கணக்கு

10

தமிழ்நாட்டுப்
பாட நூல் நிறுவனம்

கணக்கு

பத்தாம் வகுப்பு

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

© தமிழ்நாட்டு அரசு
முதல் பதிப்பு — 1982

ஆசிரியர்கள் :

திரு. எஸ். அருள் மரியதாஸ்
உதவி ஆசிரியர்
தூய கேபிரியல் மேல்நிலைப் பள்ளி
சென்னை.

திரு. து. இராஜகோபாலன்
உதவி ஆசிரியர்
டி. இ. எல். சி. மேல்நிலைப் பள்ளி
புதுக்கோட்டை.

மதிப்புரையாளர்கள் :

திரு. எஸ். எஸ். இராஜகோபாலன்
தலைமை ஆசிரியர்
சர்வஜன மேல்நிலைப் பள்ளி
கோவை.

திரு. தா. ராமானுஜம்
தலைமை ஆசிரியர்
இந்து மேல்நிலைப் பள்ளி
சென்னை.

விலை : ரூ. 4-40

இந்திய அரசு சலுகை விலையில் வழங்கிய 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் இந்நூல் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

அச்சிட்டோர் :
சண்முகம் பிரஸ் பிரைவேட் லிமிடெட், சென்னை-600 001

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	கணமொழி	...	1
2.	எண் முறையினம்	...	35
3.	அல்ஜிப்ரா	...	59
4.	புள்ளி இயல்	...	111
5.	அளவியல்	...	158
6.	அணிகள்	...	201
7.	வடிவ இயல்	...	232
8.	வரைபடங்கள்	...	315
9.	முக்கோண இயல்	...	339
10.	பிற்சேர்க்கைகள்	...	378

அறிவியலாளன் உண்மையை நேசிப்பான். உண்மையை நேசிப்பது எதற்கு? உண்மையை உண்மைக்காகவே நேசிப்பது — அது எங்கே போய் முடியும் என்றாலும் சரி.

—லூதர் பர்பாங்க்.

1. கணமொழி

1-1. கணங்கள் வரையறை

கணங்களைப்பற்றி நாம் முன் வகுப்புகளில் கற்றவற்றினை நினைவு கூர்ந்து தொகுப்போம்.

பண்டங்களின் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பே **கணம்** எனப்படும். உயரமான மனிதன், நல்ல மாணவன் ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்படாத தொகுப்புகள். எனவே, இவை கணங்களல்ல. 160 செமீ-க்கு அதிகமான உயரமுள்ள மனிதர், எல்லாப் பாடங்களிலும் 85-க்குமேல் மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர் ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை. எனவே, இவை கணங்களாகும்.

கணம் $A = \{5, 8, 9, 15\}$ எனில்,

$$5 \in A,\ 9 \in A,\ \ 10 \notin A,\ 12 \notin A$$

கணங்களைக் குறிக்கும் முறைகள் :

1. பட்டியல் முறை :
   { 1, 2, 3, 4 }, { ஆசிரியர், மாணவர், பெற்றோர் }
   { முல்லை, மல்லிகை }

2. வர்ணனை முறை :
   { இயலெண்கள் }, { பூக்கள் },
   { வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் }

3. கணக்குறியீடு முறை :
   { x/x ஓர் இரட்டை எண் }, $\{x/1 < x < 10, x \in N\}$

கணங்களிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக் கணத்தின் **ஆதி எண்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$n\{1, 2, 5, 9\} = 4$$

இரு கணங்கள் ஒரே உறுப்புகளைக் கொண்டு இருந்தால் அவை சம கணங்கள் ஆகும். இரு கணங்களின் ஆதி எண்கள் சமமானால் அவை சமான கணங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\{1, 2, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$ இவை சம கணங்கள்.

$\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\}$ இவை சமான கணங்கள்.

ஆதி எண் எண்ணிலி ஆனால் அஃது எண்ணிலி கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

ஆதி எண் எண்ணிடத் தக்கதெனின், அஃது எண்ணிடத் தக்க கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\{7, 8, 9, 12, 17\}$

ஆதி எண் பூச்சியமெனின் அஃது வெற்றுக் கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $\{\ \}$

வெற்றுக் கணத்தை ϕ என்ற எழுத்தாலும் குறிக்கலாம். பத்துக்குக் குறைவான ஈரிலக்க எண், நான்கு பக்கங்களுள்ள அறுகோணங்கள், 4-க்கும் 5-க்கும் இடைப்பட்ட முழு எண் இவற்றைக் கொண்ட கணங்கள் வெற்றுக் கணங்கள் ஆகும்.

கணம் B-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் Aஇன் உறுப்பானால் கணம் B, கணம் Aஇன் உட்கணம் எனப்படும். இப்பண்பை $B \subseteq A$ என எழுதலாம். ஒரு கணமே அதன் உட்கணமுமாகும். வெற்றுக் கணம் எல்லாக் கணங்களின் ஓர் உட்கணமாகக் கொள்ளப்படும்.

$A = \{5, 8, 12, 17, 25\}$ எனின்,

$\{5, 8, 12\}$, $\{8, 17, 25\}$, $\{12, 25\}$, $\{8\}$, $\{\ \}$ ஆகியவை Aஇன் சில உட்கணங்கள் ஆகும்.

கணம் முழுவதுமல்லாதவாறு உறுப்புகளைக் கொண்ட உட்கணம் தகு உட்கணம் எனப்படும்.

{ 2 } , { 2, 3 } , என்பவை {1, 2, 3 } இன் தகு உட்கணங்களாகும். ஒரு கணம் அக் கணத்தின் தகா உட்கணம் ஆகும்.

ஒரு கணத்தின் உட்கணங்கள் அனைத்தும் கொண்ட கணம் அக்கணத்தின் அடுக்குக் கணம் எனப்படும்.

$A = \{1, 2\}$ இன் அடுக்குக் கணம்

$$P(A) = \Big\{ \{1,2\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{\ \} \Big\}$$

$$n[P(A)] = 4 = 2^2$$

$X = \{1, 2, 3\}$ இன் அடுக்குக் கணம்

$$P(X) = \Big\{ \{1,2,3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\ \} \Big\}$$

$$n[P(x)] = 8 = 2^3$$

பொதுவாக $n(A) = p$ எனின், $n[P(A)] = 2^p$ ஆகும்.

பயிற்சி 1-1

1. பின் வருவனவற்றைக் கணக்குறியீட்டு முறையில் எழுதுக.

(அ) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ (ஆ) $\{3, 6, 9, \ldots\}$

(இ) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (ஈ) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$

(உ) {முக்கோணம், நாற்கரம், ஐங்கோணம், ... }

2. கணங்களையும் அவற்றின் உட்கணங்களையும் பொருத்துக.

கணங்கள்	உட்கணங்கள்
(அ) $\{4, 7, 9, 11, 12\}$	(i) $\{x/x = 5n + 1, n \in N\}$
(ஆ) $\{-4, -2, -1, 7, 8, 11\}$	(ii) $\{7, 11, 4\}$
(இ) $\{1, 2, 3, \ldots\}$	(iii) $\{8, 16, 24, \ldots\}$
(ஈ) $\{2, 4, 6, \ldots\}$	(iv) $\{-1\}$

3. கீழ்க்காணும் கணங்களின் அடுக்குக் கணங்களை எழுதுக.

(அ) $\{5, 9\}$ (ஆ) $\{a, b, c\}$ (இ) $\{9\}$

4. சில கணங்களின் ஆதி எண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் அடுக்குக் கணங்களின் ஆதி எண்களைக் கூறுக.

(அ) 4 (ஆ) 6 (இ) 2 (ஈ) 3 (உ) 1

5. (அ) $n[P(A)] = 32$ எனில், $n(A)$ என்ன ?

(ஆ) $n[P(A)] = 512$ எனில், $n(A)$ என்ன ?

(இ) $n(A) = K$ எனில், $n[P(A)]$ என்ன ?

(ஈ) $n(A) = 0$ எனில், $n[P(A)]$ என்ன ?

விடைகள்

1. (அ) $\{x/x$ ஓர் ஒற்றை முழு எண் $\}$

(ஆ) $\{x/x$ மூன்றின் மடங்கு, $x \in N\}$.

(இ) $\{x/3 < x < 10, x \in N\}$

(ஈ) $\{x/x$ ஒரு குறை முழு $\}$ (உ) $\{x/x$ ஒரு பலகோணம் $\}$

2. (அ) ii (ஆ) iv (இ) i (ஈ) iii.

3. (அ) $\{\{5, 9\}, \{5\}, \{9\}, \{\ \}\}$

(ஆ) $\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\},$
$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\ \}\}$

(இ) $\{\{9\}, \{\ \}\}$

4. (அ) 16 (ஆ) 64 (இ) 4 (ஈ) 8 (உ) 2

5. (அ) 5 (ஆ) 9 (இ) 2^k (ஈ) 1 ஏனெனில்

$$A = \{\} \; ; \; P(A) = \{\{\}\}$$

1-2. கணச்செயல்கள்

நினைவு கூர்க :

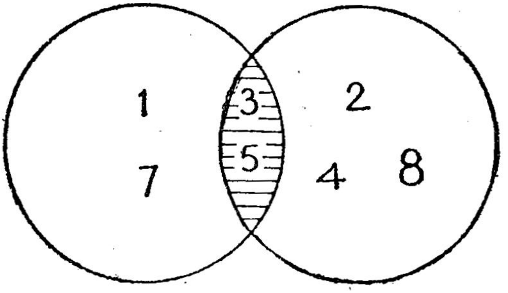
$$A = \{1, 3, 5, 7\} \; ; \qquad B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

எனில், $A \cap B = \{3, 5\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

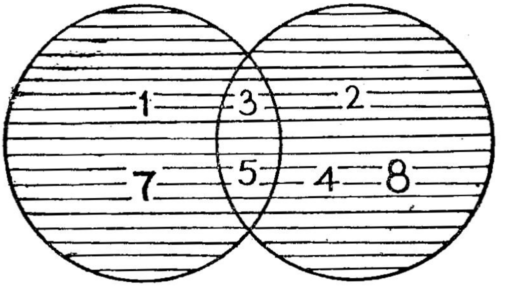
$A \cap B$ (A வெட்டு B) என்பது கணங்கள் A, B ஆகிய இரண்டிலும் உள்ள பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.

$A \cup B$ (A சேர்ப்பு B) என்பது கணம் A அல்லது கணம் B ஆகிய இரண்டில் ஒன்றிலாவது உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இவற்றை வென்படத்தில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



$A \cap B$

படம் 1-1.



$A \cup B$

படம் 1-2.

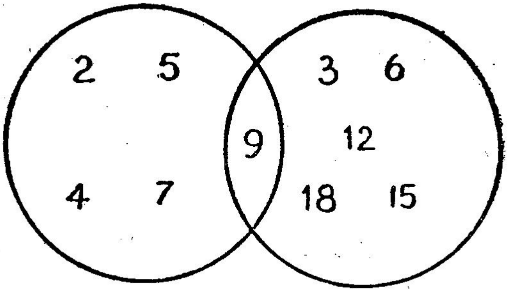
வெட்டுக் கணம் வெற்றுக் கணமாக உள்ள கணங்கள் ஒவ்வாக்கணங்கள் எனப்படும்,

வெட்டுக் கணம் வெற்றுக் கணமன்று எனில், அவை வெட்டும் கணங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ எனில், $A \cup B$, $A \cap B$ காண்க. $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$ இவற்றைக் கண்டு இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18 \}$.



படம் 1-3.

$n(A \cup B) = 10$, $A \cap B = \{ 9 \}$, $n(A \cap B) = 1$,

$n(A) = 5$, $n(B) = 6$

$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 11$

மேலும் பல கணங்களை எடுத்துக்கொண்டு

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

என்பதன் மெய்ம்மையைச் சரிபார்க்கவும்.

$A \cap B = \{ \}$ எனில், $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

எடுத்துக்காட்டு :

கீழ்க்கண்டவற்றில் $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

1. $A = \{ 4, 7, 9, 11, 13 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 11, 13, 15 \}$

   $A \cap B = \{ 4, 11, 13 \}$

   $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 15 \}$

2. A = { ஒற்றை இயலெண்கள் },

   B = { இரட்டை இயலெண்கள் }

   $A = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots \}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

   $A \cap B = \{ \}$, A-யும், B-யும் ஒவ்வாக்கணங்கள்.

   $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$ = { இயலெண்கள் }.

பயிற்சி 1-2

1. $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$
$C = \{1, 3, 4, 5\}$ எனில், $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. $A = \{5, 7, 3, 9\}$, $B = \{3, 7, 4, 6\}$
$C = \{7, 4, 6, 10\}$ எனில், $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $A = \{3, 7, 9, 11\}$ $B = \{4, 5, 6, 8\}$ எனில், $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. காலியிடங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

	$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
(அ)	5	4	3	—
(ஆ)	6	7	—	8
(இ)	3	5	—	6
(ஈ)	4	4	—	5
(உ)	6	—	2	7
(ஊ)	3	—	0	5

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$ கணம் B ஐக் காண்க.

$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$ என்பதைச் சரி பார்க்க.

6. வென்படம் வரைந்து சரிபார்க்க.

(அ) $A \cup B = B \cup A$, (ஆ) $A \cap B = B \cap A$.

விடைகள்

1. $\{0,1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$, $\{0,1,3,4,5\}$
2. $\{3, 7\}$, $\{4, 6, 7\}$, $\{7\}$
3. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$, $\{\ \}$
4. 6, 5, 2, 3, 3, 2
5. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1·3. கண முற்றொருமை 1:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$A = \{ 4, 5, 11, 13 \}$, $B = \{ 6, 8, 11, 12, 13 \}$, $C = \{ 3, 4, 8, 12, 13 \}$ என்ற மூன்று கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$B \cap C = \{ 8, 12, 13 \}$$

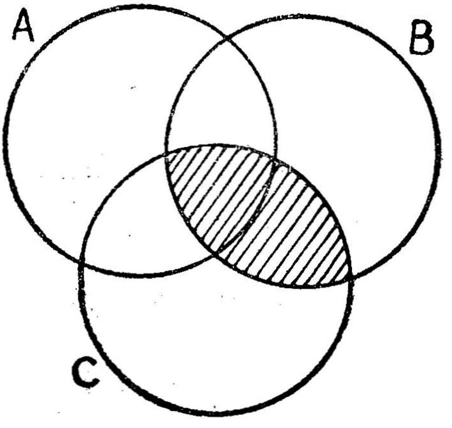
எனவே, $A \cup (B \cap C) = \{ 4, 5, 11, 13 \} \cup \{ 8, 12, 13 \}$
$= \{ 4, 5, 8, 11, 12, 13 \}$

$$A \cup B = \{ 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13 \}$$

$$A \cup C = \{ 3, 4, 5, 8, 11, 12, 13 \}$$

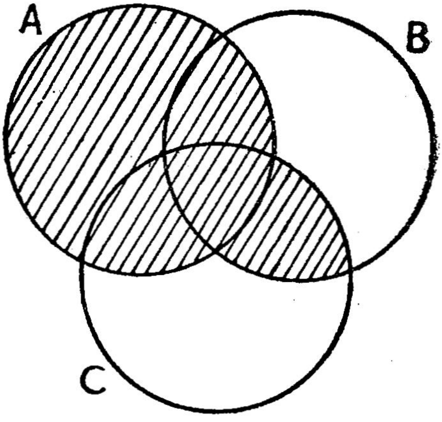
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$= \{ 4,5,6,8,11,12,13 \} \cap \{ 3,4,5,8,11,12,13 \}$
$= \{4,5,8,11,12,13 \}$

எனவே, $A \cup (B \cap C) = \{ (A \cup B) \cap (A \cup C) \}$ என ஊகிக்கலாம். மேலும், பல கணங்களை ஆய்ந்து இக் கூற்றைச் சரிபார்க்கவும். இதனை வென்படம் மூலம் விளக்கலாம்.



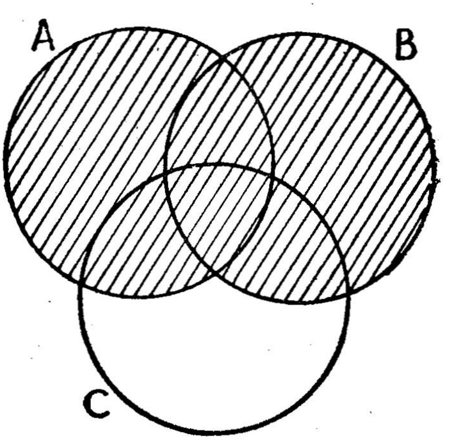
$B \cap C$

படம் 1-4.



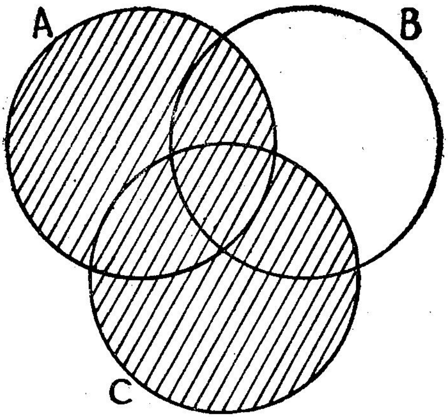
$A \cup (B \cap C)$

படம் 1-5.



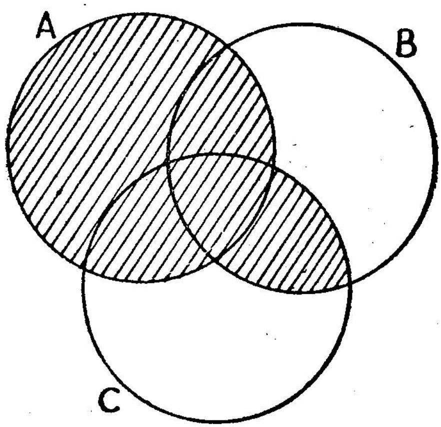
$A \cup B$

படம் 1-6.



$A \cup C$

படம் 1-7.



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

படம் 1-8.

பயிற்சி 1-3

கீழ்க்காணும் கணங்களில் $A \cup B$, $A \cup C$ $B \cap C$ ஆகியவற்றைக் கண்டு $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்ற முற்றொருமையைச் சரிபார்க்கவும்.

	கணம் A	கணம் B	கணம் C
1.	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{2, 4, 7, 9, 11\}$
2.	$\{a, b, c, d, e\}$	$\{b, d, e\}$	$\{a, e, f, g\}$
3.	$\{2, 5, 8, 9\}$	$\{3, 4, 5, 6, 9, 11\}$	$\{2, 8, 9\}$
4.	$\{1, 2, 3\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{6, 7, 8, 9\}$
5.	$\{p, q, r, s\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 5, p, r\}$

விடைகள்

1. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$, $\{7\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

2. $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $\{e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$

3. $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11\}$, $\{2, 5, 8, 9\}$, $\{9\}$ $\{2, 5, 8, 9\}$

4. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ $\{\ \}$ $\{1, 2, 3\}$

5. $\{p, q, r, s, 2, 3, 5\}$, $\{p, q, r, s, 2, 5\}$, $\{2, 5\}$ $\{p, q, r, s, 2, 5\}$

1·4. கணமுற்றொருமை 2 :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$,

$C = \{4, 5, 8, 9\}$

என்ற மூன்று கணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 4, 5, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$
$$= \{3, 4, 5, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 7\}$$
$$A \cap C = \{4, 5\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4, 7\} \cup \{4, 5\}$$
$$= \{3, 4, 5, 7\}$$

எனவே, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ எனக் காண்கிறோம்.

பயிற்சி 1·4

1. பயிற்சி 1·3இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்கள் A, B, C ஐக் கொண்டு $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cup C$ ஆகியவற்றைக் கண்டு மேற்கண்ட முற்றொருமையைச் சரிபார்க்கவும்.

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பதை வென்படம் மூலம் சரி பார்க்கவும்.

விடைகள்

1. $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4\}$,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. $\{b, d, c\}$, $\{a, e\}$, $\{a, b, d, e, f, g\}$,
$\{a, b, d, e\}$

3. $\{5, 9\}$, $\{2, 8, 9\}$,
$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11\}$, $\{2, 5, 8, 9\}$

4. $\{3\}$, $\{\ \}$, $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{3\}$

5. $\{\ \}$, $\{p, r\}$, $\{p, r, 2, 3, 5\}$, $\{p, r\}$

1·5 நிரப்புக் கணங்கள்

நினைவு படுத்திக் கொள்க :

அனைத்துக் கணம் $\mathcal{E} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{7, 8\}$ எனில்

Aஇன் நிரப்புக்கணம் $A' = \{5, 6, 9\}$

Aஇன் நிரப்புக்கணம் A' என்பது அனைத்துக் கணத்தில் Aஇல் உள்ள உறுப்புகள் அல்லாத பிற உறுப்புகளைக் கொண்டது.

பயிற்சி 1·5

1. $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ எனில், A' ஐக் காண்க.

2. $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
$A = \{b, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c, f, h\}$
எனில், A', B', $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $\xi = \{ 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23 \}$
$A = \{ 13, 15, 17 \}$, $B = \{ 15, 17, 21, 23 \}$
$C = \{ 13, 17, 19, 21 \}$ எனில்
$(A \cup B)'$, $(B \cup C)'$, $(A \cap C)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ξ என்பதை அனைத்துக் கணமாகக் கொண்டு $A \cup A'$, $A \cap A'$, ϕ' ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $\xi = \{ 1, 2, 3, 4 \ldots 15 \}$
$A = \{$ 15-க்குக் குறைவான மூன்றின் மடங்குகள் $\}$ எனில் A' ஐக் காண்க.

6. (அ) $\xi = \{$ இயலெண்கள் $\}$,
$A = \{$ ஒற்றை இயலெண்கள் $\}$, A' யாது ?
(ஆ) $\xi = \{$ முழுக்கள் $\}$, $B = \{$ மிகை முழுக்கள் $\}$, B' யாது ?
(இ) $\xi = \{$ மெய்யெண்கள் $\}$,
$X = \{$ விகித முறா எண்கள் $\}$, X' யாது ?
(ஈ) $\xi = \{$ ஆங்கில எழுத்துகள் $\}$,
$V = \{$ ஆங்கில உயிரெழுத்துகள் $\}$, V' யாது ?

7. மேலே கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகள் 1, 3-களில் உள்ள கணங்களைக் கொண்டு A', B' ஆகியவற்றைக் கண்டு $(A')'$, $(B')'$ ஆகியவற்றைக் காண்க A, B கணங்களோடு உள்ள தொடர்பு என்ன ?

8. மேற்கண்ட கணக்கில், $A \cup A'$, $A \cap A'$, ϕ' ஆகியவற்றைக் காண்க. வென்படத்தில் அவற்றைக் குறித்துக் காட்டவும்.

9. (அ) $n(E) = 20$; $n(A) = 12$; $n(A') = ?$
(ஆ) $n(E) = 42$; $n(X') = 26$; $n(X) = ?$
(இ) $n(E) = 30$; $n(M') = 16$; $n(M) = ?$
(ஈ) $n(E) = 40$; $n(A') = 6$; $n(B) = 10$; $B \subset A$ எனில் Bஇல் இல்லாத Aஇன் உறுப்பு எத்தனை ?

10. (அ) $n(E) = 145$; $n(A \cup B) = 98$; $n[(A \cup B)'] = ?$
(ஆ) $n(E) = 84$; $n(A) = 58$; $n(B) = 54$;
$n[(A \cup B)'] = 12$; $n(A \cap B) = ?$

விடைகள்

1. $\{1, 3, 5, 7 \ldots\}$
3. $\{11, 14, 19\}$, $\{11, 14\}$, $\{11, 14, 15, 19, 21, 23\}$
5. $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$
6. (ஆ) {0, குறை முழுக்கள்}
   (ஈ) {ஆங்கில மெய்யெழுத்துகள்}
7. $(A')' = A$; $(B')' = B$.
9. (அ) 8, (ஆ) 16, (இ) 14, (ஈ) 24
10. (அ) 47, (ஆ) $n(A \cup B) = 72$,
    $n(A \cap B) = 58 + 54 - 72 = 40$.

1-6. டி மார்க்கன் விதி (1) : $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்போம்.

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ என்போம்.

$A' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ $B' = \{1, 2, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

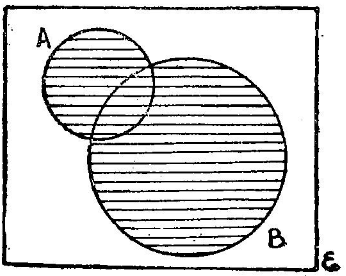
$(A \cup B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}' = \{7, 8\}$

$A' \cap B' = \{4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 2, 7, 8\} = \{7, 8\}$

எனவே $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ஆகும்.

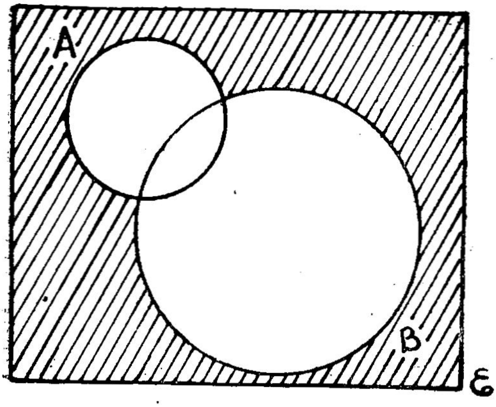
இரு கணங்களின் சேர்ப்புக் கணத்தின் நிரப்புக் கணம் அக்கணங்களின் நிரப்புக் கணங்களின் வெட்டுக் கணம் ஆகும். இது டிமார்க்கனின் விதிகளில் ஒன்றாகும்.

இதனை வென்படம் மூலமும் சரிபார்க்கலாம்.

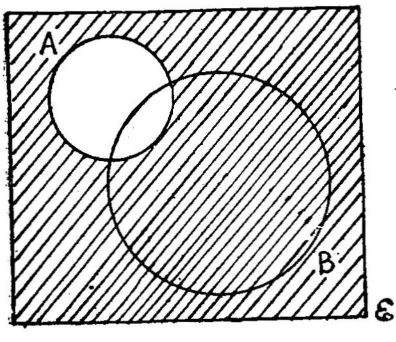


$A \cup B$

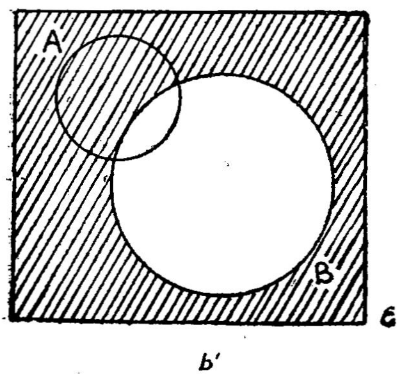
படம் 1-9.



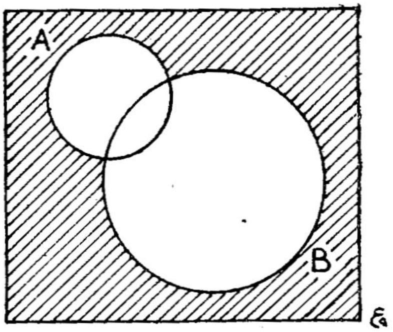
(A ∪ B)'
படம் 1-10.



A'
படம் 1-11.



b'
படம் 1-12.



$A' \cap B'$

படம் 1-13.

பயிற்சி 1·6

கீழ்க்காணும் கணங்களைக் கொண்டு டீமார்க்கனின் முதல் விதியைச் சரிபார்க்கவும்.

	அனைத்துக் கணம்	கணம் A	கணம் B
1.	$\{1,2,3,\ldots,10\}$	$\{1,3,5,7\}$	$\{2,5,7,9,10\}$
2.	$\{x \mid 6<x<18, x\in N\}$	$\{8,12,16\}$	$\{6,12,14\}$
3.	$\{x \mid -4<x<6, x\in Z\}$	$\{x \mid 0<x<4, x\in Z\}$	$\{x \mid -2<x<3, x\in Z\}$
4.	$\{2,5,7,9,11,13,14\}$	$\{9,11,13\}$	$\{2,5,9,14\}$
5.	$\{5,6,9,11,13,17,18\}$	$\{6,9,13,17\}$	$\{5,9,17,18\}$

1·7 டீ மார்க்கன் விதி (2) : $(A\cap B)' = A'\cup B'$

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, \ldots 10\}$ என்போம்.

$A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 5, 6, 7\}$, என்போம்.

$A' = \{1, 2, 4, 6, 10\}$, $B' = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$

$A\cap B = \{5, 7\}$

$(A\cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$A'\cup B' = \{1, 2, 4, 6, 10\} \cup \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

எனவே $(A\cap B)' = A'\cup B'$ ஆகும்.

இரு கணங்களின் வெட்டுக் கணத்தின் நிரப்புக் கணம் அவற்றின் தனிப்பட்ட நிரப்புக் கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம் ஆகும். இது டீ மார்க்கன் விதிகளில் மற்றொன்றாகும்.

மனதிற் கொள்க :

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

வெட்டு, சேர்ப்பு குறிகளின் இடங்களைக் கவனித்து டீ மார்க்கன் விதிகளை அறிந்து கொள்ளவும்.

பயிற்சி 1·7

1. பயிற்சி 1·6இல் உள்ள கணங்களைக் கொண்டு டீ மார்க்கனின் இரண்டாம் விதியைச் சரிபார்க்க.

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பதை வென்படம் மூலம் சரிபார்க்க.

1-8. வென்படத்தின்மூலம் தீர்வுகள்

நினைவு கூர்க :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு தேர்வு எழுதிய 100 மாணவர்களில் 48 பேர் கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்றனர். 40 பேர் ஆங்கிலத்தில் தேர்ச்சி பெற்றனர். 25 பேர் இரண்டு பாடங்களிலும் தேறினர். ஒன்றிலுமே தேர்ச்சியடையாதவர்கள் எத்தனை பேர் ?

தீர்வு :

$A =$ { கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்றவர்கள் } என்க.

$n(A) = 48$

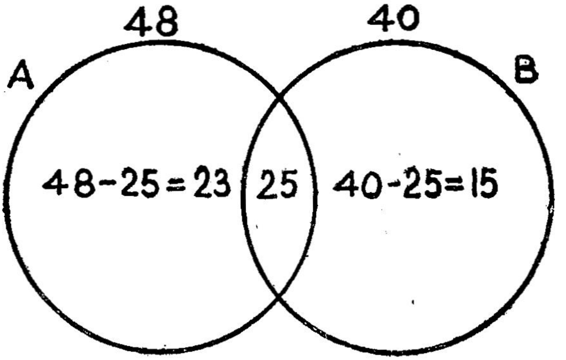
$B =$ {ஆங்கிலத்தில் தேர்ச்சிபெற்றவர்கள் } என்க.

$n(B) = 40$

$A \cap B =$ { ஆங்கிலத்திலும் கணிதத்திலும் தேர்ச்சி பெற்றவர்கள் }

$n(A \cap B) = 25$

விவரங்களை வென்படத்தில் குறிக்க.



படம் 1-14.

வென்படத்திலிருந்து

$$n(A \cup B) = 23 + 25 + 15$$
$$= 63$$

ஒன்றிலுமே தேர்ச்சியடையாதவர்கள்

$$= 100 - 63$$
$= 37$ பேர்.

பயிற்சி 1-8

வென்படங்கள்மூலம் தீர்வு காண்க.

(மனக்கணக்கு 1-6)

1. $n(A) = 20,\ n(B) = 50,\ n(A \cap B) = 15,\ n(A \cup B) = ?$
2. $n(A) = 72,\ n(B) = 80,\ n(A \cap B) = 40,\ n(A \cup B) = ?$
3. $n(A) = 35,\ n(B) = 50,\ n(A \cup B) = 70,\ n(A \cap B) = ?$
4. $n(A) = 52,\ n(B) = 40,\ n(A \cup B) = 80,\ n(A \cap B) = ?$
5. $n(A \cup B) = 60,\ n(B) = 30,\ n(A \cap B) = 20,\ n(A) = ?$
6. $n(A \cup B) = 60,\ n(A) = 25,\ n(A \cap B) = 10,\ n(B) = ?$

7. ஒரு தெருவில் வாழும் 200 பேர்களில் 120 பேர் காபி அருந்துகின்றனர். 70 பேர் தேனீர் அருந்துகின்றனர். 60 பேர் காபி, தேனீர் இரண்டும் அருந்துகின்றனர். ஒன்றுமே அருந்தாதவர்கள் எத்தனை பேர்?

8. ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களில் 26 பேர் இயற்பியலும், 21 பேர் வேதியியலும், 11 பேர் இரண்டு பாடங்களையுமே எடுக்கின்றனர். இப் பாடங்களில் ஒன்றை யாவது பயிலாத மாணவர் அவ் வகுப்பில் இல்லையென்றால், (அ) இயற்பியல் மட்டும், (ஆ) வேதியியல் மட்டும் படிப்பவர்கள் எத்தனை பேர்? வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் எத்தனை பேர்?

9. ஒரு நிறுவனத்தில் 40 பேர் உற்பத்திப் பிரிவிலும், 30 பேர் அலுவலகப் பிரிவிலும் பணியாற்றுகின்றனர். அவர்களில் 20 பேர் இரு இடங்களிலும் பணியாற்றுகின்றனர் என்றால் நிறுவனத்திலுள்ள ஊழியர்கள் எத்தனை பேர்?

10. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 32 மாணவர்கள் கோவைக்கு சுற்றுலா சென்றனர். 20 பேர் வேளாண்மைப் பல்கலைக்கழகப் பொருட்காட்சியையும், 21 பேர் காடு இயல் பொருட்காட்சியையும் பார்த்தனர். காடு இயல் பொருட்காட்சியைப் பாராதவர்கள் எத்தனை பேர்?

விடைகள்

(7) 70; (8) 15, 10, 36; (9) 50; (10) 11.

1-9. மூன்று கணங்களை ஒட்டிய கணக்குகள்

சூத்திரம்: $A \cap B \cap C \neq \phi$ எனில்

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதைவிட வென்படங்களின் துணைகொண்டு தீர்வு காணுதல் எளிது.

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு பள்ளியில் தொடர்ந்தாற்போல் மூன்று நாள்களுக்கு நடந்த விழாவில் முதல் நாள் விழாவிற்கு 140 பேரும், 2ஆம் நாள் விழாவிற்கு 100 பேரும், 3ஆம் நாள் விழாவிற்கு 170 பேரும் வருகை தந்தனர். 35 பேர் மூன்று நாள்களிலும் வருகை தந்தனர். 55 பேர் முதல் இரு நாள்கள் மட்டும் வருகை தந்தனர்.

80 பேர் முதல் நாளும், 3ஆம் நாளும் மட்டும் வருகை தந்தனர். 65 பேர் 2ஆம், 3ஆம் நாள்களில் வருகை தந்தனர் எனில்,

1. முதல் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?
2. 2ஆம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?
3. 3ஆம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

தீர்வு :

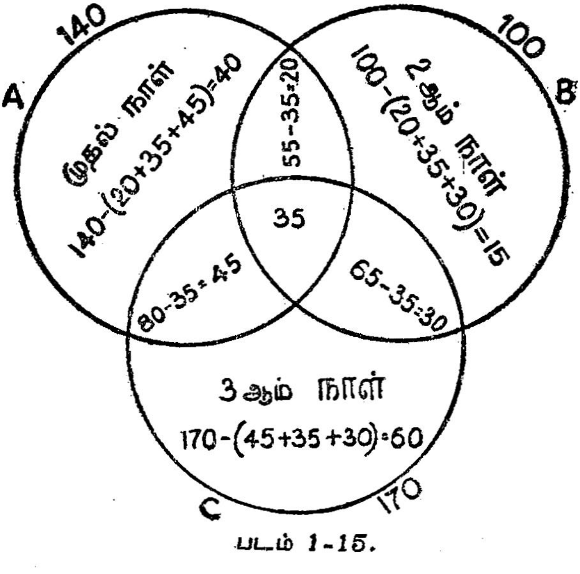
A = { முதல் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் }
$n(A) = 140$

B = { இரண்டாம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் }
$n(B) = 100$

C = { மூன்றாம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் }
$n(C) = 170$

மூன்று நாட்களிலும் வருகை தந்தவர்கள்	= 35 பேர்.
முதல் நாள், 2-ம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள்	= 55 பேர்.
2-ம் நாள், 3-ம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள்	= 65 பேர்.
முதல் நாள், 3-ம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள்	= 80 பேர்.

இவ் விவரங்களை வென்படத்தில் குறிக்க.



படம் 1-15.

படத்திலிருந்து,

முதல் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் = 40 பேர்.

இரண்டாம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் = 15 பேர்.

மூன்றாம் நாள் மட்டும் வருகை தந்தவர்கள் = 60 பேர்.

பயிற்சி 1-9

வென்படங்களின் உதவிகொண்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகளின் தீர்வு காண்க.

1. ஒரு வகுப்பில் 60 மாணவர்கள் பயிலுகின்றனர். இவர்களில் 25 பேர் கால்பந்தும், 20 பேர் ஹாக்கியும், 30 பேர் கிரிக்கெட்டும் விளையாடுகின்றனர். 12 பேர் கால்பந்தும், ஹாக்கியும் விளையாடுகின்றனர். 9 பேர் ஹாக்கியும், கிரிக்கெட்டும் விளையாடுகின்றனர். 13 பேர் கிரிக்கெட்டும், கால்பந்தும் விளையாடுகின்றனர். 5 பேர்கள் மூன்று ஆட்டங்களையும் விளையாடுகின்றனர் எனில்,

   (1) ஒன்றுமே விளையாடாதவர்கள் எத்தனை பேர்?

   (2) கிரிக்கெட் மட்டும் விளையாடுவோர் எத்தனை பேர்?

   (3) கால்பந்து மட்டும் விளையாடுவோர் எத்தனை பேர்?

2. ஒரு பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பில் நடந்த தேர்வில் ஆங்கிலத்தில் 50 பேரும், கணிதத்தில் 70 பேரும், அறிவியலில் 60 பேரும் தேர்ச்சி பெற்றனர். ஆங்கிலத்திலும் கணிதத்திலும் 15 பேரும், கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் 20 பேரும், ஆங்கிலத்திலும் அறிவியலிலும் 30 பேரும் தேர்ச்சிபெற்றனர். 8 பேர் மூன்றிலும் தேர்ச்சி பெற்றனர் எனில்,

   (1) ஆங்கிலத்தில் மட்டுமே தேர்ச்சியடைந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

   (2) கணிதத்தில் மட்டுமே தேர்ச்சி பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

   (3) அறிவியலில் மட்டுமே தேர்ச்சிபெற்றவர்கள் எத்தனை பேர்?

3. வானொலியில் இசை. பேச்சு, நாடகம் ஆகிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளைப்பற்றி மாணவரிடையே நடத்தப்பட்ட ஆய்விநின்று பெறப்பட்ட தகவல்கள் பின்வருமாறு.

நிகழ்ச்சி	கேட்டவர்
இசை	60%
பேச்சு	40%
பேச்சு மட்டும்	10%
நாடகம் மட்டும்	10%
இசை, பேச்சு கேட்டு நாடகம் கேளாதவர்	15%
இசை, நாடகம் கேட்டு பேச்சைக் கேளாதவர்	20%
மூன்று நிகழ்ச்சிகளையும் கேட்டவர்	5%

இத் தகவல்களினின்று, (அ) இசை நிகழ்ச்சியை மட்டும் கேட்டவர் (ஆ) எந்நிகழ்ச்சியையும் கேளாதவர் என்ன விழுக்காடு? எந்நிகழ்ச்சியை மிகவும் அதிகமான பேர் கேட்டனர்?

4. பந்தயங்களில் கலந்துகொண்ட மாணவர்களின் விவரம் பின் வருமாறு.

பந்தயம்	போட்டியாளர்
100 மீ	30
200 மீ	18
400 மீ	12

இவர்களில் மூவர் மூன்று பந்தயங்களிலும், 18 பேர் 100 மீ ஓட்டத்தில் மட்டும், 3 பேர் 200 மீ ஓட்டத்தில் மட்டும் கலந்து கொண்டனர். 100 மீ ஓட்டத்தில் பங்குகொண்டவர் யாரும் 400 மீ ஓட்டத்தில் கலந்துகொள்ளவில்லை. பந்தயங்களில் கலந்துகொண்ட மொத்த போட்டியாளர்கள் எத்தனை பேர்?

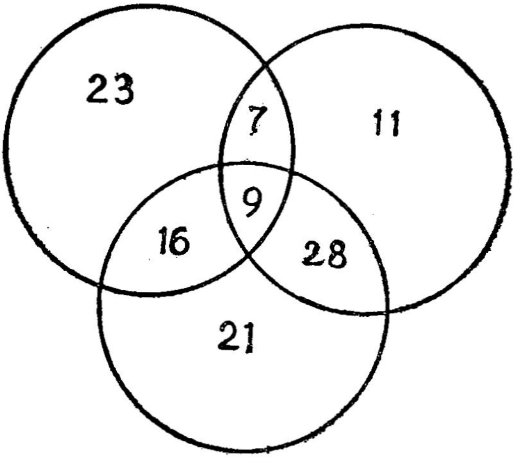
5. $n(A) = 30, n(B) = 20, n(C) = 40$

$n(A \cup B) = 13, n(B \cap C) = 11, n(A \cap C) = 18$

$n(A \cap B \cap C) = 6$ எனில், $n(A \cup B \cup C)$ காண்க.

6. பின்வரும் வென்படத்தில், ஏதேனும் ஒரு விவரத்தைக் குறைக்கவும்: இதர விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு கணக்கு

உண்டாக்கவும். வெவ்வேறு மாணவர் வெவ்வேறு விவரங்களை மறைக்க வேறுபட்ட கணக்குகள் கிடைக்கும். அவற்றைத் தீர்த்துப் பயிற்சி பெறவும்.



படம் 1-16.

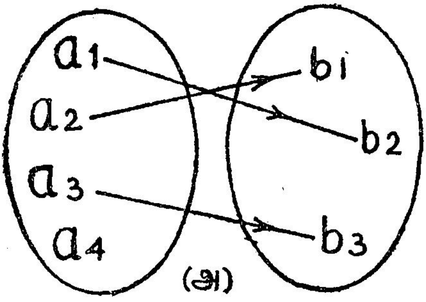
1-10. சார்பு வரையறை

சென்ற வகுப்பில் சார்புகளைப் பற்றிக் கற்றவற்றை முதலில் நினைவு கூர்வோம்.

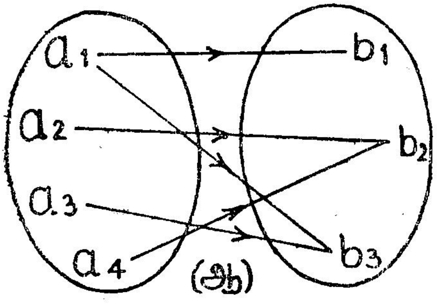
A, *B* என்பன வெற்றல்லாத இரு கணங்களென்க. கணம் *A*இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் *B*இல் ஒரே ஒரு உறுப்போடு பிணைக்கப்பட்டால் அப் பிணைப்பு *சார்பு* எனப்படும்.

'ஒவ்வொரு', 'ஒரே ஒரு' என்ற சொற்களை நன்கு கவனிக்கவும். *A*இன் உறுப்பு a-க்கு பிணைக்கப்பட்டுள்ள *B*இன் உறுப்பு b, aஇன் பிம்பம் எனப்படும். b பிணைந்த a, bஇன் முன் பிம்பம் எனப்படும்.

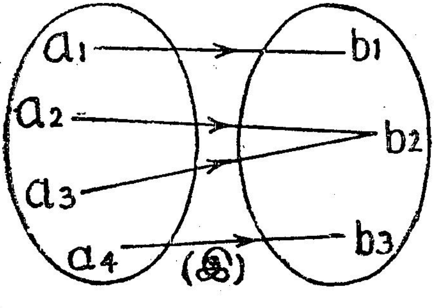
கீழே $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகளுக்கும் $\{b_1, b_2, b_3\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகளுக்கும் நால் வகைப் பிணைப்புகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.



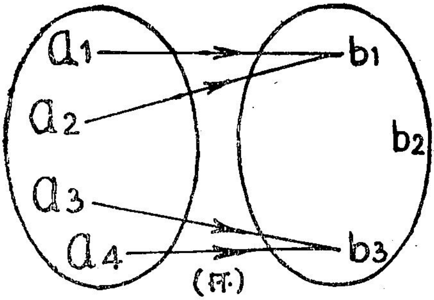
படம் 1-17.



படம் 1-18.



படம் 1-19.



படம் 1-20.

படம்	மதிப்பகம்	வீச்சகம்	பிணைப்புக் கணம்	சார்பா ?
(அ)	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$	$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_3)\}$	அன்று a_4-க்கு பிம்பம் இல்லை. 'ஒவ்வொரு' என்ற நிபந்தனை நிறைவேற வில்லை.
(ஆ)	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$	$\{(a_1, b_3), (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_2)\}$	சார்பன்று. a_1-க்கு இரு பிம்பங்கள் உள்ளன. 'ஒரே ஒரு' என்ற நிபந்தனை நிறைவேறவில்லை,
(இ)	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$	$\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$	சார்பு.
(ஈ)	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_3\}$	$\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_3)\}$	சார்பு.

கவனிக்க : (அ), (ஆ)-க்களில், பிணைப்புக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 3-ம், 5-ம் ஆகும். மதிப்பகத்திலுள்ள உறுப்புகள் 4. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரேயொரு **பிம்பம்**

அமையவேண்டுமாதலால், பிணைப்புக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4-க்கு கூடவோ, குறையவோ இருந்தால், பிணைப்பு சார்பாகாது. பிணைப்புக்கணத்திலுள்ள வரிசைச் சோடிகள் மதிப்பகத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிணையும் முதலுறுப்பாகக் கொண்டிருந்தால் பிணைப்பு சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

1. $\{(7, 3), (-2, 5), (-3, 4), (-1, 4)\}$

பிணைப்புக்கணத்திலுள்ள முதலுறுப்புகள் வேறானவை.

ஆகவே இஃது ஒரு சார்பு.

மதிப்பகம் $= \{7, -2, -3, -1\}$, வீச்சகம் $= \{3, 5, 4\}$

2. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

பிணைப்புக்கணம் $f = \left\{(1, 1), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(5, \frac{1}{5}\right)\right\}$

வீச்சகம் $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$. இஃது ஒரு சார்பு.

3. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$B = N$, $f(x) = x + 2$ என்ற விதிப்படி

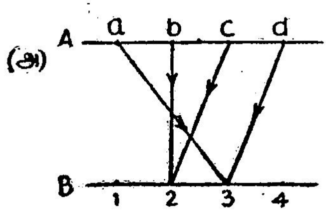
பிணைப்பு துணை மதிப்பகம் $= \{1, 2, 3, ..\}$

$f(-3) = -3 + 2 = -1;\ f(-2) = -2 + 2 = 0$

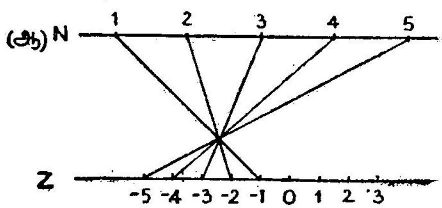
$-1, 0$ என்பவை துணை மதிப்பகத்தில், இல்லையாதலால், இது சார்பாகாது.

பயிற்சி 1-10

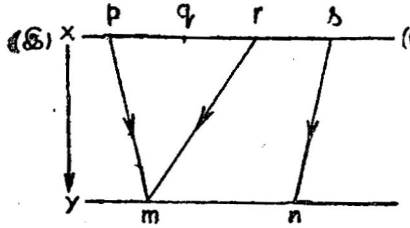
1. பின்வரும் படங்களில் காட்டப்பட்ட பிணைப்புகள் சார்புகளா என ஆய்க. ஒவ்வொன்றிற்கும் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம், வீச்சகம், பிணைப்புக் கணம் ஆகியவற்றைக் காண்க.



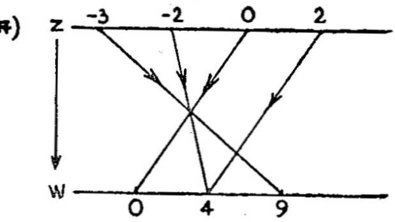
படம் 1-21.



படம் 1-22.



படம் 1-23.



படம் 1-24.

2. $A = \{0\ 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ பிணைப்பு $f : A \rightarrow B$, $f(x) = -2x$ என்ற விதிப்படி அமைகிறது. இஃது ஒரு சார்பா?

3. $(3, 3)$, $(-3, 2)$, $(1, 6)$, $(0, 5)$, $(-5, 0)$ என்ற பிணைப்புக்கணம் ஒரு சார்பாகுமா? பிணைப்பு விதியைக் காண்க.

4. பிணைப்பு $f: \quad A \rightarrow B$ இன் விதி $f(x) = x^2 - 4$. $A = B = N$ ஆனால் f ஒரு சார்பாகுமா எனக் காண்க.

5. பிணைப்பு $f: \quad Z \rightarrow Z$ இன் விதி $f(x) = 2x + 1$, $x > 0$ ஆனால், $= -x$, $x < 0$ ஆனால், அஃது ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. $\{-5, -2, -1, 0, 1, 3\}$, என்ற மதிப்பகத்தின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

விடைகள்

1. (அ) சார்பு ; $\{a, b, c, d\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3\}$
$\{(a, 3)\ (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$

(ஆ) சார்பு ; $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{-5, -4, \ldots, 2, 3\}$,
$\{-5, -4, -3, -2, -1\}$
$\{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (5, -5)\}$

(இ) சார்பன்று ; q-க்கு பிம்பம் இல்லை.

(ஈ) சார்பு ; $\{-3, -2, 0, 2\}$, $\{0, 4, 9\}$, $\{0, 4, 9\}$,
$(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (2, 4)\}$

2. சார்பன்று ; 3, 4 என்ற உறுப்புகளுக்குப் பிம்பங்கள் இல்லை.

3. ஆம். $f(x) = x + 5$.

4. சார்பன்று ; 1, 2 ஆகிய உறுப்புகளுக்குப் பிம்பங்கள் இல்லை.

5. $\{5, 2, 1, 3, 7\}$

1-11. சார்பு மதிப்பீடு

$f(x)$ குறியீடு

$f : \{(0, 1), (3, 5), (4, -3)\}$ என்ற வரிசைப்படுத்தப் பட்ட சோடிகளால் ஆன கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

fஇன் மதிப்பகம் $= \{0, 3, 4\}$

fஇன் வீச்சகம் $= \{1, 5, -3\}$

$f(0) = 1,\ f(3) = 5,\ f(4) = -3$

f என்ற சார்பின் ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடி (x, y) எனில் $f(x) = y$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$f = \{(x, y) / y = 4x - 7\}$ எனில், $f(0)$, $f(2)$, $f(-5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 7 \\ f(0) &= 4(0) - 7 \\ &= 0 - 7 \\ &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= 4x - 7 \\ f(2) &= 4(2) - 7 \\ &= 8 - 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 7 \\ f(-5) &= 4(-5) - 7 \\ &= -20 - 7 \\ &= -27. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$f(x) = 3x^2 - x + 2$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பில் f இன் மதிப்பகம் $\{1, 3, -3\}$ எனில் f இன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

$f(x) = 3x^2 - x + 2$
$f(1) = 3(1)^2 - 1 + 2$
$= 3 - 1 + 2$
$= 4$

$f(x) = 3x^2 - x + 2$
$f(3) = 3(3)^2 - 3 + 2$
$= 27 - 3 + 2$
$= 26.$

$f(x) = 3x^2 - x + 2$
$f(-3) = 3(-3)^2 - (-3) + 2$
$= 27 + 3 + 2$
$= 32$

f இன் வீச்சகம் $= \{4, 26, 32\}$

பயிற்சி 1-11

1. $f = \{(x, y) \mid y = 4x - 1\}$ எனில்,
$f(0), f(4), f(-2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. $g = \{(x, y) \mid y = -3x + 2\}$ எனில்,
$g(1), g(2), g(-3)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $f(x) = x^2 - 7$ எனில், $f(2), f(-4), f(5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பின் மதிப்பகம் D எனில் அச் சார்பின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(a) $f(x) = x^2 + 1$, $\quad D = (1, -1, 0)$
(b) $g(x) = x^2 - x + 1$ $\quad D = (2, 3, -5)$
(c) $r(x) = 2x^2 + 3$ $\quad D = (0, 1, 2)$
(d) $h(x) = 3x^3 - 2x + 7$ $\quad D = (-1, -2, -3)$
(e) $k(x) = (2x - 3)^2$ $\quad D = (1, -1, 2, 5)$

5. $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 4$, $h(x) = 3x - 5$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) $f(1) + g(2)$ (b) $f(-2) + g(3)$
(c) $h(-4) + g(-5)$ (d) $h(-1) - g(-3)$
(e) $g(-8) + h(-2)$ (f) $g(7) - h(-3)$
(g) $g[h(-3)]$ (h) $h[g(4)]$

விடைகள்

1. −1, 15, −9. 4. (a) (2, 1) (d) (12, 23, 40)
5. (a) 6 (d) −21 (g) 200.

பாடச் சுருக்கம்

1. பண்டங்களின் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.

2. கணம் A இலுள்ள உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் கணம் Bஇன் உறுப்பானால், கணம் A, கணம் Bஇன் உட்கணமாகும். $A \subseteq B$. ஒரு கணமும் வெற்றுக் கணமும் அக் கணத்தின் உட்கணங்களாகும்.

   ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களால் உருவான கணம் அடுக்குக் கணம் எனப்படும்.

   கணத்தின் ஆதி எண் p ஆனால், அதன் அடுக்குக் கணத்தின் ஆதி எண் 2^p.

3. இரு கணங்களிலுள்ள பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்டு அமையும் கணம் அக்கணங்களின் வெட்டு ஆகும்.

   இரு கணங்களில் ஏதேனும் ஒன்றிலாவது உள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் கணம் அக் கணங்களின் சேர்ப்பு எனப்படும்.

   அனைத்துக் கணத்தில் ஒரு கணத்தில் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டு அமையும் கணம் அக்கணத்தின் நிரப்புக் கணமாகும்.

4. (அ) (i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   (ii) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

   (ஆ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (இ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (ஈ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

   (உ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

5. ஒரு கணத்திலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் மற்றொரு கணத்தில் ஒரே ஓர் உறுப்போடு பிணைக்கப்பட்டால், அப்பிணைப்பு சார்பு எனப்படும்.

முதல் கணம் மதிப்பகம் என்றும், இரண்டாம் கணம் துணை மதிப்பகம் என்றும் அழைக்கப்படும்.

இரண்டாம் கணத்தில் பிணைந்த உறுப்புகள் மட்டும் உள்ள கணம் வீச்சகம் எனப்படும்.

வீச்சகம் துணை மதிப்பகத்தின் உட்கணமாகும்.

மதிப்பகத்திலுள்ள உறுப்போடு பிணைக்கப்படும் வீச்சகத்திலுள்ள உறுப்பு முதலுறுப்பின் பிம்பம் எனப்படும்.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. இயல் எண் கணத்திலுள்ள பின்ன எண்களைக் கொண்ட கணம் எத்தகையது?

2. $\{x \mid 2 < x < 7,\ x \in N\}$ எனும் கணத்தை பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

3. $A = \{2, 4, 9, 12, 17\}$, $B = \{-5, -4, 0, 7\}$,
$C = \{-4, 4, 12, 18\}$ ஆனால், (அ) $A \cup B$; (ஆ) $A \cup C$; (இ) $B \cup C$; (ஈ) $A \cap B$; (உ) $A \cap C$; (ஊ) $B \cap C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. மேற்கண்ட கணக்கிலுள்ள கணங்களைக் கொண்டு
(அ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(ஆ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(இ) $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ என்பவற்றைச் சரிபார்க்க.

5. ஓரிலக்க இயலெண் கணம் அனைத்துக் கணம். $A = \{$ பகா எண்கள் $\}$ எனில் Aஇன் நிரப்புக் கணம் A' என்ன?

6. டி மார்க்கன் விதிகளைக் கூறுக. தேவைக்கேற்ப கணங்களை வரையறுத்துக் கொண்டு அவ் விதிகளைச் சரிபார்க்க.

7. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 45 மாணவர்களில் 25 பேர் பாடத் தெரிந்தவர்கள். 20 பேர் ஆடத் தெரிந்தவர்கள். 10 பேர் பாடவும் ஆடவும் தெரிந்தவர்களெனில், பாடவோ, ஆடவோ, இரண்டுமே தெரியாதவர்கள் எத்தனை பேர்?

8. ஒரு விற்பனையாளர் மக்களிடையேயுள்ள பான பழக்க வழக்கங்களைத் தனது அலுவலகத்திற்கு அனுப்பினார்.

மொத்தம் சந்தித்தவர்கள்	=	1000 பேர்
டீ மட்டும் பருகுபவர்கள்	=	300 பேர்
காபி மட்டும் பருகுபவர்கள்	=	150 பேர்
கொக்கோ மட்டும் பருகுபவர்கள்	=	200 பேர்
டீ, கொக்கோ இரண்டும் அருந்துபவர்கள்	=	50 பேர்
காபி, கொக்கோ இரண்டும் அருந்துபவர்கள்	=	100 பேர்
டீ, காபி இரண்டும் அருந்துபவர்கள்	=	70 பேர்
மூன்று பானங்களும் அருந்துபவர்கள்	=	20 பேர்
ஒரு பானமும் அருந்தாதவர்கள்	=	110 பேர்

தலைமையிடம் விற்பனையாளரை வேலையினின்று நீக்கியது. காரணம் என்ன?

9. கீழ்க்கண்ட வரிசைச் சோடியில் எவை எவை சார்புகளாகும்?

(அ) $\{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$,

(ஆ) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 4)\}$,

(இ) $\{(2, 2), (3, 4), (4, 3), (1, 1)\}$,

(ஈ) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$,

(உ) $\{(4, 1), (3, 2), (4, 2)\}$

(ஊ) $\{(6, 2), (5, 3), (4\ 4)\}$

10. $f(x) = 2x^2 + x - 5$ என்ற சார்பில் $(0, -5)$, $(-2, -1)$, $(1, -1)$, $(3, 16)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகளில் எவை பொருந்தும்? $\{4, -3, -1\}$ என்ற மதிப்பகத்திற்கான வீச்சகத்தினைக் காண்க.

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம் - மேடை 1

ஃபைபோனாசி வரிசை :

ஃபைபோனாசி என்று அறியப்பெறும் பைசா நகரத்தைச் சார்ந்த இலியோனார்டோ என்ற அறிஞர் ஓர் எண் தொடர் வரிசையினை உலகிற்கு அளித்தார்.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

இதன் அமைப்பு முறையை ஊன்றிக் கவனித்தறிக. அடுத்த சில உறுப்புகளைக் காண்க. இவ் வரிசையில் அடுத்தடுத்து அமைந்த இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம். 8, 13 அவற்றின் பெருக்கற்பலன் காண்க. $8 \times 13 = 104$

அவற்றை அடுத்த எண்களின் பெருக்கற்பலனைக் காண்க. $5 \times 21 = 105$

அவற்றினின்று இரு இடங்களைத் தள்ளியுள்ள எண்களின் பெருக்கற்பலன் காண்க. $3 \times 34 = 102$

அவற்றினின்று மூன்று இடங்கள் தள்ளியுள்ள எண்களின் பெருக்கற்பலன் காண்க. $2 \times 55 = 110$

அவற்றினின்று நான்கு இடங்கள் தள்ளியுள்ள எண்களின் பெருக்கற்பலன் காண்க. $1 \times 89 = 89$

இது போல வேறு சில இணை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு கீழ்க்கண்ட கூற்றுகள் மெய்யானவையா என ஆய்க.

(a_n என்பது வரிசையில் n ஆவது உறுப்பு)

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
2. $a_n \times a_{n+1} = a_{n-1} \times a_{n+2} \pm 1$
3. $a_n \times a_{n+1} = a_{n-2} \times a_{n+3} \pm 2$
4. $a_n \times a_{n+1} = a_{n-3} \times a_{n+4} \pm 6$
5. $a_n \times a_{n+1} = a_{n-4} \times a_{n+5} \pm 15$
6. $a_{n-1} \times a_{n+1} = a_n^2 \pm 1$

7. $a_{n-2} \times a_{n+2} = a_n^2 \pm 1$

8. $a_{n-3} \times a_{n+3} = a_n^2 \pm 2^2$

9. $a_{n-4} \times a_{n+4} = a_n^2 \pm 3^2$

10. $a_{n-5} \times a_{n+5} = a_n^2 \pm 5^2$

11. $a_n^2 + a_{n+1}^2$ உம் ஒரு ஃபைபோனாசி வரிசை எண்.

12. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

எவையேனும் இரண்டு எண்களை எழுதுக. அவற்றின் கூட்டுத்தலை மூன்றாம் எண்ணாகக் கொள்க. இரண்டாம், மூன்றாம் எண்களின் கூட்டுதலை நான்காம் எண்ணாகக் கொள்க. தொடர் வரிசையை வைத்து மேற்கண்ட கூற்றுகளின் மெய்ம்மையை ஆய்க. சூரியகாந்திப் பூவின் சுழல் அமைப்பு, ஒற்றைத் தண்டுள்ள தாவரங்களில் இலைகளின் எண்ணிக்கை போன்ற பல வற்றிற்கும் ஃபைபோனாசி தொடர் வரிசைக்கும் பல தொடர்புகள் காணப்படுகின்றன. இவற்றினை அறிய முற்படுக.

2. எண் முறையினம்

2-1. மெய்யெண்கள்

நினைவு கூர்க :

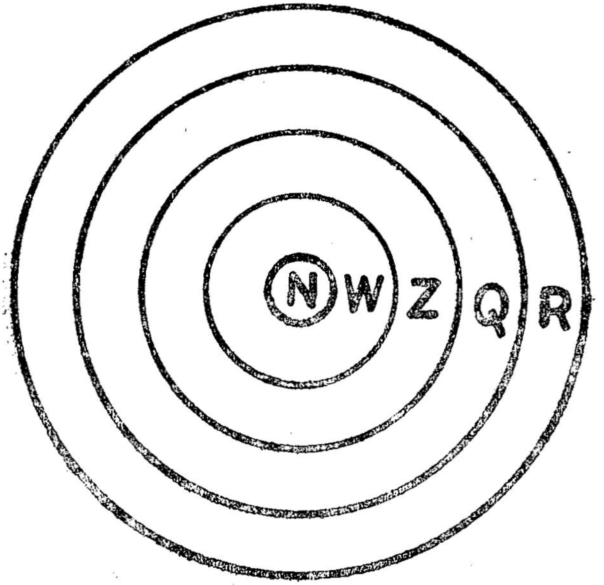
$N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

$W = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

$Q = \{$ விகிதமுறு எண்கள் $\}$

$R = \{$ மெய்யெண்கள் $\}$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

படம் 2-1.

பயிற்சி 2-1

1. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எவை மெய், எவை மெய்யல்ல எனக் கூறுக.

(அ) எல்லா இயலெண்களும் முழு எண்களே.

(ஆ) ஓர் எண் முழு எண் ஆனால் அஃது இயல் எண்ணே.

(இ) இரு முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு முழு எண்.

(ஈ) எம் முழுவையும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகக் கூற முடியும்.

(உ) மெய்யெண் கணத்தின் உறுப்புகள் எல்லாம் விகிதமுறா எண்கள்.

(ஊ) விகிதமுறு எண்ணையும் விகிதமுறா எண்ணையும் கூட்டக் கிடைக்கும் எண் மெய்யெண்.

2. கீழ்க்காணும் எண்களில் எவை விகிதமுறா எண்கள், எவை விகிதமுறு எண்கள் எனக் காண்க.

(அ) $\sqrt{7}$ (ஆ) $\frac{-3}{4}$ (இ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ஈ) $\sqrt{16}$ (உ) $7\sqrt{3}$

(ஊ) $\frac{-4}{8}\sqrt{25}$ (எ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (ஏ) $3+4\sqrt{3}$

2-2. மெய்யெண்களின் பண்புகள்

$a, b, c \in R$ எனில்

1. $a+b \in R$ (கூட்டல் அடைவுப் பண்பு)
2. $a+b=b+a$ (கூட்டல் மாற்றுப் பண்பு)
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு)
4. $a+0=a$ (கூட்டல் சமனிப் பண்பு)
5. $a+(-a)=0$ (கூட்டல் தலைகீழிப் பண்பு)
6. $a \times b \in R$ (பெருக்கல் அடைவுப் பண்பு)
7. $a \times b=b \times a$ (பெருக்கல் மாற்றுப் பண்பு)
8. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு)
9. $a\times 1=1\times a=a$ (பெருக்கல் சமனிப் பண்பு)
10. $a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1$ (பெருக்கல் தலைகீழிப் பண்பு) இதில் $a \neq 0$ என்பதைக் கவனிக்க.
11. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (பங்கீட்டுப் பண்பு)

பயிற்சி 2-2

கீழ்க் காணும் எண்களைக் கொண்டு மெய்யெண் கணத்தின் பண்புகளைச் சரிபார்க்க.

	a	b	c
1.	4	5	8
2.	-4	3	-6
3.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
4.	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{3}{4}$
5.	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{10}$
6.	$2+\sqrt{3}$	$3-\sqrt{5}$	$3-\sqrt{3}$

2-3. மெய்யெண்கணமும் அதன் உட்கணங்களும்

கீழ்க் காணும் அட்டவணை மெய்யெண்களின் பண்புகள், மெய்யெண்கணத்தின் உட்கணங்களில் எவற்றிற்குப் பொருந்தும் என்பதைக் காட்டுகிறது.

பண்பு	N	W	Z	Q^+	Q	R
கூட்டல் செயல் 1. அடைவுப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. சேர்ப்புப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. கூட்டல் சமனி (0)	×	✓	✓	✓	✓	✓
4. கூட்டல் தலைகீழி	×	×	✓	×	✓	✓
5. மாற்றுப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓

பண்பு	N	W	Z	Q^+	Q	R
பெருக்கல் செயல் 1. அடைவுப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. சேர்ப்புப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. பெருக்கல் சமனி (1)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4. பெருக்கல் தலைகீழி	×	×	×	✓	✓	✓
5. மாற்றுப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6. பங்கீட்டுப் பண்பு	✓	✓	✓	✓	✓	✓

பயிற்சி 2-3

1. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எவை மெய், எவை மெய்யல்ல எனக் கூறுக.

   (அ) இயல் எண்களின் கணம் கூட்டல் சமனியைப் பெற்றுள்ளது.

   (ஆ) முழு எண்களின் கணம் கூட்டல் தலைகீழியைப் பெற்றுள்ளது.

   (இ) முழுக்களின் கணம் பெருக்கல் செயலுக்கு அடைவு பெற்றுள்ளது.

   (ஈ) இயல் எண்களின் கணத்தில் பெருக்கல் சமனி உள்ளது.

   (உ) விகிதமுறு எண்களின் கணத்தில் பெருக்கல் தலைகீழி உள்ளது.

2. $a + x = a$ எனில் $x \in N$ ஆக இருக்கமுடியுமா ?

3. $a \times x = 1$ எனில் $x \in Z$ ஆக இருக்கமுடியுமா ?

4. $a, b \in R$ எனில் $a + b = b + a$ என்பது உண்மையா ?

5. $a, b, c \in Z$ எனில் $a(b+c) = ab+ac$ என்பது உண்மையா?

2-4. கூட்டுத் தொடர் வரிசை

(1) 4, 7, 10, 13, ...

(2) 5, 10, 15, 20, ...

(3) 8, 6, 4, 2, 0, ...

(4) 5, 11, 17, 23, ...

மேற் காணப்படும் தொடர் வரிசைகளைக் கவனிக்க. அடுத்தடுத்துள்ள எண்களிடையேயுள்ள வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளன.

(1)இல் வித்தியாசம் 3

(2)இல் வித்தியாசம் 5

(3)இல் வித்தியாசம் −2

(4)இல் வித்தியாசம் 6

இத்தகைய தொடர் வரிசைகள் கூட்டுத் தொடர் வரிசைகள் எனப்படும்.

பொதுவாக $a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும். இதில் முதல் உறுப்பு "a". "d" என்பது பொது வித்தியாசம் ஆகும்.

முதல் உறுப்பு $= a$

2 ஆம் உறுப்பு $= (a + d) = a + (2 - 1)d$

3 ஆம் உறுப்பு $= a + 2d = a + (3 - 1)d$

4 ஆம் உறுப்பு $= a + 3d = a + (4 - 1)d$

... ...

... ...

n ஆவது உறுப்பு $= a + (n - 1)d$

$$\boxed{t_n = a + (n - 1)d}$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

3, 7, 11, ... என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 32 ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$t_n = a + (n-1)d$$

$a = 3, d = 4, n = 32$ எனப் பிரதியிட

$$t_{32} = 3 + (32-1)(4)$$

$$= 3 + (31)(4)$$

$$= 3 + 124$$

$$= 127.$$

32 ஆவது உறுப்பு = 127.

$a, (a+d), (a+2d), \ldots$ இல் n ஆவது உறுப்பைக் கடைசி உறுப்பு l எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $t_n = l$

$$a + (n-1)d = l$$

$$(n-1)d = l - a$$

$$(n-1) = \frac{l-a}{d}$$

$$\boxed{n = \frac{l-a}{d} + 1}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

3, 8, 13, ... என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 98 எத்தனையாவது உறுப்பாகும்?

தீர்வு :

$n = \frac{l-a}{d} + 1$ இல்

$l = 98, a = 3, d = 5$ எனப் பிரதியிட,

$$n = \frac{98 - 3}{5} + 1$$

$$= \frac{95}{5} + 1$$

$$= 19 + 1$$

$$= 20.$$

98 என்பது 20 ஆவது உறுப்பாகும்.

பயிற்சி 2-4

1. பின்வரும் கூட்டுத் தொடர் வரிசைகளில் அடுத்துவரும் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

   (a) 5, 12, 19, ..

   (b) 7, 4, 1,

   (c) 3, 3·5, 4, 4·5, ...

2. கீழ்க்காணும் கணக்குகளில் சில கூட்டுத் தொடர் வரிசைகளின் முதல் உறுப்பும் பொது வித்தியாசமும் முறையே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அத் தொடர் வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக.

   (a) 5, 4 (b) 3, 2 (c) −7, 3 (d) 73, −2
   (e) 10, −5

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a. பொது வித்தியாசம் d எனில் கீழ்க்காணும் கூட்டுத் தொடர் வரிசைகளின் 12 ஆவது, 35 ஆவது, 100 ஆவது உறுப்புக்களைக் காண்க.

   (a) $a = 6, \quad d = 5$

   (b) $a = 4, \quad d = 7$

   (c) $a = 8, \quad d = 1·5$

4. 8, 11, 14, ..., 95 என்ற முடிவுறு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன ?

5. $11, 6, 1, \ldots, -54$ என்ற முடிவுறு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

6. $2, 3{\cdot}5, 5, \ldots, 62$ என்ற முடிவுறு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன ?

7. $3x + 1, 5x - 1, 5x + 1$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசை யெனில் xஇன் மதிப்பைக் காண்க.

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 12ஆவது உறுப்பு 61. பொது வித்தியாசம் 5 எனில் அக் கூட்டுத் தொடர் வரிசை யைக் காண்க.

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 10 ஆவது உறுப்பு 31. 15ஆவது உறுப்பு 46 எனில் அத்தொடர் வரிசையைக் காண்க.

விடைகள்

1. (a) 26, 33, 40 (b) $-2, -5, -8$ (c) 5, 5·5, 6.

2. (a) 5, 9, 13, 17 (b) 3, 5, 7, 9
(c) $-7, -4, -1, 2$ (d) 73, 71, 69, 67
(e) $10, 5, 0, -5$.

3. (a) 61, 176, 501 (b) 81, 242, 697.
(c) 24·5, 59, 156·5.

4. 30 5. 14 6. 41 7. $x = 2$ 8. 6, 11, 16,

9. 4, 7, 10, ...

2-5. நினைவு கூர்க :

$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + l)}$$ (l என்பது கடைசி உறுப்பு)

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$5 + 8 + 11 + \ldots$ என்ற தொடரில் முதல் 30 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

$$S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$$ இல்

$n = 30, \quad a = 5, \quad d = 3$ எனப் பிரதியிட

$$S_{30} = \frac{30}{2}\left\{2 \times 5 + (30 - 1)3\right\}$$

$$= 15\{10 + (29 \times 3)\}$$

$$= 15\{10 + 87\}$$

$$= 15 \times 97$$

$$= 1455.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கூடுதல் காண்க :

$4 + 9 + 14 + \ldots 199.$

தீர்வு :

முதலில் n இன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$$n = \frac{l - a}{d} + 1.$$

$l = 199, \quad a = 4, \quad d = 5$ எனப் பிரதியிட

$$n = \frac{199 - 4}{5} + 1$$

$$= \frac{195}{5} + 1$$

$$= 39 + 1$$

$$= 40.$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}(4 + 199)$$
$$= 20 \times 203$$
$$= 4060$$

பயிற்சி 2·5

கூடுதல் காண்க :

1. $3 + 7 + 11 + \dots$ 25 உறுப்புகள் வரை.
2. $9 + 12 + 15 + \dots$ 30 உறுப்புகள் வரை.
3. $7 + 5 + 3 + \dots$ 15 உறுப்புகள் வரை.
4. $2 + 4{\cdot}5 + 7 + \dots$ 40 உறுப்புகள் வரை.
5. $5 + 6{\cdot}5 + 8 + \dots$ 30 உறுப்புகள் வரை.
6. $7 + 12 + \dots + 152$.
7. $6 + 10 + 14 + \dots + 202$.
8. $5 + 3 + \dots + (-53)$.
9. $3 + 4{\cdot}5 + \dots + 18$.
10. 200-க்கும் 400-க்கும் இடையில் 7ஆல் வகுபடும் எல்லா முழு எண்களின் கூடுதல் காண்க.

விடைகள்

1. 1275 2. 1575 3. -105 4. 2030
5. 2955 6. 2385 7. 5200 8. -720
9. 115·5 10. 8729

2-6 ஒற்றை எண்களின் கூடுதல்

நினைவு கூர்க :

1. $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
3. $1 + 3 + 5 + \dots + l = \left(\dfrac{l+1}{2}\right)^2$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

முதல் 12 ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

முதல் n ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் $= n^2$

$n = 12$ எனப் பிரதியிட

முதல் 12 ஒற்றை எண்களின் கூடுதல் $= 12^2$

$= 144.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கூடுதல் காண்க.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 51.$$

தீர்வு :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 51 = \left(\frac{51 + 1}{2}\right)^2$$

$$= (26)^2 = 676$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கூடுதல் காண்க.

$$13 + 15 + \dots + 47$$

தீர்வு :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 47 = \left(\frac{47 + 1}{2}\right)^2$$

$$= (24)^2$$

$$= 576.$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 11 = \left(\frac{11 + 1}{2}\right)^2$$

$$= (6)^2 = 36$$

$$13 + 15 + \dots + 47 = (1 + 3 + \dots + 47) - (1 + 3 + \dots + 11)$$

$$= 576 - 36$$

$$= 540.$$

பயிற்சி 2-6

கூடுதல் காண்க.

1. முதல் 15 ஒற்றை எண்கள்
2. முதல் 20 ஒற்றை எண்கள்
3. முதல் 25 ஒற்றை எண்கள்
4. முதல் 40 ஒற்றை எண்கள்
5. முதல் 32 ஒற்றை எண்கள்
6. $1 + 3 + 5 + \dots + 73$
7. $1 + 3 + 5 + \dots + 101$
8. $1 + 3 + 5 + \dots + 143$
9. $23 + 25 + \dots + 111$
10. $47 + 49 + 51 + \dots + 307$

விடைகள்

1. 225 2. 400 3. 625 4. 1600 5. 1024
6. 1369 7. 2601 8. 5184 9. 3015 10. 23187

2-7. இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$1^2 = 1 = \frac{1\times2\times(2\times1+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2\times3\times(2\times2+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{3\times4\times(2\times3+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4\times5\times(2\times4+1)}{6}$$

இதுபோல $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

என அனுமானிக்கலாம்.

