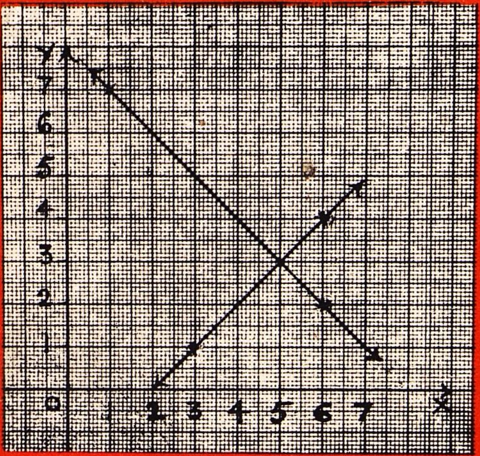
கணக்கு 9



தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்

கணக்கு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

© தமிழ்நாட்டு அரசு

முதற் பதிப்பு — 1981
மறு பதிப்பு — 1982

ஆசிரியர்கள் :

திரு. எஸ். எஸ். இராஜகோபாலன்,
தலைமை ஆசிரியர்,
சர்வஜன மேல் நிலைப்பள்ளி,
கோவை.

திரு. கே. சுப்பிரமணியன்,
ரீடர்,
தமிழ்நாடு கல்வி ஆராய்ச்சி பயிற்சி நிறுவனம்
சென்னை.

மதிப்புரையாளர்கள் :

திரு. எஸ். எஸ். இராஜகோபாலன்,
தலைமை ஆசிரியர்,
சர்வஜன மேல் நிலைப்பள்ளி,
கோவை.

திரு. கே. இராமநாதன்,
பேராசிரியர்,
தமிழ்நாடு கல்வி ஆராய்ச்சி பயிற்சி நிறுவனம்
சென்னை.

விலை : 3-40

இந்திய அரசு சலுகை விலையில் வழங்கிய 60 ஜி. எஸ். எம். தாளில் இந்நூல் அச்சிடப்பட்டது.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :
லக்ஷ்மி ஆப்செட் பிரிண்டர்ஸ்,
சிவகாசி - 626 123.

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1.	கணங்கள்	1
2.	எண் முறையினம்—எண்ணியல்	42
3.	அல்ஜீப்ரா	85
4.	அளவியல்	170
5.	வடிவ இயல்	188
6.	வரைபடங்கள்	246
7.	பயனியல்	291
8.	கணித தருக்க முறை	302

1. கணங்கள்

1. மீள் பார்வை

தோட்டத்தில் பூக்கள் 'கொத்துக் கொத்தாக' இருப்பதைப் பார்த்திருப்பீர்கள். சந்தையில் தேங்காய் 'குவியல் குவியலாக' வைத்திருப்பார்கள். விடியற்காலையில் பறவைகள் 'கூட்டம் கூட்டமாக'ப் பறந்து செல்கின்றன. உங்களுடைய பையில் புத்தகங்களும் நோட்டுப் புத்தகங்களும் 'தொகுதி'யாக இருக்கின்றன. இவ்வாறு பொருள்களின் தொகுதி கணக்கு மொழியில் 'கணம்' எனப்படும். வகுப்பறை மாணவர்களின் பட்டியல், கால் பந்தாட்டாக் குழு, சாவிக் கொத்து, அஞ்சல் தலைகளின் தொகுதி இவை கணங்களுக்கு வேறு சில உதாரணங்கள்.

கீழே வருகைப் பட்டியலினின்று ஒரு பகுதி கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. பள்ளிக்கு வந்த நாள்கள் '×' என்ற குறியீட்டாலும், வராத நாள்கள் '0' என்ற குறியீட்டாலும் குறிக்கப் பட்டுள்ளன.

	தி	செ	பு	வி	வெ
இராமன்	×	×	×	×	×
அப்துல்	×	0	×	0	×
மோசஸ்	0	×	×	×	×
கேசவன்	×	×	0	0	0

திங்கட்கிழமை பள்ளிக்கு வந்தவர்கள் இராமன், அப்துல், கேசவன். இவர்களின் கணத்தை இருதலை அடைப்பிற்குள் இவ்வாறு எழுதுவோம்.

{ இராமன், அப்துல், கேசவன் }

இராமன், அப்துல், கேசவன் கணத்தின் 'உறுப்புகள்' எனப்படும்.

கணத்தைக் குறிக்க ஆங்கில மொழிப் பெரிய எழுத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$M = \{ \text{இராமன், அப்துல், கேசவன்} \}$$

இராமன், கணம் M-ன் ஓர் உறுப்பு. ஆனால் மோசஸ், கணம் M-ன் உறுப்பு அல்ல.

இதனை இராமன் $\in M$

மோசஸ் $\notin M$

என்ற குறியீடுகளால் குறிப்போம்.

ஓர் உறுப்பு ஒரு கணத்தில் உள்ளதா என்று திட்டமாகக் கூறமுடியுமானால் அது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுதி எனப்படும். அதாவது ஒரு கணம் கொடுக்கப்பட்டால் எவ்வொரு பொருளும் அக்கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கும்; அல்லது அக்கணத்தின் உறுப்பாக இல்லாதிருக்கும்.

[M என்பது ஒரு கணம்; a என்பது ஒரு பொருள் எனின் $a \in M$ அல்லது $a \notin M$ ஆக மட்டும் இருக்கமுடியும்.]

கணம் பொருள்களின் வரையறுக்கப்பட்ட தொகுதி

கணம் - எழுதும் முறை

$E = \{ 2, 4, 6, \ldots \}$ இக்கணத்தைப் பொதுவாகப் படிக்கும் பொழுது 2, 4, 6, ... எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம் என்று படிக்கலாம். இது இரட்டை முழு எண்களின் கணம். இது பட்டியல் முறை.

இதையே $E = \{$ இரட்டை எண்கள் $\}$ என்று எழுதுவது வருணனை முறை.

$E = \{ n/n$ ஓர் இரட்டை எண் $\}$ என்று எழுதுவது கணக் குறியீட்டு முறை.

E என்பது எல்லா 'n'களைக் கொண்ட கணம். அதில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஓர் இரட்டை முழு எண்.

ஓர் உறுப்புக்கணம் - வெற்றுக் கணம்

$$A = \{ n/n = 1 \}$$

இந்தக் கணத்தில் 1 என்ற ஓர் உறுப்பு மட்டுமே இருக்க முடியும். இதை $A = \{ 1 \}$ என்றும் எழுதலாம். இது ஓர் உறுப்புக் கணம்.

ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகவும் ஓர் இரட்டை எண்ணாகவும் உள்ள கணத்தைப் பார்ப்போம்.

$A = \{ n/n$ ஓர் ஒற்றை எண் மேலும் ஓர் இரட்டை எண் $\}$

ஓர் எண் ஒற்றை எண்ணாகவோ அல்லது இரட்டை எண்ணாகவோ மட்டுமே இருக்கமுடியும். ஒற்றை எண்ணாகவும் இரட்டை எண்ணாகவும் இருக்க முடியாது. ஆதலால் இக் கணத்தில் உறுப்பே இருக்க முடியாது.

இது வெற்றுக்கணம்.

$A = \{ \ \}$ அல்லது $A = \phi$ என எழுதுவோம்.

பயிற்சி 1

1. கீழுள்ள கணங்களின் உறுப்புகளை எழுதுக.

   (அ) குற்றெழுத்துகளின் கணம்

   (ஆ) முழு எண்களின் கணத்தில் பத்துக்குள் ஒற்றை எண்களின் கணம்

   (இ) 20-க்குள் முழு எண்களில் பகா எண்களின் கணம்

2. 99-க்குக் குறைந்த முழு எண்களில் 9 ஆல் வகுபடும் எண்களின் கணம் என்ன ?

3. 99-க்குக் குறைந்த முழு எண்களில் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9 ஆக உள்ள எண்களின் கணத்தை எழுதுக.

4. கீழுள்ள கணங்களை விவரண முறையில் எழுதுக.

   (அ) $K = \{ 5, 10, 15, 20, 25 \}$

   (ஆ) $M = \{ 3, 6, 9, 12, 15, \dots \}$

   (இ) $R = \{ a, e, i, o, u \}$

   (ஈ) $S = \{$ இராமன், இராகவன், இராதாகிருட்டிணன் $\}$

2-1 உட்கணம்

உனது பெஞ்சில் மாணவர்களின் கணம்

$A = \{ a, b, c, d, e \}$ என்போம்.

இதில் ஒரு நாள் பள்ளிக்கு வந்த மூன்று மாணவர்களின் கணம்

$P = \{ a, b, e \}$

P-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் A-ல் உள்ளதால் P, A-ன் உட்கணம் எனப்படும்.

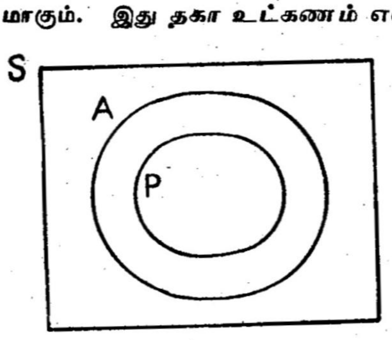
$$P \subset A$$

$P \subset A$ ஆனால் $P \neq A$ ஆகையால் P, A-ன் தகு உட்கணம் எனப்படும்.

கணம் $\{ a, b, c, d, e \}$-ல் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம்

கணம் $A = \{ a, b, c, d, e \}$ என்ற கணத்திலும் உள்ளன.

ஆதலால் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் அதுவே ஓர் உட்கணமாகும். இது தகா உட்கணம் எனப்படும்.



படம் 1-1.

வகுப்பிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களின் கணம் S என்றால் $P \subset A \subset S$.

குறிப்பு: படம் 1-1-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது வென்பட விளக்கம். ஜான்வென் என்ற ஆங்கில நாட்டுக் கணித வல்லுநர் கணங்களை விளக்க இம்மாதிரியான படங்களைப் பயன்படுத்தினார்.

$A = \{ a, b \}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்க. இதன் உட்கணங்கள் எவை?

$\{ a, b \}$, $\{ a \}$, $\{ b \}$, $\{ \}$ ஆகும்.

இவற்றில் $\{ a, b \}$ தகா உட்கணம்; $\{ \}$ வெற்றுக்கணம். தகா உட்கணமும், வெற்றுக்கணமும் ஒவ்வொரு கணத்தின் உட்கணங்கள் ஆகும்.

கீழுள்ள பட்டியலை நிரப்புக :

கணம்	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	உட்கணங்கள்	உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை
$\{a\}$	1	$\{a\}$, $\{\ \}$	2
$\{a, b\}$			
$\{a, b, c\}$			

கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 1 எனில் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2.

கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 2 எனில் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை ? 4 எனக் கண்டோமல்லவா ?

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 3 எனில் உட்கணங்கள் எத்தனை ? 8 எனப் பட்டியலிலிருந்து அறியலாம்.

1, 2, 3 உறுப்புகளுடைய கணங்களின் . உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2, 4, 8 அல்லது $2, 2^2, 2^3$ ஆகும்.

4 உறுப்புகளையுடைய கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^4 (= 16) என்பதைச் சரிபார்க்க.

எனவே,

> ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n எனில் அதன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^n

என அறிகிறோம்.

அடுக்குக் கணம்

$$A = \{a, b\}$$

இதன் உட்கணங்கள் $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{\ \}$ எனத் தெரிந்துகொண்டீர்கள். இவ்வுட்கணங்கள் எல்லாவற்றையும் சேர்த்து ஒரு கணம் அமைத்தால் அதை

$$P = \Big\{ \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{\ \} \Big\}$$ என எழுதலாம்.

இது $\{ a, b \}$ -இன் அடுக்குக்கணம் எனப்படும்.

$$P(A) = \Big\{ \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{\ \} \Big\}$$

A ஒரு கணம் எனில் $P(A) = \{ x \mid x \subset A \}$

> ஒரு கணத்தின் உட்கணங்கள் அனைத்தையும் உறுப்பு களாகக் கொண்ட புதிய கணம் முதலில் எடுத்துக் கொண்ட கணத்தின் அடுக்குக் கணம் ஆகும்.

கவனிக்க : அடுக்குக் கணம் ஒரு கணம் ஆகும். அதன் உறுப்புகளும் கணங்கள்.

பயிற்சி 2 - 1

1. $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9\}$
   இதன் பகா எண்களின் உட்கணத்தை எழுதுக.
2. மேற்குறித்த கணக்கில் உட்கணங்கள் எத்தனை ?
3. $\subset$ அல்லது $\not\subset$ என்ற தகுந்த குறியிட்டு நிறைவு செய்க.
   (அ) $\{1, 2, 3\}$ ...... $\{3, 1, 2\}$
   (ஆ) $\{2, 3, 6, 8, 10\}$ ...... $\{6, 2, 8, 12, 10, 4\}$
   (இ) $\{ a, e, i, o, u \}$ ... $\{ x/x$ ஓர் ஆங்கில எழுத்து $\}$
   (ஈ) $\{x \mid x$ 10-ன் மடங்கு$\}$ ... $\{ x/x$ 5-ன் மடங்கு $\}$
   (உ) $\{ x/x$ 10-க்கும் 100-க்கும் இடையேயுள்ள பகா எண் $\}$ ...... $\{ x/x$ 10-க்கும் 100-க்கும் இடையே யுள்ள இரட்டை எண் $\}$

விடைகள்

1. $\{3, 5, 7\}$ 2. 32
3. (அ) $\subset$ (ஆ) $\not\subset$ (இ) $\subset$ (ஈ) $\subset$ (உ) $\not\subset$

2 – 2 வெட்டுக்கணம்

திங்கட்கிழமை கைப்பந்தாட்டத்தில் கலந்து கொண்டவர் களின் கணம் M. செவ்வாய்க்கிழமை ஆட்டத்தில் கலந்து கொண்டவர்களின் கணம் T.

$M = \{ a, b, c \}$

$T = \{ a, c, d \}$

திங்கள், செவ்வாய் இரண்டு நாட்களிலும் விளையாட்டில் கலந்துகொண்டவர்கள் யாவர் ? அவர்களின் கணம் S என்றால்

$$S = \{ a, c \}.$$

இது M, T ஆகிய இரு கணங்களிலும் உள்ள பொது உறுப்பு களைக் கொண்டது எனக் கூறலாம்.

கணம் S, கணங்கள் M, T இவற்றின் **வெட்டுக் கணம்** எனப் படும்.

இதனை $S = M \cap T$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

மேற்குறிப்பிட்ட இரு கணங்கள் M, T இவற்றின் $M \cap T$, $T \cap M$ இரண்டையும் காண்க.

என்ன அறிகிறோம் ?

$$M \cap T = T \cap M$$

இவ்வுண்மையை வேறு பல கணங்கள், அமைத்துச் சரி பார்க்கவும்.

A, B என்பன இரண்டு கணங்கள் எனில் $A \cap B$ என்பது இரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் ஆகும்.

மேலும் $A \cap B = \{ x/x \in A$; மேலும் $x \in B \}$

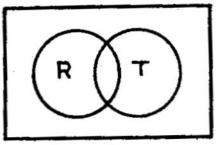
பயிற்சி 2 - 2

1. வெட்டுக்கணத்தை எழுதுக.

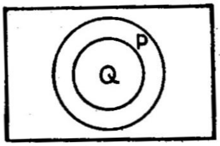
   $\{ a, b, c, d, e \}$; $\{a, e, i, o, u\}$

2. பத்துக்குக் குறைந்த பகா எண்களின் கணம், பத்துக்குக் குறைந்த ஒற்றை முழு எண்களின் கணம். இவற்றின் வெட்டுக்கணத்தை எழுதுக.

3. ஒவ்வொரு படத்திலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெட்டுக் கணத்தை நிழலிட்டுக் காட்டுக.

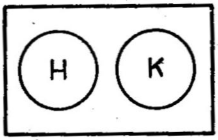


(a) R∩T



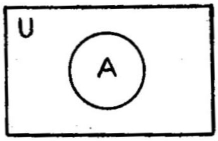
(b) P∩Q

படம் 1-2. படம் 1-3.



(c) H∩K

படம் 1-4.



(d) A∩U

படம் 1-5.

4. வெட்டுக்கணத்தை எழுதுக.

(அ) $A \cap A$

(ஆ) $A \cap \phi$

(இ) $A \cap U$

விடைகள்

1. $\{a, e\}$ 2. $\{3, 5, 7\}$

4. (அ) A (ஆ) ϕ (இ) A

2 - 3 கணச் சேர்ப்பு

வியாழக்கிழமை பள்ளிக்கு வந்த மாணவர்களின் கணம் T. வெள்ளிக்கிழமை வந்தவர்களின் கணம் F.

$$T = \{b, c, c\}, \quad F = \{a, b, c\}$$

வியாழன், வெள்ளி இரு நாட்களில் ஏதாவது ஒரு நாளிலாவது பள்ளிக்கு வந்தவர்களின் கணம் K என்றால் அதில். T, F இரண்டு கணங்களிலும் உள்ள உறுப்புகள் இருக்கும்.

$$a \in K; \quad b \in K; \quad c \in K; \quad e \in K;$$

ஆதலால்

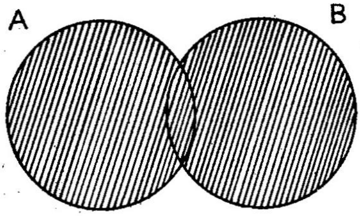
$$K = \{a, b, c, e\}$$

கணம் K, கணங்கள் T, F இவற்றின் **சேர்ப்புக் கணம்.** இதனை $K = T \cup F$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$M = \{c, e, f\}$, $N = \{c, r, l\}$ எனில்,
$M \cup N = \{c, e, f, r, l\}$.

A, B இரண்டு கணங்கள் எனில், A, B இரண்டு கணங்களில் ஏதாவது ஒன்றிலாவது அல்லது இரண்டிலுமோ உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் $A \cup B$.

$A \cup B = \{ x / x \in A$ அல்லது $x \in B \}$



A U B

படம் 1-6.

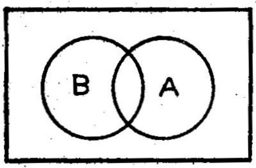
பயிற்சி 2 - 3

1. (அ) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$
$A \cup B = ?$

(ஆ) $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Y = \{3, 6, 9, 12\}$
$X \cup Y = ?$

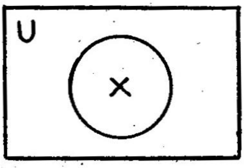
(இ) $A \subset B$ எனில் $A \cup B$ என்ன?

2. வென் படத்தில் நிழலிட்டுக் காட்டுக.



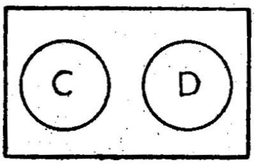
A U B

படம் 1-7.



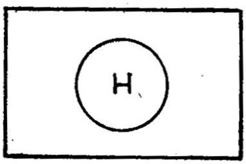
X U U

படம் 1-8.



C U D

படம் 1-9.



H U H

படம் 1-10

விடைகள்

1. (அ) $\{a, b, c, d, f, h\}$
   (ஆ) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$
   (இ) B

2 - 4 கணம் - பண்புகள்

மாற்றுப் பண்பு

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 6\}$

$A \cup B$, $B \cup A$ இவற்றினைக் காண்க.

$A \cap B$, $B \cap A$ இவற்றினைக் காண்க.

$A \cup B$, $B \cup A$ இவற்றின் தன்மை என்ன ?

$A \cap B$, $B \cap A$ இவற்றின் தன்மை என்ன ?

மேலும் சில கணங்களை எடுத்துக் கொள்க. சோதனையைத் தொடர்க. இவற்றிலிருந்து என்ன யூகிக்கலாம் ?

> சேர்ப்பு, வெட்டு இவற்றைப் பொருத்து, கணங்கள் மாற்றுப் பண்பினைக் கொண்டுள்ளன. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e, f\}$

$C = \{a, e, g, h\}$ எனில்

$B \cup C$; $A \cap (B \cup C)$ இவற்றைக் காண்க.

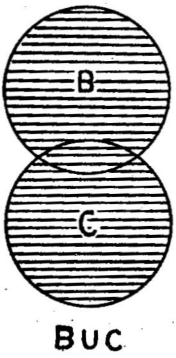
$A \cap B$, $A \cap C$ இவற்றினையும் கணக்கிடுக.

$A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ இவற்றிற்கிடையே என்ன ஒற்றுமையைக் காண்கிறாய் ?

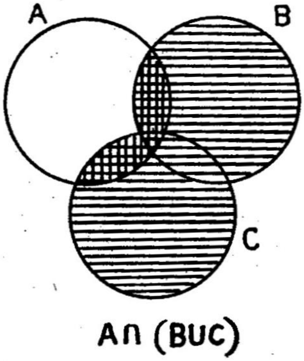
இவற்றினின்று

> $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்று அறியலாம். இப்பண்பு பங்கீட்டுப் பண்பு எனப்படும்.

மேற்குறித்த எடுத்துக்காட்டு $A \cap (B \cup C)$ என்பதை வென் படம் மூலமாக விளக்கினால்



படம் 1-11.



படம் 1-12.

இருகோடிட்டு நிழலிட்ட பகுதி $A \cap (B \cup C)$ என்பதைக் குறிக்கும்.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 6\}$

$C = \{2, 5, 6, 7\}$

$A \cap B$, $A \cap C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$(A \cap B) \cap (A \cap C)$ என்ன ?

$(A \cap B \cap C)$ ஐக் காண்க.

என்ன அறிகிறோம் ?

$$(A \cap B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

மேற்குறித்த எடுத்துக்காட்டில் $(B \cap C)$ என்ன ?

$A \cup (B \cap C)$ என்ன ?

$(A \cup B)$, $(A \cup C)$ இவற்றினைக் காண்க.

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்ன ?

$A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ இவற்றிற்கிடையே என்ன உறவைக் காண்கிறாய் ?

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

பயிற்சி 2 - 4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணச்சேர்க்கையைக் காண்க.

   (அ) { x/x ஓர் இரட்டை எண் } $\cup$ { x/x ஓர் ஒற்றை எண் }

   (ஆ) { x/x இரண்டின் மடங்குகள் } $\cup$ { x/x-ன் மூன்றின் மடங்குகள்}

   (இ) { x/x ஒரு குறை முழு } $\cup$ { x/x ஒரு மிகை முழு }

2. $A \subset B$ எனில் $B \cup A = B$ என்று காட்டுக.

3. $A \subset B$ எனில் $B \cap A = A$ என்று காட்டுக.

4. N இயல் எண்களின் கணம், A ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம், B இரட்டை இயல் எண்களின் கணம், C, 3-ன் மடங்குகளின் கணம் எனில்,

   (அ) $A \cap B$ (ஆ) $A \cap C$ (இ) $B \cap C$ (ஈ) $N \cap A$
   (உ) $N \cap B$ (ஊ) $A \cap B \cap \phi$ இவற்றைக் காண்க.

விடைகள்

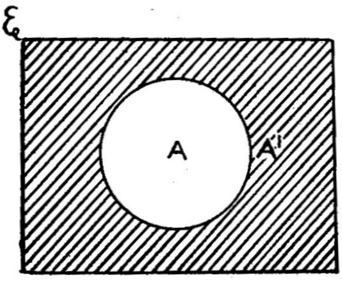
1. (அ) முழு எண்களின் கணம்

   (ஆ) { 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, ... }

   (இ) { ... -3, -2, -1, 1, 2, 3, .. }

4. (அ) ϕ (ஆ) { 3, 9, 15, 21. ...}
   (இ) { 6, 12, 18, ... } (ஈ) A
   (உ) B (ஊ) ϕ

2 - 5 கண நிரப்பி



E என்பது அனைத்துக் கணம்; A என்பது அதன் உட் கணம். A-இல் இல்லாத E-ன் மற்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் A-இன் கண நிரப்பி எனப்படும். அதை A' என்று குறிப்பிடுவோம்.

படம் 1-13.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ எனில்

$A' = \{2, 4, 6\}$

(2) $E = \{x \mid x$ ஆங்கில எழுத்து $\}$

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$A' = \{x \mid x$ ஆங்கில மெய்யெழுத்து $\}$

கொடுக்கப்பட்ட அனைத்துக் கணம் E எனில்

$A' = \{x \mid x \in E$, மேலும் $x \notin A\}$

$E = A$ எனில் $A' = E' = \phi$

பயிற்சி 2 - 5

1. N இயல் எண்களின் கணம், A ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம், B இரட்டை இயல் எண்களின் கணம், C மூன்றின் மடங்குகளின் கணம் எனில்

   (அ) C' (ஆ) A' (இ) B' இவற்றைக் காண்க.

2. வென்படம் வரைக.

   (அ) $(A \cup B)'$ (ஆ) $A' \cap B'$ (இ) $(A \cap B)'$ (ஈ) $A' \cup B'$

விடைகள்

1. (அ) $C' = \{x/x \in N, x \notin C\}$

   (ஆ) $A' = \{x \mid x \in N, x \notin A\}$

   (இ) $B' = \{x \mid x \in N, x \notin B\}$

2 - 6 வென்படத்தின் மூலம் தீர்வுகள்

ஆதி எண்

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ எனில் இக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4. இக்கணத்தின் ஆதி எண் 4. இதனை $n(A) = 4$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $A \ \{x/x$ ஓர் இரட்டை எண், மேலும் $x < 9\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$n(A) = 4$

(2) $A = \{1, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; $A \cap B = \{\ \}$

$n(A \cup B$ என்ன ? இதற்கும் $n(A)$, $n(B)$ -க்கும் என்ன சம்பந்தம் ?

(3) $A = \{1, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 4, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$; $A \cap B = \{4\}$

$n(A \cup B)$ என்ன ?

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ அல்லவா ?

வென்படத்தின் மூலம் தீர்வு

எடுத்துக்காட்டு :

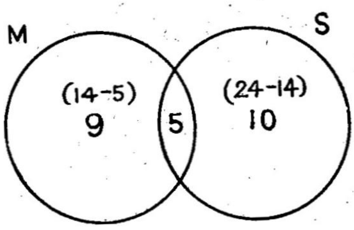
ஒரு பள்ளியில் கணக்கு, அறிவியல் பாடங்கள் கற்றுத் தரும் ஆசிரியர்கள் 24 பேர். இதில் கணக்கு கற்றுக் கொடுக்கும் ஆசிரியர்கள் 14 பேர். கணக்கும், அறிவியலும் கற்றுக் கொடுப்பவர் 5 பேர் எனில், அறிவியல் கற்றுக் கொடுப்பவர் எத்தனை பேர் ?

M = கணக்கு கற்றுக்கொடுக்கும் ஆசிரியர்களின் கணம்.

S = அறிவியல் கற்றுக்கொடுக்கும் ஆசிரியர்களின் கணம்.

$M \cap S$ = கணக்கும், அறிவியலும் கற்றுக்கொடுக்கும் ஆசிரியர்களின் கணம்.

இவற்றை வென்படத்தில் குறித்தால்



படம் 1-14.

$$n(M) = 14,\ n(M \cap S) = 5,\ n(M \cup S) = 24$$

$$n(S) = 10 + 5 = 15$$

பயிற்சி 2 - 6

1. ஒரு பள்ளியில் 21 மாணவர்கள் தச்சு வேலையிலும், 17 மாணவர்கள் நெசவு வேலையிலும் ஈடுபட்டுள்ளனர். இவர்களில் 12 பேர் தச்சு, நெசவு இரு வேலைகளையும் கற்றுக் கொள்கின்றனர். மொத்தம் தச்சு, நெசவு வேலை கற்றுக்கொள்பவர்கள் எத்தனை பேர்?

2. ஒரு பள்ளி மாணவர்களில் 25 மாணவர்கள் கால்பந்து விளையாடுவார்கள். 15 பேர் ஹாக்கி விளையாடு வார்கள். 7 மாணவர்கள் இரண்டும் விளையாடுவார் கள். கால்பந்து மட்டும் விளையாடுபவர்கள் எத்தனை பேர்? ஹாக்கி மட்டும் விளையாடுபவர்கள் எத்தனை பேர்? மொத்தம் இரண்டும் விளையாடுபவர்கள் எத்தனை பேர்?

3. ஒரு தெருவில் 40 வீடுகள். ஒரு செய்தித்தாள் விற்பனையாளர் 27 தினமணிப் பிரதிகளும், 15 தினத் தந்திப் பிரதிகளும் போடுகிறார். எந்த வீட்டிலும் இரண்டு செய்தித் தாள்களுக்குமேல் வாங்குவதில்லை. இரண்டு செய்தித் தாள்களும் வாங்கக்கூடிய குறைந்த எண்ணிக்கை, அதிகபட்ச எண்ணிக்கை வீடுகள் எத்தனை?

விடைகள்

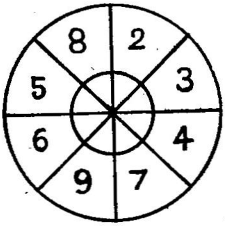
1. 26   2. 18; 8; 33   3. 2; 15.

3 - 1 நிகழ்தகவு - சோதனை - கூறுவெளி

ஒரு நல்ல நாணயத்தைச் சுண்டினால் தலை அல்லது பூ விழும். (இரண்டில் ஏதாவது ஒன்று விழும்.)

ஒரு பகடையில் 1 முதல் 6 வரையுள்ள எண்கள் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. பகடையை உருட்ட எவ்வெண்கள் கிடைக்கப் பெறலாம்? 1, 2, 3, 4, 5, 6 இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லவோ?

ஒரு விளையாட்டுக் குறிப் பலகை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அம்பை எய்தால் அம்பு எவ்வெண்களில் குத்தலாம்?



படம் 1-15.

நாணயம் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல், அம்பு எய்தல், சீட்டுக் குலுக்கல் போன்றவை சோதனைகள் எனப்படும்.

பூ விழுதல், பகடையில் 5 காணப்படல், அம்பு 8-ன்மீது பாய்தல் போன்றவை விளைவுகள் அல்லது நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

ஒரு சோதனையில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகள் கணத்தின் சேர்ப்புக்கணம் அச்சோதனையின் கூறுவெளி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) நாணயம் சுண்டுவதில் கூறுவெளி $= \{ H, T \}$

பகடை உருட்டுவதில் கூறுவெளி $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

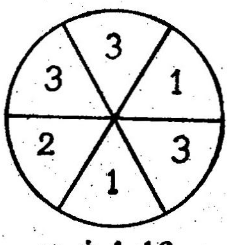
அம்பு எய்தலில் கூறுவெளி $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

(2) 3 மஞ்சள், 2 பச்சைப் பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து பந்து ஒன்று எடுத்தல் என்ற சோதனையில் கூறுவெளி

$$= \{ y_1, y_2, y_3, G_1, G_2 \}$$

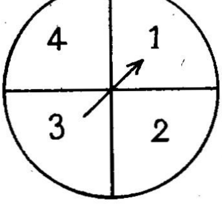
(3) படத்தில் காட்டப்பட்ட அட்டைச் சுழற்சிச் சோதனையில் கூறுவெளி

$$S = \{ 1_1, 1_2, 2, 3_1, 3_2, 3_3 \}$$



படம் 1-16.

பயிற்சி 3 - 1

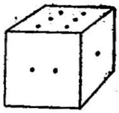


படம் 1-17.

கூறுவெளிகள் தருக.

1. படத்தில் காட்டியவாறு உள்ள அட்டையில் முள்ளைச் சுழற்றுவதால் ஏற்படும் விளைவுகள்.

2\. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோன்று ஒரு தாயக் கட்டையை உருட்டுவதால் சோதனையின் கூறுவெளி.



படம் 1-18.

விடைகள்

1\. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3 - 2 நிகழ்தகவு

நாணயம் சுண்டும் சோதனையில் கூறுவெளி $\{H, T\}$ எனக் கண்டோம். இதில் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உண்டு. ஒரு நிகழ்ச்சி தலை விழுதல்; அதன் கணம் $\{H\}$. மற்றொரு நிகழ்ச்சி பூ விழுதல்; அதன் கணம் $\{T\}$.

நாணயம் நல்ல நாணயமாயிருந்தால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளில் எது ஏற்படவும் சமவாய்ப்பு உண்டு. இவ்வாய்ப்பு ஒரு சோதனையில் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எனப்படும். இங்கு தலை விழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$; பூ விழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$. அதுபோலவே பகடை உருட்டுகையில் 1 முதல் 6 வரையுள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் கிடைக்கப்பெற சமவாய்ப்பு உண்டு. 3 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$. கூறுவெளி S என்றும், நிகழ்ச்சிக் கணம் E என்றும், அந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ என்றும் குறிப்பிட்டால்,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு பையில் 6 சிவப்புக் கோலிகளும் 4 நீலக் கோலிகளும் இருக்கின்றன. அவற்றிலிருந்து ஒரு கோலி பொறுக்கி எடுத்தால் அது (அ) சிவப்புக் கோலியாக (ஆ) நீலக் கோலியாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

சோதனையின் கூறுவெளி

$$S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

[$R_1, R_2, \ldots R_6$ என்பவை 6 சிவப்புக் கோலிகளையும், $B_1, B_2, \ldots B_4$ என்பவை 4 நீலக் கோலிகளையும் குறிக்கின்றன.]

நிகழ்ச்சி 1 : சிவப்புக் கோலி எடுக்கப்படல் :

$$E_1 = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$$

$$n(E_1) = 6$$

அதன் நிகழ்தகவு $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \cdot 6$

நிகழ்ச்சி 2 : நீலக்கோலி எடுக்கப்படல் :

$$E_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

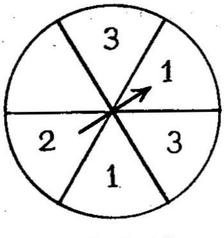
$$n(E_2) = 4$$

அதன் நிகழ்தகவு $= \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \cdot 4$

பயிற்சி 3-2

1. ஒரு கன சதுரக் கட்டையின் பக்கங்களில் A, B, C, D, E, F என்ற எழுத்துகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதை உருட்டுவதால் கிடைக்கும் சோதனையின் கூறுவெளி என்ன? ஒவ்வோர் எழுத்தும் கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன?

2. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள அட்டையில் முள் சுழற்றப்படுகிறது. சோதனையின் கூறுவெளி என்ன?



படம் 1-19.

(அ) '1' கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) '3' கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

(இ) '2' கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

3. ஒரு பையில் 4 சிவப்பு பலூன்களும் 5 கறுப்பு பலூன்களும் உள்ளன. ஒரு நேரத்தில் ஒரு பலூன் எடுத்தால்

(அ) 1 சிவப்பு பலூன் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) 1 கறுப்பு பலூன் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

விடைகள்

1. $\frac{1}{6}$ 2. (அ) $\frac{1}{3}$ (ஆ) $\frac{1}{2}$ (இ) $\frac{1}{6}$

3. (அ) $\frac{4}{9}$ (ஆ) $\frac{5}{9}$

3 - 3 நிகழ்தகவு—செயல்முறை நிகழ்தகவு

இதுகாறும் நாம் கணித முறை நிகழ் தகவினைக் கண்டோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினால் தலை விழும் நிகழ்ச்சியும், பூ விழும் நிகழ்ச்சியும் நடைபெற சம வாய்ப்புகள் என்றும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் $\frac{1}{2}$ என்றும் அறிந்தோம். அதனால், ஒரு நிகழ்ச்சியில் தலை விழுந்தால் அடுத்த முறை பூ விழும் என்று சொல்ல முடியுமா? மீண்டும் தலையே விழலாம்.

ஆனால் நாணயம் சுண்டுதல் சோதனையைப் பல முறை செய்தோமென்றால், மொத்தம் தலை விழுகின்ற நிகழ்ச்சிகளும், பூ விழுகின்ற நிகழ்ச்சிகளும் ஏறக்குறைய சமமாக இருக்கும் எனக் காணலாம். 1000 முறை சுண்ட 484 முறை தலையும், 516 முறை பூவும் விழுந்தால்

தலை விழும் நிகழ்ச்சியின்

$$\text{செயல்முறை நிகழ்தகவு} = \frac{484}{1000} \text{ என்றும்}$$

பூ விழும் நிகழ்ச்சியின்

$$\text{செயல்முறை நிகழ்தகவு} = \frac{516}{1000} \text{ என்றும்}$$

சொல்வோம்.

மாணவர்கள் ஒவ்வொருவரும் ஒரு நாணயத்தை எடுத்துக் கொண்டு ஆளுக்குப் பத்து முறை சுண்டி, நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக. எல்லா மாணவரது சோதனை யையும் சேர்த்து ஒரு சோதனையாகக் கொண்டு செயல் முறை நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

அடுத்து ஒரு பையில் 5 மஞ்சள், 3 சிவப்பு, 2 வெள்ளை கோலிகளை எடுத்துக்கொள்க. 1கோலி எடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறிக்க. சோதனையை அடுத்தடுத்து மாணவர்கள் தொடரட்டும். 1 சுற்று, 2 சுற்று, ... 10 சுற்று இந்தச் சோதனையைத் தொடர்க. ஒவ்வொரு சுற்றிற்கும் அதுவரை செய்த சோதனைகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் செயல்முறை நிகழ்தகவுகள் காண்க.

4. சோடி - வரிசைச் சோடி

நண்பர்கள் இருவர் சிற்றுண்டிச் சாலைக்குச் சென்றனர். லட்டு, ஜாங்கிரி, வடை, போண்டா இருந்தன. ஒவ்வொருவரும் ஏதாவது ஓர் இனிப்பும் ஒரு காரமும் சாப்பிட நினைத்தனர். அவர்கள் சாப்பிடக்கூடியது என்ன ?. இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு சோடி. ஒருவர் (லட்டு, வடை) எடுத்துக் கொண்டார். முதல் உறுப்பு இனிப்பையும் இரண்டாவது உறுப்பு காரத்தையும் குறிக்கும்.

வகுப்பறையில் இராமன் இருக்கையைக் குறிக்கும் பொழுது இரண்டாவது வரிசையில் வலமிருந்து மூன்றாவது பையன் என்று அவனிருக்கும் இடைத்தைக் குறித்துச் சொல்லலாம். வரிசையையும் இடத்தையும் குறித்து ஒரு சோடியாகக் குறிப்பிட்டால் (2, 3) என்று எழுதலாம். இந்தச் சோடியில் முதல் உறுப்பு வரிசையையும், இரண்டாவது உறுப்பு வரிசையில் வலமிருந்து அவன் இடத்தையும் குறிக்கும். இது ஒரு வரிசைச் சோடி எனப் படும். (3, 2) என்றால் மூன்றாவது வரிசையில் வலமிருந்து இரண்டாவது பையனைக் குறிக்கும். இது இராமனைக் குறிக் காது. வேறு ஒரு பையனைக் குறிக்கும்.

பின்னம்—ஒரு வரிசைச் சோடி

$\frac{2}{3}$ என்பது ஒரு பின்னம். இதில் 2 தொகுதியையும் 3 பகுதியையும் குறிக்கும். இது ஒரு வரிசையில் குறிக்கப்படுகிறது. இதை (2, 3) என்று சோடியாகக் குறிப்பிட்டு 2 தொகுதியையும் 3 பகுதியையும் குறிக்கும் வரிசைச் சோடியாக எழுதலாம். (3, 2) என்ற வரிசைச்சோடி இதே பின்னத்தைக் குறிக்குமா ? அல்லது வேறு பின்னமா ? ஏன் ? எல்லாப் பின்னங்களையும் இவ்வாறே வரிசைச் சோடியாகக் குறிப்பிடலாம்.

இவ்வரிசைச் சோடியில் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைக் காண்க.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

ஆதலால் $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ஆதலால்

$(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$

[குறிப்பு : வரிசைச் சோடியின் குறியீடு சாதாரணமாக ( ) ஆகும்.]

முழுக்கள் வரிசைச் சோடிகள்

இரண்டு முழு எண்களின் வித்தியாசமாக ஒரு முழுவைக் கூறமுடியும்.

$$4 \equiv 6 - 2$$
$$-4 \equiv 2 - 6$$

எனவே (6, 2) என்ற வரிசைச் சோடி 4 என்ற முழுவையும் (2, 6) என்ற வரிசைச் சோடி -4 என்ற முழுவையும் குறிக்கும். முதல் உறுப்பிலிருந்து இரண்டாம் உறுப்பைக் கழிக்கின்றோம். ஒரே முழுவை பல வேறு முழு எண் சோடிகளின்மூலம் கூறலாம்.

$$4 \equiv 6 - 2 \equiv 8 - 4 = 10 - 6 \equiv 12 - 8 \equiv 5 - 1$$

என்றால் (6, 2), (8, 4), (10, 6), (12, 8), (5, 1) என்ற வரிசைச் சோடிகள் 4 என்ற முழுவைக் குறிக்கின்றன.

முழுக்கள் வரிசைச் சோடியில்,

கூட்டல் விதி :

$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$

பெருக்கல் விதி :

$(a, b)\ (c, d) = (ac + bd,\ ad + bc)$

இவற்றைச் சரிபார்க்க.

எடுத்துக்காட்டு :

$$-4 \equiv (2, 6)$$
$$-3 \equiv (1, 4)$$
$$(-4) + (-3) \equiv (2 + 1,\ 6 + 4) = (3,\ 10) \equiv -7$$
$$(-4) \times (-3) = (2 + 24,\ 8 + 6) = (26,\ 14) \equiv 12$$

மேலும் சில முழுக்களை எடுத்துக் கொண்டு சரிபார்க்க.

கார்டீசியன் பெருக்கல்

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$

இவ்விரண்டு கணங்களின் உறுப்புகளைக் கொண்ட வரிசைச் சோடிகளை அமைப்போம். கணம் A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் கணம் B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் வரிசைச் சோடிகள் $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$ ஆகும். இந்த வரிசைச் சோடிகளின் கணம் A, B-ன் கார்டீசியன் பெருக்கல் பலன் எனப்படும்.

A, B இரண்டு கணங்களில் A-லிருந்து முதல் உறுப்பும் B-லிருந்து இரண்டாவது உறுப்பும் கொண்ட எல்லா வரிசைச் சோடிகளின் கணம் A, B-ன் கார்டீசின் பெருக்கற்பலன் எனப் படும். இதை $A \times B$ என்று எழுதுவோம் ; A குறுக்கு B என்று படிக்கவேண்டும்.

$A \times B$ பெருக்குக் கணம் எனப்படும்.

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

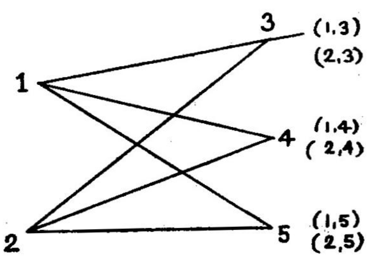
கவனிக்க : $A \times B$ ஒரு கணம். அதன் உறுப்புகள் வரிசைச் சோடிகளே.

இதை கண அமைப்புக் குறியீட்டு முறையில் எழுதினால்,

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A ; Y \in B\}$$

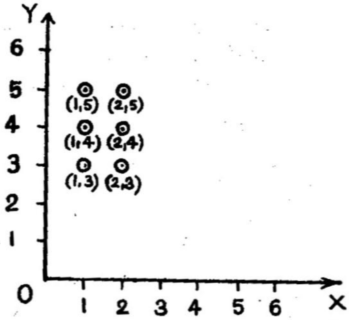
செடிப்படத்திலும் வரைபடத்திலும் மேற்குறித்த கார்டீசியன் பெருக்கற் பலனைப் படங்கள் 1-20, 1-21-ல் காட்டியவாறு குறிப்பிடலாம்.

செடிப்படம் :



படம் 1-20.

வரைபடம்



படம் 1-21.

பயிற்சி 4

1. $A = \{m, n\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{r, s, t\}$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (அ) $A \times B$ (ஆ) $A \times C$ (இ) $C \times B$ (ஈ) $n(A \times B)$
   (உ) $n(B \times C)$

2. $A \times C = C \times A$ மெய்யான கூற்றா ?

3. $A = \{1, 2, 3\}$. $A \times A$-ஐக் காண்க.

   $A \times A$-ன் வரைபடம் வரைக.

விடைகள்

1. (அ) $\{(m, x), (m, y), (n, x), (n, y)\}$

   (ஆ) $\{(m, r), (m, s), (m, t), (n, r), (n, s), (n, t)\}$

   (இ) $\{(r, x), (r, y), (s, x), (s, y), (t, x), (t, y)\}$

   (ஈ) 4 (உ) 6 2. இல்லை

3. $(\,(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\,\}$

5-1 மதிப்பகம் - துணை மதிப்பகம் - வீச்சகம்

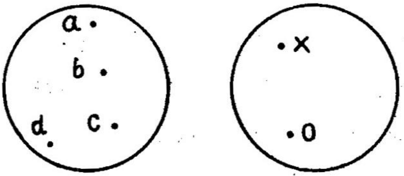
ஒரு பள்ளியில் ஒன்பதாவது வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்கள் சிலரின் வருகைப் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெயர்	தி	செ	பு	வி	வெ
a	×	0	×	×	×
b	0	0	×	×	×
c	×	×	×	0	×
d	×	×	0	×	×

மாணவர்களின் கணம் = { *a*, *b*, *c*, *d* }

குறியீடுகளின் கணம் = { ×, 0 }

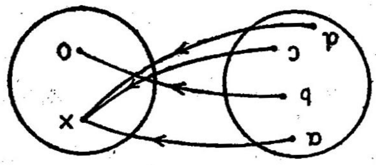
மாணவர்களின் கணத்தையும் குறியீடுகளின் கணத்தையும் படத்தில் குறிப்போம்.



படம் 1-22.

திங்கட்கிழமை *a*, *c*, *d* மாணவர்களின் குறியீடு ×. *b* இன் குறியீடு 0.

இதை படத்தில் எப்படிக் குறிக்கலாம்?



படம் 1-23

மற்ற நாட்களுக்கும் இதே மாதிரியான படம் வரையலாம் அல்லவா?

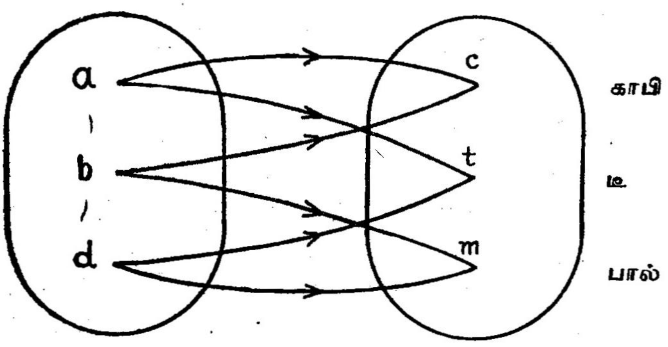
படத்தில் குறிப்பிட்டுள்ள தகவலை வரிசைச் சோடிகளாகக் குறிப்பிடலாம். ஒவ்வொரு மாணவனையும் அவனுடைய குறியீட்டையும் இணைத்துச் சொல்லலாம்.

$(a, x), (b, 0), (c, x), (d, x).$

ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் முதல் உறுப்பு மாணவனை யும் இரண்டாவது உறுப்பு அவனுடைய வருகைக் குறியீட்டையும் குறிக்கும். ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் முதல் உறுப்புக்கும் இரண்டாவது உறுப்புக்கும் ஒரு தொடர்பு இருப்பதைப் பார்க்கி றோம். இவ்வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

$\{ (a, x), (b, 0), (c, x), (d, x) \}$

நீயும் உன் நண்பர்கள் இருவரும் ஒரு நாளில் அருந்திய பானங்களை ஒரு படத்தில் குறிப்பிடுக.



படம் 1-24.

இதை வரிசைச் சோடிகளின் கணமாகக் குறிப்பிட்டால்

$\{ (a. c), (a, t), (b, c), (b, m), (d, t), (d, m) \}$

என்று எழுதுவோம்.

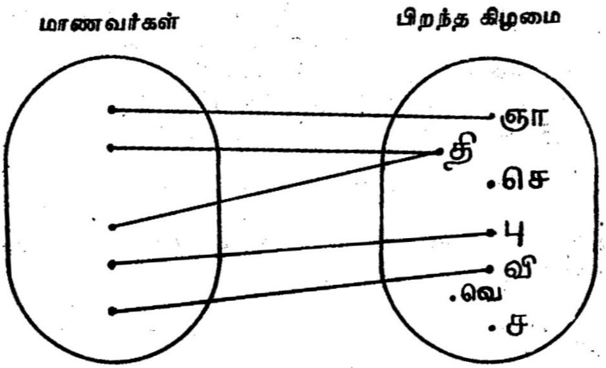
ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் முதல் உறுப்பு பானம் அருந்தியவர்களையும் இரண்டாவது உறுப்பு அவர்கள் அருந்திய பானத்தையும் குறிக்கும்.

இந்தக் கணத்திலுள்ள வரிசைச் சோடிகளின் முதல் உறுப்புகளின் கணம் அதன் மதிப்பகம் எனப்படும்.

{ a, b, d } என்பது மதிப்பகம்.

வரிசைச் சோடிகளின் இரண்டாவது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் அதன் வீச்சகம் எனப்படும்.

{ c, t, m } என்பது வீச்சகம்.



படம் 1-25.

இப்படம் எதைக் காட்டுகிறது ?

ஒரே கிழமையில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்டவர்கள் பிறந்திருக்கலாம். ஒரு கிழமையில் எம்மாணவனும் பிறந்திராமலும் இருக்கலாம். இதில் மதிப்பகம் மாணவர்கள் கணம்.

வீச்சு = { ஞா, தி, பு, வி}

துணை மதிப்பகம் = { ஞா, தி, செ, பு, வி, வெ, ச }

துணை மதிப்பகத்தின் உட்கணம் வீச்சகம் ஆகும்.

மதிப்பகம் ⟶ ஒரு வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தில் முதல் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்.

வீச்சகம் ⟶ ஒரு வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தில் இரண்டாவது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்.

துணை மதிப்பகம் ⟶ வீச்சகத்தை உட்கணமாகக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு கணம்.

பயிற்சி 5-1

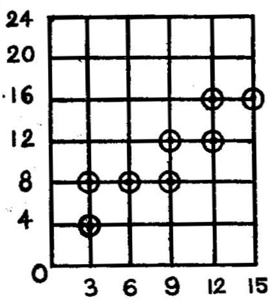
1. மதிப்பகம், வீச்சகம் இவற்றை எழுதுக.

   (அ) $\{(-3, 1), (-1, 1), (1, 0), (3, 0)\}$

   (ஆ) $\{(1, 1), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$

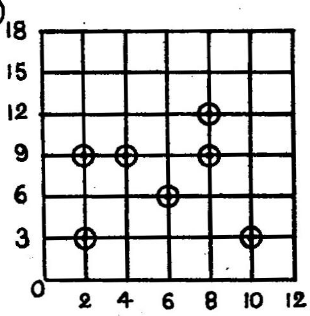
2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடங்களில் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதி, மதிப்பகம், வீச்சகம் இவற்றைக் கூறுக.

(அ)



படம் 1-26.

(ஆ)



படம் 1-27.

3. மதிப்பகம், வீச்சகம் இவற்றை எழுதுக.

   (அ) $\left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) / \, 0 < x < 6; x \in Z \right\}$

   (ஆ) $\{(1, 1), (2, 4), (\sqrt{3}, 3), (3, 9)\}$

விடைகள்

1. (அ) $\{-3, -1, 1, 3\}$, $\{1, 0\}$

   (ஆ) $\{1, -1, 0, 2\}$, $\{1, 0\}$

2. (அ) $\{(3, 4), (3, 8), (6, 8), (9, 8), (9, 12), (12, 12), (12, 16), (15, 16)\}$

   மதிப்பகம் $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

   வீச்சகம் $\{4, 8, 12, 16\}$

(ஆ) { (2, 3), (2, 9), (4, 9), (6, 6), (8, 9), (8, 12), (10, 3) }

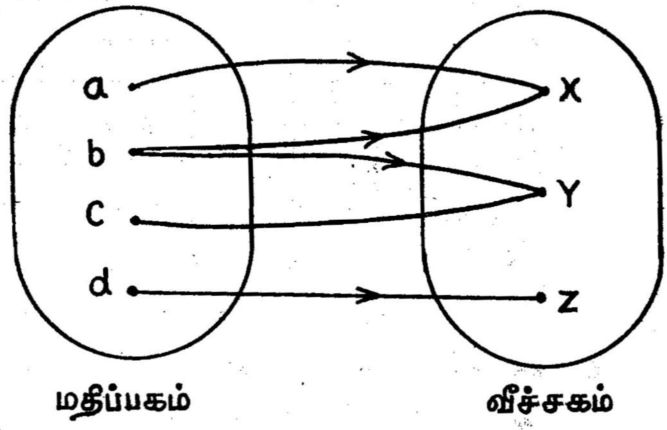
மதிப்பகம் { 2, 4, 6, 8, 10 }

வீச்சகம் { 3, 6, 9, 12 }

3. (அ) { 1, 2, 3, 4, 5 }, $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\}$

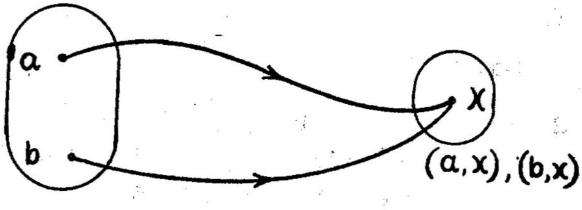
(ஆ) { 1, 2, $\sqrt{3}$, 3 }, { 1, 4, 3, 9 }

5 - 2 சார்பு



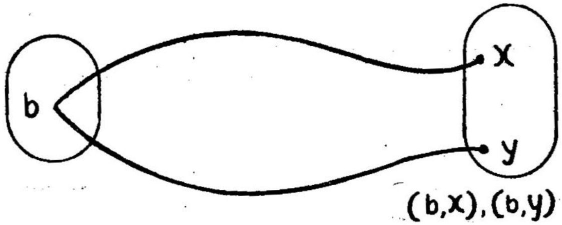
படம் 1-28.

இப்பிணைப்பில் மதிப்பகத்திலுள்ள இரு உறுப்புகள் வீச்சகத்திலுள்ள ஒரே உறுப்பிற்கு பொருத்தப்பட்டுள்ளன.

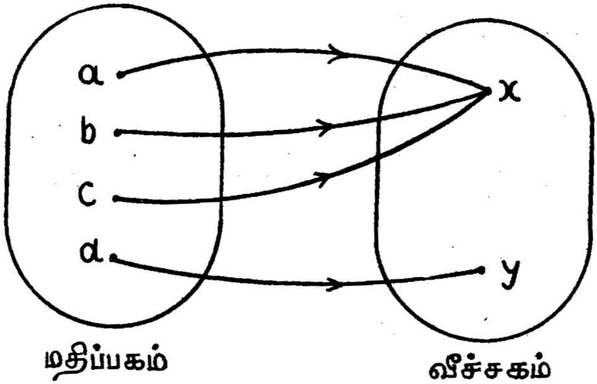


படம் 1-29.

மதிப்பகத்திலுள்ள ஓர் உறுப்பு வீச்சகத்திலுள்ள இரு உறுப்புகளுடன் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனிக்க.



படம் 1-30.



படம் 1-31.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்க. மதிப்பகத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்தும் ஓர் அம்புக் குறி மட்டும் கிளம்புவதைப் பார்க்கவும். இம்மாதிரிப் பிணைப்பை சார்பு என்கிறோம்.

{ (1, 6), (3, 8), (9, 14) }

இந்த வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தில் ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியிலும் முதல் உறுப்புடன் 5-ஐக் கூட்ட இரண்டாம் உறுப்பு கிடைக்கிறது.

{ (2, 10), (3, 15), (4, 20), (0, 0) }

இந்தக் கணத்தில் ஒவ்வொரு வரிசைச் சோடியின் முதல் உறுப்பையும் 5 ஆல் பெருக்க இரண்டாவது உறுப்பு கிடைக்கிறது.

இவ்விரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் முதல் உறுப்புகள் வெவ்வேறாக உள்ளன.

ஒரு வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தில் வரிசைச் சோடிகளின் முதல் உறுப்புகள் வெவ்வேறாக இருப்பின் அதை சார்பு என்போம்.

> வரிசைச் சோடிகளில் முதலுறுப்பு x, இரண்டாம் உறுப்பு y என்க ஒவ்வொரு x-க்கும் ஒரேயொரு y இருந்தால், இவ் வரிசைச் சோடிகளின் கணம் சார்பு ஆகும்.

பயிற்சி 5-2

1. கீழேயுள்ள வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தில் எவை சார்பு? ஏன்?

(அ) $\{(9,4), (7,2), (21,16)\}$

(ஆ) $\left\{(9, 3), (6, 2), \left(2, \frac{2}{3}\right)\right\}$

(இ) $\{(0, 0), (3, 3), (7, 7)\}$

(ஈ) $\{(5, 6), (9, 10), (9, 14)\}$

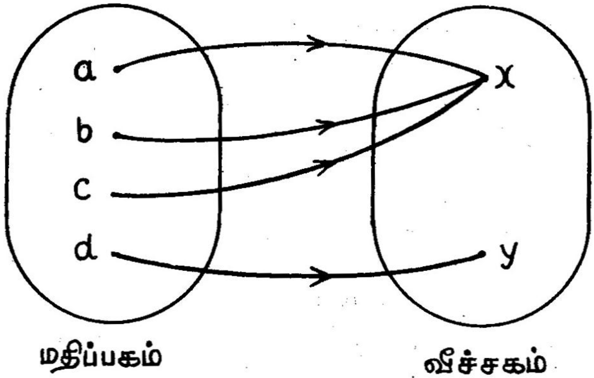
(உ) $\{(1, 3), (2, 5), (1, -1), (2, -4)$

விடைகள்

1. (அ), (ஆ), (இ) — சார்புகள்

(ஈ), (உ) — இரண்டும் சார்பு அல்ல. முதலுறுப்புகள் வெவ்வேறாக இல்லை. ஒரே முதலுறுப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசைச் சோடிகளில் உள்ளன.

5-3 சார்பின் வரைபடம்



படம் 1-32.

மதிப்பகத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்தும் ஒரே அம்புக் குறி மட்டும் கிளம்புவதைக் கவனிக்க. அதாவது மதிப்பகத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் வீச்சகத்தில் உள்ள ஒரே உறுப்பினை மட்டுமே பிம்பமாகக் கொண்டுள்ளது. மேற்குறித்த படத்தில் a-ன் பிம்பம் x.

இதை $f(a) = x$ என்று எழுதுவோம்.

$a \xrightarrow{f} x$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

$x = f(b)$; $x = f(c)$; $y = f(d)$.

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

f என்பது $3x^2 + 1$ என்ற x-ன் சார்பு எனில் $f(x) = 3x^2 + 1$ அல்லது $x \xrightarrow{f} 3x^2 + 1$ என்று எழுதுவோம்.

$x \in A$ எனில்,

$$f(1) = 3 \times 1^2 + 1 = 4$$
$$f(2) = 3 \times 2^2 + 1 = 13$$
$$f(3) = 3 \times 3^2 + 1 = 28$$
$$f(4) = 3 \times 4^2 + 1 = 49$$

இச் சார்பின் மதிப்பகம் $= \{1, 2, 3, 4\}$

வீச்சகம் $= \{4, 13, 28, 49\}$

பயிற்சி 5 - 3 (அ)

1. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $f(x) = 5y + 6$; $y \in B$ எனில், சார்பின் வீச்சகத்தைக் கூறுக.

2. $C = \{x / x$ ஓர் இரட்டை முழு எண் $\}$; $f(x) = 2x + 1$; $x \in C$ எனில், $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ என்ன ?

3. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$; $f(x) = x + 1$ எனில், வீச்சகத்தைக் காண்க.

விடைகள்

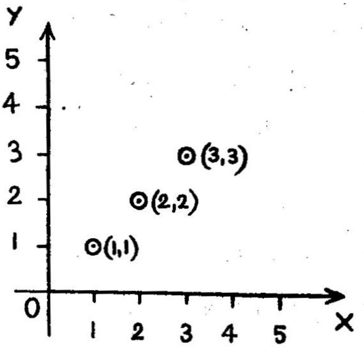
1. $\{6, 11, 16, 21, 26\}$ 2. 1, 5, 9, 13.
3. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

வரைபடம்

$C = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

இது ஒரு சார்பா ? ஏன் ?

இதன் வரைபடம்



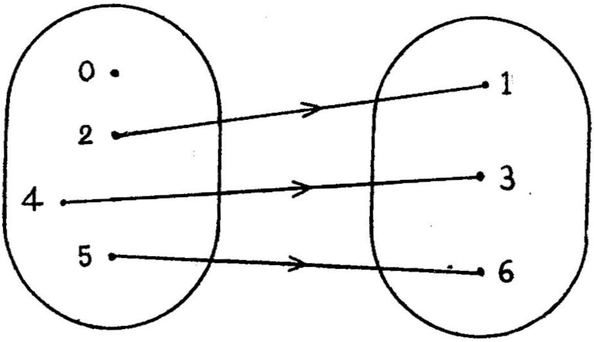
படம் 1-33.

வரைபடத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் இல்லை என்பதைக் கவனிக்க. இக் கணத்தில் ஒரே முதலுறுப்பைக் கொண்ட ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசைச் சோடிகள் இல்லை.

பயிற்சி 5 - 3 (ஆ)

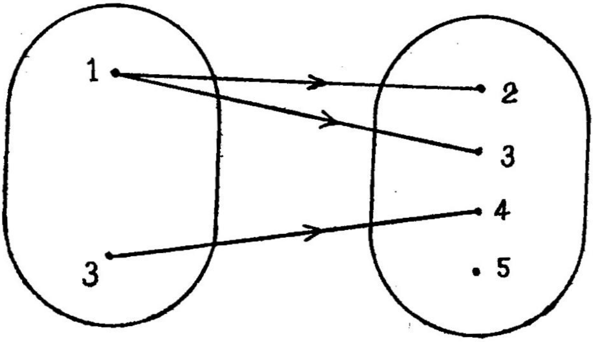
1. கீழுள்ள படங்கள் ஏன் சார்புகளைக் குறிப்பதில்லை என்பதைக் கூறுக.

(அ)



படம் 1-34.

(ஆ)



படம் 1-35.

விடைகள்

1 (அ) மதிப்பகத்தின் உறுப்பு '0', வீச்சகத்தின் எந்த உறுப்புடனும் தொடர்பு படுத்தப்படவில்லை.

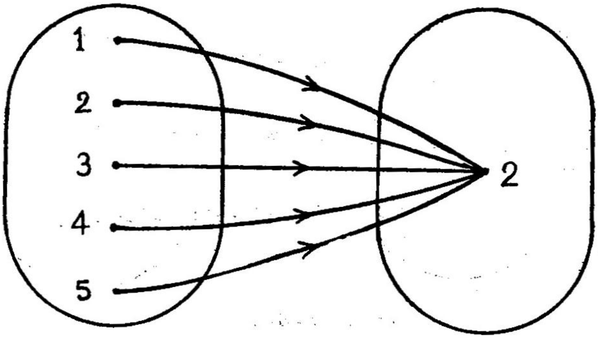
(ஆ) மதிப்பகத்தின் ஓர் உறுப்பு வீச்சகத்தில் இரண்டு உறுப்புகளுடன் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது. (1,2), (1,3).

5 - 4 மாறிலிச் சார்பு

$G = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$ என்ற சார்பில் மதிப்பகம், வீச்சகம் எவை ?

மதிப்பகம் $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. வீச்சகம் $R = \{2\}$.

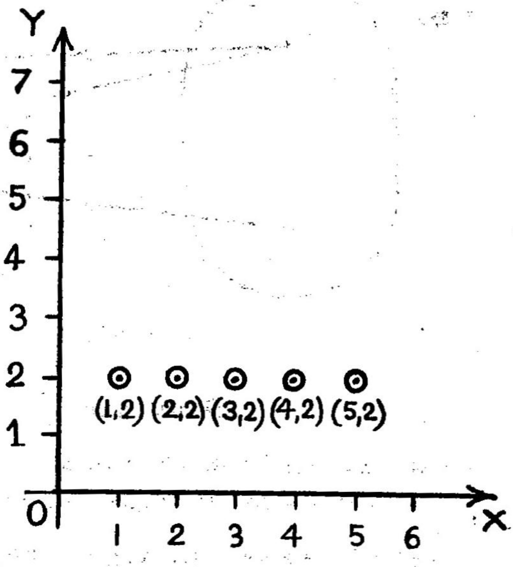
இதை அம்புக்குறிப் படத்தில் எவ்வாறு குறிப்பிடுவோம்?



படம் 1-36.

வீச்சகத்தில் ஒரே ஓர் உறுப்பு மட்டும் இருப்பதைக் கவனிக்க.

இதன் வரைபடம்



$f : x \rightarrow 2 \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

படம் 1-37.

> மதிப்பகத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் வீச்சகத்தில் ஒரே ஓர் உறுப்புடன் பொருந்தியிருக்கிறது. இம்மாதிரியான சார்புகள் மாறிலிச் சார்புகள் எனப்படும்.

குறியீட்டில் $f(x) = a$; $x \in$ மதிப்பகம் ; a என்பது குறிப்பிட்ட நிலையான உறுப்பு.

5-5 நேர்விகிதச் சார்பு

மீள்பார்வை :

x, y-க்கு இடையே உள்ள விகிதம் $x : y$ அல்லது $\frac{x}{y}$.

6-க்கும் 3-க்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 6 : 3 அல்லது $\frac{6}{3}$.

4-க்கும் 12-க்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 4 : 12 அல்லது $\frac{4}{12}$.

y	8	12	16	32	64	128	256
x	2	3	4	8	16	32	64

அட்டவணையில் x-க்கும் y-க்கும் உள்ள விகிதம் என்ன ?

$$x : y = 1 : 4$$

$$\frac{y}{x} = 4 \text{ அல்லது } y = 4x.$$

x-க்கும் y-க்கும் உள்ள விகிதம் மாறாமலிருப்பதைக் கவனிக்க.

குறிப்பு : $y = f(x)$

> இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள விகிதம் மாறாமல் இருந்தால் அது நேர் விகிதச் சார்பு ஆகும்.
>
> $$\frac{y}{x} = k \text{ அல்லது } y = kx.$$
>
> $$\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{அல்லது} \quad f(x) = kx.$$
>
> k ஒரு மாறிலி.

எடுத்துக்காட்டு :

$y = 2x$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர் விகிதச் சார்பா?

$y = 2x$

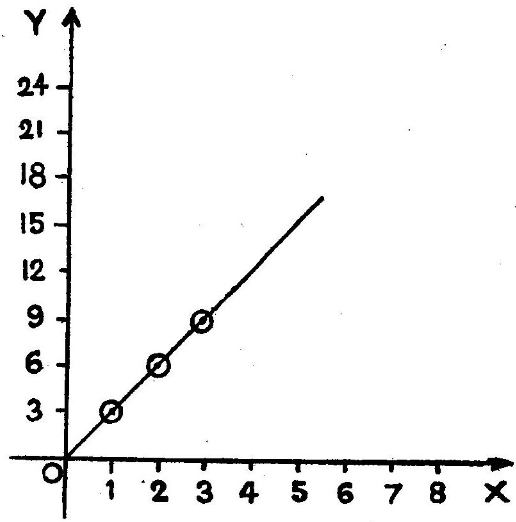
$\frac{y}{x} = 2 \quad (x \neq 0)$

$\frac{y}{x} = 2$ என்பது உண்மை. ஆதலால் $y = 2x$ என்பது நேர் விகிதச் சார்பு.

ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. 3. 2 பேனாக்களின் விலை ரூ. 6. இதைப் பட்டியல்படுத்து. பேனாக்களின் எண்ணிக்கை x எனவும், ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. y எனவும் கொள்ளவும்.

y	3	6	9	12	15	18	21	24
x	1	2	3	4	5	6	7	8

$\frac{y}{x} = 3;\ y = 3x$. இது ஒரு நேர் விகிதச் சார்பு. இதை ஒரு வரைபடத்தில் குறித்தால் இது ஒரு நேர்கோட்டில் அமைவதைக் கவனிக்க. $(x, y \in \mathbb{R})$



படம் 1-38.

பயிற்சி 5 - 5

கீழ்க் குறித்தவற்றில் எவை நேர்விகிதச் சார்பு?

1. $y = 5x$ 2. $y = 3x + 7$ 3. $m = \frac{1}{4} n^2$

4. $C = 6d$ 5. $A = 2r + 9$ 6. $\frac{C}{d^2} = 7$.

7. கீழ்க்காணும் அட்டவணைகளில் எவை நேர்விகிதச் சார்பைக் குறிக்கும்?

(அ)

y	x
1	−2
2	−4
−1	2
−2	4

(ஆ)

c	d
5	2
7	3
11	5
15	7

(இ)

A	r
15	3
10	2
20	4
25	5

8. $x = -4$ ஆக இருக்கும்பொழுது $y = 16$. $x = 8$ ஆனால் y-ன் மதிப்பென்ன?

9. $x = 27$ ஆக இருக்கும்பொழுது $y = 27$. $x = -6$ ஆனால் y-ன் மதிப்பென்ன?

10. ஒரு படகு 12 மணி நேரத்தில் 120 கிமீ தூரம் செல்லும். அதே வேகத்தில் 18 மணி நேரத்தில் அது செல்லும் தூரம் என்ன?

விடைகள்

1, 4. நேர்விகிதச் சார்பு 7. (அ), (இ) 8. −32
9. −6 10. 180 கிமீ.

5 - 6 எதிர்விகிதச் சார்பு

கீழுள்ள அட்டவணையைக் கவனிக்க.

x	−16	−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4	8	32
y	−4	−32	256	128	32	16	8	2

ஒவ்வொரு நிரலிலும் $xy = 64$ என்பதைக் கவனிக்க.

y	4	6	-1	$-\frac{1}{2}$
x	3	2	-12	-24

ஒவ்வொரு நிரலிலும் x-க்கும் y-க்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன?

$x\,y = 12$

மேலுள்ள இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் x, y-இன் பெருக்கல் பலன் மாறாமல் இருப்பதைக் கவனிக்க.

> இரண்டு மாறிகளின் பெருக்கல் பலன் மாறாததாக இருந்தால் அது எதிர்விகிதச் சார்பு ஆகும்.
>
> $x\,y = k$ அல்லது $y = \dfrac{k}{x}$; $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

எடுத்துக்காட்டு :

$y = 5x$ ஓர் எதிர்விகிதச் சார்பா எனக் காண்க.

x	y	xy
2	10	20
4	20	80
-1	-5	5

x, y-இன் பெருக்கல் பலன் வெவ்வேறாக இருப்பதால் $y = 5x$ என்பது எதிர்விகிதச் சார்பு அல்ல.

பயிற்சி 5 - 6

1. கீழுள்ள அட்டவணைகளில் எவை எதிர்விகிதச் சார்பைக் குறிப்பவை ?

(1)

x	y
3	15
5	9
15	3

(2)

c	d
-2	3
-1	-6
-3	2

(3)

x	y
1	1
3 2	2'3
4/5	5/4

2. $x = 3$ ஆக இருக்கும்பொழுது $y = 12$.
$x = 6$ ஆக இருக்கும்பொழுது y என்ன ?

3. $x = \frac{1}{9}$ ஆக இருக்கும்பொழுது $y = 81$.
$y = 3$ ஆக இருக்கும்பொழுது x என்ன ?

விடைகள்

1. (1), (3) எதிர்விகிதச் சார்பு 2. 6 3. 3

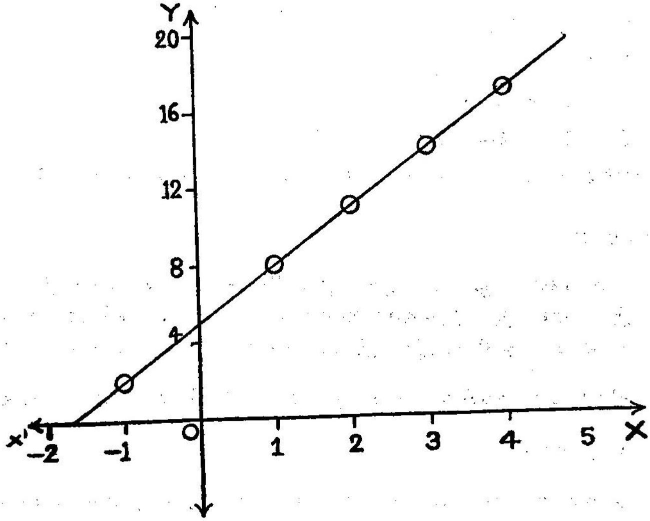
5 - 7 கோட்டுச் சார்பு

$y = 3x + 5$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்க. $(x, y \in R)$ x-இன் மதிப்பிற்குத் தகுந்தாற்போல் y-இன் மதிப்பு மாறுமா ?

$x =$	-1	1	2	3	4
$y = f(x) =$	2	8	11	14	17

x-இன் மதிப்பை 3ஆல் பெருக்கி 5ஐக் கூட்ட y, அதாவது, $f(x)$ கிடைக்கிறது.

குறியீட்டில் $f(x) = ax + b$ என எழுதுவோம். வரை படத்தில் இது ஒரு கோட்டுத்துண்டு என்பதைக் கவனிக்க. இது ஒரு செங்குத்துக்கோடு அல்லது படுக்கைக்கோடு அல்ல.



படம் 1-39.

