எந்திரவியல் - II

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—220

எந்திரவியல்-II

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

ஆர். நாகராஜன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,

பௌதிக உதவிப் பேராசிரியர்,

அரசினர் கலைக் கல்லூரி, உதகை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—February 1970

B.T.P. No. 220

© Bureau of Tamil Publications

MECHANICS for B.Sc., (Book II)

R. NAGARAJAN

Net Price Rs. 5-50
(No discount)

Printed by
ANURADHA ACCHAGAM,
146, T. H. Road, Madras-21.

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

MADRAS

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரில், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'எந்திரவியல்—II'** என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் **220**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **255** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் ; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

II. நிலையியல்

		பக்கம்
12.	விசை	... 1
13.	புவி ஈர்ப்பு மையம்	... 69
14.	உராய்வு	... 116
15.	மாயவேலை	... 147
16.	இலகு எந்திரங்கள்	... 158
17.	அழுத்தமும் அமுக்கமும்	... 200
18.	ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவமும் மிதவை விதிகளும்.	... 237
19.	வளி அழுத்தம்	... 256
20.	பாய்பொருளியல் எந்திரங்கள்	... 269
	கலைச்சொற்கள்	... 294

இரண்டாம் பாகம்

நிலையியல்

(Statics)

12. விசை

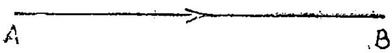
(Force)

முன்னுரை

நிலையியலில், பல்வேறு விசைகள் செயற்பட்டபோதிலும் சமநிலையில் இருக்கும் பொருட்களைப்பற்றிப் பார்ப்போம். பல்வேறு விசைகள் செயற்பட்டு ஒரு பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்குமாயின் அவ் விசைகளும் சமநிலையில் இருக்கின்றன என்று கூறப்படும்.

விசைக்குரிய மூன்று பண்புகளை, அதாவது விசையின் எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படு புள்ளி ஆகியவற்றை ஒரு நேர்க்கோட்டால் தக்க முறையில் குறிப்பதன்மூலம் அவ் விசையை முழுமையாக அந்த நேர்க்கோட்டால் குறிக்க முடியும். தக்க அளவுத் திட்டத்தில் வரையப்பட்ட கோட்டின் நீளம், விசையின் எண் மதிப்பையும், கோட்டின் திசை விசையின் திசையையும், நேர்கோட்டின் ஒருமுனை விசையின் செயற்படு புள்ளியையும் குறிக்கும். படம் 12·1-ல் AB-ன் நீளம் விசையின் எண் மதிப்பையும் (1 செ.மீ=50 டைன் என்ற அளவுத்திட்டத்தில் AB= 4 செ.மீ என்றால் விசையின் மதிப்பு 200 டைன்கள்) அதன் திசையானது விசையின் திசையையும் (A-லிருந்து B-க்கு) A அல்லது B விசைச் செயற்படு புள்ளியையும் குறிக்கும். விசையின் பண்புகளை முழுமையாகக் குறிக்கும் நேர் கோடு விசை வெக்டர் (force vector) என்றும் விசைக்கோடு (line of force) என்றும் அழைக்கப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது செயற்பட்டு விளைவிக்கக்கூடிய அதேவிளைவை ஒரு ஒற்றை விசையானது



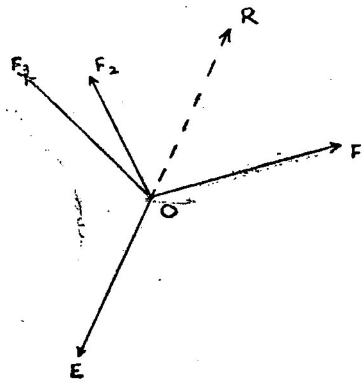
படம் 12·1

அப் பொருளின்மீது செயற்பட்டு விளைவிக்குமாயின், அந்த ஒற்றை விசை அவ் விசைகளின் தொகுபயன் (resultant) எனப்படும். மற்ற விசைகள் அந்த ஒற்றை விசையின் ஆக்கக் கூறுகள் எனப்படும்.

மாறுக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது செயற்பட்டு அப் பொருளில் விளைவிக்கும்விளைவை அந்த விசைகளுடன் சேர்ந்து செயற்பட்டு பொருளைச் சமநிலைப்படுத்தும் ஒற்றை விசை அவ் விசைகளின் எதிர் சமனி (equilibrant) எனப்படும்.

தொகுபயனும் எதிர்சமனியும் :

O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் F_1, F_2, F_3, E என்ற விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதாகக் கருதுவோம் (படம் 12·2). F_1, F_2, ஆகியவற்றை அவற்றின் தொகுபயனல் (R என்னும் விசையால்) பதிலீடு செய்வோமாயின், R-ம் E-ம் சமநிலையில் இருக்கும். ஒரு



படம் 12·2

புள்ளியில் செயற்படும் இருவிசைகள் சமநிலையில் இருக்க வேண்டுமாயின், அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் எதிர்த்திசைகளிலும் செயற்பட வேண்டும். எனவே, F_1, F_2, F_3 என்ற விசைகளின் தொகுபயனும் எதிர்சமனியும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் எதிர்த் திசைகளில் செயற்பட வேண்டும். இதனையே,

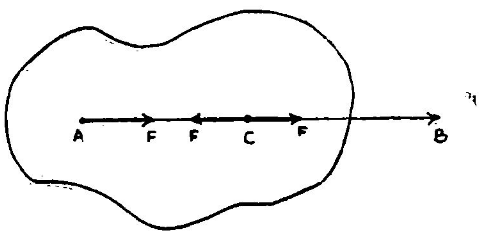
$$R = -E$$

என்று குறிப்பிடலாம்.

ஒரு பொருளின்மீது இருவிசைகள் செயற்பட்டு அதனைச் சம நிலையில் வைத்திருக்குமாயின், அப் பொருளின் அந் நிலை கெடாமல் அவ் விரு விசைகளையும் நீக்கிவிடலாம். அவ்வாறே ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று சமமான எதிர் விசைகளைச் சேர்ப்பதால் பொருளின் அந் நிலை மாறாது.

விசைகளின் இப் பண்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு திண் பொருளின் மீது செயற்படும் ஒரு விசையின் செயற்படு புள்ளியை அவ் விசையின் திசையில் அப் புள்ளியுடன் கெட்டியாக இணைந்திருக்கும் மற்றொரு புள்ளிக்கு மாற்றலாம் என நிறுவலாம். விசைகளின் இத் தகைய பண்பு விசை கடத்தீட்டியல்பு (Transmissibility of forces) எனப்படும். அதனைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

ஒரு திண்பொருளின்மீது A என்ற புள்ளியில் F என்ற ஒரு விசை AB என்ற திசையில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம் (படம்12·3). அடுத்து AB-ல் C என்ற புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று சமமான (F, F) இரு எதிர் விசைகளை C என்ற புள்ளியில் பொருளின்மீது



படம் 12·3

மீது செயற்படுத்துவோமாயின் A,C ஆகிய புள்ளிகளில் A-லிருந்து C-க்கு F என்ற விசையும், C-லிருந்து A-க்கு F என்ற விசையும் செயற்படுகின்றன. மேலும், C-லிருந்து B-க்கு F என்ற ஒரு விசையும் செயற்படுகிறது. AC திசையில் செயற்படும் F என்ற விசையும் CA திசையில் செயற்படும் F என்ற விசையும் ஒன்றுக்கொன்று சமமான எதிர் விசைகளாதலால், அவற்றைப் பொருளிலிருந்து நீக்கிவிடலாம். எனவே, எஞ்சி நிற்பது பொருளின்மீது முதலில் A-ல் செயற்பட்ட விசைக்குச் சமமான C-ல் செயற்படும் விசையாகும். இது F-ன் செயற்படு புள்ளியை A-லிருந்து C-க்கு மாற்றப்பட்டதையே குறிக்கும்.

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகள்

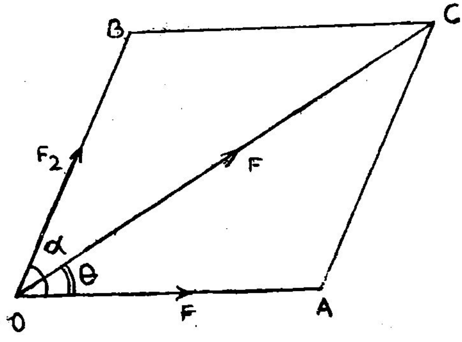
ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன்

இருவிசைகள்: ஒரு புள்ளியில் ஒரே திசையில் செயற்படும் F_1, F_2 என்ற இரு விசைகளின் தொகுபயன் F_1+F_2 ஆகும். அது அவ் விசைகளின் செயற்படும்.

ஒரு புள்ளியில் எதிர்த்திசைகளில் செயற்படும் F_1, F_2 என்ற இரு விசைகளின் தொகுபயன் $F_1 - F_2$ ஆகும். அது அவ்விசைகளுள் பெரிய விசையின் திசையில் செயற்படும்.

ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த திசைகளில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரு விசைகள்: இவ் விசைகளின் தொகுபயனை விசைகளின் இணைகர விதியால் அறியலாம்.

விசைகளின் இணைகரவிதி: ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரு விசைகளின் வெக்டர்களை ஒரு புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட ஒரு இணைகரத்தின் அண்டைப் பக்கங்களால் குறிக்க முடியுமாயின் அப் புள்ளி வழியே செல்லும் மூலைவிட்டம் அவ் விசைகளின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும்.

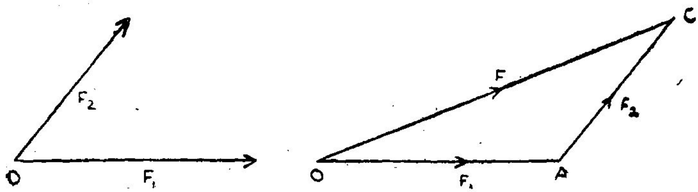


படம் 12·4

படம் 12·4, O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் F_1, F_2 என்ற விசைகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்களை $(\vec{OA}, \vec{OB})$ அண்டைப் பக்கங்களாக அமைத்து வரையப்பட்ட OACB என்ற இணைகரத்தைக் குறிக்கிறது. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் குறிக்கப்படும் $\vec{OC}$ என்ற வெக்டர் F_1, F_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் குறிக்கும்.

F_1, F_2 என்ற விசைகளின் தொகுபயனை வெக்டர் முறையில் பின் வருமாறும் காணலாம்.

O என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட $\overrightarrow{OA}$, F_1 வெக்டரைக்



படம் 12·5

குறிக்குமாயின் A-லிருந்து F_2 வெக்டரைக் குறிக்கும் $\overrightarrow{AC}$-ஐ வரைவோமாயின், $\overrightarrow{OC}$, F_1, F_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் வெக்டராகும். (படம் 12·5) இம் முறையில் இணைகரம் வரையவேண்டிய தேவையில்லை.

விசை ஒரு வெக்டராதலால் இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம் ஆகியவற்றிற்கான தொகுப்பு, பிரிவீடு விதிகள் விசைகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே, α கோணத்தில் சாய்ந்த திசைகளில் செயற்படும் F_1, F_2 என்ற இருவிசைகளின் தொகுபயனின் எண் மதிப்பு F எனில்,

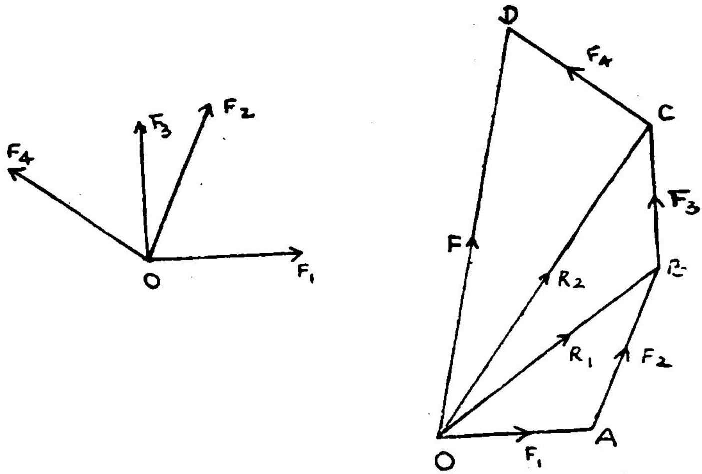
$$F = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha)} \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}1$$

அவ்வாறே F-க்கும் F_1-க்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ எனில்

$$\tan\theta = \frac{F_2 \sin\alpha}{F_1 + F_2 \cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}2$$

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் : ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகளின் தொகுபயனை அவற்றை இரண்டிரண்டு விசைகளாக எடுத்துக்கொண்டு வெக்டர் முறையில் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் F_1, F_2, F_3, F_4 என்ற விசைகளைக் கருதுவோம் (படம் 12·6).

முதலில் O என்ற புள்ளியிலிருந்து F_1-ஐக் குறிக்கும் $\vec{OA}$ என்ற வெக்டரையும் பின்னர் A-லிருந்து F_2-ஐக் குறிக்கும் $\vec{AB}$-ஐயும் வரையவேண்டும். இப்போது $\vec{OB}$ அவற்றின் தொகுபயன்



படம் 12·6

(R_1) வெக்டராகும். அடுத்து B-லிருந்து F_3-ஐக் குறிக்கும் $\vec{BC}$-ஐ வரைந்தால், R_1, F_3 ஆகியவற்றின் தொகுபயனை (R2) $\vec{OC}$ குறிக்கும். அவ்வாறே C-லிருந்து F_4-ஐக் குறிக்கும் $\vec{CD}$-ஐ வரைந்தால் $\vec{OD}$ என்பது R_2, F_4 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் (F) ஆகும். அதாவது

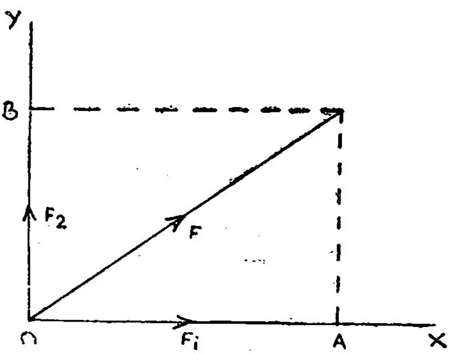
$\vec{OD} = F$ = (R_2), F_4 ஆகியவற்றின் தொகுபயன்

= (R_1, F_3 ஆகியவற்றின் தொகுபயன்

= (F_1, F_2, F_3), F_4 ஆகியவற்றின் தொகுபயன்.

$\therefore$ $\vec{OD} = F$ = F_1, F_2, F_3, F_4, ஆகியவற்றின் தொகுபயன்.

விசைகளின் பிரிவீடு: ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகளின் தொகுபயனுன ஒற்றைவிசை ஒன்றை எவ்வாறு காணமுடியுமே அவ்வாறே ஒற்றைவிசை ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளையும் காணலாம். இவ்வாறே ஒற்றைவிசை ஒன்றின் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்பதற்கு விசைகளின் பிரிவீடு என்று பெயர். ஒரு குறிப்பிட்ட விசையின் ஆக்கக் கூறுகளை எந்த இரு திசைகளிலும் காணமுடியுமாயினும் ஒன்றுக் கொன்று நேர்குத்தாக அமையும் இருதிசைகளில் அதன் ஆக்கக் கூறுகளைக் கருதுவது வழக்கமாகும். (பார்க்க திசைவேகங்க (ளின் பிரிவீடு)



படம் 12·7

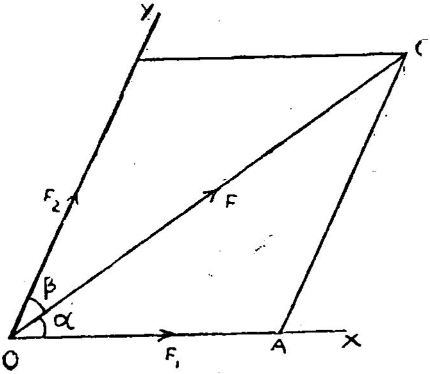
படம் 12·7-ல் F என்பது ஒரு ஒற்றை விசையாயின் அதனுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசை (OX) யில் அதன் ஆக்கக் கூறு $(=\overrightarrow{OA})$ $F_1 = F \cos\theta$ அத்திசைக்கு நேர்குத்துத் திசை (OY) யில் ஆக்கக்கூறு $(\overrightarrow{OB})$ $F_2 = F \sin\theta$

F-ன் ஆக்கக்கூறுகளை வேறுதிசைகளிலும் காணலாம். F-ன் திசையுடன் α, β கோணங்களை அமைக்கும் திசைகளில் அதன் ஆக்கக்கூறுகள் முறையே F_1, F_2 என்ருல் (படம் 12·8)

$$F_1 = \frac{F \ \text{Sin}\ \beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{(பார்க்க சமன் 2·4)} \ \dots \ 12{\cdot}3$$

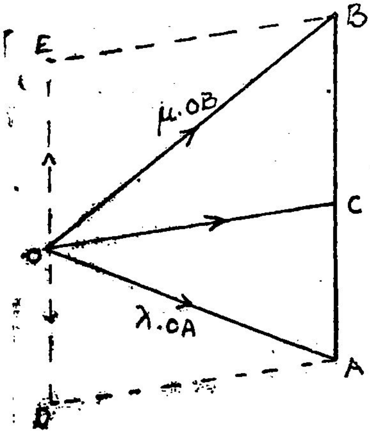
$$F_2 = \frac{F \ \text{Sin}\ \alpha}{\text{Sin}\ (\alpha+\beta)} \quad \text{(பார்க்க சமன் 2·5)} \ \dots \ 12{\cdot}4$$

தெரிவு 12·1 : ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இருவிசைகளை எண் மதிப்பிலும் திசையிலும் $\lambda . \vec{OA}$, $\mu . \vec{OB}$ ஆகியவற்றால்



படம் 12·8

குறித்தால் அவற்றின் தொகுபயன் $(\lambda + \mu) . \vec{OC}$ ஆகும்; C என்பது AB-ல் $\lambda . CA = \mu . CB$ என்னும் சமன்பாட்டின்படி அமைந்த ஒரு புள்ளியாகும்.



படம் 12·9

படம் 12·9-ல் C என்பது $\lambda . CA = \mu . CB$ என்பதற்கேற்ப AB-ல் அமைந்த ஒரு புள்ளியாகும். O வழியே செல்லும் ODAC OEBC என்ற இரு இணைகரங்களை வரைவோமாயின், விசைகளின்

இணைகர விதிப்படி $\lambda.\overrightarrow{OA}$ என்ற விசையை OD, OC ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படும் முறையே $\lambda.\overrightarrow{OD}$, $\lambda.\overrightarrow{OC}$ ஆகிய இரு ஆக்கக்கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். அவ்வாறே $\mu.\overrightarrow{OB}$ ஐ OC, OE வழியாகச் செயற்படும் முறையே $\mu.\overrightarrow{OC}$, $\mu.\overrightarrow{OE}$ என்று இரு ஆக்கக்கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். எனவே இப்பொழுது O-ல் செயற்படும் விசைகளைக் கருதுவோமாயின்,

OC வழியே $\lambda.\overrightarrow{OC}$, $\mu\overrightarrow{OC}$ ஆகிய இருவிசைகள்

OD வழியே $\lambda.\overrightarrow{OD}$

OE வழியே $\mu.\overrightarrow{OE}$ ஆகும்.

OC வழியே செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$

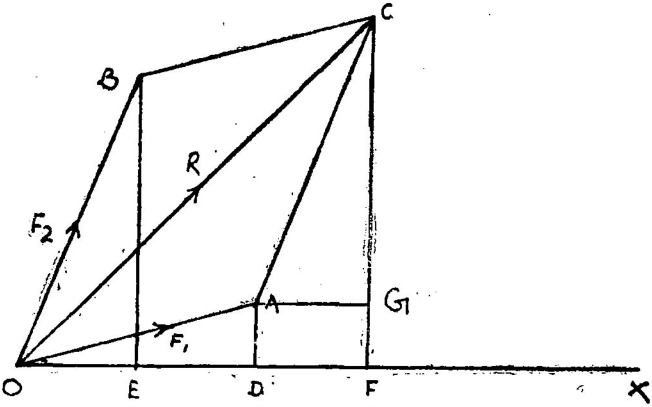
OD=CA, OE=CB ஆதலால் மற்ற இருவிசைகளின் தொகுபயன் $\lambda.\overrightarrow{OD} - \mu.\overrightarrow{OE} = O$ ஆகும்.

எனவே, O வழியே செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ ஆகும்.

தெரிவு : 12·2 : இருவிசைகளின் ஒருதிசையில் உள்ள ஆக்கக்கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை அவற்றின் தொகுபயனின் அந்தத் திசையில் உள்ள ஆக்கக்கூறுக்குச் சமமாகும்,

படம் 12·10-ல் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்பவை F_1, F_2 என்ற இருவிசைகளையும் $\overrightarrow{OC}$, அவற்றின் தொகுபயனையும் (R) குறிக்கின்றன. OX ஒரு குறிப்பிட்ட திசையைக் குறிக்கிறது. A, B, C-யிலிருந்து OX-க்கு முறையே AD, BE, CF என்ற நேர்குத்துக் கோடுகளையும் A-விருந்து CF-க்கு AG என்ற நேர்குத்துக் கோட்டையும் வரைவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ என்பவை OX

திசையில் முறையே F_1,F_2, R ஆகியவற்றின் ஆக்கக்கூறுகளாகும். மேலும், OBE, ACG என்ற முக்கோணங்களில் ஒத்தபக்கங்கள்



படம் 12·10

இணையாகவும் OB, AC ஆகிய பக்கங்கள் சமமாகவும் இருப்பதால் அவ்விரு முக்கோணங்களும் முழுதொத்த முக்கோணங்களாகும். எனவே, OE = AG = DF.

இனி $OF = OD + DF$

$OF = OD + OE$

அதாவது OX திசையில் R-ன் ஆக்கக்கூறு $(\overrightarrow{OF}) =$

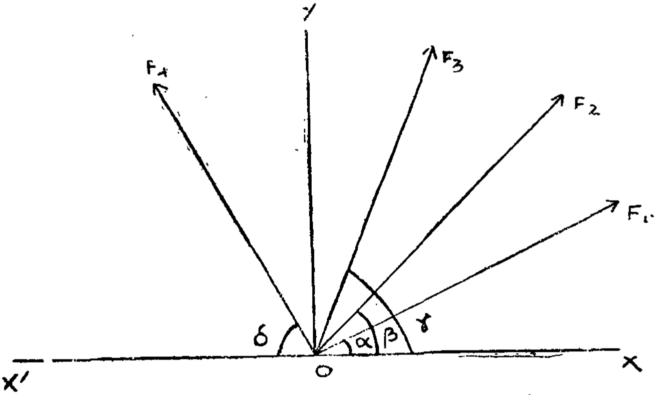
OX திசையில் F_1-ன் ஆக்கக்கூறு $(\overrightarrow{OD})$ +

ஆக்கக்கூறு (F_2-ன் $\overrightarrow{OE}$)

இத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு புள்ளியில் ஒரே தளத்தில் செயற்படும் பல்வேறு விசைகளின் தொகுபயனைக் காணலாம்.

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் ஒருதள விசைகள் பலவற்றின் தொகுபயன்: O என்ற புள்ளியில் F_1, F_2, F_3, F... என்ற விசைகள் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். (படம் 12·11) OX, OY என்ற ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான இருதிசைகளைக் கருதுவோம். F_1, F_2, F_3, F_4,...... என்ற விசைகள் OX - உடன் முறையே α, β, γ, δ என்ற கோணங்களை அமைக்குமாயின், OX திசையில்

அவற்றின் ஆக்கக்கூறுகள் முறையே $F_1 \cos \alpha$, $F_2 \cos \beta$, $F_3 \cos \gamma$ $F_4 \cos \delta$; OY திசையில் அவற்றின் ஆக்கக் கூறுகள் முறையே



படம் 12.11

$F_1 \sin \alpha$, $F_2 \sin \beta$, $F_3 \sin \gamma$, $F4 \sin \delta$ ஆகும்.

∴ OX திசையில் செயற்படும் ஆக்கக்கூறுகளின் தொகுபயன்

$$X = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma + F_4 \cos \delta.$$

OY திசையில் செயற்படும் ஆக்கக்கூறுகளின் தொகுபயன்

$$Y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta + F_3 \sin \gamma + F_4 \sin \delta$$

இப்பொழுது X, Y ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் காணின் அது F_1, F_2, F_3, F_4, ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் கொடுக்கும். X, Y ஆகியவற்றின் தொகுபயன் F என்றும் அது OX திசையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்றும் கொள்வோமாயின்

$$F = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}5$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}6$$

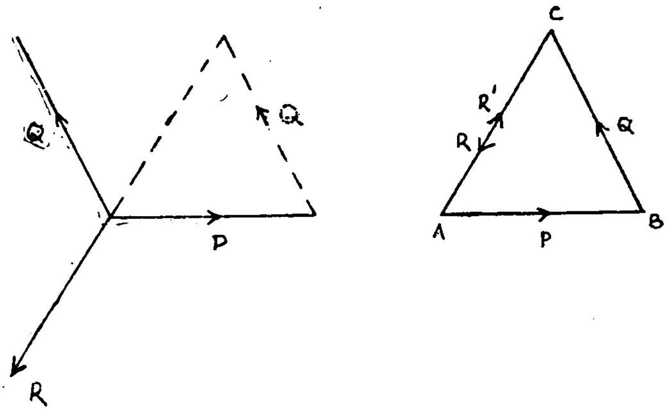
சமன்பாடுகள் 12.5, 12.6 முறையே தொகு பயனின் எண்மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றைக் கொடுக்கின்றன.

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமாயின், அவற்றின் தொகுபயன் (F) சுழியாகும். எனவே, X, Y ஆகியவை சுழியாகும். அதாவது ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் பல விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமாயின், ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான இருதிசைகளில் அவற்றின் ஆக்கக்கூறுகளின் கூட்டுத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் சுழியாகும்.

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளின் சமநிலை

விசைகளின் முக்கோண விதி : ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று விசைகளின் வெக்டர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்கப் பெறுமாயின் அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் P, Q, R, என்ற மூன்று விசைகளின் வெக்டர்களை ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் AB, BC, CA, என்ற பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்க முடிவதாகக்கொள்வோம் (படம் 12·12). இவ் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும் என்று பின்வருமாறு நிறுவலாம். வெக்டர் முறையில்



படம் 12·12

விசைகளின் தொகுப்பு விதிப்படி $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ ஆகியவற்றால் குறிக்கப் பெறும் P, Q, வெக்டர்களின் தொகுபயன் வெக்ட (R′)ரை $\vec{AC}$ குறிக்கும். எனவே, P, Q, R, ஆகியவற்றின் தொகுபயன் R, R_1 ஆகிய வெக்டர்களின் தொகுபயன் ஆகும்.

ஆனால் $R^1 = -R$

எனவே, அவற்றின் தொகுபயன் அதாவது P, Q, R ஆகியவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். ஆகையால் O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் P, Q, R, ஆகிய விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

விசைகளின் முக்கோண விதியைச் சோதனைமூலம் நிரூபிக்க முடியாது. எனினும், அதன் மறுதலையை நிரூபிக்கமுடியும்.

வழக்கில் அதிகமாகப் பயன்படுவது முக்கோண விதியின் மறுதலேயேயாதலால், அதைப்பற்றி இங்குக் காண்போம்.

விசைகளின் முக்கோண விதியின் மறுதலே : ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலேயில் இருக்குமாயின் அவற்றின் வெக்டர்களே ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்று முறையில் குறிக்கமுடியும்.

படம் 12·12*a*-ல் P, Q, R என்ற விசைகள் சமநிலேயில் இருப்பதால் P, Q ஆகியவற்றின் எதிர்சமனி R ஆகும். P, Q ஆகியவற்றின் வெக்டர்களே முறையே $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ குறிக்குமாயின், $\vec{OB}$ அவற்றின் தொகுபயன் வெக்டரைக் குறிக்கும். தொகுபயனும் எதிர் சமனியும் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்குமாகையால், $\vec{BO}$ என்ற வெக்டர் P, Q ஆகியவற்றின் எதிர்சமனியை அதாவது R-ஐக் குறிக்கும். எனவே, P, Q, R ஆகிய வெக்டர்களின் எண் மதிப்புகளே OAB என்ற முக்கோணத்தின் முறையே OA, AB, BO ஆகிய பக்கங்களால் குறிக்கமுடியும். OA, AB, BO ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே, P, Q, R ஆகியவற்றின் எண் மதிப்புகளே ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுத்திட்டத்தின்படி குறிப்பதால்,

$$\frac{P}{OA} = \frac{Q}{AB} = \frac{R}{BO} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 12{\cdot}7$$

லாமியின் தேற்றம் : (Lami's Theorem) ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலேயில் இருக்குமாயின், அவற்றுள் ஒவ்வொரு விசையும் மற்ற இரு விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சைனுக்கு (sine) நேர்விகிதத்திலிருக்கும்.

P, Q, R என்ற விசைகள் O என்ற புள்ளியில் செயற்பட்டு சமநிலேயில் இருப்பதாகக் கொள்வோம் (படம் 12·13). முக்கோண விதியின் மறுதலேப்படி

P, Q, R ஆகியவை OAD என்ற முக்கோணத்தின் முறையே OA, AC, CO ஆகிய பக்கங்களால் குறிக்கப்படும். படம் 12·13-ல்

$$\widehat{BOC} = \alpha$$

$$\widehat{COA} = \beta$$

$$\widehat{BOA} = \gamma$$

என இருக்கட்டும்.

OAD என்ற முக்கோணத்தில்

$$\frac{OA}{\sin \widehat{ODA}} = \frac{AD}{\sin \widehat{DOA}} = \frac{DO}{\sin \widehat{OAD}}$$

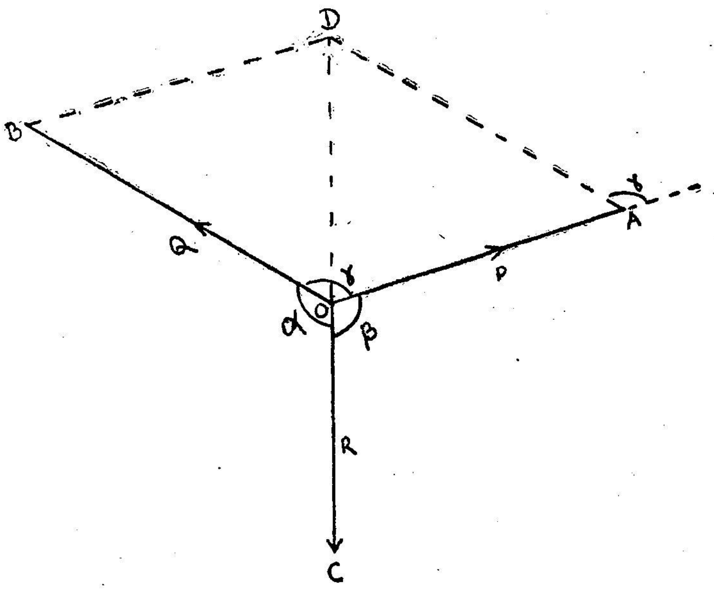
ஆனல், OA = P, AD = Q, DO = R.

$$\sin \widehat{ODA} = \sin \widehat{BOD} = \sin (180-\widehat{BOC}) = \sin \widehat{BOC} = \sin \alpha$$

$$\sin \widehat{DOA} = \sin (180-\widehat{COA}) = \sin \widehat{COA} = \sin \beta$$

$$\sin \widehat{OAD} = \sin (180-\gamma) = \sin \gamma$$

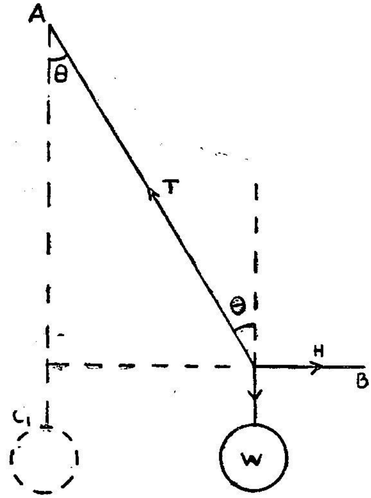
எனவே, $\dfrac{P}{\sin \alpha} = \dfrac{Q}{\sin \beta} = \dfrac{R}{\sin \gamma}$ ... ... 12·8



படம் 12·13

டான்ஜென்ட் விதி (Tangent law) : ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து விரிவுபடாத மெல்லிய கயிறு ஒன்ருல் தொங்கவிடப்பட்ட W என்ற ஓர் எடையை, கயிறு செங்குத்து நிலையுடன் θ என்ற

கோணத்தை அமைக்குமாறு H என்ற கிடைமட்ட விசை இழுக்குமாயின் $\frac{H}{W} = \tan\theta$ ஆகும்.



படம் 12·14

படம் 12·14-ல் A நிலையான புள்ளியையும் AO, கயிற்றையும் குறிக்கின்றன ; $C_1\hat{A}O = \theta$ கயிற்றின் இழுவிசை T எனக் கொள்வோமாயின், O என்ற புள்ளியில் W, H, T ஆகிய மூன்று விசைகள் செயற்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றன.

எனவே, லாமியின் தேற்றப்படி

$$\frac{W}{\sin A\hat{O}B} = \frac{H}{\sin A\hat{O}C} = \frac{T}{\sin C\hat{O}B}$$

$$\sin A\hat{O}B = \sin(90+\theta) = \cos\theta$$

$$\sin A\hat{O}C = \sin(180-\theta) = \sin\theta$$

$$\sin C\hat{O}B = \sin 90^\circ = 1$$

$$\therefore \quad \frac{H}{W} = \frac{\sin \widehat{AOC}}{\sin \widehat{AOB}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

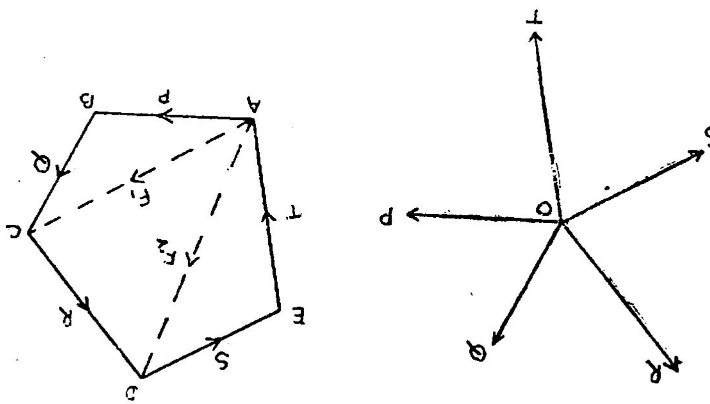
அதாவது $\frac{H}{W} = \tan \theta$

மேலும், $T = W \dfrac{\sin \widehat{COB}}{\sin \widehat{AOB}}$

அதாவது $T = \dfrac{W}{\cos \theta}$

விசைகளின் பல்கோண விதி (polygon of forces): ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் பல விசைகளின் வெக்டர்களை ஒரு பல்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்று முறையில் குறிக்க முடியுமாயின், அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

O என்ற புள்ளியில், P,Q,R,S,T ஆகியவற்றின் வெக்டர்களை ABCDE என்ற பல்கோணத்தின் AB, BC, CD, DE, EA என்ற பக்கங்களால் முறையே வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்கமுடிவதாகக் கொள்வோம் (படம் 12·15). அவ் விசைகள் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

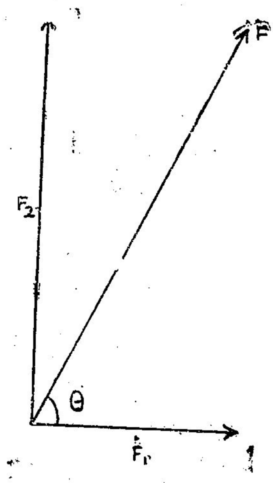


படம் 12·15

வெக்டர்முறையில் தொகுப்பு விதிப்படி P, Q, R, S ஆகியவற்றின்

தொகுபயன் வெக்டரை (T′) AE குறிக்கும். எனவே, P,Q,R, S, T ஆகியவற்றின் தொகுபயன் T′,T ஆகியவற்றின் தொகுபயன் ஆகும். ஆனுல் T′ = —T. ஆதலால் அவற்றின் தொகுபயன் அதாவது P, Q, R, S, T ஆகியவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 40 பவு. எடை விசையொன்று ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான திசைகளில் இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அவற்றுள் ஒன்று மற்ருென்றைப்போல் இருமடங்கு இருப்பின், அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.



படம் 12·16

இரு ஆக்கக்கூறுகளை F_1, F_2 என்றும், அவற்றுள் F_1 40 பவு. எடை விசையுடன் θ கோணத்தை அமைப்பதாகவும் கொள்வோம் (படம் 12·16).

இனி, $F_1 = 40 \cos \theta$

$F_2 = 40 \sin \theta$

மேலும், $F_2 = 2F_1$ எனக் கொள்வோமாயின்,

$$40 \sin \theta = 2 \times 40 \cos \theta$$

அல்லது $\tan \theta = 2$

$$\therefore \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} ; \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

எனவே, $F_1 = 40 \cos \theta$

$$= 40 \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = 8\sqrt{5} \text{ பவு. எடை.}$$

$$F_2 = 2F_1$$

$$= 16\sqrt{5} \text{ பவு. எடை.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஒரு துகளின்மீது ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த திசைகளில் செயற்படும் இரு சமமான விசைகளின் தொகுபயனின் இருமடி அவ் விசைகளின் பெருக்கற் பலனைப்போல் மூன்று மடங்காகும். அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

இரு விசைகளுள் ஒன்றை F_1 எனவும் அவற்றின் தொகுபயனை F என்றும், விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ எனவும் கொள்வோமாயின்,

$$F^2 = 3F_1^2$$

ஆனல் சமன் 12·1-ன்படி

$$F^2 = 3F_1^2 = 2F_1^2\,(1+\cos\theta)$$

அல்லது $3 = 2\,(1+\cos\theta)$

$$\therefore \cos\theta = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

மாதிரிக் கணக்கு 3. ஒரே கிடைக்கோட்டில் 10 அடி தொலைவிலுள்ள இருபுள்ளிகளில் இணைக்கப்பட்ட 6 அடி, 8 அடி நீளங்கள் கொண்ட இரு கயிறுகளால் 150 பவு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கயிறுகளின் இழுவிசைகளைக் கணக்கிடுக.

படம் 12·17-ல் A,B ஆகியவை ஒரே கிடைக்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள். AC, 6 அடி கயிற்றையும் CD 8 அடி கயிற்றையும் குறிக்கின்றன.

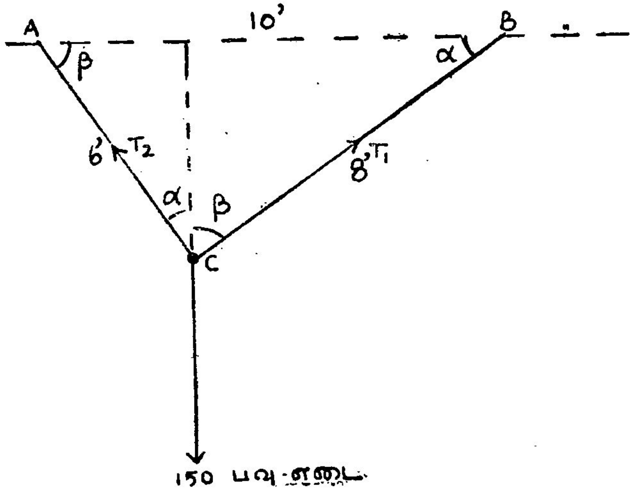
BC-ல் இழுவிசை T_1 எனவும் CA-ல் இழுவிசை T_2 எனவும் $\widehat{ABC} = \alpha$ எனவும், $\widehat{BAC} = \beta$ எனவும் கொள்வோம்.

ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 10 அடி 8 அடி, 6 அடி ஆதலால் அது ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும் $\widehat{AC\beta} = 90^\circ$ ஆகும்.

$$\therefore \widehat{BCE} = \beta \qquad \widehat{ACE} = \alpha$$

$$\widehat{BCD} = (180 - \beta) \qquad \widehat{ACD} = (180 - \alpha)$$

C-ல் செயற்பட்டு சமநிலையில் இருக்கும் T_1, T_2, w (= 150 பவு. எடை) ஆகிய விசைகளுக்கு லாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்து வோமாயின்,



படம் 12·17.

$$\frac{T_1}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{T_2}{\sin \widehat{BCD}} = \frac{W}{\sin 90^\circ}$$

அல்லது $\dfrac{T_1}{\sin \alpha} = \dfrac{T_2}{\sin \beta} = W$

ஆனால், $\sin \alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$\sin \beta = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \quad T_1 = W \sin \alpha$

$= 150 \times \dfrac{3}{5}$

அதாவது $T_1 = 90$ பவு. எடை.

$T_2 = W \sin \beta$

$= 150 \times \dfrac{4}{5}$

அதாவது $T_2 = 120$ பவு. எடை.

6 அடிகயிற்றின் இழுவிசை = 120 பவு. எடை.
8 அடிகயிற்றின் இழுவிசை = 150 பவு. எடை.

இணைவிசைகள் (Parallel forces)

விசைவெக்டர்கள் இணையாக இருப்பின், இவ் விசைகள் இணை விசைகள் எனப்படும் (படம் 12·18). அந்த வெக்டர்கள் ஒரே

(a) (b)

படம் 12·18

திசையை நோக்குமாயின், அவை ஒருபோக்கு இணைவிசைகள் (Like parallel forces) எனப்படும். (படம் 12·18a); எதிர்த் திசைகளை நோக்குவோமாயின், எதிர் போக்கு இணைகள் (unlike parallel forces) எனப்படும்.

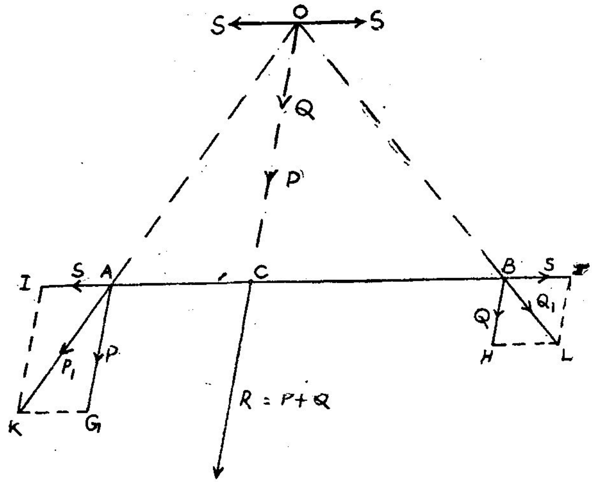
ஒரு போக்கு இணைவிசைகளின் தொகுபயன்: ஒரு திண் பொருளில் A,B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் P, Q என்ற இணை விசைகளைக் கருதுவோம், (படம் 12·19); அவை முறையே $\vec{AG}$, $\vec{BH}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிப்பிடப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

அவற்றின் தொகுபயனைப் பின்வருமாறு காணலாம்: விசைகள் திண்பொருளில் செயற்படுவதால் பொருளில் இருசமமான எதிர் விசைகளைச் சேர்ப்பதன்மூலம் பொருளின் நிலை பாதிக்கப்படாது. அவ் விசைகளுள் (S,S) ஒன்றை A-ல் AI என்ற திசையிலும் மற்றொன்றை B-ல் BJ என்ற திசையிலும் சேர்ப்போம். இணைகர விதிப்படி A-ல் செயற்படும் P,S என்ற விசைகள் AK என்ற திசையில் P_1 என்ற தொகுபயனையும், B-ல் செயற்படும் Q, S என்ற விசைகள் BL என்ற திசையில் Q_1 என்ற் தொகு பயனையும் கொடுக்கும்.

KA, LB ஆகிய கோடுகளை நீட்டிவிட்டால் அவை O என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். O-விருந்து AB-ஐC -ல் வெட்டுமாறு P,Q ஆகியவற்றின் திசைகளுக்கு இணையாக OC என்ற கோட்டை வரையவும்.

விசைகளின் கடத்தீட்டியல்புக் கோட்பாட்டின்படி P_1,Q_1 ஆகியவற்றின் செயற்படு புள்ளிகளை (முறையே A,B) O-க்கு மாற்றலாம்.

இனி O-ல் செயற்படும் விசைகளைக் கவனிப்போம், OA என்ற திசையில் செயற்படும் P_1 என்ற விசையை AB-க்கு இணையாகவும் OC வழியேயும் முறையே S, P என்ற இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப்



படம் 12·19

பிரிக்கமுடியும். அவ்வாறே OB என்ற திசையில் செயற்படும் Q_1 என்ற விசையை AB-க்கு இணையாகவும் OC வழியேயும் முறையே S,Q என்ற இரு ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கமுடியும்.

AB-க்கு இணையாகச் செயற்படும் S,S என்ற இரு ஆக்கக்கூறுகளும் எதிர்த்திசைகளில் செயற்படுவதால், அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, அவற்றைப் பொருளிலிருந்து நீக்கிவிடலாம். ஆகவே, பொருளில் எஞ்சியிருக்கும் விசைகள் OC வழியே செயற்படும் P,Q என்ற ஆக்கக் கூறுகளே; அதாவது நாம் எடுத்துக் கொண்ட விசைகளேயாகும். அவையிரண்டும் ஒரே திசையில் செயற்படுவதால் அவற்றின் தொகுபயன் (R=) P+Q ஆகும். இப்பொழுது R-ன் செயற்படு புள்ளியை O-விருந்து C என்ற புள்ளிக்கு மாற்றலாம். C-ன் நிலையைப் பின்வருமாறு மதிப்பிடலாம்.

OAC, AIG என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{AC}{OC} = \frac{IG}{AG} = \frac{S}{P} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (i)$$

OBC, BMK என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{CB}{OC} = \frac{KM}{BK} = \frac{S}{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (ii)$$

எனவே, சமன் (i)-ஐ (ii)-ஆல் வகுத்தால்

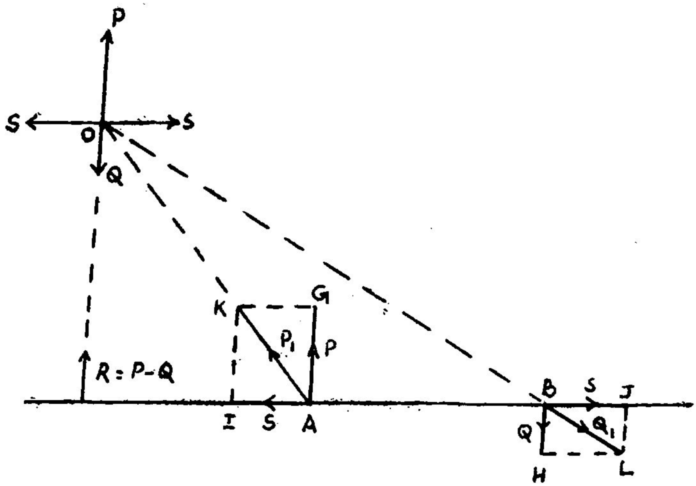
$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

அல்லது $P \times AC = Q \times CB$. ... ... 12·9

அதாவது C என்ற புள்ளி AB-ஐ P,Q ஆகியவற்றின் எதிர் விகிதத்தில் அகவியலாகப் பிரிக்கிறது.

எனவே A,B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் P, Q என்ற ஒருபோக்கு இணைவிசைகளின் தொகுபயன் (P+Q) ஆகும்; அது AB-ஐ P,Q ஆகியவற்றின் எதிர் விகிதத்தில் அகவியலாகப் பிரிக்கும் C என்ற புள்ளி வழியே செயற்படுகிறது.

எதிர்போக்கு இணைவிசைகளின் தொகுபயன்: ஒரு திண் பொருளில் A,B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் P,Q என்ற இரு எதிர்போக்கு இணை விசைகளைக் கருதுவோம். (படம் 12-20).



படம் 12·20

அவை முறையே $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிப்பிடப்படுவதாகக் கொள்வோம். அவற்றின் தொகுபயனைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

திண்பொருளில் S, S என்ற இரு சமமான எதிர் விசைகளுள் ஒன்றை A-ல் AI என்ற திசையிலும் மற்றொன்றை B-ல் BJ என்ற திசையிலும் சேர்ப்பதாகக் கொள்வோம். இணைகர விதிப்படி A-ல் செயற்படும் P, S என்ற இருவிசைகள் AK என்ற திசையில் P_1 என்ற

தொகுபயனையும், B-ல் செயற்படும் Q, S என்ற விசைகள் BL என்ற திசையில் Q_1 என்ற தொகுபயனையும் கொடுக்கும். AK, LB என்ற திசைகள் O என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், O-விருந்து AB-ஐ C-ல் வெட்டுமாறு P, Q ஆகியவற்றின் திசைகளுக்கு இணையாக OC என்ற கோட்டை வரையவும். விசைகளின் கடத்தீட்டியல்புக் கோட்பாட்டின்படி P_1, Q_1 ஆகியவற்றின் செயற்படு புள்ளிகளை O-க்கு மாற்றலாம். O-ல் P_1-ஐ AB-க்கு இணையாகவும் CO திசையிலும் முறையே S, P என்ற ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம், அவ்வாறே Q_1-ஐ AB-க்கு இணையாகவும் OC திசையிலும் முறையே S, Q என்ற ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

AB-க்கு இணையாகச் செயற்படும் S, S என்ற இரு ஆக்கக்கூறுகளும் எதிர்த்திசைகளில் செயற்படுவதால் அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, அவற்றைப் பொருளிலிருந்து நீக்கிவிடலாம். பொருளில் எஞ்சியிருக்கும் விசைகள் O-ல் எதிர்த்திசைகளில் செயற்படும் P, Q என்ற விசைகளேயாகும். அவற்றின் தொகுபயன் (P=) P—Q ஆகும். இப்பொழுது R-ன் செயற்படு புள்ளியை O-விருந்து C-க்கு மாற்றலாம். C-ன் நிலையைப் பின்வருமாறு மதிப்பிடலாம்.

ACO, AIK என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{AC}{CO} = \frac{AI}{IK} = \frac{P}{S} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

BCO, LHB என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில்

$$\frac{BC}{CO} = \frac{LH}{BH} = \frac{S}{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

சமன் (i)-ஐ (ii)-ஆல் வகுக்க

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$$

அல்லது $P \times AC = Q \times BC \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}10$

அதாவது C என்ற புள்ளி AB-ஐ P, Q ஆகியவற்றின் எதிர் விகிதத்தில் புறவியலாகப் பிரிக்கிறது.

எனவே, பொருளில் A, B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் P, Q என்ற எதிர்போக்கு இணைவிசைகளின் தொகுபயன் P—Q ஆகும்; அது AB-ஐ P,Q ஆகியவற்றின் எதிர் விகிதத்தில் புறவியலாகப் பிரிக்கும் C என்ற புள்ளிவழியாகச் செயற்படும். C என்ற புள்ளி பெரிய விசையின் செயற்படு புள்ளிக்கு அருகில் இருக்கும்.

சமன்பாடு 12·10-ல்

$$P \times AC = Q\,(CA + AB) \text{ (படம் 12·20)}$$

அல்லது $(P - Q)\ AC = Q.\ AB$

அல்லது $$AC = \frac{Q.\ AB}{P-Q}$$

A,B புள்ளிகளில் செயற்படும் இரு எதிர்போக்கு இணை விசைகளும் சமமாக இருப்பின் $P - Q = O$

எனவே $AC = \infty$ (முடிவிலி)

மேலும் அவற்றின் தொகுபயன் $= P - Q = O$ ஆகும்.

எனவே, இரு சமமான எதிர்போக்கு இணை விசைகளின் தொகுபயனைக் காணமுடியாது. அத்தகைய இருசமமான எதிர்போக்கு இணை விசைகள் இரட்டை (couple) என அழைக்கப்படும்.

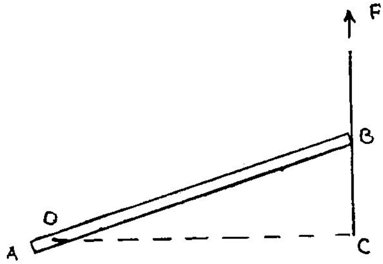
பல ஒருதள இணைவிசைகளின் தொகுபயன்: ஒரு பொருளின்மீது பல ஒருதள இணைவிசைகள் செயற்படுமாயின், அவற்றின் தொகுபயனைப் பின்வருமாறு காணலாம். முதலில் இரு இணை விசைகளின் (அவை எத்தகைய இணை விசைகளாயினும்) தொகுபயனைக் காணவேண்டும். அடுத்து இத் தொகுபயன், மூன்ருவது இணைவிசை ஒன்று ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் காணவேண்டும். இவ்வாருக, ஒவ்வொரு முறையும் கிடைக்கும் தொகுபயன், மற்ருெரு இணைவிசை ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் கண்டால், இறுதியில் ஓர் இணைவிசையும் எஞ்சியுள்ள மற்ற இணை விசைகளின் தொகுபயனும் ஆக இரு இணைவிசைகளைப் பெறுவோம். இவ்விரு இணைவிசைகளும் ஒருபோக்கு இணை விசைகளாகவோ அல்லது மாறுபட்ட மதிப்புகளையுடைய எதிர்போக்கு இணைவிசைகளாகவோ இருப்பின், அவற்றின் தொகுபயனுக ஒற்றை விசை ஒன்றைப் பெறமுடியும். மாருக, அவ்விரு இணைவிசைகளும் சமமான எதிர்போக்கு இணைவிசைகளாக அமையுமாயின் ஒரு இரட்டையைப் பெறுவோம். எனவே, பொதுவாகக் கூறுமிடத்து ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் பல இணைவிசைகளின் தொகுபயன் ஒற்றை விசையாகவோ அல்லது இரட்டையாகவோ அமையும்.

திருப்புதிறன் (Moment): ஒரு பொருளின்மீது ஒரு விசை செயற்படும்போது பொதுவாக அப்பொருள் அவ் விசையின் திசையில் நகரும் என்று எதிர் பார்க்கலாம். ஆனுல், அப் பொருள் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிச் சுழலக்கூடியதாகவோ அல்லது அதன்மீது இரு சமமான எதிர்போக்கு இணைவிசைகள் செயற்பட்டாலோ, அப் பொருளில் ஒரு சுழற்சி இயக்கம் ஏற்படும்.

ஒரு புள்ளியைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாய் அமைந்த ஒரு பொருளின் மீது ஒரு விசை செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். விசையின் திசை குறிப்பிட்ட புள்ளிவழியே செல்லாதிருக்குமாயின், அவ் விசை அப் பொருளை அப் புள்ளியைப்பற்றிச் சுழலச்செய்யும். ஒரு பொருளில்

ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய சுழற்சி இயக்கத்தை விளைவிக்கக்கூடிய விசையின் இத்தகைய திறமையை விசையின் அப் புள்ளியைப்பற்றிய திருப்புதிறன் என அழைக்கிறோம். ஒரு விசையின் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புதிறன், அவ் விசை குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து விசைக் கோட்டிற்குள்ள நேர்குத்துத் தொலைவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனால் அளவிடப்படுகிறது.

படம் 12·21-ல் F என்ற விசையின் O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன் F×OC.



படம் 12·21

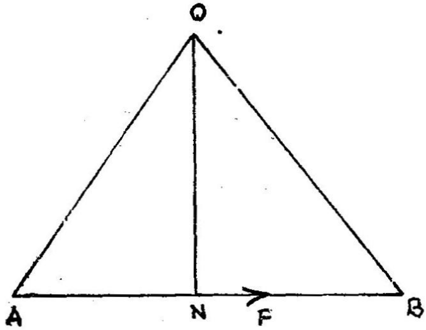
ஒரு விசை ஒரு பொருளைக் கடிகாரத் திசையில், அதாவது வலப் புறமாகச் சுழற்றினால், விசையின் திருப்புதிறனை வலந்திருப்பு திறன் (clockwise moment) என்றும், கடிகார எதிர்த் திசையில் அதாவது இடப்புறமாகச் சுழற்றினால், இடந்திருப்பு திறன் (anti clockwise moment) என்றும் அழைக்கிறோம். இடந்திருப்புதிறனை நேர்குறியுடையதாகவும், வலந்திருப்பு திறனை எதிர்குறியுடைய தாகவும் கொள்ளுதல் மரபு.

ஒரு விசையின் ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய திருப்புதிறன் அவ் விசை வெக்டரை அடிப்பக்கமாகவும் குறிப்பிட்ட புள்ளியை உச்சியாகவும் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவைப்போல் இருமடங்கு ஆகும்.

படம் 12·22-ல் $\vec{AB}$, விசை வெக்டரையும் O, குறிப்பிட்ட புள்ளி யையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது O-விருந்து AB-க்கு ON என்ற குத்துக்கோட்டை வரைவோமாயின், O ஐப் பற்றிய விசையின் திருப்புதிறன் AB × ON ஆகும். ஆனால், OAB என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ AB × ON.

எனவே, O-ஐப் பற்றிய விசையின் திருப்புதிறனின் எண் மதிப்பு விசை வெக்டரை அடிப்பக்கமாகவும் O-ஐ உச்சியாகவும் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைப் போல் இருமடங்காகும்.

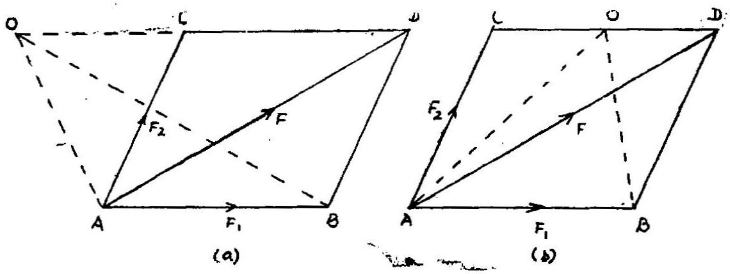
திருப்பு திறன்களின் தேற்றம் : இரு விசைகளின் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை (algebraic



படம் 12·22

sum) அவற்றின் தொகுபயனின் அப் புள்ளியைப்பற்றிய திருப்பு திறனுக்குச் சமமாகும்.

(i) ஒரு புள்ளியியல் சந்திக்கும் விசைகள் : A என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும் F_1, F_2 என்ற விசைகளை கருதுவோம் (படம் 12·23).



படம் 12·23

O-விருந்து F_2-ன் திசையை C என்ற புள்ளியில் வெட்டுமாறு F_1ன் திசைக்கு இணையாக OCD என்ற கோட்டை வரையவும். $\overrightarrow{AC}$-ஐ F_2-ன் வெக்டராகக் கருவோம். பின்னர், அதே அளவுத் திட்டத்தில் F_1-ன் வெக்டரான $\overrightarrow{AB}$-ஐ வரைந்து ABDC என்ற இணைகரத்தை அமைப்போமாயின், இணைகர விதிப்படி $\overrightarrow{AD}$ என்ற வெக்டர் அவற்றின் தொகுபயன் வெக்டராகும். O என்பது அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. அது, படம் 12·23a-ல் F_1. F_2 திசை

களுக்கு வெளியிலும் 12·23b-ல் அத் திசைகளுக்கு இடையிலும் உள்ளது. படம் 12·23a-ல்

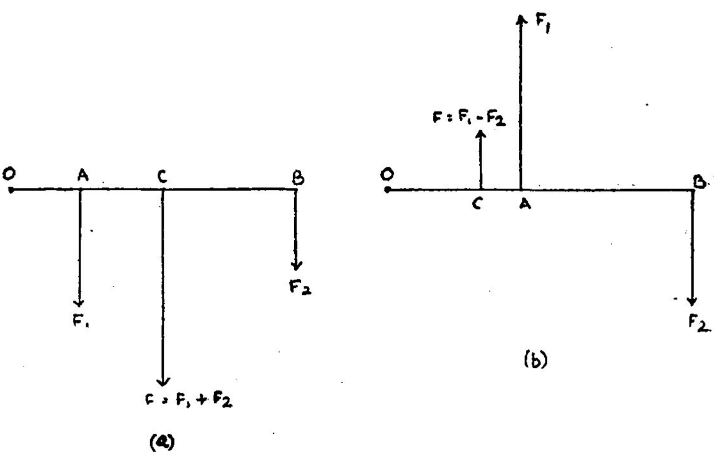
O-ஐப் பற்றிய F_1-ன் திருப்புதிறன் $= 2 \triangle AOB$
O-ஐப் பற்றிய F_2-ன் திருப்புதிறன் $= 2 \triangle AOC$
O-ஐப் பற்றிய F-ன் திருப்புதிறன் $= 2 \triangle AOD$

இப்பொழுது $\triangle AOB = \triangle ADB = \triangle ACD$

இனி, O-ஐப் பற்றிய F_1, F_2 விசைகளின் திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை $= 2 \triangle AOB + 2 \triangle AOC$
$= 2 \triangle ACD + 2 \triangle AOC$
$= 2 \triangle AOD$
= O-ஐப் பற்றின் F-ன் திருப்புதிறன்

படம் 12·23b-ல் O-ஐப் பற்றிய F_1, F_2 ஆகியவற்றின் திருப்பு திறன்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் போக்காக இருப்பதால், அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை $= 2 \triangle AOB - 2 \triangle AOC$
$= 2 \triangle ACD - 2 \triangle AOC$
$= 2 \triangle AOD$
= O ஐப் பற்றின் F-ன் திருப்புதிறன்

(ii) இணை விசைகள் : F_1, F_2 என்ற இரு இணை விசைகளையும் அவற்றின் தளத்திலுள்ள O என்ற புள்ளியையும் கருதுவோம் (படம் 12·24). O-விருந்து F_1, F_2 விசைகளின் திசைகளை முறையே



படம் 12·24,

A,B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு அத் திசைகளுக்கு ஒரு குத்துக்கோடு வரையவும். படம் 12·24-a இரு ஒருபோக்கு இணை

விசைகளையும் படம் 12·24 b இரு எதிர்போக்கு இணைவிசைகளையும் குறிக்கின்றன. F_1, F_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் (F) C என்ற புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். எனவே,

$$F_1 \times AC = F_2 \times BC$$

படம் 12·24a-ல்

O-ஐப் பற்றிய F_1, F_2 ஆகியவற்றின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை $= F_1 \times OA + F_2 \times OB$

$$= F_1 (OC - AC) + F_2 (OC + CB)$$
$$= (F_1 + F_2)\ OC + F_2 \times OC - F_1 \times AC$$
$$= (F_1 + F_2) OC\ [\therefore F_2 \times OC = F_1 = AC]$$
$$= F \times OC$$

= O-ஐப் பற்றிய F-ன் திருப்புதிறன்

படம் 12.24b-ல் O-ஐப் பற்றிய F_1-ன் திருப்புதிறன் இடந்திருப்பு திறன் (நேர்குறியுடையது); F_2-ன் திருப்புதிறன் வலந்திருப்பு திறன் (எதிர்குறியுடையது). எனவே, அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை

$$= F_1 \times OA - F_2 \times OB$$
$$= F_1 (OC + CA) - F_2 (OC + CB)$$
$$= (F_1 - F_2)\ OC + F_1 \times CA - F_2 \times CB$$
$$= (F_1 - F_2)\ OC\ [\therefore F_1 \times AC = F_2 \times CB]$$
$$= F \times OC$$

= O-ஐப் பற்றிய F-ன் திருப்பு திறன்

எந்தப் புள்ளியைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காண்கிறோமோ அப் புள்ளியின் வழியே விசைகளின் தொகுபயன் செல்லுமாயின், அப் புள்ளியைப்பற்றிய தொகுபயனின் திருப்புதிறன் சுழியாகும். எனவே, அப் புள்ளியைப்பற்றிய குறிப்பிட்ட விசைகளின் திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையும் சுழியாகும். இவ்வாறாக இருவிசைகளின் தொகுபயனின் திசையிலுள்ள ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய அவ் விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்.

மறுதலையாக இருவிசைகளின் ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகுமாயின், அவ் விசைகளின் தொகுபயன் அப் புள்ளி வழியே செல்லும்; அல்லது சுழியாக அமைந்து அவ் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும். மேற்கூறப்பட்ட உண்மைகள், விசைகளின் எண்ணிக்கை எத்தனையானாலும் பொருந்தும்.

திருப்புதிறன்களின் பொதுத் தேற்றம் :

ஒரு திண் பொருள்மீது செயற்படும் ஒருதள விசைகளின் தொகுதி ஒன்று ஒரு தொகுபயனைக் கொண்டிருக்குமாயின், அவ் விசைகளின் தளத்தில் அமைந்த ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன் களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை, அப் புள்ளியைப் பற்றிய தொகுபய னின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

F_1, F_2, F_3, F_4 என்பவை ஒரு தள விசைகளையும் அவற்றின் தளத்தில் அமைந்த O என்ற புள்ளியையும் கருதுவோம். F_1, F_2 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் R_1 எனவும், R_1, F_3 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் R_2 எனவும், R_2 F_4 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் R_3 எனவும் கொள்வோம்.

O-ஐப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்

R_1-ன் திருப்புதிறன் = F_1-ன் திருப்புதிறன் + F_2-ன் திருப்புதிறன்

R_2-ன் திருப்புதிறன் = R_1-ன் திருப்புதிறன் + F_3-ன் திருப்புதிறன்

= F_1-ன் திருப்புதிறன் + F_2-ன் திருப்புதிறன் + F_3-ன் திருப்புதிறன்.

R_3-ன் திருப்புதிறன் = R_2-ன் திருப்புதிறன் + F_4-ன் திருப்புதிறன்

= F_1-ன் திருப்புதிறன் + F_2-ன் திருப்புதிறன் + F_3-ன்திருப்புதிறன் + F_4-ன்திருப்புதிறன்

R_3 என்பது F_1, F_2, F_3 F_4 ஆகியவற்றின் தொகுபயன் ஆதலால் ஒருதள விசைகளின் தொகுபயனின் O-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன் =

அவ் விசைகளின் O-ஐப் பற்றிய திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை.

ஒரு பொருள் ஒரு புள்ளியைப் பற்றியல்லாது அதில் உள்ள அச்சைப்பற்றிச் சுழலுவதாக அமையுமாயின், ஒரு விசையின் அந்த அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன், அந்த விசை, அந்த அச்சிலிருந்து விசைக்கோட்டிற்குள்ள நேர்குத்துத் தொலைவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுல் அளவிடப்படும். ஒரு விசையின் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புதிறனைப்பற்றிக் கூறப்பட்ட எல்லா உண்மைகளும் ஓர் அச்சைப் பற்றிய திருப்பு திறனுக்கும் பொருந்தும்.

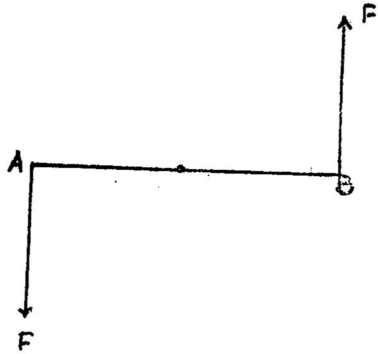
இரட்டைகள்

இரண்டு சமமான எதிர்போக்கு இணைவிசைகளின் தொகுப்பு ஒரு இரட்டை எனப்படும்.

இரண்டு சமமான எதிர்போக்கு இணைவிசைகளின் தொகு பயனைக் காணமுடியாது என்றும், அத்தகைய விசைகள் இரட்டை எனப்படும் என்றும் முன்னர் கூறப்பட்டது. இரட்டைகளைப் பற்றி இங்கு விரிவாகக் காண்போம்.

படம் 12·25-ல் F, F என்ற இருவிசைகள் ஓர் இரட்டையை அமைக்கின்றன. இருவிசைக் கோடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள நேர்குத்துக் தொலைவு (AB) இரட்டையின் புயம் (arm) எனப்படும்.

இரட்டையை அமைக்கும் விசைகளுள் ஒன்று, இரட்டையின் புயம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் இரட்டையின் திருப்புதிறன்



படம் 12·25

எனப்படும். அதாவது படம் 12·25-ல் இரட்டையின் திருப்புதிறன் $= F \times AB$.

தேற்றம் : ஒரு இரட்டையை அமைக்கும் இரு விசைகளின் திருப்பு திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை இரட்டையின் திருப்புதிறனுக்கு சமாகும்.

படம் 12·26-ல் F, F என்ற விசைகள் ஓர் இரட்டையின் ஆக்கக் கூறுகளாகும். O என்பது அவற்றின் தளத்தில் அமைந்த ஒரு புள்ளி. O-விருந்து அவ் விசைகளின் திசைகளுக்கு நேர்குத்தாக அவற்றை A,B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு OAB என்ற நேர் கோட்டை வரையவும். O என்ற புள்ளி படம் 12·26a-ல் AB-க்கு வெளியேயும் படம் 12·26b-ல் AB-க்கு உள்ளேயும் இருக்கிறது.

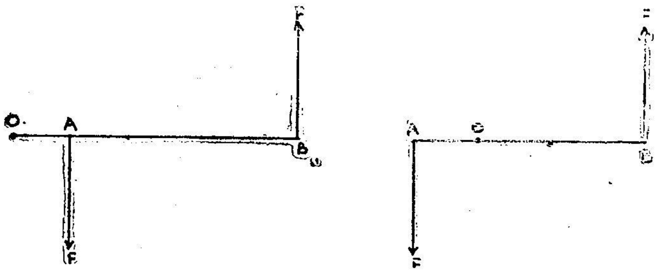
படம் 12·26a-ல் O-ஐப் பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்
A-ல் செயற்படும் F-ன் திருப்புதிறன் $= -F \times OA$
B-ல் செயற்படும் F-ன் திருப்புதிறன் $= F \times OB$

எனவே, இரட்டையை அமைக்கும் விசைகளின் திருப்புதிறன் களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை $= F(OB - OA)$
$= F \times AB$
= இரட்டையின் திருப்புதிறன்.

படம் 12.26 b-ல் இருவிசைகளும் ஒரே போக்கான (இடந் திருப்புதிறன் கொண்டிருப்பதால் அத் திருப்புதிறன்களின்) குறியியல் கூட்டுத் தொகை

$$= F \times AO + F \times OB$$
$$= F \times AB$$
= இரட்டையின் திருப்புதிறன்.

இரட்டையின் திருப்புதிறனுக்கான சமன்பாட்டில் F, AB ஆகியவை மாறிலிகளாதலால், இரட்டையின் திருப்புதிறனும் மாறிலி



(a) (b)

படம் 12·26

யாகும். அது இரட்டையின் தளத்தில் O-ன் நிலையைப் பொறுத்து மாறாது.

தேற்றம்: ஒரு திண்பொருளின்மீது ஒரே தளத்தில் செயற்படும் இரு இரட்டைகளின் திருப்பு திறன்கள் சமமாகவும் எதிராகவும் இருப்பின் அந்த இரட்டைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

(P,P), (Q,Q) என்ற விசைகளால் அமைக்கப்படும் இரு இரட்டைகளைக் கருதுவோம். அவற்றின் புயங்கள் முறையே p, q எனக் கொள்வோம்.

(i) விசைகள் ஒன்றையொன்று சந்திக்குமாறு அமைந்த இரட்டைகள் (படம் 12·27)

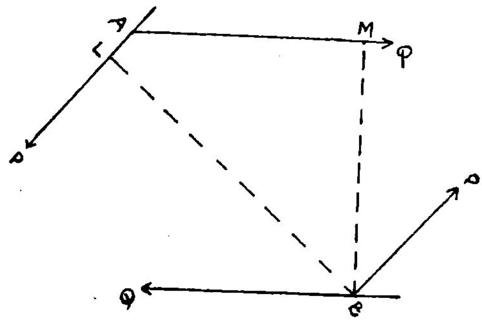
(P,P) இரட்டையின் ஒரு விசையும் (Q,Q) இரட்டையின் ஒரு விசையும் A என்ற புள்ளியிலும், இரட்டைகளின் மற்ற விசைகள் B என்ற புள்ளியிலும் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். B-லிருந்து, A-ல் செயற்படும் P, Q என்ற விசைகளுக்கு முறையே BL, BM என்ற குத்துக் கோடுகளை வரைவோமாயின், $BL = p$, $BM = q$ ஆகும்.

இரட்டைகளின் திருப்புதிறன்கள் சமமானதாலும் அவை எதிர்த்திசைகளில் செயற்படுவதாலும்

$$P \times p = - \ Q \times q$$

அதாவது $P \times BL = - Q \times BM$

அல்லது $P \times BL + \ Q \times BM = 0$



படம் 12·27

எனவே, A-ல் செயற்படும் P, Q என்ற இரு விசைகளின் B-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும். ஆகவே, அவற்றின் தொகுபயன் B வழியே செல்லும். அதாவது A-ல் சந்திக்கும் P,Q ஆகியவற்றின் தொகுபயன் AB திசையில் செயற்படும். இவ்வாறே A-லிருந்து, B-ல் செயற்படும் P,Q என்ற விசைகளுக்கு நேர்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து, அவற்றின் தொகு பயன் BA திசையில் செயற்படும் என நிறுவலாம். இவ்விரு தொகு பயன்களும் சமமாகவும் எதிர்த்திசைகளிலும் செயற்படுவதால், அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். அதாவது இரட்டைகளை அமைக்கும் விசைகளின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, இரட்டைகள் சம நிலையில் இருக்கும்.

(ii) இரட்டைகளின் விசைகள் யாவும் இணையானவையா யிருத்தல்: படம் 12-28ல் *(P, P)* இரட்டையின், புயம் AB, (Q,Q) இரட்டையின் புயம் CD ஆகும்.

இரட்டையின் திருப்புதிறன்கள் எண் மதிப்பில் சமமானவை யாதலால்,

$$P \times AB = Q \times CD \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

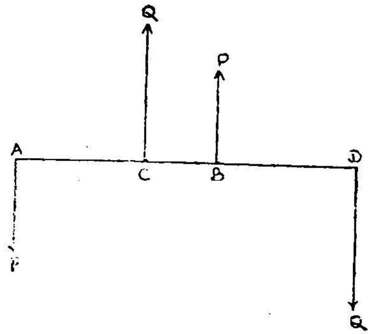
இனி C, B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் முறையே Q, P என்ற ஒருபோக்கு இணை விசைகளின் தொகுபயன் O-என்ற புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோமாயின்,

$$P \times BO = Q \times CD \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

சமன் (i) லிருந்து சமன் (ii)-ஐக் கழித்தால்

$$P(AB-BO) = Q(CD-CO)$$

அல்லது $P \times AO = Q \times DO$



படம் 12·28

எனவே, O என்ற புள்ளி வழியாக A,D புள்ளிகளில் செயற்படும் முறையே P,Q ஆகிய ஒரு போக்கு இணை விசைகளின் தொகுபயனும் செல்லும்.

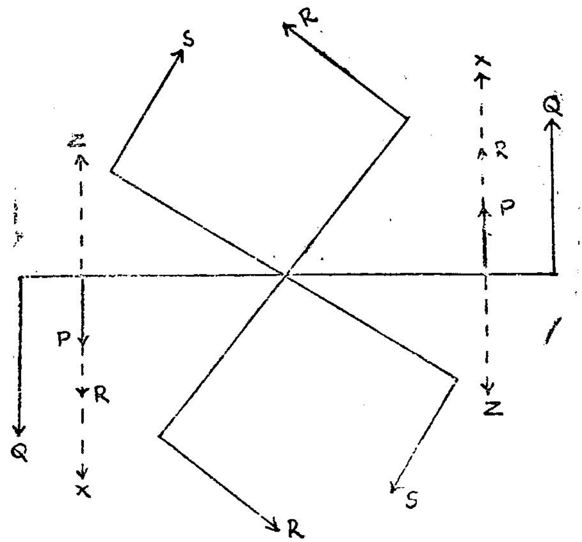
O வழியாகச் செல்லும் இருதொகுபயன்களும் சமமாகவும் எதிர்த்திசைகளிலும் செயற்படுவதால் அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். அதாவது இரட்டைகளை அமைக்கும் விசைகளின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, இரட்டைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

மேற்கூறப்பட்ட இரட்டைகளுள் ஒன்றை அமைக்கும் விசைகளின் திசையை நேர் எதிராக மாற்றினுல் இரு இரட்டைகளும் எண் மதிப்பு, திசை ஆகிய இரண்டிலும் சமமான திருப்புதிறன்களைக் கொண்டிருக்கும். அதாவது $P \times p = Q \times q$ அத்தகைய இரட்டைகள் இணைமாற்று இரட்டைகள் (equivalent couples) எனப்படும். ஒரு பொருளின்மீது சரிசமமான இரட்டைகள் இரண்டு செயற்படுமாயின், அவற்றின் தொகுபயன் திருப்புதிறன் அவற்றுள் ஒன்றின் திருப்புதிறனைப்போல் இருமடங்காகும்.

தேற்றம் ; ஒரு திண் பொருளின்மீது ஒரே தளத்தில் செயற்படும் பல இரட்டைகளின் தொகுபயனுனது அந்த இரட்டைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமான திருப்புதிறனைக் கொண்ட மற்றெரு இரட்டையாகும்.

இரட்டைகளை அமைக்கும் விசைகள் (PP), (QQ), (RR), (SS) ... எனவும் அவற்றின் புயங்கள் முறையே p, q, r, s எனவும்

கொள்வோம். (படம் 12·29). P,P விசைகள் A,B என்ற புள்ளிகளில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது (QQ), (RR), (SS) என்ற இரட்டைகளை (PP) இரட்டையின் ஆக்கக்கூறுகளின் திசை



படம் 12·29

களோடு ஒன்றிய திசைகளில் AB-ஐப் புயமாகக் கொண்ட (XX), (YY), (ZZ) என்ற இணைமாற்று இரட்டைகளால் பதிலீடு செய்வதாகக் கொள்வோம்.

XX இரட்டை QQ இரட்டையின் இணைமாற்று இரட்டையாதலால் $X. AB = Q.q$.

$$\therefore \quad X = Q.\frac{p}{q} \; [\because AB = \quad]$$

இவ்வாறே (RR), (SS) ... இரட்டைகளை AB-ஐப் புயமாகக் கொண்ட (YY) (ZZ) என்ற இணைமாற்று இரட்டைகளால் பதிலீடு செய்வோமாயின், $Y \cdot p = R.r$

அல்லது $$Y = R\cdot\frac{r}{p}$$

$$Z\cdot p = S\cdot s$$

அல்லது $$Z = S\cdot\frac{s}{p}$$

எனவே (PP), (QQ), (RR), (SS) ... என்ற இரட்டைகள் ஒரே புயத்தை(p)க் கொண்ட முறையே (P,P), $\left(Q\frac{q}{p}, Q\frac{q}{p}\right)$ $\left(R\frac{r}{p}, R\frac{r}{p}\right)$ $\left(S\frac{s}{p}, S\frac{s}{p}\right)$ என்ற இணைமாற்று இரட்டைகளுக்குச் சமமாகும். அவற்றின் தொகுபயன் A,B புள்ளிகளில் செயற்படும் F, F என்ற விசைகளைக் கொண்ட ஓர் இரட்டை என்றால்,

$$F = P + Q.\frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + S\frac{s}{p} + \ldots\ldots$$

எனவே, தொகுபயன் திருப்புதிறன் =

$$F \times AB = F \times p = \left(P + Q\cdot\frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + S\frac{s}{p} + \ldots\right)p$$

$$= P\cdot p + Q\cdot q + R\cdot r + S\cdot s + \ldots\ldots$$

= எடுத்துக்கொண்ட இரட்டைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை.

தேற்றம் : ஒரு திண் பொருளின் மீது ஒரே தளத்தில் செயற்படும் ஓர் இரட்டை, ஓர் ஒற்றைவிசை ஆகியவற்றின் தொகுபயன் அந்த ஒற்றை விசையின் திசைக்கு இணையான திசையில் செயற்படும் அதே ஒற்றை விசையாகும்.

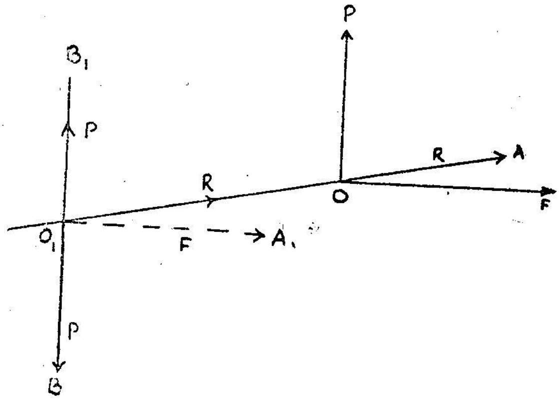
இரட்டையை அமைக்கும் விசைகள் P,P என்றும், ஒற்றைவிசை F என்றும் கொள்வோம்.

1. ஒற்றை விசை இரட்டையின் ஆக்கக் கூறுகளுக்கு இணையற்று இருத்தல். (படம் 12·29)

ஒற்றைவிசை இரட்டையின் விசைகளுள் ஒன்றை O என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். O-ல் செயற்படும் F, P ஆகியவற்றின் தொகுபயனை (R)க் காணலாம். அது OA என்ற திசையில் செயற்படுவதாகக்கொள்வோம். AO-ஐ நீட்டிவிட்ட கோடு இரட்டையின் மற்றொரு விசையை O_1 என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். விசைகளின் கடத்தீட்டியல்புப்படி R-ன் செயற்படு புள்ளியை O_1-க்கு மாற்றலாம். இப்பொழுது O_1-ல் செயற்படும் R-ஐ, O_1, B_1, O_1 A_1 என்ற திசைகளில் P, F என்ற அதன் ஆக்கக்கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். இனி, O_1-ல் செயற்படும் விசைகளைக் கருதுவோமாயின், O_1B_1, OB திசைகளில் செயற்படும் P,P என்ற விசைகளின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, எஞ்சியிருக்கும் விசை O_1A_1 வழியாக அதாவது ஒற்றை விசையின் திசைக்கு இணையாகச் செயற்படும் F என்ற அதே ஒற்றை விசை மட்டுமே.

2. ஒற்றைவிசை இரட்டையின் ஆக்கக் கூறுகளுக்கு இணையா யிருத்தல் (படம் 12·30).

இரட்டையின் விசைகள் இரண்டும் O, O_1 என்ற புள்ளிகளில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். OO_1 ஒற்றை விசையை O_2 என்ற



படம் 12·30

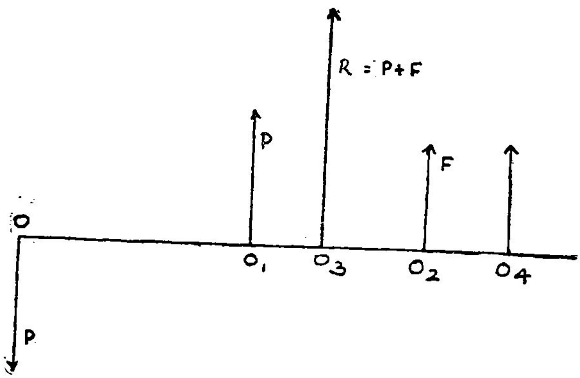
புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது O_1, O_2 என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் முறையே P,F ஆகிய ஒருபோக்கு இணை விசைகளின் தொகுபயன் (R) P+F ஆகும். இது O_1-க்கும் O_2-க்கும் இடையே O_3 என்ற ஒரு புள்ளியில் P,F ஆகியவற்றின் திசைக்கு இணையாகச் செயற்படும். இனி, இந்தத் தொகுபயன், O-ல் செயற்படும் இரட்டையின் மற்றொரு விசை P ஆகிய இரண்டும் எதிர் போக்கு இணைவிசைகளாதலால், அவையிரண்டின் தொகுபயன் R—P=P+F—P=F. அது OO_2-க்கு வெளியே O_3-க்கு அருகே O_4 என்ற புள்ளியில் R-ன் திசைக்கு இணையான திசையில் அதாவது F-ன் முதற் திசைக்கு இணையாகச் செயற்படும். எனவே, ஓர் இரட்டை, ஓர் ஒற்றைவிசையின் திசைக்கு இணையான திசையில் செயற்படும் அதே ஒற்றைவிசையாகும்.

தெரிவு: ஒரு திண்பொருளின்மீது செயற்படும் மூன்று விசைகளின் வெக்டர்களை ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்று முறையில் குறிக்கமுடியுமாயின் அவ் விசைகள் அம் முக்கோணத்தின் இருமடங்கு பரப்பளவு குறிக்கும் திருப்புதிறனைக்கொண்ட ஓர் இரட்டைக்குச் சமமாகும்.

பொருளின்மீது செயற்படும் P, Q, R என்ற விசைகளை ABC என்ற முக்கோணத்தின் முறையே AB, BC, CD என்ற பக்கங்களால்

வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்கமுடிவதாகக் கொள்வோம் (படம் 12·31).

இப்பொழுது A என்ற புள்ளியில் BC-க்கு இணையான AL, AM என்ற எதிர்த்திசைகளில் Q, Q என்ற விசைகளைச் சேர்ப்போமாயின், விசைகளின் முக்கோண விதிப்படி A-ல் AM வழியே செயற்படும் Q மற்றும் P, R ஆகிய விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்



படம் 12·31

அதாவது, அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே, பொருளின் மீது செயற்படும் எஞ்சியிருக்கும் விசைகள் AL, BC ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படும் Q, Q விசைகளே. இவையிரண்டும் சமமான எதிர்ப்போக்கு இணைவிசைகளாதலால், இரு இரட்டையை அமைக்கும் A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு இரட்டையின் புயமாகும்.

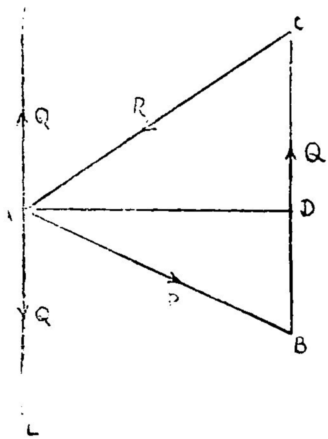
எனவே, இரட்டையின் திருப்புதிறன் $= Q \times AD$
$= BC \times AD$
$=$ ABC முக்கோணத்தின் பரப்பளவைப்போல் இரு மடங்கு.

இவ்வாறே ஒரு திண்பொருளின்மீது ஒரேதளத்தில் செயற்படும் பல விசைகளின் வெக்டர்களை ஒரு பல்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்கமுடியுமாயின், அவ்விசைகள், பல்கோணத்தின் இருமடங்கு பரப்பளவு குறிக்கும் திருப்புதிறனைக் கொண்ட ஓர் இரட்டையாகும் என நிறுவலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 10 அடி நீளமுள்ள எடைமிக்க சீரான தண்டு ஒன்று 5 அடி தொலைவிலுள்ள இரு முனைகளின்மீது கிடை

மட்டமாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு முனையிலிருந்து தொங்க விடப்படும் 3 பவு நிறை அல்லது மறுமுனையிலிருந்து தொங்க விடப்படும் 48 பவு நிறை தண்டினைச் சற்றே நொடிக்கச் செய்யும். தண்டின் எடையையும் அதன் மையத்திலிருந்து முனைகளின் தொலைவுகளையும் கணக்கிடுக.

படம் 12·32-ல் AB தண்டையும் K_1, K_2 முனைகளையும் குறிக்கின்றன. தண்டின் எடை W எனக் கொள்வோம்; அது தண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் செயற்படும். $K_1 G = x$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 12·32

$$\therefore AK_1 = AG - K_1G = 5 - x$$
$$K_2G = K_1K_2 - K_1G = 5 - x$$
$$K_2B = 5-(5-x) = x$$

A-ல் 3 பவு எடையைத் தொங்கவிடும்போது தண்டு சற்றே நொடிப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, $3 \times AK_1 = W \times K_1G$

அதாவது $3(5-x) = W \times X$

$\therefore \quad x(W+3) = 15 \quad \dots \dots \quad (i)$

B-ல் 48 பவு எடையைத் தொங்கவிடும்போது

$$48K_2B = W \times GK_2$$

அதாவது $x = W(5-x)$

$\therefore \quad x(48+W) = 5W \quad \dots \dots \quad (ii)$

$$\frac{(i)}{(ii)} = \frac{w+3}{48+W} = \frac{15}{5W} = \frac{3}{W}$$

$$\therefore \quad W^2+3W = 3W+144$$
$$W^2 = 144$$
$$W = 12 \text{ பவு.}$$

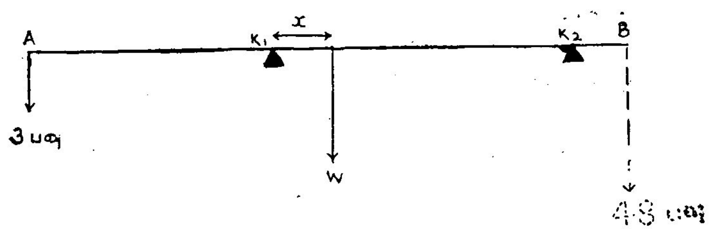
மேலும் சமன் (i) லிருந்து

$$x \times 15 = 15$$
$$x = 1 \text{ அடி.}$$

எனவே, தண்டின் எடை = 15 பவு. தண்டின் மையத்திலிருந்து முனைகளின் தொலைவுகள் 1 அடி, 4 அடி .