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கூடுதல் காண்க :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2$$

தீர்வு :

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 12$ எனப் பிரதியிட,

$$1^2 + 2^2 + \dots + 12^2 = \frac{12\,(12+1) \times (2 \times 12 + 1)}{6}$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6}$$

$$= 650.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கூடுதல் காண்க :

$$11^2 + 12^2 + \dots + 30^2$$

தீர்வு :

$$1^2 + 2^2 + \dots + 30^2 = \frac{30 \times (30+1) \times (2 \times 30 + 1)}{6}$$

$$= \frac{30 \times 31 \times 61}{6}$$

$$= 9455$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6}$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 385$$

$$11^2 + 12^2 + \dots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2)$$

$$= 9455 - 385$$

$$= 9070$$

பயிற்சி 2-7

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கூடுதல் காண்க.

1. $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + 20^2$
2. $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + 25^2$
3. $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + 40^2$
4. $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + 50^2$
5. $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + 84^2$
6. $9^2 + 10^2 + \ldots\ldots + 17^2$
7. $15^2 + 16^2 + \ldots\ldots + 27^2$
8. $17^2 + 18^2 + \ldots\ldots + 30^2$
9. $21^2 + 22^2 + \ldots\ldots + 35^2$
10. $28^2 + 29^2 + \ldots\ldots + 60^2$

விடைகள்

1. 2870 2. 5525 3. 22140 4. 42925
5. 201110 6. 1581 7. 5915 8. 7959
9. 12040 10. 66880

2-8. இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$$1^3 = 1 = \left[\frac{1\times(1+1)}{2}\right]^2$$

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = \left[\frac{2\times(2+1)}{2}\right]^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = \left[\frac{3\times(3+1)}{2}\right]^2$$

இதுபோலவே

$$\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

என ஊகிக்கலாம்.

கவனிக்க : $\Sigma n^3 = \left[\Sigma n\right]^2$

எடுத்துக்காட்டு 1:

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கூடுதல் காண்க.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 12^3$$

தீர்வு:

$$\sum n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \text{ இல்}$$

$n = 12$ எனப் பிரதியிட

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 12^3 &= \left(\frac{12 \times 13}{2}\right)^2 \\ &= (6 \times 13)^2 \\ &= (78)^2 \\ &= 6084. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

சூத்திரத்தை பயன்படுத்திக் கூடுதல் காண்க.

$$11^3 + 12^3 + \dots + 20^3$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + 20^3 &= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 \\ &= (10 \times 21)^2 \\ &= (210)^2 \\ &= 44100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 &= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 \\ &= (5 \times 11)^2 \\ &= (55)^2 \\ &= 3025. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11^3 + 12^3 + \dots\dots + 20^3 &= (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3) \\ &\quad - (1^3 + 2^3 + \dots + 10^3) \\ &= 44100 - 3025 \\ &= 41075. \end{aligned}$$

பயிற்சி 2-8

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.

1. $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 15^3$
2. $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 20^3$
3. $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 32^3$
4. $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 47^3$
5. $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 51^3$
6. $7^3 + 8^3 + \dots\dots + 16^3$
7. $6^3 + 7^3 + \dots\dots + 25^3$
8. $12^3 + 13^3 + \dots\dots + 45^3$
9. $15^3 + 16^3 + \dots\dots + 70^3$
10. $1 + 2 + \dots\dots + 24 = 300$ எனில், $1^3 + 2^3 + \dots\dots + 24^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

விடைகள்

1. 14400 2. 44100 3. 278784
4. 1272384 5. 1758276 6. 18055
7. 105400 8. 1066869 9. 6164200
10. 90000.

2-9. பெருக்குத் தொடர் வரிசை

4, 12, 36, 108, ... என்ற தொடர் வரிசையின் அமைப்பு முறையைக் கவனிக்க. ஒவ்வோர் உறுப்பின் பின்னியும் அதன் முன்னியின் 3 மடங்காக இருப்பதைக் காண்க. இத்தகைய அமைப்புக் கொண்ட தொடர் வரிசை பெருக்குத் தொடர் வரிசை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. 5, 10, 20, 40, ...
2. 2, -4, 8, -16, ...
3. 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{27}$, ...

ஓர் உறுப்பிற்கும் அதன் முன்னிக்கும் உள்ள விகிதம் பொது விகிதம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1இல் பொது விகிதம்

$$= \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 2இல் பொது விகிதம்

$$= \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = \frac{-16}{8} = -2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3இல் பொது விகிதம்

$$= \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

3, 6, 12, ... என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அடுத்து வரும் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

3, 6, 12, ... இல்

பொது விகிதம் $= \frac{6}{3} = 2.$

அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = 24, 48, 96.

ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் n ஆவது உறுப்பைக் காணல்

a, ar, ar^2, ar^3, ... என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் முதல் உறுப்பு a ஆகும். r பொது விகிதமாகும்.

முதல் உறுப்பு $= a \quad = ar^{1-1}$

2ஆம் உறுப்பு $= ar \quad = ar^{2-1}$

3ஆம் உறுப்பு $= ar^2 = ar^{3-1}$

... ...

... ...

nஆம் உறுப்பு .... $= ar^{n-1}$

$$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ... என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 10ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$t_n = ar^{n-1}$ என்பதில்

$a = \frac{1}{2}$, $r = 2$, $n = 10$ எனப் பிரதியிட

$$t_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)(2)^{10-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^9$$

$$= 2^8$$

$$= 256$$

10ஆவது உறுப்பு = 256.

பயிற்சி 2-9

1. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர் வரிசைகளின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

(a) 6, 18, 54, ... (d) 32, 16, 8, ...

(b) 7, −14, 28, ... (e) 16, −4, 1, ...

(c) $\frac{1}{5}$, 1, 5, ... (f) 1, 0·2, 0·04, ...

2. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர் வரிசைகளில் அடுத்து வரும் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(a) $5, 10, 20, \ldots$ (c) $-4, 12, -36, \ldots$

(b) $81, 27, 9, \ldots$ (d) $\frac{1}{7}, 1, 7, \ldots$

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் முதல் உறுப்பு a. பொது விகிதம் r எனில், கீழ்க்காணும் பெருக்குத் தொடர் வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக.

(a) $a = 5,\quad r = 2$ (d) $a = 125,\ r = \frac{1}{5}$

(b) $a = -\frac{1}{4},\ r = 4$ (e) $a = -3,\quad r = -3$

(c) $a = 0{\cdot}2,\quad r = 3$ (f) $a = 4,\quad r = -\frac{1}{2}$

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் முதல் உறுப்பு a. பொது விகிதம் r. nஆவது உறுப்பு t_n எனில் கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

(a) $a = 6\quad r = 2\quad t_5 = ?$

(b) $a = -3\quad r = \frac{1}{3}\quad t_7 = ?$

(c) $a = -1\quad r = 4\quad t_6 = ?$

(d) $a = 25\quad r = \frac{2}{5}\quad t_4 = ?$

5. $3, x, 27$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைந்திருப்பின் xஇன் இரு மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $\frac{1}{3}, k, \frac{1}{12}$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைந்திருப்பின் kஇன் இரு மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

1. (a) 3 (b) -2 (c) 5 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $-\frac{1}{4}$ (f) $0{\cdot}2$

2. (a) 40, 80, 160 (b) 3, 1, $\frac{1}{3}$ (c) 108, -504, 1512 (d) 49, 343, 2401.

3. (a) $15, 30, 60, 120$ (b) $-\frac{1}{4}, -1, -4, -16$
(c) $0{\cdot}2, 0{\cdot}6, 1{\cdot}8, 5{\cdot}4$ (d) $125, 25, 5, 1$
(e) $-3, 9, -27, 81$ (f) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}$.

4. (a) 96 (b) $-\frac{1}{243}$ (c) -1024 (d) $\frac{8}{5}$

5. $+9$ அல்லது -9 6. $\frac{1}{6}$ அல்லது $-\frac{1}{6}$.

2-10. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இடை உறுப்புகளைக் காணல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 7ஆவது உறுப்பு 128. அதன் 10ஆவது உறுப்பு 1024 எனில், அதன் 8ஆவது, 9ஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$t_7 = ar^6 = 128 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$t_{10} = ar^9 = 1024 \qquad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)ஐ (1)ஆல் வகுக்க,

$$\frac{ar^9}{ar^6} = \frac{1024}{128}$$

$$r^3 = 8$$

$$r = \sqrt[3]{8}$$

$$r = 2.$$

$$t_8 = 128 \times 2 = 256$$

$$t_9 = 256 \times 2 = 512.$$

பயிற்சி 2-10

1. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 5ஆவது உறுப்பு 48. 8ஆவது உறுப்பு 384 எனில், இடைப்பட்ட 6ஆவது, 7ஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

2. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 4ஆவது உறுப்பு 108. 6ஆவது உறுப்பு 972 எனில், இடைப்பட்ட 5ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 3ஆவது உறுப்பு 80. 6ஆவது உறுப்பு 5120 எனில், இடைப்பட்ட 4ஆம், 5ஆம் உறுப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

(1) 96, 192 (2) 324 அல்லது −324
(3) 320, 1280.

பாடச் சுருக்கம்

1. எண் கணங்கள் கூட்டல், பெருக்கல் செயல்களைப் பொறுத்து கொண்டுள்ள பண்புகளை 2-3இல் உள்ள அட்டவணை தெளிவுபடுத்துகிறது.

2. ஒரு விதிப்படி அமையும் எண்கள் தொடர் வரிசையில் உள்ளவையாகக் கூறப்படும்.

3. அடுத்த இரு எண்களுக்கிடையிலுள்ள வித்தியாசம் நிலையானதாகக் கொண்ட தொடர் வரிசை கூட்டுத் தொடர் வரிசை எனப்படும்.

$a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் முதலுறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d.

n ஆவது உறுப்பு $t_n = a + (n - 1)\,d$

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d]$

முதலுறுப்பு a, கடைசி உறுப்பு l, பொது வித்தியாசம் d ஆனால்

தொடர் வரிசையிலுள்ள மொத்த எண்கள் $n = \frac{l - a}{d} + 1$

எண்களின் கூடுதல் $= \frac{n}{2}\,(a + l)$

4. (அ) $\Sigma n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

(ஆ) $\Sigma (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(இ) $1 + 3 + 5 + \ldots . + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$

(ஈ) $\Sigma n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(உ) $\Sigma n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\Sigma n)^2$$

5. அடுத்தடுத்த இரு எண்களுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் நிலையானதாகக் கொண்ட தொடர் வரிசை பெருக்குத் தொடர் வரிசை எனப்படும்.

$a, ar, ar^2, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையில்

முதலுறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r.

nஆவது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. (அ) விகிதமுறு எண்கள், மிகை விகிதமுறு எண்கள் ஆகியவற்றின் பண்புகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு யாது?

(ஆ) கூட்டல் தலைகீழி இல்லாத எண் கணங்கள் யாவை?

(இ) பெருக்கல் தலைகீழி இல்லாத எண் கணங்கள் யாவை?

(ஈ) பெருக்கல் தலைகீழி கொண்டும், கூட்டல் தலைகீழி இல்லாமலும் உள்ள கணம் எது?

(உ) கூட்டல் சமனி இல்லாத எண் கணம் எது?

2. முதலுறுப்பு 8, பொது வித்தியாசம் 5 உள்ள கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக. 20ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் 10ஆவது உறுப்பு 35, 25ஆவது உறுப்பு 80 ஆனால், முதலுறுப்பு யாது? பொது வித்தியாசம் என்ன ?

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் முதலுறுப்பு 8, பொது விகிதம் -2 எனில் 6ஆவது, 11ஆவது உறுப்புகள் எவை ?

5. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 5ஆவது உறுப்பு 3. 8ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{9}$ ஆனால் முதலுறுப்பு என்ன ? பொது விகிதம் என்ன ? இடை உறுப்புகள் யாவை?

6. கீழ்க்கண்ட கூட்டுப் பலன்களைக் காண்க.

(அ) $1 + 2 + 3 + \dots + 24$

(ஆ) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 91$

(இ) $21 + 23 + 25 + \dots + 101$

(ஈ) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2$

(உ) $11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 40^2$

(ஊ) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$

(எ) $8^3 + 9^3 + 10^3 + \dots + 20^3$

(ஏ) 25, 22, 19 ... என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் முதல் 40 உறுப்புகளின் கூடுதல்.

(ஐ) முதலுறுப்பு 25, கடைசி உறுப்பு 425, பொது வித்தியாசம் 4 உள்ள கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் கூடுதல்.

விடைகள்

1. (அ) மிகை விகிதமுறு எண் கணத்தில் கூட்டல் தலைகீழி கிடையாது.

(ஆ) இயலெண், முழு எண், மிகை விகிதமுறு எண்.

(இ) இயலெண், முழு எண். முழுக்கள்.

(ஈ) மிகை விகிதமுறு எண்.

(உ) இயலெண்.

2. 103 ; 3. 8, 3 ; 4. −256, 8192 (5) 243, $\frac{1}{8}$, 1, $\frac{1}{8}$.

6. 300, 2116, 2501, 5525, 21755, 44100, 43316, −1340, 22725.

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம்—மேடை 2

கணக்குப் போட்டு எடுத்துக்கொள்க.

