புகுமுக வகுப்புக்

கணித நூல்-I

தி. கோவிந்தராசன்

முத்துசாமி

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் – 158

புகுமுக வகுப்புக்

கணித நூல் – I

ஆசிரியர்கள் :

டி. **கோவிந்தராசன்,** *எம்.ஏ., எல்.டி.,*

பேராசிரியர், கணிதத் துறை,

அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

சொ. முத்துசாமி, *எம்.எஸ்.ஸி.,*

உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,

அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1968

B. T. P. No. 158

© Bureau of Tamil Publications

MATHEMATICS FOR THE P. U. C.

T. GOVINDARAJAN & S. MUTHUSWAMY

Price Rs. 7-00

Printed by
Manickam Press, Madras-29

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஏழு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன் வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும், மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பலதுறைகளில் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**புதுமுக வகுப்புக் கணித நூல் I**' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக்கழகத்தின் 158 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 193 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலை மண்டபத்தில் கொலு வீற்றிருக்கிறாள். எனவே இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக; உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

உள்ளடக்கம்

இயற்கணிதம் (Algebra)

பகுதி		பக்கம்
1.	முன்னுரை (Introduction)	1
2.	சார்புகள் (Functions)	13
3.	படிக்குறிக் கொள்கை (Laws of Indices)	26
4.	அளவுக்கிணங்காத மூலங்கள் (Surds)	36
5.	மடக்கைகள் (Logarithms)	49
6.	விகிதமும், விகித சமமும் (Ratio and Proportion)	82
7.	இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic Equations)	103
8.	இருபடிச் சார்புகள் (Quadratic Functions)	125
9.	பல்விதச் சமன்பாடுகள் (Miscellaneous Equations)	151
10.	கூட்டுத் தொடர் (Arithmetical Progression)	169
11.	இசைத் தொடர் (Harmonic Progression)	186
12.	பெருக்குத் தொடர் (Geometrical Progression)	199
13.	கூட்டு, இசை, பெருக்குத் தொடர்களுக்குள்ள சில தொடர்புகள் - அத்தொடர்புகளை யொட்டிய மற்ற சில தொடர்கள் (Relationships among the Arithmetic, Harmonic and Geometrical Series - Associated Series)	218
14.	வரிசை மாற்றமும் சேர்வுகளும் (Permutations and Combinations)	236
*15	தொடர் முறைத் தெரிப்பு (Proof by Mathematical Induction)	265
16.	ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (கூட்டு முழு எண்படி) (The Binomial Theorem – Positive Integral Index)	270
*17.	ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (அளவுக்கிணங்கியபடி) (The Binomial Theorem-Rational Index)	290
	விடைகள்	295

இயல்முறை வடிவ கணிதம்

(Analytical or Algebraic Geometry)

1.	ஆயத்தொலைகள் (Co-ordinates)	307
2.	நேர்க்கோடுகள் (Straight Lines)	332
3.	இரண்டும், அதற்கு மேற்பட்ட நேர்க்கோடுகள் (Two and more Straight Lines)	355
4.	வட்டம் (The Circle)	370
	விடைகள்	407

* இக்குறியிடப்பட்ட பகுதிகளும் பத்திகளும் புதுமுக வகுப்புக்குப்பாடமன்று.

1. முன்னுரை

1.1. "எண்ணும் எழுத்தும் கண்ணெனத் தகும்" என்பது முதுரை.

"எண்ணென்ப ஏனை யெழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு"

என்பது வள்ளுவர் வாக்காம்.

மனித வாழ்க்கையில் எண்ணின் இன்றியமையாமையை மிகைப்படுத்திக் கூறத் தேவையில்லை. எண்ணின்றேல் வாழ்க்கையில்லை என்பது சிந்தித்தால் தெரியவரும். ஆனால் மனித சாதி முதலில் எண்களைப் பயன்படுத்த ஆரம்பித்த போது 'ஒன்று' 'இரண்டு' 'பல' எனத்தான் எண்ண ஆரம்பித்திருக்கவேண்டும் என்று அறிஞர் ஊகிக்கின்றனர். பின்னர் பல்லாயிரக் கணக்கான ஆண்டுகள் கழித்தே, 'மூன்று' 'நான்கு'...........'பத்து'வரை எண்ண ஆரம்பித்திருக்கலாம். இவ்வாறே, பல்லாயிரக் கணக்கான ஆண்டுகள் செல்லச் செல்ல, கூட்டு முழு எண்கள் வளர்ந்து, 'ஆயிரம்', 'பத்தாயிரம்',.........'கோடி' போன்ற எண்கள் வழக்கில் பயன்பட வழிகோலப்பட்டிருக்கலாம்.

முழு எண் முறைதான் இயற்கையாக மனிதனுக்குத் தேவைப்பட்ட எண்ணிக்கை முறை. ஆடுமாடுகளை வைத்து வளர்த்த மனிதனுக்கு அவைகளை எண்ணுவதோடு அவனுடைய எண்ணறிவு முற்றுப்பெற்றது.

ஆனால் மனித வாழ்க்கையில், முழு எண்கள் மாத்திரம் போதாத காலம் ஒன்று வந்திருக்கவேண்டும். அப்போது பின்னங்களின் அவசியம் தோன்றியிருக்கலாம். ஒரு பொருளை இரு சமபகுதிகளாகப் பிரித்துக் கையாள வேண்டிய நிலையில் பாதியும், பாதியில் பாதியும் தோன்றியிருக்கலாம்.

பின்னர் மூன்று சமபகுதிகளாக, நான்கு சமபகுதிகளாக,...... பிரித்துப் பயன்படுத்தவேண்டிய நிலையும் ஏற்பட்டிருக்கலாம். அப்போது பின்னங்கள் தோன்றியிருக்கக்கூடும். ஆரம்ப காலத்தில் $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,.........போன்ற பின்னங்கள் வழக்கில் வந்திருக்கக் கூடும். மற்ற பின்னங்கள் இப் பின்னங்களின் கூட்டுத் தொகைகளாய்,

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ என வழக்கில் வந்திருக்கலாம்.

ஆயிரக்கணக்கான ஆண்டுகள் செல்லச் செல்ல, மனித வாழ்க்கையில் பல்வேறு சிக்கல்களும், அவைகளை விடுவிக்க வேண்டிய இன்றியமையாமையும் தோன்றவே, அறிவியல் துறைகள் பலபட வளர ஆரம்பித்தன. மனிதனது அறிவு வளர்ச்சித் துறைகளிலே, கணித இயல் வளர்ச்சி சீரும் சிறப்பும் மிக்கதோர் செந்துறையாய்ச் செங்கோலோச்சத் தொடங்கிற்று. அவ்வியல் வளர்ச்சியின் பல பிரிவுகளில் தலையாய பிரிவு இயற்கணிதமாகும். இயற்கணிதம் நம் நாட்டில் வெகு காலத்துக்கு முன்பே வளரத் தொடங்கியது. எண்ணியலறிவும், அவ்வெண்களைப் பொதுப்படுத்திய கணித முறை அறிவும், இந்திய நாட்டிலிருந்து, அரேபிய நாடு களுக்குச் சென்று பரவி, அங்கிருந்து மேலை நாடுகளுக்கும் பரவ ஆரம்பித்தன.

இயற் கணித நூலின் ஆங்கிலப் பெயர் 'Algebra' என்பது, 'Aljeber' என்ற அரேபியச் சொல்லின் சிதைவு எனச் சில ஆராய்ச்சியாளர்கள் கொள்கின்றனர்.

1.2. இயற்கணிதநூல் வளர்ச்சியிலே, கூட்டு முழு எண்கள் மாத்திரமேயல்லாமல் (Positive integers), கூட்டுப் பின்னங்கள் (Positive fractions), குறை முழு எண்கள் (Negative integers), குறை பின்னங்கள் (Negative fractions), அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் (Rational numbers), அளவுக்கிணங்காத எண்கள் (Irrational numbers), மெய்யெண்கள் (Real numbers), கற்பனை எண்கள் (Imaginary numbers), கலப்பெண்கள் (Complex numbers) முதலிய பல்வகைப்பட்ட எண்கள் இன்றியமை யாதனவாயின. அவ்வித எண்களின் பல வகைகளை (அல்லது பல பிரிவுகளை) நாம் அறியவேண்டும். இவ்வகைகள் ஒன்றுக்கொன்று பிணைபட்டு நிற்கும். ஒருவகை மற்றொன்றின் பகுதியாகவும், ஒருவகை, சிலபல வகைகளைத் தன்னுள்

அடக்கியும், ஒருவகை மற்ற வகைகளோடு ஒரு விதத் தொடர்பும் இல்லாமலும் — பல விதத் தொடர்புகளைக் கொண்டும், தனித்தியங்கும் தன்மை கொண்டும் இருக்கும்.