கணித மன்றம்—மேடை 1

கணக்குகளைச் சரிபார்த்தல்

நீங்கள் போடுகின்ற கணக்குகளில் கூட்டல், பெருக்கல் போன்றவற்றைச் செய்கையில் ஏதேனும் தவறு ஏற்பட்டுள்ளதா என்பதைச் சோதிக்க இரண்டு சோதனைகள் பின்வருமாறு :

சோதனை 1:

1. எண்களின் இலக்கங்களை ஒற்றை இலக்க எண்களாகும் வரையில் தொடர்ந்து கூட்டுக.
2. கிடைத்த எண்களைக் கொண்டு எண் செயலைச் செய்க. கிடைக்கும் எண்ணை ஒற்றை இலக்க எண்ணாக மாற்றுக.
3. எண் செயல் செய்து கிடைத்த எண்ணையும் ஒற்றை இலக்க எண்ணாக மாற்றுக.
4. எண்கள் ஒரே மாதிரியாக இருப்பின் தவறு நிகழ்ந்திருக்காமல் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$371 \times 43 = 15953$

$371 = 3 + 7 + 1 = 11 ; \; 1 + 1 = 2$

$43 = 4 + 3 = 7$

$2 \times 7 = 14 ; \; 1 + 4 = 5$

$15953 = 1 + 5 + 9 + 5 + 3 = 23 ; \; 2 + 3 = 5$

சோதனை 2:

1. எண்களின் ஒற்றை இட இலக்கங்களின் கூடுதலிற்கும், இரட்டை இட இலக்கங்களின் கூடுதலிற்கும் வித்தியாசம் காண்க. ஒன்று இட இலக்கத்திலிருந்து தொடங்கவும்.
2. கிடைத்த வித்தியாசங்களுக்கு எண் செயலைச் செய்க.
3. சரிபார்க்க.
4. குறை எண்ணானால், 11-லிருந்து கழித்து எண்ணைக் கொள்க. (-3 என்பதை $11 - 3 = 8$ எனக் கொள்க.)

எடுத்துக்காட்டு 2:

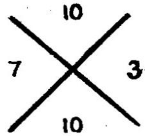
$557 \times 25 = 13925$

$557 = (7 + 5) - 5 = 7$

$25 = 5 - 2 = 3$

$7 \times 3 = 21\ ;\ 1 - 2 = -1\ ;\ 11 - 1 = 10$

$13925 = (5 + 9 + 1) - (2 + 3) = 15 - 5 = 10$

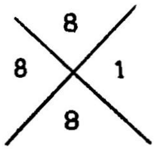


இவ்விரு சோதனைகளிலும் சரியாக இருந்தால், தவறு ஏற்படும் வாய்ப்பு குறைவு.

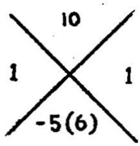
எடுத்துக்காட்டு 3 :

$485 \times 208 = 13580$

சோதனை 1 :



சோதனை 2 :



சோதனை 1 பொருந்துகிறது ; சோதனை 2 பொருந்தவில்லை. எனவே பெருக்கலில் தவறு ஏற்பட்டுள்ளது எனக் கூறலாம்.

சரிபார்க்கவும் :

1. $4605 \times 381 = 1754505$ 2. $7285 \times 437 = 3184645$

3. $647 \times 872 = 564184$ 4. $389 \times 211 = 82979$

2. எண் முறையினம் - எண்ணியல்

1. மீள் பார்வை

1-1 பத்தடிமானம்

நாம் வழக்கமாகப் பயன்படுத்தும் எண்கள் பத்தடிமானத்தில் உள்ளவை என்பது நீங்கள் அறிந்ததே. இதில் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற பத்து எண்ணுருக்களைப் பயன்படுத்தி எந்த எண்ணையும் எழுதலாம். ஒவ்வோர் எண்ணுருவுக்கும் இரண்டு மதிப்புகள் உண்டு. ஒன்று இயல் மதிப்பு, மற்றது இட மதிப்பு. ஓர் இலக்கம் எண்ணில் பெற்றுள்ள இடத்தைப் பொறுத்து அதன் இடமதிப்பு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 5 3 2 3 என்ற எண்ணில் இரண்டு மூன்றுகள் உள்ளன. இரண்டிற்கும் இயல் மதிப்பு 3. ஆனால் முதல் மூன்று ஒன்றுத்தானத்தில் உள்ளதால் அதன் மதிப்பு 3. இரண்டாவது மூன்று நூறு தானத்தில் இருப்பதால் அதன் மதிப்பு 300 (3×100). வலப்புறமிருந்து இடப்புறமாக 1, 10, 100, ... என்று பத்தின் அடுக்குகளாக இட மதிப்பு கூடிக்கொண்டே செல்லும்.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
பத்தாயிரம்	ஆயிரம்	நூறு	பத்து	ஒன்று
4	6	2	5	8

46258 என்ற எண்ணில்,

ஒன்று இடத்தில் 8 உள்ளது.	இது $8 \times 10^0 =$	8
பத்து இடத்தில் 5 உள்ளது.	இது $5\,(10^1) =$	50
நூறு இடத்தில் 2 உள்ளது.	இது $2\,(10)^2 =$	200
ஆயிரம் இடத்தில் 6 உள்ளது.	இது $6\,(10^3) =$	6000
பத்தாயிரம் இடத்தில் 4 உள்ளது.	இது $4\,(10^4) =$	40000
		46258

பயிற்சி 1 - 1

1. பின்வரும் எண்களைப் பத்தின் அடுக்குகளாக எழுதுக.
[எடுத்துக்காட்டு : $467 = (4\times 10^2)+(6\times 10)+(7\times 1)$]
(i) 384 (ii) 6840 (iii) 54698
(iv) 108439 (v) 16705

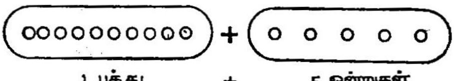
2. பத்தின் அடுக்குகளுக்கும் 10, 100, 1000, ... இவற்றில் உள்ள பூச்சியங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன ?

1-2 ஐந்தடிமானம்

பத்தடிமானத்தில் (தசம எண் முறையினத்தில்) பத்து எண்ணுருக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

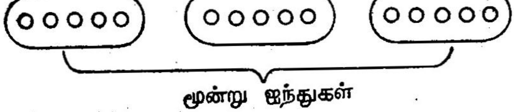
பத்தடிமானத்தில் பத்துப் பத்தாகச் சேர்க்கிறோம். பத்து ஒன்றுகள் சேர்ந்து ஒரு பத்து; பத்து பத்துகள் சேர்ந்து ஒரு நூறு; பத்து நூறுகள் சேர்ந்து ஓர் ஆயிரம் முதலியன. இதேபோல ஐந்தடிமானத்தில் ஐந்து ஐந்தாகச் சேர்க்கிறோம். இதில் 0, 1, 2, 3, 4 என்ற ஐந்து எண்ணுருக்களை மட்டுமே பயன்படுத்துவோம்.

பத்தடிமானத்தில் 15 என்ற எண்
1 பத்து + 5 ஒன்றுகள் ஆகும்.



படம் 2-1.

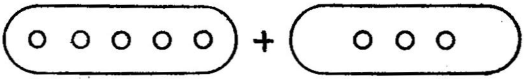
இதேபோல 15 என்பதை ஐந்தடிமானத்தில் எழுதும்பொழுது



படம் 2-2.

30_5 என்று எழுதப்படும். 5 அடிமானத்தில் ஐந்து ஐந்தாகச் சேர்க்கிறோம். இதில் வலப்புறமிருந்து இடப்புறமாக 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, ... என்று மதிப்பு கூடிக்கொண்டே போகும்.

8 என்ற எண்



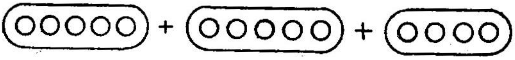
1 ஐந்து + 3 ஒன்றுகள்

படம் 2-3.

13_5 என்று ஐந்தடிமானத்தில் எழுதப்படும்.

குறிப்பு : ஐந்தடிமான எண்களைக் குறிக்க எண்களின் கீழ் '5' குறிக்கப்படும். (எ-டு.) 13_5 என்பது ஐந்தடிமான எண் ஒன்று மூன்றைக் குறிக்கும்.

14 என்ற எண்



2 ஐந்துகள் + 4 ஒன்றுகள்

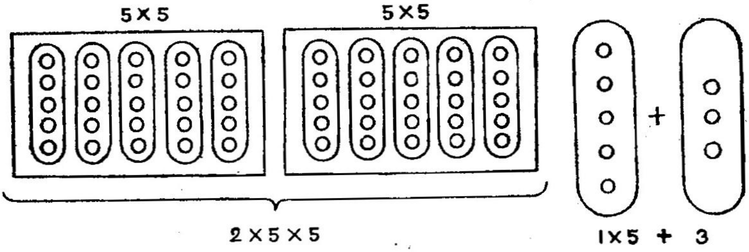
படம் 2-4.

24_5 என்று ஐந்தடிமானத்தில் எழுதப்படும்.

பத்தடி மானம்		ஐந்தடி மானம்	
1	0	1	ஒன்று
2	00	2	இரண்டு
3	000	3	மூன்று
4	0000	4	நான்கு
5	00000	10_5	ஓர் ஐந்து + 0 ஒன்றுகள்
6	00000 0	11_5	ஓர் ஐந்து + 1 ஒன்று
7	00000 00	12_5	ஓர் ஐந்து + 2 ஒன்றுகள்
8	00000 000	13_5	ஓர் ஐந்து + 3 ஒன்றுகள்
9	00000 0000	14_5	ஓர் ஐந்து + 4 ஒன்றுகள்
10	00000 00000	20_5	இரண்டு ஐந்துகள் + 0 ஒன்றுகள்

ஐந்தடிமானத்தில் 5, 6, 7, 8, 9 என்ற எண்ணுருக்களைப் பயன்படுத்துவதில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

58 என்ற எண்ணில் 11 ஐந்துகளும் 3 ஒன்றுகளும் உள்ளன.



படம் 2-5.

$$58 = 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3$$

இதை 213_5 என்று எழுதுவோம்.

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
		2	1	3

$3 \times 1 = 3$

$1 \times 5 = 5$

$2 \times 25 = 50$

58

58. இதை ஐந்தடிமானத்தில் எழுத வகுத்தல் முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 58 \\ 5 & 11 - 3 \\ & 2 - 1 \end{array} \qquad 58 = 213_5$$

412. இதை ஐந்தடிமானத்தில் எழுதுக.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 412 \\ 5 & 82 - 2 \\ 5 & 16 - 2 \\ & 3 - 1 \end{array} \qquad 412 = 3122_5$$

பயிற்சி 1 — 2

1. ஐந்தடிமானத்தில் இடமதிப்பு ஐந்தின் ———

2. பின்வரும் எண்களை ஐந்தடிமான எண்களாக எழுதுக.

   (i) 66 (ii) 143 (iii) 403 (iv) 210 (v) 300

3. பின்வரும் ஐந்தடிமான எண்களை தசம எண்களாக எழுதுக.

   (i) 13_5 (ii) 40_5 (iii) 222_5 (iv) 123_5 (v) 403_5 (vi) 2134_5

4. ஐந்து அடிமானத்தில் 4_5 என்ற எண்ணிற்கு அடுத்த எண் 10_5. இதேபோல பின்வரும் எண்களுக்கு அடுத்த ஐந்தடிமான எண்கள் எவை ?

   (i) 444_5 (ii) 404_5 (iii) 3444_5

5. பின்வரும் ஐந்தடிமான எண்களில் எவை இரட்டை எண்கள்?

   (i) 4_5 (ii) 11_5 (iii) 14_5 (iv) 23_5 (v) 22_5 (vi) 32_5 (vii) 111_5 (viii) 123_5 (ix) 100_5

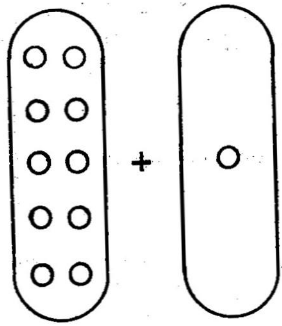
விடைகள்

1. அடுக்குகள் 2. (i) 231_5 (ii) 1033_5 (iii) 3103_5 (iv) 1320_5 (v) 2200_5 3. (i) 8 (ii) 20 (iii) 62 (iv) 38 (v) 103 (vi) 294 4. (i) 1000_5 (ii) 410_5 (iii) 4000_5 5. (i), (ii), (v), (viii) இரட்டை எண்கள்.

1 — 3 இரண்டடிமானம்

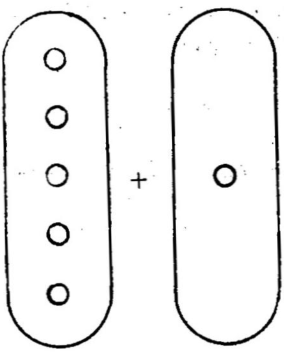
பத்தடிமானத்தில் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற பத்து எண்ணுருக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஐந்தடிமானத்தில் 0, 1, 2, 3, 4 என்ற ஐந்து எண்ணுருக்களைப் பயன்படுத்து கிறோம். இரண்டடிமானத்தில் 0, 1 என்ற இரண்டு எண்ணுருக் களை மட்டுமே பயன்படுத்துகிறோம். இரண்டடிமானத்தில் இரண்டிரண்டாகத் தொகுத்தலைப் பார்க்கலாம். பத்தடிமானத் தில் வலப்புறமிருந்து இடப்புறமாக 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... என்று மதிப்பு கூடுகிறது. ஐந்தடிமானத்தில் 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, ... என்று மதிப்பு கூடுகிறது. இதேபோல இரண்டடிமானத்திலும் 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... என்று மதிப்பு கூடுவதைக் காணலாம்.

11 என்ற தசம எண்
1 பத்து + 1 ஒன்று ஆகும்.



1 பத்து + 1 ஒன்று

படம் 2-6.



1 ஐந்து + 1 ஒன்று

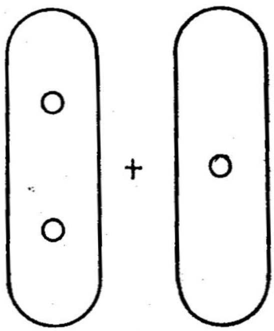
படம் 2-7.

6 என்ற தசம எண் ஐந்தடிமானத்தில் 1 ஐந்து + 1 ஒன்று ஆகும்.

இதை 11_5 என்று எழுதுவோம்.

3 என்ற தசம எண் இரண்டடிமானத்தில் 1 இரண்டு + 1 ஒன்று ஆகும்.

இதை 11_2 என்று எழுதுவோம்.



1 இரண்டு + 1 ஒன்று

படம் 2-8.

இரண்டடிமானத்தில் இடமதிப்பு இரண்டின் அடுக்குகளாக இருக்கும் என்பதைக் கவனிக்க.

2-இன் அடுக்கு மதிப்பு	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	128	64	32	16	8	4	2	1

தசம முறை	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
இரண்டடிமானம்	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

18 என்ற தசம எண்ணை இரண்டடிமானத்தில் மாற்ற மேலே குறித்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$18 = 16 + 2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1$$

ஆதலால் இந்த எண் இரண்டடிமானத்தில் 10010 என்று எழுதப்படும்.

வகுத்தல் முறையில்

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \\ \hline 2 & 9 - 0 \\ \hline 2 & 4 - 1 \\ \hline 2 & 2 - 0 \\ \hline & 1 - 0 \end{array} \qquad 18 = 10010_2$$

$1\,0\,0\,1\,0_2$ இதன் மதிப்பு தசம எண்ணுருவில்

$$\begin{array}{rcr} 0 \times 2^0 & = & 0 \\ 1 \times 2^1 & = & 2 \\ 0 \times 2^2 & = & 0 \\ 0 \times 2^3 & = & 0 \\ 1 \times 2^4 & = & 16 \\ \hline & & 18 \end{array}$$

$$10010_2 = 18$$

பயிற்சி 1 - 3

1. பின்வரும் தசம எண்களை இரண்டடிமான எண்களாக எழுதுக.
   (i) 19 (ii) 14 (iii) 27 (iv) 30

2. பின்வரும் இரண்டடிமான எண்களை தசம எண்களாக எழுதுக.
   (i) 101_2 (ii) 1101_2 (iii) 11111_2
   (iv) 100001_2 (v) 110010_2

3. பின்வரும் வரிசைகளில் அடுத்த இரண்டு எண்களை எழுதுக.
   (i) 11_2 (ii) 110_2 (iii) 1001_2 (iv) 1100_2
   (v) 1_2 (vi) 101_2 (vii) 111_2 (viii) 1010_2

விடைகள்

1. (i) 10011_2 (ii) 1110_2 (iii) 11011_2
   (iv) 11110_2

2. (i) 5 (ii) 13 (iii) 31 (iv) 33 (v) 50

3. (i) 100_2; 101_2 (ii) 111_2; 1000_2
   (iii) 1010_2; 1011_2 (iv) 1101_2; 1110_2
   (v) 10_2 ; 11_2 (vi) 110_2 ; 111_2
   (vii) 1000_2 ; 1001_2 (viii) 1011_2 ; 1100_2

2 - 1 இரண்டடிமானக் கூட்டல்

இரண்டடிமானக் கூட்டல் தசமக் கூட்டல் போன்றே செய்யலாம். அட்டவணையைப் பார்க்கவும்.

+	0	1
0	0	1
1	1	**10**

எடுத்துக்காட்டு :

(1)
$$\begin{array}{r} 1000_2 \\ 101_2 \\ \hline 1101_2 \\ \hline \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 11_2 \\ 101_2 \\ \hline 1000_2 \\ \hline \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} 111101_2 \\ 10010_2 \\ \hline 1001111_2 \\ \hline \end{array}$$

பயிற்சி 2-1

பின்வரும் இரண்டடிமான எண்களைக் கூட்டுக.

(1) $10110_2 + 1101_2$ (2) $1101_2 + 101_2$
(3) $11111_2 + 10001_2$ (4) $100101_2 + 111011_2$
(5) $1111_2 + 111_2$

விடைகள்

(1) 100011_2 (2) 10010_2 (3) 110000
(4) 1100000_2 (5) 10110_2

2-2 இரண்டடிமானப் பெருக்கல்

கூட்டல் அட்டவணையைப் போன்றே இரண்டடிமானப் பெருக்கல் அட்டவணையையும் எழுதலாம்.

×	0	1
0	0	1
1	0	1

தசம எண் பெருக்கலைப் போன்றே இரண்டடிமான எண்களின் பெருக்கலையும் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $111_2 \times 11_2$

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ 11_2 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

(2) $101_2 \times 10_2$

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ 10_2 \\ \hline 1010_2 \\ \hline \end{array}$$

பயிற்சி 2-2

பின்வரும் இரண்டடிமான எண்களைப் பெருக்குக.

(1) $101_2 \times 11_2$ (2) $110_2 \times 101_2$
(3) $1010_2 \times 110_2$ (4) $1101_2 \times 101_2$
(5) $1100_2 \times 101_2$

விடைகள்

(1) 1111_2 (2) 11110_2 (3) 111100_2
(4) 1000001_2 (5) 111100_2

3. கடிகார எண்கள்

காலை 10 மணிக்குப் பள்ளி தொடங்கி 6 மணி நேரத்திற்குப் பின் பள்ளி நேரம் முடிந்தால் அப்பொழுது மணி என்ன ? மாலை 4 மணி அல்லவா ? கடிகாரத்தில் 1 முதல் 12 வரையுள்ள மணியைக் குறிக்கும் எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருகின்றன. இவ்வாறு மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண்களைக் கொண்ட கணித முறையைக் காண்போம்.

இதுபோலவே வாரத்தின் கிழமைகளும் திரும்பத் திரும்ப வருகின்றன. ஞாயிற்றுக்கிழமை 1 என்று தொடங்கி சனிக்கிழமை 7 என்று கொண்டோமானால் இவையும் கடிகார எண் அமைப்பைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காணலாம். கடிகார எண்ணின் சுழற்சி 12 ஆக உள்ளது. வாரத்தின் கிழமைகளின் சுழற்சி 7 ஆக உள்ளது.

இதுபோல சுழற்சி வெவ்வேறு எண்களைக் கொண்டு வெவ்வேறு கடிகார எண்களை அமைக்க இயலும்.

வார எண் 7 இன் கூட்டல் வாய்பாடு அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

வார எண் 7 இன் பெருக்கல் வாய்பாடு அட்டவணை

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	1	3	5	7
3	3	6	2	5	1	4	7
4	4	1	5	2	6	3	7
5	5	3	1	6	4	2	7
6	6	5	4	3	2	1	7
7	7	7	7	7	7	7	7

கடிகார எண் 12இன் கூட்டல் அட்டவணை

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

கடிகார எண் 12இன் பெருக்கல் அட்டவணை

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

பயிற்சி 3

1. ஆகஸ்டு 2-ந் தேதி ஞாயிற்றுக்கிழமையானால் ஆகஸ்டு 18-ந் தேதி என்ன கிழமை?
2. செப்டம்பர் 1-ந் தேதி திங்கட்கிழமை. செப்டம்பர் 22-ந் தேதி என்ன கிழமை?

விடைகள்

1. செவ்வாய்க்கிழமை 2. திங்கட்கிழமை.

4 - 1 மட்டு

கடிகார எண்களைப் பற்றி முன் பகுதியில் படித்தீர்கள்.

கடிகார எண்களிலிருந்து ஒரு புது வகை எண் அமைப்பைப் பெற முயல்வோம்.

கீழே குறித்துள்ள அட்டவணையைக் கவனிக்கவும். எந்த ஒரு முழு எண்ணையும் 4 ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் மீதியைப்பற்றி என்ன கூற முடியும்?

வகுக்கப் படும் எண்	4 ஆல் வகுக்க மீதி	வகுக்கப் படும் எண்	4 ஆல் வகுக்க மீதி
0	0	6	2
1	1	7	3
2	2	8	0
3	3	9	1
4	0	10	2
5	1	11	3
		12	0

4 ஆல் எந்த ஒரு முழு எண்ணையும் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் மீதி 0, 1, 2, 3 ஆகத்தான் இருக்க இயலும் என்பதைத் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

பொதுவாகக் கூறின் எந்த ஒரு முழு எண்ணையும் இயல் எண் m ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 0, 1, 2, ... $(m-1)$ ஆகத்தான் இருக்க முடியும்.

0, 1, 2, 3 மீதியாகக் கிடைக்க 4 ஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் கணம் $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ஆகும். இது முழு எண்களின் கணம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

18, 4 ஆல் வகுக்கப்படும்பொழுது கிடைக்கும் மீதி 2. இதை $18 \equiv 2$ (மட்டு 4) என்று எழுதுகிறோம்.

$2 \equiv 2$ (மட்டு 4)
$24 \equiv 4$ (மட்டு 5)
$34 \equiv 4$ (மட்டு 5)
$24 \equiv 34$ (மட்டு 5)

மட்டு 5 இல் ஒரே மீதியைக் கொடுக்கும் எல்லா எண்களும் சர்வசமம் என்பதைக் காணலாம்.

மட்டு - கூட்டல்

(1) $37 \equiv 2$ (மட்டு 5)

$27 \equiv 2$ (மட்டு 5)

$\therefore\ 37 \equiv 27$ (மட்டு 5)

$37 + 27 \equiv (2 + 2) \equiv 4$ (மட்டு 5)

(2) $49 \equiv 4$ (மட்டு 5)

$34 \equiv 4$ (மட்டு 5)

$49 + 34 \equiv ?$ (மட்டு 5)

$4 + 4 \equiv 3$ (மட்டு 5)

$\therefore\ 49 + 34 \equiv 3$ (மட்டு 5) (விடையைச் சரிபார்க்கவும்.)

மட்டு - பெருக்கல்

(1) $14 \equiv 2$ (மட்டு 3)

$8 \equiv 2$ (மட்டு 3)

$\therefore\ 14 \equiv 8$ (மட்டு 3)

$14 \times 8 \equiv ?$ (மட்டு 3)

$2 \times 2 \equiv 1$ (மட்டு 3)

$\therefore\ 14 \times 8 \equiv 1$ (மட்டு 3)

(2) $10 \equiv 1$ (மட்டு 3)

$7 \equiv 1$ (மட்டு 3)

$\therefore\ 10 \times 7 \equiv 1$ (மட்டு 3)

$14 \times 10 \equiv 8 \times 7 \equiv 2$ (மட்டு 3) என்பதையும் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $24 \equiv 0$ (மட்டு 6)

$17 \equiv 5$ (மட்டு 6)

$24 \times 17 \equiv ?$ (மட்டு 6)

$24 \times 17 \equiv 0$ (மட்டு 6) ($0 \times 5 = 0$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(2) $2^{12} \equiv 6$ (மட்டு 10) எனக் காட்டுக.

$2^4 = 16$

$16 \equiv 6$ (மட்டு 10)

$2^{12} = 2^4 \times 2^4 \times 2^4$

$2^4 \times 2^4 \times 2^4 \equiv 6 \times 6 \times 6$ (மட்டு 10)

$6 \times 6 \times 6 \equiv 6 \times 6$ (மட்டு 10)

$6 \times 6 \equiv 6$ (மட்டு 10)

$\therefore \quad 2^{12} \equiv 6$ (மட்டு 10)

மற்றொரு முறை :

$2^6 = 64$

$64 \equiv 4$ (மட்டு 10)

$2^{12} = 2^6 \times 2^6$

$\therefore \quad 2^6 \times 2^6 \equiv 4 \times 4$ (மட்டு 10)

$\therefore \quad 2^{12} \equiv 6$ (மட்டு 10)

(3) $5^n \equiv 5$ (மட்டு 10) எனக் காட்டுக.

$5 \equiv 5$ (மட்டு 10)

$5^2 \equiv 5$ (மட்டு 10)

$5^3 \equiv 5$ (மட்டு 10)

5 இன் எந்த அடுக்கும் 5 இல் தான் முடியும்.

ஆதலால் $5^n \equiv 5$ (மட்டு 10)

(4) $9^5 \equiv ?$ (மட்டு 10)

$9 \equiv 9$ (மட்டு 10)

$9^2 \equiv 1$ (மட்டு 10)

$9^3 \equiv 9$ (மட்டு 10)

$9^4 \equiv 1$ (மட்டு 10)

$9^5 \equiv 9$ (மட்டு 10) $\quad (9^3 = 729)$

இதிலிருந்து $9^n \equiv$ (மட்டு 10)-க்குப் பொது விதி காண முடியுமா ?

பயிற்சி 4-1

கீழ்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக :

(1) $4^9 \equiv$ (மட்டு 5)

(2) $2^{20} \equiv$ (மட்டு 5)

(3) $3^{12} \equiv$ (மட்டு 6)

(4) $9^{27} \equiv$ (மட்டு 10)

(5) $9^{18} \equiv$ (மட்டு 10)

(6) $5^{31} \equiv$ (மட்டு 5)

(7) $14^5 \equiv$ (மட்டு 9)

(8) $x + 3 \equiv 2$ (மட்டு 5) ; $x \in N$

x இன் குறைந்த மதிப்பு என்ன ?

(9) $x^2 + 4 \equiv 4$ (மட்டு 7) ; $x \in N$

x இன் குறைந்த மதிப்பு என்ன ?

(10) $10^{11} \equiv$ (மட்டு 11)

விடைகள்

(1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) 9 (5) 1

(6) 5 (7) 2 (8) 5 (9) 7 (10) 10

4 - 2 மட்டு — பெருக்கல்

(அட்டவணையைப் பயன்படுத்துதல்)

மட்டு 4—பெருக்கல் அட்டவணையைப் பார்க்கவும்.

(மட்டு 4—பெருக்கலில் 0, 1, 2, 3 என்ற 4 எண்களை மட்டும் பயன்படுத்துகிறோம். ஏன் ?)

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

பெருக்கல் அட்டவணையிலிருந்து கீழ்க்காணும் விவரங்களைக் கணக்கிடுக.

$27 \equiv$ (மட்டு 4)

$38 \equiv$ (மட்டு 4)

$27 \times 38 \equiv$ (மட்டு 4)

$27 \equiv 3$ (மட்டு 4)

$38 \equiv 2$ (மட்டு 4)

$27 \times 38 \equiv 3 \times 2$ (மட்டு 4)

$27 \times 38 \equiv 2$ (மட்டு 4)

பயிற்சி 4 - 2

1. மட்டு 5 இன் பெருக்கல் அட்டவணையை எழுதிக் கீழ்க் காணும் விவரங்களைக் கணக்கிடுக.

   (அ) $38 \equiv$ (மட்டு 5) (இ) $38 \times 49 \equiv$ (மட்டு 5)

   (ஆ) $49 \equiv$ (மட்டு 5) (ஈ) $16 \times 25 \equiv$ (மட்டு 5)

2. $34 + 68 + 43 \equiv$ (மட்டு 10)

3. $2^6 \equiv$ (மட்டு 9)

4. $(x + 1)(x + 2) \equiv 2$ (மட்டு 5) ; $x \in N$

   x இன் குறைந்த மதிப்பு என்ன ?

5. இன்று புதன்கிழமை. இன்றிலிருந்து 37-வது நாள் என்ன கிழமை ?

6. இது அக்டோபர் மாதம். இதிலிருந்து 30-வது மாதம் என்ன ?

விடைகள்

1. (அ) 3 (ஆ) 4 (இ) 2 (ஈ) 0

2. 5 3. 1 4. 2 5. வியாழன் 6. மார்ச்சு

4 - 3 மட்டு — வகுத்தல்

மட்டு 6 பெருக்கல் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

இதிலிருந்து $2 \times 3 \equiv 0$ (மட்டு 6) என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

சாதாரண வகுத்தலில் $2 \times 3 = 6$

$$2 = \frac{6}{3}$$

$$3 = \frac{6}{2}$$ என்பது தெரியும்.

மட்டு கணிதத்தில் இதைப் பார்ப்போம்.

$$2 \times 3 \equiv 0$$

$$\therefore \quad \frac{0}{2} = 3 \; ; \; \frac{0}{3} = 2$$ என்பது கவனிக்கவும்.

சாதாரண வகுத்தலில் பூச்சியத்தை எந்த எண்ணால் வகுத்தாலும் விடை பூச்சியம் என்பது தெரியும். ஆனால் மட்டு கணிதத்தில் பூச்சியத்தை முழு எண்ணால் வகுக்கும் பொழுது விடையில் பூச்சியமல்லாத எண்கள் கிடைப்பதைக் கவனிக்கவும்.

$$4 \times 3 \equiv 0 \text{ (மட்டு 6)}$$

$$\therefore \quad \frac{0}{3} = 4 \; ; \; \frac{0}{4} = 3$$ என்பதும் உண்மை.

5. தசம பின்னங்கள் — மீள்பார்வை

$$\frac{1}{10} = \cdot 1$$

$$\frac{1}{5} = \cdot 2$$

$$\frac{37}{100} = \cdot 37$$

$$\frac{7}{20} = \cdot 35$$

இவை முடிவுறு தசம பின்னங்கள் என்பதை முன் வகுப்பில் தெரிந்து கொண்டீர்கள். முடிவுறு தசம பின்னங்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கூறுக.

$\frac{1}{3}$. இதைத் தசம பின்னமாக மாற்றினால் $\cdot 333\ldots$ என்று முடிவுறா தசம பின்னமாக எழுதப்படும். இதை $\cdot\dot{3}$ என்று சுழல் தசம பின்னமாக எழுதுவோம்.

$\frac{1}{11} = \cdot 090909...$ இதில் 09 மீண்டும் மீண்டும் வருவதால் இதை $\cdot 0\dot{9}0\dot{9}$ என்று எழுதுவோம். இதுவும் முடிவுறா சுழல் தசம பின்னமே.

முடிவுறு, முடிவுறா, சுழல் தசம பின்னங்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படும் என்பதை முன்னரே தெரிந்து கொண்டிருக்கிறீர்கள்.

பயிற்சி 5

1. கீழ்வரும் விகிதமுறு எண்களை சுழல் தசம பின்னங்களாக எழுதுக.

   (அ) $\frac{1}{9}$ (ஆ) $\frac{23}{45}$ (இ) $\frac{7}{15}$ (ஈ) $\frac{25}{37}$ (உ) $\frac{5}{6}$

   (ஊ) $\frac{32}{111}$ (எ) $\frac{1}{13}$

2. கீழக்காணும் விகிதமுறு எண்களை நான்கு தசம இடம் வரை தசம பின்னங்களாக எழுதுக.

   (அ) $\frac{1}{11}$ (ஆ) $\frac{2}{11}$ (இ) $\frac{3}{11}$ (ஈ) $\frac{9}{11}$ (உ) $\frac{14}{11}$

   (ஊ) $\frac{23}{11}$

3. (அ) $\frac{1}{11}$ இன் தசம எண்ணுருவுக்கும் $\frac{2}{11}$-இன் தசம எண்ணுருவுக்கும் ஒற்றுமை இருக்கிறதா ?

   (ஆ) $\frac{1}{11}$ இன் தசம எண்ணுருவுக்கும் $\frac{3}{11}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{14}{11}$, $\frac{23}{11}$ இவற்றின் தசம எண்ணுருக்களுக்கும் தொடர்பு ஏதாவது உள்ளதா ?

4. வகுக்காமலேயே $\frac{5}{11}$ என்ற பின்னத்தைத் தசம பின்னமாகக் கூறமுடியுமா ?

5. $\frac{4}{11}$ என்ற பின்னத்தின் தசம பின்னம் $\frac{1}{11}$ இன் தசம பின்னத்தைப்போல் நான்கு மடங்கு என்பது சரியா ?

விடைகள்

1. (அ) $\cdot\dot{1}$ (ஆ) $\cdot 5\dot{1}$ (இ) $\cdot 4\dot{6}$ (ஈ) $\cdot\dot{6}\dot{7}\dot{5}$
2. (அ) ·0909 (ஆ) ·1818 (இ) ·2727

6. விகிதமுறா எண்கள்

எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் முடிவுறு அல்லது முடிவுறா தசம பின்னங்களாக எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம்.

கீழேயுள்ள எண்ணைப் பார்க்க.

2·4035789201...

இது முடிவுறு தசம பின்னமோ, சுழல் தன்மையுள்ள தசம பின்னமோ அல்ல.

2·444 ... இது ஒரு விகிதமுறு எண்.

$$2\cdot 444\ ... = \frac{22}{9}$$

2·444...	2·4343343334...
↑	↑
சுழல் தன்மையுடைய தசம பின்னம்	இது முடிவுறா தசம பின்னம் சுழல் தன்மையுடையதும் அல்ல
↓	↓
$2\cdot 4\dot{4}$ என்று இதை எழுதமுடியும்	சுழல் தசம பின்னம் போன்று இதை எழுதமுடியாது.

இம்மாதிரியான முடிவுறாத, சுழல் தன்மையுமில்லாத எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும்.

பயிற்சி 6

கீழ்க்காணும் எண்கள் விகிதமுறு எண்களா, விகிதமுறா எண்களா எனக் கூறுக.

(1) 7·323232 .. (2) 3·6262262226 (3) $\cdot 34\dot{1}4\dot{1}$

(4) $\sqrt{9}$ (5) $\sqrt{10}$ (6) $\sqrt{16}$ (7) $-3\frac{1}{2}$

(8) 49505152... (9) ·027 (10) ·441441144111...

விடைகள்

(1), (3), (4), (6), (7), (9) — விகிதமுறு எண்கள்

(2), (5), (8), (10) — விகிதமுறா எண்கள்

7. விகிதமுறா எண்கள் சில

எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் முடிவுறு தசம பின்னமாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தன்மையுள்ள தசம பின்னமாகவோ எழுதப்படலாம் எனப் பார்த்தோம்.

16 ச செமீ பரப்புடைய சதுரத்தின் பக்க நீளம் என்ன ? 4 செமீ ($\sqrt{16}$) எனக் கூறமுடியும். 2·56 ச செமீ பரப்புடைய சதுரத்தின் பக்க நீளம் 1·6 செமீ ($\sqrt{2{\cdot}56}$) என்று கூறலாம். ஆனால் 2 ச செமீ பரப்புடைய சதுரத்தின் பக்கம் என்ன ? $\sqrt{2}$ செமீ ஆகும்.

$\sqrt{2}$-ஐ தசம பின்னமாக எழுதுக.

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}41421$$

	1·41421
	2·0000000000
1	1
	100
24	96
	400
281	281
	11900
2824	11296
	60400
28282	56564
	383600
282841	282841
	100759

இது ஒரு முடிவுறா சுழல் தன்மையில்லாத தசம பின்னமாக உள்ளது. இது ஒரு விகிதமுறா எண்.

நான்கு தசம இடத்திற்குத் திருத்தமாக இதன் மதிப்பை 1·4142 என்று சொல்லலாம்.

$$\sqrt{2} \simeq 1{\cdot}4142$$

2-க்கும் 1·4142-இன் வர்க்கத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம்

$$= 2 - 1{\cdot}99996164$$
$$= {\cdot}00003836$$

மேற்கூறியவாறு $\sqrt{3}$ இன் தோராய மதிப்பையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}7321$ (நான்கு தசம இடம் திருத்தமாக)

மேலும் தசம இடம் திருத்தமாக மதிப்புக் காணும்பொழுது துல்லியம் அதிகமாகும்.

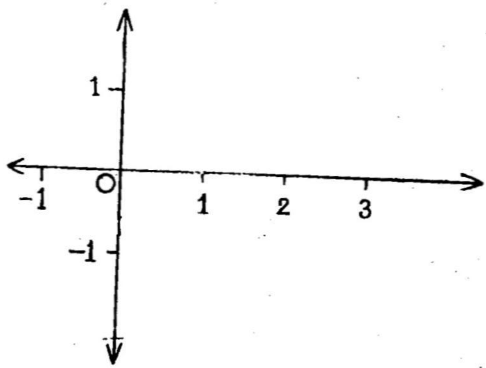
π: ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின் நீளம், அதன் விட்டத்தின் நீளத்தைப்போல் π மடங்கு என்பது உங்களுக்குத் தெரியும் (πd).

π என்பதும் ஒரு விகிமுறா எண். அதன் தோராய மதிப்பு $\frac{22}{7}$, $3 \cdot 14$, $3 \cdot 1416$, $\frac{355}{113}$ என்பன.

இவை எதுவும் π-க்குச் சமமான மதிப்பு அல்ல.

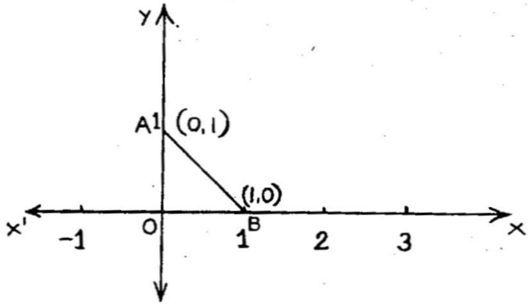
எண்கோட்டில் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

எண் கோட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தலம் அமைக்கவும். (படம் 2-9.)



படம் 2-9.

$A(0, 1)$, $B(1, 0)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் AB என்ற கோட்டுத் துண்டை வரைக. (படம் 2-10.)



படம் 2=10

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின்மீது வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பு செங் கோணத்தை உண்டாக்கும் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின்மீது வரையப்பட்ட சதுரங்களின் பரப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

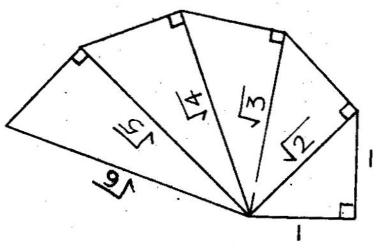
$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$AB = \sqrt{2}$$

$\overline{AB}$ இன் நீளத்தைக் கவராயத்தின் உதவியால் எண் கோட் டில் குறிக்க.

இப்புள்ளி எண் கோட்டில் $\sqrt{2}$-ஐக் குறிக்கும்.

இதேபோல $\sqrt{3}$-ன் இடத்தையும் எண் கோட்டில் குறிக்க லாம்.



படம் 2-11.

மேலேயுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... இவற்றைக் காண இப்படத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

8. மெய்யெண் கணமும் அதன் உட்கணங்களும்

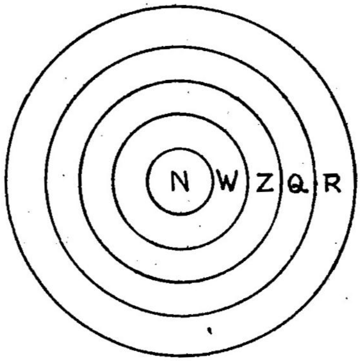
இதுவரை பல எண் கணங்களைத் தெரிந்துகொண்டீர்கள்.

N, W, Z, Q இவை எண் கணங்களில் எவற்றைக் குறிக் கின்றன ?

$N \subset W \subset Z \subset Q$ என்பது மெய்யானது என்பதையும் தெரிந்துகொண்டிருக்கிறீர்கள்.

முன்பகுதியில் சில எண்கள் மேற்குறித்த கணங்களின் உறுப்புகளாக இல்லாமலிருப்பதைப் பார்த்தோம். அவை விகித முறா எண்கள் எனப்படும் எனவும் அறிந்தோம். இதிலிருந்து எண்கள் விகிதமுறு எண்களாகவோ, விகிதமுறா எண்களா கவோ இருக்கமுடியும் என அறியலாம்.

எல்லா விகிதமுறு, விகிதமுறா எண்களின் கணத்தை மெய் யெண்களின் கணம் '$\mathbb{R}$' எனக் குறிப்பிடுவோம்.



படம் 2-12.

மேலே உள்ள படத்தைப் பார்க்கவும். இதிலிருந்து என்ன தெரிந்துகொள்ளலாம்? மெய்யெண்களின் கணத்தில் N, W, Z, Q என்பவை உட்கணங்களாக அமையும் எனத் தெரிந்து கொள்ள லாம்.

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$$

எண் கோட்டில் விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கும்பொழுது சில இடைவெளிகள் ஏற்படும். ஏன் ?

எல்லா எண்களும் விகிதமுறு எண்களாக இருக்கமுடியாது. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... போன்ற விகிதமுறா எண்களும் எண் கோட் டில் இருக்கும். ஆதலால் மெய்யெண் கோட்டில் இடைவெளி யிராது. விகிதமுறு எண்களும், விகிதமுறா எண்களும் எண் கோட்டில் இடம் பெறும்.

எண் முறையினங்களின் பண்புகள்

விகிதமுறு எண்களில் கீழ்க்காணும் பண்புகள் உண்மை எனத் தெரிந்துகொண்டிருக்கிறீர்கள்.

கூட்டல்	பெருக்கல்
கூட்டலில் அடைவுப் பண்பு	பெருக்கலில் அடைவுப் பண்பு
மாற்றுப் பண்பு $a + b = b + a$	மாற்றுப் பண்பு $a \times b = b \times a$
சேர்ப்புப் பண்பு $(a + b) + c = a + (b + c)$	சேர்ப்புப் பண்பு $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
'0'-இன் சமனிப் பண்பு $a + 0 = 0 + a = a$	பெருக்கலில் சமனிப் பண்பு $a \times 1 = 1 \times a = a$
தலைகீழிப் பண்பு $a + (-a) = (-a) + a = 0$	பெருக்கலில் தலைகீழிப் பண்பு $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ $a \neq 0$
பங்கீட்டுப் பண்பு $a(b + c) = ab + ac$	
	0இன் பெருக்கல் பண்பு $a \times 0 = 0 \times a = 0$

வரிசைப் பண்பு

a, b என்ற எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்துகொண்டாலும் கீழ்க்காணும் ஏதாவது ஒன்று உண்மையானதாக இருக்கும்.

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

மெய்யெண் கணம் விகிதமுறு எண்களின் எல்லாப் பண்புகளையும் உடையது. ஏன்?

அத்துடன் மெய்யெண் கணம் அடர்த்திப் பண்பையும் உடையது.

அடர்த்திப் பண்பு

எண் கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தொடர்புடைய ஒரு மெய்யெண் உண்டு. (எந்த ஓர் எண்ணும் மெய்யெண் ஆகும்.)

இதுவரை பல எண் முறையினங்களைப் பார்த்தோம். இவ்வெண் முறையினங்களெல்லாம் கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கொண்டுள்ளன எனக் கண்டோம்.

1. அடைவுப் பண்பு
2. மாற்றுப் பண்பு
3. சேர்ப்புப் பண்பு
4. பங்கீட்டுப் பண்பு
5. வரிசைப் பண்பு
6. சமனிப் பண்பு

கீழ்க்காணும் அட்டவணை சில பண்புகள் எம்முறையினத்திற்குப் பொருத்தமானவை என்பதைக் காட்டும்.

பண்பு	இயல் எண்கள்	முழு எண்கள்	முழுக்கள்	மிகை விகிதமுறு எண்கள்	விகிதமுறு எண்கள்	மெய் யெண்கள்
பூச்சியத்தின் சமனிப்பண்பு						
பெருக்கல் தலைகீழி						
கூட்டல் தலைகீழி						
பூச்சியத்தின் பெருக்கல் பண்பு						

9 - 1 வர்க்கமூலம்

மீள்பார்வை :

16 என்பது 4இன் வர்க்கம்.

4 என்பது 16இன் வர்க்கமூலம்.

16 என்பது (−4)இன் வர்க்கம்.

−4 என்பது 16இன் வர்க்கமூலம்.

16இன் வர்க்கமூலங்கள் 4, −4.

$a^2 = (a)^2$ அல்லது $(-a)^2$ ஆதலால், எம் முழுவெண்ணிற்கும் ஒரு மிகை எண், ஒரு குறை எண் ஆகியவை வர்க்கமூலங்களாக அமையும்.

25இன் வர்க்கமூலங்கள் −5, 5.

இப்பாடத்தில் மிகை எண் வர்க்கமூலங்கள் மட்டும் காண்போம்.

(1)
$$441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$$
$$\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21$$

(2)
$$1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$$
$$\sqrt{1764} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7^2} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

(3)
$$\sqrt{27 \times 15 \times 20} = \sqrt{3^3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 2^2} = \sqrt{3^4 \times 5^2 \times 2^2} = 3^2 \times 5 \times 2 = 90$$

பயிற்சி 9 - 1

1. காரணி முறையில் வர்க்கமூலம் காண்க :

(அ) 2304 (ஆ) 7056 (இ) 39204
(ஈ) 50625 (உ) 44100 (ஊ) 26244

2. பின்வரும் பெருக்குத் தொகைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க :

(அ) 18×32 (ஆ) 44×99
(இ) 50×72 (ஈ) 72×128
(உ) 108×147 (ஊ) 112×175
(எ) $15 \times 35 \times 21$ (ஏ) $30 \times 35 \times 42$
(ஐ) $21 \times 56 \times 96$ (ஒ) $18 \times 21 \times 30 \times 35$

3. xஇன் மதிப்பைக் காண்க :

(அ) $6x^2 = 486$ (ஆ) $12x^2 = 432$
(இ) $60x^2 = 2940$ (ஈ) $2\frac{1}{2}x^2 = 640$
(உ) $\frac{1}{2}x^2 = 128$ (ஊ) $\frac{1}{3}x^2 = 147$
(எ) $x = \sqrt{a^6}$ (ஏ) $x = \sqrt{9a^8}$

4. $A = \pi r^2$, $A = 616$, $\pi = \frac{22}{7}$ என்றால் rஇன் மதிப்பு என்ன ?

விடைகள்

1. (அ) 48 (ஆ) 84 (இ) 198 (ஈ) 225
(உ) 210 (ஊ) 162

2. (அ) 24 (ஆ) 66 (இ) 60 (ஈ) 96
(உ) 126 (ஊ) 140 (எ) 105
(ஏ) 210 (ஐ) 336 (ஒ) 630

3. (அ) 9 (ஆ) 6 (இ) 7 (ஈ) 16
(உ) 16 (ஊ) 21 (எ) a^3 (ஏ) $3a^4$

4. 14.

9-2 பின்னங்களின் வர்க்கமூலம்

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$ இன் வர்க்கம் $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{4}$ இன் வர்க்கமூலம் $= \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$\frac{4}{25}$ இன் வர்க்கமூலம் $= \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

பகுதி, தொகுதி இரண்டும் வர்க்க எண்களாக இருந்தால் மேற்குறித்தவாறு செய்யலாம்.

$\frac{9}{7}$ இன் வர்க்கம் $= \frac{9}{7} \times \frac{9}{7} = \frac{81}{49} = 1\frac{32}{49}$.

$1\frac{32}{49}$ ஒரு கலப்பு எண்.

$$\sqrt{1\frac{32}{49}} = \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$$

$$\text{பின்னத்தின் வர்க்கமூலம்} = \frac{\text{தொகுதியின் வர்க்கமூலம்}}{\text{பகுதியின் வர்க்கமூலம்}}$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

2. $\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

3. $\sqrt{\frac{63}{112}} = \sqrt{\frac{63 \div 7}{112 \div 7}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

(தொகுதிக்கும் பகுதிக்கும் 7 பொதுவாக உள்ளது.)

குறிப்பு :

1. 1ஐ விட அதிகமான எண்ணின் வர்க்கமூலம் அந்த எண்ணைவிடக் குறைவாக இருக்கும். $\sqrt{16} = 4$

2. 1இன் வர்க்கமூலம் 1. $\sqrt{1} = 1$.

3. 1ஐ விடக் குறைவான எண்ணின் வர்க்கமூலம் அந்த எண்ணைவிடப் பெரியதாக இருக்கும். $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ஏன் எனக் கூறுக.

பயிற்சி 9 - 2

பின்வரும் பின்னங்களின் வர்க்கமூலம் என்ன ?

1. (அ) $\frac{49}{64}$ (ஆ) $\frac{25}{36}$ (இ) $\frac{64}{81}$ (ஈ) $\frac{36}{49}$

2. (அ) $1\frac{9}{16}$ (ஆ) $2\frac{14}{25}$ (இ) $1\frac{7}{9}$ (ஈ) $1\frac{13}{36}$

3. (அ) $\frac{720}{245}$ (ஆ) $\frac{392}{512}$ (இ) $\frac{175}{28}$ (ஈ) $\frac{360}{810}$

4. $\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$ எனில் $\sqrt{768}$இன் மதிப்பு என்ன ?

விடைகள்

1. (அ) $\frac{7}{8}$ (ஆ) $\frac{5}{6}$ (இ) $\frac{8}{9}$ (ஈ) $\frac{6}{7}$

2. (அ) $1\frac{1}{4}$ (ஆ) $1\frac{3}{5}$ (இ) $1\frac{1}{3}$ (ஈ) $1\frac{1}{6}$

3. (அ) $1\frac{5}{7}$ (ஆ) $\frac{7}{8}$ (இ) $2\frac{1}{2}$ (ஈ) $\frac{2}{3}$

4. 27·712

9 - 3 வர்க்கமூலம் - வகுத்தல் முறை

1. $2^2 = 4$; $7^2 = 49$; $9^2 = 81$

ஓர் இலக்க எண்ணின் வர்க்கத்தில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும் ?

2. $30^2 = 900$; $35^2 = 1225$; $90^2 = 8100$

இரண்டு இலக்க எண்ணின் வர்க்கத்தில் 3 அல்லது 4 எண்கள் இருக்குமா ?

3. $300^2 = 90000$; $900^2 = 810000$

மூன்று இலக்க எண்ணின் வர்க்கத்தில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும் ?

4. $2^2 = 4$; $12^2 = 144$; $30^2 = 900$; $300^2 = 90000$

ஓர் எண்ணில் ஓர் இலக்கம் சேர்த்தால் வர்க்கத்தில் எத்தனை எண்கள் கூடும்? (இரண்டு எண்கள் அல்லவா?)

இவற்றினின்று நாம் அறிவது :

எண்ணிலுள்ள இலக்கங்கள்	அதன் வர்க்கமூலத்திலுள்ள இலக்கங்கள்
1, 2	1
3, 4	2
5, 6	3

எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை ஒன்றுத் தானத்திலிருந்து இரண்டிரண்டாகப் பிரித்து வர்க்கமூலத்தில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும் என்று தெரிந்து கொள்ளமுடியும்.

$\sqrt{6\dot{7}4\dot{8}5\dot{9}}$ வர்க்கமூலத்தில் முழு எண் பாகத்தில் 3 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

2467596 இந்த எண்ணின் வர்க்கமூலத்தில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும்?

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) 6724இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

$6\dot{7}2\dot{4}$இன் வர்க்கமூலத்தில் 2 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

$80^2 = 6400$; $90^2 = 8100$

எனவே வர்க்கமூலம் 80-க்கும் 90-க்கும் இடையில் இருக்கும்.

80ஐ விட x அதிகம் என்போம்.

$6724 = (80 + x)^2 = 6400 + 2x \cdot 80 + x^2$

$2x \cdot 80 + x^2 = 6724 - 6400 = 324$

$x(160 + x) = 324$

$x = 2$ ஆனால் $2(160 + 2) = 324$

எனவே $\sqrt{6724} = 82$.

இதனைச் சுருக்கமாகக் கீழ்க்கண்டவாறு காட்டலாம்.

	80 + 2
80	$\dot{6}7\dot{2}4$
	6400
160 + 2	324
	324
	0

அல்லது மேலும் சுருக்கமாக

	8 2
8	$\dot{6}7\dot{2}4$
	64
	324
162	324
	0

இதே முறையை எத்தனை இலக்கங்கள் கொண்ட எண்ணின் வர்க்கமூலம் காணவும் பயன்படுத்தலாம்.

(2) 64516இன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

	254	
2	$\dot{6}\ \dot{4}5\ \dot{1}6$	
	4	2^2
45	2 45	
	2 25	5×45
504	20 16	
	20 16	4×504
	0	

$\sqrt{64516} = 254$

பயிற்சி 9-3

பின்வரும் எண்களின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(அ) 361 (ஆ) 2809 (இ) 1849 (ஈ) 2209
(உ) 3844 (ஊ) 4356 (எ) 8464 (ஏ) 37249
(ஐ) 92416 (ஒ) 208849

விடைகள்

(அ) 19 (ஆ) 53 (இ) 43 (ஈ) 47 (உ) 62
(ஊ) 66 (எ) 92 (ஏ) 193 (ஐ) 304 (ஒ) 457

9–4 தசம பின்னங்களின் வர்க்கமூலம்

$(0\cdot1)^2 = \cdot1 \times \cdot1 = \cdot01 \qquad \sqrt{\cdot01} = \cdot1$

$(1\cdot1)^2 = 1\cdot1 \times 1\cdot1 = 1\cdot21 \qquad \sqrt{1\cdot21} = 1\cdot1$

$(0\cdot22)^2 = \cdot22 \times \cdot22 = \cdot0484 \qquad \sqrt{\cdot0484} = \cdot22$

இதிலிருந்து ஓர் எண்ணில் எத்தனை தசமத் தானங்கள் இருக்கின்றனவோ அதைப் போல் இரண்டு மடங்கு தசமத் தானங்கள் அதன் வர்க்கத்தில் இருக்கும் என அறிகிறோம். ஆதலால் ஒரு தசம எண் முழு வர்க்கமாக இருந்தால் அதன் வர்க்கமூலத்தில் அதில் பாதி எண்ணிக்கை தசமத் தானங்கள் தான் இருக்கும்.

குறிப்பு : தசமத் தானங்களின் எண்ணிக்கை வர்க்கத்தில் இரட்டை எண்ணாகவே இருக்கும். ஏன் ?

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) 20·8849இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

	4 .	5	
4	20 .	88	49
	16		
8 5	4 ·	88	
	4 ·	25	
90 7		6349	
		6349	
		0	

முதல் புள்ளியை ஒன்று தானத்தில் இடுக. பிறகு முழுஎண்களுக்கு இரண்டிரண்டாக இடப்புறமும் தசமத் தானத்திற்கு வலப்புறமாக இரண்டிரண்டு இடங்களும் தள்ளிப் புள்ளி வைக்க. பிறகு முன்போல் வர்க்கமூலம் கணக்கிடுக.

வர்க்கத்தில் 4 தசமத் தானங்கள் இருப்பதால் வர்க்கமூலத்தில் இரண்டு தசமத்தானங்கள் தான் இருக்கும்.

(2) $\sqrt{0\cdot0484}$

	22
2	484
	4
42	84
	84
	0

$\sqrt{484} = 22$

$\sqrt{\cdot0484} = \cdot22$

(3) $\sqrt{0 \cdot 001089}$

	33
3	1089
	9
63	189
	189
	0

$\sqrt{1089} = 33$

$\sqrt{0 \cdot 001089} = \cdot 033$

வர்க்கத்தில் 6 தசமத் தானங்கள். வர்க்கமூலத்தில் 3 தசமத் தானங்கள். வர்க்கத்தில் இரண்டு பூச்சியங்களுக்கு வர்க்க மூலத்தில் ஒரு பூச்சியம் இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

பயிற்சி 9 - 4

1. பின்வரும் எண்களின் வர்க்கமூலத்தைக் கணக்கிடுக :

(அ) 7·29 (ஆ) 22·09 (இ) 32·49
(ஈ) 70·56 (உ) 0·0289 (ஊ) 281·9041
(எ) 0·095481 (ஏ) 0·009604
(ஐ) 0·000784 (ஒ) 6517·3329

2. 4160·25இன் வர்க்கமூலம் 64·5 எனில் பின்வரும் எண்களின் வர்க்கமூலங்களைக் கூறுக.

(அ) 41·6025 (ஆ) 416025
(இ) 0·416025 (ஈ) 0·00416025

3. $\sqrt{2} \simeq 1 \cdot 414$; $\sqrt{3} \simeq 1 \cdot 732$; $\sqrt{5} \simeq 2 \cdot 236$

என்றால் பின்வரும் எண்களின் வர்க்கமூலங்களைக் கணக்கிடுக.

(அ) 32 (ஆ) 147 (இ) 180 (ஈ) 72 (உ) 243
(ஊ) 128.

விடைகள்

1. (அ) 2·7 (ஆ) 4·7 (இ) 5·7 (ஈ) 8·4
(உ) 0·17 (ஊ) 16·79. (எ) 0·309 (ஏ) 0·098
(ஐ) 0·028 (ஒ) 80·73

2. (அ) 6.45 (ஆ) 645 (இ) ·645 (ஈ) ·0645

3 (அ) 5·656 (ஆ) 12·124 (இ) 13·416
(ஈ) 8·484 (உ) 15·588 (ஊ) 11·312

எண்களின் வர்க்கங்களின் அட்டவணை

A ↓ \ B →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

9 - 5 அட்டவணையைப் பயன்படுத்துதல்

முன் பக்கத்திலுள்ள அட்டவணை வர்க்கங்களைக் கண்டு பிடிப்பதற்கும் 10000க்குள் இருக்கும் வர்க்க எண்களின் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும் உதவும். மற்ற எண்களுக்குத் தோராயமாக வர்க்கமூலம் என்ன இருக்கலாம் என்பதைத் தெரிந்துகொள்ளவும் உதவும்.

பயன்படுத்தும் முறை :

அட்டவணையிலிருந்து 1 இலிருந்து 99 வரை உள்ள எண் களின் வர்க்கங்களைக் காணலாம்.

வர்க்கம் காண :

A வரிசையில் இருக்கும் எண்கள் 0 இலிருந்து 9 உட்பட பத்துத்தானம் என்று கொள்க. *B* வரிசையில் 0 இலிருந்து 9 உட் பட உள்ள எண்கள் ஒன்றுத் தானம் எனக் கொள்க.

38இன் வர்க்கம் காண *A* வரிசையில் 3க்கு நேராகவும் *B* வரிசையில் 8க்கு நேர் கீழாகவும் பார்த்தால் இரண்டும் சேரும் இடத்தில் 1444 இருப்பதைக் காணலாம்.

(எண் 3 உள்ள நிரையில், எண் 8 உள்ள நிரலில் உள்ள எண் 38இன் வர்க்கம் ஆகும்.)

$$\therefore \quad 38^2 = 1444.$$

வர்க்கமூலம் காண :

$$\sqrt{1849}$$

1849 என்ற எண் உள்ள நிரை எண் 4 (*A* வரிசையில்) நிரல் எண் 3 (*B* வரிசையில்).

$$\therefore \quad \sqrt{1849} = 43.$$

பயிற்சி 9 - 5

1. அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் எண் களின் வர்க்கமூலங்களைக் காண்க.

(அ) 576 (ஆ) 3136 (இ) 4624

(ஈ) 7921 (உ) 9801 (ஊ) 8836

2. அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் எண்களின் வர்க்கங்களைக் காண்க.

(அ) 27 (ஆ) 39 (இ) 45 (ஈ) 78 (உ) 89

3. அட்டவணையில் ஒவ்வொரு நிரையிலும் (A வரிசை) அடுத்துள்ள எண்களுக்கிடையிலுள்ள வித்தியாசங்களைக் காண்க. வித்தியாசங்களிடையே என்ன சிறப்பு காணப்படுகிறது? அதே போல ஒவ்வொரு நிரலிலும் (B வரிசை) அடுத்துள்ள எண்களுக்கிடையிலுள்ள வித்தியாசங்கள் என்ன? வித்தியாசங்களிடையே பண்பு என்ன? ஏன் எனக் கூறமுடியுமா?

10. சீர்கள் — வரிசைகள்

முதல் 'n' இயல் எண்களின் கூட்டுத் தொகை கண்டுபிடிப்பதற்கான சூத்திரத்தைச் சென்ற வகுப்பில் படித்தீர்கள்.

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ எனக் கண்டீர்கள்.

பயிற்சி 10

கூடுதல் காண்க :

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 15$
2. $1 + 2 + 3 + \dots + 50$
3. $12 + 13 + 14 + \dots + 32$
4. $43 + 44 + 45 + \dots + 76$
5. $4 + 8 + 12 + \dots + 44$
6 $5 + 10 + 15 + \dots + 65$

விடைகள்

1. 120 2. 1275 3. 452
4. 2023 5. 264 6. 455

10-1 முதல் *n* ஒற்றை எண்களின் கூட்டுத் தொகை

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = ?$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ? = ?$$

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை? அவற்றின் கூட்டுத் தொகைக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கைக்கும் ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா?

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கையின் வர்க்கமே கூட்டுத் தொகை ஆகும்.

$$1 + 3 + 5 = 3^2 \quad \left[\frac{1+5}{2} = 3\right]$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \quad \left[\frac{1+9}{2} = 5\right]$$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + 33 = 17^2 \quad \left[\frac{1+33}{2} = 17\right]$$

பயிற்சி 10-1

கூடுதல் காண்க.

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + 23$
2. $5 + 7 + 9 + \ldots + 35$
3. $9 + 11 + 13 + \ldots + 37$
4. $1 + 3 + 5 + \ldots + 47$
5. $7 + 9 + 11 + \ldots + 33$

விடைகள்

1. 144 2. 320 3. 345 4. 576 5. 280.

10 - 2 தொடர் வரிசை

$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ இந்த வரிசையில் அடுத்துள்ள எண் களிடையே உள்ள வித்தியாசம் என்ன? இரண்டு அடுத் துள்ள எண்களிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாமலிருப்பதைக் கவனிக்க.

கீழ்க்காணும் வரிசைகளைக் கவனிக்க.

$15, 11, 7, 3, \ldots$

$2, 6, 10, 14, \ldots$

$7, 5\frac{1}{2}, 4, 2\frac{1}{2}, \ldots$

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் தொடர்ந்த இரண்டு எண்களுக் கிடையே உள்ள இடைவெளி மாறாமலிருக்கிறது.

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் இடைவெளி முறையே -4, $+4$, $-1\frac{1}{2}$ என்பதைக் கவனிக்க.

இவ்வாறு ஒரு வரிசையில் இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள எண் களின் வித்தியாசம் (இடைவெளி) மாறாமலிருப்பின் அந்த வரிசை, தொடர் வரிசையில் உள்ளது எனப்படும்.

'a' என்பது ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு. இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள உறுப்புகளின் பொது வித்தியாசம் 'd', எனில் அந்த வரிசை

$a, \; a + d, \; a + 2d, \ldots$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட வரிசையில் n ஆவது உறுப்புக் காணல்

$4, 7, 10, 13, \ldots$ என்ற வரிசையில் 8-வது உறுப்பு என்ன?

$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$. எட்டாவது உறுப்பு 25.

25-வது உறுப்பு என்ன?

எண்களை வரிசையாக எழுதி விடையைக் கண்டுகொள்ள லாம். வேறு சுலபமான வழி என்ன?

பொதுவாக இடைவெளி 3. ஓர் உறுப்புடன் பொது இடை வெளியைக் கூட்ட அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கிறது.

முதல் உறுப்பு $a = 4$

பொது இடைவெளி $d = 3$

இரண்டாவது உறுப்பு $7 = 4 + (3 \times 1) = 4 + 3\,(2 - 1)$

மூன்றாவது உறுப்பு $10 = 4 + (3 \times 2) = 4 + 3\,(3 - 1)$

நான்காவது உறுப்பு $13 = 4 + (3 \times 3) = 4 + 3\,(4 - 1)$

இதிலிருந்து என்ன தெரிந்து கொள்கிறீர்கள்? மூன்றாவது உறுப்பினைக் காண முதல் உறுப்புடன் பொது இடைவெளியின் இரண்டு மடங்கைக் $(3-1)$ கூட்டவேண்டும். நான்காவது உறுப்பு காண முதல் உறுப்புடன் பொது இடைவெளியின் மூன்று மடங்கைக் $(4-1)$ கூட்டவேண்டும்.

இதுபோலவே எட்டாவது உறுப்பு $= 4 + 3(8-1)$ $= 4 + 21 = 25$.

25-வது உறுப்பு என்ன ?

$$4 + 3(25-1) = 4 + 3 \times 24 = 76$$

பொதுவாக ஒரு வரிசையில் 'n'-வது உறுப்பு காணவேண்டுமெனில்

n-வது உறுப்பு $= a + (n-1)d$.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. 5, 9, 13, 17, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 12-வது உறுப்பு என்ன ?

   முதல் எண் $a = 5$

   பொது இடைவெளி $d = 4$

   $n = 12$

$\therefore$ 12-வது உறுப்பு $= a + (n-1)d$
$= 5 + 11 \times 4$
$= 49$.

2. 61, 58, 55, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 18-வது உறுப்பு என்ன?

   $a = 61$

   $d = 58 - 61 = -3$

   $n = 18$

$\therefore$ 18-வது உறுப்பு $= 61 + 17(-3)$
$= 61 - 51$
$= 10$

பயிற்சி 10 - 2

1. 4, 7, 10, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 11-வது உறுப்பு என்ன ?

2. 6, 11, 16, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 15-வது உறுப்பு என்ன ?

3. 74, 70, 66, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 12-வது உறுப்பு என்ன ?

4. 69, 64, 59, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 20-வது உறுப்பு என்ன ?

5. 6, $7\frac{1}{2}$, 9, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 9-வது உறுப்பு என்ன ?

6. 34, 28, 22, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 15-வது உறுப்பு என்ன ?

7. $\frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, ... என்ற தொடர் வரிசையில் 11-வது உறுப்பு என்ன ?

8. 3, 5, 9, 17, ... என்ற வரிசையில் 10-வது உறுப்பு என்ன ?

9. கணக்கு '8'இல் 'n'-வது உறுப்புக் காண பொது விதி என்ன ?

விடைகள்

1. 34 2. 76 3. 30 4. -26 5. 18
6. -50 7. $1\frac{5}{12}$ 8. $2^{10}+1$ 9. 2^n+1.

10-3 தொடர் வரிசையின் கூடுதல்

(1) $4+7+10+13$. இதன் கூடுதல் காண்போம். முதல் உறுப்பு 4, கடைசி உறுப்பு 13, இடைவெளி 3.

$$S = 4 + 7 + 10 + 13$$
$$S = 13 + 10 + 7 + 4$$ (வலமிருந்து இடமாக மாற்றி அமைக்க)
$$2S = 17 + 17 + 17 + 17$$

$$2S = 17 \times 4 = 68$$

$$\therefore \quad S = \frac{17 \times 4}{2} = 34 = \frac{4}{2}(4+13)$$

தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகள் $= \frac{13-4}{3} + 1 = 4$

(2) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ கூடுதல் காண்போம்.

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$$

மாற்றி எழுத $S = 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2$

$$2S = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$

$$2S = 14 \times 6$$

$$S = \frac{14 \times 6}{2} = 42 = \frac{6}{2}(2 + 12)$$

தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகள் $= \frac{12 - 2}{2} + 1 = 6$

எனவே தொடர் வரிசையின் கூடுதல்

$= \frac{\text{உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை}}{2} \times$ (முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு)

முதல் உறுப்பு 'a', பொது இடைவெளி 'd' ஆக உள்ள தொடர் வரிசையில் 'n' ஆவது உறுப்பு $= a + (n-1)d$

முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு $= a + [a + (n-1)d]$.

கூடுதல் $= \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$a_1, a_2, \ldots a_n$ என்ற தொடர்வரிசையில் 'd' இடைவெளியானால் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

பயிற்சி 10-3

கீழ்க்காணும் தொடர் வரிசையின் கூடுதல் காண்க.

1. $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 26$
2. $4 + 5\frac{1}{2} + 7 + \ldots + 16$
3. $3 + 7 + 11 + \ldots + 39$
4. $48 + 43 + 38 + \ldots + 13$
5. $(-1) + (-3) + (-5) + \ldots + (-19)$
6. ஒரு தொடர் வரிசையில் 5வது உறுப்பு 18. முதல் 10 உறுப்புகளின் கூடுதல் 230. தொடர் வரிசையைக் காண்க.

விடைகள்

1. 126 2. 90 3. 210 4. 244 5. −100
6. −22, −12, −2, 8, ...

கணித மன்றம் - மேடை 2

கீழ்க்கண்ட சூத்திரம் தேதி கொடுக்கப்பட்டால் கிழமை காணப் பயன்படும்.

$$A + (2{\cdot}6\,B - {\cdot}2) + \left(\frac{C}{4} + C\right) + \left(\frac{D}{4} - 2\,D\right)$$

A : தேதி

B : மார்ச் மாதத்தை முதல் மாதமாகக் கொண்டு மாதத்தின் எண்ணிக்கை

(ஏப்ரல்—2, மே—3, ... ஜனவரி —11, பிப்ரவரி 12)

C : ஆண்டின் கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள்.

ஜனவரி, பிப்ரவரி மாதத்திற்கு முன் ஆண்டினைக் கொள்க. 1967 என்றால் 67 என C ஐக் கொள்க. 19—2—1931 என்றால், $C = 30$

$D =$ நூற்றாண்டுகள். 1967 என்றால் ; 19 (20 அல்ல). வந்த எண்ணை 7 ஆல் வகுத்து மீதியைக் காண்க.

0 ஞாயிறு, 1 திங்கள், ... 6 சனி என்பவை கிழமையைக் கொடுக்கும்.

ஒவ்வொரு நிலையிலும் பின்னம் வந்தால், முழு எண் பகுதியை மட்டும் கொள்க.

சுதந்திர தினம் 15-8-1947 இன் கிழமையைக் காண்போம்.

$A = 15;\quad B = 6;\quad C = 47;\quad D = 19$

$2{\cdot}6\,B - {\cdot}2 = 15{\cdot}6 - {\cdot}2 = 15{\cdot}4 = 15$

$\frac{C}{4} + C = \frac{47}{4} + 47 = 11 + 47 = 58$

$\frac{D}{4} - 2D = \frac{19}{4} - 38 = 4 - 38 = -34$

மொத்தம் $= 15 + 15 + 58 - 34 = 54$

7 ஆல் வகுக்க மீதி 5. எனவே கிழமை வெள்ளி.

3. அல்ஜீப்ரா

1 - 1 அடுக்குகள்—பெருக்கல்

திருப்புதல் :

எட்டாம் வகுப்பில் அடுக்கு, அடுக்குக் குறியீடு ஆகியவற்றைப் பற்றி நீங்கள் கற்றவற்றினை நினைவு கூர்வோம்.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

2 என்பது அடிமானம். 5 என்பது அடுக்குக் குறியீடு. 2^5 என்றால், 2 என்' 2 ஆல் 5 முறை பெருக்கப்பட்டுள்ளது எனப் பொருள்' ிம்.

5^2 என்பதில் 5 அடிமானம் 2 அடுக்குக் குறியீடு. 5, 5 ஆல் இருமுறை பெருக்கப்பட்டுள்ளது.

$$2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2^7 = 2^{4+3}$$

$$3^5 \times 3^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$
$$= 3^9 = 3^{5+4}$$

$$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5 = a^{3+2}$$

இதனின்று

$a^6 \times a^8 = a^{6+8} = a^{14}$;

$x^5 \times x^{12} = x^{5+12} = x^{17}$ எனக் காணலாம்.

$a^m \times a^n$ என்னவென்று ஊகிக்கலாம்?

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ எனக் காண்கிறோம்.

$$2^5 \times 3^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3)$$
$$= 2^5 \times 3^2$$

2^5ன் அடிமானம் 2; 3^2ன் அடிமானம் 3. அடிமானங்கள் வேறுபடுவதால் அடுக்குப் பெருக்கல் விதி பொருந்தவில்லை. எனவே, ஒரே அடிமானமுள்ள அடுக்கு எண்களைப் பெருக்கும் பொழுதே அடுக்குப் பெருக்கல் விதி பொருந்தும் என அறிகிறோம்.

நினைவில் கொள்க :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

பயிற்சி 1-1

1. அடுக்குக் குறியீட்டு முறையில் எழுதுக :
   (அ) $4 \times 4 \times 4$ (ஆ) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
   (இ) $a \times a \times a \times a$ (ஈ) $x \times x \times x \ldots$ 10 காரணிகள்
   (உ) $p \times p \times p \times \ldots\ldots a$ காரணிகள்

2. விரித்தெழுதுக :
   (அ) 6^5 (ஆ) 3^8 (இ) a^5 (ஈ) x^{20} (உ) p^x

3. கீழ்க்கண்டவற்றின் பெருக்கற் பலன்களை அடுக்குக் குறியீடுகளில் காண்க.
   (அ) $5^6 \times 5^4$ (ஆ) $x^{20} \times$ [illegible] (இ) $p^{12} \times p^9$
   (ஈ) $3^4 \times 3^2 \times 3^3$ (உ) [illegible] $x^3 \times x^5$
   (ஊ) $a^x \times a^y$ (எ) $a^m \times a^n \times$ [illegible]
   (ஏ) $3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$ (ஐ) $a^p \times a$[illegible] $a^r \times a^s$
   (ஒ) $p^a \times p^b \times p^c \times p^d \times p^e$.