தந்தையிடம் தனயன் ஒருவர் செலவிற்குப் பணம் கேட்டு எழுதினார். தந்தை ஒரு வெற்றுக் காசோலையில் கையொப்பமிட்டு

```
  S A V E
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

என்ற வாக்கிய அமைப்பை எழுதி, எழுத்துகளுக்குப் பொருத்தமான எண்களை அமைத்து அத்தொகையை நிரப்பிக்கொள்ளுமாறு பணித்தார். ஒவ்வோர் எழுத்தும் வெவ்வேறு இலக்கங்களைக் குறிக்கும் எனில், மகன் பெறக்கூடிய மிக உயர்ந்த தொகை என்ன எனக் காண்க.

3. அல்ஜிப்ரா

3-1. முற்றொருமைகள் : திருப்புதல்

9ஆம் வகுப்பில் நாம் கற்ற சில முற்றொருமைகளை நினைவு படுத்திக் கொள்வோம்.

1. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4. $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ca)+abc$

5. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

6. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

பயிற்சி 3-1

I. விரித்தெழுதுக. (மனக்கணக்குகள்)

1. $(x+y+z)^2$
2. $(p+q-r)^2$
3. $(k-l-m)^2$
4. $(2a-3b+4c)^2$
5. $(x+y)^3$
6. $(4x+3)^2$
7. $(p-q)^3$
8. $(x-4)^3$
9. $(5x-3y)^3$
10. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3$
11. $(x+3)(x+4)(x+5)$
12. $(p-1)(p-2)(p-3)$
13. $(m+7)(m+1)(m+3)$
14. $(a-4)(a+3)(a-5)$

15. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ 16. $(a+3)(a^2-6a+9)$

17. $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ 18. $(p-q)(p^2+pq+q^2)$

19. $(k-4)(k^2+4k+16)$

20. $(3x-5y)(9x^2+15xy+25y^2)$

II $x+\frac{1}{x}=3$ எனில் $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

III $a-\frac{1}{a}=4$ எனில் $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^3-\frac{1}{a^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

II 7, 18 III 18, 76

3-2. காரணிப்படுத்தல் : (a^2-b^2) வடிவம் : திருப்புதல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

வடிவம் (1): $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

எடுத்துக்காட்டு :

$$25p^2-49q^2=(5p+7q)(5p-7q)$$

பயிற்சி 3-2

(மனக்கணக்குகள்)

காரணிகள் எழுதுக.

(1) x^2-y^2 (2) m^2-n^2 (3) p^2-q^2

(4) c^2-d^2 (5) x^2-1 (6) p^2-9

(7) m^2-25 (8) k^2-49 (9) $16-c^2$

(10) $36-x^2$ (11) $64-p^2$ (12) $25x^2-16$

(13) $49a^2-100$ (14) $81m^2-4$ (15) $4x^2-25y^2$

(16) $81a^2-16b^2$ (17) $121a^2-100b^2$ (18) $9k^2-49l^2$

3·3 காரணிப்படுத்தல் : $x^2 + px + q$ வடிவம் : திருப்புதல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

வடிவம் (2): $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிகளை எழுதுக : $x^2 + 9x + 14$ | $14 = 2 \times 7$

தீர்வு :

$x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$ | $9 = 2 + 7$

பயிற்சி 3-3

காரணிகள் எழுதுக.

(1) $x^2 + 3x + 2$ (2) $a^2 + 4a + 3$

(3) $p^2 + 11p + 24$ (4) $m^2 + 5m + 6$

(5) $a^2 + 7a + 6$ (6) $x^2 + 8x + 12$

(7) $x^2 + 10x + 9$ (8) $c^2 + 6c + 8$

(9) $p^2 + 21p + 110$ (10) $x^2 + 13x + 42$

(11) $x^2 - 7x + 10$ (12) $a^2 - 5a + 4$

(13) $p^2 - 10p + 21$ (14) $x^2 - 11x + 18$

(15) $k^2 - 12k + 35$ (16) $x^2 - 10x + 24$

(17) $m^2 - 11m + 28$ (18) $k^2 - 9k + 14$

(19) $x^2 - 20x + 96$ (20) $y^2 - 15y + 50$

3-4 காரணிப்படுத்தல் : $x^2 + px - q$ வடிவம்: திருப்புதல்

நினைவு படுத்திக் கொள்க.

வடிவம் (3) :

$$x^2 + (a-b)x - ab = (x + a)(x - b)$$

எடுத்துக்காட்டு :

$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$ | $35 = 7 \times 5$, $2 = 7 - 5$

பயிற்சி 3-4

காரணிகள் எழுதுக.

(1) $x^2 + x - 6$	(2) $p^2 + p - 12$
(3) $m^2 + m - 2$	(4) $y^2 + 2y - 8$
(5) $x^2 + 2x - 15$	(6) $k^2 + 4k - 32$
(7) $x^2 + 3x - 10$	(8) $y^2 + 3y - 18$
(9) $c^2 + c - 20$	(10) $x^2 + 2x - 120$
(11) $x^2 - 3x - 4$	(12) $a^2 - a - 56$
(13) $m^2 - 5m - 14$	(14) $c^2 - 4c - 45$
(15) $p^2 - 4p - 77$	(16) $k^2 - 11k - 26$
(17) $x^2 - 11x - 60$	(18) $a^2 - 3a - 28$
(19) $p^2 - 5p - 66$	(20) $x^2 - 2x - 143$

3-5. காரணிப்படுத்தல் : $ax^2 + bx + c$ வடிவம்

$(2x + 5)(3x + 4)$ என்ற இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவை களைப் பெருக்குக.

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ 3x + 4 \\ \hline 8x + 20 \\ 6x^2 + 15x \\ \hline 6x^2 + 23x + 20 \\ \hline \end{array}$$

கவனிக்க : $6 \times 20 = 120$

$8 \times 15 = 120.$

$ax^2 + bx + c$ என்ற அமைப்பிலுள்ள கோவையைக் காரணிப்படுத்தும்பொழுது கவனிக்கவேண்டிய விதிகள் :

1. x^2 இன் குணகத்தையும் மாறிலியையும் பெருக்குக. $(= ac)$

2. பெருக்கற்பலன் ac ஆகவும் கூடுதல் xஇன் குணகமான b-க்கு சமமாகவும் இருக்குமாறு இரண்டு எண்களைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 + 11x + 12.$

தீர்வு :

$$2x^2 + 11x + 12$$
$$= 2x^2 + 8x + 3x + 12$$
$$= 2x(x + 4) + 3(x + 4)$$
$$= (x + 4)(2x + 3)$$

கவனிக்க :

$12 \times 2 = 24$

$8 \times 3 = 24$

$8 + 3 = 11$

$11x = 8x + 3x$

பயிற்சி 3-5

காரணிப்படுத்துக.

(1) $2x^2 + 3x + 1$
(2) $2a^2 + 5a + 2$
(3) $2x^2 + 7x + 5$
(4) $3a^2 + 10a + 7$
(5) $2m^2 + 11m + 5$
(6) $12x^2 + 7x + 1$
(7) $2x^2 + 7x + 3$
(8) $6p^2 + 5p + 1$
(9) $2x^2 + 9x + 10$
(10) $3a^2 + 10a + 8$
(11) $7x^2 + 25x + 12$
(12) $15d^2 + 11d + 2$
(13) $6m^2 + 29m + 9$
(14) $12x^2 + 31x + 20$
(15) $2x^2 + 9x + 4$
(16) $4x^2 + 13x + 10$
(17) $4x^2 + 13x + 3$
(18) $6x^2 + 23x + 10$
(19) $10x^2 + 23x + 9$
(20) $8x^2 + 27x + 9$

விடைகள்

(1) $(x + 1)(2x + 1)$
(2) $(2a + 1)(a + 2)$
(7) $(2x + 1)(x + 3)$
(13) $(3m + 1)(2m + 9)$
(16) $(x + 2)(4x + 5)$
(20) $(x + 3)(8x + 3)$

3-6 காரணிப்படுத்தல் : $ax^2 - bx + c$ வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப் படுத்துக : $4x^2 - 16x + 15$

தீர்வு :

$$4x^2 - 16x + 15$$
$$= 4x^2 - 10x - 6x + 15$$
$$= 2x(2x - 5) - 3(2x - 5)$$
$$= (2x - 5)(2x - 3)$$

கவனிக்க :

$15 \times 4 = 60$

$60 = 10 \times 6$

$(+10) + (+6) = +16$

$-16x = -10x - 6x$

பயிற்சி 3-6

காரணிப் படுத்துக.

(1) $8x^2-10x+3$ (2) $6p^2-17p+5$

(3) $10m^2-19m+7$ (4) $3c^2-11c+6$

(5) $2d^2-15d+25$ (6) $2x^2-25x+50$

(7) $3y^2-31y+56$ (8) $15c^2-19c+6$

(9) $4x^2-23x+15$ (10) $3a^2-10a+8$

விடைகள்

(1) $(2x-1)(4x-3)$ (3) $(5m-7)(2m-1)$

(8) $(5c-3)(3c-2)$ (10) $(a-2)(3a-4)$

3-7. காரணிப் படுத்தல் : ax^2+bx-c வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப் படுத்துக : $6x^2+7x-20$

தீர்வு :

$6x^2+7x-20$

$=6x^2+15x-8x-20$

$=3x(2x+5)-4(2x+5)$

$=(2x+5)(3x-4)$

கவனிக்க :

$20\times 6=120$

$120=15\times 8$

$(+15)+(-8)=+7$

$+7x=+15x-8x$

பயிற்சி 3-7

(1) $2a^2+7a-4$ (2) $2a^2+a-3$

(3) $3x^2+7x-20$ (4) $2p^2+5p-12$

(5) $3x^2+10x-48$ (6) $5a^2+42a-27$

(7) $6x^2+x-15$ (8) $18a^2+9a-35$

(9) $20m^2+m-12$ (10) $15a^2+17a-4$

விடைகள்

(1) $(a+4)(2a-1)$ (2) $(2a+3)(a-1)$

(4) $(p+4)(2p-3)$ (9) $(5m+4)(4m-3)$

3-8. காரணிப் படுத்தல் : $ax^2 - bx - c$ வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப் படுத்துக : $3x^2 - 2x - 8$.

தீர்வு :

	கவனிக்க :
$3x^2 - 2x - 8$	
$= 3x^2 - 6x + 4x - 8$	$(-8)\times(+3) = -24$
$= 3x(x-2) + 4(x-2)$	$(-6)+(+4) = -2$
$= (x-2)(3x+4)$	$-2x = -6x + 4x$

பயிற்சி 3-8

(1) $9x^2 - 5x - 4$ (2) $5x^2 - x - 18$

(3) $8x^2 - 6x - 5$ (4) $6x^2 - 5x - 6$

(5) $7x^2 - x - 6$ (6) $7p^2 - 10p - 8$

(7) $9d^2 - 9d - 4$ (8) $12a^2 - 7a - 10$

(9) $8l^2 - 6l - 9$ (10) $28 - 31a - 5a^2$

விடைகள்

(1) $(9x+4)(x-1)$ (5) $(x-1)(7x+6)$

(8) $(4a-5)(3a+2)$ (10) $(4-5a)(7+a)$

3·9 மீதித் தேற்றம்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க ஈவு, மீதி முதலியவற்றைக் கண்டறியும் முறையை அறிவோம்.

$x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+2)$ ஆல் வகுத்து மீதி காண்போம்.

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ எனில் $P(1)$, $P(2)$, $P(-2)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களையும் கண்டு பட்டியல் படுத்துவோம்.

வகுக்கும் கோவை	மீதி		
$(x-1)$	-2	$P(1)$	$= 1-2+3-4 = -2$
$(x-2)$	2	$P(2)$	$= 8-8+6-4 = 2$
$(x+2)$	-14	$P(-2)$	$= -8-8-6-4 = -26$

மேற்கண்டவற்றினின்று $(x-1)$ ஆல் வகுக்க மீதி $P(1)$ என்றும், $(x-2)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(2)$ என்றும், $(x+2)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(-2)$ என்றும் அறிகிறோம்.

எனவே,

$P(x)$ஐ $(x-a)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(a)$ என ஊகிக்கலாம்.

மீதித் தேற்றம் :

$P(x)$ என்ற மெய்யெண்களின் மீது அமையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையினை $(x - a)$, $a \in R$ எனும் ஈருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $P(a)$ ஆகும்.

பயிற்சி 3-9

கீழே காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றை அடுத்துக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் வகுத்து மீதி காண்க.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	வகுக்கும் கோவைகள்
(1) x^2-7x+3	$(x+1)$, $(x-1)$, $(x+2)$
(2) x^3+3x^2+2	$(x-1)$, $(x-2)$, $(x+3)$
(3) x^3-4x+5	$(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$
(4) x^3+x^2+x+1	$(x-1)$, $(x+1)$, $(x-2)$
(5) $2x^3-4x^2+5x-3$	$(x+2)$ $(x-1)$, $(x-3)$

விடைகள்

(1) 11, −3, 21 (4) 4, 0, 15

3-10. மீதித் தேற்றம் : பல்வகைக் கணக்குகள்

எடுத்துக்காட்டு :

$2x^3 - ax + 11$ஐ $(x - 2)$ஆல் வகுக்க மீதி 13 எனில் a இன் மதிப்பு என்ன ?

தீர்வு :

$P(x) = 2x^3 - ax + 11$

$x - 2$ஆல் வகுக்க மீதி,

$$P(2) = 2(2)^3 - a(2) + 11 = 13$$
$$8 - 2a + 11 = 13$$
$$-2a = 13 - 8 - 11$$
$$-2a = -6$$
$$a = 3.$$

பயிற்சி 3-10

கீழே சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் அவற்றை வகுக்கும் கோவைகளும் மீதிகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ் விவரங் களிலிருந்து a இன் மதிப்பைக் காண்க.

	பல்லுறுப்புக் கோவை	வகுக்கும் கோவை	மீதி
(1)	$4x^2 - 5x + a$	$x - 1$	6
(2)	$2x^2 - 4x + a$	$x + 1$	9
(3)	$3x^3 - 5x^2 + 7x + a$	$x - 2$	21
(4)	$5x^2 + ax + 11$	$x + 2$	43
(5)	$4x^2 + ax + 9$	$x + 3$	66
(6)	$ax^2 - 5x + 13$	$x - 3$	16

(7) $3x^3 + ax^2 - 5x + 2$ஐ $(x + 2)$ மீதியின்றி வகுக்கும் எனில் a இன் மதிப்பு என்ன ?

(8) $x^2 + ax + b$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - 2)$, $(x + 5)$ மீதியின்றி வகுத்தால் அப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

(9) $x^2 + ax + b$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-1)$ஆல் வகுக்க மீதி 13. $(x-2)$ஆல் வகுக்க மீதி 23 எனில் a, bஇன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

(10) $2x^2+ax+b$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+2)$ஆல் வகுக்க மீதி 21. $(x-3)$ஆல் வகுக்க மீதி 11 எனில் a, bஇன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $a=7$ (4) $a=-6$ (7) $a=3$ (10) $a=-4, b=5$.

3-11. காரணித் தேற்றம்

ஓர் எண்ணை மற்றோர் எண் மீதியின்றி வகுத்தால் அவ்வெண் முதலெண்ணின் வகுத்தி ஆகும். இவ்வுண்மை பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் பொருந்துமாதலால், மீதித் தேற்றத்தின் உதவியைக் கொண்டு நாம் கோவைகளின் வகுத்திகள் அல்லது காரணிகள் காண இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு :

x^2-5x+6-க்கு $(x-3)$, $(x-2)$, $(x-1)$ என்பவை காரணிகளாக அமையுமா எனக் காண்க.

தீர்வு :

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$

$(x-3)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(3) = 9 - 15 + 6 = 0$.

$(x-2)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(2) = 4 - 10 + 6 = 0$.

$(x-1)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(1) = 1 - 5 + 6 = 2$.

எனவே x^2-5x+6-க்கு $(x-3)$உம் $(x-2)$உம் காரணிகளாகும். $(x-1)$ ஒரு காரணி அன்று.

காரணித் தேற்றம் :

$a \in R$, $(x-a)$ என்பது $P(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணி என்றால், $P(a) = 0$. a **என்பது பல்லுறுப்புச் சார்பின் பூச்சியம் எனப்படும்.**

பயிற்சி 3-11

(1) $(x-1)$ என்பது பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் காரணியா எனச் சோதிக்க.

(a) x^2-4x+3 (b) x^2+x+1 (c) $2x^2+x-3$

(d) x^3-x^2+x+1 (e) x^2-8x+7

(2) $(x-2)$ என்பது பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் காரணி எனக் காட்டுக.

(a) $x^2+3x-10$ (b) $x^2-9x+14$

(c) $2x^2-7x+6$ (d) x^3-8

(3) கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x+3)$ ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

(a) $x^2-2x-15$ (b) $x^2+12x+27$ (c) $2x^2+13x+21$

(d) $7x^3+21x^2-2x-6$ (e) x^3+27

(4) கீழே சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், அவற்றின் ஒரு காரணியும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், "a"இன் மதிப்பைக் காண்க.

பல்லுறுப்புக் கோவை	ஒரு காரணி
(a) $2x^2+ax-10$	$x-2$
(b) $7x^2-11x+a$	$x-1$
(c) $2x^2+ax-3$	$x+3$
(d) $3x^3+ax^2-5x+2$	$x+2$

(5) x^3+px^2-2x+q என்ற கோவைக்கு $(x-3)$, $(x+2)$ காரணிகளாக அமையுமெனில் p, qஇன் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

(4) (a) $a=1$ (d) $a=3$

(5) $p=-5$, $q=24$

3-12. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : சுருக்குமுறை வகுத்தல்

$x^3 + 5x^2 - 4x + 6$ஐ $(x-2)$ஆல் வகுத்து கிடைக்கும் ஈவு, மீதியைக் காண்போம்.

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3+5x^2-4x+6\ (x^2+7x+10 \\
\quad\ \ x^3-2x^2 \\
\quad\quad\quad 7x^2-4x \\
\quad\quad\quad 7x^2-14x \\
\quad\quad\quad\quad\quad 10x+6 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 10x-20 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 26
\end{array}
$$

மேலே உள்ள வகுத்தலில் ஒவ்வொரு படியின் முடிவும் பெறப்பட்ட முறையினை ஆய்வோம்.

$$5x^2 + 2x^2 = 7x^2$$
$$-4x + 14x = 10x$$
$$6 + 20 = 26$$

கழிக்கும்போது எதிரெண்ணைக் கூட்டுகிறோம். இக்கருத்தினைக் கொண்டு இவ்வகுத்தலைச் சுருக்கு முறையில் செய்வோம்.

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 5 & -4 & 6 \\
 & & 2 & 14 & 20 \\
\hline
 & 1 & 7 & 10 & \underline{|\,26}
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ஈவு} = x^2 + 7x + 10 \\ \text{மீதி} = 26\end{array}\right\}$$

பயிற்சி 3-12

அடுத்த பக்கத்திலுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றை அடுத்தாற்போல் காணப்படும் ஒவ்வொரு கோவையாலும் சுருக்கு முறையில் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க.

	வகுபடும் கோவைகள்	வகுக்கும் கோவைகள்
(1)	$4x^2-5x+13$	$(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$
(2)	$2x^2+7x-15$	$(x+1)$, $(x-2)$, $(x+3)$
(3)	$x^2-10x+8$	$(x-3)$, $(x+1)$, $(x-4)$
(4)	$3x^2-10x+11$	$(x-5)$, $(x+2)$, $(x+4)$
(5)	$2x^3-3x^2+5x+7$	$(x+5)$, $(x-4)$, $(x+3)$
(6)	$4x^3-12x^2+5$	$(x+1)$, $(x-2)$, $(x-4)$

விடைகள்

(1) $4x-1,\ 12$
$4x+3,\ 19$
$4x+7,\ 34.$

(5) $2x^2-13x+70,\quad -343$
$2x^2+5x+25,\quad 107$
$2x^2-9x+32,\quad -89$

3-13. காரணிப்படுத்தல் : மூன்றாம்படிக் கோவைகள்

சுருக்கு முறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி மூன்றாம் படிக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும் முறையைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

காரணிப்படுத்துக : $2x^3-5x^2+x+2$

தீர்வு :

1	2	−5	1	2
		2	−3	−2
2	2	−3	−2	0
		4	2	
	2	1	0	

$P(1)=0$; $P(2)=0$. எனவே $(x-1)$, $(x-2)$ ஆகியவை காரணிகளாகும்.

$$2x^3-5x^2+x+2=(x-1)(x-2)(2x+1)$$

பயிற்சி 3-13

காரணிப்படுத்துக :

(1) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (2) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (4) $x^3 - 4x + 3$

(5) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (6) $x^3 - x^2 - x - 2$

(7) $x^3 - 6x^2 - x + 6$ (8) $x^3 - 7x - 6$

(9) $x^3 + 2x - 3$ (10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

விடைகள்

(1) $(x-3)(x-1)(x+2)$ (2) $(x+2)(x+1)(x-1)$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)$ (4) $(x-1)(x^2+x-3)$

(5) $(x+1)(x+2)(x+3)$ (6) $(x-2)(x^2+x+1)$

(7) $(x+1)(x-1)(x-6)$ (8) $(x+1)(x+2)(x-3)$

(9) $(x-1)(x^2+x+3)$ (10) $(x+2)(x-3)(2x-1)$

3-14 பொதுக் கோவைகள்

படி	மாறி அல்லது மாறிகள்	பொது வடிவம்	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
1	x	$ax+b$	2
2	x	ax^2+bx+c	3
1	x, y	$ax+by+c$	3
2	x, y	$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$	6
1	x, y, z	$ax+by+cz+d$	4
2	x, y, z	$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx+gx+hy+lz+m$	10

பயிற்சி 3-14

(1) பின் வரும் மாறிகளுடன் தொடர்பு கொண்ட முழுக் கோவைகளை எழுதுக.

(a) m இல் 1 ஆம் படிக் கோவை
(b) p, q இல் 2 ஆம் படிக் கோவை
(c) p, q, r இல் 1 ஆம் படிக் கோவை
(d) p, q, r இல் 2 ஆம் படிக் கோவை

(2) x இல் முதல் படிக் கோவையொன்றில் $x = 4$ எனில் கோவையின் மதிப்பு 11 ஆகும். $x = 3$ எனில் கோவையின் மதிப்பு 9 ஆகும். அக் கோவையைக் காண்க.

விடைகள்

(2) $2x + 3$

3-15. ஒருபடித்தான பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

ஒரு கோவையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் சம படியில் இருந்தால் அஃது ஒருபடித்தான கோவை எனப்படும். எடுத்துக் காட்டாக $3x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + 4y^3$ என்ற கோவையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் 3 ஆகும். எனவே, இது 3 படியுள்ள ஒருபடித்தான கோவையாகும்.

கவனிக்க :

(1) ஒருபடித்தான கோவையொன்று அதன் உறுப்புகளின் படிகளைப் பொறுத்ததேயன்றி அவற்றின் குணகங்களைப் பொறுத்ததன்று.

(2) ஒருபடித்தான கோவையொன்றில் மாறிலி உறுப்பு இருக்க முடியாது.

ஒருபடித்தான கோவைகளின் பொது வடிவங்கள் :

மாறிகள்	படி	பொது வடிவம்
x, y	1	$ax + by$
x, y	2	$ax^2 + bxy + cy^2$
x, y, z	1	$ax + by + cz$
x, y, z	2	$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$

பயிற்சி 3-15

(1) பின் வரும் மாறிகளுடன் தொடர்பு கொண்ட ஒரு படித்தான கோவைகளை எழுதுக.

(a) p, q இல் படி 1 இல் ஒருபடித்தான கோவை.

(b) a, b, c இல் படி 1 இல் ஒருபடித்தான கோவை.

(c) p, q, r இல் படி 2 இல் ஒருபடித்தான கோவை.

(2) $4x^2 - 5xy + 6y^2 - 4yz + 11z^2$ என்ற ஒருபடித்தான கோவையின் படி யாது ?

(3) $(x + 3)^2$ ஒருபடித்தான கோவையா ? காரணம் கூறுக.

(4) x, y இல் முதலாம் படி ஒருபடித்தான கோவையில் $x = 3$, $y = 1$ எனில் அதன் மதிப்பு 17 ஆகும் $x = 2, y = 3$ எனில் அதன் மதிப்பு 23 ஆகும். அக்கோவையைக் காண்க.

விடைகள்

(4) $4x + 5y$.

3-16. சமச்சீர்க் கோவைகள்

$3x^2 + 7xy + 3y^2$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதில் x-க்கு y எனவும், y-க்கு x எனவும் பிரதியீடு செய்யக் கிடைக்கும் கோவை $3y^2 + 7yx + 3x^2$ ஆகும். இக்கோவையும் முதலில் எடுத்துக்கொண்ட கோவையும் ஒன்றேயாகும். இத்தகைய கோவை சமச்சீர் கோவை எனப்படும். மூன்று மாறிகள் உள்ள கோவையில் எந்த இரண்டு மாறிகளிலும் ஒன்றுக்கு மற்றதைப் பிரதியீடு செய்தபின் கோவை மாறாமலிருந்தால் அது சமச்சீர் கோவையாகும், சமச்சீர் உள்ள கோவைகளை அமைக்கும்போது ஒரே படியில் உள்ள மாறிகளின் குணகங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

சமச்சீர் கோவைகளின் பொது வடிவங்கள்:

மாறிகள்	படி	கோவை
x, y	1	$a(x+y)+b.$
x, y	2	$a(x^2+y^2)+bxy+c(x+y)+d.$
x, y, z	1	$a(x+y+z)+b.$
x, y, z	2	$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$ $+c(x+y+z)+d,$

பயிற்சி 3-16

(1) கீழ்க்காணும் கோவைகளில் எவை சமச்சீருள்ளவை எனக் காண்க.

(a) $x^2+y^2+3x+3y+5.$

(b) $x^5+y^5+4.$

(c) $2x^2-2y^2.$

(d) $3x^2+2xy+3y^2+6x+8+6y.$

(e) $3x^2+3y^2+x+7.$

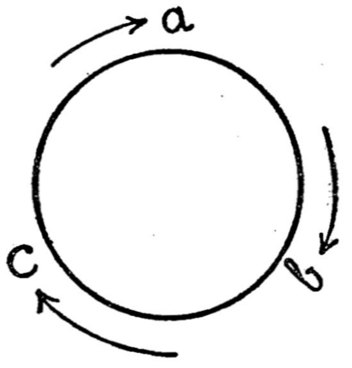
(f) $5a^2-3ab+5b^2-2a+3b-7.$

(2) a, b, c இல் 2ஆம் படியில் ஓர் சமச்சீர் கோவையை எழுதுக.

3-17. வட்ட சமச்சீர் கோவைகள்

$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் a-க்கு b-யையும், b-க்கு c-யையும், c-க்கு a-யையும் பிரதியீடு செய்வோம். இப்பொழுது கிடைக்கப் பெறும் கோவை $b(c+a)+c(a+b)+a(b+c)$ ஆகும். இக் கோவையும் முதலில் கூறப்பட்ட கோவையும் ஒன்றேயாகும். இத்தகைய கோவைகள் வட்ட சமச்சீர் கோவைகள் என அழைக்கப்பெறும். a, b, c என்ற மூன்று மாறிகளையும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் அமைத்து இம் மாற்றத்தைச் செய்யலாம்.

$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$ என்பதைச் சுருக்கமாக $\Sigma a(b+c)$ என எழுதலாம். Σ என்பதை "சிக்மா" எனப் படிக்க வேண்டும். இது கூட்டல் என்ற பொருளில் பயன்படுத்தப் படுகிறது.



படம் 3-1.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

விரித்துச் சுருக்குக : $\Sigma x(y-z)$

தீர்வு :

$$\begin{aligned}\Sigma x(y-z) &= x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\\ &= xy-xz+yz-yx+zx-zy\\ &= 0.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

விரித்துச் சுருக்குக : $\Sigma x^2 + 2\Sigma xy$.

தீர்வு :

$$\begin{aligned}&\Sigma x^2 + 2\Sigma xy.\\ &\quad = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &\quad = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\ &\quad = (x+y+z)^2\end{aligned}$$

பயிற்சி 3-17

விரித்துச் சுருக்குக.

(1) $\Sigma\, x$ (2) $\Sigma\, a$

(3) $\Sigma\, (a + b)$ (4) $\Sigma\, x\, (y+z)$

(5) $\Sigma\, (a^2 + b^2)$ (6) $\Sigma\, (x^3+y^3)$

(7) $\Sigma\, (x+y)\,(x-y)$ (8) $\Sigma\, (a+b+c)$

(9) $\Sigma\, (a+b-c)$ (10) $\Sigma\, (a-b-c)$

(11) $\Sigma\, (x-y)(x^2+xy+y^2)$ (12) $\Sigma\, (a^2+b^2+c^2)$

(13) $\Sigma\, (x^2+y^2-z^2)$ (14) $(\Sigma\, x)^2 - \Sigma\, x^2$

(15) $\Sigma\, p^2\, (q + r - p)$

விடைகள்

(1) $x + y + z$ (3) $2a + 2b + 2c$ (4) $2\,(xy + yz + zx)$ (10) $-(a+b+c)$

3-18. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : வர்க்க மூலங்கள்

நினைவு கூர்க :

$$x \times x = x^2$$

$$(-x) \times (-x) = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = +x \text{ அல்லது } -x.$$

இதனைச் சுருக்கமாக $\pm\, x$ என எழுதுவது வழக்கம்.

$$x^3 \times x^3 = (-x^3) \times (-x^3) = x^6$$

$$\sqrt{x^6} = \pm\, x^3 = \pm\, x^{6 \times \frac{1}{2}}$$

$$x^5 \times x^5 = (-x^5) \times (-x^5) = x^{10}$$

$$\sqrt{x^{10}} = \pm\, x^5 = \pm\, x^{10 \times \frac{1}{2}}$$

$$5x^4 \times 5x^4 = (-5x^4) \times (-5x^4) = 25x^8$$

$$\sqrt{25x^8} = \pm\, 5x^4 = \pm\, 5x^{8 \times \frac{1}{2}}.$$

நினைவில் கொள்க :

(1) எண் குணகங்களுக்கு எண் கணித முறைப்படி வர்க்கமூலம் காணுதல் வேண்டும்,

(2) அடுக்கு எண்ணின் வர்க்க மூலத்தின் அடுக்கு அந்த எண்ணின் அடுக்கில் பாதியாகும்.

(3) ஓர் எண்ணிற்கு ஒரு மிகை வர்க்க மூலம், ஒரு குறை வர்க்க மூலம் ஆக இரு வர்க்க மூலங்கள் உண்டு. குறிப்பிடப்பட்டாலன்றி மிகை வர்க்க மூலத்தை மட்டுமே நாம் இப்பாடத்தில் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$144\, a^{12}\, b^{8}\, c^{2}$ இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$\sqrt{144a^{12}\, b^{8}\, c^{2}}$$
$$= 12a^{12\times\frac{1}{2}}\, b^{8\times\frac{1}{2}}\, c^{2\times\frac{1}{2}}$$
$$= 12a^{6}\, b^{4}\, c^{1}$$
$$= 12a^{6}\, b^{4}\, c.$$

பயிற்சி 3-18

பின் வருவனவற்றின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க.

(மனக் கணக்குகள்)

(1) a^{10} (2) x^{16} (3) $25x^{6}$ (4) $169x^{4}y^{8}$

(5) $2{\cdot}25\, x^{8}y^{2}$ (6) $\dfrac{9a^{4}b^{4}}{16x^{2}y^{2}}$ (7) $\dfrac{8m^{8}n^{6}}{50a^{2}b^{12}}$

(8) $\dfrac{0{\cdot}81m^{2}\,(x+v)^{2}}{1{\cdot}21\; p^{4}(q+r)^{6}}$ (9) $1\dfrac{9}{16}\, x^{10}\, y^{12}\, z^{14}$

(10) $36\,(x+y)^{4}\,(y+z)^{6}\,(z+x)^{2}$.

3-19. வர்க்க மூலம் : காரணி முறை

நினைவு கூர்க :

$$(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$$
$$(a-b)^{2} = a^{2} - 2ab + b^{2}$$
$$(2x+3y)^{2} = 4x^{2} + 12xy + 9y^{2}$$
$$(3x-4y)^{2} = 9x^{2} - 24xy + 16y^{2}$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = (a + b)$$

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = (a - b)$$

$$\sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2} = (2x + 3y)$$

$$\sqrt{9x^2 - 24xy + 16y^2} = (3x - 4y)$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$25x^2 + 30xy + 9y^2$ இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$25x^2 + 30xy + 9y^2$$

$$= (5x)^2 + 2(5x)(3y) + (3y)^2$$

$$= (5x + 3y)^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{25x^2 + 30xy + 9y^2} = (5x + 3y)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(x + y)^2 - 6(x + y) + 9$ இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 9$$

$x + y = k$ என்க.

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 9 = k^2 - 6k + 9$$

$$= k^2 - 2(k)(3) + 3^2$$

$$= (k - 3)^2$$

வர்க்க மூலம் $= (k - 3)$

$$= (x + y - 3).$$

பயிற்சி 3-19

பின்வருவனவற்றின் வர்க்கமூலங்களைக் காண்க.

(1) $a^2 + 2a + 1$ (2) $x^2 + 14x + 49$

(3) $x^2 + 16x + 64$ (4) $b^2 - 10b + 25$

(5) $c^2 - 20c + 100$ (6) $m^2 - 22m + 121$

(7) $16x^2 + 24x + 9$ (8) $9x^2 + 30x + 25$

(9) $49x^2 - 14x + 1$ (10) $36a^2 - 60a + 25$

(11) $9x^2 + 48xy + 64y^2$ (12) $16a^2 + 72ab + 81b^2$

(13) $4l^2 - 28lm + 49m^2$ (14) $25c^2 - 60cd + 36d^2$

(15) $4a^2b^2 + 4ab + 1$ (16) $25x^2y - 20xy + 4$

(17) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(18) $p^2 + q^2 + r^2 + 2pq - 2qr + 2rp$

(19) $(m + n)^2 + 12(m + n) + 36$

(20) $(x + y)^2 - 10(x + y) + 25$

(21) $10(x - y)^2 + 8(x - y) + 1$

(22) $4(p + q)^2 - 28(p + q) + 49$.

விடைகள்

(1) $(a + 1)$ (4) $(b - 5)$ (7) $(4x + 3)$

(11) $(3x + 8y)$ (15) $(2ab + 1)$ (17) $(x + y + z)$

(19) $(m + n + 6)$ (22) $(2p + 2q - 7)$.

3-20. வர்க்கமூலம் : பெருக்குத் தொடர்கள்

எடுத்துக்காட்டு :

வர்க்கமூலம் காண்க.

$(x^2 + 2x - 15)(x^2 - x - 6)(x^2 + 7x + 10)$

தீர்வு :

காரணிப்படுத்த,

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

$$\sqrt{(x^2 + 2x - 15)(x^2 - x - 6)(x^2 + 7x + 10)}$$

$$= \sqrt{(x + 5)(x - 3)(x - 3)(x + 2)(x + 2)(x + 5)}$$

$$= \sqrt{(x + 5)^2 (x - 3)^2 (x + 2)^2}$$

$$= (x + 5)(x - 3)(x + 2)$$

பயிற்சி 3·20

பின் வருவனவற்றின் வர்க்கமூலங்களைக் காண்க.

(1) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 4x + 3)$

(2) $(a^2 + 7a + 12)(a^2 + 9a + 20)(a^2 + 8a + 15)$

(3) $(p^2 - 3p + 2)(p^2 - 5p + 6)(p^2 - 4p + 3)$

(4) $(m^2 - 7m + 12)(m^2 - 9m + 20)(m^2 - 8m + 15)$

(5) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 3x - 28)(x^2 + 8x + 7)$

(6) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 11x + 30)(x^2 + 5x - 6)$

(7) $(x^2 + 7x - 18)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 6x - 27)$

(8) $(a^2 - 9)(a^2 + 2a - 15)(a^2 + 8a + 15)$

(9) $(12x^2 + 19x + 5)(8x^2 + 22x + 15)(6x^2 + 11x + 3)$

(10) $(4x^2 - 8x + 3)(4x^2 - 12x + 5)(4x^2 - 16x + 15)$

விடைகள்

(1) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

(2) $(a + 3)(a + 4)(a + 5)$

(3) $(p - 1)(p - 2)(p - 3)$

(4) $(m - 3)(m - 4)(m - 5)$

(5) $(x + 1)(x - 4)(x + 7)$

(6) $(x - 1)(x + 5)(x + 6)$

(7) $(x - 2)(x - 3)(x + 9)$

(8) $(a + 3)(a - 3)(a + 5)$

(9) $(3x + 1)(2x + 3)(4x + 5)$

(10) $(2x - 1)(2x - 3)(2x - 5)$

3.21. வர்க்கமூலம் : வகுத்தல் முறை

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலங்களை, எண் கணிதத்தில் செய்வது போல் வகுத்தல் முறையைப் பயன் படுத்தியும் காணலாம்.

$9x^2 - 30x + 25$ இன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்போம்.

$$
\begin{aligned}
9x^2 - 30x + 25 &= (3x + a)^2 \text{ என்று கொள்வோம்.}\\
&= 9x^2 + 6ax + a^2\\
-30x + 25 &= 6ax + a^2\\
&= a(6x + a)\\
&= a(2 \times 3x + a)
\end{aligned}
$$

$a = -5$ என்பது தெளிவு.

இதனைச் சுருக்கமாக வகுத்தல் முறையில் கீழ்வருமாறு செய்யலாம்.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \quad 3x - 5 & \\
\hline
3x & 9x^2 - 30x + 25 & (3x)^2 \\
 & 9x^2 & \\
\hline
6x - 5 & \quad -30x + 25 & (6x - 5)(-5) \\
 & \quad -30x + 25 & \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

எடுத்துக்காட்டு :

$4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25$ இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \quad 2x^2 - 3x + 5 & \\
\hline
2x^2 & 4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25 & \\
 & 4x^4 & (2x^2)^2 \\
\hline
4x^2 - 3x & \quad -12x^3 + 29x^2 & \\
 & \quad -12x^3 + 9x^2 & (4x^2 - 3x) \times (-3x) \\
\hline
4x^2 - 6x + 5 & \qquad 20x^2 - 30x + 25 & \\
 & \qquad 20x^2 - 30x + 25 & (4x^2 - 6x + 5) \times (5) \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore \sqrt{4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25} = 2x^2 - 3x + 5$$

பயிற்சி 3-21

பின் வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க.

(1) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

(2) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

(3) $4x^4 - 20x^3 + 29x^2 - 10x + 1$

(4) $25p^4 - 20p^3 - 26p^2 + 12p + 9$

(5) $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

(6) $9x^6 - 24x^5 + 16x^4 - 30x^3 + 40x^2 + 25$

(7) $16x^4 - 24x^3 - 7x^2 + ax + 4$ ஒரு முழு வர்க்கம் எனில் a இன் மதிப்பு காண்க.

(8) $25x^4 - 30x^3 - x^2 + ax + b$ ஒரு முழு வர்க்கம் எனில் a, b இன் மதிப்புகள் என்ன ?

விடைகள்

(1) $(x^2 + x + 1)$ (2) $(x^2 - 2x + 1)$

(3) $(2x^2 - 5x + 1)$ (4) $(5p^2 - 2p - 3)$

(5) $(x^3 + x^2 + x + 1)$ (6) $(3x^3 - 4x^2 - 5)$

(7) $a = 12.$ (8) $a = 6, b = 1.$

3.22. மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ. பெ. வ.)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

24, 30, 36 எண்களின் மீ, பெ. வ. காணும் முறையைப் பற்றி ஏற்கெனவே அறிந்திருக்கிறோம்.

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$

24, 30, 36 இன் மீ. பெ. வ. $= 2 \times 3 = 6$. இதுபோல் $5a^2$, b^2, $20ab^3$ இன் மீ. பெ. வ. காண்போம்.

$$5a^2b^2 = 5 \times a^2 \times b^2$$
$$20ab^3 = 5 \times 2^2 \times a \times b^3$$
$$\text{மீ. பெ. வ.} = 5 \times a \times b^2$$
$$= 5ab^2$$

எடுத்துக்காட்டு :

$4x^2y^3$, $6xy^5$ இன் மீ. பெ. வ, காண்க.

தீர்வு :

$$4x^2y^3 = 2^2 \times x^2 \times y^3.$$
$$6xy^5 = 2 \times 3 \times x \times y^5.$$
$$\text{மீ. பெ. வ.} = 2xy^3.$$

பயிற்சி 3-22

பின் வருவனவற்றின் மீ. பெ. வ. காண்க.

(1) a^7, a^4 (2) x^5, x^6

(3) p^8, p^{11}, p^7 (4) $4a^2, 6a^4$

(5) $7x^3, 14x^5$ (6) $24a^2, 36a^7$

(7) $10a^2b^2, 15a^4b^3$ (8) $20x^3y^2, 25xy^4$

(9) $12a^4b^2c^6, 16ab^3c^4$. (10) $12a^2b^2c^2, 30a^3bc^2$

(11) $10a^2bc^2, 15ab^2c^3, 20b^3c^2$

(12) $4x^2y^3z^2, 12x^5$

(13) $2xb, axy$

(14) p^m, p^{m+1}, p^{m+2}

விடைகள்

(1) a^4 (4) $2a^2$ (7) $5a^2b^2$ (11) $5bc^2$ (14) p^m

3-23. மீ. பெ. வ. : மூன்று கோவைகள்

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோவைகளின் மீ. பெ. வ. காண முதலில் அவற்றைக் காரணிப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர் அவற்றின் பொதுக் காரணிகளைக் கண்டுபிடித்தால் அவற்றில் மிகப் பெரியது மீ. பெ. வ. ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^2 - 3x - 10$, $x^2 + 9x + 14$, $x^2 - x - 6$ இன் மீ.பெ.வ. காண்க.

$x^2 - 3x - 10 \;=\; (x - 5)(x + 2)$

$x^2 + 9x + 14 \;=\; (x + 7)(x + 2)$

$x^2 - x - 6 \;=\; (x - 3)(x + 2)$

மீ. பெ. வ. $= (x + 2)$.

பயிற்சி 3-23

பின் வருவனவற்றின் மீ. பெ. வ, காண்க.

(1) $(x + 3)(x - 5)(x + 7)$, $(x - 2)(x + 3)(x + 6)$

(2) $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$, $(a + 5)(a - 1)(a - 2)$

(3) $(a - b)$, $(a - b)^3$

(4) $x^2(x - y)$, $x^3(x - y)^2$

(5) $3x - 5$, $9x - 15$

(6) $x^2 + xy$, $x^2 - y^2$

(7) $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$

(8) $x + y$, $x^3 + y^3$

(9) $p^2 - 4$, $p^2 + 3p + 2$, $p^2 + p - 2$

(10) $x^2 - 6x + 9$, $x^3 - 27$

(11) $x^2 + 8x + 15$, $x^2 + 4x - 5$, $x^2 + 3x - 10$

(12) $6a^2 - 7a - 3$, $10a^2 - 11a - 6$, $2a^2 + 11a - 21$

(13) $x^2 - 6x - 7$, $2x^2 - x - 3$, $x^2 - 1$

(14) $m^2 + 2mn + n^2$, $m^2 - n^2$, $(m + n)^3$

விடைகள்

(1) $(x + 3)$ (4) $x^2(x - y)$ (8) $x + y$

(11) $(x + 5)$ (12) $(2a - 3)$

3-24. மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ. சி. ம.)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

25, 40 இன் மீ.சி.ம. காணும் முறையை நினைவுகூர்வோம்.

$$25 = 5^2$$
$$40 = 5 \times 2^3$$
மீ. சி. ம. $= 5^2 \times 2^3$
$= 25 \times 8$
$= 200.$

எடுத்துக்காட்டு :

$16x^2, 24x^3y$ இன் மீ.சி. ம. காண்க.

$16x^2 = 2^4 \times x^2$

$24x^3y = 2^3 \times 3 \times x^3 \times y$

மீ. சி. ம. $= 2^4 \times 3 \times x^3 \times y$
$= 48x^3y$

பயிற்சி 3-24

பின் வருவனவற்றின் மீ. சி. ம. காண்க.

(1) x^2, x^3 (2) a^4, a^6 (3) x^6, x^{11}, x^6
(4) $2a^2, 3a^5$ (5) $8x^4, 12x^3$ (6) $12x^3, 20x^5$
(7) xy, yz (8) a^2b, ab^2 (9) x^2y^3, xy^3
(10) $3ab, 6bc, 9ca$ (11) x^2yz, x^3y
(12) $10a^2bc, 15abc^2, 20a^2b^2c.$

விடைகள்

(1) x^3 (4) $6a^5$ (9) x^2y^3 (11) x^3yz
(12) $60a^2b^2c^2$.

3-25. மீ. சி. ம. : மூன்று கோவைகள்

எடுத்துக்காட்டு :

$x^2 + 2x - 3$, $x^2 - 6x + 8$, $x^2 + x - 6$ இன் மீ. சி. ம. காண்க.

தீர்வு :

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$
$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$$
$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$
மீ. சி. ம. $= (x+3)(x-2)(x-1)(x-4)$

பயிற்சி 3-25

பின் வருவனவற்றின் மீ. சி. ம. காண்க.

(1) $(x+y)$, $(x+y)^2$, $(x+y)^3$

(2) $2(x-y)$, $4(x-y)^2$, $6(x-y)^3$

(3) $10(p-q)(q-r)$, $15(q-r)(r-p)$

(4) $x^2y(x+y)$, $2x^2z(x-y)$

(5) $m+n$, m^2-n^2

(6) $m+n$, m^3+n^3

(7) $a^2+2ab+b^2$, a^2-b^2

(8) x^3-1, x^2-1, $(x-1)^2$

(9) x^2+3x+2, x^2+5x+6, $x^2+7x+12$

(10) x^2-9, $x^2+2x-15$, $x^2+7x+10$

(11) $2a^2-5a-12$, a^2+a-20, $4a^2+8a+3$

(12) $6x^2+13x+6$, $15x^2+7x-2$, $10x^2+13x-3$

விடைகள்

(1) $(x+y)^3$ (4) $2x^2yz(x^2-y^2)$

(8) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

(11) $(2a+3)(a-4)(a+5)(2a+1)$

3-26 விகிதமுறு கோவைகள் : சுருக்குதல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

3, −5, 4, −7 என்பன முழுக்கள் ஆகும்.

$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{3}{-7}$, $\frac{4}{-7}$ என்பன முழுக்களின் இரட்டைகளாலான விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

இதுபோலவே $P(x)$, $Q(x) \neq 0$ என்பன இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில், $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ஒரு விகிதமுறு கோவையாகும்.

$\frac{x^2-5}{x^2-4x+7}$, $\frac{x^2-3x-3}{x^3-2x^2+5x+1}$ என்பன விகிதமுறு கோவைகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

எண் கணிதத்தில் உள்ளது போலவே விகிதமுறு கோவைகளையும் கூட்டவும், கழிக்கவும், பெருக்கவும், வகுக்கவும், சுருக்கவும் இயலும். எண் கணிதத்தில் உள்ள விதிகள் இவற்றுக்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$

இதைப் போலவே,

$$\frac{4x - 20}{3x - 15} = \frac{4(x-5)}{3(x-5)} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2x - 20}{3x^2 - 30x} = \frac{2(x-10)}{3x(x-10)} = \frac{2}{3x}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{(x-2)}{(x-3)}$$

பயிற்சி 3-26

சுருக்குக.

(1) $\frac{x^2}{x^2 + xy}$ (2) $\frac{4x}{2x^2 - 2xy}$

(3) $\frac{5x + 10}{5x - 15}$ (4) $\frac{3a - 12b}{3a + 3b}$

(5) $\frac{x - 4}{4 - x}$ (6) $\frac{2a - 6}{3 - a}$

(7) $\frac{x + y}{x^2 - y^2}$ (8) $\frac{6(x + y)^3}{30(x + y)^5}$

(9) $\frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 + 2x - 15}$ (10) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

(11) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ (12) $\frac{d^2 - 5d + 4}{d^2 - 10d + 24}$

(13) $\frac{2x^2 + 5x - 12}{4x - 6}$ (14) $\frac{5x - 5}{4x^2 - 9x + 5}$

(15) $\frac{m^3 + 8}{m^2 - m - 6}$ (16) $\frac{4x^2 + 7x - 15}{8x^2 + 2x - 15}$

விடைகள்

(1) $\frac{1}{x+y}$ (5) (-1) (8) $\frac{1}{5(x+y)^2}$

(11) $\frac{x+1}{x+2}$ (13) $\frac{x+y}{2}$ (16) $\frac{x+3}{2x+3}$

3-27 விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கல்

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9} = \frac{20}{63}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \,.\, R(x)}{Q(x) \,.\, S(x)}$$

$$(Q(x) \neq 0, \; S(x) \neq 0)$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{2}{x+3}$ ஐ $\frac{4}{x+5}$ ஆல் பெருக்குக.

தீர்வு :

$$\frac{2}{x+3} \times \frac{4}{x+5} = \frac{2 \times 4}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{8}{(x+3)\;(x+5)}$$

$$= \frac{8}{x^2+8x+15}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

பெருக்குக :

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} \times \frac{x^2-2x-8}{x^2-7x+12}$$

தீர்வு :

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} \times \frac{x^2-2x-8}{x^2-7x+12}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+2)} \times \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)(x-4)(x+2)}{(x+2)(x+2)(x-4)(x-3)}$$

$$= 1$$

பயிற்சி 3-27

பெருக்கி, முடியுமானால் விடையைச் சுருக்கி எழுதுக-

(1) $\dfrac{x-2}{4} \times \dfrac{-8}{3x-6}$

(2) $\dfrac{5x+15}{2y-8} \times \dfrac{3y-12}{4x+12}$

(3) $(x+3) \times \dfrac{3x}{(x^2-9)}$

(4) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+3} \times \dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$

(5) $\dfrac{x^2+11x+30}{x^2-6x+9} \times \dfrac{x^2-3x}{x^2-5x}$

(6) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9} \times \dfrac{x^2-2x-15}{x^2+6x+5}$

(7) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x-12} \times \dfrac{x^2-7x+6}{x^2-4}$

(8) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+5x+6} \times \dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$

(9) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} \times \dfrac{a^3-b^3}{ab\,(a+b)}$

(10) $\dfrac{3x^2-2x-8}{4x^2+5x-6} \times \dfrac{8x^2+6x-9}{6x^2+17x+12}$

விடைகள்

(1) $\dfrac{-2}{3}$ (5) $\dfrac{x-6}{x-3}$ (7) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

(10) $\dfrac{(x-2)}{(x+2)}$

3-28. விகிதமுறு கோவைகளின் வகுத்தல்

நினைவு படுத்திக் கொள்க.

$$\frac{3}{8} \div \frac{15}{16} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

இதைப்போலவே

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)}$$
$$= \frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{S(x)}{R(x)}$$

எடுத்துக்காட்டு :

வகுக்க :

$$\frac{ax + bx}{a^2 + ab + b^2} \div \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$$

தீர்வு :

$$\frac{ax + bx}{a^2 + ab + b^2} \div \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$$
$$= \frac{ax + bx}{a^2 + ab + b^2} \times \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$
$$= \frac{x(a + b)}{a^2 + ab + b^2} \times \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)(a - b)}$$
$$= x$$

பயிற்சி 3-28

வகுக்க.

(1) $\frac{p + 5}{2} \div (3p + 15)$

(2) $\frac{3x + 12}{5x} \div (x^2 - 16)$

(3) $\frac{x^2 - 7x + 12}{15x^3} \div \frac{x - 4}{10x}$

(4) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} \div \frac{x^2 + 6x - 55}{x^2 + 6x + 8}$

(5) $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 5x + 6} \div \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - x - 12}$

(6) $\frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 9ab + 20b^2} \div \frac{a^2 - 5ab + 6b^2}{a^2 - 7ab + 12b^2}$

(7) சுருக்குக :

$$\frac{x^2-16}{x^3-8} \times \frac{2x^2-3x-2}{2x^2+9x+4} \div \frac{3x^2-11x-4}{x^2+2x+4}$$

விடைகள்

(1) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{2}{3x^2}(x-3)$ (5) $\frac{(x-5)(x-4)}{(x+2)(x+1)}$

(7) $\frac{1}{3x+1}$

3-29. விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் : (பகுதிகள் சமம்)

நினைவு படுத்திக் கொள்க.

$$\frac{4}{11}+\frac{5}{11}$$
$$=\frac{4+5}{11}$$
$$=\frac{9}{11}.$$

கூட்டப் பெறும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களின் பகுதிகள் ஒன்றாக இருந்தால் அப் பின்னங்களின் தொகுதிகளைக் கூட்டலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கூட்டுக : $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}$

தீர்வு :

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}$$
$$=\frac{x+y}{7}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

கூட்டுக : $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{x+4}{x^2+5x+6}$

தீர்வு :

$$\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{x+4}{x^2+5x+6}$$

$$= \frac{2x + 5 + x + 4}{x^2 + 5x + 6}$$

$$= \frac{3x + 9}{x^2 + 5x + 6}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{3}{x + 2}$$

பயிற்சி 3-29

கூட்டுக.

(1) $\frac{x}{7} + \frac{3x}{7}$ (2) $\frac{p}{3} + \frac{q}{3}$

(3) $\frac{4x}{9} + \frac{x}{9}$ (4) $\frac{7x}{24} + \frac{5x}{24}$

(5) $\frac{2}{3x} + \frac{4}{3x}$ (6) $\frac{x - 5}{xy} + \frac{x + 5}{xy}$

(7) $\frac{11x}{9ab} + \frac{7x}{9ab}$ (8) $\frac{5x}{21} + \frac{8x}{21} + \frac{x}{21}$

(9) $\frac{a - 4}{ab} + \frac{a - 6}{ab} + \frac{a + 10}{ab}$

(10) $\frac{3}{5x - 10} + \frac{2}{5x - 10}$

(11) $\frac{5x - 15}{3x - 9} + \frac{3 - x}{3x - 9}$

(12) $\frac{x}{x^2 - 36} + \frac{6}{x^2 - 36}$

(13) $\frac{x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

(14) $\frac{2x}{x^2 + 10x + 24} + \frac{12}{x^2 + 10x + 24}$

(15) $\frac{2x - 10}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

(16) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 6x + 9} + \frac{2x + 3}{x^2 + 6x + 9}$

(17) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 7x + 12} + \frac{3x - 36}{x^2 - 7x + 12}$

(18) $\frac{x^2}{x^2 + 10x + 21} + \frac{6x - 7}{x^2 + 10x + 21}$

விடைகள்

(1) $\frac{4x}{7}$ (6) $\frac{2}{y}$ (9) $\frac{3}{b}$ (12) $\frac{1}{x - 6}$

(15) $\frac{3}{x - 2}$ (18) $\frac{x - 1}{x + 3}$

3-30. விகிதமுறு கோவைகள் கூட்டல் : வேறுபட்ட பகுதிகள்

நினைவு கூர்க.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{15}$$

$$= \frac{25}{60} + \frac{28}{60} \quad [12, 15\text{இன் மீ.சி.ம. } 60]$$

$$= \frac{53}{60}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கூட்டுக : $\frac{2}{1 + x} + \frac{3}{1 - x}$

தீர்வு :

$(1 + x), (1 - x)$ இன் மீ.சி.ம. $= (1 + x)(1 - x)$

$$\frac{2}{1 + x} = \frac{2(1 - x)}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{2 - 2x}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$\frac{3}{1 - x} = \frac{3(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{3 + 3x}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$\frac{2}{1 + x} + \frac{3}{1 - x} = \frac{2 - 2x}{(1 + x)(1 - x)} + \frac{3 + 3x}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$= \frac{2 - 2x + 3 + 3x}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$= \frac{5 + x}{1 - x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கூட்டுக : $\frac{x-4}{x^2-3x+2}+\frac{x-2}{x^2-5x+4}$

தீர்வு :

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

$(x^2-3x+2),\ (x^2-5x+4)$ இன் மீ.சி.ம.

$$=(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$\frac{x-4}{x^2-3x+2}=\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x-4)(x-4)}{(x-2)(x-1)(x-4)}$$

$$=\frac{(x-4)^2}{(x-2)(x-1)(x-4)}$$

$$\frac{x-2}{x^2-5x+4}=\frac{x-2}{(x-4)(x-1)}=\frac{(x-2)(x-2)}{(x-4)(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x-4}{x^2-3x+2}+\frac{x-2}{x^2-5x+4}$$

$$=\frac{(x-4)^2}{(x-2)(x-1)(x-4)}+\frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-4)^2+(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$=\frac{x^2-8x+16+x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$=\frac{2x^2-12x+20}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

பயிற்சி 3-30

கூட்டுக.

(1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}$ (2) $\frac{2x}{3}+\frac{7x}{6}$

(3) $\frac{4a}{5}+\frac{6a}{7}$ (4) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

(5) $\frac{4}{xy}+\frac{3}{y}$ (6) $\frac{3x}{10}+\frac{2x-3}{15}$

(7) $\frac{3x}{4x+16}+\frac{2x}{5x+20}$ (8) $\frac{3x}{x^2-9}+\frac{5}{x+3}$

(9) $\frac{2a+3}{a^2-16}+\frac{4a}{3a+12}$

(10) $\frac{x+3}{x^2-8x+15}+\frac{2}{3x-9}$

(11) $\frac{2x-1}{x^2+6x+8}+\frac{5}{2x+4}$

(12) $\frac{2x-1}{x^2-25}+\frac{x+2}{x+5}$

(13) $\frac{3x}{x^2+3x+2}+\frac{4x}{x^2+7x+10}$

(14) $\frac{x+1}{3x^2-2x-1}+\frac{x-1}{3x^2+4x+1}$

(15) $\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+3x+2}$

(16) $5+\frac{2}{2x-3}$

(17) $7+\frac{x+1}{x-2}$

விடைகள்

(1) $\frac{5x}{8}$ (5) $\frac{4+3x}{xy}$ (8) $\frac{8x-15}{x^2-9}$ (11) $\frac{9}{2(x+4)}$

(14) $\frac{2x^2+2}{(3x+1)(x+1)(x-1)}$ (17) $\frac{8x-13}{x-2}$

3-31. விகிதமுறு கோவைகள் : கழித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1:

சுருக்குக :

$$\frac{2x}{x+3} - \frac{x}{4}$$

தீர்வு :

$4, (x+3)$இன் மீ.சி.ம. $= 4(x+3)$

$$\frac{2x}{x+3} = \frac{(2x)(4)}{(x+3)(4)} = \frac{8x}{4(x+3)}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{x(x+3)}{4(x+3)} = \frac{x^2+3x}{4(x+3)}$$

$$\frac{x+3}{2x} - \frac{x}{4} = \frac{8x}{4(x+3)} - \frac{(x^2+3x)}{4(x+3)}$$

$$= \frac{8x - x^2 - 3x}{4(x+3)}$$

$$= \frac{-x^2+5x}{4(x+3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சுருக்குக :

$$\frac{x+1}{x^2+7x+12} - \frac{x+2}{x^2+8x+15}$$

தீர்வு :

$$x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$$

$(x^2+7x+12), (x^2+8x+15)$இன் மீ. சி. ம.

$$= (x+3)(x+4)(x+5)$$

$$\frac{x+1}{x^2+7x+12} = \frac{x+1}{(x+3)(x+4)} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$\frac{x+2}{x^2+8x+15} = \frac{x+2}{(x+3)(x+5)} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+7x+12} - \frac{x+2}{x^2+8x+15} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+4)(x+5)} - \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{(x^2+6x+5)-(x^2+6x+8)}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{x^2+6x+5-x^2-6x-8}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{-3}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

பயிற்சி 3-31

சுருக்குக.

(1) $\frac{4a}{7} - \frac{a}{7}$ (2) $\frac{3x}{8} - \frac{x}{8}$

(3) $\frac{7x}{12} - \frac{3x}{8}$ (4) $\frac{5}{ab} - \frac{3}{b}$

(5) $\frac{4}{x^2y} - \frac{3}{xy^2}$ (6) $\frac{3}{2p^3q^2} - \frac{5}{6pq}$

(7) $\frac{a}{a+3} - \frac{2}{a-3}$ (8) $\frac{7}{x-5} - \frac{3}{5-x}$

(9) $\frac{5x}{x^2-9} - \frac{2}{x+3}$ (10) $\frac{7}{2x-10} - \frac{5x}{x^2-25}$

(11) $\frac{2x+1}{x^2-36} - \frac{x+1}{x+6}$

(12) $\frac{2p}{3p^2+5p-2} - \frac{p}{3p^2-7p+2}$

(13) $\frac{4x-5}{x^2-7x+12} - \frac{x+7}{x^2-7x+12}$

(14) $\frac{5}{x^2+5x+6} - \frac{4}{x^2+5x+6}$

(15) $\frac{x}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{2x}{x^2-4x+3}$

விடைகள்

(1) $\frac{3a}{7}$ (3) $\frac{5x}{24}$

(6) $\frac{9 - 5pq}{6p^2q^2}$ (10) $\frac{-3x + 35}{2(x^2 - 25)}$

(12) $\frac{p^2 - 6p}{(3p - 1)(p + 2)(p - 2)}$ (15) 0.

3.32. இருபடிச் சமன்பாடுகள்

$x \in R$, $ax + b = 0$ என்ற அமைப்பு முறையைக் கொண்ட ஒரு படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறையை ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள மாறியின் படி 2 ஆனால் அஃது இரு படிச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$a, b, c \in R$, $a \neq 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாடு இரு படிச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$3x^2 + 10x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x + 7 = 0$ என்பன இரு படிச் சமன்பாடுகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

$p(x)$ இல், $p(a) = 0$ ஆனால் a என்பது $p(x) = 0$ இன் மூலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$P(x) = x^2 - 3x + 2$ இல்
$$P(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$
$$P(2) = 2^2 - 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$
$$P(3) = 3^2 - 3(3) + 2 = 9 - 9 + 2 = 2.$$

1, 2 என்பன $x^2 - 3x + 2 = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

3 என்பது $x^2 - 3x + 2 = 0$ இன் மூலமன்று.

ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரு மூலங்கள் உண்டு.

வரலாற்றுக் குறிப்பு

4000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே பாபிலோனியர்கள் இரு படிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி அறிந்திருந்தனர். கி. மு. 565ஆம் ஆண்டில் யூக்லிட் என்ற கணித மேதை இரு படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணம் காண வடிவ இயல் முறைகளைக் கையாண்டார். கி. பி. 598ஆம் ஆண்டில் வாழ்ந்த இந்தியக் கணித மேதை பிரம்ம குப்தர் இரு படிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையை அறிந்திருந்தார்.

3 - 33. காரணிப்படுத்தி இரு படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்களைக் காணல்

எடுத்துக்காட்டு 1:

தீர்க்க : $x^2 - 25 = 0$

தீர்வு :

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x + 5)(x - 5) = 0$$

$$x + 5 = 0 \text{ அல்லது } x - 5 = 0$$

$$x = -5 \text{ அல்லது } x = 5$$

$$\text{தீர்வுக் கணம்} = \{5, -5\}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

தீர்க்க : $x^2 + 7x + 12 = 0$

தீர்வு :

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$x + 4 = 0 \text{ அல்லது } (x + 3) = 0$$

$$x = -4 \text{ அல்லது } x = -3$$

$$\text{தீர்வுக் கணம்} = \{-4, -3\}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்க்க : $3x^2 + 10x + 3 = 0$

தீர்வு :

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$3x^2 + 9x + x + 3 = 0$$

$$3x(x + 3) + 1(x + 3) = 0$$

$$(3x + 1)(x + 3) = 0$$

அதாவது $3x + 1 = 0$ அல்லது $x + 3 = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ அல்லது $x = -3$

தீர்வுக் கணம் $= \{-3, -\frac{1}{3}\}$

பயிற்சி 3-33

பின் வரும் இரு படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக்கணம் காண்க. $(x \in R)$ (1 — 15 மனக் கணக்குகள்)

(1) $(x-3)(x-2)=0$ (2) $(x-4)(x+5)=0$

(3) $(x-5)(x-7)=0$ (4) $(x-2)(x+6)=0$

(5) $(x+9)(x-11)=0$ (6) $(x+8)(x+3)=0$

(7) $(x+5)(x+12)=0$ (8) $(x+6)^2=0$

(9) $(x+8)^2=0$ (10) $(x-1)^2=0$

(11) $x(x-3)=0$ (12) $x(x-7)=0$

(13) $x(4x-5)=0$ (14) $(4x+3)(2x-7)=0$

(15) $(5x-1)(3x+4)=0$ (16) $x^2-36=0$

(17) $x^2-169=0$ (18) $2x^2-50=0$

(19) $2x^2-7x=0$ (20) $3x^2+4x=0$

(21) $x^2+14x+48=0$ (22) $x^2+24x+143=0$

(23) $x^2+11x+30=0$ (24) $x^2-21x+104=0$

(25) $x^2+x-72=0$ (26) $x^2+5x-150=0$

(27) $x^2-x-12=0$ (28) $x^2-6x-91=0$

(29) $2x^2+5x+2=0$ (30) $3x^2+10x+8=0$

(31) $2x^2-3x+1=0$ (32) $4x^2+8x-5=0$

(33) $x^2+10x+25=0$ (34) $x^2-6x+9=0$

(35) $4x^2-28x+49=0$

விடைகள்

(16) $\{6, -6\}$ (18) $\{5, -5\}$

(21) $\{-6, -8\}$ (23) $\{-6, -5\}$

(27) $\{4, -3\}$ (30) $\left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$

(35) $\left\{\frac{7}{2}\right\}$

3-34. இருபடிச் சமன்பாடுகள் : பயன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஓர் இயல் எண்ணும் அதன் வர்க்கமும் சேர்ந்து 56-க்குச் சமம் எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு :

இயல் எண் $= x$ என்க.

அதன் வர்க்கம் $= x \times x = x^2$

$$x^2 + x = 56$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x + 8)(x - 7) = 0$$

$x = -8$ அல்லது $x = 7$

$-8 \notin N$. எனவே $x = 7$ என்பதே பொருத்தமான விடையாகும். அந்த எண் $= 7$

சரிபார்த்தல் :

$$7 + 7^2 = 7 + 49 = 56$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஓர் அறையின் நீளம் அதன் அகலத்தை விட 2 மீட்டர் அதிகம். அறையின் தரையின் பரப்பளவு 120 மீ^{2} எனில் அந்த அறையின் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

அறையின் அகலம் $= x$ மீ என்க.

அறையின் நீளம் $= (x + 2)$ மீ

தரையின் பரப்பளவு $= x(x+2)$ மீ^{2}

$$x(x+2) = 120$$

$$x^2 + 2x = 120$$

$$x^2 + 2x - 120 = 0.$$

$$(x+12)(x-10) = 0$$

$x = -12$ அல்லது $x = 10$

$x = -12$ என்பது பொருத்தமற்றது. எனவே, $x = 10$ எனக் கொள்ளவேண்டும்.

அறையின் அகலம் $= 10$ மீ

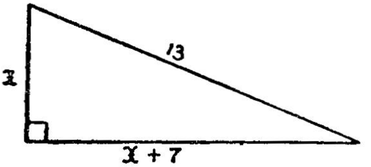
அறையின் நீளம் $= (10+2)$ மீ

$= 12$ மீ

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளம் 13 செமீ. மற்ற இரு பக்கங்களில் ஒன்று மற்றொன்றை விட 7 செமீ அதிகம் எனில் அம் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 3·2.

கர்ணத்தின் நீளம் $= 13$ செமீ

அதன் மற்ற பக்கங்களின் நீளங்கள் $= x$ செமீ, $(x+7)$ செமீ என்க.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$x^2 + (x+7)^2 = 13^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$$

$2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 + 14x - 120 = 0$

$x^2 + 7x - 60 = 0$ (சமன்பாட்டை 2ஆல் வகுக்க)

$(x + 12)(x - 5) = 0$

$x = -12$ அல்லது $x = 5$

$x = -12$ என்பது பொருத்தமற்றது; $x = 5$ என்று கொள்வதே பொருந்தும்.

செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்

= 5 செமீ, (5 + 7) செமீ

= 5 செமீ, 12 செமீ

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 5 \times 12$

= 30 செமீ^{2}

பயிற்சி 3-34

(1) அடுத்தடுத்துள்ள இரு இயல் எண்களின் பெருக்கற் பலன் 420 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(2) 31ஐ இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தபின் அப்பகுதிகளின் பெருக்கற் பலன் 240 ஆகக் காணப்படுகிறது எனில், அவ்விரு பகுதிகளைக் காண்க.

(3) அடுத்தடுத்துள்ள இரு ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 202 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(4) ஓர் எண், அதன் பெருக்கல் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\frac{41}{20}$ எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

(5) ஓர் எண், அதன் பெருக்கல் தலைகீழியைப் போல் 6 மடங்கு; அவற்றின் கூடுதல் 5க்கு சமம் எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

(6) அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 77 எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(7) இரு அடுத்தடுத்துள்ள ஏழின் மடங்கிகளின் பெருக்கற் பலன் 294 எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(8) இரு இயல் எண்களுக்குள்ள வித்தியாசம் 5. அவற்றின் பெருக்கற் பலன் 500 எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(9) ஒரு செவ்வக வயலின் சுற்றளவு 50 மீ. அவ்வயலின் பரப்பளவு 150 மீ^{2} எனில், அவ்வயலின் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

(10) ஒரு சதுர வயலின் பக்கத்தின் நீளம் 30 மீ. அவ்வயலைச் சுற்றிலும் வெளியே சம அகலமுள்ள பாதை செல்கிறது. பாதையின் பரப்பளவு 256 மீ^{2} எனில், பாதையின் அகலம் என்ன ?

(11) ஒரு செவ்வக வயலின் நீளம் 20 மீ, அகலம் 15 மீ. அதைச் சுற்றிலும் உட்புறமாக சம அகலமுள்ள பாதை செல்கிறது. பாதையின் பரப்பளவு 96 மீ^{2} எனில், பாதையின் அகலம் என்ன ?

(12) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் அதன் உயரத்தை விட 1 செமீ அதிகம். அம் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 6 செமீ^{2} எனில், அம்முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(13) ஒரு கூம்பின் சாயுயரம் 17 செமீ அதன் குத்துயரம் அதன் ஆரத்தைவிட 7 செமீ அதிகம் எனில், அக்கூம்பின் கொள்ளளவைக் காண்க.

(14) ஒரு செவ்வகத்தின் மூலை விட்டத்தின் நீளம் 6·5 செமீ. அதன் நீளம், அகலத்தை விட 3·5 செமீ அதிகம் எனில், அச் செவ்வகத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(15) ஒருவர் ரூ. 900க்கு சில பேனாக்கள் வாங்கினார். ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. 1 குறைந்திருந்தால் அவர் இன்னும் 30 பேனாக்கள் அதிகமாக வாங்கியிருந்திருப்பார். அவர் வாங்கிய பேனாக்கள் எத்தனை ?

விடைகள்

(1) 20, 21, (2) 15, 16, (3) 9, 11, (4) $\frac{4}{5}$ அல்லது $\frac{5}{4}$, (5) 3 அல்லது 2, (6) 4, 5, 6, (7) 14, 21, (8) 20, 25, (9) 15 மீ, 10 மீ (10) 2 மீ (11) $1\frac{1}{2}$ மீ (12) 12 செமீ (13) 320 π செமீ^{3} (14) 17 செமீ (15) 150.

பாடச் சுருக்கம்

1. முற்றொருமைகள்

(அ) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(ஆ) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(இ) $(a+b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(ஈ) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x+abc$

(உ) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

(ஊ) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

2. ax^2+bx+c என்பதைக் காரணிப்படுத்த

(அ) acஇன் காரணிச் சோடிகளைக் காண்க.

(ஆ) (1) ac மிகை எண்ணானால் காரணிகளின் கூடுதல் b ஆகவும்.

(2) ac குறை எண்ணானால் காரணிகளின் வித்தியாசம் b ஆகவும் அமையும் காரணிச் சோடியைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(3) bxஐ இரண்டு உறுப்புகளாகப் பிரித்தெழுதி காரணி காண்க.

3. மெய்யெண்மீது வரையறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $P(x)$ஐ $(x-a)$ஆல் வகுக்க மீதி $P(a)$ ஆகும். **(மீதித் தேற்றம்)**

4. $P(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $P(a)=0,\ a \neq 0$ என்றால் $(x-a)$, $P(x)$இன் ஒரு காரணி ஆகும். **(காரணித் தேற்றம்)**

a என்பது $P(x)$ இன் பூச்சியம் எனப்படும்.

5. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ. பெ. வ, மீ.சி.ம, வர்க்க மூலம் காணுதல் ஆகியவற்றிற்கு எண் கணித விதிகளும் முறைகளும் பொருந்தும்.

6. $P(x), Q(x) \neq 0$ என்பவை பல்லுறுப்புக் கோவைகளானால் $\frac{P(x)}{Q(x)}$ விகிதமுறு கோவையாகும்.

விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கல், வகுத்தல், கூட்டல், கழித்தல் ஆகியவற்றை, விகிதமுறு எண்கள் போன்றே செய்யலாம்.

7. $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in R, a \neq 0)$ ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

$x^2 + px + q = (x - l)(x - m)$ என்றால்

$x^2 + px + q = 0$ என்பதன் தீர்வுக் கணம் $\{l, m\}$ ஆகும்.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. கீழ்க் கண்டவற்றின் விரிவைக் காண்க.

(அ) $(2p - 3q - 4r)^2$

(ஆ) $(7x + 3)^3$

(இ) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$

(ஈ) $(x + 7)(x + 3)(x - 4)$

2. $x + \frac{1}{x} = 4$ எனில்,

$x^3 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ இன் மதிப்பென்ன ?

3. காரணிப்படுத்துக.

(அ) $a^4 - 4b^4$

(ஆ) $x^2 + x - 110$

(இ) $30 - x - 42x^3$

4. $2x^3 - 3x^2 + px - 8$ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்க மீதி 18 எனில், p இன் மதிப்பென்ன ?

5. காரணிப்படுத்துக : $x^3 + 4x^2 + x - 6$

6. $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4$இன் வர்க்க மூலம் காண்க,

7. $x^2 - 2x - 15$, $x^2 + 2x - 3$, $x^2 + 10x + 21$இன் மீ.பெ.வ. காண்க.

8. சுருக்குக : $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} \times \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5} \div \frac{x^2 - 9}{x^2 - 25}$

9. சுருக்குக : $\frac{1}{a + b} - \frac{2}{a - b} + \frac{3}{a^2 - b^2}$

10. ஓர் எண், அதன் வர்க்கம் ஆகியவற்றின் கூடுதல் 72 எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

தேர்விற்கு அன்று

சிவசங்கர நாராயணன் (1901—1950)

எஸ். எஸ். பிள்ளை என்று கணித உலகில் அழைக்கப்பெறும் சிவசங்கர நாராயண பிள்ளை ஒரு மாபெரும் கணிதமேதை ஆவார், இவர் தென் இந்தியாவைச் சேர்ந்தவர். வாரிங் என்பவர் எழுப்பிய கணிதவினாவிற்கு முழுமையாக விடைகண்ட ஒப்பற்ற சிந்தனையாளர் இவரே ஆவார்

கி. பி. 1640ஆம் ஆண்டில் பிரான்சு நாட்டைச் சார்ந்த பெர்மா என்பார் 'முழு எண் எதனையும் நான்கு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகக் கூற இயலும்' என்று கூறினார். இதனை இலக் ராஞ்சு என்ற கணித அறிஞர் 1770 ஆம் ஆண்டில் கணித தர்க்க முறையில் மெய்ப்பித்துக்காட்டினார். அவ்வாண்டிலேயே கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக்கழகக் கணிதப் பேராசிரியர் வாரிங் என்பவர் அதனை ஒட்டிய ஒரு கணிதப்புதிர் தொடுத்தார்.

முழு எண் எதனையும்

(அ) 4 வர்க்கங்களின் கூடுதலாக ;

(ஆ) 9 கனங்களின் கூடுதலாக ;

(இ) 19 நான்காம் அடுக்குகளின் கூடுதலாக ;

கூற இயலும் என்பதே அப்புதிர். இப்புதிரினை நிரூபிக்கப் பலர் முயன்று தோல்வி அடைந்தனர். நமது சிவசங்கர நாராயணன் அவர்கள் 1935இல் இப்புதிரின் ஒரு பகுதியையும், 1940இல் முழுமையாகவும் நிரூபித்து இதற்கான சார்பினையும் கண்டார்.

அச்சார்பு : $g(k) = 2k + m - 2; \quad m = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k \right]$

$[x]$ என்பது x ஐ விட மிகாத மிகப் பெரிய முழு எண்.

$k = 1$ ஆனால் $\left(\frac{3}{2}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right), \quad m = \left[\left(\frac{3}{2}\right) \right] = 1$

$g(1) = 2 + 1 - 2 = 1$ இது மெய்யே.

$k = 2$ ஆனால் $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}; \quad m = \left[\frac{9}{4} \right] = 2$

$g(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4.$ இது பெர்மா புதிர்.

$k = 3$ ஆனால் $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}; \quad m = \left[\frac{27}{8} \right] = 3$

$g(3) = 2^3 + 3 - 2 = 9.$ இது வாரிங் புதிர்.

$k = 4$ ஆனால் $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}, \quad m = \left[\frac{81}{16} \right] = 5$

$g(4) = 2^4 + 5 - 2 = 19.$ இதுவும் வாரிங் புதிர்தான்.

நம் இந்திய நாட்டைச் சேர்ந்த எஸ். எஸ். பிள்ளை அவர்களின் தீர்வின் காரணமாக ஒரு முழு எண்ணை நான்கிற்கு மேலும் உயர்ந்த அடுக்குகளின் கூடுதலாகக் கூறும் வகையை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு முழு எண்ணை ஆறாம் அடுக்குகள் எத்தனையின் கூடுதலாகக் கூற இயலும்?

$$k = 6; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{729}{64} = 11\frac{25}{64}; \quad m = 11$$

$$g(6) = 2^6 + 11 - 2 = 73$$

73 ஆறாம் அடுக்குகளின் கூடுதலாத ஒரு முழு எண்ணைக் கூறமுடியும்.

பேரறிஞர் ஹார்டி, அவர்கள் ஆற்றிய இராமானுஜன் நினைவுச் சொற்பொழிவுகள் பன்னிரண்டனுள் "பிள்ளை அவர்களின் மிகுந்த சுவையான தேற்றம்" என்று இதனைக் குறிப்பிட்டுள்ளார்.

