த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண் — 449

பன்மாறித் தொகைகளும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளும்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
வை. செல்வமுத்து,
கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—May, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 449

© Tamil Nadu Text Book Society

MULTIPLE INTEGRALS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. SELVAMUTHU

Price Rs. 3–45

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பன்மாறித் தொகைகளும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளும்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 449ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 484 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1. பன்மாறித் தொகைகள்	...	1
2. பன்மாறித் தொகைகளின் நடைமுறைப் பயன்கள்	...	58
3. சுழற்சி கன உருவத்தின் கன அளவு காணல்		65
4. வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்	...	83
மேற்கோள் நூற்பட்டியல்	...	120
கலைச்சொற்கள்	...	121

பன்மாறித் தொகைகள்

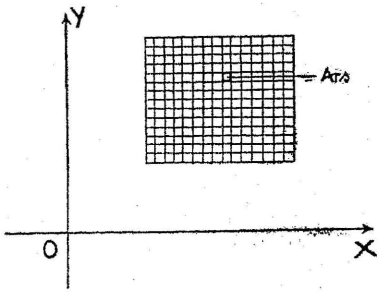
(Multiple Integrals)

$[a, b]$ எனும் இடைவெளியில், சார்பு $f(x)$-ன் தொகையான $\int_a^b f(x)\,dx$ ஐ வரையறை செய்ய, $[a, b]$ ஐ சிறுசிறு இடைவெளிகளாகப் பகுத்தோம். அச்சிறு இடைவெளிகளுள் $f(x)$-ன் வரம்புகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளின் துணையால், $\int_a^b f(x)\,dx$ ஐ வரையறுத்தோம். இத் தொகை, வளைவரை $f(x)$, X அச்சு, $x = a$, $x = b$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவைக் குறிக்கிறது என்பதையும் அறிந்துள்ளோம்.

இதே போன்று, $f(x, y)$ எனும், ஓர் இருமாறிச் சார்பின் ரீமன் தொகையை, ஒரு செவ்வக அரங்கில் வரையறுக்க, செவ்வகத்தை, சிறுசிறு செவ்வகங்களாகப் பகுத்து, அச் சிறு செவ்வகங்களில் $f(x, y)$-ன் வரம்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும். ஒற்றை மாறிச் சார்பின் தொகை, ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பளவைக் குறிப்பது போல் இரு மாறிச் சார்பின் தொகை, பொதுவாக, ஒரு கன அளவைக் குறிப்பிடும்.

இரு பரிமாண அரங்கில் (Two-dimensional domain) உள்ள எளிய உருவம் செவ்வகமாதலால், முதலில் ஒரு செவ்வகத்தில் $f(x, y)$-ன் இரு மாறித் தொகையை வரையறுப்போம். அதனை, மற்ற அரங்குகளுக்கு, விரிவு படுத்திக் கொள்ளலாம்.

ஒரு செவ்வக அரங்கில், $f(x, y)$ எனும் சார்பின் இருமாறித் தொகையின் வரையறை :



படம்-1.

R என்ற செவ்வகத்தில், வரையறுக்கப்பட்ட வரம்புள்ள ஒரு சார்பு $f(x, y)$ என்க. ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாகப் பல நேர் கோடுகளை வரைந்து, R-ஐ சிறுசிறு செவ்வகங்களாகப் பகுத்திடுக. இதனை R-ன் ஒரு பகுப்பு முறை என்கிறோம். சிறு செவ்வகங்களுள் ஒன்று A_{rs} என்க. அதில் $f(x, y)$-ன் மேல் வரம்பு M_{rs}, கீழ் வரம்பு m_{rs} எனவும் கொள்க. A_{rs}-ன் பரப்பளவு ρ_{rs} என்க.

இப் பகுப்பில் உள்ள மொத்த சிறு செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கை 'mn' எனக் கொள்க.

கீழ்க்காணும் இரு தொகைகளைக் கணக்கிடுவோம் :

$$S = \sum_{r=1}^{n} \sum_{0-1}^{n} M_{rs} \rho_{rs}$$

$$s = \sum \sum m_{rs} \rho_{rs}$$

இவைகளுக்கு முறையே, தோராய மேற்தொகை (upper approximate sum), தோராய கீழ்த் தொகை (lower approximate sum) எனப் பெயராகும். R-ன் பல்வேறு பகுப்பு முறைகளைக் கணக்கிடும் போது, S, s-ன் மதிப்புகள் மாறுகின்றன. ஆயினும், R-ல் $f(x, y)$-ன் மேல் வரம்பு M, கீழ் வரம்பு m என்றால்,

R-ன் பரப்பளவு $\triangle$ என்றால்,

எந்தப் பகுப்பு முறையிலும்,

$$S \geqslant m \triangle$$

$$s \leqslant M \triangle$$ எனக் காணலாம்.

இவ்வாறு R-ன் அனைத்து பகுப்பு முறைகளுக்கும், தோராய மேற்தொகை (S) களுக்கும் ஒரு கீழ் வரம்பு உண்டு ; கீழ்த் தொகை (s) களுக்கு ஒரு மேல் வரம்பு உண்டு. இவ் வரம்புகளுக்கு, முறையே ரீமன் மேற் தொகை (J), ரீமன் கீழ்த் தொகை (I) எனப் பெயராகும். இதனை,

$$J = \overline{\int\int_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$I = \underline{\int\int_R} f(x, y)\, dx\, dy$$ என எழுதுகிறோம்.

இவ்விரு வரம்புகளும் சமமானுல், i.e., $I = J$ என்றால், R-ல் $f(x, y)$ ஐ ரீமன் வழியில் தொகைப் படுத்தலாம் என்று கூறு கிறோம். அப் பொது மதிப்பை, R-ல் $f(x, y)$-ன் ரீமன் தொகை எனக் குறிப்பிடுகிறோம். அதனை,

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$$ என எழுதுகிறோம்.

குறிப்பு 1 : $m\triangle \leqslant s \leqslant S \leqslant M\triangle$ என்பதை எளிதில் உணரலாம்.

குறிப்பு 2 : ரீமன் தொகையின் இவ் வரையறையை, இரண் டுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் விரிவு படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 3 : இரு மாறிச் சார்பின் தொகையின் வரையறை, ஒற்றை மாறிச் சார்பின் தொகை வரையறையைப் போன்றே அமைந்துள்ளதால், ஒற்றை மாறிச் சார்பின் தொகைகளுக்கு உரிய இயல்புகளையும், தேற்றங்களையும் தேவையான சிறு மாற்றங்க ளுடன் இரு மாறித் தொகைகளுக்கு விரிவுபடுத்திக் கொள்ளலாம்.

டார்போவின் தேற்றம் (Darboux's theorum) :

கொடுக்கப்பட்ட ஒருசிறு மிகை எண் ϵ-க்குத் தக்க, ஒரு மிகை எண் δ ஐ δ ஐவிடக் குறைந்த பரப்புள்ள சிறு செவ்வகங் களைக் கொண்ட எந்தப் பகுப்பு முறையிலும் $S - J < \epsilon$, $I - s < \epsilon$ என அமையுமாறு, காணலாம்.

(இத் தேற்றத்தை நிரூபிப்பது, இப் புத்தகத்தின் நோக்க மல்ல.)

குறிப்பு 1 : R-ல் உள்ள ஒரு பகுப்பு முறையில், சிறு செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதால், S-ன் மதிப்பு உயர்வதில்லை ; s-ன் மதிப்பு குறைவதில்லை ; என்பதை அறியலாம். எனவே சிறு செவ்வகங்களின் பரப்பளவு பூஜ்யத்தை அணுகும் வகையில், அவைகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியை அணுகினால், $S \to J \times s \to I$ இவ்வாறு I-யும், J-யும் முறையே s, S-ன் வரம்புகள் மட்டுமல்ல, அவற்றின் எல்லை (limit) மதிப்புகளுமாம்.

குறிப்பு 2 : $f(x, y)$ ஒரு தொகைப்படும் சார்பு என்றால், $I = J$

எனவே, S, s-ம் $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ ஐ அணுகும்.

குறிப்பு 3 : சிறு செவ்வகம் A_{rs}-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (ξ_{rs}, η_{rs}) என்றால்,

$$m_{rs} \leqslant f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \leqslant M_{rs}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} m_{rs}\, \rho_{rs} \leqslant \Sigma\Sigma\ \rho\ (\xi_{rs}, \eta^{r}{}_{s}) \cdot \rho_{rs} \leqslant \Sigma\Sigma\ M_{rs}\, \rho_{rs}$$

$$\therefore \quad s \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \cdot \rho_{rs} \leqslant S$$

எனவே R-ல், $f(x, y)$ தொகைபடும் சார்பெனில், சிறு செவ்வகங்களின் பரப்பு, பூஜ்யத்தை அணுகும் வகையில், அவைகளின் எண்ணிக்கை, கந்தழியை அணுகினால்,

$$\left[\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} f(\xi_{rs}, \eta_{r}{}^{s}) \cdot \rho_{rs} \right]$$

என்ற கூட்டுத் தொகையின் எல்லை மதிப்பு $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ ஆகும்.

அதாவது, அனைத்து $\rho_{rs} \rightarrow 0$ என்றால்,

$$\underset{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}}{Lt} \left\{ \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} f(\xi_{rs}, \eta_{rs}) \rho_{rs} \right\} = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

தேற்றம் : ஒரு செவ்வகம் R-ல் வரையறுக்கப்பட்ட, வரம்புள்ள சார்பு $f(x, y)$ என்றால், அதனைத் தொகைப்படுத்த தேவையான அல்லது போதுமான நிபந்தனையாவது : கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க, ஒரு மிகை எண் δ ஐ, S ஐ விடக் குறைந்த பரப்புள்ள சிறு செவ்வகங்களைக் கொண்ட எந்தப் பகுப்பு முறையிலும், $S - s < \in$ ஆக இருக்குமாறு காணலாம்.

(இதனை நிரூபிப்பது, இப் புத்தகத்தின் நோக்கமல்ல.)

குறிப்பு : '$S - s$' ஐ அலைவுத் தொகை (oscillatory sum) எனக் கூறுகிறோம்.

தொகைப் படுத்தத் தக்க சார்புகள்

(1) தொடர்ச்சியான சார்புகளைத் தொகைப் படுத்தலாம்.

$$R \left\{ \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta \end{matrix} \right\}$$

என்ற செவ்வகத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு $f(x, y)$ என்க. $\in$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சிறு மிகை எண் என்றால், R ஐ சிறுசிறு செவ்வகங்ககளாகப் பகுத்து, அச் செவ்வகங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், $f(x, y)$-ன் அலைவு (oscillation) $\in$ ஐ விடக் குறைந்துள்ளவாறு காணலாம்.

i.e., சிறு செவ்வகங்கள் அனைத்திலும் $M_{rs} - m_{rs} < \in$

எனவே, $S - s = \sum_{r=1}^{m} \sum_{0=1}^{n} (M_{rs} - m_{rs}) \rho_{rs}$

$< \Sigma \Sigma \in . \rho_{ks}$

$< \in \Sigma \Sigma \rho_{rs}$

$< \in . \triangle$ (R-ன் பரப்பளவு $\triangle$ என்றால்)

$\therefore$ $\delta(x, y)$ ஐ தொகைப் படுத்தலாம்.

(2) R-ல் $f(x, y)$ வரம்புள்ளதாக, ஆனால், தொடர்ச்சியற்றதாக இருப்பின், தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய சிறு செவ்வகங்களின் மொத்த பரப்பளவு ϵ-க்குக் குறைவாக இருக்குமானால், $f(x, y)$ ஐ தொகைப் படுத்தலாம்.

ϵ என்பது ஏதேனும் ஒருசிறு மிகை எண் என்க. $f(x, y)$ தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய செவ்வகங்களை d செவ்வகங்கள் என அழைப்போம். இவைகளின் மொத்த பரப்பளவு ϵ ஐவிடக் குறைவு எனக் கொள்க. மீதிச் செவ்வகங்களில் $f(x, y)$ தொடர்ச்சியான சார்பாகும். எனவே இச் செவ்வகங்கள் அனைத்திலும் $M_{rs} - m_{rs} < \epsilon$ என அமைக்கலாம். இவைகளை '$R - d$' செவ்வகங்கள் என்போம்.

இப்போது, $$S - s = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} (M_{rs} - m_{rs})\, \rho_{rs}$$

$$= \sum\sum_{'d'} (M_{rs} - m_{rs})\, \rho_{rs}$$

$$+ \sum_{'R-d'} (M_{rs} - m_{rs})\, \rho_{rs}$$

R-ல் $f(x, y)$-ன் வரம்புகள் M, m என்றால்,

$$M_{rs} - m_{rs} \leqslant M - m$$

$$\therefore \quad S - s \leqslant \Sigma\Sigma (M - m)\, \rho_{rs} + \Sigma\Sigma\, \epsilon\, \rho_{rs}$$

$$< (M - m) \sum\sum_{'b'} \rho_{sr} + \epsilon \sum\sum_{'R-d'} \rho_{rs}$$

$$< (M - m)\, \epsilon + \epsilon\, \Delta$$

$$< \frac{\epsilon}{2}$$

$$S - s \leqslant (M - m + \Delta)\, \epsilon$$

$\therefore$ $f(x, y)$ ஐ தொகைப் படுத்தலாம்.

குறிப்பு : $f(x, y)$ வரம்புள்ள சார்பாதலின் அதன் தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகள், எளியவை. (Simple discontinuious).

முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றம் :

$$m \triangle \leqslant s \leqslant \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leqslant S \leqslant M \triangle$$

$$m \triangle \leqslant \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M \triangle$$

R-ல் $f(x, y)$ தொடர்ச்சியான சார்பாயின், அரங்கில் (ξ, η) எனும் ஒரு புள்ளியில்

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \cdot \triangle$$

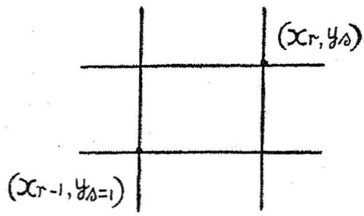
என அமைந்திருக்கும்.

செவ்வக அரங்கில், ஒரு சார்பின் இருமாறித் தொகையைக் கணக்கிடல் :

R எனும் செவ்வகத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு $f(x, y($ என்றால், அதன் இருமாறித் தொகையின் வரையறை என்ன வென்று கண்டோம். இனி அத் தொகையைக் கணக்கிடும் முறையைக் காண்போம்.

தேற்றம் : $R \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ x \leqslant y \leqslant \beta \end{cases}$ என்ற செவ்வகத்தில் $f(x, y)$-ஐ தொகைப்படுத்த முடியுமானால், (α, β)-இல் y-இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\int_a^b f(x, y)\, dx$-ஐக் கணக்கிட முடியுமானால், $\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x. y)\, dx$ என்ற அடுக்குத் தொகை (Rcpeated Intergal)யின் மதிப்பே $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ என்ற இருமாறித் தொகையின் மதிப்பாகும்.

OX, OY ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைந்து, R-ஐ சிறு செவ்வகங்களாகப் பகுத்திடுக. அதில் ஒரு சிறு செவ்வகம் A_{rs} என்க. A_{rs}-இல் $f(x, y)$-யின் வரம்புகள் M_{rs}, m_{rs} என்க.



படம் 2.

எனவே, A_{rs}-ல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும்,

$$M_{rs} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{rs}$$

$f(x, y)$ ஐ x-ன் சார்பாக மட்டும் கருதி, இடைவெளி (x_{rs}, x_r)-ல் முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திஞல்,

$$M_{rs}(x_r - x_{r-1}) \leqslant \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x, y)\, dx \leqslant M_{rs}(x_r - x_{r-1})$$

எனக் கிடைக்கிறது. A_{rs}-ல் உள்ள y-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (i. e., இடைவெளி $(y_s - 1, y_s)$ -யிலுள்ள y-ன் அனைத்து மதிப்பு களுக்கும்) இச் சமமின்மை பொருந்தும்.

$$\text{எனவே,}\quad \phi(y) = \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x, y)\, dx \text{ என்றால்,}$$

$$M_{rs}(x_r - x_{r-1})(y_s - y_{s-1}) \leqslant I' \leqslant J'$$
$$\leqslant M_{rs}(x_r - x_{r-1})(y_s - y_{sr})$$

இங்கு I', J' என்பன (y_{s-1}, y_s)-ல் $\phi(y)$-ன் ரீமன் மேற்தொகையையும், கீழ்த் தொகையையும் குறிக்கும்.

$$\text{i. e.,}\quad I' = \int_{-y_{s-1}}^{y_s} \phi(y)\, dy$$

$$J' = \int_{y_{s-1}}^{-y_s} \phi(y)\, dy$$

சிறு செவ்வகம் A_{rs}-ன் பரப்பளவு ρ_{rs} என்றால்,

$$m_{rs}\,\rho_{rs} \leqslant I' \leqslant J' \leqslant M_{rs}\,\rho_{rs}$$

$$\therefore\quad \Sigma\Sigma\, m_{rr}\,\rho_{rs} \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} \phi(y)\, dy \leqslant \int_{\alpha}^{-\beta} \phi(y)\, dy \leqslant \Sigma\Sigma\, M_{rs}\,\rho_{rs}$$

R-ல் $f(x, y)$-ன் தோராயத் தொகைகள் s, S என்றால்,

$$\text{i. e.,}\quad s \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} \phi(y)\, dy \leqslant \int_{\alpha}^{-\beta} \phi(y)\, dy \leqslant S$$

இதிலிருந்து,

$$I \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} \phi(y)\, dy \leqslant \int_{\alpha}^{-\beta} \phi(y)\, dy \leqslant J$$

எனக் காணலாம்.

$f(x, y)$ ஐ தொகைப்படுத்த முடியுமாதலால்,

$$I = J.$$

$\therefore\ \int_{\alpha}^{\beta} \phi(y)\, dy$-க்கு உண்மை மதிப்பு உண்டு. அதன் மதிப்பு $f(x, y)$-ன் இரு மாறித் தொகைக்கு சமமாகும்.

$$\therefore \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(y)\, dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx$$

துணை முடிவு 1 :

இதே முறையில்,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a}^{b} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy$$ எனவும்

நிறுவலாம்.

துணை முடிவு 2 :

$f(x, y)$ -ன் இரு மாறித் தொகை இருக்குமாயின், அதன் அடுக்குத் தொகைகள் (Repeated Integrals) இரண்டும் சமமாக இருக்கும்.

குறிப்பு : $$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy = \frac{1}{2}$$

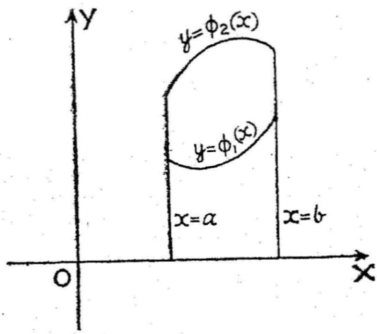
$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx = -\frac{1}{2}$$

இங்கு $f(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$ என்ற சார்பு, R $\begin{Bmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{Bmatrix}$ என்ற சதுரத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

இச் சதுரத்தில், (0, 0) என்ற புள்ளிக்கு அண்மையில் $f(x, y)$ கந்தழியை அணுகுவதால், சார்பு வரம்புக்கு உட்படவில்லை. (0, 0)-ல் $f(x, y)$-க்கு ஒரு மதிப்பும் தேருது. (Indeterminate) இதனுல்தான், மேற்கண்ட இரு அடுக்குத் தொகைகளும் சமமாக இல்லை.

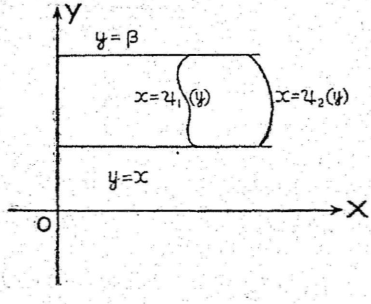
ஏதேனுமொரு இரு பரிமாண அரங்கில் பன்மாறித் தொகை காணல் :

ஒரு செவ்வக அரங்கில், $f(x, y)$ எனும் சார்பின் தொகை காணும் முறையைக் கண்டோம். இதனை மற்ற அரங்குகளுக்கு விரிவுபடுத்த, அவ்வரங்குகளை ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் பகுப்பது அவசியம்.



படம் 3.

ஒரு இரு பரிமாண அரங்கின் மேல், கீழ் வரப்பு (boundary curves) களாக $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ ஆகிய வளைவரைகளையும், மற்ற இருபுறமும் Y அச்சிக்கு இணையான $x=a$, $x=b$ எனும் இரு நேர்க்கோடுகளையும் வரம்பாகக் கொண்டால், அவ்வரங்கு Y அச்சினைப் பொறுத்த வகையில், இருபடித்தானது (quadratic lost Y-axis) எனக் கூறுகிறோம். அரங்கினுள் Y அச்சுக்கு இணையான எந்த நேர்கோடும் அரங்கின் வரம்புகளை இரு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டாது.