மாதிரிக் கணக்கு 2. புறக்கணிக்கத் தக்க எடையையுடைய ஒரு தண்டு 12 அங்குல இடைவெளியிலுள்ள இரு வில்தராசுகளி லிருந்து கிடைமட்டமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. வில்தராசு களுக்கு இரு பக்கத்திலும் 20 அங். இடைவெளியில் 3 பவு., 4 பவு. எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. எடைகளின் பின்வரும் நிலை களுக்கு வில்தராசுகளின் அளவீடுகளைக் கணக்கிடுக. (a) 3 பவு. எடை ஒரு வில்தராசிலிருந்து 5 அங். தொலைவில் உள்ளது. (b) எடைகள் அவற்றின் நிலைகளில் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப் படுகின்றன.

படம் 12·33-ல் S_1, S_2 வில்தராசுகளையும் AB தண்டையும் குறிக்கின்றன. தண்டு S_1, S_2 என்ற வில்தராசுகளிலிருந்து தொங்க



படம் 12·33

விடப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகள் முறையே C, D எனவும், எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகள் A, B எனவும் கொள்வோம்.

CD=12 அங்; AC=5 அங்; DB=3 அங்.

(a) வில்தராசுகளின் அளவீடுகள் S_1, S_2 எனக் கொள் வோம்.

C-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

இடந்திருப்புதிறன்கள் = வலந்திருப்புதிறன்கள்

$3 \times 5 + s_2 \times 12 = 4 \times 15$

$s_2 \times 12 = 45$

$s_2 = \frac{45}{12} = 3\frac{3}{4}$ பவு.

மேலும் $s_1 + s_2 = 7$

$\therefore \quad s_1 = 7 - 3\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$ பவு.

(b) C-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$4 \times 5 + s_2 \times 12 = 3 \times 15$$
$$12 s_2 = 25$$
$$s_2 = 2\frac{1}{12} \text{ பவு.}$$

மேலும், $s_1 + s_2 = 7$ பவு.

$$\therefore \quad s_1 = 7 - 2\frac{1}{12} = 4\frac{11}{12} \text{ பவு.}$$

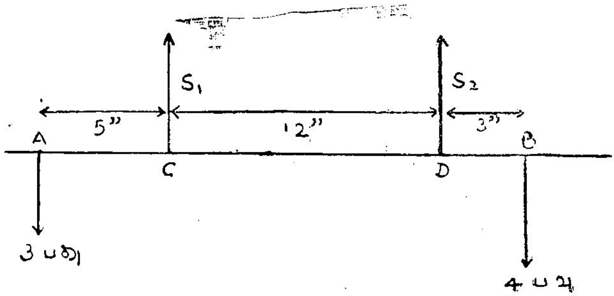
வில்தராசுகளின் அளவீடுகள்

a. $3\frac{1}{4}$ பவு ; $3\frac{3}{4}$ பவு.

b. $4\frac{11}{12}$ பவு ; $2\frac{1}{12}$ பவு.

மாதிரிக் கணக்கு 3. ABCD என்பது 1அடி பக்கமுடைய ஒரு சதுரம். 2,3,4,5 பவு எடைக்குச் சமமான விசைகள் முறையே, AB, BC,CD,DA வழியாகச் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகு பயனையும் அது AD-ஐ சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

தொகுபயன், AD-ஐ A-யிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள E என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம் (படம் 12.34). D-க்கு



படம் 12·34

இணையாகச் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் $Y = 5-3=2$ பவு. எடை. DA-க்கு நேர்குத்துத் திசையில் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன்,

$$X = 4 - 2 = 2 \text{ பவு. எடை.}$$

அவ்விரு தொகுபயன்களின் தொகுபயன்

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ பவு. எடை.}$$

R, DA-உடன் θ கோணத்தை அமைக்குமாயின்,

$$\tan\theta = \frac{X}{Y} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \qquad \theta = 45^\circ$$

விசைகளின் தொகுபயன் E வழியே செல்வதால் விசைகளின் E-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழி யாகும்.

எனவே $2 \times AE + 3 \times AB + 4 \times DE = 0$

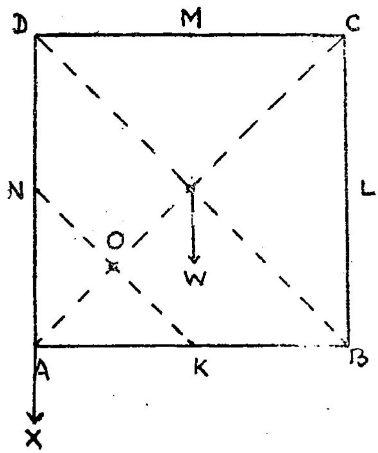
அதாவது $2 \times x + 3 \times 1 + 4(1-x) = 0$

அல்லது $-2x = -7$

அல்லது $x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ அடி.

எனவே, தொகுபயன் $2\sqrt{2}$ பவு. எடையாகும். அது AD-ஐ நீட்டி விட்ட கோட்டில் $3\frac{1}{2}$ அடி தொலைவில் உள்ள புள்ளிவழியே AD-க்கு 45° கோணத்தில் செயற்படுகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 4. சதுர வடிவ மேசை ஒன்று அதன் பக்கங் களின் நடுவில் அமைந்த நான்கு கால்களின்மீது நிற்கிறது. மேசை, கால்கள் ஆகியவற்றின் மொத்த எடை W என்ருல் மேசை சாயாமல் அதன் ஒரு மூலையில் வைக்கக்கூடிய பெரும எடை என்ன?



படம் 12·35

படம் 12·35-ல் ABCD மேசையையும் K, L, M, N, மேசைக் கால்களின் நிலைகளையும் குறிக்கின்றன. A என்ற மூலையில் எடை வைக்கப்படுவதாகவும் அதன் பெரும மதிப்பு X எனவும் கொள் வோம்.

மேசையின் மொத்த எடையும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் செயற்படுவதாகக் கொள்ளலாம். மேசையின் பக்கம் 'a' எனக் கொள்வோம். K, AB-ன் மையப்புள்ளியாதலாலும் NK, DB ஆகியவை இணைக்கோடுகளாதலாலும்

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AK}{KB} = 1$$

A-ன் மீது X என்ற பெரும எடையை வைக்கும்போது, மேசைச் சற்றே சமநிலையிலிருந்து N,K கால்களின் முனைகளைச் சேர்க்கும் கோட்டைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயிருக்கும். எனவே, NK-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறனைக் காணின்,

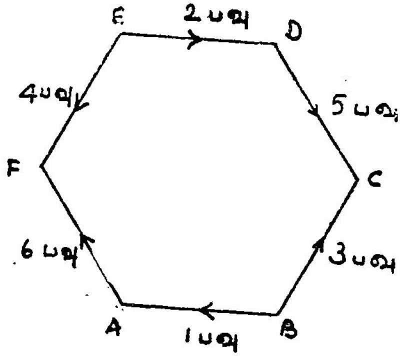
$$X \cdot AO = W \times GO$$

அல்லது $$X = W \times \frac{GO}{AO} = W$$

எனவே மேசை சாயாமல் A-ல் அதாவது மேசையின் ஒரு மூலையில் வைக்கக்கூடிய எடை மேசையின் எடைக்குச் சமமாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5. 1, 3, 5, 2, 4, 6 பவு. எடையுள்ள விசைகள் a என்ற பக்கத்தையுடைய ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் முறையே BA, BC, DC, ED, EF, AF பக்கங்களின் வழியே செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயன் a. $7\sqrt{3}/2$ அலகு திருப்புதிறனைக் கொண்ட ஓர் இரட்டை என நிறுவுக.

ஒரு தளத்தில் இரட்டையின் திருப்புதிறன் மாறுத மதிப்புடைய தாகையால் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகளைப்



படம் 12·36.

பற்றிய விசைகளின் சுழற்று விளைவுகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணின், அவை சமமாக இருக்கவேண்டும்,

படம் 12·36 விசைகளின் அமைப்பைக் காட்டுகிறது.

A-ஐப் பற்றிய சுழற்று விளைவுகளைக் காணின் அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$= 3 \times a \sin 60 - 5 \times 2 a \cos 30 - 2 \times 2 a \cos 30 + 4 \sin 60$$

$$= 3a \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \times 2a \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 2a \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a (3 - 10 - 4 + 4)$$

$$= - 7 \frac{\sqrt{3}}{2} . a$$

C-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை

$$= - 2 \times a \sin 60 + 4 \times 2a \cos 30 - 6 \times 2a \cos 30 - 1 \times \sin 60$$

$$= - 2a \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times 2a \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \times 2a \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a (- 2 + 8 - 12 - 1)$$

$$= - 7 \frac{\sqrt{3}}{2} . a$$

E-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$= - 6a \sin 60 - 1 \times 2a \cos 30 + 3 \times 2 a \cos 30 - 5a \times \sin 60$$

$$= - 6a \frac{\sqrt{3}}{2} - 2a \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times 2a \frac{\sqrt{3}}{2} - 5a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a (- 6 - 2 + 6 - 5)$$

$$= - 7 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

எனவே, A,C,E ஆகிய மூன்று புள்ளிகளைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களை குறியியல் கூட்டுத்தொகைகள் சமமமாயிருப்பதால், விசைகளின் தொகுபயன் இரட்டையாகும். அதன் வலந்திருப்புதிறன் $7 . \frac{\sqrt{3}}{2} . a$ ஆகும்.

ஒருதள விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்

இதுவரை ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளின் விளைவுகளைப்பற்றிப் பார்த்தோம். அவற்றைப்பற்றி இதுவரை நாம் அறிந்த

கருத்துகளைப் பயன்படுத்தி விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பெறலாம்.

ஒரு பொருளின்மீது ஒரு விசைச் செயற்படும்போது, அப் பொருளில் ஒரு நேர்கோட்டு இயக்கத்தையோ அல்லது சுழற்சி இயக்கத்தையோ விளைவிக்கிறது. ஆனால், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் செயற்படும்போது அத்தகைய விளைவுகள் ஏற்பட்டபோதினும் அவ் விசைகளின் தொகுபயனும் அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் சுழியாகும்போது, அப்பொருளில் எவ்வித இயக்கமும் ஏற்படாது. அதாவது அப் பொருள் எனவே அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும். இந்த உண்மைகளின் அடிப்படையில் விசைகளின் சமநிலைக்கான நிபந்தனைகளை இப்போது காண்போம்.

முதலாவதாக ஒரு பொருளின்மீது ஓர் ஒற்றைவிசை செயற்படும்போது அது சமநிலையில் இருக்க முடியாது. எனவே, பொருள் சமநிலையில் இருப்பதற்கு இரண்டு விசைகள் தேவை.

இருவிசைகளின் சமநிலை

1. இருவிசைகளும் சமமான எண்மதிப்பைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

2. இருவிசைகளும் ஒரு நேர்கோட்டில் எதிர்த்திசைகளில் செயற்பட வேண்டும்.

மூன்று விசைகளின் சமநிலை

1. அம் மூன்று விசைகளின் வெக்டர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்கப்படக் கூடியவையாயிருக்க வேண்டும்.

2. ஒவ்வொரு விசையும் மற்ற இருவிசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தின் சைனுக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்க வேண்டும்.

3. அம் மூன்று விசைகளும் ஒரே தளத்தில் அமையவேண்டும்.

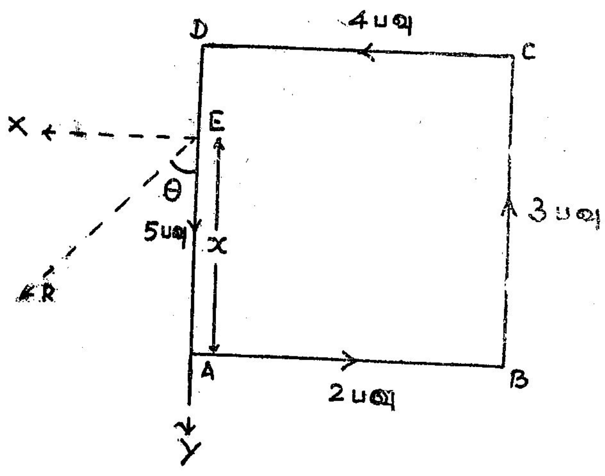
இந்த மூன்று நிபந்தனைகளுள் முதல் இரண்டை நாம் முதலிலேயே அறிந்திருக்கிறோம். மூன்றுவது நிபந்தனையைப் பற்றி இங்குக் காண்போம்.

தெரிவு : ஒரு திண்பொருளின்மீது செயற்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமாயின், அவை : (a) ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டும். (b) இணையாக இருக்கவேண்டும் அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

a. ஒரு திண் பொருளின்மீது செயற்பட்டு சமநிலையிலிருக்கும் P,Q,R என்ற மூன்று விசைகளை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 12·37).

P,Q ஆகிய விசைக்கோடுகளை A,B புள்ளிகளில் சந்திக்கும் AB என்ற நேர்கோட்டைக் கருதுவோம்.

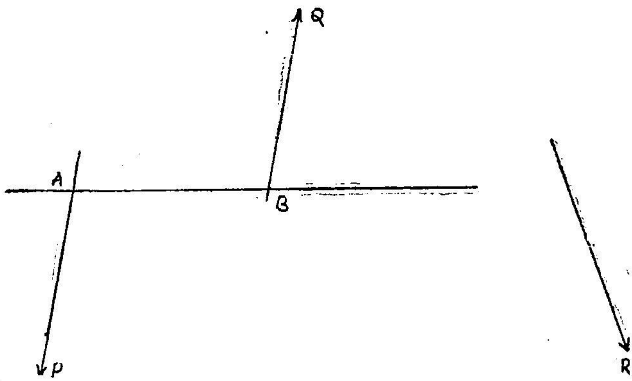
விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால் (i) அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகும். (ii) அத் தொகுபயனின் AB-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறனும் சுழியாகும். இப்பொழுது P,Q ஆகிய விசைகள் AB கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் வழியே AB-ஐப் பற்றிய அவற்றின் திருப்பு திறன்கள் தனித்தனியே சுழியாகும். எனவே ABயைப் பற்றிய R-ன் திருப்புதிறனும் சுழியாகவேண்டும். ஆகையால் AB,R விசைக்கோட்டையும் சந்திக்கவேண்டும். இம் மூன்று விசைகளும் ஒரே தளத்தில் அமைந்தால்தான் இது முடியுமாதலால், அவை ஒரே தளத்தில் அமையவேண்டும்.



படம் 12·37

b. எல்லா விசைகளும் இணையாக இல்லாவிடில், அவற்றுள் இரண்டு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கக்கூடும். P,Q என்ற விசைகள் O என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம் (படம் 12·38). P,Q ஆகியவற்றின் தொகுபயன் O என்ற புள்ளி வழியே செல்லும். P,Q,R என்ற மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால், P,Q ஆகியவற்றின் தொகுபயனும் R-ம் சமநிலையில் இருக்கவேண்டும். எனவே, தொகுபயனும் R-ம் ஒரே நேர்கோட்டில் செயற்பட

டும்; அதாவது R-ம் O-வழியே செல்லும். ஆகையால் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



படம் 12·38

P,Q என்ற இரு விசைகள் இணையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ் விரு விசைகளும் ஓர் இரட்டையை அமைக்க முடியாது. அவ்வாருயின் மூன்று விசைகளும் ஓர் இரட்டை, ஓர் ஒற்றை விசை ஆகியவற்றிற்குச் சமமாகும்; எனவே, அவை சமநிலையில் இருக்கமுடியாது. P,Q ஆகியவற்றின் தொகுபயன் அவற்றிற்கு இணையான திசையிலேயே செயற்படும். P,Q,R ஆகிய விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால் P,Q ன் தொகுபயனும் R-ம் ஒரேநேர் கோட்டில் செயற்படவேண்டும். எனவே P,Q,R ஆகியவை இணையாக அமையவேண்டும்.

தெரிவு : ஒரு திண்பொருளின்மீது செயற்பட்டு சமநிலையில் இல்லாமலிருக்கும் ஒருதள விசைகளின் தொகுதி ஒன்றை ஓர் ஒற்றைவிசையாகவோ ஓர் இரட்டையாகவோ சுருக்கலாம்.

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் ஒருதள விசைகளுள் இரண்டை முதலில் கருதுவோம். இவ் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், விசைகளின் இணைகர விதிப்படியோ, அல்லது அவை இணைவிசைகளாக அமையுமாயின், இணைவிசைகளின் தொகுப்பு விதிப்படியோ, அவற்றின் தொகுபயனை (R_1)க் காணலாம். (இணைவிசைகள் ஓர் இரட்டையை அமைக்குமாயின் அவ்வாறில்லாத தக்க இரு விசைகளை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.) அடுத்து, R_1, மூன்ருவது விசை ஒன்று ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் (R_2) காணலாம். பின்னர், இந்த R_2, நான்காவது விசை ஒன்று ஆகிய

வற்றின் தொகுபயனைக் காணலாம். இவ்வாறே, கிடைக்கும் ஒவ்வொரு தொகுபயனையும் மற்றொரு தக்க விசையுடன் சேர்த்து அவற்றின் தொகுபயனைக் காண்போமாயின், இறுதியில் இருவிசைகளைப் பெறுவோம். இவ் விரு விசைகளும் சமமான எதிர்போக்கு இணை விசைகளாக அமையுமாயின், அவை ஓர் இரட்டையை அமைக்கும். மாறாக வேறு எவ்வகையில் அமையினும் அவற்றின் தொகுபயனை ஒற்றைவிசையைப் பெறலாம். எனவே, ஒரு திண்பொருளின்மீது செயற்பட்டு சமநிலையில் இல்லாதிருக்கும் ஒருதள விசைகளின் தொகுதி ஒன்றை ஓர் இரட்டையாகவோ, ஒற்றை விசையாகவோ மாற்றலாம்.

விசைகளின் சமநிலைக்கான பொது நிபந்தனைகள் : ஒரு திண்பொருளின்மீது ஒருதள விசைகள் பல செயற்படும்போது அப்பொருளில் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கமோ சுழற்சி இயக்கமோ இல்லாதிருக்குமாயின் அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

ஒரு திண் பொருளின்மீது ஒரு தளத்தில் செயற்படும் பல விசைகளின் தொகுபயன் ஓர் ஒற்றையாகவோ ஓர் இரட்டையாகவோ இருக்கும் என்று கண்டோம்.

எனவே, அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்க வேண்டுமாயின் அவற்றின் தொகுபயனை ஒற்றைவிசை சுழியாக வேண்டும். இதனால் பொருளில் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம் ஏற்படாது. தொகுபயன் சுழியாக வேண்டுமாயின் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான இரு திசைகளில் அவ்விசைகளின் ஆக்கக் கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் சுழியாக வேண்டும்.

மேலும், அவ் விசைகள் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின் அவற்றின் தொகுபயன் இரட்டையாக அமையக் கூடாது. அதாவது அவ் விசைகளின் தொகுபயனின் திருப்புதிறனும் சுழியாக வேண்டும். இதனால் அப் பொருளில் சுழற்சி இயக்கம் ஏற்படாது. தொகுபயனின் திருப்புதிறன் சுழியாக வேண்டுமாயின் விசைகளின் தளத்தில் அமைந்த ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாக வேண்டும்.

இப்பொழுது ஒரு திண்பொருளின்மீது செயற்படும் ஒருதள விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பின் வருமாறு கூறலாம் :

1. எந்தவொரு திசையிலும் விசைகளின் ஆக்கக்கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகவேண்டும்.

2. அத் திசைக்கு நேர்குத்துத் திசையிலும் உள்ள ஆக்கக்கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகவேண்டும்.

3. விசைகளின் தளத்திலமைந்த ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாக வேண்டும்.

முதல் இரு நிபந்தனைகளின் பயனாக பொருளில் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம் இருக்காது. மூன்றாவது நிபந்தனையின் பயனாக பொருளில் சுழற்சி இயக்கம் இருக்காது. எனவே, மேற்கூறப்பட்ட மூன்று நிபந்தனைகளும் விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதற்கு இன்றியமையாத, போதுமான நிபந்தனைகளாகும்.

மேற்கூறப்பட்ட நிபந்தனைகளையன்றி வேறொரு நிபந்தனையையும் காணலாம்.

தெரிவு : ஒரு திண்பொருளின் மீது ஒருதள விசைகள் பல செயற்படும்போது அத்தளத்திலுள்ள ஒரு கோட்டமையாத மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் சுழியாகுமாயின் அவ் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் ஓர் ஒற்றை விசையாகவோ ஓர் இரட்டையாகவோ இருக்கும் என்று முன்னரே கண்டோம். இங்கு விசைகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை சுழியாதலால் அவற்றின் தொகுபயன் இரட்டையாக அமைய முடியாது. ஏனெனில் ஓர் இரட்டையின் திருப்புதிறன் ஒரு போதும் சுழியாகாது. எனவே அவ்விசைகளின் தொகுபயன் ஓர் ஒற்றை விசையாகவே அமையும். அந்த ஒற்றைவிசையை F எனக் கொள்வோம்.

A,B,C என்பவை விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஒரு கோட்டமையாத குறிப்பிட்ட மூன்று புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

A-ஐப் பற்றிய விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாதலால் அவ் விசைகளின் தொகுபயனின் (F) அப் புள்ளியைப்பற்றிய திருப்புதிறன் சுழியாகும். எனவே, F,A வழியே செயற்படவேண்டும் அல்லது சுழியாகவேண்டும்.

இவ்வாறே விசைகளின் B-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாதலால் F-ன் B-ஐ பற்றிய திருப்புதிறனும் சுழியாகும். எனவே, F,B வழியாகச் செயற்பட வேண்டும். அல்லது சுழியாகவேண்டும். அதாவது F,AB வழியாகச் செயற்படவேண்டும் அல்லது சுழியாக வேண்டும்.

இறுதியாக, விசைகளின் C-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாதலால் Cஐப் பற்றிய F-ன் திருப்புதிறனும் சுழியாகும். எனவே, F,C வழியே செயற்படவேண்டும். அல்லது சுழியாகவேண்டும். ஆனால் A,B,C ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும்

ஒரு கோட்டமையாத புள்ளிகளாதலால் F,AB வழியாகவும், C வழியாகவும் செயற்படமுடியாது. ஆகையால் F-சுழியாகத்தான் வேண்டும். எனவே, விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

சமநிலையிலுள்ள விசைகளைப்பற்றிய கணக்குகளைச் செய்யும் போதுப் பின்வரும் உண்மைகளைக் கருத்திற் கொள்வதன்மூலம் அவற்றை எளிதாக்கலாம்.

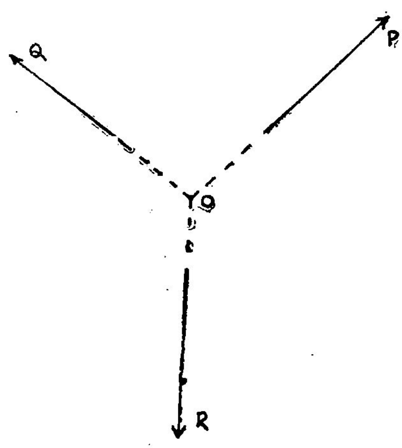
1. ஒரு பொருளின் எடை அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும்.

2. ஒரு வழவழப்பான தளத்தின்மீது பொருள் சாய்ந்திருந்தால், தளம் அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் ஓர் எதிர்விசையைச் செயற் படுத்தும்.

3. ஒரு தண்டானது முனை அல்லது கத்தி முனைகள்மீது அமைந்திருக்கும்போது அவற்றின் எதிர் விசைகள் தண்டிற்கு நேர்குத்துத்திசையில் செயற்படும்.

4. ஒரு பொருள் ஒரு கயிற்றினால் தொங்கவிடப்படுமாயின், கயிறு மெல்லியதாகவும் நீட்சியடையாததாயும் இருந்தால், அதன் இழு விசை எல்லாப் புள்ளியிலும் ஒரே அளவாய் இருக்கும்.

5. ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயமைந்த இரு வசதியான திசைகளில் விசைகளின் ஆக்கக் கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் சுழியாகும்.



படம் 12·39

6. விசைகளின் தளத்திலமைந்த ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

சமநிலையில் இருக்கும் விசைகளைப்பற்றிய கணக்குகளில் சில வற்றில் பயன்படக்கூடிய இரு கோண கணித வாய்பாடுகள் பின் வருமாறு :

ABC என்ற முக்கோணத்தில் AB பக்கத்திலுள்ள D என்ற புள்ளி AB-ஐ X,Y என்ற விகிதத்திலும் CD, ABC கோணத்தை α, β என்ற இரு கோணங்களாகவும் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்.

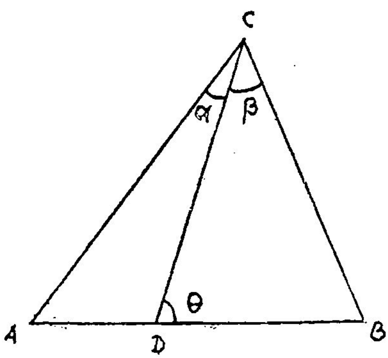
(படம் 12·39) $\widehat{CDB} = \theta$ என்றால்

$$\left.\begin{aligned}(x+y)\cot\theta &= x\cot\alpha - y\cot\beta\\ (x+y)\cot\theta &= y\cot A - x\cot\beta\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad 12{\cdot}11$$

மாதிரிக்கணக்கு 1. A என்ற முனையில் கீல்மூலம் பொருத்தப் பட்ட AB என்ற இலேசான தண்டு ஒன்று அதனுடன் 30° கோணத் தைஅமைக்குமாறு B முனையில் இணைக்கப்பட்ட ஒரு கயிற்றின் உதவியால் கிடைமட்டத்தில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. B முனையில் 2 பவு. நிறை ஒன்று தொங்கவிடப்படின், கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

படம் 12·40ல் AB தண்டையும், BC கயிற்றையும் குறிக்கின்றன.

$\widehat{ABC}=30°$, தண்டு இலேசானதாகையால் அதன் எடை புறக் கணிக்கத்தக்க அளவுக்குச் சிறியதாயிருக்கும்.



படம் 12·40

தண்டின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன: (i) கயிற்றின் இழுவிசை (ii) 2 பவு. எடை (w) (iii) கீலின் எதிர்விசை (R).

தண்டு சமநிலையிலிருப்பதாலும் கயிற்றின் இழுவிசையும் 2 பவு. எடையும் B-ல் சந்திப்பதாலும் கீலின் எதிர்விசை B-வழியே செல்ல வேண்டும்.

எனவே, B-ல் செயற்படும் W,T,R ஆகிய விசைகளுக்கு லாமி யின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோமாயின்

$$\frac{W}{\sin 150} = \frac{T}{\sin 90} = \frac{R}{\sin 120}$$

$$\therefore \quad T = \frac{W}{\sin 150} = \frac{2}{\sin 30} = 4 \text{ பவு. எடை.}$$

எனவே. கயிற்றின் இழுவிசை = 4 பவு. எடை.

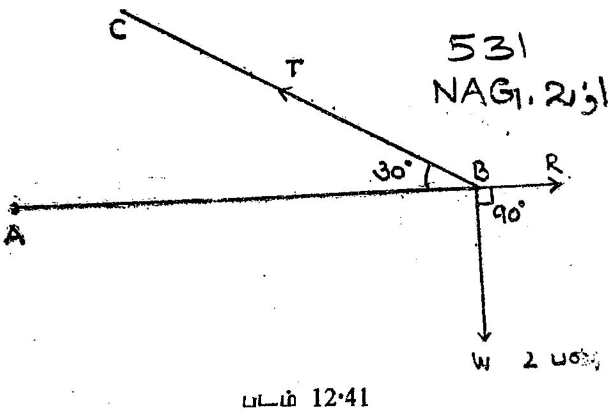
மாதிரிக் கணக்கு 2. AB என்ற சீரான தண்டு ஒன்றின் A முனை வழவழப்பான செங்குத்தான சுவர் ஒன்றைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. A-லிருந்து $\frac{1}{4}$ AB தொலைவிலுள்ள C என்ற புள்ளியில் ஒரு கயிற்றின் ஒருமுனை கட்டப்பட்டு, மறுமுனை சுவரு டன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டு செங்குத்து நிலைக்கு α கோணத்தில் சமநிலையில் இருக்குமாயின், கயிற்றின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 12·41-ல் AB, தண்டையும், G அதன் புவியீர்ப்பு மையத் தையும், CD கயிற்றையும், AD சுவரையும் குறிக்கின்றன.

$C\hat{A}D = \alpha$.

307173

தண்டின் மீது செயற்படும் விசைகளாவன: 1. தண்டின் எடை (W); இது செங்குத்தாகச் செயற்படும். 2. சுவரின் எதிர் விசை



531
NAG. 2/1

படம் 12·41

(R); சுவர் வழவழப்பானதால் R கிடைமட்டத்தில் செயற்படும். 3. கயிற்றின் இழுவிசை (T)

தண்டு சமநிலையில் இருப்பதால், கயிற்றின் இழுவிசையானது W,R இவை சந்திக்கும் O என்ற புள்ளிவழியே செல்லும். எனவே, OCD கயிற்றின் திசையைக் குறிக்கும்.

ACD, OCG என்ற முக்கோணங்களில்

$$D\hat{A}C = C\hat{G}D$$

$$D\hat{C}A = G\hat{C}O$$

$$AC = CG = \frac{1}{4}AB$$

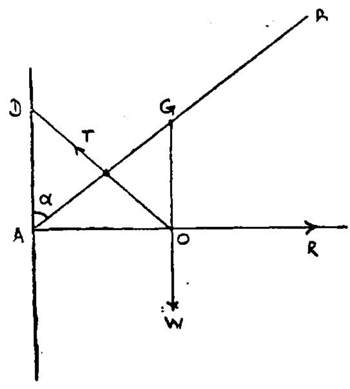
எனவே, அந்த முக்கோணங்கள் முழுதொத்த முக்கோணங்களாகும். ஆகவே, $DC = CO$

ஆனால், $A\hat{O}G$ என்ற முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமாதலால், $AC = CG = CO = \frac{1}{4}AB$

எனவே கயிற்றின் நீளம் $= DC = \frac{1}{4}AB$.

மாதிரிக் கணக்கு 3. 13 அங். நீளமும் 5 பவு. எடையும் கொண்ட சீரான தண்டு ஒன்று அதன் முனைகளில் கட்டப்பட்ட கயிறுகளால் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கயிறுகளின் நீளங்கள் 5″, 12″ என்றால் அவற்றின் இழுவிசைகளையும் கிடைத்தளத்துடன் தண்டு அமைக்கும் கோணத்தையும் கணக்கிடுக.

படம் 12·42-ல் AB தண்டையும், G அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் AO, OB கயிறுகளையும் குறிக்கின்றன. AOB என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $AG = GB = OG = \frac{13''}{2}$



படம் 12·42

$AO = 12''$, $OB = 5''$ $B\hat{A}H = \theta$ எனவும் $A\hat{O}G = \alpha$ எனவும் கொள்வோம்.

AO, BO கயிறுகளின் இழுவிசைகள் முறையே, T_1, T_2 எனவும் தண்டின் எடையை W எனவும் கொள்வோமாயின், தண்டு சம நிலையிலிருப்பதால், அவை மூன்றும் O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும்.

அம் மூன்று விசைகளுக்கும் லாமியின் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்துவோமாயின்,

$$\frac{T_1}{\sin(90\ \alpha)} = \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin 90}$$

அல்லது $\frac{T_1}{\cos\alpha} = \frac{T_2}{\sin\alpha} = W \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

மேலும், OAG என்ற முக்கோணத்தில்

$$\frac{12}{\sin(90+\theta)} = \frac{13}{2\sin\alpha} = \frac{13}{2\sin A} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \frac{13}{2\sin\alpha} = \frac{13}{2\sin A}$$

$$\therefore \quad \alpha = A.$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \sin A = \frac{5}{13};\ \cos\alpha = \cos A ; \frac{12}{13}$$

சமன் (i) லிருந்து

$$T_1 = W\cos\alpha = 5\times\frac{12}{13} = \frac{60}{13} \text{ பவு. எடை.}$$

$$T_2 = W\sin\alpha = 5\times\frac{5}{13} = \frac{25}{13} \text{ பவு. எடை.}$$

மேலும், சமன் (ii) லிருந்து

$$\frac{12}{\cos\theta} = \frac{13}{2\sin A}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2\times 12\ \sin A}{13}$$

$$= \frac{2\times 12\times 5}{13\times 18} = \frac{120}{169}$$

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ\ 15'$$

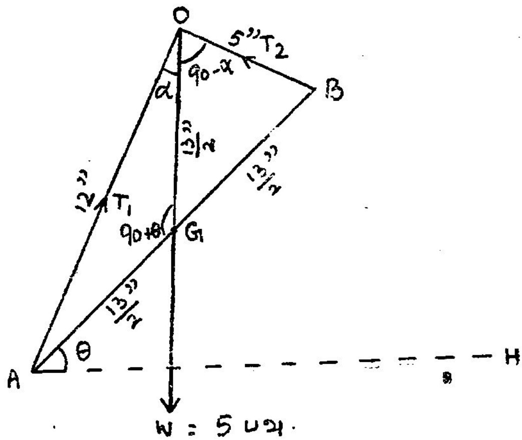
எனவே, கயிறுகளின் இழுவிசைகள் $= \frac{60}{13}$ பவு. எடை:

$\frac{25}{13}$ பவு எடை

தண்டு கிடைமட்டத்துடன் அமைக்கும் கோணம் $= 45^\circ 15'$

மாதிரிக் கணக்கு 4. 2a அலகு பக்கத்தையுடைய சீரான சதுர மான தகடு ஒன்று கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு வழவழப்பான முளைகளின்மீது ஒரு பக்கம் கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்குமாறு செங்குத்தாக சமநிலையிலிருக்கிறது. முளைகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு C எனில், $\sin 2\theta = \frac{a^2-c^2}{C^2}$ என நிறுவுக.

படம் 12·43-ல் ABCD தகட்டையும் G, அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் P, Q முளைகளையும் குறிக்கின்றன. AD என்ற



படம் 12.43

பக்கம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோம். $\widehat{APQ} = \theta$ ஆகும்.

P, Q முளைகள் தகட்டின்மீது செயற்படுத்தும் எதிர் விசைகள் R_1, R_2 எனக் கொள்வோம். முளைகள் வழவழப்பானவையாதலால், R_1, R_2 முறையே AD, AB பக்கங்களுக்கு நேர்குத்துத் திசைகளில் அமையும்.

தகடு சமநிலையிலிருப்பதால், R_1,R_2 தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் செங்குத்தாகச் செயற்படும் அதன் எடை (W) ஆகியவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும். அவை O என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். படத்தில் GO, PQ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தானவை. மேலும், $PO = AQ = C\cos\theta$. $QO = AP = C\sin\theta$. இனி, AB, AC ஆகிய பக்கங்களை ஆயங்களாகக் கொள்வோமாயின்,

GO-வின் வாட்டம் × PQ வின் வாட்டம் = −1

GO-வின் வாட்டம் :

G-ன் ஆயத் தொலைவுகள் (a,a)

O-ன் ஆயத் தொலைவுகள் $(C\cos\theta, C\sin\theta)$

∴ GO-ன் வாட்டம் $= \dfrac{c\cos\theta - a}{C\sin\theta - a}$

PQ- ன் வாட்டம் $= \tan(90+\theta) = -\cot\theta = -\dfrac{\text{sco}\,\theta}{\sin\theta}$

$$\therefore \quad \frac{C\cos\theta - a}{C\sin\theta - a} \times -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -1$$

$$\therefore \quad C\cos^2\theta - a\cos\theta = C\sin^2\theta - a\sin\theta.$$

அல்லது $C(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a(\cos\theta - \sin\theta)$

அல்லது $C(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = a(\cos\theta - \sin\theta)$

$$\therefore \quad (\cos\theta - \sin\theta)\Big[c(\cos\theta + \sin\theta) - a\Big] = 0$$

எனவே, $\cos\theta - \sin\theta = O$

அல்லது $\cos\theta = \sin\theta$

∴ $\theta = 45^\circ$

அல்லது $C(\cos\theta + \sin\theta - a = 0$

அதாவது $C(\cos\theta + \sin\theta) = a$

இருமடிகாணின் $c^2(1 + 2\sin\theta\cos\theta) = a^2$

∴ $C^2(1 + \sin 2\theta) = a^2$

$$\sin 2\theta = \frac{a^2 - C^2}{C^2}$$

மாதிரிக் கணக்கு 5. 40 பவு. நிறையுள்ள ஓர் ஏணி கிடைத் தளத்துடன் 60° கோணத்தை அடைக்குமாறு ஒரு வழவழப்பான தரையிலிருந்து, ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது சாய்த்துவைக்கப் பட்டுள்ளது. ஏணியின் கீழ்முனை சுவரும் தரையும் சேருமிடத் துடன் ஒரு கயிற்றால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசை, சுவர், தரை ஆகியவற்றின் எதிர் விசைகள் ஆகியவற் றைக் கணக்கிடுக. மேலும்-80 பவு. நிறையுள்ள ஒரு சிறுவன் ஏணி மீது அதன் முக்கால் நீளத்தில் இருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

படம் 12·44-ல் AB, ஏணியையும், G அதன் புவியீர்ப்பு மையத் தையும், OB சுவரையும் AO தரையையும் கயிற்றையும் குறிக்கின் றன. ஏணியின் எடையை W எனவும், B,A ஆகிய புள்ளிகளில் எதிர்விசைகள் R, S எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் ஏணி யின் நீளம் 21 எனவும் கொள்வோம்.

ஏணி சமநிலையிருப்பதால்,

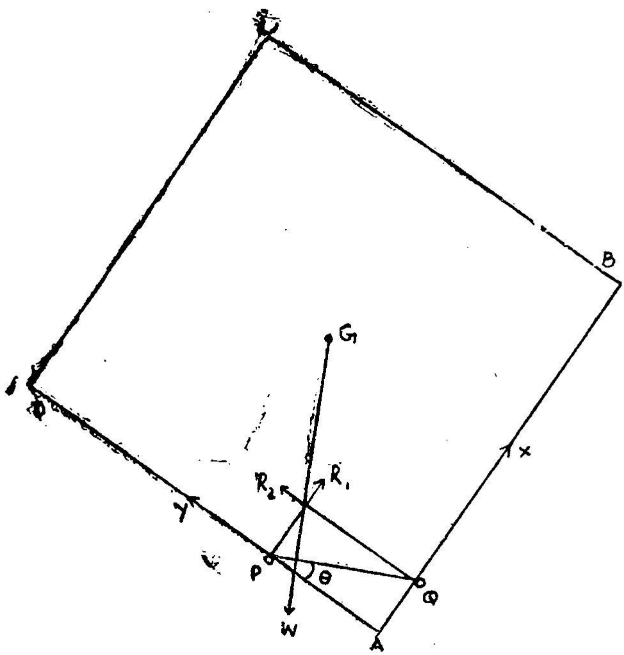
$$R = T$$
$$S = W = 40 \text{ பவு. எடை.}$$

A-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$W \times l \cos 60 = R \times 2l \sin 60$$

அதாவது $40 \times \frac{1}{2} = R \times 2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \quad R = T = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ பவு. எடை.}$$



படம் 12·44

ஏணியின்மீது அதன் முக்கால் நீளத்தில் (C என்ற புள்ளியில்) 80 பவு. நிறை எடையுள்ள சிறுவன் இருக்கும்போது, A-ஐப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்,

$$40 + l \cos 60 + 80 \times \frac{3}{2} l \cos 60 = R \times 2l \sin 60$$

அதாவது $40 \times \frac{1}{2} + \frac{240}{2} \times \frac{1}{2} = R \times 2\frac{\sqrt{3}}{2}$

அல்லது $20 + 60 = R \times \sqrt{3}$

$\therefore \quad R = T = \frac{80}{\sqrt{3}}$ பவு. எடை.

எனவே, (i) கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{20}{\sqrt{3}}$ பவு. எடை; சுவற்றி எதிர் விசை $= \frac{20}{\sqrt{3}}$ பவு. எடை; தரையின் எதிர்விசை$=40$ பவு. எடை.

(ii) ஏணியின்மீது சிறுவன் இருக்கும்போது கயிற்றின் இழு விசை $= \frac{80}{\sqrt{3}}$ பவு. எடை.

மாதிரிக் கணக்கு 6. $2l$ அலகு நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான கோளம் ஒன்றின்மீது சம நிலையில் உள்ளது. அதன் கீழ்முனை கோளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான சுவரை எதிர்த்து நிற்கிறது. தண்டு கிடைமட்டத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்றால், $a = l \cos\theta\,(1+\sin\theta)$ என நிறுவுக.

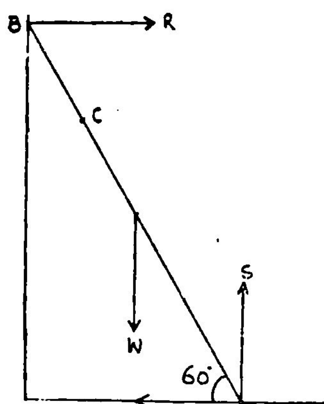
படம் 12·45-ல் AB தண்டையும் O, கோள மையத்தையும், DY சுவரையும் குறிக்கின்றன.

$AG = GB = l$, $EC = a$ $\widehat{GAO} = \theta$.

தண்டின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

1. G வழியே செயற்படும் அதன் எடை (W); 2. A-ல்சுவரின் எதிர்விசை (R); 3. D-ல் கோளத்தின் எதிர்விசை (S).

தண்டு சமநிலையிலிருப்பதால், இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும். அப்புள்ளி O எனக் கொள்வோம்.



படம் 12·45

AOG என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$AO = AG \cos\theta$$
$$= l \cos\theta$$

AECD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில்

$$E\hat{C}D = D\hat{A}Y = (90-\theta)$$

$$\therefore \quad D\hat{C}A = A\hat{C}E = \left(45-\frac{\theta}{2}\right)$$

மேலும், AOC என்ற முக்கோணத்தில்

$$O\hat{A}C = D\hat{A}C - \theta$$

$$= \left(45+\frac{\theta}{2}-\theta\right) = \left(45-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$O\hat{C}A = D\hat{C}A = 45-\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad O\hat{C}A = O\hat{C}A$$

$$\therefore \quad OC = OA = l\cos\theta$$

இனி

$$a = EC = EF+FC$$

$$= AO + OC\sin\theta$$

$$= l\cos\theta + l\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \quad a = l\cos\theta\,(1+\sin\theta)$$

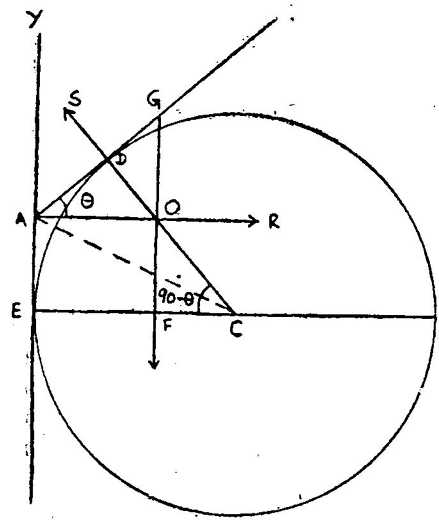
மாதிரிக் கணக்கு 7. 100 பவு. எடையுள்ள ஒரு தண்டு ஒரு முனையிலுள்ள வழவழப்பான கீலைப்பற்றி செங்குத்தான தளத்தில் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. மறுமுனையில் தண்டின் எடையில் பாதி எடையுள்ள ஒரு பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அந்த முனையில் 3 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு கயிற்றின் மறுமுனை கீலுக்கு மேல் செங்குத்தாக 1 அடி உயரத்தில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிறு செங்குத்து நிலைக்கு 60° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது என்றால் கயிற்றின் இழுவிசையையும் கீலின் எதிர்விசையையும் கணக்கிடுக.

படம் 12·46-ல் AB, தண்டையும் G, அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் DB கயிற்றையும் குறிக்கின்றன. $AD = 1'$, $DB = 3'$.

$A\hat{D}O = 60^\circ$ தண்டின் நீளம் l எனக் கொள்வோம். தண்டின் மீது G-ல் செயற்படும் 100 பவு. எடை (தண்டின் எடை) B-ல் செயற்படும் 50 பவு. எடை ஆகியவற்றின் தொகுபயன் (R) C என்ற புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம்.

A-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$100 \times \frac{l}{2} + 50 \times l = 150 \times AC$$



படம் 12·46

$$\therefore \quad AC = \frac{100}{150}\, l = \frac{2}{3}\, l.$$

தண்டு சமநிலையிலிருப்பதால் தொகுபயன் (R), கயிற்றின் இழு விசை, கீலின் எதிர்விசை (S) ஆகிய ஒரு புள்ளியில் (O) சந்திக்க வேண்டும். மேலும் அவற்றை அவற்றின் திசைகளுக்கு இணை யான பக்கங்களையுடைய முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் வரிசைச் சுற்றுமுறையில் குறிக்க முடியும். அந்த முக்கோணம் DAO ஆகும் (படம் 12·46).

முக்கோணம் ABD-ல் AD, CO ஆகியவை இணையான கோடுகள். மேலும், $AC = \frac{2}{3}\, l = \frac{2}{3}$ AB, எனவே $DO = \frac{2}{3}$ $DB =$

$\frac{2}{3} \times 3 = 2$ அடி.

AOD என்ற முக்கோணத்தில்,

$$AO^2 = AD^2 + DO^2 - 2\, AD.\, DO \cos \widehat{ADO}.$$

$$= 1^2+2^2-2\times\frac{1}{2} = 3$$

$\therefore \quad AO = \sqrt{3}.$

கயிற்றின் இழுவிசையை T என்வும் கீலின் எதிர்விசையை S எனவும் கொள்வோமாயின் விசைகளின் முக்கோண விதிப்படி

$$\frac{150}{1} = \frac{T}{2} = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad T \quad = 2\times150=300$ பவு. எடை.

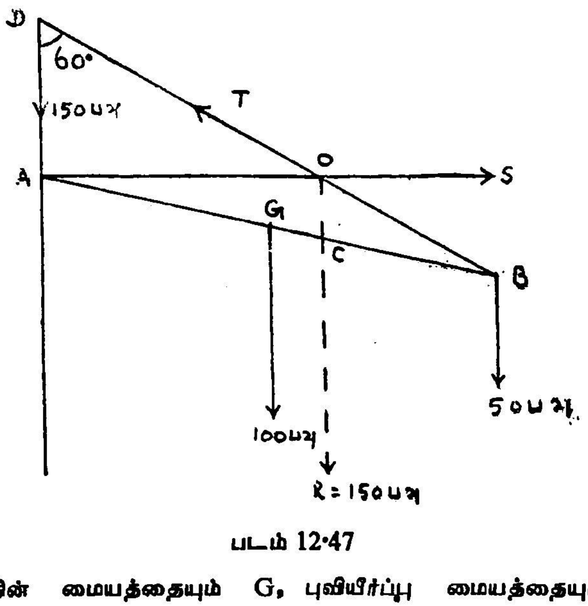
$\quad S \quad = 150\sqrt{3}$ பவு. எடை.

எனவே கயிற்றின் இழுவிசை $=300$ பவு. எடை.

கீலின் எதிர்விசை $=150\sqrt{3}$ பவு. எடை.

மாதிரிக் கணக்கு 8. ஒரு கூம்பின் உயரம் 2 அடி; அடித் தளத்தின் ஆரம் 1 அடி. கூம்பின் உச்சியிலும் அடித்தளத்தின் விளிம்பில் ஒரு புள்ளியிலும் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான முளையின் மீது போடப்பட்டுள்ளது. கூம்பு அதன் அச்சு கிடைமட்டத்திலிருக்குமாறு சமநிலையிலிருக்குமாயின் கயிற்றின் நீளம் $2\sqrt{2}$ அடி என நிறுவுக.

படம் 12·47-ல் VC கூம்பின் அச்சையும் C கூம்பின் அடித்



படம் 12·47

தளத்தின் மையத்தையும் G, புவியீர்ப்பு மையத்தையும் O,

வழ வழப்பான முனையையும் AOV கயிற்றையும் குறிக்கின்றன. கூம்பின் உயரம் h எனவும் அடித் தளத்தின் ஆரம் a எனவும் கொள்வோமாயின் படத்தில் $VG = \frac{3}{4}h$, $GC = \frac{1}{4}h$, $AC = a$. கயிற்றின் நீளம் l எனக் கொள்வோம். கயிறு வழ வழப்பான முனையின் மீது செல்வதால் அதன் இழுவிசை ஒரே அளவாய் இருக்கும். அதன் இழுவிசை T எனில், கூம்பு சமநிலையில் இருப்பதால் AO, VO ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படும் T, T என்ற இழுவிசைகளின் தொகுபயன் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் வழியே அதாவது OG வழியே செயற்பட வேண்டும். இழுவிசைகள் இரண்டும் சமமானதால் அவற்றின் தொகுபயன் AOV கோணத்தை இரு சமமாகப் பிரிக்கும். எனவே

$A\hat{O}G = V\hat{O}G = \theta$ எனக் கொள்வோம். கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் α எனில் படத்தில் $O\hat{M}A = (90 - \alpha)$

இனி, AB, OG ஆகிய கோடுகள் இணைக்கோடுகளாதலால்,

$$\frac{VM}{MA} = \frac{VG}{VG} = \frac{3}{1}$$

மேலும், VOA என்ற முக்கோணத்தில் OM, VOA என்ற கோணத்தின் இருசமவெட்டியாதலால்,

$$\frac{OV}{OA} = \frac{VM}{MA} = \frac{3}{1}$$

$$\therefore \quad OV = \frac{3}{4}l; \; OA = \frac{1}{4}l.$$

மேலும் VOA என்ற முக்கோணத்தில் சமன் 14·1-ன் படி

$$(VM + MA)\cot(90 - \alpha) = VM\cot\theta - MA\cot\theta$$

ஆனால் $VM : MA = 3 : 1$ ஆதலால்,

$$4\tan\alpha = 3\cot\theta - 1\cot\theta = 2\cot\theta$$

$$\therefore \quad \cot\theta = 2\tan\alpha$$

ஆனால், AVC என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

$$\tan\alpha = \frac{a}{h}$$

$$\cot\theta = \frac{2a}{h}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{(h^2 + 4a^2)}}$$

மேலும் Δ VGO-ல்,

$$\sin\theta = \frac{VG}{VO}$$

$$= \frac{3h/4}{3l/4} = \frac{h}{l}$$

$$\therefore \quad \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{(h^2+4a^2)}}$$

அல்லது $l = \sqrt{(h^2+4a^2)}$

இங்கு $h = 2$ அடி; $a=1$ அடி

$l = \sqrt{(2^2+4)}\ \sqrt{8}$

$l = 2\sqrt{2}$ அடி.

பயிற்சி XII

1. புறக்கணிக்கத்தக்க எடைகளைக்கொண்ட மூன்று கயிறுகளைக் கொண்டு A-ல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட ABC என்ற இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று அமைக்கப்பட்டு A-லிருந்து ஓர் எடை W தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. BC-ஐ கிடைமட்டத்திலிருக்கு மாறு வைத்து அதனுடன் 150° கோணத்தை அமைக்கும் இரு கயிறுகளால் முக்கோணத்தையும் எடையையும் தொங்கவிட்டால் BC-ல் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\frac{1}{2}w(\sqrt{3}-1)\right]$$

2. P, Q, R என்ற மதிப்புகளை உடைய விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் திசையிலும் அவற்றிற்கு இணையாகவும் செயற்படுமாயின் அவற்றின் தொகுபயன்

$$[P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2PR\cos B-2PQ\cos C]^{\frac{1}{2}}$$

எனக் காட்டுக.

3. 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 பவு எடையுள்ள விசைகள் அறுகோணத்தின் ஒரு மூலையிலிருந்து மற்ற மூலைகளை நோக்கி முறையே செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயனைக் கணக்கிடுக.

[10 பவு. எடை.]

4. (A+B), (A−B) என்ற இருவிசைகளின் தொகுபயன் $\sqrt{(A^2+B^2)}$ என்றால் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}\right)\right]$$

5. ஒரு விசையின் இரு ஆக்கக்கூறுகளுள் ஒன்று அவ் விசைக்கு நேர்குத்துத் திசையில் அமைந்து அவ் விசையின் எண் மதிப்பையே பெற்றிருக்குமாயின் மற்ற ஆக்கக்கூறின் எண்மதிப்பையும் திசையையும் மதிப்பிடுக. (மற்ற ஆக்கக் கூறுடன் 135°-ல் $F\sqrt{2}$)

6. ABCD என்பது ஒரு இணைகரம். P என்ற ஒரு துகள் PA, PC-க்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் இருவிசைகளால் முறையே A, C, ஆகியவற்றை நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது; PB, PD-க்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் விசைகளால் முறையே B,D-ஐ நோக்கி தள்ளப்படுகிறது. P எங்கிருந்தாலும் சமநிலையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

7. 100 கிராம் எடையையுடைய ஒரு மீட்டர் கோல் 50, 20, 75 செ.மீ-களில் முறையே 50, 60, 75 கிராம்கள் எடைகளைத் தாங்குகிறது. அது எந்தப் புள்ளியில் சமநிலையில் இருக்கும் எனக் கணக்கிடுக. [43·2 செ. மீ]

8. ஒரு மனிதனும் ஒரு சிறுவனும் 6 அடி நீளமும் 20 பவு. எடையும் கொண்ட ஒரு கம்பத்தின் உதவியால் 120 பவு எடையுள்ள பளுவைத் தூக்குகின்றனர். சிறுவன் மொத்த எடையில் மூன்றிலொரு பங்கைத் தாங்க வேண்டுமாயின் பளுவைக் கம்பத்தில் எந்த இடத்தில் தொங்க விடவேண்டும்? [சிறுவனிடமிருந்து 4 அடி தொலைவில்]

9. மையத்திலிருந்து 6 செ.மீ தொலைவில் தொங்க விடப்பட்டிருக்கும் ஒரு மீட்டர் கோலின் ஒரு முனையிலிருந்து 15 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருளைத் தொங்கவிட்டால் கோல் கிடைமட்டத்தில் இருக்கிறது. கோலின் எடை என்ன? [110 கி.]

10. 5 அடி நீளமும் 40 பவு. எடையுமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு A, B என்ற இரு கத்திமுனைகள் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. A, தண்டின் ஒரு முனையிலும், B, A-லிருந்து 3 அடி தொலைவிலும் உள்ளன. A-லிருந்து $\frac{3}{2}$ தொலைவில் 20 பவு. எடை ஒன்று தொங்க விடப்படுமாயின் கத்தி முனைகளில் செயற்படும் எதிர் விசைகளைக் கணக்கிடுக.

(A-ல் $16\frac{2}{3}$ பவு. எடை B-ல் $43\frac{1}{3}$ பவு. எடை.)

11. 20 அடி நீளமும் 200 பவு நிறையும் கொண்ட ஒரு குறுக லான, சீரான பலகை ஒன்று 10 அடி தொலைவிலுள்ள இரு தாங்கி களில் சரிசீரமைவாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. பலகையின் மையத்தி லிருந்து ஒருமுனையை நோக்கிச் செல்லும் ஒரு மனிதன் முனையை அடையும்போது சமநிலை சற்றே கெடுவதைக் காண்கிறான். அவனுடைய எடை என்ன? [500 பவு]

12. 100 செ. மீ நீளமும் 20 பவு எடையும் கொண்ட AB என்ற ஒரு சீரான தண்டு A-விருந்து 75 செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு கத்தி முனைமீது வைக்கப்பட்டு A-விருந்து 30-செ.மீ தொலைவில் 46 பவு. எடை ஒன்று தொங்கவிடப் படுகிறது. தண்டு கிடைமட்டத்திருக்க B-விருந்து 15 செ.மீ தொலைவில் தொங்கவிடப்பட வேண்டிய எடை என்ன? [230 பவு]

13. 15 அடி நீளமும் 196 பவு. எடையும் கொண்ட ஒரு சீரான பலகை அதன் ஒரு முனையில் 28 பவு. எடையைத் தாங்கு கிறது. பலகை, 18 அங். அகலமுள்ள ஒரு சுவரின் குறுக்காக வைக்கப்படுமாயில் பலகை சாயாமல் மற்றமுனை சுவருக்கு வெளியே நீட்டிக்கொண்டிருக்கக் கூடிய பெரும, சிறுமத் தொலைவுகளைக் கணக்கிடுக. [9'', 7·5'']

14. 4 அடி நீளமுள்ள எடைமிக்க சீரான தண்டு ஒன்று ஒரு அடி இடைவெளியிலுள்ள இருமுனைகளின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது ஒரு முனையில் தொங்கவிடப்பட்ட 4 பவு. எடை அல்லது மறு முனை யில் தொங்கவிடப்பட்ட 10 பவு, எடை தண்டினைச் சற்றே சாய்க் கிறது. தண்டின் எடையையும் அதன் மையத்திலிருந்து முனை களின் தொலைவுகளையும் கணக்கிடுக.

$$\left[\ 20 \text{ பவு. எடை } \frac{2'}{3},\ \frac{1'}{3}\ \right]$$

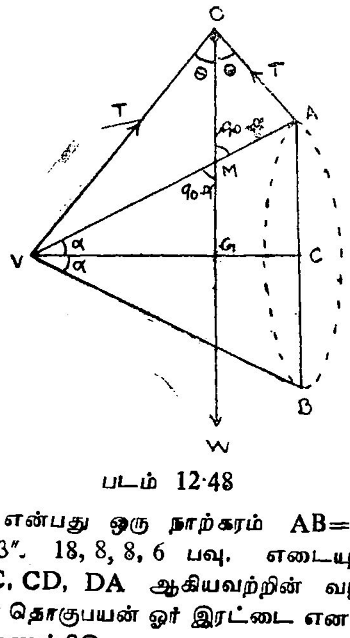
15. ABCD என்பது 20 அங். பக்கமுடைய ஒரு சதுரம். E என் பது AB-ன் மையப்புள்ளி. 7, 8, 12, 5, 9, 6 பவு. எடையுள்ள விசைகள் முறையே AB, EC, BC, BD, CA, DE ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயனின் எண் மதிப்பையும் நிலையையும் மதிப்பிடுக.

16. 2, 10, 6, 6 பவு. எடையுள்ள விசைகள் ABCD என்ற சது ரத்தின் முறையே AB, DC பக்கங்களின் வழியாகவும் AC, BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் வழியாகவும் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகு பயனையும் அது AB-உடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் கணக் கிடுக.

[AB-உடன் 45° கோணத்தில் $6\sqrt{6}$ பவு எடை]

17. 5, 3, 4, 5, 3, 4 பவு. எடையுள்ள விசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பக்கங்கள் வழியே வரிசைச் சுற்றுமுறையில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் தொகுபயனையும் திசையையும் மதிப்பிடுக. [0]

18. ஒரு வட்ட மேசையின் 9 பவு. எடையுள்ள பலகை அதன் மையத்திலிருந்து சம தொலைவுகளில் உள்ள மூன்று செங்குத்தான கால்களின்மீது நிற்கிறது. 12 பவு. எடை ஒன்று அதனைச் சாய்ப்பதற்குப் போதுமானதாக உள்ளது. மேசையின் ஒவ்வொரு காலின் எடையையும் கணக்கிடுக.



படம் 12·48

19. ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம் AB=5″; BC=DC=DB=4″; AD=3″. 18, 8, 8, 6 பவு. எடையுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படுமாயின், அவற்றின் தொகுபயன் ஓர் இரட்டை என நிறுவுக. அதன் திருப்புதிறனையும் கணக்கிடுக.

20. AB என்ற சீரான தண்டு 6 அடி நீளமும் 40 பவு. எடையும் கொண்டுள்ளது. தண்டின் A முனை ஒரு செங்குத்தான சுவருடன் கீல்மூலம் பொருத்தப்பட்டு CD என்ற கயிற்றின் உதவியால் கிடைமட்டத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. D, A-க்கு நேர்மேலும், C, A-யிலிருந்து $\frac{5'}{4}$ தொலைவிலும், கயிறு தாங்கக்கூடிய பெரும இழுவிசை 120 பவு. எடையாகவும்மிருப்பின் AD-ன் நீளம் $1\frac{2}{3}$ அடியை விடக் குறைவாக இருக்கக்கூடாது என நிறுவுக.

21. AB என்ற சீரான தண்டு ஒன்று A என்ற முனையிலுள்ள ஒரு கீலைப்பற்றிச் செங்குத்துத் தளத்தில் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. B-முனையில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு A-க்கு நேர்மேலே AB-க்குச் சமமான தொலைவில் C என்ற புள்ளியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் வழியே எடுத்துச் செல்லப்படுகிறது. தண்டைக் கிடைமட்டத்திற்கு 60° கோணத்தில் சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்குத் தேவையான கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

22. 4 பவு. நிறையுள்ள AB என்ற ஒரு தண்டு A முனையில் ஒரு கீல்மூலம் ஒரு சுவரில் இணைக்கப்பட்டு, அதனுடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும் BC என்ற கயிற்றின் உதவியால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டு, சுவருக்கு 60° கோணத்தில் சாய்ந்தும் அதன் B-முனை A-க்குக் கீழும் இருக்குமாயின், கீலில் எதிர்விசையையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் கணக்கிடுக.

[$2\sqrt{3}$ பவு. எடை. 2 பவு. எடை.]

23. l அலகு நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு a என்ற ஆரத்தை யுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளம் ஒன்றின்மீது சமநிலையில் உள்ளது. அதன் கீழ்முனை கோளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான சுவரை எதிர்த்து நிற்கிறது. தண்டு செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்றால்,

$$a = 2l \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos^3 \frac{\theta}{2}$$

எனக் காட்டுக.

24. செவ்வக வடிவமுள்ள சீரான பலகை ஒன்று அதன் a, b பக்கங்கள் கிடைமட்டத்தில் C தொலைவில் உள்ள இரு வழவழப்பான முனைகளின்மீது செங்குத்தாக சமநிலையில் உள்ளது. a பக்கம் செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்றால்,

$$2C \cos 2\theta = b \cos \theta - a \sin \theta$$

என நிறுவுக.

25. 2 அங். ஆரமும் சம எடையையும் கொண்ட இரு கோளங்கள் 6 அங். ஆரமுடைய அரைக்கோள வடிவிலுள்ள வழவழப்பான கோப்பை ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு கோளத்திற்கும் கோப்பைக்கும் இடையே செயற்படும் விசை, இரு கோளங்களுக்கிடையே செயற்படும் விசையைப்போல் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

26. $2l$ அலகு நீளமும் W அலகு நிறையும் கொண்ட சீரான தண்டு ஒன்று வழவழப்பான சுவருக்கு இணையாகச் செல்லும் வழவழப்பான தண்டவாளத்தின்மீது செங்குத்து நிலைக்கு 45° கோணத்தில் அச் சுவரை எதிர்த்து சமநிலையில் இருக்கிறது. சுவரிலிருந்து

தண்டவாளத்தின் தொலைவையும் எதிர்விசைகளையும் கணக்கிடுக.

$$\left(\frac{1}{4} l \sqrt{2}, W, W \sqrt{2}\right)$$

27. a அலகு ஆரத்தையும் W அலகு நிறையையும் கொண்ட ஒரு கோளம் வழவழப்பான சாய்தளத்தில் ஒரு புள்ளியிலும் கோளத்தின் மேற்பரப்பில் ஒரு புள்ளியிலும் இணைக்கப்பட்ட l அலகு நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் உதவியால், அத் தளத்தின்மீது சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளம் கிடைத்தளத்திற்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்திருந்தால் கயிற்றின் இழுவிசை,

$$\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{(l^2+2al)}}$$

என நிறுவுக.

28. h உயரமும் $2a$ உச்சிக்கோணமும் கொண்ட ஒரு வட்ட வடிவ ஒழுங்கான கூம்பு அதன் உச்சி ஒரு வழவழப்பான சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறும் அதன் சாய்ந்த பக்கம் சுவருக்கு இணையாக C தொலைவிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான தண்டவாளத்தின்மீது அமையுமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கூம்பின் அச்சு கிடைத்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்குமாயின்,

$$3h = 4c \sec^2 (\theta - a) \sec \theta$$

என நிறுவுக.

29. 12 அடி நீளமும் 80 பவு. நிறையும் கொண்ட AB என்ற சீரான தண்டு கிடைத்தளத்திற்கு 60° கோணத்தில் அதன் A முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும் B முனை ஒரு வழவழப்பான தரையின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டு நழுவாமலிருக்க அதில் B-லிருந்து 3 அடி தொலைவில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு கயிற்றின் மறுமுனை சுவரின் அடியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக: [40 பவு. எடை]

30. 10 அடி நீளமும் 30 பவு. நிறையும் கொண்ட AB என்ற ஓர் ஏணி அதன் A முனை வழவழப்பான சுவர் ஒன்றின்மீது இருக்குமாறு B முனையில் கட்டப்பட்ட கிடைமட்ட கயிறு ஒன்றின் உதவியால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி, கிடைத்தளத்திற்கு 60° கோணத்தில் சாய்ந்தும் அதன் புவியீர்ப்புமையம் B-லிருந்து 4 அடி தொலைவிலும் இருக்குமாயின், கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக. மேலும், கயிற்றின் உதவியின்றி ஏணியை அந்நிலை

யில் வைத்திருப்பதற்கு A-ல் செயற்படுத்தவேண்டிய சிறும விசை யின் எண்மதிப்பையும் திசையையும் கணக்கிடுக.

$$\left(\frac{14}{8}\sqrt{3}\text{ பவு. எடை, செங்குத்தாக 14 அடி மேலே}\right)$$

31. 2 l நீளமும் W எடையும் கொண்ட சீரான தண்டு ஒன்று அதன் A முனையிலுள்ள ஒரு கீல்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A வழியே செல்லும் கிடைமட்டத்திலுள்ள C என்ற புள்ளியுடன் l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் உதவியால் இணைக்கப்பட்ட $\frac{W}{2}$ எடையுள்ள ஒரு வளையம் தண்டின்மீது நழுவுகிறது. வளையம் சம நிலையிலிருக்கும் இடத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும், கீல், வளையம் ஆகியவற்றின் எதிர்விசைகளையும் கணக்கிடுக.

$$\left(\text{தண்டின் மையத்தில், } \frac{1}{2}W\sqrt{3}, \frac{1}{2}W\sqrt{3}, \frac{1}{2}W\right)$$

32. 12 பவு. எடையுள்ள AB என்ற சீரான தண்டு ஒன்று அதன் A முனை கீல்மூலம் பொருத்தப்பட்டு B முனையில் இணைக்கப் பட்ட ஒரு கயிற்றின்மூலம் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற் றின் மறுமுனை B முனையைவிட அதிக உயரத்தில் A-க்கு நேர்மேல் உள்ள C என்ற புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. B-ல் 2 அந்தர் எடை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. செங்குத்து நிலைக்கு தண்டு 30° கோணத்திலும் கயிறு 45° கோணத்திலும் சாய்ந்திருந் தால், கயிற்றின் இழுவிசையையும் கீலின் எதிர்விசையின் எண்மதிப் பையும் திசையையும் கணக்கிடுக. [119 1 பவு. எடை 173·4 பவு எடை].

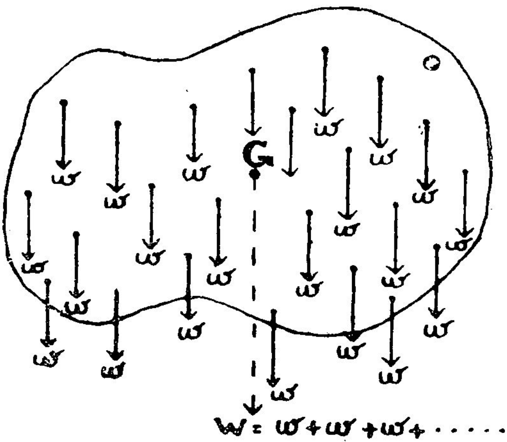
33. W என்ற எடையைக் கொண்ட AB என்ற சீரான தண்டு ஒன்று ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக அமைந்த CA, CB என்ற சாய் தளங்களின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது ACB தளம் செங்குத்தாகவும் CB கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்தும் இருக்குமாயின், தண்டைக் கிடைமட்டத்தில் சமநிலையில் வைப்பதற்கு B-ல் இணைக்க வேண்டிய எடையின் மதிப்பு என்ன. [W]

34. W அலகு எடையையுடைய ஒரு சீரான தண்டு அதன் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டு, வழவழப்பான ஒரு முளையின்மீது செல்லும் 2 l அலகு நீளமுடைய ஒரு கயிற்றின் உதவியால் சமநிலை யில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது தண்டின் ஒருமுனையில் W என்ற ஓர் எடை இணைக்கப்படுமாயின் $\frac{l\,W}{l\,W+_2W}$ நீளக் கயிறு முளையின்மீது நழுவிச் செல்லும் எனக்காட்டுக.

13. புவியீர்ப்பு மையம்

(Centre of gravity)

ஒவ்வொரு பொருளும் எண்ணிலடங்காத் துகள்களால் ஆக்கப் பட்டிருக்கிறது என்று கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு துகளும் புவியின் மையத்தைநோக்கி அத் துகளின் எடையாகிய விசையுடன் ஈர்க்கப் படுகிறது. அதாவது, அத் துகள்களின் எடைகள் செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி ஒருபோக்கு இணைவிசைகளாகச் செயற்படுகின்றன. அத் தகைய இணைவிசைகளின் தொகுபயனானை பொருளின் எடை பொரு



படம் 13·1

ளின் எல்லா நிலைகளுக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிவழியாகச் செல்லும். அக் குறிபிட்ட புள்ளி புவியீர்ப்புமையம் (Centre of gravity) அல்லது நிறைமையம் (Centre of mass) எனப்படும். ஒரு பொருளின், புவியீர்ப்புமையம் அப் பொருளின் உள்ளேயே அமைய வேண்டுமென்பதில்லை. ஒரு பொருளுக்கு ஒரே ஒரு புவியீர்ப்புமையம்தான் உண்டு.

ஒரு பொருளை எந்நிலையில் வைத்தாலும் அதன் எடை எந்த நிலையான புள்ளிவழியே செயற்படுகிறதோ, அக் குறிப்பிட்ட புள்ளி அப் பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் எனப்படும்.

எளிய வடிவங்களையுடைய சில பொருட்களின் புவியீர்ப்புமையம்

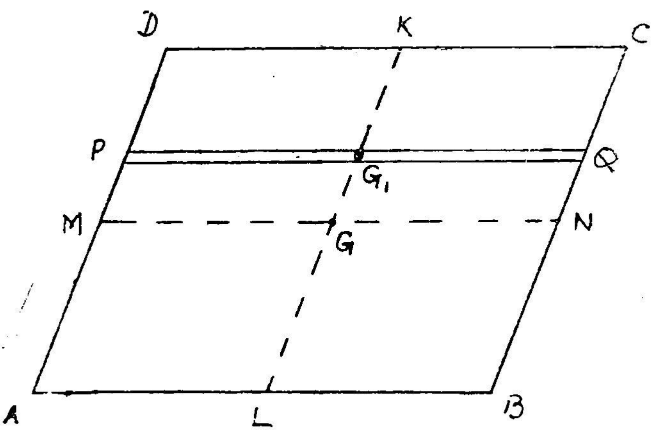
மெல்லிய சீரான தண்டின் புவியீர்ப்புமையம் : படம் 13·2-ல் AB, தண்டையும் C அதன் மையத்தையும் குறிக்கின்றன. AB-யில் C-க்கு இருபுறமும் சமமான தொலைவுகளில் உள்ள P,Q என்ற சம எடையுள்ள இரு துகள்களைக் கருதுவோம். அவற்றின் தொகுபயன் C வழியாகச் செல்லும். எனவே, அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் C

படம் 13·2

ஆகும். A-க்கும் C-க்குமிடையே உள்ள ஒவ்வொரு துகளுக்கும் C-லிருந்து அதே தொலைவில் அதே எடையையுடைய ஒரு துகளை C-க்கும் B-க்குமிடையே காணமுடியும். அத்தகைய ஒவ்வொரு சோடி துகள்களின் புவியீர்ப்புமையம் C ஆகும். எனவே தண்டின் புவியீர்ப்புமையமும் C ஆகும்; அதாவது தண்டின் மையமாகும்.

இணைகர வடிவிலுள்ள மென்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம்

படம் 13·3ல் ABCD இணைகரத் தகட்டைக் குறிக்கிறது. தகட்டை அதன் AB பக்கத்திற்கு இணையான சிறுபட்டைகளாகப்



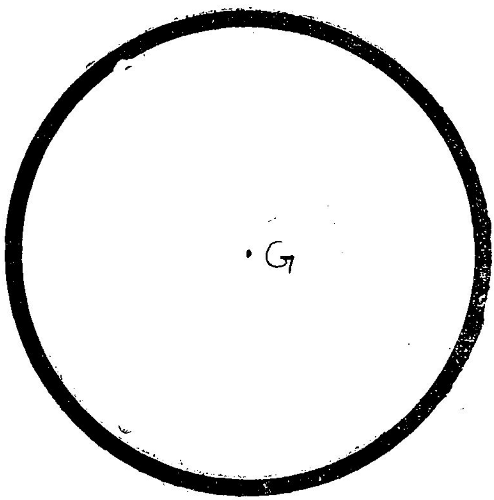
படம் 13·3

பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். P, Q, என்ற அத்தகைய ஒரு பட்டையைக் கருதுவோமாயின் அதனை ஒரு மெல்லிய சீரான தண்டாகக்கருதலாம். அதன் புவியீர்ப்புமையம் அதன் மையப்புள்ளியாகிய G_1 ஆகும். ஒவ்வொரு பட்டையின் புவியீர்ப்புமையமும் அதன் மையப்

புள்ளி ஆதலால் அந்த புவியீர்ப்புமையங்கள் எனவே, தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் AB,DC ஆகிய பக்கங்களின் மையங்களை (முறையே L,K) இணைக்கும் LK என்ற கோட்டில் அமையும்.

இவ்வாறே மென்தகட்டை BC பக்கத்திற்கு இணையாக மெல்லிய பட்டைகளாகப் பிரிப்பதாகக் கருதுவேமாயின், மென்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் BC,AD ஆகிய பக்கங்களின் மையங்களை இணைக்கும் MN என்ற கோட்டில் அமையும் என நிறுவலாம். எனவே தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் LK, MN என்ற கோடுகளின் சந்தியாகிய G என்ற புள்ளியாகும். G இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் சந்தியுமாகும்.

சீரான வட்டவளையத்தின் புவியீர்ப்புமையம் : வட்டவளையத்தை விட்டங்களின் முனைகளில் அமைந்த சமமான எடைகளையுடைய துகள்களின் சோடிகளாகப் பிரிப்போமாயின், சோடியிலுள்ள ஒவ்

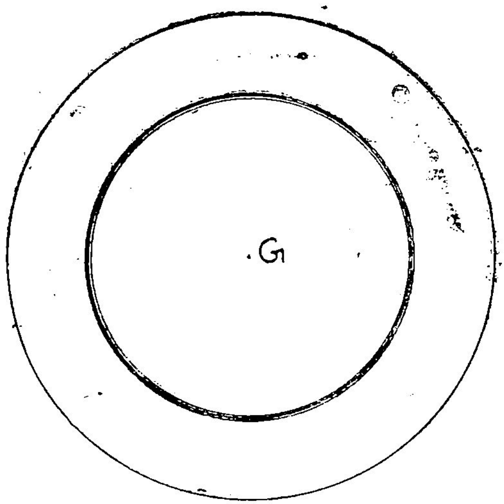


படம் 13·4

வொருதுகளும் வட்டமையத்திலிருந்து சமதொலைவுகளிலிருப்பதால், ஒவ்வொரு சோடித்துகள்களின் புவியீர்ப்புமையமும் வட்டத்தின் மையமாக அமையும். எனவே, வளையத்தின் புவியீர்ப்புமையம் வட்டத்தின் மையமாகும்.

சீரான வட்டவடிவத் தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் : வட்டவடிவத் தகட்டை வட்டத்தின் மையத்தை பொது மையமாகக்கொண்ட

மெல்லிய வளையங்களாகப் பிரிப்போமாயின், ஒவ்வொரு வளையமும் வட்டமையத்தைப் புவியீர்ப்புமையமாகக் கொண்டிருக்கும்.



படம் 13·5

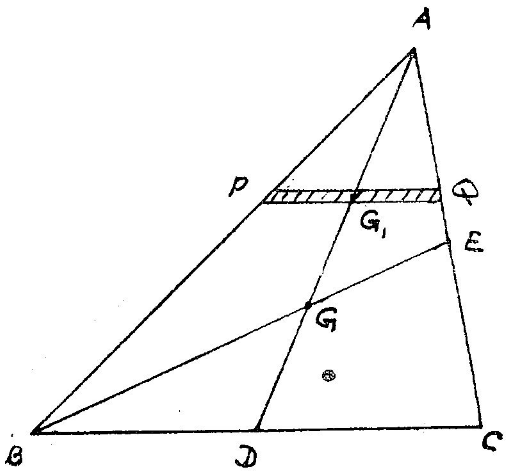
எனவே, முழுத்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் மையத்தில் அமையும்.

முக்கோண வடிவிலுள்ள மென்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் : ABC என்பது முக்கோண வடிவத்தகடு எனக்கொள்வோம். (படம் 13·6) தகட்டை முக்கோணத்தின் BC பக்கத்திற்கு இணையாக மெல்லிய பட்டைகளாகப் பிரித்து, அவற்றுள் PQ என்ற ஒரு பட்டையைக் கருதுவோம். அதனைச் சீரான மெல்லிய தண்டு என்று கருதலாம். எனவே, அதன் புவியீர்ப்புமையம் அதன் மையப்புள்ளியாகிய G_1 ஆகும். இவ்வாறே ஒவ்வொரு பட்டையின் புவியீர்ப்புமையமும் அதன் மையப்புள்ளியாதலால் அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் அல்லது முழுத்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் முக்கோணத்தின் A முனையையும் BC-யின் மையப்புள்ளி (D) யையும் இணைக்கும் மையக்கோட்டில் (AD) அமையும்.

இவ்வாறே முக்கோணத்தை AC பக்கத்திற்கு இணையாக மெல்லிய பட்டைகளாகப் பிரிப்போமாயின், தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் BE என்ற மையக்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டலாம்,

எனவே, முழுத்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் முக்கோணத்தின் மையக்கோடு சந்தியில் (G) அமையும். வடிவ கணிதத்தின் அடிப் படையில் $AG = \frac{2}{3}$ AD என நிறுவலாம்.

முக்கோணத்தின் மூலைகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமமான எடை களின் புவியீர்ப்புமையம்: ABC என்ற முக்கோணத்தின் A,B,C என்ற மூலைகளில் ஒவ்வொன்றும் W எடையையுடைய துகள்கள் வைக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். (படம் 13·6). B-ல் உள்ள

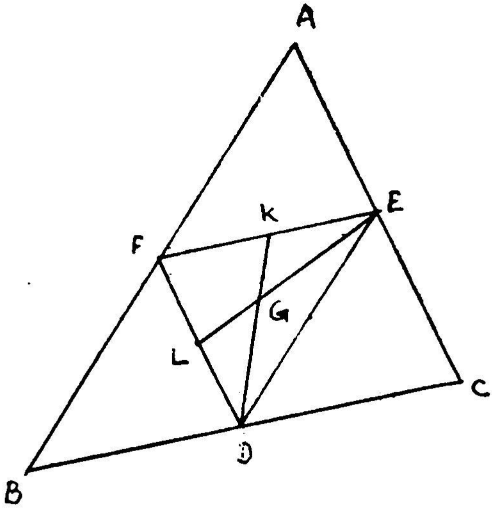


படம் 13·6

W என்ற எடை C-ல் உள்ள W என்ற எடை ஆகியவற்றின் தொகுபயன் 2W, AB-ன் மையப்புள்ளியாகிய D வழியே செல்லும். அடுத்து A-யில் உள்ள W,D ல் உள்ள 2W ஆகியவற்றின் தொகு பயன் 3W,AD-ல் AG:GD::2:1 என்னும் விகிதத்தில் AD -ஐப் பிரிக் கும் G என்ற புள்ளியில் செயற்படும். இது முக்கோணத் தகட்டின் புவியீர்ப்புமையமுமாகும். எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் மூலைகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமமான எடைகளின் புவியீர்ப்புமயம் அந்த முக்கோண வடிவத்திலமைந்த மென்தகட்டின் புவியீர்ப்புமைய மாகும்.

இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒருமுக்கோணத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தில் செயற்படும் அதன் மொத்த எடையை (w) முக்கோணத்தின் மூலைகளில் அமைந்த ஒவ்வொன்றும் $\frac{w}{3}$ க்குச் சமமான மூன்று எடைகளாகக் கருதலாம்.

ஒரு முக்கோணத்தை மூன்று *சீரான* தண்டுகளின் புவியீர்ப்பு மையம் : AB, BC, CA என்ற *சீரான* தண்டுகள் ABC என்ற முக்கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொள்வோம். (படம் 13·7). D,E,F என்பன முறையே BC,CA,AF ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளாயின்



படம் 13·7

படத்தில் DE = $\frac{1}{2}$ AB, EF = $\frac{1}{2}$ BC, FD = $\frac{1}{2}$ AC. தண்டுகள் *சீரான* வையாதலால் D, E, F அவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்களாக அமையும். மேலும், தண்டுகளின் எடைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் எனவும் கொள்ளலாம்.

AB, AC ஆகிய தண்டுகளின் புவியீர்ப்புமையம் EF-ஐ AB-ன் எடை × FK = AC-ன் எடை × KE அல்லது AB × FK = AC × KE

$$\text{அல்லது } \frac{FK}{KE} = \frac{AC}{AB}$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் K என்ற புள்ளியில் அமையும்.

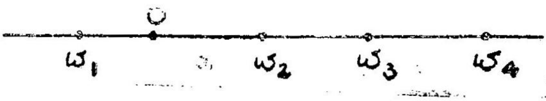
$$\frac{FK}{KE} = \frac{AC}{AB} = \frac{2FD}{2DE} = \frac{DF}{DE}$$

எனவே, DK, FDE என்னும் கோணத்தின் இருசமவெட்டியாகும்.

BC தண்டின் எடை D-ல் செயற்படுவதால் மூன்று தண்டுகளின் எடைகளின் தொகுபயன் DK-ல் ஒருபுள்ளிவழியே செயற்படும். அதாவது தண்டுகளின் புவியீர்ப்புமையம் DK-ல் அமையும்.

அவ்வாறே தண்டுகளின் புவியீர்ப்புமையம் FED கோணத்தின் இருசமவெட்டி (EL) யிலும் அமையும் என நிறுவலாம். எனவே, மூன்று தண்டுகளின் புவியீர்ப்புமையம் DK, EL ஆகியவற்றின் சந்தி (G) யில் அமையும். அதாவது, தண்டுகளின் மையப் புள்ளிகளை இணைப்பதால் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் கோண இருசமவெட்டிகளின் சந்தியில் அமையும். அச் சந்தி DEF என்ற முக்கோணத்தின் அகமையம் (incentre) எனப்படும்.

ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்த துகள்களின் தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் : $W_1, W_2, W_3, \ldots$ என்ற எடைகளை உடைய துகள்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் O என்ற புள்ளியிலிருந்து முறையே $x_1, x_2, x_3, \ldots$ தொலைவுகளில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். துகள்



படம் 13·8

களின் எடைகள் ஒருபோக்கு இணைவிசைகளாகச் செயற்படும். அவற்றின் தொகுபயன் அதே நேர்கோட்டில் O-லிருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம்.

இனி, எடைகளின் O என்ற புள்ளியைப்பற்றிய திருப்புதிறன் களைக்காணின், அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை எடைகளின் தொகுபயனின் O-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறனுக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடைகளின் O-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை $= W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + \ldots\ldots$

எடைகளின் தொகுபயன் $= W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots$

தொகுபயனின் O-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= (W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots)\ \bar{x}$$

எனவே, $(W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots)\bar{x} = (W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + \ldots)$

$$\bar{x} = \frac{(W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + \ldots)}{(W_1 + W_2 + W_3 + \ldots)}$$

$$= \frac{\Sigma\, W x}{\Sigma\, W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13{\cdot}1$$

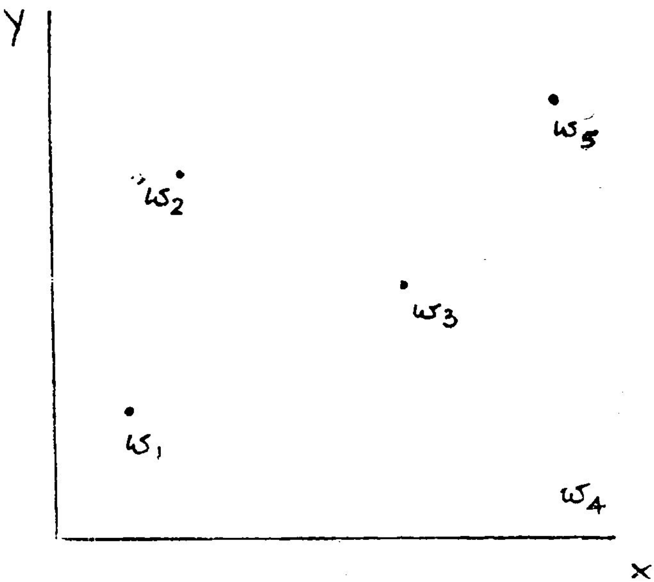
துகள் நேர்கோட்டில் தொடர்ச்சியாக அமையுமாயின் (ஒரு மெல்லிய தண்டிலுள்ளதுபோல்) $\Sigma\, Wx$, $\Sigma\, W$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை தொகை நுண்கணித (integral calculus) முறையில் காண வேண்டும். நுண்கணிதக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோமாயின்

O என்ற புள்ளியிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள ஒரு துகளின் எடை dw என்றால்,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W} = \frac{\int x\,dw}{\int dw} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13{\cdot}2$$

ஆகும்.

ஒரு தளத்தில் அமைந்த துகள்களின் புவியீர்ப்புமையம்: W_1, W_2, W_3 ...... என்பவை ஒருதளத்தில் அமைந்த துகள்களின் எடைகள் எனக் கொள்வோம். அத் தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயமைந்த OX, OY என்ற ஆயங்களிலிருந்து துகள்களின்



படம் 13·9

ஆயத்தொலைவுகள் முறையே $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$, ... எனக் கொள்வோம். அத் துகள்களின் புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆயத் தொலைவுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என இருக்கட்டும்.

