே

$$\nabla . (F_3 \hat{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_2} (F_2 h_3 h_1)$$

$$\nabla . (F_2 \hat{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_2 h_3)$$

எனவே

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_3 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_2 h_3 h_1)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2)\right]$$

(3) $F = F_1 \bar{e}_1 + F_2 \bar{e}_2 + F_3 \bar{e}_3$. எனவே

$$\text{சுழல் } \bar{F} = \Delta \times \bar{F} = \nabla \times (F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3)$$

$$= \nabla \times (F_1 \hat{e}_1) + \nabla \times (F_2 \hat{e}_2) + \times \nabla F_3 \hat{e}_3)$$

இப்போது,

$$\Delta \times (F_1 \hat{e}) = \nabla r \times (F_1 h_1 \nabla u_1) [- \hat{e}_1 = h_1 \nabla u_1,$$

$$\therefore \quad \Delta \times (f\bar{a}) = f \nabla \times \bar{a} + \nabla f \times \bar{a}$$

$$= \nabla (F_1 h_2) \times \nabla u_2$$

$$(\because \text{ சுழல் சரிவு } u_1 = 0)$$

அதாவது

$$\nabla (F_1 = \hat{e}\left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_1) \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_1)\hat{e}_2\right.$$

$$+ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(y_1 h_1) \hat{e}_3 \times \frac{\hat{e}_1}{h_1}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(F_1 h_1)\hat{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(F_1 h_1) \hat{e}_3$$

இதுபோன்றே

$$\nabla \times (F_2 \hat{e}_2) = \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_2 h_2) \hat{e}_3 - \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2) \hat{e}_1$$

$$\nabla \times (F_3 \hat{e}_3) = \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(F_2 h_2) \hat{e}_3 - \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_3 h_3) \hat{e}_2$$

எனவே

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2} F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(F_2 h_2)\right]\hat{e}_1$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(F_3 h_3)\right]\hat{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(F_1 h_1)\right]\hat{e}_3$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_9 & F_5 h_3 \end{vmatrix}$$

(4) கோளக் கூறுகளில் சரிவு, பாய்வு, சுழல் ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள்.

கோளக் கூறுகள் (l, θ, ϕ) ஆகியவை

$$u_1 = P, u_2 = \theta, u_3 = \phi$$
$h_1 = 1,\ h_2 = P,\ h_3 = P \sin\theta$ ஆகும்.

மேலும்

$$\hat{e}_1 = \sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{e}_2 = \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,k$$
$$\hat{e}^{8} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}.$$

எனவே

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial P}\hat{e}_1 + \frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial\theta}\hat{e}_2 + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\phi}\hat{e}_3,$$

$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{1}{P^2}\sin\theta\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial P}(P^2 F_1) + P\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_2) + P\frac{\partial F_3}{\partial\phi}\right]$$

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{P \sin\theta}\Big[\Big\{ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\, F_3) - \frac{\partial F}{\partial\phi} \Big\} \hat{e}_1$$

$$+ \Big\{ \frac{\partial F_1}{\partial\phi} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial P} (P F_3) \Big\} \hat{e}_2$$

$$+ \sin\theta \Big\{ \frac{\partial}{\partial P} (PF_2) - \frac{\partial F_1}{\partial\theta} \Big\} \hat{e}_3 \Big]$$

(5) உருளைக் கூறுகளின் சரிவு, பாய்வு, சுழல் ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள்

உருளைக் கூறுகள் (P, ϕ, z)

$u_1 = P, u_2 = \phi, u_3 = z$

$h_1 = 1, h_2 = P, h_3 = 1$ ஆகும்.

மேலும்

$\hat{e}_1 = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}$

$\hat{e}_2 = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$

$c_3 = \hat{k}.$

எனவே

$$\triangle F = \frac{\partial F}{\partial P} \hat{e}_1 + \frac{1}{P} \frac{\partial F}{\partial\phi} \hat{e}^3 + \frac{F}{\partial z} \hat{e}_3.$$

$$\triangle.\bar{F} = \frac{1}{P}\Big[\frac{\partial}{\partial P} PF_1 + \frac{\partial F}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z} (PF)\Big]$$

$$\triangle \times \bar{F} = \frac{-1}{P}\Big[\Big\{ \frac{\partial F_3}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial z} (P F_1) \Big\} \hat{e}_1 + F$$

$$+ P \Big\{ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial P} \Big\} \hat{e}_2 + \Big\{ \frac{\partial}{\partial P} (P F_2) \frac{\partial}{\partial\phi} \Big\} \hat{e}_3 \Big]$$

2. அணிக்கோவைகள்

1. அணிக்கோவைகள்

1-01. இந்த அத்தியாயத்தில் அணிக்கோவைகளின் பண்புகளையும், [illegible], [illegible] போன்ற விஞ்ஞானப் பிரிவுகளில் இவைகளைப் பயன்படுத்தும் முறைகளையும் காண்போம். மிக சிக்கலான கோவைகளை சுருக்கமாக எழுதவும், ஒருபடி சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை சுலபமாக காணவும் அணிக்கோவை பயன்படுகிறது.

மாறுபடும் மதிப்புகளையுடைய x_1 x_2 என்ற இராசிகளைக் கொண்ட

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$a_2 x_1 + c_2 x_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

என்ற தீர்வினை எழுதலாம். இதில் $a_1 b_2 - a_2 b_1$ என்ற கோவையை

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

என்று குறிக்கலாம். இதற்கு **இரண்டாம் வரிசை** (Second order) அணிக்கோவை என்று பெயர்.

இந்த அணிக்கோவை இரண்டு நிரைகளையும்' இரண்டு நிரல்களையும் கொண்டிருக்கிறது.

இதே மாதிரி

$$a_1 x_1 + b_1 x_3 + c_1 x_3 = 0$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = 0$$

$$a_3 x_1 - b_3 x_2 = c_3 x_3 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவைகளிலிருந்து x_1, x_2, x_3 ஆகியவற்றை நீக்கினால் $a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0$ என்று காணலாம். இதன் இடப்பக்க கோவையை

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக் கோவையின் மூலம் குறிக்கலாம்.

அணிக்கோவையின் பொது வரையறை

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_2 \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_n \end{matrix}$$

என்ற n^2 மூலகங்களை (Elements) எடுத்துக்கொண்டு பின் வரும் அணிவரிசை (Array) எழுது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_2 \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}$$

இந்த அணிக்கோவை, n மூலகங்களைக் கொண்ட எல்லா விதமான பெருக்குத் தொகைகளின் கூடுதலுக்குச் சமம். இந்த பெருக்குத் தொகைகளிலுள்ள மூலகங்கள், n_2 எழுத்துக்களிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. இந்த n மூலகங்களை எடுக்கும்பொழுது ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்து ஒரேயொரு மூலகங்களை, ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்து ஒரேயொரு மூலகங்களை மட்டுமே எடுக்க வேண்டும்.

இந்த பெருக்கு தொகைகளின் கூடுதல் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டது.

குறிகளின் விதி

அணிக்கோவையின் எந்த ஒரு உறுப்பின் குறியினைக் கொடுக்கும்பொழுதும் பின்வரும் இரண்டு விதிகளைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

1. இடமிருந்து வலமாக வரையப்படும் தலையாய மூலை விட்டத்தில் அமையும் மூலகங்களின் பெருக்குத் தொகையான

$a_1\ b_2\ c_3 \ldots\ldots\ c_n$ என்ற உறுப்பின் குறி கூட்டற் குறி (+) யாக இருக்க வேண்டும்.

2. மற்ற உறுப்புகளின் பின் ஒட்டு எண்கள் (Suffix) இயல்பான வரிசையிலிருந்து மாறியிருக்கும், இந்த பின் ஒட்டு எண்களின் மாற்று விதங்கள் இரட்டைப் படையாகவோ, ஒற்றைப் படையாகவோ இருப்பதற்கு ஏற்ப, அந்த உறுப்புகள் கூட்டற் குறியையோ, கழித்தல் குறியையோ ஏற்கும்.

உதாரணம் :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2\,c_3 - b_2\,c_2) - b_1(a_2 c_2 - a_3\,c_2) + c_1\,(a_2\,b_3 - a_3\,b_2)$$

$a_1\ b_2\ c_3$ என்ற உறுப்பு, அணிக்கோவையின் தலையாய விட்டத்தில் அமைகிறது. மேலும் இதன் பின் ஒட்டு எண்கள் இயல்பான வரிசையில் அமைந்துள்ளன. எனவே இது + குறியைக் கொண்டுள்ளது. ஆனால் $a_1\ b_3\ c_2$ என்ற உறுப்பில் பின்ஒட்டு எண்கள் இயல்பான வரிசையிலிருந்து ஒற்றைபபடையில் மாறுபட்டிருப்பதால் இது '—' குறியை பெறுகிறது.

அணிக்கோவையின் விரிவு n உறுப்புக்களைக் கொண்டது. இவற்றில் ஒரு பாதி '+' குறியையும், மறு பாதி '—' குறியையும் ஏற்கும்.

இந்த அணிக்கோவை n நிரைகளையும், n நிரல்களையும் கொண்டுள்ளதால் இது n ஆவது-வரிசை (nth order) அணிக்கோவை எனப்படும்.

1.02. அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (Properties of determinants)

தேற்றம் 1.

ஒரு அணிக்கோவையின் மதிப்பு, நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி அமைப்பதால் மாறுது அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{இ.ப.} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{இ.ப.} = a_1 \ (b_2 c_2 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 = c_3 c_2) + c_1 \ (a_2 b_2 - a_3 b \ )$$

$$\text{வ.ப.} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \ (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 \ (b_1 c_2 - b_2 e_1)$$

எனவே, இ.ப. = வ. ப.

தேற்றம் 2.

ஒரு அணிக்கோவையின் ஏதாவது இரண்டு நிரைகளையோ அல்லது நிரல்களையோ மாற்றி அமைப்பதால் அதன் குறி மாறுமே தவிர மதிப்பு மாறாது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

என நிரூபிக்க வேண்டும்.

(இந்த அணிக்கோவையில் இரண்டாவது நிரையும் மூன்றாவது நிரையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றி அமைக்கப்பட்டுள்ளன.)

$$\text{இ.ப.} = a_1 \ (b_2 c_3 - b_2 c_2) - b_1 \ (a_2 c_3 - a_3 \quad) + c_1 \ (a_2 b_3 - b_2 a_3)$$

$$\text{வ.ப.} = -[\ a_1 \ (b_3 c_2 - b_2 c_3) - b_1 \ \ a_3 c_2 - a_2 c_2) + c_1 \ (a_3 b_2 - b_3 a_2) \ ]$$

எனவே இ. ப. = வ.ப.

தேற்றம் 3.

ஓர் அணிக்கோவையில் இருநிரைகள் அல்லது நிரல்கள் முழுதும் ஒத்தவாறு இருந்தால் அதன் மதிப்பு சுழியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் மதிப்பு Δ ஆக இருக்கட்டும். ஒத்துவாறுள்ள நிரைகளை மாற்றி அமைந்தால் அதன் மதிப்பு — Δ என இரண்டாம் தேற்றத்தின் படி கண்டோம். ஆனால் இவை முழுதும் ஒத்த நிரைகள்.

$$\therefore \; = \Delta = \Delta$$

$$\text{அதாவது } 2\Delta = O$$

$$\text{அல்லது } \Delta = O$$

தேற்றம் 4

ஒரு நிரையில் அல்லது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் ஒரே கணியம் K ஆல் பெருக்கினல். Δ மதிப்புள்ள அணிக்கோவையின் மதிப்பு $K\,\Delta$ ஆகும்.

ஒரு அணிக்கோவையை விரித்தெழுதும்போது அதன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் (term) ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்து ஒரே ஒரு மூலகத்தையும் (Element) ...... நிரலிலிருந்து ஒரே ஒரு மூலகத்தையும் மட்டுமே கொண்டதாக இருக்கிறது.

எனவே,

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_2 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & Kb_1 & c_1 \\ a_2 & Kb_2 & c_2 \\ a_3 & Kb_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

கிளைத்தேற்றம்

ஒரு அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள மூலகங்கள் மற்றொரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள இசைந்த மூலகங்களைப் போல் K மடங்காக இருந்தால் அதன் மதிப்பு சுழியமாகும்.

தேற்றம் 5.

ஒரு நிரையில் அல்லது ஒரு நிரலில் உள்ள ஒவ்வோர் மூலகமும் இரு எண்களின் கூடுதலாக இருந்தால் அந்த அணிக்கோவையை ஒரே தரமுள்ள இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\alpha_2 & c_1+\alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_6 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

இ.ப. $= (a_1+\alpha_1)\ (b_2 c_3 - b_3 c_2)$

$-a_2 \{ (b_1+\alpha_2)\ c_3 - b_3\ (c_1+\alpha_3) \}$

$+a_3 \{ (b_1+\alpha_2)\ c_2 - b_2\ (c_1+\alpha_3) \}$

$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1)$

$+ a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) + \alpha_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2)$

$- \alpha_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + \alpha_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$

= வ.ப.

தேற்றம் 6.

ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள மூலகத்துடன், மற்றொரு நிரையின் (நிரலின்) இசைந்த உறுப்புக்களை மாறிலி K ஆல் பெருக்கி கூட்டினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

அதாவது

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+Kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+Kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+Kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

தேற்றம் 5)ன்படி

$$\text{வ. ப.} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Kb_1 & b_1 & c_1 \\ Kb_2 & b_2 & c_2 \\ Kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + K \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

தேற்றம் (3) ன்படி மேலுள்ள இரண்டாவது அணிக்கோவையின் மதிப்பு சுழியமாகிறது.

எனவே

இ. ப. = வ. ப.

1.03. சிற்றணிக்கோவை (Minor)

எந்த ஒரு நிரை, நிரல் இவற்றிலுள்ள மூலகங்களின் மூலமும் ஒரு அணிக்கோவையினை விரிவாக எழுதலாம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

Δa_r என்பது, மூலகம் a_r யினைக் கொண்ட நிரை, நிரல் இவை இரண்டையும் நீக்கி கணக்கிடப்பட்ட அணிக்கோவை எனக் கொள்வோம். இது ar-ன் சிற்றணிக் கோவை எனப்படும்.

அணிக் கோவையின் விரிவிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களையும் பின் வருமாறு தொகுக்கலாம். (can be grouped).

1. a_1 ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள்
2. a_2 ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள்
3. a_3 ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள்.
4. a_4 ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள்.

எந்த ஒரு உறுப்பிலும், இரண்டு "a" க்களின் பெருக்குத் தொகை இருக்க முடியாது என்பதிலிருந்து மேற் கண்ட (group) தொகுதியில், அணிக்கோவையின் எல்லா உறுப்புகளும் உள்ளன என்று அறியலாம்.

$a_1 b_2 c_3 d_4$ என்ற உறுப்பில் a_1 ஐ மாற்றினால், b_2 c_3 d_4 ல் உள்ள பின் ஒட்டு எண்ணை முடிந்த வகையிலெல்லாம் வரிசை மாற்றல் செய்தல் a_1 உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் பெறலாம்.

ஆகையால் a_1 உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் a_1 $(b_2\ c_3\ d_4)$ ஆகும்.

அதாவது a_1 $(\Delta\ a_1)$ முதல் இரண்டு வரிசைகளையும் ஒன்றுக் கொன்று மாற்றி அமைத்தால்

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

வலது பக்க அணிக் கோவையில்,

a_2 உள்ள உறுப்புகள் $= a_2\ (b_1\ c_3\ d_4)$ ஆகையால் Δ வில் a_2 உள்ள உறுப்புகள்

$$= - a_2\ (b_1\ c_3\ d_4) = - a_2\ \Delta\ a_2$$

இதே மாதிரி a_3, a_4 இந்த மூலகங்கள் உள்ள உறுப்புகளை $a_3\ \Delta_3$ என்றும் $- a_4\ \Delta\ a_4$ என்றும் முறையே எழுதலாம்.

ஆகவே

$$\Delta = a_1\ \Delta a_1 - a_2\ \Delta\ a_2 + a_3\ \Delta a_3 - a_3\ \Delta\ a_4 \qquad (1)$$

அணிக்கோவையின் தரம் n ஆக இருந்தால் அதன் விரிவு

$\Delta = a_1\ \Delta a_1 - a_2\ \Delta a_2 + , \ldots , \ldots (-1)^{n-1}\ \Delta\ an$ இதே மாதிரி எந்த ஒரு அணிக்கோவையையும், அதன் எந்த ஒரு நிரை நிரல் இவற்றிலுள்ள மூலகங்களின் மூலம் விரிவாக எழுதலாம்.

உதாரணமாக

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & l_2 \\ a_F & b_r & c_n \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1\ \Delta a_1 - b_1\ \Delta\ b_1 + c_1\ \Delta\ c_1 + \ldots\ldots l = (-1^{-n'})\ l_1\ \Delta\ \ l$$

$$= -a_2 \Delta c_2 + b_2 \Delta b_2 - c_2 \Delta c_2 + \quad (-1)^r c_2 \Delta l)$$

. . . .

. . . .

$$= (-1)^r (c_r \Delta c_r + c_1 \Delta c_1 + c_1 \Delta c_r + \ldots) + \mp_1 (-1)^{r-} (b_r \Delta b_r + d_r \Delta c_r + f_1 \Delta f_1 + \ldots)$$

1.04. இணைக்காரணி (Cofactor)

ஒரு அணிக்கோவை

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D. \qquad (2)$$

என்று எழுதப்பட்டால் இங்கு A_1, B_1, C_1, D_1 ஐ a_1, b_1, c_1, d_1 ஆகியவற்றின் இணைக்காரணிகள் என்று சொல்வோம்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) லிருந்து ஒரு மூலகத்தின் சிற்றணிக் கோவையும், இணைக்காரணியும் ஒரே மதிப்புடையவை யென்றும் ஆனால் குறியில் வேறுபட்டிருக்கலாம் என்றும் அறிகிறோம்.

அதாவது $A_1 = \Delta a_1$; $B_1 = -\Delta b_1$;
$C_1 = \Delta c_1$; $D_1 = -\Delta d_1$

பொதுவாக இணைக்காரணியின் குறியினை கண்டு பிடிக்க, பின்வரும் சுலபமான விதியினை பின்பற்றலாம்.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

ஒரு மூலகத்தை, மேலே இடது மூலைக்குக் கொண்டுவர அதை நகர்த்த வேண்டிய முறைகளின் எண்ணிக்கை இரட்டையாகவோ அல்லது ஒற்றையாகவோ இருப்பதைப் பொருத்து '+' குறியையோ, '—' குறியையோ, முறையே ஏற்கும்.

தேற்றம் 7.

ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள மூலகங்களை மற்றொரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள இசைந்த உறுப்புகளின் இணைக் காரணிகளைக் கொண்டு பெருக்கி, கூட்டினால் அதன் மதிப்பு சுழியமாகும்.

அதாவது :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஆனால்

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0$$

நிரூபணம்

இந்த சமன்பாட்டின் இடப்பக்க கோவையை

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக் கோவையாக எழுதலாம். தேற்றம் 3-ன்படி இந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு சூழியமாவதால் இந்த தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது,

1.05. அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்தி ஒருபடி சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறை

இப்பொழுது மூன்று இராசிகளையுடைய மூன்று ஒன்றும் வரிசை (First order) சமன்பாடுகளின் தீர்விணைக் காணும் முறையை விவரிப்போம்.

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \qquad \dots (1)$$

$$a_2 x_2 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \qquad \dots (2)$$

$$a_3 x_3 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \qquad \dots (3)$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு ar, br, cr $(r = 1, 2, 3)$ என்பவை மாறிலிகள்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \Delta x_1 = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & b_1 & c_2 \\ a_2 x_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 x_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

நிரல் 2-லுள்ள மூலகங்களை x_2 உலும் நிரல் 3-லுள்ள மூலகங்களை x_3-ஆலும் பெருக்கி அவைகளின் கூடுதலை, முதல் நிரலிலுள்ள இசைந்த மூலகங்களுடன் கூட்ட

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 & b_1 & c_1 \\ a_2 x_2 \quad b_2 x_2 + c_3 x_3 & b_2 & c_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_2 + c_3 x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{எனவே } x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

இதே முறையில் x_2, x_3 ஆகிய இராசிகளின் மதிப்புகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\text{ஆகவே } \Delta = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{x_2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{x_3}$$

என்று காணலாம். இதே மாதிரி n ஒன்றும் வரிசை சமன்பாடுகளில் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தி n இராசிகளின் மதிப்பை

கண்டுபிடிக்கலாம். எந்த ஒரு இராசியின் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கவும் அந்த இராசியின் குணங்களை கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாடுகளின் வலப் பக்கத்திலுள்ள மாறிலிகளால் மாற்றி அமைத்து அதன் பயனாகக் கிடைக்கும் அணிக்கோவையை Δ ஆல் வகுக்க வேண்டும். இதற்கு (Cramer's rule) **கிரேமர் விதி** என்று பெயர்.

$\Delta = 0$ ஆனால் இந்த விதியைப் பயன்படுத்த முடியாது. எனவே $\Delta \pm 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டின் கீழ் இதைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

உதாரணம்

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{19} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{19} = 2$$

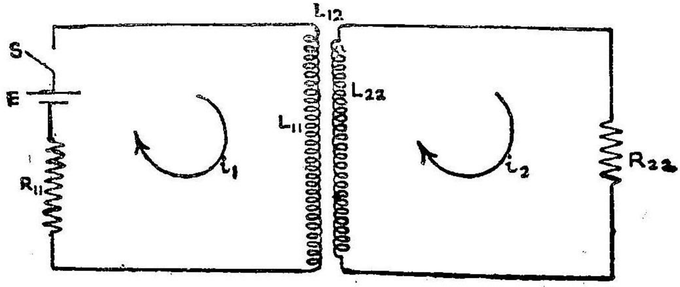
1 07. இயற்பியலில் அணிக்கோவையின் பயன்கள்

மாறிலிகளை குணகங்களாக கொண்ட ஒருபடி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளை (Linear differential equations) ஏற்ற மாற்றங்கள் செய்து, ஒருபடி சமன்பாடுகளாக எழுதி அவைகளின் தீர்வுகளை

கிரேமர் விதியின் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம், மின்சார சுற்றுகளின் நிலையற்ற தன்மைகள், இயக்க இயலில் (Dynamical System) அலைவு வீச்சுகள், அலைவு வகைகள், ஆகிய இயற்பியல் கணக்குகளில் இந்த முறையினை பயன்படுத்தி அவைகளின் பண்புகளைக் (behaviour) காணலாம். சான்றாக, பரிமாற்று மின் தூண்டல் (Mutual Inductance Circuit), மின் தேக்கிகளால் இணைக்கப்பட்ட மின் சுற்றுகள் இவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

பரிமாற்று மின் தூண்டல் சுற்று

L 12



படம் 40

படம் 40 இங்கு மின் காந்தத்தினால் இணைக்கப்பட்ட இரண்டு சுற்றுகள் உள்ளன. L_{12} என்பது பரிமாற்று மின் தூண்டல் குணகம் (Co-efficient of Mutual Inductance) எனப்படும். சுற்றுகள் 1, 2-ல் உள்ள மின்னோட்டங்கள் i_2, i_2-வினால் ஏற்படும் காந்தப் புலன்களின் திசைகள் ஒன்றாக இருந்தால் + குறியையும் எதிராக இருந்தால் − குறியையும் L_{12} ஏற்கும். இவ்விரண்டு சுற்றுகளில் உள்ள மின்னோட்டங்களைக் கட்டுபடுத்தும் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளை கிர்சாப் விதி (Kirchoff's law) யைபயன் படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$L_{12}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} + R_{11}\, i_1 = E \qquad \ldots (1)$$

$$L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} + R_{22}\, i_2 = O \qquad \ldots (2)$$

L_{11}, L_{22} என்பன முறையே சுற்றுக்கள் 1, 2-ல் உள்ள சுருள்களின் தன் மின் நிலைம எண்களாகும்.

R_{11}, R_{22} என்பன சுற்றுக்கள் 1, 2-ல் உள்ள மின் தடைகளாகும்.

$$L(i_1) = I_1$$

$$L(i_2) = I_2$$

என்று இருக்கட்டும். இதில் L என்பது லேப்லாஸ் மாற்றுக் குறியாகும் (L place Transfo'n) அதாவது $L\{F(t)\} = f(s)$ $= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு S என்பது ஒரு மெய்யான சாராமாறியாகும்.

$t = O$ கணத்தில்

$$i_1 = O$$

$$i_2 = O$$

E என்பது ஒரு மாறிலி. இதைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடுகள் (1) (2) இவை இரண்டையும் லேப்லாஸ் மாற்றம் செய்து பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$S L_{11} I_1 + S L_{12} I_2 + R_{11} I_1 = \frac{E}{S} \quad \ldots (3)$$

$$sL_{22} I_2 + sL_{12} I_1 + R_{22} I_2 = O \quad \ldots (4)$$

கிரேமர் விதியினைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட இரண்டு சமன்பாடுகளையும் I_1 I_2-க்குத் தீர்க்கலாம்.

$$= \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{S} & sL_{12} \\ O & sL_{12} + R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_{11} + R_{11} & sL_{12} \\ sL_{12} & sL_{22} + R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} sL_1 + R_{21} & -\frac{E}{S} \\ sL_{12} & O \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_{11}+R_{11} & sL_{12} \\ sL_{12} & sL_{22}\ R_{22} \end{vmatrix}}$$

எனவே

$$I_1 = \frac{(E/s)\,(sL_{22} + R_{22})}{(L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2)\,S^2 + (R_{11}\,L_{22} + R_{22}\,L_{11}\,S + R_{11}\,R_{22}}$$

$$I_2 = \frac{-\,E\,L_{12}}{(L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2)\,S^2 + (R_{12}\,L_{22} + R_{22}\,L_{11})\,S + R_{11}\,R_{22}}$$

$$a = \frac{R_{11}\,L_{22} + R_{22}\,L_{11}}{2\,(L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2)}$$

$$\omega o^2 = \frac{R_{11}\,R_{22}}{L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2}$$ என்று கொண்டால்

$$I_1 = \left[\frac{-E}{L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2}\right] \quad \left[\frac{sL_{22} + R_{22}}{(S^2 + 2as + \omega_o^2)\,S}\right]$$

$$I_2 = \left[\frac{-E}{L_{11}\,L_{22} - L_{12}^2}\right] \quad \left[\frac{sL_{12}}{S^2 + 2as + \omega_o^2}\right]$$

$a^2 > wo^2$ ஆக இருப்பதால் $\sqrt{a^2 - \omega^2} = \beta$ எனக் கொள்வோம். இந்த சமன் பாடுகளின் இருபக்கங்களிலும் தலை கீழ் லேப்லாஸ் மாற்றம் (Inverse Laplace Transform) செய்தால் i_1, i_2 வை பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$i_1 = \frac{E}{R_{11}}\left[\,1 - e^{-at}\cos h\,\beta\,t + \frac{(a^2 - \beta^2)\,L_{22} - a\,R_{22}}{\beta\,R_{22}} \times e^{-at}\sin h\,\beta\,t\,\right]$$

$$i_2 = \frac{(\beta^2 - a^2)\,L_{12}\,E}{\beta\,R_{11}\,R_{22}}\,e^{-at}\sin h\,\beta\,t$$

இதிலிருந்து நேரம் (t) அதிகம் ஆக ஆக i_1 அதன் இறுதி மதிப்பான $\frac{E}{R_{11}}$ ஐ அடைகிறது.

$\frac{di_2}{dt} = O$. என்று கொண்டு, t-க்கு தீர்வினைக் கண்டால் $t = \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} \frac{\beta}{a}$ என்ற t-ன் மதிப்புக்கு i_2 அதன் மீப்பெரு மதிப்பைப் (maximum value) பெறுகிறது என்று காணலாம். மேலும் t ஆனது ∞ (Infinity) ஐ அணுகும்போது i_2-ன் மதிப்பு சுழியத்தை நெருங்குகிறது என்று தெரிகிறது.

குறிப்பாக $R_{11} = R_{22} = R$ $L_{12} = L_{22} = L$, $L_{12} = M$ என்று கொண்டால் சமன்பாடுகள் (3), (4) ஐ பின் வருமாறு மாற்றி எழுதவேண்டும்.

$$sL I_1 + sM I_2 + R I_1 = \frac{E}{s}$$

$$sL I_1 + sM I_1 + R I_2 = O$$

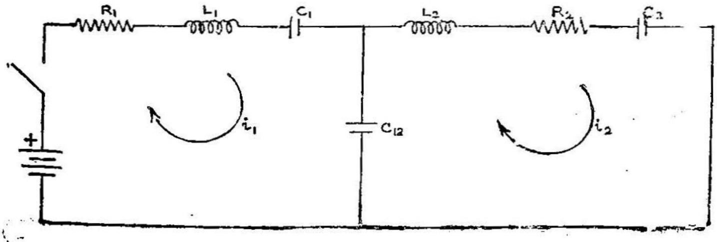
மேற் கண்ட முறைப்படி, இவற்றின் தீர்வையும் கண்டால்

$$i_1 = \frac{E}{R} \quad \frac{2 - e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}}{2}$$

$$i_2 = \frac{E}{2R} (- e^{-a_1 t} + e^{-a_2 t})$$

இங்கு $a_1 = \frac{R}{L + M}$; $a_2 = \frac{R}{L - M}$ ஆகும்.

மின் தேக்கியால் இணைக்கப்பட்ட மின் சுற்றுகள்



படம் 41

C_{12} என்னும் மின் தேக்கி, இரண்டு மின் சுற்றுகளையும் இணைக்கிறது. (படம் 41), $t = O$ கணத்தில், குமிழ் (Switch)

S ஐ மூடி இந்த சுற்றில் மின் விசை தொடர்பு படுத்தப்படுகிறது. இப்பொழுது மின்னோட்டங்கள் i_1, i_2 வை கணக்கிட வேண்டும்.

கிர்சாப் விதியைப்பயன்படுத்தி

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{c_3} + \frac{q_1 - q_2}{c_{12}} = E$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{q_2}{c_3} + \frac{q_2 - q_1}{c_{12}} = O \qquad \ldots (1)$$

என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாட்டில் L_1, L_2 என்பன 1, 2-மின் சுற்றுக்களில் உள்ள சுருள்களின் தன் மின் நிலைம எண்ணையும் (self inductance R_1, q_1, c_1, R_2, q_2, c_2 என்பன முறையே இச்சுற்றுக்களில் உள்ள மின்தடை, மின்னூட்டம், மின்தேக்கி ஆகியவற்றையும் குறிக்கின்றன.

இங்கு $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$; $i_2 - \frac{dq_2}{dt}$

$L(i_1) = I_1$: $L(i_2) = I_2$; $L(q_1) = Q1$

$L()_2) = Q2$

என்று கொள்வோம்.

$t = O$ ஆக இருக்கும்போது

$i_1 - O \qquad q_1 = O$

$i_2 = O \qquad q_2 = O$ எனக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு (1) ஐ லேப்லாஸ் மாற்றம் செய்து பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left.\begin{aligned} S L_1 I_1 + R_1 I_1 + \frac{I_1}{SC_1} + \frac{I_1 - I_2}{SC_{12}} &= \frac{E}{S} \\ S L_2 I_2 + R_2 I_2 + \frac{I_2}{SC_2} + \frac{I_2 - I_1}{SC_{12}} &- O \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (2)$$

கிரேமர் விதியினைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட இரு சமன்பாடுகளையும் I_1 I_2 க்கு தீர்க்கலாம்.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{S} & \frac{1}{-SC_{12}} \\ O & SL_2+R_2+\frac{1}{SC_2}+\frac{1}{SC_{12}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} SL_1+R_1+\frac{1}{SC_1}+\frac{1}{SC_{12}} & -\frac{1}{SC_{12}} \\ -\frac{1}{SC_{12}} & SL_2+R_2+\frac{1}{SC_2}+\frac{1}{SC_{12}} \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} SL_1+R_1+\frac{1}{SC_1}+\frac{1}{SC_{12}} & \frac{E}{S} \\ -\frac{1}{SC_{12}} & O \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_1+R_1+\frac{1}{sC_1}+\frac{1}{sC_{12}} & +\frac{1}{sC_{12}} \\ -\frac{1}{sC_{12}} & sL_2+R_2-+\frac{1}{sC_2}+\frac{1}{sC_{12}} \end{vmatrix}}$$

இந்த அணிக் கோவைகளை விரிவாக்கி எழுதினால், I_1, I_2 ஆகியவை S-ல் பல்லுறுப்பு கோவைகளின் விகிதங்களாக கிடைக்கின்றன. இதன் தலைகீழ் லேப்லாஸ் மாற்றம் i_1, i_2 விளைக் கொடுக்கும்.

இதன் தீர்வின் போக்கை $R_1 = R_2 = R$; $C_1 = C_2 = C$; $L_1 - L_2 = L$ என்று குறிப்பாக எடுத்துக்கொண்டு காணலாம். இப்பொழுது சமன்பாடு (2) பின் வருமாறு மாறுகிறது.

$$\left.\begin{aligned} sLI_1 + RI_1 + \frac{I_1}{sC} + \frac{I_1}{sC_{12}} &= \frac{I_2}{sC_{12}} - \frac{E}{S} \\ sLI_2 + RI_2 + \frac{I_2}{sC} + \frac{I_2}{sC_{12}} &= \frac{I_1}{sO_{12}} - C \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

இவை இரண்டையும் கூட்டினால்,

$$sL(L_1 = I_2) + R(I_1 + I_2) + \frac{1}{sC}(I_1 + I_2) = \frac{E}{S}$$

என்றும்

கழித்தால்

$$sL(I_1 - I_2) + R(I_1 + I_2) + \frac{1}{sC}(I_1 - I_2)$$

$$+ \frac{1}{sC_{12}}(I_1 - I_2) + \frac{1}{sC_{12}}(I_1 - I_2) = \frac{E}{S}$$

என்றும் கிடைக்கின்றன.

$$x_1 = I_1 + I_2 \,;\; x_2 = I_1 - I_2 \,;\; \frac{R}{2L} = a$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{Lc} \,;\; \omega_2^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{C_{12}}\right)$$

எனக்கொண்டு

$$(s^2 + 2as + \omega_1^2)\, x_1 = \frac{E}{L}$$

$$(s^2 + \text{-}\,as + \omega_2^2)\, x_2 = \frac{E}{L}$$

என்று எழுதலாம்.

இந்த சமன் பாட்டினை தலைகீழ் லேப்லாஸ் மாற்றம் செய்து

$$L^{-1}(x_1) = \frac{E}{L\,\omega_b}(e^{-at} \sin \omega_b t)$$

$$L^{-1}(x_2) = \frac{E}{L\,\omega_b}(e^{-at} \sin \omega_b t)$$

என எழுதலாம்.

இங்கு

$$\omega_a = \sqrt{\omega_1^2 - a_2},\; \omega_1^2 > a^2$$

$$\omega_b = \sqrt{\omega_2 - a^2},\; \omega_2^2 > a^2$$

இவையிரண்டையும் கூட்டினால்.

$$i_1 + \frac{E e^{-at}}{2L}\left(\frac{\sin \omega_a t}{\omega a} + \frac{\sin \omega_b t}{\omega b}\right)$$

$$i_2 = \frac{E}{2L} e^{at}\left(\frac{\sin \omega_a t}{\omega a} + \frac{\sin \omega_b t}{\omega b}\right)$$

மின்தடை சுழியமானால், $a = 0$. எனவே முன்னேட்டங்கள், ω_1, ω_2 என்ற அதிர்வெண்களைக் கொண்டு அலைவு வீச்சு குறையாமல், அலைவு இயற்றிகளாக (oscillators) இயங்குகின்றன.

அணிக்கோவைகள் பயன்படுத்தப்படும், மேலும் பல எடுத்துக்காட்டுகள் அணியின் கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

3. அணிகள்

1-01. அணிகள் : mxn மூலகங்களை ஒரு பகர அடைப்புக் குள் n நிரைகளாகவும், n நிரல்களாகவும் வரிசைப்படுத்தி அமைத் தால் அது நீள்சதுர அணி எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ am_1 & am_2 & am_3 & \dots\dots & am_n \end{bmatrix}$$

இந்த அணி m நிரைகளையும் n நிரல்களையும் கொண்டுயிருப் பதால் இதன் வரிசை (order) $n \times n$ ஆகும். ஒவ்வொரு மூலகமும் Aij என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும். இங்கு ij என்பது முறையே அந்த மூலகம் உள்ள நிரையையும், நிரலையும் குறிக்கிறது.

1-02. அணிகளின் கூட்டலும் பெருக்கலும் :

1. கூட்டல் $A = [aij]$; $B\ [bij]$

என்ற $n \times n$ வரிசையுள்ள இரு அணிகளை எடுத்துக் கொண் டால் ; $A + B$ என்பது A, B-ன் இசைந்த மூலகங்களின் கூட்டுத் தொகையை மூலகங்களாகக் கொண்ட $n \times n$ வரிசையுள்ள ஒரு அணியாகும்.

அதாவது $A + B = [Cij] = c$

இங்கு $Cij = aij + bij$

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 3 \\ 3 & 11 & 10 \\ 8 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

(2 கழித்தல்:

A, *B* என்பது $n \times n$ வரிசையுள்ள இரு அணிகளானல் $A - B = A + (-B)$ எனவே $A - B$ என்பது B-ன் மூலகங்களை, A-யின் இசைந்த மூலகங்களிலிருந்து கழித்து வரும் பயனை மூலகங்களாகக் கொண்ட $n \times n$ வரிசையுள்ள ஒரு அணியாகும்.

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

அணிகளின் கூட்டல், கழித்தல் வருத்தமைவு விதிக்கும், பரிமாற்று விதிக்கும் உட்பட்டது என காணலாம்.

(3) பெருக்கல்: *A* என்ற அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை, *B* என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருந்தால்தான் இந்த இரண்டு அணிகள் பெருக்குவதற்கு இயைந்தவை என வரையறுக்கலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 & a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & a_2 x_2 + b_3 y_2 + c_2 z_2 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 \end{vmatrix}$$

(அ) அணிகளின் பெருக்கப் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதல்ல.

அதாவது $AB \neq BA$

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

என்று கொண்டால்

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+cg & df+dh \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ca+fc & eb+fd \\ ga+hc & gh+hd \end{bmatrix}$$

இதிலிருந்து $AB \neq BA$ என்று தெரிகிறது.

(ஆ) $AB = O$; ஆனால் ; $A = O$ அல்லது $B = O$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(இ) அணிகளின் பெருக்கல் வகுத்தமைவு விதிக்கும் தொடர்பு விதிக்கும் (Associative law) உட்பட்டது.

அதாவது

$(AB)\,C = A\,(BC)$ ... (தொடர்பு விதி)

$A\,(B+C) = AB+AC$ .. (இட வகுத்தமைவு விதி)

$(B+C)\,A = BA+CA$ (வல் வகுத்தமைவு விதி)

1·03. அணிகளின் வகையிடலும் தொகையிடலும் (Differentiation and integration)

$$L(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ i(x) & i(x) \end{bmatrix}$$

என்று கொள்வோம்.

வகையீட்டு வரையறையின்படி

$$\frac{d}{dx} L(x) = \lim_{\partial x \to 0} \frac{L(x + \partial x) - L(x)}{\partial x}$$

$$= \lim_{\partial x \to 0} \begin{vmatrix} \frac{f(x+\partial x) - f(x)}{\partial x} & \frac{g(x+\partial x) - g(x)}{\partial x} \\ \frac{h(x+\partial x) - h(x)}{\partial x} & \frac{i(x+\partial x) - i(x)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h'(x) & i'(x) \end{bmatrix}$$

இரு அணிகளின் பெருக்குத் தொகைகளின் வகையீட்டையும் இதே முறைப்படி எழுதலாம்.

$$\frac{d}{dx} L_1(x) L_2(x) = L_1(x) \frac{d}{dx} L_2(x) + \frac{d}{dx} L_1(x) L_2(x)$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & i(x) \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை தொகையிட்டால்

$$\int L(x)\, dx = \begin{vmatrix} \int_o^x f(t)\, dt & \int_o^x g(t)\, dt \\ \int_o^x h(t)\, dt & \int_o^x i(t)\, dt \end{vmatrix}$$

கன்று ஆகும்.

1-04. பலவகை அணிகள் :

(1) சதுர அணி. ஒரு அணியானது n நிரைகளையும், n நிரல்களையும் கொண்டிருந்தால் அது $n \times n$ வரிசை சதுர அணி எனப் படும்.

உதாரணம் :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) நிரை அணி. $1 \times n$ வரிசையுள்ள அணி நிரை அணி எனப்படும். இதில் 1 நிரையும் n நிரல்களும் இருக்கும்.

உதாரணம் : $[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{1n}]$

(3) நிரல் அணி. $n \times 1$ வரிசையுள்ள அணி நிரல் அணி எனப்படும். இதில் n நிரைகளும், 1 நிரலும் உள்ளன.

உதாரணம் :

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{vmatrix}$$

(4) சுழி அணி. ஒரு அணியில் எல்லா மூலகங்களும் சுழியமாக இருந்தால் அது சுழிஅணி எனப்படும்.

உதாரணம் :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(5) சம அணிகள். இரு அணிகளின் வரிசைகள் சமமாயிருந்து, ஒன்றின் மூலகங்கள் மற்றொன்றின் இசைந்த மூலகங்களைக் கொண்டிருந்தால் அவையிரண்டும் சம அணிகள் எனப்படும்.

(6) மூலைவிட்ட அணி. ஒரு சதுர அணியின் தலையாய மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்களைத் தவிர மற்றவை சுழியமாக இருந்தால் அந்த அணி மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

உதாரணம் :
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

(7) அலகு அணி, மூலைவிட்ட அணியிலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றின் மதிப்பு ஒன்று அல்லது ஒருமை என்றிருந்தால் அது **அலகு அணி** எனப்படும்.

உதாரணம் ;
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(8) கீழ் அணி (Sub matrix). ஒரு M என்ற அணியிலிருந்து சில நிரைகளையோ, நிரல்களையோ அல்லது இரண்டையுமோ நீக்கினால் கிடைக்கும் அணி M-ன் கீழ் அணி எனப்படும்.

உதாரணம் : $m = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

இதில் 3-வது நிரையையும், 2-ஆம் நிரல்களையும் நீக்கியபின்னர் கிடைக்கும் கீழ் அணி $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

(9) சிறப்பு அணி(Singular matrix). ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை சுழியாகவோ அல்லது வேறாகவோ இருப்பதற்கு ஏற்ப அது சிறப்பு அணி அல்லாத சிறப்பு அல்லாத அணி (Non Singular) எனப்படும்.

(10 சேர்ப்பு அணி (Adjoint matrix)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்று கொள்.

இதன் அணிக்கோவை.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

இந்த அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் இணைக்காரணியைக் கண்டுபிடித்து, அவற்றைப் பின் வரும் அணியாக எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

இதன் திருப்பு அணியே சேர்ப்பு அணி எனப்படும். அதாவது

$$\text{சேர்ப்பு அணி } A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

(11) நேர் எதிர் அணி (Inverse matri) A, B என்ற சதுர அணிகள் என்பதற்கிணங்க இருந்தால் B ஆனது A-ன் எதிர் அணியாகும். இங்கு I என்பது அலகு அணி ஆகும்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A என்ற அணிக்கு ஒரேயொரு நேர் எதிர் அணி தான் உண்டு. சேர்ப்பு A-யின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் அணிக் கோவை $|A|$ ஆல் வகுத்து கிடைக்கும் அணியே அணி A-யின் நேர் எதிர் அணியாகும்

அதாவது $A^{-1} = \dfrac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$

இங்கு $|\bar{A}|$ சுழியமாக இருக்கக் கூடாது என்பது அவசியமான, போதுமான நிபந்தனையாகும்.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{vmatrix}$$

(12) இரு அணிகளின் பெருக்கற் பலனின் நேர் எதிர் அணியானது, அவற்றின் நேர் எதிர் அணிகளின் முன் பின்னுக்கிய பெருக்கற் பலனுக்கு சமம்.

இதன்படி $(AB)^{-1}(AB) \quad I = (AB)(AB)^{-1}$

இப்பொழுது $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B$ ... ...

(தொடர்பு விதி)

$= B^{-1}IB = B^{-1}B \triangle I$

மேலும் $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})(A^{-1})$ ... ...

(தொடர்ப்பு விதி)

$= \bar{A}IA^{-1} = \bar{A}A^{-1} = I$

$\therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆக இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது. ஏனெனில் ஒரேயொரு நேர் எதிர் அணிதான் உண்டு.

1.05. அணிகளின் மற்ற வகைகள் :

(அ) சிக்கல் அணி (Complex Matrix)

ஒரு அணியின் மூலகங்கள் சிக்கல் எண்களைக் கொண்டிருந்தால், அது சிக்கல் அணி எனப்படும்.

(ஆ) அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் (Minors of a Natrix).

ஒரு அணியின் சதுர கீழ் அணிகளின் அணிக்கோவைகள் அந்த அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் எனப்படும்.

(இ) சமச்சீரணி

$\tilde{M} = M$ ஆக இருந்தால் அந்த அணி சமற்சீரணி எனப்படும் .