படம் 4.

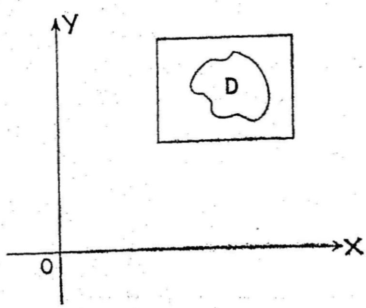
இவ்வாறே, அரங்கின் இரு வரப்புகளாக $x=4_1(y)$, $x=4_2(y)$ என்ற வளைவரைகளையும், மற்ற இருபுறமும் $y=\alpha$, $y=\beta$ ஆகிய நேர்கோடுகளையும் வரப்பாகக் கொண்டால் அவ்வரங்கு X அச்சினைப் பொருத்த வகையில் இருபடித்தானது என்கிறோம். அரங்கினுள், X அச்சுக்கு இணையான எந்த நேர்கோடும் அரங்கின் வரப்புகளை இரு புள்ளிகளுக்குமேல் வெட்டாது.

பொதுவாக, இருபரிமான அரங்கு, மேற்கண்ட வகையில் அமையாவிடில், X, Y ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான நேர் கோடுகள் துணையால், அரங்கை, பல சிற்றரங்குகளாகப் பகுத்து, ஒவ்வொரு சிற்றரங்கும் X அச்சு அல்லது Y அக்சுக்கு இருபடித் தாக அமையுமாறுச் செய்யலாம்.

எனவே ஏதேனும் ஒரு இரு பரிமான அரங்கில் ஒரு சார்பின் இருமாறித் தொகையைக் கணக்கிட, அவ்வரங்கை X அச்சுக்கு அல்லது Y அச்சுக்கு இரு படித்தாக இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

ஏதேனும் ஒரு இருபரிமாண அரங்கில் $f(x, y)$-யின் இருமாறித் தொகை காண :

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு D ஐ முழுவதும் உள்ளடக்கிய ஒரு செவ்வகம் R ஐ வரைக. R-இல் $F(x, y)$ என்னும் சார்பை கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்க.



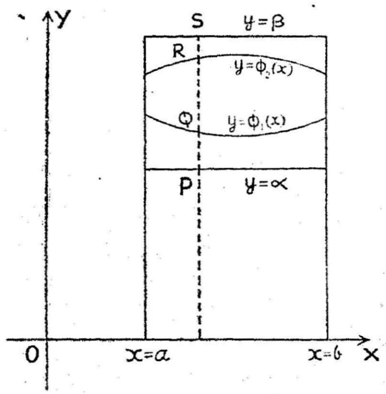
படம் 5.

D யில் $F(x, y) = f(x, y)$ மற்ற பகுதியில் $F(x, y) = 0$ என்க. செவ்வகம் R-இல், $F(x, y)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியு மானால், D-யில் $f(x, y)$ ஐத் தொகைப் படுத்தலாம்.

மேலும் $$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R F(x, y)\, dx\, dy.$$

$x = a$, $x = b$, $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ ஆகிய வரப்புகளைக் கொண்ட அரங்கில், $f(x, y)$-யின் தொகை காண :

[இங்கு, $a \leqslant x \leqslant b$; $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ இரண்டும் தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனவும், அரங்கில் $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ எனவும் கொள்க].



படம் 6.

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு D ஐ முழுவதும் உள்ளடக்கும் ஒரு செவ்வகம் R வரைக. அச் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் $x=a$, $x=b$, $y = \alpha$, $y = \beta$ என்க. ($\alpha \leqslant \phi_1(x) = \leqslant \phi_2(x) \leqslant \beta$ எனக் கொள்க) இச் செவ்வகத்தில் $F(x, y)$ எனும் சார்பை கீழ்க்கண்டவாறு வரை செய்க :

$$D\text{-ல் } F(x, y) = f(x, y)$$

மற்ற பகுதியில் $F(x, y) = 0$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு D-ல் $f(x, y)$ ஐ தொகைப்படுத்த முடியுமானுல், R-ல் $F(x, y)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$$\text{மேலும் } \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b dx \int_\alpha^\beta F(x, y)\, dy.$$

$$= \int_a^b dx \left\{ \int_{\alpha}^{\phi_1(x)} F(x, y)\, dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} F(x, y)\, dy + \int_{\phi_2(x)}^{\beta} F(x, y)\, dy. \right\}$$

இங்கு, $\int_{\alpha}^{\phi_1(x)} F(x, y)\, dy = 0$

[$\because$ இப்பகுதியில் $F(x, y) = 0$]

$$\therefore \int_{\phi_2(x)}^{\beta} F(x, y) = 0$$

$$\therefore \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} F(x, y)\, dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

துணைமுடிவு : இவ்வாறே, $y = \alpha$, $y = \beta$, $x = \psi_1(y)$ $x = \psi_2(y)$ ஆகிய வரப்புகளைக் கொண்ட அரங்கு D-ல், [இங்கு $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ இரண்டு தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனவும், அரங்கில் $\psi_1(y), \leqslant \psi_2(y)$ எனவும் கொள்க].

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

என நிறுவலாம்.

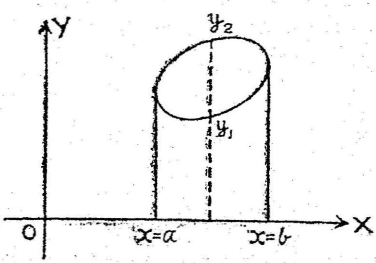
குறிப்பு 1 : $\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$ என்ற அடுக்குத் தொகையைக் கணக்கிட, $f(x, y)$ ஐ முதலில் y ஐப் பொருத்து தொகைப்படுத்த வேண்டும். கிடைக்கும் தொகையை, மீண்டும்

x ஐப் பொருத்து தொகைப்படுத்த வேண்டும். இவ்வரிசை முறையில் மாற்றம் செய்யக் கூடாது.

குறிப்பு 2: $y = \phi(x)$, $x = 4(y)$ போன்ற தொடர்ச்சியான வளைவரைகளை வரப்புகளாகக் கொண்ட ஓர் அரங்கு D-யில் $\iint_D dx\, dy$ என்ற தொகை, அரங்கின் பரப்பளவைக் குறிக்கும்.

நடைமுறை விதி :

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கில் x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = a$, $x = b$ என்க. அரங்கினுள், Y அச்சுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட எந்த நேர்கோடும் அரங்கின் வரப்புகளை இரண்டு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டவில்லை எனக் கொள்க. அந் நேர்கோடு, அரங்கின் வரப்புகளை வெட்டும் புள்ளிகளின் Y ஆய உறுப்புகள் y_1 y_2 என்றால் ($y_1 < y_2$ என்க.)



படம் 7.

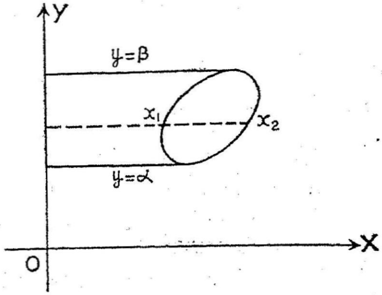
பொதுவாக, y_1, y_2 இரண்டும் x-ன் தொடர்ச்சியான சார்புகளாக இருக்கும். எனவே,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

இதே போன்று, y-ன் எல்லை மதிப்புகள் $y = \alpha$, $y = \beta$ என்றால் X அச்சுக்கு இணையாக, அரங்கினுள் வரையப்பட்ட நேர்க்கோடு, அரங்கின் வரப்புகளை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுமானால், அப் புள்ளிகளின் x ஆய உருபுகள் x_1, x_2 என்றால் x_1, x_2 இரண்டும் y-யின் தொடர்ச்சியான சார்புகளாக இருக்கும்.

எனவே,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$



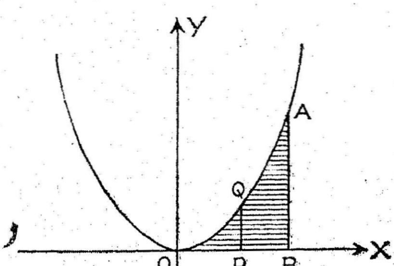
படம் 8.

குறிப்பு : இவ்வாறு செவ்வக மல்லாத மற்ற அரங்குகளில், தொகைப் படுத்தலின் வரிசையை (order of integration) மாற்றும் போது மாறிகளின் எல்லைகள் மாறுகின்றன.

எடுத்துக் காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

X அச்சு, $x = 2a$ போன்ற நேர்கோடு, $x^2 = 4ay$ என்ற பரவளை ஆகியவற்றை வரப்புகளாகக் கொண்ட ஓர் அரங்கு D, என்றால் $\iint_D xy\, dx\, dy$ கணக்கிடுக.



படம் 9.

அரங்கில் x-ன் எல்லா மதிப்புகள் $x = 0$, $x = 2a$ ஆகும். அரங்கை, Y அச்சைப் பொருத்து இரு படித்தானது எனக் காணலாம். அரங்கினுள், Y அச்சுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட நேர்கோடு, அரங்கின் வரப்புகளை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டு கிறது என்க. அப்புள்ளிகளின் Y ஆய உருபுகள் முறையே

$$y = 0, \quad y = \frac{x^2}{4a} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_P^Q xy\,dy.$$

$$= \int_0^{2a} dx \int_0^{x^2/4a} xy\,dy.$$

$$= \int_0^{2a} dx \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2/4a}$$

$$= \int_0^{2a} dx \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x^4}{16a^2}$$

$$= \frac{1}{32a^2} \int_0^{2a} x^5\,dx$$

$$= \frac{1}{32a^2} \quad \frac{(2a)^6}{6} = \frac{a^4}{3}$$

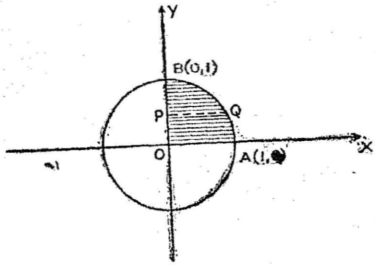
எடுத்துக்காட்டு 2 :

தொகைப் படுத்தலின் வரிசையை மாற்றி, கீழ்க்கண்ட தொகையைக் கணக்கிடுக.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{(e^y+1)\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

இவ்வரங்கின் (D) வரப்புகளாவன :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0$$



படம் 10.

$$\therefore \quad y = \sqrt{1-x^2} \qquad (\text{i.e., } x^2 + y^2 = 1)$$

அரங்கில் $0 \leqslant y \leqslant 1$.

X அச்சுக்கு இணையாக, அரங்கினுள் PQ என்ற நேர்கோடு வரைக. புள்ளி P, Q ஆகியவற்றின் x ஆய உறுப்புகள் முறையே, $x = 0 \quad x = \sqrt{1-y^2}$ ஆகும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்டத் தொகை,

$$= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{(e^y+1)\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{(e^y+1)} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-y^2) - x^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{(e^y+1)} \cdot \left\{ \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right\}_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{e^y+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{e^{-y}\, dy}{1 + e^{-y}}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left[\log (1 + e^{-y})\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\log 2 - \log (1+e^{-1}) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

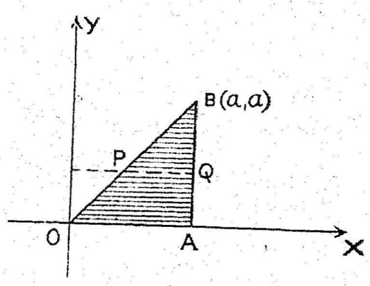
$$\int_0^a \int_0^x \frac{f'(y)\, dx\, dy}{\sqrt{a-x)\,(x-y)}} = \pi\,[f(a) - f(0)]$$

என நிறுவுக.

அரங்கின் வரப்புகள் :

$x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = x$ ஆகும். அரங்கினுள் $O \leq y \leq a$.

X அச்சுக்கு இணையாக PQ ஐ வரைக.



படம் 11.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகை :

$$= \int_0^a dy \int_P^{\phi} \frac{f'(y)\, dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$$= \int_0^a dy \int_y^a \frac{f'(y)\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$$= \int_0^a f'(y)\,dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$x = a\cos^2\theta + y\sin^2\theta$ எனக் கொண்டால்,

$$\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_{\pi/2}^0 \frac{2\sin\theta\cos(y-a)\cdot d\theta}{\sqrt{(a-y)\sin^2\theta\,.\,(a-y)\cos^2\theta}}$$

$$= 2\int_{\pi/2}^0 -\,d\theta = \pi$$

$$\therefore \quad I = \int_0^a \pi f'(y)\,dy = \pi\,[\,f(y)\,]_0^a$$

$$= \pi\,[\,f(a) - f(0)\,]$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

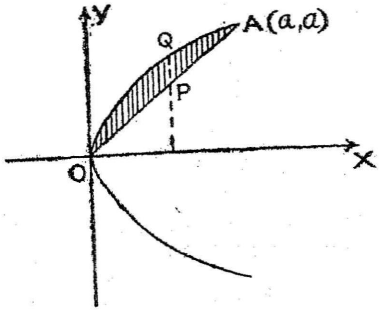
தொகைப்படுத்தலின் வரிசையை மாற்றி, கீழ்க்கண்ட தொகையைக் கணக்கிடுக.

$$\int_0^a \int_{y^2/a}^{y} \frac{y\,dy\,dx}{(a-x)\sqrt{ax-y^2}}$$

அரங்கின் வரப்புகளாவன

$$y = 0, \quad y = a, \quad x = \frac{y^2}{a}, \quad x = y$$

X அச்சுக்கு இணையாக PQ ஐ வரைக.



படம் 12.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \int_0^a dx \int_P^Q \frac{y\,dy}{(a-x)\sqrt{ax-y^2}}$$

$$= \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{ax}} \frac{y\,dy}{(a-x)\sqrt{ax-y^2}}$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{(a-x)} \left\{-\sqrt{ax-y^2}\right\}_{y=x}^{\sqrt{ax}}$$

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{ax-x^2}}{a-x}\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$$

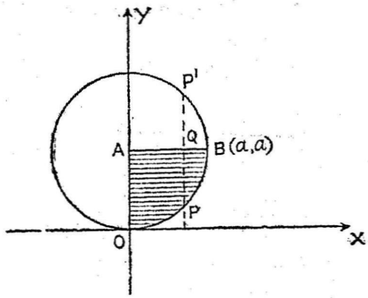
$$= 2a \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta \quad x = a\sin^2\theta$$ எனக் கொள்க.

$$= \frac{\pi a}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

என்ற தொகையில், தொகைப்படுத்தலின் வரிசையை மாற்றுக.



படம் 13.

அரங்கின் வரப்புகளாவன :

$$y = 0,\ y = a,\ x = 0.$$

$$x = \sqrt{2ay - y^2} \quad (\text{i.e.,} \quad x^2 + y^2\ 2ay = 0).$$

அரங்கினுள், Y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு நேர்கோடு வரைக. அது, அரங்கின் வரப்புகளை P, Q என்ற புள்ளிகளிலும், $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ என்ற வட்டத்தின் பரிதியை P, P^1 ஆகிய புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது என்க.

புள்ளிகள், P, P^1 ஆகியவற்றின் y ஆய உருபுகள் முறையே y_1, y_2 என்றால், அவை $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$$y^2 - 2ay + x^2 = 0$$

$$y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

$\therefore$ $y_1 < y_2$ எனக் கொண்டால்,

$$y_1 = a - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y_2 = a + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகை :

$$= \int_0^a dx \int_P^Q f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^a dx \int_y^a f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^a dx \int_{a - \sqrt{a^2 - x^2}}^a f(x, y)\, dy$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

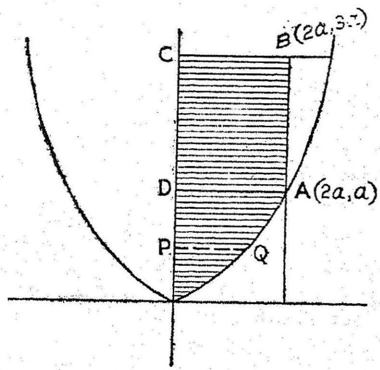
தொகைப்படுத்தலின் வரிசையை மாற்றுக :

$$\int_0^{2a} dx \int_{x^2/4a}^{3a} f(x, y)\, dy.$$

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கின் வகுப்புகளாவன :

$$x = 0, \quad x = 2a.$$

$$y = \frac{x^2}{4a}, \quad y = 3a$$



படம் 14.

X அச்சுக்கு இணையாக வரைந்த எந்த நேர் கோடும், அரங்கின் வலப்புறம், படத்தில் கண்டபடி புள்ளி $A(2a, a)$-க்குக் கீழே பரவளையையும், A-க்கு மேலே நேர்கோடு AB ஐயும் வெட்டுகிறது. எனவே, அரங்கை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

X அச்சுக்குஇணையாக, DA என்ற நேர் கோட்டை வரைக. அது அரங்கை இரு சிற்றரங்குகளாகப் பிரிக்கிறது. இரு சிற்றரங்குகளும் தனித்தனியே X அச்சைப் பொருத்து இருபடித்தானவை.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \iint\limits_{OAD} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{ABCD} f(x, y)\, dx\, dy.$$

சிற்றரங்கு OAD-ல், X அச்சுக்கு இணையாக PQ வரைக.

$$\therefore \iint\limits_{OAD} f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^a dy \int_P^Q f(x, y)\, dx$$

$$= \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4ay}} f(x, y)\, dx.$$

செவ்வகம், $ABCD$-ல்

$$\iint\limits_{ABCD} f(x, y)\, dx\, dy \int_a^{3a} dy \int_0^{2a} f(x, y)\, dx$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4ay}} f(x, y)\, dx + \int_a^{3a} dy \int_0^{2a} f(x, y)\, dx.$$

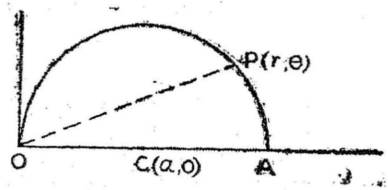
எடுத்துக்காட்டு 7 :

$r = 2a \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ என்ற அறை வட்டத்தில்,

$\iint r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$ ஐ தொகைப்படுத்துக.

இவ் அரை வட்டத்தில் $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

θ-ன் எம்மதிப்பிற்கும், r-ன் மதிப்பு 0 முதல் $2a\cos\theta$ வரை மாறுகிறது.



படம் 15.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \left\{ \frac{r^3}{3} \sin\theta \right\}_{r=0}^{2a\cos\theta}$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3} \cdot \frac{2}{4\cdot 2}$$

$$= \frac{2a^3}{3}$$

மாறி மாற்றம் (Transformation of Variables) ஜாக்கோபியன்கள் (Jacobians):

$u_1, u_2, \ldots u_n, x_1, x_1, x_p$ ஆகிய $(n+p)$ மாறிகளைக்கொண்ட வகைபடும் சார்புகள் $F_1, F_2 \ldots F_n$ என்றால்,

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial_2 u} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவைக்கு (Determinant) F_1, F_2, F_n ஆகிய n சார்புகளின், $u_1, u_2, \dots u_n$ ஆகிய மாறிகளைப் பொருத்த ஜாக்கோபியன் அல்லது சார்பு அணிக்கோவை (Functional Deteminant) எனப்பெயராகும்.

$$\text{இதனை } J \equiv \frac{\partial (F_1, F_2, \dots F_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots u_n)} \text{ என எழுதுகிறோம்.}$$

குறிப்பாக u, v, w ஆகிய மாறிகளைக் கொண்ட வகைபடும் சார்புகள் x, y, z என்றால்,

அதாவது,

$$x = \phi_1 (u, v, w)$$

$$y = \phi_2 (u, v, w)$$

$$z = \phi_3 (u, v, w) \text{ என்றால்}$$

$$\frac{\partial (x, y, y)}{\partial (u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையைக் கணக்கிடலாம்.

பல மாறிகளைக் கொண்டிருப்பினும், ஜாக்கோபியன்கள், ஒற்றை மாறிச் சார்புகளைப் போல் செயல்படுவது அவற்றின் சிறப் பியல்பு ஆகும்.