4. கீழ்க்கண்டவற்றின் பெருக்கற் பலன்களை அடுக்குக் குறியீடுகளில் தருக.
   (அ) $2^5 \times 3^4$ (ஆ) $7^5 \times 5^7$
   (இ) $2^5 \times 5^7 \times 2^3$ (ஈ) $a^3 \times b^4 \times a^2 \times b^3$
   (உ) $a^2 \times b^4 \times a^3 \times b^5 \times c^2 \times c^4$.

விடைகள்

3. (அ) 5^{10} (ஆ) x^{27} (இ) p^{21} (ஈ) 3^9
   (உ) x^{15} (ஊ) a^{x+y} (எ) a^{m+n+p} (ஏ) 3^{10}

4. (அ) $2^5 \times 3^4$ (ஆ) $7^5 \times 5^7$ (இ) $2^8 \times 5^7$
   (ஈ) a^5b^7 (உ) $a^5b^9c^6$.

1 - 2 அடுக்குகள்—வகுத்தல்

திருப்புதல் :

அடுக்கு எண்களை வகுப்பதுபற்றி இன்றைய பாடத்தில் கற்போம்.

$$2^5 \div 2^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \not{2} \times \not{2}}{\not{2} \times \not{2}}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{5-2}$$

$$3^7 \div 3^5 = \frac{3 \times 3 \times \not{3} \times \not{3} \times \not{3} \times \not{3} \times \not{3}}{\not{3} \times \not{3} \times \not{3} \times \not{3} \times \not{3}}$$

$$= 3 \times 3 = 3^2 = 3^{7-5}$$

$$a^6 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a}$$

$$= a \times a \times a = a^3 = a^{6-3}$$

இவற்றினின்று

1. வகுபடும் எண், வகுக்கும் எண் இரண்டும் ஒரே அடிமான முள்ளவை

2. வகுபடும் எண்களின் அடுக்குக் குறியீடு, வகுக்கும் எண்ணின் அடுக்குக் குறியீட்டைக் காட்டிலும் பெரியது:

3. அவ்வடுக்குக் குறியீடுகளின் வேறுபாடு வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு உறுப்பின் அடுக்கு எண் ஆகும் என்று காண்கிறோம்.

எனவே,

$m > n$ ஆனால் $a^m \div a^n = a^{m-n}$

என ஊகிக்கலாமல்லவா? $a = 0$ ஆனால். இவ்விதி பொருந்துமா என ஆராய்க.

$$2^5 \div 3^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3} = 2^5 \div 3^2$$

வேறு வேறு அடிமானங்களுள்ள எண்களை வகுக்கும் பொழுது அடுக்குக் குறியீட்டு வகுத்தல் விதி பொருந்தாது.

வகுக்கும் எண்ணின் அடுக்குக் குறியீடு வகுபடும் எண்ணின் அடுக்குக் குறியீட்டைக் காட்டிலும் பெரியதானால், ஈவு என்ன ஆகின்றது எனக் காண்போம்.

$$3^4 \div 3^6 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{6-4}}$$

$$a^3 \div a^7 = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^{7-3}}$$

எனவே $m < n$ ஆனால் $a^m \times a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ $(a \neq 0)$

நினைவில் கொள்க:

$$a^m \div a^n = a^{m-m} \ (m > n)$$
$$= \frac{1}{a^{n-m}} \ (m < n)$$
$$a \neq 0$$

பயிற்சி 1-2

1. சுருக்கி எழுதுக :

(அ) $7^{10} \div 7^{5}$ (ஆ) $a^{9} + a^{3}$ (இ) $x^{12} \div x^{7}$

(ஈ) $a^{p} + a^{q}; (p > q)$ (உ) $a^{3p} + a^{2q}; (p > q)$

(ஊ) $7^{5} \div 7^{10}$ (எ) $a^{3} \div a^{9}$ (ஏ) $x^{7} \div {}^{12}$

(ஐ) $a^{p} \div a^{q}\ (q > p)$ (ஒ) $a^{3m} \div a^{6n}\ (n < m)$

2. mக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொடுத்து $m = n$ ஆனால், வெவ்வேறு அடிமானங்களுக்கு $a^{m} \div a^{n}$ என்ன மதிப்புக் கொள்கிறது எனக் காண்க. aஇன் அடுக்குக் குறியீடு 0 ஆனால் என்ன ஊகிக்கலாம் ?

விடைகள்

1. (அ) 7^{5} (ஆ) a^{6} (இ) x^{5} (ஈ) a^{p-q} (ஊ) $\frac{1}{7^{5}}$

(எ) $\frac{1}{a^{6}}$ (ஏ) $\frac{1}{x^{5}}$ (ஐ) $\frac{1}{a^{q-p}}$ (ஒ) $\frac{1}{a^{6n-3m}}$ 2. 1.

1-3 அடுக்குகள்

பூச்சியம், குறை எண் அடுக்குகள்

$$5^{4} \div 5^{4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 1;\ 5^{4} \div 5^{4} = 5^{4-4} = 5^{0};$$

$$\therefore 5^{0} = 1.$$

$$a^{3} \div a^{3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1\ ;\quad a^{3} \div a^{3} = a^{3-3} = a^{0}\ ;$$

$$\therefore a^{0} = 1.$$

$$a^{m} \div a^{m} = \frac{a \times a \times a \ldots m \text{ காரணிகள்}}{a \times a \times a \ldots m \text{ காரணிகள்}} = 1;$$

$$a^{m} \div a^{m} = a^{m-m} = a^{0};\ \therefore a^{0} = 1.$$

இவற்றினின்று 0 அல்லாத எவ்வடிமானத்தினுடைய பூச்சியம் அடுக்கும் 1-க்குச் சமம் என அறிகிறோம்.

$a^{0} = 1$ $a \neq 0$

$3 - 7 = -4$; $5 - 2 = 5 + (-2)$ என அறிவோம்.

$a^3 \div a^7 = \dfrac{1}{a^4}$; $a^3 \div a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$; $\therefore \dfrac{1}{a^4} = a^{-4}$

$2^5 \div 2^2 = 2^{5-2} = 2^{5+(-2)} = 2^5 \times 2^{-2}$; $\therefore \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

மேலும், $1 \div a^3 = a^0 \div a^3 = a^{0-3} = a^{-3}$; $\dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

$1 \div a^n = a^0 \div a^n = a^{0-n} = a^{-n}$; $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$(5^3)^4 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{12} = 5^{3\times 4}$

$(3^5)^6 = 3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5 = 3^{30} = 3^{5\times 6}$

$(a^4)^2 = a^4 \times a^4 = a^8 = a^{4\times 2}$

$(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m = a^{3m} = a^{m\times 3}$

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times \ldots$ n காரணிகள் $= a^{m+m+\cdots m}$ காரணிகள்
$= a^{mn}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

பெருக்கற்பலனின் அடுக்குகளைப்பற்றி இப்பொழுது ஆராய்வோம்.

$6 = 2 \times 3$

$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 2^4 \times 3^4$

அதாவது $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

இதுபோலவே $(ab)^3 = ab \times ab \times ab$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3$

எனக் காணலாம்.

பொதுவாக $(ab)^m = a^m b^m$ ஆகும்.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

பயிற்சி 1 - 3

1. விரித்தெழுதுக :

(அ) $(2^5)^2$ (ஆ) $(7^2)^3$ (இ) $(a^3)^4$ (ஈ) $(x^2)^m$
(உ) $(p^a)^b$ (ஊ) $(xy)^4$ (எ) $(pq)^5$ (ஏ) $(2a)^4$
(ஐ) $(3p)^3$ (ஒ) $(abc)^6$

2. மிகை எண் அடுக்குகளாக மாற்றி எழுதுக :

(அ) 2^{-3} (ஆ) 3^{-4} (இ) 6^{-5} (ஈ) a^{-3}
(உ) p^{-6} (ஊ) x^{-m} (எ) a^{-7}

3. $(a^3)^2$. a^{3^2} இவற்றை விரித்துதெழுதுக. அவை சமமா எனக் காண்க. இதனின்று $(a^m)^n$, a^{mn} இவை ஒரே அடுக்குக் குறியீடுள்ளவையா என ஆய்க.

4. m, n இன் மதிப்புகள் 0, 1 அல்லாத மிகை எண்கள் எனின் m, nஇன் எம் மதிப்புகளுக்கு $(a^m)^n = a^{m^n}$ ஆகும்.

5. விரித்தெழுதி மிகை எண் அடுக்குகளாக மாற்றி அமைக்க.

(அ) $(a^3b^2)^4$ (ஆ) $(2a^2)^3$ (இ) $(4x^3)^5$
(ஈ) $(a^2b^4)^3$ (உ) $(p^6q^5)^4$ (ஊ) $(2a)^{-5}$
(எ) $(ab)^{-m}$ (ஏ) $(a^2b^2)^{-3}$

விடைகள்

1. 2^{10}, 7^6, a^{12}, x^{2m}, p^{ab}, x^4y^4, p^5q^5, $16a^4$, $27p^3$, $a^6b^6c^6$;

2. $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{3^4}$, $\frac{1}{6^5}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{p^6}$, $\frac{1}{x^m}$, $\frac{1}{a^7}$;

3. a^6, a^9; 4. 2 ; 5. $a^{12}b^8$, $8a^6$, $1024x^{15}$, a^6b^{12}, $p^{24}q^{20}$, $\frac{1}{32a^5}$, $\frac{1}{a^mb^m}$, $\frac{1}{a^6b^6}$.

2-1 பல்லுறுப்புக்கோவைகள் : வகைகள் (அ)

கீழ்க்கண்ட கோவைகளைக் கவனிக்கவும்.

1. $5x$
2. $-4x^2$
3. $3x^4 - 1$
4. $2x^2 + 4x^3 + 1$

$5x$ என்பதில் 5 என்பது xஇன் குணகம் எனப்படும்.

$-4x^2$ என்பதில் x^2 இன் குணகம் -4.

முதல், இரண்டாம் கோவைகளில் ஓருறுப்பே உள்ளதால், அவை ஓருறுப்புக் கோவைகளெனப்படும்.

மூன்றாம் கோவை ஈருறுப்புக் கோவையெனவும், நான்காம் கோவை மூவுறுப்புக் கோவையெனவும் கூறப்படும்.

பல ஓருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் சேர்க்கை பல்லுறுப்புக் கோவையை உருவாக்கும். பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ என்றவாறு குறிக்கப்படும். ஓருறுப்பு, ஈருறுப்பு, மூவுறுப்புக் கோவைகளும், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தனி வகைகளாகும்.

ஒரு கோவையில் X மாறி உறுப்புகளிலிருந்து, எவ்வெண் கணத்தில் மதிப்புகள் கொள்கின்றனவோ, அக் கோவை அவ்வெண் கணத்தின்மீது Xஇல் வரையறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $2m^3 - 4m^2 + 3$ என்ற கோவையில் m முழுக்கள் கணத்தில் மதிப்புகளைக் கொள்ளுமென்றால் அக்கோவை முழுக்கள் மீது mஇல் வரைறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். அனைத்து உறுப்புகளின் குணகங்களும் முழுக்களே எனக் காண்க. இதுபோலவே $3y^2 - 2y - 5$ என்ற கோவையில் y விகிதமுறு எண் கணத்தில் மதிப்புகளை ஏற்றால், $3y^2 - 2y - 5$ என்பது விகிதமுறு எண்கள் மீது y இல் வரையறுக்கப்பட்ட மூவுறுப்புக் கோவையாகும். உறுப்புகளின் குணகங்கள் முழுக்கள் ஆகும். முழுக்கள் விகிதமுறு எண் கணத்தின் உட்கணமாதலால், முழுக்களும் விகிதமுறு எண்களாகக் கொள்ளலாம்.

$a^0 = 1$ என்று அறிவீர்கள். 5 என்பதனை $5x^0$ என்று கருதலாமாதலால், (x, 0 ஐத் தவிர எம்மதிப்பு ஏற்றாலும்) $5x^0$ எப்பொழுதும் 5 என்ற மதிப்பையே காட்டும். எனவே 5 என்பது *மாறிலி*.

$3x^2 - 4x + 5$ என்பது xஇல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

xஇன் மிக உயர்ந்த அடுக்கு 2.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் *படி* 2 ஆகும்.

இதுபோலவே $8 - 3x + 2x^4$ என்பதன் படி 4.
$x + 3$இன் படி 1

5 என்பது xஇல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானால் அதன் படி என்னவென்று கூறலாம்?

கவனத்தில் கொள்க :

கோவை	பெயர்	படி
0	பூச்சியம்	கிடையாது
4	மாறிலிச் சார்பு	பூச்சியம்
$2x - 5$	கோட்டுச் சார்பு	1
$3x^2 + 2x - 7$	வர்க்கச் சார்பு	2
$2x^3 + 7$	கனச் சார்பு	3
$3x^5 - 4x^2 + 2x - 5$	பல்லுறுப்புச் சார்பு	5
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$	பல்லுறுப்புச் சார்பு	n

பயிற்சி 2-1

1. கீழ்க்கண்டவை எவ்வகைப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளெனக் கூறுக.

   (அ) $2x - 7$ (ஆ) $p^2 + 3p + 8$ (இ) $5a^2$
   (ஈ) $8x^3 + 2x - 9$ (உ) 9 (ஊ) $5 - 7x$
   (எ) -3 (ஏ) $7x^2 + 2$.

2. $5, -2x, a, 3x^3, 2a, -3p^4, x^2, xp$ இவற்றினின்று தேவையானவற்றை எடுத்து,

   (அ) xஇன் மீது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவை
   (ஆ) aஇன் மீது ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை
   (இ) pஇன் மீது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவை
   (ஈ) xஇன் மீது மிக அதிக உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கோவை ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படிகள் என்ன ?

   (அ) $2x - 3 + 7x^5 - x^6$
   (ஆ) $3x^8 + 7x^3 - 2x + 5$ (இ) $4x^2$
   (ஈ) $2x^4 + x^3 - 6x^7 + 3x^2 - 9$.

விடைகள்

3. (அ) 6 (ஆ) 8 (இ) 2 (ஈ) 7.

2-2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள்: வகைகள் (ஆ)

சென்ற பாடத்தில் ஒரு மாறியில் வரையறுக்கப்பட்ட கோவைகளைப் பற்றி அறிந்தோம். இப்பாடத்தில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட கோவைகளைக் காண்போம்.

1. $3x + 4y + 5$
2. $2x^2 + 4xy + y^2 + 3x - 4y + 7$
3. $x^3 + 3x^2 y^2 + 4x^2 + 5xy + 4x + 5y + 6$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 4x^2y + 2xyz$

மேற்கண்ட கோவைகளில், முதல் மூன்றும் x, y ஆகிய மாறிகளிலும், நான்காம் கோவை x, y, z ஆகிய மூன்று மாறிகளிலும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒரு மாறியில் வரையறுக்கப்பட்ட கோவையின் **படி** அம்மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு எனக் கண்டோம்.

$2x^2 - 3x + 4x^3 - 6$ என்பதன் படி 3.

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையின் படி மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதலாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$3x^2y^4$இன் படி $(2 + 4) = 6$
$-5x^3y^2 z^4$இன் படி $(3+2+4) = 9$
$6xy$இன் படி $(1 + 1) = 2$

பல மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் **படி**யைக் காண,

1. அதன் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் படிகளைக் காண்க.

2. அவற்றுள் எது மிக அதிகமானது எனக் காண்க. அதுவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் **படி**யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$2x^2 - 3xy + 4y^3 - 2x^2y^2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $2x^2$இன் படி 2; $-3xy$இன் படி 2; $4y^3$இன் படி 3; $-2x^2y^2$இன் படி 4. எனவே அப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 4 ஆகும்.

மெய்யெண் மதிப்புகளைக் கொள்கின்ற மாறிகளைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உருவாக்கினால், $x \times y = y \times x$ என்பது மெய்யாகும். எனவே xyயும் yxம் ஒரே இனமாகும். ஆனால் x^2y, xy^2 ஆகியவை இரண்டும் 3 படி கொண்டாலும், அவை வெவ்வேறு இனமாகும்.

$$x^2y = x \times x \times y; \quad xy^2 = x \times y \times y.$$

x^2y^3z, zy^3x^2, y^3x^2z ஆகியவை ஒரே இனத்தைச் சார்ந்தவை.

ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த உறுப்புகளையே கூட்டிச் சுருக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு :

சுருக்குக : $3x^2 + 4xy - 5y^2 - 7x^2 + 4x + 6yx + 8y^2 - 5xy - 3x + 7y$

$$= (3 - 7)\,x^2 + (4 + 6 - 5)\,xy + (-5 + 8)\,y^2 + (4 - 3)\,x + 7y$$

$$= -4x^2 + 5\,xy + 3y^2 + x + 7y.$$

பயிற்சி 2-2

1. படிகளைக் காண்க.

(அ) $3x^2y^3$ (ஆ) $-5xy^5z^6$ (இ) $4x^3y^2z^5$
(ஈ) $2x^2y^7z$ (உ) $-3xyz.$

2. எவை ஓரின உறுப்புகள் எனக் கூறுக.

(அ) $x^3y^2,\ y^3x^2$ (ஆ) $-3x^2y^4,\ -5y^4x^2$
(இ) $5x^3y^2z^4,\ y^2x^4z^4$ (ஈ) $8x^4yz^2,\ 6z^2x^4y$
(உ) $2xy^3z^2,\ -3xz^2y^3.$

3. கோவைகளின் படிகளைக் காண்க.

(அ) $4x^3 - 3x^2y^2 + 2y^3 - 4xy^4$
(ஆ) $7 - 3xy + 2y^2 - x^3y$
(இ) $3x^2 - 2xy + 4xyz - 2x^3y^2z$
(ஈ) $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$

4. சுருக்குக :

(அ) $2x^2 + 5xy - 4y^2 + 3x^2 - 2y^2 + 5x - 3xy + 4y^2 - 2x + 7$

(ஆ) $3x^3 + 5x^2y - 5xy^2 + 8y^3 - 4xy^2 - 6y^3 + 2x^3 + 3x^2y$

(இ) $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - 2xy + y^2 + x^4 - 2xy + 2y^2$

(ஈ) $x^3 + x^2y - xy^2 + 8y^3 - 4x^2y - 3xy^2 - 7y^3 + 3x^3$

விடைகள்

(1) 5, 12, 10, 10, 3 (2) ஆ, ஈ, உ

(3) 5, 4, 6, 3;

(4) $5x^2 + 2xy - 2y^2 + 3x + 7$,
$5x^3 + 8x^2y - 9xy^2 + 2y^3$,
$x^4 + 4y^2 - 2xy$, $4x^3 - 3x^2y - 4xy^2 + y^3$

3. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : மதிப்பிடல்

நினைவிற்குக் கொண்டு வரவும்.

$3 + 5 = 8$; $2 \times 3 = 6$; $(+2)(-3) = -6$;

$(-2)(-3) = +6$; $-5 + 3 = -2$;

$-5 + (-3) = -8$.

$a = 3$ என்றால்,

$$a + 5 = 3 + 5 = 8$$
$$2a = 2 \times 3 = 6$$
$$-2a = -2 \times 3 = -6$$
$$-5 + a = -5 + 3 = -2$$
$$-5 - a = -5 - 3 = -8$$
$$a^2 = a \times a = 3 \times 3 = 9$$
$$4a^2 = 4 \times a \times a = 4 \times 3 \times 3 = 36$$
$$-6a^2 = -6 \times 3 \times 3 = -54$$
$$a^3 = a \times a \times a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$2a^2 + 3a - 8 = 2(3)^2 + 3(3) - 8$$
$$= 2 \times 9 + 3 \times 3 - 8$$
$$= 18 + 9 - 8 = 19$$

$a = -5$ என்றால்,

$$a + 5 = -5 + 5 = 0$$
$$3a = 3 \times (-5) = -15$$
$$-3a = -3 \times (-5) = +15$$
$$a^2 = (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$
$$5a^2 = 5 \times (-5) \times (-5) = 5 \times 25 = 125$$
$$-2a^2 = (-2)(-5)(-5) = -2 \times 25 = -50$$
$$a^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$

$$3a^2 - 2a + 5 = 3(-5)^2 - 2(-5) + 5$$
$$= 3 \times 25 - 2 \times (-5) + 5$$
$$= 75 + 10 + 5 = 90.$$

இவ்வாறு ஓர் எண் கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை மதிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\left\{ \cdot 5, \sqrt{2}, \frac{2}{3} \right\}$ என்ற எண் கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $6a^2 - 5a + 3$ஐ மதிப்பிடுவோம்.

$a = \cdot 5$ ஆனால், $6a^2 - 5a + 3 = 6(\cdot 5)^2 - 5(\cdot 5) + 3$
$$= 6 \times \cdot 25 - 5 \times \cdot 5 + 3$$
$$= 1\cdot 5 - 2\cdot 5 + 3 = 2$$

$a = \sqrt{2}$ ஆனால், $6a^2 - 5a + 3 = 6(\sqrt{2})^2 - 5(\sqrt{2}) + 3$
$$= 6 \times 2 - 5\sqrt{2} + 3$$
$$= 15 - 5\sqrt{2} \qquad (\sqrt{2}^2 = 2)$$

$a = \frac{2}{3}$ ஆனால், $6a^2 - 5a + 3 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{3}\right) + 3$
$$= 6 \times \frac{4}{9} - 5 \times \frac{2}{3} + 3$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{10}{3} + 3 = \frac{7}{3}$$

2. $x = 2, y = -1$ ஆனால்,

$$3x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 4y^4 + 2x^2y$$
$$-3xy^2 + 4x + 5y + 7$$

$= 3(2)^4 - 4(2)^3(-1) + 2(2)^2(-1)^2 - 3(2)(-1)^3$
$+ 4(-1)^4 + 2(2)^2(-1) - 3(2)(-1)^2 + 4(2)$
$+ 5(-1) + 7$
$= 3\times 16 - 4(8)(-1) + 2(4)(1) - 3(2)(-1)$
$+ 4(1) + 2(4)(-1) - 3(2)(1) + 4(2)$
$+ 5(-1) + 7$
$= 48 + 32 + 8 + 6 + 4 - 8 - 6 + 8 - 5 + 7$
$= 94.$

பயிற்சி 3

1. கீழே சில பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றையொட்டி கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளைப் பிரதியிட்டுக் கோவைகளை மதிப்பிடுக.

(அ) $3x^2 - 5x + 6$ $\{2, -2, 1, -1, 0\}$

(ஆ) $2x^3 - 4x^2 + 3x - 7$ $\{0, -1, 3, -2\}$

(இ) $x^4 + x^2 + 2$ $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

(ஈ) $3x^2 - 7x + 8$ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right\}$

2. $x = 3$, $y = -2$ எனப் பிரதியிட்டு கீழ்க்கண்ட கோவைகளை மதிப்பிடுக.

(அ) $5x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 2y + 3$

(ஆ) $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + 5y^3 - 2x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x - 5y + 2$

(இ) $3x^3 + 5xy^2 - 2x^2y + 5x^2 - 7y^2 + 4x - 2$

(ஈ) $x^3 + y^3$

விடைகள்

1. (அ) 8, 28, 4, 14, 6

(ஆ) -7, -16, 20, -45

(இ) 8, 32, 14, $\frac{28}{9}$

(ஈ) $\frac{21}{4}$, 6, $\frac{71}{16}$, $\frac{37}{4}$

2. 56, 112, 204, 19

4-1 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : கூட்டல்

(அ) $3 + 5 = 8$; $5 - 3 = 2$; $3 - 5 = -2$;
$3 - 5 = -8$ என்று அறிவீர்கள். இதுபோலவே
$3a + 5a = 8a$; $5a - 3a = 2a$; $3a - 5a = -2a$;
$-3a - 5a = -8a$.

$3, 5, -5, -3, 8, -8, 2, -2$ என்பன உறுப்புகளின் குணகங்கள் எனப்படும்.

மேலும் $3a^2 + 5a^2 = 8a^2$; $5a^2 - 3a^2 = 2a^2$;
$3a^2 - 5a^2 = -2a^2$; $-3a^2 - 5a^2 = -8a^2$

ஒரு மாறியில் வரையறுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளைச் சுருக்கும்பொழுது, எண்கள், ஓரடுக்கு உறுப்புகள், ஈரடுக்கு உறுப்புகள் என்று தனித்தனியாகப் பிரித்து, அவற்றின் குணகங்களைக் கூட்டக் குறிப்பிட்ட அடுக்கு உறுப்பின் குணகம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$3a^2 - 8 + 2a^2 - 7a + 9 - 4a^2 + 10a - 6 + 5a$$
$$= [3a^2 + 2a^2 - 4a^2] + [-7a + 10a + 5a] + [-8 + 9 - 6]$$
$$= (3 + 2 - 4)\,a^2 + (-7 + 10 + 5)\,a + (-8 + 9 - 6)$$
$$= a^2 + 8a - 5$$

$a^2 + 8a \neq 9a$; $a^2 + 8a \neq 9a^2$. a-க்கு மதிப்புகள் கொடுத்து இக் கூற்றுகளைச் சரிபார்க்கவும். $a^2 + 8a = a^2 + 8a$.

(ஆ) இப்பொழுது, இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுவோம்.

1. $(2x^2 + 3x - 5) + (5x^2 - 4x + 7)$
$= (2x^2 + 5x^2) + (3x - 4x) + (-5 + 7)$
$= (2 + 5)\,x^2 + (3 - 4)\,x + (-5 + 7)$
$= 7x^2 - x + 2.$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 5 \\ 5x^2 - 4x + 7 \\ \hline 7x^2 - x + 2 \\ \hline \end{array}$$

2. $(5x^3 - 6x^2 + 8x - 9) + (3x^4 - 7x^3 + 9x - 8)$

$= 3x^4 + (5x^3 - 7x^3) + (-6x^2) + (8x + 9x) + (-9 - 8)$

$= 3x^4 + (5 - 7)x^3 + (-6)x^2 + (8 + 9)x + (-9 - 8)$

$= 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 17x - 17$

$$\begin{array}{r} 0x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8x - 9 \\ 3x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 9x - 8 \\ \hline 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 17x - 17 \\ \hline \end{array}$$

கவனிக்க : முதல் கோவையில் x^4 கொண்ட உறுப்பு இல்லை. எனவே அதனை $0x^4$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இரண்டாம் கோவையில் x^2 கொண்ட உறுப்பு இல்லை. எனவே அதன் குணகத்தினை 0 எனக் கொண்டு அவ்வுறுப்பினை $0x^2$ என எழுதுகிறோம். இவ்வாறு செய்வதன் மூலம், இரு கோவைகளிலும் சம உறுப்புகளுள்ளவாறு, கோவைகளை மாற்ற இயலும்.

3. கூட்டுக : $4x - 8x^2 + 7x^4 - 5$; $2x^4 - 5x^3 + 9x$: $3x^2 - 7x - 8x^3 + 9$

இவற்றினை அடுக்குக் குறிகளின் இறங்கு வரிசைகளில் அமைத்துப் பிறகு கூட்ட முற்படுவோம்.

$$\begin{array}{l} 7x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 4x - 5 \\ 2x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 9x + 0 \\ 0x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7x + 9 \\ \hline \end{array}$$

$(7 + 2 + 0)x^4 + (0 - 5 - 8)x^3 + (-8 + 0 + 3)x^2 + (4 + 9 - 7)x + (-5 + 0 + 9)$

$= 9x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 6x + 4.$

பயிற்சி 4-1

1. (அ) கோவைகளை அடுக்குக் குறிகளின் இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

(i) $2x^2 - 7x^3 + 3x - 8$

(ii) $8 - 2x^2 + 9x - 7x^4 + 2x^3$

(iii) $3x + 5x^6 - 7x^2 + 5$

(iv) $3x^2 + 2x - 7x^3 + 6$

(ஆ) கோவைகளை அடுக்குக் குறிகளின் ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

(i) $2x^3 - 4x^2 - 8 + 3x$
(ii) $4x^2 - 8x^3 + 3x + 8$
(iii) $5x^2 + 7 - x^3 + 8x$
(iv) $3 - 2x^3 + 5x^2 - 7x$

2. உறுப்புகளை, இனப்படுத்திச் சுருக்குக.

(அ) $2a^2 + 3a + 5a^2 - 2a + 5 - 4a^2$
(ஆ) $2x^3 - 5 + 4x^2 - 3x^3 + 5x - 3x^2 + x^3 - 7$
(இ) $5x^3 - 7x^2 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6x^3 + 2x^2$
$-5x + 8$
(ஈ) $3a^3 - 4a - 5a^2 - 2a^3 + 8 - 6a + 10a^2 + 4a$

3. கீழ்க்கண்ட கோவைகளைக் கூட்டுக.

(அ) $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 8), (2x^3 - 5x^2 + 4x - 6)$
(ஆ) $(2x^3 - 6x^2 + 3x - 4), (5x^3 + 2x^2 - 5x + 8)$
(இ) $(3x^2+6x-4), (2x^2+8x-9), (12-4x-7x^2)$
(ஈ) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7), (5 + 4x + 2x^3),$
$(-3x^3 + 4x^2 + 3x + 8)$
(உ) $(2x^3+4x-5), (3x^2-5x+2), (4x^3-2x^2+3)$

4. $5x - 9x^2 + 2x^3 - 7$, $4x^2 - 3x^3 - 5 + 6x$; $3 + ax^2 + 9x - 2x^3$ என்ற கோவைகளில் கூட்டலில் x^2இன் குணகம் 1 என்றால், aஇன் மதிப்பு என்ன?

5. $ax^3 - 8x^2 + 9x - 3$, $4x^3 + bx^2 + 6x + 9$, $2x^3 + 3x^2 - cx + d$ என்ற கோவைகளின் கூடுதற் பலன் $4x^3 + 3x^2 - 4x + 8$ என்றால் a, b, c, d ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

2. (அ) $3a^2 + a + 5$ (ஆ) $x^2 + 5x - 12$,
(இ) x^3-10x^2-x+8 (ஈ) $a^3 + 5a^2 - 6a + 8$
3. (அ) $7x^3-x^2-2x+2$ (ஆ) $7x^3-4x^2-2+x4$
(இ) $-2x^2 + 10x - 1$ (ஈ) $x^3+x^2+11x+6$
(உ) $6x^3 + x^2 - x$
4. 6 5. $-2, 8, 19, 2.$

4-2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : பூச்சியம், எதிர்பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(அ) நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

$$8 + 0 = 8 ; \quad -5 + 0 = -5 ; \quad a + 0 = a.$$

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றின் குணகமும் 0 ஆனால், அது பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். அதனை $0(x)$ என எழுதுவோம்.

உதாரணம் : $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ என்பது 3 படியுள்ள ஒரு பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை.

எண்கணத்தில் 0 இன் பண்புகள் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு உண்டு.

$$(8x^2 + 3x + 5) + (0x^2 + 0x + 0) = 8x^2 + 3x + 5$$

$$P(x) + 0(x) = P(x)$$

எனவே பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவை கூட்டல் சமனியாகும்.

(ஆ) $-5 + 5 = 0$; $8 + (-8) = 0$; $9 + (-9) = 0$; $a + (-a) = 0$ என்று நாம் அறிவோம். இவற்றில் $+5$ இன் கூட்டல் தலைகீழி -5 என்றும், 8 இன் கூட்டல் தலைகீழி -8 என்றும், -9 இன் கூட்டல் தலைகீழி $+9$ என்றும் a இன் கூட்டல் தலைகீழி $-a$ என்றும், $-a$ இன் கூட்டல் தலைகீழி $+a$ என்றும் ஏற்கனவே எண்கணத்தில் படித்துள்ளோம். இதுபோல, பல்லுறுப்புக் கோவையில் கூட்டல் தலைகீழியினைக் காண்போம்.

$F(x) = 5x^2 + 8x - 9$ இன் கூட்டல் தலைகீழி $ax^2 + bx + c$ என்போம்.

$$(5x^2 + 8x - 9) + (ax^2 + bx + c) = 0(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

$$\therefore \quad (5 + a)x^2 + (8 + b)x + (-9 + c) = 0x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

$$\therefore \quad 5 + a = 0; \; a = -5$$

$$8 + b = 0; \; b = -8$$

$$-9 + c = 0; \; c = 9$$

$$\begin{array}{rr} 5x^2 + & 8x - 9 \\ -5x^2 + & (-8)x + 9 \\ \hline 0x^2 + & 0x + 0 \\ \hline \end{array}$$

எனவே $5x^2 + 8x - 9$ இன் கூட்டல் தலைகீழி $-5x^2 - 8x + 9$.
பொதுவாக $P(x) : a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ என்றால் அதன் கூட்டல் தலைகீழி

$$-P(x) : \quad -a_0 - a_1x - a_2x^2 \ldots - a_nx^n$$ ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பின் குணகத்தின் குறியினை மாற்றப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கூட்டல் தலைகீழி கிடைக்கும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் கூட்டல் தலைகீழி **எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவை** யெனவும் கூறப்படும்.

சரிபார்க்க : $P(x) + (-P(x)) = 0\,(x)$
$-P(x) + P(x) = 0\,(x)$

பயிற்சி 4-2

எதிர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காண்க.

1. $4x^2 - 5x + 7$;
2. $3x^2 - 5x^2 + 6x - 9$;
3. $4x^3 - 3x^2 - 6x - 7$
4. $2x^3 + 3x + 4x + 5$;
5. $8x^2 - 9x + 6$.

விடைகள்

(1) $-4x^2 + 5x - 7$
(2) $-3x^3 + 5x^2 - 6x + 9$
(3) $-4x^3 + 3x^2 + 6x - 7$
(3) $-2x^3 - 3x^2 - 4x - 5$
(5) $-8x^2 + 9x - 6$

4 - 3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள்: கழித்தல்

மெய்யெண் கணத்தில் $8 - 8 = 8 + (-8)$ என்று கண்டீர்கள். அதாவது ஓர் எண்ணினின்று மற்றோர் எண்ணைக் கழிப்பதும், முதலெண்ணோடு இரண்டாம் எண்ணின் கூட்டல் தலைகீழியினைக் கூட்டுவதும் ஒன்றே.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $P(x) : \quad 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x - 6$
   $Q(x) : \quad x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 9$ என்றால்

$P(x) - Q(x)$ என்ன ?

$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$

$-Q(x) : \quad -x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 9$

எனவே $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$

$$= (3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x - 6) + (-x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 9)$$

$$= (3 - 1)x^4 + (-5 - 4)x^3 + (7 + 8)x^2 + (-9 - 5)x + (-6 + 9)$$

$$= 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 14x + 3$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x - 6 \\ -x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 9 \\ \hline 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 14x + 3 \\ \hline \end{array}$$

2. கழிக்க : $P(x) : 5x^4 + 3x^2 - 7x + 9$

$Q(x) : 2x^3 - 6x - 11$

$$\begin{array}{rl} P(x): & 5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 7x + 9 \\ -Q(x): & 0x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 6x + 11 \\ \hline P(x) + (-Q(x)): & 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 20 \\ \hline \end{array}$$

எவ்வெவ் அடுக்குக்குறி உறுப்புகளுக்கு 0 குணகம் கொண்டுள்ளோம் எனக் கவனிக்க.

பயிற்சி 4 - 3

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளில் முதல் கோவையினின்று இரண்டாம் கோவையினைக் கழிக்க.

(அ) $(4x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 8x + 6)$; $(2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 5)$

(ஆ) $(5x^3 + 8x^2 + 9x + 5$; $(3x^3 + 6x + 2)$

(இ) $(5x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 5)$; $(2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5)$

(ஈ) $(4x^3 - 5x^2 - 6x - 9)$; $(3x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$

(உ) $(2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 6)$; $(3x^4 - 5x^2 + 7x - 6)$

(ஊ) $(5x^4 - 4x^3 - 5x + 7)$; $(3x^4 - 5x^2 + 7x + 6)$

2. $(8x^4 - 5x^3 + ax^2 + 9)$ இலிருந்து $(3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 9x - 5)$ ஐக் கழிக்க x^2 இன் குணகம் 8 எனில் a இன் மதிப்பு என்ன ?

3. $(ax^4 - 4x^3 + bx^2 + 2x + c)$ இலிருந்து $(3x^4 - px^3 - 5x^2 + qx - 4)$ ஐக் கழிக்கக் கிடைக்கும் கோவை $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 7x - 9$ எனில், a, p, b, q, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

(1) (அ) $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$
(ஆ) $2x^3 + 8x^2 + 3x + 3$
(இ) $3x^4 + 3x^3$ (ஈ) $x^3 - 7x^2 - 9x - 13$
(உ) $-x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 7x + 12$
(ஊ) $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 12x + 1$.

(2) 2 (3) 5, 9, −2, 9, −13

4 - 4 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : கூட்டலும், கழித்தலும்

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $P(x)$: $2x^3 - 7x^2 + 9x - 3$; $Q(x)$: $4x^3 + 3x^2 - 7x + 6$; $R(x)$: $9x^2 - 3x + 5$ என்றால்,
(அ) $P(x) + Q(x) + R(x)$
(ஆ) $P(x) + Q(x) - R(x)$
(இ) $P(x) - Q(x) + R(x)$
(ஈ) $Q(x) + R(x) - P(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(அ)
$$\begin{aligned} P(x) &: 2x^3 - 7x^2 + 9x - 3 \\ Q(x) &: 4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 \\ R(x) &: 0x^3 + 9x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$
$$\therefore P(x) + Q(x) + R(x) : 6x^3 + 5x^2 - x + 8$$

(ஆ)
$$\begin{aligned} P(x) &: 2x^3 - 7x^2 + 9x - 3 \\ +Q(x) &: 4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 \\ -R(x) &: 0x^3 - 9x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$
$$\therefore P(x) + Q(x) - R(x) : 6x^3 - 13x^2 + 5x - 2$$

(இ)
$$\begin{aligned} P(x) &: 2x^3 - 7x^2 + 9x - 3 \\ -Q(x) &: -4x^3 - 3x^2 + 7x - 6 \\ R(x) &: 0x^3 + 9x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$
$$\therefore P(x) - Q(x) + R(x) : -2x^3 - x^2 + 13x - 4$$

(ஈ)
$$\begin{aligned} Q(x) &: 4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 \\ R(x) &: 0x^3 + 9x^2 - 3x + 5 \\ -P(x) &: -2x^3 + 7x^2 - 9x + 3 \end{aligned}$$
$$Q(x) + R(x) - P(x) : 2x^3 + 19x^2 - 19x + 14$$

2. $4x^3 - 7x^2 - 2x + 9$ உடன் எதைக் கூட்ட $6x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ கிடைக்கும்.

$P(x)$: $4x^3 - 7x^2 - 2x + 9$; $R(x)$: $6x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ என்றும் கூட்டவேண்டிய கோவை $Q(x)$ என்றும் கொண்டால்,

$$P(x) + Q(x) = R(x)$$

$$\therefore \quad Q(x) = R(x) - P(x)$$

$$\begin{aligned} R(x) : &\quad 6x^3 - 3x^2 + 9x - 8 \\ -P(x) : &\quad -4x^3 + 7x^2 + 2x - 9 \\ \hline R(x) - P(x) : &\quad 2x^3 + 4x^2 + 11x - 17 \end{aligned}$$

$\therefore$ கூட்டவேண்டிய கோவை : $2x^3 + 4x^2 + 11x - 17$.

3. $7x^2 - 3x + 9$ இலிருந்து எதைக் கழிக்க $5x^3 + 6x - 4$ கிடைக்கும்?

$P(x)$: $7x^2 - 3x + 9$; $R(x)$: $5x^3 + 6x - 4$

கழிக்கவேண்டிய கோவை $Q(x)$ எனில் $P(x) - Q(x) = R(x)$

$$\therefore \quad -Q(x) = R(x) - P(x)$$

அல்லது $Q(x) = P(x) - R(x)$

$$\begin{aligned} P(x) : &\quad 0x^3 + 7x^2 - 3x + 9 \\ -R(x) : &\quad -5x^3 + 0x^2 - 6x + 4 \\ \hline P(x) - R(x) : &\quad -5x^3 + 7x^2 - 9x + 13 \end{aligned}$$

கழிக்கவேண்டிய கோவை : $-5x^3 + 7x^2 - 9x + 13$.

பயிற்சி 4 - 4

1. சுருக்குக :

(அ) $(2x^3 + 4x^2 + 5x + 6) + (x^3 + 3x^2 + 2x + 1) + (3x^3 - x^2 + x - 4)$

(ஆ) $(x^3 - 4x^2 + 4x - 2) + (2x^3 - 3x^2 - 2x - 1) + (x^3 - x^2 - x + 1)$

(இ) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1) + (x^3 - 2x^2 - 5x + 1) - (2x^3 - x^2 + x - 1)$

(ஈ) $(3x^3 - 5x^2 + 4x - 1) + (4x^3 - 2x^2 + 5x - 2) - (5x^3 - 3x^2 - x - 2)$

(உ) $(4x^3 - x^2 - x - 2) - (x^3 + 2x^2 - 2x - 3)$
$+ (x^3 - 2x^2 - 2x - 1)$

(ஊ) $(5x^3 - 3x^2 + 2x - 1) - (x^3 - 2x^2 - 5x + 2)$
$+ (x^3 + x^2 + x + 1)$

(எ) $(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) - (x^3 - x^2 - x - 1)$
$- (2x^3 - 2x^2 + x - 1)$

(ஏ) $(2x^3 - 3x^2 - x + 2) - (3x^3 - 2x^2 + x - 2)$
$- (2x^3 - 5x^2 + x + 5)$

(ஐ) $(3x^3 - x - 2) - (x^2 - 5x + 4) + (4x^4 - 3x + 1)$

(ஒ) $(5x^3 - 4x^2 + 4) - (3x^4 - x - 2)$
$- (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

2. கீழ்க்கண்ட கணக்குகளில், முதல் கோவையினின்று எக்கோவையைக் கழிக்க இரண்டாம் கோவை கிடைக்கும் ?

(அ) $(x^3 + 2x^2 - x - 4)$, $(2x^3 + 5x^2 - 2x - 1)$

(ஆ) $(2x^3 - 3x^2 + x - 1)$, $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 2)$

(இ) $(3x^3 - 4x^2 - x - 1)$, $(2x^3 - x^2 + 5x - 2)$

(ஈ) $(x^4 - x^2 - x + 1)$, $(x^3 + x^2 + x + 1)$

(உ) $(2x^4 - 3x^2 + x - 1)$, $(2x^4 - x^2 - x + 1)$

3. கீழ்க்கண்ட கணக்குகளில் முதல் கோவையினின்று எக்கோவையைக் கூட்ட இரண்டாம் கோவை கிடைக்கும் ?

(அ) $(x^3 + 2x^2 - x - 4)$, $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 1)$

(ஆ) $(2x^3 + 3x^2 - x - 1)$, $(3x^3 - 4x^2 - 2x + 2)$

(இ) $(3x^3 - 4x^2 + x - 1)$, $(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$

(ஈ) $(x^4 - x^2 + x - 1)$, $(x^3 - x^2 - x + 1)$

(உ) $(2x^4 + 3x^2 - x + 1)$, $(2x^4 - x^2 + x - 1)$

4. கீழ்க்கண்ட கணக்குகளில் xஇன் குணகத்தைக் காண்க.

(அ) $(x^2 + 2x + 1) + (x^3 - x^2 + 1)$
$+ (x^2 + x^3 + 2x + 1)$

(ஆ) $(2x^3 - x^2 + 1) + (x^3 - 2x^2 + 1) + (x^2 + x + 1)$

(இ) $(x^3 - 3x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 2x^2 - x - 1)$
$-(2x^3 - x^2 - x + 1)$

(ஈ) $(2x^3 + 3x^2 - x + 1) - (x^3 - x^2 - x + 1)$
$-(2x^3 - 2x^2 + x - 1)$

விடைகள்

(1) (அ) $6x^3+6x^2+8x+3$ (ஆ) $4x^3-8x^2+x-2$
(இ) $x^4-4x^3+x^2-7x+3$ (ஈ) $2x^3-4x^2+10x-1$
(உ) $4x^3-5x^2-x$ (ஊ) $5x^3+8x-2$
(எ) $-2x^3+5x^2-2x-1$ (ஏ) $-3x^3+4x^2-3x-1$
(ஐ) $4x^4+3x^3-x^2+x-5$ (ஒ) $-3x^4+4x^3-x^2+x+5$

(2) (அ) x^3-3x^2+x-3 (ஆ) $-x^3+x^2-x+1$
(இ) x^3-3x^2-6x+1 (ஈ) $x^4-x^3-2x^2-2x$
(உ) $-2x^2+2x-2$

(3) (அ) x^3+3x^2-x+5 (ஆ) x^3-7x^2-x+3
(இ) $-x^3+5x^2-6x+3$ (ஈ) $-x^4+x^3-2x+2$
(உ) $-4x^2+2x-2$

(4) (அ) 4 (ஆ) 1 (இ) 0 (ஈ) -1.

5-1 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : எண்ணால் பெருக்கல்

$P(x)$: $3x^2-4x+2$ என்றால், $P(x)+P(x)$, $P(x)+P(x)+P(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$P(x)$இன் குணகங்கட்கும், $P(x)+P(x)$, $P(x)+P(x)+P(x)$ ஆகியவற்றின் குணகங்கட்கும் இடையே ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா ?

$$P(x)+P(x) = (3x^2-4x+2)+(3x^2-4x+2)$$
$$= 6x^2-8x+4$$

$$P(x)+P(x)+P(x) = (3x^2-4x+2)+(3x^2-4x+2)$$
$$+(3x^2-4x+2) = 9x^2-12x+6$$

எனவே $P(x)+P(x)$ என்பது $P(x)$ஐ 2ஆல் பெருக்கி வரும் கோவையாகவும். $P(x)+P(x)+P(x)$ என்பது $P(x)$ஐ 3ஆல் பெருக்கி வரும் கோவையாகவும் உள்ளதைக் காண்கிறோம்.

எனவே $2P(x) = P(x)+P(x)$, $3P(x) = P(x)+P(x)+P(x)$

பொதுவாக $mP(x) = P(x)+P(x)+P(x)+\ldots$ m முறை என வரையறுப்போம்.

$m\,P(x)$ என்பது $P(x)$இன் ஒவ்வோர் உறுப்பின் குணகத்தையும் mஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.

இப்பண்பினை எம்மெய்யெண்ணாலும் பெருக்கப் பயன் படுத்தலாம்.

எனவே, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு மெய் யெண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் கொடுக்கப்பட்ட கோவையில் அதன் ஒத்த உறுப்பினை அம்மெய்யெண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$P(x): \; 3x^4 - 5x^2 + 7x - 9$ ஆனால் $5\,P(x)$, $\frac{4}{7}P(x)$, $-3P(x)$, $\sqrt{2}\,P(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$5\,P(x): \; 5 \times 3x^4 + 5 \times (-5x^2) + 5 \times 7x + 5 \times (-9)$$
$$= 15x^4 - 25x^2 + 35x - 45$$

$$\frac{4}{7}P(x): \; \frac{4}{7} \times 3x^4 + \frac{4}{7} \times (-5x^2) + \frac{4}{7} \times 7x + \frac{4}{7} \times (-9)$$
$$= \frac{12}{7}x^4 - \frac{20}{7}x^2 + 4x - \frac{36}{7}$$

$$-3\,P(x) = (-3) \times 3x^4 + (-3)(-5x^2) + (-3)\,7x + (-3)(-9)$$
$$= -9x^4 + 15x^2 - 21x + 27$$

$$\sqrt{2}\,P(x) = \sqrt{2} \times 3x^4 + \sqrt{2}\,(-5x^2) + \sqrt{2}\,(7x) \quad \sqrt{2} + (-9)$$
$$= 3\sqrt{2}\,x^4 - 5\sqrt{2}\,x^2 + 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}$$

பயிற்சி 5 - 1

கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளை அவற்றிற்கெதிரிலுள்ள எண்களால் பெருக்கவும்.

1. $2x^2 - 5x + 7 \qquad \left(3, -5, \sqrt{5}, \frac{1}{4}\right)$
2. $x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \qquad \left(2, -7, -\frac{3}{4}, \sqrt{2}\right)$
3. $5 - 7x + x^2 - 2x^3 \qquad \left(-6, \frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, -\frac{5}{2}\right)$

4. $4x^3 - 5x^2 - 7x + 9$ $\left(3, \frac{3}{7}, \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

5. $\frac{2}{7}x^3 - \frac{3}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{5}{7}$ $\left(7, \frac{7}{2}, -\frac{7}{3}, \frac{7}{5}\right)$

6. மேற்கண்ட கோவைகளை 1ஆல் பெருக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பெருக்கலில் 1 என்ன பண்பினைக் கொண்டுள்ளது ?

விடைகள்

1. $6x^2 - 15x + 21$; $-10x^2 + 25x - 35$;
$2\sqrt{5}x^2 - 5\sqrt{5}x + 7\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$

2. $2x^3 - 10x^2 + 6x - 4$; $-7x^3 + 35x^2 - 21x + 14$;
$-\frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}$;
$\sqrt{2}x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$

3. $-30 + 42x - 6x^2 + 12x^3$;
$2 - \frac{14}{5}x + \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^3$;
$\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{5}x + \frac{\sqrt{2}}{5}x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$;
$-\frac{25}{2} + \frac{35}{2}x - \frac{5}{2}x^2 + 5x^3$

4. $12x^3 - 15x^2 - 21x + 27$;
$\frac{12}{7}x^3 - \frac{15}{7}x^2 - 3x + \frac{27}{7}$;
$2\sqrt{5}x^3 - \frac{5\sqrt{5}}{2}x^2 - \frac{7\sqrt{5}}{2}x + \frac{9\sqrt{5}}{2}$;
$-14x^3 + \frac{35}{2}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{63}{2}$.

5. $2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$; $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$;
$-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$;
$\frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 1$.

6. பெருக்கல் சமனி.

5-2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : ஒருறுப்பால் பெருக்கல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க.

$x^2 \times x^3 = x^5$; $x \times x^3 = x^4$; $5 \times x^2 = 5x^2$

இப்பாடத்தில் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்க அறிந்து கொள்வோம்.

$P(x) : 3x^2 - 4x + 7$ என்ற கோவையினை $2, x, x^2, x^3, -x^2, +3x^2, -7x^3$ ஆகியவற்றால் பெருக்குக.

$$2 \times P(x) = 2 \times (3x^2 - 4x + 7) = 6x^2 - 8x + 14.$$

$$\begin{aligned} x \times P(x) &= x \times (3x^2 - 4x + 7) \\ &= x \times 3x^2 + x(-4x) + x(7) \\ &= 3x^3 - 4x^2 + 7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \times P(x) &= x^2 \times (3x^2 - 4x + 7 \\ &= x^2 \times 3x^2 + x^2(-4x) + x^2(7) \\ &= 3x^4 - 4x^3 + 7x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 \times P(x) &= x^3 \times (3x^2 - 4x + 7) \\ &= x^3 \times 3x^2 + x^3(-4x) + x^3(7) \\ &= 3x^5 - 4x^4 + 7x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 \times P(x) &= -x^2 \times (3x^2 - 4x + 7) \\ &= (-x^2) \times 3x^2 + (-x^2)(-4x) + (-x^2)(7) \\ &= -3x^4 + 4x^3 - 7x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 \times P(x) &= 3x^2 \times (3x^2 - 4x + 7) \\ &= 3x^2 \times 3x^2 + (3x^2)(-4x) + 3x^2 \times 7 \\ &= 9x^4 - 12x^3 + 21x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x^3 \times P(x) &= -7x^3 \times (3x^2 - 4x + 7) \\ &= (-7x^3)(3x^2) + (-7x^3)(-4x) + (-7x^3)(7) \\ &= -21x^5 + 28x^4 - 49x^3 \end{aligned}$$

எனவே ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையினை ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்க, ஒவ்வோர் உறுப்பினையும் ஒருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குக.

பயிற்சி 5-2

(மனக்கணக்கு)

கீழே கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளை அவற்றின் வலப்புறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஓருறுப்புக் கோவைகளால் தனித்தனியாகப் பெருக்குக.

1. $2x - 5$ $(3, x, x^3, x^4, 2x^2, -5x^3)$
2. $4x^2 - 3x + 2$ $\left(-3x, +4x^3, \frac{7}{2}x^2, \sqrt{2x}\right)$
3. $x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ $\left(-5x^2, 3x, \sqrt{5}x^2 - \frac{7}{2}x\right)$
4. $2x^2 - 7x + 9$ $(-x, -4x^3, 3x^2, 5x)$

5-3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : ஈருறுப்புப் பெருக்கல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க : $(3 + 5)\,7 = 3 \times 7 + 5 \times 7$

$7 \times (x^2 - 3x + 5) = 7x^2 + 7(-3x) + 7(5)$

பல்லுறுப்புக் கோவை ஓருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கப்படும் பொழுது பங்கீட்டுப் பண்பு பொருந்தியது என்று கண்டோம். அதே பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்க முடியும்.

இப்பாடத்தில் ஒரு படியுள்ள ஈருறுப்புக் கோவையால் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்க அறிந்து கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(3x^2 - 4x - 7)(2x + 3)$

$= (3x^2 - 4x - 7) \times 2x + (3x^2 - 4x - 7) \times 3$

$= 2x(3x^2) + 2x(-4x) + 2x(-7) + 3(3x^2) + 3(-4x) + 3(-7)$

$= 6x^3 - 8x^2 - 14x + 9x^2 - 12x - 21$

$= 6x^3 + (-8 + 9)x^2 + (-14 - 12)x - 21$

$= 6x^3 + x^2 - 26x - 21$

$$\begin{array}{rrrr} 3x^2 & -\ 4x & -\ 7 & \\ & 2x & +\ 3 & \\ \hline 6x^3 & -\ 8x^2 & -\ 14x & \\ & 9x^2 & -\ 12x & -\ 21 \\ \hline 6x^3 & +\ x^2 & -\ 26x & -\ 21 \\ \hline \end{array}$$

2. $(2x^3 - 5x - 6)(3 - 2x)$

$= (2x^3 - 5x - 6) \times 3 + (2x^3 - 5x - 6) \times (-2x)$

$= 3 \times (2x^3) + 3(-5x) + 3(-6) + (-2x)(2x^3)$

$+ (-2x)(-5x) + (-2x)(-6)$

$= 6x^3 - 15x - 18 - 4x^4 + 10x^2 + 12x$

$= -4x^4 + 6x^3 + 10x^2 + (-15 + 12)x - 18$

$= -4x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 3x - 18$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x^3 & +0x^2 & -5x & -6 \\ & & & -2x & +3 \\ \hline -4x^4 & +0x^3 & +10x^2 & +12x & \\ & 6x^3 & +0x^2 & -15x & -18 \\ \hline -4x^4 & +6x^3 & +10x^2 & -3x & -18 \end{array}$$

பயிற்சி 5-3

1. கீழே இடப்புறம் கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளை அவற்றிற்கு வலப்புறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவை ஒவ்வொன்றாலும் பெருக்குக.

(அ) $4x^2 - 5x + 9$; $x + 5$; $x + 3$; $x - 7$; $x - 9$.

(ஆ) $2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$; $2x + 3$; $3x + 2$; $2x - 3$; $3x - 2$

(இ) $5x^3 + 2x - 6$; $3 - x$; $5 - x$; $3 - 2x$; $5 - 2x$

(ஈ) $3x^3 - 5x^2 + 7$; $3x + 5$; $2x - 7$; $5 - 3x$; $9 - 5x$

(உ) $4x^3 - 3x - 9$; $2x + 5$; $3x - 7$; $4 - 5x$; $3 + 2x$

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் பெருக்கற் பலன்களில் x^2, x ஆகிய உறுப்புகளின் குணகங்களைக் கோவைகளை முழுவதும் பெருக்காமல் காண்க.

(அ) $(4x^3 - 5x^2 + 7x - 9)(3x + 7)$

(ஆ) $(2x^3 - 5x + 6)(4x - 5)$

(இ) $(3x^3 + 4x^2 - 9)(2x - 11)$

(ஈ) $(5x^2 + 3x - 7)(5x + 7)$

(உ) $(2x^2 - 4x - 7)(7x - 9)$

விடைகள்

1. (அ) $4x^3 + 15x^2 - 16x + 45$;
$4x^3 + 7x^2 - 6x + 27$;
$4x^3 - 33x^2 + 44x - 63$;
$4x^3 - 41x^2 + 54x - 81$.

(ஆ) $4x^4 + 16x^3 + x^2 - 29x - 12$:
$6x^4 + 19x^3 - 11x^2 - 26x - 8$;
$4x^4 + 4x^3 - 29x^2 + 13x + 12$;
$6x^4 + 11x^3 - 31x^2 + 2x + 8$.

(இ) $-5x^4 + 15x^3 - 2x^2 + 12x - 18$;
$-5x^4 + 25x^3 - 2x^2 + 16x - 30$;
$-10x^4 + 15x^3 - 4x^2 + 18x - 18$;
$-10x^4 + 25x^3 - 4x^2 + 22x - 30$.

(ஈ) $9x^4 - 25x^2 + 21x + 35$;
$6x^4 - 31x^3 + 35x^2 + 14x - 49$;
$-9x^4 + 30x^3 - 25x^2 - 21x + 35$;
$-15x^4 + 42x^3 - 45x^2 - 35x + 63$.

(உ) $8x^4 + 20x^3 - 6x^2 - 33x - 45$;
$12x^4 - 28x^3 - 9x^2 - 6x + 63$;
$-20x^4 + 16x^3 + 15x^2 + 33x - 36$;
$8x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 27x - 27$.

2. (அ) $-14, 22$ (ஆ) $-20, 49$ (இ) $-44, -18$
(ஈ) $50, -14$ (உ) $-46, -13$.

5-4 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்கல்

முன் பாடங்களினின்று பல்லுறுப்புக் கோவையொன்றினை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்கப் பங்கீட்டு விதி பயன்படுகிறது எனக் கண்டோம். அவற்றை மேலும் விரிவாகப் பயன்படுத்த இப்பாடத்தில் முற்படுவோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(3x^3 - 7x^2 + 6)(2x^2 - 3x - 5)$
$= (3x^3 - 7x^2 + 6)\, 2x^2 + (3x^3 - 7x^2 + 6)(-3x)$
$+ (3x^2 - 7x^2 + 6)(-5)$

$$\begin{aligned}
&= 6x^5 - 14x^4 + 12x^2 \\
&\quad - 9x^4 + 21x^3 - 18x \\
&\quad - 15x^3 + 35x^2 - 30 \\
&= 6x^5 + (-14 - 9)x^4 \\
&\quad + (21 - 15)x^3 \\
&\quad + (12 + 35)x^2 \\
&\quad + (-18)x - 30. \\
&= 6x^5 - 23x^4 + 6x^3 \\
&\quad + 47x^2 - 18x - 30
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
3x^3 - 7x^2 + 0x + 6 \\
2x^2 - 3x - 5 \\
\hline
6x^5 - 14x^4 + 0x^3 + 12x^2 \qquad\qquad\qquad \\
- 9x^4 + 21x^3 + 0x^2 - 18x \qquad \\
- 15x^3 + 35x^2 + 0x - 30 \\
\hline
6x^5 - 23x^4 + 6x^3 + 47x^2 - 18x - 30
\end{array}$$

2. $(4x^3 - 7x^2 + 9x - 5)\ (3x^2 - 4x + 5)$ என்பதன் பெருக்கற்பலனில் x^3, x^2 ஆகியவற்றின் குணகங்களைக் கோவைகளை முழுவதும் பெருக்காமல் காண்க.

x^3 வரும் உறுப்புகள் :

$$(4x^3 - 7x^2 + 9x - 5)\ (3x^2 - 4x + 5)$$

முதல் கோவையில் x^3 இன் உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் மாறிலி $= 4x^3 \times 5 = 20x^3$

முதல் கோவையில் x^2 இன் உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் x இன் உறுப்பு $= -7x^2 \times -4x = 28x^3$

முதல் கோவையில் x இன் உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் x^2 இன் உறுப்பு $= 9x \times 3x^2 = 27x^3$

முதல் கோவையில் மாறிலி உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் x^2 இன் உறுப்பு $= -5 \times 0\ x^3 = 0x^3$

பெருக்கற் பலனில் x^3 இன் குணகம் $= 20 + 28 + 27 + 0 = 75$

x^2 வரும் உறுப்புகள் :

$$(4x^3 - 7x^2 + 9x - 5)\ (3x^2 - 4x + 5)$$

முதல் கோவையில் x^2 இன் உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் மாறிலி உறுப்பு $= -7x^2 \times 5 = -35x^2$

முதல் கோவையில் x இன் உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் x இன் உறுப்பு $= 9x \times -4x = -36x^2$

முதல் கோவையில் மாறிலி உறுப்பு $\times$ இரண்டாம் கோவையில் x^2 இன் உறுப்பு $= -5 \times 3x^2 = -15x^2$

பெருக்கற் பலனில் x^2 இன் குணகம் $= -35 -36 -15 = -86$

பயிற்சி 5 - 4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளை அவைகளின் வலப்புறம் உள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் பெருக்குக.

(அ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$; $x^2 - 2x + 3$; $2x^2 + 3x + 1$; $4x^2 - 5$; $2x^2 + 7$

(ஆ) $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$; $2x^2 + x - 5$; $4x^2 - 7x - 8$; $2x^2 + 5x + 7$; $3x^2 + 7x$

(இ) $3x^3 + 7x - 5$; $x^2 - 3x + 4$; $2x^2 + 5$; $3x^2 + 5x - 7$; $5x^2 - 3x + 7$

(ஈ) $2x^3 + 4x^2 - 9$; $3x^2 + 4x + 5$; $2x^2 - 4x + 5$; $2x^2 - 7$; $3 - 2x - x^2$

(உ) $4x^3 - 5x^2 + 8$; $3 - 4x - 2x^2$; $2 + 5x - x^2$; $1 - x - x^2$; $1 + x - x^2$

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் பெருக்கற் பலன்களில் x^3, x^2 ஆகியவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

(அ) $(2x^3 + 4x^2 + 1)\ (3x - 6)$

(ஆ) $(4x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2)\ (2x^3 - 5x^2 - 3x + 2)$

(இ) $(5x^5 - 3x^4 - x^2)\ (2x + 4)$

3. $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\ (ax^2 + 2x + b)$ என்ற பெருக்கற் பலனின் x^4 இன் குணகம் -4, x இன் குணகம் 4 என்றால் x^5, x^3 ஆகியவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

4. $(2x^3 + ax^2 + 4x + 8)(4x^2 - bx + c)$ என்ற பெருக்கற் பலனில் மாறிலி 24, xஇன் குணகம் 4, x^4இன் குணகம் 8 ஆனால், a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

விடைகள்

1. (அ) $2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 26x - 21$,
$4x^5 + x^3 - 5x^2 - 17x - 7$,
$8x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 13x^2 - 20x + 35$.
$4x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 35x^2 + 28x - 49$

(ஆ) $10x^5 - 7x^4 - 27x^3 + 38x^2 - 7x - 15$,
$20x^5 - 59x^4 + 10x^3 + 46x^2 - 37x - 24$,
$10x^5 + 13x^4 + 9x^3 - 26x^2 + 29x + 21$,
$15x^5 - 17x^4 + 36x^3 + 23x^2 + 21x$

2. (அ) 20, −24 (ஆ) −20, 2 (இ) −2, −4

3. 6, 11 4. $a = \frac{5}{2}$, $b = 1$, $c = 3$.

6 - 1 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : ஒருறுப்பால் வகுத்தல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க : $x^5 \div x^2 = x^3$; $x^6 \div x^4 = x^2$

கீழ்க்கண்ட வகுத்தல்களைக் கவனிக்கவும்.

1. $x^2 \div 2 = \frac{x^2}{2}$ அல்லது $\frac{1}{2} x^2$

2. $3x^2 \div x = \frac{3x^2}{x} = 3x$

3. $12x^6 \div 3x^4 = \frac{12x^6}{3x^4} = 4x^2$

4. $15x^2y^2 \div 5xy = \frac{15x^2y^2}{5xy} = 3xy$

குணகங்களை வகுக்கும்பொழுது சாதாரண வகுத்தலையும், அடுக்கெண்களை வகுக்கும்பொழுது அடுக்கு வகுத்தல் விதியையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$x^2 \div x^3 = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}$ பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல. பல்லுறுப்புக் கோவையில் மாறி மிகை முழு அடுக்குகளையே கொள்ளும் என அறிக.

$$(15x^3 + 8x^2 - 5x + 3) \div 10$$
$$= \frac{15}{10}x^3 + \frac{8}{10}x^2 - \frac{5}{10}x + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{3}{2}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}.$$

$$(x^3 + 4x^2 - 9x) \div x = \frac{x^3}{x} + \frac{4x^2}{x} - \frac{9x}{x}$$
$$= x^2 + 4x - 9$$

$$(8x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 6x^2) \div x^2$$
$$= \frac{8x^5}{x^2} + \frac{-9x^4}{x^2} + \frac{10x^3}{x^2} + \frac{6x^2}{x^2}$$
$$= 8x^3 - 9x^2 + 10x + 6$$

$$(5x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 7x) \div 9x$$
$$= \frac{5x^4}{9x} + \frac{-6x^3}{9x} + \frac{10x^2}{9x} + \frac{-7x}{9x}$$
$$= \frac{5}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) \div x^2$$
$$= \frac{x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}$$
$$= x + 2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$$

(பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல)

$(3x + 4)$-ஐ x^2ஆல் வகுக்கப் பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைப்பதில்லை.

$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$-ஐ x^2ஆல் வகுக்க ஈவு $x + 2$; மீதி $3x + 4$ என்போம்.

ஈவு, மீதி இரண்டும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளெனக் கவனிக்கவும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுக்க, மீதி பல்லுறுப்புக் கோவையின் *படி*, வகுக்கும் கோவையின் படியைவிடக் குறைவாகும்.

பயிற்சி 6 - 1

(மனக்கணக்குகள்)

1. கீழே கொடுத்துள்ள கோவைகளை அவற்றின் வலப்புறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒறுருப்புக் கோவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் வகுக்க.

(அ) $5x^3 - 4x^2 + 8x - 6$; $2, -2, 3, \frac{1}{2}$

(ஆ) $5x^4 - 6x^3 + 7x^2$; $2x^2, -3x, 4, -x^2$

(இ) $4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 10x^2$; $-2x^2, 2x^2, 4x, -6$

(ஈ) $x^5 + x^3 + x$; $x, 2, -x, +2$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தல்களைச் செய்து ஈவு, மீதி காண்க.

(அ) $2x^2 - 4x + 5$; $2, -2, x, 2x, -x$

(ஆ) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; $x, -x, x^2, 2x^2, x^3$

(இ) $5x^4 + 10x^3 - 15x^2 - 4x - 8$;
$5x^2, 2x, -5x, 2x^2, -5x^3$

(ஈ) $3x^4 + 12x^3 - 5x - 6$;
$3x^2, -4x^2, 2x^3, 4x, -2x^3$

6 - 2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : ஈருறுப்புக் கோவைகளால் வகுத்தல்

கவனிக்க : 156ஐ 13ஆல் வகுக்க.

```
      12
13 | 156
   | 13↓
   | ---
   |  26
   |  26
   | ---
   |   0
```

எண்களின் நீண்டமுறை வகுத்தல்களைப் போலவே, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(x^2 + 5x + 6)$ ஐ $(x + 3)$ ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|r|l} & x + 2 & \\ \hline x + 3 & x^2 + 5x + 6 & \\ & x^2 + 3x \quad \downarrow & x(x + 3) \\ \cline{2-2} & 2x + 6 & \\ & 2x + 6 & 2(x + 3) \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

முதலில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை இறங்கு வரிசையில் எழுதிக்கொள்க.

(1) வகுபடும் கோவையின் முதல் உறுப்பு x^2; வகுக்கும் கோவையின் முதல் உறுப்பு x. ஈவின் முதல் உறுப்பு $= \dfrac{x^2}{x} = x$.

$\therefore\ (x^2+5x+6) \div (x+3) = x+2$

(2) xஆல் $(x + 3)$ஐப் பெருக்கி, கோவையின் அதன் ஒத்த இன உறுப்புகள் அதாவது, $x^2 + 5x$ இன் கீழ் எழுதி அவற்றினின்று கழிக்க.

(3) கழிக்கக் கிடைக்கும் $2x$ உடன் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடுத்த உறுப்பினைச் சேர்க்கவும்.

இது புதிய வகுபடும் எண்.

(4) ஈவின் அடுத்த உறுப்பு $= \dfrac{2x}{x} = 2$.

(5) 2ஆல் $x + 3$ஐப் பெருக்கி புதிய வகுபடும் எண்ணிற்குக் கீழ் எழுதிக் கழிக்கவும்.

(6) இதேபோல் தொடர்ந்து தேவைப்படும்வரை செய்க.

2. $8y^3 - 1$ஐ $2y - 1$ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|r|l} & 4y^2 + 2y + 1 & \\ \hline 2y - 1 & 8y^3 + 0y^2 + 0y - 1 & \\ & 8y^3 - 4y^2 \qquad\qquad & 4y^2(2y-1) \\ \cline{2-2} & 4y^2 + 0y \qquad & \\ & 4y^2 - 2y \qquad & 2y(2y-1) \\ \cline{2-2} & 2y - 1 & \\ & 2y - 1 & 1(2y-1) \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$\therefore\ (8x^3 - 1) \div (2y - 1) = 4y^2 + 2y + 1$

3. $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \div 3x - 2y$

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 9x^2 - 12xy + 4y^2 & \\
\hline
3x-2y & 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 & 9x^2(3x-2y) \\
 & 27x^3 - 18x^2y & \\
\cline{2-2}
 & -36x^2y + 36xy^2 & -12xy(3x-2y) \\
 & -36x^2y + 24xy^2 & \\
\cline{2-2}
 & 12xy^2 - 8y^3 & 4y^2(3x-2y) \\
 & 12xy^2 - 8y^3 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore \; (27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3) \div (3x - 2y)$
$= 9x^2 - 12xy + 4y^2$

பயிற்சி 6-2

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வகுத்தல்களைச் செய்து ஈவு காண்க.

1. $(x^2 + 4x + 3) \div (x + 3)$
2. $(x^2 + 11x + 18) \div (x + 9)$
3. $(x^2 - 12x + 27) \div (x - 3)$
4. $(x^2 - 10x + 25) \div (x - 5)$
5. $(x^2 + 11x - 42) \div (x - 3)$
6. $(x^2 - 6x - 27) \div (x - 9)$
7. $(x^2 + 4xy + 3y^2) \div (x + 3y)$
8. $(x^2 + 12xy + 27y^2) \div (x + 9y)$
9. $(a^2 - 12ab + 27b^2) \div (a - 3b)$
10. $(m^2 - 10mn + 25n^2) \div (m - 5n)$
11. $(p^2 + 11pq - 42q^2) \div (p - 3q)$
12. $(k^2 - 6kl - 27l^2) \div (k - 9l)$
13. $(27a^3 + 8) \div (3a + 2)$
14. $(16x^4 - 81) \div (2x - 3)$
15. $(64m^3 - 27) \div (4m - 3)$
16. $(6x^3 - 23x^2y + 24xy^2 - 10y^3) \div (2x - 5y)$
17. $(18x^3 - 17xy^2 + 20y^3) \div (3x + 4y)$

விடைகள்

1. $x + 1$ 2. $x + 2$ 3. $x - 9$ 4. $x - 5$
5. $x + 14$ 6. $x + 3$ 7. $x + y$ 8. $x + 3y$
9. $a - 9b$ 10. $m - 5n$ 11. $p + 14q$
12. $k + 3l$ 13. $9a^2 - 6a + 4$
14. $8x^3 + 12x^2 + 18x + 27$
15. $6m^2 + 12m + 9$ 16. $3x^2 - 4xy + 2y^2$
17. $6x^2 - 8xy + 5y^2$

6-3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள்: மூவுறுப்புக் கோவைகளால் வகுத்தல்

கீழ்க்கண்ட எண் வகுத்தலைக் கவனிக்க :

$$
\begin{array}{r|r|}
 & 231 \\
\hline
121 & 27951 \\
 & 242 \\
\hline
 & 375 \\
 & 363 \\
\hline
 & 121 \\
 & 121 \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

இதற்கும் கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தலுக்கும் உள்ள ஒற்றுமையைக் காண்க.

$(2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 5xy^3 + y^4) \div (x^2 + 2xy + y^2)$;

$$
\begin{array}{r|r|l}
 & 2x^2 + 3xy + y^2 & \\
\hline
x^2+2xy+y^2 & 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 5xy^3 + y^4 & 2x^2(x^2 + 2xy + y^2) \\
 & 2x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
 & 3x^3y + 7x^2y^2 + 5xy^3 \qquad & 3xy(x^2 + 2xy + y^2) \\
 & 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy_3 \qquad & \\
\hline
 & x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 & y^2(x^2 + 2xy + y^2) \\
 & x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 & \\
\hline
 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

பயிற்சி 6-3

ஈவு காண்க.