(உ-ம்)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

தேற்றம்

(1) M என்பது சதுர அணியானல் $M + \tilde{M}$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்.

M, N என்பது ஒரேதர சமச்சீரணிகளானல் M+N-ம் ஒரு சமச்சீரணியாகும்.

(2) *M*-ன்பது ஒரு சமச் சீரணியானல், KM-ம் ஒரு சமச்சீரணியாகும்.

(3) M என்பது ஏதாவதொரு அணியானல், $M\tilde{M}$ ஒரு சமச்சீரணியாது

(4) *M* ஒரு சமச்சீரணியானல், M^n என்பது ஒரு சமச்சீரணியாகும்.

(5) இரு சமச்சீரணிகளின் பெருக்கற்பலன் ஒரு சமச்சீரணியாக இருக்க வேண்டியதில்லே.

(6) M என்பது ஒரு சமச்சீரணியானல் $\tilde{N} M N$ என்பது ஒரு சமச்சீரணியாகும். $(\widetilde{\tilde{N} M N}) = \tilde{M}\tilde{M}\tilde{N}\tilde{M}\tilde{N} = N M \tilde{N}$

எனவே $\tilde{N} M N$ என்பது சமச்சீரணியாகும்.

(ஈ) எதிர்ச்சீரணி (Skew Symmetric Matrix)

$M = -\overset{\text{ெ}}{M}$ என்றிருந்தால் அது எதிர்ச் சீரணியாகும். இந்த அணியின் மூலகங்கள் $a_{ij} = -a_{ji}$ ஆக இருக்கும். எனவே $i = j$ ஆனால் $a_{ii} = -a_{ii}$ என்றாகிறது. இதன் மதிப்பு சுழியமாகத் தான் இருக்க முடியும் என்பது தெளிவு.

(உ-ம்.)

$$\begin{vmatrix} o & a \\ -a & o \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} o & a & b \\ -a & o & c \\ -b & -c & o \end{vmatrix}$$

தேற்றம்

(1) M என்பது ஏதாவதொரு சதுர அணியானல் $M - \overset{\text{ெ}}{M}$ என்பது ஒரு எதிர்ச்சீரணியாகும்.

(2) M, N என்பன ஒரே தர எதிர்ச் சீரணிகளானல் $M+N$-ம் ஒரு எதிர்ச்சீரணியாகும்.

(3) M என்பது ஒரு எதிர்ச்சீரணியானல் KM-ம் ஒரு எதிர்ச் சீரணியாகும்.

(4) M ஒரு எதிர்ச்சீரணியானல் $\overset{\text{ெ}}{N} M N$,ம் ஒரு எதிர்ச்சீரணி யாகும்.

(உ) இணை அணி (Conjugate Matrix)

ஒரு சிக்கல் அணியின் மூலகங்களிலுள்ள சிக்கல் எண்களை இணை எண்களாக மாற்றி அமைந்தால் அது இணை அணி எனப்படும்.

$$M = \begin{vmatrix} a+bi & i \\ c & l+id \end{vmatrix}; \quad M^* = \begin{vmatrix} a-bi & -i \\ c & l+id \end{vmatrix}$$

(ஊ) திருப்பு இணை அணி (Tranjugate or transpose of a conjugate matrix)

$M^{\dagger} = (\tilde{M})^{*}$ என்பது திருப்பு இணை அணி எனப்படும்.

(I) $(\tilde{M}^{*}) = (\tilde{M})^{*}$

(2) $(M^{\dagger})^{\dagger} = M$

(3) $(M + N)^{\dagger} = M^{\dagger} + N^{\dagger}$

(4) $(V M)^{\dagger} = V^{*} M^{\dagger}$

(5) $(M N)^{\dagger} = N^{\dagger} M^{\dagger}$

(எ) ஹெர்முஷியன் அணி (Hermitian matrix)

அதாவது $M^{\dagger} = M$ ஆனால் M என்பது ஹெர்மிஷியன் அணி என்று சொல்வோம்.

அதாவது $M^{\dagger} = M$ ஆனால் M என்பது ஹெர்மிஷியன் அணி இதில் $a_{ij} = a_{ji}^{*}$ என்று இருக்கும். எனவே $a_{ii} = a_{ii}^{*}$. அதாவது மூலைவிட்ட மூலகங்கள் மெய் எண்களாக இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

(ஏ) எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி : (Skew Hermitian Matrix)

$M = - M^{\dagger}$ ஆனால் M-க்கு எதிர் ஹெர்மிஷியன் அணி என்று பெயர். எனவே $a_{ij} = - a_{ji}^{*}$, $a_{ii} = - a_{ii}^{*}$ என்றிருக்க வேண்டும். இதிலிருந்து மூலைவிட்ட மூலகங்கள் சுழியாகவோ அல்லது முழுதும் கற்பனை எண்களாகவோ இருக்க வேண்டும் என்று தெரிகிறது.

அணிகளின் பலன்கள்

2.01. அணிகளைப் பயன்படுத்தி ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்.

அணிகளைப் பயன்படுத்தி ஒருங்கமைச் சமன் பாடுகளின் சுருக்கமாகவும் நேர்த்தியாகவும் எழுதலாம்.

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2$$
$$a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3$$

இவற்றை அணிகள் வடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

இதில்

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

என்று கொண்டால்

$AX = B$ என்று எழுதலாம். இதை இரு பக்கங்களிலும் A^{-1} ஆல் இடமிருந்து பெருக்க, $A^{-1}AX = A^{-1}B$ என்று கிடைக்கும். $A^{-1}A = I$ என்பதால் $IX = A^{-1}B$ அல்லது $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

அதாவது

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = A^{-1} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

எனவே A^{-1} தெரிந்தால், x, y, z-க்குச் சுலபமாகத் தீர்வு காணலாம் எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

தீர் :

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 3y + 4z = 9$$
$$3x - y - 2z = 0$$

இங்கு

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 16 & -5 & -2 \\ -11 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

எனவே

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 16 & -5 & -2 \\ -11 & 4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -6 & +9 \\ 48 & -45 \\ -33 & 36 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

எனவே $x = y = z = 1$.

2-02. சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள்

(அ) λ-ஐத் திசையிலி மாறிலியாகவும் (Scalar), A-ஐ ஒரு n-வரிசைச் சதுர அணியாகவும் கொண்டு $Ax = \lambda x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்பது, இயற்கணிதத்தில் முக்கியமான தொன்றாகும். இங்கு X-ஐ மாற்றமிலா வெக்டார் அல்லது சிறப்பியல்பு வெக்டார் என்றும், λ-ஐச் சிறப்பியல்புமூலம் (ஐஜின் மதிப்பு) என்றும் சொல்வோம்.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

என்று கொண்டால் $Ax = \lambda x$ என்பதனைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(1)$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் x_1, x_2, x_3-க்கு வெளிப்படைத் தீர்வுக ளல்லாத மற்றத் தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டுமானால்,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ஆக இருக்கவேண்டும்.

1. இது A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு என வரையறுக்கப் படுகிறது.

2. இதன் மூலங்களுக்குச் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு

பின்வரும் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

இதனுடைய சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதனை விரித்தெழுதினால்

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் 2, 2, —2 என எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

தேற்றம் 1. A-யின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_n$ ஆனால் KA-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $K\lambda_1, K\lambda_2 \ldots\ldots K\lambda_n$ ஆகும்.

தேற்றம் 2. $(A-KI)$-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்

$$\lambda_1-K, \ldots\ldots\ldots \lambda_n-K.$$

தேற்றம் 3. α ஆனது A-யின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், $\frac{|A|}{\alpha}$ ஆனது சேர்ப்பு A-யின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்கும்.

தேற்றம் 4. A-யின் சிறப்பியல்பு மூலம் α ஆனால், A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α^{-1} ஆகும்.

தேற்றம் 5. A-யின் சிறப்பியல்பு மூலம் α ஆனால் A^2-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α^2 ஆகும்.

(ஆ) ஓர் அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள்: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்பவற்றை ஒரு சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் தனிவேறுபட்ட, மெய்யான மூலங்களாகக் கொள்வோம். λ_1-ஐச் சமன்பாடுகள் (1)-ல் பிரதியிட்டு, x_1, x_2, x_3 இவற்றின் மதிப்பைக் காணலாம். இதேமாதிரி ஒவ்வொரு மூலத்தையும் பயன்படுத்தி x_1, x_2, x_3-க்குத் தனித்தனி மதிப்புகளைக் (a set of values) கண்டுபிடிக்கலாம். அவற்றினை

$$X_1 = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{vmatrix}$$

என்று கொள்வோம்.

x_1, x_2, x_3 ஆகியவை சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள் (ஐஜின் வெக்டார்கள்) எனப்படும். இவைகள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரே சிறப்பியல்பு வெக்டாருக்கு இரண்டு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் இருக்க முடியாது.

$A X = \lambda_1 X \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$ ஆக இருந்தால்

$A X = \lambda_2 X$

$\lambda_1 X = \lambda_2 X$ ஆகும்.

ஆகவே $(\lambda_1 - \lambda_2) X = 0$ ... (1)

ஆனால் $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $X \neq 0$

$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) X \neq 0$ ... (2)

(1)-ம் (2)-ம் எதிர் மாறானவை.

எனவே $\lambda_1 = \lambda_2$

தேற்றம் 2. ஒரே சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு, பல்வேறு சிறப்பியல்பு வெக்டார்கள் உடன்பாடாக இருக்கலாம்.

ஏனெனில் $AX = \lambda X$ ஆனால்

$$A\,(KX) = \lambda\,(KX)$$

$\therefore$ $K X$-ம் ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டார். X-ம், $K X$-ம் ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை.

(இ) ஓர் அணியை மூலைவிட்ட அணியாக மாற்றுதல்: P என்பது X_1, X_2, X_3-யினைக் கொண்டு எழுதப்பட்ட அணியாக இருக்கட்டும்.

அதாவது $[P] = [X_1\ X_2\ X_3]$

$$\therefore\quad [A]\,[P] = [A]\ \ [X_1\ X_2\ X_3] = [\,AX_1\ AX_2\ AX_3]$$

$$AX_1 = \lambda_1\,X_1,\ AX_2 = \lambda_2\,X_2,\ A\,X_3 = \lambda_3\,X_3$$

ஆக இருப்பதால்,

$$[A]\,[P] = [\lambda_1\,X_1\ \lambda_2\,X_2\ \lambda_3\,X_3]$$

$$= [X_1\ X_2\ X_3] \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= [P]\,[D]$$

$$\therefore\quad [P^{-1}]\,[A]\,[P] = [D]$$

A சிறப்பு அணியாக இல்லாதிருந்தால், P என்ற அணியைக் கண்டுபிடித்து $P^{-1}\,AP = D$ என்று எழுதலாம். இங்கு D என்பது மூலைவிட்ட அணியாகும்.

குறிப்பு: சிறப்பியல்பு மூலங்கள் தனிவேறுபட்டதாக இல்லாதிருந்தால், அந்த அணியை மூலைவிட்ட அணியாக மாற்ற முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$ ஐ மூலைவிட்ட அணியாக மாற்று.

இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad (1)$$

அதாவது $\lambda^3-13\lambda+12=0$.
எனவே $\lambda = -4, 3, 1$ ஆகும்.

$\lambda = -4$ என்று சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட்டு x_1, x_2, x_3-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$(2+4)\, x_1+2\, x_2+(0)x_3=0$$
$$2x_1+(1+4)\, x_2+x_3=0$$
$$-7\, x_1+2x_2+(-3+4)\, x_3=0$$

$\therefore \quad x_1=1\,;\; x_2=-3\,;\quad x_3=13.$

$$\therefore \quad X_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{vmatrix}$$

இதே மாதிரி $\lambda=3$, $\lambda=1$ என்று பிரதியிட்டு

$$X_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}\,; \quad X_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix}$$ என எழுதலாம்.

எனவே,

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{35} & \frac{-2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{10} \end{vmatrix}$$

எனவே,

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} \frac{3}{35} & \frac{-2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2-03. கேலி ஹாமில்டன் தேற்றம் (Cayley Hamilton Theorem)

தேற்றம்.

ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் மூலமாக இருக்கும்.

$[A-\lambda I]$ என்ற அணி

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad |A-\lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \qquad \dots (1)$$

A-ஆனது இதன் மூலம் என நிரூபிக்கவேண்டும். அதாவது,

$$a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0 \qquad \dots (2)$$

என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது

$$(A-\lambda I) \text{ சேர்ப்பு } (A-\lambda I) = |A-\lambda I|\, I \qquad \dots (3)$$

$(A-\lambda I)$ என்ற அணியின் உறுப்பிலுள்ள λ-ன்படி ஒன்று ஆக இருப்பதால் சேர்ப்பு $(A-\lambda I)$-ன் உறுப்புகளில், λ-ன்படி $(n-1)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, சேர்ப்பு $(A-\lambda I) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots$

$$\dots + b_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad \dots (4)$$

என எழுதலாம்.

கோவைகள் (2) (4)-ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டுப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(A-\lambda I)(b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots\dots\dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})$$
$$= (a_0 + a_1\lambda + \dots\dots\dots + a_n\lambda^n)\, I$$

இட, வலப்பக்கங்களிலுள்ள λ-வின் அடுக்குகளின் குணகங்களைச் சமன்படுத்தினுல்,

$$Ab_0 = a_0 I$$

$$Ab_1 - b_0 = a_1 I$$

$$Ab_2 - b_1 = a_2 I$$

....

$-b_{n-1} = a_n I$ என எழுதலாம்.

இவற்றை முறையே I, A, A^2 ...... A^n ஆல் முன் பெருக்கிக் கூட்டினுல்,

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 \;\ldots\ldots\; a_n A^n = 0.$$

என வரும். இதிலிருந்து A என்ற அணி $|A - \lambda I| = 0$ என்ற சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

A-ன் நேர் எதிர் அணியை, ஸ்கேலார் குணகங்கள் உள்ள பல்லுருப்புக் கோவையாக எழுதுக.

சமன்பாடு (1)-ல், $\lambda = 0$ என்று கொண்டால், $|A| = a_0$ ஆகும். A சிறப்பு இல் அணியாக இருப்பதால் $|A| = a_0 \neq 0$

சமன்பாடு (2)ஐ A^{-1}ஆல் முன் பெருக்கி, பின்வரும் பல்லுருப்புக் கோவையை எழுதலாம்.

$$A^{-1} a_0 + a_1 I + a_2 A \;\ldots\ldots\; a_n A^{n-1} = 0$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \frac{a_2}{a_0} A - \;\ldots\; - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}$$

2-04. (அ) வடிவொத்த அணிகள் (similar matrices)

A, B என்ற அணிகள், $B = P^{-1}AP$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், அவை வடிவொத்த அணிகளாகும்.

தேற்றம் 1. A, B என்ற வடிவொத்த அணிகளின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள் ஒன்ருகவே இருக்கும்.

நிரூபணம் : $P^{-1}AP = B.$

$$|B-\lambda I| = |P^{-1}AP-\lambda I| = |P^{-1}AP-P^{-1}\lambda IP|$$
$$= |P^{-1}(A-\lambda I)P| = |P^{-1}|\ |A-\lambda I|\ |P|$$
$$= |A-\lambda I|\ |P^{-1}|\ |P| = |A-\lambda I|$$

இதிலிருந்து இவற்றின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள் ஒன்றே என்று புலனாகிறது. இவற்றின் சிறப்பியல்பு மூலங்களும் சமமாகும்.

2. $AB—B^{-1}(BA)B$ ஆதலால் AB, BA என்பன ஒரே சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கொண்டவை.

3. $B = P^{-1}AP$ என்னும் அணியின் λ என்ற சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு இசைந்த மாற்றமிலா (invariant) வெக்டார் Y ஆனால், $X = PY$ என்பது, A என்ற அணியின் λ மூலத்திற்கு இசைந்த மாற்றமிலா வெக்டாராகும்.

$BY = \lambda Y$ [கொள்கை].

மேலும் $PB = PP^{-1}AP = AP$

$\therefore\quad AX = APY = PBY = P\lambda Y = \lambda PY = \lambda X$

(ஆ) செங்குத்தணிகள் (Orthogonal matrices)

A என்னும் சதுர அணி, $\widetilde{A}A = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதைச் செங்குத்தணி என வரையறை செய்வோம். இதில் $\widetilde{A} = A^{-1}$ ஆக இருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

$$|\widetilde{A}A| = |I| = 1.$$
$$\therefore\quad |A|^2 = 1 \qquad \because\quad |\widetilde{A}| = |A|$$
$$\therefore\quad |A| = \pm 1.$$

தேற்றம் 1. A, B என்பவை செங்குத்தணிகளானால் AB-ம் BA-ம் செங்குத்தணிகள் ஆதல் வேண்டும்.

தேற்றம் 2. A என்னும் செங்குத்தணி $|A| = +1$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், அதன் ஒவ்வொரு மூலகமும் அதனதன் இணைக்காரணிக்குச் சமமாக இருக்கும். $|A| = +1$ என்று இருக்கும் செங்குத்தணியைத் தகு செங்குத்தணி (Proper orthogonal matrix) என்று கூறுவோம்.

(இ) செங்குத்தான மாற்றம் (Orthogonal transformation)

A என்பது செங்குத்தணியாக இருக்கட்டும். $Y = AX$ என்னும் மாற்றத்தைச் செங்குத்தான மாற்றம் என்று சொல்வோம்.

தேற்றம் 1. ஒரு செங்குத்தான மாற்றத்தால் ஒரு வெக்டாரின் நீளம் மாறுது.

$Y = AX$ என்ற மாற்றத்தை எடுத்துக்கொள்.

இதில் $\widetilde{A} = A^{-1}$. ஆகவே

$$\widetilde{Y}Y = (\widetilde{AX})\, A\, X = \widetilde{X}\, \widetilde{A}\, A\, X = \widetilde{X}\, I\, X = \widetilde{X}X$$

எனவே Y-ன் நீளம் = X-ன் நீளம்.

தேற்றம் 2. ஒரு செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலத்தின் மட்டு (Modulus of the characteristic root) ஒன்று ஆக இருக்க வேண்டும்.

தேற்றம் 3. ஒரு சிக்கல் எண், செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், அதன் இணை சிக்கல் எண்ணும் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்க வேண்டும்.

தேற்றம் 4. A என்ற செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு ஒரு தலைகீழ் சமன்பாடாகும் (Reciprocal equation).

எடுத்துக்காட்டு :

$$C_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$ என இருக்கும்படி

$A = [c_1\ c_2\ c_3]$ என்ற செங்குத்தணியைக் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & a & x \\ \frac{2}{3} & b & y \\ \frac{2}{3} & c & z \end{vmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\tilde{A}A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & a & x \\ \frac{2}{3} & b & y \\ \frac{2}{3} & c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad \dots (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \dots (2)$$
$$a + 2b + 2c = 0 \qquad \dots (3)$$
$$x + 2y + 2z = 0 \qquad \dots (4)$$
$$ax + by + cz = 0 \qquad \dots (5)$$

$a=0$ என்று கொண்டால் (3)-லிருந்து $b = -c$ எனத் தெரிகிறது. (1)-லிருந்து $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ என அறிகிறோம். (5)-லிருந்து $y = +z$ என்று தெரிகிறது. இதை (4)-ல் பிரதியிட்டால் $x = 4y$ எனக் கிடைக்கிறது. இவற்றினைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு (2)-ன் மூலம் $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $z = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். எனவே,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

(ஈ) சிக்கல் செங்குத்தணி (Unitary matrix)

A என்ற சதுர அணி $A^{\dagger}A = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அது சிக்கல் செங்குத்தணி எனப்படும்.

$$|A^{\dagger}| = |\tilde{A}^*| = |A^*|$$

$$|A^{\dagger}A| = |A^{\dagger}|\,|A| = |A^*|\,|A| \text{ ஆகவே}$$

$A^{\dagger}A = I$ ஆனால் $|A^*|\,|A| = 1$ ஆகும்.

அதாவது ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியின் அணிக்கோவையின் மட்டு ஒன்ருக இருக்க வேண்டும் எனத் தெரிகிறது.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^\dagger A = \tilde{A}^* A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

எனவே A ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணி.

தேற்றம். A, B என்பன சிக்கல் செங்குத்தணிகளானுல் AB-யும் BA-யும் சிக்கல் செங்குத்தணிகள் ஆகும்.

3-01. அணிகளைப் பயன்படுத்தி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறை

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{5dx}{dt} + 6x = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்.

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \dots \quad (2)$$

எனக் கொண்டு சமன்பாடு (1)-ஐ

$$\frac{dy}{dt} = 5y - 6x \qquad \dots \quad (3)$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடுகள் (2), (3)-ஐ

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

என்ற அணி வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$t=0$ கணத்தில், $x=\alpha$, $\frac{dx}{dt}=\beta$ என்று கொள்வோம்.

$$\int \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt$$

எனவே

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} d\varphi \ldots \quad (4)$$

இங்கு φ என்பது தொகையீட்டு மாறி (integration variable) ஆகும்.

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$-க்குச் சமன்பாடு (4)-யே பிரதியிட்டால்

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} d\varphi \right\} d\varphi$$

என்று கிடைக்கும். இந்தப் பிரதியீட்டினைப் பல தடவைகள் செய்தால்

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[I + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} d\varphi + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \left\{ \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} d \right\} d\varphi + \ldots\ldots \right] \left[\begin{matrix} \alpha \end{matrix} \right] \}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left\{ I + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^2 + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^3 + \ldots\ldots \right\} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

எனவே

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} t} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

கேலீ ஹேமில்டன் தேற்றத்தின்படி

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} t} = b_0 I + b_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் 3, 2 ஆதலால்

$$e^{3t} = b_0 + 3b_1$$

$e^{2t} = b_0 + 2b_1$ என எழுதலாம்.

இந்த இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து b_0, b_1-ன் தீர்வினைக் கண்டு

$$\begin{vmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3e^{2t} - 2e^{3t} & e^{3t} - e^{2t} \\ -6e^{3t} + 6e^{2t} & 3e^{3t} - 2e^{2t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

என்று காணலாம். இதன் பொதுத் தீர்வு $x = Ae^{2t} + Be^{3t}$ ஆகும்.

இந்த முறையினைப் பயன்படுத்தி n_1 வேறுபடு சமன்பாடுகள் இருந்தாலும் அவற்றினைச் சுலபமாகத் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \qquad \ldots (1)$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

இங்கு $y = \frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

முந்தைய எடுத்துக்காட்டின் செய்முறையை பின்பற்றி

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangleq \left\{ \left[I + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \ldots\ldots \int_\beta^\alpha \int \right. \right. \quad \ldots (2)$$

என்று காணலாம்.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் சம மாக இருப்பதால், முந்தைய முறையை (1)-ன் தீர்வு காண தொடர்ந்து பயன் படுத்த இயலாது.

எனவே $A^n = n\lambda^{n-1} A - (n-1) \lambda^n I$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \ldots \ldots$$

$$= 1 + At + \frac{1}{2!}\left[2\lambda A - \lambda^2 I\right]t^2 + \frac{1}{3!}\left[3\lambda^2 A - 2\lambda^3 I\right]t^3 + \ldots\ldots$$

$$= I\left[1 - \frac{\lambda^2}{2!}\frac{2\lambda^3}{3!} - \frac{3\lambda^4}{\lambda 4!}\ldots\ldots\right]t + A\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\ldots\right]t$$

$$= I\left[e^{-\lambda}(1 - \lambda t)\right] = \lambda e^{\lambda t}$$ என்று எழுதலாம் ... (3)

(3)-ஐப் பயன்படுத்தி, (2) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(1-2t) & e^{2t} \\ -4e^{2t} & 5e^{2t}-2te^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

என்று தீர்வு காணலாம். இதிலிருந்து சமன்பாடு (1)-ன் பொதுத் தீர்வு $x = e^{t\lambda}[c + + D]$ என்று அறிகிறோம்.

பயிற்சி :

அணியினைப் பயன்படுத்தி கீழ்கண்ட வேறுபடு சமன்பாடு களைத் தீர்.

$t = 0$-தில், $x = \alpha, \frac{dx}{dt}\ \beta$ என்று கொள்.

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt}+2x=0$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt}+9x=0$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+4\ x=0$.

3-02. இதுவரை, வலப்பக்கம் சுழியமாக உள்ள வேறுபடு சமன்பாடுகளின் தீர்வினைக் [துணைத்தீர்வு (complementary function)] கண்டோம். இப்பொழுது வலப்பக்கம் சுழியமல்லாத வேறு படு சமன்பாடுகளின் தீர்வினைக் [சிறப்புத் தீர்வு (Particular integral)] காண்போம்.

வேறுபடு சமன்பாடுகளை பின்வரும் முறையில் எழுதுவோம்.

$$D\ [X] = A\ [X]+[z[$$

இங்கு $D=\frac{d}{dt}$, A என்பது ஒரு அணி. $[X]$, $]z]$ என்பன வெக்டார்கள்.

மூன்பு

$D\ [X] = A\ [X]$......(1) என்ற சமன்பாட்டினை $t=O$ கணத்தில்

$[X]=[X_o]$ என்று கொண்டு, தீர்த்து

$[X]=e^{At}\ [X_o]$ என்று கண்டோம்.

இப்பொழுது $D\ [X] - A\ [X] = [z]$ ... (2)

என்று கொள்.

இங்கு z என்பது t-யினை சார்ந்துள்ளது.

$$D\ (e^{-At}\ [X]) = -Ae^{-At}\ [X]+e^{-At}\ D\ [X[$$
$$= e^{-At}\ [D\ [X] - A\ [X]]$$
$$= e^{-At}\ [z]$$

இதன் தொகையீட்டு மதிப்பு

$$e^{-At}\ [X] = \int_{t_o}^{t} e^{-At}\ [z]\ dt$$ ஆகும்.

எனவே $[X] = e^{At} \int_{t_o}^{t} e^{-At}\ [z]\ dt$

(2)-ன் முழுத் தீர்வு (complete solution)

$$[X] = e^{At}[X_o] + \int_{t_o}^{t} e^{At}[z]\, dv]$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 3t$$

இதை அணிவடிவத்தில்

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ Va \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3t \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம். இங்கு $y = \frac{dx}{det}$ ஆகும்.

இதன் துணைத்தீர்வினை எடுத்துக்காட்டு (1)-ல் கண்டுள்ளோம் இங்கு சிறப்புத்தீர்வினை மட்டும் காண்போம்.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \int^{t} e^{-At} \begin{matrix} 0 \\ 3t \end{matrix}\, dt.$$

$\int_{t_0}^{t} e^{At} \begin{matrix} 0 \\ 3t \end{matrix}\, dt$ என்ற தொகையீட்டினைப்பகுதி படுத்தித் தொகைக் காணலாம். $t = t_o$ ஆகும்போது இந்தத்தொகையீடு, சுழியம் மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At}\left[-\frac{1}{A} e^{=At} \begin{bmatrix} 0 \\ 3t \end{bmatrix} + \int_{t^o}^{t} e^{-A} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} dt \right.$$

$$= e^{At}\left[-\begin{bmatrix} \frac{1}{A} \end{bmatrix} e^{-At} \begin{bmatrix} 0 \\ 3t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{A^2} \end{bmatrix} e^{-At} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$= e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 3t \end{bmatrix} - A^{A2}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{36} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19-5 \\ 30-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & t \\ 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t + \frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

எனவே இதன் தீர்வை

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t}-2e^{3t} & e^{3t}-e^{2t} \\ -6e^{3t}+6e^{2t} & 3e^{3t}-2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t+\frac{5}{12} \\ \; \end{bmatrix}$$

என்று காணலாம்.

இதிலிருந்து $x = Ae^{2t}+Be^{3t}+\frac{1}{3}\,t+\frac{5}{12}$ என்று தெரிகிறது.

பயிற்சி. தீர்வினைக் கண்டுபிடி

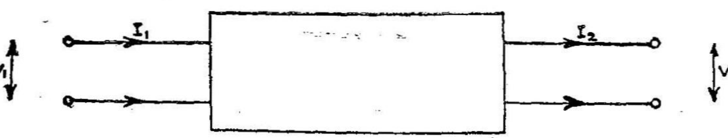
(1) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 2t^2$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = \cos t$

4. இயற்பியலில் அணிகளைப் பயன்படுத்தும் முறை :

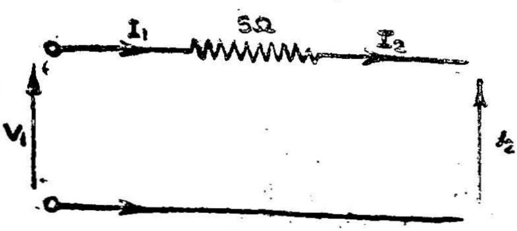
குறிப்பாக மின் இயலிலும் (Electrical Network) இயந்திர இயலிலும் அணிகள் எவ்வாறு பயன் படுகின்றன என்று காண்போம்.

I. மின் வலையமைப்புகள் (Electrical Network) நான்கு வரை கோடிகள் (Terminals) கொண்ட வலையமைப்பு (FourTerminal Network) :



படம் 42

(படம் 42) இந்த மின் வலையானது இரண்டு உள்ளிடு அளவு (input) வரை கோடிகளையும், இரண்டு வெளிவரு (output) வரை கோடிகளையும் கொண்டது. இதை ஆராய ஓமின் விதியை (Ohm's law) பயன்படுத்தும் முறை தெரிந்தால் போதுமானது. எடுத்துக் காட்டாக பின் வரும் வலையமைப்புகளை ஆராய்வோம்.



படம் 43

$V_1 = 5I_2 + V_2$ (ஓமின் விதி) (படம் 43)

$I_1 = I_2$

இதையே அணி வடிவத்தில் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

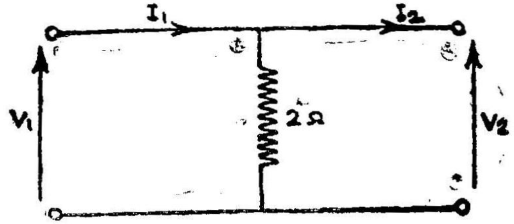
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

பொதுவாக மின் தடை R-ம் ஆக இருந்தால்

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

இதே மாதிரி வரும் பின் வரும் வலையமைப்பில் (படம் 44)

(2)



படம் 44.

$V_1 = V_2$

$V_2 = 2\,(I_1 - I_2)$ அல்லது $I_1 = \frac{1}{2}\,V_2 + I_2$ ஆகும்.

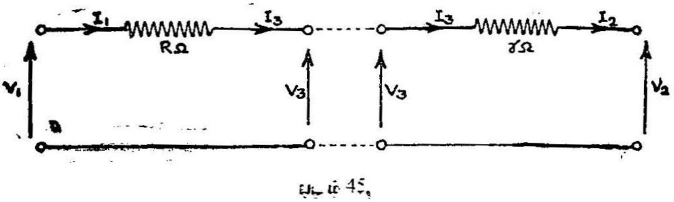
அதாவது

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

மின் தடை S-ஓம் ஆக இருந்தால்.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{S} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

(3) இதே முறையை, பல வலையமைப்புகள் ஒன்றாக இணைக்கப் (பட்ட மின் சுற்றில் பயன்படுத்தும் முறையைக் காண்போம். படம் 45).



படம் 45.

மின் சுற்றின் இடது பகுதிக்கு

$$\begin{bmatrix} V^{I} \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$ என்றும்

வலது பகுதிக்கு

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_2 \\ V_2 \end{matrix}$$ என்றும் எழுதலாம்.

எனவே

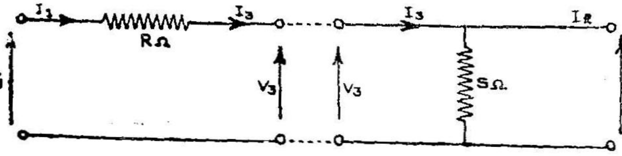
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & R+r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

இது தொடர் மின் தடை விதியை உறுதிப்படுத்துகிறது. (Resis tances in series)

இதே மாதிரி இணை மின் தடை விதி (Resistance in parallel $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ என்பதையும் காணலாம்.

(4)



படம் 46

இங்கு (படம் 46)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

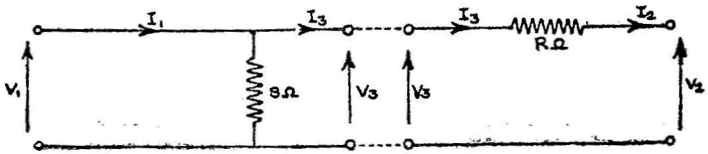
$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

எனவே

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

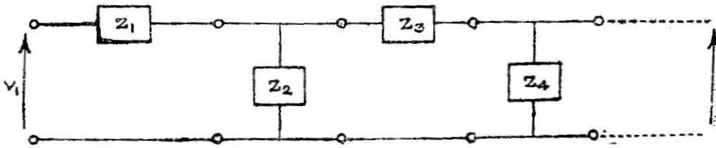
$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{R}{S} & R \\ \frac{I}{S} & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

(5) பின் வரும் மின் சுற்றினை (படம் 47) ஆராய்ந்து (4)ன் விடையுடன் ஒப்பிடு.



படம் 47

(6) பொதுவாக z_1; z_2, z_3 ...... என்ற மின் எதிர்ப்புகள் கொண்ட மின் சுற்றுகளை கீழ்க்கண்டவாறு இணைத்தால் (படம் 48)



படம் 48

$$\begin{vmatrix} V^1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_2} & 1 \end{vmatrix}$$

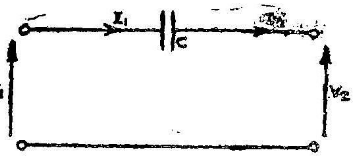
$$\begin{vmatrix} 1 & z_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_2} & 1 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} V_2 \end{vmatrix}$$

என்று எழுதலாம்.

மின் தேக்கிகளையும், மின் நிலை மங்களையும் (capacitance and Inductance) **கொண்ட மின் சுற்றுகள் :**

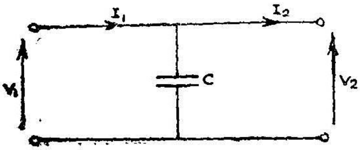
இந்த சுற்றுகளில் w என்பது உள்ளிடு மின் அழுத்தத்தின் applied voltage) அதிர்வு எண் எனக் கொள்வோம். படம் 49-ல்

(7)



$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{wc} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

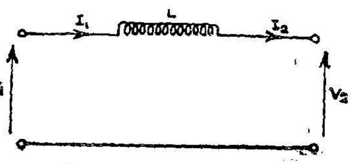
படம் 49



$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ wc & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

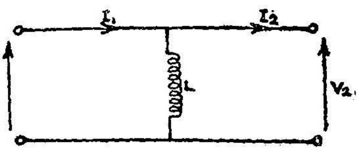
படம் 50

(8)



$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

படம் 51



$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w_2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_5 \end{vmatrix}$$

படம் 52

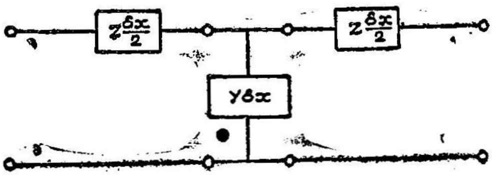
பயிற்சி :

(i) *n* மின் தடைகள் தொடர்ச்சியாக (series) இணைக்கப்பட்ட ஒரு தொடர் மின் சுற்றின் (cascade circuit) மொத்த மின் தடையை மேற்கண்ட அணிமுறையில் (Matrix method) கணக்கிடு.

(ii) மின் தடை இணையாக இணைக்கப்பட்ட மின் சுற்றின் மொத்த மின் தடையை கணக்கிடு.

(9) ∂x நீளம் உள்ள மின் வலை அமைப்புகள் பல கொண்ட மின் தொடர் இணைப்பில் (cascade connection), $\partial x \to 0$ என்ற எல்லையைக் கண்டால், அது, ஓரலகு நீளத்திற்கு z தொடர் மின் எதிர்ப்பும் (series impedance), ஓரலகு நீளத்திற்கு y இணை மின் ஏற்பும் (shunt admittance) கொண்ட ஆற்றல் செலுத்தும் கம்பி யாக கொள்ளலாம்.

தொடர் இணைப்பில், ஒரு வலை அமைப்பு கீழ் கண்டவாறு இருக்கும். (படம் 53)



படம் 53

இதற்கு இசைந்த அணியானது

$$M = \begin{vmatrix} 1 & z\frac{\partial x}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y\partial x & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z\frac{\partial x}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+zy\frac{(\partial x^2)^2}{2} & z\partial x+x^2y\frac{(\partial x)^3}{4} \\ y\partial x & 1+2y(\partial x^2) \end{vmatrix}$$

ஆற்றல் செலுத்தும் கம்பியின் நீளம் $n\partial x = l$ என்று கொண்டால்

$$M = \begin{vmatrix} 1+zy\frac{l^2}{2n^2} & \frac{zl}{n}+\frac{z^2yl^3}{4n^3} \\ \frac{yl}{n} & 1+\frac{zyl^2}{} \end{vmatrix}$$

இதே மாதிரி n வலையமைப்புகள் உள்ளதால், பைநாமியல் தேற்றத்தைப் (Binomial Theorem) பயன்படுத்தி M^n-ஐக் கண்டு பிடிக்கலாம். மின் எதிர்ப்பு அணி z-ன் நேர் எதிர் அணியே மின் ஏற்பு அணி ஆகும்.

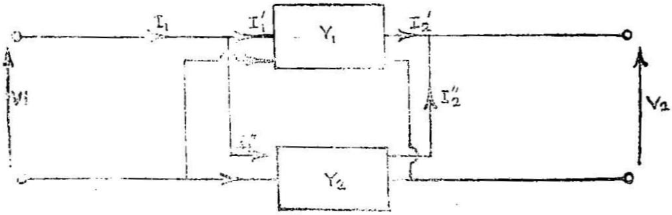
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

அதாவது $V = ZI$.

$$I_1 = Y_{11} \quad Y_{12} \quad V_1$$
$$I_2 = Y_{21} \quad Y_{22} \quad V_2$$

அதாவது $I = YV$.

(10)



படம் 54

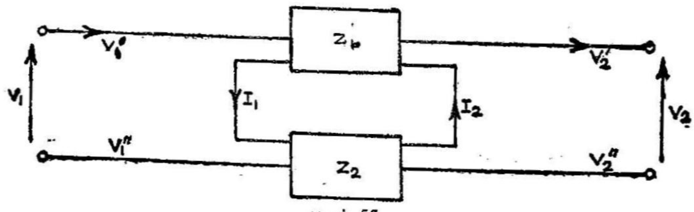
(படம் 54) இங்கு $\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$I_1 = I_1' + I_1''$; $I_2 = I_2' + I_2''$ ஆக இருப்பதால்

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = (y_1 + y_2) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

பயிற்சி :

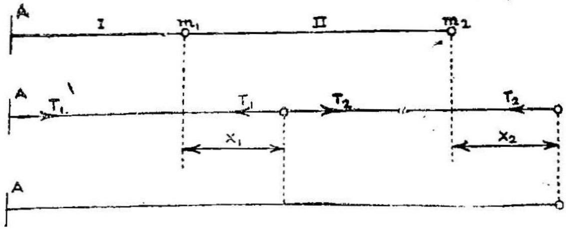


படம் 55

மேற்கண்ட வழி முறையைப் பின் பற்றி இந்த வலையமைப்பில் (படம் 55) $V=zI$ என்று காண்.

II. **இயந்திர இயலில் அணிகளின் பயன்கள் :**

m_1; m_2 என்ற இரண்டு பொருண்மைகள் (masses) படத்திற் கண்டவாறு I, II என்ற இரண்டு மீள் சக்தி இழைகளால் (Elastic string) இணைக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம். (படம் 56)



படம் 56

T_1, T_2 என்பன முறையே இவ்விரண்டு இழைகளின் இழு விசைகளாகவும்; x_1, x_2 என்பன முறையே m_1, m_2-வின் இடப் பெயர்சிகளாகவும் கொள்வோம்.

இவ்விரண்டு இழைகளின் விறைப்பு மாறிலிகள் (Stiffness constants) k_1, k_2 ஆக இருக்கட்டும். ஹூக் விதிப்படி (Hooke's law)

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= k_1 x_1 \\ T_2 &= k_2 (x_2 - x)_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியின்படி

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= T_2 - T_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= - T_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

என எழுதலாம்.

(1)-ஐ, (2)-ல் பிரதியிட்டு

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_2 (x_2) - x_1 - k_1 x_1 \\ m_2 \ddot{x}_1 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4$$

என காணலாம். $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2$ எனக் கொண்டு, பின் வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்.

$$\dot{v}_1 = -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2$$

$$\dot{x}_1 = v_1$$

$$x\dot{v}_3 = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{\kappa_2}{m_2} x_2$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \qquad \text{— (5)}$$

இதையே அணி வடிவத்தில் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{v}_1 \\ x^1 \\ v_2 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

வேறுபடு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையில் உள்ள எடுத்துக் காட்டு (1)-ஐப் பின்பற்றி சமன்பாடு 6-ன் தீர்வை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$x_1 = p_1 e^{\lambda_1 t} + q_1 e^{\lambda_2 t} + r_1 e^{\lambda_3 t} + s_1 e^{\lambda_4 t}$$

$$x_2 = p_2 e^{\lambda_1 t} + q_2 e^{\lambda_3 t} + r_2 e^{\lambda_3 t} + s_2 e^{\lambda_4 t}$$

இங்கு p, q, r, s — என்பன மாறிலிகள்.

பொருண்மை, விறைப்பு மாறிலிகள் ஆகியவற்றிற்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுத்து, இந்த முறையை எளிதில் விளக்கலாம்

$$m_1 = m_3 = 1\ ;\ k_3 = 1\ ;\ k_2 = 2,$$

இப்பொழுது சமன்பாடு (6)

$$\begin{vmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ x_1 \\ \dot{v}_2 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

என்று ஆகிறது.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

இதையே

$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 2 = 0$ என எழுதலாம்.

இதனை λ^2-ல் இருபடி சமன்பாடாகக் கொண்டு இதன் தீர்வினை,

$\lambda^2 = \dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ எனக்காணலாம்.

எனவே அணியின் சிறப்பு மூலங்கள்

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\,; \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\,; \quad \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$

எனக் கொண்டு

m_1, m_2-வின் இடப்பெயர்ச்சிகளை (displacements).

$x_1 = p_1\, e^{imt} + q_1\, e^{-imt} + r_1\, e^{int} + s_1\, e^{-int}$

$x_2 = p_2\, e^{imt} + q_2\, e^{-imt} + r_2\, e^{int} + s_2\, e^{-int}$

என எழுதலாம். அல்லது

$$x_1 = A_1 \cos mt + B_1 \sin mt + C_1 \cos nt + D_1 \sin nt$$
$$x_2 = A_2 \cos mt + B_2 \sin mt + C_2 \cos nt + D_2 \sin nt$$

என்றும் எழுதலாம்.

பயிற்சி :

(1) இதையே $m_1 = m_2 = 1$. $R_1 = 2$; $R_2 = 1$. என கொண்டு தீர்

(2) இதில் இரண்டு பொருண்மைகளும் cv_1, cv_2 என்ற தடையுறு விசைகளால் (damping forces) தாக்கப்பட்டால், அவற்றின் இயக்கங்களைக் கட்டுப்படுத்தும் வகைகெழு சமன்பாடுகளை பின்வரும் அணி வடிவத்தில் எழுதலாம் என்று காண்பி.

$$\begin{vmatrix} \dot{v}_1 \\ x_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{c}{m_1} & \frac{-k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} & \frac{-c}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ x_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix}$$

பொதுவாக இயற்பியலில் எந்த ஒருபொருளின் இயக்கப் பண்புகளை ஆராய வேண்டுமானாலும், அதன் இயக்கத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் வேறுபடு சமன்பாடுகள் தெரிந்தால் போதும். மேற்கண்ட பல அணி முறைகளைப் பயன்படுத்தி அந்த பண்புகளை எளிதாக அறியலாம் என தெரிகிறது.

4. கந்தழித் தொடர்முறைகள், தொடர்கள்

1. கந்தழித் தொடர்முறைகள் (முடிவிலா எண் தொடர்ச்சி) எல்லைகள். (Infinite sequences and limits).

முன்னுரை :

கந்தழி தொடர் முறைகள், தொடர்கள் இவை பயன்முறை கணிதத்தின் மிகவும் முக்கியமானவையாகும். இயற்பியலில் வரும் அனேக முக்கியமான கணக்குகளுக்கு எண்சார் தீர்வுகாண கந்தழித் தொடர்கள் பயன்படுகின்றன. இயற்பியல் கணக்குகளின் கணித தீர்வுகளில் அடிக்கடிவரும் சில வகைக்கெழு சமன்பாடு களின் தீர்வுகள் கந்தழித் தொடர்கள் மூலம் குறிக்கப் படுகின்றன. கந்தழித் தொடர்கள் எவ்விதத்தில் கையாளப்படுகின்றன என்ற முழுமையான அறிவு இருந்தால்தான் இத்தீர்வுகளின் இயல்புகளை ஆராய இயலும். எனவே பயன்முறை விஞ்ஞானம் படிக்கும் மாணவர்கள் இத்தலைப்பு பற்றி தெளிவாக புரிந்து கொள்வது அவசியமாகும்.