இயற் கணிதத்தில், அணிக் கோவையின் இயல்புகளிலிருந்து, ஜாக்கோபியன்களின் கீழ்க்கண்ட இயல்புகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

(I) x, y எனும் இரு மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகள் u, v என்றால், [i.e., $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$] இதில், x, y இரண்டும் ξ, η எனும் மற்றிரு மாறிகளின் சார்புகளாயின், [i.e., $x = x(\xi, \eta)$; $y = y(\xi, \eta)$], எல்லா சார்புகளின் பகுதி வகைக் கெழுக்களும் இருக்குமானால்,

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (\xi, \eta)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}$$

நிரூபணம் :

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

i.e., $\frac{\partial (u, v)}{\partial (\xi, \eta)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \cdot \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}$

(ii) குறிப்பாக, $\xi = u$, $\eta = v$ என்றால், இயல்பு I-லிருந்து,

$$1 = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \cdot \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, y)}}$$

(iii) $u = u (r, s, t)$
$v = v (r, s, t)$

இங்கு, r, s, t மூன்றும் x, y என இரு மாறிகளின் சார்புகளாயின்,

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (r, s)} \cdot \frac{\partial (r, s)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (u, v)}{\partial (s, t)} \cdot \frac{\partial (s, t)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (u, v)}{\partial (t, r)} \cdot \frac{\partial (t, r)}{\partial (x, y)}$$

வலப் புறத்திலுள்ள அணிக் கோவைகளைப் பெருக்கி, இதனை நிறுவலாம்.

மாறி மாற்றம் (Transformation of Variables) :

பன்மாறித் தொகை கணக்கிடுவதில், சில சமயம் சார்புகளின் மாறிகளை மாற்றி, எளிதாகத் தொகைப்படுத்தலாம்.

ஒரு பன்மாறிச் சார்பின் மாறிகளை மாற்றி தொகைப்படுத்துவதற்குத் தேவையான நிபந்தனையையும் வழிமுறையையும் முதலில் காண்போம்.

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் (x, y, z) எனும் புள்ளி, (u, v, w) என்ற புள்ளியுடன்

$$\left.\begin{aligned} x &= \phi_1 (u, v, w) \\ y &= \phi_2 (u, v, w) \\ z &= \phi_3 (u, v, w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆகிய சமன்பாடுகள்மூலம், தொடர்பு கொண்டிருந்தால், (u, v, w) வெளி (X, Y, Z) வெளியாக மாற்றப்படுகிறது என்கிறோம். மேற் கண்ட சமன்பாடுகள் (1) ஐ மாறிமாற்றச் சமன்பாடுகள் (Equation of Transformation) என அழைக்கிறோம். புள்ளி (x, y, z) ஐ, புள்ளி $v, u, w)$ ன் பிம்பம் (Image) எனக் கூறுகிறோம். u, v, w வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி (u, v, w)-க்கும் (X, Y, Z) வெளியில் ஒருபிம்பம் இருக்கும். ஆனால் (x, y, z) என்ற புள்ளி, பல புள்ளிகளின் பிம்பமாக அமைந்திருக்கலாம். (x, y, z) ஐ பிம்பமாக கொண்ட ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டும் (u, v, w) வெளியில் இருக்குமானால், கொடுக்கப்பட்ட மாறிமாற்றம் திருப்பத் தக்கது (reversible) எனக் கூறுகிறோம். மாறிமாற்றம் திருப்பத் தக்கதாக அமைவதற்குத் தேவையான நிபந்தனை $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \pm 0$ ஆகும்.

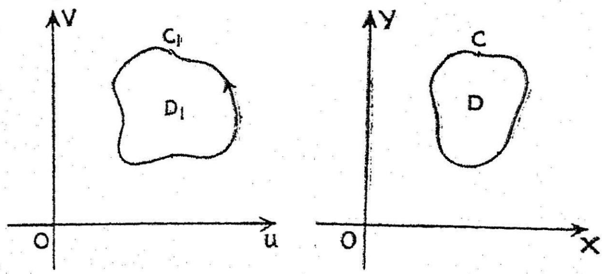
மேலே குறிப்பிட்ட மாறிமாற்றம் திருப்பத்தக்கதாக இருப்பின் மாறிகள் (u, v, w) மூன்றையும் தனித்தனியே (x, y, z)-ன் சார்புகளாக எழுதலாம்.

ஓர் இரு பரிமாண வெளியில், (u, v) என்ற புள்ளி, D_1 எனும் அரங்கை விவரிப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் பிம்பமான (x, y) என்ற புள்ளி, D எனும் அரங்கை விவரிப்பதாகக் கொள்க. மாறி மாற்றச் சமன்பாடுகள்,

$$x = \phi_1 (u, v)$$

$$y = \phi_2 (u, v) \text{ என்க.}$$

அரங்கு D ஐ, D_1-ன் பிம்பம் எனக் கூறுகிறோம். D_1-ன் வரப்பு ஒரு மூடிய வளைவரை C_1 (closed curve) என்றால், D-ன் வரப்பும், ஒரு மூடிய வளைவரை (C) ஆக இருக்கும்.



படம் 16.

ஒரு புள்ளி C ஐ இடஞ் சுழியாக விவரிக்கும் போது, அப் புள்ளியின் பிம்பம், C_1 ஐ இடஞ்சுழியாக விவரிக்குமானால், இம் மாறி மாத்றத்தை, நேர் மாற்றம் (Direct transformation) எனக் கூறுகிறோம். அப்போது ஜாக்கோபியன் $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கும். ($\therefore \quad J < 0$ ஆகும்.)

புள்ளி, C ஐ இடஞ் சுழியாக விவரிக்கும் போது புள்ளியின் விம்பம், C ஐ வலஞ்சுழியாக விவரிக்கு மானால், மாறி மாற்றத்தை தலைகீழ் மாற்றம் (Inverse transformation) என்கிறோம். அப்போது J ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும். $(\therefore \quad J < 0)$

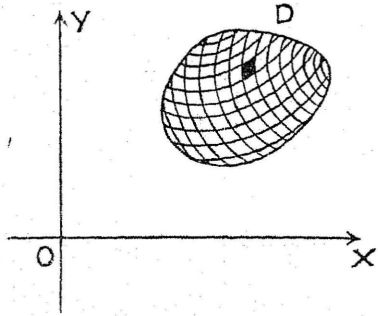
இரு மாறித் தொகையில் மாறி மாற்றம் (Change of variable in a double integral)

ஓர் அரங்கு D-ல் $f(x, y)$ ஐ தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$ என்பன மாறி மாற்றச் சமன்பாடுகளானால், D ஐ பிம்பமாகக் கொண்ட அரங்கம் D_1 என்றால்,

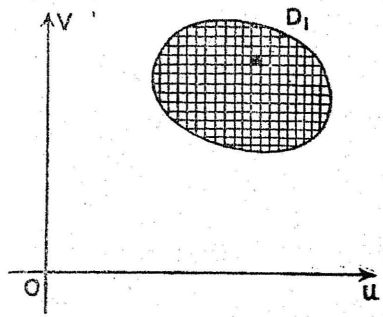
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(\phi_1, \phi_2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du = dv$$

(u, v) தளத்தில், ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைந்து, D ஐ சிறு சிறு செவ்வகங்களாகப் பகுத்திடுக. அதில் ஒரு சிறு செவ்வகம் ρ_{rs} என்க. (X, Y) தளத்தில் இதன் பிம்பம் δ_{rs} என்க. (δ_{rs} ஒரு செவ்வகமாக இருக்குமெனக் கூற இயலாது).

ρ_{rs}-ன் முனைகள், (u, v), $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ என்க.



படம் 17.



படம் 18.

எனவே, d_{rs}-ல் இதன் பிம்பங்கள் முறையே,

(i) $[\varphi_1 (u, v) \phi_2 (u, v)]$

(ii) $[\varphi_1 (u + \Delta u, v) \phi_2 (u + \Delta u, v)]$

$$\therefore \left[\phi_1 (u, v) + \Delta u \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u}, \ \phi_2 (u, v) + \Delta u \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right]$$

(இடை மதிப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி)

(iii) $\phi_1 (u, v) v + \Delta v), \ \phi_2 (u, z + \Delta v)$

$$\text{i.e.,} \left[\phi_1 (u, v) + \Delta v \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \ \phi_2 (u, v) + \Delta v \ \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right]$$

(iv) $[\phi_1 (u + \Delta u, \ u + \Delta v), \ \phi_2 (u + \Delta u, \ v + \Delta v)]$

$$\therefore \left[\varphi_1 (u, v) + \Delta u \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \Delta v \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \right.$$

$$\left. \phi_2 (u_1 v) + \Delta u \cdot \frac{\partial \phi^2}{\partial u} + \Delta u \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right]$$

δ_{rs} மிகச் சிறிய உருவமாதலால், இந் நான்கு புள்ளிகளையும், ஒரு இணைகரத்திற்கு முனைகளாகக் கொள்ளலாம். எனவே அதன் பரப்பளவு $= 2 \times$ முதல் மூன்று முனைகளால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \phi_1 (n, v) & \phi_2 (u, v) & - \\ \phi_1 (u, v) + \Delta u \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \phi_2 (u, v) \Delta u \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \\ \phi_1 (u, v) + \Delta v. \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \phi_2 (u, v) + \Delta v \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \end{vmatrix}$$

எனக் குறிப்பிடலாம்.

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & \\ x + \Delta u \frac{\partial x}{\partial v} & y + \Delta u \frac{\partial y}{\partial v} & \\ x + \Delta v \frac{\partial x}{\partial v} & y + \Delta v \frac{\partial y}{\partial v} & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \Delta u \cdot \frac{\partial x}{\partial u} & \Delta u \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \Delta v \cdot \frac{\partial x}{\partial v} & \Delta v \cdot \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad d_{rs}\text{-ன் பரப்பு} = \Delta u \cdot \Delta v \left| \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial (u \cdot v)} \right|$$

$$\rho_{rs}\text{-ன் பரப்பு} = \Delta x \cdot \Delta y$$

இவ் விரு பரப்புகளும், இரு தளங்களின் ஆரம்பப் பரப்புகள், (Elementary areas) ஆதலால்

$$\Delta x \cdot \Delta y = \Delta u \cdot \Delta v \left| \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial (u \cdot v)} \right| \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

$$\therefore \quad dx\, dy = \left| \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial (u \cdot v)} \right| du\, dv$$

$$\therefore \quad \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f\{\phi_1, \phi_2\} \left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| dx \,.\, dv$$

குறிப்பு : இத் தேற்றத்தை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் விரிவு படுத்திக் கொள்ளலாம்.

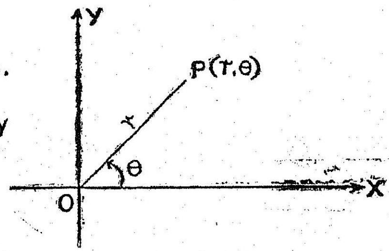
குறிப்பு 2 : பன்மாறிச் சார்புகளின் மாறிகளை மாற்றி, தொகைப்படுத்துவதற்கு, ஜாக்கோபியன் தேவை என்பதை உணரலாம். எனவே, சில முக்கிய மாறி மாற்றத்திற்கு உரிய ஜாக்கோபியன்களின் மதிப்புகளை அறிந்து வைத்திருப்பது பயனுள்ளதாகும்.

சில முக்கிய மாறி மாற்றங்கள்

(i) $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ என்க.

$\therefore \quad J = \dfrac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = r$



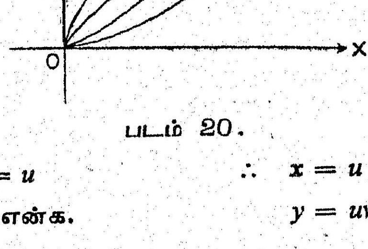
படம் 19.

(ii) $x = r\sin\theta\cos\phi$

$y = r\sin\theta\sin\phi$

$z = r\cos\theta$

$\dfrac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta.$



படம் 20.

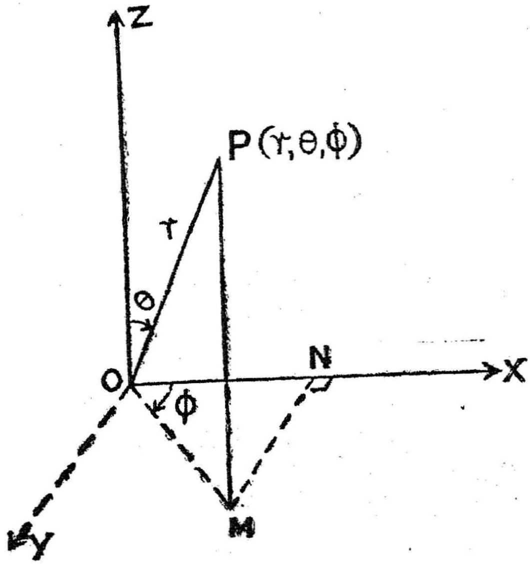
(iii) $x + y = u$

$y = uv$ என்க.

$\therefore \quad x = u(1-v)$

$y = uv$

$\therefore \quad \dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = u.$



படம் 21.

(iv) $x + y + z = 11$ $\qquad\therefore\quad x = u(1-v)$

$z + z = uv$ $\qquad y = uv(1-w)$

$z = uvw$ என்க. $\qquad z = uvw$

$$\therefore\quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v.$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஆய தளத்தின் முதற் கால்பகுதியில் (first quadrant), $a^2y = x^3$, $b^2y = x^3$, $p^2x = y^3$, $q^2x = y^3$ ஆகிய வளைவரைகளுக்கு இடையில் அமைந்த பரப்பளவைக் காண்க.

$a > b$, $p > q$ எனக் கொள்வோம்.

முதல் இரு வளைவரைகளுக்கும், X அச்சு ஒரு தொடு கோடாகும். அடுத்த இரு வளைவரைகளும் Y அச்சைத் தொடுகின்றன.

$u = \frac{x^3}{y} \quad v = \frac{y^3}{x}$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{3x^2}{y} & -\frac{x^3}{y^2} \\ -\frac{y^3}{x^2} & \frac{3y^2}{x} \end{vmatrix} = 8xy$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{8xy} = \frac{1}{8\sqrt{uv}}$$

$\therefore$ குறிப்பிட்ட பரப்பு $= \int\int dx\, dy$.

$$= \int\int \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du \,.\, dv.$$

(u, v) — தளத்தில், அரங்கின் வரப்புகளாவன :

$b^2 \leqslant u \leqslant a^2$

$q^2 \leqslant v \leqslant p^2$

$$\therefore \quad \text{பரப்பளவு} = \int_{u=b^2}^{a^2} \int_{v=q^2}^{p^2} \frac{1}{8\sqrt{uv}}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{8} \int_{b^2}^{a^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \cdot \int_{q^2}^{p^2} \frac{du}{\sqrt{v}}$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)(p-q).$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்ட அரங்கில் $\iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ என்ற தொகையைக் கணக்கிடுக.

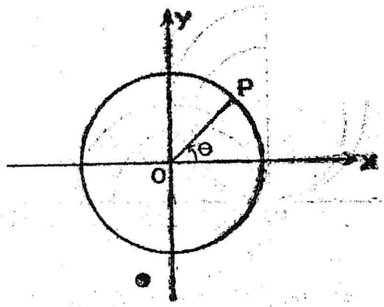
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \text{ என்க.}$$

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = r$$

(r, θ) தளத்தில் $0 \leqslant r \leqslant a$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$



படம் 22.

$$\therefore \quad \iint (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\, |J| \cdot dr\, d\theta$$

$$= \iint r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^a r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

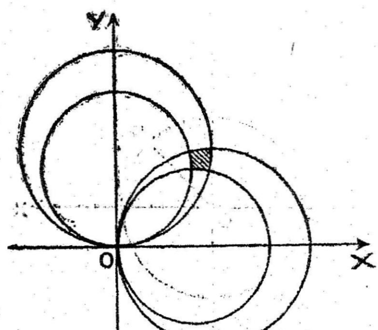
a, a', b, b', என்பன மிகை எண்கள் என்றால்,

$x^2 + y^2 = ax,\ a'x,\ by,\ b'y$ ஆகிய 4 வட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட அரங்கில் $\iint \frac{dx\,dy}{xy}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$a' > a,\ \ b' > b$ எனக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு, ஆயதளத்தின் முதற் காற்பகுதியில் உள்ளது. அரங்கில்,

$$ax \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a'x$$

$$by \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b'y$$



படம் 23.

i.e., $a \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{x} \leqslant a'$

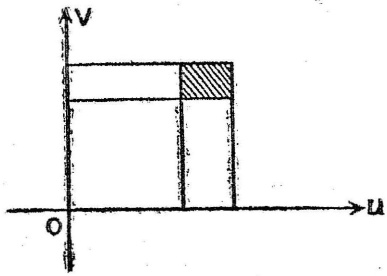
$$b \leqslant \frac{x^2 + y^2}{y} \leqslant b'$$

$$u = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$v = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$ என்க.

$\therefore\ (u, v)$ தளத்தில் $\ a \leqslant u \leqslant a'$

$$b \leqslant v \leqslant b'$$



படம் 24.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{x\cdot 2x-(x^2+y^2)}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & \frac{y\cdot 2y-(x^2+y^2)}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2} - 4 = -\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2}$$

$$\therefore \quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{xy}\ |J| = \frac{1}{xy}\cdot\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{uv}.$$

∴ இ கொடுக்கப்பட்டத் தொகை

$$= \int_a^{a^1}\int_b^{b^1} \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}\,du\,dv$$

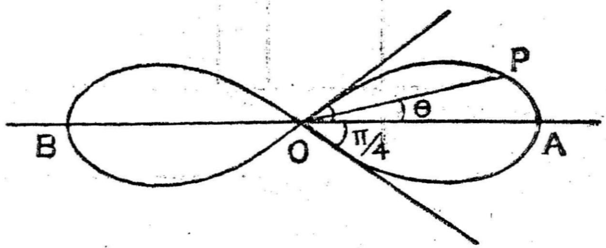
$$= \int_a^{a^1}\frac{du}{u}\cdot\int_b^{b^1}\frac{dv}{v}.$$

$$= \log\frac{a^1}{a}\cdot\ \log\frac{b^1}{b}$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$\gamma^2 = a^2\cos 2\theta$ என்ற பெர்னோலியின் (Bernoulli's lemniscate) ஒரு கண்ணியில் (loop) $\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ ஐ மதிப்பிடுக.

அரங்கில் $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ θ-வின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் γ-ன் மதிப்பு 0 முதல் $a\sqrt{\cos 2\theta}$ வரை மாறுகிறது.



படம் 25.

$$x = \gamma \cos \theta$$

$$y = \gamma \sin \theta$$ என்க.

$$\therefore \quad J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\gamma, \theta)} = x$$

$$\therefore \quad I = \iint \sqrt{a^2 - \gamma^2} \,.\, \gamma \, d\gamma \, d\theta.$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 - \gamma^2} \; \gamma \, d\gamma$$

$$= \int d\theta \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(a^2 - \gamma^2)^{3/2}}{3/2} \right\}_{\gamma = 0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \, (a^3 - a^3 \, 2^{3/2} \sin^3 \theta)$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - 2^{\frac{3}{2}} \sin^3 \theta) \, d\theta.$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (\because \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3\theta \cdot d\theta = 0$$

$$= \frac{a^3 \pi}{6}.$$

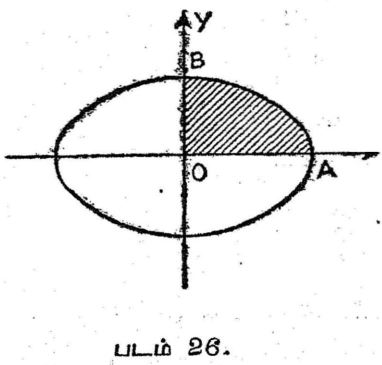
எடுத்துக்காட்டு 5:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வளையத்தின் (ellipse), முதற் காற் பகுதியில்,

$$\iint \frac{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2}}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 x^2 + b^2 y^2}}$$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$x = ax$

$y = by$ என்க.



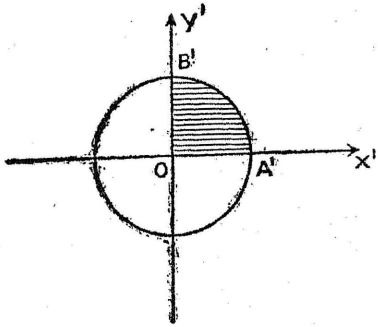
படம் 26.

$$\therefore \quad J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (X, Y)} = ab$$

இம்மாறி மாற்றத்தால், (X, Y)-தளத்தில் அரங்கின் சமன்பாடு

$$X^2 + Y^2 = 1, \; X \geqslant 0$$
$$Y \geqslant 0$$

என ஆகிறது.



