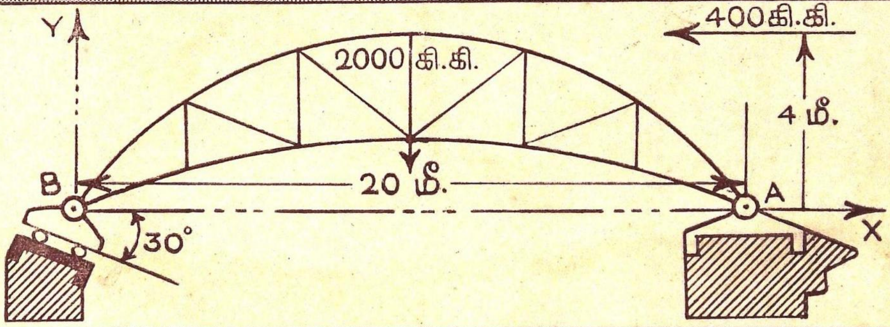
391

பொறியியல்சார் நிலைஇயக்கவிசையியல்

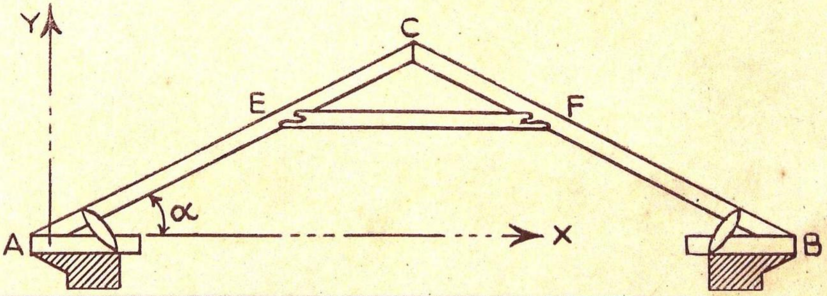
பகுதி - 1 - நிலையியல்

(ENGINEERING MECHANICS)

VOLUME - 1 - STATICS



சு. வைத்தியநாதன்



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—614

பொறியியல்சார் நிலை இயக்கவிசையியல்

பகுதி 1 – நிலையியல்

(திசையிப் பதிப்பு)

சு. வைத்தியநாதன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
துணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
பொறியியற் கல்லூரி,
கிண்டி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—May, 1975

T. N. T. B. S. (C.P.) No. 6N

© Tamilnadu Textbook Society

ENGINEERING MECHANICS
PART I – STATICS (Vector Edition)

S. VAIDYANATHAN

Price Rs. **12-30**

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Rex Printers,
Madras-600004.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந்து ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்பு வரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறை களில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல்,தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'பொறியியல்சார் நிலை இயக்க விசையியல்—பகுதி—1—நிலையியல்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **614**ஆவது வெளி யீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **649** நூல்கள் வெளி வந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும், பல்கலைக் கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங் களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில் நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளர வேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ், எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும், மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங் களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. இயந்திர இயலின் அடிப்படைக் கருத்துகள்

1·1	முன்னுரை	....	1
1·2	இயந்திர இயலின் அடிப்படை அலகுகளும், பரிமாணங்களும்	....	1
1·3	படித்தர அலகுகள்	....	3
1·4	நிறை	....	3
1·5	வழி வந்த ராசிகளின் பரிமாணங்கள்	....	6
1·6	அலகுகளின் அமைப்புகளும், விசையின் பொதுக் கோட்பாடும்	....	14
1·7	பரிமாண ஓரியல் நியதி	....	21

2. திசையிகளின் இயற்கணிதப் பொருள் விளக்கம்

2·1	எண்ணிகளும், திசையிகளும்	....	36
2·2	திசையிகளின் தொகுப்பு	....	41
2·3	ஓரலகு திசையி	....	48
2·4	திசையிகளை எண்ணியால் பெருக்குதல்	....	48
2·5	திசையிகளின் பிரிவீடு	....	49
2·6	பரந்தவெளியில் ஒரு புள்ளியின் நிலைத் திசையியைக் காணுதல்	....	56
2·7	தொகுபயன் திசையியைப் பிரிவீடு செய்தல்	....	60
2·8	இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி	....	81
2·9	இரு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி	....	88
2·10	மூன்று திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி	....	101
2·11	மூன்று திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி	....	106
2·12	நான்கு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி	....	118
2·13	நான்கு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி	....	118
2·14	திசையிச் சமன்பாடுகள்	....	122

பக்கம்

3. விசைகள்

3·1 விசையின் தன்மை 154

3·2 துகள்களும் இறுக்கப் பொருள்களும் 155

3·3 நியூட்டனின் இயக்க இயல் விதிகள் 157

3·4 நியூட்டனின் புவியீர்ப்பு விதி 164

3·5 விசைகளின் இணைகர விதி 167

3·6 அடிப்படை மெய்ம்மைகள் 167

3·7 விசைகளின் சரிசமத்துவம் 172

3·8 விசைக்கணத்தின் தொகுபயன் 172

3·9 ஒரே தளத்தில் செயற்படும் விசை அமைப்பு 173

3·10 தளம் ஒன்றில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் பிரிவீடு 178

3·11 துகள் ஒன்று தளத்தில் சமநிலையிலமைவதற்குரிய வரையறைகள் 181

3·12 ஒருபோகான விசைகளின் தொகுபயன் 182

3·13 பரந்தவெளியில் ஒரு துகளின் சமநிலை 186

4. முக்கியத் திசையிக் கணியங்கள்

4·1 நிலைத் திசையி 213

4·2 ஒரு புள்ளிக்குரிய ஒரு விசையின் திருப்புதிறன் 214

4·3 வாரிக்னனின் தேற்றம் 217

4·4 ஓர் அச்சு பற்றி விசையின் திருப்புதிறனைக் காணுதல் 220

4·5 சுழலிணையும், சுழலிணைப்புத் திறனும் 222

4·6 சுழலிணைகளின் சமத்துவம் 227

4·7 சுழலிணைகளின் தொகுப்பு 233

5. விசைத் தொகுதி அமைப்பின் ஒடுக்கம்

5·1 விசைக்குச் சரிநிகரான 'விசை-சுழலிணை' அமைப்பு 271

5·2 விசைகளின் கணத்திற்குச் சரிநிகரான 'விசை-சுழலிணை' ஒடுக்கம் 277

5·3 தனிச் சிறப்பான விசை அமைப்புகளின் ஒடுக்கம் 285

பக்கம்

6. கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் சமநிலை

6·1 கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றின் சமநிலை 315
6·2 சமநிலையின் முக்கிய வகைகள் 317
வகை 1 : ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற விசைகளின் தொகுதி 317
வகை 2 : ஒரு தள விசைத் தொகுதி 319
வகை 3 : பரந்தவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாகச் செயல்படும் விசைத் தொகுதி 324
வகை 4 : இரு விசைகளால் தாக்கப்படும் ஓர் இறுக்கப் பொருளின் சமநிலை 325
வகை 5 : கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படுகின்ற மூன்று விசைத் தொகுதிகளின் சமநிலை 326

7. உராய்வு

7·1 உராய்வு வரையறை 368
7·2 நிலையியல் உராய்வு விதிகள் 368
7·3 உராய்வுக் கெழு 369
7·4 உராய்வுக் கோணம் 370
7·5 உராய்வுக் கூம்பு 371

8. கற்பித வேலைத் தத்துவம்

8·1 விசை செய்யும் வேலை 381
8·2 சுழலிணை செய்யும் வேலை 387
8·3 விசையினங்கள் 392
8·4 கற்பித வேலையின் தத்துவம் 394
8·5 துகளுக்கு உரிய கற்பித வேலையின் தத்துவம் 395
8·6 கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றுக்குரிய கற்பித வேலையின் தத்துவம் 397
மேற்கோள் நூற்பட்டியல் 416
கலைச்சொற்கள் 417

1. இயந்திர இயலின் அடிப்படைக் கருத்துகள்

1—1. முன்னுரை

இறுக்கப் பொருள்களின் (Rigid bodies) இரசாயன, தட்ப, வெப்ப, இயக்க நிலைகளைப்பற்றி அறிவிக்கும் அறிவுத் துறையே பௌதிக இயலாகும் (Physics). இயக்க நிலைகளை வரையறுக்கும் பகுதி இயந்திர இயலாகும் (Mechanics). இயந்திர இயலில் பொருள்களின் இயக்கம் (motion), இயக்கம் நிகழ்வதற்குரிய விசை (force), விசையினுல் பொருள்கள் செய்யக்கூடிய வேலை (work), பொருள்களின் திறன், ஆற்றல் ஆகியவைபற்றிக் கூறப் படுகின்றன. இயந்திர இயல் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி பொறியியல் விஞக்களுக்குத் தீர்வு காணும் பகுதியே பொறி யியலுக்குரிய இயந்திர இயலாகும்.

பொதுவாக இயந்திர இயலை நிலையியல் (Statics), இயக்க இயல் (Dynamics) என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். நிலையான பொருள்களின்மீது செயற்படும் விசைகளைப் பற்றிக் கூறுவது நிலையியல்; பொருள்களை இயங்கிடச் செய்யும் விசை களைப் பற்றியும், இயக்கம் எவ்விதத்தில் நிகழும் என்பதைப் பற்றியும் அறிவிக்கும் பகுதி இயக்க இயலாகும்.

1—2. இயந்திர இயலின் அடிப்படை அலகுகளும் (Units), பரிமாணங்களும் (Dimensions)

பொருள்களின் பல்வேறு தன்மைகளை அளவிடுவதன் மூலமாகவோ, எண்ணிக்கையின் மூலமாகவோ உணர்த்த முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் நீளம், அகலம், உயரம், பருமன், எடை, அதன் திண்மம் ஆகியவற்றை அளவிட்டுக் கூறமுடியும். பொருள்களைத் தரப்படுத்திக் கூறு

வதற்கு அளவைகள் பெரிதும் இன்றியமையாதனவாகும். பொருள்களின் தன்மைகளை உய்த்துணர அளவைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் கற்பனையாக ஒரு பரிமாணத்தை இணைப்பது வழக்கம்.

ஒரு பொருள் பலவிதமான அளவிடும் தன்மைகளைப் பெற்றிருக்கக்கூடும். ஒவ்வொன்றின் தன்மையை அளவிடுவதற்கு அத்தன்மையின் ஒரு சிறு பகுதியை அடிப்படை அளவாகக் கொண்டு (basic unit), அவ்வடிப்படையில் அத்தன்மையின் அளவை வரையறுக்கலாம். அவ்வடிப்படை அளவு, அத்தன்மையின் அடிப்படை அலகு எனக் கருதப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் நீளத்தை அதற்குகந்த அடிப்படை அளவான 'ஒரு சென்டிமீட்டர்' அல்லது 'ஓர் அடி' என்ற அலகு அளவையால் கணக்கிட முடியும்.

இயந்திர இயலில் இடம் பெறும் ராசிகள் (Quantities) அல்லது தன்மைகள் (Qualities) ஆகியவற்றின் ஒவ்வொன்றின் தனித்த அலகை மேற்கொள்வது இயலாத செய்கையாகும். ஆழ்ந்த ஆராய்ச்சிகளின் அடிப்படையில் கிடைக்கப்பெற்ற நீளம் (Length), நிறை (Mass), காலம் (Time) ஆகியவற்றின் அடிப்படை அலகுகளின் வாயிலாக மற்ற ராசிகளை அளவிட முடியும். எனவே நீளம், நிறை, காலம் ஆகிய மூன்று ராசிகளும் அடிப்படை ராசிகள் (Fundamental Quantities) எனவும், மற்றெல்லா ராசிகளும் அவற்றின் வழி வந்த ராசிகளெனவும் (Derived or Secondary Quantities) கருதப்படும்.

இம் மூன்று அடிப்படை ராசி அலகுகள் ஒவ்வொன்றின் அடிப்படைப் பரிமாணத்தை (basic dimension) ஒன்றெனக் கொண்டு (unity), மற்ற அளவிடும் ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் கணக்கிட முடியும். மற்றைய ராசிகளின் பரிமாணங்கள் அடிப்படை ராசிகளின் பரிமாணங்களைச் சார்ந்து வரையறுக்கப் படுவதால், அவற்றை வழி வந்த அல்லது இரண்டாவதான பரிமாணங்கள் (Derived or Secondary Dimensions) எனக் கூறுவர்.

ராசிகளை அளவிட்டுக் கூறுவதில் இரு வகையான முறைகள் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. மெட்ரிக் முறை (Metric System) என்பது ஒன்று; மற்றொன்று பிரிட்டன் முறை (British System).

மெட்ரிக் முறையில் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றை அளவிடப் பயன்படுத்தப்படும் அடிப்படை அலகுகள் முறையே

சென்டிமீட்டர் (செ.மீ.), கிராம் (கி.), விநாடி (வி.) ஆகியவை களாகும். பிரிட்டன் முறையில் அவற்றின் அலகுகள் முறையே அடி (அ.), பவுண்டு (பவு.), விநாடி (வி.) ஆகியவைகளாகும்.

1—3. படித்தர அலகுகள் (Standard Units)

வழக்கமாக மெட்ரிக் முறையில் பயன்படுத்தப்படும் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் படித்தர அலகுகள் முறையே மீட்டர் (மீ), கிலோகிராம் (கி.கி.), விநாடி (வி.) ஆகும். அவ்வாறே பிரிட்டன் முறையில் கெஜம் (கெ.), பவுண்டு (பவு.), விநாடி (வி.) என்பனவாகும்.

மெட்ரிக் முறையில் பாரிசுக்கு (Paris) அருகில் செவ்ரே (Sevres) என்னுமிடத்தில் 0°C வெப்ப நிலையில் கண்காணிக்கப் பட்டு வரும் பிளாட்டினம்-இரிடியம் உலோகக் கலவையாலான கம்பி (bar) ஒன்றிலுள்ள இரு நிலையான குறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு (distance) ஒரு மீட்டர் (மீ.) எனவும், அதே இடத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பிளாட்டினம்-இரிடியம் உலோகக் கலவை யாலான உருளைக்கட்டி ஒன்றின் நிறை ஒரு கிலோகிராம் (கி.கி.) எனவும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

மீட்டரின் நூற்றில் ஒரு பகுதியே சென்டிமீட்டராகும். கிலோகிராமின் ஆயிரத்தில் ஒரு பகுதியே கிராமாகும்.

பிரிட்டன் முறையில் இலண்டன் மாநகரில் வர்த்தகக் குழு அலுவலகத்தில் 62°F வெப்பநிலையில் வைக்கப்பட்டுப் பாது காக்கப்பட்டு வரும் வெங்கலக் கம்பி ஒன்றில் பதிக்கப்பட்டுள்ள இரு தங்க முனைகளுள்ள குறியீடுகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு ஒரு கெஜம் எனவும், அதே இடத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள பிளாட்டினக் கட்டி ஒன்றின் நிறை ஒரு பவுண்டு எனவும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

கெஜத்தின் மூன்றில் ஒரு பகுதி அடியாகும்.

இரு முறைகளிலும் காலத்தின் படித்தர அலகு சராசரி ஞாயிறு நாளாகும் (Mean Solar day). ஞாயிறு நாள் என்பது கதிரவன் வான்முகட்டை அடுத்தடுத்து இருமுறை கடப்பதற்கிடையே யுள்ள கால அளவாகும். ஞாயிறு நாளின் 1/86400 பகுதியே ஒரு விநாடியாகும்.

1—4. நிறை (Mass)

ஒரு பொருளின் நிறை என்பது அப்பொருளிலடங்கியுள்ள திணிவின் (matter) அளவைக் குறிக்கும். பொருளின் எடை

(weight) என்பது அப்பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையை (gravitational force)க் குறிக்கும். புவியீர்ப்பு விசை, புவியின்மேல் இடத்திற்கு இடம் மாறுபடும். ஆதலால் பொருளின் எடையும் இடத்திற்கிடம் வேறுபடும். ஆனால் ஒரு பொருளின் நிறை எல்லா இடங்களிலும் ஒரே மதிப்பளவாக இருக்கும்.

பொருள்களின் இரு மாறுபாடான செயல்களிலிருந்து வரையறுக்கப்பட்ட பொருண்மையின் அல்லது திணிவின் பண்பையே நிறை எனக் கூறுவது வழக்கம்.

முதலாம் செயலை ஆராய்ந்திட, சரி நிலையிலுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே மாதிரியான இரு திருகு சுருள் (springs)களைத் தொங்கவிடவும். வெவ்வேறு மூலப் பொருள்களாலானதும், உருவம், அமைப்பு, நிறம் ஆகியவற்றில் மாறுபட்டும் உள்ள இரு திடப் பொருள்களைச் சுருள்களின் அடி முனைகளில் முறையே இணைக்கவும். பொருள்கள் இரண்டும் புவியீர்ப்புச் சக்தியினால் திருகு சுருள் ஒவ்வொன்றிலும் சிறிது நீட்சியை உண்டு பண்ணும். எந்தச் சுருளில் அதிக நீட்சியுள்ளதோ அச்சுருளில் இணைக்கப்பட்ட திடப் பொருளிலிருந்து இரு நீட்சிகளும் ஒரே அளவாக வருமளவுக்கு மூலப்பொருளைச் சுரண்டி எடுக்கவும். பிறகு இவ்விரு திருகு சுருள்களையும், புவியின் மேற்பரப்பிலிருந்து ஒரே உயரத்திற்குத் தூக்கிடவும். அப்போது நீட்சி அளவுகளில் சற்றுக் குறைவு காணப்பட்ட போதிலும், இரு நீட்சிகளின் தொலைவுகள் ஒன்றாகவே (same) இருப்பதைக் காணலாம். காரணம் என்னவெனில், இரு பொருள்களும் புவியீர்ப்பு விசையால் ஒரே அளவுள்ள நீட்சியை இரு சுருள்களிலும் செய்விக்கின்றன. இதிலிருந்து பொருள்கள் சம மதிப்புள்ளதும், இயல்பாக அமைந்த பண்பையும் பெற்றுள்ளன என அறியலாம். ஒவ்வொரு பொருளின் இவ்விதப் பண்பைப் புவியீர்ப்பு விசை அளவையால் தெளிவாக்க முடிகிறது. பொருளின் இத்தகைய பண்பைத் தான் பொருளின் நிறை எனக் கூறுவர்.

இரு பொருள்களும் பொருண்மையில் சம மதிப்பைப் பெற்றுள்ளன என்பதை மற்றொரு செய்முறையாலும் அறியலாம். திருகு சுருள்களில் இணைக்கப்பட்ட இரு திடப் பொருள்களைக் கீழ்நோக்கி ஒரே அளவுக்கு இழுத்து, ஒரே நேரத்தில் (same time) விடுவித்தால், அவைகளின் இயக்கங்களில் எவ்வித மாறுபாடுகளையும் காணமுடிவதில்லை. ஆகவே, பொருள்கள் வெளிப் படைத் தோற்றங்களில் மாறுபட்டிருந்த போதிலும், அவைகளை இயங்கிடச் செய்யும்போது, அப் பொருள்களில் நிகழும்

இயக்கங்கள் முற்றிலும் ஒரே சீராக, மாற்றங்கள் எதுவுமின்றி நிகழ்கின்றன.

எனவே புவியீர்ப்பு விசையின் செய்கையிலும், இடப்பெயர்ச்சி (displacement) செய்வதால் நிகழும் இயக்கத்திலும் பொருளின் தனிச் சிறப்புக் குணத்தைப் பொருளின் நிறை வெளிப்படுத்துவதை அறியலாம்.

பல பொருள்களின் நிறைகளைக் காண்பதிலும், அவைகளின் இடப்பெயர்ச்சிச் செய்கையினுல் நிகழும் இயக்கங்களைக் காண்பதிலும், ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் நிறை, நீட்சி ஆகிய வற்றை அடிப்படையாகக் கொள்வது முறையாகும். எடுத்துக் காட்டாக, திருகு சுருள் வில் ஒன்றில் ஏதாவதொரு பொருள் விளைவிக்கும் நீட்சியை, குறிப்பிட்ட பொருள் விளைவிக்கும் நீட்சி யுடன் ஒப்பிட்டு, அப்பொருளின் நிறையைக் கணக்கிடலாம்.

ஒரு பொருளின் தன்மைகளை விவரிப்பதில், மூன்று தனித்த பரிமாணங்களைப் பயன்படுத்தி, அதன் மற்றத் தன்மைகளை அளவிட முடியும் என முன்பே கூறப்பட்டது. அம்மூன்று அடிப்படைப் பரிமாணங்களும் கீழ்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

நீளம் (நீ) — Length (L)
நிறை (நி) — Mass (M)
காலம் (கா) — Time (T)

நீளம், நிறை, காலம் ஆகிய ஒவ்வொன்றின் அடிப்படைப் பரிமாணங்கள் ஒன்றெனக் (unit dimension) கொள்ளப்படும். குறியீட்டு முறையில் அவைகள் ஒவ்வொன்றின் பரிமாணங்களை முறையே (நீ)—(L), (நி)—(M), கா—(T) என்ற அடையாளக் குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். மேலும் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அளவுகளின் பரிமாணங்கள் ஒன்று என்பதையும் மேற்கண்ட குறியீடுகள் விளக்க உதவுகின்றன.

நடைமுறையில் கணக்கிடும்போது அலகுகளை ஒரு முறையி லிருந்து மற்றொரு முறைக்கு மாற்ற வேண்டிய தேவை ஏற்படு கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, அடி அலகை அங்குலம் அல்லது சென்டிமீட்டரால் அறிவிக்க வேண்டி வரும். அப்போது அடி அலகுக்குச் சம மதிப்பைப் பெற்ற புதிய அலகுகளின் மடங்கால் மாற்றியமைக்க வேண்டும். அதாவது, ஒரு அடியை, 12 அங்குலங்கள் அல்லது 30·5 சென்டிமீட்டர்கள் என்று மாற்றிட

வேண்டும். இங்கு 12, 30·5 என்ற எண்கள், புதிய அலகுகளில் அடிக்குரிய மடங்குகளை அறிவிக்கின்றன. மேற்கூறிய அலகு களுக்குள்ள மதிப்புகளின் தொடர்பை

1 அடி = 12 அங்குலம் = 30·5 சென்டிமீட்டர்

எனச் சர்வ சமக் குறியீட்டால் வெளிப்படுத்த முடியும். அவைகளை இயற்கணித முறைச் சமன்பாடாகக் கருதக் கூடாது. அலகுகளுக்குள்ள சமத்துவத்தை (equivalence), அதாவது சார்ந்திருக்கும் தன்மையைத் தெரிவிப்பதாகத்தான் கொள்ளவேண்டும். அவைகளின் சமத்துவத்தைப் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம் :

$$\left[\frac{1 \text{ அடி}}{12 \text{ அங்குலம்}}\right] = 1 \; ; \quad \left[\frac{1 \text{ அடி}}{30{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}}\right] = 1 \; ;$$

$$\left[\frac{12 \text{ அங்குலம்}}{1 \text{ அடி}}\right] = 1 \; ; \quad \left[\frac{30{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ அடி}}\right] = 1 \; .$$

இங்கு வலப்புறத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒன்று என்ற இலக்கம், இடப்புறத்திலுள்ள கீழ், மேல் அலகுகளின் மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று சமத்துவமாக (equivalence) உள்ளன என்பதை அறிவிக்கிறது. இவ்வெண் குறிகள், இரண்டாவதான பரிமாணங்களுக்குகந்த அலகுகளை மாற்றுவதில் துணை புரிகின்றன.

1-5. வழிவந்த அல்லது இரண்டாவது நிலையான ராசிகளின் பரிமாணங்கள் (Derived or Secondary Dimensions of Quantities)

நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அலகுகளை அடிப்படை அலகுகளெனக்கொண்டு, மற்ற பௌதிக ராசிகளின் அலகுகளை, அவற்றின் வரையறைகளுக்கு ஏற்றவாறு அடிப்படை ராசி அலகு களின் மூலமாகப் பெறலாம். எனவே அவ்வித ராசிகளின் பரிமாணங்களையும், அடிப்படை ராசிகளின் பரிமாணங்களைத் துணைகொண்டு வரையறுக்க முடியும். அப்போது அவ்வித ராசிகள் இரண்டாவதான பரிமாணங்களைப் பெற்ற ராசிகள் என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, திசைவேகம் (Velocity) என்பது, இடப்பெயர்ச்சிக்கும், நேரத்திற்குமுள்ள விகிதமாக அளவிடப் பட்டு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, திசைவேகத்தின் பரிமாணத்தை நீளம், நேரம் ஆகியவற்றின் அடிப்படைப்

பரிமாண அளவுகளில் வரையறுக்கலாம். ஆதலால் திசைவேகம் ஒரு வழி வந்த ராசியாகும்.

நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அடிப்படைப் பரிமாணங்கள் ஒன்று என அறிவிக்க, அவைகளைக் குறிக்கும் எழுத்துகளான L, M, T-களைப் பெரிய அடைப்புக் குறியீடு களிலிட்டு, [L], [M], [T] என எழுதப்படும்.

திசைவேகத்தின் பரிமாணங்களைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்:

$$[\text{திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}]$$

திசைவேகம் வழி வந்த ராசி (derived quantity) யாதலால், அதற்குரிய அலகினை, இடப்பெயர்ச்சி, நேரம் ஆகியவற்றின் அலகுகளால் வரையறுக்கலாம். எனவே,

$$\text{திசைவேகத்தின் அலகு} \equiv \frac{[\text{அடி}]}{[\text{விநாடி}]} \text{ ஆகும்.}$$

ஓர் அமைப்புக்குரிய அலகுகளை மற்றோர் அமைப்பின் அலகுகளாக மாற்றிடும்போது, பொதுவாக சார்ந்த ராசிகளின் அளவுகோல்களுக்குள்ள சமத்துவத்தைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும்.

திசைவேகத்தின் அடிப்படை அலகு பிரிட்டன் முறையில் ஒரு விநாடியில் கடக்கக்கூடிய தொலைவை அடி அலகில் அறிவிக்கும் அளவாகும். மெட்ரிக் முறையில் இவ்வலகு, ஒரு விநாடியில் கடந்த தொலைவை சென்டிமீட்டர் அலகில் குறிக்கும் அளவாகும்.

ஒரு முறையிலிருந்து மற்றொரு முறைக்கு அலகுகளை மாற்றிடப் பின்வரும் செயல்முறைகளைக் கையாள வேண்டும்.

(i) சார்ந்த ராசியை அதற்குரிய பரிமாணக் குறியீட்டால் வெளியிடல்.

(ii) அடிப்படைப் பரிமாணங்களுக்குரிய தற்போதைய அலகு அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தல்.

(iii) அளவுகோல்களைப் புதிய முறையில் சமத்துவமாக இருக்கும் அளவுகோல்களின் மடங்கில் மாற்றி அமைத்தல்.

(iv) புதிய முறையில் சார்ந்த ராசியின் அளவுகோல்களுக் குரிய மடங்கை, பழைய முறையில் பயன்படுத்திய அளவுகோல் களின் வாயிலாக வரையறுக்கும் சமன்பாட்டைத் தீர்மானித்தல்.

எடுத்துக்காட்டாக, வேகத்தின் ஓர் அலகை வரையறுக்கும் பரிமாணத்தை பிரிட்டன் முறையிலிருந்து மெட்ரிக் முறைக்கு மாற்றுவதற்கான வாய்பாடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

$$[\text{வேக வீதம்}] = \frac{[1 \text{ அடி}]}{[\text{விநாடி}]} = \frac{[30{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}]}{[1 \text{ விநாடி}]}$$

$$= 30{\cdot}5 \left[\frac{1 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ விநாடி}}\right] \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, மெட்ரிக் முறையில் வேக வீதத்திற்குரிய $\left[\frac{1 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ விநாடி}}\right]$ என்ற அலகின், 30·5 மடங்கு, பிரிட்டன் முறையில் வேக வீதத்தின் ஓரலகுக்குச் சமமாகும்.

இரண்டாவது நிலைப் பரிமாணங்களைக் கையாளும்போது, ஒரு முறைக்குகந்த அலகு ஒவ்வொன்றின் அளவுகோல்களை மற்றொரு முறைக்குகந்த அலகு அளவுகோல்களின் மடங்காக மாற்றிட, முதல் முறையின் அலகு அளவுகோல் ஒவ்வொன் றையும் அதற்கு ஏற்ற பருப்பொருளைச் சார்ந்த விகித மதிப்பு ஒன்றால் பெருக்கிட வேண்டும். அப்போது பழைய முறையில் பயன்படுத்தப்பட்ட அலகு-அளவுகோல்கள் அனைத்தும் நீக்கப் பட்டு (cancel), புதிய முறை அலகு-அளவுகோல்களுக்குகந்த கெழுக்களால் சார்ந்த ராசியின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, பிரிட்டன் முறையில், திசைவேகத்தின் அலகு $\left[\frac{1 \text{ அடி}}{1 \text{ விநாடி}}\right]$ ஆகும். இங்கு அடி அளவுகோலை, செ.மீ. அளவுகோலின் வாயிலாகப் பின்வருமாறு மாற்றிட முடியும் :

$$[\text{திசைவேகம்}] = \left[\frac{1 \text{ அடி}}{1 \text{ விநாடி}}\right]$$

$$= \frac{[1 \text{ அடி}] \left[\frac{30{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ அடி}}\right]}{1 \text{ விநாடி}}$$

$$= 30{\cdot}5 \left[\frac{1 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ விநாடி}}\right] \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் பிரிட்டன் முறையில் திசைவேகம் வினாடிக்கு 22 அடிகளானால், அதை மெட்ரிக் முறையில் பின்வருமாறு அறிவிக்கலாம் :

$$\text{திசைவேகம்} = 22 \left[\frac{1 \text{ அடி}}{1 \text{ வினாடி}}\right]$$

$$= 22 \frac{[1 \text{ அடி}] \left[\frac{30{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ அடி}}\right]}{[1 \text{ வினாடி}]}$$

$$= 22 \times 30{\cdot}5 \left[\frac{1 \text{ செ.மீ.}}{1 \text{ வினாடி}}\right]$$

இங்கு அலகு-அளவுகோல்களைப் புதிய முறைக்கு ஏற்றவாறு மாற்றிடும்போது, திசைவேகத்தை அறிவிக்கும் எண்ணான '22' மாறுவதில்லை என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்.

1-5 (1) வழி வந்த பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களை வரையறுத்தல்

Q என்பது வழி வந்த ஒரு பௌதிக ராசியைக் குறிக்கட்டும். Q-க்கு உகந்த பரிமாணங்களை, அடிப்படைப் பரிமாண அலகு அளவுகோல்களின் படிகளால் (powers) பின் வருமாறு எழுதலாம் :

$$[Q] = [L^x\ M^y\ T^z] = [\text{நீ}^x\ \text{நி}^y\ \text{கா}^z]$$

இங்கு x, y, z என்பன படிப் பெருக்க எண்கள். அவை நேர், எதிர் குறியுடையனவாகவோ, பின்னமாகவோ இருக்கலாம். மேலும் Q ராசியின் பரிமாணங்கள், நீளத்தில் x-படி, நிறையில் y-படி, நேரத்தில் z-படி ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்படும் எனவும் கூறலாம்.

ஒரு சில முக்கிய வழி வந்த ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் கணக்கிடுவோம்.

1. பரப்பு (Area) : நீளம், அகலம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் பரப்பளவு அளவிடப்படுவதால், பரப்பளவின் பரிமாணங்கள் $[L^2]$ ஆகும்.

2. [பரப்பளவு] = [நீளம் × அகலம்] = $[L \times L] = [L^2]$.

3. பருமன் (Volume) : ஒரு பொருளின் பருமன், அதன் நீள, அகல, உயரங்களின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படுவதால், பருமனின் பரிமாணங்கள் $[L^3]$ ஆகும்.

$$[\text{பருமன்}] = [\text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \times \text{உயரம்}]$$
$$= [L \times L \times L]$$
$$= [L^3]$$

4. அடர்த்தி (Density) : ஒரு பொருளின் அடர்த்தி அதன் ஓரலகுப் பருமனின் நிறையாகும்.

$$[\text{அடர்த்தி}] = \left[\frac{\text{நிறை}}{\text{பருமன்}}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right] = [ML^{-3}].$$

5. திசைவேகம் (Velocity) : இது ஓரலகு நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சியாகும்.

$$[\text{திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}]$$

6. முடுக்கம் (Acceleration) : இது ஓரலகு நேரத்தில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடாகும்.

$$[\text{முடுக்கம்}] = \left[\frac{\text{திசைவேகம்}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = [LT^{-2}]$$

7. உந்தம் (Momentum) : ஒரு பொருளின் உந்தம், அதன் நிறை, திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படும்.

$$[\text{உந்தம்}] = [\text{நிறை} \times \text{திசைவேகம்}]$$
$$= [M \times LT^{-1}]$$
$$= [MLT^{-1}]$$

8. விசை (Force) : விசையானது, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, பொருளின் நிறை, முடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படும். எனவே,

$$[\text{விசை}] = [\text{நிறை} \times \text{முடுக்கம்}]$$
$$= [M \times LT^{-2}]$$
$$= [MLT^{-2}].$$

9. தாக்கு (Impulse) :

$$\text{தாக்கு} = \text{விசை} \times \text{நேரம்}$$
$$[\text{தாக்கு}] = [\text{விசை} \times \text{நேரம்}]$$
$$= [MLT^{-2} \times T]$$
$$= [MLT^{-1}]$$

[தாக்கு, உந்தம் ஆகியவற்றின் பரிமாணங்கள் சமமாக இருப்பதைக் காண்க.]

10. வேலை (Work)

வேலை = விசை × விசைச் செயற்படு புள்ளி நகரும் தொலைவு.

∴ [வேலை] = [விசை × விசைச் செயற்படு புள்ளி நகரும் தொலைவு]

$= [MLT^{-2} \times L]$

$= [ML^{2}T^{-2}]$

11. இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy) :

இயக்க ஆற்றல் = $\frac{1}{2}$ நிறை × (திசைவேகம்)^2

∴ [ஆற்றல்] = [நிறை × (திசைவேகம்)^2]

$= [M \times (LT^{-1})^2]$

$= [ML^2T^{-2}]$.

[வேலை, ஆற்றல் ஆகியவற்றின் பரிமாணங்கள் சமமாக இருப்பதைக் காண்க.]

12. திறன் (Power) : திறன் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலை.

$$\text{திறன்} = \frac{\text{செய்யப்பட்ட வேலை}}{\text{நேரம்}}$$

$$[\text{திறன்}] = \left[\frac{\text{செய்யப்பட்ட வேலை}}{\text{நேரம்}}\right]$$

$$= \left[\frac{ML^2T^{-2}}{T}\right]$$

$$= [ML^2T^{-3}]$$

13. கோணம் (Angle) : கோணத்தை ரேடியனில் அளவிடும்போது,

$$\text{கோணம்}, (\theta) = \frac{\text{வட்ட வில்}}{\text{ஆரம்}}$$

$$\text{எனவே}, [\text{கோணம்}] = \left[\frac{\text{வட்ட வில்}}{\text{ஆரம்}}\right]$$

$$= \left[\frac{L}{L}\right]$$

$$= [L^0]$$

∴ கோணத்திற்குப் பரிமாணங்கள் கிடையாது.

14. கோணத் திசைவேகம் (Angular Velocity) : இது ஓரலகு நேரத்தில் பொருள் பெறும் கோண இடப்பெயர்ச்சியாகும்.

$$\text{கோணத் திசைவேகம் } (\omega) = \left[\frac{\text{கோணம்}}{\text{நேரம்}}\right]$$

எனவே,

$$[\text{கோணத் திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{கோணம்}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{L^0}{T}\right] = [T^{-1}]$$

15. கோண முடுக்கம் (Angular Acceleration) : இது ஓரலகு நேரத்தில் கோணத் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடாகும்.

$$\text{கோண முடுக்கம்} = \frac{\text{கோணத் திசைவேக மாறுபாடு}}{\text{நேரம்}}.$$

எனவே,

$$[\text{கோண முடுக்கம்}] = \left[\frac{\text{கோணத் திசைவேக மாறுபாடு}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{T^{-1}}{T}\right] = [T^{-2}]$$

16. நிலைமத் திருப்புதிறன் (Moment of Inertia) : நிலைமத் திருப்புதிறன் = நிறை × (சுழற்சி ஆரம்)^2 எனவே

$$[\text{நிலைமத் திருப்புதிறன்}] = [\text{நிறை} \times (\text{சுழற்சி ஆரம்})^2] = [M \times L^2] = [ML^2]$$

17. கோண உந்தம் (Moment of Momentum) : ஒரு பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன், கோணத் திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் கோண உந்தம் எனப்படும்.

$$[\text{கோண உந்தம்}] = [\text{நிலைமத் திருப்புதிறன்} \times \text{கோணத் திசைவேகம்}] = [ML^2 \times T^{-1}] = [ML^2\, T^{-1}].$$

18. திருப்பு விசை :

திருப்பு விசை = [நிலைமத் திருப்புதிறன் × கோண முடுக்கம்]

எனவே, [திருப்பு விசை] = [நிலைமத் திருப்புதிறன் × கோண முடுக்கம்]

$$= [ML^2 \times T^{-2}]$$

$$= [ML^2 T^{-2}]$$

19. யங் குணகம் (Young Modulus) :

$$\text{யங் குணகம்} = \frac{\text{தகைவு}}{\text{திரிபு}}$$

$$= \frac{\text{விசை/பரப்பளவு}}{\text{நீள மிகுதிப்பாடு/மூல நீளம்}}$$

$$\text{யங் குணகம்} = \left[\frac{MLT^{-2}/L^2}{L/L}\right]$$

$$= [ML^{-1} T^{-2}]$$

20. அழுத்தம் (Pressure) :

அழுத்தம் என்பது ஓரலகு பரப்பளவில் செயற்படும் நேர்க் குத்து விசை.

$$[\text{அழுத்தம்}] = \left[\frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பளவு}}\right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right]$$

$$= [ML^{-1} T^{-2}]$$

21. பரப்பு இழுவிசை :

பரப்பு இழுவிசை என்பது திரவத்தின் பரப்பில் ஓரலகு நீளத்தில் செயற்படும் விசை.

$$[\text{பரப்பு இழுவிசை}] = \left[\frac{\text{விசை}}{\text{நீளம்}}\right]$$

$$= \frac{MLT^{-2}}{L}$$

$$= [MT^{-2}]$$

22. பாகியல் எண் (Coefficient of Viscosity)

$$\text{பாகியல் எண்} = \frac{\text{ஓரலகு பரப்பளவில் தொடுவரை விசை}}{\text{திசைவேக வாட்டம்}}$$

எனவே,

$$[\text{பாகியல் எண்}] = \left[\frac{\text{விசை/பரப்பளவு}}{\text{திசைவேகம்/தொலைவு}}\right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2}/L^2}{LT^{-1}/L}\right]$$

$$= [ML^{-1}\,T^{-1}]$$

23. வெட்டுத் தொடுவிசை (Shear Stress)—ζ_s :

வெட்டுத் தொடுவிசை என்பது ஓரலகு பரப்பளவில் செயற்படும் தொடுவிசை.

$$[\text{வெட்டுத் தொடுவிசை}] = \left[\frac{\text{தொடுவிசை}}{\text{பரப்பளவு}}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right]$$

$$= [ML^{-1}\,T^{-2}]$$

24. முறுக்குதிறன் (Torque)—T_q

ஒரு பொருளில் செயற்படும் விசை, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் பொருளைச் சுழலச் செய்யும் செயலே முறுக்குத் திறனாகும். இது விசை குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கும் விசை செயற்படும் கோட்டிற்குமுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் வரையறுக்கப்படும்.

$$[\text{முறுக்குதிறன்}] = [\text{விசைத் திருப்புதிறன்}]$$

$$= [\text{விசை} \times \text{தொலைவு}] = [MLT^{-2} \times L]$$

$$= [ML^2\,T^{-2}]$$

1—6. அலகுகளின் அமைப்புகளும், விசையின் பொதுக் கோட்பாடும் (Systems of Units and Concept of a Force)

1—6 (1) சார்பிலா அலகுகளின் அமைப்பு (Absolute System of Units)

நீளம், நிறை, நேரம் ஆகிய ராசிகளின் அடிப்படைப் பரிமாணங்களால் மற்றெல்லா பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் கணக்கிட முடியும். அடிப்படை அலகுகள் எல்லா இடங்களிலும் ஒரே மாதிரியான பொருள்படும் வகையில் பயன்படுத்தப் படுவதால், அடிப்படை ராசிகளின் அலகுகள் சார்பிலா அலகு

களாகக் கொள்ளப்படும். நீளம், நிறை, நேரம் ஆகியவற்றிற்குரிய சார்பிலா அலகுகள், ஒரு சார்பிலா அமைப்பை வரையறுக்கும். இச் சார்பிலா அமைப்பு முறையில், விசையானது சார்ந்த ராசியாகக் கருதப்படும். எனவே, விசையின் பரிமாணங்களை, அடிப்படைச் சார்பிலா அலகுகளின் பரிமாணங்களால் வரையறுக்கலாம்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது இயக்க விதிப்படி,

விசை = நிறை × முடுக்கம் ஆகும்.

எனவே, [விசை] = [நிறை × முடுக்கம்]

$= [M \times LT^{-2}]$

$= [MLT^{-2}]$ ஆகும்.

மெட்ரிக் படித்தர முறையைக் கையாளும்போது, நிறை = 1 கி.கி; முடுக்கம் = 1மீ./வி^{2} என்றுவதால்,

விசை = நிறை × முடுக்கம்

= 1 கி.கி × 1 மீ./வி^{2}

= 1 (கி.கி.மீ./வி^{2}) ஆகும்.

விசையின் பரிமாணங்கள், [கி.கி.மீ./வி^{2}] என்று ஆவதால், விசை, அதன் அலகில் (கி.கி.மீ./வி^{2}) என்றுகும். எனவே, ஓரலகு நிறையுள்ள பொருள் ஒன்றின்மீது செயற்பட்டு, அப் பொருளில் தன் திசையிலேயே ஓரலகு முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தும் விசை ஒருமவிசையாகும் (one unit of force). மெட்ரிக் முறையில், மீட்டர், கிலோகிராம், விநாடி ஆகியவற்றின் படித்தர சார்பிலா அலகுகளில், விசையின் சார்பிலா அலகு, நியூட்டன் எனப்படுவதாகும்.

1 நியூட்டன் = (1 கி.கி.) (1 மீ/வி^{2}).

மெட்ரிக்—'செ.மீ. கிராம், விநாடி'—முறையில், விசையின் சார்பிலா அலகு, டைன் (Dyne) எனப்படும். அதாவது, ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்பட்டு, அப் பொருளில், தன் திசையிலேயே (1 செ.மீ./வி^{2}) முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் விசை ஒரு டைன் விசையாகும்.

அவ்வாறே பிரிட்டன் முறையில், விசையின் சார்பிலா அலகு பவுண்டல் (Poundal) ஆகும். ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்பட்டு, அப் பொருளில் தன் திசையிலேயே, (1அடி/வி^{2}) முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் விசை ஒரு பவுண்டல் விசையாகும்.

சார்பிலா அலகுகளின் மதிப்புகள் எல்லா இடங்களிலும் ஒரே அளவானவையாகவும், புவியீர்ப்பு விசையால் பாதிக்கப் படாமலும் உள்ளன.

சார்பிலா அலகுகளின் அமைப்பு முறை, பௌதிக, இரசாயனத் துறைகளில் பின்பற்றப்படுகிறது. சார்பிலா அலகு களைத் தழுவியஅமைப்பு முறைகளின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

பரிமாணங்கள்		மெட்ரிக் சார்பிலா முறை		பிரிட்டன் சார்பிலா முறை FPS
		படித்தர அலகுகள் MKS	அடிப்படை அலகுகள் CGS	
அடிப் படைப் பரிமா ணங்கள்	நீளம் [L]	மீட்டர்–M–மீ.	சென்டிமீட்டர் cm–செ.மீ.	அடி–ft–அ.
	நிறை [M]	கிலோகிராம் kg–கி.கி.	கிராம்–gm–கி.	பவுண்டு lb–பவு.
	காலம் [T]	விநாடி–s–வி.	விநாடி–s–வி.	விநாடி–s–வி.
வழிவந்த பரிமா ணங்கள்	விசை $[MLT^{-2}]$	நியூட்டன் $(kg\text{–}m/s^2)$ (கி.கி. மீ./வி^{2})	டைன் $(gm.\ cm/s^2)$ (கி.செ.மீ/வி^{2})	பவுண்டல் $(lb.\ ft/s^2)$ (பவு. அ./வி^{2})

1-6 (2) புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள் (Gravitational Units)

இங்கு அலகுகளின் அளவு மதிப்புகள் புவியீர்ப்பு விசையைச் சார்ந்துள்ளன. பொறிநுட்பத் துறைகளில் இவ்வித அலகுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

இம் முறையில் விசை, நீளம், நேரம் ஆகியவை அடிப்படை அலகுகளாக ஏற்கப்படும். நிறை சார்ந்த அலகாகக் கருதப்படும். ஆனால் சார்பிலா அமைப்பு முறையில் பயன்படுத்தப்பட்ட நீளம், நேரம் ஆகிய அடிப்படை ராசிகளுக்கு உகந்த சார்பிலா அலகுகளே இம் முறையிலும் ஏற்கப்படுகின்றன.

புவியீர்ப்பு காரணமாக ஓரலகு நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்படும் விசை, புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசையாகும் (one unit of force).

"மீட்டர்-கிலோகிராம் – விநாடி"—என்ற மெட்ரிக் முறையில் புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசை கிலோகிராம் எடை (Kilogram weight) எனப்படும். ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை ஒரு கிலோகிராம் எடையாகும் (kgf).

ஒவ்வொரு இடத்திலும், ஓரலகு நிறையுள்ள பொருள் தங்கு தடையின்றி தானே விழும்போது (Freely falling body), புவியீர்ப்பு விசையினால் g அலகுகள் முடுக்கத்தைப் பெறுவதால், புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசை, g சார்பிலா அலகுகளுக்குச் சமமாகும். எனவே, "மீட்டர்–கிலோகிராம்–விநாடி" முறையில் MKS–System), 1 கிலோகிராம் எடை = g நியூட்டன்களாகும். ஆதலால், ஓரலகு (கி.கி.) நிறையுள்ள பொருள் தங்குதடையின்றி புவியீர்ப்பு விசையினால் விழும்போது, விழும் திசையில் (gமீ/வி^{2}) அலகு முடுக்கத்தைப் பெறுவதற்குரிய புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசை, ஒரு கிலோகிராம் எடை எனப்படும். அதாவது புவியீர்ப்பால், ஏதாவதொரு இடத்தில் ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள பொருள் ஒன்றில், (gமீ/வி^{2}) அலகு முடுக்கத்தை ஏற்படுத்துவதற்குரிய விசை அலகு ஒரு கிலோகிராம் விசை எனக் கருதப்படும்.

அவ்வாறே, "சென்டிமீட்டர் - கிராம் - விநாடி" – மெட்ரிக் முறையில், விசையின் புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகு கிராம் எடை எனப்படும். ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருள் ஒன்றில் செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை, ஒரு கிராம் எடையாகும். புவியீர்ப்பு சார்ந்த ஓர் அலகு விசை, g சார்பிலா அலகுகளுக்குச் சமமாகும். ஆதலால், "செ.மீ. - கி. - விநாடி" முறையில் (CGS–System)

1 கிராம் எடை = g டைன்களாகும்.

பிரிட்டன் முறையில், விசையின் புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகு பவுண்டு எடை எனப்படும். ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின்மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை ஒரு பவுண்டு எடையாகும். எனவே,

1 பவுண்டு எடை = g பவுண்டல்களாகும்.

gன் மதிப்பு இடத்திற்கிடம் மாறுபடுவதால், கிலோகிராம் எடை, கிராம் எடை, பவுண்டு எடை ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களும் இடத்திற்கிடம் மாறுபடும்.

நிறையை, ஓர் சார்ந்த ராசியாகக் கருதினால், அதன் பரிமாணங்கள் நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$[\text{நிறை}] = \left[\frac{\text{விசை}}{\text{முடுக்கம்}}\right] = \frac{[F]}{[LT^{-2}]} = [FL^{-1}T^{2}] \text{ ஆகும்.}$$

விசை, நீளம், நேரம் ஆகியவற்றை அடிப்படை ராசிகளாக மேற்கொள்ளும்போது, விசையின் சார்பிலா அலகு, ஒரு கிலோகிராம் விசை எனக் கொள்ளப்படும். அப்போது, நிறையின் சார்பிலா அலகு, ஒரு ஸ்லக் (Slug) எனப்படும்.

ஒரு கிலோகிராம் விசை ஒரு பொருளின்மேல் செயற்பட்டு, தன் திசையிலேயே அப்பொருளுக்கு, (1மீ. /வி^{2}) முடுக்கத்தை விளைவிக்குமானால், அப்பொருளின் நிறை அளவு ஒரு "மெட்ரிக் ஸ்லக்" என, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி வரையறுக் கலாம். அதாவது, நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$F = m. a.$$

இங்கு F = 1 கி. கி. விசை ; a = 1 மீ./வி^{2} என்றுவதால், m = 1 ஆகும். எனவே,

நிறை = 1 மெட்ரிக் ஸ்லக் ஆகும்.

நியூட்டனின் விதிப்படி, ஒரு கிலோகிராம் விசை, ஒரு மெட்ரிக் ஸ்லக் நிறையுள்ள பொருளில் செயற்படும்போது, தன் திசையில் அப்பொருளுக்கு, 1மீ./வி^{2} முடுக்கத்தை விளை விக்கும். ஆனால், புவியீர்ப்பு விதிப்படி, 1 கிலோகிராம் விசை, 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள பொருளில் g மீ./வி^{2} முடுக்கத்தை விளைவிக்கின்றது. ஆதலால்,

1 கிலோகிராம் விசை = (1 மெட்ரிக் ஸ்லக்) (1 மீ./வி^{2})
= (1 கி. கி.) (g மீ./வி^{2})
∴ 1 மெட்ரிக் ஸ்லக் = g கி. கி. நிறையாகும்.

பொதுவாக, gன் மதிப்பு 9·81 மீ./வி^{2} எனக் கொள்ளப் படுவதால்,

1 மெட்ரிக் ஸ்லக் = 9·81 கி. கி. (நிறை).

பிரிட்டன் முறையிலும், நிறையின் ஓர் அலகு, ஒரு ஸ்லக் ஆகும். ஒரு பவுண்டு விசை, ஒரு ஸ்லக் நிறையுள்ள பொருளில் செயற்பட்டு, தன் திசையிலேயே, பொருளுக்கு (1 அடி/வி^{2}) முடுக்கத்தை விளைவிக்கும். புவியீர்ப்பு விதிப்படி, 1 பவுண்டு விசை, 1 பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளில், (g அடி/வி^{2}) முடுக் கத்தை விளைவிக்கின்றது. ஆதலால்,

1 பவுண்டு விசை = (1 ஸ்லக்) (1 அ./வி^{2}) = (1 பவு) (g அ/வி^{2}) ஆகும்.

∴ 1 ஸ்லக் = g பவுண்டு நிறையாகும்.

எனவே பிரிட்டன் முறையில், நிறையின் ஓர் அலகு ஒரு "ஸ்லக்" ஆகும். பொதுவாக, g-ன் மதிப்பு, 32·2 அ/வி^{2} எனக் கொள்ளப்படுவதால்,

1 ஸ்லக் (பிரிட்டன் முறையில்) = 32·2 பவுண்டு நிறையாகும்.

பொறி நுட்பத் துறைக்கு ஏற்ற அலகு அமைப்பு பின் வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

பரிமாணங்கள்		பொறி நுட்பத் துறைக்குரிய மெட்ரிக் அலகுகள்		பொறி நுட்பத் துறைக்குரிய பிரிட்டன் அலகுகள்
		MKS	CSG	FPS
அடிப் படைப் பரிமா ணங்கள்	நீளம்–[L]	மீட்டர்-(M)-மீ.	சென்டிமீட்டர் (cm)–செ,மீ.	அடி–(ft)–அ.
	விசை–[F]	கிலோகிராம் விசை (kgf) கிகி. விசை	கிராம் விசை (gmf)–கி. விசை	பவுண்டு விசை (lbf)–பவு. விசை
	நேரம் [T]	விநாடி–(s)–வி.	விநாடி–(s)–வி.	விநாடி–(s)–வி.
வழிவந்த பரிமா ணங்கள்	நிறை $[L^{-1} FT^2]$	மெட்ரிக் ஸ்லக் (kgf. s^2/m) (கி. கி. விசை வி^{2}/மீ.)	(கிராம் விசை வி^{2}/செ. மீ.) gmf. s^2/cm.) (கி. விசை வி^{2}/செ. மீ.)	ஸ்லக் (lbf. s^2/ft.) (பவு. விசை வி^{2}/அ.)

1—6 (3) ஒரு பொருளின் நிறையும், எடையும்

ஒரு பொருளின் நிறை (Mass), அதிலடங்கிய பொருண்மையின் (Matter) அளவாகும். இதைத் தெளிவு படுத்திக் கூற, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, F = m a என்றுவதால்,

$$a = \frac{F}{m}$$

ஆகும். ஆதலால், ஒரு குறிப்பிட்ட விசை, பொருள் ஒன்றின்மீது செயற்படும்போது, பொருளில் ஏற்படும் முடுக்கம், அதன் நிறைக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளது. மேலும், பொருளின் நிறை அதிகமாக இருக்கும்போது, அது, தன் நிலையை எளிதில் மாற்றிக்கொள்வதில்லை. ஆதலால், ஒரு பொருளின் நிறை என்பது, அப்பொருள் தன் நிலையை மாற்றிக்கொள்வதில் காட்டும் தயக்கத்தின் அளவை அல்லது அதிலடங்கியுள்ள நிலைமத்தின் (Inertia) அளவைக் குறிக்கிறது. நிறைக்கு எண் மதிப்பு

மட்டுமே உண்டு. அது எப்போதும் மாருதது. எனவே, நிறை ஒரு எண்ணி (Scalar) ஆகும்.

ஒரு பொருளின் எடை அப்பொருளின் மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையாகும். ஒரு பொருளின் நிறை m - ஆகவும், புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g - ஆகவும் இருப்பின், அதன் எடை, சார்பிலா அலகுகளில், W = mg ஆகும்.

$$\therefore m = \frac{W}{g}$$

புவியீர்ப்பு முடுக்கம் இடத்திற்கிடம் மாறுபடுவதால் பொருளின் எடையும் மாறுபடக் கூடியது. ஆனால் பொருளின் நிறை எவ்விடத்திலும் மாருத எண்ணாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில், ஒரு பொருளின் எடையை W கிலோகிராம் விசையாகவும் (kgf), அவ்விடத்தின் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g மீட்டர் / (வினடி)^2 — (m/s) — ஆகவும் இருக்குமானல், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

W (கி. கி. விசை) = m (மெட்ரிக் ஸ்லக்) ×g (மீ./வி^{2}) ஆகும்.

எனவே, பொருளின் நிறையை வரையறுக்கும் சமன்பாடு

$$\text{நிறை (மெட்ரிக் ஸ்லக்கில்)} = \frac{\text{W (கி.கி. விசை)}}{\text{g (மீ./வி}^2)} \text{ ஆகும்.}$$

1 மெட்ரிக் ஸ்லக் = 9·81 கிலோகிராம் நிறையாவதால்,

$$\text{நிறை (கிலோகிராமில்)} = \frac{\text{W (கி. கி. விசை)}}{\text{g (மீ./வி}^2)} \times 9{\cdot}81 \text{ ஆகும்.}$$

1—6 (4) விசையின் ஓரலகுக்கு ஏற்ற வாய்பாடு
(Formula for one Unit of Force)

1 நியூட்டன் = (1 கி.கி.) × (1 மீ./வி^{2})
= 1000 × 100 (கிராம் - செ.மீ./வி^{2})
= 10^5 (கி. செ.மீ./வி^{2})
= 10^5 டைன்கள்.

1 பவுண்டல் = (1 பவுண்டு) × (1 அடி/வி^{2})
= (454 கிராம்) × (30·5 செ.மீ./வி^{2})
= 1384·7 (கிராம்-செ.மீ./வி^{2})
= 1384·7 டைன்கள்

1 கிலோகிராம் விசை = 1000 கிராம் விசை
= 1000 கிராம் எடை
= $1000 \times g$ டைன்கள்
= 1000×981 டைன்கள்
= $9{\cdot}81 \times 10^5$ டைன்கள்
= 9·81 நியூட்டன்கள்

1 பவுண்டு விசை = 1 பவுண்டு எடை
= $1 \times g$ பவுண்டல்கள்
= $1 \times 32{\cdot}2$ பவுண்டல்கள்
= 32·2 பவுண்டல்கள்
= $32{\cdot}2 \times 1384{\cdot}7$ டைன்கள்
= 44587·34 டைன்கள்
= $0{\cdot}4457834 \times 10^5$ டைன்கள்
= 0·4457834 நியூட்டன்கள்

1—7. பரிமாண ஓரியல் நியதி (Law of Dimensional Homogeneity)

நீளம், நிறை, நேரம் ஆகியவற்றை அடிப்படை ராசிகளாகக் கொண்டு, மற்றெல்லா பௌதிக ராசிகளை இம் மூன்று அடிப்படை ராசிகளின் வாயிலாகப் பெறலாம். அப்போது, பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களையும், அடிப்படை ராசிகளுக்குரிய பரிமாணங்களின் மூலம் தெரிவிக்கலாம். மேலும் பௌதிக ராசிகளைத் தொடர்பு படுத்தும் சமன்பாடுகளை அமைப்பதிலும், சமன்பாடுகளைச் சரி பார்ப்பதிலும், ஓர் அளவீட்டு முறையிலுள்ள அலகுகளை மற்ரேர் அளவீட்டு முறைக்கு மாற்றுவதிலும் பரிமாணங்கள் பயன்படுகின்றன.

1—7 (1) சமன்பாடுகளின் அமைப்பைப் பெறுதல்

எடுத்துக்காட்டாக, சிறு வீச்சுகளுடன் கூடிய இலகு ஊசலின் (Simple Pendulum) அலைவு நேரத்திற்கான சமன்பாட்டின் அமைப்பைப் பெற வேண்டியிருப்பதாகக் கொள்ளவும்.

ஊசலின் அலைவு நேரம், வீச்சுக்களைச் சார்பற்று இருக்கிறது எனக் கொள்வோமாயின், அது (i) ஊசல் குண்டின் நிறை (M), (ii) கயிற்றின் நீளம் (L), (iii) ஈர்ப்பு முடுக்கம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்து அமைவதாகக் கொள்ளவும்.

Q என்பது ஏதாவதொரு ராசியைக் குறிக்குமென்றால், அதன் பரிமாணங்களை வரையறுக்கும் வாய்பாடு :

$[Q] = [M^x L^y T^z]$ எனக்கொண்டு, x, y, z ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட முடியும்.

எனவே, இங்கு அலைவு நேரம் $= K$ (நிறை)^x (நீளம்)^y (முடுக்கம்)^z ஆகும். k, x, y, z என்பன மாறிலிகள்.

அதாவது, $T = KM^x L^y (LT^{-2})^z$
$= KM^x L^{y+z} T^{-2z}$ ஆகும்.

இருபுறமும் உள்ள ஒத்த ராசிகளின் மடிப்பெருக்க எண்களைச் சமப்படுத்துவோமாயின்

$x = 0; \quad y+z=0; \quad 2z=-1;$

அல்லது $x = 0; \quad \underline{y=-z=\frac{1}{2}}$ ஆகும்.

எனவே, $T = K\sqrt{l/g}$ ஆகும்.

kன் மதிப்பைப் பரிமாணங்களின் முறையில் காண முடியாதாகையால், அதன் மதிப்பைச் சோதனை முறையில் காண வேண்டும். அவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு 2π ஆகும்.

எனவே, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

1—7 (2) பௌதிக ராசிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைச் சரிபார்த்தல்

பௌதிக ராசிகளைத் தொடர்பு படுத்தும் ஒரு சமன்பாட்டைப் பிறப்பிக்கும்போது (Derived), சமன்பாட்டின் இரு புறங்களிலும் பரிமாணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். இதுவே பரிமாண ஓரியல் நியதி எனக் கூறப்படும். அதாவது கணக்கியல் முறையில் பௌதிக ராசிகளின் தொடர்பை வெளிப்படுத்தும் சமன்பாடுகள் எல்லாவித அளவீட்டு முறைகளுக்கும் பொருந்தும். இத் தத்துவத்தைக் கொண்டு, ராசிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகள் பரிமாணங்களில் ஒத்துள்ளனவா அல்லது முரண்பட்டுள்ளனவா என அறியலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$R = \dfrac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$ என்ற சமன்பாட்டை

எடுத்துக் கொள்ளவும். சமன்பாட்டிற்கான பரிமாணங்களை இரு புறங்களிலும் எழுதவும். அப்போது,

$$[L] = \left[\frac{L}{T}\right]^2 \cdot \frac{L^\circ}{[L/T^2]}$$
$$= \left[\frac{L^2}{T^2}\frac{T^2}{L}\right]$$
$$= [L] \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, இங்கு இருபுறங்களிலுள்ள பரிமாணங்கள் ஒத்துள்ளன. ஆதலால் $R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$ என்ற நியதி சரியானது.

1—7 (3) ஒரு பௌதிக ராசியின் இரு அளவீட்டு முறைகளின் அலகுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காணல்

திறனின் மெட்ரிக் முறையில் நடைமுறை அலகுக்கும், பிரிட்டன் முறையில் நடைமுறை அலகுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காணவேண்டியிருப்பதாகக் கொள்ளவும். மெட்ரிக் முறையில் திறனின் நடைமுறை அலகு வாட், பிரிட்டன் முறையில் குதிரைத் திறன் (Horse Power). சார்பிலா அலகுகளுக்கான பரிமாணங்கள் மட்டுமே அறியப்படுவதாலும், இரு முறையிலும் நடைமுறை அலகுக்கும் சார்பிலா அலகுக்கும் உள்ள விகிதங்கள் வெவ்வேருக இருப்பதாலும், முதலில் நடைமுறை அலகுகளைச் சார்பிலா அலகுகளாக மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

மெட்ரிக் முறையில் திறனின் சார்பிலா அலகு P_1 என்றும், பிரிட்டன் முறையில் P_2 என்றும், மெட்ரிக் முறையில் அடிப்படை அலகுகளை L_1, M_1, T_1 என்றும், பிரிட்டன் முறையில் L_2, M_2, T_2 என்றும் கொள்ளவும்.

$$\frac{\text{ஒரு வாட்}}{\text{ஒரு குதிரைத் திறன்}} = \frac{10^7 \text{ எர்குகள்/வி.}}{550 \text{ அடி. பவுண்டுகள்/வி.}}$$

$$= \frac{10^7 \text{ எர்குகள்/வி.}}{550 \times 32{\cdot}2 \text{ பவுண்டல்கள்/வி.}}$$

$$= \frac{10^7}{550 \times 32{\cdot}2} \times \frac{P_1}{P_2}$$

ஆனால், $[P_1] = [M_1 L_1^2 T_1^{-3}]$

$[P_2] = [M_2 L_2^2 T_2^{-3}]$

$$\therefore \quad \frac{\text{1 வாட்}}{\text{1 குதிரைத் திறன்}} = \frac{10^7}{550 \times 32{\cdot}2} \times \left[\frac{M_1}{M_2}\right] \times \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2 \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-3} \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால், $\frac{M_1}{M_2} = \frac{\text{1 கிராம்}}{\text{1 பவுண்டு}} = \frac{1}{453{\cdot}6}$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{1 செ. மீ.}}{\text{1 அடி}} = \frac{1}{30{\cdot}48}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\text{1 விநாடி}}{\text{1 விநாடி}} = 1$$

$$\therefore \frac{1 \text{ வாட்}}{1 \text{ குதிரைத் திறன்}} = \frac{10^7}{550 \times 32{\cdot}2} \times \frac{1}{453{\cdot}6} \times \left(\frac{1}{30{\cdot}48}\right)^2 \times 1$$

$$= 00134$$

எனவே, 1 வாட் = 0·00134 குதிரைத் திறன் அல்லது
1 குதிரைத் திறன் = 746·2 வாட்டுகள்.

மாதிரி கணக்குகள் :

மாதிரி 1—1:

கீழ்க் காணும் ராசிகளின் பரிமாணங்களை வரையறுக்க :
(அ) அடர்த்தி ; (ஆ) அழுத்தம்; (இ) பிசுப்புமை (Viscosity)

$$(\text{அ}) \quad \text{அடர்த்தி} = \frac{\text{நிறை}}{\text{பருமன்}}$$

$$\therefore \quad [\text{அடர்த்தி}] = \frac{[\text{நிறை}]}{[\text{பருமன்}]} = \frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-3}]$$

(ஆ) அழுத்தம் : அழுத்தம் என்பது ஓரலகுப் பரப்பளவில் செயற்படும் நேர் குத்து விசை.

$$\text{அழுத்தம்} = \frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பளவு}}$$

$$\therefore \quad [\text{அழுத்தம்}] = \frac{[\text{விசை}]}{[\text{பரப்பளவு}]}$$

$$= \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

மாதிரி 1—2 :

பிரிட்டன் முறையில் (அ) "ஸ்லக், அடி, விநாடி" ; (ஆ) "பவுண்டு, நிறை, அடி, விநாடி" ஆகிய அலகுகளுக்குச் சரியானஅடர்த்தியின் அலகை, மெட்ரிக் முறையில் "சென்டி மீட்டர்-கிராம்-விநாடி" ஆகிய அலகுகளில் வரையறுக்க.

$$(\text{அ}) \ \rho = \text{அடர்த்தி} = \frac{\text{நிறை (ஸ்லக்கில்)}}{\text{பருமன்}}$$

$$= \frac{g \text{ பவுண்டு நிறை}}{\text{அடி}^3}$$

$$= \frac{32{\cdot}2 \times 454}{(30{\cdot}5)^3} \text{ கிராம்/செ.மீ}^3$$

$$= 0{\cdot}515 \text{ கி./செ.மீ.}^3$$

$$(ஆ)\ \rho = அடர்த்தி = \frac{நிறை\ (பவுண்டில்)}{பருமன்}$$

$$= \frac{பவுண்டு}{அடி^3}$$

$$= \frac{454}{(30 \cdot 5)}\ கிராம்/செ.மீ.^3$$

$$= 0 \cdot 0162\ கி./செ.மீ.^3$$

மாதிரி 1-3 :

புவியீர்ப்பு விசையிலிருந்து புவி, சந்திரன் ஆகியவற்றின் தப்பி ஓடும் திசை வேகங்கள் (Escape Velocity) முறையே 25,000 மைல்/மணி, 5,360 மைல்/மணி ஆகும். இவற்றை கிலோமீட்டர்/விநாடி அலகுகளில் காண்க.

$$\left.\begin{matrix}புவியின்\ தப்பி\ ஓடும் \\ திசை\ வேகம்\end{matrix}\right\} = 25000\ மைல்/1\ மணி$$

$$= \frac{25000 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}\ (அடி/விநாடி)$$

$$= \frac{25000 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} \times \frac{30 \cdot 5}{1000 \times 100}$$

(கிலோமீட்டர்/விநாடி)

$$= 11 \cdot 183\ (கி.மீ./வி.)$$

$$\left.\begin{matrix}சந்திரனின்\ தப்பி\ ஓடும் \\ திசை\ வேகம்\end{matrix}\right\} = 5360\ மைல்/1\ மணி$$

$$= \frac{5360 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}\ (அடி/விநாடி)$$

$$= \frac{5360 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} \times \frac{30 \cdot 5}{100 \times 1000}$$

கிலோமீட்டர்/விநாடி

$$= 2 \cdot 3977\ (கி.மீ./வி.)$$

மாதிரி 1—4 :

திரவ இயக்க இயலில் நீரோட்டத்திற்குரிய ரெய்னால்டின் எண் (Re) (Reynold's number), திரவத்தின் அடர்த்தி (ρ), திசை வேகம் (v), பிசுப்புத் தன்மை (μ), நீளம் (l)—ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. ரெய்னால்டின் எண்ணுக்குப் பரிமாணங்கள்

கிடையா எனக்கொண்டு, அவ்வெண்ணை வரையறுக்கும் சமன்பாட்டை, பரிமாணங்களின் ஓரியல் தத்துவத்தின் அடிப்படையில் காண்க.

$$Re = f(\rho, v, \mu, l) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore [Re] = [\kappa \rho^{q} v^{b} \mu^{c} l^{d}]$$

$$[M^{0}L^{0}T^{0}] = [ML^{-3}]^{a} [LT^{-1}]^{b} [ML^{-1}T^{-1}]^{c} [L]^{d}$$

$$= [M^{a+c}] [L^{-3a+b-c+d}] [T^{-b-c}]$$

முறையான காரணிகளின் படிகளை இரு புறங்களிலும் ஒப்பிடும்போது,

$a+c=0$;

$3a+b-c+d=0$;

$-b-c=0$ ஆகும்.

$\therefore a=-c=b$

மேலும் $-3a+b-c+d=0$ ல் a, bகளின் மதிப்புக்களை cன் வாயிலாக அறிவிக்கும்போது,

$3c-c-c+d=0$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore d=-c$ ஆகும்.

எனவே $Re = k\rho^{-c}v^{-c}\mu^{c}l^{-c} = k\left(\frac{P v l}{\mu}\right)^{-c}$

பரிசோதனையின் மூலம், kன் மதிப்பு 1 என்றும், cன் மதிப்பு (—1) என்றும் கண்டிட முடியும். ஆதலால் $Re = \frac{P v l}{\mu}$ என்றாகும்.

மாதிரி 1—5:

வடிவில் ஒத்துள்ள வளைகளின் திருப்பங்கள் (Deflection of beams) — (y), ஒரு படிப் பரிமாணங்களைப் பெற்ற ராசிகள்—(d), மீட்சிக் குணகம்—(E), பயன்படுத்தப்பட்ட பளு—(W) ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளன என்றால், அவைகளுக்குள்ள மாறுபாடுகளை பரிமாண ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

y என்பது W, d, E ஆகியவற்றின் சார்பலனாகக் கருதப் படுவதால்,

$$y = \phi_1 (W, d, E) \text{ என்று குறிக்கலாம்.}$$

அதாவது $y = \Sigma AW^a d^b E^c$ எனவும் கொள்ளலாம்.

இங்கு A என்பது ஒரு மாறிலியாகும்; a, b, c என்பவை தீர்மானிக்க வேண்டிய அடுக்குக் குறிகளாகும்.

இச் சமன்பாட்டிற்குரிய பரிமாணங்களின் அமைப்பு,

$$[L] = [W^a]\,[L^b]\,[E^c]$$

$$= [F^a]\,[L^b]\left[\left(\frac{F}{L^2}\right)^c\right]$$

$$= [F^{a+c}]\,[L^{b-2c}]$$ என்றாகும்.

எனவே ராசிகளுக்கு உகந்த பரிமாணங்களைச் சமன்பாட்டின் இரு புறங்களிலும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது,

$$a+c=0, \quad 1 = b-2c$$

அதாவது $c = -a, \quad b = 1+2c = 1-2a$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad y = \Sigma AW^a d^{1-2a} E^{-a}$$

$$= \Sigma Ad\left(\frac{W}{d^2E}\right)^a$$

$$= d\Sigma A\left(\frac{W}{d^2 E}\right)^a$$

அதாவது $\dfrac{y}{d} = \Sigma A\left(\dfrac{W}{d^2E}\right)^a$

$$= \phi_2\left(\frac{W}{d^2E}\right)$$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு $\dfrac{y}{d}$, $\dfrac{W}{d^2E}$ என்ற ராசிகளின் பரிமாணங்கள் சுழியாகும். அதாவது அவைகள் மாறிலிகளாகும். மேலும் அடுக்குக் குறி a-ன் மதிப்பு வரையற்றுள்ளதால், வலது புறத்திலுள்ள சார்பலனை ஒரு தொடராகவும் கருதலாம். அப்போது, தொடரில் அமையும் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றின் பரிமாணங்கள் சுழியாவதால்,

$$\frac{y}{d} = \phi_2\left(\frac{W}{d^2E}\right)$$ என்ற சமன்பாடு, பரிமாணங்களுக்கு ஏற்றவாறு அமைகிறது.

முன்னேக்கி இயங்கும் கப்பலொன்றைத் தடை செய்யும் விசை (R) என்பது, ஒரு படிப் பரிமாணங்களைப் பெற்ற ராசிகள்—(d),

கப்பலின் திசை வேகம்—(v), கடல் நீரின் அடர்த்தி—(ρ), இயக்கப் பண்புக்குரிய பாகியல் எண்—(υ)—(kinetic viscosity)— $\left[\frac{L^2}{T}\right]$ புவியீர்ப்பு முடுக்கம்—(g) ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. தடை விசையை வரையறுக்கும் சார்பலனை,

$R = \phi_1 (l, v, \rho, \upsilon, g)$ எனக்கொண்டு சமன்பாட்டைப் பரிமாணங்களுக்கு ஏற்றவாறு அமைக்கவும்.

$R = \Sigma A l^a v^b \rho^c \upsilon^d g^e$ எனக் கொள்ளவும். (A என்பது ஒரு மாறிலி) இச் சமன்பாட்டிற்குரிய பரிமாணங்களின் அமைப்பு

$$[R] = [L^a] [v^b] [\rho^c] [\upsilon^d] [g^e]$$

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right] = [L^a]\left[\left(\frac{L}{T}\right)^b\right]\left[\left(\frac{M}{L^3}\right)^c\right]\left[\left(\frac{L^2}{T}\right)^d\right]\left[\left(\frac{L}{T^2}\right)^e\right]$$

$$= \left[L^{a+b-3c+2d+e}\right]\left[M^c\right]\left[\frac{1}{T^{b+d+2e}}\right] \text{ ஆகும்.}$$

ராசிகளின் பரிமாணங்களை இருபுறங்களிலும் சமப்படுத்த, $c = 1,\ a+b-3c+2d+e=1,\ b+d+2e=2$ என்றும் ஆகும்.

அதாவது $c = 1;\ b=2-d-2e\ \ a = 2-d+e$ ஆகும்.

$$\therefore \quad R = \Sigma A l^{2-d+e} v^{2-d-2e} \rho \upsilon^d g^e$$

$$= Pl^2 v^2 \Sigma A \left(\frac{\upsilon}{lv}\right)^d \left(\frac{lg}{v^2}\right)^e$$

$$\frac{R}{Pl^2v^2} = \phi_2\left(\frac{\upsilon}{lv}, \frac{lg}{v^2}\right)$$

$\therefore \quad \dfrac{R}{pl^2 v^2} = \phi_3\left(\dfrac{lv}{\upsilon}, \dfrac{v^2}{lg}\right)$ என்ற சமன்பாடு பரிமாணங்களுக்கு ஏற்றவாறு அமைகிறது.

பயிற்சி

1-1 அடிப்படை அலகுகள் (Fundamental units), வழிவந்த அலகுகள் (Derived Units) ஆகியவற்றைத் தகுந்த எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

1-2 நிறை, எடை — இவைகளுக்குள்ள வேற்றுமையை விளக்குக.

1-3. பின்வரும் ராசிகளின் பரிமாணங்கள் யாவை ?

(i) அடர்த்தி ; (ii) உந்தம் ; (iii) வேலை; (iv) கோணம்; (v) அழுத்தம்.

1-4. கீழ்க்காணும் பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் காண்க :

(i) நேர் கோட்டு உந்தம் (Linean Momentum)

(ii) திருகுச் சுருள் வில் ஒன்றின் தன்னிடத்தே சேமித்து வைத்திருக்கும் (நிலை) ஆற்றல்

(iii) திரவ அழுத்தம் (Fluid Pressure)

(iv) திருப்புத் திறன்

(v) இயக்காற்றல் (Kinetic Energy)

(vi) கோண உந்தம் (Angular Momentum)

[விடை : (i) [நேர்கோட்டு உந்தம்] = [நிறை × திசைவேகம்] = $[MLT^{-1}]$

(ii) [நிலை ஆற்றல்] = $[\frac{1}{2}kx^2]$ = $[ML^2T^{-2}]$

(iii) [திரவ அழுத்தம்] = $\frac{[\text{நேர்குத்து விசை}]}{[\text{பரப்பு}]}$ = $[ML^{-1}T^{-2}]$

(iv) [திருப்புத் திறன்] = [நெம்புகோலின் கை நீளம்] [விசை] = $[ML^2T^{-2}]$

(v) இயக்காற்றல்] = $[\frac{1}{2}mv^2]$ = $[ML^2T^{-2}$

(vi) [கோண உந்தம்] = [நீளம் × நேர் கோட்டு உந்தம்] = $[ML^2T^{-1}]$

1-5. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் எச்சமன்பாடுகள் பரிமாணங்களில் முரணற்றதாக உள்ளன எனக் காண்க. முரணுள்ளதாக இருக்குமானால், அதற்குரிய காரணங்களைக் கூறுக.

(i) $v = u + as$

(ii) $T = 2\pi EI/L$, T = திருப்புத் திறன்; E = மீட்சிக் கெழு (கி. கி./மீ.^{2});

I = பரப்பளவுக்குரிய நிலைமைத் திருப்புத் திறன் (Area Moment of Inertia);

L = நீளம்.

(iii) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

(iv) $y = -\frac{wx}{24E.I}(L^2 - 2Lx^2 + x^3)$ x, y நீளங்களைக் குறிக்கின்றன.

L = மாறிலி;

w = ஓரலகு நீளத்திற்குரிய விசை;

E = மீட்சிக் கெழு;

I = பரப்பளவுக் குரிய நிலைமைத் திருப்புத் திறன்.

(v) $p = p_a + g\rho h$, p, p_a-என்பன அழுத்தங்கள்;

g = புவியீர்ப்பு முடுக்கம்;

h = அழுத்த உயரம்;

ρ = அடர்த்தி

(vi) $\theta = T.L\left(\frac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3 G}\right)$, θ = கோணச் சுழற்சி (ரேடியனில்);

a, h = குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவின் பரிமாணங்கள்;

G = விரைப்புக் குணகம் (modulus of Rigidity in kg/m^2)

T = முறுக்குத் திறன்;

L = நீளம்

1-6. m நிறையுள்ள ஒரு பொருள், m ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் v திசை வேகத்தில் இயங்கும்போது, இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை F_r-ஐ வரையறுக்கும் சமன்பாடு

$$F_r = \frac{mv^2}{r}$$ ஆகும்.

இச் சமன்பாடு பரிமாணங்களில் முரணற்றதா என்பதைக் காண்க. [விடை : முரணற்றது]

1-7. பரிமாணங்களின் ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி, g மதிப்பு புவியீர்ப்பு முடுக்கமுள்ள இடத்தில், m நிறையும்,

நீளமும் உடைய ஒரு தனி ஊசல் குண்டின் (Simple Pendulum) அலைவு நேரத்தை

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கும்

எனக் காண்க.

{குறிப்பு : $[T] = [M^a L^b g^c] = [F^a L^{-a+b+c} T^{2a-2c}]$}

1-8. ஒரு இறுகலான வில்லின்மீது (Tight String), குறுக்காக நிகழ்ந்திடும் ஓர் அலைவின் திசை வேகம், அதன் நிறை (m); இழுவிசை (Tension)—(f); நீளம் (l)—ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. திசை வேகத்திற்குரிய சமன்பாட்டை, பரிமாணங்களின் ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி வரையறுக்க.

{விடை : $[v] = [L^{-1}FT^2]^a [F]^b [L]^c$; $v = k\sqrt{\frac{fl}{m}}$}

1-9. புவியீர்ப்பு விசையை வரையறுக்கும் சமன்பாடு $F = \frac{GM_1 M_2}{m^2}$ ஆகும். G ன் பரிமாணங்களைக் காண்க.

{விடை : $[G] = F^{-1}L^4T^{-4}]$}

1-10. ஓர் ஆழமான நதி அலையின் திசைவேகம் (v), அதன் அடர்த்தி (ρ); புவியீர்ப்பு முடுக்கம் (g); அலை நீளம் (λ)—ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாணங்களுக்கு ஒப்ப, அதன் நியதியை வரையறுக்க.

{விடை : $v = k\sqrt{g\lambda}$}

1-11. ஓர் ஒலி அலையின் திசை வேகம், அதன் அடர்த்தி (ρ) பல்க் மாடுலஸ் (Bulk Modulus) (β), $[FL^{-2}]$; அலை நீளம் (λ)— ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாணங்களுக்கு ஏற்றதான நியதியை வரையறுக்க

{விடை : $v = k\ (\beta/\rho)^{\frac{1}{2}}$

1-12. பிசுபிசுப்புள்ள (Viscous) திரவத்தில், எண் மதிப்பு f உடைய நிலையான விசை, உருண்டை வடிவமுள்ள பொருளின் மேல் செயற்படும்போது, அதன் திசை வேகம் (v), எண்

மதிப்பு (f), கோளத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு (a), பிசுபிசுப்புக் கெழு (Coefficient of viscosity) (η), $[ftl^{-2}]$—ஆகிய வற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாண ஓரியல் விதியைப் பயன்படுத்தி, திசை வேகத்தை வரையறுக்கும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\left\{ \text{விடை :} \quad v = kfa^{-\frac{1}{2}}\eta^{-1} \right\}$$

1-13. ஒரு கோள், சூரியனைச் சுற்றி வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம், புவியீர்ப்பு மாறிலி (Gravitation Constant), (G), அவைகளின் கூட்டு நிறை (M), சுற்றி வரும் பாதையின் அரை நீட்டச்சு அளவு (Semi Major Axis) (a) ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாணங்களுக்கு ஏற்றதான நேரத்தின் நியதியைக் காண்க.

$$\left\{ \text{விடை :} \quad T = kG^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{8}{2}} \right\}$$

1-14. நீள் உருளை ஒன்றின் கைப்பிடியில் நிகழ்ந்திடும் முறுக்குத் திறன் (T_q), குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியின் விட்டத் தொலைவு (d), வெட்டுத் தொடு விசை (f) ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாண ஓரியல் விதியைப் பயன்படுத்தி, முறுக்குத் திறனை வரையறுக்கும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\left\{ \text{விடை :} \quad [T_q] = [d^a f^b]; \; [FL] = [L^a]\left[\frac{F}{L^2}\right]^b, \; T_q = c.d.^8 f \right\}$$

1-15. பரிமாண ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பரிமாணங்களைத் தணிக்கை செய்க)

(i) முளை ஒன்றை ஏதாவதொரு பொருளில் அடித்து நுழைப்பதால் ஏற்படும் தடையை (resistance)

$$R = W + w + \frac{W^2 h}{(W + w)\, d}$$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கும்.

இங்கு W, w என்பவை எடையாகும். h, d என்பவை நீள அளவைகளைக் குறிக்கும்.

(ii) கப்பி ஒன்றால் செலுத்தப்படும் உச்சப் பரித் திறனை (Maximum Horse Power)

$$H = \frac{bt\,(1-n)}{550} \times \tfrac{2}{8} f \sqrt{\frac{fg}{3w}}$$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கும்.

இங்கு b, t, n, f, g, w என்பவை முறையே அகலம், தடிப்பு, பின்ன எண், வெட்டுத்தொடுவிசை, புவியீர்ப்பு முடுக்கம், ஓரலகு குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பின் எடை—ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

(iii) முட்டு (Strut) ஒன்றில் நிகழ்வதற்குரிய பளுவின் உச்ச வரம்பைப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்கின்றன :

$$P = \frac{\pi^2}{l^2} E I, \quad P = \frac{f. A}{\left\{ 1 + a \left(\frac{l}{k}\right)^2 \right\}}$$

இங்கு l, E, I, f, A, k என்பவை முறையே நீளம், மீட்சிக் குணகம் (Modulus of Elasticity), குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பின் குறுக்கச்சின் நிலைமைத் திருப்புத் திறன், வெட்டுத் தொடு விசை, பரப்பளவு, சுழியாரை (radius of gyration) ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

(iv) நுனி ஒன்று நிலைப்படுத்தப்பட்டும், மற்றொரு நுனியில் இணைச் சக்கரம் பொருத்தப்பட்டுமுள்ள கருவிக் கைப்பிடியின் (Shaft) முறுக்கதிர்வுக்குரிய கால வட்ட நேரம் (t).

$t = 2\pi\sqrt{\frac{32Il}{C\pi d^4}}$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு I = இணைச் சக்கரத்தின் நிலைமைத் திருப்புத் திறன்
l = நீள அளவு
c = விறைப்புக் குணகம் (Modulus of rigidity)
d = கருவிக் கைப்பிடியின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதிக்குரிய விட்டம் ஆகும்.

1-16. $c = I\alpha + m\bar{x}\ a_y - m\bar{y}a_x$ என்ற சமன்பாட்டில், α, m, $\bar{x}$, $\bar{y}$, என்பவை சுழல் வேக வளர்ச்சி வீதம், நிறை, நீளங்களையும், a_x, a_y என்பவை நேர் கோட்டுக்குரிய முடுக்கங்களையும் அறிவித்தால், c, I ஆகியவற்றின் பரிமாணங்களை, சமன்பாடு பரிமாணங்களில் சமபடித்தானது எனக்கொண்டு காண்க.

{விடை : [c] = [FL]; [I] = [FLT²]}

1-17. $mk^2 = bw^2 + R\sqrt{x^2 - y^2}\ \text{Sin}\theta$ என்ற சமன்பாடு பரிமாணங்களில் சமபடித்தானது என்றால், k, b ஆகிய பௌதிக

ராசிகளின் அடிப்படைப் பரிமாணங்களைக் காண்க. இங்கு m, w, R, y என்பவை முறையே நிறை, சுழல் வேகம், விசை, நீளம் ஆகியவற்றை அறிவிக்கின்றன.

{விடை : $[k] = [LT^{-1}]$, $[b] = [FLT^2]$}

1-18. பரிமாணங்களில் ஒரு படித்தாக உள்ள

$$Q = c\,(B - nH)\left[\ m\ +\left(\frac{BH}{A}\right)^2\right] H^{\frac{3}{2}}$$ என்ற சமன்

பாட்டில், Q, B, என்பவை முறையே ஓரலகு நேரத்தில் கன அளவு, நீளம் ஆகியவற்றையும், m, n என்பவை மாறிலிகளையும் தெரிவிப்பதாகில், H,A,c ஆகியவற்றின் அடிப்படைப் பரிமாணங் களைக் காண்க.

{விடை : $[H] = [L]$; $[A] = [L^2]$; $[c] = [L^{\frac{1}{2}}\ T^{-\frac{1}{2}}]$}

1-19. பரிமாண ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி, பின் வரும் சமன்பாடுகளின் பரிமாணங்களைத் தணிக்கை செய்க :

(i) $F\,t\cos\theta = \frac{W}{g}\,v + I\,w$. இங்கு F, t, θ, W, g, v, I, w என்பவை முறையே விசை, நேரம், கோணம், எடை, புவியீர்ப்பு முடுக்கம், நேர் கோட்டுத் திசை வேகம், நிலைத் திருப்புத் திறன், சுழல் வேகம் ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.

[விடை : சமன்பாடு, பரிமாணங்களில் முரண் உள்ள தாகும்.]

(ii) $x = Ae^{-bt}\,\mathrm{Sin}\,(bt + \alpha)$ இங்கு x, A என்பவை நீளங் களையும், t நேரத்தையும், b சுழல் வேகத்தையும் குறிக்கின்றன.

[விடை : சமன்பாடு, பரிமாணங்களில் முரணற்றதாகும்.]

1-20. ஒரு பொருள் சாய்தளத்தில் (inclined plane) கீழ் நோக்கி உருளும்போது ஏற்படும் நிலை ஆற்றல் விரயத்திற்கும், இயக்க ஆற்றல் ஆதாயத்திற்கும் உள்ள இணைப்பைப் பின்வரும் சமன்பாடு அறிவிக்கிறது.

$$Wh = \tfrac{1}{2}\,Mv^2 + \tfrac{1}{2}\,Iw^2.$$

சமன்பாட்டை வரையறுக்கும் உறுப்புக்கள் பரிமாணங்களின் ஓரியல் தத்துவத்திற்கு இணக்கமாக உள்ளனவா என ஆராய்க.

{குறிப்பு : $[I]$ = [சடத்துவத் திருப்பித் திறன்] = $[ML^2]$}

[விடை : முரணற்றது.]

1-21. d தொலைவு விட்டமுடைய ஒரு நீள் உருளையின் கைப்பிடியில் (Shaft) நிகழ்ந்திடும் முறுக்குத் திறன் (Torque)-T_qக்கும், வெட்டுத் தொடு விசை (Shear Stress) - fக்கும் உள்ள தொடர்பை

$$T_q = \frac{\pi d^3 f}{16}$$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

பரிமாணங்களில் இச் சமன்பாடு முரணற்றது எனக் காண்க.

{குறிப்பு : $[T_q] = [ML^2T^{-2}]$; $[f] = [ML^{-1}T^2]$}
[விடை : முரணற்றது.]

1-22. இதழ் வில் (leaf spring) ஒன்றில் ஏற்படும் வெட்டுத் தொடு விசையை

$$f = \frac{3}{2}\,\frac{Wl^a}{nbt^2}$$ என்ற சமன்பாடு வரையறுப்பதாகில்,

பரிமாண ஓரியல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி a-ன் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு W, l, n, b, t என்பவை முறையே பளு, நீளம், இதழ்களின் எண்ணிக்கை, இதழ் ஒவ்வொன்றின் அகலம், தடிப்பு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும். [விடை : a = **1.**]

1-23. நுனி ஒன்று நிலைப்படுத்தப்பட்டும், மற்றொரு நுனியில் இணைச் சக்கரம் பொருத்தப்பட்டுமுள்ள கருவிக் கைப்பிடியின் முறுக்கதிர்வுக்கு உரிய (torsional vibration) காலவட்ட நேரம் (t).

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{32\,I\,l}{c\,\pi\,d^4}}$$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுகிறது. பரிமாணங்களில் இச் சமன்பாடு முரணற்றது எனக் காண்க.

[இங்கு I = இணைச் சக்கரத்தின் நிலைமைத் திருப்புத் திறன், l = நீளம், c = விறைப்புக் குணகம், d = கருவியின் குறுக்கு வெட்டு வட்டப் பகுதியின் விட்டம் ஆகும்].

2. திசையிகளின் இயற்கணிதப் பொருள் விளக்கம்

2—1 எண்ணிகளும், திசையிகளும் (Scalars and vectors)

பௌதிக ராசிகளின் அலகு அளவைகளையும், பரிமாணங்களையும் அறிவது மட்டுமன்றி மற்ற தன்மைகளையும் விவரிக்க வேண்டிய நிலைமைகள் ஏற்படக்கூடும். பௌதிக ராசிகளில் சிலவற்றை அவைகளுக்குகந்த அலகுகளின் அளவைகளைக் கொண்டும், அவைகளின் பரிமாணங்களைக் கொண்டும் வரையறுக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு ஆரோக்கியமுள்ள குழந்தை உடலின் வெப்பநிலை 98·4°F எனக் குறிப்பிடுவதில், வெப்ப நிலையின் அளவிடும் தன்மைக்கு மட்டுமே சிறப்பிடம் அளிக்கப்பட்டுள்ளது. வெப்ப நிலையைக் குறிப்பதில் எண் மதிப்பு முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. அளவிடும் தன்மையை மட்டும் பெற்றுள்ள பௌதிக ராசிகள் எண்ணி ராசிகள் (Scalar Quantities) என்று வரையறுக்கப்படும். அவ்வாறே காலம், பருமன், ஆற்றல், அடர்த்தி ஆகியவை எண்ணி ராசிகளாகும்.

இதற்கு மாறாக ஒரு சில பௌதிக ராசிகள், அளவிடும் தன்மையுடன், எத் திசையில் அளவிடப்பட வேண்டும் என்பதையும் சார்ந்திருக்கக்கூடும். அவைகளை திசையிகள் (Vectors) எனக் கூறுவது வழக்கம். எனவே திசையுடன் அளவிடும் தன்மையைப் பெற்ற பௌதிக ராசிகள் திசையிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, விசை (Force), திசை வேகம் (Velocity), இடப் பெயர்ச்சி (Displacement) ஆகியவை திசையிகளாகும்.

திசையி ஒன்றை ·முற்றிலும் வரையறுக்க பின்வரும் தகவல்கள் தேவைப்படும் :

(i) ஆய்வுக்கு உரிய ராசி, அடிப்படை ராசியா அல்லது வழி வந்த ராசியா எனக் காணுதல் ;

(ii) ராசிக்கு ஏற்ற அடிப்படைப் பரிமாணங்கள் அல்லது வழிவந்த பரிமாணங்களைக் கணக்கிடுதல் ;

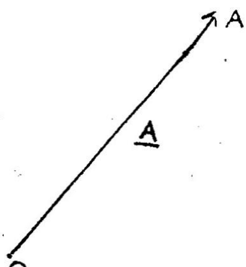
(iii) வழிவந்த பரிமாணங்களுக்குரிய மதிப்பளவை, ஏற்ற அலகு கோல்களைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுதல்;

(iv) ராசியின் இயக்க திசையை அறிந்திடல்.

2—1 (1) திசையியைத் தெரிவித்தல்

வரைபடத் தாளில் குறிப்பிட்ட திசையை நோக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுடைய நேர் கோட்டால் திசையியைத் தெரிவிக்கலாம். நேர்கோட்டில் திசையி-இன் திசையை ஒரு அம்புக் குறியால் குறிப்பது வழக்கம். இங்கு அம்புக்குறி திசையையும், துண்டு நேர்கோடு தகுந்த அலகு அளவையில் திசையி-இன் மதிப்பையும் அறிவிக்கின்றன.

படம் 2-1-ல் வரைந்துள்ள அம்பு OA–ஐக் கவனிக்க. இங்கு துவக்கப் புள்ளி O-க்கும் இறுதிப் புள்ளி (நுனிப் புள்ளி) A-க்கும் உள்ள தொலைவு, திசையி-இன் எண் மதிப்பைத் தெரிவிக்கிறது. நுனியில் வரையப்பட்டுள்ள அம்புக் குறி, திசையி எத்திசையை நோக்கியுள்ளது என்பதையும் தெரிவிக்கிறது. ஒரு திசையியைக் குறிக்கும்போது, அச்சில் தடித்த எழுத்தாலும், எழுதும்போது அதன்மீது அம்புக் குறியிட்டும், அல்லது எழுத்துச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு சிறிய நேர் கோட்டையிட்டும் குறிப்பது வழக்கம். எனவே திசையியை, A, OA, $\vec{A}$, $\vec{OA}$, $\underline{A}$, $\underline{OA}$ ஆகிய குறியீடுகளில் ஏதாவதொன்றைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கலாம். இவற்றில் $\underline{A}$, $\underline{OA}$ என்ற குறியீடுகள் மட்டுமே இந்நூலில் பயன்படுத்தப்படும். திசையி-இன் எண் மதிப்பு அளவையை,



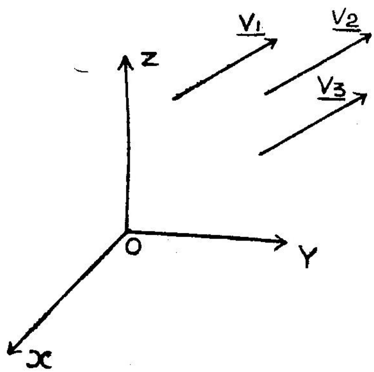
படம் 2-1

$|A|$, $|OA|$, $|\vec{A}|$, $|\vec{OA}|$, $|\underline{A}|$, $|\underline{OA}|$ OA, அல்லது A ஆகியவற்றில் ஏதாவதொரு குறியீட்டின் மூலம் அறிவிப்பது வழக்கம். இவற்றில் $|\underline{OA}|$, $|\underline{A}|$, A என்பவை திசையி-இன் எண் மதிப்பைக் குறிப்பதற்கு இந்நூலில் பயன்படுத்தப்படும்.

2—1 (2) சம (Equal), சரிசமத்துவ (Equivalent) திசையிகள்

பரிமாணங்கள் மதிப்பு (Magnitude), திசை (Direction) ஆகியவற்றில் ஒன்றுயுள்ள (சமமாயுள்ள) இரு திசையிகள் சமமாகும்.

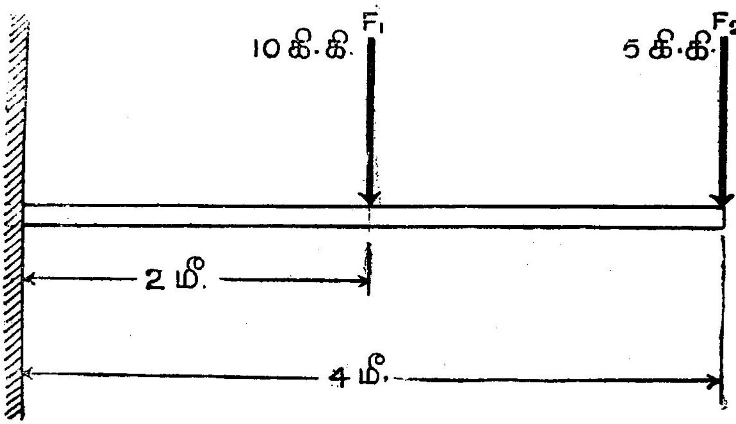
படம் 2-2-ல், மூன்று திசை வேகங்களை அறிவிக்கும் திசையிகள், நீளங்களில் சம மதிப்புக்களையும், x y z-ஆகிய தொலை வெளியில் ஒரே சீரான சரிவுகளையும் பெற்றுள்ளன. இம் மூன்று திசையிகளின் செயற்படு கோடுகள் வெவ்வேருக இருந்த போதிலும், அவைகள் மூன்றும் வரையறைக்கு இணங்க சம திசையிகளாகின்றன.



படம் 2-2

இரு திசையிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சில குறிப்பிட்ட திறமைகளில் (Capacities) ஒன்ருன விளைவை உண்டு பண்ணுமாளுல் அவைகள் அக் குறிப்பிட்ட திறமைகளில் சரிசமத்துவ (Equivalent) திசையிகளாகக் கருதப்படும். மேற்கூறிய மூன்று திசையிகளின் சரிவை ஒரே அளவில் மாற்றிடும்போதும், அல்லது அவைகள் இயங்கிச் சென்ற மொத்த தொலைவுகளை அளவிடும்போதும், அம் மூன்று திசையிகளும் ஒன்ருன விளைவையே உண்டு பண்ணும். இவ்வித நிலைமைகளில், திசையிகள் சமமாயிருப்பதோடு, குறிப்பிட்ட திறமைகளில் சரிசமத்துவமாகவும் உள்ளன. ஆனுல் x y தளத்திற்கு மேற்புறம் சார்பிலா உயரங்களை நோக்கும் போது, அம் மூன்று திசையிகள் சமமாக இருந்தபோதிலும், உயர அளவுகளில் சரிசமத்துவ திசையிகளாகக் கருதுவதற்கில்லை. எனவே, சம திசையிகள் எப்போதும் சரிசமத்துவ திசையிகளாக இருக்க வேண்டியதில்லை. நிலைமையைச் சார்ந்துதான் திசையிகளின் சரிசமத்துவத்தை அறிந்திட முடியும். மேலும் சமமில்லாத திசையிகள், ஏதாவதொரு திறமையில் சரிசமத்துவமாக இருக்கக்கூடும். எடுத்துக்காட்டாக, படம் 2-3இல் விட்டம் ஒன்றில் செயற்படும் $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ஆகிய விசைகள், அளவுகளில் வேறுபடுவதால், அவைகள் சமமற்ற திசையிகளாகும். ஆனுல்

விட்டத்தின் நிலைப்படுத்திய புள்ளியில் (Fixed End) விசைகள் ஏற்படுத்தும் திருப்புத் திறன்கள் (Moments) சமமாக உள்ளன.



படம் 2–3

எனவே திருப்புத் திறன் பண்பில் இரு விசைகளும் சரிசமத்துவமாகும். அவ்வாறே தடையற்ற நுனிப் பகுதியில் (Free End) விசைகள் ஒவ்வொன்றும் வெவ்வேருன ஒதுக்கத்தை (Deflection)க் கொடுக்கும். ஆதலால் இரு விசைகளும், இப்பண்பில் சரிசமத்துவ மற்றதாக உள்ளன.

முடிவாக "திசையிகள் சமம்" என்பது திசையிகளைக் கொண்டே வரையறுக்கப்படும். "சரிசமத்துவம்" என்பது திசையிகளின் நிலைமைகளையொட்டி வரையறுக்கப்படும்.

2—1 (8) தடையற்ற திசையிகள்; நழுவும் திசையிகள்; நிலையான திசையிகள் (Free vectors, Sliding vectors, Fixed vectors)

இயந்திர இயல் கணக்குகளில் திசையிகளின் சரிசமத்துவத்தைப்பற்றி மூன்று வித நிலைமைகளில் விளக்கலாம். மதிப்பளவு, செயற்படும் திசை ஆகியவற்றில் வேறுபாடற்ற திசையிகளை, நிலைமைகளில் ஒருவித குறைவையோ அல்லது மாற்றத்தையோ நிகழ்த்திடாமல், பரந்த வெளியில் (in Space) எந்த இடத்திலும் செயற்படும்படி அமைக்கலாம். அதாவது, திசையிகள் செயற்படும் துண்டு நேர்கோடுகளை, அவைகளுக்கு இணையாகப் பரந்த வெளியில் வரையும் கோடுகளில் செயற்படுவதாகக் கொள்ளலாம். இவ்விதத் திசையிகள் தடையற்ற திசையி

களாகக் கருதப்படும். எடுத்துக்காட்டாக முடுக்கத்தை (Acceleration)க் கருதுங்கால், விசைகளை வரையறுக்கும் திசையிகள் தடையற்ற திசையிகளாகும்.

அவ்வாறே நிலைமைகளை மாற்றிடாமல் திசையிகள் ஒவ்வொன்றையும், அவைகள் செயற்படும் நேர்கோடுகளில் எப் புள்ளியிலும் இயங்குவதாகக் கொள்ள முடியும். அதாவது, திசையியை அது செயற்படும் நேர்கோட்டில் விருப்பப்படி நகர்த்தலாம். இவ்விதத் திசையிகள் நழுவும் திசையிகளாகக் கருதப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளைக் குறிப்பிட்ட திசையில் நகர்த்திட, கட்டியிழுக்கும் கயிற்றில், பயன்படுத்தும் விசையை எப்புள்ளியிலும் மேற்கொள்ளலாம்.

ஒரு திசையி-இன் செயற்படும் புள்ளி திட்டவட்டமாக வரையறுக்கப்படும்போது, அது நிலையான திசையியாகும்.

நிலையியல் ஆய்வு முறைகளில் பயன்படுத்தப்படும் தடையற்ற நழுவும் திசையிகள், உருவ மாற்றமடையும் பொருள்களின் ஆய்வு முறைகளில் நிலையான திசையிகளாகக் கருதப்படும்.

எண்ணிக்கு (Scalar Quantity) எண் மதிப்பு மட்டுமே உள்ளது. ஆனால் திசையிக்கு எண் மதிப்புடன் இயங்கும் திசையும் தேவைப்படும். எண்ணிக்கு எவ்வாறு ஒரு இயற் கணிதம் தேவைப்படுகிறதோ, அவ்வாறே, திசையிகளுக்கும் ஒரு இயற் கணிதம் தேவைப்படும். அதுவே திசையி-இயற் கணிதமாகும். (Vector Algebra.)

திசையி-இன் எண்ணி ஒரு மிகை எண்ணாகக் (Positive Number) கொள்ளப்படும்.

m-என்பது ஒரு மிகை எண் எனில், திசையி $\underline{A}$-ன் m மடங்கை $m\underline{A}$ என்று எழுதுவது வழக்கம். $m\underline{A}$ என்ற திசையி-இன் இயங்கும் திசை, $\underline{A}$-ன் திசையிலும், அதன் எண்ணி, $\underline{A}$-ன் எண்ணியை m-ஆல் பெருக்கி வரும் மிகை எண்ணின் மதிப்பைப் பெற்றுள்ளதாகவும் கொள்ளப்படும்.

m என்பது ஒரு குறை எண் (Negative Number) எனில், $m\underline{A}$-ன் திசையை, $\underline{A}$-ன் திசைக்கு எதிராகக் குறித்தல் வேண்டும். மேலும், $m\underline{A}$-ன் எண்ணி, $\underline{A}$-ன் எண்ணியை, (-m)-ஆல் பெருக்கி வரும் மிகை எண்ணால் வரையறுக்கப்படும்.

(—A) என்ற திசையி, திசையி A-ஐ, (-1) ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கப் பெற்றதாகக் கொள்ளப்படும். எனவே (—A) என்ற திசையி, A-என்ற திசையி செயற்படும் திசைக்கு எதிர்ப்புறம் இயங்குகிறது. மேலும் திசையி செயற்படும் நேர் கோட்டை, இவ்வித செயலிகள் (Operations) எவ்விதத்திலும் பாதிப்பதில்லை யாதலால், A,—A ஆகிய திசையிகள் வெவ்வேறுன செயற்படும் கோடுகளைப் பெற்றுள்ளனவாகவும் கொள்ளலாம்.

எண் மதிப்பு சுழியுள்ள திசையி, சுழித் திசையி (Null Vector) என அழைக்கப்படும்.

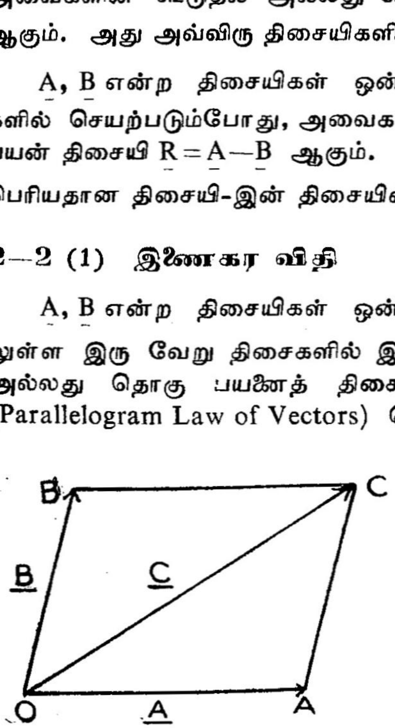
2—2 திசையிகளின் கூடுதல் அல்லது தொகுப்பு (Addition or Resultant of Vectors)

ஒரே திசையில் A, B என்ற திசையிகள் செயற்படுமானல், அவைகளின் கூடுதல் அல்லது தொகுபயன் திசையி R = A + B ஆகும். அது அவ்விரு திசையிகளின் திசையிலேயே செயற்படும்.

A, B என்ற திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செயற்படும்போது, அவைகளின் கூடுதல் அல்லது தொகு பயன் திசையி R = A — B ஆகும். அது அவ்விரு திசையிகளுள் பெரியதான திசையி-இன் திசையில் செயற்படும்.

2—2 (1) இணைகர விதி

A, B என்ற திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த நிலையிலுள்ள இரு வேறு திசைகளில் இருப்பின், அவற்றின் கூடுதலை அல்லது தொகு பயனைத் திசையிகளின் இணைகர விதியால் (Parallelogram Law of Vectors) பெறலாம்.



படம் 2-4

A, B என்ற திசையிகளின் கூடுதலைக் காண, ஏதேனும் ஒரு O-என்ற புள்ளியை எடுத்து, அதன் வழியே OA, OB என்ற நேர் கோடுகளைத் தகுந்த அலகுகளில், A, B என்ற திசையிகளின் மதிப்பெண்களுக்குச் சமமாகவும் அல்லது அவைகளுக்கு நேர்விகி

தத்திலிருக்குமாறும், அவைகள் செயற்படும் திசைகளுக்கு இணையாக இருக்குமாறும் படம் 2-4-ல் காட்டியவாறு வரையவும். அப்பொழுது $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்ற அம்புக் கோடுகள், $\underset{-}{A}$, $\underset{-}{B}$—ஆகிய திசையிகளைக் குறிக்கும். பிறகு, OA, OB ஆகியவற்றை அண்டைப் பக்கங்களாக அமைத்து, OACB என்ற இணைகரத்தை அமைக்கவும். O-என்ற புள்ளியின் வழியே செல்லும் இணைகரத்தின் OC என்ற மூலை விட்டம், $\underset{-}{A}, \underset{-}{B}$ ஆகியவற்றின் கூடுதல் அல்லது தொகுபயன் திசையியை வரையறுக்கும்.

படம் 2-4-ல்,

$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$ ஆகும்.

அதாவது, $\underset{-}{A} + \underset{-}{B} = \underset{-}{C}$ ஆகும்.

இங்கு, "+" என்னும் குறி, $\underset{-}{A}, \underset{-}{B}$ ஆகிய திசையிகளைச் சேர்க்கும், திசையிக் கூடுதலை (Victor Addition) அறிவிக்கிறது. மேலும், $\underset{-}{A}, \underset{-}{B}$ என்ற திசையிகளால் வரையறுக்கப்பட்ட இணைகரம், $\underset{-}{A}, \underset{-}{B}$ திசையிகளை எடுத்திடும் முறைமையை (Order)ச் சார்ந்திராததால்,

$$\underline{OB} + \underline{OA} = \underline{OC},$$

அதாவது $\underset{-}{B} + \underset{-}{A} = \underset{-}{C}$ என்றாகும்.

எனவே, $\underset{-}{A} + \underset{-}{B} = \underset{-}{C} = \underset{-}{B} + \underset{-}{A}$.

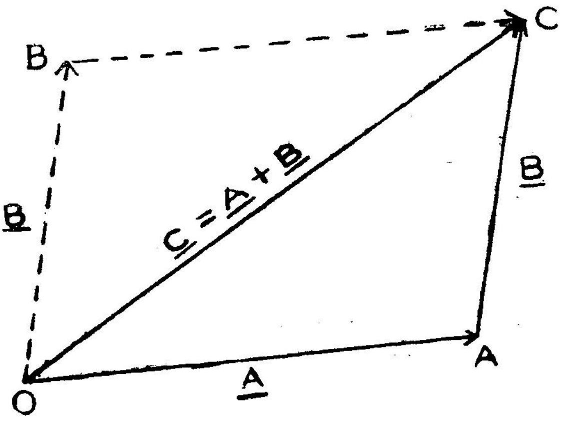
ஆதலால் திசையிக் கூடுதல், உறுப்புக்களின் பரிமாற்று அமைப்புக்கு இணங்கியுள்ளது. (Vector addition is Commutative).

2—2 (2) முக்கோண விதி (Triangle Law)

இரு திசையிகளின் தொகுபயனைத் திசையி முக்கோணத் தத்துவத்தின் அடிப்படையிலும் பெறலாம்.

O என்ற புள்ளியில், $\underset{-}{A}$ திசையி-இன் அடி (tail)ப் புள்ளி அமையுமாறும், $\underset{-}{B}$ திசையி-இன் அடிப் புள்ளி, $\underset{-}{A}$ன் நுனிப் புள்ளியில் (tip) அமையுமாறும் எடுத்தும், $\underset{-}{A}$ன் அடிப் புள்ளி, $\underset{-}{B}$ன் நுனிப் புள்ளி ஆகியவற்றைச் சேர்த்தும் உண்டாகும் நேர் கோட்டுத் துண்டு, $\underset{-}{A}, \underset{-}{B}$ ஆகிய திசையிகளின் கூடுதலைக் குறிக்கும்.

படம் 2-5இல் $\underline{OA}$, $\underline{AC}$ என்பன $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு திசையிகளைக் குறிக்குமாயின், $\underline{OC}$ அவற்றின் தொகு பயன் திசையியாகும்.



படம் 2–5

இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$$

ஆனல் $\underline{OB} = \underline{AC}$ (தடையற்ற திசையியை இணையாக இடப் பெயர்ச்சி செய்யலாம்.)

எனவே, $\triangle$ OACஇல்

$$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$$

அதாவது $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$ ஆகும்.

மேலும், "அடி-நுனி" அமைப்புக்கு (Tip-to-tail fashion) ஏற்ப, $\triangle$OBCஇல்,

$$\underline{OB} + \underline{BC} = \underline{OC} \text{ ஆகும்.}$$

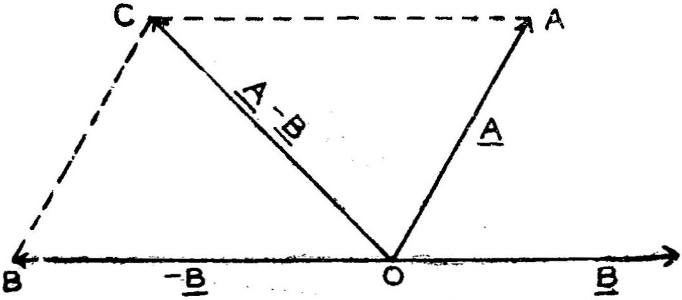
ஆதாவது $\underline{B} + \underline{A} = \underline{C}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \underline{A} + \underline{B} = \underline{C} = \underline{B} + \underline{A} \text{ என்ருகும்.}$$

எனவே, இங்கும் "திசையிக் கூட்டல்" பரிமாற்று அமைப்புக்கு இசைந்துள்ளது.

2—2 (3) ஒரு திசையியை, மற்ருெரு திசையி-இலிருந்து கழித்தல்

A, B என்ற திசையிகளில், Aஇலிருந்து, Bயைக் கழிக்க, B என்ற திசையியை திசை மாற்றி வரையவும்.



படம் 2-6

படம் 2-6இல் O என்ற புள்ளியில் OA, OB என்பன A—B ஆகிய திசையிகளைக் குறிக்கின்றன. OA, OB ஆகியவற்றின் தொகு பயனை, இணைகர விதிப்படி, O வழியே வரைந்திடும், OC என்ற மூலை விட்டம் அறிவிக்கும்.

அதாவது, $\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$

$\underline{A} + (-\underline{B}) = \underline{A} - \underline{B}$ ஆகும்.

2—2 (4) இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திசையிகளின் கூடுதலைக் காணல்

இணைகர விதியைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தி, திசையிகளின் கூடுதலைத் தீர்மானிக்கலாம்.

A, B, C என்பன ஒரே தளத்திலமையும் திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். இவைகளின் கூடுதலை இரு வழிகளில் பெறலாம்.

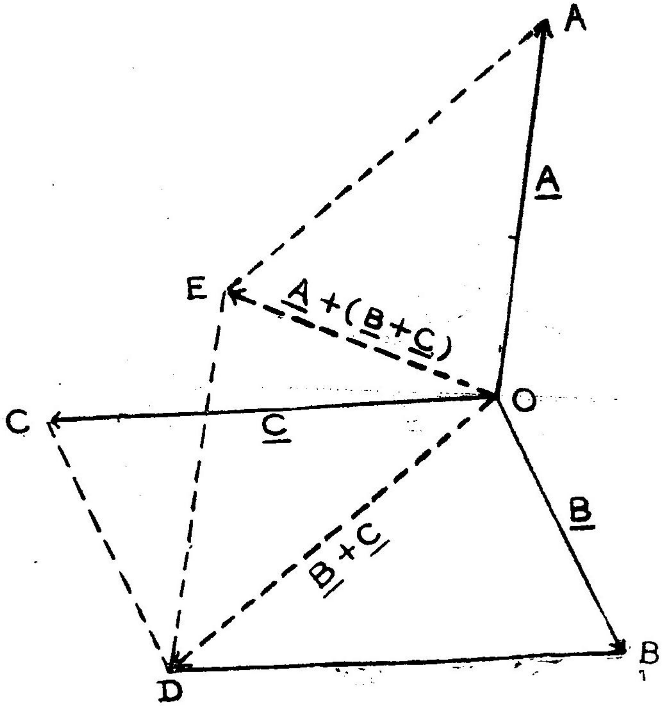
வரைபடத் தாளில், OA, OB, OC என்பன, தகுந்த அலகு கோலில் முறையே A, B, C என்ற திசையிகளைக் குறிக்கட்டும்.