இந்த அத்தியாயத்தில் கந்தழித் தொடரின் சில அடிப்படை யான கருத்துகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன. தொடர்களின் இயற் கணிதமும், நுண்கணிதமும் கொடுக்கப்பட்டு இவைகளின் பயன்கள் முக்கியமான உதாரணங்களுடன் தெளிவாக்கப்பட் டுள்ளன.

1.01. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ என்ற முடிவிலா தொடர் எண்கள்.

$1, 2, 3 \ldots\ldots n$ என்ற இயற்கையான எண் தொடருடன், சில சட்ட திட்டங்களுக்குட்பட்டு தொடர்பு படுத்தப்பட்டு எழுதப் படுமேயானால் அது முடிவிலா அல்லது கந்தழித் தொடர்முறை என் வரையறுக்கப்படும்.

முடிவிலா அல்லது கந்தழி என் குறிப்பிடும்போது ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் அடுத்த மற்றோர் உறுப்பு உள்ளது என்று பொரு ளாகும்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ என்ற கந்தழித் தொடர் முறையை சுருக்கமாக (a_n) அல்லது $\left\{a_n\right\}$ என குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

1. $1, 3, 5 \ldots (2n-1), \ldots \ldots$

2. $-2, -4, -6 \ldots -2n \ldots \ldots$

3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{(-1)^{=n}}{n} \ldots \ldots$

4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n}, \frac{1}{2n} \ldots \ldots$

$$\left[a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad a_2\, n-1 = \frac{2n-1}{2n}\right]$$

என்பதன் தொடர்முறைகளாகும்

102. மட்டு (Modulus)

a என்ற ஒரு எண்ணின் அல்லது இராசியின் எண் மதிப்பு (numerical value) மாத்திரம், அதாவது தனி மதிப்பு மாத்திரம் (absolute value) $|a|$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். இடு 'மட்டு' 'a' எனப்படும்.

$|6| = 6$

$|-8| = 7$

$a > b$ ஆனல். $|a-b| = a-b$

$a < b$ ஆனல், $|a-b| = b-a$

$|a| \; |b| = |ab|$

$|a+b| \leq |a|\, b|$

$a, b,$ என்ற எண்கள் ஒரே குறியைக் கொண்டிருந்தால் $|a+b| = |a| + |b|$ எனவும், ஒன்றுக்கொன்று எதிர் குறிகளைக் கொண்டிருந்தால் $|a| \gtrless |b|$-க்கு ஏற்ப $-\bar{a}+b| = |a-$ $-|b|$ அல்லது $|b| - |a|$ எனவும் எழுதப்பட வேண்டும்.

எனவே $|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a + b + c + d \ \dots \ | \leq |a + b + c + d| + \ \dots$

1-03. $a < b < c$ ஆனால் $|b| < G$,

இங்கு G என்பது $|a|, |c|$ ல எது பெரிதோ அதைக் குறிக்கும்.

$b > o$ ஆக இருந்தால், $c > o$

ஆனால் $b < c$, அதாவது $|b| < |c$

$b < o$ ஆக இருந்தால் $a < o$.

மேலும் $|b| < -a$

அதாவது $|b| \ | < |a|$

$\therefore \ |b| < G|$ $\left[\begin{array}{l} \text{ஏனெனில் } |b| = -b \\ \qquad\qquad |a| = -a \end{array}\right]$

1.04 E, N குறியீடுகள்

E என்பது முதலிலேயே நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் அல்லது கொடுக்கப்பட்ட ஏதாவதொரு மிகச் சிறிய கூட்டெண் (அதாவது) $E = \frac{1}{10}, \ \frac{1}{80}, \ \frac{1}{10^{78}}$ போன் எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண்ணுகவும் இருக்கலாம்.

N என்பது முதலிலேயே நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் அல்லது கொடுக்கப்பட்ட, ஏதாவதொரு மிகப் பெரிய கூட்டெண் (அதாவது $N = 1000, 100{,}000, 10^{100}$ ... போன்ற பெரிய கூட்டெண்.)

1.05. எல்லே (Limit)

எல்லே என்ருல் என்ன என்பது பற்றி நுண் கணிதத்திலும், கோண கணிதத்திலும் ஓரளவு படித்திருக்கிருேம்.

பல முடிவிலா தொடர்களேக் கூர்ந்து கவனிக்கும்போது, n-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு தொடரானது ஒரு எல்லேயை அணுகுவதைக் காண்கிருேம்.

எடுத்துக் காட்டாக

$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \dots \ \dots, \ \frac{n}{n+1} \ \dots \ \dots$

$1, \frac{1}{2}, \ldots \ldots, \frac{1}{n}$ ஆகியவை முறையே '1' என்ற எல்லை யையும், 'O' என்ற எல்லையையும் நெருங்குகின்றன. இக்கருத்தைப் பின்பு விரிவாகக் காண்போம்.

1-06. குவி தொடர்களும் அவற்றின் எல்லைகளும். (Convergence of sequences and their limits)

$n \geq m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, $l - E < a_n < l + E$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காண முடியுமானால், அல்லது எல்லா $n \geq m$ மதிப்பு களுக்கும் $| a_n - l | < E$ ஆக இருந்தால் (a_n) என்னும் தொடர் முறை குவி தொடர்முறை l என்பது அதன் எல்லை எனவும் கூறப் படும்.

(1) $\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; a_n = l$

(2) எல்லை $(a_n) = l$

(3) $(a_n) \to l$ அல்லது $a_n \to l$

என்ற குறியீடுகள் ஏது வொன்றாலும் குறிக்கலாம்.

குறிப்பு : $n \geq m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $| a_n - l | < E$ என்பது

$n \leq m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு— $E < l - a_n < E$ அல்லது $-E < a_n - l < E$ என்பதற்கு சமமாகும்.

1.07. $E ; m ; N$ முறை

இம்முறை மிக ஆற்றலும், சிறப்பும் வாய்ந்த தொரு அடிப் படையான முறையாகும். இது உயர்கணிதத்தில் பகுவியல் 'Analysis' எனப்படும் கணித பகுப்பு முறை என்னும் பகுதியில் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறை பற்றி தெரிந்து கொள்வது இன்றியமையாத தொன்றாகும். இம்முறையை

$$1, \; 1\tfrac{1}{2}, \; 1\tfrac{2}{3}, \; 1\tfrac{3}{4}, \; \ldots \ldots, \; 1 + \frac{n-1}{n}, \; \ldots \ldots$$

என்ற தொடர்முறை கொண்டு விளக்குவோம்.

இங்கு $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

$|a_n - 2| = \frac{1}{n}$ என கிடைக்கும்.

$E = \frac{1}{1000}$ என கொடுக்கப்பட்டால்,

$n > 1000$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$|a_n - 2| < \frac{1}{1000}$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும்.

இங்கு $m = \frac{1}{E} = 1000$ என கொள்கிறோம்.

ஆனால் m-க்கு மீச்சிறு மதிப்பைத்தான் கொடுக்கவேண்டு மென்ற கட்டாய மில்லை.

$n \geq m$ மதிப்புகளுக்கு $|a_n - l| < E$ என்றிருந்தால் போது மானது. உதாரணமாக $E = \frac{1}{1000}$ க்கு $m \geq 2000$ எனவும் கூற லாம். m-ன் மதிப்பு 1000 அல்லது அதற்குயர்ந்த கூட்டெண் மதிப் பைக் கொள்ளலாம்.

$E = \frac{1}{10^{10}}$ என கொடுக்கப் பட்டால், $m = 10^{10}$ அல்லது அதற் குயர்ந்த முழு எண் மதிப்பு பெறும்.

குறிப்பு : $E = \frac{1}{1000}$ ஆனல், $m = 1000$: அதாவது 1000-த் தாவதும் அதற்கு மேற்பட்டும் இருக்கும் இத்தொடரின் **உறுப்புகள்** சுழியத்திலிருந்து $\frac{1}{1000}$ க்கும் குறைவாக வேறுபடுகின்றன **என்று** பொருள்.

மேல் கொடுக்கப்பட்ட முடிவிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட E மதிப்புக்கு m-ன் மதிப்பை எளிதாக கூறலாம்.

சான்றாக

$E = \frac{1}{10}, \frac{1}{80}, \frac{1}{1800} \ldots \ldots$ ஆனல்

$m = 10, 80, 1800 \ldots \ldots$ ஆகும்,

1-08. எல்லை வரையறைபற்றி சில குறிப்புகள்.

$n \geq m$ மதிப்புகளுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு E-க்கும் $|a_n - l| < E$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில் ஒரு

m இருக்கிறது என்பது வரையறை (a_n) என்ற தொடர் முறையை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு 'n' ஒரு ஒற்றைப்படை யெண்ணு யின் $a_n = \frac{n}{n+1}$.

'n' ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணுயின் $a_n = \frac{1}{n}$.

எனவே இத்தொடர் முறை

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \ldots\ldots, \frac{2n-1}{2n}, \frac{1}{2n}$ ஆகும்.

இதன் எல்லை சுழியம் எனக் கொள்வோம்.

$E = \frac{1}{100}$ என்று கொண்டால்

$$| a_n - l | = | a_n - o | = a_n < \frac{1}{100} \text{ ஏனெனில் } n \geqslant 101$$

ஆனால் இந்த சமனின்மை n-ன் 101-க்கு மேற்பட்ட இரட்டைப் படை மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே பொருந்தும். n-ன் 101-க்கு மேற் பட்ட ஒற்றைப்படை மதிப்புகளுக்கு இது பொருந்தாது.

இந்த சமனின்மையானது, n-ன் $-n \geqslant 101$ என்ற எண்ணிறந்த மதிப்புகளுக்குப் பொருந்தி யிருந்தாலும், $n \geq 101$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துவதில்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

எனவே இது மாதிரி சமயங்களில் இந்த தொடர் முறைக்கு எல்லையில்லை (sequence has on limit).

1.01. விரி தொடர் முறைகளும் கந்தழியும். (Divergent sequences and infinity).

a_n என்ற தொடர்முறை கந்தழியை நெருங்கு மாயின் அது ஒரு விரிதொடர் முறை என கூறப்படும்.

குறிப்பு :

$a_n \to +\infty$, அல்லது $a_n \to -\infty$ ஆயினும் இரு தொடர் முறை களும் விரிதொடர் முறை என்றே கூறப்படும்.

1-10. வரம்புள்ள தொடர்முறைகளும் மேல் வரம்புகளும் கீழ் வரம்புகளும் (Bounded sequences and upper and lower bounds):

பல தொடர் முறைகளில் $L, \leq a_n \leq M$ என்ற சமனின்மைக்-கொப்ப x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் L, M என இரு எண்கள் அல்லது இராசிகள் காண முடியலாம். அப்படிப்பட்ட தொடர் முறைகள் வரம்புடையன எனவும், L அதன் கீழ் வரம்பு எனவும், M அதன் மேல் வரம்பு எனவும் கூறப்படும். மேலும் $L^{\prime} < L$ எனவும், $M^{\prime} > M$ எனவும் $L^{\prime}$ $M^{\prime}$ என இரு எண்கள் இருக்கு மாயின் $L^{\prime}$ $M^{\prime}$ என்பவையும் முறையே கீழ் வரம்பு, மேல் வரம்பு என கூறலாம்.

எனவே மேல் வரம்பு எண்களில் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும் கீழ் வரம்பு எண்களில் ஒரு மீப்பெறு எண்ணும் இருக்கின்றன. இந்த எண்கள் முறையே, அத்தொடர் முறையின் மேல் வரம்பு, கீழ் வரம்பு என கூறப்படும்.

1-11. அலை தொடர் முறைகள் (Oscillating sequence):

ஒரு தொடர் முறை எல்லையை நெருங்காமல், மேல் வரம்பும் கீழ் வரம்பும் கொண்டதாக இருந்தால் அது அலை தொடர் முறை எனப்படும். அது குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்கிடையில் அலைந்து கொண்டிருக்கும்.

சான்ருக $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

என்ற தொடர் முறையில், நாம் எவ்வளவு துரம் சென்ருலும், 'O' எல்லையை நெருங்கும் எண்ணற்ற உறுப்புகளும், 'I' எல்லையை நெருங்கும் எண்ணற்ற உறுப்புகளும் உள்ளன. எனவே இத் தொடர் முறை ஒருகுறிப்பிட்ட எல்லையை நெருங்காமல் 'O'-க்கும் 'I'-க்கும் இடையில் அலைந்து கொண்டிருக்கிறது. இது ஒரு அலை தொடர் முறை.

ஒரு தொடர் முறையானது ஒரு எல்லையை நெருங்காமலும், மேல் வரம்பும் கீழ் வரம்பும் இல்லாமலும் இருந்தால், அத்தொடர் முறை முடிவிலா எல்லைகளுக்கிடையில் அலைகிறது என்று கூறு வோம்.

1-12. குவி தொடர் முறைகளைப் பற்றிய சில முக்கியமான தேற்றங்கள்:

(1) குவி தொடர் முறை வரம்புடையதாகும்.

(2) $(\bar{a}_n)$ என்ற, மிகை உறுப்புகளின் தொடர்முறை (ஒரு உறுப்பும் சுழிய மதிப்புடையதல்ல) சுழியத்துக்கு மேற்பட்ட ஒரு எல்லையை நெருங்கினுல், n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $O > L \leqq a_n \geqq M$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்க, L, M என்ற எண்கள் இருக்கின்றன.

1-13. சூனியத் தொடர் முறை (Null sequence) :

ஒரு தொடர் முறையின் எல்லை சுழியமாளுல், அது சூனியத் தொடர்முறை எனப்படும். (a_n) ஒரு சூனியத்தொடர் முறையாளுல், கொடுக்கப்பட்ட E-க்கு, $n \geqq m$ மதிப்புகளுக்கு $| an | = | a_n - O | < E$ என்பதற் கிணங்க ஒரு m-ஐக் காணலாம்.

அ, (a_n) என்பது ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாளுல் (ka_n) என்பதும் ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும். k ஒரு மாறிலி.

(a_n) ஒரு சூனியத்தொடர் முறையாளுல்—(a_n)-ம் ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

ஆ, (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகவும், (b_n) ஒரு வரம் புள்ள தொடர் முறையாகவும் இருந்தால், $(a_n \; b_n)$ ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(b_n) ஒரு குவி தொடராக இருக்கும் போதும், இத்தேற்றம் பொருந்தும்.

இ. (a_n)-ம் (b_n)-ம் சூனியத் தொடர்முறைகளாளுல், $(a_n + b_n)$ என்பது ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

1. எல்லை $(a_n - b_n) = 0$.

2. எல்லை $(a_n) = 0$, எல்லை $(b_n) = 0$, எல்லை $(n) = 0$ ஆளுல் எல்லை $(a_n + b_n + c_n) = 0$ ஆகும்.

ஈ. $| r | < |$ ஆளுல், $1, r, r^2 \; \ldots \; \ldots \; r^{n-1} \; \ldots \; \ldots$ என்ற தொடர்முறை ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

உ. அவ்வாறே $a_1 \; ar, ar^2 \; \ldots \; ar^{n-1} \; \ldots$ என்ற தொடர் முறையும் சூனியத் தொடர் முறையாகும். $n \geqq m$ மதிப்பு களுக்கு

$\frac{| a_n + 1 |}{| a_n |} < k < 1$ ஆளுல், எல்லை $(a_n) = 0$ ஆகும். k தகுந்த மதிப்பை ஏற்கும் ஒரு கணியம்,

ஊ. $a_n = \frac{1}{np}$, $p > O$ ஆனால், (a_n)ஒரு சூனிய தொடர் முறையாகும்.

எ. (a_n) ஒரு குவி தொடர்முறையாகி l என்ற எல்லையைப் பெற்றிருந்தால், $(\bar{a}_n - l)$ என்ற தொடர்முறை ஒரு சூனிய தொடர் முறையாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

1-14. குவி தொடர்முறையின் முக்கியமான பண்புகள் :

1. $\lim_{n \to \infty} (a_n) = A$ என்றால்,

   (a) $\lim_{u \to \infty} (a_n + k) = A + k$ ஆகும்

   (b) $\lim_{n \to \infty} (ka_n) = kA$ ஆகும். ($k \neq 0$ நிபந்தனை)

   (c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 1$; ($B \neq 0$ நிபந்தனை)

2. $\lim_{n \to \infty} (a_n) = A$, $\lim_{n \to \infty} (b_n) = B$ ஆனால்,

   (a) $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

   (b) $\lim_{n \to \infty} a_n + b_n) = AB$:

   (c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ நிபந்தனை)

1-15. ஓரியல்பான தொடர் முறைகள் (Monotonic sequence):

$(\bar{a}_n)$ என்ற தொடர் முறை

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \quad \ldots \quad \geqq a_n \geqq an+1 \geqq \quad \ldots$$

என்ற விதிப்படி இருக்குமாயின் அது ஓர் ஓரியல்பான, இறங்கு தொடர்முறை (decreasing monotonic sequence) எனப்படும்.

(a_n) என்ற தொடர் முறை

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \geqq a_4 \quad \ldots \quad \leqq a_n \leqq a_n + 1 \leqq \quad \ldots$$

என்ற விகிதப்படி இருக்குமாயின், அது ஒரு ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறையாகும், (Monotonic increasing sequence).

1. ஓரியல்பான தொடர் முறைகளுக்கு ஒரு முடிவான (திட்டமான) அல்லது ஒரு முடிவற்ற கந்தழி எல்லை யுண்டு.

ஓர், ஓரியல்பானதொடர் முறையில் எல்லா 'n' மதிப்புகளுக்கும் $|a_n| < |A|$ ஆக இருப்பின், அது ஒரு குவி தொடர்முறையாகும். இல்லையேல் அது ஒரு விரி தொடர்முறையாகும். இங்கு A என்பது n உடன் தொடர்பில்லாத ஒரு திட்டமான மதிப்பு.

ஏறு, இறங்கு தொடர்முறைகளைப் பற்றிய முக்கியமான தேற்றங்கள்.

1. ஓர், ஓரியல்பானஏறும் தொடர்முறை,மேல்வரம்பு உடையதாயின் ஒரு குவி தொடர் முறையாகவும், மேல் வரம்பற்றதாயின் ஒரு விரி தொடர் முறையாகவும் இருக்கும்.

2. ஓர், ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர்முறை கீழ் வரம்புடையதாயின், ஒரு குவி தொடர் முறையாகவும்' கீழ் வரம்பற்றதாயின், விரி தொடர்முறையாகவும் இருக்கும்.

1-16. சிறப்பான தொடர் முறை :

1. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்ற பொது உறுப்பைக் கொண்ட தொடர்முறை $(\bar{a}_n)$ ஒரு குவி தொடர்முறை யெனவும், ஒரு திட்டமான எல்லை பெற்றது எனவும் நிறுவலாம்.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

அதாவது $a_n+1 > a_n$.

எனவே (a_n) ஒரு ஏறும் தொடர்முறை

மேலும் $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\ldots$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \ldots\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 3$$

மேலும் $a_n > 1$

$\therefore$ எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

$1 < a_n < 3.$

எனவே (a_n) ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை; கீழ், மேல் வரம்புகள் பெற்றது. ஆகவே (a_n) ஒரு குவி தொடர்முறையாகும்; ஒரு திட்டமான எல்லை பெறும்; அவ்வெல்லை 'e' என குறிக்கப் படும். இந்த 'e' நேப்பியர் மடக்கை முறையில் மடக்கை அடியாய் கூமைகிறது. (Napierean base for logarithms).

இவ்வாறே

2. $a_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}$ என்ற பொது உறுப்பைக்கொண்ட

(a_n) என்ற தொடர்முறையும் ஒரு குவி தொடர்முறை யெனவும், 'e' என்ற எல்லை பெற்ற தெனவும் நிறுவலாம்.

இப்போது 1.16 (1), (2)-ல் உருவாகிய எல்லையைப் பொதுப் படுத்தி

(அ) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ என்பது x-ன் எல்லா மிகை முழு

எண் மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும் எனவும்

(ஆ) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ என்பது x-ன் எல்லா குறை யெண்

மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும் எனவும் நிறுவலாம்.

1-17. தொடர்ச்சியான சார்புகள் (continuous function):

1. தொடர்ச்சி யான சார்பு—வரையறை.

$x > a$ ஆகஇருந்து, a-ஐ அணுகும் போதும்,

$x < a$ ஆக இருந்து, a-ஐ அணுகும் போதும்.

$f(x)$ எல்லை மதிப்புகள் பெற்று, அவ்விரு எல்லை மதிப்புகளும் $f(a)$-க்கு சமமானல், $f(x)$ என்பது a என்ற புள்ளியில் (அல்லது a என்ற மதிப்புக்கு) தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும். $x > a$ ஆக இருந்து a-ஐ அணுகுவதை

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ எனவும்,

$x > a$ ஆக இருந்து a-ஐ அணுகுவதை

$\lim\limits_{x \to \bar{a} = 0} f(x)$ எனவும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

எடுத்துக்காட்டு :

$3+0$ என்பது 3.1, 3.001, 3.0001 ... ... $\to 3$

$3-0$ என்பது 2.9, 2.99, 2.9999 ... ... $\to 3$.

$f(x) = x^2$ எனக் கொண்டால்,

$\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 9$

$\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = 9$

$x = 3$ ஆனல் $f(x) = 9$

எனவே $f(x) = x^2$ என்ற சார்பு, $x = 3$ என்ற புள்ளியில் (அல்லது $x = 3$ என்ற மதிப்புக்கு) தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

இத்த வரையறையை இன்னும் நுட்பமாகப் பின் வருமாறு கூறுவோம்.

$|x-a| < h$ என்னும் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு $|f(x) - f(a)| > E$ என்பதற்கிணங்க $h > 0$ என்னும் ஒரு எண்ணைக் காண முடியுமேயானல், $f(x)$ என்னும் சார்பு a-என்னும் புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

இது

$\lim\limits_{x \to a-0} = \lim\limits_{x \to \bar{a} = 0} = f(a)$ என்பதேயாகும்,

குறிப்பு $(\bar{a}, b)$ என்ற இடை வெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகுமாயின், $f(x)$ அவ்விடை வெளியில் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்,

3. x^m, a^x, e^x, $\log a^x$ என்னும் சார்புகள் x-ன் தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.

$a > 0.$

4. $f(x)$ எனும் சார்பு, l எனும் புள்ளியில் x-ன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக விருந்து, மேலும் எல்லை $a_n = l$ என்றிருந்தால் எல்லை $f(a_n) = f(l)$ ஆகும்.

பயிற்சி :

(1) $a_n = \frac{\log n}{n}$ ஆனால் $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக

(2) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ஆனால் $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக

(3) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$; $b_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}$ ஆனால்

$a_n < b_n$ என நிறுவி, எல்லை

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து

$\lim\limits_{n \to \infty} (\bar{a}_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (b_n)$ என நிறுவுக.

2. கந்தழித் தொடர்கள்

குவிதலும், விரிதலும்

2-01. தொடர் :

$a^1, a_2, \ldots a_n \ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர்முறையின் உறுப்புகளை, $+$ என்ற குறியீட்டால் இணைத்துப் பெறப்படும், $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ldots$ என்பது ஒரு **தொடர்** எனப்படும்.

முடிவுள்ள தொடர் :

இத்தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கைவரை, உறுப்புக்கள் கொண்டால், அது ஒரு 'முடிவுள்ள' (finite) தொடரெனப்படும்.

கந்தழித் தொடர் :

கந்தழிவரை உறுப்புக்களைக் கொண்ட தொடர், ஒரு முடிவிலாத் தொடர் அல்லது கந்தழித் தொடர் (Infinite series) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \quad \ldots \quad +\frac{1}{2^{100}}$ என்பது 101 உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள பெருக்குத் தொடர்.

இது $\sum^{101} \frac{1}{2^{n-1}}$ என எழுதப்படும்,

எந்த ஒரு முடிவுள்ள தொடருக்கும் ஒரு திட்டமான கூட்டுத் தொகையுண்டு. மேலே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் முதல் 101 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right) = 2\left(\frac{2^{101}-1}{2^{121}}\right)$$

$$= \frac{2^{101}-1}{2^{100}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \infty$-க்கு என்பது ஒரு **கந்தழிப்** பெருக்குத் தொடர், இது $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ என **எழுதப்படும்.**

இம்மாதிரியான தொடருக்கு திட்டமான கூட்டுத் தொகை உண்டா, இருப்பின் அது எவ்வாறு வரையறுக்கப்படுகிறதென காண்போம்.

2.02. கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத்தொகை வரையறை :

$a_1+a_2+a_3+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \infty$ வரை ஒரு தொடர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதைக்கொண்டு $S_1, S_2, S_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad S_n \quad \ldots$ என்ற (S_n) என்ற தொடர்முறை அமைப்போம். $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$

$$S_n = a_1 + a_2 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_n$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

இப்போது (S_n) என்றதொடர் முறை குவிந்து S என்ற எல்லையைப் பெறுமாயின், கந்தழித் தொடரான

$$a_1 + a_2 + \quad \ldots \quad \ldots \quad \infty = \sum_{1}^{\infty} a_n = \sum S_n$$

ஒரு குவிதொடரெனப்படும் : அதன் கூட்டுத் தொகை S என வரையறுக்கப்படுகிறது. (Convergent series, with a sum S)

குறிப்பு S என்பது ஒரு எல்லை (அல்லது ஓர் அணுகி) என்பது வலியுறுத்துவதற்குரியதோர் அடிப்படைக் கருத்து. S என்பது ஒரு தொடரைக் கூட்டிப் பெறப்படும் தொகையல்ல. அது ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை தான். ஆகவே எல்லை $\lim_{u \to \infty} S_n = S$ என்று கூறுவது எல்லைக் கருத்தை வலியுறுத்துவதாகும். S என்பது அக்கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை யென்பது ஒரு மரபே யொழிய வேறல்ல.

அவ்வாறே (S_n) என்ற தொடர் முறை விரியுமாயின் அல்லது அலையுமாயின், $\sum a_n$ என்ற கந்தழித்தொடர் முறையே ஒரு விரி தொடரெனவும், ஒரு அலை தொடரெனவும், கூறப்படும். (Divergent series oscillating series).

தேற்றம் 1 : $\sum_{1}^{\infty} a_n$ என்ற தொடர் A என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும், $\sum_{1}^{\infty} b_n$ என்ற தொடர் B என்ற கூட்டுத் தொகைக் கும் குவியுமானல்

(i) $(a_1 + b_1) + (a_3 + b_2) + \dots \dots \infty$-க்கு என்ற தொடர் $A+B$என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும்,

(ii) $(a_1 - b_1.) + (a_2 — b_2) + \dots \dots \infty$-க்கு என்ற தொடர் $A—B$ என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும்,

(iii) $Ka_1 + Ka_2 + \dots \dots \infty$ என்ற தொடர் KA என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும் குவியும்.: இங்கு K ஒரு மாறிலி.

தேற்றம் 2 : ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்-புக்கள் நீக்கப்படுமாயின், அத்தொட ரின் குவிதன்மை, விரிதன்மை, அலேதன்மை மாறுபடாது. $\sum a_n$ என்பது ஒரு தொடராக இருக்கட்டும். இத்தொடரின், முதல் P உறுப்புக்கள் நீக்கப்படுகிறதென கொள்வோம்.

$$A_n = a_1{}^1 + a_2 + \dots \dots + an + \dots\dots$$

$$S_n = ap + 1 + ap_2 + \dots \dots ap+n$$

எனக் கொண்டால்,

$$S_n = A_{p+n} - A_p.$$

$\sum a_n$, A-க்குக் குவிந்தால்

அதாவது எல்லை $(A_n) = A$ என்றால்,

எல்லை $(S_n) =$ எல்லை $(A_{p+n} - A_p) = A - A_p$

எனவே (S_n) குவிகிறது. இதே மாதிரியே, முதலில் கொண்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை $\pm\infty$-க்கு விரியுமானாலும் அல்லது குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு கிடைப்பட்டோ அல்லது $\pm\infty$-க்கு இடைப்பட்டோ, அலையுமாயினும், ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை எடுத்து விட்டாலும், இரண்டாவது தொடரின் விரிதன்மை அல்லது அலைதன்மை மாறுபடாது.

குறிப்பு : இதன் மறுதலையும் உண்மை.

2-03. பெருக்குத் தொடர் (Geometrical series) :

(1) $a + ar + ar^2 + \dots \dots + ar^{n-1} + \dots\dots$
என்ற கந்தழிப் பெருக்குத் தொடர் $|r| < 1$ ஆனால் குவியும் — அதன் தொகை $\frac{a}{1-r}$ ஆகும்.

இங்கு, $Sn = a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^{n-1}$

$$= a\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1=r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$$\left\{\frac{a}{1-r} - S_n\right\} = \frac{ar^n}{1-r} = kr^n, \text{ (என இருக்கட்டும்)}$$

இங்கு $k = \frac{a}{1-r}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}{}^{\text{எல்லை}} \left\{\frac{a}{1-r} - Sn\right\} = \lim_{n\to\infty}{}^{\text{எல்லை}} kr^n =$$

$(\because |r| < 1)$

$\therefore$ எல்லை $(Sn) = \frac{a}{1-r}$, அதாவது தொடர்

$\sum a_n$ ஒரு குவி தொடர். அதன் தொகை $\frac{a}{1-r}$

(2) $\geq r$ 1 ஆனால், கந்தழிப் பெருக்குத்தொடர் விரியும் r —$1 \geqslant$ ஆனால் அலையும். $r \geqslant 1$ ஆனால், $Sn = \frac{ar^n}{r-1} - \frac{a}{r-1}$.

r^n கந்தழியை n-னுடன் நெருங்குவதால், a ஆனது மிகை எண் $(a > 0)$ அல்லது எதிர் எண்ணாக $(\bar{a} < 0)$ இருப்பதற்கேற்ப

எல்லை $(Sn) = \pm \propto$ ஆகிறது.

$r = 1$, என்றால் $S_n = na$

∴ எல்லை $(S_n) = \pm \propto$, $(a, +$ அல்லது—ஆக இருப்பதற்கேற்ப)

(3) $r = <-1$ ஆகும்போது, $r = -k$ $(k > 1)$ எனக்கொண்டு

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1+k} + \frac{(-1)^{n-1} \cdot a k^n}{1+k}$$

k^n, n உடன் கந்தழியை நெருங்குவதால் (S_n) கந்தழி எல்லைகளுக்கு இடையில் அலைகிறது.

$r = -1$ ஆகும்போது 'n' ஒற்றை அல்லது இரட்டைப் படையாயிருப்பதற்கேற்ப $S_n = a$ அல்லது 0 ஆகும்.

எனவே, இங்கு அது அறுதியிட்ட எல்லைகளுக்கிடையில் அலைகிறது.

2-04. மிகை எண்களை மட்டும் உறுப்புகளாய்க் கொண்ட தொடர் (Series of positive terms) :

மிகை எண் உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர் குவியும் அல்லது விரியும். Σa_n என்ற தொடரின் உறுப்புகள் யாவும் மிகை மதிப்புக்கள் உடையன வாயின், $(S_n) = (a_1 + a_2 + \ldots \ldots + a_n)$ என்றி தொடர்முறை ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறையாகும். உறுப்புக்கள் யாவும் மிகை எண்களாதலால்,

$$S_n > S_n - 1 > S_n - 2 > \ldots\ldots > S_2 > S_1$$

தொடர்முறை (S_n) ஒருமேல் வரம் புடைத்தாயின் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும். (2) தொடர்முறை (S_n) மேல் வரம்பற்றதாயின் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

Σa_n என்ற தொடரின் உறுப்புக்கள் யாவும் குறை மதிப்புடை, யனவாயின் $(S_n) = a_1 + a_2 + \ldots \ldots + a_n)$ என்ற தொடர்முறை ஓர் "ஓரியல்பான" இறங்கும் தொடர் முறையாகும்.

இங்கு (1) தொடர்முறை (S_n) ஒரு கீழ் வரம்புடைத்தாயின் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும். (2) தொடர்முறை (S_n) ஒரு கீழ் வரம் பற்றதாயின் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும். $-\infty$-க்கு விரியும்.

2-05. சோதனைகள் :

பின்னர் கந்தழித் தொடர் Σa_n (மிகையெண் உறுப்புக்கள் கொண்டது) குவியுமா, விரியுமா என்பதை அறிய சில சோதனை முறைகள் வகுத்துக் கூறப்பட்டிருக்கின்றன. தேவைக்குத் தக்கபடி அச்சோதனைகளைப் பயன்படுத்தி குவி, அலை, விரி, தன்மைகளை அறியலாம்.

நிறைய இடங்களில், S_n-ஐக் கணக்கிட இயலாது. எனவே இத்தொடர்கள் குவி தொடரா, விரி தொடரா என கண்டுபிடிக்க முடியாது.

சோதனை 1 : ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள் (Comparison tests) :
எல்லா n மதிப்புகளுக்கும்,

(அ) $O > a_n \leqq kb_n$ என்ற கட்டுப் பாட்டில் Σb_n குவிதொட ரானல், Σa_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ஆ) $a_n \geq kb_n > O$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் Σb_n விரி தொட ரானல்,

Σa_n-ம் ஒரு விரிதொடராகும்.

(அ) **நிரூபணம் :** $\sum_1^\infty b_n$ என்பது ஒரு குவிதொடர் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad \sum_1^\infty b_n = B \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

மேலும் $\sum_1^n a_n = A_n$ எனவும்,

$\sum_{1}^{n} b_n = B_n$ எனவும் கொள்க

$\sum_{1}^{\infty} b_n$ ஒரு குவி தொடர் ஆகையால்,

$$B_n < B ; K , B_n < K . B$$

∴ எனவே (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, அதற்கு. ஒரு மேல் வரம்புண்டு.

∴ (A_n) குவியும்,

∴ $\sum_{1}^{\infty} an$ ஒரு குவி தொடராகும்.

அதன் கூட்டுத் தொகை A என்றால் $A < KB$ ஆக இருக்கும்.

$K=1$ என்பதும் சிறப்பாகப் பொருந்தும், என்பதையும் கொள்க.

(ஆ) நிருபணம்: $\sum_{1}^{\infty} b_n$ ஒரு விரி தொடர் என கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

∴ N என்ற எவ்வளவு பெரிய எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், $Bn > \frac{N}{K}$ என்பதற் கொப்ப, ஒரு $n = m$ கண்டுபிடிக்க முடியும்.

அப்படிப்பட்ட $n \geqslant m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $B_n > \frac{N}{K}$ ஆக இருக்கும். கொடுக்கப்பட்டபடி, $n \geqslant n$, என்ற மதிப்புக்களுக்கு, $A_n \geqslant K B_n$, அதாவது $A_n \geqslant N$.

எனவே (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, மேல் வரம் பற்றது.

∴ (A_n) விரியும்

∴ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்

முக்கிய குறிப்பு :

$K = 1$ என்ற மதிப்பு பெற்ருலும் இவ்விரு சோதனைகளும் பொருந்தும். எனவே இச்சோதனைகள், சிறப்பாக பின்வருமாறு உருவம் பெறும்.

(அ) $O < a_n < b_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum b_n$ குவி தொடராஞல் $\sum a_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ஆ) $a_n > b_n > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum b_n$ விரி தொடராஞல் $\sum a_n$-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.
இச்சோதனைகளைப் பொதுவாக பின்வருமாறு எழுதலாம் :

(1) ஒரு தொடரின் உறுப்புக்கள், முறையே (ஒன்றிற்கொன்று) மற்ருெரு குவி தொடரின் உறுப்புக்களை விடச் சிறியதாயின், முதல் தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) ஒரு தொடரின் உறுப்புக்கள் முறையே (ஒன்றிற்கொன்று) மற்ருெருவரி தொடரின் உறுப்புகளை விட பெரியதாயின், முதல் தொடரும் ஒரு விரி தொடராகும்.

சோதனை 2 :

எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும் $O > L \leqslant a_n/b_n \leq M$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்க L, M என இரண்டு திட்டமான எண்கள் இருக்குமாயின், $\sum a_n$-ம் $\sum b_n$-ம் ஒருங்கே குவியும், அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

நிரூபணம் :

கொடுக்கப்பட்டபடி $a_n \leq M \cdot b_n$; $a_n \geq L\, b_n$ எனவே சோதனை (1)-ன்படி, $\sum b_n$ விரிவது அல்லது குவிவதற்கேற்ப $\sum a_n$-ம் விரியும் அல்லது குவியும்.

மேலும் கொடுக்கப்பட்டபடி

$$b_n \leq \frac{a_n}{L};\ b_n \leq \frac{a_n}{M}$$

எனவே, சோதனை (1)-ன்படி $\sum a_n$ குவியுமாயின்,

$\sum b_n$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

$\sum a_n$ விரியுமாயின், $\sum b_n$-ம் ஒருவிரி தொடராகும்.

எனவே Σa_n-ம் Σb_n-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

சோதனை 3 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0$$

என்ற திட்டமான எல்லை இருக்குமாயின், Σa_n-ம், $M b_n$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும். எல்லை வரையறைப்படி, ξ என்ற எவ்வளவு சிறிய மிகை எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், $n \geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக் கொப்ப,

$$K - \xi < \frac{a_n}{b_n} < K + \xi$$

என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில் m என்ற ஒரு மிகை முழு எண் காணமுடியும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களின் முதல் m உறுப்புகளுக்குப் பின்பு,

$$0 < K - \xi < \frac{an}{b_n} < K + \xi$$

என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும்.

எனவே சோதனை 2-ன்படி இரு தொடர்களும் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

சோதனை 4 .

(அ) $\frac{a_n+1}{a_n} \leq \frac{b_n+1}{b_n}$ என்றால்

Σb_n ஒரு குவி தொடராயின், Σa_n-ம் ஒரு குவி தொடராகும்

(ஆ) $\frac{a_n+1}{a_n} \leqslant \frac{b_n+1}{b_n}$ என்றால்

Σb_n ஒரு விரி தொடராயின், Σa_n-ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(அ) $\Sigma b_n \to B$ எனவும்

$\sum_1^n b_n = B_n$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $B_n < B$

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n$$

$$= a_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_3} \quad \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} - \right)$$

$$\leq a_1 \left(1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} + \ldots\ldots \right)$$

$$= a_1 \left(1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \ldots\ldots \frac{b_n}{b_1} \right)$$

$$= \frac{a_1}{b_1} (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n)$$

$$< \frac{a_1}{b_1} B$$

$\therefore$ (A_n) ஒரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை மேல்வரம்பு பெற்றது. ஆகவே

(A_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும்.

$\therefore$ Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(ஆ) Σb_n ஒரு விரி தொடரெனக் கொண்டால், $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, எவ்வளவு பெரிய N கொடுக்கப்பட்டாலும்,

$$B_n = \sum_1^n b_n > n \text{ ஆகவிருக்கும்.}$$

(அ)-ல் கண்ட முறையை யொட்டி,

$$A_n = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)$$

$$\geq \frac{a_1}{b_1} b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $A \geqslant \frac{a_1}{b_1} B_n$.

ஆனால் (B_n) ஒரு விரி தொடர் முறை, மேல் வரம்பற்றது; ஆகவே (A_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

$\therefore$ Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

சோதனை 5 :

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ \ldots\ldots\ \infty$$ என்ற தொடர்

$$\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right)$$

(a) $k > 1$ ஆனால் குவி தொடராகும்;

(b) $k \leq 1$ ஆனால் விரி தொடராகும்.

( ) $k > 1$ எனக் கொள்வோம். r என்ற ஏதாவதொரு மிகை முழு எண் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது, $r < (r+1)$

$$\therefore\ r^k < (r+1)^k;\qquad \therefore\ \frac{1}{r^k} > \frac{1}{(r+1)^k}$$

இது $r=1, 2, 3, \ldots$ என்ற எல்லா மிகை எண் மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். இப்போது கொடுக்கப்பட்ட தொடர்,

$$\frac{1}{1^k}+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8^k}+\ \ldots\ +\frac{1}{15^k}\right)+\ldots\ \ldots \quad (A)$$

எனக் கொள்ளலாம்.

$$\text{ஆனால்}\ \frac{1}{r^k} > \frac{1}{(r+1)^k}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2^k} > \frac{1}{3^k} > \frac{1}{4^k} > \ \ldots$$ என்பது உண்மையாகும்.

$$\therefore\ \left\{\frac{1}{1^k}+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{7^k}\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{8^k}+\ \ldots\ldots\ +\frac{1}{15^k}\right)+\ \ldots\ldots\ \right\}$$
$$< \left\{\frac{1}{1^k}+\frac{2}{2^k}+\frac{4}{4^k}+\frac{8}{8^k}+\ \ldots\ldots\ \right\}$$
$$= 1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\frac{1}{2^{3(k-1)}}+\ \ldots\ldots \quad (3)$$

இத் தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடர், பொது விகிதம் $\frac{1}{2^{Y-1}}$. $k>1$ ஆகையால், $k-1>0$ ஆகும்.

$\therefore \quad 2^{k-1} > 2^0$

அதாவது $2^{k-1} > 1$

$\therefore \quad \frac{2}{2^{k-1}} < 1$ ஆகும்.

$\therefore$ (*B*) எனக் கண்ட பெருக்குத் தொடர் குவியும்.

$\therefore \quad \Sigma \frac{1}{n^k}$ என்ற தொடரின் உறுப்புக்களை வசதியாக அடைப்புக்குள் இடுவோமாயின், பெறப்படும் தொடரின் உறுப்புக்கள் (அதாவது தொடர் (*A*)-ன் உறுப்புக்கள்) முறையே மற்ருேர் குவித்தொடரின் உறுப்புகளுக்குக் குறைவாக இருக்கின்றன.

எனவே, சோதனை (1) முதற் பிரிவின்படி, $\Sigma \frac{1}{n^k}$ ஒரு குவித் தொடராகும்,

இங்கு $k > 1$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதது.

(*b*) (1°) $k=1$ எனக் கொண்டால், தொடர்

$$>1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \ldots\ldots \tfrac{1}{8})$$

$$+ (\tfrac{1}{9} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{16}) + \ldots\ldots \quad (C)$$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} \quad \ldots\ldots$ ஆதலால்,

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \ldots \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \ldots\ldots \tfrac{1}{16})$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + 2\,(\tfrac{1}{4}) + 4\,(\tfrac{1}{8}) + 8\,(\tfrac{1}{16}) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots \quad (D)$$

இது ஒரு விரி தொடரென எளிதில் புலனாகிறது.

$\therefore \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots \infty$-க்கு

என்ற தொடரின் உறுப்புக்களை வசதியாக அடைப்புக்குள் இடுவோமாயின், பெறப்படும் தொடரின் உறுப்புக்கள் (தொடர் *c*)

முறையே மற்றோர் விரி தொடரின் உறுப்புக்களை விடப் பெரிதாக இருக்கின்றன. ஆவே, சோதனை 1, இரண்டாம் பிரிவின்படி,

$$k = 1 \text{ ஆனால்,} \quad \Sigma \frac{1}{n^k} = \Sigma \frac{1}{n}$$

ஒரு விரி தொடராகும். இது ஒரு முக்கியமான தொடர்.

(*ii*) $k < 1$ எனக் கொள்வோம். அப்போது, r என்ற எந்த மிகை எண் மதிப்புக்கும்,

$$r^k < r^1 \qquad \therefore \frac{1}{n^k} > \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{2^k} > \tfrac{1}{2}\,; \; \frac{1}{3^k} > \frac{1}{3}\,; \;\dots\dots$$

என்பவை பொருந்தும், $\therefore \dfrac{1}{1^k} + \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{3^k} + \dots\dots$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots\dots \text{ (விரி தொடர்)}$$

எனவே சோதனை (1) இரண்டாம் பிரிவின்படி, $k < 1$ ஆனால் $\Sigma \dfrac{1}{n^k}$ விரி தொடராகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\Sigma a_n, \Sigma b_n$ என்பன மெய்யெண் உறுப்புகளின் குவி தொடர்களானால்

(a) $\Sigma(a_n + b_n)$

(b) $\Sigma(a_n b_n)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $\Sigma a_n b_n$ என்பவை குவியும்.

(a) $\Sigma a_n \to A$, $\Sigma b_n \to B$ எனக் கொள்வோம். மேலும்

$$a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n = A_n,$$

$$b_1 + b_2 + \dots\dots + b_n = B_n,$$

$$S_n = \sum_1^n (a_r + b_n), \text{ என்று கொள்வோம்.}$$

எல்லை $S_n =$ எல்லை $(A_n + B_n) = A + B$.

$\therefore \quad \Sigma (a_n + b_n)$ ஒரு குவி தொடர்.

(*b*), (*a*)-விருந்து $\Sigma(a_n + {}_1n)$ ஒரு குவி, தொடரென கண்டோம்.

எனவே $\Sigma \frac{(a_n + b_n)}{2}$ ஒரு குவி தொடர்.

ஆனால் $(a_n \quad b_n)^{\frac{1}{2}} < \frac{a_n + b_n)}{2}$

ஆதலால், $\Sigma (a_n b_n)^{\frac{1}{2}}$ ஒரு குவி தொடர்.

(c) இப்பொழுது, $b_n < B_n < B$ எனவே, $a_n b_n < B . a_n$ ஆனால் Σa_n ஒரு குவி தொடர்.