ஃப்யூரியர் வரிசை என்பதைப் பற்றிய ஒரு புதிர் விடுபடாமல், கணித அறிஞர்களின் காலத்தையும், ஆர்வத்தையும் ஈர்த்துக் கொண்டிருந்தது. அதை விடுவிக்கும் முயற்சியில் ஈடுபட்டிருந்த சிவசங்கர நாராயணன் அவர்கள் ஒரு விமான விபத்தில் மறைவுற்றது, கணித உலகிற்கு நேர்ந்த பேரிழப்பு ஆகும்.

பிரம்ம குப்தர், ஆரியபட்டர், பாஸ்கரர், இராமானுஜன், சிவசங்கரநாராயணன் முதலிய இந்திய கணித அறிஞர் சிலரின் வரலாற்றினை இதுவரை அறிந்துள்ளீர்கள். கணித உலகிற்கு நமது நாடு அளித்த மாணிக்கங்கள் ஏராளம். அவர்களில் பலரைப் பற்றி அறிந்த நீங்களும் ஒரு மாணிக்கமாகத் திகழ முற்படுங்கள்.

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம் - மேடை 3

கயவன் யாரோ?

ஆனந்தத்தைக் கொன்றதாகக் கருதி மூன்று பேர் காவல் துறை அலுவலரால் விசாரிக்கப்படுகின்றனர். ஒவ்வொருவரும் மூன்று செய்திகள் தருகின்றனர்.

நரி :
1. நான் கொலை செய்யவில்லை.
2. ஆனந்தம் தற்கொலை செய்துகொள்ளவில்லை.
3. நான் ஆனந்தத்தின் நண்பன்.

புலி :
1. ஆனந்தம் தற்கொலை செய்துகொள்ளவில்லை.
2. ஆனந்தத்தோடு நான் பேசிக்கொண்டிருந்தேன்.
3. ஆனந்தத்தின் நண்பன் நரியன்று.

பூனை :
1. ஆனந்தத்தை புலி கொல்லவில்லை.
2. ஆனந்தம் தற்கொலை செய்துகொண்டான்.
3. ஆனந்தத்தின் நண்பன் என்ற நரியின் கூற்றுமெய்.

ஒவ்வொருவர் கூறிய கூற்றுகளிலும் ஒன்றே ஒன்றுதான் பொய்யென்றும் மற்ற இரண்டும் மெய்யென்றும் காவல்துறை அலுவலர் அறிந்தார். யார் கொலையாளி என்று கண்டுபிடிக்க.

4. புள்ளி இயல்

4.1 நிகழ்வுப்பட்டியல்

புள்ளி விவரங்களை வகைப்படுத்துவதற்காக நிகழ்வுப் பட்டியல் அமைக்கும் முறையை எட்டாம் வகுப்பில் அறிந்து கொண்டோம். அதை மீண்டும் நினைவு கூர்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 30 மாணவர்களின் உயரம் (செமீ திருத்தமாக) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தகுந்த பிரிவு இடைவெளி களைத் தேர்ந்தெடுத்து ஒரு நிகழ்வுப்பட்டியல் அமைக்க.

163	166	168	162	163	169
161	160	157	166	169	158
165	168	169	168	166	169
160	169	164	155	168	167
158	162	167	159	165	156

தீர்வு :

மிக உயர்ந்த அளவு $= 169$

மிகக் குறைந்த அளவு $= 155$

வீச்சு $= 169 - 155 = 14$

மொத்தமுள்ள விவரங்கள் $= 30$

குறைந்தது 5 சம பிரிவு இடைவெளிகள் இருக்கவேண்டு மெனில் பிரிவு இடைவெளி அளவு $= \dfrac{\text{வீச்சு}}{\text{பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$

$$= \frac{14}{5} = 2{\cdot}8$$

எனவே தேர்ந்தெடுக்கக்கூடிய சமபிரிவு இடைவெளி 3.

பிரிவு இடைவெளி	குறியீடுகள்	நிகழ்வெண்
154·5 – 157·5	|||	3
157·5—160·5	~~||||~~	5
160·5—163·5	~~||||~~	5
163·5—166·5	~~||||~~ |	6
166·5—169·5	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
		$\Sigma f = 30$

கவனிக்க :

பிரிவு இடைவெளிகள் 154 – 157, 157 – 160,...என்று இருந்தால், பிரிவின் மேல் எல்லைகள் 157, 160, .. எப்பிரிவில் சேரும் என்ற குழப்பம் ஏற்படும். எனவே, 154·5—157·5, 157·5—160·5, ... என்று பிரிவு இடைவெளிகள் எடுத்துக் கொள்ளப் பட்டுள்ளன.

பயிற்சி 4-1

பின்வரும் விவரங்களுக்குத் தக்க பிரிவு இடைவெளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து நிகழ்வுப்பட்டியல் அமைக்க.

1. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 35 மாணவர்களின் எடை (கிகி திருத்தமாக.)

45	32	33	36	32	38	31
45	47	32	35	43	33	40
43	45	49	34	35	38	30
38	41	41	37	36	37	39
31	34	39	49	42	40	44

2. சென்னைத் துறைமுகத்தில் கப்பல் சரக்குகளை இறக்கும் 25 தொழிலாளர்களின் சராசரி வயது (ஆண்டுகளில்).

34	41	39	30	29
39	36	37	38	40
36	44	46	35	42
40	38	35	37	45
33	28	39	32	31

3. 40 குக்கிராமங்களில் நெல் சாகுபடி செய்யப்படும் பரப்பளவு (ஹெக்டேர் திருத்தமாக).

14	13	14	18	15	20	22	23
16	15	20	19	15	17	13	23
16	24	17	20	11	18	24	14
14	12	21	17	12	19	11	24
22	23	22	16	21	23	21	13

4. ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த 25 உராய்வுத் தடைக்கருவி களின் விட்டம் (மிமீ இல்).

7·32	7·35	7.30	7·32	7·27
7·37	7·29	7·38	7·40	7·44
7·31	7·34	7·44	7·39	7·46
7·46	7·33	7·41	7·30	7·24
7·35	7·30	7·39	7·34	7·35

4-2 மைய ஈர்ப்பு அளவுகள்

4-2-1. தனித்த மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரி

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் கூட்டுத் தொகையை விவரங் களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைப்பது கூட்டுச் சராசரி எனப்படும்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு குடும்பத்திலுள்ள 5 பிள்ளைகளின் படிப்பிற்கான ஆண்டுச் செலவுகள் முறையே ரூ. 60, ரூ. 70, ரூ. 90 ரூ. 120, ரூ. 150 என்றால் அக் குடும்பத்தின் சராசரி படிப்புச் செலவு எவ்வளவு?

தீர்வு :

$$\text{சராசரி படிப்புச் செலவு} = \text{ரூ. } \frac{60+70+90+120+150}{5}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{490}{5}$$

$$= \text{ரூ. } 98$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு வகுப்பில் 66 செமீ உயரமுள்ள 4 மாணவர்களும் 67 செமீ உயரமுள்ள 5 மாணவர்களும் 68 செமீ உயரமுள்ள 6 மாணவர்களும் இருக்கிறார்கள். அவர்களுடைய சராசரி உயரம் என்ன ?

தீர்வு :

(i) மாணவர்களின் சராசரி உயரம்

$$\bar{x} = \frac{66 \times 4 + 67 \times 5 + 68 \times 6}{4 + 5 + 6}$$

$$= \frac{264 + 335 + 408}{15} = \frac{1007}{15}$$

$= 67 \cdot 13 = 67 \cdot 1$ செமீ (மிமீ திருத்தமாக)

(ii) பட்டியல் முறை :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு அட்டவணை அமைத்துப் பின் வருமாறு $\bar{x}$ஐக் காணலாம்.

உயரம் (செமீ இல்) x	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	fx
66	4	264
67	5	335
68	6	408
	$n = \Sigma f = 15$	$\Sigma fx = 1007$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f}}$$

$$\bar{x} = \frac{1007}{15} = 67 \cdot 13 = 67 \cdot 1 \text{ செமீ}$$

(மிமீ திருத்தமாக)

(iii) உத்தேசக் கூட்டுச் சராசரி முறை

பெருக்கல் விவரங்களை எளிமைப்படுத்த, உத்தேசக் கூட்டுச் சராசரி ஒன்றை எடுத்துக்கொண்டு அதிலிருந்து வித்தியாசங்கள் கண்டு, கூட்டுச் சராசரி காணலாம்.

உத்தேசச் சராசரி $A = 67$ செமீ என்க.

உயரம் செமீ இல் x	உத்தேசச் சராசரியிலிருந்து வேறுபாடு $d = x - A$	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	fd
66	−1	4	−4
67	0	5	0
68	1	6	6
		$\Sigma f = 15$	$\Sigma fd = 2$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

$$\therefore \bar{x} = 67 + \frac{2}{15} = 67 \cdot 13 = 67 \cdot 1 \text{ செமீ (மிமீ திருத்தமாக)}$$

பயிற்சி 4-2

1. பின் வருவனவற்றின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

   (i) முதல் n இயல் எண்களின் கனங்கள்.

   (ii) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

   (iii) ஒரு மாதத்தின் முதல் 10 நாட்களில் ஓர் இடத்தின் உச்ச வெப்ப நிலை (°C):

   32·3 33·8 28·8 33·8 30·4

   30·3 31·5 33·4 32·4 32·1

(iv) ஓர் அரசினர் மகப் பேறு இல்லத்தில் ஒரு மாதத்தில் பிறந்த 20 குழந்தைகளின் எடைகள் (கிகி இல்)

2·3 3·4 2·4 2·1 3·0 2·2 3·5

2·9 3·0 4·0 2·5 3·0 4·1 3·8

2·8 2·0 3·0 3·3 2·1 3·0

2. பின் வரும் நிகழ்வுப் பட்டியலில் உள்ள விவரங்களின் சராசரியைக் காண்க.

(i) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்.

மதிப்பெண்	10	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	9	8	15	9	4	2

(ii) ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் 30 வேலையாட்களின் எடைகள்.

எடை (கிகி இல்)	52	58	60	55	68	70	75
நிகழ்வெண்	7	5	4	6	3	3	2

3. ஒரு கடைத் தெருவில் ஒரு மாதத்தில் ஒரு நாள் சராசரி வருமானம் முதல் 10 கடைகளில் ரூ. 7, அடுத்த 15 கடைகளில் ரூ. 12 எனில், எல்லா கடைகளிலும் சேர்ந்து அன்றைக்கு சராசரி வருமானம் யாது ?

4. (i) 8 எண்களின் சராசரி — 8. ஒவ்வோர் எண்ணோடும் 3ஐக் கூட்டினால் புதிய சராசரி எவ்வளவு ?

(ii) 12 எண்களின் சராசரி 6. ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3ஆல் பெருக்கினால் புதிய சராசரி எவ்வளவு ?

விடைகள்

1. (i) $\frac{n(n+1)^2}{4}$ (ii) 14·3 (iii) 31·88°C

   (iv) 2·92 கிகி

2. (i) 37·6 (ii) 61·6 கிகி

3. ரூ. 10 4. (i) − 5 (ii) 18

4.2-2. தொடர்ச்சியான மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரி

நிகழ்வுப் பட்டியலில் ஒரு பிரிவு இடைவெளிக்குள் அடங்கும் விவரங்கள் ஒவ்வொன்றும் பிரிவுமையம் அல்லது பிரிவு மதிப் பெண்ணிற்குச் சமமாகக் கருதப்படும். ஒரு பிரிவு இடைவெளி யின்கீழ் எல்லையையும் மேல் எல்லையையும் கூட்டி இரண்டால் வகுக்கப் பிரிவு மதிப்பெண் கிடைக்கிறது. இதைப் பயன் படுத்தி ஒரு நிகழ்வுப் பட்டியலில் காணும் தொடர்ச்சியான மாறியின் கூட்டுச் சராசரி காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

4-1 இல் உள்ள எடுத்துக்காட்டு தரும் அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களின்படி வகுப்பின் சராசரி உயரம் யாது ?

தீர்வு :

(i)

உயரம் (செமீ இல்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	பிரிவுமையம் x	fx
154·5 − 157·5	3	156	468
157·5 − 160·5	5	159	795
160 5 − 163·5	5	162	810
163·5 − 166·5	6	165	990
166·5 − 169·5	11	168	1848
	$\Sigma f = 30$		$\Sigma fx = 4911$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{4911}{30} = 163{\cdot}7 \text{ செமீ}$$

(ii) உத்தேசச் சராசரி முறை

உத்தேசச் சராசரி $A = 162$ செமீ என்க.

உயரம் (செமீ இல்)	பிரிவுமையம்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	உத்தேசச் சராசரி வேறுபாடு d	fd
154·5 – 157·5	156	3	– 6	– 18
157·5 – 160·5	159	5	– 3	– 15
160·5 – 163·5	162	5	0	0
163·5 – 166·5	165	6	3	18
166·5 – 169·5	168	11	6	66
		$\Sigma f = 20$		$\Sigma fd = 51$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 162 + \frac{51}{30} = 162 + 1\cdot7$$

வகுப்பின் சராசரி உயரம் $= 163\cdot7$ செமீ

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

போட்டிகளில் புள்ளி முறை பின்பற்றப்படுவதை நாம் அறிவோம். ஒவ்வொரு போட்டியின் இன்றியமையாமைக்குத் தக்கவாறு நிறைகள் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. இவற்றிற்கேற்ற வாறு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காணலாம். அன்றாட வாழ்க்கையில் பலவகைப் பொருட்களின் விலை உயர்வு, ஊதிய உயர்வு போன்றவற்றைக் கணக்கிட நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு போட்டியில் ஒரு மாணவன் ஆங்கிலம், கணக்கு, அறிவியல் ஆகிய தேர்வுகளில் முறையே 72, 90, 86 மதிப் பெண்கள் பெறுகிறான். இத் தேர்வுகளுக்கு முறையே 1, 1, 3

என்ற புள்ளிகள் அளிக்கப்படுகிறது என்றால், அம் மாணவன் பெற்ற மதிப்பெண்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி யாது ?

தீர்வு :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{72 \times 1 + 90 \times 1 + 86 \times 3}{1 + 1 + 3}$$

$$= \frac{72 + 90 + 258}{5} = \frac{420}{5} = 84$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரு தொழில் நிறுவனத்தில் 50 பேர் மணிக்கு ரூ. 3 வீதமும், 30 பேர் மணிக்கு ரூ. 4 வீதமும், 20 பேர் மணிக்கு ரூ. 5 வீதமும், ஊதியம் பெற்றால் அவர்கள் ஒரு மணிக்குப் பெறும் சராசரி ஊதியம் யாது ?

தீர்வு :

தொழிலாளர் எண்ணிக்கை x	ஊதியம் (மணிக்கு ரூபாயில்) w	wx
50	3	150
30	4	120
20	5	100
	$\Sigma w = 12$	$\Sigma wx = 370$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{370}{12} = 30{\cdot}83$$

ஒரு மணிக்குப் பெறும் சராசரி ஊதியம் ரூ. 30·83.

பயிற்சி 4-3

1. பின்வரும் நிகழ்வுப்பட்டியலிலுள்ள விவரங்களுக்குச் சராசரி காண்க.

(i)

மாதச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை f
125 – 175	2
175 – 225	22
225 – 275	19
275 – 325	14
325 – 375	3
	$\Sigma f = 60$

(ii)

மாதச் சேமிப்பு ரூபாயில்	சேமிப்போரின் எண்ணிக்கை f
50 – 52	7
52 – 54	10
54 – 56	15
56 – 58	12
58 – 60	1
	$\Sigma f = 45$

2. பின்வரும் விவரங்களுக்கு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காண்க.

(i)

குழு	மாத ஊதிய உயர்வு (ரூபாயில்)	உயர்வு பெறுவோர் எண்ணிக்கை
A	3	500
B	8	1500
C	10	2000

(ii)

பொருள்	விலை ஏற்றம் %	நிறை
A	10	6
B	24	60
C	30	50
D	40	75

விடைகள்

(1) (i) ரூ. 245 (ii) 54·56

(2) (i) ரூ. 8·38 (ii) 31·4.

4.2.3. இடைநிலை அளவு

விவரங்களைப் பார்த்தவுடனே சராசரியைக் கண்டறிய உதவுவது இடைநிலை அளவு ஆகும்.

> கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்தால் நடுவில் உள்ள விவரம் அல்லது நடுவிலுள்ள இரு விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை அளவு எனப்படுகிறது.

எனவே, இடைநிலை அளவு காண

(1) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறு/இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

(2) விவரங்களின் எண்ணிக்கை (அ) ஒற்றையானால் நடு உறுப்பு (ஆ) இரட்டையானால் நடு இரு உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சாரணச் சிறுவர்களுக்கான போட்டிகளில் ஒரு சிறுவன் பெற்ற புள்ளிகள் 5, 2, 4, 3, 4, 1, 2. இவற்றின் இடைநிலை அளவு யாது ?

தீர்வு :

விவரங்களை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

1, 2, 2, 3, 4, 4, 5. இதன் நடு உறுப்பு 4வது உறுப்பாகிய 3 ஆகும்

இடைநிலையளவு 3.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

வாழை சாகுபடி ஆராய்ச்சியில் ஒரு தோட்டத்தில் 40 வாழை இலைகளின் நீளங்கள் (செமீ இல்) பின் வருமாறு காணப்பட்டது.

173	128	145	150	132	156	153	140
138	135	135	144	125	157	176	146
158	163	135	152	149	148	119	168
161	142	154	165	142	147	138	126
150	140	136	147	144	145	164	146

இதன் இடைநிலையளவு யாது ?

தீர்வு :

விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதப் பின்வரும் அணி கிடைக்கிறது.

119	135	138	144	146	150	156	164
125	135	140	144	147	150	157	165
126	135	140	145	147	152	158	168
128	136	142	145	148	153	161	173
132	138	142	146	149	154	163	176

இதில் நடு உறுப்புகள் 20வது உறுப்பும் 21வது உறுப்பும் ஆகும்.

அவை முறையே 146, 146.

$$\text{இடைநிலையளவு} = \frac{146 + 146}{2} = 146 \text{ செ மீ}$$

பயிற்சி 4-4

பின்வரும் விவரங்களின் இடைநிலையளவுகளைக் காண்க,

1. (i) முதல் 100 இயல் எண்களின் வரிசை.
   (ii) முதல் 100 முழு எண்களின் வரிசை.
   (iii) ஆறு 6 கள், ஏழு 7 கள், எட்டு 8 கள், ஒன்பது 9 கள். பத்து 10கள்.

2. ஒரு தொழிற்சாலை 8 மாதங்களில் பெற்ற வருமானம் (%) :

   19·3, 20·2, 18·3, 22·4, 20·6, 20·0. 18·8, 19·7.

3. மருத்துவ முகாம் ஒன்றில் முதல் இருபது நாட்களில் குடும்பநல அறிவுரை பெற்றோர் எண்ணிக்கை :,

   77, 75, 78, 83, 85, 81, 86, 78, 76, 81, 85, 74, 68, 79, 77, 70. 71, 84, 80, 69.

4. பெரு நகர் ஒன்றில் ஒன்பது மாதங்களில் சாலை விபத்தில் இறந்தோர் எண்ணிக்கை :
   8, 8, 4, 5. 4. 6, 3, 8. 10.

விடைகள்

1. (i) 50·5 (ii) 50 (iii) 8
2. 19·85% 3. 78 4. 6

4·2·4. முகடு

ஒரு தொகுதியில் மிகுதியான நிகழ்வெண் கொண்டுள்ள விவரம் அம் முழுத் தொகுதியின் ஒரு சராசரியாகக் கொள்ளப் படும். இச் சராசரி முகடு எனப்படுகிறது.

சட்டைகள், காலணிகள் போன்றவற்றை விற்போர் எந்நிறம், எந்த அளவு மிகுதியாக விரும்பப்பட்டு வாங்கப்படுகிறது என்பதை அறிவது மிகத் தேவை. அதற்குப் பெரிதும் பயன் படுவது முகடு ஆகும்.

முகடு காண

1. விவரங்களின் நிகழ்வெண் காண்க.

2. விவரங்கட்கு மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண் ஒன்று இருந்தால் அதையே முகடு எனக் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 1:

பின்வருவனவற்றின் முகடு காண்க.

(i) 3, 3, 6, 8, 9, 9, 9, 11, 11, 12, 13, 9

(ii) 4, 6, 9, 11, 13, 16, 17

(iii) 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 8, 10.

தீர்வு :

(i) இத் தொகுதியில் 9இன் நிகழ்வெண் 4 ;
3இன் நிகழ்வெண் 2 ;
11இன் நிகழ்வெண் 2 ;

எனவே, இத் தொகுதியின் முகடு 9.

(ii) இதில் ஒவ்வொரு விவரத்தின் நிகழ்வெண்ணும் 1 தான்.

(iii) இதில் 5இன் நிகழ்வெண் 3.
8இன் நிகழ்வெண் 3.

எனவே, இத் தொகுதியில் 5, 8 என்ற இரு முகடுகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2:

58·7, 60·3, 59·5, 61·6, 58·9 என்ற 5 எண்கள் கொண்ட தொகுதியின் (i) கூட்டுச் சராசரி, (ii) இடைநிலையளவு, (iii) முகடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{1}{5}(58 \cdot 7 + 60 \cdot 3 + 59 \cdot 5 + 61 \cdot 6 + 58 \cdot 9)$$
$$= \frac{1}{5} \times 299 \cdot 0$$
$$= 59 \cdot 8$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் ஏறுவரிசை

58·7, 58·9, 59·5, 60·3, 61·6 இவ் வரிசையின் மையத்தில் உள்ளது 3ஆவது உறுப்பு. எனவே, இடைநிலையளவு 5·95.

(iii) இதில் ஒவ்வொரு விவரமும் கொண்டுள்ள நிகழ்வெண் 1. எனவே, இதில் முகடு இல்லை.

பயிற்சி 4-5

பின் வருவனவற்றின் (i) கூட்டுச் சராசரி (ii) இடைநிலையளவு (iii) முகடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

1. 18, 21, 14, 13, 12, 15, 20, 16, 14, 11, 20, 18, 22, 16, 15, 17.
2. ஆறு 6கள், ஏழு 7கள், எட்டு 8கள், ஒன்பது 9கள், பத்து 10கள்.
3. 0, 11, 16, 17, 12, 13, 17, 16, 16, 12, 16, 0, 15, 16, 0.

விடைகள்

(1) (i) 16·4 (ii) 16·4 (iii) முகடு இல்லை.

(2) (i) 8·25 (ii) 8 (iii) 10.

(3) (i) 11·08 (ii) 15 (iii) 16.

4·3. பரவுதலின் அளவுகள்

4·3·1. வீச்சு

A, *B* என்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்கள் 5 ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்களை ஒப்பிடுவோம்.

	ஆட்டங்கள்					மொத்த ஓட்டங்கள்	கூட்டுச் சராசரி
	1	2	3	4	5		
A	15	30	30	0	75	150	30
B	20	30	30	30	40	150	30

சராசரியிலிருந்து Aஇன் மிகுதியான மாறுபாடு 45, குறைவான மாறுபாடு 0. ஆனால், சராசரியிலிருந்து Bஇன் மிகுதியான மாறுபாடு 10, குறைவான மாறுபாடு 10. எனவே Bஇன் ஆட்டம் Aஇன் ஆட்டத்தைவிடச் சீராக உள்ளது எனலாம்.

மேலும்,

A இன் ஓட்டங்களின் வீச்சு $= 75 - 0 = 75$.

B இன் ஓட்டங்களின் வீச்சு $= 40 - 20 = 20$.

இவ்வாறு விவரங்கள் மைய ஈர்ப்பு அளவிலிருந்து எவ்வாறு பரவியுள்ளன என்பதைக் கண்டறிய உதவும் அளவுகள் **பரவுதலின் அளவுகள்** எனப்படுகின்றன.

பரவுதலின் அளவுகளுள் ஒன்று வீச்சு ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுள் மிக உயர்ந்த அளவிற்கும் மிகக் குறைந்த அளவிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு *வீச்சு* எனப்படுகிறது.

பயிற்சி 4-6

பயிற்சிகள் 4·1, 4·2, 4·3, 4·4 ஆகியவற்றில் உள்ள கணக்குகளில் எவையேனும் 10 கணக்குகளுக்கு வீச்சைக் கணக்கிட்டு எழுதுக.

4·3·2. *தனித்த மாறிகளின் திட்ட விலக்கம்*

3, 5, 7, 9, 11 ;

3, 4, 6, 8, 10, 11

ஆகிய இரு எண் வரிசைகளிலும் வீச்சு $= 11 - 3 = 8$ ஆகும். இருப்பினும் 3, 11 ஆகிய கோடி எண்கள் இரண்டுக்கும் இடையேயுள்ள விவரங்களைப் பற்றி வீச்சு நமக்கு எதுவும் அறிவிப்பதில்லை. ஆனால், கொடுத்துள்ள விவரங்கள் அனைத்தையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு பரவுதலைக் காணத் திட்ட விலக்கம் பயன்படுகிறது.

திட்ட விலக்கம் காண

1. *கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ காண்க.*

2. *கூட்டுச் சராசரிக்கும் ஒவ்வொரு விவரத்திற்கும் உள்ள விலக்கம் $d = x - \bar{x}$ காண்க.*

3. d^2 காண்க.

4. விலக்கவர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \frac{\Sigma d^2}{n}$ காண்க.

5. திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் முதல் நான்கு மாதத் தேர்வுகளில் ஒரு மாணவன் கணக்குப் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (%) முறையே 42, 30 48, 36 ஆகும். இவற்றின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

விவரங்களின் எண்ணிக்கை, $n = 4$

கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = \frac{42 + 30 + 48 + 36}{4}$

$$= \frac{156}{4} = 39$$

மதிப்பெண் x	கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலகல் $d = x - \bar{x}$	விலகலின் வர்க்கம் d^2
42	$+3$	9
30	-9	81
48	$+9$	81
36	-3	9
	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 180$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{180}{4}} = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} = 3 \times 2{\cdot}236$$
$$= 6{\cdot}708$$

குறிப்பு : தனித்த மாறிகளின் $\Sigma d = 0$. இதை ஒரு சோதனையாகக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 4-7

பின் வருவனவற்றின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

1. புதிய பாணியில் அமைக்கப் பெற்ற ஓவியக் கண் காட்சியில் காணப்பட்ட 10 வடிவொத்த முக்கோணப் படங்களின் அடிப்பக்க அளவுகள் (செமீ இல்)

   4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.

2. ஓர் ஊரில் 8 ஆண்டுகளில் அக்டோபர் மாதத்தில் பெய்த மழையளவு (செமீ இல்)

   9, 18, 9, 3, 8, 8, 9, 8.

3. 10 கோழிப் பண்ணைகளில் ஓர் ஆண்டில் நோய் வாய்ப்பட்ட கோழிகளின் எண்ணிக்கை (%)

   8·0, 8·8, 8·2, 9·0, 6·8, 8·9, 7·4, 8·2, 6·6, 7·6

4. பஞ்சாலை ஒன்றில் இயந்திரங்களைப் பழுது பார்க்க 10 ஆண்டுகளில் நியமிக்கப்பட்ட வல்லுநர்களின் எண்ணிக்கை.

   7, 20, 21, 13, 15, 10, 12, 29, 35, 28.

விடைகள்

(1) 5·745 (2) 3·87 (3) 0·802 (4) 8·76

4·3·3. நிகழ்வுப் பட்டியலின் திட்ட விலக்கம்

நிகழ்வுப் பட்டியலில் n விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f}}$

எடுத்துக்காட்டு :

ஓர் ஊராட்சி ஒன்றியத்தில் புதிய இரக நெல் சாகுபடியை ஒட்டிய நிகழ்வுப் பட்டியல் தரப்பட்டுள்ளது. இவ் விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

பரப்பு (ஹெக்டேரில்)	5	7	9	11	13	
பயிரிடுவோர் எண்ணிக்கை	2	2	4	8	4	$\Sigma f = 20$

தீர்வு :

x	f	fx	$d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
5	2	10	− 5	25	50
7	2	14	− 3	9	18
9	4	36	− 1	1	4
11	8	88	+ 1	1	8
13	4	52	+ 3	9	36
	$\Sigma f = 20$	$\Sigma fx = 200$			$\Sigma fd^2 = 116$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{200}{20} = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{116}{20}} = \sqrt{\frac{58}{10}}$$

$$= 2{\cdot}408$$

பயிற்சி 4-3·3

பின் வரும் நிகழ்வுப் பட்டியல்களின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

1.

x	4	12	20	28	36	
f	2	3	5	4	1	$\Sigma f = 15$

2.

x	25	35	45	55	65	75	85	
f	3	8	[illegible]	18	3	2	1	$\Sigma f = 40$

3.

x	125	175	225	275	325	375	
f	7	18	25	30	12	8	$\Sigma f = 100$

4.

x	61	64	67	70	73	
f	5	18	42	27	8	$\Sigma f = 100$

விடைகள்

(1) 8·93 (2) 13·6 (3) 66·10 (4) 2·92

4-4-1. நிகழ்தகவு : திருப்புதல் I

நிகழ்தகவைப்பற்றி 9ஆம் வகுப்பில் கற்ற அடிப்படைக் கருத்துகளை மீண்டும் நினைவுபடுத்திக்கொள்வோம்.

1. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஏற்படும் விளைவு களின் அனைத்துக் கணம், கூறுவெளி (S) எனப்படும்.

2. கூறுவெளியின் உட்கணம், நிகழ்ச்சி (E) எனப்படும்.

3. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$.

4. $0 \leq P(E) \leq 1$.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

1. ஒரு நாணயம் சுண்டுதலில் தலை விழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

கூறுவெளி $S = \{H, T\}$; $n(S) = 2$

நிகழ்ச்சி $E = \{H\}$; $n(E) = 1$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

பகடை உருட்டுதலில் (i) பகா எண், (ii) 4 -க்குமேல், (iii) 3 இன் மடங்கு, (iv) 0 விழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

கூறுவெளி, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(S) = 6$

(i) பகா எண் விழும் நிகழ்ச்சி

$$E_1 = \{2, 3, 5\}; \quad n(E_1) = 3$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) 4-க்குமேல் விழும் நிகழ்ச்சி

$$E_2 = \{5, 6\}; \quad n(E_2) = 2;$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(iii) 3 இன் மடங்கு விழும் நிகழ்ச்சி

$$E_3 = \{3, 6\}; \quad n(E_3) = 2$$

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(iv) 0 விழும் நிகழ்ச்சி $E_4 = \{\ \}$; $n(E_4) = 0$

$$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

7 நீலப் பந்துகளும், 5 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால் அது (i) நீலமாக, (ii) சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

(i) பையிலுள்ள மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை

$$n(S) = 7 + 5 = 12$$

நீலப் பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி E_1 என்க.

$$n(E_1) = 7$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{7}{12}$$

(ii) சிவப்புப் பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி E_2 என்க.

$$n(E_2) = 5$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு பெட்டியில் 20 கைக்கடிகாரங்கள் உள்ளன. அவற்றில் 6 குறைபாடு உள்ளவை. அப் பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நல்ல கடிகாரத்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

மொத்த கடிகாரங்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 20$

நல்ல கடிகாரங்களின் எண்ணிக்கை $= 20 - 6 = 14$

நல்ல கடிகாரம் எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி E என்க.

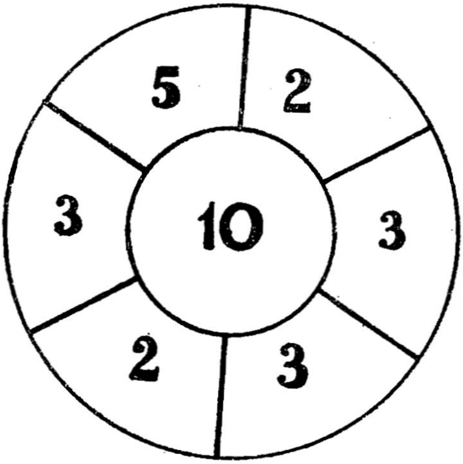
$$n(E) = 14$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

பயிற்சி 4-4·1

1. 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு துண்டுச் சீட்டில் எழுதப்படுகிறது. அவற்றில் ஒன்றைச் சமவாய்ப்பு முறைப்படி பொறுக்கி எடுத்தால் அது (i) ஒற்றை எண்ணாக, (ii) இரட்டை எண்ணாக, (iii) 3ஆல் வகுபடக் கூடியதாக, (iv) 5 இன் மடங்காக இருக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு யாது ?

2. ஒரு விளையாட்டு அட்டையிலுள்ள புள்ளிகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை சமவாய்ப்பு உள்ளவை எனில் ஓர் அம்பை ஒருவர் எய்த (i) 2 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 10 ஆகிய புள்ளிகள் எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு யாது?



படம் 4-1.

3. ஒரு பகடை ஒரு முறை வீசப்பட்டால் (i) ஒற்றை எண், (ii) இரட்டை எண், (iii) 5ஐ விடச் குறைவான எண், (iv) 5ஐ விடப் பெரிய எண் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

4. 8 சிவப்புக் கோலிகள், 7 நீலக் கோலிகள், 5 பச்சைக் கோலிகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு கோலி எடுக்கப்பட்டால் அது (i) சிவப்பாக இருக்க (ii) நீலமாக இருக்க, (iii) பச்சையாக இருக்க (iv) நீல மாக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

விடைகள்

(1) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{10}$ (iv) $\frac{1}{5}$

(2) (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{1}{7}$

(3) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{1}{6}$

(4) (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{20}$ (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\frac{13}{20}$

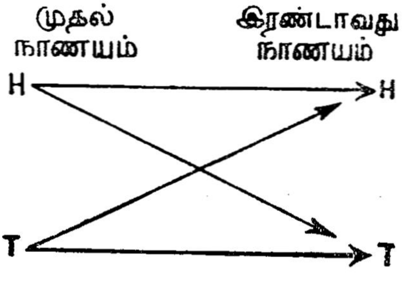
4-4·2. நிகழ்தகவு : திருப்புதல் II

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரே நேரத்தில் இரு நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டி எறியப்பட்டால் (i) ஏற்படும் விளைவுகள் யாவை? (ii) இரண்டு தலைகள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (iii) குறைந்தது ஒரு தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (iv) ஒரு தலை மட்டும் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு :

(i) இரு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் ஒரு முறை சுண்டி எறியப்படும்போது தோன்றும் விளைவுகள்:



படம் 4-2.

கூறு வெளி $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

(ii) $n(S) = 4$

இரண்டு தலைகள் தோன்றும் நிகழ்ச்சி $E_1 = \{HH\}$

$P(E_1) = \frac{1}{4}$

(iii) குறைந்தது ஒரு தலை தோன்றும் நிகழ்ச்சி E_2 என்க.

$E_2 = \{HH, HT, TH\}$

$n(E_2) = 3$

$P(E_2) = \frac{3}{4}$

(iv) ஒரே ஒருதலை மட்டும் தோன்றும் நிகழ்ச்சி E_3 என்க.

$$E_3 = \{ HT, TH \}$$

$$n(E_3) = 2$$

$$P(E_3) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் அவற்றில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதல் (i) 10 ஆக, (ii) 13 ஆக இருக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

(i) ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் ஏற்படும் $6 \times 6 = 36$ வரிசைச் சோடிகள் அடங்கிய கூறு வெளி S என்க.

$$\begin{aligned} S = \{ & (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), \\ & (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ & (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), \\ & (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), \\ & (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), \\ & (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6) \} \end{aligned}$$

$$n(S) = 36$$

கூடுதல் 10 ஆக உள்ள நிகழ்ச்சி E என்க.

$$E = \{ (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$$

$$n(E_1) = 3$$

$$P(E_1) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(ii) கூடுதல் 13 ஆக உள்ள நிகழ்ச்சி E_2 என்க.

$$E_2 = \{ \quad \}$$

$$n(E_2) = 0$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$$

பயிற்சி 4-4·2

1. ஒரே நேரத்தில் இரு நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டி எறியப்பட்டால் (i) இரண்டு பூக்கள் தோன்ற, (ii) ஒரு பூ தோன்ற, (iii) ஒரே ஒரு பூ மட்டும் தோன்ற, (iv) பூவே தோன்றாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

2. ஒரே நேரத்தில் மூன்று நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டி எறியப்பட்டால் (i) ஏற்படும் விளைவுகளின் கூறு வெளி யாது? (ii) மூன்று தலைகள் தோன்ற, (iii) மூன்று பூக்கள் தோன்ற, (iv) ஒரு தலைகூடத் தோன்றாமல் இருக்க, (v) ஒரு பூ கூடத் தோன்றாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

3. ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் கூடுதல் (i) 8 ஆக, (ii) 8ஐ விடக் குறைவாக, (iii) 8ஐ விட மிகுதியாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் (i) முதல் பகடையில் 6, இரண்டாவது பகடையில் இரட்டை எண், (ii) ஒவ்வொரு பகடையிலும் 4ஐ விடப் பெரிய எண் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடைகள்

(1) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{4}$

(2) (i) $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{1}{8}$ (v) $\frac{1}{8}$

(3) (i) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{7}{12}$ (iii) $\frac{5}{18}$

(4) (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{9}$

4-4·3. நிகழ்தகவு : கூட்டல் விதி : ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

நாணயம் சுண்டுதல் சோதனையில், தலை விழுந்தால் பூ இல்லையென உறுதியாகக் கூறலாம். பூ விழுந்தால் தலை இல்லை எனலாம். பகடை உருட்டுதலில், ஒற்றை எண் தோன்றினால், இரட்டை எண் தோன்றவில்லை என்று உறுதியாகக் கூற இயலும். ஏனென்றால், மேற்கண்ட நிகழ்ச்சியில் ஒன்று நிகழ்ந்தால் மற்றது நிகழும் வாய்ப்பில்லை. இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

இதற்கு மாறாக பகடை உருட்டுதலில், இரட்டை எண் விழுந்தது என்றால், பகா எண் விழவில்லை எனக் கூற இயலாது. ஏனென்றால், 2 இரட்டை எண்ணும் ஆகும், பகா எண்ணும் ஆகும். இஃது இரு நிகழ்ச்சிகளிலும் பொதுவான விளைவு ஆகும். எனவே, இந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

நாம் கணமொழிப் பாடத்தில் கணம் Aஇன் நிரப்புக் கணம் A' என்றால்

$$A \cup A' = E; \; A \cap A' = \phi$$

எனக் கண்டோமல்லவா? நிகழ்தகவில் அனைத்துக் கணம் கூறுவெளி S ஆகும். A ஒரு நிகழ்ச்சிக் கணம் எனில், அதை விலக்கிய நிகழ்ச்சிக் கணம் A' ஆகும்.

எனவே,

$$A \cup A' = S; \; A \cap A' = \phi$$

மேலும்,

$$n(A \cup A') = n(A) + n(A') = n(S)$$

$$P(A \cup A') = \frac{n(A \cup A')}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

மேலும்,

$$P(A \cup A') = \frac{n(A) + n(A')}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(A')}{n(S)}$$
$$= P(A) + P(A')$$

$$P(A \cap A') = \frac{n(A \cap A')}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

என அறிக.

A, A' ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளானால் $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$ $P(A \cap A') = 0.$

இவற்றினின்று $P(A') = 1 - P(A)$

A'ஐ $\sim A$ கணங் குறித்தால் $P(\sim A) = 1 - P(A)$ என அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

பகடை உருட்டுதலில் (i) 3 விழும் நிகழ்தகவு (ii) மூன்று அல்லாத எண் விழும் நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :

(i) 3 விழும் நிகழ்ச்சி E_1 என்க.

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

(ii) 3 அல்லாத எண் விழும் நிகழ்ச்சி E^2 என்க.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(\{\ \}) = 0$$

$$P(E_2) = 1 - P(E_1)$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரே நேரத்தில் இரண்டு பகடைகள் ஒருமுறை வீசப்பட்டால் "கூடுதல் 7 அல்லது கூடுதல் 9" கிடைக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

கூடுதல் 7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி E_1 என்க.

$$E_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S} = \frac{6}{36}$$

கூடுதல் 9 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி E_2 என்க.

$$E_2 = \{(3, 6)(4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{36}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(\{\ \}) = 0.$$
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

பயிற்சி 4-4·3

1. ஒரு தொழிற்சாலையில் 5 பொறியியல் வல்லுநர்களும், 10 மேற்பார்வையாளர்களும், 85 வேலையாட்களும் உள்ளனர். அத் தொழிற்சாலையின் பொழுது போக்குச் சங்கத்திற்கு ஒரு பொறியியல் வல்லுநரோ அல்லது மேற்பார்வையாளரோ தலைவராகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு யாது?

2. ஒரு பெட்டியிலுள்ள 8 சிவப்பு, 6 வெள்ளை, 4 நீலநிறப் பந்துகளிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறைப்படி ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. பந்து (a) சிவப்பு அல்லது வெள்ளையாக, (b) சிவப்பு அல்லது நீலமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

3. ஒரு மோட்டார் பந்தயத்தில் ஒரு மோட்டார் முதலாவதாக வர நிகழ்தகவு $\frac{1}{10}$, இரண்டாவதாக வர நிகழ்தகவு $\frac{1}{8}$. அது முதலாவதாகவோ அல்லது இரண்டாவதாகவோ வராமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒரே நேரத்தில் இரண்டு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் ஒவ்வொரு பகடையிலும் ஒற்றை எண் அல்லது கூடுதல் 9 கிடைக்க நிகழ்தகவு யாது?

விடைகள்

(1) $\frac{3}{20}$ (2) (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{31}{40}$ (4) $\frac{13}{36}$

4-4·4 நிகழ்தகவு : கூட்டல் விதி : ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகள்

A, B என்பவை இரு கணங்களானால்,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

என நாம் அறிவோம். எனவே, A, B என்பவை இரு நிகழ்ச்சிகளானால் இவ்விரு நிகழ்ச்சியில் ஏதேனும் ஒன்றோ அல்லது இரண்டுமோ நிகழும் நிகழ்தகவு காண முற்படுவோம்.

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

எனவே,

A, B ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகளானால்
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு பகடை உருட்டுதலில், ஒற்றை எண் அல்லது மூன்றின் மடங்குகள் தோன்றும் நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு:

முதல் நிகழ்ச்சி ஒற்றை எண் விழுதல்

$$A = \{1, 3, 5\}; \; P(A) = \frac{3}{6}$$

இரண்டாம் நிகழ்ச்சி மூன்றின் மடங்கு விழுதல்

$$B = \{3, 6\}; \; P(B) = \frac{2}{6}$$

இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழும் கணம்

$$A \cap B = \{3\}; \; P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

இரண்டு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழும் எனில்

$$A \cup B = \{ 1, 3, 5, 6 \};$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

சரிபார்க்க :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள்

$P(A) = 0{\cdot}25$; $P(A \cup B) = 0{\cdot}72$; $P(A \cap B) = 0{\cdot}14$ என்றால் $P(\sim B)$ யாது ?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) \\ &= 0{\cdot}72 - 0{\cdot}25 + 0{\cdot}14 \\ &= 0{\cdot}61 \end{aligned}$$

$$P(B) + P(\sim B) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\sim B) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - 0{\cdot}61 \\ &= 0{\cdot}39. \end{aligned}$$

பயிற்சி 4–4·4

1. ஒரே நேரத்தில் இரண்டு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் முதல் பகடையில் இரட்டை எண் அல்லது கூடுதல் 10 கிடைக்க நிகழ்தகவு யாது ?

2. A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = 0{\cdot}5$, $P(A \cap B) = 0{\cdot}1$ என்றால் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) $P(\sim A)$ (ii) $P(\sim B)$ (iii) $P(A \cup B)$

3. ஒரே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் ஒரு பகடையும் ஒரு முறை வீசப்படுகின்றன. விளைவு ஒரு தலை அல்லது ஆறு விழுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

4. 1 முதல் 12 வரை உள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு துண்டுச் சீட்டில் எழுதப்பட்டுள்ளன. அவற்றில் ஒன்றைச் சமவாய்ப்பு முறைப்படி பொறுக்கி எடுத்தால் அஃது இரட்டை எண்ணாகவும் அல்லது மூன்றால் வகுபடும் எண்ணாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

விடைகள்

(1) $\frac{19}{36}$ (2) (i) 0·6 (ii) 0·5 (iii) 0·8 (3) $\frac{7}{12}$

(4) $\frac{1}{3}$

4-4·5. நிகழ்தகவு : பெருக்கல் விதி : சாரா நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டி எறியும்போது தலை விழுகிறது எனக் கொள்வோம். இந்நிகழ்ச்சி அதே நாணயம் இரண்டாவது முறையாகச் சுண்டி எறியும்போது தலை விழவோ பூ விழவோ உதவுவதுமில்லை; தடை செய்வதுமில்லை. இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் தனித்தனியானவை, தொடர்பற்றவை.

ஒரே நேரத்தில் இரண்டு நாணயங்களை ஒருமுறை சுண்டி எறியும்போது முதல் நாணயத்தில் தலை அல்லது பூ விழுவதும் இரண்டாவது நாணயத்தில் தலை அல்லது பூ விழுவதும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை. எனவே, இவ்வகை நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.

பொதுவாக A, B என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று நிகழ்வதோ நிகழாமல் இருப்பதோ மற்றொன்று நிகழ்வதன் அல்லது நிகழாமல் இருப்பதன் நிகழ்தகவில் மாற்றம் உண்டாக்காமல் இருந்தால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் *சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்* எனப்படும்.

ஒரே நேரத்தில் இரண்டு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதன் நிகழ்தகவு அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம் ஆகும்.

எனவே,

A, B என்பவை இரண்டு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்றால் $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

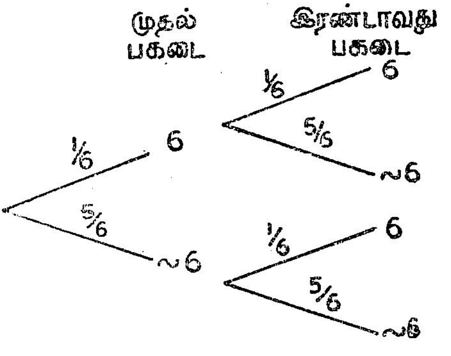
இது நிகழ்தகவின் பெருக்கல் விதி ஆகும். இவ்விதி பயன்படும் வகையைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் (i) இரண்டு 6 கள், (ii) ஒரு 6 மட்டும், (iii) 6 இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்பட்டால் ஏற்படும் 36 விளைவுகளை வரிசைச் சோடிகளாக எழுதி இக் கணக்கைச் செய்யலாம். ஆனால், செடிப்படம் வரைந்து நிகழ்தகவைக் காண்பது எளிது.



படம் 4-3.

விளைவு	நிகழ்தகவு
(6, 6)	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
(6, ~6)	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$
(~6, 6)	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
(~6, ~6)	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P(6, 6) = P$ (முதல் பகடையில் 6) $\times$ P (2வது பகடையில் 6)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$P(6, \sim 6) = P$ (முதல் பகடையில் 6) $\times$ P (2வது பகடையில் ~ 6)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$P(\sim 6, 6) = P$ (முதல் பகடையில் ~ 6) $\times$ P (2வது பகடையில் 6)

$$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$P(\sim 6, \sim 6) = P$ (முதல் பகடையில் ~ 6) $\times$ P (2வது பகடையில் ~ 6)

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

எனவே,

(i) P (இரண்டு 6 கள்) $= P(6, 6) = \frac{1}{36}$

(ii) P (ஒரு 6) $= P(6, \sim 6) + P(\sim 6, 6)$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

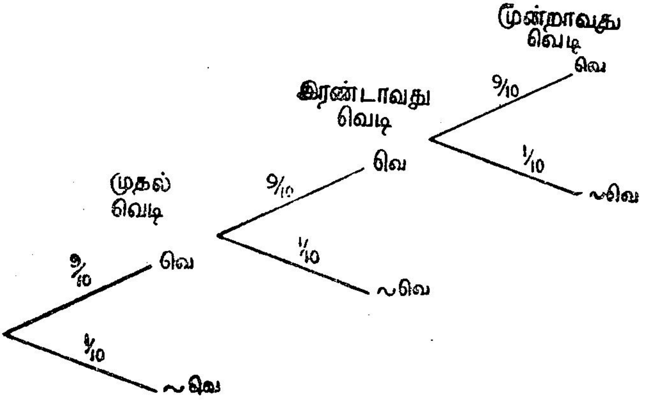
(iii) P (இரண்டு ~ 6 கள்) $= P(\sim 6 \sim 6) = \frac{25}{36}$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் வாண வெடிகள் நன்றாக வெடிக்காமல் ($\sim$ வெ) போவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{10}$. செல்வி 3 வாண வெடிகள் வாங்கினாள். அம் மூன்றும் நன்றாக வெடிக்க நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு :

(இக் கணக்கில் செடிப்படத்தை முழுவதும் வரையாமல் தேவையான பகுதியை மட்டும் வரைந்து தீர்வு காணலாம்).



படம் 4.4

வாண வெடி நன்றாக வெடிக்க நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

P (மூன்றும் வெடிக்க) $=$ P (முதலாவது வெடிக்க)
$\times$ P (2வது வெடிக்க)
$\times$ P (3வது வெடிக்க)

$$= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{729}{1000}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

A, *B* என்ற இரண்டு நண்பர்கள் ஒரு வேலைக்கு மனு செய்கிறார்கள். அவ் வேலைக்கு *A* தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு $\frac{1}{7}$; *B* தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$ இருவரும் அவ் வேலைக்கு (i) தேர்ந்தெடுக்கப்பட (ii) தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது ?

தீர்வு :

(செடிப்படம் வரையாமல், நிகழ்தகவின் பெருக்கல் விதியை நேரிடையாகப் பயன் படுத்தித் தீர்வு காணலாம்).

(i) A, B தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

(ii) இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவையே ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore\quad P(\sim A \cap \sim B) &= P(\sim A)\,P(\sim B)\\ &= [1-P(A)]\,[1-P(B)]\\ &= \left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\\ &= \frac{6}{7} \times \frac{4}{5}\\ &= \frac{24}{35}\end{aligned}$$

பயிற்சி 4-4·5

1. ஒரு சிப்பம் பூ விதைகளில் ஒரு விதை முளைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$ செடியாக வளர்ந்து பூக்கள் தர நிகழ்தகவு $\frac{5}{6}$. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட விதை முளைத்து செடியாக வளர்ந்து பூக்கள் தர நிகழ்தகவு யாது ?

2. ஒரு புத்தகத்திலுள்ள கணக்குகளை A தீர்க்க நிகழ்தகவு 0·75 ; B தீர்க்க நிகழ்தகவு 0·60 ஆகும். அப்பக்கத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு கணக்கை (i) இருவரும் தீர்க்க, (ii) A அல்லது B தீர்க்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

3. A, B என்பன இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள். $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = 0{\cdot}5$ என்றால்

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap \sim B)$

   (iii) $P(\sim A \cap B)$ (iv) $P(\sim A \cap \sim B)$

   (v) $P(A \cup B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒருவர் 25 ஆண்டுகளில் உயிரோடு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$; அவருடைய மனைவி 25 ஆண்டுகளில் உயிரோடு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகும். 25 ஆண்டுகளில் (i) இருவரும் உயிரோடு இருக்க (ii) கணவர் மட்டும் உயிரோடு இருக்க (iii) மனைவி மட்டும் உயிரோடு இருக்க (iv) எவரேனும்ஒருவர் மட்டும் உயிரோடு இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

விடைகள்

(1) $\frac{2}{3}$ (2) (i) 0·45 (ii) 0·9

(3) (i) 0·2 (ii) 0·2 (iii) 0·3 (iv) 0·3 (v) 0·7

(4) (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{13}{15}$

4-4-6 நிகழ்தகவு : பெருக்கல் விதி : சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள்

2 சிவப்பு 4 நீல கோலிகளுள்ள பையிலிருந்து 2 கோலிகளை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை ஆராய்வோம். முதல் கோலி எடுக்கும் பொழுது மொத்தமுள்ள கோலிகள் 6.

எனவே,

$$P(சி) = \frac{2}{6}; \quad P(நீ) = \frac{4}{6}$$

இரண்டாம் கோலி எடுக்கும்பொழுது பையிலுள்ள கோலிகள் 5 ஆகும். முதலில் எடுத்தது சிவப்பானால் 5 கோலிகளில் 1 சிவப்பு 4 நீலம்.

எனவே,

$$P\ (சி) = \frac{1}{5}; \quad P\ (நீ) = \frac{4}{5}$$

முதல் கோலி நீலமானால் 5 கோலிகளில் 2 சிவப்பு, 3 நீலம்.

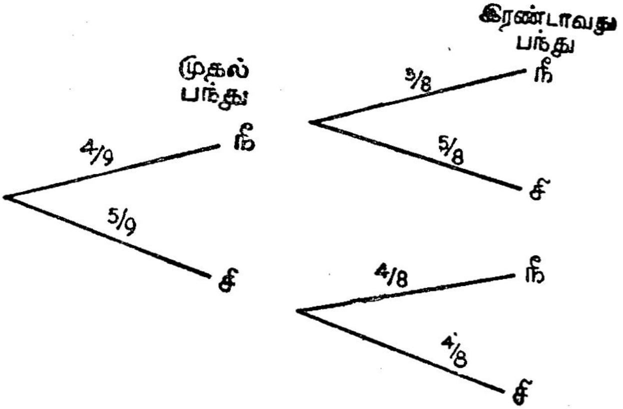
$$P(சி) = \frac{2}{5}; \quad P(நீ) = \frac{3}{5}$$

எனவே, இரண்டாம் கோலி எடுக்கும்பொழுது நிகழ்தகவு முதலில் எடுத்த கோலியைச் சார்ந்துள்ளது. இந்நிகழ்ச்சிகள் சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு பையில் 4 நீல 5 சிவப்பு பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து எடுத்து அதைப் பையில் மீண்டும் போடாமல் மற்றொரு பந்தாக இரண்டு பந்துகள் பொறுக்கி எடுக்கப்படுகின்றன. அவை (1) இரண்டும் நீலமாக (2) ஒன்று நீலம், ஒன்று சிவப்பாக (3) இரண்டும் சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு :



படம் 4·5

$$P(\text{நீ}, \text{நீ}) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72}$$

$$P(\text{நீ}, \text{சி}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72}$$

$$P(\text{சி}, \text{நீ}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}$$

$$P(\text{சி}, \text{சி}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}$$

(1) இரண்டும் நீலமாக இருக்க : $P(\text{நீ}, \text{நீ}) = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$

(2) ஒன்று நீலம், மற்றொன்று சிவப்பாக

இருக்க : $P(\text{நீ}, \text{சி}) + P(\text{சி}, \text{நீ})$

$$= \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

(3) இரண்டும் சிவப்பாக இருக்க : $P(\text{சி}, \text{சி}) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

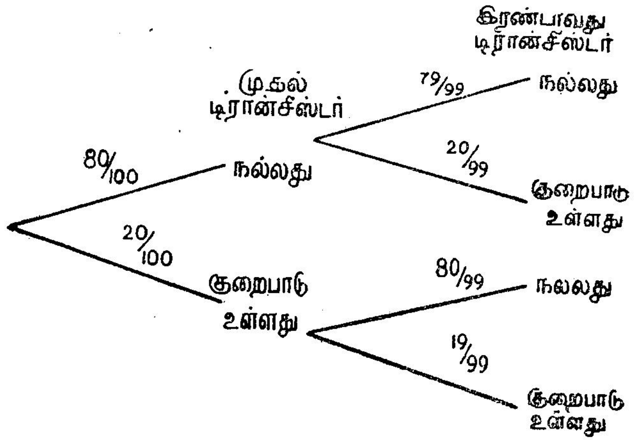
ஒரு பெட்டியில் 100 டிரான்சிஸ்டர்கள் உள்ளன. அவற்றில் 20 குறைபாடு உள்ளவை. பெட்டியிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறைப் படி ஒன்றன்பின் ஒன்றாக 2 டிரான்சிஸ்டர்கள் தொடர்ந்து எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) அவ்விரண்டும் நல்லவையாக,

(ii) அவ்விரண்டும் குறைபாடு உள்ளவையாக,

(iii) அவ்விரண்டில் ஒன்று குறைபாடு உள்ளதாகவும் மற்றொன்று நல்லதாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு :



படம். 4·6

விளைவு	நிகழ்தகவு
இரு நல்ல டிரான்சிஸ்டர்கள்	$\frac{4}{5} \times \frac{79}{99} = \frac{316}{495}$
ஒரு நல்ல, ஒரு குறைபாடுள்ள டிரான்சிஸ்டர்கள்	$\frac{4}{5} \times \frac{20}{99} = \frac{80}{495}$
ஒரு குறைபாடுள்ள, ஒரு நல்ல டிரான்சிஸ்டர்கள்	$\frac{1}{5} \times \frac{80}{90} = \frac{80}{495}$
இரு குறைபாடுள்ள டிரான்சிஸ்டர்கள்	$\frac{1}{5} \times \frac{19}{99} = \frac{19}{495}$

(i) இரு டிரான்சிஸ்டர்களும் நல்லவையாக இருக்க

நிகழ் தகவு $= \frac{316}{495}$

(ii) இரு டிரான்சிஸ்டர்களும் குறைபாடுள்ளவையாக

இருக்க நிகழ் தகவு $= \frac{19}{495}$

(iii) ஒன்று குறைபாடு உள்ளதாகவும், மற்றொன்று நல்ல தாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு

$$= \frac{80}{495} + \frac{80}{495} = \frac{160}{495} = \frac{32}{99}$$

பயிற்சி 4-4-6

1. ஒரு கூடையிலுள்ள 12 முட்டைகளுள் 10 முட்டைகள் மட்டும் நல்ல முட்டைகள். சம வாய்ப்பு முறையில் அவற்றி லிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டு முட்டைகள் எடுக்கப் பட்டால் அவை (i) இரண்டும் நல்ல முட்டைகளாக இருக்க நிகழ் தகவு யாது? (ii) இரண்டும் கெட்ட முட்டைகளாக இருக்க நிகழ் தகவு யாது?

2. ஒரு கூடையிலுள்ள 100 மாம்பழங்களுள் ஒன்றுமட்டும் கெட்டுப்போனது. சம வாய்ப்பு முறையில் கூடையிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரண்டு மாம்பழங்களை எடுத்தால் ஏதேனும் ஒன்று நல்ல மாம்பழமாக இருக்க நிகழ் தகவு யாது?

3. ஒரு பெட்டியில் 7 சிவப்பு நிறப் பேனாக்களும் 8 நீலநிறப் பேனாக்களும் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் A என்பவர் ஒரு பேனாவைத் தேர்ந்தெடுத்தபின் B என்பவர் மற்றொரு பேனாவைத் தேர்ந்தெடுக்கிறார். இருவரும் தேர்ந்தெடுத்த பேனாக்கள் (i) ஒரே நிறமாக இருக்க (ii) வெவ்வேறு நிறமாக இருக்க நிகழ் தகவு யாது?

4. ஒரு பையில் 8 பச்சை கோலிகளும் 4 மஞ்சள் கோலிகளும் உள்ளன. அதிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இரு கோலிகளைத் தொடர்ந்து எடுத்தால் முதல் கோலி மஞ்சளாகவும் இரண்டாவது கோலி பச்சையாகவும் இருக்க நிகழ் தகவு யாது?

விடைகள்

1. (i) $\frac{15}{22}$ (ii) $\frac{1}{66}$

2. $\frac{1}{50}$

3. (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{7}{15}$

4. $\frac{8}{33}$

பாடச் சுருக்கம்

1. தனிப்பட்ட பல விவரங்களைத் தொகுத்தளிப்பது நிகழ்வுப் பட்டியல் ஆகும். நிகழ்வுப் பட்டியலில் விவரங்கள் பிரிவு களாக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள எண்ணிக்கை (நிகழ்வெண்) கணக்கிட்டுக் காட்டப்படும்.

2. (அ) n அளவுகளின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

உத்தேச சராசரி A எனில், கூட்டுச்சராசரி

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n} \; ; \quad [d = (x - A)]$$

(ஆ) நிகழ்வுப்பட்டியலில் கூட்டுசராசரி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} \; ; \quad [\Sigma f = n]$$

அல்லது $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d}{n}$; [$A$ — உத்தேச சராசரி $d = (x - A)$]

3. $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற அளவுகளின் இடைநிலை அளவு

(அ) $n = 2k - 1$ என்ற முறையில் ஒற்றையானால் $M = x_k$

(ஆ) $n = 2k$ என்ற முறையில் இரட்டையானால்

$$M = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

4. விவரங்களை நிகழ்வுப் பட்டியலாக அமைக்க, மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண் கொண்ட பிரிவு முகடு ஆகும்.

5. **விவரங்களில் மிக உயர்ந்த அளவிற்கும், மிக குறைந்த அளவிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் வீச்சு எனப்படும்.**

6. (அ) **தனித்த மாறிகளின் திட்ட விலக்கம்**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}\ ; \quad [d = x - \bar{x}]$$

(ஆ) நிகழ்வுப் பட்டியலில் திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f}}\ ; \quad [d = x - \bar{x}]$$

7. (அ) ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஏற்படும் விளைவுகளின் அனைத்துக்கணம் கூறுவெளி S எனப்படும். கூறுவெளியில் உட்கணம் நிகழ்ச்சி E எனப்படும்.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

(ஆ) உறுதியாக நிகழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1.
உறுதியாக நிகழாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.

(இ) ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்தால், மற்றொன்று நிகழாது என்று அமையும் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

A, A' என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளெனில், $P(A) + P(A') = 1$

அல்லது $P(A') = 1 - P(A)$
மேலும் $P(A \cap A') = 0$

(ஈ) A, B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் இரு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(உ) ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வது மற்றொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைப் பாதிக்கவில்லையென்றால் அவை *சாரா* நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(ஊ) செடிப்படங்கள் மீள் நிகழும் சோதனைகளில் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட உதவும்.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. ஒரு கூடையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 20 மாம்பழங்களின் எடைகள் (கிராமில்) பின்வருமாறு.

106	123	90	113	99
107	92	107	98	128
76	84	70	86	82
187	119	80	81	90

இவ்விவரங்களுக்கு உண்மையான பிரிவெல்லைகளைத் தேர்ந்தெடுத்து நிகழ்வுப் பட்டியல் அமைக்க.

2. பின்வரும் நிகழ்வுப் பட்டியலிலுள்ள விவரங்களுக்குச் சராசரி காண்க.

x	f
4·5 — 5·5	6
5·5 — 6·5	8
6·5 — 7·5	12
7·5 — 8·5	2
8·5 — 9·5	2
	$\Sigma f = 30$

3. பின்வரும் நிகழ்வுப் பட்டியலின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

x	2	6	10	14	
f	4	8	2	1	$\Sigma f = 15$

4. ஒரு பையில் 6 நீலம், 4 பச்சை, 5 சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டால் அது (i) பச்சையாகவோ அல்லது சிவப்பாகவோ இருக்க நிகழ்தகவு யாது? (ii) பச்சையாகவோ அல்லது சிவப்பாகவோ இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

5. ஒரு பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. ஒவ்வொரு முறையும் தோன்றும் முகத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை (i) > 5 ஆக (ii) < 5 ஆக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

விடைகள்

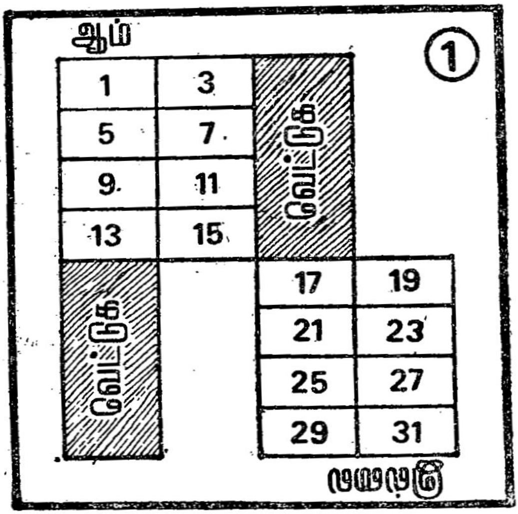
(2) 6·53 (3) 3·24

(4) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$ (5) (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{25}{36}$

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம் : மேடை - 4

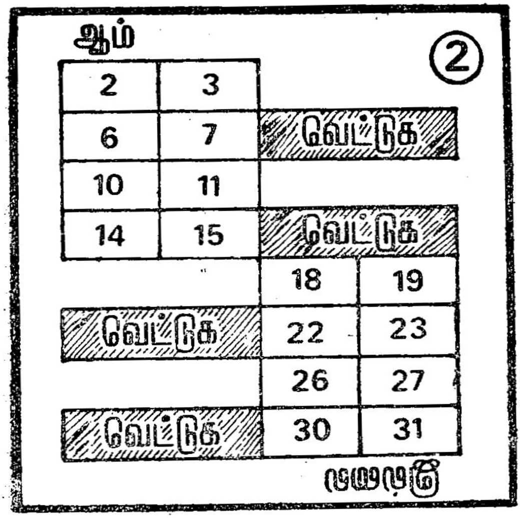
கீழ்க் காணும் வகையில் எண்களை எழுதிய ஐந்து அட்டைகளை எடுத்துக் கொள்க. 5 ஆவது அட்டையில் இருபுறமும் எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும். இவற்றின் உதவியால் ஒருவர் நினைத்த எண்களைக் காணமுடியும். ஒவ்வொரு



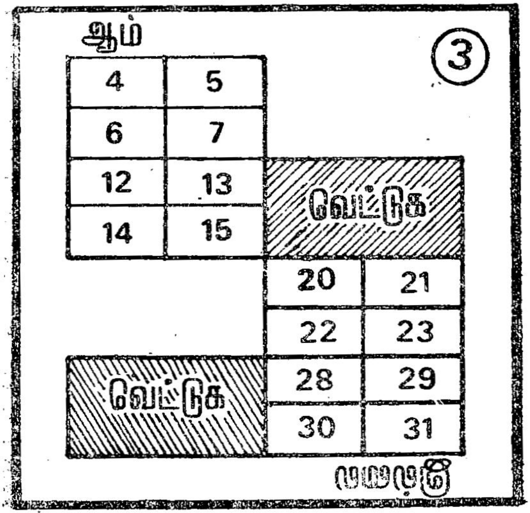
படம் 4-7.

அட்டையையும் காட்டி அதில் அவர் நினைத்த எண் உள்ளதா என வினவுக. 'ஆம்' எனில், அவ்வட்டையை 'ஆம்' என்ற சொல் மேற்புறம் உள்ளவாறு மேசையின்மேல் வைக்கவும். 'இல்லை' யெனின் 'இல்லை' என்ற சொல் மேற்புறம் உள்ளவாறு மேசையின் மேல் வைக்கவும். ஐந்து அட்டைகளையும் வைத்தபின் அவற்றை

ஒன்றன்மீது ஒன்றாக அடுக்கி நண்பரிடம் காட்டவும். அவர் நினைத்த எண்ணை அவர் காண்பார்.

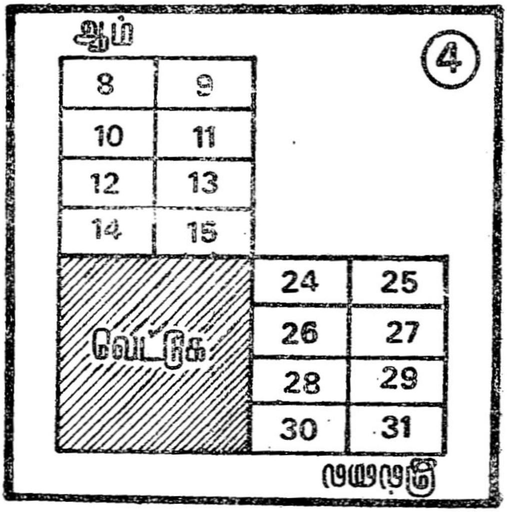


படம் 4-8.

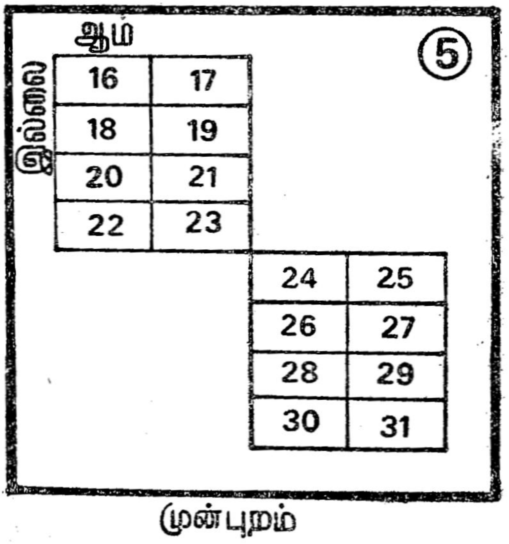


படம் 4-9.

எண்கள் அட்டையில் அமைந்த முறையினைக் காண்போம். முதல் அட்டை எல்லாம் ஒற்றை எண்களாக உள்ளன அல்லவா?

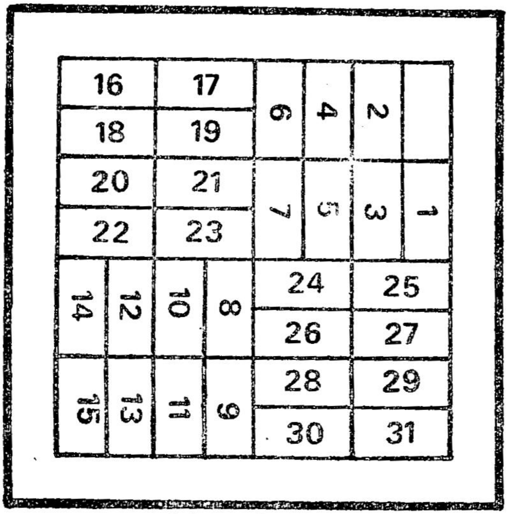


படம் 4-10.



படம் 4-11.

எண்களை இரண்டடிமானத்தில் அடுக்கு வரிசையில் எழுதி னால் 0 அடுக்கு குணகம் 1 ஆனால் அவ்வெண் முதலாம்



பின்புறம்

படம் 4-12.

அட்டையிலும், 1ஆம் அடுக்கு குணகம் 1 ஆனால் இரண்டாம் அட்டையிலும் 2ஆம் அடுக்கு குணகம் 1 ஆனால் மூன்றாம் அட்டையிலும் இருக்கும்.

எண்	0 அடுக்கு	1 அடுக்கு	2 அடுக்கு	3 அடுக்கு	4 அடுக்கு	எண் உள்ள அட்டைகள்
1	$1\cdot2^0$					1
2	$0\cdot2^0$	$1\cdot2^1$				2
3	$1\cdot2^0$	$1\cdot2^1$				1, 2
4	$0\cdot2^0$	$0\cdot2^1$	$1\cdot2^2$			3
5	$1\cdot2^0$	$0\cdot2^1$	$1\cdot2^2$			1, 3
6	$0\cdot2^0$	$1\cdot2^1$	$1\cdot2^2$			2, 3
7	$1\cdot2^0$	$1\cdot2^1$	$1\cdot2^2$			1, 2, 3

இதுபோலவே பிற எண்களும் கலந்துள்ளன. 'ஆம்' 'இல்லை, என்ற இரு பதில்களும் 1, 0 என்ற இரண்டடிமானத்தில் உள்ள இரு எண்களின் மதிப்புகளைக் கொண்டவையாகும். இதுபோல 63 வரை, 127 வரை உள்ள எண்களைக் கூறும் அட்டைகளைத் தயார் செய்க.

5. அளவியல்

5-1·1. பட்டகம் : புறப்பரப்பளவு

நினைவுகூர்க :

நேர்ப்பட்டகத்தின் புறப்பரப்பளவு

= பட்டகத்தின் அடிச்சுற்றளவு × பட்டகத்தின் உயரம்

நேர்ப்பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு

= பட்டகத்தின் புறப்பரப்பளவு + பட்டகத்தின் அடிப் பரப்பளவின் இரு மடங்கு

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு நேர்ப்பட்டகத்தின் அடிப்பாகம் 5 செமீ பக்கமுடைய சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். அதன் உயரம் 12 செமீ எனில், அதன் புறப்பரப்பளவு, மொத்த பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\sqrt{3} \simeq 1·732$)

தீர்வு :

சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவு = 15 செமீ

பட்டகத்தின் புறப்பரப்பளவு = அடிச்சுற்றளவு × உயரம்

$= 15 \times 12$ செமீ^{2}

$= 180$ செமீ^{2}

சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= a^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{5 \times 5 \times 1·732}{4}$ செமீ^{2}

$= 10·825$ செமீ^{2}

பட்டகத்தின் மொத்தப்பரப்பளவு

= புறப்பரப்பளவு + அடிப்பரப்பளவின் இருமடங்கு

$= 180 + (2 \times 10·825)$ செமீ^{2}

$= 180 + 21·65$ செமீ^{2}

$= 201·65$ செமீ^{2}

பயிற்சி 5-1·1

I. கீழ்க் கண்ட அளவுகளையுடைய பட்டகங்களின் புறப் பரப்பளவு, மொத்தப்பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$)

	அடிப்பக்க வடிவம்	உயரம்
1.	6 செமீ பக்கமுள்ள சதுரம்	10 செமீ
2.	8 செமீ பக்கமுள்ள சதுரம்	20 செமீ
3.	(15 செமீ × 10 செமீ) அளவுள்ள செவ்வகம்	12 செமீ
4.	6 செமீ பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணம்	15 செமீ
5.	10 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோணம்	12 செமீ
6.	8 செமீ, 15 செமீ பக்கங்களுள்ள செங்கோண முக்கோணம்	20 செமீ

விடைகள்

(1) 240 செமீ^{2}, 312 செமீ^{2} (2) 640 செமீ^{2}, 768 செமீ^{2}

(3) 1800 செமீ^{2}, 2100 செமீ^{2}

(4) 270 செமீ^{2}, 301·176 செமீ^{2}

(5) 720 செமீ^{2}, 1239·6 செமீ^{2}

(6) 800 செமீ^{2}, 920 செமீ^{2}

5-1·2 பட்டகம் : கன அளவு

நினைவு கூர்க :

பட்டகத்தின் கன அளவு
= பட்டகத்தின் அடிப்பரப்பளவு × பட்டகத்தின் உயரம்

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு பட்டகத்தின் அடிப்பாகம் 4 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோண வடிவமுடையது. பட்டகத்தின் உயரம் 10 செமீ எனில், அப்பட்டகத்தின் கன அளவைக் காண்க. ($\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$)

தீர்வு :

அடிப்பக்கத்தின் பரப்பு = ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு

$$= 6a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{6 \times 4 \times 4 \times 1.732}{4}$$

$= 41.568$ செமீ^{2}

கன அளவு = அடிப் பரப்பளவு × உயரம்

$= 41.568 \times 10$ செமீ^{3}

$= 415.68$ செமீ^{3}

பயிற்சி 5-1.2

கீழ்க்காணும் அளவுகளையுடைய பட்டங்களின் கன அளவுகளைக் காண்க. ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)

	அடிப்பக்கம்	உயரம்
1.	7 செமீ பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணம்	14 செமீ
2.	6 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோணம்	20 செமீ
3.	10 செமீ × 12 செமீ அளவுள்ள செவ்வகம்	15 செமீ
4.	8 செமீ பக்கமுள்ள சதுரம்	14·5 செமீ
5.	7 செமீ, 10 செமீ பக்கங்களைக் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம்	9 செமீ

விடைகள்

(1) 297·038 செமீ^{3} (2) 1870·56 கசமீ^{3}

(3) 1800 செமீ^{3} (4) 928 செமீ^{3}

(5) 315 செமீ^{3}

5-1·3. உருளை : பரப்பளவு

நினைவு கூர்க :

உருளையின் வளை பரப்பளவு $= 2\pi rh$

உருளையின் மொத்தப் பரப்பளவு $= 2\pi r(h + r)$

(r = உருளையின் ஆரம், h = உருளையின் உயரம்)

எடுத்துக்காட்டு :

ஓர் உருளையின் ஆரம் 12 செமீ, உயரம் 30 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு, மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

உருளையின் வளை பரப்பளவு $= 2\pi rh$

$= 2 \times \pi \times 12 \times 30$ செமீ^{2}

$= 720\pi$ செமீ^{2}

உருளையின் மொத்தப் பரப்பளவு $= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \pi \times 12 \times 42$ செமீ^{2}

$= 1008\pi$ செமீ^{2}

பயிற்சி 5-1·3

குறிப்பு : இப்பயிற்சி முழுதுமே $\pi = \frac{22}{7}$ என்ற மதிப்பைப் பயன்படுத்துக.

1. கீழ்க்காணும் அளவுகளையுடைய உருளையின் வளை பரப்பளவு மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க

	ஆரம் (r)	உயரம் (h)
(a)	21 செமீ	20 செமீ
(b)	28 செமீ	15 செமீ
(c)	17·5 செமீ	12 செமீ

2. ஓர் உருளையின் அடிப் பரப்பளவு 154 செமீ^{2}, அதன் உயரம் 16 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு என்ன ?

3. ஓர் உருளையின் அடிச் சுற்றளவு 100 செமீ. அதன் உயரம் 16 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு என்ன ?

4. ஓர் உருளையின் விட்டம் 21 செமீ. அதன் உயரம் 22 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு என்ன ?

5. இரண்டு உருளைகளின் ஆரங்கள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் உயரங்கள் 5:6 என்ற விகிதத்திலும் உள்ளன. அவற்றின் வளை பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

6. ஓர் உருளையின் வளை பரப்பளவு 1760 செமீ². அதன் ஆரம் 14 செமீ எனில் அதன் உயரம் என்ன ?

7. ஓர் உருளையின் மொத்தப் பரப்பளவு 748 செமீ². அதன் ஆரம் 7 செமீ எனில் அதன் உயரம் என்ன ?

விடைகள்

(1) (a) 2640 செமீ², 5412 செமீ²,
(b) 2640 செமீ², 7568 செமீ²
(c) 1320 செமீ², 3245 செமீ²

(2) 704 செமீ² (3) 1000 செமீ² (4) 1452 செமீ²

(5) 5 : 8 (6) 20 செமீ (7) 10 செமீ

5-1·4 உருளை : கன அளவு

நினைவு கூர்க :

உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

(r = உருளையின் ஆரம், h = உருளையின் உயரம்)

எடுத்துக்காட்டு :

ஓர் உருளையின் விட்டம் 21 செமீ. அதன் உயரம் 12 செமீ எனில் அதன் கன அளவு என்ன ?

தீர்வு :

உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 12 \text{ செமீ}^3$$

$$= 4158 \text{ செமீ}^3$$

பயிற்சி 5-1·4

குறிப்பு : இப்பயிற்சி முழுதுமே $\pi \simeq \frac{22}{7}$ என்ற மதிப்பைப் பயன்படுத்துக.

1. கீழ்க்காணும் அளவுகளையுடைய உருளையின் கன அளவைக் காண்க.

	ஆரம் (r)	உயரம் (h)
(a)	7 செமீ	10 செமீ.
(b)	28 செமீ	30 செமீ
(c)	10·5 செமீ	15 செமீ

௨. ஓர் உருளையின் விட்டம் 35 செமீ. அதன் உயரம் 18 செமீ. அதன் கன அளவு என்ன?

3. இரண்டு உருளைகளின் ஆரங்கள் 5 : 6 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் உயரங்கள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலும் உள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

4. இரண்டு உருளைகளின் ஆரங்கள், உயரங்கள் இரண்டுமே 3 : 7 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

5. சம உயரங்கள் உள்ள இரண்டு உருளைகளின் ஆரங்கள் 4 : 5 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவு களின் விகிதம் என்ன ?

6. ஓர் உருளையின் அடிப்பரப்பளவு 80 செமீ^{2}. அதன் உயரம் 10 செமீ எனில் அதன் கன அளவு என்ன ?

7. ஓர் உருளையின் அடிச் சுற்றளவு 264 செமீ. அதன் உயரம் 40 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

8. ஓர் உருளையின் கன அளவு 6600 செமீ^{3}. அதன் உயரம் 21 செமீ எனில் அதன் ஆரம் என்ன ?

9. ஓர் உருளை வடிவ சோதனைக் குழாயின் விட்டம் 1 செமீ. அதில் 20 செமீ உயரத்திற்குப் பாதரசம் உள்ளது. பாத ரசத்தின் அடர்த்தி எண் 13·6 எனில் அக் குழாயிலுள்ள பாதரசத்தின் எடையைக் காண்க.

10. 22 செமீ நீளமும், 12 செமீ அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வக தகட்டின் அகலப் பக்கங்கள் ஒன்று சேருமாறு வளைத்து செய்யப்படும் உருளையின் கொள்ளளவைக் காண்க.

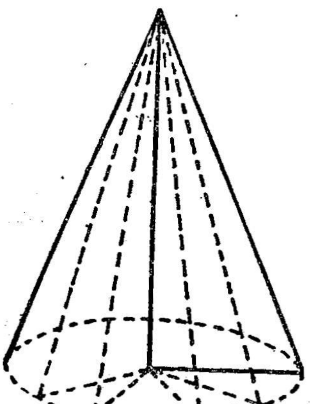
11. 7 செமீ விட்டமுள்ள ஓர் உருளை வடிவமான குழாய் வழி மணிக்கு 2·5 கிமீ வேகத்தில் தண்ணீர் பாய்கிறது. ஒ மணி நேரத்தில் அதன் வழியாக வெளியேறும் தண்ணீரி கன அளவு என்ன?

விடைகள்

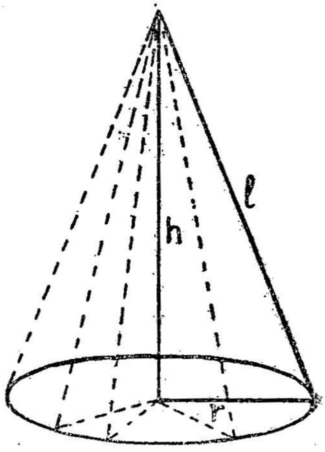
(1) (a). 1540 செமீ^{3} (b) 73920 செமீ^{3} (c) 5197·5 செமீ^{3}
(2) 17325 செமீ^{3} (3) 25 : 48 (4) 27 : 343
(5) 16 : 25 (6) 800 செமீ^{3} (7) 221760 செமீ
(8) 10 செமீ (9) 213·52 கிராம் (10) 462 செமீ^{3}.
(11) 962500 செமீ^{3}.

5-2·1. கூம்பு : அறிமுகம்

அடிப்பாகம் வட்டவடிவமாகவும் வட்டத் தளத்தின் மையத்தின் வழியே செல்லும் குத்துக் கோட்டில் ஒரு புள்ளியை



படம் 5-1.



படம் 5-2.

உச்சியாகவும் புறப்பரப்பு வளைவு பரப்பாகவும் உள்ள கன உருவம் நேர் கூம்பு எனப்படும்.

செங்கோண முக்கோண வடிவத்திலுள்ள ஓர் அட்டையை எடுத்துக்கொள்வோம். செங்கோணத்தை அடக்கிய இரு பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை அச்சாக வைத்து சுழற்றக் கிடைக்கும் உருவம் கூம்பாகும்.

ஒரு கூம்பின் உச்சியினின்று வளை பக்கத்தின் வழியே அடிக்குச் செல்லும் கோடு சாயுயரம் எனப்படும். கூம்பின் உச்சிக்கும் அடியின் மையத்திற்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தொலைவு கூம்பின் உயரம் ஆகும்.

சாயுயரம் l என்றும் குத்துயரம் h என்றும் குறிப்பிடப்படும்.

செங்கோண முக்கோணச் சுழற்சியால் உண்டாக்கப்படும் கூம்பின் அளவுகள் பின்வருமாறு :

முக்கோணத்தின் கர்ணம் = சாயுயரம்

முக்கோணச் சுழற்சி அச்சுப்பக்கம் = செங்குத்துயரம்

மூன்றாவது பக்கம் = அடி ஆரம்

படத்தில் OA = செங்குத்துயரம் (h)

AP = ஆரம் (r)

OP = சாயுயரம் (l)

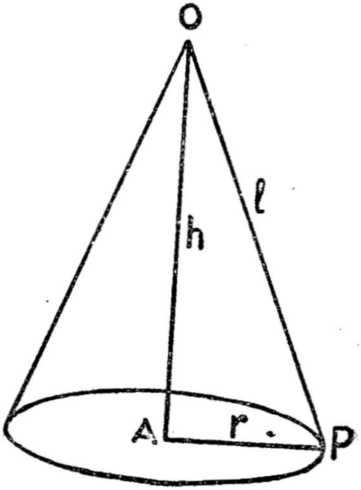
பிதாகரஸ் தேற்றப்படி

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

மேலும் $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$



படம் 5·3.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு கூம்பின் ஆரம் 5 செமீ. அதன் செங்குத்துயரம் 12 செமீ. அதன் சாயுயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{144 + 25}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13$$