OY-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்:

எடைகளின் தொகுபயனின் திருப்புதிறன் =

எடைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை.

$$\therefore \quad (W_1+W_2+W_3+\ldots\ldots)\,\overline{x} = (W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\ldots)$$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{(W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\ldots)}{(W_1+W_2+W_3+\ldots)}$$

$$\therefore \quad \overline{n} = \frac{\Sigma W}{\Sigma W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 13{\cdot}2\,a$$

அவ்வாறே OX-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்:

$$(W_1+W_2+W_3+\ldots)\,\overline{y} = W_1y_1+W_2y_2W_3y_3+\ldots$$

$$\therefore \quad \overline{y} = \frac{(W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\ldots)}{(W_1+W_2+W_3+\ldots)}$$

$$\therefore \quad \overline{y} = \frac{\Sigma W y}{\Sigma W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 13{\cdot}2b$$

ஒரு திண்பொருளிலுள்ளதுபோல் துகள்கள் தொடர்ச்சியாக அமைந்திருக்குமாயின்,

$$\overline{x} = \frac{\int x\,d\,w}{\int d\,w}$$

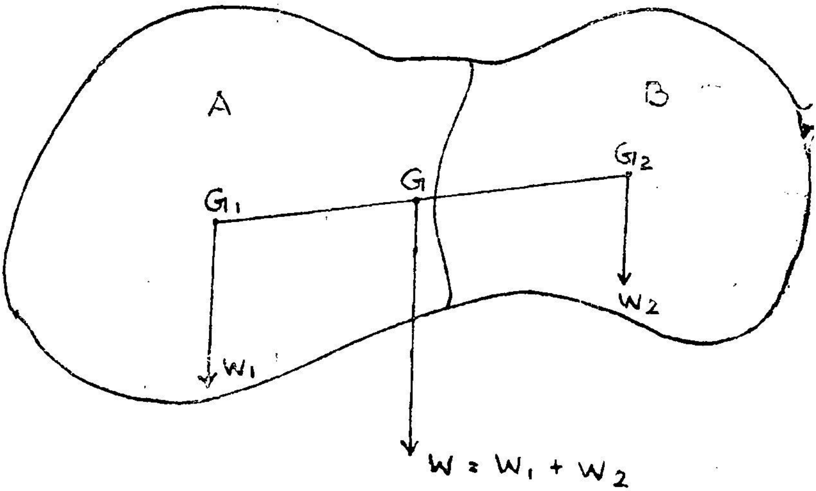
$$\overline{y} = \frac{\int y\,d\,w}{\int d\,w}$$

இரு பகுதிகளைக்கொண்ட ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்புமையம்

ஒரு பொருள் A,B என்ற இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளதாகக் கொள்வோம் (படம் 13·10). அவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்களும் எடைகளும் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் முழுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்

A,B ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்கள் முறையே, G_1, G_2 எனவும் எடைகள் W_1, W_2 எனவும் முழுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு

மையம் G எனவும் கொள்வோம். W_1, W_2 என்பவை G_1, G_2



படம் 13·10

புள்ளிகளில் செயற்படும் இணைவிசைகளாதலால் G, G_1 G_2-ல் அமையும். G-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$W_1 \times G_1G = W_2 \times G_2G$$

அதாவது $$\frac{G_1G}{G_2G} = \frac{W_2}{W_1}$$

எனவே, $$\frac{G_1G}{G_1G+G_2G} = \frac{W_2}{W_2+W_1}$$

அல்லது $$\frac{C_1G}{G_1G_2} = \frac{W_2}{W_1+W_2}$$

$$\therefore \quad G_1G = \frac{W_2}{W_1+W_2} \times G_1G_2 \quad \ldots \quad 13{\cdot}3$$

W_1, W_2, G_1, G_2 ஆகியவற்றின் மதிப்பை அறிவோமாதலால், G_1, G-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

இனி, முழுப்பொருளின் புவியீர்ப்புமையம், எடை, ஒருபகுதியின் புவியீர்ப்புமையம், எடை ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், மறுபகுதியின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் காண்பது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

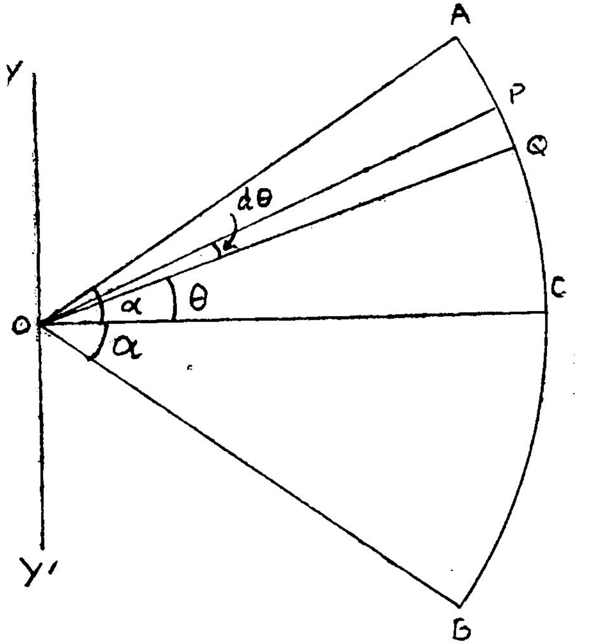
படம் 13·10-ல் முழுப்பொருளின் எடை W எனவும் ஒருபகுதியின் எடை W_1 எனவும் அவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்கள் முறையே G, G_1 எனவும் கொள்வோம். மறுபகுதியின் எடை $(W-W_1)$ ஆகும். அதன் புவியீர்ப்புமையம் G_2 என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, G_1-ல் செயற்படும் W_1, G_2-ல் செயற்படும் $(W-W_1)$ ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்புமையம் G ஆதலால் G_1, G, G_2 ஆகியவை ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும். G-ஐப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்,

$$W_1 \times G_1G = (W-W_1)\, G_2G$$

$$G_2G = \frac{W_1}{W-W_1} \times G_1G \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 13{\cdot}4$$

W_1, W, G_1G ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை நாம் அறிவோமாதலால், G_2G-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.



படம் 13·11

இனி, நுண்கணித முறையைப் பயன்படுத்தி சில பொருட்களின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் காண்பது எவ்வாறு என்று காண்போம்.

சீரான வட்டவில் (arc of a circle) லின் புவியீர்ப்புமையம்

ACB என்ற வட்டவில்லைக் கருதுவோம் (படம் 13·13). வட்டவில் வட்ட மையத்தில் (O) தாங்கும் கோணம் 2α எனவும் வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும் வட்டவில்லின் மையம் C எனவும் கொள்வோம். OC-ஐ X ஆயமாகவும் YOY′-ஐ Y ஆயமாகவும் கொள்வோமாயின், வட்டவில்லின் பகுதிகள் OC-ஐப் பொறுத்து சரி சீரமைவாக இருத்தலால், வில்லின் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் அமையவேண்டும். அது O-விலிருந்து $\bar{x}$ என்ற தொலைவில் இருக்கட்டும்.

வட்டவில்லில் PQ என்ற சிறுபகுதியைக் கருதுவோம். அது O-ல் தாங்கும் கோணம் $d\theta$ எனவும் $\widehat{QOC}=\theta$ எனவும் கொள்வோம். PQ-ன் நீளம் $= r.d\theta$. வில்லின் ஓரலகு நீளத்தின் எடை P என்றால் PQ-ன் எடை $dw=\mathrm{P}rd\theta$.

$\therefore$ வட்டவில்லின் மொத்த எடை (W)

$$= \int_{-\alpha}^{+\alpha} dw = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \mathrm{P}rd\theta = 2\mathrm{P}r\alpha$$

OY-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$\text{PQ-ன் திருப்புதிறன்} = \mathrm{P}rd\theta \times r\cos\theta$$
$$= \mathrm{P}r^2\cos\theta\, d\theta$$

வில்லில் உள்ள PQ போன்ற சிறுபகுதிகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை $= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \mathrm{P}r^2\cos\theta\, d\theta$

$$= 2\,\mathrm{P}r^2\sin\alpha$$

முழுவில்லின் எடையின் திருப்புதிறன்

$$= 2\,\mathrm{P}r\alpha\,\bar{x}$$

$$\therefore \quad 2\,\mathrm{P}r\alpha\bar{x} = \mathrm{P}r^2\sin\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} \qquad \dots \dots \quad 13{\cdot}5$$

சிறப்பு நேர்வு: வட்டவில் அரைவட்டமாக அமையுமாயின் $2\alpha = \pi$

$$\therefore \qquad \bar{x} = \frac{r \sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2r}{\pi} \quad \ldots \quad \ldots \quad 13{\cdot}5a$$

வட்டப் பகுதியின் (sector) புவியீர்ப்புமையம்: O-ஐ மையமாகவும் r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட AOB என்ற வட்டப்பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். (படம் 13·11). AB-ன் மையப்புள்ளி C எனவும் $\widehat{AOB} = 2\alpha$ எனவும் கொள்வோமாயின் OC, AOB-ன் இருசமவெட்டியாக அமையும். OC-ஐ X ஆயமாகவும் YOY′-ஐ Y ஆயமாகவும் கொள்வோமாயின் வட்டப்பகுதியின் AOC, COB பகுதிகள் OC-ஐப் பொறுத்து சரி சீரமைவாக இருப்பதால் முழுப் பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் அமையும். அது O-விருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் இருக்கட்டும். வட்டப்பகுதியை ஆரக்கோடுகளால் சிறுபகுதிகளாகப் பிரித்து அத்தகைய POQ என்ற ஒரு சிறுபகுதியைக் கருதுவோம். $\widehat{POQ} = d\theta$ எனவும் $\widehat{QOC} = \theta$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\text{POQ-ன் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}\, Pr^2\, d\theta$$

ஓரலகு பரப்பின் எடை P என்றால்

$$\text{POQ-ன் எடை } dw = \tfrac{1}{2}\, Pr^2 d\theta$$

∴ வட்டப்பகுதியின் மொத்த எடை

$$W = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dw = \int_{-Pr^2\alpha}^{+\alpha} \tfrac{1}{2}\, Pr^2 d\theta = Pr^2 \alpha\theta.$$

POQ-ஐ ஒரு சிறு முக்கோணமாகக் கருதலாமாகையால், அதன் புவியீர்ப்புமையம் O-விலிருந்து $\frac{2}{3} r$ தொலைவில் இருக்கும். எனவே OY-விருந்து அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு $= \frac{2}{3} r \cos\theta$

OY-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின் :

POQ-ன் எடையின் திருப்புதிறன் $= dw \frac{2}{3} r \cos \theta$

$$= \frac{1}{2} Pr^2 d\theta \frac{2}{3} r \cos \theta$$

$$= \frac{1}{3} Pr^3 \cos \theta \, d\theta.$$

அத்தகைய சிறுபகுதிகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{3} Pr^3 \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3} Pr^3 \sin \alpha$$

வட்டப்பகுதியின் மொத்த எடையின் திருப்புதிறன்

$$= Pr^2 \alpha \bar{x}$$

$$\therefore \quad Pr^2 \alpha \bar{x} = \frac{2}{3} Pr^3 \sin \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \dots \quad \dots \quad 13{\cdot}6$$

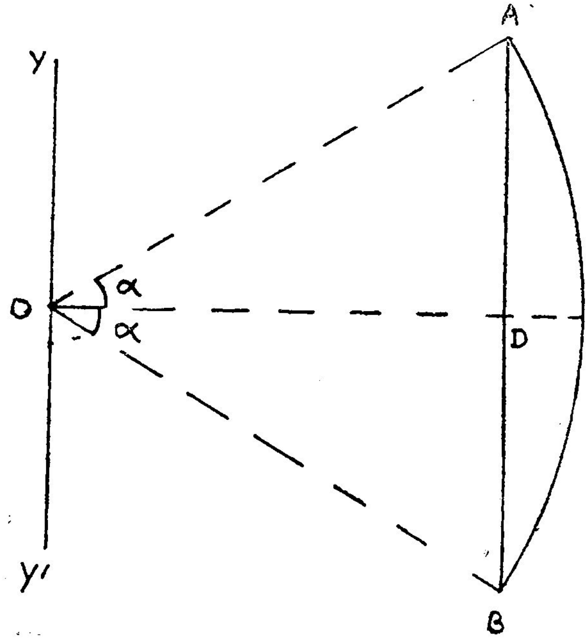
சிறப்பு நேர்வு : வட்டப்பகுதி அரைவட்டமாக அமையுமாயின் $\alpha = \pi/2$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \pi/2}{\pi/2}$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \quad \dots \quad \dots \quad 13.6a$$

பிறைமத்தின் (**segment**) புவியீர்ப்புமையம் : ABCD என்ற வட்டப் பிறைமத்தைக் கருதுவோம். (படம் 13·12) வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், மையம் O எனவும் $\widehat{AOB} = 2\alpha$ எனவும்

கொள்வோம். ACB-ன் மையப்புள்ளி C எனக் கொள்வோமாயின் OC, $\widehat{AOB}$-ன் இருசமவெட்டியாக அமையும். பிறைமத்தின் ACD



படம் 13·12

BCD பகுதிகள் OC-ஐப் பொறுத்து சரி சீரமைவாக இருப்பதால் பிறைமத்தின் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் இருக்கவேண்டும்.

பிறைமம் AO BC என்ற வட்டப்பகுதியின் ஒரு பகுதியாகும். ஒரு வட்டப்பகுதியின் புவியீர்ப்புமையத்தையும் அதன் மற்ருெரு பகுதியான AOB() என்ற முக்கோணப் பகுதியின் புவியீர்ப்புமையத் தையும் நாம் அறிவோமாதலால் பிறைமத்தின் புவியீர்ப்புமையத் தைப் பின்வருமாறு காணலாம் :

ஓரலகு பரப்பின் எடை P என்ருல்

AOBC என்ற வட்டப்பகுதியின் எடை$(W) = Pr^2\alpha$

O-விருந்து அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலேவு

$$(\bar{x}) = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} \quad \text{(சமன் 13·6)}$$

AOBD என்ற முக்கோணப்பகுதியின் எடை

$$(W_1) = P \times \tfrac{1}{2} OD \times AB$$
$$= \frac{1}{2} Pr\cos\alpha \times 2r\sin\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2} Pr^2\, 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2} Pr^2 \sin 2\alpha$$

O-விலிருந்து அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு

$$(x_1) = \frac{2}{3} OD$$
$$= \frac{2}{3} r\cos\alpha$$

∴ ADBC என்ற பிறைமத்தின் எடை $W_2 = W - W_1$

$$= \tfrac{1}{2} Pr^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

O-விருந்து அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு x_2 என இருக்கட்டும்.

O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$w_1x_1 + w_2x_2 = (w_1 + w_2)\bar{x} = w\bar{x}$$

$$x_2 = \frac{w\bar{x} - w_1x_1}{w_2}$$

$$= \frac{Pr^2\alpha \times \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}Pr^2\, 2\sin\alpha\cos\alpha \times \frac{2}{3} r\cos\alpha}{\tfrac{1}{2}Pr^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{r\sin\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

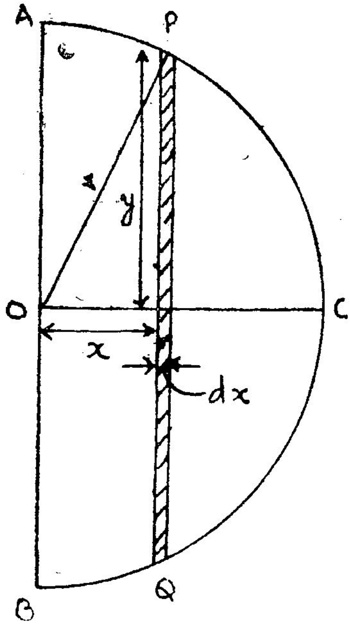
$$x_2 = \frac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 13{\cdot}7$$

சிறப்பு நேர்வு : பிறைமம் அரைவட்டமாக இருக்கும்போது $2\alpha = \pi$

$$x_2 = \frac{4r\sin^3\frac{\pi}{2}}{3(2 \times \frac{\pi}{2} - \sin\pi)}$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \quad \ldots \quad \ldots \quad 31$$

கெட்டியான அரைக்கோளத்தில் டிவியீர்ப்புமையம்: படம் 13·13-ல் AOBC அரைக்கோளத்தின் மையம் (O) வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத்தள வெட்டுமுகத்தைக் காட்டுகிறது. OC, AOB-க்கு நேர்குத்தாக இருப்பின் கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம்



படம் 13·13

OC-ல் இருக்கும். அரைக்கோளத்தின் ஆரம் r எனவும் ஓரலகுப் பருமனின் எடை P எனவும் கொள்வோம்.

அரைக்கோளத்தை AOB-க்கு இணையான தளங்களால் பிரிப்போமாயின் PQ போன்ற வட்டத்தட்டுகளாகக் கிடைக்கும். O-விருந்து x தொலைவிலுள்ள dx தடிப்புள்ள PQ என்ற ஒரு வட்டத் தகட்டைக் கருதுவோம். அதன் ஆரம் y எனில்,

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

$$\text{PQ-ன் பருமன்} = \pi (r^2 - x^2)\, dx.$$

$$\text{PQ-ன் எடை } dw = \pi P (r^2 - x^2) dx.$$

∴ அரைக்கோளத்தின் மொத்த எடை

$$= \int_{o}^{r} dw = \int_{o}^{r} \pi \, P \, (r^2 = x^2) \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \pi \gamma^3 P$$

O-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

PQ-ன் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் O-விருந்து x தொலைவில் இருக்கும்.

PQ-ன் எடையின் திருப்புதிறன் $= dw. \, x$

$$= \pi P \, (r^2 - x^2) \, x \cdot dx$$

PQ போன்ற வட்டத் தகடுகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்

தொகை $= \int_{o}^{r} \pi \, P \, (r^2 - x^2) \, x dx.$

$$= \pi \, P \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \pi \, P r^4.$$

அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் O-விருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் இருக்கட்டும்.

அரைக்கோளத்தின் மொத்த எடையின் திருப்புதிறன்

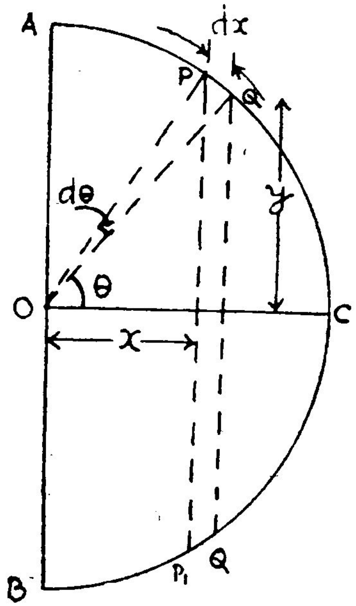
$$= \frac{2}{3} \pi \, r^3 \, P \bar{x}$$

$$\frac{2}{3} \pi r^3 \, P\bar{x} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8} r \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 13{\cdot}8$$

எனவே கெட்டியான அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் வட்டத்தளத்திற்குச் நேர்குத்தான ஆரத்தில் கோள மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8} r$ தொலைவில் உள்ளது.

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம்: படம் 13·14 அரைக்கோளத்தின் மையம் (O) வழியாகச்செல்லும் செங்குத்துத் தள வெட்டுமுகத்தைக் காட்டுகிறது. OC, AOB-க்கு நேர்குத்தாக



படம் 13·14

இருப்பின் கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் இருக்கும். அரைக் கோளத்தின் ஆரம் r எனவும் ஓரலகு பரப்பின் எடை P எனவும் கொள்வோம். அரைக்கோளத்தை AOB-க்கு இணையான தளங்களால் பிரிப்போமாயின், PQQ_1P_1 போன்ற வளையங்களாகக் கிடைக்கும்.

O-விருந்து x தொலைவில் உள்ள PQQ_1P_1 என்ற ஒரு வளையத்தைக் கருதுவோம். $\widehat{QOC}=\theta$ எனவும் $\widehat{POQ}=d\theta$ எனவும் இருக்கட்டும். $PQ=rd\theta$.

குறிப்பிட்ட வளையத்தின் ஆரம் y எனில் அதன் பரப்பளவு

$$= 2\pi y \, PQ$$

$$= 2\pi r \sin\theta \, rd\theta$$

$$= 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta$$

வளையத்தின் எடை $dw = 2\pi P r^2 \sin\theta \, d\theta$

$$\therefore \text{அரைக்கோளத்தின் எடை} = \int_0^{\pi/2} 2\pi d^2 r \sin\theta d\theta = 2\pi r^2 P$$

O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின் :

குறிப்பிட்ட வளையத்தின் புவியீர்ப்புமையம் OC-ல் O-விருந்து x தொலைவில் இருக்கும்.

$\therefore$ அதன் எடையின் திருப்புதிறன் $= dw.x$

$$= 2\pi P r^2 \sin\theta \, r \cos\theta \, d\theta$$

$$= \pi P r^3 \sin 2\theta \; d\theta.$$

அரைக்கோளத்தில் அடங்கிய எல்லா வளையங்களின் எடைகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை.

$$= \int_0^{\pi/2} \pi P r^3 \sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \pi P r^3 \times \tfrac{1}{2} \left[-\cos 2\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi P r^3$$

அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் O-விருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் இருக்கட்டும்.

$\therefore$ அரைக்கோளத்தின் மொத்த எடையின் திருப்புதிறன்

$$= 2\pi r^2 P \bar{x}$$

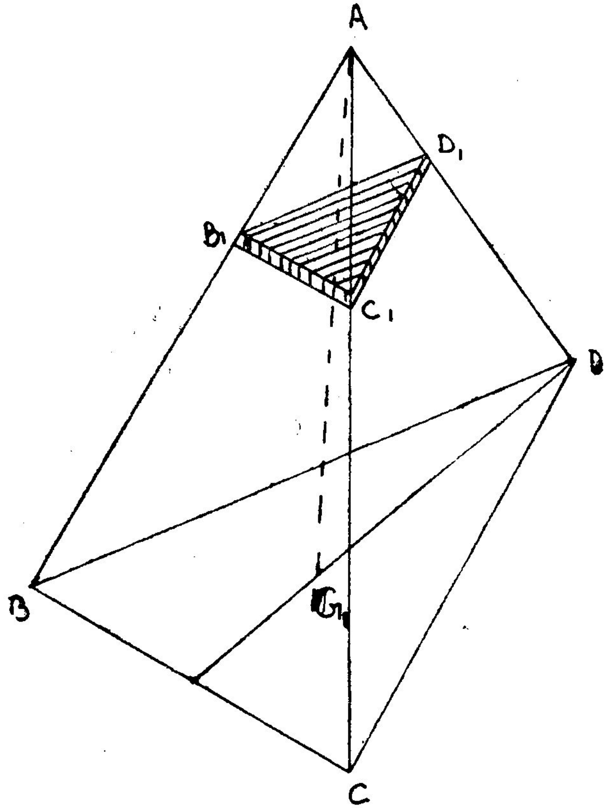
$$2\pi r^2 P \bar{x} = \pi P r^3$$

$$\bar{x} = \frac{r}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 13{\cdot}9$$

எனவே, உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் வட்டத் தளத்திற்கு நேர்குத்தான ஆரத்தில் கோள மையத்திலிருந்து $\frac{r}{2}$ தொலைவில் இருக்கும்.

கெட்டியான நான்முகியின் (tetra hedron) புவியீர்ப்புமையம் :
B C D என்ற முக்கோணத்தை அடித்தளமாகவும் A-ஐ

உச்சியாகவும் கொண்ட ABCD என்ற நான்முகியைக் கருதுவோம் (படம் 13 15). நான்முகியின் உயரம் h எனவும் அதன் முக்கோண அடித்தளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் முக்கோணத்தின் மையக்கோடு சந்தியான G_1 எனவும் கொள்வோம். நான்முகியை அதன் அடித் தளத்திற்கு இணையான முக்கோணத் தகடுகளாகப் பிரிப்போமாயின், ஒவ்வொன்றின் புவியீர்ப்புமையமும் அதன் மையக்கோடு சந்தியில் அமையுமாதலால் நான்முகியின் புவியீர்ப்புமையம் AG_1-ல் இருக் கும் என்பது தெளிவாகும்.



படம் 13·15

நான்முகியின் அடித்தளத்திற்கு இணையான $B_1C_1D_1$ என்ற முக்கோணத் தகட்டைக் கருதுவோம். அதன் தடிப்பு dx எனவும்

-லிருந்து அதன் ஆழம் x எனவும் நான்முகியின் ஓரலகுப் பருமனின் எடை P எனவும் கொள்வோம்.

இனி, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$

மேலும் BCD, $B_1C_1D_1$ ஆகிய முக்கோணங்களின் உயரங்கள் முறையே a, a_1 எனக் கொள்வோமாயின்,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore \frac{B_1C_1D_1\text{-ன் பரப்பளவு}}{BCD\text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{\frac{1}{2}\times a_1 \times B_1C_1}{\frac{1}{2}\times a \times BC} = \frac{x}{h} \times \frac{x}{h} = \frac{x^2}{h^2}$$

BCD-ன் பரப்பளவு S எனக் கொள்வோமாயின்

$B_1C_1D_1$-ன் பரப்பளவு $= S\,\frac{x^2}{h^2}$

$\therefore$ $B_1C_1D_1$-ன் பருமன் $= S\,\frac{x^2}{h^2}\,dx$

$\therefore$ $B_1C_1D_1$-ன் எடை (dw) $= PS\,\frac{x^2}{h^2}\,dx$

$\therefore$ நான்முகியின் மொத்த எடை

$$(w) = \int_0^h dw = \int_0^h PS\,\frac{x^2}{h^2}\,dx$$

$$W = \tfrac{1}{3}\,PS\,h.$$

A-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின் :

$B_1\,C_1\,D_1$, A-லிருந்து x தொலைவில் இருப்பதால்

அதன் திருப்புதிறன் $= Ps\,\frac{x^3}{h^2}\,dx$

நான்முகியில் அடங்கியுள்ள அத்தகைய தகடுகளின் திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$= \int_0^h PS\,\frac{x^3}{h^2}\,dx$$

$$= \frac{PS\,h^2}{4}$$

நான்முகியின் புவியீர்ப்பு மையம் A-லிருந்து $\bar{x}$ ஆழத்தில் இருக்குமாயின் அதன் மொத்த எடையின் திருப்புதிறன்.

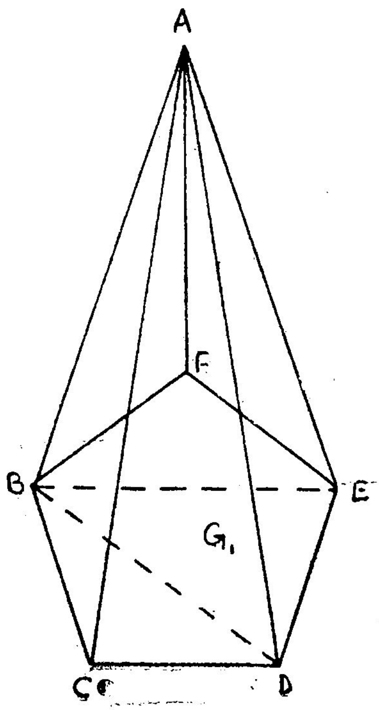
$$= \frac{sh}{3}\bar{x}$$

$$\therefore \quad \frac{Psh}{3}\bar{x} = \frac{Psh^2}{4}$$

$$\bar{x} = \tfrac{3}{4}h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13{\cdot}10$$

எனவே, நான்முகியின் புவியீர்ப்புமையம் AG_1ல் அதனை $AG : GG_1 = 3 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் G என்ற புள்ளியில் அமையும்.

பல்கோணத் தளத்தில் அமைந்த பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்: B C D E F என்ற ஐங்கோணத் தளத்தின்மீது அமைந்த, A என்ற உச்சியையுடைய ABCDEF என்ற பட்டைக் கூம்பைக்



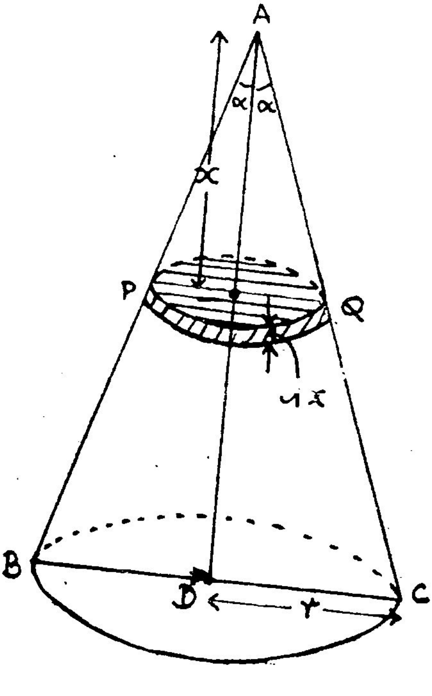
படம் 13·16

கருதுவோம். (படம் 13·16). பட்டைக் கூம்பின் அடித்தளத்தின் புவியீர்ப்புமையம் G_1 என்றால் கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் AG_1-ல் அமைய வேண்டும் என்பது தெளிவு.

கூம்பின் அடித்தளத்தை BCD, BDE, BEF என்ற முக்கோணங்களாகப் பிரிப்போமாயின் பட்டைக் கூம்பை ABCD, ABDE, ABEF என்றநான் முகிகளாகக் கருதலாம்.

பட்டைக் கூம்பின் உயரம் h எனில்நான்முகிஒவ்வொன்றின் புவியீர்ப்புமையமும் A-லிருந்து $\frac{3}{4}h$ ஆழத்தில் இருக்கும். எனவே, பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் A-லிருந்து $\frac{3}{4}h$ ஆழத்திலுள்ள தளத்தில் AG_1-ல் அதனை $AG : GG_1 = 3 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் G என்ற புள்ளியில் அமையும்.

பட்டைக் கூம்பின் அடித்தளத்தின் பக்கங்களை எண்ணற்ற அளவுக்கு அதிகமாக்கினால் அது ஏறத்தாழ ஓர் ஒழுங்கான கூம்பாக அமையும். எனவே h உயரமுள்ள கெட்டியான கூம்பின்



படம் 13·17

புவியீர்ப்புமையம் அதன் உச்சியையும் அடித்தளத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில் உச்சியிலிருந்து $\frac{3}{4}h$ ஆழத்தில்அமையும். கூம்பின் புவியீர்ப்புமையத்தை நுண்கணித முறையிலும் காணலாம்.

கெட்டியான நேர் கூம்பின் (right cone) புவியீர்ப்பு மையம்: h உயரத்தையும் r என்ற ஆரத்தையுடைய அடித்தளத்தையும் 2α என்ற உச்சிக்கோணத்தையும் கொண்ட ABC என்ற கெட்டியான நேர் கூம்பைக் கருதுவோம். (படம் 13·17). படத்தில் $AD = h$, $DC = r$. கூம்பை அடித்தளத்திற்கு இணையாக மென்தகடுகளாகப் பிரித்து அத்தகைய PQ என்ற ஒரு தகட்டைக் கருதுவோம். PQ, A-லிருந்து x ஆழத்தில் இருப்பதாகவும் அதன் தடிப்பு dx எனவும் கொள்வோம். குறிப்பிட்ட தகட்டின் ஆரம் y எனில் $y = x\tan\alpha$

குறிப்பிட்ட தகட்டின் பருமன் $= \pi y^2 dx$

$= \pi x^2 \tan^2\alpha\, dx$

கூம்பின் ஓரலகுப் பருமனின் எடை P என்றால் குறிப்பிட்ட தகட்டின் எடை $dw = \pi P x^2 \tan^2\alpha\, dx$

$$\therefore \text{கூம்பின் மொத்த எடை} \quad w = \int_0^h dw = \int_0^h \pi P \tan^2\alpha\, x^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi P \tan^2\alpha\, h^3$$

A-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்:

PQ. A-லிருந்து x தொலைவிலிருப்பதால்

PQ-ன் திருப்புதிறன் $= dw.\, x$

$= \pi P \tan^2\alpha\, x^3 dx.$

கூம்பிலுள்ள அத்தகைய தகடுகளின் திருப்புதிறன்களின்

$$\text{குறியியல் கூட்டுத்தொகை} = \int_0^h \pi P \tan^2\alpha\, x^3 dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi P \tan^2\alpha\, h^4$$

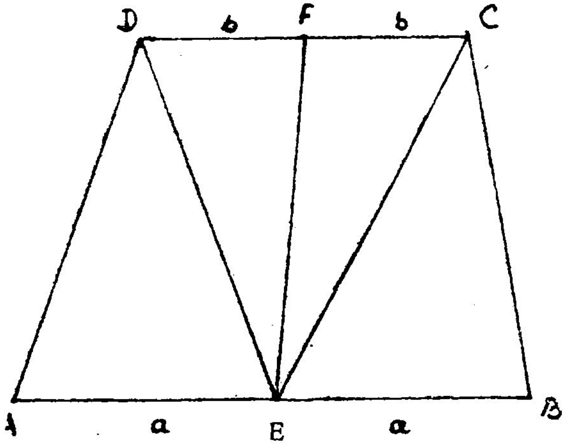
கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் A-லிருந்து $\bar{x}$ ஆழத்தில் இருக்குமாயின் அதன் மொத்த எடையின் திருப்பு திறன்

$= \frac{1}{3}\pi P \tan^2\alpha\, h^3\bar{x}$

$$\therefore \tfrac{1}{3}\pi P \tan^2\alpha\, h^3 \bar{x} = \tfrac{1}{4}\pi P \tan^2\alpha\, h^4$$

$$\bar{x} = \tfrac{3}{4}h \quad \ldots \quad \ldots \quad 13{\cdot}11$$

ஈரிணைப் பக்க நாற்கர சென்தகட்டின் புவியீர்ப்புமையம் : AB, CD என்ற இணையான பக்கக்களையுடைய ஓர் ஈரிணைப் பக்க நாற்கரத்தைக் கருதுவோம். AB = $2a$, CD = $2b$ எனக் கொள்



படம் 13·18

வோம். [படம் 13·18]. AB, CD ஆகிய பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் முறையே E, F எனக்கொள்வோமாயின் E-ஐ C, D புள்ளிகளுடன் இணைப்பதன்மூலம் நாற்கரத்தை AED, CEB, DEC என்ற முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம். AB, DC ஆகியவை இணைப் பக்கங்களாதலால் முக்கோணங்களின் உயரங்கள் ஒரே அளவாய் இருக்கும். எனவே, அவற்றின் பரப்பளவுகள் அவற்றின் அடிப் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் ; ஆகவே அவற்றின் எடைகளும் அடிப்பங்களின் நீளங்களுக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும். DAE, CEB, DEC ஆகிய முக்கோணங்களின் எடைகளை முறையே Ka, Ka, $2Kb$ எனக் கொள்ளலாம் ; K என்பது ஒரு மாறிலி. முக்கோணத்தின் மொத்த எடையை அதன் உச்சிகளில் சமமாகப் பங்கிடலாமாதலால் A, B ஆகிய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{1}{3}Ka$ என்ற எடையும், C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\left(\frac{1}{3}Ka + \frac{2}{3}Kb\right)$ என்ற எடையும் E-ல் $\left(\frac{2}{3}Ka + \frac{2}{3}Kb\right)$ என்ற எடையும் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

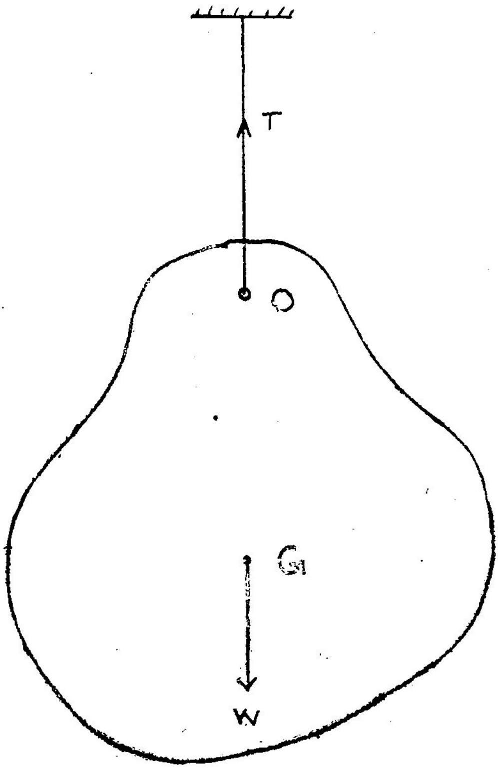
இனி, D, C ஆகியவற்றில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள $\left(\frac{1}{3}Ka + \frac{2}{3}Kb\right)$ என்ற எடைகளின் தொகுபயன் $\left(\frac{2}{3}Ka + \frac{4}{3}Kb\right)$

DC-யின் மையப்புள்ளியாகிய F ல் செயற்படும். அவ்வாறே A, B ஆகியவற்றில் ஒவ்வொன்றிலும் செயற்படும் $\frac{1}{3}ka$ என்ற எடைகளின் தொகுபயன், $\frac{2}{3}ka$, AB-ன் மையப்புள்ளியாகிய E-ல் செயற்படும். ஆகவே, E-ல் செயற்படும் மொத்த எடை$\left(\frac{4}{3}Ka+\frac{2}{3}Kb\right)$ ஆகும்.

எனவே ஈரிணைப்பக்க நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்புமையம் EF-ல் அதனை $\left(\frac{4}{3}Ka+\frac{2}{3}Kb\right)EG=\left(\frac{2}{3}Ka+\frac{4}{3}Kb\right)GF$

அதாவது $$\frac{EG}{GF}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் G என்ற புள்ளியில் அமையும்.



படம் 13·19

பொருட்களின் சமநிலைகள் :

ஒரு திண்பொருள் ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். [படம் 13·19]. அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன : 1 அதன் புவியீர்ப்புமையம் (G) வழியாகச் செங்குத்தாகச் செயற்படும் அதன் எடை (W). 2. O-ல் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை (T).

பொருள் சமநிலையிலிருப்பதால் அவ்விரு விசைகளும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமைய வேண்டும். ஆனால் பொருளின் எடை செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுவதால் OG செங்குத்தாக அமைய வேண்டும். அதாவது பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் தொங்கு தானத்திற்கு நேர்கீழே இருக்க வேண்டும்.

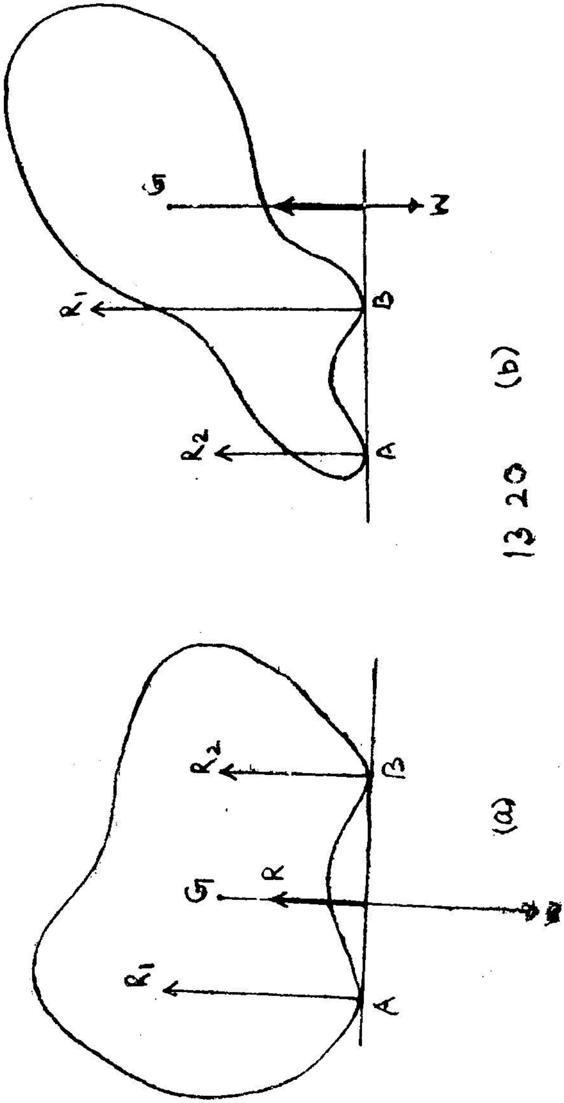
அடுத்து ஒரு தளத்தின்மீது சமநிலையில் இருக்கும் பொருட்களைக் கருதுவோம். [படம் 13·20]

பொருளில் A,B என்ற புள்ளிகள் தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். A,B என்ற புள்ளிகளில் தளம் செங்குத்துத் திசையில் R_1, R_2 என்ற எதிர்விசைகளை மேல் நோக்கிச் செயற்படுத்தும். அவை ஒருபோக்கு இணைவிசைகளாதலால் அவற்றின் தொகுபயன் (R) A-க்கும் B-க்கும் இடையே ஒரு புள்ளியில் செயற்படும்.

இப்பொழுது பொருளின் எடையும் தொகுபயன் செயற்படும் கோட்டின் வழியே செயற்படுமாயின் அதாவது பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு A-க்கும் B-க்குமிடையே செல்லுமாயின் (படம் 13.20a) பொருள் சமநிலையில் இருக்கும். மாறாக,புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு AB-க்கு வெளியே செல்லுமாயின் (படம் 13 20b-இங்கு எடையும் எதிர்விசைகளின் தொகுபயனும் ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே செயற்படா) பொருள் சமநிலையில் இருக்காது. எனவே ஒரு பொருள் சமநிலையிலிருக்க அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு அதனைத் தாங்கும் அடித்தளத்தினுள் ஒரு புள்ளி வழியேசெல்ல வேண்டும்.

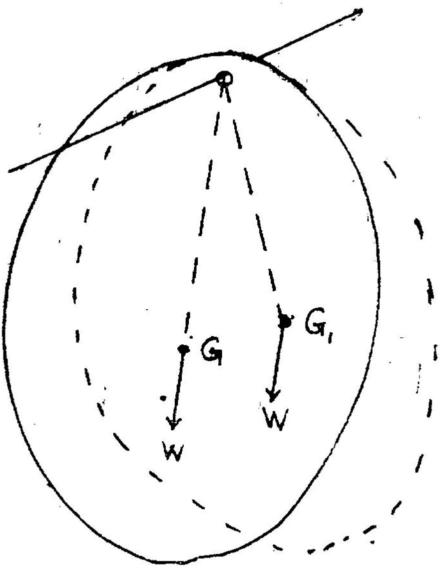
ஒரு பொருளின் சமநிலையானது அதன் புவியீர்ப்புமையம் அதன் தாங்குதானத்திற்கு (point of support மேலோ, கீழோ அல்லது தாங்குதானத்திலேயோ அமைவதைப் பொறுதுமூன்று வகைப்படும். அவையான: நிலையான சமநிலை, நிலையற்ற சமநிலை, நடுவியல் சமநிலை எனப்படும், அவை ஒவ்வொன்றைப் பற்றியும் இங்கு ஆராய்வோம்.

- படம் 13-21ல் உள்ளவாறு புவியீர்ப்புமையத்திற்கு மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு



பொருளைக் கருதுவோம். அதனை, அதன் புவியீர்ப்புமையம் (G)

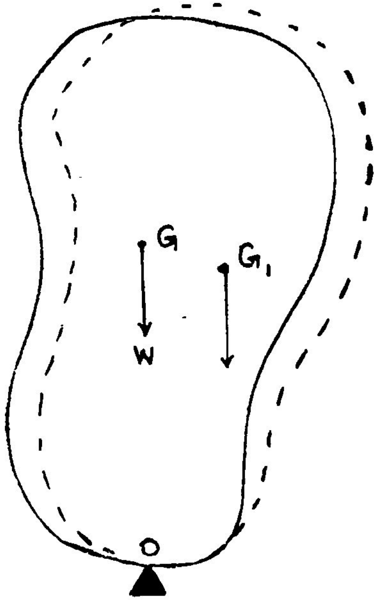
G_1 ஐ அடையுமாறு அதன் சமநிலையிலிருந்து சற்று அசைத்து விடுவதாகக் கொள்வோம். இந் நிலையில் G_1ல் செயற்படும் அதன் எடை அதனைப் பழைய நிலைக்கே சுழற்றும். இப்பொழுது பொருளின் சம நிலை நிலையான சமநிலை எனப்படும். இங்கு பொருள் அசைக்கப் படும்போது அதன் புவியீர்ப்புமையம் உயர்த்தப்படுவதைக் காண லாம்.



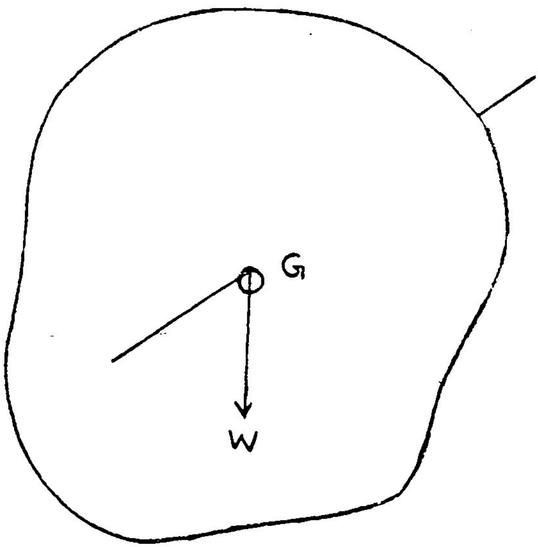
படம் 13,21

எனவே சமநிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருளைச் சற்று அசைத்து விடும்பொழுது அது தன் பழைய நிலைக்கே திரும்புமாயின் அதன் சம நிலை நிலையான சமநிலை எனப்படும்.

அடுத்து, படம் 13-22ல் உள்ளதுபோல் தாங்குதானம் புவியீர்ப் புமையத்திற்குக் கீழுள்ள ஒருபுள்ளியாகஅமைவதாகக் கொள்வோம் இங்கு பொருளைச் சிறிது அசைத்துவிடும்போது அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் புதிய நிலையில் செயற்படும் எடை பொருளைச் சமநிலையி லிருந்து மேன்மேலும் விலகிச் செல்லுமாறு செய்யும். இங்குப்பொருள் அசைக்கப்படும்போது அதன் புவியீர்ப்புமையம் தாழ்த்தப்படுவ தைக் கணலாம். பொருளின் இத்தகைய சமநிலை நிலையற்ற சமநிலை எனப்படும்.



படம் 13.22

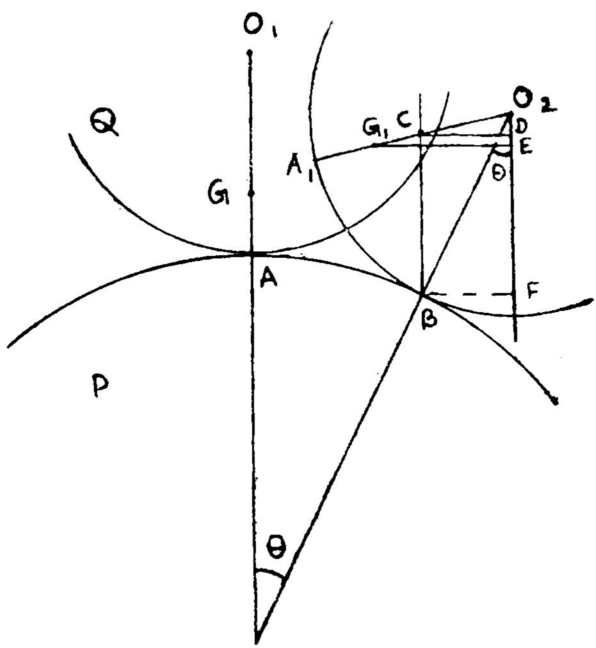


படம் 13.23

எனவே சமநிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருளைச் சற்று அசைத்துவிடும் போது அது தன் பழைய நிலைக்குத் திரும்புவதில்லையாயின் அந்தச் சம நிலை நிலையற்ற சமநிலையாகும்.

மூன்றாவதாக; படம் 13.23-ல் உள்ளவாறுபுவியீர்ப்புமையம் வழி யாகச் செல்லும் ஒருதாங்கியில் நிறுத்தப்பட்டு சமநிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அத்தகைய ஒரு பொருளைச் சிறிது அசைத்துவிடும்பொழுது அதன் புவியீர்ப்புமையம் நிலைமாறுவ தில்லையாதலால் அது அசைத்துவிடப்பட்ட நிலையிலும் சமநிலையில் இருக்கும்; தன் பழைய நிலைக்கு மீண்டும் திரும்பவோ அந்நிலையிலி ருந்து மேன்மேலும் விலகிச் செல்லவோ முயற்சிக்காது. இங்குப் புவி யீர்ப்புமையம் உயர்த்தப்படவோ தாழ்த்தப்படவோ இல்லை. பொரு ளின் அத்தகைய சமநிலை நடுவியல் சமநிலை எனப்படும்.

சமநிலையில் இருக்கும் ஒரு பொருளைச் சற்று அசைத்துவிடும் பொழுது, அசைத்து விடப்பட்ட நிலையிலும் அது சமநிலையிலிருக்கு மாயின் அதன் சமநிலை நடுவியல் சமநிலை எனப்படும்



படம் 13·24

தெரிவு: ஒரு திண்பொருள் மற்றொரு நிலையான திண்பொரு ளின்மீது சமநிலையிலிருக்கிறது. பொருட்களின் பரப்புகள் அவை

ஒன்றின்மீது ஒன்று நழுவாவண்ணம் சொரசொரப்பாக இருக்கின்றன. சமநிலை நிலையானதாகவோ நிலையற்றதாகவோ இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பெறுக.

நிலையான பொருளை P எனவும் அதன்மேல் சமநிலையிலிருக்கும் பொருளை Q எனவும் அழைப்போம். பொதுவகையாக இருப்பதற்கேற்ப திண்பொருட்களின் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் பரப்புகள் கோளகப் பரப்புகள் எனக் கொள்வோம். P-ன் பரப்பின் வளைவு மையம் O எனவும், வளைவு ஆரம் R எனவும், Q-ன் பரப்பின் வளைவு மையம் O_1 எனவும் வளைவு ஆரம் r எனவும் கொள்வோம். Q-ன் புவியீர்ப்புமையம் G. Q சம நிலையிலிருக்கும் போது P.Q ஆகியவற்றின் பரப்புகள் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் புள்ளி A என்றால் $G, O_1 A O$ சென்றசெங்குத்துக் கோட்டில் அமையும். AG=h என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது Q-ஐச் சற்று உருளுமாறு செய்வதாகக் கொள்வோம். Q-ன் புதிய நிலையில் O_1, G, A ஆகியவற்றின் புதிய நிலைகள் முறையே O_2, G_1. A_1, எனவும் Q, P-ன் பரப்பைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் புள்ளி B எனவும் கொள்வோம். $\widehat{AOB}=\theta$. $\widehat{A_1O_2B}=\phi$ எனவும் இருக்கட்டும். $O_2 A_1$-ஐ C-ல் சந்திக்குமாறு BC என்ற செங்குத்துக்கோட்டையும் O_2 வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோட்டிற்கு நேர்குத்தாக C, G_1 ஆகியவற்றிலிருந்து முறையே CD G,E என்ற கோடுகளையும் வரையவும்.

இனி, வில் AB = வில் A_1B

அல்லது $R\theta = r\phi$ ....(i)

G_1, BC என்ற கோட்டிற்கு இடது புறமோ அல்லது வலது புறமோ இருப்பதற்கேற்ப அதாவது GE, CD-ஐ விடப் பெரிதாகவோ அல்லது சிறிதாகவோ இருப்பதற்கேற்ப Q-ன் சமநிலை நிலையானதாகவோ, நிலையற்றதாகவோ இருக்கும்.

$$\text{இப்பொழுது}\quad G_1E = G_1O_2 \sin G_1\widehat{O_2}E$$
$$= (r-h)\sin(\theta+\phi)$$
$$CD = BF = r\sin\theta$$

∴ Q-ன்சமநிலை நிலையானதாகவோ நிலையற்றதாகவோ இருப்பதற்கேற்ற நிபந்தனை $(r-h)\sin(\theta+\phi) \gtrless r\sin\theta$.

அதாவது $$\frac{r-h}{r} \gtrless \frac{\text{sni }\theta}{\sin(\theta+\phi)}$$

பொருளைச் சற்றே அசைத்து விடுவதால் θ, ϕ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்கள் சிறியவையாயிருக்குமாதலால்,

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)} = \frac{\theta}{\theta+\phi}$$

சமன் (1)-லிருந்து $\dfrac{\theta}{\phi} = \dfrac{r}{R}$

$$\frac{\theta}{\theta+\phi} = \frac{r}{R+r}$$

எனவே, சமநிலை நிலையானதாகவோ நிலையற்றதாகவோ இருப்பதற்கான நிபந்தனை

$$\frac{r-h}{r} \gtrless \frac{r}{R+r}$$

அதாவது $$1-\frac{h}{r} \lessgtr \frac{r}{R+r}$$

அதாவது $$\frac{h}{r} \gtrless \frac{R}{R+r}$$

அதாவது $$h \lessgtr \frac{Rr}{R+r}$$

அதாவது $$\frac{1}{h} \gtrless \frac{R+r}{Rr}$$

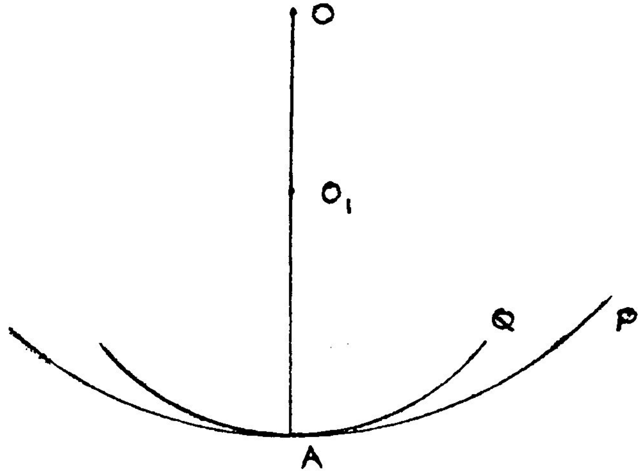
அதாவது $$\frac{1}{h} \gtrless \frac{1}{R}+\frac{1}{r}$$

எனவே $$\frac{1}{h} > \frac{1}{R}+\frac{1}{r}$$

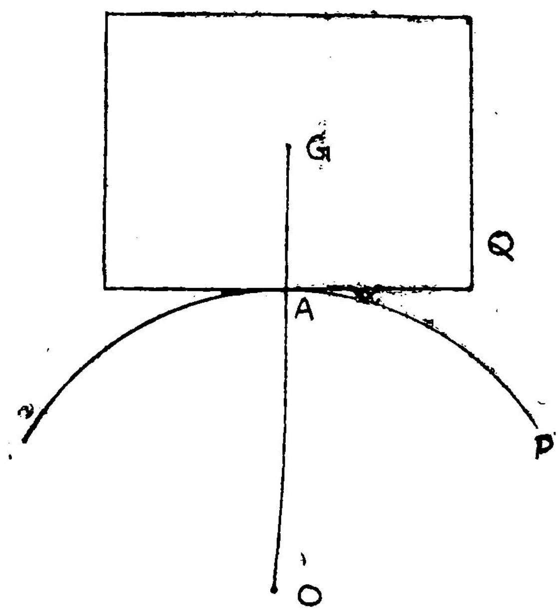
என்றால் சமநிலை நிலையானது

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{R}+\frac{1}{r}$$

என்றால் சமநிலை நிலையற்றது.



படம் 13.25



படம் 13.26

சிறப்பு நேர்வுகள் :

1. இரு பரப்புகளும் குழிபரப்புகளாக இருத்தல் [படம் 13.25] இங்கு P-ன் வளைவுமையம் மேல்நோக்கி இருப்பதால் R எதிர் குறியுடையதாயிருக்கும்.

$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ என்றால் சமநிலை நிலையானதாகும்.

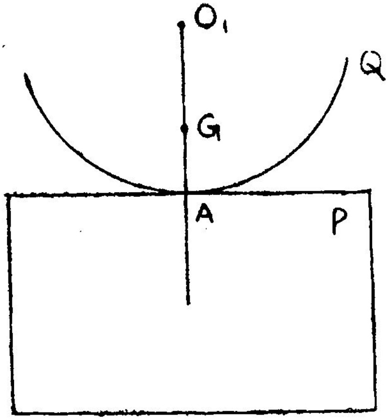
$\frac{1}{h} < \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ என்றால் சமநிலை நிலையற்றதாகும்.

2. Q-ன் பரப்பு சமதளமாகவும் P-ன் பரப்பு குவிபரப்பாகவும் இருத்தல் [படம் 13.26].

இங்கு $r = \infty$ (முடிவிலி) ஆகும். எனவே,

$\frac{1}{h} > \frac{1}{R}$ அல்லது $h < R$ என்றால் சமநிலை நிலையானதாகும்.

$\frac{1}{h} < \frac{1}{R}$ அல்லது $h > R$ என்றால் சமநிலை நிலையற்றதாகும்.



படம் 13.27

3. P-ன் பரப்பு சமதளமாகவும் Q-ன் பரப்பு கோளகப்பரப்பாகவும் இருத்தல் [13.27].

இங்கு R = α. எனவே

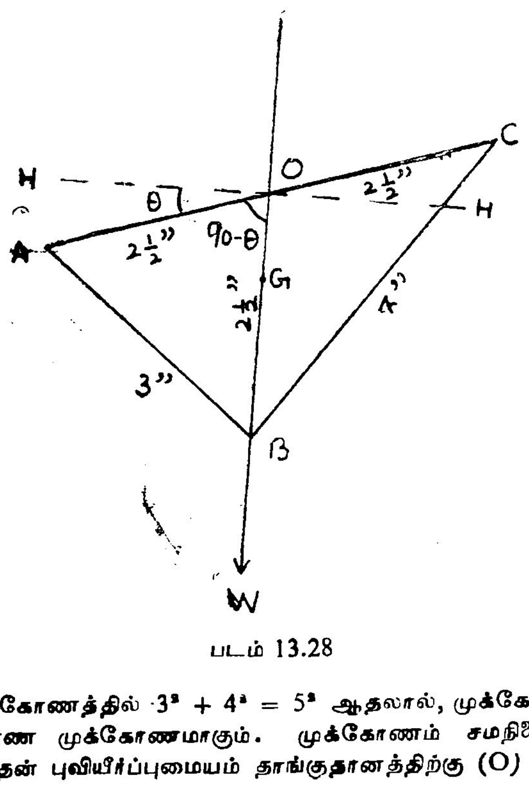
$\frac{1}{h} > \frac{1}{r}$ என்ருல் அல்லது

$h < r$ என்ருல் சமநிலை நிலையானதாகும்.

$h > r$ என்ருல் சமநிலை நிலையற்றதாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. முக்கோண வடிவ சீரான மென்தகடு ஒன்றின் பக்கங்கள் 3, 4, 5 அங்குலங்களாகும். அது நீளமிக்க பக்கத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அப் பக்கம் கிடைதளத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

முக்கோணத்தின் நிலையைப் படம் 13.28-ல் காணலாம் முக்கோணத்தில் AB = 3″, BC = 4″ AC = 5″. G என்பது அதன் புவியீர்ப்புமையம்.



படம் 13.28

முக்கோணத்தில் $3^2 + 4^2 = 5^2$ ஆதலால், முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். முக்கோணம் சமநிலையிலிருப்பதால் அதன் புவியீர்ப்புமையம் தாங்குதானத்திற்கு (O) நேர்கீழாக

இருக்க வேண்டும். அதாவது BO என்ற மையக்கோடு செங்குத்தாக இருக்க வேண்டும்.

இனி, AC பக்கம் கிடைத்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொள்வோமாயின் $\widehat{AOH} = \theta$, $\widehat{AOB} = 90 - \theta$. மேலும், $AO = OC = OB = 2\frac{1}{2}''$.

சமன் 12.11-ன் படி

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) \cot (90 - \theta) = \frac{5}{2} \cot C - \frac{5}{2} \cot A$$

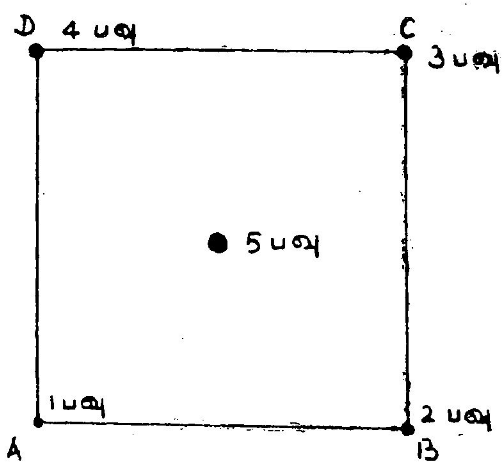
$$2 \tan \theta = \cot C - \cot A$$

$$2 \tan \theta = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{7}{24}$$

அல்லது $\theta = 16^\circ 15'$

மாதிரிக் கணக்கு 2. 2 அடி பக்கத்தையுடைய ABCD என்ற சதுரத்தின் மூலைகளில் 1, 2, 3, 4 பவு எடைகளும் அதன் மையத்தில் 5 பவு. எடையும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. எடைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் கணக்கிடுக.



படம் 13.29

படம் 13.29 சதுரத்தையும் எடைகளின் அமைப்பையும் காட்டுகிறது. இங்கு எடைகளை துகள்களின் தொகுதியாகக் கருதலாம்.

எனவே சமன் 13.2 a, 13.2b ஆகியவற்றைப்பயன்படுத்தி புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காணலாம். AB, AD ஆகியவற்றை X, Y ஆயங்களாகக் கருதுவோம். எடைகளின் புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆயத் தொலைவுகள் ($\bar{x}, \bar{y}$) எனக் கொள்வோம்.

AD-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W} = \frac{1\times O+2\times 2+3\times 2+4\times O+5\times 1}{1+2+3+4+5}$$

$$= \frac{15}{15} \times 1 \text{அடி}$$

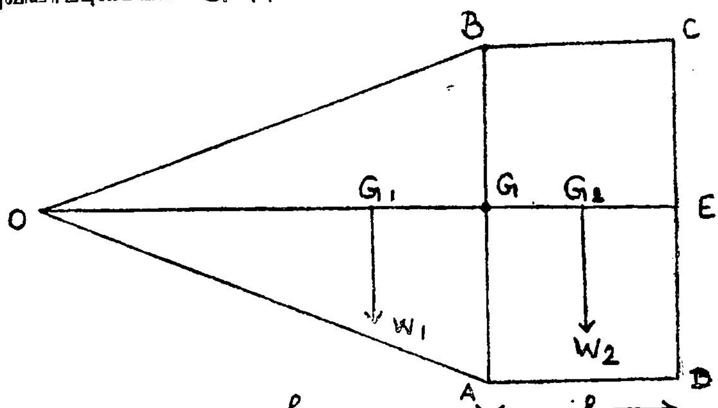
AB ஐப் பற்றிய திருப்பதிறன்களைக் காணின்,

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Wy}{\Sigma W} = \frac{1\times O+2\times O+3\times 2+4\times 2+5\times 1}{1+2+3+4+5}$$

$$= \frac{19}{15} \text{அடி} = 15.2 \text{ அங்.}$$

எனவே, புவியீர்ப்புமையம் AB, CD ஆகியவற்றின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டில் AB-லிருந்து 15·2 அங். தொலைவில் அமையும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. ஒரே அளவு அடித்தளங்களையுடைய ஒரு உருளையும் கூம்பும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பொதுப் புவியீர்ப்புமையம் அவற்றின் பொது அடித்தளத்தின் மையத்தில்



படம் 13.30

அமைய வேண்டுமாயின் அவற்றின் உயரங்களின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 13·30-ல் OAB, ABCD ஆகியவை அவற்றின் பொது அச்சு வழியே செல்லும் செங்குத்துதள வெட்டுமுகத்தைக் குறிக்கின்றன; AE பொது அச்சைக் குறிக்கிறது. கூம்பின் உயரம் h_1 எனவும் உருளையின் உயரம் h_2 எனவும் கொள்வோம். அவற்றின் புவியீர்ப்புமையங்கள் முறையே G_1, G_2 எனில் $OG_1 = \frac{3}{4} h_1$. $GG_2 = \frac{h_2}{2}$; $OG_2 = h_1 + \frac{h_2}{2}$. அவற்றின் எடைகள் W_1, W_2. எனவும் பொது அடித்தளத்தின் மையம் G எனவும் கொள்வோம். G அவற்றின் பொது புவியீர்ப்புமையம் ஆதலால் அவற்றின் மொத்த எடை G-ல் செயற்பட வேண்டும்.

எனவே, O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$W_1 \times OG_1 + W_2 \times OG_2 = (W_1 + W_2)\, OG$$

அதாவது $$W_1 \times \tfrac{3}{4}h_1 + W_2 \times \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = (W_1 + W_2) \times h_1$$

அல்லது $$\frac{W_2\, h_2}{2} = \tfrac{1}{4} W_1 h_1$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2W_2}{W_1}$$

கூம்பு உருளை ஆகியவற்றின் பொதுத்தளத்தின் ஆரம் a எனில்,

$$W_1 \propto \tfrac{1}{3} \pi a^2 h_1$$

$$W_2 \propto \pi a^2 h_2$$

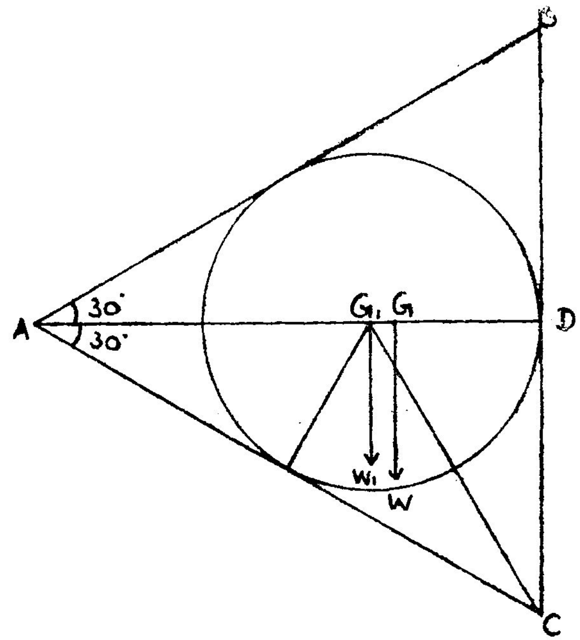
$$\therefore \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{2W_2}{W_1} = \frac{2\pi a^2 h_2}{\pi a^2 h_1} \times 3$$

$$\therefore \quad \frac{h_1^2}{h_2^2} = 6$$

எனவே $$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{6}.$$

மாதிரிக் கணக்கு 4 : 60° உச்சிக்கோணத்தையுடைய சீரான நேர் கூம்பிலிருந்து முடிந்த அளவு பெரிய கோளம் ஒன்று வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 13·31-ல் கூம்பின் அச்சின் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத்தள வெட்டுமுகத்தைக் காட்டுகிறது. G_1 கோளத்தின் மையத்தைக் குறிக்கிறது.



படம் 13·31

கூம்பின் உயரம் h எனக் கொள்வோமாயின் அதன் அடித்தள ஆரம் $a = DC = AD \tan 30 = \frac{h}{\sqrt{3}}$

கூம்பின் உச்சிக்கோணம் 60° ஆதலால்

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 60°$$

$$\therefore \quad \widehat{GCD} = 30°$$

எனவே கோளத்தின் ஆரம்

$$r = G_1D = DC \tan 30$$
$$= \frac{h}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times : \frac{h}{3}$$

இனி, கூம்பின் ஓரலகு பருமனின் எடை P எனவும் அதன் மொத்த எடை W எனவும் கோளத்தின் எடை W_1 எனவும் கொள்வோமாயின்
$$W = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h P$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi \frac{h^2}{3} h P$$
$$= \frac{\pi h^3}{9} P.$$

A-லிருந்து கூம்பின் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு $\frac{3}{4} h$.
$$W_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 P$$
$$= \frac{4}{3}\pi \frac{h^3}{27} P$$
அதாவது $$W_1 = \frac{4}{81}\pi h^3 P$$

A-லிருந்து கோத்ளதின் புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு
$$= h - r = h - \frac{h}{3} = \frac{2h}{3}$$

∴ எஞ்சியுள்ள பகுதியின் எடை
$$W_2 = W - W_1$$
$$= \frac{\pi h^3}{9} P - \frac{4}{81}\pi h^3 P$$
$$= \frac{5\pi h^3 P}{81}$$

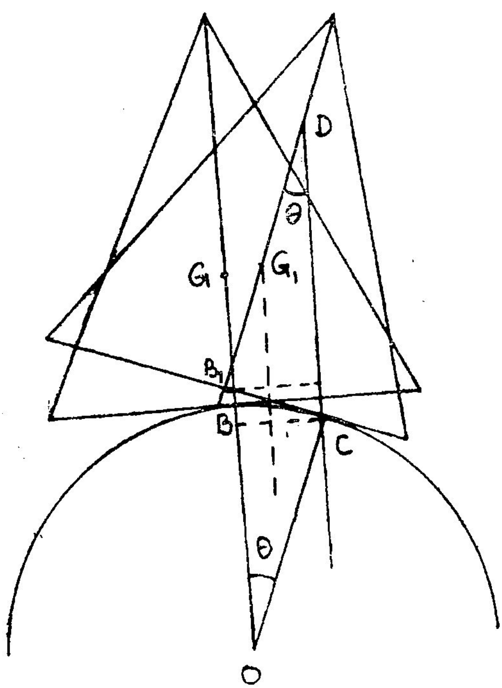
எஞ்சியுள்ள பகுதியின் எடை G_2 என்னும் புள்ளியில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம்.

A-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,
$$W_1 \times AG_1 + W_2 \times AG_2 = W \times AG$$
அதாவது $$\frac{4}{81}\pi h^3 P \times \tfrac{2}{3} h + \frac{5\pi h^3 P}{81} \times AG_2 = \frac{\pi h^3 P}{9} \times \tfrac{3}{4} h$$
அல்லது $$\frac{8}{3} h + 5\, AG_2 = \frac{27}{4} h$$
$$5\, AG_2 = \left(\frac{27}{4} - \frac{8}{3}\right) h = \frac{49}{12} h.$$
எனவே $$AG_2 = \frac{49}{60} h.$$

அதாவது எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் கூம்பின் உச்சியிலிருந்து $\frac{49}{60} h$ தொலைவில் இருக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5 : h அலகு உயரத்தைக் கொண்ட ஒரு கெட்டியான கூம்பு R என்ற ஆரத்தையுடைய ஒரு சொரசொரப்பான கோளத்தின் உச்சியில் சமநிலையில் இருக்கிறது. $R > \frac{h}{4}$ என்றால் கூம்பின் சமநிலை நிலையானது என நிறுவுக.

படம் 13·32ல் கூம்பின் அச்சு வழியாக செல்லும் செங்குத்துத் தள வெட்டுமுகத்தைக் காட்டுகிறது. O, கோளத்தின் மையத்தையும் G, கூம்பின் புவியீர்ப்புமையத்தையும் குறிக்கின்றன. சமநிலையில் கூம்பின் தளம் கோளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் புள்ளி, B. கூம்பின் உயரம் h எனில் $BG = \frac{h}{4}$. கோளத்தின் ஆரம் R எனக் கொள்வோம்.



படம் 13·32

இப்பொழுது கூம்பைச் சற்று அசைத்து விடுவதாகக் கொள்வோம். இந்நிலையில் கூம்பு கோளத்தைத்தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்

புள்ளி C என இருக்கட்டும். B_1, G_1, ஆகியவை B. G ஆகிய வற்றின் புதிய நிலைகளாகும். C வழியே வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு B_1G_1-ஐ D-ல் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம்.

இனி, G_1, CD-க்கு இடது புறத்தில் அமையுமாயின் அதாவது $B_1D > B_1G_1$ என்றால் கூம்பு நிலையான சமநிலையில் இருக்கும்.

$\widehat{BOC} = \theta$ எனில் $B_1\widehat{D}C = \theta$ ஆகும்.

மேலும் B_1C = வில் $BC = R\theta$

ஆனால் $B_1C = B_1D \tan\theta = B_1D \times \theta$ (θ சிறியதாயிருப்பதால்)

∴ $B_1D.\theta = R\theta$

அல்லது $B_1D = R$.

மேலும் $B_1G_1 = \frac{h}{4}$

எனவே $R. > \frac{h}{4}$ என்றால் கூம்பு நிலையான சமநிலையில் இருக்கும்.

பயிற்சி XIII

1. 5 பவு. எடையுள்ள ஓர் உலோகத்தகடு ABC என்ற இருசமபக்க முக்கோண வடிவில் உள்ளது. AB = AC = 5 அடி, BC = 6 அடி என்றால் அதன் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக. 4,6,6, பவு எடைகள் முறையே A, B, C, என்ற மூலைகளில் வைக்கப் படுமாயின் புதிய புவியீர்ப்புமையத்தின் நிலையைக் காண்க.

2. 12 அங். நீளமுள்ள ஓர் உருளையின் விட்டம் 8 அங். நீளத்திற்கு 8 அங்குலமாகவும் எஞ்சியுள்ள 4 அங் நீளத்திற்கு 3 அங் குலமாகவும் இருப்பின் அதன் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக.

3. கனசதுர வடிவிலுள்ள காலிப்பெட்டி ஒன்றின் மூடி 45° கோணத்தில் திறக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சுவர்களின் தடிப்பை மிகமிகச் சிறியதாகக் கருதி பெட்டியின் அந் நிலையில் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் கணக்கிடுக.

4. சீரான வட்டத்தகடு ஒன்றிலிருந்து அதன் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான ஆரங்களின் மையங்களை மையங்களாகக் கொண்ட இருவட்டத்துளைகள் வெட்டியெடுக்கப்படுகின்றன. வட்டத்துளை களின் ஆரம் தகட்டின் ஆரத்தில் மூன்றிலொரு பங்கு என்றால் எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக.

5. a அலகு பக்கமுள்ள சதுர வடிவ மென்தகடு ஒன்று அதன் அண்டைப்பக்கங்களின் மையங்களின் வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் வழியாக இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அவற்றுள் பெரிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் கணக்கிடுக.

6. நேர்கூம்பு ஒன்றும் அதே பொருளால் ஆன ஓர் அரைக் கோளமும் அவற்றின் வட்டத்தளங்களை ஒன்று சேர்த்து இணைக்கப் பட்டுள்ளன. கூம்பின் உயரம் அரைக் கோளத்தின் ஆரத்திற்குச் சமம் என்றால், முழுஉருவத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக.

7. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் G என்னும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளுகின்றன. GABCDG என்ற வடிவில் வளைக்கப்பட்ட சீரான கம்பி ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம் G-இல் அமைகிறது. $AB=\sqrt{3}\ BC$ என நிறுவுக.

8. கூம்பின் அடிக்கண்டத்தின் வட்டமுனைகளின் ஆரங்கள் 2 அடி, 3 அடி ஆகும். முனைகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு 4 அடி என்றால் அதன் புவியீர்ப்புமையத்தைக் காண்க.

9. AB, BC. CD என்ற மூன்று சீரான சமமான தண்டுகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களை அமைக்கு மாறு கெட்டியாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த அமைப்பு A-யிலிருந்து தொங்கவிடப்படுமாயின், DC கிடைமட்டத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

10. சீரான தண்டு ஒன்று அதன் நீளத்திற்குச் சமமான ஆரத்தைக் கொண்ட வட்டவில்லாக வளைக்கப்படுகிறது. அதன் புவியீர்ப்புமையத்தைக் காண்க.

11. ABC என்ற முக்கோண மென்தகடு ஒன்று A-லிருந்தும் B-லிருந்தும் அடுத்தடுத்துத் தொங்கவிடப்படுகிறது. AB பக்கத்தின் இருநிலைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 90° என்றால் $5C^2 = a^2 + b^2$ எனக் காட்டுக.

12. $2a$ அலகு சதுர அடித்தளத்தையும் h அலகு உயரத்தையும் கொண்ட ஓர் உள்ளீடற்ற பட்டைக்கூம்பு சீரான மெல்லிய உலோகத் தகட்டால் செய்யப்பட்டுள்ளது. அடித்தளம் உட்பட கூம்பின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக. இந்தப் பட்டைக் கூம்பின் அடித்தளத்திலிருந்து புவியீர்ப்புமையத்தின் தொலைவு அதே அளவு கெட்டியான பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவுக்குச் சமமானால், $h = 2\sqrt{3}\ a$ என நிறுவுக.

13. சீரான மெல்லிய அரைக்கோள வடிவக் கோப்பை ஒன்று அதே பொருளாலான மூடியால் மூடப்பட்டுள்ளது. அது அதன் விளிம்பில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்படுமாயின், அதன்மூடி கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

14. சீரான கம்பி ஒன்று ஒரு வட்டத்துண்டு வடிவில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. வட்டவில் அரைவட்டத்தைவிடப் பெரிதாகவும் முழுக்கம்பியின் புவியீர்ப்புமையம் வட்டமையத்திலும் இருக்குமாயின், கம்பியின் வட்ட ஆரப்பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ என நிறுவுக.

15. சீரான கம்பி ஒன்று வட்டவடிவில் வளைக்கப்பட்டு வட்டவில்லின் முனைகள் அதே கம்பியின் மற்றொரு நேரான பகுதியால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. முழுக்கம்பியின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கணக்கிடுக.

16. ஒரு நேர்கூம்பின் அடித்தளத்துடன் அதே அடித்தளத்தையுடைய ஓர் அரைக்கோளம் இணைக்கப்பட்ட ஒருபொருள் அதன் அரைக்கோளப்பரப்பு ஒரு சொரசொரப்பான மேசைமீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அது நிலையான சமநிலையில் இருப்பதற்கேற்ற கூம்பின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

17. எடைமிக்க சதுரவடிவ சீரான தகடு ஒன்று செங்குத்துத் தளம் ஒன்றில் அமைந்த வட்டம் ஒன்றின் உச்சியில் அதே தளத்தில் செங்குத்தாக அமையுமாறு சமநிலையில் இருக்கிறது. வட்டத்தின் ஆரம் r, சதுரத்தின் பக்கம் $\frac{\pi r}{2}$, வட்டத்தின் விளிம்பு அதன் மீது தகடு நழுவாமலிருக்கும் அளவுக்குச் சொரசொரப்பாயிருக்குமாயின், தகடு கீழே விழாமல் $90°$ கோண அளவில் வட்டத்தின்மீது அசைந்தாடும் எனக் காட்டுக.

18. ஒரு கெட்டியான, r அலகு ஆரமுடைய ஓர் அரைக்கோளமும் ஒரு கெட்டியான கூம்பும் $(h = 3r)$ அவற்றின் அடித்தளங்களில் இணைக்கப்பட்டு அமைந்த ஒரு பொருள் அதன் அரைக்கோளப்பரப்பு ஒரு கிடைத்தள மேசைமீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பொருள் நடுவியல் சமநிலையில் இருக்கவேண்டுமாயின் அரைக்கோளம், கூம்பு ஆகியவற்றின்மூலம் பொருட்களின் ஒப்பு அடர்த்திகளின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

19 r அலகு ஆரமும் W அலகு எடையும் கொண்ட மெல்லிய அரைக்கோள வடிவக் கோப்பை ஒன்று R அலகு ஆரத்தையுடைய ஒரு நிலையான கோளத்தின்மீது சமநிலையிலுள்ளது. கோப்பையினுள் w அலகு எடையுள்ள ஒரு சிறு வழவழப்பான கோளம் வைக்கப் பட்டுள்ளது. $w < W(R-r)$ என்றால் சமநிலை நிலையானது எனக் காட்டுக.

விடைகள் :

1. AD-ல் A-லிருந்து 2·67 அடி, 2·92 அடி.
2. அச்சின்மீது அதிக ஆரமுள்ள முனையிலிருந்து 5·3″ தொலைவில்.
3. $\bar{x} = \frac{1}{12} a(2-\sqrt{2})$; $\bar{y} = \frac{1}{12} a(6\sqrt{2}+1)$

4. தட்டின் ஆரம் r எனில் குறிப்பிட்ட ஆரங்களின் வெளிக் கோணத்தின் இருசமவெட்டியாயமைந்த ஆரத்தில் வட்டமையத்தில் இருந்து $\frac{1}{14} r\sqrt{2}$ தொலைவில்

5. சதுரத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{1}{21} a\sqrt{2}$ தொலைவில்

6. அரைக்கோளத்தின் ஆரம் a எனில், பொதுத்தளத்தின் மையத்திலிருந்து அரைக்கோளத்தின் ஆரத்தில் $\frac{1}{6} a$ தொலைவில்.

8. அடிக்கண்டத்தின் 3 அடி ஆர முனையிலிருந்து $1\frac{4}{19}$ அடி தொலைவில்

10. தண்டின் நீளம் l எனில் $2l \sin \frac{1}{2}^{\circ}$

13. $\tan^{-1} 3$

15. மையத்திலிருந்து $\frac{r \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\alpha + \sin\alpha}$ தொலைவில்

16. $\sqrt{3}\cdot r$; 17. : 13

14. உராய்வு

(Friction)

வழவழப்பான ஒருபொருள் மற்றொரு வழவழப்பான பொருளின் மீது சமநிலையில் இருக்கும்போது அதன்மீது செயற்படும் ஒரே விசை இரண்டாவது பொருள் அதன்மீது செயற்படுத்தும் லம்ப எதிர்விசையேயாகும். ஆனால், நிறைந்த வழவழப்பையுடைய அத்தகைய பொருட்களைச் சிலகாரணங்களை முன்னிட்டு இயற்கையன்னை நமக்களிக்கவில்லை.

சொரசொரப்பான தரைமீது உள்ள எடைமிக்க ஒரு பொருளை இழுக்க முயற்சிக்கும்போது செயற்படுத்தப்படவேண்டிய விசை அதே பொருள் வழவழப்பான தரைமீது இருக்கும்போது செயற்படுத்த வேண்டிய விசையைவிட அதிகமாக இருக்கிறது என்பதை நாமறிவோம். இது ஏனெனில், சொரசொரப்பான பரப்பையுடைய ஒரு பொருள் அத்தகைய மற்றொரு பொருளின்மீது இருக்கும் போது அதன்மீது லம்ப எதிர்விசை மட்டுமன்றி இரண்டாவது பொருளுடன் தொடர்புகொண்டிருக்கும் பரப்புவழியே மற்றொரு விசையும் எப்போதும் செயற்படுகிறது. இந்த விசை ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருள்மீது நழுவிச் செல்லாவண்ணம் தடுக்கிறது. இவ்வாறு இருபொருட்கள் ஒன்றின் மீதொன்று நழுவுவதைத் தடுக்கும் விசை உராய்வு விசை எனப்படும். இருபொருட்கள் ஒன்றின் மீதொன்று சமநிலையில் இருக்கும்போது அவற்றிற்கு இடையே செயற்படும் உராய்வு விசை அவை நழுவுவதைத் தடுப்பதற்குச் சற்றே போதுமானதாக இருக்கிறது. ஆனால், ஒருபொருளை நகர்த்த முயற்சிக்கும்போது அதனை நகர்த்தப் பயன்படும் விசையின் அளவு அதிகரிக்கும்போது உராய்வு விசையின் அளவும் அதிகமாகி ஒரு பெரும மதிப்பையடையும். செயற்படுத்தப்படும் விசை இப் பெரும மதிப்பைவிட அதிகமாக இருப்பின், பொருள் நகரத் தொடங்கும். இரு பொருட்களுக்கிடையே உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பு எல்லை உராய்வு விசை (force of limiting

friction) எனப்படும்.) பொருள் நகரும்போது உராய்வு தொடர்ந்து செயற்பட்டு அதன் இயக்கத்தை எதிர்க்கும். உராய்வு நம் வாழ்க்கையில் பெரும்பங்கு வகிக்கிறது. அது இல்லையெனில் ஓடிக் கொண்டிருக்கும் உந்து வண்டியை நிறுத்த முடியாது; குதிரை வண்டியை இழுக்கமுடியாது; ஏன்? நாமே நடக்கமுடியாது. (வழவழப்பான தரையின்மீது நடப்பது எவ்வளவு கடினம் என்பதை நாமறிவோம்.) இவ்வாறு நம் வாழ்வில் பெரும்பங்கு வகிக்கும் உராய்வைப் படைத்த இயற்கையன்னைக்கு நாம் பெரிதும் கடமைப்பட்டவர்களாவோம்.

உராய்வு விதிகள் :

1. உராய்வு விசையின் திசை எப்போதும் ஒருபொருள் மற்றொரு பொருளின்மீது நழுவ முயற்சிக்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் இருக்கிறது.

2. இரு பொருட்கள் சமநிலையில் இருக்கும்போது அவற்றிற்கு இடையே செயற்படும் உராய்வு விசை அவை ஒன்றின் மீதொன்று நழுவாவண்ணம் தடுப்பதற்குச் சற்றே போதுமானதாக இருக்கிறது. ஒருபொருள் மற்றொன்றின்மீது நழுவும் நிலையில் இருக்கும்போது உராய்வு விசை பெரும மதிப்பை அடைகிறது. இப்பொழுது பொருட்கள் எல்லைச் சமநிலையில் (limiting equilibrium) இருக்கின்றன என்று கூறப்படும். இந் நிலையில் உராய்வு விசையின் மதிப்பு எல்லை உராய்வு விசை எனப்படும்.

3. எல்லை உராய்வு விசைக்கும் லம்ப எதிர்விசைக்கும் உள்ள தகவு ஒரு மாறிலியாகும், இதன் மதிப்பு வெவ்வேறு சோடிப் பரப்புகளுக்கு வெவ்வேறாக இருக்கும்.

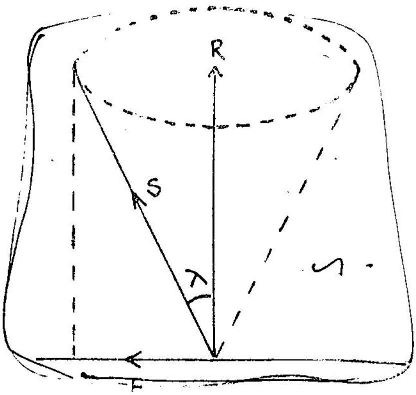
4. எல்லை உராய்வு விசை லம்ப எதிர் விசையையும், பொருட்கள் தொடர்பு கொண்டிருக்கும் பரப்புகளின் தன்மையையும் மட்டுமே பொறுத்துள்ளது; அப் பரப்புகளின் அளவையோ உருவத்தையோ பொறுத்திருக்கவில்லை.

5. ஒருபொருள் இயங்கும்போதும் அதன் இயக்கத்தை எதிர்த்து உராய்வு விசை செயற்படுகிறது. இந் நிலையில் உராய்வு விசையானது பொருளின் திசை வேகத்தைப் பொறுத்து மாறுவதில்லையாயினும், லம்ப எதிர்விசைக்கு நேர்விகிதத்திலேயே அமைகிறது. ஆனால், இந்த உராய்வு விசைக்கும் லம்ப எதிர்விசைக்கும் உள்ள தகவு பொருள் நழுவும் நிலையில் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தகவைவிடக் குறைவானது.

மேற்கூறப்பட்ட விதிகளுள் முதல் நான்கும் நிலையியல் உராய்வு விதிகள் (Laws of statical friction) என்றும், ஐந்தாவது இயக்கவியல் விதி என்றும் அழைக்கப்படும்.

உராய்வு எண் : இருபொருட்களுக்கிடையே செயற்படும் எல்லை உராய்வு விசைக்கும் லம்ப விசைக்கும் உள்ள தகவு ஒரு மாறிலி எனக் கூறப்பட்டது. அந்த மாறிலி உராய்வு எண் (Coeflicient of firiction) எனப்படும்; அது μ என்னும் கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கப்படும். எல்லை உராய்வு விசையை F எனவும் லம்ப எதிர் விசையை R எனவும் குறிப்போமாயின்,

$$F = \mu . R \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 14{\cdot}1$$



படம் 14.1

(உராய்வுக் கோணமும் தொகுபயன் எதிர் விசையும் (angle of firiction and resultant reaction): ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மீது எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும்போது அதன்மீது செயற்படும் லம்ப எதிர்விசை எல்லை உராய்வு விசை ஆகியவற்றின் தொகுபயனைக் காண்போமாயின் அத் தொகுபயனுனது லம்ப எதிர்விசையுடன் அமைக்கும் கோணம் உராய்வுக் கோணம் எனப்படும். அது λ என்னும்எழுத்தால் குறிக்கப் படும்.) தொகுபயன், தொகுபயன் எதிர் விசை என அழைக்கப்படும்.

படம் 14·1-ல். F, எல்லை உராய்வு விசையையும் R, லம்ப எதிர்விசையையும் குறிக்குமாயின்,

$$\frac{F}{R} = \tan \alpha$$

ஆனல், $$\frac{F}{R} = \mu \text{ (சமன் 14·1)}$$

$$\therefore \quad \mu = \tan \alpha \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad 14{\cdot}2$$

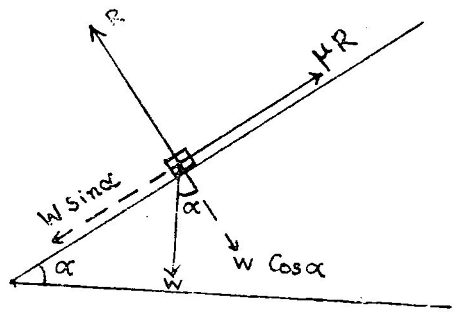
அதாவது உராய்வெண் உராய்வுக்கோணத்தின் டான்ஜென்ட்டுக்குச் சமமாகும்.