படம் 2-7இல் இணைகர விதிப்படி, முதலில் B, C திசையிகளின் கூடுதலை OD என்ற அம்புக் கோடு அறிவிக்கிறது. பிறகு OD உடன், A-ஐச் சேர்த்திட, அம்புக் கோடு OE என்பது

$\underline{OA}$, $\underline{OD}$ ஆகியவற்றின் கூடுதலை வரையறுக்கிறது.

எனவே, $\underline{OE} = \underline{A} + \underline{OD}$

$= \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$



படம் 2–7

அவ்வாறே படம் 2-8இல் $\underline{A}$, $\underline{B}$ திசையிகளின் கூடுதலை, முதலில் $\underline{OF}$ என்ற அம்புக் கோட்டால் வரையறுத்து, பிறகு அதனுடன், $\underline{C}$ என்ற திசையியைச் சேர்த்திட, $\underline{OF}$, $\underline{OC}$ ஆகியவற்றின் கூடுதலை $\underline{OG}$ என்ற அம்புக்கோடு வரையறுக்கிறது.

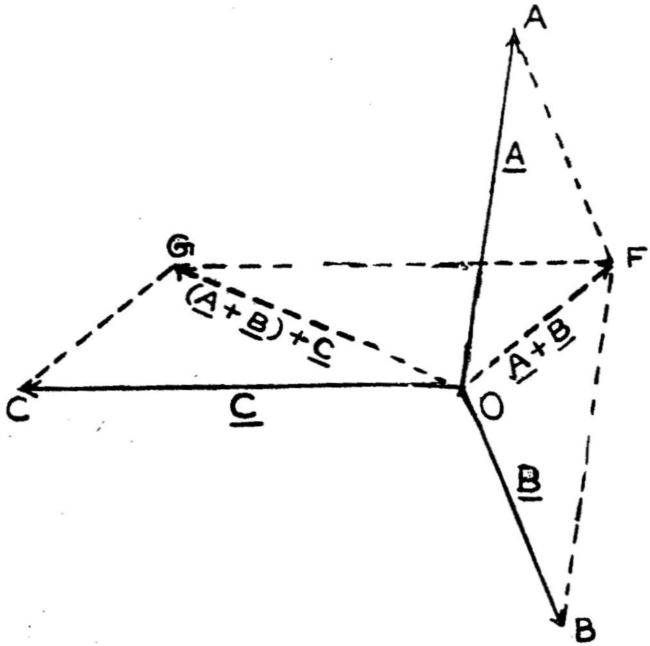
எனவே, $\underline{OG} = \underline{OF} + \underline{OC}$

$= (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$ ஆகும்.

இரு வழிகளிலும் இறுதியாகக் கிடைக்கப்பெற்ற $\underline{OE}$, $\underline{OG}$ என்ற திசையிகள் சமமாக உள்ளன என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

ஆதலால், $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$ என்றுகும்.

இங்கு, இயற்கணித முறையில் திசையிகளை இணைத்து, தங்குதடையின்றிக் கூட்டுச் சேர்க்க முடிவதால், "திசையிகளின்

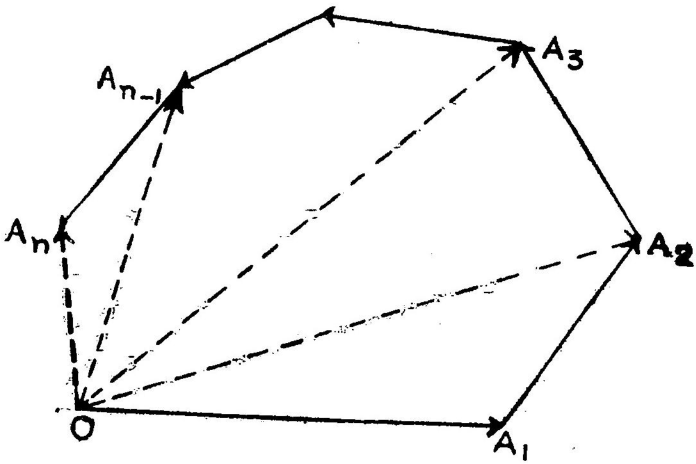


படம் 2-8

கூடுதல்" இயற்கணித கூட்டுச் சேர்க்கை விதிக்கு (Associative Law of Addition) இணங்கியுள்ளது.

மேலும், $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$, ...$\underline{A_i}$,...$\underline{A_n}$ என்ற திசையிகளின் தொகு பயனைக் (கூடுதலை)காண, முதலில் $\underline{A_1}$ $\underline{A_2}$ ஆகியவற்றின் தொகு பயன் $\underline{R_1}$ ஐக் கண்டு, அதனுடன் $\underline{A_3}$ ஐச் சேர்த்திட, கிடைக்கும் தொகு பயன் திசையி $\underline{R_2}$ என்பது, $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$, $\underline{A_3}$ ஆகிய வற்றின் கூடுதலை அறிவிக்கும். அங்ஙனமே, அடுத்தடுத்து வரும் திசையியை, அதற்கு முன் வந்த திசையிகளின் கூடுதலை வரையறுக்கும் தொகு பயன் திசையியுடன் சேர்த்து, இறுதியாக எல்லாத் திசையிகளின் கூடுதலை, ஒரு விளைவு தொகுபயன் திசையி (Final Resultant Vector)-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

அவ்வாறே, "நுனி-அடி" அமைப்புக்கு ஏற்றவாறும், $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$,......$\underline{A_i}$, ...$\underline{A_n}$ ஆகியவற்றின் கூடுதலை வரையறுக்க முடியும். இங்கு O என்ற துவக்கப் புள்ளியில், $\underline{A_1}$ என்ற திசையி-இன் அடிப்புள்ளி அமையுமாறு எடுத்து, $\underline{A_2}$ இன் அடிப்புள்ளி, $\underline{A_1}$ இன் நுனியில் பொருந்துமாறும், $\underline{A_3}$இன் அடிப் புள்ளி, $\underline{A_2}$ இன் நுனிப்புள்ளியில் பொருந்துமாறும் எடுத்து இறுதி யாக $\underline{A_n}$ இன் அடி, A_{n-1} இன் நுனியில் பொருந்துமாறும் அமைத்து, $\underline{A_1}$ இன் அடிப்புள்ளி O-ஐ, $\underline{A_n}$ இன் நுனிப் புள்ளி யுடன் சேர்த்து உண்டாகும் நேர்கோடு, எல்லாத் திசையிகளின் கூடுதலை வரையறுக்கும். படம் 2-9இல், "இணைகர விதி" அல்லது "நுனி-அடி" அமைப்பு முறைப்படி,



படம் 2-9

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{OA_2}$$
$$\underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{OA_3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\underline{OA_{n-1}} + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{OA_n}$$

இவைகளைக் கூட்டிட,

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + \underline{A_2A_3} + \ \dots\ + \underline{A_{i-1}\,A_i} + \dots + \underline{A_{n-1}A_n}$$
$= \underline{OA_n}$ ஆகும்.

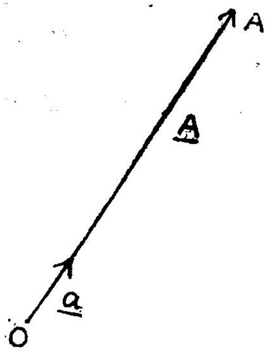
எனவே, தொகு பயன் திசையி $\underline{OA_n}$, திசையிகளின் கூடுதலை வரையறுக்கிறது.

2—3 ஓரலகு திசையி (Unit Vector)

எண் மதிப்பு ஒன்றுள்ள திசையி ஓரலகுத் திசையியாகும்.

2—3 (1) ஓரலகுத் திசையியைப் பயன்படுத்துதல்

படம் 2-10இல், அம்புக்கோடு $\overline{OA}$ என்பது, $\underline{A}$ என்ற திசையியைக் குறிக்கிறது. அத் திசையிலேயே ஓரலகு எண் மதிப்புள்ள, a என்னும் ஓரலகுத் திசையியை எடுக்கவும். அப்பொழுது, $\underline{A}$, $\underline{a}$—ஆகிய திசையிகளின் செயற்படும் திசைகள் ஒன்றுகின்றன (Same). ஆனால் அத் திசையிகளின் எண் மதிப்புக்கள் (scalar magnitudes) முறையே A, 1 என்றாகும்.



படம் 2-10

ஆதலால், $\underline{A}$ என்ற திசையியை, அதன் எண்ணி Aஆல் வகுக்கும் போது, $\underline{a}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி கிடைக்கும்.

எனவே, $\underline{a} = \left(\frac{1}{A}\right) \underline{A}$ ஆகும்.

அல்லது $\underline{A} = A\ \underline{a}$ ஆகும்.

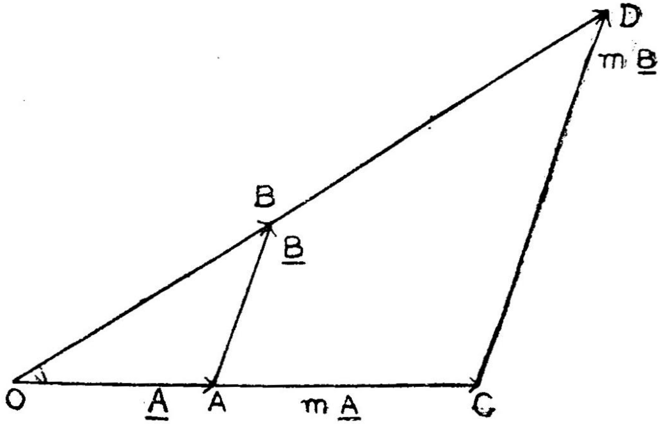
2—4 திசையிகளை எண்ணியால் பெருக்குதல் (Multiplication of Vectors by a scalar)

m என்பது ஒரு எண்ணியைக் குறிக்கட்டும். $\underline{A}$ என்பது ஒரு திசையியைக் குறிக்கட்டும். அப்பொழுது, m $\underline{A}$ என்பது, $\underline{A}$ன் திசையிலேயே, mA எண் மதிப்புள்ள திசையியைக் குறிக்கும். மேலும் m என்பது ஒரு எண்ணியாகவும், $\underline{A}$, $\underline{B}$, என்பன இரு திசையிகளாகவும் உள்ளபோது,

$m(\underline{A} + \underline{B}) = m\underline{A} + m\underline{B}$ என நிறுவலாம்.

O என்ற புள்ளியில், படம் 2-11ல், $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ என்பன தகுந்த அலகுகோலில், $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். OAல்,

OC = mA இருக்குமாறு C என்னும் புள்ளியைக் குறிக்கவும். C வழியே ABக்கு இணையாக வரையும் நேர்க்கோடு, OBஐ D



படம் 2-11

என்னுமிடத்தில் வெட்டட்டும். அப்பொழுது OAB, OCD என்ற முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகின்றன.

எனவே, $\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = m$ ஆகும்.

i. e. $OC = m.\ OA \quad \therefore \quad \underline{OC} = m.\ \underline{OA} = m\ \underset{-}{A}$

$CD = m.\ AB \quad \therefore \quad \underline{CD} = m.\ \underline{AB} = m\ \underset{-}{B}$

$OD = m.\ OB \quad \therefore \quad \underline{OD} = m.\ \underline{OB} = m\ (\underset{-}{A} + \underset{-}{B})$

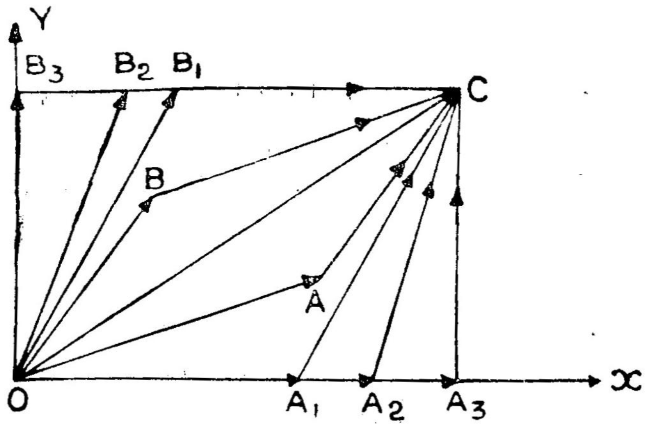
ஆதலால், $\underline{OC} + \underline{CD} = \underline{OD}$

அதாவது $m\ \underset{-}{A} + m\ \underset{-}{B} = m\ (\underset{-}{A} + \underset{-}{B})$ ஆகும்.

அவ்வாறே, $(m + n)\ \underset{-}{A} = m\ \underset{-}{A} + n\ \underset{-}{A}$ ஆகும்.

2—5 திசையிகளின் பிரிவீடு (Resolution of Vectors)

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசையிகளின் தொகுபயனை ஒற்றைத் திசையியைக் கண்டதுபோல், ஒற்றைத் திசையியின் ஆக்கக் கூறுகளையும் காண முடியும். இங்ஙனம் திசையி ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்பதற்குத் திசையியின் பிரிவீடு என்று பெயர். ஒரு குறிப்பிட்ட திசையியை மூலை விட்டமாகக் கொண்ட எண்ணற்ற இணைகரங்களை வரைய முடியும்.

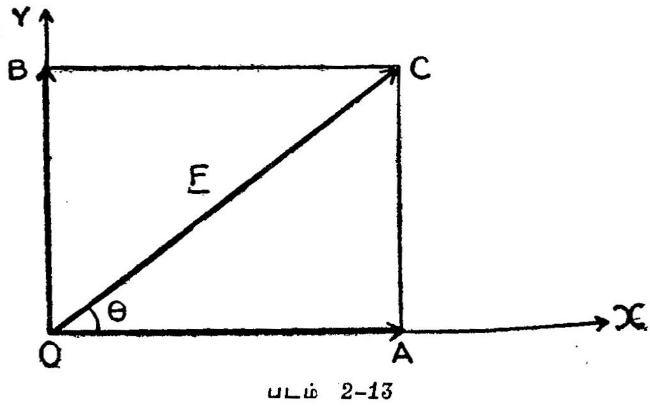


படம் 2-12

படம் 2-12இல் காட்டியவாறு ஒரு குறிப்பிட்ட திசையியின் ஆக்கக் கூறுகளைக் குறிப்பிட்ட எந்த இரு திசைகளிலும் பெறலாம் ஆனால், பொதுவாக, ஒரு தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக உள்ள இரு திசைகளில் திசையிகளைப் பிரிப்பது வழக்கம். அப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட ஒற்றைத் திசையியிக்கும், ஆக்கக் கூறுகளில் ஒன்றிற்கும் இடையிலமையும் கோணம் கொடுக்கப் படவேண்டும்.

2—5 (1) திசையி ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளை கிடை, நிலை அச்சுத் திசைகளில் காணுதல்

படம் 2-13இல் OC என்ற அம்புக் கோடு, F என்ற திசையியைக் குறிக்கிறது. OC-உடன் θ என்ற கோணத்தை



படம் 2-13

அமைக்கும் OX என்ற திசையிலும், அதற்கு நேர்குத்தாக உள்ள OY என்ற திசையிலும், $\underline{F}$ என்ற திசையியைப் பிரிக்க வேண்டியிருப்பதாகக் கொள்ளவும். C என்ற புள்ளியிலிருந்து OX, OY ஆகியவற்றிற்கு வரையும் குத்துக் கோடுகள் OX, OY—நேர் கோடுகளை முறையே A, B என்ற இடங்களில் வெட்டட்டும். OACB-என்பது ஒரு செவ்வகமாகும்.

$\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்பவை முறையே OX, OY திசைகளில் $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$ என்ற திசையிகளைக் குறிக்குமாயின், இணைகர விதிப்படி, $\underline{F}$ என்பது $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$ ஆகியவற்றின் தொகு பயனாகும். எனவே $\underline{F_x} = \underline{OA}$; $\underline{F_y} = \underline{OB}$ என்பவை, $\underline{F}$ இன் ஆக்கக் கூறு களாகும்.

படம் 2-13லிருந்து,

$$OA = OC \cos\theta$$

$$\therefore \; F_x = F \cos\theta,$$

$$OB = OC \sin\theta$$

$$\therefore \; F_y = F \sin\theta$$

எனவே, $\underline{F}$ என்ற திசையி, θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையிலும், அத்திசைக்கு நேர்குத்தான திசையிலும், $\underline{F}$இன் ஆக்கக் கூறுகள் முறையே F Cos θ, F sin θ என்றாகும்.

O_x, O_y திசைகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுக்குமென்றால்,

$$\underline{OC} = \underline{OA} + \underline{AC}$$

$$= \underline{OA} + \underline{OB}$$

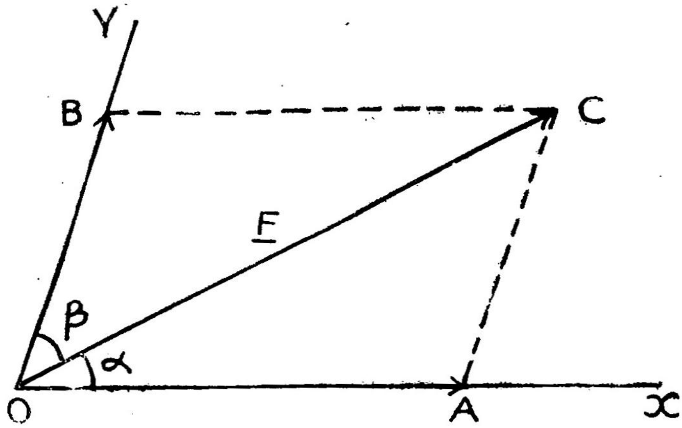
$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y}$$

$$= F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

$$= F \cos\theta \, \underline{i} + F \sin\theta \, \underline{j}$$ என்றாகும்.

2—5 (2) திசையி ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளை ஏதேனும் இரு குறிப்பிட்ட திசைகளில் காணுதல்

படம் 2-14இல், OC என்ற கோடு, $\underline{F}$ என்ற திசையியின் எண் மதிப்பைக் குறிக்கட்டும். OX, OY என்ற இரு திசைகளில், $\underline{F}$இன்



படம் 2-14

ஆக்கக் கூறுகளைக் காணுதல் வேண்டும். OX, OY என்பவை முறையே OC உடன் α, β என்ற கோணங்களைத் தாங்குவதாகக் கொள்ளவும். Cயிலிருந்து, OX, OYகளுக்கு இணையாக வரையும் கோடுகள் OY, OX கோடுகளை முறையே B, A என்ற இடங்களில் வெட்டட்டும்.

இணைகர விதிப்படி, $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ ஆகியவை OX, OY திசைகளில் $\underline{F}$இன் ஆக்கக் கூறுகளாகும். அவற்றின் எண் மதிப்புக்களை F_x, F_y என்று குறிக்கவும்.

படம் 2-14இல்,

$\angle OAC = 180 - (\alpha + \beta)$ ஆகும்.

$\angle OCA = \beta$ ஆகும்.

எனவே $\triangle OAC$இல்,

$$\frac{OA}{\text{Sin } O\hat{C}A} = \frac{AC}{\text{Sin } A\hat{O}C} = \frac{OC}{\text{Sin } O\hat{A}C}$$

i. e. $$\frac{OA}{\text{Sin } \beta} = \frac{AC}{\text{Sin } \alpha} = \frac{OC}{\text{Sin } (180-\overline{\alpha+\beta})}$$

i. e. $$\frac{OA}{\text{Sin } \beta} = \frac{AC}{\text{Sin } \alpha} = \frac{OC}{\text{Sin } (\alpha+\beta)}$$

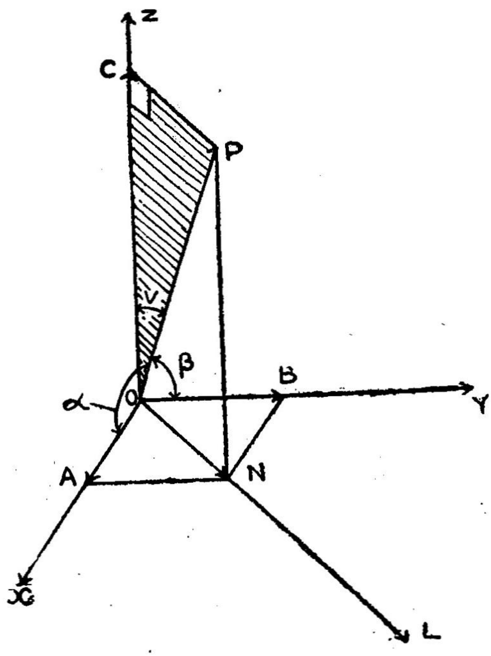
எனவே $$OA = \frac{OC. \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } (\alpha+\beta)}$$

அல்லது $$F_x = OA = \frac{F \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } (\alpha+\beta)}$$ ஆகும்.

அவ்வாறே, $$F_y = OB = AC = \frac{F \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } (\alpha+\beta)}$$ ஆகும்.

2—5 (3) திசையி ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளைப் பரந்த வெளியில் ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக அமையும் ஏதேனும் மூன்று குறிப்பிட்ட திசைகளில் காணுதல்

பரந்த வெளியில் O என்ற புள்ளியில் OX, OY, OZ என்ற மூன்று அச்சுக்களை ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக அமையுமாறு, படம் 2-15இல் காட்டியவாறு எடுக்கவும். $\bar{F}$ என்ற திசையி-இன் ஆக்கக் கூறுகளை, OX, OY, OZ திசைகளில் காண வேண்டும்.



படம் 2-15

அதற்காக O-என்ற புள்ளியில், $\underline{OP}$ என்ற அம்புக் கோடு $\underline{F}$-என்ற திசையியை வரையறுப்பதாகக் கொள்ளவும். OP, OZ - என்ற கோடுகளால் வரையறுக்கப்படும் தளம், XOY தளத்தை OL என்ற கோட்டில் வெட்டட்டும். P-என்ற புள்ளியிலிருந்து, OL, OZ என்ற கோடுகளுக்கு இணையாக வரையும் கோடுகள், OZ, OL கோடுகளை முறையே, C, N என்ற இடங்களில் வெட்டட்டும். அப்பொழுது ONPC என்பது ஒரு செவ்வகமாகும். இணைகர விதிப்படி, $\underline{F}$-ன் ஆக்கக்கூறுகள், OZ, OL திசைகளில், $\underline{OC}$, $\underline{ON}$ என்ற அம்புக் கோடுகளால் வரையறுக்கப்படும். எனவே,

$$\underline{OP} = \underline{OC} + \underline{ON}$$

அடுத்து, $\underline{ON}$ என்ற திசையி-இன் ஆக்கக் கூறுகளை, XOY தளத்தில் OX, OY என்ற திசைகளில் காண வேண்டும். அதற்காக N-என்ற புள்ளியிலிருந்து OY, OX அச்சுக்களுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரையவும். அவைகள் OX, OY-கோடுகளை முறையே A, B என்ற இடங்களில் வெட்டட்டும். இணைகர விதிப்படி, $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்பவை, OX, OY திசைகளில், $\underline{ON}$-ன் ஆக்கக் கூறுகளாகும். எனவே,

$$\underline{ON} = \underline{OA} + \underline{OB}$$

$$\therefore \quad \underline{OP} = \underline{OA} + \underline{OB} + \underline{OC} \text{ என்றாகும்.}$$

$\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, $\underline{F_z}$ என்பவை, $\underline{OA}$, $\underline{OB}$, $\underline{OC}$ ஆகிய திசையிப் பகுதிகளைக் குறிக்குமாகில்,

$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z} \text{ என்றாகும்.}$$

அப்பொழுது, $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, $\underline{F_z}$ என்பவை, OX, OY, OZ ஆகிய அச்சுக்களில், $\underline{F}$ என்ற திசையியின் ஆக்கக் கூறுகளாகும். மேலும் F_x, F_y, F_z என்பவை முறையே, X, Y, Z அச்சுக்களில் $\underline{F}$ என்ற திசையி-இன் எண் மதிப்புப் பகுதிகளாகும் (Scalar Components).

$\underline{F}$ என்ற திசையி, OX, OY, OZ அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் கோணங்களை முறையே α, β, γ எனக் கொள்ளவும். அக் கோணங்களின் கிடக்கைகள் (cosine of the angles) முறையே, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்றாகும். இவற்றையே, $\underline{F}$ திசையி-இன் திசைக் கிடக்கைகள் (Direction Cosines) என்று கூறுவது வழக்கம். இவைகளை l, m, n என்ற எழுத்துக்களாலும் குறிப்பது வழக்கம்.

F, F_x, F_y, F_z என்பவை முறையே, $\underline{F}$, $\underline{F}_x$, $\underline{F}_y$, $\underline{F}_z$ ஆகிய திசையிகளின் எண் மதிப்புக்களைக் குறிக்கும்.

OCP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில், $F_z = F\cos\gamma = F.n$ ஆகும்.

அவ்வாறே, OAN, OBN என்ற செங்கோண முக்கோணங்களில்,

$$F_x = F\cos\alpha = F.l,$$
$$F_y = F\cos\beta = F.m \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் OAN என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$ON^2 = OA^2 + AN^2$$
$$= OA^2 + OB^2 \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே, OCP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$OP^2 = OC^2 + CP^2$$
$$= OC^2 + ON^2$$
$$= OC^2 + OA^2 + OB^2$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $F^2 = (F\cos\alpha)^2 + (F\cos\beta)^2 + (F\cos\gamma)^2$
$= F^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ என்றாகும்.

அதாவது, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

அல்லது $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ என்றாகும்.

அடுத்து, $F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$ என்றாவதால், $\underline{F}$ திசையி-இன் எண் மதிப்பு $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ ஆகும்.

மேலும்,

$$F_x = F\cos\alpha; \quad F_y = F\cos\beta; \quad F_z = F\cos\gamma$$

என்றாவதால்,

$$\frac{\cos\alpha}{F_x} = \frac{\cos\beta}{F_y} = \frac{\cos\gamma}{F_z} = \frac{1}{F} \text{ ஆகும்.}$$

மற்றும், $F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$ என்றுவதால்,

$$F = F_x\left(\frac{F_x}{F}\right) + F_y\left(\frac{F_y}{F}\right) + F_z\left(\frac{F_z}{F}\right)$$

$$= F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma$$

$$= F_x . l + F_y . m + F_z . n$$ ஆகும்.

OX, OY, OZ என்ற அச்சுத் திசைகளை, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுப்பதாகக் கொண்டால்,

$\underline{F_x} = \underline{i}\ F_x$; $\underline{F_y} = \underline{j}\ F_y$; $\underline{F_z} = \underline{k}\ F_z$ என்றுகும்.

அப்பொழுது,

$$\underline{F} = F_x\ \underline{i} + F_y\ \underline{j} + F_z\ \underline{k}$$ ஆகும்.

மேலும் $$\underline{F} = F\left(\frac{F_x}{F}\right)\underline{i} + F\left(\frac{F_y}{F}\right)\underline{j} + F\left(\frac{F_z}{F}\right)\underline{k}$$

$$= F\,(\cos\alpha\ \underline{i} + \cos\beta\ \underline{j} + \cos\gamma\ \underline{k})$$ ஆகும்.

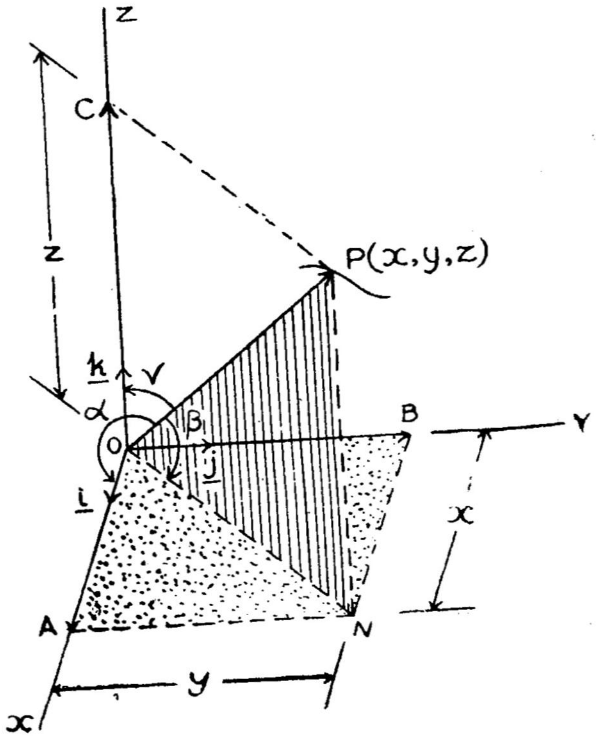
அல்லது, $\underline{F} = F\,\underline{f}$ என்றும் குறிக்கலாம்.

இங்கு $\underline{f}$ என்பது, $\underline{F}$ திசையி-செயற்படும் திசைக்கு இணையாக அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

2—6 பரந்த வெளியில் ஒரு புள்ளியின் நிலைத் திசையியைக் காணுதல்

O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, அதில் OX, OY, OZ என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று அச்சுக்களை எடுக்கவும். பரந்த வெளியில் P என்பது ஒரு புள்ளியாகில், $\underline{OP}$ என்ற அம்புக்கோடு, P என்ற புள்ளியின் நிலைத் திசையியை (Position vector) வரையறுக்கும். O, P களுக்கு இடையிலமையும் தொலைவு r என்றுல், Pஇன் நிலைத் திசையி, படம் 2-16இல் காட்டியவாறு,

$$\underline{OP} = \underline{r}$$ ஆகும்.



படம் 2–16

OP என்ற நேர் கோடு X, Y, Z, அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் கோணங்களை, வழக்கம்போல், α, β, γ எனக் கொள்ளவும். X, Y, Z அச்சுக்களில், OP என்றநேர்கோட்டின் தள வீழ்ச்சிகளே (Projections) P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளாகும். (Coordinates). OA, OB, OC ஆகியவற்றை OP இன் தள வீழ்ச்சிகளாகக் கொள்ளவும். அப்பொழுது, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ ஆகும்.

மேலும், OAP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$\frac{OA}{OP} = \cos\alpha, \text{ அதாவது, } OA = OP \cos\alpha$$

அல்லது $x = r \operatorname{Cos}\alpha$ என்றாகும். அவ்வாறே, $y = r \operatorname{Cos}\beta$, $z = r \operatorname{Cos}\gamma$ ஆகும்.

OX, OY, OZ என்ற அச்சுக்களில் முறையே $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை அமைக்கவும்.

அப்பொழுது, $\underline{OA} = x\underline{i}$, $\underline{OB} = y\underline{j}$, $\underline{OC} = z\,\underline{k}$ என்றாகும்.

P என்ற புள்ளியிலிருந்து, XOY தளத்திற்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு ஒன்றை வரையவும். N-லிருந்து OY, OX அச்சுக்களுக்கு இணையாக வரையும் கோடுகள், முறையே, OX, OY அச்சுக்களை A, B என்ற இடங்களில் வெட்டும்.

ONPC என்ற குத்துத் தளத்தில் (Vertical Plane), இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OP} = \underline{ON} + \underline{OC}$$ ஆகும்.

OANB என்ற கிடைத் தளத்தில், இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{ON} = \underline{OA} + \underline{OB}$$ ஆகும்.

எனவே, $\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{OB} + \underline{OC}$,

அல்லது $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ என்றாகும்.

ஆதலால் P என்ற புள்ளியின் நிலைத் திசையியை,

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ என்பது அறிவிக்கிறது.

மேலும்,

$$\begin{aligned} \underline{r} &= x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \\ &= r\,\text{Cos}\alpha\,\underline{i} + r\,\text{Cos}\beta\,\underline{j} + r\,\text{Cos}\gamma\,\underline{k} \\ &= r\,(\text{Cos}\alpha\,\underline{i} + \text{Cos}\beta\,\underline{j} + \text{Cos}\gamma\,\underline{k}) \end{aligned}$$

$\therefore \quad r = r\ \underline{\psi r}$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு $\underline{\psi r} = \text{Cos}\alpha\,\underline{i} + \text{Cos}\,\beta\,\underline{j} + \text{Cos}\gamma\,\underline{j}$ என்பது, $\underline{r}$ என்ற திசையி செயற்படும் திசையிலேயே ஓரலகுத் திசையியாகும்.

மேலும், பிதகோரஸ் (Pythogoras) நியதிப்படி,

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

அதாவது, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ எனவும்,

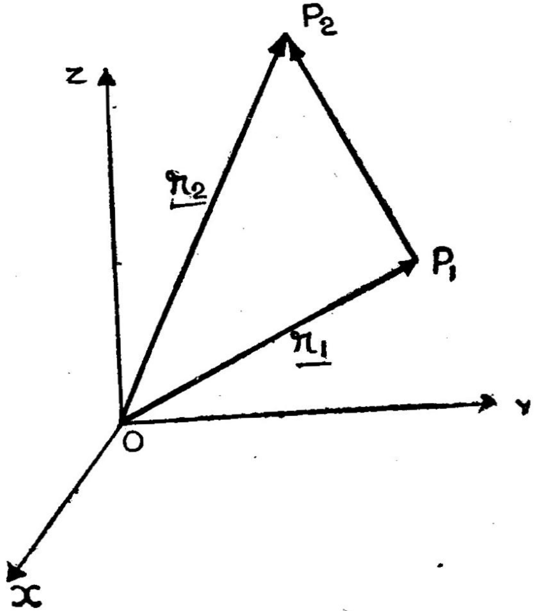
$|\,\underline{\psi r}\,|^2 = \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$ எனவும் வரையறுக்கலாம்.

பரந்த வெளியில் P_1 (x_1, y_1, z_1), P_2 (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகளை எடுக்கும்போது, அப்புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே,

$$\underline{r_1} = \underline{OP_1} = x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k},$$

$$\underline{r_2} = \underline{OP_2} = x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}$$ என்றாகும்.

படம் 2-17இல் காட்டியுள்ளபடி, "அடி - நுனி" அமைப்பு முறையில்,



படம் 2-17

$$\underline{OP_1} + \underline{P_1P_2} = \underline{OP_2}$$ என்றாகும்.

அதாவது, $$\underline{P_1P_2} = \underline{OP_2} - \underline{OP_1},$$

$$= \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

$$= (x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}) - (x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j} + (z_2 - z_1)\underline{k}$$ ஆகும்.

மேலும், (x_2-x_1), (y_2-y_1), (z_2-z_1) என்பவை x, y, z அச்சுக்களில் P_1, P_2 என்ற நேர்கோட்டின் தள வீழ்ச்சிகளாகும். அவைகள் P_1, P_2 நேர்கோட்டின் திசை விகித எண்கள் (Direction Ratios) என்றும் கூறப்படும். P_1, P_2 புள்ளிகளுக்கு உள்ள தொலைவை d எனக் கொண்டால், P_1 P_2 என்ற நேர்கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே,

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{x_2-x_1}{d}, \text{Cos}\ \beta = \frac{y_3-y_1}{d}, \ \text{Cos}\ \gamma = \frac{z_2-z_1}{d}$$

என்றாகும்.

2—7 திசையிகளின் கூடுதலை (தொகுபயனைப்) பகுதிகளாகப் பிரிவீடு செய்தல்

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்பவை x, y, z அச்சுக்களில் ஓரலகுத் திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். அவற்றின் மூலமாக, $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots \underline{F_r} \ldots \underline{F_n}$ என்ற திசையிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கவும் :

$$\underline{F_1} = F_{1x}\underline{i} + F_{1y}\underline{j} + F_{1z}\underline{k}$$

$$\underline{F_2} = F_{2x}\underline{i} = F_{2y}\underline{j} + F_{2z}\underline{k}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{F_r} = F_{rx}\underline{i} + F_{ry}\underline{j} + F_{rz}\underline{k}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{F_n} = F_{nx}\underline{i} + F_{ny}\,\underline{j} = F_{nz}\underline{k}$$

O என்ற துவக்கப் புள்ளியில், மேற்கொண்ட n திசையிகளை அவைகளுக்கு உரிய அம்பு நேர் கோடுகளால் வரையறுத்து, அவற்றின் தொகு பயனைக் காண முடியும். இறுதியாக வரும் அவற்றின் தொகு பயன் திசையியை $\underline{R}$ எனக் கொண்டால்,

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \ldots\ldots + \underline{F_r}\ldots\ldots + \underline{F_n}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} F_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (F_{rx}\,\underline{i} + F_{ry}\,\underline{j} + F_{rz}\,\underline{k})$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rx}\right)\underline{i} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{ry}\right)\underline{j} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rz}\right)\underline{k}$$

என்றாகும்.

மேலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில், $\underline{R}$இன் ஆக்கக் கூறுகளை $\underline{R}_x$, $\underline{R}_y$, $\underline{R}_z$ எனக் குறிப்பிடும்போது,

$$R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rx}\right)\underline{i} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{ry}\right)\underline{j} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_{rz}\right)\underline{k}$$

என்றுகும்.

$$\text{எனவே, } R_x = \sum_{r=1}^{n} F_{rx}\,;\quad R_y = \sum_{r=1}^{n} F_{ry}\,;\quad R_z = \sum_{r=1}^{n} F_{rz}$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

மேற்கூறிய சமன்பாடுகள், தொகு பயன் திசையி $\underline{R}$ இன் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ திசைகளில் அமைந்திடும் எண்ணிப் பகுதிகளை (Scalar Components) முறையே ஆக்கக் கூறு திசையிகளின் எண்ணிப் பகுதிக் கூடுதல்களால் அறிவிக்கின்றன.

தொகு பயன் திசையி, $\underline{R}$-ன் எண் மதிப்பை,

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

மேலும் $\underline{R}$ என்ற தொகுபயன் திசையி, Ox, Oy, Oz அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் கோணங்களை முறையே Ox, Oy, Oz எனக் கொண்டால், $\underline{R}$இன் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே, $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$, $\cos\theta_z$ ஆகும். அப்பொழுது, $R_x = R\cos\theta_x$; $R_y = R\cos\theta_y$; $R_z = R\cos\theta_z$ என்றுகும்.

ஆதலால்,

$$\frac{\cos\theta_x}{R_x} = \frac{\cos\theta_y}{R_y} = \frac{\cos\theta_z}{R_z} = \frac{1}{R} \text{ ஆகும.}$$

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 2-1: $\underline{F} = 12\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k}$ என்ற திசையி-இன் செயற்படும் கோட்டில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க.

இங்கு $\underline{F} = 12\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k}$

$$= \sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}\left\{\frac{12}{13}\underline{i} + \frac{3}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}\right\}$$

$$= 13\left(\frac{12}{13}\underline{i} + \frac{3}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $\underline{F} = 13\underline{f}$ என்றால், $\underline{f}$ என்பது, $\underline{F}$ என்ற திசையி யின் போகாக அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$\therefore \quad \underline{f} = \frac{12}{13}\underline{i} + \frac{3}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}.$$

மாதிரி 2—2 : $\underline{F} = 180\,\underline{i} - 90\,\underline{j} + 60\,\underline{k}$ என்ற திசையி செயற்படும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க.

இங்கு $\underline{F} = 180\underline{i} - 90\underline{j} + 60\underline{k}$

$$= 30\,(6\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k})$$

$$= 30\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}\left\{\frac{6\underline{i}}{7} - \frac{3\underline{j}}{7} + \frac{2}{7}\underline{k}\right\}$$

$$= 210\left(\frac{6}{7}\underline{i} - \frac{3}{7}\underline{j} + \frac{2}{7}\underline{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\underline{F} = 210\,\underline{f}$ எனக் கொண்டால், $\underline{f}$ என்பது, $\underline{F}$ இன் திசையிலேயே அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும். எனவே, $\underline{F}$ இன் எதிர்த்திசையை அறிவிக்கும் ஓரலகுத் திசையி,

$$-\frac{6}{7}\underline{i} + \frac{3}{7}\underline{j} - \frac{2}{7}\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2—3 : $\underline{F}$ என்ற திசையி-இன் எண் மதிப்பு 490 என்றும், அது செயற்படும் திசையை $\left(\frac{2}{7}\underline{i} - \frac{9}{7}\underline{j} + \frac{6}{7}\underline{k}\right)$ என்ற ஓரலகுத் திசையி அறிவிக்கிறது என்றும் கொண்டால், F-ஐ வரையறுக்க

இங்கு $F = |\underline{F}| = 490$ என்றும், அதன் திசையை $\underline{f} = \frac{1}{7}(2\underline{i} - 9\underline{j} + 6\underline{k})$ என்ற ஓரலகுத் திசையியாலும் அறிவதால்,

$$\underline{F} = F\underline{f}$$

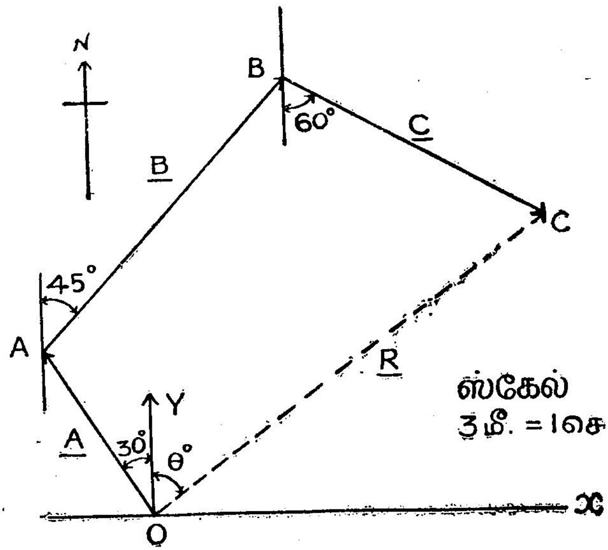
$$= 490\left[\tfrac{1}{7}(2\,\underline{i} - 9\,\underline{j} + 6\,\underline{k})\right]$$

$$= 70\,(2\underline{i} - 9\underline{j} + 6\underline{k})$$

$$= 140\,\underline{i} - 630\,\underline{j} + 420\,\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2-4 : ஒரு நில அளவாயர் (Surveyor) காலி நிலம் ஒன்றின் எல்லைகளை வரையறுக்க, முதலில் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைப் புள்ளியிலிருந்து, N30°W என்ற திசையில் (அதாவது வடதிசையிலிருந்து 30° மேற்கு திசையில் அல்லது வடதிசைக்கு 30° மேற்கு திசையில்) 12 மீட்டர் சென்று, அங்கிருந்து N45°E என்ற திசையில் $15\sqrt{2}$ மீட்டர் தொலைவைக் கடந்து, பிறகு அங்கிருந்து S60°E என்ற திசையில் $10\sqrt{3}$ மீட்டர் செல்கிறார். இறுதியாக வந்தடைந்த புள்ளியையும், துவக்கப் புள்ளியையும் சேர்த்திடும் போது, காலி நிலம் வரையறுக்கப்படுகிறது என்றால், அவைகளுக்குள்ள தொலைவையும், துவக்கப் புள்ளியிலிருந்து இறுதியாக வந்தடைந்த புள்ளி எத்திசையிலமையும் என்பதையும் காண்க.

படம் 2-18இல், $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்ற திசையிகள் குறிப்பிட்ட திசைகளில் கடந்த தொலைவுகளைக் குறிக்கட்டும். எனவே,



படம் 2-18

தேவையான திசையி $\underline{OC} = \underline{R}$ என்றாகும்.

இங்கு $|\underline{A}| = A = 12$ மீ. $= OA$

$|\underline{B}| = B = 15\sqrt{2}$ மீ. $= AB$

$|\underline{C}| = C = 10\sqrt{3}$ மீ. $= BC$

திசையிகள் ஒவ்வொன்றையும் அவைகளுக்கு உகந்த ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கவும். அப்பொழுது,

$A_x = -A \text{ Sin } 30^\circ = -6$; $B_x = B \text{ Sin } 45^\circ = 15$; $C_x = C \text{ Sin } 60^\circ = 15$;
$A_y = A \text{ Cos } 30^\circ = 6\sqrt{3}$; $B_y = B \text{ Cos } 45^\circ = 15$;
$C_y = - C \text{ Cos } 60^\circ = - 5\sqrt{3}$ ஆகும்.

எனவே, $R_x = A_x + B_x + C_x$ $\quad R_y = A_y + B_y + C_y$

$= -6+15+15$ $\quad = 6\sqrt{3} + 15—5\sqrt{3}$

$= 24$ மீட்டர். $\quad = \sqrt{3} + 15$

$= 16{\cdot}732$ மீட்டர்.

ஆதலால் $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$= \sqrt{(24)^2 + (16{\cdot}732)^2}$

$= \sqrt{855{\cdot}9}$

$= 29{\cdot}2$ மீ.

இறுதியாக அமையும் C என்ற புள்ளி, துவக்கப் புள்ளிக்கு வடக்கிலிருந்து θ° கிழக்குத் திசையிலிருக்குமென்றால் ($N\theta^\circ E$),

$$\tan \theta = \frac{R_x}{R_y}$$

$$= \frac{24}{16{\cdot}732}$$

$= 1{\cdot}434$ என்றாகும்.

அல்லது $\theta = 55^\circ 7'$ ஆகும்.

எனவே $OC = 29{\cdot}2$ மீட்டர் ; $\theta^\circ = 55^\circ 7'$ ஆகும்.

குறிப்பு : வரைபடத்தில் OCயின் நீளம் ஏறக்குறைய 9·8 செ.மீ. ஆகவும், $\theta^\circ = 55^\circ$க்குச் சமமாகவும் இருப்பதைக் காண்க.

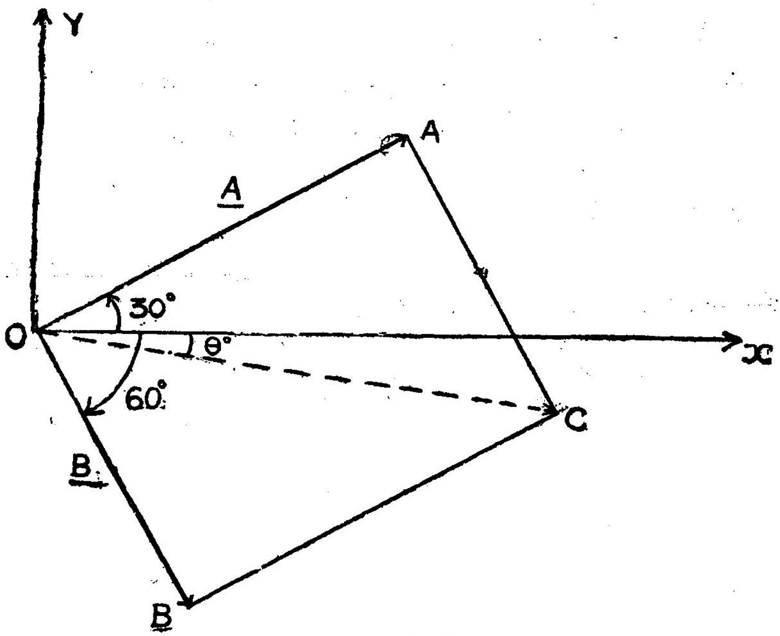
மாதிரி 2—5 $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளின் எண் மதிப்புக்களும், அவைகள் கிடை அச்சில் அமைக்கும் கோணங்களும் பின் வருமாறு :

திசையி	எண் மதிப்பு	கிடை அச்சில் தாங்கும் கோணம்
$\underline{A}$	48	30°
$\underline{B}$	36	−60°

இணைகர விதியைப் பயன்படுத்தி, அவைகளின் தொகுபயன் திசையியைக் காண்க.

படம் 2-19ல் காட்டியுள்ள அமைப்பில் இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 2-19

வரைபடத்தில் OC-ன் நீளம் 5 செ.மீ. ஆகும்.

எனவே தொகுபயன் திசையி, R-ன் எண் மதிப்பு

$= 5 \times 12 = 60$ ஆகும்.

மேலும் படத்தில் $A\hat{O}C = 37°$ (ஏறக்குறைய)

இரண்டாவது முறை (Second Method) :

OX, OY அச்சுக்களில் $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை எடுக்கும்போது,

$$\underline{A} = 48 \text{ Cos } 30° \underline{i} + 48 \text{ Sin } 30° \underline{j}$$
$$= 24\sqrt{3}\ \underline{i} + 24\ \underline{j}$$
$$\underline{B} = 36 \text{ Cos } 60° \underline{i} - 36 \text{ Sin } 60° \underline{j}$$
$$= 18\ \underline{i} - 18\sqrt{3}\ \underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$= (24\sqrt{3} + 18)\underline{i} + (24 - 18\sqrt{3})\underline{j};$$

$$R_x = 24\sqrt{3} + 18, \; R_y = 24 - 18\sqrt{3}$$

$$\therefore R^2 = |\underline{R}|^2 = (24\sqrt{3} + 18)^2 + (24 - 18\sqrt{3})^2$$

$$= 36\,(4\sqrt{3} + 3)^2 + 36\,(4 - 3\sqrt{3})^2$$

$$= 3600$$

$$\therefore R = 60$$

$\theta°$ என்பது OC என்ற நேர் கோடு, x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் குறிக்குமென்றால்

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{24 - 18\sqrt{3}}{24\sqrt{3} + 18}$$

$$= \frac{4 - 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 3}$$

$$= -\frac{1{\cdot}196}{9{\cdot}928}$$

$$= -0{\cdot}1205$$

$$\therefore \theta° = -6°\,53' \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2—6: $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளின் எண் மதிப்புக்களும், அவைகள் கிடை அச்சில் தாங்கும் கோணங்களும் பின்வருமாறு :

திசையி	எண் மதிப்பு	கிடை அச்சில் தாங்கும் கோணம்
$\underline{A}$	12 கி. கி. செ.மீ.	150°
$\underline{B}$	8 கி. கி. செ. மீ.	30°

இணைகர விதியைப் பயன்படுத்தி, அவைகளின் தொகுபயன் திசையியைக் காண்க.

முதல் வழி :

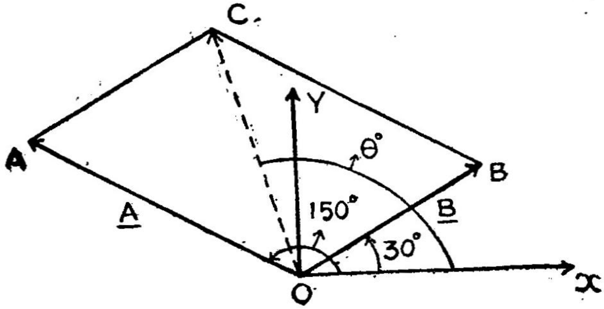
படம் 2-20இல் காட்டியுள்ள அமைப்பில் இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC} \text{ ஆகும்.}$$

வரைபடத்தில் OCயின் நீளம் 5·3 செ.மீ. ஆகும்.
எனவே, தொகுபயன் திசையி $\underline{R}$-ன் எண் மதிப்பு

$$= 5{\cdot}3 \times 2 = 10{\cdot}6 \text{ கி. கி. செ.மீ.}$$

மேலும் படத்தில் $C\hat{O}B = 109°$ (ஏறக்குறைய) ஆகும்.



படம் 2–20

இரண்டாவது வழி :

OX, OY திசைகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுக்குமென்றால்,

$$\underline{A} = 12(\text{Cos } 150\, \underline{i} + \text{Sin } 150\, \underline{j}) = -6\sqrt{3}\,\underline{i} + 6\,\underline{j}$$

$$\underline{B} = 8(\text{Cos } 30\, \underline{i} + \text{Sin } 30\, \underline{j}) = 4\sqrt{3}\,\underline{i} + 4\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$= -2\sqrt{3}\,\underline{i} + 10\,\underline{j}$$

$\therefore R_x = -2\sqrt{3}$; $R_y = 10$ ஆகும்.

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{112} = 4\sqrt{7} = 10{\cdot}584 \text{ கி. கி. செ. மீ.}$$

OC என்ற நேர்கோடு, x அச்சுடன், $\theta°$ என்ற கோணத்தை அமைக்குமென்றால்,

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{10}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3} = -2{\cdot}887$$

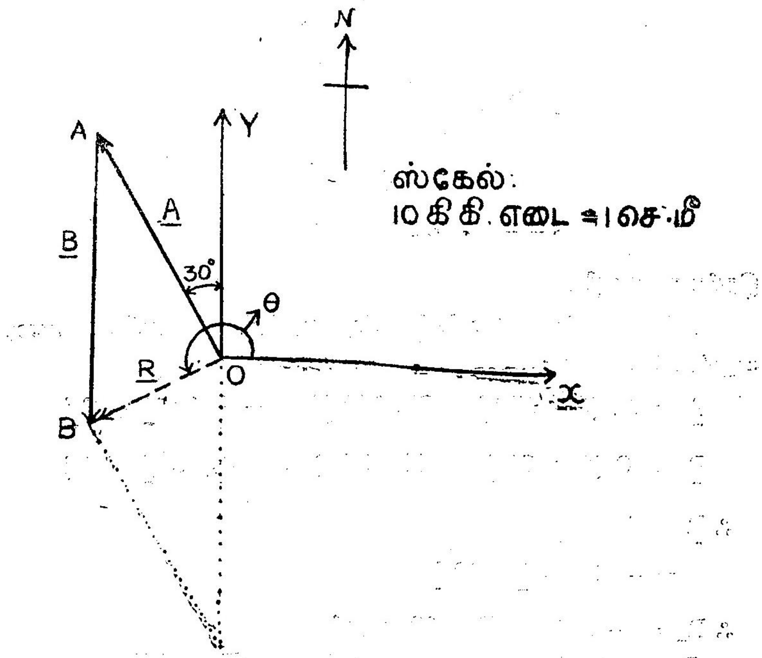
$$\therefore \theta° = 180 - 70°54'$$

$$= 109°\,6' \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2—7: N30°W என்ற திசையில் செயற்படும் 34·64 கி.கி. எடை மதிப்புள்ள A என்ற திசையியை, தெற்குத் திசையில் செயற்படும் 40 கி. கி. எடை மதிப்புள்ள B என்ற திசையியுடன் முக்கோண விதிப்படி ஒன்று சேர்த்து உண்டாகும் தொகுபயன் திசையியைக் காண்க.

முதல் வழி :

"நுனி-அடி" அமைப்பு முறையில் படம் 2-21இல் காட்டியவாறு $\underline{OA} + \underline{AB} = \underline{OB}$ ஆகும்.



படம் 2–21.

வரைபடத்தில் OBஇன் நீளம் 2 செ.மீ. ஆகும். எனவே $|\underline{R}| = 2 \times 10 = 20$ கி.கி. எடை ஆகும். வரைபடத்தில் $X\hat{O}B = 210°$ ஆகும்.

இரண்டாவது வழி :

$\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை Ox, Oy அச்சுக்களில் வரையறுக்கவும். அப்பொழுது,

$$\underline{A} = 34{\cdot}64\,(\text{Cos } 120°\ \underline{i} + \text{Sin } 120°\ \underline{j})$$
$$= 34{\cdot}64\left(-\frac{1}{2}\,\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\underline{j}\right)$$
$$= 17{\cdot}32\,(-\underline{i} + \sqrt{3}\ \underline{j})$$

$$\underline{B} = 40{\cdot}00\,(\text{Cos } 270°\ \underline{i} + \text{Sin } 270°\ \underline{j})$$
$$= 40{\cdot}00\,(0{\cdot}\underline{i} - \underline{j})$$
$$= -40\ \underline{j}$$

$$\therefore\ \underline{R} = \underline{A} + \underline{B}$$
$$= (-17{\cdot}32\ \underline{i} - 10\ \underline{j})$$ கி.கி. எடை.

$$\therefore\ R_x = -17{\cdot}32\,;\ \ R_y = -10$$

$$\therefore\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{(-17{\cdot}32)^2 + (-10)^2}$$
$$= \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (10)^2}$$
$$= \sqrt{300 + 100}$$
$= 20$ கி.கி. எடை.

OB என்ற கோடு, x அச்சுடன், $\theta°$ உள்ள கோணத்தை அமைக்குமென்றால்,

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$
$$= \frac{-10}{-17{\cdot}32}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \theta = 180° + 30°$$
$= 210°$ ஆகும்.

மாதிரி 2—8: கீழ்க் காணும் இடப் பெயர்ச்சி திசையிகளின் தொகுபயன் திசையியை பல கோண திசையி விதிப்படி காண்க.

$\underline{A}$ = 420 மீ., S 75° W.

B = 400 மீ., N 45° E.

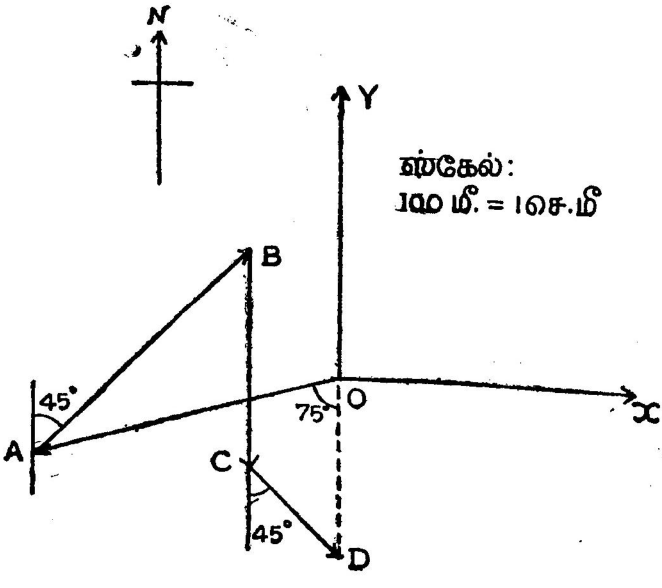
$\underline{C}$ = 290 மீ., S

D = 170 மீ., S 45° E.

முதல் வழி :

படம் 2-22ல் காட்டியுள்ளவாறு, "நுனி-அடி" அமைப்பில்,

$$\underline{OA} + \underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CD} = \underline{OD}$$ ஆகும்.



படம் 2–22.

வரைபடத்தில் ODன் நீளம் 2·4 செ.மீ. ஆகும்.

எனவே $|\underline{R}| = 2{\cdot}4 \times 100$

$= 240$ மீ. ஆகும்.

வரைபடத்தில் $\theta = x\hat{O}D = 270°$ ஆகும்.

இரண்டாவது வழி :

$\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை x, y அச்சுக்களில் அமைக்கவும். அப்பொழுது,

$$\underline{A} = 420 \ (\cos 195^\circ \ \underline{i} + \text{Sin } 195 \ \underline{j})$$

$$= 420 \ (-\cos \ 15^\circ \ \underline{i} - \text{Sin } 15^\circ \ \underline{j})$$

$$= -420 \ \cos \ 15^\circ \ \underline{i} - 420 \ \text{Sin } \ 15^\circ \ \underline{j}$$

$$\underline{B} = 400 \ (\cos 45^\circ \ i + \text{Sin } 45^\circ \ j)$$

$$= 400 \ \cos 45^\circ \ i + 400 \ \text{Sin } 45^\circ \ \underline{j}$$

$$\underline{C} = 290 \ (-\underline{j})$$

$$= -290 \ \underline{j}$$

$$\underline{D} = 170 \ (\cos 45^\circ \ \underline{i} - \text{Sin } 45^\circ \ \underline{j})$$

$$= 170 \ \cos 45^\circ \ i - 170 \ \text{Sin } 45^\circ \ \underline{j}$$

$$\therefore \ \underline{R} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}$$

$$= (-420 \cos 15^\circ + 400 \cos 45^\circ + 170 \cos 45^\circ) \ \underline{i} + (-420 \text{ Sin } 15^\circ + 400 \text{ Sin } 45^\circ - 290 - 170 \text{ Sin } 45^\circ) \ \underline{j}$$

$$= (-420 \cos 15^\circ + 570 \cos 45^\circ) \ i + (-420 \text{ Sin } 15^\circ + 230 \text{ Sin } 45^\circ - 290) \ \underline{j}$$

$$= \left(-420 \ \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}} + 570 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ \underline{i} + \left(-420 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2 \ \sqrt{2}} \right) + \frac{230}{\sqrt{2}} - 290 \right) j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(360 - 210 \sqrt{3} \right) \ \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(440 - 210\sqrt{3} - 290\sqrt{2} \right) \underline{j}$$

$$= -(2{\cdot}631 \ \underline{i} + 236{\cdot}053 \ \underline{j})$$

$$\therefore \ R_x = -2{\cdot}63 \quad ; \quad R_y = -236{\cdot}053$$

$$\therefore \ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$= \sqrt{(-2{\cdot}63)^2 + (-236{\cdot}053)^2}$$

$$= 236{\cdot}05 \text{ மீ.}$$

OD என்ற கோடு x அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைப்பதாகில்,

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$
$$= \frac{-236{\cdot}053}{-2{\cdot}63}$$
$$= 89{\cdot}07$$
$$\therefore\ \theta = 180° + 89°\ 21'$$
$$= 269°\ 21' \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2—9 : இடப் பெயர்ச்சி 30 மீட்டர் உள்ள திசையி ஒன்று, (– 2, 2, 1) என்ற திசை விகிதங்களைக் கொண்ட திசையில் செயற்படுகிறதென்றால் அதன் திசைக் கிடக்கைகளையும், x, y, z அச்சுக்களில் அதன் எண்ணிப் பகுதிகளையும் காண்க.

$\underline{a}$ என்பது $\underline{A}$ என்ற திசையியிக்கு ஒரு போகாக அமையும் ஓரலகுத் திசையி என்றால்,

$$\underline{A} = A\ \underline{a}$$
$$= 30\ \underline{a} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $$\underline{a} = \frac{1}{(\sqrt{-2)^2 + (2)^2 + (1)^2}}\ (-2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k})$$
$$= \frac{1}{3}(-2\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + \underline{k}) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $l = -\frac{2}{3},\ m = \frac{2}{3},\ n = \frac{1}{3}$ என்பவை திசைக் கிடக்கைகளாகும்.

ஆதலால் $$\underline{A} = 30\left(-\frac{2}{3}\underline{i} + \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{1}{3}\underline{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $A_x\,\underline{i} + A_y\,\underline{j} + A_z\,\underline{k} = -20\,\underline{i} + 20\underline{j} + 10\,\underline{k}$ ஆகும்.

$$\therefore\ A_x = -20 \text{ மீ.};\quad A_y = 20 \text{ மீ.};\quad A_z = 10 \text{ மீ.}$$
ஆகும்.

மாதிரி 2—10 : 420 கி. கி. எடையுள்ள விசை ஒன்று, (–3, 7, 0), (–5, 10, –6) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்

கோட்டில் செயற்படுகிறதென்றால், விசையை வரையறுக்கும் திசையி-இன் திசைக் கிடக்கைகளையும், அதன் எண் மதிப்பையும் காண்க.

பரந்த வெளியில் O என்ற சுட்டமைப்புப் புள்ளியில் (−3, 7, 0), (−5, 10, −6) என்பவை, $\underline{P}$, Q என்ற புள்ளிகளை வரையறுப்பதாகில்,

$$\underline{OP} = -3\,\underline{i} + 7\,\underline{j} + 0\underline{k},$$

$$\underline{OQ} = -5\,\underline{i} + 10\,\underline{j} - 6\,\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= (-5\,i + 10\,\underline{j} - 6\,\underline{k}) - (-3\,\underline{i} + 7\,\underline{j} + 0k)$$

$$= -2\,\underline{i} + 3\,\underline{j} - 6\,\underline{k}$$

$$= 7\left(-\frac{2}{7}\,\underline{i} + \frac{3}{7}\,j - \frac{6}{7}\,k\right)$$

$$= 7\,\underline{f} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\underline{PQ}$ என்ற திசையி-இன் செயற்படும் திசையை, $\underline{f} = -\frac{2}{7}\,\underline{i} + \frac{3}{7}\,\underline{j} - \frac{6}{7}\,\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி வரையறுக்கும்.

ஆதலால் $l = -\frac{2}{7},\ m = \frac{3}{7}\ \ n = -\frac{6}{7}$

மேலும் $\underline{F} = F\,\underline{f}$

$$= 420\left(-\frac{2}{7}\,\underline{i} + \frac{3}{7}\,\underline{j} - \frac{6}{7}\,\underline{k}\right)$$

$$= -120\,\underline{i} + 180\,\underline{j} - 360\,\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore\ F_x = -120$ கி.கி. எடை; $F_y = 180$ கி.கி. எடை;
$F_z = -360$ கி.கி. எடை ஆகும்.

மாதிரி 2—11: **15** மீ./வி^{2} மதிப்புள்ள முடுக்கம், **(5, 8, 14)** என்ற புள்ளியை, (7, 3, 0) என்ற புள்ளியுடன் சேர்க்கும் நேர் கோட்டில் செயற்படுமானால், முடுக்கத்தை வரையறுக்கும் திசையி-இன் திசைக் கிடக்கைகளையும், x, y, z அச்சுக்களில் முடுக்கத்தின் எண்ணிப் பகுதிகளையும் காண்க.

P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே (5, 8, 14), (7, 3, 0) என்னுமிடத்திலமையுமாகில்,

$$\underline{OP} = 5\,\underline{i} + 8\,\underline{j} + 14\,\underline{k},$$

$$\underline{OQ} = 7\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 0\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= (7\,\underline{i} + 3\,\underline{j}) - (5\,\underline{i} + 8\,\underline{j} + 14\,\underline{k})$$

$$= 2\,\underline{i} - 5\,\underline{j} - 14\,\underline{k}$$

$$= 15\left(\frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{14}{15}\underline{k}\right)$$

$$= 15\,\underline{f}.$$

இங்கு $\underline{f}$ என்பது PQ என்ற நேர்கோட்டிலமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும். எனவே, முடுக்கம் செயற்படும் திசையை, $\underline{f} = \frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{14}{15}\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி அறிவிக்கும்.

ஆதலால், முடுக்கம் செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே $l = \frac{2}{15}$, $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{14}{15}$ ஆகும்.

மேலும் $\underline{a} = a\underline{f}$ ஆவதால்,

$$a_x\,\underline{i} + a_y\,\underline{j} + a_z\,\underline{k} = 15\left(\frac{2}{15}\underline{i} - \frac{5}{15}\underline{j} - \frac{14}{15}\underline{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால் $a_x = 2$ மீ/வி^{2}

$a_y = -5$ மீ/வி^{2}

$a_z = -14$ மீ/வி^{2} ஆகும்.

மாதிரி 2—12: 190 செ.மீ. நீளமுள்ள $\underline{L}$ என்னும் திசையி, (− 3, − 1, − 11) என்ற புள்ளியிலிருந்து (15, 0, −5) என்ற புள்ளிக்கு வரையும் நேர்கோட்டில் செயற்படுகிறது. $\underline{L}$க்கு இணையாக, (5, −7, 0) என்ற புள்ளி வழியே, $\underline{M}$ என்ற திசையி செயற்படுகிறது. $\underline{M}$ செயற்படும் கோட்டில் மற்றொரு புள்ளியைக் காண்க.

(−3, − 1, − 11), (15, 0, − 5) என்பவை P, Q என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும். அப்பொழுது,

$$\underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= (15\,\underline{i} - 5\,\underline{k}) - (-3\,i - \underline{j} - 11\,\underline{k})$$

$$= 18\,\underline{i} + \underline{j} + 6\,\underline{k}$$

$$= 19\left(\frac{18}{19}\,\underline{i} + \frac{1}{19}\,\underline{j} + \frac{6}{19}\,\underline{k}\right),\ 19 = \sqrt{18^2 + 1^2 + 6^2}$$

$$= 19\,\underline{f}$$ ஆகும்.

$$\therefore\ \underline{f} = \frac{18}{19}\,\underline{i} + \frac{1}{19}\,\underline{j} + \frac{6}{19}\,\underline{k}$$

$$\therefore\ \underline{L} = L\,\underline{f}$$

$$= 190\left(\frac{18}{19}\,\underline{i} + \frac{1}{19}\,\underline{j} + \frac{6}{19}\,\underline{k}\right)$$

$$= 180\,\underline{i} + 10\,\underline{j} + 60\,\underline{k}$$ ஆகும்.

மேலும் $\underline{M} = M\,\underline{f}$

$$= M\left(\frac{18}{19}\,\underline{i} + \frac{1}{19}\,\underline{j} + \frac{6}{19}\,\underline{k}\right)$$ ஆகும்.

(5, —7, 0) என்பது, R என்ற புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். $\underline{M}$ செயற்படும் கோட்டில் S (x, y, z) என்பது மற்ருெரு புள்ளியாகில்

$$\underline{RS} = \underline{OS} - \underline{OR}$$

$$= (x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}) - (5\underline{i} - 7\underline{j})$$

$$= (x - 5)\,\underline{i} + (y + 7)\,\underline{j} + z\,\underline{k}$$ ஆகும்.

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + z^2}\left(\frac{x - 5}{\sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + 2^2}}\,\underline{i} + \frac{y + 7}{\sqrt{\cdot\cdot}}\,\underline{j} + \frac{z}{\sqrt{\cdot\cdot}}\,\underline{k}\right)$$ என்ருகும்.

PQ, RS என்பவை இணை கோடுகளாவதால்,

$$\frac{x - 5}{\sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + z^2}} = \frac{18}{19}$$

$$\frac{y + 7}{\sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + z^2}} = \frac{1}{19}$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x-5)^2 + (y+7)^2 + z^2}} = \frac{6}{19}$$ ஆகும்.

$\therefore \quad \frac{x-5}{18} = \frac{y+7}{1} = \frac{z}{6} = r$ எனக் கொண்டால்,

$(r \neq 0)$,

$x = 18r + 5$

$y = r - 7$

$z = 6r$ என்றுகும்.

r-க்கு எந்த மதிப்பையும் கொடுக்கலாம். ஏதாவதொரு புள்ளியை வரையறுக்க $r = 1$ எனக் கொள்ளவும். அப்பொழுது

$x = 18 + 5 = 23$

$y = 1 - 7 = -6$

$z = 6 \quad = 6$ என்றுகும்.

எனவே $\underline{M}$ செயற்படும் கோட்டில் (23, – 6, 6) என்பது மற்றொரு புள்ளியாகும்.

மாதிரி 2—13 : ஒரு சில திசையிகளின் எண் மதிப்புக்களும், அவைகள் செயற்படும் கோடுகளின் திசை விகித எண்களும் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அவைகளின் தொகுபயன் திசையியைக் காண்க.

அட்டவணை

திசையி	எண் மதிப்பு	திசை விகித எண்கள்
$\underline{A}$	A = 98 கி. கி.	(6, 4, –12)
$\underline{B}$	B = 76 கி. கி.	(–6, 18, 1)
$\underline{C}$	C = 90 கி. கி.	(4, –1, 8)

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என்பவை, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்ற திசையிகள் செயற்படும் கோடுகளில் முறையே ஓரலகுத் திசையிகளைக் குறிக்கட்டும்.

அப்பொழுது,

$$\underline{a} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-12)^2}}\, \underline{i} + \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-12)^2}}\, \underline{j}$$

$$- \frac{12}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-12)^2}}\, \underline{k}$$

$$= \frac{6}{14}\, \underline{i} + \frac{4}{14}\, \underline{j} - \frac{12}{14}\, \underline{k}$$ என்றாகும்.

அவ்வாறே $\underline{b} = -\frac{6}{19}\, \underline{i} + \frac{18}{19}\, \underline{j} + \frac{1}{19}\, \underline{k}$,

$\underline{c} = \frac{4}{9}\, \underline{i} - \frac{1}{9}\, \underline{j} + \frac{8}{9}\, \underline{k}$ ஆகும்.

$\underline{R}$ என்பது $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் திசையியைக் குறிக்குமென்றால்,

$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$$

$$= A\, \underline{a} + B\, \underline{b} + C\, \underline{c}$$

$$= 98\left(\frac{6}{14}\, \underline{i} + \frac{4}{14}\, \underline{j} - \frac{12}{14}\, \underline{k}\right)$$

$$+ 76\left(-\frac{6}{19}\, \underline{i} + \frac{18}{19}\, \underline{j} + \frac{1}{19}\, \underline{k}\right)$$

$$+ 90\left(\frac{4}{9}\, \underline{i} - \frac{1}{9}\, \underline{j} + \frac{8}{9}\, \underline{k}\right)$$

$$- 42\, \underline{i} + 28\, \underline{j} - 84\, \underline{k}$$

$$- 24\, \underline{i} + 72\, \underline{j} + 4\, \underline{k}$$

$$+ 40\, \underline{i} - 10\, \underline{j} + 80\, \underline{k}$$

$$= 58\, \underline{i} + 90\, \underline{j}$$

$$= \sqrt{11464}\left(\frac{58}{\sqrt{11464}}\, \underline{i} + \frac{90}{\sqrt{11464}}\, \underline{j}\right),$$

$\sqrt{58^2 + 90^2} = \sqrt{11464}$ ஆகும்.

எனவே $\underline{R} = \sqrt{11464} = 107$ கி. கி.

$$R_x = 58, \quad l = \frac{58}{\sqrt{11464}} = \frac{58}{107}$$

$$R_y = 90, \quad m = \frac{90}{\sqrt{11464}} = \frac{90}{107}$$

$R_z = 0, \ n = 0$ என்றாகும்.

மாதிரி 2—14 : P, Q என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவுகள் முறையே (2, — 4, 1), (7, 10, 5) எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. P-லிருந்து, Q-க்கு முறையே (3, 0, 4), (—4, 1, 8), (1, 2, —2) என்ற திசை விகித எண்களைக் கொண்ட திசைகளின் வழியாகச் சென்றால், இடையில் சென்ற வழிகளின் தொலைவுகளைக் காண்க.

O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுக்கும்போது,

$\underline{OP} = 2\,\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}$,

$\underline{OQ} = 7\,\underline{i} + 10\,\underline{j} + 5\underline{k}$ என்றாகும்.

$\therefore \ \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$

$= (7\,\underline{i} + 10\,\underline{j} + 5\,\underline{k}) - (2\,i - 4\,\underline{j} + \underline{k})$

$= 5\,\underline{i} + 14\,\underline{j} + 4\underline{k}$ ஆகும்.

P-லிருந்து, Q-க்குச் செல்லும்போது எத் திசைகளின் வழியாகச் செல்ல வேண்டும் என்பதை திசை விகிதங்கள் வரையறுக்கும். அத் திசைகளில் கடக்கும் தொலைவுகளை A, B, C எனக் கொள்ளவும். அப்பொழுது,

$\underline{PQ} = \underline{PA} + \underline{AB} + \underline{BQ}$

$= \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$ என்றாகும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ஆகிய திசையிகள் செயற்படும் திசைகளில், $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை முதலில் வரையறுக்கவும்.

$\underline{a}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி (3, 0, 4) என்ற திசை விகிதங்களைப் பெற்ற திசையிலமைவதால்,

$$\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}}\left(3\,\underline{i} + 0\,\underline{j} + 4\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(3\,\underline{i} + 4\,\underline{k}\right)$$ என்றாகும்.

அவ்வாறே,

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{16 + 1 + 64}}\left(-4\,\underline{i} + \underline{j} + 8\,\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-4\,\underline{i} + \underline{j} + 8\,\underline{k}\right)$$ என்றும்,

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 4}}\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} - 2\,\underline{k}\right)$$

$= \frac{1}{3}\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} - 2\,\underline{k}\right)$ என்றும் வரையறுக்கப் படும். ஆதலால்,

$$\underline{A} = A\,\underline{a} = \frac{A}{5}\left(3\,\underline{i} + 4\,\underline{k}\right)$$

$$\underline{B} = B\,\underline{b} = \frac{B}{9}\left(-4\,\underline{i} + \underline{j} + 8\,\underline{k}\right)$$

$$\underline{C} = C\,\underline{c} = \frac{C}{3}\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} - 2\,\underline{k}\right)$$ என்றாகும்.

எனவே,

$\underline{PQ} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$ என்ற சமன்பாடு,

$$5\,\underline{i} + 14\,\underline{j} + 4\,\underline{k} = \left(\frac{3A}{5} - \frac{4B}{9} + \frac{C}{3}\right)\underline{i} + \left(\frac{B}{9} + \frac{2C}{3}\right)\underline{j}$$

$$+ \left(\frac{4A}{5} + \frac{8B}{9} - \frac{2C}{3}\right)\underline{k}$$ என்றாகும்.

இருபுறங்களிலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களை (coefficients)ச் சமப்படுத்த,

$$\frac{3A}{5} - \frac{4B}{9} + \frac{C}{5} = 5, \quad \text{(i)}$$

$$\frac{B}{9} + \frac{2C}{3} = 14, \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{4A}{5} + \frac{8B}{9} - \frac{2C}{3} = 4 \quad \text{(iii)}$$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$\text{(i)} \times 2 + \text{(iii)} \rightarrow \frac{6A}{5} - \frac{8B}{9} + \frac{2C}{5} + \frac{4A}{5} + \frac{8B}{9} - \frac{2C}{5} = 10 + 4$$ என்றாகும்.

அதாவது $\frac{10A}{5} = 14$

$\therefore \quad A = 7$ ஆகும்.

$$\text{(ii)} + \text{(iii)} \rightarrow \frac{4A}{5} + B = 14 + 4$$ என்றாகும்.

அதாவது $B = 18 - \frac{4}{5}A$

$$= 18 - \frac{28}{5}$$

$$= \frac{90 - 28}{5}$$

$= \frac{62}{5}$ ஆகும்.

(ii)-வது சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{2C}{3} = 14 - \frac{B}{9}$$

$$= 14 - \frac{62}{5} \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{630 - 62}{45}$$

$$= \frac{568}{45}$$

$$C = \frac{568}{45} \times \frac{3}{2}$$

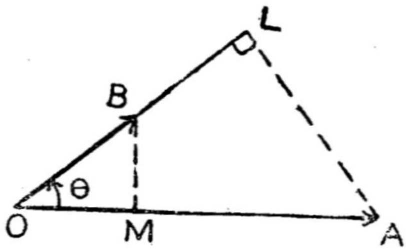
$= \frac{284}{9}$ ஆகும்.

$\therefore A = 7; \; B = \frac{62}{5}, \; C = \frac{284}{9}$ ஆகும்.

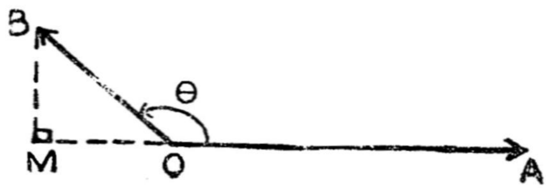
2—8. இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar product of two vectors):

இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, அத் திசையிகளின் எண் மதிப்புக்கள், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தின் கிடக்கை மதிப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் வரையறுக்கப்படும்.

படம் {2-23 (a), (b)}இல், O என்ற புள்ளியில், $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ என்ற அம்புக் கோடுகள், $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளைக் குறிக்கின்றன. θ என்பது, $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகள் செயற்படும் திசைகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் குறிக்கிறது.



படம் 2-23 (a)



படம் 2-23 (b).

இங்கு θ-ன் மதிப்பு $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ என்ற வரம்பிற்குள் அமைவதாகக் கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, $AB \cos \theta$ என்ற எண் மதிப்பால் வரையறுக்கப்படும். $\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கி குறியீட்டு முறையில்,

$\underline{A} \cdot \underline{B}$ என்று எழுதப்படும்.

எனவே,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}|\,|\underline{B}| \cos(\underline{A}, \underline{B})$$

$$= AB \cos \theta \text{ ஆகும்.}$$

வலதுபுறமுள்ள பெருக்குத் தொகை எண் மதிப்பை மட்டுமே பெற்றிருப்பதால் இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கிக்கு எண் மதிப்பு மட்டும்தான் உள்ளது. ஆகவே இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி ஒரு எண்ணியாகும்.

இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கியைக் குறிப்பிட அவைகளுக்கு இடையில் ஒரு புள்ளியை (Dot) அமைப்பதால், எண்ணிப் பெருக்கியைப் புள்ளிப் பெருக்கி (Dot Product) என்றும் கூறலாம்.

படம் 2-23 (a)-ல் $BM \perp OA$ என்றிருக்குமாறு வரையப் பட்டுள்ளது. அவ்வாறே, $AL \perp OB$ என்றிருக்குமாறும் வரையப்பட்டுள்ளது.

OMB என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$OM = OB \cos\theta$$

$$= B \cos\theta \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே OLA என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$OL = OA \cos\theta$$

$$= A \cos\theta \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos\theta$

$$= A\,(B \cos\theta)$$

$$= OA\ OM \text{ என்றும்}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = BA \cos\theta$$

$$= B\,(A \cos\theta)$$

$$= OB \cdot OL \text{ என்றும் ஆவதால்}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos\theta = OA \cdot OM = OB \cdot OL \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பு $\underline{A}$ திசையி-இன் எண் மதிப்பையும், $\underline{A}$ செயற்படும் கோட்டில் B-ன் வீழ்ச்சியின் எண் மதிப்பையும் (Length of Projection) பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது.

அவ்வாறே $\underline{B}$ திசையி-இன் எண் மதிப்பை $\underline{B}$-ன் திசையில், $\underline{A}$-ன் வீழ்ச்சியின் எண் மதிப்பளவால் பெருக்கியும் எண்ணிப் பெருக்கியைக் கணக்கிடலாம்.

மேலும் படம் 2-23 (a)-ல் OA, OM ; OB, OL என்பவை ஒரே திசையிலமைவதால், எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பு ஒரு மிகை எண்ணாகும். ஆனால் படம் 2-23 (b)-ல் $\underline{B}$-ன் வீழ்ச்சி $\underline{A}$ செயற்படும் திசைக்கு எதிர்ப்புறத்திலமைவதால் எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பு ஒரு குறை எண்ணாகிறது (Negative Number). ஆகவே திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் குறுங்கோணம் (Acute Angle) அல்லது விரிகோணம் என்பதை யொட்டி எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பு ஒரு மிகை அல்லது குறை எண்ணாகும் என அறியலாம்.

மேலும்,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta$$
$$= BA \cos \theta$$
$$= \underline{B} \cdot \underline{A} \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால் எண்ணிப் பெருக்கி, திசையிகளின் பரிமாற்று விதியை (Commutative Law)த் தழுவி செயல்படுகிறது.

சுழியற்ற இரு திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் ஒரு செங்கோணமானால், (அதாவது $\theta = 90^\circ$ எனில்)

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos 90^\circ$$
$$= 0 \text{ ஆகும்.}$$

அப்பொழுது $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளதாகும்.

θ-ன் மதிப்பு 0° எனில்,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos 0^\circ$$
$$= AB \text{ என்றாகும்.}$$

அதாவது ஒரே திசையிலமையும் இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, திசையி எண் மதிப்புக்களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

θ-ன் மதிப்பு 180° என்றால்,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos 180^\circ$$
$$= AB(-1)$$
$$= -AB \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் எண்ணிப் பெருக்கி நியதியில் $\underline{B} = \underline{A}$ என்று எடுக்கும்போது,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AA \cos 0^\circ$$
$$= A^2 \text{ என்றாகும்.}$$

ஆதலால் ஒரு திசையி-இன் எண் மதிப்பை,

$A = +\sqrt{(\underline{A} \cdot \underline{A})}$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியும் கண்டிடலாம்.

$\underline{A}$ அல்லது $\underline{B}$, ஒரு சுழித் திசையி(Null Vector) யாகுமெனில்,

$$\underline{0} \cdot \underline{B} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே $\underline{A} \cdot \underline{0} = 0$ என்றாகும்.

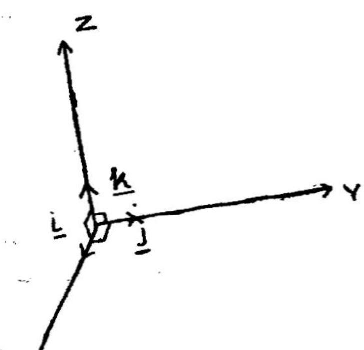
எனவே எண்ணிப் பெருக்கியில் வந்திடும் திசையிகள் சுழியற்ற திசையிகளாகக் கருதப்படும்.

மேலும் $\underline{A} = A\,\underline{a}$, $\underline{B} = B\,\underline{b}$ என்று அவைகளுக்குகந்த $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளின் மடங்கால் வரையறுக்கும்போது,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A\,\underline{a} \cdot B\,\underline{b}$$
$$= AB\,(\underline{a} \cdot \underline{b}) \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே $(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \cos\theta$ ஆகும்.

மேலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்பவை படம் 2-24ல் காட்டியவாறு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் x, y, z அச்சுக்களின் திசைகளை அறிவிக்கும் ஓரலகுத் திசையிகளானதால்,



படம் 2-24.

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1$$

ஆகும்.

அவ்வாறே

$$\underline{j} \cdot \underline{j} = 1 = \underline{k} \cdot \underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$$

ஆகும்.

மேலும்

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = 1 \cdot 1 \cos 90^\circ = 0$$

ஆகும்.

ஆதலால்,

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{i} = 0$$
$$\underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{j} = 0$$
$$\underline{k} \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot \underline{k} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளை, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில் பகுதிகளாகப் பிரித்திடும்போது,

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k},$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$$ என்றாகும்.

அப்பொழுது,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \cdot (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k})$$

$$= A_x B_x (\underline{i} \cdot \underline{i}) + A_x B_y (\underline{i} \cdot \underline{j}) + A_x B_z (\underline{i} \cdot \underline{k})$$

$$+ A_y B_x (\underline{j} \cdot \underline{i}) + A_y B_y (\underline{j} \cdot \underline{j}) + A_y B_z (\underline{j} \cdot \underline{k})$$

$$+ A_z B_x (\underline{k} \cdot \underline{i}) + A_z B_y (\underline{k} \cdot \underline{j}) + A_z B_z (\underline{k} \cdot \underline{k})$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$ ஆகும்.

மேலும்,

$$A^2 = \underline{A} \cdot \underline{A} = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \cdot (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k})$$

$$= A_x^2 (\underline{i} \cdot \underline{i}) + A_y^2 (\underline{j} \cdot \underline{j}) + A_z^2 (\underline{k} \cdot \underline{k})$$

$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$ என்றும்,

$$B^2 = \underline{B} \cdot \underline{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$ என்றுமாகும்.

எனவே

$$\cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{AB}$$

$$= \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$ என்றாகும்.

மேலும் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளின் திசைக் கிடக்கைகளை முறையே (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) எனக் கொண்டால் அவை களின் மதிப்புக்கள்,

$$l_1 = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\,;\ l_2 = \frac{B_x}{B} = \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$m_1 = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\,;\ m_2 = \frac{B_y}{B} = \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$n_1 = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\,;\ n_2 = \frac{B_z}{B} = \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

ஆகும்.

எனவே

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= \left(\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\right)\left(\frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right)$$

$= l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2$ ஆகும்.

முடிவாக,

$$\cos\theta = \frac{(\underline{A} \cdot \underline{B})}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2$$

என்று வரையறுக்கப்படும்.

மேலும்,

$$\underline{A} \cdot \underline{i} = (A_x\, \underline{i} + A_y\, \underline{j} + A_z\, \underline{k}) \cdot \underline{i} = A_x$$

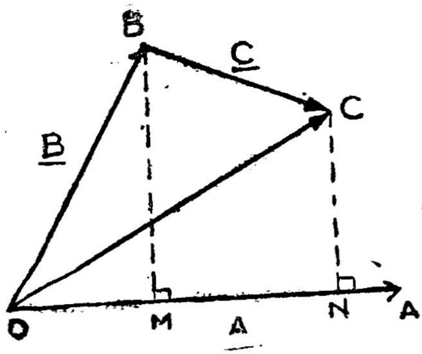
$$\underline{A} \cdot \underline{j} = (A_x\, \underline{i} + A_y\, \underline{j} + A_z\, \underline{k}) \cdot \underline{j} = A_y$$

$\underline{A} \cdot \underline{k} = (A_x\, \underline{i} + A_y\, \underline{j} + A_z\, \underline{k}) \cdot \underline{k} = A_z$ ஆகும்

இங்கு A_x, A_y, A_z என்பவை $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில், $\underline{A}$ என்ற திசையி-இன் வீழ்ச்சி மதிப்புக்களாகும். அவற்றை முறையே, $(\underline{A}, \underline{i})$; $(\underline{A}, \underline{j})$; $(\underline{A}, \underline{k})$ ஆகியவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கிகள் வரையறுக்கின்றன.

2—8 (1) எண்ணிப் பெருக்கியின் பகிர்வு விதி (Distributive Law of scalar product of vectors) :

படம் 2-25இல், O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுத்து, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்ற திசையிகளை $\underline{OA}$, $\underline{OB}$, $\underline{BC}$ என்ற அம்புக்கோடுகள் வரையறுப்பதாகக் கொள்ளவும்.



படம் 2–25.

இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OC} = \underline{OB} + \underline{BC}$$
$$= \underline{B} + \underline{C} \text{ ஆகும்.}$$

B, C என்ற புள்ளிகளிலிருந்து, OA என்ற கோட்டிற்கு BM, CN என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை வரையவும். OA என்ற நேர் கோட்டில் OM, MN, ON என்பவை முறையே OB, BC, OC ஆகியவற்றின் வீழ்ச்சிகளாகும்.

ஆதலால் $\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = OA \cdot ON$

$$= OA \cdot (OM + MN)$$
$$= OA \cdot OM + OA \cdot MN$$
$$= \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே எண்ணிப்பெருக்கி பகிர்வு விதியைத் தழுவிச் செயல் படுகிறது.

மேலும்,

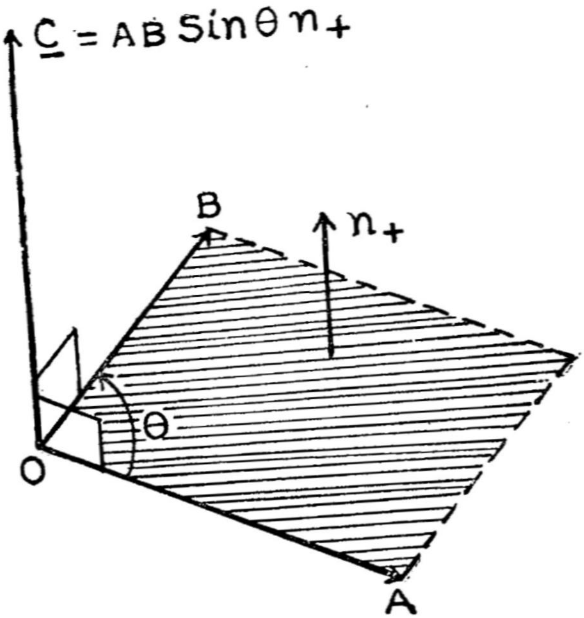
$$(\underline{A} + \underline{B}) \cdot (\underline{C} + \underline{D}) = \underline{A} \cdot (\underline{C} + \underline{D}) + \underline{B} \cdot (\underline{C} + \underline{D})$$
$$= \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{A} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{D}$$

என்றும்,

$$m\,\underline{A} \cdot n\,\underline{B} = (mA)\,(nB) \cos (m\underline{A},\ n\underline{B})$$
$$= mn\,AB \cos (\underline{A},\ \underline{B})$$
$$= mn\,\underline{A} \cdot \underline{B}$$ என்றும் ஆகும்.

2—9. இரு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி (Vector or cross product of two vectors) :

படம் 2-26இல் O என்ற புள்ளியில், $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்ற அம்புக் கோடுகள் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். A, $\underline{B}$க்களுக்கு



படம் 2-26

இடையிலமையும் கோணத்தை θ எனக் கொள்ளவும். $\underline{n}$ என்பது $\underline{A}$, $\underline{B}$ திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குக் குத்தான திசையில் செயற்படும் ஓரலகுத் திசையியாக இருக்கட்டும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கி ஒரு திசையியாகக் கருதப்படும். அதை $\underline{C}$ எனக் கொண்டால், $\underline{C}$-ன் எண் மதிப்பு $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமமாகவும், அது செயற்படும் திசை, A, Bக்களால் வரையறுக்கப்பட்ட தளத்திற்குக் குத்தாக வும் இருக்குமெனக் கொள்ள வேண்டும். இணைகரத்தின் பரப்பு, அதன் அடிப்பக்கம், குத்து உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையாவதால் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு திசையிகளின் "குறுக்குப் பெருக்கித் திசையி"யை

$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு திசையிகளின் "குறுக்குப் பெருக்கித் திசையி"யை, $A \times B$, $\underline{A} \times \underline{B}$, $\vec{A} \times \vec{B}$, $[\underline{A} \times \underline{B}]$, $\vee \underline{A}\,\underline{B}$, $\underline{A} \wedge \underline{B}$ ஆகிய குறியீடுகளில் ஏதேனுமொன்றைப் பயன்படுத்திக் குறிக்க லாம். இவற்றில் $\underline{A} \wedge \underline{B}$ என்ற குறியீடு மட்டுமே இந்நூலில் பயன் படுத்தப்படும்.

இங்கு $C = |\underline{C}| = |\underline{A}|\,|\underline{B}| \sin\theta$

$= A \cdot B \sin\theta$ ஆகும்.

$\underline{C}$ செயற்படும் திசைக் கோட்டைத் தேவைக்கேற்ப $(\underline{A}, \underline{B})$ தளத்திற்கு மேல்நோக்கிச் செங்குத்தாகவோ அல்லது கீழ் நோக்கிச் செங்குத்தாகவோ எடுத்தல் வேண்டும். மேல்நோக்கி யுள்ள திசை $\underline{n+}$ என்ற ஓரலகுத் திசையியால் அறிவிக்கப்படும். அங்ஙனமே $\underline{n-}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி கீழ் நோக்கியுள்ள திசையை அறிவிக்கும். மேலும் $\underline{C}$ என்ற திசையி, $\underline{n+}$ அல்லது $\underline{n-}$ ஆகியவற்றின் திசைகளில் செயற்படும் என்பதைப் பின்வரு மாறும் வரையறுக்கலாம். வலப்புறத் திருகுச் சுருள் ஒன்று $\underline{C}$ திசையியை அச்சாகக் கொண்டு $\underline{A}$ செயற்படும் திசையிலிருந்து $\underline{B}$ செயற்படும் திசையை நோக்கிச் சுழலும்போது, திருகு மேல்

நோக்கிச் செல்லுவதால் $\underline{C}$ செயற்படும் திசையை $\underline{n+}$ வரையறுப்பதாகவும் $\underline{B}$ செயற்படும் திசையிலிருந்து $\underline{A}$ செயற்படும் திசையை நோக்கித் திருகைச் சுழற்றிடும்போது திருகு கீழ் நோக்கி வருவதால் $\underline{C}$ செயற்படும் திசையை $\underline{n-}$ வரையறுப்பதாகவும் கொள்ளப்படும்.

திருகு மேல்நோக்கிச் செல்லும்போது, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ஆகிய திசையிகள் கடிகார முள்ளின் இயக்கத்திற்கு எதிரான சுழற்சியை மேற்கொள்வதால், $\underline{C}$ செயற்படும் திசையைத் தளத்தின் மேல் நோக்கிய ஓரலகுத் திசையி $\underline{n+}$ ஆலும், $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{C}$ ஆகிய திசையிகள் வலஞ்சுழியாவதால் (clockwise rotation) $\underline{C}$ செயற்படும் திசையைத் தளத்தின் கீழ்நோக்கிய ஓரலகுத் திசையி $\underline{n-}$ ஆலும் குறித்தல் வேண்டும்.

எனவே $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்பவை இடஞ்சுழியாக அமையும்போது

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$= (AB \sin \theta)\ \underline{n+}$$ எனவும்,

$\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{C}$ என்பவை வலஞ்சுழியாக அமையும்போது,

$$\underline{C} = \underline{B} \wedge \underline{A}$$

$$= (AB \operatorname{Sin} \theta)\ \underline{n-}$$

$$= -(AB \operatorname{Sin} \theta)\ \underline{n+}$$ எனவும் கொள்ளப்படும்.

இங்கு $(\underline{A} \wedge \underline{B}) = -(\underline{B} \wedge \underline{A})$ என்றாகிறது.

அல்லது $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \neq (\underline{B} \wedge \underline{A})$ ஆகும்.

அதாவது இரு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி, திசையிகள் பரிமாற்ற விதியை(Commutative Law)த் தழுவி செயற்படவில்லை என அறிதல் வேண்டும்.

சுழியற்றதான $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு திசையிகள் இணையாக இருக்குமானால் அவைகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் சுழியாகும் (அதாவது $\theta^\circ = 0$). அப்பொழுது,

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$
$$= (AB \sin 0°)\ \underline{n+}$$
$$= \underline{0}$$ ஆகும்.

எனவே இரு திசையிகள் இணையாக அமைந்திட அவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கி சுழியாக வேண்டும்.

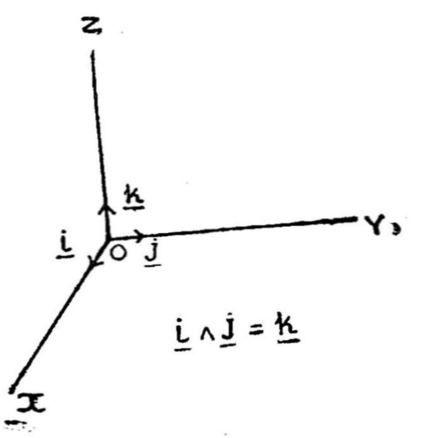
மேலும் $\underline{A}$, $\underline{B}$க்களுக்கு இடையிலமையும் கோணம் ஒரு செங்கோணமானல் ($\theta = 90°$),

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$
$$= (AB \sin 90°)\ \underline{n+}$$
$$= AB\ \underline{n+}$$ என்ருகும்.

எனவே $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு திசையிகள் செங்குத்தாக அமைவதற்குரிய நியதி: "$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$" ஆகும். அவைகள் இணையாக அமைவதற்குரிய நியதி: "$\underline{A} \wedge \underline{B} = 0$" ஆகும்.

2—9 (1) ஓரலகுத் திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கியைக் காணுதல்:

படம் 2-27இல் காட்டியவாறு O என்ற புள்ளியின் வழியாக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள ox, oy, oz என்ற அச்சுக்களை எடுக்கவும். அவைகளின் திசைகளை முறையே $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் குறிக்கட்டும்.



படம் 2–27.

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வலப்புறத் திருகு முறைப்படி (Right Handed Screw Rule) ஒரு

வலப்புற மும்மை (Right Handed Triad)களாகும். அவைகள் ஒரு வலப்புற அமைப்பு முறையைக் (Right Handed System of Reference) குறிப்பதாகவும் கொள்ளப்படும்.

$\underline{i}, \underline{i}$ என்ற சமமான ஓரலகுத் திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கித் திசையியை ஆராயும்போது அவைகளுக்கிடையிலமையும் கோணம் சுழியாவதால்,

$$\underline{i} \wedge \underline{i} = (1 \cdot 1 \sin 0)\ \underline{n+}$$
$$= 0 \cdot \underline{K}$$
$$= \underline{0} \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே,

$$\underline{j} \wedge \underline{j} = 0 = \underline{k} \wedge \underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{i}, \underline{j}$ என்ற இரு தனித்த ஓரலகுத் திசையிகளின் திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியை ஆராயும்போது அவைகளுக்கிடையிலமையும் கோணம் செங்கோணமாவதால்,

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = (1 \cdot 1 \text{ Sin } 90^\circ)\ \underline{n+}$$
$$= k \text{ ஆகும்.}$$

($\because$ $\underline{i}, \underline{j}$ தளத்திற்குக் குத்தான திசையை $\underline{k}$ வரையறுக்கும்.)

மேலும் $\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$ ஆகும்.

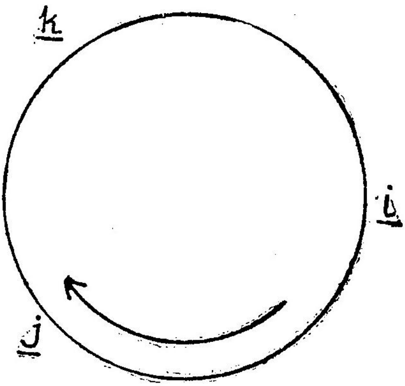
எனவே $(\underline{i} \wedge \underline{j}) = \underline{k} = -(\underline{j} \wedge \underline{i})$ ஆகும்.

அவ்வாறே,

$$(\underline{j} \wedge \underline{k}) = \underline{i} = -(\underline{k} \wedge \underline{j}) \text{ என்றும்,}$$
$$(\underline{k} \wedge \underline{i}) = \underline{j} = -(\underline{i} \wedge \underline{k}) \text{ என்றும் ஆகும்.}$$

இவற்றினை எளிதாக அறிவதற்கு ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்ற திசையிகளைக் கடிகார முள் சுற்றும் திசைக்கு ஒப்ப அடுத்தடுத்துப் படம் 2-28இல் காட்டியவாறு அமைக்கவும்.

ஏதாவது இரு அடுத்தடுத்துள்ள ஓரலகுத் திசையிகளை எடுத்து, கடிகார முள் சுழலும் திசையையொட்டி அவற்றின் திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியை அமைத்தால் அது அடுத்து வரும் திசையியாக இருக்கும்.



படம் 10–94.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ ஆகும்.

கடிகார முள் செல்லும் திசைக்கு எதிராக இரு அடுத்தடுத்துள்ள திசையிகளை எடுத்து அவற்றின் திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியை அமைத்தால், அது மீதமுள்ள திசையிக்கு எதிர் மறையானதாக இருக்கும். அதாவது,

$$\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j} \text{ ஆகும்.}$$

2—9 (2) இரு திசையிகளின் திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியை ஓரலகுத் திசையிகளின் வாயிலாகக் கணக்கிடல் :

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில் பகிர்ந்திடும் போது அவை

$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$,

$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$ என்று குறிக்கப்படும்.

எனவே அவற்றின் குறுக்குப்பெருக்கி,

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \wedge \underline{B} \\ &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \\ &= A_x \underline{i} \wedge (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \\ &\quad + A_y \underline{j} \wedge (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \\ &\quad + A_z \underline{k} \wedge (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \end{aligned}$$

$= A_x B_y \underline{k} - A_x B_z \underline{j}$

$- A_y B_x \underline{k} + A_y B_z \underline{i}$

$+ A_z B_x \underline{j} - A_z B_y \underline{i}$

$= (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j}$

$+ (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k}$ ஆகும்.

இதனை அணிக்கோவை அமைப்பில் (Determinant),

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ என்றும்

குறிக்கலாம்.

2—9 (3) $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைத், திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியால் காணுதல் :

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளில், $\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகிய திசையிகளை,

$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$,

$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$ எனக் குறிக்கவும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$க்களுக்கிடையிலமையும் கோணத்தை θ எனக் கொள்ளவும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றின் திசைக் கிடக்கைகளை (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) எனவும் கொள்ளவும். எனவே,

$$A^2 = (\underline{A} \cdot \underline{A}) = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$B^2 = (\underline{B} \cdot \underline{B}) = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$l_1 = \frac{A_x}{A},$$

$$= \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}},$$

$$l_2 = \frac{B_x}{B},$$

$$= \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}},$$

$$m_1 = \frac{A_y}{A}, \quad n_1 = \frac{A_z}{A};$$

$$= \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}};$$

$$m_2 = \frac{B_y}{B}, \quad n_2 = \frac{B_z}{B};$$

$$= \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}, \quad = \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

ஆகும்.

$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = (AB \sin\theta)\, \underline{n+}$ என்றுவதால்,

$$(\underline{C} \cdot \underline{C}) = (\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B})$$

$$= (AB \sin\theta\ \underline{n+}) \cdot (AB \sin\theta\ \underline{n+})$$

$$= (AB \sin\theta)^2 (\underline{n+} \cdot \underline{n+})$$

$$= A^2 B^2 \sin^2\theta$$

$$= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \sin^2\theta$$

ஆகும்.

மேலும்

$$(\underline{C} \cdot \underline{C}) = \{ (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k} \} .$$
$$\{ (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k} \}$$
$$= (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2$$ ஆகும்.

எனவே இரு வழிகளில் கிடைக்கப்பெற்ற $(\underline{C} \cdot \underline{C})$ன் மதிப்புக்களைச் சமப்படுத்த,

$$\text{Sin}^2\theta = \frac{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}$$
$$= \left(\frac{A_y}{A} \cdot \frac{B_z}{B} - \frac{A_z}{A} \cdot \frac{B_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A} \cdot \frac{B_x}{B} - \frac{A_x}{A} \cdot \frac{B_z}{B}\right)^2 + \left(\frac{A_x}{A} \cdot \frac{B_y}{B} - \frac{A_y}{A} \cdot \frac{B_x}{B}\right)^2$$
$$= (m_1 n_2 - n_1 m_2)^2 + (n_1 l_2 - l_1 n_2)^2 + (l_1 m_2 - m_1 l_2)^2$$
$$= (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2$$

ஆகும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளுக்கிடையிலமையும் கோணம் சுழியாகும்போது Sin θ — Sin 0 = 0 ஆகும். அப்பொழுது,

$$(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 = 0$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 = 0 ; (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 = 0 ; (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 = 0.$$

அதாவது,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} ; \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2} ;$$
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

அதாவது $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{m_2}$ என்றாகும்.

அதாவது, $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளின் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே நேர் விகிதத்திலுள்ளனவாகும்.

2—9 (4) திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியின் பகிர்வு விதி (Distributive Law of Vector Product) :

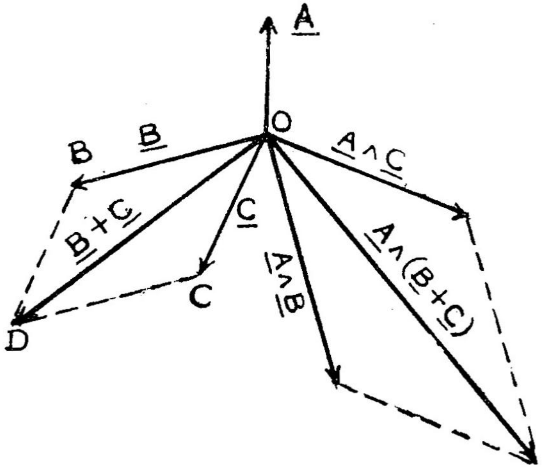
$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ஆகிய திசையிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில் $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்ற திசையிகள் $\underline{A}$க்குச் செங்குத்தாகப் படம் 2-29இல் காட்டியவாறு அமைவதாகக் கொள்ளவும்.

திசையிப் பெருக்கி $\underline{A} \wedge \underline{B}$, $(\underline{A}, \underline{B})$ ஆகியவை வரையறுக்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகவும், எண் மதிப்பு, $AB \text{ Sin } 90^\circ = AB$ என்று உள்ளதாகவும் அமையும். அவ்வாறே,

$(\underline{A} \wedge \underline{C})$ என்ற திசையி, $(\underline{A}, \underline{C})$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், எண் மதிப்பு AC ஆகவும்,

$\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C})$ என்ற திசையி, $\{\underline{A}, (\underline{B} + \underline{C})\}$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், எண் மதிப்பு $A \mid \underline{B} + \underline{C} \mid$ ஆகவும் அமையும்.

மேலும் $\underline{A}$ என்ற திசையி, $\{\underline{B}, \underline{C}, \underline{B} + \underline{C}\}$ ஆகிய திசையிகளால் வரையறுக்கப்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள



படம் 2-29

தால், $(\underline{A} \wedge \underline{B})$, $(\underline{A} \wedge \underline{C})$, $\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C})$ என்ற திசையிகள், $(\underline{B}, \underline{C})$ தளத்தில் முறையே $\underline{B}, \underline{C}, \underline{B} + \underline{C}$ ஆகிய திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாக அமையும். எனவே $\underline{B}, \underline{C}, (\underline{B} + \underline{C})$ என்ற திசையி களை, எண்ணி A ஆல் பெருக்கி, அவைகளை $(\underline{B}, \underline{C})$ தளத்திலேயே 90° அளவில் கடிகார முள் சுற்றும் திசைக்கு எதிராகத் திருப்பி, $(\underline{A} \wedge \underline{B})$, $(\underline{A} \wedge \underline{C})$, $\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C})$ ஆகிய திசையிகளைப் பெறலாம்.

(B + C) என்ற திசையி, $\underline{B}, \underline{C}$ என்ற திசையிகளை O என்ற புள்ளியில் அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு O புள்ளி வழியே வரையும் இணைகரத்தின் மூலை விட்டமாவதால், $\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C})$ என்ற திசையி, $(\underline{A} \wedge \underline{B})$, $(\underline{A} \wedge \underline{C})$ ஆகியவற்றை அண்டைப் பக்கங்களாக உடைய இணைகரத்தின் மூலைவிட்டமாகும். எனவே இணைகர விதிப்படி $\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C})$ என்பது, $(\underline{A} \wedge B)$, $(A \wedge C)$ ஆகியவற்றின் தொகுபயனாகும். அப்பொழுது,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} \wedge \underline{B}) + (\underline{A} \wedge \underline{C})$$ என்றாகும்.

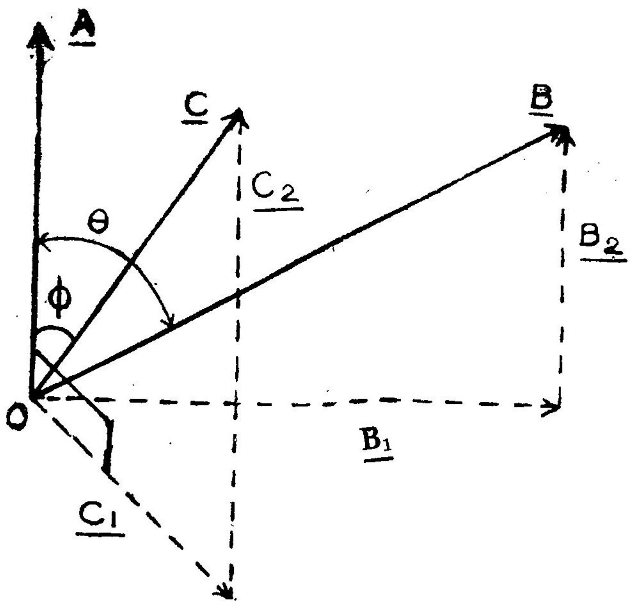
இங்கு $\underline{B}, \underline{C}$ என்ற திசையிகள் ஒரு தளத்திலும், $\underline{A}$ என்ற திசையி அத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் எடுக்கப்பட்டு, திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியின் பகிர்வு விதி வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

இரண்டாவதாக, $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ஆகிய திசையிகளைப் பரந்த வெளியில் O என்ற புள்ளியில், $\underline{OA}, \underline{OB}, \underline{OC}$ என்ற அம்புக் கோடுகள் குறிக்கட்டும்.

மேலும் $\underline{OA}, \underline{OB}$ என்ற அம்புக் கோடுகள் இங்குப் புத்தகத் தாளில் படம் 2-30இல் காட்டியவாறு அமைவதாகக் கொள்ளவும். அப்பொழுது $\underline{B}$ திசையியை புத்தகத் தாளில், $\underline{A}$க்குச் செங்குத் தாகவும் இணையாகவும் பகிர்வு செய்ய முடியும். அவைகளை முறையே $\underline{B_1}, \underline{B_2}$ எனக் கொள்ளவும்.

$\underline{n+}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி காகிதத் தாளுக்குச் செங்குத்தான திசையைக் குறிக்கட்டும்.

திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கி விதிப்படி,



படம் 2-30

$\underline{A} \wedge \underline{B} = (AB \sin \theta)\, \underline{n+}$, ($\theta = \underline{A}$, $\underline{B}$க்களுக்கு இடையிலமையும் கோணம்)

$= A\,(B \sin \theta)\, \underline{n+}$

$= AB_1\, \underline{n+}$ ஆகும்.

மேலும்,

$\underline{A} \wedge \underline{B_1} = (AB_1 \sin 90°)\, \underline{n+}$

$= AB_1\, \underline{n+}$ ஆகும்.

$\underline{A} \wedge \underline{B_2} = (AB_2 \sin 0^c)\, \underline{n+}$

$= \underline{0}$ ($\because$ $\underline{A}$, $\underline{B_2}$ ஆகியவை இணைத் திசையிகள்).

ஆதலால்,

$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{A} \wedge (\underline{B_1} + \underline{B_2}) = \underline{A} \wedge \underline{B_1}$ ஆகும்.

அவ்வாறே $\underline{C}$ திசையியை, $(\underline{A}, \underline{C})$ தளத்தில் $\underline{A}$க்குச் செங்குத்தாகவும் இணையாகவும் பகிர்வு செய்யவும். அவைகளை முறையே $\underline{C}_1$, $\underline{C}_2$ எனக் கொள்ளவும்.

$\underline{n_1+}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி, $(\underline{A}, \underline{C})$ தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையைக் குறிக்கட்டும். அப்பொழுது,

$$\underline{A} \wedge \underline{C} = (AC \text{ Sin } \phi)\ \underline{n_1+}\ ,$$ ($\phi = \underline{A}, \underline{C}$க்களுக்கு இடையிலமையும் கோணம்)

$$= (AC_1)\ \underline{n_1+}$$ ஆகும்.

மேலும் $$\underline{A} \wedge \underline{C_1} = (A\ C_1 \text{ Sin } 90^\circ)\ \underline{n_1+}$$

$$= (A\ C_1)\ \underline{n_1+}$$ என்றும்,

$$\underline{A} \wedge \underline{C_2} = (A\ C_2 \text{ Sin } 0^\circ)\ \underline{n_1+}\ ,$$ ($\therefore \underline{A_1}\ \underline{C_2}$ ஆகியவை இணைத் திசையிகள்)

என்றும் ஆவதால்,

$$= \underline{0}$$

$$A \wedge \underline{C} = \underline{A} \wedge (\underline{C_1} + \underline{C_2}) = \underline{A} \wedge \underline{C_1}$$ ஆகும்.

அவ்வாறே,

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \wedge (\underline{B_1} + \underline{B_2} + \underline{C_1} + \underline{C_2})$$

$$= \underline{A} \wedge (\underline{B_1} + \underline{C_1} + \underline{B_2} + \underline{C_2})$$

$$= \underline{A} \wedge (\underline{B_1} + \underline{C_1})$$ ஆகும்.

$\underline{B_1}$, $\underline{C_1}$ என்ற திசையிகள் Aக்குச் செங்குத்தாக அமைவதால்,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B_1} + \underline{C_1}) = (\underline{A} \wedge \underline{B_1}) + (\underline{A} \wedge \underline{C_1})$$ ஆகும்.

அதாவது,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} \wedge B) + (\underline{A} \wedge \underline{C})$$ என்றாகும்.

எனவே திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கி, பகிர்வு விதியைத் தழுவி செயல்படுகிறது.

இவ் விதியைப் பயன்படுத்தித் திசையிகளின் வரிசை நிலையை மாற்றிடாமல் எழுதும்போது, திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கிகளின் கோவைகளை இயற்கணித முறையில் விரிவுபடுத்தி எழுதலாம்.

அதாவது,

$$(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \ldots\ldots) \wedge (\underline{X} + \underline{Y} + \underline{Z} + \ldots\ldots)$$

$$= \underline{A} \wedge \underline{X} + \underline{A} \wedge \underline{Y} + \underline{A} \wedge \underline{Z} + \ldots\ldots$$

$$+ \underline{B} \wedge \underline{X} + \underline{B} \wedge \underline{Y} + \underline{B} \wedge \underline{Z} + \ldots\ldots$$

$$+ \underline{C} \wedge \underline{X} + \underline{C} \wedge \underline{Y} + \underline{C} \wedge \underline{Z} + \ldots\ldots$$

+ ....என்றாகும்.