இவைகளை யெல்லாம் ஒழுங்காகப் பிரித்து அவ்வவ் வகைகளின் பல்வேறு பண்புகளையும் தொடர்புகளையும் ஆராய்வதும் அவைகளை வரையறுத்து விளக்குவதும் பெரு முயற்சியாகும். நமக்குத் தேவைப்படும் அளவிற்கு அவை களைப்பற்றி அறியப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் உதவி செய்யும். பின்வரும் பத்திகளில் a, b என்பவை இரு கூட்டு முழு எண்கள் எனக் கொள்க.

1.3·1. கூட்டு முழு எண்: $3x=9$ என்ற சமன்பாடு நமக்கு ஒரு கூட்டு முழு எண்ணை அறிமுகப்படுத்துகிறது. $x=3$ அதன் தீர்வு. பொதுவாக $x=a$ அல்லது $x-a=0$ என்பது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணைத் தெரிவிக்கிறது.

1, 2, 3....... கூட்டு முழு எண் தொடர். இத் தொடரை, இயற்கை எண் தொடர் (Series of Natural numbers) என்றும் கூறுவதுண்டு.

1.3·2. கூட்டு பின்னம்: $2x=1$; $3x=1$; $4x=1$.............. என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$........என்ற கூட்டு பின்னங்களை நமக்கு அறிமுகப்படுத்துகின்றன. பொது வாக $ax=b$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $x=\dfrac{b}{a}$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. $\dfrac{b}{a}$ ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயிருக்கலாம், அல்லது கூட்டு பின்னமாயிருக்கலாம். இங்கு $a\neq 0$, (அதாவது a பூச்சியமல்ல).

1.3·3. குறை முழு எண்: $x+3=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என்ன? அதாவது எந்த எண்ணோடு 3ஐக் கூட்டினுல் பூச்சியமாகும்? அப்படிப்பட்ட ஒரு கூட்டு முழு எண் இருக்க முடியாது. ஆகவே $x=-3$ எனக் கொள்ளப்படுகிறது. இது ஒரு குறை முழு எண்ணுகும். பொதுவாக $x+a=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x=-a$ என்ற குறை முழு எண் ஆகும்.

1.3·4. குறை பின்னம்: $2x+1=0$, $3x+1=0$, $4x+1=0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் என்ன? எந்த எண்ணை இரண்டால் (மூன்ருல், நாலால்) பெருக்கி அதோடு 1ஐக்

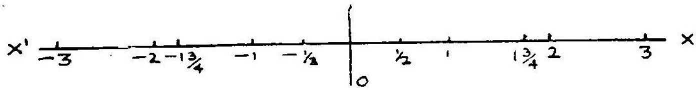
கூட்டினால் பூச்சியம் கிடைக்கும்? அது ஒரு கூட்டெண்ணாய் இருக்க முடியாது. குறை முழு எண்ணாகவும் இருக்கமுடியாது. ஆனால் $2x=-1$, $3x=-1$, $4x=-1$ ஆனால் xன் மதிப்பு அச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளையளிக்கும். அவைகளே $x=-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ போன்ற குறை பின்னங்களாகும்.

பொதுவாக $ax+b=0$ ஆனால், $x=-\dfrac{b}{a}$ என்பது குறை பின்னமாகலாம். ஆனால் $-\dfrac{b}{a}$ ஒரு குறை முழு எண்ணாகவும் இருக்கலாம். (இங்கு $a\neq 0$ அதாவது a பூச்சியமல்ல).

1.4. அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் (Rational numbers):

இதுவரை நாம் கண்டவை, கூட்டு முழு எண், கூட்டு பின்னம், குறை முழு எண், குறை பின்னம் என நான்கு வகைப்பட்ட எண்களாகும். அவையாவும் ஒரோர் அளவுக் குட்பட்டவை.

நாம் வழக்கமாகக் கையாளும் முறைப்படி இவ்வாறான கூட்டு, குறை எண்களை (ஒரு அளவுச் சட்டங் கொண்டு) ஒரு நேர்க்கோட்டில் இடங் குறிக்கலாம் என அறிவோம்.



படம் 1.4

X'OX என்ற நேர் கோட்டில் O என்ற ஒரு புள்ளி எடுத்துக் கொள்வோம். OX பக்கம் கூட்டு எண்களை இடம் குறிப்பதும், OX' பக்கம் குறை எண்களை இடம் குறிப்பதும் மரபு என்பது நாம் அறிவோம்.

படம் 1.4ல் $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{3}{4}$, 2, 3........என்ற கூட்டு எண்கள் கோட்டின்மேல் OX பக்கம் இடங் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன; $-\frac{1}{2}$, -1, $-1\frac{3}{4}$, -2, -3........என்ற குறை எண்கள் கோட்டின் மேல் OX' பக்கம் இடங் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

அவ்வாறே பொதுவாக a, $\dfrac{b}{a}$ என்ற கூட்டு முழு எண், கூட்டு பின்னம் எதையும் OXன் மேல் இடங்குறிக்கலாம்.

மேலும் $-a$, $-\frac{b}{a}$ என்ற குறை முழு எண், குறை பின்னம் எதையும் OX^1-ன் மேல் இடங்குறிக்கலாம்.

எனவே, இதுவரை கண்ட நான்குவகை எண்களுக்கும் உரியதோர் புள்ளி உண்டு. குறிப்பிட்ட புள்ளி O விலிருந்து, எவ்வளவு தூரத்தில் Oக்கு எந்தப் பக்கத்தில் இருக்கின்றதென அறிந்தால், அப்புள்ளி எவ்வெண்ணைக் குறிக்கிறதெனக் கூற முடியும்.

இப்படிப்பட்ட எண்களை அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் என்று கூறுவதுண்டு. ஒவ்வொரு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணும் $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும். p, q கூட்டு அல்லது குறை முழு எண்கள். இப்படி வரையறுக்கப்பட்ட எண்கள் கூட்டத்தில் O, பூச்சியம் என்ற எண்ணையும் சேர்த்துக் கொள்ளலாம். (ஏனெனில் $p=0$ ஆனால் $\frac{p}{q}=0$ என்ற எண்ணும் அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் கூட்டத்தில் சேரும்.) ($q=0$ ஆனால் $\frac{p}{q}$ கந்துழி எல்லையை அடையும். பின்னர் கந்துழி பற்றிக் காண்க).

அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் எத்தனை? எண்ணற்றவை; கூட்டு முழு எண்கள் எண்ணற்றவை; கூட்டு பின்னங்கள் எண்ணற்றவை; அவ்வாறே, குறை முழு எண்கள், குறை பின்னங்கள்.

1.5. அளவுக்கிணங்காத எண்கள் (Irrational numbers) :

முன் வரையறுக்கப்பட்ட அளவுக்கிணங்கிய எண் இனத்திற்கும் அப்பாற்பட்ட ஒரு எண்ணினம் ஒன்று (ஏன்? பல) உண்டு. அவ்வினத்திலொன்றையறியும் முறையாக,

$x^2=2$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். எந்த எண்ணை இருபடிக்கு உயர்த்தினால் 2 கிடைக்கும்? $\frac{p}{q}$ என்ற அளவுக் கிணங்கிய எண்ணாக, அது இல்லையென நாம் அறிவோம். ஏனெனில் 2 என்ற எண்ணின் இருபடி மூலத்தை நாம் காண முற்படும்போது, அது ஒரு முடிவற்ற எண்ணாவதை நாம் பார்க்கிறோம்.

1) 2·0000..... (1·414.....
1
24) 100
96
281) 400
281
2824) 11900
11296
604

இது ஒரு முடிவற்ற பதின்பகுப்புப் பின்னமாகச் சென்று கொண்டேயிருக்கிறது.

[குறிப்பு: பொதுவாகக் கூறுங்கால், ஒரு எண்ணில் இருபடி மூலத்தைச் சாதாரணமாக நாம் காண முற்படும்போது, பதின் புள்ளிக்குப் பின்னால் எண்கள் இருக்குமாயின், அவ்வெண்கள் முடிவடையும்போது, இருபடி மூலம் காணும் வேலையும் முடிவடைய வேண்டும்; அப்படியின்றி, இரண்டிரண்டு பூச்சியங்கள் சேர்த்து நாம், முயற்சியை நீடிக்க வேண்டுமாயின், இருபடி மூலம் ஒரு எல்லையற்று வளர்ந்து கொண்டே போகும்.]