மேலும், தொகுபயன் எதிர் விசை

$$S = \sqrt{F^2 + R^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \; 14{\cdot}$$

(உராய்வுக் கூம்பு (cone of friction) ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளுடன் தொடர்புகொண்டிருக்கும் புள்ளியை உச்சியாகவும் லம்ப எதிர்விசையை அச்சாகவும் உராய்வுக்கோணம் λ-ஐ அரை உச்சிக்கோணமாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் கற்பனை செய்வோமாயின் (படம் 14·1) தொகுபயன் எதிர்விசை இக் கூம்பின் பரப்பின்மீதோ அதனுள்ளேயோ அமையும். அவ்வாறு கற்பனை செய்யப்பட்ட கூம்பு உராய்வுக் கூம்பு எனப்படும்.)

சொரசொரப்பான சாய்தளத்தின்மீது ஒருபொருளின் சமநிலை: W என்ற எடையையுடைய ஒருபொருளைச் சொரசொரப்பான ஒரு சாய்தளத்தின்மீது வைத்து, சாய்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தைச் சிறிதுசிறிதாக அதிகரிப்பதாகக் கொள்வோம். தளம் கிடைத்தற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும்போது பொருள் சமநிலையில் இருப்பதாகவும் கொள்வோம். (படம் 14·2)



படம் 14·2

பொருள் சாய்தளத்தில் சமநிலையில் இருக்கும்போது அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

1. செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை W

2. தளத்திற்கு நேர்குத்துத்திசையில் செயற்படும் லம்ப எதிர்விசை R

3. தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும் எல்லைஉராய்வு விசை $F = \mu R$.

W-ஐ தளத்திற்கு நேர்குத்தாகவும் தளத்தின் வழியேயும் பிரிப்போமாயின்,

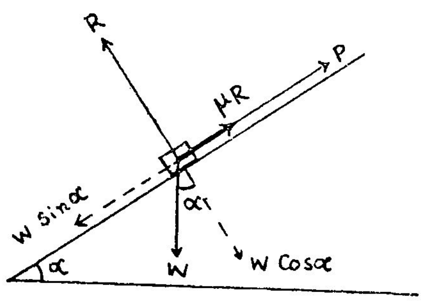
$$W \sin \alpha = \mu R$$
$$W \cos \alpha = R$$
$$\therefore \quad \tan \alpha = \mu = \tan \lambda$$
$$\therefore \quad \alpha = \lambda \quad \ldots \quad \ldots \quad 14{\cdot}4$$

எனவே, ஒருபொருள் சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின் மீது புறவிசையின் துணையின்றித் தானே எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும்போது, சாயதளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் உராய்வுக்கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

தெரிவு : கிடைத்தளத்துடன் α $(< \lambda)$ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்ட ஒருபொருள் சாய்தளத்தின் பெரும வாட்டத்திசையில் செயற்படுத்தப்படும் விசை ஒன்றினால் எல்லைச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. விசையின் பெரும சிறும மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

1. பொருள் கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் உள்ளதாகக் கருதுவோம் :

இங்கு எல்லை உராய்வு விசையானது தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும். செயற்படுத்தப்படும் புறவிசை P என இருக்கட்டும்.



படம் 14·3

பொருள் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும்போது அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன. (படம் 14·3).

(i) செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை W

(ii) தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையில் லம்ப எதிர்விசை R

(iii) தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும் எல்லை உராய்வு விசை μR

(iv) தளத்திற்கு இணையாக மேல்நோக்கிச் செயற்படுத்தப்பட்ட புறவிசை P

W-ஐத் தளத்திற்கு இணையாகவும் நேர்குத்தாகவும் பிரிப்போமாயின்,

$$P + \mu R = W \sin \alpha$$

$$R = W \cos \alpha$$

எனவே,

$$P = W \sin \alpha - \mu W \cos \alpha$$

ஆனல்,

$$\mu = \tan \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}$$

எனவே,

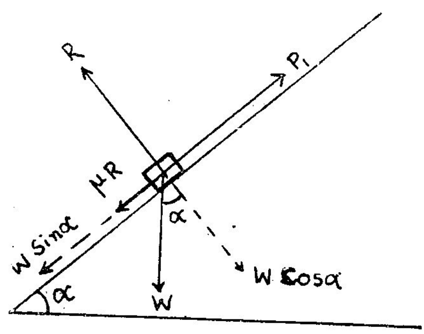
$$P = \frac{W}{\cos \lambda} (\sin \alpha \ \cos \lambda - \cos \lambda \sin \lambda)$$

அதாவது

$$= \frac{W}{\cos \lambda} \sin (\alpha - \lambda)$$

2. பொருள் மேல்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருத்தல் :

இங்கு எல்லை உராய்வு விசை தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கிச் செயற்படும். இப்பொழுது செயற்படுத்தப்படும் புறவிசை P_1 எனக் கொள்வோம்.



படம் 14. 1

பொருள் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும்போது அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன : (படம் 14·4)

1. செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை W
2. தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையில் செயற்படும் லம்ப எதிர்விசை R
3. தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் எல்லை உராய்வு விசை μR
4. தளத்திற்கு இணையாக மேல்நோக்கிச் செயற்படுத்தப் படும் விசை P_1

w-ஐத் தளத்திற்கு இணையாகவும் நேர்குத்தாகவும் பிரித்தால்

$$P_1 = W \sin \alpha + \mu R$$

$$R = W \cos \alpha$$

$$\therefore \quad P_1 = W \sin \alpha + \mu W \cos \alpha$$

ஆனால்,

$$\mu = \tan \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}$$

$$\therefore \quad P_1 = \frac{W}{\cos \lambda} (\sin \alpha \cos \lambda + \cos \lambda \sin \lambda)$$

அதாவது

$$P_1 = \frac{W}{\cos \lambda} \sin (\alpha + \lambda). \quad \ldots \quad \ldots \quad 14{\cdot}6$$

செயற்படுத்தப்படும் விசையின் சிறும, பெரும மதிப்புகளை முறையே, சமன்பாடுகள் 14·5, 14·6 கொடுக்கின்றன. எனவே, செயற்படுத்தப்படும் விசையின் மதிப்பு P, P_1 ஆகியவற்றிற்கிடையே இருக்கும்போது பொருள் சமநிலையில் இருக்கும். எனினும் அது எல்லைச் சமநிலையில் இருக்காது.

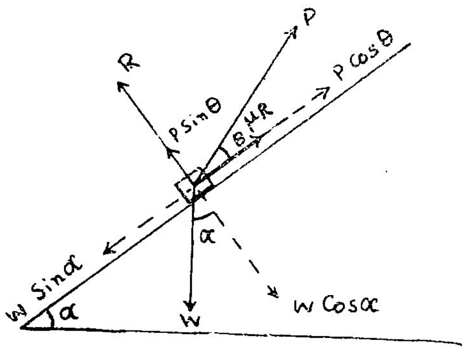
தெரிவு : கிடைத்தளத்துடன் α $(> \lambda)$ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்ட ஒரு பொருள், சாய்தளத்தின் பெரும வாட்டக் கோட்டின்வழியே செல்லும் செங் குத்துத் தளத்தில் சாய்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் செயற்படுத்தப்படும் விசை ஒன்றினால் எல்லைச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. விசையின் பெரும சிறும மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

1. பொருள் கீழ் நோக்கி நகரும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள் வோம். இங்கு எல்லை உராய்வு விசை மேல்நோக்கிச் செயற் படும் (படம் 14·5). இப்பொழுது செயற்படுத்தப்படும் புறவிசை P எனக் கொள்வோம். பொருள் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும் போது அதன்மீது செயற்படும் விசைகளாவன:

1. செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயப்படும் அதன் எடை W
2. தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செயற்படும் லம்ப எதிர்விசை R

3. தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும் எல்லை உராய்வு விசை } μ R

4. தளத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் மேல்நோக்கிச் செயற்படுத்தப்படும் புறவிசை } P



படம் 14·5

இனி, தளத்திற்கு இணையான, நேர்குத்துத் திசைகளில் W, P ஆகியவற்றின் ஆக்கக்கூறுகளைக் காண்போமாயின், பொருள் சம நிலையில் இருக்க,

$$P \cos \theta + \mu R = W \sin \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$P \sin \theta + R = W \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

சமன் (ii)-ஐ μ- ஆல் பெருக்கி சமன் (i)-லிருந்து கழிப்போமாயின்

$$P (\cos \theta - \mu \sin \theta) = W (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

ஆனால், $\mu = \tan \lambda = \dfrac{\sin \lambda}{\cos \lambda}$

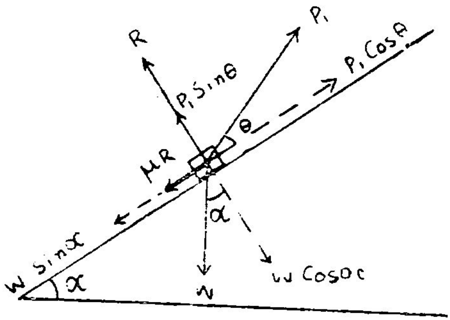
$$\therefore \quad \frac{P}{\cos \lambda} (\cos \theta \cos \lambda - \sin \theta \sin \lambda)$$

$$= \frac{W}{\cos \lambda} (\sin \alpha \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda)$$

எனவே, $P = \dfrac{W \sin (\alpha - \lambda)}{\cos (\theta + \lambda)} \quad \ldots \quad \ldots \quad 14{\cdot}7$

2. பொருள் மேல்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம் : இங்கு எல்லை உராய்வு விசை கீழ்நோக்கிச் செயற்

படும். இப்பொழுது செயற்படுத்தப்படும் புறவிசை P_1 எனக் கொள்வோம். பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்போது செயற்படும் விசைகளைப் படம்14·6 காட்டுகிறது.



படம் 14·6

W, P ஆகியவற்றைத் தளத்திற்கு இணையாகவும் நேர்குத்தாக வும் பிரிப்போமாயின்,

$$P_1 \cos\theta = W \sin\alpha + \mu R \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$P_1 \sin\theta + R = W \cos\alpha$$

அல்லது $P_1 \sin\theta = W \cos\alpha - R \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

சமன் (ii)-ஐ μ-ஆல் பெருக்கி சமன் (1)-உடன் சேர்ப்போமாயின், $P_1 (\cos\theta + \mu \sin\theta) = W (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$

ஆனால், $\mu = \tan\lambda = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$

$$\therefore \quad \frac{P_1}{\cos\lambda} \cos(\theta - \lambda) = \frac{W}{\cos\lambda} \sin\alpha + \lambda$$

$$\therefore \quad P_1 = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)} \quad \ldots \quad 14{\cdot}8$$

செயற்படுத்தப்படும் விசையின் சிறும, பெரும மதிப்புகளை முறையே சமன்பாடுகள் 14·7, 14·8 ஆகியவை கொடுக்கின்றன.

சிறப்பு நேர்வுகள் : பொருள் எல்லைச் சமநிலையின் மேல் நோக்கிநகரும் நிலையில் இருக்கும்போது, θ கோணத்தில் செயற் படுத்தப்படும் புறவிசையின் சிறுமமதிப்பு$W \dfrac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$-ன் சிறும மதிப்பாகும்.

$W \dfrac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$ -ன் சிறும மதிப்பானது $\cos(\theta - \lambda)$-ன்

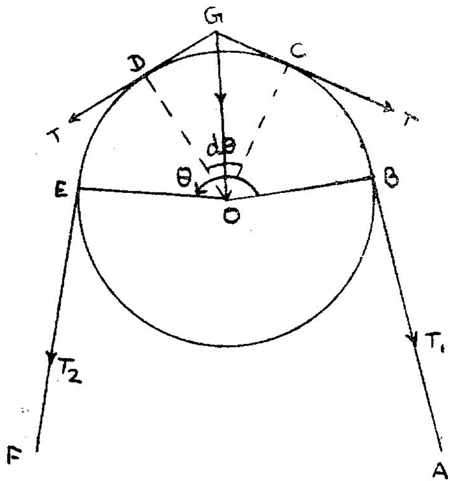
பெரும மதிப்பிற்குரிய அதன் மதிப்பாகும். cos $(\theta-\lambda)$-ன் பெரும மதிப்பு 1 ஆகும்.

அதாவது $\cos(\theta-\lambda) = 1$

அல்லது $(\theta-\lambda) = 0$

அல்லது $\theta = \lambda$

எனவே, செயற்படுத்தப்படும் விசை தளத்துடன் உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமான கோணத்தை அமைக்குமாயின், அதன் மதிப்பு சிறுமமாக இருக்கும்.



படம் 14·7

ஒரு சொரசொரப்பான உருளைக்கும் அதன்மேல் இடப்பட்ட பட்டைக்குமிடையே செயற்படும் உராய்வு: படம் 14·7 உருளையின் அச்சுக்கு செங்குத்துதள வெட்டு முகத்தைக் காட்டுகிறது. O உருளையின் அச்சையும் ABCDEF பட்டையையும் குறிக்கின்றன. பட்டையின் இரு முனைகளிலும் விசைகள் செயற்படும் நிலையில் பட்டை உருளையின் மேல் நகருமாயின், அது நகர்த்தப் படும் திசையில் செயற்படும் விசை மற்ற திசையில் செயற் படும் விசையைவிடக் கணிசமான அளவு அதிகமாக இருக்க வேண்டும். இந்த மிகுதிப்பாடு உருளைக்கும் பட்டைக்குமிடையே செயற்படும் உராய்வின் பயனாய் ஏற்படுகிறது.

படத்தில் பட்டை உருளையின்மீது BCDE என்னும் பகுதியுடன் தொடர்புகொண்டுள்ளது. BA வழியே செயற்படும் இழுவிசை T_1 எனவும், EF வழியே செயற்படும் இழுவிசை T_2 எனவும் கோணம் $BOE = \theta$ எனவும் கொள்வோம். பட்டை கடிகாரத் திசையில் நகரும் நிலையில் இருப்பதாகவும் கொள்வோம். இப்பொழுது $T_1 > T_2$

பட்டையின் CD என்ற மிகச்சிறு பகுதி ஒன்றைக் கருதுவோம். அப் பகுதி மிகச் சிறியதாயிருப்பதால், அதில் செயற்படும் இழுவிசையைச் சீரானதாகக் கருதலாம். அதன் மதிப்பை T எனவும் $C\hat{O}D = d\theta$ எனவும் கொள்வோம். T என்ற இழுவிசை C,D புள்ளிகளில் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் வழியே செயற்படும். அத் தொடுகோடுகள் G என்னும் புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், அவற்றின் வழியே செயற்படும் இழுவிசைகளின் தொகுபயன் DGC என்ற கோணத்தின் இருசமவெட்டியாகிய GO வழியே செயற்படும்.

ODG, OCG என்ற செங்கோண முக்கோணங்களில்,

$$D\hat{G}O = C\hat{G}O = 90 - \frac{d\theta}{2}$$

எனவே, GO வழியே செயற்படும் தொகுபயன்

$$= 2T \cos\left(90 - \frac{d\theta}{2}\right)$$

$$= 2T \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$= T\,d\theta \left[\because \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \right]$$

GO வட்டத்திற்கு நேர்குத்துக்கோடு ஆதலால், $T\,d\theta$ பட்டைக்கும் உருளைக்குமிடையே செயற்படும் லம்ப எதிர்விசையாகும். எனவே, உராய்வெண் μ எனில் அவற்றிற்கிடையே செயற்படும் எல்லை உராய்வு விசை $\mu T\,d\theta$ ஆகும்.

இப்பொழுது C, D ஆகிய புள்ளிகளில் செயற்படும் இழுவிசைகளின் வேறுபாடு dT எனில், பொருள் நகரும் நிலையில் இருக்கும் போது,

$$dT = \mu T\,d\theta$$

$$\frac{dT}{T} = \mu\,d\theta$$

T-ன் T_1, T_2 மதிப்புகளுக்கிடையே தொகுதி காணின்,

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_{o}^{\theta} \mu d\theta$$

அல்லது $$ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \theta$$

∴ $$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\theta}$$

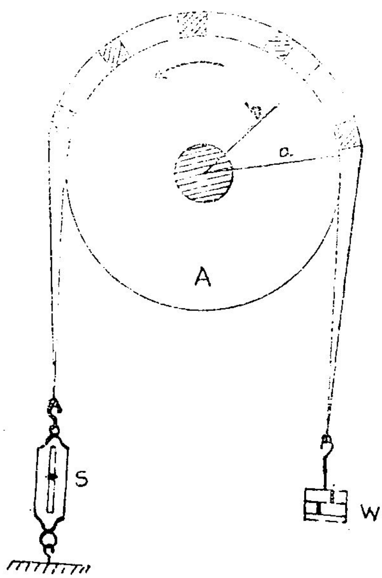
அல்லது $$T_1 = T_2 e^{-\mu\theta}$$

உராய்வைப் பயன்படுத்திப் பல கருவிகள் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றுள் உராய்வு-திறன்மானி (Friction dynamometer) உராய்வு சுழற்சி இணக்கக்கடத்தி (friction clutch)) என்ற கருவிகளைப்பற்றி இங்கு காண்போம்.

உராய்வு-திறன்மானி :

சொரசொரப்பான உருளையின் மீது போடப்பட்ட பட்டைக்கும் உருளைக்குமிடையே ஓர் உராய்வு விசை செயற்படுகிறது என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்தி உராய்வு திறன்மானி என்ற ஒரு கருவி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் கருவி மின்சுழற்றிகளின் திறனை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

இக் கருவியின் அமைப்பைப் படம் 14·8-ல் காணலாம். இதில் மின் சுழற்றியின் சுழல்தண்டுடன் இணைக்கப்பட்ட A என்ற பெருங்கப்பி ஒன்றின்மீது ஒரு பட்டை போடப்பட்டுள்ளது. பட்டைக்கும் கப்பிக்குமிடையே உராய்வை அதிகப்படுத்துவதற்காக பட்டையின் அடிப்பகுதியில் மரத்துண்டுகள் பொருத்தப்படலாம். பட்டையின் ஒருமுனை நிலையான தாங்கி ஒன்றில்



படம் 14·8

கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்ட வில்தராசு (S)-டன் இணைக்கப்பட்டு மறுமுனையில் சரிசெய்யக் கூடிய ஓர் எடை (W) தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது.

மின்சுழற்றியை இயக்கிவிட்டு (மின்சுழற்றி வில்தராசை நோக்கிச் சுற்றுமாறு அமைக்கப்படவேண்டும்.) W நிலையாக இருக்குமாறு அதன் மதிப்பைச் சரி செய்யவேண்டும். அவ்வாறு சரி செய்த பின் அதன் மதிப்பையும் வில்தராசின் அளவீட்டை (S) யும் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர் மின்சுழற்றி ஒரு விநாடியில் மேற்கொள்ளும் சுழற்சி எண்ணிக்கை (n)-யையும் (இதற்கென அமைந்த சுழற்சிக் கணிப்பானைக் (rotation counter) கொண்டு) சுழல் தண்டின் அச்சிலிருந்து பட்டையின் தொலைவை (b)-யும் கம்பியின் ஆரத்தையும் (a) கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும்

இனி, மின்சுழற்றியின் திறனைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம் : பட்டை சமநிலையிலிருப்பதால் அதன்மீது செயற்படும் விசைகளின் O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின், அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும். எல்லை உராய்வு விசையை F எனக்கொள்வோமாயின்,

$$S \times \frac{a+b}{2} + F+a-W\frac{a+b}{2} = O$$

அல்லது $$F \times a = (W-S)\frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \quad F = \frac{(W-S)(a+b)}{2a}$$

இந்த உராய்வு விசையை எதிர்த்து மின்சுழற்றி விநாடிக்கு n முறைகள் சுற்றும்போது அது ஒரு விநாடியில் செய்யும் வேலை,

$$= F \times 2\pi a n$$

$$= \frac{(W-S)(a+b)}{2a} \times 2\pi a n$$

$$= \pi n (W-S)(a+b)$$

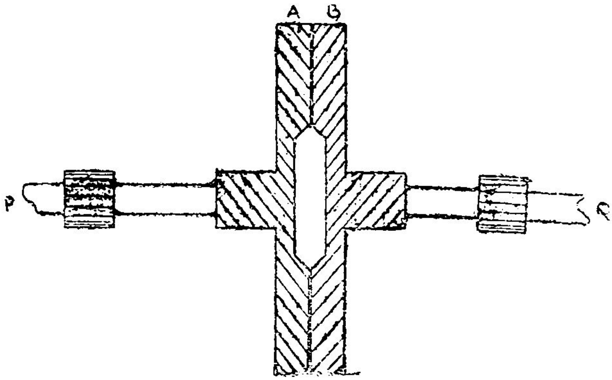
எனவே, மின்சுழற்றியின் திறன்

$$= \pi n (W-S)(a+b)$$

உராய்வு — சுழற்சி இயக்கக் கடத்தி (Clutch) : சுழற்சி இயக்கக் கடத்தி என்பது பொது அச்சையுடைய இரு சுழல் தண்டுகளுக்கிடையே ஒன்றின் சுழற்சி இயக்கத்தை மற்றொன்றிற்குக் கடத்தப்

பயன்படும் ஓர் அமைப்பாகும். இது உந்து வண்டிகளில் எஞ்சி னின் இயக்கத்தைச் சக்கரங்களுக்குக் கடத்தப் பயன்படுகிறது.

படம் 14·9-ல் உள்ளதுபோன்ற ஓர் அமைப்பைக் கருதுவதன் மூலம் உராய்வு-சுழற்சி இயக்கக் கடத்தி வேலைசெய்யும் விதத்தை



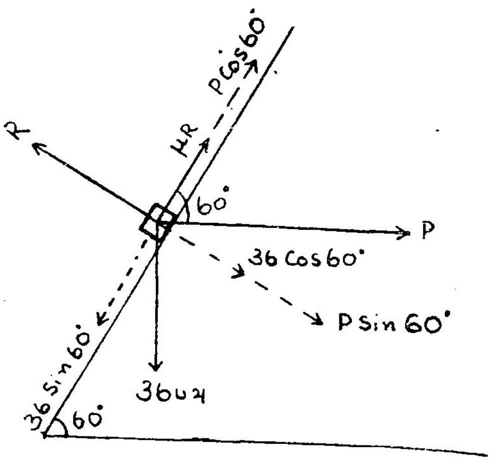
படம் 14·9

விளங்கிக் கொள்ளலாம். படத்தில் A,B என்பன P,Q என்ற சுழல் தண்டுகளின் முனைகளில் பொருத்தப்பட்ட வட்ட வடிவத்தட்டுகள். அவற்றின் ஒன்றையொன்று நோக்கும் பக்கங்கள் சொரசொரப்பு மிக்கவையாயிருக்கும். தட்டுக்களை ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பு கொள்ளும்படியோ, பிரித்து வைக்கவோ ஏற்ற அமைப்பு உண்டு. தட்டுகள் பிரிந்திருக்கும் நிலையில் P என்ற சுழல்தண்டும் அதனு டன் சேர்ந்த A என்ற தட்டும் சுழல்வதாகக் கொள்வோம். இப் பொழுது அவற்றை ஒன்றுடன் ஒன்று சிறிது சிறிதாகத் தொடர்பு கொள்ளுமாறு செய்வதாக அதாவது. A என்ற தட்டை B என்ற தட்டின்மீது அழுத்துவதாகக் கொள்வோம். A-ஐ B-யின் மீது அழுத்தும் விசையின் அளவு அதிகரிக்கும்போது அவற்றிற் கிடையே உள்ள உராய்வு விசையும் அதிகரித்து பெரும மதிப்பை அடைகிறது. இந் நிலையில் B-யும் சுழலத் தொடங்கி A-ன் சுழற்சி வேகத்துடனேயே சுழலத் தொடங்குகிறது. உந்து வண்டியில் இவ்விரு தட்டுக்களும் எப்போதும் ஒன்றுடன் ஒன்று அழுத்திக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரு வில்லின் உதவியால் செய்யப்பட் டிருக்கும். தேவைப்பட்டபோது அவற்றுள் ஒன்றை வில்லின் விசையை எதிர்த்துப் பிரித்துக் கொள்ளலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 36 பவு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் கிடைத் தளத்திற்கு 45° கோணத்தில் அமைந்த ஒரு சாய்தளத்தின்மீது

சமநிலையில் உள்ளது. சாய்தளத்தை 60° கோணத்தில் சாய்க்கும் போது அப் பொருளை எல்லைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கக்கூடிய கிடைத்தள விசையின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

சாய்தளம் 45° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும்போது பொருள் புறவிசையின் துணையின்றித் தானே சமநிலையில் இருப்பதால், உராய்வுக் கோணம் 45° ஆகும். எனவே, உராய்வு எண் $\mu = \tan 45 = 1$.



படம் 14·10

சாய்தளம் 60° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும்போது பொருளை எல்லைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கக்கூடிய கிடைத்தள விசையின் மதிப்பு P எனக் கொள்வோம். பொருள் கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருக்கும்போது, P-ன் மதிப்பு சிறுமமாக இருக்கும். இந்த நிலையில் எல்லை உராய்வு விசைத்தளத்தின் வழியே மேல் நோக்கிச் செயற்படும். விசைகள் செயற்படும் விதத்தைப் படம் 14·10-ல் காணலாம். விசைகளைத் தளத்திற்கு இணையாகவும் நேர்குத்தாகவும் பிரிப்போமாயின், பொருள் எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதால்,

$$P \sin 60 + 36 \cos 60 = R$$

$$P \cos 60 + \mu R = 36 \sin 60$$

எனவே,

$$P \sin 60 = R - 36 \cos 60 \quad \ldots \text{(i)}$$

$$P \cos 60 = 36 \sin 60 - R \quad \ldots \text{(ii)}$$

[$\mu = 1$ ஆதலால்]

(i), (ii) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டினால்,

$$P(\sin 60 + \cos 60) = 36(\sin 60 - \cos 60)$$

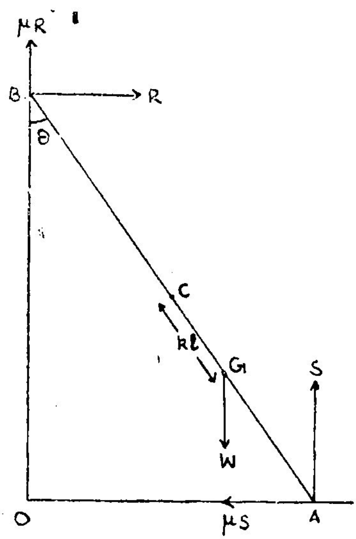
அல்லது $$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$P = 36\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 9.69$$ பவு. எடை.

மாதிரிக் கணக்கு 2. $2l$ நீளமுள்ள ஓர் ஏணி தரையிலிருந்து ஒரு சுவரின்மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி, தரையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமிடத்திலும் சுவரை தொட்டுக் கொண்டிருக்குமிடத்திலும் உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். ஏணியின் எடை அதன் மையத்திலிருந்து கீழே rl தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் செயற்படுமாயின் அது செங்குத்துநிலைக்குச் சாய்ந்திருக்கக் கூடிய கோணத்தின் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

படம் 14. 11 ஏணியின் நிலையைக் காட்டுகிறது, படத்தில் A B என்பது ஏணி; G, அதன் புவியீர்ப்புமையம்; R S என்பன முறை



படம் 14·11

யே A, B ஆகிய புள்ளிகளில் எதிர்விசைகள். எனவே A, B ஆகிய புள்ளிகளில் உராய்வு எண் μ $(= \tan\lambda)$ எனக் கொள்

வோமாயின் முறையே சுவர், தரை ஆகியவற்றின் வழியே செயற்படும் எல்லா உராய்வு விசைகள் μR, μS ஆகும்.

$\widehat{OBA} = \theta$ என இருக்கட்டும்

ஏணி சமநிலையில் இருப்பதால்,

$$W = \mu R + S \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$
$$R = \mu S \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$S \times 2l \sin\theta = W\,(l + Kl)\sin\theta + R\,2l\cos\theta$$

அல்லது $l \sin\theta\,[2S - W(1+K)] = 2Rl\cos\theta$

அல்லது $$\tan\theta = \frac{2R}{2S - W(1+K)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$W = \mu^2 S + S = S(\mu^2 + 1)$$
$$R = \mu S$$

$$\tan\theta = \frac{2\mu S}{2S - S(\mu^2+1)(1+K)}$$
$$= \frac{2\mu}{2 - (\mu^2+1)(1+K)}$$

அதாவது $$\tan\theta = \frac{2\tan\lambda}{2 - (1+K)\sec^2\lambda}$$

எனவே ஏணி செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணத்தை

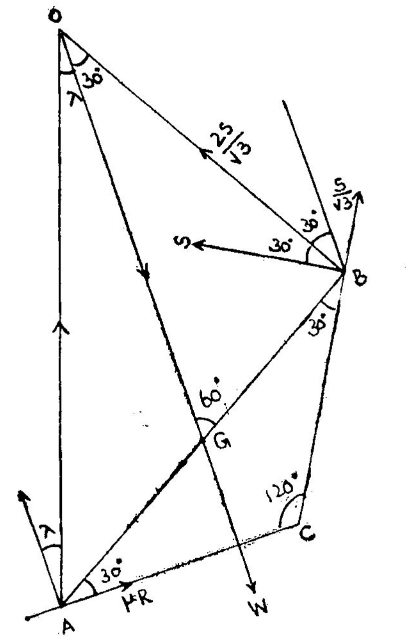
$$\tan\theta = \frac{2\tan\lambda}{2 - (1+K)\sec^2\lambda}$$

என்னும் சமன்பாடு கொடுக்கிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 3. கிடைத்தளத்திலும், கிடைத்தளத்துடன் 120° கோணத்திலும் அமைந்த இருதளங்களின்மீது சீரான தண்டு ஒன்று சமகோணங்களில் சாய்ந்தவாறு எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. தண்டிற்கும் சாய்தளத்திற்கும் இடையே உராய்வுக் கோணம் 30° என்றால் தண்டிற்கும் கிடைத்தளத்திற்கும் இடையே உராய்வெண்ணைக் கணக்கிடுக.

படம் 14·12-ல் AB தண்டையும், G அதன் புவியீர்ப்புமையம் AC கிடைத்தளத்தையும், CB சாய்தளத்தையும் குறிக்கின்றன. A-ல் உராய்வு எண் μ எனக் கொள்வோம். A-யிலும் B-யிலும் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன்களைக் காண்போமாயின், A-ல் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் AO என்ற திசையிலும், B-ல் செயற்படும் விசைகளின் தொகுபயன் BO என்ற திசையிலும் செயற்படும். தண்டு சமநிலையில் இருப்பதால் அத் தொகு

பயன்களும் தண்டின் எடையும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அப் புள்ளியை O எனக் கொள்வோம். A-ல் தொகுபயன் அப் புள்ளியில்



படம் 14·12

AC-க்கு வரையப்பட்ட லம்பத்திற்கு λ கோணத்திலும் B-ல் தொகுபயன் அப் புள்ளியில் CB-க்கு வரையப்பட்ட லம்பத்திற்கு 30° கோணத்திலும் செயற்படும்.

AG : GB :: 1 : 1

AOB என்ற முக்கோணத்தில் சமன் 12·11-ன் படி

$$2 \cot 60 = \cot \lambda - \cot 30$$

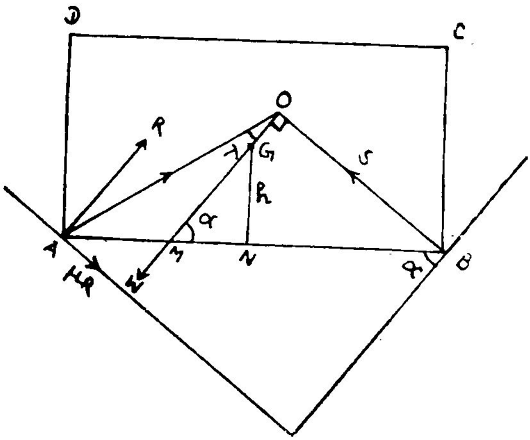
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\mu} - \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4. மூடப்பட்ட செவ்வக வடிவப்பெட்டி ஒன்று அதன் அடிப்பாக நீளவிளிம்புகளுள் ஒன்று வழவழப்பான சுவர் ஒன்றின்மீதும் மறு விளிம்பு சொர சொரப்பான தரையின்மீதும் அமையுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. பெட்டியின் அடித்தளம் செங்குத்து நிலையுடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கிறது. பெட்டியின் அகலம் உயரம் முறையே $2b$, $2h$ என்றால் $\tan \alpha = 2\mu + \frac{h}{b}$ என்றால் பெட்டி நழுவும் நிலையில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

படம் 14·13-ல் ABCD பெட்டியின் வெட்டுமுகத்தையும், G அதன் புவியீர்ப்புமையத்தையும், AC தரையையும், OB சுவரையும்



படம் 14·13

குறிக்கின்றன. சுவர் வழவழப்பானதால் B-ல் உராய்வு விசை செயற்படாது. A-ல் உராய்வுக்கோணம் λ எனில் அங்கு செயற்படும் R, μR என்ற விசைகளின் தொகுபயன் AO வழியே செயற்படும். $\widehat{RAO} = \lambda$. பெட்டி நழுவும் நிலையில் சமநிலையில் இருப்பதால் பெட்டியின் எடை, AO வழியே செயற்படும் தொகுபயன், B-ல் செயற்படும் எதிர்விசை ஆகிய மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அப் புள்ளியை O எனக்கொள்வோம்.

படத்தில் $GN = h;\ AN = NB = b$

$MN = h \cot \alpha$

$\therefore \quad AM = b - h \cot \alpha$

$MB = b + h \cot \alpha$

AOB என்ற முக்கோணத்தில் சமன் 12·11ன் படி

$$2b \cot \alpha = (b - h \cot \alpha) \cot \lambda - (b + h \cot \alpha) \cot 90$$

ஆனல் $\cot \lambda = \dfrac{1}{\tan \lambda} = \mu;\ \cot 90 = 0$

$$\therefore \quad 2b \cot \alpha = \frac{b - h \cot \alpha}{\mu}$$

அல்லது $\mu \cdot 2b \cot \alpha = b - h \cot \alpha$

$$2b\,\mu = b \tan \alpha - h$$

$$\therefore \quad b \tan \alpha = 2b\,\mu + h$$

எனவே பெட்டி நழுவும் நிலையிலிருக்கும் போது

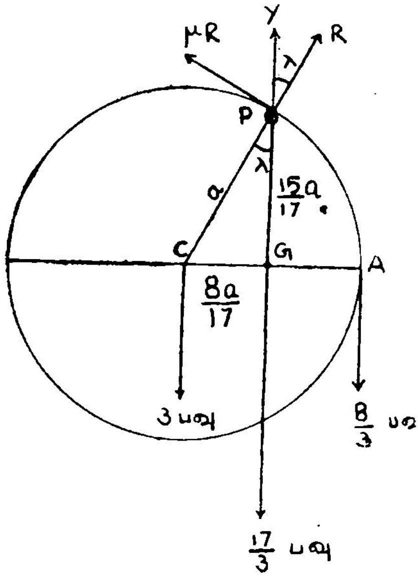
$$\tan = 2\mu + \frac{h}{b}$$

எனவே $\tan \alpha = 2\mu + \dfrac{h}{b}$ என்ருல் பெட்டி நழுவும் நிலையில் இருக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 5 : 3 பவு. எடையுள்ள வட்டவளையம் ஒன்று கிடைமட்டத்தில் அமைந்த முளை ஒன்றின்மீது தொங்குகிறது. வளையத்திலிருந்து தொடுகோட்டு நிலையில் $2\frac{2}{3}$ பவு. எடை ஒன்று தொங்குகிறது. வளையம் முளையின் மீது நழுவும் நிலையில் இருக்குமாயின் $\mu = \dfrac{8}{15}$ என நிறுவுக.

படம் 14 14-ல் C வளையத்தின் மையத்தையும் A, $2\frac{2}{3}$ பவு. எடை தொங்கும் புள்ளியையும், P முளையையும் குறிக்கின்றன. C-ல் செயற்படும் 3 பவு. எடை A-ல் செயற்படும் $2\frac{2}{3}$ பவு. எடை ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்புமையம் G எனக் கொள்வோமாயின்

வளையம் நழுவும் நிலையில் சமநிலையில் இருப்பதால் P-ல் செயற்படும் R, μ R ஆகியவற்றின் தொகுபயன் G வழியே செயற்பட



படம் 14·14

வேண்டும். வளையத்தின் ஆரம் a எனக் கொள்வோம்.

இனி C-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$3 \times 0 + \frac{8}{3} a = \left(3 + \frac{8}{3}\right) CG$$

அல்லது $$\frac{17}{3} CG = \frac{8}{3} a$$

$$\therefore \quad CG = \frac{8}{17} a.$$

CPG என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$PG^2 = CP^2 - CG^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 a^2$$

$$= \frac{225}{289} a^2$$

$$PG = \frac{15}{17} a$$

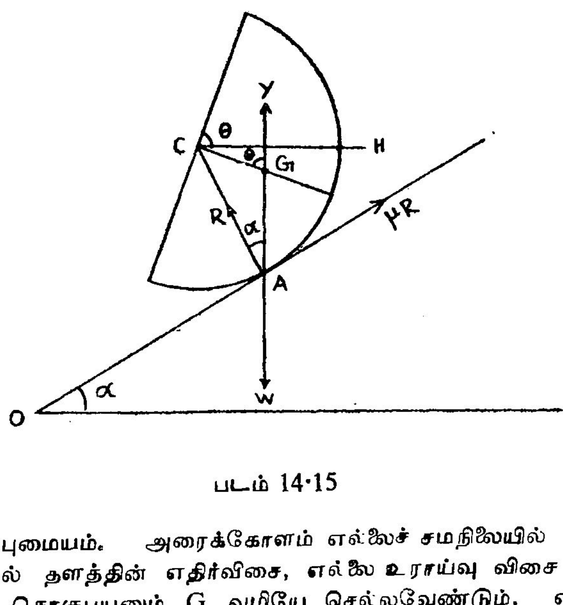
ஆனால் $\widehat{CPG} = \widehat{YPR} = \lambda$ = உராய்வுக்கோணம்

$$\therefore \quad \mu = \tan\lambda = \frac{CG}{GP} = \frac{8a}{17} \div \frac{15}{17}a$$

$$\mu = \frac{8}{15}$$

மாதிரிக் கணக்கு 6 : அரைக்கோள வடிவக்கூடு ஒன்று λ உராய்வுக்கோணமுடைய ஒரு சொரசொரப்பான சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோள விளிம்பின் வழியே செல்லும்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் sin1 $(2 \sin\lambda)$-ஐ விட அதிகமாக இருக்கமுடியாது என நிறுவுக.

படம் 14·15-ல் OA சாய்தளத்தையும் C அரைக்கோளத்தின் மையத்தையும் A, அரைக்கோளம் அடித்தளத்தைத் தொடும் புள்ளியையும் குறிக்கின்றன. G என்பது அரைக்கோளத்தின்



படம் 14·15

புவியீர்ப்புமையம். அரைக்கோளம் எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதால் A-ல் தளத்தின் எதிர்விசை, எல்லை உராய்வு விசை ஆகியவற்றின் தொகுபயனும் G வழியே செல்லவேண்டும். எனவே, GA ஒரு செங்குத்துக் கோடாகும்.

இனி சாய்தளத்தின் கோணம் α என்ருல் $\widehat{CAG} = \alpha$. அரைக்கோளத்தின் அடித்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனில் படத்தில் $\widehat{CGY} = \theta$ ஆகும்.

எனவே முக்கோணம் CGA-ல்

$$\frac{CA}{\sin(180-\theta)} = \frac{CG}{\sin\alpha}$$

$$\frac{CA}{CG} = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

ஆனல் $CA = CE = 2CG$

$\therefore$ $2 = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$

அல்லது $\sin\theta = 2\sin\alpha$

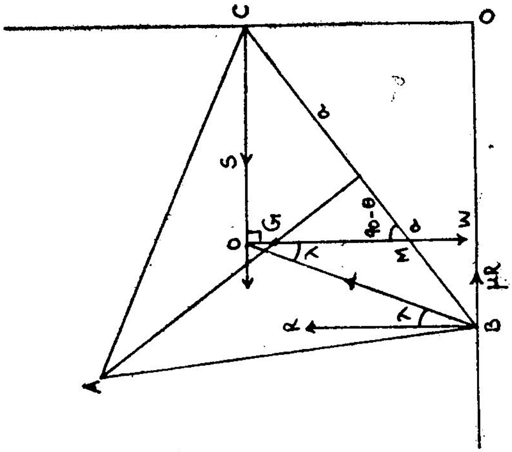
மேலும், அரைக்கோளம் எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதால் α-இன் பெரும மதிப்பு λ ஆகும். எனவே $\sin\theta$-ன் பெரும மதிப்பு $2\sin\lambda$. ஆகவே θ-ன் பெரும மதிப்பு $= \sin^{-1}(2\sin\lambda)$

மாதிரிக் கணக்கு : மெல்லிய சீரான அடர்த்தியைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று செங்குத்துத்தளத்தில் அதன் அடித்தளத்தின் ஒருமுனை சொரசொரப்பான கிடைத்தளத்தின்மீதும் மறுமுனை வழவழப்பான செங்குத்துச் சுவர் ஒன்றின் மீதும் அமைந்து சமநிலையில் உள்ளது. உராய்வெண் μ என்ருல் முக்கோணத்தின் அடித்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் $\cot\theta = 2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}$ என்னும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது என நிறுவுக.

படம் 14·16-ல் ABC முக்கோணத்தையும் G அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் BO தரையையும் OC சுவரையும் குறிக்கின்றன. கோணத்தின் அடித்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோமாயின் படத்தில் $\widehat{OMC} = 90-\theta$ ஆகும்.

முக்கோணம் சமநிலையிலிருப்பதால் B-ல் செயற்படும் R, μR ஆகியவற்றின் தொகுபயன், C-ல் செயற்படும் எதிர்விசை S,

முக்கோணத்தின் எடை ஆகிய மூன்றும் O என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். முக்கோணத்தின் பக்கம் $2a$ எனக்கொள்வோமாயின்,



படம் 14·16

$$AD = a \tan 60 = a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad GD = \tfrac{1}{3} a\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad MD = \frac{a}{\sqrt{3}} \tan \theta$$

எனவே $$BM = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \tan \theta = \frac{a}{\sqrt{3}} [\sqrt{3} - \tan \theta]$$

$$MC = a + \frac{a}{\sqrt{3}} \tan \theta = \frac{a}{\sqrt{3}} [\sqrt{3} + \tan \theta]$$

$$\therefore \quad BM : MC :: \sqrt{3} - \tan\theta : \sqrt{3} + \tan \theta$$

முக்கோணம் $B\hat{O}C$-ல் சமன் 12·11-ன் படி

$$2\sqrt{3} \cot (90 - \theta) = (\sqrt{3} - \tan \theta) \cot \lambda - (\sqrt{3} + \tan \theta). \cot 90$$

ஆனால் $\cot \lambda = \frac{1}{\tan\lambda} = \frac{1}{\mu}$; $\cot 90 = 0$

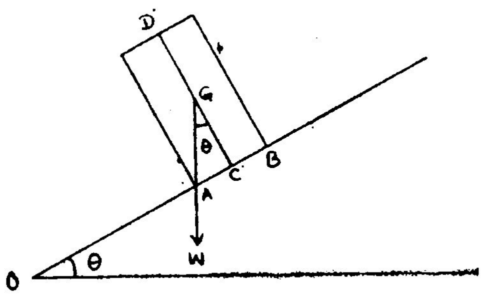
$$\therefore \quad 2\sqrt{3} \tan \theta = \frac{1}{\mu} (\sqrt{3} - \tan \theta)$$

$$2\mu\sqrt{3}\tan\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$$
$$2\mu\sqrt{3} = \sqrt{3}\cot\theta - 1$$
$$\sqrt{3}\cot\theta = 2\mu\sqrt{3} + 1$$

எனவே $\cot\theta = 2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}$

மாதிரிக் கணக்கு 8 : சீரான உருளை ஒன்று அதன் தளம் ஒரு சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டு சாய்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் சிறிது சிறிதாக அதிகரிக்கப்படுகிறது. உருளையின் விட்டத்திற்கும் உயரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் உராய்வு எண்ணைவிடக் குறைவாக இருப்பின் அது நழுவத்தொடங்குமுன் நொடித்து விடும் எனக் காட்டுக.

படம் 14·17-ல் AB உருளையின் அடித்தளத்தையும் G அதன் புவியீர்ப்புமையத்தையும் OB சாய்தளத்தையும் குறிக்கின்றன.



படம் 14·17

உருளை நொடிக்கும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது G வழியே செல்லும் செங்குத்துக்கோடு A வழியே செல்லும். இந் நிலையில் சாய்தளத்தின் கோணம் θ என்று கொள்வோமாயின் $\widehat{AGC} = \theta$.

உருளையின் விட்டம் $2r$ எனவும் உயரம் h எனவும் கொள்வோமாயின் $\tan\theta = \frac{AC}{GC} = \frac{r}{h/2} = \frac{2r}{h}$

உருளை நழுவும் நிலையில் இருக்கும்போது சாய்தளத்தின் கோணம் α எனக் கொள்வோமாயின்

$$\tan\alpha = \tan\lambda = \mu.$$

எனவே tan θ, tan λ ஐ விடக் குறைவாக இருப்பின் உருளை நழுவ ஆரம்பிக்குமுன் நொடித்து விடும். அதாவது $\frac{2r}{h}$, μ-ஐ விடக் குறைவாக இருப்பின் உருளை நழுவத் தொடங்குமுன் நொடித்து விடும்.

பயிற்சி XIV

1. 4 பவு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் 30° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள சொரசொரப்பான தளம் ஒன்றின்மீது எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. தளத்தின் கோணம் 60° ஆக உயர்த்தப்படும்பொழுது பொருளை எல்லைச் சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்கு தளத்தின்வழியே செயற்படுத்த வேண்டிய புறவிசையின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

2. 500 பவு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள் சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது கிடைமட்டக்கயிறு ஒன்றின் உதவியால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வு எண் 0.2, சாய்தளம் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ என்றால் கயிற்றின் பெரும, சிறும இழுவிசைகளைக் கணக்கிடுக.

3. 60 பவு. எடை ஒன்று சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டு தளத்தின் பெரும வாட்டக்கோட்டின்வழியே செயற்படும் 24 பவு. எடை விசை ஒன்றின் உதவியால் எல்லைச் சமநிலையில் கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மீது 36 பவு. எடை விசை ஒன்று செயற்படும்போது அது மேல் நோக்கி நகரும் நிலையில் உள்ளது, தளத்தின் உராய்வு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

4. ஒரு பொருளைக் கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து உச்சிக்கு எடுத்துச் செல்ல வேண்டியிருக்கிறது. உராய்வு எண் $\tan\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$-ஐ விடக் குறைவாக இருக்குமாயின் அப் பொருளைத் தூக்கிச் செல்வதைவிட தளத்தின்வழியே இழுத்துச் செல்வதற்குக் குறைவான விசையே தேவைப்படும் என நிறுவுக.

5. வெவ்வேறு மூலப்பொருட்களாலான சமமான இரு எடைகள் (W, W) சாய்தளம் ஒன்றின் பெரும வாட்டக்கோட்டிற்கு இணையான கயிறு ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு சாய்தளத்தின்மீது எல்லைச்

சமநிலையில் உள்ளன. சாய்தளத்திற்கும் தாழ்ந்த நிலையிலுள்ள பொருளுக்குமிடையே உராய்வு எண் $\frac{1}{3}$ என்றும், தளத்திற்கும் உயர்ந்த நிலையில் உள்ள பொருளுக்குமிடையே உராய்வு எண் $\frac{2}{3}$ என்றும் இருப்பின் சாய்தளத்தின் சரிவுக் கோணத்தையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் மதிப்பிடுக.

6. கிடைத்தளத்துடன் 30° கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள சாய் தளம் ஒன்றின்மீது 60 பவு. எடையுள்ள பொருள் ஒன்று கயிறு ஒன் றின் உதவியால் மேல்நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. உராய்வு எண் 0.2 எனில் சாய்தளம் செங்குத்து நிலையுடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும்போது கயிற்றில் செயற்படுத்த வேண்டிய விசையின் சிறும மதிப்பு என்ன ?

7. கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு பொருள், தளத்தின் உச்சியிலுள்ள கப்பி ஒன்றின்மீது செல்லும் கயிறு ஒன்றின் ஒருமுனையில் செங்குத்தாக தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் அதே நிறையுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவை தளத்தின்மீது 1. மேல்நோக்கி 2. கீழ் நோக்கி இயங்குவதற் கேற்ற α-ன் மதிப்பை உராய்வுக்கோணத்தின் அடிப்படையில் பெறுக.

8. 2 பவு, 1 பவு, எடையுள்ள இரு பொருட்கள் சம அளவுக்கு சொரசொரப்பாயும் கிடைத்தளத்திற்கு முறையே 30°, 60° கோணத் தில் சாய்ந்தும் இருக்கும் இரட்டைச்சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக் கப்பட்டு தளங்களின் பொது உச்சியில் உள்ள கப்பி ஒன்றின்மீது செல்லும் கயிறு ஒன்றின் உதவியால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. எடை மிக்க பொருள் கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருக்குமாயின் உராய்வு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

9. ஒரு பூச்சி a ஆரமுடைய அரைக்கோள வடிவ கோப்பை ஒன்றினுள் மேல்நோக்கி ஊர்ந்து செல்ல முயற்சிக்கிறது. அதன் கால்களுக்கும் கோப்பையின் பரப்புக்குமிடையே உராய்வு எண் $\frac{1}{3}$ என்றால் பூச்சியானது எவ்வளவு உயரத்திற்கு ஊர்ந்து செல்ல முடியும் ?

10. 24 அடி நீளமும் 112 பவு. எடையும் கொண்ட ஓர் ஏணி சமதளத்தரையில் வைக்கப்பட்டு ஒரு சுவரில் சாய்த்து வைக்கப் பட்டுள்ளது. சுவரும் தரையும் ஒரே அளவுக்குச் சொரசொரப்பா யிருந்து உராய்வு எண் 0·3 எனில் ஏணி எந்த நிலையில் எல்லைச்சம நிலையில் இருக்கும்?

11. AB என்ற சீரான ஏணி ஒன்று தரையிலிருந்து அதன் A முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது இருக்குமாறு சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் எடையைப்போல் மூன்று மடங்கு எடையுள்ள ஒரு சிறுவன் அதன்மீது ஏறுகிறான். அவன் ஏணியின் உச்சியில் இருக்கும்போது உள்ள உராய்வு விசை ஏணியின் அடியில் இருக்கும்போது உள்ளதைப்போல் நான்கு மடங்கு எனக் காட்டுக.

12. AB என்ற சீரான ஏணி ஒன்று அதன் B முனை தரையிலும் A முனை செங்குத்தான சுவர் ஒன்றிலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. A,B புள்ளிகளில் உராய்வு எண்கள் முறையே $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ என்றால் ஏணி சுவருடன் அமைக்கும் பெருமக் கோணம் சுமார் 36° எனக் காட்டுக.

13. 50 அடி நீளமும் 120 பவு. எடையும் கொண்ட ஓர் ஏணியின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் கீழ்முனையிலிருந்து 20 அடி தொலைவில் உள்ளது. அதன் ஒருமுனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீதும் மறுமுனை சொரசொரப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றின்மீது சுவரின் அடியிலிருந்து 14 அடி தொலைவிலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வு விசையைக் கணக்கிடுக. கீழ்முனையிலிருந்து 40 அடி தொலைவில் 20 பவு. எடை ஒன்று தொங்கவிடப்படும்போது ஏணி நழுவும் நிலையில் இருக்குமாயின் உராய்வு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

14. 30 அடி நீளமுள்ள ஏணி ஒன்று அதன் ஒருமுனை வழவழப்பான சுவர் ஒன்றின்மீதும் மறுமுனை 0·5 உராய்வெண்ணையுடைய தரையின்மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் கீழ்முனை சுவரிலிருந்து 6 அடி தொலைவில் இருக்குமாயின் ஏணியின் எடையைப்போல் 4 மடங்கு எடையுள்ள ஒருவர் ஏணி நழுவாவண்ணம் அதன் உச்சியை அடையமுடியும் எனக் காட்டுக.

15. l அலகு நீளமுள்ள சீரான ஏணி ஒன்று அதன்மேல் a உயரத்திலுள்ள வழவழப்பான கிடைத்தள தண்டவாளத்தின்மீது சற்றே நீட்டிக்கொண்டிருக்குமாறு சொரசொரப்பான தரை ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி நழுவும் நிலையில் இருக்குமாயின் உராய்வெண் $\mu = a\sqrt{(l^2-a^2)/(l^2+a^2)}$ என நிறுவுக.

16. $2l$ நீளமுள்ள சீரான தண்டு ஒன்று கிடைமட்டத்தில் அமைந்த முனையொன்றின் மீதாகச் சென்று அதன் ஒரு முனை

அதிலிருந்து a தொலைவில் உள்ள ஒரு சுவரில் அழுத்திக்கொண்டிருக்கிறது. முனையில் உராய்வு இல்லை என்றும் தண்டு கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கிறது என்றும் கொள்வோமாயின் சுவரில் உராய்வு எண்ணின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

17. W எடையுள்ள கோளம் ஒன்று கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தை அமைக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டு அதன் உச்சியில் இணைக்கப்பட்ட கிடைத்தள கயிறு ஒன்றின் உதவியால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் $\frac{\alpha}{2}$ ஐ விட அதிகம் என்றும் கயிற்றின் இழுவிசை $W. \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ என்றும் நிறுவுக.

18. 20 அடி நீளமும் 72 பவு. எடையும் உள்ள ஓர் ஏணியின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் கீழ் முனையிலிருந்து 8 அடி தொலைவில் உள்ளது. அது தரையிலிருந்து அதனுடன் θ கோணத்தை அமைக்குமாறு வழவழப்பான சுவர் ஒன்றின்மீது சாய்த்துவைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வெண் 0·7 என்றால் 12 கல் எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணி நழுவாவண்ணம் அதன் உச்சியை அடைய முடியுமாயின் θ-ன் மதிப்பை கணக்கிடுக.

19. நிலையான, உள்ளீடற்ற, சொரசொரப்பான கோளம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட சீரான தண்டு ஒன்று கோளமையத்தில் செங்கோணம் ஒன்றைத் தாங்குகிறது. உராய்வுக்கோணம் λ எனில் தண்டுநழுவாமல் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் பெருமக் கோணத்தை மதிப்பிடுக.

20. W எடையும் 37 அடி நீளமும் கொண்ட AB என்ற சீரான ஏணி ஒன்றின் A முனை, உராய்வெண் $\frac{1}{2}$ உள்ள ஒரு கிடைத்தளத் தரையின் மீதும் B முனை, உராய்வெண் $\frac{5}{12}$ உள்ள ஒருசெங்குத்தான சுவரின்மீதும் இருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவரிலிருந்து A-ன் தொலைவு 12 அடி என்றால் ஏணியைச் சுவரை நோக்கிச் சற்றே இழுப்பதற்கு A-ல் செயற்படுத்த வேண்டிய விசை $\frac{89}{120}$ W எனக் காட்டுக.

21. 50 பவு. எடையுள்ள சீரான ஏணி கிடைத்தளத்துடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும் தரையிலிருந்து ஒரு வழவழப்பான சுவரின்மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி நழுவும்

நிலையில் இருக்கும்போது அது கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் கணக்கிடுக. உராய்வுக்கோணம் 45° என்ருல் சுவரின் எதிர்விசையைக் கணக்கிடுக.

22. சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கூம்பு நழுவும் நிலையிலும் சாய்ந்து விழும் நிலையிலும் உள்ளது $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ என்ருல் கூம்பின் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

23. சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்ட சீரான, கன சதுரக் கட்டை ஒன்று அதன் கிடைமட்டத்தில் அமைந்த மேல் விளிம்பின் மையப்புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டு தளத்தின் பெரும வாட்டக் கோட்டிற்கு இணையாக அமைந்த கயிறு ஒன்றின் உதவியால் சநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளத்தின் கோணம் $\tan^{-1}(2\mu+1)$-ஐ விடக்குறைவாக இருக்கக் கூடாது என நிறுவுக.

24. சீரான தண்டு ஒன்று அதனுடைய முனைகள் செங்குத்தாயமைந்த சொரசொரப்பான வளையம் ஒன்றில் இருக்குமாறு சமநிலையில் உள்ளது. தண்டின் நீளம் வளையத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமாகும். தண்டின் உச்சி வளையத்தின் கிடைத்தள விட்டத்தின் முனையில் உள்ளது, வளையத்திற்கும் தண்டின் ஒவ்வொரு முனைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வெண்ணைக் கணக்கிடுக.

25. ABCD என்ற சதுர வடிவ சீரான தகடு ஒன்று அதன் BC பக்கம் α கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது இருக்குமாறு செங்குத்தாக இருக்கிறது. தகட்டின் A முனை தளத்தின் உச்சி, T உள்ள அதேமட்டத்தில் இருக்கிறது, A-யில் சிறிது சிறிதாக அதிகமாகும் விசை ஒன்று AT திசையில் செயற்படுகிறது. λ என்பது உராய்வுக்கோணம் என்ருல், $\frac{\tan(\alpha+\lambda)}{1+\tan\alpha} > \frac{1}{2}$ என்ருல் தகடு நழுவுமுன் B-ஐப் பற்றிச் சுழல முயலும் என நிறுவுக.

26. $2a$ பக்கமுள்ள கன சதுர வடிவிலுள்ள ஒரு கட்டை ஒரு கிடைதளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. கட்டைக்கும் தளத்திற்கும் இடையே உராய்வு எண் μ ஆகும். கட்டையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத்தளத்தில் செங்குத்தாய் அமைந்த பக்கம் ஒன்றிற்கு நேர்குத்துத் திசையில் ஒரு கிடைத்தள விசைச் செயற்படுத்தப்படுகிறது. விசை செயற்படுபுள்ளி கிடைத்தளத்திற்குமேல் $\frac{a}{\mu}$ -ன் மதிப்பைவிட உயரத்தில் இருக்குமாயின்

$\mu > \frac{1}{2}$ என்றால் கட்டை சாயுமுன் நழுவும் என்றும், $\mu < \frac{1}{2}$ என்றால் அது நழுவுமுன் சாயும் என்றும் காட்டுக.

27. சமநீளமுடைய AB, AC என்ற சீரான இரு தண்டுகள் B-ல் அசையுமாறு இணைக்கப்பட்டு அவற்றின் A, C முனைகள் சொரசொரப்பான கிடைதளத்தில் அமைந்து செங்குத்தாக சமநிலையில் இருக்கின்றன. AB-யின் எடை BC-ன் எடையைப்போல் இரு மடங்கு என்றால் A,C ஆகிய இரு புள்ளிகளிலும் எல்லை உராய்வு இருக்கமுடியாது என்றும், அவற்றுள் ஏதாவதொரு புள்ளியில் இருக்குமாயின் அது C-ல் இருக்கும் என்றும் நிறுவுக. தண்டுகளுக்கிடையே இருக்கக்கூடிய பெருமக்கோணம் 90° எனில் உராய்வெண்ணையும் கணக்கிடுக.

28. சதுரங்கப்பலகை ஒன்று ஓரளவு திறந்த நிலையில் ஒரு சொரசொரப்பான கிடைத்தள மேசைமீது கவிழ்ந்த நிலையில் அதன் மடிப்பு கிடைமட்டத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அது எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கும்போது அதன் இருபாதிகளுக்கிடையே யுள்ள கோணம் 2α என்றால் உராய்வெண் $\frac{1}{2}\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

விடைகள் :

1. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ பவுண்டு எடை

2. $\frac{3500}{9}$ பவு. எடை $\frac{1500}{11}$ பவு. எடை

3. $\frac{\sqrt{3}}{15}$

5. $\tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\frac{W}{3\sqrt{5}}$ பவு. எடை

... .

7. $90-2\lambda$, $90°$

8. 0·66

....

10. கிடைத்தளத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{91}{60}\right)$

13. $14g$, $\frac{2}{15}$

16. $\frac{l\cos^3\theta - a}{l\cos^2\theta\sin\theta}$

18. $\cot^{-1}\frac{75}{123}$

21. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\cot 15°)$, $50\tan 15°$

22. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{12}\sqrt{3}\right)$

27. $\frac{3}{5}$

15. மாயவேலை
(Virtual Work)

ஒரு பொருளின்மீது விசை ஒன்று செயற்படும்போது விசைச் செயற்படுபுள்ளி நகருமாயின் வேலை செய்யப்படும் என்று கூறப்படுகிறது என்று முன்னர் கூறப்பட்டது. ஒரு பொருளின்மீது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் செயற்படும்போது அவற்றின் தொகுபயன் சுழியாகுமாயின் அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கக்கூடும் என்றும் கண்டோம். அத்தகைய நிலையில் பொருளானது உண்மையில் நகருவதற்கு முயலாது. எனினும் அது நகருவதாகக் கற்பனை செய்வோமாயின் அது பெறும் இடப்பெயர்ச்சி கற்பித இடப்பெயர்ச்சி அல்லது மாய இடப்பெயர்ச்சி (virtual dlsplacement) எனப்படும்.

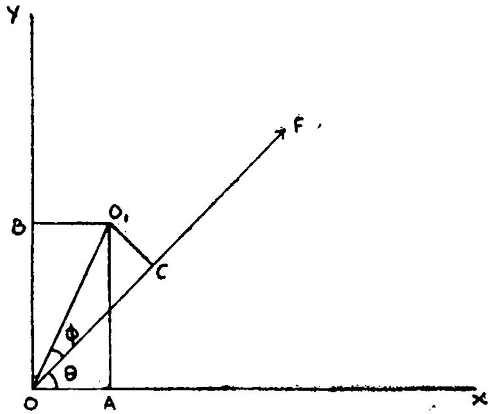
விசைச் செயற்படுபுள்ளி கற்பித இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும் போது செய்யப்படக்கூடிய வேலை கற்பிதவேலை அல்லது மாயவேலை எனப்படும். மாயவேலையானது விசை (F), விசைச் செயற்படுபுள்ளி விசையின் திசையில் பெறும் மாய இடப்பெயர்ச்சி (S), ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனால் அளவிடப்படுகிறது. அதாவது கற்பனை வேலை $= F \times S$

விசைச் செயற்படுபுள்ளி விசையின் திசையுடன் θ கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் மாய இடப்பெயர்ச்சி ஒன்றைப் பெறுமாயின்,
கற்பனை வேலை $= F \times S \cos \theta$

தேற்றம் : ஒருவிசையின் மாயவேலை அவ் விசையின் ஆக்கக் கூறுகளின் கற்பித வேலைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

ஒரு திண் பொருளில் O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் F என் விசையைக் கருதுவோம். OX, OY என்பவை O வழியாகச் செல்லும்

ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான திசைகள் எனவும் OX என்ற திசை விசையின் திசையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் (படம் 15·1)



படம் 15·1

கொள்வோமாயின், OX, OY திசைகளில் F-ன் ஆக்கக் கூறுகள் முறையே,

$$x = F\cos\theta$$
$$y = F\sin\theta$$

ஆகும்.

இனி, விசைச் செயற்படுபுள்ளியான O விசையின் திசையுடன் ϕ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் OO_1 என்ற மாயஇடப் பெயர்சியைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம், O_1 லிருந்து OX, OY, F-ன் திசை ஆகியவற்றிற்கு முறையே O_1A, O_1B, O_1C ஆகிய நேர்குத்துக் கோடுகளை வரைவோமாயின், அத் திசைகள்மாய இடப் பெயர்ச்சிகள் முறையே OA, OB, OC ஆகும்.

எனவே,

x-ன் மாயவேலை $= x \times OA$

y-ன் மாயவேலை $= y \times OB$.

x, y ஆகியவற்றின் மாயவேலைகளின் கூட்டுத்தொகை

$= x \times OA + y \times OB$.

$= F\cos\theta \times OO_1 (\cos\theta + \phi) + F\sin\theta \times OO_1 \sin(\theta + \phi)$

$= F.OO_1 [\cos\theta\cos(\theta+\phi) + \sin\theta\sin(\theta+\phi)]$

$= F.OO_1 \cos\phi$

$= F.OC$,

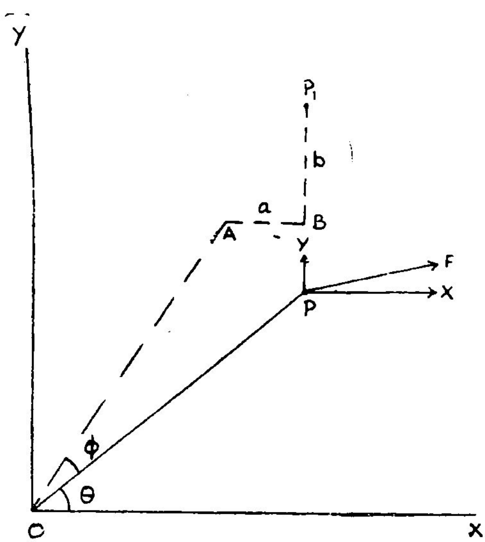
$=$ F-ன் மாய வேலை.

மாய வேலைக் கோட்பாடு (Principle of virtual work) :

திண்பொருள் ஒன்றின்மீது செயற்படும் ஒரு தள விசைத் தொகுதி ஒன்று சமநிலையில் இருக்குமாயின், அவ் விசைத் தொகுதி திண்பொருள் அடங்கிய அமைப்பின் வடிவ கணித நிபந்தனைக்குட்பட்ட ஒரு மாய இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்பொழுது அவ் விசைகள் செய்யும் மாய வேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

ஒரு தள விசைத் தொகுதி செயற்படும் திண்பொருளில் OX, OY என்ற ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாயமைந்த இரு நிலையான அச்சுகளைக் கருதுவோம். (படம் 15·2).

பொருள் ஒருசிறு மாய இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். விசைத் தொகுதியில் அடங்கிய விசைச் செயற்படு புள்ளிகளும் அதே அளவு இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்



படம் 15·2

OX, OY ஆகிய அச்சுகள் அடங்கிய தளத்தில் வடிவ கணித நிபந்தனைக்குட்பட்டு பொருள் பெறக்கூடிய மூன்று இடப் பெயர்ச்சிகள் பின் வருமாறு; (i) பொருள் O என்ற புள்ளியைப் பற்றி ϕ என்ற கோண அளவுக்குச் சுழலக்கூடும். (ii) OX-க்கு இணையான திசையில் Q தொலைவு நகரக் கூடும். (iii) OY-க்கு இணையான திசையில் b தொலைவு நகரக்கூடும். பொருள் இம்

மூன்று இடப் பெயர்ச்சிகளையும் பெறுவதன் பயனாய் விசைத் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு விசையின் செயற்படு புள்ளியும் அதே இடப் பெயர்ச்சிகளைப் பெறும். F என்ற விசையின் செயற்படு புள்ளியான P, P_1 என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயர்வதாகக் கொள்வோம்.

P-ன் ஆரமுறை ஆயத் தொலைவுகள் (Polar coordinates) r, θ எனக் கொள்வோமாயின், அதன் கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைவுகள் (cartesiancoord inates) $x = r\cos$, $y = r\sin\theta$. எனவே P_1-ன் கார்ட்டீசியின் ஆயத்தொலைவுகள் $x_1 = r\cos(\theta+\phi)+a$, $x_2 = \gamma\sin(\theta+\phi)+b$,

இனி, P-ன்

x ஆயத் தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதல்

$= r\cos(\theta+\phi)+a - r\cos\theta$

$= r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi + a - r\cos\theta$

$= a - r\sin\theta\,.\,\phi$ [ϕ சிறியதாக இருக்கும்போது $\cos\phi = 1$; $\sin\phi = \phi$]

$= a - y\phi$.

y ஆயத் தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதல்

$= r\sin(\theta+\phi) + b - r\sin\theta$

$= r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi + b - r\sin\theta$

$= b + r\cos\theta\,.\,\phi$

$= b + x\phi$.

எனவே, OX, OY திசைகளில் F-ன் ஆக்கக்கூறுகள் X, Y, எனில், X-ன் மாயவேலை $= X(a - y\phi)$

Y-ன் மாயவேலை $= Y(b + x\phi)$

F-ன் மாயவேலை = X, Y ஆகியவற்றின் மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$= X(a - y\phi) + Y(b + x\phi)$

$= a.X + b.Y + \phi(Y.x - X.y)$

விசைத் தொகுதியில் அடங்கியஎல்லா விசைச்செயற்படு புள்ளிகளும் P-ன் இடப்பெயர்ச்சிகளையே பெறுமாதலால். எல்லா விசைகளின் மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$= a\Sigma X + b\Sigma Y + \phi\Sigma(Y.x - X y)$$

விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதால் அதன் தொகுபயன் சுழியாகும். எனவே; ΣX, ΣY ஆகிய ஒவ்வொன்றும் சுழியாகும். மலும், $(\Sigma Y\cdot x - X\cdot y)$ என்பது விசைகளின் O-ஐப் பற்றிய திருப்புத் -

திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையாதலால் அதுவும் சுழியாகும்.

எனவே. $a\Sigma X+b\Sigma Y+\phi\ \Sigma(Y.x-X\ y)=O$

அதாவது, விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும் பொழுது விசைகளின் மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

மாயவேலைக் கோட்பாட்டின் மறுதலை : ஒருதிண் பொருளின்மீது செயற்படும் ஒருதள விசைத்தொகுதி ஒன்றின் மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகுமாயின் விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாதலால்,

$$a\Sigma X+b\Sigma Y+\phi\Sigma\ (Y.x-X.y)=O$$

இப்பொழுது விசைச் செயற்படு புள்ளிகள் OX-க்கு இணையான திசையில் மட்டுமே a தொலைவு நகருமாறு பொருள் ஒரு மாய இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். அதாவது $b=O$, $\phi=O$ எனவே $a\Sigma X=O$

a, சுழியில்லையாதலால் $\Sigma X=O$ ஆகும். அதாவது OX-க்கு இணையான திசையில் விசைகளின் ஆக்கக்கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

அடுத்து, விசைச் செயற்படு புள்ளிகள் OY—க்கு இணையான திசையில் மட்டும் b தொலைவு நகருமாறு பொருள் ஒரு மாய இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். அதாவது $a=O$; $\phi=O$ எனவே, $b\ \Sigma Y=O$

b, சுழியில்லையாதலால் $\Sigma Y=O$ ஆகும். அதாவதுOYக்கு இணையான திசையில் விசைகளின் ஆக்கக்கூறுகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

இறுதியாக, பொருள் O-ஐப் பற்றிச் சுழலுவதாகமட்டும் கொள்வோம். அதாவது $a=O$; b—O. எனவே,

$$\phi\Sigma\ (Y.x-X.y)=O$$

ϕ, சுயிழில்லையாதலால் $\Sigma\ (Y.x-X.y)\ =\ O$ அதாவது விசைகளின் O-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.

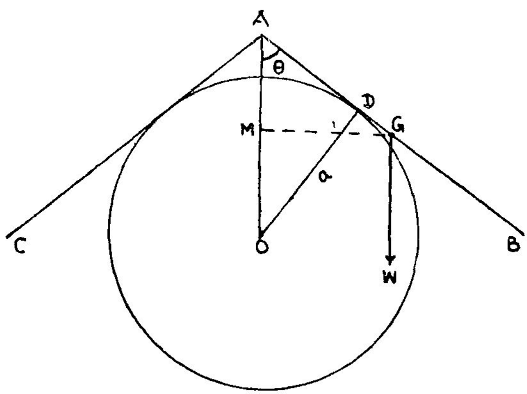
எனவே விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

மாயவேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி ஒருதள விசைகள் பல செயற்பட்டு சமநிலையிலிருக்கும் திண் பொருட்களைப் பற்றிய கணக்குகளைச் செய்யும் பொழுது பின்வரும் சில உண்மைகளைக் கருத்திற் கொள்ள வேண்டும்.

1. திண்பொருட்கள் பல அமைந்த ஒரு அமைப்பில் இடம் பெறக்கூடிய கயிறு ஒன்றின் நீளத்தில் அமைப்பு மாய இடப் பெயர்ச்சி ஒன்றைப் பெறும்போது எவ்வித மாறுபாடும் ஏற்படவில்லையாயின் கயிற்றின் இழு விசையை எதிர்த்து வேலை செய்யப் படுவதில்லை.

2. வழவழப்பான பொருள் ஒன்றின்மீது சமநிலையில் இருக்கும் மற்றொரு பொருள் மாய இடப்பெயர்ச்சி ஒன்றைப் பெறும்போது பொருளின் அந்த மாய இடப்பெயர்ச்சி அவற்றிற்கிடையே செயற் படும் லம்ப எதிர்விசைக்கு நேர்குத்துத் திசையில் அமையுமாதலால் லம்ப எதிர்விசை கற்பனை வேலை எதையும் செய்வதில்லை.

3. ஒன்றோடு ஒன்று தொடர்பு கொண்டிருக்கும் வழவழப் பான இரு பொருட்கள் மாய இடப்பெயர்ச்சி ஒன்றை ஒருங்கே பெறும்பொழுது அவை ஒன்றின் மீதொன்று செயற்படுத்தும் லம்ப எதிர்விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்த்திசைகளில் செயற்படு வதால் அவைகளின் மாயவேலைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும்.



படம் 15·3

மாதிரிக் கணக்கு 1. AB, AC என்ற ஒவ்வொன்றும் 2 b நீளமுடைய சமமான சீரான இரண்டு தண்டுகள் A-ல் கீல்மூலம்

இணைக்கப்பட்டு a ஆரமுடைய வழுவழுப்பான செங்குத்தான வட்டம் ஒன்றின்மீது சமநிலையில் இருக்கிறது. அவைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 2θ என்றால் $b \sin^3 \theta = a \cos\theta$ என நிறுவுக.

படம் 15·3. தண்டுகளின் நிலையைக் காட்டுகிறது; O என்பது வட்டத்தின் மையம்; G என்பது AB தண்டின் புவியீர்ப்புமையம் AB வட்டத்தை D என்ற புள்ளியில் தொடுவதாகக் கொள்வோம்.

$\widehat{OAD} = 2\theta$, G-லிருந்து OA-க்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக்கோடு OA-ஐ M-ல் சந்திக்கட்டும். தண்டுகள் ஒவ்வொன்றின் எடையும் W எனக் கொள்வோம்.

O-விருந்து G-ன் உயரம்

$$OM = OA - MA$$

ஆனால், $$OA = \frac{OD}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$MA = AG\cos\theta = b\cos\theta.$$

$$OM = \frac{a}{\sin\theta} - b\cos\theta.$$

A, சற்று கீழ்நோக்கி நகருமாறு தண்டுகள் மாய இடப்பெயர்ச்சி ஒன்றைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். அதன் பயனாய் $\widehat{OAD}$-ன் மதிப்பு $d\theta$ அளவுக்கு அதிகமாவதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, தண்டுகளின் எடைகளை எதிர்த்துச் செய்யப்படும் மாய

வேலை $$= 2W \times d\left(\frac{a}{\sin\theta} - b\cos\theta\right)$$

$$= 2W \times \left[-a\frac{\cot\theta}{\sin\theta} + b\sin\theta\right] d\theta$$

தண்டுகள் சமநிலையிலிருப்பதால் மாயவேலைக் கோட்பாட்டின்

படி $$= 2W \times \left[-a\frac{\cot\theta}{\sin\theta} + b\sin\theta\right] d\theta = O$$

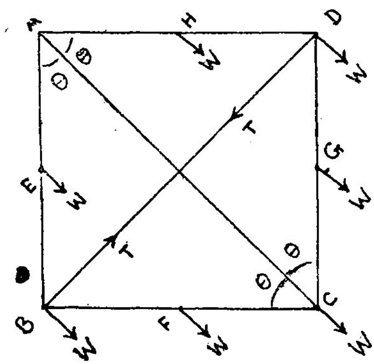
$$\therefore \quad a\frac{\cot\theta}{\sin\theta} - b\sin\theta = O$$

அல்லது $$a\frac{\cot\theta}{\sin\theta} = b\sin\theta$$

அதாவது $$\cos\theta = b\sin^3\theta$$

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஒவ்வொன்றும் W எடையையுடைய நான்கு சீரான தண்டுகளால் ஆன ஒரு சதுரச் சட்டம் அதன் ஒரு மூலையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. மற்ற மூன்று மூலை களில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் W என்ற எடை தொங்கவிடப் படுகிறது. சதுரத்தின் கிடைத்தள மூலைவிட்டத்தின் வழியே ஓர் இலேசான தண்டை வைத்து சதுரத்தின் வடிவம் மாருமல் காக்கப் படுகிறது. இலேசான தண்டின்மீது செயற்படும் அழுத்த விசையைக் கணக்கிடுக.

படம் 15·4-ல் ABCD என்பது சதுரம். E,F,G,H என்பன முறையே AB, BC, CD, DA ஆகிய தண்டுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள். BD என்பது இலேசான தண்டு.



படம் 15·4

$\widehat{CAB} = \widehat{CAD} = \theta$ எனவும் தண்டுகள் ஒவ்வொன்றின் நீளம் $2l$ எனவும் கொள்வோம்.

A-லிருந்து

E,H ஆகியவற்றின் ஆழங்கள்	$l \cos \theta$;
B,D ஆகியவற்றின் ஆழங்கள்	$2l \cos \theta$;
F,G ஆகியவற்றின் ஆழங்கள்	$3l \cos \theta$;
C-ன் ஆழம்	$4l \cos \theta$.
இலேசான தண்டின் நீளம் BD =	$4l \sin \theta$.

தண்டின்மீது செயற்படும் அழுத்த விசை T எனக் கொள் வோம்.

இப்பொழுது தண்டுகள் அடங்கிய அமைப்பு ஒரு சிறு மாய இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். அதன் பயனாய் $\widehat{CAB}$, $\widehat{CAD}$ கோணங்கள் $d\theta$ அளவு மாறுபடுவதாகக் கொள்வோம்.

இனி,

E,H ஆகிய புள்ளிகளிலுள்ள எடைகளின் மாயவேலை
$$= 2\,W.d\,(l \cos\theta)$$
B,D ஆகிய புள்ளிகளிலுள்ள எடைகளின் மாயவேலை
$$= 2W.\,d\,(2l \cos\theta)$$

F,G ஆகிய புள்ளிகளிலுள்ள எடைகளின் மாயவேலை
$$= 2W.\,d\,(3l \cos\theta)$$

C-ல் உள்ள எடையின் மாயவேலை
$$= W.d\,(4l \cos\theta)$$
இலேசான தண்டில் செயற்படும் அழுத்த விசையால் செய்யப்படும் மாயவேலை $= T.d\,(4l \sin\theta)$

மாயவேலைக் கோட்பாட்டின்படி
$$2W.d\,(l \cos\theta) + 2W.d\,(2l \cos\theta) + 2W.d\,(3l \cos\theta) + W.d\,(4l \cos\theta) + T.d\,(4l \sin\theta) = 0$$
அல்லது $(2W+4W+6W+4W)\,l + d\,(\cos\theta) + 4\,Tl\,d(\sin\theta) = 0$

அதாவது $16W(-\sin\theta\, d\theta) + 4T \cos\theta d\theta = 0$

அதாவது $4T \cos\theta = 16\,W \sin\theta.$

ஆனல், ABCD ஒரு சதுரமாதலால் $\theta = 45^\circ$

எனவே, $\cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \quad T = 4W.$

அதாவது இலேசான தண்டில் செயற்படும் அழுத்தவிசை 4W ஆகும்.

பயிற்சி XV

1. நான்கு தண்டுகளை இணைத்து ஓர் இணைகரம் செய்யப்பட்டு அவற்றின் எதிர்முனைகள் மூலைவிட்டங்கள் வழியே செல்லும் இரு கயிறுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் இழுவிசைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்கு எதிர் விகிதத்திலிருக்கின்றன என நிறுக

2. நான்கு சமமான தண்டுகள் ABCD என்ற சாய்வு சதுரத்தை அமைக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சாய்வு சதுரம் அதன் AC மூலைவிட்டம் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஒரு கிடைத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டு B,D மூலைகள் ஓர் இலேசான கயிற்ருல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $\widehat{BAC} = \theta$ என்ருல் கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக. [4W]

3. ஆறு சமமான, சீரான தண்டுகளால் ஆன அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கம் கிடைமட்டமாகப் பொருத்தப்பட்டு அதன் மையப் புள்ளியும் அதற்கு எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளியும் தண்டின் நீளத்தைப்போல் இருமடங்கைவிடக் குறைவான நீளத்தையுடைய ஒரு கயிற்ருல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் இழுவிசை அதன் நீளத்தைப் பொறுத்ததல்ல எனக் காட்டுக.

4. நான்கு சீரான தண்டுகளால் அமைக்கப்பட்ட ABCD என்ற இணைகரம் A-லிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இணைகர வடிவம் செவ்வகமாக மாறுமாறு A,C மூலைகள் விரிவுபடாத கயிறு ஒன்றிஞல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் இழுவிசை தண்டின் எடையில் பாதி எனக் காட்டுக.

5. AB, AC என்ற இரு தண்டுகள் A ல் கீல்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் B,C முனைகள் ஒரு கயிற்ருல் இணைக்கப்பட்ட பின் அவை வழவழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றில் அமையுமாறு தண்டுகள் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளன. AC தண்டில் C-லிருந்து b தொலைவிலுள்ள D என்ற புள்ளியில் W என்ற எடை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அந்த தண்டு A வழியே செல்லும் செங்குத்து நிலைக்கு சரிச்சீரமைவாக அமையுமாயின் கயிற்றின் முவிசையைக் கணக்கிடுக. $\left[\frac{W\,b \tan\theta}{2a}\right]$

6. சமமான நீளமுடைய எடையற்ற ஐந்து தண்டுகள் ABCD என்ற சாய்வு சதுரத்தையும் அதன் BD என்ற மூலைவிட்டத்தையும் அமைக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. C-ல் W என்ற ஓர் எடை தொங்கவிடப்பட்டு சாய்வுசதுரம் A-லிருந்து தொங்கவிடப்படுமாயின் BD-ல் செயற்படும் அழுத்த விசை $\frac{W}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

7. ஒவ்வொன்றும் W எடையுடைய 12 சமமான தண்டுகளால் அமைக்கப்பட்ட ஒழுங்கான எண்முகி ஒன்று ஒரு மூலையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கிடைத்தளத் தண்டிலும் செயற்படும் அழுத்த விசை $\frac{3}{2}\,W/\sqrt{2}$ என நிறுவுக.

8. 3 பவு. எடையும் 5 அடி நீளமும் கொண்ட மூன்று சீரான தண்டுகள் ஒரு முக்காலிச் சட்டத்தை அமைக்குமாறு ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் $1\frac{1}{2}$ அடி நீளமுள்ள மூன்று இலேசான கயிறுகளால் தண்டுகளின் மையப்புள்ளிகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. முக்காலிச் சட்டம் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டு அதன்மீது 10 பவு. எடை ஒன்று வைக்கப்படுமாயின் கயிறுகளின் இழுவிசைகளைக் கணக்கிடுக.

9. ஒவ்வொன்றும் W எடையுள்ள மூன்று சமமான தண்டுகளைக் கீல்மூலம் இணைத்து அமைக்கப்பட்ட ABC என்ற சமபக்க முக்கோணம் BC-ன் மையப் புள்ளியில் தாங்கப்பட்டுள்ளது. A-ல் உள்ள கீலில் செயற்படும் விசை $W\frac{\sqrt{3}}{6}$ எனக் காட்டுக.

10. முறையே 6 அடி நீளமும் 8 அடி நீளமும் கொண்ட AB, AC என்ற இரு தண்டுகள் A-ல் கீல்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB, AC ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளை 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றால் இணைத்து B,C முனைகள் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசைமீது அமையுமாறு தண்டுகள் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளன. தண்டுகளின் ஓரலகு நீளத்திற்கான எடை W என்றால் கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக. $\left[\frac{168}{25}W\right]$

11. ஒவ்வொன்றும் 10 பவு. எடையுள்ள மூன்று சமமான சீரான தண்டுகள் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்திலிருந்து 4 அடி உயரத்திலுள்ள D என்ற புள்ளியில் கீல்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் A,B,C முனைகள் அந்த கிடைத்தளத்தில் அமையுமாறு வைக்கப்பட்டு D-லிருந்து 45 பவு. எடை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A,B,C ஆகிய ஒவ்வொரு முனையும் மற்ற இரு தண்டுகளின் மையப்புள்ளிகளுடன் 3 அடி நீளமுள்ள கயிறுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிறுகளின் இழுவிசைகளைக் கணக்கிடுக. [5 பவு. எடை]

12. இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோண வடிவிலமைந்த ஒரு மென்தகடு அதன் தளம் செங்குத்தாக அமையுமாறும் உச்சி கீழ்நோக்கி இருக்குமாறும் ஒரே கிடைமட்டத்தில் அமைந்த இரு வழவழப்பான முனைகளுக்கிடையே அமைந்துள்ளது. அதன் அடிப்பக்கத்தின் நீளம் முனைகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவைப் போல் மூன்று மடங்காதும். அடிப்பக்கம் கிடைத்தளத்துடன் 60° கோணத்தை அமைக்குமாயின் மென்தகடு சமநிலையிலிருக்குமெனை நிறுவுக.

16. இலகு எந்திரங்கள்

(Simple Machines)

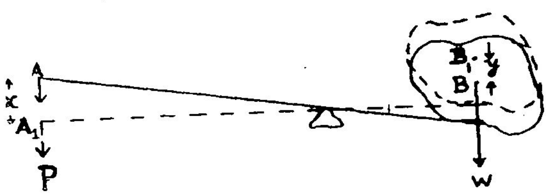
நம் அன்றாட வாழ்வில் கத்திரிக்கோல், இடுக்கி, பாக்குவெட்டி, கப்பிகள், நெம்புகோல் போன்ற பலவித கருவிகளைக் கையாளுகிறோம். அவை யாவும் இலகு எந்திரங்களே. அத்தகைய கருவிகளில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படுத்தப்படும் ஒரு விசை மற்றொரு புள்ளியில் செயற்படும் மற்றொரு விசையை வெற்றி கொள்ளும் வகையில் வசதியானதிசையிலும் அளவிலும் கிடைக்குமாறு செய்யப்படுகிறது. கருவியில் செயற்படுத்தப்படும் விசை முயற்சி (effort) எனவும் வெற்றி கொள்ளப்படும் விசை எடை (weight) அல்லது பளு (load) எனவும் வழங்கப்படும்.

எந்திரப்பயன் (Mechanical advantage) :

இலகு எந்திரத்தில் முயற்சியானது எடையைச் சரியீடு செய்யுமாயின் எடைக்கும் முயற்சிக்கும் உள்ள தகவு எந்திரப்பயன் எனப்படும்.

முயற்சியை P என்றும் எடையை W என்றும் குறித்தால்

$$\text{எந்திரப் பயன்} = \frac{\text{எடை}}{\text{முயற்சி}} = \frac{W}{P} \quad \dots \quad \dots \quad 16{\cdot}1$$



படம் 16·1

திசைவேகத் தகவு (Velocity ratis)

இலகு எந்திரத்தில் முயற்சி, எடை ஆகியவற்றின் செயற்படு புள்ளிகள் நகரும்போது அவற்றின் இடப்பெயர்ச்சிகளுக்கிடையேயுள்ள தகவு திசைவேகத் தகவு எனப்படும்.