1. $(2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 2x + 1)$

2. $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) \div (x^2 - 2x + 1)$

3. $(x^6 - x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 + 2x + 1)$

4. $(4x^3 + 4x^2 - 5x - 3) \div (2x^2 - x - 1)$

5. $(24x^4 + 146x^3 + 409x^2 + 326x + 120) \div (2x^2 + 7x + 6)$

6. $(2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3) \div (2x^2 - 3xy + y^2)$

7. $(2x^4 + 7x^3y + 13x^2y^2 + 11xy^3 + 3y^4) \div (x^2 + 2xy + 3y^2)$

8. $(6x^4 - x^3y - 4x^2y^2 + 22xy^3 - 8y^4) \div (3x^2 + 4xy - 2y^2)$

9. $(5x^4 + 3x^3y + 5xy^3 - 3y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$

10. $(a^4 + a^2b^2 + b^4) \div (a^2 + ab + b^2)$

விடைகள்

1. $2x + 1$
2. $2x - 1$
3. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
4. $2x + 3$
7. $2x^2 + 3xy + y^2$
10. $a^2 - ab + b^2$

6-4 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் : வகுத்தல் : ஈவு, மீதி காணல்

இதுகாறும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையினை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவை மீதமின்றி வகுத்து வரும் கணக்குகளைப் பார்த்தோம். இப்பொழுது, பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுக்கும் பொழுது ஈவு, மீதி ஆகியவற்றைக் காண்போம். சாதாரண வகுத்தலில் மீதி காண்பது போலவே, பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தலிலும் மீதியைக் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x^2 + 2x + 3 & \\
2x^2 + 3x + 1 & 2x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 15x + 6 & x^2\,(2x^2 + 3x + 1) \\
 & 2x^4 + 3x^3 + x^2 & \\
\hline
 & \quad\quad 4x^3 + 12x^2 + 15x & 2x\,(2x^2 + 3x + 1) \\
 & \quad\quad 4x^3 + 6x^2 + 2x & \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad 6x^2 + 13x + 6 & 3\,(2x^2 + 3x + 1) \\
 & \quad\quad\quad\quad 6x^2 + 9x + 3 & \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 4x + 3 &
\end{array}
$$

ஈவு $x^2 + 2x + 3$; மீதி $4x + 3$.

ஈவு, மீதி இரண்டும் பல்லுறுப்புக் கோவைகள். மீதியின் படி, வகுக்கும் கோவையின் படியைவிடக் குறைவானதென்று காண்க. ஏன் எனக் கூறமுடியுமா?

பயிற்சி 6-4

ஈவு, மீதி காண்க :

1. $(2x^3 - 5x^2 + 6x + 5) \div (x^2 - 2x + 1)$
2. $(24x^4 + 146x^3 + 409x^2 + 300x + 100) \div (2x^2 + 7x + 6)$
3. $(6x^4 - x^3y - 4x^2y^2 + 26xy^3 - 4y^4) \div (3x^2 + 4xy - 2y^2)$
4. $(5x^4 + 3x^3y + 3y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$
5. $x^5 \div (x^2 + 2x + 3)$

விடைகள்

1. ஈவு $(2x - 1)$, மீதி $(2x + 6)$

4. ஈவு $(5x^2 + 8xy + 3y^2)$, மீதி $(-5xy^3)$

5. ஈவு $(x^3 - 2x^2 + x + 4)$, மீதி $(-11x - 12)$

7 - 1 முற்றொருமைகள் : திருப்புதல்

[$(a \pm b)^2$ இன் விரிவு]

எட்டாம் வகுப்பில் நாம் கற்ற முற்றொருமைகளை நினைவு படுத்திக் கொள்வோம்.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$\underset{\substack{\downarrow\\(2x}}{a} + \underset{\substack{\downarrow\\3y)^2}}{b} = \underset{\substack{\downarrow\\(2x)^2}}{a^2} + 2 \times \underset{\substack{\downarrow\\2x}}{a} \times \underset{\substack{\downarrow\\3y}}{b} + \underset{\substack{\downarrow\\(3y)^2}}{b^2}$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\(3x}}{a} - \underset{\substack{\downarrow\\4y)^2}}{b} = \underset{\substack{\downarrow\\(3x)^2}}{a^2} - 2 \times \underset{\substack{\downarrow\\3x}}{a} \times \underset{\substack{\downarrow\\4y}}{b} + \underset{\substack{\downarrow\\(4y)^2}}{b^2}$$
$$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

$$\begin{aligned} 105^2 &= (100 + 5)^2 \\ &= 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 \\ &= 10000 + 1000 + 25 \\ &= 11025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 94^2 &= (100 - 6)^2 \\ &= 10000 - 2 \times 100 \times 6 + 6^2 \\ &= 10000 - 1200 + 36 \\ &= 8836 \end{aligned}$$

பயிற்சி 7 - 1

(மனக்கணக்குகள்)

I. கீழேகண்ட கோவைகளின் வர்க்கங்களைக் காண்க :

(அ) 1. $a + b$	9. $x + 5$	17. $4p + q$
2. $p + q$	10. $m + 6$	18. $5l + m$
3. $l + m$	11. $a + 2b$	19. $6x + y$
4. $x + y$	12. $p + 3q$	20. $7m + n$
5. $m + n$	13. $l + 4m$	21. $3a + 2b$
6. $a + 2$	14. $x + 5y$	22. $4p + 5q$
7. $p + 3$	15. $m + 6n$	23. $5l + 3m$
8. $l + 4$	16. $a + 3b$	24. $6x + 7y$

(ஆ)

1. $a-b$	9. $x-5$	17. $4p-q$
2. $p-q$	10. $m-6$	18. $5l-m$
3. $l-m$	11. $a-2b$	19. $6x-y$
4. $x-y$	12. $p-3q$	20. $7m-n$
5. $m-n$	13. $l-4m$	21. $3a-2b$
6. $a-2$	14. $x-5y$	22. $4p-3q$
7. $p-3$	15. $m-6n$	23. $5l-3m$
8. $l-4$	16. $a-3b$	24. $6x-7y$

II. சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக :

(அ) $49+2\times 3\times 7+9$

(ஆ) $225+2\times 15\times 5+25$

(இ) $625+2\times 25\times 15+225$

(ஈ) $169-2\times 13\times 3+9$

(உ) $144-2\times 12\times 2+4$

(ஊ) $77\times 77+2\times 77\times 23+23\times 23$

(எ) $95\times 95+2\times 95\times 5+5\times 5$

(ஏ) $65\times 65-2\times 65\times 15+15\times 15$

(ஐ) $112\times 112-2\times 112\times 12+12\times 12$

(ஒ) $88\times 88-2\times 88\times 88+88\times 88$

III. சூத்திரங்களின் மூலம் மதிப்புக் காண்க :

(1) 101^2 (2) 53^2 (3) 22^2 (4) 44^2 (5) 61^2

(6) 99^2 (7) 47^2 (8) 38^2 (9) 36^2 (10) 59^2

விடைகள்

II. (அ) 100 (ஆ) 400 (இ) 1600 (ஈ) 100

(உ) 100 (ஊ) 10000 (எ) 10000 (ஏ) 2500

(ஐ) 10000 (ஒ) 0

7-2 முற்றொருமைகள்

[$(a+b+c)^2$ இன் விரிவு]

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c) \times (a+b+c)$$

$$\begin{array}{l} a + b + c \\ \underline{a + b + c} \\ a^2 + ab + ac \\ \quad + ab + \quad + b^2 + bc \\ \qquad + ca + \quad + cb + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 2ca + b^2 + 2bc + c^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$$

இதே முடிவினை $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ என்ற முற்றொருமையின் மூலம் பெறலாம்.

$b + c = x$ என்க; $a + b + c = a + (b + c) = a + x$

$$\begin{aligned} \therefore \quad (a+b+c)^2 &= (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \\ &= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(2a + 3b + 5c)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5c)^2 + 2 \times 2a \times 3b + 2 \times 3b \times 5c + 2 \times 5c \times 2a$
$= 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 12ab + 30bc + 20ca$

2. $(3a - 4b + 2c)^2 = (3a)^2 + (-4b)^2 + (2c)^2 + 2 \times (3a)(-4b) + 2 \times (-4b)(2c) + 2 \times (2c)(3a)$
$= 9a^2 + 16b^2 + 4c^2 - 24ab - 16bc + 12ca$
$[\because (-4b)^2 = -4b \times -4b = 16b^2]$

3. $(5x - 3y - 4z)^2 = (5x)^2 + (-3y)^2 + (-4z)^2 + 2 \times (5x)(-3y) + 2 \times (-3y)(-4z) + 2(-4z)(5x)$
$= 25x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 30xy + 24yz - 40zx$

4. $123^2 = (100 + 20 + 3)^2$

$= 10000 \leftarrow (100^2)$

$400 \leftarrow (20^2)$

$9 \leftarrow (3^2)$

$4000 \leftarrow (2 \times 100 \times 20)$

$120 \leftarrow (2 \times 20 \times 3)$

$600 \leftarrow (2 \times 3 \times 100)$

15129

பயிற்சி 7–2

I. விரித்தெழுதுக. (மனக்கணக்குகள்)

1. $(a + b + c)^2$
2. $(p + q + r)^2$
3. $(l + m + n)^2$
4. $(x + y + z)^2$
5. $(a + b - c)^2$
6. $(p + q - r)^2$
7. $(l + m - n)^2$
8. $(x + y - z)^2$
9. $(a - b + c)^2$
10. $(p - q + r)^2$
11. $(l - m + n)^2$
12. $(x - y + z)^2$
13. $(a - b - c)^2$
14. $(p - q - r)^2$
15. $(l - m - n)^2$
16. $(x - y - z)^2$
17. $(2a + 3b + 4c)^2$
18. $(3p + 4q + 2r)^2$
19. $(2l + 3m + 7n)^2$
20. $(5x + 2y + 4z)^2$
21. $(2a - 3b + 4c)^2$
22. $(3p - 4q - 2r)^2$
23. $(2l + 3m - 7n)^2$
24. $(5x - 2y - 4z)^2$

II. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க :

1. 111^2
2. 125^2
3. 234^2
4. 425^2
5. 542^2

7-3 முற்றொருமைகள்

[$(a + b)^3$, $(a - b)^3$ விரிவுகள்]

நினைவுபடுத்திக் கொள்க : $x \times x^2 = x^3$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\
&= a(a^2-2ab+b^2)+(-b)(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

கவனிக்க: கோவைகள் aஇன் இறங்கு வரிசையிலும், bஇன் ஏறு வரிசையிலும் உள்ளன.

கோவை	விரிவு	குணகங்கள்
$a+b$	$a+b$	1, 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b$	1, 2, 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1, 3, 3, 1
$a-b$	$a-b$	1, − 1
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b$	1, − 2, 1
$(a-b)^3$	$a^2-3a^2b+3ab^2-b^3$	1, − 3, 3, − 1

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ விரிவுகளின் குணகங்கள், குணகங்களின் குறிகள், $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ விரிவுகளின் குணகங்கள், குணகங்களின் குறிகள் ஆகியவற்றைத் தனித்தனியேயும், ஒன்றுடன் ஒன்று ஒப்பிட்டும் பார்க்க. என்ன ஒற்றுமை, வேற்றுமைகள் உள்ளன என ஆய்க.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $(\overset{a}{\overset{\downarrow}{2x}} + \overset{b}{\overset{\downarrow}{5y}})^3$

$$
\begin{aligned}
&= \overset{a^3}{(2x)^3} + \overset{3}{3}\,\overset{a^2}{(2x)^2}\,\overset{b}{(5y)} + \overset{3}{3}\,\overset{a}{(2x)}\,\overset{b^2}{(5y)^2} + \overset{b^3}{(5y)^3} \\
&= 8x^3 + 3(4x^2)(5y) + 3(2x)(25y^2) + 125y^3 \\
&= 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3
\end{aligned}
$$

(2) $(3x - 2y)^3$

$$= (3x)^3 - 3\,(3x)^2\,(2y) + 3\,(3x)\,(2p)^2 - (2y)^3$$
$$= 27x^3 - 3\,(9x^2)\,(2y) + 3\,(3x)\,(4y^2) - 8y^3$$
$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$

(3) 52^3

$$= (50 + 2)^3$$
$$= 50^3 + 3 \times 50^2 \times 2 + 3 \times 50 \times 2^2 + 2^3$$
$$= 125000 + 3 \times 2500 \times 2 + 3 \times 50 \times 4 + 8$$
$$= 140608$$

125000
15000
600
8
140608

பயிற்சி 7 - 3

(மனக்கணக்குகள்)

I. கீழே கண்ட கோவைகளின் கனங்களைக் காண்க.

(அ)

1. $a + b$	9. $x + 5$	17. $4p + q$
2. $p + q$	10. $m + 6$	18. $5l + m$
3. $l + m$	11. $a + 2b$	19. $6x + y$
4. $x + y$	12. $p + 3q$	20. $7m + n$
5. $m + n$	13. $l + 4m$	21. $3a + 2b$
6. $a + 2$	14. $x + 5y$	22. $4p + 5q$
7. $p + 3$	15. $m + 6n$	23. $5l + 3m$
8. $l + 4$	16. $a + 3b$	24. $6x + 7y$

(ஆ)

1. $a - b$	9. $x - 5$	17. $4p - q$
2. $p - q$	10. $m - 6$	18. $5l - m$
3. $l - m$	11. $a - 2b$	19. $6x - y$
4. $x - y$	12. $p - 3q$	20. $7m - n$
5. $m - n$	13. $l - 4m$	21. $3a - 2b$
6. $a - 2$	14. $x - 5y$	22. $4p - 5q$
7. $p - 3$	15. $m - 6n$	23. $5l - 3m$
8. $l - 4$	16. $a - 3b$	24. $6x - 7y$

II. சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

(1) $7^3 + 3 \times 7^2 \times 3 + 3 \times 7 \times 3^2 + 3^3$

(2) $28^3 + 3 \times 28^2 \times 2 + 3 \times 28 \times 2^2 + 2^3$

(3) $88^3 + 3 \times 88^2 \times 12 + 3 \times 88 \times 12^2 + 12^3$

(4) $15^3 - 3 \times 15^2 \times 5 + 3 \times 15 \times 5^2 - 5^3$

(5) $62^3 - 3 \times 62^2 \times 12 + 3 \times 62 \times 12^2 - 12^3$

(6) $112^3 - 3 \times 112^2 \times 12 + 3 \times 112 \times 12^2 - 12^3$.

III. சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி மதிப்புகள் காண்க.

(1) 22^3 (2) 101^3 (3) 48^3 (4) 99^3 (5) 33^3.

IV. $(a+b)^2$; $(a+b)^3$ இவற்றின் விரிவுகளிடையேயுள்ள சம்பந்தம் $(a+b)^4$ இன் விரிவின் குணகங்களுக்கும் பொருந்துமென்றால் $(a+b)^4$ இன் குணகங்களை யூகிக்கவும்.

விடைகள்

II. (1) 1000 (2) 27000 (3) 1000000
(4) 1000 (5) 125000 (6) 1000000

IV. 1, 4, 6, 4, 1

7 - 4 முற்றொருமைகள் : $(x+a)(x+b)$ இன் விரிவு — திருப்புதல்

எட்டாம் வகுப்பில்

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

எனப் படித்தீர்கள்.

இதனின்று

$$(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$$

$$(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(x+3)(x+5) = x^2 + (3+5)x + 3 \times 5$
$= x^2 + 8x + 15$

2. $(x+5)(x-3) = x^2 + (5-3)x - 5 \times 3$
$= x^2 + 2x - 15$

3. $(x-5)(x+3) = x^2 + (3-5)x - 5 \times 3$
$= x^2 - 2x - 15$

4. $(x-5)(x-3) = x^2 - (3+5)x + 5 \times 3$
$= x^2 - 8x + 15$

[ஆய்க : நடு உறுப்புகளின் குணகங்கள், ஈற்று உறுப்பின் குணகங்கள்].

5. $(x+3y)(x+5y) = x^2 + (3y+5y)x + 3y \times 5y$
$= x^2 + 8xy + 15y^2$

6. $(x-2y)(x+7y) = x^2 + (7-2)xy - 2 \times 7y^2$
$= x^2 + 5xy - 14y^2$

7. $(2x+7)(2x-5) = (2x)^2 + (7-5)2x - 7 \times 5$
$= 4x^2 + 4x - 35$

8. $(3x-4)(3x-2) = (3x)^2 - (4+2)3x + 4 \times 2$
$= 9x^2 - 18x + 8$

9. $23 \times 27 = (20+3)(20+7)$
$= 20^2 + (3+7)20 + 3 \times 7$
$= 400 + 200 + 21 = 621$

10. $47 \times 38 = (40+7)(40-2)$
$= 40^2 + (7-2)40 - 7 \times 2$
$= 1600 + 200 - 14 = 1786$

பயிற்சி 7 - 4

I. விரிவுகள் எழுதுக : (மனக்கணக்குகள்)

1. $(x+3)(x+2)$
2. $(a+4)(a+5)$
3. $(m+5)(m+6)$
4. $(p+6)(p+3)$
5. $(l+8)(l+9)$
6. $(x+3y)(x+2y)$
7. $(a+4b)(a+5b)$
8. $(m+5n)(m+6n)$
9. $(p+6q)(p+3q)$
10. $(l+8m)(l+9m)$

11. $(x + 3)(x - 2)$
12. $(a + 4)(a - 5)$
13. $(a + 5)(a - 6)$
14. $(p + 6)(p - 3)$
15. $(l + 8)(l - 9)$
16. $(x + 3y)(x - 2y)$
17. $(a + 4b)(a - 5b)$
18. $(m + 5n)(m - 6n)$
19. $(p + 6q)(p - 3q)$
20. $(l + 8m)(l - 9m)$
21. $(x - 3)(x + 2)$
22. $(a - 4)(a + 5)$
23. $(m - 5)(m - 6)$
24. $(p - 6)(p + 3)$
25. $(l - 8)(l + 9)$
26. $(x - 3y)(x + 2y)$
27. $(a - 4b)(a + 5b)$
28. $(m - 5m)(m + 6n)$
29. $(p - 6q)(p + 3q)$
30. $(l - 8m)(l + 8m)$
31. $(x - 3)(x - 2)$
32. $(a - 4)(a - 5)$
33. $(m - 5)(m - 6)$
34. $(p - 6)(p - 3)$
35. $(l - 8)(l - 9)$
36. $(x - 3y)(x - 2y)$
37. $(a - 4b)(a - 5b)$
38. $(m - 5n)(m - 6n)$
39. $(p - 6q)(p - 3q)$
40. $(l - 8m)(l - 9m)$

II. விரிவுகள் காண்க. (முதலில் விரிவாகவும், பின்னர் மனக் கணக்காகவும் செய்ய முயல்க.)

1. $(2x + 3)(2x + 5)$
2. $(3a + 4)(3a + 5)$
3. $(4m + 5n)(4m + 7n)$
4. $(7p + 6q)(7p + 9q)$
5. $(5l + 8m)(5l + 9m)$
6. $(2x + 3)(2x - 5)$
7. $(3a + 4)(3a - 5)$
8. $(4m + 5n)(4m - 3n)$
9. $(7p + 6q)(7p - 9q)$
10. $(5l + 8m)(5l - 9m)$
11. $(2x - 3)(2x + 5)$
12. $(3a - 4)(3a + 5)$
13. $(4m - 5n)(4m + 7n)$
14. $(7p - 6q)(7p + 9q)$
15. $(5l - 8m)(5l + 9m)$
16. $(2x - 3)(2x - 5)$
17. $(3a - 4)(3a - 5)$
18. $(4m - 5n)(4m - 7n)$
19. $(7p - 6q)(7p - 9q)$
20. $(5l - 8m)(5l - 9m)$

III. $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$ ஆகியவற்றின் விரிவுகளை மேலே கண்ட சூத்திரத்தின் வாயிலாகக் காண்க.

IV. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பெருக்கற் பலன்கள் காண்க.

1. 34×36; 2. 72×78; 3. 42×43; 4. 46×53; 5. 76×83; 6. 94×102

7-5 முற்றொருமைகள்:

[$(x+a)(x+b)(x+c)$ இன் விரிவு]

நினைவிற்குக் கொண்டு வருக :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= (x+a)[(x+b)(x+c)]\\ &= (x+a)[x^2+(b+c)x+bc]\\ &= x[x^2+(b+c)x+bc]\\ &\quad + a[x^2+(b+c)x+bc]\\ &= x^3+(b+c)x^2+bcx+ax^2+a(b+c)x+abc\\ &= x^3+ax^2+bx^2+cx^2+abx+bcx+cax+abc\\ &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.\end{aligned}$$

இது போலவே,

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)(x-c) &= x^3+(-a-b-c)x^2\\ &\quad +[(-a)(-b)+(-b)(-c)\\ &\quad +(-c)(-a)]x+(-a)(-b)(-c)\\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\end{aligned}$$

எனக்காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(x+4)(x+5)(x+3)$
$= x^3+(4+5+3)x^2+(20+15+12)x+60$
$= x^3+12x^2+47x+60.$

2. $(x-4)(x-5)(x-3)$
$= x^3-(4+5+3)x^2+(20+15+12)x-60$
$= x^3-12x^2+47x-60.$

3. $(x+4)(x+5)(x-3)$
$= x^3+(4+5-3)x^2+(20-15-12)x-60$
$= x^3+6x^2-7x-60.$

4. $(x-4)(x+5)(x-3)$
$= x^3+(-4+5-3)x^2+(-20-15+12)x+60$
$= x^3-2x^2-23x+60.$

5. $(2x+5)(2x-3)(2x+4)$

$= (2x)^3 + (5-3+4)(2x)^2$
$\quad + (-15-12+20)(2x) - 60.$

$= 8x^3 + 6(4x^2) + (-7)(2x) - 60$

$= 8x^3 + 24x^2 - 14x - 60.$

6. $(4x-3)(4x+7)(4x-2)$ இன் விரிவில், x^2 x இவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

x^2 இன் உறுப்பு $= (-3+7-2)(4x)^2 = 2 \times 16x^2$
$= 32x^2$

x^2 இன் குணகம் $= 32.$

x இன் உறுப்பு $= (-21-14+6)(4x) = -29 \times 4x$
$= -116x$

x இன் குணகம் $= -116.$

பயிற்சி 7-5

I. விரிவுகள் எழுதுக. (முடிந்த வரையில் மனக்கணக்காகச் செய்யப் பழகுக.)

1. $(x+3)(x+6)(x+2)$
2. $(p+4)(p+5)(p+6)$
3. $(m+1)(m+2)(m+3)$
4. $(a+2)(a+3)(a+4)$
5. $(l+5)(l+2)(l+3)$
6. $(x+3)(x+6)(x-2)$
7. $(p+4)(p-5)(p+6)$
8. $(m-1)(m+2)(m+3)$
9. $(a+2)(a-3)(a+4)$
10. $(l+5)(l+2)(l-3)$
11. $(x+3)(x-6)(x+2)$
12. $(p-4)(p-5)(p+6)$
13. $(m-1)(m+2)(m-3)$
14. $(a+2)(a-3)(a-4)$
15. $(l-5)(l+2)(l-3)$
16. $(x-3)(x-6)(x-2)$
17. $(p-4)(p-5)(p-6)$
18. $(m-1)(m-2)(m-3)$
19. $(a-2)(a-3)(a-4$
20. $(l-5)(l-2)(l-3)$

II. விரிவுகள் காண்க.

1. $(2x+3)(2x+5)(2x+7)$
2. $(3p+4)(3p+5)(3p+2)$
3. $(2m+1)(2m+3)(2m+5)$
4. $(5a+2)(5a+3)(5a+4)$

5. $(4l + 5)(4l + 7)(4l + 3)$

6. $(2x + 3)(2x - 5)(2x + 7)$

7. $(3p - 4)(3p + 5)(3p + 2)$

8. $(2m - 1)(2m + 3)(2m - 5)$

9. $(5a + 2)(5a - 3)(5a - 4)$

10. $(4l - 5)(4l - 7)(4l - 3)$

III. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவுகளில் x^2, x, இவற்றின் குணகங்களை மட்டும் காண்க.

1. $(x + 5)(x - 2)(x + 3)$
2. $(x + 6)(x - 2)(x - 5)$
3. $(x - 6)(x - 2)(x - 3)$
4. $(x + 5)(x - 2)(x - 3)$
5. $(x + 2)(x - 3)(x - 6)$
6. $(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)$
7. $(3x + 4)(3x + 2)(3x + 7)$
8. $(4x - 2)(4x + 3)(4x - 1)$
9. $(5x - 3)(5x - 1)(5x + 2)$
10. $(10x - 9)(10x - 3)(10x - 1)$

விடைகள்

I. (1) $x^3 + 11x^2 + 36x + 36$ (7) $p^3 + 5p^2 - 26p - 120$
(16) $x^3 - 11^2 + 36x - 36$

II. (1) $8x^3 + 60x^2 + 142x + 105$
(6) $8x^3 + 20x^2 - 58x - 105$
(8) $8m^3 - 12m^2 - 26m + 15$
(10) $64l^3 - 240l^2 + 284l - 105$

III. (1) 6, −1 (2) −1, −32 (3) −11, 36
(6) 60, 142 (8) 0, −28 (9) −50, −25
(10) −1800, 390

7 - 6 முற்றொருமைகள் :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)+(-b)(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3.\end{aligned}$$

மேற்கொண்ட முற்றொருமைகளை $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ இன் விரிவுகளினின்றும் பெறலாம் என்பதைப் பின்னர் ஒரு பாடத்தில் காண்பீர்.

இம்முற்றொருமைகளில், இடப்புறமுள்ள கோவைகளின் உறுப்புகளின் குணகங்களின் தன்மையை அறிக.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$
2. $(2a+3)(4a^2-6a+9)=(2a)^3+3^3=8a^3+27$
3. $(a-3)(a^2+3a+9)=a^3-3^3=a^3-27$
4. $(3a-5)(9a^2+15a+25)=(3a)^3-5^3$
   $=27a^3-125$

பயிற்சி 7 - 6

I. கீழ்க்கண்டவை $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ அல்லது $(a-b)(a^2+ab+b)$ வடிவத்தில் அமைந்துள்ளனவா எனக் கண்டு அவற்றின் விரிவுகளைத் தருக.

1. $(p+q)\ (p^2-pq+q^2)$
2. $(l+m)\ (l^2+lm+m^2)$
3. $(x-y)\ (x^2+xy+y^2)$

4. $(a + 2b)\ (a^2 + 2ab + b^2)$
5. $(a - 2b)\ (a^2 + 2ab + 2b^2)$
6. $(a - 2b)\ (a^2 + 2ab + 4b^2)$
7. $(2a + b)\ (4a^2 - 2ab + b^2)$
8. $(3a - 4)\ (9a^2 - 12a + 16)$
9. $(2a - 5)\ (4a^2 + 10a + 25)$
10. $(3a + 2b)\ (9a^2 - 6ab + 4b^2)$

II. மேற்கண்ட கணக்குகளில் $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ அல்லது $(a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$ என்ற வடிவங்களில் அமையாதவற்றினை அவ்வடிவங்கட்கு மாற்றி விரிவுகள் தருக.

III. விடுபட்ட இடத்தை நிரப்புக :

1. $(x + y)$ (   ) $= x^3 + y^3$
2. (   ) $(a^2 - 2ab + 4b^2) = a^3 + 8b^3$
3. $(p - 2q)$ (   ) $= p^3 - 8q^3$
4. $(2l - 3)$ (   ) $= 8l^3 - 27$
5. (   ) (   ) $= 27x^3 - 64$

விடைகள்

I. (1) $p^3 + q^3$; (2) அமையவில்லை (3) $x^3 - y^3$
(4) அமையவில்லை (5) அமையவில்லை (6) $a^3 - 8b^3$
(7) $8a^3 + b^3$ (8) அமையவில்லை (10) $27a^3 + 8b^3$

III. (1) $x^2 - xy + y^2$ (2) $a + 2b$
(3) $p^2 + 2pq + 4q^2$ (4) $4l^2 + 6l + 9$
(5) $(3x - 4)\ (9x^2 + 12x + 16)$

7 - 7 முற்றொருமைகள் : பலவகைக் கணக்குகள் (அ)

இதுகாறும் கற்ற முற்றொருமைகள் அனைத்தும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக அமைத்துள்ளன எனக் கண்டீர்கள். முற்றொருமைகள் மெய்யெண் கணத்திலுள்ள மதிப்புகளைக் கொள்ளுமாதலால், விகிதமுறு கோவைகளுக்கும் அவை சில நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டுப் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ $[x \neq 0]$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

2. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$

$[a, b \neq 0]$

$$= \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2}$$

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

$[x \neq 0]$

$$= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

4. $a + \frac{1}{a} = 3$ எனில் $a^2 + \frac{1}{a^2}$, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $a + \frac{1}{a} = 3$; $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 3^2$

$$a^2 + 2 . a . \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 9$$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 9; \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2 = 7$$

(ii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 = 3^3$

$$a^3 + 3 . a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = 27$$

$$a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} = 27$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a+\frac{1}{a}\right) = 27$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \times 3 = 27$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 27 - 9 = 18$$

பயிற்சி 7 - 7

I. கீழ்க்கண்ட உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள், கனங்களைக் காண்க.

1. $p + \frac{1}{p}$ 2. $m + \frac{1}{m}$ 3. $l + \frac{1}{l}$

4. $p - \frac{1}{p}$ 5. $m - \frac{1}{m}$ 6. $l - \frac{1}{l}$

7. $p + \frac{2}{p}$ 8. $m + \frac{3}{m}$ 9. $l + \frac{4}{l}$

10. $p - \frac{5}{p}$ 11. $m - \frac{6}{m}$ 12. $l - \frac{9}{l}$

13. $2p + \frac{1}{p}$ 14. $3m + \frac{1}{m}$ 15. $4l + \frac{1}{l}$

16. $5p - \frac{1}{p}$ 17. $6m - \frac{1}{m}$ 18. $9l - \frac{1}{l}$

19. $2p + \frac{3}{p}$ 20. $3m + \frac{4}{m}$ 21. $4l + \frac{5}{l}$

22. $5p - \frac{2}{p}$ 23. $6m - \frac{7}{m}$ 24. $9l - \frac{8}{l}$

25. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 26. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ 27. $\frac{l}{m} + \frac{m}{l}$

28. $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ 29. $\frac{m}{n} - \frac{n}{m}$ 30. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

II. $x + \frac{1}{x}$ என்பது $\{1, 2, -1, 5, -2\}$ என்ற கணத்தில் மதிப்புகள் கொண்டால், $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

III. $p - \frac{1}{p}$ என்பது $\{2, 3, 4, -2, -3\}$ என்ற கணத்தில் மதிப்புகள் கொண்டால், $p^2 + \frac{1}{p^2}$, $p^3 - \frac{1}{p^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

விடைகள்

1. $p^2 + \frac{1}{p^2} + 2, \quad p^3 + \frac{1}{p^3} + 3p + \frac{3}{p}$

4. $p^2 + \frac{1}{p^2} - 2, \quad p^3 - \frac{1}{p^3} - 3p + \frac{3}{p}$

7. $p^2 + \frac{4}{p^2} + 4, \quad p^3 + \frac{8}{p^3} + 6p + \frac{12}{p}$

10. $p^2 + \frac{25}{p^2} - 10, \quad p^3 - \frac{125}{p^3} + 15p - \frac{75}{p}$

13. $4p^2 + \frac{1}{p^2} + 4, \quad 8p^3 + \frac{1}{p^3} + 12p + \frac{6}{p}$

16. $25p^2 + \frac{1}{p^3} - 10. \quad 125p^3 - \frac{1}{p^3} - 75p + \frac{15}{p}$

19. $4p^2 + \frac{9}{p^2} + 12; \quad 8p^3 + \frac{27}{p^3} + 36p + \frac{54}{p}$

20. $9m^2 + \frac{16}{m^2} + 24, \quad 27m^3 + \frac{64}{m^3} + 108m + \frac{144}{m}$

22. $25p^2 + \frac{4}{p^2} - 20, \quad 125p^3 - \frac{8}{p^3} - 150p + \frac{60}{p}$

25. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2, \quad \frac{x^2}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{3x}{y} + \frac{3y}{x}$

29. $\frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} - 2, \quad \frac{m^3}{n^3} - \frac{n^3}{m^3} - 3\frac{m}{n} + 3\frac{n}{m}$

7-8 முற்றொருமைகள் : பலவகைக் கணக்குகள் (ஆ)

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகள் போட இப்பாடத்தில் கற்போம்.

$(\sqrt{5})^2 = 5$; $(\sqrt{3})^2 = 3$; $(\sqrt{a})^2 = a$ என அறிவோம்.

இப்பொழுது சில விகிதமுறா பின்னங்களின் சமான பின்னங்களைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\frac{5}{\sqrt{3}+1} = \frac{5}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$ (தொகுதி, பகுதி இரண்டையும் $(\sqrt{3}-1)$ ஆல் பெருக்குக.)

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} \quad [(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{5}{2}(\sqrt{3}-1).$$

பகுதியினை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றியுள்ளோம்.

2. $\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$$

3. $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$= \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

பயிற்சி 7 - 8

கீழ்க்கண்ட பின்னங்களின் பகுதிகளை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றி அமைக்க.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$
3. $\frac{3}{\sqrt{3}+2}$
4. $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$
5. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
7. $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
8. $\frac{5}{\sqrt{3}-2}$

விடைகள்

2. $\sqrt{2}+1$ 6. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

8-1 காரணிப் படுத்தல் : $(a \pm b)^2$ வடிவம்

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

என நாம் கற்றுள்ளோம். இவற்றினின்று,

$(a^2 + 2ab + b^2) = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

எனப் பெறலாம்.

அதாவது, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$

$a^2 + 2ab + b^2$ இன் காரணிகள் $(a+b)$, $(a+b)$

அதுபோலவே $a^2 - 2ab + b^2$ இன் காரணிகள் $(a-b)$, $(a-b)$ ஆகும்.

எனவே, இம்முற்றொருமையைக் கொண்டு, முழு வர்க்க வடிவத்திலுள்ள கோவைகளின் காரணிகளைக் காண இயலும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $4a^2 + 20ab + 25b^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5b) + 5b^2$
$= (2a+5b)^2$

2. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2(3a)(2b) + (2b)^2$
$= (3a-2b)^2$

பயிற்சி 8 - 1

I. கீழே உள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றும் முழு வர்க்கமாக அமைய என்ன உறுப்புகளை அவற்றோடு சேர்க்க வேண்டும் ?

(அ) $25x^2 + 40xy$ (ஆ) $49m^2 - 42mn$

(இ) $16p^2 + 25q^2$ (ஈ) $81a^2 + 72ab$

(உ) $4x^2 - 28x$

II. கீழே உள்ள கோவைகள் முழு வர்க்கங்களா என ஆய்க. முழு வர்க்கங்களெனில், அவற்றின் காரணிகளைக் காண்க.

1. $x^2 + 22x + 121$
2. $x^2 - 8x + 16$
3. $x^2 + 8x - 16$
4. $a^2 + 4ab + 4b^2$
5. $4a^4 + 4a^2b^2 + b^4$
6. $64a^4 - 80a^2b^2 + 25b^4$
7. $a^4 - 2a^2b^2 + 2b^2$
8. $36x^2 - 12xy + b^2$
9. $49m^4 - 56m^2n^2 + 16n^4$
10. $9a^2 - 4ab + 64b^2$

விடைகள்

I. (அ) $16y^2$ (ஆ) $9n^2$ (இ) $40pq$ (ஈ) $16b^2$ (உ) 49

II. (1) ஆம், $(x+11)^2$ (2) ஆம், $(x-4)^2$ (3) இல்லை
(4) ஆம், $(a+2b)^2$ (5) ஆம், $(2a^2+b^2)^2$
(6) ஆம், $(8a^2-5b^2)^2$ (7) இல்லை (8) இல்லை
(9) ஆம், $(7m^2-4n^2)^2$ (10) இல்லை

8 - 2 காரணிப்படுத்தல் :

$(a+b)(a+b)$ வடிவம் (அ)

எட்டாம் வகுப்பில் $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ எனக் கண்டீர்கள்.

இதனின்று $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ எனப் பெறலாம்.

இம் முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக அமைகிற கோவைகளின் காரணிகளை எளிதில் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $4p^2 - 9q^2 = (2p)^2 - (3q)^2 = (2p+3q)(2p-3q)$

2. $(2x+3y)^2 - (x-2y)$
$= [(2x+3y)+(x-2y)]\,[(2x+3y)-(x-2y)]$
$= (2x+3y+x-2y)(2x+3y-x+2y)$
$= (3x+y)(x+5y)$

3. $(a+b+c)^2 - (a+b)^2$
$= [(a+b+c)+(a+b)]\,[(a+b+c)-(a+b)]$
$= (a+b+c+a+b)(a+b+c-a-b)$
$= c(2a+2b+c)$

பயிற்சி 8 - 2

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

I. 1. $p^2 - q^2$ 8. $m^2 - 16n^2$ 15. $4a^2 - 49b^2$
2. $x^2 - y^2$ 9. $l^2 - 25m^2$ 16. $9p^4 - 4q^4$
3. $m^2 - n^2$ 10. $a^2 - 49b^2$ 17. $16x^4 - 9y^4$
4. $l^2 - m^2$ 11. $9p^2 - 4q^2$ 18. $49m^4 - 16n^4$
5. $a^2 - b^2$ 12. $16x^2 - 9y^2$ 19. $16l^6 - 25m^6$
6. $p^2 - 4q^2$ 13. $49m^2 - 16n^2$ 20. $4a^8 - 49b^8$
7. $x^2 - 9y^2$ 14. $16l^2 - 25m^2$

II 1. $(2x + 3y)^2 - (x + 2y)^2$
2. $(3x - 2y)^2 - (x + y)^2$
3. $(4a - 3b)^2 - (2a + 5b)^2$
4. $(9p - 16q)^2 - (2p - 5q)^2$
5. $(3m + 4n)^2 - (4m + 5n)^2$
6. $(a + b + 2c)^2 - (b + c)^2$
7. $(2a + 3b - 4c)^2 - (a + 4b - 3c)^2$
8. $(3a - 2b + 4c)^2 - (2a - 3b - 4c)^2$
9. $(x + y - z)^2 - (x - y + z)^2$
10. $(4x - 5y - 7z)^2 - (2x - 3y + 8)^2$

விடைகள்

I 1. $(p + q)(p - q)$ 6. $(p + 2q)(p - 2q)$
11. $(3p + 2q)(3p - 2q)$ 16. $(3p^2 + 2q^2)(3p^2 - 2q^2)$

II 1. $(3x + 5y)(x + y)$ 2. $(4x - y)(2x - 3y)$
6. $(a + 2b + 3c)(a + c)$

8 - 3 காரணிப் படுத்தல்:
$(a + b)(a - b)$ வடிவம் (ஆ)

ஜோடியாக $(a^2 - b^2)$ வடிவத்தில் அமையாத கோவைகளை அவ்வடிவங்களில் அமைத்துக் காரணிப்படுத்த இயலும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $4a^4 + b^4$

$$= (2a^2)^2 + 2(2a^2)(b^2) + (b^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= (2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$$
$$= (2a^2 + b^2 + 2ab)(2a^2 + b^2 - 2ab)$$
$$= (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$$

2. $9x^4 - 33x^2y^2 + 16y^4$

$$= (3x^2)^2 - 2(3x^2)(4y^2) + (4y^2)^2 - 9x^2y^2 \qquad [-33 = -24 - 9]$$
$$= (3x^2 - 4y^2)^2 - (3xy)^2$$
$$= (3x^2 - 4y^2 + 3xy)(3x^2 - 4y^2 - 3xy)$$
$$= (3x^2 + 3xy - 4y^2)(3x^2 - 3xy - 4y^2)$$

3. $a^2 - b^2 - 4a - 6b - 5$

$$= a^2 - 4a + 4 - b^2 - 6b - 9$$
$$= (a^2 - 2 \times a \times 2 + 2^2) - (b^2 + 2 \times b \times 3 + 3^2)$$
$$= (a - 2)^2 - (b + 3)^2$$
$$= [(a - 2) + (b + 3)][(a - 2) - (b + 3)]$$
$$= (a - 2 + b + 3)(a - 2 - b - 3)$$
$$= (a + b + 1)(a - b - 5)$$

4. $(p^2 - q^2)(r^2 - s^2) + 4\,pqrs$

$$= p^2r^2 - p^2s^2 - q^2r^2 + q^2s^2 + 4\,pqrs \qquad \text{(விரிவு படுத்த)}$$
$$= (p^2r^2 + 2\,pqrs + q^2s^2) - (p^2s^2 - 2pqrs + q^2r^2)$$
$$= (pr + qs)^2 - (ps - qr)^2$$
$$= [(pr + qs) + (ps - qr)]\,[(pr + qs) - (ps - qr)]$$
$$= (pr + qs + ps - qr)(pr + qs - ps + qr)$$

பயிற்சி 8-3

காரணிப்படுத்துக :

1. $x^2 + 9y^2 - 25z^2 - 6xy$
2. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd$
3. $a^2 + 8a + 4^2 - b^2$

4. $9 - x^2 + 2xy - y^2$

5. $y^2 - 2y - 17 + 4y^2$

6. $4a^2 - 12a + 9 - b^2 - 6b - 9$

7. $4x^4 + 81y^4$

8. $64a^4 + 81b^4$

9. $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2$

10. $4\ ^4 + 16p^2q^2 + 25q^4$

11. $25x^4 - 79x^2y^2 + 49y^4$

12. $36m^4 - 16m^2n^2 + n^4$

விடைகள்

1. $(x - 3y + 5z)\ (x - 3y - 5z)$

2. $(a + b + c + d)\ (a + b - c - d)$

3. $(a + b + 4)\ (a - b + 4)$

8. $(8a^2 + 12ab + 9b^2)\ (8a^2 - 12ab + 9b^2)$

9. $(b + d)\ (b - d)\ (a + c)\ (a - c)$

11. $(5x^2 + 3xy - 7y^2)\ (5x^2 - 3xy - 7y^2)$

8 - 4 காரணிப்படுத்தல் :
$(x + a)\ (x + b)$ வடிவம்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + x\,(a + b) + ab$$
$$(x - a)\ (x - b) = x^2 - x\,(a + b) + ab$$

கவனிக்க :

1. $(x + 3)\ (x + 6) = x^2 + (3 + 6)\,x + 3 \times 6$
$= x^2 + 9x + 18$

2. $(x + 5)\ (a + 7) = a^2 + (5 + 7)\,a + 5 \times 7$
$= a^2 + 12a + 35$

3. $(x - 3)\ (x - 6) = x^2 - (3 + 6)\,x + 3 \times 6$
$= x^2 - 9x + 18$

4. $(a - 5)\ (a - 7) = a^2 - (5 + 7)\,a + 5 \times 7$
$= a^2 - 12a + 35$

எனவே $x^2 + px + q$ என்ற வடிவிலுள்ள ஒரு கோவையைக் காரணிப்படுத்த,

1. கோடி உறுப்பு qஐ அதன் இரு காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதுக.

2. அக்காரணிகளின் கூடுதல் p ஆக அமையும் காரணிச் சோடியைப் பொறுக்குக. அக்காரணிச் சோடி a, b என்க.

3. p மிகை எண்ணானால், காரணிகள் $(x + a)$, $(x + b)$

p குறை எண்ணானால், காரணிகள் $(x - a)$, $(x - b)$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. காரணிப்படுத்துக : $x^2 + 13x + 36$.

36இன் காரணிச் சோடிகள் :
(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6) ஆகும்.

காரணிச் சோடிகளின் கூடுதல் :
37, 20, 15, 13, 12.

எனவே நமக்குத் தேவையான காரணிச் சோடி 4, 9.

நடு எண் 13 மிகை எண்ணாதலால்,

காரணிகள் $(x+4)$, $(x+9)$ ஆகும்.

எனவே, $x^2 + 13x + 36$

$$= (x + 4)(x + 9).$$

2. காரணிப்படுத்துக : $x^2 - 11x + 24$.

24இன் காரணிச்சோடிகள் :
(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6).

காரணிச் சோடிகளின் கூடுதல் 25, 14, 11, 10.

நமக்குத் தேவையான காரணிச் சோடி : 3, 8

நடு எண் -11 குறை எண்ணாதலால், காரணிகள் $(x-3)$, $(x-8)$ ஆகும்

எனவே $x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x - 8)$.

பயிற்சி 8 - 4

I. கீழே சில எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கடுத்தாற்போல், அவைகளின் காரணிகளின் கூடுதல்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்குப் பொருத்தமான காரணிச் சோடிகளைக் காண்க.

1. 32, 12	2. 12, 7	3. 30, 11
4. 42, 17	5. 6, 5	6. 12, 13
7. 81, 30	8. 108, 14	9. 36, 15
10. 48, 16	11. 45, −14	12. 40, −13
13. 42, −13	14. 35, −36	15. 28, −11
16. 1, −2	17. 64, −16	18. 12, −7
19. 16, −10	20. 20, −9.	

II. காரணிப்படுத்துக :

1. x^2+4x+3	2. $x^2+9x+14$	3. a^2+6a+8
4. p^2+5p+4	5. $m^2+19m+90$	6. x^2-5x+6
7. $x^2-7x+10$	8. $a^2-15a+54$	9. $p^2-12p+20$
10. $m^2-12m+72$	11. x^2+6x+5	12. $x^2-8x+15$
13. $a^2+15a+26$	14. $p^2-16p+63$	15. m^2+2m+1
16. $x^2-17x+66$	17. $x^2+13x+40$	18. a^2-7x+6
19. $p^2-24p+44$	20. $m^2+20m+36$.	

விடைகள்

I 1. 8, 4 2. 4, 3 4. 14, 3
11. −9, −5 12. −8, −5.

II 1. $(x+3)(x+1)$ 2. $(x+7)(x+2)$
3. $(a+4)(a+2)$ 7. $(x-5)(x-2)$
8. $(a-9)(a-6)$

8 - 5 காரணிப்படுத்தல் : $(x+a)(x+b)$ வடிவம்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

$$(x+a)(x-b) = x^2 + x(a-b) - ab$$
$$(x-a)(x+b) = x^2 - x(a-b) - ab$$

கவனிக்க :

கோவை	விரிவு	கோடி உறுப்பு	நடு உறுப்பு
$(x+11)(x-2)$	$x^2+9x-22$	$-22\,(11\times-2)$	$9\,(11-2)$
$(x+7)(x-3)$	$x^2+4x-21$	$-21\,(7\times-3)$	$4\,(7-3)$
$(x-11)(x+2)$	$x^2-9x-22$	$-22\,(-11\times+2)$	$-9(-11+2)$
$(x-7)(x+3)$	$x^2-4x-21$	$-21\,(-7\times+3)$	$-4\,(-7+3)$

இவற்றினின்று, x^2+px-q வடிவிலுள்ள கோவைகளின் காரணிகளைக் காண,

1. கோடி உறுப்பு qவின் காரணிச் சோடிகளைக் காண்க.

2. காரணிச் சோடிகளின் வித்தியாசம் நடு உறுப்பின் குணகம் pஆக உள்ள காரணிச் சோடியைப் பொறுக்குக.

அக்காரணிச் சோடி a, b என்க. $(a > b)$

3. p மிகை எண்ணானால், காரணிகள் $(x+a)$, $(x-b)$.
p குறை எண்ணானால், காரணிகள் $(x-a)$, $(x+b)$.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. காரணிப்படுத்துக :
$$x^2+15x-100$$

கோடி உறுப்பு 100இன் காரணிச் சோடிகள் :
(1, 100), (2, 50), (4, 25), (5, 20), (10, 10)

காரணிச் சோடிகளின் வித்தியாசங்கள் :
99, 48, 21, 15, 0

பொருத்தமான காரணிச் சோடி (5, 20)

நடு எண் 15 மிகை எண்.

எனவே காரணிகள் $(x+20)$, $(x-5)$

$$x^2+15x-100=(x+20)(x-5)$$

2. காரணிப்படுத்துக :
$$x^2-8x-48$$

கோடி உறுப்பின் காரணிச் சோடிகள் :

(1, 48), (2, 24), (3, 16), (4, 12) (6, 8)

காரணிச் சோடிகளின் வித்தியாசங்கள் :

47, 22, 13, 8, 2,

பொருத்தமான காரணிச் சோடி : (4, 12)

நடு எண் — 8 குறை எண்.

எனவே காரணிகள் $(x - 12)$, $(x + 4)$.

$x^2 - 8x - 48 = (x - 12)(x + 4)$

பயிற்சி 8 - 5

I கீழே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் காரணிச் சோடிகளைக் காண்க. காரணிகளின் வித்தியாசம் எண்களுக் கடுத்தாற்போல் கொடுக்கப்பட்ட எண்களுக்குப் பொருத்தமான காரணிச் சோடியை எழுதுக.

1. 12, 1
2. 56, 10
3. 66, 5
4. 72, 14
5. 36, 5
6. 64, 0
7. 24, 2
8. 30, 7
9. 84, 5
10. 48, 22
11. 55, 54
12. 12, 11
13. 100, 0
14. 55, 6
15. 28, 3
16. 40, 3
17. 34, 15
18. 108, 3
19. 120, 19
20. 135, 6

II காரணிப்படுத்துக :

1. $x^2+7x-60$
2. $p^2+3p-54$
3. $m^2+8m-105$
4. $a^2+4a-45$
5. $x^2+2x-120$
6. $x^2-9x-22$
7. $p^2-5p-84$
8. $m^2-3m-180$
9. $a^2-10a-24$
10. $x^2-6x-27$
11. x^2-16
12. p^2-25
13. m^2+m-72
14. $a^2-2a-35$
15. $x^2+3x-130$
16. $x^2-2x-99$
17. $p^2+p-132$
18. $m^2-7m-260$
19. $a^2-5a-150$
20. x^2+8x-9

விடைகள்

I 1. 4, 3 2. 14, 4 13. 10, 10
15. 7, 4

II 1. $(x+12)(x-5)$ 2. $(p+9)(p-6)$
3. $(m+15)(m-7)$ 7. $(p-12)(p+7)$
8. $(m-15)(m+12)$ 15. $(x+13)(x-10)$
20. $(x+9)(x-1)$

8 - 6 காரணிப்படுத்தல் : ax^2+bx+c வடிவம் (ac மிகை எண்)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(x+a)(y+b) = x(y+b)+a(y+b)$$

கீழ்க்கண்டவற்றை நன்கு கவனிக்கவும்.

கோவை	விரிவு
$(2x+5)(3x+4)$	$6x^2+23x+20$
$(4x+3)(6x+7)$	$24x^2+46x+21$
$(2x-5)(3x-4)$	$6x^2-23x+20$
$(4x-3)(6x-7)$	$24x^2-46x+21.$

நடு உறுப்பு	கோடி உறுப்புகளின் பெருக்கற் பலன்
$23=8+15$	$6\times20=120=8\times15$
$46=28+18$	$24\times21=504=28\times18$
$-23=-8-15$	$6\times20=120=-8\times-15$
$-46=-28-18$	$24\times21=504=-28\times-18$

மேற்கண்டவற்றினின்று ax^2+bx+c வடிவிலுள்ள கோவைகளைக் காரணிப்படுத்த,

1. கோடி உறுப்புகளின் குணகங்கள் a, c ஐப் பெருக்கவும்.
2. ac-க்குக் காரணிச் சோடிகள் காணவும்.
3. ac மிகை எண்ணானால் காரணிச் சோடிகளின் கூடுதல் நடு எண் b உள்ளவாறு தெரிந்தெடுக்கவும்.
4. பின்னர் காரணிகளாகப் பிரிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. காரணிப்படுத்துக : $8x^2 + 28x + 20$.

கோடி உறுப்புகளின் குணகங்களின் பெருக்கற் பலன் :

$8 \times 20 = 160$.

அதன் காரணிச் சோடிகள் : (1, 160), (2, 80), (4, 40), (5, 32), (8, 20), (10, 16)

நடு எண் 28-க்குப் பொருத்தமான சோடி : (8, 20)

$$8x^2 + 28x + 20$$
$$= 8x^2 + 8x + 20x + 20$$
$$= 8x(x + 1) + 20(x + 1)$$
$$= (8x + 20)(x + 1)$$
$$= 4(2x + 5)(x + 1)$$

2. காரணிப்படுத்துக : $6a^2 - 19a + 15$.

கோடி உறுப்புகளின் குணகங்களின் பெருக்கற் பலன் :

$6 \times 15 = 90$

அதன் காரணிச் சோடிகள் : (1, 90), (2, 45), (3, 30), (5, 18), (6, 15), (9, 10).

நடு எண் 19க்குப் பொருத்தமான சோடி : (9, 10)

$$6a^2 - 19a + 15$$
$$= 6a^2 - (9 + 10)a + 15$$
$$= 6a^2 - 9a - 10a + 15$$
$$= 3a(2a - 3) - 5(2a - 3)$$
$$= (2a - 3)(3a - 5)$$

பயிற்சி 8 - 6

காரணிப்படுத்துக :

1. $6x^2+5x+1$
2. $15x^2+8x+1$
3. $6x^2+7x+2$
4. $10p^2+11p+3$
5. $6p^2+21p+15$
6. $8p^2+25p+17$

7. $6a^2+23p+20$
8. $12m^2+43m+35$
9. $6x^2+25x+14$
10. $p^2+25p+12$
11 $6x^2-5x+1$
12. $15x^2-8x+1$
13. $6x^2-7x+2$
14. $10p^2-11p+3$
15. $6p^2-21p+15$
16. $8p^2-25p+17$
17. $6a^2-23p+20$
18. $12m^2-43m+35$
19. $6x^2-25x+14$
20. $12p^2-25p+12$

விடைகள்

1. $(3x+1)(2x+1)$
2. $(5x+1)(3x+1)$
3. $(3x+2)(2x+1)$
11. $(3x-1)(2x-1)$
12. $(5x-1)(3x-1)$
15. $3(2p-5)(p-1)$

8 - 7 காரணிப்படுத்தல் : ax^2+bx+c வடிவம் (ac குறை எண்)

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. காரணிப்படுத்துக : $6x^2+7x-20$

கோடி உறுப்புகளின் குணகங்களின் பெருக்கற் பலன்
$= 6 \times 20 = 120 = 15 \times 8$

நடு உறுப்பு $= 7 = 15 - 8$

எனவே ax^2+bx+c வடிவத்தில் ac குறை எண்ணானால், acஇன் காரணிச் சோடிகளின் வித்தியாசம் நடு எண் 7ஆக அமையுமாறு தெரிந்தெடுக்கவும்.

$$\begin{aligned} & 6x^2+7x-20 \\ &= 6x^2+(15-8)x-20 \\ &= 6x^2+15x-8x-20 \\ &= 3x(2x+5)-4(2x+5) \\ &= (2x+5)(3x-4) \end{aligned}$$

2. காரணிப்படுத்துக : $12x^2-13x-35$

கோடி உறுப்புகளின் குணகங்களின் பெருக்கற் பலன்
$= 12 \times 35 = 420$

420இன் காரணிச் சோடிகள்

(1, 420), (2, 210), (3, 140), (4, 105),
(5, 84), (6, 70), (7, 60), (10, 42), (12, 35),
(14, 30), (15, 28), (20, 21)

அவற்றின் வித்தியாசம் நடு எண் 13க்கும் பொருத்தமான சோடி (15, 28)

$$\begin{aligned} & 12x^2 - 13x - 35 \\ &= 12x^2 - (28 - 15)x - 35 \\ &= 12x^2 - 28x + 15x - 35 \\ &= 4x(3x - 7) + 5(3x - 7) \\ &= (3x - 7)(4x + 5) \end{aligned}$$

பயிற்சி 8-7

காரணிப்படுத்துக :

1. $6x^2 + 5x - 11$
2. $3x^2 + 5x - 8$
3. $5x^2 + 4x - 9$
4. $8x^2 + 11x - 10$
5. $6p^2 + p - 15$
6. $10m^2 + 14m - 15$
7. $12a^2 + 5a - 3$
8. $15x^2 + 11x - 12$
9. $14p^2 + 15p - 9$
10. $9p^2 - 25$
11. $6x^2 - 5x - 11$
12. $3x^2 - 5x - 8$
13. $5x^2 - 4x - 9$
14. $8x^2 - 11x - 9$
15. $6p^2 - p - 15$
16. $10m^2 - 19m - 15$
17. $12a^2 - 5a - 3$
18. $15x^2 - 11x - 12$
19. $14p^2 - 15p - 9$
20. $8x^2 - 10x - 25$

விடைகள்

1. $(6x + 11)(x - 1)$
2. $(3x + 8)(x - 1)$
3. $(5x + 9)(x - 1)$
10. $(3p + 5)(3p - 5)$
20. $(2x - 5)(4x + 5)$

9-1 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் : ஒரு மாறி (திருப்புதல்)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a; \quad a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

ஏழாம், எட்டாம் வகுப்புகளில் ஒரு மாறியில் உள்ள ஒரு படிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிக் கற்றவற்றினை இப்பொழுது நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $x + 5 = 6$ என்றால்,

$$x + 5 + (-5) = 6 + (-5)$$
$$x + 0 = 1$$
$$x = 1$$

சுருக்கமாகக் கூறின்,

$x + 5 = 6$

$x = 6 - 5 = 1$

தீர்வுக் கணம் $\{1\}$

2. $x - 3 = 9$ என்றால்,

$$x - 3 + 3 = 9 + 3$$
$$x + 0 = 12$$
$$x = 12$$

சுருக்கமாக,

$x - 3 = 9$

$x = 9 + 3 = 12$

தீர்வுக் கணம் $\{12\}$

3. $3x = 24$ என்றால்,

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 24$$
$$1 \cdot x = 8$$
$$x = 8$$

சுருக்கமாக,

$3x = 24$

$x = 24 \div 3 = 8$

தீர்வுக் கணம் $\{8\}$

4. $\frac{2}{3} x = 10$ எனில்,

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \cdot 10$$
$$1 \cdot x = 15$$
$$x = 15$$

சுருக்கமாக,

$\frac{2}{3} x = 10$

$x = \frac{3}{2} \times 10 = 15$

தீர்வுக் கணம் $\{15\}$

5. $2x + 3 = 13$

$2x+3+(-3)=13+(-3)$

$2x + 0 = 10$

$2x = 10$

$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 10$

$1 \cdot x = 5$

$x = 5$

சுருக்கமாக,

$2x + 3 = 13$

$2x = 13 - 3 = 10$

$x = 10 \div 2 = 5$

தீர்வுக் கணம் { 5 }

6. $\frac{5}{2} x - 4 = -19$

$\frac{5}{2} x - 4 + 4 = -19 + 4$

$\frac{5}{2} x + 0 = -15$

$\frac{5}{2} x = -15$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} x = \frac{2}{5} \cdot (-15)$

$1 \cdot x = -6$

$x = -6$

சுருக்கமாக,

$\frac{5}{2} x - 4 = -19$

$\frac{5}{2} x = -19 + 4 = -15$

$x = \frac{2}{5} (-15) = -6$

தீர்வுக் கணம் { −6 }

பயிற்சி 9-1

(மனக்கணக்குகள்)

தீர்வுக் கணங்களைக் காண்க :

1. (அ) $x+3=8$ (ஆ) $a+6=9$ (இ) $x+12=6$
 (ஈ) $x+7=5$ (உ) $x+2\frac{1}{2}=5$ (ஊ) $x+3=-8$
 (எ) $a+6=-9$ (ஏ) $x+12=-6$ (ஐ) $x+7=-5$

2. (அ) $x-3=8$ (ஆ) $a-6=9$ (இ) $x-12=6$
 (ஈ) $x-7=5$ (உ) $x-2\frac{1}{2}=5$ (ஊ) $x-3=-8$
 (எ) $a-6=-9$ (ஏ) $x-12=-6$ (ஐ) $x-7=-5$

3. (அ) $3x=12$ (ஆ) $4x=24$ (இ) $2x=7$
 (ஈ) $7x=-14$ (உ) $2x=6{\cdot}5$ (ஊ) $3x=-12$
 (எ) $4x=-24$ (ஏ) $-2x=7$ (ஐ) $-7x=-14$

9-2 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் : ஒரு மாறி

பல்வகைக் கணக்குகள்

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. இரு எண்களின் கூடுதல் 117. அவற்றின் வித்தியாசம் 27. அவ்வெண்கள் யாவை ?

அவைகளின் வித்தியாசம் 27 ஆதலால், ஓர் எண் x ஆனால், மற்றது $x + 27$. அவற்றின் கூடுதல்

$$x + x + 27 = 117$$
$$2x + 27 = 117$$
$$2x = 117 - 27 = 90$$
$$x = 45$$

எனவே ஓர் எண் 45 ; மற்றது $45 + 27 = 72$.

2 இருவரின் வயதுகள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. 20 ஆண்டுகளுக்கு முன் அவர்களின் வயதுகள் 1 : 2 என்ற விகிதத்திலிருந்தன. அவர்களது தற்போதைய வயதுகள் என்ன ?

ஒருவர் வயது $3x$ ஆண்டுகள் என்றால், மற்றவர் வயது $4x$ ஆகும். 20 ஆண்டுகட்கு முன்னர் அவர்கள் வயதுகள் முறையே $3x - 20$, $4x - 20$.

$$\therefore \quad 3x - 20 : 4x - 20 = 1 : 2$$

எனவே $2(3x - 20) = 1(4x - 20)$

$$6x - 40 = 4x - 20$$
$$6x - 4x = -20 + 40$$
$$2x = 20$$
$$x = 10$$

அவர்களுடைய தற்போதைய வயதுகள் முறையே 30, 40.

எண் விளையாட்டு :

ஓர் எண்ணை நினைக்க. அதனை 5 ஆல் பெருக்கி 3 ஐக் கூட்டுக. பலனை 8 ஆல் பெருக்கி 24 ஐக் கழிக்க. பலனை 4 ஆல் வகுக்க. நினைத்த எண்ணிற்கும் பலனிற்கும் உள்ள சம்பந்தம் என்ன எனக் காண்க.

எண் x என்றால், 5 ஆல் பெருக்கி 3 ஐக் கூட்ட $= 5x + 3$

$(5x + 3)$ ஐ 8 ஆல் பெருக்க $= 40x + 24$

24 ஐக் கழிக்க $= 40x$

4 ஆல் வகுக்க $= 10x$

கிடைத்துள்ள பலன் நினைத்த எண்ணின் 10 மடங்காகும். கிடைத்த பலனில் ஒன்றிடத்திலுள்ள பூச்சியத்தை நீக்க நினைத்த எண் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 9 - 2

1. கீழ்க்கண்ட எண் சோடிகளைக் சமன்பாடுகள் அமைத்துக் காண்க.

	எண்களின் கூடுதல்	அவற்றின் வித்தியாசம்
(அ)	80	10
(ஆ)	92	28
(இ)	35	5
(ஈ)	48	16
(உ)	75	25

2. இருவரின் வயதுகள் முறையே 2 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. பத்தாண்டுகளுக்குப் பின்னர் அவர்கள் வயதுகள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலமையும். அவர்களின் வயதுகள் என்ன ?

3. இரு இயந்திரங்களின் விலைகள் 4 : 5 என்ற விகிதத்திலிருக்கின்றன. அவை ஒவ்வொன்றின் விலையும் ரூ. 500 குறைந்தால், அவற்றின் விலைகள் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலமையும். அவற்றின் முதல் விலைகள் யாவை ?

4. இரு எண்கள் 5 : 4 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. முதல் எணணோடு 5ஐயும், இரண்டாமெண்ணோடு 2ஐயும் கூட்டினால், அவை 4 : 3 என்ற விகிதத்திலமையும். அவ்வெண்கள் யாவை ?

5. இரு வகுப்புகளில் மாணவர் எண்ணிக்கை 8 : 7 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. முதல் வகுப்பிலிருந்து 3 மாணவரை இரண்டாம் வகுப்பிற்கு மாற்ற, வகுப்புகளில் சம எண்ணிக்கை மாணவர் உள்ளனர். முதலில் முதல் வகுப்பில் எத்தனை மாணவர் இருந்தனர் ?

6. இருவர் சென்ற பயண தூரங்கள் 4 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. முதலாமவர் 60 கிமீ-ம் இரண்டாமவர் 120 கிமீ-உம் மேலும் பயணம் செய்த பின்னர், அவை 7 : 9 என்ற விகிதத்திலிருக்கும். ஒவ்வொருவரும் எவ்வளவு தூரம் பயணம் செய்துள்ளனர் ?

விடைகள்

(அ) $x+y=80$
$x-y=10$

(ஆ) $x+y=92$
$x-y=28$

(இ) $x+y=35$
$x-y=5$

(ஈ) $x+y=48$
$x-y=16$

(உ) $x+y=75$
$x-y=25$

2. (அ) 20, 30 3. ரூ. 2000, ரூ. 2500 4. 35, 28
5. 48, 42 6. 80 கிமீ ; 60 கிமீ.

9 - 3 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் : இருமாறிகள் (திருப்புதல்)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

ஒரு சமன்பாட்டின் வலப்புறம், இடப்புறம் இரண்டையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கினாலோ, வகுத்தாலோ கிடைக்கும் சமன்பாடுகள் சமான சமன்பாடுகளாகும்.

$2x+3y=5$; $4x+6y=10$; $6x+9y=15$; $14x+21y=35$ இவை சமான சமன்பாடுகள்.

எட்டாம் வகுப்பில் இரு மாறிகளிலுள்ள சமன்பாடுகளை விடுவிக்கக் கற்றோம். அவற்றினை மீண்டும் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $2x + 3y = 1$ ... (1)

$3x - 4y = 10$ ... (2)

yஇன் குணகங்கள் 3, 4இன் மீ.சி.ம. 12

(1) × 4, $8x + 12y = 4$ ... (3)

(2) × 3, $9x - 12y = 30$ ... (4)

(3) + (4), $(8x + 9x) + (12y - 12y) = 4 + 30$

$$17x + 0 = 34$$

$$x = 34 \div 17 = 2$$

(1)இல் பிரதியிட, $4 + 3y = 1$

$$3y = 1 - 4 = -3$$

$$y = \frac{-3}{3} = -1$$

$x = 2$ y, $= -1$ அல்லது $\{ (2, -1) \}$ என்பது தீர்வுக் கணம்.

2. $3x + 4y = 6$ ... (1)

$5x + 6y = 8$ ... (2)

4, 6 இவற்றின் மீ. சி. ம. 12

(1) × 3, $9x + 12y = 18$ ... (3)

(2) × − 2. $-10x - 12y = -16$ ... (4)

(3) + (4), $(9x - 10x) + (12y - 12y) = 18 - 16$

$$-x + 0 = 2$$

$$x = -2$$

(1)இல் பிரதியிட, $-6 + 4y = 6$

$$4y = 6 + 6 = 12$$

$$y = 12 \div 4 = 3$$

தீர்வுக் கணம் $\{ (-2, 3) \}$

3. $4x - 3y = 14{\cdot}5$ ... (1)

$2x - 5y = 12{\cdot}5$ ... (2)

3, 5 இவற்றின் மீ. சி. ம. 15

(1) × 5, $20x - 15y = 72{\cdot}5$ ... (3)

(2) × −3, $-6x + 15y = -37{\cdot}5$ ... (4)

(3) + (4),

$20x - 6x) + (-15y + 15y) = 72{\cdot}5 - 37{\cdot}5$

$$14x = 35$$

$$x = 35 \div 14 = 2{\cdot}5$$

0இல் பிரதியிட, $10 - 3y = 14{\cdot}5$

$$-3y = 14{\cdot}5 - 10 = 4{\cdot}5$$

$$y = 4{\cdot}5 \div -3 = -1{\cdot}5$$

தீர்வுக் கணம் : $\{(2{\cdot}5, -1{\cdot}5)\}$

பயிற்சி 9 - 3

1. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளில் ஒவ்வொன்றிற்கும் நேராக வேறு சில சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்குச் சமான சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(அ) $2x + 5y = 8$; $5x + 2y = 8$; $4x + 10y = 8$; $6x + 15y = 24$; $2x - 5y = 8$.

(ஆ) $3x - 4y = 6$; $9x - 12y = 2$; $15x - 20y = 30$; $3x + 4y = 6$; $4x - 3y = 6$.

(இ) $5x + 3y = 12$; $3x + 5y = 12$; $15x + 13y = 36$; $15x + 9y = 12$; $20x + 12y = 48$.

(ஈ) $1{\cdot}5x + 2{\cdot}25y = 4$; $6x + 9y = 16$; $4{\cdot}5x + 6{\cdot}5y = 12$; $3x + 4{\cdot}5y = 4$; $6x + 9y = 4$.

2. கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்க.

(அ) (i) $2x + 3y = 5$, $4x - 3y = 1$ (ii) $4x + 5y = 13$, $3x - 5y = 1$

(iii) $5x + 2y = 9$, $3x - 2y = -1$ (iv) $5x + 2y = 6$, $3x - 2y = 10$

(ஆ) (i) $2x + 3y = 5$, $3x - 4y = -1$ (ii) $3x + 5y = 11$, $2x - 3y = 1$

(iii) $2x + 5y = 3$, $3x - 2y = -5$ (iv) $3x + 4y = -11$, $2x - 3y = 4$

(இ) (i) $2x + 3y = 5$, $3x + 4y = 7$ (ii) $4x + 5y = 13$, $2x + 3y = 7$

(iii) $2x + 5y = 3$, $3x + 2y = -1$ (iv) $3x + 4y = -11$, $2x + 3y = -8$

(ஈ) (i) $2x - 3y = 1$ (ii) $4x - 5y = 3$
$3x - 4y = -1$ $2x - 3y = 1$

(iii) $2x - 5y = -7$ (iv) $3x - 4y = 5$
$3x - 2y = -5$ $2x - 3y = 4$

விடைகள்

2. (அ) (i) $\{(1, 1)\}$ (ஆ) (iii) $\{(-1, 1)\}$
(இ) (i) $\{(1, 1)\}$ (ஈ) (iii) $\{(-1, 1)\}$

9 - 4 ஒரு படிச் சமன்பாடுகள்: இரு மாறிகள் — பல்வகைக் கணக்குகள்

இரு மாறிகளில் ஒரு படிச் சமன்பாடுகளை அமைப்பது எவ்வாறு என்று காண்போம்.

1. (i) இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களும், மூன்று டாக்டர் பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை ரூ. 14.

ஒரு ரைட்டர் பேனாவின் விலை ரூ. x, ஒரு டாக்டர் பேனாவின் விலை ரூ. y என்றால்,

இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களின் விலை $2x$

மூன்று டாக்டர் பேனாக்களின் விலை $3y$

இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களும், மூன்று டாக்டர் பேனாக்களும் சேர்ந்து விலை $= 2x + 3y$.

கொடுத்துள்ள விவரப்படி $2x + 3y = 14$

(ii) மூன்று டாக்டர் பேனாக்களின் விலை, இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களின் விலையை விட ரூ. 4 அதிகம்.

மூன்று டாக்டர் பேனாக்களின் விலை = இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களின் விலை + 4

$$3y = 2x + 4$$
$$-2x + 3y = 4$$

(iii) இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களின் விலை, மூன்று டாக்டர் பேனாக்களின் விலையை விட ரூ. 4 குறைவு.

இரண்டு ரைட்டர் பேனாக்களின் விலை
= மூன்று டாக்டர் பேனாக்களின் விலை — ரூ. 4.

$$2x = 3y - 4$$
$$2x - 3y = -4$$

2. இரு எண்களின் கூடுதல் 100; அவற்றின் வித்தியாசம் 40. எண்கள் x, y $(x > y)$ என்றால்,

கூடுதல் $= x + y$; வித்தியாசம் $= x - y$

எனவே $x + y = 100$; $x - y = 40$.

3. (i) இருவர் வயதுகள் 2 : 3 என்ற விகிதத்திலுள்ளன.

அவர்கள் வயதுகள் x, y என்றால் $x : y = 2 : 3$

$$3x = 2y$$
$$3x - 2y = 0$$

(ii) அவர்கள் வயதுகள் 15 ஆண்டுகட்கு முன்னர் 1 : 2 என்ற விகிதத்திலுள்ளன.

15 ஆண்டுகட்கு முன்னர் முதலாமவர் வயது $= x - 15$

15 ஆண்டுகட்கு முன்னர் இரண்டாமவர் வயது $= y - 15$

கொடுத்துள்ள விவரப்படி $(x - 15) : (y - 15) = 1 : 2$

$$2(x - 15) = 1(y - 15)$$
$$2x - 30 = y - 15$$
$$2x - y = -15 + 30 = 15$$

4. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9. இலக்கங்களை இடம் மாற்றினால், எண்ணின் மதிப்பு 45 அதிகரிக்கிறது.

எண் xy என்போம். அதாவது, ஒன்று இடத்திலுள்ள இலக்கம் y; பத்து இடத்திலுள்ள இலக்கம் x என்போம்.

இலக்கங்களின் கூடுதல் $x + y = 9$.

எண்ணின் மதிப்பு $= y$ ஒன்றுகள் $+ x$ பத்துகள் $= y + 10x$.

இலக்கங்களை இடமாற்றினால், எண் yx ஆகும்.

ஒன்று இடத்தில் xஉம், பத்து இடத்தில் yயும் இருக்கும்.

எண்ணின் மதிப்பு $= x$ ஒன்றுகள் $+ y$ பத்துகள்
$= x + 10y$.

புதிய எண்ணின் மதிப்பு $=$ பழைய எண்ணின் மதிப்பு $+ 45$

$$x + 10y = y + 10x + 45$$

$$x + 10y - y - 10x = 45$$

$$-9x + 9y = 45$$

அல்லது $-x + y = 5$ (9 ஆல் வகுக்க)

மேசையை 10 % இலாபத்திற்கும், நாற்காலியை 5 % இலாபத்திற்கும் விற்க மொத்த இலாபம் ரூ. 50.

மேசையின் விலை ரூ. x ; நாற்காலியின் விலை ரூ. y என்க.

மேசையின்மீது இலாபம் $= \frac{10}{100} \times x = \frac{10x}{100}$

நாற்காலியின் மீது இலாபம் $= \frac{5}{100} \times y = \frac{5y}{100}$

மொத்த இலாபம் $= \frac{10x}{100} + \frac{5y}{100}$

எனவே $\frac{10x}{100} + \frac{5y}{100} = 50$

100 ஆல் பெருக்க, $10x + 5y = 5000$

5 ஆல் வகுக்க, $2x + y = 1000$

மேசையை 10% இலாபத்திற்கும், நாற்காலியை 5% நஷ்டத்திற்கும் விற்க நிகர இலாபம் ரூ. 10.