$\therefore \quad \Sigma a_n b_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\Sigma \left(\frac{1}{x^n + x^{-n}} \right) \quad (x > 0)$ என்ற தொடரின் குவி தன்மை காண்க.

வகை 1.

$x > 1$ எனக் கொள்வோம்.
$x^n + x^{-n} > x^n$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^n}$$

ஆனால், $\Sigma \frac{1}{x^n}$ ஒரு குவி தொடர் ;

($\because \quad \Sigma \frac{1}{x^n}$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்,

பொது விகிதம் $\frac{1}{x} < 1$ எனவே குவிதொடர்)

எனவே $\Sigma \left(\frac{1}{x^n + x^{-n}} \right)$ ஒரு குவி தொடர்.

வகை 2.

$0 < x < 1$ எனக் கொள்வோம்.
$x^n + x^{-n} > x^{-n} \quad \therefore \quad \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^{-n}} = x^n$.

ஆனால் Σx^n ஒரு பெருக்குத் தொடர்,

பொது விகிதம் $x<1$, எனவே குவி தொடர்.

எனவே $\Sigma\left(\frac{1}{x^n+x^{-n}}\right)$ ஒரு குவி தொடர்.

வகை 3.

$$x=1 \text{ ஆனால், } \frac{1}{x^n+x^{-n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

எனவே, n - மதிப்பை அதிகப்படுத்தி (S_n)-ஐ அதிகமாக்க முடியும்.

$$\therefore \quad \Sigma\frac{1}{x^n+x^{-n}} \text{ விரியும்.}$$

இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $x \gtrless 1$ ஆகும்போது குவியும். $x=1$ ஆகும்போது விரியும் என தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.

$\Sigma\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}\right)$ என்ற தொடரின் குவி தன்மையை அறிக.

$$\text{இப்போது } a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p} = \frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$b_n = \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, எல்லை $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$

ஆனால் $\sum b_n$, $p+\frac{1}{2}>1$ ஆனால் குவியும்.

$p+\frac{1}{2} \leq 1$ ஆனால் விரியும்.

எனவே $\sum a_n$, $p>\frac{1}{2}$ ஆனால் குவியும்.

$p\leq\frac{1}{2}$ ஆனால் விரியும்.

பயிற்சி

பின்வரும் தொடர்களின் குவி/விரி தன்மையை அறிக

(1) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}}$ (2) $\sum \frac{n+1}{\sqrt{(n^6-\frac{5}{4})}}$

(3) $\sum \sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}$

சோதனை 6.

தாலம் பெயரின் விகித சோதனை (D' Alamberts Ratio Test):

$n \geqslant n$ என்ற எல்லா மதிப்புக்ளுக்கும்

(a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$, என்ற சமனின்மை கட்டுப்பாடு பொருந்துமாயின் $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

k தகுந்த மதிப்பை ஏற்கும் ஒரு கணியம்

(b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ஆனல், $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

வகை 1.

$n > m$ ஆனல்,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \dots \frac{a_{m+1}}{a_m} \times a_m$$

$\geqslant a_m = k$ (என்போம்)

எல்லா n மதிப்புகளுக்கும், $\sum b_n$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $b_n = k$. $\sum b_n$ ஒரு விரி தொடர்.

$n > m$-க்கு, $a_n \geqq b_n$

எனவே $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடர்.

சோதனை 7.

தாலம் பெயரின் சோதனைகளின் விரிவு

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ என்ற நிலையில்

(1) $l < 1$ ஆனல் $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) $l > 1$ ஆனல் $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

(1) நிரூபணம்.

$l<1$

$l<k<1$ என்பதற்கிணங்க k என்னும் எண்ணை எடுத்துக் கொள். $E=k-1$, எனக் கொண்டு. $n\geqslant n$ என்ற மதிப்புகளுக்கு,

$$l-E<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+E=k$$

என்பதற்கிணங்க ஒரு m காணமுடியும்.

அதாவது, $n\geq n$ என்ற மதிப்புகளுக்கு

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<k$$

எனவே, $n<m$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\ \ldots\ \ldots\ \times\frac{a_{m+1}}{a_m}\times a_m$$

$$<k^{n-m}\ .\ a_m=\left(\frac{a_m}{k^m}\right)k^n$$

$$=\lambda k^n\text{ (என்போம்)}$$

ஆனால் $k<1$ ஆதலால் $\sum\lambda k^n$ ஒரு குவி தொடர்.

$\therefore\ \sum a_n$ ஒரு குவி தொடர்.

(2) நிரூபணம்.

$l>1.$

$\xi=l-1$ எனக் கொண்டு, $n\geqslant m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, $1=l-\xi<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+E$ என்பதற்கிணங்க, ஒரு m கண்டுபிடிக்க இயலும். அதாவது $n\geq m$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

$$\text{எனவே, } a_n=\frac{a_n}{a^n_{-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n+2}}\times\frac{a_{m+1}}{a_m}\times a_n$$

$$>a_m=k\text{ (என்போம்)}$$

எல்லா n மதிப்புக்களும், $\sum b_n$ எனும் தொடர் ஒரு விரி தொடராகும் இங்கு $b_n=k$. $a_n>b_n$.

எனவே $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடர்.

சோதனை 8.

காஷியின் மூல சோதனை (Cauchy's Root Test) :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l \text{ என்றிருந்தால்}$$

(1) $l<1$, ஆனல் $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) $l>1$ ஆனல் $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

வகை 1.

$l<1$ எனக்கொள்வோம். $l<k<1$ என்பதற்கிணங்க k-ஐ எடுத்துக் கொண்டு, மேலும் $E=k-l$ எனக் கொண்டு $n\geqslant m$, மதிப்புகளுக்கு

$l-\xi< (a_n)^{\frac{1}{n}} <l+\xi\ (=k)$ என்பதற்கிணங்க ஒரு n கண்டு பிடிக்க இயலும்.

$\therefore$ $n\geqslant n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,
$a_n<k^n$.

ஆனல் $\sum k^n$ ஒரு குவி தொடர்.

எனவே $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடர்.

வகை 2.

$l>1$ எனக் கொள்வோம்.

$l-1=\xi$ எனக்கொண்டு, $n\geqslant m$ என்ற எல்லாம் மதிப்புகளுக்கும் $1=l-\xi< (an)^{\frac{1}{n}} <l+E$ என்பதற் கிணங்க ஒரு m கண்டு பிடிக்க இய

என வே $n\geqslant m$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $R_n>1$

ஆனல் $1+1+1$......ஒரு விரி தொடர்

$\therefore$ $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடர்.

சோதனை 9.

இராபேயின் விகித சோதனை (Raabe's Test)

எல்லை $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$ என்ற நிலையில்,

(1) $l>1$ ஆனல் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) $l<1$ ஆனல் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

வகை 1-

$l > 1$ ஆக இருக்கட்டும்.

$l > k = 1 + \partial > 1$ என்பதற்கிணங்க k என்னும் ஏதேனும் ஒரு $E = l - \xi$ என எடுத்துக் கொண்டு, $n \geqslant n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $k = l - \xi < n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ என்பதற்கிணங்க ஒரு m கண்டு பிடிக்க இயலும்.

அதாவது $n \leqslant m$ மதிப்புகளுக்கு

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + \partial$$

$$na_n - (n+1)\, a_{n+1} > \partial a_{n+1}$$

$$\therefore \quad (n-1)\, a_{n-1} - na_n > \partial a_n$$

$$(n-2)\, a_{n-2} - (n-1)\, a_{n-1} > \partial a_{n-1}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$na_m - (n+1)\, a_{m+1} > \partial a_{n+1}$$

எனவே, $\partial\,(am_{+1} + a_{m+2} + \ \ldots\ldots \ + a_n)$

$$< ma_m - na_n < ma_m.$$

அதாவது $S_n - S_m < \dfrac{ma_m}{\partial}$

$n < n$ மதிப்புகளுக்கு,

$$S_n > S_m + \frac{ma_m}{\partial}$$

எனவே $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

வகை 2,

$l < 1$ ஆக இருக்கட்டும்.

எல்லா $n \geqslant n$ மதிப்புகளுக்கு

$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < l + E = 1,$ என்பதற்கிணங்க ஒரு m கண்டு பிடிக்க இயலும்.

அதாவது $n \geqslant m$ மதிப்புகளுக்கு

$$na_n < (n+1)\, a_{n+1}$$

$$\therefore \quad na_n > (n-1)\, a_{n-1} > (n-2)\, (\bar{a}_{n-2} > \ \ldots\ldots\ldots \ > ma_m$$

$n > n$ மதிப்புகளுக்கு

$na_n > ma_m = \lambda$ (என இருக்கட்டும்)

$\therefore \quad a_n > \frac{\lambda}{n}$

ஆனால் $\sum \left(\frac{\lambda}{n}\right)$ ஒரு விரி தொடர். எனவே $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடர்

ராபியின் விகித சோதனையிலிருந்து $k \gtrless 1$

என்பதற்கேற்ப, $\sum \frac{1}{n^k}$ ஒரு குவி தொடர் அல்லது ஒரு விரி தொடராகும்.

$a_n = \frac{1}{n^k}$ எனக் கொண்டு

$$\text{எல்லை } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \text{எல்லை } n \left[\frac{(n+1)^k}{n^k} - 1\right]$$

$$= \text{எல்லை } \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1} = k.$$

எனவே $k>1$ ஆனால் $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகவும், $k<1$ ஆனால் ஒரு விரி தொடராகவும் உள்ளது என்பது தெளிவு.

சோதனை 10.

காஷியின் ஒடுக்கற் சோதனை (Cauchy's Condensation test):

$f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(n) \ldots\ldots$ என்ற தொடர் உண்டு எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டெண் மதிப்புடையவை. இங்குள்ள தொடர் முறை ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர்முறை யெனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

[அதாவது $f(n+1) \leqslant f(n)$]

$a>1$ என்ற ஏதாமொரு கூட்டு முழு எண் கொண்டால், $\sum f(n)$-ம், $\sum a^n f(a^n)$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் என்பது தேற்றம்.

நிரூபணம். $\sum f(n)$-ன் உருப்புகளைப் பின் வருமாறு வகுத்து அடைப்புக்குள் கூட்டு சேர்க்கவும்.

$$\sum f(n) = [f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(a)]$$
$$+ [f(a+1) + f(a+2) + \ldots\ldots + f(a^2)]$$
$$+ [f(a^2+1) + f(a^2+2) + \ldots\ldots + f(a^3)]$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \text{—} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+ [f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \ldots\ldots + f(a^n)]$$
$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

ஒவ்வொரு சதுர அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை முறையே, $a, (a^2 - a), (a^3 - a^2), \ldots\ldots (a^n - a^{n-1}) \ldots\ldots$

$$\therefore \quad \sum f(n) = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + un + \ldots\ldots$$

$= \sum un$ என எழுதலாம்.

இங்கு $un = [f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \ldots\ldots + f(a^n)]$

$f(n)$ என்பது, $f(n+1) \leq f(n)$

என்ற தன்மையுடையதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால்

$$f(a^{n-1}) \geqslant f(a^{n-1}+1) \geqslant f(a^{n-1}+2) \ldots\ldots \ldots\ldots \geqslant f(a^n).$$

$$\therefore \quad (a^n - a^{n-1}) f(a^{n-1}) \geqslant un \geqslant (a^n - a^{n-1}) \times f(a^n).$$

அதாவது

$$a^{n-1}(a-1) f(a^{n-1}) \geqslant un \geqslant a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times f(a^n) \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

அதுபோல்

$a^n (a-1) f(a^n) \geqslant an_{n+1}$ என்பதும் பொருந்தும்.

$$\therefore \quad u_{n+1} \leqslant a^n (a_n - 1) f(a^n) \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

∴ இதையொட்டி

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots \propto$$
$$\leqslant (a+1)[a f(a) + a^2 f(a^2) + \ldots\ldots]$$

∴ சோதனை 1, முதற் பிரிவின்படி, $\sum a^n f(a^n)$ ஒரு குவி தொடராயின், $(u_2 + u_3 + \ldots\ldots \propto)$-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

u_1-ஐக் கூட்டுவதால், $u_2+u_3+ \ldots\ldots \propto$ என்ற தொடரின் குவி தன்மை மாறுது.

$\therefore \quad \sum u_n$ ஒரு குவி தொடர் அதாவது

$\sum f(n)$ ஒரு குவி தொடராகும்.

மேலும், (4)-ன்படி,

$$u_n \geqslant a^n \left(1-\frac{1}{a}\right) f(a^n)$$

$$\therefore \quad u_1+u_2+u_3+ \ldots\ldots + \propto$$

$$\geqslant \left(1-\frac{1}{a}\right)[a f(a) + a^2 f(a^3) + \ldots\ldots + \propto]$$

$\because$ சோதனை 1, இரண்டாம் பிரிவின்படி,

$\sum a^n f(a^n)$ ஒரு விரி தொடராயின், $u_1+u_2+u_n \ldots$ $\propto$-ம் ஒரு விரி தொடராகும்,

அதாவது

$\sum u_n = \sum f(n)$-ம் ஒரு விரி தொடரென நிறுவப்படுகிறது.

$\therefore \quad \sum f(n)$-ம் $\sum a^n f(a^n)$-ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

ஒடுக்கற் சோதனை எடுத்துக்காட்டு :

$$f(n) = \frac{1}{n(\log n)^p} \text{ ஆனால்,}$$

$$a^n f(a^n) = \frac{a^n}{a^n (\log a^n)^p}$$

$$= \frac{1}{n^p (\log a)^p}$$

$$\therefore \quad \sum a^n f(a^n) = \frac{1}{(\log a)^p} \cdot \sum \frac{1}{n^p}$$

$\therefore \quad P > 1$ ஆனால், $\sum_{2}^{\propto} f(n)$ குவி தொடராகும்.

$\therefore \quad P > 1$ ஆனல், $\sum_{2}^{\infty} f(n)$ விரி தொடராகும்.

பொதுக் குறிப்பு :

சிறப்பாக தாலம் பெயரின் சோதனைகளும், அச்சோதனைகள் பயன்படாவிடத்து, காஷி, இராபேயின் சோதனைகளும், பல தொடர்களின் தன்மையை சோதிக்குங்கால் பயன்படும். இவை யாவும் மிக "ஆற்றலுடைய" (Powerful) சோதனைகளாகும். இவைகளைப் பயன் படுத்தும்போது, நமக்கு எல்லை காண வேண்டிய இன்றியமையாமை ஏற்படும். ஆகவே எல்லை காணும் முறைகள் நமக்கு தெளிவாக தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

மேலும் x என்ற இராசியோ, மற்று எந்த இராசிகளோ தொடரின்கண் தோன்றுங்கால் x-ன் எல்லா வகையான மதிப்புகளுக்கும், நாம் தொடரின் குவி தன்மை / அல்லாமை காணவேண்டும். இது வரை கண்ட சோதனைகளைக் கொண்டு $O < x \lesseqgtr 1$ அல்லது $O < x \lesseqgtr n$ என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களுக்கு நாம் தொடர்களின் தன்மை காணலாம்.

2-06. கூட்டெண்கள், குறையெண்கள் கலந்த தொடர்கள் :

இதுவரை நாம் பார்த்த சோதனைகள் யாவும் கூட்டெண்களாலாகிய தொடர்களுக்கே பயன்படும். இப்போது கூட்டு, குறையெண்கள் கலந்த தொடர்களின் குவி / விரி / அலை தன்மைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

அ. அறக்குவிதல் (Absolute Convergence) :

$\sum a_n$ என்ற கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடரைக் கொண்டு

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots$$

என்ற கந்தழித் தொடர் அமைப்போம். அமைக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடராயிருப்பின், முதலில் கூறப்பட்ட கூட்டு, குறையெண்கள் கலந்த தொடர் ஒரு அறக்குவியும் தொடர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு.

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடரைக் கொண்டு

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடர் அமைப்போம்.

பின் கூறப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடர் எனவே வரையறைப்படி, முன் கூறப்பட்ட தொடர் அறக் குவியும் தொடர் எனப்படும்.

ஆ. நிபந்தனைக்குவிதல் (Conditional Convergence) :

கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித்தொடர் தானுகவே ஒரு குவி தொடராயிருந்து, அது அறக்குவியும் தொடராக இல்லையாயின், அத்தொடர் ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots \infty$ என்பது ஒரு குவி தொடராகும்.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \infty$ என்பது ஒரு விரி தொடராகும்

$$\therefore\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

என்பது ஒரு நிந்தனைக் குவி தொடரெனப்படும்.

பின் வருவன முக்கிய தேற்றங்களாகும் :

(1) ஒரு 'அறக்குவியும்' தொடரில் உள்ள உறுப்புக்களை இடம் மாற்றி எழுதினுல் பெறப்படும் தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடரில் உள்ள உறுப்புக்களைத் தகுந்தபடி இடம் மாற்றி எழுதினுல் பெறப்படும் தொடரை $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை அலையும் தொடராக அமைக்கலாம்.

2-07. ஆடற் தொடர் (Alternating Series) :

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots an \ldots\ldots$ என்ற எல்லா எண்களையும் கூட்டெண்களாய் உள்ள $a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6$ என்ற தொடர் ஓர் ஆடற்றொடராகும்.

ஒரு ஓரியல்பான இறங்கு தொடர்முறை எல்லை $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என் மதிப்பையுடையதாக இருந்தால், $\sum (-1)^{n-1} a_n$ என்ற ஆடல் தொடர் குவியும்.

$a_n = a_1 - a_2 + \ldots\ldots + (-1)^{k-1}\ a_n$ எனக் கொள் வோம்.

எடுகோளின்படி (by hypothesis), n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $a_n > a_{n+1}$, மேலும் எல்லை $a_n = 0$.

எனவே

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > S_{2n}$$

மேலும்

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots\ldots = (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

$$= a_1 - \left\{ (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots\ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \right\} < a_1$$

எனவே $S_3, S_4, S_6 \ldots\ldots S_{2n} \ldots\ldots$

ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை ; a_1 என்ற மேல் வரம்புடையது.

$$\therefore\ (S_{2n}) \to l\ (O < l < a_1)$$

மேலும் $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$$\therefore\ \underset{n \to 8}{\text{எல்லை}}\ S_{2n+1} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ S_{2n} + \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ a_{2n+1}$$

$$= l_{+0} = l$$

எனவே எல்லை $(S_n)_2 = l.$ $\therefore$ தொடர்குவியும்.

கிளைத்தேற்றம் t

$S_1, S_3, S_5 \ldots\ldots S_{2n+}1 \ldots\ldots$

ஒரு கூட்டெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஓரியல்பான இறங்கு தொடர்முறையாகும். இதன் ஒவ்வொரு உறுப்பும், $S_2, S_4, S_6 \ldots\ldots S_{2n} \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறையின்ஒவ்வொரு உறுப்பையும் விட பெரிதாக இருக்கும்.

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} - a_{2n} - (a_{2n+1}) < S_{2n^-1}.$$

எனவே (S_{2n+1}) + ஒரு ஓரியல்பான இறங்குதொடர் முறையாகும்.

மேலும் $S_{2n+2} > S_{2n}$.

எனவே எல்லா n, p மதிப்புகளுக்கும்,

$$> S_3\, p.$$
$$S_{2n-1}\ l\ \text{——}\ x\ \text{——}$$
தொடர் $\sum a_n$ ஒரு

குவிதொடரானுல், n கந்தழியை நெருங்கும்போது $a_n \to \propto$.
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ எனக் கொள்வோம். எடுகோளின்படி, தொடர் குவி தொடர்.

அதாவது

$$\underset{m \to \propto}{\text{எல்லை}}\ S_n = l$$

எனவே, $n \geqslant n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும், கொடுக்கப் பட்ட எந்த ஒரு ξ-க்கும்,

$$-\frac{\xi}{2} < l - S_n < \frac{\xi}{2}$$

மேலும் $-\frac{E}{2} < S_{n+1} - l < \frac{E}{2}$ என்பதற்கிணங்க ஒரு m-கண்டு பிடிக்க இயலும். இரண்டு சமனின்மையையும் கூட்ட $n \geqslant m$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $-E < S_{n+1} - S_n < \xi$.

அதாவது, $n \geq m$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்
$$-\xi < a_{n+1} < E$$

அதாவது $n \geqslant m + 1$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $-\xi < a_n < \xi$

$$\therefore\ \text{எல்லை}\ (a_n) = 0.$$

மறுதலை : எல்லை $a_n \neq 0$ வானுல், தொடர் குவி தொடரல்ல

கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த $\sum a_n$ என்ற எல்லை $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$= l < 1$ ஆனுல், $\sum a_n$ ஒரு அறக்குவியும் தொடராகும். எனவே ஒரு குவி தொடர். $l > 1$ ஆனுல், இத்தொடர் ஒரு குவி தொடரல்ல.

$$| a_1 | + | a_2 | + \ldots\ldots + | an | + \ldots\ldots$$

என்னும் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்,

எடுகோளின்படி

$$\text{எல்லை} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \text{எல்லை} \frac{| a_{n+1} |}{| \bar{a}_n |} = l < 1$$

எனவே $\sum | a_n |$ குவியும்

$\therefore \sum a_n$ ஒரு குவி தொடர்.

$l > 1$ ஆனுல் $\xi = l - 1$ எனக்கொண்டு, $n \geqslant m$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $1 = l - \xi < \frac{| a_{n+1} |}{| a_n |} < l + E$ என எழுதலாம்.

$\therefore n \geqslant n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\frac{| a_{n+1} |}{| a_n —} > 1.$$

எனவே $n >$

ஆனுல்

$$| a_n | > | a_{n-2} | > | a_{n-2} | > \ldots\ldots | a_{m+1} | > | a_n |$$

எனவே n-வது உறுப்பு சுழியத்தை நெருங்கவில்லை. எனவே தொடரானது குவி தொடரல்ல

3. அடுக்குத் தொடர் (Power Series)

3·01. $S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_{nx}{}^n + \ldots\ldots$ (1)

என்பது x-ல் ஒரு அடுக்குத் தொடரெனப்படும். இங்கு a_0, a_1, a_2 ...... என்ற கெழுக்கள் x-ன் சார்பற்றவை. இந்த அடுக்குத்தொடர் x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் குவியலாம். அல்லது $x = 0$ தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்குக் குவியாமல் இருக்கலாம்; அல்லது x-ன் சில மதிப்புகளுக்கு குவிந்து. மற்ற மதிப்புகளுக்கு விரியலாம்,

3-02. குவிதலின் இடைவெளி :

தொடர் (1)-ன் $(n+1)$-வது உறுப்புக்கும் n-வது உறுப்புக்கும் உள்ள விகிதத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\, x$$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ (ஒரு குறிப்பிட்ட எண்) காஷியின் விகிதம் (Cauchy's Ratio) :

$P = xL$ ஆகும்.

வகை 1.

$L = 0$ ஆனால், தொடர் (1) x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவியும். ஏனெனில் இங்கு $P = 0$,

வகை 2.

$L \neq 0$. xL-ன் மதிப்பு 1-க்குக் குறைவாக இருக்கும்போது தொடர் (1) குவியும்

அதாவது ஆனது $-\frac{1}{|L|} < x < \frac{1}{|L|}$ என்றிருக்கும்போது தொடர் குவியும். x-ன் மதிப்பு இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே இருக்கும்போது தொடர் விரியும். இந்த இடைவெளிக்கு குவிதலின் இடைவெளி எனப் பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2} \ \ldots\ldots \qquad (2)$$

என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

இங்கு $x < 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது தொடர் குவிகிறது. $x <$ ஆக இருக்கும்பொழுது விரிகிறது. இப்பொழுது முடிவுப் புள்ளிகளை (end points) ஆராய்வோம்.

தொடர் (2)-ல், $x=1$ எனக் கொண்டால்,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots$$ எனக் கிடைக்கும்.

இது ஒரு குவியும் ஆடற்றொடராகும்.

$x = -1$ எனக் கொண்டால்

தொடர்

$$-1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \ldots\ldots$$ என கிடைக்கும்.

இது ஒரு குவி தொடராகும். எனவே தொடர் (2) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ என்ற குவிதலின் இடைவெளியைக் கொண்டிருக்கிறது,

3-03, முக்கிய தேற்றங்கள் :

தேற்றம் 1. இரு குவியும் அடுக்குத் தொடர்களின் :

$$S_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_n x^n + \ldots\ldots$$
$$S_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots + b_n x^n + \ldots\ldots$$

என்பவை முறையே $|x| < r_1$, $|x| < r_2$ என்ற மதிப்புகளுக்கு குவியும் இரு அடுக்குத் தொடர்களாக இருக்கட்டும். r என்பது r_1, r_2 இவைகளைவிட குறைவான எண்ணாக இருந்தால், $|x| < r$, என்ற மதிப்புக்கு எடுத்துக் கொண்ட இரு அடுக்குத் தொடர்களும் குவியும். இப்பொழுது இவ்விரு தொடர்களின் கூடுதல்

$$S_1(x) + S_2(x) = (a^0 + b_6)$$
$$+(a_1+b_1)x + \ldots\ldots + (a_n+b_n)x^n + \ldots\ldots n$$
$$+ \ldots\ldots$$ ஆகும்.

இத் தொடர் குறைந்தது $|x| < r$ என்ற மதிப்புக்காவது குவியும்.

இரண்டு வலுத்தொடர்களின் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் பயனாகக் கிடைக்கும் தொடரானது. x-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு எடுத்துக் கொண்ட அடுக்குத் தொடர்கள் குவியுமோ, அம்மதிப்புகளுக்கு

$S_1(x) + S_2(x)$ என்று குவியும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$S_1(x)=e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+ \ldots\ldots +\frac{x^n}{n!}+ \ldots\ldots$$

$$S_2(x)=e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!} - \ldots\ldots +(-1)^n \frac{x^n}{n!}+ \ldots\ldots$$

என்றால்

$$S_1(x)+S_2(x)=e^x+e^{-x}$$

$$=2\left[1+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{1+(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots\right]$$

$$=2\cosh x.$$

இங்கு $S_1(x)$, $S_2(x)$ என்ற இரு தொடர்களும் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிகின்றன. எனவே அவைகளின் கூடுதல் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிகிறது.

தேற்றம் 2.

இரு குவியும் அடுக்குத்தொடர்களின் பெருக்கற் பலன் :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n$$

$|x| < r$-க்குக் குவியுமானால் இவைகளின் பெருக்குத் தொகையான $S_1(x)\, S_2(x)$ என்பது

$$S_1(x)\, S_2(x)=a_0 b_0+(a_0 b_1+a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2+a_1 b_1+a_2 b_0)\, x^2 + \ldots\ldots$$

என்ற ஒரு அடுக்குத் தொடராகும்.

இது குறைந்தது $|x| < r$ என்ற மதிப்புக்காவது குவியும்.

அதாவது இரு சார்புகளின் பெருக்கற் பலனின் விரிவு (expansion) அடைய, ஒரு அடுக்குத் தொடரை மற்றொரு அடுக்குத் தொடரால் பெருக்கலாம். இரு பல்லுருப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற் போலவே கெழுக்கள் கிடைக்கின்றன. கொடுக்கப்பட்ட

இரு தொடர்கள் குவி தொடர்களானால், பெருக்கற்றொடர்களும் குவியும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$S_1(x) = \sin h\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ldots$$

$$S_2(x) = \cos h\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\ldots$$

என்பவை இரு தொடர்களாகட்டும்.

$$S_1(x)\ S_3(x) = \sin h\ x\ \cos h\ x.$$

$$= x + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!\ 2!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + \ldots\ldots$$

$$= x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[2x + \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin h_2\ x.$$

எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட தொடர்கள் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிவதால், பெருக்கற்றொடரும் குவியும்.

தேற்றம் 3.

இரு குவியும் அடுக்குத் தொடர்களை வகுத்து வரும் ஈவு :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n$$

என்ற இரு தொடர்களும் $|x| < r$ என்ற மதிப்புக்குக் குவிகின்றன என கொள்வோம்,

$b_0 \neq 0$ என்றால்,

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} x$$

$$+ \frac{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2}{b_0^3}$$

$$+ \dots \dots$$

என்ற தொடர் $S_1(x)$-ஐ $S_2(x)$-ஆல் வகுத்து வரும் ஈவாகும் இங்கு $S_1(x)$, $S_2(x)$ என்ற தொடர்களின் குவியும் பகுதிகள் பற்றிய அறிவிலிருந்து ஈவுத் தொடரின் பகுதிபற்றி ஒரு முடிவும் கூற இயலாது.

இதைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டிலிருந்து நன்கு விளக்க லாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$S_1(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$S_2(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots\dots$$

இப்பொழுது $S_1(x)$-ஐ $S_2(x)$ ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots\dots \tan x.$$

$\sin x$, $\cos x$-ன் தொடர்கள் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிந்தாலும் $\tan x$-ன் தொடர் $|x| < \frac{\pi}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு மட் டும் தான் குவியும்.

தேற்றம் 4.

ஒரு தொடரில் மற்றொரு தொடரைப் பிரதியிடல் ;
எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட

$$z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots\ldots + a_n y^n + \ldots\ldots$$

என்ற தொடர் $|y| < r_1$ என்ற மதிப்புக்கும், $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots b_n x^n + \ldots\ldots$

என்ற தொடர் $|x| < r_2$ என்ற மதிப்புக்கும் குவிவதாகக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது $|b_0| < r_1$ என்ருல், y-ன்மதிப்பை இரண்டாவது தொடரிலிருந்து, முதல் தொடரில் பிரதியிட்டு, தொடர் z-ஐ x-ல் ஒரு அடுக்குத் தொடராக எழுதலாம். x போதுமான அளவு சிறிய, தாயிருந்தால் இத் தொடர் குவியும். ஒரு சிறப்பு வகையில் தொடர் z, y-ன்எல்லா மதிப்புகளுக்கும், குவியுமாளுல் தொடர் z-ஐ, x-ல் ஒரு அடுக்குத்தொடராக பெறலாம். இத்தொடர் $|x| < r_2$ என்ற எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் குவியும். எடுத்துக்காட்டாக, $e^{\cos x}$ என்ற அடுக்குத் தொடரின் விரிவை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு

$$z = e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} \ldots \quad (2)$$

இந்த இரு தொடர்களும் x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் குவியும்.

இப்பொழுது நாம் y-ன் பல அடுக்குகளைக் கண்டுபிடித்து z-ல் பிரதியிடுவோம்.

$$y^2 = 1 - x^2 + \tfrac{1}{3} x^4 - \ldots\ldots$$

$$y^3 = 1 - \tfrac{3}{2} x^2 + \tfrac{7}{8} x^4 - \ldots\ldots$$

$$y^4 = 1 - 2x^2 + \tfrac{5}{3} x^4 - \ldots\ldots$$

எனவே $e^3 = 1 \triangle \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\ldots\right)$

$$+\tfrac{1}{2}\left(1 - x^2 \frac{x^4}{3} - \ldots\ldots\right)$$

$$+\tfrac{1}{6}\left(1 - \frac{3x^2}{2} + \tfrac{7}{8} x^4 - \ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{24}(1-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4-\ldots\ldots)$$

$$=(1+1+\tfrac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\ldots)$$

$$-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\frac{1}{12}+\ldots\ldots)x_2$$

$$+\left(\frac{1}{24}+\tfrac{1}{6}\triangle\frac{7}{48}+\frac{5}{72}+\ldots\ldots\right)x^4\ldots\ldots$$

எனவே

$$e^y=e^{\cos x}=2\frac{17}{24}-1\frac{1}{3}x^2+\frac{61}{144}x^4\ldots\ldots$$

இத்தொடரிலுள்ள கெழுக்கள் ஒரு கந்தழித் தொடராகும் இங்கு ஒவ்வொரு தொடரிலும் முதல் சில உறுப்புக்களை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டு மதிப்பு கண்டுள்ளோம்.

தேற்றம் 5. அடுக்குத் தொடரின் வகைக்கெழு :

$$S_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots$$

என்னும் தொடர் $|x|<r$ மதிப்புக்கு குவிகிறதெனக் கொள் வோம். இத் தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வகைக்கெழு கண்டு பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{d}{dx}S_1(x)=a_1+2a_2x+\ldots\ldots+an_nx+\ldots\ldots$$

இத் தொடரும் $|x|<r$ மதிப்புக்குக் குவியும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dx}\sin x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\ldots$$

$$=\cos x$$

இங்கு இரு தொடர்களும் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவி கின்றன.

தேற்றம் 6. அடுக்குத் தொடரின் தொகைக்கெழு :

$S_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ என்னும் தொடர் $|x| < r$ என்ற மதிப்புக்குக் குவிகிற தென கொள்வோம். இத்தொடரின் தொகைக் கெழுவை. இதன் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் தொகைக்கெழு கண்டு பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\int_0^x S_1(x)\, dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\bar{a}n}{an+1} x^{n+1}$$

இத்தொடர் $|x| < r$ மதிப்புக்குக் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \ldots\ldots$$

$$\because \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\ldots$$

$$= \tan^{-1} x.$$

எடுத்துக்கொண்ட தொடர் $|x| < 1$ என்ற மதிப்புக்குக் குவிகிறது. அதனால் $\tan^{-1} x$-ன் தொடரும் இந்த இடைவெளியில் குவியும்.

தேற்றம் 7 அடுக்குத் தொடர்களின் சரி நிகர்வு (Equality of power series) :

$|x| < r$ என்ற மதிப்புக்கு

$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n$. ஆனால் இரு தொடர்களின் ஒத்த அடுக்குகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது $a_s = b_s$, $S = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$

இதிலிருந்து ஒரு சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில், பல வழிகளில் விரிவு படுத்தினால் கிடைக்கப்பெறும் தொடர் சர்வ சமமாக இருக்க வேண்டும் என்று தெரிகிறது.

தேற்றம் 8. அடுக்குத் தொடரின் திரும்புகை (Reversion) :

கணித பகு பாய்வை இயற்பியலில் பயன்படுத்தும்போது சில சமயங்களில் அடுக்குத் தொடரை முன் பின்னுக்குதல் அவசிய மாகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$y = ax + bx^2 = cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gy^7 + \ldots\ldots$$

ஆக இருக்கட்டும். இங்கு $a \neq 0$.
இப்பொழுது

$\therefore \quad Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots\ldots$ என்ற தொடரின் கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$A, B, C \ldots\ldots$ என்னும் கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்க, 2-வது தொடரை 1-வது தொடரில் பிரதியிட்டு, ஒத்த அடுக்குகளின் கெழுக்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த முறையைப் பின்பற்றி

$$A = \frac{1}{\bar{a}}, \quad B = -\frac{b}{a^9}, \quad C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$$

$$D = \frac{5abc - {}^2ad - 5b^3}{a^7}$$

$$E = \frac{6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21\bar{a}b^2c}{a^9}$$

$$F = \frac{(6a^3be + 7\bar{a}^3cd + 84ab^3c - {}^4f - 28a^2b^2d}{}$$

$$\frac{- 28\bar{a}^2b^2d - 28a^3bc^2 - 42b^5}{\bar{a}^{11}}$$

என்ற கெழுக்களின் மதிப்புகள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுள்ளன.

3.04. சார்புகளின் தொடர்களும் சீரான குவிதலும் (Series of functions and uniform convergence) :

$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots\ldots + u_n(x) + \ldots\ldots$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடரின் உறுப்புகள் (a, b) என்னும் இடை வெளியில் x என்னும் மாறியின் தொடர் சார்புகளாகும். இந்த இடை வெளியில் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் இத்தொடர் குவிகிறது. இத்தொடரானது நாம் எதிர்பார்ப்பது

போல தொடர்சார்பாக இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை எடுத்துகாட்டாக

$$S(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+a^2} + \ldots\ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots\ldots$$ என்னும்

தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x \neq 0$ என்றால், இத்தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடரைக் குறிக்கிறது. இதன் விகிதம் $\frac{1}{(1+x^2)}$ ஆகும். எனவே இதன் தொகை

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2, \; x \neq 0.$$

$S_n(x)$ என்பது முதல் n – உறுப்புகளின் தொகையானால்

$$S(0) = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} Sn(0) = 0.$$ ஏனெனில் $x = 0^s$ ஆகும்போது

தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் சுழியமாகும். மேலும்

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} S(x) = \underset{n \to 0}{\text{எல்லை}} (1 + x^2) = 1.$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில், x சுழியத்தை நெருங்கும்போது $S(x)$ என்ற சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை நெருங்குகிறது. ஆனால் இந்த எல்லையானது $x = 0$ ஆக இருக்கும்போது உள்ள சார்பின் மதிப்பிலிருந்து வேறுபட்டுள்ளது. இவ்வாறாக $x = 0$-வில் $S(x)$ தொடர்ச்சியானதாக இல்லாமல் இருக்கிறது.

(a, b) என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட x-ன் சார்பை உறுப்புகளாகக் கொண்ட

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) \ldots\ldots u_n(x) + \ldots\ldots$$

என்ற தொடரானது a_1 b என்ற இடை வெளியில் சீரான குவி தொடராக இருக்க வேண்டுமானால் (1) a-க்கும், b- க்கும் இடையிலுள்ள ஒவ்வொரு x-ன் மதிப்புக்கும் அது குவிய வேண்டும் (2) முன்னமேயே கணிக்கப்பட்ட (Preassigned) யாதாமொரு மிகை எண் ∂-க்கும், x-ஐ சார்ந்தில்லாத N என்ற நேர் முழுவெண்ணை கண்டுபிடிக்க இயல வேண்டும். இவ்வாறு கண்டுபிடிக்கும் போது தொடரின் மீதி (remainder) R_n-ன் தனி மதிப்பு

$$R_n = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots\ldots$$

$n \geqslant N$ என்ற ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும். (a, b) இடைவெளியிலுள்ள x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ϵ-வைவிட குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

சீரான குவிதலுக்கு வெயிஸ்ட் ராஸின் M சோதனை The Weierstrass M Test for uniform convergence :

$u_0(x) + u_1(x) + \ldots\ldots + ux$ (x) △ ...... என்பது (a, b) இடைவெளியில் x-ன் தொடர்புடைச் சார்பாகவுள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொடராக இருக்கட்டும்.

மேலும்

$M_0 + M_1 + M_2$ △ ...... M_n + ... என்பது மிகை மாறிலிகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு குவி தொடராக இருக்கட்டும்.

(a, b) இடை வெளியில் உள்ள x-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் மேலும் n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், (a, b) இடைவெளியில் இந்த தொடரானது சீராக குவியும்.

3-05. தொடரின் தொகை யிடல் மேலும் வகையிடல் :

கீழ் வருவன சீரான குவி தொடரின் தொகையிடலும் வகையிடலும் பற்றிய இரண்டு தேற்றங்களாகும்.

1. தொகையீட்டின் எல்லைகள் முடிவுள்ள அளவுள்ள தாகவும் (finite) (a, b) இடைவெளியில் உள்ளதாகவும் இருந்தால் $(a; b)$ இடைவெளியில் சீராக குவிகின்ற தொடர்ச்சி சார்புகளின் தொடருக்கு ஒவ்வொரு உறுப்பாக தொகை காண இயலும்.

2. விளைவு தொடரானது (resulting series) சீராக குவியுமானல் எந்தவொரு குவி தொடருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பாக வகையீடு காண முடியும்.

உதாரணமாக

$$S(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots\ldots$$

என்ற தொடர் எந்த இடை வெளியிலும் சீராகக் குவியும் தொடராகும். எனவே a, b இடை வெளியில் x-ன் தொடர்ச்சி சார்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

தொடர் $S(x)$-ன் உறுப்பு உறுப்பாகக் கண்ட வகையீடானது

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots\ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots\ldots$$

ஆகும்.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots$ என்னும் தொடர் விரிவு தொடரானதால், இங்கு சீரான குவிதலுக்கான சோதனைக்குத் தகுந்த M தொடரைக்காண இயலாது.

3-06. தெயிலரின் தொடர் (Taylor's series) :

சார்பு $f(x)$-ஐ ஒரு அடுக்குத் தொடராக விரிவுபடுத்தி எழுதும் ஒரு முறையை இப்பொழுது காண்போம்.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f'(x)\,dx = f(x_0 + h) - f(x_0) \qquad \ldots \quad (1)$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது தொகையீட்டு மாறியை x-லிருந்து t-க்குப் பின் வரும் சமன்பாட்டைப்பயன் படுத்தி மாற்றி எழுதலாம்.

$$x = (x_0 + h) - t \qquad \ldots$$

h-க்கும் t-க்கும் உள்ள தொடர்பை படம் 57 விளக்குகிறது (2)

படம் 57

புதிய தொகையீட்டு மாறியைப் புகுத்தி சமன்பாடு (1)-ஐ

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f'(x)\,dx = -\int_{h}^{0} f'(x_0 + h - t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{h} f'(x_0 + h - t)\,dt \qquad (\ )$$

என எழுதலாம்.

இப்பொழுது பகுதிபடுத்தி தொகை காணும்.

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad \dots \quad (4)$$

என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

இங்கு $u = f'(x_0 + \quad - t), dv = dt.$

$$du = -j''(u_0 + h - t)\, dt; \quad v = t \qquad \dots \quad (5)$$

எனவே

$$\int_0^h f''(x_0 + h - t)\, dt = t f'(x_0 + h - t) \Big|_0^h$$

$$+ \int_0^h t f''(x_0 + h = \iota)\, dt$$

$$= h f'(x_0) \ x + \int_0^h t f''(x_0 + h - t)\, dt \qquad \dots \quad (6)$$

மறுபடியும் பகுதிபடுத்தி தொகையீடு கண்டால்

$$\int_0^h t f''(x_0 + h - t)\, dt$$

$$= \frac{h^2}{2!} h f''(x_0) + \int^h \frac{t^2}{2!} f''(x_0 + h - t)\, dt \qquad \dots \quad (7)$$

என கிடைக்கும்.

இதே மாதிரி n தடவை பகுதி படுத்தி தொகையீடு கண்ட பிறகு

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f'(x)\, dx = h_{i}^{\xi} \quad x_c) \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f''(x_0)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + \int_0^h \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + h - t)\,dt$$

$$= f(x_0 + h) - f(x_0) \qquad \ldots (8)$$

என கிடைக்கிறது.

மேலுள்ள சமன்பாட்டின் கடைசி தொகையீட்டை

$$\int_0^h \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + h - t)\,dt = \int_0^h \frac{t^n}{n!} \phi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^h t^n \phi(t)\,dt = \mathrm{I} \qquad \ldots (9)$$

என எழுதலாம். இந்த தொகையீடு I, வளைகோடு $y = t^n \phi(t)$-ன் கீழ் $t = 0$-விலிருந்து $t = h$ வரையுள்ள பரப்பளவைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம். $\phi(t)$, t-ன் ஒரு தொடர்ச்சி சார்பாக யிருந்தால் $0 < t_0 < h$ என்பதற்கிணங்க, t_0 என்னும் ஏதோவொரு புள்ளி யிருக்கும். இப்புள்ளிக்கு

$$\mathrm{I} = \frac{1}{n!}\int_0^h t^n \phi(t)\,dt = \frac{\phi(t_0)}{n!}\int_0^h t^n\,dt$$

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\phi(t_0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) \ldots \quad (10)$$

$$0 < \theta < 1$$

இங்கு $\theta h = h - t_0$.

எனவே சமன்பாடு (8)-ஐ

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) +$$

$$+ \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) \qquad \ldots (11)$$

$$0 < \theta < 1,$$

என எழுதலாம்.

இதற்கு லெக்ராஞ்சியன் வடிவில் மீதியைக் கொண்டுள்ள, தெயிலரின் வாய்பாடு எனப்பெயர்.

இங்கு இந்தத் தெயிலரின் வாய்பாடு அடைவதில் $f(x)$ என்பது தொடர்ந்த n ஆவது கெழு உடையது என புனைந்து கொள்ளப் படுகிறது.

$R_{n+1} = \frac{h_n^{+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$ என்ற உறுப்பு $(n+1)$ உறுப்புகளுக்குப் பிறகுள்ள மீதி எனப்படும். $f(x)$ ஆனது எல்லா வரிசைகள் வகைக் கெழுக்களையும் கொண்டதாக அமையலாம்.

மேலும்

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} R_{n+1} = 0$$

இந்த வகையில் இப்பொழுது நமக்கு குவி கந்தழி தொடர்

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h f'(x_0)}{1!} + \dots\dots + \frac{h^n f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$+ \;\dots\dots$ கிடைக்கிறது.

$x_0 = 0.\ h = x$ என பிரதியிட்டால்,

$$f(x) = f(0) = \frac{x f'(0)}{1!} + \dots\dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + \dots\dots$$

என்று கிடைக்கும்.

இந்தத் தொடர் மெக்லாரின் (Maclaurin) தொடர் எனப்படும்.

உதாரணம் 1.

$f(x) = e^x$ என்பதின் மெக்லாரின் தொடர் விரிவு கண்டு பிடிப்போம்.

இங்கு $f(0) = 1\ f'(0) = \dots\dots f^{(n)}(0) = 1$

எனவே

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots$$

இத் தொடரானது, x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிகிறது.

உதாரணம் 2,

$f(x) = \cos x$ என்பதின் மெக்லாரின் தொடர் விரிவு கண்டு பிடிப்போம்.