படம் 16·1-ல் முயற்சி செயற்படுபுள்ளி A-லிருந்து A_1-க்கு x தொலைவு நகரும்போது எடை செயற்படுபுள்ளி B-லிருந்து B_1-க்கு y தொலைவு நகருமாயின்

$$\text{திசைவேகத் தகவு} = \frac{x}{y}$$

பயனுறு திறன் (efficiency)

ஓர் எந்திரத்தின் பயனுறு திறன் என்பது அது செய்யும் பயனுறு வேலைக்கும் அதன்மீது செய்யப்படும் வேலைக்கும் உள்ள தகவு ஆகும்.

$$\text{அதாவது, பயனுறு திறன்} = \frac{\text{எந்திரம் செய்யும் பயனுறுவேலை}}{\text{எந்திரம் பெறும் வேலை}}$$

படம் 16·1-ல்

பயனுறு திறன்

$$= \frac{\text{எடையை எதிர்த்து எந்திரம் செய்யும்வேலை}}{\text{முயற்சியால் செய்யப்படும் வேலை}}$$

$$= \frac{W \times y}{P \times x}$$

$$= \frac{W}{P} \div \frac{x}{y}$$

$$\text{எனவே பயனுறு திறன்} = \frac{\text{எந்திரப் பயன்}}{\text{திசைவேகத் தகவு}} \quad \ldots \ldots 16{\cdot}3$$

பயனுறு திறனின் பெரும மதிப்பு ஒன்றாகும். உராய்வு போன்ற எதிர்விசைகளற்ற இலட்சிய எந்திரங்களில் எந்திரத்தின்மீது செய்யப்படும் வேலை முழுவதும் எடையை எதிர்த்து வெற்றி கொள்ளப் பயன்படுகிறது; அதாவது எந்திரத்தின்மீது செய்யப் படும் வேலை முழுவதும் எந்திரம் செய்யக்கூடிய பயனுறு வேலைக்குச் சமமாகிறது. அத்தகைய எந்திரங்களின் பயனுறு திறன் பெரும மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும். ஆனால் உண்மையில் அத்தகைய எந்திரங்களை அமைக்க முடியாதாகையால் பயனுறு திறன் எப்போதும் ஒன்றைவிடக் குறைவாகவே இருக்கும். பயனுறு திறனைச் சதவீதத்தில் குறிப்பது மரபு.

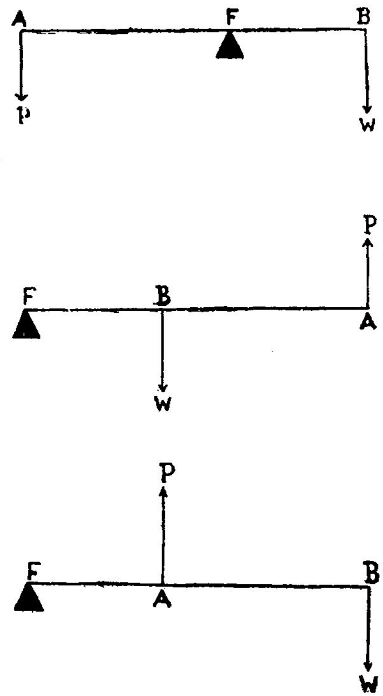
இலட்சிய எந்திரத்தின் பயனுறு திறன் ஒன்று ஆதலால் அத்தகைய எந்திரத்தில் எந்திரப்பயன் = திசைவேகத்தகவு

அதாவது
$$\frac{W}{P} = \frac{x}{y}$$

இலகு எந்திரங்களில் W,P-ஐ விட அதிகமாக இருக்குமாதலால், x, y-ஐ விட அதிகமாக இருக்கும். அதாவது முயற்சி செயற்படு புள்ளி எடைச் செயற்படுபுள்ளியை விட, அதிக இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும். இதனையே திறன் ஓங்க வேகம் மங்கும் என்னும் பொருள் படும் what is gained in power is lost in speed என்னும் ஆங்கில முதுமொழி கூறுகிறது.

இனி, சில இலகு எந்திரங்களைப் பற்றியும் அவற்றின் எந்திரப் பயன்களைப் பற்றியும் காண்போம்.

நெம்புகோல் (Lever): இது, ஒரு மிகவும் எளிய எந்திரமாகும். நெம்புகோல் என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியைப்பற்றிச் சுழலக்கூடிய கெட்டியான கோல் ஆகும். நிலையான புள்ளிக்கு ஆதாரத்தானம் என்று பெயர்.



படம் 16·2

மூன்று வகை நெம்பு கோல்கள்: ஆதாரத்தானம், முயற்சி செயற்படுபுள்ளி, எடைச்செயற்படுபுள்ளி ஆகியவற்றின் நிலைகளுக்கு

ஏற்ப முதல்வகை, இரண்டாம்வகை மூன்றும்வகை நெம்பு கோல்கள் என மூன்றுவகை நெம்புகோல்கள் உண்டு.

முதல்வகை நெம்புகோல் : இந்தவகை நெம்புகோலில் ஆதாரத் தானம் (F), முயற்சி செயற்படுபுள்ளிக்கும் எடைச் செயற்படு புள்ளிக்கும் இடையே அமைந்துள்ளது (படம் 16·2*a*).

தண்ணீர் பம்பின் கைப்பிடி, கத்திரிக்கோல், தராசு ஆகியவை இவ் வகை நெம்புகோலின் எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இரண்டாம்வகை நெம்புகோல் : இதில் எடைச் செயற்படுபுள்ளி யானது ஆதாரத்தானத்திற்கும் முயற்சி செயற்படுபுள்ளிக்கும் இடையே அமைந்துள்ளது (படம் 16·2*b*). பாக்குவெட்டி, பழம் பிழியும் கருவி, ஒற்றைச்சக்கரக் கைவண்டி ஆகியவை இவ் வகைக் குரிய எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

மூன்றும்வகை நெம்புகோல் : இதில் முயற்சி செயற்படுபுள்ளி யானது, ஆதாரத்தானத்திற்கும் எடைச் செயற்படுபுள்ளிக்கும் இடையே அமைந்துள்ளது (படம் 16·2c). இதற்கான எடுத்துக் காட்டுகள் இடுக்கி, ஒரு பொருளைத் தூக்கும் நிலையில் மனிதனின் முன்கை முதலியனவாகும்.

நெம்புகோலின் எந்திரப்பயன் : எல்லாவகை நெம்புகோல் களிலும் ஆதாரத்தானத்திலிருந்து முயற்சியின் நேர்குத்துத்தொலைவு முயற்சிபுயம் (power arm) என்றும், எடையின் நேர்குத்துத் தொலைவு எடைப்புயம் (weight arm) என்றும் அழைக்கப்படு கின்றன.

நெம்புகோலில் முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது முயற்சி, எடை ஆகியவற்றின் ஆதாரத் தானத்தைப்பற்றிய திருப்பு திறன்கள் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, எடை × எடை புயம் = முயற்சி × முயற்சிபுயம்.

$$W \times BF = P \times AF$$

$$\therefore \text{ எந்திரப் பயன் } \frac{W}{P} = \frac{AF}{BF} = \frac{\text{முயற்சிபுயம்}}{\text{எடை புயம்}} \quad \dots \dots 16{\cdot}4$$

முதல்வகை நெம்புகோலில் ஆதாரத்தானம் நடுவில் இருப்ப தால், முயற்சிபுயம் எடைபுயத்திற்குச் சமமாகவோ, அதைவிடக் குறைந்தோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்கலாம். அதற்கேற்ப எந்திரப்பயன் ஒன்றுகவோ, ஒன்றைவிடக் குறைந்தோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்கும்.

இரண்டாம்வகை நெம்புகோலில் எடைச் செயற்படுபுள்ளி (B) நடுவிலிருப்பதால், முயற்சிபுயம் எப்போதும் எடைபுயத்தைவிட அதிகமாகவே இருக்கும். எனவே, எந்திரப்பயனும் ஒன்றைவிட அதிகமாகவே இருக்கிறது.

மூன்றும்வகை நெம்புகோலில் முயற்சி செயற்படுபுள்ளி நடுவில் இருப்பதால், முயற்சிபுயம் எப்போதும் எடைபுயத்தைவிடக் குறைவாகவே இருக்கும். எனவே, எந்திரப்பயனும் ஒன்றைவிடக் குறைவாகவே இருக்கும்.

பௌதிகத் தராசு

பௌதிகத்தராசு முதல்வகை நெம்புகோலைச் சேர்ந்தது. இங்கு ஆதாரத்தானம் தூலத்தின் மையத்தில் இருப்பதால், எந்திரப்பயன் ஒன்று ஆகும். பௌதிகத்தராசின் அமைப்பைப்பற்றியும் அதனைக் கொண்டு ஒரு பொருளின் நிறையைக் காண்பதுபற்றியும் முதல் பகுதியில் விரிவாகக் கூறப்பட்டது. இங்கு ஒரு நல்ல தராசுக்குத் தேவைப்படும் பண்புகளைப்பற்றிக் காண்போம்.

ஒரு நல்ல தராசுக்குத் தேவைப்படும் பண்புகளாவன: 1. உண்மையுடைமை (Truthfulness), 2. உணர்வு நுட்பம் (Sensilbility) 3. நிலைத்த தன்மை (Stability).

இனி, மேற்கூறப்பட்ட பண்புகளைப்பற்றி விரிவாக ஆராய்வோம்.

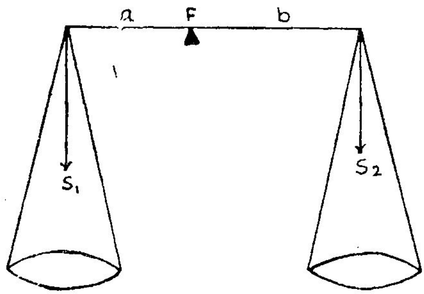
1. உண்மையுடைமை: ஒரு தராசின் தட்டுகள் காலியாக இருக்கும்போதும் சமஎடைகளைத் தாங்கும்போதும் அதன் தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்குமாயின், தராசு உண்மையுடையது எனக் கூறப்படுகிறது. அவ்வாறாயின் தூலத்தின் புவியீர்ப்புமையம் ஆதாரத்தானத்தின் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில் அமையவேண்டும்.

ஒரு தராசு உண்மையுடையதா என்பதைப் பின்வருமாறு சோதனை செய்யலாம். தராசு உண்மையுடையதாக இருப்பின், அதன் தட்டுகள் காலியாக இருக்கும்போது அதன் தூலம் கிடைமட்டத்தில் சமநிலையில் இருக்கவேண்டும். அடுத்து, ஒரு பொருளை ஒரு தட்டில்வைத்து தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்வரை மறுதட்டில் எடைகளை வைத்த பின்னர் அவற்றைத் தட்டுகளில் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றி வைக்கவேண்டும். இப்பொழுதும் தூலம்

கிடைமட்டத்தில் இருக்குமாயின் தராசு உண்மையுடையதாயிருக்கும்.

இனி, தராசு உண்மையுடையதாயிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப்பற்றிக் காண்போம்.

ஒரு தராசின் புயங்கள் a, b எனவும் தட்டுகளின் நிறைகள் முறையே, s_1, s_2 எனவும் கொள்வோம் (படம் 16·3). படத்தில்



படம் 16·3

F என்பது ஆதாரத்தானம். தராசு உண்மையுடையதாயிருப்பின், தட்டுகள் காலியாக இருக்கும்போது தூலம் கிடைமட்டத்தில் சமநிலையிலிருக்குமாதலால், F-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$s_1 a = s_2 b \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

தூலத்தின் புவியீர்ப்புமையம் ஆதாரத்தானத்தின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில் அமையுமாதலால், ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய தூலத்தின் எடையின் திருப்புதிறன் சுழியாகும்.

அடுத்து ஒவ்வொரு தட்டிலும் W என்ற ஓர் எடையை வைப்பதாகக் கொள்வோம். தராசு உண்மையுடையதாக இருப்பின், இந்நிலையிலும் தூலம் கிடைமட்டத்தில் சமநிலையில் இருக்கும். எனவே, ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$(S_1 + W)\, a = (S_2 + W)\, b$$

அதாவது $S_1 a + W a = S_2 b + W b \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

சமன் (i)-ஐ சமன் (ii)-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின் $Wa = Wb$

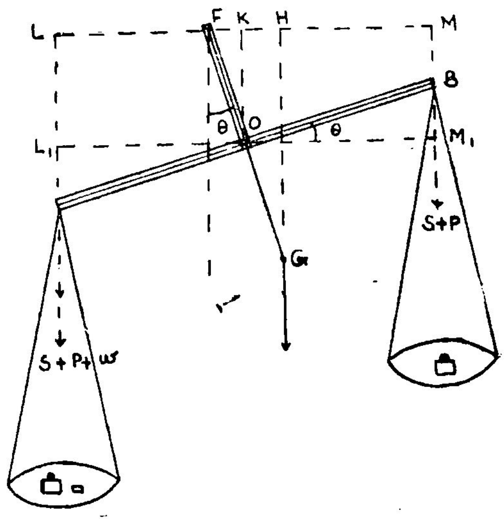
அல்லது $a = b$

எனவே, சமன் (i)லிருந்து $S_1 = S_2$

ஆகவே, ஒரு தராசு உண்மையுடையதாயிருக்க வேண்டுமாயின் அதன் புயங்கள் ஒரே அளவாயும் தட்டுகள் சம எடையை உடையனவாயும் இருக்கவேண்டும். மேலும், தூலத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆதாரத்தானத்தின் வழியேசெல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில் அமையவேண்டும்.

2. உணர்வு நுட்பம் : தராசு ஒன்றின் தட்டுகளில் வைக்கப்படும் எடைகளின் சிறுவேறுபாட்டிற்கும் அதன் தூலம் கணிசமான அளவுக்கு கிடைமட்டத்திலிருந்து விலகுமாயின், அது உணர்வு நுட்பம் உடையதாயிருக்கிறது எனக் கூறப்படும்.

தராசின் உணர்வு நுட்பத்திற்கான நிபந்தனைகளைக் காண அதன் தூலம் அதற்குப் புறத்தேயுள்ள F என்ற ஆதாரத்தானத்தைப் பற்றித் திரும்பக்கூடியதாக இருப்பதாகக் கொள்வோம் (படம்



படம் 16·4

16·4). தூலம் ஆதாரத்தானத்துடன் O என்ற புள்ளியில் கெட்டியாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. படத்தில் AB தூலத்தையும் G, தூலத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தையும் குறிக்கின்றன. தூலத்துடன் கெட்டியாக இணைக்கப்பட்ட உறுப்புகளுடன் அதன் எடை W எனவும், ஒவ்வொரு தட்டின் எடையும் S எனவும் படத்தில் $FG = h$, $OA = OB = a$, $FO = b$ எனவும் கொள்வோம். இடது தட்டில் $(P+w)$ என்ற எடையையும் வலது தட்டில் P என்ற எடையையும்

வைக்கும்போது, தூலம் கிடைமட்டத்திற்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பதாகக் கொள்வோம். $\widehat{BOM_1} = \theta$

ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$(S+P+w)\,LF = (S+P)\,MF + W \times FH$$

ஆனால்,

$$LF = LK - FK$$
$$= a\cos\theta - b\sin\theta$$
$$MF = MK + KF$$
$$= a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$FH = FG\sin\theta = h\sin\theta$$

எனவே $(S+P+w)\,(a\cos\theta - b\sin\theta) = (S+P)\,(a\cos\theta + b\sin\theta) + Wh\sin\theta$ ... ... 16·5

அல்லது

$$\frac{\tan\theta}{w} = \frac{a}{Wh+(2P+2S+w)b} \quad \ldots \quad 16·6$$

W-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு θ அதிகமாக இருப்பின் தராசின் உணர்வு நுட்பம் அதிகமாக இருக்கும். எனவே, உணர்வு நுட்பத்தை $\frac{\tan\theta}{W}$-ன் மதிப்பால் அறியலாம். உணர்வு நுட்பம் அதிகமாக இருக்க வேண்டுமாயின், G-ன் மதிப்பு அதிகமாகவும் W, h, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் குறைவாகவும் இருக்க வேண்டும் என்று சமன் 16·6-லிருந்து தெரியவருகிறது. மேலும், தராசின் உணர்வு நுட்பம் அதன் தட்டுகளில் வைக்கப்படும் எடைகளையும் ஓரளவுக்குச் சார்ந்திருக்கிறது என்பதையும் சமன் 16·6-லிருந்து அறியலாம். b-ஐச் சுழியாக்குவதன்மூலம் அதாவது ஆதாரத்தானத்தைத் தூலத்திலேயே பொருத்துவதன்மூலம் இதனைத் தவிர்க்கலாம். இப்பொழுது உணர்வு நுட்பம் $\frac{a}{Wh}$ ஆகும்.

எனவே, தராசு உணர்வு நுட்பமிக்கதாக இருக்க வேண்டுமாயின், அதன் புயங்கள் நீளமானவையாகவும், தூலம் இலேசானதாகவும், அதன் புவியீர்ப்புமையம் ஆதாரத்தானத்திற்கு மிக அருகிலும் இருக்கவேண்டும்.

3. நிலைத்த தன்மை: தராசின் தூலம் அதன் சமநிலையில் இருந்து விலகியபின் மீண்டும் சமநிலைக்கு விரைவில் திரும்புமாயின், அது நிலைத்த தன்மையுடையது எனக் கூறப்படுகிறது.

P, P என்ற இரு சமமான எடைகளைத் தட்டுகளில் வைத்து தூலத்தை θ கோண அளவுக்கு அசைத்துவிடுவதாகக் கொள்வோம்.

அசைத்து விடப்பட்ட நிலையில் அதனைச் சமநிலைக்கு மீட்க முயலும் ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய தொகுபயன் திருப்புதிறன்

$$= (P+S)(a\cos\theta + b\sin\theta) + Wh\sin\theta - (P+S)(a\cos\theta - b\sin\theta)$$

$$= \left[2(P+S)\,b + Wh\right]\sin\theta.$$

இத் தொகுப்பயன் திருப்புதிறன் அதிகமாக இருப்பின், அசைத்து விடப்பட்ட தூலம் விரைவிலேயே சமநிலைக்குத் திரும்பும். எனவே, தராசு நிலைத்த தன்மையுடையதாக இருக்கவேண்டுமாயின், $[2(P+S)\,b + Wh]\sin\theta$ அதிகமான மதிப்பைப் பெற்றிருக்க வேண்டும். அதாவது, தூலத்தின் எடை, தட்டுகளின் எடைகள், ஆதாரத்தானத்திலிருந்து தூலத்தின் தொலைவு, b, புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவு ஆகியவை அதிகமாக இருக்கவேண்டும். b-ன் மதிப்பு சுழியாகுமாயின், தூலம் எடைமிக்கதாகவும் ஆதாரத்தானத்திலிருந்து புவியிர்ப்புமையம் அதிகத் தொலைவிலும் இருக்க வேண்டும்.

தராசின் நிலைத்த தன்மைக்கான நிபந்தனைகளை உணர்வு நுட்பத்திற்கான நிபந்தனைகளுடன் ஒப்புநோக்குவோமாயின், அவை ஒன்றுக்கொன்று முரண்பட்டவையாக இருப்பதை அறியலாம். எனவே, அதிக உணர்வு நுட்பத்தையும் நிலைத்த தன்மையையும் ஒருங்கே பெற்றுள்ள ஒருதராசைப் பெறமுடியாது. தராசின் பயனுக்கேற்ப அது உணர்வு நுட்பமுடையதாகவோ அல்லது நிலைத்த தன்மையுடையதாகவோ இருக்குமாறு அமைக்கப்படுகிறது. பொருட்களின் நிறைகளைத் துல்லியமாக அறியவேண்டிய ஆராய்ச்சிகளுக்குப் பயன்படும் தராசுகள், உணர்வு நுட்பமிக்கதாகவும் வர்த்தகத்துறைகளில் பயன்படக்கூடிய தராசுகள் நிலைத்ததன்மையுடையதாகவும் அமைக்கப்படுகின்றன.

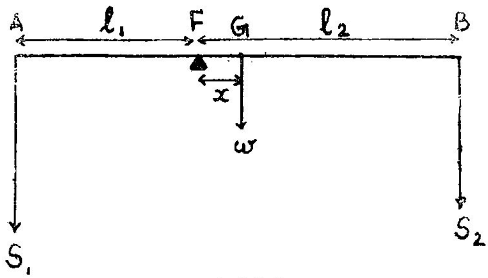
பொய்த் தராசு ஒன்றின் உதவியால் பொருளின் உண்மையான எடையை அறிதல் : தராசின் புயங்கள் சமமற்றவையாகவோ தட்டுகள் சம எடைகளைக் கொண்டிராமலோ இருக்குமாயின், அத் தராசு பொய்த்தராசு எனப்படும். தராசின் புயங்கள் சமமாக அமைந்து, தட்டுகள் சம எடைகளைக் கொண்டிராமல் இருக்குமாயின், தூலம் கிடைமட்டத்தில் அமையும்வரை குறைந்த எடையை உடைய தட்டில் மணல்போன்ற பொருளைச் சேர்த்தபின் அதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

புயங்கள் சமமற்றவையாகவும் தட்டுகள் சம எடைகளைக் கொண்டிராமலும் இருக்குமாயின், பின்வரும் இரு முறைகளைப் பயன்படுத்திப் பொருட்களின் உண்மையான எடைகளைக் காணலாம்.

(i) போர்டா முறை (Borda's Method) : எடை காண வேண்டிய பொருளை இடது தட்டில்வைத்து தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்வரை வலது தட்டில் எடைகளையோ மணல் போன்ற ஒரு பொருளையோ சேர்க்கவேண்டும். பின்னர், இடது தட்டிலிருந்து பொருளை நீக்கிவிட்டு தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும் வரை அதில் எடைக்கற்களைச் சேர்க்கவேண்டும். இடது தட்டில் சேர்க்கப்படும் எடை பொருளின் உண்மையான எடையைக் குறிக்கும்.

(ii) காஸ்முறை (Gauss Method) : இம் முறையில் முதலில் பொருளை இடது தட்டில் வைத்து தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்வரை வலது தட்டில் எடைகளைச் சேர்க்கவேண்டும். அடுத்து பொருளை வலது தட்டில் வைத்து தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்வரை இடது தட்டில் எடைகளைச் சேர்க்கவேண்டும். பொருளின் உண்மையான எடை W எனவும், வலது தட்டிலும் இடது தட்டிலும் அடுத்தடுத்து சேர்க்கப்படும் எடைகள் முறையே P, Q எனவும் இருக்குமாயின், பொருளின் உண்மையான எடையைப் (W) பின்வருமாறு பெறலாம்.

தராசின் புயங்களின் நீளங்கள் l_1 l_2 எனவும் தட்டுகளின் எடைகள் S_1, S_2 எனவும் தராசின் ஆதாரத்தானம் F எனவும் தூலத்தின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு தூலத்தை G என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகவும் கொள்வோம். (படம் 16. 5). FG = x என இருக்கட்டும். தட்டுகள் காலியாயிருக்கும்போது தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்குமாயின், ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,



படம் 16·5

$$s_1 l_1 = s_2 l_2 + wx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

பொருள் இடது தட்டிலும் P என்ற எடை வலது தட்டிலும் வைக்கப்பட்டு தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்போது, ஆதாரத்தானத்தைபற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$(S_1 + W)\, l_1 = (S_2 + P)\, l_2 + w\, x \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

பொருள் வலது தட்டிலும் Q என்ற எடை இடது தட்டிலும் வைக்கப்பட்டு தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும்போது, ஆதாரத் தானத்தைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$(S_1 + Q)\, l_1 = (S_2 + W)\, l_2 + w\, x \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

சமன்பாடு (i)-ஐ சமன் (ii)-லிருந்து கழித்தால்,

$$W\, l_1 = P\, l_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

சமன்பாடு (i)-ஐ சமன் (iii)-லிருந்து கழித்தால்

$$Q\, l_1 = W\, l_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

சமன் (iv)-ஐ சமன் (v)-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{W}{Q} = \frac{P}{W}$$

அல்லது $W^2 = PQ$

எனவே, $W = \sqrt{PQ} \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}7$

அதாவது பொருளின் உண்மையான எடை அதனை ஒவ்வொரு தட்டிலும் வைத்து நிறுக்கப்பட்டபோது கிடைத்த போலி எடைகளின் பெருக்கத்தொடர் சராசரி (Geometric Mean) யாகும். இம்முறை இரட்டை நிறுவை முறை (Method of double weighing) எனவும் அழைக்கப்படும்.

மேலும், இம்முறையில் பொய்த்தராசின் புயங்களின் நீளங்களுக் கிடையேயுள்ள விகிதத்தையும் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

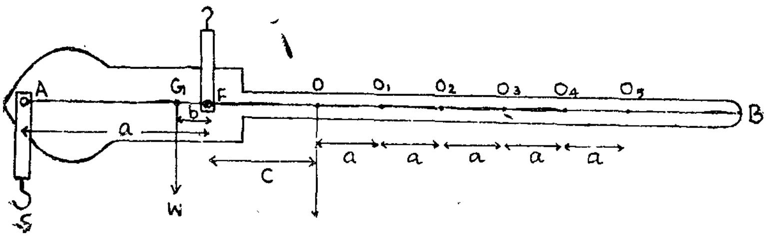
மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் (iv), (v) ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனைக் காண்போமாயின்,

$$WQ\, l_1^2 = W\, P\, l_2^2$$

எனவே, $\dfrac{l_1}{l_2} = \sqrt{\dfrac{P}{Q}}$

துலாக் கோல்கள் (Steel Yards) : இவை முதல்வகை நெம்பு கோலைச் சேர்ந்தவை ; இவைகளைக்கொண்டு பொருட்களின் எடைகளை, எடைக்கற்களின் உதவியின்றி மிக விரைவாகவும் எளிதாகவும் அறியலாம். துலாக்கோல்கள் ரோமானிய துலாக்கோல் (Roman Steel Yard), டேனிய துலாக்கோல் (Danish Steel Yard) என இருவகைப்படும்.

ரோமானிய துலாக்கோல் : ரோமானிய துலாக்கோலின் அமைப்பைப் படம் 16·6-ல் காணலாம். இதில் A முனையில் நீளமான குண்டு ஒன்று பொருத்தப்பட்ட AB என்ற எடைமிக்க உலோகத்தண்டு



படம் 16·6

ஒன்று உள்ளது. தண்டு A-முனைக்கு அருகிலுள்ள ஓர் ஆதாரத் தானத்தைப் (F) பற்றிச் சுழலக்கூடியதாயுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்புமையம் (G) ஆதாரத்தானத்திற்கு அருகிலுள்ளது. A முனையில் ஒரு தட்டு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. தண்டின் FB பகுதியில் நகர்க்கூடிய P என்ற ஓர் எடையின் உதவியால் தண்டு கிடைமட்டத்தில் சமநிலையில் இருக்குமாறு செய்யலாம். ஒரு பொருளின் எடையைக்காண அதனைத் தட்டில்வைத்து தண்டு கிடைமட்டத்திலிருக்கும்வரை P-ன் நிலையைச் சரிசெய்ய வேண்டும். இனி பொருளின் எடையை மதிப்பிடுவது எவ்வாறு என்று காண்போம்.

தட்டு காலியாக இருக்கும்போது தட்டு கிடைமட்டத்தில் அமைய P-ஐ BF-ல் θ என்ற புள்ளியில் அமைக்கவேண்டியிருப்பதாகக்கொள்வோம். துலாக்கோலின் எடை W தட்டின் எடை S என்ருல் ஆதாரத் தானத்தைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$S \times AF + W \times FG = P \times FO$$

$AF = a,\ FG = b,\ FO = c$ எனக் கொள்வோமாயின்

$$S\,a + W.\,b = P.\,c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (i)$$

அடுத்து W என்ற ஓர் எடை தட்டில் வைக்கப்படும்போது தண்டு கிடைமட்டத்தில் அமைய P-ஐ O-விருந்து O_1 என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்த வேண்டியிருப்பதாகக் கொள்வோம். $OO_1 = x$ என இருக்கட்டும். இப்போது ஆதாரத் தானத்தைப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்,

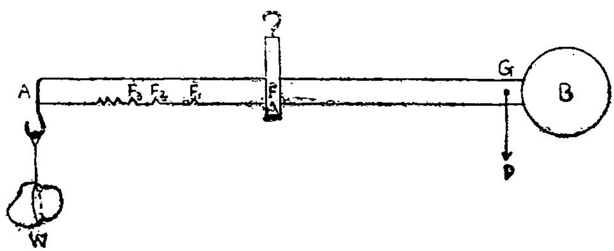
$$(S + W)\,a + W.\,b = P(c + x) \quad \ldots \quad (ii)$$

சமன் (i) ஐ சமன் (ii) லிருந்து கழிப்போமாயின்

$$W.\,a = P.\,x \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}9$$

சமன் 16·9-லிருந்து. $x = a$ எனில் $W = P$, $x = 2a$ எனில் $W = 2P$, $x = 3a$, எனில் W3P ...... எனக் காணலாம். எனவே, FB-ல் O-லிருந்து முறையே a, $2a$, $3a$ ...... தொலைவுகளில் O_1, O_2, O_3 ...... என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதன்மூலம் FB-ல் அளவுக் கூறுகளைக் குறிக்கலாம். தட்டில் ஒரு பொருளை வைக்கும் போது தண்டு கிடைமட்டத்தில் அமைய P ஐ எந்த நிலையில் வைக்கவேண்டியுள்ளதோ, அந் நிலைக்குரிய அளவீடு பொருளின் எடையைக் குறிக்கும். P-ன் எடை 1 பவு என இருக்குமாயின், பொருளின் எடையை நேரடியாக பவுண்டுகள் கணக்கிலேயே பெறலாம்.

டேனிய துலாக்கோல்: இது நகரக்கூடிய ஆதாரத் தானத்தைக் கொண்டுள்ளது இதில் B முனையில் ஓர் எடைமிக்க குண்டு பொருத்தப்பட்ட AB என்ற ஒரு தண்டு உள்ளது. (படம் 16·7). A முனையில் எடை காணவேண்டிய பொருளைத் தொங்கவிடுவதற்



படம் 16·7

காக ஒரு கொக்கி உள்ளது. பொருளை A முனையில் தொங்கவிட்டு தண்டு கிடைமட்டத்தில் அமையுமாறு ஆதாரத் தானத்தை நகர்த்தி சரிசெய்யப்படுகிறது. இப்பொழுது, ஆதாரத்தானத்தின் நிலை F எனக் கொள்வோம். தண்டின் புவியீர்ப்புமையத்தில் (G) செயற்படும் தண்டின் எடை P, பொருளின் எடை W என்றால், ஆதாரத்தானத்தைப்பற்றிய திருப்புறன்களைக் காணின்,

$$W \times AF = P \times FG$$
$$= P\,(AG - AF)$$
$$AF\,(W + P) = P \times AG$$

அல்லது

$$AF = \frac{P}{W + P}\,AG \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}10$$

சமன்பாடு 16. 10

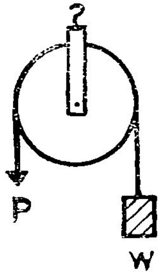
$$W = P \text{ என்றால் } AF = \tfrac{1}{2} AG$$
$$W = 2P \text{ என்றால் } AF = \tfrac{1}{3} AG$$
$$W = 3F \text{ என்றால் } AF = \tfrac{1}{4} AG$$

... ...

A-முனையில் எடையேதும் தொங்கவிடாமல் துலாக்கோல் மட்டும் கிடைமட்டத்தில் அமைவதற்கேற்ற ஆதாரத்தானத்தின் நிலை தண்டின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் கொடுக்குமாதலால், AG-ன் மதிப்பை அறியலாம். எனவே, A-லிருந்து $\frac{AG}{2}$, $\frac{AG}{3}$; $\frac{AG}{4}$ ... தொலைவிலுள்ள F, F_1, F_2 ... என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கலாம். இனி A முனையில் பொருட்களைத் தொங்கவிடும்பொழுது ஆதாரத் தானத்தின் நிலை F, F_1, F_2 ... எனில் பொருட்களின் எடைகள் P. P_2, P_3 ... ஆகும். மேலும், துலாக்கோலின் மொத்தஎடை 1பவு. என்றால், ஆதாரத்தானத்தின் F, F_1, F_2 ... நிலைக்குரிய எடைகள் 1 பவு, 2 பவு, 3 பவு, ... என்றாகும்.

கப்பிகள் (Pulleys): கப்பி என்பது ஓர் அச்சில் தங்கு தடையின்றிச் சுழலக்கூடிய ஒரு சக்கரமாகும். சக்கரத்தின் விளிம்பைச் சுற்றி ஒரு கயிறு செல்லக்கூடிய வகையில் பள்ளமாக உள்ளது. இதன் அச்சைத் தாங்கும் சட்டத்திற்குக் கப்பிதாங்கி என்று பெயர் (படம் 16·8).

கப்பிகளைப் பற்றிப் பார்க்கும்போது கப்பிவழியே செல்லும் கயிற்றின் இழுவிசை கயிறு முழுவதும் ஒரேயளவாய் இருக்கிறது என்றுகொள்ளுமாறு, கப்பி அதன் அச்சைப்பற்றிதங்குதடையின்றிச் சுழலக் கூறியதாயும் கயிறு மெல்லியதாகவும் விரிவுபடாதவாறும் இருக்கின்றன என்ற உண்மை கருத்திற் கொள்ளப்படுகிறது.



படம் 16·8

கப்பிகளில் நிலைக்கப்பி (fiixed Pulley), இயங்கு கப்பி (movable Pulley) என இருவகை உண்டு. கப்பிதாங்கி நிலையாய் உள்ள கப்பி நிலைக்கப்பி எனவும், கப்பிதாங்கி மேலும் கீழும் அசையுமாறு அமைந்தகப்பி இயங்கு கப்பி எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

நிலைக்கப்பி : நிலைக்கப்பி ஒன்றின்வழியே செல்லும் கயிறு ஒன்றின் ஒரு முனையில் தொங்க விடப்பட்ட ஒரு எடை (W) யை அடுத்த முனையில் செயற்படுத்தப்படும் முயற்சி (P) சரியீடு செய்வதாகக் கொள்வோம். (படம் 16·7).

கப்பியின் அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

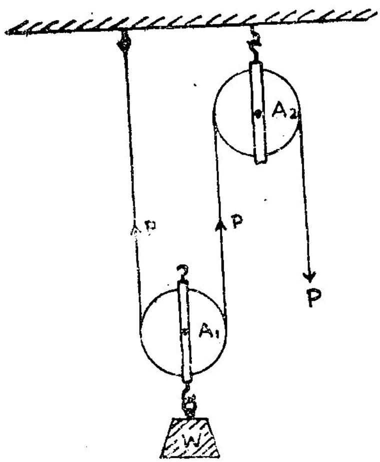
$$W \times \text{சக்கரத்தின் ஆரம்} = P \times \text{சக்கரத்தின் ஆரம்}$$

$$\therefore \quad \text{எந்திரப்பயன்} = \frac{W}{P} \quad 1$$

அல்லது $$W = P$$

எனவே, நிலைக்கப்பி முயற்சியை வசதியான திசையில் செயற்படுத்துவதற்கு பயன்படுவதைத் தவிர, பயனுறு அளவில் எந்திரப் பயனைக் கொடுக்கவில்லை.

இயங்கு கப்பி : படம் 16·9-ல் காட்டியுள்ளவாறு அமைக்கப்பட்ட இயங்கு கப்பி ஒன்றைக் கருதுவோம். படத்தில் A_1 இயங்கு



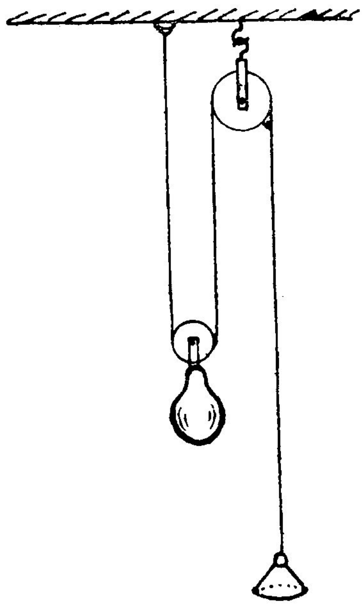
படம் 16·9

கப்பியாகவும், A_2 நிலைக்கப்பியாகவும் பயன்படுகின்றன. இரு கப்பிகளின் வழியாகவும் ஒரே கயிறு செல்வதாலும் கப்பிகள் தங்கு தடையின்றிச்சுழலக்கூடியனவாயிருப்பதாலும், கயிற்றின், இழுவிசை அதன் நீள முழுவதும் ஒரேயளவாய் முயற்சி (P) க்குச் சமமாய் இருக்கும். அமைப்பு சமநிலையில் இருக்குமாயின், இயங்கு கப்பி தாங்கும் எடை,

$$W = 2P$$

$$\therefore \quad \text{எந்திரப்பயன்} \ \frac{W}{P} = 2.$$

எனவே, ஒற்றை இயங்கு கப்பியைக்கொண்ட அமைப்பின் எந்திரப்பயன் 2 ஆகும். இத்தகைய கப்பி அமைப்பைச் சில இடங்களில் மின்விளக்குகளின் உயரத்தைச் சரி செய்வதற்காகப் பயன்படுத்துவதைக் காணலாம். இத்தகைய அமைப்பில் இயங்கு கப்பியுடன் இணைக்கப்பட்ட ஓர் எடையை மின்விளக்கின் எடை சரியீடு செய்கிறது (படம் 16·10). எனவே, மின்விளக்கை எந்த உயரத்திலும் அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

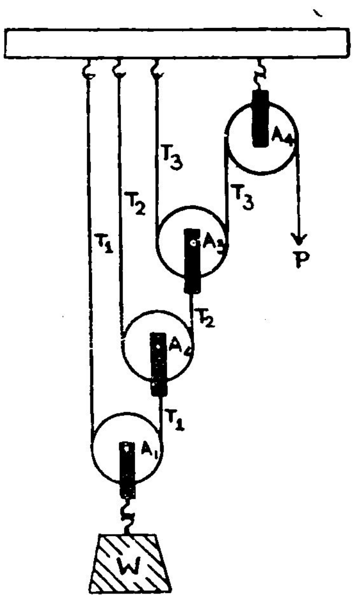


படம் 16·10

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இயங்கு கப்பிகளைக்கொண்ட கப்பித் தொகுதிகளை அமைத்து 2-க்கு மேற்பட்ட எந்திரப் பயனைப் பெறலாம். அத்தகைய கப்பித் தொகுதிகள் முதல்வகை, இரண்டாம் வகை, மூன்றும்வகைக் கப்பித் தொகுதிகள் என மூன்று வகைப்படும்.

முதல்வகைக் கப்பித் தொகுதி : இவ்வகை அமைப்பில் (படம் 16·11) ஒவ்வோர் இயங்கு கப்பியையும் ஒரு தனிக் கயிறு தாங்குகிறது. கயிற்றின் ஒரு முனை கிடைநிலையிலுள்ள நிலையான கெட்டியான கட்டையில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கயிறு ஓர் இயங்கு கப்பியைச் சுற்றி எடுத்துச் செல்லப்பட்டு அதன் மறுமுனை

அதற்கு மேலுள்ள அடுத்த இயங்கு கப்பியின் கப்பிதாங்கியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கடைசி இயங்கு கப்பியைச் சுற்றிச் செல்லும் கயிறு ஒரு நிலைக்கப்பியைச் சுற்றி எடுத்துச்செல்லப்பட்டு இணைக்கப் பெறாத அதன் மறுமுனையில் முயற்சி (P) செயற்படுத்தப்படுகிறது. எடை (W) கீழேயுள்ள முதல் இயங்கு கப்பியின் கப்பி தாங்கியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. படம் 16.11-ல் A_1, A_2 A_3 என்பவை இயங்கு கப்பிகள்; A_4 நிலைக்கப்பி; இது முயற்சியைத் தக்க திசையில் பயன்படுத்த உதவுகிறது.



படம் 16·11

இவ் வமைப்பின் எந்திரப்பயனைப் பின்வருமாறு காணலாம். A_1, A_2, A_3 கப்பிகளைத் தாங்கும் கயிறுகளின் இழுவிசைகள் முறையே T_1, T_2, T_3 எனவும் கப்பிகளின் எடை W-ஐ நோக்க மிகமிகக் குறைந்ததாகவும் கொள்வோம். முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்பொழுது எடையானது A_1 கப்பியைத் தாங்கும் கயிற்றுப் பகுதிகளின் இழுவிசைகளால் சரியீடு செய்யப்படுகிறது.

எனவே, $W = 2T_1$

ஆனால், T_1 என்ற இழுவிசை A_2 கப்பியைச் தாங்கும் கயிற்றுப் பகுதிகளின் இழுவிசைகளால், சரியீடு செய்யப்படுகிறது.

எனவே, $T_1 = 2T_2$

இவ்வாறே $T_2 = 2T_3$

A_3 கப்பிவழியே செல்லும் கயிற்றின் இணைக்கப்பெறாத முனையில் முயற்சி செயற்படுவதால் அக் கயிற்றின் இழுவிசை

$$T_3 = P$$

எனவே, $W = 2T_1 = 2\times 2T_2 = 2\times 2\times 2.\ T_3$
$= 2\times 2\times 2\times P$

$\therefore$ எந்திரப் பயன் $\dfrac{W}{P} = 2^3$

(இயங்கு கப்பிகளின் எண்ணிக்கை)
$= 2$

அல்லது பொதுவாக முதல்வகைக் கப்பி அமைப்பு ஒன்றில் n இயங்கு கப்பிகள் இருக்குமாயின்,

எந்திரப்பயன் $= 2^n$ ... ... 16·11

மேற்கண்ட முறையில் கப்பிகளின் எடைகள் W-ஐ நோக்க மிகமிகச் சிறியதாயிருந்தால், அது புறக்கணிக்கப்பட்டது. அவ்வாறு இல்லையாயின், அதனையும் சேர்த்தே முயற்சி சரியீடு செய்வதால், எந்திரப்பயன் சற்று மாறுபடும். இப்பொழுது கப்பிகளின் எடைகளையும் கருத்திற்கொண்டு எந்திரப்பயனைக் கணக்கிடுவோம்.

w_1, w_2, w_3 ... என்பன முறையே, A_1, A_2, A_3 ... இயங்கு கப்பிகளின் எடைகள் எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $2T_1 = W + w_1$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{W}{2} + \frac{w_1}{2}$$

$$2T_2 = T_1 + w_2$$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{w_2}{2} = \frac{W}{4} + \frac{w_1}{4} + \frac{w_2}{2}$$

$$2T_3 = T_2 + w_3$$

$$\therefore \quad T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{w_3}{2} = \frac{W}{8} + \frac{w_1}{8} + \frac{w_2}{4} + \frac{w_3}{2}$$

அதாவது $$T_3 = \frac{W}{2^3} + \frac{w_1}{2^3} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w_3}{2^1}$$

அமைப்பில் n கப்பிகள் இருப்பதாகக் கருதுவோமாயின்,

$$P = T_n = \frac{W}{2^n} + \frac{w_1}{2^n} + \frac{w_2}{2^{n-1}} + \frac{w_3}{2^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{w_n}{2^1} \ldots (i)$$

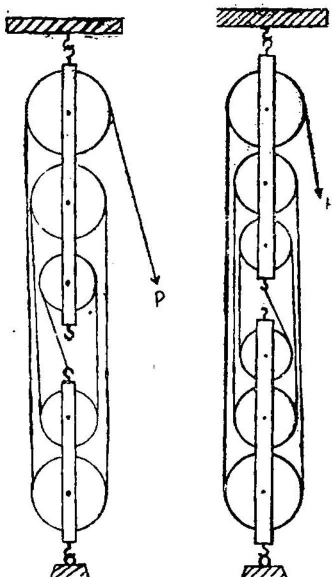
சமன் (i)-ஐ 2^n ஆல் பெருக்குவோமாயின்,

$$P.2^n = W + w_1 + 2w_2 + 2^2w_3 + \ldots. + 2^{n-1} w_n$$

கப்பிகள் ஒவ்வொன்றும் சமமான எடை (w)-யைக் கொண்டிருக்குமாயின்,

$$P.2^n = W + w\,(1+2+2^2+ \ldots \quad \ldots \quad +2^{n-1})$$

அதாவது $$2^nP = W + w\,(2^n - 1) \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}12$$



படம் 16·12 (b) படம் 16·12 (a)

சமன் 16·12-லிருந்து எந்திரலாபம் கப்பியின் எடையைப் பொறுத்துள்ளது. என்பதைக் காணலாம்.

இரண்டாம்வகைக் கப்பித்தொகுதி : இவ் வகையில் இரு கப்பித் தாங்கிகள் உள்ளன. ஒரு கப்பிதாங்கி நிலையானதாகவும் மற்றொன்று மேலும் கீழும் இயங்குமாறும் அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கப்பிகள் உள்ளன. பொதுவாக இரண்டு கப்பிதாங்கிகளிலும் சம எண்ணிக்கை கொண்ட கப்பிகள் இருப் பினும் நிலையான கப்பிதாங்கியில் இயங்கு கப்பிதாங்கியிலுள்ளதை விட, ஒரு கப்பி அதிகமாக இருக்கக்கூடிய அமைப்பும் உண்டு. இந்த இருவகை அமைப்புக்களையும் முறையே படம் 16·12a, படம் 16·12b ஆகியவற்றில் காணலாம்.

இரு வகைகளிலும் ஒரே கயிறு கப்பிகளைச் சுற்றிச் செல்லு கிறது. இரு கப்பிதாங்கிகளிலும் சம எண்ணிக்கைக் கப்பிகள் இருப் பின், கயிற்றின் ஒருமுனை நிலையான கப்பிதாங்கியில் இணைக்கப் பட்டு கயிறு இருகப்பிதாங்கிகளிலுள்ள கப்பிகளைச் சுற்றி மாறி மாறி எடுத்துச் செல்லப்பட்டு அதன் மறுமுனையில் முயற்சி (P) செயற் படுத்தப்படுகிறது (படம் 16·12a). நிலையான கப்பிதாங்கியில் இயங்கு கப்பி தாங்கியிலுள்ளதை விட ஒரு கப்பி அதிகமாக இருப் பின் கயிற்றின் ஒருமுனை இயங்கு கப்பிதாங்கியில் இணைக்கப்பட்டு மறுமுனையில் முயற்சி செயற்படுத்தப்படுகிறது. (படம் 16·12b). எடை இயங்கு கப்பிதாங்கியில் இணைக்கப்படுகிறது. இந்த வகை அமைப்புகளில் ஒரே கயிறு எல்லாக் கப்பிகளையும் சுற்றிச் செல்வதால் கயிற்றின் ஒவ்வொரு பகுதியின் இழுவிசையும் முயற்சி (P)-க்குச் சமமாகும்.

முதலில் இயங்கு கப்பிதாங்கியின் எடை (கப்பிகளுடன்) W-ன் மதிப்பை நோக்க மிகமிகச் சிறியதாயிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது எடையானது இயங்கு கப்பி தாங்கியைத் தாங்கி நிற்கும் கயிற்றுப் பகுதிகளில் செயற்படும் இழுவிசைகளில் சரியீடு செய்யப்படுகிறது.

எனவே, படம் 16·12a-ல்

$$W = 6P$$

அல்லது, எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = 6$ ... ... (i)

படம் 16·12b-ல்

$$W = 5P$$

அல்லது, எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = 5$ ... ... (ii)

சமன்பாடுகள் (i), (ii) ஆகியவற்றைக் கருதுவோமாயின், எந்திரப் பயன் இரண்டு கப்பிதாங்கிகளிலுள்ள கப்பிகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் சமமாயிருப்பதைக் காணலாம்.

எனவே, இரண்டாம்வகைக் கப்பி அமைப்பில் இருகப்பி தாங்கி களிலுமுள்ள கப்பிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை n என்றால்,

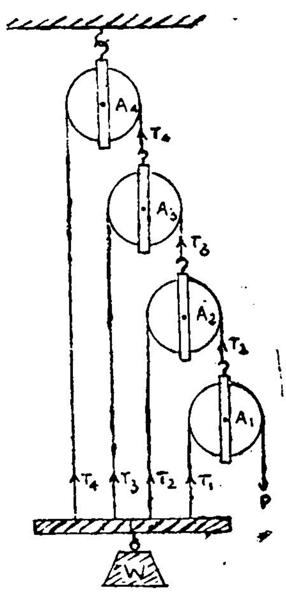
எந்திரப்பயன் $= n$ ... ... 16·13

இனி, இயங்கு கப்பியின் எடையையும் கருத்திற்கொண்டு எந்திரப்பயனைக் கணக்கிடுவோம். அதன் எடை w எனில்,

$$nP = W + w. \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}14.$$

வழக்கில் இவ்வகைக் கப்பித்தொகுதியில் கப்பிகளின் ஒன்றின் மேலொன்றாக அமைக்காமல் ஒன்றுகொன்று இணையாகவே அமைக்கப்பட்டிருக்கும்.

மூன்று வகைக் கப்பித்தொகுதி : இவ்வகை அமைப்பைத் தலை கீழாக அமைக்கப்பட்ட முதல்வகை அமைப்பாகக் கருதலாம். இவ்வகை அமைப்பிலும் ஒவ்வொரு கப்பியின்மீதும் ஒரு தனிக் கயிறு செல்லுகிறது. கயிற்றின் ஒருமுனை கிடைமட்டமான ஒரு தண்டில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிறு கப்பியின் வழியே எடுத்துச் செல்லப்பட்டபின், அதன் மறுமுனை அதை அடுத்து கீழே யுள்ள இயங்கு கப்பியின் கப்பி தாங்கியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கடைசி கப்பி வழியாகச் செல்லும் கயிற்றின் முனையில் முயற்சி (P) செயற்படுத்தப்படுகிறது (படம் 16·13). எடை கிடைமட்டமான தண்டில் தக்க இடத்தில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டுடன் சேர்ந்த எடையின் மதிப்பு W எனக் கொள்வோம்.



படம் 16·13

முதலில் கப்பிகள் மிகவும் இலேசானவையாய் இருப்பதாகக் கொள்வோம். A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய கப்பிகளின் வழியே

செல்லும் கயிறுகளின் இழுவிசைகள் முறையே T_1, T_2, T_3, T_4 எனக் கொள்வோமாயின், முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது

$$W = T_4 + T_3 + T_2 + T_1$$

ஆனால் $T_2 = T_1 + P = 2P$

$$T_3 = 2T_2 = 2\times 2P = 4P$$

$$T_4 = 2T_3 = 2\times 2\times 2P = 8P$$

$\therefore$ $W = 8P + 4P + 2P + P$

$$= 15.P$$

$$W = (2^4 - 1)P$$

$\therefore$ எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = 2^4 - 1$ ... ... 16·15

சமன் 16·15-ல் 4 என்பது அமைப்பிலுள்ள மொத்த கப்பிகளைக் குறிக்கும். எனவே, மூன்றும்வகைக் கப்பித்தொகுதியில் உள்ள கப்பிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை n எனில்,

எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = 2^n - 1$ ... . 6·16

இனி, கப்பிகள் கணிசமான எடைகளைக் கொண்டுள்ளன வாகக் கருதுவோம். A_1, A_2, A_3, ... ஆகிய கப்பிகளின் எடைகள் முறையே w_1, w_2, w_3 .... எனக் கருதுவோம்.

எனவே, $T_2 = 2T_1 + w_1 = 2P + w_1$

$$T_3 = 2T_2 + w_2 = 4P + 2w_1 + w_2$$

$$T_4 = 2T_3 + w_3 = 8P + 4w_1 + 2w_2 + w_3$$

$$= 2^3P + 2^2w_1 + 2^1w_2 + 2^0w_3$$

கப்பித் தொகுதியில் உள்ள கப்பிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை n எனில், $T_n = 2^{n-1}P + 2^{n-2}w_1 + 2^{n-3}w_2 + \ldots\ldots + 2^0 w_{n-1}$

அமைப்பு சமநிலையிலிருக்கும்போது

$$W = T_n + T_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + T_2 + T_1$$

$$= (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1)P$$

$$+ (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1)w_1$$

$$+ (2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1)w_2$$

$$+ (2^1 + 1)w_{n-2}$$

$$+ w_{n-1}$$

எனவே. $W = (2^n-1)P + (2^{n-1}-1)w_1 + (2^{n-2}-1)w_2 + \ldots\ldots$
$+ (2^2-1)w_{n-2} + (2^1-1)w_{n-1} \ldots.$ 16.17

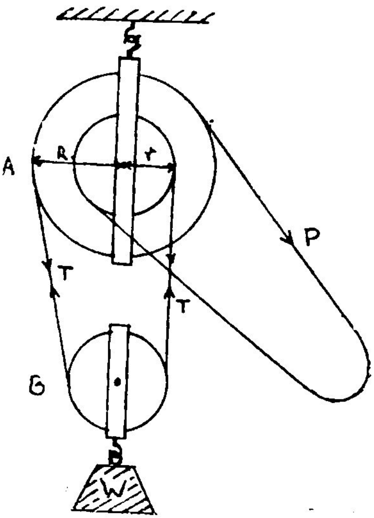
கப்பிகள் ஒவ்வொன்றும் சமமான எடை (w)யைக் கொண்டிருக்குமாயின் $W = (2^n-1)P + w\,[2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots\dots + 2^2 + 2^1 - (n-1)]$

எனவே $$W = (2^n-1)\,P + w\,[2^n - n - 1] \quad \dots \quad \dots \qquad 16{\cdot}16$$

எந்திரப் பயன்களை நோக்குமிடத்து முதல்வகை, மூன்றும் வகைக் கப்பித்தொகுதிகள் அதிக எந்திரப் பயன்களைக் கொண்டுள்ளனவாயினும் அவற்றை அமைக்க மிக அதிக இடவசதி தேவைப்படுகிறது. எனவே, இரண்டாம்வகைத் தொகுதியே வழக்கில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும், மூன்றும் வகைத் தொகுதியைப் பயன்படுத்தி ஓர் எடையைத் தூக்க முயற்சி செய்வோமாயின், கயிறுகள் எளிதில் சிக்கலடைவதைக் காணலாம். மிகக் குறுகிய கால அளவில் அளவு மிக்க முயற்சியைச் செயற்படுத்த வேண்டிய இடங்களில் மூன்றும் வகைத் தொகுதி மிகவும் பயன்படும்.

வெஸ்டன் பகுகப்பி (Weston differential pulley) :

வெஸ்டன் பகுகப்பியில் A, B என்ற இருகப்பிதாங்கிகள் உள்ளன. (படம் 16·14). A என்ற கப்பிதாங்கி ஒரு நிலையான தாங்கியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு, B என்ற கப்பிதாங்கி மேலும்



படம் 16·14

கீழும் இயங்குமாறு அமைந்துள்ளது A-ல் ஒன்றுடன் ஒன்று கெட்டியாகப் பிணைக்கப்பட்டு ஒரு பொது அச்சைப்பற்றிச் சுழலக்

கூடிய, சற்று வேறுபட்ட ஆரங்களையுடைய இரண்டு கப்பிகள் உள்ளன. B ஓர் இயங்கு கப்பியாகும். மூன்று கப்பிகளின் விளிம்புகளும் பற்களைக் கொண்டுள்ளன. முடிவற்ற சங்கிலி ஒன்று படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு கப்பிகளின்மீது செல்லுகிறது. சங்கிலியின் தளர்ந்த பகுதியில் முயற்சி (P) செயற்படுத்தப்படுகிறது.

இயங்கு கப்பியைத் தாங்கும் சங்கிலியின் இரு பகுதிகளிலும் இழுவிசைகள் T எனக் கொள்வோமாயின், முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும் போது,

$$2T = W$$

$$\therefore \quad T = \frac{W}{2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

A-ல் உள்ள கப்பிகளின் ஆரங்கள் R, r எனக் கொள்வோம். இனி, அக் கப்பிகளின் பொது அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்,

$$T \cdot R = P \cdot R + Tr$$

அல்லது $$T(R-r) = P \cdot R$$

எனவே, சமன் (i)-ன் படி

$$\frac{W}{2}(R-r) = P.R$$

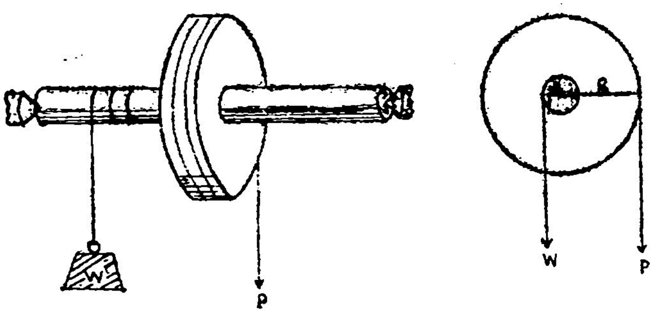
∴ எந்திரப்பயன் $$\frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad 16\text{-}19$$

R, r ஆகியவற்றின் மதிப்பை ஏறத்தாழ சமமாக்குவதன்மூலம் மிக அதிக எந்திரப்பயனைப் பெறலாம். இதில் பயன்படும் சங்கிலியின் நீளம் குறைவாக இருக்கிறதெனினும், இதில் எடை மெதுவாகவே தூக்கப்படுகிறது.

சக்கரமும் அச்சும் (Wheal and axle) :

இதில் சக்கரம் ஒன்றின் மையத்தின் வழியே செல்லுமாறு பொருத்தப்பட்ட நீண்ட உருளைவடிவ அச்சு ஒன்று உள்ளது, [படம் 16·15]. சக்கரமும் அச்சும் அச்சின் முனைகளில் உள்ள சுழல்முனைகளைப்பற்றித் தங்கு தடையின்றி சுழலக்கூடியனவா

யிருக்கின்றன. எடையானது அச்சின் ஒரு புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டு அதன்மீது சுற்றப்பட்ட கயிறு ஒன்றின் மறுமுனையில்



படம் 16·15

இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முயற்சி (P), சக்கரத்தின்மீது எதிர்திசையில் கயிறு ஒன்றின்மூலம் செயற்படுத்தப்படுகிறது.

W என்ற எடையை p என்ற முயற்சி சரியீடு செய்வதாகக் கொள்வோம். சக்கரத்தின் ஆரம் R எனவும் அச்சின் ஆரம் r எனவும் கொள்வோமாயின் அவற்றின் பொது அச்சைப் பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்

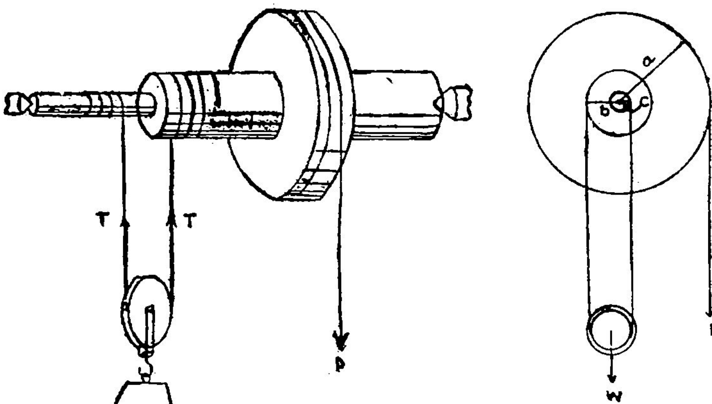
$$P \times R = W \times r$$

எனவே, எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = \frac{R}{r}$ ... ... 16·20

சமன் 16 20-லிருந்து R-ன் மதிப்பை அதிகப்படுத்துவதன் மூலமும், r-ன் மதிப்பைக்குறைப்பதன்மூலமும் சக்கரமும் அச்சும்அமைப்பின் எந்திரப்பயனை எல்லையற்ற அளவுக்கு அதிகமாக்க முடியும் எனத் தோன்றினும், அதற்கு ஓர் எல்லையுண்டு. ஏனெனில், R-ன் மதிப்பை அதிகப்படுத்துவதன்மூலம் அமைப்பு மிகவும் பெரியதாகிவிடும். மேலும், r-ஐச் சிறியதாக்குவதன் மூலம் பெரிய சக்கரத்தின் எடையைத் தாங்கமுடியாமல் அச்சு ஒடிந்துவிடக்கூடும். அவ்வாறு ஏற்படும் இடர்ப்பாடின்றி அதிகமான எந்திரப்பயனைப் பெறக்கூடிய ஓர் அமைப்பு உண்டு. அது பகு சக்கரமும் அச்சும் (differential wheel and axle) எனப்படும்.

பகுசக்கரமும் அச்சும் : இதில், அச்சு வெவ்வேறு ஆரங்களையுடைய இருபகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. (படம் 16·16). கயிறு ஒன்றின் முனை அச்சின் இருபகுதிகளுள் ஒன்றில் சுற்றப்பட்டு மறுமுனை அச்சின் மறுபகுதியில் எதிர்த்திசையில் சுற்றப்பட்டுள்ளது. இந்தக்

கயிற்றின் தளர்ந்த பகுதியில் இயங்கும் இயங்குகப்பி ஒன்றிலிருந்து எடை (W) தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அச்சின் சிறு பகுதியில் கயிறு சுற்றப்பட்டிருக்கும் அதே திசையில் சக்கரத்தின்மீது சுற்றப்



படம் 16·16

பட்ட மற்றொரு கயிற்றின்மூலம் முயற்சி (P) செயற்படுத்தப்படுகிறது. சக்கரத்தின் ஆரம் a எனவும், அச்சின் பெரிய பகுதியின் ஆரம் b எனவும், சிறிய பகுதியின் ஆரம் c எனவும் இயங்கு கப்பியைத் தாங்கும் கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் கொள்வோம்

முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது,

$$2T = W$$

$$T = \frac{W}{2}$$

பொது அச்சைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின் :

$$P.a + T.c = T.b$$

$$P.a = T(b-c)$$

$$= \frac{W}{2}(b-c)$$

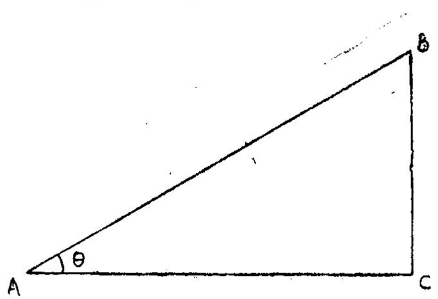
$$\therefore \text{ எந்திரப்பயன் } \frac{W}{P} = \frac{2a}{b-c} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 16{\cdot}21$$

சமன் 16·21-லிருந்து அச்சின் இருபகுதிகளின் ஆரங்களை ஏறத் தாழ சமமாக்குவதன்மூலம் மிக அதிகமான எந்திரப்பயனைப்பெற முடியும் என்பது விளங்கும். எனவே, அச்சை மிக மெல்லியதாக வும் சக்கரத்தைப் பெரியதாகவும் செய்யவேண்டிய தேவையில்லை. எனினும், அச்சின் இருபகுதிகளின் ஆரங்களுக்கிடையே வேறுபாடு குறையும்போது எடை மிகவும் மெதுவாகவே தூக்கப்படும்.

சாய்தளம் (Inclined plane)

எடைமிக்க பொருட்களைத் தூக்கவேண்டியிருக்கும்போது அவற்றை நேரே செங்குத்தாகத் தூக்குவதைவிட, ஒரு சாய்தளத் தின் வழியே மேலேஏற்றுவது எளிதாகும் என்பதை நாமறிவோம். சாய்தளம் என்பது கிடைமட்டத்திற்குக் குறிப்பிட்ட கோணத்தில் சாய்ந்தவாறு அமைந்த வழ வழப்பான தளமாகும். (படம் 16·17) சாய்தளத்தில் முயற்சி தளத்திற்கு இணையாகவோ, கிடைமட்ட மாகவோ செயற்படலாம்.

படம் 16·17-ல் ABC சாய்தளத்தின் பெரும வாட்ட கோட்டின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தள வெட்டுமுகத்தைக் குறிக்கிறது. (பெரும வாட்டக்கோடு என்பது சாய்தளம் கிடைத்தளத்தைச்



படம் 16·17

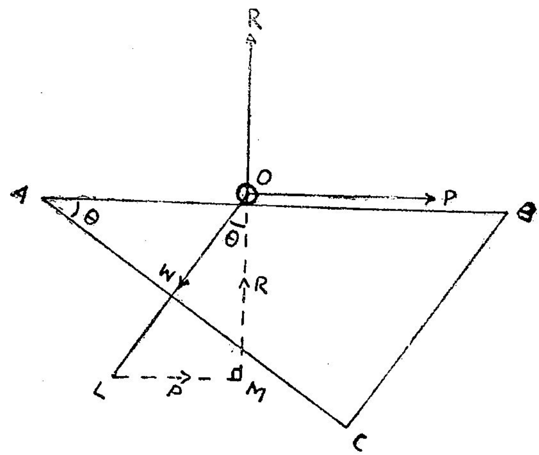
சந்திக்கும் விளிம்புக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடாகும்).

$\widehat{BAC} = \theta$, சாய்தளம், கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோண மாகும். AB ($= l$) சாய்தளத்தின் நீளம் எனவும், BC ($= h$) சாய் தளத்தின் உயரம் எனவும், AC ($= b$) சாய்தளத்தின் அடித்தளம் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

சாய்தளத்தின் எந்திரப்பயன் :

1. தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்படும் முயற்சி : சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் எடையை (W) தளத்திற்கு இணையாக

செயற்படும் முயற்சி (P) சரியீடு செய்வதாகக் கொள்வோம், (படம் 16·18).



படம் 16·18

இங்கு, பொருளானது

(i) சாய்தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்படும் முயற்சி (P)

(ii) செங்குத்தாகச் செயற்படும் பொருளின் எடை (W)

(iii) பொருளின்மீது தளம் அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் செயற்படுத்தும் எதிர்விசை (R)

ஆகிய மூன்று விசைகளின் கூட்டுச் செயலால் சமநிலையிலிருக்கிறது. எனவே, விசைகளின் முக்கோண விதியின் மறுதலை அல்லது லாமியின் தேற்றம் ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் எந்திரப் பயனைக் கணக்கிடலாம். விசைகளின் முக்கோண விதியின் மறுதலையின் அடிப்படையில் இங்கு எந்திரப்பயனைக் கணக்கிடலாம்.

P, R, W என்ற விசைகளின் திசைகளுக்கு இணையாக LM, MO, OL ஆகிய கோடுகளை வரைந்து, OLM என்ற முக்கோணத்தை அமைப்பதாகக்கொள்வோம். குறிப்பிட்ட மூன்றுவிசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால், முக்கோண விதியின் மறுதலைப்படி,

$$\frac{W}{OL} = \frac{P}{LM} = \frac{R}{MO}$$

$$\therefore \quad \text{எந்திரப்பயன் } \frac{W}{P} = \frac{OL}{LM}$$

OLM என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$\frac{OL}{LM} = \frac{1}{\sin\theta}$$

மேலும், ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

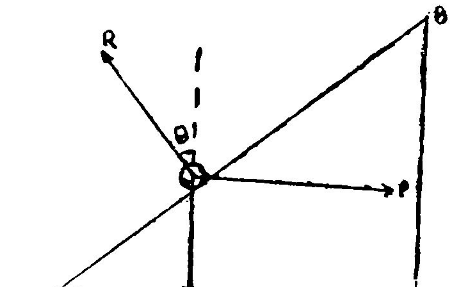
$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{AB}{BC} = \frac{l}{h}$$

எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = \frac{l}{h}$ ... ... 16·22

அதாவது, எந்திரப்பயன் $= \frac{\text{சாய்தளத்தின் நீளம்}}{\text{சாய்தளத்தின் உயரம்}}$

2. கிடைமட்டமாகச் செயற்படும் முயற்சி :

இப்பொழுது சாய்தளத்தில் கிடைமட்டமாக முயற்சி செயற்படும்போது சாய்தளத்தின் எந்திரப்பயனைக் கணக்கிடுவோம்.



படம் 16·19

இங்கும் பொருளானது அதன் எடை, முயற்சி, தளத்தின் எதிர்விசை ஆகிய மூன்று விசைகளின் கூட்டுச்செயலால் சமநிலையிலிருப்பதால், லாமியின் தேற்றத்தின் அடிப்படையில் எந்திரப் பயனைக் கணக்கிடலாம்.

படம் 16·19-ல் P, R ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $(90 + \theta)$; R, W ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் θ; W, P ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $90°$.

எனவே, லாமியின் தேற்றப்படி

$$\frac{W}{\sin(90+\theta)} = \frac{P}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 90}$$

∴ எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = \frac{\sin(90+\theta)}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

அதாவது, எந்திரப்பயன் $= \frac{W}{P} = \cot\theta$

ஆனால், ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$\cot\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{h}$$

எனவே, சாய்தளத்தில் முயற்சி கிடைமட்டமாகச் செயற்படும் போது எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = \frac{b}{h}$ ... ... 16·23

அதாவது எந்திரப்பயன் $= \frac{\text{சாய்தளத்தின் அடித்தளம்}}{\text{சாய்தளத்தின் உயரம்}}$

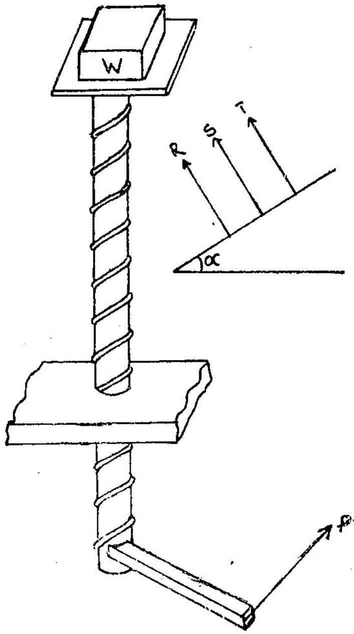
சாய்தளத்தின் நீளம் அடித்தளத்தைவிட எப்பொழுதும் அதிகமாக இருக்குமாதலால் முயற்சி சாய்தளத்திற்கு இணையாகச் செயற்படும்போது உள்ள எந்திரலாபம் முயற்சி சாய்தளத்தின் அடித்தளத்திற்கு இணையாக அதாவது கிடைமட்டமாகச் செயற்படும் போது உள்ளதைவிட அதிகமாக இருக்கும்.

திருகு (Screw):

வளைந்த பரப்பின் வழியே சுருள்வடிவப் புரி பொருத்தப்பட்ட அல்லது சுருள்வடிவ வரிப் பள்ளம் வெட்டப்பெற்ற மெல்லிய தண்டு திருகு எனப்படும். புரியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அது திருகின் அச்சுக்கு நேர்குத்தான தளத்துடன் அமைக்கும் சமமாக இருக்கும். இந்தக்கோணம் திருகின் கோணம் (angle of the screw) என அழைக்கப்படுகிறது. திருகின் அச்சுக்கிணையாக அடுத்தடுத்த புரிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் புரியிடைத் தூரம் (pitch) எனப்படும். திருகு வழக்கமாக நிலையான ஒரு திருகு மரையினுள் இயங்கும். திருகுமரையின்வழியே இயங்கும் ஒரு திருகு அதன் அச்சைப் பற்றிச் சுழல்வதோடு அதன் அச்சுக்கு இணையாகவும் நகருகிறது.

திருகின் கோணம் α, புரியிடைத்தூரம் P, திருகின் ஆரம் r எனின், $P = 2\pi r\tan\alpha$ ... ... 16·24

திருகின் எந்திரப்பயன் : வழவழப்பான திருகு மரை ஒன்றின் வழியே செல்லும் வழவழப்பான திருகு ஒன்றின்மீது ஓர் எடை (W) யை வைப்பதாகக் கொள்வோம். இதன் பயனாய் திருகுப்புரி, திருகு மரையின் வரிப்பள்ளங்களில் பல புள்ளிகளில் ஓர் அழுத்த விசையைச் செயற்படுத்துகிறது. எனவே, அந்தப் புள்ளிகளில்



படம் 16 20

லம்ப எதிர் விசைகள் திருகுப் புரிக்கு நேர்குத்துத் திசைகளில் செயற் படுகின்றன. (படம் 16-20). இந்த எதிர் விசைகளின் செங்குத்து ஆக்கக்கூறுகள் எடையைச் சரியீடு செய்கின்றன' கிடைத்தள ஆக்கக் கூறுகள் திருகுக்குத் தொடுவரை நிலையில் செயற்பட்டு அதனை அதன் அச்சைப்பற்றிச் சுழற்ற முயற்சிக்கின்றன. எனவே, திருகு சுழன்று கீழே இறங்க முயற்சிக்கும். இதனைத் தடுத்து எடையைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கத் திருகின் சுழற்சிக்கு எதிர்த் திசையில் ஒரு திருப்பு திறனை ஏற்படுத்த வேண்டும். திருகின் அச்சுக்கு நேர்குத்தாக இணைக்கப்பட்ட புயம் ஒன்றின் முனையில் அதற்கு நேர்குத்தான திசையில் ஒரு முயற்சி (P) யைச் செயற்படுத்துவதன்மூலம் அத்தகைய திருப்புதிறனை ஏற்படுத்த லாம். (படம் 16·20) திருகின் அச்சிலிருந்து முயற்சி செயற்படு

புள்ளிவரை புயத்தின் நீளம் a எனவும், திருகின் ஆரம் r எனவும் திருகின் கோணம் α எனவும் கொள்வோம். திருகுமரையின் வரிப்பள்ளங்களில் செயற்படும் லம்ப எதிர் விசைகளின் (R, S, T,......) செங்குத்து, கிடைத்தள ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்போமாயின், முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது,

$$W = R \cos\alpha + S \cos\alpha + T \cos\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \cos\alpha (R + S + T + \ldots\ldots\ldots) \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

முயற்சி, மற்றும் எதிர் விசைகளின் கிடைத்தள ஆக்கக்கூறுகளின் திருகின் அச்சைப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின்,

$$P.a = R \sin\alpha.r + S \sin\alpha.r + T \sin\alpha.r$$
$$= r \sin\alpha (R + S + T + \ldots\ldots) \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots (ii)$$

எனவே, சமன் (i), (ii) ஆகியவற்றிலிருந்து

எந்திரப் பயன் $$\frac{W}{P} = \frac{a}{r}\text{Cot}\alpha = \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{\tan\alpha} \quad \ldots \ldots \quad 16{\cdot}25$$

அல்லது $$\frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{2\pi r \tan\alpha}$$

ஆனால், திருகின் புரியிடைத்தூரம் சமன் 16·24-ன் படி

$$p = 2\pi r \tan\alpha$$

எனவே, திருகின் எந்திரப்பயன் $$\frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{p} \quad \ldots \quad \ldots \quad 6{\cdot}26$$

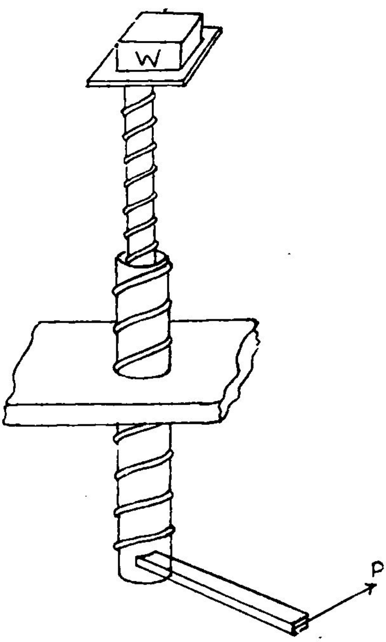
அதாவது, திருகின் எந்திரப்பயன்

$$= \frac{\text{முயற்சி புயத்தை ஆரமாகக்கொண்ட வட்டத்தின் பரிதி}}{\text{திருகின் புரியிடைத்தூரம்}}$$

எனவே, a-ன் மதிப்பை அதாவது முயற்சி புயத்தை அதிகரிப்பதன் மூலமும் புரியிடைத்தூரத்தை (p)க் குறைப்பதன்மூலமும் அதிகமான எந்திரப்பயனைப் பெறலாம் எனச்சமன் 16·26-லிருந்து நமக்குத் தெரியவருகிறது. எனினும், புரியிடைத்தூரத்தை அளவுக்குமீறிச் சிறிதாக்குவோமாயின், திருகுப்புரிகள் பலங்குன்றி எடையைத் தாங்கும் ஆற்றலற்றுப்போய் விடும். ஆகவே அதிகமான எந்திரப்பயனைப்பெற பகுதிருகு (differential screw) என்னுமோர் அமைப்பைப் பயன் படுத்தலாம்.

பகுதிருகு : இவ்வகைத் திருகில் பெரியதும் சிறியதுமான A, B என்ற இருதிருகுகள் உள்ளன. (படம் 16·21). பெரியதிருகு ஒரு நிலையான திருகுமரையின் வழியே இயங்குகிறது. சிறிய திருகு பெரிய திருகின் உள்ளமைந்த திருகுமரையின் வழியே இயங்கு

கிறது. எடை (W) சிறிய திருகின்மீது வைக்கப்பட்டு முயற்சியானது பெரிய திருகுடன் அதன் அச்சுக்கு நேர்குத்தாக இணைக்



படம் 16·21

கப்பட்ட புயம் ஒன்றின் முனையில் புயத்திற்கு நேர்குத்தாக செயற்படுத்தபப்டுகிறது.

முயற்சி புயத்தை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றும்பொழுது எடையும் பெரிய திருகும் அதன் புரியிடைத்தூரத்திற்குச் சமமான தொலைவு மேலேறுகிறது. ஆனால், அதே நேரத்தில் எடையும் சிறிய திருகும் அதன் புரியிடைத்தூரத்திற்குச் சமமான தொலைவு கீழிறங்குகிறது. எனவே, முயற்சி புயத்தை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றும்பொழுது எடை உயர்த்தப்படக்கூடிய தொலைவு இருதிருகுகளின் புரியிடைத் தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடாகும்.

இனி பகுதிருகின் எந்திரப்பயனைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்;

முயற்சிபுயம் a எனக்கொள்வோமாயின், அதன் ஒரு சுற்றின் போது செய்யப்பட்டவேலை $= P \times 2\pi a$

பெரிய திருகின் புரியிடைத்தூரம் P, சிறிய திருகின் புரியிடைத் தூரம் P_1 எனில், முயற்சி புயத்தின் ஒரு சுற்றின்போது எடை உயர்த்தப்பட்ட தொலைவு $= P-P_1$. எனவே, முயற்சி புயத்தின் ஒரு சுற்றின்போது எடையை எதிர்த்து செய்யப்பட்ட வேலை

$$= W \times (P-P_1)$$

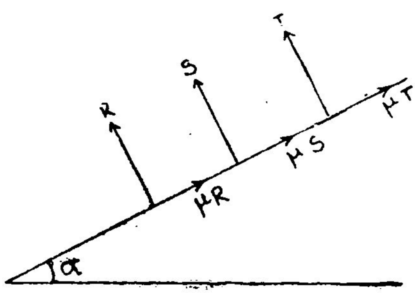
$$\therefore \quad W(P-P_1) = P \times 2\pi a.$$

எனவே, எந்திரப்பயன் $\frac{W}{P} = \frac{2\pi a}{P-P_1}$ ... ... 16·27

எனவே, பகுதிருகில் P, P_1 ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சிறிதாக்குவதன்மூலம் அதிகமான எந்திரப்பயனைப் பெறலாம். எனினும், அவ்வாறு அதிகமான எந்திரப்பயனைப்பெறும் போது எடை மிகமிக மெதுவாகவே உயர்த்தப்படும்.

உராய்வுடைய திருகு (Rough Screw): நாம் இதற்கு முன் கண்ட இருவகைத் திருகுகளும் வழவழப்பானவை எனக் கருத்திற் கொண்டே அவற்றிற்கான எந்திரப்பயனைக் கண்டோம், ஆனால் அத்தகைய வழவழப்பான திருகுகளை அமைப்பது எளிதன்று. நாம் கையாளக்கூடிய திருகுகள் யாவும் உராய்வுடைய திருகுகளே.

உராய்வுடைய திருகுகளில், திருகுப்புரிகள் திருகுமரையின் வரிப்பள்ளங்களில் தொடும் புள்ளிகளில் செயற்படும் லம்ப எதிர்



படம் 16·22

விசைகளைத்தவிர, புரிகளின் வழியே உராய்வு விசைகளும் செயற்படுகின்றன. லம்ப எதிர்விசைகள் R, S, T.........எனவும் உராய்வெண் μ எனவும் கொள்வோமாயின், திருகு கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருக்கும்போது, μR, μS, μT,......என்ற உராய்வு விசைகள் புரியின்வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும் (படம் 16·22).

திருகின் அச்சுக்கிணையாகவும் அதற்கு நேர்க்குத்தாகவும் விசைகளின் ஆக்கக் கூறுகளைக் காண்போமாயின் முயற்சி எடையைச் சரியீடு செய்யும்போது

$$W = R\ Cos\alpha + S\ Cos\alpha + T\ Cos\alpha + \dots\dots\dots$$
$$+ \mu R\ Sin\alpha + \mu\ S\ sin\alpha + \mu\ T\ Sin\ \alpha + \dots$$

$$\therefore \quad W = (R+S+T+\dots\dots)\ (Cos\alpha + \mu\ Sin\alpha) \dots (i)$$

திருகின் அச்சைப்பற்றிய திருப்பு திறன்களைக்காணின்

$$P.a = (R\sin\alpha + S\sin\alpha + T\sin\alpha + \dots\dots)\ r$$
$$+ (\mu\ R\ Cos\alpha + \mu\ S\cos\alpha + \mu\ T\cos\alpha + \dots\dots)\ r$$
$$P.a = r\ (R + S + T + \dots\dots)\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \dots (ii)$$

சமன்பாடுகள் (i) (ii) லிருந்து

$$\text{எந்திரப்பயன்} \quad \frac{W}{P} = \frac{a\ (Cos\alpha + \mu\ Sin\alpha)}{r\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

ஆனால், λ என்பது உராய்வுக் கோணமெனின் $\mu = \tan\lambda = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$

$$\therefore \text{ எந்திரப்பயன் } \frac{W}{P} = \frac{a}{r}\ \frac{Cos\ (\alpha - \lambda)}{\sin\ (\alpha - \lambda)} = \frac{a}{r} Cot(\alpha - \lambda)$$

$$\text{அதாவது எந்திரப்பயன்} \frac{W}{P} = \frac{a}{r\tan\ (\alpha - \lambda)} \quad \dots \quad 16.28$$

திருகு மேல் நோக்கி நகரும் நிலையில் இருக்குமாயின் உராய்வு விசைகள் புரியின் வழியே கீழ்நோக்கிச் செயற்படும். எனவே அந்நிலையில்

$$\text{எந்திரப் பயன்} \frac{W}{P} = \frac{a}{r\tan\ (\alpha + \lambda)} \quad \dots \quad \dots \quad 16{\cdot}29$$

திருகின் பயனுறு திறன் (Efficiency of the screw) திருகின் பயனுறுதிறன் என்பது அதில் உராய்வு இல்லாதபோது ஒரு குறிப்பிட்ட எடையைத் தூக்குவதற்குத் தேவைப்படும் முயற்சிக்கும், உராய்வு இருக்கும்போது தேவைப்படும் முயற்சிக்கும் உள்ள தகவு ஆகும்.

உராய்வு இல்லாதபோது W என்ற எடையைத் தூக்குவதற்குத் தேவைப்படும் முயற்சி $\quad P_1 = w.\ \dfrac{r}{a}\ \tan\alpha$ (சமன் 16·25).

உராய்வு இருக்கும்போது அந்த எடையைத் தூக்குவதற்குத் தேவைப்படும் முயற்சி $P_2 = w. \frac{r}{a}\tan(\alpha+\lambda)$ (சமன் 16·29)

எனவே, பயனுறு திறன் $E = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\lambda)}$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha+\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(2\alpha+\lambda) - \sin\lambda}{\sin(2\alpha+\lambda) + \sin\lambda}$$

அல்லது $E = 1 - \frac{2\sin\lambda}{\sin(2\alpha+\lambda) + \sin\lambda}$ ...16·30

$\sin(2\alpha+\lambda)$ பெரும மதிப்பைப் பெறும்போது அதாவது)

$$2\alpha + \lambda = 90^\circ$$

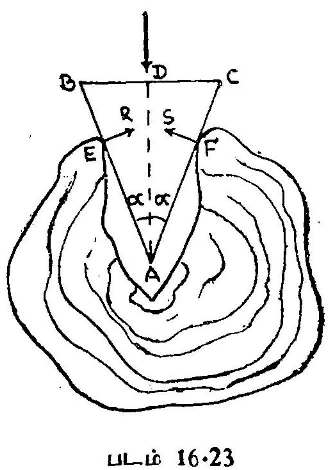
அல்லது $\alpha = 45^\circ - \frac{\lambda}{2}$

என்னும்போது திருகின் பயனுறுதிறன் பெரும மதிப்பைப்பெறும்.

ஆப்பு (Wedge)

கடினமான ஒரு பொருளால் செய்யப்பட்ட சிறிய கோணத்தை யுடைய முப்பட்டக வடிவிலுள்ள ஒரு திண்பொருள் ஆப்பு எனப் படும். மரத்தைப் பிளக்கவும் அதுபோன்ற மற்ற செயல்களுக்கும் ஆப்பு பயன்படுகிறது.

படம் 26·23-ல் ABC ஆப்பின் கூரான விளிம்புகளுக்கு நேர் குத்துத் தளவெட்டு முகத்தைக் காட்டுகிறது. ஆப்பின் கோணம் α எனவும், (படம் 16·23-ல் $\widehat{BAC}$) மரத்தைப் பிளக்கும் முயற்சியில் ஆப்பின் மேற்பரப் பில் செங்குத்தாகச் செயற்படுத் தப்படும் விசை P எனவும் கொள் வோம். இப்பொழுது ஆப்பின் BA,CA பக்கங்களில் செயற்படும் எதிர்விசைகள் முறையே, E, F எனக் கொள்வோம்.



படம் 16·23

இனி, ஆப்பு வழவழப்பான தாக இருக்குமாயின் ஆப்பின் மீது செயற்படும் விசைகளாவன,

(i) ஆப்பின் BC பக்கத்தில் D-ல் செங்குத்தாகச் செயற்படும் விசை P ;

(ii) BA, CA பக்கங்களில் செயற்படும் எதிர்விசைகள் R, S விசைகளைச் செங்குத்துத் திசையிலும் கிடைமட்டத்திலும் பிரிப்போமாயின் ஆப்பு சமநிலையிலிருக்கும்போது

$$P = (R + S)\ \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$R\cos\alpha = S\cos\alpha$$

அல்லது $$R = S \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (i), (ii) -லிருந்து

$$P = 2R\sin\alpha$$

அல்லது $$R = \frac{P}{2\sin\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}31$$

ஆப்பு உராய்வுடையதாக இருக்குமாயின், ஆப்பின் BA, CA பக்கங்களில் செயற்படும் லம்ப எதிர்விசைகளைத்தவிர, முறையே AB, AC வழியே செயற்படும் $\mu R, \mu S$ என்ற உராய்வு விசைகளும் செயற்படுகின்றன. எனவே, ஆப்பு சமநிலையில் இருக்கும்போது,

$$P = (R + S)\sin\alpha + \mu(R + S)\cos\alpha$$

அல்லது $$P = (R + S)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

மேலும், $$\mu R\sin\alpha - R\cos\alpha = \mu S\sin\alpha - S\cos\alpha$$

அல்லது $$R(\mu\sin\alpha - \cos\alpha) = S(\mu\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$\therefore \quad R = S \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

எனவே $$P = 2R(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

அல்லது $$P = \frac{2R}{\cos\lambda}\sin(\alpha + \lambda) \quad [\because \mu = \tan\lambda]$$

$$\therefore \quad R = \frac{P\cos\lambda}{2\sin(\alpha+\lambda)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 16{\cdot}32$$

R-ன் மதிப்பு ஆப்பின் பிளக்குந் திறனின் (Splitting power) அளவைக் குறிக்கின்றது.

P-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு ஆப்பின் கோணத்தைச் சிறிய தாக்குவதன் மூலம் R-ன் மதிப்பை அதாவது ஆப்பின் பிளக்குந் திறனை அதிகமாக்கலாம் எனச் சமன்பாடுகள் 16·31, 16·32 ஆகியவற்றிலிருந்து அறியலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1. 15 செ.மீ உயரமும் 30 செ.மீ அடித்தளமும் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மீது வைக்கப்

பட்ட 2 கி.கி. எடை ஒன்றைச் சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்குத் தேவையான கிடைத்தள விசையைக் கணக்கிடுக. தளத்தின் எதிர்விசையையும் கணக்கிடுக.