மேசையின் மீது இலாபம் $= \frac{10}{100} \times x = \frac{10x}{100}$

நாற்காலியின் மீது நஷ்டம் $= \frac{5}{100} \times y = \frac{5y}{100}$

நிகர இலாபம் $=$ மேசையின் மீது இலாபம் $-$ நாற்காலியின் மீது நஷ்டம்

$$= \frac{10x}{100} - \frac{5y}{100}$$

எனவே $\frac{10x}{100} - \frac{5y}{100} = 10$

அல்லது $10x - 5y = 1000$; அல்லது $2x - y = 200$

7. ஒரு செவ்வக அறையின் நீளத்தை 4 மீ அதிகரித்து, அகலத்தை 2 மீ குறைக்க, அதன் பரப்பளவு 8 மீ^{2} அதிகரிக்கிறது.

நீளம் l மீ, அகலம் b மீ என்க. அறையின் பரப்பு $= lb$ மீ^{2}
நீளத்தை 4 மீ அதிகரித்தால், புதிய நீளம் $= l + 4$ மீ
அகலத்தை 2 மீ குறைத்தால், புதிய அகலம் $= b - 2$ மீ
புதிய செவ்வக அறையின் பரப்பு $= (l + 4)(b - 2)$ மீ^{2}
$= lb - 2l + 4b - 8$
புதிய பரப்பு = பழைய பரப்பு + 8
$lb - 2l + 4b - 8 = lb + 8$
அல்லது $-2l + 4b = 8 + 8 = 16$; அல்லது $-l + 2b = 8$

பயிற்சி 9-4

கீழ்க்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு சமன்பாடுகளை அமைக்க. பின்னர் அவற்றைத் தீர்க்க.

1.

	முதல் பண்டத்தின் எண்ணிக்கை	இரண்டாம் பண்டத்தின் எண்ணிக்கை	மொத்த விலை ரூ.
(அ)	5	4	23
	2	5	16
(ஆ)	4	7	45
	3	2	17·50
(இ)	2	3	9·00
	5	2	11·50

2. (அ) மூன்று ஆங்கில நூல்களின் விலை இரண்டு கணித நூல்களின் விலையைவிட ரூ. 1 அதிகம். 5 ஆங்கில நூல்களின் விலை 4 கணித நூல்களின் விலையைவிட ரூ. 1 குறைவு.

(ஆ) 8 பேனாக்களின் விலை 5 கணிதக் கருவிப் பெட்டிகளின் விலையைவிட ரூ. 5 அதிகம். 2 பேனாக்களின் விலை 1 கணிதக் கருவிப் பெட்டியின் விலையைவிட ரூ. 2 அதிகம்.

(இ) 4 பிலிப்ஸ் குழல் விளக்குகளின் விலை 6 பஜாஜ் குழல் விளக்குகளின் விலையைவிட ரூ. 60 குறைவு. 3 பிலிப்ஸ் விளக்குகளின் விலை 2 பஜாஜ் விளக்குகளின் விலையைவிட ரூ. 55 அதிகம்.

3. (அ) இரு எண்களின் கூடுதல் 120. அவற்றின் வித்தியாசம் 20.

(ஆ) இரு எண்களின் கூடுதல் 175. அவற்றின் வித்தியாசம் 25.

(இ) இரு எண்களின் கூடுதல் 110. அவற்றின் வித்தியாசம் 0.

4. (அ) இருவர் வயதுகள் முறையே 3 : 5 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. பத்தாண்டுகளுக்கு முன்னர் அவை 1 : 2 என்ற விகிதத்திலிருந்தன.

(ஆ) இருவரிடம் உள்ள பணம் 7 : 4 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. தலைக்கு ரூ. 2000 செலவழித்த பின்னர் அவர்களிடம் உள்ள பணம் 16 : 7 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

(இ) பத்தாண்டுகளுக்கு முன்னர் பையன், தகப்பனார் வயதுகள் 1 : 6 என்ற விகிதத்திலும், பத்தாண்டுகளுக்குப் பின்னர் அவை 1 : 2 என்ற விகிதத்திலும் இருக்கும்.

5. (அ) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 8. அவற்றின் இடங்களை மாற்றினால் அதன் மதிப்பு 36 குறையும்.

(ஆ) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 15. அவற்றின் இலக்கங்களை இடம் மாற்ற அதன் மதிப்பு 9 கூடுகிறது.

(இ) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் வித்தியாசம் 3. அவற்றின் இலக்கங்களை இடம் மாற்ற அதன் மதிப்பு 27 அதிகரிக்கும்.

6.	முதல் பண்டத்தின் மீது இலாபம்/நஷ்டம்	இரண்டாம் பண்டத்தின் மீது இலாபம்/நஷ்டம்	மொத்த இலாபம்/நஷ்டம் ரூ.
(அ)	15% இலாபம்	10% இலாபம்	250 இலாபம்
	10% இலாபம்	15% இலாபம்	250 இலாபம்
(ஆ)	8% இலாபம்	5% நஷ்டம்	50 இலாபம்
	10% இலாபம்	5% இலாபம்	130 இலாபம்
(இ)	12% இலாபம்	10% நஷ்டம்	2 நஷ்டம்
	5% நஷ்டம்	8% இலாபம்	8·50 இலாபம்

7.	செவ்வக அறையில் நீளத்தில் மாற்றம்	அகலத்தில் மாற்றம்	பரப்பளவில் மாற்றம்
(அ)	3 மீ குறைவு	2 மீ அதிகம்	1 மீ² அதிகம்
	2 மீ குறைவு	3 மீ அதிகம்	12 மீ² அதிகம்
(ஆ)	10 மீ அதிகம்	5 மீ குறைவு	ஏதுமில்லை
	10 மீ குறைவு	15 மீ அதிகம்	400 மீ² அதிகம்
(இ)	10 மீ அதிகம்	10 மீ குறைவு	200 மீ² குறைவு
	10 மீ குறைவு	10 மீ அதிகம்	ஏதுமில்லை

விடைகள்

(2) (அ) ரூ. 3, ரூ. 4 (ஆ) ரூ. 3, ரூ. $2\frac{1}{2}$
(இ) ரூ. 45, ரூ. 40

(3) (அ) 70, 50 (ஆ) 100, 75 (இ) 55, 55

(4) (அ) 30, 50 (ஆ) ரூ. 8400, ரூ. 4800 (இ) 15, 40

(5) (அ) 62 (ஆ) 78 (இ) 36

(6) (அ) ரூ. 1000, ரூ. 1000

(7) (அ) 8 மீ ; 3 மீ

கணித மன்றம் — மேடை 3

ஓர் எண்ணை இரு வர்க்கங்களின்மூலம் கூறுதல்

$$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$$

$$48 = \left(\frac{48+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{48-1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{24+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{24-2}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{16+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{16-3}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{12+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{12-4}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{8+6}{2}\right)^2 - \left(\frac{8-6}{2}\right)^2$$

$$= 24{\cdot}5^2 - 23{\cdot}5^2 = 13^2 - 11^2$$
$$= 9{\cdot}5^2 - 6{\cdot}5^2 = 8^2 - 4^2 = 7^2 - 1^2$$

இவற்றில் $(13^2 - 11^2), (8^2 - 4^2), (7^2 - 1^2)$ என்பவை முழுக்களின் கணத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. இதுபோல எந்த எண்ணையும் இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம்.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

என்று பிரித்தெழுதிச் சரி பார்க்கலாம்.

இரு எண்கள் இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலானால், அவற்றின் பெருக்கற் பலனையும் இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலாக அமைக்க முடியும்.

$13 = 2^2 + 3^2;\quad 41 = 4^2 + 5^2$

$a = 2;\quad b = 3;\quad c = 4;\quad d = 5$

$ac + bd = 8 + 15 = 23$

$ad - bc = 10 - 12 = -2$

$533 = 13 \times 41 = 23^2 + 2^2 = (2^2 + 3^2)(4^2 + 5^2)$

612, 725 ஆகியவற்றை இதுபோல இரு வர்க்கங்களின் கூடுதலாக அமைக்க முடியுமா எனப் பார்க்க.

ஆய்லர் என்ற சுவிசு நாட்டுக் கணிதப் பேரறிஞர் 4 எண்களின் கூடுதலாக அமையப் பெற்ற இரு எண்களின் பெருக்கற் பலனை 4 வர்க்கங்களின் கூடுதலாக அமைக்கும் முறையைக் கண்டறிந்தார். லியோவில்லி என்பார் ஓர் எண்ணைச் சில எண்களின் 4 ஆம் அடுக்குகளின் கூடுதலாக அமைக்க முற்பட்டார்.

கணித மன்றம் — மேடை 4

சீர்மை எண்கள்

ஓர் எண்ணின் வகுத்திகளின் கூடுதல் (அவ்வெண் நீங்கலாக) அவ்வெண்ணிற்குச் சமமானால், அவ்வெண் சீர்மை எண் எனப்படும்.

28இன் வகுத்திகள் = 1, 2, 4, 7, 14

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

எனவே 28 ஒரு சீர்மை எண்.

மிகச் சிறிய சீர்மை எண்ணைக் காண்க.

$n = 2, 3, 5, 7$ எனக் கொண்டு $2^{n-1}(2^n - 1)$ என்ற சூத்திரம் சீர்மை எண்களைத் தருகின்றதா எனச் சரி பார்க்க.

n	$2^n - 1$	2^{n-1}	$2^{n-1}(2^n - 1)$	இரண்டடிமானத்தில்
2	3	2	6	110
3	7	4	28	11100
5	31	16	496	111110000
7				

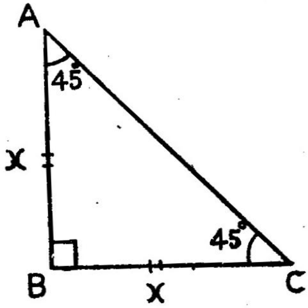
$n = 13, 17$ மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டாலும் சீர்மை எண் கிடைக்குமென்றால், அவ்வெண்களை இரண்டு அடிமானத்தில் உடனடியாகக் கூறமுடியுமா? சீர்மை எண்ணிற்கான இச்சூத்திரத்தினை யூக்ளிட் என்பார் 2300 ஆண்டுகட்கு முன்னர் கண்டார் என்பது வியப்பைத் தரவில்லையா ?

4. அளவியல்

1-1 பிதாகரசு தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீது வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு, மற்ற இருபக்கங்களின் மீது வரையப்பட்ட சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம். படம் 4—1 இல் AC கர்ணம், AB, BC செங்கோணத்தை உண்டாக்கும் இருபக்கங்கள்.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



படம் 4-1.

1 - 2 (அ) 45° ஒரு கோணமாக உள்ள செங்கோண முக்கோணம்

சென்ற வகுப்பில் ஒரு முக்கோணத்தில் சம பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமமென்று கண்டீர்கள்.

படம் 4-1 இல் ABC ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம். இதில் சம பக்கங்கள் எவை ?

$\angle ABC$ ஒரு செங்கோணம்

$AB = BC$ அதனால்

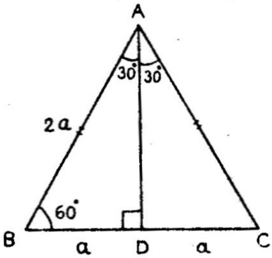
$m\ \angle BAC = m\ \angle ACB = 45°$

பிதாகரசு தேற்றப்படி செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு மற்ற இரு பக்கங்களின் மீதுள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்குச்சமம்.

$$\text{அதாவது} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$AC = \sqrt{2x^2}$$
$$= \sqrt{2}\ x.$$
$$\therefore \quad AB : BC : AC = x : x : \sqrt{2}\ x$$
$$= 1 : 1 : \sqrt{2}$$

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் 45° ஆனால் அதன் பக்கங்கள் $1 : 1 : \sqrt{2}$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

1 - 2 (ஆ) 30° ஒரு கோணமாக உள்ள செங்கோண முக்கோணம்



படம் 4-2.

ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

*BC*க்குச் செங்குத்தாக *AD* வரையப்பட்டுள்ளது.

∴ $\angle ADB$ ஒரு செங்கோணம்.

△ *ADB* ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

இதில் ஒரு கோணம் 30° (ஏன்?) மற்றக் கோணங்களின் அளவு என்ன ?

$$AB = 2a; \quad BD = a$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - a^2$$

$$= 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\therefore \quad AD = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a$$

$$BD : AD : AB = a : \sqrt{3}\,a : 2a$$

$$= 1 : \sqrt{3} : 2.$$

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் 30° ஆக இருந்தால் அதன் பக்கங்களின் விகிதம் $1 : \sqrt{3} : 2$ ஆக இருக்கும்.

90° கோணத்திற்கு எதிர்ப் பக்கம் 2

30° கோணத்திற்கு எதிர்ப் பக்கம் 1

60° கோணத்திற்கு எதிர்ப் பக்கம் $\sqrt{3}$

இதிலிருந்து என்ன தெரிந்து கொள்ளலாம் ?

பயிற்சி 1–2

1. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகள் 30°, 60°, 90°.

   (அ) 30° கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் 5 செமீ என்றால் மற்றப் பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

   (ஆ) 60° கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் 6 செமீ என்றால் மற்ற பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

   (இ) 90° கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் 10 செமீ என்றால் மற்றப் பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

2. பின்வரும் பக்கங்களுடைய சம பக்க முக்கோணங்களின் குத்துயரத்தைக் கணக்கிடுக.

   (அ) 4 செமீ (ஆ) 10 செமீ (இ) 6·4 செமீ
   (ஈ) 120 மீ

3. ஒரு கோபுரத்தின் அடிவாரத்திலிருந்து 30 மீ தூரத்தில் அது எதிர்கொள்ளும் கோணத்தின் அளவு 60° என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

4. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் குத்துயரம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. முக்கோணத்தின் பக்கத்தைக் (ஒரு தசம இடத் திருத்தமாக) கணக்கிடுக. ($\sqrt{3} \simeq 1{\cdot}732$)

   (அ) 8 செமீ (ஆ) 10 செமீ (இ) 40 மீ (ஈ) 15 மீ

விடைகள்

1. (அ) 10 செமீ, 8·66 செமீ (ஆ) 3·464 செமீ, 6·928 செமீ (இ) 5 செமீ, 8·66 செமீ.

2. (அ) $2\sqrt{3}$ செமீ (ஆ) $5\sqrt{3}$ செமீ (இ) 5.5424 செமீ (ஈ) $60\sqrt{3}$ செமீ.

3. $30\sqrt{3}$ மீ 4. (அ) 9·2 செமீ (ஆ) 11·54 செமீ (இ) 46·2 செமீ (ஈ) 17·32 மீ.

2 - 1 சதுரத்தின் பரப்பு
(மூலைவிட்டத்தின் மூலம்)

$ABCD$ ஒரு சதுரம். அதன் பக்கம் a.

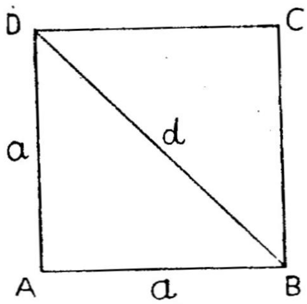
சதுரத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் d.

சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் கொடுத்தால் அதன் பரப்பளவு காண்பது எவ்வாறு ?

$a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ (எப்படி ?)

$d^2 = 2a^2$
(பிதாகரசு தேற்றப்படி)



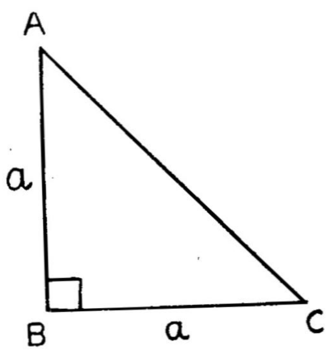
படம் 4-3.

சதுரத்தின் பரப்பளவு $= a^2 = \dfrac{d^2}{2}$

சதுரத்தின் பக்கம் $a = \sqrt{\dfrac{d^2}{2}} = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

2 - 2 இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு
(பக்கங்களின் மூலம்)

ABC ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணம்.



படம் 4-4.

இதன் பரப்பளவு

$= \dfrac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ குத்துயரம்

$= \dfrac{1}{2} \times BC \times AB$

$= \dfrac{1}{2} \times a \times a$

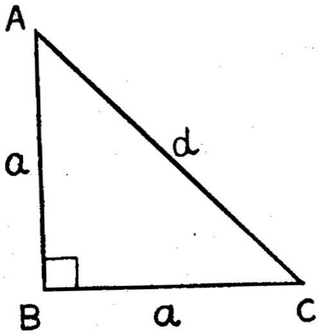
$= \dfrac{1}{2} a^2$

ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு
= செங்கோணம் உண்டாக்கும் பக்கங்களின் அளவுகளின் பெருக்குத் தொகையில் பாதி.

2 - 3 இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு

(கர்ணத்தின் மூலம்)

ABC ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம்.



படம் 4-5.

பக்கம் a, கர்ணம் d.

இதன் பரப்பளவு என்ன ?

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ குத்துயரம்

$= \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{a^2}{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ எனில்,

இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2} \times \frac{d}{\sqrt{2}} \times \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{d^2}{4} .$$

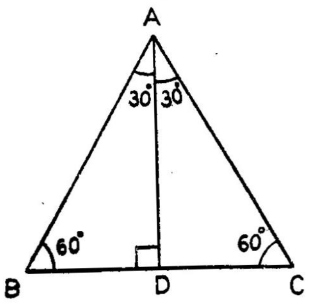
2 - 4 சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் சமமானால் அது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என்று அறிவோம்.

பக்கங்கள் சமமானதால் கோணங்களைப்பற்றி என்ன கூற இயலும் ?

ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் கோணங்களை அளந்து பார்க்க. ஒவ்வொரு கோணமும் என்ன அளவு இருக்கிறது என்று கூறுக.

AD, BC-க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 4-6.

D. BCஇன் மையப் புள்ளியாகும்.

$$BD = DC$$

AD. கோணம் Aஐ இரு சமபாகங்களாக வெட்டும்.

$$\angle BAD = 30° ; \quad \angle CAD = 30°$$

ABD ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

AB கர்ணம். $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$\triangle ABC$இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம்

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4} \text{ அல்லது } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$\therefore$ ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

பயிற்சி 2 - 4

1. பின்வரும் பக்கங்களை உடைய சமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பைக் காண்க.

   (அ) 6 செமீ (ஆ) 10 செமீ (இ) 60 மீ
   (ஈ) 4·8 செமீ

2. ஒரு முக்கோண வடிவான வயலின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் 176 மீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

3. $16 \times \sqrt{3}$ ச செமீ பரப்பளவுடைய சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கம் என்ன ?

4. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் $\sqrt{3} \times 7$ செமீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

5. இரு சமபக்க முக்கோணங்களில் செங்கோணத்தை உண்டாக்கும் பக்க அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

   (அ) 5 செமீ (ஆ) 7·2 செமீ (இ) 10 மீ
   (ஈ) 8·6 செமீ

6. இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணங்களின் பரப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. செங்கோணத்தை உண்டாக்கும் பக்கங்களின் அளவு என்ன ?

(அ) 18 ச செமீ (ஆ) 32 ச செமீ
(இ) 24·5 ச செமீ (ஈ) 40·5 ச மீ

விடைகள்

1. (அ) $9\sqrt{3}$ ச செ மீ (ஆ) $25\sqrt{3}$ ச செ மீ
(இ) $900\sqrt{3}$ ச மீ (ஈ) $5{\cdot}76\sqrt{3}$ ச செ மீ

2. $7744\sqrt{3}$ ச மீ 3. 8 செ மீ

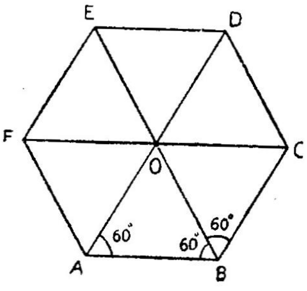
4. $49\sqrt{3}$ ச செ மீ

5. (அ) 12·5 ச செ மீ (ஆ) 25.92 ச செ மீ
(இ) 50 ச மீ (ஈ) 36·98 ச செ மீ

6. (அ) 6 செ மீ (ஆ) 8 செ மீ
(இ) 7 செ மீ (ஈ) 9 செ மீ

2 - 5 ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பைக் கணக்கிடல்

3 செமீ பக்கமுள்ள 6 சமபக்க முக்கோணங்களை ஒரு காகிதத்தில் வரைந்து அவை ஒவ்வொன்றையும் கத்தரித்துப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் ஒட்டவும். கிடைப்பது ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம்.



படம் 4-7.

அறுகோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 3 செமீ. உள்கோணம் ஒவ்வொன்றும் 120°. (ஏன் ?)

ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு, அதே பக்க அளவுள்ள 6 சமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்று அறியலாம்.

a அலகுகள் அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இதிலிருந்து a அலகுகள் பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு $=\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2$ சதுர அலகுகள் எனக் கண்டுகொள்ளலாம்.

ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு

$$=\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 2-5

1. ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் உட்கோணத்தின் அளவு என்ன ?

2. ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் சுற்றளவு 7·2 மீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

3. கீழ்க்காணும் அளவுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட ஒழுங்கு அறுகோணங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(அ) 2 செமீ (ஆ) 1 மீ (இ) 10 மீ (ஈ) 5 செமீ

4. 5·6 செமீ ஆரமுள்ள வட்டத்திற்குள் வரையப்படும். ஒரு மிகப் பெரிய ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

விடைகள்

1. $120°$ 2. $2·16\sqrt{3}$ சமீ 3. (அ) $6\sqrt{3}$ ச செமீ

(ஆ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ச செமீ (இ) $150\sqrt{3}$ ச மீ

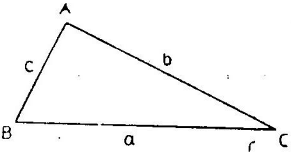
(ஈ) $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ ச செமீ 4. $47·04\sqrt{3}$ ச செமீ

3. மூன்று பக்கங்கள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கணக்கிடல்

ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் a, b, c ஆகும். எந்த முக்கோணத்தின் பரப்பும் $\frac{1}{2}\times$ அடிப்பக்கம் $\times$ குத்துயரம் என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்.

பக்கங்கள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அம் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண உதவும் சூத்திரம்

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$



படம் 4-8.

S என்பது முக்கோணத்தின் சுற்றளவில் பாதி $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

இச் சூத்திரத்தை ஈரோ என்ற கிரேக்க அறிஞர் கண்டுபிடித்ததாகக் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் 4 செமீ, 5 செமீ, 7 செமீ ஆகும். அதன் பரப்பு என்ன ?

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+7}{2}$$

$$= \frac{16}{2} = 8 \text{ செமீ.}$$

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}$$

$$= \sqrt{8 \times 4 \times 3 \times 1}$$

$$= \sqrt{96}$$

$= 9 \cdot 8$ ச செமீ.

(ஒரு தசம இடம் திருத்தமாக)

	9·8
9	96
	81
188	1500
	1504

பயிற்சி 3

1. கீழ்க்காணும் பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

   (அ) 12 செமீ, 35 செமீ, 37 செமீ

   (ஆ) 36 மீ, 61 மீ, 65 மீ

   (இ) 5·4 செமீ, 9 செமீ, 7·2 செமீ

   (ஈ) 17 மீ, 25 மீ, 26 மீ

2. ஒரு முக்கோண வடிவமான தலத்தின் பக்கங்கள் 75 மீ, 65 மீ, 20 மீ. அதைச் சமப்படுத்த சதுரமீட்டருக்கு 10 பை வீதம் என்ன செலவாகும் ?

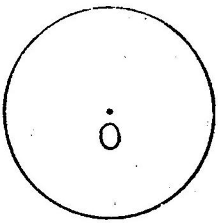
3. ஒரு முக்கோண வடிவ வயலின் பக்கங்களின் விகிதம் 8 : 15 : 17. அதன் பரப்பு 135 ஏர் என்றால் அவ் வயலின் சுற்றளவு என்ன ?

விடைகள்

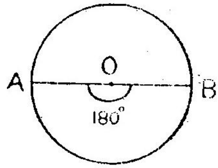
1. (அ) 210 செமீ² 2. ரூ. 60 3. 600 மீ

4-1 வட்டக் கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

கீழுள்ள படங்களைப் பார்க்க. படம் 4-9இல் மையம் *O*வில் உண்டாகும் கோணம் 360°. அதன் சுற்றளவு $2\pi r$ என்று நாம் அறிவோம். படம் 4-10இல் *AB* விட்டம்; *ACB* ஓர் அரை வட்டம். இது முழு வட்டத்தில் ஒரு பகுதி.



படம் 4-9.



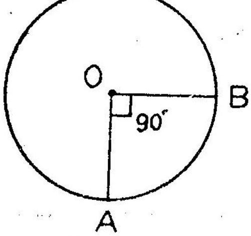
படம் 4-10.

முழு வட்டத்தின் பரிதி $= 2\pi r$.

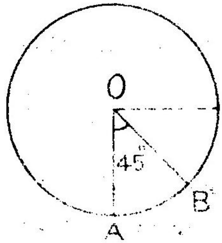
ACB அரைவட்டத்தின் பரிதி $= \frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= \pi r$

இது *ACB* என்ற வட்டக் கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் ஆகும். வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் 180° என்பது வட்ட மையக் கோணம் 360° இல் பாதி.



படம் 4-11.



படம் 4-12.

படம் 4-11 இல் OAB ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி. அதன் மையக் கோணம் $90°$. இது வட்ட மையக் கோணம் $360°$இல் $\frac{1}{4}$ பாகம் வில் ABஇன் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவில் எத்தனை பாகம்? $\frac{1}{4}$ பாகம் என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

வில் AB இன் நீளம் $= \frac{1}{4} \times 2\pi r$

படம் 4-12இல் OAB ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி. அதன் மையக்கோணம் $45°$. இது வட்ட மையக் கோணம் $360°$இல் $\frac{1}{8}$ பாகம். வில் AB இன் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவில் $\frac{1}{8}$ பாகமாக இருப்பதை அளந்து பார்க்க.

வில் AB இன் நீளம் $= \frac{1}{8} \times 2\pi r$

வட்ட மையக் கோணம்	வில்லின் நீளம்
$360°$	$2\pi r$ (வட்டத்தின் சுற்றளவு)
$180°$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r \left(\frac{180}{360} \times 2\pi r\right)$
$90°$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r \left(\frac{90}{360} \times 2\pi r\right)$
$45°$	$\frac{1}{8} \times 2\pi r \left(\frac{45}{360} \times 2\pi r\right)$

வட்ட வில் மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் $360°$ இல் எத்தனை பாகமோ அதே பாகம்தான் வட்டத்தின் பரிதியில் வட்ட வில்லின் நீளம் ஆகும் என்று அறிகிறோம்.

வட்ட மையக் கோணம் D, வில்லின் நீளம் l எனில்

$$l = \frac{D}{360} \times 2\pi r$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் $210°$ அதன் ஆரம் 9 செமீ. அதன் வில்லின் நீளம் என்ன ?

வில்லின் நீளம் $l = \frac{D}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{\overset{30}{\cancel{210}}}{\underset{40}{\cancel{360}}} \times \cancel{2} \times \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \cancel{2}$$

$= 33$ செமீ.

2. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் ஆரம் 10·5 செமீ. வில்லின் நீளம் 22 செமீ. அதன் மையக் கோணம் என்ன ?

$$l = \frac{D}{360} \times 2\pi r$$

$$\therefore \quad D = \frac{l \times 360}{2\pi r}$$

$$= \frac{22 \times 360 \times 7}{2 \times 22 \times 10{\cdot}5}$$

$$= 120$$

வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் 120°

பயிற்சி 4 - 1

1. பின்வரும் கோணங்களை வட்ட மையத்தில் எதிர் கொள்ளும் வட்ட வில், வட்டப் பரிதியின் என்ன பின்னமாகும் ?

(அ) 20° (ஆ) 24° (இ) 72° (ஈ) 144°

2. பின்வரும் கணக்குகளில் வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணமும் ஆரமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. வில்லின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

	(அ)	(ஆ)	(இ)	(ஈ)
ஆரம்	7 செமீ	10.5 செமீ	21 செமீ	15 செமீ
மையக் கோணம்	270°	135°	60°	84°

3. கீழே சில வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் வில்லின் நீளமும் மையக் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

	(அ)	(ஆ)	(இ)
வில்லின் நீளம்	11 செ மீ	33 செமீ	52·8 செமீ
மையக் கோணம்	63°	135°	216°

4. கீழே சில வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் வில்லின் நீளமும் ஆரமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மையக் கோணத்தைக் காண்க.

	(அ)	(ஆ)	(இ)
வில்லின் நீளம்	55 செமீ	99 செமீ	88 செமீ
ஆரம்	21 செமீ	55 செமீ	64 செமீ

விடைகள்

1. (அ) $\frac{1}{18}$ (ஆ) $\frac{1}{12}$ (இ) $\frac{1}{5}$ (ஈ) $\frac{2}{5}$

2. (அ) 33 செமீ (ஆ) 24·75 செமீ
(இ) 22 செமீ (ஈ) 22 செமீ

3. (அ) 10 செமீ (ஆ) 14 செமீ (இ) 14 செமீ

4. (அ) 150° (ஆ) $103\frac{1}{11}^\circ$ (இ) $78{\cdot}75^\circ$

4 - 2 வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு

சென்ற பாடத்தில் நாம் படித்த வட்டக் கோணப் பகுதிகளை மீண்டும் பார்ப்போம்.

படம் 4-9 இல் மையக் கோணம் 360°. வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2. படங்களைப் பார்த்து மற்ற வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளைக் கூற முடியுமா ?

வட்ட மையக் கோணம்	பரப்பளவு
360°	πr^2
180° ($\frac{1}{2} \times 360^\circ$)	$\frac{1}{2}\pi r^2$
90° ($\frac{1}{4} \times 360^\circ$)	
45° ($\frac{1}{8} \times 360^\circ$)	
30° ($\frac{1}{12} \times 360^\circ$)	

மேற்குறித்த அட்டவணையை நிரப்புக.

அட்டவணையிலிருந்து என்ன தெரிகிறது? வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் 360° இல் எத்தனை பாகமோ அதே பாகம் தான் வட்டத்தின் பரப்பளவில் வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு ஆகும் எனத் தெரிகிறது.

வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் D, ஆரம் r, பரப்பு S என்றால்,

$$\frac{\text{வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு}}{\text{வட்டத்தின் பரப்பு}} = \frac{D}{360}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{r}\text{வட்டக் கோணப் பகுதியின்}\\ \text{பரப்பு}\end{array}\right\} = \frac{D}{360} \times \text{வட்டத்தின் பரப்பு}$$

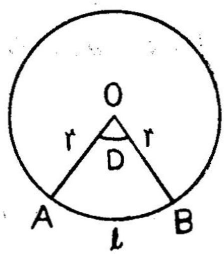
$$= \frac{D}{360} \times \pi r^2$$

$$\therefore S = \frac{D}{360} \times \pi r^2$$

4 - 3 வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு

$$\left.\begin{array}{r}OAB \text{ என்ற வட்டக் கோணப்}\\ \text{பகுதியின் சுற்றளவு}\end{array}\right\} = l + 2r$$

வட்டக் கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் l, வட்டத்தின் ஆரம் r ஆகும்.



படம் 4-13.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் 60°. அதன் ஆரம் 21 செமீ. வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு என்ன? சுற்றளவு என்ன?

$$\text{வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு} = \frac{D}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 231 \text{ ச செமீ.}$$

வில்லின் நீளம் $= \frac{D}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 22$ செமீ.

வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு $= l + 2r$

$= 22 + 42$

$= 64$ செமீ.

2. $140°$ மையக் கோணம் உடைய ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 44 ச செமீ. அதன் ஆரம் என்ன ?

வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு $= \frac{D}{360} \times \pi r^2$

$$44 = \frac{140}{360} \times \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{44 \times 360 \times 7}{140 \times 22}$$

$$= 36$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{36} = 6$$

வட்டக் கோணப் பகுதியின் ஆரம் $= 6$ செமீ.

4 - 4 வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு (வேறொரு முறை)

வட்ட வில்லின் நீளம் $l = \frac{D}{360} \times 2\pi r$

வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $= \frac{D}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{D}{360} \times \frac{2\pi r^2}{2}$

$= \frac{D}{360} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$

$= \frac{l \times r}{2} = \frac{1}{2} lr.$

எனவே வில்லின் நீளம் l, ஆரம் r உள்ள வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} lr.$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 52 செமீ. அதன் ஆரம் 15 செமீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

$$\text{சுற்றளவு} = l + 2r$$
$$l + 2 \times 15 = 52$$
$$l + 30 = 52$$
$$l = 52 - 30$$
$$= 22$$

∴ வில்லின் நீளம் = 22 செமீ.

வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $= \frac{1}{2} lr$

$= \frac{1}{2} \times 22 \times 15$

$= 165$

வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு = 165 சசெமீ.

பயிற்சி 4 - 4 (அ)

1. ஒரு வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம் 35 செமீ. மையக் கோணம் 216°. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

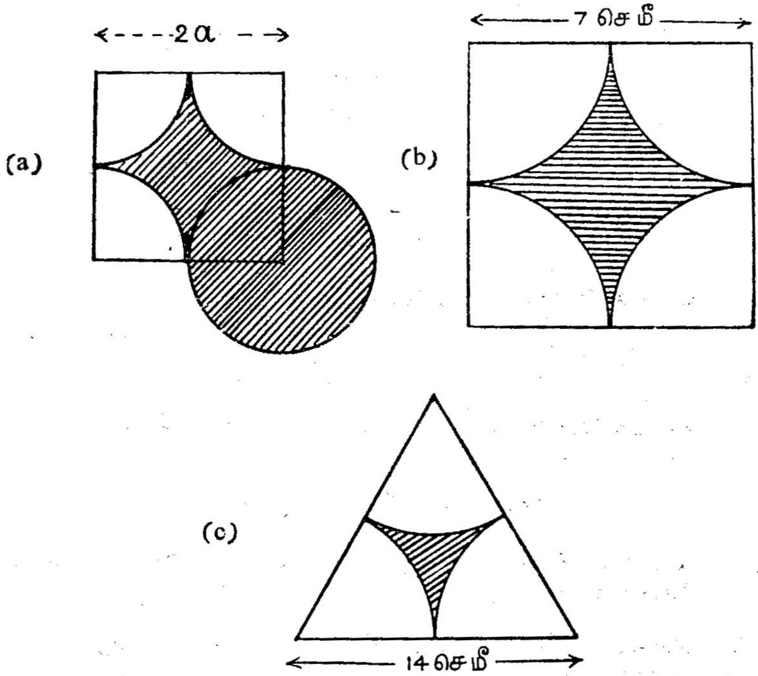
2. சில வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் சில அளவுகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. கோடிட்ட இடங்களில் இருக்க வேண்டிய அளவுகளைக் கணக்கிடுக.

	ஆரம்	வில்லின் நீளம்	மையக் கோணம்	சுற்றளவு	பரப்பு
i	21 செமீ.	44 செமீ.	....	....	......
ii	21 செமீ.	....	... .	97 செமீ.	......
iii	....	88 செமீ.	... .	158 செமீ.	......
iv	......	110 செமீ.	300°	....	......

3. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 44 ச செமீ. அதன் ஆரம் 6 செமீ. மையக் கோணம் எவ்வளவு ?

4. படத்தில் நிழலிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவு என்ன ?

$$(\sqrt{3} = 1{\cdot}732)$$



படம் 4-14.

5. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 68 செமீ. அதன் மையக் கோணம் 210°. அதன் ஆரத்தையும் பரப்பளவையும் கணக்கிடுக.

விடைகள்

1. 2310 ச செமீ ; 2. (i) 120° ; 86 செமீ; 462 ச செமீ ; (ii) 55 செமீ; 150°; 577·5 ச செமீ; (iii) 35 செமீ; 144°; 1540 ச செமீ ; (iv) 21 செமீ ; 152 செமீ ; 1155 ச செமீ.

3. 140° 4. (a) $4a^2$ (b) 10·5 ச செமீ ; (c) 7·868 ச செமீ.

5. 12 செமீ ; 264 ச செமீ.

பயிற்சி 4 - 4 (ஆ)

1. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் ஆரம் 8 செமீ ; வில்லின் நீளம் 13 செமீ. அதன் பரப்பு என்ன ?

2. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 48 செமீ ; ஆரம் 15 செமீ. பரப்பளவு என்ன ?

3. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு 42 செமீ; அதன் வில்லின் நீளம் 21 செமீ. அதன் பரப்பளவு என்ன ?

4. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 153 ச செமீ ; அதன் வில்லின் நீளம் 18 செமீ. அதன் ஆரம் என்ன ?

5. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 68·25 செமீ ; அதன் ஆரம் 13 செமீ. வில்லின் நீளம் என்ன ?

6. ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு 92 ச செமீ ; அதன் ஆரம் 11 5 செமீ. சுற்றளவு என்ன ?

விடைகள்

1. 52 ச செமீ 2. 135 ச செமீ 3. 110·25 ச செமீ

4. 17 செமீ 5. 10·5 செமீ 6. 39 செமீ

கணித மன்றம் — மேடை 5

1, ஒவ்வொரு நாளும் நண்பகலில் நியூயார்க்கிலிருந்து இங்கிலாந்திற்கு ஒரு கப்பலும், இங்கிலாந்திலிருந்து நியூயார்க்கிற்கு ஒரு கப்பலும் புறப்படுகின்றன. பயண காலம் 144 மணிகள். நியூயார்க்கிலிருந்து புறப்பட்ட ஒரு கப்பல் இங்கிலாந்திலிருந்து புறப்பட்ட எத்தனை கப்பல்களைச் சந்திக்கும் ?

2, கீழ்க்கண்ட பெருக்கல் கணக்கில் விடுபட்ட எண்களைக் காண்க :

```
      × × 7
      3 × ×
    ---------
    × 0 × ×
    × × ×
  × 5 ×
  -----------
  × 7 × × × 3
  -----------
```

5. வடிவ இயல்

1. வடிவ இயல் சொற்கள் - திருப்புதல்

வடிவ இயல் என்பது புள்ளிகளின் கணத்தைப் பற்றியது எனச் சென்ற வகுப்பில் படித்தோம். புள்ளி என்பது ஒரு வடிவ இயல் கருத்து. அதனை. என்ற முறையில் பொட்டிட்டுக் குறிக்கிறோம். ஆனால் உண்மையில் அப்பொட்டு பல புள்ளிகளைக் கொண்டதென்றும், பொட்டு ஒரு குறியீட்டு முறையே என்றும் நாம் அறிந்துள்ளோம்.

புள்ளிகளின் கணங்கள் கோடு, கதிர், கோட்டுத் துண்டு, கோணம், தளம், வெளி போன்ற பல வடிவ இயல் கருத்துக்களை உருவாக்குகின்றன என்று கற்றோம். இவற்றில் சிலவற்றினை இப்பொழுது நினைவு கூர்வோம்.

பெயர்	படம்	குறியீடு	படித்தல்
புள்ளி :	$\cdot P$	P	புள்ளி P
கோடு :	l ←——→ M N	l அல்லது $\overleftrightarrow{MN}$ அல்லது $\overleftrightarrow{NM}$	கோடு l அல்லது கோடு MN அல்லது கோடு NM
கோட்டுத் துண்டு :	X———Y	$\overline{XY}$ அல்லது $\overline{YX}$	கோட்டுத் துண்டு XY அல்லது கோட்டுத் துண்டு YX
கதிர் :	T———U→	$\overrightarrow{TU}$	கதிர் TU

கோடு, கோட்டுத் துண்டு, கதிர் மூன்றும் எண்ணற்ற புள்ளி களின் கணம் என அறிக. கோட்டுத் துண்டில் இரு முடிவுப் புள்ளி களும், கதிரில் ஒரு முடிவுப் புள்ளியும் உள்ளன. கோட்டிற்கு முடிவுப் புள்ளிகள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. படம் 5-1 இல் உள்ள புள்ளிகளின் கணத்தின் பெயர் யாது?

படம் 5-1.

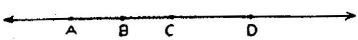
இது A ஐ முடிவுப் புள்ளியாகக் கொண்ட ஒரு கதிர். இக் கதிரில் B, C மற்ற இரு புள்ளிகளாதலால், இக்கதிரினை $\overrightarrow{AB}$ அல்லது $\overrightarrow{AC}$ எனக் குறிக்கலாம்.

2. படம் 5-2 இல் உள்ள கோட்டிற்கு இடக் கூடிய பல பெயர்களையும் காண்க.

படம் 5-2.

ஒரு கோடு அதனிலுள்ள இரு புள்ளிகளால் குறிக்கப்படும், எனவே, படத்திலுள்ள கோட்டிற்கு $\overleftrightarrow{RJ}$, $\overleftrightarrow{RQ}$, $\overleftrightarrow{JR}$, $\overleftrightarrow{QR}$, $\overleftrightarrow{JQ}$, $\overleftrightarrow{QJ}$ எனப் பெயரிடலாம்.

3. படம் 5-3 இல் உள்ள கோட்டில் (அ) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD}$ (ஆ) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$ (இ) $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD}$ (ஈ) $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD}$ (உ) $\overrightarrow{CA} \cup \overrightarrow{BD}$ ஆகியவற்றினைக் காண்க.



படம் 5-3.

(அ) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ இடையே பொதுப் புள்ளி ஏதுமில்லை.

$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} = \phi$

(ஆ) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ இடையே முடிவுப் புள்ளி B மட்டுமே பொது

$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$

(இ) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$ இடையே உள்ள பொதுப் புள்ளிகள் $\overline{BC}$ கோட்டுத் துண்டினை உண்டாக்குகின்றன.

எனவே $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD} = \overline{BC}$

(ஈ) $\overrightarrow{AC}$ இன் மறு பெயர் $\overrightarrow{AD}$

எனவே $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$

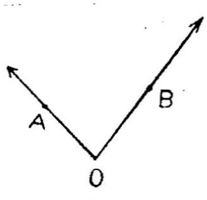
(உ) $\overrightarrow{CA}$ என்பது C ஐ முடிவுப் புள்ளியாகக் கொண்டு இடப்புறம் செல்லும் கதிர்.

$\overrightarrow{BD}$ என்பது B ஐ முடிவுப் புள்ளியாகக் கொண்டு வலப்புறம் செல்லும் கதிர்.

இவை இரண்டும் சேர்ந்த புள்ளிகளின் சேர்ப்புக் கணம் $\overleftrightarrow{AD}$ என்ற கோட்டினை உண்டாக்கும்.

$\therefore \quad \overrightarrow{CA} \cup \overrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{AD}.$

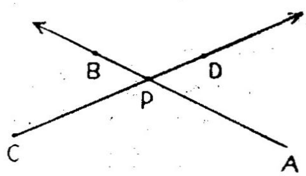
கோணம் :



படம் 5-4.

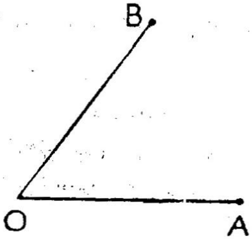
ஒரே முடிவுப் புள்ளியைக் கொண்ட இரு கதிர்களின் சேர்ப்பு, கோணம் எனப்படும்.

படம் 5-4 இல் உள்ளது கோணம் AOB ஆகும். $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \angle AOB = \angle BOA.$



படம் 5-5.

படம் 5-5 இல் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ கோணத்தை உண்டாக்குவது ஏன்? அக் கதிர்களுக்குப் பொது முடிவுப் புள்ளி இல்லையல்லவா ?



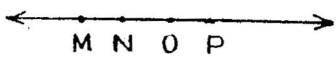
படம் 5-6.

படம் 5-6 இல் $\overline{OA} \cup \overline{OB}$ கோணமாகாது. ஏன்? $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ கோட்டுத் துண்டுகள். அவை கதிர்களல்ல.

நினைவு கொள்க :

ஒரு கோணம் இரு கதிர்களின் சேர்ப்பு ஆகும். அக்கதிர்களுக்குப் பொது முடிவுப் புள்ளி இருக்கவேண்டும்.

பயிற்சி 1



படம் 5-7

1 (அ) படம் 5-7 இல் உள்ள கோட்டிற்கு ஏதேனும் மூன்று பெயர்களைத் தருக.

(ஆ) அதில் ஏதேனும் மூன்று கதிர்களைக் கூறுக.

(இ) ஏதேனும் மூன்று கோட்டுத் துண்டுகளைக் கூறுக.

(ஈ) சேர்ப்புகளுக்குப் பெயரிடுக.

(i) $\overline{MO} \cup \overline{NP}$	(ii) $\overline{MN} \cap \overline{NP}$
(iii) $\overrightarrow{OM} \cap \overrightarrow{NP}$	(iv) $\overleftrightarrow{NO} \cup \overrightarrow{OP}$
(v) $\overline{MO} \cap \overrightarrow{NP}$	(vi) $\overrightarrow{NM} \cap \overline{OP}$
(vii) $\overline{MP} \cup \overline{NO}$	(viii) $\overline{MN} \cup \overline{OP}$
(ix) $\overline{OP} \cap \overrightarrow{MN}$	(x) $\overrightarrow{OM} \cup \overrightarrow{NP}$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாக்கியங்கள் ஒவ்வொன்றும் மெய்யா, அல்லவா எனக் கூறுக. உமது விடைக்கு விளக்கப் படம் வரைக.

(அ) இரு கதிர்களின் சேர்ப்பு, கோடாகலாம்.

(ஆ) இரு கதிர்களின் சேர்ப்பு, கோணமாகலாம்.

(இ) இரு கோடுகள் இரண்டே இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும்.

(ஈ) இரு கோட்டுத் துண்டுகளின் சேர்ப்பு, ஒரு கோணம்.

3. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விளக்கப் படங்கள் வரைக.

(அ) ஒரே கோட்டிலமைந்த இரு கோட்டுத் துண்டுகள்.

(ஆ) ஒரு கோட்டுத் துண்டும், ஒரு கதிரும்; அவற்றின் சேர்ப்பு, வெட்டுக் கணங்கள்.

(இ) ஒரே கோட்டிலமையாத இரு கோட்டுத் துண்டுகள்.

(ஈ) ஒரே முடிவுப் புள்ளியைக் கொண்ட இரு கதிர்கள்.

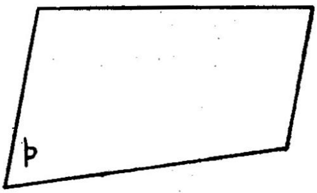
விடைகள்

1. (ஈ) (i) $\overline{MP}$ (ii) $\{ N \}$

2. (அ), (ஆ) மெய் (இ), (ஈ) மெய்யல்ல.

2. தளம்

படம் 5-8 இல் தளம் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தளம் புள்ளிகளின் கணத்திலானது. கோட்டிற்கு முடிவுப் புள்ளிகள் கிடையாது. அது போலவே, தளத்திற்கும் முடிவு கிடையாது. நாற்புறமும் அதனை நீட்டிச் செல்லலாம். தளத்தில் எண்ணற்ற கோடுகள் உள்ளன.



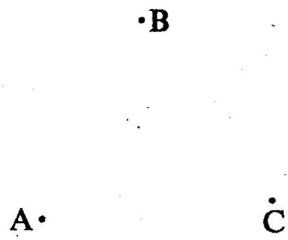
படம் 5-8.

இரு புள்ளிகளால் நிர்ணயிக்கப் படுவது ஒரு கோடு என்று அறிவோம். ஒரு தளத்தை நிர்ணயிக்க இவ்விரு புள்ளிகளைத் தவிர அப்புள்ளிகள் நிர்ணயிக்கும் கோட்டிலில்லாத மற்றொரு புள்ளி தெரிந்தால் போதும். எனவே ஒரு கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் ஒரு தளத்தை நிர்ணயிக்கும்.

எனவே இரு புள்ளிகள் ஒரு கோட்டை நிர்ணயிக்குமாதலால், நாம், ஒரு கோடும் அக் கோட்டிலமையாத மற்றொரு புள்ளியும் தளத்தை நிர்ணயிப்பதாகக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\overleftrightarrow{AB}, C;\ \overleftrightarrow{AC}, B;\ \overleftrightarrow{BC}, A.$



படம் 5-9.

இதே மூன்று புள்ளிகள் கொண்டு AB, AC, BC என்ற கோடுகளை உருவாக்கலாம். எனவே தளத்தை $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ அல்லது $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ அல்லது $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ என்ற கோடுகளின் சோடிகள் மூலமும் கூறலாம்.

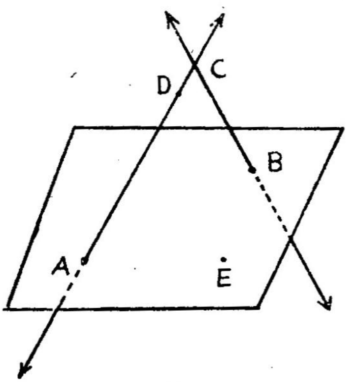
எனவே தளம் என்பதை

1. ஒரு கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளால் அல்லது

2. ஒரு கோடாலும், அக்கோட்டிலமையாத மற்றொரு புள்ளியாலும் அல்லது

3. ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகளாலும் நிர்ணயிக்கலாம் என அறிகிறோம்.

பயிற்சி 2



படம் 5-10.

1. படல் 5-10இல் காண்க :

(அ) மூன்று ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகள்

(ஆ) மூன்று ஒரு தளப் புள்ளிகள்

(இ) மூன்று ஒரு கோட்டிலமையாத புள்ளிகள்

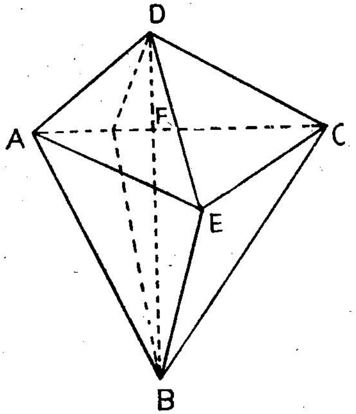
(ஈ) மூன்று ஒரு தளத்திலமையாத புள்ளிகள்.

2. சோதனைகள் மூலம் விடைகளைக் காண்க.

(அ) ஒரு தளமும் அத் தளத்திலமையாத ஒரு கோடும் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் கணம்.

(ஆ) இரு தளங்களின் வெட்டு.

3. படம் 5-11இல் கண்ட கன உருவத்தில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் கணங்கள் ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகளா அல்லவா, ஒரு தளப் புள்ளிகளா அல்லவா எனக் கூறுக.



படம் 5-11.

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{F\}$

(அ) $\{D, E\}$

(ஆ) $\{A, B, E\}$

(இ) $\{A, E, C\}$

(ஈ) $\{A, B, C, D\}$

(உ) $\{B, D, F\}$

(ஊ) $\{B, C, D, E\}$

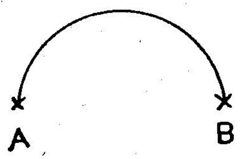
(எ) $\{A, D, C, E\}$

(ஏ) $\{A, F, C\}$

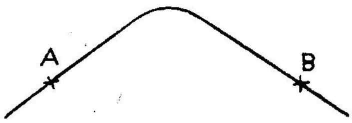
3. மூடிய வளைவுகள், பலகோணங்கள்

3-1 மூடிய வளைவுகள்

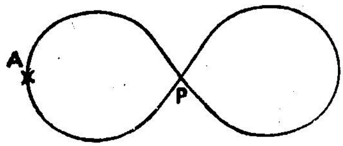
• கீழே கண்ட வளைவுகளைக் காண்க.



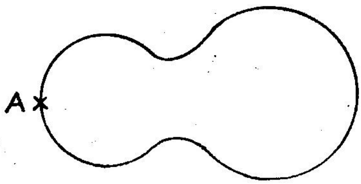
படம் 5-12.



படம் 5-13.



படம் 5-14.



படம் 5-15.

படம் 5-12இல் உள்ள வளைவு இரு முடிவுப் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளது.

படம் 5-13இல் உள்ள வளைவில் இரு முடிவுப் புள்ளிகள் இல்லை.

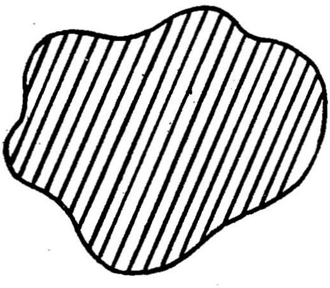
படம் 5-14, படம் 5-15களில், வளைவில் உள்ள எப்புள்ளியையும் ஒரு முடிவுப் புள்ளியாகக் கொள்ளலாம். அப்புள்ளியினின்று தொடங்கி வளைவின் வழியே சென்று மீண்டும் அப் புள்ளியையே வந்தடைய முடியும் என்பதைக் கவனிக்கவும். இவ்வாறு உள்ள வளைவுகள் மூடிய வளைவுகள் எனப்படும்.

படம் 5-13இல் தளம் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஆனால் அப் பகுதிகள் எல்லையற்றவை.

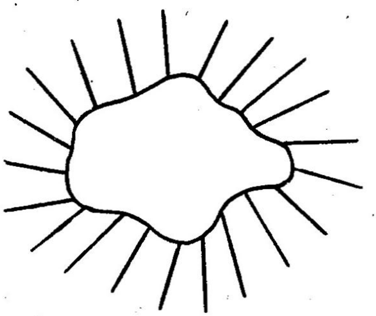
படம் 5-14, படம் 5-15களில் தளம் மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

கீழுள்ளவற்றையும் அறிக.

1. வளைவின் உட்புறம் (படம் 5-16)
2. வளைவின் வெளிப்புறம் (படம் 5-17)
3. வளைவின் எல்லை (படம் 5-14, படம் 5-15)



படம் 5-16.



படம் 5-17.

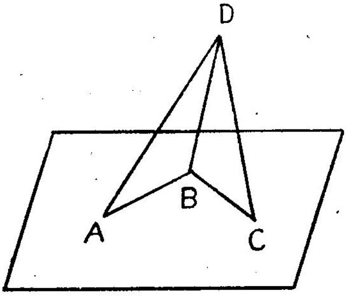
வளைவின் எல்லையும், உட்புறமும் சேர்ந்த பகுதி வளைவின் மூடிய பகுதி எனப்படும்.

படம் 5-14 இல் தொடங்கிய புள்ளி A-யினின்று கிளம்பி வளைவின் முழுப் பகுதியையும் கடந்து மீண்டும் Aஐ அடையு முன் வளைவை P என்ற புள்ளியில் இரு முறை கடக்கின்றது. ஆனால், படம் 5-15 இல், தொடங்கிய புள்ளி வளைவை

மீண்டும் கடப்பதில்லை. இவ்வாறு உள்ள வளைவுகள் *எளிய மூடிய வளைவுகள்* எனப்படும். கேமிலி ஜோர்டன் (1838 — 1922) என்ற பிரஞ்சு கணித அறிஞர் இவ் வளைவுகளை வரையறுத்ததால், இவை *ஜோர்டன் வளைவுகள்* எனவும் அழைக்கப்படும். படங்களைப் பார்த்தவுடன் இதுகாறும் நாம் படித்த பல எளிய மூடிய வளைவுகள் நினைவிற்கு வரும், வட்டம், முக்கோணம், நாற்கரம் இவையெல்லாம் மூடிய வளைவுகளே. இவ்வுருவங்களில் நாம் சுற்றளவு, பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் கண்டோமல்லவா சுற்றளவு என்பது வளைவின் எல்லைக் கோட்டின் நீளம் என்றும், பரப்பளவு என்பது வளைவின் உட்புறத்தை ஒட்டியது என்றும் இப்பொழுது நாம் அறியலாம்.

3 - 2 பலகோணங்கள்

முக்கோணம், சதுரம், நாற்கரம், இணைகரம், செவ்வகம், அறுகோணம் போன்ற உருவங்கள் கோட்டுத் துண்டுகளால் ஆன எளிய மூடிய வளைவுகள் எனக் காண்கிறோம். அவற்றின் பொதுப் பெயர் *பலகோணங்கள்*. அவற்றின் பெயருக்கேற்ப, அவ்வுருவங்களில் பல கோணங்கள் உள்ளன என அறியலாம். இப்பண்பைவிட அவை எளிய மூடிய வளைவுகள் என்ற பண்பு ஆழ்ந்த ஒரு கணிதக் கருத்து என அறிக.



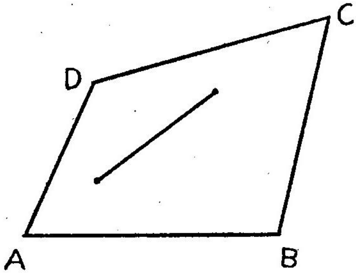
படம் 5-18.

நான்கு கோட்டுத் துண்டுகள் ஒரு நாற்கரத்தை உருவாக்கும் எனக் கூற இயலாது என்பதைப் படம் 5-18 இலிருந்து அறியலாம்.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ என்ற கோட்டுத் துண்டுகள் ஒரே தளத்தில் அமையவில்லை என்பதைக் காண்க. பலகோணங்கள் ஒரு தள உருவங்கள் என்பதை நினைவு கூர்தல் அவசியம்.

பலகோணங்களில் ஒவ்வொரு கோட்டுத் துண்டும் அதன் *பக்கம்* என்றும், இரு கோட்டுத் துண்டுகளின் பொது முடிவுப் புள்ளி *உச்சி* என்றும் அழைக்கப்படும். கோணம், இரு கதிர்களின்

சேர்ப்பு எனக் கண்டோம். ஆனால், பலகோணத்தில் கோட்டுத் துண்டுகளேயுள்ளதால், பலகோணத்தில் உள்ள கோணங்கள் அக்கோட்டுத் துண்டுகளின் நீட்சிகளான கதிர்களின் சேர்ப்புகள் எனக் கொள்ளவேண்டும்.



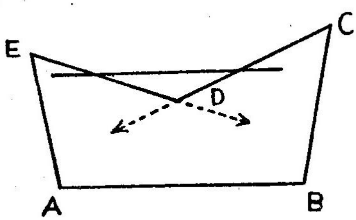
படம் 5-19.

எடுத்துக்காட்டு :

படம் 5-19 இல் $\angle ABC$ என்பது $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ என்ற கதிர்களால் ஆனது.

இதுபோலவே $\overrightarrow{AD} \cup \overrightarrow{DC} = \angle ADC$; $\overrightarrow{DC} \cup \overrightarrow{CB} = \angle DCB$; $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AD} = \angle DAB$.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ஆகிய கதிர்களில் உள்ள புள்ளிகள் ஏதேனும் பலகோணத்தின் உட்புறத்தில் உண்டா? இல்லை. இவ்வாறு உள்ள பலகோணங்கள் *குவி பலகோணங்கள்* எனப்படும்.



படம் 5-20.

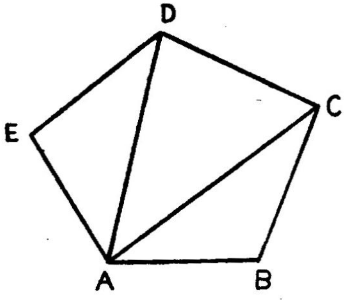
படம் 5-20 இல் $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$ என்ற கதிர்களின் சேர்ப்பு $\angle AED$ ஆகும். $\overrightarrow{ED}$ இல் உள்ள சில புள்ளிகள் பலகோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைவதைக் காணலாம்.

இதுபோலவே, $\overrightarrow{CD}$ இன் ஒரு பகுதி பலகோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைகின்றது. இத்தகைய பலகோணம் *குழி பலகோணம்* எனப்படும்.

ஒரு குவி பலகோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைந்த எவ்விரு புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டில் உள்ள புள்ளிகளனைத்தும் பலகோணத்தின் உட்புறத்திலேயே அமைகின்றன என்பதைக் கவனிக்கவும் (படம் 5-19). மாறாக, ஒரு குழி பலகோணத்தின் உட்புறத்தில் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளின் சேர்ப்புக் கோட்டுத் துண்டின் சில புள்ளிகள், பலகோணத்தின் வெளிப் புறத்தில் அமையும் வண்ணம் இரு புள்ளிகள் காணலாம் (படம் 5-20).

3 - 3 மூலைவிட்டங்கள்

ஒரு பலகோணத்தின் அடுத்துள்ளதாக அமையாத உச்சிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டு மூலைவிட்டம் எனப்படும். படம் 5-21 இல் உச்சி A-க்கு அடுத்துள்ள உச்சிகள் B, E; அடுத்து இல்லாத உச்சிகள் C, D. $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ மூலைவிட்டங்கள். இது போலவே $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ ஆகியவையும் மூலைவிட்டங்கள். குவி பலகோணத்தில் எல்லா மூலைவிட்டங்களிலும் உள்ள புள்ளிகள் பலகோணத்தின் உட்புறம் அமைகின்றன. குழி பலகோணத்தில் அவ்வாறு உள்ளதா என ஆராய்க.



படம் 5-21

3, 4, 5, 6, 7, 8 பக்கங்களுள்ள பலகோணங்களை வரைக. ஒவ்வொன்றிற்கும் எத்தனை மூலைவிட்டங்கள் எனக் காண்க. அவற்றை அட்டவணைப்படுத்துக. இனிப் பலகோணம் என்றால், குவி பலகோணத்தையே குறிக்கும் எனக்கொள்வோம்.

படம் 5-20 இல் காட்டிய வண்ணம் ஓர் உச்சியினின்று வரையப்பட்ட மூலைவிட்டங்கள் ஐங்கோணத்தை 3 முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன என்றும், அம் முக்கோணங்களின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் $3 \times 180° = 540°$ என்றும் அறிகிறோம். எனவே, ஐங்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் 540°.

இதுபோலவே, 6, 7, 8 பக்கங்களுள்ள பலகோணங்களின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதலைக் காண்க. இவற்றை அட்டவணைப்படுத்திக் காட்டுவோம்.

பக்கங்கள்	மூலை விட்டங்கள்	முக்கோணங்கள்	கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல்
3	0	1	180
4	2	2	360
5	5	3	540
6	9	4	720
7	14	5	900
8	20	6	1080
9	?	?	?
10	?	?	?

n பக்கங்களுள்ள பலகோணத்தின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n(n-3)}{2}$ என்றும், கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் $180(n-2)$ என்றும் கூறலாமா எனச் சரி பார்க்கவும்.

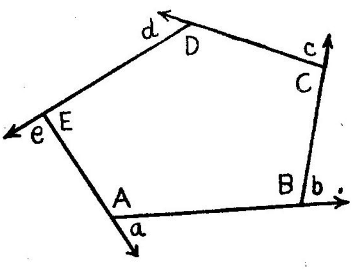
3 - 4 பலகோணத்தின் கோணங்கள்

படம் 5-22 இல் ஐங்கோணத்தில் கோணங்களை உருவாக்கும் (கடியார முள் திசைக்கு எதிர்த் திசையில்) கதிர்களைக் காட்டியுள்ளோம். இக்கதிர்கள் பலகோணத்தின் வெளிப்புறத்தில் கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. உட்கோணங்களை A, B, C, D, E என்றும், வெளிக் கோணங்களை a, b, c, d, e என்றும் குறித்தால்,

$$m\angle A + m\angle a = 180^\circ$$
$$m\angle B + m\angle b = 180^\circ$$

....

என்று காணலாம்.



படம் 5-22.

எனவே உட்கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் + வெளிக் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் $= 5 \times 180^\circ = 900^\circ$

உட்கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் $= 540°$

∴ வெளிக் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல்

$$= 900° - 540° = 360°$$

இதுபோல, 6, 7, 8 பக்கங்களுள்ள பலகோணங்களின் வெளிக்கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதலைக் காண்க, என்ன காண்கிறோம் ?

n-கோணத்தின் உட்கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல்

$$= 180\,(n - 2) = 180n - 360$$

n-கோணத்தின் (உட்கோணம் + வெளிக்கோணம்) அளவுகளின் கூடுதல் $\} = 180n$

எனவே, n-கோணத்தின் வெளிக்கோணங்களின் அளவுகளின்

கூடுதல் $= 180n - (180n - 360)$

$$= 180n - 180n + 360 = 360°$$

ஒரு பலகோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்கள் சர்வ சமமாகவும், எல்லா உட்கோணங்கள் சர்வ சமமாகவும் இருந்தால், அது ஒழுங்கு பலகோணம் எனப்படும். சமபக்க முக்கோணம்; சதுரம் ஆகியவை நாம் இதுவரை அறிந்த ஒழுங்கு பல கோணங்கள்.

ஒழுங்கு பலகோணத்தின் உட்கோணத்தைக் காண்பது எவ்வாறு என்று பார்க்கலாம்,

n-கோணத்தின் உட்கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் $180\,(n - 2)$ என்று அறிந்தோம். எனவே ஒழுங்கு n-கோணத்தின் ஒரு உட்கோணத்தின் அளவு

$$= \frac{180}{n}(n - 2) = 180 - \frac{360}{n}$$

ஒழுங்கு n-கோணத்தின் ஒரு வெளிக்கோணத்தின் அளவு $\} = \dfrac{360}{n}$

ஒரு ஒழுங்கு n-கோணத்தின் ஒரு உட்கோணம் அதன் வெளிக்கோணமொன்றின் மிகை நிரப்பி.

எடுத்துக்காட்டு :

பத்து பக்கங்களுள்ள ஒழுங்கு பலகோணத்தின் உட்கோண மொன்றின் அளவு என்ன ?

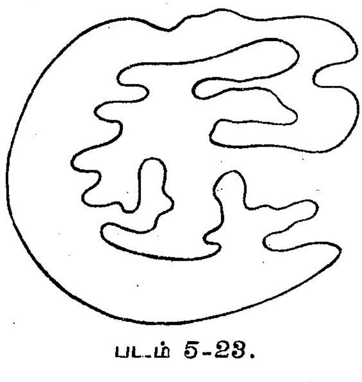
அதன் வெளிக்கோணத்தின் அளவு $= \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$\therefore$ உட்கோணத்தின் அளவு $= 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

பயிற்சி 3

1. பலகோணங்களின் பட்டியலில் ஏன் 2 பக்கமுள்ள பல கோணம் இல்லை ?

2. படம் 5-23 இல் உள்ள வளைவில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தொடங்கி மீண்டும் அப் புள்ளியை வந்தடைகிறோமா எனப் பார்க்கவும். அவ்வாறெனில் அது எளிய மூடிய வளைவு. அதன் உட்புறம், வெளிப் புறங்களில் ஒவ்வொரு புள்ளி குறித்து அவற்றைச் சேர்க்க அக்கோடு வளைவை எத்தனை புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது எனக் காண்க. வளைவின் . உட்புறத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றைச் சேர்க்கும் கோடுகள் வளைவை எத்தனை புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் குறிக்கவும். இதுபோலவே, வெளிப்புறத்தில் உள்ள புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் வளைவை எத்தனை புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் காணவும். இவற்றினின்று என்ன . அறியலாம் ? (இவ்வுண்மை ஜோர்டான் — ஹோல்டர் தேற்றம் எனப்படும்.) இதைப் பயன்படுத்தி படம் 5-23 போன்று குழப்பமான எளிய மூடிய வளைவுகளில் ஒரு புள்ளி உட்புறத்திலுள்ளதா, வெளிப் புறத்திலுள்ளதா எனக் காணலாம்.



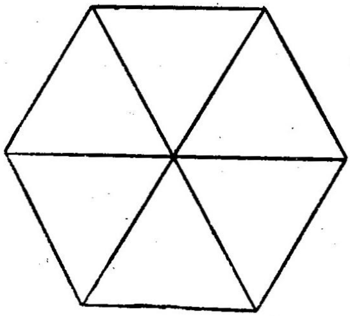
படம் 5-23.

3. மேற்கண்ட உண்மை, எல்லா மூடிய வளைவுகளுக்கும் பொருந்துமா எனச் சோதிக்கவும்.

4. ஒரு ஒழுங்கு குவி பலகோணத்தின் உட்கோணத்தின் அளவு 180°-க்கு மிகுமா ? சமமாகுமா ?

5. முறையே 12, 18, 24, 30 பக்கங்களுள்ள ஒழுங்கு குவி பலகோணங்கள் ஒவ்வொன்றின் உட்கோணங்கள் வெளிக் கோணங்களின் அளவுகளைத் தனித் தனியே காண்க.

6. உட்கோணமொன்றின் அளவு 179° உள்ள ஒழுங்கு பல கோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள்?



படம் 5-24

7. சில ஒழுங்கு பல கோணங்களின் உச்சிகள் ஒரு புள்ளியில் பொருந்தும் வண்ணம் அவற்றை அமைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 6 சம பக்க முக்கோணங்களை படம் 5—24 இல் அமைந்த வண்ணம் பொருத்தலாம். இதுபோல வேறு எவ்வகைப் பலகோணங்களைப் பொருத் தலாம் எனக் காண்க,

8. சென்ற கணக்கில், ஒரே வகை ஒழுங்கு பலகோணங் களை ஒரு புள்ளியில் பொருத்தினோம். வெவ்வேறு வகை ஒழுங்கு பலகோணங்களையும் ஒரு புள்ளியில் பொருந்துமாறு அமைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக (1) 3 முக்கோணங்கள், 2 சதுரங்கள் (2) 2 முக்கோணங்கள், 2 அறுகோணங்கள் (3) 2 முக்கோணங்கள், 12-கோணம், 1 சதுரம் ஆகியவற்றின் உச்சிகளை ஒரு புள்ளியில் பொருத்தலாம். இதே போல (அ) எண் கோணம் (ஆ) 10-கோணம் (இ) 12-கோணம் ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றின் ஒவ்வொன்றோடும் வேறு எவ்வகை ஒழுங்கு பலகோணங்களைப் பொருத்தலாம் எனக் காண்க. [எடுத்துக்காட்டில் கொடுக்கப்பட்ட உருவங் களின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதலைக் காண்க.]

விடைகள்

1. இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு மூடிய உருவம் அமைக்க முடியாது.

4. 180°-க்குக் குறைவாகவே அமையும்.

5. (i) 150°, 30° (ii) 160°, 20° (iii) 165°, 15° (iv) 168°, 12°.

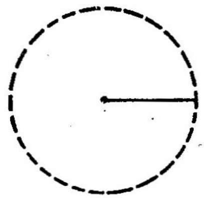
4. நியமப் பாதைகள்

ஒரு குறிக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு ஒரு புள்ளி ஏற்கக் கூடிய புள்ளிகளின் சேர்ப்புக் கணம் அப்புள்ளியின் **நியமப் பாதை** எனப்படும். சென்ற வகுப்புகளில் சில நியமப் பாதைகளைப் பற்றி அறிந்துள்ளவற்றை ஈண்டு நினைவு கூர்வோம்.

4 - 1 ஒரு புள்ளியினின்று சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளி

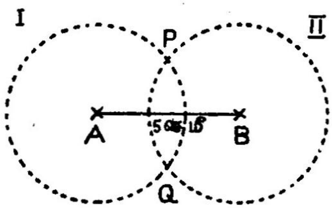
ஒரு நிலையான புள்ளியினின்று நிலையான தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தை அமைக்கும் எனக் கண்டோம். புள்ளியை மையம் எனவும், தூரத்தை ஆரம் எனவும் அழைக்கிறோம்.

இதனை, *ஒரு நிலையான புள்ளியினின்று நிலையான தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை, வட்டம் என்போம்.*



படம் 5-25.

இரண்டு நிலையான புள்ளிகளினின்று நிலையான தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன? அப்புள்ளிகளிடையேயுள்ள தூரம் 5 செமீ என்றும், நிலையான தூரம் 3 செமீ என்றும் கொள்வோம். புள்ளி A யினின்று 3 செமீ தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை A-ஐ மையமாகவும், 3 செமீ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் I. புள்ளி B-யினின்று 3 செமீ தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை B-ஐ மையமாகவும் 3 செமீ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் II.



படம் 5-26.

A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளினின்றும் 3 செமீ தூரத்திலுள்ள புள்ளிகள், வட்டங்கள் I-ம், II-ம் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

களான P, Q ஆகும். நிலையான தூரம் 2 செமீ ஆனால், P, Q ஐக் காண இயலுமா ? இதனின்று என்ன அறியலாம் ?

$\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ எவ்வாறு அமைந்துள்ளன எனக் காண்க.

$\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ க்கு மையக் குத்துக் கோடாக அமைந் துள்ளது. P, Q வினின்று 3 செமீ தூரத்தில் அமைந்த புள்ளி கள் A, B எனவும் காண்க.

எனவே, நிலையான இரு புள்ளிகளினின்று நிலையான தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அப் புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டின் மையக் குத்துக் கோட்டில் அமைந்த இரு புள்ளிகள் ஆகும்.

4 - 2 இரு புள்ளிகளினின்று சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளி

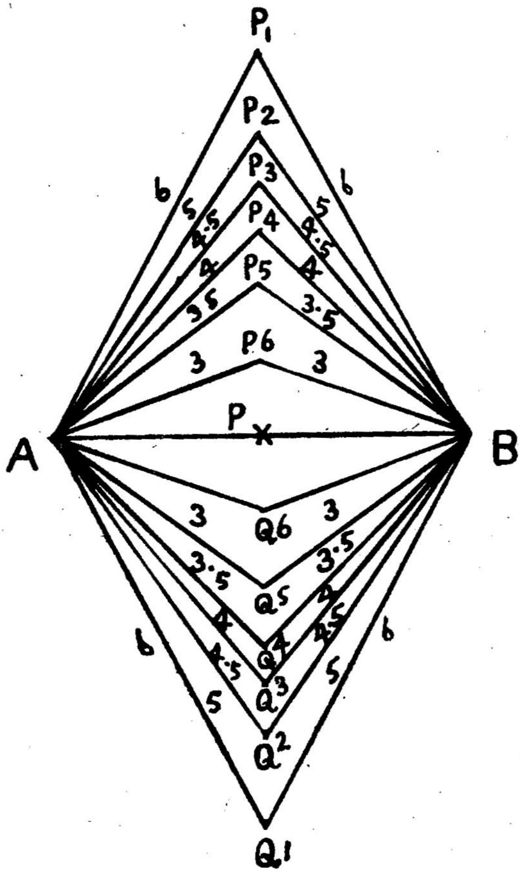
சென்ற பாடத்தில் இரு நிலையான புள்ளிகளினின்று நிலை யான தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அப் புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டின் மையக் குத்துக் கோட்டில் அமைந்த இரு புள்ளிகள் எனக் கண்டோம்.