[குறிப்பு : திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, குறுக்குப் பெருக்கி ஆகியவற்றை வரையறுப்பதில், "•"- புள்ளி, அல்லது "∧"- பெருக்கல் என்ற இரு குறியீடுகளுக்கு இரு புறங்களிலும் திசையிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும். எண்களுக்கு இவ் விதிகள் பொருத்தமற்றவை.]

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திசையிகளைப் பெருக்குதல்

2—10 மூன்று திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar Product of three Vectors)

எண்ணிப் பெருக்கி, குறுக்குப் பெருக்கிகளை வரையறுக்கும் போது, காரணிகள் (Factors) திசையிகளாகத்தான் இருக்க வேண்டுமென முன்னரே கூறப்பட்டது. ஆகவே $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்ற மூன்று திசையிகளைக் காரணிகளாக எடுத்து, பின்வரும் பொருள் தரும் வகைகளில்தான் திசையிகளைச் சேர்த்துப் பெருக்குதல் வரையறுக்கப்படும். அவைகள் முறையே,

(i) $(\underline{A} \cdot \underline{B})\, \underline{C}$, (ii) $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$, (iii) $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ ஆகும்.

முதல் வகையில், $(\underline{A} \cdot \underline{B})$ என்பது எண் மதிப்பானதால், $(\underline{A} \cdot \underline{B})\, \underline{C}$ என்பது, $\underline{C}$ என்ற திசையிக்கு இணையாகவும், அதைப் போல் $(\underline{A} \cdot \underline{B})$ மடங்கும் உள்ள திசையியாகும்.

இரண்டாம் வகையிலும் $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பதற்கும் பொருள் உண்டு. ஏனெனில் $(\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பது ஒரு திசையியையும், $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பது ஓர் எண்ணிப் பெருக்கியையும் குறிக்கும். இங்கு $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பதற்கு எண் மதிப்பு மட்டுமே உள்ளதால், அதனை முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar Triple Product) என்று கூறுவது பொருந்தும்.

மூன்றுவது வகையில் எடுத்த $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற பெருக்கலுக்கும் பொருள் உண்டு. இங்கு $(\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பது ஒரு திசையியாகும். ஆகவே $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பது ஒரு திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கியைக் குறிக்கும். இங்கு $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்பது ஒரு திசையியாவதால், அதனை முக்கூட்டுக் குறுக்குப் பெருக்கி அல்லது திசையி முப்பெருக்கி (Vector Triple Product) என்று கூறுவது பொருந்தும்.

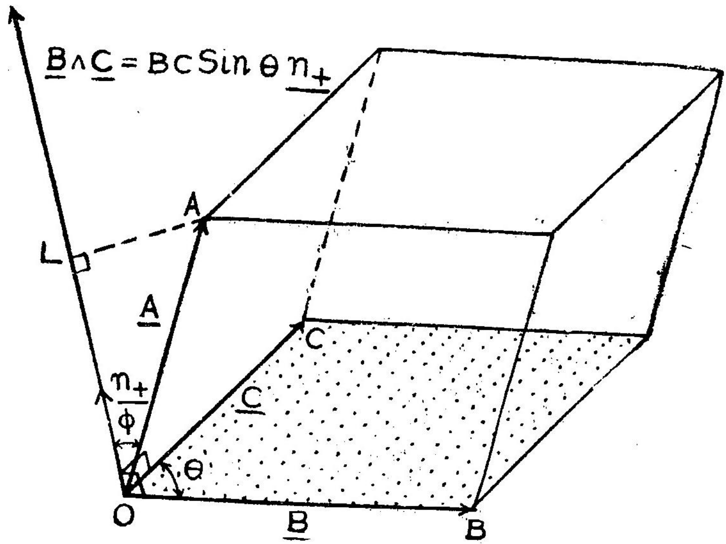
[**குறிப்பு :** $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$, $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \wedge \underline{C}$ ஆகியவை பொருளற்றவை.]

2—10 (1) முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியின் விளக்கவுரை

பரந்த வெளியில், O என்ற புள்ளியில், $\underline{OA}$, $\underline{OB}$, $\underline{OC}$ என்ற அம்புக் கோடுகள், $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ஆகிய திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். $(\underline{OB}, \underline{OC})$ என்பவை ஒரு தளத்தை வரையறுக்கும்.

அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள $\underline{n}+$ என்ற ஓரலகுத் திசையி, $(\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற திசையி செயற்படும் திசையைக் குறிக்கட்டும். OB, OC, OA ஆகியவற்றை விளிம்புகளாக(Edges)க் கொண்ட ஓர் கன இணைகரத்தை (Parallelopiped) படம் 2-31இல்

காட்டியவாறு வரையவும். OB, OCக்களுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தை θ எனக் கொள்ளவும். ($\underline{A}$, $\underline{n+}$) ஆகிய திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தை ϕ எனக் கொள்ளவும்.



படம் 2–31

கன இணைகரத்தின் அடித்தளப் பரப்பு OB· OC Sin θ ஆகும். அதன் செங்குத்து உயரம் OL $= \underline{A} \cdot \underline{n_+} =$ OA cos ϕ ஆகும்.

மேலும் $\underline{B} \wedge \underline{C} = (OB \cdot OC \cdot \text{Sin}\,\theta)\, \underline{n+}$ ஆகும்.

எனவே, $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{A} \cdot (OB \cdot OC\ \text{Sin}\,\theta)\, \underline{n+}$

$= OB \cdot OC\ \text{Sin}\,\theta\ (\underline{A} \cdot \underline{n+})$

$= OB \cdot OC\ \text{Sin}\,\theta\ (OA \cdot \cos\phi)$

= கன இணைகரத்தின் பருமன் ஆகும்.

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்ற திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமானால், $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$ ஆகும். அப்பொழுது,

$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = OA \cdot OB \cdot OC.$

= கன செவ்வகத்தின் பருமனாகும்.

மேலும்,

$$\underline{A}\cdot(\underline{B}\wedge\underline{C}) = (\underline{B}\wedge\underline{C})\cdot\underline{A} = -\underline{A}\cdot(\underline{C}\wedge\underline{B}) = -(\underline{C}\wedge\underline{B})\cdot\underline{A}$$

$$= \underline{B}\cdot(\underline{C}\wedge\underline{A}) = (\underline{C}\wedge\underline{A})\cdot\underline{B} = -\underline{B}\cdot(\underline{A}\wedge\underline{C}) = -(\underline{A}\wedge\underline{C})\cdot\underline{B}$$

$$= \underline{C}\cdot(\underline{A}\wedge\underline{B}) = (\underline{A}\wedge\underline{B})\cdot\underline{C} = -\underline{C}\cdot(\underline{B}\wedge\underline{A}) = -(\underline{B}\wedge\underline{A})\cdot\underline{C}$$

= கன இணைகரத்தின் பருமனாகும்.

இங்கு 12 முறைகளில் முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கி எழுதப் பட்டுள்ளது. அவற்றின் மதிப்புக்கள் யாவும் சமமாகும். மேலும் புள்ளி—"·"—, குறுக்குப் பெருக்கல் குறி -"$\wedge$"— ஆகியவற்றை விருப்பப்படி மாற்றி அமைக்கலாம். அப்பொழுது பருமன் மதிப்பளவு மாறுவதில்லை. ஆனால் எழுத்துக்களின் வரிசை அமைப்பு முறை காக்கப்பட வேண்டும். (should be preserved.) ஏதாவது இரு எழுத்துக்களை ஒரு முறை இடம் பெயர்த்திடும்போது, குறியில் மாற்றம் (change of sign) நிகழ்வதையும், இரு முறை இடம் பெயர்த்திடும்போது குறி நிலைத்திருப்பதையும் காணலாம். ஆதலால், முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியை $[\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்ற மூன்று திசையிகளும் ஒரே தளத்தி லமையுமென்றால், கன இணைகரத்தின் பருமன் சுழியாகும்.

அதாவது $(\underline{B}\wedge\underline{C})$ என்ற திசையி, $(\underline{B}, \underline{C})$ தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் செயற்படும். $\underline{A}$ என்ற திசையி, $(\underline{B}, \underline{C})$ தளத்திலமைவதால், $\underline{A}$, $(\underline{B}\wedge\underline{C})$ ஆகியவற்றின் செயற் படும் திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகும். எனவே அவைகளின் எண்ணிப் பெருக்கி : $\underline{A}\cdot(\underline{B}\wedge\underline{C}) = 0$ ஆகும்.

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ஆகிய திசையிகளில், ஏதேனும் இரு திசையிகள் சமமாக இருக்குமானால், அவைகளின் எண்ணிப் பெருக்கி சுழியாகும்.

அதாவது $\underline{A} = \underline{B}$ எனில்,

$$\begin{aligned}\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) &= \underline{A} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{C}) \\ &= (\underline{A} \wedge \underline{A}) \cdot \underline{C} \\ &= \underline{0} \cdot \underline{C} \\ &= 0\end{aligned}$$

ஆகும்.

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ஆகியவற்றின் முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பை, $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளைப் பயன்படுத்தியும் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் :

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்ற வலப்புறச் சுட்டமைப்பு முறையில் (Right Handed Frame of Reference), $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்ற திசையிகளை

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k},$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k},$$

$$\underline{C} = C_x \underline{i} + C_y \underline{j} + C_z \underline{k}$$

எனக் கொள்ளவும்.

அப்பொழுது,

$$\underline{B} \wedge \underline{C} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (B_yC_z - B_zC_y)\,\underline{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\,\underline{j} + (B_xC_y - B_y C_x)\,\underline{k}$$

ஆகும்.

ஆதலால்,

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \cdot \{(B_yC_z - B_zC_y)\underline{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\,\underline{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\,\underline{k}\}$$

$$= A_x (B_yC_z - B_zC_y) + A_y (B_zC_x - B_xC_z) + A_z (B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= A_x (B_yC_z - B_zC_y) - A_y (B_xC_z - B_zC_x) + A_z (B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

2—11 முக்கூட்டுக் குறுக்குப் பெருக்கி (Vector product of three vectors):

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்ற மூன்று திசையிகளைப் பயன்படுத்தி, $\underline{D} = \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற ஒரு முக்கூட்டுக் குறுக்குப் பெருக்கியை எடுக்கவும். இங்கு,

$(\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற திசையி,	$\{\underline{B}, \underline{C}\}$ திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.
$\therefore \underline{D} = \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற திசையி,	$\{\underline{A}, \underline{B} \wedge \underline{C}\}$ திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.
அதாவது $\underline{D}$ என்ற திசையி,	$\underline{A}$ என்ற திசையி செயற்படும் திசைக்கும், $\{\underline{B}, \underline{C}\}$ திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்தின் செங்கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக உள்ளது.
அதாவது $\underline{D}$ என்ற திசையி,	$\{\underline{B}, \underline{C}\}$ திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திலுள்ளது.

எனவே,

$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = m\,\underline{B} + n\,\underline{C}$ என வரையறுக்கலாம்.

2—11 (1) $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்னும் திசையி முப்பெருக்கியின் பகிர்வுகளை $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ கூட்டமைப்பில் நிறுவுதல்

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளைக் கொண்ட குத்தாய அமைப்பில் (Orthogonal system), $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ஆகிய திசையிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கவும்:

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k},$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k},$$

$$\underline{C} = C_x \underline{i} + C_y \underline{j} + C_z \underline{k}.$$

$$\therefore \quad \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge \{ (B_y C_z - B_z C_y) \underline{i} + (B_z C_x - B_x C_z) \underline{j} + (B_x C_y - B_y C_x) \underline{k} \}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & B_z C_x - B_x C_z & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix}$$

$$= \{A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z)\} \underline{i}$$
$$+ \{A_z (B_y C_z - B_z C_y) - A_x (B_x C_y - B_y C_x)\} \underline{j}$$
$$+ \{A_x (B_z C_x - B_x C_z) - A_y (B_y C_z - B_z C_y)\} \underline{k}$$

$$= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_x \underline{i} - A_x B_x C_x \underline{i}$$
$$+ (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_y \underline{j} - A_y B_y C_y \underline{j}$$
$$+ (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_z \underline{k} - A_z B_z C_z \underline{k}$$
$$- (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_x \underline{i} + A_x B_x C_x \underline{i}$$
$$- (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_y \underline{j} + A_y B_y C_y \underline{j}$$
$$- (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_z \underline{k} + A_z B_z C_z \underline{k}$$

$$= (\underline{A} \cdot \underline{C}) (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) - (\underline{A} \cdot \underline{B}) (C_x \underline{i} + C_y \underline{j} + C_z \underline{k})$$

$\therefore \quad \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C}$ ஆகும்.

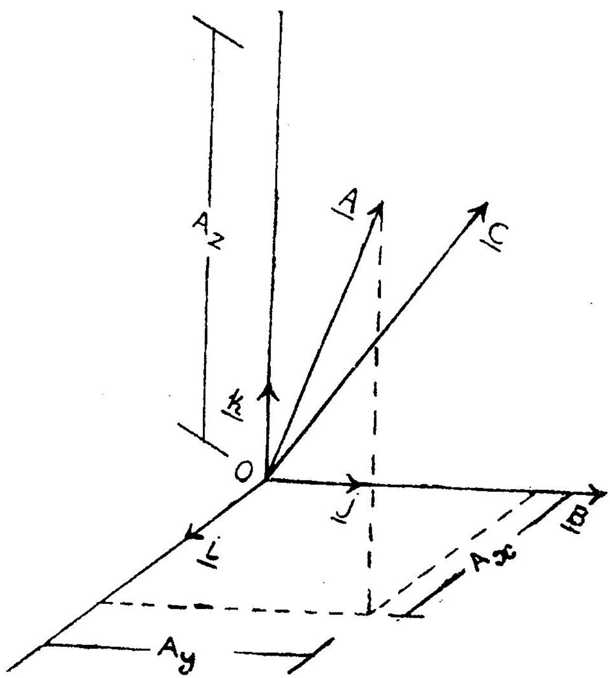
$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$ என்ற திசையி, $(\underline{B}, \underline{C})$ தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்படும். ஆனால் $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C}$ என்ற திசையி, $(\underline{A}, \underline{B})$ தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்படும். எனவே அவைகள் இரண்டும் சமமாகாது. ஆதலால்,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) \neq (\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C}.$$

அதாவது, திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கி, இயற்கணிதக் கூட்டுச் சேர்க்கை விதிக்கு ஒத்து வருவதில்லை.

2—11 (2) திசையி முப்பெருக்கியின் பகிர்வுகளை எளிய முறையில் தருவித்தல்

ஒரு குறிப்பிட்ட சுட்டமைப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்னும் திசையிகளின் பகிர்வுகளை அமைத்து, திசையி முப்



படம் 2-32

பெருக்கியின் சமன்பாட்டை எளிய முறையில் பின்வருமாறு நிறுவலாம்:

திசையி $\underline{B}$ஐ, $\underline{j}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையி–இன் திசையிலும், $\underline{k}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையியை, $\underline{j}$-க்குச் செங்குத்தான திசையிலும் எடுக்கவும். ($\underline{j}$, $\underline{k}$)-திசையிகள் நிறுவும் தளத்தில், $\underline{c}$ என்ற திசையியை அமைக்கவும். $\underline{i}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையியை $\underline{j}$, $\underline{k}$, ஓரலகுத் திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாகவும் எடுக்கவும். அத்தகைய சுட்டமைப்பில்,

$$\underline{B} = B_y \underline{j}$$

$$\underline{C} = C_y \underline{j} + C_z \underline{k}$$

$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

எனவே,

$\underline{B} \wedge \underline{C} = B_y C_z \underline{i}$ என்றுவதால்,

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge B_y C_z \underline{i}$$

$$= A_z B_y C_z \underline{j} - A_y B_y C_z \underline{k}$$

$$= (A_y C_y + A_z C_z) B_y \underline{j} - A_y B_y (C_y \underline{j} + C_z \underline{k})$$

$= (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C}$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 2–15 : A (4, 0, 3), B (–8, 6, 0) என்ற புள்ளிகளைத் துவக்கப் புள்ளி O உடன் சேர்த்து உண்டாகும் இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

O என்ற புள்ளியைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்டால், A, B என்ற புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே $\underline{A} = \underline{OA} = 4\,i + 3\,\underline{k}$, $\underline{B} = \underline{OB} = -8\,i + 6\,\underline{j}$ என்றுகும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தை θ எனக் கொண்டால், எண்ணிப்பெருக்கி விதிப்படி

$$\text{Cos } \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{A\ B}$$

$$= \frac{(4\,\underline{i} + 3\,\underline{k}) \cdot (-8\,\underline{i} + 6\,\underline{j})}{\sqrt{4^2 + 3^2}\ \sqrt{(-8)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{-32}{5 \times 10}$$

$$= -0{\cdot}64 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\theta = (180° - 50{\cdot}2°) = 129{\cdot}8°$ ஆகும்.

மாதிரி 2—16 : $\underline{A} = 3\,\underline{i} - 6\,\underline{j} - 9\,\underline{k}$ என்ற திசையி-இன் பகிர்வை, $\underline{E} = \frac{1}{3}\,\underline{i} - \frac{2}{3}\,\underline{j} - \frac{2}{3}\,\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி-க்கு இணையான திசையில் காண்க.

தேவையான பகிர்வை A_E எனக் கொண்டால்,

$$A_E = \underline{A} \cdot \underline{E}$$

$$= (3\,\underline{i} - 6\,\underline{j} - 9\,\underline{k}) \cdot (\tfrac{1}{3}\,\underline{i} - \tfrac{2}{3}\,\underline{j} - \tfrac{2}{3}\,\underline{k})$$

$$= 11 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 2—17 : கீழ்க்காணும் வரையறைகளில் திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க :

(i) திசையிகள் : $2\,\underline{i} - \underline{j} - 2\,\underline{k}$, $+ 3\,\underline{j} - 4\,\underline{k}$

(ii) (0, 5, 2), (−6, −6, 3) என்ற புள்ளிகளுக்கு உரிய நிலைத் திசையிகள்.

(iii) A (−2, 6, 3) என்ற புள்ளியை, B (−2, 7, 5), C (−1, 6, 1) என்ற புள்ளிகளுடன் சேர்த்து உண்டாகும் AB, AC என்ற கோடுகள்.

(iv) $\{(\frac{1}{3}), (-\frac{2}{3}), (\frac{2}{3})\}, \{(\frac{2}{3}), (\frac{2}{3}), (\frac{1}{3})\}$ என்ற திசைக் கிடக்கைகளையுடைய கோடுகள்.

(i) $\underline{A} = 2\,\underline{i} - \underline{j} - 2\,\underline{k}$, $\underline{B} = 3\,\underline{j} - 4\,\underline{k}$ என்றால்,

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{A\,B} = \frac{(2\,\underline{i} - \underline{j} - 2\,\underline{k})\cdot(3\,\underline{j} - 4\,\underline{k})}{\sqrt{4+1+4}\;\;\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{-3+8}{3\times 5} = \tfrac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \theta = \text{Cos}^{-1}(\tfrac{1}{3}) = 70{\cdot}5^\circ$$

(ii) A (0, 5, 2), B (—6, —6, 3) என்றால்,

$\underline{A} = \underline{OA} = 5\,\underline{j} + 2\,\underline{k}$, $\underline{B} = \underline{OB} = -6\,\underline{i} - 6\,\underline{j} + 3\,\underline{k}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \text{Cos}\,\theta = \frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{AB} = \frac{(5\,\underline{j}+2\,\underline{k})\cdot(-6\,\underline{i}-6\,\underline{j}+3\,\underline{k})}{\sqrt{25+4}\;\;\sqrt{36+36+9}} = \frac{-30+6}{\sqrt{29}\times 9}$$

$$= -\frac{8}{3\sqrt{29}} = -0{\cdot}49517$$

$$\therefore\ \theta = (180^\circ - 60{\cdot}3^\circ) = 119{\cdot}7^\circ$$

(iii) A (—2, 6, 3), B (—2, 7, 5), C (—1, 6, 1) என்ற புள்ளிகளுக்கு உரிய நிலைத் திசையிகள் முறையே,

$\underline{OA} = -2\,\underline{i} + 6\,\underline{j} + 3\,\underline{k}$, $\underline{OB} = -2\,\underline{i} + 7\,\underline{j} + 5\,\underline{k}$,

$\underline{OC} = -\,\underline{i} + 6\,\underline{j} + \underline{k}$ ஆகும்.

$\therefore\ \underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA} = \underline{j} + 2\,\underline{k}$, $\underline{AC} = \underline{OC} - \underline{OA} = \underline{i} - 2\,\underline{k}$ ஆகும்.

$\underline{P} = \underline{j} + 2\,\underline{k}$, $\underline{Q} = \underline{i} - 2\,\underline{k}$ எனக் கொண்டால்,

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\underline{P}\cdot\underline{Q}}{PQ} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \therefore \quad \theta = (180^\circ - 36{\cdot}8^\circ)$$

$= 143 \cdot 2^\circ$ ஆகும்.

(iv) $\text{Cos}\,\theta = l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2$ என்ற நியதிப்படி, இங்கு $\cos\theta = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0$ ஆகும்.

எனவே $\theta = 90^\circ$ என்றாகும்.

மாதிரி 2—18: $\underline{A} = 16\underline{i} + 3j$, $\underline{B} = 10\underline{k} - 6\underline{i}$, $\underline{C} = 4j$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க:

(i) $\underline{C}\,(\underline{A}\cdot\underline{C}) + \underline{B}$

(ii) $-\underline{C} + [\underline{B}\cdot(-\underline{A})]\,\underline{C}$

(iii) $\underline{A}\cdot(\underline{B}\wedge\underline{C})$

(iv) $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})$

(i) $\underline{A} = 16\underline{i} + 3j$, $\underline{B} = -6\underline{i} + 10k$, $\underline{C} = 4j$

$\therefore \quad (\underline{A}\cdot\underline{C}) = (16\underline{i} + 3j)\cdot(4j) = 12$

எனவே $\underline{C}\,(\underline{A}\cdot\underline{C}) + \underline{B}$

$= 12\,(4j) + 10\underline{k} - 6\underline{i}$

$= -6i + 48j + 10k$ ஆகும்.

(ii) $[\underline{B}\cdot(-\underline{A})] = (-6\underline{i} + 10\underline{k})\cdot(16\underline{i} - 3j)$

$= 96$

எனவே $-\underline{C} + [B\cdot(-A)]\,C$

$= -4\underline{j} + 96\,(4\underline{j})$

$= 380\underline{j}$ ஆகும்.

(iii) $\underline{A}\cdot(\underline{B}\wedge\underline{C}) = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= 16\,(0-40) - 3\,(0) + 0$

$= -640$

(iv) $(\underline{B}\wedge\underline{C}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= \underline{i}\,(0-40) - \underline{j}\,(0) + \underline{k}\,(-24-0)$

$= -40\,\underline{i} - 24\,\underline{k}$

$\therefore\ \underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 16 & 3 & 0 \\ -40 & 0 & -24 \end{vmatrix}$

$= \underline{i}\,(-72-0) - \underline{j}\,(-384-0) + \underline{k}\,(0+120)$

$= -72\,\underline{i} + 384\,\underline{j} + 120\,\underline{k}$

$\therefore\ \underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C}) = 24\,(-3\,\underline{i} + 16\,\underline{j} + 5\,\underline{k})$ ஆகும்.

மாதிரி 2—19 : $\underline{A} = 5\,\underline{i} - 6\,\underline{j} + 7\,\underline{k}$, $\underline{B} = 7\,\underline{i} - 8\,\underline{j} + 9\,\underline{k}$, $\underline{C} = 3\,\underline{i} + \underline{j} - 5\,\underline{k}$ என்ற திசையிகள் ஒரு தளத்திலமையும் என நிறுவுக.

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்பவை ஒரு தளத்திலமைவதற்குரிய வரையறை, $A\cdot(\underline{B}\wedge\underline{C}) = 0$ ஆகும்.

எனவே, முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியை அணிக்கோவை அமைப்பில் எழுதிட,

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 7 & -8 & 9 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$ என்றாகும்.

அதன் மதிப்பு $= 5\,(40-9) - 7\,(30-7) + 3\,(-54+56)$

$= 155 - 161 + 6$

$= 0$ ஆகும்.

எனவே, $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்பவை ஒரு தளத்திலமையும் திசையிகளாகும்.

மாதிரி 2—20 : A (2, 3, 5), B (4, −3, −2), C (0, 5, 4), D (−2, 5, −1) என்ற புள்ளிகள் ஒரு தளத்திலமையும் எனக் காண்க.

O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கருதும்போது,

$\underline{OA} = 2\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 5\,\underline{k}$, $\underline{OB} = 4\,\underline{i} - 3\,\underline{j} - 2\,\underline{k}$, $\underline{OC} = 5\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$,

$\underline{OD} = -2\,\underline{i} + 5\,\underline{j} - \underline{k}$ என்றாகும். அப்பொழுது,

$\underline{P} = \underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA} = 2\,\underline{i} - 6\,\underline{j} - 7\,\underline{k}$

$\underline{Q} = \underline{AC} = \underline{OC} - \underline{OA} = -2\,\underline{i} + 2\,\underline{j} - \underline{k}$

$\underline{R} = \underline{AD} = \underline{OD} - \underline{OA} = -4\,\underline{i} + 2\,\underline{j} - 6\,\underline{k}$ ஆகும்.

$\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R}$ என்ற திசையிகள் ஒரு தளத்திலமைவதற்குரிய வரையறை $\underline{P} \cdot (\underline{Q} \wedge \underline{R}) = 0$ ஆகும்.

எனவே முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கி $\underline{P} \cdot (\underline{Q} \wedge R)$ன் மதிப்பை அணிக்கோவை அமைப்பில் எழுதிட,

$$\underline{P}\cdot(\underline{Q}\wedge\underline{R}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} \text{ என்றாகும்.}$$

அதன் மதிப்பு $= 2(-12+2) + 6(12-4) - 7(-4+8)$

$= -20+48-28$

$= 0$ ஆகும்.

எனவே $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ என்ற திசையிகள் ஒரு தளத்திலமையும்.

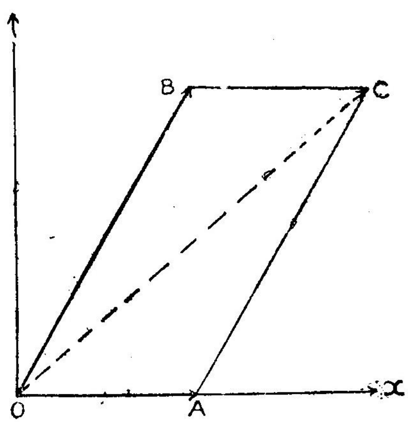
அதாவது A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் ஒரு தளத்திலமையும்.

மாதிரி 2—21 : 25 கி. கி. எடையுள்ள விசை ஒன்று x அச்சின் மிகைத் திசையில் செயற்படுகிறது. 50 கி. கி. எடையுள்ள மற்றொரு விசை, முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் (in the first quadrant) துவக்கப் புள்ளியின் வழியே, x அச்சுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் நேர்கோட்டில் செயற்படுகிறது. அவ் விசைகளின் தொகுபயன் விசையைக் காண்க.

வரைபட விளக்கம் :

இங்கு இரு விசைகளும் துவக்கப்புள்ளி O வழியே செல்கின்றன. OX, OY என்ற கிடை, நிலை அச்சுக்களின் திசைகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் அறிவிக்கட்டும்.

ஸ்கேல் : 10 கி.கி. = 1 செ.மீ.



படம் 2–32

தகுந்த அளவீடு எடுத்து, படம் 2-32ல் காட்டியபடி, x அச்சில் OA = 2·5 செ. மீ. உள்ளவாறு, A என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். x அச்சுடன் 60° கோணத்தைத் தாங்கும் கோட்டில், OB = 5 செ.மீ. தொலைவைக் குறிக்கும் B என்ற புள்ளியை எடுக்க

வும். இணைகர விதிப்படி, OC என்ற மூலைவிட்டம் தொகுபயன் விசையை அறிவிக்கும்.

வரைபடத்தில் OCன் நீளம் 6·6 செ. மீ. ஆவதால், தொகு பயன் விசையின் எண் மதிப்பு = 6·6 × 10 = 66 கி. கி. எடையாகும். அது செயற்படும் திசை, x அச்சுடன் $\hat{COA} = \theta = 41°$ என்ற கோணத்தை அமைக்கிறது.

இயற்கணித விளக்கம் :

இங்கு விசைகள்

$\underline{F}_1 = 25\,\underline{i}$, $\underline{F}_2 = 50 \text{ Cos } 60° \underline{i} + 50 \text{ Sin } 60° j = 25i + 25\sqrt{3}j$

என்றாகும். விசைகளின் தொகுபயன் விசையை R எனக் கொண்டால்,

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$= 25\,\underline{i} + 25\,\underline{i} + 25\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$$= 50\,i + 25\sqrt{3}\,j \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore R_x = 50, R_y = 25\sqrt{3}$

எனவே, $R^2 = R_x^2 + R_y^2$

$$= (50)^2 + (25\sqrt{3})^2$$

$$= 2500 + 1875$$

$$= 4375$$

$\therefore \quad R = \sqrt{4375} = 25\sqrt{7} = 66{\cdot}13$ கி.கி. எடை.

தொகுபயன் விசை, x அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொண்டால்,

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{25\sqrt{3}}{50} = \frac{\sqrt{3}}{—} = 0{\cdot}866 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\theta = 40° 55'$ ஆகும்.

மாதிரி 2—22 :

மாதிரி 2—21வது கணக்கில், 25 கி. கி. விசை x அச்சின் குறைவுத் திசையில் (Negative direction of the x axis) செயற் படுமானல் விசைகளுக்கு உரிய தொகுபயன் விசையைக் காண்க.

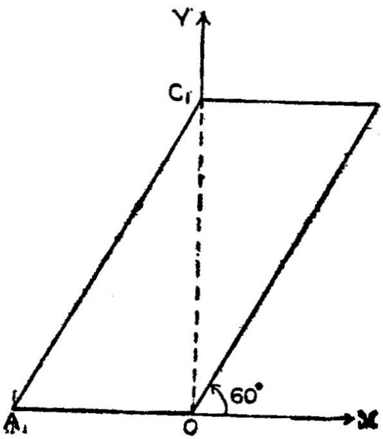
படம் 2-33ல்,

$OA_1 = 2{\cdot}5$ செ.மீ.

$B_1\hat{O}X = 60^\circ$, $OB_1 = 5$ செ. மீ.

$OB_1C_1A_1$ என்ற இணைகரத்தில், மூலைவிட்டம் OC_1ன் நீளம் 4·4 செ.மீ. என்ருகிறது. ஆதலால் தொகுபயன் விசையின் எண்மதிப்பு $= 4{\cdot}4 \times 10 = 44$ கி.கி. எடையாகும். மேலும் $C_1\hat{O}X = 90^\circ$ என்றும் உள்ளது.

ஸ்கேல்: 10 கி.கி. = 1 செ.மீ.



படம் 2–33

இயற்கணித முறைப்படி,

$$\underline{R_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$= -25\underline{i} + 50 \text{ Cos } 60^\circ\underline{i} + 50 \text{ Sin } 60^\circ\underline{j}.$$

$$= -25\,\underline{i} + 25\,\underline{i} + 25\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$$= 25\sqrt{3}\,\underline{j}$$

$\therefore\ R_x = 0,\ R_y = 25\sqrt{3}$ என்றுவதால், $R_1 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$= R_y = 25\sqrt{3} = 43{\cdot}3$ கி.கி. எடை ஆகும்.

மேலும் $\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \infty$ ஆவதால், $\theta = 90^\circ$ ஆகும்.

2—12 நான்கு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar product of four vectors):

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ என்பவை ஏதேனும் நான்கு திசையிகளாகுக. $(\underline{A} \wedge \underline{B}), (\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்பவையும் திசையிகளாகும். ஆகவே அவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கியை வரையறுக்க முடியும். மேலும் அதன் மதிப்பு எண்ணியாவதால்,

$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்பதை நான்கு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி எனக் கூறுவது வழக்கம்.

எனவே,

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{C} \wedge \underline{D}) = \underline{A} \cdot \underline{B} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D})$$

$$= \underline{A} \cdot [\underline{B} \cdot \underline{D})\,\underline{C} - (\underline{B} \cdot \underline{C})\,\underline{D}]$$

$$= (\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{A} \cdot \underline{D})(\underline{B} \cdot \underline{C})$$

$$= \begin{vmatrix} (\underline{A} \cdot \underline{C}) & (\underline{A} \cdot \underline{D}) \\ (\underline{B} \cdot \underline{C}) & (\underline{B} \cdot \underline{D}) \end{vmatrix}$$

2—13 நான்கு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி (cross product of four vectors) :

$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்பது $(\underline{A} \wedge \underline{B}), (\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்னும் இரு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கியாகும்.

இத்திசையி $(\underline{A} \wedge \underline{B})$ என்னும் திசையியிக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. எனவே, இது $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திலமையும். மேலும் இது $(\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்னும் திசையியிக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ளதால், இது $\underline{C}$, $\underline{D}$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திலும் அமையும். ஆகவே $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D})$ என்னும் திசையி, $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ள தளமும், $\underline{C}$, $\underline{D}$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ள தளமும் வெட்டும் கோட்டிற்கு இணையாக அமையும்.

$$\begin{aligned}(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D}) &= \underline{P} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D}) \\ &= (\underline{P} \cdot \underline{D})\, \underline{C} - (\underline{P} \cdot \underline{C})\, \underline{D} \\ &= (\underline{A} \wedge \underline{B} \cdot \underline{D})\, \underline{C} - (\underline{A} \wedge \underline{B} \cdot \underline{C})\, \underline{D} \\ &= [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{D}]\, \underline{C} - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\, \underline{D} \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

அவ்வாறே,

$$\begin{aligned}(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{C} \wedge \underline{D}) &= (\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{Q} \\ &= (\underline{A} \cdot \underline{Q})\, \underline{B} - (\underline{B} \cdot \underline{Q})\, \underline{A} \\ &= \{\underline{A} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{D})\}\, \underline{B} - \{\underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{D})\}\, \underline{A} \\ &= [\underline{A}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{B} - [\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{A} \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

(i), (ii) என்பவற்றிலிருந்து,

$$[\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{D}]\, \underline{C} - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\, \underline{D} = [\underline{A}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{B} - [\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{A}$$

அதாவது,

$$[\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{A} - [\underline{A}\ \underline{C}\ \underline{D}]\, \underline{B} + [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{D}]\, \underline{C} - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\, \underline{D} = 0$$

$\underline{D} = \underline{M}$ எனக் கொள்க.

அப்பொழுது,

$$[\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{M}]\ \underline{A} - [\underline{A}\ \underline{C}\ \underline{M}]\ \underline{B} + [\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{M}]\ \underline{C} - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\ \underline{M} = \underline{O}$$

$$M = \frac{[\underline{M}\ \underline{B}\ \underline{C}]\ \underline{A} + [\underline{M}\ C\ \underline{A}]\ \underline{B} + [\underline{M}\ \underline{A}\ \underline{B}]\ \underline{C}}{[\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]},$$

$$\{[\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ ] \neq 0\}$$

$[\underline{A}\ \ \underline{B}\ \ \underline{C}] \neq 0$ என்றிருக்குமெனில், எந்த ஒரு திசையி $\underline{M}$-ஐயும், $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ என்னும் திசையிகளைக் கொண்டு வரையறுக்க முடியும்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 2—23 :

$$[\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2 = \begin{vmatrix} \underline{A}\cdot\underline{A} & \underline{A}\cdot\underline{B} & \underline{A}\cdot\underline{C} \\ \underline{B}\cdot\underline{A} & \underline{B}\cdot\underline{B} & \underline{B}\cdot\underline{C} \\ \underline{C}\cdot\underline{A} & \underline{C}\cdot\underline{B} & \underline{C}\cdot\underline{C} \end{vmatrix}$$ என நிரூபிக்க.

$$(\underline{A} \wedge \underline{B})^2 = (\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B})$$

$$= A^2\ B^2\ \text{Sin}^2\ \theta$$

$$= A^2\ B^2 - A^2\ B^2\ \cos^2\ \theta$$

$$\therefore (A \wedge B)^2 = A^2\ B^2 - (A \cdot B)^2$$

$$[(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C}]^2 = (\underline{A} \wedge \underline{B})^2\ C^2 - [(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{C}]^2$$

$$= [A^2\ B^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2]\ \underline{C}^2 - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2$$

$$= A^2\ B^2\ C^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2\ \underline{C}^2 - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2 \quad \text{(i)}$$

ஆனல்,

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{C})\, \underline{B} - (\underline{B} \cdot \underline{C})\, \underline{A}$$ என்றுவதால்,

$$[(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C}]^2 = (\underline{A} \cdot \underline{C})^2 B^2 - 2\,(\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{C})(\underline{A} \cdot \underline{B}) + (\underline{B} \cdot \underline{C})^2 A^2 \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) என்னும் சமன்பாடுகளைச் சமப்படுத்த,

$$(A \cdot \underline{C})^2 B^2 - 2\,(\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{C})(\underline{A} \cdot \underline{B}) + (\underline{B} \cdot \underline{C})^2 A^2 = A^2 B^2 C^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2 C^2 - [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2$$

$$\therefore [\underline{A}\ \underline{B}\ C]^2 = A^2 B^2 C^2 - (\underline{B} \cdot \underline{C})^2 A^2 - (\underline{C} \cdot \underline{A})^2 \underline{B}^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2 C^2 + 2\,(\underline{A} \cdot \underline{B})(\underline{B} \cdot \underline{C})(\underline{C} \cdot \underline{A})$$

$$= \begin{vmatrix} (\underline{A} \cdot \underline{A}) & (\underline{A} \cdot \underline{B}) & (\underline{A} \cdot \underline{C}) \\ (\underline{B} \cdot \underline{A}) & (\underline{B} \cdot \underline{B}) & (\underline{B} \cdot \underline{C}) \\ (\underline{C} \cdot \underline{A}) & (\underline{C} \cdot \underline{B}) & (\underline{C} \cdot \underline{C}) \end{vmatrix}$$

மாதிரி 2—24 :

$$(A \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{C} \wedge \underline{D}) + (\underline{B} \wedge \underline{C}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{D}) + (\underline{P} \wedge \underline{A}) \cdot (\underline{B} \wedge \underline{D}) = 0$$ என நிறுவுக.

$$(A \wedge B) \cdot (C \wedge D) = \begin{vmatrix} \underline{A} \cdot \underline{C} & \underline{A} \cdot \underline{D} \\ \underline{B} \cdot \underline{C} & \underline{B} \cdot \underline{D} \end{vmatrix} = (\underline{A} \cdot \underline{C})(\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{A} \cdot \underline{D})(\underline{B} \cdot \underline{C})$$

அவ்வாறே,

$$(\underline{B} \wedge \underline{P}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{D}) = (\underline{B} \cdot \underline{A}) (\underline{C} \cdot \underline{D}) - (\underline{B} \cdot \underline{D}) (\underline{C} \cdot \underline{A})$$

$$(\underline{C} \wedge \underline{A}) \cdot (\underline{B} \wedge \underline{D}) = (\underline{C} \cdot \underline{B}) (\underline{A} \cdot \underline{D}) - (\underline{C} \cdot \underline{D}) (\underline{A} \cdot \underline{B})$$

இவற்றைக் கூட்டுக.

$[\underline{A} \wedge \underline{B},\ \underline{B} \wedge \underline{C},\ \underline{C} \wedge \underline{A}] = [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2$ என நிரூபி.

$$[A \wedge B,\ \underline{B} \wedge \underline{C},\ \underline{C} \wedge \underline{A}] = [(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A})]$$

$$= \{(\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C})\ \underline{B} - (\underline{A} \wedge \underline{B} \cdot \underline{B})\ \underline{C}\} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A})$$

$$= [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\ \underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A}), \quad \{\because [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{B}] = 0\}$$

$$= [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\ [\underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A})]$$

$$= [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]\ [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]$$

$$= [\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}]^2$$

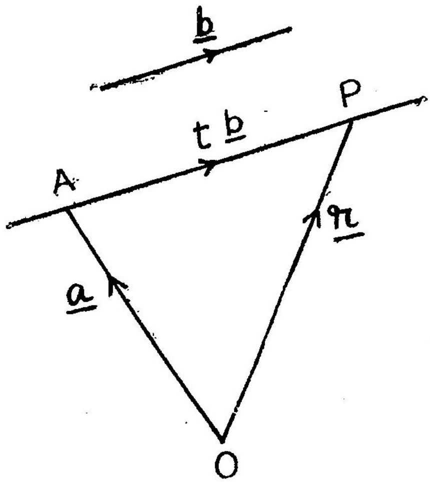
2—14 திசையிச் சமன்பாடுகள் :

2—14 (1) நேர்கோடு :

2—14 (1A) கொடுக்கப்பட்ட A என்னும் புள்ளி வழியாகவும், கொடுக்கப்பட்ட b என்னும் திசையிக்கு இணையாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணுதல் :

O என்னும் புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, A என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{a}$ எனக் கொள்க. (படம் 2—34 ஐ நோக்குக).

Aயின் வழியே $\underline{b}$க்கு இணையிலமையும் கோட்டில் P என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறிக்கவும்.



படம் 2–34

இங்கு $\underline{OA} = \underline{a}$

$\underline{AP}$ என்பது $\underline{b}$க்கு இணையாகவுள்ளதால்,

$\underline{AP} = t\,\underline{b}$, (t என்பது ஒரு மெய்யெண்—real number)

$\underline{OP} = \underline{r}$ எனில்,

$\underline{OP} = \underline{OA} + \underline{AP}$

$\underline{r} = \underline{a} + t\,\underline{b}$

$\underline{P}$ என்பது கோட்டில் ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறிப்பதால், தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு

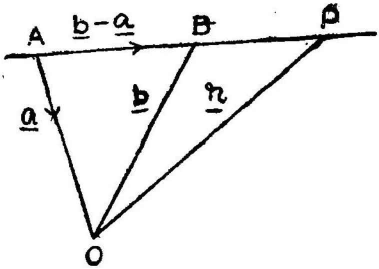
$\underline{r} = \underline{a} + t\,\underline{b}$ ஆகும்.

படம் 2-35ல் A, B என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{a}$, $\underline{b}$ எனக் கொண்டால்,

$\underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA} = \underline{b} - \underline{a}$.

எனவே A, B என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\,\underline{a} + t\,\underline{b}$$



படம் 2–35

2—14 (1B): A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2) என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை வரையறுத்தல் :

P (x, y, z) என்பது ABயில் ஏதேனுமொரு புள்ளியாகுக.

A, B, P என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே, $x_1\,\underline{i} + y_1\,\underline{j} + z_1\,\underline{k}$; $x_2\,\underline{i} + y_2\,\underline{j} + x_2\,\underline{k}$; $x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ ஆகும்.

எனவே ABயின் சமன்பாடு,

$$\underline{r} = (1-t)\,(x_1\,\underline{i} + y_1\,\underline{j} + z_1\,\underline{k}) + t\,(x_2\,\underline{i} + y_2\,\underline{j} + z_2\,\underline{k})$$

இங்கு t என்பது ஒரு மாறியாகும்.

P (x, y, z) என்னும் புள்ளி இக் கோட்டின்மீதுள்ளதால்,
$x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} = (1-t)\,(x_1\,\underline{i} + y_1\,\underline{j} + z_1\underline{k}) + t\,(x_2\,\underline{i} + y_2\,\underline{j} + z_2\,\underline{k})$

இரு புறங்களிலும் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பவற்றின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த,

$$x = (1-t)\,x_1 + tx_2$$

$$y = (1-t)\,y_1 + ty_2$$

$$z = (1-t)\,z_1 + tz_2$$

அதாவது, $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$

$y - y_1 = t(y_2 - y_1)$

$z - z_1 = t(z_2 - z_1)$

அதாவது, $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$ ஆகும்.

2—14 (1C) : $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்னும் திசையிகளை நிலைத் திசையிகளாகக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டிலமைவதற்குரிய வரையறை :

l, m, n என்னும் எண்களை,

$al + bm + cn = 0$

$l + m + n = 0$ என்றிருக்குமாறு எடுக்க.

$n \neq 0$ என்பதால், $l + m = -n \neq 0$

$al + bm = -cn$

$$\therefore \quad \frac{al + bm}{l + m} = c$$

எனவே $\underline{c}$ என்னும் திசையி A ($\underline{a}$), B ($\underline{b}$) என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை l : m என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியாகும்.

$\therefore$ A, B, C என்னும் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலமைந்துள்ளன.

மேலும் A, B என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\underline{r} = (1-t)\,\underline{a} + t\,\underline{b}.$$

இது $\underline{c}$ யை நிலைத் திசையியாகவுடைய C என்னும் புள்ளி வழியே சென்றால்,

$\underline{c} = (1-t)\,\underline{a} + t\,\underline{b}$

அல்லது $(1-t)\,a + t\,\underline{b} - \underline{c} = 0$

இங்கு கெழுக்களின் கூடுதல், $1-t+t-1=0$ ஆகும்.

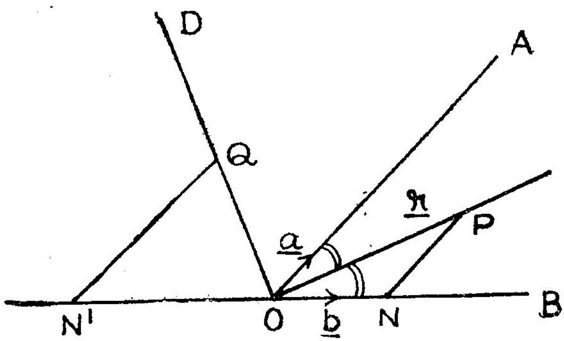
எனவே தேவையான நிபந்தனை : $l\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} = 0.$

இங்கு $l+m+n=0$ என்று இருக்க வேண்டும்.

2—14 (2): கோண சம வெட்டிகள்—இரு கோடுகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தின் சம வெட்டிகள் :

OA, OB என்னும் திசைகளை $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையிகள் குறிக்கட்டும். (படம் 2—36ஐப் பார்க்கவும்.)

OP, கோணம் AOBயின் உள் சமவெட்டியாகுக.



படம் 2–36

Pயிலிருந்து AOவுக்கு இணையாக வரையும் PN என்னும் கோடு OBயை Nஇல் சந்திக்கட்டும்.

$\therefore ON = NP$

எனவே $\underline{ON} = t\,\underline{a}$

$\underline{ON} = t\,\underline{b}$ (t என்பது ஒரு மெய்யெண்.)

P யின் நிலைத் திசையியை $\underline{r}$ எனக் கொண்டால்,

$\underline{OP} = \underline{ON} + \underline{NP}$,

$\underset{\sim}{r} = t(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a})$

இதுவே கோண உட்சமவெட்டியின் திசையிச் சமன்பாடாகும்.

மேலும் OD என்னும் வெளிச் சமவெட்டியின்மேல் Q என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளியை எடுத்து, AOவுக்கு இணையாக QN′ என்னும் கோட்டை வரைக. இது OB′ஐ N′இல் சந்திக்கட்டும். அப்பொழுது,

$\underline{OQ} = \underline{ON'} + N'Q$

$\underset{\sim}{r} = -s\underset{\sim}{b} + s\underset{\sim}{a}$

$\therefore \; \underset{\sim}{r} = s(\underset{\sim}{a} - b)$ ஆகும்.

எனவே கோணத்தின் வெளிச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$\underset{\sim}{r} = s(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})$

இங்கு s என்பது ஒரு மெய்யெண்.

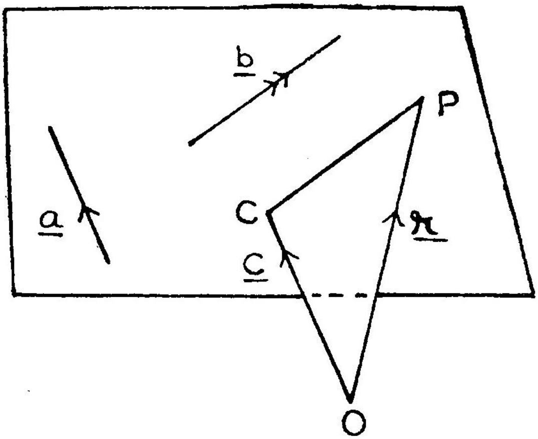
2—14 (3): தளம் (Plane).

2—14 (3A): கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி ஒன்றின் வழியே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கோடுகளுக்கு இணையாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டை வரையறுத்தல் :

c என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியாகுக.

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கு இணையாக அமையும் இரு திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். (படம் 2-37ஐப் பார்க்கவும்.)

O என்பது துவக்கப் புள்ளியாகுக. C என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{c}$ எனக் கொள்க.



படம் 2–37

P என்பது தளத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளியாகுக. Pயின் நிலைத் திசையியை $\underline{r}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \underline{OP} = \underline{OC} + \underline{CP}$$

அல்லது $\underline{CP} = \underline{OP} - \underline{OC}$

$$= \underline{r} - \underline{c}$$

$(\underline{r} - \underline{c})$, $\underline{a}$, b என்பவை ஒரு தளத்திலமையும் திசையிகளாகும். எனவே,

$$(\underline{r} - \underline{c}) \cdot \underline{a} \wedge \underline{b} = O$$

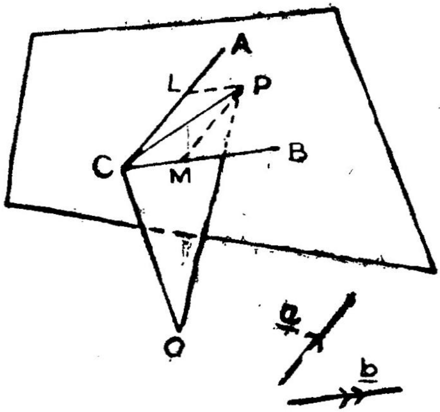
அதாவது $\underline{r} \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{c} \cdot (a \wedge \underline{b})$

அல்லது $[\underline{r}\ \underline{a}\ \underline{b}] = [\underline{c}\ \underline{a}\ b]$

வேறு முறை :

O என்பது துவக்கப் புள்ளியாகுக. Cயின் நிலைத் திசையியை $\underline{c}$ எனக் கொள்க. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட திசையிகள்.

P என்பது தளத்தில் படம் 2-38ல் காட்டியவாறு ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறிக்கட்டும்.



படம் 2–38.

Pயின் நிலைத் திசையியை $\underline{r}$ எனக் கொள்க.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ திசையிகளுக்கு இணையாகத் தளத்திலமையும் கோடுகளை CA, CB எனக் குறிக்கவும்.

CA, CBக்களுக்கு இணையாக முறையே PM, PL என்னும் கோடுகளை வரையவும்.

$$\underline{CM} = s\,\underline{b}$$

$$\underline{CL} = t\,\underline{a}$$

$$\therefore\ \underline{OP} = \underline{OC} + CP = \underline{OC} + \underline{CM} + \underline{CL}$$

$$= \underline{c} + s\,\underline{b} + t\,\underline{a},$$ s, t என்பவை மெய்யெண்கள்.

எனவே தளத்தின் சமன்பாடு

$\underline{r} = \underline{c} + t\,\underline{a} + s\,\underline{b}$ ஆகும்.

2—14 (8B) துவக்கப் புள்ளி வழியாகவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கோடுகளுக்கு இணையாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணுதல் :

தளம் துவக்கப் புள்ளி வழியே செல்வதால்,

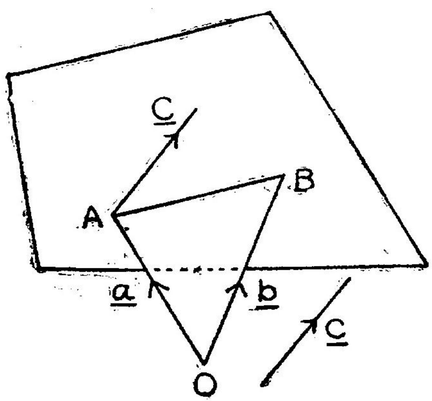
$\underline{OC} = O$

அதாவது $\underset{-}{c} = O$

$\therefore \underset{-}{r} = t\underset{-}{a} + s\,b$

2—14 (8C) கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாகவும் செல்லும் தளத்தை வரையறுத்தல் :

படம் 2-39இல் A, B என்பவை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும். அவற்றின் நிலைத் திசையிகளை $\underset{-}{a}$, $\underset{-}{b}$ எனக்



படம் 2-39.

கொள்க. $\underset{-}{c}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டிற்கு இணையாக அமையும் திசையியாகுக. இக்கோட்டை A வழியே செல்வதாகக் கொள்க.

$\therefore \underline{OA} = \underset{-}{a},\ \underline{OB} = \underset{-}{b},\ \underline{AB} = b - a$

இத் தளம் A என்னும் புள்ளி வழியாகவும், $\underline{b}-\underline{a}$, $\underline{c}$ என்னும் திசையிகளுக்கு இணையாகவும் செல்லுகிறது. ஆதலால், தளத்தின் சமன்பாடு

$$\underline{r} = \underline{a} + s(\underline{b} - \underline{a}) + t\underline{c}$$

$$= (1 - s)\underline{a} + s\underline{b} + t\underline{c} \text{ ஆகும்.}$$

2—14 (3D): A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை வரையறுத்தல்:

A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை a, b, c எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \underline{CA} = \underline{OA} - \underline{OC} = \underline{a} - \underline{c}$$

$$\underline{CB} = \underline{OB} - \underline{OC} = \underline{b} - \underline{c}$$

A, B, C என்னும் புள்ளிகள் வரையறுக்கும் தளத்தில் $\underline{P}$ என்பது ஏதேனுமொரு புள்ளியாகுக. $\underline{P}$யின் நிலைத் திசையியை $\underline{r}$ எனக் கொள்க.

இத் தளம் C என்னும் புள்ளி வழியாகவும், $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} - \underline{c}$ என்னும் திசையிகளுக்கு இணையாகவும் செல்வதால், தளத்தின் சமன்பாடு,

$$\underline{r} = \underline{c} + s(\underline{a} - \underline{c}) + t(\underline{b} - \underline{c})$$

$$= s\underline{a} + t\underline{b} + (1 - s - t)\underline{c}$$

$$= s\underline{a} + t\underline{b} + u\underline{c}, \qquad s + t + u = 1$$

அதாவது, $\underline{r} = s\underline{a} + t\underline{b} + u\underline{c}$

பயிற்சி

2—1. பின்வரும் திசையிகள் ஒவ்வொன்றின் செயற்படும் திசையில், ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க.

(i) $15\underline{i} - 6\,j + 10\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{19}(15\underline{i} - 6\underline{j} + 10\underline{k})$]

(ii) $10\underline{i} + 20\underline{j} - 20\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{3}(\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k})$]

(iii) $32\underline{i} - 16k + 4\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{9}(8\underline{i} - 4j + \underline{k})$]

(iv) $4\underline{i} + 3j - 5\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{5\sqrt{2}}(4\underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k})$]

(v) $5i - 2j + 14\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{15}(5\underline{i} - 2\underline{j} + 14\underline{k})$]

2—2. பின்வரும் திசையிகள் செயற்படும் திசைகளுக்கு எதிர்த் திசைகளில் ஓரலகுத் திசையிகளைக் காண்க:

(i) $-- 10\underline{i} + 6j - 15k$

[விடை: $\frac{1}{19}(10\underline{i} - 6j + 15k)$]

(ii) $- 9\underline{i} + 8\underline{j} - 12\,\underline{k}$

[விடை: $\frac{1}{17}(9\underline{i} - 8\underline{j} + 12\underline{k})$]

(iii) $200\underline{i} - 100\underline{j} - 200\underline{k}$

[விடை : $\frac{1}{3}(-2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k})$]

(iv) $36\underline{i} + 72\underline{j} + 9\underline{k}$

[விடை : $\frac{1}{9}(-4\underline{i} - 8\underline{j} + \underline{k})$]

(v) $3\underline{i} + 12\underline{j} - 4\underline{k}$

[விடை : $\frac{1}{13}(-3\underline{i} - 12\underline{j} + 4\underline{k})$]

(vi) $350\underline{i} - 50\underline{j} + 125\underline{k}$

[விடை : $\frac{1}{15}(-14\underline{i} + 2\underline{j} - 5\underline{k})$]

(vii) $-50\underline{i} + 200\underline{j} + 40\underline{k}$

[விடை : $\frac{1}{21}(5\underline{i} - 20\underline{j} - 4\underline{k})$]

2—3. திசையி-இன் எண் மதிப்பும், அது செயற்படும் திசையில் ஓரலகுத் திசையியும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. உகந்த திசையியைக் காண்க.

(i) $|\underline{A}| - A = 42$ கி. கி., $\psi_A = \frac{1}{7}(3\underline{i} + 6\underline{j} + 2\underline{k})$

[விடை : $\underline{A} = (18\underline{i} + 36\underline{j} + 12\underline{k})$ கி.கி.]

(ii) $R = 2100$மீ., $\underline{\psi_R} = \frac{2}{7}\underline{i} + \frac{6}{7}\underline{j} + \frac{3}{7}\underline{k}$

[விடை : $\underline{R} = (600\underline{i} + 1800\underline{j} + 900\underline{k})$மீ.]

(iii) $|\underline{A}| = 100$, $\underline{\psi_A} = 0{\cdot}8\underline{j} - 0{\cdot}6\underline{k}$

[விடை : $\underline{A} = 80\underline{j} - 60\underline{k}$]

(iv) $A = 90$, $\underline{\psi_A} = -\frac{2}{3}\underline{i} + \frac{1}{3}\underline{j} + \frac{2}{3}\underline{k}$

[விடை : $\underline{A} = -60\underline{i} + 30\underline{j} + 60\underline{k}$]

(v) $A = 50,\ \psi_A = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} - \frac{1}{2}\underline{k}$

[விடை : $\underline{A} = 25\underline{i} + 35{\cdot}35\underline{j} - 25\underline{k}$]

2—4. A, B என்ற புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் (position vectors) முறையே $3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$; $5\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}$ என்றால், AB என்ற திசையியையும், அதன் திசைக் கிடக்கை களையும் காண்க.

[விடை : $2\underline{i} + 5\underline{j} - 11\underline{k},\ l = \frac{2}{5\sqrt{6}},\ m = \frac{1}{\sqrt{6}},\ n = -\frac{11}{5\sqrt{6}}$]

2—5. நேர்க் கோட்டில் இயங்கும் துகள் ஒன்று (6, 13, 7) என்ற புள்ளியிலிருந்து, (10, — 3, 4) என்ற புள்ளிக்குச் சென்றால், துகளின் இடப் பெயர்ச்சியைக் காண்க.

[விடை : $4\underline{i} - 16\underline{j} - 3\underline{k}$]

2—6. $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ சுட்டமைப்பில், (3, 4, 5) என்ற புள்ளிக்கு ஏற்ற நிலைத் திசையியைக் காண்க. அதன் எண் மதிப்பையும், திசைக் கிடக்கைகளையும் காண்க.

[விடை : $3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k},\ 5\sqrt{2},\ l = 0{\cdot}4242,\ m = 0{\cdot}5656,$
$n = 0{\cdot}707$]

2—7. ஒரு திசையியின் எண் மதிப்பு 50 எனவும், அது செயற்படும் கோடு x, y, z அச்சுக்களுடன் முறையே 45°, 60°, 120° என்ற கோணங்களைத் தாங்குவதாகவும் கொண்டால், அத் திசையியைக் காண்க.

[விடை : $35{\cdot}35\underline{i} + 25\underline{j} - 25\underline{k}$]

2—8. R_i, (i = 1, 2, 3) என்ற புள்ளிகள் (x_i, y_i, z_i) என்ற இடங்களிலும், $\tilde{R}$ என்ற புள்ளி $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ என்ற இடத்திலும் அமைந்து, அவைகளுக்கு உரிய நிலைத் திசையிகள்,

$10\underline{\tilde{R}} = 2\underline{R_1} + 3\underline{R_2} + 5R_3$ என்ற சமன்பாட்டை வரையறுக்கின்றன. இச்சமன்பாட்டிற்குச் சரிநிகரான மூன்று எண்ணிச் சமன்பாடுகளை (Scalar Equation) வரையறுக்க.

2—9. P (1 செமீ., 1 செமீ., 1 செமீ.) என்ற புள்ளி, (0·500, —0·707, 0·500) என்பவைகளைத் திசைக் கிடக்கைகளாகக் கொண்ட ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளது. அக் கோட்டில் Pக்கு இரு புறங்களிலும் 5 செமீ. தொலைவில் அமையும் புள்ளிகளுக்கு உரிய நிலைத் திசையிகளைக் காண்க.

விடை : $\left\{\frac{7}{2}\underline{i} + \left(1-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\underline{j} + \frac{7}{2}\underline{k}\right\}$ செ. மீ

$$\left\{-\frac{3}{2}\underline{i} + \left(1+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\underline{j} - \frac{3}{2}\underline{k}\right\} \text{ செ.மீ.}$$

2—10. $\underline{A}$ என்ற திசையி-இன் துவக்கப்புள்ளி (5, 3, 4) ஆகவும், நுனிப் புள்ளி (11, 8, —5) ஆகவும் இருக்குமெனில், $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில் அதன் பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : $A_x = 6$, $A_y = 5$, $A_z = -9$]

2—11. எண் மதிப்பு 210 மீட்டர் உள்ள ஒரு திசையி, (—1, 5, 4) என்ற புள்ளியை, (5, 3, 1) என்ற புள்ளியுடன் சேர்த்திடும் திசையில் செயற்படுமானால் அதன் x, y, z பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : 180, —60, — 90 மீ.]

2—12. 7500 கி. கி. எடையுள்ள விசை ஒன்று, $\frac{1}{25}(7\underline{i} - 24\underline{k})$ என்ற திசையி-க்கு இணையாகச் செயற்படுமென்றால், அதை ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$) சுட்டமைப்புக்கு ஏற்றவாறு வரையறுக்க.

[விடை : 300 $(7\underline{i} - 24\underline{k})$ கி. கி. எடை]

2—13. எண் மதிப்பு 42 கி. கி. உடையதும், திசைக் கிடக்கைகள் $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ என்றும் உள்ள திசையியைக் காண்க.

[விடை : $(28\underline{i} - 14\underline{j} - 28\underline{k})$ கி. கி.]

2—14. எண் மதிப்பு **45** கி. மீட்டரும், திசைக் கோணங்கள் (Direction Angles) α, β, γ முறையே 37°, 90°, 127° என்றும் உடைய திசையியைக் காண்க.

[விடை : $3{\cdot}6\underline{i} - 2{\cdot}7\,\underline{k}$) கி. மீட்டர்]

2—15. 70 கிராம் எடையுள்ள விசை ஒன்று, $2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}$ என்ற திசையிக்கு இணையாக செயற்படுமானால், அவ்விசையைக் காண்க.

[விடை : $(20\underline{i} + 50\underline{j} - 60\underline{k})$ கிராம்]

2—16. பின்வரும் திசையிகளுக்கு உரிய தொகு பயன் திசையி-இன் எண் மதிப்பையும், அது செயற்படும் திசையில் ஓரலகுத் திசையியையும் காண்க.

(i) $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j}$

$\underline{B} = -\underline{j} + \underline{k}$ [விடை : $1{\cdot}414$, $0{\cdot}707\underline{i}\ 0{\cdot}707\underline{k}$]

(ii) $\underline{A} = 2\underline{i} - 3\underline{k}$

$\underline{B} = \underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$ [விடை : 9, $0{\cdot}333\underline{i} + 0{\cdot}667\underline{j} - 0\ 667\underline{k}$]

(iii) $\underline{A} = 7\ \angle 30^\circ$

$\underline{B} = 7\ \angle 150^\circ$ [விடை : 7, $\underline{j}$]

(iv) $\underline{A} = 10\ \angle 120^\circ$

$\underline{B} = 10 \angle 45^\circ$ [விடை : $15{\cdot}9$, $0{\cdot}130\underline{i} + 0{\cdot}99\underline{j}$]

(v) $\underline{A} = 3\underline{i} - 5\underline{j} - 2\underline{k}$

$\underline{B} = 4\underline{i} - 7\underline{j} + 4\underline{k}$

$\underline{C} = -5\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ [விடை : 15, $\frac{1}{15}(2\underline{i} - 14\underline{j} + 5\underline{k})$]

(vi) $\underline{A} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$

$\underline{B} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$

$\underline{C} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k}$

[விடை: $10\sqrt{3}, \ \frac{1}{15\sqrt{3}}(15\underline{i} + 21\underline{j} - 3\underline{k})$]

(vii) $\underline{A} = 6\underline{i} + 10\underline{j} + 16\underline{k}$

$\underline{B} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$

$\underline{C} = 25 \angle 45°$ [விடை: $\underline{R} = 25{\cdot}7\underline{i} + 24{\cdot}7\underline{j} + 16\underline{k}$]

(viii) $\underline{A} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}$

$\underline{B} = 3\underline{i} - 3\underline{j} - 2\underline{k}$

$\underline{C} = -2\underline{i} + 4\underline{j} - 3\underline{k}$ [விடை: 5, $0{\cdot}6\underline{i} + 0{\cdot}8\underline{j}$]

2—17. பின்வரும் கணக்குகளில் ஒரு சில திசையிகளின் எண் மதிப்புக்களும், அவைகள் செயற்படும் கோடுகளின் திசை விகிதங்களும் (Direction ratios) தரப்பட்டுள்ளன. அத் திசையிகளின் தொகுபயன் திசையியைக் காண்க. அதன் x, y, z பகிர்வுகளையும், அது செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகளையும் காண்க.

திசையி	எண் மதிப்பு	திசை விகித எண்கள்
(i) $\underline{A}$	A = 98 கி.கி.	(6, 4, −12)
$\underline{B}$	B = 76 கி.கி.	(−6, 18, 1)
$\underline{C}$	C = 90 கி.கி.	(4, −1, 8)

[விடை: $\underline{R} = 58\underline{i} + 90\underline{j}$, $R_x = 58$ கி.கி., $R_y = 90$கி.கி.

$R_z = 0; \ l = \frac{58}{\sqrt{11464}}, \ m = \frac{90}{\sqrt{11464}}; \ n = 0$]

திசையி	எண் மதிப்பு	திசை விகித எண்கள்
(ii) $\underline{A}$	A = 150	(2, −2, 1)
$\underline{B}$	B = 175	(2, + 3, −6)
$\underline{C}$	C = 135	(−4, −8, −1)

[விடை : $\underline{R} = 90\underline{i} - 145\underline{j} - 115\underline{k}$, $R_x = 90$, $R_y = -145$
$R_z = -115$, $l = 0{\cdot}4373$, $m = -0{\cdot}7046$,
$n = -0{\cdot}5588$]

(iii) $\underline{A}$	A = 130	(−5, 12, 0)
$\underline{B}$	B = 100	(0, −4, 3)
$\underline{C}$	C = 150	(1, −2, −2)
$\underline{D}$	D = 70	(−3, 6, 2)

(விடை : $\underline{R} = -30\underline{i} + 100\underline{k}$, $R_x = -30$, $R_y = 0$,
$R_z = 100$, $l = -0{\cdot}2873$, $m = 0$, $n = 0{\cdot}9578$]

(iv) $\underline{A}$	A = 1900	(18, 1, −6)
$\underline{B}$	B = 1700	(−8, 0, 15)
$\underline{C}$	C = 2500	(0, 0, −1)
$\underline{D}$	D = 1500	(−14, −5, 2)
$\underline{E}$	E = 1300	(4, 12, −3)

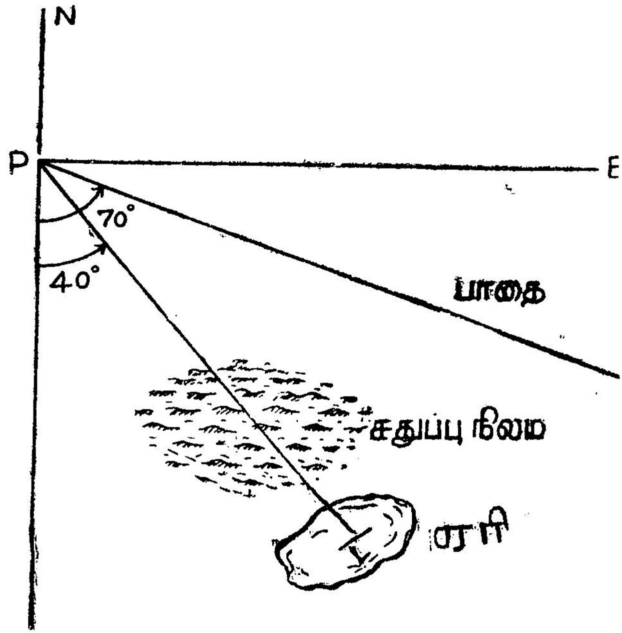
[விடை : $\underline{R} = 800\underline{j} - 1700\underline{k}$; $R_x = 0$, $R_y = 800$,
$R_z = -1700$; $l = 0$, $m = 0{\cdot}4255$,
$n = -0{\cdot}9043$]

(v) $\underline{A}$	A = 380	(18, 1, −6)
$\underline{B}$	B = 340	(−8, 0, 15)

திசையி	எண் மதிப்பு	திசை விகித எண்கள்
$\underline{C}$	C = 500	(0, 0, −1)
$\underline{D}$	D = 300	(−14, −5, 2)
$\underline{E}$	E = 260	(4, 12, −3)

[விடை : $\underline{R}$ 160$\underline{j}$ − 340$\underline{k}$, $R_x = 0$, $R_y = 160$,
$R_z = -340$, $l = 0$, $m = 0{\cdot}4255$
$n = -0{\cdot}9043$]

2—18. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி Pஇலிருந்து, மனிதர் நடமாட முடியாத சதுப்பு நிலத்திற்கு அப்பால், S 40° E என்ற திசையில் 2·5 கி.மீ. நேரான தொலைவில் ஒரு ஏரி உள்ளது.



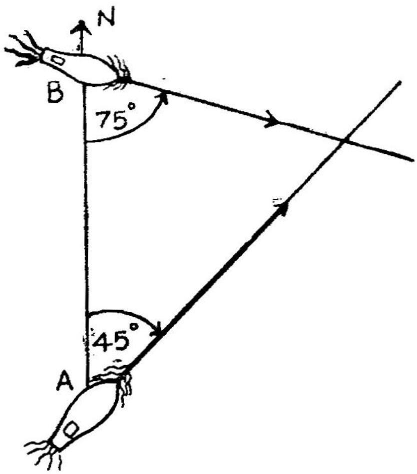
படம் 2–40

ஆனல் Pஇல் S70°E என்ற திசையில் மனிதர் நடமாடுவதற்குகந்த ஒரு நேரான பாதை உள்ளது. (படம் 2-40ல் காட்டியவாறு.)

மீன் பிடிப்பவன் ஒருவன், பாதையில் எப் புள்ளியிலிருந்து ஏரியை மிகக் குறைந்த தொலைவில் அணுக முடியும் எனக் காண்க. அப் புள்ளிக்கும் ஏரிக்கும் உள்ள தொலைவையும், அப் புள்ளியில் ஏரி அமைத்திடும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை : தொலைவு = 1·25 கி.மீ., S20°W]

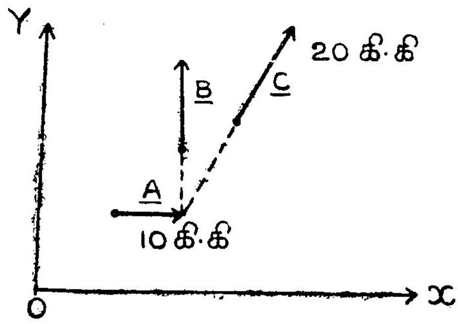
2—19. A என்ற கப்பலின் தலைவர், ரேடார் திரைப்படத்தில் (Radar screen) தனக்கு நேர் வட திசையில், 30 கி.மீ. தொலைவில் B என்ற கப்பல், S75°E என்ற திசையில், 30 கி.மீ. வேகத்தில் செல்வதாகக் கண்டார். அப்பொழுது, A என்ற கப்பல், N45°E என்ற திசையில் 20 கி.மீ. வேகத்தில் சென்று கொண்டிருந்தது. (2-41 படத்தில் கப்பல்களின் தொடக்கத்தில் உள்ள அமைப்புக் காட்டப்பட்டுள்ளது.) (a) B என்ற கப்பல், Aஇன் திசையைக் கடக்கும்போது, Aயிலிருந்து எவ்வளவு தொலைவிலுள்ளது என்பதையும், (b) A என்ற கப்பல், Bஇன் திசையைக் கடக்கும்போது, B என்ற கப்பல் Aயிலிருந்து எத் தொலைவிலுள்ளது என்பதையும் காண்க.



படம் 2–41

[விடை : (a) 18·8 கி.மீ. ; (b) 25·3 கி.மீ.]

2—20. படம் 2-42இல், $\underline{A}$ (கிடைத் திசையில், 10 கி.கி. விசை), $\underline{B}$ (நிலைக்குத்தான திசையில்) ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை $\underline{C}$ (20 கி.கி. விசை) என்றால், $\underline{B}$இன் எண் மதிப்பையும், $\underline{C}$ எத் திசையில் செயற்பட வேண்டுமென்பதையும், வரைபட விளக்கம், கணக்கியல் முறை ஆகியவற்றின் மூலமாகக் காண்க.



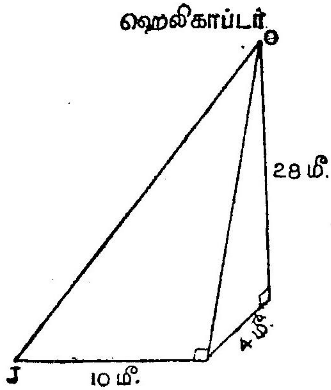
படம் 2–42

[விடை : $|\underline{B}| = 17 \cdot 3$ கி.கி., x அச்சுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் $\underline{C}$ செயற்படவேண்டும்.]

2—21. 2-20வது கணக்கில் (படம் 2–42ல்), $\underline{B}$, $\underline{A}$ ஆகியவற்றின் வேறுபாடு, 30 கி.கி. எடை எண் மதிப்புள்ள $\underline{D}$ என்ற விசையை வரையறுக்குமென்றால், $\underline{B}$இன் எண் மதிப்பையும், $\underline{D}$ செயற்படும் திசையையும் காண்க.)

[விடை : $B = 28 \cdot 28$ கி.கி. விசை, $109^\circ\ 28'$]

2—22. ஜவான் (Soldier) ஒருவரை மீள வைப்பதற்காக கவண் கயிறு ஒன்று (Sling) ஹெலிகாப்டரிலிருந்து பயன்படுத்தப்பட்டது. கவண் கயிற்றில் 88 கி. கி. இழுவிசை ஏற்பட்டது. ஹெலிகாப்டரைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்டு நோக்குங்கால் ஜவான் 28 மீட்டர் தொலைவில் கீழ்நோக்கியும், 10 மீட்டர் தொலைவில் ஹெலிகாப்டருக்குப் பின்புறமும், 4 மீட்டர் தொலைவில் ஹெலிகாப்டருக்குப் பக்கவாட்டிலும் உள்ள

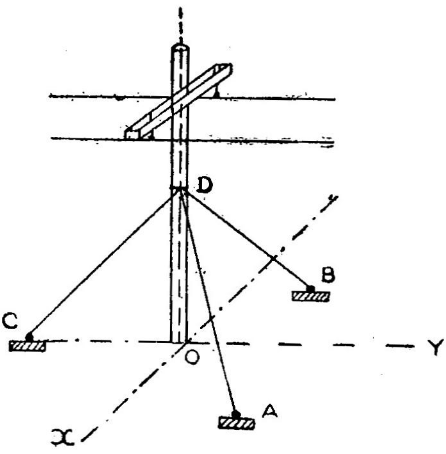


படம் 2–43

நிலையில் இருப்பதாகக் கொண்டு, (படம் 2-43இல் காட்டியுள்ள படி) இழுவிசைகளின் பகிர்வுகளை, தகுந்த அச்சுக்களைச் சுட்டமைப்பில் எடுத்து வரையறுக்க.

[விடை : 42 கி.கி. (கீழ்நோக்கி) ; 29·2 கி.கி. (பின்புறம்) ; 11·6கி.கி. (பக்கவாட்டில்)]

2—23. தொலைபேசி கம்பம் ஒன்று படம் 2-24இல் காட்டிய வாறு மூன்று வலுவான கம்பிகளால் (Cables), A (5, 4, 0)மீ., B $(-6, \frac{8}{3}, 0)$ மீ., C $(0, -6, 0)$மீ. என்ற புள்ளிகளை நோக்கிய திசைகளில் அமையுமாறு கம்பத்தின் ஓர் புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அப் புள்ளி அடித்தளத்திலிருந்து $\frac{35}{3}$மீ. தொலைவில்



படம் 2–44

உள்ளது. கம்பி ஒவ்வொன்றிலும் 60கி.கி. இழுவிசை ஏற்படுவதாகில், அவற்றின் தொகுபயன் விசைக்கு உரிய எண் மதிப்பையும், அது செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகளையும் காண்க.

[விடை : $\underline{R} = 158{\cdot}5$கி.கி.,

$$l = -0{\cdot}0284, \quad m = 0{\cdot}0172, \quad n = 0{\cdot}996]$$

2—24. முதல் எண் பகுதியில் (First octant), சுட்டமைப்புப் புள்ளி O வழியாகவும், x, y, z அச்சுக்களுடன் சமமான கோணங்

களை அமைக்கும் நேர்கோட்டில் செயற்படும். ஓரலகுத் திசையியின் பகிர்வுகளைக் காண்க. அது ஏதாவதொரு அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை : $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 54·7°]

2—25. சுட்டமைப்புப் புள்ளி, O வழியாகவும், x, y, x அச்சுக்களுடன் சமமான கோணங்களைத் தாங்கும் நேர்கோட்டில், $(3i - 4j + 12k)$ என்ற திசையியின் எண்ணிப் பகுதியை (Scalar component)க் காண்க.

[விடை : $\frac{11}{\sqrt{3}}$]

2—26. $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளன :

$\underline{A} = 3\underline{i} - 4\underline{k}$; $\underline{B} = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$.

(a) B திசையி செயற்படும் திசையில், $\underline{A}$இன் வீழ்ச்சியைக் காண்க.

(b) இரு திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை : (a) $\frac{2}{3}$ (b) 82° 20′]

$\underline{F} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ என்ற விசையின் வீழ்ச்சியை $x = y = 2z$ என்ற நேர்கோட்டுத் திசையில் காண்க.

[விடை : $\frac{8}{3}$]

2—27. $\underline{A}$ ஒரு திசையி எனின், $|\underline{A}|^2 = \underline{A} \cdot \underline{A}$ என்று நிறுவுக. $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் θ என்றால்,

$|\underline{A} + \underline{B}|^2 = |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + 2\,|\underline{A}|\,|\underline{B}| \cos\theta$ என நிரூபிக்க.

2—28. $\underline{A} + 2\underline{B} + 5\underline{C}$, $3\underline{A} + 2\underline{B} + \underline{C}$, $2\underline{A} + 2\underline{B} + \underline{C}$ ஆகிய நிலைத் திசையிகளுக்கு உரிய புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

[**குறிப்பு :** திசையிகளுக்கு உரிய புள்ளிகள் P, Q, R என்றால் $\underline{PR} + \underline{RQ} = \underline{PQ}$ ஆகும்.]

2—29. நிலைத் திசையிகள் $2\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k}$, $7\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}$, $24\underline{i} + 2\underline{j} + 24\underline{k}$ எனவுடைய புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டிலமையும் எனக் காண்க.

2—30. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே $2\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k}$, $4i - 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $3i - 4\underline{j}$ ஆகும். $\underline{AB}$, $\underline{AC}$ ஆகிய திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை :} \quad \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{18}\right) \right]$$

2—31. $2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $4\underline{i} - 3\underline{k}$ என்ற திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : 70·5°]

2—32. (2, 0, 5), (3, − 6, − 6) என்ற புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : 119·7°]

2—33. A, B, C என்ற புள்ளிகள் முறையே, (3, − 2, 6), (5, − 2, 7), (1, −1, 6) என்னுமிடங்களில் அமையுமென்றால், AB, AC ஆகிய நேர்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : 143·2°]

2—34. இரு நேர்கோடுகளின் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ என்றால், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : 90°]

2—35. பின்வரும் தொகுதிகளிலுள்ள திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள எனக் காட்டுக :

(i) $-6\underline{i} + 9\underline{j} + \underline{k}, \quad 5\underline{i} + 4\underline{j} - 6\underline{k}$

(ii) $\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}, \quad -16\underline{i} + 5\underline{j} + 2\underline{k}$

(iii) $8\underline{i} - 3\underline{j} + 5\underline{k}, \quad -3\underline{i} + 7\underline{j} + 9\underline{k}$

2—36. $6\underline{i} + y\underline{j} - 2\underline{k}$, $9\underline{i} - 4\underline{j} + 15\underline{k}$ என்ற திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையுமென்றால், y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $y = 6$]

2-37. $2x - y + 2z = 1$, $x - y = 2$ என்ற தளங்களுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : $45°$]

2—38. $7x + 4y + 4z + 3 = 0$, $2x + y - 2z + 2 = 0$ என்ற தளங்களுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : $\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$]

2—39. $7\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$, $2\underline{i} - 4\underline{j} + 3\underline{k}$ என்ற திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, குறுக்குப் பெருக்கி ஆகியவற்றைக் காண்க. இவ்விரு திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை : 9 ; $10\underline{i} - 19\underline{j} - 6\underline{k}$; $76°, 51'$]

2—40. $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ சுட்டமைப்பு முறையில், $2\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k}$, $\underline{i} - 4\underline{k}$ ஆகிய திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாகவுள்ள ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க.

[விடை : $\frac{1}{\sqrt{33}}(4\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k})$]

2—41. $\underline{A} = \underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{B} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ என்றால், $(\underline{A} \wedge \underline{B})$ன் பகிர்வை, $(3\underline{i} - 4\underline{k})$ என்ற திசையி செயற்படும் திசையில் காண்க.

[விடை : $-3\underline{i} + 4\underline{k}$]

2—42. எவ்வித நிலைமைகளில், $\underline{A} \wedge \underline{C} = \underline{B} \wedge \underline{C}$ என்ற சமன்பாட்டில் பொதுக் காரணிகளை நீக்க முடியும் ?

2—43. $\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k}$, $2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ என்ற திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் குறுங்கோணத்தைக் காண்க. இவ்விரு திசையிகளுக்கும் செங்குத்தாகவுள்ள ஓரலகுத் திசையியையும் வரையறுக்க.

$$\left[\text{விடை : } 60^\circ ; \ \frac{1}{\sqrt{3}} (\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}) \right]$$

2—44. $(3\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$, $(-2\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k})$ என்ற திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க. இவ்விரு திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. அவைகளுக்கு இடையிலமையும் குறுங் கோணத்தையும் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \frac{1}{\sqrt{390}} (-5\underline{i} + 14\underline{j} + 13\underline{k}) ; \ \sqrt{390}; \ 73^\circ \ 52' \right]$$

2—45. $\underline{A} = \underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{B} = 2\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ என்ற திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள திசையில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க. இவ்விரு திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } \pm \frac{\sqrt{2}}{10} (4\underline{i} - 3\underline{j} + 5\underline{k}) ; \ \frac{5\sqrt{2}}{2} \right]$$

2—46. $\underline{A} = 12\underline{i} + 13\underline{j} + 10\underline{k}$, $\underline{B} = 5\underline{i} - 9\underline{j} + 7\underline{k}$ என்றால், (a) $\underline{A} \wedge \underline{B}$ஐக் காண்க. (b) (a)ல் கண்டறிந்த திசையி, $\underline{A}$, $\underline{B}$

ஆகியவற்றிற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது என்பதைக் காட்டுக. (c) $\underline{A}$, $\underline{B}$ திசையிகளுக்குச் செங்குத்தாகவுள்ள திசையில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க. (d) இரு திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணத்தின் நெடுக்கையையும் (Sine) காண்க.

[விடை : (a) $181\underline{i} - 34\underline{j} - 173\underline{k}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{63846}}(181\underline{i} - 34\underline{j} - 173\underline{k})$

(d) 0·9973]

2—47. $\underline{A} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{B} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$ என்ற திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

[விடை : $5\sqrt{5}$]

2—48. பின்வரும் தொகுதிகளில் கண்ட திசையிகள் இணையாக இருக்கும் எனக் காட்டுக :

(i) $\underline{A} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 5\underline{k}$, $\underline{B} = -6\underline{i} + 8\underline{j} - 10\underline{k}$

(ii) $\underline{A} = -35\underline{i} + 15\underline{j} - 10\underline{k}$, $\underline{B} = 7\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{k}$

(iii) $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{B} = 7\underline{i} + 7\underline{j} + 7\underline{k}$

(iv) $\underline{A} = -\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$, $\underline{B} = -4\underline{i} + 4\underline{j} - 4\underline{k}$

(v) $\underline{A} = 4\underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$, $\underline{B} = 20\underline{i} + 15\underline{j} - 25\underline{k}$

(vi) $\underline{A} = -\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}$, $\underline{B} = 3\underline{i} - 6\underline{j} + 9\underline{k}$

2—49. $2\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k}$, $\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ ஆகிய திசையிகள் இணையானவைகளானல், அவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கியைப் பயன்படுத்தி, b, cக்களின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : $b = -\frac{3}{2}$; $c = 2$]

2—50. பின்வரும் தொகுதிகளில் உள்ள திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(i) $2\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}$, $-\underline{i} + 5\underline{j} + 2\underline{k}$ [விடை: $\sqrt{30}$]

(ii) $\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $3\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$ [விடை: $\sqrt{171}$]

(iii) $\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $3\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$ [விடை: $4\sqrt{6}$]

(iv) $8\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}$, $2\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ [விடை: $\sqrt{12}$]

2—51. A (1, 2, 3), B (− 1, 1, 2), C (2, 3, −1) என்ற புள்ளிகளைக் கோண முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் குறுக்குப் பெருக்கியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

[விடை: $\frac{1}{2}\sqrt{107}$]

2—52. A (1, 2, 3), B (−2, −3, 4), C (4, 5, 6) என்ற புள்ளிகளால் வரையறுக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

[விடை: $3\sqrt{6}$]

2—53. A (0, 0 ,0), B (1, 1, 1), C (2, 1, 3) என்ற புள்ளிகளால் வரையறுக்கப்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஓரலகுத் திசையியைக் காண்க. அப் புள்ளிகளைக் கோண முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

[விடை: $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}\right)$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$]

2—54. $4\underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$, $-2\underline{i} + \underline{j} + 6\underline{k}$, $2\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k}$ என்ற திசையிகள் ஒரு முக்கோணத்தை அமைத்திடும் என நிறுவுக.

2—55. இரு திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கி, குறுக்குப் பெருக்கி ஆகியவற்றின் வரையறைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சர்வ சமன்பாட்டை மெய்யெனக் காட்டுக :

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) \equiv (\underline{A} \cdot \underline{A})\,(\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{A} \cdot \underline{B})\,(\underline{A} \cdot \underline{B})$$

2—56. இரு திசையிகளது எண்ணிப் பெருக்கி, குறுக்குப் பெருக்கி ஆகியவற்றின் வரையறைகளைக் கொண்டு,

$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{C}, \quad \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{A}$ என்றால்,

$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0, \quad \underline{B} \cdot \underline{C} = 0; \quad \underline{C} \cdot \underline{A} = 0, \quad \underline{A} \cdot \underline{A} = \underline{C} \cdot \underline{C}, \quad \underline{B} \cdot \underline{B} = 1$ எனக் காட்டுக.

2—57. $(\underline{A} - \underline{B}) \wedge (\underline{A} + \underline{B}) = 2(\underline{A} \wedge \underline{B})$ என நிரூபிக்க.

இதன் ஜியோமிதி விளக்கத்தைக் கூறுக.

[**குறிப்பு:** $\underline{A}, \underline{B}$ என்ற திசையிகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு, இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்களை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பில் பாதியாகும்.]

2—58. R என்பது ஒரு நிலைத் திசையி (Position Vector) என்றால்,

$(\underline{i} \wedge \underline{R}) \cdot (\underline{R} \wedge \underline{j}) = (\underline{i} \cdot \underline{R})(\underline{R} \cdot \underline{j})$ எனக் காட்டுக.

2—59. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணப் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ என்றால், அம் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை,

$\frac{1}{2}(\underline{A} \wedge \underline{B} + \underline{B} \wedge \underline{C} + \underline{C} \wedge \underline{A})$ என்ற திசையியின் எண் மதிப்பு வரையறுக்குமெனக் காட்டுக. இதனைப் பயன்படுத்தியோ, அல்லது வேறு வழியிலோ,

$-2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}, \quad \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}, \quad 7\underline{i} - \underline{k}$ என்ற நிலைத் திசையிகள் வரையறுக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

2—60. பின்வரும் தொகுதிகளில் கொடுக்கப்பட்ட திசையிகளுக்குரிய முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கி $\{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})\}$, முக்கூட்டுக் குறுக்குப் பெருக்கி $\{\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})\}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $\underline{A} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{B} = 6\underline{i} + 4\underline{j} - 2\underline{k}$,

$\underline{C} = 3\underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k}$

[விடை : -72, $-6(6\underline{i} + 4\underline{j} - 5\underline{k})$]

(ii) $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{B} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$,

$\underline{C} = 3\underline{i} + \underline{j} - 5\underline{k}$

[விடை : -4, $37\underline{i} + 26\underline{j} + 15\underline{k}$]

(iii) $\underline{A} = \underline{i} - \underline{k}$, $\underline{B} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}$,

$\underline{C} = -6\underline{j} - 7\underline{k}$

[விடை : 20, $21\underline{i} + 16\underline{j} + 21\underline{k}$]

(iv) $\underline{A} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$, $\underline{B} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$,

$\underline{C} = 6\underline{i} + 7\underline{j} - \underline{k}$

[விடை : 78, $8\underline{i} - 84\underline{j} + 36\underline{k}$]

(v) $\underline{A} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{B} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}$,

$\underline{C} = 6\underline{i} + 4\underline{j} - 3\underline{k}$

[விடை : 28, $31\underline{i} + 14\underline{j} - 3\underline{k}$]

2—61. பின்வரும் திசையிகளின் கணம் (set) ஒரு தளத்திலமையும் எனக் காண்க :

(i) $2\underline{i} - 3\underline{j} + 5\underline{k}$, $3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$, $16\underline{i} - 7\underline{j} + 23\underline{k}$

(ii) $\underline{i} + 3\underline{j} - 2\underline{k}$, $7\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $25\underline{i} + 6\underline{j} + \underline{k}$

(iii) $3\underline{i} - 7\underline{j} - 2\underline{k}$, $-4\underline{i} + 5\underline{j} + 3\underline{k}$, $9\underline{i} - 34\underline{j} - 5\underline{k}$

(iv) $6\underline{i} - \underline{j} + 5\underline{k}$, $5\underline{i} + 7\underline{j} - 3\underline{k}$, $7\underline{i} + 38\underline{j} - 30\underline{k}$

(v) $4\underline{i} - 2\underline{j} + 59\underline{k}, \quad -3\underline{i} + 4\underline{j} + 7\underline{k}, \quad 5\underline{i} - 6\underline{j} + 2\underline{k}$

(vi) $18\underline{i} + 8\underline{j} + 6\underline{k}, \quad 4\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}, \quad \underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$

(vii) $-2\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}, \quad 3\underline{i} - 4\underline{j} - 2\underline{k}, \quad -\underline{i} + 2\underline{j}$

2—62. பின்வரும் புள்ளிகளின் கணம் ஒரு தளத்திலமையும் எனக் காண்க.

(i) A (−13, 17, −1), B (−6, 3, 2), C (3, −2, 4), D (5, 7, 3)

(ii) A (−1, 1, −1), B (1, 1, −1), C (3, −1, −1), D (3, −2, −1)

2—63. A (3, 0, 1), B (1, − 5, 1), C (6, 0, 2), D (4, −3, 2) என்ற புள்ளிகளுக்குரிய நிலைத் திசையிகளைக் காண்க. இவற்றினைப் பயன்படுத்தி, $(\underline{B} - \underline{A}) \wedge (\underline{C} - \underline{A}) \cdot (\underline{D} - \underline{A})$ என்ற முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பையும் காண்க.

2—64. A (−5, 0, 1) என்பது ஒரு கன இணைகரத்தின் (parallelopiped) உச்சிப் புள்ளியாகும். விளிம்புகள் (edges) Aயிலிருந்து முறையே B (2, −2, 5), C (−1, 5, 7), D (−2, 4, 6) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்த்திடும் துண்டுக் கோடுகளில் அமைகின்றன, அதன் பருமனைக் காண்க.

[விடை : 15]

2—65. பின்வரும் திசையிகளில் மூன்று திசையிகள் ஒரு தளத்திற்கு இணையாக அமைகின்றன எனக் காட்டுக :

$$-\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}, \quad \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}, \quad 3\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}, \quad 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$$

2—66. முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கியைப் பயன்படுத்தி, P′, Q′, R′ என்ற நிலையான புள்ளிகளால் வரையறுக்கப்படும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[விடை : $(\underline{P} - \underline{P}') \cdot (\underline{Q}' - \underline{P}') \wedge (\underline{R}' - \underline{P}') = 0$]

2—67. $2\underline{i} - 6\underline{j} + 3\underline{k}$, $4\underline{i} + 3\underline{j} - 2\underline{k}$, $3\underline{i} + 5\underline{j} + 7\underline{k}$, $-\underline{i} - 13\underline{j} + 17\underline{k}$ என்பவைகளை நிலைத் திசையிகளாகவுடைய புள்ளிகள் ஒரு தளத்திலமையும் என நிறுவுக.

2—68. $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$, $\underline{B} = \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{C} = -\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ என்றால், $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{C}$ன் மதிப்பு யாது?

[விடை : -4]

2—69. A, B, C, D என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவு கள், முறையே $(-5, 0, 1)$, $(2, -2, 5)$, $(-1, 5, 7)$, $(-2, 4, 6)$ என்றால், AB, AC, AD என்ற நேர்கோடுகளை விளிம்புகளாகக் கொண்ட (edges) கன இணைகரத்தின் பருமனைக் காண்க.

[விடை : 15]

2—70. நான்கு பக்கமுள்ள கன வடிவத்தின் (tetrahedron) அடித்தள முக்கோணம் $(-2, 6, 0)$, $(3, 2, 1)$, $(0, 0, 5)$ என்ற புள்ளிகளாலும், அதன் உச்சி, துவக்கப் புள்ளியாலும் வரையறுக் கப்பட்டால், அதன் கனபரிமாணத்தைக் காண்க.

[விடை : 18·3]

2—71. $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ என்ற புள்ளி களில் உச்சிகளை (Vertices) உடைய நான்கு பக்கமுள்ள கன வடிவத்தின் பருமனைக் காண்க.

[விடை : $\frac{1}{6}$]

2—72. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக:

(i) $(\underline{B} - \underline{C}) \cdot [(\underline{C} - \underline{A}) \wedge (\underline{A} - \underline{B})] = 0$

(ii) $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot [(\underline{B} \wedge \underline{C}) \wedge (\underline{C} \wedge \underline{A})] = [\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})]^2$

(iii) $\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) + \underline{B} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{A}) + \underline{C} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) = 0$

(iv) $(\underline{B} + \underline{C}) \cdot [(\underline{C} + \underline{A}) \wedge (\underline{A} + \underline{B})] = 2\, \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$

[விளக்கம் : A, B, C என்ற திசையிகளை விளிம்புகளாகக் கொண்ட கன இணைகரப் பட்டகையின் பருமன், அதன் மூலை விட்டங்களை விளிம்புகளாகக் கொண்ட கன இணைகரப் பட்டகையின் பருமனில் பாதியாகும்.]

2—73. $\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = 0$ எனின்,

$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{C} \wedge \underline{A}$ என நிறுவுக.

2—74. $\underline{A}, \underline{B}$ இணைத் திசையிகள் எனின்,

$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{C})$ எனக் காட்டுக.

2—75. $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) \neq 0$ ஆகவும், $\underline{D} = x\underline{A} + y\underline{B} + z\underline{C}$ ஆகவும் கொண்டால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(i) $$x = \frac{\underline{D} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})}{A \cdot (B \wedge C)}$$

$$y = \frac{A \cdot (D \wedge C)}{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})}$$

$$z = \frac{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{D})}{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})}$$

(ii) $$D = \frac{\underline{D} \cdot \underline{A}}{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})} (\underline{B} \wedge \underline{C}) + \frac{\underline{D} \cdot \underline{B}}{A \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})} (C \wedge \underline{A})$$

$$+ \frac{\underline{D} \cdot \underline{C}}{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})} (A \wedge B)$$

3. விசைகள் (Forces) :

இயந்திர இயல் அறிவுத் துறையில் விசை என்பது நீளம், நேரம் ஆகியவற்றுடன் ஓர் அடிப்படை ராசியாகக் கருதப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை நிலைத் திசையி வரையறுப்பதைப் போல் விசைகளையும் திசையிகளின் மொழியால் வரை யறுக்கலாம்.

3—1. விசையின் தன்மை (Nature of a force) :

விசையின் உள்ளுணர்வான சில தன்மைகளை ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளால் அறியலாம்.

ஒரு பொருள் புவியை நோக்கி விழும்போது, அப்பொருளின் மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையே அதன் எடையாகும். எனவே பொருளின் எடை ஓர் விசையைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளப்படும்.

முன்னும் பின்னும் இழுக்கத் தகுந்த அறைகளுள்ள பெட்டியில் அறை ஒன்று சிக்கிக்கொண்டால் அதைச் சரிப்படுத்தி வெளியே இழுக்க அல்லது உட்புறம் செலுத்த ஒரு வித விசையைப் பயன்படுத்த வேண்டி வருகிறது.

விட்டத்தில் கட்டப்பட்ட கயிறு ஒன்றின் நுனியில் ஒரு பொருளைத் தொங்கவிட்டால், அது ஒரு சமநிலையை அடையும் போது, கயிற்றில் மேல் நோக்கிய இழு விசை (tension) செயற் பட்டுப் பொருள் கீழே விழாமலிருக்கும்படிச் செய்கிறது.

ஓர் உந்து வண்டியின் வேகம் குறைக்கப்பட்டவுடன், அதை நிறுத்துவதற்கு உராய்வு விசை (Frictional force) காரணமாக உள்ளது.

இங்கு காட்டிய நான்கு எடுத்துக்காட்டுகளில் முதலில் கண்ட விசை பொருளைச் சார்ந்திருப்பதால், அதைப் பொருள் விசை (Body force) எனவும், இறுதியாகக் குறிப்பிட்ட மூன்று

விசைகளும் தொடுகை (contact) அல்லது மேற்பரப்பில் (surface) அமைவதால், அவைகளை மேற்பரப்பில் செயற்படும் விசைகளெனவும் (surface forces) கூறுவர். இங்கு விசையானது ஒன்றை ஒன்று தொடும் புள்ளி, அல்லது பரப்பில் பொருளின் மேல் கடத்தப்படுகிறது. ஆகவே, எடுத்துக்காட்டுகளில், விசைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட திசை உள்ளது. புவியீர்ப்பு விசை கீழ் நோக்கிச் செயற்படுகிறது. இழுப்பு விசை, கயிற்றில் மேல் நோக்கிச் செயற்படுகிறது. பெட்டியில் அறைகளைச் சரிவரப் பொருத்துவதில் அல்லது திறப்பதில், விசையானது தேவைப்பட்ட திசையில் செயற்படும். உராய்வு விசை பொருள் இயங்கும் திசைக்கு எதிர்ப்புறத்தில செயற்படுகிறது.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளினுல், விசையானது ஒரு குறிப்பிட்ட திசையை நோக்கிச் செயற்படுவது புலனுகும்.

மேலும் விசைகளுக்கு எண் மதிப்புக்களும் உண்டு.

மெட்ரிக் முறையில் விசையின் ஓரலகு கிராம் எடையாகும். புவியீர்ப்பு அலகு முறையில், அதன் மதிப்பு 9·81 நியூட்டன்களாகும். பிரிட்டன் முறையில் விசையின் ஓரலகு பவுண்டு எடையாகும். அது 4·45 நியூட்டன் எடைகளுக்குச் சமமாகும்.

விசைகளுக்கு எண்மதிப்பும், செயற்படும் திசையும் உளதாகையால், அவைகளைத் திசையிகளால் (vectors) அறிவிக்க முடியும்.

பொதுவாக ஒரு விசையை வரையறுக்க, அதன் எண் மதிப்பு (Magnitude), செயற்படும் திசை (Direction), செயற்படும் புள்ளி (Point of application) ஆகியவை தேவைப்படும். மேற்கூறிய 1, 3 எடுத்துக்காட்டுகளில் செயற்படும் புள்ளி, திசையி-இன் துவக்கப் புள்யிலும், 2, 4 எடுத்துக்காட்டுகளில் செயற்படும் புள்ளி, திசையி-இன் நுனிப் புள்ளியிலும் அமைகிறது.

3—2. துகள்களும், இறுக்கப் பொருள்களும் (Particles and Rigid bodies)

இயந்திர இயல் கருத்துக்கள், விசைகளால் செயற்பட்டு இயங்கிடும் பொருள்கள் எதுவாகிலும் அவைகளனைத்துக்கும் பொதுவாக இருக்கும். இயந்திர இயல் கருத்துக்கள், கோட்பாடுகள் ஆகியவற்றை எளிய முறையில் விளக்கிட, பொருள்களனைத்தையும் துகள்களாக மேற்கொள்வது வழக்கம். இங்கு துகள் என்பது ஒரு பொருளின் கணித இயல் உருவப் படிவம்

(Mathematical Model) ஆகும். பொருள்களின் உருவம், பரிமாணம் ஆகியவை உண்மையில் பெரியவையாக அல்லது சிறியவையாக இருந்தபோதிலும், சூழ்நிலைகளுக்கு ஏற்றவாறு அவைகளைத் துகள்களாகக் கருதவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் ஊசல் குண்டின் பரிமாணம், ஊசலின் நீளத்தை நோக்கும்போது மிகச் சிறியதாக உள்ளது. அவ்வாறே, வானத்தில் சுற்றிடும் கோள், அதன் சுற்றுப் பாதையின் பரிமாணத்துடன் 'ஒப்பிடும்போது மிகச் சிறியதாக ஏற்கப்படும். மேலும் தொங்கும் பொருள்கள், தாழ்ப்பாள், மறை ஆணிகள் முதலிய இறுக்கிகள் அனைத்தும் நிலையியலில் துகள் களாகக் கருதப்படும்.

பொதுவாக, துகளின் நிலை ஒரு புள்ளியால் குறிக்கப்படும். ஆனால், நடைமுறையில், துகளின் கோட்பாடுகளைப் பருப் பொருளைச் சார்ந்த பிரச்சினைகளுக்குப் பயன்படுத்தும்போது, பருப் பொருள் துகள்போல் செயல்படுவதாகக் கொள்ளப் படுவதால், கிடைக்கும் விளைவுகள், உண்மையாக நிகழக்கூடிய விளைவுகளின் தோராயமாகக் கொள்ளப்படும். பொருள்களின் உருவம், பருமன் ஆகியவற்றால் பாதிக்காத ஆய்வுகளில், துகள் களின் நிலைகளைக் கையாளுதல் விரும்பத் தக்கது. அப்போது, பொருளின் நிறையைத் துகள் பெற்றுள்ளதாகக் கொள்ளப்படும். இவ்விதக் கருத்து, இயந்திர இயலின் குறிக்கோள் நெறிகளில் ஒன்றாகும்.

சில சமயங்களில், பொருளானது, துகளாகக் கருதமுடியாத நிலையிலிருக்கலாம். அப்போது பொருளானது, செயல், எதிர் செயல் விளைவிக்கும் துகள்களின் கணமாகக் கொள்ளப்படும். அந்த நிலைகளில், துகள்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணக்கமாகப் பிணைக்கப்பட்டும், துகள்களுக்குள்ள இடைத் தொலைவுகள் மாறாமலும் இருக்கக்கூடுமானதால், பொருளை இறுக்கப் பொருளாகக் (Rigid body) கருத வேண்டும். உந்து வண்டி, ஏணி, சட்டங்கள் (Frames), இயந்திரப் பகுதிகள் ஆகியவை இறுக்கப் பொருள்களுக்கு ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இயந்திர இயல் என்பது பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் கூறுகிறது எனக் கூறப்பட்டது. மேலும் இயந்திர இயலில், இயக்கத்திற்குக் காரணமாக உள்ள விசைகளைப் பற்றியும் அறியலாம். ஒரு நிலையான புள்ளியைப் பொறுத்து, ஒரு பொருள் அல்லது ஒரு துகள் எப்பொழுதும் ஒரே நிலையில் இருந்தால், அது ஓய்வில் இருப்பதாக(at rest)க் கூறப்படும்.

மாருக அத்துகள் தன் நிலையைத் தொடர்ந்து மாற்றிக் கொண்டே இருந்தால் அது இயங்குகிறது எனக் கூறப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட சுட்டமைப்பை (Frame of reference) மேற் கொண்டால்தான் ஓய்வு, இயக்கம் ஆகியவை பொருளைப் (meaning) பெற்றதாகக் கருத முடியும்.

நிலையியலில், நிலையாக உள்ள பொறியியற் சார்ந்த மூலப் பொருள்களில், விசைகளின் கணம், பொருள்கள் ஒரே நிலையில் இருப்பதற்கேற்ப எவ்வாறு செயற்படுகிறது என்பதை அறிய லாம். முதலாவதாக, விசைகளின் கணத்தால் ஒரு துகள் வசப் பட்டிருக்கும்போது, அது எவ்வாறு ஒரே நிலையான புள்ளியில் அமைந்திருக்க முடியும் என்பதைப் பற்றியும், இறுதியாக, இறுக்கப் பொருள்களின் கணம் (set of rigid bodies) எவ்வாறு செயற்படும் விசைகளால் ஒரே நிலையில் அமைந்திருக்க முடியும் என்பதைப் பற்றியும் நிலையியலில் படிப்படியாக அறிய முடிகிறது.

3—3. நியூட்டனின் இயக்க இயல் விதிகள் (Newton's Laws of Motion) :

இயந்திர இயல் அறிவுத் துறைகளில், மிகவும் குறிப்பிடத் தக்கதான அடிப்படைக் கருத்துக்கள் எல்லாம் அனுபவத்தில் பழகிப்போன நியூட்டனின் விதிகளேயாகும். விசை என்ருல் என்ன ? அவ்விசைக்கும் துகளின் இயக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன ? — என்பவைபற்றி நியூட்டனின் விதிகள் கூறுகின்றன. நியூட்டனின் இயக்க இயல் விதிகள் பின் வருமாறு :

முதல் விதி : புறவிசை ஒன்று செயற்படும்வரை அமைதி நிலை (அல்லது ஓய்வு நிலை) அல்லது நேர்கோட்டில் சீரான திசை வேக நிலையிலுள்ள ஒரு பொருள், அந்த நிலையிலேயே தொடர்ந்து இருக்கும்.

இரண்டாவது விதி : ஒரு பொருளின் இயக்கத்திற்குரிய முடுக்கம், அதன்மீது செயற்படும் விசைக்கு நேர் விகிதத்தில் அமைவதோடு, அவ்விசையின் திசையிலேயே ஏற்படுகிறது.

மூன்ருவது விதி : ஒவ்வொரு விசைக்கும் அதற்குச் சமமான எதிர் விசை உண்டு.

மேற்கூறிய கோட்பாடுகளில் பயன்படுத்தப்பட்ட ஓய்வு, இயக்கம் ஆகிய இரு சொற்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட சுட்டமைப்பு

அடிப்படையில்தான் பொருள் உண்டு என்பதை மனதில் கொள்ள வேண்டும். நியூட்டனின் விதிகளை நேரடியாக நிரூபிக்கக்கூடிய எவ்வித சோதனைகளையும் அமைக்க முடியாது. இருந்தபோதிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான சுட்டமைப்பு, அல்லது நேர்கோட்டில் சீரான திசை வேகத்துடன் இயங்கும் சுட்டமைப்பு ஆகியவற்றின் அடிப்படையில்தான் நியூட்டனின் விதிகள் துல்லியமான (exact) அல்லது பிறழாத விளைவுகளை அனுபவத்தில் நிகழ்ந்திடச் செய்யும். வானியலில் விண்மீன்கள் நிலையாகக் கருதப்படுவதால், அவற்றின் சுட்டமைப்பை அடிப் படையாகக் கொண்டு கோள்களைச் சார்ந்த விளைவுகள், நியூட்டனின் விதிகளுக்குக் கட்டுப்பட்டு பிழையின்றி நிகழ் வதால் நியூட்டனின் விதிகள் ஏற்கத்தக்கதாக உள்ளன.

எனவே நிலையான சுட்டமைப்பு முறையை மேற்கொண்டால் தான் நியூட்டனின் விதிகள் பயனுள்ள விளைவுகளை நிகழ்த்திடச் செய்யும். நிலைமைச் சுட்டமைப்பின் (Inertial frame of reference) அடிப்படையில் எடுத்திடும் சுழலும் சுட்டமைப்புக் களிலும் (Rotating frames), முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ள சுட்டமைப்புக்களிலும் (Accelerated frame of reference), நியூட்டனின் விதிகளுக்குரிய பண்புகள், முறையே, சுழற்சி, முடுக்கம் ஆகியவற்றின் வீதத்திற்கேற்றவாறு மாறுபடக் கூடியவை. இவ்விதச் சுட்டமைப்புக்களுக்கு நியூட்டனின் விதிகள் ஏற்பவையல்ல. எடுத்துக்காட்டாக, புவியைச் சுட்டமைப்பாகக் கருதும்போது, புவிப் பரப்பின்மீது உள்ள ஒரு பொருள் ஓய்வில் (அதாவது ஒரே அமைதி நிலையில்) இருப்ப தாகக் கொள்ளப்படும். ஆனால் சூரியனைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்டால், அப்பொருள் ஓய்விலிருப்பதில்லை. இயக்க இயலில், புவியே சுட்டமைப்பாகக் கருதப்படும்.

நியூட்டனின் விதிகள் ஒவ்வொன்றையும் சற்று விரிவாகக் கீழ்க்கண்டவாறு ஆராய்ந்திடலாம்.

3—5 (1) முதல் விதி : இவ்விதியை இரு நிலைகளில் ஆராயலாம். ஒன்று, அமைதி நிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருள், புற விசை யொன்று செயற்படும்வரை, எப்போதும் அமைதி நிலையிலேயே இருக்கும். மற்றொன்று, சீரான திசை வேகத்துடன் ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்கும் ஒரு பொருள், புற விசை ஒன்று செயற்படும் வரை, அதே நேர்கோட்டில், அதே வேகத்துடன் எப்போதும் இயங்கும். இவ்விரு நிலைகளின் உண்மையை அன்றாட நிகழ்ச்சிகளின் வாயிலாக விளக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மேசையின்மீது வைக்கப்பட்ட பூப் பந்து, அதை ஒருவர் தொட்டு நகர்த்தினாலன்றி அசைவ தில்லை. மேலும், தளம் ஒன்றில், ஒரே வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் பூப்பந்து ஒன்று புவியீர்ப்பு, உராய்வு, காற்று முதலிய விசைகளால் தங்கு தடையற்று இருக்குமாகில், அது நிற்காமல், அதே வேகத்தில், தளத்தில் சென்றுகொண்டே இருக்கும். ஆனால் அனுபவத்தில் பூப்பந்தின்மேல் மேற் கூறிய புற விசைகள் செயற்படுவதைத் தடுக்க முடியாததால், அது சற்றுத் தொலைவு சென்றபின் நின்றுவிடும். எனவே முதலாவது விதி, இவ்வித நிகழ்ச்சிகளைக் கற்பனையாகக் கொண்டுதான், புறக்கணிக்கப்படாமல் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்க தாக உள்ளது.

முதல் விதியிலிருந்து எப்பொருளும் அதன் நிலையைத் தானாகவே மாற்றிக்கொள்ள முடியாது என்பது கிடைக்கப் பெறுகிறது. இவ்விதப் பண்பு, நிலைமம் (Inertia) என்று கூறப்படும். மேலும், அப்பொருள் அமைதி நிலையில் (equilibrium) இருப்பதாகவும் கூறப்படும். அதாவது, அமைதி நிலைக்குரிய வரையறை, தொகுபயன் நிகர விசை (Net resultant force) சுழியாக வேண்டும் என்பதையும் வலியுறுத்துகிறது.

பொருளின்மேல் செயற்படும் நிகர விசை சுழியாக இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனை, பொருள் அமைதி நிலையிலிருப் பதற்குப் போதுமானதல்ல என்பதையும் மனதிற் கொள்ள வேண்டும். (The net force acting on a rigid body must be equal to zero, is not enough to ensure its equilibrium). "Equilibrium" என்ற ஆங்கிலச் சொல், இலத்தீன் மொழியி லிருந்து பெறப்பட்டுள்ளது. இலத்தீன் மொழியில் "aequus" என்றால் "equal"—சமம் என்றும், "libra" என்றால் "balance"—சம நிலை என்றும் பொருள்படும். ஆகவே, பொருள் அமைதி யாக இருப்பதைச் சமநிலையில் இருப்பதாக மேற்கொள்ள வேண்டும்.

மேலும், விசை என்பது என்ன என்றும் முதல் விதியிலிருந்து வரையறுக்கலாம்.

விசை என்பது அமைதி நிலை அல்லது நேர்கோட்டில் சீரான திசை வேக நிலையிலுள்ள பொருள் ஒன்றில் செயற்பட்டு, அந்நிலையை மாற்றிடும் செய்கையாகும்.

ஒரு விசையை வரையறுக்கப் பின்வரும் விவரங்கள் தேவைப் படும் :

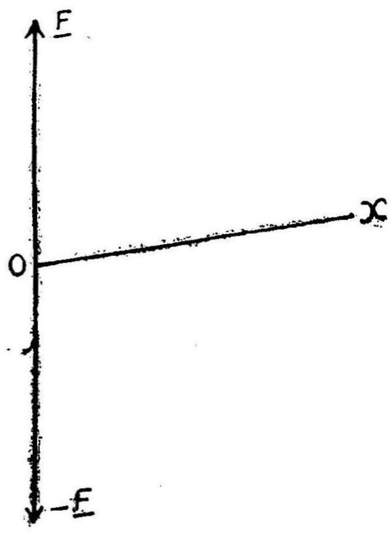
(i) தகுந்த அலகுகோலில் விசையின் எண்மதிப்பு,

(ii) இயங்கும் திசை (அதாவது செயற்படும் கோடும், செயற்படும் திசையும்),

(iii) செயற்படும் புள்ளி (அதாவது பொருள் ஒன்றில் விசை செயற்படும் புள்ளி.)

இங்கு விசைக்கு எண் மதிப்பும், திசையும் உண்டென்பதால் அது ஒரு திசையி (Vector) ஆகும்.