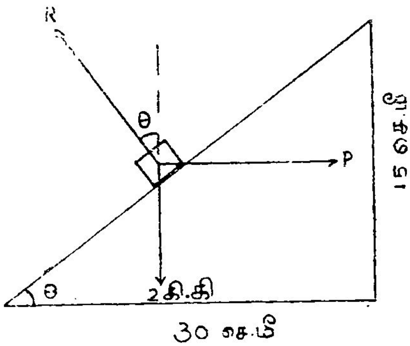
தேவையான கிடைத்தள விசையை P எனவும் தளத்தின் எதிர் விசையை R எனவும் கொள்வோம். விசைகளின் அமைப்பைப் படம் 16. 24-ல் காணலாம். சாய் தளத்தின் கோணம் θ எனில்

$$\tan\theta = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

எனவே

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



படம் 16. 24

லாமியின் தேற்றத்தின்படி படம் 16. 23-ல்

$$\frac{2}{\sin(90+\theta)} = \frac{P}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 90}$$

அல்லது

$$\frac{2}{\cos\theta} = \frac{P}{\sin\theta} = R$$

$$\therefore \quad P = 2.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= 2\tan\theta$$

$$= 2 \times \tfrac{1}{2} \text{ கி. கி. எடை}$$

$$\therefore \quad P = 1 \text{கி. கி. எடை}$$

மேலும்

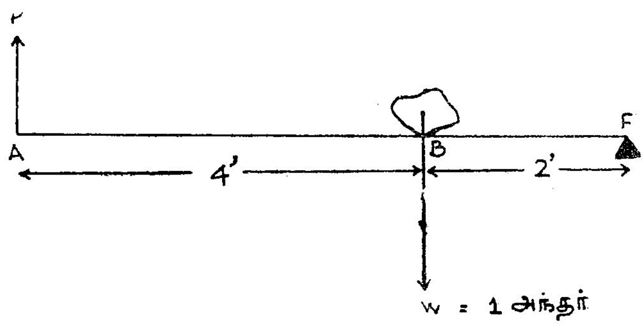
$$R = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2}{2/\sqrt{5}}$$

$$R = \sqrt{5} \text{ கி. கி. எடை}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2. ஆறடி நீளமும் ஒருமுனையில் ஆதாரத் தானத்தையும் கொண்ட ஒரு நெம்பு கோலில் ஆதாரத்தானத்தி லிருந்து 2 அடி தொலைவிலுள்ள 1 அந்தர் எடையைத் தாங்குவதற்கு மறு முனையில் ஒரு விசை செயற்படுத்தப்படுகிறது. ஆதாரத் தானத்தில் செயற்படுத்தப்படும் அழுத்த விசையின் மதிப்பையும் திசையையும் மதிப்பிடுக.

படம் 16. 25-ல் AF நெம்பு கோலையும் F ஆதாரத் தானத்தையும் குறிக்கின்றன. B எடை செயற்படு புள்ளியாகும். AF = 6 அடி, BF = 2 அடி, நெம்பு கோலின் A முனையில் முயற்சி செயற்படுகிறது. ஆதாரத்தானத்தில் செயற்படும் அழுத்த விசை R என இருக்கட்டும்.



படம் 16. 25

நெம்புகோல் சமநிலையிலிருப்பதால் A முனையைப் பற்றிய திருப்பு திறன்களைக் காணின் அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை சுழியாகும். அதவாது

$$W \times BA + R \times AF = O$$

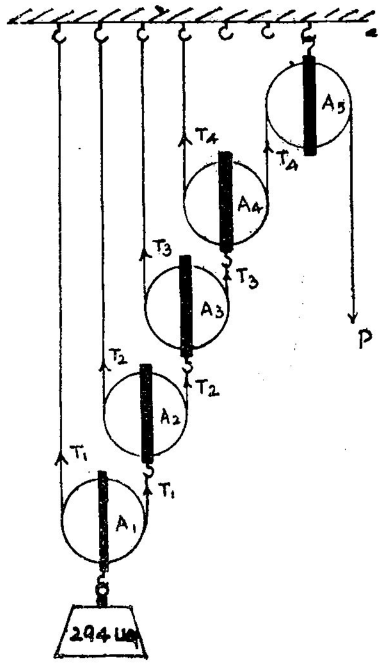
அல்லது $1 \times 4 \;\; + R \times 6 = O$

அல்லது $= \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3}$ அந்தர் எடை

எனவே ஆதாரத்தானத்தில் அழுத்த விசை $\frac{2}{3}$ அந்தர் எடை, இது எடைக்கு எதிர்த்திசையில் செயற்படும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. ஒரு முதல்வகைக் கப்பித் தொகுதியிலுள்ள கப்பிகளின் எடைகள் உச்சியிலுள்ள கப்பியிலிருந்து முறையே 1, 2, 3, 4 பவு. அத்தகைய கப்பித் தொகுதியில் 294 பவு. எடையைத் தாங்கக் கூடிய முயற்சியைக் கணக்கிடுக.

படம் 16. 26-ல் A_1, A_2, A_3, A_4 என்பன குறிப்பிடப்பட்ட கப்பிகள் அவற்றின் எடைகள் முறையே 4, 3, 2, 1 பவு. ஆகும்



படம் 16. 26

அவற்றைத் தாங்கும் கயிறுகளின் இழுவிசைகள் முறையே T_1, T_2, T_3, T_4, எனவும், முயற்சியை P எனவும், கொள்வோம்.

அமைப்பு சமநிலையிலிருக்கும்போது

$$2T_1 = (W + 4)$$
$$2T_1 = 294 + 4$$
$$\therefore \quad T_1 = \frac{298}{2} = 149 \text{ பவு. எடை.}$$
$$2T_2 = T_1 + 3 = 149 + 3$$
$$\therefore \quad T_2 = \frac{152}{2} = 76 \text{ பவு. எடை.}$$
$$2T_3 = T_2 + 2 = 76 + 2$$
$$\therefore \quad T_3 = \frac{78}{2} = 39 \text{ பவு. எடை.}$$

$$2T_4 = T_3 + 1 = 39 + 1$$

$$\therefore \quad T_4 = \frac{40}{2} = 20 \text{ பவு. எடை}$$

ஆனால், $T_4 = P$; முயற்சி

எனவே, தேவைப்படும் முயற்சி = 20 பவு. எடை.

மாதிரிக் கணக்கு 4. பொய்த்தராசு ஒன்றின் புயங்கள் 10 : 11 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அத்தகைய தராசுக்குரிய வணிகர் ஒருவர் அதன் குட்டையான புயத்துடன் இணைக்கப்பட்ட தட்டி விட்டு 4 கிலோ சர்க்கரையை விற்கிறார். அவர் அடைவது லாபமா? நஷ்டமா? ஒருகிலோ சர்க்கரை 2 ரூபாய் என்றால், அவர் அடையும் லாபநஷ்டம் எவ்வளவு?

4 கிலோ சர்க்கரையின் உண்மையான எடை W எனக்கொள்வோம். எனவே 4 கி. கி எடைக்கற்களை நீண்ட புயத்தின் தட்டில் வைத்து குறிப்பிடப்பட்ட அளவு சர்க்கரையை மறுதட்டில் வைக்கும் பொழுது, தராசின் தூலம் கிடைமட்டத்தில் இருக்கும். ஆதாரத் தானத்தைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்

$$W \times 10 = 11 \times 4$$

$$\therefore \quad W = \frac{44}{10} = 4{\cdot}4 \text{ கி.கி}$$

எனவே, உண்மையில் 4·4 கி. கி எடையுள்ள சர்க்கரையை வணிகர் 4 கி. கி அளவாகக் கொடுப்பதால், அவர் 0·4 கி. கி. சர்க்கரையின் விலையை நஷ்டமடைகிறார். அதாவது $0{\cdot}4 \times 2{\cdot}00 = 0{\cdot}80$ ரூபாய் அல்லது 80 பைசாக்கள் நஷ்டமடைகிறார்.

பயிற்சி XVI

1. 25-க்கு 1 சரிவுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ள 500 பவு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் தளத்திற்கு இணையாகச் செல்லும் கயிறு ஒன்றின்மூலம் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக. [20 பவு. எடை]

2. 6 அடி நீளமுள்ள கடப்பாரையின்மீது அதன் ஒரு முனையில் இருந்து 0·5 அடி தொலைவிலுள்ள ஒரு கல்லைத் தூக்குவதற்கு மறு முனையில் ஒருவர் 30 பவு. எடை விசையைச் செயற்படுத்துகிறார். கடப்பாரையின் முதல்முனை ஆதாரத்தானமாக அமையுமாயின், கல்லின் எடையைக் கணக்கிடுக. [360 பவு. எடை]

3. 60° கோணமுடைய ஓர் ஆப்பு வழவழப்பான மேசை ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சாய்ந்த பக்கத்தின்மீது வைக்கப்பட்ட 20 பவு. எடை ஒன்று அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகச் செல்லும் கயிறு ஒன்றினால் தாங்கப்படுகிறது. ஆப்பு நகராமலிருக்க அதன்மீது செயற்படுத்தவேண்டிய கிடைத்தள விசை என்ன?

[5 $\sqrt{3}$ பவு. எடை]

4. 3 அடி உயரமும் 4 அடி அடித்தளமும் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்ட 20 பவு. எடை ஒன்றைச் சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்குத் தேவையான கிடைமட்ட விசையைக் கணக்கிடுக. [15 பவு எடை]

5. முதல்வகைக் கப்பித்தொகுதி ஒன்றில் உள்ள கப்பிகளின் எண்ணிக்கை மூன்று. அவற்றுள் தாழ்ந்த கப்பியிலிருந்து அவற்றின் எடைகள் முறையே, 5, 4, 3 பவுண்டுகள். அத்தகைய கப்பித் தொகுதியில் 75 பவு. எடையைச் சற்றே சரியீடு செய்யக்கூடிய முயற்சியைக் கணக்கிடுக. [12·5 பவு. எடை]

6. ஆறு கப்பிகளைக் கொண்ட மூன்றும் வகைக் கப்பித்தொகுதி ஒன்றில் உள்ள கயிறுகளின் முனைகள் எடையற்ற தண்டு ஒன்றில் ஒன்றுக்கொன்று 2 அங். தொலைவில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தண்டு கிடைமட்டத்திலிருக்க அதில் எடை இணைக்கப்படவேண்டிய இடத்தை மதிப்பிடுக. [1 8"]

7. ஒரு திருகின் சுற்றளவு 2 அங்; உராய்வு எண் 0·15; முயற்சி புயத்தின் நீளம் 15 அங்குலம்; திருகின் 1 அங்குல நீளத்தில் மூன்று புரிகள் உள்ளன. திருகின்மீது 1 அந்தர் எடையுள்ள ஒருபொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அந்த எடையைச் சற்றேதாங்கக்கூடிய விசையையும் திருகைச் சற்றே இயக்கக்கூடிய விசையையும் கணக்கிடுக. அந்த திருகு வழவழப்பாயிருக்கும்போது தேவைப்படும் முயற்சியையும் அதன் பயனுறுதிறனையும் காண்க.

$$\left[\frac{176}{135\pi}, \frac{3248}{855\pi}, \frac{112}{45\pi},\right]$$

8. திருகுப் பாரந்தூக்கி (Screw Jack) ஒன்றின் திருகின் புரியிடைத் தூரம் $\frac{1}{4}$ அங்குலமாகும். அதன் புயத்தின் முனை 2 அடி 6 அங். ஆரமுடைய வட்டத்தில் இயங்கக்கூடியது. அத்தகைய பாரந்தூக்கியில் 2 டன் எடையுள்ள பளுவைத் தூக்க 15 பவு. எடை விசைத் தேவைப்படுகிறது. அதன் பயனுறு திறனைக் கணக்கிடுக

$$\left[\frac{56}{45\pi}\right]$$

17. அழுத்தமும் அமுக்கமும்
(Pressure and Thrust)

முன்னுரை :

நிலைப்பாய் பொருளியல் என்பது, நிலையான திரவ, வாயுப் பொருட்களையுப்பற்றியும் அவற்றில் செயற்பட்டு சமநிலையில் இருக்கும் விசைகளைப்பற்றியும் கூறும் ஒரு பகுதியாகும்.

பருப்பொருட்கள் திட, திரவ, வாயு என்ற மூன்று நிலைகளை உடையன என்பதை நாமறிவோம். ஒரு திடப்பொருள் குறிப்பிட்ட அளவு உருவம் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளது. அவற்றை மாற்றுவதென்பது அவ்வளவு எளிதன்று. ஒரு திரவத்திற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட பருமன் உண்டு; ஆனால் குறிப்பிட்ட உருவம் கிடையாது. திரவம் எந்தக் கலத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளதோ அதன் உருவத்தையே பெறுகிறது. திரவத்தின் பருமனை மாற்றுவது அவ்வளவு எளிதன்று. வாயுவிற்குக் குறிப்பிட்ட பருமனோ அல்லது உருவமோ கிடையாது. வாயு எந்தக் கலத்தில் உள்ளதோ அதன் உருவத்தையும் பருமனையும் கொண்டிருக்கும். வாயுவின் பருமனையும் உருவத்தையும் மாற்றுவது மிக எளிது. திரவங்களும் வாயுக்களும் பொதுவாக பாய்பொருட்கள் (fluids) என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே நிலைப்பாய் பொருளியலில் ஒரு திரவத்திற்குக் கூறப்படும் எல்லா உண்மைகளும் வாயுக்களுக்கும் பொருந்தும்.

ஒரு பொருளின் பரப்பிற்கு நேர்குத்தான திசையில் செயற்படும் விசை பொதுவாக லம்பவிசை (normal force) எனப்படும். அந்த லம்பவிசை பொருளைச் சுருக்க முயலுமாயின் அது அமுக்கம் (thrust) எனப்படும்; பொருளை விரிக்க முயலுமாயின் இழுவிசை (tension) எனப்படும். பொருளின் பரப்பின்வழியே செயற்படும் விசை தொடுவரை விசை (tangential force)—அல்லது உருவமாற்று விசை

(Shearing force) எனப்படும். ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் லம்ப விசை அதன் அளவையும், உருவமாற்று விசை அதன் உருவத்தையும் மாற்ற முயற்சிக்கின்றன

அழுத்தம் :

ஒரு பொருளின் பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கம் அப் பரப்பில் எல்லாப்புள்ளிகளிலும் சீராக செயற்படுமாயின் ஓரலகு பரப்பளவின் மீது செயற்படும் அமுக்கம் அப் பரப்பில் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் எனப்படும். அதாவது F என்ற அமுக்கம் a அலகு பரப்பளவில் சீரர்கச் செயற்படுமாயின் அப்பரப்பில் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம்

$$P = \frac{F}{a} \quad \ldots \quad .. \quad \ldots \quad 17.1$$

ஆகும்.

ஒரு பரப்பில் செயற்படும் அமுக்கம் சீரானதாக இல்லாவிட்டால் அப் பரப்பில் அழுத்தம் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெவ்வேறு அளவாக இருக்கும். அந்நிலையில் அப் பரப்பில் எந்தவொரு புள்ளியிலும் அழுத்தம் அப் புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள ஒரு சிறு பரப்பளவின் மீது செயற்படும் அமுக்கத்திற்கும் அப்பரப்பளவுக்கும் உள்ள விகிதமாகும். நுண்கணித முறையில் சொல்வோமாயின் δa அலகுள்ள மிகற்சிறிய பரப்பளவின்மீது செயற்படும் அழுக்கம் δF என்ருல் $\frac{\delta F}{\delta a}$ அப்பரப்பளவின் மீதுள்ள சராசரி அழுத்தத்தைக் கொடுக்கிறது.

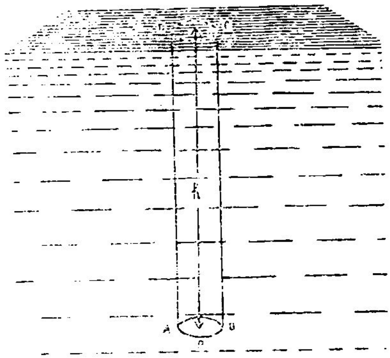
δa-ன் மதிப்பு சுழியை நெருங்கும்போது $\frac{\delta F}{\delta a}$ -ன் அணுக்க மதிப்பு குறிப்பிட்ட பரப்பில் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தத்தைக் கொடுக்கும். அதாவது

$$\text{அழுத்தம்} = \text{எல்லை}_{\delta a \to 0} \frac{\delta F}{\delta a} = \frac{dF}{da} \quad \ldots \quad \ldots \quad 17{\cdot}2$$

எனவே, பொதுவாக ஒரு பரப்பில் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் என்பது அப் புள்ளியை உள்ளடக்கிய ஓரலகு பரப்பளவின்மீது செயற்படும் அமுக்கம் என வரையறுக்கலாம்.

அழுத்தத்தின் சார்பிலா அலகு; மெட்ரிக் முறையில் டைன்கள்/சதுர சென்டி மீட்டர்; பிரிட்டன் முறையில், பவுண்டல்கள்/சதுர அடி. இருமுறைகளிலும் புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள் முறையே கிராம் எடை./ ச. செ. மீ; பவு எடை./ ச. அடி.

நிலையான திரவத்தினுள் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம்: நிலையான ஒரு திரவத்தினுள் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தத்தை அப்புள்ளியை உள்ளடக்கியுள்ள ஓரலகு கிடைப்பரப்பளவின்மீது செயற்படும்



படம் 17·1

செங்குத்து விசையை அதாவது திரவத்தின் எடையைக் காண்பதன்மூலம் கணக்கிடலாம். P அலகு அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் அதன் மேற்பரப்பிலிருந்து h அலகு ஆழத்திலுள்ள P என்ற ஒரு புள்ளியைக் கருதுவோம். (படம் 17·1) P-ஐச் சுற்றி a அலகு பரப்பளவுள்ள AB என்ற சிறிய கிடைப்பரப்பைக் கருதுவோமாயின் அதன்மீது செயற்படும் அமுக்கம் அதன்மீது நிற்கும் ABCD என்ற செங்குத்துத் திரவத் தம்பத்தின் எடையாகும். ஆனால், அத்திரவத் தம்பத்தின் எடை $= h \times a \times p \times g$

ஒருபுள்ளியில் அழுத்தம் அதனை உள்ளடக்கிய ஓரலகு பரப்பளவின்மீது செயற்படும் அமுக்கமாதலால் P-ல் அழுத்தம்

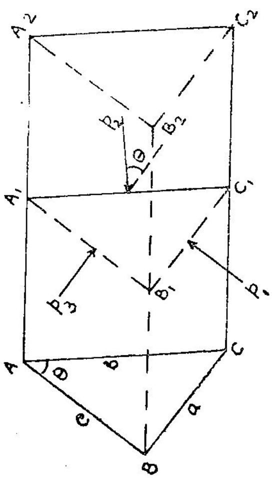
$$p = \frac{a \text{ அலகு பரப்பளவின்மீது செயற்படும் அமுக்கம்}}{a}$$

அதாவது, $P = h\,p\,g$ சார்பிலா அலகுகள் ……… 17·3

சமன்பாடு 17·3-லிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட திரவத்தினுள் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் திரவமட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் ஆழத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் என அறியலாம்.

ஒரு திரவத்தினுள் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் எல்லாத் திசைகளிலும் சமமாயிருக்கும். இதனைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம். P அலகு அடர்த்தியுள்ள நிலையான திரவம் ஒன்றில் முக்கோண வடிவ குறுக்குப் பரப்பையுடைய $AA_2\ C_2\ CBB_2$ என்ற சிறு பட்டகம் ஒன்றைக் கருதுவோம். பட்டகத்தின் $BB_2\ C_2\ C$ என்ற பரப்பு கிடைத்

தளத்திலும், கோணம் $\widehat{ABC}$ ஒரு செங்கோணமாகவும் இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின் AA_2B_2B என்ற பரப்பு செங்குத்தாக



படம் 17·2

அமையும். மேலும் $AB = C$, $BC = a$, $CA = b$, $AA_2 = l$ எனக் கொள்வோமாயின் BB_2C_2C, AA_2C_2C, AA_2B_2B ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே Cl, bl, al ஆகும். $\widehat{BAC} = \theta$ எனவும் BB_2C_2C, $AA_2\ C_2\ C$, AA_2B_2B ஆகியவற்றின்மீது செயற்படும் அழுத்தங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3 எனவும் இருக்கட்டும். குறிப்பிட்ட பட்டகம் சிறியதானதாகையால் அதன் பக்கங்களின் மீது செயற்படும் அழுத்தங்களைச் சீரானதாகக் கருதலாம்.

இனி, பட்டகத்திலுள்ள திரவத்தைக் கருதுவோமாயின் அது பின்வரும் விசைகளின் கூட்டுச் செயலால் சமநிலையிலுள்ளது.

(i) BB_2C_2C என்ற பக்கத்தில் BA-க்கு இணையாகச் செயற்படும் $p_1 \times al$ என்ற விசை;

(ii) AA_2C_2C என்ற பக்கத்தில் BC-க்கு இணையாகச் செயற்படும் $p_2 \times bl$ என்ற விசை;

(iii) AA_2B_2B என்ற பக்கத்தில் கிடைத்தளத்துடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் செயற்படும் $p_3 \times cl$ என்ற விசை.

(iv) செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் பட்டகத்தில் அடங்கிய திரவத்தின் எடை $= \frac{1}{2}\, a\, c\, l\, p\, g$

(v) ABC, $A_2B_2C_2$ ஆகிய முனைகளில் கிடைமட்டத்தில் செயற்படும் அமுக்கங்கள். இவையிரண்டும் சமமாகவும் எதிர்த் திசைகளிலும் செயற்படுவதால் அவை ஒன்றையொன்று அழித்துக் கொள்ளுகின்றன.

விசைகளின் BC-க்கு இணையான ஆக்கக்கூறுகளைக் காண் போமாயின் $p_3 \times cl = p_2 \cos\theta\, bl.$

ஆனால் $b\cos\theta = c$

$\therefore \quad p_3 = p_2$

விசைகளின் AB-க்கு இணையான ஆக்கக்கூறுகளைக் காணின்

$$p_1 \times al = p_2 \sin\theta\, b.l + \tfrac{1}{2}\, acl\, Pg$$

ஆனால் $b \sin\theta = a$

$$\therefore \quad p_1 \times al = p_2\, al + \tfrac{1}{2}\, acl\, Pg$$

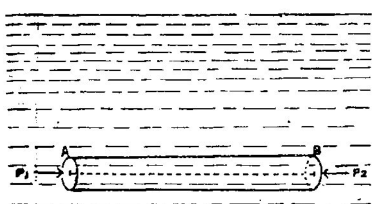
$$p_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\, cpg$$

இப்பொழுது, பட்டகம் அளவில் சிறிது சிறிதாகக் குறைந்து ஒரு புள்ளியாக மாறுவதாகக் கொள்வோம். அந்நிலையில் C = O ஆகும்; எனவே $\frac{1}{2}cpg$ = O ஆகும். ஆகவே, பட்டகம் ஒரு புள்ளியாகக் குறை யும் போது $p_1 = p_3$

எனவே $p_1 = p_2 = p_3$

அதாவது நிலையான திரவத்தினுள் ஒருபுள்ளியில் அழுத்தம் எல்லா திசைகளிலும் சமமாகும்.

நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் ஒரு கிடைத்தளத்தில் உள்ள புள்ளி களில் அழுத்தம் சமமாக இருக்கும்: நிலையான திரவம் ஒன்றி னுள் AB என்ற கிடைக்கோட்டையும், அதனை அச்சாகவும் 'a'



படம் - 17·3

அலகு குறுக்குப் பரப்பையும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய உருளை வடி வத் திரவப் பகுதியையும் கருதுவோம். இத் திரவப் பகுதியின் A,B முனைகளில் செயற்படும் அழுத்தங்கள் முறையே p_1, p_2 என்றால் அம் முனைகளில் செயற்படக்கூடிய அமுக்கங்கள் முறையே p_1a, $p_2\,a$ ஆகும். இத் திரவப்பகுதியானது,

(i) செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை,

(ii) அதன் A,B முனைகளில் செயற்படும் p_1a, p_2a என்ற அமுக்கங்கள்.

(iii) அதன் வளைந்த பரப்பின்மீது எல்லாப் புள்ளிகளிலும் AB-க்கு நேர்குத்துத் திசையில் செயற்படும் அமுக்கம். ஆகிய விசைகளின் கூட்டுச் செயலால் சமநிலையில் இருக்கும்.

எனவே விசைகளின் AB-க்கு இணையான ஆக்கக்கூறுகளைக் காணின்,

$$p_1 a = p_2 a$$

அல்லது

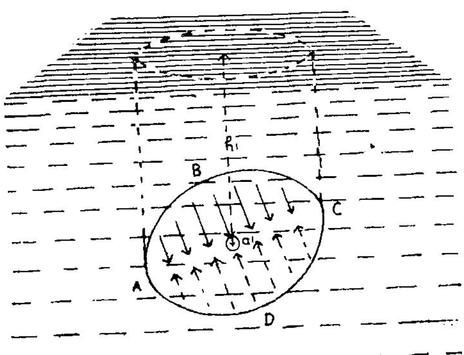
$$p_1 = p_2$$

அதாவது ஒரே கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளிகளில் அழுத்தம் சமமாகும்.

மேற்கூறப்பட்ட பண்புகளின் அடிப்படையில் பெறக்கூடிய சில உண்மைகளாவன: (i) நிலையான திரவம் ஒன்றின் மேற்பரப்பு கிடைமட்டமாக அமையும். (ii) ஒரு பாத்திரத்திலுள்ள ஒன்றுக்கொன்று கலவாத இருதிரவங்களின் பொதுப்பரப்பு கிடைமட்டமாக அமையும். (iii) ஒன்றுக்கொன்று x அலகு உயரத்தில் வெவ்வேறு ஆழங்களிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் உள்ள அழுத்தங்களில் வேறுபாடு $x p g$ சார்பிலா அலகுகள். (iv) திரவத்தினுள் அழுத்தம் ஊடுருவுதலைப்பற்றிய பாஸ்கலின் விதி: நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் அழுத்த மாறுதல் மற்ற எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் அதே அளவில் கடத்தப்படுகிறது.

அமுக்கம்

நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட ஒருதளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கம்: நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்



படம் 17·4

டிருக்கும் ABCD என்ற ஒரு தளத்தைக் கருதுவோம். அதன்மீது செயற்படுத்தும் விசை அதன் பரப்பிற்கு நேர்குத்துத் திசையிலேயே

அமையும். அவ்வாறின்றி வேறு எந்தத் திசையிலும் விசைச் செயற் படுமாயின் அது தளத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையிலும் இணையான திசையிலும் ஆக்கக்கூறுகளைக் கொண்டிருக்கும் தளத்திற்கு இணையான திசையில் செயற்படும் ஆக்கக்கூறு திரவத்தில் ஒரு இயக்கத்தை விளைவிக்கும். ஆனால், திரவம் நிலையானதாகையால் அத்தகைய விசை ஏதும் செயற்பட முடியாது. எனவே ஒரு நிலையான திரவத்தினுள் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தளத்தில் செயற் படும் அமுக்கம் எப்போதும் தளத்திற்கு நேர்குத்தான திசையி லேயே செயற்படும். இனி, தளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கத் தின் எண் மதிப்பைப் பற்றிக்காண்போம்.

ABCD என்ற தளத்தின் பரப்பளவு S எனவும், அது அமிழ்ந்தி ருக்கும் திரவத்தின் அடர்த்தி P எனவும் கொள்வோம். தளத்தின் பரப்பளவை $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ……… அலகு பரப்பளவுள்ள மிகச் சிறு பரப்புகளாகப் பிரிப்பதாகவும் திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து அவற் றின் ஆழங்கள் முறையே h_1, h_2 h_3………எனவும் கொள்வோம். h_1 ஆழத்திலுள்ள புள்ளியில் திரவத்தின் அழுத்தம் h_1 P g. எனவே, α_1 அலகு பரப்பளவின்மீது செயற்படும் அமுக்கம் $\alpha_1 h_1 p g$. இவ்வாறே, α_2, α_3 ……. அலகு பரப்பளவுகளின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்கள் முறையே $\alpha_2 h_2$ P g $\alpha_3 h_3$ P g……… ஆகும். இந்த விசைகள் இணைவிசைகளின் தொகுதி ஒன்றை அமைப்பதால் தளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கமானது சிறு பரப்பளவுகளின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை யாகும். அதாவது தளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கம்

$$= p g h_1 \alpha_1 + p g h_2 \alpha_2 + p g h_3 \alpha_3 + \ldots\ldots$$
$$= pg \Sigma h\alpha.$$

திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து தளத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆழம் $\overline{h}$ என்றால்

$$\Sigma h \alpha = \overline{h} \Sigma \alpha$$

எனவே, தளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கம்

$$p g \Sigma h\alpha = \overline{h} p g \Sigma\alpha$$

அதாவது, தளத்தின்மீது அமுக்கம்

$$= \overline{h} p g \, S \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 174$$

ஆனால் $\overline{h p g}$ என்பது தளத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தில் திரவத் தினால் ஏற்படும் அழுத்தமாகும்.

எனவே ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் தளத்தின்மீது (அது கிடைமட்டமாக இருந்தாலும் செங்குத்தாக இருந்தாலும்) செயற்படும் அமுக்கமானது அத் தளத்தின் புவியீர்ப்புமையத்தில் அழுத்தம், தளத்தின் பரப்பளவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனால் பெறப்படுகிறது.

திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் தளத்தின்மீது செயற்படும் அமுக்கமானது அத்தளத்தின் பரப்பளவையும் திரவத்தின் மேற் பரப்பிலிருந்து அத்தளத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தையும் மட்டுமே சார்ந்திருக்கிறதேயன்றி, அதன் நிலையைப் பொறுத்து அதாவது, அது கிடைத்தளத்திற்குச் சாய்ந்திருக்கும் நிலையைப் பொறுத்ததன்று என்பதைச் சமன் 17·4-லிருந்து அறியலாம்.

அழுத்தமையம் (Centre of pressure)

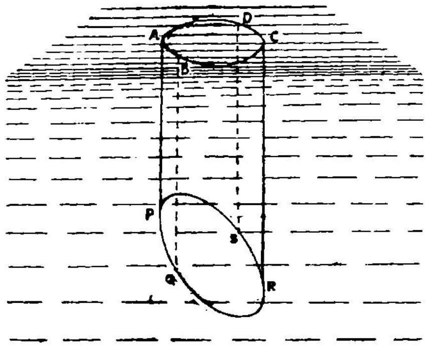
சமதளப்பரப்பு ஒன்று நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந் திருப்பதாகக் கொள்வோம். அப் பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அழுத்தமானது திரவமட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் ஆழத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும்; மேலும், அப்பரப்பிற்கு நேர்குத்துத்திசை யிலும் செயற்படும். அப் பரப்பிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் உள்ள அழுத்தங்கள் இணைவிசைகளின் தொகுதி ஒன்றை அமைக்கும். அத்தகைய இணைவிசைகளின் தொகுபயன் பரப்பின்மீது செயற் படும் அமுக்கத்திற்குச் சமமாகும். அத் தொகுபயன் பரப்பின்மீது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிவழியே செல்லும். அக் குறிப்பிட்ட புள்ளியே அழுத்தமையம் எனப்படும்.

எனவே நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் சமதளப் பரப்பின் அழுத்த மையம் என்பது அப்பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் செயற்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியாகும்.

தொகுபயன் அமுக்கத்தின் எண்மதிப்பைக் கணக்கிட பரப்பின் புவியீர்ப்புமையம் பயன்படுத்தப்பட்ட போதிலும் தொகுபயன் அமுக்கம் புவியீர்ப்புமையத்தில் செயற்படுவதில்லை என்பது குறிப் பிடத்தக்கது. பொதுவாக, அழுத்தமையம் புவியீர்ப்புமையத்தை விட அதிக ஆழத்திலேயே அமைந்திருக்கும்; எனினும் பரப்பு கிடை மட்டமாக அமையும்போது அழுத்தமையம் புவியீர்ப்புமையத் துடன் ஒன்றும்.

சமதளப்பரப்பு ஒன்றின் அழுத்தமையமும் அதன் மீது நிற்கும் திரவத்தம்பத்தின் புவியீர்ப்புமையமும்: திரவம் ஒன்றினுள் செங் குத்து நிலைக்குச் சாய்ந்த நிலையில் அமிழ்ந்திருக்கும் PQRS என்ற

சமதளப்பரப்பைக் கருதுவோம். (படம் 17·5) ABCD என்பது திரவத்தின் மேற்பரப்பில் PQRS-ன் வீழ்ச்சி. இப்பொழுது சமதளப்



படம் - 17·5

பரப்பின்மீது செங்குத்தாக நிற்கும் PQRSD ABC என்ற திரவப் பகுதியின் சமநிலையைக் கருதுவோம்.

அதன்மீது செயற்படும் செங்குத்து விசைகளாவன :

(i) அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை.

(ii) சமதளப்பரப்பின் அழுத்தமையம் வழியாக அதன்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கத்தின் செங்குத்து ஆக்கக்கூறு.

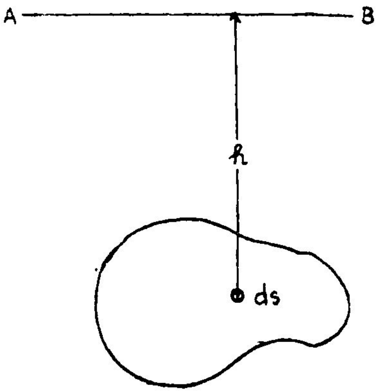
இவ் விரு விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால் பரப்பின்மீது நிற்கும் திரவத்தம்பத்தின் புவியீர்ப்புமையமும், சமதளப்பரப்பின் அழுத்த மையமும் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் அமைய வேண்டும். மேலும், பரப்பின்மீது நிற்கும் திரவத்தம்பத்தின் புவியீர்ப்புமையம் திரவப்பரப்பிலிருந்து பரப்பின் புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆழத்தில் இருக்கும் என்பது தெளிவு.

எனவே, திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் சமதளப்பரப்பு ஒன்றின் அழுத்தமையமானது அதன்மீது நிற்கும் செங்குத்துத் திரவத்தம்பத்தின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச்செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில் திரவமட்டத்திலிருந்து புவியீர்ப்புமையத்தைப்போல் இரு மடங்கு ஆழத்தில் அமையும்.

இனி, பல்வேறு வடிவங்களையுடைய சமதளப்பரப்புகளின் அழுத்த மையத்தைக் காண்பது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

பொது வகை :

திரவம் ஒன்றினுள் செங்குத்தாக அமிழ்ந்திருக்கும் S அலகு பரப்பளவுள்ள ஒரு சமதளப்பரப்பைக் கருதுவோம். [17·6]



படம் 17·6

பரப்பில் AB என்பது பரப்பின்தளம் திரவப்பரப்பைச் சந்திக்கும் கோடாகும். அப்பரப்பைச் சிறு பரப்புகளாகப் பிரித்து, திரவ மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில் இருக்கும் ds அலகு பரப்பளவைக் கொண்ட அத்தகைய ஒரு சிறு பரப்பை எடுத்துக் கொள்வோம், திரவத்தின் அடர்த்தி P எனில் அச் சிறு பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கம் $dF = hpgds$; இந்த அமுக்கத்தின் AB-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன் $dF.h = hpgds.h$ s அலகு பரப்பளவில் அடங்கிய அத்தகைய சிறு பரப்பளவுகள் எல்லாவற்றின்மீதும் செயற்படும் அமுக்கங்களின் AB-ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை; $\int dF.h = \int h^2 p g\, ds.$

சமதளப்பரப்பின் அழுத்தமையம் AB-யிலிருந்து H ஆழத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின் சமதளப்பரப்பின் மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கத்தின் AB-ஐப்பற்றிய திருப்புத்திறன்

$$H \int dF = H \int h p g\, ds.$$

எனவே,

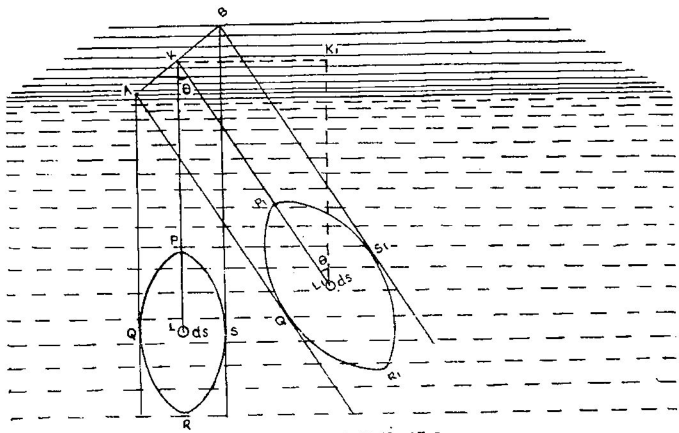
$$H \int h p g\, ds = \int h^2 p g\, ds.$$

அல்லது

$$H = \frac{\int h^2 ds.}{\int h\, ds.} \quad \ldots$$

பரப்பை அதன் தளம் திரவப்பரப்பைச் சந்திக்கும் கோட்டை (படம் 17·6-ல் AB ஐப்) பற்றிச் சுழற்றுவதால் அதன் அழுத்த மையத்தின் நிலை மாறுவதில்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. இதனைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து எளிதில் விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

திரவம் ஒன்றினுள் செங்குத்தாக அமிழ்ந்திருக்கும் P Q R S என்ற பரப்பையும் அதில் L என்ற புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள ds என்ற



படம் 17.7

சிறுபரப்பு ஒன்றையும் கருதுவோம். [படம் 17. 7] P Q R S என்ற பரப்பை அதன்தளம் திரவப் பரப்பைச் சந்திக்கும் A B என்ற கோட்டைப் பற்றி θ கோண அளவிற்குச் சுழற்றுவதாகக் கொள்வோம் இப்பொழுது P Q R S, L ஆகியவற்றின் புதிய நிலைகளை முறையே $P_1 Q_1 R_1 S_1$, L ஆகியவை குறிக்கட்டும். $\widehat{LKL_1} = \theta$ ஆகும்.

இனி, சமதளப்பரப்பின் PQRS நிலையில் ds-ன் ஆழம் KL; $P_1Q_1R_1S_1$ நிலையில் அதன் ஆழம் $K_1 L_1$.

ஆனால் $K_1 L_1 = K L_1 \cos\theta$

$= K L \cos\theta$

$K L = h$ என்றால் $K_1 L_1 = h \cos\theta$

P Q R S என்ற நிலையில் சமதளப்பரப்பின் அழுத்தமையத்தின் ஆழம் H எனில்,

$$H = \frac{\int h . h \rho g \, ds}{\int h \rho g \, ds}$$

$$= \frac{\int h^2 \rho g \, ds}{\int h \rho g \, ds}$$

$P_1Q_1R_1S_1$ நிலையில் சமதளப்பரப்பின் அழுத்தமையத்தின் ஆழம் H_1 எனக் கொள்வோமாயின்

$$H_1 = \frac{\int h.\, h \cos\theta\, \rho g\, ds}{\int h \cos\theta\, \rho g\, ds}$$

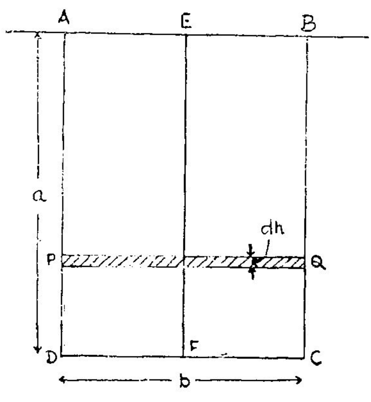
சமதளப்பரப்பை AB-ஐப் பற்றிச் சுழற்றும்போது எல்லாச் சிறு பரப்புகளும் அதே கோண அளவிற்குச் சுழற்றப்படுவதால்,

$$H_1 = \frac{\int h^2 Pg\, ds}{\int h\, Pg\, ds}$$

$= H$

$=$ PQRS நிலையில் அழுத்தமையத்தின் ஆழம்.

திரவமட்டத்தில் ஒருபக்கம் இருக்குமாறு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் செவ்வக வடிவப் பரப்பின் அழுத்தமையம்.



படம் 17·8

படம் 17·8-ல் AB திரவமட்டத்தையும், ABCD செவ்வக வடிவப் பரப்பையும் குறிக்கின்றன. திரவத்தின் அடர்த்தி P எனவும், செவ்வக வடிவப் பரப்பின் நீள அகலங்கள் முறையே a, b எனவும் கொள்வோம். படத்தில் AD $= a$, DC $= b$. செவ்வகத்தை AB-க்கு இணையாக சிறுசிறு பட்டைகளாகப் பிரித்து அத்தகைய PQ என்ற பட்டை ஒன்றைக் கருதுவோம். அதன் அகலம் dh எனவும் திரவப்பரப்பிலிருந்து அதன் ஆழம் h எனவும் கொள்வோம்.

PQ-ன் பரப்பளவு $= b.dh$

அதன்மீது செயற்படும் அமுக்கம் $= dF = hPg\ b.dh$

dF-ன் AB-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன் $= h^2Pgb.\ dh$

செவ்வகப் பரப்பில் அடங்கியுள்ள அத்தகைய சிறு பரப்புகளின்

திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை $= \int_o^a h^2 Pg\ b.dh$

அத்தகைய சிறு பரப்புகளின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்களின்

தொகுபயன் $= \int_o^a h\ Pg\ b.dh$

A-லிருந்து பரப்பின் அழுத்தமையத்தின் ஆழம் H என்ருல் தொகுபயன் அமுக்கத்தின் AB-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= H \int_o^a bPg\ hdh$$

எனவே, $H \int_o^a bPg\ hdh = \int_o^a bPg\ h^2\ dh$

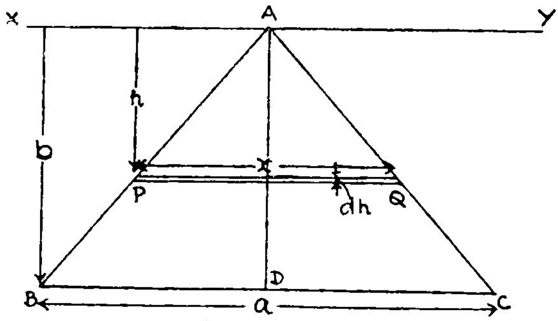
அல்லது $H\ \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{3}$

$\therefore \quad H = \dfrac{2}{3} a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 17{\cdot}6$

AB, DC ஆகிய பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் EF கோட்டைப் பொறுத்து செவ்வகப் பரப்பு சரிசீரமைவாக இருப்பதால் அதன் அழுத்தமையம் EF-ல் திரவமட்டத்திலிருந்து $\dfrac{2}{3} a$ ஆழத்தில் இருக்கும்.

திரவமட்டத்தில் ஓர் உச்சி இருக்குமாறும் அடிப்பக்கம் கிடைமட்டத்திலிருக்குமாறும் ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்த மையம் : படம் 17·9-ல் XY, திரவத்

தையும், ABC, முக்கோணப் பரப்பையும் குறிக்கின்றன. திரவத்தின் அடர்த்தி P எனவும் முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் 'a' எனவும் திரவமட்டத்திலிருந்து அதன் ஆழம் b எனவும் கொள்வோம்.



படம் 179

முக்கோணத்தை BC-க்கு இணையாக சிறுபட்டைகளாகப் பிரித்து அத்தகைய PQ என்ற ஒரு பட்டையைக் கருதுவோம். அதன் அகலம் dh எனவும் நீளம் x எனவும் XY-லிருந்து ஆழம் h எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad x = \frac{ah}{b}$$

PQ-ன் பரப்பளவு $= x dh = \frac{a}{b} h.\, dh$

அதன்மீது செயற்படும் அமுக்கம் $= dF = hPg \cdot \frac{a}{b} h dh$

$$= \frac{a}{b} Pg\, h^2\, dh$$

dF-ன் XY-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன் $= dF \cdot h$

$$= \frac{a}{b} Pg\, h^3\, dh$$

APQ, ABC ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலால் முக்கோணத்திலடங்கிய எல்லாப் பட்டைகளின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்களின் XY-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்

தொகை $$= \int_{0}^{b} \frac{a}{b} \, \mathrm{P}g \, h^{3} \, dh$$

எல்லாப் பட்டைகளின்மீதும் செயற்படும் அமுக்கங்களின்

தொகுபயன் $$= \int d\mathrm{F}$$

$$= \int_{0}^{b} \frac{a}{b} \, \mathrm{P}g \, h^{2} \, dh$$

XY-லிருந்து முக்கோணத்தின் அழுத்தமையத்தின் ஆழம் H எனில், இத் தொகுபயனின் XY-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= \mathrm{H} \int_{0}^{b} \frac{a}{b} \, \mathrm{P}g \, h^{2} \, dh$$

$$\therefore \quad \mathrm{H} \int_{0}^{b} \frac{a}{b} \, \mathrm{P}gh^{2} dh = \int_{0}^{b} \frac{a}{b} \, \mathrm{P}gh^{3} dh$$

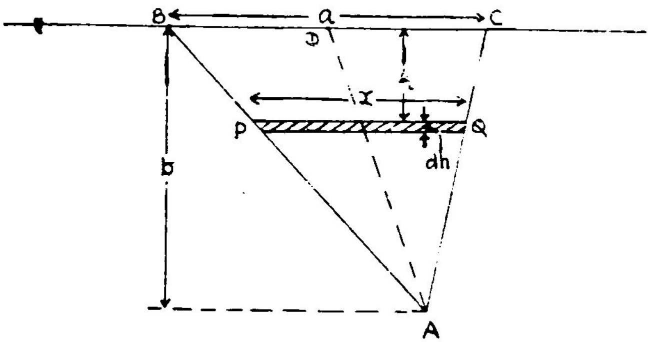
அல்லது $$\mathrm{H} \, . \, \frac{b^3}{3} = \frac{b^4}{4}$$

எனவே, $$\mathrm{H} = \frac{3}{4} b \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 17{\cdot}7$$

பட்டைகள் ஒவ்வொன்றின் மீதும் செயற்படும் அமுக்கம் அவற்றின் மையங்கள் வழியே செல்வதால் அந்த அமுக்கங்களின் தொகுபயன் படடைகளின் மையங்களை இணைக்கும் AD என்ற மையக் கோட்டின் மீது திரவப்பரப்பிலிருந்து $\frac{3}{4}$ b ஆழத்தில் இருக்கும்; அதாவது AD-ல் A-யிலிருந்து $\frac{3}{4}$ AD தொலைவில் இருக்கும்.

அடிப்பக்கம் திரவத்தின் பரப்பில் இருக்குமாறு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் முக்கோணப்பரப்பின் அழுத்த மையம் :

படம் 17. 10-ல் BC திரவப்பரப்பையும் ABC முக்கோணம் பரப்பையும் குறிக்கின்றன. திரவத்தின் அடர்த்தி ρ எனவும் முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் *a* எனவும் திரவமட்டத்திலிருந்து முக்கோண உச்சி (A) யின் ஆழம் *b* எனவும் கொள்வோம்.



படம் 17·10

முக்கோணத்தை BC-க்கு இணையாகச் சிறு பட்டைகளாகப் பிரித்து அத்தகைய PQ என்ற ஒரு பட்டையைக் கருதுவோம். அதன் அகலம் dh எனவும், நீளம் x எனவும், BC-லிருந்து ஆழம் h எனவும் இருக்கட்டும்.

APQ, ABC ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலால்

$$\frac{x}{a} = \frac{b-h}{b}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a\,(b-h)}{b}$$

PQ-ன் பரப்பளவு $x.dh = \frac{a}{b}\,(b-h)\,dh$

அதன்மீது செயற்படும் அமுக்கம் $= dF = \frac{a}{b}\,(b-h)\,dh.h\rho g.$

dF-ன் BC-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன் $= \frac{a}{b}\,(b-h)\,\rho g\,h^2dh$

முக்கோணத்தில் எல்லாப் பட்டைகளின் மீதும் செயற்படும் அமுக்கங்களின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகை.

$$= \int_0^b \frac{a}{b} (b\text{-}h)\, pg\, h^2 dh$$

எல்லாப்பட்டைகளின் மீதும் செயற்படும் அமுக்கங்களின்

தொகுபயன் $$= \int_0^b \frac{a}{b} (b\text{-}h)\, pg\, hdh$$

BC-யிலிருந்து முக்கோணத்தின் அழுத்த மையத்தின் ஆழம் H எனில், தொகுபயன் அமுக்கத்தின் BC-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= H \int_0^b \frac{a}{b} (b\text{-}h)\, pg\, hdh$$

∴ $$H \int_0^b \frac{a}{b} (b\text{-}h)\, pghdh = \int_0^b \frac{a}{b} (b\text{-}h)\, pg\, h^2 dh$$

அல்லது $$H \int_0^b (b\text{-}h)\, hdh = \int_0^b (b\text{-}h)\, h^2 dh$$

அதாவது $$H \left\{ \frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right\} = \left\{ \frac{b^4}{3} - \frac{b^4}{4} \right\}$$

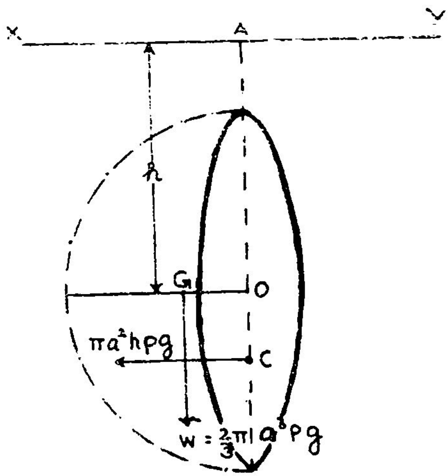
∴ $$H \frac{b^3}{6} = \frac{b^4}{12}$$

எனவே, $$H = \frac{b}{2} \qquad \dots \quad 17{\cdot}8$$

பட்டைகள் ஒவ்வொன்றின்மீதும் செயற்படும் அமுக்கம் அவற்றின் மையங்கள் வழியே செல்வதால் அந்த அமுக்கங்களின் தொகுபயன் பட்டைகளின் மையங்களை இணைக்கும் AD என்ற

மையக் கோட்டின்மீது திரவப்பரப்பிலிருந்து $\frac{b}{2}$ ஆழத்தில் இருக்கும்; அதாவது AD-ல் அதன் மையப்புள்ளியில் அமையும்.

மையம், திரவப்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திலிருக்குமாறு திரவத்தினுள் செங்குத்தாக அமிழ்ந்திருக்கும் a ஆரமுள்ள வட்டவடிவப் பரப்பின் அழுத்த மையம் :- படம் 17·11-ல் O, வட்டப்பரப்பின் மையத்தையும் XAY திரவப்பரப்பையும் குறிக்கின்றன; $Ao = h$



படம் 17·11

குறிப்பிட்ட வட்டப்பரப்பை அடித்தளமாகக் கொண்ட அரைக் கோள வடிவிலமைந்த திரவப்பகுதியைக் கருதுவோம். அதன் புவி யீர்ப்பு மையானது oவழியே வட்டப்பரப்பிற்கு நேர்குத்துத் திசையில் செல்லும் ஆரத்தில் o-லிருந்து $\frac{3}{8}a$ தொலைவில் அமையும்; அதாவது $oG = \frac{3}{8}a$. வட்டப்பரப்பின் அழுத்த மையம் C என இருக்கட்டும்.

அரைக்கோள வடிவத் திரவப் பகுதியின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) அதன் எடை, $\frac{2}{3}\pi a^3 \rho g$; இது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (G) வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுகிறது.

(ii) வட்டப்பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் $\pi a^2 hpg$; இது பரப்பிற்கு நேர்குத்தாக அதன் அழுத்த மையம் (c) வழியாகச் செயற்படுகிறது.

(iii) வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம்; இது அரைக்கோளத்தின் மையம் (o) வழியே செயற்படும்.

குறிப்பிட்ட திரவப்பகுதி சமநிலையிலிருப்பதால் அதன்மீது செயற்படும் விசைகளின் o-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்

எனவே, $\frac{2}{3}\pi a^3 pg \times OG - \pi a^2 hpg \times OC = 0$

அதாவது $\frac{2}{3}\pi a^3 pg, \times \frac{3}{8}a - \pi a^2 hpg \times OC = 0$

$$\therefore \qquad h \times OC = \frac{a^2}{4}$$

அல்லது
$$OC = \frac{a^2}{4h}$$

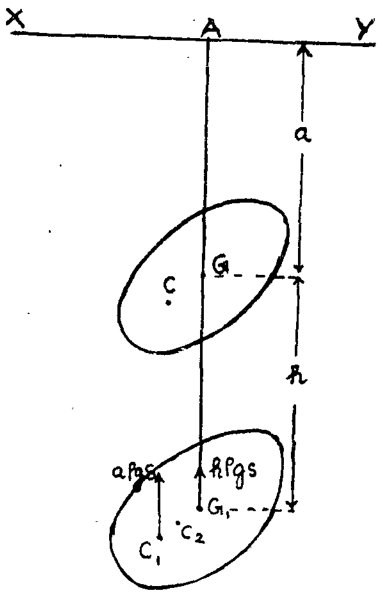
எனவே, மையம் திரவப்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திலிருக்குமாறு திரவத்தினுள் செங்குத்தாக அமைந்திருக்கும். a ஆரமுள்ள வட்ட வடிவப்பரப்பின் அழுத்தமையம் அதன்மையத்திலிருந்து $\frac{a^2}{4h}$ ஆழத்திலிருக்கும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட ஆழத்தில் அமிழ்ந்திருக்கும் ஒரு பரப்பு மேலும் அமிழ்த்தப்படும்போது அதன் அழுத்தமையத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்

திரவம் ஒன்றினுள் கிடைமட்டமாக அமிழ்ந்திருக்கும் பரப்பு ஒன்றில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் செயற்படும் அழுத்தம் ஒரே அளவாய் இருக்குமாதலால் அதன் அழுத்தமையம் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றும். எனவே, அப் பரப்பை அது சுழற்றப்படாமல் மேலும் அமிழ்த்தும்போது அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அழுத்தம் சீராக அதிகரிக்கும், எனவே, அதன்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் அதிகரிக்குமேயொழிய அழுத்தமையம் இன்னமும் புவியீர்ப்புமையத்துடன் ஒன்றும். அதாவது அதன் அழுத்த மையத்தில் எவ்வித மாறுபாடும் ஏற்படுவதில்லை.

பரப்பு செங்குத்தாகவோ அல்லது கிடைமட்டத்திற்குச் சாய்ந்த நிலையிலோ அமிழ்ந்திருப்பின் அது மேலும் அமிழ்த்தப்படும் போது அதன் அழுத்தமையத்தில் ஏற்படும் மாறுதலைப்பற்றி இப்பொழுது காண்போம்.

திரவமட்டத்திலிருந்து புவியீர்ப்புமையம் a ஆழத்திலிருக்குமாறு அமிழ்ந்திருக்கும் ஒருசமதளப் பரப்பைக் கருதுவோம். (படம் 17·12). படம் 17·12-ல் XAY திரவமட்டத்தையும், G, பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், C, அதன் அழுத்தமையத்தையும் குறிக்கின்றன; $AG = a$. XY-யிலிருந்து அழுத்தமையத்தின் ஆழம் H எனக்கொள்வோம். சமதளப்பரப்பின் பரப்பளவு S என்றால் அதன் அழுத்தமையத்தில் (C) செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் aPgs ஆகும். இந்நிலையில் பரப்பை மேலும் h ஆழத்திற்கு அமிழ்த்துவதாகக் கொள்வோம். இதன் பயனாய் பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளி



படம் 17·12

யிலும் அழுத்தமானது hPg அளவுக்கு அதிகமாகிறது. இந்த அழுத்த மிகுதிப்பாடு பரப்பு முழுவதும் சீரானதாக இருப்பதால் அதன் பயனாய் பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கத்தில் ஏற்படும் அதிகரிப்பான $hpgs$ இந் நிலையில் பரப்பின் புவியீர்ப்புமையமான G_1 வழியே செயற்படும். எனவே, மேலும் அழுத்தப்பட்ட நிலையில் பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்களாவன :

(i) C_1-ல் செயற்படும் aPgs

(ii) G_1-ல் செயற்படும் hPgs

இவையிரண்டும் இணைவிசைகளாதலால் இணைவிசைகளின் தொகுப்பு விதிப்படி அவற்றின் தொகுபயன் C_1 G_1 என்ற கோட்டில் உள்ள C_2 என்ற புள்ளியில் செயற்படவேண்டும். XY-லிருந்து C_2-ன் ஆழம் H_1 என்றால் XY-ஐப்பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் காணின்

$$H_1 (aPgs + hPgs) = (H+h) aPgs + (a+h) hPgs$$

அல்லது $$H_1 = \frac{(H+h)a + (a+h)h}{a+h}$$

அதாவது $$H_1 = \frac{aH + 2ah + h^2}{a+h}$$

மேலும் XY-லிருந்து C_1-ன் ஆழம் — C_2-ன் ஆழம்

$$= H+h - \frac{aH + 2ah + h^2}{a+h}$$

$$= \frac{h(H-a)}{a+h}$$

எனவே, கிடைத்தளத்திற்கு சாய்ந்த நிலையில் திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் பரப்பு ஒன்று மேலும் அமிழ்த்தப்படும்போது அதன் அழுத்தமையம் புவியீர்ப்புமையத்தை நோக்கி $h \cdot \frac{H-a}{h+a}$ தொலைவு நகருகிறது.

மேலும், புவியீர்ப்புமையம் பரப்பின் இரண்டாவது நிலையில் அழுத்தமையம் ஆகியவற்றின் ஆழ வேறுபாடு

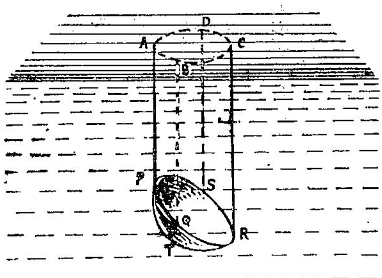
$$= \frac{aH + 2ah + a^2}{a+h} - a + h$$

$$= \frac{aH - a^2}{a+h}$$

அதாவது, குறிப்பிட்ட ஆழ வேறுபாடு $(a+h)$-க்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளது. எனவே, பரப்பு அமிழ்த்தப்படும் ஆழம் அதிகமாக அதிகமாக அழுத்தமையமானது புவியீர்ப்புமையத்தை மேலும் மேலும் நெருங்குகிறது; முடிவிலா ஆழத்தில் அழுத்தமையம் புவியீர்ப்புமையத்துடன் ஒன்றுகிறது.

ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்துள்ள வளைந்த பரபபு ஒன்றின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் : வளைந்த பரப்பு ஒன்றின் மிகச் சிறு பரப்புகளின்மீது செயற்படும் அமுக்கங்கள் வெவ்வேறு தளங் களிலும் திசைகளிலும் செயற்படுமாதலால் அவற்றின் தொகுபயனைக் காண்பது எளிதன்று. ஆனல் அவற்றின் செங்குத்து, கிடைத்தள ஆக்கக்கூறுகளைக் கண்டு அந்த ஆக்கக்கூறுகளின் தொகுபயன் களைக் காணமுடியும். அத் தொகுபயன்கள், தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் (Resultant vertical thrust) தொகுபயன் கிடைத்தள அமுக்கம் (Resultant horizontal thrust) எனப்படும்.

ஒரு நிலையான திரவத்தினுள் அமிழ்ந்துள்ள வளைந்த பரப்பின் மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் : திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் வளைந்த பரப்பின் PQRS என்ற பகுதியைக் கருது வோம். (படம் 17·13). அப் பரப்பின் எல்லையிலுள்ள ஒவ்வொரு



படம் - 17·13

புள்ளிவழியேயும் செல்லக்கூடிய செங்குத்துக் கோடுகள் திரவத்தின் மேற்பரப்பை ABCD என்ற ஒரு வளைகோட்டில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். ABCD என்ற தளம், PQRS என்ற வளைந்த பரப்பு ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள திரவப்பகுதியானது,

(i) அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே கீழ்நோக்கிச் செயற் படும் அதன் எடை

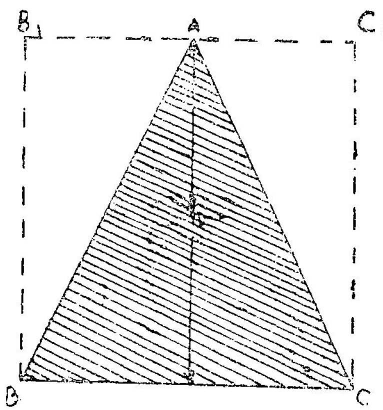
(ii) PQRST என்ற வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகு பயன் இறுக்கவிசையின் செங்குத்து ஆக்கக்கூறு

ஆகிய இருவிசைகளின் செயலால் சமநிலையில் இருக்கிறது. எனவே, வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் PQRST என்ற வளைந்த பரப்பிற்கும், திரவத்தின் மேற்பரப்பில் உள்ள ABCD என்ற பகுதிக்குமிடையேயுள்ள

APTRSQBCD என்ற திரவப்பகுதியின் எடைக்குச் சமமாகும். அதாவது ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்துள்ள வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அழுக்கம் அப் பரப்பின்மீது நிற்கும் செங்குத்துத் திரவத்தம்பத்தின் எடைக்குச் சமமாகும்; அது, திரவப்பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் வழியே செயற்படும்.

வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து ஆக்கக்கூறின் மதிப்பு அதன்மீது நிற்கக்கூடிய செங்குத்துத் திரவத்தம்பத்தின் எடைக்குச் சமம் என்றுதான் பொருள் கொள்ள வேண்டுமேயொழிய அதன்மீது அத் திரவம் உண்மையாகவே இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. இதனைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டால் எளிதில் உணர்ந்து கொள்ளலாம்.

படம் 17. 14-ல் உள்ளவாறு அமைந்த ABC என்ற கூம்பு வடிவ கலம் ஒன்றில் ஒரு திரவம் நிறைந்துள்ளதாகக் கருதுவோம். கூம்பின் உயரம் h எனவும், அடித்தளத்தின் பரப்பளவு Q எனவும், திரவத்தின்



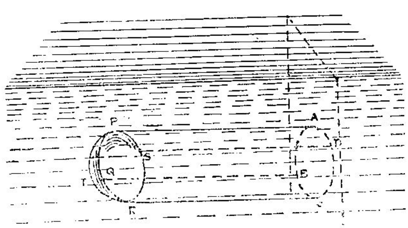
படம் 17.14

அடர்த்தி P எனவும் கொள்வோம். கூம்பு வடிவக்கலத்தின் அடித் தளத்தில் அழுத்தம் $h P g$ ஆகும். எனவே, அடித்தளத்தில் செயற் படும் அழுக்கம் $a h P g$ ஆகும். ஆனால், அதன்மீது நிற்கும் திர வத்தின் எடையோ $\frac{1}{3}ahPg$ ஆகும்; அதாவது உண்மையில் கலத் தின் அடித்தளத்தில் செயற்படும் அழுக்கத்தில் மூன்றிலொரு பகுதி யாகும். அவ்வாறாயின் எஞ்சியுள்ள $\frac{2}{3}\, a h P g$ அளவு அழுக்கம். எங்கிருந்து கிடைக்கிறது?

இப்பொழுது, கலத்தின் வளைந்த பரப்பின்மீது திரவம் மேல் நோக்கிச் செயற்படுத்தக்கூடிய அமுக்கத்தின் செங்குத்து ஆக்கக் கூறைக் கருதுவோம். அது, அப் பரப்பின்மீது கூம்பின் உயரத்திற்குச் சமமான உயரம்வரை நிற்கக்கூடிய திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகும். கலத்தின் வளைந்த பரப்பின்மீது நிற்கக்கூடிய திரவத்தின் பருமன் $B\,C\,C_1\,B_1$ என்ற உருளையின் பருமன் $(a\,h)$ கூம்பு வடிவக் கலத்தின் பருமன் $(\frac{1}{3}\,a\,h)$ ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறு பாட்டிற்குச் $(a\,h-\frac{1}{3}\,ah=\frac{2}{3}\,a\,h)$ சமமாகும். எனவே, கலத்தின் வளைந்த பரப்பின்மீது நிற்கக்கூடிய திரவத்தின் எடை $\frac{2}{3}\,a\,h\,P\,g$ ஆகும். அதாவது கலத்தின் வளைந்த பரப்பின்மீது அதனுள் இருக்கும் திரவம் மேல் நோக்கிச் செயற்படுத்தக்கூடிய அமுக்கத்தின் செங்குத்து ஆக்கக்கூறு $\frac{2}{3}\,a\,h\,P\,g$ ஆகும். இதன் பயனாய் கலத்தின் வளைந்த பரப்பு திரவத்தின்மீது அதற்குச் சமமான எதிர் விசை ஒன்றைச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுத்தும். எனவே, கலத்தின் அடித்தளத்தில் செயற்படக்கூடிய செங்குத்து விசை $\frac{1}{3}\,a\,h\,P\,g+\frac{2}{3}\,a\,h\,P\,g=a\,h\,P\,g$ ஆகும். அதாவது அந்த அடித்தளத்தின்மீது நிற்கக்கூடிய செங்குத்துத் திரவத் தம்பத்தின் எடைக்குச் சமமாகும்.

ஒரு நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்துள்ள வளைந்த பரப்பின் மீது செயற்படும் தொகுபயன் கிடைத்தள அமுக்கம் :

திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் வளைந்த பரப்பின் $P\,Q\,R\,S$ என்ற



படம் 17.15

எல்லையைக் கருதுவோம். (படம் 17. 15). $P\,Q\,R\,S$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் குறிப்பிட்ட திசையில் வரையப்படும் கிடைக்கோடுகள் அத்திசைக்கு நேர்குத்தாகத் திரவத்தினுள் உள்ள செங்குத்துத் தளம் ஒன்றை $A\,B\,C\,D$ என்ற வளைகோட்டில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். $A\,B\,C\,D$ என்பது குறிப்பிட்ட செங்குத்துத்

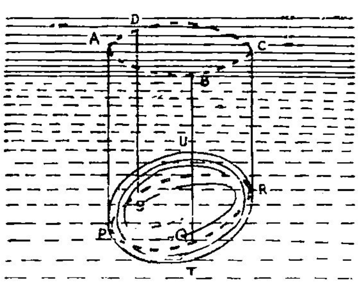
தளத்தில் PQRST என்ற வளைந்த பரப்பின் வீழ்ச்சியாகும். இப்பொழுது PTRSQBCDA என்ற திரவப்பகுதியின் கிடைத்தள சமநிலையைக் கருதுவோம். அத் திரவப்பகுதியின்மீது செயற்படும் கிடைத்தள விசைகளாவன :

(i) PQRST என்ற வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கத்தின் PA திசையில் ஆக்கக்கூறு;

(ii) ABCD என்ற சமதளப்பரப்பின்மீது செயற்படும் அமுக்கம். இது அப் பரப்பின் புவியீர்ப்புமையத்தில் அழுத்தம், அதன் பரப்பளவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாயமைந்து பரப்பின் அழுத்தமையம் வழியே செயற்படும்.

இவ் விரண்டு விசைகளின் செயலால் குறிப்பிட்ட திரவப்பகுதி சமநிலையிலிருப்பதால் அவையிரண்டும் சமமாகவும் ஒரே நேர் கோட்டில் எதிர்த்திசைகளிலும் செயற்பட வேண்டும்.

எனவே, நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் வளைந்த பரப்பின்மீது ஒரு குறிப்பிட்ட கிடைத்தள திசையில் செயற்படும் தொகுபயன் கிடைத்தள அமுக்கமானது அக் குறிப்பிட்ட திசைக்கு நேர்குத்தாயமைந்த ஒரு செங்குத்துத்தளத்தில் வளைந்த பரப்பின் வீழ்ச்சியின்மீது அதன் புவியீர்ப்புமையத்தில் செயற்படும் அழுத்தம், அதன் பரப்பளவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும்; அது வீழ்ச்சியின் அழுத்த மையத்தின் வழியாகத் திரவப் பகுதியிலிருந்து வளைந்த பரப்பினை நோக்கிய திசையில் செயற்படும்.



படம் 17.16

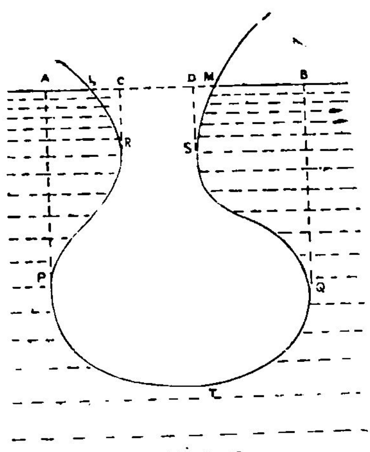
நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் ஒரு பொருளின் மீதுசெயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் : ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவம் : நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் PTRU என்ற பொருளைக் கருதுவோம். (படம் 17. 16).

திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து வரையப்பட்ட ஒரு செங்குத்துக் கோடு பொருளை P Q R S என்ற கோட்டின்மீது தொட்டுக்கொண்டு செல்வதாகக் கொள்வோம். திரவத்தின் மேற்பரப்பில் அக் கோடு A B C D என்ற பாதை வழியே செல்லும்.

இனி, பொருளின் P Q R S T என்ற வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் அப் பரப்பின்மீது நிற்கும் P T R Q S D A B C என்ற திரவப்பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செயற்படும் அதன் எடைக்குச் சமமாகும். இது மேல்நோக்கிச் செயற்படும்.

அடுத்து P Q R S U என்ற வளைந்த பரப்பின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கமானது அப் பரப்பின்மீது நிற்கும் P U R Q S D A B C என்ற திரவப்பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகச் செற்படும் அதன் எடைக்குச் சமமாகும். இது கீழ்நோக்கிச் செயற்படும்.

பொருளின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் மேற்கூறப்பட்ட இரு பரப்புகளின்மீது செயற்படும் செங்குத்து அமுக்கங்களின் தொகுபயனுக்கு அதாவது P T R U என்ற இடத்தை நிரப்பக்கூடிய திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகும்; இது மேல்நோக்கிச் செயற்படும். ஆனால் P T R U என்ற திரவப்பகுதியின் பருமன் பொருளின் பருமனாகும். அதாவது, பொருளால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் பருமனாகும்.



படம்-17·17

எனவே, நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் தடையின்றி அமிழ்ந்திருக்கும் பொருளின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து

அழுக்கம் அப்பொருளால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகும்; அது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே மேல் நோக்கிச் செயற்படும். இதுவே ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவம் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

மேற்கூறப்பட்ட உண்மை பொருளின் ஒரு பகுதியளவே திரவத்தில் அமிழ்ந்திருக்கும்போதும் பொருந்தும். படம் 17·17-ல் உள்ளவாறு ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அப் பொருளின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம் = APTQP என்ற பரப்பின்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் + DSM, CLR என்ற பரப்புகளின்மீது மேல்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் - PRCA, SQBD ஆகிய பரப்புகளின் மீது கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் தொகுயன் செங்குத்து அமுக்கம்.

அல்லது = APTQB என்ற பரப்பின்மீது நிற்கும் திரவத்தின் எடை

+ DSM, CLR என்ற பரப்புகளின்மீது நிற்கும் திரவத்தின் எடை

− PRCA, SQBD என்ற பரப்புகளின்மீது நிற்கும் திரவத்தின் எடை

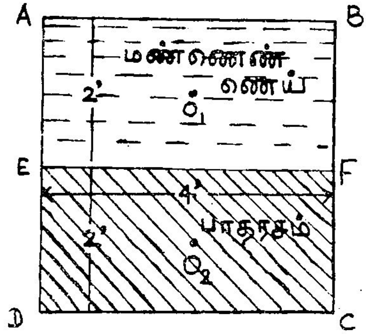
அதாவது = LRPTQ எற்ற திரவப்பகுதியின் எடை

அதாவது = பொருளால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவப்பகுதியின் எடை.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்பொருளின் மிதவைத்திறன் மையம் (ceutre of buoyancy) பொருளின் மீது செயற்படும் தொகுபயன் செங்குத்து அமுக்கம் மிதவைத் திறன் விசை (force of buoyancy) எனவும் அழைக்கப்படும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1: 4 அடி பக்கமுடைய கன சதுரபாத்திரம் ஒன்று பாதியளவு பாசரசத்தாலும்பாதியளவு மண்ணெண்ணெயாலும் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. பாதரசத்தின் ஒப்படர்த்தி 13·6, மண்ணெண்ணெயின் ஒப்படர்த்தி 0·8 என்றால் அப் பாதரசத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பக்கத்தில் செயற்படும் அமுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

படம் 17·18-ல் ABCD, பாத்திரத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பரப்பைக் குறிக்கின்றது. ABFE-ல் அமுக்கம்=ABFE-ன் புவியீர்ப்பு



படம் 17·18

மையத்தில் (O_1) அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$= 1 \times 0{\cdot}8 \times 4 \times 2$

$= 6{\cdot}4$ பவு. எடை

EFCD-ல் அமுக்கம் = EFCD-ன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் (O_2) அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$= (2 \times 0{\cdot}8 + 1 \times 13{\cdot}6)\, 4 \times 2$

$= 15{\cdot}2 \times 8$

$= 121{\cdot}6$ பவு. எடை.

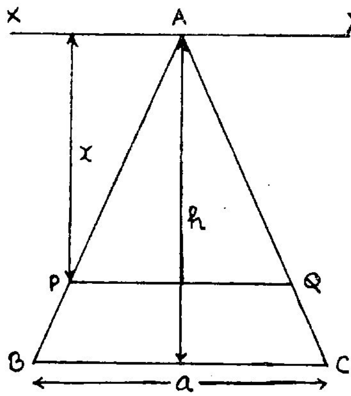
எனவே. ABCD பக்கத்தில் செயற்படும் மொத்த அமுக்கம்

$= 128$ பவு. எடை

மாதிரிக் கணக்கு 2. இரு சமபக்க முக்கோண பரப்பு ஒன்று அதன் அடிப்பக்கம் கிடைத்தளமாகவும் உச்சி திரவப்பரப்பிலும் இருக்குமாறு திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கிறது. தொகு பயன் அமுக்க விசை சமமாக இருக்குமாறு கிடைத்தளக் கோடு ஒன்றின் மூலம் அப் பரப்பை இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கவும்.

படம் 17·19-ல் XAY திரவப்பரப்பையும், ABC இரு சமபக்க க்கோணத்தையும் குறிக்கின்றன. PQ என்பது குறிப்பிடப்பட்ட

கிடைத்தளக்கோடு எனக் கொள்வோம். A-யிலிருந்து அதன்



படம் 17.19

ஆழம் x எனவும் முக்கோணத்தின் அடிப் பக்கம் (BC =) a எனவும் அதன் ஆழம் h எனவும் கொள்வோம்.

$$\frac{PQ}{a} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore \qquad PQ = a.\frac{x}{h}$$

APQ பகுதியின் மீது அமுக்கம் = அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$$= \tfrac{2}{3}\, x\rho g \times \tfrac{1}{2}.\, PQ.\, x$$

$$= \tfrac{2}{3}\, x\rho g \times \tfrac{1}{2}\, a\, \frac{x}{h}.x$$

$$= \tfrac{1}{3}\, \frac{x^3 a\rho g}{h}$$

முழுமுக்கோணத்தின் மீது அமுக்கம் = அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$$= \tfrac{2}{3}\, h\rho g \times \tfrac{1}{2}\, ah$$

$$= \frac{ah^2\rho g}{3}$$

முழுமுக்கோணத்தின் மீது அமுக்கம் = APQ பகுதியின் மீது அமுக்கத்தைப்போல் இரு மடங்கு

எனவே,
$$\frac{ah^2\rho g}{3} = \frac{2x^2 a\rho g}{3h}$$

அல்லது
$$x^3 = \frac{h^3}{2}$$

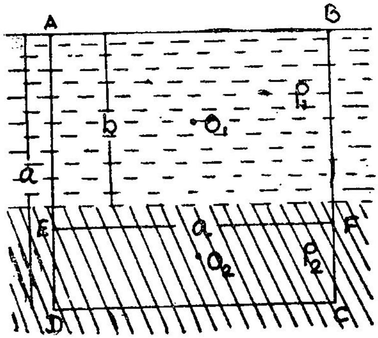
$$x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$$

எனவே முக்கோணப்பரப்பை A-லிருந்து $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ ஆழத்தில் BC-க்கு இணையாக வரைப்படும் கோடு அமுக்கம் சமமாக இருக்குமாறு இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. a அலகு பக்கமுடைய சதுரவடிவ மென்தகடு ஒன்று P_2 அலகு அடர்த்தியுள்ள திரவத்தின்மீது நிற்கும் P_1 அலகு அடர்த்தியுள்ள திரவத்தின் மேற்பரப்பில் அதன் ஒரு பக்கம் இருக்குமாறு செங்குத்தாக அமிழ்ந்திருக்கிறது. மேலேயுள்ள திரவத்தின் ஆழம் b எனில் மென்தகட்டின்மீது அமுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. மென்தகட்டின் இருதிரவங்களுடன் தொடர்பு கொண்டிருக்கும் பகுதிகளில் அமுக்கங்கள் சமமாக இருப்பின்

$$P_1 b\,(3b-2a) = P_2\,(a-b)^2$$

என நிறுவுக



படம் 17·20

படம் 17·20-ல் ABCD மென்தகட்டையும் EF, திரவங்களின் பொதுப் பரப்பையும் குறிக்கின்றன.

ABFE-ன் மீது அழுக்கம்

= அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் (O_1)
அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$$= \frac{b}{2} p_1 g \times ab$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ab p_1 g$$

EFCD-ன் மீது அழுத்தம்

= அதன் புவியீர்ப்புமையத்தில் அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$$= [b\, P_1 g + \frac{a-b}{2} P_2 g\,]\, a\,(a-b)$$

∴ ABCD-ன் மீது செயற்படும் மொத்த அமுக்கம்

$$= \tfrac{1}{2}\, a\, b^2\, P_1 g + [b\, P_1 g + \frac{a-b}{2}\, P_2\, g\,]\, a\,(a-b)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ag\,[b^2\, P_1 + 2b\, P_1\,(a-b) + (a-b)^2\, P_2]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ag\,[bP_1(2a-b) + (a-b)^2\, P_2\,]$$ சார்பிலா அலகுகள்

இருபகுதிகளிலும் அமுக்கங்கள் சமமாக இருக்குமாயின்

$$\tfrac{1}{2}\, ab^2\, P_1 g = [b\, P_1\, g + \frac{a-d}{2}\, P_2\, g\,]\, a\,(a-b)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, g[2b\, P_1 + (a-b)P_2\, g]\ a\,(a-b)$$

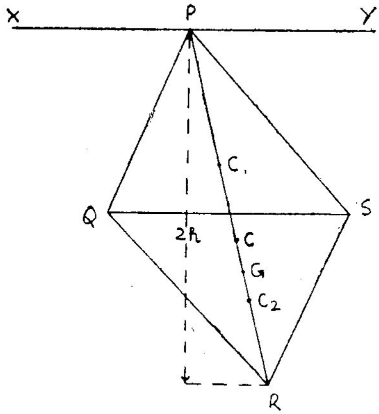
$$b^2\, P_1 = 2b\, P_1\,(a-b) + P_2\,(a-b)^2$$

அல்லது $P_1\, b\,[3b-2a] = P_2\,(a-b)^2$

மாதிரிக் கணக்கு 4. : PQRS என்ற இணைகர வடிவிலுள்ள சமதள மென்தகடு ஒன்று அதன் P முனை திரவமட்டத்தில் இருக்கு மாறும் QS என்ற மூலைவிட்டம் கிடைத்தளத்தில் அமையுமாறும் ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்ந்திருக்கிறது. அதன் அழுத்தமையம் PR என்ற மூலைவிட்டத்தை 7 : 5 விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

படம் 17·21-ல் XY, திரவப் பரப்பையும் PQRS, மென்தகட்டையும் குறிக்கின்றன. மென்தகட்டை PQS, QRS என்ற இரு

முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம். இருமுக்கோணங்களும் சம பரப்புள்ளவைகளாகவும் சம உயர முள்ளவைகளாகவும் இருக்கும்.



படம் 17·21

அவை ஒவ்வொன்றின் பரப்பளவு **A** எனவும், உயரம் h எனவும் கொள்வோம்.

P Q S-இன் மீது செயற்படும் அமுக்கம்

= அதன் புவியீர்ப்புமையத்தில் அழுத்தம் × அதன் பரப்பளவு

$$= \frac{2}{3}\ h\, Pg \times A$$

இது அதன் அழுத்தமையத்தில் அதாவது P R-ல் திரவப் பரப்பிலிருந்து $\frac{3}{4}$ h ஆழத்தில் C_1 என்ற புள்ளியில் செயற்படுகிறது.

QRS என்ற முக்கோணத்தை அதன் அடிப்பக்கம், Q S, திரவப் பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திற்கு அமிழ்த்தப் பட்டதாகக் கருதலாம். Q S திரவப் பரப்பிலிருக்கும் பொழுது அதன் மீது அதன் அழுத்தமையத் (C^2) தில் செயற்படும் அமுக்கம்.

$$= \tfrac{1}{3}\, h\, Pg \times A$$

திரவப் பரபிப்லிருந்து அதன் அழுத்தமையம் ஆழம் $\frac{h}{2}$ ஆகும்.

அம் முக்கோணம் h ஆழத்திற்கு அழுத்தப்படும்போது விளையும்

அமுக்க அதிகரிப்பான h Pg A அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் வழி யாகச் செயற்படும். முக்கோணத்தின் இந்நிலையில் C_2-ன் ஆழம் $= h + \frac{h}{2} = \frac{3h}{2}$ புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆழம் $h + \frac{1}{3} h = \frac{4}{3} h$

இப்பொழுது முழு மென்தகட்டின் அழுத்தமையம் C எனவும் அதன் ஆழம் H எனவும் இருப்பின் XY-ஐப் பற்றிய திருப்புதிறன் களைக் காணின்

$$H \left(\frac{2}{3} hpg\ A + \frac{1}{3} hpg\ A + hpg\ A\right) = \frac{2}{3} hpg\ A \times \frac{3}{4} h + \frac{1}{3} hpg\ A \times \frac{3}{2} h +$$

4

hpg i

அல்லது $$H \times 2 = \frac{7}{3} h$$

$$H = \frac{7}{6} h$$

அல்லது $$PC = \frac{7}{12} PR$$

எனவே, $$CR = \frac{5}{12} PR$$

$$\therefore \quad PC : CR = 7 : 5$$

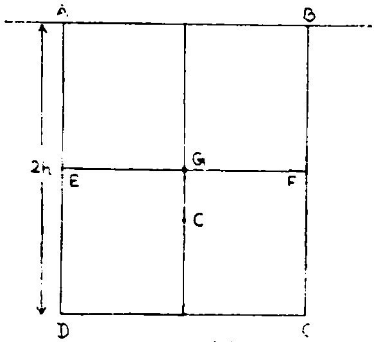
மாதிரிக் கணக்கு 5. செவ்வக வடிவ மென் தகடு ஒன்று அதன் ஒரு பக்கம் திரவப் பரப்பிலிருக்குமாறு திரவத்தினுள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்புமையத்திலிருந்து அழுத்தமையத்தின் ஆழம் $\frac{k^2}{h}$ எனக் காட்டுக. (R என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் ; h என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்.)

படம் 17·2 2-ல் ABCD செவ்வக வடிவ மென்தகட்டைக் குறிக்கிறது. G, அதன் புவியீர்ப்புமையத்தையும் E F, G வழியாகச் செல்லும் ஒரு கிடைக்கோட்டையும் C அதன் அழுத்த மையத்தையும் குறிக்கின்றன.

$$AB\text{-லிருந்து } C\text{-ன் ஆழம்} = \frac{2}{3} \times 2h$$

$$= \frac{4}{3} h$$

$$AB\text{-லிருந்து } G\text{-ன் ஆழம்} = h.$$



படம் 17.22

எனவே, புவியீர்ப்புமையத்திலிருந்து அழுத்தமையத்தின் ஆழம்

$$= \frac{4}{3} h - h = \frac{1}{3} h$$

மென்தகட்டின் நிறை M எனில் E F-ஐப் பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $I = \frac{Mh^2}{3}$

∴ E F-ஐப் பற்றிய சுழற்சி ஆரம் k எனில்

$$k^2 = \frac{h^2}{3}$$

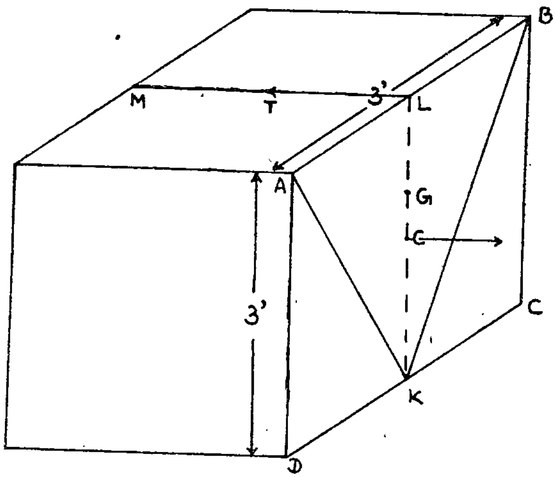
∴ புவியீர்ப்புமையத்திலிருந்து அழுத்தமையத்தின் ஆழம்

$$\frac{h}{3} = \frac{k^2}{h}$$

மாதிரிக் கணக்கு 6. 3 அடி பக்கமுடைய கனசதுர வடிவிலுள்ள ஒரு கலத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பக்கத்திலிருந்து ஒரு முக்கோண வடிவப் பகுதி ஒன்று வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத்தின் உச்சி சதுர வடிவப் பக்கத்தின் அடிப்பகுதியின் மையப்புள்ளியிலும், அதன் அடிப்பக்கம் சதுரவடிவப் பக்கத்தின் உச்சிப்பக்கமாகவும் அமைந்துள்ளன. முக்கோணத்தின் உச்சி

கீல்மூலம் பொருத்தப்பட்டு அதன் அடித்தளத்தின் மையமும், கலத்தின் எதிர்பக்கத்தின் உச்சி விளிம்பின் மையமும், ஒரு கயிறு மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கலம் இப்பொழுது நீரால் நிரப்பப்படின் கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக. (நீரின் அடர்த்தி 62·5 பவு/கன அடி)

படம் 17.23ல் ABCD, கலத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பக்கத்தையும் AKB முக்கோணத்தையும் L M கயிற்றையும் குறிக்கின்றன. இங்கு, கலம் நீரால் நிரப்பப்படும்பொழுது முக்கோணப் பரப்பு



படம் 17·23

அதன் அடிப்பக்கம் நீர்மட்டத்தில் இருக்குமாறு நீரில் அமிழ்த்தப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளலாம், G, C என்பன முறையே முக்கோணப்பரப்பின் புவியீர்ப்புமையத்தையும் அழுத்தமையத்தையும் குறிக்கின்றன. முக்கோணப்பரப்பின் கிடைத்தளச் சமநிலையைக் கருதுவோயின் அதன் மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) அதன் அழுத்தமையத்தின் (C) வழியே திரவம் செயற்படுத்தும் தொகுபயன் அமுக்கம்.

(ii) கயிற்றின் இழுவிசை (T)

C-ல் செயற்படும் தொகுபயன் அமுக்கம்

= புவியீர்ப்புமையத்தில் அழுத்தம் × முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{3} \times 3 \times 62{\cdot}5 \times g \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3$

$= \frac{9}{2} \times 62{\cdot}5\, g$ பவுண்டல்கள்.

AB-லிருந்து C-ன் ஆழம்

$= \frac{3}{2}$ அடி

K-ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களைக் காணின்

$$T \times 3 = \frac{9}{2} \times 62{\cdot}5\, g \times \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad T = \frac{9}{4} \times 62{\cdot}5 \times 32 \text{ பவுண்டல்கள்}$$

அதாவது கயிற்றின் இழுவிசை = 4500 பவுண்டல்கள்.