இப்பொழுது, நிபந்தனையில் ஒரு மாறுதலைச் செய்வோம். நிலையான தூரம் என்பதற்குப் பதிலாக சம தூரம் என்போம். படம் 5-27 ஐப் பார்க்க. A, B என்பன நிலையான புள்ளிகள். ஆனால் அப் புள்ளிகளினின்று நகரும் புள்ளிகள் A, B களினின்று சமதூரத்திலுள்ளன. சென்ற பாடத்தில் உள்ள எடுத்துக் காட்டில், நிலையான தூரம் 3 செமீ. அதற்குப் பதிலாக சம தூரம் என்று கொண்டால், சம தூரங்கள் 6 செமீ, 5 செமீ, 4.5 செமீ, 4 செமீ, 3.5 செமீ, 3 செமீ, 2.5 செமீ எனக் கொள்ளலாம். 6 செமீ தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் P_1, Q_1; 5 செமீ தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் P_2, Q_2; 4·5 செமீ தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் P_3, Q_3, இது போலவே (P_4, Q_4), (P_5, Q_5), (P_6, Q_6) ஆகியவை A, B யினின்று முறையே 4 செமீ, 3.5 செமீ, 3 செமீ தூரத்தில் அமை கின்றன.

மேலும், $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{P_4Q_4}$, $\overline{P_5Q_5}$, $\overline{P_6Q_6}$ ஆகியவை $\overline{AB}$ க்கு மையக் குத்துக் கோடுகளாகும் என அறிவோம்.

இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் நகர் கின்ற புள்ளியின் நியமப் பாதை அப் புள்ளிகளைச்

சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டின் மையக் குத்துக் கோடாகும் எனக் காணலாம்.



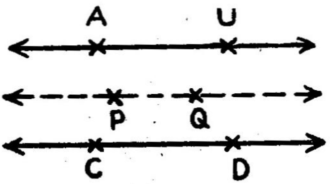
படம் 5-27.

இதே உண்மையைக் காகித மடிப்பின் மூலமும் சரி பார்க்க லாம். ஒரு தாளில் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டினை வரைக. இரு புள்ளிகளும் ஒன்றன் மீது ஒன்றாகப் படியும்படி தாளை மடிக்க. மடிப்பு அக்கோட்டுத் துண்டின் மையக் குத்துக் கோடாகும். அதனில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் நிலையான புள்ளிகளினின்று உள்ள தூரங்களை அளக்க. மேற் கண்ட உண்மையினை இவ்வாறு சரிபார்க்கலாம்.

4 - 3 இணை கோடுகளினின்று சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளி

ஒரு சோடி இணைகோடுகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவ்விணை கோடுகளினின்று சம தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன எனக் காண்போம்.

ஒரு கோடிட்டதாளில் ஏதேனும் இரு கோடுகளை எடுத்துக் கொள்க. அவை இணைகோடுகள் என்பதை அறிக. அவ்விணை கோடுகளை ஒன்றன் மீது ஒன்று பொருந்தும் வண்ணம் தாளினை மடிக்க. மடிப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அவ்விணை கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளன அல்லவா ? அம்மடிப்பும் ஒரு கோடு; மற்றும் அது அவ்விணை கோடுகளுக்கு இணையாகவும் அவற்றிற்குச் சரி நடுவிலும் அமைகின்ற தென்பதைக் கவனிக்க.



படம் 5-28.

படம் 5-28 இல் $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ என்பன நிலையான இணை கோடுகள். அவற்றிற்குச் சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை $\overleftrightarrow{PQ}$.

இப்பொழுது PQ நிலையான கோடு என்று கொண்டோமென்றால். அக்கோட்டினின்று நிலையான தூரத்தில் நகரும் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ ஆகிய கோடுகளல்லவா?

மேலும் பல சோதனைகள் செய்து மேற்கண்ட கூற்றுகள் மெய்யானவையா எனச் சரிபார்க்கவும்.

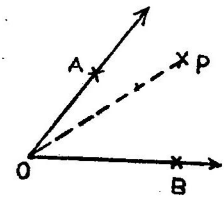
இவற்றினின்று நாம் அறிவது :

1. ***இரு நிலையான இணைகோடுகளினின்று சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அவ்விரு இணை கோடுகளுக்கும் நடுமத்தியில் உள்ள மற்றொரு இணை கோடு.***

2. ***ஒரு நிலையான கோட்டினின்று நிலையான தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அந்நிலையான தூரத்தில் அக்கோட்டிற்கு இருபுறமும் அமைந்த இணையான இருகோடுகள்.***

4 - 4 இரு வெட்டும் கோடுகளினின்று சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளி

ஒரு கோணத்தினை ஒரு தாளில் வரைக. அதன் கதிர்கள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை ஒன்றன் மீது ஒன்றாக அமையும் வண்ணம் தாளினை மடிக்க. மடிப்பு கோணத்தை இரு கூறாக்குகிற தல்லவா? மடிப்பிலுள்ள கதிர் $\overrightarrow{OP}$, $\angle AOB$யின் இரு சமவெட்டி ஆகும்.

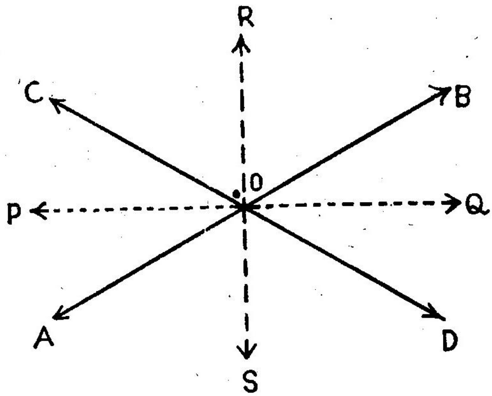


படம் 5-29.

$\overrightarrow{OP}$யில் சில புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளில் $\overrightarrow{OP}$-க்குச் செங்குத்தாகத் தாளினை மடிக்க. அம்மடிப்புகள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ஐச் சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. மீண்டும் $\angle AOB$-ஐ $\overrightarrow{OP}$ இல் மடிக்க, $\overrightarrow{OP}$ யிலுள்ள புள்ளிகள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ யினின்று சமதூரத்திலுள்ளவை என அறியலாம்.

இச் சோதனையினின்று,

பொது முடிவுப் புள்ளி கொண்ட இரு கதிர்களினின்று சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை அக்கதிர்கள் உண்டாக்கும் கோணத்தின் இரு சமவெட்டி என அறியலாம்.



படம் 5-30.

ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகளை வரைக (படம் 5-30). அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் 4 கோணங்கள் அமைகின்றன. அவை ஒவ்வொன்றிலும் கோணங்களின் புயங்களுக்குச் சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளிகளின் நியமப் பாதைகள் அக் கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகளன்றோ ?

ஒரு தாளில் அக்கோடுகளை வரைந்து, உண்டாகும் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் கிடைக்கும் வண்ணம் தாளினை மடிக்க. மடிப்பிலுள்ள கதிர்கள் $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகளை உடையவையாகவும், $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகளை உடையவையாகவும், $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவும் அமைகின்றன எனக் காணலாம்.

எனவே,

ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் இரு நிலையான கோடுகளினின்று சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளிகளின் நியமப் பாதைகள், அக்கோடுகள் உண்டாக்கும் கதிர்களினால் ஏற்படுத்தப்படும் கோணங்களின் இருசம வெட்டிச் சோடிகள். இச் சமவெட்டிச் சோடிகள் ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தானவை.

பயிற்சி 4

கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளின் நியமப் பாதைகளை வரையறுத்தும், படமிட்டும் காட்டுக.

1. ஒரு புள்ளியினின்று 3 செமீ தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள்.
2. ஒரு கோட்டினின்று 3 செமீ தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள்.
3. இடைவெளி 5 செமீ உள்ள இரு இணை கோடுகளினின்று சமதூரத்தில் செல்லும் புள்ளிகள்.
4. 60° அளவுள்ள கோணத்தின் புயங்களுக்குச் சம தூரத்தில் அமைந்த புள்ளிகள்.
5. 6 செமீ இடைவெளியில் அமைந்த P, Q என்ற புள்ளிகளிடமிருந்து 4 செமீ தூரத்தில் அமைந்த புள்ளிகள்.

விடைகள்

1. வட்டம் 2. இணைகோடுகள் 3. இணைகோடு
4. கோணத்தின் இருசமவெட்டி
5. *PQ* வின் மையக்குத்துக்கோடு

5 - 1 (i) இணைகரங்கள் (அ)

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

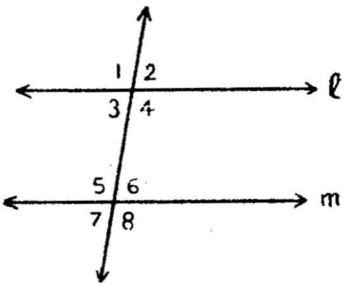
$l \parallel m$ ஆனால்,

$\angle 3 \equiv \angle 6$; $\angle 4 \equiv \angle 5$

$\angle 1 \equiv \angle 4$; $\angle 1 \equiv \angle 5$

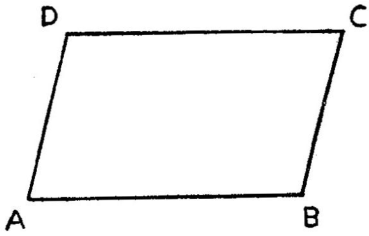
$\angle 2 \equiv \angle 3$; $\angle 2 \equiv \angle 6$

$\angle 3 \equiv \angle 7$; $\angle 4 \equiv \angle 8$



படம் 5-31.

இணைகரம், எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாகவுள்ள நாற்கரம்.



படம் 5-32

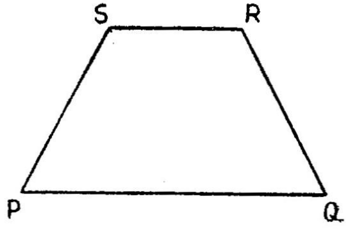
$AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

ABCD ஓர் இணைகரம்.

$PQ \parallel SR$

இது இணைகரமா ?



ஒரு அளவுகோலின் விளிம்புகள் இணையாதலால், அதனைக் கொண்டு இணைகரங்கள் அமைக்க. அவற்றினைக் கத்தரித்து எடுத்துக் கொள்க.

பக்கம் DCஐ பக்கம் ABஇல் பொருத்துக. அவை சர்வசமமா எனக் காண்க. இதுபோலவே $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ எனக் காண்க.

இணைகரத்தை BDஇல் வெட்டி இரு முக்கோணங்கள் ஆக்குக. அவற்றை ஒன்றின்மீது மற்றதைப் பொருத்தி, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ எனக் காண்க. $\angle A \equiv \angle C$. இதுபோலவே $\angle B \equiv \angle D$ எனவும் காணலாம்.

மற்றோர் இணைகரத்தின் படத்தைக் கத்தரித்து எடுக்க.

AC, BD ஆகியவற்றின் வழியே மடிக்க. நான்கு கோட்டுத் துண்டுகள் உண்டாகின்றன அல்லவா? அவற்றில் சர்வ சமமாக உள்ள கோட்டுத் துண்டுகள் எவை எனப் பார்க்க. இச் சோதனைகளினின்று,

இணைகரத்தில்,	1.	எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை
	2.	எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமம்
	3.	எதிர்க் கோணங்கள் சர்வசமம்
	4.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்

என அறியலாம்.

இணைகரங்கள் வரைந்து, பக்கங்கள், கோணங்கள், மூலை விட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்வதால் ஏற்படும் கோட்டுத் துண்டு களின் நீளங்கள் இவற்றை அளந்து மேற்கண்டவற்றைச் சரி பார்க்க.

எடுத்துக்காட்டு :

$PQRS$ ஓர் இணைகரம் (படம் 5-34). $m\angle S = 4x - 60$; $m\angle Q = 30 - x$. ஒவ்வொரு கோணத்தையும் காண்க.

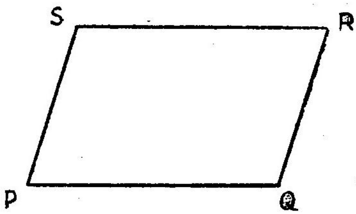
$\angle S$, $\angle Q$ எதிர்க் கோணங்கள்

$$m\angle S = m\angle Q$$

$$4x - 60 = 30 - x$$

$$4x + x = 30 + 60$$
$$5x = 90$$
$$x = 18$$

$$m\angle S = 4x - 60$$
$$= 72 - 60 = 12^\circ$$
$$m\angle Q = 12^\circ$$
$$m\angle P = m\angle R$$
$$= 180 - 12 = 168^\circ$$



படம் 5-34.

பயிற்சி 5 - 1(i)

1. *JKLM* ஓர் இணைகரம். அதில் சமபக்கங்கள், சம கோணங்கள் யாவை ?

2. இணைகரம் *RSTU*இல் $m\angle R = 130^\circ$ ஆனால், பிற கோணங்களின் அளவுகள் என்ன ?

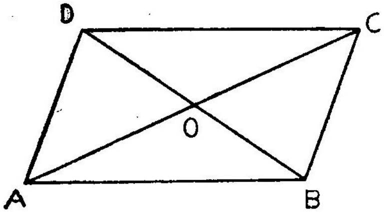
3. இணைகரம் *SBCJ*இல் $m\angle B = 2\, m\angle S$ ஆனால், $m\angle S$, $m\angle B$ஐக் காண்க.

4. இணைகரம் *S B C J* இல் $m\angle S = 3x - 5$; $m\angle B = 4x - 25$; $m\angle S$, $m\angle B$ஐக் காண்க.

5. இணைகரம் *PWJL*இல், $m\angle P = 7x - 12$; $m\angle W = 2x + 3$. $m\angle P$. $m\angle W$ஐக் காண்க.

6. இணைகரம் *ABCD*இல், $AB = 5x - 3$; $DC = 3x + 3$. *AB* இன் அளவு என்ன ?

7. *ABCD* ஓர் இணைகரம். அதில் கீழ்க்கண்ட எச் சோடி முக்கோணங்கள் சர்வசமம் ? ஏன் ?



படம் 5-35.

(அ) $\triangle AOD$, $\triangle COB$

(ஆ) $\triangle ABC$, $\triangle ABD$

(இ) $\triangle ADB$, $\triangle CDB$

(ஈ) $\triangle AOB$, $\triangle BOC$

8. படம் 5-35இல் $OA = 3$ செமீ ; $OB = 2{\cdot}5$ செமீ ; $AB = 4$ செமீ. *AC*, *BD*, *DC* இவற்றைக் காண்க.

விடைகள்

4. $m\angle S = 85$; $m\angle B = 95$
6. $AB = 12$
7. (அ), (இ) சர்வசமம்

5 - 1 (ii) இணைகரங்கள் (ஆ)

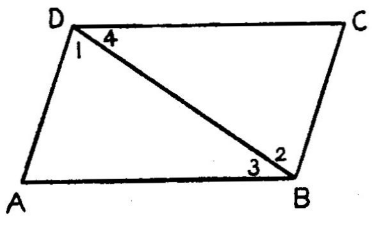
சென்ற பாடத்தில் இணைகரத்தைப்பற்றி படித்தவற்றைக் கணித முறையில் நிறுவுவோம்.

சென்ற வகுப்பில், $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ஆகிய இரு முக்கோணங்களில்

1. $AB = DE$; $BC = EF$; $CA = FD$ (SSS) அல்லது
2. $AB = DE$; $BC = EF$; $m\angle B = m\angle E$ (SAS) அல்லது
3. $AB = DE$; $m\angle A = m\angle D$; $m\angle B = m\angle E$ (SAA)

ஆனால், $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ எனக் கண்டோம்.

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ஆனால், $AB = DE$; $AC = DF$; $BC = EF$; $m\angle A = m\angle D$; $m\angle B = m\angle E$; $m\angle C = m\angle F$



படம் 5-36.

இணைகரம் $ABCD$யில் $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

BDஐச் சேர்த்தால்,

$\triangle ABD$, $\triangle CDB$-களில்

1. $BD = DB$ (பொதுப் பக்கம்)
2. $\angle 1 \equiv \angle 2$ ($AD \parallel BC$, DB குறுக்குவெட்டி)
3. $\angle 3 \equiv \angle 4$ ($AB \parallel DC$, DB குறுக்குவெட்டி)

$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle CDB \; (SAA)$

$\therefore \quad AB = DC \; ; \; AD = BC \; ; \; \angle A = \angle C$

இதுபோலவே $\angle B = \angle D$ என நிறுவலாம்.

எனவே இணைகரத்தில், எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமம் ; எதிர்க் கோணங்கள் சர்வசமம்.

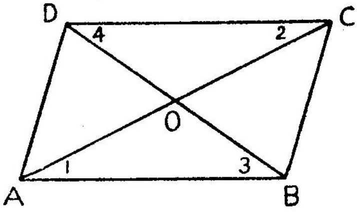
$\triangle OAB$, $\triangle OCD$-களில்

$AB = DC$ (எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$\angle 1 \equiv \angle 2$ (ஏன்?)

$\angle 3 \equiv \angle 4$ (ஏன்?)

$\therefore \quad \triangle OAB \equiv OCD \; (SAA)$



படம் 5-37.

எனவே, $OA = OC$; $OB = OD$

அல்லது AC, BC ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிட்டுக் கொள்கின்றன.

நாற்கரம் ஒன்றில்,

1. எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமமானால் அல்லது,

2. எதிர்க் கோணங்கள் சர்வசமமானால் அல்லது,

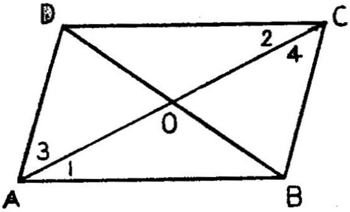
3. ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சர்வசமமாகவும், இணையாகவும் இருந்தால் அல்லது,

4. அதன் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறுகளாக வெட்டிக் கொண்டால், அந்நாற்கரம் இணைகரமாகும். முக்கோணங்களின் சர்வசமத் தன்மையைப் பயன்படுத்தி இக் கூற்றுகளை நிறுவுக.

பயிற்சி 5-1 (ii)

1. நாற்கரம் $ABCD$இல் மூலை விட்டங்கள் AC, BD, Oஇல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $AO = CO = 8$, $BO = DO = 7$. அது எவ்வகை நாற்கரம்?

2. *ABCD* ஓர் இணைகரமா ? காரணம் கூறுக,



படம் 5-38

(அ) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel BC$

(ஆ) $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$; $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

(இ) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

(ஈ) $\overline{DO} \equiv \overline{BO}$; $\overline{AO} \equiv \overline{CO}$

(உ) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

(ஊ) $\angle 1 \equiv \angle 2$; $\angle 3 \equiv \angle 4$

(எ) $\angle ABC \equiv \angle ADC$; $\angle DAB \equiv \angle DCB$

(ஏ) $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

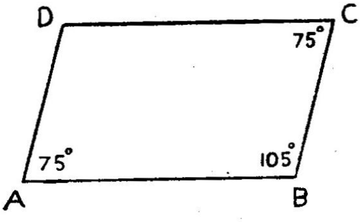
(ஐ) $\triangle AOB \equiv \triangle COD$

(ஒ) $AB \equiv DC$; $\angle 2 \equiv \angle 1$

3. நாற்கரம் *ABCD*இல், $\angle A$, $\angle B$ மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் ; $\angle A$, $\angle D$ மிகை நிரப்புக் கோணங்கள். *ABCD* இணைகரமா ? காரணம் கூறுக.

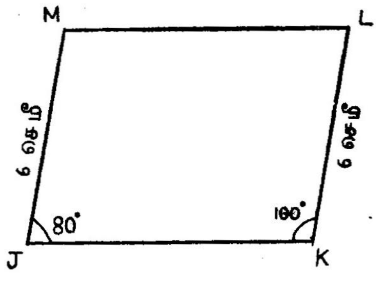
4. கீழ்க்கண்ட நாற்கரங்கள் இணைகரங்களா ?

(அ)



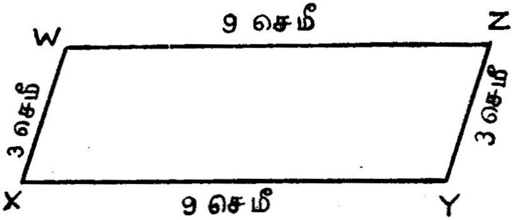
படம் 5-39.

(ஆ)



படம் 5-40.

(இ)



படம் 5-41.

விடைகள்

1. இணைகரம்.

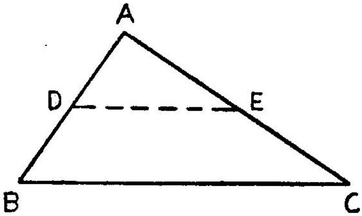
3. ஆம். ஓர் இணைகரத்தில் அடுத்தடுத்துள்ள ஒரு சோடிக் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

4. (அ), (ஆ), (இ) ஆம்.

5 - 2 முக்கோணங்கள்

ஒரு முக்கோணத்தைத் தாளில் கத்தரித்து எடுத்துக்கொள்க.

உச்சி A, உச்சி Bமீது படியும் வண்ணம் மடிக்க.



படம் 5-42.

$\overline{AB}$இன் மையப்புள்ளி Dஐக் காணலாம். அதுபோலவே $\overline{AC}$இன் மையப்புள்ளி E-யைக் காண்க.

$\overline{DE}$, $\overline{BC}$-க்கு இணையாகவுள்ளதா என ஆய்க.

$DE = \frac{1}{2} BC$ என்பதையும் சரி பார்க்க.

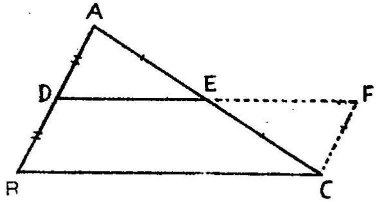
தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு முக்கோணங்களை அமைத்து, மேற்கண்ட கூற்றைச் சரிபார்க்கவும்.

இச்சோதனைகளிலிருந்து,

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப் புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டு, மூன்றாவது பக்கத் திற்கு இணையாகவும், பாதி நீளமுள்ளதாகவும் இருக்கும்

என அறியலாம்.

இதனைக் கணித முறையில் நிறுவுவோம்.



படம் 5-43.

D, E, F ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகளாகவும், $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$ உள்ளவாறும் Fஐக் குறிக்க. FCஐ வரைக.

$\triangle AED$, $\triangle CEF$களில்,

$\overline{AE} \equiv \overline{EC}$ (E, $\overline{AC}$இன் மையப் புள்ளி)

$\overline{DE} \equiv EF$ (அமைப்பு)

$\angle AED \equiv \angle CEF$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எனவே $\triangle ADE \equiv \triangle CEF$ (SAS)

எனவே $\overline{CF} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{DB}$

$\angle ECF \equiv \angle DAE \quad \therefore \quad AD \parallel FC$

$\therefore \quad \overline{DB} \parallel \overline{FC}$; $\overline{DB} \equiv FC \quad \therefore \quad \triangle BDFC$ ஓர் இணைகரம்

$\therefore \quad \overline{DF} \parallel \overline{BC}$; அல்லது $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$DF = BC$; $DF = 2\,DE$

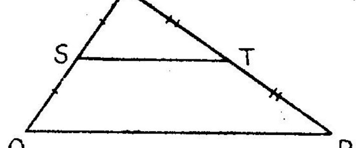
$2\,DE = BC$; $\therefore \quad DE = \frac{1}{2}\,BC$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $\triangle PQR$இல் PQவின் மையப் புள்ளி S. $\overline{PR}$இன் மையப் புள்ளி T. $ST = 7$ ஆனால் QRஐக் காண்க.

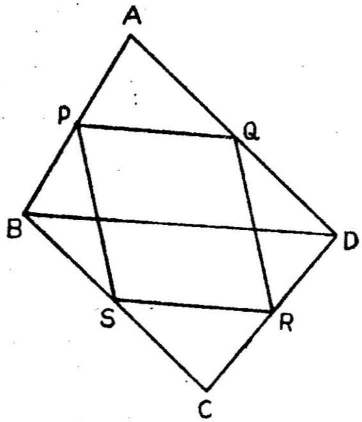
$QR = 2\,ST$

$= 14$



படம் 5-44.

2. ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டுகள் ஓர் இணைகரத்தை உண்டாக்கும்.



படம் 5-45.

$\triangle$ ABD இல், $\overline{AB}$ இன் மையப் புள்ளி P ஆகும்;

$\overline{AD}$ இன் மையப் புள்ளி Q ஆகும்.

எனவே, $\overline{PQ} \parallel BD$; $PQ = \frac{1}{2} BD$.

$\triangle$ BCD இல், $\overline{BC}$ இன் மையப் புள்ளி S ஆகும்;

$\overline{CD}$ இன் மையப் புள்ளி R ஆகும்.

எனவே, $\overline{SR} \parallel \overline{BD}$; $SR = \frac{1}{2} BD$.

$\overline{BD}$-க்கு இணையாக PQ, $\overline{SR}$ இரண்டும் உள்ளன.

$\therefore$ $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $PQ = \frac{1}{2} BD = SR$

$\therefore$ $PQRS$ ஓர் இணைகரம் (எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை, சமம்)

பயிற்சி 5 - 2

1. $\triangle ABC$இல் ABஇன் மையப் புள்ளி K, ACஇன் மையப் புள்ளி L.

(அ) $BC = 10$ ஆனால், $KL = ?$

(ஆ) $BC = 8$ ஆனால், $KL = ?$

(இ) $KL = 6$ ஆனால், $BC = ?$

(ஈ) $KL = 7$ ஆனால், $BC = ?$

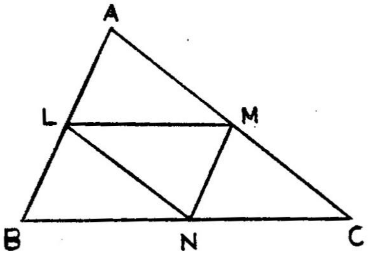
2. படம் 5-46இல், L, M, N முறையே

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$இன் மையப் புள்ளிகள்.

(அ) $LN = 12$, $AC = ?$ (ஆ) $MN = 2x$, $AB = ?$

(இ) $\overline{LN} \parallel ?$ (ஈ) $\overline{BN} \parallel ?$

(உ) $BN = 3$, $LM = ?$ (ஊ) $AL = p$, $MN = ?$



படம் 5-46.

3. படம் 5-46இல்

(அ) $BC = 4x - 6$, $LM = x - 1$, $LM = ?$

(ஆ) $AB = 5m - 2$, $MN = 2m + 3$, $AB = ?$

(இ) எத்தனை இணைகரங்கள் உள்ளன ?

4. "ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களின் மையப் புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டுகள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்." இக்கூற்று மெய்யா ? மெய்யற்றதா ?

விடைகள்

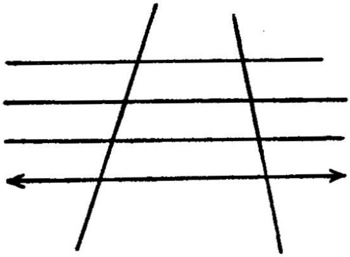
1. (அ) 5 (ஆ) $1\frac{1}{2}$ (இ) 12 (ஈ) 14

2. (அ) 24 (ஆ) $4x$ (ஊ) p

5 - 3 மூன்று இணைகோடுகள்

சம தூரங்களில் வரிகளிட்ட ஒரு தாளினை எடுத்துக் கொள்க. அவ்வரிகளை வெட்டும் வண்ணம் ஒரு கோட்டினை வரைக. இணைகோடுகளிடையே உண்டாக்கப்படும் கோட்டுத்துண்டுகள் சம நீளமுள்ளவையா எனக் காண்க. அவ்விணை கோடுகளை வெட்டுமாறு மேலும் ஒரு கோட்டினை வரைக. இப்பொழுது

ஏற்படும் கோட்டுத்துண்டுகளின் நீளங்கள் சமமானவையா எனக் காண்க. இதுபோல, பலகோடுகள் வரைந்து, உண்டாகும் கோட்டுத் துண்டுகளின் தன்மையை அறிக.



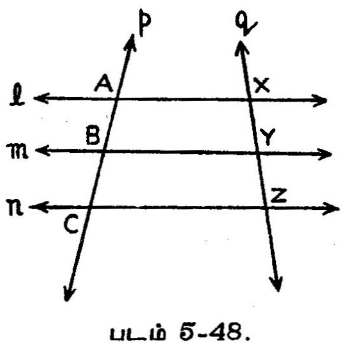
படம் 5-47.

இச்சோதனைகளிலிருந்து,

> பல இணைகோடுகள் ஒரு குறுக்குவெட்டியில் சர்வசம கோட்டுத்துண்டுகளை உண்டாக்கினால், அவ்விணைகோடுகள் வேறு எக்குறுக்கு வெட்டியிலும் உண்டாக்கும் கோட்டுத் துண்டுகள் சர்வ சமமாகும்.

என அறியலாம்.

நன்கு கவனிக்க :



படம் 5-48.

$l \parallel m \parallel n$

கோடு p, அவற்றை A, B, Cயில் வெட்டுகிறது.

கோடு q, அவற்றை X, Y, Zஇல் வெட்டுகிறது.

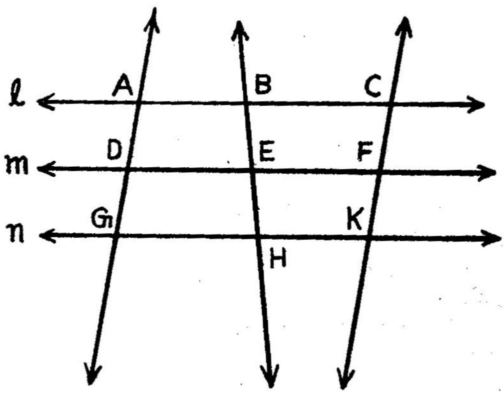
$\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ ஆனால், $\overline{XY} \equiv \overline{YZ}$,

$XY = AB$ ஆக இருக்கத் தேவையில்லை. $AB = BC = 5$ செமீ, $XY = 6$ செமீ என்றால் $YZ = 6$ செமீ.

இத்தேற்றத்தை, ஒரு கோட்டுத்துண்டைச் சம பிரிவு களாகப் பிரிக்கப் பயன்படுத்துகிறோம்.

பயிற்சி 5 - 3

1. படம் 5-49இல் $l \parallel m \parallel n$; $AD = DG = 5$.



படம் 5-49.

(அ) $BE = 4$; $EH = ?$

(ஆ) $EH = 3$; $BE = ?$

(இ) $CF = 10$; $CK = ?$

(ஈ) $BH = 9$; $EH = ?$

(உ) $BH = 14$; $BE = ?$

(ஊ) $CK = 11$; $CF = ?$

(எ) $CF = 7$; $FK = ?$

(ஏ) $CK = 13$; $FK = ?$

2. மேற்கண்ட படத்தில்,

(அ) $BE = 3x + 4$; $EH = x + 8$; BEஐக் காண்க.

(ஆ) $CF = 3y - 2$; $CK = 3y + 8$; $FK = ?$

(இ) $AD = 2n + 5$; $DG = 4n - 3$; $AG = ?$

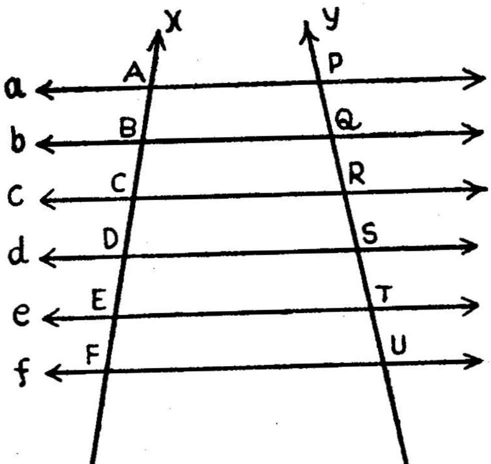
3. மெய்யா மெய்யல்லவா எனக் கூறுக, மெய்யல்ல என்றால் ஒரு மறுப்பு எடுத்துக்காட்டு தருக,

(அ) மூன்று கோடுகள், இரண்டு குறுக்கு வெட்டிகளை ஒவ்வொன்றிலும் சர்வசமக் கோட்டுத் துண்டுகளை வெட்டினால். அம் மூன்று கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று இணை.

(ஆ) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு மற்றொரு பக்கத்தை இருசமக் கூறிட்டால், மூன்றாவது பக்கத்தையும் அது சமக் கூறிடும்.

4. படம் 5-50இல் $a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e \parallel f$

$AB = BC = CD = DE = EF$



படம் 5-50.

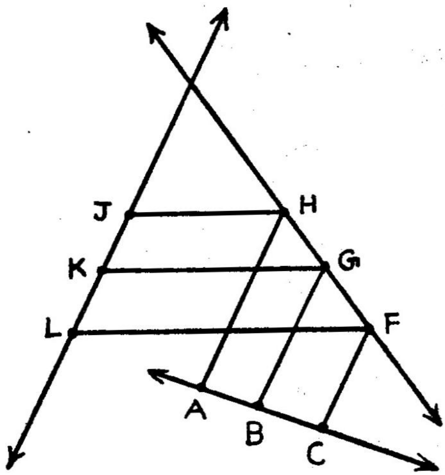
(அ) $PQ = 6$, $TU = ?$, $PU = ?$

(ஆ) $SQ = 8$, $PR = ?$

(இ) $AC = 10$, $DE = ?$

(ஈ) $PS = 15$, $RU = ?$

5 படம் 5-51இல், $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$; $\overline{AH} \parallel \overline{BG} \parallel \overline{CF}$; $\overline{LF} \parallel \overline{KG} \parallel JH$என்றால், $\overline{JK} \equiv \overline{KL}$ என நிறுவுக.



படம் 5-51.

6. வட்டங்கள்

6 - 1 பொது வடிவ இயல் சொற்கள்

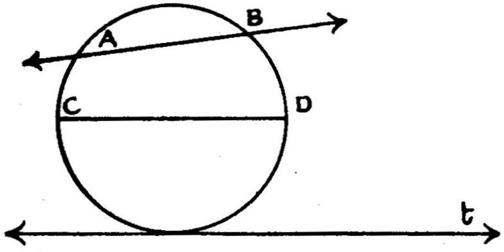
வட்டத்தின் மையம், ஆரம், விட்டம். நாண் ஆகியவற்றைப் பற்றி ஏற்கெனவே அறிவோம். மேலும் சில வடிவ இயல் கருத்துகளை இப்பொழுது பார்ப்போம்.

வட்டம் ஓர் எளிய மூடிய வளைவு. எனவே அதற்கு உட்புறம், வெளிப்புறம், எல்லை ஆகிய மூன்று பகுதிகள் உண்டு. எல்லையும், உட்புறமும் சேர்ந்தது வட்டப்பகுதி எனப்படும்.

வட்டத்தின் எல்லையின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டு **நாண்** எனப்படும். வட்டமையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் **விட்டமா**கும்.

வட்டத்தை இருபுள்ளிகளில் வெட்டும் கோடு **வெட்டி** எனப்படும். நாண் அமையும் கோடு வெட்டி என அறிக.

வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டும் கோடு **தொடு கோடு** எனப்படும்.

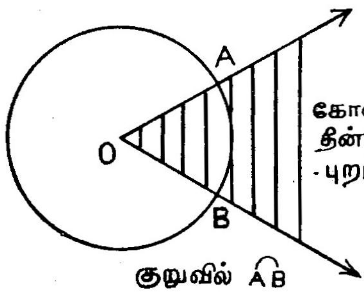


படம் 5-52.

படம் 5-52இல் l வெட்டி, AB நாண், CD விட்டம், t தொடு கோடு.

வட்ட மையத்தை உச்சியாகக் கொண்ட கோணம் **மையக் கோணம்** எனப்படும்.

மையக் கோணம், வட்ட விற்களை அளக்கப் பயன்படுகிறது.



படம் 5-53.

வட்டவில் ABஐ $\widehat{AB}$ எனக் குறிக்கிறோம்.

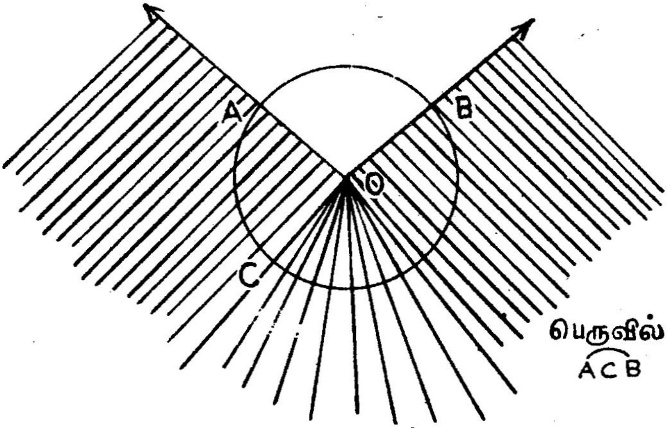
$m\,\widehat{AB} = m\,\angle AOB$ என வரையறுக்கிறோம்.

படம் 5-53இல் $m\,\angle AOB = 60°$ என்றால், $m\,\widehat{AB} = 60°$

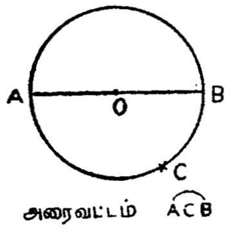
படம் 5-54இல் $m\,\angle AOB = 100°$ என்றால்,

$$m\,\widehat{ACB} = 360° - 100° = 260°$$

படம் 5-55இல் $m\angle AOB = 180°$; எனவே $m\,\widehat{ACB} = 180°$



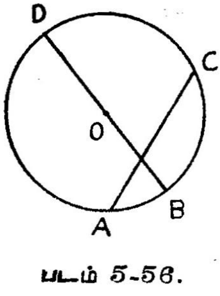
படம் 5-54.



படம் 5-55.

பயிற்சி 6 - 1

1. படம் 5-56இல், (அ) குறுவிற்கள் (ஆ) பெருவிற்கள் (இ) அரை வட்டங்கள் யாவை ?



படம் 5-56.

2. படம் 5-57 இல், $\overline{UX}$ விட்டம்

(அ) $m\,\overline{UV} = 62^\circ$,

$m\,\widehat{WX} = 42^\circ$ எனில்

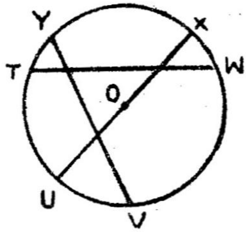
$m\,\widehat{VW} = ?$

(ஆ) படம் 5-57 இல்,

$m\,\widehat{TU} = 72^\circ$, $m\,\widehat{VW} = 60^\circ$,

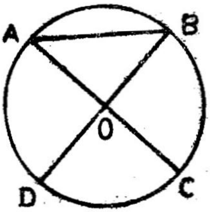
$m\,\widehat{WX} = 72^\circ$, $m\,\widehat{XY} = 56^\circ$.

$m\,\widehat{UV}$, $m\,\widehat{YT}$ காண்க.



படம் 5-57.

3. படம் 5-58இல், $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ விட்டங்கள்.



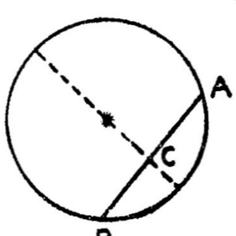
படம் 5-58.

(அ) $m\,\widehat{DC} = 79^\circ$ எனில்,
$m\angle AOD$, $\angle AOB$,
$m\,\widehat{ADC}$, $m\,\widehat{BC}$ காண்க.

(ஆ) $m\,\angle AOB = 123^\circ$ எனில்,
$m\,\angle BOC$, $m\,\widehat{AB}$,
$m\,\widehat{BCD}$, $m\,\widehat{CAB}$ காண்க.

6 - 2 நாண்கள்

ஒரு ரூபாய் நாணயத்தின் விளிம்பை ஒட்டி வட்டம் ஒன்று வரைக. அதைக் கத்தரித்து எடுத்துக்கொண்டு அதனை இரண்டாக மடிக்க. மடிப்பு ஒரு விட்டமாகும். மற்றொரு விட்டம் காண்க. விட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி வட்ட மையம். வட்டத்தில் ஏதேனும் ஒரு நாணைக் குறிக்க. நாணின் முடிவுப் புள்ளிகளை ஒன்றன்மீது ஒன்று பொருந்தும்படி காகிதத்தை மடித்தால், நாணிற்கு மையக் குத்துக் கோடு கிடைக்கும். அது வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லுகின்றதா எனக் காண்க. மையத்திற்கும், நாணின் மையப் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் என்ன? ஒரு குச்சியால் அளக்க.



படம் 5-59.

அதே நாணின் நீளத்திற்கேற்ப மற்றொரு நாணைக் குறித்துச் சோதனையை மீண்டும் செய்க. சோதனையைத் தொடர்க.

இவற்றினின்று,

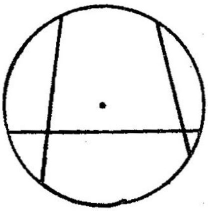
> சர்வ சம நாண்கள் வட்ட மையத்தினின்று சமதூரத்தில் இருக்கும்

என அறியலாம்.

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை மெய்யா எனக் காண்போம்.

தேற்றத்தின் மறுதலை :

வட்ட மையத்தினின்று சம தூரத்திலுள்ள நாண்கள் சர்வ சமம்.



படம் 5-60

வட்ட மையத்தினின்று சமதூரத்தில் வெவ்வேறு திசைகளில் புள்ளிகளைக் குறிக்க. வட்டத்தினை அப்புள்ளிகளில் மடிக்க. நாண்கள் கிடைக்கும். அந்நாண்களின் நீளங்கள் சமமா எனக் காண்க. சோதனையைத் தொடர்ந்து செய்க. மறுதலையும் மெய் என அறிகிறோம்.

> வட்ட மையத்தினின்று சமதூரத்திலுள்ள நாண்கள் சர்வசமம்.

இவற்றை வடிவியல் கணித முறைப்படி நிறுவுவோம்.

கொள்கை : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

நிருபணம் : $OP \perp AB, OQ \perp CD$ வரைக.

$\triangle OAB, \triangle COD$ களில்

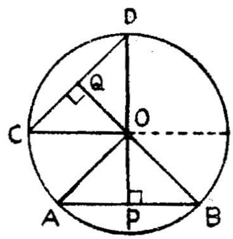
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$ (ஆரங்கள்)

$\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (,,)

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OCD$ (SSS)

$\angle OAP \cong \angle OCQ$



படம் 5-61

$\triangle OAP$, $\triangle OCQ$களில்

$$\overline{OA} \equiv OC$$
$$\angle OPA \equiv \angle OQC$$
$$\angle OAP \equiv \angle OCQ$$
$$\therefore \triangle OAP \equiv \triangle OCQ \ (SAA)$$
$$\therefore \overline{OP} \equiv \overline{OQ}$$

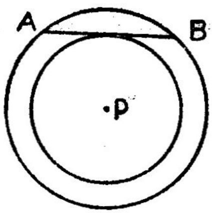
இதுபோலவே, மறுதலைத் தேற்றத்தையும் நிரூபிக்கலாம்.

பயிற்சி 6-2

1. 10 செமீ நீளமுள்ள நாண் வட்ட மையத்தினின்று 12 செமீ தொலைவிலுள்ளது. வட்ட ஆரம் என்ன ?

2. 6 செமீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் 8 செமீ நீளமுள்ள நாண் வட்ட மையத்தினின்று எவ்வளவு தொலைவில் இருக்கும் ?

3. படம் 5-62 இல் $\overline{AB}$ பெரிய வட்டத்திற்கு நாண்; சிறிய வட்டத் திற்குத் தொடுகோடு. அப்பொது மைய வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 6 செமீ, 4 செமீ ஆனால், AB இன் நீளம் என்ன ?



படம் 5-62.

4. 4 செமீ நீளமுள்ள நாண், 8 செமீ நீளமுள்ள நாணைப் போல் வட்ட மையத்தினின்று இருமடங்கு தொலைவில் இருந் தால், அவ்வட்டத்தின் ஆரம் என்ன ?

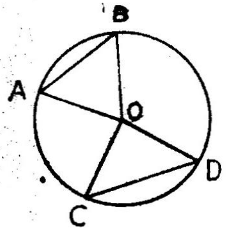
விடைகள்

1. 13 செமீ   2. $2\sqrt{5}$ செமீ

6 - 3 வட்ட விற்களும் நாண்களும்

ஒரு வட்டத்தைக் கத்தரித்து எடுத்துக்கொள்க. சம நீள முள்ள இரு நாண்களைக் குறிக்க. நாண் AB வழியே கத்தரித்து, அப்பகுதியை நாண் CD மீது பொருத்துக.

நாண்களும், நாண்கள் உண்டாக்கும் விற்களும் ஒன்றன் மீது ஒன்று பொருந்துகின்றன அல்லவா?



படம் 5-68.

இதனைக் கணிதமுறையில் நிறுவுவோம்.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (கொள்கை)

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$ (ஆரங்கள்)

$\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (ஆரங்கள்)

எனவே $\triangle OAB \cong \triangle OCD$ (SSS)

$\therefore \quad \angle AOB \cong \angle COD$

$m\,\widehat{AB} = m\angle AOB,\ m\,\widehat{CD} = m\angle COD$

$\therefore \quad m\,\widehat{AB} = m\,\widehat{CD}$

$\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

எனவே

ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம நாண்கள் சர்வசம குறுவிற்களை வெட்டும்.

இதன் மறுதலையையும் காகிதக் கத்தரிப்பு மூலமும், வடிவ இயல் கணித முறைப்படியும் மெய் எனக் காணலாம்.

ஒரு வட்டத்தில் சர்வசம விற்கள் சர்வசம நாண்களை உண்டாக்கும்.

வேறுபட்ட ஆரங்களை உடைய வட்டங்களில் இச்சோதனையைச் செய்து, இத்தேற்றங்கள் அவற்றிற்குப் பொருந்தாது என்பதை அறிக. சம ஆரங்களுடைய வட்டங்களில் இத் தேற்றம் பொருந்தும். எனவே, இத் தேற்றங்களை

ஒரு வட்டத்தில் (அல்லது சர்வசம வட்டங்களில்) **சர்வ சம நாண்கள் சர்வசம குறுவிற்களையும், சர்வசம விற்கள் சர்வசம நாண்களையும் உண்டாக்கும்**

என விரிவுபடுத்தலாம்.

பயிற்சி 6 - 3

1. ஒரு வட்டத்தில் A, B, C, D, E ஐந்து புள்ளிகள்.

$m\widehat{AB} = 48°$; $m\ \widehat{AC} = 124°$: $m\ \widehat{ABD} = 208°$;

$m\widehat{ABE} = 312°$ ஆனால், எவ்விற்கள் சர்வ சமம் ?

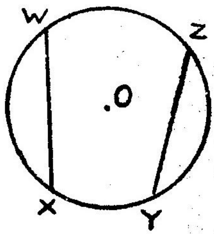
2. $\odot O = \odot P$. $\odot O$இல் $\overline{AB}, \overline{CD}$ நாண்கள். $\odot P$ இல் $\overline{EF}, \overline{GH}$ நாண்கள். $m\ \widehat{AB} = 118°$; $m\ \widehat{CD} = 188°$; $m\ \widehat{EF} = 129°$; $m\ \widehat{GH} = 118°$ என்றால், எந்நாண்கள் சர்வ சமம் ?

3. படம் 5-64 இல் $\overline{XW} \cong \overline{YZ}$,

$m\ \overline{XW} = 10t + 5$,

$m\ \overline{YZ} = 12t - 21$.

$m\ \overline{XW}$ ஐக் காண்க.



படம் 5-64.

4. கீழ்க்கண்ட கணக்குகளில், A, B, C, D ஒரு வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்க.

(அ) $AB = 7$; $BC = 8$; $CD = 9$; $DA = 8$. எவ்விற்கள் சர்வ சமம் ?

(ஆ) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. எவ்விற்கள் சர்வ சமம் ?

(இ) $m\ \widehat{AB} = 150°$; $m\ \widehat{BC} = 80°$; $m\ \widehat{CD} = 50°$; $m\ \widehat{DA} = 80°$. எந்நாண்கள் சர்வ சமம் ?

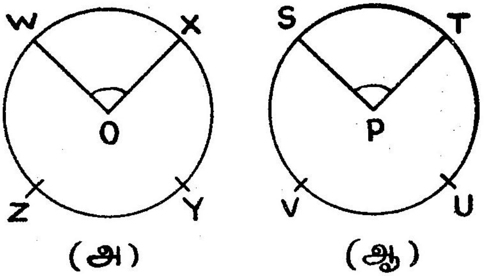
(ஈ) $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$; $\widehat{DA} \cong \widehat{CB}$. எந்நாண்கள் சர்வ சமம் ?

5. படம் 5-65 இல் எவ் விவரங்களுக்கு $\overline{WX} \cong \overline{ST}$ எனக் கூறலாம் ?

(அ) $\overline{OW} \cong \overline{PS}$; $\overline{WX} \cong \widehat{TU}$;

(ஆ) $OX \cong \overline{PS}$; $m\ \angle WOX \cong m\ \angle SPT$

(இ) $\overline{OW} \cong \overline{PS}$; $m\ \angle WZX \cong m\ \angle SVT$

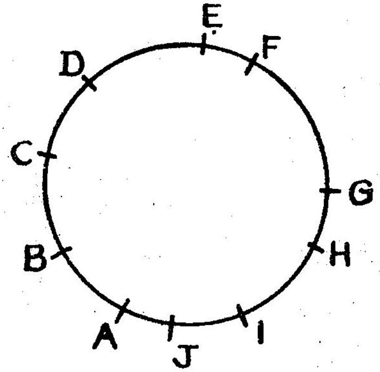


படம் 5-65.

6 மேற்கண்ட படத்தில் கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு எவ் விற்கள் சர்வ சமமாகும் ?

$$m\,\widehat{XY} = 85^\circ\ ;\quad m\,\widehat{ST} = 95^\circ\ ;\quad m\,\widehat{XYZ} = 190^\circ;$$
$$m\,\widehat{STU} = 180^\circ;\ m\,\widehat{XZW} = 300^\circ;\ m\,\widehat{STV} = 240^\circ.$$

7. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு, $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{DF}$ விற்களுக்குச் சர்வ சமமான நாண்கள் யாவை ?



படம் 5-66.

$$m\,\widehat{AB}=35^\circ,\ m\,\widehat{AC}=75^\circ,\ m\,\widehat{AD}=110^\circ,\ m\,\widehat{AE}=160^\circ,$$
$$m\,\widehat{BF} = 145^\circ,\ m\,\widehat{BDG}=215^\circ,\ m\,\widehat{BDH} = 240^\circ,$$
$$m\,\widehat{BDI} = 280^\circ,\ m\,\widehat{BDJ} = 305^\circ$$

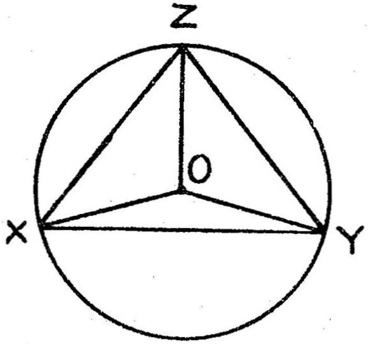
8. $\widehat{RY} \equiv \widehat{RL}$ என்றால், $\triangle RLY$ ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

9. $\widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \equiv \widehat{CA}$ என்றால், $\triangle ABC$ எவ்வகை முக்கோணம் ?

10. படம் 5-67 இல்,

(அ) $\widehat{ZXY} \equiv \widehat{ZYX}$ எனில், $\angle ZOX = \angle ZOY$ எனவும்

(ஆ) $\triangle XOZ \equiv \triangle ZOY$ எனில், $\widehat{XZ} \equiv \widehat{YZ}$ எனவும் நிறுவுக.



படம் 5-67.

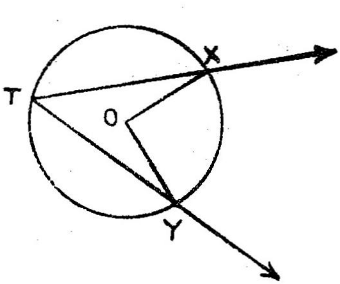
விடைகள்

1. $\widehat{AB} \equiv \widehat{AE}$

6 - 4 வட்டக் கோணம்

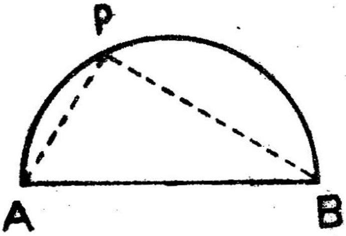
வட்ட மையத்தை உச்சியாகக்கொண்ட கோணத்தை மையக் கோணம் என அழைத்தோம். வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை உச்சியாகக்கொண்ட கோணம் வட்டக் கோணம் எனப்படும்.

$\angle XOY$ மையக் கோணம்,
$\angle XTY$ வட்டக் கோணம்.



படம் 5-68.

இப்பொழுது சில சோதனைகளைச் செய்வோம். ஒரு வட்டத்தைக் கத்தரித்து எடுத்துக்கொள்க. அதனை மையத்தின் வழியே மடிக்க. இரு அரை வட்டங்கள் கிடைக்கின்றன. அவற்றைக் கத்தரித்து எடுத்துக் கொள்ளவும். வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் (P) குறிக்கவும். அப் புள்ளியையும் விட்டத்தின் முடிவுப் புள்ளிகளான A, B ஐயும் முறையே சேர்ந்து நாண்கள் ($\overline{PA}$, $\overline{PB}$) உண்டாருமாறு காகிதத்தை மடிக்கவும். $\angle APB$ செங்கோணமா எனக் காண்க. அரை வட்டத்தில் வேறு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு சோதனையைத் தொடர்க.



படம் 5-69.

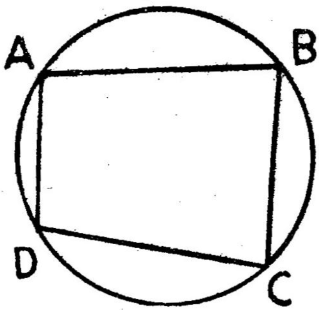
இவற்றினின்று,

> அரை வட்டத்தில் அமைந்த வட்டக் கோணம் செங் கோணம்

என அறியலாம்.

அரைவட்டத்திலமைந்த வட்டக் கோணம் என்பதில் கோணத்தின் உச்சி அரைவட்டத்தில் எங்குவேண்டுமானாலும் அமையும் என்றும், கோணத்தின் கதிர்கள் விட்டத்தின் முடிவுப் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் என்றும் கவனிக்க.

ஒரு வட்டத்தில் ஏதேனும் நான்கு புள்ளிகளைக் குறிக்க. படத்தில் கண்ட வண்ணம் $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ நாண்களை அமைக்க, $ABCD$ என்ற நாற்கரம் கிடைக்கிறது. அதன் உச்சிகள் வட்டத்தின்மீது அமைந்துள்ளதால், அது வட்ட நாற்கரம் என்று அழைக்கப்படும். வட்டக் கோணங்கள் $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ இவற்றை அளக்க.



படம் 5-70.

$m\angle ABC + m\angle CDA$, $m\angle BCD + m\angle DAB$ இவற்றைக் காண்க. உங்களுக்குக் கிடைக்கின்ற விடைகளைத் தொகுத்தெழுதுக.

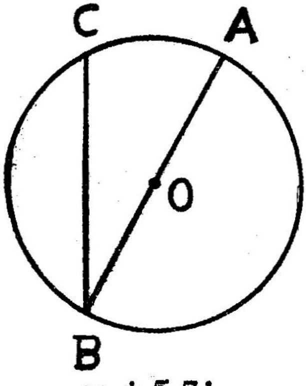
$$m\angle ABC + m\angle CDA = 180^\circ$$
$$m\angle BCD + m\angle DAB = 180^\circ$$

எனக் காணலாம்.

> வட்ட நாற்கரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள்.

வட்டக் கோணங்களைப்பற்றி விவரமாகப் பத்தாம் வகுப்பில் நீங்கள் படிப்பீர்கள். மேற்கண்ட இரு தேற்றங்களும் நாம் சில வகை நாற்கரங்கள் வரைய உதவியாக இருக்கும் என அடுத்த பாடங்களில் அறிவோம்.

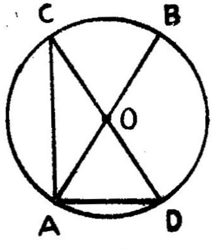
பயிற்சி 6 - 4



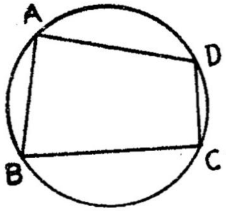
படம் 5-71.

1. படம் 5-71இல் $\overline{AB}$ விட்டம், $m\angle ACB$ என்ன ?

2. படம் 5-72இல் AB விட்டம், $\angle CAB \cong \angle BAD$ எனில், $m\angle ABC = m\angle ABD$ என நிறுவுக.



படம் 3-72.



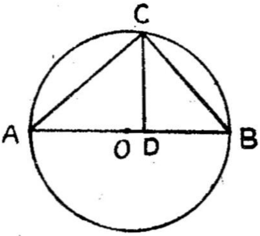
படம் 5-73.

3. படம் 5-73 இல் BD விட்டம். $m\angle ADC = 100°$.

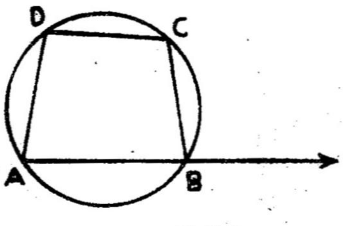
$m\angle BAD$, $m\angle BCD$, $m\angle ABC$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. படம் 5-74 இல் $\overline{AB}$ விட்டம். $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

$\angle CAB \cong \angle DCB$ எனக் காட்டுக.



படம் 5-74.



படம் 5-75.

5. படம் 5-75 இல் $m\angle CBE = 100°$. $m\angle ADC$ஐக் காண்க.

விடைகள்

1. $90°$

3. $m\,B\hat{A}D = 90°$; $m\,B\hat{C}D = 90°$; $m\,A\hat{B}C = 80°$

5. $m\,A\hat{D}C = 100°$

7. செயல் வடிவ இயல்

7 - 1 சரிவகம்

ஒரு ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் மட்டும் இணையாக உள்ள நாற்கரம் சரிவகம் என்று அறிவோம். சென்ற வகுப்பில், சில வகை சரிவகங்கள் வரைந்தோம். சரிவகங்கள் வரைய,

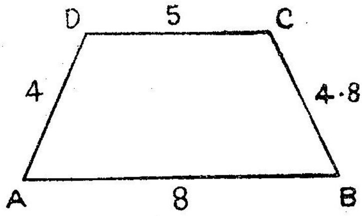
(1) கொடுத்துள்ள அளவுகள் மூன்றினைக் கொண்டு, ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, சரிவகத்தின் மூன்று உச்சிகளையும்

(2) அடுத்த இரண்டு அளவுகளைக் கொண்டு நான்காம் உச்சியையும் கண்டோமல்லவா ?

இப்பொழுது, ஒரு சரிவகத்தின் 4 பக்கங்களின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால், எவ்வாறு சரிவகம் வரைவது எனப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $AB = 8$ செமீ ; $BC = 4{\cdot}8$ செமீ ; $CD = 5$ செமீ ; $DA = 4$ செமீ. அளவுகளுள்ள சரிவகம் வரைக.

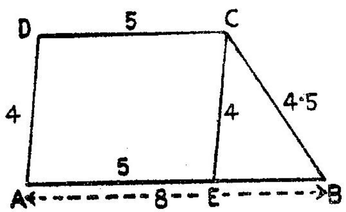


படம் 5-76.

உதவிப் படம் வரைந்து கொடுத்துள்ள அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

$\overline{AC}$ மூலைவிட்டம் இரண்டு முக்கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றிற்கு மூன்று அளவுகள் தெரியுமா? தெரியாதல்லவா ? எனவே $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ வரைய, கொடுத்துள்ள அளவுகள் உதவாது. இதுபோலவே, BD உருவாக்கும் $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ ஆகியவற்றையும் வரைய இயலாது. எனவே வேறு 3 அளவுகளுள்ள ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்க முற்படுவோம். $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ ஆக வரைய, $AECD$ ஓர் இணைகரம் கிடைக்கும் அல்லவா ? இணைகரத்தில் $EC = AD = 4$ செமீ ; $AE = DC = 5$ செமீ.

$\therefore$ $EB = 3$ செமீ.



படம் 5-77.

இப்பொழுது $\triangle ECB$ வரைய 3 அளவுகள் தெரியுமல்லவா ?

சரிவகம் $ABCD$ வரைய,

(1) $\overline{AB}$ இல், $AE = 5$ உள்ளவாறு புள்ளி E ஐக் குறிக்கவும்.

(2) Δ *ECB* ஐ வரைக.

(3) $AD = 4$; $CD = 5$ உள்ளவாறு வட்ட விற்கள் வரைந்து *D*-ஐக் காண்க.

(4) CD , $\overline{DA}$ சேர்க்க.

ABCD நமக்குத் தேவையான சரிவகம்.

பயிற்சி 7-1

கீழ்க்கண்ட அளவுகளுக்குச் சரிவகங்கள் வரைக.

1. $PQ \parallel SR$; $PQ = 7{\cdot}2$ செமீ ; $QR = 3{\cdot}8$ செமீ ; $RS = 4$ செமீ ; $SP = 3{\cdot}6$ செமீ.

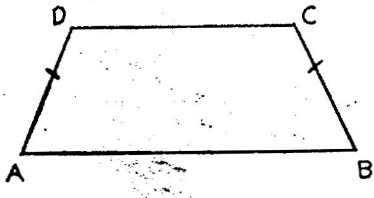
2. $AB = DC$; $AB = 6$ செமீ ; $BC = 4$ செமீ ; $CD = 4{\cdot}5$ செமீ ; $DA = 3{\cdot}5$ செமீ.

3. $KL \parallel NM$; $KL = 4{\cdot}8$ செமீ ; $LM = 6$ செமீ ; $MN = 9$ செமீ ; $NK = 5$ செமீ.

4. $AB \parallel DC$; $AB = 4$ செமீ ; $BC = 5{\cdot}4$ செமீ; $CD = 8{\cdot}5$ செமீ ; $DA = 5$ செமீ.

7 - 2 இரு சமபக்க சரிவகம்

ஒரு சரிவகத்தில் இணையற்ற பக்கங்கள் சர்வ சமமானால், அச்சரிவகம் இரு சமபக்க சரிவகம் என அழைக்கப்படும்.



படம் 5-78.

ABCD இல்

$AB \parallel DC$, $AD \equiv BC$.

ABCD ஓர் இருசமபக்க சரிவகம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

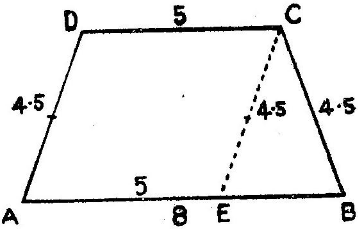
1. இணைப் பக்கங்கள் 8 செமீ, 5 செமீ; சம பக்கங்கள் 4·5 செமீ உள்ள இரு சமபக்க சரிவகத்தினை வரைக.

நான்கு பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், சரிவகம் எவ்வாறு வரைவது என்று முன் பாடத்தில் படித்தோமல்லவா ?

$m\angle A$, $m\angle B$, $m\angle C$, $m\angle D$ காண்க.

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ இன் நீளங்களைக் காண்க.

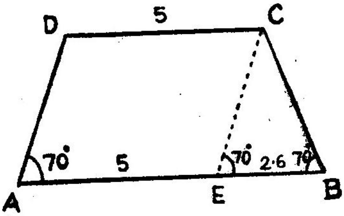
$m\angle A = m\angle B$,
$m\angle C = m\angle D$,
$AC = BD$ எனக் காணலாம்.



படம் 5-79.

இருசமபக்க சரிவகத்தில், சாய்வுக் கோணங்கள் சர்வசமம்; மூலைவிட்டங்கள் சர்வசமம் என அறிக.

2. ஓர் இருசமபக்க சரிவகத்தில் இணைப் பக்கங்கள் 7·6 செமீ, 5 செமீ; அடிக்கோணம் 70°. சரிவகத்தினை வரைக.



படம் 5-80.

படம் 5-80 உதவிப் படமாகும்.

$\overline{CE} \parallel \overline{DA}$ ஆக வரைக.

$\angle CEB \cong \angle DAB$

(1) $AB = 7{\cdot}6$ செமீ ஆக வரைக.

(2) $AE = 5$ செமீ உள்ளவாறு Eஐக் குறிக்க.

(3) $m\angle CEB = m\angle CBE = 70^\circ$ உள்ளவாறு கதிர்கள் வரைக.

அவை வெட்டுமிடம் C.

(4) $m\angle BAD = 70^\circ$ உள்ளவாறு கதிர் $\overrightarrow{AD}$ வரைக.

(5) $CD = 5$ செமீ உள்ளவாறு Dஐ வெட்டுக.

$ABCD$ வேண்டிய சரிவகம்.

D-க்கு இரு இடங்கள் கிடைத்தால், எதைத் தேர்ந்தெடுப்போம்?

பயிற்சி 7 - 2

கீழ்க்கண்ட அளவுகளுக்கு இருசமபக்க சரிவகங்கள் வரைக.

1. இணைப் பக்கங்கள் 8 செமீ, 4.6 செமீ; சம பக்கங்கள் 3·5 செமீ.

2. இணைப் பக்கங்கள் 7·6 செமீ, 3·8 செமீ; சம பக்கங்கள் 4 செமீ.

3. இணைப் பக்கங்கள் 6 செமீ, 4 செமீ; அடிக் கோணங்கள் 60°.

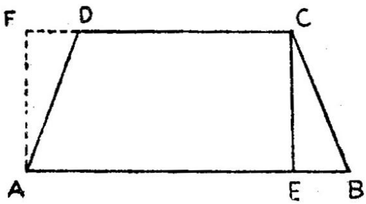
4. இணைப் பக்கங்கள் 9 செமீ, 5 செமீ; அடிக் கோணங்கள் 75°.

7 - 3 சரிவகம் - பரப்பு காணல்

சரிவகம் $ABCD$ இல் $\overline{AC}$ அதனை $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ என இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

$\triangle ABC$ இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} AB \times CE.$

$\triangle ACD$ இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} DC \times AF = \frac{1}{2} DC \times CE.$



படம் 5-81.

சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times AB \times CE + \frac{1}{2} DC \times CE$

$= \frac{1}{2} CE (AB + DC)$

இணைப் பக்கங்கள் a, b, இணைப் பக்கங்களிடையே தொலைவு h ஆனால்,

சரிவகத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} h(a+b)$

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு சரிவகத்தின் இணைப் பக்கங்கள் 8 செமீ, 6 செமீ. அவற்றினிடையே தூரம் 5 செமீ.

அதன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 5 \times (8 + 6)$ செமீ²

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 14$ செமீ² $= 35$ செமீ²

பயிற்சி 7 - 3

பயிற்சி 7-1, பயிற்சி 7-2களில் வரைந்த சரிவகங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

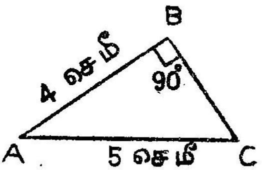
7 - 4 செங்கோண முக்கோணம் வரைதல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

அரை வட்டக் கோணம் செங்கோணமாகும்.

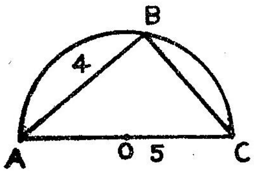
எடுத்துக்காட்டு :

கர்ணம் $AC = 5$ செமீ; $AB = 4$ செமீ அளவுகளுள்ள செங்கோண முக்கோணம் ABC வரைக.



படம் 5-82.

$m\angle B = 90^\circ$ ஆதலால் $\overline{AC}$ ஐ விட்டமாகக் கொண்ட அரை வட்டத்தில் B அமையும்.



படம் 5-83.

$\overline{AC}$இன் மையப் புள்ளி O ஐக் காண்க. O ஐ மையமாகவும், $\overline{OA}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு அரை வட்டம் ABC வரைக. $AB = 4$ செமீ உள்ளவாறு, அரை வட்டத்தில் B ஐக் குறிக்க.

குறிப்பு : அரை வட்டம் வரையாமலேயே $\Delta\ ABC$-ஐ வரையலாமல்லவா ?

பயிற்சி 7 - 4

கீழ்க்கண்ட அளவுகளுக்குச் செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைக. (அரைவட்டம் அமைக்க.)

1. கர்ணம் 6 செமீ; பக்கம் 4 செமீ.
2. கர்ணம் 5·4 செமீ; பக்கம் 3·2 செமீ.
3. கர்ணம் 7 செமீ; கோணத்தின் அளவு 35°.
4. கர்ணம் 5·8 செமீ; கோணத்தின் அளவு 48°.

7 - 5 நாற்கரம் வரைதல்

நினைவுபடுத்திக் கொள்க :

(அ) நாற்கரம் வரைய 5 அளவுகள் தேவை.

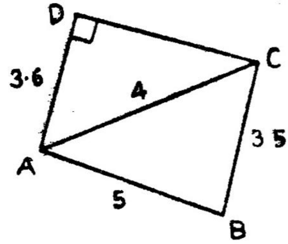
அவற்றில் 3 அளவுகளைக் கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரைக. 3 உச்சிகள் கிடைக்கும். மீதியுள்ள 2 அளவுகளைக் கொண்டு நான்காம் உச்சியினைக் காண்க.

(ஆ) அரை வட்டக் கோணம் செங்கோணமாகும்.

இப்பாடத்தில் ஒரு கோணம் செங்கோணமாகவுள்ள நாற்கரம் வரைய அறிவோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$AB = 5$ செமீ ; $BC = 3 \cdot 5$ செமீ ; $CA = 4$ செமீ ; $AD = 3 \cdot 6$ செமீ ; $m\angle D = 90°$ உள்ளவாறு நாற்கரம் $ABCD$ஐ வரைக.



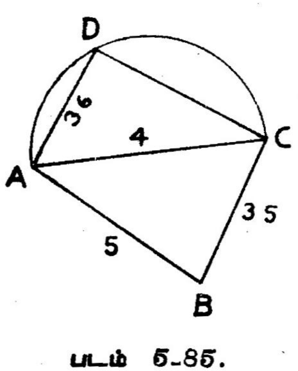
படம் 5-84.

உதவிப் படத்திலிருந்து அறிவது :

(1) $\triangle ABC$ வரைக.

(2) $\overline{AC}$ ஐ விட்டமாகக் கொண்டு அரை வட்டம் வரைக.

(3) $AD = 3 \cdot 6$ செமீ உள்ள வாறு D-ஐ வட்டத்தில் காண்க.



படம் 5-85.

பயிற்சி 7 - 5

கீழ்க்கண்ட அளவுகளுக்கு நாற்கரம் $ABCD$-ஐ அமைக்க.

1. $AB = 6$ செமீ ; $BC = 4$ செமீ ; $CA = 3{\cdot}3$ செமீ ; $AD = 2{\cdot}8$ செமீ ; $m\angle D = 90°$.

2. $AB = 6$ செமீ ; $m\angle BAC = 40°$; $m\angle ABC = 60°$; $CD = 3$ செமீ ; $m\angle D = 90°$.

3. $AD = 5$ செமீ ; $m\angle DAC = 45°$; $m\angle ADC = 60°$; $m\angle B = 90°$; $AB = 3{\cdot}5$ செமீ.

4. $m\angle A = 90°$; $m\angle C = 90°$; $BD = 6$ செமீ ; $DC = 3{\cdot}5$ செமீ ; $BA = 3$ செமீ.

7 - 6 வட்ட நாற்கரம் வரைதல்

பயிற்சி 7-5 இல் 4 ஆம் கணக்கில் வரையப்பட்ட நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாக அமைந்ததைக் காண்க.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் மையக் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென்றும், அப் புள்ளி, முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் எனவும் கற்றோம். ஒரு முக்கோணத்திற்கு ஒரேயொரு சுற்று வட்டமுள்ளதால், மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டமே செல்லும் என அறியலாம்.

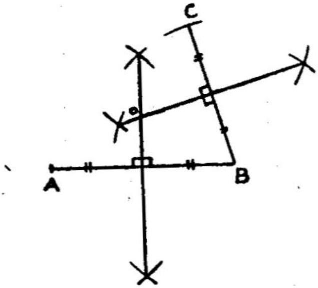
எனவே ஒரு வட்ட நாற்கரம் வரைய, முதலில் மூன்று உச்சிகளைக்கண்டு அவ்வுச்சிகளாலான முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் வரையவும். அந்த வட்டத்தில் நான்காம் உச்சியைக் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு :

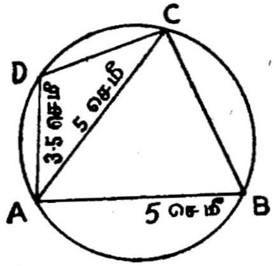
$AB = 5$ செமீ ; $BC = 4$ செமீ ; $CA = 5$ செமீ ; $AD = 3{\cdot}5$ செமீ அளவுகளுள்ள $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரம் வரைக.