சாயுயரம் = 13 செமீ.

பயிற்சி 5-2·1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் விடுபட்ட இடங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

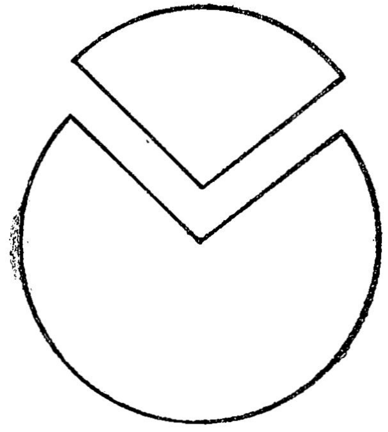
எண்	ஆரம் (r)	செங்குத்துயரம் (h)	சாயுயரம் (l)
1	3 செமீ	4 செமீ	—
2	8 செமீ	—	17 செமீ
3	—	24 செமீ	25 செமீ
4	9 செமீ	40 செமீ	—
5	20 செமீ	—	29 செமீ

விடைகள்

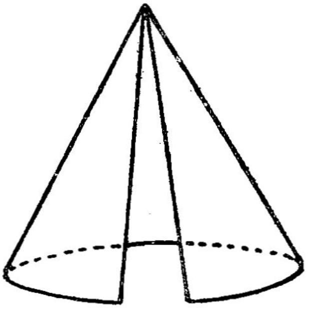
(1) 5 செமீ (2) 15 செமீ (3) 7 செமீ (4) 41 செமீ (5) 21 செமீ

5-2 2. கூம்பு : வளை பரப்பளவு காணல்

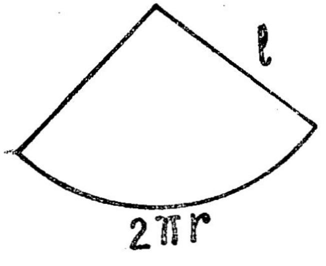
ஒரு வட்ட கோணப்பகுதியின் இரண்டு ஆரப் பக்கங்களையும் ஒன்று சேர்த்துக் குவிக்க ஓர் உள்ளீடற்ற கூம்பு கிடைக்கும்.



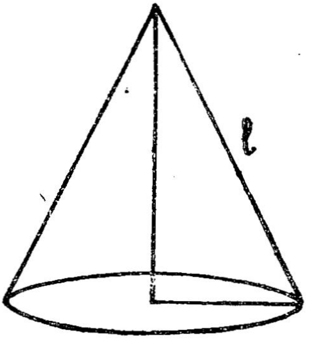
படம் 5·4.



படம் 5·5.



படம் 5·6.



படம் 5·7.

வட்டக் கோணப் பகுதிக்கும் அதனால் உருவாக்கப்பட்ட கூம்பிற்கும் உள்ள தொடர்பு பின் வருமாறு :

வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு = கூம்பின் வளை பரப்பு

வட்டக்கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்
= கூம்பின் அடிச் சுற்றளவு

வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம் = கூம்பின் சாயுயரம்

எனவே,

கூம்பின் வளை பரப்பளவு = வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

$$= \frac{\text{வில்லின் நீளம்} \times \text{ஆரம்}}{2}$$

$$= \frac{\text{கூம்பின் அடிச் சுற்றளவு} \times \text{சாயுயரம்}}{2}$$

$$= \frac{2\pi r \times l}{2}$$

$$= \pi r l$$

கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு

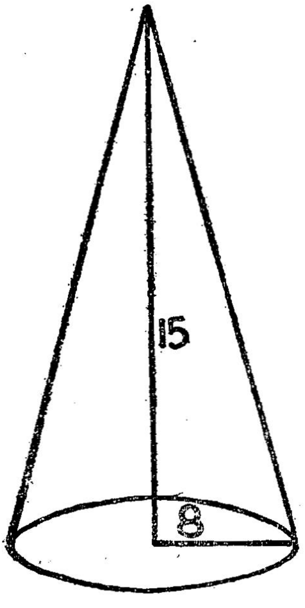
$$= \text{வளை பரப்பளவு} + \text{அடிப்பரப்பளவு}$$

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு கூம்பின் ஆரம் 8 செமீ. அதன் செங்குத்து உயரம் 15 செமீ. கூம்பின் வளை பரப்பளவையும் அதன் மொத்தப் பரப்பளவையும் காண்க.



படம் 5·8.

தீர்வு :

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$= \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{225 + 64}$$

$$= \sqrt{289}$$

$$= 17 \text{ செமீ.}$$

வளை பரப்பளவு

$$= \pi r l$$

$$= \pi \times 8 \times 17 \text{ செமீ}^2$$

$$= 136\pi \text{ செமீ}^2$$

மொத்தப் பரப்பளவு $= \pi r(l + r)$

$= \pi \times 8 \times (17 + 8)$ செமீ^{2}

$= \pi \times 8 \times 25$ செமீ^{2}

$= 200\pi$ செமீ^{2}

பயிற்சி 5-2·2

1. கீழ்க்கண்ட அளவுகளையுடைய கூம்பின் வளை பரப்பளவு, மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.
   (a) ஆரம் 20 செமீ, சாயுயரம் 30 செமீ
   (b) ஆரம் 7 செமீ, செங்குத்துயரம் 24 செமீ
   (c) ஆரம் 9 செமீ, செங்குத்துயரம் 40 செமீ
   (d) செங்குத்துயரம் 40 செமீ, சாயுயரம் 50 செமீ

2. இரண்டு கூம்புகளின் ஆரங்கள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் சாயுயரங்கள் 5 : 6 என்ற விகிதத்திலும் இருந்தால் அவற்றின் வளை பரப்புகளின் விகிதம் என்ன ?

3. ஒரு கூம்பின் அடிச் சுற்றளவு 48 செமீ. அதன் சாயுயரம் 20 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு என்ன ?

4. ஒரு கூம்பின் அடிப்பரப்பளவு 36π செமீ^{2}. அதன் செங்குத்துயரம் 8 செமீ எனில் அதன் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

5. ஒரு கூம்பின் வளை பரப்பளவு $204\frac{2}{7}$ செமீ^{2}. அதன் ஆரம் 5 செமீ எனில் அதன் செங்குத்துயரம் என்ன ? $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

6. ஒரு கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு 4400 செமீ^{2}. அதன் விட்டம் 40 செமீ எனில் அதன் செங்குத்துயரம் காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

7. ஒரு கூம்பின் ஆரமும் சாயுயரமும் 2 : 5 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அதன் வளை பரப்பளவு 160π செமீ^{2} எனில் அதன் செங்குத்துயரத்தைக் காண்க.

விடைகள்

(1) (a) 600π செமீ^{2}, 1000π செமீ^{2}

(b) 175π செமீ^{2}, 224π செமீ^{2}

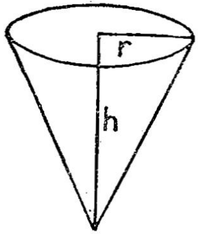
(c) 369π செமீ^{2}, 450π செமீ^{2}

(2) 5 : 8 (3) 480π செமீ^{2} (4) 96π செமீ^{2}

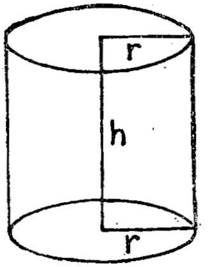
(5) 12 செமீ (6) $10\sqrt{21}$ செமீ (7) $4\sqrt{21}$ செமீ

5-2·3 கூம்பு : கன அளவு

ஒரே அளவு ஆரமும், ஒரே அளவு உயரமும் கொண்ட உள்ளீடற்ற கூம்பு வடிவ, உருளை வடிவக் கொள்கலங்கள் இரண்டை எடுத்துக்கொள்வோம். கூம்பு வடிவமான கொள்கலம் நிறைய நீரைஎடுத்து உருளை வடிவக் கொள்கலத்தில் ஊற்றுவோம். மும்முறை ஊற்றியபின் உருளை வடிவக் கொள்கலம் முழுவதும் நிரம்புவதைப் பார்க்கலாம். இதிலிருந்து நாம் எடுத்துக்கொண்ட உருளையின் கன அளவு கூம்பின் கன அளவைப்போல் 3 மடங்காகும் என அறியலாம்.



படம். 5-9



படம் 5-10

உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$

அதே ஆரமும் அதே உயரமும் உள்ள கூம்பின் கன அளவு

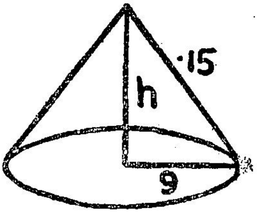
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு கூம்பின் ஆரம் 9 செமீ. அதன் சாய்வு உயரம் 15 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$
$$= \sqrt{15^2 - 9^2}$$
$$= \sqrt{225 - 81}$$
$$= \sqrt{144}$$
$= 12$ செமீ



படம். 5-11

கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 9 \times 12$ செமீ^{3}

$= 324\pi$ செமீ^{3}.

பயிற்சி 5-2·3

1. கீழ்க்காணும் அளவுகளையுடைய கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

    (a) ஆரம் 8 செமீ, செங்குத்துயரம் 12 செமீ

    (b) ஆரம் 10 செமீ, செங்குத்துயரம் 21 செமீ

    (c) ஆரம் 8 செமீ, சாயுயரம் 17 செமீ

    (d) ஆரம் 5 செமீ, சாயுயரம் 13 செமீ

    (e) சாயுயரம் 41 செமீ, செங்குத்துயரம் 40 செமீ

2. இரண்டு கூம்புகளின் ஆரங்கள் 3 : 5 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் குத்துயரங்கள் 4 : 7 என்ற விகிதத்திலுமிருந்தால் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

3. இரண்டு கூம்புகளின் ஆரங்கள் குத்துயரங்கள் இரண்டுமே 5 : 6 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதமென்ன ?

4. சம உயரங்களையுடைய இரண்டு கூம்புகளின் ஆரங்கள் 1 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதமென்ன ?

5. சம ஆரங்களையுடைய இரண்டு கூம்புகளின் குத்துயரங்கள் 10 : 11 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவு களின் விகிதம் என்ன ?

6. ஒரு கூம்பின் அடிப்பரப்பளவு 300 செமீ^{2}. அதன் குத்துயரம் 10 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

7. ஒரு கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு 40π செமீ. அதன் சாயுயரம் 29 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

8. ஒரு கூம்பின் வளை பரப்பளவு 39π செமீ^{2}. அதன் சாயுயரம் 6.5 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

9. ஒரு கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு 56π செமீ^{2}. அதன் ஆரம் 3.5 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

10. ஒரு கூம்பு வடிவமான கூடாரத்தின் அடிப்பரப்பளவு $201\frac{1}{7}$ மீ^{2}. அதன் வளைப்பரப்பளவு $427\frac{3}{7}$ மீ^{2}. ஒவ்வொருவருக்கும் $22\frac{6}{7}$ மீ^{3} காற்று தேவையெனில் அக்கூடாரம் எத்தனை ஆட்களுக்கு இடமளிக்கும்? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

11. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 9 செமீ, 12 செமீ ஆகும். 9 செமீ பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றக்கிடைக்கும் கூம்பின் கன அளவையும், வளை பரப்பளவையும் காண்க.

12. ஒரு கூம்பின் உச்சிக்கோணம் 60°. அதன் ஆரம் 7 செமீ எனில் அதன் கன அளவு, வளை பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. ஒரு கூம்பின் கன அளவு 320π செமீ^{3}. அதன் ஆரம் 8 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவையும், மொத்த பரப்பளவையும் காண்க.

விடைகள்

(1) (a) 256π செமீ^{3} (b) 700π செமீ^{3} (c) 320π செமீ^{3} (d) 100π செமீ^{3} (e) 1080π செமீ^{3}

(2) 36 : 175 (3) 125 : 216 (4) 1 : 9

(5) 10 : 11 (6) 1000 செமீ (7) 2800π செமீ³

(8) 30π செமீ³ (9) 49π செமீ (10) 44

(11) 432π செமீ³, 180π செமீ²

(12) $\frac{343}{\sqrt{3}}\pi$ செமீ³, 98π செமீ²

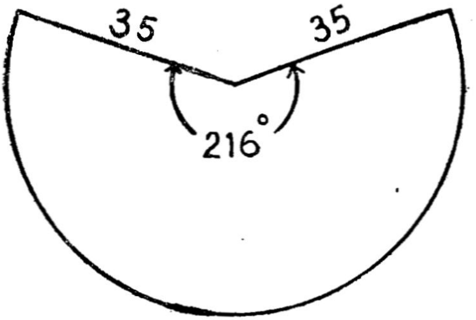
(13) 120π செமீ², 184π செமீ²

5·2·4. வட்டக்கோணப் பகுதியும் கூம்பும்

எடுத்துக்காட்டு :

35 செமீ ஆரமும், 216° மையக் கோணமும் உள்ள ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதி வடிவத் தகட்டின் இரண்டு ஆரப் பக்கங்களையும் ஒன்று சேர்த்து ஒரு கூம்பு செய்தால் அக் கூம்பின் கொள்ளளவைக் காண்க. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

தீர்வு :



படம் 5-12.

வட்டக் கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம்

= கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு

$$\text{வில்லின் நீளம்} = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{216}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \text{ செமீ}$$

$$= 132 \text{ செமீ}$$

கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு = 132 செமீ

$$2\pi r = 132$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 132$$

$$\frac{44}{7} r = 132$$

$$r = 132 \times \frac{7}{44}$$

$$= 21$$

கூம்பின் ஆரம் = 21 செமீ

வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரம் = கூம்பின் சாயுயரம்

= 35 செமீ

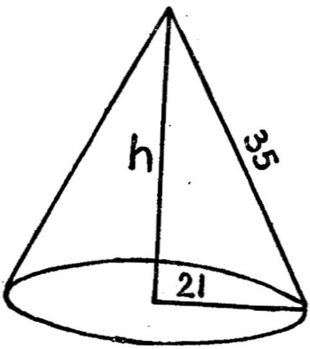
$$h^2 = 35^2 - 21^2$$

$$= 1225 - 441$$

$$= 784$$

$$h = \sqrt{784}$$

$$= 28$$



படம் 5-13

கூம்பின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 28$$

$$= 12936 \text{ செமீ}^3$$

பயிற்சி 5-2·4

1. 18 செமீ ஆரங்கொண்ட வட்ட வடிவத் தகட்டிலிருந்து 140° மையக்கோணம் கொண்ட ஒரு சிறிய வட்டக்கோணப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்பட்டு அதன் இரண்டு ஆரப்பக்கங்களையும் ஒன்று சேர்த்து ஒரு கூம்பு செய்யப்படுகிறது. அக் கூம்பின் ஆரம் எவ்வளவு ?

2. கணக்கு 1 இல் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்டக் கோணப் பகுதி போக மீதியுள்ள பெரிய வட்டக் கோணப்பகுதி ஒரு கூம்பாகச் செய்யப்பட்டால் அதன் உயரம் யாது ?

3. 288° மையக் கோணமும், 10 செமீ ஆரமும் உள்ள ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதி வடிவத்தகட்டின் இரண்டு ஆரம் பக்கங்களையும் ஒன்று சேர்த்து ஒரு கூம்பு செய்யப்பட்டால் அக்கூம்பின் கொள்ளளவு என்ன ?

4. $100\frac{4}{5}°$ மையக் கோணமும் 25 செமீ ஆரமும் உள்ள ஒரு வட்ட கோணப் பகுதி வடிவத் தகட்டின் இரண்டு ஆரப்பக்கங்களையும் ஒன்று சேர்த்து ஒரு கூம்பு செய்யப்பட்டால் அக் கூம்பின் கொள்ளவைக் காண்க.

விடைகள்

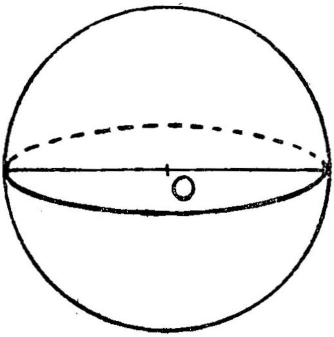
3. $402\frac{2}{7}$ செமீ^{3} 4. 1232 செமீ^{3}

5-2·5. கோளம் : கன அளவு, பரப்பளவு

கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

(r = கோளத்தின் ஆரம்)



படம் 5-14.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 12 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 12$ செமீ^{3}

$= 2304\pi$ செமீ^{3}

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 7 செமீ. அதன் புறப்பரப்பளவைக் காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

தீர்வு :

கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ செமீ^{2}

$= 616$ செமீ^{2}

பயிற்சி 5-2·5

1. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 14 செமீ. அதன் கன அளவைக் காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

2. ஒரு கோளத்தின் விட்டம் 10 செமீ. அதன் கன அளவு என்ன? $(\pi \simeq 3\cdot14)$

3. இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்கள் $4:5$ என்ற விகிதத்தி லுள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் என்ன?

4. இரண்டு கோளங்களின் கன அளவுகளின் விகிதம் $216:343$ எனில் அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதமென்ன?

5. கருங்கல் குண்டு ஒன்றின் விட்டம் 7 செமீ. 1 செமீ^{3} கல்லின் நிறை 2·7 கிராம் எனில் அக் குண்டின் எடையைக் காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

6. ஒரு கோளத்தின் ஆரத்தை அரைமடங்கு அதிமாக்கினால் அதன் கன அளவு எவ்வாறு மாறும்?

7. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செமீ எனில் அதன் வளை பரப் பளவு என்ன?

8. ஒரு கோளத்தின் விட்டம் 21 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

9. இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்கள் 7 : 8 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றின் வளை பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன?

10. ஒரு கோளத்தின் வளை பரப்பளவு 616 செமீ^{2} எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

11. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு 38808 செமீ^{3} எனில் அதன் வளை பரப்பளவு என்ன ? $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

விடைகள்

(1) $11498\frac{2}{3}$ செமீ^{3} (2) 523·8 செமீ^{3} (3) 64 : 125

(4) 6 : 7 (5) 485·1 செமீ^{3} (6) $3\frac{3}{8}$ மடங்கு

(7) 400π செமீ^{2} (8) 1386 செமீ^{2} (9) 49 : 64

(10) $1437\frac{1}{3}$ செமீ^{3} (11) 5544 செமீ^{2}

5-2·6. *அரைக்கோளம்*

அரைக் கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

அரைக் கோளத்தின் வளை பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

$= 2\pi r^2$

அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

எடுத்துக்காட்டு :

ஓர் அரைக் கோளத்தின் ஆரம் 6 செமீ. அதன் கன அளவு, வளை பரப்பளவு, மொத்தப் பரப்பளவு, ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

அரைக் கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 6$ செமீ^{3}

$= 144\pi$ செமீ^{3}

அரைக் கோளத்தின் வளை பரப்பளவு

$$= 2\pi r^2$$
$$= 2 \times \pi \times 6 \times 6$$
$$= 72\pi \text{ செமீ}^2$$

அரைக் கோளத்தின் மொத்தப பரப்பளவு

$$= 3\pi r^2$$
$$= 3 \times \pi \times 6 \times 6$$
$$= 108\pi \text{ செமீ}^2$$

பயிற்சி 5-2·6

1. ஓர் அரைக் கோளத்தின் ஆரம் 3·5 செமீ. அதன் கன அளவு, வளை பரப்பளவு, மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஓர் அரைக் கோளத்தின் விட்டம் 11 செமீ. அதன் கன அளவு, வளை பரப்பளவு, மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. இரண்டு அரைக் கோளங்களின் விட்டங்கள் 5 : 7 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதமென்ன? வளை பரப்பளவுகளின் விகிதமென்ன?

விடைகள்

(1) 89·83 செமீ^{3}, 77 செமீ^{2}, 115·5 செமீ^{2}

(2) 110·9 π செமீ^{3}, 60·5 π செமீ^{2}, 90·75 செமீ^{2}

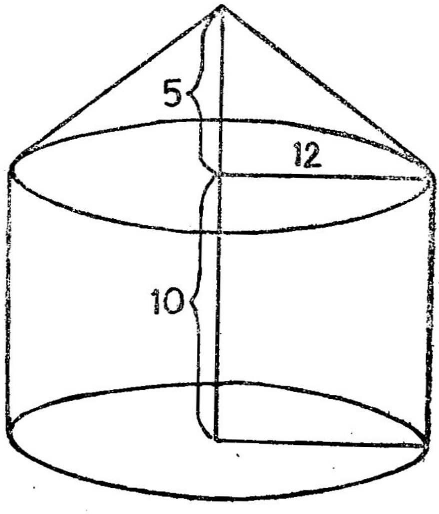
(3) 125 : 343, 25 : 49.

5-2·7. கூம்பும் உருளையும்

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு கண்காட்சியில் அமைக்கப்பெற்ற ஒரு கூடாரம் உருளையின் மேல் கூம்பு வைத்த வடிவத்தில் உள்ளது. உருளைப் பகுதியின் ஆரம் 12 மீ. உருளையின் உயரம் 10 மீ. கூடாரத்தின் மிக அதிக உயரம் 15 மீ. அக் கூடாரம் அமைக்கத் தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பளவு என்ன?

தீர்வு :



படம் 5-15.

உருளையின் ஆரம் $= 12$ மீ

உருளையின் உயரம் $= 10$ மீ

உருளைப் பாகத்தின் வளை பரப்பளவு $= 2\pi rh$

$= 2 \times \pi \times 12 \times 10$

$= 240\ \pi$ மீ^{2}

கூம்பின் ஆரம் $= 12$ மீ

கூம்பின் உயரம் $= 5$மீ

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$= \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{25 + 144}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13 \text{ மீ}$$

சாயுயரம் $= 13$ மீ

கூம்பின் வளை பரப்பளவு $= \pi rl$

$= \pi \times 12 \times 13$ மீ^{2}

$= 156\ \pi$ மீ^{2}

கூடாரம் அமைக்கத் தேவையான கித்தானின் பரப்பளவு

$= 240\pi$ மீ^{2} $+ 156\pi$ மீ^{2}

$= 396\pi$ மீ^{2}

பயிற்சி 5-2·7

1. ஒரு கூடாரத்தின் அடிப்பாகம் 40 மீட்டர் விட்டமும், 3·5 மீட்டர் உயரமும் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவத்திலுள்ளது. மேல் பாகம் கூம்பு வடிவத்திலுள்ளது. தரை மட்டத்திலிருந்து அதன் உயரம் 18·5 மீட்டர். அக் கூடாரம் செய்யத் தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

2. உட்புற ஆரம் 2·5 செமீ, உயரம் 8 செமீ அளவுள்ள ஓர் உருளை வடிவமான குப்பி நிறைய நறுமணத் தைலம் உள்ளது. இதை உட்புற ஆரம் 1 செமீ, உயரம் 5 செமீ அளவுள்ள கூம்பு வடிவமான அழகிய குப்பிகளில் நிரப்பினால் எத்தனை குப்பிகள் தேவை?

3. ஒரு கூம்பு, ஓர் உருளை இவற்றின் ஆரங்கள் 3 : 5 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் உயரங்கள் 2:3 என்ற விகிதத்திலும் உள்ளன. அவற்றின் கன அளவுகளை ஒப்பிடுக.

4. 10 செமீ ஆரமுள்ள ஓர் உருளை வடிவக் கொள்கலத்தில் நீர் உள்ளது. ஒவ்வொன்றும் 5 செமீ உயரமும், 2 செமீ ஆரமும் உள்ள 15 உலோகக் கூம்புகளை அதனுள் நன்றாக மூழ்கும்படி இட்டால் கொள்கலத்திலுள்ள நீர் மட்டம் எவ்வளவு உயரும்?

5. இரண்டு கூம்புகள் சமமான உயரம் கொண்டுள்ளன. அவற்றின் விட்டங்கள் முறையே 6 செமீ, 8 செமீ. அவ்விரண்டையும் உருக்கி அதே உயரமுள்ள உருளையாக வார்த்தால் உருளையின் ஆரம் எவ்வளவு?

விடைகள்

(1) 640π மீ^{2} (2) 30 (3) 2 : 25 (4) 1 செமீ

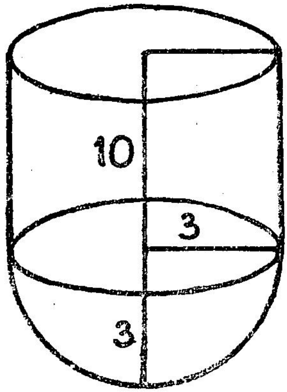
(5) 2·88 செமீ

5-2·8. உருளையும் கோளமும்

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு நீர்த் தொட்டி ஓர் உருளையும் அதன்கீழ் அதே ஆரமுள்ள அரைக்கோளமும் சேர்ந்த வடிவத்திலுள்ளது. உருளையின் ஆரம் 3 டெசிமீ. அதன் ஆழம் 13 டெசிமீ எனில் அதன் கொள்ளளவைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 5-16.

நீர்த்தேக்கத்தின் கொள்ளளவு

= உருளையின் கொள்ளளவு
+ அரைக்கோளத்தின் கொள்ளளவு

$$= \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2$$

$$= \pi r^2 \left(h + \frac{2}{3} r\right)$$

$$= \pi \times 3 \times 3 \left(10 + \frac{2}{3} \times 3\right) \text{ டெசிமீ}^3$$

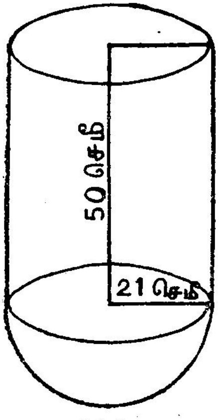
$$= \pi \times 9 \times 12 \text{ டெசிமீ}^3$$

$$= 108\pi \text{ டெசிமீ}^3$$

பயிற்சி 5-2·8

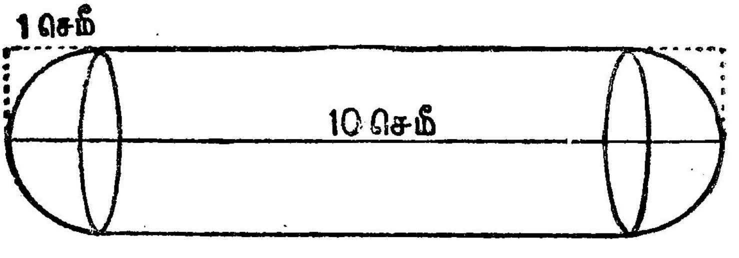
1. அடியிற் கண்ட கன உருவங்களின் கன அளவுகளைக் காண்க.

(i)



படம் 5-17.

(ii)



படம் 5-18.

மொத்த நீளம் = 10 செமீ.

2. 14 செமீ ஆரமும் 1 மீ நீளமும் உள்ள ஒரு கெட்டி சிலிண்டரை உருக்கி 1 செமீ விட்டமுள்ள கெட்டிக் கோளங்களாகச் செய்தால் எத்தனை கோளங்கள் கிடைக்கும்?

விடைகள்

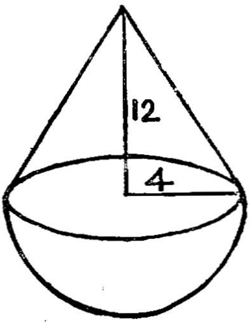
(1) (i) 28224π செமீ^{3} (2) 117600

5-2·9 கூம்பும் கோளமும்

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு திடப்பொருள் கூம்பும் அதன்கீழ் அதே ஆரமுடைய அரைக் கோளமும் சேர்ந்த வடிவத்திலுள்ளது. கூம்பின் ஆரமும் உயரமும் முறையே 4 செமீ, 12 செமீ எனில் அதன் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 5-19.

கூம்புப் பகுதியின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 4 \times 12 \text{ செமீ}^3$$

$$= 64\pi \text{ செமீ}^3$$

அரைக் கோளப் பகுதியின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times 4 \times 4 \times 4 \text{ செமீ}^3$$

$$= \frac{128}{3} \pi \text{ செமீ}^3$$

$$= 42\frac{2}{3} \pi \text{ செமீ}^3$$

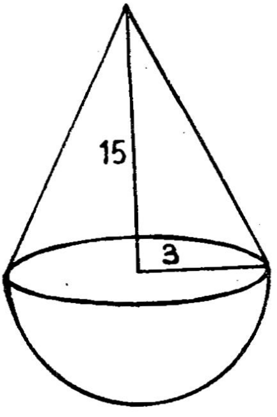
$$\text{மொத்த கன அளவு } = \left(64\pi + 42\frac{2}{3}\pi\right) \text{ செமீ}^3$$

$$= 106\frac{2}{3} \pi \text{ செமீ}^3$$

பயிற்சி 5-2·9

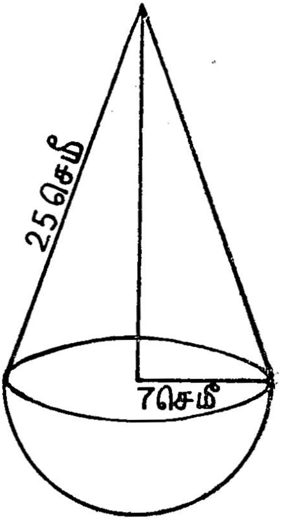
1. கீழ்க்கண்ட கன உருவத்தின் கன அளவைக் காண்க.

(i)



படம் 5-20.

(ii)



படம் 5-21.

2. ஓர் அரைக்கோளத்தின்மீது அதே ஆரமுள்ள ஒரு கூம்பை நிறுத்தி ஒரு பிளாஸ்டிக் பொம்மை செய்யப்படுகிறது. அரைக் கோளத்தின் ஆரம் 5 செமீ. கூம்பின் சாயுயரம் 11 செமீ. அப் பொம்மை செய்யப்படுவதற்குத் தேவையான பிளாஸ்டிக் தகட்டின் பரப்பளவு யாது?

3. 20 செமீ ஆரமும், 30 செமீ உயரமுமுள்ள ஓர் உலோகக் கூம்பை உருக்கி 2 செமீ ஆரமுள்ள கோளங்கள் எத்தனை செய்யலாம்?

விடைகள்

(1) (ii) $620\frac{2}{3}\pi$ செமீ^{3} (2) 105π செமீ^{2}

5·3. மடக்கை

5-3·1. மடக்கை : வரையறை

$a^x = b\ (a \neq 0,\ a \neq 1,\ a > 0,\ \ b > 0,\ a, b, x \in R)$

என்பது a, b, x என்ற எண்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் கூறுகிறது.

a அடிமானம். x அடுக்கு என்றறிவோம்.

bஇன் x மூலம் a ஆகும். எ. கா. $5^2 = 25$ எனில் $5 = \sqrt{25}$

xஐ a, bஇன்மூலம் கூற நாம் **மடக்கை** என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துவோம்.

$x = \log_a b$ என்போம்.

a மடக்கையின் அடிமானம்.

(கவனிக்க : a அடுக்கின் அடிமானமும் ஆகும்.)

$a^x = b$ என்பது அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடு. அதற்கிசைந்த $x = \log_a b$ என்பது மடக்கைச் சமன்பாடு ஆகும். இரண்டும் a, b, x இடையேயுள்ள தொடர்பைக் கூறும் முறைகளாகும்.

அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடு	மடக்கைச் சமன்பாடு
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\log_2 \frac{1}{8} = -3$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$

கவனிக்க :

1இன் மடக்கை (எல்லா அடிமானத்திற்கும்) பூச்சியமாகும். ஓர் எண்ணின் மடக்கை அதே எண்ணின் அடிமானத்திற்கு 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\log_2 64$ என்ன ?

தீர்வு :

$\log_2 64 = a$ என்க.

$2^a = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$\therefore \quad a = 6.$

$\log_2 64 = 6.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\log_7 x = 3$ எனில், xஇன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\log_7 x = 3$

$x = 7^3$

$= 7 \times 7 \times 7$

$\therefore \quad x = 243.$

பயிற்சி 5-3·1

1. அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(a) $\log_3 9 = 2$ (b) $\log_6 216 = 3$

(c) $\log_5 625 = 4$ (d) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

(e) $\log_a m = n$ (f) $\log_x p = q$

2. மடக்கைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(a) $2^5 = 32$ (b) $3^6 = 729$ (c) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

(d) $\frac{1}{81} = 3^{-4}$ (e) $m^n = l$ (f) $k^l = a$

3. xஇன் மதிப்பைக் காண்க.

(a) $\log_2 256 = x$ (b) $\log_5 3125 = x$

(c) $\log_4 \frac{1}{64} = x$ (d) $\log_4 x = 5$

(e) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

4. மதிப்பு காண்க.

(a) $\log_{10} 1000$ (b) $\log_8 16$

(c) $\log_9 3$ (d) $\log_{10} \cdot 001$

விடைகள்

(1) (a) $3^2 = 9$ (2) (a) $\log_2 32 = 5$

(3) (a) $x = 8$ (4) (a) 3

5·3·2. மடக்கை விதிகள்

நினைவு கூர்க : $a^x \times a^y = a^{x+y}$; $a^x \div a^y = a^{x-y}$

1. $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ என்க.

$$m = a^x,\ n = a^y$$

$$mn = a^x \times a^y$$

$$= a^{x+y}$$

$$\log_a (mn) = x + y$$

$$\therefore \log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$$

கவனத்தில் கொள்க :

$$\log_a m + \log_a n \neq \log_a (m + n)$$

2. $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ என்க.

$$m = a^x,\ n = a^y$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$= a^{x-y}$$

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

$$\therefore \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

3. $\log_a m = x$ என்க.

$$m = a^y$$

$$m^n = (a^x)^n$$

$$= a^{nx}$$

$\log_a (m^n) = n \cdot x$

$\therefore \quad \log_a (m^n) = n \cdot \log_a m$

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$$
$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$
$$\log_a m^n = n \log_a m$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

சரிபார்க்க : $\log_{10} 1600 = 2 + 4 \log_{10} 2.$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \log_{10} 1600 &= \log_{10} (100 \times 16) \\ &= \log_{10} 100 + \log_{10} 16 \\ &= 2 + \log_{10} 2^4 \\ &= 2 + 4 \log_{10} 2. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

நிறுவுக : $\log_{10} \left(11 \frac{1}{9}\right) = 2 - 2 \log_{10} 3$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(11 \frac{1}{9}\right) &= \log_{10} \left(\frac{100}{9}\right) \\ &= \log_{10} 100 - \log_{10} 9 \\ &= 2 - \log_{10} 3^2 \\ &= 2 - 2 \log_{10} 3. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

நிறுவுக : $\log_{10} \frac{15}{16} + \log_{10} \frac{64}{81} - \log_{10} \frac{4}{27} = \log_{10} 5$

தீர்வு :

$$\log_{10} \frac{15}{16} + \log_{10} \frac{64}{81} - \log_{10} \frac{4}{27}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{15}{16} \times \frac{64}{81} \div \frac{4}{27}\right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{15}{16} \times \frac{64}{81} \times \frac{27}{4}\right) = \log_{10} 5$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\log 3 = 0 \cdot 4771, \quad \log 5 = 0 \cdot 6990, \quad \log 7 = 0 \cdot 8451$

எனில் $\log 105$இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$\begin{aligned} \log 105 &= \log (3 \times 5 \times 7) \\ &= \log 3 + \log 5 + \log 7 \\ &= 0 \cdot 4771 + 0 \cdot 6990 + 0 \cdot 8451 \\ &= 2 \cdot 0212 \end{aligned}$$

பயிற்சி 5-3·2

1. சுருக்குக :

(a) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(b) $\log_{12} 16 + \log_{12} 9$

(c) $\log_{10} 15 - \log_{10} 5$

(d) $\log_{10} 64 - \log_{10} 16$

(e) $\log_{10} 12 + \log_{10} 20 + \log_{10} 15$

(f) $\log_{10} 30 + \log_{10} 20 - \log_{10} 10$

2. $\log 2 = 0 \cdot 3010$, $\log 3 = 0 \cdot 4771$

$\log 5 = 0 \cdot 6990$, $\log 7 = 0 \cdot 8451$

எனில் கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(1) $\log 15$ (2) $\log 6$ (3) $\log 35$ (4) $\log 21$

(5) $\log 7^2$ (6) $\log 5^4$ (7) $\log 2^8$

3. நிறுவுக : $\log_{10} 72 = 2 \log_{10} 3 + 3 \log_{10} 2$

4. நிறுவுக : $\log_{10} 2500 = 2 + 2 \log_{10} 5$

5. நிறுவுக : $\log_{10} \left(2 \frac{2}{49} \right) = 2 - 2 \log_{10} 7$

6. நிறுவுக : $\log_{10} 125 = 3 - 3 \log_{10} 2$

7. நிறுவுக : $\log_{10}\left(\frac{9}{8}\right) - \log_{10}\left(\frac{27}{32}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$

8. சுருக்குக :

$$\log_5\left(\frac{5}{12}\right) - \log_5\left(\frac{7}{5}\right) - \log_5\left(\frac{7}{12}\right)$$

9. சுருக்குக :

$$\log_{10}\left(\frac{26}{33}\right) - \log_{10}\left(\frac{65}{69}\right) + \log_{10}\left(\frac{55}{46}\right)$$

விடைகள்

(1) (a) 2 (2) (1) 1·1761 (8) $\log_5 \frac{25}{49}$ (9) 0.

5-3·3. மடக்கை அட்டவணைகள்

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மேடை : மடக்கை காணல்

$2^{10} = 1024 \simeq 1000 = 10^3$

$2 = (2^{10})^{\frac{1}{10}} \simeq (10^3)^{\frac{1}{10}} = 10^{\cdot 3}$

$\therefore \log_{10}2 \simeq \cdot 3$

$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2\log_{10}2 \simeq \cdot 6$

$\log_{10}8 = \log_{10}2^3 = 3\log_{10}2 \simeq \cdot 9$

$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10}10 - \log_{10}2$

$\simeq 1 - \cdot 3 = \cdot 7$

$3^4 = 81 \simeq 80 = 8\times 10 = 10^{\cdot 9}\times 10^1 = 10^{1\cdot 9}$

$3 = (10^{1\cdot 9})^{\frac{1}{4}} = 10^{0\cdot 475}$

$\therefore \log_{10}3 \simeq 0\cdot 475$

$\log_{10}9 = \log_{10}3^2 \simeq 2\log_{10}3$

$\log_{10}9 \simeq \cdot 95$

$$\log_{10} 6 = \log_{10}(2\times3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$
$$\simeq \cdot3 + \cdot475 = \cdot775$$

$$7^2 = 49 \simeq 50 = 5\times10 = 10^{\cdot7}\times10^1 = 10^{1\cdot7}$$

$$7 \simeq (10^{1\cdot7})^{\frac{1}{2}} = 10^{\cdot85}$$

$$\therefore \quad \log_{10} 7 \simeq \cdot85$$

எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மடக்கை	0	·3	·475	·6	·7	·775	·85	·9	·95	1

கவனிக்க

1. $\log_{10}2 = 0\cdot3$

$$\begin{aligned}\log_{10}20 &= \log_{10}(10\times2)\\ &= \log_{10}10 + \log_{10}2\\ &= 1 + 0\cdot3\\ &= 1\cdot3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}200 &= \log_{10}(10\times10\times2)\\ &= \log_{10}10 + \log_{10}10 + \log_{10}2\\ &= 1 + 1 + 0\cdot3\\ &= 2\cdot3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}2000 &= \log_{10}(10\times10\times10\times2)\\ &= \log_{10}10+\log_{10}10+\log_{10}10+\log_{10}2\\ &= 1 + 1 + 1 + 0\cdot3\\ &= 3\cdot3\end{aligned}$$

2. $\log_{10}2 = 0\cdot3$

$\log_{10}20 = 1\cdot3$

$\log_{10}200 = 2\cdot3$

$\log_{10}2000 = 3\cdot3$

முழு எண் பகுதி மடக்கை முழு எண் என்றும் பின்னப் பகுதி மடக்கை பின்னம் என்றும் கூறப்படும்.

இனி வேறுவிதமாகக் குறிப்பிடப்பட்டாலன்றி, மடக்கையின் அடிமானம் 10 எனவே கொள்ளப்படும்.

3.

கொடுக்கப் பட்ட எண்	எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை	மடக்கை முழு எண்	மடக்கை பின்னம்	மடக்கை
3	1	0	·475	0·475
30	2	1	·475	1·475
300	3	2	·475	2·475
3000	4	3	·475	3·475

4.

எண்	மடக்கை முழு எண்	மடக்கை பின்னம்	மடக்கை
4000	3	·6	3·6
400	2	·6	2·6
40	1	·6	1·6
4	0	·6	0·6
·4	−1 (அ) $\bar{1}$	·6	$\bar{1}$·6
·04	−2 (அ) $\bar{2}$	·6	$\bar{2}$·6
·004	−3 (அ) $\bar{3}$	·6	$\bar{3}$·6

5·3·4· மடக்கை, எதிர் மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்துதல்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

347இன் மடக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

3476இல் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 4.

எனவே, 3476இன் மடக்கை முழு எண் 3.

மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து

மடக்கை

		7		சராசரி வேறுபாடு 6		
3·4		·5403				

3·476இன் மடக்கை $= 0{\cdot}5403 + 0{\cdot}0008$

$= 0{\cdot}5411$

எனவே, 3476இன் மடக்கை $= 3{\cdot}5411$.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஓர் எண்ணின் மடக்கை 2·7312 எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

எதிர் மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து

எதிர் மடக்கை

	1		சராசரி வேறுபாடு 2		
·73	5·383			3	

·7312இன் எதிர் மடக்கை $= 5{\cdot}383 + 0{\cdot}003$

$= 5{\cdot}386$.

மடக்கை 2·7312இல் மடக்கை முழு எண் 2.

எனவே, எண்ணிலுள்ள இலக்கங்கள் 3.

2·7312இன் எதிர் மடக்கை 538·6.

பயிற்சி 3-4

1. பின் வருவனவற்றின் மடக்கையைக் காண்க.

(1) 4137 (2) 7234 (3) 648·5 (4) 72·15
(5) 4·132 (6) ·5413 (7) 43612 (8) 2·64.

2. கீழ்க்காணும் மடக்கையைக் கொண்ட எண்ணைக் காண்க.

(1) 2·514 (2) 3·712 (3) 4·222
(4) 1·234 (5) 0·5147

5-3 5. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குதல்

எண் செயல்	மடக்கை செயல்	எடுத்துக்காட்டு
பெருக்கல்	கூட்டல்	$\log(152 \times 324) = \log 152 + \log 324$
வகுத்தல்	கழித்தல்	$\log(400 \div 34) = \log 400 - \log 34$
அடுக்கு	பெருக்கல்	$\log 23^5 = 5 \log 23$
மூலம்	வகுத்தல்	$\log \sqrt{30} = \frac{1}{2} \log 30$

எடுத்துக்காட்டு 1:

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக :

434·38 × 37·48

தீர்வு :

எண் செயல்	எண்கள்	மடக்கை	மடக்கை செயல்
×	434·38 37·48	2·6378 1·5738	+
		4·2116	

anti log 4·2116 = 16280

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி விடை காண்க.

$$\frac{4{\cdot}325}{{\cdot}031}$$

தீர்வு :

எண் செயல்	எண்கள்	மடக்கை	மடக்கை செயல்
÷	4·325	0·6360	—
	·031	−2·4914	
		2·1446	

anti log 2·1446 = 139·5

எடுத்துக்காட்டு 3:

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $(41{\cdot}37)^5$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

எண் செயல்	எண்கள்	மடக்கை	மடக்கை செயல்
அடுக்கு	41·37	1·6167	×
	$(41{\cdot}37)^5$	5 × 1·6167	
		= 8·0835	

anti log 8·0835 = 121200000

எடுத்துக்காட்டு 4 :

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 561·7 இன் வர்க்க மூலம் காண்க.

தீர்வு:

எண் செயல்	எண்	மடக்கை	மடக்கை செயல்
மூலம்	561·7 $\sqrt{(561 \cdot 7)}$	2·7495 $\frac{1}{2} \times 2 \cdot 7495$ $= 1 \cdot 3747$	÷

anti log $1 \cdot 3747 = 23 \cdot 70$

எடுத்துக்காட்டு 5:

மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 75·13இன் கனமூலம் காண்க.

எண் செயல்	எண்	மடக்கை	மடக்கை செயல்
மூலம்	75·13 $\sqrt[3]{(75-13)}$	1·8758 $\frac{1}{3} \times 1 \cdot 8758$ $= 0 \cdot 6252$	÷

anti log $0 \cdot 6252 = 4 \cdot 219$.

பயிற்சி 5-3.5

மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவைகளைச் சுருக்குக.

(1) 4132×5268 (2) $723 \cdot 5 \times 61 \cdot 56$

(3) $4 \cdot 2576 \times \cdot 00271$ (4) $3 \cdot 713 \div 2 \cdot 52$

(5) $473 \cdot 4 \div 1 \cdot 636$ (6) $0 \cdot 0123 \div 4 \cdot 123$

(7) $(54 \cdot 67)^7$ (8) $(33 \cdot 47)^6$

(9) $\sqrt{431 \cdot 4}$ (10) $\sqrt[3]{7229}$

விடைகள்

(1) 21770000 (4) 1·473

(7) 1461000000000 (9) 20·77

பாடச் சுருக்கம்

1. கன உருவங்கள் :

உருவம்	பக்க அல்லது வளை பரப்பளவு	மொத்தப் பரப்பளவு	கன அளவு
1. பட்டகம் P = அடிச்சுற்றளவு A = அடிப்பரப்பளவு h = உயரம்	Ph	$Ph + 2A$	Ah
2. உருளை r = அடி ஆரம் h = உயரம்	$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	πr^2h
3. கூம்பு r = அடி ஆரம் h = குத்துயரம் l = சாயுயரம் $l^2 = h^2 + r^2$	πrl	$\pi r(l + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
4. கோளம் r = ஆரம்	$4\pi r^2$	—	$\frac{4}{3}\pi r^3$
5. அரைக்கோளம்	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

2. வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரப் பக்கங்களைச் சேர்த்துக் கூம்பு உருவம் செய்யப்பட்டால்,

கூம்பின் சாயுயரம் = வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம்

$$\text{கூம்பின் அடி ஆரம்} = \text{வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம்} \times \frac{\text{வட்டக்கோண அளவு}}{360^\circ}$$

3. $a^x = b$ என்ற தொடர்பை $x = \log_a b$ என்று காட்டுவது மடக்கை முறையாகும்.

$$\log (mn) = \log m + \log n$$

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$$

$$\log m^n = n \log m$$

4. எண் செயல்களுக்கும் மடக்கைச் செயல்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு :

எண் செயல்	மடக்கைச் செயல்	எடுத்துக்காட்டு
பெருக்கல்	கூட்டல்	$\log (15 \times 48) = \log 15 + \log 48$
வகுத்தல்	கழித்தல்	$\log \left(\frac{524}{37}\right) = \log 524 - \log 37$
அடுக்கு	பெருக்கல்	$\log 8^5 = 5 \log 8$
மூலம்	வகுத்தல்	$\log \sqrt[4]{58} = \frac{1}{4} \log 58$

தன்னறிவுச் சோதனை

1. ஒரு நேர்ப் பட்டகத்தின் அடிப்பாகம் 7 செமீ பக்கமுள்ள ஒழுங்கு அறுகோண வடிவம் ஆகும். அதன் உயரம் 12 செமீ எனில் அதன் மொத்தப் பரப்பளவு, கன அளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஓர் உருளையின் ஆரமும், உயரமும் முறையே 3 செமீ, 10 செமீ எனில் அதன் வளை பரப்பளவு, கன அளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. ஒரு கூம்பின் சாயுயரம் 39 செமீ. அதன் ஆரம் 15 செமீ. அதன் கன அளவு, மொத்தப் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு 36π செமீ^{3}. அதன் வளை பரப்பளவைக் காண்க.

5. 20 செமீ ஆரமும் 160 செமீ உயரமும் உள்ள ஓர் உலோக உருளையை உருக்கி 4 செமீ ஆரமுள்ள கோளங்கள் எத்தனை செய்யலாம்?

6. $\log_{10} 64000 = 3 + 6 \log_{10} 2$ எனக் காட்டுக.

7. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின் வருவன வற்றைக் காண்க.

(அ) 4379×1234 (ஆ) $2439 \div 1{\cdot}37$ (இ) $(32{\cdot}64)^3$

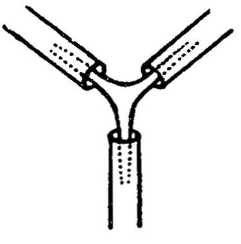
(ஈ) $\sqrt{92167}$ (உ) $\sqrt[3]{7455}$

தேர்வுக்கு அன்று

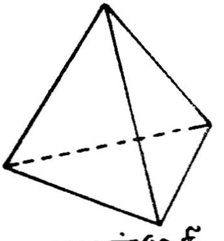
கணித மன்றம் - மேடை 5

முகங்கள், எத்தனை முகங்கள்?

பிளேட்டோவின் ஐந்து கன உருவங்களைப்பற்றி எட்டாம் வகுப்பு கணித மன்றத்தில் பார்த்தோம். இப்போது அவற்றின் பண்புகளை ஆய்வோம். உறிஞ்சு குழல்கள், கம்பிகள் கொண்டு இவ்வுருவங்களை அமைக்க முயல்க.

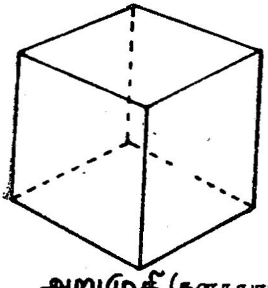


படம் 5-22.



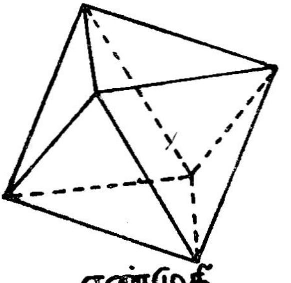
நான்முகி

படம் 5-23.



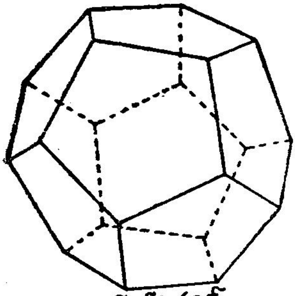
அறுமுகி (கனசதுரம்)

படம் 5-24.



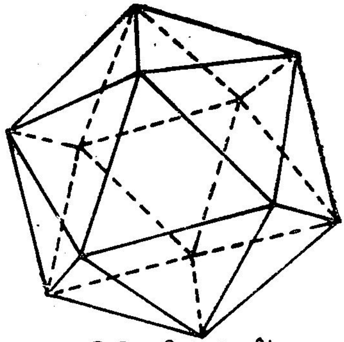
எண்முகி

படம் 5-25.



பதினிருமுசி

படம் 5-26.



இருபதின்முகி

படம் 5-27.

இவ்வுருவங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உச்சிகள், விளிம்புகள், முகங்கள் எத்தனை எனக் கண்டு பட்டியல் படுத்துக. அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

உருவம்	முகங்கள் (f)	விளிம்புகள் (e)	உச்சிகள் (v)
நான்முகி	6	12	8
அறுமுகி			
எண்முகி			
பதினிருமுகி			
இருபதின்முகி			

பட்டகங்கள், மற்றும் வேறுபல கன உருவங்களுக்கும் மேற்கண்டவாறு விவரங்களைப் பட்டியல் படுத்துக. மேலே காணப்பட்ட $v + f = e + 2$ என்ற உறவு இவற்றிற்கும் பொருந்துகிறதா எனக் காண்க.

இவ்வுறவினை 1752ஆம் ஆண்டில் ஆய்லர் கண்டறிந்தார்.

6. அணிகள்

1. ஒரு வகுப்பு மாணவர் மதிப்பெண் பதிவேட்டினின்று சில மாணவர்கள் வெவ்வேறு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணிதம்	அறிவியல்	வரலாறு
A	40	50	60	42	47
B	60	65	68	70	53
C	25	15	30	12	40

இதனை $$\begin{pmatrix} 40 & 50 & 60 & 42 & 47 \\ 60 & 65 & 68 & 70 & 53 \\ 25 & 15 & 30 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

என்று அணி உருவத்தில் சுருக்கமாக எழுதலாம். இவ்வாறு எண் விவரங்களை ஒரு செவ்வக அமைப்பில் குறிப்பதை அணி என்போம். மேற்கண்ட அணியில் 3 நிரைகளும், 5 நிரல்களும் உள்ளன. இந்த அணியின் வரிசை (3×5) எனப்படும். (4×3) வரிசையுள்ள அணியில் 4 நிரைகளும், 3 நிரல்களும் இருக்கும். அணியிலுள்ள தனிப்பட்ட விவரங்கள் உறுப்புகள் எனப்படும். மேலே குறிப்பிட்ட அணியில் 15 உறுப்புகள் உள்ளன. (4×3) வரிசையுள்ள அணியில் எத்தனை உறுப்புக்கள் இருக்கும் ?

நிரை அணி

ஒரு நிரை மட்டும் கொண்ட அணி நிரை அணி அல்லது நிரை வெக்டர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $(1 \quad 3 \quad 5 \quad 7)$ என்பது நிரை அணியாகும். இதன் வரிசை (1×4) ஆகும்.

நிரல் அணி

ஒரு நிரல் மட்டும் கொண்ட அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ என்பது நிரல் அணியாகும்.

இதன் வரிசை (4×1) ஆகும்.

சதுர அணி

ஓர் அணியில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனில் அது ஒரு *சதுர அணி* எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ இது (2×2) வரிசையுள்ள அணியாகும்.

பூச்சிய அணி

ஓர் அணியின் உறுப்புகள் அனைத்தும் பூச்சியமானால் அது *பூச்சிய அணி* எனப்படும்.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்பன பூச்சிய அணிகளாகும்.

சம அணிகள்

ஒரே வரிசை கொண்ட இரண்டு அணிகளில் ஒத்த இடங்களில் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனில் அவைகள் *சம அணிகள்* ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-6 & \sqrt{16} \\ 1+1 & \frac{14}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$ எனில்,

$a = e, \quad b = f, \quad c = g, \quad d = h$ ஆகும்.

பயிற்சி 6-1

1. கீழ்க்காணும் அணிகளின் வரிசைகளைக் காண்க. அவற்றில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

(அ) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(இ) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 6 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(உ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2. 3×2, 2×2, 3×3 வரிசையுள்ள பூச்சிய அணிகளை அமைக்க.

3. $(a \quad 4) = (3 \quad b)$ எனில் a, bஇன் மதிப்பு காண்க.

4. $\begin{pmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 8 \end{pmatrix}$ எனில் x, y, m, n ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $\begin{pmatrix} x - 11 \\ y + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ எனில் x, y எவ்வளவு?

விடைகள்

(1) (அ) 1×3 (ஆ) 2×2 (இ) 3×2 (ஈ) 4×3 (உ) 4×4
(3) $a = 3$, $b = 4$ (4) $x = 0$, $m = 5$, $n = 3$, $y = 8$
(5) $x = 16$, $y = -4$

6-2. அணிகளின் கூட்டல்.

இருவர் இரு மாதங்களில் வாங்கிய பண்டங்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு:

(1) ஜனவரி 1982

	அரிசி	பருப்பு	எண்ணை
அன்பு	15 கிகி	4 கிகி	3 லி
ஆனந்தம்	10 கிகி	6 கிகி	4 லி

(2) பிப்ரவரி 1982

அன்பு	10 கிகி	4 கிகி	4 லி
ஆனந்தம்	12 கிகி	0 கிகி	5 லி

இரண்டு மாதங்களிலும் அவர்கள் சேர்ந்து வாங்கிய பண்டங்களின் மொத்தம் :

அன்பு	$(15+10)$ கிகி	$(4+4)$ கிகி	$(3+4)$ லி
ஆனந்தம்	$(10+12)$ கிகி	$(6+0)$ கிகி	$(4+5)$ லி

இவற்றை அணி வடிவத்தில் அமைக்க

$$\begin{pmatrix}15 & 4 & 3\\10 & 6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 4 & 4\\12 & 0 & 5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}15+10 & 4+4 & 3+4\\10+12 & 6+0 & 4+5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}25 & 8 & 7\\22 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

எனக் குறிக்கலாமல்லவா ?

பிப்ரவரி மாதத்தில் அவர்கள் வாங்கிய எண்ணை அளவு தெரியாவிட்டால், இரு மாதமும் வாங்கிய எண்ணையின் அளவு காண இயலுமா ? இயலாது.

$$\begin{pmatrix}15 & 4 & 3\\10 & 6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 4 & ?\\12 & 0 & ?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 8 & 3+?\\22 & 6 & 4+?\end{pmatrix}$$

எனவே, சம வரிசையுள்ள அணிகளையே கூட்ட இயலும் என அறிக.

சம வரிசைகளையுடைய அணிகளின் கூடுதற் பலன் அணியின் வரிசையும் அவ்வணிகளின் வரிசையேயாகும். கூடுதற்பலனிலுள்ள உறுப்புகள் கூட்டப்படும் அணிகளிலுள்ள ஒத்த உறுப்புகளை கூட்டக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 5\\2 & 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\5 & 6 & 3\end{pmatrix}$$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+7 & 3+1 & 5+0 \\ 2+5 & 6+6 & 8+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 5 \\ 7 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

பொதுவாக,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ m & n & l \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+m & e+n & f+l \\ g+x & h+y & k+z \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$ ஐக்

காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+6+5 & 3+7+4 \\ 4+1+2 & 5+3+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 6–2

பின்வரும் அணிகளைக் கூட்ட இயலுமெனில் கூட்டுக. இயலாதெனில் காரணம் கூறுக.

1. $(3 \quad 5) + (7 \quad 4)$
2. $(2 \quad 7) + (4 \quad -3)$

3. $(4 \quad 6 \quad 7) + (11 \quad 5 \quad -3)$

4. $(5 \quad 9 \quad 8 \quad 7) + (3 \quad 1 \quad 3)$

5. $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

6. $(2 \quad 3 \quad -1) + (5 \quad 6 \quad 2) + (4 \quad 7 \quad -3)$

7. $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (2 \quad 3 \quad 5)$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

எனில், (அ) $A + B$, (ஆ) $B + C$, (இ) $C + A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $(10 \quad 9)$ (5) $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 13 \\ 14 & 11 & 23 \\ 15 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ 4, 7, 11 இயலாது.

௫·3 அணிகளின் கழித்தல்

எதிரணி

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

Aஇன் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றின் கூட்டல் தலைகீழிகளைக் கொண்டு அமையும் அணியைப் பார்ப்போம். அது

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \\ -7 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$A + B$, $B + A$ இவற்றைக் காண்க.

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$ எனக் காண்கிறோமல்லவா ?

எனவே B. Aஇன் எதிரணி எனப்படும். Bஇன் வரிசை Aஇன் வரிசையேயாகும். Bஇன் உறுப்புக்கள் Aஇன் ஒத்த உறுப்புகளின் கூட்டல் தலை கீழிகளாகும். Aஇன் எதிரணியை $-A$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{இன் எதிரணி } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

கழித்தல் :

A, B என்பன ஒரே வரிசையுடைய இரண்டு அணிகள் எனில் $A - B = A + (-B)$ என வரையறுப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$ எனில், $A - B$ யாது ?

தீர்வு :

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+1 & 4+5 \\ 2-6 & -7+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

சுருக்குக :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-1+5 & 4+0+2 & -5+2-3 \\ -2-2+3 & 3-3-5 & -4-4+2 \\ 5-2-2 & -2+4+3 & 3-3-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -1 & -5 & -6 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 6-3

1. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் எதிரணிகளைக் காண்க.

(அ) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(இ) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

2. ஒரு பூச்சிய அணியின் எதிரணி யாது ?

சுருக்குக :

3 $(1 \quad 5) - (2 \quad -7)$

4. $(-1 \quad 3 \quad 4) - (-5 \quad 6 \quad -2)$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -5 & -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -5 & -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

எனில் (அ) $A + B + C$ (ஆ) $A - B + C$ (இ) $A - B - C$

(ஈ) $A + B - C$ (உ) $C - A + B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடைகள்

1. (அ) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ (இ) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

3. $(-1 \quad 12)$ (5) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 13 \\ -9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10. (ஆ) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ஈ) $\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

6-4. அணிச் சமன்பாடுகள்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

மெய்யெண்களில் 0 என்பது கூட்டல் சமனி ஆகும்

$$4 + 0 = 4$$

அதைப்போல் அணிகளில் பூச்சிய அணி கூட்டல் சமனி ஆகும்.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 5+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A, B என்பன ஒரே வரிசையுடைய அணிகள். $X + A = B$ எனும் கட்டுப்பாட்டிலுள்ள X என்ற அணியைக் காண்போம்.

$$X + A = B$$
$$X + A + (-A) = B + (-A)$$
$$X + 0 = B - A$$
$$X = B - A$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

தீர்க்க :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4-2 & 2+5 \\ 1-3 & -3-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 6·4

தீர்க்க :

1. $X + (1 \quad 2) = (5 \quad 7)$
2. $(3 \quad -4) - X = (-1 \quad 2)$
3. $X - (4 \quad 3 \quad -7) = (1 \quad 5 \quad -6)$

4. $X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. $X + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. $X + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ என்க. $X + A = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலுள்ள X அணியைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $(4 \quad 5)$ (3) $(5 \quad 8 \quad -13)$ (5) $\begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

6-5. அணிப் பெருக்கல் : அணிகளை திசையிலியால் பெருக்கல்

$A + A = 2A$, $A + A + A = 3A$,

$A + A + A + \ldots\ n$ முறை $= n\ A$ என வரையறுப்போம்.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்றால்,

$$3A = A + A + A$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2+2 & 3+3+3 \\ 5+5+5 & 7+7+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 3 \\ 3 \times 5 & 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

Aஇன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் 3ஆல் பெருக்க $3A$ கிடைக்கிறது. இதனைத் திசையிலிப் பெருக்கல் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ எனில் $5X$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$5X = 5\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times -5 & 5 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ -25 & 30 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 6-5.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ எனில் $5A$ ஐக் காண்க.

2. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ எனில் $2X$, $3X$, $7X$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

சுருக்குக :

3. $2(5 \quad 4 \quad 3) + 3(-4 \quad 2 \quad 1)$

4. $3 \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ எனில் $2A + 3B$ ஐக் காண்க.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ எனில் $A - 2B + 3C$ஐக் காண்க.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ எனில்

$X + 3A = B$ எனும் கட்டுப்பாட்டிலுள்ள சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

விடைகள்

(1) $\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$ (3) $(-2 \quad 14 \quad 9)$

(5) $\begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 10 & 31 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}$

6-6. அணிப் பெருக்கல் : நிரை அணியை நிரல் அணியால் பெருக்கல்

A என்பவர் தனது வீட்டிற்கு 4 ஆப்பிள்கள், 5 ஆரஞ்சுகள், 10 வாழைப் பழங்கள் வாங்கினார். 1 ஆப்பிளின் விலை 70 பைசா, 1 ஆரஞ்சின் விலை 30 பைசா, 1 வாழைப் பழத்தின் விலை 10 பைசா எனக் கொள்வோம். அவர் வாங்கிய பழங்களின் மொத்த விலை $= (4 \times 70) + (5 \times 30) + (10 \times 10)$ $= 530$ பைசா.

இவ்விவரத்தை ஒரு நிரை, ஒரு நிரல் வெக்டராக எழுதிக் காட்டுவோம்.

$$(4 \quad 5 \quad 10) \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = (4 \times 70 + 5 \times 30 + 10 \times 10)$$
$$= (530)$$

இஃது அணிப் பெருக்கல் எனப்படும்.

முதலணியின் வரிசை 1×3. இரண்டாம் அணியின் வரிசை 3×1. பெருக்கற் பலன் அணியின் வரிசை (1×1).

பயிற்சி 6-6

பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = (19)$ எனில் xஇன் மதிப்பைக் காண்க.

6. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = (35)$ எனில் xஇன் மதிப்பைக் காண்க.

விடைகள்

(1) 33 (4) $(ax + by + cz)$ (5) $x = 2$ (6) $x = 4$

6·7. அணிப் பெருக்கல் : அணியை அணியால் பெருக்கல்

கீழ்காணும் அணி இருவர் மூவகைப் பொருள்களை வாங்கிய விவரத்தைக் குறிக்கும்.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ஒரு கடையில் அப்பண்டங்களின் விலைகள் முறையே ரூ. 10, ரூ. 15, ரூ. 20 என்றால் முதலாமவர் வாங்கிய பண்டங்

களின் மொத்த விலை ரூ. $[(2\times 10)+(5\times 15)\times(8\times 20)]$ = ரூ. 255; இரண்டாமவர் வாங்கிய பண்டங்களின் மொத்த விலை ரூ. $[(4\times 10)+(2\times 15)+(3\times 20)]$ = ரூ. 130. இவற்றைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் அமைப்போம்.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 10+5\times 15+8\times 20 \\ 4\times 10+2\times 15+3\times 20 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 255 \\ 130 \end{pmatrix}$$

மற்றொரு கடையில் அப்பண்டங்களின் விலைகள் முறையே ரூ. 12, ரூ. 16, ரூ. 18 என்றால் மொத்த விலைகளின் அணியை மேற்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 12+5\times 16+8\times 18 \\ 4\times 12+2\times 16+3\times 18 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 248 \\ 134 \end{pmatrix}$$

மேற்கண்ட இரு விவரங்களையும் சேர்த்து,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 16 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 255 & 248 \\ 130 & 134 \end{pmatrix}$$

என எழுதுவோம்.

இரண்டாம் அணி விலைகளின் அணியாகும். ஏதேனும் ஒரு பண்டத்தின் விலை கொடுக்கப்படாவிட்டால் மொத்த விலையைக் காண இயலுமா ? இயலாது. எனவே, முதலணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாம் அணியில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருந்தால்தான் அணிப் பெருக்கல் செய்ய இயலும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில்,

முதல் அணியின் வரிசை 2×3

இரண்டாம் அணியின் வரிசை 3×2

பெருக்கற்பலன் அணியின் வரிசை 2×2

இவற்றிலிருந்து நாம் அறிவது :

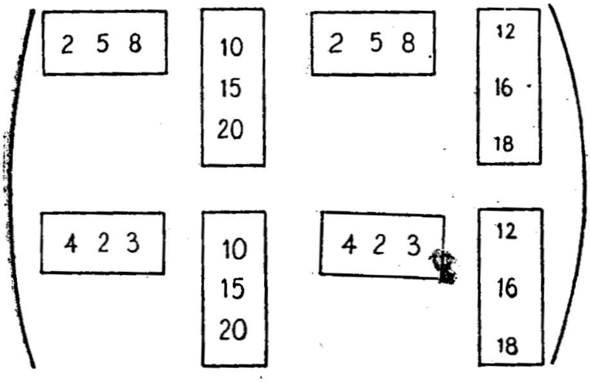
அணிப் பெருக்கலில்

(1) முதல் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாம் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்;

(2) முதல் அணியின் வரிசை $l \times m$, இரண்டாம் அணியின் வரிசை $m \times p$ என்றால் பெருக்கற்பலன் அணியின் வரிசை $l \times p$ ஆகும்;

(3) முதல் அணியின் நிரைகளின் உறுப்புகளை இரண்டாம் அணியின் நிரல்களின் உறுப்புகளால் பெருக்கி, பெருக்கற்பலன்களின் கூடுதல் இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலனின் உறுப்புகளைத் தரும்.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 16 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$



படம் 6-1.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

முதலணியில் உள்ள நிரல்கள் 3. இரண்டாம் அணியில் உள்ள நிரைகள் 3. எனவே, பெருக்க இயலும்.

பெருக்கற்பலன் :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4 \quad 5 \quad -3}\ \boxed{\begin{matrix}2\\-1\\3\end{matrix}} & \boxed{4 \quad 5 \quad -3}\ \boxed{\begin{matrix}-1\\-2\\0\end{matrix}} \\ \boxed{2 \quad -4 \quad 6}\ \boxed{\begin{matrix}2\\-1\\3\end{matrix}} & \boxed{2 \quad -4 \quad 6}\ \boxed{\begin{matrix}-1\\-2\\0\end{matrix}} \\ \boxed{-1 \quad 6 \quad 0}\ \boxed{\begin{matrix}2\\-1\\3\end{matrix}} & \boxed{-1 \quad 6 \quad 0}\ \boxed{\begin{matrix}-1\\-2\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

படம் 6-2.

$$= \begin{pmatrix} 4\times 2 + 5\times(-1) + (-3)\times 3 & 4\times(-1) + 5\times(-2) + (-3)\times 0 \\ 2\times 2 + (-4)\times(-1) + 6\times 3 & 2\times(-1) + (-4)\times(-2) + 6\times 0 \\ (-1)\times 2 + 6\times(-1) + 0\times 3 & (-1)\times(-1) + (6)\times(-2) + 0\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -14 \\ 26 & 6 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 6-7

1. கீழ்க்காணும் அணிகளைப் பெருக்க இயலுமா ?

	முதல் அணியின் வரிசை	இரண்டாம் அணியின் வரிசை
(a)	2×3	3×1
(b)	1×2	2×2
(c)	3×2	1×2
(d)	2×3	2×3
(e)	3×2	2×3
(f)	2×2	2×3
(g)	1×3	3×2

௨. A, B என்ற அணிகளின் பெருக்கற்பலன் அணி C எனில் பின்வரும் அட்டவணையில் விடுபட்ட இடங்களை நிரப்புக.

எண்	Aஇன் வரிசை	Bஇன் வரிசை	Cஇன் வரிசை
அ	2×3	3×5	—
ஆ	3×4	4×2	—
இ	4×3	—	4×2
ஈ	5×4	—	5×1
உ	—	3×5	1×5
ஊ	—	2×3	5×3

(3) $(3 \;\; 4 \;\; 7) \; B = (5 \;\; 6)$ எனில், B இன் வரிசை யாது ?

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ எனில்,

Bஇன் வரிசையைக் காண்க.

கீழ்க்காணும் அணிப் பெருக்கல்களைச் செய்க.

(5) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & -1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

எனில் $AB \neq BA$ எனக் காட்டுக

(11) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

எனில் (அ) AB (ஆ) BA (இ) BC (ஈ) CB (உ) AC (ஊ) CA (எ) A^2 (ஏ) B^2 (ஐ) C^2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

(12) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ எனில்

$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(1) c, d இயலாது (2) (அ) 2×5 (இ) 3×2 (உ) 1×3

(3) 3×2 (5) $\begin{pmatrix} 16 & -22 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 44 & 72 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 16 & 52 & 7 \\ 46 & 9 & 37 \\ 71 & 15 & 53 \end{pmatrix}$ (12) $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 68 & 52 \\ 104 & 81 \end{pmatrix}$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 72 & 43 \\ 123 & 77 \end{pmatrix}$$

6-8. 2×2 வரிசையுடைய அணியின் நேர் மாறுடைய அணி காணல்

அலகு அணி :

$x \in R$ எனில் $x \times 1 = x$ என்பதில் 1 என்பது பெருக்கல் சமனி எனப்படும். இதைப்போலவே ஓர் அணியை அலகு அணியால் பெருக்க மீண்டும் அதே அணி கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது 2×2 வர்சையுடைய அலகு அணி ஆகும். இது I எனக் குறிக்கப்படும். அலகு அணிகள் சதுர அணிகளாகும்.

3×3 வரிசையுள்ள அலகு அணி,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

கீழ்க்கண்ட அணிப் பெருக்கல்களைக் காண்க.

(1) $$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

இவற்றிலிருந்து நாம் காண்பது :

1. முதல் அணியில் உள்ள மூல மூலைவிட்ட உறுப்புகள் இரண்டாம் அணியில் இடம் மாறியுள்ளன.

2. முதல் அணியில் உள்ள துணை மூலை விட்ட உறுப்புகள் இரண்டாம் அணியில் குறி மாறியுள்ளன.

3. அவற்றின் பெருக்கற்பலன் அலகு அணி அல்லது அலகு அணியின் ஒரு திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகும்.

மேலும் எடுத்துக்காட்டு 3இல்,

(மூல மூலை விட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்)

— (துணை மூலை விட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்)

$= (4 \times 5) - (7 \times 2) = 6$

எடுத்துக்காட்டு 4இல், $(3 \times (-2)) - (2 \times (-1)) = -4$
6, −4 என்பன அணிகளின் அணிக் கோவை மதிப்பு எனப்படும்.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-7}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{-4} & \frac{-2}{-4} \\ \frac{1}{-4} & \frac{3}{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

எனக் காண்கிறோம்.

இரண்டாம் அணி முதலாம் அணியின் நேர் மாறணி எனப்படும். (2×2) அணியின் நேர்மாறணியைக் காண,

1. மூல மூலை விட்ட உறுப்புகளை இடம் மாற்றுக.
2. துணை மூலை விட்ட உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக.
3. அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு காண்க.
4. மாற்றப்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அணிக் கோவையின் மதிப்பால் வகுக்க.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ இன் நேர் மாறுடைய அணி காண,

படி 1 : $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

படி 2 : $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

படி 3 : $ad - bc$

படி 4 : $\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ இன் நேர் மாறணி

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$ எனக் காணலாம்.

$ad - bc = 0$ ஆனால் நேர்மாறணி கிடையாது என அறிக.

எடுத்துக்காட்டு :

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறணியைக் காண்க.

தீர்வு :

படி 1 : $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

படி 2 : $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

படி 3 : $(2 \times 4) - (-3) \times (7) = 8 + 21 = 29$

படி 4 : $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{29} & \dfrac{-7}{29} \\ \dfrac{3}{29} & \dfrac{4}{29} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறணி $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{29} & \dfrac{-7}{29} \\ \dfrac{3}{29} & \dfrac{4}{29} \end{pmatrix}$

பயிற்சி 6-8

கீழ்க்கண்ட அணிகளுக்கு நேர்மாறணிகள் இருக்குமானால் அவற்றைக் காண்க.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

விடைகள்

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \frac{-3}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{-3}{16} \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-7}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(6), (10) நேர்மாறணி கிடையாது.

6·9. அணிகளைப் பயன்படுத்தி 2 மாறிகளில் உள்ள ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணம் காணல்

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்க்க :

$$3x + 5y = 29$$
$$x + 2y = 11$$

தீர்வு :

$$3x + 5y = 29$$
$$x + 2y = 11$$

என்பதை இரண்டு அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \ldots \quad (1)$$

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ இன் நேர் மாறணி $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

சமன்பாடு (1)இன் இருபுறமும் $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ஆல் முன்புறம் பெருக்க,

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 - 55 \\ -29 + 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x = 3, \quad y = 4$$

தீர்வுக்கணம் $= \{ (3, 4) \}$

எடுத்துக்காட்டு 2:

அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க :

$$4x - 3y = 14$$
$$5x + 2y = 29$$

தீர்வு :

$$4x - 3y = 14$$
$$5x + 2y = 29$$

என்பதை இரண்டு அணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix} \qquad \ldots \quad (1)$$

$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறணி $\begin{pmatrix} \frac{2}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$

சமன்பாடு (1)இன் இருபுறமும் $\begin{pmatrix} \frac{2}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$ ஆல் முன்புறம் பெருக்க,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{23} + \frac{87}{23} \\ \frac{-70}{23} + \frac{116}{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 5, \quad y = 2$

தீர்வுக்கணம் = $\{(5, 2)\}$

பயிற்சி 6-9

அணிகளின் உதவி கொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக்கணங்களைக் காண்க.

(1) $3x + 2y = 5$, $7x + 3y = 10$

(2) $4x + 3y = 17$, $3x + 4y = 18$

(3) $2x + y = 6$, $5x - 3y = 15$

(4) $3x - 5y = 8$, $7x + 2y = 5$

(5) $x - 2y = -8$, $3x + 4y = 26$

(6) $4x - 7y = -53$, $7x - 2y = -21$

(7) $4x - 5y = -6$, $5x - 2y = 1$

(8) $2x - 3y = 1$, $x + 4y = 6$

(9) $3x + 2y = -13$, $x - 4y = 5$

(10) $5x - 7y = 11$, $2x - 3y = 5$

(1) $\{(1, 1\}$ (2) $\{(2, 3)\}$ (3) $\{(3, 0)\}$
(4) $\{(1, -1)\}$ (5) $\{(2, 5)\}$ (6) $\{(-1, 7)\}$
(7) $\{(1, 2)\}$ (8) $\{(2, 1)\}$
(9) $\{(-3, -2)\}$ (10) $\{(-2, -3)\}$

பாடச் சுருக்கம்

1. எண் விவரங்கள் ஒரு செவ்வக அமைப்பில் காட்டப்படுவது அணி எனப்படும்.

   $m \times n$ வரிசையுள்ள அணியில் m நிரைகளும், n நிரல்களும், mn உறுப்புகளும் இருக்கும்.

2. அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியமாகக் கொண்ட அணி பூச்சிய அணி எனப்படும்.

3. ஒரே வரிசை கொண்ட இரு அணிகளில் ஒத்த இடங்களில் உள்ள உறுப்புகள் தனித்தனியே ஒன்றுக்கொன்று சமமானால் அவை சம அணிகளாகும்.

4. ஒரே வரிசையுள்ள அணிகளைத்தான் கூட்ட முடியும். அவற்றின் கூடுதற் பலன் அணியின் உறுப்புகள் அவற்றின் ஒத்த இடங்களிலுள்ள உறுப்புகளின் தனித்தனி கூடுதல்களாகும்.

5. ஓர் அணியின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றின் கூடுதல் தலைகீழிகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் அணி முதலணியின் எதிரணியாகும்.

6. $A - B = A + (-B)$ என வரையறுக்கப்படும்.

7. ஓர் அணியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு குறிப்பிட்ட மெய்யெண்ணால் பெருக்கப்படுவது திசையிலிப் பெருக்கல் எனப்படும்.

8. பெருக்கப்படும் அணியின் நிரல்கள் பெருக்கும் அணியின் நிரைகளுக்குச் சமமானால்தான் அணிப்பெருக்கல் வரையறுக்கப்படுகிறது. நிரை, நிரல் சோடிப் பெருக்கல்களின் கூடுதற் பலன்கள் பெருக்கற் பலனின் உறுப்புகளைத் தரும்.

9. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு $(ab - bc)$ ஆகும்.

10. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு (பெருக்கல் தலைகீழி) அணி.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. சுருக்குக :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

எனில் $A - 2B + 3C$ஐக் காண்க.

3. தீர்க்க : $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} + x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. பெருக்கற்பலன் அணியைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறணியைக் காண்க.

6. அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

$$2x + 3y = 13$$
$$3x + 2y = 12$$

ஆய்லர் (1707 — 1783)

$F + V = E + 2$ என்ற சூத்திரத்தை முன் வகுப்புகளில் நாம் கண்டோம். இதனைக் கண்டறிந்த மாபெரும் கணித மேதை லியோனார்ட் ஆய்லர் (Leonard Euler) என்பவர் ஆவார். இன்றைக்கு இருநூறு ஆண்டுகளுக்கு முன் வாழ்ந்த இவர், சுவிசு நாட்டைச் சேர்ந்தவர். ஆய்லரது ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளைத் தொகுத்து வெளியிடும் பணி கடந்த ஐம்பது ஆண்டுகளாகத் தொடர்ந்து நிகழ்ந்து வருகிறது. ஆயினும், இன்னும் அப்பணி முடிவடையவில்லை. ஆய்லரது படைப்புகளின் அளவும் தன்மையும் அளப்பிலா வியப்பைத் தரும் விரிவு படைத்தவை என்பதை இந்நிகழ்ச்சி உணர்த்துகிறது