$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x \; f^{(n)}(x = \cos (x + n\frac{\pi}{2})$

இதை மெக்லாரின் தொடரில் பிரதியிட்டால்

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{(2^{n-2})!} + \ldots\ldots$$

என கிடைக்கிறது. இந்ததொடர், x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் குவிகிறது.

ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series):

$f(x) = n(1 + x)^n$ என்ற சார்பை, x-ன் அடுக்குகளில் ஒரு மெக்லாரின் தொடரில் விரிவாக எழுதினல்

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}, f''(x) = n(^{n-1})(1 + x)^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)(1+x)^{n-1}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

இதை மெக்லாரின் தொடரில் பிரதியிட,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)x^r}{r!}$$

என கிடைக்கிறது.

இத்தொடர் $|x| < 1$ ஆனால் குவியும்.

$|x| > 1$ ஆனால் விரியும்.

மேலுள்ள சமன்பாடு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் குறிக்கிறது n. ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இருந்தால், தொடர் முடிவுள்ள தொடராகும்.

$$(a+b)^n = a^n(1+x)^n, \left[x = \frac{b}{a} \text{ என்றால்}\right]$$

$$= a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n!\, a^{n-r} b^r}{(n-r)!\, r!} + \ldots\ldots, \left[|b| < |a| \right]$$

என்பதற்கு ஏற்றது

எனவும் எழுதலாம்.

3-07. அடுக்குத் தொடரைப் பயன்படுத்தி தொகைகள் காணல் :

பயன் முறை கணிதத்தில் அடிக்கடி, வரையறுத்த தொகைகள் வருகின்றன. இதில் அடைத்த வடிவில் வரையறுத தொகை காண இயலாது.

உதாரணமாக

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

போன்ற தொகைகள் இயற்பியல் கணக்குகளில் வருகின்றன. தொகைச் சார்பின் அடுக்குத் தொடர் விரிவு பயன்படுத்தி இந்தத் தொகைகளின் மதிப்புக்களை எந்த ஒரு தேவையான துல்லியத்திற்குக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

உதாரணம் 1.

தொகை காண்.

$$\int_0^1 \sin^2 x\, dx = I$$

$x^2 = u$ எனக் கொண்டால்,

$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots\ldots$ என $\sin u$-க்கு மெக்லாரின் விரிவை எழுதலாம்.

எனவே $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^1}{5!} = \ldots\ldots$

என கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \sin^2 x \; dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^1}{5!}\right) dx$$

[தோராயமாக]

$$= \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320}\right) \Big|_0^1$$

$$= 0.3333 = 0.0238 + 0.0008 = 0.3103.$$

இதிலுள்ள பிழையானது, தவிர்த்த முதல் உறுப்பைவிட குறைவு என்பதை மனதில் கொண்டு, கிடைத்த விடை நான்கு தசமப் புள்ளிகளுக்குச் சரியாக உள்ளதென கூறலாம்.

சில சமயங்களில் ஒரு சார்பின் அடுக்குத்தொடர் விரிவு ஒரு தொகையின் மதிப்பீடு கண்டு அடையலாம்.

உதாரணம்

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\text{எனவே } \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \ldots \quad (2)$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$(1 - u^2)^{-1/2} = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} u^4 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} u^6 + \ldots \quad (3)$$

என கிடைக்கிறது.

இத்தொடர் $|u| < 1$ ஆகும்போது குவிகிறது. இதை (2)-வது சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு உறுப்பு வாரியாக தொகை காண,

$$\sin^{-1} x = x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1\times 3}{2\times 4}\left(\frac{x^5}{5}\right) + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\left(\frac{x^7}{7}\right) + \ldots\ldots$$

என கிடைக்கிறது.

$|x| < 1$-க்கு இத்தொடர் குவிகிறது.

$x = \frac{1}{2}$ எனக் கொண்டால்

$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} + \frac{1\times 1}{2\times 3}(\tfrac{1}{2})^3 + \frac{1\times 3\times 1}{2\times 4\times 5}(\tfrac{1}{2})^5 \qquad + \ldots\ldots$$

அல்லது $\pi = 3.1415$.

3-08. மெக்லாரின் தொடரிலிருந்து கிடைக்கும் தோராய வாய்பாடுகள் :

பயன் முறை கணிதத்தில், ஒரு அடுக்குத் தொடரின் சில உறுப்புகளால் ஒரு சார்பைக் குறிப்பிட்டு ஓரளவு செம்மைப் படித் தரமுள்ள தோராய வாய்பாடுகளைப் பெறலாம். இத்தோராய வாய் பாடுகள் மிகவும் பயனுள்ளதாக விளங்குகின்றன.

உதாரணமாக, ஈருறுப்புத் தொடரைப் பயன்படுத்தி x-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு கீழ்க்கண்ட தோராய வாய்பாடுகளை உடனே எழுதலாம்.

$$(1 + x)^n \doteq 1 + nx \doteq 1 + nx + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^2$$

1-வது தோராயம் 2-வது தோராயம்

$\doteq$ இக்குறிக்கு தோராயமாக சமம் என்று பொருள் மேலும் $(1+x)^{-n} \doteq 1\ nx \doteq 1 - nx = \frac{1}{2}n(n+1)x^2$.

மெக்லாரின் தொடரிலிருந்து sin e-க்கு, $\sin x \doteq x - \dfrac{x^3}{6}$.

இப்பொழுது x-ன் எந்த மதிப்புக்கு, மூன்று தசம புள்ளிகளுக்கு துல்லிய விடை கிடைக்க, $\sin x \doteq x$ என்ற தோராயத்தைப் பயன் படுத்த முடியுமென்று பார்க்கலாம், sine-க்கு, மெக்லாரின்

தொடர் ஒரு ஆடற்றொடர் என்பதால், முதல் உறுப்பை மட்டும் வைத்துக் கொண்டால், மீதுயுள்ள தொடரின் மதிப்பு உறுப்பு $\frac{x^3}{6}$-ஐ விட குறைவாக இருக்கும்.

எனவே $\left|\frac{x^3}{6}\right| < .0005$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $| x | < \sqrt[3]{0.003}$

அல்லது $| x | < 0.1442$ ரேடியன்

இது $| < 8.2^\circ$ என்பதற்கு சமம்.

3-09. சார்புகளின் கணிப்பில் (computation) தொடரின் பயன்

பல சமயங்களில் ஒரு சார்பின் தொடர் விரிவு, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட மாறியின் (Argument) மதிப்புக்கு சார்பின் எண் மதிப்பைக் கணிப்பதில் நேரடியாக உதவுகிறது. இந்த முறையில் சார்புகளின் அட்டவணையைக் கணிக்கலாம்.

உதாரணமாக sin 10°-ஐ கணிக்க வேண்டுமென கொள்வோம் இதை sine-க்கான மெக்லாரின் தொடர் விரிவு பயன்படுத்திச் செய்யலாம்.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots$$

இங்கு $x = 10^\circ = \frac{\pi}{18}$ ரேடியன்கள். எனவே

$$\sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \left(\frac{\pi}{18}\right)^3\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{18}\right)^5\frac{1}{5!} - \left(\frac{\pi}{18}\right)^7\frac{1}{7!}$$

என ஆகிறது.

இது ஒரு ஆடற்றொடராக இருப்பதால் இந்த உறுப்புடன் நிறுத்துவதால் ஏற்படும் பிழை $\left(\frac{\pi}{18}\right)^9\frac{1}{9!}$-ஐ விட குறைவாக இருக்கும்.

மற்றொரு உதாரணமாக மடக்கை கணிப்பில், பயனுள்ளதாக உள்ள ஒரு தொடரை கருதுவோம்.

சார்பு $l_n(1+x)$-ன் மெக்லாரின் தொடர் விரிவு,

$l_n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$ என எழுதலாம். மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $x = -x$ எனக் கொண்டால்

$$l_n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots\ldots$$

என கிடைக்கிறது,

எனவே

$$l_n\frac{(1+x)}{(1-x)} = l_n(1+x) - l_n(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\right)$$

$|x| < 1$ ஆகும்போது இத் தொடர் குவிகிறது. இப்பொழுது $x = \frac{1}{2x^{+1}}$, $n > 0$ எனக் கொண்டால் $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ என கிடைக்கிறது.

அப்பொழுது $n < 0$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $|x| < 1$ ஆகும். இதை $l_n\frac{1+x}{1-x}$-க்கான சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$l_n)n+1) = l_n\ n+2)\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2_{n+1})^5} + \ldots\ldots\right]$$ என கிடைக்கும்.

இத்தொடர் n-ன் எல்லா நேர் மதிப்புகளுக்கும் குவிகிறது அதனுல் கணிப்புக்கு பயன்படுத்த தகுதியாக இருக்கிறது.

உதாரணமாக $n = 1$ எனக் கொண்டால்

$$l_n 2 = 2\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1\times1}{3\times3^3} + \frac{1\times1}{5\times35} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 0.69315$$

$n = 2$ ஆனுல்

$$l_n\ 3 = l_n\ 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1\times 1}{3\times 5^3} + \frac{1\times 1}{5\times 5^5} + \cdots\cdots\right)$$
$$= 1.09861.$$

இந்த முறையில் எந்த ஒரு எண்ணின் இயல் மடக்கையை (Natural logarithms) கணிக்கலாம்.

எண்களின் பொதுவான மடக்கை வேண்டுமானல்

$$\log n\ \frac{l_n n}{l_n 10} = \frac{l_n n}{2.30259}$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி கண்டு பிடிக்கலாம்.

உதாரணமாக

$$\log n = \frac{l_n 2}{l_n 10} = \frac{0.69315}{2.30259} = 0.3010 \ \ldots\ldots$$

3-10. தேரப்பெருத அமைப்பு கொண்ட சார்பின் மதிப்பீடு (Evaluation of a function taking of an indeterminate form)

(a) % என்ற அமைப்பு :

சில சமயங்களில் $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{(1-\cos x)}{x^2}$ போன்ற சார்புகளுக்கு, மாறியானது மாறுநிலை (critical) மதிப்பை நெருங்கும்போது, எல்லை மதிப்புகளைக் காணவேண்டி வருகிறது. கொடுக்கப்பட்ட சார்பானது $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ என்ற அமைப்பில் $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ என்பதற்கிணங்க உள்ளது. $x=a$-ஆக இருக்கும்போது, சார்பு தேரப்பெருத சார்பாகவுள்ளது.

இப்பொழுது $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ என்பதைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$f(a+b)$, $\varphi(a+b)$ என்பவைகளுக்கு தெயிலரின் தொடர் விரிவிலிருந்து

$$\frac{f(a+b)}{\varphi(a+b)} = \frac{f(a)+f'(a)\,b+f''(a)\,b^2/2!+\ \ldots}{\varphi(a)+\varphi'(a)\,b+\varphi''(a)\,b^2/2!+\ \ldots\ldots}$$

என கிடைக்கிறது.

$$\underset{x \to x}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \underset{b \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+b)}{\varphi(a+b)}$$

ஆனால் எடுகோளின்படி $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$, என்பதால் மேலிரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$ என கிடைக்கிறது.

இதற்கு எல் ஹாஸ்பிடல் விதி (L' Hospital rule) எனப்பெயர் $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ மறுபடியும் தேருப் பெருததாக இருந்தால், இவ்விதியை மறுபடியும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

உதாரணமாக

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin x}{2x} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2}$$

இதை cosine-க்கான மெக்லாரின் தொடர் விரிவின் முதல் சில உறுப்புக்களைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்.

x சிறியதாக யிருந்தால்

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^9}{2}$$

எனவே $1 - \cos x \doteq \frac{x^2}{2}$

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x^2/2}{x^2} = \tfrac{1}{2}.$$

(b) ∞ / ∞ என்ற அமைப்பு :

இந்தத் தேரப்பெருத % என்ற அமைப்புக்குப் பின்வருமாறு கொண்டு வரலாம்.

$$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{1/\varphi(x)}{1/f(x)}$$

எடுகோளின்படி $\varphi(a) = \infty$, $f(a) = \infty$. ஆதலால் நமக்கு % என்ற அமைப்பு கிடைக்கிறது. எனவே எல் ஹாஸ்பிடல் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணமாக

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \frac{\sec 3x}{\sec 5x} = \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{1}{\sec 5x}}{\frac{1}{\sec 3x}}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x} = -\tfrac{5}{3},$$

(*c*) $0 \times \infty$ என்ற அமைப்பு :

$f(x) \times \varphi(x)$ என்ற சார்பு $x = a$ என்ற மதிப்புக்கு $0 \times \infty$ என்ற தேரப்பெருத அமைப்பை ஏற்குமானல், இந்த சார்பை

$f(x) \times \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ என எழுதலாம்.

இந்த வடிவானது கொடுக்கப்பட்ட சார்புக்கு % அல்லது $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பைக் கொடுக்கிறது எனவே (*a*) அல்லது (*b*)-யில் கொடுக்கப்பட்ட முறையில் கணக்கிடலாம்.

உதாரணமாக

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ x\, l_n x = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{l_n x}{1/x} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= 0,$$

(*d*) $\infty - \infty$ என்ற அமைப்பு :

பொதுவாக மாறியின் மாறுநிலை (critical) மதிப்புக்கு இக் கோவையை % அல்லது $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பை ஏற்கக் கூடிய பின்னமாக உருமாற்றி எழுத முடியும்.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

(எல்லை)

(*e*) 1^{∞}, 0^{0}, $\propto^{0}$ என்ற அமைப்புகள் :

பொதுவாக இந்த அமைப்புகளை. *a*, *b*-ல் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்புகளுக்கு உருமாற்றம் செய்ய இயலும்.

உதாரணம் 1:

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} (\cos x)^{1/x^2} = 1^{\infty}.$$

$u = (\cos x)^{1/x^2}$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ l_n u = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{l_n (\cos x)}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-\sin x/\cos x}{2x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-\sec^2 x}{2} = = \tfrac{1}{2}$$

எனவே $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ u = e^{-\frac{1}{2}}$

உதாரணம் 2 :

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ x^{2 \sin} = 0^{0}.$$

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ x^{\sin x} = \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ x^{x}$$

$u = x$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ l_n u = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ x\, l_n x = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{l_r x}{1/x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

எனவே

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}\ u} = e^0 = 1$$

உதாரணம் 3 :

$$\text{எல்லை}\ u\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \propto^0 = 0$$

$u = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ ஆக இருக்கட்டும்.

எனவே

$$\text{எல்லை}\ l_n u = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \sin x\, l_n \frac{1}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\cos x}{\int 1/x} = 0.$$

எனவே $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}\ u} = e^0 = 1.$

உதாரணம் 4 :

$$\underset{n\to\propto}{\text{எல்லை}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^{\propto}$$

$u = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \quad \frac{1}{n} = x$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\underset{n\to\propto}{\text{எல்லை}}\quad l_n u = \underset{n\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{l_n (1+x)}{x}$$

$$= \underset{n\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{1/1+x)}{1} = 1.$$

எனவே

$$\underset{n\to\propto}{\text{எல்லை}\ u} = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}\ u} = e^1 = e$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் நேரப்பெருத அமைப்புகளின் முக்கிய வகைகளாக இருக்கின்றன.

பயிற்சி :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்புகளின் மெக்லாரின் விரிவுகளை நிரூபி. இவை மாறிகளின் எந்த மதிப்புகளுக்கு குவியும் என கண்டுபிடி.

1. $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-}}{(n-1)!} + \ldots\ldots$

எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

2. $\sin^{-1} = x + \frac{1 \times x^3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 3 \times x^5}{2 \times 4 \times 5} + \ldots\ldots$

கீழ் வரும் விரிவுகளை நிரூபி.

3. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots$

4. $l_n \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots\ldots$

கீழ்க் கண்ட சார்புகளின் மதிப்புகளை அடுக்குத் தொடர் விரிவுகளில் பிரதியிட்டுக் கணக்கிடு.

5. $e = 2.7183.$

6. $\cos 10^\circ = 0.9848.$

7. $\sqrt{e} = 1.6487.$

கீழ்க்கண்ட விரிவுகளைக்காண்.

8. $e^{-x} \cos x = 1 - x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^4 + \ldots\ldots$

9. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 - \frac{x^3}{16} - \frac{49x^4}{384} - \ldots\ldots$

10. sin 45° மதிப்பை 5 தசம புள்ளிகளுக்குச் சரியாக கணக்கிட, sin-க் கான மெக்லாரின் தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

5. சிக்கல் எண்கள், சிக்கல் மாறிகள்

1. சிக்கல் எண்கள் (complex numbers) :

இந்த அத்தியாயத்தில் சிக்கல் எண்களைப் பற்றிய வரையறைகளையும், அவைகளை இணைக்கும்போது (கூட்டல், கழித்தல் போன்றன) கடைப்பிடிக்க வேண்டிய கட்டுப்பாடுகளையும் பற்றி விவரிப்போம். பயன் முறை கணிதத்தில் (Applied mathematics) சிக்கல் எண்கள் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மின் சுற்றுகளில் திசை மாற்று மின்னோட்டங்களின் பங்கீடு, இயக்கவியலில் திணிப் பதிர்வுகள், திடப்பொருள்களில் உஷ்ண நிலையின் மாறுதல் போன்ற பலவகையான இயற்பியல் பண்புகளை சுலபமாக ஆராய்வதற்கு சிக்கல் எண்கள் பயன்படுகின்றன.

1-01. சிக்கல் எண் முறை (complex number system) :

$x-1=0$ என்ற ஒரு படிச்சமன்பாட்டின் தீர்வினை $x=1$ என்று எழுதலாம். இதே மாதிரி $x^2-1=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகள் $x=\pm\ 1$ என்றும் காணலாம். ஆனால் $x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x=\pm\sqrt{-1}$ என்று வருகிறது. இங்கு $\sqrt{-1}$ என்ற கணியம் பொருளற்றதாக (absurd) கருதப்பட்டது. எண் கொள்கையில் (Theory of numbers) இந்த சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வே காண முடியாது. எண் கொள்கையில் உள்ள இக் குறையை நீக்க₃ 'i' என்ற ஒரு புதுவிதமான அலகு ஆய்லர் என்பவரால் புகுத்தப்பட்டது. இது ஒரு கற்பனை அலகு. இந்த எண் இயற் கணிதத்தின் அடிப்படை விதிகளான சேர்ப்பு விதி, பங்கீட்டு விதி, மாற்று விதி போன்றவைகளுக்கு உட்பட்டதாக இருக்கிறது. மேலும் 'i^2'-ன் மதிப்பு -1 என்றும் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே $x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x=\pm\sqrt{-1}=\pm\ i$ என கிடைக்கிறது. இருபடிச் சமன்பாடான $ax^2+bx+c=0$-ன் தீர்வு,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^3-4ac}}{2a} \text{ ஆகும்.}$$

(1) $b^2 > 4ac$ ஆனால், இது இரு வேறான, மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

(2) $b^2 = 4ac$ ஆனால் மெய் மூலங்களும் சமமாகும்.

(3) $b^2 = < 4ac$ ஆனால், இரண்டு மூலங்கள் கிடையாது.

அதாவது

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta$$

இங்கு மூலங்கள் இரு பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகைகளாக அமைகின்றன. இவைகளைச் சிக்கல் எண்கள் என்போம்.

பொதுவாக Z என்ற எந்தவொரு சிக்கல் எண்ணையும் $Z = a + ib$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். இங்கு a, b என்பன மெய் எண்கள். மேலும் 'a' என்பது Z-ன் மெய்ப்பகுதி மெ. ப. (z) (real part) என்றும், b என்பது அதன் கற்பனைப்பகுதி க. ப. (z) (imaginary part) என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

இரண்டு சிக்கல் எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானால் முறையே அதன், மெய், கற்பனைப் பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்க வேண்டும். அதாவது $Z_1 = Z_2$ என்றால், $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ ஆக இருக்க வேண்டும். மெய்யெண்களை $b = 0$ எனவுள்ள, சிக்கல் எண்களின் துணைக்கணமாகக் (sub set) கருதலாம். அதாவது சிக்கல் எண்கள் $0 + i0$, $-3 + i0$ என்பன $0, -3$ என்ற மெய்யெண்களை முறையே குறிக்கின்றன. $a = 0$ ஆனால் $0 + ib$ அல்லது ib என்ற சிக்கலெண், தூய கற்பனை எண் (pure imaginary number) எனக் கூறப்படும்.

பரிமாற்று சிக்கல் எண் (complex conjugate number):

$Z = a + ib$ ஆனால், $a - ib$ என்பது Z-ன் பரிமாற்று சிக்கல் எண் எனப்படும். இதனை $\bar{Z}$ அல்லது Z^* என குறிப்பிடுவோம்.

$Z_1 + Z_2$-ன் பரிமாற்று எண் $= \bar{Z}_1 \; \bar{Z}_2$

$Z_1 Z_2$-ன் பரிமாற்று எண் $= \bar{Z}_1 \; \bar{Z}_2$

மேலும் $Z\bar{Z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |Z|^2$

$$Z+\bar{Z}=(a+ib)+(a-ib)=2a=2 \text{ மெ. ப. } (z)$$

$$Z-\bar{Z}=(a+ib)-(a-ib)=2\,ib=2 \text{ க. ப. } (z).$$

1-02. சிக்கல் எண்களின் அடிப்படை இயங்கு முறைகள் (Fundamental operations with complex numbers) :

சிக்கல் எண்களை இணைக்கும்போது, சாதரண மெய் எண்களின் இயற்கணித முறையே பின்பற்றலாம். ஆனால் 'i^2' வரும் இடங்களில் -1 என்று பிரதியிட வேண்டும்.

கூட்டல் :

$$(a+ib)\ (c+id)=(a+c)+i\ (b+d)$$

கழித்தல் :

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i\ (b-d)$$

பெருக்கல் :

$$(a+ib)-(c+id)=(\bar{a}c)+iad+ibc+i^2bd$$
$$=(ac-ad)+i\ (\bar{a}d+bc)$$

வகுத்தல் :

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-td}=\frac{\bar{a}c-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2d^2}$$

$$=\frac{(ac+bd)+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

தனி மதிப்பு அல்லது சார்பிலா மதிப்பு (adsolute value) :

சிக்கல் எண் $a+ib$-ன் தனி மதிப்பு அல்லது மட்டு என்பது $|\ a+ib\ |\ =\sqrt{a^2+b^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக

$$|\ -4+2\ |\ -\sqrt{20}$$

$Z_1\ Z_2\ \ldots\ldots\ Z_n$ என்பன சிக்கலெண்களானல், பின் வரும் பண்புகள் அவற்றிற்கு பொருந்தும்.

(1) $|Z_1 Z_2| = |Z_1| \quad |Z_2|$

நிரூபணம் :

$$|Z_1 Z_2|^2 = Z_1 Z_2 \bar{Z}_1 \ \bar{Z}_2 = |Z_1|^2 \ |Z_2|^2$$

இதன் இரு பக்கங்களிலும் வர்க்கமூலம் எடுத்து

$|Z_1 Z_2|^2 = |Z_1| \ |Z_3|$ என காணலாம்.

பொதுவாக

$|Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_n| = |Z_1| \ |Z_2| \ldots\ldots |Z_n|$ ஆகும்.

(2) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$ – இங்கு $Z \neq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

(3) $|Z_1+Z_2| \geqslant |Z_1| + |Z_2|$

அதாவது இரண்டு சிக்கலெண்களின் கூட்டுத் தொகையின் மட்டு, அவற்றின் தனித்தனி மட்டுகளின் கூட்டுத் தொகைக்கு மிகையாக இருக்க முடியாது.

நிரூபணம் :

$$|Z_1+Z_2|^2 = (Z_1+Z_2)(\bar{Z}_1+\bar{Z}_2)$$

$$= Z_1 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2 + (Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1)$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + (Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1)$$

இப்பொழுது

$$Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1 = (a_1+ib_1)(a_2-ib_2) + (a_2+ib_2) a_1-ib_1)$$

$$= 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = 2 \text{ மெ. ப. } (Z_1 Z_2)$$

மெ. ப. $Z \leqq |Z|$ அதாவது $a \leq \sqrt{a^2+b^3}$

என்பதால் $Z_1 \bar{Z} + Z_2 \bar{Z}_1 \leqq 2 |Z_1 \bar{Z}_2|$

$$\leqq 2 |Z_1 \bar{Z}_2|$$

$$\leqq 2 |Z_1| \ |Z_2|$$

எனவே $|Z_1+Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|$

$$\leq (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\therefore \quad |Z_1| + Z_n| \leq |Z_1| \pm |Z_2|$$

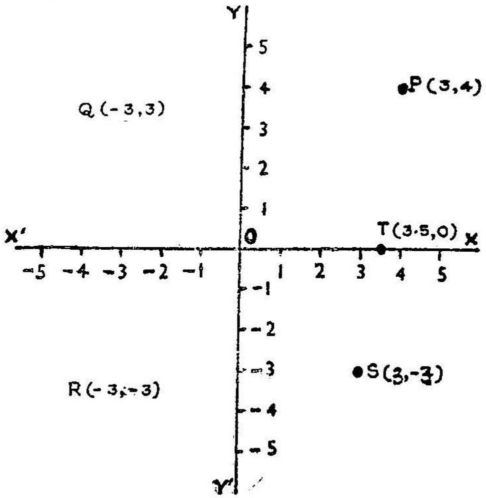
எனவே பொதுவாக

$|Z_1+Z_2+ \ldots Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \ldots |Z_n|$ என எழுதலாம்.

$$(4) \quad Z_1 - Z_2| \geqslant |Z_1| - |Z_3|$$

இரு சிக்கல் எண்களின் வித்தியாசத்தின் மட்டு$_2$ அவற்றின், தனித்தனி மட்டுகளின் வித்தியாசத்துக்குக் குறைவாக இருக்க முடியாது, (3)-ஐ நிரூபித்த முறையிலேயே, இதையும் நிரூபிக்கலாம்.

1-03. சிக்கல் எண்களின் வரைபட வகைக் குறிப்பு (Graphical representation of complex numbers):



படம் 58

ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான $X'OX$, YOY என்ற அச்சுகளின் மீது, மெய்யளவுத் திட்டங்களைப் படத்தில் உள்ளது போல் எடுத்துக் கொண்டு, இந்த கோடுகளால் வரையறுக்கப்படும் தளத்தில், வரிசைப்பட்ட மெய்யெண்களின் இரட்டையால் (x, y) ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கலாம். x, y என்பன அப்புள்ளியின் செவ்வக அச்சுத் தூரங்கள் எனப்படும். படம் 58-ல் P, Q, R, S, T என்பன இது மாதிரியான புள்ளிகளாகும்.

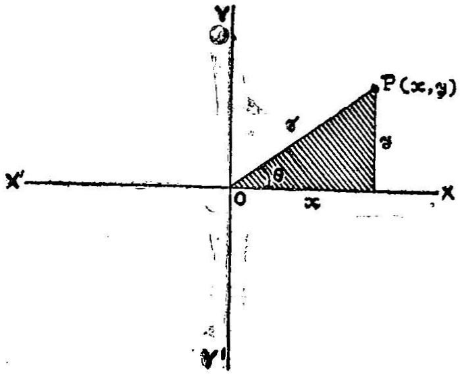
$x+iy$ என்ற சிக்கல் எண், வரிசைப்பட்ட மெய்யெண்களின் இரட்டையாதலால் இது மாதிரியான எண்களை xy தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளால் குறிக்கலாம். இப்பொழுது இந்த x, y தளத்தை சிக்கற்றளம் அல்லது ஆகன் விளக்கப்படம் (Argand diagram) என்போம்.

உதாரணமாக, P என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்பட்ட சிக்கல் எண்ணை (3, 4) அல்லது $(3+i4)$ என படிக்கலாம். ஒவ்வொரு சிக்கலெண்ணுக்கும் ஒப்புமையாக, (corresponding) தளத்தில் ஒரேயொரு புள்ளிதான் உண்டு. இதற்கு மறுதலையாக, தளத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒப்புமையாக ஒரேயொரு சிக்கல் எண்தான் உண்டு என்று கூறலாம் இதனால் Z என்ற சிக்கலெண்ணை ஆகன் (Argand) விளக்கப்படத்தில் Z என்ற ஒரு புள்ளியால் குறிக்கிறோம். கிடைநிலை அச்சுக்களான, X, Y அச்சுக்களை முறையே, மெய், கற்பனை அச்சுக்கள் என்று கூறுவோம், இந்த சிக்கல் தளத்தை Z தளம் என்று கூறுவோம். இத்தளத்தில், $Z_1 = x_1 + iy_1$. $z_2 + x_2 + iy_3$ என்ற சிக்கல் எண்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

$$| z_1 - z_2 | = \sqrt{(x_1 - x_2)^3 + (y_1 - y_2)^2} \text{ ஆகும்.}$$

1-04. சிக்கல் எண்களின் துருவ ஆய அமைப்பு (Polar form of complex numbers) :

$a+iy$ என்ற சிக்கல் எண்ணை, Z தளத்தில் குறிக்கும் புள்ளி P என்று கொண்டால் படம் 59-லிருந்து $z=r \cos\theta$, $y=r \sin\theta$ என்று அறியலாம். இங்கு $r=\sqrt{x^2+y^2} = | x+iy |$ என்பது $Z=x+iy$-ன் தனி மதிப்பு அல்லது 'மட்டு' என்றும், θ என்பது Z-ன் கோண வீச்சம் (argument or amplitude of Z) என்றும் கூறப்படும்.



படம் 59

எனவே $Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்பது சிக்கல் எண்ணின் துருவ ஆய அமைப்பு எனப்படும். r, θ என்பன துருவ ஆயத்தொலைகள் எனப்படும்.

$Z \neq 0$ என்ற எந்த ஒரு சிக்கல் எண்ணுக்கும், ஒப்புமையாக $0 \leqslant \theta < 2\pi$ என்ற இடைவெளியில், θ-க்கு ஒரேயொரு மதிப்பு தானிருக்கும். எனினும் 2π என்ற நீளமுள்ள எந்தவொரு இடைவெளியையும் பயன்படுத்தலாம். உதாரணம் $-\pi < \theta \leqslant \pi$. முன்னலேயே எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட, எந்தவொரு இடைவெளியும் -வின் தலையாய இடைவெளி அல்லது தலையாய மதிப்பு எனப் படும். (Principle range or principal value).

1-05. டி மாயரின் தேற்றம் (De Moivre's theorem) :

$$Z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$Z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

என்ருல்

$$(a)\ Z_1 Z_2 = r_1 r_2 = [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + 0_2)]$$

என்றும்

$$(b)\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$$(a)\ Z_1 Z_2 = [r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)][\, [r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$

$$= r_1 r_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$(b)\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2\, \theta_2 + i \sin\theta_2)} \times \frac{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \cos\theta_1 \sin\theta^2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\quad - \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

இவற்றையே, ஆய்லரின் வாய்ப்பாடான $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

என்பதைப் பயன்படுத்தி

$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ என்றும்,

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ என்றும் எழுதலாம்.

பொதுவாக n சிக்கல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$Z_1 Z_2 \ldots Z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_3 \ldots)]$$

இதில் $Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = Z$ ஆனல்

$Z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ ஆகும்.

இந்த சமன்பாடுதான் டி மாயரின் தேற்றம் எனப்படும்.

சிக்கல் எண்களின் மூலங்கள் ;

$w^n = Z$ என்ருல், w என்பது Z-ன் n-வது மூலம் எனப்படும். இதையே $w = Z^{1/n}$ என எழுத வேண்டும்.

n ஒரு நேர் முழு எண்ணுனல், டி மாயரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$Z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right.$$

எனக் காணலாம்.

இங்கு $k=0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots,\ n-1$ என்ற மதிப்புக்களைப் பெறுகிறது.

இதிலிருந்து, $Z\neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $Z^{1/n}$-க்கு n வேறுபட்ட மதிப்புகள் உள்ளன அதாவது Z-க்கு n வேறுபட்ட n-வது மூலங்கள் உள்ளனஎன்று அறிகிறேம்.

எடுத்துக்காட்டு :

1. (*a*) $Z^5=-32$ என்ற சமன்பாட்டில், Z-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. (*b*) இந்த மதிப்புகளைச் சிக்கற்றளத்தில் குறிப்பிடு.

(*a*) துருவ ஆய அமைப்பு முறையில் (Polar Form).

$$-32=32\left[\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right],$$
$k=0,\ \pm1\ \pm2$, ஆகும்.

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்று கொண்டால் டி மாயரின் தேற்றத்தின்படி,

$$Z^5=r^5\left[\cos 5\theta+i\sin 5\theta\right)$$
$$=32\left[\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right]$$ ஆகும்.

எனவே $r^5=32,\ 5\theta=\pi+2k\pi$ என்று கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து $r=2,\ \theta=(\pi+2k\pi)/5$ என்று காணலாம்.

$$\therefore\quad Z=2\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right]$$

$k=0$ என்றால், $Z=Z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$k=1$ என்றால், $Z=Z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$

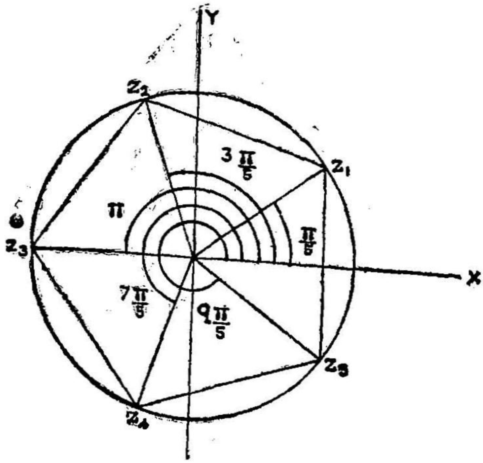
$$k = 2 \text{ என்றால், } Z = Z_3 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{5} + i \sin \frac{5\pi}{5}\right) = -2$$

$$k = 3 \text{ என்றால், } Z = Z_4 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{3}\right)$$

$$k = 4 \text{ என்றால், } Z = Z_5 = 2\left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}\right)$$

$k = 5, 6\ldots\ldots$ அல்லது எதிர் மதிப்புகள் என்றும் கொண்டால், Z-க்கு மேற்கண்ட 5 மதிப்புகள் தான் திரும்ப, திரும்ப கிடைக்கின்றன. எனவே இவை மட்டும் தான் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் அல்லது மூலங்கள் ஆகும். இந்த ஐந்து மூலங்களும் (—32)-ன் 5 வது மூலங்கள் என்று கூறப்படும். கூட்டாக (collectively) $(-32)^{1/5}$ என்று குறிக்கப்படும். பொதுவாக, $a^{1/n}$ என்பது a-ன் n-வது மூலத்தை குறிக்கிறது. என்றும், இதே மாதிரியாக n மூலங்கள் உள்ளன என்றும் அறியலாம்.

(*b*) இந்த மதிப்புகள் படம் 60-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. அவை, அச்சு மையத்தை மையமாகவும், 2-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்ட வரையின் மீது, சம இடைவெளிகளைக் கொண்டு இருக்கின்றன.



படம் 60

எடுத்துக்காட்டு.

2. (*a*) மூலங்களைக் கண்டு பிடித்து, வரை படத்தில் காண்பி.

$(-1+i)^{1/3}$

$$-1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(3\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(3\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$

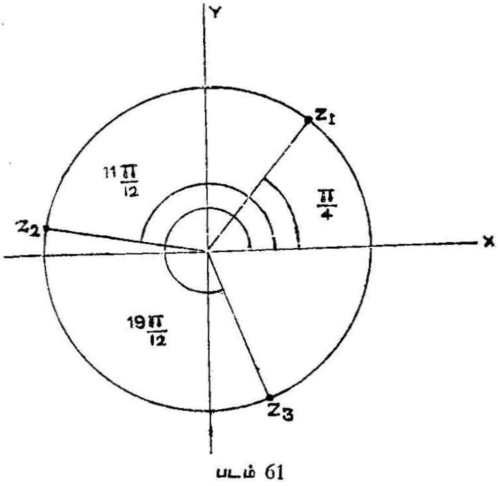
$$(-1+i)^{1/3}=2^{1/6}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$k=0$, என்றால், $Z_1=2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$k=1$, என்றால், $Z_2=2^{1/6}\left(\cos 11\frac{\pi}{12}+i\sin 11\frac{\pi}{12}\right)$

$k=2$, ஆனால், $Z_3=2^{1/6}\left(\cos 19\frac{\pi}{12}+i\sin 19\frac{\pi}{12}\right)$.

இந்த மூலங்கள் வரை படம் 61-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 61

(*b*) மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

$(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$

$$-2\sqrt{3}=2\,i=4\left[\cos\left(7\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(7\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right]$$

$$(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}=4^{1/4}\left[\cos\left(\frac{7\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

$k=0$ என்றால், $Z_1=\sqrt{2}\left[\cos 7\frac{\pi}{24}+i\sin 7\frac{\pi}{24}\right]$

$k=1$ என்றால், $Z_2=\sqrt{2}\left[\cos 29\frac{\pi}{24}+i\sin 19\frac{\pi}{24}\right]$

$k=2$ என்றால், $Z_3=\sqrt{2}\left[\cos 31\frac{\pi}{24}+i\sin 31\frac{\pi}{24}\right]$

$k=3$ என்றால், $Z_4=\sqrt{2}\left[\cos 43\frac{\pi}{24}+i\sin 43\frac{\pi}{24}\right]$.

1-06. ஒருமையின் (unity) n-ஆவது மூலங்கள் :

$Z^n=1$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஒருமையின் n-ஆவது மூலங்கள் எனப்படும்.

$$Z^n=1=(\cos 2k\pi+i\sin, 2k\pi)$$

$$\therefore\quad Z=(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{1/n}$$

$$=\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin 2\,\frac{k}{n}\,\pi)$$

$$=e^{\frac{i\,2k\pi}{n}} \qquad \dots\quad (1)$$

என அறியலாம்.

இங்கு k, 0, 1, 2,.........$(n-1)$ என்ற 'n' மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ என்று கொண்டால் சமன்பாடு (1)-லிருந்து. ஒருமையின் 'n' மூலங்களை 1, w w^2.........w^{n-1} எனக் குறிக்கலாம்.

பயிற்சி.

I. கீழே கொக்கப்பட்டுள்ள எண்களை துருவ ஆப அமைப்பு வடிவத்தில் எழுது.

(*a*) $2-2i$ (*b*) $-1+\sqrt{3}i$ (*c*) $2\sqrt{2}i$

(*d*) $-i$ (*e*) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2}$.

விடை :

(*a*) $2\sqrt{2}$ cis 315° அல்லது $2\sqrt{2}\, e^{7\pi i/4}$

(*b*) 2 cis 120° அல்லது $2e^{2\pi i/3}$

(*c*) 4 cis 45° அல்லது $4e^{\pi i/4}$

(*d*) cis 270° அல்லது $e^{3\pi i/2}$

(*e*) $\sqrt{3}$ cis 300° அல்லது $\sqrt{3}\, e^{5\pi/3}$

II. மூலங்களைக் கண்டுபிடித்து வரை படத்தில் காண்பி.

(*a*) $(2\sqrt{3}-2i)^{\frac{1}{2}}$ (*b*) $(-4+4i)^{\frac{1}{5}}$ (*c*) $(2-Z\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}}$

விடை

(*a*) 2 cis 165°, 2 cis 343°

(*b*) $\sqrt{2}$ cis 27, $\sqrt{2}$ cis 99°, $\sqrt{2}$ cis 171°
$\sqrt{2}$ cis 243°, $\sqrt{2}$ cis 315.

(*c*) $\sqrt[3]{4}$ cis 20°, $\sqrt[3]{4}$ eis 140°, $\sqrt[3]{4}$ cis 260°.

III. ஒருமையின் எல்லா (*a*) 4-வது மூலங்களையும். 7-வது மூலங்களையும் கண்டுபிடி.

விடை :

(*a*) $e^{2\pi i\, k/4}$, $k=0, 1, 2, 3.$

(*b*) $e^{2\pi i\, k/7}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

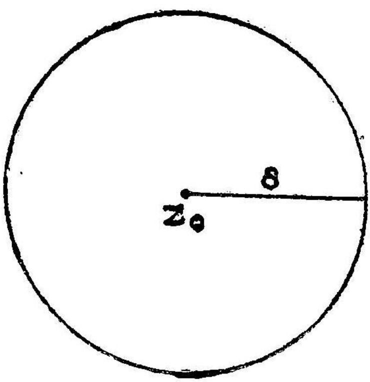
2. சிக்கல் மாறிகள் (Complex Variables) :

2-01. சிக்கல் மாறிகளில் சில அடிபடை வரையறைகள் (Some terminology in complex variables) :

சிக்கற்றளத்திலுள்ள ஒரு சில புள்ளிகளின் தொகுப்பை புள்ளி கணம் (Point set) என்போம். அதிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் அந்த கணத்தின்மெம்பர் அல்லது மூலகம் என்போம்.

(1) அண்மை (neighbourhood) :

$|Z-Z^{\circ}| < \delta$ எனக் கொண்ட, Z என்ற எல்லா புள்ளிகளையும் கொண்ட கணம், Z_0 என்ற புள்ளியின், அண்மை எனப் படும். இங்கு δ என்பது மிகச்சிறிய நேர் மாறிலியாகும். இதிலிருந்து Z_0 என்ற புள்ளியின் அண்மை வட்ட வரம்பின் வட்டப் பகுதியிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்டுள்ளது என அறியலாம். Z_0-ஐ மையமாகவும், δ-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டப் பகுதியின் வரம்பிலுள்ள (boundary) (படம் 62) புள்ளிகளைத் தவிர்த்து, அதனுள் உள்ள எல்லா புள்ளிகளையும் கொண்டது என அறியலாம். இதில் Z_0-ஐத் தவிர்த்து. மற்ற புள்ளிகளைக் கொண்ட கணம், Z_0-ன் தவிர்த்த அண்மை (deleted neighbourhood) எனப்படும். இந்த அண்மையிலுள்ள புள்ளிகளுக்கு $0 < |Z-Z_0| \wedge \delta$ ஆகும்.



படம் 62

(2) எல்லைப்புள்ளி (Limit point) :

சிக்கற்றளத்தில். Z_0 என்ற ஒரு புள்ளியின் ஒவ்வொரு அண்மையும்Z_0-ஐத் தவிர்த்து, ஏதோவொரு கணத்திலுள்ள எண்ணிலா

புள்ளிகளைக் கொண்டிருந்தால், Z_0-ஐ அக்கணத்தின் எல்லைப் புள்ளி எனக்கூறலாம்.

உதாரணம் : அச்சுமையம் O-ஐமையமாகவும், C-ஐ ஆர மாகவும் கொண்ட வட்டப்பகுதியை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு வட்டப் பகுதிக்குள் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் $|Z| < C$ ஆகவும், அதன் வரம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், $|Z| = C$ ஆகவும் இருக்கும். ஆகவே வட்ட வரம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், $|Z| < C$ என்ற கணத்திற்கு எல்லைப் புள்ளி யாகும். ஏனெனில், வரையறைப்படி, வட்ட வரம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் வரையப்படும் எந்த அணிமையும். அக்கணத் தின் எண்ணிலா புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கிறது. மேலும், இக் கணம் $|Z| < C$-க்குள் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் கூட இதற்கு எல்லைப் புள்ளியாக அமைகிறது. $Z = O$ என்பது, $Z = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ என்ற கணத்திற்கு எல்லைப்புள்ளி, $Z = O$-க்கு $\delta = \frac{1}{10}$, ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு அண்மையை வரைந்தால், Z-க்கும் $|Z - 0| < \frac{1}{10}$. எனவே இதிலிருந்து $Z = 0$-ன் அணிமை $Z = \frac{1}{n}$ என்ற கணத்தின் புள்ளிகளான $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$.......... என்ற எண்ணிலா புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கிறது. என அறிய லாம். இதே மாதிரி δ-க்கு எந்த ஒரு மதிப்பைக் கொடுத்தாலும், அதாவது $Z = 0$-ன் ஒவ்வொரு அண்மையும், $Z = \frac{1}{n}$ என்ற கண தின் எண்ணிலா புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காணலாம். $Z + si$ என்பது $Z + \frac{ni}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3\ldots\ldots)$ என்ற கணத்தின் எல்லைப் புள்ளி எனக் காணலாம்.

(3) S என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு எல்லைப்புள்ளியும், அதற்கு உரியதாக இருந்தால், அக்கணத்தை மூடிய கணம் (closed set) எனக்கூறுவோம்.

உதாரணம் : $|Z| \leqq C$ என்பது ஒரு மூடியகணம்.

(4) **வரம்புள்ள கணம் :**

S என்ற கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி Z-க்கும் என்பதற் கிணங்க, M என்ற ஒரு மாறிலியைக் காணமுடியுமானால், அக்

கணத்தை வரம்புள்ள கணம் எனக் கூறுவோம். மேற் கூறியபடி M என்ற மாறிலியைக் கண்டுபிடிக்க முடியாமலிருந்தால், அக் கணம் வரம்பில்லாகணம் (unbounded set) எனப்படும். வரம் புடைய, மூடிய, ஒரு கணத்தை அடர்த்தி கணம் (compaet set) என்போம்.