மெட்ரிக் முறையில், விசையின் எண்மதிப்பு, படித்தர அலகில், கிலோகிராம் விசை (kgf) என்ற ஒரும விசை அலகாலும் அல்லது மெட்ரிக் டன் என்ற ஒரும விசை அலகாலும் வரையறுக்கப்படும். வரைபட விளக்க உரையில் திசையுடன் கூடிய துண்டு நேர் கோட்டாலும், அதாவது $\underline{OA}$ என்ற அம்புக்குறியுள்ள நேர் கோட்டாலும் விசையானது குறிக்கப்படும். விசை செயற்படும் நேர்கோடு வரையற்றதாகவும், அதில் விசை நழுவக்கூடிய (Sliding)தாகவும் உள்ளது. விசைக்கு உரிய திசையை O என்ற சுட்டமைப்புப் புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வரையப்படும் ox, oy, oz என்ற அச்சுக்களுடன் விசை செயற்படும் கோடு தாங்கும் கோணங்களின் கிடக்கைகளாலும் அறிவிக்கலாம். மேலும் விசைக்கு உரிய திசை, வரைபடத்தில் துண்டு நேர்கோட்டின் நுனிப் பகுதியில் வரையப்படும் அம்புக்குறியால் குறிக்கப்படும்.



படம் 3–1

இரு விசைகளின் எண் மதிப்புக்கள் சமமாகவும், செயற்படும் கோடு ஒன்றுகவும், ஆனல் செயற்படும் திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிராகவும் இருக்குமானல், அவைகள் ஒரு துகளின் மேல் செயற்படும்போது, எதிர் எதிர் சரிநிகர் விளைவுகளை படம் 3-1இல் காட்டியவாறு உண்டு பண்ணும். அப்போது, துகளின்மேல் செயற்படும் நிகர விசையின் தொகுபயன் சுழித் திசையியாகும். எனவே, புள்ளி அமைதி நிலையில் இருக்கிறது.

ஒரு பொருளைத் துகளாகக் கருதும்போது, விசைகளனைத்தும் துகளில் செயற்படுவதால், அவைகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் விசைகளாகும் (concurrent forces). அப்போது, விசைகள் ஒவ்வொன்றின் எண் மதிப்பும், செயற்படும் திசையும் அறிவிக்கப்பட்டால் மட்டும் போதுமானதாகும்.

3—3. (2) இரண்டாவது விதி: இது விசையை அளவிடுவதற்கு உதவி புரிகிறது. ஒரு பொருளின் மீது செயற்படும் விசையானது, அப் பொருளின் நிறை, அதில் ஏற்படும் முடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் அளவிடப்படுகிறது. இவ் விதியின் மற்ற விளக்கங்கள் இயக்க இயல் பகுதியில் தரப்படும்.

3—3. (3) மூன்றாவது விதி: இவ் விதியிலிருந்து, விசைகள் தனித்துச் செயற்படுவதில்லை; அவை எப்போதும் இரட்டையாகவே அமைந்து, ஒன்று மற்றொன்றின் எண் மதிப்புக்குச் சமமாகவும், ஒரே நேர்கோட்டில், எதிர் எதிர் திசைகளிலும் செயற்படுகின்றன என்பதை அறியலாம். இரட்டையிலுள்ள விசைகள் இரண்டும் ஒருபோதும் ஒரே பொருளில் செயற்படுவதில்லை. ஆதலால் அவைகளால் சமநிலையை விளைவிக்க முடியாது.

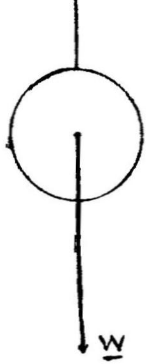
மேசையின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ள குண்டு ஒன்று அதன் எடைக்குச் சமமான விசையை மேசையின்மீது செயற்படுத்துகிறது. மேசையோ அவ் விசைக்கு எதிரானதும், சமமானதுமான விசை ஒன்றை குண்டின்மீது விளைவிக்கிறது. அங்ஙனமே, மேசையின் அறையை உள்ளே தள்ளும்போது, அதற்குச் சமமான விசை ஒன்றை, அறையானது தள்ளுபவர்மேல் செலுத்துகிறது. கயிற்றில் தொங்கவிடப்பட்ட பொருள், கயிற்றைக் கீழ்நோக்கி இழுக்கும்போது நிகழ்த்திடும் விசைக்குச் சமமான விசையைக் கயிறானது மேல்நோக்கிய திசையில் பொருளின்மேல் விளைவிக்கிறது. பொறி வண்டிச் சக்கரத்தின் பொதிகவசம் (tyre) பாதையின் மேற்பரப்பில் உந்தும்போது முன்னோக்கி நிகழ்த்திடும் விசைக்குச் சமமான விசையை, பொறி வண்டி இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் தரையின் உராய்வு விசை பொதி கவசத்தின்மேல் செயற்படுத்துகிறது.

விசைகள் சோடியாகவே ஏற்படுவதால் அவற்றில் எவ் விசை மேற்கொண்ட ஆய்பொருளில் தேவைப்படுகிறதோ, அவ் விசைக்குத்தான் சிறப்பிடம் அளிக்கப்பட வேண்டும். ஒரு பொருள், மற்றப் பொருள்களுடன், "n" குறிப்பிட்ட செயல் எதிர்

செயல்களை நிகழ்த்திடும்போது, அது "2n" விசைகளுக்கு உள்ளடங்கியுள்ளது. அவற்றில் குறிப்பிட்ட பொருளின்மேல் செயற்படும் "n" விசைகளைத்தான் மேற்கொள்ள வேண்டும். அதாவது, குறிப்பிட்ட பொருளைத் தனிப்படுத்தி (isolate), மற்றப் பொருள்கள் அதன்மேல் செயற்படுத்தும் புற விசைகளைத்தான் ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இவ்விதம் பொருளைத் தனிப்படுத்தி, அதன்மேல் செயற்படும் புற விசைகளைக் குறிப் பிடுவதில் விளக்கப் படங்கள் பெரிதும் உதவி புரிகின்றன. அதற்காக, முதலில், தனிப்படுத்தப்பட்ட பொருளின் எல்லைக் கோட்டை (outline) வரைந்திடவேண்டும். பிறகு அப்பொருள் மற்றப் பொருள்களுடன் செயல், எதிர்ச் செயல்களை விளைவிக்கும் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும், அப் பொருளின் மேல் செயற்படும் புற விசைகளுக்குரிய திசையிகளைக் குறிக்க வேண்டும். அப்போது கிடைக்கும் வரைபடத்திற்குத் தடையற்ற பொருள் விளக்கப் படம் (free body diagram) என்று பெயர்.

3—3. (4) தடையற்ற பொருள் வரைபட விளக்கங்களுக்கு ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகள் (Free body diagrams–some illustrations).

ஒரு பொருளின் எடை, அப் பொருளின் புவியீர்ப்புப் புள்ளியில் கீழ்நோக்கிய குத்துத் திசையில் செயற்படுவதாக வரையப்படும்.



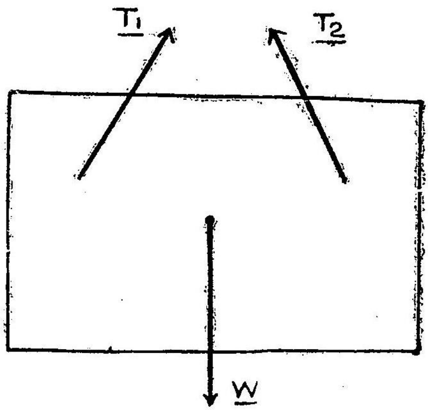
படம் 3–2

கயிற்றில் தொங்கவிடப்பட்ட குண்டின் எடை (W) கீழ் நோக்கியும், கயிற்றின் இழுப்பு விசை (T) மேல் நோக்கியும் படம் 3-2ல் காட்டியபடி குறிக்கப்படும்.

ஒரு பொருள், வழவழப்பான தரையின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும்போது, தரையின் புற விசையை, தொடும் புள்ளியில் தரைக்குச் செங்குத்தான மேற்புற திசையில், பொருளின் மீது செயற்படுமாறு வரைதல் வேண்டும்.

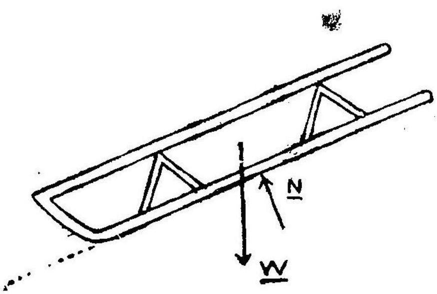
உராய்வு விசையானது, பொருள் இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் குறிக்கப் படும்.

கம்பியால் கட்டப்பட்டு ஓர் ஆணியில் தொங்கவிடப்பட்ட படம் ஒன்றில், $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$ என்ற இழுப்பு விசைகளைக் கம்பியில் தொங்க விடப்பட்ட புள்ளியை நோக்கியும், அதன் எடை $\underline{W}$ஐ படத்தின் புவியீர்ப்புப் புள்ளியில் கீழ் நோக்கியும், படம் 3-3ல் காட்டியவாறு வரைய வேண்டும்.



படம் 3–3.

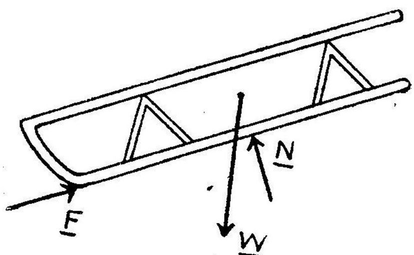
வழவழப்பான சாய்வு தளத்தில் அமைந்திருக்கும் சறுக்கு வண்டி தளத்தைத் தொடும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், தளத்தின் புற விசையை, தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் எடுப்ப தற்குப் பதிலாக, அவைகளின் தொகுபயன் விசையை ($\underline{N}$) தளத் திற்குக் குத்தாக ஓர் உகந்த புள்ளியில்: படம் 3-4ல் காட்டியபடி



படம் 3–4

செயற்படுவதாகக் கொள்ள வேண்டும். சறுக்கு வண்டியின் எடையை (W), அதன் புவியீர்ப்புப் புள்ளியின் வழியே, கீழ் நோக்கிய குத்துக் கோட்டில் செயற்படுமாறு வரைதல் வேண்டும்.

சறுக்கு வண்டி, சொரசொரப்பான (rough) தளத்தில் அமைவதாகில், மேற்கூறிய விசைகளுடன் அது இயங்கும்



படம் 3–5

திசைக்கு எதிர்த் திசையில் உராய்வு விசையை (F) சாய்வு தளத்தில்செயற்படுமாறு படம் 3-5ல் காட்டியபடி குறித்தல் வேண்டும்.

3·4. நியூட்டனின் புவியீர்ப்பு விதி (Newton's law of gravitation):

இது நியூட்டனின் மூன்றுவது விதி செயற்படுவதை விளக்கிக் கூறிடும். இரு பொருள்களை இணைத்துக் கட்டுவதற்கு, உணர்ந்தறியக் கூடிய ஊடு பொருள் (perceptible medium) ஏதுமின்றி, அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செயலெதிரான கவர்ச்சி விசையைப் பெற்றுள்ளன என்ற விதியை நியூட்டன் கண்டு பிடித்தார். இதுவே நியூட்டனின் புவியீர்ப்பு விதியாகும். மேலும் இவ்விதக் கவர்ச்சி விசையானது, பொருள்களை (துகள்களை)ச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டில் செயற்பட்டும், அதன் எண் மதிப்பு, பொருள்களுடைய நிறை எண்களின் (masses) பெருக்குத் தொகைக்கு நேர் விகிதத்திலும், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் தொலைவின் இரு படிக்கு எதிர் விகிதத்திலும் இருக்குமென்றும் நியூட்டனின் புவியீர்ப்பு விதி கூறுகிறது.

இரு துகள் (பொருள்)களின் நிறைகளை முறையே m_1, m_2 எனவும், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் தொலைவை r எனவும்

கொள்ள, அவைகள் ஒவ்வொன்றின்மேல் செயற்படும் கவர்ச்சி விசையின் எண் மதிப்பானது கணக்கியலாக,

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$ என்று அறிவிக்கப்படும்.

இங்கு G என்பது படைப்பு முழுமைக்கும் உள்ள (Universal) ஈர்ப்பு விசையின் வீத அளவைக் குறிக்கும் மாறிலி.

மெட்ரிக் முறையில் Gன் மதிப்பு,

$(6{\cdot}670 \pm 0{\cdot}005) + 10^{-10}$ (மீ.)^4 (கி. கி. விசை)$^{-1}$ (விநாடி)$^{-4}$ அலகுகளாகும்.

பிரிட்டன் முறையில் Gன் மதிப்பு, தோராயமாக,

$$G \doteq 6{\cdot}67 \times 10^{-10} \left(\frac{100}{2{\cdot}54 \times 12}\right) \left(\frac{9{\cdot}80665 \times 10^5}{32{\cdot}174 \times 453{\cdot}59 \times 30{\cdot}48}\right)$$

(அடி)^4 (பவு. விசை)$^{-1}$ (விநாடி)$^{-4}$

$\doteq$ $34{\cdot}44 \times 10^{-9}$ (அடி)^4 (பவு. விசை)$^{-1}$ (விநாடி)$^{-4}$ அலகுகளாகும்.

Gஇன் மதிப்பு மிகச் சிறியதானதால் இரு பொருள்களுக்கு இடையே அமையும் மைய ஈர்ப்பு விசை குறிப்பிடத்தக்க அளவில் இருப்பதற்கு பொருள்களில் ஏதாவதொன்றின் நிறை மிகவும் அதிகமாக இருக்கவேண்டி வரும். எடுத்துக்காட்டாக, புவியின் மேல்பரப்பிலுள்ள பொருள்களின் நிறைகள், புவியின் நிறையுடன் ஒப்பிடும்போது மிகச் சிறியவைகளானதால் பொருள்களின்மேல் செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை மிகவும் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் உள்ளது.

3—4. (1) புவியில் ஓர் இடத்தின் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தைக் காணுதல்:

m நிறையுள்ள ஒரு துகளைப் புவிப் பரப்பின்மேல் எடுக்கவும். புவியைக் கோளமாகக் கொண்டு அதன் நிறை, ஆரம் ஆகியவற்றை முறையே M, R எனக் கொள்ளவும். அப்போது துகளுக்கும், புவிக்கும் இடையிலமையும் கவர்ச்சி விசை

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2}$$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

மேலும் துகளின் எடை, அத் துகளின் மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையாவதால், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$F = W = mg \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே,} \quad g = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot M}{R^2} \text{ ஆகும்.}$$

இதையே துகள் இருக்கும் இடத்தின் புவியீர்ப்பு முடுக்கமாகக் கொள்ளப்படும்.

மெட்ரிக் முறையில் g–இன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :

$$G = 6{\cdot}54 \times 10^{-4} \ (\text{மீட்டர்})^4 \ (\text{கி.கி. விசை})^{-1} \ (\text{விநாடி})^{-4}$$

$$M = \text{புவியின் நிறை} = 6{\cdot}1 \times 10^{23} \ (\text{கி.கி.விசை}) \ (\text{மீட்டர்})^{-1} \ (\text{விநாடி})^2$$

$$R = \text{புவியின் ஆரம்} = 6378 \text{ கி.மீட்டர்} = 6378 \times 10^3 \text{ மீட்டர்.}$$

எனவே,

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2} = \frac{6{\cdot}54 \times 10^{-10} \ (\text{மீட்டர்})^4 \ (\text{கி.கி.விசை})^{-1} \ (\text{விநாடி})^{-4} \times 6{\cdot}1 \times 10^{23} \ (\text{கி.கி.விசை}) \ (\text{மீ.})^{-1} \ (\text{வி})^2}{(6378)^2 \times 10^6 \ (\text{மீட்டர்})^2}$$

$$= \frac{6{\cdot}54 \times 6{\cdot}1 \times 10^{-16} \times 10^{23}}{(6378)^2} \ (\text{மீட்டர்})/(\text{விநாடி})^2$$

$$= 9{\cdot}81 \ \text{மீட்டர்}/(\text{விநாடி})^2 \text{ ஆகும்.}$$

உண்மையில் புவி ஒரு கோளமாயிராததால், Rன் மதிப்பும் அதனால் g-ன் மதிப்பும் புவியின் மையத்தைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு அளவிடும்போது, துகளின் நில நேர்கோடு (latitude), நிரைகோடு (longitude) ஆகியவற்றிற்கும் ஏற்றாற்போல் மாறுபடும்.

பொறியியலைச் சார்ந்த கணக்குகளில், புவிப் பரப்பின் மேல் பொருள் அமைந்திருக்கும் நிலைமையில் g-ன் மதிப்பு 9·81 (மீட்டர்/விநாடி^{2}) எனக் கொள்ளப்படும்.

3—5. விசைகளின் இணைகர விதி (Parallelogram Law of forces):

இரு விசைகள் ஒரு துகளில் செயற்படுமானால், அவைகளின் தொகுபயன் விசையை இணைகர விதியின்மூலம் பெறலாம்.

துகளில் செயற்படும் விசைகளைத் தகுந்த அலகுகோலில் துகளுக்கு உரிய புள்ளியில் திசையிகளாக அமைத்து, அவைகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட ஓர் இணைகரத்தை வரைந்து, அப் புள்ளியின் வழியே அமையும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் இரு விசைகளின் தொகுபயன் விசையைத் தெரிவிக்கும்.

3—6. அடிப்படை மெய்ம்மைகள் (Axioms):

பொறியியலைச் சார்ந்த இயந்திர இயல் ஒரு சில அடிப்படை மெய்ம்மைகளால் உருவாக்கப்பட்ட அறிவுத் துறையாகும். இவ்வித அடிப்படை மெய்ம்மைகள் கணக்கியலாக வரையறுக்கத் தக்கவையல்ல. அனுபவ முறையில் பரிசோதனைகள் வாயிலாக அவைகள் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கனவாக உள்ளன.

நியூட்டனின் விதிகளனைத்தும் அடிப்படை மெய்ம்மைகளாகும். மற்றும் ஒரு சில மெய்ம்மைகளை இயந்திர இயலில் ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டிய நிலைமைகள் ஏற்படுகின்றன. அவைகள் ஒவ்வொன்றும் இங்கு விவரிக்கப்படும்.

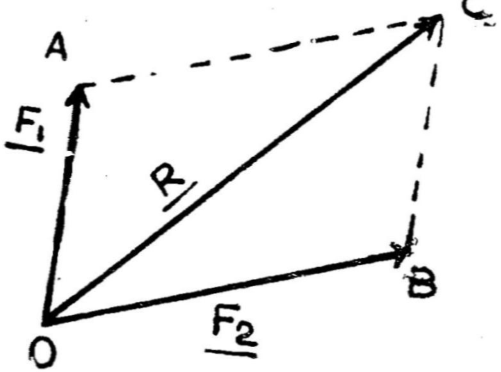
3—6. (1) மெய்ம்மை I:

விசைகளின் இணைகர விதி
(Parallelogram Law of Forces)

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்ற விசைகள் பொருள் ஒன்றில், O என்ற புள்ளி வழியே செயற்படும்போது அவைகளுக்குச் சரிசமத்துவமான $\underline{R}$ என்ற விசை ஒன்று அப் புள்ளியின் வழியே செயற்பட்டும், அதன் எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றை $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$களை அண்டைப் பக்கங்களாக எடுத்து, அப் புள்ளியில் அமைக்கப்படும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் வரையறுக்கும் என இணைகர விதி கூறுகிறது.

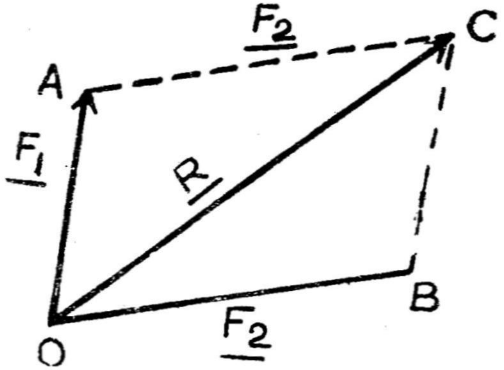
$\underline{R}$ என்பது $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்ற விசைகளின் தொகுபயன் விசை (Resultant Force) எனக் கூறப்படும். அதைத் திசையி முறையில்,

$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$ என எழுதலாம். [படம் 3-6இல் காட்டியவாறு.]



படம் 3-6

மேலும் தொகுபயன் விசையை எடுத்த $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ என்ற விசைகளைத் தடையற்ற திசையிகளாகக் (Free vectors),



படம் 3-7

கையாண்டு, $\underline{F}_1$இன் அடியை Oஇல் எடுத்து, அதன் நுனியில் $\underline{F}_2$ன் அடியைப் பொருத்தி O-வையும், $\underline{F}$ ன் நுனியையும் சேர்த்திடும் அம்புக்கோடு வரையறுக்கும். (படம் 3-7இல் காட்டியவாறு.)

படம் 3-7இல்,

$\underline{F_1} = \underline{OA}$

$\underline{F_2} = \underline{OB} = \underline{AC}$ ஆகும்.

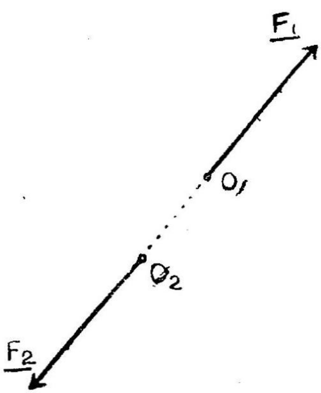
$\therefore \underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{OA} + \underline{AC}$ ஆகும்.

அதாவது $\underline{R} = \underline{OC}$ ஆகும்.

இதுவே விசைக் கூடுதலின் முக்கோண விதியாகும்.

O என்ற புள்ளியில் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் செயற்படுமேயானால், இணைகர விதியைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தி, இறுதியாக ஓர் தொகுபயன் விசையைத் (Final resultant force) தீர்மானிக்கலாம். அல்லது திசையிகளின் "நுனி-அடி" என்ற அடிப்படையிலும் இறுதியாக வரும் தொகுபயன் விசையைப் பெற்றிடலாம்.

3-6. (2) மெய்ம்மை II:



படம் 3-8

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்ற இரு விசைகள் ஒரு பொருளில் செயற்பட்டு அப் பொருளை அமைதி நிலையில் இருக்கச் செய்வதானால், அவைகள் எண் மதிப்புக்களைச் சமமாகவும், எதிர் எதிர்த்திசைகளில் செயற்பட்டும், இரண்டும் ஒரே (same) செயற்படும் கோட்டைப் பெற்றுள்ளனவாகவும் இருக்க வேண்டும். (படம் 3-8ஐப் பார்க்க.)

கொள்கையின்படி,

$\underline{F_1} = -\underline{F_2}$

அல்லது $\underline{F_1} = \underline{F_2} = 0$

அதாவது $\underline{R} = 0$

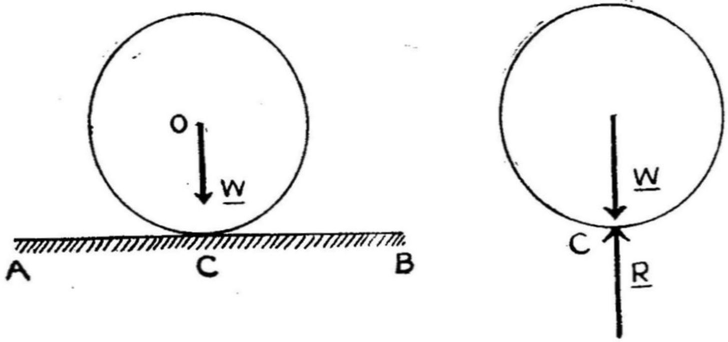
எனவே, இங்கு தொகுபயன் விசை சுழியாகிறது.

ஆதலால் மெய்ம்மைகள் Iம், IIம் ஒரு புள்ளியில் அமையும் விசைகள் புள்ளியை அமைதி நிலையில் வைப்பதற்கு அவற்றின் தொகுபயன் விசை சுழியாக வேண்டுமென்பதை வரையறுக்கின்றன.

3—6. (3) மெய்ம்மை III :

ஒவ்வொரு செயலுக்கும் அதற்குச் சமமான எதிர்ச் செயல் உண்டு. இது நியூட்டனின் மூன்ருவது விதியேயாகும்.

$\underline{W}$ எடையுள்ளதும், உருண்டை வடிவமுள்ளதுமான இரும்புக் குண்டு ஒன்று மட்ட தளத்தில் வைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளவும். குண்டின் எடை, தளத்தைத் தொடும் புள்ளியில் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுகிறது. குண்டு அமைதி நிலையிலிருப்பதாலும், அதன் எடை கீழ்நோக்கிச் செயற்படுவதாலும்,



படம் 3-9

அதற்குச் சமமான $\underline{R}$ என்ற விசை ஒன்று தொடும் புள்ளியில் மேல் நோக்கிச் செயற்பட வேண்டிய நிலைமை ஏற்படுகிறது. எனவே மெய்ம்மை II ன்படி,

$\underline{W} + \underline{R} = 0$ ஆகும்.

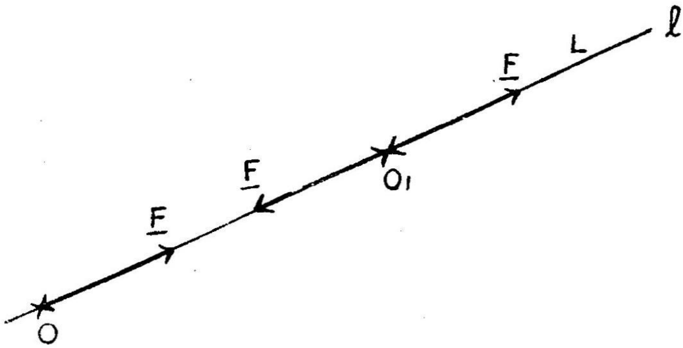
$\underline{R}$ என்பது தளத்தின் எதிர்ச் செயலாற்றும் விசை (reaction) யாகக் கொள்ளப்படும். [படம் 3-9ஐப் பார்க்கவும்.]

3—6 (4) மெய்ம்மை IV :

விசை கடத்தும் கோட்பாடு

(The Principle of Transmissibility of a force)

ஒரு பொருளின்மேல் செயற்படும் புற விசையின் கணத்தைக் கவனிக்கும்போது, புறவிசை ஒவ்வொன்றையும் நழுவும் திசையி (Sliding Vector) யாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, புறவிசை ஒவ்வொன்றையும் புற விசை செயற்படும் கோட்டின் எப்புள்ளி யிலும் செயற்படும்படி அமைக்கலாம்.



படம் 3–10

பொருள் ஒன்றின்மீது O என்ற புள்ளியில் $\underline{F}$ என்ற விசை, l என்ற கோட்டில், படம் 3–10ல் காட்டியவாறு செயற்படுவ தாகக் கொள்ளவும். அக்கோட்டில், O_1 என்ற புள்ளியின் இரு புறங்களிலும் $\underline{F}$, $\underline{F}$ என்ற விசைகளை எதிர் எதிராகச் செயல்படும் படி அமைக்கவும். அப்போதும் பொருள் முன்பு இருந்த நிலையிலேயே இருக்கும்.

இவ்விசைகளின் தொகுபயன் விசையை, திசையிகளின் முறையில் அறியும்போது Oல் OL என்ற திசையில் செயற்படும் $\underline{F}$-ம், O_1-ல், O_1O என்ற திசையில் செயற்படும் $\underline{F}$ம் எதிர் எதிரான விசைகளாவதால், அவற்றின் தொகுபயன் விசை சுழியாகும். அப்போது மீதியிருக்கும் $\underline{F}$ என்ற விசை O_1 ல், O_1L என்ற திசையில் செயற்படுகிறது. எனவே, F என்ற

விசையை, செயற்படும் புள்ளி Oவிலிருந்து, O_1க்கு, அதன் செயற்படும் கோட்டிலேயே மாற்றலாம் என்பது புலனாகிறது. இதுவே விசை கடத்தும் கோட்பாடாகும்.

இங்கு

$$\left\{\underline{F}\right\}, O ல் \equiv \left\{\underline{F}\right\}, O ல் + \left\{-\underline{F}\right\}, O_1 ல்$$

$$+ \left\{\underline{F}\right\}, O_1 ல் \equiv \left\{\underline{F}\right\}, O_1 ல் ஆகும்.$$

3—7. விசைகளின் சரிசமத்துவம் (Equivalence of forces) :

விசைகளின் இரு கணங்கள் (two sets of forces) துகள் அல்லது பொருள் ஒன்றில் செயற்பட்டு, கணப் பொழுதில் (instantaneous) விளைவிக்கும் செயல்கள் சமமாக இருக்குமேயானால், அவைகள் சரிசமத்துவக் கண விசைகளாகக் கருதப்படும்.

இரு விசைகள் சரிசமத்துவ விசைகளாகக் கருதுவதற்குரிய அவசியமானதும் (necessary), போதுமானதுமான (sufficient) நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு :

(i) அவைகள் சமமான திசையிகளால் அறிவிக்கப்பட்டும்,

(ii) ஒரே செயற்படும் நேர்கோட்டைப் பெற்றுள்ளதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் விசைகளை ஒன்று சேர்த்திடுவதில் சோதனைகள் வாயிலாக அவைகள் திசையிகளின் கூட்டுச் சேர்க்கை விதியைப் பின்பற்றுகின்றன என்ற காரணத்தால் இணைகர விதி விசைகளுக்கும் பொருந்தும் என்பது தெளிவாகிறது.

3—8. விசை கணத்தின் தொகுபயன் (Resultant of a set of forces) :

விசைகளின் கணம் ஒன்றிற்குச் சரிசமத்துவமாக ஒரு தனித்த விசை இருப்பதாகில், அதனை விசைக் கணத்தின் தொகுபயன் விசை எனக் கூறுவது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டாக $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்ற விசைகளின் செயற்படும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், அவைகளின் தொகுபயன் விசை $\underline{F_1} + \underline{F_2}$ என்றுவதுடன் அது விசைகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும் செயற்படும். மேலும் அது சந்திக்கும் புள்ளியில் $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ஆகியவற்றை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தாலும் வரையறுக்கப்படும்.

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, $\underline{F_3}$......$\underline{F_i}$,......$\underline{F_n}$ என்பவை ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் விசைகளானல், அவைகளின் தொகுபயன் விசை $\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \dots + \underline{F_i} + \dots + \underline{F_n}$ என்றுகும். மேலும், தொகுபயன் விசையும் அப்புள்ளி வழியே செல்லும்.

விசைகளை ஒன்று சேர்ப்பதில் திசையிகளைப் பயன்படுத்துவதால்,

$\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \dots + \underline{F_i} + \dots + \underline{F_n}$ என்ற திசையிகளின் கூடுதல், $\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ என்று குறியீட்டு முறையில் அறிவிக்கப்படும். இங்கு Σ என்ற குறியீடு, மேற்கொண்ட திசையிகளைக் கூட்ட வேண்டும் என்பதை அறிவிக்கிறது.

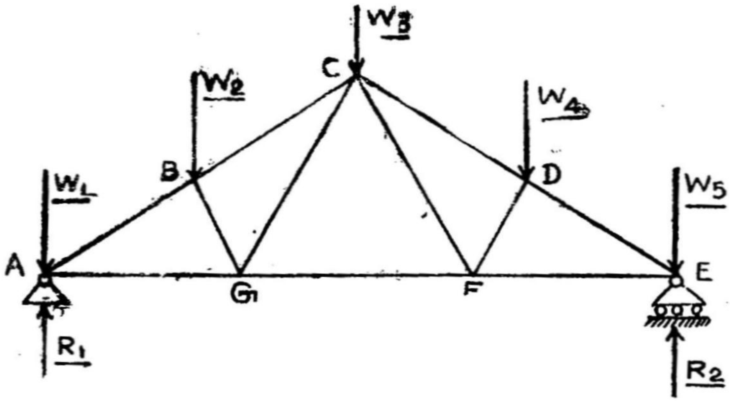
3—9. ஒரே தளத்தில் செயற்படும் விசை அமைப்பு (Coplanar force system) :

விசைகளின் செயற்படும் கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் போது, அவைகள் ஒரு தள விசைகளெனக் கூறப்படும். ஒரு தள விசைகள் அனைத்தும் ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படுவதாக அமையலாம். அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காத தள விசைகளாகவும் இருக்கலாம். எனவே தள விசைகளை ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் தள விசைகளென்றும் (Concurrent coplanar forces), ஒரு புள்ளியிலமையாத தள விசைகளென்றும் (Non-concurrent coplanar forces) வகைப்படுத்தலாம்.

ஒரு புள்ளியிலமையாத தள விசைகளின் செயற்படும் கோடுகள் எல்லாம் ஒரு போகாக (இணையாக) இருக்கலாம். அல்லது எல்லாம் இணையற்றதாக அல்லது ஒரு சில ஒரு போகாவும், மற்றவை இணையற்றதாகவும் இருக்கலாம்.

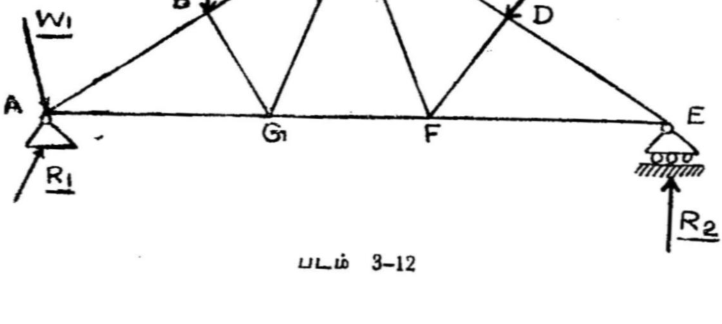
ஒரு கூரை உத்தரத்தின் (roof truss) தொகுதியில் செயற் படும் விசைகள் ஒரு தள விசைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

படம் 3-11ல் விசைகளின் செயற்படும் கோடுகள் ஒருபோகாக உள்ளன.



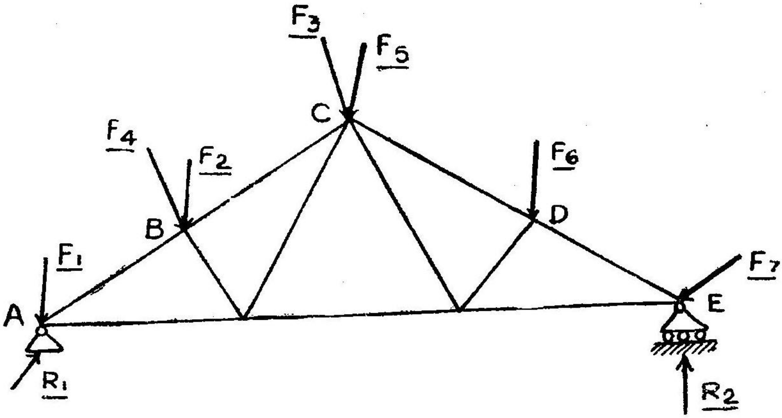
படம் 3-11

படம் 3-12ல் விசைகளனைத்தும் ஒரு தளத்தில் இணையற்றதான அமைப்பைப் பெற்றுள்ளன.



படம் 3-12

படம் 3-13ல் ஒரு சில தள விசைகள் ஒரு போகாகவும், மற்றவை ஒரு போகாக அமையாதனவாகவும் உள்ளன.



படம் 3–13

3—9. (1) தொகுபயன் (Resultant):

கொடுக்கப்பட்ட விசைகளின் தொகுதிக்கு மிக எளிதாகவும், சரிசமத்துவமாகவும் உள்ள அமைப்பு தொகுபயன் எனப்படும். தொகுபயன் ஒரு ஒற்றை (Single) விசையாக, ஒரு சுழலிணையாக (Couple) அல்லது ஒரு தனித்த விசையுடன் கூடிய சுழலிணையாக (Single force together with a couple) அமையலாம்.

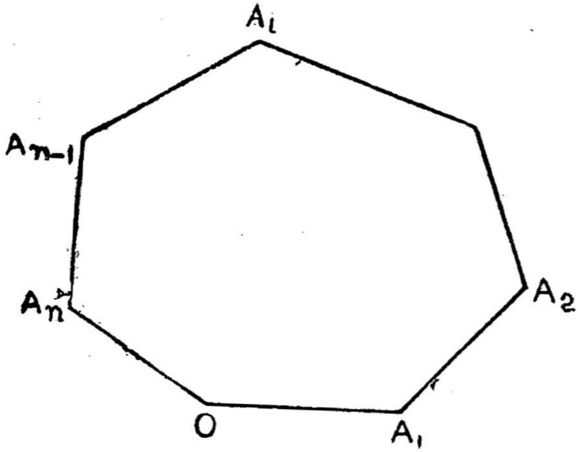
விசைகளை ஒன்றுகச் சேர்த்துத் தொகுபயனைப் பெற்றிடும் செய்முறைக்குத் தொகுப்பு (Composition) அல்லது ஒடுக்கம் (reduction) எனப் பெயர்.

3—9. (2) எதிர்த் தொகுபயன் அல்லது சமனி (Anti-resultant or Equilibrant):

எதிர் தொகுபயன் அல்லது சமனி என்பது கொடுக்கப்பட்ட விசைகளின் தொகுதி, ஒரு பொருளில் செயற்படும்போது அதை ஈடு செய்து சமநிலைப்படுத்தும் விசையாகும். அதுவும் ஒரு ஒற்றை விசையாக (single force), அல்லது ஒற்றை சுழலிணையாக (single couple) அல்லது தனி விசையுடன் கூடிய சுழலிணையாக இருப்பது மட்டுமின்றி, கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதியின் தொகுபயன் விசைக்கு உரிய எண் மதிப்புக்குச் சமமாகவும், அதற்கு எதிர்த் திசையில் அமைவதாகவும் உள்ளது.

3—9. (3) விசைகளின் பல்கோணம் (Polygon of Forces) :

ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் ஒரு தள விசைகளை $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$,......$\underline{F_i}$,......$\underline{F_n}$ எனக் கொள்ளவும். இவற்றின் தொகுபயன் விசையைத் திரும்பத் திரும்ப இணைகர விதியைப் பயன்படுத்துவதால் அடையலாம்.



படம் 3–14

தளம் ஒன்றில் படம் 3–14ல் காட்டியுள்ளபடி O என்ற புள்ளியை எடுத்து, $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$,......$\underline{F_i}$,......$\underline{F_n}$ என்ற விசைகளைத் தகுந்த அலகுகோலில் முறையே $\underline{OA_1}$, $\underline{A_1A_2}$,......$\underline{A_{i-1}A_i}$,...... $\underline{A_{n-1}A_n}$ என்ற திசையிகள் வரையறுப்பதாகக் கொண்டால், இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OA_2} = \underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$\underline{OA_3} = \underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$$

....

$$\underline{OA_n} = \underline{OA_{n-1}} + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \ldots\ldots + \underline{F_{n-1}} + \underline{F_n}$$

ஆகும்.

எனவே $\underline{OA_n}$ என்பது $\{\underline{F_i}\}$ விசைகளின் தொகுதிக்கு ஏற்ற தான தொகுபயன் விசை $-\underline{R}$ஐ வரையறுக்கிறது. விசைத் தொகுதியின் எதிர்த் தொகுபயன் விசை அல்லது சமனி, $-\underline{R}$ ஆகும். இதை $\underline{A_nO}$ என்ற அம்புக் கோடு வரையறுக்கிறது.

நிலையியலில் (statics), விசைகளைத் தடையற்ற திசையிகளாக (free vectors) மேற்கொண்டு, முக்கோண திசையிக் கூட்டு விதிப்படி, அல்லது "அடி-நுனி" முறையைக் கையாண்டு தொகுபயன் விசையைக் காணலாம். ஆதலால்,

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} = \underline{OA_2}$$

$$\underline{OA_2} + \underline{A_2A_3} = \underline{OA_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underline{OA_{n-1}} + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{OA_n}$$ ஆகும்.

இவற்றைக் கூட்டும்போது,

$$\underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + \underline{A_2A_3} + \ldots + \underline{A_{n-1}A_n} = \underline{OA_n}$$ ஆகும்.

அதாவது, $$\underline{OA_n} = \underline{OA_1} + \underline{A_1A_2} + \ldots\ldots + \underline{A_{n-1}A_n},$$

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \ldots\ldots + \underline{F_n},$$

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$ என்றாகும்.

விசைகளை ஒன்றின்பின் ஒன்றாக எடுத்து "அடி-நுனி" முறையிலமைத்தும், தொகுபயன் விசையை (Rஐ)ப் பெறலாம்.

படம் 3-14ல், $OA_1\ A_2 \ldots A_n$ என்ற உருவம் விசைகளின் பல்கோணம் என்று குறிப்பிடப்படும். OA_n என்ற கோடு பல் கோணத்தை மூடிடும் பக்கமாக அமையும். எனவே $\underline{OA_n}$ என்ற திசையி, விசைகளின் தொகுதிக்கு உரிய தொகுபயன் விசையை எண் மதிப்பிலும் (magnitude) செயற்படும் திசையிலும் அறிவிக் கிறது. மேலும் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் தொகுதியை இங்கு மேற்கொள்வதால், அவற்றின் தொகுபயன் விசையும் அப்புள்ளி வழியே செல்லத்தக்கது என்பதும் மெய்யாகிறது.

திசையிக் கூட்டல் (Vector addition), கூட்டற்பரிமாற்று விதிக்கு (commutative law of addition) ஒத்து அமைவதால், விசைகளை வரையறுக்கும் திசையிகளை, எவ்வித வரிசை முறையிலெடுத்தும் (in any order) அதற்கு ஏற்ற விசைப் பல்கோணத்தை வரையலாம்.

ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காத, ஒரு தளத்திலமையும் விசைகளின் தொகுதியை மேற்கொள்ளும்போது, தளத்தில் O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுத்து, தகுந்த அலகு கோலில், விசைகளை வரையறுக்கும் திசையிகளை ஒன்றின் பின் ஒன்றாக எடுத்து, "அடி-நுனி" முறையிலமைத்து, தொகுபயன் விசையைப் பல்கோணத்தை மூடும் பக்கத்தால் வரையறுக்கலாம்.

இங்கு விசைகள் தடையற்ற திசையிகளாகக் (free vectors) கொள்ளப்படுவதால் தொகுபயன் விசையின் செயற்படும் புள்ளி வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் விசைகளின் தொகுதிக்கு உரிய தொகுபயன் விசை, சுழியாகுமென்றால் (zero), அப்புள்ளியை விசைகளின் தொகுதி சம நிலையில் வைத்திருக்கும். அவ்வித நிலையில், பல்கோணத்தை மூடிடும் கோட்டின் நீளம் பூச்சியமாகும். அதாவது, இறுதியாக அமைந்திடும் விசையின் நுனிப் புள்ளி, A_n, Oல் ஒன்றுபடும். அப்போது விசைப் பல்கோணம் மூடிய பல்கோணமாக அமைந்திடும்.

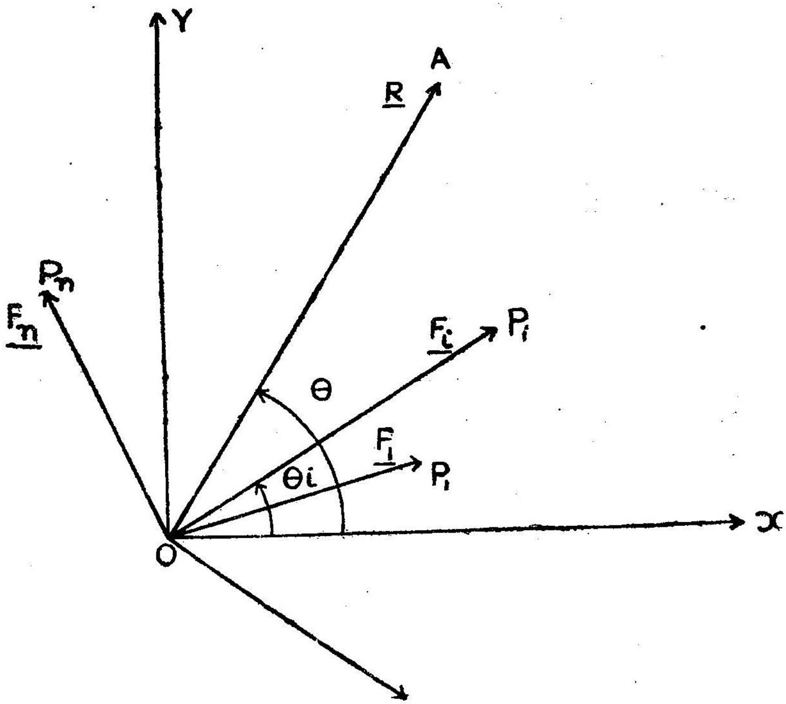
எனவே ஒரு துகள் சம நிலையிலமைய, துகளில் செயற்படும் விசைகளுக்கு உரிய பல்கோணம் மூடப்பட்டதாக இருக்க வேண்டும் என்பதே வேண்டியதும், போதியதுமான நிபந்தனையாகும். (Necessary and sufficient condition.)

3—10. தளம் ஒன்றில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் பிரிவீடு

(Resolution of coplanar concurrent forces) :

வரைபட முறையில், விசைகளைச் சேர்த்துத் தீர்வு காண்பதில் விசைப் பல்கோணம் சிறப்புப் பெற்றதாக உள்ளது ஆயத்தொலை வடிவ கணித முறையில் விசைகளின் கூடுதலை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவுள்ள இரு திசைகளில் (கிடை, நிலை திசைகளில்) விசைகள் ஒவ்வொன்றையும் பிரித்தும் வரையறுக்கலாம்.

தளம் ஒன்றில் $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots \underline{F}_i \ldots \underline{F}_n$ என்ற விசைகள் O என்ற புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்ளவும். Oஐத் துவக்கப் புள்ளியாகவும், Ox, Oy என்ற கிடை, நிலை அச்சுக்களை, $\underline{i}$, j என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுப்பதாகவும் கொள்ளவும்.



படம் 3–15

$\underline{R}$ என்பது, $\{\underline{F}_i\}$ விசைகளின் தொகுபயனை அறிவிக்கட்டும்.

$\therefore \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$ ஆகும். படம் 3-15 ல், $\underline{F}_i$ என்ற விசையை, $\underline{OP}_i$ என்ற திசையி வரையறுக்கிறது. P_iயிலிருந்து, Oxக்கு $P_i N_i$ என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைக. $\underline{F}_{ix}$, $\underline{F}_{iy}$ என்பவை முறையே Ox, Oy திசைகளில், இணைகர விதிப்படி, ஆக்கக்

கூறு(components)களாகும். F_{ix}, F_{iy} என்பவை, Ox, Oy அச்சுக்களில், மதிப்பெண் F_iன் தள வீழ்ச்சி (projictions) களாகும்.

இணைகர விதிப்படி,

$$\underline{OP_i} = \underline{ON_i} + \underline{N_i P_i}$$

$$\underline{F_i} = \underline{F_{ix}} + \underline{F_{iy}}$$

$$= F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j}, \quad i = 1, 2, \ldots n \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $$\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) i + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j}$$

அவ்வாறே, தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ன் ஆக்கக் கூறுகள் Ox, Oy திசைகளில் முறையே $\underline{R_x}$ $\underline{R_y}$ என்றால்,

$$\underline{R} = \underline{R_x} + \underline{R_y}$$

$$= R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ என்ற சமன்பாடு,

$$R_x\, i + R_y\, j = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) \underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j} \text{ என்றாகும்.}$$

இருபுறங்களிலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளுக்கு இசைந்து வரும் மதிப்புக்களைச் சமன்படுத்த,

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \text{ எனவும் ஆகும்.}$$

தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ ன் பகுதிகளான R_x, R_y என்பவை முறையே Ox, Oy திசைகளில் விசைத் தொகுதியிலமையும் விசை ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய எண்ணிப் பகுதிகளின் கூடுதலாகும்.

மேலும் $R^2 = R_x^2 + R_y^2$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2$$ ஆகும்.

தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ன் செயற்படும் கோடு x அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தைத் தாங்குவதாகக் கொண்டால்,

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$ என்றாகும்.

அதாவது, $$\frac{\sin \theta}{R_y} = \frac{\cos \theta}{R_x} = \frac{1}{R}$$ என்றாகும்.

மேலும் $\underline{F_i}$ என்ற விசை x அச்சுடன் θ_i என்ற கோணத்தை அமைத்தால்,

$F_{ix} = F_i \cos\theta_i$; $F_{iy} = F_i \sin\theta_i$ என்றாகும்.

ஆதலால்,

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\theta_i$$ ஆகும்.

3–11. துகள் ஒன்று தளத்தில் சம நிலையில் அமைவதற்குரிய வரையறைகள் :

தளத்தில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகள் அப் புள்ளியிலமையும் துகளை அமைதி நிலையில் அல்லது சமநிலையில் வைத்திருக்க அவற்றின்,

(i) தொகுபயன் விசை சுழியாக வேண்டும்.

அல்லது (ii) திசையிப் பல்கோணம் மூடப்பட்டதாக அமைய வேண்டும்.

அல்லது (iii) திசையி முறையில்,

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = 0$$ ஆக வேண்டும்.

அல்லது (iv) பகுமுறையில் கிடை, நிலை அச்சுக்களில் விசைகளைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0$$

அதாவது $R_x = 0, \quad R_y = 0$

அதாவது $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$ என்றாக வேண்டும்.

3—12. ஒரு போகான விசைகளின் தொகுபயன் (Resultant of parallel forces) :

இணையாக உள்ள விசைகளின் செயற்படும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலிருந்த போதிலும், அவைகளின் தொகுபயன் விசையைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்:

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற இரு விசைகளை எடுக்கவும். இங்கு $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்பவை இணையாகக் கருதப்படுவதால் k என்ற எண்ணியை

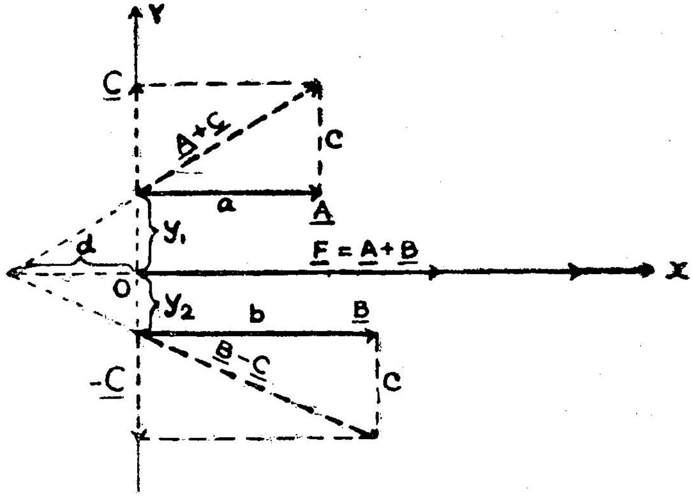
$\underline{A} = k\,\underline{B}$ என்றிருக்குமாறு வரையறுக்கவும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற விசைகள் வரையறுக்கும் தளத்தில் $\underline{C}$, $-\underline{C}$ என்ற விசைகளை, $\underline{A}$, $\underline{B}$க்களுக்குச் செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டில் படம் 3-16இல் காட்டியபடி செயற்படுவதாக எடுக்கவும். (இங்கு $\underline{C}$, $-\underline{C}$ என்ற விசைகள் செயற்படும் கோடுகள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டுமேயன்றி, $\underline{A}$, $\underline{B}$ விசைகளுக்குச் செங்குத்தாக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனையில்லை; சாய்வான கோட்டிலும் $\underline{C}$, $-\underline{C}$ என்ற விசைகள் செயற்படலாம். வரைபட வசதிக்காக $\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றிற்குச் செங்குத்தான கோட்டில் $\underline{C}$, $-\underline{C}$ என்ற விசைகள் அமைவதாக எடுக்கப் பட்டுள்ளன.)

எனவே சரிசமத்துவ விதிப்படி,

$$\{\underline{A} = k\underline{B}, \underline{B}\} \equiv \{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, -\underline{C}\} \equiv [\{\underline{A}, \underline{C}\}, \{\underline{B}, -\underline{C}\}]$$

ஆகும்.



படம் 3–16

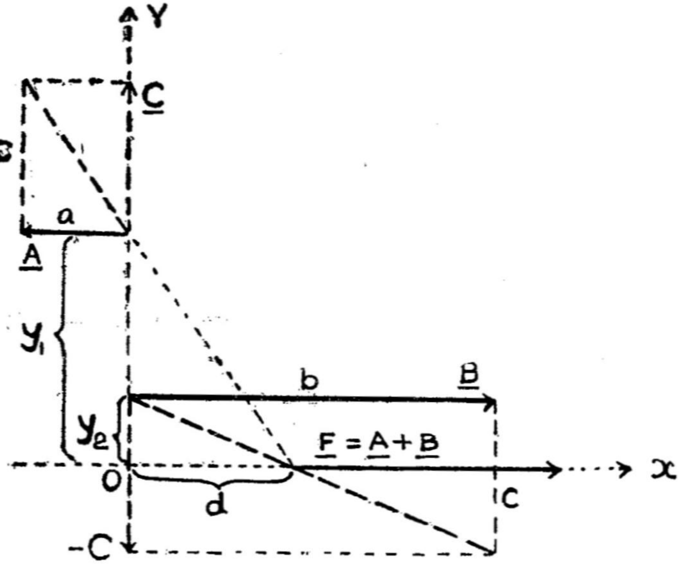
இணைகர விதிப்படி $\{\underline{A} + \underline{C}\}$ ஆகிய விசைகளின் தொகுபயன் விசை $(\underline{A} + \underline{C})$ எனவும், $\{\underline{B}, -\underline{C}\}$ ஆகிய விசைகளின் தொகுபயன் விசை $(\underline{B} - \underline{C})$ எனவும் ஆகும். பொதுவாக, $(\underline{A} + \underline{C})$, $(\underline{B} - \underline{C})$ என்ற விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். எனவே, இணைகர விதியைப் பயன்படுத்த, அவைகளின் தொகுபயன் விசை $\underline{F}$ என்பது சந்திக்கும் புள்ளி வழியே செயற்படும். ஆதலால்,

$$\underline{F} = (\underline{A} + \underline{C}) + (\underline{B} - \underline{C})$$

$$= \underline{A} + \underline{B} \text{ ஆகும்.}$$

படம் 3-16ல் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற விசைகள் ஒரே திசையில் செயற்படுவதாக எடுத்து, வரைபட விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது

மேலும் $\underline{A} + \underline{C}$, $\underline{B} - \underline{C}$ என்ற விசைகள் இணையற்றதாகவும் மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளன.



படம் 3–17

படம் 3-17ல் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற விசைகள் எதிர் போகாக அமைவதற்குரிய வரைபட விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது.

$\underline{A} + \underline{C}$, $\underline{B} - \underline{C}$ என்ற விசைகள் ஒரு போகாக அமையும் போது, இன்னும் சற்றுக் கூர்மையாகக் கவனிக்க வேண்டிய நிலைமை ஏற்படுகிறது.

h என்பது ஒரு எண்ணி என்றால்,

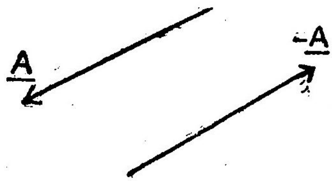
$$\underline{A} + \underline{C} = h(\underline{B} - \underline{C})$$ என்றாகும்.

ஆனால், $\underline{A} = k\,\underline{B}$ என்பதால்,

$$k\,\underline{B} + \underline{C} = h\,\underline{B} - h\,\underline{C}$$

$$(h - k)\,\underline{B} = (h + 1)\,\underline{C}$$

அதாவது $\underline{B} = \left(\frac{h + 1}{h - k}\right)\underline{C}$ ஆகும்.



படம் 3–18

$h \neq k$ என்றால், $\underline{B}$ என்பது $\underline{C}$ன் மடங்காகும். அப்பொழுது $\underline{B}$ என்பது $\underline{C}$க்கு ஒரு போகாக அமைந்திடும். ஆனால் கொள்கையின்படி B, C என்ற விசைகள் இணையற்றதால்,

$h - k = 0$, $h + 1 = 0$ என்றாக வேண்டும்.

ஆதலால், $h = k = -1$ ஆகும்.

அப்பொழுது, $\underline{A} = -\underline{B}$ ஆகும்.

ஆகவே இரு இணை விசைகளின் தொகுபயன் விசையை அவைகள் சமமான எண் மதிப்பைப் பெற்றதாகவும், எதிர் போகான கோடுகளில் செயற்படுவதாகவும் உள்ள நிலைமையைத் தவிர மற்ற நிலைமைகளில் திட்டவட்டமாகத் தீர்மானிக்க முடியும். இவ்வித இரட்டை விசைகள், சுழலிணை (couple) எனப்படும். சுழலிணையின் அமைப்பு படம் 3-18ல் காட்டியது போல் இருக்கும். சுழலிணைகளின் பண்புகள் வேறு பகுதியில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு போகான அல்லது எதிர் போகான நிலைமைகளில் $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற விசைகளின் தொகுபயன் விசையை $(\underline{A} + \underline{B})$ என்ற திசையி அறிவிக்கிறது. $\underline{A}$, $\underline{B}$ விசைகள் ஒரு போகாக இருக்கும் போது, தொகுபயன் விசையின் செயற்படும் கோடு $\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவை செயற்படும் கோடுகளுக்கு இடையில் இணையாக அமைவதைக் காணலாம். மேலும் அக்கோடு A, Bக்களில் பெரிய எண் மதிப்பைப் பெற்ற விசைக்கு அருகிலும் அமையும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ விசைகள் எதிர் போகாக அமையும்போது, தொகுபயன் விசையின் செயற்படும் கோடு A, Bக்களின் செயற் படும் கோடுகளுக்கு வெளிப்புறமும், பெரிய விசை செயற்படும் கோட்டுக்கு அருகிலும் அமைவதைக் காணலாம்.

வடிவ கணித முறைப்படி படங்கள் 3-16, 3-17ஆகியவற்றி லிருந்து, தொகுபயன் விசை செயற்படும் புள்ளியை வரையறுக் கலாம். அதற்காக தொகுபயன் விசைக்கு உரிய செயற்படும் கோடு $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்பனவற்றின் செயற்படும் கோடுகளுக்கு முறையே y_1, y_2 தொலைவுகளில் இருப்பதாகக் கொள்ளவும்.

வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து,

$$\frac{c}{a} = \frac{y_1}{d}, \quad \frac{c}{b} = \frac{y_2}{d}$$

அல்லது $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$ ஆகும்.

ஆகவ, தொகுபயன் விசையானது கொடுக்கப்பட்ட இணை விசைகளிலிருந்து பிரிக்கப்பட்டு அமைந்திடும் தொலைவுகள், விசைகளின் எண் மதிப்புக்களின் எதிர் விகிதத்திலிருக்கும் எனவும் அறியலாம்.

3—13. பரந்தவெளியில் ஒரு துகளின் சம நிலை (Equilibrium of a particle in space):

ஒரு துகளில் செயற்படும் விசைகள், அத்துகளைக் குறிக்கும் புள்ளி வழியே செயற்படுவதால் அவற்றின் தொகுபயன் விசையும் அப்புள்ளியின் வழியே செயற்படும். துகள் அமைதி நிலையில் அல்லது சமநிலையில் இருக்க, அதன்மேல் செயற் படும் தொகுபயன் விசை சுழியாக வேண்டும் என்பதே வேண்டிய (necessary) நிபந்தனையாகும்.

O என்ற புள்ளியில் அமையும் துகளின்மேல், $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ... $\underline{F_i}$......$\underline{F_n}$ என்ற விசைகள் செயற்படுவதாகக் கொள்ளவும். அவைகளின் தொகுபயன் விசையை, $\underline{R}$ எனக் கொண்டால்,

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$ என்றாகும்.

துகள் அமைதி நிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனை $\underline{R} = 0$ என்பதாகும்.

O என்ற புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள Ox, Oy, Oz என்ற அச்சுக்களை, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுப்பதாகக் கொண்டு அமைக்கவும்.

$\underline{F_i}$ என்ற விசையை அதன் ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரித்து அமைக்கவும். அப்பொழுது,

$$\underline{F_i} = \underline{F_{ix}} + \underline{F_{iy}} + \underline{F_{iz}}$$

$$= F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j} + F_{iz}\,\underline{k}, \quad i = 1, 2 \ldots n \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே, $\underline{R}$ என்ற தொகுபயன் விசையும்,

$$\underline{R} = \underline{R_x} + \underline{R_y} + \underline{R_z}$$

$$= R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} + R_z\,\underline{k} \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே,

$$R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} + R_z\,\underline{k} = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j} + F_{iz}\,\underline{k})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)\underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)\underline{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)\underline{k}$$

ஆகும்.

அல்லது $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$ ஆகும்.

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2} \qquad \text{(i)}$$

$\underline{R}$ என்ற தொகுபயன் விசையின் செயற்படும் கோடு, x, y, z அச்சுக்களுடன் θ_x, θ_y, θ_z என்ற கோணங்களை அமைப்பதாகில்,

$R_x = R \cos \theta_x$; $R_y = R \cos \theta_y$; $R_z = R \cos \theta_z$ என்றாகும்.

ஆதலால், $\frac{\cos \theta_x}{R_x} = \frac{\cos \theta_y}{R_y} = \frac{\cos \theta_z}{R_z} = \frac{1}{R}$ ஆகும். (ii)

எனவே, தொகுபயன் விசையின் எண் மதிப்பும், செயற்படும் திசையும் (i), (ii) என்ற சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப் படுகின்றன.

துகள் சமநிலையிலிருப்பதாகில் $\underline{R} = 0$ ஆகும்.

அதாவது $R = 0$

,, $R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 0$

,, $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$

,, $R_x = \Sigma F_{ix} = 0$,

$R_y = \Sigma F_{iy} = 0$,

$R_z = \Sigma F_{iz} = 0$ ஆகும்.

எனவே துகள் சமநிலையிலிருப்பதானல் x, y, z திசைகளில் விசைப் பகிர்வுகளின் கூடுதல் சுழியாக வேண்டும்.

மேலும் $\underline{R} = 0$ என்பது துகள் அமைதி நிலையிலிருப் பதற்குப் போதுமான (sufficient) வரையறையாகும்.

$\underline{R} = 0$ எனில் துகளில் செயற்படும் விசைகளின் கூடுதல் சுழியாகிறது. எனவே இரண்டாவது மெய்ம்மையின் வாயிலாக துகள் அமைதி அல்லது சமநிலையில் உள்ளது.

எனவே, ஒரு துகள் அமைதி அல்லது சமநிலையிலிருக்க வேண்டியதும், போதியதுமான நிபந்தனை $\underline{R} = 0$ என்பதாகும்.

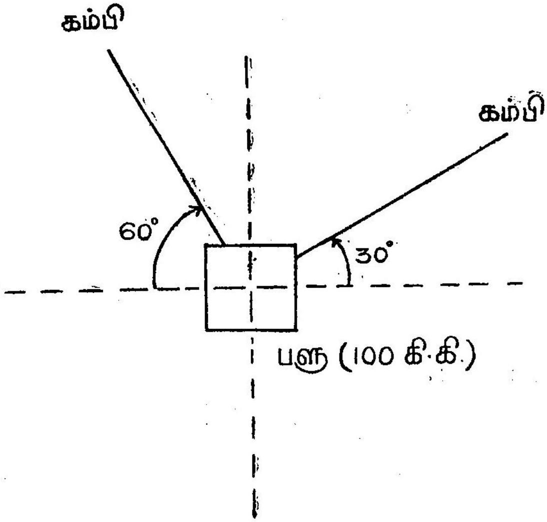
வரைபட விளக்க முறையில் F_1, F_2,...F_i,...F_n என்ற விசைகள் O என்ற புள்ளியில் செயற்பட்டு அப்புள்ளியைச் சம நிலையில் வைத்திருக்கும்போது விசைகளை வரையறுக்கும் திசையிகளை ஒன்றின்பின் ஒன்றாக "அடி-நுனி" முறையில்

அமைக்க ஒரு மூடிய பல்கோணம் கிடைக்கும். இங்குத் திசையிகளை எவ்வித வரிசை முறையில் (in any order) எடுத்து ஒன்றின் பின் ஒன்ருக அமைத்தபோதிலும், இறுதியாக ஒரு மூடிய பல்கோணமே கிடைக்கும் என்பதையும் அறிதல் வேண்டும். மேலும், விசைப் பல்கோணம், திசையிகளின் கூடுதலைத் தெரிவிப்பதைத் தவிர, விசைகள் செயற்படும் கோடுகளைச் சார்ந்திருப்பதில்லை என்பதையும் கவனிக்கவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்:

மாதிரி 3—1. 100 கி.கி. எடையுள்ள பளு (load) ஒன்று, கிடைக்கோட்டில் 30°, 60° கோணங்களை அமைக்கும் இரு வலுவான கம்பிகளால் தாங்கப்பட்டு சம நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளதென்ருல் கம்பிகளில் செயற்படும் இழு விசைகளைக் காண்க.

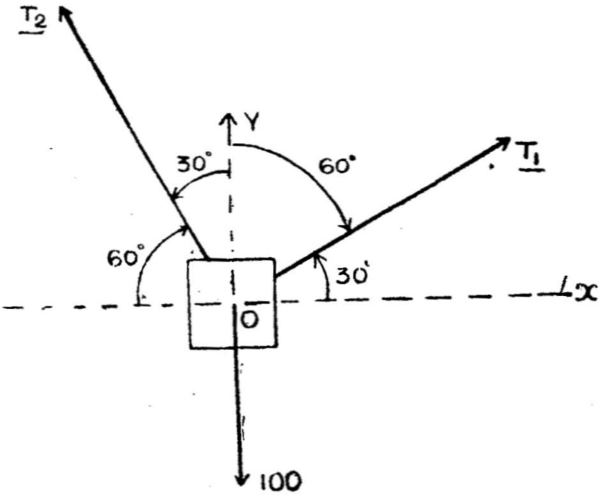
கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு ஏற்றவாறு படத்தை அமைக்க. அது படம் 3-19இல் காட்டியவாறு இருக்கும். இவ்வித விஞக்களுக்குத் தீர்வு காண, முதலில் தடையற்ற



படம் 3-19

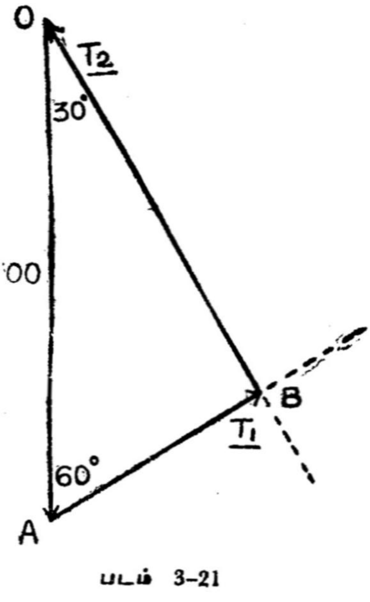
பொருளை (free body) வரையறுத்துக் கொண்டு, அதன்மேல் செயற்படும் விசைகளைக் குறிக்க வேண்டும்.

இங்கு பளு என்பது தடையற்ற பொருளாகக் கருதப்படும். பளு ஒரு புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொண்டு, மற்ற இரு இழு



படம் 3-20

விசைகளையும் அப் புள்ளியின் வழியே செல்வதாக மேற்கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது பளுவின் மேல் செயற்படும் விசைகள் படம் 3-20இல் காட்டியதுபோல் அமையும்.



படம் 3-21

(1) வரைபட விளக்கம் :

இங்கு மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளி வழியே செயற்பட்டு அதைச் சமநிலையில் வைக்கின்றன. தகுந்த அலகுகோலில் எடைக்குச் சமமான நீளத்தை வரையறுத்துக் கொள்ளவும்.

வரைபடத்தில் (படம் 3-21) O என்ற புள்ளியைக் குறித்து பளு செயற்படும் திசையில் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி 100 கி.கி. பளுவுக்குச் சமமான நீளத்தை $\underline{OA}$ என்ற அம்புக்கோடு வரையறுப்பதாகக் கொள்ளவும். பிறகு Aன் வழியே $\underline{T_1}$ செயற்படும் திசைக்கு இணையாக, OAஉடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் கோட்டை வரையவும். அவ்வாறே Oஇன் வழியே $\underline{T_2}$ செயற்படும் திசைக்கு இணையாக, OAஉடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும் மற்றொரு கோட்டை வரையவும். அவைகள் ஒன்றை ஒன்று B என்னுமிடத்தில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். அப்பொழுது $\underline{AB}$, $\underline{BO}$ என்ற அம்புக்கோடுகள் $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$ என்ற இரு விசைகளை வரையறுக்கும். AB, BO ஆகியவற்றின் நீளங்கள், இரு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களைப் பயன்படுத்தப்பட்ட அலகுகோல் அளவைகளில் அறிவிக்கும்.

(2) இலாமியின் விதிப்படி (Lami's Theorem) T_1 T_2 க்களைக் காணுதல் :

இங்கு மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் செயற்பட்டு, அதைச் சமநிலையில் வைத்திருப்பதால் முக்கோண விதிப்படி,

$$\underline{OA} + \underline{AB} + \underline{BO} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\triangle OAB$ல்,

$$\frac{OA}{\text{Sin } A\hat{B}O} = \frac{AB}{\text{Sin } B\hat{O}A} = \frac{BO}{\text{Sin } O\hat{A}B}$$

$$\frac{100}{\text{Sin } 90^\circ} = \frac{T_1}{\text{Sin } 30^\circ} = \frac{T_2}{\text{Sin } 60^\circ} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{100 \times \text{Sin } 30^\circ}{\text{Sin } 90^\circ} = 50 \text{ கி.கி.}$$

$$T_2 = \frac{100 \times \text{Sin } 60^\circ}{\text{Sin } 90^\circ} = 50\sqrt{3} \text{ கி.கி.}$$

(3) ஆயத்தொலை வடிவ கணித முறையில் T_1, T_2 க்களைக் காணுதல் :

O என்ற புள்ளியில் Ox, Oy என்ற கிடை, நிலை அச்சுக்களை வரையறுக்கவும். Oல் செயற்படும் ஒவ்வொரு விசையின் ஆக்கக் கூறுகளை Ox, Oy திசைகளில் கண்டு அவற்றின் இயற்கணிதக் கூடுதலைச் சுழிக்குச் சமன்படுத்தவும்.

இங்கு விசைகளின் எண்ணிப் பகுதிகளின் கூடுதல் முறையே Ox, Oy திசைகளில்

$T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ$ என்றும்,

$T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 30^\circ - 100$ என்றும் ஆகும்.

எனவே,

$R_x = 0$, $R_y = 0$ என்ற வரையறைகள் முறையே

$T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0$

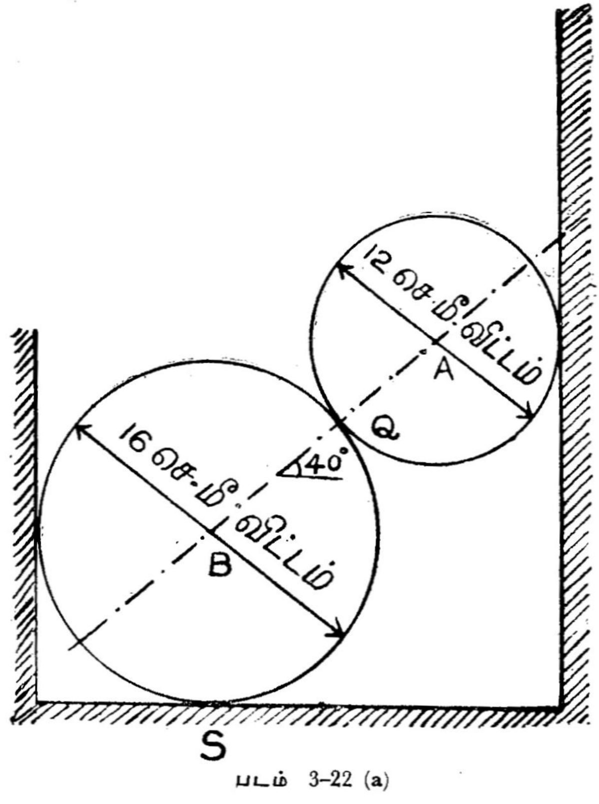
$T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 30^\circ - 100 = 0$ ஆகும்.

அதாவது, $\sqrt{3}\, T_1 - T_2 = 0$,

$T_1 + \sqrt{3}\, T_2 = 200$ ஆகும்.

அல்லது $T_1 = 50$ கி.கி., $T_2 = 50\sqrt{3}$ கி.கி. ஆகும்.

மாதிரி 3—2. 150 கி.கி., 250 கி.கி. எடையுள்ள A, B என்ற இரு கோளங்கள் படம் 3-22 (a)ல் காட்டியவாறு தாங்கப்படு

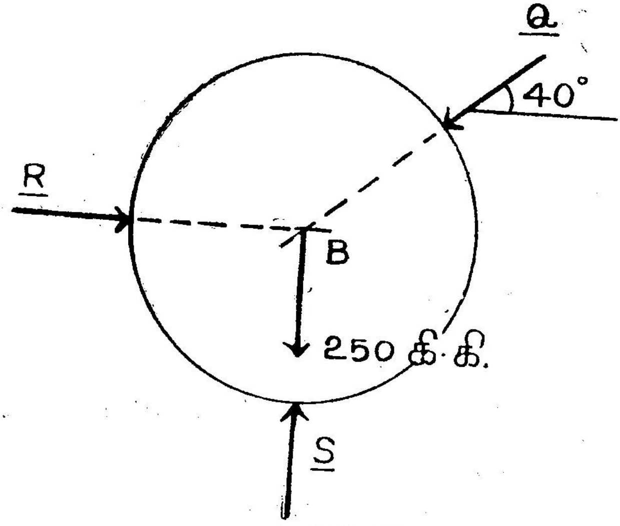


படம் 3–22 (a)

கின்றன. பரப்புக்கள் ஒன்றை ஒன்று தொடும் P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளில் நிகழும் உராய்வு விசைகளைப் புறக்கணித்து R, S என்னுமிடங்களில் B கோளத்தில் செயற்படும் எதிர் விசைகளைக் (reactions) காண்க.

[கோளங்களின் எடைகள், தொடும் புள்ளிகளில் அமையும் எதிர் விசைகளனைத்தும் ஒரு தளத்திலமைவதாகக் கொள்ளவும்.]

படம் (b), c) ஆகியவற்றில் கோளம் B, கோளம் A என்பவை தனிப்படுத்தப்பட்டு, அவற்றின்மேல் செயற்படும் புற விசை



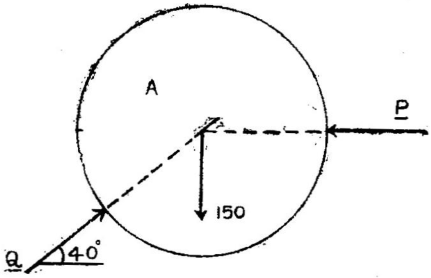
படம் 3–22 (b)

களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. கோளம் Aஐ அமைதி நிலையில் வைக்கும் விசைகள் பின்வருமாறு :

(i) கோளம் Aன் எடை 150 கி.கி. ↓ } இவைகள் இரண்டும் கோளம் Aன் மையத்தில் சந்திக்கின்றன.
(ii) புற விசை P ←

(ii) புற விசை Q, ∢40°.

இங்கு முதல் இரு விசைகள் கோளம் Aன் மையத்தில் சந்திப்பதால், அது அமைதி நிலையிலிருக்க, மூன்ருவது விசை Qவும் மையப் புள்ளி வழியே செல்ல வேண்டும்.



படம் 3–22 (c)

எனவே $\boxed{\uparrow +}$ $\Sigma F_{iy} = 0$ என்பது,

$$Q \sin 40° - 150 = 0$$

$$Q = \frac{150}{\sin 40°} = 233{\cdot}5 \text{ கி.கி. ஆகும்.}$$

கோளம் Bஐ அமைதி நிலையில் வைக்கும் விசைகள் பின் வருமாறு :

(i) கோளம் Bன் எடை 250 கி.கி. ↓
(ii) புற விசை R →
(iii) புற விசை S ↑
(iv) புற விசை Q = 233·5, ∢ 40°

இவைகளனைத்தும் கோளம் Bன் மையப் புள்ளி வழியே செல்கின்றன.

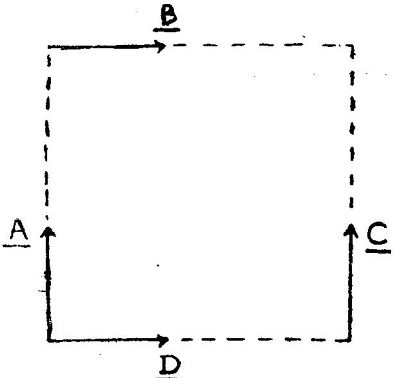
எனவே $\boxed{\uparrow +}$ $\Sigma F_{iy} = 0$ என்பது,

$$S - 250 - Q \sin 40° = 0$$
$$S = 250 - Q \sin 40°$$
$$= 250 + 150$$
$$= 400 \text{ கி.கி. ஆகும்.}$$

மேலும் $\boxed{\overset{\rightarrow}{+}}$ $\Sigma F_{ix} = 0$ என்பது,

$$R - Q \cos 40° = 0$$
$$R = Q \cos 40°$$
$$= 233{\cdot}5 \cos 40°$$
$$= 179 \text{ கி.கி. ஆகும்.}$$

மாதிரி 3—3. சமமாக உள்ள நான்கு விசைகள், ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்களில் படம் 3-23ல் காட்டியவாறு ஏற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயன் விசையை வரையறுக்க.



படம் 3–23

இங்கு விசைகளை எவ்விதத்தில் சேர்த்தபோதிலும், தொகுபயன் விசை, கொடுக்கப்பட்ட விசைகளுக்கு உரிய திசையிகளின் கூடுதலாகும்.

விசைகள் ஒவ்வொன்றின் எண் மதிப்பை a எனக் கொள்ளவும். இங்கு தொகுபயன் விசை,

$$\underline{F} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}$$

$$= (\underline{A} + \underline{D}) + (\underline{B} + \underline{C})$$

$$= 2(\underline{A} + \underline{D}) = 2(\underline{B} + \underline{C}) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad F = |\underline{F}| = 2\sqrt{|\underline{A}|^2 + |\underline{D}|^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= 2\sqrt{2}a$$

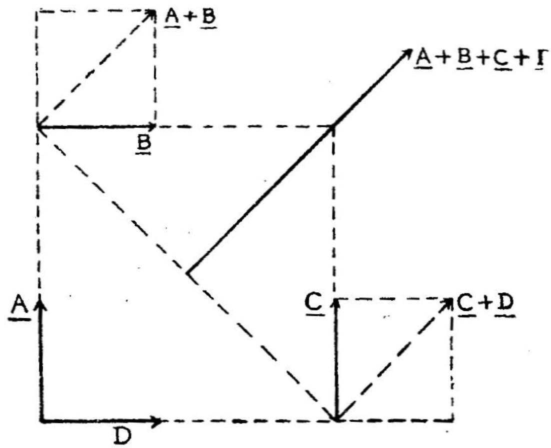
$$= 2{\cdot}828a \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{F}$ன் செயற்படும் கோட்டையும், திசையையும் பின்வரும் முறைகளில் பெறலாம்.

முதலாவதாக $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்ற விசைகளைச் சேர்க்கவும். அவ்வாறே $\underline{C}$, $\underline{D}$ என்ற விசைகளையும் சேர்க்கவும்.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை $= \underline{A} + \underline{B}$ ஆகும். அவ்வாறே $\underline{C}$, $\underline{D}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை $= \underline{C} + \underline{D}$

ஆகும். ஆனால் $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} + \underline{D}$ என்பதால், $(\underline{A} + \underline{B})$, $(\underline{C} + \underline{D})$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை, இவைகளுக்கு இடையில், நடு மையத்தில், அவைகள் செயற்படும் கோடுகளுக்கு



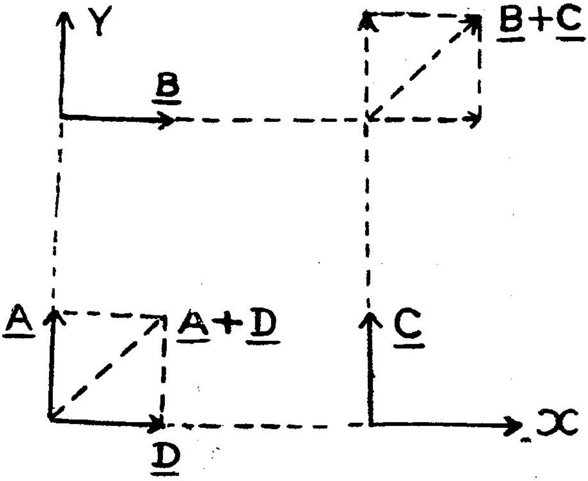
படம் 3-24

இணையாகவும், அவைகளுடைய எண் மதிப்புக்களின் இரு மடங்காகவும் 3-24 என்னும் படத்தில் காட்டியபடி அமைகிறது.

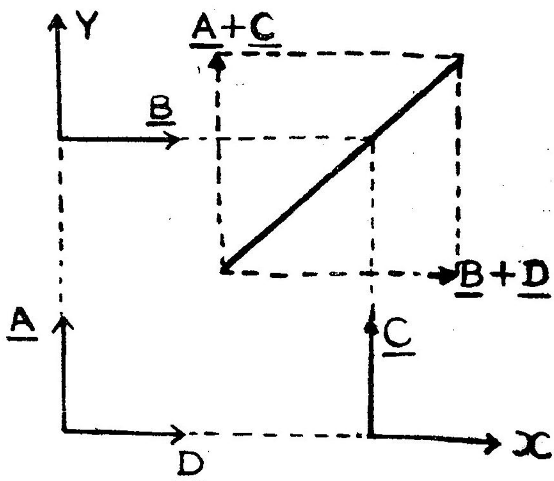
இரண்டாவதாக $(\underline{A}, \underline{D})$; $(\underline{B}, \underline{C})$ ஆகியவற்றைச் சேர்க்க அவைகளின் தொகுபயன் விசைகள் முறையே, $(\underline{A} + \underline{D})$, $(\underline{B} + \underline{C})$ என்றாகின்றன. மேலும் $(\underline{A} + \underline{D})$, $(\underline{B} + \underline{C})$ என்பவைகள் ஒரே செயற்படும் கோட்டைப் பெற்றிருப்பதால், அவைகளின் தொகுபயன் விசை $(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D})$யும் படம் 3-25ல் காட்டியபடி அதே நேர்கோட்டில் செயற்படுகிறது.

மூன்றாவதாக இணைவிசைகள், $(\underline{A}, \underline{C})$க்களையும் $(\underline{B}, \underline{D})$க்களையும் ஒன்று சேர்க்கவும். அவைகளின் தொகுபயன் விசைகள் முறையே $(\underline{A} + \underline{C})$, $(\underline{B} + \underline{D})$ என்றாகும். $(\underline{A} + \underline{C})$ என்ற விசை, $\underline{A}$, $\underline{C}$ விசைகள் செயற்படும் கோடுகளுக்கு இடையில் நடு மையத்தில் அமைந்தும், அவைகளுக்கு இணையாகவும், அதன் எண் மதிப்பு $\underline{A}$ அல்லது $\underline{C}$ யின் எண் மதிப்பின் இரண்டு

மடங்காகவும் இருப்பதைக் காணலாம். அவ்வாறே ($\underline{B} + \underline{D}$) என்ற தொகுபயன் விசை, $\underline{B}$ அல்லது $\underline{D}$ விசையைப்போல்



படம் 3-25

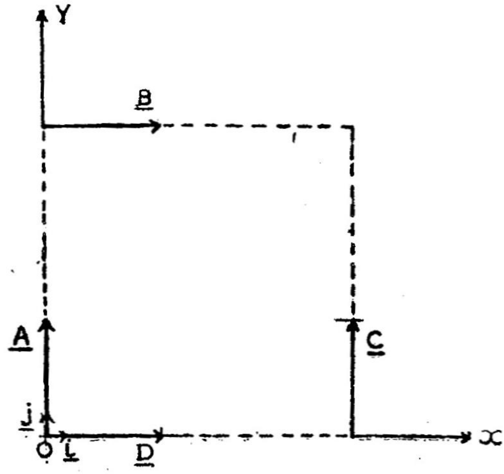


படம் 3-26

இரண்டு மடங்காகவும் அவைகளுக்கு இணையாக இடையில் நடு மையத்திலும் அமைகிறது.

எனவே $(\underline{A} + \underline{C})$, $(\underline{B} + \underline{D})$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை, இணைகர விதிப்படி படம் 3-26ல் காட்டியபடி செயற்படும்.

இம் மூன்று முறைகளிலும் தொகுபயன் விசை $2\sqrt{2}\,a$ என்ற எண் மதிப்பைப் பெற்றும் சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தைச் செயற்படும் கோடாகவும் பெற்றிருப்பதை அறியலாம்.



படம் 3–27

ஆயத்தொலை வடிவ கணித முறையில் சதுரத்தின் கிடை, நிலைப் பக்கங்களை x, y அச்சுக்களாகக் கொண்டு அவைகளின் திசைகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுப்பதாகக் கொள்ளவும். அப்பொழுது, படம் 3-27ல் காட்டியுள்ளவாறு

$$\underline{A} = a\,\underline{j}$$

$$\underline{D} = a\,\underline{i}$$

$$\underline{B} = a\,\underline{i}$$

$$\underline{C} = a\,\underline{j}$$

$\therefore F = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D} = 2a\,(\underline{i} + \underline{j})$ ஆகும்.

$$\therefore \quad F = |\underline{F}| = |\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D}|$$

$$= 2a|\underline{i} + \underline{j}|$$

$$= 2a\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\,a$$

$$\therefore \quad \underline{F} = 2\sqrt{2}\,a\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}\right)$$

$\underline{F}$ விசையின் செயற்படும் கோடு x அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்குமென்ருல்,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ என்ருகும்.}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = 1 \text{ அல்லது } \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி

3—1. ஒரு துகளில் $\underline{F_1} = 6\underline{i} + 8\,j$, $\underline{F_2} = 10, \angle 120^\circ$, $\underline{F_3} = 10, \angle -30^\circ$ என்ற திசையிகளால் வரையறுக்கப்பட்ட விசைகள் (கி.கி. விசை அலகுகளில்) செயற்படுகின்றன. வரைபடம் வரைந்து இவற்றின் தொகுபயன் விசையைக் காண்க.

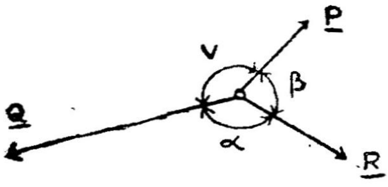
துகள் சம நிலையிலிருப்பதற்கு வேண்டிய விசை $\underline{F} = F$, $\angle\theta$ஐக் காண்க.

ஆயத்தொலை வடிவ கணித முறையில் விடையைச் சரி பார்க்க.

3—2. 1 கி.கி. எடையுள்ள எஃகு குண்டு ஒன்று V வடிவ முள்ள தொட்டி ஒன்றில் அமைதி நிலையிலுள்ளது. தொட்டியின் ஒரு பக்கம் செங்குத்தாகவும், மற்ருெரு பக்கம் செங்குத்துத் திசையுடன் 30° கோணத்தை அமைத்தவாறும் உள்ளது. தொட்டியின் பக்கங்கள் வழவழப்பான தளங்களாக இருக்கு மென்ருல், தளங்களின் எதிர் செயல் விசைகளுக்கு உரிய எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : $\sqrt{3}$ கி.கி. விசை ; 2 கி.கி. விசை.]

3—3. P, Q, R என்ற மூன்று விசைகள், ஒன்று மற்றொன்றுடன் முறையே α, β, γ என்ற கோணங்களை அமைத்து படம் 3-28ல் காட்டியதுபோல் ஒரு துகளில் செயற்படுகின்றன. துகள் சம நிலையிலிருக்குமெனில், $\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$ என்று நிரூபிக்க.



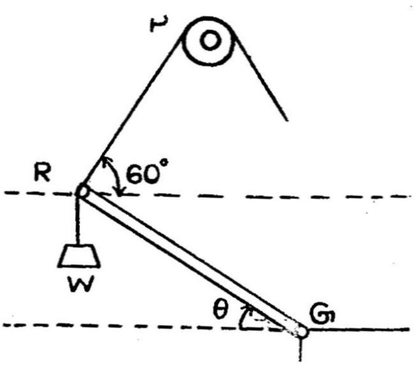
படம் 3-28

இவ்வரையறை நிறைவேற்றப்பட்டால், துகள் சம நிலையிலிருக்கத் தக்கதா என்று ஆராய்க.

3—4. 27 மீட்டர் நீளமுள்ள கயிறு ஒன்று 21 மீட்டர் இடைவெளித் தொலைவில் பொருத்தப்பட்டுள்ள கொக்கிகளில் கட்டப்பட்டு, கயிற்றின் ஒரு நுனியிலிருந்து 9 மீட்டர் தொலைவில் 200 கி.கி. எடையுள்ள பளு ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டு பளு, கொக்கிகள் ஆகிய மூன்றும் 9 மீட்டர், 18 மீட்டர், 21 மீட்டர் பக்கங்களையுடைய ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன. பளுவுக்கு இரு புறமுள்ள கயிற்றின் பகுதிகளில் செயற்படும் இழு விசைகளைக் காண்க.

[விடை : 182·1 கி.கி. விசை ; 123·5 கி.கி. விசை.]

3—5. 250 கி.கி. எடையுள்ள பாரம் ஒன்று W R P என்ற வலுவான கம்பி (Cable) ஒன்றில் படம் 3-29ல் காட்டியவாறு P என்ற கப்பியின் வழியாகத் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. கப்பியை GR முட்டு ஒன்றால் (strut) ஒரு பக்கம் தள்ளப்பட்டு, GRல் 150 கி.கி. நெருக்கம் (compression) ஏற்படுகிறது. அத்துடன் RP என்ற கம்பியின் பகுதி கிடைக்கோட்டுடன் 60° கோணத்தை அமைத்தவாறும் உள்ளது.



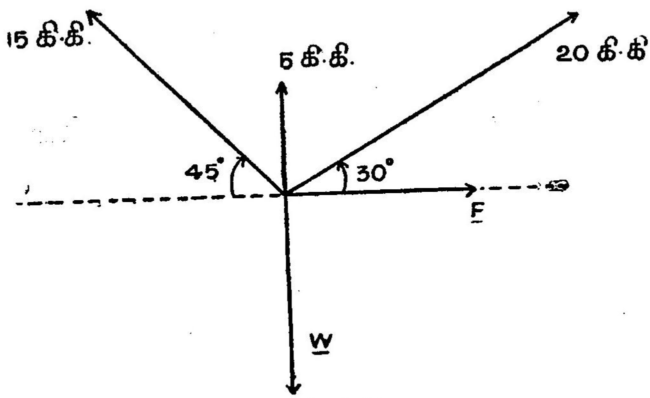
படம் 3-29

(i) GR என்ற முட்டு கிடைக் கோட்டுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்ருல் அதன் இரு மதிப்புக்களைக் காண்க.

(ii) RPயில் செயற்படும் இழு விசையின் எண் மதிப்பையும் காண்க.

[விடை: (i) $-3{\cdot}55^\circ$, $63{\cdot}55^\circ$ (ii) 299·40 கி.கி., 133·68 கி கி.]

3—6. ஒரு துகள், படம் 3-30ல் காட்டியவாறு விசைகளால் சம நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது அதன் எடையையும், F்ன்



படம் 3–30

எண் மதிப்பையும் காண்க.

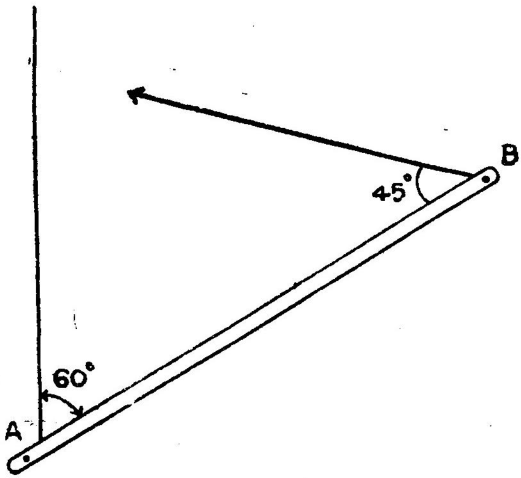
[விடை: 25·605 கி.கி.; 3·89 கி.கி.]

3—7. 10 கி.கி. எடையுள்ள ஈய உருண்டை, கிடைத் திசையுடன் 30°, 60° கோணங்களை அமைக்கும் இரு வழவழப்பான (Smooth) சாய்வு தளங்களுக்கு இடையில் அமைதி நிலையில் வைக்கப்பட்டு உள்ளது. உருண்டை சாய்வு தளங்களைத் தொடுமிடத்தில் தளங்களின் எதிர் செயல் விசைகளைக் காண்க.

[விடை: 5 கி.கி., $5\sqrt{3}$ கி.கி.]

3—8. 500 கி.கி. எடையுள்ள ஒரே சீரான AB என்ற உத்தரம் (Beam) ஒன்று தடையற்று Aயில் சுழலுமாறும், Bயில் ஒரு கயிற்ருல் படம் 3-31ல் காட்டியுள்ளபடி தாங்கப்படுகிறது.

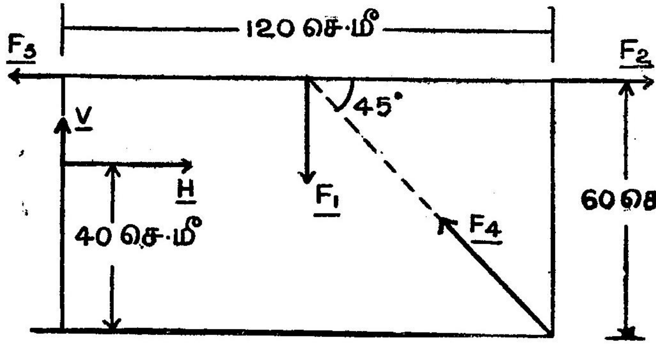
திருப்புத் திறன் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் Aயில் செயற்படும் விசை, Bயில் செயற்படும் இழு விசை ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 3–31

[விடை : 514·2 கி.கி., 37°7′; 306·3 கி.கி.]

3—9. இறுக்கமுள்ள செவ்வகத் தளம் ஒன்று, படம் 3-32ல் காட்டியுள்ளபடி 6 விசைகளால் சம நிலையில் வைக்கப்பட்



படம் 3–32

டுள்ளது. |V| / |H|ன் மதிப்பைக் காண்க. பின்பற்றிய வழிகளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

[விடை : $\frac{1}{3}$]

3—10. 1000 கி.கி. (விசை) எடையுள்ள பொருளை படம் 3-33ல் காட்டியபடி கம்பிகள் தாங்குகின்றன. கம்பிகளில் செயற்படும் இழு விசைகளைக் காண்க.

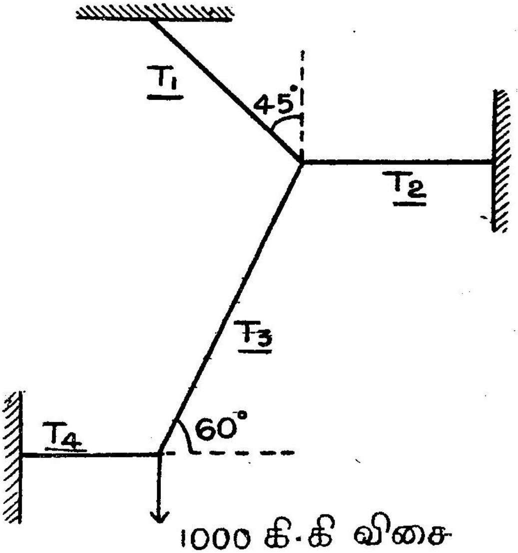
[விடை :

$T_1 = 1414$ கி.கி.

$T_2 = 1578$ கி.கி.

$T_3 = 1154.67$ கி.கி.

$T_4 = 577{\cdot}33$ கி.கி.]



படம் 3–33

3—11. ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் தொகுதி கீழ்வருமாறு :

$\underline{F_1} = 8{\cdot}4\underline{i} - 6{\cdot}0\underline{k}$ கிப்ஸ்

$\underline{F_2} = 10{\cdot}0\underline{j} - 5\underline{k}$ கிப்ஸ்

$\underline{F_3} = -5{\cdot}4\underline{i} + 7{\cdot}0\underline{j} + 14{\cdot}6\underline{k}$ கிப்ஸ்

இவைகளுக்குச் சமமான தொகுபயன் விசையைக் காண்க.

[விடை : $3{\cdot}0\underline{i} + 17{\cdot}0\underline{j} + 3{\cdot}6\underline{k}$]

3—12. ஒரு துகள் $\underline{P} = 2{\cdot}2\underline{j} + 5{\cdot}5\underline{k}$, $\underline{Q} = -8{\cdot}4\underline{j} - 1{\cdot}9\underline{i}$, $\underline{R}$ என்ற விசைகளால் செயற்பட்டும், அவைகளுக்குச் சரிநிகரான $6{\cdot}5\underline{i} - 4{\cdot}1\underline{j} + 8{\cdot}3\underline{k}$ என்ற தொகுபயன் விசையையும் பெற்றிருக்குமென்றால், $\underline{R}$ என்ற விசையை வரையறுக்க.

[விடை : $8{\cdot}4\underline{i} + 2{\cdot}1\underline{j} - 2{\cdot}8\underline{k}$]

3—13. O என்ற புள்ளியில் அமைந்திருக்கும் ஒரு துகளில் விசைக் கணம் ஒன்று செயற்பட்டும் அதற்குச் சமமான தொகு பயன் விசையின் செயற்படும் கோடு (5, 2, −14) என்ற திசை விகிதங்களையும் பெற்றுள்ளது. கணத்தில் உள்ள விசைகள் $\underline{A} = A(\frac{2}{3}\underline{i} - \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{1}{3}\underline{k})$, $\underline{B} = B(0{\cdot}6\underline{j} - 0{\cdot}8\underline{k})$, $\underline{C} = -110\underline{k}$

நியூட்டன்கள் என்ருல் தொகுபயன் விசைக்கு உரிய எண் மதிப்பு, A, B ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : தொகுபயன் விசையின் எண் மதிப்பு $= \frac{1980}{7}$ நியூட்டன்கள் ; $A = \frac{990}{7}$ நியூட்டன்கள் ; B = 220 நியூட்டன்கள்.]

3—14. ஒரு துகளில் கீழ்க்காணும் விசைகளின் கணம் செயற்படுகிறது. அதற்குச் சமமான தொகுபயன் விசையைக் காண்க.

$$\underline{A} = -3{\cdot}0\underline{i} + 4{\cdot}2\underline{j}$$

$$\underline{B} = -2{\cdot}5\underline{i} + 5{\cdot}0\underline{k}$$

$$\underline{C} = 7{\cdot}3\underline{i} - 2{\cdot}7\underline{j} + 4{\cdot}0\underline{k}$$

[விடை : $1{\cdot}8\underline{i} + 1{\cdot}5\underline{j} + 9\underline{k}$]

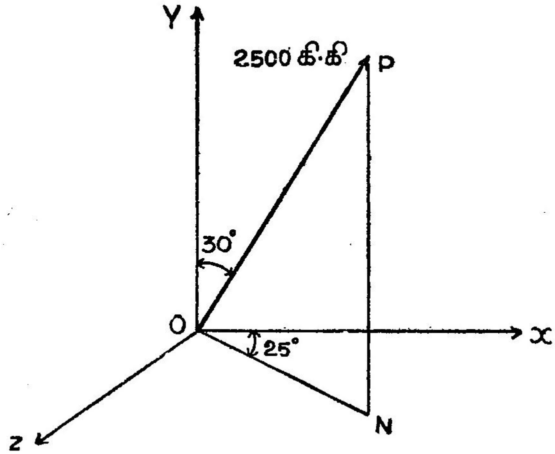
3—15. 75 கி.கி. எடையுள்ள மரக்கட்டை ஒன்று மூன்று கம்பிகளிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. கம்பிகள் அமையும் கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் (direction ratios) முறையே (−2, 6, 3), (−5, −14, 2), (4, 0, 3) என்ருல் கம்பிகளில் செயற்படும் இழு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : 78·4 கி.கி., 72·0 கி.கி., 58·357 கி.கி.]

3—16. படம் 3-34ல் 2500 கி.கி. விசை OP என்ற நேர் கோட்டில் செயற்படுகிறது.

(a) விசையின் x, y, z பகிர்வுகளைக் காண்க.

(b) விசையின் செயற்படும் கோடு x, y, z அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் கோணங்களையும் காண்க.

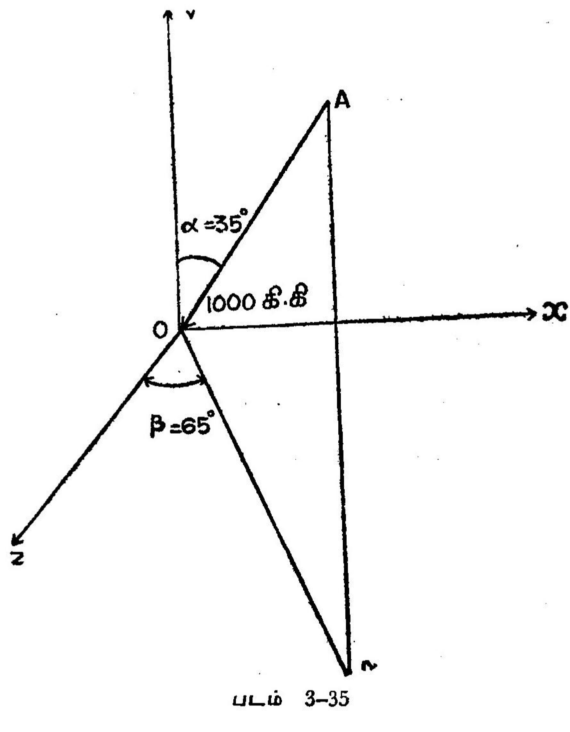


[விடை :
(a) 1133,
2165,
528 கி.கி.
விசை;

(b) 63·1°,
30°,
77·8°]

படம் 3–34

3—17. படம் 3-35ல் காட்டியபடி 1000 கி.கி. விசை Oல் தாக்கப்பட்டும், AOஐச் செயற்படும் கோடாகவும் கொண்ட தடியில் செயற்படுகிறது. $\alpha = 35°$, $\beta = 65°$ என்றால்,



படம் 3–35

(a) விசையின் x, y, z பகிர்வுகளைக் காண்க

(b) அது செயற்படும் கோடு x, y, z திசைகளுடன் அமைக்கும் கோணங்களையும் காண்க.

[விடை: (a) −2600, −4100, −1212 கி.கி. விசை;
(b) 121°20′, 145°, 104°]

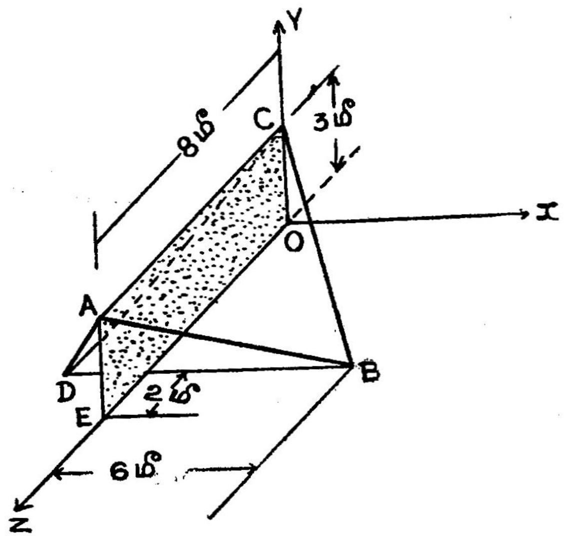
3—18. 4000 கி.கி. விசை ஒன்று துவக்கப் புள்ளியின் வழியே, y, z அச்சுக்களுடன் முறையே 80°, 40° கோணங்களை அமைக்கும் கோட்டில் செயற்படுகிறது. விசையின் x பகிர்வு மிகை எண்ணாக இருக்குமென்றால் விசையின் x, y, z பகிர்வுகளையும் அது செயற்படும் கோடு x அச்சில் தாங்கும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை: 2792, 694, 2778·8 கி.கி. விசை, 45° 44′]

3—19. ஒரு விசை துவக்கப் புள்ளியின் வழியாகவும் x, z அச்சுக்களில் முறையே 125°, 65° கோணங்களைத் தாங்கும் கோட்டிலும் செயற்படுகிறது. விசையின் y பகிர்வு 320 கி.கி. என்றால் விசையின் எண் மதிப்பையும், செயற்படும் கோடு x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

[விடை: 456 கி.கி., 45° 26′]

3—20. இரும்புக் கம்பிகள், சிமெண்டுக் கலவை ஆகிய வற்றால் வார்ப்பு செய்யப்பட்ட சுவர்ப் பகுதி படம் 3-36ல்



படம் 3–36

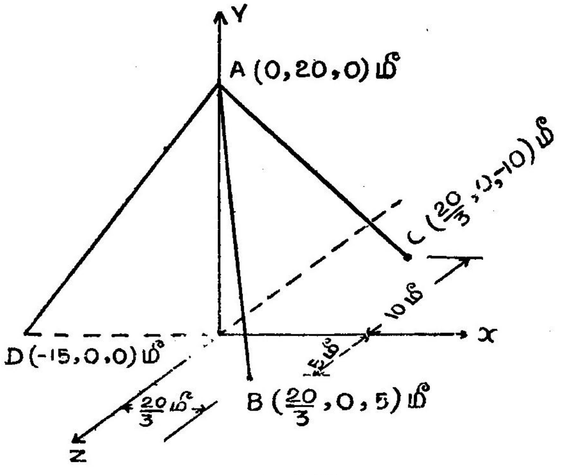
காட்டியபடி வலுவான கம்பிகளால் நிறுவப்பட்டுள்ளது. 350 கி. கி. விசையுள்ள இழு விசை AB என்ற கம்பியில் செயற்படு மென்றால் சுவர்ப் பகுதியில் A என்னுமிடத்தில் பயன்படுத்தப் படும் விசையின் x, y, z பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : 300, —150, — 100 கி. கி.]

முந்திய கணக்கில் BC என்ற கம்பியில் செயற்படும் இழு விசை 450 கி. கி. விசை என்றால், சுவர்ப் பகுதியில் C என்ற இடத்தில் செயற்படும் விசையின் x, y, z பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : —300, 150, —300 கி. கி. விசை]

3—21. கூடார உச்சியைக் குறிக்கும் A என்ற புள்ளியில், அது சாயாமல் உதவும் ஆதாரக் கயிறுகளில் (guy wires)



படம் 3-37

படம் 3-37ல் காட்டியபடி பொருத்தப்பட்டுள்ளன. கயிறுகள் AB, AC ஆகியவற்றில் செயற்படும் இழு விசைகள் முறையே 2600 கி. கி. விசை, 1750 கி. கி. விசை என்றால், அவைகள் இரண்டும் Aயில் நிகழ்த்தும் விசைகளின் தொகுபயனைக் காண்க.

[விடை : 1300 i — 3900 j — 150 k கி. கி. விசை.]

3—22. படம் 3-37ல் AC என்ற கயிற்றில் செயற்படும் இழு விசை 3500 கி. கி. என்றிருக்கும்போது AB, AD என்ற கயிறுகளில் செயற்படும் விசைகளை Aல் செயற்படும் இம்மூன்று இழுப்பு விசைகளின் தொகுபயன் விசை செங்குத்தாக இருப்பதாகக் கொண்டு காண்க.

[விடை : 6500 கி. கி., 5000 கி. கி.]

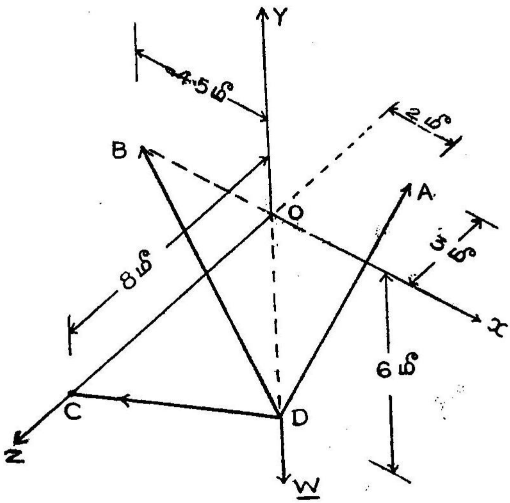
3—23. 100 கி. கி. விசை எடையுள்ள ஒரு கொத்து விளக்கு (chandelier) ஒழுங்காக அமைந்த மூன்று சங்கிலிகளில் ஒவ்வொன்றும் செங்குத்துத் திசையுடன் 30° கோணத்தைத் தாங்கியவாறு தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. சங்கிலி ஒவ்வொன்றி லும் ஏற்படும் இழு விசையின் எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.

3—24. z அச்சின் மிகைத் திசையில் செயற்படும் 2·5 கி. கி விசையை மூன்று முட்டுகளில் (stiuts) செயற்படும் விசைகள் சம நிலையில் வைக்கின்றன. முட்டுகள் (0, 5, −12), (3, 0, −4), (2, −2, 1) என்ற திசை விகிதங்களைப் பெற்ற திசைகளில் அமைந்து, அவைகளில் செயற்படும் இழு அல்லது இறுக்க விசைகளின் (tensile or compressive forces) எண் மதிப்புக்கள் முறையே P, Q, R என்றால், முட்டுகளில் செயற்படும் விசைகளைக் காண்க. எவற்றில் இழு அல்லது இறுக்க விசைகள் நிகழ்கின்றன என்றும் காண்க.

[விடை : P = 4·15 (− இழு விசை) கி. கி.
Q = 2·66 (இறுக்க விசை) கி. கி.
R = 2·40 (இழு விசை) கி. கி.]

3—25. படம் 3-38ல், DA, DB, DC என்ற கம்பிகள் Dல் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் W கி. கி. பளுவைச் சம நிலையில் வைக்கின்றன. DBல் செயற்படும் இழுவிசை 100 கி. கி. என்றால் பளுவின் எடையையும், DA, DC ஆகியவற்றில் செயற்படும் இழு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களையும் காண்க.

[விடை : 327·5, 210·0, 112·5 கி. கி.]



படம் 3–38

3—26. படம் 3-38ல், DC கம்பியில் செயற்படும் இழு விசை 225 கி. கி. என்றால், W, T_{DA}, T_{DB} ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : 655, 420, 200 கி. கி.]

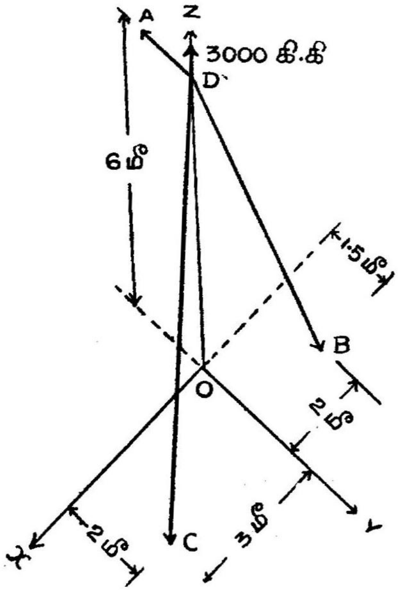
3—27. 3-38ல் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் பளுவின் எடை 131 கி. கி. என்றால் DA, DB, DC ஆகியவற்றில் செயற்படும் இழு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : 80, 40, 45 கி. கி.]

3—28. D என்ற புள்ளியில் அடுத்த பக்கத்திலுள்ள படம் 3-39ல் காட்டியவாறு, 3000 கி. கி. விசையானது மேல் நோக்கிச் செயற்பட்டு, DA, DB, DC என்ற கம்பிகளில் நிகழும் இழு விசைகளால் ஈடு செய்யப்பட்டு D என்ற புள்ளி சமநிலையில் அமைகிறது என்றால் கம்பிகளில் நிகழும் இழு விசைகளின் எண்மதிப்புகளைக் காண்க.

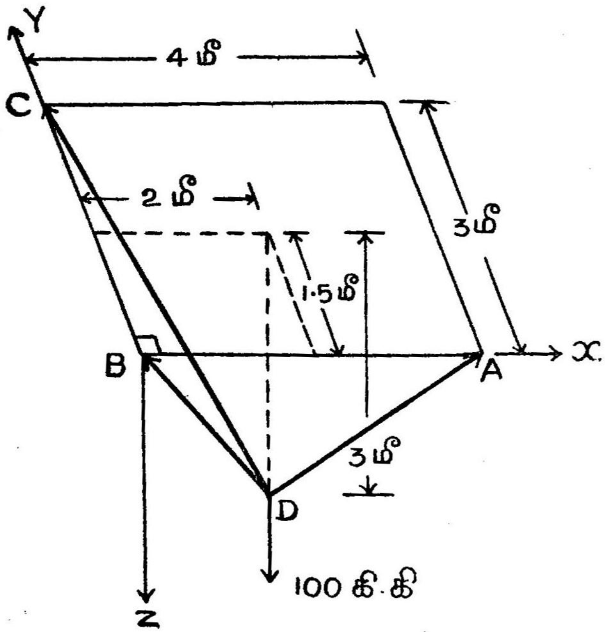
[விடை : 850, 1950, 1400 கி. கி.]

3—29. அடுத்த பக்கத்திலுள்ள படம் 3-40ல் D என்ற புள்ளியில் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் 100 கி.கி. எடையுள்ள



படம் 3–39

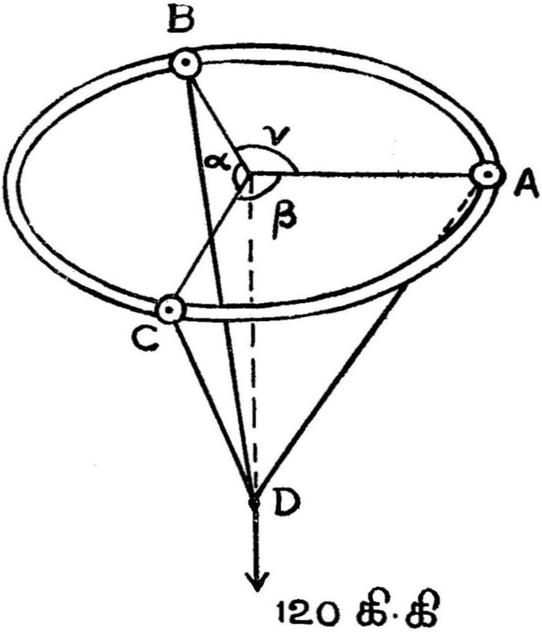
படம் 3–40



பளுவை, DA, DB, DC ஆகிய கயிறுகளில் செயற்படும் இழு விசைகள் சம நிலையில் வைக்கின்றன என்றால், இழு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை : 62·4, 20·8, 45·8 கி. கி.]

3—30. படம் 3-41ல் காட்டியவாறு தள மட்டமான வட்ட வளையத்தில் A, B, C என்ற புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்ட கொக்கிகளிலிருந்து கயிறுகள் கட்டப்பட்டு, கீழ் நுனிகளை ஒன்று



படம் 3-41

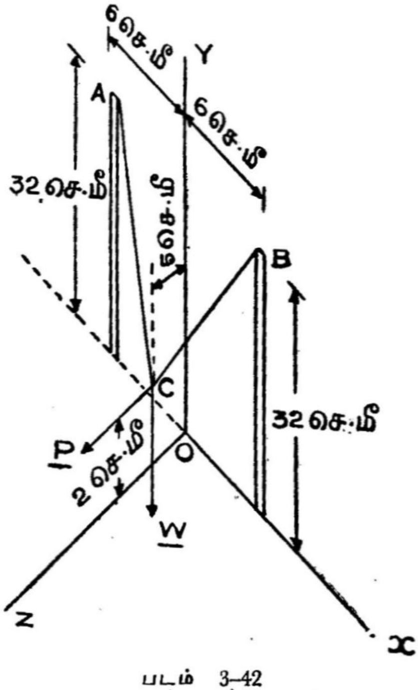
சேர்க்கும் D என்ற புள்ளியில் 120 கி. கி. எடை பளு ஒன்று தொங்க விடப்பட்டு சம நிலையில் அமைகிறது. D என்ற புள்ளி தள மட்டத்திலிருந்து கீழ்நோக்கி 16 செ. மீ. தொலைவில் அமைகிறதென்றால் DA, DB, DC கயிறுகளில் நிகழும் இழு விசைகளின் எண் மதிப்புக்களை

(a) $\alpha = \beta = \gamma = 120°$, ஆரம் = 12 செ. மீ.