$x^2=2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வான $x=\sqrt{2}$ என்பது ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணல்ல. அதை $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பில் எழுதவே முடியாது. எனவே $\sqrt{2}$ என்பது, அளவுக்கிணங்கிய எண்கள் இனத்தின்பாற் படாத ஒரு எண்ணாகும். இருந்த போதும் $\sqrt{2}$ க்கு ஒரு மதிப்புண்டு. அது யாதெனின்:

ஒரு செ. மீ. நீளம் உள்ள ஒரு சம சதுரத்தின் மூலை வரையின் நீளம் $\sqrt{2}$ செ. மீ. ஆகும். ஆகவே $\sqrt{2}$ செ. மீட்டரை, சரியாக (Exact) ஒரு கோட்டின் பகுதி குறிக்கும். எனவே $\sqrt{2}$ க்கு ஒரு மதிப்பு உண்டு. அவ்விதமான எண்களின் இன்றியமையாமை அதன் காரணமாக ஏற்படுகின்றது. அது அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாக இல்லாவிட்டாலும், அதையும் எண்களினத்தில் சேர்க்க வேண்டிய தேவை ஏற்படுகின்றது. கணிதத்துறையில் $x^2=2$ போன்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாக அது எண்கள் இனத்தில் இடம்பெறுகிறது. ஆனால் அது அளவுக்கிணங்காத எண் என்ற இனத்தில் சேரும். இவ்வினமின்றி எண்ணினம் பூர்த்தியாவதில்லை.

அவ்வாறே $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{15}$ ...... முதலிய எண்களின் மதிப்பு $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பில் தோன்ருவிடினும், அவை, எண்களினத்தில் இடம்பெற்று, அவைகளுக்குரிய மதிப்புக் களைப் பெறுகின்றன.

எனவே எண்களினம், இவ்வாருன, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ... போன்ற அளவுக் கிணங்காத எண்களின் கூட்டத்தினுல் விரிவடைகின்றது, ஆக்கம் பெறுகின்றது. அளவுக் கிணங்கிய எண்களைப்போல் அளவுக் கிணங்காத எண்களுக்கும் கணித அமைப்பில் முக்கியமான இடம் உண்டு.

1.5·1. இப்போது $\sqrt{2}$க்கு அணித்தான அல்லது ஏறத் தாழவுள்ள (approximate) மதிப்பு என்ன எனக் காண்போம்.

$$(1.1)^2 = 1.21$$

$$(1.2)^2 = 1.44$$

$$(1.3)^2 = 1.69$$

$$(1.4)^2 = 1.96$$

$$(1.5)^2 = 2.25$$

$$\therefore 1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$(1{\cdot}41)^2 = 1.9881$$

$$(1.42)^2 = 2.0164$$

$$\therefore 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

இவ்வாறே $\sqrt{2}$ன் அணித்தான மதிப்பை எந்த அளவுக்கு அணித்தாகக் கொண்டு செல்ல வேண்டுமானுலும் எடுத்துச் செல்லலாம் $(1{\cdot}4142...... = \sqrt{2})$.

ஆகவே $\sqrt{2}$ என்ற எண்மதிப்பைப்பற்றி நாம் கண்டவற் றைச் சுருங்கக் கூறில்:

(1) $\sqrt{2}$ என்ற ஒரு எண் உண்டு;

(2) அதை ஒரு கோட்டின் அளவாகக் குறிக்கலாம்;

(3) ஆனால் அதை அளவுக் கிணங்கிய எண் அமைப்பில், அதாவது $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பில் எழுத முடியாது;

(4) அது அளவுக் கிணங்காதது;

(5) அதற்கு அணித்தான மதிப்புக்களை நாம் அறிய இயலும் (எவ்வளவு அணித்தான மதிப்பும் காணலாம்.)

இப்படிப்பட்ட எண்கள் அளவுக் கிணங்காத எண்கள் (Irrational numbers) என்ற பாகுபாட்டின்பாற்படும்.

1.6. இதுவரை நாம் கண்ட இரு பெரும் இனத்தைச் சேர்ந்த எண்களை—அதாவது அளவுக்கிணங்கிய எண்கள்—அளவுக் கிணங்காத எண்கள்—மெய்யெண்களெனக் கொள்வோம் (Real numbers). இவைகள் யாவற்றையும் $\frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பிலோ, அல்லது ஒரு அணித்தான மதிப்புக் கொண்டோ அளவிட முடியும். ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுச் சட்டம் கொண்டு இவைகள் யாவற்றையும் விதிவிலக்கின்றிக் குறிப்பிடலாம்.

1.7. கற்பனை எண்கள் (Imaginary numbers) :

இப்போது $x^2+9=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். $x^2=-9$. எந்த எண்ணைத் தன்னாலேயே பெருக்கினால், -9 கிடைக்கும்? அவ்வெண் ஒரு கூட்டு அல்லது குறை வெண்ணாக இருக்க முடியாது. ஏனெனில் ஒரு கூட்டு அல்லது குறை யெண்ணாக இருப்பின் அதன் இருபடி ஒரு கூட்டெண், எப்போதும் குறை யெண்ணாக இருக்க முடியாது. ஆகவே $x^2=-9$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஒரு கூட்டு அல்லது குறை யெண்ணல்ல, எனவே மெய்யெண்ணு மல்ல. $x^2=2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண, $\sqrt{2}$ என்ற ஒரு அளவுக் கிணங்காத எண்ணை ஏற்றுக் கொண்டோம். அதாவது எண் இனத்தை விரிவுபடுத்தி, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\ldots$ போன்ற அளவுக் கிணங்காத எண்களையும் எண்களினத்தில் சேர்த்துக் கொண்டோம். அதேபோல், $x^2=-9$ என்ற சமன்

பாட்டுக்கும் ஒரு தீர்வை நிர்ணயிக்க மேலும் எண்களினத்தை விரிவு படுத்துவோம்.

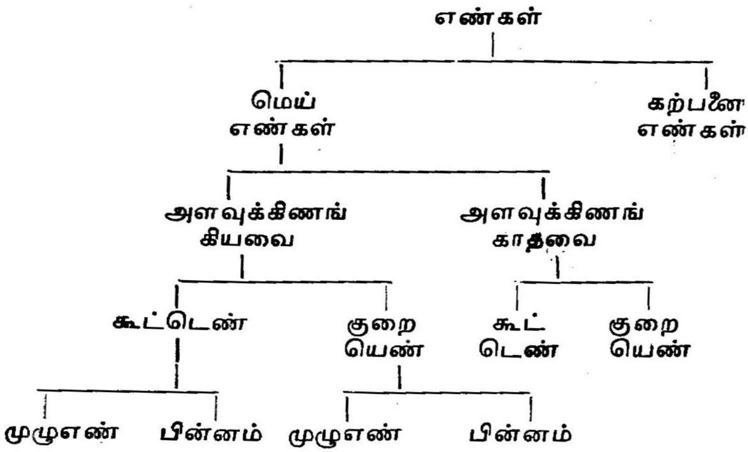
*1.7·1. இதற்கென $i^2 = -1$ என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்ட i என்ற ஒரு எண்ணை, அதாவது $i = \sqrt{-1}$ என ஏற்படுத்துவோம். இந்த i என்ற எண்ணை எல்லா இயற்கணித வரையறைகளுக்கும், கோட்பாடுகளுக்கும், வாய்பாடுகளுக்கும் உட்பட்டதாக, அமைத்து விடுவோம். (முதலாவதாக $i^2 = -1$ ஆனல், $(-i)^2$ ம் -1 க்குச் சமமாகும். அதாவது $\sqrt{-1} = -i$ அல்லது $-i$ எனவும் கொள்ளலாம்). இந்த நிபந்தனையில், $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(9)} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = \pm 3i$ ஆகும். அவ்வாறே $\sqrt{-4} = \pm 2i$, பொதுவாக $\sqrt{-a^2} = \pm ai$ என எழுதப்படும். $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$ என எழுதப்படும். சாதாரணமாக கூட்டெண் குறியுடைய எண்ணை மாத்திரம் கொண்டால் போதுமானது. அதாவது $\sqrt{-a^2} = ai$, என்பதே போதுமானது. இதனல் $\sqrt{-a^2} = -ai$ என்பது விலக்கப்படவில்லை. இந்த i என்ற எண் ஒரு கற்பனை எண். ஏனெனில் இந்த எண்ணை இருபடிக்கு உயர்த்தினல் -1 என்ற குறைவெண் மதிப்பு கிடைக்கிறது. ஆனல் எந்த மெய்யெண்ணும் எக்குறி பெற்ற போதிலும் அதை இருபடிக்கு உயர்த்தினல் கூட்டெண் மதிப்பே கிடைக்கும். ஆகவே i என்பது ஒரு மெய்யெண் அல்ல. அது ஒரு கற்பனை எண்ணே.

*1.8. மெய்யெண் இனமும் கற்பனையெண் இனமும் சேர்ந்து நமக்கு இயற் கணிதத்தில் ஒரு மாபெரும் எண்ணினத்தைத் தருகின்றன. இப்பரந்த எண்ணினம் நமக்குப் பல்வேறு சமயங்களில் தேவைப்படும் எண்களைக் கொடுத்துதவுகின்றது.