(5) அகப்புள்ளி, புறப்புள்ளி, வரம்புப்புள்ளி (interior. exterior and boundary points) :

அகப்புள்ளி : எல்லா புள்ளிகளும் S என்னும் கணத்துக்கும் உரியதாக, Z_6 என்ற புள்ளிக்கு, ஏதேனும் ஒரு அண்மை கண்டு பிடிக்க முடிந்தால் கூட, அப்புள்ளியை, அக்கணத்தின் அகப் புள்ளி எனக் கூறுவோம்.

உதாரணம் : $|Z| < C$ என்ற கணத்திற்குள் உள்ள ஒவ் வொரு புள்ளியும், அக்கணத்தின் அகப்புள்ளி ஆகும்.

புறப்புள்ளி : Z_0 என்ற புள்ளி S என்னும் கணத்திற்கு அகப் புள்ளியாகவோ, வரம்புள்ளியாகவோ, இல்லாதிருந்தால் அதனை S-ன் புறப்புள்ளி எனக் கூறுவோம். அதாவது அப்புள்ளியின் அண்மையிலுள்ள புள்ளிகள், S-க்கு உரியவையாக இருக்காது.

உதாரணம் : $|Z| > C$ என்றுள்ள புள்ளிகள் $|Z| \leq C$ என் னும் கணத்திற்கு புறப்புள்ளிகளாகும்.

வரம்புப்புள்ளி : Z_6-ன் ஒவ்வொரு அண்மையுப், S என்னும் கணத்துக்கு உரியபுள்ளிகளையும், அல்லாத புள்ளிகளையும் கொண் டிருந்தால், Z_C-ஐ அக்கணத்தின் வரம்புப்புள்ளி எனக் கூறுவோம்.

உதாரணம் : $|Z| = C$ என்றுள்ள வட்ட வரம்பிலுள்ள புள்ளிகள் $|Z| = C$ என்ற கணத்திற்கு வரம்புப் புள்ளிகளாகுய்.

(6) திறந்த கணம் (open set):

அப்புள்ளிகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கணம், திறந்த கணம் எனப்படும்.

உதார்ணம் : $|Z| < C$ என்பது ஒரு திறந்த கணம்.

(7) தொடுத்த கணம் (connected set) :

S எனும் திறந்த கணத்திலுள்ள ஏதேனும் இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டுகளையுடைய பல கோண

பாதையிலுள்ள (polygonal path) ஒவ்வொரு புள்ளியும் அக்கணத்திற்கு உரியதாக இருந்தால் அக்கணத்தை தொடுத்த கணம் என்போம்.

$|Z|=1$ எனும் வட்டத்திற்குள்ளேயுள்ள புள்ளிகள், $|Z|=2$ வட்டத்திற்கு வெளியே யுள்ள புள்ளிகள் இவற்றைக் கொண்டுள்ள, S எனும் ஒரு திறந்த கணம் ஆகாது.

(8) அடைத்த பகுதி (closed region) :

திறந்த கணத்தின் எல்லா புள்ளிகள், அதன் வரம்பிலுள்ள புள்ளிகள் இவற்றைக் கொண்டுள்ள ஒரு கணத்தினை, அடைத்த பகுதி எனக்கூறலாம்.

உதாரணம் : $O<|Z|\leq C$ என்பது ஒரு அடைந்த பகுதியாகும்.

(9) வரம்புள்ள பகுதி (bounded region) .

C-எனும் ஏதேனும் ஒரு மாறிலிக்கு ஒகு பகுதியிலுள்ள எல்லா புள்ளிகளும் $|Z|=C$ என்ற வரம்புக்குள்ளிருந்தால், அப்பகுதியை வரம்புள்ள பகுதி என்போம்.

(10) அரங்கம் (Domain) :

ஒரு தொடுத்த, திறந்த பகுதியை அரங்கம் எனக் கூறலாம்.

$|Z|>0$, $0<$ கோ. வீ. $Z\leq 2\pi$, என்ற அரங்கம், $Z=0$ என்ற அச்சு மையத்தைத் தவிர்த்து, சிக்கற்றளத்திலுள்ள எல்லா புள்ளிகளையும் கொண்டிருக்கிறது.

2-02. சிக்கல் மாறியின் சார்பு :

$Z=x+iy$, $w=u+iv$ என்ற இரு சிக்கலெண்களை எடுத்துக் கொள்வோம். D-எனும் அரங்கத்தில், Z-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒப்புமையாக w-க்கு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளிருந்தால், w-ஐ Z-ன் சார்பு எனக்கூறலாம். அதாவது $w=f(z)$ ஆகும்.

எனவே x, y-ல் மாற்றங்கள் செய்தால் u, v-யும் மாறும் எனவே u-வும், v-யும் x, y-ன் சார்புகளாக இருக்கின்றன. அதாவது $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$.

$\therefore \quad w = u + iv = u\,(x, y) + iv\,(x, y).$

இங்கு w-ஐ, இரட்டை மெய்யெண்களின் ஒரு இரட்டை சார்பு களாக எழுதுகிறோம். $w = f\,(z)$-ஐ ஒரு தனிதளத்தில் (single plane) குறிக்க முடியாது. ஏனெனில், இதைக் குறிக்கவே u, v எனும் இரு அச்சுகள் தேவைப்படுகின்றன. எனவே மொத்தத்தில் நான்கு அச்சுகள் வேண்டும். u, v என்ற அச்சுகள் உள்ள w தளம், x, y என்ற அச்சுகள் உள்ள Z தளம்என்று இரு தளங்களை எடுத்துக் கொண்டு குறிப்பது வழக்கம்.

உதாரணம் :

$Z = x + iy$, $w = u + iv$, $w = z^2 + 2$ ஆக இருக்கும்போது u, v-ஐக் கண்டு பிடி.

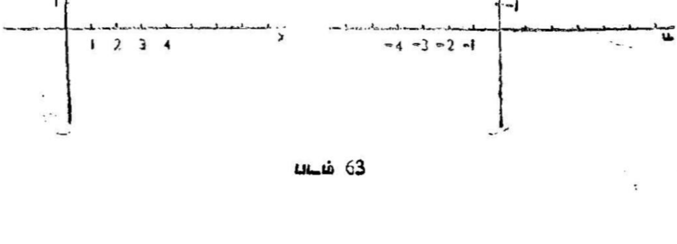
$$w = u + iv = z^2 + 2 = (x + iy)^2 + 2$$
$$= x^2 - 2\,ixy - y^2 + 2$$
$$= x^2 - y^2 + 2 + 2\,ixy$$

எனவே $u = x^2 - y^2 + 2$

$v = 2\,xy.$

2-03. நிலை அல்லது உருவ மாற்றம் (Transformation) :

$u = u\,(x, y)$, $v = v\,(x, y)$ அல்லது $w - f\,(z)$ என்பது நிலை மாற்றம் எனப்படும். எனவே, இதன் மூலம் P எனும் ஒரு புள்ளியை, P' என்னும் ஒரு புள்ளிக்கு அமைப்பு மாற்றம் செய்யலாம். P'-ஐ P-யின் பிம்பம் எனக் கூறலாம்.



படம் 63

உதாரணம் :

$$w = z^2 \text{ ஆனால் } u + iv = (x + iy)^2$$
$$= x^2 - y^2 + 2\,ixy$$

இங்கு $u = x^2 - y^2$, $v = 2\,xy$ என்பது நிலைமாற்றமாகும். Z தளத்தில் (1, 2) என்னும் புள்ளியின் பிம்பம் w தளத்தில் (—3, 4) ஆகும். (படம்-63)

2-04: ஒரு மதிப்புடைய சார்பு, பல மதிப்புடைய சார்புகள் (Single valued and multiple valued functions):

$w = f(Z)$ ஆனால், Z-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒப்புமையாக w-க்கு ஒரேயொரு மதிப்பு மட்டுமிருந்தால், அதனை ஒரு மதிப்புடைய சார்பு எனக் கூறுவோம்.

உதாரணம் :

(1) $w = \dfrac{Z}{Z^2+1}$, (2) $w = Z^3 - 1$, (3) $w = \dfrac{1}{Z}$.

இந்த சார்புகளில் சில சிக்கற்றளத்தின் குறித்த சில புள்ளிகளில், வரையறுக்க முடியாததாக இருக்கும். அதாவது, $w = \dfrac{Z}{Z^2+1}$ என்ற சார்பு, $Z = \pm i$, என்ற புள்ளிகளில் வரையறுக்க முடியாததாக இருக்கிறது. ஏனெனில் அப்புள்ளிகளில், அச்சார்பு கந்தழி மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$w = \dfrac{1}{Z}$-ஐ. $Z = 0$-வில் வரையறுக்க முடியாது. இம்மாதிரி புள்ளிகளை சிறப்புப் புள்ளிகள் (Singular point) என்போம்.

$w = f(Z)$ ஆனால், D என்ற அரங்கத்தில் Z-ன் ஒப்புமையாக, w-க்கு பல மதிப்புகளிருநதால், அதனை பல மதிப்புடைய சார்பு எனக் கூறுகிறேம்.

உதாரணம் :

(1) $w = Z^{1/6}$, (2) $w = \sqrt{Z}$,

(3) $w =$ கோ. வீ. Z.

2-05. ஒரு சார்பின் எல்லை மதிப்பு (Limit of a function) :

f எனும் சார்பு z_0-ஐத் தவிர அதன் அண்மையிலுள்ள எல்லா புள்ளிகளிலும் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கொள் வோம்.

$$\underset{Z \to Z_0}{\text{எல்லை}} \left[f(Z) \right] = w_0 \qquad \ldots \quad (1)$$

என்பது சார்பு $f(z)$-ன் எல்லை மதிப்பாகும். $Z = Z_0$-ஐத் தவிர அதன் அண்மையிலுள்ள z என்ற எல்லா புள்ளிகளிலும் $f(z)$-ன் மதிப்பு, w_0-ஐ சூழ்ந்துள்ள யாதாமொரு மதிப்பாக இருக்கும். (இந்த அண்மையை போதுமான அளவு சிறியதாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்).

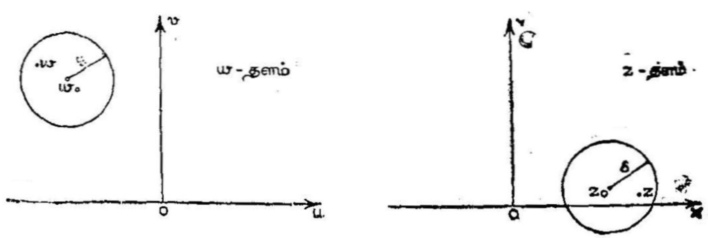
f என்ற சார்பு, z_0, w_0 என்ற சிக்கலெண்கள் கொடுக்கப்பட்டவைகளாகக் கொண்டால், மேற்கூறிய வரையறையை பின் வருமாறு சுருக்கமாகக் கூறலாம்.

$|Z - Z_0| < \delta$ $(Z \neq Z_0)$ என்றிருக்கும் போதெல்லாம்

$|f(Z) - w_0| < \xi$ என்றிருந்தால் $\qquad \ldots \quad (2)$

ξ – எனும் ஒவ்வொரு மிகை யெண்ணுக்கும் ஒப்பமையாக் δ என்னும் மிகையெண் இருக்கும். இதையே வரை படத்தின் மூலம் பின் வருமாறு விளக்கலாம்.

Z தளத்திலுள்ள $|Z - Z_0| = \delta$ என்னும் வட்டப்பகுதிக்குள் உள்ள, Z_0ஐத் தவிர Z என்ற எல்லா புள்ளிகளுக்கும், w தளத்தில் $|w - w_0| < \xi$ என்னும் வட்டத்திற்குள் பிம்பப் புள்ளிகளிருக்கும் படம் 64).



படம் 64

குறிப்பு: Z தளத்தில் $|Z - Z^{0}| < \delta$ வட்டத்திற்குள் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின், பிம்பப் புள்ளியும், w_0-ன் அணிமையான $|w = w_0| < \xi$-க்கு உரியதாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் அவை மட்டுமே சேர்ந்து முழு அணிமையையும் அமைக்க வேண்டியதில்லை. (they need not constitute the entire neighbourhood). ஆனால் Z எனும் புள்ளிகள் $0 < |Z - Z_0| < \delta$ என்னும் முழு அரங்கத்தையும் அமைக்கும் புள்ளிகளாக இருக்கின்றன. எனவே $Z \to Z_0$ என்பது Z, Z_0-ஐ யாதாமொரு வழியில் அடையாளம் என்பதைக் குறிக்கிறது.

δ-க்கு ξ-ன் சார்பாக $\delta = \varphi(\xi)$ என்ற வாய்ப்பாடு கண்டு பிடித்தால், எல்லையானது நிறுவப்படுகிறது.

(2)-வது நிபந்தனை, δ-க்கு சிறு நேர் மதிப்புகளைக் கொடுக்கும் போதும் பொருந்துமாதலால், $\delta = \varphi(\xi)$ என்பது தனித்தவம் (unique) வாய்ந்ததல்ல, உதாரணமாக $\delta = \frac{1}{2}\varphi(\xi)$ என்பது இன்னொரு வாய்ப்பாடு.

இந்த வரையறையை பயன்படுத்தி $\underset{Z=1}{\text{எல்லை}} \dfrac{Z^2-1}{Z=1} = 2$ என்பதை நிரூபிக்கலாம்.

$Z = 1$-க்கு இந்த சார்பின் மதிப்பு வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆனால் $Z \neq 1$-க்கு, $f(Z) = Z + 1$ ஆகும்.

$$\text{இதிலிருந்து } |f(Z) - 2| = |Z + 1 - 2| \quad (Z \neq 1)$$
$$= |Z - 1|$$

எனவே $0 < |Z - 1| < \xi$ என்றிருக்கும் போதெல்லாம், $|f(Z) - 2| < \xi$ ஆகும். அதாவது $\delta = \xi$ என்றால், ஒவ்வொரு நேர் எண் ξ-க்கும், $|Z - Z_0| < \delta$ என்றிருக்கும்போது, $f|Z) - w_0| < \xi$ எனும் நிபந்தனை பொருந்துகிறது.

2-06- சார்பு தொடர்ச்சி (continuity of a function) :

ஒரு சார்பானது ஒரு புள்ளி Z_0-ல் தொடர்ச்சி சார்பாக இருக்க வேண்டுமானால், எல்லாவற்றிற்கும் முதலாக அது Z_6-ல் இருக்க வேண்டும். அதாவது $f(Z_0)$ எனும் சார்பு இருப்பதோடு கூட அது Z_0 என்ற புள்ளியின் அண்மையில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும். இச்சார்பானது Z_0-ல் வரையறுக்கப்பட்டிருப்பதால், முதல் நிபந்தனையின்படி $f(Z_0)$ அதன் எல்லையாகிறது.

வரையறை :

$f(Z_0)$ எனும் சார்பு இருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஏதோவொரு மிகை எண் ξ-க்கு, $|Z-Z_0|<\delta$ ஆக இருக்கும் போதெல்லாம், $|f(Z)-f(Z_0)|$ என்னும் நிபந்தனைக்கிணங்க, மற்றொரு எண் δ, Z-ன் மதிப்பாக இருந்தால், இந்த சார்பு புள்ளி Z_0-ல் தொடர்ச்சி சார்பாக இருக்கிறது என்பது வரையறை.

δ-ன் மதிப்பு ξ-ஐயும், E_0-ன் மதிப்பு ξ_0-ஐயும் சார்ந்திருக்கிறது Z_0-ஐ சாராமல் δ அல்லது δ' என்னும் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமேயானால், அந்த சார்பு ஒரு ஒரே தரமான, தொடர்ச்சி சார்பாகும். (uniformly continuous).

சிக்கல் மாறிகளில், தொடர்பு என்றால் ஒரே தர தொடர்பைத் தான் குறிக்கும். $u(x, y)$, $v(x, y)$ என்பன x, y என்ற மெய் மாறிகளின் தொடர்ச்சி சார்புகளானால் $f(Z)=u(x, y)+iv(x, y)$ என்பது Z-ன் ஒருதொடர்ச்சி சார்பாகும். இதன் மாறுதலையும் உண்மை.

2-07. சார்பின் வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்ற தன்மை :

D என்னும் அரங்கத்தில், $f(Z)$ என்பது ஒரு மதிப்புடைய ஒரு சார்பாக இருக்கட்டும். இச் சார்பு அரங்கத்திலுள்ள Z_0 என்னும் புள்ளியில் தொடர்ந்த சார்பாக இருந்து, மேலும் Z, Z_0-ஐ நெருங்கும்போது $\dfrac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}$, ஒரு தனித்துவ எல்லையை நெருங்குமாயின் அது Z_0 என்னும் புள்ளியில் வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்ற ஒரு சார்பு எனப்படும். Z-ம் அரங்கம் D-ல் ஒரு புள்ளியாக இருக்க வேண்டும்.

மேற்கூறியபடி ஒரு எல்லை இருக்குமாயின் அது $Z=Z_e$ என்னும் புள்ளியில் $f(Z)$-ன் வகைக்கெழு என்றழைக்கப்படும். அது $f'(Z_0)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

மேற் கூறியதை, கீழ்க்கண்ட வாறும் கூறலாம். ξ 70 எனக் கொண்டிருப்பதால்,

$$\left|\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}-f'(Z_0)\right|<\xi$$

என்பதற்கிணங்க. δ எனும் ஒரு நேர் எண்ணை கண்டுபிடிக்கலாம். இங்கு Z என்பது அரங்கத்திலுள்ள, $O<|Z-Z_0|<\delta$ (δ நேர் எண்) என்னும் சமனின்மைக்குப் பொருந்திய, ஒரு புள்ளியாகும்.

ஒரே ஒரு எல்லை என்றக் கருத்து (idea of unique limit) சிக்கல் மாறிகளில் முக்கியமான தொன்றுகும். மெய் மாறிகளில், இதைக் குறிப்பிட்டு சொல்ல வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில், அங்கு எண்ணுனது மெய் அச்சு மட்டிலுமே குறிப்பிடப் படுகிறது. $x+\triangle x \to x$ எல்லையானுல், ஒரேயொரு தனித்துவ பாதைதான் உண்டு. இவ்வாறு அது ஒரேயொரு எல்லை மதிப்பைத்தான் கொடுக்க முடியும். எனவே, இங்கு தனித்துவ பாதை தானுகவே அமைந்திருக்கிறது. ஆனுல், ஒரு அரங்கத்திலுள்ள Z, Z_0 என்னும் சிக்கலெண்களை எடுத்துக் கொண்டால், $f(Z)$, ஒரு மதிப்புடைய, தொடர்ந்த சார்பாக இருக்கும்போது, Z-லிருந்து Z_0-க்கு மதிப்பு மாறுவதில், $Z \to Z_0$ ஆகும்போது, ஒரு தனித்துவ பாதை இல்லை. ஆனுல், பலபாதைகள் இருக்கின்றன. எந்த வழியில், Z, Z_0-ஐ நெருங்கினுலும், எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட எல்லையின் மதிப்பு ஒரே முடிவையே தரவேண்டும். தனித்துவ எல்லை கிடைத்தால் அச்சார்பு வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்றதென்றும், இல்லையேல் அதாவது எல்லையின் மதிப்புகள் ஒத்தவைகளாக இல்லையென்ருல், அச்சார்பு வகைக்கெழுகாண ஏற்றதல்ல என்றும் கொள்ளப்படும். மேலும், அச்சார்பு தொடர்ந்த சார்பாக இருக்க வேண்டும். இல்லையேல் கூடும் வீதம் (increment ratio) ஒரு முடிவான எல்லையை நெருங்காது.

எனவே வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்ற சார்பென்ருல், தொடர்ச்சி சார்பாக இருக்க வேண்டும் என்று தெரிகிறது. ஆனுல் தொடர்ச்சி சார்பு, வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்ப இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. ஏனெனில் எல்லை ஒரே ஒரு தனித்துவ மதிப்பை கொண்டில்லாமல் இருக்கலாம்.

(1) கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்ற சார்பு, தொடர்ந்த சார்பாக இருக்க வேண்டுமென காட்டலாம்.

$f(Z) = Z^2$ எனக்கொள்வோம்.

$$f(Z_0) = \underset{Z \to Z_0}{\text{எல்லை}} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0}$$

$$= \underset{Z \to Z_0}{\text{எல்லை}} \frac{Z^2 - Z_0^2}{Z - Z_0} = \underset{Z \to Z_0}{\text{எல்லை}} Z + Z_0$$

$$= 2 Z_0.$$

எல்லையானது $2 Z_0$-ஐ நெருங்குகிறது. எந்த பாதையாக இருந்தாலும் ஒரே ஒரு தனித்துவ எல்லையாக இருக்கிறது. $(2 Z_0)$.

(2) கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு, ஒரு தொடர்ந்த சார்பு, வகைக்கெழுக்காண ஏற்றதாக இருக்க வேண்டியதில்லை. என காட்டுகிறது.

$f(Z) = |Z|^2$ எனக்கொள்வோம்.

இந்த சார்பு, Z தளத்தில் ஒரு தொடர்ச்சி சார்பாகும். ஆனால், **Z** தளத்தில் அச்சுமையத்தைத் தவிர வேறு எந்த ஒரு புள்ளியிலும், இது வகைக்கெழு காணுவதற்கேற்றதாக இல்லை. வரையறையின் படி $\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}$ ஒரு முடிவான, தனித்துவ மதிப்பை நெருங்க வேண்டும். $f(Z)$-க்குப் பிரதியிட்டு

$$\frac{|Z^2| - |Z_0^2|}{Z-Z^0} = \frac{Z\bar{Z} - Z_0\bar{Z}_0}{Z=Z_0}$$

$$= \frac{Z\bar{Z} - Z\ \bar{Z}_0 + Z_0\bar{Z} - Z_0\bar{Z}}{Z-Z_0}$$

$$= \bar{Z} + Z_0\ \frac{\bar{Z}-\bar{Z}_0)}{Z-Z_0}$$

$\bar{Z} - Z_0 = r\ (\cos\varphi + i\ \sin\ \varphi)$ என்க. இப்பொழுது $\bar{Z} - \bar{Z}_0 = r$ $(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$\therefore\ Z + Z_0(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு φ என்பது $(Z—Z_0)$-ன் கோண வீச்சம் (argument) ஆகும். அது பல மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம். எனவே, எல்லையின் மதிப்பு தனித்துவமானதல்ல. ஆனால் $Z_0 = 0$, $Z \rightarrow Z_0 \rightarrow 0$ என்பதில் இந்த மதிப்பு தனித்துவ மதிப்பான சுழியத்தை நெருங்குகிறது. எனவே, அச்சுமையத்தில் இந்த சார்பானது, வகைக்கெழு காணுவதற் கேற்றதாக இருக்கிறது. எனவே இந்த சார்பானது அச்சுமையத் தைத் தவிர, மற்ற புள்ளிகளின் வகைக்கெழு காண ஏற்றதல்ல எனத்தெரிகிறது.

2-08. ஒரு சார்பின் ஒழுங்கமைப்பு : (Regularity of a function) ;

$f\ Z)$ என்னும் சார்பு, D என்னும் அரங்கத்தில், ஒரு மதிப் புடையதாகவும் அரங்கததின் எல்லா புள்ளிகளிலும் வகைக்கெழு

காணு வதற் கேற்பவும் இருந்தால் அது ஒரு ஒழுங்கமைந்த சார்பு எனப்படும். ஒரு ஒழுங்கமைந்த சார்பு பகுமுறைச் சார்பு எனப்படும். ஒரு ஒழுங்கமைந்த சார்பு பகுமுறைச் சார்பு (ana'y Ic) சார்பு அல்லது holomorphic சார்பு என்றும் கூறப்படும். சில சமயங்களில் ஒரு சார்பானது Z_0-ன் அண்மையில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியில் ஒழுங்கமைந்த சார்பாகவும் ஆனால் Z_0 ல் அவ்வாறில்லாமலும் இருக்கலாம். அதாவது இந்த சார்புக்கு Z_0-ல் வகைக்கெழு இல்லை. அப்பொழுது Z_0 ஒரு சிறப்புப் புள்ளி எனக் கூறப்படும். வேறுவிதமாகச் சொன்னால், சிறப்புப் புள்ளியில் சார்பு ஒழுங்கமைந்ததாக இருக்காது.

உதாரணம் : (1) $f(Z) = |Z|^2$

இந்த சார்புக்கு அச்சுமையத்தை தவிர, வேறு எந்த புள்ளியிலும் வகைக்கெழு இல்லையாதலால், இது அச்சுமையத்தைத்தவிர வேறு எந்த புள்ளியிலும் ஒழுங்கமைந்ததாக இருக்காது.

உதாரணம் : (2) $f(Z) = \frac{1}{Z}$, $f'(Z) = -\frac{1}{Z^2}$

இந்த சார்பு, அச்சுமையத்தைத் தவிர மற்ற புள்ளிகளில் ஒழுங்கமைந்த சார்பாக உள்ளது.

$f(Z)$, ஒரு ஒழுங்கமைந்த சார்பாக இருப்பதற்கு அவசியமானதும், போதுமானதுமான நிபந்தனைகள்

$w = f(Z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$Z = x + iy$ ஆனால் அப்பொழுது

(1) அவசியமான நிபந்தனை :

அரங்கம் D-யில் ஒரு சார்பு ஒழுங்கமைந்ததாக இருக்க வேண்டுமானால் அதன் நான்கு பகுதிவகைக்கெழுக்கான (partial derivatives) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ என்பன இருக்க வேண்டும். மேலும் இந்த வகைக்கெழுக்கள் காஷி–ரீமேன் (Cauchy-Reimann நிபந்தனையான $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ என்பதற்கு உட்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(2) போதுமான நிபந்தனை :

ஒரு சார்பு ஒழுங்கமைந்ததாக இருக்க வேண்டுமானால், அதன் நான்கு பகுதி வகைக்கெழுகளும், அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு

புள்ளியிலும், தொடர்ந்தும், காஷி-ரீமேன் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டும் இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம் : (*a*) அவசியமானது.

$f(Z)$ ஒரு பகுமுறைச் (analytic) சார்பாக இருக்க வேண்டுமானுல், எல்லையானது

$$\underset{\triangle Z\to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{f(Z)+\triangle Z)-f(Z)}{=Z} j'(Z)$$

$$=\underset{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{[u(x+\triangle x, y+\triangle y)+iv(x+\triangle x, y+\triangle y)^{2} -[u(x,y)+iv(x,y)]}{\triangle x+i\triangle y}\right.$$

... (1)

$\triangle Z$ (அல்லது $\triangle x$, $\triangle y$) எந்த முறையில் சூழியத்தை நெருங்குகிறதோ, அதைச் சார்ந்திராமல் இருக்க வேண்டும். நாம் இங்கு இரண்டு இயன்றவழிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

1. $\triangle y=0$; $\triangle x\to 0$

இங்கு சமன்பாடு (1)

$$\underset{\triangle x\to 0}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{u(x+\triangle x.)-u(x,y)}{\triangle x}+\frac{iv(x+\triangle x, y)-v(x,y)}{\triangle x}\right\}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(Z)$$

(பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இருந்தால்)

2. $\triangle x=0$; $\triangle y\to 0$

இங்கு சமன்பாடு (1)

$$\underset{\triangle y\to 0}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{u(x, y+\triangle y)=u(x,y)}{i\triangle y}+\frac{v(x,y+\triangle}{y}\right\}$$

$$=\frac{1}{i}\quad\frac{\partial n}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-t\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=f(Z)$$

இப்பொழுது, இவ்விரண்டு எல்லைகளும் சர்வ சமமாக இருந்தாலொழிய, $f(Z)$ பகு முறைச் சார்பாக (analytic) ஆக இருப்பது முடிந்ததல்ல, எனவே,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

அல்லது $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial u}{\partial y}$

என்பது, $f(Z)$, (analytic) பகுமுறைச் சார்பாக இருப்பதற்கு வேண்டிய அவசியமான நிபந்தனையாகும்.

(b) போதுமானது நிகர மதிப்பு தேற்றம் (Mean value theorem) :

$f(x, y)$ எனும் சார்பின், பகுதி வகைக்கெழுக்களான $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ என்பவை தொடர்ந்தாக இருந்தால்

$$f(x+\triangle x,\ y+\triangle y)-f(x, y)$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\right)\triangle x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \eta\right)\triangle y$$

என்று இருக்கும். இங்கு ξ, η என்பவை மாறிலிகள். $\triangle x$, $\triangle y \to 0$ ஆகும்போது இவை சுழியத்தை நெருங்குகின்றன.

$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, தொடர்ந்ததாக இருந்தால்,

$$\triangle u = u(x+\triangle x, y+\triangle y) - u(x, y)$$

$$= \left(\frac{\delta u}{\partial x} + \xi_1\right)\triangle x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\triangle y$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + \xi_1\triangle x + \eta_1\triangle y$$

இங்கு $\triangle x$, $\triangle y \to 0$ ஆகும்போது

$$\xi_1 \to 0,\ n \to 0$$

இது மாதிரியே, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, தொடர்ந்தாக இருப்பதால்

$$\triangle v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \xi_2\right)\triangle x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\triangle y$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y\right) + \xi_2\triangle x + \eta_2\triangle y$$

இங்கு $\triangle x, \triangle y \to 0$ ஆகும்போது

$\xi_2 \to 0, \eta_2 \to 0$

இப்பொழுது $\triangle w = \triangle u + i \triangle v$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\triangle x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\triangle y$$

$$+ \xi \triangle x + \eta \triangle y \quad \ldots \quad (2)$$

$\triangle x, \triangle y \to 0$ ஆகும்போது

$\xi = \xi_1 + \xi \to 0, \quad \eta = \eta_1 + \eta_1 \to 0$

காஷி-ரீமேன் நிபந்தனைப்படி' (2)-வது சமன்பாட்டை

$$\triangle w - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\partial v}{\partial x}\right)\triangle x + \left(\frac{-\partial v}{\partial x} + \frac{i\partial u}{\partial x}\right)\triangle y$$

$$+ \xi \triangle x + \eta \triangle y$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\partial v}{\partial x}\right)(\triangle x + i\triangle y) + \xi \triangle x + \eta \triangle y$$

என்று எழுதலாம்.

$\triangle z = \triangle x + i\triangle y$-ஆல் வகுத்து, $\triangle z \to 0$ ஆகும்போது எல்லை கண்டு பிடித்தால்

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \underset{\triangle z \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

என்று ஆகும், எனவே இதிலிருந்து வகைக் கெழுக்கள் இருக்கின்றன, மேலும் அவை தனித்துவம் வாய்ந்தவை என்பது தெரிகிறது. அதாவது $f(z)$,

R-ல் (Analytic) பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கின்றதென தெரிகிறது $\triangle x \leq |\triangle z|$, $\triangle y \leq |\triangle z|$ என இருப்பதால், $\triangle x$-ம் $\triangle y$-ம் $\triangle z$-ஐ விட வேகமாக சுழியத்தை நெருங்குகின்றன். இந்த சார்பானது வகைக்கெழுக் காண ஏற்றது. எனவே, (Analytic) ஒழுங்கமைந்தது வகைக்கெழுக்கள் ux, uy, vx, vz தொடர்ந்திருப்பதாலும், காஷி-ரீமேன் நிபந்தனைக்கு பொருந்தி இருப்பதாலும் இது இவ்வாறிருக்க முடிகிறது.

2-09. லாப்லாஸ் சமன்பாடு (Laplace's equation) :

$\nabla^2 \varphi = 0$ என்பது லாப்லாஸ் சமன்பாடாகும். $f(z) = u + iv$ என்பது, D என்னும் அரங்கத்தில், ஒரு ஒழுங்கமைந்த சார்பாக இருக்கட்டும். காஷ- ரீமேன் நிபந்தனைகள்படி,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots (2)$$

(1)-ன் x பற்றிய வகைக்கெழுவையும், (2)-ன் y பற்றிய வகைக்கெழுவையும் கண்டு கூட்டினால்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

எனக்கிடைக்கிறது.

இது மாதிரியே

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$ எனக்காட்டலாம்.

கார்டீஷியன் அமைப்பில் அதாவது கூறுகளில், முப்பரி மாணத்தில் லாப்லாஸின் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$ ஆகவும்,

இருபரிமாணத்தில் $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ ஆகவும் இருக்கிறது.

எனவே, u, v, லாப்லாஸ் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்தி யிருக்கிறது.

சீரிசை சார்பு (Harmonic function) :

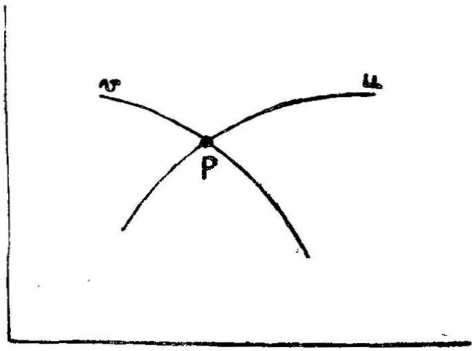
லாப்லாஸ் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்தும்படியான தொடர்ந்த 2-வது வரிசை பகுதி வகைக் கெழுக்களைப் பெற்றிருக்கும் f எனும் ஒரு சார்பு, சீரிசை சார்பு எனப்படும். $f(z) = u + iv$ என்பது ஒரு

பகுமுறைச் சார்பானுல், u-வும், v-யும் சீரிசை சார்புகளாகும். அவை பரிமாற்று சீரிசை சார்புகள் எனப்படும்.

பரிமாற்று சார்புகள் செங்குத்தாக (orthogonal) ஆக வெட்டிக் கொள்ளும் என்று காட்டலாம்.

$u(x, y) = c_1$

$v(x, y) = c_2$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட பரிமாற்று சார்புகளாக இருக்கட்டும். $u(x. y)$ என்பது x, y எனும் மாறிகளின் ஒரு மெய் யான, தொடர்ந்த சார்பாகும். இதை x, y தளத்தில் குறித்தால் ஒரு வளைகோடு கிடைக்கிறது. இது மாதிரியே, $v(x, y)$-க்கு மற்ருெரு வளைகோடு கிடைக்கிறது. இரண்டு வளை கோடுகளும்



படம் 65

P எனும் புள்ளியில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம். (படம் 6)

m_1, $\overline{m}_2$ என்பன P-ல் முறையே இந்த வளைகோடுகள் (1) (2)-ன் சிரிவுகளானுல், $m_1 m_2 = -1$ என நாம் காட்டவேண்டும்.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{ux}{uy} \qquad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = uy \end{array} \right|$$

இது மாதிரியே

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{vx}{vy}$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_1 \times \left[\frac{dy}{dx}\right]_2 = \frac{u_x}{u_y} \times \frac{v_x}{v_y} = -1$$

(காஷி-ரீமேன் நிபந்தனையின்படி) எனவே இந்த வளைகோடுகள் செங்குத்தாக (orthogonal) வெட்டுகின்றன எனத்தெரிகிறது.

6. நிகழ்திறமும், பிழைக்கொள்கையும்

1. நிகழ்திறம் (Probability) :

'இன்று மாலை மழை பெய்யலாம்.

'நாளை விடுமுறையாக இருக்கலாம்' என்பது போன்ற நிகழக் கூடிய அல்லது உண்மை-யாக இருக்கக் கூடிய நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பதே நிகழ்ச்சித்தகவு அல்லது நிகழ்திறம் ஆகும். மேற் சொன்னது போன்ற கூற்றுகளை எவ்வளவு தூரம் நம்பிக்கைக்கு உகந்தவை என்பது, கூற்றைப் பகர்பவரைப் பொறுத்தும் அவரது மதிப்பீட்டுத் திறனைப் பொறுத்தும் இருக்கும். எனவே நாம் வழக் கில் பயன்படுத்தும் நிகழ்திறம் என்னும் வார்த்தை சொல்பவரின் அக உணர்வு நிலைக்குரிய (Subjective) ஒன்றாகும், ஒரு நாண யத்தை சுண்டி யெறியும்போது தலைப்பக்கம் விழக் கூடிய நிகழ் திறம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். இக்கூற்றில், முன் சொன்னது போன்ற, சொல் பவரைப் பொறுத்திருக்கும் தன்மை நீக்கப்படுகிறது. உறுதியின்மை (uncertainty) ஒத்துக்கொள்ளக்கூடிய அளவில் உள்ளது.

நிகழ் திறம் இரண்டு வகைப்படும் (1) கணக்கியல் அல்லது காரண காரிய (apriori) நிகழ்திறம்)அப்பாஸ்ட்ரியாரி) புள்ளியியல் (aposteriori) நிகழ்திறம்.

1-01, அப்ரியரி (Apriori) அல்லது கணிதத்திற்குரிய நிகழ்திறம்

ஒரு நாணயத்தை சுண்டி யெறியும்போது. அது தலைப் பக்கமோ அல்லது பூ பக்கமோ விழ சமமான வாய்ப்புகளிருக்கின் றன. இவை யிரண்டில் ஒன்று நிச்சயம் நடந்தே தீரவேண்டும். எனவே தலைப்பக்கம் நிகழ்க்கூடிய நிகழ்திறம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். இவ் வாறாக நாம் நிகழ்ச்சி நடக்கக் கூடிய எல்லாவித வாய்ப்புகளையும் ஆராய்ந்து, நிகழ்திறத்தை நிர்ணயிக்கிறோம். இதற்கு அப்ரியாரி நிகழ்திறம் அதாவது நிகழ்ச்சிக்கு முன் நிர்ணயிக்கப்பட்ட நிகழ் திறம் என்று பெயர்.

1-02. அப்பாஸ்டீரியாரி நிகழ்திறம் அல்லது புள்ளியி நிகழ்திறம் (Statistical Probability) :

ஒரே சூழ்நிலையில் நடத்தப்பட்ட எண்ணற்ற சோதனைகளில், ஒரு நிகழ்ச்சியானது நிகழக்கூடிய தடவைகள் p என்றும், நிகழாத தடவைகள் q என்றும் கொண்டால், அடுத்த சோதனையில் அந் நிகழ்ச்சி நிகழக்கூடிய நிகழ்திறம் $\frac{p}{p+q}$ ஆகும். இங்கு முதலில் நடத்திய சோதனைத் தவிர நிகழ்ச்சி பற்றிய முந்தைய தகவல் எதுவும் தெரியாதென கொள்ளப்படுகிறது.

அப்ரியாரி (Apriori) நிகழ்திறம் விதி தரு முறைகளை ஆதாரமாகக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. அப்பாஸ்டீரியாரி (Aposteriori) நிகழ் திறம் தொகுப்பாய்வு முறையை ஆதாரமாகக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

நிகழ்திறத்தின் அளவு

ஒரு நிகழ்ச்சியானது நிகழக்கூடிய வழிகள், a ஆகவும், நிகழ முடியாத வழிகள் b ஆகவும் இருந்தால், அந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ் திறம் $\frac{a}{a+b}$ ஆகும். இது நிகழ்ச்சியின் வெற்றியின் நிகழ்திறம் "p", எனப்படும்.

எனவே $p=\frac{a}{a+b}$

நிகழ்ச்சி, நிகாழாமையின் நிகழ்திறம் "q" ஆகும்.

என $q = \frac{b}{a+b}$

$\therefore \quad p+q=1$

(i) நிகழ்ச்சி நிகழவே இல்லையானுல் $a=0 \quad \therefore \quad p=0$

(ii) $b=0$ ஆனுல் $p=1$

இப்போது நிகழ்ச்சி நிகழ்வது நிச்சயம்.

p-ன் மதிப்பு எப்பொழுதும் 0-வுக்கும், 1-க்கும் இடையில் உள்ளது.

$\frac{p}{q}$ நிகழ்ச்சியின் சாதக விகிதம் (odds in favour) என்றும்

$\frac{q}{p}$ நிகச்சியின் பாதக விகிதம் என்றும் கூறப்படும்.

உதாரணம் 1.

1, 2, 3, 5 என்ற இலக்கங்களை (ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் ஒரு முறைக்கு மேல் பயன்படுத்தாமல்) கொண்டு ஒரு நான்கு இலக்க எண் அமைக்கப்படுகிறது. (1) இந்த எண்ணானது 5-ஆல் வகுபடக்கூடிய வாய்ப்பையும் (2) இந்தஎண் ஒற்றைப்படையாக இருக்கக் கூடிய வாய்ப்பையும் கண்டுபிடி.

இந்த இலக்கங்கள் எல்லாவற்றையும் ஒரே சமயத்தில் எடுத்துக் கொண்டு அமைக்கப்படும் (ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் ஒரு முறைக்கு மேல் பயன்படுத்தாமல்) எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.

$4! = 24$ ஆகும்.

வகை 1 (Case 1)

ஒரு எண்ணின் முடிவு இலக்கம் 5-ஆனால், அது 5-ஆல் வகுபடும். எனவே 5-ஆல் வகுபடக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை

$3! = 6$ ஆகும்,

∴ அமைக்கப்பட்ட எண் 5-ஆல் வகுபடக்கூடிய வாய்ப்பின் நிகழ்திறம்

$$= \frac{\text{சாதகமான வகைகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த வகைகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

வகை 2. (Case 2)

அமைக்கப்பட்ட எண் 1, 3, 5 என்ற இலக்கத்தில் முடிந்தால் அதாவது 2 என்ற இலக்கத்தில் முடியாதிருந்தால், அது ஒற்றைப் படை எண்ணாகும். 2-ஐ முடிவு இலக்கமாகக்கொண்டு அமைக்கப் படும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$3! = 6$ ஆகும்.

∴ ஒற்றைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை = 18.

∴ ஒற்றைப்படை எண்ணுக இருப்பதின் நிகழ்திறம் } $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

உதாரணம் 2,

இரண்டு பகடைகளை உருட்டி விடும்போது 10 வரக்கூடிய நிகழ்திறத்தை கண்டுபிடி. பகடையின் 6 பக்கங்களிலும் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற இலக்கங்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த இலக்கங்களில் இரண்டைக் கூட்டி, 10 வரக்கூடிய வழிகள் (6, 4), (5, 5), (4, 6) என்ற மூன்ருகும். பகடையை உருட்டும் மொத்த வழிகள் $6 \times 6 = 36$ எனவே தேவையான நிகழ்திறம் $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

1-03. நிகழ்திறத்தை தீர்மானித்தல் (Determination of Probability) .

வரையறை 1

ஒரு கணத்திலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒன்று நிகழும்போது மற்ருென்று நிகழ முடியாதபடி இருந்தால் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கப்படும் (events nutually exclusive).

கூட்டல் தேற்றம்

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் கொண்ட கணத்தின் ஒன்று அல்லது மற்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறம், தனித்தனி நிகழ்ச்சியின் நிகழ் திறத்தின் கூடுதலுக்கு சமமாகும்.

நிருபணம்

கணக்கிலுள்ள எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் உள்ள N வாய்ப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் முதல் நிகழ்ச்சி a_1 வாய்ப்புகளிலும், 2-வது நிகழ்ச்சி a_2 வாய்ப்புகளிலும்..........இதே மாதிரி R-வது நிகழ்ச்சி a_k வாய்ப்புகளிலும் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். P_1 P_2 ......P_k என்பன, இந்த நிகழ்ச்சிகளின். நிகழ் திறங்களானுல்,

$$P_1 = \frac{a_1}{N}, \quad P_2 = \frac{a_2}{N} \;\ldots\ldots P_k = \frac{a_k}{N}.$$

இந்த நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால். நிகழ்ச்சிகள் நிகழும் வாய்ப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மேற்பொருந்துவதில்லை. (do not overlap).

எனவே இந்த k நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று அல்லது மற்ற நிகழ்ச்சியின் வாய்ப்பு $(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_k)$-க்கு சமமாகும் அதாவது ஒன்று அல்லது மற்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ் திறம் $\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_k}{N}$.

$$\frac{a_1}{N}+\frac{a_2}{N}+\ldots\ldots+\frac{a_k}{N}\ P_1+B_2+\ldots\ldots P_k$$

= தனித்தனி நிகழ் திறங்களின் கூடுதல்

உதாரணம் 3.

ஒரு பையில் 3 வெள்ளை, 5 கறுப்பு 6 சிவப்பு பந்துகள் உள்ளன. இதிலிருந்து சரிசம வாய்ப்பில் (random) ஒரு பந்து எடுக்கப் படுகிறது. அது சிவப்பு பந்தாகவோ அல்லது வெள்ளைப்பந்தாகவோ இருக்கும் நிகழ்திறம் என்ன ?

ஒருசிவப்பு பந்தை எடுக்கும் நிகழ்திறம் $=\frac{6}{14}$

ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்திறம் $=\frac{3}{14}$

இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால், சிகப்பு பந்தாகவோ, அல்லது வெள்ளைப் பந்தாகவோ இருக்கும் நிகழ்திறம்

$$=\frac{6}{14}+\frac{3}{14}=\frac{9}{14}$$

உதாரணம் 4.

மூன்று திறனாய் வாளர்களால், ஒரு நூலானது சாதகமாக பார்வையிடப்படும் விகிதம் 5 : 2, 4 : 3, 3 : 4 ஆக இருக்கிறது. இம்மூவரின் கருத்துக்களில் பெரும்பான்மையான கருத்து சாதகமாக இருக்கக் கூடியதன் நிகழ்திறம் என்ன ?

முதல் திறனாய் வாளர் கருத்து நூலுக்கு சாதகமாக இருக்கும் நிகழ்திறம் $=\frac{5}{7}$.

2-வது திறனாய் வாளர்கருத்து நூலுக்கு சாதகமாக இருக்கும் நிகழ்திறம் $=\frac{4}{7}$.