(b) α 80° ; β 130°, γ 150° என்றிருக்கும்போது காண்க.

[விடை : (a) $T_A = T_B = T_C = -50$ கி. கி.
(b) $T_A = -109$, $T_B = -120$, $T_C =$
-308 கி. கி.]

3—31. 300 கி. கி. எடை உள்ள பளு CA, CB என்ற கயிறு களில் கட்டப்பட்டு படம் 3-42ல் காட்டியபடி P என்ற விசையால் சம நிலையில் வைக்கப்பட்டிருக்குமென்றால் கயிறுகளில் செயற் படும் இழு விசை, P ஆகியவற்றின் எண் மதிப்புக்களைக் காண்க.



படம் 3-42

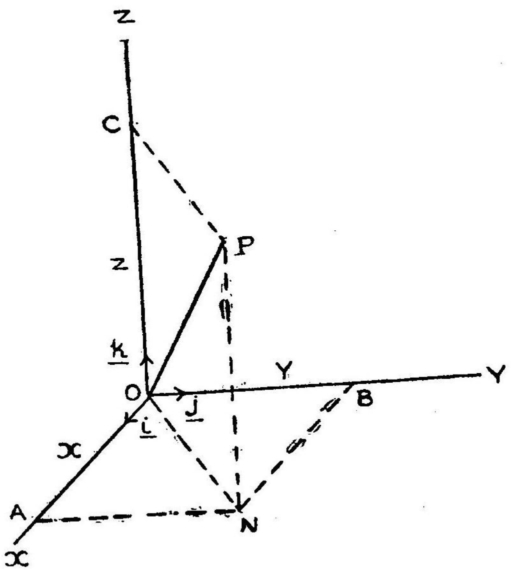
[விடை : $T_A = T_B = 155$ கி. கி.
$P = 50$ கி. கி.]

4. முக்கியத் திசையிக் கணியங்கள்

(Important Vector Quantities)

4—1. நிலைத் திசையி (Position vector) :

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்டு பரந்த வெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலையை வரையறுக்கலாம். இவ்விரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் திசையுடன் கூடிய



படம் 4–1

துண்டு நேர்கோடே பரந்த வெளியில் எடுத்த புள்ளியின் நிலைத் திசையி எனப்படும். நிலைத் திசையியின் எண் மதிப்பைத் துண்டு நேர்கோட்டின் நீளம் வரையறுக்கிறது.

படம் 4-1ல் காட்டியவாறு O என்ற புள்ளியில் Ox, Oy, Oz என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் அச்சுக்களை அமைக்கவும். பரந்த வெளியில் P என்ற புள்ளியை எடுக்கவும். P‌ன் நிலைத் திசையியை OP என்ற அம்புக்கோடு வரையறுக்கும். OPன் நீளத்தை r எனக் கொண்டு x, y, z அச்சுக்களில் அதன் வீழ்ச்சிகள் (projections) முறையே, x, y, z என்றிருக்குமெனில் P‌ன் நிலைத் திசையி

$\underline{OP} = \underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ என்று குறிக்கப்படும். இங்கு $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பவை x, y, z அச்சுக்களின் திசைகளை வரையறுக்கும் ஓரலகுத் திசையிகளாகும். மேலும் x, y, z என்பவை P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளாகும்.

4—2. ஒரு புள்ளிக்கு உரிய ஒரு விசையின் திருப்புத் திறன் (Moment of a force about a point) :

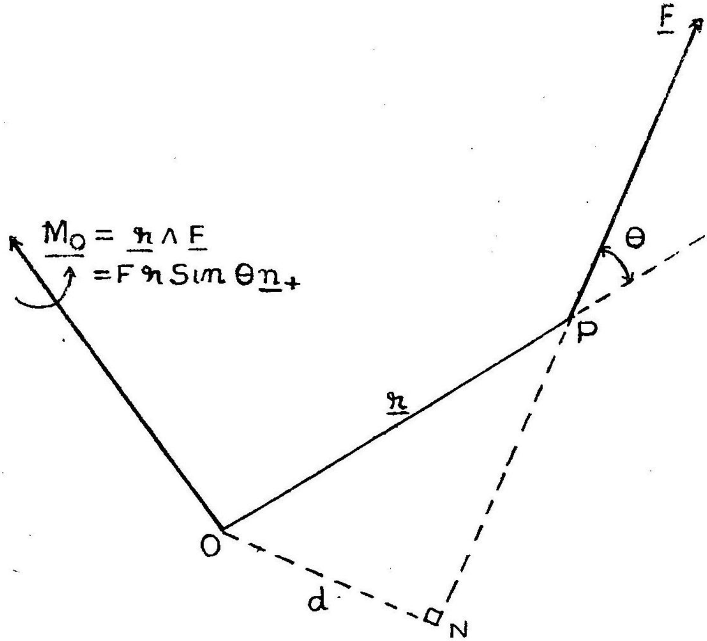
பரந்த வெளியில் O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். $\underline{F}$ என்பது ஒரு விசையை அறிவிக்கட்டும். O என்ற புள்ளிக்கும், $\underline{F}$ என்ற விசை செயற்படும் நேர்கோட்டிற்கும் உள்ள செங்குத்துத் தொலைவை d எனக் கொள்ளவும்.

$\underline{F}$ என்ற விசை ஒரு பொருளில் செயற்படுவதாகில், அது அப்பொருளை O என்ற புள்ளியைச் சுற்றி வலது அல்லது இடது புறம் சுழலச் செய்யும். அவ்விதச் செயல் "திருப்புத் திறன்" (Moment) எனப்படும். விசையின் எண்மதிப்பு, Oவிலிருந்து விசை செயற்படும் நேர்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் திருப்புத் திறன் வரையறுக்கப்படும். மேலும் அதன் விளைவு (effect) $(\underline{O}, \underline{F})$ ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஏற்படும். எனவே திருப்புத் திறன் ஒரு திசையியாகும். அது திசையிக் குறியீட்டில் M_o எனக் குறிக்கப்படும்.

படம் 4-2ல் காட்டியவாறு O என்ற புள்ளிக்கு உரிய $\underline{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத் திறனின் எண்மதிப்பை (magnitude)

$$|\underline{M}_o| = |\underline{F}|\, d,$$

அல்லது $M_o = F.\, d$ என்ற சமன்பாடு அறிவிக்கிறது.



படம் 4–2

$\underline{n}_+$ என்பது (O, $\underline{F}$) தளத்திற்கு மேல் நோக்கிய செங்குத்தான திசையை அறிவிக்கும் ஓரலகுத் திசையி என்றால்,

$$\underline{M}_o = Fd\ \underline{n}_+ \text{ ஆகும்.}$$

4—2. (1) திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கியால் திருப்புத் திறனை வரையறுத்தல் :

$\underline{F}$ என்ற விசை செயற்படும் நேர்கோட்டில் படம் 4-2ல் காட்டியவாறு P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுக்கவும். P ன் நிலைத் திசையியை OP = $\underline{r}$ எனக் கொள்ளவும். ($\underline{OP}$, $\underline{F}$) ஆகியவற்றிற்கு இடையிலமையும் குறுங்கோணத்தை θ எனக் குறிக்கவும்.

Oவிலிருந்து $\underline{F}$க்கு ON என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரையவும். $ON = d = r\cos\theta$ ஆகும்.

$\therefore \quad \underline{M_o} = F\ r\sin\theta\ \underline{n_+}$ என்ருகும்.

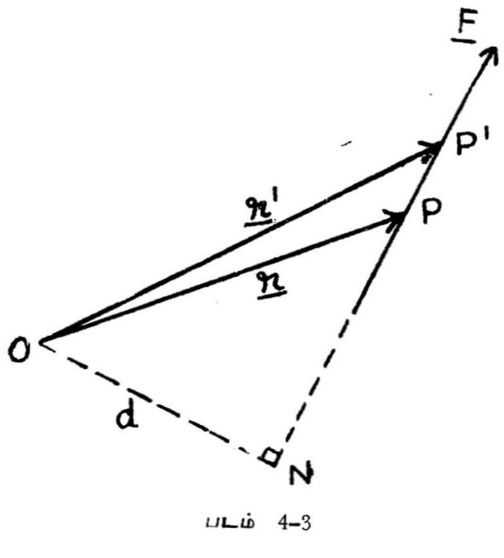
$\underline{r}$, $\underline{F}$ ஆகியவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கியை எடுத்திட,

$\underline{r} \wedge \underline{F} = F\ r\ \sin\theta\ \underline{n_+}$ என்ருவதால், திருப்புத் திறன் திசையியை (Vector Moment), $\underline{r}$, $\underline{F}$ ஆகியவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கி அறிவிக்கிறது.

$\therefore \quad \underline{M_o} = \underline{r} \wedge \underline{F}$ ஆகும்.

திருப்புத் திறன் செயற்படும் கோட்டை அச்சாகக் கொண்டு பொருள் (O, $\underline{F}$) தளத்தில் சுழலுகிறது. அவ்விதச் சுழற்சி இடப்புற அல்லது வலப்புறச் சுழற்சியைப் பெற்றிருப்பது, ($\underline{r}$, $\underline{F}$, $\underline{n_+}$) என்பவை ஒரு இடஞ்சுழி அல்லது ($\underline{F}$, $\underline{M}$, $\underline{n_-}$) என்பவை ஒரு வலஞ்சுழி அமைப்பை மேற்கொள்வதைச் சார்ந்துள்ளது. இங்கு $\underline{n_-}$ என்பது (O, F) தளத்திற்குக் கீழ் நோக்கிய செங்குத்துத் திசையை அறிவிக்கும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

மேலும் $\underline{F}$ செயற்படும் கோட்டில், P′ என்ற மற்ருெரு



படம் 4–3

புள்ளியை எடுத்து அதன் நிலைத் திசையியை $\underline{OP'} = \underline{r'}$ எனக் கொண்டால், படம் 4–3லிருந்து,

$$\underline{OP'} = \underline{OP} + \underline{PP'}$$

$$\underline{r'} = \underline{r} + \underline{PP'} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \underline{r'} \wedge \underline{F} = (\underline{r} + \underline{PP'}) \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{r} \wedge \underline{F} + \underline{PP} \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{r} \wedge \underline{F} + \underline{0}$$ ($\underline{PP'}$, $\underline{F}$ என்பவை ஒரே நேர் கோட்டில் அமைவதால்,

$$= \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{M_0}$$ ஆகும். $\underline{PP'} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ஆகும்.)

எனவே O என்ற புள்ளிக்கு உரிய $\underline{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத் திறன் $\underline{F}$ செயற்படும் புள்ளியைச் சார்ந்திருப்பதில்லை என்றுகிறது. ஆதலால் திருப்புத் திறன் திசையியை வரையறுப்பதில் விசையை நழுவும் திசையியாகக் (sliding vector) கருதலாம்.

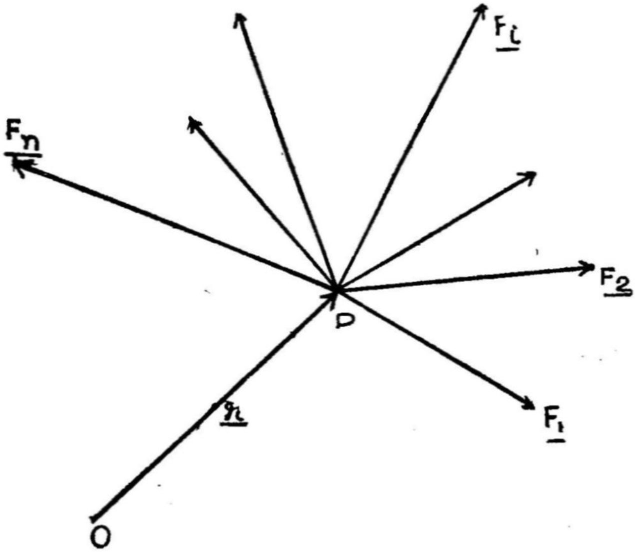
Oக்கு உரிய திருப்புத் திறன் சுழியாக இருக்க, $\underline{F} = 0$ அல்லது $d = 0$ ஆக வேண்டும். அதாவது விசை சுழியாக வேண்டும் அல்லது விசை Oவின் வழியே செல்ல வேண்டும்.

திருப்புத் திறனின் பரிமாணங்கள் (dimensions) [விசை] × [நீளம்] = [FL] ஆகும். மெட்ரிக் முறையில் அதற்கு உரிய அலகுகள் கி.கி. விசை. செமீ., கி.கி. விசை. மீட்டர் அல்லது மெட்ரிக் டன் விசை. மீட்டர் ஆகும்.

4—3. வாரிக்னானின் தேற்றம் (Varignon's theorem):

பரந்த வெளியில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் கண விசைகளின் (set of concurrent forces) திருப்புத் திறன் (ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட சுட்டமைப்புப் புள்ளியில் எடுக்கப்பட்டால்), அதன் தொகுபயன் விசையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

($\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ ...$\underline{F}_i$,...$\underline{F}_n$) என்பவை படம் 4-4ல் காட்டியபடி $\underline{P}$ என்ற புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்ளவும்.



படம் 4–4

O என்ற சுட்டமைப்புப் புள்ளியில் கண விசைகளின் திருப்புத் திறன் தேவைப்படுவதாகக் கொள்ளவும்.

$\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ ...$\underline{F}_i$,...$\underline{F}_n$ என்ற விசைகள் $\underline{P}$யின் வழியே செயற்படுவதால் அவைகளின் தொகுபயன் விசையும் இணைகர விதிப்படி அப் புள்ளியின் வழியே செயற்படும். $\underline{R}$ என்பது கண விசைகளின் தொகுபயன் விசையைக் குறிக்குமென்றால்,

$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_i + ... + \underline{F}_n$ ஆகும்.

எனவே O என்ற புள்ளியில் கண விசைகளின் திருப்புத் திறன்களுக்கு உரிய கூடுதல்

$= \underline{r} \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2 + ... + \underline{r}_o \wedge \underline{F}_i + ... + \underline{r} \wedge \underline{F}_n$

$= \underline{r} \wedge (\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_i + ... + F_n)$, (குறுக்குப் பெருக்கி பங்கீட்டு விதிக்கு இசைந்துள்ளதால்)

$= \underline{r} \wedge \underline{R}$

= Oல் தொகுபயன் விசையின் திருப்புத் திறனாகும்.

இத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விசை ஒன்றின் திருப்புத் திறனை அதன் ஆக்கக் கூறுகளின் திருப்புத் திறன்கள் வாயிலாக அறியலாம்.

4—3 (1) பரந்த வெளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் 3 திசைகளில் திருப்புத் திறனின் பகிர்வீடுகள்

(Rectangular Components of Moment):

O என்ற புள்ளியில் ox, oy, oz என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் அச்சுக்களைக் குறிக்கட்டும். $\underline{F}$ என்ற விசை, P என்ற புள்ளியில் செயற்படுகிறது. $\underline{P}$யின் நிலைத் திசையியை r எனக் கொள்ளவும்.

$\underline{r}$, $\underline{F}$ ஆகியவற்றை x, y, z திசையிகளில் பகிர்வீடு செய்ய,

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$$ என்றாகும்.

$\underline{Mo}$ என்பது O என்ற புள்ளியில் $\underline{F}$ன் திருப்புத் திறனைக் குறிக்கட்டும். அப்போது,

$$\underline{Mo} = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (y F_z - z F_y)\underline{i} - (x F_z - z F_x)\underline{j} + (x F_y - y F_x)\underline{k}$$

$$= (y F_z - z F_y)i + (z F_x - x F_z)j + (x F_y - y F_x)\underline{k}$$

ஆகும்.

$\underline{M_o} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k}$ என்றால்,

$$M_x = y F_z - z F_y$$

$M_y = z F_x - x F_z$

$M_z = x F_y - y F_x$ என்பவை முறையே x, y, z திசைகளில் திருப்புத் திறன் $\underline{M}_o$ன் எண்ணிப் பகிர்வுகளாகும்.

$\underline{F}$ என்ற விசை XOY தளத்திலமையுமென்றால் $F_z = 0, z = 0$ ஆகும். எனவே

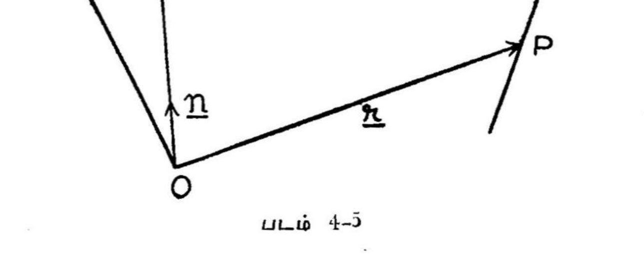
$\underline{M}_o = (x F_y - y F_x) \underline{k}$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{k}$ என்பது XOY தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலமையும் ஓரலகுத் திசையியாவதால் தளத்தில் செயற்படும் விசையின் திருப்புத் திறன் தளத்தின் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுகிறது என்பதை அறிய வேண்டும்.

4—4. ஓர் அச்சு பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காணுதல் :

இறுக்கப் பொருள் ஒன்றில் $\underline{P}$ என்னுமிடத்தில் $\underline{F}$ என்ற விசை செயற்படுகிறது. Oவில் அவ் விசையின் திருப்புத் திறன் $\underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F}$ ஆகும்.

படம் 4-5ல் OL என்பது Oவின் வழியே குறிப்பிட்ட அச்சுக்கு இணையாக அமையும் கோடாகும். OL கோட்டின் திசையை $\underline{n} = n_x\underline{i} + n_y\underline{j} + n_z\underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையி வரையறுக்கட்டும்.



படம் 4-5

OL என்ற அச்சில் $\underline{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத் திறன் OL என்ற கோட்டில் $\underline{M_o}$ன் வீச்சு நீளத்தால் (length of projection) வரையறுக்கப்படும். அது ஒரு எண் மதிப்பை மட்டும் பெற்றிருப்பதால் அதை M_{OL} எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

$$\therefore \quad M_{OL} = \underline{n} \cdot \underline{M_o}$$

$$= \underline{n} \cdot (\underline{r} \wedge \underline{F})$$

$$= \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= n_x (y F_z - z F_y) + n_y (z F_x - x F_z) + n_z (x F_y - y F_x) \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{n}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிக்குப் பதிலாக $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்ற ஓரலகுத் திசையிகளை எடுத்தால் x, y, z அச்சுக்களில் $\underline{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத் திறன்களைப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad M_{ox} = \underline{i} \cdot \underline{M_o}$$

$$= \underline{i} \cdot (M_x \underline{i} + M_y \underline{j} + M_z \underline{k})$$

$$= M_x$$

$$= y F_z - z F_y \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே, $M_{oy} = \underline{j} \cdot \underline{M_o} = M_y = z F_x - x F_z$ என்றும்

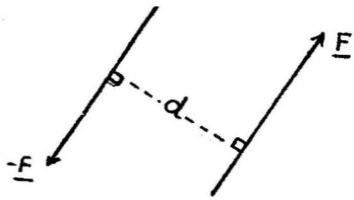
$$M_{oz} = \underline{k} \cdot \underline{M_o} = M_z = x F_y - y F_x \text{ என்றும் ஆகும்.}$$

அதாவது $\underline{M_o}$வின் பகிர்வுகளே x, y, z திசைகளில் $\underline{F}$ என்ற விசையின் திருப்புத் திறன்களாகும்.

4—5. சுழலிணையும், சுழலிணைப்புத் திறனும் (Couple and Couple Moment) :

இரு இணை விசைகள் சமமான எண் மதிப்புக்களைப் பெற்றும், எதிர் போகான கோடுகளில் செயற்பட்டும் அமையுமானுல் அவைகள் சுழலிணை எனப்படும்.

சுழலிணையைப் பொதுவாக $\{\underline{F}, -\underline{F}\}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம். சுழலிணையின் அமைப்பு, படம் 4-6ல் காட்டியவாறு இருக்கும். சுழலிணையாக அமையும் இரு விசைகளுக்கு இடையில் உள்ள செங்குத்து நீளம், இடைத் தொலைவு (arm length) எனப்படும்.



படம் 4-6

சுழலிணையிலமையும் இரு விசைகளின் பகிர்வுகளை எத்திசையில் எடுத்தபோதிலும் அவற்றின் இயற்கணிதக் கூடுதல் சுழியாவதால் சுழலிணை ஒன்று செயற்படும்போது பொருளில் எவ்வித இடப் பெயர்ச்சி இயக்கத்தையும், அதாவது தள்ளுவது அல்லது இழுப்பது போன்ற இயக்கங்களை எத்திசையிலும் உண்டு பண்ணுவதில்லை. ஆனுல், ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் சுழலிணையிலமையும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்கள் சுழியாவதில்லை. எனவே, சுழலிணை ஒரு இறுக்கப் பொருளைச் சுழலச் செய்வதற்குக் காரணமாக உள்ளது. ஒரு பொருள், ஒரு புள்ளியைச் சார்ந்து அல்லது ஒரு நேர்கோட்டைச் சார்ந்து சுழலுவதை சுழலிணைப்புத் திறனுல் அளவிட்டுக் கூறமுடியும்.

4—5 (1) துவக்கப் புள்ளியில் சுழலிணைப்புத் திறனைக் காணுதல் :

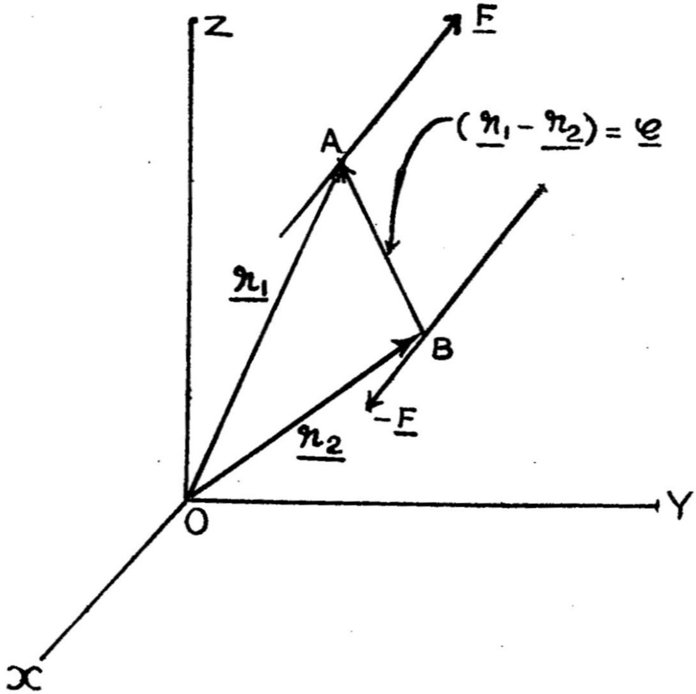
O என்ற புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்ட சுட்டமைப்பில் சுழலிணைக்கு உரிய இரு விசைகள் $\{\underline{F}, -\underline{F}\}$ செயற்படும் கோடுகளில் முறையே A, B என்ற ஏதேனும் புள்ளிகளை படம் 4-7ல் காட்டியவாறு எடுத்து அவைகளின் நிலைத் திசையிகளை r_1, r_2 எனக் கொள்ளவும்.

$$\underline{BA} = \underline{OA} - \underline{OB}$$

$$= \underline{r_1} - \underline{r_2}$$

$= \underline{\phi}$ எனக் கொள்ளவும்.

துவக்கப் புள்ளி Oல் விசைத் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதல் :



படம் 4–7

$$\underline{M} = \underline{r_1} \wedge \underline{F} + \underline{r_2} \wedge (-\underline{F})$$

$$= \underline{r_1} \wedge \underline{F} - \underline{r_2} \wedge \underline{F}$$

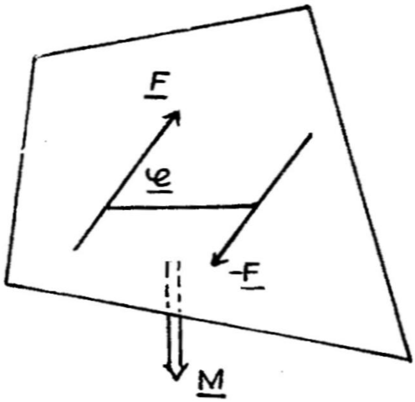
$$= (\underline{r_1} - \underline{r_2}) \wedge \underline{F}$$

$= \underline{\text{ஓ}} \wedge \underline{F}$ ஆகும்.

குறுக்குப் பெருக்கி நியதிப்படி $\underline{M}$ என்பது ($\underline{\text{ஓ}}$, $\underline{F}$) ஆகியவை வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டில் செயற் படும். அதுவே சுழலிணைப்புத் திறனை வரையறுக்கிறது.

இங்கு சுழலிணைப்புத் திறன், செயற்படும் திசை வலப்புறத் திருகு முறைப்படி கீழ்நோக்கி படம் 4-8ல் காட்டியவாறு அமைகிறது.

மேலும் $\underline{\psi}$லிருந்து $\underline{F}$க்குச் செல்லும் சுழற்சி குறுக்குப் பெருக்கல் வரையறையையொட்டி இரு விசைகளின் திரிபு (twist) ஏற்படும் திசையிலேயே அமைகிறது. எனவே சுழற்சி ஏற்படும் திசையை தீர்மானிக்க, இடப் பெயர்ச்சி திசையி $\underline{\psi}$லிருந்து $\underline{F}$ என்ற விசைக்குச் செல்லும் சுழற்சியை அறிதல் அவசியமாகிறது.



படம் 4–8

சுழலிணைப்புத் திறன் செயற்படும் திசை, சுழற்சியின் போக்கு (sense of rotation) ஆகியவற்றை அறிவது மட்டுமின்றி, எண் மதிப்பையும் கணக்கிட்டால்தான் அதை வரையறுத்ததாகக் கொள்ள முடியும்.

சுழலிணைப்புத் திறனைக் கணிப்பதில் விசைகள் நழுவும் (sliding) திசையிகளாகக் கொள்ளப்படுவதால் விசைகள் செயற்படும் புள்ளிகளை, செயற்படும் கோடுகளில் எந்த இடத்தில் அமைத்தபோதிலும் சுழலிணைப்புத் திறன் மாறுவதில்லை. எனவே, சுழலிணைப்புத் திறனின் எண் மதிப்பை எளிதில் கணிக்க, A, B என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு விசைகள் செயற்படும் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு அமைக்கப்படும். அப்பொழுது இடப் பெயர்ச்சித் திசையி $\underline{BA}$ஐ $\underline{\Phi}_{\perp}$ எனக் குறித்தால்,

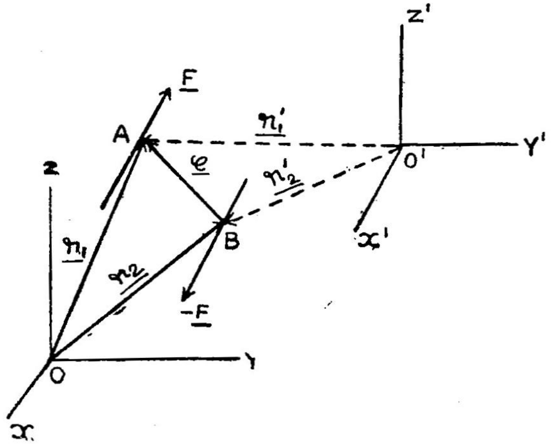
$$|\underline{M}| = |\underline{\Phi}_{\perp}|\,|\underline{F}|\,\text{Sin } 90^{\circ}$$

$= |\underline{F}|\, d$ ஆகும். இங்கு d என்பது சுழலிணையின் விசைகள் செயற்படும் கோடுகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவாகும்.

எனவே சுழலிணைப்புத் திறன் என்பது ஒரு திசையியாகும். அது செயற்படும் திசை விசைகள் செயற்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வலப்புறத் திருகு சுழலும் முறையைக் கடைப்பிடித்து வரையறுக்கப்படும். மேலும் அதன் எண் மதிப்பானது விசையின் எண் மதிப்பு, விசைகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவு ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் தீர்மானிக்கப் படும்.

4—5 (2) சுழலிணைப்புத் திறன் ஓர் தடையற்ற திசையி எனக் காணுதல் :

படம் 4-9ல் காட்டியவாறு O, O' என்ற புள்ளிகளில் (ox, oy, oz), (o′ x′, o′ y′, o′ z′) என்ற இரு சுட்டமைப்புக்களை வரையறுக்கவும். {$\underline{F}$, $-\underline{F}$} என்ற விசைகள் பரந்த வெளியில் ஓர் சுழலிணையாக அமையட்டும். $\underline{F}$, $-\underline{F}$ ஆகியவை செயற்படும் கோடுகளில் முறையே A, B என்ற ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை



படம் 4–9

எடுக்கவும். A, B என்ற புள்ளிகளை O, O' சுட்டமைப்புக்களில் $\underline{r_1}$, $\underline{r_2}$; $\underline{r_1'}$, $\underline{r_2'}$ என்ற நிலைத் திசையிகள் வரையறுக்கட்டும்.

O என்ற புள்ளியில் சுழலிணைப்புத் திறன்

$$= (\underline{r_1} \wedge \underline{F}) + (\underline{r_2} \wedge -\underline{F})$$

$$= \underline{r_1} \wedge \underline{F} - \underline{r_2} \wedge \underline{F}$$

$$= (\underline{r_1} - \underline{r_2}) \wedge \underline{F}$$

$= \underline{\rho} \wedge \underline{F}$ என்றும்

O′ என்ற புள்ளியில் சுழலிணைப்புத் திறன்

$$= (\underline{r}'_1 \wedge \underline{F}) + (\underline{r}'_2 \wedge - \underline{F})$$

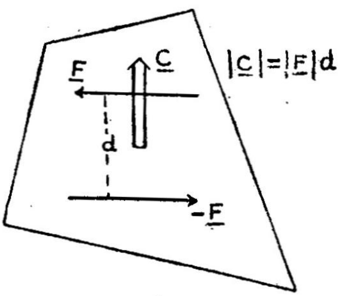
$$= \underline{r}'_1 \wedge \underline{F} - \underline{r}'_2 \wedge \underline{F}$$

$$= (\underline{r}'_2 - \underline{r}'_2) \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{\phi} \wedge \underline{F}$$

என்றும் ஆவதால் சுழலிணைப்புத் திறன் சுட்டமைப்பால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. எனவே பரந்த வெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சுழலிணையில் அமையும் விசைகளின் திருப்புத் திறன் ஒன்றுகவே (same) இருக்கும். மேலும் திருப்புத் திறன், விசைகளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டில் அமையும் திசையியாவதாலும், திருப்புத் திறனை அறிவிக்கும் திசையியைத் தடையற்ற திசையியாகக் (free vector) கருதலாம்.

நிலைமைகளுக்கு ஏற்றவாறு திருப்புத் திறன் திசையியை பரந்த வெளியில் சுழலிணையிலமையும் விசைகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான எந்த நேர்கோட்டிலும் அதன் பொருள் மாறுபடாமல் செயற்படும்படி நகர்த்தலாம். அதன் பயனுகத் திருப்புத் திறனை வரையறுப்பதில் சுழலிணையை அதன் தளத்திலேயே அல்லது அதற்கு இணையாக அமையும் தளத்திலும் திரிபு (twist) நிகழும் போக்கு (sense) மாருமல் நகர்த்தலாம்.



படம் 4–10

இவ்விதத் தளங்களில் சுழலிணையிலமையும் இரு விசைகளையும் அவைகளுக்கு ஏற்றதான இடைத் தொலைவுகளையும் திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பு |F|d என்றிருக்குமாறு மாற்றியமைக்கலாம். மேற்கூறிய வழிகளில் சுழலிணைப்புத் திறனை மாற்றி அமைப்பதில் திசை, எண் மதிப்பு, திரிபு நிகழும் போக்கு (sense) ஆகியவை எவ்விதத்திலும் பாதிக்கப்படுவதில்லை என்ற காரணத்தால் அவ்வித அமைப்புக்கள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சமத்துவமாகக் (equivalent) கருதப்படும்.

படம் 4-10ல் C என்பது சுழலிணைப்புத் திறனை அறிவிக்கப் பயன்படுத்தும் குறியீடாகும்.

4—6. சுழலிணைகளின் சமத்துவம் (Equivalence of Couples):

ஒவ்வொரு சுழலிணையுடனும் அதற்கு உரிய திருப்புத் திறன் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதால் திருப்புத் திறன்கள் சமமாக உள்ள இரு சுழலிணைகள் சமம் என்பதை வரையறுக்கலாம். அவ்வித சுழலிணைகளில் ஒன்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மற்றதை அடிப்படைச் சுழலிணையின் அமைப்புக்கு ஏற்றவாறு மாற்றிட பின்வரும் எளிதான மாற்ற நிலைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

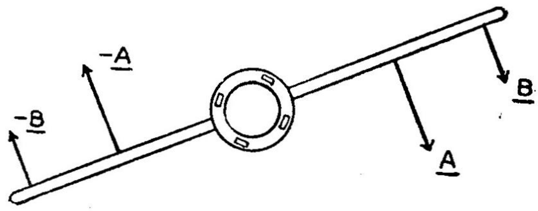
(1) விசைகளின் எண் மதிப்பை அதிகரித்தும், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் தொலைவை ஏற்றவாறு குறைத்தும் அல்லது இவற்றிற்கு எதிர்மாருக எடுத்தும் அமைத்தல்.

(2) சுழலிணைப்புத் திறன் செயற்படும் திசைக்கு இணையாக எடுக்கும் அச்சில் சுழலிணையைச் சுழற்றுதல்.

(3) சுழலிணையை வரையறுக்கும் விசைகளின் எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றை மாற்ருமல், அவைகள் செயற்படும் தளத்திலேயே இடப் பெயர்ச்சி (translation) செய்தல்.

நடைமுறையில் இவ்வித சுழலிணைகளை ஒன்றின் அமைப்பிலிருந்து மற்ருென்றின் அமைப்புக்கு மாற்ற முடியும் என்பதை நெம்புகோல் தத்துவம் உணர்த்துகிறது.

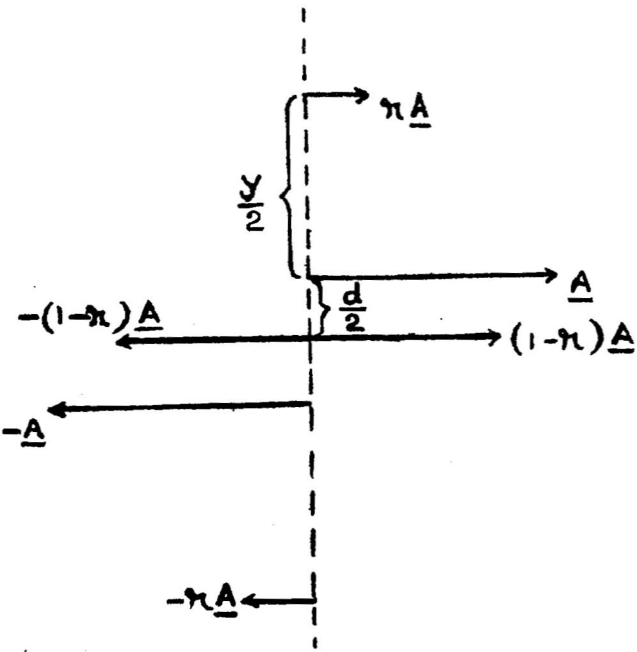
எடுத்துக்காட்டாக இரு வலுவுள்ளவர்கள் A, —A என்ற விசைகளைக் குறுகிய தொலைவில் படம் 4-11ல் காட்டியபடி செயல்படுத்தும்போது Capstan கருவியில் ஏற்படும் விளைவு,



படம் 4-11

இரு வலுவற்றவர்கள் $\underline{B}$, $-\underline{B}$ என்ற விசைகளை அதிகத் தொலைவில் செயல்படுத்தி அதே விளைவை ஏற்படுத்த முடியும் என்பது அனுபவத்தில் கண்டறிந்த உண்மை.

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணையை d தொலைவில் அமையுமாறு படம் 4-12ல் காட்டியபடி எடுக்கவும். $0 < r < 1$ என்றிருக்குமாறு r என்ற மிகை எண்ணைப் பயன்படுத்தி $\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணைக்குச் சமமான விளைவை நிகழ்த்தும் $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ என்ற



படம் 4–12

சுழலிணையை வரையறுப்பதாகக் கொள்ளவும். $\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணைக்கு இணையாக நடுவில் அமையும் நேர்கோட்டில் $(1 - r)\,\underline{A}$, $-(1 - r)\,\underline{A}$ என்ற எதிர் எதிர் விசைகளைப் படம் 4-12ல் காட்டியதுபோல அமைக்கவும்.

$\underline{A}$, $-(1-r)\,\underline{A}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை,

$$\underline{R} = \underline{A} - (1-r)\,\underline{A}$$
$$= \underline{A} - \underline{A} + r\,\underline{A}$$
$$= r\,\underline{A} \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே $-\underline{A}$, $(1-r)\,\underline{A}$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசை $= -\underline{A} + (1-r)\,\underline{A}$

$$= -A + \underline{A} - r\,\underline{A}$$
$$= -\underline{R} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\{r\,\underline{A}, -r\,\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணையின் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் படத்தில் காட்டியவாறு, மையத்திலிருந்து $\frac{y}{2}$ தொலைவில் செயற்படுவதாகில்,

$$\frac{1-r}{1} = \frac{\frac{y}{2} - \frac{d}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{y-d}{y} = 1 - \frac{d}{y}$$

$$\therefore \quad r = \frac{d}{y} \text{ அல்லது } y = \frac{d}{r} \text{ ஆகும்.}$$

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணைக்கு உரிய திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பு,

$$|\underline{C}| = |\underline{A}|\,d \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வாறே $\{r\,\underline{A}, -r\,\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணைக்கு உரிய திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பும்,

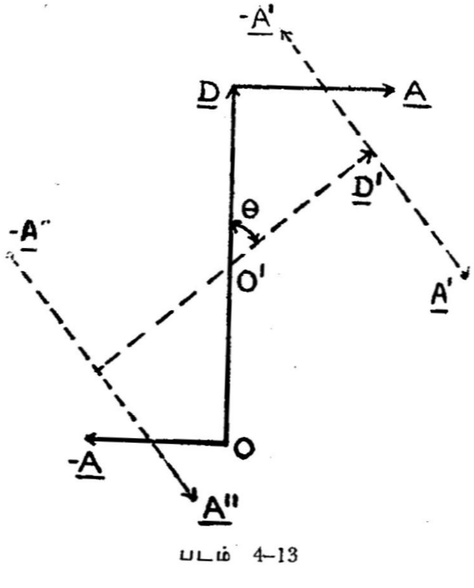
$$r\,|\underline{A}|\,y = r\,|\underline{A}|\,\frac{d}{r}$$
$$= |\underline{A}|\,d$$
$$= |\underline{C}| \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, d தொலைவில் செயற்படும் $\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற இரட்டையும், $y = \frac{r}{d}$ தொலைவில் செயற்படும் $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணையும் ஒன்றுக்கொன்று சரிநிகராகும். இங்கு இரு வித சுழலிணைப்புத் திறன்களின் எண் மதிப்புக்கள் $|\underline{A}|\,d$ என்று வருகின்றன. மேலும் இங்கு விசையின் எண் மதிப்பைக் குறைத்து, தொலைவை அதிகரித்து, அடிப்படை சுழலிணைக்குச் சரிநிகரான மற்றொரு $\{r\underline{A}, -r\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணை வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

அவ்வாறே விசைகளின் எண்மதிப்பை அதிகரித்தும், தொலைவை ஏற்றவாறு குறைத்தும், அடிப்படை சுழலிணைக்குச் சமமான மற்றொரு சுழலிணையையும் வரையறுக்க முடியும்.

சுழலிணை ஒன்றை அதன் திருப்புத் திறன் திசையியிக்கு இணையாக அமையும் ஓர் அச்சில் சுழலும்படிச் செய்து, அதன் விளைவாகக் கிடைக்கும் சுழலிணை மேற்கொண்ட சுழலிணைக்குச் சரிநிகராக அமையுமென்பதையும் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணையை முன்போலவே படம் 4-13ல்



படம் 4–13

காட்டியதுபோல், d தொலேவில் அமையுமாறு எடுக்கவும். $\underline{A}$யின் எண் மதிப்பை a எனக் கொள்ளவும். $(-\underline{A})$ என்ற விசை செயற்படும் கோட்டில், O என்ற புள்ளியை எடுத்து $\underline{A}$ என்ற விசைக்குச் செங்குத்தாக OD என்ற கோட்டை வரையவும்.

$\underline{P}$யின் நிலேத் திசையியை $\underline{OP} = \underline{D}$ எனக் கொள்ளவும். O′ என்பது OPயின் மையப் புள்ளியைக் குறிக்கட்டும்.

$\{\underline{A}, -\underline{A}\}$ என்ற சுழலிணே அமையும் தளத்தில் OPஐ, O′ என்ற புள்ளியில், θ° அளவுக்குச் சுழற்றவும். அப்போது, $\underline{D}'$ என்ற திசையி, $\underline{D}$யின் நகல்போன்று அமையும். $\underline{D}$யின் முனேப் புள்ளிகளில் முறையே $(\underline{A}', -\underline{A}')$, $(\underline{A}'', -\underline{A}'')$ என்ற திசையிகளே $\underline{D}'$ என்ற திசையி செயற்படும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், அவைகளின் எண் மதிப்புக்கள் aக்குச் சமமாக இருக்குமாறும் படம் 4-13ல் காட்டியவாறு எடுக்கவும்.

$[(\underline{A}', -\underline{A}'), (\underline{A}'', -\underline{A}'')]$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் சுழி யாவதால்,

$\{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{(\underline{A}, -\underline{A}) ; (\underline{A}', -\underline{A}') ; (\underline{A}'', -\underline{A}'')\}$ ஆகும்

ஆனல் $(\underline{A}, -\underline{A}')$; $(\underline{A}'', -\underline{A})$ ஆகியவற்றின் தொகுபயன் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் எதிராக, ஒரே நேர்கோட்டில் செயற்படுவதால்,

$[(\underline{A}', \underline{A}) ; (-\underline{A}, \underline{A}'')] \equiv \underline{0}$ ஆகும்.

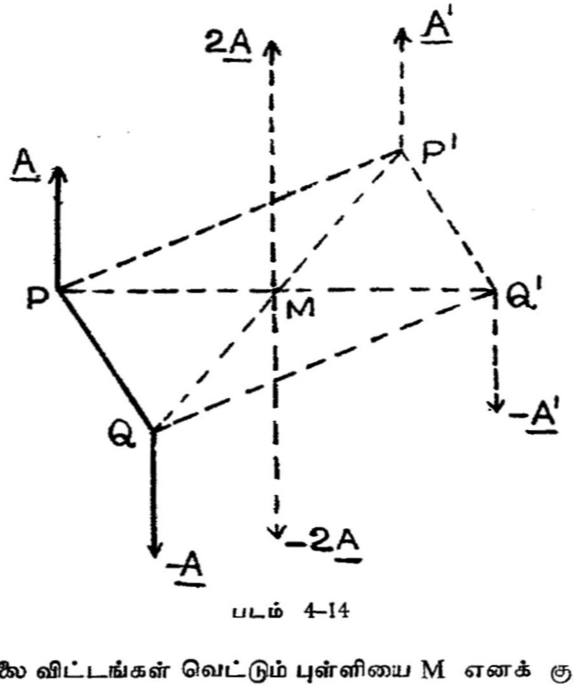
எனவே மீதமுள்ள விசைகள்

$\{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{\underline{A}', -\underline{A}''\}$ ஆகும்.

ஆதலால் சுழலிணேயில் அமையும் விசைகளே அவற்றின் தளத்திலேயே சுழற்றிடுவதால் சுழலிணேப்புத் திறன் பாதிக்கப் படுவதில்லே என்ருகிறது.

இறுதியாக $\{\underline{A}, -\underline{A}\}, \{\underline{A}', -\underline{A}'\}$ என்ற இரு சுழலிணைகள் ஒரே போகாகவும் $|\underline{A}| = |\underline{A}'| = a$ என்றும், ஒவ்வொரு சுழலிணையின் விசைகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவு d அளவு இருப்பதாகவும் இட அமைப்பில் மட்டும் வேறுபாடுடையதாகவும் படம் 4–14ல் காட்டியபடி அமையட்டும்.

படத்தில், $\underline{P}, Q, P', Q'$ என்பவை $\underline{A}, -\underline{A}, \underline{A}' -\underline{A}'$ ஆகிய விசைகள் செயற்படும் புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. இங்கு $\underline{D} = \underline{D}'$ என்றுவதால், PQQ'P' என்பது ஓர் இணைகரமாகும்.



படம் 4–14

மூலை விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியை M எனக் குறிக்கவும்.

∴ PM = MQ' ; QM = MP' ஆகும். M என்ற புள்ளியில், $2\underline{A}, -2\underline{A}$ என்ற விசைகளை $\underline{A}$க்கு இணையாக அமையுமாறு எடுக்கவும். அப்பொழுது,

($\underline{A}$ விசை $\underline{P}$ல்) + ($-2\underline{A}$ விசை Mல்) ≡ ($-\underline{A}'$ விசை Q'ல்) என்றும்,

($-\underline{A}$ விசை Qல்) + ($2\underline{A}$ விசை Mல்) ≡ ($\underline{A}'$ விசை P′ல்) என்றும் ஆவதால்,

$$\{\underline{A}, -\underline{A}\} \equiv \{(\underline{A}, -\underline{A}), (2\underline{A}, -2\underline{A})\}$$

$$\equiv \{(\underline{A}, -2\underline{A}), (-\underline{A}, 2\underline{A})\}$$

$$\equiv \{-\underline{A}', \underline{A}'\}$$

$$\equiv \{A', -A'\} \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால், சுழலிணைகள் இடம் பெயர்வதால் பாதிக்கப் படுவதில்லை என்ருகிறது.

எனவே சுழலிணையை வரையறுக்கும் விசைகள் அவற்றிற்கு இடையிலமையும் தொலைவு ஆகியவற்றை மிகுதிப்படுத்துவது அல்லது குறைப்பது, சுழலிணையைச் சுழற்றுவது, இடம் பெயர்த்தல் ஆகிய செயல்களைப் பயன்படுத்தித் திருப்புத் திறன்கள் சமமாயுள்ள இரு சுழலிணைகள் சரிநிகரானவை என நிரூபிக்கலாம்.

4—7. சுழலிணைகளின் தொகுப்பு (Addition of couples):

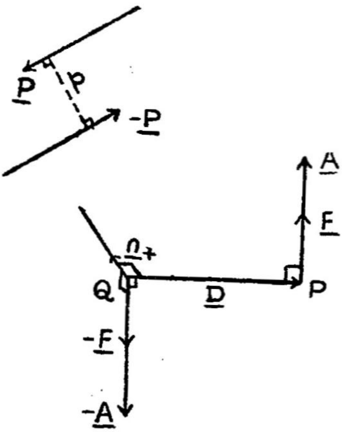
4—7. (1) ஒரே தளத்திலமையும் இரு சுழலிணைகளின் தொகுபயனைக் காணுதல் :

$(\underline{A}, -\underline{A}), (\underline{P}, -\underline{P})$ என்ற இரு சுழலிணைகள் படம் 4-15ல் காட்டியவாறு ஒரே தளத்திலமைவதாகக் கொள்க. d, p என்பவை சுழலிணை விசைகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவைக் குறிக்கட்டும். $\underline{n}_+$ என்பது தளத்தின் மேல் நோக்கிய செங்குத்துத் திசையை அறிவிக்கும் ஓரலகுத் திசையாகும். $\underline{C}_1, \underline{C}_2$ என்பவை சுழலிணைகளின் திருப்புத் திறன்களைக் குறிப்பதாயின்,

$$\underline{C}_1 \equiv (\underline{A}, -\underline{A}) = |\underline{A}|\, d\, \underline{n}_+$$

$$\underline{C}_2 \equiv (\underline{P}, -\underline{P}) = |\underline{P}|\, p\, \underline{n}_+ \text{ ஆகும்.}$$

சுழலிணை $(\underline{P}, -\underline{P})$ என்பதை $(\underline{A}, -\underline{A})$ என்னும் விசைகளோடு ஒரே செயற்படும் கோடுகளையுடைய கூறுகள் கொண்டதாயும், சுழலிணை $(\underline{P}, -\underline{P})$ க்குச் சம திருப்புத் திறனுடையதாயுமுள்ள ஒரு சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்க.



படம் 4–15

இச் சுழலிணையினுடைய விசைகள் ஒவ்வொன்றும் $\underline{F}$ ஆனால்

$$\underline{P} \cdot p \cdot \underline{n_+} = F \cdot d\, \underline{n_+}$$

அல்லது $F = \dfrac{P \cdot p}{d}$ ஆகும்.

எனவே

$$\underline{C_2} = \underline{P} \cdot p\ \underline{n_+}$$

$$= Fd\, \underline{n_+}$$

$$\therefore (\underline{C_2} \wedge \underline{D}) = Fd\, \underline{n_+} \wedge \underline{D}$$

$$= Fd\, (\underline{n_+} \wedge \underline{D})$$

$Fd\,(l \cdot d)\, \underline{a}$ ($\underline{a}$ என்பது $\underline{A}$ என்ற விசை செயற்படும் கோட்டில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$= F\, \underline{a}\, (d^2)$$

$$= F\, \underline{a}\, (\underline{D} \cdot \underline{D})$$

$$= \underline{F}\, (\underline{D} \cdot \underline{D})$$

$$\therefore \underline{F} = \frac{(\underline{C_2} \wedge \underline{D})}{(\underline{D} \cdot \underline{D})}$$

எனவே $\{(\underline{P}, -\underline{P}); p\}$ என்ற சுழலிணைக்குச் சரிநிகரான $\{(\underline{F}, -\underline{F}); d\}$ என்ற சுழலிணையின் விசையை வரையறுக்க முடிகிறது.

$$\therefore\ \underline{C_1} + \underline{C_2} = (\underline{A}, -\underline{A}) + (\underline{P}, -\underline{P})$$

$$= (\underline{A}, -\underline{A}) + \mathrm{Pp}\,\underline{n_+}$$

$$= (\underline{A}, -\underline{A}) + \mathrm{Fd}\,\underline{n_+}$$

$$= (\underline{A}, -\underline{A}) + (\underline{F}, -\underline{F})$$

$$\{(\underline{A} + \underline{F}), -(\underline{A} + \underline{F})\}$$

ஆகவே ஒரு தளத்தில் அமையும் $(\underline{A}, -\underline{A})$, $(\underline{P}, -\underline{P})$ என்ற இரு சுழலிணைகளும், விசைகள் ஒவ்வொன்றும் $\left(A + \frac{Pp}{d}\right)$க்குச் சமனாய் d அளவுடைய செங்குத்துத் தொலைவிலே செயற்படுகின்ற ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும். இச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்

$$= \left(A + \frac{Pp}{d}\right) d\,\underline{n_+}$$

$$= \mathrm{Ad}\,\underline{n_+} + \mathrm{P\,p}\,\underline{n_+}$$

$$= \underline{C_1} + \underline{C_2}$$ ஆகும்.

மேலும் ஒரு இறுக்கப் பொருளில் செயற்படுகின்ற ஒரு தளத்துச் சுழலிணைகள் எத் தொகையதாயினும் அச் சுழலிணைகளெல்லாம் அவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமான திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ஒரே ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

$\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}$, $\{(\underline{P_2}, -\underline{P_2}); p_2\}$......$\{(\underline{P_n}, -\underline{P_n}); p_n\}$ என்ற n சுழலிணைகள் ஒரே தளத்திலமைவதாகக் கொள்க. அவற்றின் தொகுபயனைக் காண $\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}$ என்ற

சுழலிணையை அடிப்படையாகக் கொண்டு மற்ற சுழலிணைகளுக்கு உகந்த சரிநிகரான சுழலிணைகளை $\{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\}$ என்ற சுழலிணை செயற்படும் கோடுகளில் வரையறுத்து அவைகளை முறையே $\{(\underline{F_2}, -\underline{F_2}), p_1\}$ ...... $\{(\underline{F_n}, -\underline{F_n}); p_1\}$ எனக் குறிக்கவும்.

ஆகவே எல்லாச் சுழலிணைகளின் தொகுபயன் சுழலிணைப்புத் திறன்

$$\underline{C_R} = \underline{C_1} + \underline{C_2} + \dots + \underline{C_n}$$

$$= \{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\} + \{(\underline{P_2}, -\underline{P_2}), p_2\} + \dots + \{(\underline{P_n}, -\underline{P_n}); p_n\}$$

$$= \{(\underline{P_1}, -\underline{P_1}); p_1\} + \{(\underline{F_2}, -\underline{F_2}); p_1\} + \dots + \{(\underline{F_n}, -\underline{F_n}); p_1\}$$

$$= \{(\underline{P_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_n}), -(\underline{P_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_n}); p_1\}$$

ஆகும்.

இங்கு $\underline{F_i} = \dfrac{\underline{C_i} \wedge \underline{D_1}}{(\underline{D_1} \cdot \underline{D_1})}$, $i = 2, 3, \dots n$ ஆகும்.

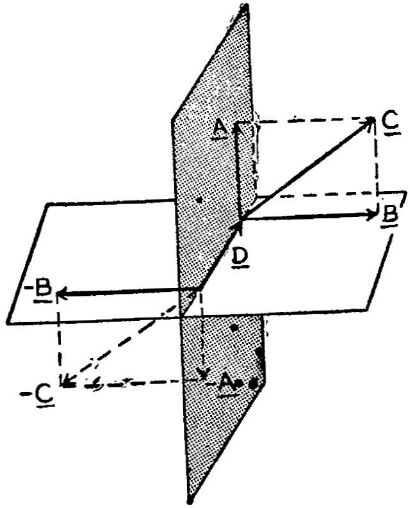
ஆதலால் கொடுத்த சுழலிணைகளெல்லாம் தம் சுழல் திறன்களின் இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமான திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரே ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

சுழலிணைகளெல்லாவற்றிற்கும் ஒரே குறி (same sign) இல்லையாயின் ஒவ்வொரு சுழலிணைப்புத் திறனுக்கு உரிய குறியை இட்டு மேலே கொடுக்கப்பட்ட நிரூபணத்தையே பயன்படுத்தலாம்.

4—7. (2) இணையற்ற திருப்புத் திறன் திசையிகளை வரையறுக்கும் இரு சுழலிணைகளின் தொகுபயனைக் காணுதல் :

இங்கு சுழலிணைகள் ஒவ்வொன்றையும் வரையறுக்கும் விசைகள் வெவ்வேறான தளங்களில் செயற்படுகின்றன. தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் நேர்கோட்டில் படம் 4–16ல் காட்டியவாறு,

$\underline{D}$ என்ற தொடர்புபடுத்தும் நிலைத் திசையியை அமைக்கவும். மேற்கொண்ட சுழலிணைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சரிநிகராகவும், $\underline{D}$ என்ற திசையியைத் தொடர்புபடுத்தும் நிலைத் திசையியாகக் கொண்ட சுழலிணையை ஒவ்வொரு தளத்திலும் வரையறுத்து அவைகளை $\{\underline{A}, -\underline{A}\}$; $\{\underline{B}, -\underline{B}\}$ எனக் கொள்க. $\underline{A}$, $\underline{B}$ என்பவை ஒரு புள்ளியில் செயல்படுவதால் அவற்றின் தொகு பயன் விசை $\underline{C}$ ஐ இணைகர விதிப்படி அப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் எண் மதிப்பிலும், திசையிலும் வரையறுக்கிறது.



படம் 4–16

அவ்வாறே, $(-\underline{A}, -\underline{B})$ ஆகியவற்றின் தொகு பயன் விசை $(-\underline{C})$யும் வரையறுக்கப்படும். ஆதலால் $\{\underline{C}, -\underline{C}\}$ என்ற சுழலிணை, மேற்கொண்ட இரு சுழலிணைகளின் சரிநிகரான தொகுபயனாகும். மேலும் $\underline{C}$ என்ற விசைக்கும் $\underline{D}$ என்ற திசையியே தொடர்புடைய (relative) நிலைத் திசையியாகிறது.

$$\therefore \ \{(\underline{A}, -\underline{A}) ; (\underline{B}, -\underline{B})\} \equiv \{\underline{C}, -\underline{C}\}$$

சுழலிணைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய திருப்புத் திறன் முறையே

$$\underline{C_A} = \underline{D} \wedge \underline{A} ; \quad \underline{C_B} = \underline{D} \wedge \underline{B} ; \quad \underline{C_R} = \underline{D} \wedge \underline{C}$$

என்றாகும்.

ஆனால்

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$$

$$\therefore \ \underline{C_R} = \underline{D} \wedge \underline{C}$$
$$= \underline{D} \wedge (\underline{A} + \underline{B})$$

$$= \underline{D} \wedge \underline{A} + \underline{D} \wedge \underline{B}$$

$$= \underline{C_A} + \underline{C_B}$$

எனவே இரு சுழலிணைகளுக்கு உரிய திருப்புத் திறன் திசையிகளின் கூடுதல் அவற்றின் தொகுபயன் சுழலிணைக்கு உரிய திருப்புத் திறன் திசையியால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பாக, $\underline{C_A}$, $\underline{C_B}$ என்பவை ஒரு போகாக அமையும் போது ஒரு தளத்தை மேற்கொண்டு அத்தளத்தில் $\underline{D}$ என்ற ஏதேனும் தொடர்புப்படுத்தும் நிலைத் திசையியை எடுத்து, தொகுபயன் திருப்புத் திறன் திசையி ($\underline{C_R}$)ஐ வரையறுக்கலாம்.

ஆகவே சுழலிணைகள் அவற்றின் திருப்புத் திறன் திசையிகளால் குறிக்கப்பட்டால், அவற்றைத் திசையிகளைப்போல் கூட்டலாம். அதாவது, $\underline{C_1}$, $\underline{C_2}$,......$\underline{C_n}$ என்ற சுழலிணைப்புத் திறன்கள் எத்தகைய இட அமைப்பைப் பெற்றபோதிலும், அவற்றின் கணத்திற்குச் சமமான ஓர் சுழலிணைப்புத் திறனை வரையறுக்க முடியும். $\underline{C_R}$ என்பது கணத்திற்குரிய தொகுபயன் சுழலிணைப்புத் திறனைக் குறிக்குமென்றால்,

$\underline{C_R} = \underline{C_1} + \underline{C_2} + \ldots\ldots + \underline{C_n}$ ஆகும்.

4—7.(8) தம் திருப்புத் திறன்கள் சமமாயும் எதிராகவுமுள்ள இரு சுழலிணைகள் ஒரு இறுக்கப் பொருளின் மீது ஒரே தளத்தில் செயல்படுமானல், அவை ஒன்றை ஒன்று சமமாக்கும்:

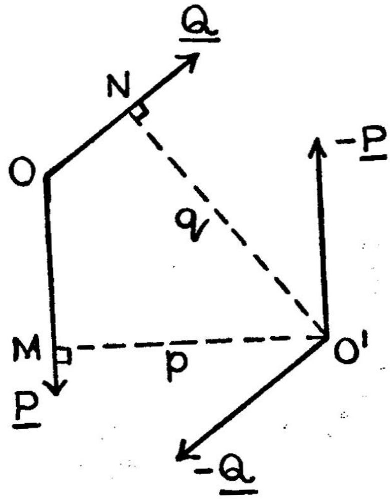
ஒரு சுழலிணை pயைப் புயமாகக் கொண்டு (arm length) அதன் முனைகளிலே ($\underline{P}$, $-\underline{P}$) என்னும் விசைகளைக் கொண்டுள்ள தாகவும், மற்றொரு சுழலிணை q வைப் புயமாகக் கொண்டு, அதன் முனைகளிலே ($\underline{Q}$, $-\underline{Q}$) என்னும் விசைகள் செயல்படுவதாகவும் கொள்க.

வகை 1:

$\underline{P}$ என்னும் விசையும் $\underline{Q}$ என்னும் விசையும் Oவில் சந்திக்கட்டும். அவ்வாறே, ($-\underline{P}$, $-\underline{Q}$) என்பவை O'வில் சந்திக்கட்டும்.

O'விலிருந்து O'M, O'N என்னும் இரு செங்குத்துக் கோடுகளை $\underline{P}$, $\underline{Q}$ என்ற விசைகள் செயல்படும் கோடுகளின்மீது வரைக. இச் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p,q என்பனவாகும். அச் சுழலிணைப்புத் திறன்கள் அளவிற் சமனுகையால் Pp = Qq ஆகும்.

Oவில் செயற்படும் $\underline{P}$, $\underline{Q}$ என்பனவற்றின் தொகுபயன் விசையை $\underline{R}$ எனக் கொண்டால் அதுவும் Oவின் வழியே செயற்படும்.



படம் 4–17

படம் 4-17ல் O' பற்றி $\underline{P}$, $\underline{Q}$ ஆகியவற்றின் திருப்புத் திறன்கள் முறையே $\underline{O'M} \wedge \underline{P}$, $\underline{O'N} \wedge \underline{Q}$ ஆகும்.

$\underline{O'M} \wedge \underline{P}$ என்பது இடஞ்சுழியாகவும் $\underline{O'N} \wedge \underline{Q}$ என்பது வலஞ்சுழியாகவும் செயல் புரிகின்றன. எனவே அவற்றின் இயற்கணிதக் கூட்டுதல்

$$= \underline{O'M} \wedge \underline{P} + \underline{O'N} \wedge \underline{Q}$$

$$= Pp\,\underline{n_+} - Qq\,\underline{n_+}$$

$$= 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆனல் வாரிக்னனின் தேற்றப்படி (Varignon's theorem) O' என்னும் புள்ளி பற்றி,

$$\underline{O'O} \wedge \underline{P} + \underline{O'O} \wedge \underline{Q} = \underline{O'O} \wedge \underline{R} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\underline{O'O} \wedge \underline{R} = (\underline{O'M} + \underline{MO} \wedge \underline{P}) + (\underline{O'N} + \underline{NO}) \wedge \underline{Q}$

$$= (\underline{O'M} \wedge \underline{P}) + (\underline{O'N} \wedge \underline{Q}) + (\underline{MO} \wedge \underline{P}) + (\underline{NO} \wedge \underline{Q}$$

$$= \underline{P}p\,\underline{n_+} - Qq\,\underline{n_+} + 0 + 0$$

$$= 0$$

$\underline{R} \neq 0$ என்பதால் O′ என்பது $\underline{R}$ செயல்படும் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். அதாவது OO′ என்பது தொகுபயன் $\underline{R}$ன் செயல்படும் திசையாகும். அதுபோலவே O′வில் உள்ள $-\underline{P}$, $-\underline{Q}$ என்பனவற்றின் தொகுபயன் விசை $-\underline{R}$ ஆகும். அதுவும் O′O என்னும் திசையில் இருக்கும். ஆதலால் இத் தொகுபயன் விசைகள் ஒன்றை ஒன்று அழிக்கும். ஆகவே, இவ்விரு சுழலிணைகளை ஆக்கும் நான்கு விசைகளும் சம நிலையில் இருக்கும்.

வகை 2:

அச் சுழலிணைகளை வரையறுக்கும் விசைகள் இணையாக இருக்கட்டும்.

அவற்றினுடைய திசைகளுக்குச் செங்குத்தாக வரையும் யாதேனுமொரு நேர்கோடு அவற்றைப் படம் 4-18ல் காட்டியபடி A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

சுழலிணைப்புத் திறன்கள் அளவிற் சமனுகையால்

$\underline{P} \cdot AB = Q \cdot CD$

Cயிலுள்ள $\underline{Q}$, Bயிலுள்ள $\underline{P}$ ஆகிய இணை விசைகளின் தொகுபயன் செயல்படும் புள்ளியை L எனக் கொள்க.

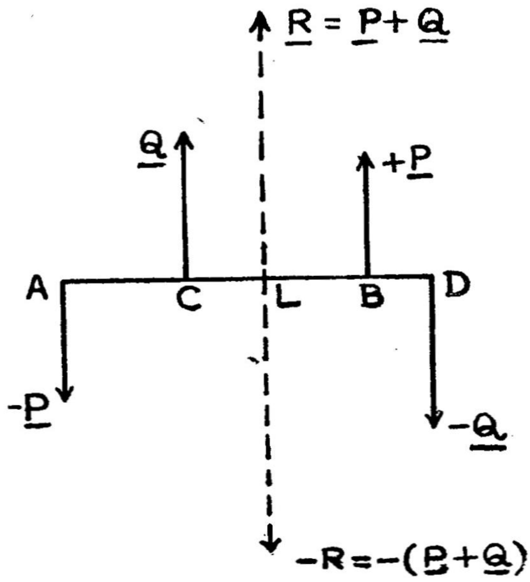
ஆதலால் $\underline{P} \cdot LB = Q \cdot CL$

எனவே

$$P\,(AB - LB) = Q\,(CD - CL)$$

$$\therefore\quad P \cdot AL = Q \cdot LD$$

அதாவது L என்பது Aயிலுள்ள (— P) என்ற விசைக்கும் Dயிலுள்ள (— Q) என்ற இணை விசைக்கும் உள்ள தொகுபயன் விசையின் செயல்படும் புள்ளியாகும்.



படம் 4–18

ஆனால் இத் தொகுபயன் விசைகள் முறையே (P + Q), —(P + Q) என்ருவதால், அவைகள் ஒன்றை ஒன்று அழிக்கும்.

ஆகவே, இவ்விரு சுழலிணைகளை ஆக்கும் நான்கு விசைகளும் சம நிலையிலிருக்கும்.

மேலும் ஒரே தளத்தில் சமமாயும் எதிராகவுமுள்ள திருப்புத் திறன்களைப் பெற்ற இரு சுழலிணைகள் சமன்படுத்துவதால் அச் சுழலிணைகளுள் ஒன்றின் விசைத் திசைகளை நேர்மாருக அமைக்கும்போது,

“ஒரே தளத்தில் சம திருப்புத் திறன்களைப் பெற்ற எவையேனும் இரு சுழலிணைகள் சமம்” என்பது பெறப்படும்.

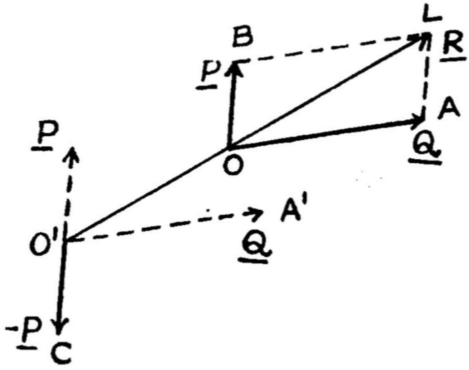
அன்றியும், சம திருப்புத் திறன்களைப் பெற்றுள்ள இரண்டு ஒத்த சுழலிணைகள் இரு மடங்கு திருப்புத் திறனைப் பெற்றுள்ள ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம் என்பதும் பெறப்படும்.

4—7. (4) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரே தளத்திலே செயல்படுகின்ற ஒரு தனி விசையும் ஒரு சுழலிணையுஞ் சேர்ந்து சம நிலையை ஏற்படுத்த முடியாது. ஆனால் அவை முந்திய திசைக்கு இணையான திசையிலே செயல்படுகின்ற ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகும்.

ஒரு தளத்தில் செயல்படும் தனி விசை, சுழலிணை ஆகியவற்றை முறையே $\underline{Q}$, $(\underline{P}, -\underline{P})$ எனக் கொள்க. சுழலிணையை வரையறுக்கும் விசைகள் OB, O′C என்ற கோடுகளில் செயல்படுவதாகக் கொள்க.

வகை 1:

$\underline{Q}$ என்பது சுழலிணை விசைகளுக்கு இணையில்லாவிடின் அது அவற்றுள் ஒன்றை படம் 4-19ல் காட்டியபடி Oவில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. அப்பொழுது Oவில் செயற்படுகின்ற $\underline{P}$, $\underline{Q}$ என்னும் விசைகளின் தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ என்றால் அதன் செயல்படும் கோடு OA, OBக்கு இடையே அமைய வேண்டும். அதை OL எனக் கொள்க.



படம் 4–19

OL என்பது சுழலிணையின் மற்றைய விசையை O′ என்னும் புள்ளியில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. R என்ற தொகுபயன் விசையின் செயற்படும் புள்ளியை O′க்குக் கொண்டு செல்க.

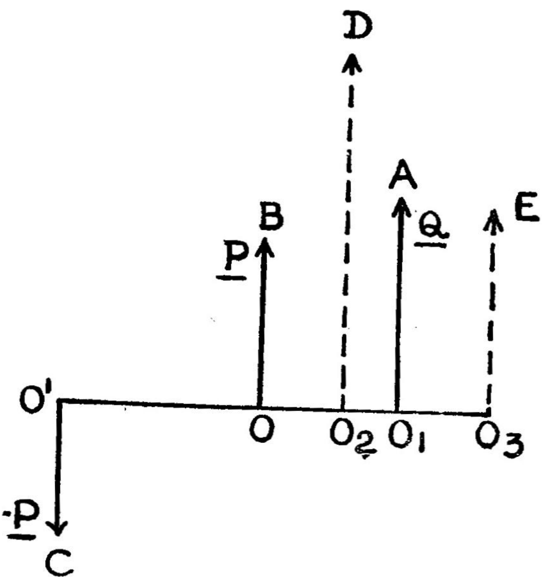
O′A′ என்ற நேர்கோட்டை OAக்கு இணையாக வரைக. இப்பொழுது R என்ற விசையை, OAக்கு இணையான O′A′ என்ற நேர்கோட்டில் செயற்படும் Q என்னும் விசையாகவும், O′Cக்கு எதிர்த் திசையில் செயற்படும் P என்னும் விசையாகவும் பிரிக்கலாம்.

P என்னும் பின்னதாகிய (latter) இவ்விசை, O′C திசையில் செயற்படுகின்ற சுழலிணையின் இரண்டாம் விசை (— P)யினுலே சமமாக்கப்படுகின்றது.

எனவே இறுதியாக OAவிற்கு இணையாயுள்ள O′A′ என்னும் திசையிலே செயற்படுகின்ற Q என்னும் விசையே அத் தொகுதியின் விளைவாக அமைகிறது.

வகை 2 :

விசை Q ஆனது அச்சுழலிணையின் விசைகளுக்கு இணையாக அமையட்டும்.



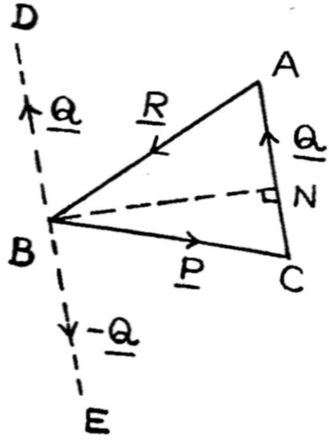
படம் 4-20

O'O என்பது Q என்னும் விசையை O_1இல் சந்திக்கட்டும். Oவிலுள்ள P, O_1லுள்ள Q என்னும் ஒத்த இணைவிசைகளின் தொகுபயன் (P + Q) என்ற ஒரு விசைக்குச் சமன். இது OO_1 என்ற கோட்டிற்கு இடையே, $\frac{OO_2}{O_2O_1} = \frac{Q}{P}$ என்ற விகிதத்தால் வரையறுக்கப்படும் O_2 என்ற புள்ளியில் OB என்னும் திசைக்கு இணையாகச் செயல்படும்.

எனவே O_2லுள்ள (P + Q), O'லுள்ள (− P) என்ற இணை விசைகளின் தொகுபயன் விசை (P + Q) − P = Qவிற்குச் சமனாய், O_1 O_2 என்னும் கோட்டை வெளியே $\frac{O_1 O_3}{O_1 O_2} = \frac{P + Q}{P}$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் O_3 என்னும் புள்ளியில் O_2 D திசைக்கு இணையாக படம் 4-20ல் காட்டியபடி O_3 E என்னும் நேர்கோட்டில் செயற்படும்.

ஆகவே, அத்தொகுதியின் தொகுபயன், முந்தியதாகத் தரப் பட்ட விசைக்கு இணையான திசையிலே செயற்படுகின்ற Q என்னும் தனி விசைக்குச் சமனாகும்.

4—7. (5) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படும் கோடு— ஆகியவை ஒரொழுங்கிலே எடுத்த ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் குறிக்கப்பட்டால், அவை அம் முக்கோணப் பரப்பின் இரு மடங்கால் குறிக்கப்படும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.



படம் 4–21

BC, CA, AB என்ற ஒரொழுங்கிலே எடுத்த A BC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் P, Q, R என்ற விசைகளைக் குறிக்கட்டும்.

Bயின் வழியாக, ACக்கு இணையாக DBE என்ற கோட்டை வரைக. Bயில் Qக்குச் சமனன இரு சமவெதிர் விசைகளை BD, BE என்னுந் திசைகளில் செயற்படுமாறு அமைக்க.

விசை முக்கோணத்தின்படி BDயின் நீளவாட்டில் செயற்படும் விசை Q, Bயில் செயற்படும் விசைகள் P, R ஆகியவை சம நிலையில் இருக்கும். ஆகவே ஒவ்வொன்றும் Qக்குச் சமனய் முறையே CA, BE என்ற திசைகளில் செயற்படுவதாகவும் உள்ள இரு விசைகளே இறுதியாக இருக்கும்.

படம் 4-21ல் காட்டியவாறு Bயிலிருந்து ACக்கு BN என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைக.

இவ் விசைகள் Q·BN என்பதைத் தனது திருப்புத் திறனுகவுள்ள ஒரு சுழலிணையை உண்டாக்கும்.

மேலும் Q·BN = AC·BN

= $2 \times \frac{1}{2}$ AC·BN

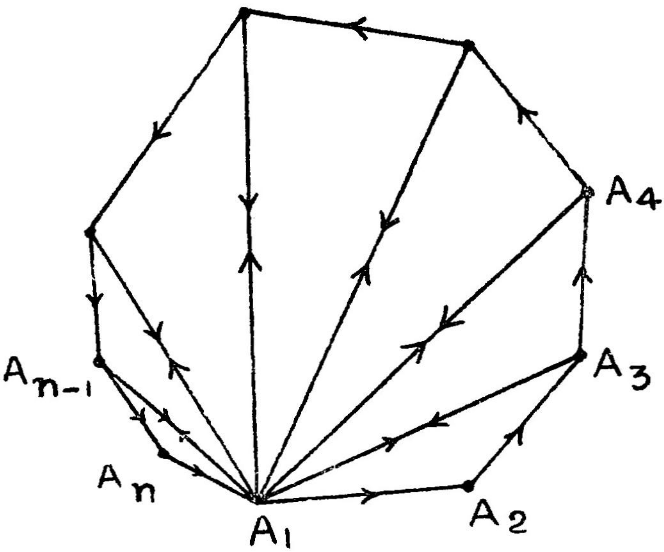
= முக்கோணம் ABCயின் பரப்பின் இரு மடங்கு.

இவ்வித முடிவு எத்தொகை விசைகளுக்கும் ஏற்றதாகும்.

4—7. (6) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற ஒரு தளத்து விசைக் கணமொன்று, எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படும் கோடு ஆகியவை ஒழுங்கிலே எடுத்த ஒரு பல்கோணத்தின் பக்கங்களால் குறிக்கப்பட்டால் அவை அப் பல்கோணப் பரப்பின் இரு மடங்கால் குறிக்கப்படும் திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ஒரு சுழலிணைக்குச்சமமாகும்.

படம் 4-22ல் காட்டியுள்ள $A_1 A_2 \dots A_n$ என்னும் பல்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_{n-1} A_n$ என்பவை தள விசைக் கணத்திலடங்கிய F_1, F_2 .... F_n என்னும் விசைகளை எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படும் கோடு ஆகியவற்றில் குறிக்கட்டும். $A_1 A_3$, $A_1 A_4$,.... $A_1 A_{n-1}$ என்பனவற்றினூடாக அவற்ருல் முற்றிலும் குறிக்கப்பட்ட சமனுமெதிருமான விசைகளை உள்ளிடுக.

அப்பொழுது $A_1 A_2 A_3$ என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ என்பவற்ருல் குறிக்கப்பட்டும்,



படம் 4–22

அப் பக்கங்களையே செயற்படும் கோடுகளாகவும் கொண்ட விசைகள் $2\triangle A_1 A_2 A_3$ என்ற பரப்பளவை எண் மதிப்பாகக் கொண்ட திருப்புத் திறனை உடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

அவ்வாறே $\triangle A_1 A_3 A_4$, $\triangle A_1 A_4 A_5$,.... $\triangle A_1 A_{n-1} A_n$ என்ற முக்கோணங்களின் பக்கங்களால் எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படும் கோடு ஆகியவற்றைப் பற்றிக் குறிக்கப்படும் விசைகள் முறையே

$2\triangle A_1 A_3 A_4$, $2\triangle A_1 A_4 A_5$ · .... $2\triangle A_1 A_{n-1} A_n$ என்று குறிக்கப்படுந் திருப்புத் திறன்களையுடைய சுழலிணைகளுக்குச் சமமாகும். இந்த $(n - 2)$ சுழலிணைகளையும் ஒரே சுழலிணைக்குச் சமமாக உள்ளதாகவும் கருதலாம். அத் தனிச் சுழலிணைப்புத் திறன் அந்த $(n - 2)$ சுழலிணைப்புத் திறன்களின் இயற் கணிதக் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே அத் தனிச் சுழலிணைப்புத் திறன், மேற்கொண்ட பல்கோணம் $A_1 A_2$, ...A_nஇன் பரப்பின் இரு மடங்கிற்குச் சமம்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 4—1. O வைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்ட ஆயத் தொலை (coordinate system), $\underline{F} = (10\,\underline{i} + 6\,\underline{j} - 6\,\underline{k})$ கி.கி. உள்ள விசை ஒன்று (10, 3, 4) மீ. என்னுமிடத்திலமையும் புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. O பற்றி $\underline{F}$ என்னும் விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

$\underline{F} = 10\,\underline{i} + 6\,\underline{j} - 6\,\underline{k}$. (10, 3, 4) என்பது P என்னும் புள்ளியைக் குறித்தால், $\underline{r} = \underline{OP} = 10\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$ ஆகும்.

$$\therefore \underline{M_o} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 3 & 4 \\ 10 & 6 & -6 \end{vmatrix} = (-42\,\underline{i} + 100\,\underline{j} + 30\,\underline{k})$$

மீ.கி.கி.

மாதிரி 4—2. முந்திய மாதிரிக் கணக்கில் (அதாவது மாதிரி 4-1ல்) எடுத்த $\underline{F}$ என்னும் விசையின் திருப்புத் திறனை Q (6, −4, −3) மீ. என்னும் புள்ளி பற்றிக் காண்க.

$$\underline{QP} = \underline{OP} - \underline{OQ}$$

$$= \underline{r_1} - \underline{r_2}$$

$$= (10\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 4\,\underline{k}) - (6\,\underline{i} - 4\,\underline{j} - 3\,\underline{k})$$

$$= 4\,\underline{i} + 7\,\underline{j} + 7\,\underline{k}$$

$$\therefore \underline{M_Q} = \underline{QP} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 7 & 7 \\ 10 & 6 & -6 \end{vmatrix} = (-84\,\underline{i} + 94\,\underline{j} - 46\,\underline{k})$$ மீ.கி.கி.

மாதிரி 4—8. $\underline{F} = (200\,\underline{i} + 100\,\underline{j} + 500\,\underline{k})$ கி.கி. என்னும் விசை ஒன்று P (8, 9, 4) மீ என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. $\left(\frac{6}{19}, -\frac{6}{19}, -\frac{17}{19}\right)$ என்பனவற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகவும், Q (−5, 3, 2) மீ. என்னும் புள்ளி வழியே செல்லும் நேர் கோடு பற்றி $\underline{F}$ன் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

$\underline{r}$ என்பது Q (−5, 3, 2) மீ. என்னும் புள்ளியை P (8, 9, 4) மீ. என்னும் புள்ளியுடன் இணைக்கும் திசையியைக் குறிக்குமெனில்,

$$\underline{r} = \underline{QP} = \underline{OP} - \underline{OQ}$$

$$= (8\,\underline{i} + 9\,\underline{j} + 4\,\underline{k}) - (-5\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 2\,\underline{k})$$

$$= (13\,\underline{i} + 6\,\underline{j} + 2\,\underline{k}) \text{ மீ.}$$

$$\underline{F} = (200\underline{i} + 100\underline{j} + 500\underline{k}) \text{ கி.கி.}$$

$\therefore\ \underline{M_Q}$ = Q பற்றி $\underline{F}$ன் திருப்புத் திறன்

$$= \underline{QP} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 13 & 6 & 2 \\ 200 & 100 & 500 \end{vmatrix}$$

Q வழியே $\left(\frac{6}{19}, -\frac{6}{19}, -\frac{17}{19}\right)$ என்னும் திசைக் கிடக்கைகளையுடைய நேர்கோட்டை QL எனக் கொண்டால் QL திசையில் ஓரலகுத் திசையியை

$\underline{n} = \frac{6}{19}\,\underline{i} - \frac{6}{19}\,\underline{j} + \frac{17}{19}\,\underline{k}$ என்பது வரையறுக்கும். எனவே

M_{QL} = QL என்னும் நேர்கோடு பற்றி $\underline{F}$இன் திருப்புத் திறன்

$$= \underline{n} \cdot (\underline{M_Q})$$

$$= \underline{n} \cdot (\underline{r} \wedge F)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{6}{19} & -\frac{6}{19} & \frac{17}{19} \\ 13 & 6 & 2 \\ 200 & 100 & 500 \end{vmatrix}$$

= 2900 மீ.கி.கி.

மாதிரி 4—4. F = $(20\underline{i} + 5\underline{j} + 10\underline{k})$ கி. கி. என்னும் விசை P(0, −4, 3) மீ. என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. அவ்விசையின் திருப்புத் திறனை Q (−7, −2, −4) மீ, L(1, −2, 2) மீ. என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் நேர் கோடு பற்றிக் காண்க.

$\underline{r}$ என்பது $\underline{QP}$யின் திசையியைக் குறிப்பதாகில்

$$\underline{r} = \underline{QP} = \underline{OP} - \underline{OQ}$$

$$= (0\underline{i} - 4\underline{j} + 3\underline{k}) - (-7\underline{i} - 2\underline{j} - 4\underline{k})$$

$$= (7\underline{i} - 2\underline{j} + 7\underline{k}) \text{ மீ.}$$

$$\underline{F} = (20\underline{i} + 5\underline{j} + 10\underline{k}) \text{ கி. கி.}$$

$$\therefore \underline{M_Q} = \underline{QP} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 7 & -2 & 7 \\ 20 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\underline{QL} = \underline{OL} - \underline{OQ}$$

$$= (\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}) - (-7i - 2j - 4k)$$

$$= 8\underline{i} + 0\underline{j} + 6\underline{k}$$

$$= 10 \left\{ \frac{8}{10} \underline{i} + 0 \underline{j} + \frac{6}{10} \underline{k} \right\}$$

$$= 10 \left(\frac{4}{5} \underline{i} + \frac{3}{5} \underline{k} \right)$$

$= 10 \underline{n}$, $\underline{n} = \frac{4}{5} \underline{i} + \frac{3}{5} \underline{k}$ என்பது QL என்னும் நேர் கோட்டில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

எனவே

$$M_{QL} = \underline{n} \cdot \underline{M_Q} = \underline{n} \cdot (\underline{QP} \wedge \underline{F})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 7 & -2 & 7 \\ 20 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1 \text{ மீ. கி. கி.}$$

மாதிரி 4—5. $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்னும் விசைகளின் எண் மதிப்புக்கள் 20, 40 கி.கி. எனவும் அவைகள் செயல்படும் கோடுகளின் திசைக் கிடக்கைகள் முறையே $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விசைகள் P (2, 2, 3) மீ, Q (0, −3, 1) மீ.என்னும் புள்ளிகளின் வழியே செல்வதானல், துவக்கப்புள்ளி பற்றி, விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதலைக் காண்க.

$\underline{\lambda_1}$, $\underline{\lambda_2}$ என்பவை $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்பவை செயற்படும் திசைகளின் ஓரலகுத் திசையிகளைக் குறிக்குமென்ருல்,

$$\underline{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} + \frac{1}{2} \underline{k},$$

$$\underline{\lambda_2} = \frac{3}{5} \underline{i} + \frac{4}{5} \underline{j} + 0 \underline{k}$$

எனவே $\underline{F_1} = F_1 \underline{\lambda_1}$

$$= 20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{2}\,j + \frac{1}{2}\,\underline{k}\right)$$

$$= 10\sqrt{2}\ \underline{i} - 10\underline{j} + 10\ \underline{k}$$ கி. கி.

$$\underline{F_2} = F_2\ \underline{\lambda_2}$$

$$= 40\left(\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j} + 0\ \underline{k}\right)$$

$$= (24\ \underline{i} + 32\ \underline{j})$$ கி. கி.

P (2, 2, 3), Q (0, −3, 1) என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை

$$\underline{r_1} = \underline{OP} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$$

$\underline{r_2} = 0\ \underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$ எனக் கொள்க.

எனவே O பற்றி $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ என்னும் விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்

$$= \underline{r_1} \wedge \underline{F_1} + \underline{r_2} \wedge \underline{F_2}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 10\sqrt{2} & -10 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -3 & 1 \\ 24 & 32 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{50\,i - (20 - 30\sqrt{2})\,\underline{j} - (20 + 20\sqrt{2})\,\underline{k}\}$$

$$+ \{-32\underline{i} + 24\underline{j} + 72\underline{k}\}$$

$$= (18\underline{i} + 46{\cdot}42\underline{j} + 23{\cdot}72\ \underline{k})$$ மீ. கி. கி.

மாதிரி 4—6. $\underline{F} = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 10\underline{k}$ என்னும் விசை, A(0, 2, 3) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது. B (2, −3, 0) என்னும் புள்ளியில் சமனுமெதிருமான $-\underline{F}$ என்னும் விசை செயல்படுகிறது.

அவ் விசைகளின் சுழலிணைப்புத் திறன் யாது? அது செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகளையும் காண்க.

A (0, 2, 3), B (2, − 3, 0) என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ எனக் கொள்க. அப்பொழுது

$$\underline{\Phi} = \underline{BA} = \underline{OA} - \underline{OB}$$

$$= (0\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}) - (2\underline{i} - 3\underline{j} + 0\cdot\underline{k})$$

$$= -2\underline{i} + 5\underline{j} + 3\underline{k}$$

எனவே $\underline{C} = \underline{BA} \wedge \underline{F}$

$$= \underline{\Phi} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 41\underline{i} + 38\underline{j} - 36\underline{k}$$

மாதிரி 4—7. முந்திய கணக்கில் (அதாவது மாதிரி 4-6ல், (i) x அச்சுபற்றி சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் யாது? (ii) விசைகளுக்கு இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு யாது? (iii) அத் தொலைவை 10 அலகுகள் மிகுதியாக இருக்குமாறு எடுத்தால் அதே சுழலிணைப்புத் திறனைப் பெறுவதற்கு உரிய விசை ஒவ்வொன்றின் எண் மதிப்பு யாது?

$$C_{ox} = \underline{C} \cdot \underline{i} = (41\underline{i} + 38\underline{j} - 36\underline{k}) \cdot \underline{i} = 41$$

$(\underline{F}, -\underline{F})$ என்னும் சுழலிணைக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவு d எனக் கொள்க. அப்பொழுது

$|\underline{C}| = |\underline{F}|\, d$ ஆகும்.

$$\{(41)^2 + (38)^2 + (-36)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{(6)^2 + (3)^2 + (10)^2\}^{\frac{1}{2}} d.$$

$d = 5\cdot54$ அலகுகள்.

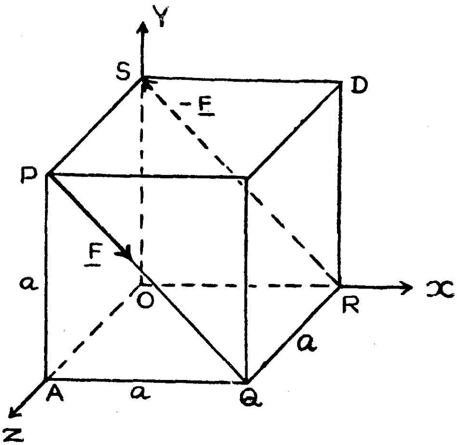
இத் தொலைவை $5\cdot54 + 10 = 15\cdot54$ என மிகுதிப்படுத்த,

$$|\underline{F}_1| \times 15\cdot54 = |\underline{C}|$$

$$F_1 = \frac{66\cdot49}{15\cdot54} = 4\cdot28$$

மாதிரி 4—8. ஒரு கன சதுரத்தின் இரு முகங்களில் சமனுமெதிருமான விசைகள் படம் 4-23ல் காட்டியவாறு செயல் படுகின்றன.

a = 6 செ.மீ. என்றும், $\underline{F}$ = 5 கி.கி. என்றும் எடுக்கும்போது



படம் 4–23

சுழலிணைப்புத் திறன் யாது? AD என்னும் மூலைவிட்டம் பற்றி அச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் யாது?

கன சதுரத்தின் விளிம்புகளான OR, OS, OA என்பவை Ox, Oy, Oz என்னும் அச்சுக்களைக் குறிக்கட்டும். அப்பொழுது A, P, Q, S, D ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவுகள் முறையே (0, 0, a), (0, a, a), (a, 0, a), (0, a, 0), (a, a, 0) ஆகும்.

ஆகவே,

$$\underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP} = (a\underline{i} + a\underline{k}) - (a\underline{j} + a\underline{k}) = a\underline{i} - a\underline{j}$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)$$

$= a\sqrt{2}\,\underline{\lambda_1}$, $\underline{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$ என்பது

$\underline{PQ}$வில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$\therefore\quad \underline{F} = F\,\underline{\lambda_1} = 5\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{5}{\sqrt{2}}\,\underline{j}\right) \text{கி.கி.}$$

$$\underline{SP} = \underline{OP} - \underline{OS} = (a\,\underline{j} + a\,\underline{k}) - a\,\underline{j} = a\,\underline{k}$$

$(\underline{F}, -\underline{F})$ என்னும் சுழலிணைக்கு உரிய திருப்புத் திறன்

$$\underline{C} = \underline{SP} \wedge \underline{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & a \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-5}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{5a}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{5a}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

$$= \frac{5\times 6}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{5\times 6}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

$$\therefore\quad \underline{C} = 15\sqrt{2}\,(\underline{i} + \underline{j}) \text{ செ.மீ. கி.கி.}$$

$$\underline{AD} = \underline{OD} - \underline{OA}$$

$$= (a\,\underline{i} + a\,\underline{j}) - (a\,\underline{k})$$

$$= a\sqrt{3}\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\underline{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\underline{k}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 6\sqrt{3}\left(\frac{\underline{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\underline{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\underline{k}}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3}\ \underline{\lambda_2},\quad \underline{\lambda_2}$$

என்பது $\underline{AD}$யில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

AD என்னும் நேர்கோடு பற்றி சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்

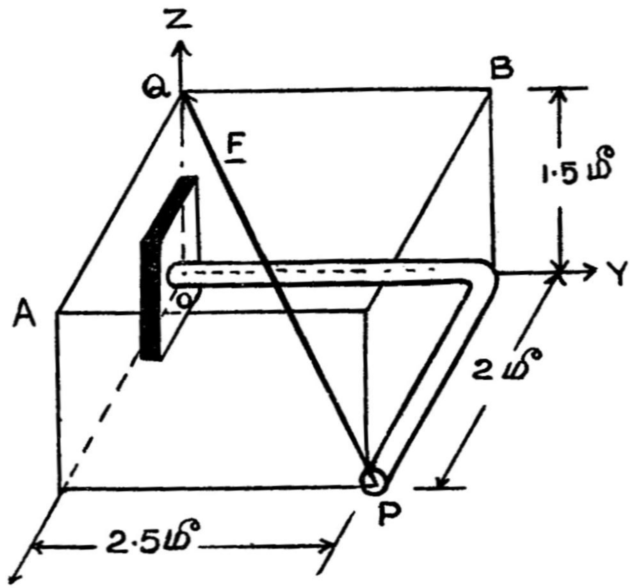
$$= \underline{C} \cdot \underline{\lambda_2}$$

$$= 15\sqrt{2}\,(\underline{i} + \underline{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)$$

$$= 10\sqrt{6}$$

$= 24{\cdot}5$ செ.மீ. கி.கி.

மாதிரி 4—9. ஒரு வளைவு குழாய் நுனி ஒன்றில் படம் 4-24ல் காட்டியவாறு $50\sqrt{2}$ கி.கி. விசையானது செயல்படுகிறது.



படம் 4–24

(a) x, y, z ஆயங்கள்,

(b) A என்னும் புள்ளி,

(c) B என்னும் புள்ளி

ஆகியவை பற்றி, விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

O என்னும் புள்ளிக்கு உரிய சுட்டமைப்பில் P, Q, A, B ஆகிய புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே P (2, 2·5, 0), Q (0, 0, 1·5), A (2, 0, 1·5), B (0, 2·5, 1·5) ஆகும்.

PQ என்ற நேர்கோட்டிலமையும் ஓரலகுத் திசையியை $\underline{\lambda}$ எனக் குறிக்கவும்.

$$\underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

$$= -2\underline{i} - 2{\cdot}5\underline{j} + 1{\cdot}5\underline{k}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5}\underline{i} - \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5}\underline{j} + \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5}\underline{k}\right]$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\underline{\lambda}$$

$$\therefore \quad \underline{\lambda} = + \frac{1}{5\sqrt{2}}\left[-4\,\underline{i} - 5\,\underline{j} + 3\,\underline{k}\right]$$

$\underline{F}$ என்ற விசை PQவில் செயற்படுவதால்

$$\underline{F} = F\,\underline{\lambda}$$

$$= 50\sqrt{2} \times \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(-4\,\underline{i} - 5\,\underline{j} + 3\,\underline{k}\right)$$

$$= -40\,\underline{i} - 50\,\underline{j} + 30\,\underline{k}$$ ஆகும்.

(a) $\underline{F}$ என்ற விசை Qவில் செயற்படுவதாகக் கொண்டு, O என்ற புள்ளிபற்றி அதன் திருப்புத் திறன்

$$\underline{M_o} = \underline{OQ} \wedge \underline{F}$$

$= \frac{5}{2} \underline{k} \wedge (-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k})$

$= -60\underline{j} + 75\underline{i}$

$= (75\underline{i} - 60\underline{j} + 0\underline{k})$ கி.கி. மீட்டர் ஆகும்.

$\therefore M_x = 75$ கி.கி. மீட்டர்; $M_y = -60$ கி.கி. மீட்டர்; $M_z = 0$.

(b) $\underline{M_A} = \underline{AQ} \wedge \underline{F}$

$= -2\underline{i} \wedge (-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k})$

$= 100\underline{k} + 60\underline{j}$

$= (60\underline{j} + 100\underline{k})$ கி.கி. மீட்டர்.

(c) $\underline{M_B} = \underline{BQ} \wedge \underline{F}$

$= (-2{\cdot}5\underline{j}) \wedge (-40\underline{i} - 50\underline{j} + 30\underline{k})$

$= -100\underline{k} - 75\underline{i}$

$= -25(3\underline{i} + 4\underline{k})$

மாதிரி 4—10. XOY தளத்தில் (2, 1) மீ. என்னும் புள்ளியில் $(5\underline{i} + 5\underline{j})$ கி.கி. விசை செயற்படுகிறது. O என்னும் துவக்கப் புள்ளி பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

முதல் வழி :

P என்னும் புள்ளி (2, 1)யைக் குறிப்பதாகில்

$\underline{r} = \underline{OP} = 2\underline{i} + \underline{j}$ ஆகும்.

$\underline{F} = 5\underline{i} + 5\underline{j}$

$\therefore \underline{M_o} = \underline{r} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 5\underline{k}$ ஆகும்.

இரண்டாவது வழி :

விசை $\underline{F}$ செயற்படும் திசையில் $\underline{\lambda}$ என்பது ஓரலகுத் திசையியைக் குறிக்கட்டும்.

$$\therefore \quad \underline{F} = 5\underline{i} + 5\underline{j} = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right)$$

$$= 5\sqrt{2}\,\underline{\lambda}$$

$\underline{F}$ செயற்படும் கோடு x அச்சுடன் θ என்னும் கோணத்தை அமைப்பதாகில்

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{Sin}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

அல்லது $\theta = \frac{\pi}{4}$

எனவே $\underline{F}$ செயற்படும் கோட்டின் சரிவு 1 ஆகும்.

அக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 1 = 1\,(x - 2)$$

அதாவது $x - y - 1 = 0$.

p என்பது Oவிலிருந்து $x - y - 1 = 0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் தொலைவைக் குறிக்குமாறுல்

$$p = -\left(\frac{-1}{\sqrt{1+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \quad |\underline{M_o}| = |\underline{F}|\ p$

$$= 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 5 \text{ கி.கி.மீ.}$$

வலப்புற முறைப்படி (right handed system) $\underline{M_o}$ என்பது $\underline{k}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையியின் போக்கில் செயற்படுகிறது. எனவே

$$\underline{M_o} = 5\underline{k}.$$

மூன்ருவது வழி :

வாரிக்னனின் தேற்றத்தை (Varignon's theorem)ப் பின்பற்றி $5\underline{i}$ கி.கி., $5\underline{j}$ கி.கி. என்ற விசைகள் (2, 1) மீ. என்னும் புள்ளியில் செயற்படுவதால் O என்னும் துவக்கப் புள்ளிபற்றி விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் எண் மதிப்பு

$$|\underline{M_o}| \quad (-)\, 1 \times 5 + (+)\, 2 \times 5$$

$$= 5 \text{ கி.கி. மீ.}$$

இங்கு (+), (−) என்ற குறிகள் இடப்புற வலப்புறச் சுழற்சிகளை முறையே அறிவிக்கின்றன. மேலும் இவைகள் $\underline{k} = \underline{i} \wedge \underline{j}$ என்னும் கருத்துக்கு இணக்கமாக உள்ளன.

ஆகவே $\underline{M_o} = 5\underline{k}$ கி.கி. மீ.

நான்காவது வழி :

வரைபடத் தாளில் தகுந்த அலகுகோலில் நிலைத் திசையி, விசை ஆகியவற்றை வரையறுத்து, அவைகளால் தீர்மானிக்கப்படும் இணைகரத்தின் பரப்பளவை அதிலடங்கிய சதுரக் கட்டங்களின் எண்ணிக்கையால் அறியலாம். அதுவே திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பாகும்.

மாதிரி 4—11. $(12\underline{i} + 4\underline{j} + 3\underline{k})$ கி.கி. விசை ஒன்று (3, 4, 0)மீ. அச்சுத் தொலைவுகளைப் பெற்ற புள்ளியில் செயற்படுகிறது. விசையின் திருப்புத் திறனை (a) துவக்கப் புள்ளிபற்றி

(b) ஆயத்தொலை அச்சுக்கள் பற்றி

(c) (0, 0, 0), (1, 1, 1) என்னும் இடத்திலமையும் புள்ளி களைச் சேர்த்து உண்டாகும் நேர்கோடு பற்றி

(d) (0, 0, 5), (5, 0, 0) என்னும் இடத்திலமையும் புள்ளி களைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு பற்றிக் காண்க.

P என்னும் புள்ளி (3, 4, 0) என்ற இடத்திலமையுமென்றால் அதன் நிலைத் திசையி

$$\underline{r} = \underline{OP} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{F} = 12\underline{i} + 4\underline{j} + 3\underline{k}$$

(a) $\therefore \underline{M_o} = \underline{r} \wedge \underline{F}$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (12\,\underline{i} - 9\,\underline{j} - 36\,\underline{k})$$ மீ. கி. கி.

(b) $M_x = \underline{M_o} \cdot \underline{i} = (12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}) \cdot \underline{i} = 12$ மீ. கி. கி.

$M_y = \underline{M_o} \cdot \underline{j} = (12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}) \cdot \underline{j} = -9$ மீ. கி.கி.

$M_z = \underline{M_o} \cdot \underline{k} = (12\underline{i} - 9\underline{j} - 36\underline{k}) \cdot \underline{k} = -36$ மீ.கி.கி.

(c) (1, 1, 1) என்ற இடத்திலமையும் புள்ளி A என்றால்,

$$\underline{OA} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}\right)$$

$= \sqrt{3}\,\underline{\phi_1}$, $\underline{\phi_1}$ என்பது $\underline{OA}$யில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$\therefore\ M_{OA} = M_o \cdot \underline{\phi_1}$$

$$= (12\,\underline{i} - 9\,\underline{j} - 36\,\underline{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}\right)$$

$$= \frac{12 - 9 - 36}{\sqrt{3}}$$

$$= -11\sqrt{3} \text{ மீ.கி.கி.}$$

(d) B, C என்ற புள்ளிகள் (0, 0, 5), (5, 0, 0) என்னுமிடங்களைக் குறிப்பதாயின்,

$$\underline{OB} = 5\,\underline{k}$$

$$\underline{OP} = 3\,\underline{i} + 4\,\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\therefore \quad \underline{BP} = \underline{OP} - \underline{OB}$$

$$= 3\,\underline{i} + 4\,\underline{j} - 5\,\underline{k}$$

$$\underline{BC} = \underline{OC} - \underline{OB}$$

$$= 5\,\underline{i} - 5\,\underline{k}$$

$$= 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}\right)$$

$= 5\sqrt{2}\ \underline{\Phi_2}$, $\underline{\Phi_2}$ என்பது $\underline{BC}$யில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$\therefore \quad M_{BC} = \underline{M_B} \cdot \underline{\Phi_2}$$

$$= \underline{BP} \wedge \underline{F} \cdot \underline{\Phi_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 12 & 4 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= 34\sqrt{2} \text{ மீ.கி.கி.}$$

பயிற்சி

4—1. XY தளத்தில் மூன்று விசைகள் பின்வருமாறு அமைகின்றன: $10 \angle 30°$, (1, 0) என்னும் புள்ளியில்; $10 \angle -60°$, (0, −2) என்னும் புள்ளியில்; $10 \angle 120°$, (0, −4) என்னும் புள்ளியில். (இங்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட அலகுகள் முறையே நியூட்டன், மீட்டர்கள் ஆகும்.)

(i) துவக்கப் புள்ளி பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களைக் காண்க.

(ii) (3, 0) மீ. என்னுமிடத்திலமையும் புள்ளி பற்றியும் திருப்புத் திறன்களைக் காண்க.

[விடை : (i) $-5\,\underline{k}$ மீட்டர்-நியூட்டன்;

(ii) $-20\,\underline{k}$ மீட்டர்-நியூட்டன்.]

4—2. 30 கி.கி. விசை ஒன்று (4, 4, −2·5) மீட்டர் அச்சுத் தொலைவுகளையுடைய புள்ளியின் வழியே செயற்படுகிறது. விசை செயற்படும் கோட்டில் (5, 4·5, −1·5) மீட்டர் என்னும் மற்றொரு புள்ளியும் உள்ளது. (0·5, 1, 1·5) மீட்டர் அச்சுத் தொலைவுகளையுடைய புள்ளி பற்றி விசைத் திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : 182 மீ.கி.கி.]

4—3. $\underline{F} = 12\,\underline{i} - 7\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$ என்னும் விசை (7, 2, 2) என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகிறது. துவக்கப் புள்ளி O பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[விடை : $30\,\underline{i} - 32\,\underline{j} - 73\,\underline{k}$]

4—4. வினா (4-3)ல் கொடுத்துள்ள விசையின் திருப்புத் திறனை (4, −3, 6) என்னும் புள்ளி பற்றிக் காண்க.

[விடை : $12\,\underline{i} - 72\,\underline{j} - 81\,\underline{k}$]

4—5. வினா (4-3)ல் கொடுத்துள்ள விசையின் திருப்புத் திறனை

(i) ஆயத்தொலை அச்சுக்கள்,

(ii) துவக்கப் புள்ளி O வழியே செல்வதும், (0·5, 0·5, —0.707) என்பனவற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகவும் கொண்ட நேர்கோடு,

(iii) பகுதி (ii)ல் வரையறுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டுக்கு (2, 3, 5) என்னும் புள்ளி வழியே இணையாக அமையும் நேர்கோடு

ஆகியவை பற்றிக் காண்க.

[விடை: (i) $M_x = 30$, $M_y = -32$, $M_z = -73$

(ii) 50·611

(iii) — 36·239]

4—6. $\underline{F} = 6\underline{i} - 6\underline{j} + 10\underline{k}$ என்னும் விசை A (3, 4, 10) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது. விசையின் திருப்புத் திறனை

(i) துவக்கப் புள்ளி

(ii) B (—4, —3, 6) என்னும் புள்ளி

(iii) ஆயத் தொலை அச்சுக்கள்

(iv) (0·5, — 0·707, 0·5) என்பனவற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகவும், துவக்கப் புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் நேர்கோடு,

(v) C (2, 5, 3) என்ற புள்ளியின் வழியே (d)யில் வரையறுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டிற்கு இணையாக அமையும் நேர்கோடு—ஆகியவை பற்றிக் காண்க.

[விடை: (i) $100\underline{i} + 30\underline{j} - 42\underline{k}$

(ii) $94\underline{i} - 46\underline{j} - 84\underline{k}$

(iii) $M_x = 100$, $M_y = 30$, $M_z = -42$

(iv) 7·79

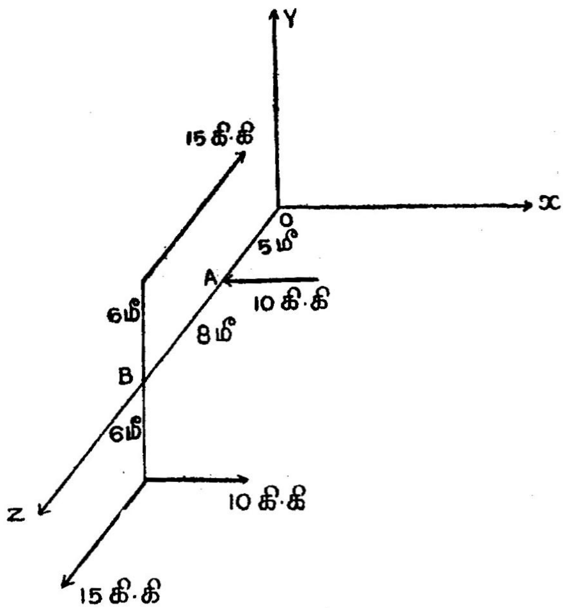
(v) — 6·624]

4—7. $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ என்னும் விசைகளின் எண் மதிப்புக்கள் செயல்படும் புள்ளிகள், செயல்படும் கோடுகளின் திசைக் கிடக்கைகள்

ஆகியவை முறையே 100, 150; (4, 5, 6), (3, 1, −1); ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2}$), ($\frac{8}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$) என்றால் துவக்கப் புள்ளி O பற்றி விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் கூடுதலைக் காண்க.

[விடை : $-554{\cdot}2\underline{i} + 50\underline{j} - 57{\cdot}2\,\underline{k}$]

4—8. படம் 4-25ல் அமைந்துள்ள சுழலிணைகளின் தொகுபயன் சுழலிணையை வரையறுத்து அதன் x, y, z பகிர்வு

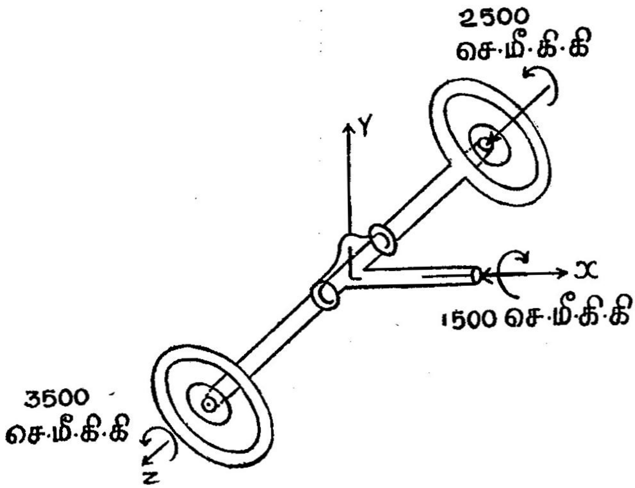


படம் 4-25

களைத் தீர்மானிக்க. விசைகள் ஒவ்வொன்றின் திருப்புத் திறனை சுட்டமைப்புப் புள்ளி O பற்றி கணித்துச் சரி பார்க்கவும்.

[விடை : $-180\underline{i} + 80\underline{j} + 60\underline{k}$]

4—9. ஓர் உந்து வண்டியின் அச்சுக்களில் (drive shafts) படம் 4-26ல் காட்டியவாறு மூன்று சுழலிணைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றிற்குச் சரிநிகரான தொகுபயன் சுழலிணைத்



படம் 4–26

திருப்புத் திறனை வரையறுக்க. அதன் எண் மதிப்பையும் அது x, y, z அச்சுக்களில் அமைக்கும் கோணங்களையும் காண்க.

[விடை : $\underline{C_R} = -1500\underline{i} + 6000\,\underline{k}$; $|\underline{C_R}| = 6180$;

$\theta_x = 104°$, $\theta_y = 90°$, $\theta_z = 14°$]

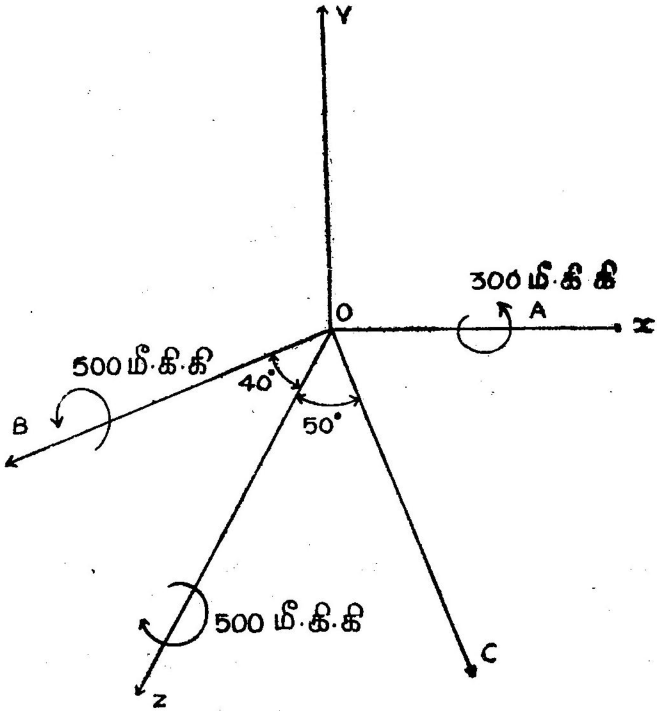
4–10. ஒரு கியர் பெட்டியுடன் (gear box) மூன்று கைப்பிடிகள் (shafts) படம் 4-27ல் (படத்தை அடுத்த பக்கத்தில் காண்க.) காட்டியவாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளன. கைப்பிடி A கிடையாகவும், கைப்பிடிகள் B, C என்பவை yoz என்னும் செங்குத்துத் தளத்திலும் அமைந்துள்ளன. கியர் பெட்டியில் இவற்றிற்குச் சரிநிகரான ஓர் சுழலிணைப்புத் திறனைக் காண்க.

[விடை : $300\underline{i} + 643\underline{k}$]

4–11. 100 கி.கி. விசை ஒன்று (1, 0, 0) மீ., (1, 0, 1)மீ. என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டில் செயல்படுகிறது. விசையின் திருப்புத் திறனைத் துவக்கப் புள்ளி பற்றியும் ஆயத் தொலை அச்சுக்கள் பற்றியும் காண்க.

[விடை : $-100\underline{j}$ மீ.கி.கி., $M_x = 0$, $M_y = -100$ மீ.கி.கி.,

$M_z = 0$.



படம் 4–27

4—12. 1000 கி.கி. விசை ஒன்று (3, 9, —6) என்னும் புள்ளியின் வழியாகவும், (—0·667, 0·667, —0·333) என்பன வற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகக் கொண்ட கோட்டிலும் செயற் படுகிறது. துவக்கப் புள்ளி Oவை (6, 0, —8) என்னும் புள்ளி யுடன் சேர்க்கும் நேர்கோடு பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[விடை : —133·8 மீ.கி.கி.]

4—13. 2·5 கிலோகிராமுள்ள விசை ஒன்று (0·8, 0, 0·6) என்னும் திசைக் கிடக்கைகளைப் பெற்ற கோட்டில் செயல்படு கிறது. அக் கோட்டில் (—4, 8, 6) செ.மீ. என்னும் புள்ளியும் உள்ளது எனின் விசையின் திருப்புத் திறனைப் பின்வரும் புள்ளிகள் பற்றிக் காண்க.

(a) (i) (0, 0, 0) ; (ii) (0, 0, 6); (iii) (—4, 0, 0);
(iv) (0, 8, 0); (v) (2, 2, 2) செ.மீ.

(b) ஆயத்தொலை அச்சுக்கள் பற்றியும் விசையின் திருப்புத் திறன்களைக் காண்க.

[விடை : (a) (i) $(12\underline{i} + 18\underline{j} - 16\underline{k})$ செ.மீ. கி.கி.

(ii) $(12\underline{i} + 6\underline{j} - 16\underline{k})$ செ.மீ. கி.கி.

(iii) $(12\underline{i} + 12\underline{j} - 16\underline{k})$ செ.மீ. கி.கி.

(iv) $18\underline{j}$ செ.மீ. கி.கி.

(v) $(9\underline{i} + 17\underline{j} - 12\underline{k})$ செ.மீ. கி.கி.

(b) $M_x = 12$ செ.மீ. கி.கி., $M_y = 18$ செ.மீ. கி.கி., $M_z = -16$ செ.மீ. கி.கி.]

4—14. 15 கி.கி. உள்ள விசை ஒன்று y அச்சின் மிகைத் திசைக்கு இணையாக (2, 0, 0)மீ. என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது. துவக்கப் புள்ளி O-ன் வழியாக $(-6\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{k})$ என்னும் திசையிக்கு ஒரு போகாக அமையும் நேர்கோடு பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[விடை : 20 மீ. கி.கி.]

4—15. 100 கி.கி. விசை ஒன்று துவக்கப் புள்ளி O-ன் வழியாகவும், y, z அச்சுக்களுடன் $60°$, $75°$ கோணங்களை அமைக்கும் நேர்கோட்டிலும் செயற்படுகிறது. (2, 0, 0) மீ. என்னும் புள்ளி வழியே y அச்சுக்கு இணையாக வரையும் நேர் கோடு பற்றி விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[விடை : 51·76 மீ. கி.கி.]

4—16. $\underline{F} = (20\,\underline{i} - 15\,\underline{j})$ கி.கி. விசை, (4, —8) மீ. என்னுமிடத்தில் அமையும் புள்ளி வழியே, x y தளத்தில் செயற்பட்டு, (x, 4) மீ. என்னும் புள்ளி பற்றி 190 $\underline{k}$ மீ. கி.கி. கொண்ட திருப்புத் திறனைப் பெற்றிருக்குமென்றால் xன் மதிப்பைக் காண்க.