சிறப்பாக $a+bi$ என்ற ஒரு கலப் பெண்ணில் (Complex number) a, b மெய் யெண்களானல் ஒரு புது வகை எண் கிடைக்கிறது. எடுத்துக்காட்டு :

$2+3i$; $1-i\sqrt{3}$ போன்றவை.

பின்வரும் அட்டவணை கவனத்திற்குரியது. இங்கு நாம் கண்டவையாவும் தொகுத்துக் கூறப்பட்டிருக்கிறது.



பயிற்சி 1

1. பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் எந்த எண்ணினத்தைச் சேர்ந்தவை யெனக் கூறுக:

(1) $5x-13=0$ (2) $3x+9=0$ (3) $x^3+8=0$

(4) $x^2-4=0$ (5) $x^2-6=0$ (6) $x^2+16=0$

(7) $7x-14=0$ (8) $3x^2-5=0$ (9) $4-5x^2=0$

2. பின்வரும் எண்கள் எவ்வினத்தைச் சேர்ந்தவை?

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) $\frac{6}{-7}$

(4) $\sqrt{5}$ (5) $\sqrt{3}+2$ (6) $\frac{\sqrt{-6}}{7}$

(7) $\sqrt{-16}$ (8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (9) $\frac{6}{1-\sqrt{-4}}$

(10) $1-\sqrt{-3}$

அளவுக்கிணங்கிய எண்களின் சில பண்புகள்.

(1) இரண்டு அளவுக் கிணங்கிய எண்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண்.

சிறப்பாக $\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$

(2) ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணிலிருந்து மற்றொரு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணைக் கழித்தால் ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண் கிடைக்கும்.

சிறப்பாக $\frac{p}{q}-0=\frac{p}{q}$

(3) இரண்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண்.

$$\frac{a}{b}\times\frac{p}{q}=\frac{ap}{bq}$$

$$\frac{a}{b}\times 0=0$$

0×0—தெரியாது (0 - அல்ல).

(4) ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண்ணை மற்றொரு அளவுக் கிணங்கிய எண்ணால் வகுத்தால் ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண் கிடைக்கும்.

$$\frac{a}{b}\div\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\times\frac{q}{p}=\frac{aq}{bp}$$

$$\frac{0}{a}=0.$$

a கூட்டெண்ணுயின் $\frac{a}{0} = \propto$ (கந்தழி) (+Infinity)

a குறைவெண்ணுயின் $\frac{a}{0} = - \propto$ (– கந்தழி) (–Infinity)

$\frac{0}{0}$ தெரியாது (தேரப் பெருத எண்—Indeterminate)

2. சார்புகள்

(Function)

2.1. $y = f(x)$ என்பது இயற்கணிதத்தில் ஒரு முக்கிய குறியீடு. அதாவது, y என்பது x ன் சார்பு எனவும் கூறப்படும். இதனால் என்ன குறிக்கப்படுகிற தெனின், x ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால், அதைச் சார்ந்த, அல்லது அதற்கு இணையான y ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

$y = 2x^2 + 1$ என்பது ஒரு சார்பு. இதை $y = f(x) = 2x^2 + 1$ எனவும் எழுதலாம். x ன் ஒவ்வொரு மெய் யெண் மதிப்புக்கும், அதற்கு இணையான மதிப்பொன்று y க்கு உண்டு.

இணையான மதிப்புக்கள் பின் காண்க:

x	1	-3	$\sqrt{3}$	$(a-b)$
இணையான y	3	19	7	$2(a-b)^2+1$

இங்கு x – என்பது சார்பில் மாறி (Independent Variable) எனவும், y – என்பது சார்புடை மாறி (Dependent Variable) எனவும் கூறப்படும்.

இதே சார்பை $x = \sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$ அல்லது $-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு $y = 1$ ம் அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புக்களும் கொடுக்கப்பட்டால், அவைகளுக்கிணைந்த x – ன் மதிப்பையறியலாம். ஆனால் y ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு (1) குறைவாயிருப்பின் x க்கு ஒரு கற்பனை யெண் மதிப்பே கிடைக்கும்.

இணையான மதிப்புக்கள் பின் காண்க.

y	1	3	5	19	a	-3	-17
இணையான x	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 3	$\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}$	$\pm i\sqrt{2}$	$\pm 3i$

இங்கு y–சார்பில் மாறி யெனவும், x–சார்புடை மாறி யெனவும் கூறப்படும். மேலும் இச்சார்புடைமை ஒரு குறிப்பிட்ட எண் அண்டப் பகுதியில் (in a given region), சார்புக்கு மெய்யெண் மதிப்பு தரும். அவ்வண்டப் பகுதி 1 க்கு மேற்பட்ட எண் களின் கூட்டம். 1 க்குக் குறைவான எண் அண்டப் பகுதி யில் சார்பு கற்பனை யெண் மதிப்பையே பெறுகிறது. மிகச் சிக்கலான முறைகளிலும் சார்புகள் தோன்றலாம். எடுத்துக் காட்டாக,

$$y = \frac{x^{n+2}\,(1-ax^n)}{ax^m+bx^p}.$$

2.2·1. சார்புகளில் சில எளிய பிரிவுகள் :

பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவை (Polynomials) : $F(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + a_m$ என்பது இக் கோவையின் பொது அமைப்பு. இங்கு $a_0, a_1, \ldots\ldots a_m$ என்பவை xஓடு தொடர்பற்ற மாறிலி மெய் யெண்கள்; m ஒரு கூட்டு முழு எண்.

(எ–கா.) (1) $y = 3x^3 - 4x^2 - 7x - 9$;

(2) $y = \sqrt{3}\,x - 4x^2 + 7$;

(3) $y = (a+b)\,x^2 + 4\,(a-b)\,x + (a^2+b^2)$

2.2·2. அளவுக் கிணங்கிய சார்புகள் (Rational Functions) :

$$F(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots\ldots + b_p}$$ என்பது இவ்வகைச் சார்பின் பொது அமைப்பு.

2.2·3. அளவுக் கிணங்கிய கூட்டு முழு எண்படி கொண்ட சார்புகள் (Rational integral function).

2.2·1 ல் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பிலுள்ள யாவையும் இப்பிரிவின் பாற்படும். இவ்வகைச் சார்புகளில்,

(1) சார்பில் மாறியான x ன் படி மூலங்கள் (Roots) சார்பில் தோன்ருது ;

(2) சார்பில் மாறியான x, கூட்டு முழு எண்படிக்கு மட்டுமே உயர்த்தப்பட்டிருக்கும்.

2.2·1 ல் கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகள் பொருத்த மானவை.

ஆனல் $y = \left(\sqrt{x}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{x};} - \sqrt{x}$ $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ போன்றவை இந்த வகுப்பில் சேராது.

2.2·4. நேர்முகமான இயற் கணிதச் சார்புகள் (Explicit algebraic functions) :

ஏதாமொரு மதிப்பை நேரடியாக அச்சார்பில் x க்கு ஈடு செய்து, அச்சார்பின் மதிப்பைப் பெற முடியுமானல், அச்சார்பு, நேர்முகமான இயற் கணிதச் சார்பு எனப்படும்.

(எ–கா.) $y = x^2 + 3x - 7$

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{(x^2+1)}{(x-2)}$$

2.2·5. மறைமுகமான இயற் கணிதச் சார்புகள் (Implicit algebraic functions)

y என்பதை, நேரடியாக x ன் சார்பாகக் கொடுக்காமல், x, y இரண்டையும் ஒரு கோவையால் இணைத்தோ, அல்லது வேறு தொடர்பு காட்டியோ கொடுத்தால், அது மறைமுகமான இயற் கணிதச் சார்பெனப்படும். இங்கு x–க்குரிய y ன் மதிப்பையோ, y–க்குரிய x ன் மதிப்பையோ நேரடியாக அறிய முடியாது. ஆனல் முதலில் x-ன் மதிப்பைக் கோவையில் ஈடு செய்து, பின்னர் y-ன் மதிப்பை அறியலாம் ; தலைகீழ் முறையிலும் அறியலாம்.

*பொதுவாக,

$y^n + R_1\, y^{n-1} + \ldots\ldots + R_n = O$ என்பதில் n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாகவும், R_1, $R_2, \ldots\ldots R_n$ என்பவை அளவுக்கிணங்கிய x ன் சார்புகளாகவும் இருக்குமானால், முதலில் x ன் மதிப்பை அச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்யவேண்டும். அப்போது $y^n + A_1\, y^{n-1} + A_2\, y^{m-2} + A_n = O$ என்ற ஒரு y-சமன்பாடு கிடைக்கும். இதிலிருந்து குறிப்பிட்ட x–மதிப்புக்கு இணைந்த y-மதிப்பை அறியவேண்டும்.