(1) $\triangle ABC$-ஐ வரைக.

(2) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ க்கு மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டும் புள்ளி O என்க.



படம் 5-86.



படம் 5-87.

(3) O-ஐ மையமாகவும், $\overline{OA}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக.

(4) $AD = 3{\cdot}5$ செமீ உள்ளவாறு வட்டத்தில் D-ஐக் குறிக்க. $ABCD$ வேண்டிய நாற்கரம்.

பயிற்சி 7-6

கீழ்க்கண்ட அளவுகளுக்கு $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரம் வரைக.

1. $AB = 4{\cdot}8$ செமீ ; $m\angle BAC = 48°$; $m\angle BCA = 60°$; $m\angle ABD = 35°$.

2. $AB = 6{\cdot}4$ செமீ ; $m\angle BAC = 65°$; $AC = 5$ செமீ ; $AD = 3{\cdot}6$ செமீ.

3. $AB = 7{\cdot}2$ செமீ ; $m\angle ABD = 40°$; $m\angle BAD = 100°$; $BC = 4$ செமீ.

4. $AC = 7$ செமீ ; $AD = 4$ செமீ ; $m\angle CAD = 48°$; $AB = 4{\cdot}2$ செமீ.

கணித மேதைகளின் வாழ்க்கைக் குறிப்புகள்

டெகார்டே

கனவான், போர்வீரன், கணித மேதை என்று அழைக்கப் படும் ரெனி டெகார்டேயைப் பற்றி நீங்கள் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். அவர் கணிதத்திற்கு மிகப்பெரும் தொண்டாற்றினார். நாம் இன்று பயன்படுத்தும் வரைபடங்களின் தந்தை டெகார்டே ஆகும்.

இவர் 1596ஆம் ஆண்டு மார்ச் திங்கள் 31ஆம் நாள் பிரான்சு நாட்டில் லாஹே என்ற சிற்றூரில் நடுத்தரக் குடும்பம் ஒன்றில் பிறந்தார். இளம் வயதில் நல்ல உடற்கட்டு இல்லாமல் இருந்ததால் லாப்லாஸ் பள்ளி ஆசிரியர் 'சார்லட்' இவரை ஆதரவுடனும், அரவணைப்புடனும் நடத்திப் பள்ளியில் பயில உதவினார். படிக்கின்ற காலத்தில் காலை நேரங்களில் மணிக் கணக்காக ஆழ்ந்த சிந்தனையில் ஈடுபடும் வழக்கம் உடையவர் டெகார்டே.

பதினெட்டாம் வயதில் போர் வீரராகச் சேர்ந்தார். பல ஆண்டுகள் போர் வீரராகக் கழித்த பிறகு தத்துவ விசாரணையில் ஈடுபட்டார். பின் பல காலம் ஹாலந்து நாட்டில் தங்கிய இவர் தத்துவ விசாரணையுடன் கணிதம் பற்றியும் ஆராய்ந்து வந்தார்.

கணித வளர்ச்சிக்கு இவர் ஆற்றிய பணி போற்றற்குரியது. நாம் இன்று பயன்படுத்தும் வரைபடங்களுக்கும், முக்கியமாக ஆயத்தொலைவு கணிதத்திற்கும் தந்தை இவராவார். வாழ்க்கை விவரங்களின் அடிப்படையில் எழுந்தது வரைபடங்கள். ஒரு தெருவில் ஒரு வீட்டைக் குறிக்கவேண்டுமானால், தெரு கிழக்கு மேற்காக உள்ளதா அல்லது தெற்கு வடக்காக உள்ளதா என முதலில் கவனித்துக் குறிக்கிறோம். பின்னர் அதில் வீட்டு எண் குறிக்கும்பொழுது வரைபடம் வரையும் முறையைப் பயன்படுத்து கிறோம். இந்த அடிப்படையில் புள்ளிகளைக் குறிக்க இரு விவரங்கள் தேவை என்பதைக் கண்டு, இன்று நாம் பயன் படுத்தும் ஆயத்தொலைவு கணிதத்திற்கு அவர் வித்திட்டார். வரைபடம் மூலம் சமன்பாடுகள், அதன் தீர்வுகள் இவற்றிற்கு வழிகோலியவரும் டெகார்டே அவர்களே.

இவர் காலத்தில் வாழ்ந்த கணிதமேதைகள் ஃபெர்மேட் பாஸ்கல் ஆகியோராவர்.

இராமானுஜன்

இந்தியா கணித வளர்ச்சியில் முக்கியமான பங்கு உடையது. பூச்சியத்தின் கண்டுபிடிப்பும் அதனால் தசம எண்முறை உருவான பெருமையும் இந்தியாவைச் சாரும். இந்தியக் கணித மேதைகளில் ஆரியபட்டர், பாஸ்கரா போன்றவர்கள் குறிப்பிடத் தக்கவர்கள் என்பதை முன்னரே அறிந்திருப்பீர்கள்.

18ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் பிறந்து 32 ஆண்டுகளே வாழ்ந்து கணித உலகில் புகழ்பெற்ற இந்தியக் கணிதமேதை இராமானுஜனைப் பற்றியும் நீங்கள் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். அவர் தமிழ்நாட்டைச் சேர்ந்தவர் என்பது நம்மெல்லோருக்கும் பெருமைதரக் கூடியது.

இராமானுஜன் 1887ஆம் ஆண்டு டிசம்பர் 22ஆம் நாள் ஈரோட்டில் பிறந்தார். அவ்வளவாக வசதியில்லாத குடும்பத்தில் பிறந்தாலும் அவர் தொடக்கக் கல்வி நிலையிலிருந்தே கணிதத்தில் மிகவும் ஆர்வம் கொண்டவராக இருந்தார். உயர்நிலைப் பள்ளியில் படிக்கும்பொழுதே கல்லூரிக் கணக்குகளையும் எளிதில் தீர்க்கக்கூடிய ஆற்றல் படைத்தவராயும் மனத்திலேயே கணக்குகளைச் செய்யும் திறமையுடையவராயும் இருந்தார். இவர் கும்பகோணம் கலைக் கல்லூரியில் வறுமையின் காரணமாகத் தொடர்ந்து படிக்க இயலவில்லை. நண்பர்களின் உதவியால் சிறிது காலம் சென்னைக் கணக்காயர் அலுவலகத்திலும், சென்னைத் துறைமுகக் கழகத்திலும் பணியாற்றினார். எங்கு வேலை செய்தாலும் கணித ஆராய்ச்சியைத் தொடர்ந்தார்.

இவருடைய கணிதத் திறமையைக் கண்டு சென்னைப் பல்கலைக் கழகம் இவருக்கு உதவித்தொகை அளித்து உதவியது. இவர் தன்னுடைய கட்டுரைகளை கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக் கழகத்திற்கு அனுப்பினார். இவருடைய திறமையை பேராசிரியர் ஹார்டி பாராட்டினார். அவருடைய உதவியாலும் நண்பர்களின் உதவியாலும் 1914ஆம் ஆண்டு இங்கிலாந்து நாட்டிற்குச் சென்றார். அங்கு தொடர்ந்து கணித ஆராய்ச்சியில் ஈடுபட்டுப் பட்டங்களும் பெற்றார். உடல் நலக்குறைவால் 1919ஆம் ஆண்டு இந்தியாவிற்குத் திரும்பி நோய் வாய்ப்பட்டு 1920ஆம் ஆண்டு புகழுடல் எய்தினார்.

இவருக்கு எண்களோடு விளையாடுவது மிகவும் விருப்பமான செயல். மாயச் சதுரங்கள் அமைத்தலிலும் விருப்பம் கொண்டவர். இவரை எண்களின் நண்பன் எனக் கூறுவர். ஒரு முறை

பேராசிரியர் ஹார்டி தாம் வந்த காரின் எண் அவ்வளவு சிறப்பான எண் அல்ல எனக் கூற இராமானுஜன் உடனே அதை மறுத்து அது மிகச் சிறந்த எண் எனக் குறிப்பிட்டார். அக்காரின் எண் 1729.

இரண்டு எண்களின் கனங்களின் கூடுதலாக, இருவகையாகக் கூறக்கூடிய எண்களுள் மிகச் சிறிய எண் 1729 என விளக்கினார்.

$$1729 = (12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3) \text{ என்றார்.}$$

32 ஆண்டுகளே வாழ்ந்தாலும் கணிதத்தில் அவருக்கு இருந்த ஆர்வத்தாலும் விடாமுயற்சியாலும் தனக்கும் தன்னுடைய நாட்டிற்கும் பெருமை தேடித்தந்தவர் இராமானுஜன்.

இராமானுஜனின் பிறந்த நாளை அடிப்படையாகக்கொண்ட மாயச் சதுரத்தைக் கீழே காணுங்கள்.

22	12	18	87
21	84	32	2
92	16	7	24
4	27	82	26

முதல் வரிசையில் அவர் பிறந்த தேதி உள்ளதைக் கவனியுங்கள். ஒவ்வொரு நிரல், நிரை, மூலைவிட்டம் இவற்றிலுள்ள எண்களின் கூடுதல் 139 ஆக உள்ளதையும் கவனிக்கவும்.

6. வரைபடங்கள்

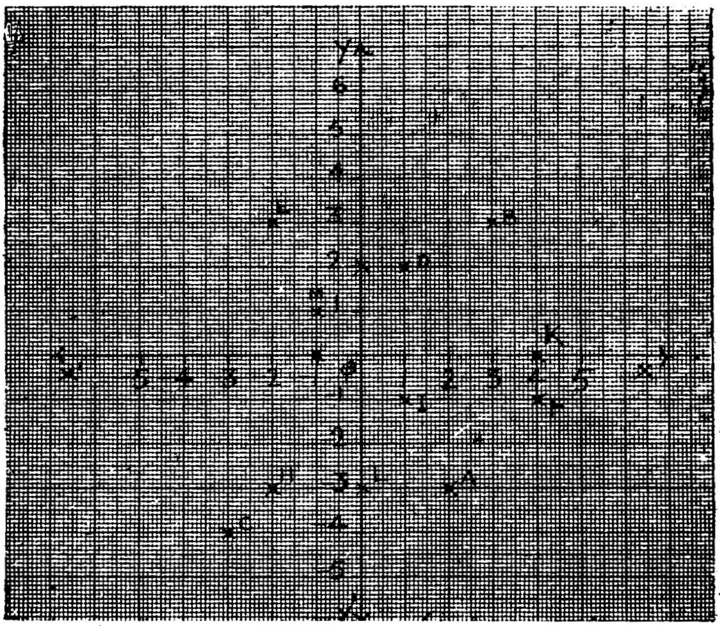
1 - 1 வரைபடத்தில் புள்ளிகள்

நான்கு காற்பகுதிகள் கொண்ட வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும், படிக்கவும் முன்வகுப்பில் கற்றுக்கொண்டவற்றினை நினைவு கூர்வோம். இவ் வரைபடங்களில், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவுள்ள இருகோடுகள் முறையே X-அச்சு, Y-அச்சு என அழைக்கப்படுகின்றன வென்றும், ஒவ்வொரு புள்ளியையும் அதன் X-அச்சு, Y-அச்சுத் தூரங்களின் மூலம் ஒரு வரிசைச் சோடி யெண்ணால் குறிக்கலாமென்றும் அறிந்தோம். (2, −3) என்ற புள்ளி X அச்சில் வலப்புறத்தில் 2 அலகு தூரம் தள்ளி, Y-அச்சில் கீழ்நோக்கி 3 அலகு தூரத்தில் உள்ளது. இப்புள்ளி நான்காம் காற் பகுதியில் அமைந்துள்ளது.

பயிற்சி 1 - 1

1. கீழேயுள்ள வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி களின் அச்சுத் தூரங்களை வரிசைச் சோடி எண்களாகக் கூறுக.

எடுத்துக்காட்டு : A (2, −3)



படம் 6-1.

2. மேற்கண்ட வரைபடத்தில் $P(2, 2)$, $Q(-1, 4)$, $R(3, -1)$, $S(-2, -1)$, $T(3, 1)$, $V(-2, -4)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்க.

3. X அச்சில் 1 செமீ = 2 அலகு, Y அச்சில் 1 செமீ = 5 அலகு என்ற அளவுத்திட்டத்தைக்கொண்டு ஒரு கார்டீசியன் தளத்தை அமைக்க அதில் கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்க.

$(-4, 20)$, $(8, 10)$, $(-6, -15)$, $(6, 15)$, $(-8, -10)$, $(4, -20)$, $(10, -25)$, $(-2, 10)$, $(8, 0)$, $(0, -10)$, $(-4, 0)$, $(0, 20)$

4. இரு அச்சுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி Oவின் அச்சுத் தூரங்கள் என்ன ?

விடைகள்

1. $B(3, 3)$; $C(-3, -4)$; $D(1, 2)$; $E(-2, 3)$; $F(4, -1)$; $G(-1, 0)$; $H(-2, -3)$; $I(1, -1)$; $J(0, 2)$; $K(4, 0)$; $L(0, -3)$; $M(=1, 1)$.

4. $(0, 0)$

1 - 2 $y = mx$ என்பதன் வரைபடம்

எட்டாம் வகுப்பில் $y = mx$ என்பதன் வரைபடம் வரையக் கற்றிருப்பீர்கள். படம் 6-2 இல் $y = 3x$ என்பதன் வரைபடம் வரையப்பட்டுள்ளது. அதனை உற்று நோக்கிக் கீழ்க்கண்ட கேள்விகளுக்கு விடையளிக்கவும்.

1. A இன் X அச்சுத்தூரம் என்ன ?

2 A இன் Y அச்சுத்தூரம் என்ன ?

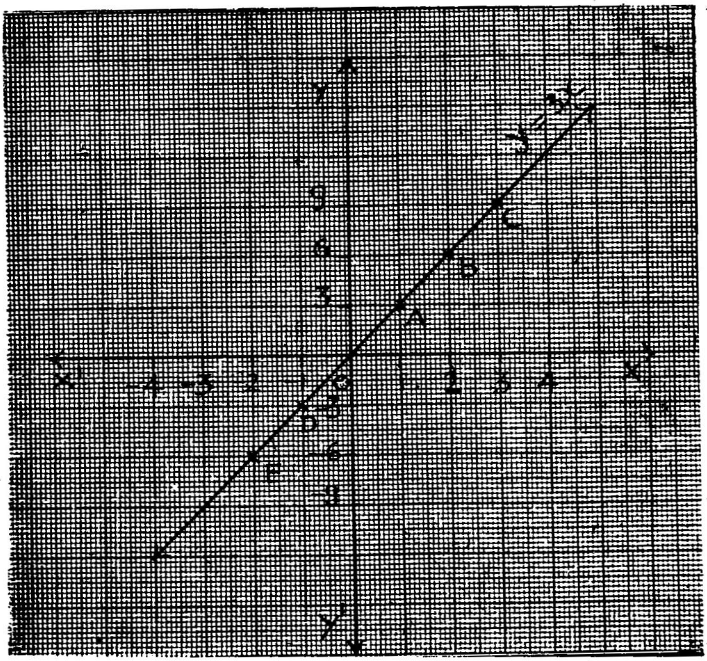
3. $\dfrac{A \text{ இன் } Y \text{ அச்சுத்தூரம்}}{A \text{ இன் } X \text{ அச்சுத்தூரம்}} =$

4. இது போலவே B இன் அச்சுத்தூரங்களைக் காணவும்.

$\dfrac{B \text{ இன் } Y \text{ அச்சுத்தூரம்}}{B \text{ இன் } X \text{ அச்சுத்தூரம்}} = ?$

5. மேற்கொண்டு, C, D, E ஆகிய புள்ளிகளின் X, Y அச்சுத் தூரங்களைக் காண்க. அவற்றின் Y அச்சுத் தூரங்களுக்கும் X அச்சுத் தூரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதங்களைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

6. மூலப் புள்ளியின் வழியே வரைபடம் செல்கிறதா?



படம் 6-2.

இச்சோதனையினின்று நாம் அறிவது :

(1) $y = 3x$ என்பதன் வரைபடம் ஒரு கோடு.

(2) மூலப்புள்ளி வரைபடத்தின் மீது அமைகின்றது.

(3) வரைபடத்திலுள்ள எப்புள்ளியின் Y அச்சுத்தூரமும், அதன் X அச்சுத்தூரத்தைப் போல் மூன்று மடங்கு.

$y = 3x$ என்ற வரைபடத்தில் 3 என்பது அக்கோட்டின் சாய்வு எனப்படும்.

$y = 2x$ என்ற வரைபடத்தின் சாய்வு என்னவென்று ஊகிக்கவும். கோட்டினை வரைந்து சரிபார்க்க.

$y = mx$ என்ற வரைபடத்தின் சாய்வு 'm' ஆகும்.

பயிற்சி 1 - 2

1. $y = -3x$ என்பதன் வரைபடத்தினை வரைக.

(அ) எந்தக்காற் பகுதியின் வழியே வரைபடம் செல்கின்றது?

(ஆ) வரைபடத்தின் மீது 5 புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

(இ) $\frac{Y \text{ அச்சுத்தூரம்}}{X \text{ அச்சுத்தூரம்}}$ விகிதம் காண்க

(ஈ) வரைபடத்தின் சாய்வு என்ன ?

(உ) X அச்சுத்தூரம் அதிகரித்தால் Y அச்சுத்தூரத்தின் மதிப்பு கூடுகிறதா அல்லது குறைகிறதா.?

2. (அ) 4 (ஆ) -5 (இ) $2{\cdot}5$ (ஈ) $\frac{3}{4}$ முறையே சாய்வுகளாகக் கொண்ட மூலப்புள்ளி வழியே செல்லும் வரை படங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. $y = 5x$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடி எண்களை எழுதவும்.

இரண்டாம் உறுப்புகளின் Y அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்கும், முதல் உறுப்புகளின் X அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்குமிடையேயுள்ள விகிதத்தினைக் காண்க. இதுபோல, வேறு 4 புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடி எண்களைக் கண்டு, இரண்டிரண்டு புள்ளிகளாக எடுத்து வித்தியாசங்களின் விகிதங்களைக் காண்க. என்ன ஊகிக்கலாம் எனக் கூறுக.

விடைகள்

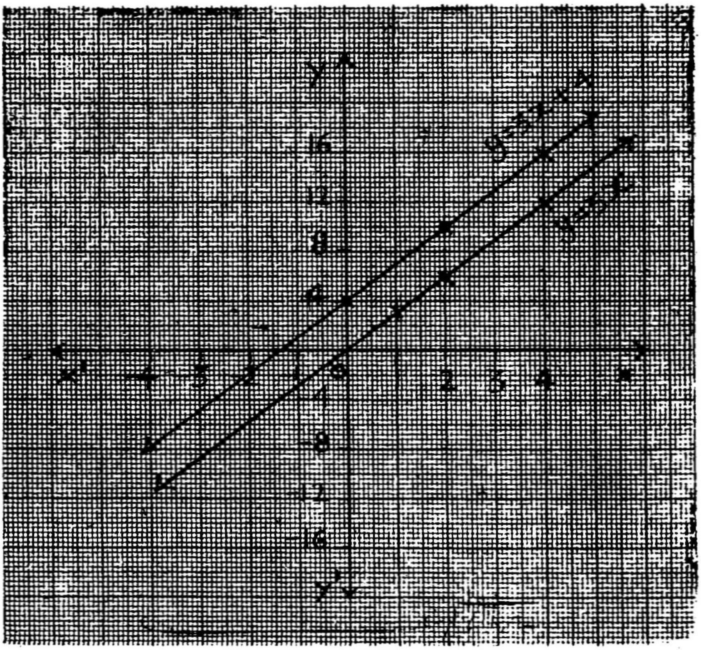
2. (அ) $y = 4x$ (ஆ) $y = -5x$
(இ) $y = 2{\cdot}5x$ (ஈ) $y = \frac{3}{4}x$

1 - 3 $y = mx + c$ என்பதன் வரைபடம்

X அச்சில் 1 செமீ = 1 அலகு எனவும், Y அச்சில் 1 செமீ = 4 அலகு எனவும் கொண்டு $y = 3x$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

$y = 3x + 4$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைய முற்படுவோம்.

x	0	2	4
$y = 3x - 4$	4	0	18



படம் 6-3.

(அ) 1. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை நிரப்புக:

x	0	1	2	3	4
y	4		10		16
$y—4$	0				

2. x இன் அடுத்தடுத்த மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தமான y இன் மதிப்பு ஏதாவது கூறமுடியுமா ?

3. $x = 5$ ஆனால், y இன் மதிப்பு என்னவென்று ஊகிக்க முடியுமா ?

4. y இன் மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசங்களைக் காண்க.

5. $y = 3x$ என்பதன் வரைபடத்தையும், $y = 3x + 4$ என்பதன் வரைபடத்தையும் ஒப்பு நோக்குக. என்னென்ன ஊகங்களைச் செய்யலாம் ?

6. $\frac{y-4}{x}$ என்ற விகிதங்களைக் காண்க.

மேற்கண்டவற்றினின்று நீவிர் அறியக் கூடியவை :

(i) $y = 3x + 4$ என்பது $y = 3x$க்கு இணையான கோடு

(ii) இரு கோடுகளும் சமசாய்வுகள் கொண்டவை.

(iii) $y = 3x + 4$ என்பதன் வரைபடம் Y அச்சை $(0, 4)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

(iv) $y = 3x + 4$ என்பதில் 3 என்பது சாய்வு, 4 என்பது Y அச்சின் மீது கோட்டின் வெட்டு அல்லது y வெட்டு எனக் கூறப்படும்.

(ஆ) $y = 3x + 4$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைய,

1. Y அச்சின்மீது $(0, 4)$ என்ற புள்ளியினைக் குறிக்க.

2. அப்புள்ளியினின்று X அச்சிற்கு இணையாக 1 அச்சுத் தூரம் வலப்புறம் நகர்ந்து Y அச்சுக்கு இணையாக 3 அச்சுத் தூரத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க.

3. மேற்கண்ட இரு புள்ளிகளையும் சேர்த்து இருபுறமும் நீட்டுக.

(இ) $y = 3x - 5$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைந்து அதன் சாய்வு, வெட்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 1 - 3

1. கீழ்க்கண்ட கோடுகளின் சாய்வு, Y அச்சின் மீதான வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் கூறுக.

(அ) $y = 2x + 5$ (ஆ) $y = 4x - 3$

(இ) $y = 3x - 4$ (ஈ) $y = 8 - 5x$

2. மேற்கண்ட கோடுகளின் வரைபடங்களை வரைக.

3. $y = 5x - 2$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் 4 புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடி எண்களைக் காண்க. இரு இரு புள்ளிகளாக எடுத்து, அவற்றின் இரண்டாம் உறுப்புகளின் வித்தியாசத்திற்கும், முதல் உறுப்புகளின் வித்தியாசத்திற்கும் உள்ள விகிதங்களைக் காண்க. என்ன ஊகிக்கலாம் எனக் கூறுக.

4. ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றால், $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ எதைக் குறிக்கும் ?

விடைகள்

1. (அ) சாய்வு $= 2$
Y அச்சின் மீதான
வெட்டுத் துண்டு 5

(ஆ) சாய்வு $= 4$
Y அச்சின் மீதான
வெட்டுத் துண்டு -3

(இ) சாய்வு $= 3$
Y அச்சின் மீதான
வெட்டுத் துண்டு -4

(ஈ) சாய்வு $= -5$
Y அச்சின் மீதான
வெட்டுத் துண்டு 8

1 - 4 கோட்டு வரைபடத்தினைப் படித்தல்

செய்தித்தாள்களைப் பார்த்தோமானால், அடிக்கடி கோட்டு வரைபடங்களைக் காண்போம். விலைவாசி, திட்டச் செலவு, பண்ட உற்பத்தி முதலியவை ஒரு கோட்டுப் படங்களாகவோ அல்லது முறிந்த பல கோட்டுப் படங்களாகவோ விவரிக்கப் பட்டிருக்கும். அவற்றைப் படித்தறிதல் எப்படி என்பதனைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டுவது மிக அவசியம். ஒரு கோட்டுப் படம் எதைச் சொல்கிறது என்பதனை அறிய முற்படுவோம்.

(அ) மிகைச் சாய்வு, குறைச் சாய்வு

$y = mx + c$ என்பதன் வரைபடத்தில் m என்பது கோட்டின் சாய்வு என்றும், c என்பது அக்கோடு Y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் Y அச்சுத் தூரம் என்றும் அறிந்தோம். m மிகை எண்ணானால் $y = mx + c$ ஓர் அதிகரிக்கும் சார்பு என்றும், m குறை எண்ணானால் $y = mx + c$ ஒரு குறையும் சார்பு என்றும் முன்னர் கண்டோம்.

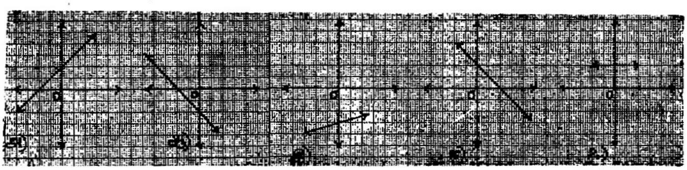
அதாவது, x இன் மதிப்பு அதிகரிக்க y இன் மதிப்பும் அதிகரித்தால், 'm' மிகை எண்ணாகும். அக்கோடு *மிகைச் சாய்வு* கொண்டது என்போம்.

xஇன் மதிப்பு அதிகரிக்க yஇன் மதிப்பு குறைந்தால், 'm' குறை எண்ணாகும். அக்கோடு *குறைச் சாய்வு* கொண்டது என்போம்.

எனவே, ஒரு கோட்டுப் படம் கொடுக்கப்பட்டால், இடமிருந்து வலம் செல்ல, கோடு கீழிருந்து மேல்நோக்கிச் சென்றால் அது அதிகரிக்கும் சார்பினைக் குறிக்கும். அதாவது 'm' மிகை எண்ணாகும்.

மாறாக, ஒரு கோட்டுப் படத்தில், இடமிலிருந்து வலம் செல்ல, கோடு மேலிருந்து கீழ்நோக்கிச் சென்றால் அது குறையும் சார்பினைக் குறிக்கும். அதாவது, 'm' குறை எண்ணாகும்.

கீழ்க்கண்ட கோட்டுப் படங்களில் எவை அதிகரிக்கும், எவை குறையும் சார்புகளெனக் கூறுக.



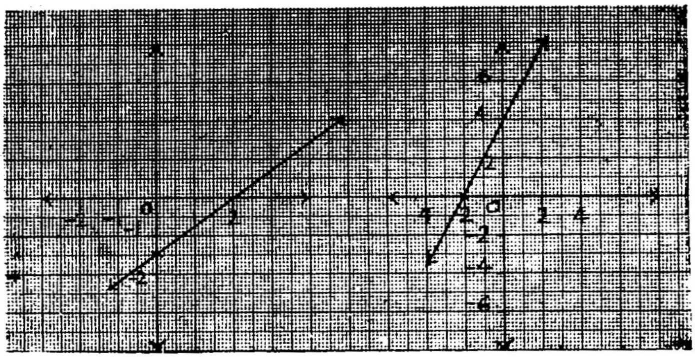
படம் 6-4.

படம் 6-4 (உ)இல் y இன் மதிப்பு அதிகரிக்கவோ, குறையவோ இல்லை எனக் கொள்கிறோம். அது ஒரு மாறாச் சார்பு. அதன் தன்மை என்ன எனக் காண்க.

(ஆ) கோட்டின் *y* வெட்டு காணல்

$y = mx + c$ என்ற வரைபடத்தில் *c* என்பது *y* அச்சின்மீது கோடு உண்டாக்கும் வெட்டு என முன்னர் கண்டோம். ஒரு கோடு *y* அச்சை எங்கு வெட்டுகிறது எனக் கண்டோமானால் அது சமன்பாட்டின் *c* ஐக் கண்டதாகும்.

கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களில் *y* வெட்டுகளைக் காண்க.



படம் 6-5.

(இ) கோட்டின் சாய்வினைக் காணல்

$y = mx + c$ என்பதன் வரைபடத்தில் (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய இரு புள்ளிகள் அமைந்தனவென்றால் $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ என முன் பயிற்சியில் கண்டோம்.

ஒரு கோட்டு வரைபடத்தின்மீது (5, 2), (3, 4) என்பன இரு புள்ளிகளானால், கோட்டின் சாய்வு $m = \dfrac{4-2}{3-5} = -1$

ஒரு கோட்டு வரைபடத்தின்மீது (0, 3), (1, 5) என்பன இரு புள்ளிகளானால் கோட்டின் சாய்வு $m = \dfrac{5-3}{1-0} = 2$

$x = 0$ ஆனால், Y அச்சுத் தூரம், கோடு Y அச்சின்மீது உண்டாகும் வெட்டு எனக் கண்டோம்

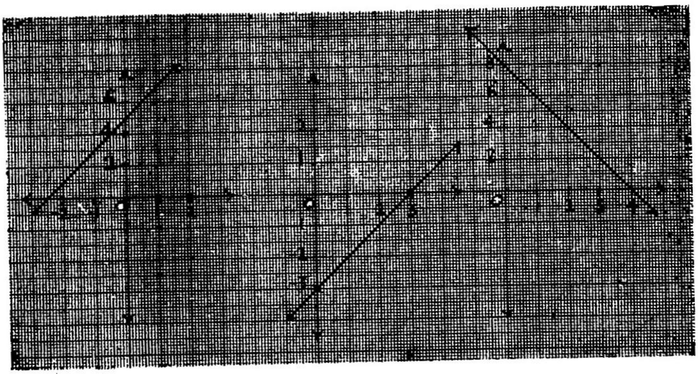
கோட்டின் சாய்வு, X அச்சுத் தூரங்கள் 0, 1-க்குப் பொருத்தமான Y அச்சுத் தூரங்களின் வித்தியாசம் எனக் காணலாம்.

மற்றொரு கோட்டின்மீதுள்ள புள்ளிகள் $(0, -2)$, $(1, 3)$ என்றால் அதன் சாய்வு $3 - (-2) = 5$. சரி பார்க்கவும்.

(ஈ) கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல்

இதுகாறும் ஒரு வரைபடம் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் சாய்வு m, y வெட்டு c ஆகியவற்றினைக் காணும் முறையினை அறிந்தோம். ஒரு கோட்டின் சாய்வு m, y வெட்டு c ஆனால், அதன் சமன்பாடு $y = mx + c$ என அறிவோம்.

கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



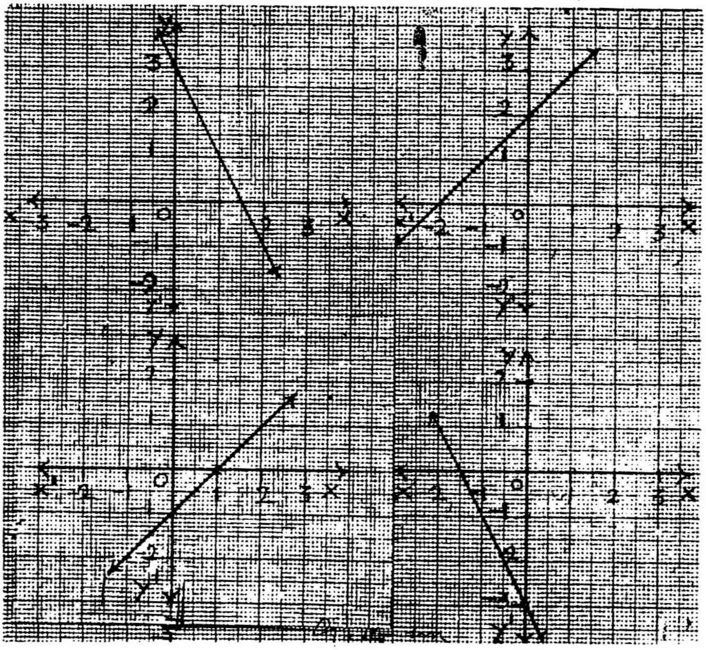
படம் 6-6.

விடைகள்

$y = 2x + 5$, $y = x - 3$, $y = -2x + 9$

பயிற்சி 1 - 4

1. கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க



படம் 6-7.

2. மேற்கண்ட கோடுகளில் உள்ள கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடி எண்களைக் குறிக்க.

கோடு (அ) (1, ...), (2, ...), (..., 5), (..., 2)

கோடு (ஆ) (2, ...), (, 7), (..., −2), (.., 0)

கோடு (இ) (..., 3), (−3, .), (3, ...), (..., −3)

கோடு (ஈ) (..., 1), (2,), (..., −9), (−3, ...)

3. கோடு (ஈ) இல் உள்ள ஒரு புள்ளி (a, a) ஆனால் a இன் மதிப்பென்ன ?

விடைகள்

1. (அ) $y = 3 - 2x$ (ஆ) $y = x + 2$
(இ) $y = x - 1$ (ஈ) $y = -2x - 3$

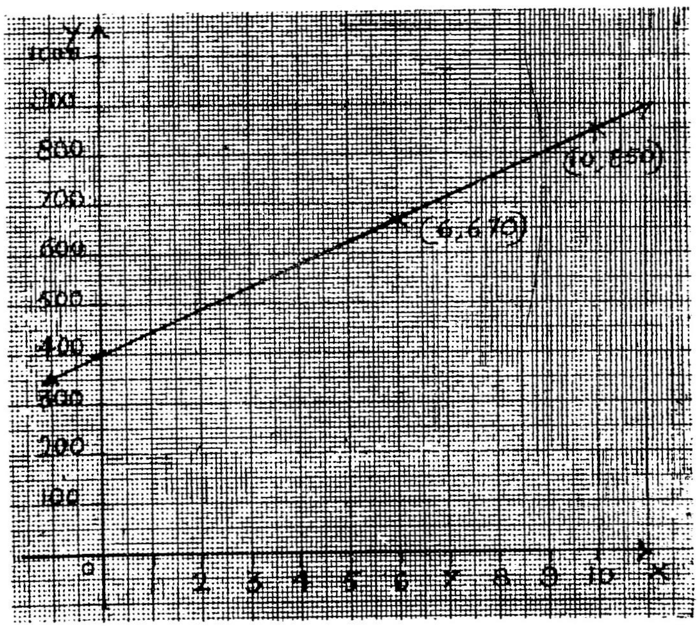
1 - 5 $y = mx + c$ என்ற வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தல்

(அ) ஒருவர் ஒரு கிராமபோனை ரூ. 500-க்கும் சில இசைத் தட்டுகளை ஒன்று ரூ. 50 வீதமும் வாங்குவதாகக் கொள்வோம். இதனை $y = 500 + 50x$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம். மொத்த விலை, தட்டுகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது.

(i) 500 எதனைக் குறிக்கிறது ?

(ii) 50 எதனைக் குறிக்கிறது ?

கிராமபோனின் விலை ரூ. 500. அது கோட்டின் y வெட்டு. இசைத் தட்டு ஒன்றின் விலை ரூ. 50. அது கோட்டின் சாய்வு. இச் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தை வரைந்து அதன் மூலம் கிராமபோனும் 10 இசைத் தட்டுகளும் சேர்ந்து என்ன விலை எனக் காண்க.



படம் 6-8.

(ஆ) ஒரு கிராமபோனும் 6 இசைத் தட்டுகளும் சேர்ந்து ரூ. 670 என்றும், ஒரு கிராமபோனும் 10 இசைத் தட்டுகளும் சேர்ந்து ரூ. 850 என்றும் இருந்தால் கிராமபோனின் விலை என்ன எனக் காண்போமா ?

(i) கட்டக் காகிதத்தில் (6, 670), (10, 850) என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்க. (படம் 6-8 காண்க).

(ii) அவற்றைச் சேர்த்து நீட்டுக.

(iii) அக்கோடு Y அச்சை வெட்டும் புள்ளி யாது? அது எதனைக் குறிக்கிறது ?

(iv) ஓர் இசைத் தட்டின் விலையை எவ்வாறு வரைபடத்தினின்று காணலாம்? கோட்டின் சாய்வு ஓர் இசைத் தட்டின் விலையைக் குறிக்கும்.

$$\text{சாய்வு } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{850 - 670}{10 - 6} = 45.$$

பயிற்சி 1 - 5

1. தனி வட்டிக்கு விடப்பட்ட ஓர் அசல் 3 ஆண்டுகளில் ரூ. 1300-யும், 5 ஆண்டுகளில் ரூ. 1500-யும் கூடுதல்களானால், அசல் என்ன ? ஆண்டு வட்டி என்ன ?

2. இரு நண்பர்கள் ஒரே மாதிரி நாடாப் பதிவுக் கருவிகள் ஆளுக்கொன்று வாங்கினர். முதலாமவர் 10 நாடாக்களும், இரண்டாமவர் 20 நாடாக்களும் வாங்கினர். கருவியும், நாடாக்களும் சேர்ந்து அவர்கள் முறையே ரூ. 1600, ரூ. 2100க்கு வாங்கினார்களானால், நாடாப் பதிவு கருவியின் விலை என்ன ? ஒரு நாடாவின் விலை என்ன ?

3. சீரான வேகத்தில் பயணம் செய்யும் ஒருவர் A என்ற இடத்திலிருந்து 2 மணி நேரப் பயணத்திற்குப் பின் 120 கிமீ தொலைவிலும், 4 மணி நேரப் பயணத்திற்குப் பின் 40 கிமீ தொலைவிலும் இருந்தால், பயணம் புறப்பட்ட சமயம் அவர் A யிலிருந்து எத்தனை தொலைவில் இருந்திருப்பார்? அவர் பயண வேகம் என்ன ?

விடைகள்

1. ரூ. 1000, ரூ. 100 2. ரூ. 1100, ரூ. 50

3. 40 கிமீ / மணி, 200 கிமீ.

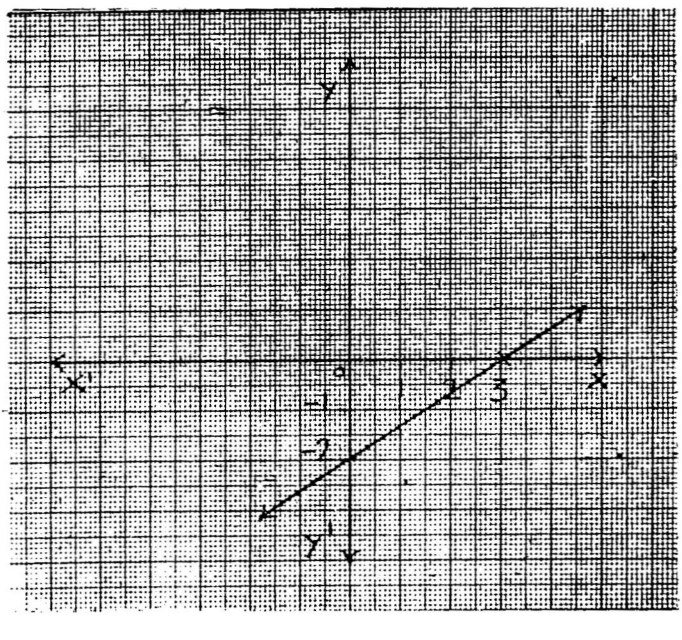
2 - 1 $ax + by + c = 0$ என்பதன் வரைபடம்

$2x - 3y - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடத்தினை வரைய முற்படுவோம். x, yஇல் ஒரு படியுள்ள சமன்பாடாதலால், இது ஒரு கோட்டுப் படம் என ஊகிக்கலாம். ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள் தெரிந்தால், அக்கோட்டினை வரைய முடியும் என நாம் அறிவோம்.

$2x-3y-6=0$ என்பதனை $y = mx + c$ என்ற அமைப்பிற்கு மாற்றுவோம்.

$$-3y = 6 - 2x$$
$$3y = 2x - 6$$
$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

இதனின்று கோட்டின் சாய்வு $\frac{2}{3}$ என்றும், y வெட்டு -2 என்றும் அறியலாம்.



படம் 6-9.

$x = 0$ ஆனால், $y = -2$. எனவே $(0, -2)$ கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

$x = 3$ ஆனால், $y = 0$. எனவே $(3, 0)$ கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளி.

இப்புள்ளிகளைக் குறித்து,

$y = \frac{2}{3}x - 2$ அல்லது,

$2x - 3y - 6 = 0$ என்பதன்

வரைபடத்தை வரையலாம்.

இப்படத்தில், x வெட்டு 3 எனவும், y வெட்டு -2 எனவும் காண்கிறோம்.

x வெட்டு காண, சமன்பாட்டில் $y=0$ இடுக,

$2x - 0 - 6 = 0$ எனவே, $x = 3$

y வெட்டு காண, சமன்பாட்டில் $x = 0$ இடுக.

$0 - 3y - 6 = 0$, எனவே $y = -2$.

$ax + by + c = 0$ என்ற அமைப்பிலுள்ள கோட்டின் வரைபடம் வரைய, x வெட்டு, y வெட்டு ஆகியவற்றினைக் கண்டறிந்து கோட்டினை வரைவது எளிது.

$3x + 4y + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் x வெட்டு என்ன ? y வெட்டு என்ன ? கோட்டின் சாய்வு யாது ?

பயிற்சி 2 - 1

1. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக. அவற்றின் சாய்வுகளைக் காண்க.

(அ) $2x + 3y = 6$ (ஆ) $3x - 2y - 62 = 0$

(இ) $6x + 5y + 15 = 0$.

2. $ax+by + c=0$ என்பதன் சாய்வு என்ன ? y வெட்டு என்ன ? x வெட்டு என்ன ? x வெட்டு, y வெட்டு, சாய்வு ஆகியவற்றிடையே ஏதாவது தொடர்பு உண்டா என ஆய்க.

விடைகள்

1. (அ) சாய்வு $-\frac{2}{3}$ (ஆ) சாய்வு $\frac{3}{2}$ (இ) சாய்வு $-\frac{6}{5}$

2 சாய்வு $\frac{-a}{b}$, y வெட்டு $\frac{-c}{b}$, x வெட்டு $\frac{-c}{a}$

2 - 2 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ என்ற அமைப்பு

சென்ற வகுப்பில் $ax + by + c = 0$ என்பதன் x வெட்டு, y வெட்டு ஆகியவற்றைக் காண அறிந்தோம்.

$2x - 3y - 6 = 0$ என்பதன் x வெட்டு 3, y வெட்டு -2 எனக் கண்டோம்.

$2x - 3y - 6 = 0$ ஆனால், $2x - 3y = 6$

இதனை 6ஆல் வகுத்து மாற்றி அமைத்தால், $\frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = 1$ அல்லது $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வமைப்பில் x வெட்டு, y வெட்டு எவ்வாறு அமைந்துள்ளனவென நோக்குக.

$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ என்றால், x வெட்டு என்ன? y வெட்டு என்ன?

$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ என்றால், x வெட்டு என்ன? y வெட்டு என்ன?

முன் பயிற்சியில் வரைபடம் வரைந்த கோடுகளின் சமன்பாடுகளை $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற அமைப்பில் மாற்றுக.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற அமைப்பில் உள்ள கோட்டின் x வெட்டு a, y வெட்டு b என அறிகிறோம்.

இதனை சமன்பாட்டில் முறையே $y = 0$, $x = 0$ பிரதியிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.

இவற்றினின்று $ax + by + c = 0$ என்பதன் வரைபடம் வரையவும், x வெட்டு, y வெட்டு ஆகியவற்றினைக் காணவும் மாற்றுமுறை ஒன்றினை அறிகிறோம்.

$3x - 5y - 12 = 0$ ஆனால்,

$3x - 5y = 12$

அல்லது $\dfrac{3x}{12} - \dfrac{5y}{12} = 1$

அல்லது $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-2{\cdot}4} = 1$

x வெட்டு 4, y வெட்டு $-2{\cdot}4$ ஆகும்.

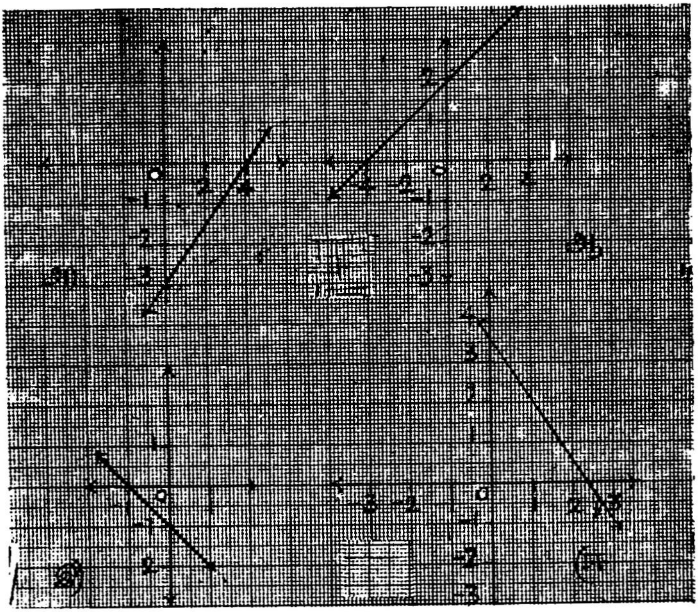
x, y வெட்டுகள் தெரிந்தால் சாய்வு $m = -\dfrac{y \text{ வெட்டு}}{x \text{ வெட்டு}}$ எனக் கண்டோமல்லவா? மேற்கண்ட கணக்கில் m கண்டு சரிபார்க்கவும்.

பயிற்சி 2 - 2

1. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ என்ற வடிவிற்கு மாற்றுக.

	சமன்பாடு	x வெட்டு	y வெட்டு	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ என்ற வடிவு
(அ)	$2x+5y=15$			
(ஆ)	$4x-y=8$			
(இ)	$2x+3y=9$			
(ஈ)	$x+y=4$			

2. அடுத்த பக்கத்திலுள்ள வரைபடங்களின் (படம் 6-10) சமன்பாடுகளை வெட்டுத் துண்டு அமைப்பில் கூறுக. பின்னர் அவற்றை $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவிற்கு மாற்றுக.



படம் 6-10.

3. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் வெட்டுத்துண்டுகளைக் கண்டு, அவற்றின் வரைபடங்களை வரைக.

(அ) $3x-6y = 12$ (ஆ) $2x+3y-9 = 0$

(இ) $4y-3x+6 = 0$ (ஈ) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$

விடைகள்

1. (அ) $\frac{x}{15/2} + \frac{y}{15/5} = 1$ (ஆ) $\frac{x}{8/4} + \frac{y}{-8} = 1$

(இ) $\frac{x}{9/2} + \frac{y}{9/3} = 1$ (ஈ) $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

2. (அ) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1;$ $3x-4y-12=0$

(ஆ) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1;$ $x-2y+4=0$

(இ) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$; $x + y + 1 = 0$

(ஈ) $\frac{x}{2.4} + \frac{y}{3.6} = 1$; $3x + 2y - 7{\cdot}2 = 0$

3. (அ) $4, -2$ (ஆ) $\frac{9}{2}, 3$

(இ) $2, -\frac{3}{2}$ (ஈ) $4, 8$

3 - 1 கோட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் (அ)

இதுகாறும், கோடுகளின் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றின் வரைபடங்களை வரையவும், வரைபடங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றினின்று கோடுகளின் சமன்பாடுகளைப் படிக்கவும் கற்றோம். இப்பொழுது, இரு கோட்டுச் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றினை வரைபடங்கள் மூலம் தீர்வு காண்பது எவ்வாறு எனக் காண்போம்.

இரு இணையற்ற கோடுகள் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென்றும், அவ்வொரு புள்ளியே இரு கோடுகளிலுமுள்ள ஒரேயொரு பொதுப் புள்ளியெனவும் அறிவோம்.

எனவே, இரு கோட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண,

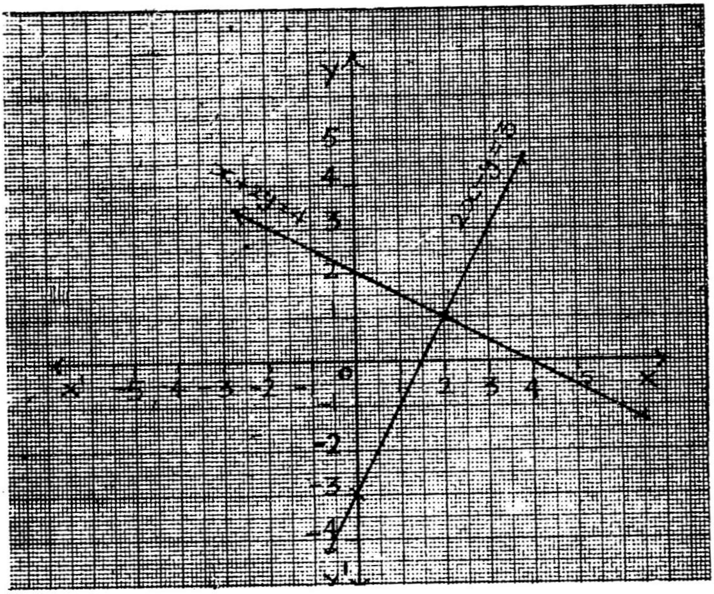
(1) அவற்றின் வரைபடங்களை வரைக

(2) அவ்வரைபடங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களைக் காண்க

அவ்வச்சுத் தூரங்களின் வரிசைச் சோடி, சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணத்தினைக் கொடுக்கும்

$2x - y = 3$; மற்றும் $x + 2y = 4$

$2x - y = 3$ என்பதன் x வெட்டு $1{\cdot}5$, y வெட்டு -3 எனக் காணலாம்.



படம் 6-11.

$x+2y=4$ என்பதன் x வெட்டு 4, y வெட்டு 2.

இவற்றின் வரைபடங்களை வரைந்து, அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி யாதெனக் காண்க. அது (2, 1) எனக் காண்கிறோம்.

எனவே, $2x-y=3$; மற்றும் $x+2y=4$ என்பவற்றின் தீர்வுக்கணம் $\{(2, 1)\}$.

பயிற்சி 3 - 1

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்களை வரைபடம் மூலம் காண்க.

(அ) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=8 \\ x+2y=5 \end{array}\right\}$ (ஆ) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-1 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \end{array}\right\}$

(இ) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$

விடைகள்

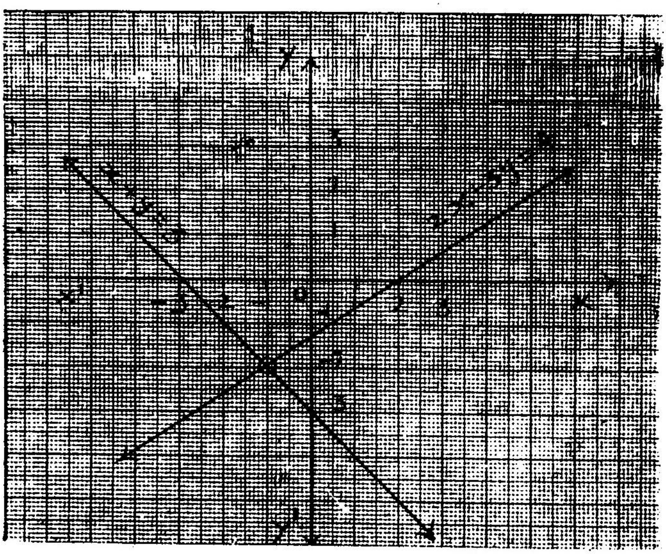
(அ) தீர்வுக் கணம் $= \left\{ \left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5} \right) \right\}$

(ஆ) தீர்வுக் கணம் $= \left\{ \left(2, \frac{3}{2} \right) \right\}$

(இ) தீர்வுக் கணம் $= \{ (2, 4) \}$

3 - 2 கோட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் (ஆ)

சென்ற வகுப்பில், கோட்டுச் சமன்பாடுகளை வரைபடம் மூலம் தீர்க்கக் கற்றுக் கொண்டீர்கள். தீர்வுக் கணம் வரைபடத்தின் முதற் காற்பகுதியில் அமைந்திருந்தன. இப்பொழுது தீர்வுக் கணம் வரைபடத்தின் பிற காற்பகுதிகளிலுள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளைக் காண்போம்.



படம் 6-12.

எடுத்துக்காட்டு :

$x + y = -3$; மற்றும் $2x - 3y = 4$

$x + y = -3$ என்பதன் x வெட்டு -3, y வெட்டு -3

$2x - 3y = 4$ என்பதன் x வெட்டு 2, y வெட்டு $-1 \cdot 3$

வரைபடங்களை வரைய, அவை வெட்டும் புள்ளி $(-1, -2)$ எனக் காணலாம்.

சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணம் $\{(-1, -2)\}$.

பயிற்சி 3 - 2

1. வரைபடங்கள் மூலம் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்க.

(அ) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{-5} &= 1 \\ 2x - y &= -3 \end{aligned}\right\}$ (ஆ) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

(இ) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 \\ x + y &= -1 \end{aligned}\right\}$

2. $2x + 3y = 0$ என்பதன் வரைபடத்தில் x வெட்டு, y வெட்டு ஆகியவை என்ன? என்ன ஊகிக்கலாம்?

3. பயிற்சி 3-1, 3-2 ஆகியவற்றில் கண்ட கோடுகளின் சாய்வுகளென்ன? என்ன பொதுத் தன்மை காண்கின்றீர்?

விடைகள்

1. (அ) $\left\{\left(\frac{4}{9}, \frac{35}{9}\right)\right\}$ (ஆ) $\{(3, -1)\}$

(இ) $\{(-2, 1)\}$

2. x வெட்டு $= 0$. y வெட்டு $= 0$

3 - 3 கோட்டுச் சமன்பாடுகள் (இ)

இதுகாறும், சமன்பாடுகளில் ஒன்று மிகைச் சாய்வு கொண்டிருந்தால், மற்றது குறைச் சாய்வு கொண்டுள்ளதாக அமைந்தது. இப்பொழுது ஒரே திசைச் சாய்வு கொண்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முயல்வோம்.

(1) $2x + 3y = 6$; $4x + 6y = 18$. கோடுகளின் சாய்வுகள் என்ன ? வரைபடங்கள் வரைந்து அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் காண்க.

சாய்வுகள் சமமானால், கோடுகள் இணை. அவை மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்வதில்லை. இத்தகைய சமன்பாடுகள் முரண்பட்ட சமன்பாடுகள் எனப்படும். முரண்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வுக் கணம் என்ன ? அது வெற்றுக் கணமாகுமா எனச் சோதிக்க.

முரண்பட்ட சமன்பாடுகளின் சாய்வுகள் சமம். ஒரு திசைச் சாய்வு உள்ள கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால், அவற்றின் சாய்வுகள் பற்றி என்ன ஊகிக்கலாம் ?

$y = 7x+5$; $y = 3x+1$ என்பவை ஒரு திசைச் சாய்வுள்ள சமன்பாடுகள். அவை முரண்பாடு உள்ளவையா ? ஏன் ?

பயிற்சி 3 - 3 (1)

கீழ்க் கண்டவற்றில் எச்சோடி சமன்பாடுகள் முரண்பட்டவை?

(அ) $2x - 3y = 7$; $3x - 2y = 2$;

(ஆ) $2x - 3y = 7$; $2x - 3y = 3$;

(இ) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$;

(ஈ) $3x + 2y = 5$; $9x + 6y = 20$;

(உ) $7x - 5y = 12$; $14x - 10y = 18$.

விடைகள்

(ஆ), (ஈ), (உ) - முரண்பட்ட சமன்பாடுகள்

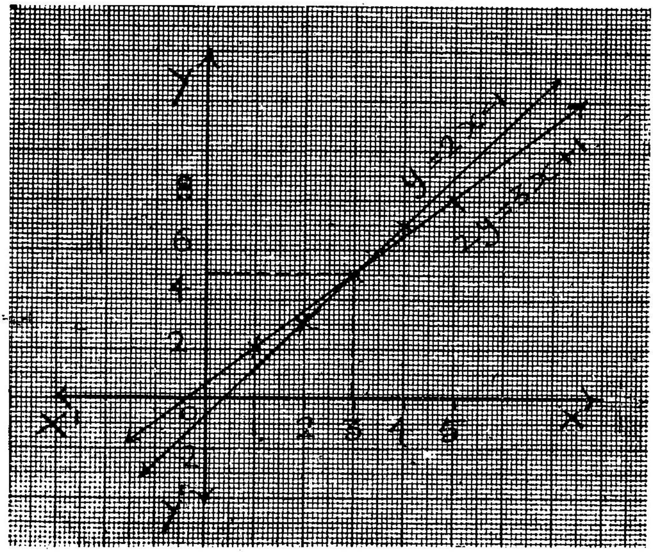
(2) இப்பொழுது முரண்பாடில்லாத ஒரு திசைச் சாய்வுள்ள இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முற்படுவோம்.

$y = 2x - 1$; மேலும் $2y = 3x + 1$

$y = 2x - 1$ என்றால், சாய்வு என்ன ? y வெட்டு என்ன ?

$2y = 3x + 1$ என்றால் $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. இதன் சாய்வு $\frac{3}{2}$.

இப்பொழுது இவற்றின் வரை படங்களை வரைவோம்.



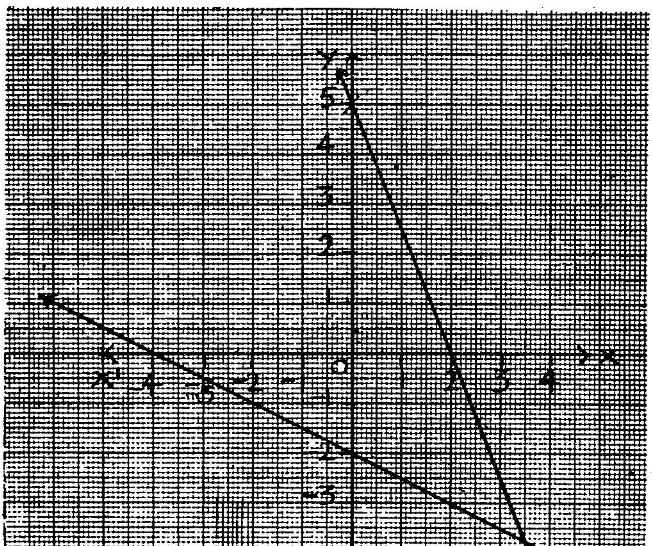
படம் 6-13.

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் அதிகரிக்கும் சார்புகளா; அல்லது குறையும் சார்புகளா ?

கீழே இரு சார்புகளின் வரைபடங்கள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவை எத்தகைய சார்புகள்? அவற்றின் சார்புகள் எத்தன்மையன? அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. படத்தின் மூலம் தீர்வுக் கணத்தையும் காண்க.

முதல் கோட்டின் x வெட்டு 2, y வெட்டு 5 ஆதலால், அதன் சமன்பாடு $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ அல்லது $5x+2y=10$.

இரண்டாவது கோட்டின் x வெட்டு -4, y வெட்டு -2 ஆதலால், அதன் சமன்பாடு $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$ அல்லது $x + 2y = -4$.



படம் 6-14.

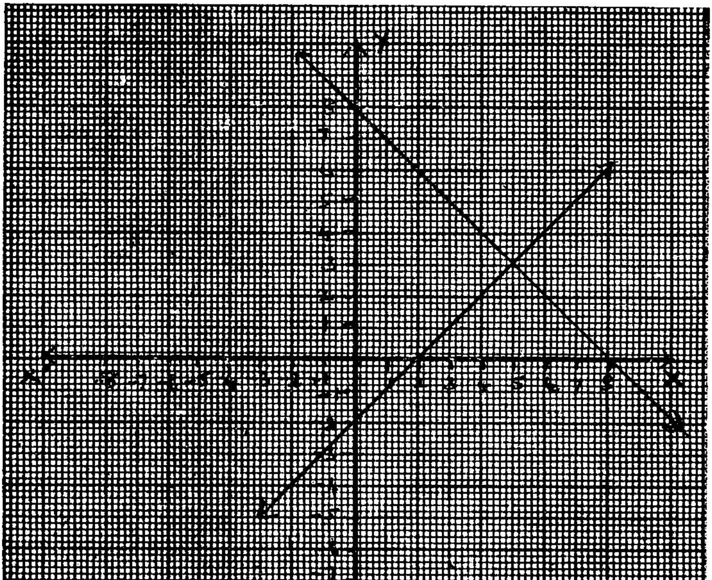
பயிற்சி 3 - 3 (2)

1. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடாத தொகுப்புகளின் கணங்களை வரைபடம் மூலம் காண்க.

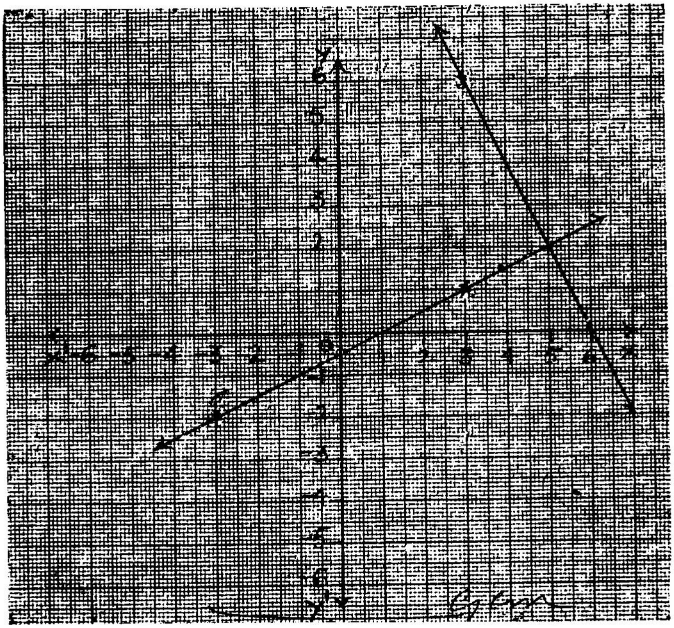
(அ) $y = 3x;\ x - y = 4$ (ஆ) $x = 4;\ x + y = 1$

(இ) $x - y = 1;\ y = 3$

2. கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களின் சமன்பாடுகளையும், தீர்வுக் கணங்களையும் காண்க



படம் 6-15 (a).



படம் 6-15 (b).

விடைகள்

2. (a) $x + y = 8$; $x - y = 2$; $x = 5$; $y = 3$
   (b) $2x + y = 12$; $x - 2y = 1$; $x = 5$; $y = 2$

3 - 4 கோட்டுச் சமன்பாடுகள் : பயன்பாடுகள்

இப்பாடத்தில் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும், அவற்றைத் தீர்க்கவும் கற்றுக் கொள்வோம்.

முதலில் கணித வாக்கியங்கள் பற்றி கற்றவற்றினை நினைவு கூர்வோம்.

y, x ஐப் போல் இரு மடங்கு என்றால், $y = 2x$

y, x ஐக் காட்டிலும் 3 அதிகம் என்றால், $y = x+3$

y, x ஐ விட 5 குறை என்றால், $y = x-5$

y, x இன் இருமடங்கைக் காட்டிலும் 4 அதிகம் என்றால், $y = 2x+4$.

இது போலவே xஇன் இரு மடங்கோடு, yஇன் மூன்று மடங்கினைச் சேர்க்க 9 கிடைக்கும் என்ற வாக்கியம்

$$2x + 3y = 9$$

என எழுதப்படும்.

கீழே சில கூற்றுகளும், அவற்றிற்குப் பொருத்தமான கணித வாக்கியங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றினை நன்கு அறியவும்.

கூற்று	கணித வாக்கியம்
1. yஇன் 3 மடங்கு, xஇன் 2மடங்கிற்குச் சமம்	$3y = 2x$
2. yஇன் 2 மடங்கு, xஇன் 5 மடங்கைவிட 3 அதிகம்	$2y = 5x + 3$
3. xஇன் 3 மடங்கு, yஇன் 2 மடங்கைவிட 7 அதிகம்	$3x - 2y = 7$
4. xஇன் 5 மடங்கு, yஇன் 2 மடங்கைவிட 3 குறைவு	$5x = 2y - 3$

வேறொரு வகை வாக்கியத்தைக் காண்போம்.

முத்து ரூ. 20க்கு 18 பென்சில்களும், 7 பேனாக்களும் வாங்குகிறார். ஒரு பென்சிலின் விலை ரூ. x என்றும், ஒரு பேனாவின் விலை ரூ. y என்றும் கொண்டால்,

$$18x + 7y = 20$$

என்ற கணித வாக்கியத்தை அமைக்கலாம்.

80 பக்க நோட்டுப் புத்தகங்கள் 4இன் விலை, 1 குயர் நோட்டுப் புத்தகங்கள் 3இன் விலையைக் காட்டிலும் ரூ. 2-80 குறைவு.

ஒரு 80 பக்க நோட்டு புத்தகத்தின் விலை x பை. என்றும், ஒரு 1 குயர் நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை y பை. என்றும் கொண்டால்,

$$4x = 3y - 280.$$

அல்லது $3y = 4x + 280.$

கணித வாக்கியத்தின் இரு புறங்களும் ஒரே அலகான பைசா வில் குறித்துள்ளோம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

பயிற்சி 3 - 4

கணித வாக்கியங்கள் அமைக்கவும்.

1. xஐப் போல் 5 மடங்கு y
2. xஐக் காட்டிலும் y, 7 அதிகம்
3. xஇன் மூன்றிலிரண்டு பகுதி y
4. y, xஇன் 2 மடங்கைக் காட்டிலும் 9 குறைவு
5. $x > y$, அவற்றினிடையே வித்தியாசம் 7
6. $x < y$, அவற்றினிடையே வித்தியாசம் 3
7. xஇன் 2 மடங்கு, yஇன் 3 மடங்கைவிட 5 குறைவு
8. xஇன் 5 மடங்கு, yஇன் 2 மடங்கைவிட 7 அதிகம்
9. yஇன் 3 மடங்கிலிருந்து xஇன் 5 மடங்கைக் கழிக்க -6 கிடைக்கும்
10. y யுடன் 3 சேர்க்க அதன் 5 மடங்கு, x உடன் 9 சேர்த்த தற்குச் சமம்.

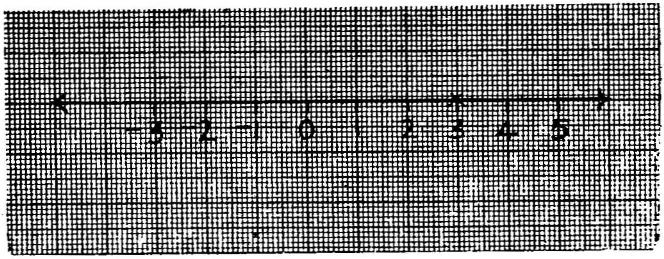
விடைகள்

1. $y = 5x$ 2. $y = x+7$ 3. $y = \frac{2}{3}x$
4. $y = 2x-9$ 5. $x-y = 7$ 6. $y-x = 3$
7. $3y-2x=5$ 8. $5x-2y = 7$ 9. $3y-5x = -6$
10. $5(y+3) = x+9$

4 - 1 அசமன்பாடுகள் — திருப்புதல்
$x > a,\ x < a,\ (x \in R)$

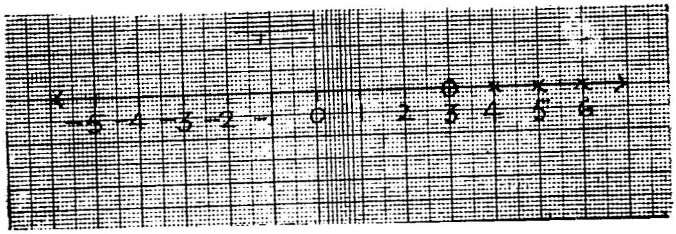
ஒரு மாறியில் அசமன்பாடுகளை எவ்வாறு வரைபடத்தில் காட்டுவது என்று எட்டாம் வகுப்பில் படித்துள்ளீர்கள். அவற்றை மீண்டும் பார்ப்போம்.

$x = 3$ என்பதனை எண் கதிரில் 3 என்ற இடத்தைப் பெரும் புள்ளியால் குறிப்பிட்டுக் காட்டுவோம்.



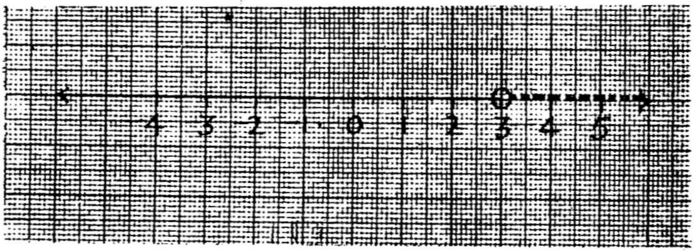
படம் 6-16.

$x > 3,\ x \in Z$ என்றால் x இன் தீர்வுக்கணம் $\{4, 5, 6, \ldots\}$. இப்புள்ளிகளை எண்கதிரில் குறிப்பிட்டால் $x > 3$ இன் வரைபடம் கிடைக்கும்.



படம் 6-17.

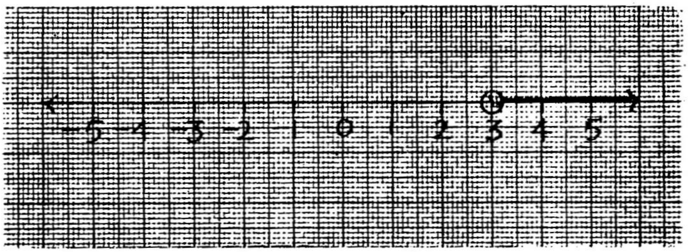
$x > 3,\ x \in Q$ என்றால் 3க்கு அதிகமான விகிதமுறு எண்கள் தீர்வுக்கணமாகும். இதனை வரைபடத்தில் 3 ஐ வட்டமிட்டு, அதற்கு வலப்புறம் எண் கதிரில் ஒரு தடித்த இடைவெளி கூடிய கோட்டால் காட்டுவோம்.



படம் 6-18.

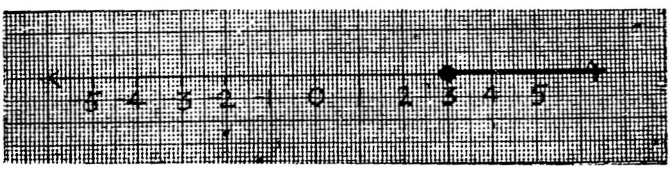
கோட்டின் இடைவெளிகள் எதனைக் குறிக்கும் ?

மெய்யெண் கணத்தில் தீர்வு காண, எண் கதிரில் இடைவெளிகள் இருக்காது எனக் கண்டுள்ளோமல்லவா ? எனவே $x > 3$, $x \in R$ இன் வரைபடத்தில் இடைவெளிகள் இருக்காது.



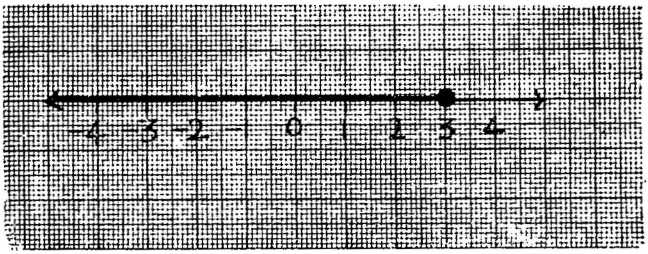
படம் 6-19.

$x \geqslant 3$, $x \in R$ என்பதன் வரைபடம் $x = 3$, $x > 3$ என்ற இரு வரைப் படங்களும் ஒன்று சேர்ந்ததாகும்.



படம் 6-20.

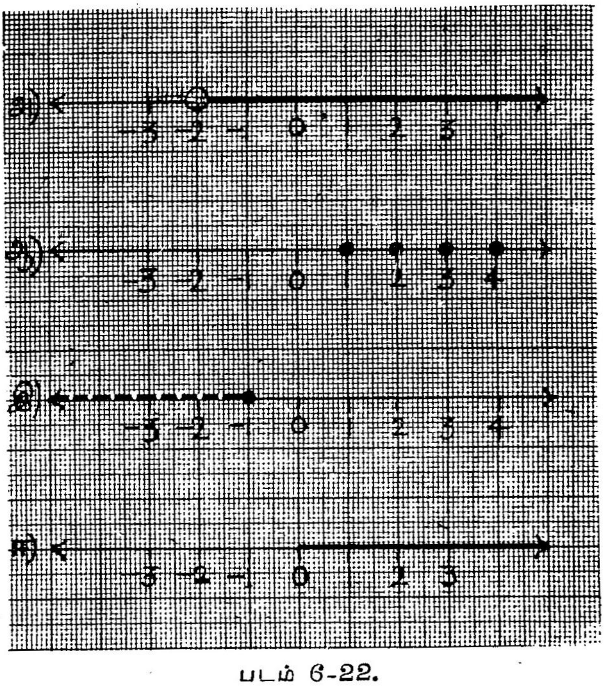
$x < 3$, $x \in R$ என்பதன் வரைபடம்.



படம் 6-21.

பயிற்சி 4 - 1

1. கீழ்க்கண்ட வரைபடங்கள் குறிக்கும் அசமன்பாடுகளை யும், அவை எக் கணத்தில் தீர்வுகளைக் குறிக்கின்றன எனவும் கூறுக.



படம் 6-22.

2. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு, அசமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்களை வரைபடம் மூலம் குறிக்கவும்.

(i) மெய்யெண் கணம் (ii) விகிதமுறு எண் கணம் (iii) முழுக்கள் கணம்.

ஒவ்வொன்றிலும் தனித்தனியே தீர்வுகளைக் காணவும்.