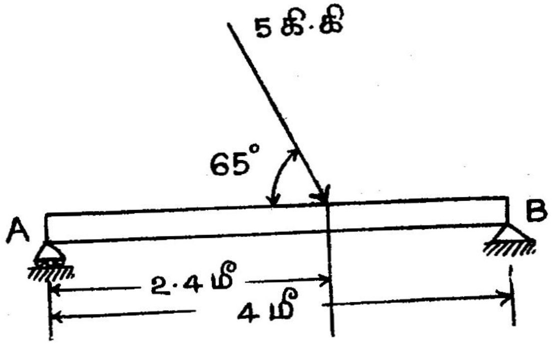
[விடை : 6 மீட்டர்]

4—17. (2, —6, 4) அச்சுத் தொலைவுகளைப் பெற்ற புள்ளியின் வழியாகவும், (—0·5, 0·707, 0·5) என்பனவற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகவும் கொண்ட அச்சில், ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் தடையின்றிச் சுழலுகிறது. x, y, z திசைகளில் முறையே 0, —15, 10 என்னும் பகிர்வுகளைக் கொண்ட ஓர் விசை (2, 4, 10) என்னும் புள்ளி வழியே செயற்படுகிறது. விசையின் திருப்புத் திறனைக் கொடுக்கப்பட்ட அச்சு பற்றிக் காண்க.

[விடை : —95]

4—18. 5 கி.கி. விசை ஒன்று படம் 4-28ல் காட்டியவாறு செயற்படுகிறது. A என்னும் தாங்கல் பற்றி விசையினுடைய திருப்புத் திறனின் எண் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : 10·8756 மீ.கி.கி.]

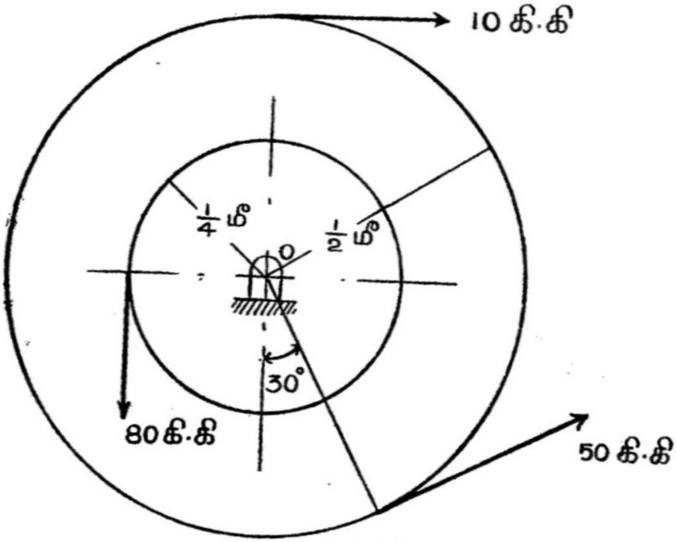


படம் 4–28

4—19. படம் 4-29ல் காட்டியவாறு ஒரு கப்பியில் விசைகள் செயற்படுகின்றன. விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணிதக் கூடுதலை மையப் புள்ளி O பற்றிக் காண்க.

[விடை : 40 மீ.கி.கி.]

4—20. $\underline{F} = 6\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 10\,\underline{k}$ என்னும் விசை, A (0, 2, 3) என்னும் புள்ளியில் செயற்படுகிறது. B (2, —3, 0) என்னும் புள்ளியில் $-\underline{F}$ என்னும் விசை செயற்படுகிறது. (i) சுழலிணைப்புத் திறன் திசையி (ii) சுழலிணை செயற்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகள்,



படம் 4–29

(iii) z அச்சு பற்றி சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் (iv) சுழலிணைக்கு இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

[விடை : (i) $\underline{C} = 41\,\underline{i} + 38\,\underline{j} - 36\,\underline{k}$

(ii) $l = 0{\cdot}616,\ m = 0{\cdot}572,\ n = -0{\cdot}541$

(iii) $M_z = -36$

(iv) 5·522 அலகுகள்]

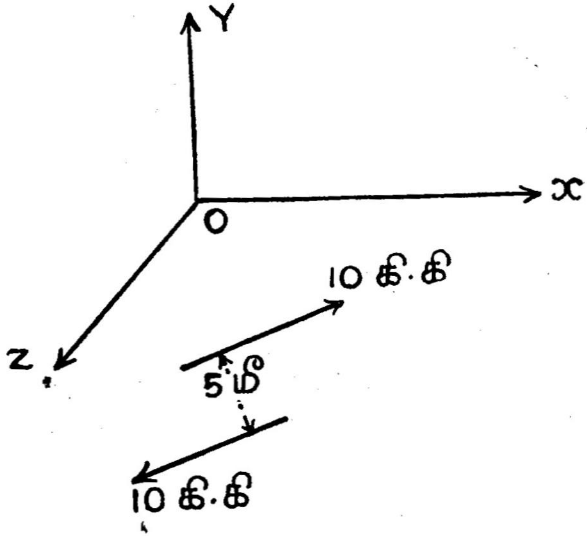
4—21. z x தளத்தில் செயற்படும் சுழலிணை படம் 4-30ல் காட்டியவாறு உள்ளது.

(i) துவக்கப் புள்ளி O பற்றி சுழலிணைப்புத் திறனை வரையறுக்க.

(ii) A (3, 4, 6) மீ. என்னும் புள்ளி பற்றியும் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

(iii) $(l = 0{\cdot}8,\ m = -0{\cdot}6,\ n = 0)$ என்பனவற்றைத் திசைக் கிடக்கைகளாகவும், துவக்கப் புள்ளியின் வழியாகவும் செல்லும் நேர்கோடு பற்றியும் சுழலிணையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

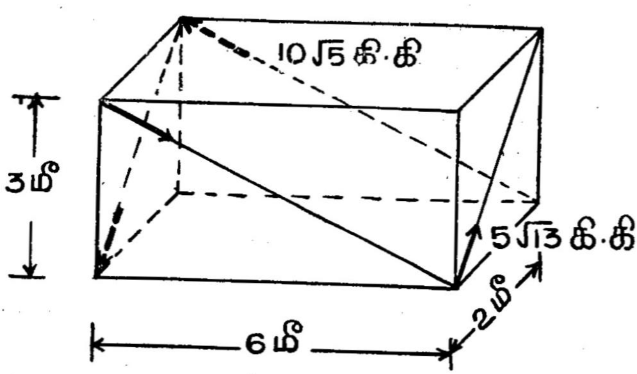
(iv) பகுதி (iii)ல் வரையறுத்த கோட்டை இணையாக இடம் பெயர்த்து, A (3, 4, 6) மீ. என்னும் புள்ளி வழியே செல்லும் நேர்கோடு பற்றியும் சுழலிணையின் திருப்புத் திறனைக் காண்க.



படம் 4–30

[விடை: (i) — 50$\underline{j}$ மீ.கி.கி.; (ii) – 50 $\underline{j}$ மீ.கி.கி.; (iii) 0; (iv) 0.]

4—22. ஒரு செவ்வக இணை கரத் திண்மத்தின் (rectangular parallelopiped) மூலைவிட்டங்களில் படம் 4-31ல் காட்டியவாறு



படம் 4–31

அமையும் சுழலிணைகளின் தொகுபயனைக் காண்க.

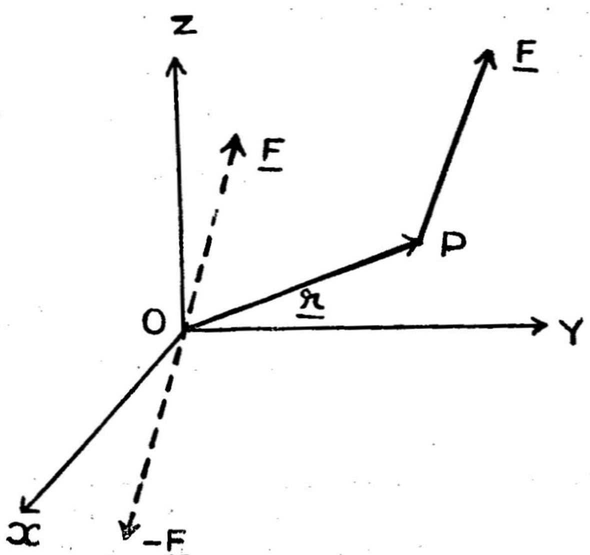
[விடை : $\underline{C_R} = (90\,\underline{i} + 20\,\underline{j} + 100\,\underline{k})$ மீ.கி.கி.]

5. விசைத் தொகுதி அமைப்பின் ஒடுக்கம்

5—1. கொடுக்கப்பட்ட விசைக்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பு :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் குறிப்பிட்ட புள்ளி ஒன்றில் செயற்படும் ஒற்றை விசையை விருப்பப்படி யாதேனுமொரு புள்ளியில் செயற்படுகின்ற ஒரு விசை, அத்துடன் ஒருமிக்க அமையும் ஒரு சுழலிணை ஆகியவற்ருல் ஈடு செய்து சமப்படுத்தல் :

கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றில் P என்னும் புள்ளியில் F என்னும் விசை செயற்படுவதாகக் கொள்க. O என்பது



படம் 5–1

விருப்பப்படி எடுத்துக் கொள்ளும் ஒரு புள்ளியாகுக. $\underline{F}$ என்னும் விசையை O என்னும் புள்ளிக்கு இடம் பெயர்த்தல் செய்வதற்கு உரிய அமைப்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு Pயின் நிலைத் திசையியை $\underline{r}$ எனக் குறிக்கவும். Oவின் வழியே $\underline{F}$ செயற்படும் கோட்டிற்கு இணையாக வரையும் கோட்டில் படம் 5-1ல் காட்டிய வாறு $\underline{F}$, $-\underline{F}$ என்னும் சமனுமெதிருமான விசைகளைப் புகுத்தவும். இவைகள் ஒரே நேர்கோட்டில் சமனுமெதிருமாக செயற்படு வதால் இவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். ஆகவே இவை அப் பொருளின் சமநிலையைப் பாதிக்கா.

எனவே Pயில் செயற்படும் $\underline{F}$க்கு Oவில் செயற்படும் $\underline{F}$ம் அத்துடன் ஒருமிக்க அமையும் ($\underline{F}$, $-\underline{F}$) என்னும் சுழலிணையும் சமமாகும். இங்கு $\underline{OP} = \underline{r}$ என்பது சுழலிணையிலமையும் விசை களுக்குத் தொடர்புப்படுத்தும் நிலைத் திசையியாவதால் (relative position vector) சுழலிணைக்கு உரிய திருப்புத் திறன் திசையி $\underline{r} \wedge \underline{F}$ என்ருகும். ஆனல் இதுவே துவக்கப் புள்ளி Oபற்றி $\underline{P}$ என்னும் புள்ளி வழியே செயற்படும் $\underline{F}$ என்னும் விசையின் திருப்புத் திறனுகும்.

$\therefore$ {Pயில் உள்ள விசை $\underline{F}$} $\equiv$ {Pயில் $\underline{F}$), (Oவில் $\underline{F}$, $-\underline{F}$)}

$\equiv$ {(Oவில் $\underline{F}$),

(Pயில் $\underline{F}$, Oவில் $-\underline{F}$)}

$\equiv$ (Oவில் $\underline{F}$) + $\underline{r} \wedge \underline{F}$

$\equiv$ (Oவில் $\underline{F}$) + $\underline{M_0}$

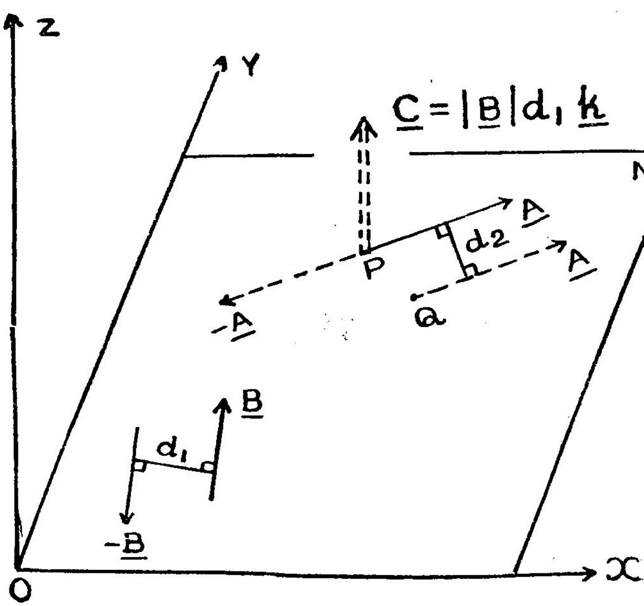
எனவே P என்னுமிடத்தில் ஒரு பொருளில் செயற்படும் விசையை விருப்பப்படி யாதேனுமொரு O என்னும் புள்ளிக்கு அதை இணையாக இடம் பெயர்த்தல் செய்து அத்துடன் Oவில் அவ் விசையின் திருப்புத் திறனை ஒருமிக்க அமைத்துச் சமப் படுத்தலாம்.

இவ்வித விசை, சுழலிணைப்புத் திறன் ஆகியவை ஒருமிக்க எடுத்துச் செயற்படும் அமைப்பே, "விசை—சுழலிணை முறை" (force-couple system) எனப்படும். மேலும் ஒரு பொருளில் செயற்படும் விசை ஒன்றிற்குச் சமமான "விசை-சுழலிணை முறை"யை எண்ணற்ற வழிகளில் அமைக்க முடியும்.

"விசை-சுழலிணை முறை"யில் விசை-சுழலிணைப்புத் திறன் ஆகியவற்றை வரையறுக்கும் திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் திசைகளில் செயல்படுவதாகவும் உள்ளன.

5—1 (1) விசை, சுழலிணை ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக செயற்படும் "விசை-சுழலிணை அமைப்புக்குச் சரி நிகரான ஓர் ஒற்றை (single) விசையை வரையறுத்தல் :

படம் 5–2ல் சுழலிணையை வரையறுக்கும் ($\underline{B}$, $-\underline{B}$) என்னும் விசைகளும், A என்னும் தனி விசையும் N என்னும் XOY தளத்திலமைவதாகக் கொள்க.



படம் 5–2

$(\underline{B}, -\underline{B})$ என்னும் சுழலிணைக்கு உரிய சுழலிணைப்புத் திறன் $\underline{C} = |\underline{B}|\, d_1\, \underline{k}$ என்பது தடையற்ற திசையியாவதால் அது $\underline{A}$ என்னும் விசை செயற்படும் P என்னும் புள்ளியில் அமையட்டும்.

Pயில் $\underline{A}$-க்கு எதிர்த் திசையிலமையுமாறு $-\underline{A}$ என்னும் விசையையும் அது செயற்படும் நேர் கோட்டிற்கு இணையாக $d_2 = \dfrac{|\underline{B}|\, d_1}{|\underline{A}|}$ தொலைவில் அமையும் கோட்டில் $\underline{A}$ என்னும் விசையையும் எடுக்கவும்.

இங்கு $|\underline{B}|d_1 = |\underline{A}|d_2$ என்றுவதால்

$$(\underline{B}, -\underline{B}) \equiv (\underline{A}, -\underline{A}).$$

எனவே (Pயில் $\underline{A}$) + $(\underline{B}, -\underline{B})$ ≡ (Pயில் $\underline{A}$) + {Pயில் $-\underline{A}$, Qவில் $\underline{A}$}

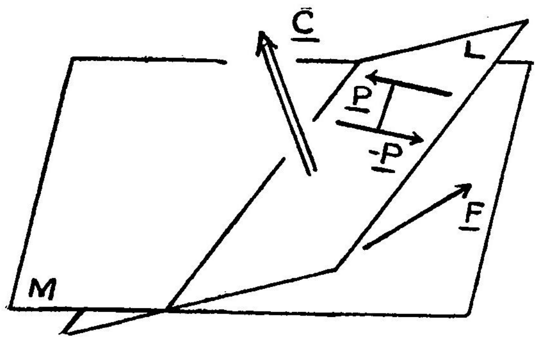
≡ {Pயில் $\underline{A} + (-\underline{A})$} + {Qவில் $\underline{A}$}

≡ (Qவில் $\underline{A}$)

5—1 (2) முறுக்கல் (Wrench):

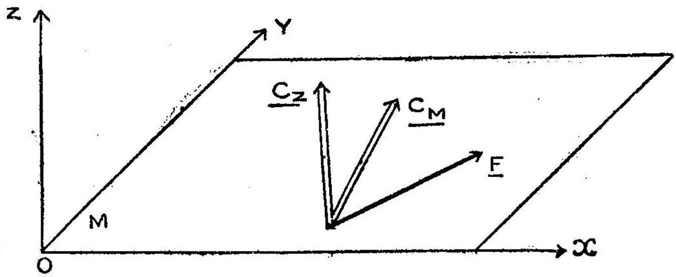
விசையும், சுழலிணையும் வெவ்வேறான தளங்களில் அமையட்டும்.

$\underline{F}$ என்னும் விசை M என்னும் தளத்திலும் $\{\underline{P}, -\underline{P}; d\}$ என்னும் சுழலிணை L என்னும் தளத்திலும் படம் 5-3ல் காட்டியவாறு செயற்படுவதாகக் கொள்க.



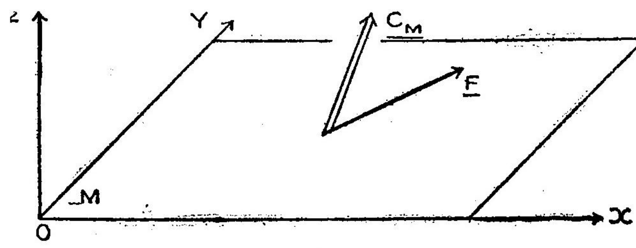
படம் 5–3.

$\underline{C}$ என்பது சுழலிணைப்புத் திறன் திசையியை வரையறுக் கட்டும். அது L என்னும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் தடையற்ற திசையியாகச் செயற்படும். $\underline{C}$யின் பகிர்வுகளை M தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் M தளத்திலும் வரையறுத்து அவற்றை $\underline{C_Z}$, $\underline{C_M}$ எனக் குறிக்கவும். (படம் 5-4ஐப் பார்க்க.)



படம் 5–4

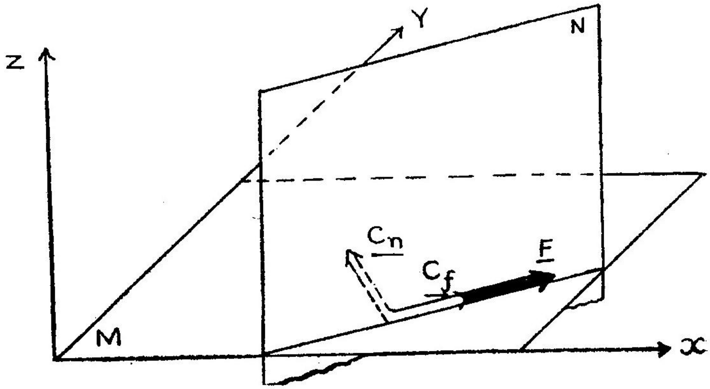
$\underline{F}$, $\underline{C_z}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைவதால் அவைகளுக்குச் சரிநிகரான ஒற்றை விசையை M தளத்தில் P என்னும் புள்ளியில் செயற்படும் $\underline{F}$ என்னும் விசையை Q என்னும் விரும்பிய புள்ளி வழியாக இணையாக இடம் பெயர்த்துப் பெறலாம். அதற்கு ஏற்றதான அமைப்பு படம் 5-5ல் காட்டப்



படம் 5–5

பட்டுள்ளது. $\underline{C_M}$ என்னும் திசையி M தளத்திலமைவதால் அதன் பகிர்வுகளை $\underline{F}$ செயற்படும் திசையிலும் $\underline{F}$க்குச் செங்குத் தான திசையிலும் வரையறுத்து அவற்றை முறையே $\underline{C_f}$, $\underline{C_n}$

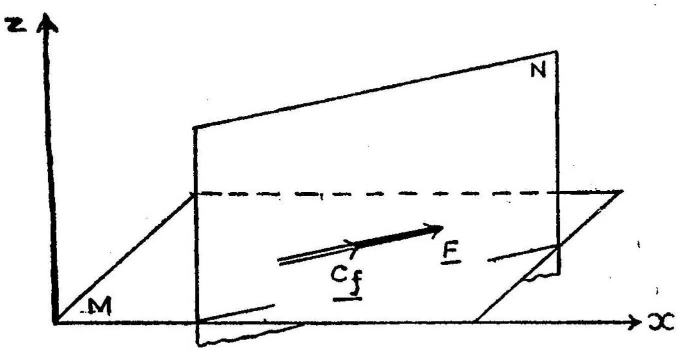
எனக் குறிக்கவும். (படம் 5-6ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.) F, C_n என்பவை M தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்ப



படம் 5–6

தால் அவைகளுக்குச் சரிநிகரான ஒற்றை விசையை M தளத்திற்குச் செங்குத்தான N என்னும் தளத்தில் F என்னும் விசையை இணையாக இடம் பெயர்த்துப் பெறலாம்.

எனவே (F, C) ஆகியவை இறுதியாக ஒடுக்கப்பட்டு (F, C_f) என்னும் ஒரே போகான அமைப்பைப் படம் 5-7ல் காட்டியவாறு பெறும்.



படம் 5–7

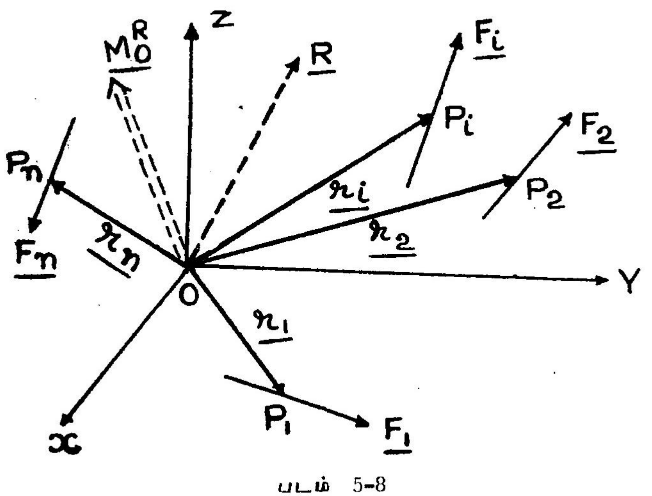
(F, C_f) ஆகியவற்றின் சேர்க்கையே முறுக்கல் (wrench) எனப்படும்.

எல்லா விசைக் கணங்களைக் குறைவுபடுத்தும் நிலைகளில் முறுக்கல் நிலையே அவற்றிற்குச் சரிநிகரான எளிய அமைப்பைப் பெற்றுள்ளது. $(\underline{F}, \underline{C}_f)$ என்பவை ஒரே திசையில் அமையு மென்றால், முறுக்கல் மிகையானதாகவும் (positive) அவைகள் எதிரெதிர்த் திசையில் அமையும்போது முறுக்கல் குறையான தாகவும் (negative) கருதப்படும்.

5-2. விசைகளின் கணத்திற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" ஒடுக்கம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படு கின்ற யாதேனுமொரு விசைகளின் கணத்திற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை விரும்பிய யாதேனுமொரு புள்ளியில் வரையறுத்தல் :

$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots\ldots \underline{F}_i, \ldots\ldots \underline{F}_n$ என்பவை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் செயற்படும் விசைகளின் கணத்தைக் குறிக்கட்டும். விசைகள் ஒவ்வொன்றும் முறையே $P_1, P_2, \ldots\ldots P_i, \ldots\ldots P_n$ என்னும் புள்ளிகளில் செயற்படுவதாகக் கொள்க. படம் 5-8ல் O என்பது



படம் 5-8

விதிக் கட்டின்றி விரும்பியவாறு எடுத்துக் கொள்ளும் புள்ளி யாகுக. Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்ட சுட்டமைப்பில்

$P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots P_n$ என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots \underline{r}_i, \ldots \underline{r}_n$ எனக் குறிக்கவும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் செயற்படும் விசை விரும்பிய யாதேனுமொரு சுட்டமைப்புப் புள்ளியிலே செயற்படுகின்ற விசையுடன் சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும் என்பதால் P_i என்னும் புள்ளியில் செயற்படும் $\underline{F}_i$ என்னும் விசைக்குச் சரிநிகராக O-ல் $\underline{F}_i$ என்னும் விசையையும் O பற்றி உண்டாகும் $\underline{F}_i$யின் திருப்புத் திறனையும் ஒருமிக்க அமைக்கலாம். அதாவது

{ P_i-யில் செயற்படும் F_i -என்னும் விசை } ≡ {O-ல் செயற்படும் $\underline{F}_i$ என்னும் விசையுடன் O பற்றி ஒருமிக்க அமையும் $\underline{M}_o{}^{Fi} = \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i$ என்னும் சுழலிணைப்புத் திறன்.}

இவ்வாறே அவ்விசைகளின் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு விசை $\underline{F}_i$, $(i = 1, 2, \ldots \ldots n)$க்கும் ஏற்படுத்தலாம்.

ஆதலால்,

{ $P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_n$ என்னும் புள்ளிகளில் செயற்படும் $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots \underline{F}_i, \ldots F_n$ என்னும் விசைகளின் கணம்} ≡ O-ல் செயற்படும் $(\underline{F}_1 + \underline{F}_2 \ldots + \underline{F}_i + \ldots + \underline{F}_n)$ என்னும் விசையுடன் O பற்றி ஒருமிக்க அமையும் $(\underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \ldots + \underline{r}_i \wedge F_i + \ldots + \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n)$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணை.

≡ {(Oவில் செயற்படும் தொகுபயன் விசை $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$) + $\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i\right.$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு தனிச் சுழலிணை.)}

அதாவது தரப்பட்ட விசைகளின் கணம், Oவில் தம் முந்திய திசைகளுக்கு இணையாகச் செயற்படுகின்ற $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots \underline{F_i} \ldots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகளின் தொகுபயன் விசையோடு சேர்ந்த $\sum_{i=1} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

எனவே விசைகளின் கணத்திற்குச் சரிநிகரான தொகுபயன் விசை, அத்துடன் சேர்ந்த தனிச் சுழலிணை ஆகியவை முறையே

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}, \quad \underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} \text{ ஆகும்.}$$

5—2 (1) பரந்த வெளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் 3 திசைகளில் $\underline{R}$, $\underline{M_o^R}$ ஆகியவற்றின் பகிர்வீடுகளைக் காணுதல் :

O என்னும் புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் Ox, Oy, Oz என்னும் அச்சுக்களை எடுக்கவும். அவற்றின் திசைகளை $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுக்கட்டும். அப்பொழுது

$$\underline{r_i} = x_i \underline{i} + y_i \underline{j} + z_i \underline{k}$$

$$\underline{F_i} = F_{ix} \underline{i} + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k}$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$M_o^R = M_{ox}^R \underline{i} + M_{oy}^R \underline{j} + M_{oz}^R \underline{k} \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \text{ என்பது}$$

$$R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} \underline{i} + F_{iy} \underline{j} + F_{iz} \underline{k})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) \underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz} \right) \underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

அவ்வாறே

$$\underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} \text{ என்பது}$$

$$M_{ox}^R \underline{i} + M_{oy}^R \underline{j} + M_{oz}^R \underline{k} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \underline{i} + (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \underline{j} + (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \underline{k} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \right\} \underline{i} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \right\} \underline{j} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \right\} \underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$M_{ox}^R = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy})$$

$$M_{oy}^{R} = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz})$$

$$M_{oz}^{R} = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$

ஆகவே அவ் விசைகளின் கணமானது

OX வழியே $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_x$ என்ற விசைக்கும்,

OY வழியே $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_y$ என்ற விசைக்கும்,

OZ வழியே $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = R_z$ என்ற விசைக்கும்,

OX பற்றி $\sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = M_{ox}^{R}$ என்ற திருப்புத் திறனுக்கும்,

OY பற்றி $\sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = M_{oy}^{R}$ என்ற திருப்புத் திறனுக்கும்,

OZ பற்றி $\sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = M_{oz}^{R}$ என்ற திருப்புத் திறனுக்கும் சமமாகும்.

மேலும் O வழியாகச் செல்லும் $\underline{R}$ என்னும் தொகுபயன் விசையின் எண் மதிப்பு

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$ என்ருகும்.

இத் தொகுபயன் விசை x, y, z ஆயங்களுடன் $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ என்னும் கோணங்களை உண்டாக்கினுல் $\underline{R}$ செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகளை

$$\frac{\cos\theta_x}{R_x} = \frac{\cos\theta_y}{R_y} = \frac{\cos\theta_z}{R_z} = \frac{1}{R}$$ என்னும் சமன்

பாடுகளிலிருந்து பெறலாம்.

அவ்வாறே O பற்றி அமையும் $\underline{M_o^R}$ என்னும் விளைவுச் சுழலிணைப்புத் திறனின் எண் மதிப்பு

$$\overset{R}{M_o} = \sqrt{(\overset{R}{M_{ox}})^2 + (\overset{R}{M_{oy}})^2 + (\overset{R}{M_{oz}})^2}$$ என்றாகும்.

மேலும் இவ்விளைவுச் சுழலிணைப்புத் திறன் x, y, z ஆயங்களுடன் ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z என்னும் கோணங்களை உண்டாக்கினால், $\overset{R}{M_o}$ செயற்படும் கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகளை

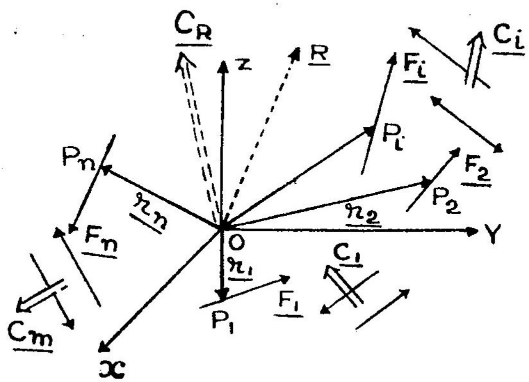
$$\frac{\cos\phi_x}{\overset{R}{M_{ox}}} = \frac{\cos\phi_y}{\overset{R}{M_{oy}}} = \frac{\cos\phi_z}{\overset{R}{M_{oz}}} = \frac{1}{\overset{R}{M_o}}$$ என்னும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்கும்.

R, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ என்பவற்றின் மதிப்புக்கள், Oவின் நிலையைச் சார்ந்தனவாக இல்லை என்பது தெளிவு; ஏனெனில் அவற்றின் மதிப்பில் $P_1, P_2, \ldots P_i \ldots, P_n$ என்பனவற்றின் ஆயத்தொலைகள் இடம் பெறவில்லை.

ஆனால் $\overset{R}{M_o}$வின் மதிப்பு Oவின் நிலையைச் சார்ந்ததாய் இருக்குமென்பது தெளிவு.

5—2. (2) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளிலே செயற்படுகின்ற யாதேனுமொரு விசைகளின் கணம், அப்பொருளிலே தாக்குகின்ற சுழலிணைகளின் கணம் ஆகியவற்றிற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை விரும்பிய யாதேனுமொரு புள்ளியில் வரையறுத்தல் :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில், P_1, $P_2, \ldots P_i, \ldots P_n$ என்னும் புள்ளிகளில் முறையே $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots \underline{F_i}, \ldots \underline{F_n}$ என்னும் சுழலிணைகளை, உருவாக்க முடியாத விசைகள் (non-couple forces) செயற்படுவதாகக் கொள்க. $\underline{C_1}, \underline{C_2}, \ldots \underline{C_i}, \ldots \underline{C_m}$ என்பவை சுழலிணைகளை உருவாக்கும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை அறிவிப்பதாகக் கொள்க. படம் 5–9ல் O என்பது விதிக்கட்டின்றி விரும்பியவாறு எடுக்கும் புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாகக் கொண்ட சுட்டமைப்பில், P_1, $P_2 \ldots P_i, \ldots P_n$ என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{r_1}$, $\underline{r_2}$ $\underline{r_i}, \ldots \underline{r_n}$ எனக் குறிக்கவும்.



படம் 5–9

Oவில் சமனுமெதிருமான $\underline{F_i} - \underline{F_i}$ என்னும் விசைகளை, அவற்றினுடைய செயற்படும் கோடுகள் P_i என்ற புள்ளியில் செயற்படும் $\underline{F_i}$ யினது திசைக்கு இணையாக ஏற்படுத்துக. இவை அப்பொருளின் சமநிலையைப் பாதிப்பதில்லை.

P_i யில் உள்ள விசை $\underline{F_i}$ என்பதும், O-ல் உள்ள எதிர் இணை விசை $-\underline{F_i}$ என்பதும் சேர்ந்து $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணையை ஆக்கும்.

P_i யில் உள்ள $\underline{F_i}$ என்னும் விசையானது, Oவில் உள்ள $\underline{F_i}$ என்னும் ஒரு சமாந்தர விசை(parallel force)யோடு சேர்ந்த $\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்.

அங்ஙனமே விசைக் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு விசையும் O-ல் அதற்கு இணையாக எடுக்கும் விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாக இருக்குமாறு ஏற்படுத்தலாம்.

ஆதலால்,

$\{P_1, P_2 \ldots P_i, P_n$ என்னும் புள்ளிகளில் செயற்படும் $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \underline{F_i}, \ldots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகளின் கணம்$\} + \{\underline{C_1}, \underline{C_2} \ldots \underline{C_m}$ என்னும்

சுழலிணைப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்}] $\equiv$ [{Oவில் செயற்படும் $(\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_i + \dots + \underline{F}_n)$ என்னும் விசையுடன், O என்னும் புள்ளி பற்றி ஒருமிக்க அமையும் $(\underline{r}_i \wedge \underline{F}_i + \dots + \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i + \dots + \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n)$ என்னும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பெற்ற ஒரு தனிச் சுழலிணை} + $\{\underline{C}_i + \underline{C}_2 + \dots \underline{Cm}\}$]

$\equiv$ [{Oவில் செயற்படும் தொகுபயன் விசை $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$}

$+ \{\underline{C}_R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i + \sum_{i=1}^{m} \underline{C}_i$ என்னும் ஒரு தனிச் சுழலிணை}]

எனவே ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளிலே செயற்படுகின்ற யாதேனுமொரு விசைகளின் கணம், அப்பொருளிலே தாக்குகின்ற சுழலிணைகளின் கணம் ஆகியவற்றை ஒரு தனி விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணையாக ஒடுக்க முடியும் (reduce).

$\underline{R}$, $\underline{C}_R$ ஆகியவற்றின் பகிர்வுகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்னும் திசைகளில் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} ; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} ; \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

$$C_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - Z_i F_{iy}) + \sum_{i=1}^{m} C_{ix}$$

$$C_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) + \sum_{i=1}^{m} C_{iy}$$

$$C_{Rz} = \sum_{j=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum_{i=1}^{m} C_{iz}$$

மேலும்

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

$$C_R^2 = C_{Rx}^2 + C_{Ry}^2 + C_{Rz}^2$$ என்றாகும்.

5—3. தனிச் சிறப்பான விசை அமைப்புக்களின் ஒடுக்கம் (Reduction Special Force Systems):

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற யாதேனு மொரு விசைத் தொகுதி விருப்பப்படி எடுக்கும் O என்னும் புள்ளியில் செயல்படும் தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ உடன் சேர்ந்து ஒரு சுழலிணை $\underline{M_0^R}$க்கு ஒடுக்க முடியுமென முன்னரே கூறப் பட்டது.

5—3. (1) வகை 1 :

தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ என்பது சுழியாகுமென்றால் விசைத் தொகுதி $\underline{M_0^R}$ என்னும் திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ஒரு சுழலிணை யாக ஒடுக்கப்படும்.

5—3. (2) வகை 2 :

$\underline{M_0^R}$ என்பது O பற்றி எடுக்கும் விசைத் தொகுதியிலுள்ள விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை யைக் குறிக்கும். இதன் மதிப்பு சுழியாகுமெனில் எடுத்த விசைத் தொகுதி Oவில் அமையும் தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ ஆக ஒடுக்கப் படும்.

5—3. (3) வகை 3 :

"விசை-சுழலிணை" அமைப்பில் விசையும் சுழலிணையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகச் செயற்படுமெனில் அவற்றிற்குச் சரிநிகராக முந்திய திசைக்கு இணையான திசையிலே செயற்படு கின்ற ஒரு ஒற்றை விசையை வரையறுக்க முடியும் என முன்பே கூறப்பட்டது.

இவ்வித நிலைமை கீழ்க்காணும் அமைப்புக்களில் ஏற்படும்.

அவைகளாவன :

(i) ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் விசைத் தொகுதி

(ii) ஒரு தளத்திலே செயற்படுகின்ற விசைத் தொகுதி

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாகச் செயற்படும் விசைத் தொகுதி.

5—3. (3A) (i) ஒரு புள்ளியில் செயற்படுகின்ற விசைகள் :

விசைகளனைத்தும் ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படுவதால் இணைகர விதிப்படி அவற்றின் தொகுபயன் விசையும் அப் புள்ளி வழியே செயற்படும்.

எனவே எடுத்த விசைத் தொகுதிக்குச் சரிநிகராக ஒரு ஒற்றைத் தொகுபயன் விசையை வரையறுக்க முடிகிறது.

5—3 (3B) (ii) ஒரு தளத்திலே செயற்படுகின்ற விசைத் தொகுதி :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே செயற்படுகின்ற யாதேனுமொரு விசைத் தொகுதி, விருப்பப்படி எடுக்கும் யாதேனுமொரு புள்ளியிலே செயற்படுகின்ற ஒரு தனி விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும் என நிறுவ முடியும்.

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ... $\underline{F_i}$ ... $\underline{F_n}$ என்ற ஒரு தள விசைகள் P_1, P_2,...P_i ... P_n என்ற புள்ளிகளில் செயற்படட்டும்.

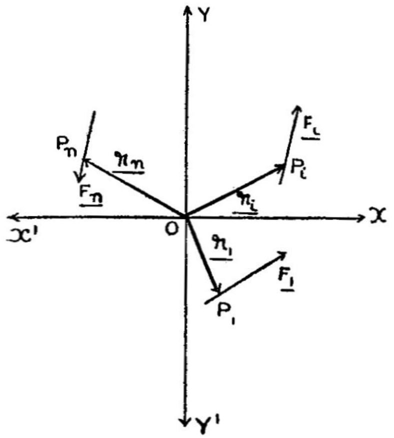
O என்பது அவ் விசைகளின் தளத்திலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாகட்டும்.

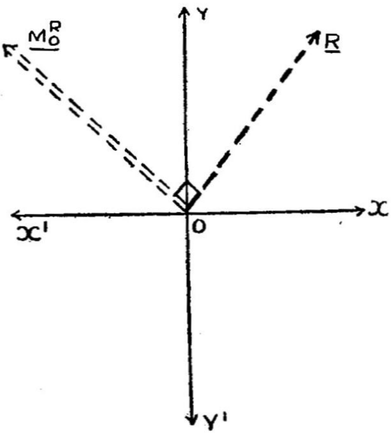
படம் 5-10ல் காட்டியவாறு Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாகவும், O வழியே x′ox, y′oy என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளைக் கிடைநிலை அச்சுக்களாகவும் கொள்க.

P_1 , P_2 ...P_i ...P_n என்பனவற்றின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{r_1}$, $\underline{r_2}$,..$\underline{r_i}$,...$\underline{r_n}$ எனக் கொள்க.

Oவின் வழியே $\underline{F_i}$ யினது செயற்படும் கோட்டிற்கு இணையாக வரையும் கோட்டில், படம் 5–10ல் காட்டியவாறு, $\underline{F_i}$, $-\underline{F_i}$

என்னும் சமனுமெதிருமான விசைகளை ஏற்படுத்துக. இவைகள் ஒரே நேர்கோட்டில் சமனுமெதிருமாயிருப்பதால், இவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். ஆகவே, இவை அப்பொருளின் சம நிலையைப் பாதிப்பதில்லை.





படம் 5-10

எனவே P_i யில் செயற்படும் $\underline{F_i}$ என்னும் விசையானது Oவில் செயற்படும் $\underline{F_i}$ என்னும் விசைக்கும் அத்துடன் ஒருமிக்க அமையும் ($\underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$) அளவு திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ($\underline{F_i}$, $-\underline{F_i}$) என்னும் ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இங்கு $\underline{F_i}$ என்பது விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஏதாவதொரு விசையைக் குறிப்பதால், இவ்விதச் செயல் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசைக்கும் பொருந்தும்.

எனவே விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசையையும், Oவின் வழியே செயற்படும் சமாந்தர விசையாகவும், அத்துடன் கூடிய சுழலிணையாகவும் அமைக்கலாம்.

எனவே {P_1 ல் செயற்படும் விசை $\underline{F_1}$,
P_2ல் செயற்படும் விசை $\underline{F_2}$,
P_iல் செயற்படும் விசை $\underline{F_i}$,
P_nல் செயற்படும் விசை $\underline{F_n}$} ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்படும் விசைத் தொகுதியானது,

O வழியே செயற்படும் $\underline{F_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_i} + \dots + \underline{F_n} = \underline{R}$ என்ற தொகுபயன் விசைக்கும்,

அத்துடன் மேற்குறிப்பிட்ட சுழலிணைப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைத் திருப்புத் திறனுகவுடைய $\underline{M_o}^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ என்னும் ஒரு தொகுபயன் சுழலிணைக்கும் (resultant couple) சமமாகும்.

இங்கு $\underline{R}$ என்பது xoy தளத்திலும் $\underline{M_o}^R$ என்பது XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் செயற்படுவதால் அவைகளை வரையறுக்கும் திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் செயற்படும்.

எனவே $\{Fi\}, i = 1, 2, \dots\dots n$ என்னும் ஒரு தள விசைத் தொகுதி, அத்தளத்திலே யாதேனுமொரு O என்னும் புள்ளியில் செயற்படும் ஒரு தனி விசை $\underline{R}$ ஆகவும், அத்துடன் சேர்ந்த திருப்புத் திறன் $\underline{M_o}^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ ஆகவுடைய ஒரு சுழலிணையாகவும் ஒடுங்கும்.

மேலும் அத் தொகுதி ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ ஒடுக்கப்படக்கூடும் என்றும் காட்டலாம்.

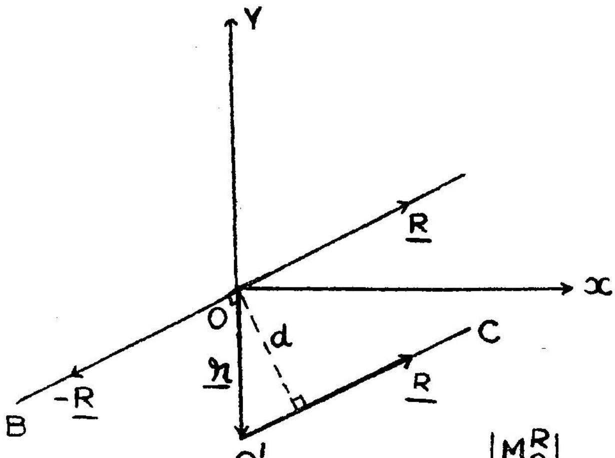
ஏனென்ருல் தனி விசை $\underline{R} = 0$ என்ருகும்போது எடுத்த தள விசைத் தொகுதி $\underline{M_o}^R$ என்னும் ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்கும்.

$\underline{M_o}^R = 0$ என்ருல் எடுத்த தள விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விசை $\underline{R}$ ஆக ஒடுங்கும்.

$\underline{R} \neq 0, \underline{M_o}^R \neq 0$ எனில் அத் தொகுதி ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டலாம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரே தளத்திலே செயற்படுகின்ற ஒரு தனி விசையும் ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து சம நிலையை உண்டுபண்ணு. ஆனல் அவற்றை முந்திய திசைக்கு இணையான திசையிலே செயற்படுகின்ற ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாக மாற்ற முடியும்.

இதை நிறுவ $\underline{M}_o^R$ என்ற சுழலிணையை, ஒவ்வொன்றும் R அளவுள்ள இரு சமனுமெதிருமான $(\underline{R}, -\underline{R})$ என்னும் விசைகளைக் கொண்டு, ஒன்று $\underline{R}$ன் திசைக்கு நேரெதிராக படம் 5-11ல்



$$d = \frac{|\underline{M}_o^R|}{|\underline{R}|}$$

படம் 5–11

காட்டியவாறு OB வழியாகவும், மற்றென்று O′C வழியாகவும் செயல்படும் சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்க. இங்கு O′C என்னும் கோடு, $\underline{M}_o^R$வின் குறிக்கேற்ப OBக்கு வலமாகவோ அல்லது இடமாகவோ அமைந்து, OB, O′Cகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவு

$$= \frac{|\underline{M}_o^R|}{|\underline{R}|}$$ ஆக நிறுவப்படும்.

Oவில் செயற்படும் விசைகள் ஒன்றையொன்று சமப்படுத்திக் கொள்வதால், O'இல் O'C வழியே செயற்படும் $\underline{R}$ என்னும் தனி விசையே எஞ்சியுள்ளதாகும்.

$\underline{R}$, $\underline{M_o^R}$ ஆகியவற்றின் பகிர்வுகளைக் காணுதல்:

$$\underline{F_i} = F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j}$$

$$\underline{r_i} = x_i\,\underline{i} + y_i\,\underline{j}$$

$$\therefore \quad \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$$

அதாவது $R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix}\,\underline{i} + F_{iy}\,\underline{j} \right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \right) \underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \right) \underline{j}$$

$\therefore \quad R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ என்றாகும்.

மேலும் $\underline{M_o^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & O \\ F_{ix} & F_{iy} & O \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})\,\underline{k}$$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) \underline{k} = M_o^R\,\underline{k}$, $\underline{k}$ என்பது

XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும் ஓரலகுத் திசையி யாகும்.

O′ என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ எனக் கொள்ள

$$\underline{M_o^R} = r \wedge \underline{R} \text{ என்றாக வேண்டும்.}$$

அதாவது $M_o^R \underline{k} = (x\,\underline{i} + y\,\underline{j}) \wedge (R_x\,i + R_y\,j)$

$$= (x R_y - y R_x)\,\underline{k}$$

அதாவது $M_o^R = x R_y - y R_x$ ஆகும்.

இதுவே O′ வழியே செயற்படும் தனி விசை $\underline{R}$ செயற்படும் கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

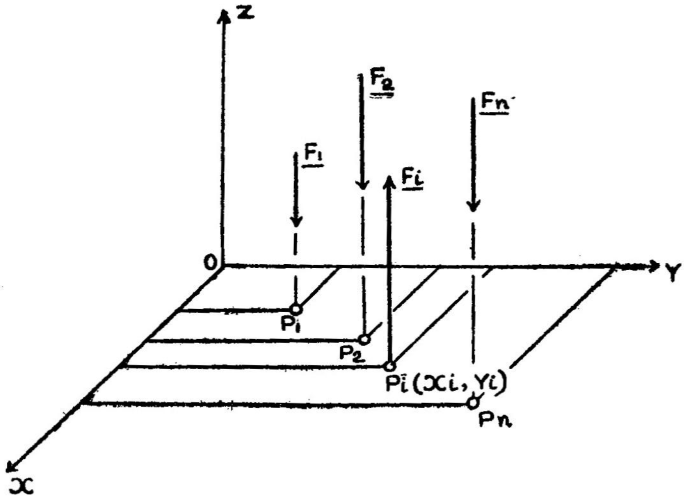
5—5 (3C) (iii) ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாக அமையும் விசைத் தொகுதி :

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots\ldots \underline{F_i}, \ldots\ldots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகள் z அச்சுக்கு இணையாக இருக்கட்டும். அவ்விசைகள் XOY தளத்தைப் படம் 5-12ல் காட்டியவாறு $P_1, P_2, \ldots\ldots P_i, \ldots\ldots P_n$ என்னும் புள்ளி களில் வெட்டட்டும். Oவைச் சுட்டமைப்பாகக் கொண்டு P_i என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{r_i}$ எனக் கொள்க.

Oவின் வழியே $\underline{F_i}$யினது செயற்படும் கோட்டிற்கு இணையாக வரையும் கோட்டில் படம் 5–12ல் காட்டியவாறு, $\underline{F_i}, -\underline{F_i}$ என்னும் சமனுமெதிருமான விசைகளை ஏற்படுத்துக. இவற்றின் தொகுபயன் சுழியாவதால், இவை எடுத்த விசைத் தொகுதியின் அமைப்பைப் பாதிப்பதில்லை.

எனவே P_iயில் செயற்படும் $\underline{F_i}$ என்னும் விசையானது, Oவில் செயற்படும் $\underline{F_i}$ என்னும் விசைக்கும், அத்துடன் ஒருமிக்க அமையும் $(\underline{r_i} \wedge \underline{F_i})$ என்னும் திருப்புத் திறனைப் பெற்ற $(\underline{F_i}, -\underline{F_i})$ என்னும் ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இவ்வாறே இணை விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசையையும், Oவின் வழியே செயற்படும் சமாந்தர விசையாகவும், அத்துடன் சேர்ந்த சுழலிணையாகவும் மாற்றியமைக்கலாம்.



படம் 5–12

O வழியே சமாந்தரமாகச் செயற்படும் $\underline{F_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_i} \dots\dots + \underline{F_n} = \underline{R}$ என்ற தொகுபயன் விசைக்கும்,

அத்துடன் ஒருமிக்க அமையும் சுழலிணைப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைத் திருப்புத் திறனாகவுமுடைய $\underline{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$ என்னும் ஒரு தொகுபயன் சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இங்கு $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \underline{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \underline{k}$ ஆகும்.

$$\underline{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i \underline{i} + y_i \underline{j}) \wedge (F_i \underline{k})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-x_i F_i \underline{j} + y_i F_i \underline{i})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i F_i\right) \underline{i} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i F_i\right) \underline{j} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\underline{R}$ என்பது $\underline{k}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையிலும், $\underline{M}_o^R$ என்பது XOY தளத்திலும் செயற்படுவதால் அவைகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் செயற்படுவதாகும்.

ஆதலால் இணை விசைத் தொகுதி ஒன்றை, யாதேனும் ஒரு O என்னும் புள்ளியில் சமாந்தரமாகச் செயற்படும் ஒரு தனி விசை $\underline{R}$ ஆகவும், அத்துடன் ஒருமிக்க இணை விசைகளுக்குச் செங்குத் தாக அமையும் தளத்தில் செயற்படும் ஒரு சுழலிணையாகவும் ஒடுக்க முடியும்.

தனி விசை $\underline{R} = O$ எனில், இணை விசைத் தொகுதி $\underline{M}_o^R$ என்னும் ஒரு சுழலிணையாகும்.

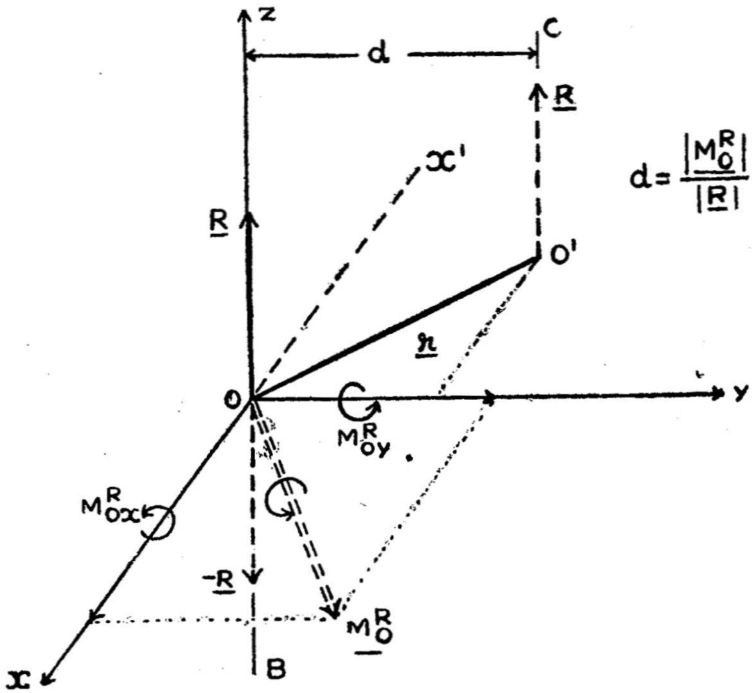
$\underline{M}_o^R = O$ எனில் இணை விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விசை $\underline{R}$ ஆக ஒடுங்கும்.

$\underline{R} \neq 0$, $\underline{M}_o^R \neq 0$ எனில், அவ்விணைத் தொகுதி ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்கும் எனக் காட்டலாம்.

இதை நிறுவ, முதலில் $\underline{R}$ என்பது Z அச்சின் வழியே செயற் படுவதாகவும், $\underline{M}_o^R$ என்னும் சுழலிணை XOY தளத்திலமைவ தாகவும் கொள்ளவும்.

$\underline{M}_o^R$ என்னும் சுழலிணையை, ஒவ்வொன்றும் $\underline{R}$ அளவுள்ள இரு சமனுமெதிருமான ($\underline{R}$, $-\underline{R}$) என்னும் விசைகளைக் கொண்டு,

ஒன்று $\underline{R}$ன் திசைக்கு நேரெதிராக, படம் 5–13ல் காட்டியவாறு OB வழியாகவும், மற்றொன்று O′C வழியாகவும் செயல்படும் சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்க.



படம் 5–13

இங்கு O′C என்னும் கோடு $\underline{M}_o^R$வின் குறிக்கேற்ப z அச்சுக்கு இணையாக மிகைத் திசையிலோ அல்லது குறைவுத் திசையிலோ அமைந்தும், OB, O′Cகளுக்கு இடையிலமையும் செங்குத்துத் தொலைவு $= \dfrac{|\underline{M}_o^R|}{|\underline{R}|}$ ஆக இருக்குமாறும் நிறுவப்படும்.

Oவில் செயற்படும் விசைகள் ஒன்றை ஒன்று சமப்படுத்திக் கொள்வதால் O′இல், O′C வழியாகச் செயற்படும் $\underline{R}$ என்னும் தனி விசையே எஞ்சியுள்ளதாகும்.

$\underline{R}$, $\underline{M}_o^R$ ஆகியவற்றின் பகிர்வுகளைக் காணுதல் :

$$\underline{F_i} = F_i \underline{k}$$

$$\therefore \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i \underline{k}$$

அதாவது $R\underline{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \underline{k}$

$$\therefore R = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad \text{ஆகும்.}$$

மேலும் $\underline{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i}$

$$M_{ox}^R \underline{i} + M_{oy}^R \underline{j} = (\Sigma y_i F_i) \underline{i} - (\Sigma x_i F_i) \underline{j}$$

அதாவது $M_{ox}^R = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i F_i \right)$; $M_{oy}^R = - \sum_{i=1}^{n} x_i F_i$

ஆகும்.

O′ என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ எனக் கொள்ள

$\underline{M}_o^R = \underline{r} \wedge \underline{R}$ என்றாக வேண்டும்.

அதாவது $M_{ox}^R \underline{i} + M_{oy}^R \underline{j} = (x\underline{i} + y\underline{j}) (R \underline{k})$

$$= -xR\underline{j} + yR\underline{i}$$

$$= yR\underline{i} - xR\underline{j}$$

ஆதலால் $M_{ox}^R = yR$, $M_{oy}^R = -xR$ ஆகும்.

அதாவது $x = -\frac{M_{oy}^{R}}{R}$, $y = \frac{M_{ox}^{R}}{R}$ என்று வரையறுக்கப்படும்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 5—1. 10 கி.கி. அளவுள்ள விசை ஒன்று துவக்கப் புள்ளி O வழியே y அச்சின் மிகைத் திசையில் செயல்படுகிறது. அவ்விசையை முறையே (a) A (0, 0, 2) செ.மீ., (b) B (0, 2, 0) செ.மீ., (c) C (2, 0, 0) செ.மீ., (d) D (2, 2, 2) செ.மீ. என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படுமாறு நகர்த்துவதாகில் எடுத்த விசைக்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதிகளைக் காண்க.

இங்கு $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி.கி.

(a) {Oவில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி.கி. என்னும் விசை}

$\equiv$ {A (0, 0, 2)ல் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$} + திருப்புத் திறன்

$(\underline{AO} \wedge \underline{F})$ என்னும் ஓர் சுழலிணை $\underline{C}_1$

$\equiv$ (Aயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$) + $\underline{C}_1 = -2k \wedge 10\,\underline{j}$

$= 20\,\underline{i}$ செ. மீ. கி. கி.

(b) {Oவில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி. கி. என்னும் விசை}

$\equiv$ {B (0, 2, 0)வில் $\underline{F} = 10\underline{j}$} + $\underline{C}_2 = \underline{BO} \wedge \underline{F}$

= (Bயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$) + $\underline{C}_2 = -2\,\underline{j} \wedge 10\,\underline{j} = 0$.

(c) {Oவில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி. கி. என்னும் விசை}

$\equiv$ {C (2, 0, 0) வில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$} + $\underline{C}_3 = \underline{CO} \wedge \underline{F}$

= (Cயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$) + $C_3 = -2\,\underline{i} \wedge 10\,\underline{j}$

$= -20\,\underline{k}$ செ. மீ. கி. கி.

(d) {Oவில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி.கி. என்னும் விசை}

$\equiv$ {D (2, 2, 2)வில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$} + $\underline{C}_3 = \underline{DO} \wedge \underline{F}$

$\equiv$ {Dயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$} + $\underline{C}_3 = (-2\underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k}) \wedge 10\,\underline{j}$

= (Dயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$) + $\underline{C}_3 = -20\,\underline{k} + 20\,\underline{i}$

= {Dயில் $\underline{F} = 10\,\underline{j}$ கி.கி.} + {$\underline{C}_3 = 20\,\underline{i} - 20\,\underline{k}$ செ.மீ.கி.கி.}

மாதிரி 5—2. மூன்று விசைகளும், இரண்டு சுழலிணைகளும் பின்வருமாறு அமைகின்றன:

$\underline{F}_1 = 6\underline{i} + 0\underline{j} + 8\underline{k}$ என்னும் விசை A (0, 2, 2) என்னும் புள்ளியிலும்,

$\underline{F}_2 = 10\underline{i} + 10\underline{j} + 10\underline{k}$ என்னும் விசை B (2, 2, 2) என்னும் புள்ளியிலும்,

$\underline{F}_3 = 4\underline{i} + 8\underline{j} + 0\underline{k}$ என்னும் விசை C (2, 4, 0) என்னும் புள்ளியிலும்,

$\underline{C}_1 = 12\underline{i} + 12\underline{j} + 12\underline{k}$

$\underline{C}_2 = 0\underline{i} - 6\underline{j} + 6\underline{k}$ என்றும் அமைகின்றன.

இவற்றிற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பைத் துவக்கப் புள்ளி பற்றி வரையறுக்க.

{எடுத்த விசைத் தொகுதி + சுழலிணைப்புத் திறன் தொகுதி} $\equiv$ {Oவில் $\underline{R} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F}_i$ என்னும் தொகுபயன் விசை} + {$\underline{M}_O^R = \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i$ என்னும் திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ஓர் சுழலிணை. $+ \sum_{i=1}^{2} \underline{C}_i$}

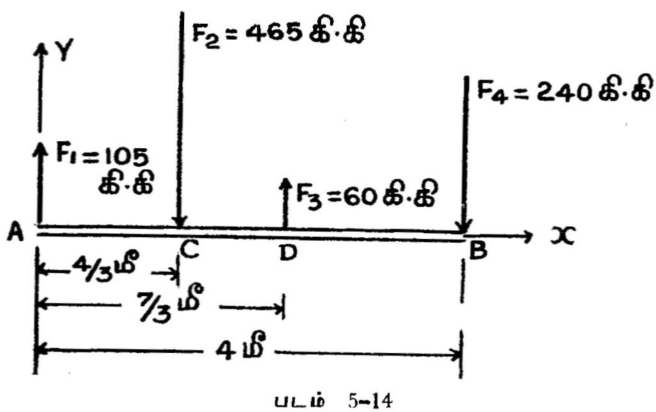
$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \\ 20\,\underline{i} + 18\,\underline{j} + 18\underline{k} \end{array} \right\} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 12\underline{i} + 6\underline{j} + 18\underline{k}$$

$$\equiv \{ \underline{R} = (20\underline{i} + 18\underline{j} + 18\underline{k}) \} + \{ 28i + 18\underline{j} + 6\underline{k}$$

என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஓர் சுழலிணை.}

மாதிரி 5—8. 4 மீட்டர் நீளமுள்ள உத்திரம் (beam) ஒன்றில் படம் 5-14ல் காட்டியவாறு விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவைகளுக்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை (a) A என்னும் புள்ளி (b) B என்னும் புள்ளியிலும் வரையறுக்க (c) அவ்விசைத் தொகுதிக்குச் சமமாக ஒடுங்கும் ஒரு தனி விசையைக் காண்க.



படம் 5–14

Aஐத் துவக்கப் புள்ளியாகவும், AB என்னும் உத்திரத்தை x அச்சாகவும் கொள்க. Aயில் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

அப்பொழுது,

$\underline{F}_1 = 105\,\underline{j}$ என்னும் விசை A (0, 0) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது.

$\underline{F}_2 = 465\,\underline{j}$ என்னும் விசை (C $\frac{4}{3}$, 0) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது.

$\underline{F}_3 = 60\,\underline{j}$ என்னும் விசை D ($\frac{7}{3}$, 0) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது.

$\underline{F}_4 = -240\,\underline{j}$ என்னும் விசை B (4, 0) என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது.

(a) A என்னும் புள்ளியில் "விசை-சுழலிணை" அமைப்பைப் பெறுதல் :

கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதிக்குச் சமமாக A என்னும் புள்ளியில் அமையும் ஒரு தனி விசை, ஒரு தனிச் சுழலிணை ஆகியவற்றை R, $\underline{M}_A^R$ எனக் கொள்க.

அப்பொழுது $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = 105\,\underline{j} - 465\,\underline{j} + 60\,\underline{j} - 240\,\underline{j} =$

$-540\,\underline{j}$ கி. கி.

$$= \underline{M}_A^R = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i$$

$$= \{(0\cdot\underline{i} + 0\cdot\underline{j}) \wedge 105\,\underline{i}\} + \{\tfrac{4}{3}\,\underline{i} \wedge 465\,\underline{j}\}$$

$$+ \{\tfrac{7}{3}\,i \wedge 60\,\underline{j}\} + \{4\underline{i} \wedge -240\,\underline{j}\}$$

$$= 0 - 620\,\underline{k} + 140\,\underline{k} - 960\,\underline{k}$$

$$= -1440\,\underline{k}$$ மீ. கி. கி.

(b) B என்னும் புள்ளியில் "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை வரையறுத்தல் :

A என்னும் புள்ளியில் $\underline{R} = -540\,\underline{j}$ என்னும் விசையும், $\underline{M}_A^R = -1440\,\underline{k}$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஓர் சுழலிணையும் எடுத்த விசைத் தொகுதிக்குச் சமமாகும்.

B என்னும் புள்ளியில் $(\underline{R}, -\underline{R})$ என்னும் சமனுமெதிருமான விசைகளை ஏற்படுத்துக.

எனவே $\left\{A\text{யில் } \underline{R},\ \underline{M}_A^R\right\} \equiv \left\{A\text{யில் } \underline{R},\ \underline{M}_A^R\right\}$

$+ \ \{B\text{யில் } (\underline{R}, \underline{R})\}$

$$\equiv \left\{B\text{யில் } \underline{R}\right\} + \underline{M}_A^R + \underline{BA} \wedge \underline{R}$$

$$\equiv \left\{B\text{யில் } \underline{R} = -540\,\underline{j}\right\} + \underline{M}_B^R = -1440\underline{k} + (-4\underline{i} \wedge -540\underline{j})$$

$$= \{B\text{யில் } \underline{R} = -540\underline{j}\} + \underline{M}_B^R = -1440\underline{k} + 2160\underline{k}$$

$$= \{B\text{யில் } \underline{R} = -540\underline{j}\} + \underline{M}_B^R = 720\,\underline{k}\}.$$

(c) விசைத் தொகுதியை ஒரு தனி விசையாக ஒடுக்குதல் :

இங்கு $\underline{R} = -540\,\underline{j}$, $\underline{M}_A^R = -1440\,\underline{k}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைகின்றன.

எனவே இவற்றை ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாக மாற்ற முடியும். அவ்வித விசை முந்திய விசை $\underline{R} = -540\underline{j}$-க்குச் சமமாகவும், அது செயல்படும் புள்ளி E ஆனது, A என்னும்

புள்ளி பற்றி எடுக்கும் $\underline{R}$ என்னும் விசையின் திருப்புத் திறன், $\underline{M}_A^R = -1440\underline{k}$-க்குச் சமமாக இருக்குமாறும் அமைய வேண்டும்.

ஆகவே, $\underline{AC} \wedge \underline{R} = \underline{M}_A^R$

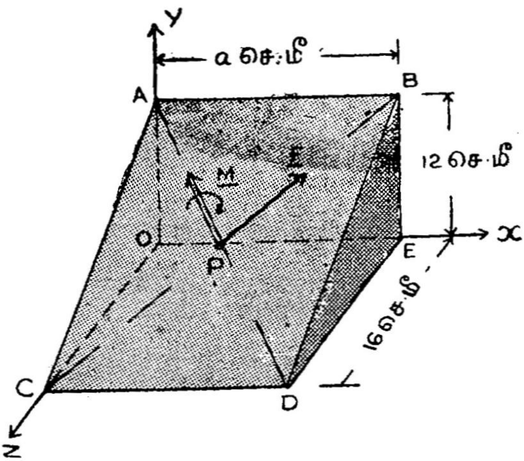
$$x\,\underline{i} \wedge -540\,\underline{j} = -1440\,\underline{k}$$

$$-540\,x\,\underline{k} = -1440\,\underline{k}$$

$x = \frac{8}{3}$ மீட்டர்.

அதாவது $\underline{R} = -540\,\underline{j}$ கி. கி. என்னும் தனி விசையானது, உத்திரத்தில் Aயிலிருந்து $\frac{8}{3}$ மீ. தொலைவிலுள்ள E என்னும் புள்ளியில் செயற்படும்.

மாதிரி 5—4. படம் 5-15ல் காட்டியவாறு அமையும் "விசை-சுழலிணை"க்குச் சரிநிகரான ஓர் ஒற்றை விசையை ஏற்படுத்த முடியுமெனக் கொண்டு "a"யின் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 5-15

விசை, சுழலிணைப்புத் திறன்களின் எண் மதிப்புக்கள் 100 கி.கி., 1000 கி.கி. செ.மீ. என்றால் ஒற்றை விசை செயல்படும் கோடு, yz தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி ஆகியவற்றை வரையறுக்க.

Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுக்கும்போது A (0, 12, 0) செ.மீ., B (a, 12, 0) செ.மீ., C (0, 0, 16) செ.மீ., D (a, 0, 16)செ.மீ., P $\left(\frac{a}{2}, 6, 8\right)$செ.மீ. ஆகும்.

$\{\underline{F}, \underline{M}\}$ ஆகியவற்றிற்குச் சமமான ஒற்றை விசை yz தளத்தை G $(0, \bar{y}, \bar{z})$ என்னுமிடத்தில் வெட்டட்டும்.

$$\underline{CB} = \underline{OB} - \underline{OC}$$

$$= (a\underline{i} + 12\underline{j}) - 16\underline{k}$$

$$= a\underline{i} + 12\underline{j} - 16\underline{k}$$

$$= \sqrt{a^2 + 144 + 256}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{k}\right\}$$

$$\therefore \underline{F} = 100\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{k}\right\}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{a^2 + 400}}\{a\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}\}$$ கி.கி.

$$\underline{DA} = \underline{OA} - \underline{OD}$$

$$= 12\,\underline{j} - (a\,\underline{i} + 16\,\underline{k})$$

$$= -a\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}$$

$$= \sqrt{a^2 + 400}\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2 + 400}}\underline{k}\right\}$$

$$\therefore \quad \underline{M} = 1000 \left\{ -\frac{a}{\sqrt{a^2+400}}\,\underline{i} + \frac{12}{\sqrt{a^2+400}}\,\underline{j} - \frac{16}{\sqrt{a^2+400}}\,\underline{k} \right\}$$

$$= \frac{1000}{\sqrt{a^2+400}} \{-a\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}\}$$

$\underline{F}$, $\underline{M}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைவதால்,

$$\underline{F} \cdot \underline{M} = 0$$

அதாவது $(a\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}) \cdot (-a\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}) = 0$

$$-a^2 + 144 + 256 = 0$$

$$a^2 = 400.$$

அதாவது $a = 20$ செ.மீ.

$$\therefore \quad \underline{F} = \frac{100}{\sqrt{800}} \{20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}\}$$

$$= \frac{100}{20\sqrt{2}} \{20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}\}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} (20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\underline{k})$$

$$= 5\sqrt{2}(10\,\underline{i} + 6\,\underline{j} - 8\,\underline{k}) \text{ கி.கி.}$$

$$\underline{M} = \frac{1000}{\sqrt{800}} \{-20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k}\}$$

$$= \frac{1000}{20\sqrt{2}} (-20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k})$$

$$= \frac{50\sqrt{2}}{2} (-20\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 16\,\underline{k})$$

$$= 50\sqrt{2} (-10\,\underline{i} + 6\,\underline{j} - 8\,\underline{k})$$

$$= (-500\sqrt{2}\,\underline{i} + 300\sqrt{2}\,\underline{j} - 400\sqrt{2}\,\underline{k}) \text{ செ.மீ.கி.கி.}$$

$G(O, \bar{y}, \bar{z})$ என்னுமிடத்தில் சமனுமெதிருமான $\underline{F}, -\underline{F}$ என்னும் விசைகளை ஏற்படுத்தவும். அப்பொழுது,

Gயில் $-\underline{F}$ என்னும் விசையும், Pயில் $\underline{F}$ என்னும் விசையும் $\underline{GP} \wedge \underline{F}$ என்னும் திருப்புத் திறனைத் தோற்றுவித்து $\underline{M}$ஐ சுழித்து விடும்.

எனவே இறுதியாக Gயில் $\underline{F}$ என்னும் ஒற்றை விசை மீதமாக இருக்கும். அப்பொழுது,

$$\underline{M} = \underline{GP} \wedge \underline{F}$$

$$(-500\sqrt{2}\,\underline{i} + 300\sqrt{2}\,\underline{j} - 400\sqrt{2}\,\underline{k}) = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 6-\bar{y} & 8-\bar{z} \\ 10 & 6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 5\sqrt{2}\,\{(8\bar{y} + 6\bar{z} - 96)\,\underline{i} - \underline{j}\,(-160 + 10\,\bar{z}) + \underline{k}\,(10\,\bar{y})\}$$

இருபுறங்களிலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களைச் சமப் படுத்த,

$$5\sqrt{2}\,(8\bar{y} + 6\bar{z} - 96) = -500\sqrt{2} \qquad \text{(i)}$$

$$5\sqrt{2}\,(160 - 10\,\bar{z}) = 300\sqrt{2} \qquad \text{(ii)}$$

$$5\sqrt{2}\,(10\,\bar{y}) = -400\sqrt{2} \qquad \text{(iii)}$$

(ii)வது சமன்பாட்டிலிருந்து $\bar{z} = 10$ செ.மீ. எனவும்

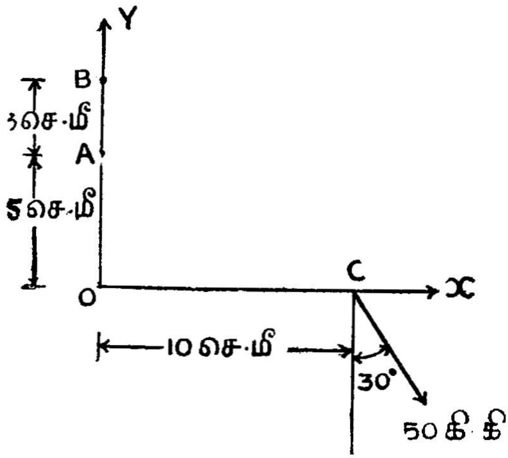
(iii)வது சமன்பாட்டிலிருந்து $\bar{y} = -8$ செ.மீ. எனவும் கிடைக்கும்.

[குறிப்பு : $\bar{y}, \bar{z}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் (i)வது சமன் பாட்டை நிறைவேற்றுவதையும் காணலாம்.]

பயிற்சி

5—1. 50 கி.கி. விசை, தட்டு ஒன்றின் மூலையில் படம் 5-16ல் காட்டியவாறு செயற்படுகிறது.

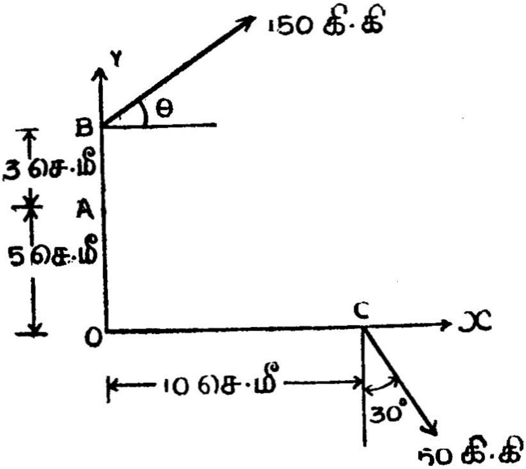
அவ்விசைக்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை A என்னும் புள்ளியில் வரையறுக்க.



படம் 5–16

[விடை : Aயில் $25\underline{i} - 25\sqrt{3}\,\underline{j}$ கி.கி. அளவுள்ள விசையும், $\underline{M_A} = -308\ \underline{k}$ செ.மீ. கி.கி. என்னும் திருப்புத் திறனைப் பெற்ற ஒரு சுழலிணையும் செயற்படும்.

5—2. அவ்வாறே 150 கி.கி. விசை ஒன்று படம் 5-17-ல் காட்டியவாறு B என்னும் புள்ளியிலும் மற்றொரு விசை Aயிலும்



படம் 5–17

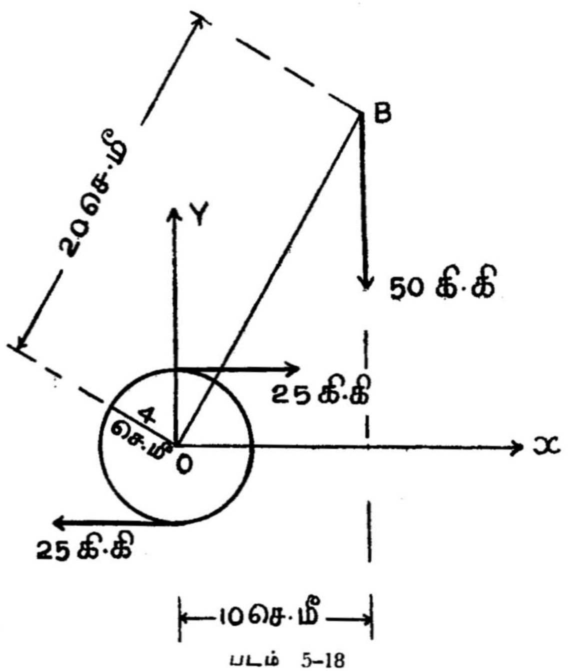
செயற்படுகிறதென்றல் விசைக்குச் சரிநிகரான அமைப்பையும் வரையறுக்க.

[விடை : (i) $\theta = 46{\cdot}8^{\circ}$ என்று இருக்கும்போது
Aயில் தொகுபயன் விசை $= (-17{\cdot}6\ \underline{i} - 132{\cdot}65\ \underline{j})$ கி.கி.

(ii) $\theta = -46{\cdot}8^{\circ}$ என்று இருக்கும்போது
Aயில் தொகுபயன் விசை $= (-76{\cdot}6\ \underline{i} + 66{\cdot}05\ \underline{j})$ கி.கி.]

5—8. படம் 5-18ல் காட்டியவாறு நெம்புகோல் ஒன்றில் செயல்படும் சுழலிணை, விசை ஆகியவைகளுக்குச் சரிநிகரான ஒற்றை விசையைக் காண்க. அவ்விசை நெம்புகோலில் தாக்கும் புள்ளிக்கும் இருசுக்கும் (Shaft) உள்ள இடைத் தொலைவைக் காண்க.

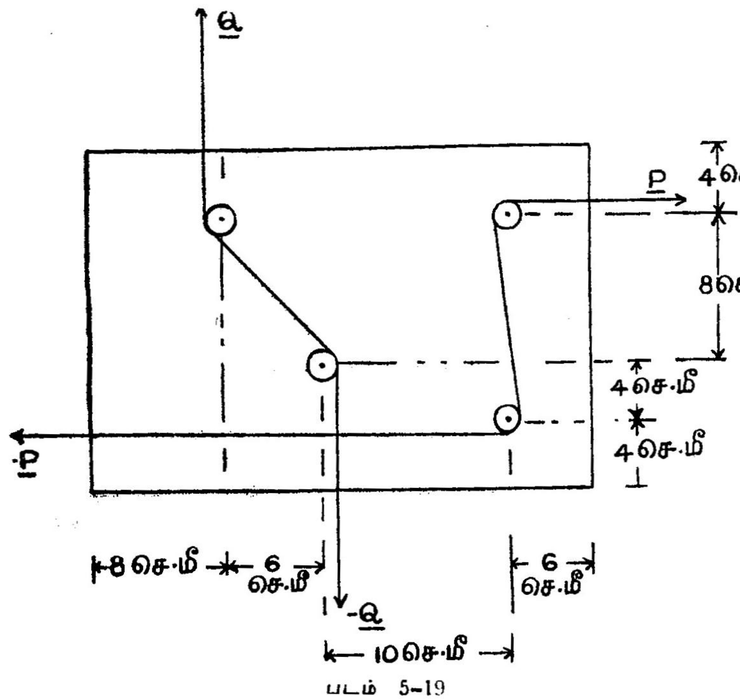
[விடை : $-50\ \underline{j}$ கி.கி., 28 செ.மீ.]



படம் 5–18

5—4. நான்கு மழமழப்பான முளைகள் ஒரு பலகையில் படம் 5-19ல் காட்டியவாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இரண்டு கயிறுகள் முளைகளைச் சுற்றியவாறு அமைந்து, P = 8 கி.கி., Q = 20 கி.கி. என்னும் விசைகளால் இழுக்கப்படுகின்றன. பலகையில் அவற்றின் தொகுபயன் சுழலிணைப்புத் திறன் 150 கி.கி. செ.மீ. என்றிருக்குமென்றால் முளைகளின் விட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

[விடை : 3 செ.மீ.]



படம் 5-19

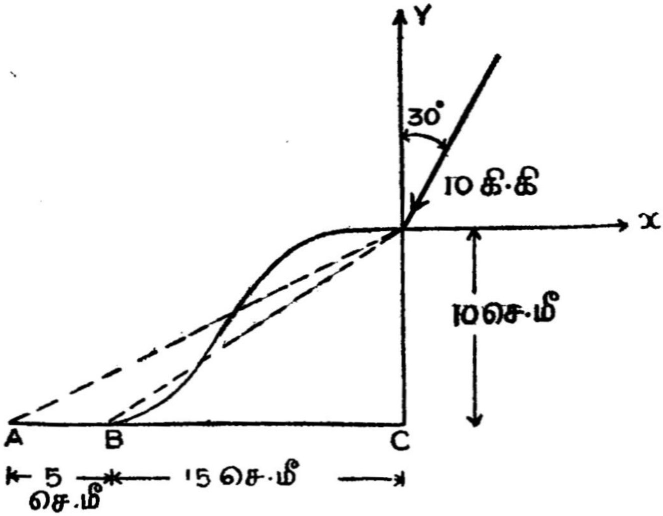
5—5. 10 கி.கி. விசை ஒன்று வளைந்த தளத்தில் படம் 5-20ல் காட்டியவாறு செயல்படுகிறது. அதைச் சமப்படுத்தும் "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை (a) A என்னும் புள்ளியிலும், (b) B என்னும் புள்ளியிலும் வரையறுக்க.

[விடை : (a) Aயில் $\underline{F} = -5\,\underline{i} - 5\sqrt{3}\,\underline{j}$ கி.கி. விசை

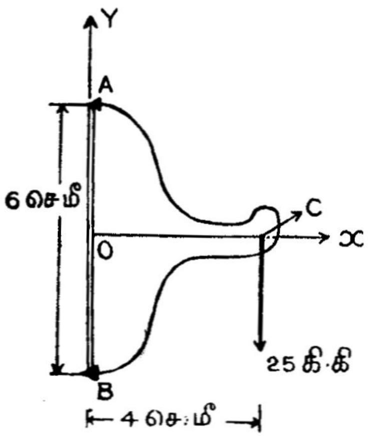
$\underline{C_A} = -123{\cdot}2\,\underline{k}$ செ.மீ. கி.கி.

(b) Bயில் $\underline{F} = -5\,\underline{i} - 5\sqrt{3}\,j$

$\underline{C_B} = -79{\cdot}9\,\underline{k}$]



படம் 5–20



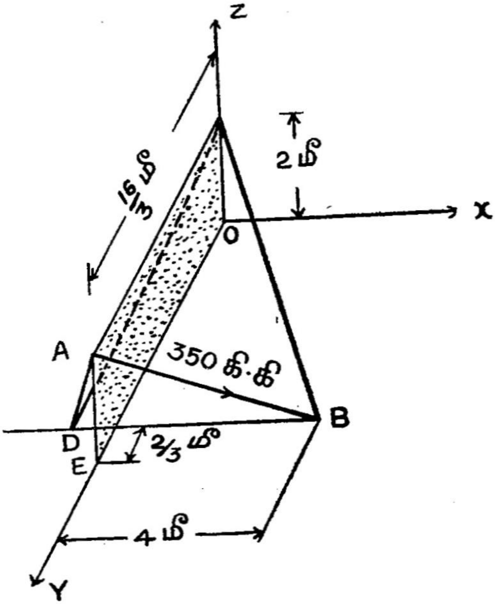
படம் 5–21

5—6. படம் 5-21ல் கொக்கி (hook) ஒன்று A, B என்னும் புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்டு உள்ளது. (a) Cயில் செயல்படும் 25 கி.கி. பளுவுக்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை B என்னும் புள்ளியில் வரையறுக்க. (b) பகுதி (a)யில் அமையும் சுழலிணைப்புத் திறனுக்குச் சரிநிகரான சுழலிணையை A, B என்னும் புள்ளிகளில் கிடையாகச் செயற்படும் இரு சமனுமெதிருமான விசைகளால் வரையறுக்க.

[விடை : (a) $\underline{F} = -25\,\underline{j}$ கி.கி., $\underline{C_B} = -100\,\underline{k}$ கி.கி. செ.மீ.

(b) $\underline{F_1} = -16{\cdot}67\,\underline{i}$ கி.கி.]

5—7. இரும்புக் கம்பிகள், சிமெண்டுக் கலவை ஆகியவற்ருல் வார்ப்பு செய்யப்பட்ட சுவர்ப் பகுதி படம் 5-22ல் காட்டியவாறு வலுவான கம்பிகளால் கட்டப்பட்டு சம நிலையில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. A, B என்னும் கம்பியில் 350 கி.கி. உள்ள இழு விசை ஒன்று செயல் படுகிறது என்ருல் அதற்குச் சரிநிகரான "விசை - சுழலிணை" அமைப்பை, (a) O என்ற புள்ளியிலும், (b) E என்னும் புள்ளியிலும் காண்க.



படம் 5–22

[விடை : (a) Oவில் $\underline{F} = (300\,\underline{i} - 100\,\underline{j} - 150\,\underline{k})$ கி.கி.

$\underline{M}_o = (-600\,\underline{i} - 1600\,\underline{j} + 600\,\underline{k})$ மீ.கி.கி.

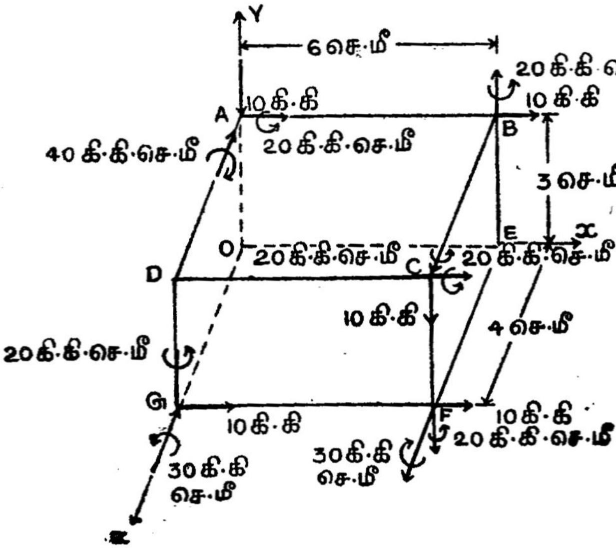
(b) Eயில் $\underline{F} = (300\,\underline{i} - 100\,\underline{j} - 150\,\underline{k})$ கி.கி.

$\underline{M}_E = (200\,\underline{i} + 600\,\underline{j})$ மீ.கி.கி.

5—8. ஒரு செவ்வகப் பெட்டியில் ஐந்து தனித்த "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதிகள் படம் 5-23ல் காட்டியவாறு செயல் படுகின்றன. (a) அவைகளில் எவ்விரு தொகுதிகள் சரிநிகராக உள்ளன எனக் காண்க. (b) அவைகளில் எத்தொகுதி Oவில், $\underline{F} = 5\,\underline{j}$, $\underline{M}_o = 60\,\underline{i} - 60\,\underline{k}$ என்னும் "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதிக்குச் சரிநிகராக அமையும்?

[விடை : (a) B, G என்னும் புள்ளிகளில் அமையும் "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதிகள் சரிநிகரானவை.

(b) C என்னும் புள்ளியில் அமையும் "விசை-சுழலிணை".]



படம் 5–23

5—9. படம் 5-24ல் A என்னும் புள்ளியில் "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதியில் விசை, சுழலிணைப்புத் திறன் ஆகியவற்றின் எண் மதிப்புகள் முறையே $|\underline{F}| = 12{\cdot}5$ கி.கி., $|\underline{M_A}| = 250$ கி.கி. செ.மீ. எனில், அதற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை"த் தொகுதியை

(i) D என்னும் புள்ளி

(ii) E என்னும் புள்ளி

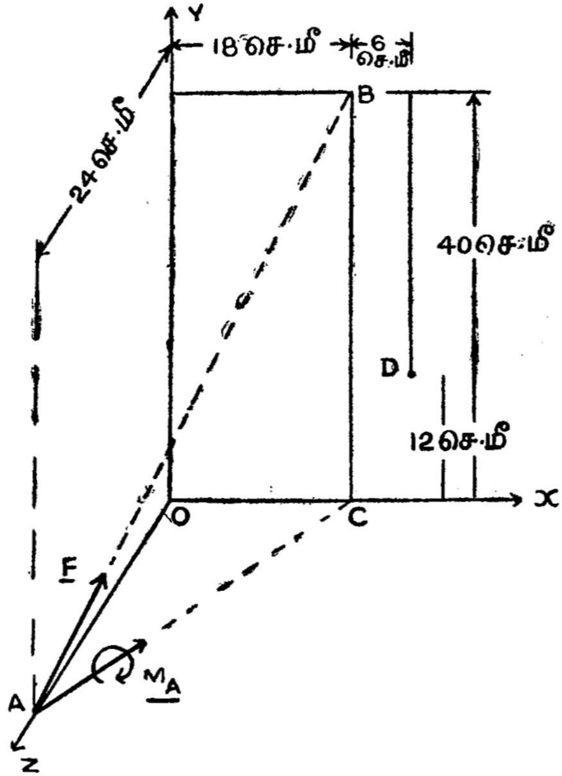
ஆகியவற்றில் காண்க.

[விடை : (i) $\underline{F} = (4{\cdot}5\,\underline{i} + 10\,\underline{j} - 6\,\underline{k})$ கி.கி.

$\underline{M_D} = (-18\,\underline{i} - 36\,\underline{j} - 386\,\underline{k})$ கி.கி. செ.மீ.

(ii) $\underline{F} = (4{\cdot}5\,\underline{i} + 10\,\underline{j} - 6\,\underline{k})$ கி.கி.

$\underline{M_E} = (150\,\underline{i} + 108\,\underline{j} - 20\,\underline{k})$ கி.கி. செ.மீ.]

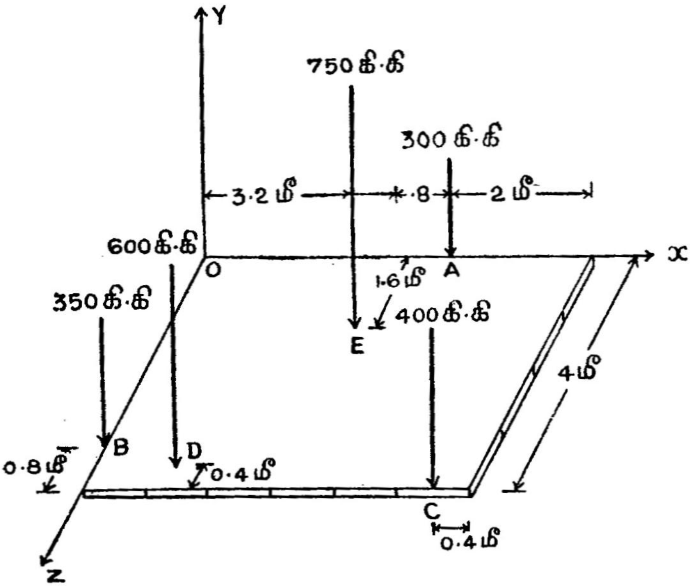


படம் 5–24

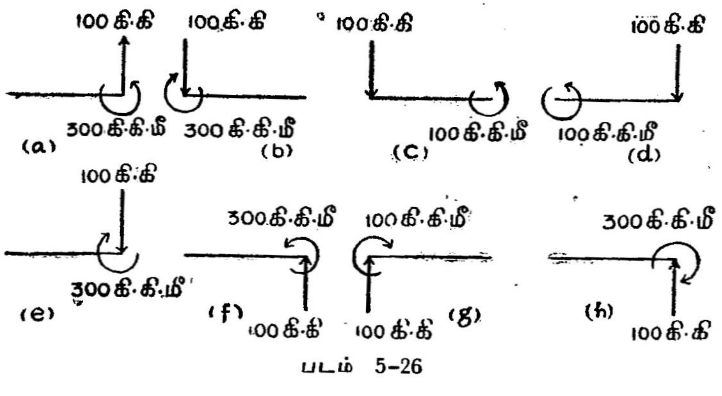
5—10. 4 மீ. × 6 மீ. அளவுள்ள கான்கிரீட் தளம் ஒன்று (concrete slab) படம் 5-25ல் (அடுத்த பக்கம் காண்க) காட்டிய வாறு 5 தூண்களில் செயல்படும் விசைகளைத் தாங்குகிறது. இவைகளுக்குச் சரிநிகராக அமையும் ஒற்றை விசையின் செயல்படும் புள்ளி, எண் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

[விடை : $\underline{R}$ = 2400 கி. கி. ↓ என்னும் தொகுபயன் விசை, (2·732, 0, 2·532) மீ. என்னும் புள்ளியில் செயல்படுகிறது.]

5—11. 4 மீட்டர் நீளமுள்ள உத்திரம் (beam) ஒன்றில் படம் 5-26ல் காட்டியவாறு வெவ்வேறான வழிகளில் விசை ஒன்றும், திருப்புத் திறன் ஒன்றும் செயல்படுகின்றன. அவற்றில் எவ்விரு அமைப்புகள் சரிநிகரானவை எனக் காண்க.



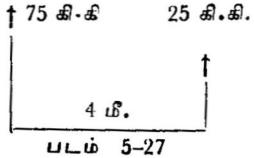
படம் 5–25



படம் 5–26

[விடை : (b), (d) அமைப்புகள் சரிநிகரானவை.]

5—12. 4 மீட்டர் நீளமுள்ள உத்திரம் ஒன்றில் படம் 5-27ல் காட்டியவாறு விசைகள் செயல்படுகின்றன. 5-11ஆவது கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்புகளில்



படம் 5–27

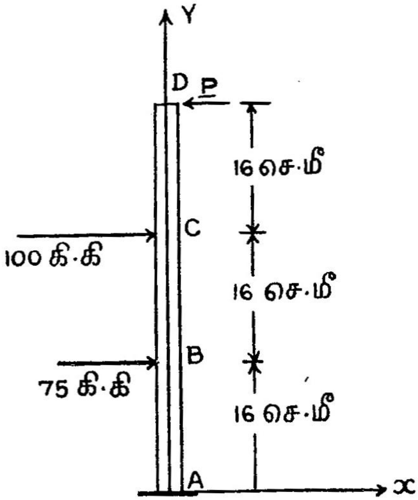
எது இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைகளுக்குச் சரிநிகராக உள்ளது எனக் காண்க.

[விடை : (h) அமைப்பு]

5—12. இயந்திரம் ஒன்றின் கைப்பிடியில் படம் 5–28ல் காட்டியவாறு விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயனையும், அது செயற்படும் புள்ளியையும், P என்னும் விசையின் எண் மதிப்பு (a) P = 25 கி. கி., (b) P = 250 கி. கி., (c) P = 175 கி. கி. என்று உள்ள போது காண்க.

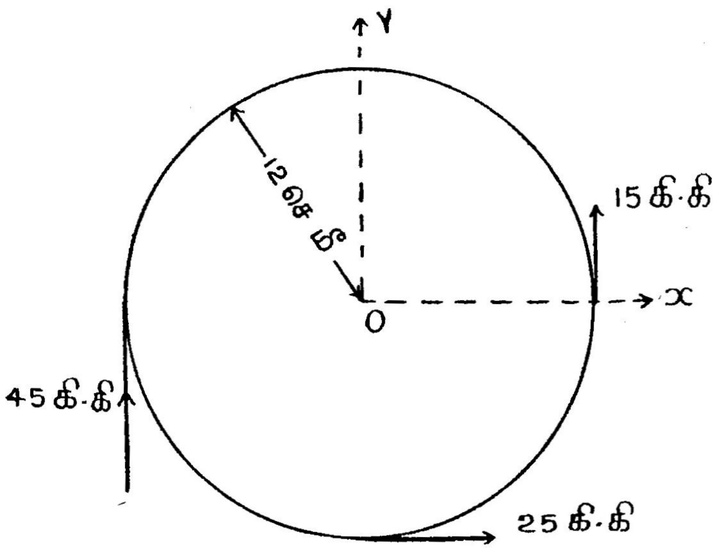
[விடை :

(a) 37·32 செ. மீ.
(b) −285·32 செ. மீ.
(c) ∞]



படம் 5–28

5—13.



படம் 5–29

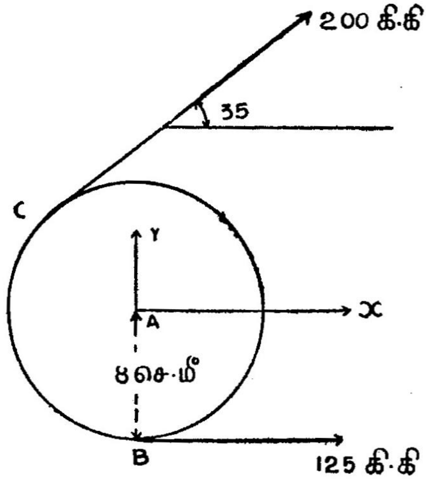
ஒரு துணைப்பொறி (gear) அமைப்பில் படம் 5-29-ல் காட்டியவாறு விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றிற்குச் சரிநிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை O என்னும் புள்ளியில் வரையறுக்க.

[விடை : $\underline{R} = (25\underline{i} + 60\underline{j})$ கி. கி.

$\underline{M}_o^R = -60\underline{k}$, $\left|M_o^R\right|$ 60 செ. மீ. கி. கி. ↻ ;

$\theta =$ 67·4°

5—14. படம் 5-30ல் காட்டியுள்ள தோல் பட்டை (belt) ஒன்றின் இருபுறங்களில் செயல்படும் இழுப்பு விசைகளுக்குச் சரி



படம் 5–30

நிகரான "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை A என்னும் புள்ளியில் வரையறுக்க.

[விடை : $\underline{R} = 309{\cdot}32\underline{i} + 129{\cdot}06\underline{j}$

$\underline{M}_A^R = -600\underline{k}$]

6. கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் சமநிலை

6–1. கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றின் சமநிலை

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற யாதேனுமொரு விசைத் தொகுதி, அப் பொருளினது விருப்பப்படி எடுக்கும் யாதேனுமொரு புள்ளியிலே செயற்படுகின்ற ஒரு விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும் என முன்பே நிறுவப் பட்டது. அவ்வித "விசை-சுழலிணை" அமைப்பை O என்னும் துவக்கப் புள்ளியில், $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$, $\underline{M_o}^{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M_i} \wedge \underline{F_i}$ என்பவை வரையறுக்கும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளிலே செயற்படுகின்ற தொகுபயன் விசையும், தொகுபயன் சுழலிணைப்புத் திறனும் யாதேனுமொரு புள்ளியில் சுழியாகுமெனில், அப் பொருள் அமைதி நிலையிலிருப்ப தாகக் கொள்ளப்படும்.

எனவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற யாதேனுமொரு விசைத் தொகுதியினுடைய சமநிலை நிபந்தனைகள் $\underline{R} = 0$, $\underline{M_o}^{R} = 0$ ஆகும்.

இவற்றை x, y, z அச்சுகளில் குத்துப் பிரிவுகளாகப் பிரித்தும் வெளியிடலாம். அப்பொழுது,

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = 0$$

அதாவது (i) $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$

(ii) $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$

(iii) $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$ என்ற நிபந்தனைகளும்,

$$\underline{M}_o^R = M_{ox}^R \underline{i} + M_{oy}^R \underline{j} + M_{oz}^R \underline{k} = 0$$

அதாவது, (iv) $M_{ox}^R = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0$

(v) $M_{oy}^R = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0$

(vi) $M_{oz}^R = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0$

என்ற நிபந்தனைகளும் கிடைக்கப்பெறும்.

இவைகளே ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையிலிருக்கத் தேவையானதும் (Necessary) போதுமானதுமான (Sufficient) நிபந்தனைகளாகும்.

இவ்விதப் பொதுவான 6 சமநிலை நிபந்தனைகளைப் பயன் படுத்துவதற்கேற்ப அவைகள் பின்வருமாறும் வரையறுக்கப்படும்:

I: ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் யாதேனும் மூன்று நிலையான திசைகளில் விசைகளுடைய பிரித்த பகுதிகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகளைத் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

II: ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் யாதேனும் மூன்று நிலையான திசைகள் பற்றி எடுக்கும் விசைகளுடைய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைகளைத் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

I, II என்னும் நிபந்தனைகள் முறையே கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கு இடப் பெயர்ச்சி (Translocation), சுழற்சி (Rotation) ஆகிய இயக்கங்கள் இருக்க முடியாதென்பதை உறுதிப்படுத்துகின்றன.

இந்த ஆறு சமநிலைச் சமன்பாடுகளின் உதவியைக்கொண்டு ஆறுக்கு மிகைப்படாததும் தெரியாததுமான கணியங்களுக்கு (unknown quantities) உட்பட்ட ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் அமைதி அல்லது சமநிலையைப் பரந்த வெளியில் விவரித்துக் கூறும் உத்திக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண முடியும். இவ்வித உத்திக் கணக்குகள் யாவும் நிலையியலாகத் தீர்மானிக்கத் தக்கவை (Statically determinate problems). ஆறுக்கு மிகுதி யானதும் தெரியாததுமான கணியங்களுக்கு உட்பட்ட உத்திக் கணக்குகள் யாவும் நிலையியலாகத் தேரப்படாதவையாகக் கருதப்படும் (Statically indeterminate problems).

6—2. சமநிலையின் முக்கிய வகைகள் (Special cases of Equilibrium)

6—2. (1) வகை 1 : ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற விசைகளின் தொகுதி (Concurrent System of Forces)

இங்கு விசைகளின் தொகுதிக்கு உரிய விளைவு அப் புள்ளி வழியே செல்கின்ற ஓர் ஒற்றைத் தொகுபயன் விசை (Single resultant force) ஆவதால் சமநிலைக்கு வேண்டிய நிபந்தனை $\underline{R} = 0$ ஆகும்.

அதாவது $R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} = 0$

(அ - து) $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$;

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 ;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

திசையியைப் பற்றிய பொது ஆய்வில் பூச்சிய விளைவை உறுதி செய்வதற்கு மற்ற வழிகளும் உள.

எடுத்துக்காட்டாக, ஏதேனுமொரு a என்னும் அச்சுபற்றி விசைத் தொகுதியின் திருப்பு திறன் பூச்சியமாகும் என்பது பின்வரும் நிலைகளைச் சார்ந்துள்ளது :

(a) தொகுபயன் விசை பூச்சியமாக உள்ள நிலை.

(b) தொகுபயன் விசை எடுத்த அச்சையே செயல்படும் கோடாகப் பெற்றிருக்கும் நிலை.

(c) தொகுபயன் விசை எடுத்த அச்சுக்கு இணையான செயல் படும் கோட்டைப் பெற்றிருக்கும் நிலை.

α என்னும் அச்சுக்கு இணையற்றதாக எடுக்கும் β என்னும் அச்சுபற்றி விசைத் தொகுதியின் திருப்பு திறன் பூச்சியமாகும் என்பதைப் பின்வரும் நிலைகளில் ஏதேனும் ஒன்று வரையறுக்கும்:

(a) தொகுபயன் விசையே பூச்சியமாகும் நிலை; அல்லது (b) தொகுபயன் விசை α, β என்னும் இரு அச்சுகளின் ஊடே (through both axes) செயற்படும் கோட்டைப் பெற்றிருக்கும் நிலை.

இரு இணையற்ற அச்சுகளுக்கு ஒருங்கே விசையானது இணையாக அமைய முடியாததால், மூன்றாவதான (c) என்னும் நிபந்தனை β என்னும் அச்சுக்குப் பொருத்தமற்றது.

γ என்னும் மூன்றாவது அச்சானது தொகுபயன் விசை செயல் படும் கோடு, இம்மூன்று α, β, γ என்னும் அச்சுகளை வெட்டாத நிலை அல்லது α, β என்னும் அச்சுகளை வெட்டாமல் மூன்றாவ தான γ என்னும் அச்சுக்கு இணையாக அமையும் நிலை என்பவை களுக்கு ஏற்றதாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. மேலும் α, β என்னும் அச்சுகள் பற்றி எடுத்த விசைத் தொகுதி யின் திருப்பு திறன் பூச்சியமாவதுடன், மூன்றாவது அச்சு பற்றியும் பூச்சியமாகும்போது தொகுபயன் விசை பூச்சியமாகும்.

எனவே, ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படும் விசைத் தொகுதிக்கு உரிய சமநிலையை உறுதிப்படுத்த மற்றொரு வழியானது

$$\Sigma M_\alpha = 0, \quad \Sigma M_\beta = 0, \quad \Sigma M_\gamma = 0$$ என்றாகும்.

அவ்வாறே சமநிலைக்கு உரிய நிபந்தனையை வெளியிடு வதற்கு மற்றொரு சமன்பாடுகளின் தொகுதி பின்வருமாறு இருக்க வேண்டும் எனவும் நிரூபிக்கலாம். அவைகளாவன :

1. y அச்சுத் திசையில் விசைகளுடைய பகிர்வுகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாவதுடன், அதாவது

$\sum_{i=0}^{o} F_{iy} = 0$ என்றாவதுடன்,

2. விசைகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியே x z தளத்திற்கு இணையாக வரையும் தளத்தில் அமையாததும், இணையற்றதுமான d, ϕ என்னும் இரு அச்சுகள்பற்றி எடுக்கும் விசைகளுடைய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாகவும், அதாவது $\Sigma M_d = 0$, $\Sigma M_\phi = 0$ என்றும் இருக்கும்போது விசைகளின் தொகுதியால் தாக்கப்படும் கட்டிறுக்கப் பொருள் அமைதி அல்லது சமநிலையிலிருக்கும்.

எனவே, ஒரு புள்ளியிலமையும் விசைகளின் தொகுதிக்கு மூன்று தனித்த சமநிலைச் சமன்பாடுகள் முக்கியமாகத் தேவைப் படும் என இறுதியாகக் கூறலாம்.

6—2. (2) வகை 2: ஒரு தள விசைத் தொகுதி (Coplanar force system)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரே தளத்தில் செயற் படுகின்ற எவ்வித விசைத் தொகுதியும் ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ ஒடுக்கப்படக்கூடும். ஆகவே, அவ் விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்க, முதலாவதாக,

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

என்றிருக்க வேண்டும்.

இரண்டாவதாக, தொகுபயன் சுழலிணையாக ஒடுக்கப்படா தென்பதை உறுதிப்படுத்த விசைத் தொகுதி செயல்படும் தளத் திற்குச் சாய்ந்து அமையும் யாதேனுமொரு α என்றும் அச்சு பற்றித் திருப்பு திறனை எடுக்க, அது $\Sigma M_\alpha = 0$ என்றும் இருக்க வேண்டும்.

ஒரு தளத்து விசைத் தொகுதிக்கு α என்னும் அச்சு பற்றி எடுத்து உண்டாகும் $\Sigma M_\alpha = 0$ என்னும் நிபந்தனைக்குப் பதிலாக அவ் விசைத் தொகுதி அமையும் தளத்திலே யாதேனு மொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் அத் தொகுதி விசைகளுடைய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத் திற்குச் சமப்படுத்துவதாகவும் கொள்ளலாம்.

எனவே, யாதேனுமொரு கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதிக்கு மேற்கூறிய சமநிலை நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்து வதற்குப் பிரிக்கும் திசைகளைத் தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுத்தால் மிகச் சுருக்கமான சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

பொதுவாக கிடைத் திசையும் நிலைக் குத்துத் திசையும் மிகவும் ஏற்றதாக இருக்கும்.

மேலும் திருப்பு திறன்கள் எடுக்கும் புள்ளியினது நிலையும் முக்கியமானது. அப் புள்ளியானது கூடியவரை குறைந்த எண்ணிக்கைகளுள்ள விசைகளே திருப்பு திறன் சமன் பாட்டில் இடம் பெறத் தக்கதாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

இவ்வித மூன்று நிலையியல் சம்பந்தங்களும்,

அதாவது, $\left\{ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \; M_{oz}^{R} = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0, \right.$

அல்லது $\left. \left[M_o = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0 \right] \right\}$, ஒரு விசைத் தொகுதியின் கூற்றுப் பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள வடிவ கணிதத் தொடர்புகளோடு கூடி, ஒரு தளத்து விசைகளாலே செயல்படுகின்ற யாதேனுமொரு தொகுதியின் சமநிலையை வரை யறுப்பதற்குப் பொதுவாகப் போதியனவாகும்.

கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றினாலும் ஒரு தள விசைத் தொகுதி சம நிலையிலிருக்கும் :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தள விசைத் தொகுதி செயல்பட, ஒரே நேர் கோட்டி லல்லாத மூன்று புள்ளிகள் ஒவ்வொன்று பற்றி எடுக்கும் அவ்விசைகளுடைய திருப்பு திறன் களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை, தனித்தனியே பூச்சியமானால், அவ் விசைத் தொகுதி சம நிலையிலிருக்கும்.

அவ்வாறே கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகள் நிறைவேறினாலும் ஒரு தள விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும் :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே ஒரு விசைத் தொகுதி செயல்பட, ஏதேனும் இரு புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்று பற்றியும் எடுக்கும் திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாகவும்,

அப்புள்ளிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் கோட்டில் விசைகளுடைய பகிர்வீடுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகவும் இருக்குமெனில், அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்."

ஒரு தள அமைப்புக்கு உகந்த எதிர்த் தாக்கு தல்களை (reactions) ஒரு பொருள் மற்றப் பொருள் களுடன் அழுத்துமிடத்து அல்லது பிணைக்கப் படுமிடத்து ஏற்படுத்துதல் :

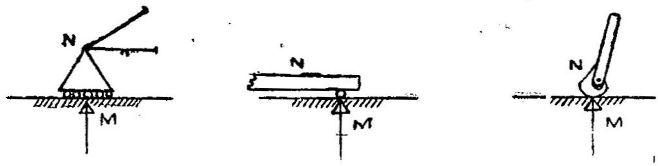
நடைமுறையில் எவ்விதப் பொருளும் இரு பரிமாணங்களைப் பெற்றுள்ள அமைப்பைச் சார்ந்திராது. இருந்தபோதிலும் கூரை உத்திரங்களின் தொகுதி (roof trusses), உத்திரங்கள் (beams) ஆகியவற்றின் சமநிலையை வரையறுக்கும் பொருட்டு அவைகள் இரு பரிமாண அமைப்பைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொள்ளப்படும். இவ்வித அமைப்புக்களில் புற விசைகளனைத்தும் இரு பரிமாணங்களைப் பெற்றதாகவும் (two dimensional forces), சமநிலைக்கு எடுத்த பொருளின் தளத்திலேயே செயல்படுவ தாகவும் கொள்ள வேண்டும்.

இரு பரிமாண அமைப்பையொட்டி பொருள்களில் செயற் படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைப் பின்வருமாறு 3 தொகுதிகளாகப் பிரித்து அறியலாம் :

1. தெரிந்த கோட்டில் செயல்படும் விசைக்குச் சமமான எதிர்த் தாக்கம் :

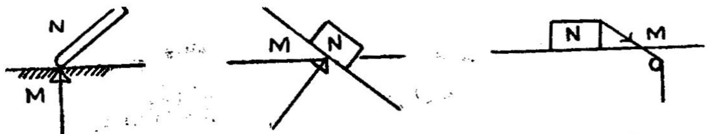
இத்தொகுதியில் அமையக்கூடிய ஆதாரங்களுக்கு (supports) உருளைகள் (rollers), அசைந்தாடும் முனைக் கட்டைகள் (rockers), மழமழப்பான பரப்புக்கள் (smooth surfaces) என்பவை ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். அவற்றின் அமைப்புக்கள் படம் 6-1ல் காட்டியவாறு இருக்கும்.

முதல் நான்கு எடுத்துக்காட்டுகளில் N என்னும் பொருளை கிடையாக விருப்பப்படி நகர்த்தலாம். எனவே கிடையான விசை ஏதும் இவ்வித ஆதாரங்களுக்கு(M)க் கிடையா. ஆகவே எதிர்த் தாக்க விசை நிலையாகவேதான் படத்தில் காட்டியவாறு அமையும். இவ்வித எதிர்த் தாக்க விசை நிலைக்கோட்டில் மேல் நோக்கி அல்லது கீழ்நோக்கி, எடுத்த பொருளின் சமநிலை அமைப் புக்கு ஏற்றவாறு குறிக்கப்படும்.



(1) ஆதார உருளை (2) உருளையின்மேல் உத்திரம் (3) அசைந்தாடும் முளை

படம் 6–1



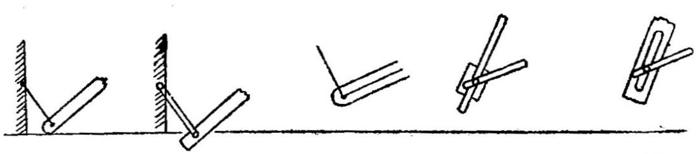
(4) மழமழப்பான தளம் (5) மழமழப்பான சாய்வு தளம் (6) இலேசான இழையில் உள்ள இழுவிசை

படம் 6–1

5வது எடுத்துக்காட்டில் எதிர்த் தாக்கம் N என்னும் பொருளின்மேல் சாய்வு தளத்திற்குக் குத்தான திசையில் செயற்படும்.

6வது எடுத்துக்காட்டில் யாதேனுமொரு தாங்கும் இழையினது நீளத்திற்கு ஓர் இழு விசையைக் குறிக்க வேண்டும்.

குறுகிய பிணைப்புக் கம்பிகள் (Short Cables), சிறிய தொக்கிப் பிணைப்புக்கள் (Short links), வலுவான கம்பிகள் (Cables), மழமழப்பான கோல்களில் பொருத்தப்பட்ட கழுத்துப் பட்டைகள் (collars on smooth rods), மழமழப்பான சிறு துளையிலமையும் ஊசி அல்லது முளையால் குத்திப் பிணைக்கப்பட்ட முளை (pin in a smooth slot) ஆகியவைகளும் இத் தொகுதியில் இடம் பெறும். அவற்றின் அமைப்புக்கள் படம் 6–2ல் காட்டியவாறு இருக்கும்.



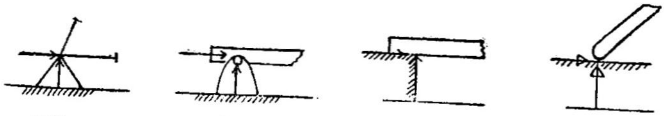
(7) குறுகிய பிணைப்புக் கம்பி (8) சிறிய கொக்கிப் பிணைப்பு (9) வலுவான கம்பியின் திசையில் எதிர்த்தாக்கம் (10) மழமழப்பான கோலில் பொருத்தப்பட்ட கழுத்துப் பட்டை (11) மழமழப்பான சிறுதுளையில் அமையும் ஊசி அல்லது முளை

படம் 6–2

இவ்வித அமைப்புக்களனைத்திலும் எதிர்த் தாக்க விசையின் எண் மதிப்பு மட்டும்தான் தெரியாததாகக் கொள்ளப்படும்.

2. தெரியாத கோட்டில் செயற்படும் விசைக்குச் சமமான எதிர்த் தாக்கம் :

இத் தொகுதியிலமையக்கூடிய ஆதாரங்களுக்கு பொருத்தப் பட்ட மழமழப்பான முனைகள் அல்லது ஊசி முனைகள் (smooth pin fixed in position), பிணையல்கள் (hinges), வழவழப்பற்ற தளங்கள் (rough surfaces) ஆகியவை ஏற்றதான ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். (படம் 6–3ஐப் பார்க்க.)



(12) உத்திரத் தொகுதியைத் தாங்கும் ஊசிமுனையின் அமைப்பு
(13) ஊசிமுனையில் பிணைக்கப்பட்ட உத்திரம்
(14) மழமழப்பற்ற தளத்தின்மேல் அமையும் உத்திரம்
(15) மழமழப்பற்ற தளத்தின்மேல் அமையும் பொருள்

படம் 6–3

இவ்வித ஆதாரங்கள் எடுத்த பொருளின் சமநிலை அமைப்புக்கு ஒருவித இயக்கத்தையும் எத் திசையிலும் ஏற்படாவண்ணம் தடுக்கக்கூடும். ஆனால் இவ்வித அமைப்பில் பொருளானது தளத்தில் பிணைக்கப்பட்ட இடத்தில் சுழலக்கூடும்.

இத் தொகுதியில் எதிர்த் தாக்க விசைகளின் செயற்படும் திசைகளும், எண் மதிப்புக்களும் தெரியாதவையாகும்.

பொதுவாக எதிர்த் தாக்க விசைகள் ஒவ்வொன்றின் பகிர்வுகளைக் கிடைத் திசையிலும் நிலைக் குத்துத் திசையிலும் ஏற்படுத்துவது வழக்கம்.

3. ஒரு விசையுடன் கூடிய சுழலிணைக்குச் சமமான எதிர்த் தாக்கம் :

நிலையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஆதாரங்கள் இவ் வகையில் இடம் பெறும்.

இங்கு நிலையாக அமையும் ஆதாரங்கள் எடுத்த பொருளுக்கு எத் திசையிலும் இயக்கமிருக்கப்படாவண்ணம் கட்டுப்படுத்தும்.