இவ்விதமான சார்பு,

$y^n + R_1\, y^{n-1} + .\ \ + R_n = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + S_m$ என்ற அமைப்பிலும் இருக்கலாம். R-கள் x ஐ ஒட்டிய சார்புகள்; S-கள் y-ஐ ஒட்டிய சார்புகள்.

(எ–கா.) $y^2x^4 - 5yx^2 + 7x = 1$ என்பது x, y ஐ இணைக்கும் ஒரு மறைமுக இயற்கணிதச் சார்பு.

$x = 1$ ஆனால் $y^2 - 5y + 6 = 0$ ஆகிறது. அப்போது $x = 1$ க்கு இணைந்த y ன் மதிப்புக்கள் 2 அல்லது 3 எனப் பெறப்படும்.

(எ–கா.) $y^2 + 6y + 2 = x^2 + 5x$ என்பதும் x, y ஐ இணைக்கும் ஒரு மறைமுக இயற்கணிதச் சார்பாகும்.

குறிப்பு : இவ் வகைப்பட்ட சார்புகளில் யாவற்றிலும், குறித்த ஒரு x ன் மதிப்புக்கு y ன் மதிப்பைப் பெறுவது எளிதாக இருக்காது; முடியாமற் போனாலும் போகலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக,

(1) $x^3 + y^3 + 3axy = O$

(2) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1+x^2}} = xy$ போன்ற மறைமுகச் சார்புகளிலிருந்து x கொடுத்தால் y பெறுவதோ, அல்லது y கொடுத்தால் x பெறுவதோ எளிதாக விராது.

2.2·6. இவ்விதமான இயற்கணிதச் சார்புகளுக்கும் புறம்பாக, பல்விதச் சார்பு வகைகள் உள்ளன. அவைகளில் சில :

(a) கோண கணிதச் சார்புகள் (Trigonometric functions) :
$y = \text{Cos}\ 2x + \text{Sin}\ 4x$;

(b) படி விதச் சார்புகள் (Exponential functions) :

$y = ab^x + cmx^2$

(c) மடக்கைச் சார்புகள் (Logarithmic functions) :

$y =$ மடக்கை$_a$ (x^2+1)

2.2·7. பல்மாறிகள் கொண்ட சார்புகள் (Functions with several variables) :

x, y என்ற இரண்டு மாறிகளுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்டும் சார்புகள் பெறப்படலாம்.

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy(x+y)$;

$z = F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$;

$s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ (u, f, t) (மாறிகள்)

$= \phi(u, f. t)$.

2.3·1. சார்புகளைப் பற்றிய சில வரையறைகள் (Definitions regarding functions) :

சார்பின்படி (Degree of the function) : ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவையிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள மாறிகளின் படிகளைக் கூட்டிப் பெறப்படும் தொகைகளில் மிகப் பெரிய தொகை எதுவோ, அதுவே அச் சார்பின் படி எனப்படும்.

(எ-கா.) (1) $y = f(x) = x^5 + x^4 - x^2 + 1$. (படி 5).

(2) $z = f(x, y) = a^3x^3 + ax^2y^2 + bxy^6$. (படி 7).

2.3·2. சமபடித்தன்மை (Homogeneity) :

ஒரு இயற் கணிதப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள எல்லா உறுப்பின் படிகளும் சமமாக விருப்பின் அது ஒரு சமபடிச் சார்பு (Homogeneous function) எனப்படும்.

(எ-கா.) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2byz + 2zx$ என்பது x, y, z ஆல் ஆகிய இரு சமபடிச் சார்பாகும் (Homogeneous function of the second degree in x, y, z).

2.3·3. சமச் சீர்மை (Symmetry) :

ஒரு இயற்கணிதப் பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவையில் ஒரு மாறியை மற்றொன்றாக மாற்றினால், அச்சார்பு மாறாதிருப் பின், அது ஒரு சமச்சீர் சார்பெனப்படும்.

அதாவது (1) $f(x, y) = f(y, x)$;

(2) $f(x, y, z) = f(y, z, x)$

$= f(z, x, y) = \ldots\ldots\ldots$

ஆனல், முதல் கூறப்பட்டது x, y மாறிகளால் அமையும் சமச்சீர் சார்பெனவும், பின் கூறப்பட்டது x, y, z மாறிகளால் அமையும் சமச்சீர் சார்பெனவும் கூறப்படும்.

(எ–கா.) (1) $a(x+y)+b = f(x, y)$;

(2) $a(x^2+y^2) + bxy + c(x+y)+d = F(x, y)$;

(3) $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)$

$+cxyz + d(x^2+y^2+z^2) + e(xy+yz+zx)$

$+g(x+y+z) + h = f(x, y, z)$.

இவை யாவும் சமச்சீர் சார்புகள்.

2.3·4. சமபடி—சமச்சீர் சார்புகள் (Homogeneous Symmetric functions):

(எ-கா.) (1) $f(x, y) = a(x+y)$;

(2) $F(x, y) = a(x^2+y^2) + bxy$;

(3) $\phi(x, y, z) = a(x^3+y^3+z^3)$

$+ b(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)$

$+ cxyz$.

இவை முறையே,

(1) x, y ஆல் அமையும் ஒரு சமபடி சமச்சீர் சார்பு (Homogeneous Symmetric function of the first degree in x and y);

(2) x, y ஆல் அமையும் இரு சமபடி சமச்சீர் சார்பு (H–S–function of the second degree in x and y)

(3) x, y, z ஆல் அமையும் முச்சமபடி சமச்சீர் சார்பு (H–S–function of the third degree in x and y)

2.4·1. சமனின்மையும் அதன் தன்மைகளும் (Irregularities and their properties):

(இப்பகுதியில் வரும் a, b ......m, n......, x, y...... முதலியன கூட்டு மெய்யெண்களெனக் கொள்க.)

$a-b$ ஒரு கூட்டெண்ணுயின் $a>b$ எனப்படும்.

$a-b$ ஒரு குறையெண்ணுயின் $a<b$ எனப்படும்.

2.4·2. $a>b$ ஆனுல், (1) $a+x > b+x$;

(2) $a-x > b-x \ (x<a, b)$;

(3) $-a < -b$;

(4) $ma > mb$; } (m, n கூட்டு

(5) $-ma < -mb$; } மெய்யெண்கள்)

(6) $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$;

(7) $\frac{-a}{m} < \frac{-b}{m}$;

(8) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ [குறிப்பு: $a<b$ ஆனுல் $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$]

(9) $a^m > b^m$

2.4·3. $a > b$; $a' > b'$; $a'' > b''$...... ஆனுல்

(1) $a+a'+a''...... > b+b'+b''......$;

(2) $aa'a''...... > bb'b''$

2.4·4. ஒரு மெய் யெண்ணின் இருபடி எப்பொழுதும் கூட்டெண்; பூச்சியத்திற்குக் குறைபடாது; குறையெண்ணுக இருக்கமுடியாது.

அதாவது a, b எப்படியான மெய்யெண்களானுலும்,

$(a+b)^2 > 0$;

அல்லது $(a+b)^2 \nless 0$.

$(a-b)^2 > 0$.

2.5. **சில முக்கியமான முற்றெருமைகள்** (Some important Identities) :

(1) $(a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2$;

(2) $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$;

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$;

(4) $(a\pm b)^3 \equiv a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

(5) $(a+b+c)^3 \equiv \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6abc$;

(6) $(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$;

(7) $(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$;

(8) $(a^3+b^3) \equiv (a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(9) $(a^3-b^3) \equiv (a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(10) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) \equiv 0$;

(11) $\sum a(b^2-c^2) \equiv (b-c)(c-a)(a-b)$;

(12) $\sum a^2(b-c) \equiv -(b-c)(c-a)(a-b)$;

(13) $\sum a(b^3-c^3) \equiv (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$;

(14) $\sum a^3(b-c) \equiv -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$;

(15) $\sum 2b^2c^2 - \sum a^4 \equiv (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$;

(16) $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-bc-ca-ab$;
$\equiv \frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2-(c+a)^2+(a-b)^2\}$

(17) $a^4+a^2b^2+b^4 \equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

2.6. மிச்சத் தேற்றம் (Remainder Theorem):

$F(x)$ என்ற ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைச் சார்பு, $(x-a)$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புச் சேர்க்கையால் வகுக்கப்பட்டால், மிச்சம் $F(a)$; $(x+a)$ ஆல் வகுக்கப்பட்டால், மிச்சம் $F(-a)$.

தெரிப்பு: $(x-a)$ ஆல் $F(x)$ ஐ வகுக்க, $Q(x)$ என்ற ஈவும், R என்ற மிச்சமும் வரட்டும். இங்கு R ஒரு மாறிலியாக விருக்கும்.

அப்போது, $F(x) \equiv (x-a)\,Q(x)+R$.

இது ஒரு முற்றொருமை.