3-வது திறனாய் வாளர் கருத்து நூலுக்கு சாதகமாக இருக்கும் நிகழ்திறம் = $\frac{3}{7}$.

2அல்லது 3 கருத்துக்கள் சாதகமாக இருக்கக் கூடிய நிகழ் திறம்.

$$\text{சாதகம், சாதகம், பாதகம்} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \left[1 = \frac{3}{7}\right]$$

$$\text{சாதகம், பாதகம், சாதகம்} = \frac{5}{7} \times \left[1 - \frac{4}{7}\right] \times \frac{3}{7}$$

$$\text{பாதகம், சாதகம். சாதகம்} = \left[1 - \frac{5}{7}\right] \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$$

$$\text{சாதகம், சாதகம், சாதகம்} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$$

இவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி களாதலால், நிகழ் திறத்தின் கூட்டல் தேற்றத்தின்படி,

$$\text{நிகழ்திறம்} = \frac{1}{7^3} [5 \times 4 \times 4 + 5 \times 3 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3]$$

$$= \frac{209}{343}$$

1-04. வரையறை 2.

ஒரு கணத்திலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று பாதிக்காம லிருந்தால் அவை சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent, events), எனப்படும்.

பெருக்கல் தேற்றம் :

ஒரு கணத்திலுள்ள சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஒரே வேளையில் நிகழ்க்கூடிய நிகழ்திறம், ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறம் பெருக் கற் பலனுக்கு சமமாகும்.

நிரூபணம் :

ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். முதல் நிகழ்ச்சி, n_1 வாய்ப்புகளில் a, தடவை நிகழ்வதாகவும்.

2-வது நிகழ்ச்சிர் n_2 வாய்ப்புகளில் a_2 தடவை நிகழ்வதாகவும் இருக்கட்டும். p_1, p_2 என்பது முறையே இவையிரண்டின் நிகழ் திறங்களானல், $p_1 = \frac{a_1}{n_1}$, $p, = \frac{a_2}{n_2}$ இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாதலால். முதல் நிகழ்ச்சி நிகழக்கூடிய ஒவ்வொரு வழியையும், 2-வது நிகழ்ச்சி நிகழுக்கூடிய ஒவ்வொரு வழியுடனும் இணைக்கலாம். எனவே இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் $(a_1 \ a_2)$ ஆகும். இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழக்கூடிய வாய்ப்புகள் $(n_1 \ n_2)$. எனவே இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சேர்ந்து நடக்கக்கூடிய நிகழ் திறம்

$$= \frac{a_1 \ a_2}{n_1 \ n_2} = \frac{a_1}{n_1} \cdot \frac{a_2}{n_2} = p_1 \ p_2$$

அதாவது நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ் திறங்களின் பெருக்கற் பலனுக்கு சமம்.

இக்கூற்று (argument) n நிகழ்ச்சிகளுக்கும் உண்மையாகும்.

உதாரணம் 5.

நான்கு சிவப்பு, ஐந்து கறுப்பு பந்துகளுள்ள ஒரு பையிலிருந்து, இரண்டு சிவப்பு பந்துகளை அடுத்தடுத்து எடுக்கக் கூடிய நிகழ் திறத்தை

(1) முதலில் எடுத்த பந்தை திரும்ப வைத்தபின்னும்

(2) திரும்ப வைக்காத பொழுதும் கண்டுபிடி.

வகை 1

முதல் பந்தை எடுக்கும்போது, பையில் 4 சிவப்பு பந்துகளும், 5 கறுப்பு பந்துகளும் உள்ளன. எனவே ஒரு சிவப்பு பந்தை எடுப்பதின் நிகழ்திறம் $\frac{4}{9}$. முதலில் எடுத்த சிவப்பு பந்து திரும்ப வைக்கப்படுவதால், இரண்டாவது பந்தை எடுக்கும் போதும், பையில் 4 சிவப்பு பந்துகளும் 5 கறுப்பு பந்துகளும் உள்ளன. எனவே, இரண்டாவது தடவையும் சிவப்பு பந்தை எடுப்பதின் நிகழ் திறம் $\frac{4}{9}$ ஆகும். இரண்டாவது உருவல், முதல் உருவலைச் சாருதது. எனவே, இரண்டு சிவப்பு பந்துகளை அடுத்தடுந்து உருவும் நிகழ் திறம் $= \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.

வகை 2.

முதல் வாய்ப்பில் ஒரு சிவப்பு பந்தை உருவும் நிகழ் திறம் $= \frac{4}{9}$.
சிவப்பு பந்து ஒரு முறை உருவப்பட்டால், அது மீண்டும் வைக்கப் படவில்லை. எனவே, இரண்டாவது உருவலின்போது பையில் 3 சிவப்பு பந்துகளும், 5 கறுப்பு பந்துகளுமே உள்ளன. இப் பொழுது ஒரு சிவப்பு பந்தை உருவும் நிகழ்திறம் $\frac{3}{8}$ எனவே, இரண்டு சிவப்பு பந்துகளை அடுத்தடுத்து,

$$\text{உருவும் நிகழ் திறம்} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6},$$

1-05. கூட்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ் திறம் :

தேற்றம் :

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் திறம் p ஆனால், n வாய்ப்புகளில் அந் நிகழ்ச்சி pr முறை நிகழக் கூடியதின் நிகழ்திறம் ${}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$ ஆகும். இங்கு $q = 1 - p$.

நிருபணம் :

நிகழ்ச்சியானது r குறிப்பிட்ட வாய்ப்புகளில் நிகழக்கூடியதும், $(u-r)$ வாய்ப்புகளில் நிகழக்கூடாததுமான நிகழ் திறம்,

பெருக்கல் விதிப்படி $p^{r}\, q^{n-r}$. இங்கு வாய்ப்புகள் குறிப்பிடப் படவில்லை.

நிகழ்ச்சியான n வாய்ப்புகளில் ஏதேனும் r வாய்ப்புகளில் நிகழ லாம். $(n-r)$ வாய்ப்புகளில் நடக்காமலிருக்கலாம். இந்த r வாய்ப்புகளை, n-லிருந்து, n_{cr} வழிகளில் பொறுக்கி யெடுக்கலாம். எனவே நிகழ்ச்சின் வெற்றி தோல்விகளின் பொருத்தமான சேர்ப்பு கள் (possible combinations) n_{cr} ஆகும். இவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுள்ளன. ஒவ்வொன்றின் நிகழ் திறமும் $p^{r}\, q^{n-r}$ எனவே' கூட்டல் தேற்றத்தின்படி, நிகழ் திறம் $n_{cr}\, p^{r}\, q^{n-r}$ ஆகும்.

கிளைத் தேற்றம் :

p, நிகழ்ச்சி நிகழக் கூடியதின்நிகழ்திறமாகவும், q, நிகழக்கூடா ததின் நிகழ் திறமாகவும் இருந்தால், n சோதனைகளில் $0, 1, 2, \ldots, n$

வெற்றிகள் கிடைப்பதின் நிகழ் திறம், $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படும்.

உதாரணம். 6 :

6 நாணயங்கள் சுண்டி விடப்படுகின்றன.

(1) துல்லியமாக 3 தலைகள்

(2) இயலும் உச்ச அளவு 3 தலைககள்

(3) குறைந்தது 3 தலைகள்

(4) குறைந்தது ஒருதலை விழக்கூடிய நிகழ் திறத்தைக் கணக்கிடு.

(1) $6\,C_3\,(\frac{1}{2})^6$

(2) $\frac{1}{2^6}\left[\,6\,C_3 + 6\,C_2 + 6\,C_1 + 6\,C_0\,\right]$

(3) $\frac{1}{2^6}\left[\,6\,C_3 + 6\,C_4 + 6\,C_5 + 6\,C_6\,\right]$

(4) $\left[\,1-\frac{1}{26}\,\right]$

உதாரணம் 7 :

3 ஆண்கள், 2 பெண்கள், 4 குழந்தைகளுள்ள ஒரு தொகுப்பிலிருந்து, 4 பேர்களை குறிப்பின்றி பொறுக்கி யெடுக்கப்படுகிறார்கள். இவர்களில் துல்லியமாக இரண்டு குழந்தைகள் இருக்கும் வாய்ப்பு $\frac{10}{21}$, என்று காண்பி.

பொறுக்கி யெடுக்கப் பட்டவர்களில் இருவர் குழந்தைகள். மற்ற இருவரும் 5 பேர்களிலிருந்து (3 ஆண்கள் + 2 பெண்கள்) எடுக்கப்படுகிறார்கள்.

2 குழந்தைகளையும் $4\,C_2$ வழிகளிலும், மற்ற இருவரை $5\,C_2$ வழிகளிலும். பொறுக்கலாம்.

$$\text{எனவே கணக்கிட வேண்டிய நிகழ் திறம்} = \frac{4\,C_2 \times 5\,C_2}{9\,C_4} = \frac{10}{21}$$

பயிற்சி.

(1) 4 சிவப்பு 7 பச்சை பந்துகளையும், 5 சிவப்பு 10 பச்சை பந்துகளையும் முறையே கொண்ட இரு பைகள் உள்ளன. இவ்விரண்டு பைகள் ஒன்று அல்லது மற்றொன்றிலிருந்து குறிப்பின்றி ஒரு பந்து உருவப்படுகின்றது. ஒரு பச்சை பந்தை உருவுவதன் நிகழ் திறத்தைக் கணக்கிடு.

(2) கலக்கபட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில், முதல் 4 சீட்டுகளும் ராஜாக்களாக இருப்பதன் நிகழ் திறம் என்ன ?

(3) 100 பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு புத்தகத்தை குறிப்பின்றி திறக்கும்போது வலப்பக்கத்திலோ அல்லது இடபக்கத்திலோ அதே இலக்கங்கள் கொண்ட இரண்டு இலக்க பக்க எண் வரும் நிகழ் திறத்தைக் கணக்கிடு.

(4) குறிபார்த்து சுடும் தேர்வில் A, B, C என்ற மூவரின் குறி வட்டத்தைத்தாகும் நிகழ் திறங்கள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ஆகும். மூவரும் ஒரே குறி வட்டத்தை நோக்கி சுட்டார்களானல் (a) ஒரே ஒருவர் மட்டும் குறி வட்டத்தைத் தாக்கும் (b) குறைந்தது ஒருவராவது குறி வட்டத்தைக் தாக்கும் நிகழ் திறங்களைக் கண்டுபிடி.

2. சில புள்ளியியல் கருத்துக்கள் :

2.01. அலை வெண் பரவல்கள்.

விஞ்ஞான அளவைகள், தொழில் மற்றும் சமுதாய புள்ளியியல் விவரங்கள் பெரும்பாலும் வரைபடத்தின் மூலம் குறிக்கப்படுகிறன.

இவ்விவரங்களை வரிசைப்படுத்தி கோவையாக எழுதுதல் முதற் படியாகும். இவ்விவரங்கள் சார்ந்திருக்கும் மாறுதலைப் பொறுத்து இவைகள் ஒரு பொருத்தமான பிரிவு இடை வெளியில் பிரிவுகளாக எழுதபபடுகின்றன.

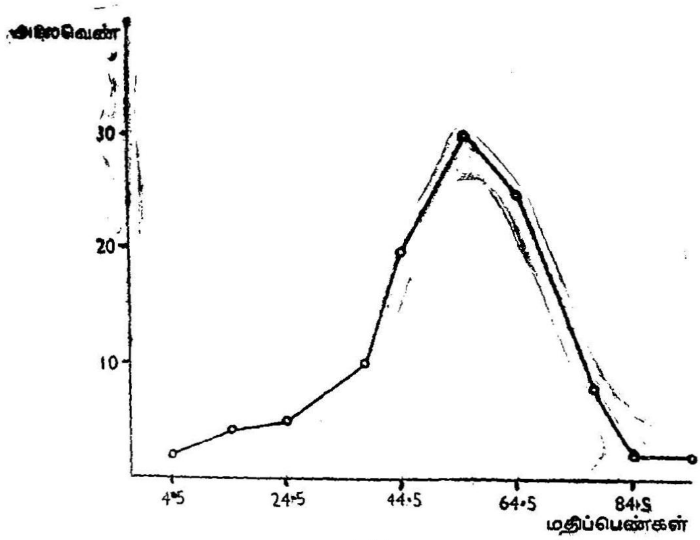
ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள விபரங்களின் எண்கள் அப்பிரிவின் அலைவெண் எனப்படும்.

கீழுள்ள அட்டவணை (1) மரணவர்கள்தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கிறது. பிரிவு என்ற நிரலில் உள்ள இரு எண்களும் உதாரணமாக 0, 9, 10, 19 ஆகியவை முறையே கீழ், மேல், யிரிவு எல்லைகளாகும். ஒரு பிரிவின் முதல் எண்ணுக்கும், அடுத்த பிரிவின் முதல் எண்ணுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் பிரிவு தூரம் (width of the class)எனப்படும்.

அட்டவணை 1

பிரிவு	அலைவெண்
6— 9	2
10— 9	5
20—29	6
30—39	14
40—49	21
50—59	32
60—69	24
70—79	10
80—89	3
90—99	3

இந்த அட்டவணையானது அலை வெண் பரமல்களை எளிதில் புரிந்து கொள்ள மிகவும் உதவியாக இருக்கிறது. ஆனால் ஒரு வரை படக் குறிப்பானது இவ்விவரங்களை இதை விட தெளிவாக விளக்குகிறது. இந்த விவரங்கள் படம் 56-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. X அச்சு மதிப் பெண்களையும், Y அச்சு அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றன.



படம் 66,

2-02. சராசரி.

சராசரி அலைவெண் முக்கியமான தொன்றல்ல. ஆனால் விவரங்களின் சராசரி மிகவும் முக்கியமான தொன்ருகும். இது கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ என்பன வெவ்வேறு பிரிவுகளின் அலைவெண்களாவும், $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன மாறிகளின் நடு மதிப்புகளாகவும் இருந்தால். மாறியின் சராசரி மதிப்பானது

$$(f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots f_n x_n) / (f_1 + f_2 + \ldots\ldots f_n) \quad \ldots (1)$$

ஆகும். இது $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$-ன் நிறையிட்ட சரரசரி ஆகும். இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள அலைவெண்ணும் நிறையாகும்.

இதையே

$$\bar{x} = \sum_{S=1}^{n} f_s x_s \Big/ \sum_{S=1}^{n} f_s \text{ அல்லது } [fx] \Big/ [f]$$

என எழுதலாம்.

சில சமயங்களில் கோவை (1)-ஐப் பயன்படுத்தி $\bar{x}$-ஐக் கணக்கிடுவது கடினமானதாக இருக்கும். x-ஐ கீழ்க்கண்ட முறையைப்பயன்படுத்தி எளிதாக கணக்கிடலாம்.

$x^s = x'_s + m$ எனக் கொள்வோம். இங்கு ஒரு மாறிலி. அப்பொழுது

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots f_n x_n$$
$$= f_1 (x'_1 + m) + f_2 (x'_2 + m) + \ldots\ldots f_n (x'_n + m)$$
$$= f_1 x'_2 + f_2 x'_2 + \ldots\ldots f_n x'_n + m (f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n)$$
$$\therefore \frac{f_1 x_1 + f_1 x_2 + \ldots\ldots f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots f_n}$$
$$= \frac{f_1 x'_1 + f_2 x'^2 + \ldots\ldots f_n x'_n}{f_1 + f_1 + \ldots\ldots f_n + m}$$

அல்லது $\bar{x} = \bar{x'} + m$

இங்கு $\bar{x'}$, x'_s-ன் சராசரியாகும்.

m-ஐ வசதியாக தேர்ந்தெடுத்து, x'-ஐ எளிதாக கணக்கிடலாம்.

n-ஆனது $\bar{x}$-க்கு நெருங்கிய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால், $\bar{x'}_1$ சிறியதாக இருக்கும். m நடைமுறை (working) சராசரி அல்லது எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சராசரி எனப்படும்.

2-03. இடைநிலே (Median) :

ஒரு கண்டறிதல்களின் கணமானது கண்டறிதல்களின் மதிப்புகளின் ஏறு வரிசையில் எழுதப்படுமேயானுல், அக்கணத்தின் நடுவிலுள்ள கண்டறிதலின் மதிப்பு அதன் இடைநிலே எனப்படும். சுருக்கமாக கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையானுல், அதாவது 2_{n+1} என்றிருந்தால், $(n+1)$-வது மதிப்பு அதன் இடை நிலேயாகும், கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையானுல், அதாவது $2n$ என்றிருந்தால். கணத்தின் நடுமதிப்புகள் n-வது $(n+1)$-வது மதிப்புகளாகும். இவ்விரண்டு மதிப்புகளின் சராசரி கணத்தின் இடை நிலேயாகும்.

2-04. முகடு (The mode) :

மாறியின் எந்த மதிப்புக்கு அலேவெண் அதிக மாகவுள்ளதோ அல்லது அலேவெண்கோடு வரைந்தால் எந்த புள்ளிக்கு ஏற்ற அலேவெண் மிக அதிகமாக உள்ளதோ அப்புள்ளி முகடு எனப்படும்.

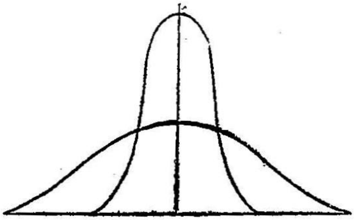
2-05. பெருகற் சராசரி (Geometric mean) :

இரண்டு எண்களின் பெருக்கற் சராசரி காண, அவை இரண்டையும் பெருக்கி அப்பெருக்கற் தொகையின் வர்க்க மூலம் காண வேண்டும். $x_1, x_n \ldots\ldots x_n$ என n எண்கள் இருந்தால் அவற்றின் பெருக்கற் சராசரி $(x_1\, x_2 \ldots\ldots \ldots)^{1/n}$ ஆகும்.

2-06. சிதறல் அளவைகள் (Measures of dispersion) :

ஒரே கூட்டுச் சராசரியுடைய இரு எண் குழுக்கள் மற்ற பண்புகளில் வேறுபட்டு இருக்கலாம். அத்தகைய பண்புகளில் முக்கியமானது சிதறல் ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 என்ற குழுவையும் 15, 17, 19, 21, 23, 25, குழுவையும்

எடுத்துக் கொள்வோம். இரண்டு குழுக்களுள் பின்னது அதிகம் சிதறுண்டுள்ளது என்பதும், முன்னது ஓரளவு நெடுங்சியே அமை யப் பெற்றுள்ளது என்பதும் தெளிவு (படம் 67) இச்சிதறலை அளப் தற்கு பல அளவைகள் பயன்படுத்தப்படுசின்றன. இங்கு நாம் வீச்சு (நெடுக்கம்) (Range) சராசரி விலக்கம் (mean deviation), தரமான விலக்கம் (Standard deviation) என்ற மூன்றை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோம்,



படம் 67

2-07. வீச்சு :

மிகப் பெரிய எண்ணையும், மிகச் சிறிய எண்ணையும் எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் வேறுபாட்டை அளந்தறியலாம். இது சித றலை அளவிடப் பயன்படும் அளவைகளுள் கணக்கிட எளிதானது. அலைவெண் பரவலாகஅமைந்துள்ள போது, அலைவெண் வளை கோட்டின் இரு முனைகளுக் கிடையே உள்ள தூரமே **வீச்சு.**

அலைவெண் பலகோணமாயின், முதற் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லைக்கும், கடைசி பிரிவு இடை வெளியின் மேல் எல்லைக்கும், இடையே உள்ள தூரமே வீச்சு. கணக்கிட இவ்வளவு எளிதாக இருந்தாலும், இந்த அளவை குறைபாடு உடையது.

சில சமயங்களில், விவரங்களின் 50% விழக்கூடிய, மாறியின் வீச்சுப் பகுதியை தெரிந்து கொள்வது மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். சான்றாக அட்டவணை (1)-ல் மதிப்பெண்களின் வீச்சு 0-99 ஆகும். ஆனால் மதிப்பெண்களின் $\frac{93}{12_0}$ அல்லது 78% 30- க்கும் 69-க்கும் இடையிலுள்ளது.

2-08. சாரசரி விலகல் :

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பன. $\bar{x}$-ஐ சாரசரியாகக் கொண்ட விவ ரங்களின் குழுவானால்,

$$(x_1 - \bar{x}),\quad (x_2 - \bar{x}) \ldots\ldots\ldots (x_n - \bar{x}),$$

என்பன முறையே சராசரியிலிருந்து விவரங்களின் விலகல்கள் ஆகும். இவைகளை $d_1, d_2 \ldots\ldots\ldots d_n$ என எழுதுவோம். இவைகளின் சில விலகல்கள் + ஆகவும், சில (—) ஆகவும் உள்ளன. உண்மையில் இவைகளின் கூடுதல் சுழியமாகும். அதாவது

$$d_1 + d_2 \ldots\ldots d_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n - n\bar{x} = 0$$

விவரங்களின் ஒரு குழுவின் சராசரி விலகல் (சில சமயங்களில் சராசரி தனிவிலகல் எனப்படும்).

விலகல்களின் எண் மதிப்புகளின் சராசரி என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \text{ சராசரி விலகல் } = \frac{|d_1| + |d_2| + \ldots\ldots |dn|}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{S=1}^{n} |ds| \text{ ஆகும்.}$$

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற விவரங்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ என்ற அலைவெண்களைக் கொண்டிருந்தால்,

சராசரி விலகலானது,

$$\frac{f_1|d_1| + f_2|d_2| + \ldots\ldots\ldots + f_n|d_n|}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots f_n}$$

$$= \frac{\Sigma f_s |x_2 - \bar{x}|}{\Sigma f_s}$$

2-09. தரமான விலகல் (Standard deviation) :

சிதறலின் மிகவும் முக்கியமான அளவை தரமான விலகலாகும். இது வழக்கமாக σ என குறிக்கப்படும். இது சராசரியிலிருந்து விலகல்களின் இருமடியின் வாயிலாக பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$d_1, d_2 \ldots\ldots dn$ என்பன, விவரங்கள் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ இவைகளின் சராசரி x-லிருந்து உள்ள விலகல்களானல்,

அப்பொழுது

$$\sigma^2 = (d_1^2 + d_2^2 + \ldots\ldots dn^2)/n$$

$$\text{அதாவது } \sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{S=1}^{n} ds^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n} \sum_{S=1}^{n} (x_s - \bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன முறையே

$f_1\ d^2 \ldots\ f_n$ என்ற அலைவெண்களைக் கொண்டிருந்தால்,

$$\sigma^2\ (f_1 d_1^2 + f_2 d_2^2 + \ldots\ldots f_n d_n^2) \Big/ (f_1 + d_2 + \ldots\ldots f_n)$$

$$= \sum_{S=1}^{n} f_s - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{S=1}^{n} f_s$$

σ^2 விவரங்களின் மாறுபாடு எனப்படும். தரமான விலகல் σ விவரங்களின் வர்க்க மூல 'சராசரி வர்க்க விலக்கம் (Root mean, Square deviation) எனப்படும்.

2-10. சில முக்கியமான அலைவெண் பரவல்கள் :

சமுதாய மற்றும் தொழில் பற்றிய புள்ளி விவரங்களின் பரவல்கள் பலவகைப்படும். ஆனல் இவைகள் கீழ்க்கண்ட முக்கியமான மூன்று வகையான அலைவெண் பரவல்களைத் தழுவியிருக்கின்றன. இவைகளை நிகழ்திறக் கொள்கையை பயன்படுத்தி அடையலாம். இவைகள் ஈருறுப்பு பரவல் என்ற மூன்றும் ஆகும், இன்னும் பல வகைகளும் உண்டு.

2-11. ஈருறுப்புப் பரவல் :

ஒரு நாணயத்தை சுண்டி எறியும்போது தலையையோ அல்லது பூவையோ பெறக்கூடிய இரணடு வாய்ப்புகள் இருக்கின்றன. எனவே ஒரு வீச்சுக்கு தலையோ அல்லது பூவோ விழக்கூடிய நிகழ்திறம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். நாம் u வீச்சுகளை எடுத்துக் கொண்டோமானல் பூ விழக்கூடிய வீச்சுகள் $\frac{1}{2}n$ ஆகும். இங்கு n ஒரு பெரிய எண்ணாக இருக்கவேண்டும். சிறியதாக இருந்தால் தலைவிழக் கூடிய

தடவைகள் $\frac{1}{2}n$-லிருந்து மாறுபடக்கூடும், அல்லது தலையே விழாமல் இருக்கவும் வாய்ப்புண்டு. உதாரணமாக 10 வீச்சுகளை எடுத்துக்கொண்டால் 3 தடவை தலை விழலாம், 20 வீச்சுகளுக்கு 8 தடவை தலை விழலாம். நாம் n வீச்சுகளை எடுத்துக்கொண்டால், m தடவை தலை விழக்கூடியதன் நிகழ்திறம் என்ன என்பது தான் கேள்வி.

$$(0 \leq m \leq n.)$$

n வீச்சுகளை எடுத்துக் கொண்டால் 0, 1, 2... n தடவைகள் தலைவிழக் கூடிய நிகழ்திறங்கள், ஈருறுப்புக் கோவை $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$-ன் விரிவின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகின்றன என காட்டலாம். உதாரணமாக, 10 வீச்சுகளுக்கு, 3 தடவைகள் தலை விழக் கூடியதன் நிகழ்திறம்

$$\frac{10\times 9\times 8}{1\times 1\times 3}\ (\tfrac{1}{2})^7\ (\tfrac{1}{2})^9 = \frac{15}{128}.$$

அதாவது தோராயமாக $\frac{1}{8}$.

பொதுவாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடக்கக்கூடிய நிகழ்திறம் p ஆகவும் நடக்கக்கூடாததன் நிகழ்திறம் q ஆகவும் இருந்தால் $(p+q=1)$, n தடவைகளில் நிகழ்ச்சி நடக்கக் கூடியதன் நிகழ் திறமானது 0, 1, 2, 3.........n ஆக இருக்கக் கூடிய வாய்ப்புகள், ஈருறுப்புக் கோவை $(q+p)^n$-ன் விரிவின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படும்.

அதாவது

$$q^n+nq^{n-1}p+\frac{n(n-1)}{1.2}q^{n-2}p^2+\ldots\ldots+p^n$$

எனவே நாணய கணக்கில், 10 வீச்சுகளில் 0, 1, 2......10 தடவைகள் தலைபக்கம் விழக்கூடியதன் நிகழ்திறம். ஈருறுப்புக் கோவை $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{10}$-யின் விரிவின் அடுத்டுத்த உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படும்.

அதாவது

$$\frac{1}{2^{10}},\quad 10\times\frac{1}{2^{10}},\quad \frac{10\times 9}{1\times 2}\times\frac{1}{2^{10}}\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \frac{1}{2^{10}}\ (1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1)$$ ஆகும்.

2-12. பாய்சான் பரவல் :

ஈருறுப்புப் பரவலின் அமைப்பு p, n இவைகளின் மதிப்பைப் பொறுத்து மாறும். நிகழ்ச்சி நடக்கக் கூடிய நிகழ் திறம் p மிகவும் சிறியதாகவும், ஆனால் n மிகப் பெரியதாகவும் அதாவது np பொருளுடையதாக இருக்கும் வகை முக்கியமான தொன்றுகும்.

p சிறியதாகவும், n பெரியதாகவும் இருக்கும்போது ஈருறுப்புக் கோவை $(q+p)^n$-ன் விரிவை தோராயமாக அல்லது அதன் எல்லை மதிப்பு

$$e^{-m}\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1\times 2}+\frac{m^3}{1\times 2\times 3}+\ldots\ldots+\frac{m^n}{n!}\right)$$

என்ற தொடர்பாக எழுதலாம்.

இங்கு $m=np$, $e=2.71828$ (5 தசம துல்லியமாக)

இந்த தொடருக்கு **பாய்சான் தொடர்** என்று பெயர். இத் தொடரின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கியைந்த பரவல் **பாய்சான் பரவல்** எனப்படும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி, சார்பு அலைவெண் r உடன் n தடவைகள் நடப்பது கீழ்க் கண்ட அட்டவணையின்படி மாறும்

n	0	1	2	3	……	s
$e^m r$	1	n	$\frac{m^2}{1\times 2}$	$\frac{m^3}{1\times 2\times 3}$	……	$\frac{ms}{S!}$

இது பாய்சான் பரவலின் சிறப்பு அம்சமாகும்.

ஒரு உண்மையன நிகழ் திற பரவலுக்கு நிகழ் திறங்களின் கூட்டுத்தொகை 'ஒன்று' என இருக்க வேண்டும், பாய்சான் பரவலுக்கு சார்பு அலைவெண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$e^{-m}\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1\times 2}+\ldots\ldots+\frac{m_s}{S!}\right)$$

$=e^{-m}\times e^{+m}$ (தோராயமாக - S பெரிய எண்ணுக இருந்தால்)

$=1$ (தோராயமாக)

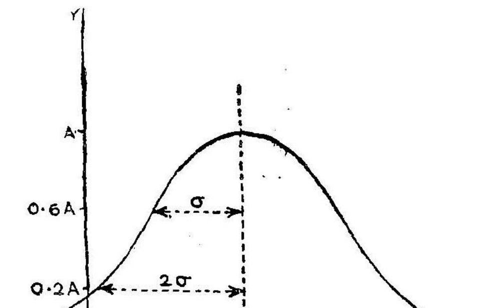
இதே அளவு தோராயமாக, பரவலின் சராசரி n எனவும், தரமான விலக்கம் $m^{\frac{1}{2}}$ எனவும் காட்டலாம்.

2-13. இயல்நிலைப் பரவல் :

இயல்நிலைப் பரவலானது முதன் முதலாக டிமாய்வர் (Demoivre) என்பவரால் நாணயக் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்காக புகுத்தப்பட்டது. இது பிறகு லாப்லாஸ், காஸ் இவர்களால் தனித்த்தனியாக கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. எனவே இது சில சமயங்களில் காஸியன் பரவல் என்றும் வானியல்,விஞ்ஞான விவரங்களில் உள்ள 'தற்செயலாய் நிகழும் பிழைகளுக்கு பயன்படுத்தப்பட்டதால் காஸியன் பிழைகளின் விதியென்றும் கூறப்படுகிறது.

இயல் நிலைப்பிழை வளைகோட்டின் சமன்பாடு $y = Ae^{-h^2(x-m)^2}$ என்று அமைகிறது. இங்கு A, h_2 m மாறிலிகள்.

வளை கோட்டின் வடிவு படத்தில் (படம் 68) கட்டப்பட்டுள்ளது. $x = m$ ஆக இருக்கும்போது ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு இருக்கிறது. மேலும் வளைகோடு, $x = m$ என்ற கோட்டைப் பற்றி சமசீராக உள்ளது.



படம் 68

இயல் நிலைப்பிழை வளைகோடு

$x = m$ ஆகும்போது, $y = A$

$x = n \pm \frac{a}{h}$ ஆகும்போது $y = Ae^{-a^2}$

வளை கோட்டின் கீழுள்ள முழுபரப்பு

$$\int_{\propto}^{+\propto} Ae^{-h^2(x-mi)^2} \, dx$$

ஆகும். இது $(A\sqrt{\pi}/h$-க்கு சமமாகும். A ஆனது

$h/\sqrt{\pi}$ எனக் கொண்டால் வளை கோட்டின் கீழுள்ள பரப்பு ஒன்று. அப்பொழுது வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-m)^2} \qquad \ldots \quad (1$$

ஆகும் இது இயல்நிலை அல்லது காஸியன் பரவலின் அலைவெண் வளைகோடு ஆகும். இந்த பரலுக்கு சார்பு அலைவெண்ணின் மதிப்பு x-க்கும் $x+\partial x$-க்கும் இடையே $y\partial x$ என்ற மதிப்புடையதாக இருக்கிறது. இதையே ஒரு நிகழ்ச்சியானது x-க்கும் $x+\partial x$-க்கும் இடையே இருக்கும் நிகழ்திறம்.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 (x-m)^2} \partial x \quad \text{எனவும் கூறலாம்.}$$

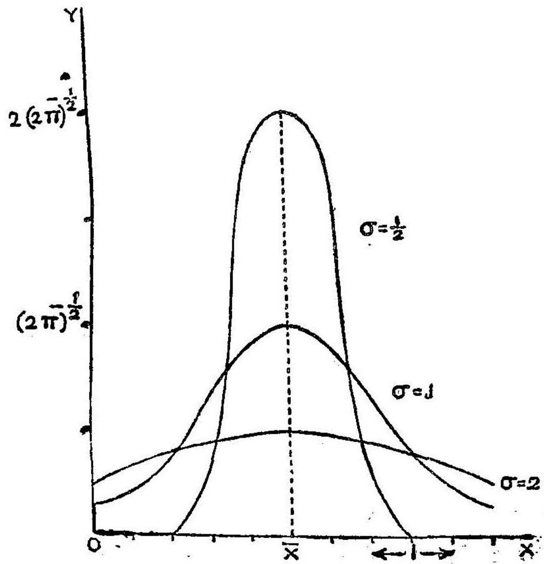
எனவே x-ன் மதிப்பு (சமன்பாடு 1) சில சமயங்களில் பரவலின் நிகழ்திற அடர்த்தி அல்லது சார்பு அலைவெண் அடர்த்தி என்றும் கூறப்படும்.

எந்த ஒரு இயல்நிலை பரவலும் h, m என்ற இரு துணையலகு கலால் (Parameters) நிர்ணயிக்கப் படுகிறது. m, பரவலின் சராசரி என காண்பிக்கலாம். h, சில சமயங்களில் திட்ப மாறிலி (Precision constant) எனப்படும். h ஆனது தரமான விலகல் σ-வுடன் $2\sigma^2 h^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டால் இணைக்கப்படுகிறது.

$m = \bar{x}$, $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ என எழுதினால்

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

இது $\bar{x}$-ஐ சராசரியாகவும், σ-ஐ தரமான விலகலாகவும் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப்பரவலைக் குறிக்கிறது. $\bar{x}$-ன் ஒரே மதிப புக்கும் σ-வின் வெவ்வேறு மதிப்புக்கும் வளைகோட்டின் வடிவ மானது படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (படம் 69.)



படம் 69

$x = \bar{x} \pm \sigma$ ஆக இருக்கும்போது

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{60.607}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}$$ எனவும்

$x = \bar{x} \pm 2\sigma$ ஆக இருக்கும்போது

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-} \simeq \frac{0.135}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}$$

எனவும் கிடைக்கிறது.

2-14. இயல்நிலை, ஈருறுப்புப் பரவல்களின் தொடர்பு :

$(q+p)^n$-க்கு இயைந்த ஈருறுப்பு பரவலின் செவ்வகப்படம், n பெரிதாக இருக்கும்போது ஏறக்குறைய ஒரு இயல் நிலை பிழை வளைகோட்டுக்குச் சமமாக இருக்கும். உண்மையில் இயல் நிலை விரிவை ஈருறுப்பு அமைப்பிலிருந்து பெறலாம். $(q+p)^n$-ன் விரிவின் உறுப்புகளை y-கூறுகவும், x-ன், O-விலிருந்து n-க்குள்ள முழு எண்

மதிப்புகளை x-கூறுகவும் கொண்டு புள்ளிகள் குறித்தோமானால், x ஆனது பெரிதாக இருக்கும்பொழுது, இப்புள்ளிகள் ஏறக்குறைய இயல்நிலை வளைகோடு.

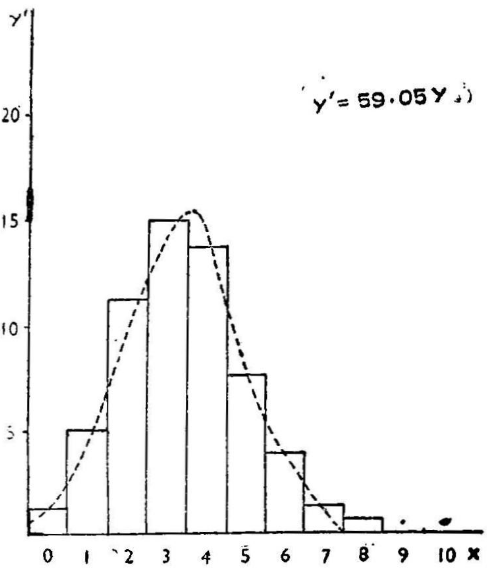
$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \; e^{-(x-n^2)/2\sigma^2}$$

மீது விழுகின்றன.

இங்கு m = ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np

σ^2 = விலக்கவர்க்க சராசரி npq.

படம் 70-ல் $(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^{10}$-க்கு இயைந்த பரவல் செவ்வகப்பட $n = \frac{10}{3}$, $\sigma^2 = \frac{20}{9}$ உள்ள இயல் நிலை வளைகோடும் வரையப் பட்டுள்ளன.



படம் 70

நிச்சயம் இரண்டு பரவல்களுக்கு இடையே, ஒரு முக்கியமான வித்தியாசம் உள்ளது. ஈருறுப்புப் பரவலானது, n-ன் முழு எண்

மதிப்புகளுக்கியைந்த தனி மதிப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணத்தைக் கொண்டு தொடர்பற்று இருக்கிறது. ஆனால் இயல்நிலைப் பரவலானது மாறியின் எல்லா மதிப்புகளையும் கொண்டு தொடர்ச்சியாக இருக்கிறது. தனி மதிப்புகளின் பரவல் ஏறக்குறைய இயல்நிலைப் பரவலைத்தழுவி இருக்கலாம்.

2-15. இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி விலகல் :

எந்த ஒரு விவரங்களின் கணத்தின் சராசரி விலகலும், விலகல்களின் மதிப்புகளின் சராசரிக்கு சமம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்த வரையறுப்பைப் பயன்படுத்தி, இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி விலகல் η-வை

$$\eta = \sigma/\sqrt{(\tfrac{1}{2}\pi)} \simeq 0.80\,\sigma$$

என எழுதலாம்.

இப்படியாக, ஒரு இயல் நிலைப்பரவலுக்கு η தோராயமாக $\frac{4\sigma}{5}$-க்குச் சமமாக இருக்கிறது, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பரவலானது எந்த அளவுக்கு இயல் நிலையிலிருந்து மாறுபட்டிருக்கிறது. என்பதை, விகிதம் η/σ-வைக் கண்டுபிடித்து அதை $\frac{4}{5}$-க்கு ஒப்பிட்டு கணக்கிடலாம்.

3. பிழைக்கொள்கையும் மீச்சிறுபடியும் :

கணிதத்தில் ஒரு சில பிரிவுகள்தான் பிழைக்கொள்கையையும், மீச்சிறுபடி தத்துவத்தையும் போல விஞ்ஞானத்துக்கும். ஆராய்சித்துறைக்கும் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கின்றன. பொதுவாக விஞ்ஞானத்தில் எந்த விதமான ஆராய்ச்சியும் இந்த தத்துவங்களின் பயனில்லாமல் திருப்திகரமாக செய்ய இயலாது.

3-01. அளவையின் வரையறுப்பு :

ஒரு கணியத்தை அளிப்பதென்பது, நேராகவோ, (direct) அல்லது மறைமுகமாகவோ (indirect) அதற்கும் அதன் மதிப்பைத் தெரிப்படுத்துவதற்கு பயன்படுத்தும் அலகுக்கும் உள்ள விகிதத்தை நிர்ணயிப்பதாகும். மிகச் சில அளவைகளைத்தான் நேராக அளக்கிறோம். நீளத்தைத் தவிர மற்ற எந்த அலகுகளையும் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்க நேராக பயன்படுத்துவதில்லை. உண்மையில் ஒவ்வொரு அளவையும் நீளத்தின் அளவை சார்ந்திருக்குமாறு செய்

யப்பட்டுள்ளது. உதாரணமாக நேரத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியிலுள்ள நிமிடங்களாலும், வினாடியாலும் கணக்கிடுவதில்லை. ஆனால் கடிகாரத்தில் முள்ளானது ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தைக் கடக்க எவ்வளவு நேரமாகிறது என்று பார்த்தே கணக்கிடபடுகிறது.

பொதுவாக அளவை சுட்டு (Dial) அளக்கப்படும் ஒவ்வொ அளவையும் முடிவாக நீளத்தையே சார்ந்திருக்கிறது.

உதாரணம் : அழுத்த மானிகள், மின் அழுத்த மானிகள், வெப்ப மானிகள், தராசுகள் ஆகியவை. நீளத்தை மிகவும் துல்லியமாக கணக்கிடக்கூடிய நம்முடைய கண்ணின் திறமையே இதற்கு காரணமாகும்.

கணியத்தின் சரியான மதிப்பைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு பிழை ஒரு முக்கியமான தடையாக உள்ளது பிழைக் கொள்கையும், மீச்சிறுபடி முறையும், கணியங்களின் சரியான மதிப்புகளுக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிப்பதற்கான முயற்சியின் பலனேயாகும்.

3-02. பிழைக்கொள்கை ;

பிழை என்பது, அளக்கப்பட்ட மதிப்பை அடைய, உண்மையான மதிப்புடன் கூட்டப்பட வேண்டிய கணியம் ஆகும். பிழையின் குறியை முன் பின்னாக்கினால் அது திருத்தம் எனப்படும்.

உண்மையான மதிப்பு + பிழை = அளக்கப்பட்ட மதிப்பு,

அளக்கப்பட்ட மதிப்பு + திருத்தம் = உண்மையான மதிப்பு.

பிழைக் கொள்கையில் கீழ்க்கண்ட நான்கு முக்கிய கேள்விகள் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றன.

(1) ஒரு இயல்பியல் கணியத்தின் உண்மையான மதிப்பு என்றால் என்ன ?

(2) நடைமுறையில், அளவைகளிலிருந்து எத்தனை உண்மையான மதிப்புகள் கணிக்கப்படுகின்றன ?

(3) கணிப்புகளுக்கு நிச்சயமாக எதை உடைமையாக attribute) செய்யலாம் ?

(4) வெவ்வேறு அளவைகளிலிருந்து கிடைத்த கணிப்புகளை எப்படி ஒப்பிடலாம் ?

ஒவ்வொரு எண்ணும், மிகச்சிறிய அலகினால் (ξ) குறிக்கப்படும் போது முழு எண்ணாக இருக்கின்றது. எந்த உண்மையான எண்ணையும், ξ என்ற நீளமுடைய இடைவெளியில் கணியத்தின் உண்மையான மதிப்பு என கூறலாம். இதன்படி நிகழ் திறங்கள் என்பன சார் அலைவெண்களின் (relative frequencies) உண்மையாண மதிப்புகளே ஆகும்.

அளக்கும் கருவிகளிலுள்ள குறைபாடுகளாலும், மற்ற இடையூறுகளாலும், ஏற்படும் பிழைகளினால் கணியங்களின் அளக்கப்பட்ட மதிப்புகள் எப்பொழுதும் உண்மையான மதிப்புகளிலிருந்து வேறு பட்டுள்ளன.

3-03. பிழைகளின் வகைகள் :

கண்டறிதல்களின் பிழைகளைப் பின்வருமாறு இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) நீடித்த (Persistent) அல்லது இடைவிடாத (Systematic) பிழை.

(2) தற்செயலாய் நிகழ்கிற பிழை (Accidental).

(1) நீடித்த அல்லது இடைவிடாத பிழைகள் :

இவை தொடரான கண்டறிதல்கள் முழுவதும் ஒரே விதமான பிழைக்கான காரணங்கள் ஒரே மாதிரியாக செயல்படுவதால் ஏற்படுவதாகும். அனேக இடங்களில் இதை தகுந்த முறைகளால் தடுக்கலாம், அல்லது நீக்கி விடலாம். தவறுன கருவிகளாலும், குறைபாடான அமைப்பினுலும் (Setting) குறையுள்ள இயக்கும் செயலமைப்பு திட்டத்தாலும் (mechanism) வெளி இடையூறுகளாலும், தனிப்பட்டவரின் தப்பெண்ணம் மற்றும் இவை போன்ற கஷ்டங்களாலும், இடைவிடாத பிழைகள் ஏற்படலாம். சீரமைவு, தரப்படுத்துவது, ஈடு செய்வது இவற்றின் மூலம் இப்படிப்பட்ட பிழைகளை நீக்கலாம்.

(2) தற்செயலாய் நிகழ்கிற பிழைகள் (Accidental errors) :

இப்பிழைகள் மிகவும் முக்கியமானவையாகும். பிழைக் கொள்கையானது இந்த பிழைகளைப் படிக்கவும், கணக்கிடவுமே ஏற்பட்ட

தாகும். இவை சுத்தமாக தற்காலிகமான காரணங்களால் ஏற்படக் கூடியவையாகும். இக்காரணங்கள் சிக்கலான தன்மையுள்ளவை யாகவும், இவைகளின் நிகழ்வு பற்றி ஒருவரும் சந்தேகப்படக் கூடாத வகையிலும் இருக்கின்றன. அதே கவனத்துடனும், திறமை யுடனும் அடுத்தடுத்து செய்யக்கூடிய கண்டறிதல்களின் முரண் பாடுகளிலிருந்து தான் இவைகளை உணரக்கூடிய வகையிலும் அமைகின்றன.