படம் 27.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= \iint \left[\frac{a^2b^2 - a^2b^2X^2 - a^2b^2Y^2}{a^2b^2 + a^2b^2X^2 + a^2b^2Y^2}\right]^{1/2} ab\, dX\, dY$$

$$= ab \iint \left[\frac{1 - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2}\right]^{1/2} dX\, dY$$

$X = \gamma \cos\theta$

$Y = \gamma \sin\theta$ என்க.

$$\therefore\ J = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\gamma, \theta)} = \gamma.$$

இப்போது, அரங்கில் $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

$0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$

$$\therefore\ I = ab \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}}\ \gamma\, d\gamma\, d\theta.$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}}\ \gamma\, d\gamma$$

$$= ab\ \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\frac{2\sin^2 t/2}{2\cos^2 t/2}}\ \frac{1}{2}(-\sin dt)$$

($\gamma^2 = \cos t$ எனப் பிரதியிட்டு)

$$= \frac{\pi\, ab}{2} \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t/2\, dt$$

$$= \frac{\pi\, ab}{2} \int \left(\frac{1 - \cos t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{\pi\, ab}{4} \Big[t - \sin t \Big]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi\, ab}{8} (\pi - 2)$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx$$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து,

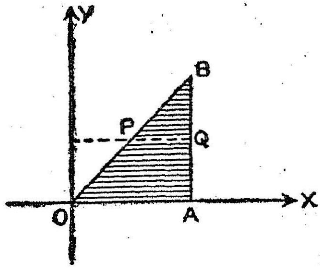
$$\int_0^a dx \int_0^x f(y)\, dy = \int_0^a (a - y) f(y)\, dy$$ எனக் காட்டுக.

இம் முடிவை அடுத்தடுத்து n முறைகள் பயன்படுத்தி

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x f(y)\, dy = \frac{1}{\lfloor n - 1} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$$

என நிறுவுக.

அரங்கின் வரப்புகளாவன : $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = x$. X அச்சுக்கு இணையாக, அரங்கினுள் PQ எனும் நேர்கோடு வரைக.



படம் 28.

தொகைப் படுத்தலின் வரிசையை மாற்றி அமைத்தால்,

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_P^Q f(x, y)\, dx$$

$$= \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx \quad \ldots \quad (1)$$

$f(x, y) = f(y)$ என்க.

$$\therefore \int_0^a dx \int_0^x f(y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(y)\, dx$$

$$= \int_0^a (a - y)\, f(y)\, dy$$

இதில் $a = x$ எனக்கொண்டால்,

$$\int_0^x dx \int_0^x f(y)\, dy = \int_0^x (x-y)\, f(y)\, dy \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இச்சார்பை, மீண்டும் $(0 \leqslant x \leqslant a)$-யில் x-ஐப் பொருத்து தொகைப் படுத்தினுல்,

$$\int_0^a dx \int_0^x dx \int_0^x f(y)\, dy = \int_0^a dx \int_0^x (x-y)\, f(y)\, dy$$

வலப்புறத்தில், தொகைப்படுத்தலின் வரிசையை மாற்ற,

$$\text{வ. பு.} = \int_0^a dy \int_y^a (x-y)\, f(y)\, dx$$

$$= \int_0^a dy\, f(y) \left\{ \frac{(x-y)^2}{2} \right\}_{x=y}^{a}$$

$$= \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^a (a-y)^2\, f(y)\, dy$$

i. e., $\int_0^a dx \int_0^x dx \int_0^x f(y)\, dy = \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^a (x-y)^2\, f(y)\, dy.$

$x = a$ எனக் கொண்டால்,

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x f(y)\, dy = \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^x (x-y)^2\, f(y)\, dy.$$

இவ்வாறே, தொடர்ந்து n—முறைகள் தொகைப்படுத்த,

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x f(y)\, dy = \frac{1}{\lfloor n-1} \int_0^x (x-y)^{n-1}\, f(y)\, dy.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$vz^2 = c^2y \qquad cx^2 = a^2z \qquad ay^2 = b^2x$$

$$vz^2 = 2c^2y \qquad cx^2 = 2a^2z \qquad ay^2 = 2b^2x$$

ஆகிய உருளை (cylinder) களுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் கன அளவு (volume), $\frac{abc}{7}$ என நிறுவுக.

$$u - \frac{z^2}{y}$$

$$v - \frac{x^2}{z}$$

$$w - \frac{y^2}{x}$$ எனப் பிரதியிடுக.

எனவே குறிப்பிட்ட அரங்கில்,

$$\frac{c^2}{b} \leqslant u \leqslant \frac{2c^2}{b}$$

$$\frac{a^2}{c} \leqslant v \leqslant \frac{2a^2}{c}$$

$$\frac{b^2}{a} \leqslant w \leqslant \frac{2b^2}{a}$$

இது ஒரு இணைகரத் திண்மமாகும் (parallelopiped) குறிப்பிட்ட கன அளவு $= \iiint dx\, dy\, dz.$

$$V = \iiint \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right] du\, dv \,.\, dw$$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \\ \frac{2x}{z} & 0 & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} & 0 \end{vmatrix} = 7$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{7} \int_{c^2/b}^{2c^2/b} du \int_{a^2/b}^{2a^2/c} dv \int_{b^2/a}^{2b^2/a} dw$$

$$= \frac{1}{7} \,.\, \frac{c^2}{v} \,.\, \frac{a^2}{c} \,.\, \frac{b^2}{a}$$

$$= \frac{abc}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ என்ற நீள் வளையத் திண்ம (ellipsoid) அரங்கில்,

$\iiint \{a^2 b^2 c^2 - b^2c^2 x^2 - c^2 a^2 y^2 - a^2 b^2 z^2\}^{1/2} dx.dy.dz$ -ன் மதிப்பென்ன ?

$$x = aX$$
$$y = bY$$
$$z = cZ \text{ என்க.}$$

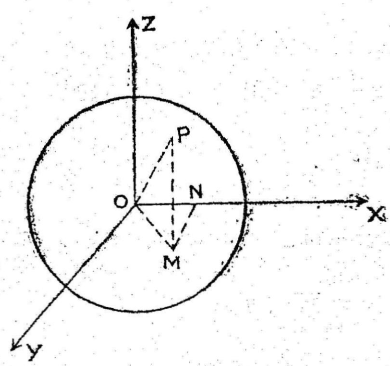
$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = abc$$

இம் மாறி மாற்றத்தால் கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு, $X^2 + Y^2 + Z^2 \leqslant 1$ என்ற கோளமாகிறது. இக் கோளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தொகை $= \iiint \{a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 c^2 X^2 - a^2 b^2 c^2 Y^2 - a^2 b^2 c^2 Z^2\}^{\frac{1}{2}} \times abc\, dX\, dY \cdot dZ.$

$$= a^2 b^2 c^2 \iiint \sqrt{1 - X^2 - Y^2 - Z^2}\, dX\, dY\, Z.$$

$$X = \gamma \sin\theta \cos\phi$$
$$Y = \gamma \sin\theta \sin\phi$$
$$Z = \gamma \cos\theta \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\gamma, \theta, \phi)} = \gamma^2 \sin\theta.$$



படம் 29.

கோள அரங்கில்

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$\therefore \quad I = a^2 b^2 c^2 \int_{\gamma=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{p=0}^{2\pi} \sqrt{1-\gamma^2}\, \gamma^2 \sin\theta \; d\gamma\, d\theta\, d\phi$$

$$= a^2 b^2 c^2 \int_0^1 \sqrt{1-\gamma^2}\, \gamma^2\, d\gamma . \int_0^{\pi} \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\gamma = \sin 4$ எனப் பிரதியிட்டால்;

$$\int_0^1 \sqrt{1-\gamma^2}\, \gamma^2\, d\gamma = \int_0^{\pi/2} \cos 4 . \sin^2 4 . \cos 4\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகை

$$= a^2 b^2 c^2 . \frac{\pi}{16} . 2 . 2\pi$$

$$= \frac{a^2 b^2 c^2 \pi^2}{4}.$$

பீற்ரு, காமா சார்புகள்* (Beta and Gamma Functions)

பீற்ரு சார்பு : $m > 0,\ n > 0$ என்ருல்

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

என்ற தகாத் தொகை (Improper Integral) குவியும். இத் தகாத் தொகையை, பிற்ரு சார்பு அல்லது ஆ(ய்)லரின் முதல் தகாத் தொகை என அழைக்கிருேம்.

---

* இச் சார்புகளின் குவிதல், இயல்புகள் பற்றிய தெளிவான விளக்கத்தை, ஆசிரியரின் "ரீமன் தொகை கணிதம்" என்ற நூலில் காணலாம்.

இச் சார்பின் சில முக்கிய இயல்புகளை அறிந்து கொள்வது, நலமாகும்.

இயல்புகள் :

(i) $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

நிரூபணம் :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$x = 1 - y$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_1^0 (1-y)^{m-1}\, y^{n-1}\, (-dy)$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\, dy$$

$$= \beta(n, m)$$

$$\beta(m. n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$$

நிரூபணம் :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}(x+\overline{1-x})\, dx$$

$$= \int_0^1 x^{m}(1-x)^{n-1}\, dx + \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n}\, dx$$

$$= \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும்,

$$\beta(m+1, n) = \int_0^1 x^m \, d\left\{\frac{(1-x)^n}{-n}\right\}$$

$$= \left[\frac{x^m(1-x)^n}{-n}\right]_0^1 + \frac{m}{n}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n \, dx$$

$$= \frac{m}{n}\beta(m, n+1) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே,

$$\beta(m, n) = \left(\frac{m}{n} + 1\right)\beta(m, n+1)$$

$$= \frac{m+n}{n}\beta(m, n+1) \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இவ்வாறே,

$$\beta(m, n) = \frac{m+n}{m}\beta(m+1, n) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

எனவும் நிறுவலாம்.

சமன்பாடு (3)-லிருந்து

$$\beta(m, n+1) = \frac{n}{m+n}\beta(m, n)$$

nஐ, $(n-1)$ என மாற்றி எழுத

$$\beta(m, n) = \frac{n-1}{m+n-1}\beta(m, n-1)$$

இவ்வாறு, தொடர்ந்து n-ன் மதிப்பைக் குறைத்து எழுதி வர, n ஒரு மிகை முழு எண் என்ருல்,

$$\beta(m, n) = \frac{(n-1)}{m+x-1} \cdot \frac{(n-2)}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+1}\beta(m, 1)$$

இங்கு $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \, dx = \frac{1}{m}$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \frac{\lfloor n-1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} \quad \ldots \quad (5)$$

இவ்வாறே, m ஒரு முழு மிகை எண் என்றால்,

$$\beta(m, n) = \frac{\lfloor m-1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)} \quad \ldots \quad (6)$$

குறிப்பாக, m, n, இரண்டுமே, முழு மிகை எண்கள் என்றால்,

$$\beta(m, n) = \frac{\lfloor m-1 \; \lfloor n-1}{\lfloor m+n-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

காமா சார்பு :

$$n > 0 \text{ என்றால், } \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx$$

என்ற தகாத் தொகை குவியும்.

இத் தொகையை காமா சார்பு அல்லது ஆ(ய்)லரின் இரண்டாம் தகாத் தொகை என அழைக்கிறோம்.

இச் சார்பின் சில முக்கிய இயல்புகளை, கீழே காணலாம் :

இயல்புகள் :

$$= \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

நிரூபணம் :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^n \, d(-e^{-x})$$

$$= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} n x^{n-1} \, dx$$

$$= n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

எனவே, $\lfloor(n) = (n-1)\ \Gamma(n-1)$ என எழுதலாம்.

$$= (n-1)(n-2)\ \Gamma(n-2)$$

இவ்வாறு தொடர்ந்து எழுதிச் செல்லலாம்.

எனவே, n ஒரு மிகை முழு எண் என்றால்,

$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 2\cdot 1\ \Gamma(1)$ ஆகும்.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 2\cdot 1$$

$$= \lfloor n-1.$$

(ii) $n = 0$ என்றால், $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \, dx = \infty.$

எனவே, $\Gamma(0) = +\infty.$

(iii) x ஒரு குறை முழு எண்ணாகவோ (negative integer) பூஜ்யமாகவோ இல்லாவிடில்,

$\Gamma(x).\ \ \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ என நிறுவலாம்.

குறிப்பாக $x = \dfrac{1}{2}$ என்றால்,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

பீற்றா, காமா சார்புகளின் உறவு

$m > 0,\ n > 0$ என்றால்

$$\beta\,(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx.$$

$$\therefore\quad \Gamma(m+n) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{m+n-1}\, dx$$

x-க்குப் பதிலாக 'ax' என எழுத $a > 0$ என்க)

$$\Gamma(m+n) = a^{m+n} \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{m+n-1}\, dx$$

$$a = 1 + y \text{ என்க.}$$

308434

$$\therefore\quad \Gamma(m+n) = (1+y)^{m+n} \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n-1}\, dx \quad \ldots \quad (1)$$

515:35
SEL;3

$$\beta\,(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\, dx$$ என அறிவோம்.

இதில் $x = \dfrac{1}{1+y}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore\quad \beta\,(m, n) = \int_\infty^0 \frac{1}{(1+y)^{m-1}} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+y)^2}\right]^{n-1} \frac{-1}{(1+y)^2}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}}$$

(1)-லிருந்து $(1+y)^{m+n}$-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட,

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty y^{n-1}\, dy\, \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n-1}\, dx.$$

இதனை,

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n-1}\, y^{n-1}\, dx\, dy.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-x}\, x^{m-1}\, dx\,.$$

$$\left\{ x^n \int_1^\infty e^{-yx}\, y^{n-1}\, dy \right\}$$ என எழுதலாம்.*

$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-y}\, y^{n-1}\, dy$ எனக் கொண்டு, இதில்

'y'-க்குப் பதிலாக, $x\,y$ எனப் பிரதியிட்டால் $(x > 0)$

$\Gamma(n) = x^n \int_0^\infty e^{-yx}\, y^{n-1}\, dy$ எனக் காணலாம்.

$$\therefore\quad \beta(m,n) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-x}\, x^{m-1}\, dx \cdot \Gamma(n)$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int_0^\infty e^{-x}\, x^{m-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

* இங்கு, மாறிகளின் வரிசை மாற்றத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனைகள், பாடத் திட்டத்தில் சேர்க்கப்படவில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

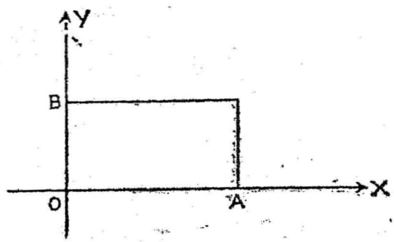
பொருத்தமான அரங்கைத் தேர்ந்தெடுத்து,

$$\iint e^{-(x+y} \; x^{m-n} \, y^{n-1} \, dx \, dy$$ ஐ மதிப்பிடுக.

அதன் துணையால், $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m) \; \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என நிறுவுக

$$R \begin{Bmatrix} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{Bmatrix}$$

என்ற செவ்வக அரங்கை எடுத்துக் கொள்க.



படம் 30.

$$I = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} e^{-(x+y)} \, x^{m-1} \, y^{n-1} \, dx \, dy$$ என்க.

$$= \int_{0}^{a} e^{-x} \, x^{m-1} \, dx . \int_{0}^{b} e^{-y} \, y^{n-1} \, dy.$$

a, *b* இரண்டும் கந்தழியை அணுகும்போது, இவ்வரங்கு ஆய தளத்தின், முதற் காற்பகுதி முழுவதும் வியாபிக்கிறது.

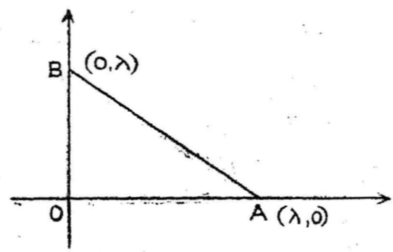
$$\therefore \quad I = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \, x^{m-1} \, dx . \int_{0}^{\infty} e^{-y} \, y^{n-1} \, dy$$

எனவே, $m, n > 0$ என்றால்

$I \cdot \Gamma(m). \;\; \Gamma(n).$ ஆகும் ... ... (1)

இப்போது, $x = 0, y = 0$ $x + y = \lambda$ என்ற வரப்புகளைக் கொண்ட முக்கோண அரங்கை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$I = \iint e^{-(x-y)} x^{m-1} y^{n-1} \, dx \, dy.$$



படம் 31.

$x + y = u$

$y = uv$ என்க.

$$\therefore \quad J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = u.$$

$\therefore$ (u, v) தளத்தில் $0 \leqslant u \leqslant \lambda$

$0 \leqslant v \leqslant 1.$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\lambda} \int_0^{1} e^{-u} \{u(1-v)\}^{m-1} (uv)^{n-1} u \cdot du \, dv$$

$$= \int_0^{\lambda} e^{-u} u^{m+n-1} du \int_0^{1} v^{n-1} (1-v)^{m-1} dv$$

$$= \beta(m, n) \int_0^{\lambda} e^{-u} u^{m+n-1} du$$

($m, n > 0$ எனக் கொள்க.)

λ கந்தழியை அணுகும் போது, இம் முக்கோண அரங்கும், ஆயதளத்தின் முதற் காற்பகுதி முழுவதும் வியாபிக்கிறது.

$$\therefore \quad I \to \beta(m, n) \int_0^\infty e^{-u} u^{m+n-1} \, du$$

$$= \beta(m \cdot n) \Gamma(m + n) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) இவைகளிலிருந்து

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = \beta(m, n) \Gamma(m + n).$$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m + n)} .$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x = 0, y = 0, x + y = 1$ ஆகிய வரப்புகளைக் கொண்ட அரங்கில் $\iint (1 - x - y)^{l-1} x^{m-1} y^{n-1} \, dx \, dy$ ஐ மதிப்பிடுக. (l, m, n அனைத்தும் மிகை எண்கள் என்க)

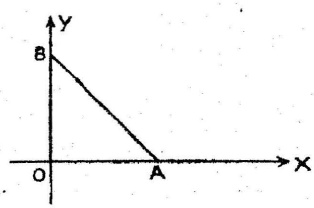
$$x + y = u$$

$$y = uv \text{ என்க,}$$

$$\therefore \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, u)} = u.$$

(u, v)-தளத்தில் $\quad 0 \leqslant u \leqslant 1$

$\qquad\qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$



படம் 32.

$$\therefore \quad \iint (1 - x - y)^{l-1} x^{m-1} y^{n-1} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{l-1} \{u(1-v)\}^{m-1} (uv)^{n-1} u . \, du \, dv$$

$$= \int_0^1 u^{n+n-1} (1-u)^{l-1} du \int_0^1 v^{n-1} (1-v)^{n-1} dv$$

$$= \beta(m+n, l). \quad \beta(m, n)$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)\,\Gamma(l)}{\Gamma(m+n+l)} \cdot \frac{\Gamma(m).\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n).}$$

$$= \frac{\Gamma(l) . \Gamma(m) . \Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}$$

துணை முடிவுகள் :

இதே அரங்கில்

(1) $\iint x^{1/2}\, y^{1/3} (1-x-y)^{2/3}\, dx\, dy$

$$= \frac{\Gamma(5/3)\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(4/3)}{\Gamma(9/2)}$$

(2) $\iint \sqrt{(1-x-y)\,xy}\; dxdy = \dfrac{2\pi}{105}$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; x + y + z = 1$ ஆகிய தளங்களால் கட்டப்பட்ட நான்முகி (tetrahedron) யில்,

$$\iiint (1-x-y-z)^{l-1}\, x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1}\, dx\, dy\, dz \text{ ஐ}$$

மதிப்பிடுக.