1707ஆம் ஆண்டு ஏப்ரல் மாதம் 15ஆம் நாள் ஆய்லர் தோன்றினார். இவர் தந்தையார் ஒரு கிறித்தவ மதப்போதகர். ஆயிலரும் மதப்போதகராக வரவேண்டும் என்றே அவர் தந்தையார் விரும்பினார். ஆனால். கணிதக் கல்வி ஆய்லரின் வாழ்க்கைப் பாதையை மாற்றியமைத்து விட்டது.

பேசில் பல்கலைக் கழகத்தில் தத்துவமும் ஈபுரு மொழியும் ஆயிலர் கற்றார். அப்போது ஜோகனஸ் பெர்னோலி என்ற கணித இயல் அறிஞரின் தொடர்பு இவருக்கு ஏற்பட்டது. மூன்று தலைமுறைகளில். தலைசிறந்த எட்டுக் கணித மேதைகளை உலகிற்களித்த பெருமையுடையது பெர்னோலியின் குடும்பம். அத்தகு சிறப்பு வாய்ந்த பெர்னோலி அவர்கள். ஆய்லருக்கு வாரம் ஒரு பாடம் கற்பிக்க முன்வந்தார். பெர்னோலியின் நட்புடன்—அவர் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த டேவிட். நிகோலசு முதலியோரின் தோழமையும் கிட்டியதால். பெர்னோலியின் குடும்பத்தில் ஒருவராகவே ஆயிலர் மதிக்கப்பட்டார்

உருசியாவிலுள்ள பீட்டர்சுபர்க் கழகம், அக்காலத்தில் உலகின் மாபெரும் அறிவியல் ஆராய்ச்சி நிறுவனமாகத் திகழ்ந்தது. அக்கழகத்தின் மருத்துவத் துறையில் ஆய்வர் சேர்ந்தார். காதுகளைப் பற்றி ஆராய முற்பட்ட அவர், ஒலியின் தன்மையை விளக்கவும் அதைப் பற்றிய பல கோட்பாடுகளை உருவாக்கவும் செய்தார். தம் மருத்துவ ஆய்வுத்துறைப் படைப்புகள் மூலம் எத்துறையிலும் தம்மால் சிறந்து விளங்க இயலும் என்பதை ஆய்லர் மெய்ப்பித்துக் காட்டினார்.

உருசியாவில் கொடுங்கோலாட்சி ஏற்பட்டபின், ஆய்லர் பெர்லின் கழகத்தில் சேர வந்த அழைப்பினை ஏற்றார். அப்போது

பிரசிய நாட்டு அரசி அவரிடம் வலிய வந்து நட்பு பாராட்ட முற்பட்டார். ஆனால் ஆய்லரோ, அரசியின் நட்பு கண்டு மகிழாமல் ஓரிரு சொற்கள் மட்டுமே பதிலளித்தார். ''என்னுடன் பேச ஏன் விரும்பவில்லை?'' என்ற அரசியின் வினாவிற்கு. ஆயிலர் சொன்ன பதில்: ''பேசினால் தூக்கிலிடும் நாட்டிலிருந்து வந்தவன் நான்''. இப்பதிலின் மூலம் அவர் அடைந்திருந்த மனத் துயரை ஒருவாறு உணரமுடியும்.

அப்போது பெர்லினை ஆண்டுவந்த பிரெடரிக் அரசர். ஆய்லரின் பேரறிவைப் பலவகையிலும் பயன்படுத்திக்கொண்டார். நாட்டு நாணய முறை, நீர்ப்பாசனம். ஆற்றுவழிச் செலவு, ஒய்வூதியக் திட்டம் முதலிய பல துறைகளிலும் ஈடுபட்டு வெற்றி கண்ட ஆய்லரின் பேரறிவு வியக்கத் தக்கதாகும். இன்றும் உலகின் பல நாடுகளில் நடைமுறையில் இருந்துவரும் 'அரசு ஊழியர் ஓய்வூதியத் திட்டம்' ஆய்லர் வழியில் வந்தவையே ஆகும்.

அரசவையிலே சாதுரியமாகப் பேசும் ஆற்றல் இல்லாத காரணத்தினால், பிரெடரிக் அரசருக்கு ஆய்லர் மீதிருந்த பற்று குறையத் தொடங்கியது. சூழ்நிலை மாற்றத்தை உணர்ந்த அறிஞர் ஆய்லர், மீண்டும் பீட்டர்சுபர்க் (இன்றைய லெனின் கிராடு) நகருக்குச் சென்று, தம் ஆராய்ச்சிப் பணியைத் தொடர்ந்தார். அப்போது உருசியாவில் கேதரைன் அரசியின் தலைமையில் புதிய ஆட்சி சிறப்பாக நிகழ்ந்தது. ஆய்லரையும் அவர் தம் குடும்பத்தினர் பதினெண்மரையும் அரசி பரிவோடு கவனித்தார். முன்னரே ஒருகண் பார்வையை இழந்திருந்த ஆய்லர், அப்போது அடுத்த கண் பார்வையையும் இழக்கலானார். முழுக் குருடரான பின்னும் ஆய்லரது அறிவாற்றல் இம்மியும் குறையவில்லை. இளம் வயதிலேயே பல காப்பியங்களை மனப்பாடம் செய்து வளர்த்த நினைவாற்றல் அவருக்குப் பெருந்துணையாய் விளங்கியது. மிகக் கடினமான ஒரு கணக்கை அவரது இரு மாணவர்கள் போட்டு விடையில் 50ஆம் இலக்கத்தில் மாறுபட்ட எண்களைப் பெற்றனர். இவ் வேறுபாட்டை ஆய்லரிடம் தெரிவித்தபோது. மனத்திலேயே அக் கணக்கைப் போட்டுச் சரியான விடையை உடனே தெரிவித்தார். உடற்குறை இருப்பினும் ஒரு மனதோடு ஈடுபட்டு முயன்றால் அடைய முடியாதது எதுவுமில்லை என்பதற்கு ஆய்லரே சான்றாவார். அவரின் நினைவாற்றலையும் மனத்திறனையும் இந் நிகழ்ச்சியின் மூலம் புரிந்துகொள்ளலாம்.

கணித உலகம், ஆய்லரின் அறிவுத் திறனால் அடைந்த பயன்கள் மிகப் பலவாகும். கன உருவங்களின் உச்சிகள் விளிம்புகள் முகங்கள் இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் கண்டறிந்தவர் ஆய்லரே ஆவர். 'கோனிக்ஸ்பர்க் புதிர் என்ற புகழ் வாழ்ந்த புதிரை விடுவித்தவரும் அவரே ஆவார். ஆய்லர் வாழ்ந்த காலம் வரலாற்றுச் சிறப்பைப் பெற்றதுபோலவே, அவரது மறைவும் வரலாற்றுச் சிறப்புடையதாகும்.

ஒரு நாள் மாலை நேரத்தில், புதிதாகக் கண்டறியப் பெற்ற பலூன்களின் விண்வெளிப் பயணத்தை ஒட்டி சில கணக்குகளை ஆய்லர் போட்டார். இரவில் நண்பர்களுடன் விருந்து உண்டார். தம் பேரனுடன் சிறிது நேரம் விளையாடிய பின், புகைக் குழலைக் கீழே வைத்து 'நான் சாகிறேன்' என்று சொல்லி உயிர்விட்டார். ஆய்லரின் அறிவுத் திறன் மட்டுமல்ல, அவர் மறைவும் வியப்பிற்குரியதாகும்.

விழியொளி இழந்த ஆய்லர், உலகிற்கு அறிவொளி தந்தார். அவரது வாழ்க்கைப் பயணத்தில் மகிழ்ச்சியும் சோர்வும் மாறி மாறி வந்தன. இருப்பினும், ஒரே மனத்துடன் அறிவாராய்ச்சியில் ஈடுபட்டு உழைத்தார். தாம் உலகில் தோன்றியது ஒரு பெரும் நோக்கத்தின் பொருட்டே என்பதை உணர்ந்து வாழ்ந்தவர் ஆவர்.

அவர் வாழ்க்கையில் நிகழ்ந்த நிகழ்ச்சிகள் பலவும், நமக்குப் படிப்பினை தருவனவாகும். ஆய்லரைப்போல நினைவாற்றலும், சிறந்ததைச் செய்யவேண்டும் என்ற சிந்தனையும், நினைத்ததைச் சாதிக்கும் திறனும் ஒவ்வொருவரும் பெற முயலவேண்டும். அங்ஙனம் முயன்றால், பிற்காலம் பொற்காலமாக அமையும் என்பதில் எள்ளளவும் ஐயமில்லை.

7. வடிவ் இயல்

7-1. திருப்புதல்

7-1-1. சர்வ சமபக்க முக்கோணங்கள்

ஒரு தளத்தில் ஒரே கோட்டில் அமையாத A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளால் தீர்மானிக்கப்படும் $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ என்ற மூன்று கோட்டுத் துண்டுகளின் சேர்ப்பு ஒரு முக்கோணம் எனப்படும். அது $\triangle ABC$ என்று குறிக்கப்படும் என்று முன் வகுப்பில் படித்தோம். முக்கோணங்களைப்பற்றி முன்னர் நாம் கற்ற கருத்துகளை இப்பொழுது திருப்பிப் பார்ப்போம்.

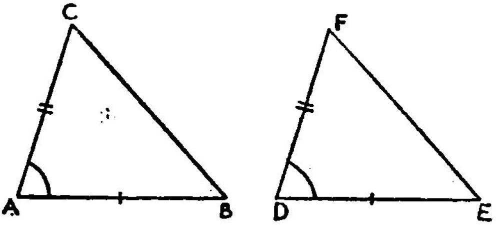
இரண்டு வடிவ இயல் உருவங்கள் ஒரே அளவும் ஒரே உருவமும் கொண்டிருந்தால் அவை சர்வசமம் எனப்படும்.

(i) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$இல்

$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$

$\overline{AC} \equiv \overline{DF}$

$\angle A \equiv \angle D$



படம் 7-1.

'பக்கம் கோணம் பக்கம்' அடிக்கோளின்படி,

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

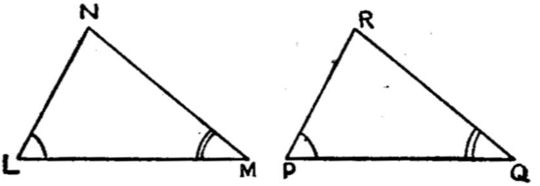
கவனிக்க :

சமபக்கங்களிடையேயுள்ள கோணங்கள் சமமானால்தான் முக்கோணங்கள் சர்வசமம் ஆகும்.

$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$; $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$; $\angle C \equiv \angle F$ ஆனால் அவை சர்வசமமாக இருக்கத் தேவையில்லை

(ii) $\triangle LMN$, $\triangle PQR$இல்.

$$\angle L \equiv \angle P$$
$$\angle M \equiv \angle Q$$
$$\overline{LM} \equiv \overline{PQ}$$



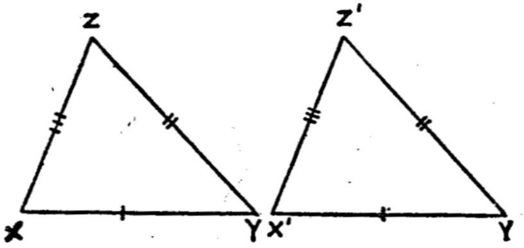
படம் 7-2.

'கோணம் பக்கம் கோணம்' அடிக்கோளின்படி,

$$\triangle LMN \equiv \triangle PQR.$$

(iii) $\triangle XYZ$, $\triangle X'Y'Z'$இல்.

$$\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$$
$$\overline{YZ} \equiv \overline{Y'Z'}$$
$$\overline{ZX} \equiv \overline{Z'X'}$$



படம் 7-3.

'பக்கம் பக்கம் பக்கம்' அடிக்கோளின்படி,

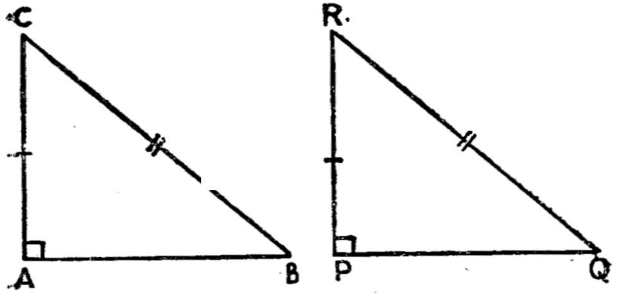
$$\triangle XYZ \equiv \triangle X'Y'Z'$$

(iv) $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ என்ற இரு செங்கோண முக்கோணங்களில்,

$$m\angle A = m\angle P = 90^\circ$$

$$\overline{AC} \cong \overline{PR}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{QR}$$



படம் 7-4.

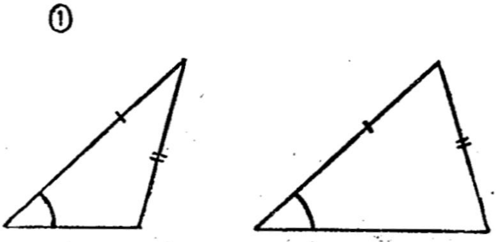
'கர்ணம் பக்கம்' அடிக்கோளின்படி

செங்கோண $\triangle ABC \cong$ செங்கோண $\triangle PQR$.

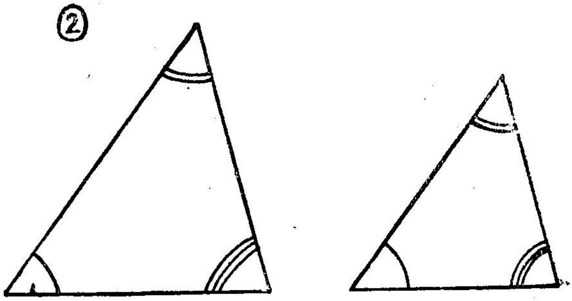
பயிற்சி 7-1·1

சர்வ சமபாகங்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ள பின்வரும் முக்கோணச் சோடிகள் சர்வ சமபக்க முக்கோணங்களா ? காரணம் கூறுக.

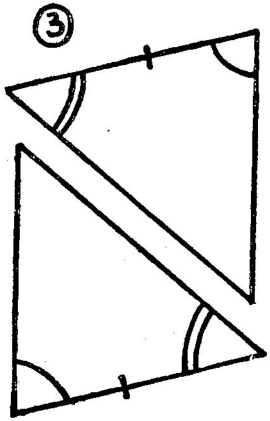
(1)



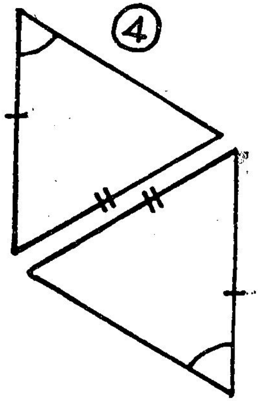
படம் 7-5.



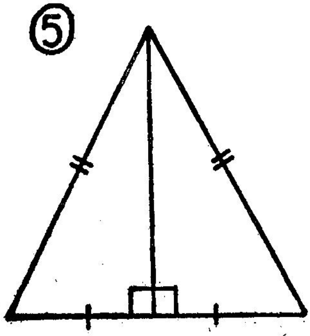
படம் 7-6.



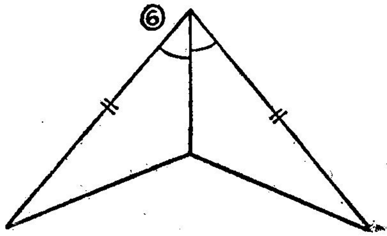
படம் 7-7.



படம் 7-8.

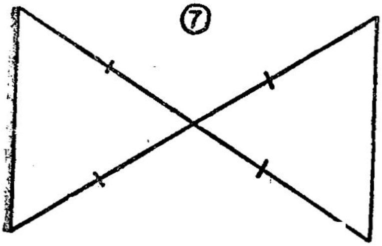


படம் 7-9.



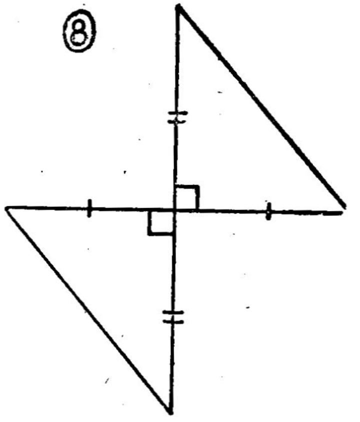
படம் 7-10.

⑦



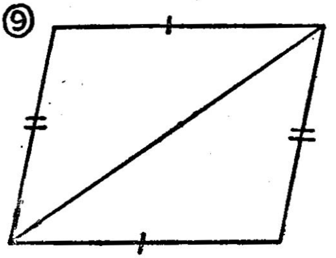
படம் 7-11.

⑧



படம் 7-12.

⑨



படம் 7-13.

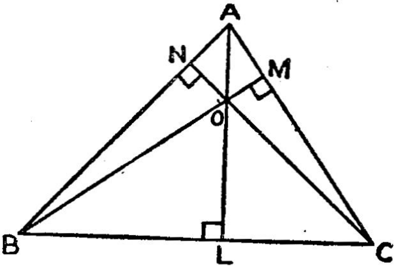
விடைகள்

(1) இல்லை (2) இல்லை (3) ஆம், 'கோ ப கோ' (4) இல்லை. (5) ஆம், 'க ப' (6) ஆம், 'ப கோ ப' (7) ஆம், 'ப கோ ப' (8) ஆம், 'ப கோ ப' (9) ஆம், 'ப ப ப'

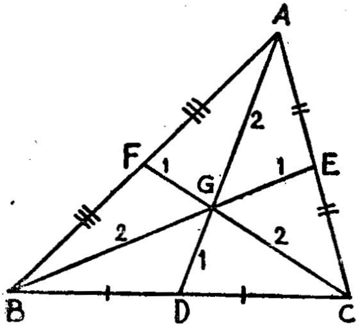
7-1-2. புள்ளி வழிக் கோடுகள்

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் அவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனப்படுகின்றன. இப்பொழுது ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

1. $\triangle ABC$இல், A, B, C என்ற உச்சிகளிலிருந்து முறையே $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ என்ற செங்கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவை சந்திக்கும் புள்ளி O, $\triangle ABC$இன் செங்கோட்டு மையம் எனப்படும்.



படம் 7-14.



படம் 7-15.

2. $\triangle ABC$இல்,

$BD = DC$

$CE = EA$

$AF = FB$ எனில்,

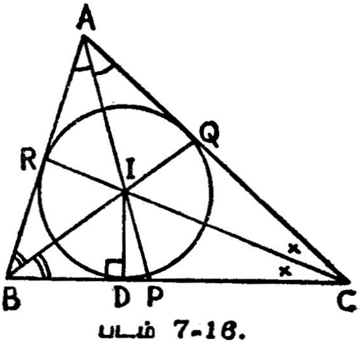
$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$

நடுக் கோடுகள் ஆகும். இவை மூன்றும் சந்திக்கும் புள்ளி G.

$AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$ எனவும் காணலாம்.

G, முக்கோண மையம் எனப்படும்.

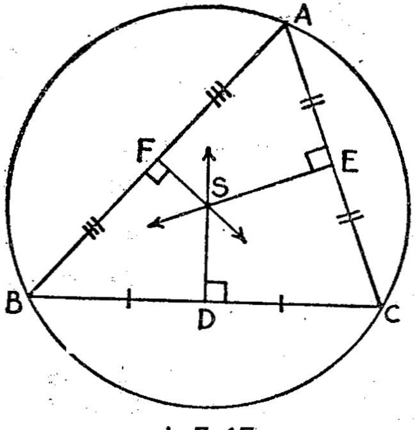
3. $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ முறையே $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ஆகியவற்றை இரு சமக் கூறிடுகின்றன. இம் மூன்று கோட்டுத் துண்டுகளும் I என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன. $\overline{ID} \perp \overline{AC}$ ஆக வரைக. Iஐ மையமாகவும், IDஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ஆகிய பக்கங்களைத் தொடும். எனவே, I, முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையம் எனப்படுகிறது.



படம் 7-16.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லுகின்றன. இப் புள்ளி **சுற்று வட்ட மையம்** எனப்படுகிறது.

$\triangle ABC$இல், D, E, F முறையே, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும்.



படம் 7-17.

$\overline{DS} \perp \overline{BC}$

$\overline{ES} \perp \overline{CA}$

$\overline{FS} \perp \overline{AB}$

$\overline{DS}$, $\overline{ES}$, $\overline{FS}$ ஆகிய மையக் குத்துக் கோடுகள் S என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. Sஐ மையமாகவும், SA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் A, B, C வழியே செல்லுகிறது. S, $\triangle ABC$ இன் சுற்று வட்ட மையம் ஆகும்.

பயிற்சி 7-1·2

தாள் மடித்தலின் மூலம் பின்வரும் உண்மைகளைக் காண்க.

1. ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு உச்சிக் கோணத்தை இரு சமக் கூறிடுகிறது.

2. ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அடிப்பக்கத்தை இரு சமக் கூறிடுகிறது.

3. ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம், உள் வட்ட மையம், சுற்று வட்ட மையம் ஆகியவை ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

4. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம், உள் வட்ட மையம், செங்கோட்டு மையம் ஆகிய மூன்றும் வெவ் வேறானவையல்ல. ஒரே புள்ளி ஆகும்.

5. ஒரு விரிகோண முக்கோணத்தில் சுற்று வட்ட மையமும் செங்கோட்டு மையமும் முக்கோணத்திற்கு வெளிப்புறம் அமைகின்றன.

7-1·3. வட்டங்கள்

வட்டம் ஓர் எளிய மூடிய வளைவு. வட்டமும் அதன் உட்புறமும் சேர்ந்து வட்டப்பகுதி எனப்படுகிறது. வட்டத்தின் நாண்கள், விற்கள், கோணங்கள் ஆகியவை பற்றி நாம் அறிந்து கொண்ட கருத்துக்களை மீண்டும் நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

(1) ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம நாண்கள் வட்ட மையத்தி லிருந்து சம தொலைவில் உள்ளன.

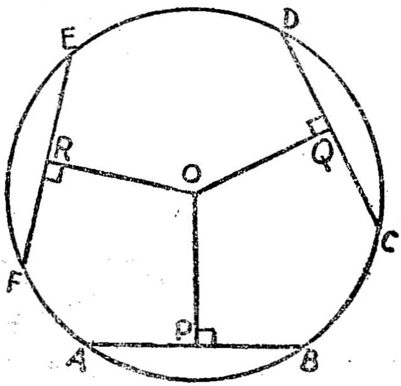
வட்ட மையம் O

$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF}$

$\overline{OP} \perp \overline{AB}, \overline{OQ} \perp \overline{CD},$

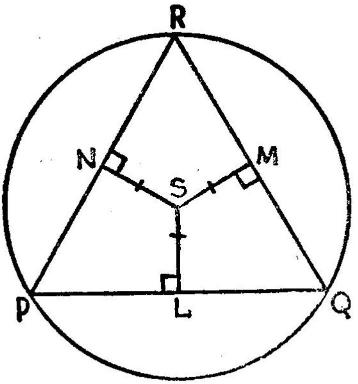
$\overline{OR} \perp \overline{EF}$ எனில்

$OP = OQ = OR$



படம் 7-18.

மறுதலையாக ஒரு வட்ட மையத்திலிருந்து சமதொலைவில் உள்ள நாண்கள் சர்வசமம்.



வட்ட மையம் S

$\overline{SL} \perp \overline{PQ}$

$\overline{SM} \perp \overline{QR}$

$\overline{SN} \perp \overline{RP}$

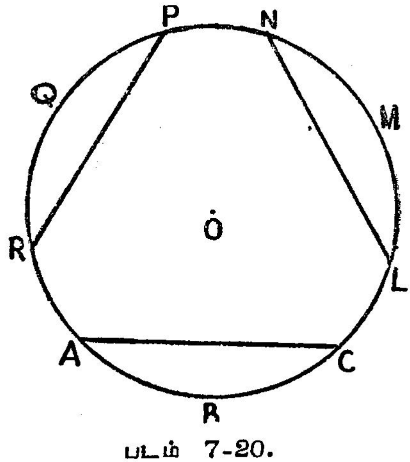
$SL = SM = SN$ எனில்

$\overline{PQ} \equiv \overline{QR} \equiv \overline{RP}$

படம் 7-19.

(2) ஒரு வட்டத்தின் சர்வ சம நாண்கள் சர்வசம விற்களை வெட்டுகின்றன.

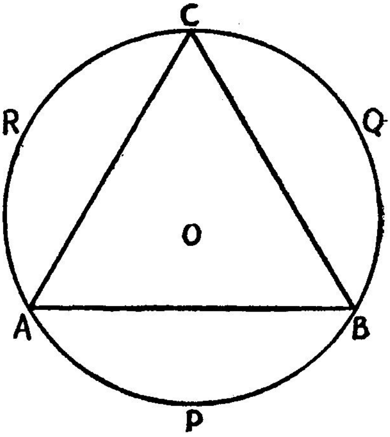
Oஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில்



படம் 7-20.

$\overline{AC} \equiv \overline{LN} \equiv \overline{PR}$ எனில்,

$\widehat{ABC} \equiv \widehat{LMN} \equiv \widehat{PQR}$



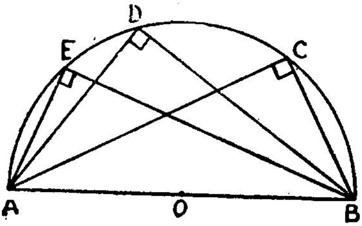
மறுதலையாக ஒரு வட்டத்தின் சர்வசம விற்கள் சர்வசம நாண்களை உண்டாக்குகின்றன.

$\widehat{APB} \equiv \widehat{BQC} \equiv \widehat{CRA}$ எனில்

$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$

படம் 7-21.

(3) ஓர் அரை வட்டத்தில் அமையும் வட்டக் கோணம் செங்கோணம் ஆகும்.

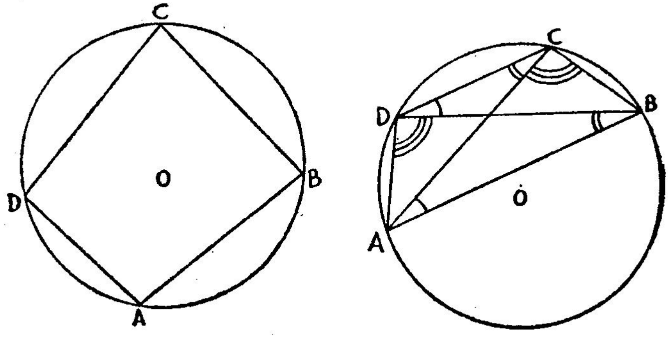


$\overline{AOB}$ விட்டம் எனில் $\widehat{AB}$இல்

$$m\angle ACB = m\angle ADB = m\angle AEB = 90°$$

படம் 7-22.

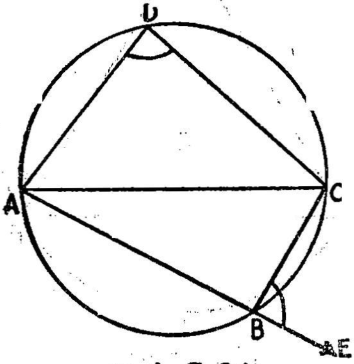
(4) ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.



படம் 7-23.

ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம் எனில்

$$m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D = 180°$$



படம் 7-24.

மேலும் *ABCD* என்ற வட்ட நாற்கரத்தில்

$$m\angle D = m\angle CBE = m\angle BAC + m\angle BCA$$

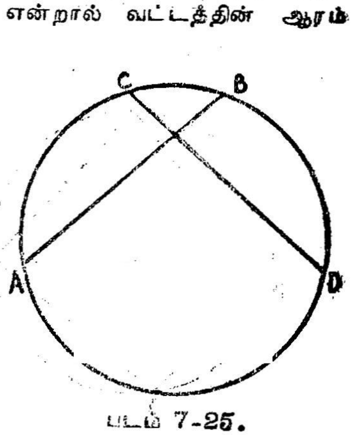
பயிற்சி 7-1·3

க. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு விட்டமும் ஒரு நாணும் பொது முனைப் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளன. விட்டத்தின் நீளம் 20 செமீ, நாணின் நீளம் 16 செமீ எனில் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாண் எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது எனக் காண்க,

உ. ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது. தொடு கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்பட்ட நாண் தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட ஆரத்தை இருசமக் கூறிடுகிறது. நாணின் நீளம் 18 செமீ என்றால் வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு ?

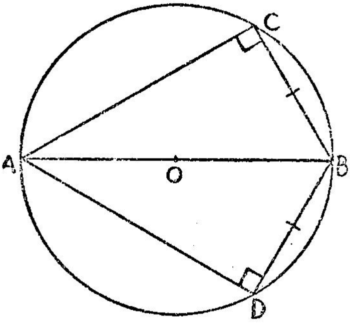
௩. $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ எனில்

$\widehat{AC}$-க்கு சர்வ சமமான வில் எது ?



படம் 7-25.

4. $\overline{AB}$ ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். அதற்கு எதிர்ப்புறங்களில் வட்டத்தின்மீது $BC = BD$ என்றவாறு C, D என்ற இரு புள்ளிகள் உள்ளன. இப்பொழுது $\triangle ABC$ யும் $\triangle ABD$ யும் சர்வசமமா ? ஏன் ?



படம் 7-26.

5. $\widehat{ACB}$ என்ற ஓர் அரை வட்டத்தில் வரையப்பட்ட $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ என்ற நாண்களுக்கு வட்ட மையம் O-விலிருந்து முறையே $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ என்பவை செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டுகள் எனில் $\angle DOE$இன் அளவு யாது ?

6. $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $m\angle DCA + m\angle DAC$ நாற்கரத்தின் எக்கோணத்தின் அளவுக்குச் சமம் ?

செய்து பாருங்கள்

ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் ஒரு நாணைக் குறிக்க. அந் நாணுக்குச் சர்வ சமமான பல நாண்களை வரைந்து அவற்றின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்க. இம் மையப் புள்ளிகள் அனைத்தும் எடுத்துக் கொண்ட வட்டத்திற்குள்ளே ஒரு பொது மைய வட்டமாக அமைகின்றன.

விடைகள்

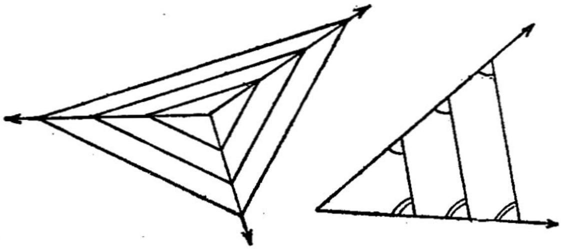
(1) 6 செமீ (2) $6\sqrt{3}$ (3) $\widehat{BD}$ (4) ஆம், "கப"
(5) $90°$ (6) $m\angle B$.

7-2. வடிவியல் கருத்துகள்.

இப்போது பல புதிய வடிவியல் கருத்துகளை தாள் மடித்தல், தாள் வெட்டுதல் மூலமாகக் கற்றுக்கொள்வோம். படங்கள் வரைந்து அவற்றைச் சரி பார்ப்போம். மேலும், கணக்கிடுதல் மூலம் அவை பயன்படும் வகைகளையும் அறிந்து கொள்வோம்.

7-2-1. வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

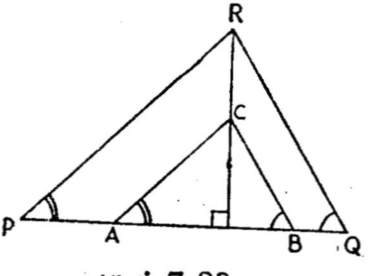
ஈரளவையுருவங்களில் மிக எளிய உருவம் முக்கோணமாகும்.



படம் 7-27.

ABC என்னும் ஒரு முக்கோணம் வரைக. அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க. இவ்வளவுகளைப்போல இரு மடங்கு பக்க அளவுகளுள்ள முக்கோணம் PQR ஐ வரைக. இவ்விரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோண அளவுகளைக் காண்க. அவை எவ்வாறு உள்ளன ?

ஒத்த கோண அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் எனப்படும்.



படம் 7-28.

$\triangle ABC$, $\triangle PQR$ வடிவொத்தவை என்க. இதனை,
$\triangle ABC ||| \triangle PQR$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$m\angle A \equiv m\angle P, \quad m\angle B \equiv m\angle Q, \quad m\angle C \equiv m\angle R$$

$$AB : PQ = BC : QR = CA : RP$$

அல்லது $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

இதைப் போலவே (அ) மும்மடங்கு (ஆ) அரை மடங்கு பக்க அளவுகள் உள்ள முக்கோணங்கள் வரைந்து முன்போலவே ஒத்த சோடிக் கோணங்களின் அளவுகளைக் காண்க. ஒத்த சோடிப்பக்க அளவுகளின் விகிதங்களைக் காண்க. இவற்றி லிருந்து வடிவொத்த முக்கோணங்களில் பக்க அளவுகள் மாறு கின்றனவேயன்றி கோண அளவுகள் மாறுவதில்லை என்பதை அறியலாம்.

> இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதங்கள் சமம்.

மறுதலையாக,

> இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்களின் அளவு களின் விகிதங்கள் சமமானால், அம் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

மேலே கண்டறிந்தவைகளைக் கொண்டு நமக்குத் தேவை யான விகித சமங்களைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\triangle ABC$, $\triangle ADE$ இல்

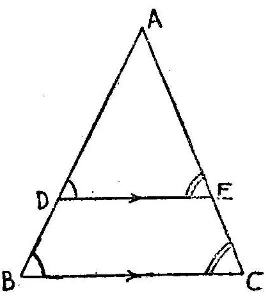
$$\angle A \equiv \angle A$$

$$\angle B \equiv \angle D$$

$$\angle C \equiv \angle E$$

$\therefore \triangle ABC ||| \triangle ADE$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$



படம் 7·29.

$$\frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1 \quad \text{(இருபுறமும் 1 ஐக் கழிக்க)}$$

$$\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$$

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$$

படம் 7-28 இல் $\triangle ABC$ இன் உயரம் h_1, $\triangle PQR$ இன் உயரம் h_2 எனில், $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = k$

$$\therefore \ AB = k\,PQ$$

மேலும், $h_1 = k\,h_2$

$$\triangle ABC \text{ இன் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times AB \times h_1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot PQ \cdot k \cdot h_2$$

$$= \frac{1}{2} k^2 \cdot PQ \cdot h_2$$

$$\triangle PQR \text{ இன் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times PQ \times h_2$$

$$\therefore \ \triangle ABC : \triangle PQR = \frac{1}{2} k^2 \cdot PQ \cdot h_2 : \frac{1}{2} PQ \cdot h_2$$

$$= k^2 : 1$$

எனவே வடிவொத்த முக்கோணங்களில் பக்கங்கள் $k : 1$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகள் $k^2 : 1$ என்ற விகிதத்திலிருக்கும்.

பொதுவாக,

> வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் $l : m$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகள் $l^2 : m^2$ என்ற விகிதத்திலிருக்கும்.

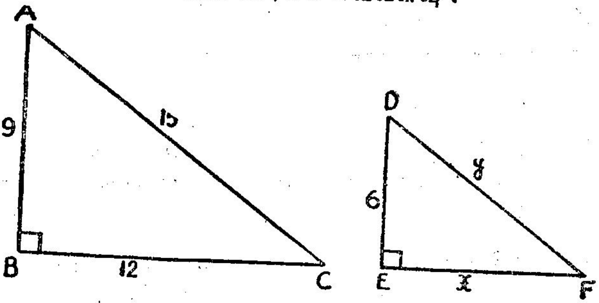
பயிற்சி 7-2·1

1. $\triangle ABC$ இல்

$AB = 9$; $BC = 12$; $CA = 15$

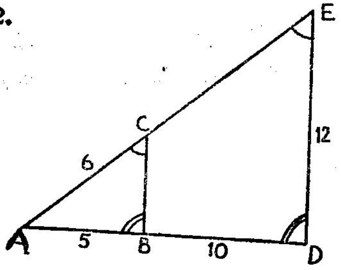
$\triangle DEF$ இல் $DE = 6$

$\triangle ABC \;|||\; DEF$ எனில் EF, FD எவ்வளவு ?



படம் 7-30.

2.



படம் 7-31.

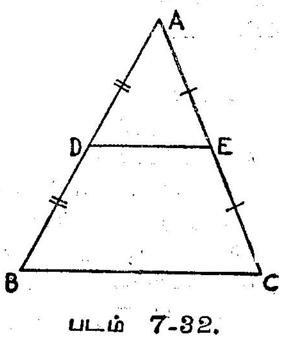
படம் 7-31 இல்

BC, CE இன் மதிப்பு என்ன ?

3.

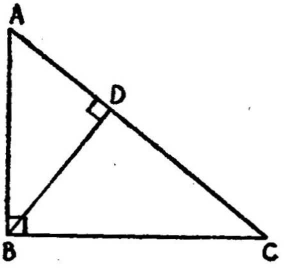
படம் 7-32 இல் DE எவ்வளவு ?

$\triangle ABC$, $\triangle ADE$ வடிவொத்த முக்கோணங்களா ?



படம் 7-32.

4.



படம் 7-33

படம் 7-33 இல் இருந்து எவையேனும் இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களை எழுதுக.

5. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் அடிப்பக்கங்களின் விகிதம் 4 : 7 என்றால் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

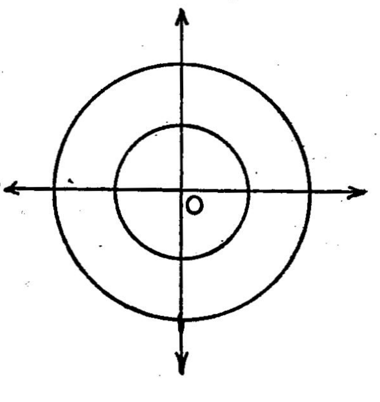
6. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் 4 : 9. அவற்றின் அடிப்பக்கங்களின் விகிதம் என்ன ?

விடைகள்

(1) $x = 8$, $y = 10$ (2) 4, 12 (3) $DE = \frac{1}{2} BC$, ஆம்
(4) $\triangle ABC$, $\triangle BDC$, $\triangle ADB$ இவற்றில் எவையேனும் இரண்டு
(5) 16 : 49 (6) 2 : 3

7-2·2. வடிவொத்த உருவங்கள்

அசைவற்ற நீர்ப் பரப்பில் ஒரு சிறு கல்லை எறிந்தால் கல் விழுந்த இடத்தில் உருவாகும் ஒரு சிறு வட்டம் ஒரே சீராகப் பெரிய வட்டமாக எல்லாத் திசைகளிலும் வளர்ந்து கொண்டு போவதைப் பார்த்திருக்கிறோம்.

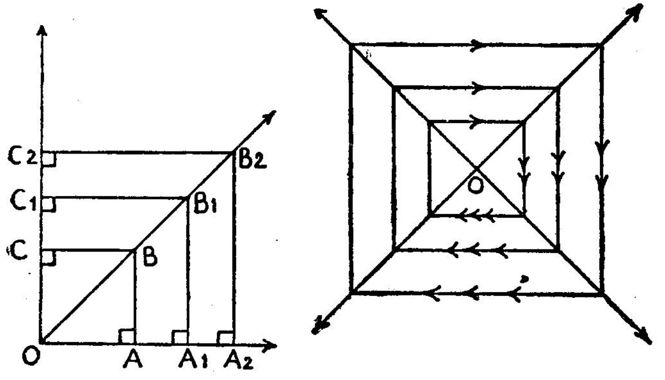


படம் 7-34.

வட்டங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் தெரிந்தால் அவ் வட்டங்களின் பரப்புகளின் விகிதத்தைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2 அலகுகள் என்றால் அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே πr_1^2, πr_2^2

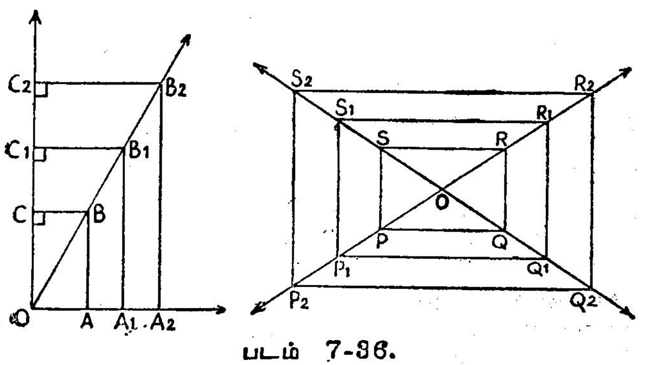
சதுர அலகுகள் ஆகும். எனவே, ஆரங்களின் விகிதம் $r_1 : r_2$ என்றால் வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் $\pi r_1^2 : \pi r_2^2$ $= r_1^2 : r_2^2$ ஆகும்.

நிழற் படத்தை எடுத்து அதைப் பெரிதாக்குவதை நாம் காண்கிறோம். ஒரு சதுர வடிவப் படம் பெரிதாக்கப்படும்போது எல்லாப் பகுதியுமே பெரிதாக்கப்படுகிறதேயன்றி ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி மட்டும் பெரிதாக்கப்படுவதில்லை. எனவே, படத்தின் பக்க நீளம் பெரிதாகுமேயன்றி கோண அளவுகள் மாறா.



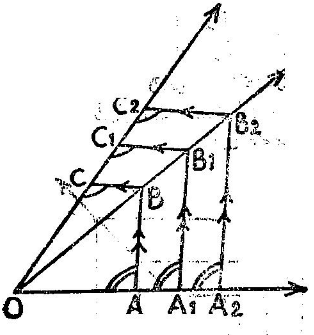
படம் 7-35.

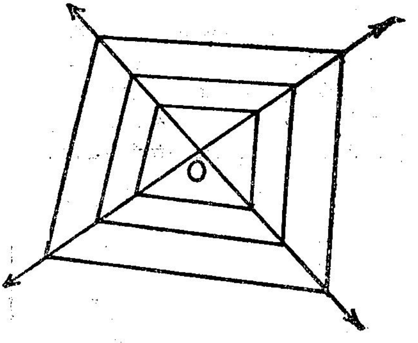
இரண்டு சதுர வடிவப் படங்களின் பக்க அளவுகளின் விகிதம் $a_1 : a_2$ என்றால் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் $a_1^2 : a_2^2$ ஆகும். படங்களின் முனைக் கோணங்கள் எப்பொழுதும் $90°$ ஆகத்தான் இருக்கும்.



படம் 7-36.

வடிவொத்த சதுரங்கள், செவ்வகங்கள், நாற்கரங்கள் ஆகிய வற்றைப் படத்தில் உள்ளவாறு அமைத்துக் காட்டலாம்.

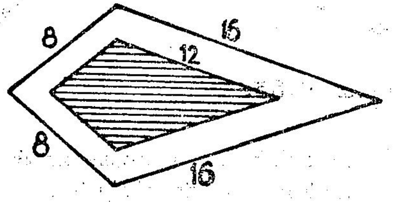




படம் 7-37.

பயிற்சி 7·2·2

1. படத்தில் பெரிய நாற்கர வடிவக் காற்றாடியின் உட்பகுதியில் வடிவொத்த சிறிய நாற்கர வடிவ வண்ணக் காகிதம் ஒட்டப்படுகிறது. வண்ணக் காகிதத்தின் மற்ற பக்க அளவுகளைக் காண்க.



படம் 7-38.

2. 4 செமீ நீளமும், 3 செமீ அகலமும் உள்ள நிழற் படம் 7·5 செமீ அகலமுள்ளதாகப் பெரிதாக்கப்பட்டால் அதன் நீளம் எவ்வளவு ?

3. இரு சதுரங்களின் பக்க அளவுகளின் விகிதம் 3 : 5 என்றால் அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

4. இரு சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் 16 : 25 எனில், அவற்றின் பக்க அளவுகளின் விகிதம் என்ன ?

5. பக்க அளவு 4 அலகுகள் கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவைப்போல் 4 மடங்கு பரப்பளவு கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் பக்க அளவு யாது ?

6. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் 6 செமீ, அகலம் 5 செமீ. அதைப் போல் 2 மடங்கு பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு யாது?

விடைகள்

(1) 6, 6, 12 (2) 10 செமீ (3) 9 : 25

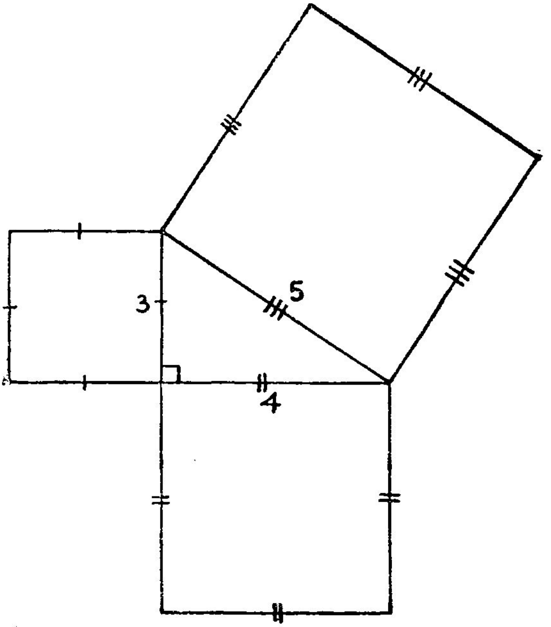
(4) 4 : 5 (5) 8 (6) 120 செமீ^{2}

7-2·3. பிதாகரஸ் தேற்றம் - I

ஒரு வரைபடத் தாளில் பக்க அளவுகள் 3, 4, 5 அலகுகள் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. 3, 4 அலகுகளுள்ள பக்கங்களின் சேர்ப்பு, செங்கோணமாக அமைவதைக் காண்க. ஒவ்வொரு பக்கத்தின்மீதும் ஒரு சதுரம் வரைக. அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே 9, 16, 25 செமீ^{2} ஆக உள்ளதை வரைபடத் தாளிலிருந்து காணலாம்.

இப்பொழுது $9 + 16 = 25$.

அ-து. $3^2 + 4^2 = 5^2$.



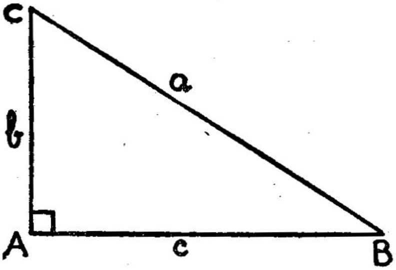
படம் 7-39.

இதைப்போலவே வரைபடத் தாளில் பக்க அளவுகள் 5, 12, 13 அலகுள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைக. 5, 12 அலகுள்ள பக்கங்களின் சேர்ப்பு செங்கோணமாக அமைவதைக் காண்க. ஒவ்வொரு பக்கத்தின்மீதும். ஒரு சதுரம் வரைக. அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே 25, 144, 169 ஆகும்.

இப்பொழுது $25 + 144 = 169$

$5^2 + 12^2 = 13^2$ எனக் காண்கிறோம்.

பொதுவாக,



படம் 7-40.

$\triangle ABC$இல் $m\angle A = 90°$ என்றால்

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

அ-து. $a^2 = b^2 + c^2$

எனவே,

> ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் அளவின் வர்க்கம் செங்கோணப் பக்கங்களின் அளவுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

பிதாகரஸ் (*c* 582 *B·C*) என்ற கிரேக்கக் கணித வல்லுநர் பெயரால் இது பிதாகரஸ் தேற்றம் என வழங்கப்படுகிறது.

4000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே பாபிலோனியர் சில குறிப்பிட்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதங்களை அறிந்திருந்ததும், எகிப்தியர் கட்டிய பிரமிடுகளின் அடிப்பக்கங்களின் மூலைகள் செங்கோணமாக அமைய 3 : 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ள முடிச்சுக் கயிறுகளைப் பயன்படுத்திய வகையும் வியப்பிற்குரியன ஆகும்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் அதன் பக்கங்களின் வர்க்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன என்று அறிந்

தோம். மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் வர்க்கங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் கொண்டு அம்முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா எனத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் 9, 12, 15 அலகுகள் எனில் அஃது ஒரு செங்கோண முக்கோணமா ?

தீர்வு :

$9^2 = 81,\ 12^2 = 144,\ 15^2 = 225\ ;\ 15^2 = 9^2 + 12^2$ என்பதால் 9, 12 அலகுள்ள பக்கங்கள் செங்கோணப்பக்கங்கள், 15 அலகுள்ள பக்கம் கர்ணம் எனத் தீர்மானிக்கலாம். எனவே, 9, 12, 15 என்ற பக்க அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

பொதுவாக ஒரு முக்கோணத்தில் $a^2 = b^2 + c^2$ என்றால் a கர்ணத்தின் அளவையும் b, c செங்கோணத்தின் பக்க அளவுகளையும் குறிக்கும்.

இதைப் போலவே மூன்று அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளாக இருக்குமா எனக் கண்டறியலாம்.

எனவே,

> ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்க அளவின் வர்க்கம் மற்ற இருபக்க அளவுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமமானால் அம்முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். பெரிய பக்கத்திற்கெதிரேயுள்ள கோணம் செங்கோணம் ஆகும்.

பயிற்சி 7·2·3

1. பின்வரும் பக்க அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா எனச் சோதிக்க.

   (i) 12, 20, 16

   (ii) 26, 10, 24

   (iii) 8, 15, 16

2. 3, 4, 5, பக்க அளவுகள் கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தைப்போல் (i) இருமடங்கு (ii) மும்மடங்கு (iii) நான்கு மடங்கு பக்க அளவுகள் கொண்ட முக்கோணங்கள் செங்கோண முக்கோணங்களா ?

3. பின்வரும் செங்கோணப் பக்க அளவுகள் கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் அளவைக் காண்க.

(i) 1·5, 2 (ii) 2·5, 6 (iii) 1, $1\frac{1}{3}$

4. பின்வரும் கர்ணத்தின் அளவும் செங்கோணப் பக்கத்தின் அளவும் முறையே கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மற்றொரு செங்கோணப் பக்கத்தைக் காண்க.

(i) 1·3, 0·5 (ii) 1·5, 1·2 (iii) 1·7, 0·8

விடைகள்

1. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) இல்லை 2. ஆம்

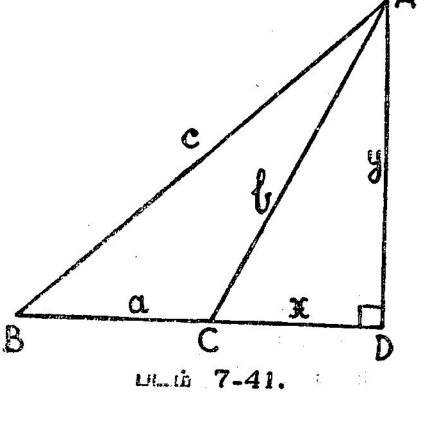
3. (i) 2·5 (ii) 6·5 (iii) $1\frac{2}{3}$

4. (i) 1·2 (ii) 0·9 (iii) 1·5

7·2·4. பிதாகரஸ் தேற்றம் - II

எடுத்துக்காட்டு :

படத்தில் $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ எனக் காட்டு.



படம் 7-41.

தீர்வு :

செங்கோண $\triangle ADB$இல்

$$AB^2 = AD^2 + DB^2$$

$$AB^2 = AD^2 + (DC + CB)^2$$

$$c^2 = y^2 + (x + a)^2$$

$$c^2 = y^2 + x^2 + 2ax + a^2$$

செங்கோண $\triangle ADC$இல், $y^2 + x^2 = b^2$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$$

பயிற்சி 7·2·4

1.

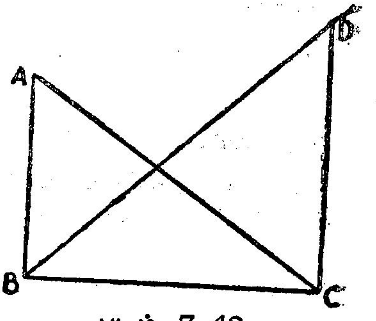
படம் 7-42 இல்

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$,

$\overline{DC} \perp \overline{BC}$ எனில்

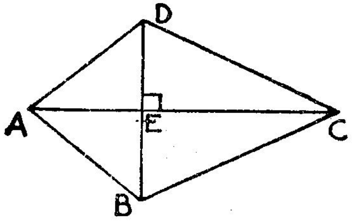
$AC^2 - AB^2 = BD^2 - DC^2$

எனக் காட்டுக.



படம் 7-42.

2.



படம் 7-43.

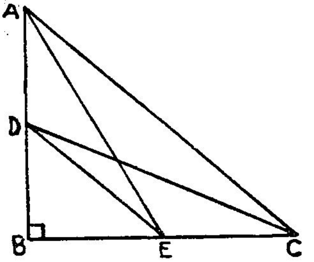
படம் 7-43 இல்

$\overline{DB} \perp \overline{AC}$ எனில்

$AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$

எனக் காட்டுக.

3.



படம் 7-44.

படம் 7-44 இல்

$m\angle ABC = 90°$ எனில்

$AC^2 + DE^2 = AE^2 + DC^2$

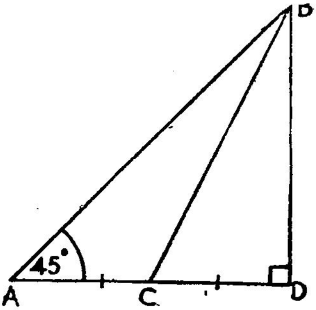
எனக் காட்டுக.

4.

படம் 7-45 இல்

$BD \perp AD$, $\overline{AD}$ இன் மையப் புள்ளி C, $m\angle A = 45°$ எனில்

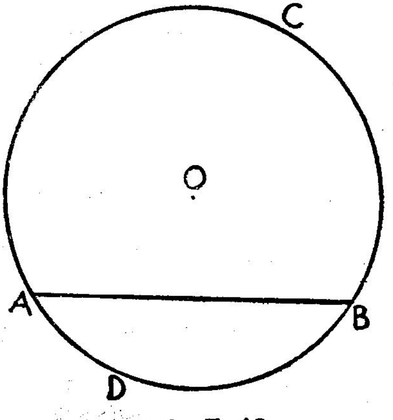
$AB^2 = 8\ AC^2$ எனக் காட்டுக.



படம் 7-45.

7·2.5 வட்டக்கோணம்

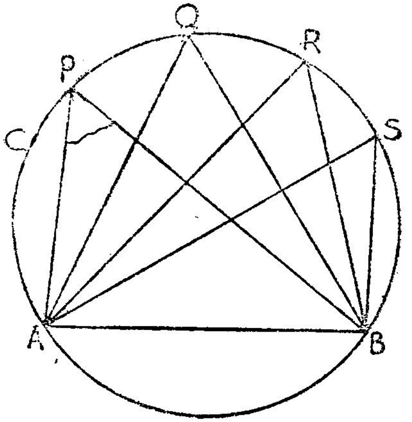
தாளில் ஒரு வட்டத்தை வரைந்து வெட்டி எடுத்துக்கொள்க. இவ்வட்டத்தாளை ஏதேனும் ஒரு பகுதியில் மடிக்க. இப்பொழுது



படம் 7-46.

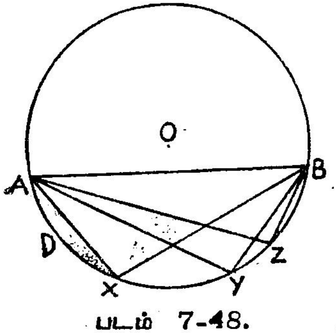
AB என்ற மடிப்பில் ACB, ADB என்ற இரண்டு வட்டத்துண்டுகள் கிடைக்கின்றன. ACB பெரிய வட்டத்துண்டு ; ADB சிறிய வட்டத்துண்டு.

பெரிய வட்டத்துண்டு ACB இல் $\angle APB$, $\angle AQP$, $\angle ARB$, $\angle ASB$ ஆகிய வட்டக் கோணங்களை மடிக்க. $\angle P$ ஐ மட்டும் படம் 7-47 இல் வளை கோடிட்டு காட்டியபடி வெட்டி எடுத்து $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$ ஒவ்வொன்றின் மீதும் பொருத்திப்பார்த்தால் $\angle P \equiv \angle Q \equiv \angle R \equiv \angle S$ என்பதைக் காணலாம். இவ்வுண்மையைப் படம் வரைந்து சரிபார்க்கலாம்.



படம் 7-47.

ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் $\overline{AB}$ என்ற நாணை வரைக. இப்பொழுது பெரிய வட்டத்துண்டு ACB இல் $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$, $\angle ASP$ ஆகிய வட்டக் கோணங்களின் அளவுகளைப் பாகைமானியைக்கொண்டு அறிக. அவை சம அளவு கொண்டிருப்பதைக் காண்க.



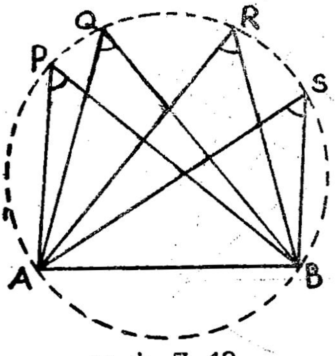
படம் 7-48.

இதைப்போலவே சிறிய வட்டத்துண்டு ADBஇல் $\angle AXB$, $\angle AYB$, $\angle AZB$ ஆகிய வட்டக் கோணங்களை மடித்து $\angle X$ ஐ மட்டும் வெட்டியெடுத்து $\angle Y$, $\angle Z$ இன்மீது

வைத்து $\angle X \equiv \angle Y \equiv \angle Z$ எனத் தெரிந்துகொள்ளலாம். முன்போலவே படம் வரைந்து கோணங்களை அளந்து இவ்வுண்மையைச் சரிபார்க்கலாம்.

எனவே,

ஒரு வட்டத்துண்டில் உள்ள வட்டக் கோணங்கள் சர்வ சமம்.

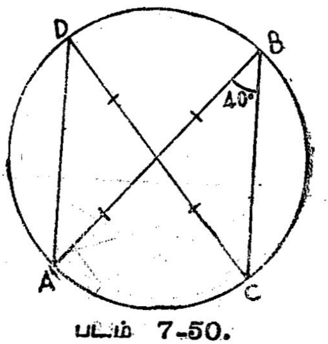


படம் 7-49.

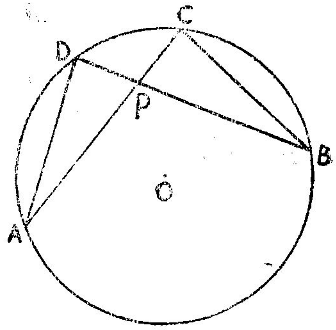
மாறாக $\overline{AB}$ என்ற நாண் P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளில் அமைக்கும் $\angle APB \equiv \angle AQB \equiv \angle ARB \equiv \angle ASB$ எனில் $APQRSB$ ஒரு வட்டத்துண்டின் வில்லின் மீது அமையும் என்பதைப் படம் வரைந்து காணலாம்.

பயிற்சி 7-2·5

1. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ என்பவை Oஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டங்கள். $m\angle OBC = 40°$ எனில் $\angle A$, $\angle D$, $\angle C$ ஆகிய கோணங்களின் அளவுகளைக் காண்க. $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ என்பது உண்மையா? ஏன்?



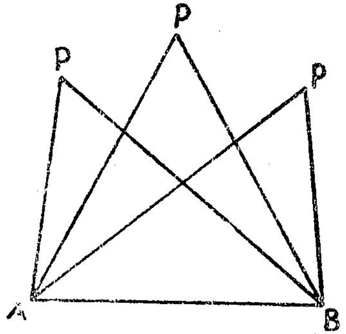
படம் 7-50.



படம் 7-51.

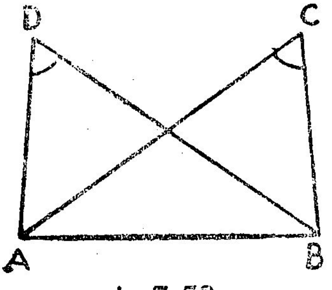
௨. படம் 7-51 இல் $\triangle APD ||| \triangle BPC$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

௩. APB என்ற அரைத்தளத்தில் $m\angle APB$ எப்பொழுதும் ஒரே அளவாக உள்ளது எனில் P இன் நியமப்பாதை யாது ?



படம் 7-52.

௪.



படம் 7-53.

$m\angle ADB = m\angle ACB$ எனில் A, B, C, D என்ற புள்ளிகளைப் பற்றி என்ன கூற முடியும் ?

விடைகள்

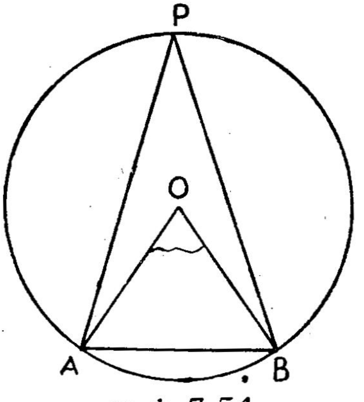
1. $m\angle A = m\angle D = m\angle C = 40°$; ஆம்.

2. "பகோப" 3. $\overset{\frown}{APB}$

4. ஒரே வட்டத்தின் மேல் அமையும் புள்ளிகள்

7-2·6. மையக் கோணம்

ஒரு வட்டவடிவத் தாளை எடுத்துக்கொண்டு அதைச் சரிபாதியாக மடிக்க. இப்பொழுது கிடைத்த அரை வட்டங்களை மீண்டும் சரிபாதியாக மடித்துப் பிரித்தால் வட்ட மையம் [O] கிடைக்கிறது. வட்டத்தை ஏதேனும் ஒரு பகுதியில் மடித்து ஏதேனும் ஒரு நாணை [$\overline{AB}$] அமைத்துக் கொள்க. நாணின் முனைப் புள்ளிகள் [A, B] ஒவ்வொன்றையும் வட்ட மையத்தோடு இணைக்கும்வகையில் மடித்து ஒரு மையக் கோணத்தை [$\angle AOB$] ஏற்படுத்துக. வட்டத்தின் பகுதியில் நாணுக்கு மையம் எப் பக்கத்தில் உள்ளதோ அதே பக்கத்தில் [பெரிய வட்டத் துண்டில்] வட்டத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்து [P] நாணின் முனைப் புள்ளிகளோடு இணைக்கும் வகையில்மடித்து ஒரு வட்டக் கோணத்தை [$\angle APB$] ஏற்படுத்துக. இப்பொழுது மையக் கோணத்தை வெட்டியெடுத்து இருசம கோணங்களாக மடித்துக்கொள்க இப் பாதிக் கோணத்தை வட்டக் கோணத்தில் பொருத்துக. மையக் கோணத்தில் பாதியும் வட்டக் கோணமும் சம அளவு உள்ளவை எனக் காண்கிறோம்.



படம் 7-54.

$$\left[\frac{1}{2}\, m\angle AOB = m\angle P\right]$$

> ஒரு வட்டத்தின் மையக் கோணத்தின் அளவு அதன் வில்லின்மீது நிற்கும் வட்டக் கோணத்தின் அளவைப் போல் இருமடங்கு.

இதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் தெளிவுபடுத்துகின்றன.

1.

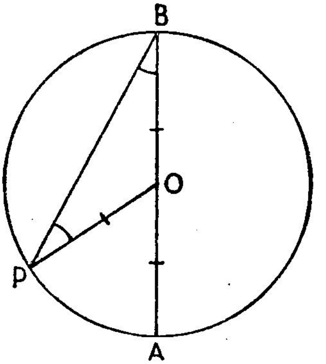
படம் 7-55இல் O வட்ட மையம்.

$\overline{AB}$ விட்டம். $\widehat{AP}$ எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட வில்.

$\angle AOP$ மையக் கோணம்.

$\angle ABP$ வட்டக் கோணம்.

$\triangle BOP$இல் வெளிக் கோணத்தின் அளவு $m\angle AOP = m\angle OBP + m\angle OPB$. $\overline{OB} \equiv \overline{OP} =$ வட்ட ஆரம் என்பதால் $\triangle OPB$ ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் .

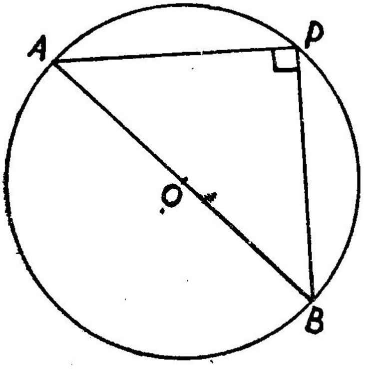


படம் 7-55.

எனவே, $m\angle OBP = m\angle OPB$

$\therefore \quad m\angle AOP = 2\, m\angle OBP.$

2.



படம் 7-56.

படம் 7-56இல் O வட்ட மையம்

$\overline{AB}$ விட்டம்.

$\angle AOB$, மையக் கோணம்.

$m\angle AOB = 180°$

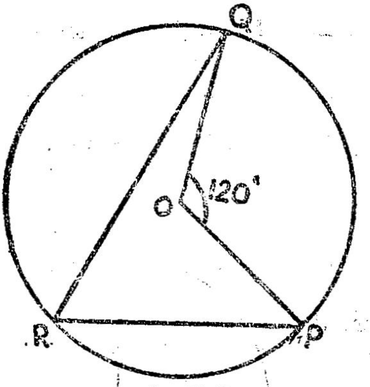
$\angle APB$, ஓர் அரை வட்டத்திலுள்ள கோணம்.

$\therefore \quad m\angle APB = 90°$

$\therefore \quad \angle AOB = 2\, m\angle APB$

பயிற்சி 7-2·6

1.

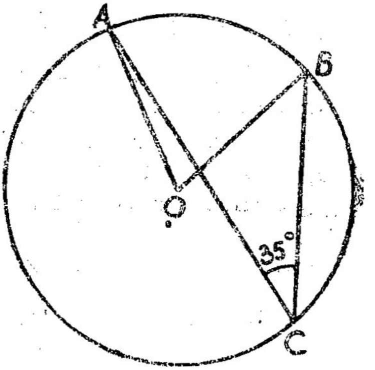


படம் 7-57.

படம் 7-57 இல் $m\angle POQ = 120°$ எனில், $m\angle PRQ$ எவ்வளவு?

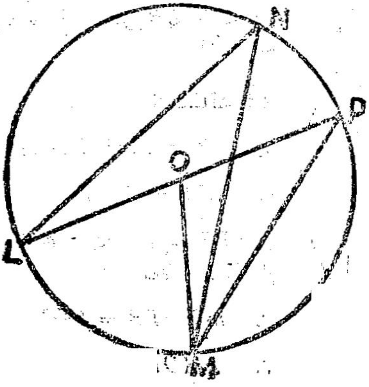
2.

படம் 7-58 இல் $m\angle ACB = 35°$ எனில், $m\angle AOB$ எவ்வளவு?



படம் 7-58.

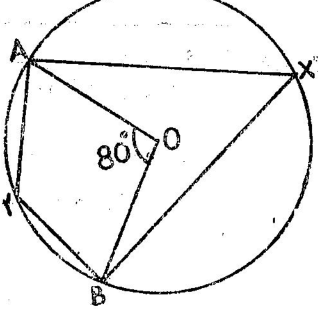
3.



படம் 7-59.

படம் 7-59 இல் $m\angle LOM = m\angle N + m\angle P$ என்பது சரியா?

4\.



படம் 7-60.

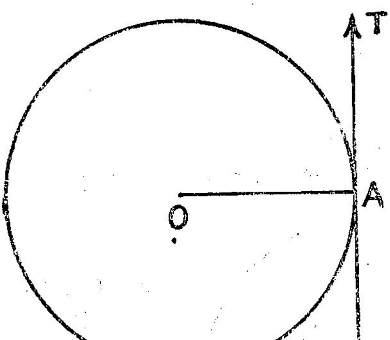
படம் 7-60 இல் $m\angle AOB = 80°$ எனில், $m\angle AYB$ எவ்வளவு ?

விடைகள்

(1) 60° (2) 70° (3) சரி (4) 140°

7-2-7. தொடு கோடு

வட்டத்தை ஓரேயொரு புள்ளியில் வெட்டும் கோடு தொடு கோடு எனப்படும்.



படம் 7-61.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Oஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Aஐக் குறித்து அப் புள்ளியில் வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு $\overleftrightarrow{AT}$ஐ வரைக. பாகைமானியைக் கொண்டு $m\angle OAT = 90°$ என்பதை அறிக.

எனவே,

> ஒரு வட்டத்தின் மீது ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, தொடும் புள்ளியில் வரையப்படும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

மாறாக ஒரு வட்டத்தில் ஏதேனும் ஓர் ஆரம் OAஐ வரைக. ஆரத்திற்கும் வட்டத்திற்கும் பொதுவான புள்ளி Aஇல் ஏதேனும் ஒரு செங்குத்துக்கோடு $\overleftrightarrow{AT}$ஐ வரைக. அஃது ஆரத்துக்குத் தொடு கோடாக உள்ளது.

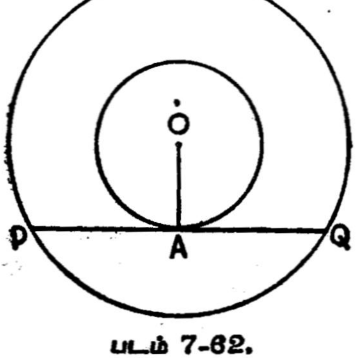
எனவே,

> ஒரு வட்டத்தின் ஆரத்தின் வெளிமுனைப் புள்ளியில் வரையப்படும் ஒரு செங்குத்துக் கோடு வட்டத்திற்குத் தொடு கோடு ஆகும்.

இத்தேற்றங்களிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையும் முறையை அறியலாம்.

பயிற்சி 7-2·7

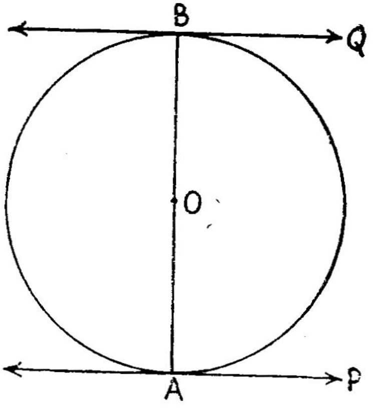
1. Oஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி A இல் எத்தனை தொடு கோடுகள் அமையும் ?



படம் 7-62.

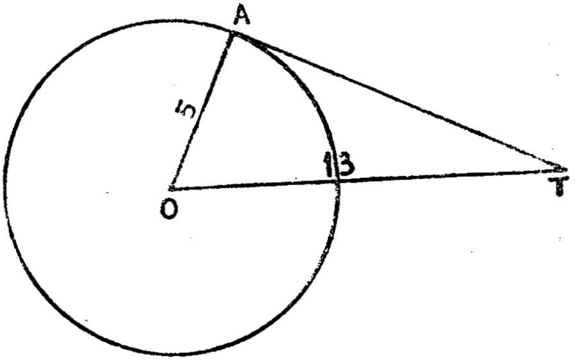
2. Oஐ மையமாகக் கொண்ட இரு பொது மைய வட்டங்களுள் பெரிய வட்டத்தின் நாண் $\overline{PQ}$ சிறிய வட்டத்திற்கு Aஇல் தொடு கோடாக அமைகிறது. $\overline{PA}$, $\overline{AQ}$ஐப் பற்றி என்ன கூறமுடியும் ?

3. Oஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் $\overline{AB}$ விட்டம். $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ வட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் எனில், $\overleftrightarrow{AP}$யும் $\overleftrightarrow{BQ}$வும் எப்படிப்பட்ட கோடுகள் ?



படம் 7-63.

4. ஆரம் $\overline{OA}$இன் அளவு 5 செமீ. Oஇல் இருந்து T என்ற புள்ளியின் தொலைவு 13 செமீ எனில், $\overline{AT}$இன் அளவு யாது?



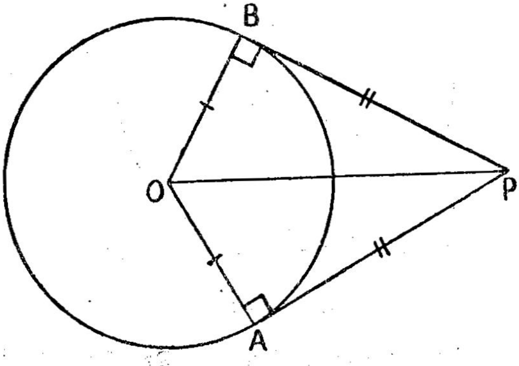
படம் 7-64.

விடைகள்

(1) ஒன்று (2) $\overline{PA} \equiv \overline{AQ}$ (3) இணை கோடுகள்
(4) 12 செமீ

7-2·8. தொடுகோட்டுச் சோடிகள்

ஒரு நாவில் O என்ற புள்ளியைக் குறித்து ஏதேனும் ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்திற்கு வெளியே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pஐக் குறித்து அதிலிருந்து வட்டத்திற்கு $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ என்ற தொடு கோடுகளை வரைக. அளவு கோலைக் கொண்டு $m\ \overline{PA} = m\ \overline{PB}$ என்பதை அறிக.



படம் 7-65.

நாற்கரம் $AOBP$ஐ வெட்டி எடுத்து $\overline{OP}$இல் மடிக்கும்போது $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ யுடனும், $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ யுடனும் பொருந்துகிறது. $\overline{PA} \equiv PB$. $\angle A \equiv \angle B$ என்பதை அறிக.

பாகைமானியைக் கொண்டு $m\angle OAP = m\angle OBP = 90°$,

$m\angle POA = m\angle POB$ என்பதை அறிக.

$\overline{PA} \perp \overline{OA} \quad \therefore \quad m\angle PAO = 90°$.

$\overline{PB} \perp \overline{OB} \quad \therefore \quad m\angle PBO = 90°$.

செங்கோண முக்கோணங்கள் $\triangle\ OAP$, $\triangle\ OBA$இல்

(i) கர்ணம் $\overline{OP}$ இரு முக்கோணங்களுக்கும் பொதுவானது.

(ii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ வட்டத்தின் ஆரங்கள் என்பதால் $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$

எனவே, 'கர்ணம் பக்கம்' அடிக்கோளின்படி

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$$

$$\therefore \quad \overline{PA} \equiv \overline{PB}$$

மேலும், $\angle POA \equiv \angle POB$

எனவே,

> ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோட்டுத் துண்டுகளும் சர்வசமம். அவை வட்ட மையத்தில் அமைக்கும் கோணங்கள் சர்வசமம்.

பயிற்சி 7-2·8

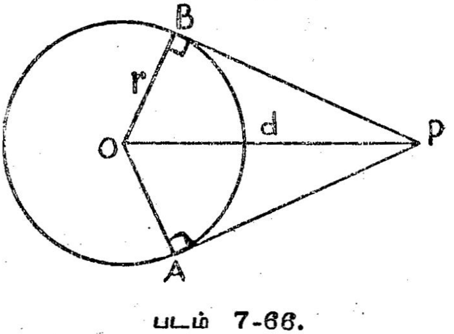
1. படம் 7-66 இல்

$OB = r$

$OP = d$ எனில்,

(i) BP எவ்வளவு ?

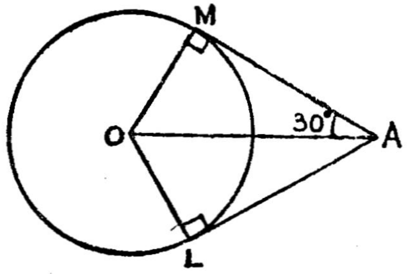
(ii) $AOBP$ எவ்வகை நாற்கரம் ?



படம் 7-66.

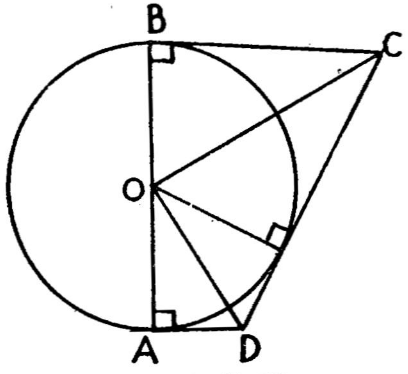
2. படம் 7-67 இல் $\overline{AL}$, $\overline{AM}$ தொடுகோட்டுத் துண்டுகள். $AM = 6$ எனில், AL எவ்வளவு ? $m\angle OAM = 30°$ எனில்,

(i) $m\angle LOM$, (ii) $m\angle MLA$ எவ்வளவு ?



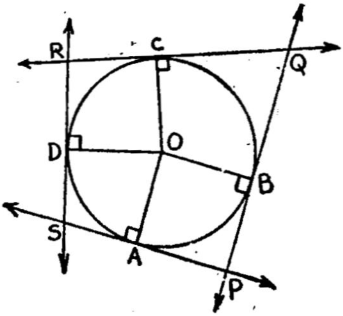
படம் 7-67.

3. படம், 7-68 இல் $\overline{AOB}$ விட்டம். $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ தொடு கோட்டுத் துண்டுகள் எனில், $m\angle DOC$ எவ்வளவு ?



படம் 7-68.

4. ஒரு வட்டத்தில் A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் வரையப் பட்ட தொடு கோடுகள் $PQRS$ என்ற நாற்கரத்தை அமைக்கின்றன. $PQ + RS = QR + SP$ என்பதைச் சரிபார்க்க.



படம் 7-69.

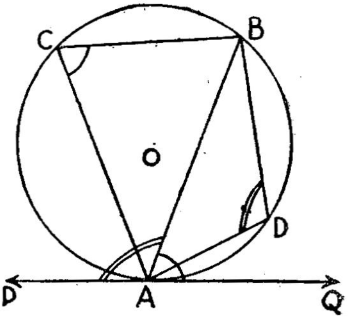
விடைகள்

(1) $\sqrt{d^2 - r^2}$, வட்ட நாற்கரம்

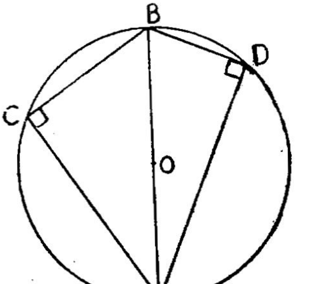
(2) 6, (i) 120° (ii) 60° (3) 90°

7-2-9. தொடு கோடு - நாண் கோணம்

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி A இல் ஏதேனும் ஒரு தொடு கோடு $\overleftrightarrow{PAQ}$ ஐ வரைக. தொடும் புள்ளி A இல் நாண் $\overline{AB}$ ஐ வரைக. பெரிய வட்டத் துண்டில் ஏதேனும் ஒரு கோணம் $\angle ACB$ ஐயும் சிறிய வட்டத் துண்டில் ஏதேனும் ஒரு கோணம் $\angle ADB$ ஐயும் வரைக. இப்பொழுது $\angle ACB$ ஐ வெட்டியெடுத்து $\angle QAB$ யோடு பொருத்துக. $\angle QAB \equiv \angle ACB$ என்பதைக் காண்க. அதுபோலவே $\angle ADB$ ஐ வெட்டியெடுத்து $\angle BAP$ யோடு பொருத்துக. $\angle BAP \equiv \angle ADB$ என்பதைக் காண்க. வெவ்வேறு படங்களை வரைந்து இவ்விரு சர்வ சமங்களைப் பாகைமானி கொண்டு அளந்து சரிபார்க்க.



படம் 7-70.



படம் 7-71.

நாண் $\overline{AB}$ விட்டமாக அமைத்தால் $\overline{AB} \perp \overline{PAQ}$.

$$m\angle QAB = m\angle BAP = 90^\circ$$

$ADBC$ ஒரு வட்ட நாற்கரம். எனவே $\angle C$, $\angle D$ அரை வட்டத்திலுள்ள கோணங்கள்.

$$\therefore\ m\angle C = m\angle D = 90^\circ$$

$$\therefore\ m\angle QAB = m\angle ACB$$
$$m\angle BAP = m\angle ADB$$

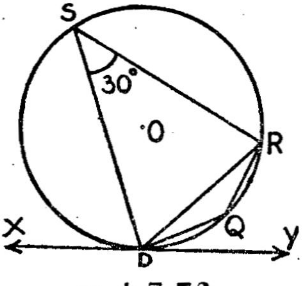
எனவே,

> ஒரு வட்டத்தின் தொடு கோடும் தொடும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட நாணும் அமைக்கும் ஒவ்வொரு கோணமும் அதற்கு எதிரேயுள்ள வட்டத் துண்டில் உள்ள வட்டக் கோணத்திற்குச் சர்வசமம்.

மாறுதலையாக

> ஒரு வட்டத்தின் நாணின் ஒரு முனை வழியே ஒரு கோடு வரையப்பட்டு அவை அமைக்கும் ஒவ்வொரு கோணமும் அதற்கு எதிரேயுள்ள வட்டத் துண்டில் உள்ள வட்டக் கோணத்திற்குச் சர்வசமமானால் அக்கோடு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாகும்.

பயிற்சி 7-2·9

1. 

படம் 7-72.

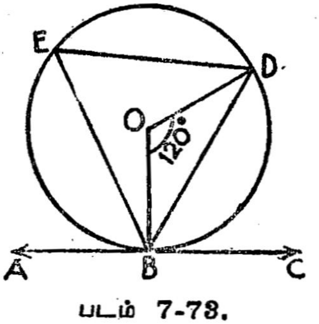
படம் 7-72இல் $\overleftrightarrow{XPY}$ தொடு கோடு.

(i) $m\angle RPY$ (ii) $m\angle RPX$
(iii) $m\angle Q$ எவ்வளவு?

2. படம் 7-73இல் $\overleftrightarrow{AB}$ தொடு கோடு.

$m\angle BOD = 120°$ எனில்

(i) $m\angle BED$ (ii) $m\angle DBC$ எவ்வளவு?

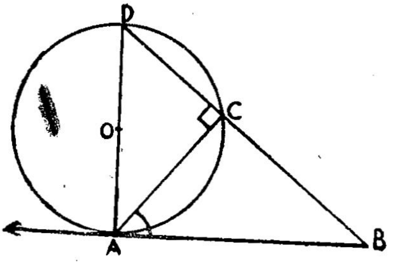


படம் 7-73.

3. படம் 7-74இல் $\overrightarrow{BA}$ தொடுகோட்டுக் கதிர்.

$m\angle D = 50$ எனில்

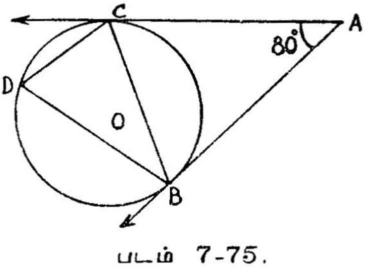
$m\angle B$ எவ்வளவு?



படம் 7-74.

4. படம் 7-75இல் $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ தொடுகோட்டுக் கதிர்கள்.

$m\angle A = 80°$ எனில், $m\angle D$ எவ்வளவு?



படம் 7-75.

விடைகள்

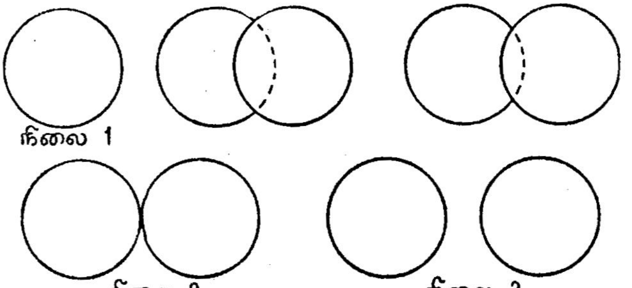
(1) (i) 30° (ii) 150° (iii) 150°

(2) (i) 60° (ii) 60° (3) 40° (4) 50°

7-2-10. வெட்டு வட்டங்கள்

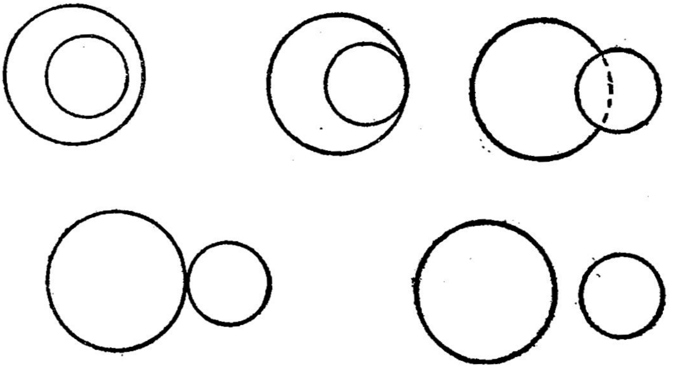
தாளில் ஒரே ஆரமுள்ள இரு வெவ்வேறு வட்டங்கள் வரைந்து வெட்டி எடுத்துக்கொள்க. அவற்றை ஒன்றன்மீது ஒன்றாகப் பொருத்துக (நிலை 1). பின் அவற்றைச் சிறிது சிறிதாக நகர்த்திக் கொண்டே சென்றால், படத்தில் காட்டியவாறு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் நிலைக்கு (நிலை 2)

வருகின்றன. பிறகு இரு வெவ்வேறு வட்டங்களாகத் தனித்து நிற்கின்றன (நிலை 3). நிலை 1க்கும் 2க்கும் இடையே வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று 2 புள்ளிகளில்தான் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இதைப் படம் வரைந்து சரிபார்க்க. மூன்று புள்ளிகளில் தொட்டால் வட்டங்கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்திவிடுகின்றன.



படம் 7-76.

இச் சோதனையை வெவ்வேறு ஆரங்கொண்ட இரு வட்டத் தாள்களைப் பயன்படுத்திச் செய்க. இரு வட்டங்கள் 3 புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ள வாய்ப்பு இல்லை எனக் காண்கிறோம்.



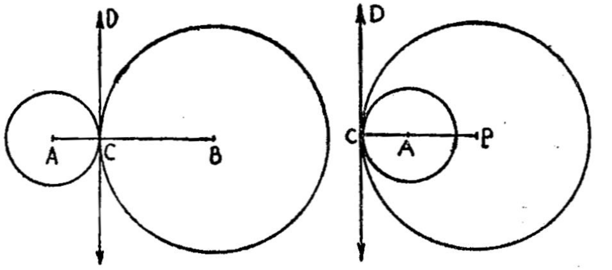
படம் 7-77.

இதிலிருந்து நாம் அறிந்து கொள்வது :

> இரு மையங்கள் மாறுபட்டோ அல்லது ஆரங்கள் மாறுபட்டோ உள்ள வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் இரண்டுக்குமேல் இருக்காது.

7·2·11 தொடு வட்டங்கள்

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகவோ அல்லது வெளிப்புறமாகவோ ஒரு புள்ளியில்தான் தொடும் என்பதை 7-2·10இல் செய்த சோதனையிலிருந்து அறிந்து கொண்டோம்.



படம் 7-78.

தொடும் புள்ளி Cயிலிருந்து முதல் வட்டத்தின் மையம் Aஐச் சேர்க்கும் ஆரம் $\overline{AC}$க்கு தொடு கோடு $\overleftrightarrow{CD}$ செங்குத்தாக உள்ளது. $m\angle ACD = 90°$. மேலும், $\overleftrightarrow{CD}$, தொடும் புள்ளி Cயிலிருந்து இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் Bஐச் சேர்க்கும் ஆரம் BCக்குச் செங்குத்தாக அமைவதைக் காண்கிறோம். $m\angle BCD = 90°$.

எனவே, $\overleftrightarrow{CD}$ இரண்டாவது வட்டத்திற்கும் தொடு கோடு ஆகும். Cஇல் வரைந்த ஒரு தொடு கோடு இரண்டு வட்டங்களுக்கும் தொடு கோடாக அமைவதைக் காண்கிறோம். இது பொதுத் தொடு கோடு எனப்படுகிறது.

எனவே,

> ஒன்றையொன்று தொடும் இருவட்டங்கள், தொடும் புள்ளியில் ஒரு பொதுத் தொடு கோட்டைப் பெற்றுள்ளன.

பல சோடி வட்டங்கள் வரைந்து இவ்வுண்மையைச் சரி பார்க்கலாம்.

7·2-12 தொடு வட்ட மையங்கள்

படம் 7-78இல் A, Bஐ மையமாகக் கொண்ட இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகவோ அல்லது வெளிப்புறமாகவோ தொடும்போது தொடும் புள்ளி Cஇல் வரையப்படும் தொடு கோடு $\overleftrightarrow{CD}$, $\overline{AC}$-க்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனக் கண்டோம்.

$$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AC} \Longrightarrow m\angle ACD = 90^\circ$$

$$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{BC} \Longrightarrow m\angle BCD = 90^\circ. \text{ எனவே.}$$

$$m\angle ACD = m\angle BCD = 90^\circ$$

$$m\angle ACD + m\angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\overline{ACB}$ ஒரு கோட்டுத் துண்டு. எனவே, A, C, B ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமைகின்றன எனக் காண்கிறோம்.

எனவே,

> இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டால் அவற்றின் மையங்களும் தொடு புள்ளியும் ஒரே கோட்டில் அமைகின்றன.

மேலும், முதல் வட்டத்தின் ஆரம் r_1, இரண்டாவது வட்டத்தின் ஆரம் r_2 எனில் இரு வட்டங்களின் மையங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு

$d = r_1 + r_2$ (இரு வட்டங்களும் வெளிப்புறமாகத் தொடும்போது)

$d = r_1 - r_2$ (இரு வட்டங்களும் உட்புறமாகத் தொடும்போது, $r_1 > r_2$)

பயிற்சி 7-2·12

1. 5 செமீ, 7 செமீ, ஆர அளவுகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொட்டால் அவற்றின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு யாது?

2. விட்டத்தின் அளவு 10 செமீ, 12 செமீ கொண்ட இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொட்டால் அவற்றின் மையங் களுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு யாது ?

3. 5 செமீ, 6 செமீ, 7 செமீ ஆர அளவுகளுள்ள மூன்று வட்டங்கள் ஒன்று மற்ற இரண்டை வெளிப்புறமாகத் தொட் டால் அவற்றின் மையங்கள் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் யாவை ?

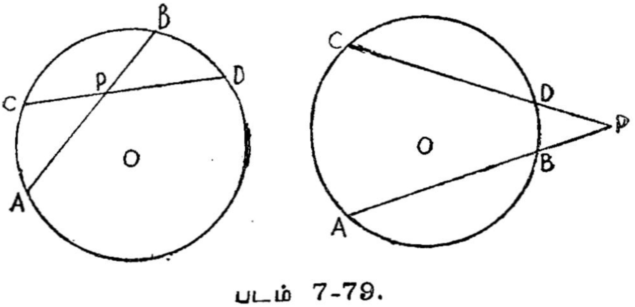
4. 8 செமீ விட்டங் கொண்ட ஒரு வட்டத்திற்குள் 4 செமீ விட்டங் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு யாது ?

விடைகள்

(1) 12 செமீ (2) 1 செமீ (3) 11 செமீ, 13 செமீ, 12 செமீ (4) 4 செமீ

7-2·13. வெட்டும் நாண்கள்

ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் எவையேனும் இரண்டு நாண்கள் $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ஐ வரைக.



படம் 7-79.

அவை வெட்டும் புள்ளி P என்க. வட்டத்திற்கு உள்ளே அல்லது வெளியே P அமையலாம். PA, PB, PC, PD ஆகிய வற்றை அளந்து பின்வரும் அட்டவணையில் குறிக்க. இச் சோதனையை மீண்டும் மீண்டும் செய்க.

சோதனை	PA	PB	PC	PD	$PA \cdot PB$	$PC \cdot PD$
1						
2						
3						
•						
•						
•						

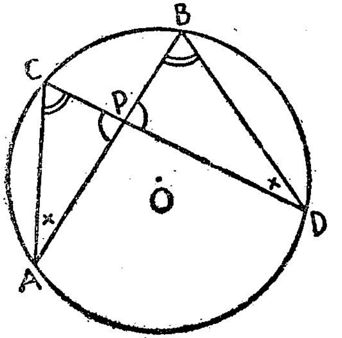
அட்டவணையிலிருந்து $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ என அறிகிறோம்.

எனவே,

> ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால், வெட்டுத் துண்டுகளால் அமையும் செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

படம். 7-80 இல் உள்ள $\triangle APC$, $\triangle DPB$ இல்



படம் 7-80.

$m\angle A = m\angle D$ (வில் BCஇன் வட்டக்கோணங்கள்)

$m\angle C = m\angle B$ (வில் ADஇன் வட்டக் கோணங்கள்)

$m\angle APC = m\angle DPB$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

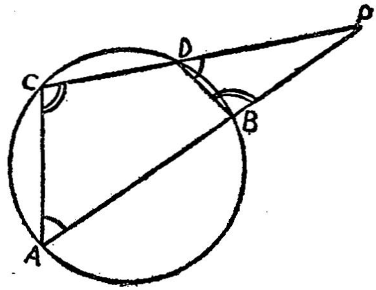
$\therefore \triangle APC \ ||| \ \triangle DPB$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

எடுத்துக்காட்டு 2:

படம் 7-81இல் உள்ள $\triangle APC$, $\triangle DPB$இல்



படம் 7-81.

$m\angle A = m\angle PDB$ (வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணமும் எதிர் உட்கோணமும் சர்வசமம்)

$m\angle C = m\angle DBP$ (வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணமும் எதிர் உட்கோணமும் சர்வசமம்)

$m\angle APC = m\angle DPB$ (பொதுவான கோணம்)

$$\therefore \quad \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

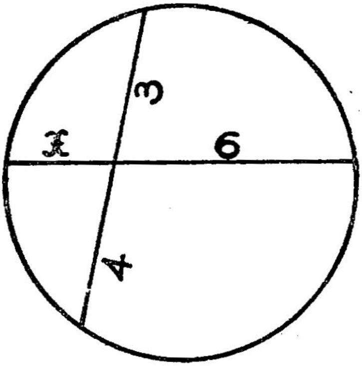
கவனிக்க :

வெட்டுத் துண்டுகளின் பொதுமுனை வெட்டும் புள்ளி, நாண்கள் வட்டத்திற்குள் வெட்டிக் கொண்டாலோ, வெளியே வெட்டிக் கொண்டாலோ, வெட்டுத் துண்டுகளைப் பெயரிடும் பொழுது அவை ஒவ்வொன்றையும் வெட்டும் புள்ளியில் தொடங்கவும்.

படம் 7-81இல் வெட்டுத் துண்டுகள் PA, PB, PC, PD ஆகும். AB, BP, CD, DP அல்ல.

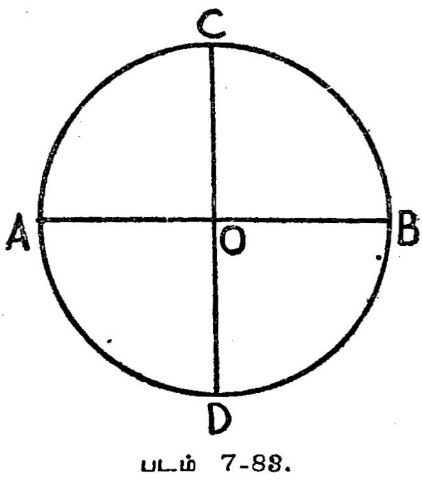
பயிற்சி 7-2·13

1. படம் 7-82இல் xஇன் மதிப்பு யாது?



படம் 7-82.

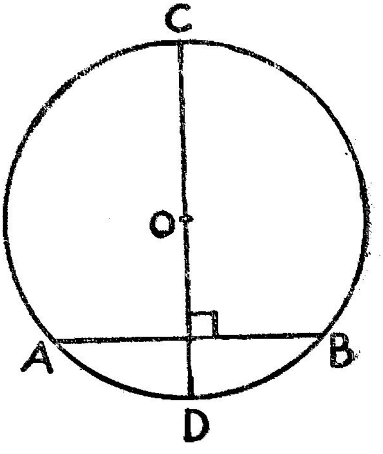
2. படம் 7-83இல் O என்பது வட்ட மையம்.



படம் 7-83.

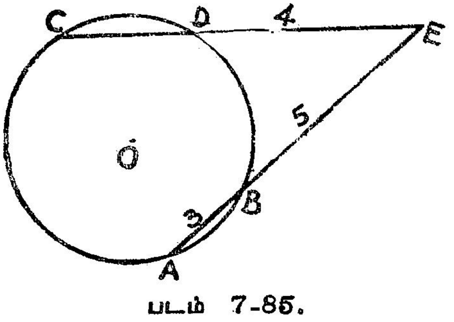
$OA \cdot OB + OC \cdot OD = 32$ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

3. படம் 7·84இல் நாண் $\overline{AB}$-க்கு விட்டம் $\overline{CD}$ செங்குத்தாக உள்ளது. வட்டத்தின் ஆரம் 10செமீ. வட்டமையத்திலிருந்து நாணின் தொலைவு 6 செமீ எனில், நாணின் அளவு என்ன?



படம் 7-84.

4. படம் 7-85இல் $\overline{CD}$இன் அளவு யாது?



படம் 7-85.

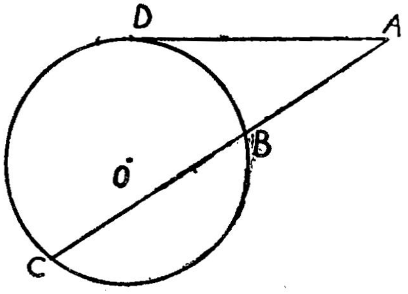
விடைகள்

(1) 2 (2) 4 (3) 16 செமீ (4) 6

7-2·14 வெட்டுக்கோடும் தொடு கோடும்

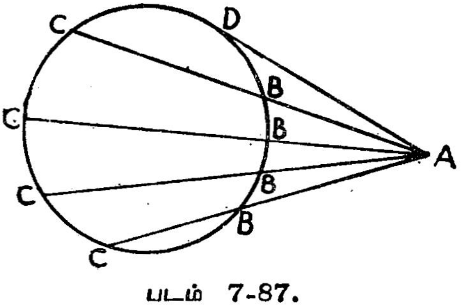
ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்திற்கு வெளியே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Aஐக் குறிக்க. Aஇல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு வெட்டுக் கோட்டுத் துண்டு $\overline{ABC}$ ஐ வரைக. அது வட்டத்தை வெட்டும்

புள்ளிகளை B, C என்க. Aஇல் இலிருந்து வட்டத்திற்கு $\overline{AD}$ என்ற தொடு கோட்டை வரைக. AC, AB, AD ஆகியவற்றை அளந்து பின்வரும் அட்டவணையில் குறிக்க.



படம் 7-86.

$\overline{ABC}$ இன் வெவ்வேறு நிலைகளுக்கேற்ப இவ்வளவுகளை அட்டவணைப் படுத்துக.



படம் 7-87.

எண்.	AC	AB	AD	$AC \cdot AB$	AD^2
1					
2.					
3.					
•					
•					
•					

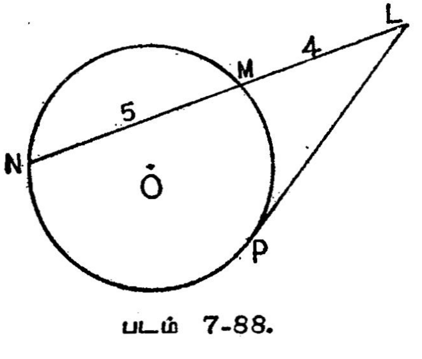
அட்டவணையிலிருந்து $AC \cdot AB = AD^2$ என்பதைக் காண்க.

எனவே,

> ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வெட்டுக் கோடும் ஒரு தொடு கோடும் வரையப்பட்டால் வெட்டுக்கோடு வட்டத்தில் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டு களினால் அமையும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு தொடு கோட்டுத் துண்டு அமைக்கும் சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமம்.

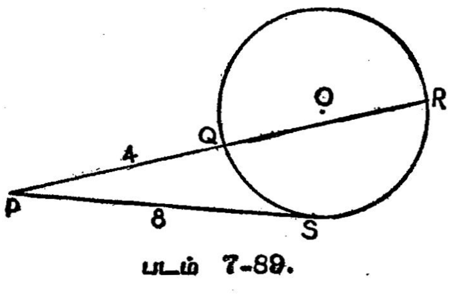
பயிற்சி 7-2·14

1. படம் 7-88இல் $\overleftrightarrow{LP}$ தொடுகோடு. $m\overline{LP}$ எவ்வளவு?



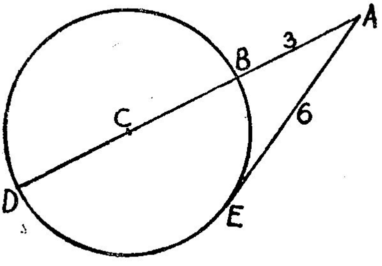
படம் 7-88.

2. படம் 7-89இல் $\overleftrightarrow{PS}$ தொடுகோடு. QR எவ்வளவு?



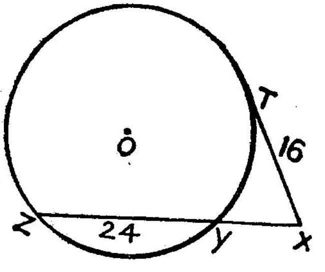
படம் 7-89.

3. படம் 7-90இல் C வட்டத்தின் மையம். $\overleftrightarrow{AE}$ தொடுகோடு எனில், வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?



படம் 7-90.

4. படம் 7-91இல் $\overleftrightarrow{XT}$ தொடுகோடு. XY எவ்வளவு?



படம் 7-91.

விடைகள்

(1) 6 (2) 12 (3) 4·5 (4) 8

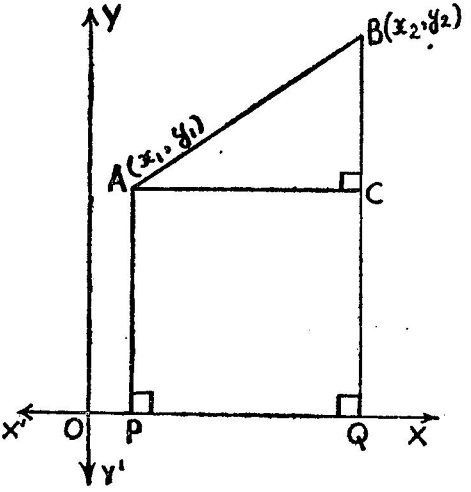
7-3. பகுமுறை வடிவ இயல்

7-3·1 இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

மெய்யெண் தளத்தில் வரிசைச் சோடிகளைக் குறிக்கும் முறையை முன் வகுப்பில் கற்றுக் கொண்டோம். இப்பொழுது இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காணும் முறையைக் கற்போம்.

1. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

ABஐக் காண X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ஐ வரைக. $\overline{BQ}$க்குச் செங்குத்தாக $\overline{AC}$ஐ வரைக.



படம் 7-92.

$OP = x_1$; $PA = y_1$; $OQ = x_2$; $QB = y_2$

$$AC = PQ = OQ - OP$$
$$= x_2 - x_1$$
$$CB = QB - QC$$
$$= QB - PA$$
$$= y_2 - y_1$$

$\triangle$ ABCஇல் $m\angle C = 90°$.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி

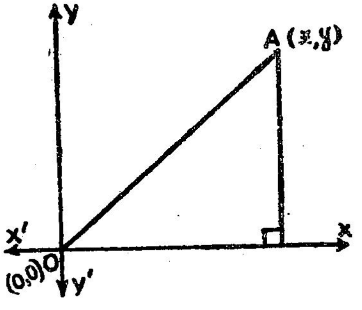
$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$BA = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$AB = BA$ ஆதலால்

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

2. ஆதிப்புள்ளி $O(0,0)$க்கும், $A(x, y)$க்கும் இடையே யுள்ள தொலைவு

$$OA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$



படம் 7-93.

எடுத்துக்காட்டு 1:

(5, −8), (10, 9) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு

$$= \sqrt{(10-5)^2 + [9-(-8)]^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 144}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$P(3, 2)$, $Q(8, 7)$ எனில், PQ எவ்வளவு ?

தீர்வு :

$$PQ = \sqrt{(8-3)^2 + (7-2)^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 25}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$= \sqrt{25 \times 2}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

பயிற்சி 7-3.1

பின்வரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

1. $(3, 7), (-1, 4)$
2. $(0, -2), (-3, 1)$
3. $(-3, -1), (2, 5)$
4. $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
5. $(m, 0), (n, 0)$
6. $(0, a), (-b, 0)$

விடைகள்

(1) 5 (2) $3\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{61}$ (4) $\sqrt{2}$

(5) $(m - n)$ (6) $\sqrt{a^2 + b^2}$

7-3·2. கோட்டு வடிவங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 1:

$(1, 0)$, $(3, 3)$, $(5, 0)$ என்ற உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணம் எவ்வகை முக்கோணம்?

தீர்வு :

$A(1, 0)$, $B(3, 3)$, $C(5, 0)$ என்க.

$$AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 9}$$
$$= \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{4+9}$$
$$= \sqrt{13}$$

$$CA = \sqrt{(1-5)^2 + (0-0)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2}$$
$$= 4$$

$AB = BC$ என்பதால் $\triangle ABC$ ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

(1, 1), (4, 1), (4, 4), (1, 4), என்ற உச்சிகளைக் கொண்ட நாற்கரத்தின் சுற்றளவு யாது ?

தீர்வு :

$A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 4)$, $D(1, 4)$, என்க.

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$BC = \sqrt{(4-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$CD = \sqrt{(1-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$DA = \sqrt{(1-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் சுற்றளவு $= AB + BC + CD + DA$
$= 3 + 3 + 3 + 3$
$= 12$

பயிற்சி 7-3.2

1. பின்வரும் உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணம் எவ்வகை முக்கோணம் ?

   (i) (0, 1), (−2, 4), (−4, 1)

   (ii) $(2 + \sqrt{3}, 5)$, (2, 6), (2, 4)

2. பின்வரும் உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமா ?

(i) (3, −2), (1, −2), (1, 2)

(ii) (−2, −1), (−2, −4), (3, −5)

3 பின்வரும் வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் அமைக்கும் நாற்கரத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(i) (−2, 1), (−2, 4), (1, 4), (1, 1)

(ii) (−5, 1) (−5, 3), (−1, 3), (−1, 1)

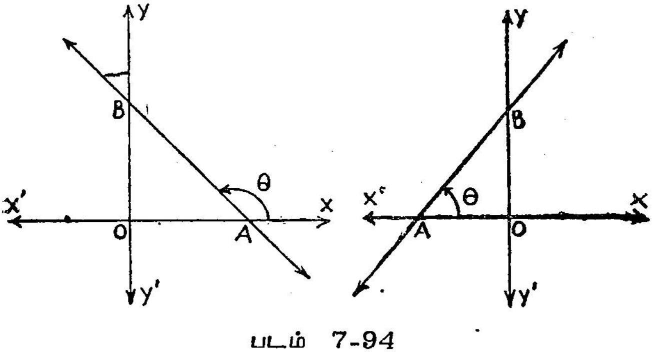
விடைகள்

1. (i) இருசமபக்க முக்கோணம் (ii) சமபக்க முக்கோணம்

2. (i) ஆம் (ii) இல்லை   3. (i) 12 (ii) 12

7-3·3. கோட்டின் சமன்பாடு

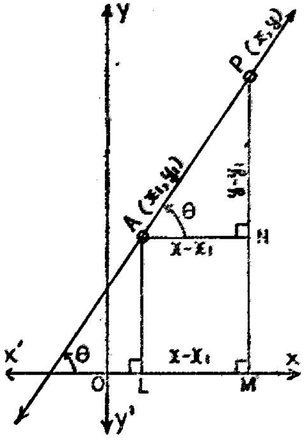
$\overleftrightarrow{AB}$, X அச்சை வெட்டும் புள்ளி A என்றும், Y அச்சை வெட்டும் புள்ளி B என்றும் கொள்வோம். இக்கோடு X அச்சுடன்



படம் 7-94

உண்டாக்கும் கோணம் $\angle XAB$, இதன் சாய்வுக்கோணம் எனப்படுகிறது. இது θ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் $\tan\theta$ இக்கோட்டின் சாய்வு எனப்படுகிறது.

எனவே $\overleftrightarrow{AB}$ இன் சாய்வு, $m = \tan\theta$. $\overleftrightarrow{AB}$, X அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டு $\overline{OA}$ (படம் 7-94). Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு $\overline{OB}$.



படம் 7-95.

1. $A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சாய்வு m என்க. $P(x, y)$ அக்கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி என்றால்,

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ஆகும்.

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

என்பது அக்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

2. $A(O, C)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y - c = m(x - 0)$

(அ - து.) $\boxed{y = mx + c}$ ஆகும்.

இச் சமன்பாட்டில் m என்பது கோட்டின் சாய்வு, C என்பது கோடு Y அச்சை ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து வெட்டும் தொலைவு என்பதை ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்தோம்.

3. $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோட்டின்மீது $P(x, y)$ என்ற புள்ளி உள்ளது என்க.

$\overleftrightarrow{AP}$இன் சாய்வு $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$\overleftrightarrow{AB}$இன் சாய்வு $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\overline{AP}$, $\overline{AB}$ ஒரே கோடாதலால், அவற்றின் சாய்வுகள் சமம்.

$$\therefore \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

எனவே $\overleftrightarrow{AB}$இன் சமன்பாடு.

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

இதனை $y - y_1 = m(x - x_1)$; $\left[m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$ எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(2, 3), (7, 8), என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

தீர்வு :

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 8$ என்க.

எனவே கோட்டின் சாய்வு $m = \frac{8 - 3}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1$

(2, 3), (7, 8) ஆகிய இருபுள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $(y - y_1) = m(x - x_1)$

அ-து, $(y - 3) = 1(x - 2)$

$$y = x + 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

பயிற்சி 7-3·3

பின்வரும் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

1. (2, 3), (−1, 6)
2. (3, −2), (5, −3)
3. (−3, −6), (−2, −1)
4. (a, 0), (0, b)

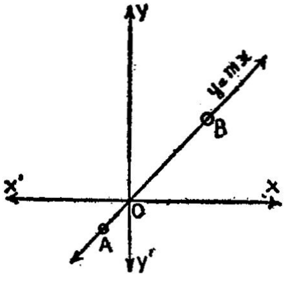
விடைகள்

1. $x + y - 5 = 0$ 2. $x + 2y + 1 = 0$

3. $5x - y + 9 = 0$ 4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

7-8·4. $y = mx + c$

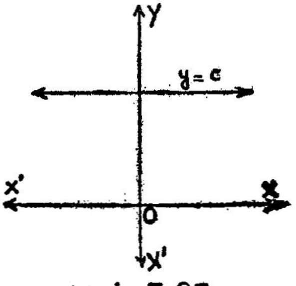
$y = mx + c$ என்ற சமன்பாடு m, c இன் மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தாற்போல் வெவ்வேறு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

1. 

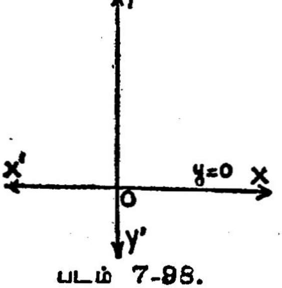
படம் 7-96.

ஆதிப்புள்ளி O (0, 0) வழியாகச் செல்லும் கோடு Y அச்சில் வெட்டுத் துண்டை ஏற்படுத்துவதில்லை. எனவே $c = 0$ ஆகையால் ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$ ஆகும்.

2. X அச்சுக்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் 0. எனவே, $m = \tan \theta = 0$. எனவே X அச்சுக்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாடு $y = c$ ஆகும்.



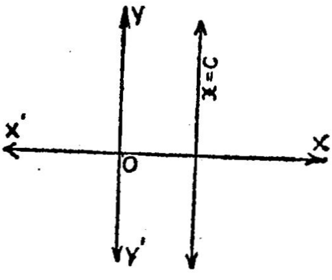
படம் 7-97.

3. 

படம் 7-98.

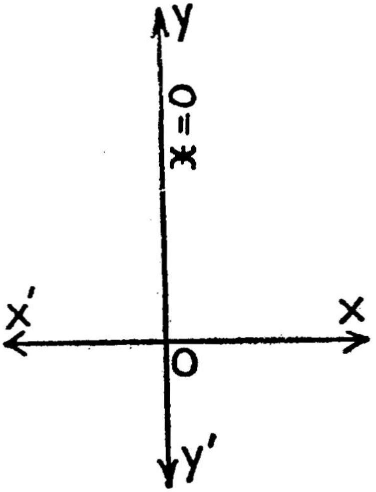
X அச்சின் சாய்வுக் கோணம் 0; Y அச்சில் வெட்டுத் துண்டு 0. எனவே X அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$ ஆகும்.

4. Y அச்சிற்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$ ஆகும். c என்பது அக்கோடு X அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டாகும்.



படம் 7-99.

5. Y அச்சின் சமன்பாடு $X = 0$ ஆகும்.



படம் 7-100.

இவற்றை நினைவில் கொண்டு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

சாய்வு 5 ஆகக் கொண்ட, ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

தீர்வு :

சாய்வு, $m = 5$

ஆதிப்புள்ளி $O\ (0, 0)$ இன் வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு '$y = mx$'

எனவே ஆதிப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் இக்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 5x$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு -7 ஆகவும் X அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

தீர்வு :

Y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு, $c = -7$

X அச்சுக்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாடு '$y = c$' எனவே X அச்சுக்கு இணையாக உள்ள இக்கோட்டின் சமன்பாடு $y = -7$.

பயிற்சி 7-3·4

1. பின்வரும் சாய்வைக் கொண்ட, ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) 9, (ii) -5

2. Y அச்சில் பின்வரும் வெட்டுத்துண்டைக் கொண்டதும் X அச்சுக்கு இணையானதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) 3, (ii) -4

3. X அச்சில் பின்வரும் வெட்டுத்துண்டைக் கொண்டதும் Y அச்சுக்கு இணையானதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) -15, (ii) 10

விடைகள்

1. (i) $y = 9x$ (ii) $y = -5x$
2. (i) $y = 3$ (ii) $y = -4$
3. (i) $x = -15$ (ii) $x = 10$

7-3·5. சாய்வு, வெட்டுத்துண்டு காணல்

ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$ எனக் கண்டோம். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து கோட்டின் சாய்வையும், கோடு Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டையும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = 3x - 8$ என்ற கோட்டின் சாய்வினையும் அக்கோடு Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டையும் காண்க.

தீர்வு :

கோட்டின் சமன்பாடு $y = 3x - 8$

இங்கு $m = 3$; $c = -8$

எனவே கோட்டின் சாய்வு 3 ;

Y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு -8 ஆகும்.

கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ என்றிருந்தால் அதை $y = mx + c$ என்ற உருவத்திற்கு மாற்றி, கோட்டின் சாய்வையும் Y அச்சில் வெட்டுத்துண்டையும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$8x + 5y - 7 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வையும், அக்கோடு Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டையும் காண்க.

தீர்வு :