எனவே $x=a$ என ஈடு செய்ய,

$$F(a)=0+R.$$

அதாவது மிச்சம் $R=F(a)$ என நிறுவப்பட்டது.

$(x+a)$ ஆல் $F(x)$ ஐ வகுக்க, $P(x)$ என்ற ஈவும், S என்ற மிச்சமும் வரட்டும்.

அப்போது, $F(x) \equiv (x+a)\ P\ (x)+S$.

இங்கு $x=-a$ என ஈடு செய்ய,

$$F(-a)=O+S.$$

அதாவது மிச்சம் $S=F(-a)$ என நிறுவப்பட்டது.

சினைத் தேற்றம் :

(1) $F(a)=O$ ஆனால் $(x-a)$ என்பது $F(x)$ன் ஒரு சினை;

(2) $F(-a)=O$ ஆனால் $(x+a)$ என்பது $F(x)$ன் ஒரு சினை.

2.6·1. சிறப்பாக, $F(1)=O$ ஆனால் $x-1$ ஒரு சினையாகும்; $F(-1)=O$ ஆனால் $x+1$ ஒரு சினையாகும்.

$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n$ எனக் கொண்டால் $F(1)=a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots a_n$. எனவே, $F(x)$ல் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகுமானால் $(x-1)$ ஒரு சினையாகும்.

$F(-1)$ வேண்டுமானால், xன் படிகளில் இரட்டைப்படிகள் உள்ள கெழுக்களை அப்படியே எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்; xன் படிகளில் ஒற்றைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களைக் குறியீடு மாற்றி எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

எனவே $F(-1)=O$ ஆக வேண்டுமானால் xன் இரட்டைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களையும், xன் ஒற்றைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களை குறியீடு மாற்றியும் எடுத்துக் கூட்டினால் பூச்சியம் வருமாயின், $(x+1)$ ஒரு சினையாகும்.

எனவே, பின்வரும் விதிகளை மனத்தில் கொள்வது பயன்படும் :

(1) ஒரு கோவையில் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால் $(x-1)$ ஒரு சினையாகும் ;

(2) இரட்டைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும் ஒற்றைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும் சமமாயின் $(x+1)$ ஒரு சினையாகும். (இங்கு x சார்பற்ற மாறிலி a_m இரட்டைப் படிக் கெழு எனக் கொள்ளப்படும்).

(எ-கா.) (1) $(x-a)(x-b)$ ஆல் $f(x)$ ஐ வகுத்தால், மிச்சம் $\dfrac{(x-b)f(a)-(x-a)f(b)}{(a-b)}$ என நிறுவுக.

$Q(x)$ ஈவு எனவும், $Ax+B$ மிச்சமெனவும் கொள்க.

$\therefore f(x) \equiv (x-a)(x-b)Q(x) + (Ax+B)$

$x=a$ ஈடு செய்ய, $f(a)=Aa+B$.

$x=b$ ஈடு செய்ய, $f(b)=Ab+B$.

இவ்விரண்டு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$A=\dfrac{f(a)-f(b)}{(a-b)}$ எனவும், $B=\dfrac{bf(a)-af(b)}{(b-a)}$ எனவும் பெறலாம்.

எனவே மிச்சம் $= x\left[\dfrac{f(a)-f(b)}{(a-b)}\right]+\dfrac{af(b)-bf(a)}{(a-b)}$.

$$=\frac{(x-b)f(a)-(x-a)f(b)}{(a-b)}$$

(எ-கா.) (2) $3x^3+4x^2-5x-2$ என்ற கோவையின் சினைகள் காண்க.

கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகிறது. எனவே $(x-1)$ ஒரு சினையாகும். [2.61 காண்க].

$f(1)=3+4-5-2=0$ எனவும் சரிபார்க்கலாம்.

கோவையில் மாறிலி எண் -2 ஆகையால், இக்கோவைக்கு சினைகளிருப்பின், அவை ± 1, ± 2 எனவா யிருக்கலாம் என ஊகித்து $f(\pm 1)$, $f(\pm 2)$ கண்டு சினைகளைக்காண முயற்சி செய்வோம்.

$f(-1)=-3+4+5-2\neq 0$; $\therefore$ $(x+1)$ சினையல்ல.

$f(2)=24+16-10-2\neq 0$; $\therefore$ $(x-2)$ சினையல்ல.

$f(-2)=-24+16+10-2=0$; $\therefore$ $(x+2)$ சினையாகும்.

$(x-1)$ ஒருசினை ; $(x+2)$ மற்ருேர் சினை.

எனவே $(3x^3+4x^2-5x-2)$ ஐ $(x-1)(x+2)$ ஆல் வகுக்க, $3x-1$ ஈவாகக் கிடைக்கும்.

எனவே $3x^3+4x^2-5x-2 \equiv (x-1)(x+2)(3x+1)$.

(எ-கா.) (3) $x^5+2x^4+ax^3+bx^2+4x-6$ என்ற கோவையை, x^2+2x-3 ஆல் மிச்சமின்றி வகுக்க முடியுமானல், a, bன் மதிப்பென்ன?

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

$(x+3)$ சினையானுல் $f(-3)=0$ ஆகும்.

$(x-1)$ சினையானுல் $f(1)=0$ ஆகும்.

$\therefore f(-3)=-243+162-27a+9b-12-6=0$

$\therefore -27a+9b=99$. (1).

மேலும் $f(1)=1+2+a+b+4-6=0$

$\therefore a+b=-1$ (2)

(1)ம் (2)ம் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்.

அவைகளின் தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=\ \ 2 \end{array}\right\}$

(எ.கா)(4) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ன் சினைகள் காண்க.

இதை $F(a)$ எனக் கொள்வோம்.

$F(b)=bc(b-c)+cb(c-b)+0$

$=0$

$\therefore (a-b)$ ஒரு சினையாகும்;

அவ்வாறே, $(b-c)$ம், $(c-a)$ம் சினைகளாகும்.

எனவே குறிப்பிட்ட கோவைக்கு,

$(b-c), (c-a), (a-b)$ மூன்று சினைகளாகும்.

ஆனல் கொடுக்கப்பட்ட கோவை, a, b, c ஆல் அமைந்த, ஒரு முச்சமபடி–சமச்சீர்க் கோவை.

எனவே

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\equiv K(b-c)\ (c-a)\ (a-b)$ என எழுதலாம். இது ஒரு முற்றொருமையாகும். ஆகவே a, b, cக்கு எம்மதிப்புக்கள் கொடுத்தாலும், இருபக்கங்களின் மதிப்பும் சமமாகும்.

$a=3,\ b=2,\ c=1$ எனக் கொள்க.

அப்போது $2(1)+3(-2)+6(1)=K(1)\ (-2)\ (1)$

$\therefore\ 2 = -2K$

$\therefore\ K = -1$

$\therefore\ bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b).$

(எ–கா.) (5)

$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$ என்ற கோவையின் சினைகள் காண்க.

போன எடுத்துக் காட்டில் கண்டபடியே, $(b-c)$, $(c-a)$ $(a-b)$ என்பவை மூன்று சினைகளாகும். கொடுக்கப்பட்ட கோவை நாற்சமபடி–சமச்சீர்க் கோவையாதலின்

$\Sigma\ a(b^3-c^3) \equiv K(a+b+c)\ (b-c)\ (c-a)\ (a-b)$ எனக் கொள்வோம்.

$a=1,\ b=2,\ c=3$ எனக் கொண்டால்,

$1(8-27)+2(27-1)+3(1-8) = K\ (6)\ (-1)\ (2)\ (-1)$

$\therefore\ 12 = 12K$

$\therefore\ K = 1.$

$\Sigma\ a(b^3-c^3) = (b-c)\ (c-a)\ (a-b)\ (a+b+c)$

பயிற்சி 2

1. பின்வரும் கோவைகளின் சினை காண்க.

(i) $x^3-3x+2.$

(ii) $4x^3+8x^2-x-2.$

2. x^n+a^n ஐ $x+a$ ஆல் மிச்சமின்றி வகுக்கலாம் என நிறுவுக.

3. $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ ஐ $x+a$ ஆல் மிச்சமின்றி வகுக்கலாம் என நிறுவுக.

4. $x^{2n}-a^{2n}$ ஐ $(x+a)$, $(x-a)$ என்பவைகளால் மிச்சமின்றி வகுக்கலாமென நிறுவுக.

5. $(x+2)$ என்பது x^4-4x^3+ax-8 ன் ஒரு சினையானால் a-ன் மதிப்பென்ன?

6. $(x+1)(x-1)$ என்பவை x^3+ax^2+bx+3 ன் இரு சினைக ளானல், a, b, ன் மதிப்பென்ன?

7. (x^2+x-6) என்பதால் $x^4+ax^3+bx^2+x-6$ ஐ மிச்ச மின்றி வகுக்க முடியுமானல் a, b ன் மதிப்புக்கள் என்ன?