$x + y + z = u$ $\quad\therefore\quad x = u(1-v)$

$y + z = uv$ $\quad\quad y = uv(1-w)$

$z = uvw$ என்க. $\quad\quad z = uvw.$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

u, v, w வெளியில்

$$0 \leqslant u \leqslant 1$$

$$0 \leqslant v \leqslant 1$$

$0 \leqslant w \leqslant 1$ இது ஒரு கன சதுரமாகும்.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{l-1} \; \{u(1-v)\}^{m-1}$$

$$\{uv(1-w)\}^{n-1} + (uvw)^{p-1} \, u^2 \, v \; du \; dv \; dw$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{l-1} \, u^{m+n+p-1} \, du \cdot \int_0^1 (1-u)^{m-1} \, u^{m+p-1} \, dv$$

$$\int_0^1 (1-w)^{n-1} \, w^{p-1} \, dw$$

$$= \beta\,(m, n, p, l) \cdot \beta\,(m, n+p) \cdot \beta\,(n \cdot p)$$

$$= \frac{\Gamma(m+n+p) \cdot \Gamma(l)}{\Gamma(m+n+p+l)} \cdot \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n+p)}{\Gamma(m+n+p)} \cdot \frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}$$

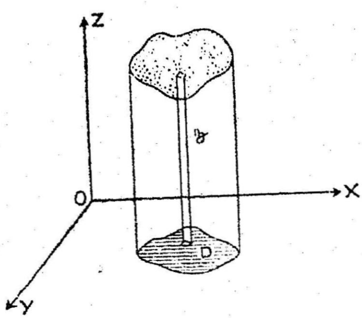
$$= \frac{\Gamma(l) \cdot \Gamma(m) \cdot (n) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(l+m+n+p)} .$$

2. பன்மாறித் தொகைகளின் நடைமுறைப் பயன்கள்

(Practical Application of Multiple Integrals)

கன அளவு காணல் :

ஒற்றை மாறிச் சார்பின் தொகை, 'ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பளவைக் குறிப்பதுபோல், இருமாறிச் சார்பின் தொகை, ஒரு கன அளவைக் குறிப்பிடும்' என்பதை இவ் அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் குறிப்பிட்டிருந்தோம். இருமாறித் தொகையைப் பயன்படுத்தி கன அளவை எவ்வாறு கணிப்பது என்பதை ஈண்டு காண்போம். கொடுக்கப்பட்ட கன உருவத்தின் மேற்பரப்பு (surface of the solid), $z = f(x, y)$ என்க. XY தளத்தில் அதன் அடிப்பாகம், D என்ற அரங்கு என்க. (அதாவது XY தளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட கன உருவத்தின் வீழ்ச்சி (projection) D ஆகும்.



படம் 33.

கன உருவத்தில், Z அச்சுக்கு இணையாகப் பல நேர்கோடுகள் வரைந்து அதனை, $dx\,dy$ அடிப்பரப்பு கொண்ட பல பட்டயங்களாகப் (prisms) பகுக்கலாம்.

ஒரு பட்டயத்தின் உயரம் $= z$

$\therefore$ அதன் கன அளவு $= z\, dx\, dy$ ஆகும்.

எனவே, உருவத்தின் கன அளவு $\iint_D z\, dx\, dy$ ஆகும்.

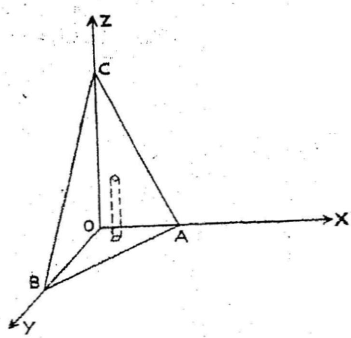
குறிப்பு 1 : கொடுக்கப்பட்ட கன உருவம் X, Y தளத்தின் இரு புறமும் சமச்சீராக அமைந்திருந்தால் $X\, Y$ தளத்தில் அதன் வீழ்ச்சி D என்றால்,

கன அளவு $= 2 \iint_D z\, dx\, dy$ எனக் காணலாம்.

குறிப்பு 2 : $\iiint dx\, dy\, dz$ என்ற மும்மாறித் தொகையும், கன அளவைக் குறிக்கும் என்பதை ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

3 ஆயதளங்களுடன், $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ என்ற தளம் உருவாக்கும் நான்முகி (tetrahedron)யின் கன அளவைக் காண்க.



படம் 34.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ என்ற தளம் ஆய அச்சுகளை A, B, C ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என்க. எனவே, XY தளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட நான்முகியின் அடித்தளம் OAB என்ற முக்கோணமாகும்.

நான்முகியின் மேற்பரப்பு, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

$$\therefore \quad z = c\left[1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right]$$

எனவே நான்முகியின் கன அளவு $\iint\limits_{OAB} z\,dx\,dy$

$$= \iint\limits_{OAB} c\left[1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right] dxdy.$$

ABC-யின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

XY தளத்தின் சமன்பாடு $z = 0.$

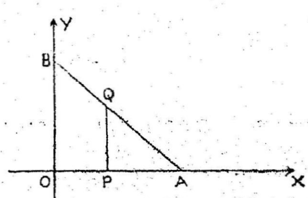
$\therefore$ AB-யின் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$z = 0.$$

$\therefore$ நான்முகியின் கன அளவு

$$= \int_{x=0}^{0} dx \int_{P}^{Q} c\left[1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right] dy.$$

$$= c\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy$$



படம் 35.

$$= c \int_0^a \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) b \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b} \frac{b^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}{2} \right] dx$$

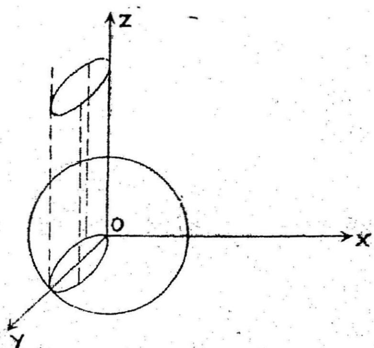
$$= bc \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx.$$

$$= \frac{bc}{2} \left[\frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3}{3} \cdot (-a) \right]_0^a$$

$$= \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{abc}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்திற்கும் $x^2+y^2=ay$ என்ற வட்ட உருளைக்கும் பொதுவான பகுதியின் கன அளவைக் கணக்கிடுக.



படம் 36.

XY-தளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட கோளம், உருளை ஆகியவற்றின் வீழ்ச்சிகள், முறையே $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=ay$ என்ற வட்டங்களாகும், எனவே, இரண்டிற்கும் பொதுவான கன உருவத்தின் வீழ்ச்சி $x^2+y^2=ay$ என்ற வட்டமாகும், (அதனை D என்க).

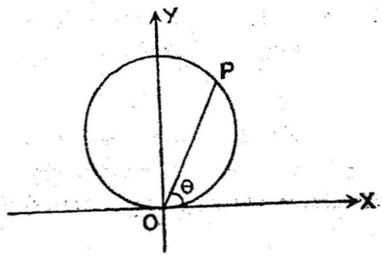
கன உருவம், XY-தளத்தின் இரு புறமும் சமச் சீராக அமைந்திருப்பதால்,

$$\text{கன அளவு} = 2\iint_D z\,dx\,dy.$$

$$= 2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$x=\gamma\cos\theta,\ y=\gamma\sin\theta$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore$ D-யின் சமன்பாடு $\gamma=a\sin\theta$.



படம் 37.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\gamma,\theta)}=\gamma.$$

$$\therefore \text{கன அளவு} = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sin\theta}\sqrt{a^2-\gamma^2}\;\gamma\,d\gamma$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-\gamma^2)^{3/2}}{3/2}\right\}_0^{a\sin\theta}$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi} a^3(\cos^3\theta-1)\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \left[\pi - 2 \int_0^{2/\pi} \cos^3 \theta \, d\theta \right]$$

$$= \frac{2a^3}{3} \left[\pi - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right]$$

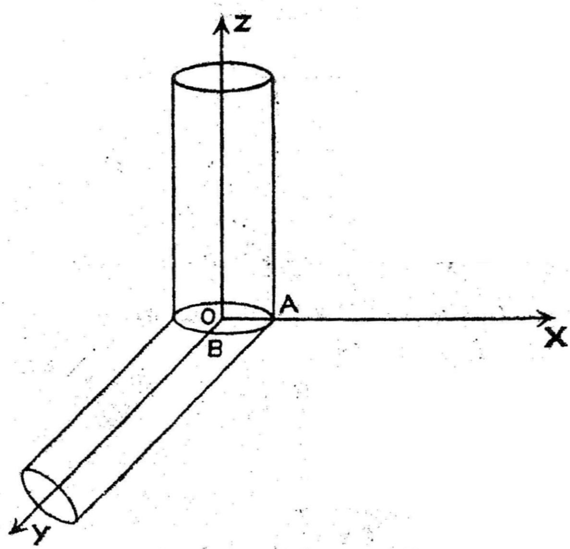
$$= \frac{2a^3}{9} \left[3\pi - 4 \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ எனும் இரு வட்ட உருளைகளுக்குப் பொதுவான கன அளவைக் காண்க.

XY-தளத்தில், இரு உருளைகளுக்கும் பொதுவான கன உருவத்தின் வீழ்ச்சி, $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டம் ஆகும். (அதனை D என்க).

கன உருவம், XY-தளத்தின் இருபுறமும் சமச்சீராக அமைந்திருப்பதால்,



படம் 38.

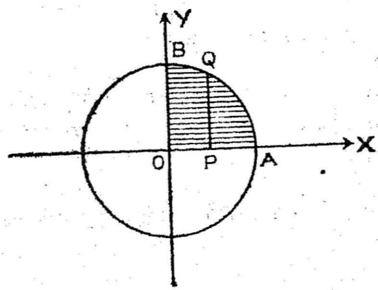
$$\text{கன அளவு} = 2 \iint_D z \, dx \, dy$$

$$= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \; dx \; dy.$$

வட்டம், D-ன் முதற் காற்பகுதி D' என்ருல், கன அளவு

$$= 2 \times 4 \iint_{D'} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \, dy$$

என எழுதலாம்.



படம் 39.

$$= 8 \int_0^a dx \int_P^Q \sqrt{a^2 - x^2} \, dy.$$

$$= 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx. \quad \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy.$$

$$= 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}. \quad \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

$$= 8 \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

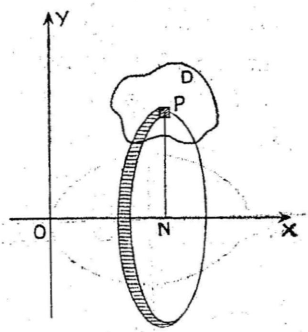
$$= 8 \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right]$$

$$= \frac{16}{3} a^3$$

3. சுழற்சி கன உருவத்தின் கன அளவு காணல்

(To find the volume of a solid of revolution)

ஒரு சமதளப்பரப்பு, ஒரு நேர்கோட்டை அச்சாகக் கொண்டு சுழலும்போது, ஒரு கன உருவத்தை உருவாக்கும். அக்கன உருவத்திற்கு சுழற்சி கன உருவம் (solid of revolution) எனப் பெயராகும். அதன் கன அளவை இருமாறித் தொகையைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.



படம் 40.

D-என்ற இரு பரிமான அரங்கு, OX-ஐ அச்சாகக் கொண்டு சுழல்கிறது என்க. D-இல் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி $P(x, y)$ என்க. P-ஐச் சுற்றியுள்ள ஆரம்பப்பரப்பு $dx\text{-}dy$ என்றால், அரங்கு OX-அச்சில் சுழலும்போது, இவ் ஆரம்பப்பரப்பு $NP = y$-ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு கங்கணத்தை உருவாக்கும். அக் கங்கணத்தின் கன அளவு$=2\pi y,\ dx\ dy$ ஆகும். எனவே,

அரங்கு முழுவதையும் கணக்கிட, சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $= \iint\limits_{D} 2\pi y \; dx \; dy$.

குறிப்பு 1 : கொடுக்கப்பட்ட அரங்கு, *OY*-அச்சில் சுழன்றால், சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $= \iint\limits_{D} 2\pi x. \; dx \; dy$ எனக் காணலாம்.

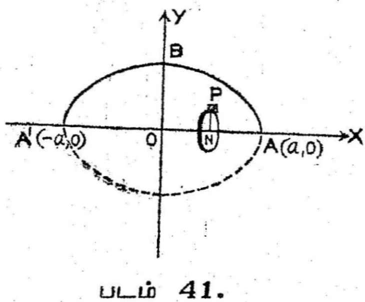
குறிப்பு 2 : சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $\int \pi y^2 \, dx$

அல்லது $\int \pi x^2 \, dy$ என்ற ஒற்றை மாறித் தொகை வாயிலாகவும் கணிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வளையம், அதனது நெட்டச்சில் (major axis) சுழல்கிறது. சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவைக் காண்க.

படத்தில் காட்டியிருப்பதுபோல், நெட்டச்சுக்கு மேலே யுள்ள நீள் வளையத்தின் அரைப்பகுதி *X* அச்சில் சுழலும்போது *A'* ($-a$, 0) தேவையான சுழற்சி கன உருவம் கிடைக்கிறது.



படம் **41.**

$\therefore$ சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $= \iint\limits_{ABA'} 2\pi y \, dx \, dy$

$$= 2\pi \int_{a}^{a} dx \int_{0}^{b\sqrt{1 - x^2/a^2}} y \, dy.$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} dx \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$= \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{a}$$

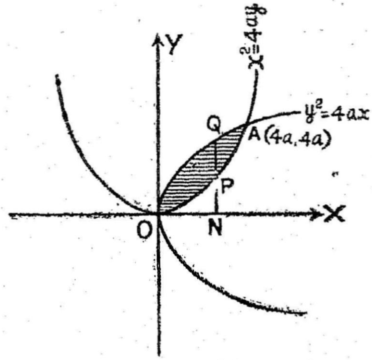
$$= \pi b^2 \left[2a - \frac{1}{3} \cdot 2a \right]$$

$$= \frac{4}{3} \pi a b^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ ஆகிய பரவளைகளுக்குப் பொதுவான பகுதி, X அச்சில் சுழல்கிறது. சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவைக் காண்க.

இரு பரவளைகளும் $O(0, 0)$, $A(4a, 4a)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.



படம் 42.

அவைகளின் பொதுப் பகுதி (படத்தில் காட்டியபடி) D என்க.

$\therefore$ சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $= \iint_D 2\pi y \, dx \, dy.$

$$= 2\pi \int_0^{4a} dx \int_P^Q y\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^{4a} dx \int_{x^2/4a}^{\sqrt{4ax}} y\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^{4a} \frac{1}{2} \left\{ 4ax - \frac{x^4}{16a^2} \right\} dx$$

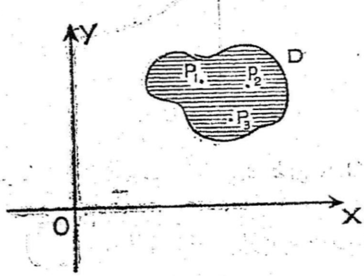
$$= \pi \left[2a \cdot x^2 - \frac{x^5}{80\, a^2} \right]_0^{4a}$$

$$= \pi \left[32a^3 - \frac{64}{5} a^3 \right]$$

$$= \frac{96}{5} \pi a^3.$$

புவிஈர்ப்பு மையம் காணல் (To find Centre of Gravity)

எல்லாப் பொருட்களையும், பூமி தனது மையத்தை நோக்கி ஈர்க்கின்றது. அவ் ஈர்ப்பு விசைக்கு புவிஈர்ப்பு விசை எனப் பெயராகும். ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் புவியின் ஈர்ப்பு விசை, அப்பொருள் எந்நிலையில் இருப்பினும் ஒரு நிலையான புள்ளி வழியாகச் செல்லும். அப் புள்ளிக்கு, அப் பொருளின் புவிஈர்ப்பு மையம் (Center of Gravity) எனப் பெயராகும். ஒரு பொருளின் புவிஈர்ப்பு மையத்தை G எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இரு பரிமாண அரங்கில் G-ன் ஆயக் கூறுகளை $(\bar{x}, \bar{y})$ என எழுதுகிறோம்.



படம் 43.

D எனும் இரு பரிமாண தளத்தில் $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$, $P_3 (x_3, y_3)$, ... என்ற புள்ளிகளில் அமைந்த துகள்களின் (particles) எடைகள் முறையே w_1, w_2 w_3 ... என்க. தளத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் $G (\bar{x}_1 \bar{y})$ என்ருல் நிலையியல் கணிதத்திலிருந்து,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma w_1 x_1}{\Sigma w_1} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma w_1 y_1}{\Sigma w_1}$$

என அறியலாம்.

துகள்கள், தளம் முழுவதும் தொடர்ச்சியாக சீராகப் பரவியிருக்குமாளுல் $\Sigma w_1 x_1$, $\Sigma w_1 y_1$, Σw_1 ஆகியவற்றை தொகைப்படுத்தல் மூலம் காணலாம்.

D-யிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P (x, y)$-யிலுள்ள துகளின் எடை $d w$ என்ருல்,

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dw}{\int d w} \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dw}{\int d w} \text{ ஆகும்.}$$

P-ஐச் சுற்றியுள்ள ஆரம்பப் பரப்பு $dx \ dy$ என்ருல், அதன் பரப்பு அடர்த்தி (areal denstiy) ρ என்ருல்,

$$dw = \rho \, dx \, dy.$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \cdot \rho \, dx \, dy}{\iint_D \rho \, dx \, dy.}$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \cdot \rho \, dx \, dy}{\iint_D \rho \, dx \, dy}$$

குறிப்பு 1 : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ என்ற போலார் ஆய உருபுகளைப் பயன் படுத்திளுல், போலார் ஆய உருப்புகளில் ஆரம்பப்பரப்பு $= r \, d\theta \, dr$ ஆதலால்,

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D r\cos\theta \cdot \rho\, r\, d\theta\, dr}{\iint\limits_D \rho\, r\, d\theta\, dr}$$

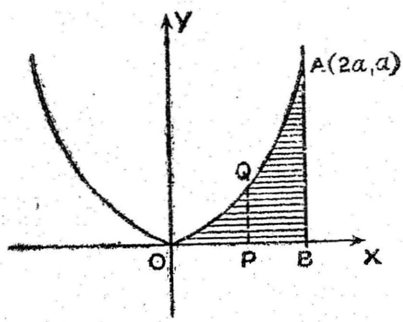
$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D r\sin\theta, \ \rho\, r d\theta\, dr}{\iint\limits_D \rho\, r\, d\theta\, dr}$$

குறிப்பு 2: இம் முடிவுகளை கன உருவங்களுக்கும், விரிவு படுத்திக் கொள்ளலாம்.

பின்குறிப்பு: பொருளின் அடர்த்தி சீராக இருக்குமாயின், ρ ஒரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$y = 4ax^2$ என்ற பரவளைக்கும், $x = 0$, $x = c$ ஆகிய நேர் கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. கொடுக்கப்பட்ட பரப்பு (OAB)-ன் புவிஈர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.



படம் 44.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\iint\limits_{OAB} x\,\rho\, dx\, dy.}{\iint\limits_{OAB} \rho\, dx\, dy.}$$

இங்கு, ρ என்பது பரப்பு அடர்த்தி (areal density) ஆகும்.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^c dx \int_0^{4ax^2} x\, dy}{\int_0^c dx \int_0^{4xa^2} dy}$$

$$= \frac{\int_0^c x \,.\, 4ax^2\, dx}{\int_0^c x\, 4ax^2\, dx.}$$

$$= \frac{4a\, c^4/_4}{4a\, c^3/_3} = \frac{3c}{4}.$$

இவ்வாறே $\bar{y} = \frac{\iint_{OAB} \rho\, y\, dx\, dy}{\iint_{OAB} \rho\, dx\, dy.}$

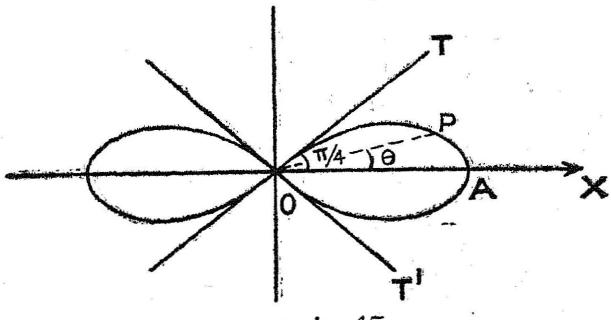
$$= \frac{\int_0^c dx \int_0^{4ax^2} y\, dy}{\frac{4a\, c^3}{3}} = \frac{\int_0^c \frac{16\, ax^2}{2}\, dx}{\frac{4ac^3}{3}}$$

$$= \frac{8a^2 .\; c^5/_5}{4ac^3/_3} = \frac{6ac^2}{5}$$

எடுத்துகாட்டு 2 :

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற பெர்னோலியின் வளைவரைவில், ஒரு கண்ணியின், புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

x-அச்சின் மிகைப் பகுதியிலுள்ள கண்ணியை (D) எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.



படம் 45.