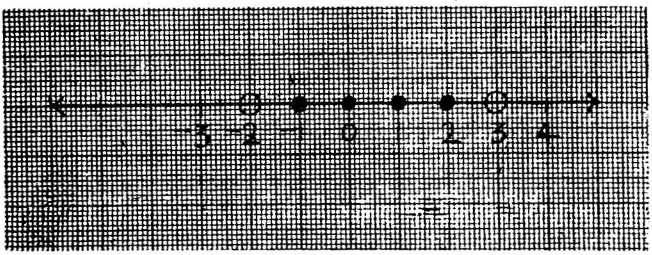
(அ) $x = 4$ (ஆ) $x > 4$ (இ) $x > -4$ (ஈ) $x < 4$
(உ) $x < -4$ (ஊ) $x \geqslant 4$ (எ) $x \leqslant 4$ (ஏ) $x \geqslant -4$
(ஐ) $x \leqslant -4$.

விடைகள்

1. (அ) $x > -2, \; x \in R$ (ஆ) $1 \leqslant x, \; x \in Z$
(இ) $x \leqslant -1, \; x \in Q$ (ஈ) $x \geqslant 0, \; x \in R$

4 - 2 அசமன்பாடுகள் : $a \geqslant x \leqslant b$

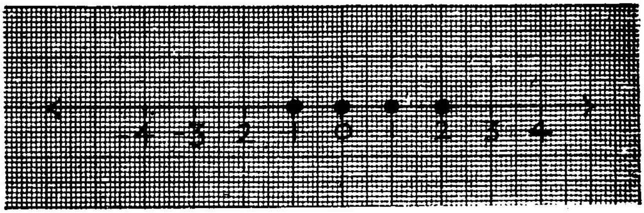
சென்ற பாடத்தில் $x \geqslant a$, $x \leqslant b$ ஆகியவற்றின் வரைபடங்களைக் கண்டோம். இப்பொழுது அவ்விருவகை அசமன்பாடுகளும் ஒருங்கே இருக்கின்ற அசமன்பாடுகளைக் காண்போம்.



படம் 6-23.

மேற்கண்ட படத்தில் காட்டப்பட்ட தீர்வுக் கணம் $\{-1, 0, 1, 2\}$ ஆகும். இதன் எல்லைகள் $-1, 2$ ஆவதால் இவ்வரைபடம் காட்டும் அசமன்பாடு $-2 < x < 3, \; x \in Z$ எனக் கூறலாம்.

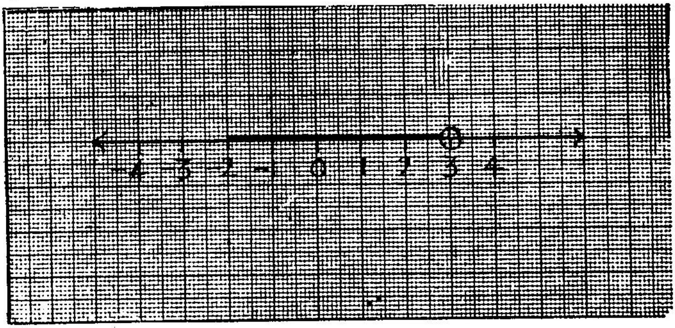
$-1 < x < 2$, $x \in Z$ என்ற அசமன்பாட்டினைக் காட்டும் வரைபடம் கீழே காணலாம்.



படம் 6-24.

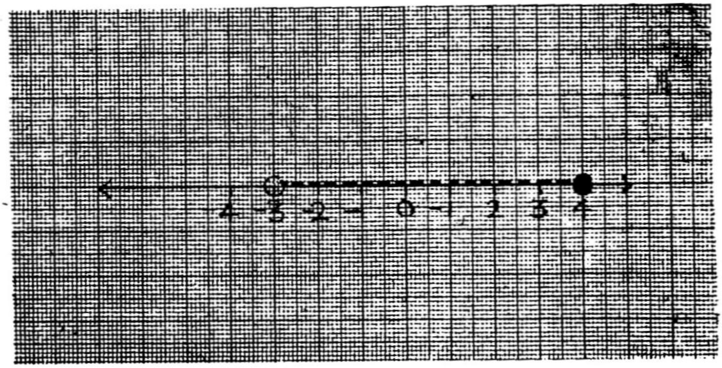
மேலே குறித்த இரண்டு அசமன்பாடுகளின் வரைபடங்களுக்கும் (படம் 6-23, 6-24) உள்ள வேறுபாட்டினைக் காண்க.

$-2 < x < 3$, $x \in R$ என்பதன் வரைபடம் கீழே காண்க.



படம் 6-25.

அடுத்த பக்கத்திலுள்ள வரைபடம் (படம் 6-26) குறிக்கும் அசமன்பாடு களையும், தீர்வுக் கணத்தையும் வரையறுக்க.

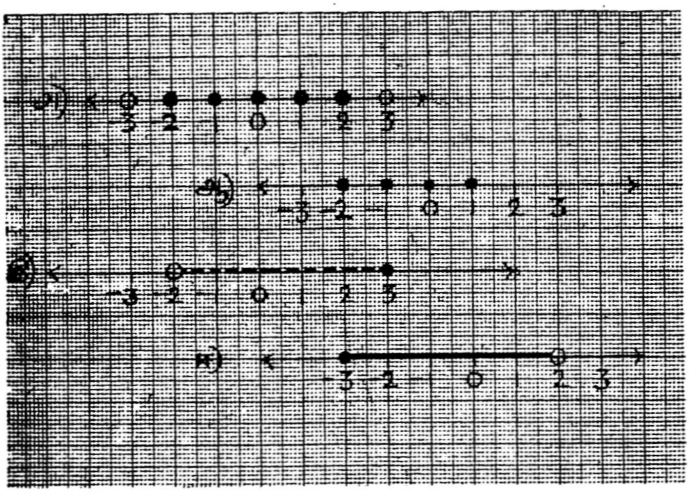


படம் 6-26.

அசமன்பாடு $-3 < x < 4, \quad x \in Q$.

பயிற்சி 4 - 2

1. கீழ்க்கண்ட வரைபடங்களில் காட்டப்பட்டுள்ள அசமன் பாடுகளைக் கூறுக. அவற்றின் தீர்வுக் கணங்கள் எவ்வெண் கணங்களில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன ?



படம் 6-27.

2. கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக. தீர்வுக் கணங்களை (i) மெய்யெண் (ii) விகிதமுறு எண் (iii) முழுக்கள் கணங்களில் கொள்க.

(அ) $-3 \le x \le 4$; (ஆ) $2 \le x < 5$ (இ) $-3 < x \le 0$
(ஈ) $-1 < x < 3$

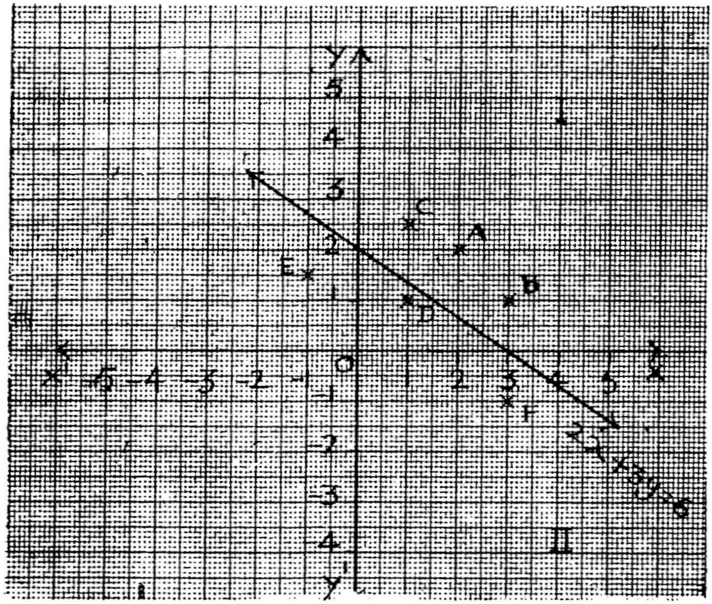
விடைகள்

1. (அ) $-3 < x < 3,\ x \in Z$ (ஆ) $-2 \le x \le 1,\ x \in Z$
(இ) $-2 < x \le 3,\ x \in Q$ (ஈ) $-3 \le x < 2,\ x \in R$

4 - 3 அசமன்பாடுகள் : $ax + by > c,\ ax + by < c$

ஒவ்வொரு கோடும் ஒரு தளத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் என நாம் அறிவோம்.

$2x + 3y = 6$ என்பதன் வரைபடத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். தளம், (1) பகுதி I (2) பகுதி II (3) கோடு ஆகிய மூன்று பகுதிகள் கொண்டுள்ளதாக அமைகிறது.



படம் 6-28.

கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $2x + 3y = 6$ என்ற சமன்பாட்டினை மெய்யாக்கும்,

பகுதி Iஇல் A, B, C என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 2\frac{1}{2})$.

பகுதி IIஇல் உள்ள புள்ளிகள் $D(1, 1)$, $E(-1, 1\frac{1}{2})$, $F(3, -1)$.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை நிரப்புவோம்.

பகுதி	புள்ளி	x	y	$2x+3y$	அசமன்பாடு
I	A	2	2	$4+6=10$	$2x+3y>6$
I	B	3	1	$6+3=9$	$2x+3y>6$
I	C	1	2·5	$2+7{\cdot}5=9{\cdot}5$	$2x+3y>6$
II	D	1	1	$2+3=5$	$2x+3y<6$
II	E	-1	1·5	$-2+4{\cdot}5=2{\cdot}5$	$2x+3y<6$
II	F	3	-1	$6-3=3$	$2x+3y<6$

மேலும் சில புள்ளிகளை எடுத்து அசமன்பாடுகளைக் காணவும்.

இவற்றினின்று பகுதி I இல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $2x + 3y > 6$ என்ற அசமன்பாட்டினையும், பகுதி II இல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $2x + 3y < 6$ என்ற அசமன்பாட்டினையும் நிறைவு செய்கின்றன எனக் காண்கிறோம்.

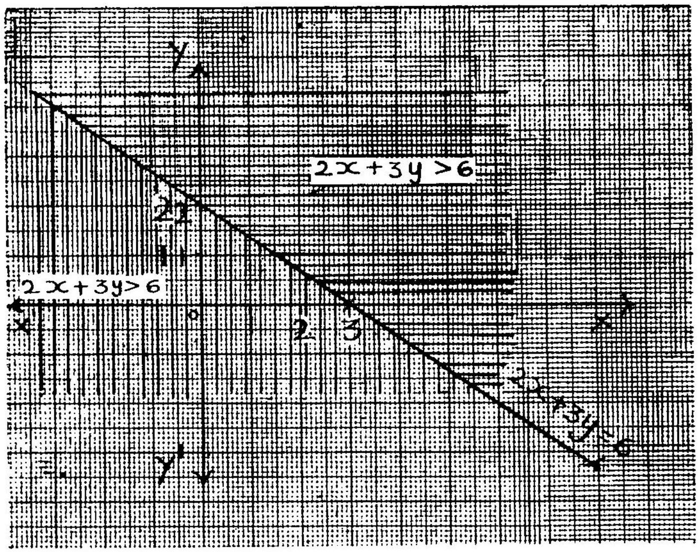
எனவே,

$2x + 3y > 6$இன் தீர்வுக்கணம் அமைவது பகுதி Iஇல் என்றும்

$2x + 3y < 6$இன் தீர்வுக்கணம் அமைவது பகுதி IIஇல் என்றும்

$2x + 3y = 6$இன் தீர்வுக்கணம் அமைவது கோட்டில் என்றும் அறிகிறோம்.

தீர்வுக் கணங்களை வரைபடங்களில் நிழலிட்டுக் காட்டுவோம்.



படம் 6-29.

பயிற்சி 4 - 3

கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக.

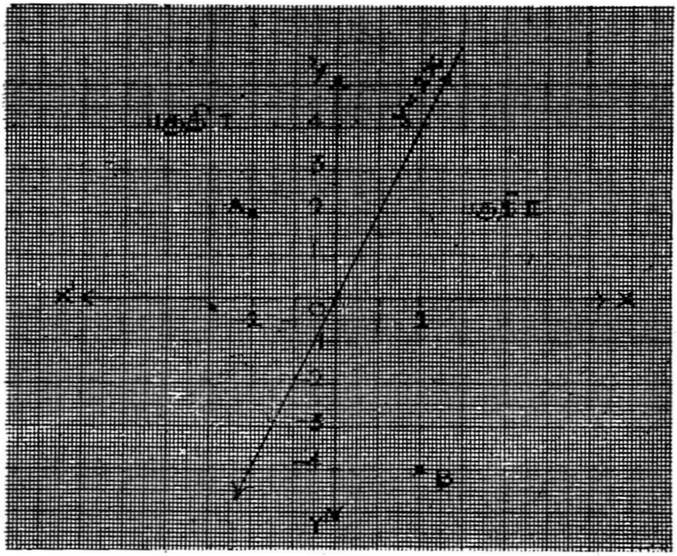
1. $3x + 2y > 6$ 2. $2x + 5y > 10$ 3. $4x + 3y > 24$
4. $3x + 2y < 6$ 5. $2x + 5y < 10$ 6. $4x + 3y < 24$

4 - 4 அசமன்பாடுகள் : $y > kx$; $y < kx$.

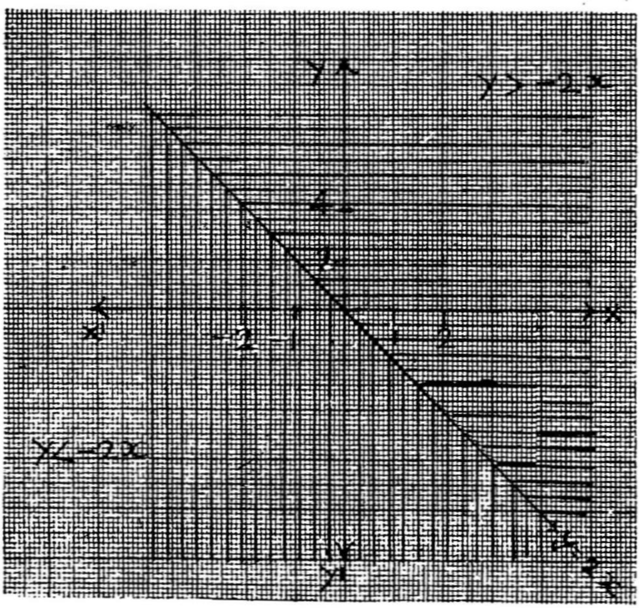
$y = 2x$ என்பதன் வரைபடத்தை எடுத்துக்கொண்டு, அது தளத்தைப் பிரிக்கும் பகுதி I, II இல் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். (படம் 6-30) காண்க.

அவற்றின் அச்சுத் தூரங்களைக் கொண்டு பகுதி I குறிக்கும் அசமன்பாட்டினையும், பகுதி II குறிக்கும் அசமன்பாட்டினையும் காண்க.

பகுதி Iஇல் உள்ள ஒரு புள்ளி $A(-2, 2)$. இங்கு $x = -2$, $y = 2$. எனவே $2x = -4$; $2 > -4$; $y > 2x$.



படம் 6-30.



படம் 6-31.

பகுதி IIஇல் உள்ள ஒரு புள்ளி $B(2, -4)$. இங்கு $x = 2$; $y = -4$. எனவே, $2x = 4$: $-4 < 4$; $y < 2x$.

அசமன்பாட்டினைக் காண ஒரு பகுதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறித்தால் போதும்.

$y = -2x$இன் வரைபடத்தை (படம் 6-31) எடுத்துக் கொண்டு $y > -2x$, $y < -2x$ என்ற அசமன்பாடுகளைக் குறிப்போம்.

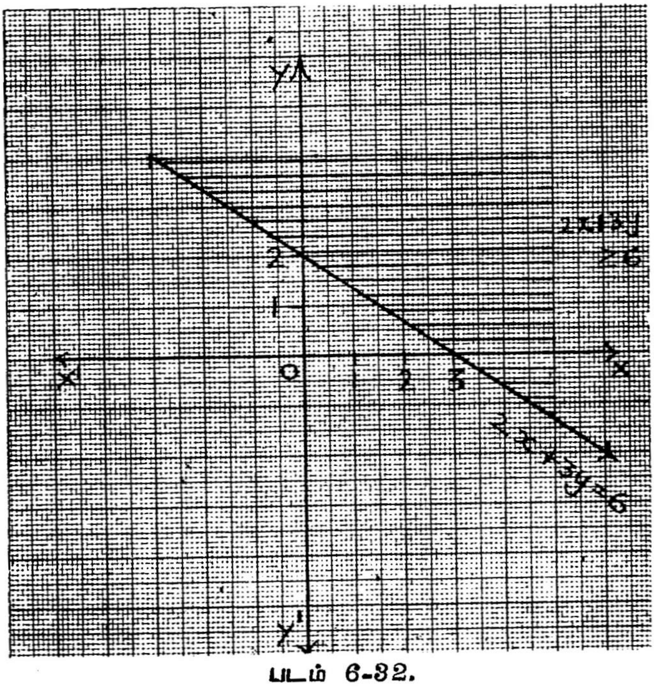
பயிற்சி 4 - 4

கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக.

1. $y > -3x$ 2. $y < -3x$ 3. $y > 3x$ 4. $y < 3x$

4 - 5 அசமன்பாடுகள்: $ax + by > c$, $ax + by < c$

$ax + by > c$; $ax + by = c$ என்ற அசமன்பாடும், சமன்பாடும் சேர்ந்து $ax + by \geqslant c$ என்ற அசமன்பாட்டினை

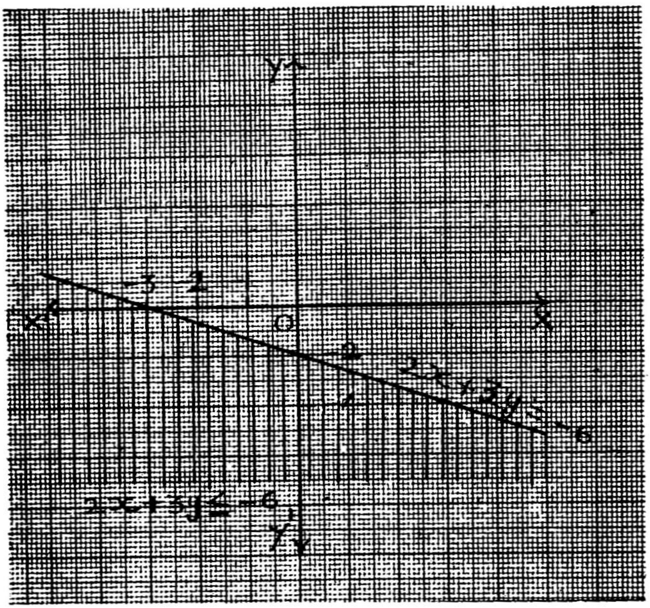


படம் 6-32.

உண்டாக்குகிறது. எனவே வரைபடத்தில் $ax + by > c$ குறிக்கும் பகுதியோடு, $ax + by = c$ குறிக்கும் கோட்டினையும் சேர்த்தால் $ax + by > c$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கும். இதனைக் காட்ட கோட்டினைத் தடிப்பாக இடுகிறோம்.

படத்தில் $2x + 3y > 6$ என்பதனை நிழலிட்டுக் காட்டியுள்ளோம். $2x + 3y > 6$ என்பதன் வரைபடத்தில் கோட்டினை முறிந்த கோடுகளில் காட்டுகிறோம். அத்தகைய கோடு அசமன்பாட்டில் சேரவில்லை என்பதனைக் குறிக்கிறது.

கீழே படம் (6-33) இல் $2x + 3y < -6$ என்பதன் வரைபடத்தை நிழலிட்டுக் காட்டியுள்ளோம்.



படம் 6-33.

பயிற்சி 4 - 5

கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக:

1. $3x + 2y > 6$
2. $2x + 5y > 10$
3. $4x + 3y > 24$
4. $3x + 2y > -6$

5. $2x + 5y > -10$ 6. $3x + 2y < 6$

7. $2x + 5y < 10$ 8. $4x + 3y < 24$

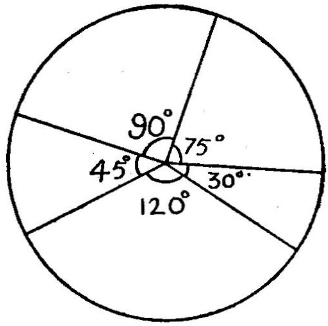
9. $3x + 2y < -6$ 10. $2x + 5y < -10$.

5 புள்ளியியல் வரைபடம் — வட்டப் பகுதி

$$\frac{\text{ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு}}{\text{வட்டத்தின் பரப்பளவு}} = \frac{\text{வட்டக் கோணம்}}{360^\circ}$$

என நாம் அறிந்தோம்.

எனவே ஒரு வட்டத்தை வட்டக் கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்தால், அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதங்கள் வட்டக் கோணங்களின் விகிதங்களில் அமையும்.



படம் 6-34.

படத்தில் வட்டம் 5 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவை மையத்தில் எதிர் கொள்ளும் கோணங்களின் அளவுகள் முறையே 75°, 90°, 45°, 120°, 30° என்றால் அவற்றின் பரப்பளவுகள் 75 : 90 : 45 : 120 : 30 என்ற விகிதத்தில் அமையும்.

இதனைப் பயன்படுத்திச் சில விவரங்களைப் படம் வரைந்து விளக்கலாம்.

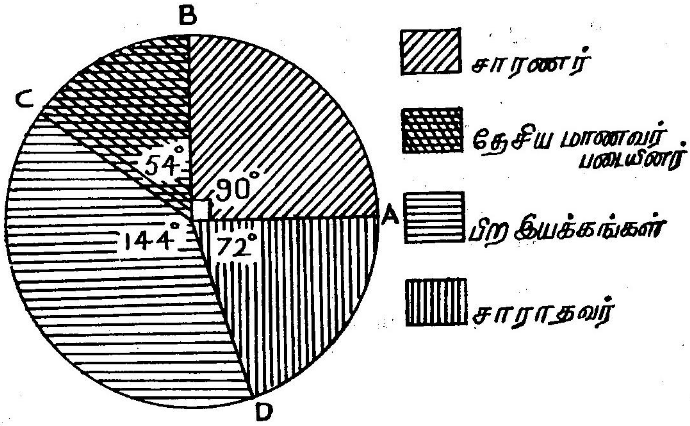
எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு பள்ளியிலுள்ள மாணவரில் 25% சாரணீயத்திலும், 15% தேசீய மாணவர் படையிலும், 40% செஞ்சிலுவை போன்ற பிற இயக்கங்களிலும் இருக்கின்றனர். மற்றவர் எவ்வியக்கத்திலும் இல்லை. இதனை ஒரு வட்ட வடிவம் மூலம் காட்டுக.

மொத்த மாணவர்கள் 100%

100% காட்டுவது 360°; 1 % குறிப்பது 3·6°.

சாரணர்	25%	25 × 3.6	90°
தேசீய மாணவர் படை	15%	15 × 3.6	54°
பிற இயக்கங்கள்	40%	40 × 3.6	144°
சாராதவர்	20%	20 × 3.6	72°
மொத்தம்	100%		360°



படம் 6-35.

பயிற்சி 5

கீழே கண்ட விவரங்களை வட்ட வரிவடிவம் மூலம் விளக்குக.

1. ஓர் உணவுப் பண்டத்திலுள்ள சத்துகள் :

   கார்போ ஹைட்ரேட் 40%; புரதம் 45%; கொழுப்பு 10%; வைட்டமின் 5%.

2. உலக மாகடல்களின் பரப்பளவுகள் (ச.கி.மீட்டரில்) :

   பசிபிக் 170 ; அட்லாண்டிக் 90 ; இந்திய 65 ; அண்டார்க்டிக் 20 ; ஆர்க்டிக் 15.

3. ஒரு குடும்பத்தின் செலவினங்கள் :

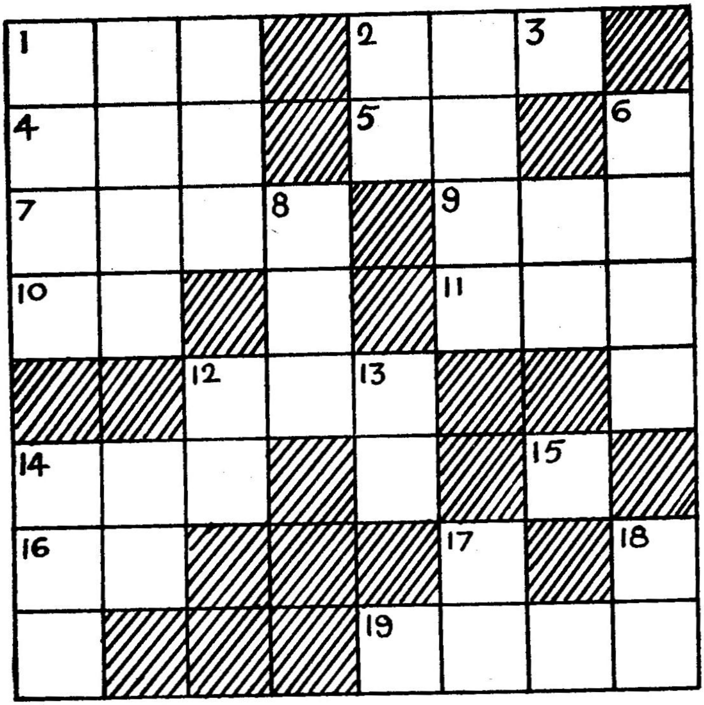
   உணவு ரூ. 160 ; உடை ரூ. 80 ; வாடகை ரூ. 60; எரிபொருள் ரூ. 20 ; பிற ரூ. 80.

4. கதர்த்துணி விற்பனையில் ஒவ்வொரு ரூபாயும் கீழ்க் கண்டவாறு செல்கிறது :

   உழவர் 19 பை; நூற்பவர் 35 பை; நெய்பவர் 28 பை; சலவை, சாயம் இடுவோர் 8 பை ; நிர்வாகச் செலவு 10 பை.

கணித மன்றம் மேடை 6

புதிர்



படம் 6-36.

குறுக்கே :

1. 15^2
2. $(5 + 9)(8 + 7)$
4. $x = 7$ ஆனால், x^3 இன் மதிப்பு
5. இரண்டு இலக்க ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை
7. 15இன் இரண்டடிமான எண்ணுரு
9. 2 இன் 1, 2, 3 அடுக்குகள்
10. ரூ. 500-க்கு 10% வீதம் 18 மாத வட்டி.
11. $3^3 \times 2^2$
12. 3^5
14. 24 டஜன்
16. 1101_2 இன் படித்தடிமான எண்ணுரு
19. $12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

கீழே :

6. இராமானுஜத்தின் பிறந்த ஆண்டு

8. 44இன் ஐந்து அடிமான எண்ணுரு

12. சீர்மை எண்

13. செங்கோணத்தை அடைக்கும் பக்கங்கள் 9, 8 கொண்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு

14. ரூ. 1000-க்கு 10% வீதம் 2 ஆண்டு கூட்டு வட்டி

15. இந்தியர்கள் கணிதத்திற்குக் கணித்த ஓர் எண்

17. மிகப் பெரிய இரண்டிலக்கப் பகா எண்

18. $\sqrt{9801}$

7. பயனியல்

1. நேர்முகத் தவணைத் திட்டம்

மொத்தமாகப் பணம் கொடுத்துச் சில பொருள்களை வாங்க முடியாத நிலையில் என்ன செய்வது? மின் விசிறி, வானொலிப் பெட்டி, தொலைக் காட்சி, மாவறைக்கும் இயந்திரம், பாத்திரங்கள் மேலும் பல பொருள்கள், வீடு, வீட்டு மனை இவற்றை மொத்தமாகப் பணம் கொடுத்து வாங்க முடியாத நிலையில் ஒரு பகுதி விலையை முதலில் கொடுத்துவிட்டு மீதியை மாதத் தவணைகளில் செலுத்துவதை அல்லது முழுத் தொகையையும் மாதத் தவணைகளில் செலுத்துவதை அறிந்திருப்பீர்கள்.

> ''வீடு கட்டும் மனைகள் - நேரு நகர் - கிரோம்பேட்டை - கிரவுண்டு ரூ. 3500 - முதலில் ரூ. 500 - மீதம் சுலப மாதத் தவணைகளில்''

— இது போன்ற விளம்பரங்களைச் செய்தித் தாள்களில் பார்த்திருப்பீர்கள்.

பாங்குகளில் கடன் வாங்கும் தொகைகளுக்கு மாதா மாதம் தவணைத் தொகை செலுத்தும்போது ஒரு பகுதி அசலுக்கும், ஒரு பகுதி வட்டிக்கும் கணக்கிடப்படுகிறது. அடுத்தடுத்துத் தவணைகளில் வட்டித் தொகை குறைந்துகொண்டே வரும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒரு சைக்கிளின் ரொக்க விலை ரூ. 500. தவணைகளில் செலுத்தினால் 15% தனிவட்டி செலுத்தவேண்டும். 12 தவணைகளில் பணம் செலுத்தினால் ஒவ்வொரு தவணையிலும் செலுத்தும் தொகை எவ்வளவு?

சைக்கிளின் விலை = ரூ. 500

வட்டி = 15%

$$\left.\begin{array}{l}\text{15\% வட்டிவீதம்}\\ \text{11 மாதத்திற்கு வட்டி}\end{array}\right\} = \text{ரூ. } 500 \times \frac{11}{12} \times \frac{15}{100} = \text{ரூ. } \frac{275}{4}$$

$$\text{மொத்த தொகை} = \text{ரூ. } 500 + \frac{275}{4} = \text{ரூ. } \frac{2275}{4}$$

மாதத் தவணை ரூ. x என்க.

12 மாதத்தில் செலுத்துவது ரூ. $12x$

$$\text{வட்டி } I = x \times \frac{11 \times 12}{2 \times 12} \times \frac{15}{100} = \frac{33}{40}x$$

மொத்தம் செலுத்தியது

$$= 12x + \frac{33}{40}x = \text{ரூ. } \frac{513}{40}x$$

$$\therefore \quad \frac{513}{40}x = \frac{2275}{4}$$

$$x = \frac{2275}{4} \times \frac{40}{513}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{22750}{513} = \text{ரூ. } 44{\cdot}35$$

$\therefore$ மாதத் தவணை = ரூ. 44·32

2. ஒரு தொலைக் காட்சிப் பெட்டியின் ரொக்க விலை ரூ. 4200. தவணைகளில் வாங்க வேண்டுமானால் ரூ. 1200 செலுத்திவிட்டு மீதமுள்ள தொகையை 30 மாதத் தவணைகளில் மாதம் ரூ. 120 வீதம் செலுத்த வேண்டும். 18% தனி வட்டி கணக்கிடப்பட்டால் மொத்தம் செலுத்தும் தொகை எவ்வளவு? எவ்வளவு அதிகம் செலுத்தப் படுகிறது?

செலுத்தவேண்டிய தொகை

$$= \text{ரூ. } 4200 + \text{ரூ. } 4200 \times \frac{30}{12} \times \frac{18}{100}$$

$$= \text{ரூ. } 6090$$

முதலில் செலுத்திய தொகை

$$= \text{ரூ. } 1200$$

அதற்கு 30 மாதங்களில் கிடைக்கும் வட்டி

$$= \text{ரூ. } 1200 \times \frac{30}{12} \times \frac{18}{100}$$

$$= \text{ரூ. } 540$$

மாதம் ரூ. 120 வீதம் 30 மாதங்களில் செலுத்திய தொகை

$$= \text{ரூ. } 3600$$

தவணைக்குச் சேர்ந்த வட்டி

$$= \text{ரூ. } 120 \times \frac{29 \times 30}{2 \times 12} \times \frac{18}{100}$$

$$= \text{ரூ. } 783$$

மொத்தம் செலுத்திய தொகை

= ரூ. 1200 + ரூ. 540
+ ரூ. 3600 + ரூ 783
= ரூ. 6123

அதிகம் செலுத்தியது = 6123 — ரூ. 6090
ரூ. 33

பயிற்சி 1

1. ஒரு மின் விசிறியின் ரொக்க விலை ரூ. 420. ஒருவர் 10 மாதத் தவணைகளில் செலுத்துவதாகக் கூறி ஒரு மின் விசிறி வாங்கினார். 18% தனி வட்டி கணக்கிடப்படுகிறதென்றால் மாதத் தவணையில் செலுத்த வேண்டிய தொகை எவ்வளவு ?

2. ஒரு மின்சார மாவு அறைக்கும் இயந்திரத்தின் ரொக்க விலை ரூ 1500. 20 மாதத் தவணைகளில் செலுத்துவதாக ஒருவர் ஓர் இயந்திரத்தை வாங்கினார். 15% தனி வட்டி கணக்கிடப்படுகிறதென்றால் மாதம் அவர் செலுத்த வேண்டிய தொகை எவ்வளவு ?

3. எண்ணெய் பிழியும் ஓர் இயந்திரத்தின் ரொக்க விலை ரூ. 4000. தவணை முறையில் வாங்கும் ஒருவர் ரூ. 1000 ரொக்கமாகச் செலுத்திவிட்டு மீதத்தை 15 தவணைகளில் செலுத்தினார். 15% வட்டி கணக்கிடப்பட்டால் மொத்தம் செலுத்தும் தொகை எவ்வளவு ? வட்டியாகச் செலுத்தியது எவ்வளவு ?

4. ஒரு வானொலிப் பெட்டியின் ரொக்க விலை ரூ. 600. ஒருவர் தவணை முறையில் 12% தனி வட்டி கணக்கிடப்படும் ஒரு கடையில் 15 மாதத் தவணைகளில் செலுத்துவதாக ஒரு வானொலிப் பெட்டி வாங்கினார். அவர் மாதத் தவணையில் செலுத்த வேண்டிய தொகை எவ்வளவு ?

விடைகள்

1. ரூ. 44-62 2. ரூ. 82-88 3. ரூ. 4431-25; ரூ. 431-25 4. ரூ. 42-59.

2 - 1 தொடர் வட்டி—திருப்புதல்

தொடர் வட்டி என்றால் என்ன? தொடர் வட்டி வீதப்படி இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு வட்டி கணக்கிடும் முறை, கூடுதல் காணும் முறை, இவற்றை முன் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறீர்கள். தொடர் வட்டி கணக்கிடுவதில் நாம் பயன்படுத்தும் குறியீடுகள் :

P — அசல்

n — காலம்

i — வட்டி வீதம்

சூத்திரம் $A = P(1 + i)^n$

எடுத்துக்காட்டு :

ரூ. 500க்கு ஆண்டுக்கு 5% தொடர் வட்டி வீதம் இரண்டு ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் தொடர் வட்டி எவ்வளவு? கூடுதல் என்ன ?

இதை இரண்டு முறைகளில் செய்யலாம்.

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்தால்,

$$A = P(1 + i)^n$$
$$= 500\ (1 + 0{\cdot}05)^2$$
$$= 500 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$
$$= 551\text{-}25.$$

கூடுதல் = ரூ. 551-25

வட்டி = ரூ. 551-25 — ரூ. 500

= ரூ. 51-25.

மாற்று முறை

முதல் வருட அசல் = ரூ. 500

வட்டி = ரூ. 25

இரண்டாம் வருட அசல் = ரூ. 525

வட்டி = ரூ. 26-25

கூடுதல் = ரூ. 551-25

[குறிப்பு : வட்டி கணக்கிட வட்டி வீதத்தை i என்று கொள்வதற்குப் பதிலாக $R\%$ என்று கொண்டால்

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

என்று சூத்திரத்தை மாற்றிக் கொள்ளலாம். இதில் $i = \frac{R}{100}$ என்பதைக் கவனிக்க.]

பயிற்சி 2 - 1

கூட்டு வட்டியையும் கூடுதலையும் காண்க.

	அசல்	வருட வட்டி வீதம்	காலம்
1.	ரூ. 2000	5%	2 ஆண்டுகள்
2.	ரூ. 2500	8%	2 ஆண்டுகள்
3.	ரூ. 3600	9%	2 ஆண்டுகள்
4.	ரூ. 1400	12%	2 ஆண்டுகள்
5.	ரூ. 5000	15%	2 ஆண்டுகள்

விடைகள்

1. ரூ. 2205; ரூ. 205
2. ரூ. 2916; ரூ. 416
3. ரூ. 4277-16; ரூ. 677-16
4. ரூ. 1756-16; ரூ. 356-16
5. ரூ. 6612-50; ரூ. 1612-50

2 - 2 தொடர் வட்டி (அ)
3 ஆண்டுகளுக்குக் கணக்கிடுதல்

இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு அல்லது இரண்டு தவணைகளில் தொடர் வட்டி கணக்கிடுவதுபோல மூன்று ஆண்டுகளுக்குத் தொடர் வட்டி கணக்கிடுவது பற்றிப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ரூ. 2000-க்கு ஆண்டுக்கு 9% வீதம் 3 ஆண்டுகளுக்கு கூடுதல், தொடர் வட்டி கணக்கிடுக.

முதல் ஆண்டு அசல் = ரூ. 2000

வட்டி = ரூ. 180

இரண்டாம் ஆண்டு அசல் = ரூ. 2180

வட்டி = ரூ. 196-20

மூன்றாம் ஆண்டு அசல் = ரூ. 2376-20

வட்டி = ரூ. 213-85 80

கூடுதல் = ரூ. 2590-05 80

= ரூ. 2590-06

கூடுதல் = ரூ. 2590-06

வட்டி = ரூ. 590-06

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 2000(1 + 0 \cdot 09)^3$$

$$= 2000 \times 1 \cdot 09 \times 1 \cdot 09 \times 1 \cdot 09$$

கூடுதல் = ரூ. 2590-06

வட்டி = ரூ. 590-06

2. ரூ. 3000-க்கு 8% வீதம் $2\frac{1}{2}$ ஆண்டுகளில் தொடர் வட்டி காண்க.

முதல் ஆண்டு அசல் = ரூ. 3000

வட்டி = ரூ. 240

இரண்டாம் ஆண்டு அசல் = ரூ. 3240

வட்டி = ரூ. 259-20

மூன்றாவது ஆண்டு அசல் = ரூ. 3499-20

$\frac{1}{2}$ ஆண்டு வட்டி = ரூ. 139-96 80

கூடுதல் = ரூ. 3639-1680

= ரூ. 3639-17

∴ தொடர் வட்டி = ரூ. 639-17

[குறிப்பு : $\frac{1}{2}$ வருட வட்டி 4% எனக் கொள்க.]

பயிற்சி 2 - 2

கூடுதலும், தொடர் வட்டியும் காண்க.

	அசல்	வட்டிவீதம்	காலம்
1.	ரூ. 4000	9%	3 ஆண்டுகள்
2.	ரூ 6000	10%	3 ,,
3.	ரூ. 8000	11%	3 ,,
4.	ரூ. 12000	12%	3 ,,
5.	ரூ. 5000	8%	$2\frac{1}{2}$,,
6.	ரூ. 10000	10%	$2\frac{1}{4}$,,
7.	ரூ. 15000	12%	$2\frac{1}{2}$,,

தொடர் வட்டி காண்க. வட்டி ஒவ்வோர் ஆறு மாதமும் அசலுடன் சேர்க்கப்படுகிறது.

8.	ரூ. 9000	12%	$1\frac{1}{2}$ ஆண்டுகள்
9.	ரூ. 11000	10%	$1\frac{1}{2}$,,
10.	ரூ. 20000	15%	$1\frac{1}{2}$,,

விடைகள்

1. ரூ. 5180-12; ரூ. 1180-12 2. ரூ. 7986; ரூ. 1986 3. ரூ. 10941-05 ; ரூ. 2941-05 4. ரூ. 16859-14; ரூ. 4859-14 5. ரூ. 6065-28; ரூ. 1065-28 6. ரூ. 12425; ரூ. 2425 7. ரூ. 19944-96; ரூ. 4944-96 8 ரூ. 10719-14; ரூ. 1719-14 9. ரூ. 12733-88; ரூ. 1733-88 10 ரூ. 24845-94; ரூ. 4845-94.

2 - 3 தொடர் வட்டி (ஆ)

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒருவர் 6% தொடர் வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் ஒவ்வோர் ஆண்டுத் தொடக்கத்திலும் ரூ. 2000 போட்டு வந்தார். மூன்றாம் ஆண்டுக் கடைசியில் அவர் கணக்கில் உள்ள தொகை எவ்வளவு ?

முதல் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அசல்	=	ரூ. 2000
வட்டி	=	ரூ. 120
இரண்டாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் போட்டது	=	ரூ. 2000
இரண்டாம் ஆண்டு அசல்	=	ரூ. 4120
வட்டி	=	ரூ. 247-20
மூன்றாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் போட்டது	=	ரூ. 2000-00
மூன்றாம் ஆண்டு அசல்	=	ரூ. 6367-20
வட்டி	=	ரூ. 382-0320
கூடுதல்	=	ரூ. 6749-2320
	=	ரூ. 6749-23

2. ரூ. 6000-க்கு $7\frac{1}{2}\%$ தொடர் வட்டி வீதம் 3 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகையையும், வட்டியையும் கணக்கிடுக.

$$7\tfrac{1}{2} = 5 + 2\tfrac{1}{2}$$

$$5\% = \tfrac{1}{20}; \quad 2\tfrac{1}{2}\% = \tfrac{1}{2} \times 5\%.$$

முதல் ஆண்டு அசல்	=	ரூ. 6000
5% வீதம் வட்டி	=	ரூ. 300
$2\frac{1}{2}\%$ வீதம் வட்டி	=	ரூ. 150
இரண்டாம் ஆண்டு அசல்	=	ரூ. 6450
5% வீதம் வட்டி	=	ரூ. 322-50
$2\frac{1}{2}\%$ வீதம் வட்டி	=	ரூ 161-25
மூன்றாம் ஆண்டு அசல்	=	ரூ. 6933-75
5% வீதம் வட்டி	=	ரூ. 346-6875
$2\frac{1}{2}\%$ வீதம் வட்டி	=	ரூ. 173-34375
கூடுதல்	=	ரூ. 7453-78125
	=	ரூ. 7453-78
வட்டி	=	ரூ. 1453-78

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் :

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

$$= ரூ.\ 6000\left(1 + \frac{15}{2 \times 100}\right)^3$$

$$= ரூ.\ 6000 \times \frac{43}{40} \times \frac{43}{40} \times \frac{43}{40}$$

$$= ரூ.\ 7453\text{-}78$$

வட்டி = ரூ. 1453-78

3. ரூ. 5000-க்கு 8% தொடர் வட்டி வீதம் $1\frac{1}{2}$ ஆண்டு களில் கூடுதல் எவ்வளவு ? தொடர் வட்டி எவ்வளவு ? (வட்டி 6 மாதத்திற்கு ஒரு முறை சேர்க்கப்படுகிறது.)

முதல் 6 மாத அசல் = ரூ. 5000
வட்டி = ரூ. 200
2ஆம் 6 மாத அசல் = ரூ. 5200
வட்டி = ரூ. 208
3ஆம் 6 மாத அசல் = ரூ. 5408
வட்டி = ரூ. 216-32
கூடுதல் = ரூ. 5624-32

கூடுதல் = ரூ. 5624-32
வட்டி = ரூ. 624-32

[குறிப்பு : 6 மாத வட்டி = $\frac{1}{2} \times 8\% = 4\%$ என்று எடுத்துக் கொண்டு 0.04 ஆல் அசலைப் பெருக்க வேண்டும்.]

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் :

$$P = ரூ.\ 5000,\ i = \frac{1}{2} \times \cdot 08 = \cdot 04;\ n = \frac{18}{6} = 3$$

$$A = 5000\ (1 + 0\cdot 04)^3$$

$$= 5000 \times 1\cdot 04 \times 1\cdot 04 \times 1\cdot 04$$

$$= ரூ.\ 5624\text{-}32$$

வட்டி = ரூ. 624-32

4. ஓர் இயந்திரத்தின் மதிப்பு ரூ. 20000. ஆண்டுதோறும் ஆரம்பத்தில் உள்ள மதிப்பில் 5% வீதம் குறைந்து கொண்டே போகிறது. 3 ஆண்டுகள் கழித்து அதன் மதிப்பு என்ன?

இயந்திரத்தின் தொடக்க மதிப்பு = ரூ. 20000
முதல் ஆண்டில் மதிப்பில் குறைவு = ரூ. 1000

இரண்டாம் ஆண்டு தொடக்க மதிப்பு = ரூ. 19000
இரண்டாம் ஆண்டு மதிப்புக் குறைவு = ரூ. 950

மூன்றாம் ஆண்டு தொடக்க மதிப்பு = ரூ. 18050
மூன்றாம் ஆண்டு மதிப்புக் குறைவு = ரூ. 902-50

மூன்றாம் ஆண்டு இறுதி மதிப்பு = ரூ. 17147-50

இதைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் செய்யலாம்.

$$A = P(1+i)^n$$
$$= 20000\,[1+(-05)]^3$$
$$= 20000 \times \cdot 95 \times \cdot 95 \times \cdot 95$$
= ரூ. 17147-50

பயிற்சி 2 - 3

1. ஒருவர் 6% தொடர் வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் ஒவ்வோர் ஆண்டுத் தொடக்கத்திலும் ரூ. 3000 போட்டு வந்தார். மூன்றாம் ஆண்டு இறுதியில் வங்கியில் அவரது கணக்கில் இருந்த தொகை என்ன?

2. ஒரு வியாபாரி ஒவ்வோர் ஆண்டுத் தொடக்கத்திலும் ரூ. 4000 வீதம் 8% தொடர் வட்டி கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் போட்டு வந்தார். $2\frac{1}{2}$ ஆண்டு இறுதியில் வங்கிக் கணக்கை முடித்துக் கொண்டார். வங்கி அவருக்கு எவ்வளவு திருப்பிக் கொடுத்தது?

3. ஒரு வியாபாரி 9% தொடர் வட்டி தரும் ஒரு வங்கியில் ரூ. 15000 போட்டு ஒவ்வோர் ஆண்டு இறுதியிலும் ரூ. 5000 வீதம் மூன்று தடவைகள் திரும்ப எடுத்துக்கொண்டார். மூன்றாமாண்டு இறுதியில் வங்கியில் எவ்வளவு மீதி இருக்கும்?

4. ஒரு நகரத்து மக்கள் தொகை ஒவ்வொரு பத்தாண்டிலும் பத்தாண்டு ஆரம்பத்தில் இருந்ததைப்போல் 5% கூட்டிக் கொண்டு வந்தது. 1940 ஆம் ஆண்டு ஆரம்பத்தில் அதன் மக்கள் தொகை 640000 என்றால் 1970 ஆம் ஆண்டு தொடக்கத்தில் மக்கள் தொகை என்ன ?

5. ஓர் இயந்திரத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அந்த ஆண்டு தொடக்கத்திலிருந்த மதிப்பில் 10% குறைந்தது, இப்பொழுது அதன் மதிப்பு ரூ. 12000 என்றால் 3 ஆண்டுகள் கழித்து அதன் மதிப்பு என்ன ?

6. ஓர் இயந்திரத்தின் மதிப்பு வருடத்திற்கு 6% குறைந்து வருகிறது. இப்பொழுது ரூ. 25000க்கு வாங்கிய இயந்திரத்தை இன்னும் மூன்று ஆண்டுகள் கழித்து என்ன விலைக்கு விற்கலாம்?

விடைகள்

1. ரூ. 10123-85 2. ரூ. 13494-62 3. ரூ. 3034.94 4. 740880 5. ரூ. 8748 6. ரூ. 20764-60.

கணித மன்றம் — மேடை 7

1. அன்பு, அழகன், அறிவு ஆகிய மூவரும் வெவ்வேறு பள்ளிகளில் படிக்கின்றனர். நாளை அவர்களுக்குத் தேர்வு.

அன்பு, மணி பள்ளியில் படிக்கவில்லை. அழகன் பன்மக்கள் பள்ளியில் படிக்கவில்லை. மணி பள்ளி மாணவர்க்குக் கணிதத்தில் தேர்வு இல்லை. பன்மக்கள் பள்ளியில் ஆங்கிலத்தில் தேர்வு. அழகனுக்கு அறிவியல் தேர்வு இல்லை. யார், யார் எப் பள்ளியில் படிக்கிறார்கள் ? என்ன தேர்வு எழுதுகிறார்கள் ? மூன்றாம் பள்ளியின் பெயர் வேண்டுமா ? உங்கள் பள்ளியின் பெயரையே கொள்ளுங்கள்.

2. என்னிடம் சில கோழிகளும், சில ஆடுகளும் உள்ளன. அவற்றின் கால்களின் எண்ணிக்கை 20. மொத்த உருப்படிகள் 8 ஆனால், எத்தனை ஆடுகள் என்னிடம் உள்ளன ?

8. கணித தருக்கமுறை

1 - 1 கணிதக் கூற்றுகள்

(அ) கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்களைக் கவனிக்கவும்.

1. இந்தியா 1947-ஆம் ஆண்டில் விடுதலை பெற்றது.

2. இந்தியா 1857-ஆம் ஆண்டில் விடுதலை பெற்றது.

3. எவ்வாண்டில் இந்தியா விடுதலை பெற்றது ?

மேற்கண்ட வாக்கியங்கள் ஒவ்வொன்றும் மெய்யா அல்லவா எனக் காண்க.

1 மெய்யென்றும்; 2 மெய்யல்ல வென்றும் காண்கிறோம்.

3 மெய், மெய்யல்ல என அறுதியிட்டுக் கூற முடியாது.

மெய் அல்லது மெய்யல்ல எனக் கூறக்கூடிய வாக்கியங்கள் கூற்றுகள் எனப்படும்.

$8 + 5 = 13$; $3 \times 5 = 35$; $9 - 4 = 6$; $15 \div 3 = 5$ என்பவை கூற்றுகள் ஆகும். இவற்றில்

$8 + 5 = 13$;

$15 \div 3 = 5$ ஆகியவை மெய்க் கூற்றுகள்.

$3 \times 5 = 35$; $9 - 4 = 6$ என்பவை மெய்யல்லாத கூற்றுகள்.

$x + 5 = 13$ என்ற வாக்கியம் மெய்யா அல்லவா எனக் கூற முடியுமா ?

x இன் மதிப்பு தெரிந்தாலே, இக்கேள்விக்கு விடையளிக்க இயலும்.

$x = 8$ என்றால், $x + 5 = 13$ என்பது மெய் வாக்கியம் என்றும், x இன் பிற மதிப்புகளுக்கு இது மெய்யல்ல என்றும் அறிவோம்.

$x+5=13$ என்ற இத்தகைய வாக்கியம் திறந்த வாக்கியம் எனப்படும்.

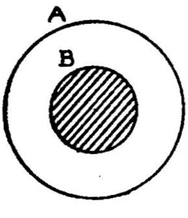
(ஆ) எல்லாம், ஒவ்வொரு, சில.

$x + 5 < 13$ என்பதும் திறந்த வாக்கியம். ஆனால் x இன் பல மதிப்புகட்கு உதாரணமாக $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தில் எம்மதிப்பிற்கும் இவ்வாக்கியம் மெய்யாகிறது. $\{x/x < 7\}$ என்ற கணத்திலுள்ள எல்லா x-களுக்கும் $x + 5 < 13$ என்பது மெய்யாகும். 'எல்லா x-க்கும்' என்பதும் 'ஒவ்வொரு x-க்கும்' என்பதும் ஒரே பொருளைத் தரும்.

எல்லாத் தமிழர்களும் இந்தியர்கள்; ஒவ்வொரு தமிழனும் இந்தியர், என்ற இரு கூற்றுகளும் ஒரே பொருள் தருவன.

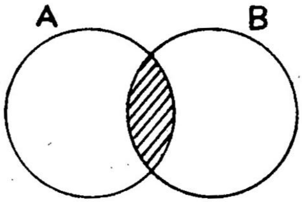
இதனையே, ஒருவர் இந்தியரல்ல வெனின், அவர் தமிழரல்ல எனக் கூறலாம். ஆனால், ஒருவர் தமிழரல்ல எனின், அவர் இந்தியரல்ல எனக் கூறமுடியுமா? சில இந்தியர்கள் தமிழர்கள் என்பது மெய்க் கூற்றல்லவா? சில இந்தியர்கள் தமிழர்கள் என்றால் தமிழரல்லாத இந்தியர் ஒருவராவது உண்டு என்று கூறலாம்.

இக் கருத்துகளை வென்படம் மூலம் விளக்குவோம்.



B, *A*இன் உட்கணம்

படம் 8-1.



A, *B* வெட்டுக் கணங்கள்

படம் 8-2.

1. எல்லா *B*-க்களும் *A*-க்களே. ஒவ்வொரு *B*-யும் *A*யே. *A* அல்லாத *B* கிடையாது.
2. சில *A*-க்கள் *B*-க்கள். *B* அல்லாத ஒன்றேனும் உண்டு.
3. சில *A*-க்கள் *B*-க்கள்; சில *B*-க்கள் *A*-க்கள்; *B* அல்லாத *A* ஒன்றேனும் உண்டு. *A* அல்லாத *B*ஒன்றேனும் உண்டு.

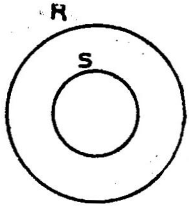
எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. 'எல்லா சதுரங்களும் செவ்வகங்களே.' இதற்குச் சமான வாக்கியங்கள்

(அ) ஒவ்வொரு சதுரமும் செவ்வகமே.

(ஆ) ஓர் உருவம் சதுரமானால், அது செவ்வகமாகும்.

(இ) செவ்வகமல்லாத சதுரம் கிடையாது.



கணம் R : செவ்வகங்கள்

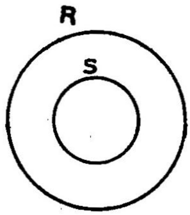
கணம் S : சதுரங்கள்

படம் 8-3.

2. 'சில இணைகரங்கள் செவ்வகங்கள்.' இதற்குச் சமான வாக்கியம் செவ்வகமல்லாத ஓர் இணைகரமாவது உள்ளது.

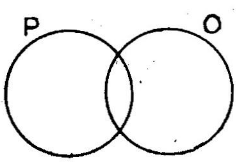
கணம் P : இணைகரங்கள்

கணம் R : செவ்வகங்கள்



படம் 8-4.

3. 'சில பகா எண்கள் ஒற்றை எண்கள்' என்றால் ஒற்றை எண்களல்லாத ஒரு பகா எண்ணாவது உள்ளது என அறிகிறோம். எடுத்துக்காட்டுத் தர இயலுமா ?



P : பகா எண்கள் கணம்

O : ஒற்றை எண்கள் கணம்.

படம் 8-5.

மேற்கண்ட படம் 'சில ஒற்றை எண்கள் பகா எண்கள்' என்ற கூற்றிற்கும் பொருந்துகிறதா எனக் காண்க. பகா எண் அல்லாத ஒற்றை எண்ணிற்கு உதாரணம் தருக.

பயிற்சி 1 - 1

கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்களின் சமான வாக்கியங்களை எழுதுக. வென்படம் வரைந்தும் காட்டுக.

1. ஒவ்வொரு செவ்வகத்திலும் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் 90° அளவுடையவை.

2. சில சாய்வு சதுரங்கள் சதுரங்களாகும்.

3. 4இன் மடங்குகள் சில 3இன் மடங்குகளாகும்.

4. ஒற்றை எண் அல்லாது 5இன் மடங்கு ஒன்றாவது உள்ளது.

5. எல்லா உயர்நிலைப் பள்ளிகளிலும் 10ஆம் வகுப்பு உண்டு.

6. நீலச்சட்டை அணியாத மாணவர் ஒருவரேனும் கிடையாது.

1 - 2 கூட்டு வாக்கியங்கள்

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட வாக்கியங்களைச் சேர்க்க உண்டாகும் வாக்கியம் கூட்டு வாக்கியம் எனப்படும். கணிதத் தருக்க முறையில் கூட்டு வாக்கியங்கள் மிகவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கூட்டு வாக்கியங்களின் வகைகளைக் காண்போம்.

கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்களைக் கவனிக்கவும்.

p : இன்று விடுமுறை.

q : நான் வீட்டிலிருப்பேன்.

இவ்வாக்கியங்களைக் கொண்டு உருவாகும் கூட்டு வாக்கியங்கள் சில :

1. இன்று விடுமுறை மேலும் நான் வீட்டிலிருப்பேன்.

2. இன்று விடுமுறை அல்லது நான் வீட்டிலிருப்பேன்.

3. இன்று விடுமுறை எனில் அப்பொழுது நான் வீட்டி லிருப்பேன்.

(அ) மேலும் என்ற சொல்லால் உண்டான கூட்டு வாக்கியம், தனித்த வாக்கியங்கள் இரண்டும் மெய்யாக இருந்தால் தான், கூட்டு வாக்கியமும் மெய்யாகும். அவற்றில் ஒன்று மெய்யல்ல என்றாலும், கூட்டு வாக்கியம் மெய்யல்ல.

(ஆ) அல்லது என்ற சொல்லால் உருவான கூட்டு வாக்கியம், தனித்த வாக்கியங்களில் ஏதேனும் ஒன்று மெய் யென்றாலும் கூட்டு வாக்கியம் மெய்யாகும். இரண்டும் மெய்யல்ல என்றால்தான், கூட்டு வாக்கியம் மெய்யல்ல.

(இ) எனில், அப்பொழுது என்ற சொற்களால் இணைக் கப்பட்ட கூட்டுவாக்கியம் *நிபந்தனை வாக்கியம்* எனப்படும்.

$p \rightarrow q$ எனக் குறிக்கப்படும். அப்பொழுது என்ற சொல்லை விட்டு விட்டுச் சுருக்கமாக, p எனில் எனக் கூறலாம்.

p எனில் q என்பதில், p என்பது கொள்வாக்கியம் எனவும், q என்பது விளைவாக்கியம் எனவும் அழைக்கப்படும். கணித தருக்க முறையில் இது மிகவும் பயன்படுத்தப்படும்.

(ஈ) அல்ல : p இன்று விடுமுறை என்பது ஒரு கூற்றானால், அதன் எதிர்மறை இன்று விடுமுறையல்ல. இதனை $\sim p$ என்ற குறியீட்டாலும், p அல்ல என்ற சொற்றொடராலும் குறிப்போம்.

p மெய்யானால், $\sim p$ மெய்யல்ல ;

p மெய்யல்ல எனில், $\sim p$ மெய் என்பது வெளிப்படை.

2 - 1 கணிதத் தொகுப்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உட்கோணங்களும் சேர்ந்து இரண்டு செங்கோணத்திற்குச் சமம் என்று கற்றுள்ளீர்கள். பல

மூக்கோணங்கள் வரைந்து அவற்றின் உட்கோணங்களை அளந்து இவ்வுண்மையினைப் பெற்றீர்கள்.

சில சோதனைகளின் அடிப்படையில் ஒரு பொதுக் கருத்தை வெளியிடக் கூடாது என்பதனைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு விளக்கும்.

$n \in N$ ஆனால் $n^2 + n + 41$இன் தன்மை என்ன எனக் காணலாம் :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 + n + 41$	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151

இவ்வுதாரணங்களைக் கொண்டு $n^2 + n + 41$ எப்பொழுதும் ஒரு பகா எண் என்ற முடிவிற்கு வர முற்படக் கூடாது.

ஏனென்றால், $n = 40$ ஆனால், $n^2 + n + 41 = 1681 = 41 \times 41$

எனவே, சில சோதனைகள் மூலம் காண்பவற்றினை உண்மைகளாகக் கொள்வது கூடாது. ஒரு வாக்கியம் மெய் யென்று கற்பிக்கப்பட வேண்டுமென்றால், நாம் கணித தருக்க முறைகள் மூலம் அதனை நிறுவுதல் வேண்டும்.

புள்ளி, கோடு, தளம் போன்ற வரையறுக்கப்படாத சொற்களையும் மெய்யெனக் கொண்ட சில அடிகோள்களையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, அவற்றினின்று வரையறுக்கப்பட்ட சொற்களையும், தேற்றங்கள் எனப்படும் மெய் வாக்கியங்களையும் தருக்க முறையில் பெறுதலே கணிதத் தொகுப்பு எனப் படும்.

2500 ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே, கிரேக்கர்கள் இத்தருக்க முறையினை ஜியோமிதிக்குப் பயன்படுத்தினார்கள். கி.மு. 300 ஆம் ஆண்டு வாக்கில் வாழ்ந்த இயூக்ளிட் என்பவர் அவற்றைத் தொகுத்து 400க்கும் மேற்பட்ட தேற்றங்களை வெளியிட்டார்.

இன்றளவும் அவற்றின் நிரூபண முறைகள் வியக்கத் தக்கனவாக உள்ளன. இயூக்ளிட் கீழ்க் கண்ட 5 அடிகோள்களைக் கொண்டார்.

1. இரு புள்ளிகளைச் சேர்த்து ஒரு கோடு வரைய முடியும்.

2. ஒரு கோட்டிற்குத் தொடக்கப் புள்ளியும் கிடையாது; முடிவுப் புள்ளியும் கிடையாது.

3. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரத்திற்கு ஒரு வட்டம் வரைய முடியும்.

4. செங்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

5. இரு கோடுகளை மற்றொரு கோடு வெட்ட உண்டாகும் உட்கோணங்களின் கூடுதல் இரு செங்கோணத்திற்குக் குறைவானால் இக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்.

மேற்கண்ட 5 அடிகோள்களைக் கொண்டு அடையப் பெற்ற இயூக்ளிடின் ஜியோமிதி வியப்பிற்குரியது. அவ்வடிகோள்களில் மாற்றங்கள் செய்யப்பட்ட புதுவகை ஜியோமிதி முறைகள் உருவாகியுள்ளன. லோபோ ஷெவ்ஸ்கி, ரீமான், போல்யாய் ஆகிய மூவர் உருவாக்கிய ஜியோமிதிகள் புதிய வரலாறு படைக்கின்றன. இவற்றைப்பற்றி உயர்கணிதம் படிக்கும்பொழுது விரிவாக அறிய இயலும்.

2 - 2 நேரிடை நிரூபண முறை

'எனில், அப்பொழுது' என்ற கூட்டு வாக்கியம் கணிதத் தருக்க முறையில் மிகவும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$p \rightarrow q$ என்பதில், P கொள் வாக்கியமெனவும், q விளை வாக்கியமெனவும் அறிந்தீர்கள்.

$p \rightarrow q$ என்பது அடிகோள் அல்லது முன்னரே அறிந்த உண்மை என்போம். கொள் வாக்கியம் மெய்யெனில், விளை வாக்கியமும் மெய்யாகும் எனப் பெறுவோம்.

நேரிடை நிரூபண முறை:

அடிகோள் : $p \to q$ (p எனில் q)

கொள்கை : p மெய்

முடிவு : q மெய்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. அடிகோள் : முதல் மதிப்பெண் பெறுபவர் அரசு உதவித் தொகை பெறுவர்.

கொள்கை : குப்பன் முதல் மதிப்பெண் பெற்றுள்ளார்.

முடிவு : குப்பன் அரசு உதவித் தொகை பெறுவார்.

2. அடிகோள் : ஒரு முக்கோணத்தின் கோண அளவு களின் கூடுதல் $180°$ ஆகும்.

கொள்கை : ABC ஒரு முக்கோணம்.

முடிவு : $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

மேலும், $p \to q$, $q \to r$ ஆனால், $p \to r$ ஆகும்.

3. அடிகோள்கள் : 1. சதுரமெனின் அது செவ்வகமாகும் $p \to q$.

2. செவ்வகமெனின் அது நாற்கர மாகும் $q \to r$.

கொள்கை : $ABCD$ ஒரு சதுரம்.

முடிவு : $p \to q$ மேலும் $q \to r$ எனவே $p \to r$

அதாவது சதுரமெனின் அது நாற்கரமாகும்.

எனவே $ABCD$ ஒரு நாற்கரமாகும்.

வரையறுக்கப்பட்ட சொற்கள் :

மையம், ஆரம், கோடு, பரிதி, நாண், செங்கோணம், முக்கோணம், செங்குத்து, கர்ணம், சமம், சர்வசமம்.

அடிகோள் :

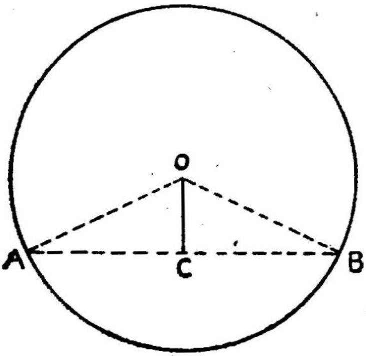
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமும் மற்றொரு பக்கமும், மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்திற்கும்

மற்றொரு பக்கத்திற்கும் சமமானால் அம் முக்கோணங்கள் சர்வ சமமாகும்.

இவற்றைக் கொண்டு கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை நிறுவுவோம் :

தேற்றம் :

" ஒரு வட்டத்தில், மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப் பட்ட செங்குத்து, அந்நாணை இரு சம பாகங்களாக்கும்."



படம் 8-6.

கொள்கை : Oஐ மையமாகவும், OAஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தில், AB ஒரு நாண்; OC, AB-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து.

நிரூபிக்க : $\overline{AC} = \overline{CB}$

நிரூபணம் : OA, OBஐச் சேர்க்க (அடிகோள்)

$\triangle OAC$, $\triangle OBC$ களில்

$m\angle OCA = m\angle OCB = 90°$ (கொள்கை)

ஆரம் OA = ஆரம் OB (வரையறுக்கப்பட்ட சொல்)

$OC = OC$

எனவே, $\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ (அடிகோள்)

$\therefore \quad AC = BC$ (வரையறுக்கப்பட்ட சொல்)

2 - 3 மறைமுக நிரூபண முறை

மறைமுக நிரூபண முறைகள் மூன்று வகைப்படும்.

(அ) புறக்கொள்கை விலக்கல்.

(ஆ) மறுப்பு உதாரணம் தருதல்.

(இ) எதிர் மறையை நிறுவுதல்.

(அ) புறக்கொள்கை விலக்கல் :

ஒரு வீட்டில் ஒரு பண்டம் திருடப்பட்டது என்போம், அவ் வீட்டிற்குள் வருபவர் நால்வரே என்றும், அவர்களில் ஒருவரே திருடர் என்றும் அறிவோம். A என்பவர் திருட்டின் போது வெளியூர் சென்றிருந்தார். B என்பவர் தனது வீட்டை விட்டு அன்று வெளியே செல்லவில்லை. C என்பவர் காந்தீயவாதி. எனவே A, B, C மூவரும் திருடியிருக்க முடியாது. நான்காமவரே திருடியிருப்பார் எனப் பெறுவது புறக்கொள்கை விலக்கல் முறை எனப்படும்.

இம்முறை ஜியோமிதியில் பயன்படுத்தப்படுவதற்கு ஓர் உதாரணம் தருவோம்.

அடிகோள் :

1. ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்களும் சமமானால் அவற்றிற்கெதிரேயுள்ள கோணங்கள் சம அளவுள்ளவை.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் சமமல்லவெனில், பெரிய பக்கத்திற்கெதிரிலுள்ள கோணம் சிறிய பக்கத்திற்கெதிரிலுள்ள கோணத்தைவிடப் பெரியது.

நிரூபிக்கவேண்டியது

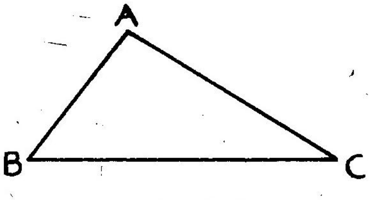
ஒரு முக்கோணத்தில் இரு கோணங்கள் சமமல்லவெனில், பெரிய கோணத்திற்கெதிரிலுள்ள பக்கம் சிறிய கோணத்திற்கெதிரிலுள்ள பக்கத்தைவிடப் பெரியது.

கொள்கை : $\triangle ABC$யில், $m\angle B > m\angle C$

நிரூபிக்க : $AC > AB$

நிரூபணம் : $AC = AB$

ஆனால், $m\angle B = m\angle C$ (அடிகோள் 1)



படம் 8-7.

கொள்கைக்கு முரண் $AC \neq AB$

$AC < AB$ ஆனால் $AB > AC$

$m\angle C > m\angle B$ (அடிகோள் 2)

இதுவும் கொள்கைக்கு முரண் $AB \not> AC$.

எனவே $AC > AB$

கவனிக்க : $AB = AC$, $AB > AC$, $AC > AB$ என்ற மூன்று நிலைகளே சாத்தியம். அவற்றில் இரண்டு நிலைகளைக் கொள்கைக்கு முரண்பட்டவை என்று விலக்கி மூன்றாம் நிலையை உறுதிப்படுத்துகிறோம்.

(ஆ) மறுப்பு உதாரணம் தருதல் :

$n \in N$ என்றால் $n^2 + n + 41$ ஒரு பகா எண் என்பது மெய்யல்லவென்று மறுப்பு உதாரணம் கொடுத்து முன்னரே காண்பித்தோம்.

"4 பக்கங்கள் சமமாகவுள்ள நாற்கரங்கள் சதுரம்" என்ற கூற்றை, ஒரு சாய்வு சதுரத்தினை உதாரணமாகக் கொடுத்து மறுக்கலாம்.

"பகா எண்கள் அனைத்தும் இரட்டை எண்களே" என்ற கூற்றை, 2 ஒரு பகா எண் என்று சுட்டிக் காட்டி மறுக்கலாம்.

(இ) எதிர்மறையை நிறுவுதல் :

$p \rightarrow q$ என்ற சுட்டில் விளை வாக்கியம் q மெய்யல்லவெனில், கொள் வாக்கியம் p-யும் மெய்யல்ல என்று நிறுவலாம். அதாவது, $p \rightarrow q$ என்பதும் $\sim q \rightarrow \sim p$ என்பதும் ஒரு பொருளுடைய சமான வாக்கியங்கள்.

எனவே, $\sim q \rightarrow \sim p$ என நிறுவி, $p \rightarrow q$ என நிரூபித்தல் மறைமுக நிரூபண முறைகளில் மிக முக்கியமானது.

எடுத்துக்காட்டு :

$a \in Z$, a^2 இரட்டை எண் எனில், a இரட்டை எண்ணாகும்.

p : a^2 இரட்டை எண் ; q : a இரட்டை எண்.

$\sim q : a$ இரட்டை எண் அல்ல ; அதாவது, a ஒற்றை எண்ணாகும்.

a ஒற்றை எண் எனில், a^2-ம் ஒற்றை எண்ணாகும்.

அதாவது, $\sim p$ மெய்யாகும்.

$\sim q \rightarrow \sim p$

இது கொள்கைக்கு முரண்பாடு. எனவே, a இரட்டை எண்ணாகும்.

பயிற்சி 2 - 3

1. அடியில் சில அடிகோள்களும், கொள்கைகளும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றினின்று பெறத்தக்க முடிவுகளைக் காண்க.

(அ) ஒரு முக்கோணத்தில், இரு பக்கங்களின் அளவுகளின் கூடுதல் மூன்றாம் பக்கத்தினைவிடப் பெரியது.

ABC ஒரு முக்கோணம்.

(ஆ) ஒருவருக்கு 21 வயது நிரம்பினால், அவருக்கு வாக்குரிமை உண்டு. வாக்குரிமை பெற்றவரில் 25 வயதைக் கடந்தவரே வேட்பாளராக நிற்க முடியும்.

அன்பரசன் வயது 24.

(இ) 12ஆல் வகுபடும் எண் 4ஆல் வகுபடும்.

4ஆல் வகுபடும் எண்ணின் கடைசி இரு இலக்கங்களாலான எண் 4ஆல் வகுபடும்.

(ஈ) ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள்.

$ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

(உ) முழு நிலவெனின், கிளித்தட்டு விளையாடுவர்.

இன்று முழு நிலவு.

(ஊ) ஆண்கள் மட்டுமே நிறக் குருடு உள்ளவர்கள்.

அவர் எனது தாய்.

(எ) கூட்டம் அதிகமெனின், நல்ல படம் ஓடுகிறது.

எனக்கு நுழைவுச் சீட்டு கிடைக்கவில்லை.

(ஏ) $w \to v$, $u \to w$, $x \to u$.

v மெய்யல்ல.

(ஐ) A பச்சையெனின் B சிவப்பாகும், A நிலமெனின் B கருப்பாகும். B சிவப்பெனின் Y வெள்ளையாகும்.

A பச்சை

௨. கீழே கண்ட அடிகோள்களிலிருந்து தேற்றங்கள் எழுதுக.

(அ) *A*-யும் *B*-யும் மாணவர்கள். *C*-யும் *D*-யும் மாணவர்கள்.

*A*இன் சகோதரி *C*

*D*இன் சகோதரி *B*

*A*இன் சகோதரன் *B*

(8 முடிவுகள் காண்க)

(ஆ) *B*இன் சகோதரன் *A*

*A*இன் தந்தை *C*

(இ) *B*இன் சகோதரன் *A*.

*A*இன் சகோதரன் *C*.

*C*இன் சகோதரன் *B*

*D*இன் சகோதரன் *B*.

கணித மன்றம்—மேடை 8

எண்களுக்குப் பதில் எழுத்துகளைக் கொண்ட கீழ்க்கண்ட புதிர்களை விடுவியுங்கள்.

1.

	C	R	O	S	S
	R	O	A	D	S
D	A	N	G	E	R

(*S* = 8 எனக் கொள்க)

௨.

	A	A	A
	B	B	B
	C	C	C
B	A	A	C

கணித மன்றம் — மேடை 9

விந்தை சதுரங்கள்

கீழேயுள்ள சதுரங்களில் நிரல், நிரை, மூலைவிட்டம் ஆகியவற்றின் கூடுதல்கள் சமமாக உள்ளன. அவற்றிற்கடுத்தாற்போல் அவ்விந்தை சதுரங்கள் அமைக்கப்பட்ட முறையைத் தெரிவிக்குமாறு சதுரங்கள் உள்ளன.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கற்க கசடற

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :
லக்ஷ்மி ஆப்செட் பிரிண்டர்ஸ்,
சிவகாசி - 626 123.