இவ்வித ஆதாரமொன்றில் செயல்படும் விசைகளை ஏதேனுமொரு தெரியாத செயற்படும் கோட்டைப் பெற்ற ஒரு தனி விசையுடன்

(16)

பொருத்தப்பட்ட வளைவுச் சட்டம் அல்லது உத்திரம்

படம் 6–4

கூடிய ஓர் சுழலிணையாக ஒடுக்க முடியும். எனவே எதிர்த் தாக்கமானது, எதிர்த் தாக்க விசையின் இரு குத்துப் பிரிவுகளின் எண் மதிப்புக்கள், அத்துடன் சேர்ந்து அமையும் சுழலிணைப்புத் திறனின் எண் மதிப்பு ஆகிய மூன்று தெரியாக் கணியங்களை உள் அடக்கமாகக் கொண்டுள்ளது. (படம் 6-4ஐப் பார்க்க.)

ஆகவே ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே செயல்படுகின்ற விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்க மூன்று சமநிலைச் சமன்பாடுகளே உளதால் ஆதாரங்களில் நிகழும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைப் பற்றிய தெரியாத கணியங்களின் எண்ணிக்கை மூன்றிற்கு மேற்படாமலிருக்க வேண்டும்.

6—2. (3) வகை 3 : பரந்தவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாகச் செயல்படும் விசைத் தொகுதி (Parallel forces in space) :

பரந்தவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாகச் செயல்படும் விசைத் தொகுதியை ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ ஒடுக்க முடியுமென முன்பே கூறப்பட்டது.

விசைகளனைத்தும் z அச்சுக்கு ஒரு போகாக (அதாவது xoy தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில்) அமையுமெனில் அத் தொகுதிக்கு உரிய தொகுபயன் விசை ஒன்று இருக்கக்கூடா தென்பதை உறுதிப்படுத்த, வேண்டிய நிபந்தனை $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$ ஆகும்.

மேலும் தொகுபயன் சுழலிணையும் இருக்கக்கூடாதென்பதை உறுதிப்படுத்த இணை விசைகள் செயற்படும் திசைக்குக் குத்தான ஏதேனுமொரு தளத்தில், ஏதேனும் ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக அமையும் x, y என்னும் அச்சுக்கள் பற்றி எடுக்கும் இணை விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகள் தனித்தனியே பூச்சியமாதலே வேண்டியதான நிபந்தனைகளாகும். அவற்றை

$$M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} y_i F_{iz} = 0,$$

$$M_{oy} = -\sum_{i=1}^{n} x_i F_{iz} = 0$$ எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

எனவே மூன்று தனித்த எண்ணிச் சமன்பாடுகள் பரந்த வெளியில் எடுத்த இணை விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருப்பதற்கு உதவியாயுள்ளன.

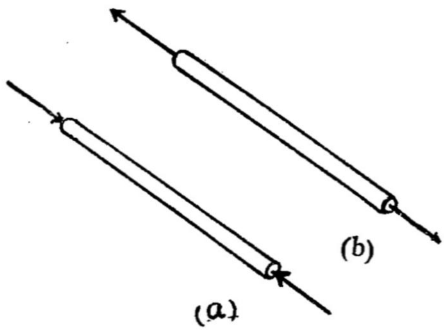
விசைகள் இணையாக ஒரே தளத்திலிருக்குமெனில் மேற்கூறிய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைகள் பூச்சியமாதலை அறிவிக்கும் ஏதேனுமொரு சமன்பாடே தேவைப்படும். ஆகவே ஒரு தளத்து இணை விசைகளின் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதை அறிவிக்க, இரு எண்ணிச் சமன்பாடுகள்— $\{\Sigma F_{iz} = 0,\ M_{ox} = 0\}$ அல்லது $\{\Sigma F_{iz} = 0,\ M_{oy} = 0\}$ உள்ளன. இவைகளே தேவையானதும் போதியதுமான நிபந்தனைகளாகும்.

6—2. (4) வகை 4 : இரு விசைகளால் தாக்கப்படும் ஒரு இறுக்கப் பொருளின் சமநிலை (Body in Equilibrium with Two Forces) :

அவ்வித விசைகள் ஒரே செயற்படும் கோட்டில் சமனுமெதிருமாயும் அமைந்தாலன்றி பொருள் சமநிலையில் இரா என்பது வெளிப்படை உண்மையாகும்.

பெரும்பாலும் பொறியியலில் சிறு துண்டுகளால் பிணைக்கப்பட்டுள்ள அமைப்புக்களை ஆராயவேண்டிய நிலைகள் உள்ளன. அவ்வித அமைப்பு ஒன்றில், சிறு தண்டின் இரு முனைகளிலும் செயல்படும் விசைகள் அத்தண்டின் மையத்தில் நீளவாட்டில் அமையும் கோட்டில் சமனுமெதிருமாக இருக்கும். படம் 6-5ல்

(a) என்னும் அமைப்பிலுள்ள சிறு தண்டில் செயற்படும் சமனுமெதிருமான விசைகள் நெருக்க விசைகளாகவும் (compressive



படம் 6–5

forces), (b) என்னும் அமைப்பிலுள்ள சிறு தண்டில் செயற்படும் சமனுமெதிருமான விசைகள் இழு விசைகளாகவும் (Tensile forces) கொள்ளப்படும்.

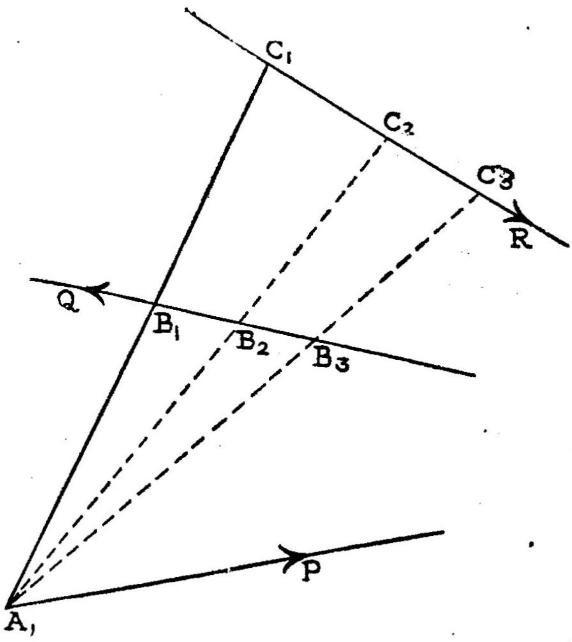
6—2. (5) வகை 5 : கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற மூன்று விசைத் தொகுதிகளின் சமநிலை (Equilibrium of Three Forces) :

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற மூன்று விசைகள் அதனைச் சமநிலையில் வைத்திருக்குமானல் அவை ஒரு தளத்திலமைய வேண்டும்.

மேலும் அம்மூன்று விசைகளுடைய செயற்படும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்; அல்லது அவை தளத்தில் இணையாக இருக்க வேண்டுமென்பதையும் நிறுவலாம்.

இவற்றைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்: பொருளின்மீது செயற்படுகின்ற மூன்று விசைகளையும் $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ எனக் கொள்க. $\underline{P}$, $\underline{Q}$ என்பவற்றினுடைய செயற்படும் கோடுகளில் முறையே A_1, B_1 என்ற ஏதேனும் இருபுள்ளிகளைப் படம் 6-6ல் காட்டியவாறு எடுக்க.

அவ்விசைகள் மூன்றும் சமநிலையிலிருப்பதால் அவற்றிற்கு ஒருமித்து அப்பொருளை A_1, B_1 என்னும் கோடு பற்றித் திருப்புதல்



படம் 6–6

முடியாது. ஆனால் P, Q என்னும் விசைகள் இக்கோட்டைச் சந்திக்கின்றன. ஆகவே அவற்றிற்கு அப்பொருளை A_1, B_1 என்னும் கோடு பற்றித் திருப்புதற்கு விளைவு (resultant) ஏதும் தனித் தனியாகக் கிடையாது. இதனால் மூன்றும் விசைக்கும் A_1, B_1 என்னும் கோடு பற்றித் திருப்புதற்கு விளைவு யாதும் இருத்தல் முடியாது.

ஆகவே A_1, B_1 என்னும் கோடு R என்பதைச் சந்திக்க வேண்டும்.

இதுபோல B_2, B_3 என்னும் புள்ளிகளை Qவினது செயற்படும் கோட்டில் எடுப்பதாயின் A_1 B_2, A_1 B_3 ... என்னும் கோடுகள் Rஐச் சந்திக்க வேண்டும்.

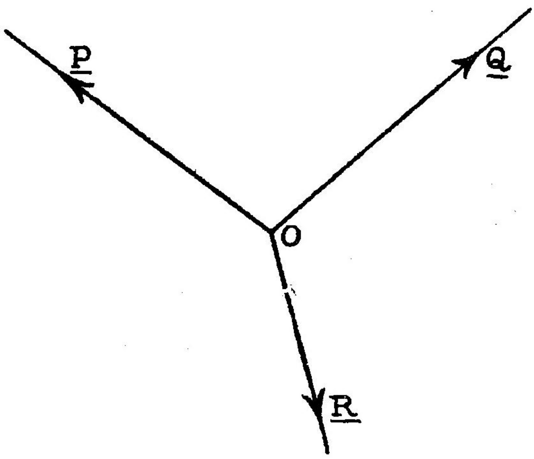
ஆதலால் R ஆனது A_1 மூலமாக Qவினது செயற்படும் கோட்டின் ஊடாகச் செல்லும் தளத்தில் அமைய வேண்டும். அதாவது Q, R என்பவற்றின் செயற்படும் கோடுகள் A_1க்கு ஊடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தில் அமைய வேண்டும்.

ஆனல் A_1 என்பது Pயினது செயற்படும் கோட்டிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி.

ஆதலால் மேற்கூறிய தளம் Pயினது செயற்படும் கோட்டிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளிக்கு ஊடாகச் செல்லும். ஆகவே Pயில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும் செல்லும்.

அதாவது அத் தளம் Pயினது செயற்படும் கோட்டையும் கொண்டுள்ளது.

மேலும் அம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும் அல்லது இணையாக இருக்க வேண்டுமென்பதையும் கீழ்வருமாறு நிறுவலாம்.



படம் 6–7

அதற்காக P, Q, R என்னும் விசைகள் ஒரு தளத்தில் செயற்பட்டு ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளைச் சமநிலையில் வைப்பதாகக் கொள்க.

முதலாவதாக அவ் விசைகளெல்லாம் இணையற்றனவாயின் அவற்றுள் யாதேனும் இரண்டு விசைகள் சந்தித்தல் வேண்டும். அவைகளை P, Q எனக் கொள்க. இவற்றினுடைய செயற்படும் கோடுகள் படம் 6-7ல் காட்டியவாறு Oவில் சந்திக்கட்டும். இப்பொழுது P, Q என்பனவற்றின் தொகுபயன் O வழியே செல்லும் யாதேனுமொரு விசையாதல் வேண்டும். ஆனால் P, Q, R என்னும் விசைகள் சமநிலையில் இருத்தலால் P, Q என்பன வற்றின் தொகுபயன் R என்பதைச் சமப்படுத்தல் வேண்டும்.

ஆனால் ஒரே செயற்படும் கோட்டில் இருந்தாலன்றி இரு விசைகள் ஒன்றையொன்று சமமாக்க முடியாது. ஆகவே Rன் செயற்படும் கோடும் O வழிச் செல்ல வேண்டும்.

இரண்டாவதாக P, Q என்னும் விசைகள் இணையாக அமையட்டும். அவற்றின் தொகுபயன் விசையும் அவைகளுக்கு இணையாக இருக்கும். ஆனால் மூன்று விசைகளும் சமநிலையி லிருப்பதால் R என்பது P, Q என்பவற்றின் தொகுபயன் விசைக்குச் சமனுமெதிருமாகவும் அத் தொகுபயனின் செயற்படும் கோட்டிலும் அமைய வேண்டும். ஆகவே R என்ற விசையின் திசை, P, Q என்னும் விசைகளின் திசைக்கு இணையாக இருக்க வேண்டும்.

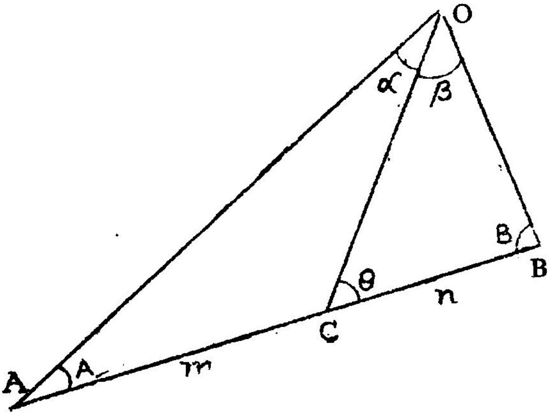
எனவே P, Q, R என்னும் விசைகளெல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள்மீது ஒரே தளத்திலே மூன்று விசைகள் செயற்பட்டு அதைச் சமநிலையில் வைத்திருந்தால் அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். ஆதலால் சமநிலை நிபந்தனைகள் ஒரு தனித் துகளினுடைய சமநிலை நிபந்தனைகளுக்கு ஒடுங்குமென்பதையும் அறிதல் வேண்டும்.

ஆகவே இலாமியனது (Lami's theorem) தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது அவ்விசைகளை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் இரு திசைகளில் பிரித்தோ அல்லது ஒரு வரைபட அமைப்பின் துணை கொண்டோ வேண்டிய நிபந்தனைகளைப் பெறலாம்.

ஒரு பொருளை இணையற்ற மூன்றே விசைகள் சமநிலையில் வைக்கும்பொழுது அவைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டுமாகையால் நிலையியலில் இவ்விதக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண தேவைக்கு ஏற்பப் பின்வரும் கோண கணிதத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

படம் 6-8ல் காட்டியுள்ள OAB என்னும் முக்கோணத்தில் AB என்பது அடிப் பக்கம். அதில் C என்பது ABஐ m : n என்னும் விகிதத்திலும்,



படம் 6–8

CO என்னும் கோடு, AOB என்னும் கோணத்தை $A\hat{O}C = \alpha$, $C\hat{O}B = \beta$ என்றிருக்குமாறு பிரிக்க, கோணம் OCB என்பது θ ஆகவும் இருக்குமெனில்,

$$(m + n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta$$

$$(m + n) \cot \theta = n \cot A - m \cot B$$ என நிறுவலாம்.

முதலில்

$$\frac{m}{n} = \frac{AC}{CB} = \frac{AC}{CO} \cdot \frac{CO}{CB}$$

$$= \frac{\text{Sin AOC}}{\text{Sin CAO}} \cdot \frac{\text{Sin CBO}}{\text{Sin COB}}$$

$$= \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } (\theta - \alpha)} \frac{\text{Sin } (180 - \overline{\theta + \beta})}{\text{Sin } \beta}$$

$$= \frac{\text{Sin } \alpha \text{ (Sin } \theta \cos \beta + \cos \theta \text{ Sin } \beta)}{\text{Sin } \beta \text{ (Sin } \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)}$$

$$= \frac{\cot \beta + \cot \theta}{\cot \alpha - \cot \theta}$$

$$n \cot \beta + n \cot \theta = m \cot \alpha - m \cot \theta$$

$(m + n) \cot \theta = m \cot \alpha - m \cot \beta$ ஆகும்.

இரண்டாவதாக

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Sin AOC}}{\text{Sin CAO}} \cdot \frac{\text{Sin CBO}}{\text{Sin COB}}$$

$$= \frac{\text{Sin } (\theta - A)}{\text{Sin } A} \cdot \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin } (180 - \overline{\theta + B})}$$

$$= \frac{\text{Sin B (Sin } \theta \cos A - \cos \theta \text{ Sin A)}}{\text{Sin A (Sin } \theta \cos B + \cos \theta \text{ Sin B)}}$$

$$= \frac{\cot A - \cot \theta}{\cot B + \cot \theta}$$

$$m \cot B + m \cot \theta = n \cot A - n \cot \theta$$

$$(m + n) \cot \theta = n \cot A - m \cot B.$$

நிலையியல் கணக்குகளுக்கு விடை காண்பதற்குப் பின்வரும் முறையை மேற்கொள்ளலாம்.

1. சமநிலைக்கு உரிய பொருள் அல்லது பொருள்களைத் தனியாகப் பிரித்து, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றதான படத்தை வரையவும்.

2. தனிப்படுத்திய பொருளின்மேல் செயல்படும் எல்லா விசைகளையும் குறிக்க வேண்டும்.

அவ்விதம் குறிக்கும்போது கீழ்க்கண்டவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும் :

(i) ஒரு பொருளின் எடை அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதாகக் குறிக்க வேண்டும்.

(ii) ஒரு பொருள் வேருெரு பொருளுடன் அல்லது நிலையான புள்ளியுடன் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் போது எதிர்த் தாக்கத்தைக் குறிக்க வேண்டும்.

(iii) ஒரு பொருள் மழமழப்பான பரப்பின்மீது அழுத்தும் போது எதிர்த் தாக்க விசை அப் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகக் குறிக்கப்பட வேண்டும்.

(iv) ஒரு கோல் ஒரு மழமழப்பான ஒரு முளைக் கட்டையின்மீது பொருந்தியிருக்கும்போது முளைக் கட்டையின் எதிர்த் தாக்கம் கோலுக்குச் செங்குத் தாகச் செயற்படும்.

(v) ஓர் இலேசான இழையிலுள்ள இழுவிசை அவ் விழை முழுவதும் ஒரே அளவுள்ளதாகும். இவ் விழை மழமழப்பான முளைக் கட்டைகள் மீதோ அல்லது கப்பிகள் வழியோ செல்லும்போது அதன் இழுவிசை மாருதிருக்கும்.

3. ஒரு தளத்தில் செயற்படும் விசைகளாகில் அவைகளை ஏற்ற இரண்டு நிலைக்குத்துத் திசைகளின் நீளத்தில் பகிர்வீடு செய்து அவ் விசைப் பகிர்வுகளின் குறியில் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

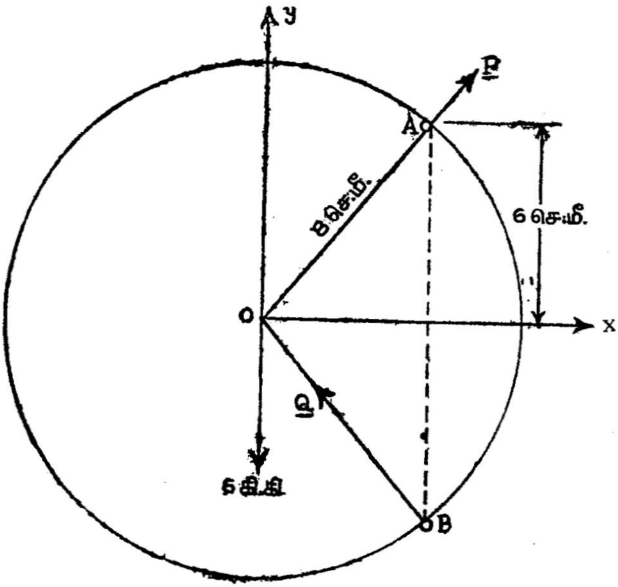
4. மூன்றே விசைகள் இருக்கும்பொழுது அவை இணையற்ற தாகில் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமாகையால், இலாமியின் தேற்றம் அல்லது கோண கணித சம்பந்தத் தேற்றம் அல்லது வரைபட அமைப்பின் துணை கொண்டோ தேவையான வரையறைகளைப் பெறலாம்.

5. பொருள் ஒரு தள விசைத் தொகுதியால் சமநிலையில் இருக்குமாளுல் ஏற்றதான யாதேனுமொரு புள்ளிபற்றி எடுக்கும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத் திற்குச் சமப்படுத்துக.

6. படத்தில் நீளங்களை அல்லது கோணங்களைத் தொடர்பு படுத்தும் வடிவ கணித சம்பந்தங்கள் இருப்பின் அவற்றை எழுதுக.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 6—1. 6 கி.கி. எடையுள்ளதும் 16 செ.மீ. விட்டமுள்ளதுமான இரும்பு வட்ட வளையமொன்று தன் பரிதியிலுள்ள



படம் 6–9

A, B என்னும் புள்ளிகளில் அமையும் இரு மழமழப்பான முளைகளில் பொருத்தப்பட்டுத் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. A, B என்னும் புள்ளிகள் படம் 6-9ல் காட்டியவாறு ஒரு நிலைக் கோட்டில் 12 செ.மீ. தொலைவில் அமையுமெனில் முளைகள் ஒவ்வொன்றின் எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க.

இங்கு வட்ட வளையம் சம நிலையிலிருப்பதற்கு உரிய விசைகள் பின்வருமாறு :

(i) வளையத்தின் எடை, (W) வட்ட மையம் Oவில் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

(ii) Aயில் அமையும் முளை P என்னும் ஓர் எதிர்த் தாக்க விசையை வளையத்தில் OA என்னும் திசையில் செயல்படுத்துகிறது.

(iii) அவ்வாறே Bயில் அமையும் $\underline{Q}$ என்னும் ஓர் எதிர்த் தாக்க விசை BO என்னும் திசையில் செயல் படுகிறது.

இம் மூன்று விசைகளும் Oவில் சந்திக்கின்றன.

Oவில் கிடையாக ox என்னும் கோட்டையும், நிலையாக oy என்னும் கோட்டையும் எடுக்க.

$\angle AOC = \theta$ எனக் கொள்க. $\text{Sin}\ \theta = \dfrac{CA}{OA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \underline{W} = -\ 6\underline{j} \text{ கி.கி.}$$

$$P = +\ P\cos\theta\ \underline{i} + P\ \text{Sin}\ \theta\ \underline{j}$$

$$\underline{Q} = -\ Q\cos\theta\ i + Q\ \text{Sin}\ \theta\ \underline{j}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow (P - Q)\cos\theta = 0$$

$\cos\theta \neq 0$ என்பதால், $P = +\ Q$ ஆகும்.

$$\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow -6 + P\sin\theta + Q\sin\theta = 0$$

$$(Q + P)\sin\theta = 6$$

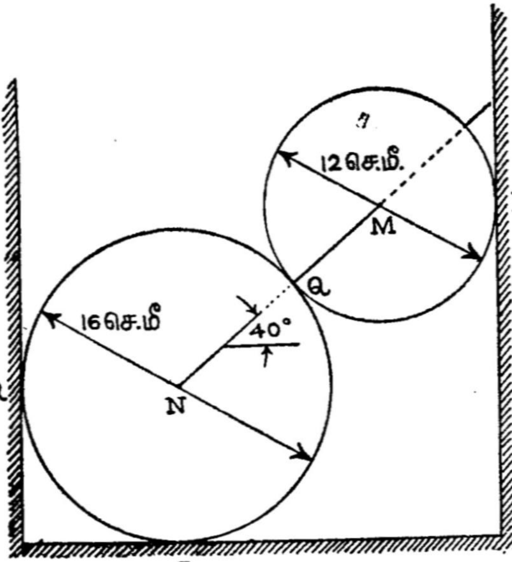
$$(Q + Q) \times \tfrac{3}{4} = 6$$

$$2Q \times \tfrac{3}{4} = 6$$

$$Q = 4 \text{ கி. கி.}$$

$$P = +\ 4 \text{ கி. கி.}$$

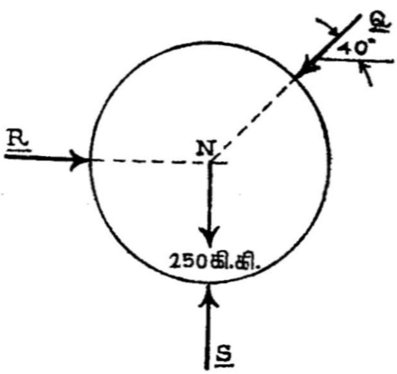
மாதிரி 6—2. 150 கி. கி. எடையுள்ள M என்னும் உருளையும், 250 கி. கி. எடையுள்ள N என்னும் உருளையும் படம் 6-10ல் காட்டியவாறு தாங்கப்படுகின்றன. P, Q, R, S என்னுமிடங் களில் அமையும் தொடுகைப் பரப்புக்கள் மழமழப்பாக இருப்ப தாகில், N என்னும் உருளையின்மேல், R, S என்னுமிடங்களில் செயற்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைக் காண்க. உருளைகளின் தொகுபயன் எடை, எதிர்த் தாக்க விசைகள் எல்லாம் ஒரு தளத்தில் அமைவதாகக் கொள்க.



படம் 6–10

முதல் வழி :

தேவைப்படும் விசைகள் N என்னும் பொருளில் செயற்படுவதால், அப்பொருளைத் தனிப்படுத்தி படம் 6-11ல் காட்டியவாறு செயல்படும் விசைகளைக் குறிக்கவும். அப்பொருளில் செயற்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்வதால், இரண்டு தனித்த சமநிலைச் சமன்பாடுகளைத்தான் வரையறுக்க முடியும்.

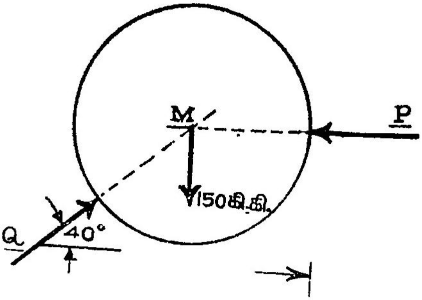


படம் 6–11

ஆனால் Nல் அமையும் விசைத் தொகுதியில் மூன்று தெரியாத கணியங்கள் (Q, R, S) உள்ளன. எனவே இவற்றையெல்லாம் Nல் உள்ள அமைப்பைக் கொண்டு வரையறுக்க முடியாது.

ஆகவே M என்னும் பொருளினது தனிப்படுத்திய அமைப்பைப் படம் 6-12ல் காட்டியவாறு எடுக்கவேண்டும்.

இங்கும் செயற்படும் (P, Q, 150) என்னும் விசைகள் ஒரு தளத்திலே ஒரு புள்ளி வழியே செயற்படும் விசைகளாகும்.



படம் 6–12

P, Q என்னும் தெரியாக் கணியங்களை, இரு தனித்த சார்பற்ற சமநிலைச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு வரையறுக்க முடியும்.

எனவே M என்னும் பொருள் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$\boxed{\uparrow +}\ \Sigma F_{iy} = 0$

என்னும் சமன்பாடு,

$Q \sin 40° - 150 = 0$

அல்லது $Q = 236{\cdot}5$ கி. கி.

$\therefore \underline{Q} = 236{\cdot}5$ கி. கி., (40°) என்னும் விசை M ன் மேல் செயல்படுகிறது.

N என்னும் பொருளுக்கு உரிய சமநிலை அமைப்பில்,

$\boxed{\uparrow +}\ \Sigma F_{iy} = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$S - 250 - Q \sin 40° = 0$

அதாவது $S = 250 + 236{\cdot}5 \sin 40°$

$= 250 + 150$

$\therefore S = 400$ கி. கி. ↑ என்னும் விசை N என்னும் பொருளில் செயல்படுகிறது.

மேலும் N என்னும் பொருளுக்கு உரிய அமைப்பில்

$\boxed{\overset{\rightarrow}{+}}\ \Sigma F_{ix} = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$R - Q \cos 40° = 0$

அதாவது $R = 236{\cdot}5 \cos 40°$

$= 179$ கி. கி.

அதாவது $R = 179$ கி. கி. → என்னும் விசை N என்னும் பொருளில் செயல்படுகிறது.

இரண்டாவது வழி :

இரு பொருள்களையும் ஒருமிக்க எடுக்கவும். அப்பொழுது Qவில் செயற்படும் விசை உள்ளடங்கிய விசையாகும்.

இவ்வமைப்புக்கு

| ↑ + | $\Sigma F_{iy} = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$$S - 150 - 250 = 0, \qquad \text{(i)}$$

அதாவது S = 400 கி. கி. ஆகும்.

| → + | $\Sigma F_{ix} = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$R = P$ என்றாகும். (ii)

M என்னும் பொருளைத் தனிப்படுத்துக.

அப்பொருளில் செயற்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளி வழியே செயல்பட்டு, Mஐ அமைதி அல்லது சமநிலையில் வைக்கின்றன. எனவே இலாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{P}{\text{Sin } 130} = \frac{Q}{\text{Sin } 90} = \frac{150}{\text{Sin } 140}$$

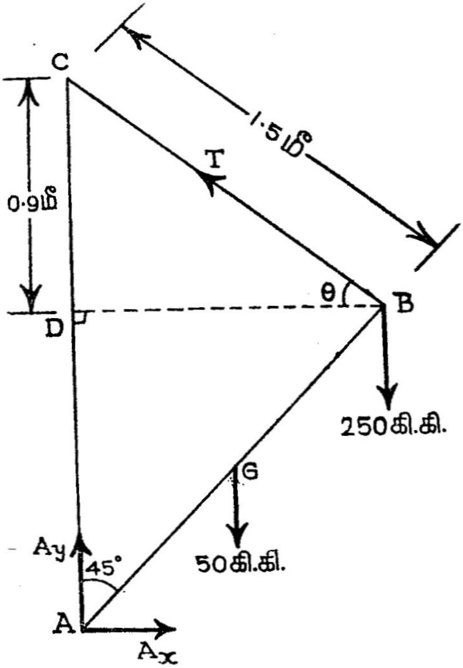
$$\therefore P = \frac{150 \text{ Sin } 50}{\text{Sin } 40} = 179 \text{ கி. கி.}$$

$$\therefore R = P = 179 \text{ கி. கி. என்றாகும்.} \qquad \text{(iii)}$$

மாதிரி 6—8. 50 கி. கி. எடையுள்ள ஒரே சீரான உத்திரத்தின் கீழ் முனையானது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் 45° கோணத்தைத் தாங்குமாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மேல் முனையானது 1·5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓரிழையினுல் கட்டப்பட்டு, மேல் முனையை விட 0·9 மீட்டர் அதிகமுள்ள குத்துத் தொலைவைக் கொண்ட சுவரில் அமையும் புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. 250 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு பளு உத்திரத்தின் மேல் முனையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது எனில், இழையில் செயல்படும் இழு விசை, பிணையலில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்கத்தையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றதான அமைப்பு படம் 6-13ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உத்திரத்தைச் சமநிலையில் வைப்பதற்கு உரிய விசைகள் பின்வருமாறு :



படம் 6–13

(1) Gயில் அதன் எடை, 50 கி.கி. ↓ AG = GB.

(2) Aயில் $A_x \rightarrow$, $A_y \uparrow$ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசைகள்.

(3) Bயில் 250கி.கி. ↓

(4) BCயில் உள்ள T என்னும் இழுவிசை.

இவைகளனைத்தும் ஒரு தளத்திலே செயல் படும் விசைகளாகும்.

உத்திரத்தின் மீது தாக்குகின்ற விசைகளுடைய கிடைக் கூறுகளையும், நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

அப்பொழுது,

$$A_x - T\cos\theta = O, \qquad \theta = D\hat{B}C \qquad (1)$$

$$A_y + T\sin\theta - 50 - 250 = 0 \qquad (2)$$

A பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை எடுத்து அதன் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக. அப்பொழுது,

$$T \times AB\ \sin(45 + \theta) - 50 \times AG\ \cos 45^\circ - 250 \times AB\cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

$\triangle CDB$யில், $\quad \text{Sin}\ \theta = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{0{\cdot}9}{1{\cdot}5} = \dfrac{3}{5}$

$$\cos\theta = \frac{DB}{BC} = \frac{1{\cdot}2}{1{\cdot}5} = \frac{4}{5}$$

$\triangle ADB$யில் $\quad AD = DB = 1{\cdot}2$ மீ.

$$\therefore\ AB = \sqrt{(1{\cdot}2)^2 + (1{\cdot}2)^2} = 1{\cdot}2 \times \sqrt{2}\ \text{மீ.}$$

(3)வது சமன்பாட்டைச் சுருக்குக.

$$T \times 1{\cdot}2 \times \sqrt{2}\ \{\text{Sin}\ 45^\circ \cos\theta + \cos 45^\circ\ \text{Sin}\ \theta\}$$

$$= 50 \times 0{\cdot}6 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 250 \times 1{\cdot}2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T \times 1{\cdot}2 \times \sqrt{2}\ \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{5}\right\} = 30 + 300$$

$$1{\cdot}68\ T = 330$$

$$T = \frac{330}{1{\cdot}68}$$

$$= 196{\cdot}42\ \text{கி.கி.}$$

(1)வது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$A_x = T\cos\theta = 196{\cdot}42 \times \tfrac{4}{5}$$

$$= 157{\cdot}136\ \text{கி.கி.}$$

$$A_y = 300 - T\ \text{Sin}\ \theta$$

$$= 300 - 196{\cdot}42 \times \tfrac{3}{5}$$

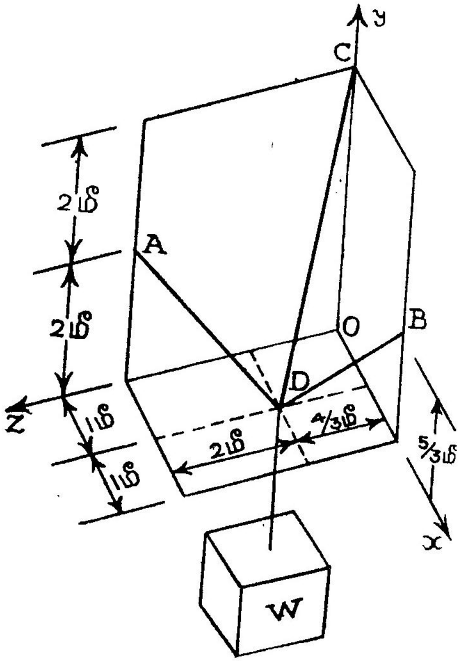
$$= 300 - 117{\cdot}85$$

$$= 182{\cdot}15\ \text{கி.கி.}$$

எனவே $T = 196$ கி.கி., $A_x = 157$ கி.கி., $A_y = 182$ கி.கி.

மாதிரி 6—4. 500 கிலோகிராம் எடையுள்ள பளு ஒன்று மூன்று வலுவான கம்பிகளால் படம் 6-14ல் காட்டியவாறு தாங்கப்படுகின்றது. BD என்னும் கம்பியில் D என்னுமிடத்தில் செயல்படும் இழு விசையைக் காண்க.

இங்கு செயல்படும் விசைகளின் தொகுதி D என்னும் புள்ளி வழியே சென்று, அத் தொகுதி அமைதி நிலையிலிருக்கிறது.



படம் 6–14

DA, DB, DC என்னும் இழைகளில் செயல்படும் இழு விசைகளை $\underline{T_A}$, $\underline{T_B}$, $\underline{T_C}$ எனக் கொள்க. Dயில் செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி W = 500 கி.கி. எடை செயல்படுவதால்,

$\underline{W} = -500\,\underline{j}$ கி.கி. ஆகும்.

Oவைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுத்து A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவுகளை வரையறுக்க. அப்பொழுது

A $(0, 2, \frac{10}{3})$மீ.; B $(2, \frac{5}{3}, 0)$மீ.; C $(0, 4, 0)$மீ.; D $(1, 0, \frac{4}{3})$மீ.

$$\underline{DA} = \underline{OA} - \underline{OD} = -\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$

$$= 3\left(-\tfrac{1}{3}\underline{i} + \tfrac{2}{3}\underline{j} + \tfrac{2}{3}\underline{k}\right)$$

$$\underline{DB} = \underline{OB} - \underline{OD} = \left(\underline{i} + \tfrac{5}{3}\underline{j} - \tfrac{4}{3}\underline{k}\right)$$

$$= \tfrac{5}{3}\sqrt{2}\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\underline{k}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}\left(\frac{3}{7{\cdot}07}\,i + \frac{5}{7{\cdot}07}\,\underline{j} - \frac{4}{7{\cdot}07}\,\underline{k}\right)$$

$$\underline{DC} = \underline{OC} - \underline{OD} = -\underline{i} + 4\underline{j} - \tfrac{4}{3}\underline{k}$$

$$= \frac{13}{3}\left(-\frac{3}{13}\underline{i} + \frac{12}{13}\underline{j} - \frac{4}{13}\underline{k}\right)$$

$$\therefore\ \underline{T_A} = \frac{T_A}{3}(-\underline{i} + 2\,\underline{j} + 2\underline{k})\ \text{கி. கி.}$$

$$\underline{T_B} = \frac{T_B}{7{\cdot}07}(3\,\underline{i} + 5\,\underline{j} - 4\,\underline{k})\ \text{கி. கி.}$$

$$\underline{T_C} = \frac{T_C}{13}(-3\,\underline{i} + 12\underline{j} - 4\,\underline{k})\ \text{கி. கி.}$$

$$\underline{W} = -500\,\underline{j}\ \text{கி.கி.}$$

$$\underline{R} = \underline{T_A} + \underline{T_B} + \underline{T_C} + \underline{W}$$

$$= \frac{T_A}{3}(-\underline{i} + 2\,\underline{j} + 2\,\underline{k}) + \frac{T_B}{7{\cdot}07}(3\,\underline{i} + 5\,\underline{j} - 4\,\underline{k})$$

$$+ \frac{T_C}{13}(-3\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - 4\,\underline{k}) - 500\,\underline{j}$$

$$= \left(-\frac{T_A}{3} + \frac{3\,T_B}{7{\cdot}07} - \frac{3\,T_C}{13}\right)\underline{i}$$

$$+ \left(\frac{2\,T_A}{3} + \frac{5\,T_B}{7{\cdot}07} + \frac{12\,T_C}{13} - 500\right)\underline{j}$$

$$+ \left(\frac{2\,T_A}{3} - \frac{4\,T_B}{7{\cdot}07} - \frac{4\,T_C}{13}\right)\underline{k}$$

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்க

$\underline{R} = 0$ அல்லது $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$ ஆகும்.

எனவே $-\frac{T_A}{3} + \frac{3\,T_B}{7\cdot07} - \frac{3\,T_C}{13} = 0$

$$\frac{2\,T_A}{3} + \frac{5\,T_B}{7\cdot07} + \frac{12\,T_C}{13} = 500$$

$$\frac{2\,T_A}{3} - \frac{4\,T_B}{7\cdot07} - \frac{4\,T_C}{13} = 0$$

இங்கு மூன்று தெரியாக் கணியங்கள் (T_A, T_B, T_C) உள்ளன. அவற்றிற்கேற்றுற்போல் மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைத்துள்ளன. இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண,

$T_A = 295$ கி.கி., $T_B = 290$ கி.கி., $T_C = 106\cdot5$ கி.கி. ஆகும்.

எனவே $\underline{T_B} = 290\left(\frac{3}{7\cdot07}\,\underline{i} + \frac{5}{7\cdot07}\,\underline{j} - \frac{4}{7\cdot07}\,\underline{k}\right)$ கி.கி.

மற்றொரு வழி :

DB என்னும் கம்பியில் செயல்படும் இழுவிசை ஒன்றுதான் தேவைப்படுகிறது. எனவே தகுந்த புள்ளி அல்லது நேர்கோடு பற்றித் திருப்புத் திறனை எடுத்து எளிதாக $\underline{T_B}$ ஐக் காண முடியும்.

$\underline{T_A}$, $\underline{T_C}$ என்னும் விசைகள் AC என்னும் கோட்டை வெட்டு கின்றன. ஆதலால் AC என்னும் கோடு பற்றி விசைத் தொகுதி யின் திருப்புத் திறனை எடுத்து அதைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப் படுத்துக.

$M_{AC} = \underline{n_{AC}} \cdot (\underline{r_{AD}} \wedge \Sigma\,\underline{F})$, $\underline{n_{AC}}$ என்பது ACயில் அமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.

$$\therefore\quad \underline{n_{AC}} = \frac{2\,\underline{j} - \frac{10}{3}\,\underline{k}}{\sqrt{\frac{136}{9}}} = \frac{6\,\underline{j} - 10\,\underline{k}}{\sqrt{136}}$$

$$\underline{r_{AD}} = \underline{i} - 2\,\underline{j} - 2\,\underline{k}$$

$$\Sigma\,\underline{F} = \underline{T_B} + \underline{W}$$

$$= \frac{3\,T_B}{7\cdot07}\,\underline{i} + \frac{5\,T_B}{7\cdot07}\,\underline{j} - \frac{4\,T_B}{7\cdot07}\,k - 500\,\underline{j}$$

$$= \frac{3\,T_B}{7\cdot07}\,\underline{i} + \left(\frac{5\,T_B}{7\cdot07} - 500\right)\underline{j} - \frac{4\,T_B}{7\cdot07}\,k$$

$$\therefore \; M_{AC} = \frac{1}{\sqrt{136}} \begin{vmatrix} 0 & 6 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ \frac{3\,T_B}{7{\cdot}07} & \left(\frac{5\,T_B}{7{\cdot}07} - 500\right) & \frac{-4\,T_B}{7{\cdot}07} \end{vmatrix} = 0$$

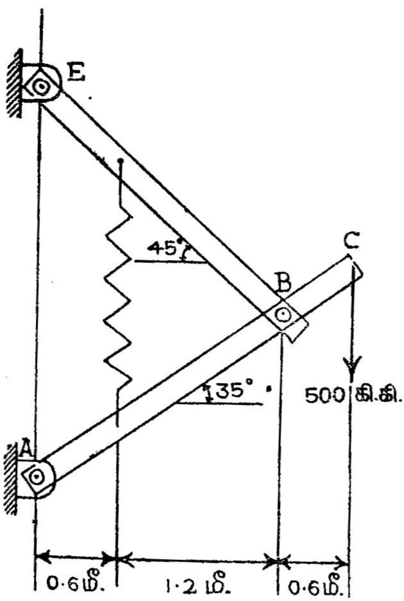
அணிக் கோவையை விரிவுபடுத்த

$$6\left(\frac{4\,T_B}{7{\cdot}07} - \frac{6\,T_B}{7{\cdot}07}\right) - 10\left(\frac{5\,T_B}{7{\cdot}07} - 500 + \frac{6\,T_B}{7{\cdot}07}\right) = 0$$

அதாவது $T_B = 290$ கி. கி.

$$\therefore \; \underline{T_B} = \frac{290}{7{\cdot}07}\left(3\underline{i} + 5\,\underline{j} - 4\,\underline{k}\right)$$ கி. கி. ஆகும்.

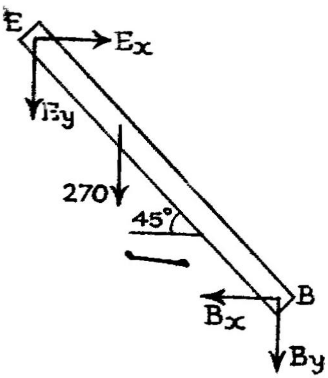
மாதிரி 6—5. சட்டங்கள் ஒன்றோடொன்று பிணைக்குமிடத்தில் ஊசி முனைப் பொருத்த அமைப்பைப் பெற்ற தொகுதியில் (படம் 6-15ல் காட்டிய வாறு) ஒரு திருகுச் சுருளில் செயல்படும் இழுவிசை 270 கி. கி. எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. சட்டங்கள் மெல்லியனவாகவும், தொடுகைப் பரப்புக்களில் உராய்வு விசைகள் புறக் கணிக்கப் பட்டுள்ளனவாகவும் கொண்டு, EB என்னும் சட்டப் பகுதியில் Bயில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசையின் கிடை, நிலைப் பகிர்வுகளைக் காண்க.



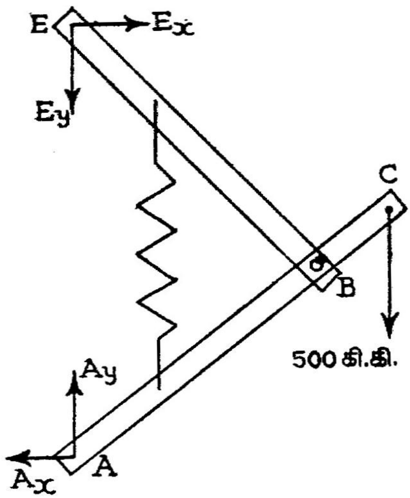
படம் 6–15

EB என்னும் சட்டத்தில், B என்னுமிடத்தில் கிடையாகவும், நிலையாகவும் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகள் தேவைப் படுவதால், அச்சட்டத்தைத் தனிப்படுத்தி வரை படத்தை வரைக. அது படம் 6-16ல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

இதில் 4 தெரியாக் கணியங்கள் உள. ஆனால் அச்சட்டத்தில் சமநிலைக்கு உரிய சமநிலைச் சமன்பாடுகள் மூன்று மட்டுமே உண்டு.



படம் 6-16



படம் 6-17

எனவே முழுப் பொருட்டொகுதிக்கும் உகந்ததான வரை படம் வரைந்து (படம் 6-17ல் உள்ளவாறு) அத்தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதற்கு உரிய சமநிலைச் சமன்பாடுகளையும் வரையறுக்க வேண்டி வருகிறது. இங்கும் 4 தெரியாக் கணங்கள் உள்ளன. ஆனால் இங்கும் மூன்று சமநிலைச் சமன்பாடுகள் மட்டுமே உள்ளன.

ஆகவே இரு தனித்தனியாகப் பிரித்த வரைபட அமைப்புக்களில் இறுதியாக 6 தெரியாக் கணியங்களும், 6 சமநிலைச் சமன்பாடுகளும் உள்ளன. எனவே தெரியாக் கணியங்களின் மதிப்புக்களைக் காண முடியும்.

முழுப் பொருட்டொகுதிக்கும் A பற்றி விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

$$-E_x\,[1{\cdot}8 \tan 35^\circ + 1{\cdot}8 \tan 45^\circ] - 500 \times (2{\cdot}4) = 0$$

$$E_x = -\ 392{\cdot}11 \text{ கி. கி.}$$

EB என்னும் சட்டத்தில் செயல்படும் விசைத் தொகுதிக்கு, விசைகளைக் கிடையாகப் பிரித்து அவற்றின் குறியியல் கூடுதலைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

அப்பொழுது $E_x - B_x = 0$

அல்லது $B_x = E_x = -392{\cdot}11$ கி. கி.

EBயில் உள்ள விசைத் தொகுதிக்கு E பற்றிய திருப்புத் திறனின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

அப்பொழுது,

$$-B_y(2{\cdot}4) - B_x(1{\cdot}8 \tan 45^\circ) - 270({\cdot}6) = 0$$

$$2{\cdot}4\, B_y = +B_x(1{\cdot}8) - 162$$

$$= +392 \times 1{\cdot}8 - 162$$

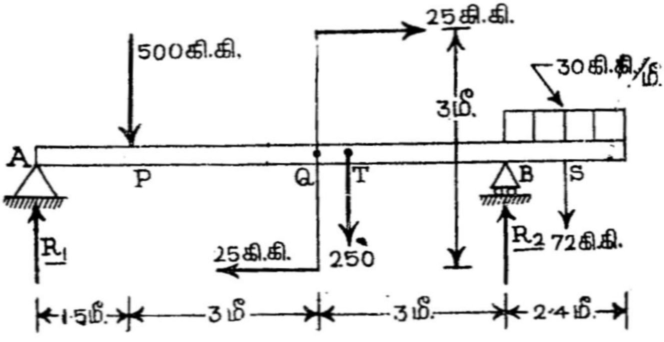
$B_y = 226{\cdot}58$ கி. கி.

எனவே Bயில் $B_x = 392{\cdot}11$ கி. கி. →

$B_y = 226{\cdot}58$ கி. கி. ↓

என்னும் எதிர்த் தாக்க விசைகள் செயல்படுகின்றன.

மாதிரி 6—6. 250 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு உத்திரம் படம் 6-18ல் காட்டியவாறு A, B என்னுமிடங்களில் செயல்படும் ஆதார விசைகளால் தாங்கப்படுகின்றது. அவ்விசைகளைக் காண்க.



படம் 6–18

உத்திரத்தைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைத் தொகுதியானது,

(1) $\underline{R_1} = R_1 \underline{j}$ என்னும் விசை A (0,0) மீ. என்ற இடத்தில் செயல்படுகிறது.

(2) $\underline{R_2} = R_2 \underline{j}$ என்னும் விசை B (7·5, 0) மீ. என்ற இடத்தில் செயல்படுகிறது.

(3) $\underline{F_1} = -500 \underline{j}$ என்னும் விசை P (1·5, 0) மீ. என்ற இடத்தில் செயல்படுகிறது.

(4) $\underline{F_2} = -72 \underline{j}$ என்னும் விசை S (8·7, 0) மீ. என்ற இடத்தில் செயல்படுகிறது.

(5) $\underline{F_3} = -250 \underline{j}$ என்னும் விசை T (4·95, 0) மீ. என்ற இடத்தில் செயல்படுகிறது.

(6) $\underline{C} = -75 \underline{k}$ என்னும் சுழலிணைப்புத் திறனும் செயல்படுகிறது.

$\underline{R} = \Sigma \underline{F_i} = 0$ என்னும் சமநிலைச் சமன்பாடு

$R_1 + R_2 - 500 - 72 - 250 = 0$ ஆகும்.

$\therefore R_1 + R_2 = 822 \qquad$ (i)

A பற்றி விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் கூடுதல்

$$= (7{\cdot}5\, \underline{i} \wedge R_2\, \underline{j}) + (1{\cdot}5\, \underline{i} \wedge -500\, \underline{j}) + (8{\cdot}7\, \underline{i} \wedge -72\underline{j}) + (4{\cdot}95\, \underline{i} \wedge -250\, \underline{j})$$

$$= 7{\cdot}5\, R_2\, \underline{k} - 750\, \underline{k} - 626{\cdot}4\, \underline{k} - 1237{\cdot}50\, \underline{k}$$

$$= 7{\cdot}5\, R_2\, \underline{k} - 2613{\cdot}9\, \underline{k}$$

எனவே A பற்றி அமையும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

அப்பொழுது,

$$7{\cdot}5\, R_2\, \underline{k} - 2613{\cdot}9\, \underline{k} - 75\, \underline{k} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$7{\cdot}5\, R_2 = 1451{\cdot}4$$

$R_2 = 358{\cdot}52$ கி. கி. $\qquad$ (iii)

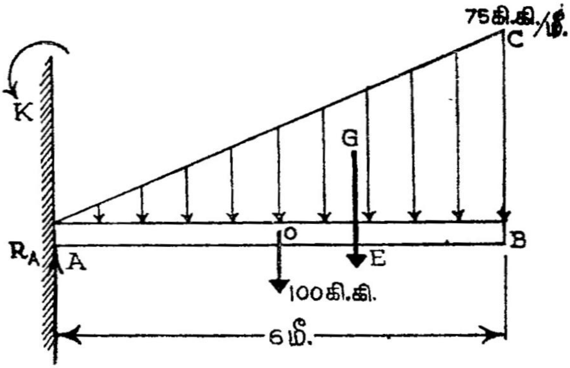
$\therefore R_1 = 822 - 358{\cdot}52$

$= 463{\cdot}48$ கி. கி.

எனவே A, B என்னும் புள்ளிகளில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகள் முறையே $R_1 = 463{\cdot}48$ கி. கி. ↑,

$R_2 = 358{\cdot}52$ கி. கி. ↑

மாதிரி 6—7. A என்னுமிடத்தில் படம் 6-19ல் காட்டிய சீரான உத்திரத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியில் செலுத்தப்படும் விசைத் தொகுதியின் அமைப்பைக் காண்க. உத்திரத்தின் எடையை 100 கி. கி. எனக் கொள்க.



படம் 6–19

சீரான உத்திரத்தைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகளின் தொகுதி

(1) அதன் எடை = 100 கி. கி.மீ ↓, O என்னும் புள்ளியில் (AO = OB = 3 மீ.)

(2) ஒரே சீராக மாறும் விசை = 75 கி. கி./மீ. (உத்திரத்தின் நீளவாட்டில்) $\equiv \frac{1}{2} \times 75 \times 6 = 225$ கி. கி. விசை ↓ G என்னுமிடத்தில் செயல்படுவதாகும். (G என்பது △ABCயின் புவியீர்ப்புப் புள்ளியாகும்.)

(3) Aயில் R_A ↑ என்னும் தாக்க விசையும், K ↺ என்னும் திருப்புத் திறனும் ஆகும்.

உத்திரத்தின் நிலைக்குத்துத் திசையில் செயல்படும் விசைகளின் குறியியல் கூடுதலைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

$$R_A - 100 - 225 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = 325 \text{ கி. கி.}$$

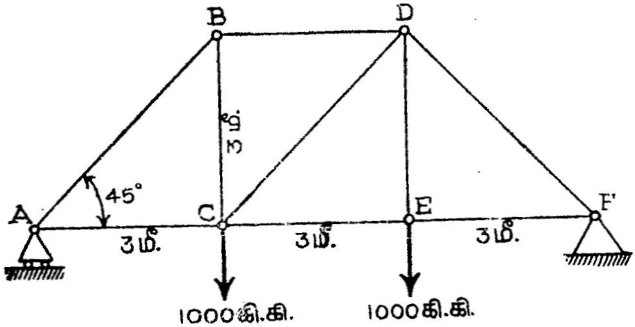
A என்னும் புள்ளி பற்றி விசைத் தொகுதியின் திருப்புத் திறனின் குறியியல் கூடுதலைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

$$K - 100 \times 3 - 225 \times 4 = 0$$

$$K = 300 + 900$$

$$= 1200 \text{ மீ. கி. கி.}$$

மாதிரி 6 – 8. படம் 6-20ல் எளியதொரு தள உத்திரத் தொகுதியின் அமைப்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. C, E என்ற



படம் 6–20

இடங்களில் முறையே 1000 கி. கி. எடையுள்ள பளுவுகள் செயற்படுகின்றன. உத்திரத் தொகுதியிலமையும் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் செயற்படும் விசை, இழுவிசை அல்லது இறுக்க விசை எனக் கண்டு அதன் எண் மதிப்பைக் காண்க.

(தொகுதியிலமையும் உத்திரங்களின் எடைகள் புறக் கணிக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.)

இங்கு உத்திரத் தொகுதியைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகள் பின்வருமாறு :

(i) Aயில், $R_1 \uparrow$ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசை,

(ii) Fல், $R_2 \uparrow$ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசை,

(iii) Cயில், 1000 ↓ கி. கி. எடையுள்ள பளுவு,

(iv) Dயில், 1000 ↓ கி. கி. எடையுள்ள பளுவு.

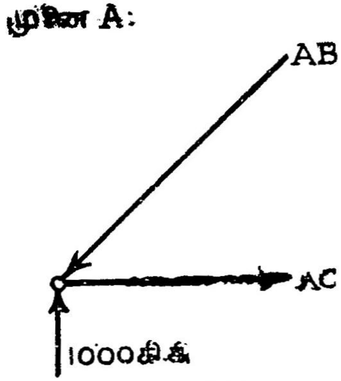
எனவே, $\boxed{\uparrow +}$ $\Sigma F_{iy} = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$$R_1 + R_2 - 2000 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

உத்திரத் தொகுதி செவ்வொழுங்குள்ள அமைப்பைப் பெற்றுள்ளதால், $R_1 = R_2$.

எனவே, $R_1 = R_2 = 1000$ கி. கி.

படம் 6-21ல், A முனைப் பகுதியில் செயற்படும் விசைகளின் அமைப்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6-21

↑+ $\Sigma F_{iy} = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$$-0{\cdot}707\ AB + 1000 = 0$$

ஆகும்.

$$\therefore\ AB = 1414 \text{ கி. கி.}$$

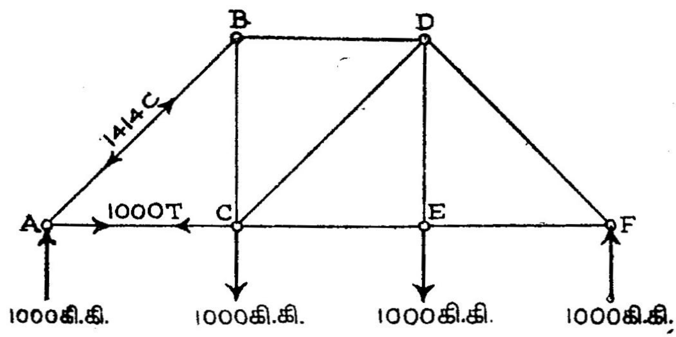
→+ $\Sigma F_{ix} = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$$AC - 0{\cdot}707\ AB = 0$$ என்றுகும்.

$$\therefore\ AC = 1000 \text{ கி. கி.}$$

A என்ற முனையை நோக்கும்பொழுது 1414 கி.கி. எடையுள்ள விசை ஒன்று, உத்திரப் பகுதி ABயிலிருந்து Aஐ நோக்கிச் செயற்படுகிறது. அவ் விசை Aஐத் தள்ள முயற்சிப்பதால் உத்திரப் பகுதி AB ஆனது **இறுக்க உறுப்பு** (Compression member) எனப்படும். AC என்ற உத்திரப் பகுதி, A என்ற முனையை 1000 கி.கி. எடையுள்ள விசை ஒன்றுல் இழுப்பதால், உத்திரம் AC ஆனது இழு பகுதி (tension member)யாகக் கருதப்படும்.

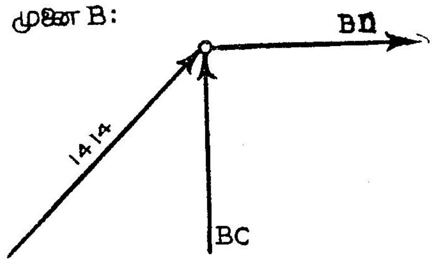
உத்திர உறுப்புக்களின் இறுக்க அல்லது இழு தன்மைகளை படம் 6-22 விளக்குகிறது.



படம் 6-22

C யிலமையும் விசைத் தொகுதி மூன்று தெரியாக் கணியங்களைப் பெற்றுள்ளதால், அதன் சமநிலையை அறிவதற்கு B என்னும் முனைப் பகுதியில் செயற்படும் விசைகள் உதவுகின்றன.

B முனையின் தனிப்படுத்திய அமைப்பு படம் 6-23ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6–23

| ↑ + | $\Sigma F_{1y} = 0$ என்ற சமன்பாடு,

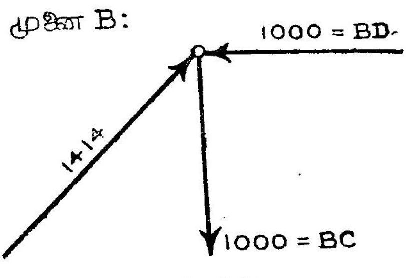
$$1414\,(0{\cdot}707) + BC = 0$$ ஆகும்.

$$\therefore\ BC = -\,1000$$ கி.கி.

| → + | $\Sigma F_{1x} = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$$1414\,(0{\cdot}707) + BD = 0$$ ஆகும்.

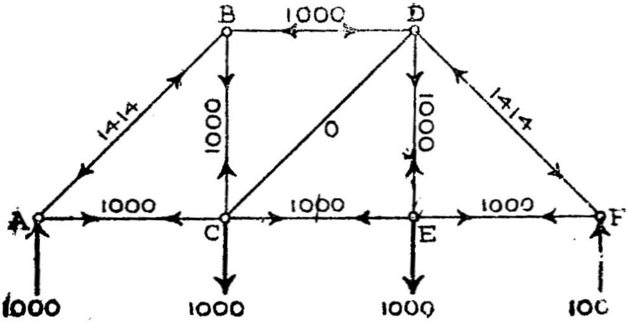
$$\therefore\ BD = -\,1000$$ கி.கி.



படம் 6–24

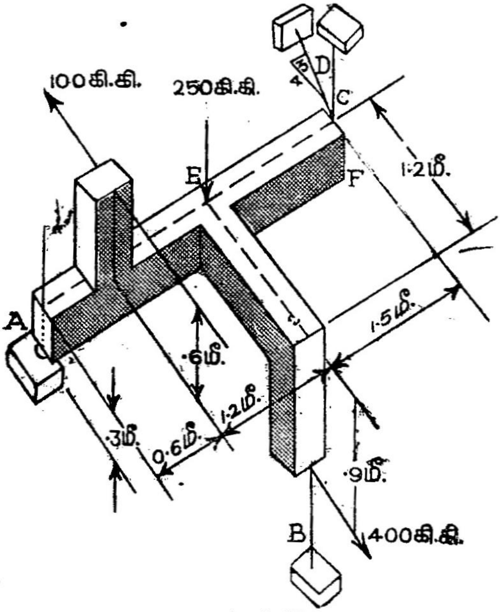
இவ்விரு விசைகளும் குறைக் குறியைப் பெற்றுள்ளதால், B முனைக்குரிய திருத்திய அமைப்பு படம் 6-24ல்காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு BD என்னும் உறுப்பு இறுக்கப் பகுதியாகவும், BC என்னும் உறுப்பு இழு பகுதியாகவும் அமைகின்றன.

இவ்வாறே ஒரு முனைப் புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு முனைப் புள்ளிக்கு முன்னேறிச் சென்று, உத்திரத் தொகுதி உறுப்புகளில் செயற்படும் விசைகளைக் காணலாம். அவற்றின் அமைப்பு படம் 6-25ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6–25

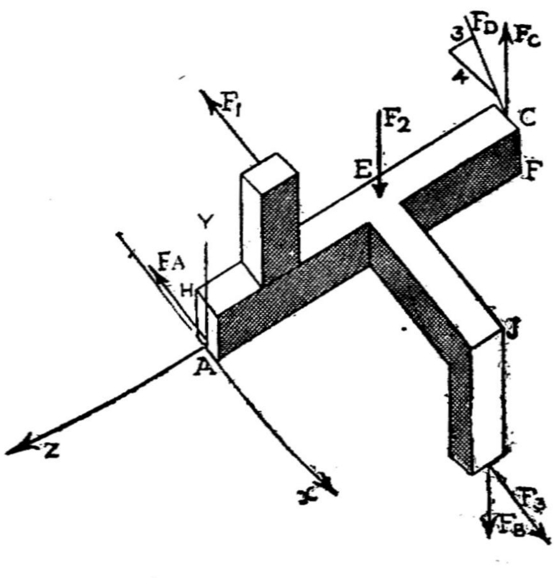
மாதிரி 6—9. படம் 6-26ல் காட்டியுள்ள பொருளானது A என்னுமிடத்தில் உரல் குழவிப் பொருத்தமான (ball and socket) அமைப்பை ஆதாரமாகக் கொண்டும், B, C என்னும் இரு



படம் 6–26

வலுவான செங்குத்துக் கம்பிகளாலும், D என்னும் வலுவானதும் கிடையிலமையும் கம்பியாலும் தாங்கப்படுகின்றது. அப்பொருளின் எடை புறக்கணிக்கப் பட்டதாகக் கொண்டு, A என்னுமிடத்தில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசை, B, C, D கம்பிகளில் செயல்படும் இழு விசைகள் ஆகியவற்றை வரையறுக்க.

படம் 6-27ல் பொருளானது தனிப்படுத்தப்பட்டு, அதில் செயல்படும் விசைகள் யாவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, $\underline{F_3}$ என்பவை தெரிந்த விசைகளாகும். $\underline{F_A}$, $\underline{F_B}$, $\underline{F_C}$, $\underline{F_D}$ என்பவை தெரியாத விசைகளாகும். Aயில் செயல்படும் எதிர்த்



படம் 6–27

தாக்க விசையின் எண் மதிப்பும், செயல்படும் கோடும் தெரியாதன வாகையால் அவ்விசையின் பகிர்வுகளான F_x, F_y, F_z என்பவற்றைத் தெரியாக் கணியங்களாகக் கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது 6 தெரியாக் கணியங்கள் விசைத் தொகுதியில் உள்ளனவாகும்.

ஆனால் பரந்தவெளியில் பொருள் சமநிலையிலிருப்பதற்கு ஆறு சமநிலைச் சமன்பாடுகள் இருத்தலால் ஆறு தெரியாக் கணியங்களையும் வரையறுக்க முடியும்.

A என்னும் புள்ளியை மூலப் புள்ளியாகவும், ZAX தளத்தைக் கிடைத் தளமாகவும், AY என்னும் கோட்டைக் கிடைத் தளத்திற்குக் குத்தாகவும் எடுக்க.

பொருளைச் சமநிலையில் வைக்கும் விசைகளும், அவ்விசைகள் செயல்படும் புள்ளிகளுடைய நிலைத் திசையிகளும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

$\underline{F_A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$ $\underline{r_A} = 0$

$\underline{F_B} = - B \underline{j}$ $\underline{r_B} = 1{\cdot}2\, \underline{i} - 1{\cdot}8\, \underline{k}$

$\underline{F_C} = C\, j$ $\underline{r_C} = - 3{\cdot}3\, \underline{k}$

$\underline{F_D} = D(- 0{\cdot}8\, i - 0{\cdot}6\, \underline{k})$ $\underline{r_D} = 0{\cdot}3\, \underline{j} - 3{\cdot}3\, \underline{k}$

$\underline{F_1} = - 100\, \underline{i}$ $\underline{r_1} = 0{\cdot}9\, \underline{j} - 0{\cdot}6\, \underline{k}$

$\underline{F_2} = - 250\, \underline{j}$ $\underline{r_2} = - 1{\cdot}8\, \underline{k}$

$\underline{F_3} = 400\, \underline{i}$ $\underline{r_3} = -0{\cdot}6\, \underline{j} - 1{\cdot}8\underline{k}$

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$\underline{i}(A_x - 0{\cdot}8\, D - 100 + 400) + \underline{j}(A_y - B + C - 250)$

$+ \underline{k}(A_z - 0{\cdot}6D) = 0$ என்றாகும்.

அதாவது $A_x - 0{\cdot}8D + 300 = 0$ (1)

$A_y - B + C - 250 = 0$ (2)

$A_z - 0{\cdot}6D = 0$ (3)

$\underline{M_O^R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge F_i = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

$0 + (1{\cdot}2\, \underline{i} - 1{\cdot}8\, \underline{k}) \wedge (- B\underline{j}) + (- 3{\cdot}3\, \underline{k}) \wedge (C\underline{j})$

$+ (0{\cdot}3\, \underline{j} - 3{\cdot}3\, \underline{k}) \wedge (- 0{\cdot}8D\, \underline{i} - 0{\cdot}6D\, \underline{k})$

$+ (0{\cdot}9\, \underline{j} - 0{\cdot}6\underline{k}) \wedge (- 100\, \underline{i}) + (- 1{\cdot}8\, \underline{k}) \wedge (- 250\, \underline{j})$

$+ (- 0{\cdot}6\, \underline{j} - 1{\cdot}8\, \underline{k}) \wedge (400\, \underline{i}) = 0$ என்றாகும்.

அதாவது,

$$- 1{\cdot}2B\,\underline{k} - 1{\cdot}8\,B\underline{i} + 3{\cdot}3C\,\underline{i} + 0{\cdot}24D\,\underline{k} - 0{\cdot}18D\underline{i} + {\cdot}264D\underline{j}$$
$$+ 90\,k + 60\underline{j} - 450\,\underline{i} + 240\,\underline{k} - 720\,\underline{j} =$$

அதாவது,

$$i\,(- 1{\cdot}8\,B + 3{\cdot}3\,C - 0{\cdot}18\,D - 450) + \underline{j}\,(0{\cdot}264\,D + 60 - 720)$$
$$+ \underline{k}\,(- 1{\cdot}2\,B + 0{\cdot}24\,D + 90 + 240) = 0$$

அதாவது,

$$- 1{\cdot}8\,B + 3{\cdot}3\,C - 0{\cdot}18\,D - 450 = 0 \qquad (4)$$

$$0{\cdot}264\,D - 660 = 0 \qquad (5)$$

$$- 1{\cdot}2\,B + 0{\cdot}24\,D + 330 = 0 \qquad (6)$$

(4), (5), (6) என்னும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

அப்பொழுது, $B = 325$ கி. கி. (7)

$C = 327{\cdot}5$ கி. கி. (8)

$D = 250$ கி. கி. (9)

எனவே (1)வது சமன்பாடு,

$A_x = 0{\cdot}8\,D - 300 = 0{\cdot}8 \times 250 - 300 = -100$ கி.கி. ஆகும். (10)

அவ்வாறே (2)வது சமன்பாடு

$A_y = 250 + B - C = 250 + 325 - 327{\cdot}5 = 247{\cdot}5$கி.கி. ஆகும். (11)

இறுதியாக (3)வது சமன்பாடு,

$A_z = 0{\cdot}6D = 0{\cdot}6 \times 250 = 150$ கி. கி. ஆகும். (12)

$\therefore\ \underline{F_A} = -100\,\underline{i} + 247{\cdot}5\,\underline{j} + 150\,\underline{k}.$ (13)

பயிற்சி

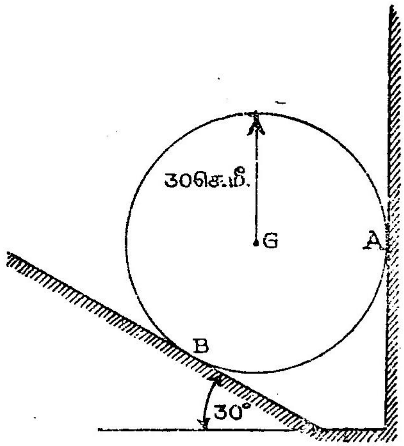
6—1. 5 மீட்டர் நீளமுள்ள கயிறு ஒன்று 3 மீட்டர் தொலைவைப் பெற்ற A, B என்னுமிடத்திலமையும் ஆதாரங்களில் பொருத்தப்பட்டுத் தொங்குகிறது. A என்னும் புள்ளி B என்னும் புள்ளி அமையுமிடத்திற்கு 1·5 மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது.

ஒரு சிறிய மழமழப்பான கப்பியில் பளு ஒன்று பிணைக்கப்பட்டு, கயிற்றின்மேல் ஊர்ந்து செல்லும் வகையில் உள்ளது. பளு அமைதி நிலையை அடையும்போது, அது இருக்குமிடத்தை வரையறுக்க.

[விடை : பளுவானது A என்னும் புள்ளியிலிருந்து கிடையாக 2·06 மீட்டர் தொலைவிலும், நிலையாகக் கீழ்நோக்கி 2·75 மீட்டர் தொலைவிலும் அமையும்.]

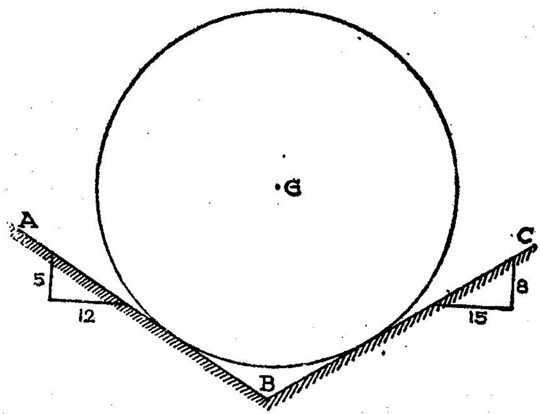
6—2. 270 கி.கி. எடையுள்ளதும் மழமழப்பானதும் சீரானதுமான உருளை ஒன்று படம் 6–28ல் காட்டியவாறு தாங்கப்படுகின்றது. A, B என்னும் இடங்களில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைக் காண்க.

[விடை : 156 கி. கி., 312 கி. கி.]



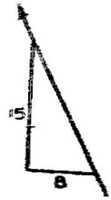
படம் 6–28

6—3. 342 கி. கி.எடையுள்ள ஒரே சீரான உருளை ஒன்று இரு சாய்வு தளங்களுக்கு இடையில் படம் 6-29ல் காட்டியவாறு அமைகின்றது. சாய்வு தளம் BC ஆனது,



படம் 6–29

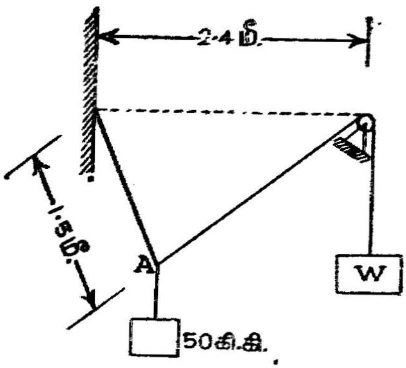
உருளையின்மேல் செயல்படுத்தும் எதிர்த் தாக்க விசையைக் காண்க.



[விடை : 170 கி. கி. என்னும் திசையில் G வழியே]

6—4. 50 கி. கி. எடையுள்ள பளு ஒன்று படம் 6-30ல் காட்டியவாறு A என்னுமிடத்தில் இரு இலேசான இழைகளால் பிணைக்கப்பட்டுத் தாங்கப்படுகின்றது. $\alpha = 60$ என்றிருப்பதற்கு உரிய W என்னும் விசையின் எடையைக் காண்க.

[விடை : 25·26 கி. கி.]



படம் 6–30

6—5. மேற்கூறிய கணக்கில் (அதாவது 6-4ல்) Wவின் எடை 40 கி. கி. என்றிருக்கும்போது αயின் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : 39°]

6—6. ஒரு திண்மக் கூம்பின் உயரம் h, அதன் அரை உச்சிக் கோணம் α. அதன் அடிப்பாகம் மழமழப்பான நிலைக் குத்துச் சுவரில் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டு, அதனுச்சிக்கும் அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் தொடுக்கப்பட்ட ஓரிழையினாலே அது தாங்கப்படுகிறது.

அவ்விழையின் மிகப் பெரிய சாத்தியமான நீளம்

$h \sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

6—7. 2 l நீளமுள்ள ஓர் இழையின் ஒரு நுனி, 2a நீளமுள்ள ஒரு பளுவான, மழமழப்பான சீர்க்கோலொன்றின் ஒரு முனையில்

கட்டப்பட்டதுடன், அதன் மற்ற நுனி அந்தக் கோலில் வழுக்கக்கூடிய ஒரு எடையில்லாத வளையத்தில் கட்டப் பட்டிருக்கிறது. அந்தக் கோல் அவ்விழையின் உதவியால் ஒரு மழமழப்பான ஒரு முனைக் கட்டையிலிருந்து தொங்கவிடப் படுகிறது. சமநிலையில் அக்கோலானது நிலைக்குத்துடன் θ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்கினுல், $l \cos\theta = a \sin^3\theta$ எனக் காட்டுக.

6—8. தன் புவியீர்ப்பு மையத்தால் a, b என்னும் பகுதி களாகப் பிரிக்கப்படுகின்ற ஒரு உத்திரம், ஒன்றையொன்று ஒரு கிடைக் கோட்டில் வெட்டிக்கொண்டு, கிடைத் தளத்திற்கு (horizontal plane) முறையே α, β என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்த இரண்டு மழமழப்பான தளங்களிலே தன் முனைகள் கிடக்கச் சமநிலையில் இருக்கின்றது. கிடைத் தளத்தோடு அவ்வுத்திரம் உண்டாக்கும் கோணத்தையும், அத்தளங்களுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

[விடை : θ என்பது உத்திரம் அடிவானத்துடன் உண்டாக்கும் கோணமென்ருல், $\tan\theta = \dfrac{b \cot\beta - a \cot\alpha}{(a + b)}$.

உத்திரத்தின் எடையை W எனக் கொண்டால்,

உத்திரத்தின் மேல் புள்ளியில் செயல்படும்

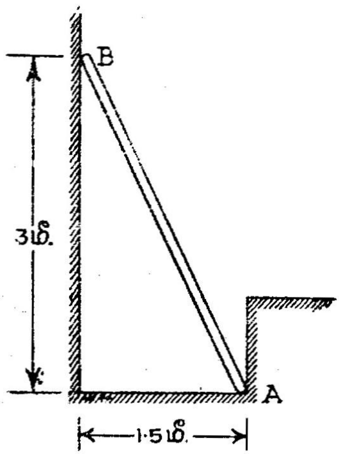
$$\text{எதிர்த் தாக்கம்} = \frac{W.\ \text{Sin}\ \beta}{\text{Sin}\ (\alpha+\beta)};$$

உத்திரத்தின் கீழ்ப் புள்ளியில் செயல்படும்

$$\text{எதிர்த் தாக்கம்} = \frac{W\ \text{Sin}\ \alpha}{\text{Sin}\ (\alpha+\beta)}.$$

6—9. 100 கி. கி. எடையும் 5 மீட்டர் நீளமும் உள்ள ஒரே சீரான வளையின் கீழ் முனையானது ஒரு நிலைக் குத்துச் சுவருடன் 45° கோணத்தைத் தாங்குமாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மேல் முனையில் ஓரிழை கட்டப்பட்டு, மேல் முனையைவிட 3 மீட்டர் அதிகமுள்ள குத்துத் தொலைவைக் கொண்ட, சுவரில் அமையும் புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. 500 கி. கி. எடை யுள்ள ஒரு பளு வளையின் மேல் முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட் டுள்ளது எனில், இழையில் செயற்படும் இழு விசை, பிணையலில் செயற்படும் எதிர்த் தாக்க விசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

[விடை : இழு விசை 390·2 கி. கி., எதிர்த் தாக்கம் 297·8 கி. கி. →; எதிர்த் தாக்கம் 252·3 கி. கி. ↑]



படம் 6–31

6—10. 25 கிலோகிராம் எடையுள்ள ஒரு ஏணியானது அதனுடைய மேல்முனை மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராயும், கீழ் முனையானது மழமழப்பான தரையும் மற்றொரு மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரும் சேருமிடத்தும் படம் 6-31ல் காட்டியவாறு இருக்கும் வண்ணம் நிற்கின்றது. ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் இடப் புறமுள்ள சுவரிலிருந்து 1 மீட்டர் தொலைவில் உள்ளது எனில் ஏணியில் செயற்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைக் காண்க.

[விடை : $\underline{R_A}$ = 25·5 கி.கி.

A வழியே ;

$\underline{R_B}$ = 5 கி.கி. → B வழியே.]

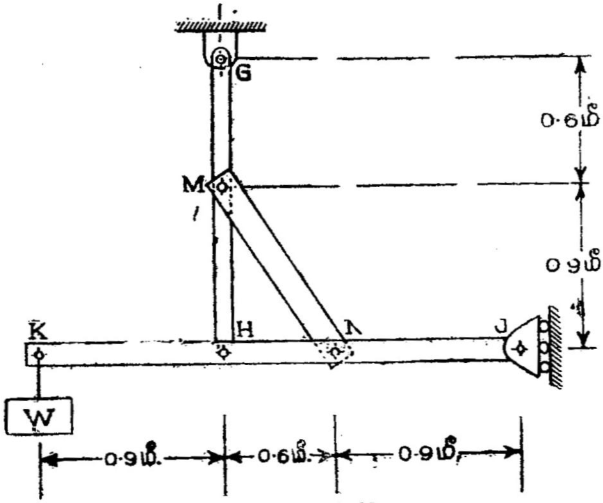
6—11. G, J என்னுமிடத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஊசி முனையில் பிணைக்கப்பட்ட (pin-connection) சட்டத் தொகுதியின் அமைப்பு (structure) படம் 6-32ல் காட்டியவாறு உள்ளது. G, J என்னுமிடங்களில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளையும், GH என்னும் சட்டப் பகுதியில் H, M என்னுமிடங்களில் அமையும் ஊசிமுனைத் தாக்க விசைகளையும் (pin reactions) காண்க. K என்னுமிடத்தில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள பளுவை 150 கி.கி. எனக் கொள்க. தொகுதி அமைப்பில் உள்ள சட்டங்களின் எடைகளைப் புறக்கணிக்க.

[விடை : $\underline{F_G} = 175 \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\underline{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\underline{j}\right)$ கி.கி.

$\underline{F_H} = 380\,(0{\cdot}158\,\underline{i} - 0{\cdot}9872\,\underline{j})$ கி.கி.

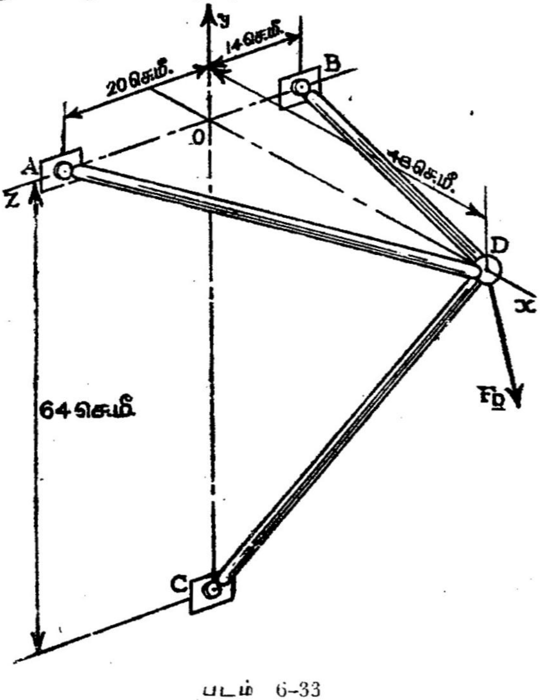
$\underline{F_J} = -\,90\,\underline{j}$ கி.கி.

$\underline{F_M} = 270{\cdot}5 \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}\right)$ கி.கி.



படம் 6–32

6—12. சுவர்ப் பகுதியில் ஆதாரமாகத் தாங்கும் AD, BD, CD என்னும் வலுவான இரும்புக் கம்பிகள் A, B, C என்னும்

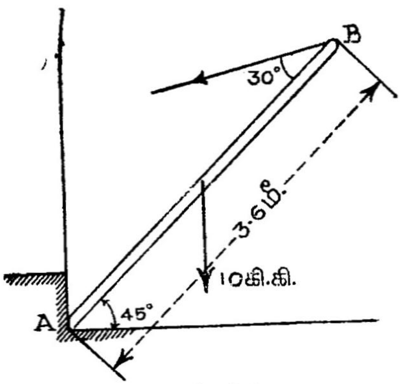


படம் 6–33

புள்ளிகளில் பந்து–கிண்ணி மூட்டுப் பொருத்தல் (ball and socket joint) அமைப்புக்களைப் பெற்று D என்னுமிடத்தில் படம் 6-33ல் காட்டியவாறு இறுக்கமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. D என்னும் புள்ளி வழியே $\underline{F_D} = (75\,\underline{i} - 600\,\underline{j} - 300\,\underline{k})$ கி.கி. விசையானது செயல்படுகிறது. CD, AD என்னும் கம்புப் பகுதிகளில் செயல் படும் விசைகளைக் காண்க.

[விடை : $\underline{F_{CD}} = 750\,(0{\cdot}6\,\underline{i} + 0{\cdot}8\,\underline{j}\,]$ கி.கி.

$\underline{F_{AD}} = -\,693\,(-\,0{\cdot}923\,\underline{i} + 0{\cdot}385\,\underline{j})$ கி.கி. இவ்விரண்டு விசைகளும் D வழியே செயல்படுகின்றன.]



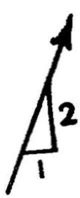
படம் 6–34

6—13. 3·6 மீட்டர் நீளமுள்ளதும் 10 கி.கி. எடையுள்ளதுமான ஓர் பாவு கட்டை (joist)யை [படம் 6-34ல் காட்டியவாறு] மனிதன் அதன் மேல் நுனியில் கட்டப்பட்டுள்ள கயிறு ஒன்றை இழுத்து உயர்த்துகிருன். A என்னுமிடத்தில் ஏற்படும் எதிர்த் தாக்க விசையையும் கயிற்றில் செயல்படும் இழு விசையையும் காண்க.

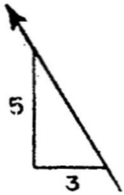
[விடை : Aயில் 13·785 கி. கி., † 63° 27′ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசை Bயில் இழு விசை $5\sqrt{2}$ கி. கி.]

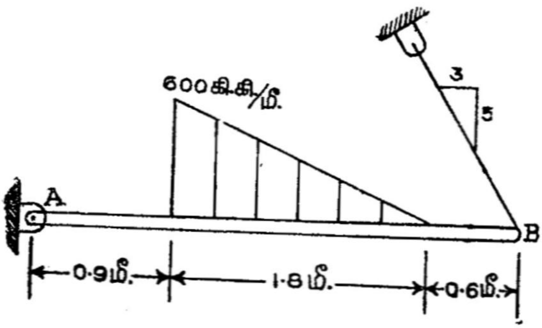
6—14. படம் 6–35ல் காட்டியவாறு கிடையாகக் கிடக்கும் உத்திரத்தின்மேல் செயல்படும் எல்லா இழு விசைகளையும் காண்க. உத்திரத்தின் எடையைப் புறக்கணிக்க.

[விடை : F_A = 366 கி.கி.



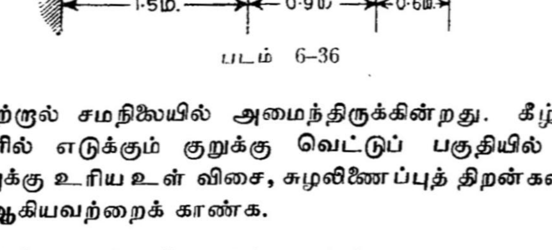
என்னும் திசையில் A வழியாகச் செயல்படும்.

F_B = 318 கி.கி.  என்னும் திசையில் B வழியாகச் செயல்படும்.]



படம் 6–35

6—15. ஒரு வளைவுச் சட்ட உத்திரம் (cantilever beam) படம் 6–36ல் காட்டியவாறு உள் விசை, புறவிசை, சுழலிணை



படம் 6–36

ஆகியவற்றால் சமநிலையில் அமைந்திருக்கின்றது. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளில் எடுக்கும் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியில் சமநிலை அமைப்புக்கு உரிய உள் விசை, சுழலிணைப்புத் திறன்களின் எண் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(a) குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி A

(b) குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி B

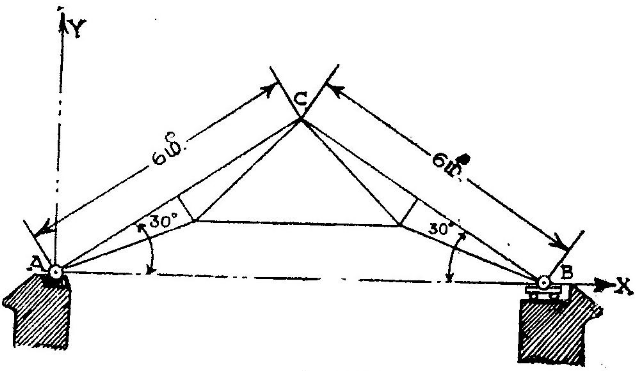
(c) குறுக்கு வெட்டுப் பகுதி C.

[விடை : (a) $F_A = 900$ கி.கி. ; $M_A = 1980$ மீ. கி.கி.

(b) $F_B = 900$ கி.கி. ; $M_B = 630$ மீ. கி.கி.

(c) $F_C = 0$; $M_C = 270$ மீ. கி.கி.]

6—16. 2000 கி.கி. எடையுள்ள ABC என்னும் சீரான உத்திரத் தொகுதி ஒன்று, A என்ற முனையில் படம் 6-37ல் காட்டியவாறு பிணைக்கப்பட்டும், அதன் B என்னும் மற்றொரு



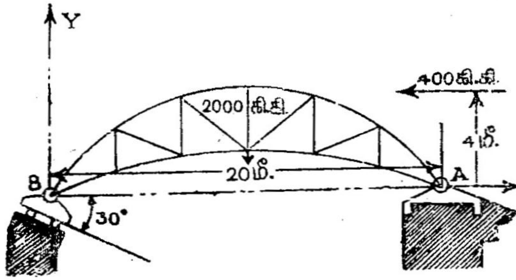
படம் 6–37

முனை, கிடையாகவுள்ள தகடு ஒன்றில் உருண்டு செல்லத்தக்க உருளைகளின்மேல் பொருத்தப்பட்டுமுள்ளது. AC = BC = 6மீ. ; ∠CAB = 30° எனவும், சீரான பகிர்வைப் பெற்றதும், 160 கி.கி. எடையுமுள்ள காற்று விசை ஒன்று (a uniformly distributed wind load of 160 kg.), AC என்னும் உத்திர உறுப்பிற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுவதாகவும் கொண்டு A, B முனைகளில் நிகழும் எதிர்த் தாக்க விசைகளைக் காண்க.

[விடை : $R_B = 1046$ கி.கி.; $F_{Ax} = 80$ கி.கி. ;
$F_{Ay} = 1092$ கி.கி.]

6—17. 20 மீட்டர் நீளமும், 2000 கி.கி. எடையுமுள்ள வளைவு உத்திரமொன்று, A என்னுமிடத்தில் படம் 6-38ல் காட்டியவாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத் தளத்துடன் 30° கோணச் சரிவைப் பெற்ற தகடு ஒன்றில் உருண்டு செல்லத் தக்க உருளைகளின்மேல், அதன் B என்ற மற்றொரு நுனி பொருத்தப்பட்டுள்ளது. ABயிலிருந்து 4 மீட்டர் உயரத்திலும், ABக்கு இணையான திசையிலும் வீசும் காற்றானது, உத்திரத்தின்

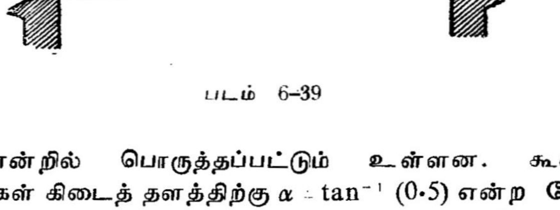
மேல் 400 கி.கி. அளவுள்ள விசை ஒன்றைச் செயல்படுத்துகிற தெனில், முட்டுக்களின் எதிர்த் தாக்க விசைகளைக் காண்க.



படம் 6–38

[விடை : F_{Ax} = 224 கி.கி. ; F_{Ay} = 920கி.கி. ;
R_B = 1247 கி.கி.]

6—18. 5 மீட்டர் நீளமுள்ள இரு உத்திரங்கள் C என்னு மிடத்தில் பிணைக்கப்பட்டும், அவ்வுத்திரத் தொகுதியின் இரு முனைகளும், படம் 6–39ல் காட்டியவாறு, AB என்னும் ஓர் கிடை

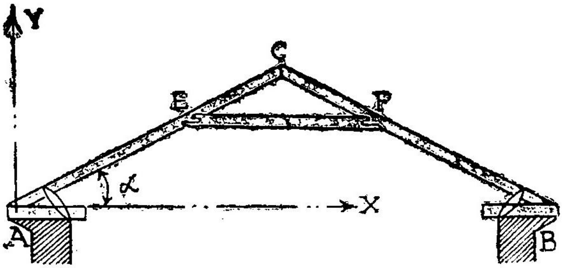


படம் 6–39

விட்டமொன்றில் பொருத்தப்பட்டும் உள்ளன. கூரையின் உத்திரங்கள் கிடைத் தளத்திற்கு $\alpha = \tan^{-1}(0{\cdot}5)$ என்ற கோணச் சாய்விலுள்ளன. உத்திர உறுப்பு ஒவ்வொன்றின் மையப் புள்ளியிலும் 180 கி. கி. எடையுள்ள பளு செயற்படுவதாகில், C, A என்னுமிடங்களில் செயல்படும் விசைகளைக் காண்க.

[விடை : F_C = 180 கி. கி. ; F_{AX} = 180 கி. கி. ; F_{AY} = 180 கி. கி.]

6—19. ஒவ்வொன்றும் 4 மீட்டர் நீளமுள்ள AC, BC என்னும் மரச் சட்டங்களைக் கொண்ட ஓர் கூரை உத்திரத்தின்

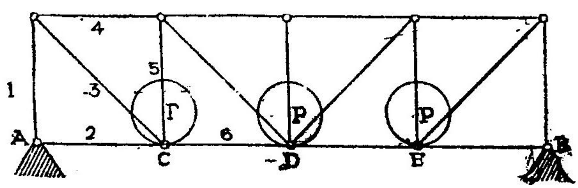


படம் 6–40

அடி முனைகள், A, B என்னுமிடங்களிலமையும் சுவர்ப் பகுதிகளில் பொருத்தப்பட்டும், EF என்னும் கிடை விட்டமொன்றால் தாங்கப் பட்டும், படம் 6-40ல் காட்டியவாறு நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. AC, BC சட்டங்களின் மையப் புள்ளிகளில் 160 கி. கி. எடையுள்ள பளு பயன்படுத்தப்படுகின்றன. உராய்வு விசை புறக்கணிக்கப்படுவதாகவும், கூரையின் சரிவு $\alpha = \tan^{-1}(0{\cdot}5)$ எனவும், AC = 3EC எனவும் கொண்டு, Aயிலமையும் சுவர்ப் பகுதியின் எதிர்த் தாக்க விசை, EFல் நிகழும் இழு விசை ஆகிய வற்றைக் காண்க.

[விடை : R_A = 160 கி. கி. ; T = 480 கி. கி.]

6—20. C, D, E என்னுமிடங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், P = 2000 கி. கி. எடையுள்ள பளுவைத் தாங்கிய வண்ணமா

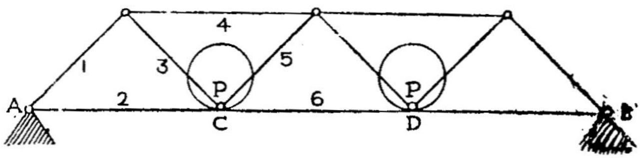


படம் 6–41

யுள்ள பால உத்திரத் தொகுதி ஒன்றின் வடிவமைப்பு, படம் 6-41ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. சரிந்த பாவு உத்திர உறுப்புகள் (inclined web members) கிடைத் தளத்துடன், 45° கோணத்தைத் தாங்குகின்றன. பகுமுறையைக் கையாண்டு, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று இலக்கமிட்ட உறுப்புகளில் செயல்படும் விசைகளைக் காண்க.

[விடை : $S_1 = -3000$ கி. கி. (இறுக்க விசை) ; $S_2 = 0$;
$S_3 = +4250$ கி.கி. (இழு விசை); $S_4 = -3000$ கி.கி.
$S_5 = -1000$ கி. கி. $S_6 = +3000$ கி. கி.]

6—21. படம் 6-42ல் காட்டிய பால உத்திரமொன்று, C, D என்ற இடங்களில் P = 2000 கி. கி. எடையுள்ள இரு சமமான

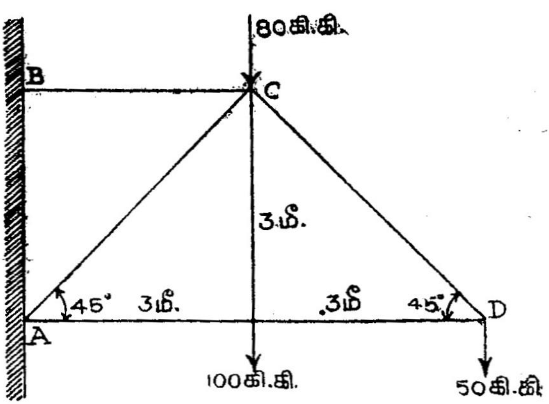


படம் 6-42

பளுவைத் தாங்குகிறது. சரிந்த பாவு உத்திர உறுப்புகள் கிடைத் தளத்துடன் 45° கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன வெனில், பகு முறையைக் கையாண்டு, பயன்படுத்தப்பட்ட பளுவின் காரணமாக, 1, 2, 3, 4, 5, 6 எனக் குறிக்கப் பட்டுள்ள உறுப்புகளில் நிகழும் விசைகளைக் காண்க.

[விடை : $S_1 = -2820$ கி. கி. ; $S_2 = +2000$ கி. கி. ;
$S_3 = +2820$ கி. கி. ; $S_4 = -4000$ கி. கி. ;
$S_5 = 0$; $S_6 = +4000$ கி. கி.]

6—22. வளைவுச் சட்ட உத்திரத் தொகுதி (cantilever truss) ஒன்று, படம் 6-43ல் காட்டியவாறு மூன்று பளுவினைத் தாங்கிய

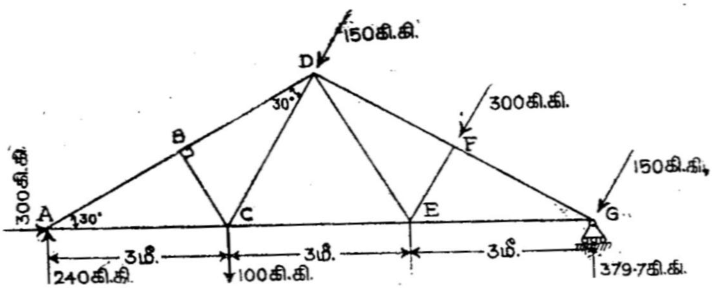


படம் 6-43

வாறும், A, B என்னுமிடங்களில் பற்றி இறுக்கப்பட்டும் (clamped) உள்ளது. இயற் கணித முறையைக் கையாண்டு, உத்திரச் சட்டங்களில் ஏற்படும் விசைகளைக் காண்க.

[விடை : S_{BC} = + 280 கி.கி. ;
$S_{AE} = S_{ED}$ = − 50 கி.கி. ; S_{CD} = + 70·7 கி.கி.;
S_{CE} = + 100 கி.கி. ; S_{AC} = − 325·5 கி.கி.]

6—23. கூரை உத்திரத் தொகுதியொன்று, படம் 6-44ல் காட்டியவாறு A என்ற முனையில் பிணைக்கப்பட்டும், G என்ற

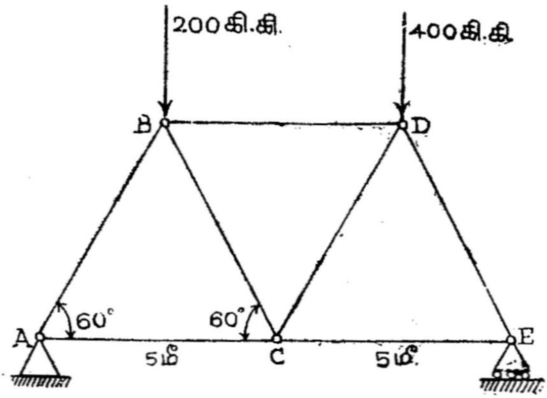


படம் 6–44

முனையில் உருளை ஒன்றின்மேல் பொருத்தப்பட்டும், 4 பளு வைத் தாங்கியவாறும் உள்ளது. இயற் கணித முறையைப் பயன்படுத்தி, உத்திரத் தொகுதி உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றிலும் நிகழும் விசைகளைக் காண்க.

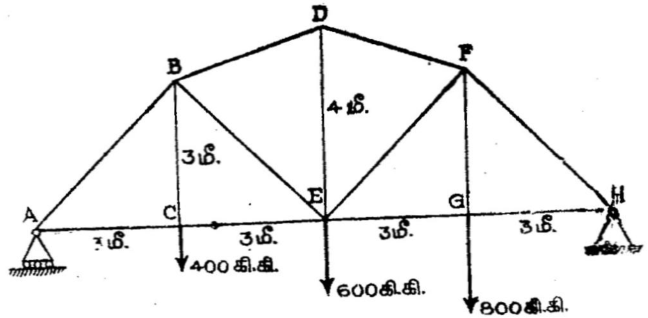
6—24. படம் 6-45ல் காட்டியவாறு உள்ள ஊசிமுனை இணைப்பைப் பெற்ற (pin connected) உத்திரத் தொகுதியின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஏற்படும் விசையைக் காண்க.

[விடை : F_{AB} = 288 கி. கி. (இறுக்க விசை) ;
F_{BC} = 57·7 கி. கி. (இழு விசை) ;
F_{CD} = 57·7 கி. கி. (இறுக்க விசை) ;
F_{BD} = 173 கி. கி. (இறுக்க விசை) ;
F_{DE} = 404 கி.கி. (இறுக்க விசை) ;
F_{CE} = 202 கி.கி. (இழு விசை) ;
F_{AC} = 144 கி.கி. (இழு விசை).]



படம் 6-45

6—25. படம் 6-46ல் காட்டியவாறு, ஊசி முனை இணைப்பைப் பெற்ற உத்திரத் தொகுதியின் EC, ED, EF என்னும் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றிலும் செயற்படும் விசையைக் காண்க.



படம் 6-46

[விடை : S_{EC} = 800 கி. கி. (இழு விசை)

S_{ED} = 600 கி. கி. (இழு விசை)

S_{EF} = $100\sqrt{2}$ கி. கி. (இறுக்க விசை)]

7. உராய்வு

(Friction)

ஒன்றையொன்று தொடும் பொருள்களுக்கிடையே ஒரு பொருளின்மீது மற்ருெரு பொருள் வழுக்குதலைத் தடுக்கும் விசையே உராய்வு விசை எனப்படும்.

7—1. உராய்வு வரையறை:

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், ஒரு பொருளானது மற்ற பொருளின்மீது வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு அவற்றின் தொடுபுள்ளியில் நிகழும் விசைக்குக் காரணமாயுள்ள அவ்விரு பொருள்களினுடைய பண்பு **உராய்வு** எனப்படும்.

உராய்வு என்பது தாஞகவே சரிக்கட்டும் விசை. இயக்கத்தைத் தடுப்பதற்குமேல் அதிகமாக உராய்வு நிகழ்வதில்லை.

7—2. நிலையியல் உராய்வு விதிகள் பின்வருமாறு:

விதி 1:

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், அவற்றுள் ஒன்றின்மீது செயல்படும் உராய்வினது திசை, அவற்றின் தொடுபுள்ளி இயங்கத் தொடங்க முயலும் திசைக்கு எதிராகும்.

விதி 2:

பொருள் சமநிலையிலுள்ளபொழுது, உராய்வின் அளவு பொருளின் இயக்கத்தைத் தடுப்பதற்குச் சரியாகப் போதியதாகும்.

எல்லை உராய்வு (Limiting friction) :

வரையறை :

ஒரு பொருள் வேறொரு பொருளின்மீது சரியாக வழுக்குறு நிலையிலிருந்தால், அச் சமநிலை எல்லையடைகின்றதெனப்படும். அப்போது நிகழும் உராய்வு எல்லை உராய்வு எனப்படும்.

விதி 3 :

பொருள்கள் உராயும்பொழுது கிடைக்கும் எல்லை உராய்வு விசை, தொடுகைத் தளத்தின் செங்குத்து விசைக்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும்.

விதி 4 :

அவ்வாறு ஏற்படும் எல்லை உராய்வு விசை, பொருள்கள் தொடும் மேற்பரப்புகளுடைய அளவையும் (size), வடிவத்தையும் (shape) சாராதிருக்கும்.

விதி 5 :

ஒரு பொருள் வேறொரு பொருளின்மீது வழுக்கி இயக்கம் உண்டாக்கும்போது, உராய்வின் திசை இயக்கத் திசைக்கு எதிராகும். உராய்வின் அளவு பொருள்களின் சார்பு வேகத்தைச் சார்ந்ததல்ல. ஆனால் உராய்வானது செங்குத்தாகச் செயல்படும் எதிர்த் தாக்கத்தோடு கொள்ளும் விகிதம், பொருள் ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்கும் தருணத்தில் உள்ள விகிதத்திற்குச் சற்றுக் குறைவாகும்.

7—3. உராய்வுக் கெழு (Coefficient of friction) :

எல்லை உராய்வானது செங்குத்து எதிர்த் தாக்க விசையுடன் கொள்ளும் மாறு விகிதம் உராய்வுக் கெழு எனப்படும். μ என்னும் எழுத்தால் அது குறிக்கப்படும்.

சமநிலை அழிக்கப்படும் நிலையிலிருக்கும்போது, F என்பது உராய்வையும், R என்பது செங்குத்து எதிர்த் தாக்க விசையையும் குறித்தால்,

$$\frac{F}{R} = \mu$$

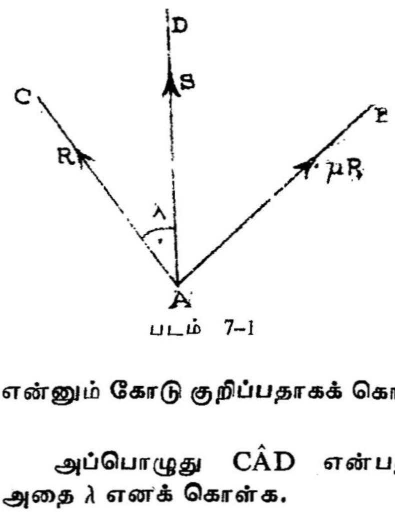
அதாவது, $F = \mu R$ ஆகும்.

பொருள் எல்லைச் சமநிலையை அணுகாமலிருக்கும் நிலைமைகளில், அதே மதிப்புடைய Rக்கு F என்னும் உராய்வு விசை μ Rஐ விடக் குறைவாகும். மேலும் ஒன்றை ஒன்று தொடும் வெவ்வேறு பொருட் சோடிகளுக்கு, μவினுடைய மதிப்பு மாறக் கூடும்.

7—4. உராய்வுக் கோணம் (Angle of friction):

சமநிலை, எல்லைச் சமநிலையை அணுகும்போது உராய்வும், செங்குத்து எதிர்த் தாக்கமும் ஒரே தனி விசையாகச் சேர்க்கப்படின், செங்குத்தோடு இவ் விசை உண்டாக்கும் கோணம் உராய்வுக் கோணம் எனப்படும்.

அத் தனி விசை விளைவெதிர்த் தாக்கம் எனப்படும்.



படம் 7–1

எடுத்த இரு பொருள்களும் A என்னுமிடத்தில் தொடுவதாகக் கொள்க. படம் 7–1ல் AC, AB என்னும் கோடுகள் செங்குத்து எதிர்த் தாக்க விசை R, உராய்வு விசை μ R என்பவற்றின் செயல்படும் திசைகளைக் குறிக்கட்டும். இவ்விரண்டு விசைகளின் தொகுபயன் விசையை S என்பது குறிக்கட்டும். அது செயல்படும் திசையை AD என்னும் கோடு குறிப்பதாகக் கொள்க.

அப்பொழுது $C\hat{A}D$ என்பது உராய்வுக் கோணமாகும். அதை λ எனக் கொள்க.

R, μR என்பவை Sன் பகிர்வுகளாவதால்,

$$\mu R = S \sin \lambda$$

$$R = S \cos \lambda$$

எனவே $\mu = \tan \lambda$ ஆகும்.

$\therefore \quad F \leqslant \mu R$ என்பது,

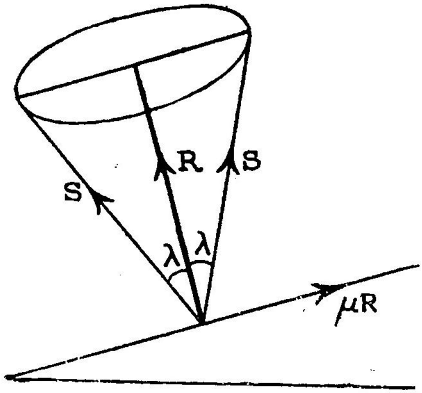
$F \leqslant \tan \lambda \, R$ ஆகும்.

7—5. உராய்வுக் கூம்பு (Cone of friction):

உராய்வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு μR ஆகும். ஆதலால் விளைவெதிர்த் தாக்கத்தின் திசை செங்குத்துக் கோட்டுடன் உண்டாக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய கோணம் λ ஆகும்.

எனவே $\lambda = \tan^{-1}(\mu)$.

இரு பொருள்கள் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது, பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டை அச்சாகவும், தொடுபுள்ளியை உச்சியாகவும் கொண்டு, அரை உச்சிக் கோணம் λ என்றுள்ள ஒரு கூம்பை வரைந்தால், விளைவெதிர்த் தாக்கத்தின் எத் திசையும் இக் கூம்பிற்கு உள்ளே அல்லது இக் கூம்பின் மீது இருத்தல் வேண்டும். (படம் 7-2ஐப் பார்க்க).



படம் 7–2

இக் கூம்பு உராய்வுக் கூம்பு எனப்படும்.

உராய்வு விசைகளை உள் அடக்கமாகக் கொண்டுள்ள கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண பின்வரும் மூன்று நிலைகளைப் பின்பற்றுதல் முறையாகும்.

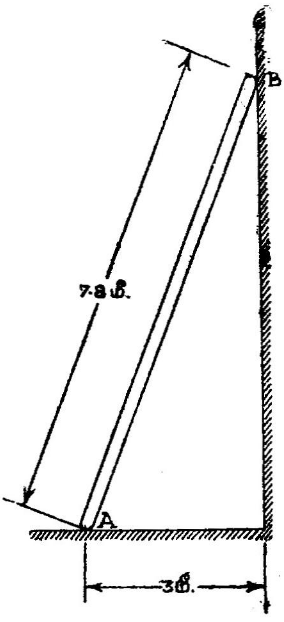
(i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து பொருள் சம நிலையில் எப்பொழுதும் இருக்கும் என அறிதல்.

(ii) விவரங்களிலிருந்து உராய்வு விசைகள் செயல்படும் தொடுகைப் பரப்புக்களில் பொருளின் சம நிலை எல்லைச் சமநிலையை அணுகி இயங்கக்கூடும் என அறிதல்.

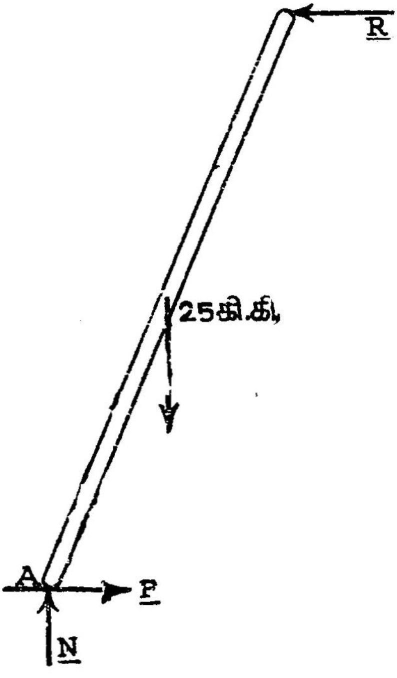
(iii) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, பொருள் இயங்க வேண்டிய நிலையிலுள்ளது என அறிதல். பிறகு அவ்வித இயக்கம் வழுக்குதலை (slipping) அல்லது கவிழ்தலை (tipping) ஒட்டியுள்ளது என அறிந்து தீர்வு காணுதல்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 7—1 : 25 கிலோ கிராம் எடையும், 7·8 மீட்டர் நீளமும் உள்ள, **AB** என்னும் *சீரான* ஏணியின் மேல் முனை ஒரு



படம் 7–3



படம் 7–4

மழமழப்பான நிலத்குத்துச் சுவரைத் தொடுமாறும், அதன் கீழ் முனை தரையில் சுவரிலிருந்து 3 மீட்டர் தொலைவில் படம் 7-3ல் காட்டியவாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரைக்கும், ஏணிக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·30 எனில், A என்னுமிடத்தில், அந்த ஏணியில் செயல்படும் உராய்வு விசையைக் காண்க.

இது முதல் வகைக்கு எடுத்துக்காட்டாக உள்ளது.

ஏணியைத் தனிப்படுத்தி, அதன்மேல் செயல்படும் விசைகள் படம் 7–4ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

விசைகளுக்கு ஏற்ற சமநிலைச் சமன்பாடுகளை வரையறுக்க.

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \quad N - 25 = 0 \quad \therefore N = 25 \text{ கி. கி.} \uparrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow 7{\cdot}2\,F + 1{\cdot}5\,(25) - 3\,(25) = 0$$

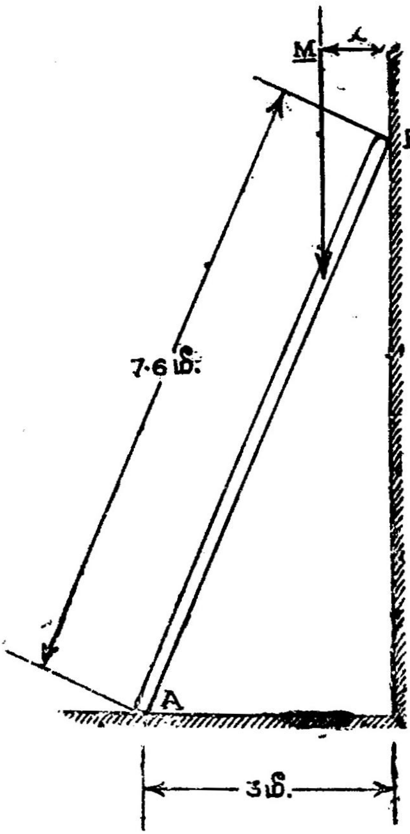
$$F = 5{\cdot}21 \text{ கி. கி.} \rightarrow$$

F^1 = எல்லை உராய்வு விசை = μN

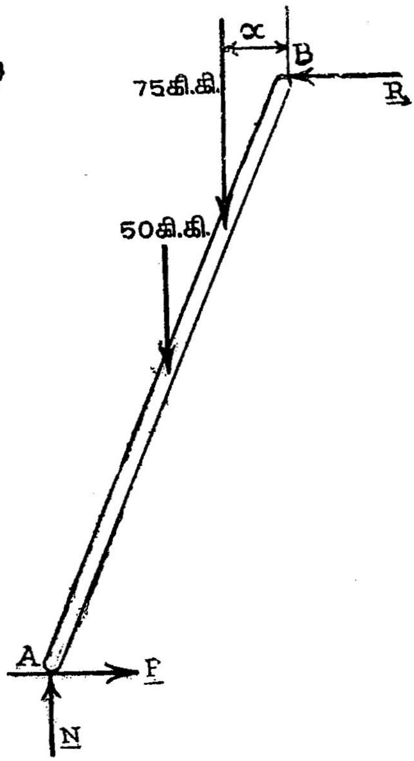
$= 0{\cdot}3 \times 25 = 7{\cdot}5$ கி. கி.

இங்கு $F = 5{\cdot}21 < 7{\cdot}5$ என்றுவதால், ஏணி சமநிலையிலிருக்கும் என உறுதியாகக் கூறலாம்.

மாதிரி 7—2. மேற் கூறிய கணக்கில், 75 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியில் ஏறுவதாகக் கொள்க. ஏணி நகர



படம் 7–5



படம் 7–6

ஆரம்பிக்கும் தருணத்தில் மனிதனுக்கும் சுவற்றிற்கும் இடையே யுள்ள x என்னும் தொலைவைக் காண்க. (படம் 7-5ப் பார்க்கவும்.)

இப்பொழுது ஏணியில் செயல்படும் விசைகள் படம் 7-6ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இந்தக் கணக்கு இரண்டாவது வகைக்கு எடுத்துக் காட்டாகும்.

இங்கு 4 தெரியாக் கணியங்கள் உள. (3 விசைகள் :— N, F, R ; தொலைவு :—x.)

விசைகளனைத்தும் ஒரு தள விசைகளானதால், மூன்று சம நிலைச் சமன்பாடுகளை வரையறுக்க முடியும்.

மேலும் வழுக்குதலுக்கு ஏற்றதான $F' = \mu N$ என்ற சமன் பாடும் பயன்படுத்த வேண்டி வருகிறது.

எனவே,

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - 25 - 75 = 0$$

$$\therefore N = 100 \text{ கி. கி. } \uparrow$$

$$F' = \mu N \rightarrow F' = 0{\cdot}3 \times (100) = 30 \text{ கி. கி.}$$

$$\therefore F = \mu N = 30 \text{ கி. கி. } \rightarrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow x\,(75) + 1{\cdot}5\,(25) - 3\,(100) + 7{\cdot}2\,(30) = 0$$

$$\therefore x = 1{\cdot}035 \text{ மீ.}$$

மாதிரி 7—8. முன் எடுத்த கணக்கில் ஏணியின் மூலம் இன்னும் சிறிது தொலைவு மேலே செல்வதற்காக, 50 கி. கி. எடை யுள்ளதும், தரையிலிருந்து 0·6 மீட்டர் உயரமும் உள்ள பெட்டியைத் தரையில் படம் 7-7ல் காட்டியவாறு வைத்து, அதன்மேல் ஏணியின் கீழ் முனை அமைவதாகக் கொள்க. Bயில் சுவற்றிற்கும், ஏணிக்கும் உள்ள உராய்வுக் கெழு 0·20 என்றும், Aயில் ஏணிக்கும் பெட்டிக்கும் உள்ள உராய்வுக்கெழு 0·35 என்றும் தரைக்கும் பெட்டிக்கும் உள்ள உராய்வுக்கெழு 0·25 என்றும் கொள்க. மனிதனுடைய எடையும், ஏணியினுடைய எடையும் முந்திய மாதிரிக் கணக்கில் கொடுத்துள்ள மதிப்புக் களாகவும் கொள்க. ஏணியின் இயக்கம் விழு நிலையை அடைந் தால், x என்னும் தொலைவைக் காண்க.