கண்ணியின் பரப்பளவு, X-அச்சுக்கு மேலும் கீழும் சமச் சீராக அமைந்திருப்பதால், A புவி ஈர்ப்பு மையம், X-அச்சில் அமைந்திருக்கும் என்பதை எளிதில் உணரலாம்.

$$\therefore \quad \bar{y} = 0.$$

பரப்பு அடர்த்தி ρ என்றால்,

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D r \cos\theta \, \rho \, r \, dr \, d\theta}{\iint\limits_D \rho \, r \, dr \, d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 2\theta}} r^2 \, dr}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 2\theta}} r \, dr}$$

$$= \frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{3} (a^2 \cos 2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \, d\theta}$$

$$= \frac{2\,\dfrac{a^3}{3}\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{3/2} 2\theta \cos\theta \, d\theta}{a^2 \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta}$$

இங்கு $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{3/2} 2\theta \, . \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} (1-2\sin^2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta$

இதில் $\sqrt{2} \sin\theta = \sin\phi$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \text{ இத் தொகை } = \int_0^{\pi/2} \cos^3\phi . \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}} \, d\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \phi \, d\phi.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}$$

மேலும் $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

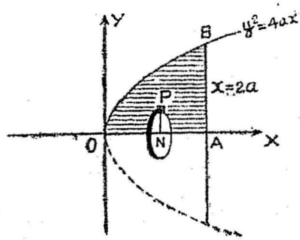
$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\dfrac{2a^3}{2} \; \dfrac{3\pi}{16\sqrt{2}}}{a^2 . \dfrac{1}{2}} = \frac{a\pi}{4\sqrt{2}}$$

எடுத்துக் காட்டு 38 :

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளை, $x = 2a$ என்ற நேர்கோடு ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு, X-அச்சில் சுழல்கிறது. சுழற்சி உருவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, OAB என்ற அரங்கு, X-அச்சில் சுழலும்போது, தேவையான கன உருவம் கிடைக்கிறது.

கன உருவம், சுழற்சி அச்சு OX-ஐச் சுற்றி சீராக அமைந்திருக்குமாதலால், அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$, சுழற்சி அச்சின் மீது இருக்கும். $\therefore \quad \bar{y} = 0.$



படம் 46.

அரங்கினுள் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ என்றால், அரங்கு X-அச்சில் சுழலும் போது, P-யிலுள்ள ஆரம்பப் பரப்பு $\delta A = dx, dy$, $NP = y$-ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு கங்கணத்தை உருவாக்கும். அக் கங்கணத்தின் கன அளவு $\delta v = 2\pi y, \; dx \;\; dy$. எனவே, P-யில் கன அடர்த்தி (volume density) ρ என்றால்,

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho \, dv}{\int \rho \, dv} = \frac{\iint\limits_{OAB} x . 2\pi y \, . \, dx \, dy}{\iint\limits_{OAB} 2\pi y \, . \, dx \, dy.}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{4ax}} x . 2\pi y \;\; dy}{\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{4ax}} 2\pi y \;\; dy}$$

$$= \frac{2\pi \int_0^{2a} x \cdot \frac{4ax}{2}\, dx}{2\pi \int_0^{2a} \frac{4ax}{2p} \cdot dx}$$

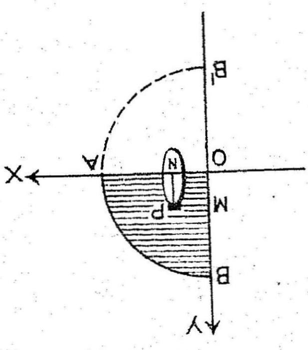
$$= \frac{\left[4a \ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2a}}{\left[4a \ \frac{x^2}{2} \right]_0^{2a}}$$

$$= \frac{4a}{3.}$$

எடுத்துக் காட்டு 4 :

ஒரு அரைக் கோளத்தின், எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அடர்த்தி, அப்புள்ளிக்கும், அரைக்கோளத்தின் அடித்தளத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரத்திற்கு விகித சமமானல், அரைக் கோளத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

அரைக் கோளத்தின் ஆரம் 'a' என்க.



படம் 47.

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் முதற் காற் பகுதி, (D என்க) X-அச்சில் சுழலும் போது, ஒரு அரைக் கோளம் கிடைக்கிறது.

அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$, சுழற்சி அச்சில் அமையுமாதலால், $\bar{y}=0$.

D-யிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி $P(x, y)$ என்க. சுழற்சியில், Y அச்சு, அரைக்கோணத்தின் அடித் தளத்தை உருவாக்கும். எனவே, P-க்கும், அடித் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம், $MP = x$ ஆகும். P-ல் அடர்த்தி ρ என்றால், கணக்கில் கொடுத்துள்ளபடி,

$$\frac{\rho}{x} = \text{ஒரு மாறிலியாகும்}$$

$$= \lambda \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad \rho = \lambda x.$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \rho\, 2\pi\, dx\, dy}{\iint\limits_D \rho\, 2\pi y \cdot dx\, dy}$$

$$= \frac{\iint\limits_D x \cdot \lambda x \cdot 2\pi y\, dx\, dy}{\iint\limits_D \lambda x \cdot 2\pi y \cdot dx\, dy}$$

$$= \frac{2\pi\lambda \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 y \cdot dy}{2\pi\lambda \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, y \cdot dy}$$

$$= \frac{\int_0^a x^2 \cdot \frac{(a^2-x^2)}{2}\, dx}{\int_0^a x \cdot \frac{(a^2-x^2)}{2}\, dx}$$

$$= \frac{\left[a^2 \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^a}{\left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}$$

$$= \frac{8a}{15}$$

பயிற்சி

I (1) கீழ்க்கண்ட தொகைகளை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (x^2+y^2) \; dy \; dx$

(ii) $\int_{-1}^{2} \int_{x2}^{x+2} dy \; dx.$

(iii) $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} \gamma \; d\gamma \; d\theta.$

(2) கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(i) $\int_0^1 \int_0^y xy \, e^{-x^2} \; dy \; dx = \frac{1}{4e}$

(ii) $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \; x \; dx \; dx = \frac{\pi}{4}$

(iii) $\int_0^1 \int_0^x e^{x+y} \; dx \; dy = \frac{1}{2} (e-1)^2$

(iv) $$\int_{0}^{a} \int^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dy\ dx = \frac{1}{6}\pi a^3$$

II (1) $xy=1$, $y=0$, $y=x$, $x=2$ ஆகிய வரப்புகளைக் கொண்ட அரங்கில்,

$\iint (x^2+y^2)\ dx\ dy$ - ஐ மதிப்பிடுக.

(2) தொகைப் படுத்தலின் வரிசையை மாற்றி கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக :

(i) $$\int_0^1 dx \int_x^{yx} \frac{y\ dy}{(1+xy)^2\ (1+y^2)} = \frac{\pi-1}{4}$$

(ii) $$\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^1}} \frac{(x^2+y^2)\ x\ \phi^1(y)\ dy}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}} = \pi a^2 [\phi(a)-\phi(0)]$$

3. கீழ்க்கண்டவற்றில், தொகைப்படுத்தலின் வரிசையை மாற்றி எழுதுக.

(i) $$\int_a^b \int_{a^2/x}^{x} F(n\ .\ y)\ dx\ dy\ .$$

(ii) $$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x-y)\ dx\ dy$$

(iii) $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} y\ (x\ .\ y)\ dx\ dy$$

(iv) $$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x\ .\ y)\ dx\ dy$$

III (1) ஆய தளத்தின் முதற் காற் பகுதியில், $y^5 = ax^2$, $y^5 = bx^2$; $x^4 = cy^3$, $x^4 = dy^3$ ஆகிய வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{6}{35}\,(b^{7/6} - a^{7/6})(d^{5/6} - c^{5/6})$ என நிறுவுக.

(2) $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தில்

$$\int\int e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \pi\,(1 - e^{-a^2})$$ என நிறுவுக.

(3) $x^2 + y^2 = 2ax$ என்ற வட்டத்தின், மேல் அரைப்பகுதி (upper half) யில்,

$$\int\int \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\; dx\, dy = \frac{4}{9}\,(3\pi - 4)\, a^3$$

என நிறுவுக.

(4) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ என்ற வட்ட அரங்கில்

$$\int\int \sqrt{x\,(2a - x) + y\,(2b - y)}\; dx\, dy$$ ஐ

மதிப்பிடுக.

(5) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$ ஆகிய வரப்புகளைக் கொண்ட முக்கோண அரங்கில்,

$$\int\int (x + y - 1)^2 dx\, dy = \frac{1}{12}$$

என நிறுவுக.

(6) $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட முக்கோண அரங்கில்,

$$\int\int x^{l-1}\, y^{m-1}\, f(x + y)\, dx\, dy$$ ஐ

மதிப்பிடுக.

(7) $x = u\,(1 + v)\quad y = v\,(1 + u)$ ஆகிய மாறி மாற்றச் சமன்பாடுகளின் துணையால்,

$$\int_0^2 \int_0^x \{\, (x - y)^2 + 2\,(x + y) + 1 \,\}^{-1/2}\, dx\, dy$$

$\log 4 - 1/2$ என நிறுவுக.

IV (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோள அரங்கில்

$$\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} = \pi^2$$

என நிறுவுக.

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ என்ற நீள் வளையத்திண் மத்தில் (ellipsoid).

$$\iiint e^{\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2}} \, .\, dx\,dy\,dz$$

$= 4\pi abc\,(e-2)$ என நிறுவுக.

(3) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ என்ற கோளத்தில் $x, y, z \geqslant 0$ என்றுள்ள பகுதியில்

$$\iiint \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\,dy \cdot dz$$ ஐ மதிப்பிடுக.

(4) $$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)} 9/2 = \frac{4\pi}{105\,a^6}$$

என நிறுவுக.

(5) $x^2 + y^2 + x^2 = ax,\ a'x,\ by,\ b'y,\ cz,\ c'z$ ஆகிய 6 கோளங்களுக்கும் பொதுவான பகுதியில் $\frac{1}{xyz}$ ஐ தொகைப் படுத்துக.

V (1) மூன்று ஆய தளங்களுக்கும்,

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$$

என்ற வளைபரப்பிற்கும் இடைப்பட்ட கன அளவைக் காண்க.

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்திற்கும் $x^2 + y^2 = ax$ என்ற வட்ட உருளைக்கும் பொதுவான கன அளவு $\frac{2a^3}{9}(3\pi - 4)$ என நிறுவுக.

(3) $x+y+z=2,\ z=0\ y^2=x$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் கன அளவு $\frac{81}{20}$ என நிறுவுக.

(4) $x^2+y^2=2ax$, $z^2=2ax$ ஆகியவற்றிற்குப் பொதுவான கன அளவைக் கணக்கிடுக.

ஆ (1) $y^2=x^2 \cdot \frac{a-x}{a+x}$ என்ற வளைவரையின் கண்ணி, X-அச்சில் சுழலும் போது உருவாகும் சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $2\pi a^3$ (lag $2-2/3$) என நிறுவுக.

(2) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ என்ற அக உருள் வளை (Hypo-cycloid), X-அச்சில் சுழலும்போது உருவாகும் சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவு $\frac{6\pi a^2}{5}$ என நிறுவுக.

(3) $y^2=4ax$ என்ற பரவளையின் முனைக்கும், அதன் செவ்வகலம் $x=a$-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதி Y-அச்சில் சுழல்கிறது. சுழற்சி உருவத்தின் கன அளவைக் காண்க.

இ. (1) கீழ்க்கண்ட பரப்புகளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் கணக்கிடுக ;

(i) ஆரம் 'a', கோணம் '2α' கொண்ட வட்ட கோணப் பகுதி.

(ii) $y^2=ax$, $x^2=ay$ ஆகிய பரவளைகளுக்கு இடைப்பட்ட பகுதி.

(iii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள் வளையத்தின் முதற் காற் பகுதி.

(iv) $\gamma=a\sin 2\theta$-இன் ஒரு கண்ணி.

(v) $y^2=4x$, $y=2x-4$. ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு,

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள் வளையத்தின் முதற் காற் பகுதி, X அச்சில் சுழலும்போது உருவாகும் கன உருவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(3) $y^2 = 4x$, $x^2 = 32y$ ஆகிய பரவளைகளுக்கு இடைப்பட்ட பகுதி, X அச்சில் சுழல்வதால் உருவாகும் கன உருவத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் $\left(\frac{80}{9}, 0\right)$ என நிறுவுக.

(4) OA எனும் விட்டத்தால் கட்டப்பட்ட ஒரு அரை வட்டத் தகட்டில், ஒரு புள்ளியின் அடர்த்தி, அப் புள்ளிக்கும் O-உக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்திற்கு விகித சமமானுல் தகட்டின் புவிஈர்பபு மையம் $\left(\frac{6a}{5}, \frac{9a}{20}\right)$ என நிறுவுக.

4. வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

(Differential Equations)

பல மாறிகளையும் (variables) அவற்றின், வகைக் கெழுக் களையும் கொண்ட சமன்பாட்டிற்கு, வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப் பெயராகும். இவற்றை (1) சாதாரணமானவை (ordinary), (2) பகுதியானவை (partial) என இருவகைப் படுத்தலாம்.

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டில், ஒரே ஒரு சார்பிலா மாறியும் (independant variable), அதனைப் பொருத்த வகைக் கெழுக்களும் மட்டும் இருப்பின், அச் சமன்பாடு சாதாரண வகையீட்டுச் சமன் பாடாகும்.

இரண்டு, அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்பிலா மாறிகளைக் கொண்டிருப்பின் அச் சமன்பாடு பகுதியான வகையீட்டுச் சமன் பாடாகும்.

உதாரணமாக,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$$

$$(2x + 3y)\ \frac{dy}{dx} + 7x^2 - 10y = 0$$

ஆகிய சமன்பாடுகளில், x மட்டுமே சார்பிலா மாறியாகும் எனவே, இவை சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாகும்.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ என்ற சமன்பாட்டில், x, y

என்ற இரு சார்பிலா மாறிகள் உள்ளன. எனவே இஃது ஒரு பகுதியான வகையீட்டுச் சமன்பாடாகும்.

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் வரிசை (order) என்பது, அதில் வரும் உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையாகும்.

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} + a = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

இது, முதல் வரிசை சமன்பாடாகும்,

$$xy\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

என்ற சமன்பாட்டின் வரிசை இரண்டாகும்.

$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ -ன் வரிசை இரண்டு, ... (3)

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் படி (degree) என்பது, அதில் வரும் உயர்ந்த வரிசை வகைக்கெழுவின் படியாகும்.

சமன்பாடு (1)-இன் வரிசை ஒன்று, படி இரண்டு.

சமன்பாடு (2)-இன் வரிசை இரண்டு, படி ஒன்று.

சமன்பாடு (3)-இன் வரிசை இரண்டு, படி இரண்டு.

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (solution) என்பது, மாறிகளுக்கிடையில் உள்ள தொடர்பாகும். அத் தொடர்பும், அதன் வகைக் கெழுக்களும், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வை, எப்படிக் காண்பது என்பதை அறியுமுன், வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் எவ்வாறு உருவாகின்றன என்பதைக் காண்போம்.

$y = A\cos nx + B\sin nx$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்க. இதில், A, B என்பன யாதாமிரு மாறிலிகள் (arbitrary constants) என்க.

இச் சார்பை தீர்வாகக் கொண்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குவோம். இச் சார்பை இருமுறை வகைப்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = -An\sin nx + Bn\cos x.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -An^2 \cos nx - Bn^2 \sin nx$$

இதிலிருந்து மாறிலிகள் A, B ஐ நீக்க,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$$

என்ற வகையீட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எனவே, $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y\ 0$ என்ற இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சார்பாகும்.

இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட சார்பில் எத்தனை மாறிலிகள் உள்ளனவோ அத்தனை முறை வகைப்படுத்தினால் அம் மாறிலிகளை நீக்கி கொடுக்கப்பட்ட சார்பை தீர்வாகக் கொண்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை உருவாக்கலாம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பில் n மாறிலிகள் இருந்தால் அதனைத் தீர்வாகக் கொண்ட வகையீட்டுச் சமன்பாடு n ஆவது வரிசையில் இருக்கும்.

இதன்மறுதலையாக, ஒரு n-ஆவது வரிசை வகையீட்டுங் சமன் பாட்டின் தீர்வில் n மாறிலிகள் இருக்கும். அத்தகைய தீர்வுத்கு முழுத் தீர்வு (complete solution) எனப் பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = cx + c - c^3$ என்ற சார்பில் c ஐ நீக்குக.

இங்கு ஒரே ஒரு மாறிலி c மட்டும் இருப்பதால், c ஐ நீக்க ஒரு முறை வகைப்படுத்தினால் போதும்.

சார்பை வகைப்படுத்த, $\frac{dy}{dx} = c$.

$$\therefore \quad y \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

என்ற முதல் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$xy = ae^x + be^{-x}$ என்ற சார்பில், a, b ஐ நீக்குக.

இச் சார்பை, தொடர்ந்து இருமுறை வகைப்படுத்த,

$$x \frac{dy}{dx} + y = a e^{x} - b e^{-x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும்,

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = a e^{x} + b e^{-x}$$

$$= xy.$$

$x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2 \dfrac{dy}{dx} - xy = 0$ என்ற இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

முதல் வரிசை, முதல் படி (first order, first degree) வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

வகை I :

பிரிக்கத்தக்க மாறிகள் கொண்டவை (variable - separable)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0$ என இருப்பின், நேரடியாகவே தொகைப்படுத்தலாம்.

$\therefore \int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = C$ என்பதே முழுத் தீர்வாகும்.

குறிப்பு : சமன்பாடு, முதல் வரிசையில் இருப்பதால், இதன் முழுத் தீர்வில் ஒரே ஒரு மாறிலி மட்டுமே இடம் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

i. e. $$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

தொகைப்படுத்த,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = c.$$

இங்கு c யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

i.e., $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = c$ என்பதே முழுத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க : $(xy^2 + x)\,dx + (yx^2 + y)\,dy = 0.$

இங்கு $(y^2 + 1)\,x\,dx + (x^2 + 1)\,y\,dy = 0.$

$$\therefore \quad \frac{x\,dx}{x^2 + 1} + \frac{y\,dy}{y^2 + 1} = 0.$$

$\therefore$ இதன் தீர்வு,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} + \int \frac{y\,dy}{y^2 + 1} = c.$$

i.e., $\frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\log(y^2 + 1) = c$

i.e., $\log(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 2c.$

$\therefore \quad (x^2 + 1)(y^2 + 1) = e^{2c}$

$= A$ என்க.

$\therefore \quad (x^2 + 1)(y^2 + 1) = A$ என்பதே முழுத் தீர்வாகும்.

இங்கு A யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

வகை II.

சமபடித்தான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous differential equations)

$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ என்ற சமன்பாட்டில், $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ இரண்டும் (x, y)-ல் சமபடித்தான சார்புகள் என்க. அவைகளின் படி n என்க.

$$\therefore \quad f_1(x, y) = x^n \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_2(x, y) = x^n \phi_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

என்றவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\phi_1\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi_2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

இதில் $y = bx$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\phi_1(v)}{\phi_2(v)}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{\phi_1(v) - v\phi_2(v)}{\phi_2(v)}$$

$$\therefore \quad \frac{\phi_2(v)\,dv}{\phi_1(v) - v\phi_2(v)} = \frac{dx}{x}$$ ஆகும்.

இதில் மாறிகள் v, x இரண்டும் பிரிக்கத் தக்கதாக உள்ளன. எனவே முந்திய வயியில் கண்டவாறு, இதனை நேரடியாகத் தொகைப் படுத்தி தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக் காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 3x^2y}{x^3 + 3xy^2}$$

$y = vx$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3x^3 + 3x^2vx}{x^3 + 3x\,v^2x^2}$$

$$= \frac{v^3 + 3v}{1 + 3v^2}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3 + 3v - v(1 + 3v^2)}{1 + 3v^2}$$

$$= \frac{2v - 2v^3}{1 + 3v^2}$$

$$\therefore \left(\frac{1+3v^2}{v-v^3}\right) dv = 2\ \frac{dx}{x}$$

தொகைப்படுத்த, $\int \frac{1+3v^2}{v(1-v^2)} \cdot dv = \int \frac{2\ dx}{x} + C.$

இங்கு $\frac{1+3v^2}{v(1-v^2)} = \frac{1}{v} + \frac{2}{1-v} - \frac{2}{1+v}$

$$\therefore \int \frac{1+3v^2}{v(1-v^2)}\ dv = \log v - 2\log(1-v) - 2\log(1+v)$$

$$= \log \frac{v}{(1-v)^2 . (1+v)^2}$$

$$= \log \frac{v}{(1-v^2)^2}$$

$$\therefore \log \frac{v}{(1-v^2)^2} = 2\log x + c.$$

$= \log x^2 + \log A$ என்க.

$$= \log Ax^2.$$

$$\therefore \frac{v}{(1-v^2)^2} = Ax^2$$

$y = vx$ ஆதலால்,

$$\frac{y}{x} = Ax^2 \left[1 - \frac{y^2}{x^2}\right]^2$$

$$= \frac{A}{x^2}(x^2 - y^2)^2.$$

$\therefore\ xy = A(x^2 - y^2)^2$ என்பதே முழுத் தீர்வாகும்.