பயிற்சி XVII

1. ஒரு பாத்திரத்தில் 1·2 ஒப்படர்த்தியுடைய திரவத்தின் மீது 0·8 ஒப்படர்த்தியுள்ள திரவம் ஒன்று 4 அங்குல உயரத்திற்கு நிற்கிறது. இலேசான திரவத்தின் மேற்பரப்பில் ஒரு பக்கம் இருக்குமாறு ஒரு சதுரம் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கிறது. சதுரத்தின் இரு திரவங்களுடன் தொடர்பு கொண்டிருக்கும் பகுதிகளில் அமுக்கங்கள் சமமாக இருப்பின் சதுரத்தின் பக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

[5·5"]

2. 2P அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவம் 3P அடர்த்தியுள்ள மற்றொரு திரவத்தின்மீது 4 அங்.உயரத்திற்கு நிற்கிறது. 6 அங் பக்கமுள்ள சதுரம் அதன் ஒருபக்கம் இலேசான திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருக்குமாறு திரவங்களுள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. திரவங்களுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ள பகுதிகளில் செயற்படும் அமுக்கங்கள் 8·11 என்ற விகிதத்தில் இருக்கின்றன என நிறுவுக.

3. திரவப்பரப்பில் ஒருபக்கம் இருக்குமாறு செங்குத்தாக அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் செவ்வகப்பரப்பு ஒன்றின் அழுத்தமையம் வழியாக ஒரு கிடைக்கோடு வரைந்து இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்

படுகிறது, அவ் விருபகுதிகளிலும் அமுக்கங்கள் 4:5 என்ற விகிதத்தி லிருக்கின்றன என நிறுவுக.

4. கால்வாய் தளமாற்ற அடைப்பு (Lock gate) ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தில் a மீட்டர் ஆழத்திற்கும் மறுபக்கத்தில் b மீட்டர் ஆழத்திற்கும் நீர் உள்ளது. அடைப்பின் மீது செயற்படும் அமுக் கங்களின் தொகுபயன் அடைப்பின் அடியிலிருந்து $(a^2+ab+b^2)/3(a+b)$ உயரத்தில் செயற்படுகிறது என நிறுவுக.

5. கன அடிக்கு 150 பவு. எடையுள்ள கான்கிரீட்டினால் செய்யப்பட்ட அணையின் மாதிரிப் படிவம் ஒன்றின் குறுக்கு வெட்டுமுகம் செங்கோண முக்கோண வடிவிலுள்ளது. அதன் செங்குத்துப் பக்கத்தின் உயரம் 10 அடி. அப் பக்கத்தை எதிர்த்து 9 அடி உயரத்திற்கு நீர் நிற்கிறது. அணைச்சுவர் (a) சாயாமல் இருக்கவும் (b) நழுவிச் செல்லாமல் இருக்கவும் முக்கோணத்தின் அடித்தளத்தின் சிறும நீளத்தைக் கணக்கிடுக $(\mu = 0{\cdot}8)$

[3·9', 4·219']

6. நாற்கரம் ஒன்று அதன் இரு மூலைகள் திரவப்பரப்பில் அமிழ்ந்துள்ளது. திரவப் பரப்பிலிருந்து மற்றமூலைகளின் ஆழங்கள் a, b ஆகும். திரவப் பரப்பிலிருந்து நாற்கரத்தின் புவியீர்ப்புமையம், அழுத்தமையம் ஆகியவற்றின் ஆழங்கள் முறையே x y எனில்

$$bxy + ab = 3x(a + b)$$

எனக் காட்டுக

7. முக்கோணம் ஒன்று அதன் மூலைகள் திரவப் பரப்பிலிருந்து α, β, γ என்னும் ஆழங்களில் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தினுள் மூழ்கியிருக்கிறது. அதன் அழுத்த மையத்தின் ஆழத்தைக் கணக் கிடுக.

$$\left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{2(\alpha + \beta + \gamma)}\right]$$

18. ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவமும் மிதவை விதிகளும்

(Archimedes' Principle and laws of floatation)

நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் ஒரு பொருள் அமிழ்ந்திருக்கும் போது அதன்மீது அதனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்கு, அதாவது, அதே பருமனுள்ள திரவத்தின் எடைக்குச் சமமான அமுக்கம் ஒன்று மேல்நோக்கிச் செயற்படுகிறது என்று முன் பகுதியில் கூறப்பட்டது. இதுவே ஆக்கிமிடீஸ் தத்துவம் எனப்படும்.

பொருளொன்றைக் கயிற்றால் தொங்கவிடும்போது கயிற்றின் இழுவிசை பொருளின் எடைக்குச் சமமாக இருக்கும் என்பதை நாமறிவோம். இனி, ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒரு பொருள் திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசையில் விளையும் மாறுதலைப்பற்றி இப்பொழுது காண்போம்.

கயிறு ஒன்றால் தொங்கவிடப்பட்டு திரவம் ஒன்றினுள் அமிழ்ந்திருக்கும் ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

1. மேல் நோக்கிச் செயற்படும் கயிற்றின் இழுவிசை (T)
2. பொருளால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமான மேல் நோக்கு அமுக்கம் (R)
3. கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் பொருளின் எடை (W)

எனவே, பொருள் சமநிலையிலிருக்க

$$T + R = W$$

அல்லது கயிற்றின் இழுவிசை $T = W - R$

இது, பொருளானது ஒரு திரவத்தில் அமிழ்ந்திருக்கும்போது அதனுல் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமான அளவிற்குப் பொருளின் எடையில் ஒரு போலிக்குறைவு ஏற்படு கிறது என்பதைக் குறிக்கிறது. அதன் பயனுய் ஒருபொருளை ஒரு திரவத்தினுள் மூழ்கியிருக்குமாறு தொங்கவிட்டு அதன் எடையைக் காண்போமாயின் தராசு அதன் போலி எடையையே அதாவது அதன் உண்மையான எடைக்கும் அதனுல் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமமான எடை யையே காட்டுகிறது.

ஒரு பொருளைக் காற்றில் எடைகாணும்போது பொருளால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட காற்றின் எடையும் எடைக்கற்களால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட காற்றின் எடையும் சமமாக இருப்பதில்லை. எனவே, நாம் காணும் எடைகள் மிகவும் துல்லியமானவை என்று சொல்லமுடியாது. நுட்பமாகக் கருதுமிடத்து பொருட்களின் உண்மையான எடைகளைக் காண வேண்டுமாயின் அவற்றை வெற்றிடத்திலேயே எடை காணவேண்டும். இதனை நேர்முகமாகக் காண்பது என்பது எளிதன்று. ஆயினும், நாம் காற்றில் காணும் எடைமதிப்புக்கு ஒரு திருத்தம் செய்து பொருட்களின் எடைகளை இவ்வளவு துல்லியமாகக் கண்டறியலாம்.

பொருளின் உண்மையான எடை W எனவும் போலிஎடை W_0 எனவும் கொள்வோம். W_0 என்பது எடைக்கற்கள் குறிக்கும் எடையாகும். பொருளின் அடர்த்தி P எனவும், எடைக்கற்களின் மூலப்பொருளின் அடர்த்தி P_1 எனவும், காற்றின் அடர்த்தி σ எனவும் கொள்வோம். எடைக்கற்களின்மீது குறிக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்பு W_0 என்ற போதிலும் அவை வைக்கப்பட்டிருக்கும் தட்டின்மீது அவற்றின் போலி எடையே செயற்படும். எனவே, தராசு சமநிலையி லிருக்கும்போது பொருளின் போலி எடையும் எடைக்கற்களின் போலி எடையும் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $$W - \frac{W}{Pg}\sigma g = W_0 - \frac{W_0}{P^1 g}\cdot\sigma g$$

அல்லது $$W\left(1 - \frac{\sigma}{P}\right) = W_0\left(1 - \frac{\sigma}{P'}\right)$$

$$W = W_0 \frac{1 - \frac{\sigma}{P'}}{1 - \frac{\sigma}{P}}$$

$$= W_0 \left(1 - \frac{\sigma}{P'}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{P}\right)$$

$$= W_0 \left(1 - \frac{\sigma}{P'}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{P}\right)$$

σ-ன் மதிப்பு மிகவும் சிறியதாயிருக்குமாகையால் δ^2—ன் மதிப்பைப் புறக்கணித்து விடலாம். எனவே பொருளின் உண்மையான எடை

$$W \qquad = W_0 \left(1 - \frac{\sigma}{P'} + \frac{\sigma}{P}\right) \quad .. 18{\cdot}1$$

மிதவை விதிகள் : (Laws of floatation)

திரவம் ஒன்றினுள் முழுவதும் அமிழ்ந்திருக்கும் பொருளின் எடை அதே பருமனுள்ள திரவத்தின் எடையைவிடக் குறைவாக இருப்பின் அதன்மீது செயற்படும் மேல்நோக்கு அமுக்கம் அதன் எடையைவிட அதிகமாக இருக்கும். அதன் பயனாய் பொருள் திரவத்தில் மிதக்கும். ஆகவே ஒரு பொருள் ஒரு திரவத்தில் மிதக்க வேண்டுமாயின் அதன் எடை அதே பருமனுள்ள திரவத்தின் எடையைவிடக் குறைவாக இருக்கவேண்டும்; அதாவது பொருளின் அடர்த்தி திரவத்தின் அடர்த்தியைவிடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

திரவம் ஒன்றில் மிதக்கும் ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை.

(ii) பொருளின்மீது திரவம் செயற்படுத்தும் மேல்நோக்கு அமுக்கம்; இது பொருளால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாக அமைந்து பொருளின் மிதவைத்திறன்மையம் வழியாக மேல்நோக்கிச் செயற்படுகிறது.

எனவே, மிதக்கும் பொருள் சமநிலையிலிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம். அவை மிதவை விதிகள் எனப்படும்,

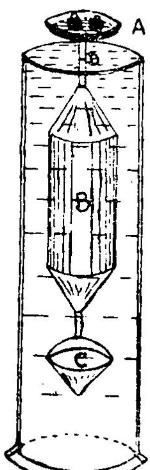
மிதவை விதிகளாவன :

(i) மிதக்கும் பொருளின் எடை அதனுல் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகவேண்டும்.

(ii) மிதக்கும் பொருளின் புவியீர்ப்புமையமும் பொருளின் மிதவைத்திறன்மையமும் ஒரே செங்குத்துக்கோட்டில் அமையவேண்டும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திரவங்களில் மிதக்கும் ஒருபொருள் சமநிலையிலிருக்க அதன் எடை அதனுல் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவங்களின் மொத்த எடைக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும். மேலும் பொருளின் புவியீர்ப்புமையமும், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவங்களின் புவியீர்ப்புமையமும் ஒரே செங்குத்துக்கோட்டில் அமையவேண்டும்.

ஆர்க்கிமிடீஸ் தத்துவத்தையும் மிதவை விதிகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு பொருட்களின் ஒப்படர்த்திகளைக் காண்பது பற்றிய சில முறைகளைப்பற்றிக் கீழ் வகுப்புக்களில் படித்திருப்பீர்கள். இங்கு, மிதவை விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட நிக்கல்சன் திரவமானி (Nicholson hydrometer) யைப்பற்றியும், சாதாரணத் திரவமானியில் எவ்வாறு அளவுக்கூறுகள் குறிக்கப்படுகின்றன என்பதைப பற்றியும் காண்போம்.



படம் 18·1

நிக்கல்சன் திரவமானி (Nicholson's hydrometer) : நிக்கல்சன் திரவமானியின் அமைப்பைப் படம் 18·1-ல் காணலாம். இதில் உள்ளீடற்ற உலோக உருளை (B) ஒன்றின் மேல்முனையில் ஒரு மெல்லிய தண்டின் மூலமாக ஒரு தட்டும் (A) கீழ்முனையில் எடைமிக்க சிறுவாளி (C) ஒன்றும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இது, ஒரு மாரு அமிழ்வுத் திரவமானியாகும். இதற்கெனத் தண்டில் D என்ற ஒரு குறியீடு உண்டு. திரவமானி எப்போதும் ஒரு குறியீடுவரை அமிழ்ந்திருக்குமாறு செய்ய வேண்டும். இனி, இதனைக் கொண்டு பொருட்களின் ஒப்பு அடர்த்திகளைக் காண்பது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

திடப்பொருளின் ஒப்பு அடர்த்தி: நீர் நிறைந்த ஜாடி ஒன்றினுள் திரவமானியை மிதக்கவிட்டு திரவமானியின் தண்டிலுள்ள குறியீடு வரை மூழ்கும் வண்ணம் அதன் தட்டில் எடையைச் சேர்க்க வேண்டும். திரவமானி செங்குத்தாகவும் சாடியின் பக்கங்களைத் தொடாதவாறும் மிதக்குமாறும் பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும். (திரவமானியின் தண்டுமட்டும் தங்குதடையின்றி செல்லக்கூடிய அளவு துளையையுடைய ஓர் அட்டையினால் சாடியை மூடுவது நல்லது. இதனால் திரவமானி நீரினுள் முழுவதும் மூழ்காவண்ணம் தடுக்கலாம்) தட்டில் சேர்க்கப்படும் எடையை w_1 எனக் கொள்வோம். பின்னர் ஒப்படர்த்தி காணப்படவேண்டிய பொருளின் சிறுதுண்டு ஒன்றைத் தட்டின்மீது வைத்து திரவமானி குறியீடுவரை அமிழுமாறு எடையைச் சரிசெய்யவேண்டும். இப்பொழுது உள்ள எடையை W_2 எனக் கொள்வோம். அடுத்து பொருளைத் திரவமானியின் வாளியில் வைத்துத் திரவமானி குறியீடுவரை அமிழுமாறு தட்டில் உள்ள எடையை மீண்டும் சரிசெய்யவேண்டும். இப்பொழுது உள்ள எடை W_3 என இருக்கட்டும். (திடப்பொருள் தக்கையைப் போன்று மிதக்கக் கூடியதாக இருப்பின் அதனை ஒரு மெல்லிய நூலினால் வாளியுடன் கட்டிவிட வேண்டும்)

இனி, காற்றில் பொருளின் எடை $= w_1 - w_2$

நீரில் பொருளின் எடை $= w_1 - w_3$

நீரில் பொருள் இழந்த எடை $= (w_1 - w_2) - (w_1 - w_3)$

$= (w_3 - w_2)$

எனவே திடப்பொருளின் ஒப்பு அடர்த்தி $= \dfrac{\text{காற்றில் எடை}}{\text{நீரில் இழந்த எடை}}$

$$= \frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} \quad \ldots \quad 18{\cdot}2$$

திரவத்தின் ஒப்படர்த்தி: முறை I: திரவமானியை முதலில் நீரில் மிதக்கக் விட்டு சிறு திடப்பொருள் துண்டு ஒன்றை முதலில் தட்டிலும் பின்னர் வாளியிலும் வைத்து ஒவ்வொருமுறையும் திரவமானி குறியீடுவரை அமிழ்வதற்கு அதன் தண்டில் சேர்க்க வேண்டிய எடைகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். அவை முறையே w_1, w_2 எனக் கொள்வோம். அடுத்து, திரவமானியைத் திரவத்தினுள் மிதக்கவிட்ட மேற்கூறப்பட்ட சோதனையைத் திருப்பிச் செய்து தட்டில் சேர்க்க வேண்டிய எடைகளைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். அவை முறையே w_3, w_4 எனக் கொள்வோம்.

இனி, நீரில் திடப்பொருளின் எடை இழப்பு $= w_2 - w_1$

திரவத்தில் திடப்பொருளின் எடை இழைப்பு $= w_4 - w_3$

எனவே திரவத்தின் ஒப்படர்த்தி

$$= \frac{\text{பொருள் திரவத்தில் இழந்த எடை}}{\text{பொருள் நீரில் இழந்த எடை}}$$

$$= \frac{w_4 - w_3}{w_2 - w_1} \quad \dots \quad \dots \quad 18{\cdot}3$$

முறை II : இம்முறை எளிதாயினும் இதில் திரவ மானியின் எடையை அறியவேண்டும். முதலில் திரவமானுயின் எடை (W) யைக் கண்டபின் அதனை முதலில் நீரிலும் பின்னர் திரவத்திலும் மிதக்க விட்டு அது குறியீடு வரை அமிழ்வதற்குத் தட்டில் சேர்க்கவேண்டிய எடைகளைக் காணவேண்டும். அவை முறையே w_1, w_2 என்ருல் குறையீடு வரை அமிழ்வதற்கு

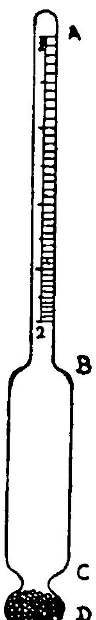
நீரில் திரவமானியின் எடை $= W + w_1$

திரவத்தில் திரவமானியின் எடை $= W + w_2$

எனவே, திரவத்தின் ஒப்படர்த்தி

$$= \frac{\text{திரவத்தில் திரவமானியின் எடை}}{\text{நீரில் திரமானியின் எடை}}$$

$$= \frac{W + w_2}{W + w_1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 18{\cdot}4$$



படம் 18·2

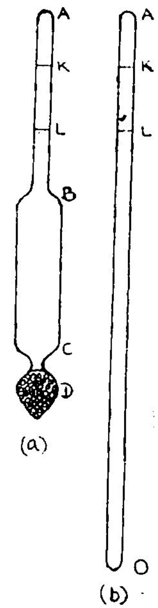
முதல் முறையில் திரவத்தின் ஒப்படர்த்தியைக் கண்டு இரண்டாம் முறையில் திரவமானியின் எடையைக் காணலாம்.

சாதாரண திரவமானி (Common hydrometer)

இது ஒருமாறு அமிழ்வு திரவமானியாகும், இதனைக் கொண்டு திரவங்களின் ஒப்பு அடர்த்திகளை நேரடியாக அறியலாம். அதன் அமைப்பைப் படம் 18·2-ல் காணலாம். BC என்பது சுமார் 1·5 செ. மீ. முதல் 2 செ. மீ. வரை குறுக்களவுள்ள ஒரு கண்ணுடிக்குழாய். அதன் கீழ் முனையில் D என்ற ஒரு கண்ணுடிக்குமிழும் மேல் முனையில் AB என்ற சுமார் 5 மி.மீ. குறுக்களவும் 10 செ. மீ. நீளமும் கொண்ட ஒரு கண்ணுடிக் குழாயும் பொருத்தப்பட்டுள்ளது (இது திரவ மானியின் தண்டு எனப்படும்.) திரவமானி திரவங்களில் செங்குத்தாக மிதக்கும் வகையில் கண்ணுடிக் குமிழ் ஈயக்குண்டுகளாலோ பாதரசத்தாலோ நிரப்பப்பட்டிருக்கும். தண்டில் ஒப்படர்த்தி அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் ஒப்படர்த்தி காணவேண்டிய திரவத்தில் திரவமானியை மிதக்க விட்டால் திரவமட்டத்திற்கு நேராக திரவமானியின் தண்டிலுள்ள

அளவீடு திரவத்தின் ஒப்படர்த்தியைக் கொடுக்கும். இப்பொழுது திரவமானியின் தண்டில் அளவுக் கூறுகள் எவ்வாறு குறிக்கப்படு கின்றன என்று காண்போம்.

முதலில் திரவமானியை நீரிலும் பின்னர் ஒரு திரவத்திலும் மிதக்க விடுவதாகக் கொள்வோம். நீரில், தண்டில் K என்ற புள்ளிவரையிலும், திரவத்தில் L என்ற புள்ளி வரையிலும் அமிழ்வதாகக் கொள்வோம். (படம் 18·3a). திரவமானியின் முழுப் பருமன் V எனவும் தண்டின் குறுக்குப் பரப்பளவு a எனவும் கொள்வோம்.



படம் 18·3

நீரில் மிதக்கும் பொழுது இடம்பெயர்க்கப் பட்ட நீரின் பருமன் V - a, AK.

∴ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் எடை

$$= (V - a.\ AK) \times 1$$

திரவத்தில் மிதக்கும் பொழுது இடம்பெயர்க் கப்பட்ட திரவத்தின் பருமன் : $V - a.AL$

திரவத்தின் அடர்த்தி P எனில் இடம்பெயர்க் கப்பட்ட திரவத்தின் எடை : $(V - a.\ AL)\ P$

திரவமானியின் எடை ஒரே அளவாயிருப்ப தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் எடை அதாவது $(V - a.\ AL)\ P = (V - a.\ AK) \times 1$

எனவே, திரவத்தின் ஒப்படர்த்தி $P = \dfrac{V - a.\ AK}{V - a.\ AL}$ 18 5

இப்பொழுது, திரவமானி அதன் தண்டின் குறுக்குப் பரப்பளவை (a) யும் அதன் முழுப்பருமனை (V) யும் கொண்ட OA என்ற ஒரு சீரான நீண்ட குழாய் வடிவிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே

$$V = a\ .\ AO \quad ... \quad ... \quad 18·6$$

எனவே, சமன் 18·5-ஐ

$$P = \frac{a\ .\ AO - a\ .\ AK}{a\ .\ AO - a\ .\ AL}$$

என எழுதலாம்.

அதாவது

$$P = \frac{a\,(AO - AK)}{a\,(AO - AL)}$$

$$P = \frac{KO}{LO}$$

அல்லது $$LO = \frac{KO}{P} \quad \ldots \quad \ldots \quad 18{\cdot}7$$

ஒரு குறிப்பிட்ட திரவமானி நீரில் எப்பொழுதும் ஒரே ஆழத்திற்கு அமிழுமாதலால் KO ஒரு மாறிலியாகும். எனவே

$$LO \propto \frac{1}{P}$$

அதாவது O-விருந்து L-ன் தொலைவு திரவத்தின் ஒப்படர்த்திக்கு எதிர்விகிதத்திலிருக்கிறது. எனவே ஒப்பு அடர்த்தி அதிகமாக அதிகமாக O-விருந்து L-ன் தொலைவு குறையும். ஆகவே தண்டில் ஒப்படர்த்தி அளவுகள் மேலிருந்து கீழ்நோக்கி அதிகமாகும். எனவே ஒப்படர்த்திகள் 1·025, 1·05, 1·075, 1·1 போன்று கூட்டுத்தொடர் (arithmetic progression) முறையில் இருப்பின் O-விருந்து L-ன் தொலைவுகள் இசைத்தொடர் முறையில் (harmonic progression) $\left[\text{அதாவது } \frac{KO}{1{\cdot}025}, \frac{KO}{1{\cdot}05}, \frac{KO}{1{\cdot}075}, \frac{KO}{1{\cdot}1} \right]$ அமையும். மாருக, ஒப்பு அடர்த்திகள் இசைத் தொடர் முறையில் அமையுமாயின் O விருந்து L ன் தொலைவுகள் கூட்டுத்தொடர் முறையில் அமையும்.

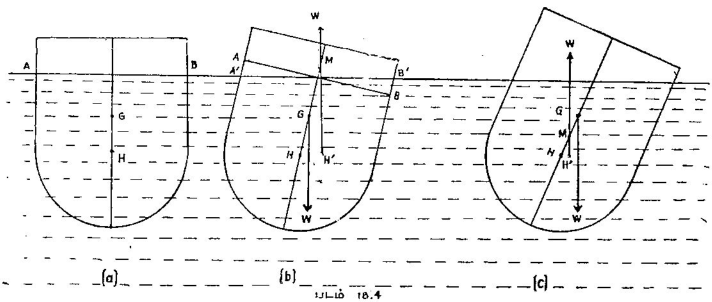
எனவே. இருவகை திரவமானிகள் உள்ளன. அவை 1. ட்வேடல் திரவமானி (Twaddell's hydrometer) 2. பியூமே திரவமானி (Beaume's hydrometer) எனப்படும். ட்வேடல் திரவமானியில் ஒப்படர்த்திகள் கூட்டுத் தொடர் முறையில் அதிகமாகின்றன. எனவே, O-விருந்து L-ன் தொலைவுகள் இசைத் தொடர் முறையில் அமைந்து கீழ் நோக்கிச் செல்லச் செல்ல அளவுக் கூறுகள் நெருக்கமாக அமைகின்றன.

பியுமே திரவமானியில் அளவுக் கூறுகள் சம தொலைவுகளில் அதாவது O-விருந்து L-ன் தொலைவுகள் கூட்டுத் தொடர் முறையில் அமைந்திருக்கும். எனவே. அளவுக் கூறுகள் குறிக்கும் ஒப்படர்த்திகள் இசைத் தொடர் முறையில் அமையும்.

மிதக்கும் பொருளின் சமநிலையின் நிலைத்ததன்மை : சமநிலையில் மிதக்கும் ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் தாங்கு தானத்திற்கு நேர்கீழே இருப்பின் அச்சமநிலை நிலையானதாகவும் புவியீர்ப்புமையம் தாங்குதானத்திற்கு நேர்மேலே இருப்பின் அச்சமநிலை நிலையற்றதாகவும் இருக்கும் என முன்னொரு பகுதியில் கூறப்பட்டது. மிதக்

கும் பொருள் ஒன்று சமநிலையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளை மிதவை விதிகள் கூறுகின்றன. அச்சமநிலை நிலையானதாக இருக்க வேண்டுமாயின் மற்றுமொரு நிபந்தனையும் உண்டு.; அதனைப்பற்றி இங்குக் காண்போம்.

ஒரு பொருள் திரவமொன்றில் தங்குதடையின்றி மிதக்கும் பொழுது அதன்மீது செயற்படும் மேல்நோக்கு அமுக்கம் பொருளின் மிதவைத்திறன் மையம் வழியாகச் செயற்படுகிறது என்று முன்னர் கூறப்பட்டது. இனி, திரவப்பரப்பானது மிதக்கும் பொருளை வெட்டு வதால் கிடைக்கும் வெட்டுமுகம் மிதவைத்தளம் (plane of floatation) எனப்படும். படம். 18 4-ல் AB மிதவைத் தளத்தைக் குறிக் கிறது. மிதக்கும் பொருள் அதனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்



படம் 18.4

தின் பருமன் ஒரே அளவாய் இருக்குமாறு நகருமாயின் மிதவைத் திறன் மையமானது மிதவைத்திறன் பரப்பு (surface of buoyancy) என்னும் பரப்பை வரைகிறது. மிதக்கும் பொருள் ஒன்றை அதனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் பருமன் ஒரே அளவாய் இருக்கு மாறு சற்று அசைத்து விடுவதாகக் கொள்வோம். அசைத்து விடப் பட்ட நிலையில் உள்ள அதன் மிதவைத்திறன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு அதன் பழைய மிதவைத்திறன்மையம், புவியீர்ப்புமையம் ஆகியவற்றின் வழியாகச் செல்லும் கோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளி மிதவைக்காப்புமையம் (meta centre) எனப்படும். மிதவைக் காப்புமையத்திற்கும் பொருளின் புவியீர்ப்புமையத்திற்கும் இடையே உள்ள தொலைவு மிதவைக்காப்புயரம் (meta centric height) எனப்படும். படம் 18·4-ல் பொருள் சமநிலையில் இருக்கும் போது (18·4a) G, அதன் புவியீர்ப்புமையத்தையும் H, அதன் மிதவைக்காப்புமையத்தையும் பொருளின் அசைத்துவிடப்பட்ட நிலையில் (18·4b) H_1 என்பது அதன் புதிய மிதவைத்திறன் மையத் தையம் குறிக்கின்றன. H_1 வழியே செல்லும் செங்குத்துக்கோடு H, G ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும்கோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளி M) மிதவைக்காப்புமையமாகும். GM மிதவைக்காப்புயரமாகும்.

பொருளின் புவியீர்ப்புமையத்தைப் பொறுத்து மிதவைக்காப்புமையத்தின் நிலைக்கேற்ப மிதக்கும் பொருளின் சமநிலை நிலையானதாகவோ நிலையற்றதாகவோ இருக்கும்.

இப்பொழுது படம் 18·4b-ல் உள்ளவாறு மிதவைக்காப்புமையம் புவியீர்ப்புமைத்திற்கு மேல் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்நிலையில் பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன:

(i) அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை (W);

(ii) அதன் மிதவைத்திறன் மையம் வழியாக மேல்நோக்கிச் செயற்படும் மிதவைத்திறன் விசை அதாவது மேல்நோக்கி அமுக்கம்; இது பொருளின் எடை (W)-க்குச் சமமானது.

இவ் விரு விசைகளும் சமமான எதிர்போக்கு இணைவிசைகளாதலால் ஓர் இரட்டையை அமைக்கின்றன. இந்த இரட்டை மிதக்கும் பொருளை அசைத்து விடப்பட்ட நிலையிலிருந்து சமநிலைக்கு மீட்க முயற்சிக்கிறது. எனவே, மிதக்கும் பொருளின் சமநிலை நிலையானதாகும். இங்கு, HM, HG-ஐ விட அதிகமானது.

அடுத்து, மிதவைக்காப்புமையம் புவியீர்ப்புமையத்திற்குக் கீழ் இருப்பதாகக் கொள்வோம். (படம் 18·4c) இந் நிலையில் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் எடையும் மிதவைத்திறன் மையம் வழியே மேல்நோக்கிச் செயற்படும் (பொருளின் எடைக்குச் சமமாய் அமைந்த) மேல்நோக்கு அமுக்கமும் அமைக்கும் இரட்டை மிதக்கும் பொருளை அதன் சமநிலையிலிருந்து மேன் மேலும் விலக்க முயற்சிக்கிறது. எனவே, பொருளின் சமநிலை நிலையற்றதாகும். இங்கு HM, HG-ஐ விடக் குறைந்தது. ஆகையால் மிதக்கும் பொருளின் மிதவைக்காப்புமையம் புவியீர்ப்புமையத்திற்கு மேலோ கீழோ இருப்பதற்கேற்ப அதன்சமநிலை நிலையானதாகவோ நிலையற்றதாகவோ இருக்கும்.

மிதக்கும் பொருள் ஒன்றைச் சற்று அசைத்துவிடும்பொழுது அதன் பழைய மிதவைத்தளமும் (AB) புதிய மிதவைத்தளமும் ($A^1 B^1$) (படம் 18·4) சந்திக்கும் கோடு பொருளின் சுழற்சி அச்சு (axis of rotation) எனப்படும். இந்த அச்சைப்பற்றிய மிதவைத் தளத்தின் நிலைமத்திருப்புதிறன் AK^2 (தளத்தின் பரப்பளவு A அச்சைப்பற்றிய களத்தின் சுழற்சி ஆரம் K), பொருளால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் பருமன் V என்றால்

$$HM = \frac{AK^2}{V} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 188.$$

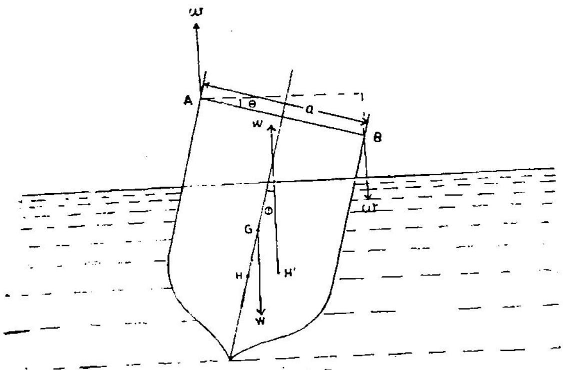
என நிறுவலாம். பொருளின் சமநிலை நிலையானதாக அமைய HM, HG-ஐ விட அதிகமாக இருக்கவேண்டும். எனவே $\frac{AK^2}{v}$, HG-ஐ விட அதிகமாக இருக்கவேண்டும்.

கோளக வடிவ அடித்தளத்தையுடைய மிதக்கும் பொருளின் மிதவைக்காப்புமையம் : மிதக்கும் பொருளின் திரவத்தினுள் இருக்கும் பகுதி கோளகவடிவில் அமையுமாயின் கோளகப் பரப்பின் ஒவ்வொரு சிறுபகுதியிலும் செயற்படும் அழுக்கங்கள் கோளகப் பரப்பிற்கு நேர்குத்தாகச் செயற்படுமாதலால் அவையாவும் வளைவு மையம் (C) வழியே செல்லும். எனவே, அவற்றின் தொகுபயனும் அதாவது பொருளின்மீது செயற்படும் தொகுபயன் அழுக்கமும் வளைவு மையத்தின் வழியே செல்லவேண்டும். ஆனால் இந்தத் தொகுபயன் அழுக்கம் பொருளின் எந்நிலையிலும் மிதவைத்திறன் மையம் (H) வழியாகச் செயற்படுகிறது. எனினும் பொருள் சமநிலையில் இருக்கும் பொழுது இத் தொகுபயன் அழுக்கம் பொருளின் புவியிர்ப்புமையம் வழியாகவும் செயற்படுகிறது. எனவே, C,G,H ஆகிய மூன்றும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும். பொருளின் அசைத்து விடப்பட்ட நிலையிலும் தொகுபயன் அழுக்கம் C வழியே செயற்படும். மேலும், அது புதிய மிதவைத்திறன் மையம் (H^1) வழியாகவும் செயற்படும், எனவே, H^1C புதிய மிதவைத் திறன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடாதலால் மிதவைக் காப்புமையத்தின் வரையறைப்படி C மிதவைக்காப்பு மையம் என்பது தெளிவாகும்.

சீரான கோளகப் பந்து ஒன்று ஒருதிரவத்தில் மிதக்கும் போது அதன் புவியீர்ப்புமையமும் (G) மிதவைக்காப்புமையமும் (M) ஒன்றுகின்றன. எனவே, அத்தகைய பந்தின் சமநிலை நடுவியல் சமநிலையாகும்.

ஒரு கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரத்தைக் காணல் : முதலில் இடப்பெயர்ச்சி முறையின்மூலம் கப்பலின் மொத்த எடை W கணக்கிடப்படுகிறது. பின்னர் உயரமான பாய்மரம் ஒன்றின் உச்சியிலிருந்து தூக்கு நூற்குண்டு ஒன்று தொங்கவிடப்படுகிறது. குண்டின் நிலையை ஓர் அளவுகோலிலிருந்து அறியலாம். இப்பொழுது, கப்பலின் எடையுடன் ஒப்பிடப் படக்கூடிய எடை (w) யைக் கொண்ட ஒரு பொருளை கப்பல் தளத்தின் குறுக்காக A-லிருந்து B-க்கு நகர்த்துவதால் அளவுகோலில் குண்டின் நிலையில் ஏற்படக்கூடிய மாறுதலைக் கணக்கிடுவதன்மூலம் பொருளை நகர்த்துவதன் பயனாய் கப்பல் சாயக்கூடிய கோணம் (θ) கணக்கிடப்படுகிறது. [படம் 18·5]. தூக்கு நூற்குண்டின் நீளம் l எனவும்

அளவுகோலில் குண்டின் நிலையில் ஏற்படும் மாறுதல் x எனவும் கொள்வோமாயின் $\theta = \frac{x}{l}$ ஆகும். கப்பலின் புவியீர்ப்புமையம்,



படம் 18·5

மிதவைக்காப்புமையம் முறையே G, M எனவும் AB = a எனவும் கொள்வோம். GM என்பது மிதவைக்காப்புயரமாகும். பொருளை A-லிருந்து B-க்கு நகர்த்துவது A-லிருந்து பொருளின் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசையை நீக்கி அதனை B-ல் செயற்படுத்துவதற்குச் சமமாகும் இது, கப்பலின் மீது ஓர் இரட்டையைச் செயற்படுத்துவதற்குச் சமமாகும். இந்த இரட்டையின் திருப்பு திறன் $w.\,a \cos\theta$. இது, கப்பலைச் சமநிலையிலிருந்து மேலும் விலக்க முயலுகிறது. ஆனால் கப்பலின் புதிய நிலையில் அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாகக் கீழ் நோக்கி செயற்படும் எடையும் மிதவைக்காப்புமையம் வழியாகச் செயற்படும் கப்பலின் எடைக்குச் சமமான மேல்நோக்கு அமுக்கமும் அமைக்கும் இரட்டையானது கப்பலைச் சமநிலைக்கு மீட்க முயற்சிக்கிறது. அதன் திருப்புதிறன் = $W\cdot GM \sin\theta$ புதிய நிலையில் கப்பல் சமநிலையில் இருப்பதால்

$$W\cdot GM \sin\theta = w\cdot a \cos\theta$$

$$\therefore \quad GM = \frac{w\cdot a}{W\cdot\theta}$$

θ, சிறியதாக இருப்பதால்

$$GM = \frac{wa}{W\ \mathrm{tad}\theta}$$

அல்லது $\theta = \frac{x}{l}$ ஆததால் $GM = \frac{w\cdot al}{wx\cdot}$ ... ... 18·9

நடைமுறையில் கப்பலின் மிதவைக்காப்புயரத்தைக் காணும் போது A-லிருந்து B-க்கு நகர்த்துவதால் ஏற்படும் விளைவை

வேறொரு முறையில் ஏற்படுத்துகிறார்கள். கப்பலின் பக்கத்திற்கொன்றாக (A,B-ல்) இரு முழுதொத்த படகுகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. முதலில் A-ஐ நீரால் நிரப்பி குண்டின் நிலையை அறிந்தபின் A காலி செய்யப்பட்டு B நீரால் நிரப்பப்படுகிறது. குண்டின் புதிய நிலையை அறிந்து கப்பல் சாயும் கோணம் கணக்கிடப்படுகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 1. சாதாரண திரவமானி ஒன்று முறையே 1·12, 1·25 ஒப்படர்த்தியுள்ள திரவங்களில் மிதக்கும்பொழுது திரவப்பரப்பின்மேல் தெரியும் அதன் நீளங்கள் 2 செ மீ, 5 செ மீ, ஆகும். திரவப்பரப்பிற்கு மேல் தண்டின் நீளம் 3 செ.மீ. தெரியுமாறு திரவமானி மிதக்கக் கூடிய திரவத்தின் ஒப்படர்த்தியைக் கணக்கிடுக.

படம் 18·6

படம் 18·6 OA, திரவமானியின் முழு நீளத்தையும் OB திரவமானி நீரில் அமிழும் ஆழத்தையும் OC, OD, OE என்பன திரவங்களில் அமிழும் ஆழங்களையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். படத்தில் AC = 2செ மீ; AD = 5 செ மீ; AE = 3 செ.மீ.

இனி, $$1{\cdot}12 = \frac{OB}{OC} = \frac{OB}{OA-2} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

$$1{\cdot}25 = \frac{OB}{OD} = \frac{OB}{OA-5} \quad \ldots\ldots \quad (ii)$$

மூன்றுவது திரவத்தின் ஒப்பு அடர்த்தி s எனில்,

$$s = \frac{OB}{OE} = \frac{OB}{OA-3} \quad \ldots\ldots \quad iii)$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii)-லிருந்து

$$\frac{1{\cdot}25}{1{\cdot}12} = \frac{OA-2}{OA-5}$$

அல்லது $$1{\cdot}25 \times OA - 6025 = 1{\cdot}12OA - 2{\cdot}24$$

அல்லது $$0{\cdot}13\ OA = 4{\cdot}01$$

$$OA = \frac{4{\cdot}01}{0{\cdot}13} = 30{\cdot}84 \text{ செ மீ} \approx 31 \text{ செ.மீ}$$

சமன் (ii), (iii) $$\frac{s}{1{\cdot}25} \quad \frac{OA-5}{OA-3} = \frac{31-5}{31-3} = \frac{26}{28}$$

எனவே, $$s = \frac{26}{28} \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}161$$

மூன்றுவது திரவத்தின் ஒப்பு அடர்த்தி = 1·161.

மாதிரிக் கணக்கு 2 சாதாரண திரவமானி ஒன்றின் எடை 22 அவுன்சு. அதில் 1 முதல் 1·2 வரை ஒப்படர்த்தி அளவு கூறுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. 1, 1·1, 1·2 அளவுக் கூறுகளுக்குக் கீழ் திரவமானியின் பருமன்களைக் கன அங்குலங்களில் கணக்கிடுக.

திரவமானி முறையே 1, 1·1, 1·2 ஒப்படர்த்தியுள்ள திரவக்களில் மிதப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது முறையே இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவங்களின் பருமன்கள் கேட்கப்பட்டிருக்கும் பருமன்களுக்குச் சமமாக இருக்கும்.

ஒப்படர்த்தி 1 உள்ள திரவத்தின் அடர்த்தி

$= 1 \times 62\cdot5$ பவு. / க.அடி

ஒப்படர்த்தி 1·1 உள்ள திரவத்தின் அடர்த்தி

$= 1\cdot1 \times 62\cdot5$ பவு / க.அடி

ஒப்படர்த்தி 1·2 உள்ள திரவத்தின் அடர்த்தி

$= 1\cdot2 \times 62\cdot5$ பவு. / க.அடி.

திரவமானியின் எடை $= 2$ அவுன்சு $= \frac{2}{16}$ பவு.

திரவமானியின் எடை ஒரே அளவாய் இருப்பதால்

திரவமானியின் எடை = இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவம் ஒவ்வொன்றின் எடை

∴ ஒப்பு அடர்த்தி 1 உள்ள இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் எடை $= \frac{2}{16}$ பவு

∴ இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் பருமன்

$= \frac{2}{16} \Big/ 62\cdot5$ க.அடி

$= \frac{2 \times 12 \times 12 \times 12}{16 \times 62\cdot5}$ கன அங்குலம்

$= 3\cdot456$ க.அங்

எனவே 1 அளவுக்கூறுக்குக் கீழ் திரவமானியின் பருமன் $3\cdot456$ க.அங்

இவ்வாறே 1·1 அளவுக்கூறுக்குக் கீழ் திரவமானியின் பருமன்

$= \frac{2 \times 12 \times 12 \times 12}{16 \times 62\cdot5 \times 1\cdot1}$

$= 3\cdot142$ க.அங்

1 2 அளவுக்கூறுக்குக் கீழ் திரவமானியின் பருமன்

$= \frac{2 \times 12 \times 12 \times 12}{16 \times 62\cdot5 \times 1\cdot2}$

$= 2\cdot878$ க.அங்.

மாதிரிக் கணக்கு 3. காற்றின் விளைவைப் புறக்கணித்து நிக்கல்சன் திரவமானியைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட ஒரு பொருளின் ஒப்படர்த்தி σ ஆகும். காற்றின் ஒப்படர்த்தி α எனில் பொருளின் உண்மையான ஒப்படர்த்தி σ- $(\sigma$-1) என நிறுவுக. மேலும் சோதனையில்கண்ட பொருளின் போலி எடை W எனில் அதன் உண்மையான எடையையும் கணக்கிடுக.

நிக்கல்சன் திரவமானியைக் கொண்டு ஒப்படர்த்தியைக் காண்பதற்குரிய சோதனையைக் கருத்திற் கொள்வோம். திரவமானி மட்டும் நீரில் குறியீடுவரை அமிழ்வதற்கு அதன் தட்டில் சேர்க்கவேண்டிய எடை, பொருளைத் தட்டில் வைக்கும்பொழுது தட்டில் சேர்க்கவேண்டிய எடை, பொருளை வாளியில் வைக்கும் பொழுது தட்டில் சேர்க்கவேண்டிய எடை ஆகியவை முறையே w_1, w_2, w_3 எனக் கொள்வோம். எடைகளின் உண்மையான ஒப்படர்த்தி d எனவும் பொருளின் உண்மையான ஒப்படர்த்தி, எடை ஆகியவை முறையே P, W_1 எனவும் திரவமானியின் எடை W_2 எனவும் கொள்வோம்.

பொருளின் ஒப்படர்த்தி $\sigma = \dfrac{w_1 - w_2}{{}_3w - w_2}$ (சமன் 18 2)

இனி, திரவமானிமட்டும் நீரில் அமிழும்பொழுது அதனுல் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் எடை $= W_2 + w_1\left(1 - \dfrac{\alpha}{d}\right)$ ... (i)

பொருள் தட்டில் இருக்கும் பொழுது இடம் பெயர்க்கப் பட்ட நீரின் எடை $= w_2 + w_2\left(1 - \dfrac{\alpha}{d}\right) + W_1\left(1 - \dfrac{\alpha}{p}\right)$ ... (ii)

பொருள் வாளியில் இருக்கும்பொழுது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் எடை

$$= w + w_2\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) + W_2\left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \ldots\ldots \quad (iii)$$

சமன் (i), (ii)-லிருந்து

$$W_1\left(\frac{P - \alpha}{P}\right) = (w_1 - w_2)\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (iv)$$

சமன் (iii), (ii) லிருந்து

$$w\left(\frac{1 - \alpha}{P}\right) = (w_3 - w_2)\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

சமன் (iv), (v) லிருந்து

$$\left(\frac{P-\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{w_1-w_2}{w_1-w_2} = \sigma$$

$$\therefore \quad (P-\alpha) = \sigma(1-\alpha)$$

$$\therefore \quad P = \alpha + \sigma(1-\alpha)$$

அல்லது $\quad P = \sigma - \alpha(\sigma-1)$

சமன் (iv)-ல் $(w_1 - w_2)$ = பொருளின் எடை

$$\therefore \quad w_1\left(\frac{P-\alpha}{P}\right) = w\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)$$

எனவே, பொருளின் உண்மையான எடை

$$w_1 = w\left(\frac{d-\alpha}{d}\right) \times \frac{P}{P-\alpha}$$

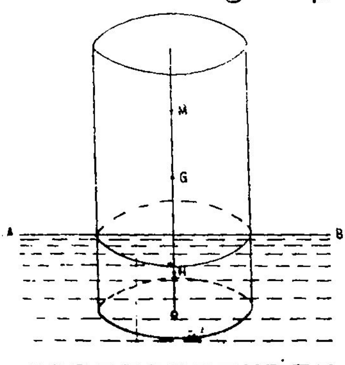
$$= w\left(\frac{d-\alpha}{d}\right) \times \left(\frac{\alpha+\sigma(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)}\right)$$

அதாவது பொருளின் உண்மையான எடை

$$= w\left(\frac{d-\alpha}{d}\right) \times \left(1+\frac{\alpha}{\sigma(1-\alpha)}\right)$$

மாதிரிக் கணக்கு 4. வட்ட முகமுடைய, $\frac{1}{2}$ ஒப்படர்த்தியுடைய சீரான உருளை ஒன்று நீரில் நேராக மிதக்கிறது. அதன் நீள அதன் வட்டத்தின் $\frac{3}{4}$ பகுதியைவிட அதிகமாக இருப்பின் அதன் சமநிலை நிலையானதாக இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

படம் 18·7-ல் உருளை மிதப்பதைக் காட்டுகிறது. உருளையின் விட்டம் a எனவும் உயரம் h எனவும் அது நீரில் அமிழ்ந்துள்ள ஆழம் h^1 எனவும் கொள்வோம் படத்தில் G என்பது உருளையின் புவியீர்ப்புமையத்தையும் H என்பது மிதவைத்திறன் மையத்தையும் குறிக்குமாயின் OG



படம் 18·7

$$OG = \frac{h}{2}\,;\ OH = \frac{h^1}{2}$$

M. மிதவைக்காப்புமையத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்

இனி,

உருளையால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் எடை
= உருளையின் எடை

$$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 h^1 g = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 h\tfrac{1}{3} g$$

$$\therefore \quad h^1 = \frac{h}{3}$$

HM > HG என்றால் சமநிலை நிலையானதாக அமையும்.

ஆனால் $$HM = \frac{AK^2}{V}$$

மிதவைத்தளம் a விட்டமுடைய வட்டமாதலால்,

$$K = \frac{1}{2} \quad \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad HM = \frac{AK^2}{V} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)\frac{2a^2}{16}}{\pi\left(\frac{a}{2}\right)2h^1}$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{16} \cdot 3}{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h}$$

$$= \frac{3a^2}{16\,h}$$

$$HG = OG - OH = \frac{h}{2} - \frac{h'}{2}$$

$$= \frac{h}{2} - \frac{h}{6} = \frac{h}{3}$$

எனவே, சமநிலை நிலையானதாக அமைய வேண்டுமாயின்,

$$\frac{3}{16}\ \frac{a^2}{h} > \frac{h}{3}$$

அல்லது $$\frac{a^2}{h^2} > \frac{16}{9}$$

அல்லது $$\frac{a}{h} > \frac{4}{3}$$

அல்லது $$h < \frac{3}{4}a$$

எனவே, $h > \frac{3}{4}a$ என்றால் சமநிலை நிலையானதாக இருக்க முடியாது.

மாதிரிக்கணக்கு 5. 10,000 டன் எடை கொண்ட ஒரு கப்பலின் 40 அடி அகலமுள்ள தளத்தின் குறுக்காக 50 டன் எடையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு பக்கத்திலிருந்து மறுபக்கத்திற்கு எடுத்துச் செல்லப்படும்போது 20 அடி நீளமுள்ள நூற்குண்டு 10 அங் தொலைவு நகருகிறது. கப்பலின் மிதவைக்காப்புயரத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\text{மிதவைக்காப்புயரம் } GM = \frac{w}{W} \cdot \frac{al}{x} \qquad (\text{சமன் } 18{\cdot}9)$$

இங்கு

$w = 50$ டன் எடை

$W = 10{,}000$ டன் எடை

$a = 40$ அடி

$l = 20$ அடி

$x = 10 \text{ அங்} = \frac{10}{12}$ அடி

∴ மிதவைக்காப்புயரம்

$$GM = \frac{50}{10000} \times \frac{40 \times 20}{10} \times 12$$

$$= \frac{48}{10} = 4{\cdot}8 \text{ அடி.}$$

பயிற்சி XVIII

1. h அலகு உயரங்கொண்ட உருளை வடிவத்தக்கை ஒன்று அதன் அச்சு செங்குத்தாக இருக்குமாறு கிண்ணம் ஒன்றில் உள்ள நீரில் மிதக்கிறது. கிண்ணம், வெளியேற்றும் பம்பு ஒன்றின் கொள்கலத்தினுள் வைக்கப்பட்டு அதனுள் வெற்றிடமாக்கப்பட்டால் தக்கை மேலும் $\dfrac{h\,d\,(1-s)}{1-\dfrac{d}{s}}$ ஆழத்திற்கு நீரில் மூழ்கும் என நிறுவுக. d, s என்பன முறையே காற்று தக்கை ஆகியவற்றின் ஒப்பு அடர்த்திகளாகும்.

2. 6 அடி நீளமுள்ள உருளைவடிவ மரக்கட்டை ஒன்று நீரினுள் 4 அடி ஆழத்திற்குச் செங்குத்தாக அமிழ்ந்துள்ளது. அது நிலையான சமநிலையிலிருக்க அதன் ஆரத்தின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக. [4']

3. 16 அங் நீளமும் 0·95 ஒப்பு அடர்த்தியும் கொண்ட உருளை ஒன்று அதன் அச்சு செங்குத்தாக இருக்குமாறு நீரில் மிதக்கிறது. அது சற்றே அமிழ்ந்திருக்குமாறு நீரின்மேல் ஊற்றவேண்டிய 0·84 ஒப்படர்த்தியையுடைய திரவத்தின் உயரம் என்ன? [5"]

4. சாதாரணத் திரவமானி ஒன்றில் 1 முதல் 1·2 வரை ஒப்படர்த்திகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. 1, 1·2 ஒப்படர்த்தி அளவுக் கூறுகளுக்கிடையே மையப்புள்ளிக்குரிய ஒப்படர்த்தி என்ன? [1·09]

5. சாதாரணத் திரவமானி ஒன்று முறையே S_1, S_2 ஒப்படர்த்திகளுள்ள திரவங்களில் மிதக்கும்போது திரவமட்டத்திற்கு மேலுள்ள தண்டின் நீளங்கள் l_1, l_2 ஆகும். அத் திரவங்களின் சம எடைகளை ஒன்று சேர்த்துக் கிடைக்கும் கலவையில் திரவமானி மிதக்கும்போது திரவமட்டத்திற்குமேல் தெரியும் தண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. $\left[\frac{l_1 + l_2}{2}\right]$

6. 20,000 டன் எடையுள்ள ஒரு கப்பலின் 50 அடி அகலமுள்ள தளத்தின் குறுக்காக 30 டன் எடையுள்ள ஒரு பொருளை நகர்த்தும்போது கப்பல் $\frac{3}{4}^\circ$ சாய்கிறது. அதன் மிதவைக்காப்புயரத்தைக் கணக்கிடுக. [5·79']

7. 8000 டன் எடையுள்ள ஒரு கப்பலின் தளத்தின் குறுக்கே 25 அடி தொலைவுக்கு 15 டன் எடையுள்ள ஒரு பொருளை நகர்த்தும்பொழுது தளத்திலிருந்து 80 அடி உயரத்திலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட ஓர் ஊசல் குண்டு 8 அங். தொலைவு நகருகிறது, கப்பலின் மிதவைக்காப்புயரத்தைக் கணக்கிடுக. $\left[5\frac{5}{6}{}'\right]$

8. h உயரமும் r ஆரமும் s ஒப்படர்த்தியும் கொண்ட ஓர் உருளை அதன் அச்சு செங்குத்தாக இருக்குமாறு நீரில் சமநிலையில் மிதக்குமாயின் $r^2 > 2h^2 s\,(1 - s)$ எனக் காட்டுக.

9. கோளம் ஒன்று அதன் மேற்பரப்பில் $\frac{1}{4}$ பங்கு நீருக்குமேல் இருக்குமாறு மிதக்கிறது. அதன் ஒப்படர்த்தியைக் கணகிடுக்க. [0·957]

10. h உயரமும் r ஆரமும் d_1 அடர்த்தியும் கொண்ட சீரான உருளை ஒன்று அதன் அச்சு செங்குத்தாக இருக்குமாறு d_2 அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கிறது. $r^2 > 2h^2\left(\frac{d_1}{d_2} - \frac{d_1 2}{d_2 2}\right)$ என்றால் அதன் சமநிலை நிலையானதென நிறுவுக.

19. வளி அழுத்தம்

(Atmospheric pressure)

நிலைப்பாய் பொருளியலில் இதுவரை சென்ற பகுதிகளில் நிலை யான திரவங்களைப்பற்றிப் படித்தோம். இனிவரும் பகுதிகளில் வாயுக்களைப் பற்றிக் காண்போம்.

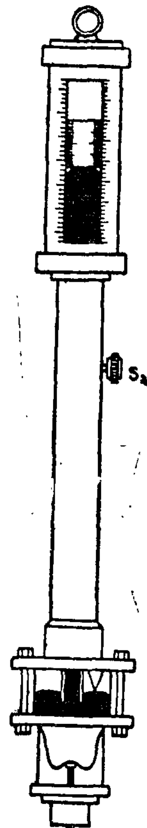
நம் நிலவுலகம் சுமார் 320 கிலோமீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு வாயு மண்டலத்தால் சூழப்பட்டுள்ளது இந்த வாயு மண்டலம் வளி மண்டலம் (atmosphere) என அழைக்கப்படும். வளி மண்டல அடர்த்தி மிகமிகக் குறைவாக (0·001293 கி/க செ. மீ.) இருப்பினும் அது மிக அதிக உயரத்திற்குப் பரவி இருப்பதால் புவிப்பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஏறத்தாழ ஒரு மில்லியன் டைன் ச. செ. மீ அழுத்தத்தைக் கொடுக்கிறது. இந்த அழுத்தம் வளி அழுத்தம் எனப்படும்.

வளி அழுத்தத்தை அளவிடப் பயன்படும் கருவிகள் பாரமானி கள் (Barometer) எனப்படும். முதல் பாரமானியை டாரிசெல்லி (Torricelli) என்னும் விஞ்ஞானி நிறுவினார். இந்தப் பாரமானியில் வளி மண்டலம் அதன் அழுத்தத்தால் பாதரசத் தம்பம் ஒன்றைத் தாங்குகிறது. பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம் வளி அழுத்தத்தின் அளவைச் கொடுக்கிறது. டாரிசெல்லி பாரமானியைப் பின் வருமாறு அமைக்கலாம்.

சுமார் 100 செ மீ. நீளமும் 5 மி. மீ. முதல் 10 மி. மீ. வரை குறுக்களவும் தடித்த சுவர்களையும் கொண்ட ஒரு முனை மூடபபட்ட ஒரு கண்ணாடிக் குழாயை நன்றாக உலர்த்தி முழுவதும் பாதரசத் தால் நிரப்பவேண்டும். குழாயினுள் காற்றுக் குமிழிகள் எதுவும் இருக்கக்கூடாது. திறந்த முனையை விரலால் நன்றாகமூடி குழாயைத் தலைகீழாகத் திருப்பி திறந்தமுனை ஒரு கிண்ணத்திலுள்ள பாதரசத் தினுள் நன்றாக அமிழ்ந்திருக்குமாறு வைத்தபின் விரலை எடுத்துவிட வேண்டும். இப்போது குழாயினுள் பாதரசமட்டம் கீழிறங்கி ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திற்கு நிற்பதைக்காணலாம். குழாயைச்

செங்குத்தாகப் பொருத்தினால் கிண்ணத்தில் பாதரசமட்டத்திலிருந்து பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம் கடல்மட்டத்தில் சுமார் 76 செ. மீ. இருக்கும். குழாயினுள் பாதரசமட்டத்திற்குமேல் வெற்றிடம் உள்ளது. இந்த வெற்றிடம் டாரிசெல்லி வெற்றிடம் எனப்படும்,

ஓரிடத்தில் வளி அழுத்தத்தின் மதிப்பு கடல் மட்டத்திலிருந்து அதன் உயரத்தைப் பொறுத்திருக்கும். மேலும் வளிமண்டலத்தின் தட்பவெப்ப நிலைகளுக்கேற்பவும் அதன்மதிப்பு மாறும். எனவே, 45° குறுக்கையளவு (latitude) உள்ள கடல்மட்டப்பகுதியில் (g-ன் மதிப்பு 980·616 செ.மீ, வி^{2} இருக்கக் கூடிய பகுதியில்) 0°C வெப்பநிலையில் 76 செ. மீ பாதரசத்தம்பம் கொடுக்கக்கூடிய அழுத்தத்தைப் படித்தர வளி அழுத்தம் (standard atmosphericpressure) அல்லது இயனளவு வளியழுத்தம் (Normal atmospheric pressure) என எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். இது 1·016 மிலியன் டைன்கள்/ச.செ.மீ. அழுத்தத்திற்குச் சமமாகும். இதனை வழக்கில் ஒரு வளி அழுத்தம் (one atmosphere) எனக் குறிப்பிடுவதும் உண்டு.



படம் 19.1

ஃபார்ட்டின் பாரமானி (Fortin's Barometer) :இது டாரிசெல்லி பாரமானியின் திருத்தப்பட்ட அமைப்பேயாகும். இதில் பாதரசத் தம்பத்தை மிகவும் துல்லியமாக அளவிடமுடியும். இந்தப்பாரமானியில் சுமார் 90 முதல் 100 செ. மீ. உயரமும் ஒரு முனை மூடப்பட்டதுமான ஒரு கண்ணாடிக் குழாயானது அப்பாகம் ஒரு வகைத் தோலினால் மூடப்பட்ட கிண்ணம் ஒன்றிலுள்ள பாதரசத்தில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு செங்குத்தாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. (படம் 19·1). கிண்ணத்தின் அடிப்பாகத்தை S_1 என்ற திருகினால் மேலும் கீழும் நகர்த்துவதன் மூலம் கிண்ணத்திலுள்ள பாதரசமட்டத்தை மேலும் கீழும் நகர்த்தமுடியும். கண்ணாடிக் குழாய் ஒரு பித்தளைக் குழாயினால் மூடப்பட்டுள்ளது. இக்குழாயின் மேற்பகுதியிலுள்ள செவ்வக வடிவத் துளைவழியாகக் கண்ணாடிக் குழாயிலுள்ள பாதரசமட்டத்தைக் காணலாம். துளையின் இரு விளிம்புகளிலும் இரு அளவு கோல்கள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன.

இவற்றின் கூர் முனைகள் கிண்ணத்தில் பாதரச மட்டத்தின் மேலாகக் காணப்படும் ஒரு தந்தக்குறி முள்ளின் கூர்முனையுடன் ஒன்று கின்றன. குழாயில் மேலும் கீழும் நகருமாறு ஒரு வெர்னியர் கோல் உள்ளது. இதனை S_2 என்ற திருகால் இயக்க முடியும்.

ஃபார்ட்டின் பாரமானியைக் கொண்டு வளி அழுத்தத்தை அளவிட முதலில் கிண்ணத்திலுள்ள பாதரசமட்டம் தந்தக்குறி முனையை (அதாவது அளவு கோல்களின் சுழிமுனைகளை)ச் சற்றே தொடுமாறு சரி செய்ய வேண்டும். பின்னர் வெர்னியரின் சுழிமுனை குழாயிலுள்ள பாதரச மட்டத்திற்குத் தொடுவரை நிலையில் இருக்கு மாறு வெர்னியரைச் சரி செய்து வளி அழுத்தத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். வளி அழுத்தத்தைத் துல்லியமாக அறிய வேண்டுமாயின் ஃபார்ட்டின் பாரமானியின் அளவீட்டிற்குப் பின் வரும் திருத்தங்களைச் செய்ய வேண்டும்.

(i) பாரமானியில் பொருத்தப்பட்ட அளவுகோல், பாதரசம் ஆகியவற்றின் விரிவுகளுக்கான திருத்தம்.

(ii) g-ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதலுக்கான திருத்தம்.

(iii) நுண்குழாய் விளைவுக்கான திருத்தம்.

(iv) பாதரச ஆவி அழுத்தத்திற்கான திருத்தம்.

(i) அளவுகோல், பாதரசம் ஆகியவற்றின் விரிவுகளுக்கான திருத்தம்: பாரமானியை அமைக்கும்போது அதில் பொருத்தப் படும் அளவு கோல்கள் பெரும்பாலும் 0°C வெப்ப நிலையில் உண் மையான அளவீடுகளைக் குறிக்குமாறு அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப் படுவது வழக்கம். எனவே, வேறு எந்த வெப்ப நிலையிலும் அளவீடு களைக் காணும்போது அளவுகோலின் விரிவுக்கான திருத்தத்தைச் செய்ய வேண்டும். மேலும் வெப்பநிலை அதிகமாகும்போது பாதரசம் விரிவடைவதால் அதன் அடர்த்தி குறைவதாலுண்டாகும் பிழைக் கான திருத்தத்தையும் செய்யவேண்டும்.

அளவுகோலின் நீட்டப் பெருக்க எண் α எனில் அதன் ஒவ் வொரு செ.மீ பகுதியும் θ°C வெப்பநிலையில் $(1 + \alpha\theta)$ உண் மையான நீளத்திற்குச் சமமாகும். எனவே, θ°C வெப்பநிலையில் பாரமானி பதிவுசெய்யும் பாதரசத்தம்ப உயரம் H எனில் அதன் உண்மையான உயரம் $H\theta = H(1 + \alpha\theta)$

அடுத்து பாதரசம் 0°C வெப்பநிலையில் இருக்குமாயின் பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம் H_0 எனக் கொள்வோம். பாதரசத்தின் அடர்த்தி 0°C வெப்பநிலையில் d_0 எனவும் θ°C வெப்பநிலையில் d_θ எனவும் கொள்வோமாயின் $H_o d_o = H_\theta d_\theta$

$$\therefore \quad H_o = H_\theta \frac{d\theta}{do}$$

ஆனால் பாதரசத்தின் தனிப் பெருக்க எண் m என்றால்

$$d\theta = \frac{do}{1 + m\theta}$$

அல்லது

$$\frac{d_\theta}{d_o} = \frac{1}{1 + m\,\theta}$$

$$\therefore \quad H_o = \frac{H\theta}{1+m\theta}$$

அல்லது

$$H_o = \frac{H(1 + \alpha\,\theta)}{(1 + m\,\theta)}$$

$$= H(1 + \alpha\,\theta)\ (1 - m\,\theta)$$

$$= H[1 - \theta\ (m - \alpha)]$$ தோராயமாக

.... 19·1

அளவுகோல்கள் 0°C வெப்பநிலையிலன்றி வேறொந்த வெப்ப நிலை (θ_1) யிலும் சரியான அளவீடுகளைக் குறிக்குமாறு அவற்றின் அளவுக் கூறுகள் குறிக்கப்பட்டிருப்பின்

$$H_o - H\ [1 - (\theta - \theta_1)\ (m - \alpha)] \quad ...... \quad 19{\cdot}1a$$

m-ன் மதிப்பு α-ன் மதிப்பைவிட அதிகமாக இருக்கு மாதலால் பாதரசத் தம்பத்தின் திருத்தப்பட்ட உண்மையான உயரம் (H_o) பதிவு செய்யப்பட்ட உயரத்தை (H) விடக் குறைவாகவே இருக்கும்.

(ii) g-ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதலுக்கான திருத்தம் :

புவிப்பரப்பில் g-ன் மதிப்பு இடத்திற்கு இடம் மாறுபடுவதால் ஓரிடத்தில் பாரமானியின் உயரத்தி (பாரமானி பதிவு செய்யும் பாதரசத்தம்ப உயரம்) லிருந்து குறுக்கையளவு 45° உள்ள கடல் மட்டப் பகுதியில் அந்தப் பாதரசத் தம்பத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடலாம்.

குறுக்கையளவு λ, ஈர்ப்பு முடுக்கம், g உள்ள இடத்தில் பாரமானி உயரம் H_o என்றால் குறுக்கையளவு 45°, ஈர்ப்பு முடுக்கம் g_o உள்ள இடத்தில் பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம்

$$H_o^1 = H_o \frac{g}{g_o}$$

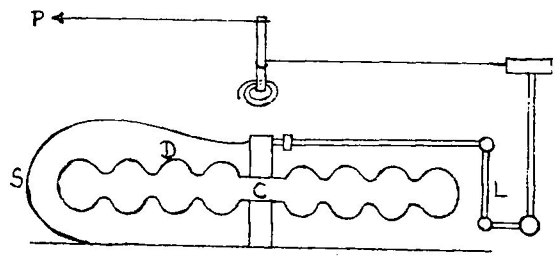
ஆனால் $\frac{g}{g_o} = 1 - 0{\cdot}00259 \cos 2\lambda - 1{\cdot}96h \times 10^{-9}$

(h என்பது குறுக்கையளவு λ உள்ள இடத்தின் கடல் மட்டத்தி லிருந்து உயரம்). எனவே, $\frac{g}{g_o}$-ன் மதிப்பை அறிந்து H_o-ன் மதிப்பிலிருந்து H_o'-ன் மதிப்பை அறியலாம்.

(iii) நுண்குழாய் விளைவுக்கான திருத்தம் (Correction for capillary effect): பாதரசத்தின் பரப்பு இழுவிசையின் பயனாக பாதரசத் தம்பம் சற்று கீழே அழுத்தப்படும். இதுதான் நுண்குழாய் விளைவு எனப்படும். குறிப்பிட்ட பாரமானியின் அளவீட்டை (அதில் உள்ள கண்ணாடிக் குழாயைவிட) நுண்குழாய் விளைவு புறக் கணிக்கத்தக்க அளவுக்கு அகலமான குழாயையுடைய மற்றொரு பாரமானியின் அளவீட்டுடன் ஒப்பு நோக்குவதன்மூலம் நுண் குழாய் விளைவுக்கான திருத்தத்தைக் காணலாம்.

(iv) பாதரச ஆவிக்கான திருத்தம்: பாரமானிக் குழாயில் பாதரச மட்டத்திற்குமேல் இருக்கக்கூடிய பாதரச ஆவி ஒருசிறு அளவு அழுத்தத்தைக் கொடுக்கும். இது சாதாரண வெப்ப நிலைகளில் மிகமிகச் சிறியதாக (0·002θ) இருந்த போதிலும் அதிக வெப்ப நிலைகளில் அதற்குரிய திருத்தத்தைச் செய்யவேண்டும்.

அனிராய்டு பாரமானி (Aneriod barometer) இதன் அமைப்பை படம் 19·2-ல் காணலாம். இதில் நெளி நெளியாக வளைக்கப்பட்ட மெல்லிய உலோகத் தட்டினாலான ஓர் அறை (D) உள்ளது. அறை



படம் 19·2

ஓரளவுக்கு காற்று நீக்கப்பட்டுள்ளது. வளி அழுத்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் உலோகத் தகட்டை உள்ளும் புறமும் இயக்குகின்றன. இந்த இயக்கம் விற்கம்பி (S) ஒன்றினால் கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது மேலும் நெம்புகோல் அமைப்பு (L) ஒன்றின் உதவியுடன் பெரிதாக்கப்பட்டு குறிமுள் (P) ஒன்றை இயக்குமாறு செய்யப்படுகிறது ஃபார்ட்டின் பாரமானி ஒன்றுடன் ஒப்பு நோக்கி வளி அழுத்த அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட அளவுகோல் ஒன்றின் முன் குறிமுள் இயங்குகிறது. இந்தப் பாரமானியை ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோரிடத்திற்கு எடுத்துச் செல்வது எளிதெனினும் ஃபார்ட்டின் பாரமானியைப்போன்று துல்லியமான அளவீடுகளைத் தராது.

இப் பாரமானியில் திரவங்கள் எதுவும் பயன்படவில்லையாதலால் இது நிர்மமற்ற (aneroid—நிர்மம் வழங்காத) பாரமானி என்றும் அழைக்கப்படும்.

ஃபார்ட்டின் பாரமானியில் குழாயில் பாதரசத் தம்பத்திற்கு மேல் வெற்றிடம் உள்ளது என்று கூறப்பட்டது. அவ்வாறின்றி பாதரசத் தம்பத்திற்குமேல் சிறிதேனும் காற்று இருப்பின் பாரமானியின் அளவீடுகள் பிழையுடையனவாய் இருக்கும். அத்தகைய பாரமானி தவறுன பாரமானி எனப்படும். தவறுன பாரமானியைக் கொண்டு உண்மையான வளி அழுத்தத்தைப் பாயிலின் விதியின் துணையால் கணக்கிடலாம்.

பாயில் விதி : வாயுக்களின் அழுத்தம் சிறிதளவு மாறும்போது கூட அதன் பருமன் அதிக அளவில் மாறுகிறது. ஒரு வாயுவின் அழுத்தத்திற்கும் அதன் பருமனுக்கும் உள்ள தொடர்புபற்றிய விதியினை பாயில் (Boyle) என்பவர் கண்டார். அவ் விதி பின்வருமாறு :

வெப்பநிலை மாறுமல் இருக்கும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட நிறையையுடைய வாயுவின் அழுத்தம் அதன் பருமனுக்கு எதிர்விகிதத்திலிருக்கிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட நிறையையுடைய வாயுவின் பருமனை V எனவும் அழுத்தத்தைப் P எனவும் குறிப்பிடுவோமாயின் அதன் வெப்பநிலை மாறுதிருக்கும்போது $P \propto \frac{1}{V}$

அல்லது $$PV = \text{மாறிலி.}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட நிறையையுடைய வாயுவின் அடர்த்தி P அதன் பருமனுக்கு எதிர்விகிதத்திலிருப்பதால் பாயில் விதியை,

$$P \propto p$$

அல்லது $$\frac{P}{p} = \text{மாறிலி}$$

என எழுதலாம்.

இப்பொழுது பாயில் விதியின் அடிப்படையில் தவறுன பாரமானியைக் கொண்டு சரியான வளி அழுத்தத்தைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

தவறுன பாரமானியில் பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம் h எனவும் காற்றுத் தம்பத்தின் நீளம் l_1 எனவும் கொள்வோம். உண்மையான பாரமானி உயரம் H எனில், பாரமானிக் குழாயில் உள்ள

காற்றின் அழுத்தம் $(H-h_1)$ செ. மீ. பாதரசமாகும். பாரமானிக் குழாயை கிண்ணத்துள் சற்று இறக்குவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது பாதரசத் தம்பத்தின் உயரம் h_2 ஆகவும் காற்றுத் தம்பத்தின் நீளம் l_2 ஆகவும் இருக்கட்டும். எனவே, காற்றின் அழுத்தம் $(H-h_2)$ ஆகும். பாரமானிக் குழாய் சீரான குறுக்குப் பரப்பளவையுடையதாதலால் காற்றின் பருமன் காற்றுத் தம்பத்தின் நீளத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். எனவே, பாயில் விதிப்படி

$$(H-h_1)\, l_1 = (H-h_2)\, l_2$$

$$\therefore \qquad H = \frac{h_1 l_1 - h_2 l_2}{l_1 - l_2} \qquad \dots \quad \dots \qquad 19{\cdot}2$$

எனவே, சரியான வளி அழுத்தத்தைச் சமன் 19·2-லிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

கடல்மட்டத்திலிருந்து உயரத்தைப் பொறுத்து வளி அழுத்தம் மாறுபடுதல்: கடல் மட்டத்திலிருந்து மேலே செல்லும்போது வளி மண்டலத்தின் உயரம் குறைவதால் வளி அழுத்தம் குறையும். கடல் மட்டத்திலிருந்து உயரத்திற்கும் வளி அழுத்தத்திற்கும் உள்ள தொடர்பை இப்போது பெறுவோம்.

கடல் மட்டத்திலிருந்து முறையே h, $h+dh$ என்ற உயரங்களிலுள்ள A, B என்ற புள்ளிகளைக் கருதுவோம். அப் புள்ளிகளில் அழுத்தங்கள் முறையே p, $p+dp$ என இருக்கட்டும். இனி, கடல் மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திற்கு உள்ள a அலகு குறுக்குப் பரப்பளவையுடைய ஒரு செங்குத்தான காற்றுத் தம்பத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். அந்தத் தம்பத்தில் உள்ள காற்றின் அடர்த்தி P என இருக்கட்டும். dh-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாக இருப்பின் dh உயரமும் a குறுக்குப் பரப்பளவும் உள்ள சிறிய காற்றுத் தம்பத்தில் காற்றின் சராசரி அடர்த்தி p எனக் கொள்ளலாம்.

dh உயரக் காற்றுத் தம்பமானது,

(i) அதற்குமேலுள்ள காற்று கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அமுக்கம் $(p-dp)\,a$;

(ii) அதற்குக் கீழுள்ள காற்று மேல்நோக்கிச் செயற்படுத்தும் அமுக்கம் $p \cdot a$;

(iii) செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் எடை $a \cdot dh \cdot p g$. (g, x உயரத்திலும் கடல் மட்டத்திலுள்ள மதிப்பையே பெற்றிப்ருபதாகக் கொள்ளப்படுகிறது)

ஆகிய மூன்று விசைகளின் செயலால் சமநிலையில் இருக்கிறது.

எனவே, $(p+dp)a + a\rho g\cdot dh = p\cdot a$

அல்லது $dp = -\rho g\, dh$ ... ... (1)

h உயரத்தில் காற்றின் வெப்பநிலை நிலையானதெனக் கருது வோமாயின், பாயில் விதிப்படி

$$p \propto \rho$$

அல்லது $p = k\rho$ (k என்பது மாறிலி)

$\therefore$ $\rho = \frac{p}{k}$ 19.3

P-ன் மதிப்பை சமன் (i) ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்

$$dp = \frac{-p}{k}\, g\, dh$$

அல்லது $\frac{dp}{p} = \frac{g}{k}\, dh$

தொகுதிகாணின் $\ln p = \frac{-gh}{k} + C$ ... ... (ii)

(C என்பது ஒரு மாறிலி)

இனி, கடல்மட்டத்தில் அழுத்தம் P_0 எனில் $h = 0$ என்னும் போது $P = P_0$ ஆகும் எனவே $C = \ln P_0$ ஆகும்.

C-ன் மதிப்பை சமன் (ii)-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்

$$\ln \frac{p}{po} = \frac{-g}{k}\, h$$

எனவே $\frac{p}{po} = e^{\frac{-g}{k} h}$

அல்லது $P = P_0 e^{\frac{-g}{k} h}$ ... ... 19·ல்

காற்றின் அடர்த்தி கட ல் மட்டத்திலும் கடல் மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலும் முறையே Po, P எனில், பாயில் விதிப்படி

$$po \propto Po$$
$$p \propto P$$

எனவே, சமன் 19·4-ஐ

$$P = P_0 e^{\frac{-g}{k} h} \quad ... \quad ... \quad ... \quad 19·5$$

எனவும் எழுதலாம்.

மேலும், வளி அழுத்தங்கள் பாரமானி உயரங்களுக்கு நேர் விகிதத்திலிருப்பதால் பாரமானி உயரம் கடல் மட்டத்திலும், கடல்

மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலும் முறையே Ho, H எனில், சமன்

19·4 ஐ $$H = H_0 e^{\frac{-g}{k} h} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 19{\cdot}6$$

எனவும் எழுதலாம்.

சமன் 19.4, கடல் மட்டத்திலிருந்து உயரத்திற்கும் அழுத்தத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் கொடுக்கிறது. சமன் 19·4 லிருந்து, கடல் மட்டத்திலிருந்து மேலே செல்லச் செல்ல அழுத்தம் குறைகிறது என்ற உண்மையையும் பெறலாம்.

மேலும் கடல் மட்டத்திலிருந்து h, $2h$, $3h$, ... உயரங்களில் வளி அழுத்தங்கள் p_1, p_2, p_3..................எனக் கொள்வோமாயின்

$$p_1 = p_0 e^{\frac{-g}{K} h}$$

$$p_2 = p_0 e^{\frac{-g}{K} 2h}$$

$$p_3 = p_0 e^{\frac{-g}{K} 3h}$$

....

எனவே $$\frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{h}{k}}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = e^{\frac{h}{k}}$$

அதாவது $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \quad \dots \quad \dots \text{ மாறிலி}$$

அதாவது p_1, p_2, p_3,.............ஆகியவை பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைகின்றன.

எனவே, கடல்மட்டத்திலிருந்து கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் அமைந்த உயரங்களில் அழுத்தங்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைகின்றன.

கடல் மட்டத்திலிருந்து இரு இடங்களின் உயர வேறுபாடு : இரு இடங்களில் பாரமானி உயரங்களைக் காண்போமாயின் சமன் 19·4-ன் அடிப்படையில் அவ்விரு இடங்களின் உயர வேறுபாட்டைக் காணலாம்.

கடல் மட்டத்திலிருந்து h_1, h_2 உயரங்களில் உள்ள A, B என்ற இடங்களில் பாரமானி உயரங்கள் முறையே H_1, H_2 எனவும் வளி அழுத்தங்கள் (சார்பிலா அலகில்) p_1, p_2 எனவும் இருப்பின்

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{H_1}{H_2}$$

ஆனால் கடல் மட்டத்தில் அழுத்தம் p_0 என்றால்,

$$p_1 = p_0 e^{\frac{-g}{k} h_1}$$

$$p_2 = p_0 e^{\frac{-g}{k} h_2}$$

$$\therefore \qquad \frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{g}{k}(h_2 - h_1)}$$

எனவே $\qquad ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{g}{K}(h_2 - h_1)$

அல்லது $\qquad h_2 - h_1 = \frac{K}{g} ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

அல்லது $\qquad h_1 - h_2 = \frac{K}{g} ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad 19{\cdot}7$

ஆனால் $\qquad K = \frac{p}{\rho}$ (சமன் 19·3)

A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடையே வெப்பநிலை மாறாமல் (O°C) இருப்பதாகக் கொள்வோமாயின் இ. வெ. அ-ல் (N. T. P) காற்றின் அடர்த்தியை (0·001293 கி/க. செ. மீ.) அறிந்து K-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

அதாவது $\qquad K = \frac{76 \times 13{\cdot}6 \times g}{0{\cdot}001293}$

அல்லது $\qquad \frac{K}{g} = \frac{76 \times 13{\cdot}6}{0{\cdot}001293}$

மேலும் $\qquad ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = 2{\cdot}303\, log_{10}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)$

எனவே, சமன் 19·7-ல் $\frac{k}{g}$, $ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பதிலீடு செய்து $(h_1 - h_2)$ன் மதிப்பை அதாவது A, B ஆகிய இடங்களுக்கிடையே உள்ள உயரத்தைக் கணக்கிடலாம். இம் முறையில் குன்றுகளின் உயரங்களையும் கணக்கிடலாம்.

ஓரியல் வளி மண்டலத்தின் உயரம் (Height of homogeneous-atmosphere) : படித்தர வளி அழுத்தத்திற்குச் சமமான அழுத்தத்தைக் கொடுக்கக்கூடியதும் சீரான அடர்த்தியைக் கொண்டதுமான காற்றுத் தம்பத்தின் உயரம் ஓரியல் வளி மண்டலத்தின் உயரம் எனப்படும். பாதரசம், காற்று ஆகியவற்றின் அடர்த்திகள் முறையே 13·6 கி/க. செ. மீ, 0·001293 கி/க. செ மீ. எனவும் ஓரியல் வளி மண்டலத்தின் உயரம் H எனவும் கொள்வோமாயின் சார்பிலா அலகில் படித்தர வளி அழுத்தம்

$$76 \times 13{\cdot}6 \times g = H \times 0{\cdot}001293 \times g$$

$$H = \frac{76 \times 13{\cdot}6}{0{\cdot}001293} \text{ செ. மீ.}$$

$$= 8 \times 10^5 \text{ செ. மீ.}$$

அதாவது, ஓரியல் வளி மண்டல உயரம் 8 கிலோ மீட்டர்களாகும். ஆனால் உண்மையில் வளி மண்டலத்தில் உயரச் செல்லச் செல்ல அதன் அடர்த்தி குறைவதால் வளி மண்டலத்தின் உண்மையான உயரம் 8 கிலோ மீட்டர்களை விட மிகமிக அதிகமாகும்.

ஓரியல் வளி மண்டலத்தின் உயரம் H எனில் வளி மண்டல அழுத்தம் $p = H\rho g$

எனவே, $\frac{p}{\rho} = Hg$

ஆகவே, K-ன் மதிப்பை சமன் 19·4-ல் பதிலீடு செய்வோமாயின்

அதனை $P = P_0 e^{\frac{-h}{H}}$ ... ... 19·8

என எழுதலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு 1 : ஒரு பாரமானியில் டாரிசெல்லி வெற்றிடத்தின் நீளம் a அங்குலம் உண்மையான வளி அழுத்தத்தின் மதிப்பு c அங்குலம் பாதரசமாக இருக்கும்போது பாரமானி b அங்குலம் பாதரசம் எனப்பதிவீடு செய்கிறது. இத்தகைய பிழை-அளவீடு வெற்றிடத்தினுள் சிறிது காற்று இருப்பதால் ஏற்படுகிறது எனில் பாரமானி d அங். பதிவீடு செய்யும்பொழுது உண்மையான அழுத்தம் $d + \frac{a(c-b)}{(b+a-d)}$ என நிறுவுக.

பாரமானியின் அளவீடு b அங்குலம் என்னும்போது காற்றுத் தம்பத்தின் நீளம் a. எனவே, பாரமானிக் குழாயின் உண்மையான நீளம் $(b+a)$. மேலும் உண்மையான வளி அழுத்தம் c ஆதலால் காற்றின் அழுத்தம் $(c-b)$ ஆகும்.

அடுத்து, பாரமானியின் அளவீடு d அங் என்னும்போது காற்றுத் தம்பத்தின் நீளம் $(b+a-d)$ ஆகும். மேலும், உண்மை யான வளி அழுத்தம் D எனக் கொள்வோமாயின் காற்றின் அழுத் தம் $(D-d)$ ஆகும். எனவே, பாயில் விதிப்படி

$$(D-d)\,(b+a-d) = (c-b).\,a$$

$$\therefore \quad (D-d) = \frac{a(c-b)}{(d+a-d)}$$

அல்லது உண்மையான வளி அழுத்தம்

$$D = d+\frac{a(c-b)}{(b+a-d)}$$

மாதிரிக்கணக்கு 2. பாரமானி உயரம் 30'', 27'' உள்ள இடங் களின் உயரவேறுபாடு 2700 அடி என்ருல் பாரமானி உயரம் 21·8' இருக்கக் கூடிய இடத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

பாரமானி உயரம் 30'' இருக்கக் கூடிய இடத்தின் உடரம் h' எனக் கொள்வோம். கடல் மட்டத்தில் பாரமானி உயரம் H_0' என்ருல்

$$\frac{30}{12} = H_0 e^{\frac{g}{k}h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

இவ்வாறே

$$\frac{27}{12} H_0 e^{-\frac{g}{k}(h+2700)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$$

பாரமானி உயரம் 21·8'' இருக்கக் கூடிய இடத்தின் உயரம் x எனக் கொள்வோமாயின்;

$$\frac{21\cdot8}{12} = H_0 e^{\frac{g}{k}}\ (h+x) \ldots\ldots\ldots \quad (iii)$$

சமான் (i), (ii) லிருந்து $\frac{30}{27} = e^{\frac{g}{k}\times 2700}$

சமன் $(i), (iii)$ லிருந்து $\frac{30}{2.18} = e^{\frac{g}{k}x}$

அல்லது

$$ln\frac{30}{27} = e\frac{g}{k}\times 2700$$

$$ln\frac{30}{21\cdot8} = \frac{g}{k}\times x$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2700} = \frac{ln\ \frac{30}{21{\cdot}8}}{ln\ \frac{30}{27}} = \frac{log\ \frac{30}{21{\cdot}8}}{log\ \frac{30}{27}}$$

$$\therefore \quad x = 2700 \times \frac{log\ \frac{30}{21{\cdot}8}}{log\ \frac{30}{27}}$$

$$= 2700 \times \frac{0{\cdot}1386}{0{\cdot}0457}$$

$x = 8191$ அடி.

பயிற்சி XIX

1. சரியான பாரமானியின் அளவீடுகள் 28·5 அங். 29·75 அங்குலமாக இருக்கும்போது தவருன பாரமானி ஒன்றின் அளவீடுகள் முறையே 28 அங்., 29 அங். ஆகும். தவருன பாரமானியின் வேறெந்த அளவீட்டுக்கும் செய்யப்பட வேண்டிய திருத்தம் $3/(62-2x)$ எனநிறுவுக.

2. வெப்பநிலை மாருமலிருப்பதாகக் கருதி பாரமானி உயரம் 705 மி.மீ இருக்கு மிடத்தின் கடல்மட்டத்திலிருந்து உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

[495 மீட்டர்கள்]

3. அட்டவணைகளிலிருந்து தேவையான குறிப்புக்களையும் சராசரி வெப்பநிலையை $0^{\circ}c$ எனவும் எடுத்துக் கொண்டு வளிமண்டல அழுத்தங்கள் 63·5 செ.மீ, 67·5 செ.மீ பாதரசம் இருக்கக்கூடிய இடங்களுக்கிடையேயுள்ள உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

[1·33 கி. மீட்டர்கள்]

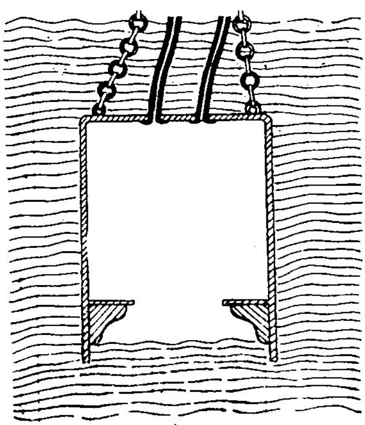
4. இ. வெ. அ-ல் காற்றின் அடர்த்தி 0·00129 கி/க.செ.மீ. எனக் கொண்டு பாரமானி அளவீடுகள் 76 செ.மீ, 75 செ.மீ. பாதரசம் இருக்கக்கூடிய இடங்களுக்கிடையேயுள்ள உயரத்தைக் கணக்கிடுக. வளிமண்டலத்தின் வெப்பநிலையை $15^{\circ}C$ எனக் கொள்க. பாதரசத்தின் அடர்த்தி 13·6 கி/ க.செ,மீ.

[111 மீட்டர்கள்]

20. பாய்பொருளியல் எந்திரங்கள்
(Hydrastatic Machines)

மூழ்கு கூண்டு (Diving bell)

ஆழ் கடலில் மனிதர்கள் சென்று முத்துக் குளிப்பது போன்ற காரியங்களைச் செய்ய மூழ்கு கூண்டு பெரிதும் பயன்படுகிறது. அதன் அமைப்பைப் படம் 20·1-ல் காணலாம். இதில், கீழ்ப்புறம் திறந்ததும் மேற்புறம் மூடியதுமான உருளை வடிவக் கலம் ஒன்று உள்ளது. அது பெரியதாகவும் நீரில் மூழ்குமளவிற்கு எடை மிக்க-



படம் 20·1

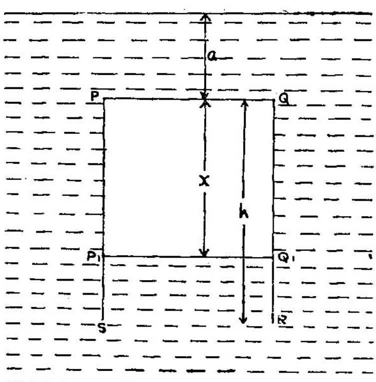
தாகவும் உள்ளது. அதனுடன் இணைக்கப்பட்ட சங்கிலிகளின் மூலமாக அது நீருக்குள் அமிழ்த்தப்படுகிறது. அது நீருக்குள் அமிழும் போது அதனுள்ளிருக்கும் காற்று அழுத்தப்பட்டு அதனுள் நீர் மட்டம் உயருகிறது. எனினும், அது மிக ஆழத்திற்கு அமிழும் போதும் அதனுள் மேற்பகுதியில் எப்பொழுதும் காற்று இருக்கும். அதனுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் இருகுழாய்களுள் ஒன்றின்

வழியாகத் தூயகாற்று அனுப்பப்பட்டு அதனுள் இருப்பவர்கள் வெளி விடும் காற்று மற்றொரு குழாயின் வழியாக வெளியேற்றப்படுகிறது.