இது மூன்றுவதான நிலைக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஏணி, பெட்டி ஆகியவை தனிப்படுத்தப்பட்டு, அவற்றில் செயல்படும் விசைகள் 7-8, 7-9 என்னும் படங்களில் காட்டப் பட்டுள்ளன.

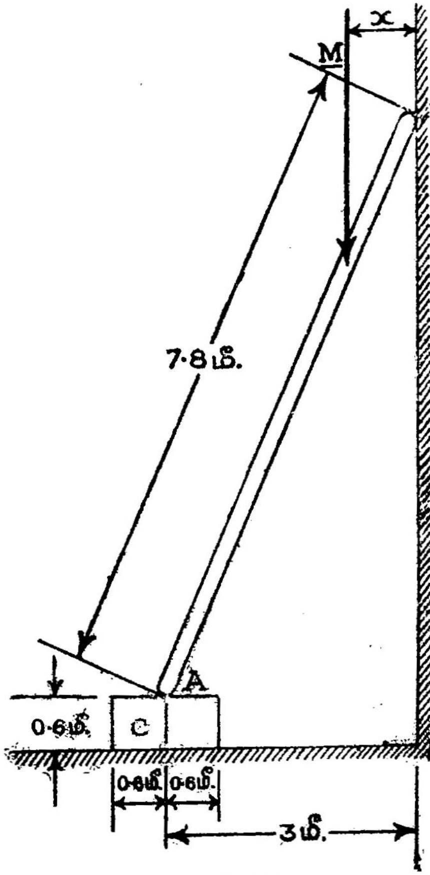
இங்கு 8 தெரியாக் கணியங்கள் உள. (6 விசைகள், 2 தொலைவுகள்.)

தனிப்படுத்தப்பட்ட பொருள் ஒவ்வொன்றுக்கும் 3 சமநிலைச் சமன்பாடுகளை வரையறுக்க முடியும்.

Bயில் வழுக்கம் நிகழ்வதால் $F'_2 = 0{\cdot}20\ N_2$ ஆகும்.

8வது சமன்பாடு, C என்னும் பெட்டியின் மேல் தளத்தில் அல்லது கீழ்த்தளத்தில் வழுக்கம் ஏற்படும் எனக்கொண்டு வரையறுக்கப்படும்.

Aயில் வழுக்கம் நிகழும் எனக்கொண்டும் கொடுக்கப்பட்ட கணக்குக்குத் தீர்வு காணலாம். இந்நிலை எளிதானதால், Aயில் வழுக்கம் ஏற்படுகிறது எனக் கொண்டு கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன :



படம் 7–7

$$F_1 = F_1' = \mu_1 N_1 = 0{\cdot}35\ N_1$$
$$F_2 = F_2' = \mu_2 N_2 = 0{\cdot}20\ N_2$$
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 - N_2 = 0 \rightarrow F_1 = N_2$$
$$\therefore N_2 = F_1 = F_1' = 0{\cdot}35\ N_1$$

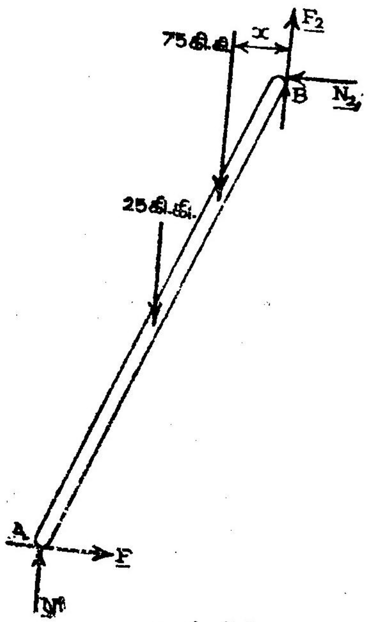
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + F_2 - 25 - 75 = 0$

அதாவது, $N_1 + 0{\cdot}20\, N_2 = 100$

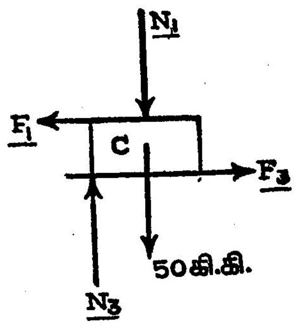
அதாவது, $N_1 + 0{\cdot}20\,(0{\cdot}35)\, N_1 = 100$

$$N_1 = \frac{100}{1{\cdot}07} = 93{\cdot}45 \text{ கி. கி.}$$

$$F_1 = F_1' = 0{\cdot}35\,(93{\cdot}45) = 32{\cdot}7 \text{ கி. கி.}$$



படம் 7–8



படம் 7–9

பெட்டிக்கு உரிய சமநிலைச் சமன்பாடுகளையும் வரையறுக்க.

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_3 - 93{\cdot}45 - 50 = 0$ அல்லது

$N_2 = 143{\cdot}45 \uparrow$ கி. கி.

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_3 - 32{\cdot}7 = 0$ அல்லது $F_3 = 32{\cdot}7$ கி. கி. $\rightarrow$

F_3யின் எல்லை உராய்வு விசை

$F_3' = \mu_3 N_3 = 0{\cdot}25\,(143{\cdot}45) = 35{\cdot}85$ கி. கி.

இங்கு $F_3 < F_3'$ என்று வருவதால், C என்னும் பெட்டிக்கும், தளத்திற்கும் இடையே வழுக்குதல் நிகழாது என உறுதியாகக் கூறலாம்.

தனிப்படுத்தப்பட்ட ஏணிக்கு உரிய $\Sigma M_B = 0$ என்னும் சமன்பாடு,

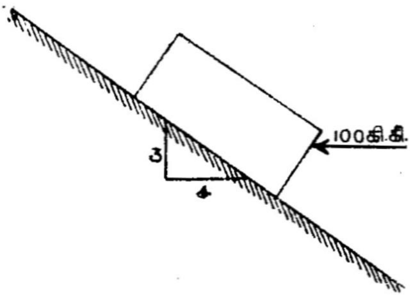
$$x\,(75) + 1{\cdot}5\,(25) + 7{\cdot}2\,(32{\cdot}7) - 3\,(93{\cdot}45) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore\ x = {\cdot}0987$ மீ.

பயிற்சி

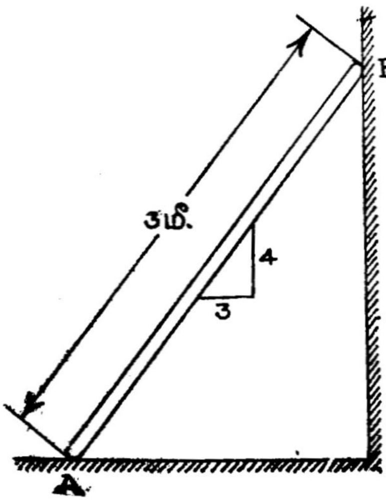
7—1. 125 கி. கி. எடையுள்ள பெட்டி ஒன்று படம் 7-10ல் காட்டியவாறு அமைந்துள்ளது. பெட்டிக்கும் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·2 எனில், அப்பெட்டியின் மேல் செயல்படும் உராய்வு விசையைக் காண்க.

[விடை : 5 கி. கி.]



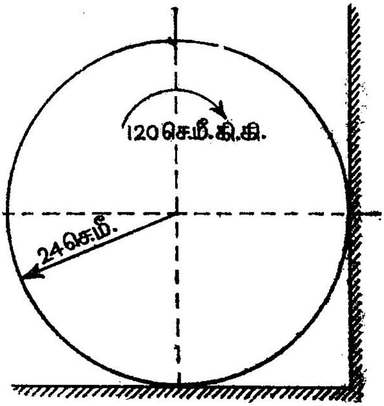
படம் 7–10

7—2. 10 கி. கி. எடையுள்ள ஏணி ஒன்று மழமழப்பான நிலைக் குத்துச் சுவரில் படம் 7-11ல் காட்டியவாறு சாய்த்து வைக்கப் பட்டிருக்கிறது. ஏணிக்கும் கிடைத் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக் கெழு 0·5 எனில், A என்னுமிடத்தில் ஏணியின்மேல் செயல்படும் உராய்வு விசையைக் காண்க.



படம் 7–11

7—3. 50 கி. கி. எடையுள்ள சீரான சக்கரம் ஒன்று மழமழப்பான செங்குத்துச் சுவரையும், உராய்வுக்கெழு 0·3 உள்ள கிடைத் தளத்தையும் தொட்டவண்ணம், படம் 7-12ல் காட்டிய



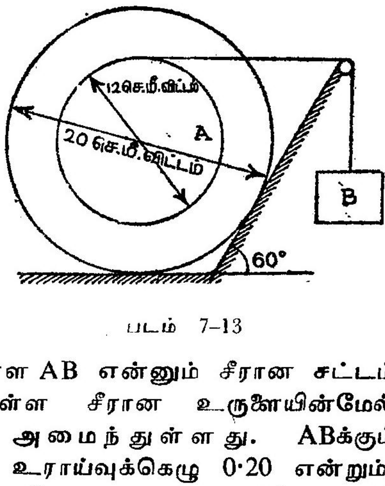
படம் 7–12

வாறு சமநிலையிலுள்ளது. கிடைத் தளமானது சக்கரத்தின் மேல் ஏற்படுத்தும் உராய்வு விசையைக் காண்க.

[விடை : வலப் பக்கம் 5 கி. கி.]

7-4. படம் 7-13ல் A என்னும் பொருளின் எடை 10 கி. கி. எனவும், B என்னும் பொருளின் எடை 5 கி. கி. எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தரை மழமழப்பாய் உள்ளது. சாய்வுதளப் பரப்பின் உராய்வுக்கெழு 0·45 ஆகும். தொடக்கத்தில் பொருட்டொகுதி சமநிலையில் இருக்கின்றது. A என்னுமிடத்தில் தரையின் எதிர்த் தாக்க விசையைக் காண்க.

[விடை : 6·825 கி. கி. செங்குத்தாக மேல்நோக்கிய திசையில்.]



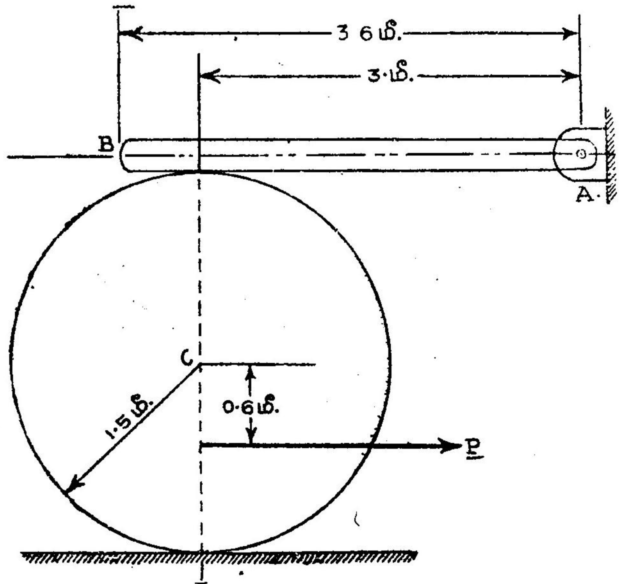
படம் 7–13

7—5. 50 கி. கி. எடையுள்ள AB என்னும் சீரான சட்டம் ஒன்று, 25 கி. கி. எடையுள்ள சீரான உருளையின்மேல் படம் 7-14ல் காட்டியவாறு அமைந்துள்ளது. ABக்கும் உருளைக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·20 என்றும், உருளைக்கும் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·40 என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், உருளையை நகர்த்தக்கூடிய மிகக் குறைந்த P என்னும் விசையைக் காண்க.

ABயின் தடிப்புப் புறக்கணிக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

[விடை : 20 கி. கி.]

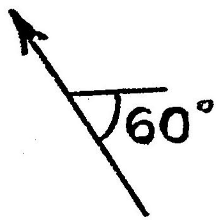
7—6. 60 கி. கி. எடையுள்ள AC என்னும் சீர்க் கோலொன்று படம் 7-15ல் காட்டியவாறு அமைந்துள்ளது. A என்னுமிடத்தில் அமையும் தொடும் பரப்புக்கள் மழமழப்பானவை. ஆனால் B என்னுமிடத்தில் நிலையியல் உராய்வுக்கெழு (static coefficient of



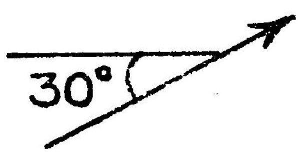
படம் 7–14

friction) 0·30 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. Bயில் செயல்படும் விசையின் பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : N = 40 கி. கி.

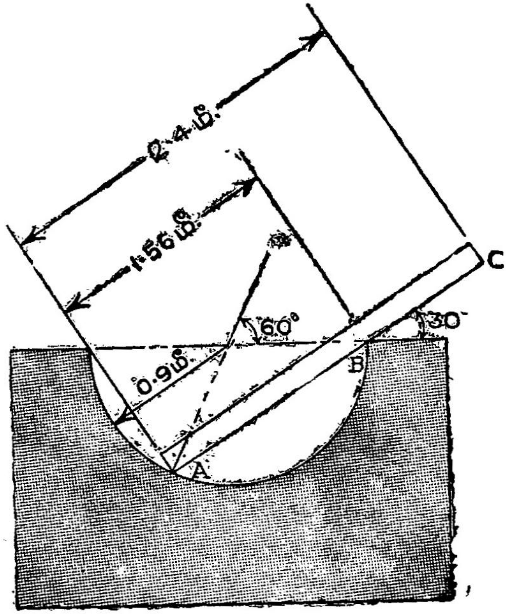


F = 9·285 கி. கி.

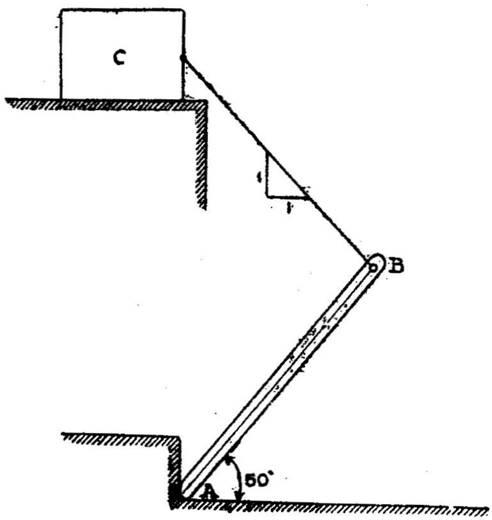


7—7. AB என்னும் சீரான சட்டம், C என்னும் மரக்கட்டை ஆகியவை ஒவ்வொன்றும் 5 கி. கி. எடையைப் பெற்றுள்ளன. அவற்றின் அமைப்பு படம் 7-16ல் காட்டியவாறு உள்ளது. மரக் கட்டை Cக்கும், அது அமையும் கிடைத் தளத்துக்கும் இடையே யுள்ள உராய்வுக் கெழு 0·2 எனில், கிடைத்தளம் Cயின்மேல் ஏற்படுத்தும் உராய்வு விசையைக் காண்க.

[விடை : 1·14 கி. கி. இடதுபுறம்.]



படம் 7–15



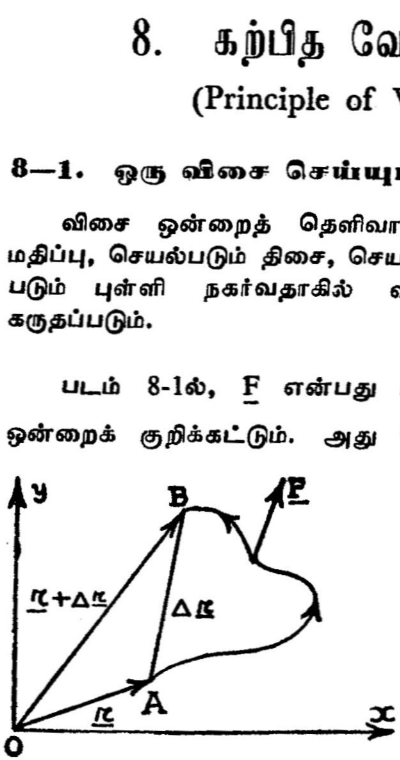
படம் 7–16

8. கற்பித வேலைத் தத்துவம்
(Principle of Virtual Work)

8—1. ஒரு விசை செய்யும் வேலை :

விசை ஒன்றைத் தெளிவாக வரையறுக்க அதன் எண் மதிப்பு, செயல்படும் திசை, செயல்படும்பொழுது அதன் செயற் படும் புள்ளி நகர்வதாகில் விசை வேலை செய்கின்றதாகக் கருதப்படும்.

படம் 8-1ல், F என்பது மாறு விசை (constant force) ஒன்றைக் குறிக்கட்டும். அது செயற்படும் புள்ளி A ஆகுக. A என்னும் புள்ளி Bக்கு நகர்வதாகக் கொள்க. O என்னும் புள்ளி பற்றி A, B என்னும் புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகளை $\underline{r}$, $\underline{r} + \Delta\underline{r}$ எனக் கொள்க.

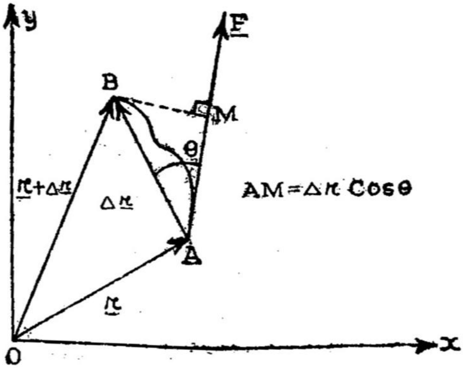


படம் 8-1

எனவே A என்னும் புள்ளி, Bக்கு இடம் பெயரும்போது ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சியை $\underline{AB} = \Delta\underline{r}$ என்னும் திசையி வரையறுக்கும். இடப் பெயர்ச்சியானது Fனது செயற்படும் புள்ளியின் இயங்கு வழிப் பாதையைச் சார்ந்திருப்பதில்லை; அது தொடக்க, இறுதியான புள்ளிகளாலே வரையறுக்கப்படுவதாகும்.

F செய்யும் வேலை, Fன் எண்மதிப்பு, Fன் திசையில் இடப் பெயர்ச்சியின் பகிர்வு ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையால் வரையறுக்கப்படும்.

படம் 8-2ல் காட்டியவாறு F, △r என்னும் திசையிகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் θ எனில்,



படம் 8-2

△r என்னும் இடப் பெயர்ச்சியால் F செய்யும் வேலை,

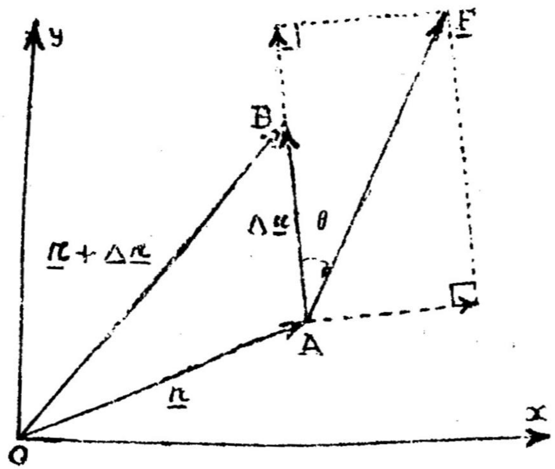
$$= F \cdot AM$$
$$= F \cdot \Delta r \cos\theta$$
$$= \underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$$

எனவே F செய்யும் வேலையை F, △r என்பவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கியாலும் வரையறுக்கலாம்.

$$\therefore \text{ வேலை } = \underline{F} \cdot \underline{\Delta r} = F\,\Delta r \cos\theta.$$

வேலைக்கு உரிய பரிமாணம் $= [F\,\Delta r \cos\theta]$
$= [F\,\Delta r]$
$= [FL]$

மேலும் F என்னும் விசையை, △r என்னும் திசையிக்கு உரிய திசையிலும், அதற்குச் செங்குத்தாக அமையும் திசையிலும் பகிர்வுகளாகப் பிரிக்கும்போது (படம் 8-3ல் காட்டியவாறு) இடப் பெயர்ச்சிக்கு இணையாக அமையும் Fன் பகிர்வுதான் வேலையை வரையறுப்பதற்கு உதவுகிறது. இடப் பெயர்ச்சியின் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையிலுள்ள Fன் பகிர்வு ஒரு வேலையும் செய்வதில்லை என்றாகிறது.



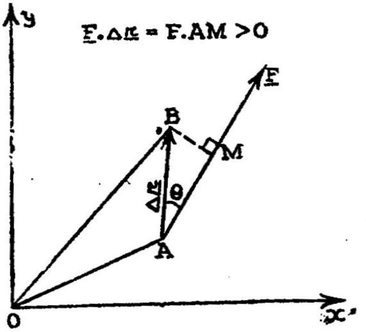
படம் 8–3

F, Δr என்னும் திசையிகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் θ என்பது குறுங்கோணமானுல் (படம் 8–4) Fம், F திசையில் AB = Δrஇன் பகிர்வும் ஒரே திசையிலமைவதால், F என்னும் விசை மிகையான வேலை [அல்லது நேர் வேலை] (positive work) செய்வதாகவும்,

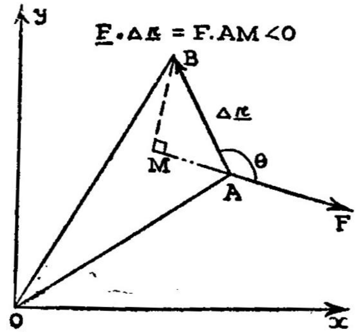
θ என்னும் கோணம் விரிகோணமெனில் (படம் 8-5) Fம், F செயல்படும் கோட்டில் AB = Δrஇன் பகிர்வும் எதிரெதிரான திசைகளில் அமைவதால், F என்னும் விசை எதிர் வேலையைச் (Negative work) செய்வதாகவும் கொள்ளப்படும். (படம் 8-4, 8-5ல் விசை செய்யும் வேலை முறையே மிகையாயுள்ளதும், குறையாயுள்ளதும் காட்டப்பட்டுள்ளது.)

θ என்பது செங்கோணமாகில், (படம் 8-6) Fம், இடப் பெயர்ச்சி ABயும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைவதால், F செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

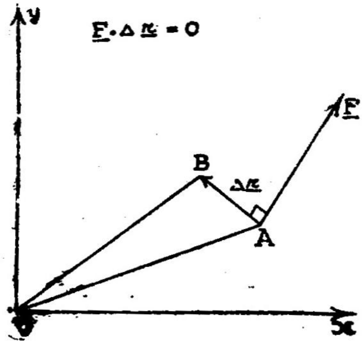
$\theta = 0^\circ$ என்றிருக்கும்போது, (படம் 8-7) F செய்யும் வேலை, F · Δr என்ருகும். இதுவே F செய்யும் வேலையின் மிகப் பெரிய மதிப்பாகும்.



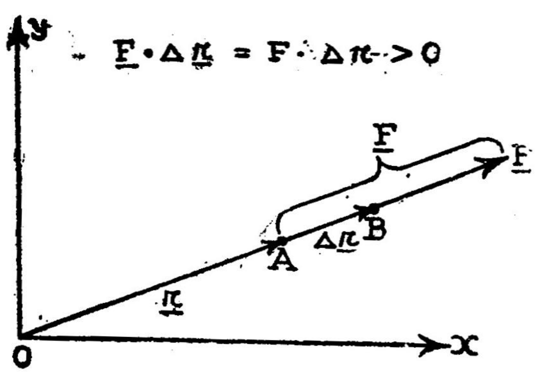
படம் 8–4



படம் 8–5

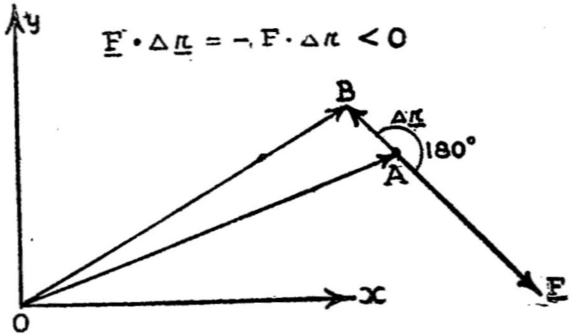


படம் 8–6



படம் 8–7

$\theta = 180°$ எனில், (படம் 8-8) $\underline{F}$ செய்யும் வேலை, $-F\,\Delta r$ ஆகும். இதுவே $\underline{F}$ செய்யும் எதிர் வேலையின் மதிப்பாகும்.



படம் 8-8

$\underline{F}$ செய்யும் வேலையின் $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ பகிர்வுகளைக் காணுதல் :

$$\underline{F} = F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j} + F_z\,\underline{k}$$

$$\underline{\Delta r} = \Delta x\,\underline{i} + \Delta y\,\underline{j} + \Delta z\,\underline{k}$$

எனவே வேலை $= \underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$

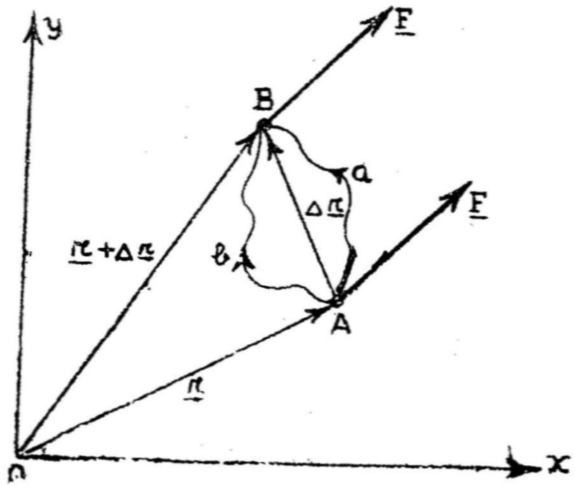
$$= (F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j} + F_z\,\underline{k}) \cdot (\Delta x\,\underline{i} + \Delta y\,\underline{i} + \Delta z\underline{k})$$

$$= F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y + Fz\,\Delta z.$$

$\underline{F}$ என்பது மாறு விசையாயுள்ளதாகில், வரையறையின்படி வேலை Δrஐத்தான் சார்ந்துள்ளது. எனவே விசையின் செயல் படும் புள்ளி Aயிலிருந்து Bக்கு எப்பாதையில் சென்ற போதிலும், (படம் 8-9ல் காட்டியவாறு) வேலையின் மதிப்பு மாறுமலுள்ளது. எனவே மாறு விசைக்கு உரிய வேலை A, B என்னும் புள்ளிகளைத்தான் சார்ந்துள்ளது.

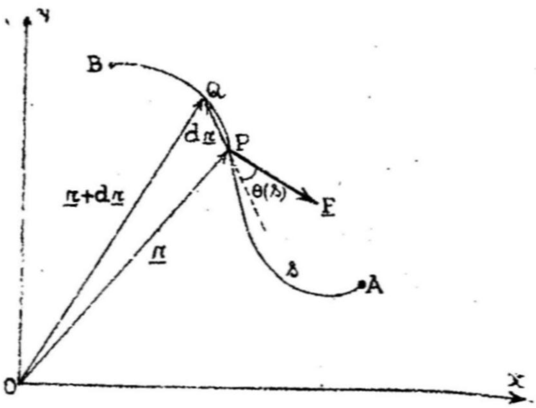
ஆனல் $\underline{F}$ என்னும் விசையின் எண் மதிப்பு அல்லது செயல் படும் திசை, அல்லது இவ்விரண்டும் மாறும் இயல்பைப் பெற்றிருப்பதாகில், $\underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$ என்னும் வரையறை, கழிநுண்

(infinitesimal) அளவுடைய இடப் பெயர்ச்சிக்கு மட்டுமே ஏற்கத் தக்கதாகும்.



படம் 8–9

அந்நிலையில் Fன் செயற்படும் புள்ளி, Aயிலிருந்து Bக்குச் செல்லும்போது, விசையின் வேலை பாதையைச் சார்ந்ததாக இருக்கும். (படம் 8–10ஐப் பார்க்க.)



படம் 8–10

அப்பொழுது,

$$\text{வேலை} = \int \underline{F} \cdot \underline{dr} = \int_{S_A}^{S_B} F \cos\theta \, ds$$

$$= \int (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படும்.

துகள் ஒன்றில் $\underline{F}$ என்னும் மாறு விசை (constant force) செயல்படுவதாகக் கொள்க. துகள் அடுத்தடுத்து $\underline{\Delta r_1}$, $\underline{\Delta r_2}$... $\underline{\Delta r_i}$, ... $\underline{\Delta r_n}$ என்னும் இடப் பெயர்ச்சிகளைப் பெறுவதாகில்,

$\underline{F}$ செய்யும் வேலை,

$$W = \underline{F} \cdot \underline{\Delta r_1} + \underline{F} \cdot \underline{\Delta r_2} + \dots + \underline{F} \cdot \underline{\Delta r_i} + \dots + \underline{F} \cdot \underline{\Delta r_n}$$

$$= \underline{F} \cdot (\underline{\Delta r_1} + \underline{\Delta r_2} + \dots + \underline{\Delta r_n})$$

$= \underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$, $\underline{\Delta r}$ = இடப் பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயனாகும்.

இதற்கு மாறாக,

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, ... $\underline{F_i}$,....$\underline{F_n}$ என்னும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் அமையும் துகள் ஒன்றில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. துகள் $\underline{\Delta r}$ என்னும் இடப் பெயர்ச்சியைப் பெறுவதானால், விசைகள் செய்யும் வேலை,

$$W = \underline{F_1} \cdot \underline{\Delta r} + \underline{F_2} \cdot \underline{\Delta r} + \dots + \underline{F_n} \cdot \underline{\Delta r}$$

$$= (\underline{F_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_n}) \cdot \underline{\Delta r}$$

$= \underline{R} \cdot \underline{\Delta r}$, $\underline{R}$ என்பது விசைகளின் தொகுபயன் விசையாகும்.

8—2. சுழலிணை செய்யும் வேலை:

சுழலிணை ஒன்று அதன் அச்சு பற்றிச் சுழலும்பொழுது, வேலை செய்வதாகக் கொள்ளப்படும்.

ஒரு மாறாச் சுழலிணை (Constant Couple) அதன் அச்சு பற்றி ϕ என்னும் கோண அளவு சுழலும்பொழுது, அது செய்யும்

வேலை, சுழலிணைப்புத் திறனின் எண் மதிப்பு, கோண இடப் பெயர்ச்சி (angular displacement) (ஆரயன்களில்) என்பவற்றின் பெருக்கற்பலனால் வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{சுழலிணை செய்யும் வேலை} = |\underline{M}|\phi$$

$$= M\phi$$

$$\text{சுழலிணை செய்யும் வேலையின் பரிமாணம்} = [M\phi] = [FL]$$

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது புற விசைகளின் தொகுதி, சுழலிணைகளின் தொகுதி ஆகியவை செய்யும் வேலை, விசை, சுழலிணை ஒவ்வொன்றும் செய்யும் வேலையின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகளுக்குச் சமமாகும்.

கட்டிறுக்கப் பொருளை இடப் பெயர்ச்சி செய்யும்போது, அப்பொருளின் உள் விசைகள் (internal forces) சோடியாகவும், சமனுமெதிருமாயும், ஒரே செயல்படும் கோட்டைப் பெற்றதாகவும் உள்ளதால் அவைகள் செய்யும் வேலையின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமனாகும்.

dl அளவு நீட்சியைப் பெற்றிடும் நீளவல்ல இழையில் இழு விசை செய்யும் வேலை $= -Tdl$, (T = இழுவிசை).

நீளவல்ல சுருள்வில் (Spring) ஒன்றில் விசையானது செயற்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருந்து s என்னும் நீட்சியை ஏற்படுத்துவதாகில் அந்த நீட்சியைப் பெற்ற நிலையில் சுருள் விசை செய்யும் வேலை $= \dfrac{ks^2}{2}$

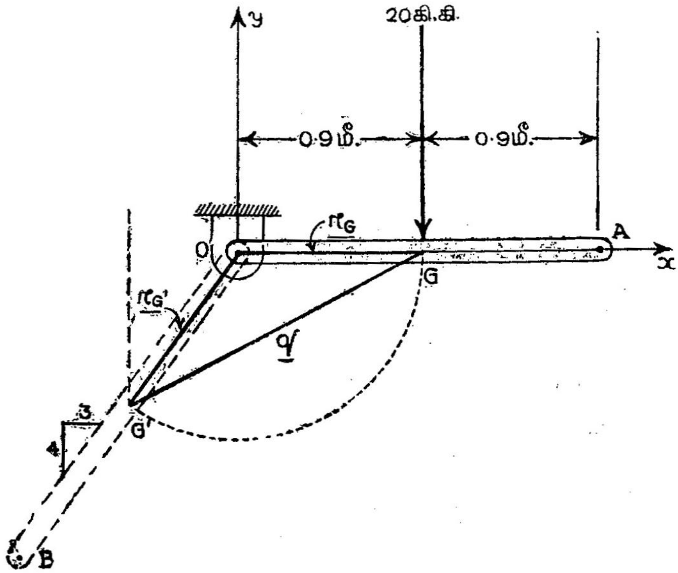
[இங்கு k என்பது சுருள்வில் மாறிலி (Spring Constant) ஆகும்.]

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 8—1 : 1·8 மீட்டர் நீளமும், 20 கிலோ கிராம் எடையுமுள்ள சீர்க்கோலொன்று படம் 8-11ல் காட்டியவாறு O' என்னும் புள்ளியிலமையும் நிலையான கிடை அச்சு பற்றிச் சுழலக் கூடியது. அது OA என்னும் நிலையிலிருந்து OB என்னும் நிலையை அடையும் போது அதன் எடை செய்த வேலையைக் காண்க.

இங்கு விசை மாறிலியாதலால்

$\underline{F} = -20\,\underline{j}$ கி.கி.



படம் 8–11

கோலின் புவியீர்ப்புப் புள்ளி G என்னும் புள்ளியிலிருந்து G′ என்னும் புள்ளிக்குச் செல்வதால் இடப் பெயர்ச்சி ஏற்படுவதை $\underline{q} = \underline{r_{G'}} - \underline{r_G}$ என்னும் திசையி வரையறுக்கும்.

$$= \underline{OG'} - \underline{OG}$$

$$= (-0{\cdot}54\underline{i} - 0{\cdot}72\underline{j}) - 0{\cdot}9\underline{i}$$

$$= (-1{\cdot}44\underline{i} - {\cdot}72\underline{j}) \text{ மீ.}$$

எனவே $\underline{F}$ செய்யும் வேலை $= \underline{F} \cdot \underline{q}$

$$= (-20\underline{j}) \cdot (-1{\cdot}44\underline{i} - 0{\cdot}72\underline{j})$$

$$= 14{\cdot}4 \text{ மீ.கி.கி.}$$

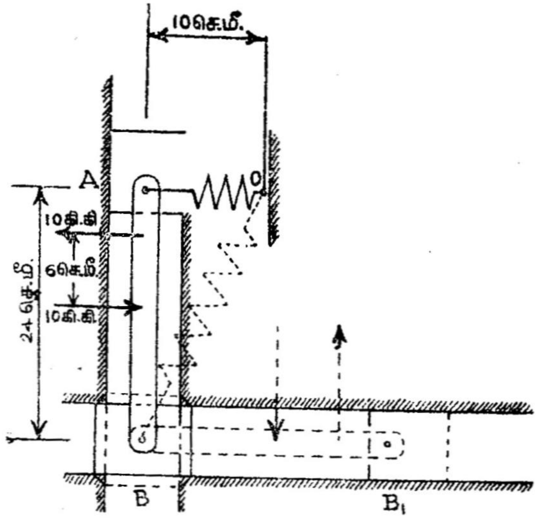
இரண்டாவது வழி :

ஒரு மாறு விசை செய்யும் வேலையை விசையின் எண்மதிப்பு, அது செயல்படும் திசையிலேற்படும் இடப் பெயர்ச்சியின் பகிர்வு என்பவற்றின் பெருக்கற்பலன் வரையறுக்கும்.

ஆகவே விசை செய்யும் வேலை $= 20 \times {\cdot}9 \times \frac{4}{5} = 14{\cdot}4$ மீ.கி.கி

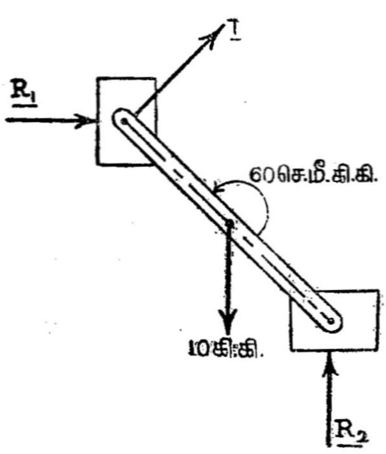
இங்கு விசையும், அதன் திசையில் எடுக்கும் இடப் பெயர்ச்சியின் பகிர்வும் ஒரே கீழ்நோக்கிய திசையிலமைவதால் விசையானது நேர் வேலையைச் செய்கிறது.

மாதிரி 8—2. 10 கிலோ கிராம் எடையுள்ள AB என்னும் கெட்டியான கம்பியின் முனைகள் மரக் கட்டைகளில் பொருத்தப்



படம் 8–12

பட்டு, மழமழப்பான கிடை, நிலை சிறு துளைப் பிளவுகளில் நழுவக் கூடிய அமைப்பைப் படம் 8–12ல் காட்டியவாறு பெற்றிருக்கின்றது. OA என்னும் சுருள் வில் இழு அல்லது இறுக்க விசையைச் செயல் படுத்தக்கூடிய அமைப் பைக் கொண்டுள்ளது. அதன் மீள் சக்திக் குணகம் $\frac{5}{4}$ கி.கி./மீ. என்றும் அதன் தகைவற்ற நீளம் (unstressed length) 14 செ.மீ. எனவும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 8–13

கம்பியானது நிலைக்குத்து நிலையிலிருந்து கிடை நிலைக்குச் செல்லும்போது, அதில் செயல்படும் விசைகளனைத்தும் செய்யும் வேலையின் மதிப்பளவைக் காண்க. A, B என்னும் மரக் கட்டைகளின் எடைகள் புறக்கணிக்கப்படுவதாகக் கொள்க.

கம்பியைத் தனிப்படுத்திய அமைப்பில் செயல்படும் விசைகள் யாவும் படம் 8-13ல் காட்டியுள்ளதைப்போல் அமையும்.

இங்கு 4 விசைகளும் ஒரு சுழலிணையும் இடம் பெறுகின்றன. அவற்றில் $\underline{R_1}$, $\underline{R_2}$ என்னும் விசைகள், ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சி ஒவ்வொன்றுக்கும் செங்குத்தாகச் செயல்படுவதால் அவைகள் ஒரு வேலையும் செய்வதில்லை. எனவே கோலின்மேல் செய்யப்படும் தொகுபயன் வேலையானது,

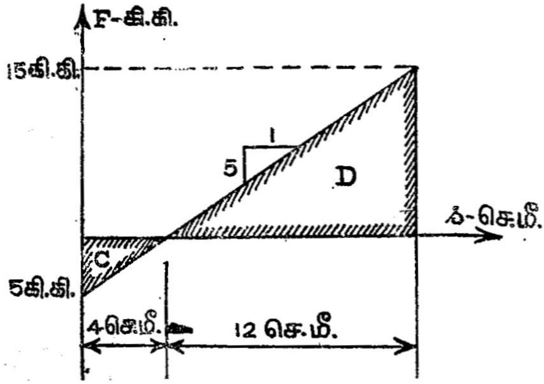
$$W = \begin{pmatrix}\text{சுருள்வில்}\\ \text{செய்யும்}\\ \text{வேலை}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{கம்பியின்}\\ \text{எடை செய்யும்}\\ \text{வேலை}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{சுழலிணை}\\ \text{செய்யும்}\\ \text{வேலை}\end{pmatrix} \text{ஆகும்.}$$

சுருள் வில்லுக்கான விசை – இடப் பெயர்ச்சி வரைபடம் (F-s diagram) படம் 8-14ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

வில் 10 செ.மீ. அளவிலிருந்து, 26 செ.மீ. அளவுக்கு நீளுவதால், அதில் ஏற்படும் நீட்சித் தொலைவு 16 செ.மீ. ஆகும்.

தொடக்கத்தில் வில்லானது 4 செ.மீ. அளவுக்கு இறுக்கப்படுவதால், அது $4 \times \frac{5}{4} = 5$ கி.கி. இறுக்க விசையை A என்னும் மரக் கட்டையின்மேல் செயல்படுத்துகிறது. இறுதி நிலைமையில் வில்லானது 12 செ.மீ. அளவு நீட்சியைப் பெறுவதால், அது $12 \times \frac{5}{4} = 15$ கி.கி. இழு விசையை உண்டுபண்ணுகிறது.

படம் 8-14ல், C என்னும் பரப்பு வில்லின்மேல் செய்யப்பட்ட எதிர் வேலை (negative work)யின் மதிப்பளவைக் குறிக்கிறது. எனவே C என்னும் பரப்பளவு, A என்னும் மரக் கட்டையின் மேல் செய்யப்படும் மிகையான வேலையையும் (positive work) குறிக்கும். ஏனெனில் A என்னும் மரக் கட்டையில் செயல்படும் விசையின் நிலைக்குத்துப் பகிர்வும், இடப் பெயர்ச்சியும் கீழ் நோக்கிய ஒரே திசையிலமைவதால், C என்னும் பரப்பளவு A என்னும் மரக் கட்டையின்மேல் செய்யப்படும் நேர் வேலையைக் கொடுப்பதாக உள்ளது.



படம் 8–14

அவ்வாறே D என்னும் பரப்பு, A என்னும் மரக் கட்டையின் மேல் வில்லானது செய்யும் எதிர் வேலையை அறிவிக்கிறது. எனவே சுருள் வில் கம்பி ABயின்மேல் செய்யும் வேலை

$$= \frac{1}{2}(5) \times 4 - \frac{1}{2}(15) \times 12$$
$$= 10 - 90$$
$$= -80 \text{ செ.மீ. கி.கி.}$$

ABயின்மேல் எடை செய்யும் வேலை

$$= 10 \times 12 = 120 \text{ செ.மீ. கி.கி.}$$

ABயின்மேல் சுழலிணை செய்யும் வேலை

$$= 10 \times 6 \times \frac{\pi}{2} = 30\,\pi = 94{\cdot}2 \text{ செ.மீ. கி.கி.}$$

எனவே AB என்னும் கம்பியின்மேல் செய்யப்படும் மொத்த வேலை $= -80 + 120 + 94{\cdot}2$

$$= 134{\cdot}2 \text{ செ. மீ. கி. கி.}$$

8—3. விசையினங்கள் :

ஒன்றுக்கொன்று செயல், எதிர்ச் செயல்களை விளைவிக்கும் துகள்கள், கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் ஆகியவற்றின் தொகுதி ஒன்றை நோக்குக. அத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் மூன்று வகையான விசைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அவ் விசையினங்கள் : (1) உள் விசைகள் (Internal forces), (2) கட்டுப்பாடுடைய விசைகள் (Constrained forces), (3) வெளி விசைகள் (Applied or External forces) ஆகும்.

8—3. (1) (1) உள் விசைகள் :

இவைகள் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புக்களுக்கு இடையில் நிகழும் செயல், எதிர்ச்செயல் விசைகளாகும். அவைகள் சோடியாகவும், எண் மதிப்பில் சமமாகவும், ஒன்றுக்கொன்று எதிர் எதிராக ஒரே செயற்படும் கோட்டில் அமைந்தவண்ணமும் இருக்கும்.

தொகுதி ஒன்றை இடப் பெயர்ச்சி செய்யும்பொழுது, ஒவ்வொரு சோடி விசையும், விசைகள் செயல்படும் புள்ளிகளில் ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சிகளுக்கு ஏற்றவாறு வேலைகளைச் செய்யக் கூடும். ஆனால் உள்விசைகள் சோடியாகவும், சமனுமெதிருமாகவும், ஒரே செயல்படும் கோட்டைப் பெற்றுள்ளதாகவும் அமைவதால் அவைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற்கணிதக் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒன்றுக்கொன்று இணைத்துச் சேர்க்கப் பட்டுள்ள பிணையல்கள் (hinges), மீள்சக்தியில்லாததும், இழுத்துக் கட்டப்பட்டுமுள்ள மென்கயிறுகள் (inelastic taut strings), உராய்வற்ற அல்லது மழமழப்பான தொடுகைகள் (smooth surfaces) ஆகியவற்றில் நிகழும் சோடி விசைகளின் நிகர வேலை (net work) பூச்சியமாகும்.

8—3. (2) (2) கட்டுப்பாடுகள் (Constraints) :

கட்டுப்பாடு என்பது, தொகுதியிலுள்ள உறுப்பு ஒன்றிற்கும், வெளியேயுள்ள பொருள் ஒன்றிற்கும் இடையில் செயல் எதிர்ச் செயலை உண்டுபண்ணக் கூடியதும், உறுப்பின் இயக்கத்தைக் கட்டுப்படுத்தக் கூடியதுமான விசையாகும். இவ்விதக் கட்டுப் பாடுகள் (கட்டுப்பாடு விசைகள்) தொகுதியின் இயக்கத்தை வடிவ கணிதச் சிறப்பியல்புகளுக்கு ஏற்றவாறு கட்டுப்படுத்தும்.

ஒரு கம்பியின்மேல் சறுக்கிச் செல்லும் உருண்டை வடிவமுள்ள மணி ஒன்றில் செயல்படும் கம்பியின் நேர்க் குத்து எதிர்த் தாக்க விசை, தொகுதி உறுப்பு ஒன்றையும், புறப்பொருள் ஒன்றையும் பிணைக்கும் பிணையல் ஒன்றில் ஏற்படும் விசை, ஒரு பொருளை நிலையான ஓர் அச்சைப் பெற்றிருப்பதற்காக, திசைக் கோள்கள் (bearings) செய்யும் விசைகள் ஆகியவை கட்டுப்பாடு விசைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

தொகுதி ஒன்றை இடப்பெயர்ச்சி செய்யும்போது, இவ்வித இடப்பெயர்ச்சி கட்டுப்பாடு விசை செயல்படும் திசைக்குச்

செங்குத்தான திசையில் ஏற்படுவதால், கட்டுப்பாடு விசை செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

8—3. (3) (3) வெளி விசைகள் :

தொகுதிக்கு வெளிப்புறத்தில் கட்டுப்பாடு விசைகளைத் தவிர்த்து, செயல்படும் விசைகளே வெளி விசைகளாகும். இழு விசைகள், தள்ளு விசைகள், எடை, உராய்வு விசை ஆகியவை வெளி விசைகளாகும்.

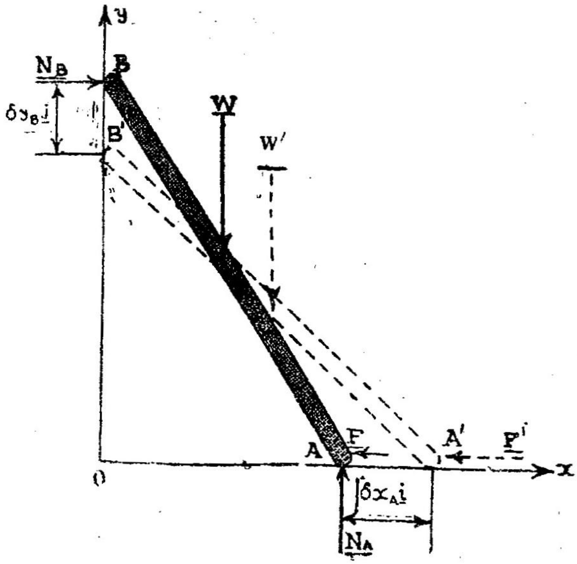
8—4. கற்பித வேலையின் தத்துவம் :

ஒரு மனிதன் ஏணி ஒன்றில் ஏறுவதற்கு முன்பாக அது உறுதி அல்லது உறுதியற்ற சமநிலையைப் பெற்றுள்ளதா என்றறிவதற்காக, அவ்வேணியில் ஒரு வித அசைவு அல்லது அதிர்ச்சியை உண்டுபண்ணுவதையே கற்பித வேலையின் தத்துவத்தை அறிவதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகக் கொள்ளலாம். இம்முறையில், முழுப் பொருட்டொகுதிக்கும் ஒரு கழி நுண் இடப் பெயர்ச்சி (infinitesimal displacement)யானது அளிக்கப்பட்டு, அத்தொகுதியின் சமநிலைமைகளை (equilibrium positions) அறிய முடியும். மேலும் புற விசைகள் அவ்வித இடப் பெயர்ச்சியில் செய்யும் வேலைகளை ஆராய்வதற்கும் உதவியாக உள்ளது. அவ்விதக் கழிநுண் இடப் பெயர்ச்சியே கற்பித இடப் பெயர்ச்சியாகக் கருதப்படும். அது விருப்பப்படி தொகுதிக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு முரணற்றதாக எடுக்கப்படும்.

8—4. (1) கற்பித இடப்பெயர்ச்சிக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு :

படம் 8-15ல் W எடையுள்ள AB என்னும் சீரான ஏணியின் B என்னும் மேல் முனை ஒரு நிலைக் குத்துச் சுவர் ஒன்றில் தாங்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் A என்னும் கீழ்முனைக்குக் கற்பித இடப் பெயர்ச்சி அளிப்பதாகில், அம்முனை கிடையாக, கழி நுண் தொலைவு $\delta x_A \underline{i}$ அளவு வலப்புறம் நகர்வதாகக் கொள்ளப்படும். இதனால் B என்னுமிடத்திலமையும் ஏணியின் மேல் முனை $-\delta y_B \underline{j}$ என்னும் கழிநுண் தொலைவு கீழ்நோக்கிய திசையில் இறங்கும்.

A, B என்னும் ஏணியின் முனைகள் முறையே கிடை, நிலைகுத்துத் தளங்களைத் தொடும் வண்ணமும், அவைகளுக்கு இடையிலமையும் இடைத் தொலைவு (அதாவது ஏணியின் நீளம்)



படம் 8-15

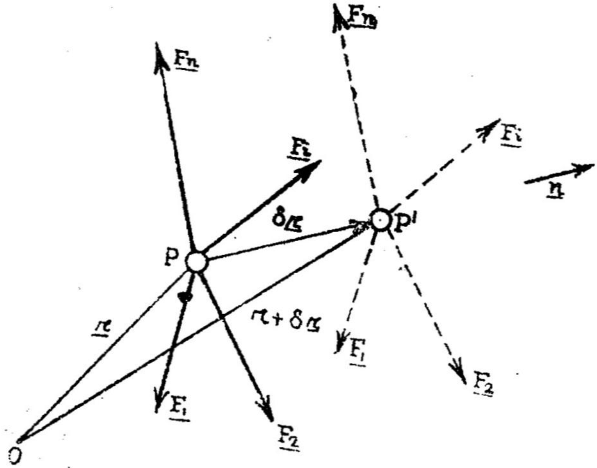
மாறுமலிருக்குமாறும் இடப் பெயர்ச்சியை ஏற்படுத்துவதே, அப் பொருளின் கட்டுப்பாடுகளாகும்.

8—5. ஒரு துகளுக்கு உரிய கற்பித வேலையின் தத்துவம் :

படம் 8-16ல் காட்டியுள்ள $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2,...\underline{F}_i,...\underline{F}_n$ என்னும் விசைகள் ஒரு துகளில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. அத்துகள் $\underline{P}$ என்னும் புள்ளியில் அமையட்டும். r என்பது அப்புள்ளியின் நிலைத் திசையியாகுக.

அத்துகளுக்கு ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட $\underline{n}$ என்னும் திசையில், $\delta \underline{r}$ என்னும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சி அளிப்பதாகக் கொள்க. $\underline{PP'} = \delta \underline{r}$ ஆகும்.

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} Fi$ என்பது அவ்விசைத் தொகுதிக்கு உரிய தொகு பயன் விசையாகும். அதுவும் P என்னும் புள்ளியிலேயே செயல்படும்.



படம் 8–16

எனவே விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலையின் குறியியல் கூடுதல்

$$\delta W = \underline{F_1} \cdot \delta \underline{r} + \underline{F_2} \cdot \delta \underline{r} + \dots + \underline{F_i} \cdot \delta \underline{r} + \dots + \underline{F_n} \cdot \delta \underline{r}$$

$$= (\underline{F_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_i} + \dots + \underline{F_n}) \cdot \delta \underline{r}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \right) \cdot \delta \underline{r}$$

$$= \underline{R} \cdot \delta \underline{r}$$

$$= \underline{R} \cdot \delta r \, \underline{n}$$

$$= (\underline{R} \cdot \underline{n}) \, \delta r$$

துகள் சமநிலையில் உள்ளதாகில் $\underline{R} = 0$

எனவே கற்பித வேலை $\delta W = 0$ என்றுகும்.

அதாவது $\delta W = 0$ என்பது வேண்டிய (necessary) நிபந்தனையாகும்.

அதாவது துகள் சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது கற்பித வேலை பூச்சியமாகும்.

கற்பித வேலை பூச்சியமாகிறதென்றால்

$$(\underline{R} \cdot \underline{n})\, \delta r = 0$$

ஆனால் $\delta r \neq 0$.

எனவே,

$$\underline{R} \cdot \underline{n} = 0$$

அதாவது $\underline{R} = 0$ அல்லது $\underline{R} \perp \underline{n}$

$\underline{n}$ என்பது பல்வேறு திசைகளை அறிவிக்குமாதலால் $\underline{R}$ என்பது $\underline{n}$க்குச் செங்குத்தாக இருக்க முடியாது.

எனவே $\underline{R} = 0$.

ஆதலால் $\delta W = 0$ என்பது போதியதான (Sufficient) நிபந்தனையாகும்.

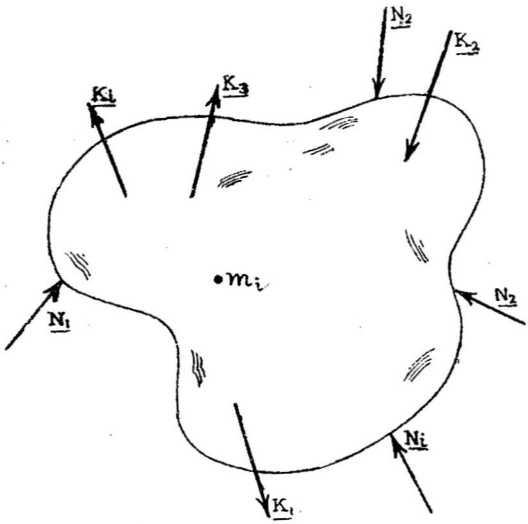
எனவே ஒரு விசைத் தொகுதியிலே தாக்கப்படுகின்ற ஒரு துகள் சமநிலையிலிருந்தால், அவ்விசைத் தொகுதி செய்யும் கற்பித வேலையின் குறியியல் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக வேண்டும் என்பதே வேண்டியதானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாகும்.

8—6. கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றிற்குரிய கற்பித வேலையின் தத்துவம் :

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது $\{\underline{F_i}\}$ $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் விசைத் தொகுதி ஒன்று செயல்பட்டு அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைப்பதாகக் கொள்க.

விசைத் தொகுதியை உள்விசைகள் பொருளின் மேற்பரப்பிற்குச் செங்குத்தான திசைகளில் செயல்படும் செங்குத்து விசைகள், புற அல்லது வெளி விசைகள் எனப் பிரிக்கவும்.

கட்டிறுக்கப் பொருளை, $\{m_i\}$, $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் துகள்களாகப் பிரிப்பதாகவும் கொள்க. (படம் 8-17ஐப் பார்க்க.)



படம் 8–17

m_i என்னும் துகளில் செயல்படும் உள்விசைகள், செங்குத்து விசைகள், புறவிசைகள் என்பவற்றை முறையே $\underline{S_i}$, $\underline{N_i}$, $\underline{K_i}$ எனக் குறிக்கவும். அவற்றின் தொகுபயன் விசையை முறையே $\underline{(S_R)_i}$, $\underline{(N_R)_i}$, $\underline{(K_R)_i}$ எனக் குறிக்க.

m_i என்னும் துகள் அமைதி நிலையில் இருப்பதால்

$$\underline{(S_R)_i} + \underline{(N_R)_i} + \underline{(K_R)_i} = 0 \qquad \text{(i)}$$

வடிவ கணிதத் தொடர்புகளுக்குப் பொருத்ததான புறக் கட்டுப்பாடுகள், பொருளைத் துகள்களின் சேர்க்கையாகக் கொள் வதற்கு உரிய நிபந்தனைகள் ஆகியவற்றிற்கு ஏற்றதான, $\delta \underline{r_i}$ என்னும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சியை m_i என்னும் துகள்களுக்கு அளிக்க.

(i) சமன்பாட்டில் உள்ள திசையிகள் $\delta \underline{r_i}$ உடன் அமைக்கும் எண்ணிப் பெருக்கிகளை எடுக்க,

$\underline{(S_R)_i} \cdot \delta \underline{r_i} + \underline{(N_R)_i} \cdot \delta \underline{r_i} + \underline{(K_R)_i} \cdot \delta \underline{r_i} = 0$ என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இங்கு $(\underline{N_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0$

எனவே,

$$(\underline{S_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} + (\underline{K_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(ii) சமன்பாடு எல்லா துகள்களுக்கும் பொருத்தமானதால், துகள்களாலான பொருளுக்கு ஏற்றதான சமன்பாடு

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{S_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} + \sum_{i=1}^{n} (\underline{K_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

ஆகும்.

பொருளில் செயல்படும் உள் விசைகளனைத்தும் சோடியாகவும், சமனுமெதிருமாயும், ஒரே நேர்கோட்டிலும் அமைவதால் உள் விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலைகளின் குறியியல் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும். ஆதலால்

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{S_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

எனவே (ii)வது சமன்பாடு

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{K_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

இதுவே ஒரு பொருள் சமநிலையிலிருப்பதற்கு வேண்டியதான (necessary) நிபந்தனையாகும்.

எனவே, ஒரு பொருளிலே செயல்படுகின்ற விசைகள் அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைத்தால், வெளி விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும் என்பதே வேண்டிய நிபந்தனையாகிறது.

$\sum_{i=1}^{n} (\underline{K_R})_i \cdot \delta \underline{r_i} = 0$ என்பதே போதியதான (sufficient) நிபந்தனையாகும் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கு $\sum_{i=1}^{n} (\underline{K_R})i \cdot \delta \underline{ri} = 0$ என்னும் நிபந்தனை நிறைவேறியதாகக் கொள்க.

கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையில் இல்லாதிருக்குமெனில் அது இயங்க வேண்டும். ஆகவே கட்டிறுக்கப் பொருளை வரையறுக்கும் m_i, $i = 1, 2 \ldots n$ என்னும் ஒவ்வொரு துகளும் இயங்கி $d\,\underline{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் இடப் பெயர்ச்சியைப் பெறும். எனவே m_i என்னும் துகளின்மேல் விசைகள் செய்யும் வேலை :

$$(\underline{K}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i + (\underline{N}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i + (\underline{S}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i > 0 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $(\underline{N}_R)_i \perp d\underline{r}_i$ என்றிருப்பதால்,

$$(\underline{N}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i = 0.$$

எல்லாத் துகள்களின்மேல் செய்யப்படும் வேலை :

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{K}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} (\underline{S}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i > 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் பொருளைக் கட்டிறுக்கப் பொருளாகக் கருதுவதால், உள் விசைகளனைத்தும் செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும். ஆதலால்,

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{S}_R)_i \cdot d\,\underline{r}_i = 0$$

எனவே இறுதியாக, பொருள் சமநிலையில் இல்லாமலிருக்கும் பொழுது

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{K}_R)_i \cdot d\underline{r}_i > 0$$ என்னும் சமனிலி (inequality) கிடைக்கப் படுகின்றது.

ஆனால் ஒவ்வொரு துகளுக்கும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சி $\delta\,\underline{r}_i$ என்பதை உண்மையாக நிகழும் $d\,\underline{r}_i$ என்னும் இடப் பெயர்ச்சியாகக் கருதலாம். அப்பொழுது மேற்கூறிய சமனிலி,

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{K}_R)_i \cdot \delta\,\underline{r}_i > 0 \text{ என்றாகும்.}$$

இது எடுத்த கொள்கைக்கு முரணையுள்ளது.

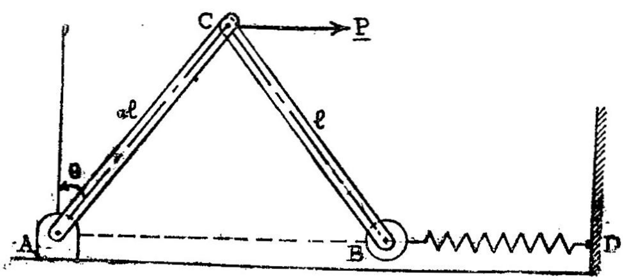
ஆகவே $\sum_{i=1}^{n} (\underline{K}_{Ri}) \cdot \delta\,\underline{r}_i > 0$ என்பது புறக்கணிக்கப்படும்; அதாவது கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையிலிருக்க வேண்டும்.

எனவே ஒரு விசைத் தொகுதியாலே தாக்கப் பட்டுத் தொடக்கத்தில் நிலையான அமைப்பைப் பெற்ற கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையிலிருக்க, அவ் விசைத் தொகுதியிலுள்ள வெளி விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலைகளின் குறியியல் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமம் என்பதே வேண்டியதும், போதுமானதுமான நிபந்தனையாகும்.

இதுவே கற்பித வேலையின் தத்துவம் எனப்படும்.

மாதிரிக் கணக்குகள் :

மாதிரி 8—3. படம் 8-18ல் காட்டியுள்ள பொருட்டொகுதி சமநிலையில் இருப்பதாகில் சுருள்வில்லில் நிகழும் இழுவிசையையும் θவின் மதிப்பையும் காண்க. இறுக்கமற்றிருக்கும்பொழுது ABயின் நீளம் a எனவும், வில் மாறிலி (spring constant) k எனவும் கொள்க.



படம் 8–18

s என்பது இறுக்க நீளத்தை அறிவிக்கட்டும்.

$\therefore\ s = x_B - a = 2\,l \sin\theta - a.$

எனவே இறுக்க விசை $F = ks = k\,(2\,l\,\text{Sin}\,\theta - a)$.

கற்பித வேலையில் பங்கெடுத்துக் கொள்ளும் விசைகளையும், அவைகளுடைய செயல்படும் புள்ளிகளையும் வரையறுக்க.

$\underline{P} = P\,\underline{i}$ என்னும் விசை $c\,(l \sin\theta, l \cos\theta)$ என்னும் புள்ளியிலும்,

$\underline{F} = -k\,(2\,l \sin\theta - a)\,i$ என்னும் விசை $B\,(2\,l \sin\theta,\ 0)$ என்னும் புள்ளியிலும் செயல்படுகின்றன.

எனவே கற்பித வேலையின் சமன்பாடு

$$(P\ i) \cdot \delta (l \sin \theta)\ \underline{i} - k (2 l \sin \theta - a)\ \underline{i} \cdot \delta (2 l \sin \theta)\ \underline{i} = 0$$

என்றாகும்.

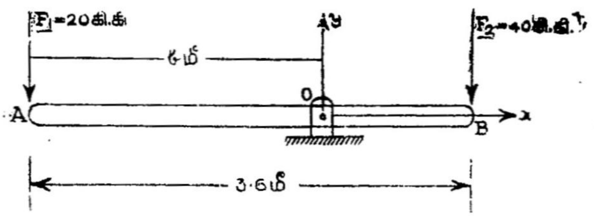
$$P\ l \cos \theta\ \delta \theta - 2\ kl \cos \theta\ (2 l \sin \theta - a)\ \delta \theta = 0$$

$$P = 2 k (2 l \sin \theta - a)$$

அல்லது $\text{Sin}\ \theta = \dfrac{P + 2\ ka}{4\ kl}$

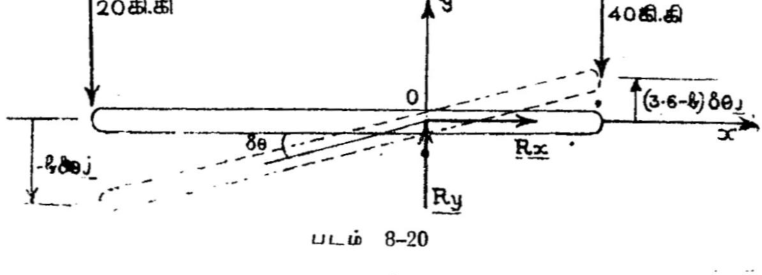
எனவே $F = \dfrac{P}{2}$ ஆகும்.

மாதிரி 8—4. 3·6 மீட்டர் நீளமுள்ள சட்டம் ஒன்று அதன் முனைகள் 20 கி.கி., 40 கி.கி. அளவுள்ள கீழ்நோக்கிய விசைகளால் தாக்கப்படுமாறும், ஒரு மழமழப்பான ஊசிமுனையை ஆதாரமாகக் கொண்டும் படம் 8-19ல் காட்டியவாறு சமநிலையில் உள்ளதானால் bன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 8-19

எதிர்த் தாக்க விசைகள் O என்னும் ஊசி முனையில் அமைவதால் O புள்ளி பற்றி சட்டத்தை கிடைநிலையிலிருந்து $\delta\theta$ அளவுக்குச் சுழற்றுவதாகக் கொண்டு கற்பித வேலையைக் கணக்கிடுவதே சிறந்ததாகும். (படம் 8-20ஐப் பார்க்க).



படம் 8–20

ஆகவே கற்பித வேலையில் பங்கெடுத்துக் கொள்ளும் விசைகளும் அவைகள் செயல்படும் கோடுகளில் ஏற்படும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சிகளும் பின்வருமாறு இருக்கும் :

விசை	கற்பித இடப் பெயர்ச்சி
$\underline{F}_1 = -20\,\underline{j}$ கி.கி.	$\delta\,\underline{r}_1 = -\,b\,\delta\,\theta\,\underline{j}$ மீ.
$\underline{F}_2 = -40\,\underline{j}$ கி.கி.	$\delta\,\underline{r}_2 = (3{\cdot}6-b)\,\delta\,\theta\,\underline{j}$

எனவே கற்பித வேலைச் சமன்பாடு $\delta\,W = 0$ என்பது

$$(-20\,\underline{j})\cdot(-b\,\delta\,\theta\,\underline{j}) + (-40\,\underline{j})\cdot(3{\cdot}6-b)\,\delta\,\theta\,\underline{j} = 0$$

$$20\,b\,\delta\,\theta - 40\,(3{\cdot}6 - b)\,\delta\theta = 0$$

$\delta\,\theta \neq 0$ என்றுருவதால்

$$60\,b = 144$$

$$b = \frac{144}{60}$$

$$= 2{\cdot}4 \text{ மீட்டர்.}$$

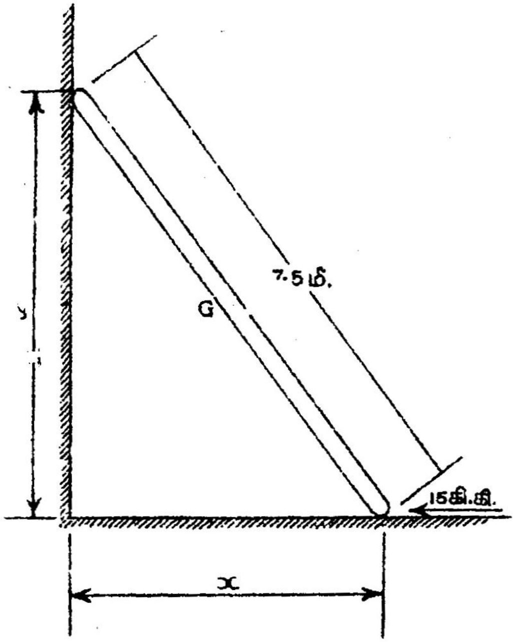
மாதிரி 8—5. 40 கி.கி. எடையும், 7·5 மீட்டர் நீளமுமுள்ள சீரான ஏணியானது தன்னுடைய மேல் முனை மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராகவும், கீழ்முனை மழமழப்பான கிடைத் தளத்திலிருக்குமாறும், அவ்வேணி வழுக்குதலைத் தடுக்கக் கீழ்முனையில் கிடையாக 15 கி.கி. விசை ஒன்று படம் 8-21ல் காட்டியவாறு செயல்படுமாறும் வைக்கப்பட்டு ஓய்விலுள்ளது.

(a) ஏணி சம நிலையிலிருப்பதற்கு ஏற்றதான xன் மதிப்பையும்,

(b) ஏணி முனைகளில் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க விசைகளையும் காண்க.

ஏணியின் கீழ்முனைக்குக் கிடையான திசையில் கீழ்முனை நிலைக்குத்துச் சுவர்ப் பக்கம் செல்லுமாறு ஓர் இடப் பெயர்ச்சியை அளிப்பதாகக் கொள்க. (படம் 8-22ஐப் பார்க்க).

ஏணி சமநிலையில் உள்ளபொழுது அது கிடைத் தளத்துடன் θ என்னும் கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொள்க. அப்பொழுது கற்பித வேலைச் சமன்பாடு



படம் 8–21

$$(-15\,i)\cdot\delta\,(7{\cdot}5\cos\theta)\,\underline{i} + (-40\,j)\cdot\delta\,(3{\cdot}75\sin\theta)\,j = 0$$

$$15\times 7{\cdot}5\sin\theta\,\delta\theta - 40\times 3{\cdot}75\cos\theta\,\delta\theta = 0$$

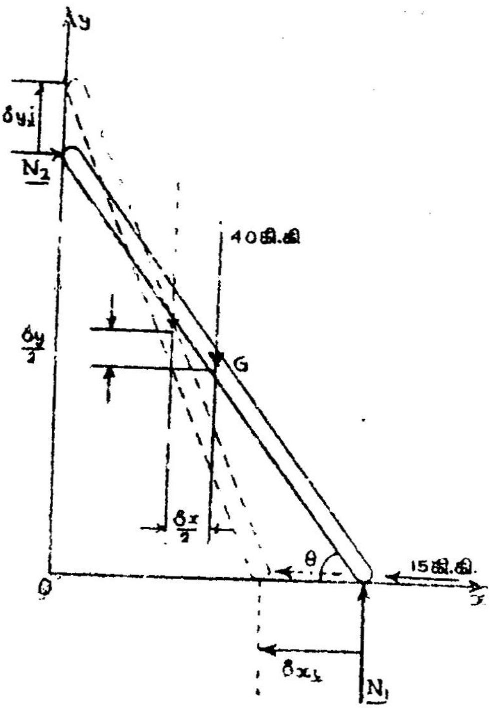
$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

ஆகவே $x = 7{\cdot}5\cos\theta = 7{\cdot}5\times\frac{3}{5} = 4{\cdot}5$ மீட்டர்.

கீழ்முனையில் செயல்படும் $\underline{N_1}$ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசையைக் காண, நிலைக்குத்துத் திசையில் $\delta\,y\,\underline{i}$ என்னும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சியை ஏணிக்கு அளிப்பதாகக் கொள்க. அப்பொழுது கற்பித வேலையின் சமன்பாடு

$$(N_1\ j)\cdot\delta\,y\,\underline{i} + (-40\,j)\cdot\delta\,y\,j = 0$$

$N_1 = 40$ கி. கி.



படம் 8–22

மேல் முனையில் செயல்படும் $\underline{N_2}$ என்னும் எதிர்த் தாக்க விசையைக் காண, கிடைத் திசையில் ($+\ \delta$ x $\underline{i}$) என்னும் கற்பித இடப் பெயர்ச்சியை ஏணிக்கு அளிப்பதாகக் கொள்க.

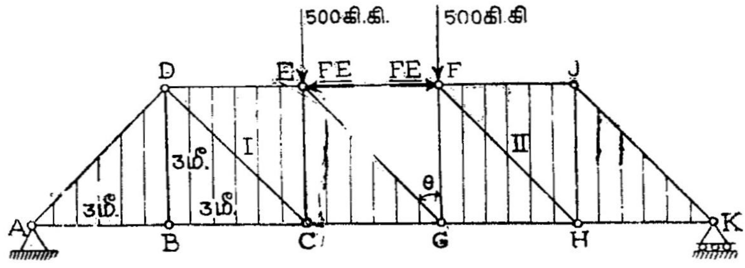
அப்பொழுது

$$(-30\ \underline{i}) \cdot (\delta\ x\ \underline{i}) + (N_2\ \underline{i}) \cdot (\delta\ x\ i) = 0$$

$$N_2 = 30 \text{ கி. கி.}$$

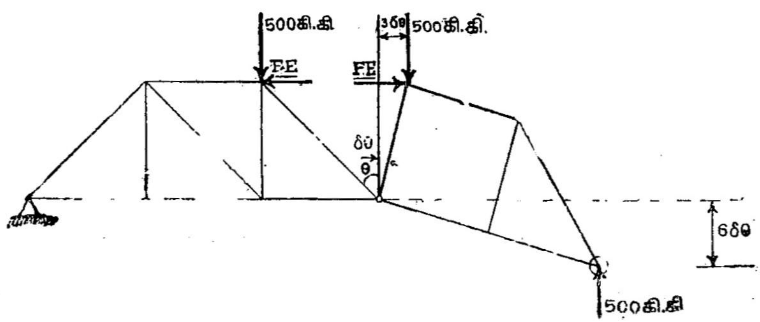
மாதிரி 8—6. எளிய உத்திரத் தொகுதி ஒன்றின் அமைப்பு படம் 8-23ல் காட்டியவாறு உள்ளது. ஆதாரங்களில் செயல் படும் எதிர்த் தாக்க விசைகள் ஒவ்வொன்றும் 500 கி. கி. என அறியலாம். F E என்னும் உத்திரத்தில் செயல்படும் விசையைக் கற்பித வேலையின் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

உத்திரப் பகுதிகளான I, II என்பவற்றிற்கு FE என்னும் உத்திரம் ஒரு கட்டுப்பாடாகக் (constraint) கருதலாம். அதாவது



படம் 8–23

FE என்னும் உத்திரம், கோணம் E G F = θ மாருதிருக்குமாறு தொகுதியைக் கட்டுப்படுத்துகிறது.



படம் 8–24

Iவது பகுதியை நிலையாக உள்ளதாகக் கொண்டு, θ என்னும் கோணத்திற்கு $\delta\theta$ என்னும் ஓர் கற்பிதக் கோண இடப் பெயர்ச்சியை அளிப்பதாகக் கொள்க. (படம் 8-24ஐப் பார்க்க). IIவது பகுதியில் விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக. அப்பொழுது

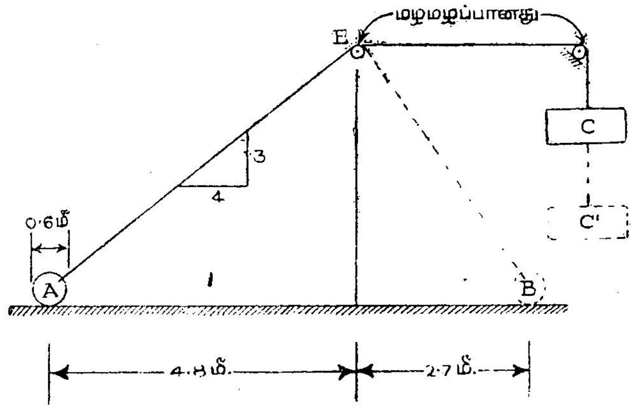
$$3\ FE\ \delta\theta - (500)\ (6)\ \delta\theta = 0$$

$$\therefore\ FE = 1000 \text{ கி. கி.}$$

இங்கு இது ஒரு நெருக்க விசையாகும் (compressive force).

பயிற்சி

8—1. 350 கி. கி. எடையுள்ள சக்கரம் ஒன்று வலுவான கம்பியால் பிணைக்கப்பட்டு C என்னும் 75 கி. கி. எடையுள்ள



படம் 8–25

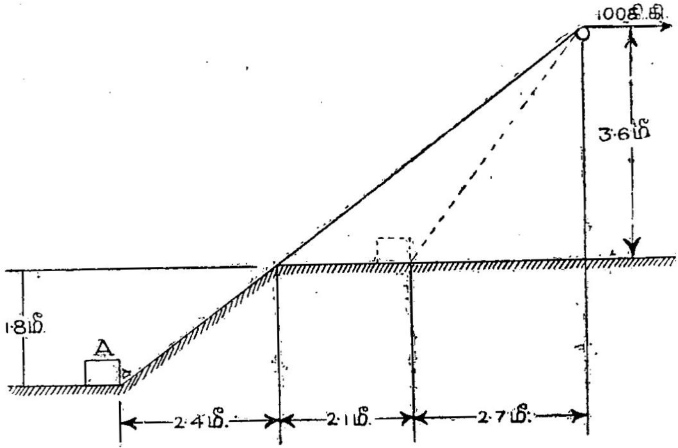
பளுவைத் தாங்குமாறு (படம் 8-25ல் காட்டியவாறு) அமைகிறது. சக்கரம் A என்னுமிடத்திலிருந்து B என்னுமிடத்திற்குக் கடத்தப் படும்பொழுது அவ்விரு விசைகள் செய்யும் மொத்த வேலையைக் காண்க. E என்னுமிடத்து அமையும் கப்பியின் விட்டத்தைப் புறக்கணிக்க.

[விடை : 112·5 மீ. கி. கி.]

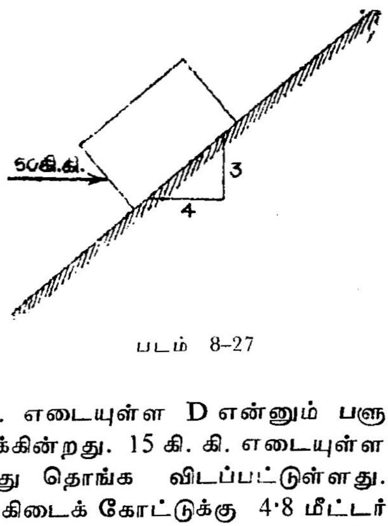
8—2. 100 கி. கி. எடையுள்ள A என்னும் பொருளானது படம் 8-26ல் காட்டியவாறு, ஒரு மழமழப்பான சாய்வுத் தளத்தின் மேலும், பிறகு ஒரு மழமழப்பான கிடைத் தளத்தின் மேலும் 100 கி. கி. அளவுள்ள விசையால் விட்டிசைப்புக் குறிநிலை (dashed position)க்கு நகர்த்தப்படுகின்றது. அவ்வித இடப் பெயர்ச்சியால் பொருளின்மேல் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

[விடை : 27 மீ. கி. கி.]

8—3. ஒரு மழமழப்பான சாய்வுத் தளத்தில் 25 கி. கி. எடையுள்ள மரக்கட்டை ஒன்று படம் 8-27ல் காட்டியவாறு உள்ளது. அது சாய்வுத் தளத்திலேயே, மேல் நோக்கியவாறு,



படம் 8–26



படம் 8–27

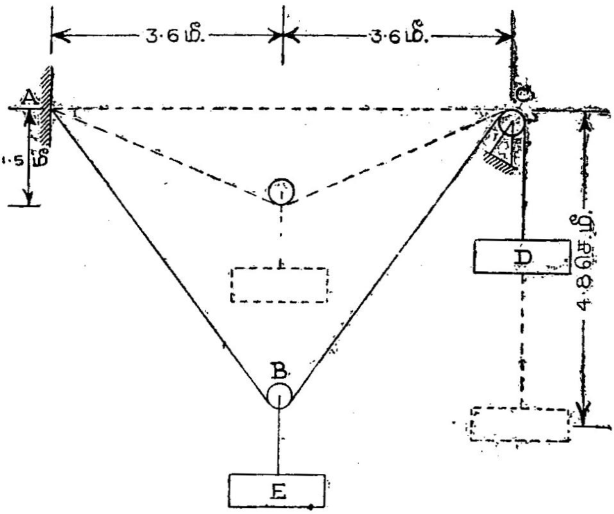
3 மீட்டர் தொலைவுக்குக் கடத்தப்பட்டால், அதன் மேல் செய்யப்படும் மொத்த வேலையைக் காண்க.

[விடை : 75 மீ. கி. கி.]

8—4. வலுவான கம்பி ஒன்றின் துணி படம் 8-28ல் காட்டியவாறு, A என்னுமிடத்தில் பொருத்தப்பட்டு, B, C என்னும் மழமழப்பான கப்பிகளின் வழியே செல்லுமாறும், அதன் மற்ற நுனியில் 26 கி. கி. எடையுள்ள D என்னும் பளுவானது தொங்க விடப்பட்டுமிருக்கின்றது. 15 கி. கி. எடையுள்ள E என்னும் பொருள் Bயிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. B என்னும் கப்பி AC என்னும் கிடைக் கோட்டுக்கு 4·8 மீட்டர் தொலைவிலிருந்து 1·5 மீட்டர் தொலைவுக்கு உயர்த்தப்படும்பொழுது, அவ்விரு விசைகள் மொத்தமாகச் செய்யும் வேலையைக் காண்க.

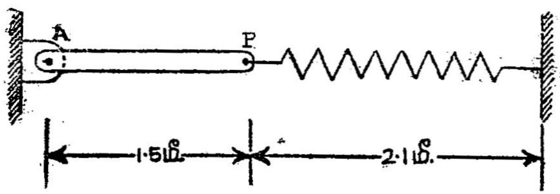
[விடை : 59·7 மீ. கி. கி.]

8—5. படம் 8-29ல் காட்டியுள்ளவாறு AB என்னும் சட்டம் 50 கி. கி. எடையுள்ளதாகவும், நிலைக்குத்துத் தளத்தில் A புள்ளி வழியே அமையும் ஒரு கிடை அச்சு பற்றி சுழலக் கூடியதாகவும்



படம் 8–28

உள்ளது. படத்தில் காட்டியுள்ள அமைப்பில் சட்டம் கிடக்கும் போது சுருள் வில்லில் 10 கி. கி. இழு விசை ஏற்படுகிறது. 90° கோண அளவுக்கு வலப்புறமாகச் சுழலும்போது, சட்டத்தில்

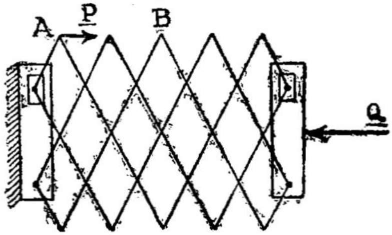


படம் 8–29

—15 மீ. கி. கி. அளவுள்ள வேலை செய்யப்படுவதாகில், சுருள் வில்லினது மீள்சக்திக் குணகத்தைக் காண்க.

[விடை : 21·3 கி. கி./மீ.]

8—6. படிக்கட்டுக் காப்பீடு வாயில் ஒன்று படம் 8-30ல் காட்டியவாறு உள்ளது. 10 கி.கி. அளவுள்ள Q என்னும் விசை வாயில் பகுதியில் கிடையாகப் படத்தில் காட்டியவாறு



படம் 8-30

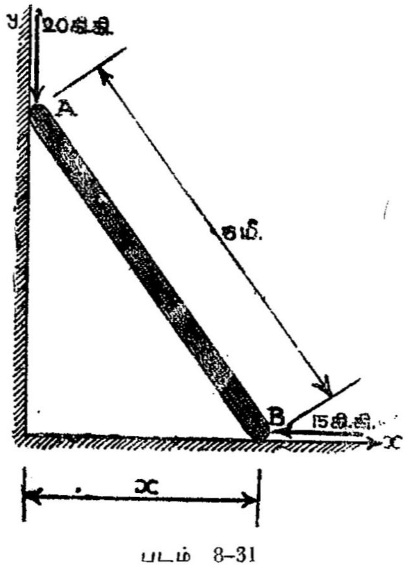
செலுத்தப்படுகின்றது. இவ் விசையைச் சமநிலைப்படுத்த, Aயில் கிடையாகத் தாங்கும் விசையைக் காண்க.

[விடை: 100 கி. கி. விசை→].

8—7. முந்திய கணக்கில் (8-6வது கணக்கில்), வாயில் பகுதியில் அமையும் ஒவ்வொரு கம்பியும் கிடைத் திசையுடன் 50° கோணத்தைத் தாங்குமாறு இருக்கும்பொழுது, B என்னுமிடத்தில் நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும் விசையைக் காண்க.

[விடை: 119 கி. கி. விசை ↓].

8—8. 6 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓர் மெல்லிய கோலானது தன்னுடைய முனைகள் மழமழப்பான ஒரு தரையின் மீதும், மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராகவும் ஓய்வில் இருக்கின்றது.



படம் 8-31

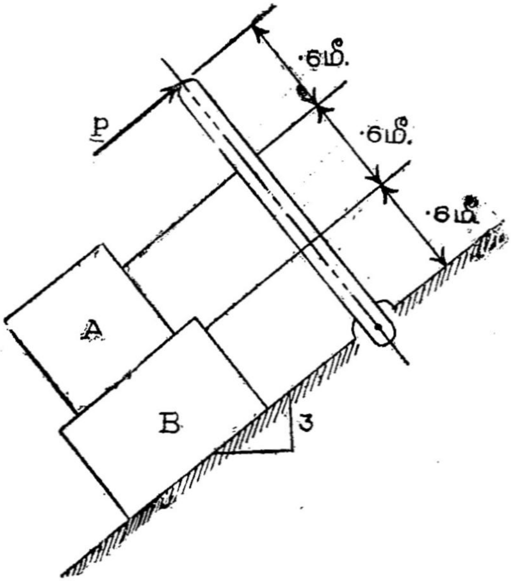
படம் 8-31ல் காட்டியவாறு, கோலின் கீழ், மேல் முனைகளில் விசைகள் தாக்கப்பட்டுக் கோலானது சமநிலையில் இருக்குமெனில் அதன் கீழ் முனைக்கும், சுவரும் தரையும் சந்திக்குமிடத்துக்கும் உள்ள தொலைவைக் காண்க.

[விடை: 3·6 மீ.]

8—9. முந்திய கணக்கில் (அதாவது 8-8வது கணக்கில் கோலின் எடையானது 10 கி.கி. என்றிருக்குமெனில், xன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை: 3·087 மீ.]

8—10. 50 கி.கி., 100 கி.கி. எடைகளுள்ள A, B என்னும் இரு கட்டைகள் படம் 8-32ல் காட்டியவாறு P என்னும் விசையால் தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கட்டைகள்



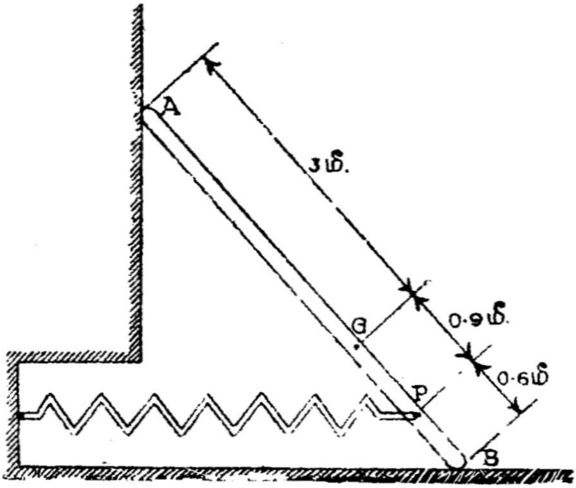
படம் 8-32

ஒன்றை ஒன்று தொடும் தளம், சாய்வுத் தளம் ஆகியவை மழமழப்பானவை எனக் கொண்டு சமநிலைக்கு உரிய Pன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : 40 கி.கி.]

8—11. 150 கி.கி. எடையுள்ள AB என்னும் ஒரு உத்திரத்தின் G என்னும் புவியீர்ப்புப் புள்ளி அவ்வுத்திரத்தை AG = 3மீ., GB = 1·5 மீ. என்னும் பகுதிகளாகப் பிரிக்குமிடத்தில் உள்ளது. அவ்வுத்திரத்தின் கீழ், மேல் முனைகள் மழமழப்பான தரையையும், மழமழப்பான நிலைக்குத்துத் தளத்தையும் தொட்டவண்ணம் உள்ளன. சுருள் வில் ஒன்று படம் 8-33ல் காட்டியவாறு, உத்திரத்தில் P என்னும் புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ் வில்லின் மீட்சிக் குணகம் 20 கி.கி./மீ. என்றும், உத்திரத்தின் கீழ் முனையானது நிலைக்

குத்துத் தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்பொழுது, சுருள் வில்லில் மீட்சி இல்லாமலிருக்கிறது என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், உத்திரத்தின் சமநிலையை வரையறுக்க.



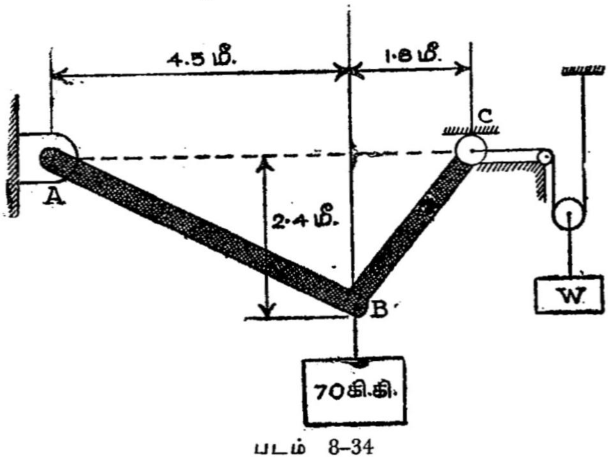
படம் 8–33

[விடை : நிலைக்குத்துத் தளத்துடன், உத்திரம் 42·3° கோணத்தைத் தாங்கும்பொழுது, அது சமநிலையில் இருக்கும்.]

8—12. படம் 8-34ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்பைச் சமநிலையில் வைப்பதற்கு உரிய Wன் எடையைக் காண்க.

AB, BC என்னும் சட்டங்களின் எடைகளைப் புறக்கணிக்க.

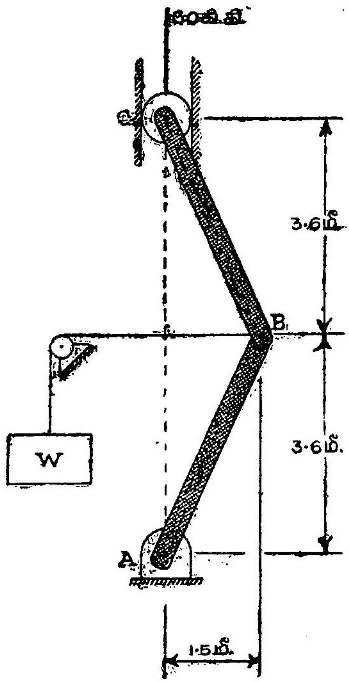
[விடை : 75 கி.கி.]



படம் 8–34

8—13. படம் 8-35ல் காட்டியுள்ள பொறியமைப்பு சமநிலையிலிருப்பதற்கு ஏற்ற தான W என்னும் பளுவின் எடையைக் காண்க. (AB, BC என்னும் சட்டங்களை எடையற்றவைகளாகக் கொள்க.)

[விடை : 25 கி.கி.]

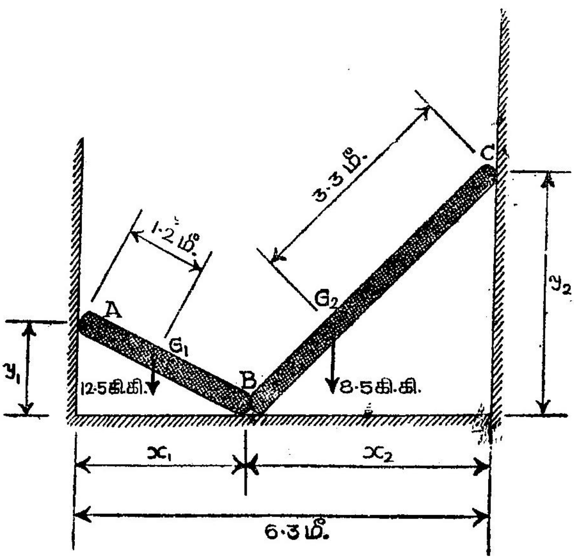


படம் 8–35

8—14. படம் 8-36ல் காட்டியுள்ள அமைப்பு சமநிலையில் இருக்குமெனில் y_1ன் நீளத்தைக் காண்க.

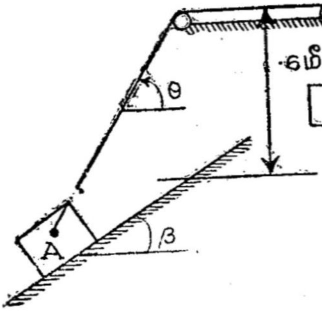
AB, BC என்னும் கோல்களின் நீளங்களை முறையே 3 மீட்டர், 5·1 மீட்டர் எனக் கொள்க.

[விடை : 2·4 மீட்டர்.]



படம் 8–36

8—15. A, B என்னும் இரு பொருள்கள், இரு மழமழப்பான கப்பிகளின்மேல் செல்லும் ஓர் நீட்சியற்ற கயிற்றின் இரு முனைகளிலும் கட்டப்பட்டு, A என்னும் பொருள் ஓர் மழமழப்பான சாய்வுத் தளத்தின்மேல் படம் 8-37ல் காட்டியவாறு உள்ளது. A, Bக்களின் எடைகள் முறையே 4 கி.கி., 2·5 கி.கி. எனவும், $\beta = 30°$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டால், பொருள்கள் சமநிலையை அடையும் பொழுது, θ என்னும் கோணத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

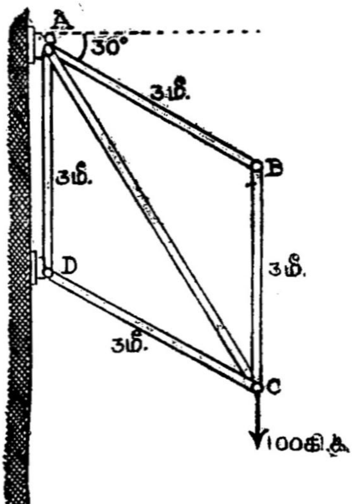


படம் 8–37

[விடை : 67°]

8—16. படம் 8-38ல் காட்டியுள்ள அமைப்பில், A என்னும் புள்ளியை நிலையாகவும், Dயில் செயல்படும் விசை ADக்குச் செங்குத்தாக இருக்கின்றது எனவும் கொண்டு ACயால் தாக்கப்படும் விசையைக் காண்க. (அமைப்பானது ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்தில் உள்ளதாகக் கொள்க).

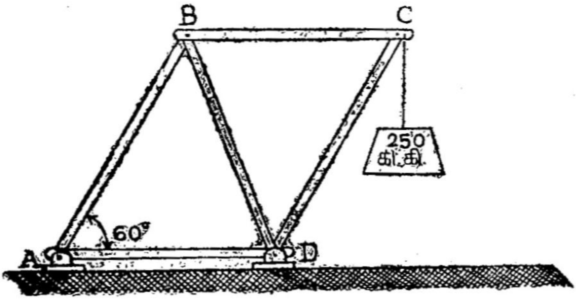
[விடை : 173 கி.கி.]



படம் 8–38

8—17. 1·8 மீட்டர் நீளமுள்ள 4 சட்டங்கள் ஒரு சாய் சதுர அமைப்பைப் பெறுமாறு (படம் 8-39ஐப் பார்க்க.) பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. AD என்னும் சட்டம் கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. கோணம் $B\hat{A}D = 60°$. 250 கி.கி. எடையுள்ள பளு ஒன்று C என்னும் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சட்டப் படல் (frame work) தொகுதி விறைப்பாக இருக்க, DB என்னும் முட்டு

உதவுகிறது. சட்டங்கள் எடையற்றவை எனக் கொண்டு, DB என்னும் முட்டில் செயல்படும் விசையைக் காண்க.



படம் 8–39

[விடை : 144·5 கி.கி.]

—

REFERENCE LIST

BIBLIOGRAPHY OF BOOKS IN ENGINEERING MECHANICS

(Consulted by the author while preparing the book)

1. BEER, F. P., and E. R. JOHNSTON, JR. : "Vector Mechanics for Engineers", Megraw-Hill Book Company, New York, 1962.
2. DAN EDWIN CHRISTIE : "Vector Mechanics", Megraw-Hill Book Company, New York, 1964.
3. HIGDON, ARCHIE and WILLIAM, B. STILES : "Engineering Mechanics"—Vector Edition—Volume I-Statics, Prentice-Hall Inc., Englewood cliffs, N. J., U. S. A.
4. IRVING H. SHMES : "Engineering Mechanics"—Statics and Dynamics Prentice Hall of India (Private) Limited, New Delhi, 1963.
5. JOSEPH GEORGE COFFIN : "Vector Analysis"—(Introduction toVector Methods—on their various applications to Physics and Mathematics), John Willy & Sons. Inc., New York, Second Edition 1959.
6. LANGHAAR H. L. and A. P. BORESI : "Engineering Mechanics"—Megraw-Hill Book Company, New York, 1959.
7. RAY SKINNER : "MECHANICS" Blaisdell Publishing Co., 1969.
8. WEATHERBURN, C. E. : "Elementary Vector Analysis"—Vol. I., Cambridge University Press.

கலைச்சொற்கள்

A

Acceleration	—	முடுக்கம்
Acceleration of a particle	—	துகளின் முடுக்கம்
Acceleration due to gravity	—	புவியீர்ப்பு முடுக்கம்
Action and Reaction	—	விசை, எதிர்விசை
Addition of Couples	—	சுழலிணைகளின் கூடுதல்
Addition of Vectors	—	திசையிகளின் கூடுதல்
Angle	—	கோணம்
Angle between Vectors	—	திசையிகளின் இடைப்பட்ட கோணம்
Angle of friction	—	உராய்வுக் கோணம்
Angular velocity	—	கோணத் திசைவேகம்
Area moment of inertia	—	பரப்பிற்குரிய நிலைமத் திருப்புத் திறன்
Associate law	—	சேர்ப்பு விதி
Axioms	—	மெய்ம்மைகள், வெளிப்படை உண்மைகள்
Axis	—	அச்சு, ஆயம்

B

Beam	—	உத்திரம், வளை
Block (Pulley)	—	(கப்பி) தாங்கி
Body	—	பொருள்
Body, rigid	—	கட்டிறுக்கப் பொருள்

C

Cables	—	வலுவான கம்பிகள்
Centre of gravity	—	புவியீர்ப்பு மையம்

Centre of mass	—	பொருண்மை மையம்
Centrifugal forces	—	மைய விட்டோடும் விசை
Centripetal forces	—	மைய நாட்ட விசை
Centroid	—	திணிவு மையம்
Cipher	—	பூச்சியம், சுழி
Clockwise	—	வலஞ்சுழியாக
Coefficient	—	குணகம், கெழு
Coefficient of elasticity	—	மீட்சிக் கெழு
Coefficient of friction	—	உராய்வுக் கெழு
Commutative law	—	மாற்று விதி
Commutative law for addition	—	கூட்டற் பரிமாற்று விதி
Commutative law for multiplication	—	பெருக்கற் பரிவர்த்தனை விதி
Component	—	கூறு, பிரிவு
Component, horizontal	—	கிடைக் கூறு, கிடைப் பிரிவு
Component, vertical	—	நிலைக்குத்துக் கூறு, நிலைக் குத்துப் பிரிவு
Components of a force	—	விசையின் பிரிவுகள், விசையின் பகிர்வீடுகள்
Components of a vector	—	திசையியின் பிரிவுகள்
Composition	—	சேர்க்கை, தொகுப்பு
Composition of forces	—	விசைகளின் சேர்க்கை, விசைகளின் தொகுப்பு
Composition of vectors	—	திசையிகளின் சேர்க்கை
Compression	—	இறுக்கம், நெருக்கம்
Concurrent	—	(ஒரு புள்ளியில்) சந்திக்கின்ற
Concurrent forces	—	ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற விசைகள்
Conditions	—	நிபந்தனைகள்
Conditions, necessary and sufficient	—	வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Conditions of equilibrium	—	சமநிலை நிபந்தனைகள்
Cone of friction	—	உராய்வுக் கூம்பு
Constant	—	மாறிலி
Constant of gravitation	—	மாறிலி நிலையெண்
Constrained bodies	—	கட்டுப்பட்ட பொருள்கள்
Constraint	—	கட்டுப்பாடு
Conversion of units	—	அலகுகளின் மாற்றம்

Coordinates — அச்சுத் தொலைவுகள்
Coordinate system — கூற்றுத் தொகுதி
Coplanar forces — ஒரு தள விசைகள்
Coplanar force system — ஒரு தள விசைத் தொகுதி
Counter clockwise — இடஞ்சுழியாக
Couple — சுழலிணை
Couple, moment of a — சுழலிணைப்புத் திறன்
Couple, vector representation of a — சுழலிணை 'திசையி' வகைக் குறிப்பு
Couple, scalar components of a — சுழலிணையின் எண்ணிப் பிரிவுகள்
Cross product — குறுக்குப் பெருக்கி
Cross product of two vectors — இரு திசையிகளின் குறுக்குப் பெருக்கி

D

Day, Mean solar — சராசரி ஞாயிற்றுநாள்
Define — வரையறு
Definition — வரையறை
Density — அடர்த்தி
Determinant — அணிக் கோவை
Dimension — பரிமாணம், அளவு
Dimensions, basic — அடிப்படைப் பரிமாணங்கள்
Dimensional homogenity, law of — பரிமாண ஓரியல் விதி
Dimensions, secondary — இரண்டாவதான பரிமாணங்கள்
Directed line segment — திசையுடன் கூடிய துண்டுக் கோடு
Direction — திசை
Direction cosives — திசைக் கிடக்கைகள்
Direction ratios — திசை விகிதங்கள்
Displacement — இடப் பெயர்ச்சி
Distance — தொலைவு, தூரம்
Distance, perpendicular — செங்குத்துத் தொலைவு
Distributive law — பங்கீட்டு விதி
Dot product — புள்ளிப் பெருக்கம்
Dot product of two vectors — இரு திசையிகளின் புள்ளிப் பெருக்கி

E

Edge	—	விளிம்பு
Elastic	—	மீள்சக்தி உடைய
Elastic constant	—	மீள்சக்தி மாறிலி
Elastic string	—	மீள்சக்தி இழை
Elastic spring	—	மீள்சக்தி உடைய வில்
Elasticity, modulus of	—	மீட்சிக் குணகம்
Energy	—	ஆற்றல்
Energy, Kinetic	—	இயக்க ஆற்றல்
Energy, potential	—	நிலை ஆற்றல்
Equal	—	சமம், சமன்
Equation	—	சமன்பாடு
Equilibrant	—	சமனி
Equilibrium	—	சமநிலை, ஓய்வு நிலை
Equilibrium of concurrent forces	—	ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் விசைகளின் சமநிலை
Equilibrium of coplanar forces	—	ஒரு தள விசைகளின் சம நிலை
Equilibrium, general conditions of	—	சமநிலைப் பொது நிபந்தனை கள்
Equilibrium of three forces	—	மூன்று விசைகளுக்கு உரிய சமநிலை
Equilibrium of parallel forces	—	இணை விசைகளுக்கு உரிய சமநிலை
Equivalent	—	சமம்
Equivalence	—	சரிநிகர், சமத்துவம்
Equivalence of couples	—	சுழலிணைகளின் சரிசமத் துவம்
Equivalence of rigid bodies	—	கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் சரிசமத்துவம்
Extensible string	—	நீளவல்ல இழை
External	—	வெளியேயுள்ள
External, binctor	—	வெளியிரு சமவெட்டி
External force	—	வெளிவிசை

F

Force	—	விசை
Force, centrifugal	—	மைய விட்டோடு விசை

Force, centripetal	—	மைய நாட்ட விசை
Force, component of a	—	விசையின் பிரிவு
Force, couple system	—	விசை-சுழலிணை அமைப்பு
Force, of friction	—	உராய்வு விசை
Force, gravitational units of	—	புவியீர்ப்பு விசையலகுகள்
Forces, composition of	—	விசைகளின் சேர்க்கை
Forces, concurrent	—	ஒருமுனை விசைகள்
Forces, coplanar	—	ஒரு தள விசைகள்
Forces, coplanar parallel	—	ஒரு தள இணை விசைகள்
Forces, unipulsives	—	கணத் தாக்கு விசைகள்
Forces, internal	—	உள் விசைகள்
Forces, parallel	—	இணை விசைகள்
Forces, parallelogram law of	—	விசைகளின் இணைகர விதி
Forces, polygon law of	—	விசைகளின் பல்கோண விதி
Forces, resolution of	—	விசைகளின் பிரிவு
Forces, system of	—	விசைகளின் தொகுதி
Forces, triangle of	—	விசை முக்கோணம்
Formula	—	வாய்பாடு, சூத்திரம்
Frame of reference	—	சுட்டமைப்பு, குறிப்பிட்டச்சு
Free vector	—	தடையற்ற திசையி, தன்வய திசையி
Free body diagram	—	பொருளின் தனிப்படுத்திய வரைபடம்
Friction	—	உராய்வு
Friction, angle of	—	உராய்வுக் கோணம்
Friction, coefficient	—	உராய்வுக் குணகம்
Friction, cone of	—	உராய்வுக் கூம்பு
Friction, laws of	—	உராய்வு விதிகள்
Friction, limiting	—	எல்லையுராய்வு
Friction, rolling	—	உருளுராய்வு
Friction, sliding	—	வழுக்குராய்வு
Friction, statical	—	நிலையியலுராய்வு

G

Gear	—	துணைப்பொறி
Geometry, coordinate	—	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்
Gradient	—	சரிவு
Graphical method	—	வரைபட முறை
Dynamics	—	இயக்க இயல்

Gravitation — ஈர்ப்பு
Gravitational force — ஈர்ப்பு விசை
Gravitation, Newton's law of — நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதி
Gravitational constant — ஈர்ப்பு மாறிலி
Gravitational unit of force — ஈர்ப்பு விசையலகு
Gravity — புவி ஈர்ப்பு
Gravity, acceleration due to — புவி ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Gravity, centre of — புவி ஈர்ப்பு மையம்

H

Hinges — பிணையல்கள்
Hoop — வளையம்
Horizontal — கிடை
Horizontal line — கிடைக் கோடு
Horizontal plane — கிடைத் தளம்
Horse power — குதிரைத் திறன்

I

Identical — சர்வ சம, முழுதும் ஒத்த
Identically equal (congruent) — சர்வ சமனான
Identity — சர்வ சமம், முற்றொருமை
Illustration — எடுத்துக்காட்டு
Impact — மோதல், மோதுகை
Impuls of a force — ஒரு விசையின் கணத் தாக்கு
Impulsive force — கணத் தாக்கு விசை
Inclination — சாய்வு
Inclined plane — சாய் தளம்
Increment — கூடுந்தொகை
Inelastic — மீள்சக்தியற்ற
Inequality — சமமின்மை, சமனிலி
Inertia — நிலைமம், சடத்துவம்
Inertia, moment of — சடத்துவத் திருப்பு திறன்
Internal forces — உள் விசைகள்

K

Kilogram — கிலோ கிராம் (கி.கி.)
Kilometer — கிலோ மீட்டர் (கி.மீ.)
Kinematics, Kinetics — இயக்க இயல், இயங்கியல்
Kinetic energy — இயக்க ஆற்றல்

Kinetic friction — இயக்கப் பண்புராய்வு
Known quantity — தெரிந்த கணியம்

L

Law — விதி
Law, associative — தொகுப்பு விதி
Law, commutative — மாற்று விதி
Law, distributive — பங்கீட்டு விதி
Laws of friction — உராய்வு விதிகள்
Laws, Motions Newton's — நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்
Left hand screw — இடக் கைத் திருகி
Left handed system — இடக் கைத் தொகுதி
Length — நீளம்
Lever — நெம்புகோல்
Limit — எல்லை, வரம்பு
Limit, elastic — மீள்சக்தி எல்லை
Limiting equilibrium — எல்லைச் சமநிலை, வரம்புச் சமநிலை
Limiting friction — எல்லை உராய்வு
Linear — நேர் கோட்டுக்குரிய, ஒரு படிக்குரிய

M

Machine — பொறி இயந்திரம்
Magnitude — பருமன், அளவு
Magnitude and direction — அளவும் திசையும்
Mass — திணிவு, நிறை, பொருண்மை
Mass, centre of — திணிவு மையம்
Matter — பருப் பொருள்
Maximum — உச்ச, உத்தம, பெருமம்
Mechanical — பொறி முறையான
Mechanics — நிலையியக்க இயல்
Metre — மீட்டர் (மீ.)
Metre, centi — சென்டி மீட்டர் (செ.மீ.)
Metre, kilo — கிலோ மீட்டர் (கி.மீ.)
Minimum — இறுமம்
Minus — கழி, குறி, எதிர்

Minus sign (−)	—	கழி குறி, குறைக் குறி, எதிர்க் குறி
Modulus	—	குணகம், எண் அளவு, மட்டு
Moment	—	திருப்புத் திறன்
Moment of a couple	—	ஒரு சுழலிணைப்புத் திறன் அல்லது ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்
Moment of a force	—	ஒரு விசையின் திருப்புத் திறன்
Moment of inertia	—	சடத்துவத் திருப்புத் திறன்
Moment of a vector	—	ஒரு திசையியின் திருப்புத் திறன்
Momentum	—	உந்தம்
Momentum, angular	—	சுழல் உந்தம்
Motion	—	இயக்கம்
Motion, angular	—	கோணவியக்கம்
Motion, Newton's laws of	—	நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்

N

Necessary and sufficient conditions	—	வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Normal reaction	—	நேர்குத்து எதிர்விசை
Null vector	—	பூச்சிய திசையி
Number	—	எண்
Number, negative	—	குறைவெண்
Number, real	—	மெய்யெண்

O

Ordinate	—	நிலைத் தொலைவு
Origin	—	ஆதி, துவக்கம்
Oscillation	—	அலைவு

P

Pair	—	சோடி
Parallel	—	ஒருபோகு, இணை, சமாந்தர
Parallel forces	—	இணை விசைகள்
Parallelogram of forces	—	விசைகளின் இணைகரம்
Parallelogram of vectors	—	திசையிகளின் இணைகரம்

Parallelopiped — இணைகரத் திண்மம்
Peg — முளை
Perpendicular — செங்குத்தான
Perpendicular plane — செங்குத்துத் தளம்
Plane — தளம்
Physical independence of forces — விசைகளின் தற்சார்புக் கோட்பாடு
Plus sign — கூட்டற் குறி
Polygon — பல்கோணம்
Polygon of forces — விசைப் பல்கோணம்
Position vector — நிலைத் திசையி
Positive — நேர், மிகை
Positive number — நேரெண், கூட்டெண், மிகையெண்
Positive moment — நேர் திருப்புத் திறன்
Positive quantity — நேர் கணியம்
Potential energy — நிலை ஆற்றல்
Pound (weight) — இராத்தல்
Power — அடுக்கு, திறன்
Principle of Transmissibility of force — விசை ஊடு கடத்தற் கோட்பாடு
Principle of virtual work — கற்பித வேலைத் தத்துவம்
Problem — உத்திக் கணக்கு
Product — பெருக்கம்
Proof — நிறுவல்
Prove — நிரூபி
Pull — இழுத்தல்
Pulley — கப்பி

Q

Quantity — கணியம்
Quantity, known — தெரிந்த கணியம்
Quantity, unknown — தெரியாக் கணியம்

R

Radius — ஆரம், ஆரை
Reaction — எதிர்த் தாக்கம், எதிர் விசை
Real — மெய்யான
Real number — மெய்யெண்

Rectangle — செவ்வகம்
Rectangular components of a vector — திசையிக் குத்துப் பிரிவுகள்
Reduce — ஒடுக்குதல், சுருக்குதல்
Reduction — ஒடுக்கம்
Relation — தொடர்பு
Resolution — பகிர்வு, கூறுபாடு
Resolution of forces — விசைகளின் பகிர்வுகள், விசைகளின் கூறுகள்
Resultant — தொகுபயன், விளைவு
Resultant force — தொகுபயன் விசை, விளைவு விசை
Right angle — செங்கோணம்
Right handed screw convention — வலக்கைத் திருகாணி மரபு
Rigid — விறைப்பான
Rigid body — கட்டிறுக்கப் பொருள்
Rigid frame work — விறைப்பான சட்டப் படல்
Rigidity — விறைப்பு
Rigidity, flexinal — வளைவு விறைப்பு
Rigidity, modulus of — விறைப்புக் குணகம்
Ring — வளையம்
Roll — உருளல்
Rolling friction — உருள் உராய்வு
Rough — சுமார், உராய்வுடைய

S

Scalar — எண்ணி
Scalar quantity — எண் கணியம்
Scalar product — எண்ணிப் பெருக்கி
Scalar triple product — முக்கூட்டு எண்ணிப் பெருக்கி, எண்ணி முப் பெருக்கி
Screw — திருகு
Secondary — இரண்டாவதான
Secondary dimensions — இரண்டாவதான பரிமாணங்கள், வழிவந்த பரிமாணங்கள்
Set — கணம்

Shear force	—	வெட்டுத் தொடுவிசை
Sign	—	குறி
Slope	—	சாய்வு விகிதம், சரிவு
Smooth	—	மழமழப்பான, உராய்வற்ற
Smooth body	—	மழமழப்பான பொருள்
Solution	—	தீர்வு
Space	—	இடம், வெளி, பரந்தவெளி
Speed	—	வேகம்
Spiral	—	சுருளி
Spring	—	சுருள் வில், வில்
Statics	—	நிலையியல்
Structure	—	அமைப்பு
Subscript	—	கீழ்க்குறி
Suffix	—	கீழ்க்குறி
Sum	—	தொகை, கூட்டுத் தொகை
Sum, algebraical	—	இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகை
Surface	—	மேற்பரப்பு
Symbol	—	குறியீடு
System (group)	—	தொகுதி
System (method)	—	முறை, திட்டம், ஒழுங்கு
System of units	—	அலகு முறைகள்

T

Tangent plane	—	தொடு தளம்
Tensile strength	—	இழுவை வலு
Tension	—	இழு விசை
Time	—	நேரம்
Torque	—	முறுக்குத் திறன்
Translation	—	இடப் பெயர்ச்சி
Transmissibility of force	—	விசை செலுத்தப்படும் தன்மை
Triangle of forces, law of	—	விசைகளின் முக்கோண விதி

U

Units	—	அலகுகள்
Units, absolute	—	தனியலகுகள்
Units, derived	—	வழிவந்த அலகுகள்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600031.

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

இதுவரை 606 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன

★

மேலும் விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	—	43	நூல்கள்
சட்டம்	—	19	,,
மருத்துவம்	—	9	,,
இயற்பியல்	—	27	,,
வேதியியல்	—	21	,,
தாவரவியல்	—	17	,,
விலங்கியல்	—	7	,,
கணிதம்	—	19	,,
வணிகவியல்	—	30	,,
பொருளாதாரம்	—	21	,,
புவியியல்	—	12	,,
வரலாறு	—	36	,,
மனையியல்	—	2	,,
தத்துவம்	—	5	,,
உளவியல்	—	4	,,
புள்ளியியல்	—	2	,,
கல்வி	—	3	,,
நிலப்பொதியியல்	—	3	,,
அரசியல்	—	25	,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)

கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை-600 006.

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20,