இங்கு A யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$y = vx$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x}$$

$$= v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}.$$

தொகைப்படுத்த,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

$$\log\left(v + \sqrt{1 + v^2}\right) = \log x + c$$

$$= \log x + \log A \text{ என்க.}$$

$$= \log Ax$$

$$\therefore \quad v + \sqrt{1 + v^2} = Ax.$$

i. e. $\frac{y}{x} + \sqrt{1 = y^2/x^2} = Ax.$

$\therefore \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = Ax^2$ என்பதே தீர்வாகும்.

இங்கு A, யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

வகை III

சமபட இல்லாத வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (Non-homogeneous differential equations)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a^1x + b^1y + c^1} \text{ என்க,}$$

இவ்வகை சமன்பாடுகளை, இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

முதற் பிரிவு: $\frac{a}{a^1} + \frac{b}{b^1}$ என்க.

h, k எனும் இரு மாறிலிகளைச் சேர்த்து,

$x = X + h$

$y = Y + k$ எனக் கொள்க;

இதனுல், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{ax+by+(ah+bk+c}{a^1X+b^1Y+(a^1h+b^1k+c^1)}$$ என்று ஆகிறது.

இப்போது, $ah+bk+c = 0$

$a^1h+b^1k+c^1 = 0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும் வகையில், மாறிலிகள் h, k-ஐ தேர்ந்தெடுக்கவும்.

இதனுல், $$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a'X + b'Y}$$ என்ருகும்.

இது (X, Y)-ல் சமபடித்தான வகையீட்டுச் சமன்பாடாகும். எனவே, $Y = VX$ எனப் பிரதியிட்டு தீர்வு காணலாம்.

இரண்டாம் பிரிவு :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$ என்க.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b}{b'}\ \lambda$$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda\,(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}$$

$a'x + b'y = v$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad a' + b'\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

எனவே, $$\frac{1}{b'}\left(\frac{dv}{dx} - a'\right) = \frac{\lambda\, v + c}{v + c'}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda\, b'v + b'c + a'(v + c')}{v + c'}$$

$$= f(v)$$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{dv}{f(v)} = dx.$$

மாறிகள் பிரிக்கத்தக்கன. எனவே, நேரடியாகத் தொகைப் படுத்தி தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

$x = X + h$

$y = Y + k$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (h + 2k - 3)}{2X + Y + (2h + k - 3)}$$

இதில், $h + 2k - 3 = 0$

$2h + k - 3 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும் வகையில், h, k ஐ தேர்ந்தெடுக்க.

எனவே, $h = 1, \quad k = 1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$$

$Y = VX$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X + 2VX}{2X + VX}$$

$$= \frac{1 + 2V}{2 + V}.$$

$$\therefore \quad X\frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V - V(2 + V)}{2 + V}$$

$$= \frac{1 - V^2}{2 + V}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{2 + V}{1 - V^2}\right) dV = \frac{dX}{X}$$

தொகைப்படுத்த,

$$\int \frac{2+v}{1-v^2}\, dv = \int \frac{dX}{X} + C.$$

$$\frac{2+v}{1-v^2} = \frac{1}{2(1+v)} + \frac{3}{2(1-v)}$$

$$\therefore \int \frac{2+v}{1-v^2}\, dv = \frac{1}{2} \log(1+v) - \frac{3}{2} \log(1-v)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+v}{(1-v)^3}$$

$$\therefore \log \frac{1}{2} \frac{1+v}{(1-v)^3} = \log X + C$$

$$\therefore \log \frac{1+v}{(1-v)^3} = 2 \log X + \log A$$ என்க.

$$= \log AX^2$$

$$\therefore \frac{1+v}{(1-v)^3} = AX^2$$

i. e. $1+v = AX^2 (1-v)^3$.

$v = \frac{Y}{X}$ என மாற்ற, $X+Y = A(X-Y)^3$ ஆகும்.

$x = X+1$

$y = Y+1$ ஆதலால்,

தீர்வு, $(x+y-2) = A(x-y)^3$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க : $(2x-4y+3)\frac{dy}{dx} + (x-2y+1) = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-2y+1)}{2x-4y+3}.$$

$$= -\frac{(x-2y+1)}{2(x-2y)+3}$$

$v = x - 2y$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{dv}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right) = -\frac{(v+1)}{2v+3}.$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2(v+1)}{2v+3} + 1$$

$$= \frac{4v+5}{2v+3}.$$

$$\therefore \quad \frac{(2v+3)}{4v+5}\, dv = dx.$$

$$\int \frac{(2v+3)\, dv}{4v+5} = \int dx + c.$$

$$\int \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2(4v+5)} \right\} dv = x + c.$$

$$\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \log(4v\ 5) = x + c$$

$$4(x - 2y) + \log\ \{4(x - 2y) + 5\} = 8(x + e)$$

$\log(4x - 8y + 5) = 4x + 8y + c^1$ என்பதே தீர்வாகும்.

இங்கு c^1 யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

நேரிய வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (Linear differential equations)

P, Q என்பன x-இன் இரு சார்புகள் என்றால், $\frac{dy}{dx} + py = Q$ என்ற அமைப்பில் உள்ள, முதல் வரிசை, முதல் படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்கு, நேரிய வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப் பெயர்.

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண எல்லா உறுப்புகளையும் $e^{\int pdx}$ - ஆல் பெருக்குக.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\, e^{\int pdx} + py\, e^{\int pdx} = Q\, e^{\int pdx}$$

$$\text{i. e.} \quad \frac{d}{dx} \left\{ y\, e^{\int pdx} \right\} = Q\, e^{\int pdx}$$

$\therefore$ x-ஐப் பொருத்து, தொகைப்படுத்த.

$$y\, e^{\int pdx} = \int Q\, e^{\int pdx}\, dx + C$$

இதுவே முழுத் தீர்வாகும்.

குறிப்பு : சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தொகைப்படுத்த $e^{\int p dx}$ என்ற காரணி பயன்படுகிறது. இதற்கு தொகையீட்டுக் காரணி (Integrating Factor) எனப் பெயராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$ ஐ தீர்க்க.

இச் சமன்பாட்டை, $(1 + x^2)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^2}\, y = \frac{4x^3}{1 + x^2}$$

$$\text{இங்கு } P = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad Q = \frac{4x^2}{1 + x^2}$$

தொகை காண,

$$\therefore\ e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{2x\,dx}{1 + x^2}} = e^{\log(1 + x^2)}$$
$$= (1 + x^2)$$

∴ சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$y(1 + x^2) = \int \frac{4x^3}{(1 + x^2)} \cdot (1 + x^2) \cdot dx + c$$
$$= \int 4x^3\,dx + c \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு c யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\, y = \sin x$$

$$P = \frac{2}{x}, \quad Q = \sin x$$

∴ தொகை காண,

$$= e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2}$$
$$= x^2$$

இதன் தீர்வு,

$$y\, x^2 = \int \sin x \cdot x^2\, px + c$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2\ d(-\cos x)$$

$$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx.$$

$$= -x^2 \cos x + \int 2x.\ d(\sin x)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x\, dx.$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

∴ தீர்வு,

$$y\, x^2 = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C.$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x = \pi/2$ என்றால், $y = 0$ எனக் கொண்டு,

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4 \operatorname{cosec} x$ - ஐ தீர்வு காண்க.

தொகை காரண $= e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x.$

∴ தீர்க்க $y \sin x = \int 4 \operatorname{cosec} x. \sin x\, dx + c.$

$$= 4x + c.$$

c ஐ மதிப்பிட $x = \pi/2 = y = 0$ எடை பிரதியிடுக.

$$0 = 4\, \pi/2 + c.$$

$$\therefore \quad c = -2\pi$$

∴ $y \sin x = 4x\ 2\pi$ என்பதே தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} - x)\, dy$ ஐ தீர்க்க.

சமன்பாட்டை,

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}\, x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

என மாற்றி எழிதலாம்.

இது x-ல் நேரிய சமன்பாடாக உள்ளது.

$$P = \frac{1}{1+y^2}, \quad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$ எனக் கொண்டால்,

தொகைகாண,

$$= e^{\int P\,dy} = e^{\int \frac{dy}{1+y^2}} = e^{\tan^{-1} y}.$$

∴ இதன் தீர்வு,

$$x\, e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1} y}\, dy + c$$ ஆகும்.

$t = \tan^{-1} y$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1} y}\, dy = \int t\, e^t\, dt$$
$$= \int t\, d(e^t)$$
$$= t\, e^t - \int e^t\, dt$$
$$= t\, e^t - e^t = e^t\,(t-1)$$

எனவே தீர்வு,

$$x\, e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}\,(\tan^{-1} y - 1) + c.$$

i.e., $x + 1 = \tan^{-1} y + c\, e^{-\tan^{-1} y}$ ஆகும்.

பெர்னோலியின் சமன்பாடு (Bernoulli's equation)

P, Q என்பன, x-இன் இரு சார்புகள் என்றால், $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு பெர்னோலியின் சமன்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது. தக்க மாற்றத்தின் மூலம், இச் சமன்பாட்டை ஒரு நேரிய வகையீட்டுச் சமன்பாடாக மாற்றி, தீர்வு காணலாம்.

சமன்பாட்டை y^n - ஆல் வகுக்க.

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q.$$

$u = y^{1-n}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dy}{dx} + Pu = Q$$

i. e., $\frac{du}{dx} + P\,(1-n)\,u = Q\,(1-n)$ என்றுகிறது.

இது u-இல் நேரிய சமன்பாடாக இருப்பதால், இதன் தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^3$ ஐ தீர்க்க.

$(1 - x^2)\, y^3$ ஆல் வகுக்க,

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2}\, y^{-2} = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$u = y^{-2}$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -2\, y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \frac{du}{dx} - \frac{x}{1-x^2}\, u = \frac{x^3}{1-x^2}$$

i.e., $\frac{du}{dx} + \frac{2x}{1-x^2} \cdot u = \frac{-2x^3}{1-x^2}$

$\therefore$ தொ. கா. $= e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}} = e^{-\log(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$

$\therefore$ தீர்வு, $u. \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\int \dfrac{-2x^3}{(1-x^2)} \cdot \dfrac{1}{(1-x^2)} dx + c$

$1 - x^2 = t$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\int \frac{-2x^3\, dx}{(1-x^2)^2} = \int \frac{(1-t)\, dt}{t^2}$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{t} - \log t.$$

$\therefore$ தீர்வு,

$$y^{-2} \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x^2} - \log(1-x^2) + C.$$

i. e., $1 + y^2 = y^2 (1-x^2) \left[C - \log(1-x^2) \right]$

இங்கு C - யாதாமொரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = \frac{\sin x. \cos^2 x}{y^2}$$

y^2 -ஆல் பெருக்க,

$$y^2 \frac{dy}{dx} - y^3 \tan x = \sin x \cos^2 x.$$

$u = y^3$ என்க.

$$\therefore \frac{du}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \frac{1}{3} \frac{du}{dx} - u \tan x = \sin x \cos^2 x.$$

i. e., $\dfrac{du}{dx} - 3u \tan x = 3 \sin x \cos^2 x.$

$\therefore$ தொகை காரணி $= e^{\int -3 \tan x\, dx} = e^{-\int \log \sec x} = \cos^3 x.$

∴ சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$u \cos^3 x = \int 3 \sin x \cos^2 x . \cos^3 x . dx + C$$

$$= -\int 3 \cos^5 x . d(\cos n) + C$$

$$= -\frac{3 \cos^6 x}{6} + C.$$

$$y^3 \cos^3 x = -\frac{1}{2} \cos^6 x + C.$$

மாறுக் கெழுக்கள் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை, முதல்படி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (Second order, first degree differentia equations with constant coefficients)

ஓர் இரண்டாம் வரிசை, முதற்படி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = X \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என எழுதலாம். இங்கு a, b, c ஆகிய மூன்றும் மாறிலிகள். X என்பது, x-ன் சார்பாகும்.

இச் சமன்பாட்டில் $X = 0$ எனக் கொண்டால்,

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

(2) ஆம் சமன்பாட்டின் தீர்வை, முதல் சமன்பாட்டின் நிரப்புச் சார்பு (complementary function) என அழைக்கிறோம்.

முதலில், (2) ஆம் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்போம்.

இதன் ஒரு தீர்வு $y = e^{mx}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = m e^{mx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

இம் மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட,

$$e^{mx} (am^2 + bm + c) = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு. m-ன் மதிப்பு

$$am^2 + bm + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கிறது. இச் சமன்பாட்டிற்குத் துணைச் சமன்பாடு (auxiliary equation) எனப் பெயராகும்.

துணைச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் மூன்று வகைகளில் அமையலாம்.

வகை 1 : மூலங்கள் இரண்டும், மெய்யான சமமில்லாத எண்கள், m_1, m_2 என்க.

எனவே $y = e^{m_1 x}$, $y = e^{m_2 x}$ ஆகிய இரு சார்புகளும், சமன்பாடு (2)-ன் தீர்வுகளாகும். சமன்பாடு (2) இரண்டாம் வரிசையில் இருப்பதால், அதன் முழுத் தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் இருக்க வேண்டும். எனவே, A, B என்பன யாதாமிரு மாறிலிகள் என்றால், $A e^{m_1 x}$, $B e^{m_2 x}$ இரண்டையும் தீர்வுகளாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே,

$$y = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

என்க.

சமன்பாடு 4ஐ சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட்டால், அதனை திருப்தி செய்வதை சுலபமாகக் காணலாம்.

வகை 2 : மூலங்கள் இரண்டும், சமமான மெய்யெண்கள் m_1, m_1 என்க.

முந்திய முடிவில், $m_1 = m_2$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$y = (A + B)\, e^{m_1 x}$$

$A + B = C$ எனக் கொண்டால்,

$$y = C e^{m_1 x} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

என்று ஆகும். இத் தீர்வில் ஒரே ஒரு மாறிலி மட்டுமே உள்ளது. ஆனால் முழுத் தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் இருக்கவேண்டும்.

எனவே, தீர்வு (5), சமன்பாடு (2)-ன் முழுத் தீர்வு அல்ல. முழுத் தீர்வைக் கணக்கிட, முதலில் $m_2 = m_1 + h$ எனக் கொள்வோம்.

இதனை (4)-ல் பிரதியிட,

$$y = Ae^{m_1 x} + B. e^{(m_1 + h) x}.$$

$$= e^{m_1 x} [A + B e^{hx}]$$

e^{hx} அடுக்குத் தொடராக விரித்தெழுத,

$$y = e^{m_1 x} \left[A + B\left(1 + \frac{hx}{\underline{|1}} + \frac{h^2 x^2}{\underline{|2}} + \cdots \right)\right]$$

$$= e^{m_1 x} \left[(A + B) + Bhx + h^2 \left(\frac{Bx^2}{\underline{|2}} + \cdots\right)\right]$$

$h \to 0$ என்றால், (Bh)-ன் மதிப்பு, ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாக (finite number) அமையும் விதத்தில், B-ன் மதிப்பை பெரிதாக எடுத்துக் கொள்ள முடியும்.

$$A + B = C$$

$$\underset{h \to 0}{Lt} \; (Bh) = D$$ என்க.

எனவே, $h \to 0$ என்றால்,

$$y = e^{m_1 x} \; [C + D\, x]$$

இவ்வாறு, துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், சமமான மெய்யெண்கள் m_1, m_1 என்றால், சமன்பாடு (2)-இன் முழுத் தீர்வு

$$y = e^{m_1 x} \; [C + Dx] \qquad \ldots (6)$$ ஆகும்.

வகை 3 : துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் சிக்கலெண்கள், (Complex No.) என்க. சிக்கல் மூலங்கள், (Complex roots) இணையாக வருமாதலால், $m_1 = \alpha + i\beta$ என்றால்

$m_2 = \alpha - i\beta$ என்றிருக்கும். (இங்கு, α, β இரண்டும் மெய்யெண்களாகும்.) இம் மதிப்புகளை (4)-இல் பிரதியிட

$$y = A\,e^{(\alpha + i\beta)x} + B\,e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= e^{\alpha x}\left[A\,e^{i\beta x} + B\,e^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{\alpha x}\,[A(\cos\beta x + i\sin\beta x) + B(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}\,[(A+B)\cos\beta x + i(A-B)\sin\beta x]$$

$$y = e^{\alpha x}\,[C\cos\beta x + D\sin\beta x]$$ என்க.

இவ்வாறு துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ என்றால், சமன்பாடு (2)-ன் முழுத் தீர்வு,

$$y = e^{\alpha x}[C\cos\beta x + D\sin\beta x]$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$9\frac{d^2y}{dx^2} + 18\frac{dy}{dx} - 16y = 0.$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$9m^2 + 18m - 16 = 0$$
$$(3m + 8)(3m - 2) = 0$$
$$m = -8/3,\quad 2/3.$$

$$\therefore\quad y = A\,e^{-\frac{8x}{3}} + B\,e^{\frac{2x}{3}}$$ என்பதே முழுத் தீர்வாகும். இங்கு A, B யாதாமிரு மாறிலிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$
$$(2m + 1)^2 = 0$$
$$m = -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு $y = e^{-x/2}(A + Bx)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$ ஐ தீர்க்க.

துணைச் சமன்பாடு, $m^2 + 8m + 25 = 0$

$$\therefore \quad m = -\frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2}$$

$$= -\frac{8 \pm 6i}{2}$$

$$= -4 \pm 3i.$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு, $y = e^{-4x}[A\cos 3x + B\sin 3x]$ ஆகும்.

$a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = X$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்.

$D \equiv \dfrac{d}{dx}$ $D^2 \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}$ என்ற குறியீடுகளின் துணையால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$(aD^2 + bD + c)\,y = X$ ... (1) என எழுதலாம்.

இதன் நிரப்பு சார்பு காணும் முறையைக் கண்டோம்.

அந் நிரப்பு சார்பு $y = v$ என்க.

இச் சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு (Particular Integral) $y = u$ என்றால், முழுத் தீர்வு $y = u + v$ ஆகும்.

சிறப்புத் தீர்வு $u = \dfrac{1}{aD^2 + bD = C}\cdot X$ ஆகும்.

[D என்ற குறியீடு, வகைப் படுத்தலைக் குறிப்பது போல், $\dfrac{1}{D}$ அதற்கு எதிரிடையாக, தொகைப்படுத்தலைக் குறிக்கும் எனப் பொருள் கொள்க.]

சில குறிப்பிட்ட சார்புகளின் சிறப்புத் தீர்வை கணக்கிடுவோம்

(A) $X = e^{\alpha x}$ என்க.

$$D\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha e^{\alpha x}$$

$$D^2\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$D^n\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha^n e^{\alpha x}$$

பொதுவாக $f(D)\, e^{\alpha x} = f(\alpha)\, e^{\alpha x}$.

சமன்பாடு (1)-ல் $f(D) \equiv aD^2 + bD + c$

∴ அதன் சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{aD^2 + bD + c} \cdot e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{f(D)}\, e^{\alpha x}$$

∴ $f(x) \neq 0$ என்றால், சி. தீ. $= \dfrac{1}{f(\alpha)} \cdot e^{\alpha x}$

இங்கு $f(x) \neq 0$

i. e., $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$

i.e., $am^2 + bm + c = 0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக α இருக்கக் கூடாது.

பிரிவு 1 : துணைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் α என்க.

$m_1 = \alpha$ என்க.

$$am^2 + bm + c \equiv a(m - m_1)(m - m_2)$$

$$\equiv a(m - \alpha)(m - m_2).$$

∴ சி. தீ. $= \dfrac{1}{aD^2 + bD + c} \cdot e^{\alpha x}$

$$= \frac{1}{a(D - \alpha)(D - m_2)} \cdot e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{a(D - \alpha)} \; \frac{1}{(\alpha - m_2)} \cdot e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{a(\alpha - m_2)} \cdot \left\{ \frac{1}{D-\alpha} \cdot e^{\alpha x} \right\}$$

$$z = \frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x}$$ எனக் கொள்க.

i.e., $(D - \alpha) z = e^{\alpha x}$

i.e., $\frac{dz}{dx} - \alpha z = e^{\alpha x}$.

இது z-ல் நேரிய சமன்பாடு.

∴ இதன் தீர்வு,

$$z \; z^{\int -\alpha x} = \int e^{-\alpha x} \cdot e^{\alpha x} dx$$

$$z \; z^{-\alpha x} = x.$$

$$\therefore \quad z = x e^{\alpha x}.$$

[தேவையான மாறிலிகள் நிரப்புச் சார்பில் இடம் பெற்று விடுவதால், சிறப்புத் தீர்வில், மாறிலி சேர்க்கக்கூடாது.]

∴ சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{1}{a(\alpha - m_2)} \cdot x e^{\alpha x}$ ஆகும்.