மூழ்கு கூண்டு நீரில் அமிழும்போது அதன் மீது செயற்படும் விசைகளாவன (i) சங்கிலியின் இழுவிசை, (iii) மேல் நோக்கு அமுக்கம், (ii) அதன் எடை. சங்கிலியின் இழுவிசையானது மூழ்கு கூண்டின் எடை, மேல்நோக்கு அமுக்கம் ஆகியவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமமாகும். மேல்நோக்கு அமுக்கம் மூழ்கு கூண்டு இடம் பெயர்க்கும் நீரின் எடைக்குச் சமமாயிருப்பதாலும் அது வெவ்வேறு ஆழத்தில் வெவ்வேறு மதிப்பைக் கொண்டிருப்பதாலும் சங்கிலியின் இழுவிசையும் மாறு படும்.

h உயரமுள்ள மூழ்கு கூண்டு ஒன்று அதன் உச்சி நீர் மட்டத் திலிருந்து a ஆழத்திலிருக்குமாறு மூழ்கியிருப்பதாகக் கொள்வோம். பாயில் விதியின் அடிப்படையில் அந்த ஆழத்தில் (i அதனுள் நீர் மட்டத்தின் உயரம், (ii) சங்கிலியின் இழுவிசை. (iii) அதனுள் நீர் ஏறாமலிருக்க அதனுள் வளி அழுத்தத்தில் அனுப்பபடவேண்டிய காற்றின் பருமன் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

படம் 20-2ல் PQRS மூழ்கு கூண்டின் செங்குத்துத் தளவெட்டு முகத்தையும் XY நீர்மட்டத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் - 20·2

(i) மூழ்குகூண்டினுள் நீர்மட்ட உயரம்: நீர்மட்டத்தில் வளி அழுத்தத்தில் PQRS முழுவதையும் நிரப்பிக் கொண்டிருந்த காற்று a அழுத்தத்தில் PQ, Q_1P_1 அளவுக்கு அழுத்தப்படுகிறது. நீர்பார மானி உயரம் H, நீரின் அடர்த்தி d எனில் வளி அழுத்தம் $\pi = Hdg$

கூண்டின் உச்சியிலிருந்து அதனுள் நீர்மட்டத்தின் ஆழம் x எனில் மூழ்கு கூண்டினுள் நீர்மட்டத்தில் (A, B_1) அழுத்தம்.

$$= (x+a)\,dg + H dg$$

$$= (x+a+H)\,dg$$

மூழ்கு கூண்டின் குறுக்குப் பரப்பளவு A எனில்

வளி அழுத்தத்தில் அதாவது Hdg அழுத்தத்தில் மூழ்கு கூண்டிலுள்ள காற்றின் பருமன் $= Ah$

$(x+a+H)\,dg$ அழுத்தத்தில் அதன் பருமன் $= Ax$

எனவே பாயில் விதிப்படி

$$Ah \times Hdg = Ax\,(x+a+H)\,dg$$

அல்லது $x^2 + x\,(a+H) - Hh = O$ ... ... 20·1

சமன் 20·1 x-ல் இருமடிச் சமன்பாடாதலால் x-க்கு ஒரு நேர்குறி மதிப்பும் ஓர் எதிர்குறி மதிப்பும் உண்டு. இங்கு x-ன் மதிப்பு எதிர்குறியுடையதாக அமைய முடியாதாகையால் x-ன் நேர்குறி மதிப்பை மட்டும் நாம் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். எனவே, மூழ்கு கூண்டினுள் நீர்மட்ட உயரம் $(h-x)$ ஆகும்.

(ii) சங்கிலியின் இழுவிசை :

சங்கிலியின் இழுவிசை T, மூழ்கு கூண்டின் எடை W எனில்,

$$T = W - \text{மேல் நோக்கு அமுக்கம்.}$$

மூழ்கு கூண்டிலுள்ள காற்றின் எடை மிகமிகக் குறைவானதெனக் கருதப்படின்

$$T = W - Axdg \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 20·2$$

(iii) கூண்டினுள் நீர்புகாமலிருக்க அதனுள் வளி அழுத்தத்தில் அனுப்பப்பட வேண்டிய காற்றின் பருமன் : மூழ்கு கூண்டினுள் வளி அழுத்தத்தில் இருந்த காற்றின் பருமன் V எனவும் கூண்டு a ஆழத்தில் இருக்கும்போது அதனுள் நீர்மட்டத்தை RS-ல் வைத்திருக்க வளி அனுப்பப்படவேண்டிய காற்றின் பருமன் v எனவும் கொள்வோம். கூண்டு a ஆழத்தில் இருக்கும்போது அதனுள் இருக்கும் காற்றின் அழுத்தம் $(H+a)\,dg + Hdg$ ஆகும்.

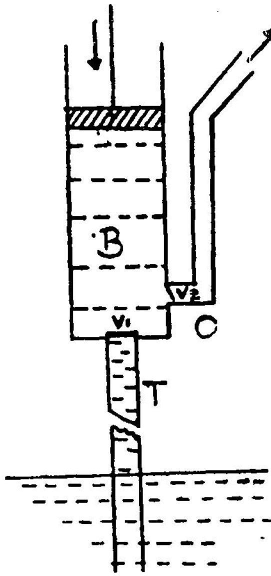
எனவே, வளி அழுத்தத்தில் (Hdg) $V+v$ பருமன் கொண்ட காற்று $(h+a)\,dg + Hdg$ அழுத்தத்தில் V பருமனைக் கொண்டுள்ளது. ஆகவே, பாயில் விதிப்படி

$$Hdg\,(V+v) = (h+a+H)\,dg \times V$$

$$v = \frac{a+h}{H} \cdot V \quad \ldots \quad \ldots \qquad 20·3$$

விசைப்பம்பு (Force pump)

இதன் அமைப்பைப் படம் 20·3-ல் காணலாம். B என்பது ஓர் உருளை வடிவ மிடா. அதன் அடிப்பகுதியில் V_2 என்ற வால்வுடன் கூடிய ஒரு பக்கக் குழாயும் (O), V_1 என்ற வால்வுடன்

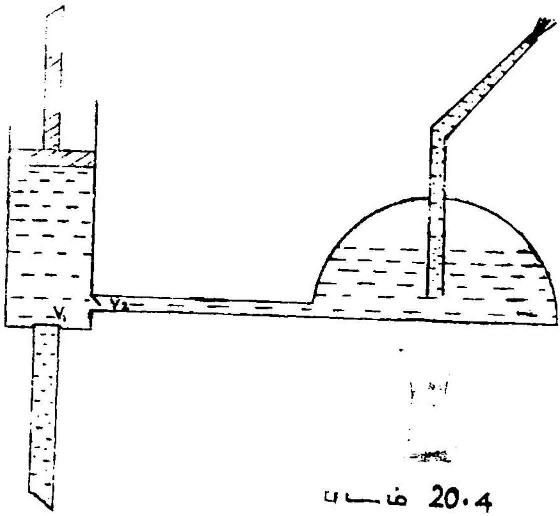


படம் 20·3

கூடிய T என்ற ஒரு குழாயும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. V_2, வெளிப் பக்கம் திறக்கக்கூடியதாயும் V_1 மேல்நோக்கித் திறக்கக்கூடியதாயும் உள்ளன. மிடாவினுள் ஒரு உந்து தண்டு (piston) இயங்குகிறது. உந்து தண்டின் ஒரு சில தாக்குகளுக்குப் பிறகு அதன் ஒவ்வொரு மேல்நோக்கு தாக்கின்போதும் மிடாவினுள் V_1-ஐத் திறந்து கொண்டு நுழையும் நீர் கீழ்நோக்குத் தாக்கின்போது V_1 மூடிக்கொள்வதால் அமுக்கப்பட்டு V_2-ஐத் திறந்து கொண்டு O என்ற குழாய் வழியே வேகமாக வெளியேறுகிறது. இதன் உதவியால் கிணற்றிலுள்ள நீரையோ நிலத்தடி நீரையோ தேவையான உயரத்திற்கு ஏற்றலாம்

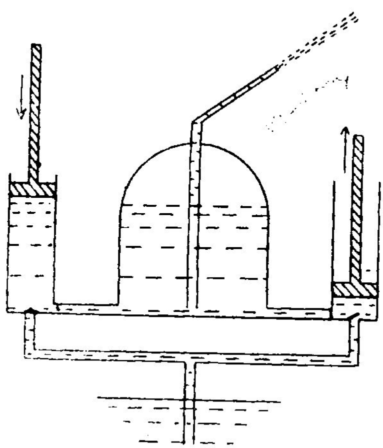
விசைப்பம்பில் உந்து தண்டின் கீழ்நோக்கு தாக்குகளின்போது மட்டுமே நீர் வெளியேற்றப்படுகிறது. விசைப்பம்பின் O என்ற குழாயை ஒரு காற்றறையுடன் படம் 20·4-ல் உள்ளதுபோல் இணைப்

பதன் மூலம் காற்றறையிலிருந்து வெளிச்செல்லும் D என்ற குழாய் வழியாக தொடர்ந்து நீர் வெளியேறும். விசைப் பம்பிலிருந்து காற்ற



படம் 20.4

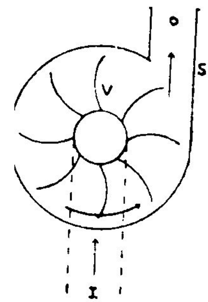
றையினுள் நீர் சென்ற பின்னர் D குழாயின் அடிப்பகுதி மூடப் படும். அதன் பின்னர் காற்றறையினுள் நுழையும் நீர் அதனுள் உள்ள காற்றை அமுக்கும். இவ்வாறு அழுக்கப்பட்ட காற்று D குழாய் வழியாக அதிக விசையோடு நீரை வெளியேற்றுகிறது.



தீயணைக்கும் எந்திரத்தில் இரண்டு விசைப் பம்புகள் உள்ளன. அவற்றின் வெளியேற்றும் குழாய்கள் ஒரு காற்றறையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டு விசைப் பம்புகளும் மாறி மாறி செயலாற்றுகின்றன. அதாவது ஒன்றின் உந்து தண்டு மேல்நோக்கி இயங்கும்போது மற்றொன்றின் உந்து தண்டு கீழ்நோக்கி இயங்கும். [படம் 22·5] இதனால்

காற்றறையினுள் தொடர்ந்து நீர் நுழையும். எனவே, காற்றறை யிலிருந்து நீரானது சீராக மேலும் அதிக விசையுடன் வெளியேறும்.

மைய விலக்கு விசைப்பம்பு (Centrifugal pump): மேற்கூறப் பட்ட விசைப்பம்புகள் செய்யக்கூடிய எல்லா வேலைகளையும் அவற்றைவிட மிக்க திறமையுடன் செய்யக்கூடியது இந்த மைய விலக்கு விசைப்பம்பு. இது, நீர் இறைக்கமட்டுமின்றி ஊது உலைகளில் காற்றை ஊதவும் பயன்படுகிறது. அதன் எளிய அமைப்பைப் படம் 20:6-ல் காணலாம். இதில் S என்ற ஓர் உலோகப் பொதியுறையினுள் V என்ற காற்றுடி ஒன்று சுழலுகிறது. பொதி யுறைக்கு தொடுவரை நிலையில் O என்ற ஒரு குழாயும், காற்றுடியின்



அச்சுக்கிணையாக I என்ற ஒரு குழாயும் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. I என்ற குழாயின் வழியாக பம்பினுள் நுழையும் நீர் O என்ற குழாய் வழியாக அதிக விசையுடன் வெளியேற்றப்படும்.

காற்றுடி சுழலும்போது அதனுள்ளிருக்கும் திரவம் மைய விலக்கு விசையால் பொதியுறையின் விளிம்பை நோக்கித் தள்ளப் படுகிறது. விளிம்பை நோக்கித் தள்ளப்படும் நீர் அங்கு அதிக அழுத்தத்திற்கு உட்பட்டு வெளியேறும்குழாய் வழியாக விசை யுடன் வெளியேறுகிறது. அதே சமயத்தில் பொதியுறையின் மையத்தில் ஏற்படும் வெற்றிடத்தை நிரப்ப வெளியிலிருந்து I என்ற குழாய் வழியே நீர் பொதியுறையினுள் நுழைகிறது. எனவே, வெளி யேறும் குழாய் வழியாக நீர் வெளியேறுகிறது.

பம்பின் ஆற்றல் அதன் வேகத்திற்கும், அது நீர் ஏற்றக்கூடிய உயரம் வேகத்தின் இரு மடிக்கும், அதன் குதிரைத் திறன் வேகத் தின் மும்மடிக்கும் நேர்விகிதத்திலிருக்கின்றன.

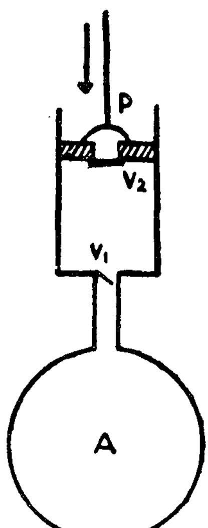
இந்தப் பம்பில் வால்வுகளோ உந்து தண்டுகளோ இல்லை யாதலால் நீருடன் சேறு, சிறு கற்கள், மணல் முதலியவை கலந் திருந்தாலும் அவற்றுடன் நீர் வெளியேறும்.

இந்தப் பம்பை இயக்குமுன் பொதியுறை நீரால் நிரப்பப்படா விடில் இது வேலை செய்யாது. எனவே, பொதியுறையை யும் அதனுள் நீர் நுழை குழாயையும் முதலில் நீரால் நிரப்பி வெளி யேற்றும் குழாயை மூடிக்கொண்டு பம்பை இயக்கியபின் வெளியேற் றும் குழாயைச் சிறிதுசிறிதாகத் திறக்க வேண்டும். நீர் நுழை குழாயின் அடிப்பகுதியில் மேல்நோக்கித் திறக்கக்கூடிய வால்வு ஒன்றைப் பொருத்துவதன்மூலம் பொதியுறையினுள் நீர் எப்பொழு தும் நிரம்பியிருக்குமாறு செய்யலாம்

காற்று ஊதும் பம்புகளும் நீர் இறைக்கும் பம்புகளைப் போலவே செயலாற்கின்றன.

காற்று அழுத்தும் பம்பு (Compression pump)

இது, ஒரு கொள் கலத்தினுள் காற்றை அழுத்தப் பயன்படு கிறது இந்தப் பம்பில் அடிப்பாகத்தில் V_1 என்ற வால்வு உள்ள,



படம் 20.7

B என்ற உருளை வடிவ மிடா உள்ளது. மிடாவினுள் V_2 என்ற வால்வு ஒன்றைக்கொண்ட ஓர் உந்து தண்டு உள்ளது. V_1, மிடாவுக்கு வெளிப்பக்கம் திறக்கக்கூடியதாயும் V_2 உட்பக்கம்

திறக்கக்கூடியதாயும் இருக்கின்றன. A என்பது அதனுள் காற்று அழுத்தப்படவேண்டிய ஒரு கொள்கலம். (படம் 20·7)

மிடாவின் அடிப்பாகத்திலிருந்து உந்து தண்டு மேலே உயர்த்தப்படும் போது உந்து தண்டின் கீழ் மிடாவுக்குள் ஓரளவு வெற்றிடம் உண்டாகிறது. A-ல் உள்ள காற்றின் அழுத்தம் V_1-ல் தாக்குவதால் அது மூடிக் கொள்ளும். அதே சமயத்தில் V_2-ல் வளி அழுத்தம் செயற்படுவதால் அது திறந்து கொண்டு வெளிக் காற்றை மிடாவுக்குள் அனுமதிக்கிறது. உந்து தண்டு கீழ்நோக்கித் தள்ளப் படும்போது மிடாவிற்குள் இருக்கும் காற்று அழுத்தப்படுவதால் V_1 மூடிக்கொண்டு V_2 திறந்து கொள்ளுகிறது. எனவே மிடாவுக்குள் இருக்கும் காற்று கொள்கலத்தினுள் செலுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறாக உந்து தண்டின் ஒவ்வொரு மேல் நோக்குத்தாக்கின் போதும் மிடாவுக்குள் நுழையும் வளி அழுத்தத்திலுள்ள காற்று கீழ் நோக்குத் தாக்குகளின்போது கொள்கலத்தினுள் செலுத்தப் படுகிறது

உந்து தண்டின் n கீழ் நோக்குதாக்குகளுக்குப் பிறகு கொள் கலத்திலுள்ள காற்றின் அழுத்தத்தைப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

மிடாவின் கொள்ளளவு v க.செ.மீ என்றும், கொள்கலத்தின் கொள்ளளவு V க.செ.மீ என்றும் கொள்வோம். உந்து தண்டின் ஒவ்வொரு கீழ் நோக்குத் தாக்கின் போதும் வளி அழுத்தத்திலுள்ள v க.செ.மீ காற்று கலத்தினுள் செலுத்தப் படுகிறது. எனவே வளி அழுத்தத்திலுள்ள V க.செ.மீ காற்றுடன் nv க.செ.மீ காற்றும் அதில் அடைக்கப் படுகிறது. கொள்கலம் விரிவடையாமல் இருக்கிறது என்று கருத்திற் கொண்டு n தாக்குகளின் முடிவில் அதில் காற்றில் அழுத்தம் P எனக் கொள்வோமானுல், வளி அழுத்தத்தில் $(V+nv)$ பருமனுள்ள காற்று P அலகு அழுத்தத்தில் V க.செ.மீ பருமனுள்ளதாக இருக்கிறது. வளி அழுத்தம் H ஆனுல், பாயில் விதிப்படி

$$PV = (V+nv)\ H$$

அல்லது

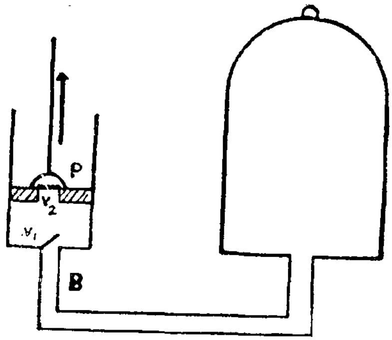
$$P = \left(\frac{V+nv}{V}\right) H$$

$$P = \left(1 + \frac{nv}{V}\right) H$$

வெளியேற்றும் பம்புகள் : (Exhaust Pumps)

இந்தப் பம்புகள் வெற்றிடமாக்க அதாவது ஒரு கொள் கலத்திலுள்ள காற்றை நீக்கப் பயன்படுகின்றன. இதில் V_2 என்ற வால்வுடன்

கூடிய ஒரு உந்து தண்டு B என்ற மிடாவினுள் இயங்கு கிறது. வெற்றிட மாக்கப் படவேண்டிய கொள்கலம் மிடாவிப



படம் 20.8

அடிப்பாகத்துடன் V_1 என்ற வால்வு மூலமாக இணைக்கப்படும் இரு வால்வுகளும் மேல் நோக்கித் திறக்கக் கூடியனவாய் இருக்கின்றன; (படம் 20.8)

தொடக்கத்தில் கொள்கலத்தினுள் உள்ளகாற்று வளி அழுத் தத்தில் உள்ளது. பம்பின் உந்து தண்டு மிடாவின் அடிப் பகுதியி லிருந்து மேலே உயர்த்தப் படும்போது மிடாவினுள் ஓரளவு வெற் றிடம் ஏற்படுகிறது. V_2-ன் மேல் வளி அழுத்தம் செயற்படுவதால் அது மூடிக் கொள்ளும். கொள்கலத்திலுள்ள காற்று V_1-ஐத் திறந்து கொண்டு மிடாவினுள் நுழைகிறது. உந்து தண்டு கீழ் நோக்கித் தள்ளப்படும்போது மிடாவினுள் காற்று அழுத்தப் படுவதால் V_1 மூடிக்கொண்டு V_2 திறந்து கொள்ளுகிறது. அழுத்தப் பட்டகாற்று V_2 வழியே வெளியேறுகிறது. இவ்வாருக. ஒவ்வொருமேல் நோக்குத் தாக்கின் போதும் கொள்கலத்திலிருந்து மிடாவினுள் நுழைந்தகாற்று ஒவ்வொரு கீழ் நோக்குத் தாக்கின் போதும் வெளியேற்றப் படுகிறது. உந்து தண்டின் சிலதாக்குகளுக்குப் பின்னர் கொள்கலம் ஏறத்தாழ வெற்றிடமாக்கப்படும்.

உந்து தண்டின் n தாக்குகளுக்குப் பிறகு கொள்கலத்தினுள் அழுத்தத்தைப்பின் வருமாறு காணலாம். கொள்கலத்தின் பருமன் V எனவும் மிடாவின் பருமன் v எனவும் கொள்வோம். தொடக்கத் தில் கொள் கலத்தினுள் காற்றின் அழுத்தம் வளி அழுத்தம் (H)

எனக்கருதுவோம். கொள்கலத்தையும் மிடாவையும் இணைக்கும் குழாயின் பருமனை மிகமிகச் சிறியதாகக் கருதலாம்.

உந்து தண்டின் முதல் மேல்நோக்குத் தாக்கின் முடிவில் V பருமனைக் கொண்டிருந்தவாயு வெப்ப நிலை மாறாமல் விரிவடைந்து $(V+v)$ பருமனைப் பெறுகிறது விரிவுக்குப்பின் காற்றின் அழுத்தம் P_1 எனக்கொள்வோம்.

பாயில் விதிப்படி $P_1\ (V+v) = H \times V$

$$P_1 = \frac{HV}{V+v}$$

உந்து தண்டு அடுத்து கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது கொள்கலத்தினுள் அழுத்தம் மாறாது

உந்து தண்டின் இரண்டாவது மேல் நோக்குத் தாக்கின்போது P_1 அழுத்தத்தில் V பருமனைக் கொண்டிருந்த காற்று தாக்கின் முடிவில் விரிவடைந்து $(V+v)$ பருமனைப் பெறுகிறது. எனவே இரண்டாவது மேல் நோக்குத் தாக்கின் முடிவில் கொள்கலத்தினுள் அழுத்தம் P_2 எனக் கொள்வோமாயின்

$$P_2\ (V+v)\quad P_1 \times V$$

$$P_2 = P_1 \times \frac{V}{V+v}$$

P_1-ன் மதிப்பைப் பதிலீடு செய்வோமாயின்

$$P_2 = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$$

உந்து தண்டின் மூன்றாவது தாக்கின் முடிவில் அழுத்தம் P_3 எனில்

$$P_3\ (V+v) = P_2\ V$$

அல்லது $$P_3 = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^3$$

இவ்வாறே ஒரு மேல் நோக்குத்தாக்கு, ஒரு கீழ் நோக்குத் தாக்கு ஆகிய இரண்டும் சேர்ந்த நிகழ்ச்சியை ஒரு முழுத்தாக்காகக் கருதினால் n தாக்குகளுக்குப் பிறகு கொள் கலத்தினுள் காற்றின் அழுத்தம் Pn எனில்

$$P_n = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^n \quad \ldots \quad \ldots \quad 20.4$$

சமன் 20. 4-லிருந்து, எந்தவொரு தாக்கின் முடிவிலும் கொள் கலத்தினுள் அழுத்தம் தொடக்கத்திலுள்ள அழுத்தத்தின் ஒரு பகுதியாகவே இருக்கும் என அறியலாம். எனவே. இத்தகைய பம்பின் உதவியால் முழு வெற்றிடத்தை அடைய முடியாது என்பது

தெளிவு. இந்தப்பம்பின் உதவியால் பெறக்கூடிய காற்று நீக்கத்திற்குப் பின்வரும் காரணங்களால் ஒரு எல்லை உண்டு.

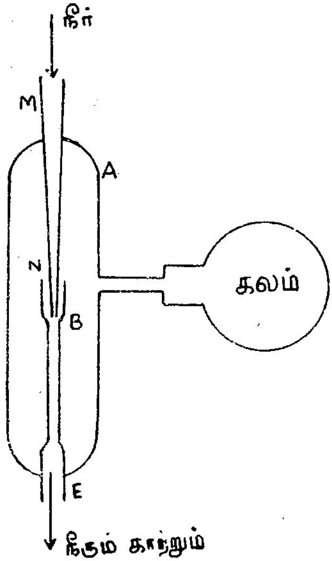
(i) உந்து தண்டின் சில தாக்குகளுக்குப் பிறகு கொள்கலத்திலுள்ள காற்றின் அழுத்தம் V_1-ஐத் திறக்க முடியாத அளவுக்குக் குறைந்து விடுகிறது. அதன் பின்னர் பம்பு செயலாற்றுவதில்லை.

(ii) உந்து தண்டு மிடாவின் அடிப்பகுதியில் இருக்கும்போது உந்து தண்டிற்கும் மிடாவின் அடிப்பகுதிக்கும் இடையே எப்போதும் சிறிது இடைவெளி இருக்கிறது. இதில் எப்போதும் சிறிது காற்று இருக்குமாதலால் உந்து தண்டு மேலே உயர்த்தப்படும்போது இது ஒரு அழுத்தத்தைக் கொடுத்து V_1-ஐ மூடிவைக்க முயலும்.

இந்தப்பம்பின் உதவியால் ஏற்படுத்தப்படக்கூடிய மிகக் குறைந்த அழுத்தம் 1மி.மீ பாதரசமாகும்.

வடிபம்பு (Filter Pump)

ஒரு கலத்தினுள் வெற்றிட முண்டாக்கப் பயன்படும் பம்புகளுள்



படம் 20.9

மிக எளியது இந்த வடிபம்பு. வழக்கமாக இந்தப் பம்பு வடிதலை ஊக்குவிக்கப் பயன்படுத்தப் படுவதால் இது அப்பெயர் பெற்றது. இதில்

உலோகத்தால் அல்லது கண்ணுடியாலான A என்ற ஒரு குழாயின் (படம் 20. 9) அடிப்பகுதியில் BE என்ற குழாயும் மேற் பகுதியில் M N என்ற ஒரு குழாயும் அதன் குறுகிய முனை BE குழாயினுள் சற்று செல்லுமாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளன. வெற்றிட மாக்கப்பட வேண்டிய கொள்கலம் A-ல் உள்ள மற்ருெரு பக்கக் குழாயுடன் இணைக்கப்படுகிறது. M N குழாயின் M முனை ஒரு நீர்க்குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டு அதன் வழியே வேகமாக நீர் செலுத்தப்படும். இவ்வாறு N வழியே வேகமாகச் செல்லும் நீர் அதனுடன் Aயிலிருந்து காற்றையும் இழுத்துச் செல்லுகிறது எனவே, கொள்கலத் திலிருந்து காற்று உறிஞ்சப் படுகிறது. இதனைக் கொண்டு உருவாக்கப் படக் கூடிய மிகக் குறைந்த அழுத்தம் 15மி.மீ பாதரசமாகும்.

விஞ்ஞான வளர்ச்சியின் பயனுய் தோன்றிய X-கதிர்க்குழாய் கள், மின்குழாய்கள் போன்ற பல கருவிகளில் தேவைப்படுமளவுக்கு இதுவரை கூறப்பட்ட வெளியேற்றும் பம்புகள் வெற்றிடத்தை உருவாக்க முடியவில்லையாதலால் மேலும் மேலும் திறமிக்க வெளி யேற்றும் பம்புகள் அமைக்கப்பட்டன. அவற்றைப்பற்றி இப்பொழுது காண்போம்.

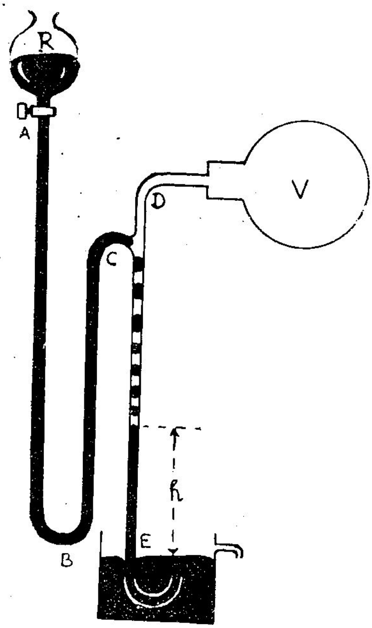
பாதரச பம்புகள் (Mercury pumps)

உந்து தண்டையும் வால்வுகளையும் கொண்ட வெளியேற்றும் பம்புகளில் உந்துதண்டின் பக்கங்களிலும் வால்வுகளிலும் ஏற்படக் கூடிய காற்றுக் கசிவின் பயனுய் திறம் குறைந்தவையாயிருக் கின்றன. மேலும், ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்குக் கீழ் அழுத்தம் குறைந்த பின்னர் காற்றினுல் வால்வுகளைத் திறக்க முடிவதில்லை. எனவே, 0·001 மி. மீ. பாதரச அளவிற்குக் குறைந்த அழுத்தங் களைப் பெற உந்து தண்டு, வால்வு ஆகியவையற்ற பாதரச பம்புகள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

ஸ்ப்ரென்ஜல் பாதரசபம்பு (Sprengel's mercury pump)

இதில் ABC என்ற U-வடிவ குழாயின் A முனையுடன் அடைப் பான் ஒன்றின் மூலமாக ஒரு சேமக்கலமும் (R) C முனையுடன் DE என்ற ஒரு செங்குத்துக் குழாயும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இக் குழாயு டன் D முனையுடன் வெற்றிடமாக்கப்படவேண்டிய கொள்கலம் இணைக்கப்படுகிறது; E முனை ஒரு கிண்ணத்திலுள்ள பாதரசத்தினுள்

அமிழ்ந்திருக்கிறது. [படம் 20·10]. C-க்குக் கீழ் DE குழாயின்



படம் 20·10

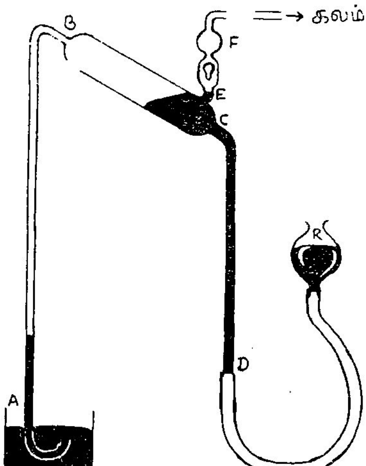
நீளம் 76 செ. மீ-க்கு மேல் இருக்குமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

சேமக்கலத்தில் பாதரசத்தை நிரப்பி அடைப்பானைத் திறந்து விட்டால் பாதரசம் U-வடிவக் குழாயை முழுதும் நிரப்பியபின் C-ல் சிறுசிறு குமிழ்களாகச் சிதைந்து DE குழாய் வழியே கீழிறங்குகிறது. கொள்கலத்திலிருந்து அத்தகைய பாதரசக் குமிழ்களுக்கிடையே அடைபடும் காற்றுக் குமிழ்களுடன் கீழிறங்கி E முனையில் வெளிக்காற்றுடன் கலக்கிறது. கொள்கலத்தினுள் அழுத்தம் குறையக்குறைய DE குழாயில் பாதரசம் மேலேறுகிறது. கொள்கலத்தினுள் முழுவெற்றிடம் ஏற்படும்போது ஏறத்தாழ பாதரசப் பாரமானி உயரத்திற்குச் சமமான உயரத்திற்கு DE குழாயில் பாதரசம் ஏறுகிறது. சேமக்கலம் முழுவதும் காலியாகாவண்ணம் கிண்ணத்துள் சேரும் பாதரசத்தை அவ்வப்போது சேமக்கலத்திற்கு மாற்றவேண்டும். சேமக்கலம் முழுவதும் காலியானாலும் அதன் வழியே கொள்கலத்தினுள் வெளிக்காற்று செல்லாமல் BC குழாயிலுள்ள பாதரசம் தடுக்கிறது.

பம்பு திறமையுடன் வேலைசெய்ய DE குழாயின் CE பகுதியின் நீளம் 76 செ. மீ-க்கு மேல் இருக்கவேண்டும். இதில் உள்ள ஒரே ஒரு வசதி குறைவானது அது அலுப்பூட்டும் வகையில் மிகவும் மெதுவாக வேலை செய்வதேயாகும். ஆனால் அது உருவாக்கும் குறைந்த அழுத்தத்தை அதன்மூலமே அளவிடக்கூடிய வசதி உண்டு. DE குழாயில் பாதரசத் தம்பத்தின் உயரத்திற்கும் பாதரசப் பாரமானி உயரத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு கொள்கலத்திலுள்ள காற்றின் அழுத்தத்தைக் கொடுக்கும்.

டோப்ளர் பம்பு (Toepler pump)

இதில் BC என்ற நீண்ட கண்ணாடிக்குமிழின் முனைகளில் சுமார் 80 முதல் 90 செ. மீ வரை நீளமுள்ள AB, CD என்ற செங்குத்துக் குழாய்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. [படம் 20·11] BA குழாய் சுமார் 1 மி. மீ குறுக்களவுடைய ஒரு நுண்குழாய். அதன்



படம் 20.11

A முனையானது கிண்ணம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட பாதரசத்தினுள் அமிழ்ந்துள்ளது. குழாயின் C முனைக்கருகில் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் E என்ற பக்கக்குழாய் ஓர் இரட்டைக்குமிழ் மூலமாக வெற்றிடமாகப்படவேண்டிய கொள்கலத்துடன் இணைக்கப்படுகிறது. இரட்டைக்குமிழ்களுள் ஒன்றில் மிதக்கும் வால்வு (V) ஒன்று இயங்குகிறது. CD குழாயின் D முனை ஓர் இரப்பர்குழாய் மூலம் பாதரசம் நிரம்பிய சேமக்கலம் (R) ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

சேமக்கலத்தைக் கீழே இறக்கினுல் பாதரசமட்டம் C-க்குக் கீழிறங்கும். எனவே, கொள்கலத்திலுள்ள காற்று BC-ஐ நிரப்பும். இப்பொழுது சேமக்கலம் உயர்த்தப்படின் BC-ல் பாதரசம் ஏறி அதனுள் இருக்கும் காற்றை அழுத்தி BA குழாய் வழியாக வெளியேற்றுகிறது. அதே சமயத்தில் வால்வு பாதரசத்தில் மிதந்து பம்பிலிருந்து கொள்கலத்தினுள் பாதரசம் செல்லாமல் அடைத்து விடுகிறது. திரும்பவும் சேமக்கலத்தைக் கீழே இறக்கும்போது கொள்கலத்திலிருந்து BC-ஐ நிரப்பும் காற்று சேமக்கலத்தை உயர்த்துவதன்மூலம் வெளித்தள்ளப்படுகிறது. இவ்வாறு சேமக்கலத்தைப் பலமுறை கீழிறக்கி மேலே தூக்கினுல் கொள்கலத்தினுள் வெற்றிடம் ஏற்படும். ஒவ்வொரு முறையும் BA வழியே காற்றை வெளித்தள்ளும் பாதரசம் கிண்ணத்தில் சேரும். அதை அவ்வப்போது சேமக்கலத்திற்கு மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும்.

இந்தப் பம்பின்மூலமும் 0·001 மி. மீ அளவுக்குக் குறைந்த அழுத்தத்தை உருவாக்க முடியுமெனினும் இதனை இயக்குவது சலிப்பூட்டுவதாக உள்ளது.

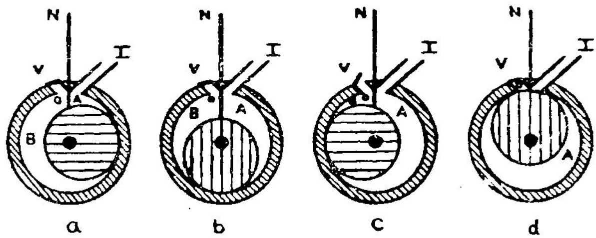
இவற்றைவிட மிக விரைவிலும் அதே அளவுக்குக் குறைந்த அழுத்தத்தையும் உருவாக்கக்கூடிய சுழற்பம்புகள் அமைக்கப்படும்வரை இவைப் பெரிதும் பயன்பட்டு வந்தன.

சென்கோ உயர் வெற்றிட பம்பு (Cencohyvac pump) :

சுழற்பம்புகளில் மிக அதிக அளவில் பயன்படும் பம்பு சென்கோ உயர் வெற்றிடப் பம்பு ஆகும்.

இதில், உருளை வடிவப் பொதியுறை ஒன்றினுள் கெட்டியான உருளை ஒன்று உறழ்வட்டமாக (eccentrically) இயங்குகிறது. கெட்டியான உருளையைச் சுழலி அல்லது சுழற்கூறு (rotor) என்றும் பொதியுறையை நிலைக்கூறு (stator) என்றும் அழைக்கலாம். சுழற்கூறு ஒரு மின்சுழற்றியின் உதவியால் இயக்கப்படுகிறது. சுழற்கூறு சுழலும்போது நிலைக்கூறின் உட்பரப்பைத் தொட்டுக்கொண்டே செல்கிறது. நிலைக்கூறில் I, O என்னும் இரு திறப்புகள் (openings) உள்ளன. O என்ற திறப்பு, காற்று வெளியேறும் வழியாக அமைகிறது. அது V என்ற ஒரு வால்வால் மூடப்பட்டுள்ளது. வால்வு வெளிப்பக்கம் திறக்கக்கூடியதாய் இருக்கிறது. வெற்றிடமாக்கப்படவேண்டிய கலம் பம்புடன் I மூலமாக இணைக்கப்படுகிறது. இருதிறப்புகளுக்குமிடையே மேலும் கீழும் இயங்கும் ஒரு தகடு (N) உள்ளது. இத்தகடு ஒரு விற்கம்பியினுல் சுழற்

கூறேடு அழுந்தியிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. இதனுல் நிலைக் கூறின் உட்பகுதி A, B என்ற இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. சுழற்கூறு உறழ்வட்டமாகச் சுழலுவதால் ஒரு பகுதியின் கொள் ளளவு, படிப்படியாகக் குறையும் அதே நேரத்தில் மற்றப் பகுதியின் கொள்ளளவு அதிகமாகிறது. சுழற்கூறின் ஒரு சுழற்சியின் அடுத்தடுத்த நிலைகளைக் காட்டும் படங்களிலிருந்து



படம் 20.12

[படம் 20·12] பம்பு செயலாற்றுவதை எளிதில் விளங்கிக் கொள்ள லாம்.

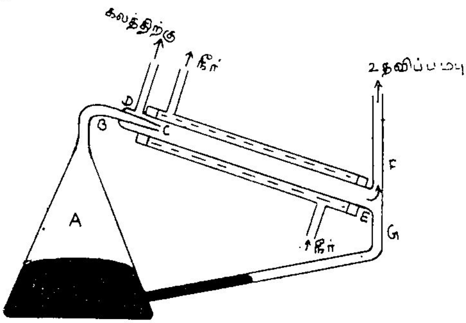
சுழற்கூறு படம் 20·12*a*-ல் காட்டப்பட்டுள்ள நிலையிலிருந்து சுழலும்போது A பகுதியின் கொள்ளளவு அதிகமாகிறது. எனவே, அதனுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் கொள்கலத்தினுள் உள்ள காற்று அதனுள் விரிவடைகிறது. அதே சமயத்தில் B பகுதியின் கொள்ளளவு குறைவதால் அதனுள் உள்ள காற்று அமுக்கப்பட்டு V வழியாக வெளியேற்றப்படுகிறது. பம்பு செயல்படத் தொடங்கிய சில நிமிடங்களில் ஏறத்தாழ 0·001 மி. மீ பாதரசம் அளவுக்கு வெற்றிடம் உண்டாக்கக் கூடியதாயுள்ளது.

விரவிப் பரவு முறைப் பம்புகள் (Diffusion pumps)

தற்காலத்தில் விரவிப் பரவுமுறைப் பம்புகளின் உதவியால் சுமார் 10^{-8} மி. மீ. அளவுக்கு மிக உயர்ந்த வெற்றிடம் உருவாக்கப் படுகிறது. விரவிப் பரவுமுறைப் பம்பு முதன்முதலில் காடே (Gaede) என்பவரால் உருவாக்கப்பட்டு பின்னர் H P. வாரன் என்பவரால் சீர் செய்யப்பட்டது. வெற்றிடமாக்கப்படவேண்டிய கலத்தினுள் அழுத்தம் 10^{-2} மி. மீ. அளவுக்குக் குறைவாக இருந் தால்தான் பரவுமுறை பம்புகள் திறமையாக வேலை செய்ய முடியு மாதலால் முதலில் கலத்தினுள் உதவிப் பம்பு அல்லது முன்னேடிப்

பம்பு (Backing pump) ஒன்றின் உதவியுடன் அந்த அளவுக்கு வெற்றிடம் உண்டாக்கப்படுகிறது. சென்கோ உயர் வெற்றிடபம்பு மிகச்சிறந்த உதவிப் பம்பாகப் பயன்படுகிறது. பரவுமுறை பம்பு ஒன்றும் சென்கோ உயர் வெற்றிடபம்பு ஒன்றும் சேர்ந்த கூட்ட மைம்பு சில நிமிடங்களில் 10^{-8} மி. மீ. வெற்றிடத்தை உருவாக்குகிறது.

வாரன் பம்பு (Waran's pump) : இந்தப் பம்பு H பரமேசுவரன் என்னும் நம் நாட்டுப் பேராசிரியரால் அமைக்கப்பட்டது. இதில் A என்ற கூம்பு வடிவக் கொதிகலத்துடன் இணைக்கப்பட்ட தூம்பு வாயுடன் (nozzle) கூடிய BC என்ற வளைந்த குழாய் ஒன்று உள்ளது. [படம் 20·13]. BC குழாய் DE என்ற மற்ரொரு குழாயி



படம் 20.13

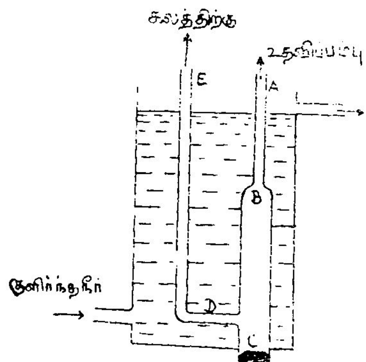
னுள் இருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. DE குழாயின் மறுமுனை FG என்ற செங்குத்துக்குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. FG குழாயின் F முனை உதவிப்பம்புடனும், G முனை கொதிகலத்துடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. DE குழாயின் D முனையிலுள்ள பக்கக் குழாயின்மூலம் வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய கலம் இணைக்கப் படுகிறது. DC குழாய் திரவமாக்கி (condenser) ஒன்றினுல் சூழப் பட்டு திரவமாக்கியின் வழியாகக் குளிர்நீர் செலுத்தப்படுகிறது.

கொதிகலத்தினுள் பாதரசம் கொதிக்க வைக்கப்பட்டு பாதரச ஆவி உருவாக்கப்படுகிறது. உதவிப்பம்பு முதற்படி வெற்றிடத்தை உருவாக்குவதுடன் தூம்புவாய் வழியாக பாதரச ஆவி அதிவேகத் துடன் வெளிவரும்படியும் செய்கிறது. கொள்கலத்திலுள்ள காற்று தூம்பு வாயினருகில் பாதரச ஆவியுள் விரவிப்பரவுகிறது. இவ்வாறு பரவும் காற்ருனது பாதரச ஆவியுடன் DE குழாயின் E முனையை நோக் கிச்செல்லுகிறது. அங்கு, அக் காற்ருனது உதவிப் பம்பின்மூலம்

வெளியேற்றப்படுகிறது. ஆனால் பாதரச ஆவிகுளிர்வடைந்து திரவமாக மாறி மீண்டும் கொதிகலத்தை அடைகிறது.

பாதரசம் அதன் ஆவி அழுத்தத்தையே கொடுப்பதால் தற்காலத்தில் பாதரசத்திற்குப் பதிலாக அதனைவிடக் குறைந்த ஆவி அழுத்தத்தை (10^{-6} மி. மீ)-க்கு கொண்டுள்ள அப்பீசான் எண்ணெய் (Apiezon oil) பயன்படுத்தப்படுகிறது. அப்பீசான் எண்ணெயைப் பயன்படுத்தும் வாரன் பம்பு சென்கோ உயர் வெற்றிடப் பம்பு ஒன்றின் உதவியுடன் 10^{-8} மி. மீ அளவுக்கு மிக உயர்ந்த வெற்றிடத்தை விளைவிக்கிறது.

விரவிப் பரவுமுறைப் பம்பில் உள்ள திரவ ஆவியும் அதனுடன் இயங்கும் உதவிப் பம்புகளிலுள்ள எண்ணெய், எண்ணெய்ப்பசை முதலியனவற்றின் ஆவிகளும் அழுத்தங்களைக் கொடுக்கின்றன. எனவே, அத்தகைய ஆவிகளை நீக்கிவிட வேண்டும். அவைகள் திரவக்காற்றுத் தடுப்பு (liquid air trap) அல்லது பொட்டாசியம் தடுப்பு (potassium trap) ஆகியவற்றின் உதவியால் நீக்கப்படுகின்றன. திரவக்காற்றுத் தடுப்பு என்பது பம்பின் ஒரு வசதியான பகுதியை திரவக்காற்றால் சூழ்ந்திருக்குமாறு செய்யும் கருவியாகும். அப் பகுதிவழியாகச் செல்லும் ஆவிகள் திரவயாக்கப்பட்டு நீக்கப்படுகின்றன. பொட்டாசியம் தடுப்பு என்பது உட்புறம் தூய பொட்டாசியம் பூசப்பட்ட ஒரு குழாயாகும் இது பம்பின் ஒரு பகுதியில் இணைக்கப்படும். இதில் உள்ள பொட்டாசியம் பூச்சு காற்றுடன் கலந்த ஆவிகளை உட்கவர்ந்து கொள்ளுகிறது.



படம் 20 4

எஃகுச் சீசா பம்பு (Steel bottle pump) கண்ணாடியால் செய்யப்பட்ட விரவிப் பரவுமுறைப் பம்புகள் உடையக் கூடியனவாயிருப்

படுதால் அவற்றிற்குப் பதில் எஃகுப் பம்புகள் குறிப்பாகத் தொழில் துறையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இதுவும் வாரன் பம்பைப் போலவே செயலாற்றுகிறது. எஃகுச் சீசா பம்பில் உச்சியில் A என்ற குழாயும் அடிப்பகுதியில் DE என்ற பக்கக் குழாயும் இணைக் கப்பட்ட ஒரு நீண்ட எஃகுக் குமிழ் (BC) உள்ளது. [படம் 20·14]. இம் முழு அமைப்பும் மற்றுமொரு கலத்தினுள் வைக்கப்பட்டு அக் கலத்தின் வழியே குளிர்நீர் செலுத்தப்படுகிறது. பக்கக்குழாயு டன் வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய கலமும் A குழாயுடன் உதவிப் பம்பும் இணைக்கப்படுகின்றன. குமிழிலுள்ள பாதரசம் அல்லது அப்பீசான் எண்ணெய் சூடேற்றப்படும்போது ஆவியாகிறது. கொள்கலத்தினுள் உள்ள காற்று இந்த ஆவியுடன் கலந்து DE என்ற குழாய் வழியாகச் செல்லுகிறது. அவ்வாறு செல்லும்போது பாதரச ஆவி அல்லது எண்ணெய் ஆவி குளிர்விக்கப்பட்டு மீண்டும் குமிழை அடைகிறது. ஆனால் ஆவியுடன் கலந்த காற்று உதவிப்பம்பின் வழியாக வெளியேற்றப்படுகிறது.

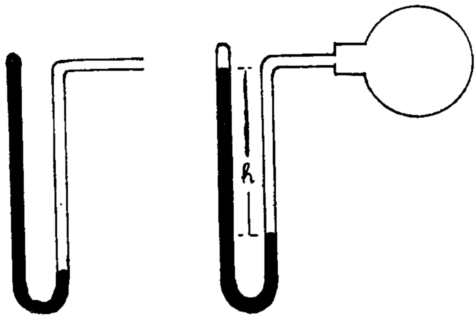
குறைந்த வெற்றிடத்திலிருந்து உயர்ந்த வெற்றிடத்தை அடை வதற்கு மற்றொருமுறை உறிஞ்சிகளையும் (absorbents) உலோக உறிஞ்சிகளையும் (gelters) பயன்படுத்துவதாகும்.

தேங்காய் ஓட்டுக் கரித்தூள் மிகச்சிறந்த உறிஞ்சியாகும். அது வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப் பட்ட பக்கக்குழாய் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டு உதவிப்பம்பு இயங் கும்போது சூடேற்றப்படுகிறது. உதவிப்பம்பு நிறுத்தப்பட்டவுடன் உறிஞ்சி திரவக்காற்றினுல் குளிர்விக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது உறிஞ்சி கொள்கலத்தில் எஞ்சியிருக்கும் காற்றை உட்கவர்ந்து கொள்ளும். இறுதியாக உறிஞ்சியடங்கிய பக்கக்குழாய் ஊது சுவாலை ஒன்றின் உதவியால் உருக்கி நீக்கப்படுகிறது.

மேற்கூறப்பட்ட உறிஞ்சிகளுக்குப் பதிலாக உலோக உறிஞ்சி களைப் (gelters) பயன்படுத்தலாம். பாஸ்பரஸ், மக்னீசியம் போன்ற உலோகங்கள், உலோக உறிஞ்சிகளாகப் பயன்படுகின்றன. அவை வெற்றிடமாகப்படவேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப்பட்ட ஒரு பக்கக் குழாயினுள்ளோ அல்லது அக்கலத்தினுள்ளேயோ வைக்கப் பட்டு சூடேற்றப்படுகின்றன. அதே சமயத்தில் ஓர் உதவிப் பம்பும் இயக்கப்படுகிறது. சூடேற்றப்பட்ட உலோக உறிஞ்சிகள் கொள்கலத்தினுள் எஞ்சியிக்கும் காற்றை நீக்குவதுடன் கலத்தின் சுவர்களில் மறைந்திருக்கும் வாயுக்களையும் நீக்க உதவுகின்றன.

குறைந்த அழுத்தங்களின் அளவீடு:

ஓரளவுக்குக் குறைந்த அழுத்தங்களை மூடிய U-குழாய் அழுத்தமானியைக் கொண்டு அளவிடலாம். மூடிய U-குழாய் அழுத்தமானி என்பது ஒருபுயம் மூடப்பட்டுச் செங்குத்தாகப் பொருத்தப்

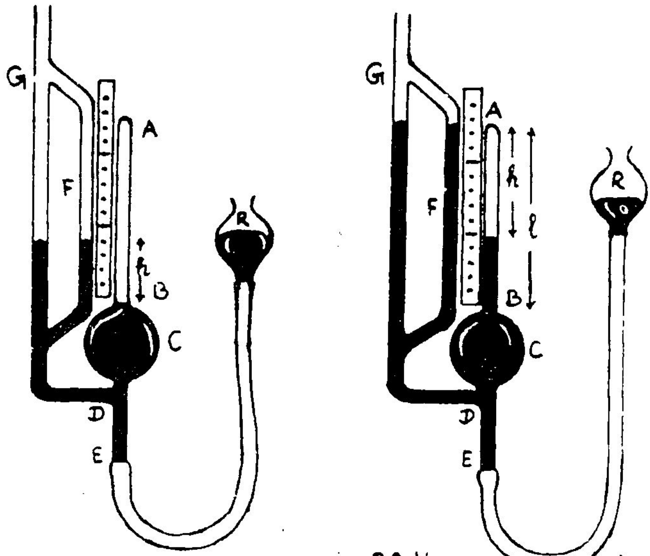


படம் 20.15

பட்ட ஒரு U-வடிவக் குழாயாகும். [படம்20·15]

முதலில், இதன் மூடப்பட்ட புயம் முழுவதும், திறந்த புயத்தின் ஒருபகுதியும் பாதரசத்தால் நிறப்பப்படுகிறது (படம்20·15a). பின்னர், திறந்த புயத்துடன் அழுத்தம் அளவிடப்படவேண்டிய காற்று அல்லது வாயு நிரம்பிய கலம் இணைக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது மூடிய புயத்தில் பாதரசம் கீழிறங்கி திறந்த புயத்தில் பாதரசம் மேலேறும். பாதரச மட்டங்களின் உயர வேறுபாடு கலத்தில் வாயுவின் அழுத்தத்தைக் கொடுக்கிறது.

U-வடிவ அழுத்த மானியைக்கொண்டு அளவிடமுடியாத மிகக்குறைந்த அழுத்தங்களைத் துல்லியமாக அளவிட மக்லியாடு அளவி (Mc leod gauge) பயன்படுகிறது. இதன் அமைப்பைப் படம் 20·16-ல் காணலாம். இதில் C என்ற ஒரு குமிழின் உச்சியில் A B என்ற சீரான நுண்குழாய் ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வெற்றிடமாகப்பட்ட கலம் குமிழிக்குச் சற்றுக் கீழ் இணைக்கப்பட்ட DG என்ற பக்கக் குழாயுடன் இணைக்கப்படும் AB நுண்குழாயின் குறுக்களவைக் கொண்ட F என்ற குழாய் DG-க்கு இணையாக அதனுடன் D-க்கும் G-க்கும் இடையே இணைக்கப்பட்டு AB-க்கு அருகில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB-க்கும் F-க்கு மிடையே அளவு கோல் (S) ஒன்றும் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. C-குமிழுடன் இணைக்கப்பட்ட DE என்ற குழாய் பாதரசம் நிரப்பப்பட்ட சேமக் கலம் ஒன்றுடன் இரப்பர்குழாய் மூலமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. குமிழின் மொத்தப்பருமனையும் (V), AB நுண்குழாயின் பருமனையும் (v) ஒரு சோதனைமூலம் அளவிட்டுக்கொள்ளலாம்.



படம் 20·16

கலத்திலுள்ள காற்றின் அழுத்தத்தை அளவிட முதலில் பாதரசம் C-க்குக் கீழ் இறங்கும் வரை சேமக்கலம் கீழிறக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது வெற்றிடமாக்கப்பட்ட கலம் C குமிழுடன் தொடர்பு கொண்டிருப்பதால் C-ல் உள்ள காற்றும் அதே அழுத்தத்தில் இருக்கும். அந்த அழுத்தம் p என இருக்கட்டும்.

அடுத்து பாதரச மட்டம் AB நுண்குழாயின் அடிப்பகுதி (B) யை அடையும் வரை சேமக்கலம் மெதுவாக மேலே தூக்கப்படுகிறது. இதனால் F குழாயிலும் பாதரசம் மேலேறுகிறது. AB குழாயிலுள்ள பாதரசத்தம்பத்தின் உயரம் (h) அளவிடப்படுகிறது. AB, F குழாய்கள் ஒரே குறுக்குப் பரப்பளவையுடையனவாதலால் நுண்குழாய் விளைவுகளால் ஏற்படும் பிழைகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. இப்பொழுது நுண்குழாயினுள் அடைபட்டிருக்கும் காற்றின் அழுத்தம் $(p+h)$ ஆகும்; பருமன், நுண்குழாயின் பருமனை v ஆகும்.

பாதரசமட்டம் D-ல் இருக்கும்போது p அழுத்தத்தில் $V+v$ பருமனைக் கொண்டிருந்த காற்று பாதரசமட்டம் B-ல் இருக்கும் போது $(p+h)$ அழுத்தத்தில் v பருமனைக்கொண்டிருக்கும். காற்று AB குழாயினுள் மெதுவாக அழுக்கப்படுவதால் வெப்பநிலை மாறாமலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே, பாயில்விதிப் படி

$$p\ (V+v) = v\ (p+h)$$

அல்லது

$$PV = hv$$

எனவே

$$P = h\frac{v}{V} \quad \dots \quad \dots \quad 20{\cdot}5.$$

சமன்பாடு 20·5-லிருந்து p-ன் மதிப்பை அறியலாம்.

மக்லியாடு அளவி மற்ருெரு முறையிலும் பின்வருமாறு பயன் படுத்தப்படுகிறது. C குமிழ் கலத்துடன் தொடர்பு கொள்ளுமாறு செய்தபின்னர் F குழாயில் பாதரசமட்டம் AB குழாயின் உச்சி (A) யுடன் ஒரே மட்டத்தில் இருக்கும்வரை சேமக்கலம் மெதுவாக மேலே தூக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது AB குழாயிலும் F குழாயிலும் உள்ள பாதரசமட்டங்களின் உயர வேறுபாடு (h) அளவிடப்படு கிறது. இனி AB குழாயின் குறுக்குப் பரப்பவு S எனில் அதனுள் அடைப்பட்டிருக்கும் காற்றின் பருமன் hs ஆகும்; அழுத்தம் $p+h)$ ஆகும். AB குழாயின் மொத்த நீளம் l எனில் அதன் பருமன் $v=ls$ ஆகும்.

பாதரச மட்டம் D-ல் இருக்கும்போது p அழுத்தத்தில் $(V+ls)$ பருமனைக்கொண்டிருந்த காற்று AB குழாயினுள் அகப்பட்டபின்னர் $(p+h)$ அழுத்தத்தில் hs பருமனைக் கொண்டுள்ளது. எனவே,

பாயில் விதிப் படி

$$P\ (V+ls) = (p+h)\ hs$$

அல்லது

$$P = \frac{h^2s}{V+(l-h)s} \quad \dots \quad \dots \quad 20{\cdot}6$$

$(bl—h)\ s$ ன்மதிப்பு V-ன்மதிப்புடன் ஒப்பு நோக்கும்போது மிக மிகச்சிறியதாயிருக்குமாதலால் சமன் 20·6 ஐ

$$P = \frac{h^2s}{V} \quad \dots \quad \dots \quad 20{\cdot}7$$

என எழுதலாம்.

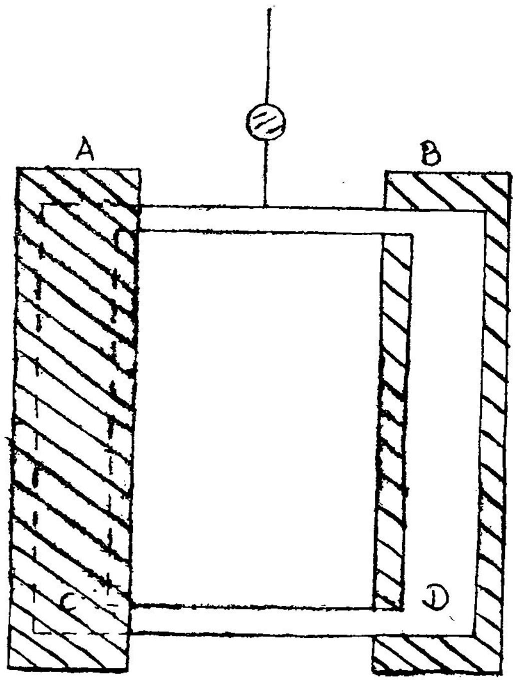
சமன் 20·7-ல் S,V ஆகியவை மாறிலிகளாதலால்,

$$P \propto h^2$$

இம் முறையில் அளவிடப்படவேண்டிய அழுத்தம் h-ன் இரு மடிக்கு நேர்விகிதத்திலிருப்பதால் அது மிகுந்த அழுத்த அள வெல்லையையுடையதாக இருக்கிறது; எனினும் முதல்முறையைப் போன்று அவ்வளவு துல்லியமானதன்று. ஆனல் நடைமுறையில் இம் முறையே பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மேலும் AB-க்கும் Γ-க்கும் இடையேயுள்ள அளவுகோலில் அழுத்த அளவீடுகள் குறிக்கப்பட்டு நேரடியாக அழுத்தங்களைப் பெறுமாறும் இம்முறையில் அமைக்கலாம்.

குறைந்த அழுத்தங்களை அளவிட நட்சென் அளவி (Knudsen's gauge) என்ற மற்றொரு கருவியும் உண்டு. இது வாயுமூலக் கூறுகளின் இயக்கத்தையும், வெப்பநிலை அதிகமாகும்போது அவற்



படம் 20 17

றின் திசைவேகம் அதிகமாகிறது என்னும் கருத்தையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது. இதன் மிக எளிய அமைப்பைப் படம் 20·17-ல் காணலாம். இதில், A,B என்ற இரு நிலையான தகடுகளும் C,D என்ற இரு அசையும் தகடுகளும் உள்ளன. அசையும் தகடுகள் இரண்டும் ஒரு குவார்ட்ஸ் இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டு அவற்றின் விலகல் கண்ணாடி—அளவுகோல் அமைப்பு ஒன்றினால் அளவிடப்படுகிறது. நிலையான தகடுகள் பிளாட்டினத்தில் செய்யப்

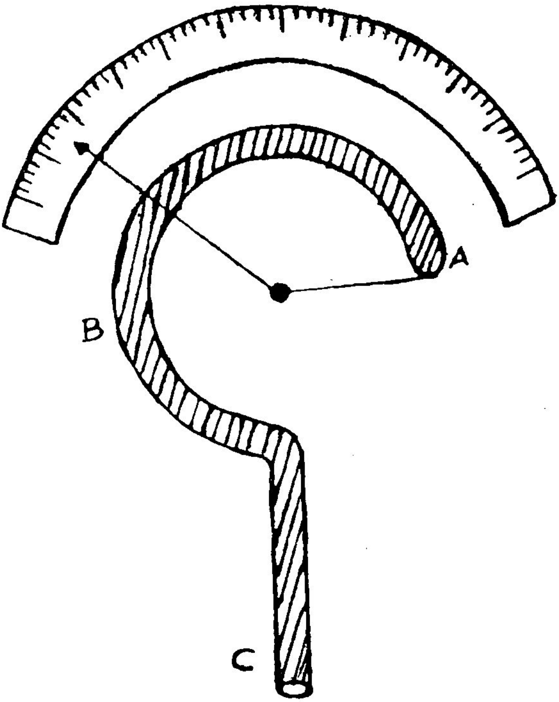
பட்டு மின்சாரத்தின் உதவியால் சூடேற்றப்படுமாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளன. அழுத்தம் அளவிடப்படவேண்டிய வாயுவைக் கருவியினுள் செலுத்தி நிலைத்தகடுகள் சற்றுசூடேற்றப்படும். இந் நிலையில் வாயுமூலக்கூறுகளின் சராசரி மோதலிடைத்தூரம் நிலைத் தகடுகளுக்கும் அசையும்தகடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவை விட மிக அதிகமாக இருக்குமாறு வாயுவின் அழுத்தம் இருப் பின் குறைந்த வெப்பநிலையிலுள்ள அசையும் தகடுகள் நிலைத் தகடுகளினின்றும் விலக்கமடையும். அசையும் தகடுகளின் இரு பக்கங்களிலும் வாயுமூலக்கூறுகள் மோதுமாயினும் அதிக வெப்ப நிலையிலுள்ள நிலைத்தகடுகளிலிருந்து வரும் மூலக்கூறுகள் அதிக வேகத்தைப் பெற்றிருக்குமாதலால் அசையும்தகடுகள் நிலைத் தகடுகளினின்றும் விலக்கமடையும். அசையும் தகடுகளின் விலக் கம் (θ) வாயுவின் அழுத்தத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் நிலைத்தகடுகள், அசையும் தகடுகள் ஆகியவற்றின் வெப்பநிலை கள் முறையே T_1°A, T_2°A எனின் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு குறைவாயிருக்கும்போது வாயுவின் அழுத்தத்தை

$$P = \frac{2R}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2} - 1}} . \theta$$

என்னும் சமன்பாட்டால் பெறலாம் என நட்சென்நிறுவியுள்ளார். சமன்பாட்டில் R என்பது ஒருமாறிலி; அது தகடுகளின் பரப்பளவு கள், அசையும் தகடுகளின் நிலைமத்திருப்புதிறன், அலைவுநேரம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்தது. இக் கருவியைக் கொண்டு 10^{-3} மி.மீ. அழுத்தத்திற்குக் குறைந்த எல்லா அழுத்தங்களையும் அள விட முடியுமாயினும் மிகக் குறைந்த அழுத்தங்களில் அசையும் தகடுகளின் மீது தடை ஏதும்செயற்படவில்லையென்று கூறுமள வுக்கு மிகக்குறைந்த தடையே செயற்படுமாதலால் அத்தகைய அழுத்தங்களில் இக்கருவியைப் பயன்படுத்துவது கடினமாகிறது. இக் கருவி மிக இலேசான நிலநடுக்கத்தையும் உணரக்கூடிய தாயுள்ளது.

போர்டன் அளவி (Bourden gauge): மிக அதிக அழுத்தங் களை அளவிட போர்டன் அளவி என்னும் கருவி பெரிதும் பயன்படு கிறது. இதில், நீள்வட்டக் குறுக்குப் பரப்பையுடையதும் ஏறத் தாழ ஒருவட்ட வடிவில் வளைக்கப்பட்டதுமான ஒருமுனை மூடப் பட்ட ABC என்ற குழாய் உள்ளது. (படம் 20.18) இக் குழாய் அழுத்தம் அளவிடப்பட வேண்டிய வாயு அடங்கிய கலத்துடன் இணைக்கப்படும்போது அதிக அழுத்தத்தின் காரணமாக குழாய் நேராக முயலும். இதன்பயனாய் குழாயின் மூடப்பட்ட A முனை

அசையும். இந்த அசைவு நெம்புகோல் அமைப்பு ஒன்றினால் பெருக்கப்பட்டு ஒரு குறிமுள்ளை இயக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.



படம் 20.18

குறிமுள் அழுத்தங்கள் குறிக்கப்பட்ட ஓர் அளவுகோலின்முன் அசைகிறது.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute unit	சார்பிலா அலகு
Absorbent	உறிஞ்சி
Acceleration	முடுக்கம்
— Angular	கோணமுடுக்கம்
— Normal	லம்பமுடுக்கம்
Action	விசை
Algebraic Sum	குறியியல் கூட்டுத்தொகை
Amplitude	வீச்சு
Analytical method	கணிதமுறை
Arc	வில்
Area	பரப்பளவு
Arm	புயம்
Atmosphere	வளிமண்டலம்
Atmospheric pressure	வளி அமுத்தம்

B

Back lash	பின்தொய்வு
Balance	தராசு
— Ballistic	உந்தவியல் தராசு
— Chemical	வேதியியல் தராசு
— False	தவருன தராசு
— Physical	பௌதிகத் தராசு
— Spring	வில் தாரசு
Balance wheel	சமனச் சக்கரம், துடிப்பியக்கச் சக்கரம்
Barometer	பாரமானி
— Fortin's	ஃபார்ட்டின் பாரமானி
— Aneroid	அனிராய்டு பாரமானி
Barrel	மிடா

Beam	தூலம்
Belt	பட்டை
Board of trade of London	லண்டன் வர்த்தகக்குழு
British system	பிரிட்டன் முறை
Burette	வடியளவு குழாய்

C

Calculus	நுண்கணிதம்
Capillary effect	நுண்குழாய் விளைவு
Capillary tube	நுண்குழாய்
Centimetre	சென்டி மீட்டர்
Centimetre-gram	சென்டி மீட்டர் — கிராம்
Centre of, buoyance	மிதவைத்திறன் மையம்
—, Gravity	புவியீர்ப்புமையம்
—, oscillation	அலைவுமையம்
—. percussion	தாக்குமையம்
—, pressure	அழுத்தமையம்
—, rotation	சுழற்சிமையம்
—, suspension	தொங்குமையம்
Chord	நாண்
Circular motion	வட்ட இயக்கம்
Clockwise	வலஞ்சுழி
— Anti	இடஞ்சுழி
Coincide	ஒன்றுதல்
Composition	தொகுப்பு
Compressor	அழுத்தி
Condenser	திரவமாக்கி
Condition	நிபந்தனை
Cone	கூம்பு
Conservation	அழிவின்மை
Converse	மறுதலை
Coplanar	ஒருதள
Couple	இரட்டை
Curvature	வளைவு
— Radius of	வளைவு ஆரம்

D

Density	அடர்த்தி
— Relative	ஒப்படர்த்தி

Derived units	வழிவந்த அலகுகள்
Differntiation	பகுதிகாணல்
Dimensions	பரிமாணங்கள்
Directrix	இயக்குவரை
Displacement	இடப்பெயர்ச்சி
— Angul	கோண இடப்பெயர்ச்சி
Diving bell	மூழ்த கூண்டு
Division	பிரிவு, பகுதி, அளவுக்கூறு
Dynamics	இயக்க—விசையியல்
Dyne	— டைன்

E

Eccentric	உறழ் வட்டமாக
Efficiency	பயனுறு திறன்
Effort	முயற்சி
Elastic	மீட்சியுறு
— Perfectly	முழு மீட்சியுறு. நிறை மீட்சியுறு
Elasticity	மீட்சியல்
Energy	ஆற்றல்
— Kinetic	இயக்க ஆற்றல்
— Potential	நிலையாற்றல்
Equilibrium	சமநிலை
— Neutral	நடுவியல் சமநிலை
— Stable	நிலைச்சமநிலை, நிலையான சமநிலை
— Stability of	சமநிலையின் நிலைத்த தன்மை
— unstable	நிலையிலாச்சமநிலை, நிலையற்றசம நிலை
Equilibrant	எதிர் சமனி
Erg	எர்க்
Externally	புறவியலாக

F

Fire engine	தீயணைக்கும் எந்திரம்
Fly wheel	விசையாட்சுழலி
Focus	குவியம்
Foot pound	அடி பவுண்டு
Foot-poundal	அடி—பவுண்டல்
Force	விசை
— Centrifugal	மைய விலக்கு விசை

— Centripetal	மையநோக்கு விசை
— Impulsive	தாக்கு விசை
— physical independance of	விசையின் தற்சார்புத்தன்மை
— shearing	உருவமாற்று
— variable	மாறுவிசை
Freely	தானே, தடங்கலின்றி, தங்குதடை யின்றி
Friction	உராய்வு
— Angle of	உராய்வுக் கோணம்
— Coefficient of	உராய்வு எண்
— cone	உராய்வுக் கூம்பு
— dynanometer	உராய்வு—திறன்மானி
— Dynamical	இயக்கவியல் உராய்வு
— Force of	உராய்வு விசை
— Limiting	எல்லை உராய்வு
— statical	நிலையியல் உராய்வு
Frictionless	உராய்வற்ற
Frustum	அடிக் கண்டம்
Fulcrum	ஆதாரத்தானம்
Fundamental quantity	அடிப்படை ராசி
Fundamental unit	அடிப்படை அலகு

G

Getter	உலோக உறிஞ்சி
Gram	கிராம்
Gram weigh	கிராம் எடை
Graphical method	வரைபட முறை
Gravitational unit	புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகு
Gravity	ஈர்ப்பு விசை
— Acceleration du	ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Governor	வேகங்காக்கும் அமைவு

H

Hexogon	அறுகோணம்
Highest point	உச்சிப் புள்ளி
Hodograph	ஹோடகிராஃப்
Homogeneous	ஓரியல்பான
Horizontal plane	கிடைத்தளம்

Horsepower	குதிரைத் திறன்
Hydrometer	திரவமானி
— common	சாதாரண திரவமானி
— Nicholson's	நிக்கல்சன் திரவமானி
Hydrostatic machines	நிலைப்பாய் பொருளியல் எந்திரங்கள்
Hydrostatics	நிலைப்பாய் பொருளியல்

I

Impact	மோதல்
— Direct	நேரடி மோதல்
— Oblique	சாய்ந்த மோதல்
Impulse	தாக்கு
Inclined plane	சாய்தளம்
Index	குறிமுனை
Inelastic	மீட்சியுறுத
Inertia	நிலைமம்
— Moment of	நிலைமத்திருப்பு திறன்
Integration	தொகுநியாக்கம், தொகுநிகாணல்
Intermittent	தொடர்ச்சியற்ற, தொடரிலா
Internally	அகவியலாக

J

Jaw	கரம்
Jet	ஜெட்
— propulsion	ஜெட்-இயக்கம்
— Turb	டர்போ ஜெட்
Joule	ஜூல்

K

Kinematics	இயக்கவியல்
Kinetics	விசையியல்
Knife edge	கத்தி முனை

L

Lami's theorem	லாமியின் தேற்றம்
Latus rectum	நேரகலம், நேர் அகலம்

Leastcount	மீச்சிற்றளவை
Lever	நெம்புகோல்
Limit	எல்லை
Limiting value	அணுக்க மதிப்பு
Line of quickest descent	மீவிரைவு இறக்கக் கோடு
Liquid air trap	திரவக் காற்றுத்துடுப்பு
Load	பளு, எடை
Lowest point	தாழ்ந்த புள்ளி

M

Magnitude	எண் மதிப்பு
Manometer	அழுத்தமானி
Mass	நிறை
Matter	பருப் பொருள்
Mcleod Gauge	மக்லியாடு அளவி
Mechanical advantage	எந்திரப் பயன்
Mechanics	எந்திரவியல்
Meta centre	மிதவைக் காப்புமையம்
Meta centric height	மிதவைக் காப்புயரம்
Metric system	மெட்ரிக் முறை
Metronome	தாளப்பொறி, மெட்ரோனோம்
Micrometer	நுண்ணளவி
Moment	திருப்புதிறன்
Momentum	உந்தம்
— Angular	கோண உந்தம்
Motion	இயக்கம்

N

Normal	லம்பம்
— common	பொது லம்பம்
Nozzle	தூம்பு வாய்
Nut	திருகுமரை

O

Oscillation	அலைவு

P

Parabola	பரவளைவு
Parallologram	இணைகரம்

Parallel forces	இணைவிசைகள்
— Like	ஒரு போக்கு இணைவிசைகள்
— unlike	எதிர் போக்கு
Particle	துகள்
Peg	முளை
Pelton wheel	பெல்ட்டன் சக்கரம்
Pendulum	ஊசல்
— Bifilar	இருநூல் ஊசல்
— compound	கூட்டு ஊசல்
— conical	கூம்பு ஊசல்
— kater's	கேட்டர் ஊசல்
— Seconds	விநாடி ஊசல்
— simple	தனி ஊசல்
— Tortion	முறுக்கு ஊசல்
Pentagon	எண் கோணம்
Perpendicular	நேர்குத்துக்கோடு, நேர்குத்தான
Phase	கட்டம்
Pitch	புரியிடைத் தூரம்
Plane of floatation	மிதவைத்தளம்
Plumbline	தூக்கு நூற்குண்டு
Polygon	பல் கோணம்
Potassium trap	பொட்டாசியம் தடுப்பு
Poundal	பவுண்டல்
Pound weight	பவுண்டு எடை
Power	திறன்
Power (index)	மடிப்பெருக்கம், மடிக்குறி
Pressure	அழுத்தம்
Projectile	எறிபொருள்
Projection	எறிதல், ஏவுதல், வீழ்ச்சி
— Angle of	எறிகோணம்
— Point	எறிதானம்
— velocity of	எறிதிசை வேகம்
Pulley	கப்பி
— Differential	பகுகப்பி
— Fixed	நிலைக்கப்பி
— Movable	இயங்குகப்பி
— systems	கப்பித் தொகுதிகள்
Pump	பம்பு
— Backing	முன்னோடிப் பம்பு
— centrifugal	மைய விலக்கு விசைப்பம்பு

Pump common	சாதாரண பம்பு
— compression	காற்றழுத்தும் பம்பு
— Diffusion	விரவிப்பரவு முறைபம்பு
— Exhaust	வெளியேற்றும்பம்பு
— Filter	வடிபம்பு
— Force	விசைப் பம்பு
— Mercury	பாதரச பம்பு
— Rotary	சுழல் பம்பு
Pyramid	பட்டைக் கூம்பு

Q

Quadrilateral	நாற்கரம்

R

Raduis of gyraition	சுழற்சி ஆரம்
Range	நெடுக்கம்
Ratchat	ஒரு வழத் தடையமைவு
Reaction	எதிர் விசை
— Normal reaction	லம்ப எதிர் திசை
Rebound	எதிர்த்துள்ளல்
Recoil	பின்னசைவு
Reservoir	சேமக்குழாய்
Resolution	பிரிவீடு
Rest	அமைதிநிலை, ஓய்வுநிலை
— Relative	சார்பமைதி
Resting point	நிலைத்தானம்
— Zero	எடையிரா நிலைத்தானம்
Restitution	மீட்சி, நிலை மீட்சி
— coefficient of	மீட்சி எண், நிலை மீட்சி எண்
Resultant	தொகுபயன், விளைவு
Revolve	சுழலுதல்
Revolution	சுழற்சி
Rhombus	சாய்சதுரம்
Rider	ஏறி
Rigid body	திண்பொருள்
Rigidity modulus	விறைப்புக்குணகம்
Rim	விளிம்பு
Rocket	ராக்கெட், ஏவுகணை
Rotation	சுழற்சி
Rotor	சுழற்கூறு
Rough	சொரசொரப்பான, உராய்வுடைய

S

Scalar	ஸ்கேலார்
Scale	அளவுகோல்
— Auxiliary	துணைக்கோல்
— circular	வட்ட அளவுகோல்
— Head	தலைக்கோல்
— Ivory	தந்த அளவுகோல்
— Main	மூலக்கோல்
— Pitch	புரிக்கோல்
— vernier	வெர்னியர் கோல்
Screw	திருகு
— Differential	பகுதிருகு
— Levelling	சரிமட்டத்திருகாணி
Screw gauge	திருகு அளவி
Second	விநாடி
Sector of a cricle	வட்டக்கூறு
Segment of a circle	பிறைமம்
Sensibility	உணர்வு நுட்பம்
Sensitiveness	உணர்வு நுட்பம்
Shaft	சுழல் தண்டு
Simple Harmonic motion	சீரிசை இயக்கம் தனி சைன் இயக்கம்
Simple machine	இலகு எந்திரம்
Siphon	வடி உழாய்
Slide	நழுவுதல்
Smooth	வழ வழப்பான
Solar day	சூரிய நாள்
Speed	வேகம்
Spherometer	கோளமானி
— Dynamical	இயக்கவியல் கோளமானி
Spindle	ஊடச்சு முளை
Square	சதுரம்
Stability	நிலைத்த தன்மை
Standard	படித்தரம்
Stator	நிலைக்கூறு
Sturrup	கொக்கி
Stop Clock	நிறுத்து கடிகாரம்
Stop watch	நிறுத்து கை கடிகாரம்
Surface tension	பரப்பு இழுவிசை

T

Tangent	தொடுகோடு, தொடுவரை, டான் ஜென்ட்
— law	டான் ஜென்ட்விதி
Target	இலக்கு
Tension	இழுவிசை
Tetrahedran	நான்முகி
Theorem of parallel axes	இணையச்சுக்களின் தேற்றம்
— perpendicular axes	நேர்குத்தச்சுக்களின் தேற்றம்
Thickness	தடிப்பு
Thrust	அமுக்கம்
Time	காலம், நேரம்
— of flight	செல்லும் நேரம்
Torque	திருப்புவிசை
Trajectory	எறிபொருள் பாதை
Transmissibility	கடத்தீட்டியல்பு, ஊடுருவுதல்
Trapezium	ஈரிணைப்பக்க நாற்கரம்
Truthfulness	உண்மையுடைமை
Turbine	டர்பைன்
— impulse	தாக்கு டர்பைன்
— reaction	எதிர்விசை டர்பைன்
— steam	நிராவி டர்பைன்
Turning point	திரும்பு தானம்

V

Vacuum	வெற்றிடம்
Valve	வால்வு
Vane	தகடு, காற்றுடி
Vapour pressure	ஆவி அழுத்தம்
Vector	வெக்டர்
Velocity	திசைவேகம்
— Angular	கோணத் திசை வேகம்
— — relative	சார்பு கோணத்திசை வேகம்
Vernier	வெர்னியர்
— Backward reading	பின்னோக்கு வெர்னியர்
— circular	வட்ட வெர்னியர்
— Forward reading	முன்னோக்கு
— calipers	வெர்னியர் காலிப்பர்

Vertex	உச்சி
Vertical	செங்குத்தான
Vibration	அதிர்வு
Viscosity	பாகுநிலை
— coefficient of	பாகியல் எண்
Volume	பருமன்

W

Watt	வாட்
Work	வேலை
— Virtual	மாயவேலை
Wedge	ஆப்பு
Wheel and axle	சக்கரமும் அச்சும்
— Differential	பகுசக்கரமும் அச்சும்

Y

Young's Modulus	யங் குணகம்

Z

Zero	சுழி
— correction	தொடக்கத் திருத்தம்
— error	தொடக்கப் பிழை
— reading	தொடக்க அளவீடு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை - 9

1969 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

				ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	... 6	50
*1-a	,, —II	...	,,	... 9	00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	... 12	00
3.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	தி. சி. மோகன்	... 12	00
4.	,, ,, —II	...	எம் ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 10	75
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	... 7	00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும்—II	...	சி. வேலாயுதம்	... 11	50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	... 7	50
*8.	இந்தியச் செலவாணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 5	50
*9.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	... 4	75
10.	இந்தியப் பொருளியல்—I	...	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	... 10	00
11.	,, II	...	எம். லூர்து நாதன்	... 4	25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	...	சி. சுந்தரராஜன்	... 10	75
13.	,, ,, II	...	எஸ். குழந்தைநாதன்	... 10	50

*மூலநூல் (Original book)

பொருளாதாரம் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
15.	,, ,, II	,,	6	00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
18.	,, ,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	50
19.	,, ,, III	,,	6	50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
21.	,, ,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
23.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*25.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
26	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
27.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
28	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*29.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
30.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
31.	,, ,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
33.	,, ,, II	--	7	00

*34.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அசசாங்க நிதியியல் ...	க. வெற்றிவேல் ...	4	25
35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள் ...	மா. குமாரசாமி ...	5	50
36.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள் ...	சி. சுந்தரராஜன் ...	7	50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள் ...	எம். கே. சுப்பிரமணியம் ...	7	75
38.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1950)—I ...	ம. திருநாவுக்கரசு ...	7	00
39.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம் ...	பு. வி. சீனிவாசன் ...	6	25

வரலாறு

*40.	பிரிட்டன் வரலாறு—I ...	கி. ர. அனுமந்தன் ...	4	50
*41,	,, ,, II ...	,, ...	3	50
*42.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா ...	4	50
43.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம் ...	வை. விருத்தகிரீசன் ...	15	00
44.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I ...	இரா. அண்ணுமலை ...	13	00
45.	,, ,, II ...	பா. மாணிக்கவேலு ...	13	00
46.	,, ,, III ...	என். ஜே. ராஜகோபால் ...	8	00
47.	,, ,, IV ...	,, ...	8	00
48.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I ...	க. த. திருநாவுக்கரசு ...	15	00
49.	,, ,, II ...	எம். எக்ஸ். மிராண்டா ...	8	00

*மூலநூல் (Original book)

வரலாறு (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
50.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—III	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	5	00
51.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
52.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
53.	,, ,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	50
54.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
55.	,, ,, II	,,	7	00
56.	,, ,, III	பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	7	75
57.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
58.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
59.	,, ,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
60.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம்.எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
61.	,, II	எம்.எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
62.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
63.	,, ,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	70
64.	,, ,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
65.	,, ,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
66.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
67.	,, ,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	75
68.	,, ,, III	இர. ஆலாலசுந்தரம், ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
69.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—1	பா. மாணிக்கவேலு	5	00

70.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*71.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
72.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
73.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
74.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
75.	,, II	,,	13	25
76.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
77.	,, ,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
78.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
79.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
80	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
81.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
82.	,, ,, II	வீ. கண்ணையா, கி.ர. அனுமந்தன்	5	75
83.	,, ,, III	கி.ர. அனுமந்தன்		
*84.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
85.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
86.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00

*மூலநூல் (Original book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்			ஆசிரியர்		ரூ.	பை.
87.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்	I	...	பா. சூரியநாராயணன்	...	5	70
88.	,, ,,	II	...	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	...	6	00
89.	,, ,,	III	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	5	75

உளவியல்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரூ.	பை.
90.	குழந்தை உளவியல்—I	...	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	...	8	00
91.	,, II	...	,,	...	7	00
92.	உட்கவர் மனம்	...	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	...	7	00
93.	இளையோர் உளவியல்—I	...	தி. இரா. அரங்கராசன்	...	12	00
94.	,, ,, —II	...	த. இரா. அரங்கராசன்	...	9	00
95.	சமூக உளவியல்	...	என். வேதமணி மானுவேல்	...	9	25
96.	பிறழ்நிலை உளவியல்	...	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	...	11	00
97.	பித்தரின் உள்ளம்	...	,,	...	3	00
98.	குமர உள்ளம்	...	டாக்டர் மு. அறம்	...	6	25

தத்துவம்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரூ.	பை.
99.	இந்து சமயத் தத்துவம்	...	ஞா. ராஜாபகதூர்	...	5	50
*100.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	...	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	...	3	50
*101.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	...	ஆர். எஸ். தேசிகன்	...	3	50
102.	அத்துவித தத்துவம்	...	கோ. மோ. காந்தி	...	6	50

103.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	5	50
104.	இந்தியத் தத்துவம்—I	...	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுந்தரம்	...	3	50
105.	,, II	...	,,	...	6	00
106.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	சி. இராமலிங்கம்	...	6	00
அறவியல்						
107.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. மோ. காந்தி	...		
அளவையியல்						
108.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	...	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	...	2	50
மானிடவியல்						
*109.	மானிடவியல்	...	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	...	4	75
110.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	...	கி. பூ. சுப்ரமணியம்	...	5	50
111.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	...	எஸ். இலட்சுமி	...	3	50
சமூகவியல்						
112.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	...	ஜே. நாராயணன்	...	10	50
புவியியல்						
113.	ஆசியா—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	9	50
114.	,, II	...	,,	...	8	75
115.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	...	ஏ. எஸ். நாராயணன்	...	8	50
*116.	தென் கிழக்கு ஆசியா	...	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	...	8	50

*மூலநூல் (Original book)

புவியியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*117.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
*118.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*119.	தென் கண்டங்கள் — ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*120.	,, — ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*121.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*122.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	9	00
*123.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*124.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
125.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
126.	,, II	,,	5	00
127.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
*128.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
129.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
130.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
131.	,, ,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
132.	,, ,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்		

புள்ளியியல்

*133.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00
134.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
135.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14	00
136.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமி நரசிம்மன்	6	50

உயர்கணிதம்

*137.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12	00
*138.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8	00
*139.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9	00

விலங்கியல்

*140.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	12	00

பௌதிகவியல்

141.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00

விஞ்ஞானம்

*142.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*143.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*144.	எக்ஸ்—கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*145.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3	00
*146.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*147.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*148.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

*மூலநூல் **(Original Book)**

			ரூ.	பை.
மருத்துவம்				
149.	நீரிழவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
*150.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*151.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
*152.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
153.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி	6	75
154.	,, II	டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது ,,	5	50
155.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
156.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50
கூட்டுறவு				
157.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
*158.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

159.	மகாத்மா காந்தி	... சரஸ்வதி தங்கையன்	...	3	25
160.	விவசாயப் புரட்சி	... வி. கார்த்திகேயன்	...	8	00
*161.	சேமக் கை நூல்	... ஆ. சுப்பிரமணியம்	...	2	50
*162.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	... எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	...	9	00
* 163.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கிடகிருஷ்ணய்யங்கார்	...	4	50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C)

*164.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	...	4	50
*165.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	...	2	75
*166.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடைய் பிள்ளை	...	2	50
*167.	,, ,, II	... ,,	...	2	25
*168.	பௌதிகம்	... டாக்டர் பி. திருஞான சம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	...	7	50
*169.	புதுமுக பௌதிகம்	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	5	75
*170.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	... கே. ராஜகோபாலன்	...	7	00
*171.	,, II	... கே. இராஜகோபாலன்	...	3	00
*172.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	... டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	...	7	00
*173.	,, II	... ,, ,,	...	4	50
*174.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	... ஆர். மகாதேவன்	...	4	75

*மூலநூல் (Original Book)

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C) (தொடர்ச்சி)

				ரூ.	பை.
*175.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—II	...	ஆர். மகாதேவன் ...	3	25
*176.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி ...	7	00
*177.	புதுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன் ...	5	50
*178.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம் ...	4	00
*179.	புதுமுக விலங்கியல்	...	பெ.மா. அண்ணாமலை ...	7	25
*180.	புதுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம் ...	4	50

*மூலநூல் (Original Book)