$$8x + 5y - 7 = 0$$

$$\Longrightarrow 5y = -8x + 7$$

$$y = \frac{-8x + 7}{5}$$

$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{7}{5}$$

இங்கு $m = -\frac{8}{5}$; $c = \frac{7}{5}$

எனவே கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{8}{5}$

Y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $\frac{7}{5}$ ஆகும்.

பயிற்சி 7-3·5

பின்வரும் சமன்பாடு குறிக்கும் கோட்டின் சாய்வையும் அக்கோடு ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டையும் காண்க.

(1) $y = 8x - 5$ (2) $y = 3x + 7$ (3) $y = -9x - 3$
(4) $6x + 7y - 3 = 0$ (5) $-5x + 4y - 2 = 0$
(6) $7x - 9y = -1$

விடைகள்

(1) $8, -5$ (2) $3, 7$ (3) $-9, -3$
(4) $-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}$ (5) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{7}{9}, \frac{1}{9}$.

7-4. செயல் வடிவ இயல்

7-4·1. வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு வரைதல்

நினைவு கூர்க :

ஒரு வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு கோடும், தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட ஆரமும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

3 செமீ ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைக.

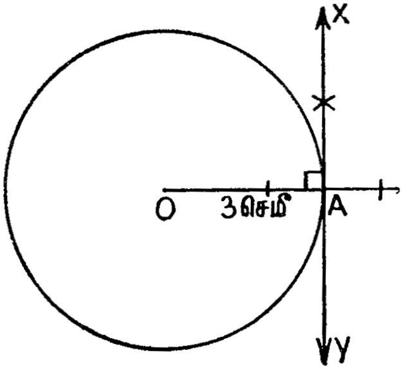
வரைமுறை :

1. Oஐ மையமாகக் கொண்டு 3 செமீ ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

2. வட்டத்தின்மேல் A என்ற புள்ளியைக் குறித்து ஆரம் $\overline{OA}$ஐ வரைக.

3. $\overline{AX} \perp \overline{OA}$ இருக்குமாறு $\overleftrightarrow{XAY}$ஐ வரைக.

இப்பொழுது $\overleftrightarrow{XY}$ வட்டத்திற்கு A என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.



படம் 7-101.

பயிற்சி 7-4·1

1. 5 செமீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு தொடுகோடு வரைக.

2. 12 செமீ விட்டம் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் ஒரு விட்டம் வரைக. விட்டத்தின் இரு முனைகளிலும் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைக. அவை இரண்டும் எவ்வாறு அமைகின்றன ?

3. 5·5 செமீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. அதில் 90°இல் வெட்டிக் கொள்ளுமாறு இரு விட்டங்கள் வரைக. அவற்றின் முனைகளிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைக. அத் தொடுகோடுகளால் அடைபடும் உருவம் யாது ?

4. 4 செமீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. அவ் வட்டத்தில் 50°இல் வெட்டிக் கொள்ளுமாறு இரு விட்டங்கள் வரைக. அவற்றின் முனைகளிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைக. அத் தொடு கோடுகளால் அடைபடும் உருவம் யாது ?

விடைகள்

(2) இணை கோடுகள் (3) சதுரம் (4) சாய் சதுரம்

7-4-2. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு :

5 செமீ ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 13 செமீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் வரைக.

வரைமுறை :

1. Oஐ மையமாகக் கொண்டு 5 செமீ ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

2. வட்டமையம் O விலிருந்து 13 செமீ தொலைவில் A என்ற புள்ளியைக் குறித்து, $\overline{OA}$ ஐ வரைக.

3. $\overline{OA}$ இன் மையப்புள்ளி M ஐக் காண்க.

4. M ஐ மையமாகவும் MO ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டவில்வரைக. அது முன் வரைந்த வட்டத்தை இருபுள்ளி களில் வெட்டுகிறது. அவற்றை X, Y என்க.

5. A, X ஐயும் A, Y ஐயும் இணைக்க.

இப்பொழுது $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{AY}$ ஆகிய இரண்டும் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் ஆகும்.

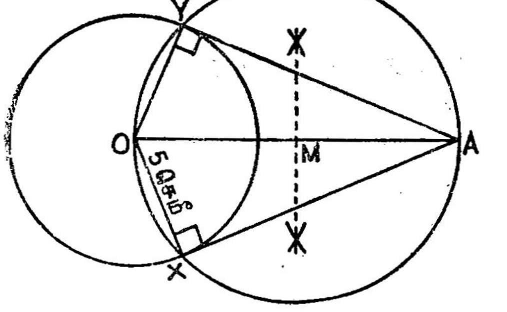
$\overline{AX}$, $\overline{AY}$ என்ற தொடு கோட்டுத் துண்டுகள் சர்வ சமம் என் பதைக் காண்க. இதைப் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்கலாம்.

$$OA^2 = AX^2 + XO^2$$

$$13^2 = AX^2 + 5^2$$

$$\therefore \; AX^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\therefore \; AX = \sqrt{144} = 12 \text{ செமீ}$$



படம். 7-102

பயிற்சி 7-4·2

1. 3 செமீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செமீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைக.

2. 4 செமீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 9 செமீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரைக. வெளிப்புள்ளியிலிருந்து தொடு புள்ளி வரை உள்ள இரு தொடு கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.

3. 6 செமீ விட்டம் கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 செமீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரைக. தொடு கோட்டுத் துண்டு களின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக. கணக்கிடுதலின் மூலம் சரிபார்க்க.

4. 12 செமீ விட்டங்கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 10 செமீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரைக. தொடு கோட்டுத் துண்டு களின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக. கணக்கிடுதலின் மூலம் சரிபார்க்க.

7·4·3. முக்கோணம் வரைதல் I

முக்கோணங்கள் வரையும் முறையை முன் வகுப்புகளில் கற்றுக் கொண்டோம். இப்பொழுது சில சிறப்பான முக்கோணங்கள் வரையும் முறையைக் காண்போம்.

1. ''மையக் கோணம் வட்டக் கோணத்தைப்போல் இருமடங்கு'';
2. ''இரு சமபக்க முக்கோணங்களில் அடிக் கோணங்கள் சர்வ சமம்'' என்ற இரு தேற்றங்களைப் பயன்படுத்துவோம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் (i) அடிப்பக்கம், (ii) அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம், (iii) அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டுத்துண்டு ஆகிய மூன்று அளவுகளைக் கொண்டு முக்கோணம் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு :

$\triangle ABC$ இல், $AB = 4$ செமீ, $m\angle C = 60°$, C இல் இருந்து AB க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு $CA = 3$ செமீ எனில் முக்கோணத்தை வரைக.

வரைமுறை :

1. உதவிப்படம் வரைந்து, கொடுத்துள்ள அளவுகளைக் குறிக்க. $m\angle ACB = 60°$, $\therefore m\angle AOB = 2 \times 60 = 120$. எனவே, இரு சம பக்க முக்கோணம் OAB இல் $m\angle BAO = 30°$.

2. $AB = 4$ செமீ இருக்குமாறு $\overline{AB}$ ஐ வரைக.

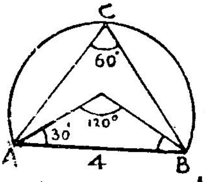
3. $m\angle BAP = 30°$ இருக்குமாறு $\overline{AO}$ ஐ வரைக.

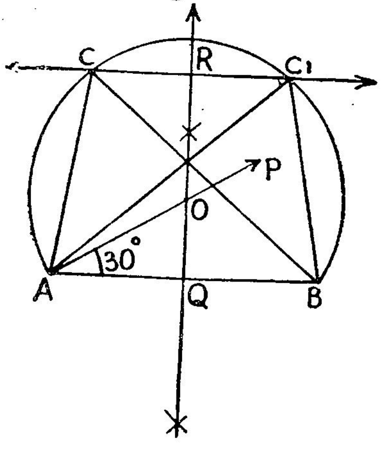
4. $\overline{AB}$ இன் மையக் குத்துக்கோட்டை வரைக. அது $\overline{AP}$ ஐ O இல் வெட்டட்டும்.

5. Oஐ மையமாகக்கொண்டும் OAஐ ஆரமாகவும் கொண்டு $\overline{AB}$ ஐ வரைக.

6. Q ஐ மையமாகக்கொண்டு 3 செமீ ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக. அது $\overline{QO}$ ஐ வெட்டும் புள்ளி R என்க.

7. R இன் வழியாக $\overline{QR}$ க்குச் செங்குத்தாக $\overleftrightarrow{CR}$ ஐ வரைக. அது $\widehat{AB}$ ஐ இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவை C, C_1 என்க.





படம் 7-103.

8. $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{BC_1}$ ஆகியவற்றை வரைக.

இப்பொழுது, $\triangle ABC$. $\triangle ABC_1$ ஆகிய இரு முக்கோணங்கள் அமைகின்றன. இரண்டும் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளின்படி அமைந்துள்ளன.

பயிற்சி 7-4·3

1. அடிப்பக்க அளவு 6 செமீ. அதற்கு எதிரேயுள்ள உச்சிக் கோணத்தின் அளவு 70°; உச்சியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 4·5 செமீ ஆகிய அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

2. $AB = 4$ செமீ, $m\angle C = 50°$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $CD = 4$ செமீ ஆகிய அளவுகளைக் கொண்ட $\triangle ABC$ஐ வரைக. அதன் மற்ற இரு பக்கங்களின் அளவுகளைக் காண்க.

3. அடிப்பக்க அளவு 5 செமீ. அதற்கு எதிரேயுள்ள உச்சிக் கோண அளவு 65° அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள உச்சியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 3·5 செமீ ஆகிய அளவுகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைக. அதன் மற்ற இரு கோணங்களின் அளவுகளைக் காண்க.

4. $XY = 4·5$ செமீ, $m\angle Z = 80°$, $\overline{ZA} \perp \overline{XY}$, $ZA = 4·2$ செமீ ஆகிய அளவுகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைக. Z லிருந்து வரையப்படும் மையக் கோட்டுத் துண்டின் அளவைக் காண்க.

7-4·4. முக்கோணம் வரைதல் II

ஒரு முக்கோணத்தின் (i) அடிப்பக்கம் (ii) அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் (iii) அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் மையக்கோடு ஆகிய மூன்று அளவுகளைக் கொண்டு முக்கோணம் வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு :

$AB = 5$ செமீ, $m\angle C = 45$; Cஇல் இருந்து $\overline{AB}$-க்கு வரையப்படும் மையக் கோட்டுத்துண்டின் அளவு 4 செமீ ஆகிய அளவுகளைக் கொண்ட $\triangle ABC$ஐ வரைக.

வரைமுறை :

1. உதவிப் படம் வரைந்து கொடுத்துள்ள அளவுகளைக் குறிக்க.

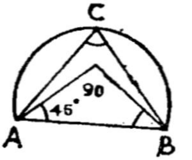
2. $AB = 5$ செமீ உள்ளவாறு $\overline{AB}$ஐ வரைக.

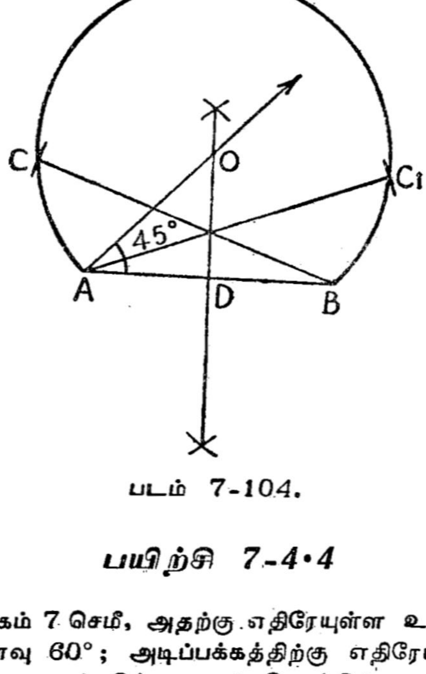
3. வட்டக்கோண அளவு 45° கொண்ட $\overset{\frown}{AB}$ஐ வரைக.

4. $\overline{AB}$இன் மையப்புள்ளி Dஐ மையமாகவும் 4 செமீஐ ஆர அளவாகவும் கொண்ட வட்ட வில் வரைக. இவ் வட்ட வில் $\overset{\frown}{AB}$ஐ இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவை C, C_1 என்க.

5. $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{BC_1}$ ஆகியவற்றை வரைக.

இப்பொழுது $\triangle$ BC, $\triangle ABC_1$ ஆகிய இரு முக்கோணங்களும் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளின்படி அமைந்துள்ளன.





படம் 7-104.

பயிற்சி 7-4·4

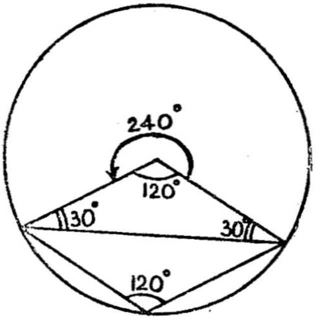
1. அடிப்பக்கம் 7 செமீ, அதற்கு எதிரேயுள்ள உச்சிக்கோணத்தின் அளவு 60°; அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள உச்சியிலிருந்து வரையப்படும் மையக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 6 செமீ ஆகிய அளவுகளுள்ள முக்கோணம் வரைக.

2. 5·5 செமீ அளவுள்ள அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள உச்சிக் கோணத்தின் அளவு 50°. அவ்வுச்சியிலிருந்து வரையப்படும் மையக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 4·5 செமீ. இவ்வளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதன் மற்ற இரு பக்கங்களை அளந்து எழுதுக.

3. $XY = 6{\cdot}2$ செமீ, $m\angle Z = 80°$; Zஇல் இலிருந்து XYக்கு வரையப்பட்ட மையக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 4·6 செமீ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதன் மற்ற இரு கோணங்களின் அளவுகளைக் காண்க.

4. 8·5 செமீ அளவுள்ள அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள உச்சிக்கோணத்தின் அளவு 120°. அவ்வுச்சியில் இருந்து வரையப்படும் மையக் கோட்டுத் துண்டின் அளவு 2 செமீ. இவ்வளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதன் மற்ற இரு பக்கங்கள், இரு கோணங்கள் ஆகியவற்றை அளந்து எழுதுக.

குறிப்பு :



படம் 105.

7-4·5. பெரிதாக்குதல் : முக்கோணங்கள்

"இரு முக்கோணங்களில் ஒத்த முக்கோணங்களின் அளவுகள் சமமானால் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதங்கள் சமம்" என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களைப் பற்றிய தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, முக்கோணங்களைப் பெரிதாக்கும் முறையைக் கற்றுக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

6 செமீ, 4 செமீ, 5 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட முக்கோணத்தை வரைந்து, பக்க அளவுகள் இதைப்போல் இரு மடங்கு உள்ளவாறு முக்கோணத்தைப் பெரிதாக்குக.

வரைமுறை :

1. $AB = 6$ செமீ, $BC = 4$ செமீ, $CA = 5$ செமீ உள்ள வாறு $\triangle ABC$ ஐ வரைக.

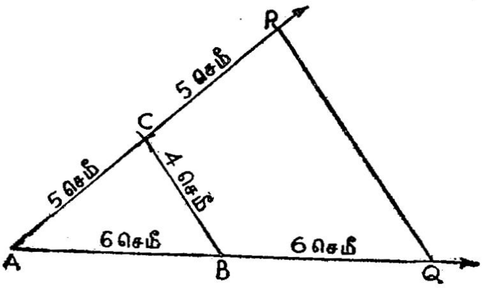
2. A ஐ வடிவொப்புமை மையமாகக்கொண்டு $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ஐ வரைக.

3. $\overrightarrow{AB}$ இல் $AQ = 12$ செமீ உள்ளவாறு Q ஐக் குறிக்க.

4. $\overrightarrow{AC}$ இல் $AR = 10$ செமீ உள்ளவாறு R ஐக் குறிக்க.

5. $\overline{QR}$ ஐ வரைக.

இப்பொழுது $\triangle AQR$இன் பக்க அளவுகள் $\triangle ABC$இன் பக்க அளவுகளைப்போல் இருமடங்காகும்.



படம் 7-106.

$QR = 2 \times BC = 2 \times 4 = 8$ செமீ; $\overline{QR} = \overline{BC}$ என்பன வற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 7-4·5

பின்வரும் அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, கொடுக்கப்பட்ட விகிதப்படி பெரிதாக்கப்பட்ட முக்கோணம் வரைக.

1. 3 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம்; பக்க அளவுகள் 3 மடங்கு.

2. பக்க அளவுகள் 5, 5, 4 அலகுகள் கொண்ட இரு சமபக்க முக்கோணம். இதன் பக்கங்களும் பெரிதாக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களும் கொண்டுள்ள விகிதம் 1 : 2.

3. 3 செமீ, 4 செமீ, 5 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம். இதன் பரப்பளவைப்போல் 4 மடங்கு பரப்பளவு கொண்ட முக்கோணம்.

4. பக்க அளவுகள் 2, 3, 4 அலகுகள் கொண்ட முக்கோணம். இதன் பரப்பளவிற்கும் பெரிதாக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 1 : 9

7-4·6. பெரிதாக்குதல் : கோட்டு உருவங்கள்

எடுத்துக்காட்டு :

பக்க அளவுகள் 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளவாறு பின் கண்ட அளவுகள் கொண்ட $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தைப் பெரிதாக்குக. $AB = 4$ செமீ, $BC = 2{\cdot}5$ செமீ, $CD = 1{\cdot}5$ செமீ, $DA = 3{\cdot}5$ செமீ, $m\angle A = 50°$.

வரைமுறை :

1. உதவிப் படம் வரைந்து கொடுத்துள்ள அளவுகளைக் குறிக்க.

2. $AB = 4$ செமீ, $m\angle A = 50°$, $AD = 3{\cdot}5$ செமீ, $BC = 2{\cdot}5$ செமீ, $DC = 1{\cdot}5$ செமீ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட $ABCD$ என்ற ஒரு நாற்கரம் வரைக.

3. Aஐ வடிவொப்புமை மையமாகக் கொண்டு $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ஐ வரைக.

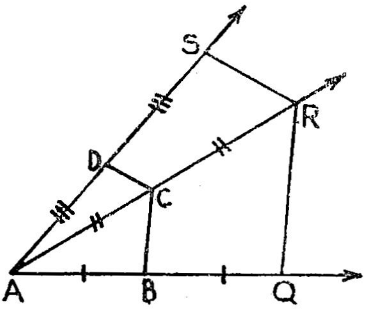
4. $\overrightarrow{AB}$இல் $AB = BQ$ என்றவாறு Qஐக் குறிக்க.

5. $\overrightarrow{AC}$இல் $AC = CR$ என்றவாறு Rஐக் குறிக்க.

6. $\overrightarrow{AD}$இல் $AD = DS$ என்றவாறு Sஐக் குறிக்க.

7. $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ஐ வரைக.

இப்பொழுது நாற்கரம் *AQRS*, நாற்கரம் *ABCD*ஐப்போல் இருமடங்கு பக்க அளவுகள் கொண்டதாகும்.



படம் 7-107.

$AQ = 2\ AB = 2 \times 4 \quad = 8$ செமீ;

$AS = 2\ AD = 2 \times 3{\cdot}5 = 7$ செமீ;

$QR = 2\ BC = 2 \times 2{\cdot}5 = 5$ செமீ;

$RS = 2\ CD = 2 \times 1{\cdot}5 = 3$ செமீ;

$\overline{QR} \parallel \overline{BC}$; $\overline{RS} \parallel \overline{CD}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 7-4·6

பின்வரும் அளவுகள் கொண்ட ஒரு நாற்கரம் வரைந்து, கொடுக்கப்பட்ட விகிதப்படி பெரிதாக்கப்பட்ட நாற்கரம் வரைக.

1. 3 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட சதுரம்; பக்க அளவுகள் 3 மடங்கு.

2. நீளம் 4 செமீ, அகலம் 3 செமீ கொண்ட செவ்வகம். இச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களும் பெரிதாக்கப்பட்ட செவ்வகத்தின் ஒத்த பக்கங்களும் கொண்டுள்ள விகிதம் 1 : 2.

3. பக்க அளவுகள் 5 செமீ, 3 செமீ கொண்ட ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு கோணத்தின் அளவு 60° இதன் பரப்பளவைப் போல் 4 மடங்கு பரப்பளவு கொண்ட இணைகரம்.

4. $PQRS$ என்ற நாற்கரத்தில் $PQ = 3$ செமீ, $QR = 4$ செமீ, $RS = 5$ செமீ, $SP = 6$ செமீ, $RP = 5$ செமீ. இதன் பரப்பளவுக்கும் பெரிதாக்கப்பட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பளவுக்கும் உள்ள விகிதம் $1 : 4$.

7-4·7. முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் வரைதல்

நினைவு கூர்க.

"ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லுகின்றன. இப் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் எனப்படுகிறது".

எடுத்துக்காட்டு :

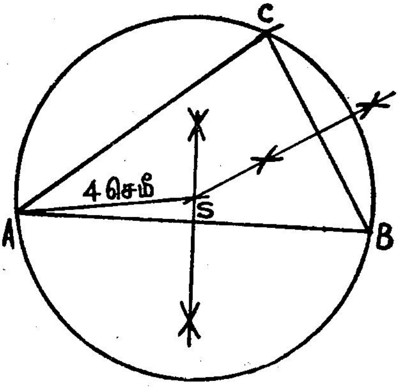
8 செமீ, 5 செமீ, 7 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் வரைந்து அதன் ஆரத்தின் அளவைக் காண்க.

வரைமுறை :

1. $AB = 8$ செமீ, $BC = 5$ செமீ, $AC = 7$ செமீ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட $\triangle ABC$ஐ வரைக.

2. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ஆகியவற்றின் மையக் குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி S என்க.

3. Sஐ மையமாகவும், SAஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. இவ் வட்டம் B, Cஇன் வழியாகச் செல்லுகிறது.



படம் 7-108.

இதுவே $\triangle ABC$ இன் சுற்று வட்டமாகும். ($SA = SB = SC$ என்பதைக் காண்க) சுற்று வட்ட ஆரம் $= SA = 4$ செமீ.

கவனிக்க :

குறுங்கோண முக்கோணத்தில் முக்கோணத்திற்கு உள்ளும், செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மையத்திலும், விரி கோண முக்கோணத்தில் முக்கோணத்திற்கு வெளியிலும் சுற்று வட்ட மையம் அமையும்.

பயிற்சி 7-4·7

பின்வரும் அளவுகள் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் வரைந்து அதன் ஆரத்தின் அளவைக் காண்க.

1. பக்க அளவுகள் 4, 5, 6 அலகுகள்.
2. $\triangle ABC$ இல் $AB = 7$ செமீ, $BC = 6$ செமீ, $m\angle B = 45°$.
3. $\triangle PQR$ இல் $PQ = 5$ செமீ, $PR = 4{\cdot}5$ செமீ, $m\angle P = 100°$.
4. $\triangle XYZ$ இல் $XY = 8$ செமீ, $XZ = 6$ செமீ, $m\angle X = 90°$.

7-4-8. முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் வரைதல்

நினைவு கூர்க.

"ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லுகின்றன. இப்புள்ளி உள் வட்டமையம் எனப்படுகிறது."

எடுத்துக்காட்டு :

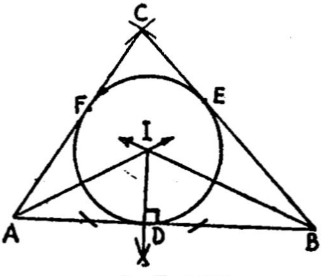
6 செமீ, 7 செமீ, 8 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் வரைக. உள்வட்ட ஆரத்தின் அளவைக் காண்க.

வரைமுறை :

1. $AB = 8$ செமீ, $BC = 7$ செமீ, $AC = 6$ செமீ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட $\triangle ABC$ ஐ வரைக.

2. $\angle A$, $\angle B$ ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி I என்க.

3. I இல் இருந்து $\overline{AB}$ க்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைக. அது ABஐ வெட்டும் புள்ளி D என்க.



படம் 7-109.

4. I ஐ மையமாகவும், ID ஐ ஆரமாகவும்கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. இவ் வட்டம் $\overline{BC}$ ஐ E யிலும், $\overline{AC}$ ஐ F யிலும் தொடுகிறது. இதுவே $\triangle ABC$இன் உள் வட்டம் ஆகும்.

உள்வட்ட ஆரம் $= ID = 2$ செமீ.

[(i) $ID = IE = IF$, (ii) $AD = AF$; $BD = BE$; $CE = CF$ என்பனவற்றைக் காண்க.]

பயிற்சி 7-4·8

பின்வரும் அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் உள் வட்டம் வரைந்து அதன் ஆரத்தின் அளவைக் காண்க.

1. பக்க அளவுகள் 5, 7, 9 அலகுகள்.
2. $\triangle ABC$இல் $AB = 10$ செமீ, $m\angle A = 40°$, $m\angle B = 50°$.
3. $\triangle PQR$இல் $PR = 12$ செமீ, $m\angle P = m\angle R = 40°$.
4. $\triangle XYZ$இல் $XY = YZ = ZX = 9$ செமீ.

பாடச் சுருக்கம்

1. இரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருக்க நிபந்தனைகள் :

(அ) பக்கம், கோணம், பக்கம் (ஆ) கோணம், பக்கம், கோணம் (இ) பக்கம், பக்கம், பக்கம் (ஈ) கர்ணம், பக்கம் (செங்கோண முக்கோணங்களானால்)

2. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் சந்தித்துக் கொள்ளும் புள்ளி செங்கோட்டு மையம் ஆகும்.

உச்சிகளையும், எதிர்ப்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோண மையம் ஆகும்.

கோணங்களை இரு சமக்கூறிடும் கோடுகள் சந்தித்துக் கொள்ளும் புள்ளி முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் ஆகும்.

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையக் குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி சுற்று வட்ட மையம் ஆகும்.

3. வட்டங்கள்

(அ) (i) சர்வசம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளன.

(ii) வட்ட மையத்திலிருந்து சமதொலைவில் உள்ள நாண்கள் சர்வசமம்.

(iii) சர்வசம நாண்கள் சமவிற்களை வெட்டும்.

(iv) சர்வசமவிற்கள் சமநாண்களை உண்டாக்கும்.

(ஆ) (i) அரைவட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம்

(ii) ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்கள்.

(இ) (i) ஒரு வட்டத் துண்டில் உள்ள வட்டக் கோணங்கள் சர்வசமம்.

(ii) மையக் கோணத்தின் அளவு வட்டக் கோணத்தின் அளவைப்போல இருமடங்கு.

(ஈ) (i) தொடுகோடும் தொடு புள்ளி வழியே செல்லும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

(ii) ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோட்டுத் துண்டுகளும் சர்வசமம். அவை வட்ட மையத்தில் அமைக்கும் கோணங்கள் சர்வசமம்.

(iii) தொடுகோடும், தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் நாணும் அமைக்கும் கோணம், அதற்கு எதிரேயுள்ள வட்டத்துண்டில் உள்ள வட்டக்கோணத்திற்குச் சர்வசமம்.

(உ) இரு தொடு வட்டங்களில், தொடுபுள்ளியும், வட்ட மையங்களும் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

(ஊ) இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ள உண்டாகும் வெட்டுத்துண்டுகளால் அமையும் செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

4. ஒத்தகோண அளவுகளைக்கொண்ட முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் எனப்படுகின்றன. அவற்றில் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகளின் விகிதங்கள் சமம்.

முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் $l : m$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகள் $l^2 : m^2$ என்ற விகிதத்திலிருக்கும்.

5. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் அளவின் வர்க்கம் செங்கோணப் பக்கங்களின் அளவுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

6. (அ) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகள் இடையே தொலைவு $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(ஆ) (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின்

(i) சாய்வு, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(ii) சமன்பாடு $(y - y_1) = m(x - x_1)$

(இ) (i) ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$

(ii) X அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $y = c$

(iii) Y அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$

(ஈ) (i) $y = mx + c$ என்பதன் சாய்வு $= m$; வெட்டு $= c$

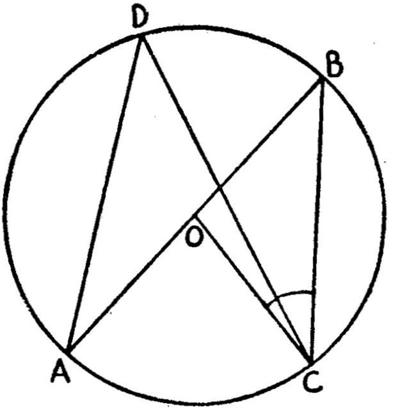
(ii) $ax + by + c = 0$ என்பதன் சாய்வு $= -\dfrac{a}{b}$;

வெட்டு $= \dfrac{-c}{b}$

தன்னறிவுச் சோதனை-1

1. $\triangle ABC$ இல் $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ எனில், $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ எனக்காட்டுக.

2. படம் 7-110 இல் $m \angle OCB = 40°$ எனில், $m \angle ADC$, $m \angle AOC$ எவ்வளவு ?



படம் 7-110.

3. 12 செமீ, 13 செமீ ஆரம் கொண்ட இரு பொது மைய வட்டங்களுள் ஒன்றின் நாண் மற்றொன்றின் தொடு கோடாக அமைகிறது எனில் நாணின் நீளம் என்ன ?

4. 2·5 செமீ விட்டமுள்ள 3 வட்ட நாணயங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரண்டையும் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டால் அவற்றின் தொடு புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் யாவை ?

5. (3, 3), (3, 6), (6, 3) ஆகிய உச்சிகளைக்கொண்ட முக்கோணம் எவ்வகை முக்கோணம்? அதன் சுற்றளவு யாது ?

6. ஒரு கோட்டின் சாய்வு விகிதம் 6, அக்கோடு Y அச்சில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு -3 எனில் அதன் சமன்பாடு யாது? அக் கோட்டிற்கு இணையாக ஆதிப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

விடைகள்

(2) 40°, 80° (3) 10 செமீ (4) பக்க அளவு 1·25 செமீ கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் (5) செங்கோண முக்கோணம், $6 + 3\sqrt{2}$

தன்னறிவுச் சோதனை-2

1. 13 செமீ விட்டம் கொண்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 11 செமீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரைக. தொடு கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.

2. 6·5 செமீ அளவுள்ள அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள உச்சிக் கோணத்தின் அளவு 55°. அவ்வுச்சியிலிருந்து வரையப்படும் மையக் கோட்டுத்துண்டின் அளவு 5 செமீ. இவ்வளவுகளைக்கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதன் மற்ற இருபக்கங்களை அளந்து எழுதுக.

3. 4 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட சாய்சதுரத்தின் ஒரு மூலை விட்டத்தின் அளவு 6 செமீ. பக்கங்களின் அளவுகள் இருமடங்கு உள்ளவாறு இச்சாய்சதுரத்தைப் பெரிதாக்குக.

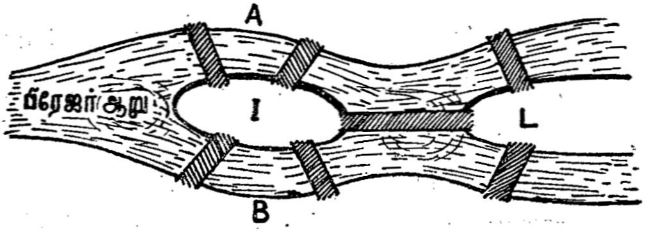
4. ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்க அளவுகள் 6·5 செமீ, 8 செமீ. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணத்தின் அளவு 110° இம் முக்கோணம் வரைந்து அதன் சுற்று வட்டத்தை வரைக. வட்டத்தின் ஆரத்தை அளந்து எழுதுக.

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம் — மேடை 6

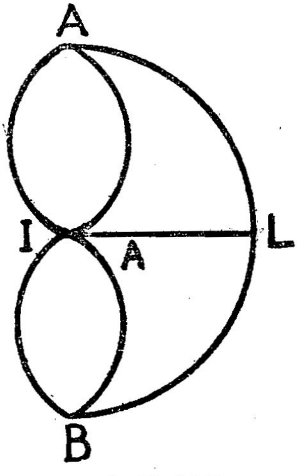
ஒருவழிப் பாதைகள்

ஆய்லர் ஒரு மாபெரும் கணித மேதை எனப் பார்த்தோம். அவரிடம் பின்வரும் கேள்வி கேட்கப்பட்டது. கோனிக்சுபெர்க் என்ற ஊரிலுள்ள ஏழு பாலங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரே ஒரு முறை கடந்து ஊர் முழுவதும் சென்று பார்க்கமுடியுமா ?



படம் 7-111.

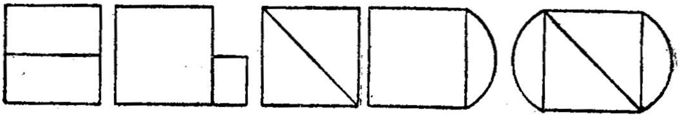
இவ் வினாவை ஆய்லர் கீழ்க்காணும் கணித வரையாக மாற்றி விடை காண முற்பட்டார்.



படம் 7-112.

நாமும் அவர் வழியே இப் புதிருக்கு விடை காண்போம்.

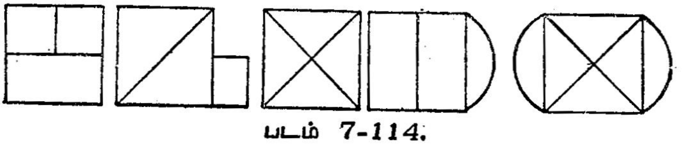
கீழ்க்காணும் கணித வரைகளை ஆய்க.



படம் 7-113.

இவை ஒவ்வொன்றின் உச்சியிலும் எத்தனை கோடுகள் சந்திக்கின்றன? இவற்றின் ஒருவழிப் பாதைகள் அமைக்க இயலுமா எனச் சோதிக்க.

மேற்கண்ட உருவங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு கோடு அதிகப்படுத்துவோம்.



படம் 7-114.

மீண்டும் ஒரு வழிப்பாதைகள் இவ்வுருவங்களில் அமைக்க முடியுமா என ஆய்க. முதல் 4 உருவங்களில் முடியாது எனவும் கடைசி உருவத்தில் முடியும் எனவும் காண்க.

உருவம்	ஒற்றை உச்சிகள்	இரட்டை உச்சிகள்	ஒரு வழிப் பாதை
1	2	4	உண்டு
2	2	5	உண்டு
3	2	2	உண்டு
4	2	2	உண்டு
5	2	2	உண்டு
6	4	4	இல்லை
7	4	3	இல்லை
8	4	1	இல்லை
9	4	2	இல்லை
10	0	5	உண்டு

இவற்றினின்று ஆய்லர் கண்ட முடிவு '2க்குமேல் ஒற்றை உச்சி உள்ள கணித வரைகளில் ஒரு வழிப் பாதை அமைக்க இயலாது' என்பதாகும். இதன் அடிப்படையில் கோனிக்சுபெர்க் புதிரை விடுவிக்க.

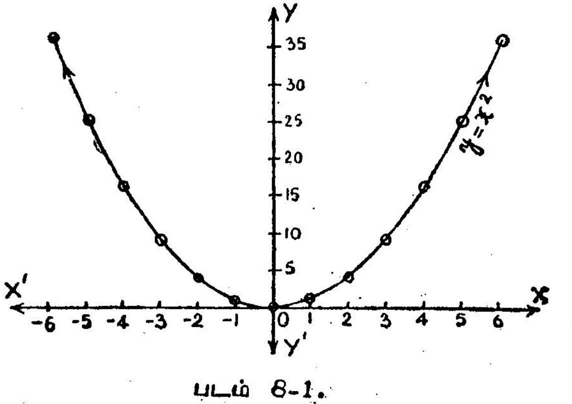
8. வரைபடங்கள்

8-1-1. *வரைபடம்: $y = x^2$ வடிவம்*

$y = x^2$, $x, y \in R$ என்ற இருபடி ஓர் உறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைய xக்கு 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ... என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கேற்றவாறு y இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

இப்பொழுது நமக்கு ... $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ . . . என்ற வரிசைச் சோடிகள் கிடைக்கின்றன. இவற்றை $R \times R$ என்ற தளத்தில் தகுந்த அளவுத் திட்டப்படி (எ - டு: X அச்சில் 1 செமீ → 1 அலகு; Y அச்சில் 1 செமீ → 5 அலகு) குறிக்க. பிறகு இப்புள்ளிகளை நெளிவு சுளிவு அற்ற, சீரான வளைகோட்டால் இணைக்க $y = x^2$ இன் வரைபடம் கிடைக்கிறது.



படம் 8-1.

கவனிக்க :

1. வரைபடம் முதல் இரண்டு கால் பகுதிகளில் அமைகிறது.

2. ஆதிப் புள்ளி O (0, 0)இன் வழியாகச் செல்லுகிறது.

3. X அச்சு $y = x^2$ க்கு ஆதிப் புள்ளியில் தொடு கோடாக அமைகிறது.

4. Y அச்சு சமச்சீர் அச்சாக அமைகிறது.

பயிற்சி 8-1-1

வெவ்வேறு அளவுத் திட்டங்களில் $y = x^2$ என்ற பரவளை யின் வரைபடத்தை வரைக.

8-1·2. வரைபடம் : $y = x^2 + a$ வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = x^2 + 4$, $x, y \in R$ என்ற இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$y = x^2 + 4$	20	13	8	5	4	5	8	13	20

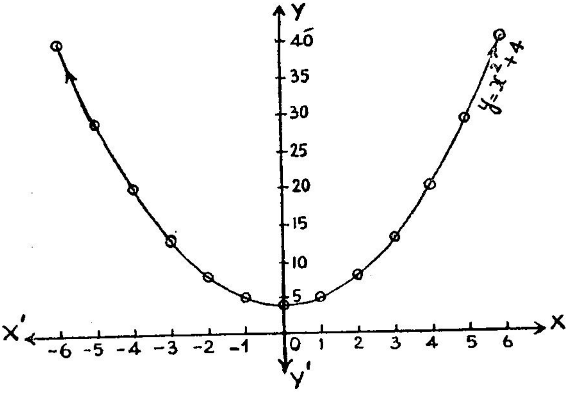
அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 5 அலகு

$y = x^2 + 4$இன் வரைபடம் முதல் இரண்டு கால் பகுதிகளில் அமைகிறது. ஆதிப் புள்ளி O (0, 0)இன் வழியாகச் செல்வ தில்லை. y அச்சு சமச்சீர் அச்சாக அமைகிறது. $x = 0$ என்றால் $y = 4$; 4 தான் $y = x^2 + 4$இன் குறைந்த மதிப்பாகும்.

$y = x^2 + 4 \neq 0$ என்பதால் வரைபடம் X அச்சை வெட்டுவதில்லை.



படம் 8-2.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$y = x^2 - 4$ என்ற இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு :

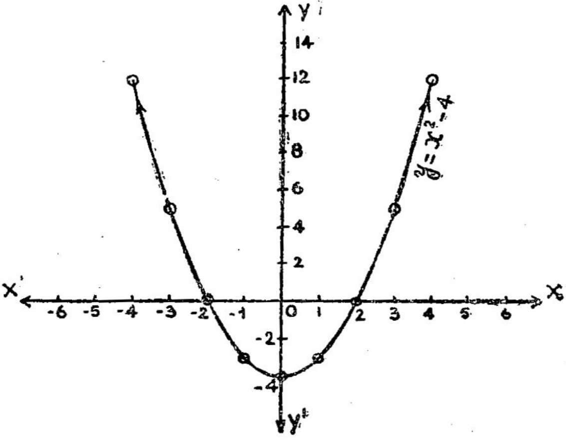
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
$y = x^2 - 4$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 2 அலகு

$y = x^2 - 4$இன் வரைபடம் நான்கு கால்பகுதிகளிலும் அமைகிறது ; ஆதிப்புள்ளி 0 (0, 0)இன் வழியாகச் செல்வ தில்லை ; Y அச்சு சமச்சீர் அச்சாக அமைகிறது ; வரைபடம் X அச்சை $(-2, 0)$, $(2, 0)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.



படம் 8-3.

xஇன் மதிப்பு ± 2ஆக இருக்கும்போது yஇன் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவே $y = x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ அல்லது -2.

பயிற்சி 8-1-2

பின்வரும் இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(1) $y = x^2 - 1$ (2) $y = x^2 + 9$ (3) $y = x^2 - 16$

வரைந்து பாருங்கள்

பின்வரும் சார்புகளின் வரைபடங்களை ஒரே வரைபடத் தாளில் ஒரே அளவுத் திட்டப்படி வரைக. பரவளைவுகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பதைக் காண்க.

(1) $y = x^2 + 1$; $y = x^2 + 4$; $y = x^2 + 8$

(2) $y = x^2 - 2$; $y = x^2 - 5$; $y = x^2 - 9$

8-1-3. வரைபடம்: $y = x^2 + ax$ வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = x^2 + 4x$, $x, y \in R$ என்ற இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

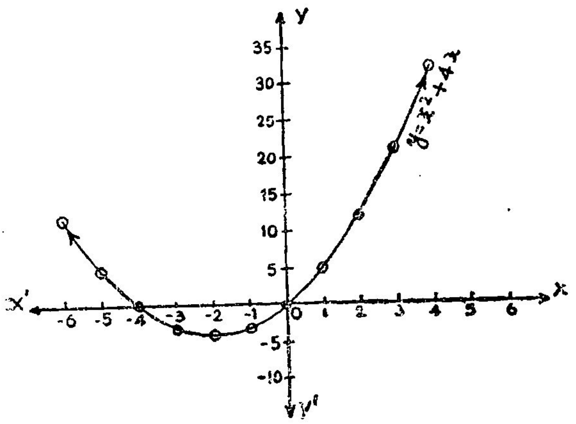
தீர்வு :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
x^2	36	25	16	9	4	1	0	1	4
$4x$	-24	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8
$y=x^2+4x$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 5 அலகு



படம் 8-4.

x இன் மதிப்பு 0 அல்லது -4 ஆக இருக்கும்போது y இன் மதிப்பு 0.

எனவே, $y = x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ அல்லது -4.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = x^2 - 4x$; $x, y \in R$ என்ற இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

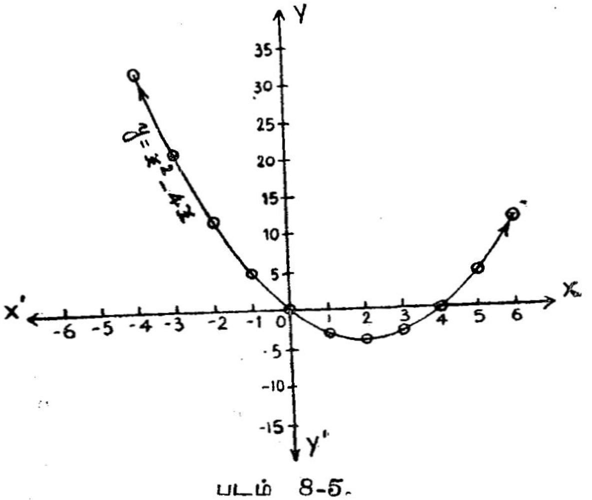
தீர்வு :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$-4x$	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24
$y=x^2-4x$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ $\rightarrow$ 5 அலகு



படம் 8-5.

x இன் மதிப்பு 0 அல்லது 4 ஆக இருக்கும்போது y இன் மதிப்பு 0.

எனவே. $y = x^2 - 4x = 0 \implies x = 0$ அல்லது 4.

பயிற்சி 8-1-3

பின்வரும் இருபடி ஈருறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(1) $y = x^2 - 3x$ (2) $y = x^2 + 7x$

(3) $y = x^2 - 16x$ (4) $y = x^2 - 25x$

வரைந்து பாருங்கள்

பின்வரும் சார்புகளின் வரைபடங்களை ஒரே வரைபடத் தாளில் ஒரே அளவுத் திட்டப்படி வரைக. பரவளைவுகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பதைக் காண்க.

(1) $y = x^2 + 2x$; $y = x^2 + 5x$; $y = x^2 + 8x$

(2) $y = x^2 - 2x$; $y = x^2 - 5x$; $y = x^2 - 8x$

8-1-4. வரைபடம் $y = x^2 + ax + b$ வடிவம்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = x^2 + x + 5$; $x, y \in R$ என்ற இருபடி மூவுறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

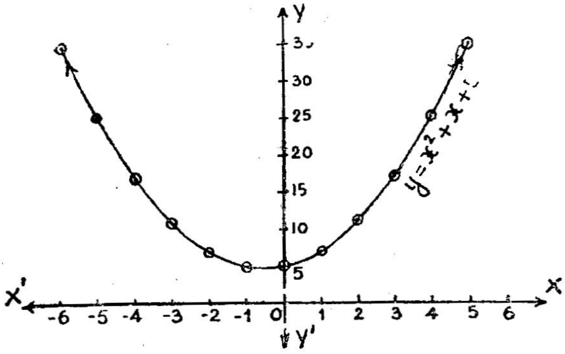
தீர்வு :

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
5	5	5	5	5	5	5	5	5
$y=x^2+x+5$	17	11	7	5	5	7	11	17

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ → 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ → 5 அலகு



படம் 8-6.

x இன் எம் மதிப்பிற்கும் $y = 0$ என அமையவில்லை. எனவே, வரைபடம் X அச்சை வெட்டுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = x^2 - 4x + 4$ என்ற இருபடி மூவுறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

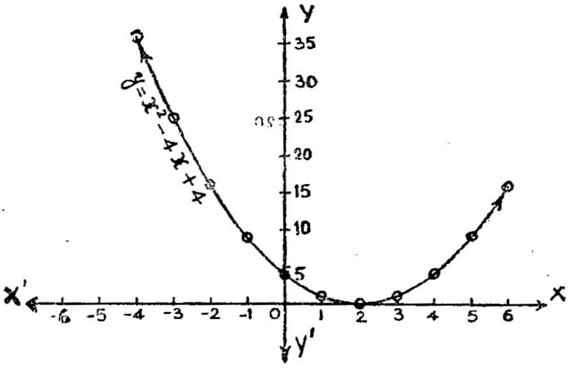
தீர்வு :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$-4x$	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$y = x^2 - 4x + 4$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ → 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ → 5 அலகு



படம் 8-7.

$x = 2$ என்றால் $y = 0$

எனவே, $y = x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ என்பதைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$y = x^2 - 2x - 3$ இன் வரைபடம் வரைக.

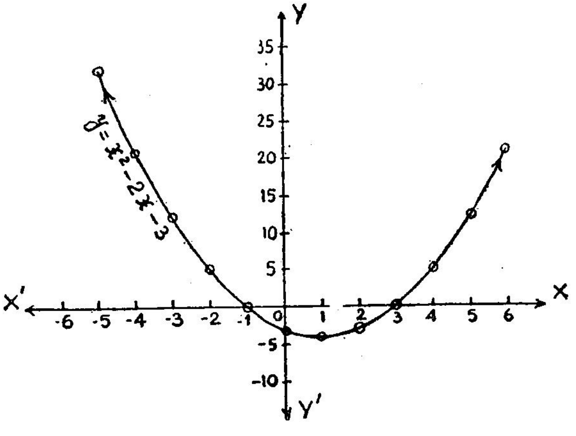
தீர்வு :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$-2x$	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
$y = x^2 - 2x - 3$	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21

அளவுத் திட்டம் :

X அச்சில் 1 செமீ → 1 அலகு

Y அச்சில் 1 செமீ → 5 அலகு



படம் 8-8.

$y = x^2 - 2x - 3$இன் வரைபடம் X அச்சை $(-1, 0)$, $(3, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $x = -1$ அல்லது 3 என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் yஇன் மதிப்பு 0 ஆகிறது. எனவே, $y = x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ அல்லது 3.

பயிற்சி 8-1-4

பின்வரும் இருபடி மூவுறுப்புச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(1) $y = x^2 + 2x + 7$

(2) $y = x^2 + 4x + 4$

(3) $y = x^2 - 2x - 15$

(4) $y = x^2 - 3x + 2$

8-1-5. வரைபடம்: இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$x^2 + ax + b = 0$ என்பதன் தீர்வுக்கணம் $y = x^2 + ax + b$, $y = 0$என்பவற்றின் வெட்டுக் கணமாகும். $y = 0$ என்பது X அச்சு. எனவே, $x^2 + ax + b = 0$ என்பதன் தீர்வுக்கணத்தை

$y = x^2 + ax + b$ என்பதன் வரைபடம் X அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து தெரிந்து கொள்ளலாம்.

வரைபட எண்	சார்பு	வரைபடம் X-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்	சமன்பாடு	மெய்யெண் கணத்தில் தீர்வுக் கணம்
8·1	$y=x^2$	(0, 0)	$x^2=0$	{ 0 }
8·2	$y=x^2+4$	ஒன்றுமில்லை	$x^2+4=0$	{ }
8·3	$y=x^2-4$	(−2, 0), (2, 0)	$x^2-4=0$	{ −2, 2 }
8·4	$y=x^2+4x$	(−4, 0), (0, 0)	$x^2+4x=0$	{ −4, 0 }
8·5	$y=x^2-4x$	(0, 0), (4, 0)	$x^2-4x=0$	{ 0, 4 }
8·6	$y=x^2+x+5$	ஒன்றுமில்லை	$x^2+x+5=0$	{ }
8·7	$y=x^2-4x+4$	(2, 0)	$x^2-4x+4=0$	{ 2 }
8·8	$y=x^2-2x+3$	(−1, 0), (3, 0)	$x^2-2x+3=0$	{ −1, 3 }

கவனிக்க :

1. $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணத்தின் உறுப்புகள் $y = x^2 + ax + b$ என்பதன் வரைபடம் Xஅச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் X அச்சுத் தொலைவுகள் ஆகும்.

2. $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் கொண்டிராது.

பயிற்சி 8-1-5

பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வை வரைபடம் வரைந்து காண்க.

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 + 2x = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$
4. $x^2 - 2x - 8 = 0$

விடைகள்

1. $\{3, -3\}$, 2. $\{0, -2\}$
3. $\{ \}$ 4. $\{4, -2\}$

3-2-1. அசமன்பாடுகள்

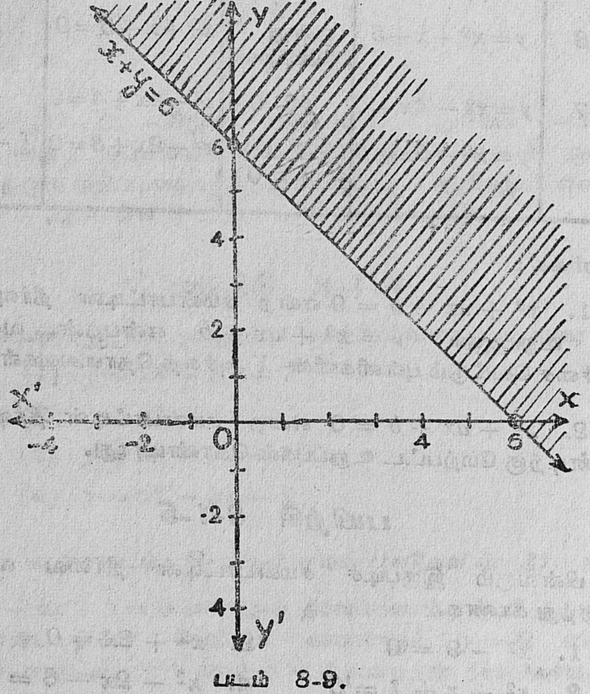
ஒன்பதாம் வகுப்பில் அசமன்பாடுகள் வரையும் முறையைக் கற்றுக் கொண்டோம். அதை மீண்டும் நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x + y \geqslant 6$, $x, y \in R$ என்ற அசமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக.

வரைமுறை

1. $x + y = 6$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் வரைக.



படம் 3-9.

2. $x + y > 6$ என்பதை நிறைவேற்றும் (0, 7), (7,0), (4, 6) போன்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளி தளத்தின் எப்பிரிவில் அமைகிறது எனக் காண்க. அதுவே அசமன்பாடு குறிக்கும் தளமாகும்.

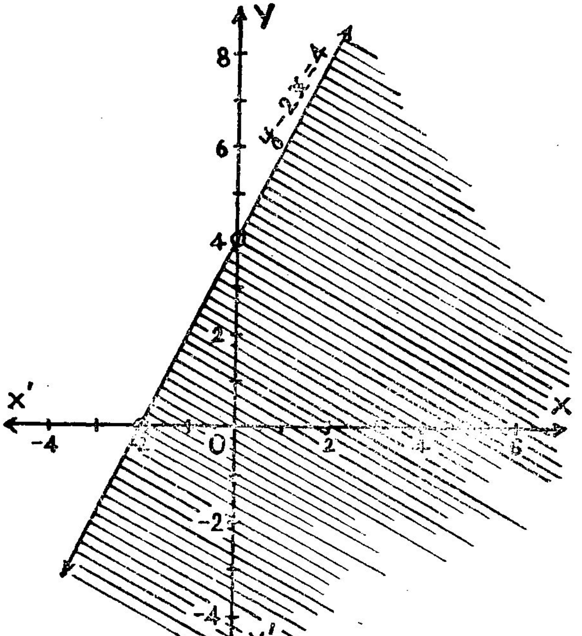
3. அதைச் சாய்வுக் கோடுகளால் நிழலிடுக.

$x + y \geq 6$ என்பது $x + y > 6$, $x + y = 6$ என்பவற்றின் சேர்ப்பு ஆகும். எனவே, $x + y = 6$ என்ற கோடு தேவையான தளப்பகுதிக்குள் அடங்கும் என்பதைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y - 2x < 4$, $x, y \in R$ என்ற அசமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக.

வரைமுறை



படம் 8-10.

1. $y - 2x = 4$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

2. $y - 2x < 4$ என்பதை நிறைவேற்றும் (0, 2), (1, 0) போன்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளி தளத்தின் எப்பிரிவில் அமைகிறது எனக் காண்க. அதுவே அசமன்பாடு குறிக்கும் தளமாகும்.

3. அதைச் சாய்வுக் கோடுகளால் நிழலிடுக. $y - 2x = 4$ என்ற கோடு தேவையான தளப்பகுதிக்குள் அடங்கும் என்பதைக் காண்க.

பயிற்சி 8-2·1

பின்வரும் அசமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக. $(x, y \in R)$

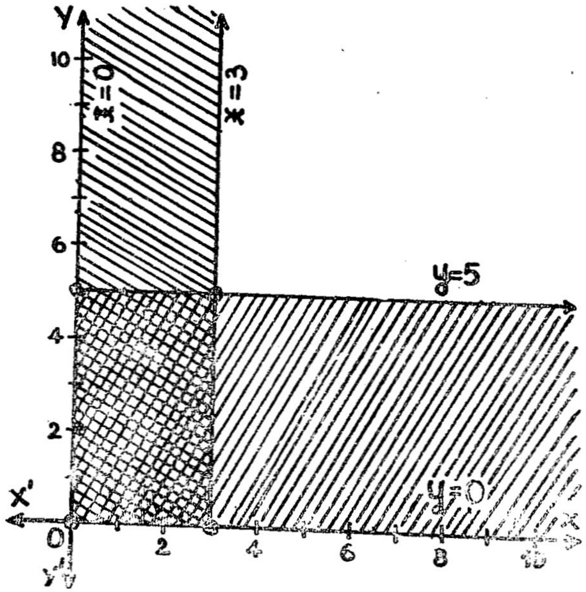
(1) $x < 6$ (2) $y > 4$ (3) $2x + y < 5$
(4) $4x + y > 8$

8-2·2. இரு அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x < 3$ மேலும் $y < 5$; $x, y \in R$ என்ற அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம் வரைக.

வரைமுறை



படம் 8-11.

1. $x = 3$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

2. $x < 3$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் தளத்தைக் தீர்மானிக்க.

3. $y = 5$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

4. $y \leqslant 5$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் தளத்தைத் தீர்மானிக்க.

5. இரு அசமன்பாடுகளும் குறிக்கும் தளப்பகுதிகளின் வெட்டுக் கணத்தை நிழலிடுக.

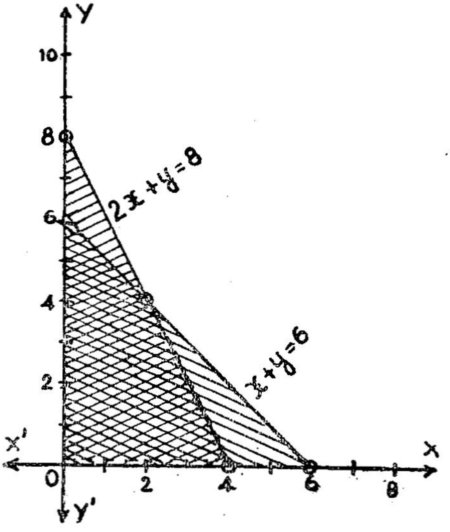
6. "$x \leqslant 3$ மேலும் $y < 5$" என்ற அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம் X, Y அச்சுகளோடு சேர்ந்து ஏற்படுத்தும் செவ்வகத்தின் உச்சிகளின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

அவை முறையே (0, 0), (3, 0), (3, 5), (0, 5) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x + y < 6$ மேலும் $2x + y < 8$, x $y \in R$ என்ற அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம் வரைக.

வரைமுறை



படம் 8-12.

வரைமுறை

1. $x + y = 6$ என்ற நேர்க்கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

2. $x + y \leqslant 6$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் தளத்தைத் தீர்மானிக்க.

3. $2x + y = 8$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் வரைக.

4. $2x + y \leqslant 8$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் தளத்தைத் தீர்மானிக்க.

5. இரு அசமன்பாடுகளும் குறிக்கும் தளப்பகுதிகளின் வெட்டுக் கணத்தை நிழலிடுக.

6. "$x + y \leqslant 6$ மேலும் $2x + y \leqslant 8$" என்ற அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம் X, Y அச்சுக்களோடு சேர்ந்து ஏற்படுத்தும் நாற்கரத்தின் உச்சிகளின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க. அவை முறையே $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(0, 6)$ ஆகும்.

பயிற்சி 8-2-2

பின்வரும் அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடம் வரைக. $(x, y \in R)$

1. $x \leqslant 2$ மேலும் $y \leqslant 4$
2. $x + y \leqslant 6$ மேலும் $4x + y \leqslant 9$
3. $x + y \leqslant 5$ மேலும் $3x + 2y \leqslant 12$
4. $x + y \leqslant 10$ மேலும் $2x + 3y \leqslant 24$

8-2-3. ஒரு படித்திட்டம் : மிகுதிப்படுத்துதல்

அசமன்பாட்டுத் தொகுதியின் வரைபடங்கள் வாழ்க்கையில் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை ஒரு படித்திட்டத்தின் மூலமாக அறிந்துகொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு விவசாயியின் பண்ணையில் 100 பறவைகள் வளர்க்க இடமிருக்கிறது. அவர் ஒரு கோழிக்குஞ்சு ரூ. 2 எனவும், ஒரு வாத்துக்குஞ்சு ரூ. 3 எனவும் சில பறவைகளை வாங்குகிறார். ஆனால், அவர் ரூ. 240-க்குமேல் செலவழிக்க இயலாது. பறவைகளை வளர்த்து விற்றால் அவருக்குக் கிடைக்கும் வருமானம்

கோழி ஒன்றுக்கு ரூ. 4, வாத்து ஒன்றுக்கு ரூ. 5 ஆகும். மிக உயர்ந்த வருமானம் பெற விவசாயி வாங்கவேண்டிய கோழிக் குஞ்சுகள், வாத்துக் குஞ்சுகள் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு :

	கோழி	வாத்து	கட்டுப்பாடு
எண்ணிக்கை	x	y	100
விலை (ரூ.)	2	3	240
வருமானம் (ரூ.)	4	5	மிக உயர்ந்த அளவு

அசமன்பாடுகள் (1) $x + y \leqslant 100$

(2) $2x + 3y \leqslant 240$

(3) $x \geqslant 0$

(4) $y \geqslant 0$

(கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து பெறும் இந்நான்கு அசமன்பாடுகளும் கட்டுப்பாடுகள் எனப்படும்).

விவசாயி பெறும் வருமானம் $P = 4x + 5y$ இது குறிக்கோள் சார்பு எனப்படுகிறது. இதன் மிக உயர்ந்த மதிப்பைத் தீர்மானிக்கவேண்டும்.

படம் 8-13இல் இந் நான்கு அசமன்பாடுகளும் $OABC$ என்ற நாற்கரத்தின் உட்பகுதியை அமைக்கின்றன.

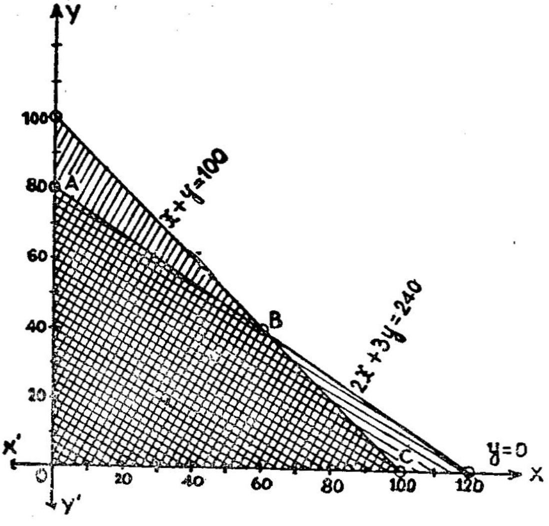
$O\,(0,\ 0)$ ஆனால், வருமானம் ரூ. $(4.0 + 5.0)$ = ரூ. 0

$A\,(0,\ 80)$ ஆனால், வருமானம் ரூ. $(4.0 + 5.80)$ = ரூ. 400

$B\,(60, 40)$ ஆனால், வருமானம் ரூ. $(4.60 + 5.40)$ = ரூ. 440

$C\,(100,\ 0)$ ஆனால் வருமானம் ரூ. $(4.100 + 5.0)$ = ரூ. 400

எனவே, 60 கோழிக்குஞ்சுகளும் 40 வாத்துக்குஞ்சுகளும் வாங்கி வளர்ப்பது விவசாயிக்கு மிக உயர்ந்த வருமானம் ரூ. 440ஐ அளிக்கும்.



படம் 8-13.

(இவ்வாறு ஒரு படித்திட்டத்தில் இயன்ற அளவு மிக உயர்ந்த மதிப்பைக் காண்பது மிகுதிப்படுத்துதல் எனப்படுகிறது.)

பயிற்சி 8-2-3

1. ஒரு சைக்கிள் தொழிற்சாலையில் இருவகையான சைக்கிள்கள் தயாரிக்கப்படுகின்றன. முதல் வகை பொதுமக்கள் பயன்படுத்துவதும், இரண்டாவது வகை சைக்கிள் ஓட்டப் பந்தயங்களில் பயன்படுத்துவதும் ஆகும். இரண்டு வகையிலுமாகச் சேர்ந்து அத் தொழிற்சாலையில் மாதத்திற்கு 200 சைக்கிள்களுக்கு மேல் தயாரிக்கமுடியாது. முதல் வகைச் சைக்கிள் ஒன்றைச் சரிபார்த்து அனுப்ப அங்கு பணிபுரிவோருக்கு 2 மணி நேரமும் இரண்டாவது வகைச் சைக்கிள் ஒன்றைச் சரிபார்த்து அனுப்ப 3 மணி நேரமும் தேவைப்படுகிறது. அத் தொழிற்சாலையில் ஒரு மாதத்தில் 480 மணி நேரத்திற்குமேல் சரிபார்க்கும் வேலை நடைபெற வாய்ப்பில்லை. பொதுமக்கள் பயன்படுத்தும் சைக்கிளில் வருமானம் ரூ. 20, ஓட்டப் பந்தயங்களில் பயன்படுத்தப்படும் சைக்கிளில் வருமானம் ரூ. 30 எனில் மிக உயர்ந்த வருமானம் பெற ஒரு மாதத்தில் ஒவ்வொரு வகை சைக்கிளிலும்

தயாரிக்க வேண்டிய மிக உயர்ந்த எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. ஒரு தொழிற்சாலையில் இரு வகைக் கால்நடைத் தீவனம் தயாரிக்கப்படுகின்றன. இரண்டு வகையிலும் சேர்ந்து ஒரு நாளைக்கு 40 டன்களுக்குமேல் தயாரிக்க முடியாது. முதல் வகையில் செலவு, டன் ஒன்றுக்கு ரூ. 3, இரண்டாவது வகையில் செலவு, டன் ஒன்றுக்கு ரூ. 6 ஆகிறது. நாள் ஒன்றுக்கு ரூ. 180 க்கு மேல் செலவு செய்ய முடியாது. முதல் வகைத் தீவனத்தில் ஒரு டன்னுக்கு வருமானம் ரூ. 6. இரண்டாவது வகைத் தீவனத்தில் ஒரு டன்னுக்கு வருமானம் ரூ. 7 எனில், மிக உயர்ந்த வருமானம் பெற நாள் ஒன்றுக்கு ஒவ்வொரு வகையிலும் மிக உயர்ந்த அளவு எத்தனை டன் தயாரிக்க வேண்டும் ?

3. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $5x + y \leqslant 170$, $x + y \leqslant 50$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்ட $C = 3x + 2y$ என்ற குறிக்கோள் சார்பை மிகுதிப்படுத்துக.

விடைகள்

1. 160 ஓட்டபந்தய சைக்கிள்கள் மட்டும் (அல்லது) 120 பொது மக்கள் சைக்கிள்களும் 80 ஓட்டப் பந்தய சைக்கிள் களும்; மிக உயர்ந்த வருமானம் ரூ. 4,800.

2. முதல் வகைத் தீவனம் 20 டன், இரண்டாவது வகைத் தீவனம் 20 டன், மிக உயர்ந்த வருமானம் ரூ. 260.

3. $x = 30$, $y = 20$; C இன் மிக உயர்ந்த மதிப்பு 180.

8·2·4. ஒருபடித் திட்டம்: குறைவுப் படுத்துதல்

எடுத்துக்காட்டு :

உணவு முறை வல்லுநர் ஒருவர் மிக உயர்ந்த அளவு 16 அலகு வைட்டமின் A வும், 14 அலகுகள் வைட்டமின் C யும் இருக்குமாறு இருவகை உணவுகளைக் கலந்து ஒரு புதிய உணவைத் தயாரிக்கிறார். முதல் வகை உணவில் 1 கிலோ கிராமுக்கு 2 அலகுகள் வைட்டமின் A வும், 1 அலகு வைட்டமின் C யும் உள்ளன. இரண்டாவது வகை உணவில் 1 கிலோ கிராமுக்கு 1 அலகு வைட்டமின் A வும், 2 அலகு வைட்டமின் C யும் உள்ளன. முதல் வகை உணவு ஒரு கிலோகிராம் ரூ. 3 ; இரண்

ண்டாவது வகை உணவு ஒரு கிலோகிராம் ரூ. 4 என்றால் இரு வகை உணவுகளையும் எவ்வளவு வாங்கி புதிய உணவு தயாரித்தால் அதன் விலை மிகக் குறைவாக இருக்கும் ?

தீர்வு :

	முதல் வகை உணவு x கிகி	இரண்டாவது வகை உணவு y கிகி	கட்டுப்பாடு
வைட்டமின் A	2	1	16
வைட்டமின் C	1	2	14
விலை (ரூ.)	3	4	மிகக் குறைந்த அளவு

அசமன்பாடுகள் (1) $2x + y \leq 16$

(2) $x + 2y \leq 14$.

(3) $x \geq 0$

(4) $y \geq 0$

இக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு புதிய உணவின் விலையை $C = 3x + 4y$ என்ற சார்பு குறிக்கிறது. எனவே, இக் குறிக்கோள் சார்பின் மிகக் குறைந்த மதிப்பைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

படம் 8-14 இல் இந்நான்கு அசமன்பாடுகளும் $OABC$ என்ற நாற்கரத்தின் உட்பகுதியை அமைக்கின்றன.

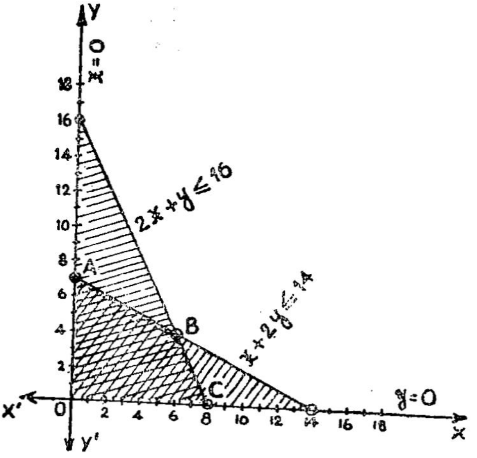
$O\,(0,0)$ ஆனால் விலை ரூ. $(3.0 + 4.0)$ = ரூ. 0.

$A\,(0, 7)$ ஆனால் விலை ரூ. $(3.0 + 4.7)$ = ரூ. 28.

$B\,(6, 4)$ ஆனால் விலை ரூ. $(3.6 + 4.4)$ = ரூ. 34.

$C\,(8, 0)$ ஆனால் விலை ரூ. $(3.8 + 4.0)$ = ரூ. 24.

எனவே, புதிய உணவின் மிகக் குறைந்த விலை ரூ. 24 ஆக இருக்க முதல் வகை உணவு 8 கிகி மட்டும் வாங்கினால் போதும்.



படம் 8-14.

(இவ்வாறு ஒரு படித்திட்டத்தில் இயன்ற அளவு மிகக் குறைந்த மதிப்பைக் காண்பது குறைவுப் படுத்துதல் எனப்படுகிறது.)

பயிற்சி 8-2-4

1. A என்ற ஒரு தையற்காரர் ஒரு நாளைக்குத் தைக்கக் கூடிய உருப்படிகளின் மிக உயர்ந்த எண்ணிக்கை 4 சட்டைகளும் 4 கால் சட்டைகளும் ஆகும். அதுபோலவே B என்பவர் ஒரு நாளைக்குத் தைக்கக் கூடிய உருப்படிகளின் மிக உயர்ந்த எண்ணிக்கை 6 சட்டைகளும் 4 கால் சட்டைகளும் ஆகும். Aஇன் தினக் கூலி ரூ. 15, Bஇன் தினக் கூலி ரூ. 20 ஆகும். மிகக் குறைந்த கூலிச் செலவில் மிக உயர்ந்த எண்ணிக்கையாக 24 சட்டைகளும், 20 கால் சட்டைகளும் தைக்க வேண்டும் என ஒரு தையற் கடையின் மேற்பார்வையாளர் விரும்புகிறார். அவர் A, B ஆகிய இருவரையும் எத்தனை நாட்களுக்கு வேலைக்கு அமர்த்த வேண்டும்?

2. வியாபாரி ஒருவர் அரிசி மூட்டை ஒன்றுக்கு ரூ. 5 வீதமும் பருப்பு மூட்டை ஒன்றுக்கு ரூ. 4 வீதமும் மொத்தம் ரூ. 100க்கு மேல் வண்டிச் சத்தம் கொடுக்க விரும்பவில்லை. மேலும் கையிருப்பு 22 மூட்டைகளுக்குமேல் வைத்துக்கொள்ள இடமில்லை. ஒரு மூட்டை அரிசியில் ஏற்படும் சேதத்தின்

மதிப்பு ரூ. 2. ஒரு மூட்டை பருப்பில் ஏற்படும் சேதம் ரூ. 1, என்றால் மிகக் குறைந்த சேதம் ஏற்படும் வகையில் அவர் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை மூட்டைகள் வாங்க வேண்டும்?

3. $x + y \leqslant 10$, $y + 4x \leqslant 28$, $x \geqslant 0$, $5 \geqslant 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்ட $C = 6x + 5y$ என்ற குறிக்கோள் சார்பை இயன்றவரை குறைவுப்படுத்துக.

விடைகள்

1. Aஐ மட்டும் 5 நாட்களுக்கு வேலைக்கு அமர்த்தினால் ஆகும் மிகக் குறைந்த செலவு ரூ. 75.

2. 22 பருப்பு மூட்டைகள் மட்டும் வாங்கினால் மிகக் குறைந்த சேதத்தின் மதிப்பு ரூ. 22.

3. $x=7$, $y=0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு Cஇன் மிகக் குறைந்த மதிப்பு 42.

பாடச் சுருக்கம்

1. $y = ax^2 + bx + c$ என்பதன் வரைபடம் வரைய, xக்கு பல்வேறு மிகை, குறை மதிப்புகளை இட்டு, அவற்றிற்கான y மதிப்புகளைக் காண்க. பின்னர் (x, y) சோடிகளை கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறித்து, ஒரு சீரான வளைகோட்டால் புள்ளிகளைச் சேர்க்க நமக்குத் தேவையான வரைபடம் கிடைக்கும்.

2. $y = x^2 + ax + b$இன் வரைபடம் X அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். வரைபடம் X அச்சை 2 புள்ளியில் வெட்டினால் தீர்வுக்கணம் 2 உறுப்புகளையும் 1 புள்ளியில் தொட்டால் 1 உறுப்பையும் கொண்டிருக்கும். X அச்சை வரைபடம் வெட்டாவிட்டால் மெய்யெண் கணத்தில் தீர்வு இல்லை என்போம்.

3. $y = mx + c$ என்ற கோடு தளத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. ஒருபகுதி $y > mx + c$ என்ற அசமன்பாட்டின் வரைபடத்தையும் மற்ற பகுதி $y < mx + c$ என்ற அசமன்பாட்டின் வரைபடத்தையும் காட்டும். $y \geqslant mx + c$ என்பதன் வரைபடம் $y = mx + c$ என்ற கோடும் $y > mx + c$ குறிப்பிடும் தளமும் சேர்ந்த பகுதி ஆகும். $y \leqslant mx + c$ என்பதன் வரைபடம் $y = mx + c$ என்ற கோடும் $y < mx + c$ குறிப்பிடும் தளமும் சேர்ந்த பகுதி ஆகும்.

4. 'மேலும்' என்ற சொல்லால் இணைக்கப்பட்ட இரு அசமன் பாடுகளின் தொகுப்பு அச் சமன்பாடுகள் குறிப்பிடும் தளப் பகுதிகளின் வெட்டுக் கணம் ஆகும்.

5. ஒரு படித்திட்டம் சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு ஒரு சார்பு அடையக்கூடிய மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பு களைக் காண உதவும். மிகுதிப்படுத்தப்படும் அல்லது குறைவு படுத்தப்படும் அச் சார்பு குறிக்கோள் சார்பு எனப்படும்.

6. வரைபடம் மூலம் ஒரு படித்திட்டக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண

(1) கட்டுப்பாடுகளாக அமையும் அசமன்பாடுகளின் வரை படங்களை வரைக.

(2) அசமன்பாடுகளின் தொகுதியின் தீர்வுக்கணம் குறிக்கும் தளத்தைக் காண்க.

(3) அத்தளம் அமைக்கும் பலகோணத்தின் உச்சிகளின் அச்சுத் தொலைவுகளைத் காண்க.

(4) குறிக்கோள் சார்பில் அவ்வச்சுத் தொலைவுகளைப் பிரதியிட்டு எம்மதிப்புக்கு அச்சார்பு மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது எனக் காண்க.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. வரைபடத்தின் மூலம் $x^2 + 2x - 15;\ x \in R$ என்ற இரு படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

2. $x > 0;\ y > 0;\ x + y < 30;\ 2x + y < 40;\ x, y \in R$ என்றால் குறிக்கோள் சார்பு $C = 5x + 4y$ ஐ மிகைப் படுத்துக.

3. $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 40;\ 2x + y \leq 60,\ x, y \in R$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்ட $C = 7x + 4y$ என்ற குறிக்கோள் சார்பை குறைவுப்படுத்துக.

விடைகள்

1. $\{-5, 3\}$ 2. $130;\ x = 10,\ y = 20$

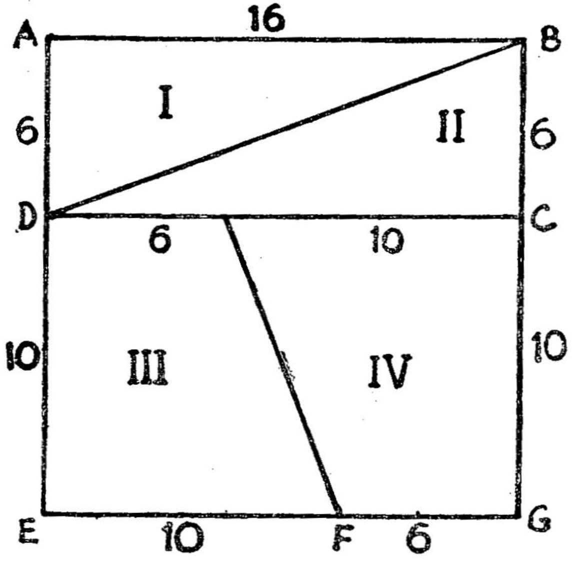
3. $160,\ x = 0,\ y = 40.$

தேர்வுக்கு அன்று

கணித மன்றம் - மேடை 7

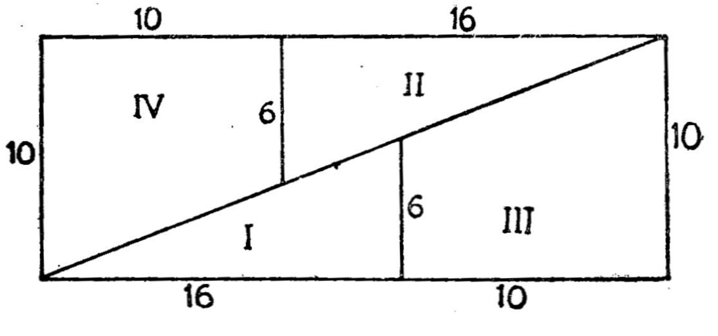
தோன்றிய மாயமென்ன ?

1·6 செமீ பக்கமுள்ள சதுரத்தை முதல் படத்தில் காணும் வகையில் வெட்டுக.



படம் 8-15.

சதுரத்தின் பரப்பளவு = $16 \times 16 = 256$ செமீ^{2}. 4 துண்டுகளை இரண்டாம் படத்தில் காட்டிய வண்ணம் பொருத்துக.



படம் 8-16.

இச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = $26 \times 10 = 260$ செமீ^{2}. எங்கிருந்து 4 செமீ^{2} தோன்றியது? மாயத்தை வெளிப்படுத்த முயலுக.

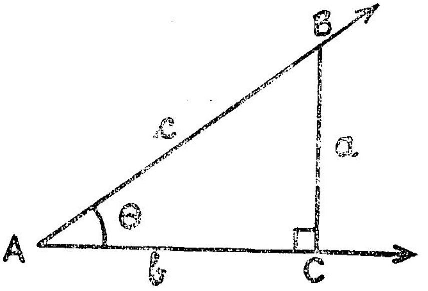
9. முக்கோண இயல்

முக்கோண இயல் ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கும் அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை விளக்குகிறது. இது பிதாகரஸ் (c 540 கி. மு.) தேற்றத்தோடு நெருங்கிய தொடர்பு கொண்டுள்ளது. இக்கணிதத் துறை நில அளவை, புவியியல், இயற்பியல், கப்பலோட்டும் துறை, வானவியல் போன்ற பல துறைகளிலும் பயன்படுகிறது.

இப்பார்கஸ் (c 140 கி. மு.) என்ற கிரேக்க வானவியல் அறிஞர் முக்கோணவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார். நம் நாட்டில் ஆர்ய பட்டர் I, பிரம்ம குப்தர், பாஸ்கரர் போன்ற கணிதவியல் அறிஞர்கள் முக்கோணவியலை வளர்த்துள்ளனர்.

9-1-1. சைன் விகிதம்

படத்தில் குறுங்கோணம் $\angle CAB$ இன் அளவு θ என்க. $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ எனில் $\triangle ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். இதில் $\frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ என்ற விகிதம் $\angle A$இன் சைன் விகிதம் எனப்படுகிறது.



படம் 9-1.

இதை $\sin A = \frac{a}{c}$ அல்லது $\sin \theta = \frac{a}{c}$ என்று எழுதுகிறோம்.

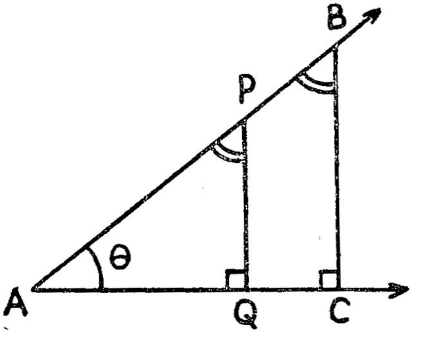
இப்பொழுது P, $\overline{AB}$இன் ஏதேனுமொரு புள்ளி என்க.

$\overline{PQ} \perp \overline{AC}$ எனில், $\triangle APQ$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

மேலும், $\triangle APQ \;|||\; \triangle ABC$

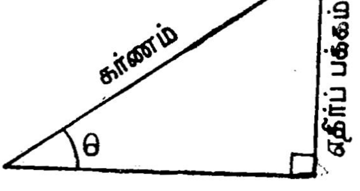
எனவே,

$\frac{PQ}{AP} = \frac{BC}{AB} = \sin\theta$ ஆகும். இதிலிருந்து



படம் 9-2.

ஒரு கோணத்தின் சைன் விகிதம் செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளைப் பொறுத்தது அன்று என அறிகிறோம்.



படம் 9-3.

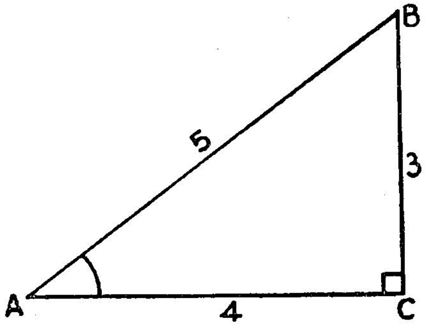
பொதுவாக,

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

என எழுதலாம்,

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\triangle ABC$ இல் $\angle C = 90°$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$ எனில், $\angle A$ இன் சைன் விகிதத்தைக் காண்க.



படம் 9-4.

தீர்வு :

$\triangle ABC$ இல் $\angle A$ இன் எதிர்ப் பக்கம் $= 3$; கர்ணம் $= 5$.

எனவே,

$$\sin A = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{3}{5}$$

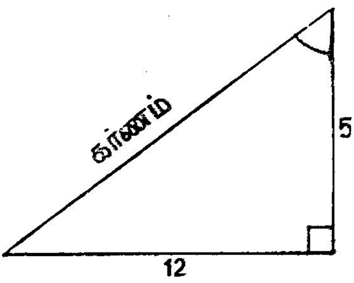
எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்தைத் தாங்கியுள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே 5, 12 அலகுகள் எனில் 12 அலகு நீளமுள்ள பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளம்

$$\sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{25 + 144}$$
$$= \sqrt{169} = 13 \text{ அலகுகள்.}$$



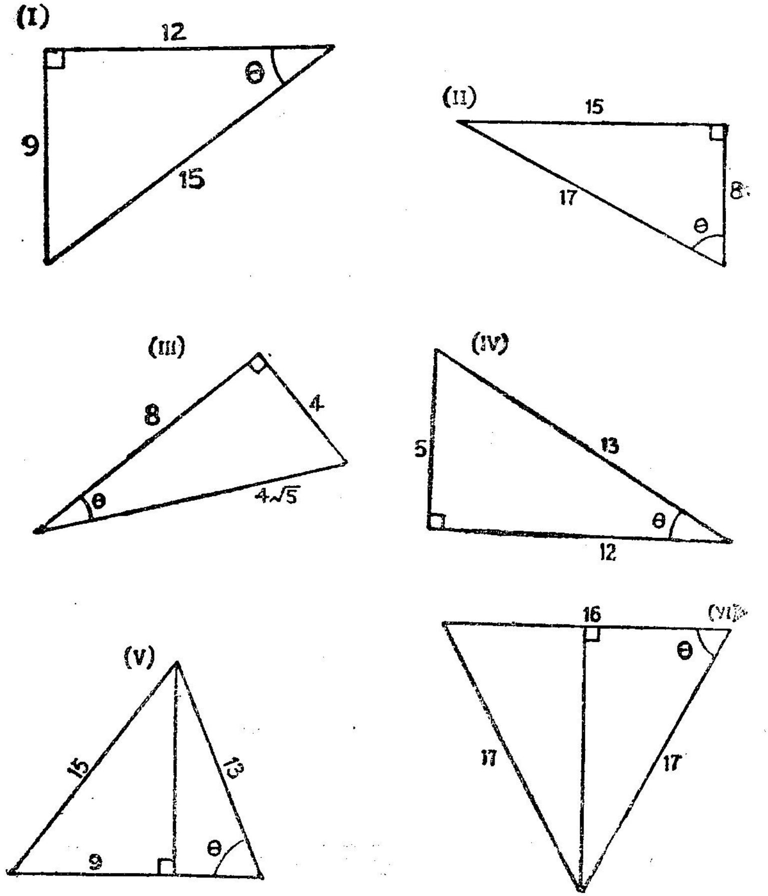
படம் 9-5.

∴ 12 அலகு நீளமுள்ள பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதம்.

$$= \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{12}{13}$$

பயிற்சி 9-1-1

1. பின்வரும் செங்கோண முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் sin θ ஐக் காண்க.



படம் 9-6.

உ. $\sin A = \frac{7}{3}$ என்று ஒருவர் குறிப்பிடுகிறார். அது சரியா எனச் சோதிக்க. இதிலிருந்து சைன் விகிதத்தின் மிக உயர்ந்த மதிப்பைப் பற்றி ஏதேனும் ஊகிக்க முடியுமா ?

விடைகள்

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{15}{17}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{5}{13}$ (v) $\frac{12}{13}$ (vi) $\frac{15}{17}$

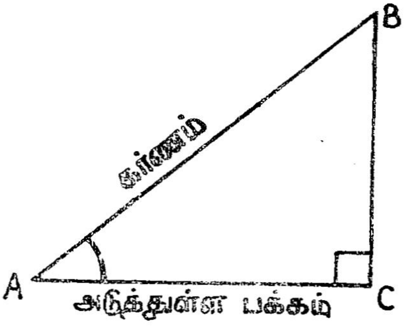
9-1-2. கோசைன் விகிதம்

படம் 9-7இல் $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ என்ற விகிதம் $\angle A$இன் கோசைன் விகிதம் எனப்படுகிறது. இதை $\cos A = \frac{b}{c}$ அல்லது $\cos \theta = \frac{b}{c}$ என்று எழுதுகிறோம்.

படம் 9-2இல் $\frac{AQ}{AP} = \frac{AC}{AB} = \cos \theta$ ஆகும். இதிலிருந்து கோசைன் விகிதம் செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளைப் பொறுத்தது அன்று என அறிகிறோம்.

பொதுவாக,

$$\cos \theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$



படம் 9-7.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

படம் 9-4இல் $\angle A$இன் கோசைன் விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

ΔABCஇல் $\angle A$இன் அடுத்துள்ள பக்கம் 4; கர்ணம் 5

எனவே, $\cos A = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{4}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் θ. அதற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம் 12. கர்ணம் 13 என்றால் $\cos\theta$இன் மதிப்பைக் காண்க.

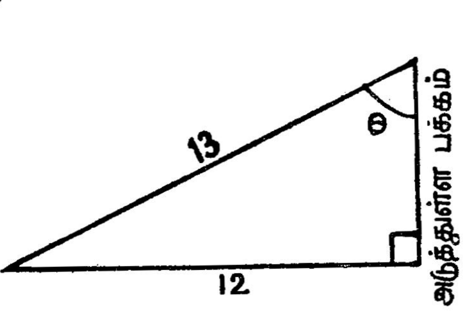
தீர்வு :

θஇன் அடுத்துள்ள பக்கம் $\sqrt{13^2 - 12^2}$

$= \sqrt{169 - 144}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$



படம் 9-8.

$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{5}{13}$

பயிற்சி 9-1-2

படம் 9-6இல் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் $\cos\theta$ஐக் காண்க.

விடைகள்

(i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{12}{13}$

(v) $\frac{5}{13}$ (vi) $\frac{8}{17}$

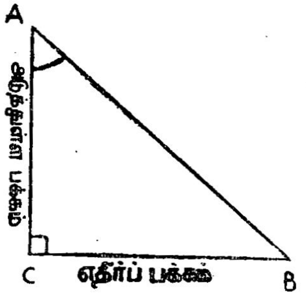
9-1-3. டேன்ஜென்ட் விகிதம்

படம் 9-9இல் $\frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$ என்ற விகிதம் $\angle A$இன் டேன்ஜென்ட் விகிதம் எனப்படுகிறது. இதை $\tan A = \frac{a}{b}$ அல்லது $\tan \theta = \frac{a}{b}$ என்று எழுதுகிறோம்.

பொதுவாக,

$$\tan \theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

என எழுதலாம்.



படம் 9-9.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

படம் 9-4இல் $\angle A$இன் டேன்ஜென்ட் விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

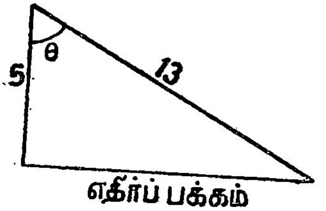
$\triangle ABC$இல் $\angle A$இன் எதிர்ப்பக்கம் 3 ; அடுத்துள்ள பக்கம் 4.

எனவே,

$$\tan A = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{3}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் θ ; அதன் அடுத்துள்ள பக்கம் 5, கர்ணம் 13 என்றால் $\tan\theta$ எவ்வளவு ?



படம் 9-10.

தீர்வு :

θஇன் எதிர்ப்பக்கம்

$\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$

$= \sqrt{144} \quad = 12$

$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

$= \dfrac{12}{5} = 2{\cdot}4$

பயிற்சி 9-1-3

படம் 9-6இல் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் $\tan\theta$ஐக் காண்க.

விடைகள்

(i) $\dfrac{3}{4}$ (ii) $\dfrac{15}{8}$ (iii) $\dfrac{1}{2}$ (iv) $\dfrac{5}{12}$ (v) $\dfrac{12}{5}$

(vi) $\dfrac{15}{8}$

9-2-1. நிரப்புகோணங்களின் சைன், கோசைன் விகிதங்கள்

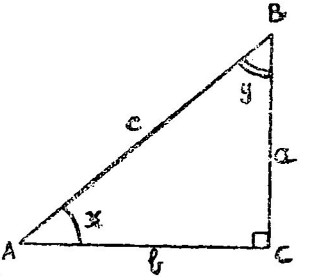
படத்தில் செங்கோண முக்கோணம் ABC இல் $\angle C = 90°$ என்பதால் $\angle A + \angle B = 90°$. எனவே, $\angle A$, $\angle B$ நிரப்பு கோணங்கள் ஆகும்.

$\angle A = x, \ \angle B = y$

எனில், $x + y = 90°$

எனவே, $x = 90 - y$;

$y = 90 - x$.



படம் 9-11.

இப்பொழுது

$$\sin x = \frac{a}{c};\ \sin y = \frac{b}{c}$$

$$\cos x = \frac{b}{c};\ \cos y = \frac{a}{c}$$

எனவே,

$$\sin x = \frac{a}{c} = \cos y;$$

$$\cos x = \frac{b}{c} = \sin y,$$

அல்லது, $\sin x = \cos y = \cos(90°-x);$
$\cos x = \sin y = \sin(90°-x);$

அல்லது, $\sin x = \cos(90°-x);$
$\cos x = \sin(90°-x),$

பொதுவாக,

$$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$$

cosine என்ற சொல் sine of the complement என்பதன் சுருக்கம் ஆகும். எனவே, ஒரு கோணத்தின் கோசைன் விகிதம் அக் கோணத்தின் நிரப்பு கோணத்தின் சைன் விகிதத்திற்குச் சமம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\sin 30° = 0{\cdot}5$ எனில், $\cos 60°$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\cos 60° = \sin(90°-60°)$$
$$= \sin 30°$$
$$= 0{\cdot}5.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\dfrac{\sin 20°}{\cos 70°}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\cos 70° = \sin(90°-70°)$$
$$= \sin 20°$$

$$\therefore\ \frac{\sin 20°}{\cos 70°} = \frac{\sin 20°}{\sin 20°} = 1$$

பயிற்சி 9-2-1.

1. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ எனில், $\cos 30°$ எவ்வளவு ?

2. $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில், $\sin 45°$ எவ்வளவு ?

3. $\sin 50° = \cos \theta$ எனில், θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $\cos 40° = \sin x$ எனில், x இன் மதிப்பு எவ்வளவு?

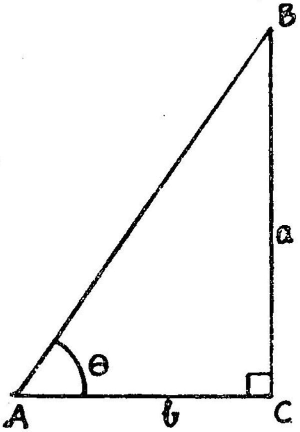
5. $\frac{\cos 80°}{\sin 10°}$ இன் மதிப்பு யாது ?

6. $\frac{\sin 75°}{\cos 15°} = \frac{\cos 15°}{\sin 75°}$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $40°$ 4. $50°$ 5. 1

9-2-2. சைன், கோசைன் விகிதங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு



படம் 9-12.

ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABC இல் $\angle C = 90°$ என்றால் பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Longrightarrow (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ போன்றவற்றை $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ என்று எழுதுவது எளிது.

எனவே, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

பொதுவாக, $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ எனில்,

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ஆகும்.

எனவே, $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$;

மேலும், $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$.

எனவே, $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் $\sin\theta = \frac{3}{5}$ எனில், $\cos\theta$ ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

i. e. $$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 - 9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

சுருக்குக: $\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

தீர்வு:

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^2 + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + (\sin^2\theta)^2$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2$$

$$= 1^2$$

$$= 1$$

பயிற்சி 9-2-2

1. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் $\cos\theta = \frac{5}{13}$ எனில் $\sin\theta$ஐக் காண்க.

2. $x = 4\cos\theta$, $y = 5\sin\theta$ என்றால் $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$இன் மதிப்பைக் காண்க.

3. சுருக்குக : $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$.

4. சுருக்குக : $\sin\theta\cos(90° - \theta) + \cos\theta\sin(90° - \theta)$.

5. $\cos\theta\cos(90° - \theta) - \sin\theta\sin(90° - \theta)$இன் மதிப்பு யாது ?

6. $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) - \cos^2\theta$இன் மதிப்பு யாது ?

விடைகள்

(1) $\frac{12}{13}$ (2) 1 (3) 2 (4) 1 (5) 0 (6) 0

9-2-3. சைன், கோசைன், டேன்ஜெண்ட் விகிதங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு

படம் 9-12இல் $\sin\theta = \frac{a}{c}$; $\cos\theta = \frac{b}{c}$; $\tan\theta = \frac{a}{b}$

இப்பொழுது.

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

மேலும், $\tan\theta = \frac{a}{b}$ என்றால்

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ;\ \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் $\tan\theta = \sqrt{3}$ என்றால் $\sin\theta$ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3},\ b = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$$
$$= 3 + 1 = 4$$

$$c = \sqrt{4} = 2$$

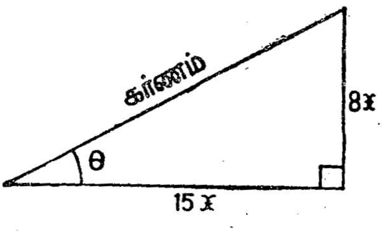
$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் $\tan\theta = \frac{8}{15}$ எனில் $\sin\theta$, $\cos\theta$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி கர்ணத்தின் நீளம்



படம் 9-13.

$$\sqrt{(8x)^2 + (15x)^2}$$
$$= \sqrt{64x^2 + 225x^2}$$
$$= \sqrt{289x^2}$$
$$= 17x.$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{8x}{17x} = \frac{8}{17}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{15x}{17x} = \frac{15}{17}$$

பயிற்சி 9-2-3

θ, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கோணம் என்றால் கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி மற்ற விகிதங்களைக் கணக்கிட்டு அட்டவணையை நிரப்புக.

எண்	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
i	$\frac{3}{5}$		
ii		0·6	
iii			$2\frac{2}{5}$
iv		$\frac{15}{17}$	
v	$\frac{a}{b}$		
vi			$\frac{p}{q}$

விடைகள்

(i) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ (ii) 0·8, 1·33

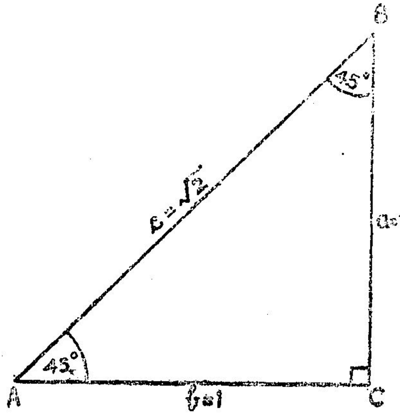
(iii) $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$ (iv) $\frac{8}{17}$, $\frac{8}{15}$

(v) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$

(vi) $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$

9·3-1. 30°, 45°, 60° அளவுள்ள கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

(i) ABC ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணம் $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$; $a = b = 1$ எனில் $c = \sqrt{2}$ ஆகும்.



படம் 9-14.

எனவே,

$$\sin 45° = \sin A$$

$$= \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{\cdot}414}{2}$$

$$= 0{\cdot}707$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{\cdot}414}{2}$$