பிரிவு 2 : துணைச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் α, α என்க

$$a m^2 + vm + c = a(m - \alpha)^2$$

$$\therefore \quad \text{சி. தீ} = \frac{1}{aD^2 + vD + c} e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{a(D-\alpha)^2} e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{a(D-\alpha)} \left\{ \frac{1}{(D-\alpha)} e^{\alpha x} \right\}$$

$$= \frac{1}{a(D-\alpha)} \cdot x e^{\alpha x}$$ (முந்திய பிரிவில் நிரூபித்தபடி)

$$z = \frac{1}{D-\alpha}\left\{x\, e^{\alpha x}\right\}$$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad (D-\alpha)\, z = x\, e^{\alpha x}.$$

$$\frac{dz}{dx} - \alpha z = x\, e^{\alpha x}$$

z-ல் நேரிய சமன்பாடு

$\therefore$ இதன் தீர்வு, $z\, e^{-\alpha x} = \int x\, e^{\alpha x} . e^{-\alpha x}\, dx$

$$= \frac{x^2}{2.}$$

$$z = \frac{x^2}{2} . e^{\alpha x}.$$

$\therefore$ சி. தீ. $= \frac{1}{a} . \frac{x^2}{2} . e^{\alpha x}.$

எடுத்துக்காட்டு 1:

தீர்வு காண்க :

$$4\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

துணைச் சமன்பாடு $4m^2 + 4m - 3 = 0$

$$(2m-1)(2m+3) = 0$$

$$m = 1/2, \quad -3/2$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= A\, e^{x/2} + B\, e^{-\frac{3x}{2}}$

சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{1}{4D^2 + 4D - 3} . e^{2x}$

$$= \frac{1}{4\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 3}\, e^{2x}$$

$$= \frac{e^{2x}}{21}.$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு,

$y = A\, e^{x/2} + B\, e^{-3x/2} + \frac{e^{2x}}{21}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}.$$

துணைச் சமன்பாடு

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

$$(m+3)(m+1) = 0$$

$$m = -1 : \ -3,$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= Ae^{-x} + Be^{-3x}$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{1}{D^2+4D+3} \cdot e^{-3x}$

$$= \frac{1}{(D+1)(D+3)} e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{(-3+1)} \left\{\frac{1}{D+3} \cdot e^{-3x}.\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot xe^{-3x}.$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு,

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x} - \frac{x}{2}e^{-3x}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$(D-3)^2 y = 2e^{3x} + e^{-x}$$

துணைச் சமன்பாடு

$$(m-3)^2 = 0$$

$$(m = 3, 3.$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= e^{3x}(A + Bx).$

சிறப்புத் தீர்வு $= \frac{1}{(D-3)^2}\{2e^{3x} + e^{-x}\}$

$$= 2 \cdot \left\{\frac{1}{(D-3)^2} \cdot e^{3x}\right\} + \frac{1}{(D-3)^2} \cdot e^{-x}.$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^{3x} + \frac{1}{(-1-3)^2} e^{-x}$$

$$= x^2 e^{3x} + \frac{1}{16} e^{-x}.$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு,

$$y = e^{3x}(A + Bx) + x^2 e^{3x} + \frac{1}{16} e^{-x}.$$

$\therefore$ $y = (A + Bx + x^2) e^{3x} + \frac{1}{16} e^{-x}$ ஆகும்.

(B) $a \frac{d^2y}{d^2x} + b \frac{dy}{dx} + cy = X$

என்ற சமன்பாட்டில் $X = \sin \alpha x$ அல்லது $\cos \alpha x$ என்க.

$$D(\sin \alpha x) = \alpha \cos \alpha x$$

$$D^2(\sin \alpha x) = -\alpha^2 \sin \alpha^2.$$

$\therefore$ $\phi(D^2) \sin \alpha x = \phi(-\alpha^2) \sin \alpha x.$

$\therefore$ $\phi(-\alpha^2) \neq 0$ என்றால்,

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \sin \alpha x = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \sin \alpha x.$$

இதேபோன்று, $\frac{1}{\phi(D^2)} \cos \alpha x = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \cos \alpha x$ ஆகும்.

எனவே, $\phi(-\alpha^2) \neq 0$ என்றால் D^2-க்குப் பதில் $-\alpha^2$ என எழுதி, சிறப்புத் தீர்வைக் காணலாம்.

$\phi(-\alpha^2) = 0$ என்றால் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பின்பற்றுக.

இப்போது $\phi(D^2)$-ன் ஒரு காரணி $D^2 + \alpha^2$ ஆகும்.

$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \beta x$ என்பதை அறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{D^2+\alpha^2} e^{i\alpha x} = \frac{1}{(D+i\alpha)(D-i\alpha)} e^{i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2i\alpha}\left\{\frac{1}{D-i\alpha} e^{i\alpha x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i\alpha} . \; x \; e^{i\alpha x}$$

$$= \frac{xi}{-2\alpha} e^{i\alpha x}$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{1}{D^2+\alpha^2}\left\{\cot \alpha x + i \sin \alpha x\right\}$$

$$= \frac{xi}{2x}\left\{\cos \alpha x + \sin \alpha x\right\}$$

இருபுறமும், மெய்ப் பகுதியையும், கற்பனைப் பகுதியையும் ஒப்பிட,

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2} \cos \alpha x = \frac{x}{2\alpha} \sin \alpha x$$

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2} \sin \alpha x = -\frac{x}{2\alpha} \cos \alpha x \text{ ஆகும்.}$$

இதன் துணையுடன், சிறப்புத் தீர்வைக் காணலாம்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட முடிவுகளை,

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2} . \quad \cos \alpha x = \frac{x}{2} \int \cos \alpha x \, dx$$

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2} \sin \alpha x = \frac{x}{2} \int \sin \alpha x \, dx$$

என்ற வடிவில் நினைவில் வைத்துக் கொள்வது எளிதாவது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்கக :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} \; 6y = \sin 3x$$

இங்கு $(D^2 - 5D + 6)\, y = \sin 3x.$

துணைச் சமன்பாடு

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-0) = 0$$

$$m = 2, 3.$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= Ae^{2x} + Be^{3x}$.

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{1}{D^2 - 5D + 6} \cdot \sin 3x$.

D^2-க்குப் பதில் -3^2 எனம், பிரதியிட,

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு} = \frac{1}{-9 - 5D + 6} \cdot \sin 3x$$

$$= \frac{1}{-(3 + 5D)} \sin 3x$$

$$= -\frac{(3 - 5D)}{(3 + 5D)(3 - 5D)} \cdot \sin 3x$$

$$= -\frac{(3 - 5D)}{9 - 25D^2} \sin 3x$$

$$= = \frac{(3 - 5D)}{9 + 25 \cdot 9} \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{234} (3 - 5D) \sin 3x$$

$$= -\frac{1}{234} [3 \sin 3x - 5 \cdot 3 \cos 3x]$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு,

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} - \frac{1}{234} [3 \sin 3x - 15 \cos 3x]$$

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} - \frac{1}{78} [\sin 3x - 5 \cos 3x$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x.$$

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 4 = 0$

$$m = 2i, \ -2i$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= A \cos 2x + B \sin 2x$.

சிறப்புத் தீர்வு,

$$= \frac{1}{D^2+4}\cos 2x$$

$$= \frac{x}{2}\int \cos 2x\, dx.$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}.$$

∴ முழுத் தீர்வு,

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x \text{ ஆகும்.}$$

(C) $a\dfrac{d^2y}{dx^2} - b\dfrac{dy}{dx} + cy = X$ என்ற சமன்பாட்டில் $X = x^m$ என்க.

[இங்கு m-ஒரு மிகை முழு எண் (positive integer) என எடுத்துக் கொள்வோம்.]

$$D(x^m) = m\,x^{m-1}$$

$$D^2(x^m) = m(m-1)\,x^{m-2}$$

... ...

$$D^m(x^m) = m(m-1)\ldots\ldots\ldots 2\cdot 1.$$

$$= \underline{|m}$$

$$D^{m+1}(x^m) = 0.$$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{1}{aD+bD+c}\cdot x^m$

$$= \frac{1}{c\left(1+\frac{b}{c}D+\frac{a}{c}D^2\right)}\ x^m$$

$$= \frac{1}{c}\left\{1+\frac{bD}{c}+\frac{aD^2}{c}\right\}^{-1} x^m$$

$\left\{1+\dfrac{bD}{c}=\dfrac{aD^2}{c}\right\}^{-1}$ – ஐ, ஈருருப்புத் தோற்றத்தின் படி, D-ன் அடுக்குகளில் விரித்தெழுதுக. $D^{m+1}(x^m) = 0$ ஆதலால், $D, D^2, \ldots\ldots\ldots D^m$ ஆகியவற்றை x^m-ல் செயல்படுத்தி, சிறப்புத் தீர்வைக் காணலாம்.

குறிப்பு: சிறப்புத் தீர்வு காண, மற்றொரு சுலபமான வழியை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு (அ) -ல் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 4D + 5)\, y = x^3$.

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 4m + 5 = 0$.

$$m = -\frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$= -2 \pm i$$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $= e^{-2n} [A \cos x + B \sin x)$

சிறப்புத் தீர்வு,

$$= \frac{1}{D^2 + 4D + 5} \quad x^3$$

$$= \frac{1}{5\left(1 + \frac{4D + D^2}{5}\right)} x^3$$

$$= \frac{1}{5} \left\{1 + \frac{4D + D^2}{5}\right\}^{-1} x^3$$

ஈருருப்புத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி,

$$= \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{4D + D^2}{5}\right) + \left(\frac{4D + D^2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4D + D^2}{5}\right)^3 + \left(\frac{4D + D^2}{5}\right)^4 + \ldots \right] x^3.$$

$D^4 (x^3) = 0$, ஆதலால், D^4, D^5, ... ஆகிய உறுப்புகளை எழுதவேண்டிய அவசியமில்லை.

சிறப்புத் தீர்வு,

$$= \frac{1}{5} \left[1 - \frac{4D}{5} - \frac{5D^2}{5} + \frac{16 D^2}{25} + \frac{8D^3}{25} - \frac{64 D^3}{125}\right] x^3.$$

$$= \frac{1}{5} \left[1 - \frac{4D}{5} + \frac{11 D^2}{25} - \frac{24 D^3}{125}\right] x^3.$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3 - \frac{4}{5}\cdot 3x^2 + \frac{11}{25}\cdot 6x - \frac{24}{125}\cdot 6 \right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3 - \frac{12x^2}{5} + \frac{66}{25}x - \frac{144}{125} \right]$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு y = நிரப்புச் சார்பு + சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + 3D - 4)\,y = x^2 - 2x$$

துணைச் சமன்பாடு

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$(m + 4)(m - 1) = 0$$

$$\therefore \quad m = 1, \; -4.$$

நிரப்புச் சார்பு $= Ae^x + Be^{-4x}$.

இதன் சிறப்புத் தீர்வைக் காண கீழ்க்கண்ட வழியையும் பின்பற்றலாம்.

மாற்று வழி :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 - 2x \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

வலப் புறம் x-ன் இரண்டாம் படியில் இருப்பதால், இச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வாக, x-ன் இரண்டாம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை $(ax^2 = bx + c)$-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

[இப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியும், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின், வலப்புறக் கோவையின் படியும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.]

அதாவது சிறப்புத் தீர்வு, $y = ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்.

மாறிலிகள் a, b, c -ஐ கணக்கிட .

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2ax+b$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$$

சிறப்புத் தீர்வு, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யுமாதலால், இத் தீர்வை சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிட,

$2a+3\ (2ax+b)-4\ (ax^2+bx+c)\ =x^2-2x$ இரு புறமும் உள்ள x^2, x, தனி எண் ஆகியவற்றின் கெழுக்களை சமப்படுத்த,

$$-\ 4a = 1$$

$$6a-4b = -2$$

$$2a+3b-4c = 0.$$

இதிலிருந்து $a = -\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{8}$, $c=-\dfrac{1}{32}$ எனக் காணலாம்.

எனவே சிறப்புத் தீர்வு $= -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32}$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு,

$$y = A\ e^{x} + B\ e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}.$$

பயிற்சி

I. கீழ்க்கண்ட சார்புகளை, முழுத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குக :

(1) $y = c\,(x-c)^2$

(2) $y = ax^2 + bx$

(3) $y = a\,e^{2x} + b\,e^{3x}$

(4) $y = a\cos(nx+b)$

a, b இரண்டும் மாறிலிகள் எண்க.

II. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

(1) $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x)\sec^2 y\, dy = 0$

(2) $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$

(3) $\tan y \sec^2 x \cdot dx + \tan x \cdot \sec^2 y\, dy = 0$

(4) $\sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x\, dy + y\, dx = 0$

(5) $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$

(6) $(e^x + 1)\, y\, dy + (y + 1)\, dx = 0$

(7) $(y - xy^2)\, dx - (x + x^2 y)\, dy = 0$

(8) $(2x^3 + 3y)\, dx + (3x + y - 1)\, dy = 0$

(9) $dy = (e^{x+y} + x^2 e^y)\, dx$

(10) $(x - y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$

(குறிப்பு : $u = x - y$ எனப் பிரதியிடுக.)

(11) $\left[1 + e^{x/y} \right] dx + e^{x/y} \left[1 - \dfrac{x}{y} \right] dy = 0$

($v = \dfrac{x}{y}$ எனப் பிரதியிடுக)

III. தீர்வு காண்க :

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$.

(2) $(y^2 - 2xy)\, dx = (x^2 - 2xy)\, dy$

(3) $2xy + (y^2 - x^2) \dfrac{dy}{dx} = 0$

(4) $(x^2 - 2xy - y^2)\, dx = (x+y)^2\, dy$.

(5) $x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x} = y$

(6) $(4x^2 - y^2) \dfrac{dy}{dx} = 4xy$

IV. தீர்வு காண்க.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+7y+2}{3x+5y+6}$

(2) $(2x + 18y - 14) \dfrac{dy}{dx} = 6x + 5y - 7$

(3) $\frac{dy}{dx} + \frac{y-2x-1}{x+2y-3} = 0$

(4) $(x+y-1)\,dy = (x+y+1)\,dx$

(5) $(2x+3y+4)\,dx = (4x+by+5)\,dy$

V. தீர்க்க :

(1) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1}x}$.

(2) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^3 x$.

(3) $\cos^2 x\,\frac{dy}{dx} + y = \tan x$.

(4) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

(5) $x\frac{dy}{dx} - y = x^5 \log x$.

(6) $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$

$x = 1$ என்றால், $y = 2$ என்க.

(7) $x\frac{dy}{dx} + y\log x = e^x\, x^{1 - 1/2 \log x}$

(8) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}\,2xy = x\sqrt{1-x^2}$.

(9) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1$.

[குறிப்பு: $u = \frac{dy}{dx}$ எனப் பிரதியிடுக.]

(10) $y - x\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{dy}{dx}$

[குறிப்பு: இது x-ல் நேரிய சமன்பாடாகும்]

(11) $\frac{dy}{dx} + x^3 y = e^x y^4$

(12) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y} + x^3 e^{-y}$

(13) $2(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - y + y^3 = 0.$

(14) $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1 + x) e^x \cdot \sec y$

(15) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x.$

(16) $2 \tan y \cdot \frac{dy}{dx} + x \sin^2 y = x^3 \cos^2 y$

(17) $\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y (1 - x \cos y).$

VI. (a) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின், முழுத் தீர்வுகளைக் காண்க :

(1) $(D^2 - 6D + 8) y = 0$

(2) $(D^2 - D + 4) y = 0$

(3) $(D^2 - 3D - 8) y = 0$

(4) $(2D^2 - 3D + 4) y = 0$

(5) $(D^2 + 16) y = 0$

(b) (1) $(D^2 - 5D + 6) y = e^{4x}$

(2) $(D^2 - 3D + 2) y = e^{3x}$

$x = 0, \ \log e\, 2$ என்றால், $y = 0$ என்க.

(3) $(D^2 - 13D + 12) y = e^{-2x} + 5e^x$

(4) $(D^3 - D^2 - D + 1) y = 2 e^x$

(5) $(D^2 - 3D + 2) y = 2 e^x$

$x = 0$ என்றால், $y = 3, \ Dy = 3$ என்க.

(6) $(D^2 + D + 1)\,y = \sin 2x$

(7) $(D^2 - 8D + 9)\,y = 8 \cos 5\,x$

(8) $(D^2 - 4D - 5)\,y = e^{3x} + 4 \cos 3x$

(9) $(D^2 + 5D - 6)\,y = \sin 4x \sin x$

(10) $(D^2 + 9) = \cos^3 x$

(11) $(D^2 - 1)\,y = 2 + 5x$

(12) $(6D^2 - D - 2)\,y = e^{4x} + x^2$

(13) $(D+1)^3\,y = e^{-x} + x^2.$

(14) $(D^2 + 3D + 2)\,y = e^{-x} + x^3 + \cos x.$

(15) $(D^4 + D^2 + 1)\,y = a\,x^2 + be^{-x}$

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

1. A Course of Analysis — *By E. G. Phillips*
2. Mathematical Analysis — *By Goodstein*
3. Advanced Calculus — *By Sokolnikaff*
4. Differential Equations — *By D. A. Murray*
5. Differential Equations — *By Piaggio*
6. Differential Equations — *By L. R. Ford*
7. Mathematical Analysis — *By A. Ramanathan*
8. A Course of Mathematical Analysis — *By Shanthi Narayanan*

கலைச் சொற்கள்

A

Approximate sum — தோராய தொகை
Approximate sum, upper — தோராய மேற்தொகை
Approximate lower — தோராய கீழ்தொகை
Axis — அச்சு
Axis, major — நெட்டச்சு

B

Binomial theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Boundary — வரப்பு

C

Centre of gravity — புவிஈர்ப்பு மையம்
Complementary function — நிரப்புச் சார்பு
Constant — மாறிலி
Constant, arbitrary — யாதாமொரு மாறிலி

D

Degree — படி
Degree of a differential equation — வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் படி
Density — அடர்த்தி
Density areal — பரப்பு அடர்த்தி
Density volume — கன அடர்த்தி
Determinant — அணிக்கோவை
Determinant, functional — சார்பு அணிக்கோவை
Determinant of transformation — மாறி மாற்று அணிக் கோவை
Dimension — பரிமாணம்
Domain — அரங்கு

E

Elementary area — ஆரம்பப் பரப்பு
Ellipse — நீள் வளையம்
Ellipsoid — நீள்வளையத் திண்மம்
Equation — சமன்பாடு
Equation auxiliary — துணைச் சமன்பாடு
Equation Bernoulli's — பெர்னூலியின் சமன்பாடு
Equation homogeneous — சமபடித்தான சமன்பாடு
Equation linear — நேரிய சமன்பாடு
Equation Non-homogeneous — சமபடியில்லாத சமன்பாடு
Equation Ordinary differential — சாதாரண வகையீட்டுச் சமன் பாடு
Equation partial differential — பகுதியான வகையீட்டுச் சமன் பாடு

F

Finite — முடிவுள்ள
Finite number — முடிவுள்ள எண்

I

Image — பிம்பம்
Indeterminate — தேருதது
Integral — தொகை
Integral improper — தகாத் தொகை
Integral lower Riemann — ரீமன் கீழ் தொகை
Integral upper Riemann — ரீமன் மேல் தொகை
Integral multiple — பன்மாறி தொகை
Integral particular — சிறப்புத் தீர்வு
Integral repeated — அடுக்குத் தொகை
Integration — தொகைப் படுத்தல்
Integrating factor — தொகையீட்டுக் காரணி

J

Jacobian — ஜாக்கோபியன்

L

Loop — கண்ணி

M

Mode of division — பகுப்பு முறை

N

Necessary & sufficient condition — தேவையான & போதுமான நிபந்தனை

O

Order — வரிசை
Order of a differential equation — வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் வரிசை
Order of Integration — தொகைப்படுத்தலின் வரிசை
Oscillation — அலைவு
Oscillatory sum — அலைவுத் தொகை

P

Parallelopiped — இணைகரத் திண்மம்
Practical rule — நடைமுறை விதி
Prism — பட்டயம்

Q

Qnadrant — காற்பகுதி
Quadrant first — முதற் காற்பகுதி
Quadratic — இரு படித்தான

R

Reversible — திருப்பத் தக்கது

S

Solid of revolution — சுழற்சிக் கன உருவம்
Solution — தீர்வு
Solution, complete — முழுத் தீர்வு
Surface — மேற் பரப்பு

T

Tetrahedron — நான்முகி
Transformation — மாறி மாற்றம்
Transformation direct — நேர் மாற்றம்
Transformation inverse — தலைகீழ் மாற்றம்

V

Variable — மாறி
Variable, independant — சார்பிலா மாறி
Variable, separable — பிரிக்கத்தக்க மாறிகள்