8. x, y, z, ஆல் ஆகிய ஓர் இரு சமபடி சமச்சீர்க் கோவை, $x=1$, $y=1$, $z=2$ ஆகும்போது மதிப்பு 28; $x=-1$, $y=-1$; $z=2$ ஆகும்போது மதிப்பு 12. அக்கோவையைக் கண்டுபிடி.

9. $\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}+\dfrac{1}{(a-b)^2}$ என்னும் கோவை ஒரு சரி யான இருபடியென நிறுவி, படிமூலத்தை யறிக.

10. x^2+px+1 என்பது ax^3+bx+c ன் ஒரு சினையாகுமானல் $a^2=c^2+ab$ என நிறுவுக.

11. $2x^3-(a+b)x^2-(2b-1)x+6$ என்ற கோவையை x^2-3x+2 ஆல் மிச்சமின்றி வகுக்க முடியுமானல் a, b மதிப்பு காண்க.

12. கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் சினைகள் காண்க.

(i) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

(ii) $x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)$

(iii) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

13. a, b, c மெய்யெண்களாய், $x^3-3b^2x+2c^3$ என்ற கோவை $(x-a)$, $(x-b)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடுமாயின், $a=b=c$ அல்லது $a=-2b=-2c$ என நிறுவுக.

14. x^2+px+1 என்ற கோவை ax^5+bx^2+c ல் ஒரு சினை யானல்,

$$(a^2-c^2)(a^2-c^2+bc)=a^2b^2$$ என நிறுவுக.

3. படிக்குறிக் கொள்கை

(Laws of Indices)

3.1. படிக்குறிக் கொள்கை விதிகள் :

பின்வரும் நான்கு விதிகளில் m, n, p... கூட்டு முழு எண்கள்.

விதி 1 : $x^m \times x^n = x^{m+n}$

$x^m = x \times x \times x \ldots\ldots m$ முறைகள்

$x^n = x \times x \times x \ldots\ldots n$ முறைகள்

$\therefore\ x^m \times x^n = x \times x \times x \ldots\ldots (m+n)$ முறைகள்

$= x^{m+n}$

கிளைவிதி : $x^m \times x^n \times x^p = x^{m+n+p}$

விதி 2 : $x^m \div x^n = x^{m-n}$

$m > n$ ஆனால் $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{x \times x \times \ldots\ldots m \text{ முறைகள்}}{x \times x \times \ldots\ldots n \text{ முறைகள்}}$

$= x \times x \times x \ldots\ldots (m-n)$ முறைகள்

$= x^{m-n}$.

$m < n$ ஆனால் $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$.

விதி 3 : $(x^m)^n = x^{mn}$

$(x^m)^n = x^m \,.\, x^m \,.\, x^m \ldots\ldots n$ முறைகள்.

$= x^{m+m+m} \ldots\ldots n$ முறைகள்.

$= x^{mn}$.

விதி 4: $(xy)^m = x^m y^m$

$(xy)^m = xy\ .\ xy\ .\ xy \ldots\ldots m$ முறைகள்.

$= (x\ .\ x\ \ldots m$ முறைகள்$)\ (y\ .\ y \ldots m$ முறைகள்$)$

$= x^m y^m$

கிளைவிதிகள்:

(1) $(xyz)^m = x^m y^m z^m$

(2) $\dfrac{1}{(xy)^m} = \dfrac{1}{x^m y^m}$

(3) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

3.2. இந்த விதிகளின்படி, x^0, x^{-n}, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}}$ முதலியவற்றின் பொருள்:

(a) x^0 ன் பொருள்:

இரண்டாம் விதிப்படி:

$$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m}$$

$$= x^0$$

ஆனால் $\dfrac{x^m}{x^m} = 1$

$\therefore x^0 = 1$ எனப்படும்.

[குறிப்பு: $x \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுண்டு; ஏனெனில் 0^0 என்பது தேராப்பொருள்.]

இப்படி $x^0 = 1$ எனப் பெறப்பட்ட மதிப்பு, படிக்குறி விதிகள் யாவைக்கும் இசைந்ததாகும். அதாவது எந்தக் கணியத்தையும் 0 என்றபடிக்கு உயர்த்தினால், அதன் மதிப்பு 1 எனக் கொள்வது, முதல் கண்ட படிக்குறி விதிகளுக்கு இசைந்ததாகும்.

(b) x^{-m} ன் பொருள்:

$$x^{-m} = x^{-m} \times \frac{x^m}{x^m}$$

$$= \frac{x^0}{x^m}$$
$$= \frac{1}{x^m}$$

(c) $x^{\frac{1}{n}}$ ன் பொருள் :

$y = x^{\frac{1}{n}}$ எனக் கொள்க.

இரு பக்கங்களையும் n படிக்கு உயர்த்தினல்

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots^{n}$ முறைகள்

$y^n = x$

$= x$

$\therefore y = \sqrt[n]{x}$ எனக் கொள்ளப்படும்.

(எ-கா.) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = x$ ன் இருபடி மூலம்.

$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = x$ ன் முப்படி மூலம்.

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = x$ ன் m படி மூலம்.

(d) $x^{\frac{m}{n}}$ ன் பொருள் :

முன் $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ எனக் கொண்டோம்.

அப்போது $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots\ldots m$ முறைகள்

$= \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{x} \ldots\ldots m$ முறைகள்

$= \sqrt[n]{x \cdot x \ldots\ldots\ldots\ldots m}$ முறைகள்

$= \sqrt[n]{x^m}$

$$\therefore x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

எனவே, $x^{\frac{m}{n}}$ ன் மதிப்பு, x^mன் ஒரு n படி மூலம் எனக் கொள்ளலாம்.

"ஒரு" n படி மூலம் எனக் கூறப்பட்டது ஏனெனில் ஒவ்வொரு எண்ணுக்கும் n எண்ணிக்கையுள்ள n - படி மூலங்கள் உள்ளன.

(எ-கா.) $\sqrt[2]{4} = 2, -2$ இரண்டு இருபடி மூலங்கள்.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ம், மீதி 4 கற்பனையெண்களும்.

(e) $x^{-\frac{m}{n}}$ ன் பொருள்

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{x^{-\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{x^0}{x^{\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

3.3. ஆகவே, $m, n, \ldots$ முதலியன கூட்டு முழு எண்களெனக் கொண்டு நிறுவப்பட்ட நான்கு விதிகளையும் (3.1 ல் கண்டவை) கூட்டு முழு எண்களுக்கு மாத்திரமன்றி, பூச்சியம், குறை முழு எண், கூட்டு பின்னம், குறை பின்னம் முதலியவைகளுக்கும் விரிவுபடுத்தி, அவ்விதிகளுக்கு இசைந்த முறையில் x^0, x^{-m}, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{-m}{n}}$ க்குரிய மதிப்புக்கள் என்ன என்பதையும் நிர்ணயித்துக் கொண்டோம்.

குறிப்பு : இந்நூலை முதல் முதலாகப் படிப்பவர்கள் பின் கூறப்படுவனவற்றை இப்போது படிக்காமல் விட்டு, கடைசியாகப் படிக்கலாம். சில நுட்பமான வரையறைகளையும் முடிவுகளையும் கூர்ந்து அறிதல் வேண்டும்.

(எ-கா.) (1) $\dfrac{16^{\frac{1}{4}}}{27^{-\frac{1}{3}}}$ ஐ மதிப்பிடுக.

$$(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

$$(27)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{16^{\frac{1}{4}}}{27^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6.$$

(எ-கா.) (2) $\dfrac{12x^{2a-3b} \cdot y^{3b-5}}{\left(2x^{a-2b} \cdot y^{b-a}\right)^3}$ ஐ சுருக்கி யெழுதுக.

$$\text{கீழெண்} = 2^3 , x^{3a-6b}\, y^{3b-3a}$$

$$= 8x^{3a-6b}\, y^{3b-3a}$$

$$\therefore \text{மதிப்பு} = \frac{12x^{2a-3b}\, y^{3b-5}}{8x^{3a-6b}\, y^{3b-3a}}$$

$$= \tfrac{3}{2}x^{2a-3b-3a+6b} \cdot y^{3b-5-3b+3a}$$

$$= \tfrac{3}{2}x^{3b-a} \cdot y^{3a-5}$$

(எ-கா.) (3) சுருக்குக:

$$\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$$

$$\text{மதிப்பு} = \left(x^{m-n}\right)^{m+n} \left(x^{n-l}\right)^{n+l} \left(x^{l-m}\right)^{l+m}$$

$$= x^{m^2-n^2} . x^{n^2-l^2} . x^{l^2-m^2}$$

$$= x^{m^2-n^2+n^2-l^2+l^2-m^2}$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

(எ-கா.) (4) சுருக்குக :