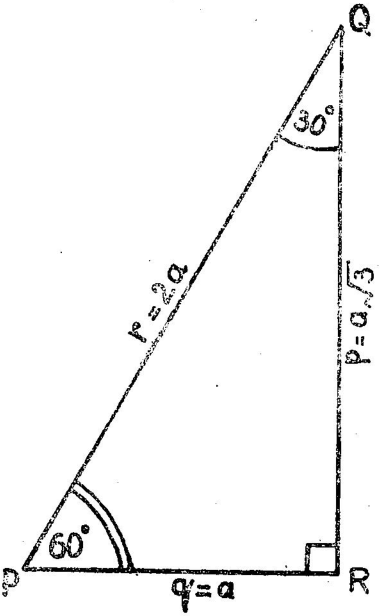
$$= 0{\cdot}707$$

$$\tan 45° = \tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

(ii) $\triangle PQR$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம். $\angle R = 90°$ $\angle P = 60°$, $\angle Q = 30°$ என்க.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோண அளவுகள் 30°, 60°, 90° என்றிருந்தால் அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்கள் முறையே

$a, a\sqrt{3}$, $2a$ என்றிருக்கும் என்று முன் வகுப்பில் கற்றுக் கொண்டோம்.



படம் 9-15.

எனவே, $p = a\sqrt{3}$, $q = a$, $r = 2a$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \sin 30° = \sin Q = \frac{q}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$$

$$\cos 30° = \cos Q = \frac{p}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1{\cdot}732}{2} = 0{\cdot}866.$$

$$\tan 30° = \tan Q = \frac{q}{p} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{1{\cdot}732}{3} = 0{\cdot}577$$

(iii) $\sin 60° = \sin P = \frac{p}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2}$

$= 0.866$

$\cos 60° = \cos P = \frac{q}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\tan 60° = \tan P = \frac{p}{q} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} = 1.732$

இம் மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	0·500	0·866	0·577
45°	0·707	0·707	1·000
60°	0·866	0·500	1·728

இவ்வட்டவணையிலிருந்து கோண அளவு மிகுதியானால் $\sin\theta$, $\tan\theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் மிகுதியாகின்றன. ஆனால், $\cos\theta$-இன் மதிப்பு குறைகிறது என அறிகிறோம்.

மேலும்,

$\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60° = \cos(90° - 30°)$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45° = \cos(90° - 45°)$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \cos(90° - 60°)$

எனவும் அறிகிறோம்.

பயிற்சி 9·3-1

1. பின் வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
$\tan\theta$			$\sqrt{3}$

2. பின் வரும் அட்டவணையிலுள்ள மதிப்புகள் சரியா என ஆராய்க.

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\cos\theta$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\tan\theta$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$

9·3-2. 30°, 45°, 60° அளவுள்ள கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் !!

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைப் போன்ற கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$2\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 45^\circ$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$\tan 45^\circ = 1$ என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 45^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$ என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

பயிற்சி 9·2-3

பின் வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

1. $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 45^\circ$
2. $\sin 45^\circ \tan 45^\circ + \cos^2 45^\circ \tan 45^\circ$
3. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$
4. $\sin 30^\circ \cos^2 30^\circ \tan 30^\circ$
5. $1 - \sin^2 30^\circ$
6. $1 + \tan^2 30^\circ$
7. $\dfrac{\tan 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}$
8. $\dfrac{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ}{\tan 60^\circ}$

9. $\tan 30° \tan 60°$

10. $\tan^2 45° + \sin^2 60°$

11. $\sin^2 30° + \cos^2 45° + \tan^2 60°$

12. $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60°$

விடைகள்

(1) $1 + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{3}{4}$

(6) $1\frac{1}{3}$ (7) $\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ (8) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ (9) 1

(10) $1\frac{3}{4}$ (11) $3\frac{3}{4}$ (12) $4\frac{1}{3}$

9·4 முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணை

30°, 45°, 60° அளவுள்ள கோணங்களின் சைன், கோசைன், டேன்ஜென்ட் விகிதங்களை நாம் கணக்கிட்டு அறிந்தோம். அதைப்போலவே மற்ற முழு எண் பாகை அளவு கொண்ட கோணங்களுக்கும் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிட முடியும். 1° இடைவெளியில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட கோணங் களுக்கு நேரே ஒரே வரிசையில் 4 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் கணக்கிடப்பட்ட முக்கோணவியல் மதிப்புகளின் அட்டவணை தரப்பட்டுள்ளது. அதைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணையைப் பயன் படுத்தி $\sin 35°$இன் தசம உருவத்தைக் காண்க. அதற்கு எக்கோணத்தின் கோசைன் மதிப்பு சமமாக உள்ளது எனவும் காண்க.

தீர்வு :

(i) கோணங்களைக் காட்டும் A நிரலில் 35°ஐக் கண்டு கொள்க. அதற்கு நேரே வலப்புறமாக $\sin A$ என்ற தலைப் பிட்டுள்ள நிரலில் ·5736 என்று உள்ளதைக் காண்க. எனவே, $\sin 35° = 0{\cdot}5736$ ஆகும்.

(ii) cos A என்ற தலைப்பிட்டுள்ள நிரலில் ·5736 என்ற மதிப்பு எங்கு உள்ளது என்பதைக் கண்டு கொள்க. பிறகு அதற்கு நேரே இடப்புறமாக A நிரலில் 55 என்று உள்ளதைக் காண்க.

எனவே, $\cdot 5736 = \cos 55^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\sin 13^\circ - \cos 31^\circ + \tan 44^\circ$இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$\sin 13^\circ = \cdot 2250$

$\cos 31^\circ = \cdot 8572$

$\tan 44^\circ = \cdot 9657$

$$\therefore \sin 13^\circ - \cos 31^\circ + \tan 44^\circ$$
$$= 0\cdot 2250 - 0\cdot 8572 + 0\cdot 9657$$
$$= 1\cdot 1907 - 0\cdot 8572$$
$$= 0\cdot 3335$$

பயிற்சி 9·4

1. தசம உருவத்தில் எழுதுக,

(i) $\cos 65^\circ$ (ii) $\tan 40^\circ$ (iii) $\cos 7^\circ$

(iv) $\sin 73^\circ$ (v) $\tan 66^\circ$ (vi) $\sin 37^\circ$

2. $\angle A$-இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin A = 0\cdot 1736$

(ii) $\tan A = 11\cdot 43$

(iii) $\cos A = 0\cdot 9336$

(iv) $\sin A = 0\cdot 8480$

(v) $\tan A = 0\cdot 7002$

(vi) $\cos A = 0\cdot 3256$

3. மதிப்பு காண்க.

(i) $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ + \tan 81^\circ$

(ii) $\tan 42^\circ - \tan 24^\circ + \tan 88^\circ$

விடைகள்

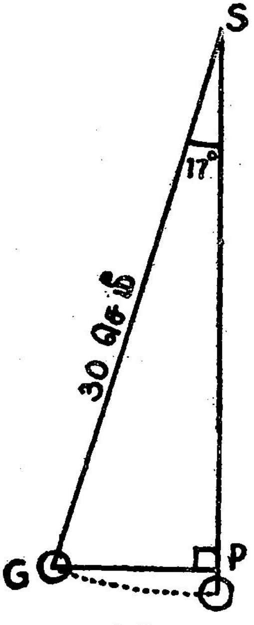
1. (i) ·4226 (ii) ·8391 (iii) ·9325
   (iv) ·9563 (v) 2·2460 (vi) ·6018
2. (i) 10° (ii) 35° (iii) 21°
   (iv) 58° (v) 35° (vi) 71°
3. (i) 6·3138 (ii) 23·0352

9·5-1. உயரங்களும் தொலைவுகளும்

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி உயரங்கள், தொலைவுகள் ஆகியவற்றை நேரிடையாகவோ, அல்லது மறைமுகமாகவோ கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

30 செமீ. நீளமுள்ள ஓர் ஊசல் செங்குத்துக் கோட்டின் ஒவ்வொரு புறமும் 17° ஊசலாடுகிறது. ஊசல் குண்டு அலையின் ஒரு முனையில் இருக்கும்போது தொங்கு தானத்திலிருந்து எவ்வளவு கீழே உள்ளது எனக் கணக்கிடுக.



படம் 9-16.

தீர்வு :

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி ஊசல் குண்டு தொங்குதானத்திலிருந்து கீழே உள்ள தொலைவு $= SP$

$$\frac{SP}{SG} = \cos S$$

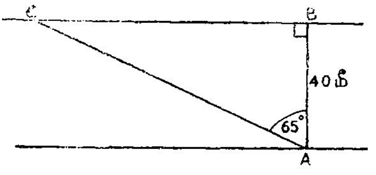
$$\therefore \quad SP = SG \cos S$$
$$= 30 \cos 17°$$
$$= 30 \times 0{\cdot}9563$$
$$= 28{\cdot}689$$
$$= 28{\cdot}7 \text{ செமீ}$$

(ஒரு தசமத்தானத் திருத்தமாக)

எடுத்துக்காட்டு 2 :

40 மீ அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றை ஒருவர் நீந்திக் கடக்க முயல்கிறார். ஆனால், உண்மையில் அவர் ஆற்றின் போக்கில் 65° கோணத்தில் நீந்துவதாகத் தெரிகிறது. புறப்பட்ட இடத்திற்கு நேர் எதிரிலிருந்து எவ்வளவு தொலைவு தள்ளி அவர் எதிர்க் கரையை அடைவார் எனக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 9-17.

படத்தில் சேரவேண்டிய இடத்திலிருந்து சேர்ந்த இடம் உள்ள தொலைவு, BC.

$$\frac{BC}{AB} = \tan 65^\circ$$

$$BC = AB \tan 65^\circ$$

$$= 40 \tan 65^\circ$$

$$= 40 \times 2{\cdot}1445$$

$$= 85.78$$

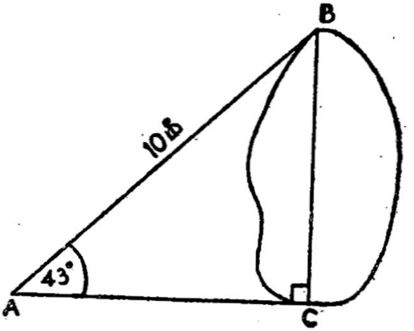
$= 86$ மீ (மீட்டர் திருத்தமாக)

பயிற்சி 9·5-1.

1. 10 செமீ. விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் 8 செமீ. நீளமுள்ள வட்ட நாண் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணத்தைக் காண்க.

2. ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 4 செமீ. அஃது ஒரு பக்கத்தோடு 50° கோணத்தை உண்டாக்குகிறது என்றால், செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

3. ஒரு குளத்தின் கரையில் எதிரேயுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண ஒருவர் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு அளவுகளைக். குறிக்கிறார் எனில் அத் தொலைவைக் காண்க.



படம் 9-18.

4. ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் 12 செமீ., அதன் அடிக்கோணம் ஒவ்வொன்றும் 71° என்றால், அதன் உயரத்தைக் காண்க.

5. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் 8 செமீ, 6 செமீ என்றால் அதன் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

6. ABC என்ற முக்கோணத்தில அதன் உயரம் $AD = 4$ செமீ., $\angle B = 50°$, $\angle C = 30°$ என்றால் BC எவ்வளவு ?

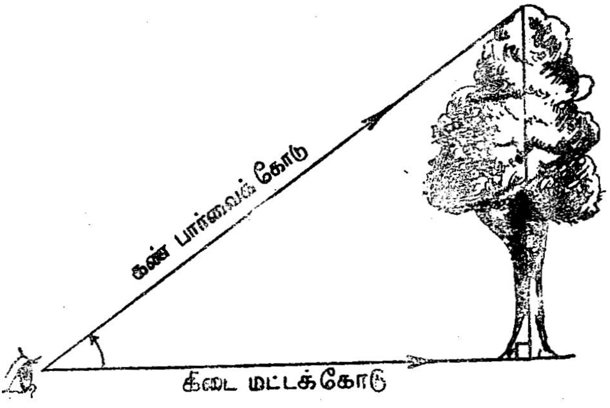
விடைகள்

(1) 54° (2) 3·1 செமீ., 2·6 செமீ. (3) 6·82 மீ. (4) 17·4 செமீ. (5) 74°, 106°, 74°, 106° (6) 10·3செமீ.

9·5-2. ஏற்றக் கோணம் I

படம் 9-19இல் ஒருவர் ஒரு மரத்தின் உச்சியை நோக்குவது காட்டப்பட்டுள்ளது. அவருடைய கண்பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைமட்டக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படுகிறது.

இக் கருத்தையும் முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் பயன் படுத்தி அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் கண்ணுறும் உயரங்களை யும் தொலைவுகளையும் கணக்கிடலாம்.



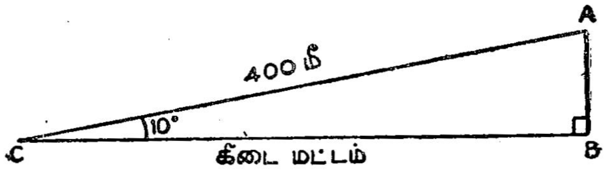
படம் 9-19.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு மலைமீது உள்ள இரயில்பாதை கிடைமட்டத்திலிருந்து $10°$ சாய்வில் ஒரே சீராக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு குறிப் பிட்ட இடத்திலிருந்து 400 மீ சென்றால் அப் பாதை செங்குத் தாக எவ்வளவு உயர்ந்திருக்கும்?

தீர்வு :

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, பாதை செங்குத்தாக உயரும் அளவு AB ஆகும்.



படம் 9-20.

$$\frac{AB}{AC} = \sin 10^\circ$$

$$AB = 400 \sin 10^\circ$$

$$= 400 \times 0.1736$$

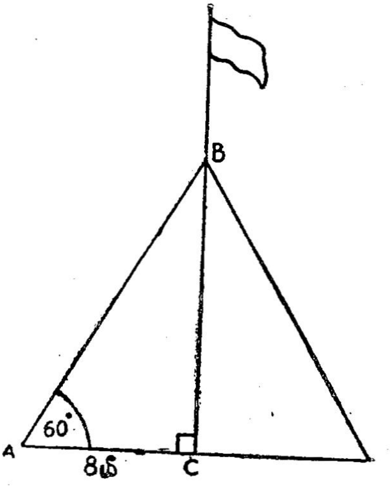
$$= 69{\cdot}44 \text{ மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு கொடிக் கம்பத்தின் ஆதாரக் கயிறு தரையிலிருந்து 8 மீ தொலைவில் தரையோடு 60° கோணத்தைத் தாங்குகிறது எனில் கயிற்றின் நீளம் என்ன ?

தீர்வு :

படத்தில் கயிற்றின் நீளம் *AB*.



படம் 9-21.

$$\cos 60 = \frac{AC}{AB}$$

$$AB = \frac{8}{\cos 60^\circ} = \frac{8}{0{\cdot}5} = 16 \text{ மீ}$$

பயிற்சி 9·5-2

1. ஒரு காற்றாடி 100 மீ நீளமுள்ள நூலில் தரை மட்டத்திற்கு 50° சாய்வில் பறந்து கொண்டுள்ளது எனில் தரை மட்டத்திலிருந்து காற்றாடி எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது? (நூலில் ஏற்படும் தொய்வைக் கணக்கில் கொள்ளவேண்டாம்.)

2. ஒரு கழைக் கூத்தாடி 6 மீ உயரமுள்ள கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து தரையோடு 30° கோணத்தில் இழுத்து கட்டப்பட்ட கயிற்றின்மீது நடக்கிறார். அவர் கம்பத்தின் உச்சியை அடைய எவ்வளவு தொலைவு நடக்கவேண்டும்?

3. ஒரு சாரணச் சிறுவன் 35° சரிவில் ஒரு குன்றின்மீது 200 மீ தொலைவு ஏறிச் செல்கிறான் என்றால் கிடைமட்டத்தில் அவன் கடந்த தொலைவு எவ்வளவு?

4. ஒரு படகுத் துறையில் ஒரு படகு 5 மீ நீளமுள்ள கயிற்றால் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிறு விறைப்பாக இருக்கும்போது கிடைமட்டத்தோடு 40° கோணத்தை உண்டாக்குகிறது என்றால் துறையின் ஓரத்திலிருந்து படகு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

5. ஓர் ஏணி ஒரு சுவரில் சாய்த்து நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் அடி சுவரிலிருந்து 3 மீ தொலைவில் உள்ளது. ஏணி தரையோடு 70° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்றால் ஏணியின் உச்சி சுவரில் எவ்வளவு உயரத்தைத் தொடுகிறது?

6. ஒரு விளக்கின் ஒளியில் 4 மீ உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் நிழல் 3 மீ உள்ளது என்றால் விளக்கின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

விடைகள்

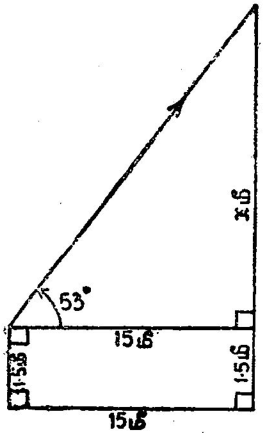
(1)	76·6 மீ	(2)	12 மீ	(3)	163.84 மீ
(4)	3·83 மீ	(5)	8·24 மீ	(6)	48°

9·5-3. ஏற்றக் கோணம் II

எடுத்துக்காட்டு 1:

1·5 மீ உயரமுள்ள ஒருவர் ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 15 மீ தொலைவில் நின்றுகொண்டு கோபுரத்தின் உச்சியை 53°

ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார் என்றால் அக் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?



படம் 9-22.

தீர்வு :

படத்தில் கோபுரத்தின் உயரம் $(x+1\cdot5)$ மீ

$$\tan 53^\circ = \frac{x}{15}$$

$$\therefore \quad x = 15 \tan 53^\circ$$
$$= 15 \times 1\cdot3270$$
$$= 19\cdot9050$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம்

$$= 19\cdot9050 + 1\cdot5$$
$$= 21\cdot4050$$
$$= 21\cdot4 \text{ மீ}$$

(முதல் தசமத்தானத் திருத்தமாக)

எடுத்துக்காட்டு **2 :**

ஒரு கட்டிடத்திலிருந்து 50 மீ தொலைவில் நிற்கும் ஒருவர் கட்டிடத்தின் மீதுள்ள ஒரு கொடிக் கம்பத்தின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 46°, 40° எனக் காண்கின்றார். கொடிக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

படத்தில் கட்டிடத்தின் உயரம் x மீ; கொடிக் கம்பத்தின் உயரம் y மீ.

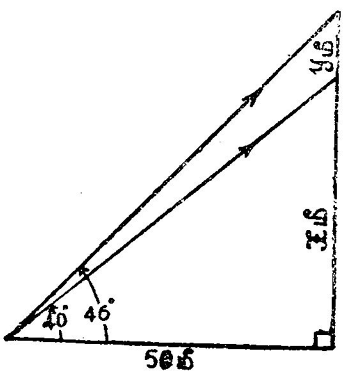
$$x = 50 \tan 40^\circ$$
$$= 50 \times 0\cdot8391$$
$$= 41\cdot9550$$

கட்டிடமும் கொடிக் கம்பமும் சேர்ந்த உயரம் $(x+y)$ மீ.

$$x + y = 50 \tan 46^\circ$$
$$= 50 \times 1\cdot0355$$
$$= 51\cdot775$$

கொடிக் கம்பத்தின் உயரம்

$$= (x+y) - x$$
$$= 51\cdot775 - 41\cdot955$$
$$= 9\cdot82 \text{ மீ}$$



படம் 9-23.

பயிற்சி 9·5-3

1. ஓர் ஆற்றின் ஒரு கரையில் உள்ள ஒரு மரத்தை மறு கரையில் அதற்கு நேர் எதிரே நின்று காணும் ஒருவர் மரத்தின் உச்சி 45° ஏற்றக் கோணத்தில் இருப்பதாகக் கண்டார். அதே நேர்க் கோட்டில் பின் நோக்கி 3 மீ சென்ற பிறகு மரத்தின் உச்சி 30° ஏற்றக் கோணத்தில் இருப்பதாகக் கண்டார் எனில் ஆற்றின் அகலம் என்ன ?

2. 30 மீ உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் கண்ட ஒருவர் நேரே பின் நோக்கி நகர்ந்து அதன் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகத் தோன்றிய இடத்தில் நின்றார் எனில் முதல் நின்ற இடத்திற்கும் இரண்டாவதாக நின்ற இடத்திற்கும் உள்ள தொலைவு யாது ?

3. ஒரு தீயணைக்கும் இயந்திரத்தின் மீது தரையிலிருந்து 2 மீ உயரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள 20 மீ நீளமுள்ள ஏணி உயர்ந்த அளவு 70° ஏற்றக் கோணத்தில் அமைக்கப்படலாம் என்றால் தரையிலிருந்து ஏணி எவ்வளவு உயரத்தை எட்டும் ?

4. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்தும் உச்சியிலிருந்தும் 100 மீ உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60°, 45° என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

5. ஒரு கோபுரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களிலிருந்து கோபுரத்தோடு ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°, 45°. அவ்விரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு 200 மீ என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன ?

6. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்திற்கு நேர் எதிரே இரு புறங்களிலும் நிற்கும் இரு கப்பல்களிலிருந்து, 25 மீ உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள்

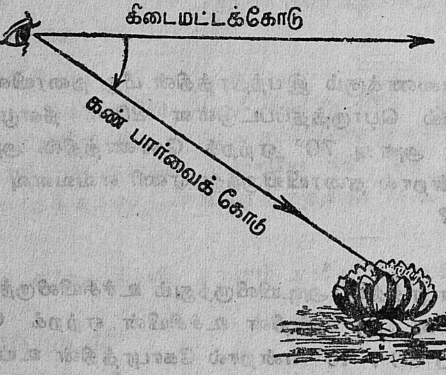
முறையே 60°, 30° என்றால் அவ்விரு கப்பல்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு யாது ?

விடைகள்

(1) 4·10 மீ	(2) 34·64 மீ	(3) 20·79 மீ
(4) 42·27 மீ	(5) 73·2 மீ	(6) 57·73 மீ

9·5-4 இறக்கக் கோணம்

படம் 9-24இல் ஒருவர் ஒரு குளத்திலுள்ள தாமரைப் பூவைப் பார்ப்பது காட்டப்பட்டுள்ளது. அவருடைய கண் பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைமட்டக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படுகிறது. ஏற்றக் கோணத்

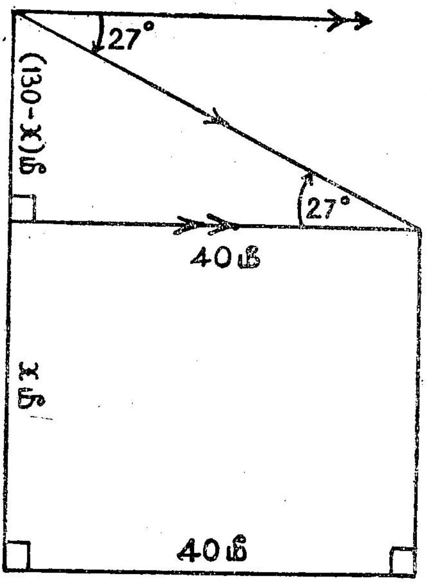


படம் 9-24.

-ப் பயன்படுத்தியது போலவே இறக்கக் கோணத்தையும் பயன்படுத்தி உயரங்களையும் தொலைவுகளையும் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

130 மீ உயரமுள்ள ஒரு செங்குத்தான பாறையின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியின் இறக்கக் கோணம் 27° ஆகும். பாறைக்கும் கோபுரத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு 40 மீ என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் எவ்வளவு ?



தீர்வு :

படத்தில் கோபுரத்தின் உயரம் x மீ

$$\tan 27^\circ = \frac{130-x}{40}$$

$$0\cdot5095 = \frac{130-x}{40}$$

$$20\cdot38 = 130-x$$

$$x = 130-20\cdot38$$

$$= 109\cdot62$$

கோபுரத்தின் உயரம் $109\cdot62$ மீ

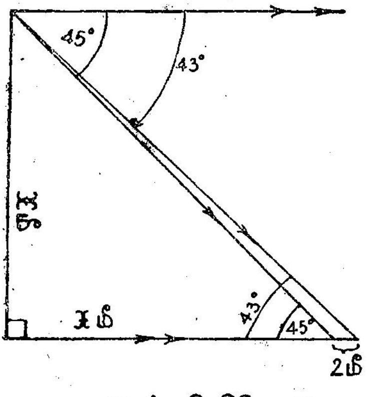
படம் 9-25.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு கலங்கரை விளக்கத்திற்குக் கிழக்கே இரு படகுகள் உள்ளன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து அவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45°, 43° எனக் காணப்பட்டன. இரு படகுகளுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு 2 மீ என்றால் கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் என்ன ?

தீர்வு :

படத்தில் கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் x மீ என்க.



படம் 9-26.

$$\tan 43^\circ = \frac{x}{x+2}$$

$$0\cdot9325 = \frac{x}{x+2}$$

$$0\cdot9325\,x + 1\cdot8650 = x$$

$$x - 0\cdot9325x = 1\cdot8650$$

$$0\cdot0675x = 1\cdot8650$$

$$x = \frac{1\cdot8650}{0\cdot0675}$$

$$= 27\cdot63$$

கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் $= 27\cdot63$ மீ

பயிற்சி 9·5-4

1. ஒரு கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து தரையில் ஒரு புள்ளி 30° இறக்கக் கோணத்தில் காணப்படுகிறது. கட்டிடத்தின் அடியிலிருந்து அப்புள்ளி 30 மீ தொலைவில் இருந்தால் கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

2. 30 மீ உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியி லிருந்து ஒரு கப்பல் 60° இறக்கக் கோணத்தில் காணப் படுகிறது என்றால் கலங்கரை விளக்கத்திற்கும் கப்பலுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

3. ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து குன்றுக்கு மேற்கே செல்லும் நேரான பாதையில் அடுத்தடுத்துள்ள இரு கிலோமீட்டர் கற்களின் இறக்கக் கோணம் முறையே 45°, 10° என்றால் குன்றின் உயரம் என்ன ?

4. கடல் மட்டத்திலிருந்து 150 மீ உயரமுள்ள ஒரு செங்குத் தான பாறையின் உச்சியிலிருந்து இரு கப்பல்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45°, 30° கப்பல்கள் பாறையின் அடியோடு ஒரே நேர்க்கோட்டிலும் அதன் இருபக்கங்களில் எதிரெதிராகவும் இருந்தால் கப்பல்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

5. 18 மீ உயரமுள்ள கட்டிடத்திலிருந்து ஒரு மரத்தின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30°, 60° என்றால் மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

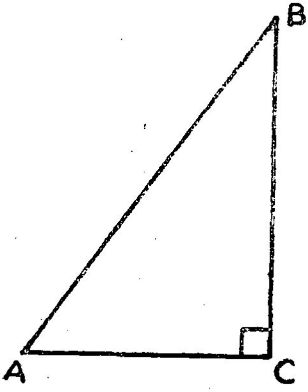
6. ஒரு பாலத்தின் ஒரு முனைக்குமேல் 1500 மீ உயரத்தில் பறந்துகொண்டிருந்த விமானத்திலிருந்து அப் பாலத்தின் மறு முனையின் இறக்கக் கோணம் 86° என்றால் பாலத்தின் நீளம் என்ன ?

விடைகள்

(1) 1·732 மீ	(2) 17·32 மீ	(3) 214·03 மீ
(4) 409·80 மீ	(5) 12 மீ	(6) 104·9 மீ

பாடச் சுருக்கம்

1. $\triangle ABC$யில் $\angle C$ செங்கோணமானால்,



படம் 9-27.

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B;\ \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A;\ \tan B = \frac{b}{a}$$

Aயும் Bயும் நிரப்புக் கோணங்கள் எனில் $\cos B = \sin A$, $\cos A = \sin B$.

cosine என்பது sine of the complement என்பதன் சுருக்கம்.

2. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$; $\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}$

3. $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$; $\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan 45° = 1$; $\tan 60° = \sqrt{3}.$

4. ஓர் இடத்திலிருந்து ஒரு பொருளைப் பார்க்கும்போது பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைக்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம், பார்வைக் கோடு கிடைக்கோட்டிற்கு (அ) உயரே அமைந்தால் ஏற்றக் கோணம் எனவும் (ஆ) கீழே அமைந்தால் இறக்கக் கோணம் எனவும் கூறப்படும்.

பொருள்களின் உயரங்கள், அவை அமைந்த இடத்தின் தொலைவுகள் ஆகியவற்றை ஏற்ற, இறக்கக் கோணங்களின் முக்கோண இயல் விகிதங்களின் துணைகொண்டு காணலாம்.

தன்னறிவுச் சோதனை

1. $\cos\theta = 0{\cdot}8$ என்றால் $\sin\theta$, $\tan\theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. $\cos 55° = \sin\theta$ எனில் θஇன் மதிப்பு எவ்வளவு?

3. சுருக்குக : $\dfrac{1}{1-\sin\theta} + \dfrac{1}{1+\sin\theta} - \dfrac{2}{\cos^2\theta}$

4. மதிப்பு காண்க : $\sin^2 60° + \cos^2 45° + \tan^2 30°$

5. மதிப்பு காண்க : $\sin 27° - \cos 63° + \tan 62°$

6. 7052 மீ உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு சேதமடைந்த விமானம் கிடைமட்டத்திற்கு 10° சாய்வில் இறங்கத் தொடங்கினால் 20 கிமீ தொலைவிலுள்ள விமான நிலையத்தில் தரை தட்டுமா எனக் காண்க.

விடைகள்

(1) 0·6, 0·75 (2) 35° (3) 0 (4) $\dfrac{19}{12}$

(5) 1·8807 (6) இல்லை.

மடக்கை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள்								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	·0000	·0043	·0086	·0128	·0170	·0212	·0253	·0294	·0334	·0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1·1	·0414	·0453	·0492	·0531	·0569	·0607	·0645	·0682	·0719	·0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1·2	·0792	·0828	·0864	·0899	·0934	·0969	·1004	·1038	·1072	·1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1·3	·1139	·1173	·1206	·1239	·1271	·1303	·1335	·1367	·1399	·1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1·4	·1461	·1492	·1523	·1553	·1584	·1614	·1644	·1673	·1703	·1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1·5	·1761	·1790	·1818	·1847	·1875	·1903	·1931	·1959	·1987	·2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1·6	·2041	·2068	·2095	·2122	·2148	·2175	·2201	·2227	·2253	·2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1·7	·2304	·2330	·2355	·2380	·2405	·2430	·2455	·2480	·2504	·2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1·8	·2553	·2577	·2601	·2625	·2648	·2672	·2695	·2718	·2742	·2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1·9	·2788	·2810	·2833	·2856	·2878	·2900	·2923	·2945	·2967	·2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2·0	·3010	·3032	·3054	·3075	·3096	·3118	·3139	·3160	·3181	·3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2·1	·3222	·3243	·3263	·3284	·3304	·3324	·3345	·3365	·3385	·3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·2	·3424	·3444	·3464	·3483	·3502	·3522	·3541	·3560	·3579	·3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2·3	·3617	·3636	·3655	·3674	·3692	·3711	·3729	·3747	·3766	·3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2·4	·3802	·3820	·3838	·3856	·3874	·3892	·3909	·3927	·3945	·3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2·5	·3979	·3997	·4014	·4031	·4048	·4065	·4082	·4099	·4116	·4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2·6	·4150	·4166	·4183	·4200	·4216	·4232	·4249	·4265	·4281	·4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2·7	·4314	·4330	·4346	·4362	·4378	·4393	·4409	·4425	·4440	·4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2·8	·4472	·4487	·4502	·4518	·4533	·4548	·4564	·4579	·4594	·4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·9	·4624	·4639	·4654	·4669	·4683	·4698	·4713	·4728	·4742	·4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3·0	·4771	·4786	·4800	·4814	·4829	·4843	·4857	·4871	·4886	·4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3·1	·4914	·4928	·4942	·4955	·4969	·4983	·4997	·5011	·5024	·5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3·2	·5051	·5065	·5079	·5092	·5105	·5119	·5132	·5145	·5159	·5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3·3	·5185	·5198	·5211	·5224	·5237	·5250	·5263	·5276	·5289	·5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3·4	·5315	·5328	·5340	·5353	·5366	·5378	·5391	·5403	·5416	·5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3·5	·5441	·5453	·5465	·5478	·5490	·5502	·5514	·5527	·5539	·5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3·6	·5563	·5575	·5587	·5599	·5611	·5623	·5635	·5647	·5658	·5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3·7	·5682	·5694	·5705	·5717	·5729	·5740	·5752	·5763	·5775	·5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·8	·5798	·5809	·5821	·5832	·5843	·5855	·5866	·5877	·5888	·5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·9	·5911	·5922	·5933	·5944	·5955	·5966	·5977	·5988	·5999	·6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4·0	·6021	·6031	·6042	·6053	·6064	·6075	·6085	·6096	·6107	·6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4·1	·6128	·6138	·6149	·6160	·6170	·6180	·6191	·6201	·6212	·6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·2	·6232	·6243	·6253	·6263	·6274	·6284	·6294	·6304	·6314	·6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·3	·6335	·6345	·6355	·6365	·6375	·6385	·6395	·6405	·6415	·6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·4	·6435	·6444	·6454	·6464	·6474	·6484	·6493	·6503	·6513	·6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·5	·6532	·6542	·6551	·6561	·6571	·6580	·6590	·6599	·6609	·6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·6	·6628	·6637	·6646	·6656	·6665	·6675	·6684	·6693	·6702	·6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4·7	·6721	·6730	·6739	·6749	·6758	·6767	·6776	·6785	·6794	·6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4·8	·6812	·6821	·6830	·6839	·6848	·6857	·6866	·6875	·6884	·6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4·9	·6902	·6911	·6920	·6928	·6937	·6946	·6955	·6964	·6972	·6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5·0	·6990	·6998	·7007	·7016	·7024	·7033	·7042	·7050	·7059	·7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5·1	·7076	·7084	·7093	·7101	·7110	·7118	·7126	·7135	·7143	·7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5·2	·7160	·7168	·7177	·7185	·7193	·7202	·7210	·7218	·7226	·7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5·3	·7243	·7251	·7259	·7267	·7275	·7284	·7292	·7300	·7308	·7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5·4	·7324	·7332	·7340	·7348	·7356	·7364	·7372	·7380	·7388	·7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

மடக்கை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள் 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·5	·7404	·7412	·7419	·7427	·7435	·7443	·7451	·7459	·7466	·7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5·6	·7482	·7490	·7497	·7505	·7513	·7520	·7528	·7536	·7543	·7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5·7	·7559	·7566	·7574	·7582	·7589	·7597	·7604	·7612	·7619	·7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5·8	·7634	·7642	·7649	·7657	·7664	·7672	·7679	·7686	·7694	·7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5·9	·7709	·7716	·7723	·7731	·7738	·7745	·7752	·7760	·7767	·7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6·0	·7782	·7789	·7796	·7803	·7810	·7818	·7825	·7832	·7839	·7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6·1	·7853	·7860	·7868	·7875	·7882	·7889	·7896	·7903	·7910	·7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6·2	·7924	·7931	·7938	·7945	·7952	·7959	·7966	·7973	·7980	·7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6·3	·7993	·8000	·8007	·8014	·8021	·8028	·8035	·8041	·8048	·8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6·4	·8062	·8069	·8075	·8082	·8089	·8096	·8102	·8109	·8116	·8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6·5	·8129	·8136	·8142	·8149	·8156	·8162	·8169	·8176	·8182	·8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6·6	·8195	·8202	·8209	·8215	·8222	·8228	·8235	·8241	·8248	·8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6·7	·8261	·8267	·8274	·8280	·8287	·8293	·8299	·8306	·8312	·8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6·8	·8325	·8331	·8338	·8344	·8351	·8357	·8363	·8370	·8376	·8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6·9	·8388	·8395	·8401	·8407	·8414	·8420	·8426	·8432	·8439	·8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7·0	·8451	·8457	·8463	·8470	·8476	·8482	·8488	·8494	·8500	·8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7·1	·8513	·8519	·8525	·8531	·8537	·8543	·8549	·8555	·8561	·8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7·2	·8573	·8579	·8585	·8591	·8597	·8603	·8609	·8615	·8621	·8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7·3	·8633	·8639	·8645	·8651	·8657	·8663	·8669	·8675	·8681	·8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7·4	·8692	·8698	·8704	·8710	·8716	·8722	·8727	·8733	·8739	·8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7·5	·8751	·8756	·8762	·8768	·8774	·8779	·8785	·8791	·8797	·8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7·6	·8808	·8814	·8820	·8825	·8831	·8837	·8842	·8848	·8854	·8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7·7	·8865	·8871	·8876	·8882	·8887	·8893	·8899	·8904	·8910	·8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7·8	·8921	·8927	·8932	·8938	·8943	·8949	·8954	·8960	·8965	·8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7·9	·8976	·8982	·8987	·8993	·8998	·9004	·9009	·9015	·9020	·9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·0	·9031	·9036	·9042	·9047	·9053	·9058	·9063	·9069	·9074	·9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·1	·9085	·9090	·9096	·9101	·9106	·9112	·9117	·9122	·9128	·9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·2	·9138	·9143	·9149	·9154	·9159	·9165	·9170	·9175	·9180	·9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·3	·9191	·9196	·9201	·9206	·9212	·9217	·9222	·9227	·9232	·9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·4	·9243	·9248	·9253	·9258	·9263	·9269	·9274	·9279	·9284	·9289	1	1	2	2	3	3	4	4	9
8·5	·9294	·9299	·9304	·9309	·9315	·9320	·9325	·9330	·9335	·9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·6	·9345	·9350	·9355	·9360	·9365	·9370	·9375	·9380	·9385	·9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8·7	·9395	·9400	·9405	·9410	·9415	·9420	·9425	·9430	·9435	·9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8·8	·9445	·9450	·9455	·9460	·9465	·9469	·9474	·9479	·9484	·9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8·9	·9494	·9499	·9504	·9509	·9513	·9518	·9523	·9528	·9533	·9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·0	·9542	·9547	·9552	·9557	·9562	·9566	·9571	·9576	·9581	·9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·1	·9590	·9595	·9600	·9605	·9609	·9614	·9619	·9624	·9628	·9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·2	·9638	·9643	·9647	·9652	·9657	·9661	·9666	·9671	·9675	·9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·3	·9685	·9689	·9694	·9699	·9703	·9708	·9713	·9717	·9722	·9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·4	·9731	·9736	·9741	·9745	·9750	·9754	·9759	·9763	·9768	·9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·5	·9777	·9782	·9786	·9791	·9795	·9800	·9805	·9809	·9814	·9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·6	·9823	·9827	·9832	·9836	·9841	·9845	·9850	·9854	·9859	·9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·7	·9868	·9872	·9877	·9881	·9886	·9890	·9894	·9899	·9903	·9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·8	·9912	·9917	·9921	·9926	·9930	·9934	·9939	·9943	·9948	·9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9·9	·9956	·9961	·9965	·9969	·9974	·9978	·9983	·9987	·9991	·9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர் மடக்கை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள் 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1·000	1·002	1·005	1·007	1·009	1·012	1·014	1·016	1·019	1·021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1·023	1·026	1·028	1·030	1·033	1·035	1·038	1·040	1·042	1·045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1·047	1·050	1·052	1·054	1·057	1·059	1·062	1·064	1·067	1·069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1·072	1·074	1·076	1·079	1·081	1·084	1·086	1·089	1·091	1·094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1·096	1·099	1·102	1·104	1·107	1·109	1·112	1·114	1·117	1·119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1·122	1·125	1·127	1·130	1·132	1·135	1·138	1·140	1·143	1·146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1·148	1·151	1·153	1·156	1·159	1·161	1·164	1·167	1·169	1·172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1·175	1·178	1·180	1·183	1·186	1·189	1·191	1·194	1·197	1·199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1·202	1·205	1·208	1·211	1·213	1·216	1·219	1·222	1·225	1·227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1·230	1·233	1·236	1·239	1·242	1·245	1·247	1·250	1·253	1·256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1·259	1·262	1·265	1·268	1·271	1·274	1·276	1·279	1·282	1·285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1·288	1·291	1·294	1·297	1·300	1·303	1·306	1·309	1·312	1·315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1·318	1·321	1·324	1·327	1·330	1·334	1·337	1·340	1·343	1·346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1·349	1·352	1·355	1·358	1·361	1·365	1·368	1·371	1·374	1·377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1·380	1·384	1·387	1·390	1·393	1·396	1·400	1·403	1·406	1·409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1·413	1·416	1·419	1·422	1·426	1·429	1·432	1·435	1·439	1·442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1·445	1·449	1·452	1·455	1·459	1·462	1·466	1·469	1·472	1·476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1·479	1·483	1·486	1·489	1·493	1·496	1·500	1·503	1·507	1·510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
18	1·514	1·517	1·521	1·524	1·528	1·531	1·535	1·538	1·542	1·545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1·549	1·552	1·556	1·560	1·563	1·567	1·570	1·574	1·578	1·581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1·585	1·589	1·592	1·596	1·600	1·603	1·607	1·611	1·614	1·618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1·622	1·626	1·629	1·633	1·637	1·641	1·644	1·648	1·652	1·656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1·660	1·663	1·667	1·671	1·675	1·679	1·683	1·687	1·690	1·694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1·698	1·702	1·706	1·710	1·714	1·718	1·722	1·726	1·730	1·734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
24	1·738	1·742	1·746	1·750	1·754	1·758	1·762	1·766	1·770	1·774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
25	1·778	1·782	1·786	1·791	1·795	1·799	1·803	1·807	1·811	1·816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1·820	1·824	1·828	1·832	1·837	1·841	1·845	1·849	1·854	1·858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1·862	1·866	1·871	1·875	1·879	1·884	1·888	1·892	1·897	1·901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1·905	1·910	1·914	1·919	1·923	1·928	1·932	1·936	1·941	1·945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1·950	1·954	1·959	1·963	1·968	1·972	1·977	1·982	1·986	1·991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1·995	2·000	2·004	2·009	2·014	2·018	2·023	2·028	2·032	2·037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2·042	2·046	2·051	2·056	2·061	2·065	2·070	2·075	2·080	2·084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2·089	2·094	2·099	2·104	2·109	2·113	2·118	2·123	2·128	2·133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2·138	2·143	2·148	2·153	2·158	2·163	2·168	2·173	2·178	2·183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2·188	2·193	2·198	2·203	2·208	2·213	2·218	2·223	2·228	2·234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2·239	2·244	2·249	2·254	2·259	2·265	2·270	2·275	2·280	2·286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2·291	2·296	2·301	2·307	2·312	2·317	2·323	2·328	2·333	2·339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2·344	2·350	2·355	2·360	2·366	2·371	2·377	2·382	2·388	2·393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2·399	2·404	2·410	2·415	2·421	2·427	2·432	2·438	2·443	2·449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2·455	2·460	2·466	2·472	2·477	2·483	2·489	2·495	2·500	2·506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2·512	2·518	2·523	2·529	2·535	2·541	2·547	2·553	2·559	2·564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2·570	2·576	2·582	2·588	2·594	2·600	2·606	2·612	2·618	2·624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2·630	2·636	2·642	2·649	2·655	2·661	2·667	2·673	2·679	2·685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2·692	2·698	2·704	2·710	2·716	2·723	2·729	2·735	2·742	2·748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2·754	2·761	2·767	2·773	2·780	2·786	2·793	2·799	2·805	2·812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2·818	2·825	2·831	2·838	2·844	2·851	2·858	2·864	2·871	2·877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2·884	2·891	2·897	2·904	2·911	2·917	2·924	2·931	2·938	2·944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2·951	2·958	2·965	2·972	2·979	2·985	2·992	2·999	3·006	3·013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3·020	3·027	3·034	3·841	3·048	3·055	3·062	3·069	3·076	3·083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3·090	3·097	3·105	3·112	3·119	3·126	3·133	3·141	3·148	3·155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர் மடக்கை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள்								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3·162	3·170	3·177	3·184	3·192	3·199	3·206	3·214	3·221	3·228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3·236	3·243	3·251	3·258	3·266	3·273	3·281	3·289	3·296	3·304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3·311	3·319	3·327	3·334	3·342	3·350	3·357	3·365	3·373	3·381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3·388	3·396	3·404	3·412	3·420	3·428	3·436	3·443	3·451	3·459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3·467	3·475	3·483	3·491	3·499	3·508	3·516	3·524	3·532	3·540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3·548	3·556	3·565	3·573	3·581	3·589	3·597	3·606	3·614	3·622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3·631	3·639	3·648	3·656	3·664	3·673	3·681	3·690	3·698	3·707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3·715	3·724	3·733	3·741	3·750	3·758	3·767	3·776	3·784	3·793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3·802	3·811	3·819	3·828	3·837	3·846	3·855	3·864	3·873	3·882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3·890	3·899	3·908	3·917	3·926	3·936	3·945	3·954	3·963	3·972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3·981	3·990	3·999	4·009	4·018	4·027	4·036	4·046	4·055	4·064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4·074	4·083	4·093	4·102	4·111	4·121	4·130	4·140	4·150	4·159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4·169	4·178	4·188	4·198	4·207	4·217	4·227	4·236	4·246	4·256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4·266	4·276	4·285	4·295	4·305	4·315	4·325	4·335	4·345	4·355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4·365	4·375	4·385	4·395	4·406	4·416	4·426	4·436	4·446	4·457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4·467	4·477	4·487	4·498	4·508	4·519	4·529	4·539	4·550	4·56[illegible]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4·571	4·581	4·592	4·603	4·613	4·624	4·634	4·645	4·656	4·667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4·677	4·688	4·699	4·710	4·721	4·732	4·742	4·753	4·764	4·775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4·786	4·797	4·808	4·819	4·831	4·842	4·853	4·864	4·875	4·887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4·898	4·909	4·920	4·932	4·943	4·955	4·966	4·977	4·989	5·[illegible]	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5·012	5·023	5·035	5·047	5·058	5·070	5·082	5·093	5·105	5·117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5·129	5·140	5·152	5·164	5·176	5·188	5·200	5·212	5·224	5·236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5·248	5·260	5·272	5·284	5·297	5·309	5·321	5·338	5·346	5·358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5·370	5·383	5·395	5·408	5·420	5·433	5·445	5·458	5·470	5·483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5·495	5·508	5·521	5·534	5·546	5·559	5·572	5·585	5·598	5·610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5·623	5·636	5·649	5·662	5·675	5·689	5·702	5·715	5·728	5·741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5·754	5·768	5·781	5·794	5·808	5·821	5·834	5·848	5·861	5·875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5·888	5·902	5·916	5·929	5·943	5·957	5·970	5·984	5·998	6·012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6·026	6·039	6·053	6·067	6·081	6·095	6·109	6·124	6·138	6·152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6·166	6·180	6·194	6·209	6·223	6·237	6·252	6·266	6·281	6·295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6·310	6·324	6·339	6·353	6·368	6·383	6·397	6·412	6·427	6·442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6·457	6·471	6·486	6·501	6·516	6·531	6·546	6·561	6·577	6·592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6·607	6·622	6·637	6·653	6·668	6·683	6·699	6·714	6·730	6·745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6·761	6·776	6·792	6·808	6·823	6·839	6·855	6·871	6·887	6·902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6·918	6·934	6·950	6·966	6·982	6·998	7·015	7·031	7·047	7·063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7·079	7·096	7·112	7·129	7·145	7·161	7·178	7·194	7·211	7·228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7·244	7·261	7·278	7·295	7·311	7·328	7·345	7·362	7·379	7·396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7·413	7·430	7·447	7·464	7·482	7·499	7·516	7·534	7·551	7·568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7·586	7·603	7·621	7·638	7·656	7·674	7·691	7·709	7·727	7·745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7·762	7·780	7·798	7·816	7·834	7·852	7·870	7·889	7·907	7·925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7·943	7·962	7·980	7·998	8·017	8·035	8·054	8·072	8·091	8·110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8·128	8·147	8·166	8·185	8·204	8·222	8·241	8·260	8·279	8·299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8·318	8·337	8·356	8·375	8·395	8·414	8·433	8·453	8·472	8·492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8·511	8·531	8·551	8·570	8·590	8·610	8·630	8·650	8·670	8·690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8·710	8·730	8·750	8·770	8·790	8·810	8·831	8·851	8·872	8·892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8·913	8·954	8·954	8·974	8·995	9·016	9·036	9·057	9·078	9·099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9·120	9·141	9·162	9·183	9·204	9·226	9·247	9·268	9·290	9·311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9·333	9·354	9·376	9·397	9·419	9·441	9·462	9·484	9·506	9·528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9·550	9·572	9·594	9·616	9·638	9·661	9·683	9·705	9·727	9·750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9·772	9·795	9·817	9·840	9·863	9·886	9·908	9·931	9·954	9·977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

முக்கோண அளவியல் விகிதங்கள்

A (டிகிரியில்)	sin A	cos A	tan A	A (டிகிரியில்)	sin A	cos A	tan A
0	·0000	1·000	·0000	45	·7071	·7071	1·0000
1	·0175	·9998	·0175	46	·7193	·6947	1·0355
2	·0349	·9994	·0349	47	·7314	·6820	1·0724
3	·0523	·9986	·0524	48	·7431	·6691	1·1106
4	·0698	·9976	·0699	49	·7547	·6561	1·1504
5	·0872	·9962	·0875	50	·7660	·6428	1·1918
6	·1045	·9945	·1051	51	·7771	·6293	1·2349
7	·1219	·9925	·1228	52	·7880	·6157	1·2799
8	·1392	·9903	·1405	53	·7986	·6018	1·3270
9	·1564	·9877	·1584	54	·8090	·5878	1·3764
10	·1736	·9848	·1763	55	·8192	·5736	1·4281
11	·1908	·9816	·1944	56	·8290	·5592	1·4826
12	·2079	·9781	·2126	57	·8387	·5446	1·5399
13	·2250	·9744	·2309	58	·8480	·5299	1·6003
14	·2419	·9703	·2493	59	·8572	·5150	1·6643
15	·2588	·9659	·2679	60	·8660	·5000	1·7321
16	·2756	·9613	·2867	61	·8746	·4848	1·8040
17	·2924	·9563	·3057	62	·8829	·4695	1·8807
18	·3090	·9511	·3249	63	·8910	·4540	1·9626
19	·3256	·9455	·3443	64	·8988	·4384	2·0503
20	·3420	·9397	·3640	65	·9063	·4226	2·1445
21	·3584	·9336	·3839	66	·9135	·4067	2·2460
22	·3746	·9272	·4040	67	·9205	·3907	2·3559
23	·3907	·9205	·4245	68	·9272	·3746	2·4751
24	·4067	·9135	·4452	69	·9336	·3584	2·6051
25	·4226	·9063	·4663	70	·9397	·3420	2·7475
26	·4384	·8988	·4877	71	·9455	·3256	2·9042
27	·4540	·8910	·5095	72	·9511	·3090	3·0777
28	·4695	·8829	·5317	73	·9563	·2924	3·2709
29	·4848	·8746	·5543	74	·9613	·2756	3·4874
30	·5000	·8660	·5774	75	·9659	·2588	3·7321
31	·5150	·8572	·6009	76	·9703	·2419	4·0108
32	·5299	·8480	·6249	77	·9744	·2250	4·3315
33	·5446	·8387	·6494	78	·9781	·2079	4·7046
34	·5592	·8290	·6745	79	·9816	·1908	5·1446
35	·5736	·8192	·7002	80	·9848	·1736	5·6713
36	·5878	·8090	·7265	81	·9877	·1564	6·3138
37	·6018	·7986	·7536	82	·9903	·1392	7·1154
38	·6157	·7880	·7813	83	·9925	·1219	8·1443
39	·6293	·7771	·8098	84	·9945	·1045	9·514
40	·6428	·7660	·8391	85	·9962	·0872	11·43
41	·6561	·7547	·8693	86	·9976	·0698	14·30
42	·6691	·7431	·9004	87	·9986	·0523	19·08
43	·6820	·7314	·9325	88	·9994	·0349	28·64
44	·6947	·7193	·9657	89	·9998	·0175	57·29

வர்க்கம், கனம், வர்க்கமூலம், கனமூலம்

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1	51	2601	132651	7·141	3·708
2	4	8	1·414	1·260	52	2704	140608	7·211	3·733
3	9	27	1·732	1·442	53	2809	148877	7·280	3·756
4	16	64	2·000	1·587	54	2916	157464	7·348	3·780
5	25	125	2·236	1·710	55	3025	166375	7·416	3·808
6	36	216	2·449	1·817	56	3136	175616	7·483	3·826
7	49	343	2·646	1·913	57	3249	185193	7·550	3·849
8	64	512	2·828	2·000	58	3364	195112	7·616	3·871
9	81	729	3·000	2·080	59	3481	205379	7·681	3·893
10	100	1000	3·162	2·154	60	3600	216000	7·746	3·915
11	121	1331	3·317	2·224	61	3721	226981	7·810	3·936
12	144	1728	3·463	2·289	62	3844	238328	7·874	3·958
13	169	2197	3·606	2·351	63	3969	250047	7·937	3·979
14	196	2744	3·742	2·410	64	4096	262144	8·000	4·000
15	225	3375	3·873	2·466	65	4225	274625	8·062	4·021
16	256	4096	4·000	2·520	66	4356	287496	8·124	4·041
17	289	4913	4·123	2·571	67	4489	300763	8·185	4·062
18	324	5832	4·243	2·621	68	4624	314432	8·246	4·082
19	361	6859	4·359	2·668	69	4761	328509	8·307	4·102
20	400	8000	4·472	2·714	70	4900	343000	8·367	4·121
21	441	9261	4·583	2·759	71	5041	357911	8·426	4·141
22	484	10648	4·690	2·802	72	5184	373248	8·485	4·160
23	529	12167	4·796	2·844	73	5329	389017	8·544	4·179
24	576	13824	4·899	2·884	74	5476	405224	8·602	4·198
25	625	15625	5·000	2·924	75	5625	421875	8·660	4·217
26	676	17576	5·099	2·962	76	5776	438976	8·718	4·236
27	729	19683	5·196	3·000	77	5929	456533	8·775	4·254
28	784	21952	5·291	3·307	78	6084	474552	8·832	4·273
29	841	24389	5·385	3·072	79	6241	493039	8·888	4·291
30	900	27000	5·477	3·107	80	6400	512000	8·944	4·309
31	961	29791	5·568	3·141	81	6561	531441	9·000	4·327
32	1024	32768	5·657	3·175	82	6724	551368	9·055	4·344
33	1089	35937	5·745	3·208	83	6889	571787	9·110	4·362
34	1156	39304	5·831	3·240	84	7056	592704	9·165	4·380
35	1225	42875	5·916	3·271	85	7225	614125	9·220	4·397
36	1296	46656	6·000	3·302	86	7396	636056	9·274	4·[illegible]14
37	1369	50653	6·083	3·332	87	7569	658503	9·327	4·431
38	1444	54872	6·164	3·362	88	7744	681472	9·381	4·448
39	1521	59319	6·245	3·391	89	7921	704969	9·434	4·465
40	1600	64000	6·325	3·420	90	8100	729000	9·487	4·481
41	1681	88921	6·403	3·448	91	8281	753571	9·539	4·493
42	1764	74088	6·481	3·476	92	8464	778688	9·592	4·514
43	1849	79507	6·557	3·503	93	8649	804357	9·644	4·531
44	1936	85184	6·633	3·530	94	8836	830584	9·695	4·547
45	2025	91125	6·703	3·557	95	9025	857375	9·747	4·563
46	2116	97336	6·782	3·583	96	9216	884736	9·798	4·579
47	2209	103823	6·866	3·609	97	9409	912673	9·849	4·595
48	2304	110592	6·928	3·634	98	9604	941192	9·899	4·610
49	2401	117649	7·000	3·659	99	9801	970299	9·950	4·626
50	2500	125000	7·071	3·684	100	10000	1000000	10·000	4·642

பெருக்கல் தலைகீழிகள்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள் (கழிக்க)								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	1·000	·9901	·9804	·9709	·9615	·9524	·9434	·9346	·9259	·9174	9	18	28	37	46	55	64	74	83
1·1	·9091	·9009	·8929	·8850	·8772	·8696	·8621	·8547	·8475	·8403	8	15	23	31	38	46	53	61	69
1·2	·8333	·8264	·8197	·8130	·8065	·8000	·7937	·7874	·7813	·7752	7	13	20	26	33	39	46	52	59
1·3	·7692	·7634	·7576	·7519	·7463	·7407	·7353	·7299	·7246	·7194	6	11	17	22	28	33	39	44	50
1·4	·7143	·7092	·7042	·6993	·6944	·6897	·6849	·6803	·6757	·6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1·5	·6667	·6623	·6579	·6536	·6494	·6452	·6410	·6369	·6329	·6289	4	8	13	17	21	25	29	34	38
1·6	·6250	·6211	·6173	·6135	·6098	·6061	·6024	·5988	·5952	·5917	4	7	11	15	19	22	26	29	33
1·7	·5882	·5848	·5814	·5780	·5747	·5714	·5682	·5650	·5618	·5587	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1·8	·5556	·5525	·5495	·5464	·5435	·5405	·5376	·5348	·5319	·5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1·9	·5263	·5236	·5208	·5181	·5155	·5128	·5102	·5076	·5051	·5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2·0	·5000	·4975	·4950	·4926	·4902	·4878	·4854	·4831	·4808	·4785	2	5	7	10	12	14	17	19	22
2·1	·4762	·4739	·4717	·4695	·4673	·4651	·4630	·4608	·4587	·4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2·2	·4545	·4525	·4505	·4484	·4464	·4444	·4425	·4405	·4386	·4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·3	·4348	·4329	·4310	·4292	·4274	·4255	·4237	·4219	·4202	·4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2·4	·4167	·4149	·4132	·4115	·4098	·4082	·4065	·4049	·4032	·4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2·5	·4000	·3984	·3968	·3953	·3937	·3922	·3906	·3891	·3876	·3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·6	·3846	·3831	·3817	·3802	·3788	·3774	·3759	·3745	·3731	·3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2·7	·3704	·3690	·3676	·3663	·3650	·3636	·3623	·3610	·3597	·3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2·8	·3571	·3559	·3546	·3534	·3521	·3509	·3497	·3484	·3472	·3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2·9	·3448	·3436	·3425	·3413	·3401	·3390	·3378	·3367	·3356	·3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·0	·3333	·3322	·3311	·3300	·3289	·3279	·3268	·3257	·3247	·3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3·1	·3226	·3215	·3205	·3195	·3185	·3175	·3165	·3155	·3145	·3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·2	·3125	·3115	·3106	·3096	·3086	·3077	·3067	·3058	·3049	·3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·3	·3030	·3021	·3012	·3003	·2994	·2985	·2976	·2967	·2959	·2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3·4	·2941	·2933	·2924	·2915	·2907	·2899	·2890	·2882	·2874	·2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3·5	·2857	·2849	·2841	·2833	·2825	·2817	·2809	·2801	·2793	·2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3·6	·2778	·2770	·2762	·2755	·2747	·2740	·2732	·2725	·2717	·2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3·7	·2703	·2695	·2688	·2681	·2674	·2667	·2660	·2653	·2646	·2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3·8	·2632	·2625	·2618	·2611	·2604	·2597	·2591	·2584	·2577	·2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3·9	·2564	·2558	·2551	·2545	·2538	·2532	·2525	·2519	·2513	·2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4·0	·2500	·2494	·2488	·2481	·2475	·2469	·2463	·2457	·2451	·2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4·1	·2439	·2433	·2427	·2421	·2415	·2410	·2404	·2398	·2392	·2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·2	·2381	·2375	·2370	·2364	·2358	·2353	·2347	·2342	·2336	·2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·3	·2326	·2320	·2315	·2309	·2304	·2299	·2294	·2288	·2283	·2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·4	·2273	·2268	·2262	·2257	·2252	·2247	·2242	·2237	·2232	·2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·5	·2222	·2217	·2212	·2208	·2203	·2198	·2193	·2188	·2183	·2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·6	·2174	·2169	·2165	·2160	·2155	·2151	·2146	·2141	·2137	·2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·7	·2128	·2123	·2119	·2114	·2110	·2105	·2101	·2096	·2092	·2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·8	·2083	·2079	·2075	·2070	·2066	·2062	·2058	·2053	·2049	·2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4·9	·2041	·2037	·2033	·2028	·2024	·2020	·2016	·2012	·2008	·2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·0	·2000	·1996	·1992	·1988	·1984	·1980	·1976	·1972	·1969	·1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·1	·1961	·1957	·1953	·1949	·1946	·1942	·1938	·1934	·1931	·1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5·2	·1923	·1919	·1916	·1912	·1908	·1905	·1901	·1898	·1894	·1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5·3	·1887	·1883	·1880	·1876	·1873	·1869	·1866	·1862	·1859	·1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·4	·1852	·1848	·1845	·1842	·1838	·1835	·1832	·1828	·1825	·1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

பெருக்கல் தலைகீழிகள்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள் (கழிக்க) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·5	·1818	·1815	·1812	·1808	·1805	·1802	·1799	·1795	·1792	·1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·6	·1786	·1783	·1779	·1776	·1773	·1770	·1767	·1764	·1761	·1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·7	·1754	·1751	·1748	·1745	·1742	·1739	·1736	·1733	·1730	·1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5·8	·1724	·1721	·1718	·1715	·1712	·1709	·1706	·1704	·1701	·1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5·9	·1695	·1692	·1689	·1686	·1684	·1681	·1678	·1675	·1672	·1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6·0	·1667	·1664	·1661	·1658	·1656	·1653	·1650	·1647	·1645	·1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6·1	·1639	·1637	·1634	·1631	·1629	·1626	·1623	·1621	·1618	·1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6·2	·1613	·1610	·1608	·1605	·1603	·1600	·1597	·1595	·1592	·1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6·3	·1587	·1585	·1582	·1580	·1577	·1575	·1572	·1570	·1567	·1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·4	·1562	·1560	·1558	·1555	·1553	·1550	·1548	·1546	·1543	·1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·5	·1538	·1536	·1534	·1531	·1529	·1527	·1524	·1522	·1520	·1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·6	·1515	·1513	·1511	·1508	·1506	·1504	·1502	·1499	·1497	·1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·7	·1493	·1490	·1488	·1486	·1484	·1481	·1479	·1477	·1475	·1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·8	·1471	·1468	·1466	·1464	·1462	·1460	·1458	·1456	·1453	·1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6 9	·1449	·1447	·1445	·1443	·1441	·1439	·1437	·1435	·1433	·1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2
7·0	·1429	·1427	·1425	·1422	·1420	·1418	·1416	·1414	·1412	·1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·1	·1408	·1406	·1404	·1403	·1401	·1399	·1397	·1395	·1393	·1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·2	·1389	·1387	·1385	·1383	·1381	·1379	·1377	·1376	·1374	·1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·3	·1370	·1368	·1366	·1364	·1362	·1361	·1359	·1357	·1355	·1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·4	·1351	·1350	·1348	·1346	·1344	·1342	·1340	·1339	·1337	·1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·5	·1333	·1332	·1330	·1328	·1326	·1325	·1323	·1321	·1319	·1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·6	·1316	·1314	·1312	·1311	·1309	·1307	·1305	·1304	·1302	·1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·7	·1299	·1297	·1295	·1294	·1292	·1290	·1289	·1287	·1285	·1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7·8	·1282	·1280	·1279	·1277	·1276	·1274	·1272	·1271	·1269	·1267	0	0	0	1	1	1	1	1	[illegible]
7·9	·1266	·1264	·1263	·1261	·1259	·1258	·1256	·1255	·1253	·1252	0	0	0	1	1	1	1	1	[illegible]
8·0	·1250	·1248	·1247	·1245	·1244	·1242	·1241	·1239	·1238	·1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·1	·1235	·1233	·1232	·1230	·1229	·1227	·1225	·1224	·1222	·1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·2	·1220	·1218	·1217	·1215	·1214	·1212	·1211	·1209	·1208	·1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·3	·1205	·1203	·1202	·1200	·1199	·1198	·1196	·1195	·1193	·1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·4,	·1190	·1189	·1188	·1186	·1185	·1183	·1182	·1181	·1179	·1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·5	·1176	·1175	·1174	·1172	·1171	·1170	·1168	·1167	·1166	·1164	0	0	0	1	1	1	1	1	[illegible]
8·6	·1163	·1161	·1160	·1159	·1157	·1156	·1155	·1153	·1152	·1151	0	0	0	1	1	1	1	1	[illegible]
8·7	·1149	·1148	·1147	·1145	·1144	·1143	·1142	·1140	·1139	·1138	0	0	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]
8·8	·1136	·1135	·1134	·1133	·1131	·1130	·1129	·1127	·1126	·1125	0	0	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]
8·9	·1124	·1122	·1121	·1120	·1119	·1117	·1116	·1115	·1114	·1112	0	0	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·0	·1111	·1110	·1109	·1107	·1106	·1105	·1104	·1103	·1101	·1100	0	0	0	1	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·1	·1099	·1098	·1096	·1095	·1094	·1093	·1092	·1090	·1089	·1088	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·2	·1087	·1086	·1085	·1083	·1082	·1081	·1080	·1079	·1078	·1076	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·3	·1075	·1074	·1073	·1072	·1071	·1070	·1068	·1067	·1066	·1065	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·4	·1064	·1063	·1062	·1060	·1059	·1058	·1057	·1056	·1055	·1054	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·5	·1053	·1052	·1050	·1049	·1048	·1047	·1046	·1045	·1044	·1043	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·6	·1042	·1041	·1039	·1038	·1037	·1036	·1035	·1034	·1033	·1032	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·7	·1031	·1030	·1029	·1028	·1027	·1026	·1025	·1024	·1022	·1021	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·8	·1020	·1019	·1018	·1017	·1016	·1015	·1014	·1013	·1012	·1011	0	0	0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]
9·9	·1010	·1009	·1008	·1007	·1006	·1005	·1004	·1003	·1002	·1001	0	0	0	0	0	1	1	[illegible]	[illegible]

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கற்க கசடற

Wrapper Printed at: PERCO LITHO WORKS, SIVAKASI-626123.