3·04. இப்பொழுது இரண்டாவது கேள்வியான, **மிகச் சரி** யான கணிப்பின் மதிப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டு சார் பற்ற அளவைகளினுல், ஒரு தெரியாத இயல்பியல் கணியம் m-கு, m_1, m_2 என்ற இரு மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன என கொள்வோம். இந்த மதிப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு m-ன் மிகச்சரியான மதிப்பைக் கணிக்க வேண்டும். இச் சரியான கணிப்பு $\varphi\ (n_1, n_2)$ ஆக இருக்கட்டும். இப்பொழுது நாம் சார்பு φ-ஐத் தீர்மானிக்க வேண்டும். $\propto$ என்பது இந்த இரணடு அளவைகளுக்கும் கொடுக் கப்பட்ட மீற்றம் ஆனுல், கணியம் m-ம் $\propto$ அளவு அதிகரிக்கப் படும்.

$$\varphi\ m_1+\propto,\ m_2+\propto) = \varphi\ (m_1\ m_2)+\propto \qquad \ldots\ (1)$$

இது போலவே m_1, m_2 ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பால் பெருக்கப்பட் டால், சரியான கணியமும் அதே மதிப்பால் பெருக்கப்படும்.

அதாவது $\varphi\ (\beta m_1, \beta m_2) = \beta\varphi\ (m_1, m_2)$ ... (2)

இரண்டு சோதனைகளும் முழுதும் ஒத்த சூழ் நிலையில் செய்யப் படுவதால்

$$\varphi\ (m_1, m_2) = \varphi\ (m_2, m_1) \text{ ஆகும்} \qquad \ldots\ (3)$$

m_1, m_2 என்பன நிலையானதாகவும் சமன்பாடு (1)-ல் $\propto = -m_2$-ல் எனவும் கொள்வோம்.

அப்பொழுது

$$\varphi\ (m_1 - m_2, 0) = \varphi\ (m_1, m_2) - m_2$$

அல்லது $\varphi\ (m_1, m_2) = \varphi\ (m_1 - m_2, 0) + m_2$ ... (4)

சமன்பாடு (2)

$$\varphi(\beta m_1, \beta m_2) = \beta\varphi(m_1, m_2)$$
$$= \beta m_2 + \varphi(\beta m_1 - m_2, 0 \qquad \ldots \quad (5)$$

அல்லது $\beta\varphi(m_1 m_2) = \beta m_2 + \varphi(\beta m_1 - m_2, 0)$

$\beta = \dfrac{1}{m_1 - m_2}$, $m_1 \neq m_2$ ஆக இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $\dfrac{m_2}{m_1 - m_2} + \varphi(1, 0) = \dfrac{1}{m_1 - m_2}\varphi(m_1, m_2)$

அல்லது $m_2 + (m_1 - m_2)\varphi(1, 0) = \varphi(m_1, m_2) \qquad \ldots \quad (6)$

இது போலவே

$$\varphi(m_2, m_1) = m_1 + (m_2 - m_1)\varphi(1, 0) \qquad \ldots \quad (7)$$

சமன் பாடுகள் 5,6, 7-லிருந்து

$$m_2 + (m_1 - m_2)\varphi(1, 0) = m_1 + (m_2 + m_1)\varphi(1, 0)$$
$$\varphi(1, 0) = \tfrac{1}{2}$$

இம்மதிப்பை சமன்பாடு (6)-ல் பிரதியிட்டு

$$m_2 + \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2) = \varphi(m_1, m_2)$$

$$\varphi(m_1, m_2) + \frac{m_1 + m_2}{2} \qquad \ldots \quad (8)$$

பொதுவாக n சோதனைகள் மூலம் கிடைக்கப்பெற்ற விடைகள் $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$-ன் உண்மையான மதிப்பு r-ன் சரியான கணியம்.

$$\mu \approx r = \bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}{n} = \frac{[m]}{[n]} \qquad \ldots \quad (9)$$

இங்கு $[m] = \sum_{i=1}^{n} mi$

உண்மையான பிழைகள் $xi = mi - r,\ i = 1, 2 \ldots\ldots, n \qquad \ldots \quad (10)$

உத்தம பிழைகள் $\xi = mi - m,\ i = 1, 2\ \ldots\ \ldots\ n$ (Best errors) ஆகும்.

3-05. இப்பொழுது மூன்றுவது கேள்வியை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது சரியான கணிப்பானது உண்மையான மதிப்பின் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வீச்சுக்குள் இருக்கக் கூடியதன் நிகழ் திறத்தைக் கணக்கிடுதல். சமன்பாடு (10)-ல் பிழை xi என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு r ஆனது உண்மையான மதிப்பு, m ஆனது கணியத்தின் அளக்கப்பட்ட மதிப்புகளாகும். தொடர்பற்ற (random) மாறி xi-ன் நிகழ்திற அடர்த்தி எண் $f\ (xi)$ ஆகட்டும். கூட்டு நிகழ்திற தேற்றத்தின்படி, முதல் சோதனையில் பிழை x_1 ஆகவும், 2-வது சோதனையில் x_2 ஆகவும் இருப்பதன் நிகழ்திறம். தனித்தனி நிகழ் திறங்களின் பெருக்கல் தொகையாகும்.

அதாவது

$$f\ (x_1\ x_2) = f\ (x_1)\ f\ (x_2) \qquad \ldots \quad (11)$$

$$f\ (x_1,\ x_2,\ x_3) = f\ (x_1)\ f\ (x_2)\ f\ (x_3) \qquad \ldots \quad (12)$$

v என்பது அளக்கப்பட்ட கணியத்தின் உண்மையான மதிப்பானல்,

$$v = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} \quad \text{[சமன்பாடு 9-ஐ பார்க்க]}$$

அப்பொழுது

$$\begin{aligned} f\ (x_1,\ x_2,\ x_3) &= f\ (x_1)\ f\ (x_2)\ f\ (x_3) \\ &= f\ (m_1 - v)\ f\ (m_2 - v)\ f\ (m_3 - v) \end{aligned}$$

மீப்பெரு மதிப்புடையது. அதனல் அதன் மடக்கையும் மீ பெருமதிப்புடையது.

எனவே $\log f\ (m_1 - v) + \log f\ (m_2 - v)$
$+ \log f\ (m_3 - v)$

ம்மீபெருமதிப்புடையது.

v-யைப் பொறுத்த இதன் வகைக்கெழு கண்டு, சுழியத்துக்கு சமன்படுத்தினல்

$$\frac{f'(m_1-v)}{f(m_1-v)}+\frac{f'(m_2-v)}{f(m_2-v)}+\frac{f'(m_3-v)}{f(m_3-v)}=0$$

என கிடைக்கும் ... (13)

$F(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ என்று ஒரு புதுசார்பை வரையறுத்தால்,

$$F(x_1)=F(m_1-v)=\frac{f'(m_1=v)}{f(m_1-v)}$$

$$F(x_2)=\frac{f'(m_2-v)}{f(m_2-v)},\quad F(x_3)=\frac{f'(m_3-v)}{f(m_3-v)}$$

எனவே $F(x_1)+F(x_2)+F(x_3)=0$ ... (14)

$v=\frac{m_1+m_2+m_3}{3}$ ஆகும்போது இது உண்மை.

அல்லது $(m_1-v)+(m_2-v)+(m_3-v)=0$

$x_1+x_2+x_3=0$ ... (15)

சமன்பாடு (15) உண்மையானல்

சமன்பாடு (14) உண்மையாகும்

இரண்டு மாறிகளிருந்தால்

$$\left.\begin{aligned}F(x_1)+F(x_2)&=0\\ x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}$$ ... (16)

ஒரு மாறிக்கு, $x_1=0$ ஆகும்போது $F(x_1)=0$

சமன்பாடு (16)-ல் $x_1=x_2$, $x_2=x_3$ ஆனல்

$F(x_2)=-F(-x_3)$ ... (17

எனவே சமன்பாடு (14)-ஐ

$F(x_1)+F(x_2)=-F(-x_2)=F(x_1+x_2)$ ... (18)

என எழுதலாம்.

சமன்பாடு (18)-ன், x_1, x_2 பற்றிய தனித்தனி வகைக் கெழுக்கள் கண்டால்

$$F'(x_1) = F'(x_1 + x_2)$$

$F'(x_2) = F'(x_1 + x_2)$ என கிடைக்கும்

$$F'(x_1) = F'(x_2)$$

x_2 ஒரு மாறிலியானால், $F'(x_1) = C =$ மாறிலியாக இருந்தால் தான் $F'(x_1) = F'(x_1 - x_2)$ உண்மையாகும்.

எனவே $f(x_1) = Cx_1 = \dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}$

அதாவது $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = F(x) + Cx$

அல்லது $f(x) - ke^{\frac{1}{2}Cx^2}$

இங்கு k தொகைக்கெழு மாறிலியாகும்.

$C = -2h^2$ எனக் கொண்டு

k-ன் மதிப்பு, $\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$ எனக் காணலாம்.

எனவே $f(x) = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ ... (19)

இதற்கு காஸியன் பிழை விதி எனப்பெயர் (Gaussian law of errors) பிழை x-ஆனது

$t_1 < \sqrt{2}\,hx < t_2$ ஆக இருப்பதன் நிகழ்திறம்.

$$\int_{t_1/\sqrt{2h}}^{t_2/\sqrt{2}h} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\,dx \quad \ldots (20)$$

$t = \sqrt{2}\,hx$ ஆனால் சமன்பாடு (20)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t}^{t_2} {}^{-t^2/2} dt = \varphi(t_2) - \varphi(i_1) \quad \ldots \quad (21)$$

ஆகும்.

$$\text{இங்கு } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-t^2/2} dt,$$

மாறிலி h பார்வையாளரின் திட்ப நுட்பத்தை அளக்கிறது. இதற்கு திட்பமாறிலி (Precision Constant) எனப்பெயர். நிகழ் திறத்தை $\frac{1}{2}$ ஆகக் கொண்டுள்ள பிழை. நிகழக்கூடிய (Probable) பிழை எனப்படும்.

இது x-ன்

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} = \tfrac{1}{2}, \text{ என்ற மதிப்பினால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.}$$

$$\text{அதாவது } x = \frac{\cdot 4769}{h} \quad \ldots \quad (22)$$

என்பது (most probable error) மிகை நிகழ் பிழை ஆகும்.

சராசரி தனிப்பிழை $E(|\times 1)$

$$E(|\times|) = \int_{-\infty}^{\infty} |\times| \ f(x)\, dx$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{.5642}{h}$$

... (23)

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

சராசரி வர்க்க பிழை $E(x^2)$ ஆனது

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0} x^2 e^{-x^2 h^2} dx$$

$$= \frac{1}{2h^2} = \frac{.5}{h^2} \quad \ldots \quad (24)$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

தரமான விலகல் அல்லது தரமான பிழை (σ) முன்னமேயே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

3-06. இப்பொழுது (4)-வது கேள்வியை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை n-ஐ அதிகப்படுத்துவதால் ஏற்படும் பயன்.

$xi = mi - v$ ஆதலால் $\bar{x} = \bar{m} - v$ ... (25)

இங்கு $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum xi,\ \bar{n} = \frac{1}{n} \sum mi$

எனவே சராசரியிலுள்ள பிழை, பிழைகளின் சராசரியாகும்.

கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை அதிகமானால், இந்த கணியம் குறைகிறது. எனவே $\sum xi$ ஐக் கணிக்கும்போது மிகை, குறை பிழைகள் ஒன்றை ஒன்று நீக்கி விடுகின்றன.

3-07. மீச்சிறுபடி முறைகள் (Method of least squares):

லெஜன்டரால் (Legendre) முதல் முதலில் வாய்பாடாக செய்யப்பட்ட மீச்சிறுபடி தத்துவத்தை பின்வருமாறு கூறலாம்.

ஒரு கண்டறிந்த கணியத்தின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பானது, இந்த மதிப்பிலிருந்து கண்டறிதல்களின் விலகல்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கக் கூடியதாக இருக்கிறது.

$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ என்பன ஏதோ ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கணியத்தின் கண்டறிந்த மதிப்புகளாக இருந்தால், மீச்சிறுபடி தத்துவத்

தின்படி இக்கணியத்தின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பான X ஆனது

$$(x_1-X)^2+(x_2-X)^2+(x_3-X)^2+\ldots\ \ldots+(x_n-X)^2$$

என்ற கோவை மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்ளுமாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது $\bar{x}$ ஆனது $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$-ன் சராசரியாக இருந்

தால் $\Sigma x_s = n\bar{x}$ அல்லது

$$\Sigma\, x_s-\bar{x}) = 0$$

எனவே

$$\Sigma(x_s-X)^2 = \Sigma[(x_s-\bar{x}) + (\bar{x})-x)]^2$$

$$= \Sigma\ (x_s-\bar{x})^2 + n\,(\bar{x}-X)^3$$

$X - \bar{x}$ ஆக இருக்கும்போது இது மீச்சிறு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும் என்பது தெளிவு இப்பொழுது $\bar{x} = \Sigma f \leqslant x_s/\Sigma f_s$ என எழுதுவோமானால், அதாவது, கண்டறிதல்களின் சராசரி ஓவ்வொன்று நிகழ்ச்சியின் அலைவெண்ணுக் கேற்ப நிறையிட்டதாயிருந்தால்

$$\Sigma f_s\,(x_s - \bar{x}) = 0 \text{ என கிடைக்கிறது.}$$

$$\text{எனவே } \Sigma f\,(x_s-X)^2 = \Sigma f\ [(x-\bar{x})+(\bar{x}-X)]^2$$

$$= \Sigma f_s\ (x-\bar{x})^2 + (\bar{x}-X)^2\ \Sigma f_s$$

இது $X=\bar{x}$ ஆகும்போது மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கிறது.

எனவே அளக்கப்பட்ட கணியத்தின் சரியானமதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பானது கண்டறிதல்களின் நிறையிட்ட சராசரி ஆகும்.

அதாவது

$$(f_1\,x_2 + f_2\,x_2 + \ldots\ldots + f_n\,x^n) \Big/ (f_1 + f_3 + \ldots\ldots + f^n)$$

ஆகும்.

இது மாதிரியான கோவையில் f_s, கண்டறிதல் x-ன் நிறை எனப்படும். எல்லா நிறைகளும் ஒரு மாறிலியால் பெருக்கப்பட்டால், நிறையிட்ட சராசரியின் மதிப்பு மாறுது. மேற்கண்ட சொல்லாக்க விளக்கத்தில் (derivation) நிறையானது கண்டறிதலின் நிகழ்ச்சியின் அலைவெண்ணுக்குச் சமமாகும்.

3-08. நிறையிட்ட சராசரி (weighted mean)

லாப்லாஸும், காஸும் வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தி மீச்சிறுபடி தத்துவத்தை (establish) நிறுவினர்கள். கண்டறிதல்களின் சராசரியானது, அளக்கப்பட்ட கணியத்தின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பெண் மேற்கொண்டு செய்து இயல்நிலை பிழை விதியை காஸ் வருவித்தார். மறுதலையாக நாம் இயல்நிலை பிழை விதியைப் பயன்படுத்திச் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புசராசரியென (deduce) வருவிக்கலாம்.

அதாவது $\sum (x_s - x)^2$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்போது மீச்சிறுபடி தத்துவத்திற்கேற்ப நிகழ் திறம் மீப்பெறு மதிப்புடைதாக இருக்கிறது.

அவைகள் $x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n$ பல்வேறுபட்ட காஸியன் தொகுதியைச் சேர்ந்ததாக இருக்கலாம் ; அவைகளின் திட்ப நுட்பம் ஒவ்வொன்றிலும் வித்தியாசமாக இருக்கலாம். அப்பொழுது கண்டறிதலின் நிகழ்திறம்.

$$x_s\text{-ஐ } (h_s/\sqrt{\pi})\, e^{-h_s^2 (x_s - x)^2}$$

என எழுதலாம் எனவே கண்டறிதல்கள்

$x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_n$ இவைகளின் நிகழக்கூடியதன் நிகழ்திறம்.

$$h_1, h_2 \ldots\ldots h_n\ \pi^{-\frac{1}{2}n}\ \ e^{-\sum h^2_s (x_s - x)} \text{ ஆகும்.}$$

இது $\sum h_s^2\ (x_s - x)^2$ மீச்சிறு மதிப்புடையதாக இருக்கும்போது மீப்பெறு மதிப்புடையதாக இருக்கிறது.

x ஆனது, நிறையிட்ட சராசரி $\sum h_s^2\ x_s / \sum h_s^2$ என்று கொடுக்கப்பட்டபோது, இது உண்மையாகிறது.

$h_s^2 = \frac{1}{2}\ \sigma_s^2$ எனக் கொண்டால், கண்டறிதல்கள் $x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_n$-லிருந்து கண்டறியக்கூடிய அளக்கப்பட்ட கணியத்தின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருக்கிய மதிப்பு

$$\frac{\sum h_s^2 x_s}{\sum h_s^2} = \frac{\sum x_s/\sigma_s^2}{\sum 1/\sigma_s^2}$$

என்ற சமன்பாட்டால் பெறப்படுகிறது.

$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots - \sigma_n$ ஆக இருந்தால் இது கூட்டுச்சராசரிக்கு சுருக்கப்படுகிறது. இந்த விடையை மேலே கொடுக்கப்பட்ட விடையுடன் சேர்த்தால் கண்டறிதல்கள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$

அலைவெண்கள் $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ அலைவெண்களுடன் நடந்தால் அல்லது x_s ஆனது f_s கண்டறிதல்களின் சராசரியானல், அளக்கப்பட்ட கணியத்தின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பானது.

$$\frac{\sum h_s^2 f_s x_s}{\sum h_s^2 f_s} = \frac{\sum f_s x_s/\sigma_s^2}{\sum f_s/\sigma_s^2} = \frac{\sum x_s/\alpha_s^2}{\sum 1/\alpha_s^2}$$

ஆகும். இங்கு $\alpha_s = \sigma_s/\sqrt{f_s}$. இது கண்டறில்கள் x_s-க்கு இயைந்த சராசரியின் தரமான பிழையைக் குறிக்கிறது. இப்படியாக ஒவ்வொரு கண்டறிதல் x_s-க்கும் அதன் தரமான பிழையின் வர்கத்தின் தலைகீழுக்கு விகித சமமாக ஒரு நிறை கொடுக்கயியலும். மாருக (Alternatively) நிகழக்கூடிய பிழையானது, தரமான பிழையின் ஒரு மாறிலி மடங்காக இருப்பதால் நிகழக்கூடிய பிழையின் வர்க்கத்தின் தலை கீழுக்கு விகித சமமான ஒரு நிறையைப் பயன் படுத்தலாம்.

3-09. நிறையிட்ட சராசரியின் தரமான பிழை (Standard mean of weighted mean)

பொதுவாக, $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற கண்டறிதல்களுக்கு முறையே $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ நிறைகள் கொடுக்கபட்டிருந்தால் நிறையிட்ட சராசரி $\bar{x} = \sum w_s\ x_s/\sum_s$ ஆகும். முன்னல் நிரூபிக்கப்பட்டது போல X ஆனது நிறையிட்ட சராசரி $\bar{x}$-க்குச் சமமாக இருக்கும்போது, தொகை $\sum w_s\ (x_s - X)^2$ மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

நிறையிட்ட சராசரியின் திட்ட நுட்பத்தைக் கணக்கிட நாம் கணியம் σ^2-ஐ $\sigma^2 = \sum_{S=1}^{n} w_s\ (x_s - \bar{x})^2/(n-1)$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காண்கிறோம். இது கணியங்களின் $w_s\ \frac{1}{2}\ (x_s - \bar{x})$ சுழியத்தைப் பொறுத்துள்ள பரவல்களின் பரவற்படி (Variance)-யைக்

குறிக்கிறது. நிறையிட்ட சராசரியின் தரமான பிழையானது $\sigma / (\sum (w_s)^{\frac{1}{2}})$ ஆல் கொடுக்கப்படுகிறதென காண்பிக்கலாம் அதாவது

$$\left[\frac{\sum w_s (x_s - \bar{x})^2}{(n-1) \sum w_s}\right]^{\frac{1}{2}}$$

எல்லா நிறைகளும் சமமாக இருந்தால் இது வழக்கமான வாய்பாட்டுக்கேற்ப

$$\left[\frac{\sum (x_s - \bar{x})^2}{(n-1!^n}\right]^{\frac{1}{2}}$$ எனச் சுருக்கப்படுகிறது.

உதாரணம்.

பல வழிகளில் கண்டுபிடித்த எலக்ட்ரானின் e/n மதிப்புகளும், நிகழக்கூடிய பிழைகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. e/n-க்கு சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்பையும், தரமான பிழையையும் கண்டுபிடி.

$e/n \times 10^{-7}$	நிகழக்கூடிய பிழை
1.76110	10.0×10^{-4}
1.75900	9.0×10^{-4}
1.75982	4.0×10^{-4}
1.75820	13.0×10^{-4}
1.75870	8.0×10^{-4}

ஒவ்வொரு கண்டறிதலின் நிறையும் நிகழக்கூடிய பிழையின் வர்க்கத்திற்குத் தலை கீழ் விகிதத்தில் இருப்பதாக கொள்வோம்; இந்த மதிப்புகள் (w_s) கீழே முதல் நிரலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிரல் 2-ல் சராசரி 1.75800-க்கியைந்த $x_s = (e/m) \times 10^{-7} - 1.75800$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

செய்முறையானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுளது :

w_s	$x_s \times 10^5$	$w_s\, x_s \times 10^5$	$d_s \times 10^5$	$d_s^2 \times 10^8$	$w_s\, d_s^2 \times 10^8$
1	310	310	151	228	228
1.2	100	120	—59	35	42
6.3	182	1147	23	5	32
0.6	20	12	—139	193	116
1.6	70	112	— 89	79	126
10.7		1701			544

எனவே 10^{-7}-ஐ விட்டு

$$\text{நிறையிட்ட சராசரி} = 1.75800 + \frac{0.01701}{10.7} = 1.75959$$

$\therefore \quad ds = (e/n) \times 10^{-7} - 1.75959$ என எழுதினால் மேலே காட்டியுள்ளபடி

$$\sigma^2 = 0.00000544/4 = 0.00000136$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{சராசரியின் தரமான பிழை} = \sqrt{(0.00000136/10.7)} = .00036$$

எனவே $e/m = (1.75959 \pm 0.00036) \times 10^7$

$e.\ m.\ u.$/கிராம்

3-10. மீச்சிறுபடி முறையின் மற்ற பயன்கள் ஒரு பல சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

லெஜெண்டர் மீச்சிறுபடி முறையை கீழேயுள்ள கணக்குகளைத் தீர்க்க பயன்படுத்தினார் :

$a_s x + b_s y = k_s$ என்ற வடிவத்தில் x, y என்ற இரண்டு மாறிகளில் பல ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இங்கு a_s, b_s, k_s என்பது மாறிலிகள். இது மாதிரியாக n சமன்பாடுகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். $n > 2$.

ஏதேனும் இரண்டு சமன்பாடுகளுக்குப் பொருந்துமாறு x, y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த மதிப்புகள் எல்லாச் சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தாமல் இருக்கலாம். இது மாதிரிச் சமயங்களில், x, y-ன் எந்த மதிப்புகள் கூடுமானவரை எல்லா சமன்பாடுகளுக்கும் பொருத்தமுடையதாக இருக்கிறது என்ற கேள்வி எழுகிறது.

இந்தக் கேள்விக்கு விடைகாண மீச்சிறுபடி முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$a_s x + b_s y - k_s = e_s$ என்று எழுதி, பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் e_s மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்படியாக, x, y-ஐ தேர்ந்தெடுக்க முடியும்.

அதாவது $\sum_{S=1}^{n} (a_s x+b_s y-k_s)^2$

மீச்சிறு மதிப்புடையதா யிருக்க வேண்டும்.

x, y-ஐப் பொறுத்துப் பகுதி வகைக் கெழு கண்டால், மீச்சிறு மதிப்புக்கான கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன.

$$\sum a_s (a_s x+b_s y-k_s)=0$$
$$\sum b_s (a_s x+b_s y-k_s)=0$$

இந்தச் சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த மதிப்புகள் சரியான மதிப்புகளுக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளாகும்.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் வழக்கமாக

$$[aa]\,x+[ab]\,y-[ak]=0$$
$$[ab]\,x+[bb]\,y-[bk]=0$$

என்ற வடிவில் எழுதப்படுகின்றன.

இங்கு $[ab]$, தொகை $\sum_{S=1}^{n} a_s b_s$-ஐக் குறிக்கிறது. இவைகள் இயல்நிலை சமன்பாடுகள் (normal equations) எனப்படும். இதை அணிக்கோவை குறியீட்டில்

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}[ak] & [ab]\\ [bk] & [bb]\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}[aa] & [ak]\\ [ab] & [bk]\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{vmatrix}}$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடுகளுக்குப் பல்வேறு நிறைகள் கொடுக்கப்பட முடியுமேயானால் மேலும் w_s சமன்பாடு $a_s x+b_s y=k_s$-ன் நிறையானால் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$[waa]\,x+[wab]\,y-[wak]=0$$
$$[wab]\,x+[wbb]\,y-[wbk]=0$$

என்ருகின்றன. ஒவ்வொரு மூலமான (original) சமன்பாட்டையும் அதன் நிறையின் வர்க்கமூலத்தால் பெருக்கினுல், அந்தச் சமன் பாடுகளைச் சமமான நிறையுள்ளதாகக் கொள்ளலாம் என்பது இந்தச் சமன்பாடுகளிலிருந்து விளங்குகிறது.

பயிற்சி

$$2x+y=5.1\ ,\quad x-y=1.1\ ,$$
$$4x-y=7.2\ ,\quad x+4y=5.9$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து, x, y-யின் சரியான மதிப்புகளுக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

3·11. வளைகோட்டுப் பொருத்துதல் (Curve fitting)

வளை கோட்டை அல்லது அறிமுறை வாய்பாட்டை ஒரு பரி சோதனை விவரங்களின் கணத்துக்குப் பொருத்துதல் மீச்சிறுபடி முறையின் மற்ருெரு பயன்பாடாகும்.

$y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ என்பன அளக்கப்பட்ட கணியம் y-ன் x என்ற மற்ருெரு கணியத்தின் மதிப்புகளான $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$-க்கிணையந்த மதிப்புகளாக இருக்கட்டும். எளிதாக இருப்பதற்காக y_s மதிப்புகளில் பரிசோதனைப் பிழைகள் இருப்பதாகவும் x_s மதிப்பு களில் பிழைகள் இல்லையென்றும் கொள்வோம். இது மாதிரியான ஒரு மாறியில் பிழைகளைத் தவிர்க்கக்கூடிய நிலைமை நடைமுறை யில் அடிக்கடி ஏற்படுகிறது. மேலும் x-க்கும் y-க்கும் இடையே ஒருபடி (linear) தொடர்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

அதாவது $y=ax+b$

$x=x_s$ எனப் பிரதியிட்டால், பொதுவாக y-ன் மதிப்பு y_s-க்குச் சமமாக இருக்காது.

ax_s+b-y_s என்ற அளவு பிழை இருக்கும்.

விவரங்களுக்கு மிகவும் பொருந்துகின்ற ஒருபடி தொடர்பை (அல்லது கோட்டை) அடைவதற்கு a, b ஆனது, பிழைகளின் வர்க் கங்களின் தொகை மீச்சிறு மதிப்புள்ளவாறு தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது.

அதாவது $\sum (ax_s+b-y_s)^2$ மீச்சிறு மதிப்புள்ளதாக இருக்கிறது.

a, b-ஐப் பொறுத்துப் பகுதி வகைகெழு கண்டு

$$\Sigma\ x_s\ ({}_s a x_s + b - y) = 0$$

$$\Sigma\ a\ x_s + b - y_s) = 0$$

என்ற நிபந்தனைகள் பெறப்படுகின்றன.

$$\text{எனவே}\ a\,[xx] + b\,[x] = [xy] \quad \dots \quad (1)$$

$$a\,[x] + b_n = [y] \quad \dots \quad (2)$$

இதிலிருந்து

$$a = \frac{n\,[xy] - [x]\,[y]}{n\,[xx] - [x]\,[x]} \quad \dots \quad (3)$$

$$b = \frac{[y]\,[xx] - [x]\,[xy]}{n\,]xx] - [x]\,[x]} \quad \dots \quad (4)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$b = 0$ ஆனால், $y = ax$ ஆகும்.

$$\text{இங்கு}\quad a = \frac{[xy]}{[xx]} = \frac{[y]}{[x]} \quad (5)$$

உதாரணம்

x-ன் மதிப்புகள் பிழையற்றவை என்று கொண்டு x, y-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒரு படிக்குரிய விதியை அமை.

	x	y	xy	xx
	0	4.6	0	0
	1	7.1	7.1	1
	2	9.5	19.0	4
	3	11.5	34.5	9
	4	13.7	54.8	16
	5	15.9	79.5	25
	6	18.6	111.6	36
	7	20.9	146.3	49
	8	23.5	188.0	64
	9	25.4	228.6	81
கூடுதல்.	45	150.7	869.4	285

$y = ax + b$ ஆனால், சமன்பாடு (3), (4) லிருந்து

$$a = \frac{8694 - 45 \times 150.7}{2850 - 45^2}$$

$$= \frac{1912.5}{825} = 2.32$$

மேலும்

$$b = \frac{150.7 \times 285 - 45 \times 869.4}{825}$$

$$= \frac{3826.5}{825} = 4.64$$

ஆகையால்

$$y = 2.32\,x + 4.64$$

x, y மதிப்புகளைக் குறித்து, இப் புள்ளிகளை இணைக்க மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டை வரையலாம்.

3-12. மற்ற வளை கோடுகள் (Other curves)

பல சமயங்களில், x, y என்ற இரண்டு மாறிகளுக்கும் ஒருபடி தொடர்பு இல்லாமலிருக்கலாம். பொதுவாகத் தொடர்பானது

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots\ldots a_n\,x^n$$

என்ற வடிவில் $(n+1)$ மாறிலிகளைக் கொண்டு இருக்கலாம். x, y-ன் n இயைந்த மதிப்புகள் தெரிந்திருந்தால் $(x_s\ y_s)$ எனச் சொல்வோம். இங்கு $S = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$. $n > m + 1$, மாறிலிகள் $a_0\ a_1 \ldots\ldots\ldots a_n$-ன் மதிப்புகளை

$$\sum_{S=1}^{n} (y_s - a_0 - a_1\,x_s - a_2\,x_s^2 \ldots\ldots a_n\,x_s^n)^2$$

மீச்சிறு மதிப்பை, ஏதாவது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை மீச் சிறு மதிப்பைக் கொள்ளுமாறு தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

கீழ்க்கண்ட உதாரணம் இந்த முறையை விளக்குகிறது:

$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$ ஆனால், a_0, a_1, a_2 என்பன

$$\sum_{S=1}^{n} (y_s - a_0 - a_1\,x_s - a_2\,x_s^2)^2$$

ஆனது மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்ளுமாறு தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன.

முறையே a_0, a_1, a_2 இவைகளைப் பொறுத்து வகைகெழு கண்டால் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன:

$$\Sigma\ (y_s - a_0 - a_1\ x_s - a_2\ x_s^2) = 0$$

$$\Sigma\ x_s\ (y_s - a_0 - a_1\ x_s - a_2\ x_s^2) = 0$$

$$\Sigma\ x_s^2\ (y_s - a_0 - a_1\ x_s - a_2\ x_s^2) = 0$$

∴ இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$$[y] - na_0 - [x]\ a_1 - [xx]\ a_2 = 0$$

$$[xy] - [x]\ a_0 - [xx]\ a_1 - [xxx]\ a_2 = 0$$

$$[xxy] - [xx]\ a_0 - [xxx]\ a_1 - [xxxx]\ a_2 = 0$$

இந்தச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் a, a_1, a_2 இவைகளின் சரியான மதிப்புக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளைக் கொடுக்கின்றன.

மேலும் x_s-ன் மதிப்புகள் சரியானவை யென்றும் y_s-ன் மதிப்புகள் பிழையுள்ளவை யென்றும் கொண்டு a_0, a_1, a_2 இவைகளின் மதிப்புகளிலுள்ள தரமான பிழைகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது இயல்நிலை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிப்பது கடினம். மற்ற முறைகளை இதற்குக் கையாள வேண்டும்.

இயல்நிலை சமன்பாடுகளை மேலும் வசதியாக

$$s_0\ a_0 + s_1\ a_1 + s_2\ a_2 = t_0$$

$$s_1\ a_0 + s_2\ a_1 + s_3\ a_2 = t_1$$

$$s_2\ a_0 + s_3\ a_1 + s_4\ a_2 + t_2$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $s_k = \sum_{r=1}^{n} x_r^{k}\ ;\ t_k = \sum_{r=1}^{n} x_r^{k}\ V^r$

இச் சமன்பாடுகளின் பொது வடிவம் தெளிவாகத் தோன்றுகும்,

பயிற்சி

(1) சார்பற்ற பல கண்டறிதல்களின் மூலம் $u = 1.23 \pm 0.06$, $v = 2.17 \pm 0.08$, $u + v = 3.5 \pm .12$ என்ற விடைகள் கிடைக்கின்றன. u, v-ன் சரியான மதிப்புகளுக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளையும் அவைகளின் தரமான பிழைகளையும் கணக்கிடு.

(2) நீரின் பரப்பு இழுவிசையின் மதிப்புகள் வெவ்வேறு உஷ்ண நிலைகளில், $t°C$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $v = a - b\theta$ ஆனால், a, b இவைகளின் சரியான மதிப்புகளுக்கு மிக நெருங்கிய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(θ—கெல்வின் அளவில் உஷ்ண நிலையாகும்.)

t	10	20	30	40	50	60
v	74.22	72.75	71.18	69.56	67.91	66.18

(3) நீரின் பாகியல் (η) மதிப்புகள் வெவ்வேறு உஷ்ண நிலைகளில், $t°C$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $\eta^{-1} = a + bt + ct^2$ என்ற வடிவில் ஒரு விதியைப் பொருத்து.

		10	20	30	40	50	60
η (சென்டிபாய்ஸ்)	1.308	1.005	.801	6.56	.549	.469	.406

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

1. An Introduction to Vector Analysis *by* B. HAGUE Mathuen Monographs.

2. A Text Book of Vector Calculus *by* SHANTHI NARAYAN, J. N. KAPUR, S. Chand & Co., Madras.

3. Vector Methods *by* D. E. RUTHERFORD, Oliver & Boyd, Edinburg & London, New York, Interscience Publishers Inc.

4. Vector Analysis *by* PHILLIPS, John Wiley & Sons Inc. New York, London, Sydney.

5. Mathematical Physics *by* B. S. RAJPUT, D. S. GUPTA, Prakathi Prakashan, (Meerut India), 1971.

6. Applied Mathematics for Engineers and Physicists *by* LOUIS A. PIPES, McGraw Hill Book Company.

7. Mathematical Physics *by* EUGENE BUTKOV, Addison-Wesley, Publishing Company.

8. Matrices : Pure and Applied *by* TIMOTHY BRAND AND ALAN SHERLOCK, Edward Arnold, London.

9. Theory and Problems of Complex Variables—SCHAUM'S outline series, McGraw Hill Book Company.

10. Complex Variables and Applications *by* **RUEL V. CHURCHLI**, McGraw Hill Book Company.

11. Theory and Problems of Probability — **SCHAUM'S** Outline Series, McGraw Hill Book Company.

12. Errors of Observation and their Treatment *by* **J. TOPPING**, Chapman & Hall Ltd.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute convergence — அறக்குவிதல்
Accuracy — துல்லியம்
Algebra — இயற்கணிதம்
Alternating series — ஆடற்றொடர்
Alternatively — மாறாக
Analysis — பகுவியல்
Aposteriori probability — புள்ளியியல் நிகழ்திறம்
Applied mathematics — செயல்முறை கணிதம்
Apriori probability — காரண காரிய நிகழ்திறம் அல்லது கணக்கியல் நிகழ்திறம்
Argument — கோண வீச்சம்
Argument of a function — சார்பின் மாறி
Arithmetic mean — கூட்டு சராசரி
Array — அணி வரிசை
Associative law — சேர்ப்பு விதி

B

Behaviour — பண்பு
Best error — உத்தம பிழை
Binomial distribution — ஈருறுப்புப் பரவல்
Binomial series — ஈருறுப்புத் தொடர்
Bound — வரம்பு
Boundary point — வரம்புப் புள்ளி
Bounded — வரம்புள்ள
Bounded region — வரம்புள்ள பகுதி

C

Calculus — நுண் கணிதம்
Chance — வாய்ப்பு

Characteristic equation — சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Circuit — சுற்று
Closed region — அடைத்த பகுதி
Coefficient — குணகம்
Cofactor — இணைகாரணி
Column — நிரல்
Commutative law — இனமாற்று விதி
Comparison test — ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Complex conjugate number — பரிமாற்று சிக்கல் எண்
Complex numbers — சிக்கல் எண்கள்
Computation — கணிப்பு
Condensation test — ஒடுக்கற் சோதனை
Condenser — மின்தேக்கி
Conditional convergence — நிபந்தனை குவிதல்
Connected set — தொடுத்த கணம்
Conservative field — காப்பு நிலைப்புலம் அல்லது காப்பு நிலைக்களம்
Continuous function — தொடர்ச்சியான சார்பு
Convergence — குவிதல்
Co-ordinate curves — ஆயத்தொலை வளைகோடுகள்
Co-ordinate surfaces — ஆயத் தொலை மேற் பரப்புகள்
Corollary — கிளைத் தேற்றம்
Critical — மாறுநிலை
Curl — சுழல்
Curve fitting — வளை கோடு பொருத்துதல்
Curvilinear co-ordinates — வளைவரைக் கூறுகள்
Cylindrical co-ordinates — உருளைக் கூறுகள்

D

Determinant — அணிக்கோவை
Differential — வகைக்கெழு
Differentiation — வகையிடல்
Differential calculus — வகைநுண் கணிதம்
Directional derivative — திசை வகைக்கெழு
Divergence — விரிதல்
Divergence of a vector — வெக்டாரின் பாய்வு
Dispersion — சிதறல்
Distributive law — வகுத்தமைவு விதி, பங்கீட்டு விதி

Domain — அரங்கம்
Dynamics — இயக்கவியல்

E

Electrical circuit — மின்சுற்று
Electrical network — மின்வலை அமைப்பு
Element — மூலகம்
Elemental volume — மூலகப் பருமன்
Ellipse — நீள் வட்டம்
Expansion — விரிவு
Exterior point — புறப்புள்ளி

F

Finite — முடிவுள்ள
Fluid — பாய்மம்
Forced vibration — திணிப்பதிர்வு
Frequency distribution — அலைவெண் பரவல்
Function — சார்பு

G

Geometric mean — பெருக்கற் சராசரி
Geometric series — பெருக்குத் தொடர்
Gradient — சரிவு, வாட்டம்
Gravitational field — புவியீர்ப்புப் புலம்
Group — தொகுதி

H

Harmonic function — சீரிசைச் சார்பு
Harmonic mean — இசைச் சராசரி
Hydrodynamic — பாய்ம இயக்கம்
Hypothesis — எடுகோள்

I

Imaginary part — கற்பனைப் பகுதி
Incompressible — இறுகாத்தன்மையுள்ள
Indeterminate — தேரப்பெருத
Inductance — மின் நிலைமம்

Inequality — சமனின்மை
Infinity — கந்தழி
Integral definite — வரையறுத்த தொகை
Integral indefinite — தேராத் தொகை
Integral line — கோட்டு வழித் தொகை
Integral surface — பரப்பு வழித்தொகை
Integral tangential line — தொடுகோட்டு வழித்தொகை
Integral volume — கன வழித்தொகை
Integration — தொகையிடல்
Interior point — அகப்புள்ளி
Irrotational — சுழற்சியில்லாத

L

Least squares — மீச்சிறுபடி
Limit point — எல்லைப் புள்ளி
Linear differential equation — ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Linear equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
Line segment — நேர்க்கோட்டுத் துண்டு
Locus — இயங்குவரை
Logarithmic series — மடக்கைத் தொடர்

M

Magnitude — எண் மதிப்பு
Mass — பொருண்மை
Matrices similar — வடிவொத்த அணிகள்
Matrix-column — நிரல் அணி
,, -complex — சிக்கல் அணி
,, -conjugate — இணை அணி
,, -diagonal — மூலை விட்ட அணி
,, -hermitian — ஹெர்மீஷியன் அணி
,, -inverse — நேர் எதிர் அணி
,, -minor of — அணியின் சிற்றணிக் கோவை
,, -orthogonal — செங்குத்து அணி
,, -row — நிரை அணி
,, -skew symmetric — எதிர்ச்சீர் அணி
,, -square — சதுர அணி
,, -symmetric — சமச்சீர் அணி

Matrix-tranjugate	—	திருப்பு இணை அணி
,, -unitary	—	சிக்கல் செங்குத்தணி
,, -zero	—	சுழி அணி
Maximum rate of increase	—	மீப்பெரும் மாறு வீதம்
Mean	—	சராசரி
Mean deviation	—	சராசரி விலக்கம்
Mean square deviation	—	சராசரி வர்க்க விலக்கம்
Mean value theorem	—	நிகர மதிப்புத் தேற்றம்
Mechanics	—	எந்திரவியல்
Median	—	இடைநிலை
Minimum	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Minor	—	சிற்றணிக் கோவை
Mode	—	முகடு
Modulus	—	எண்ணளவு, மட்டு
Moment	—	திருப்புதிறன்
Momentum	—	உந்தம்
Monotonic sequence	—	ஓரியல்பான தொடர்முறை
Most probable error	—	மிகை நிகழ் பிழை
Mutual inductance	—	பரிமாற்று மின் தூண்டல்

N

Neighbourhood	—	அண்மை
Normal	—	நேர்குத்துக் கோடு
Normal Distribution	—	இயல் நிலைப் பரவல்
Normal error curve	—	இயல்நிலை பிழை வளைகோடு
Notation	—	குறியீடு
Null sequence	—	சூனிய தொடர்முறை

O

Odds in favour	—	சாதக விகிதம்
Open set	—	திறந்த கணம்
Operator	—	செயலி, இயக்கி
Orthogonal	—	நேர்குத்தான, செங்குத்தான
Orthogonal transformation	—	செங்குத்தான மாற்றம்
Oscillator	—	அலைவு இயற்றி
Oscillating sequence	—	அலை தொடர்முறை

P

Pair	—	இரட்டை
Parabola	—	பரவளைவு
Particle	—	துகள்
Polar form	—	துருவ ஆய அமைப்பு
Polynomial expression	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
Positive number	—	கூட்டு எண்
Power series	—	அடுக்குத் தொடர்
Precision constant	—	திட்ப மாறிலி
Primitive	—	முதற்சார்பு
Probability	—	நிகழ் திறம்
Probability density	—	நிகழ் திற அடர்த்தி
Probable error	—	நிகழக்கூடிய பிழை
Projection	—	எறிவு படிவம்

Q

Quantity	—	கணியம்

R

Range	—	வீச்சு, நெடுக்கம்
Ratio test	—	விகிதச் சோதனை
Real part	—	மெய்ப்பகுதி
Relative frequency density	—	சார்பு அலைவெண்
Remainder	—	மீதி
Resultant	—	விளைவு, இணைவாக்க விளைவு
Reversion	—	திரும்புகை
Root test	—	மூலச்சோதனை
Row	—	நிரை

S

Scalar	—	திசையிலி
Self inductance	—	தன்மின் நிலைம எண்
Sense of direction	—	திசையுணர்வு
Sequence	—	தொடர் முறை
Series	—	தொடர்
Set	—	கணம்
Simple harmonic motion	—	சீரியல்பான இயக்கம்
Simultaneous equation	—	ஒருங்கமை சமன்பாடு

Spherical cavity — உட்குழிவு
Spherical co-ordinates — கோளக் கூறுகள்
Standard deviation — தரமான விலக்கம்
Substitute — பிரதியிடு
Suffix — பின் ஒட்டு எண்
Switch — குமிழ்
System — தொகுதி

T

Tension — இழுவை, இழுவிசை
Term — உறுப்பு
Terminus — முடிவுப்புள்ளி
Theory of errors — பிழைக் கொள்கை
Three dimensional space — மூவளவை வெளி

U

Uncertainty — உறுதியின்மை
Uniformly continuous — தொடர்ச்சிச் சார்பு
Uniform — சீரான
Unit tangent vector — அலகு தொடுகோட்டு வெக்டார்
Unity — ஒருமை

V

Variance — பரவற்படி
Vector — வெக்டார்
Vector-equal — சமவெக்டார்
,, -free — கட்டிலா வெக்டார்
,, -like — ஒத்த வெக்டார்
,, -localised — அறுதியிட்ட வெக்டார்
,, -negative — எதிர் மறை வெக்டார்
,, -null — சுழி வெக்டார்
,, -position — நிலை வெக்டார்
,, -reciprocal — தலைகீழ் வெக்டார்
,, -unit — ஓரலகு வெக்டார்
Velocity potential — திசை வேக அழுத்தம்

Virtual work — மாயவேலை
Viscosity — பாகியல்
Volume element — மூலகப் பருமன்
Volume integral — கன அளவு வழித்தொகை

W

Weighted mean — நிறையிட்ட சராசரி
Width of the class interval — விரிவுதூரம்

Science City
Library
Project