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\, b^{-\frac{1}{2}}\, c^{2}\right)^{-2} \left(a^{2}\, b^{2}\, c^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(a^{4}\, b^{5}\, c^{6})\,(a^{2}\, b^{-2}\, c^{-2})}}$$

மேலெண் $= a^{-1} b\, c^{-4} \cdot a^{\frac{2}{3}}\, b^{-\frac{2}{3}}\, c^{-1}$

$$= a^{-\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}\, c^{-5} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\, c^{5}}.$$

கீழெண் $= \sqrt{a^{6}\, b^{3}\, c^{4}}$

$$= a^{3}\, b^{\frac{3}{2}}\, c^{2}$$

$\therefore$ மதிப்பு $= \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\, c^{5} \cdot a^{3}\, b^{\frac{3}{2}}\, c^{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^{10}}\, \sqrt[6]{b^{7}}\, c^{7}}.$$

(எ-கா.) (5) $a^{x} = bc$; $b^{y} = ca$; $c^{z} = ab$ ஆனல்

$xyz = x + y + z + 2$ என நிறுவுக.

$$a^{xyz} = \left(a^{x}\right)^{yz}$$

$$= (bc)^{yz}$$

$$= b^{yz} \cdot c^{yz}$$

$$= (ca)^{z} \cdot (ab)^{y}$$

$$= c^{z} \cdot a^{z} \cdot a^{y}\; b^{y}$$

$$= ab \cdot a^{z} \cdot a^{y}\; b^{y}$$

$$= ab \cdot a^{z} \cdot a^{y} \cdot ca$$

$$= a^2 . bc . a^z . a^y$$

$$= a^2 . a^x . a^z . a^y$$

$$= a^{x+y+z+2}$$

$\therefore\ xyz = x+y+z+2$ என நிறுவப்பட்டது.

பாடச் சுருக்கம் 3:

m, n, p......அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்கள் ஆனால்,

(1) $x^m \times x^n = x^{m+n}$;

(2) $x^m \times x^n \times x^p = x^{m+n+p}$;

(3) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} (m > n)$;

(4) $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-m}} (m < n)$;

(5) $(x^m)^n = x^{mn}$

(6) $(xy)^m = x^m y^m$

(7) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$.

(8) $x^0 = 1$.

(9) $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$

(10) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

(11) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

பயிற்சி 3

1. கீழ்க் கண்டவைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sqrt{256} + \sqrt[4]{256}.$

(ii) $(-64)^{\frac{1}{3}}$

(iii) $(1,60,000)^{-\frac{3}{4}}$

(iv) $x = 27$ ஆனால் $\dfrac{x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}$ ன் மதிப்பென்ன?

(v) $\dfrac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[4]{x^{-8}}} = x^n$ ஆனால் n மதிப்பென்ன?

2. பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(i) $x = 4$ ஆனால் $\dfrac{(x^{-3})^{-\frac{1}{6}} + (x^{-8})^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^4}}$

(ii) $\dfrac{(2xy)^4 - (3x^2y^2)^2 + (4x^8y^8)^{\frac{1}{2}}}{x^2y^2}$

(iii) $\dfrac{x^{-2} - a^{-2}}{x^2 - a^2}$

(iv) $\dfrac{1}{1+x^{(a-b)}} + \dfrac{1}{1+x^{(b-a)}}$

(v) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)^n \left(\dfrac{x^5}{y^5}\right)^{-n} \sqrt{x^{2n}y^{-2n}}$

(vi) $\left(a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(a^n\ b^n\right)^{-\frac{3}{2}} \left(a^3\ b^3\right)^{\frac{n}{2}} \left(\dfrac{b}{a}\right)$

(vii) $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$

(viii) $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)\left(x^{-1} - y^{-1}\right)\left(x^{-2} + y^{-2}\right)$

(ix) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{x}\sqrt{y}+y)$

3. $x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}} \cdot x^{\frac{a-b}{ab}} = 1$ என நிறுவுக.

4. $\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$

$= 1$ என நிறுவுக.

5. a, b, c ஒன்றுக்கொன்று சமமில்லையாயின்

$\left(x^{\frac{b+c}{a-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-b}} \times \left(x^{\frac{a+b}{c-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} = 1$ என

நிறுவுக.

6. $m=a^x, n=a^y. m^y n^x = a^{\frac{2}{z}}$, ஆனல் $xyz = 1$ என நிறுவுக.

7. $x = y^z, y = zx, z = x^y$, ஆனல் $xyz = 1$ என நிறுவுக.

8. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$ ஆனல் $(x+y+z)^3 = 27\,xyz$ என நிறுவுக.

9. $a^{m^n} = (a^n)^m$ ஆனல் $m = \sqrt[n-1]{n}$ என நிறுவுக.

10. $y = x + \sqrt{x^2-1}$ ஆனல் $y+y^{-1} = 2x$ என நிறுவுக.

11. $y = x + \sqrt{1+x^2}$ ஆனல் $y-y^{-1} = 2x$ என நிறுவுக.

12. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$ ஆனல் $b+c$ அல்லது $c+a$

அல்லது $a+b$ பூச்சியமென நிறுவுக.

13. $a^x = b^y$; $b^x = a^y$ ஆனல் $a = b$ எனவும் $x = y$ எனவும் நிறுவுக.

14. $a^x = b^y = c^z$; $b^2 = ca$; ஆனல் $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ என நிறுவுக.

15. கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

(1) $3^{2y-x} = 9; 4^{x+y} = 1.$

(2) $2^{x+4} = 4^{5-x}$

(3) $4 . 2^{3x} = 8^{2x}$

4. அளவுக்கிணங்காத மூலங்கள்

4.1. $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$; என்பவை கண்கூடு. இங்கு, அளவுக் கிணங்கிய எண்களின் இருபடி மூலங்கள் = அளவுக் கிணங்கிய எண்களாக இருக்கின்றன.

ஆனால் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ போன்ற எண்கள் அளவுக் கிணங்காதவை. இங்கு 2, 3, 5 அளவுக் கிணங்கிய எண்களாயினும், அவைகளின் இருபடி மூலங்கள் அளவுக் கிணங்காதவையாகின்றன. அவ்வாறே, $\sqrt{\frac{8}{11}}$, $\sqrt{\frac{14}{15}}$.

இப்போது, பின் கூறப்பட்ட, அளவுக் கிணங்காத எண்களைப் பற்றிய சில பண்புகளை ஆராய்வோம்.

$\sqrt{\frac{a}{b}}$ ஒரு இருபடி மூலம்; அவ்வாறே, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, ...$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ என்பவைகளை முறையே, முப்படி, நாற்படி,.........n படி மூலம் எனக் கூறலாம்.

*4·2. p என்பது ஒரு கூட்டு முழு எண், அல்லது கூட்டு பின்னமாக விருந்து, அதன் இருபடி, முப்படி,.........n படி மூலங்கள் அளவுக் கிணங்காதவையாயிருப்பினும் மெய்யெண் களாயிருக்கும். ஆனால் p குறையெண்ணாயிருப்பின், அதன் இருபடி, நாற்படி போன்ற இரட்டைப்படி மூலங்கள் கற்பனை யெண்களாகும்; முப்படி, ஐம்படி போன்ற ஒற்றைப்படி மூலங்கள் மெய்யெண் (குறை எண்) ணாக விருக்கும். இது கவனத்திலிருக்க வேண்டும்.

[$\sqrt{11}$, $\sqrt[4]{35}$, $\sqrt[8]{.14}$......அளவுக் கிணங்காத மெய்யெண்கள்;

$\sqrt{-11}, \sqrt[4]{-35}, \sqrt[8]{-14}$......கற்பனை யெண்கள்;

$\sqrt[3]{-11}, \sqrt[5]{-35}, \sqrt[7]{-14}$...........அளவுக் கிணங்காத மெய் யெண்கள், குறையெண்கள்]

*4.3. படி மூலங்களை வகைப்படுத்தும் மற்றோர் முறை: $\sqrt{\frac{a}{b}}\left(=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ போன்ற, அளவுக்கிணங்கிய எண்ணின் அளவுக் கிணங்காத இருபடி மூலத்தை, இரண்டாம் தரப்படி மூலம் (Second order) என்றும், அவ்வாறே $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $\left(=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ போன்ற அளவுக் கிணங்கிய எண்ணின் அளவுக் கிணங்காத முப்படி மூலத்தை, மூன்றும் தரப் படிமூலம் (Third order) என்றும் மற்றொரு முறையில் படி மூலங்களை வகைப் படுத்துவதும் உண்டு.

(எ-கா.) $\sqrt[5]{\frac{-8}{9}}$ – ஐந்தாம் தரப் படிமூலம்.

$\sqrt[6]{\frac{12}{17}}$ – ஆறும் தரப் படிமூலம்.

4.3·1. ஆனல், $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{5-\sqrt{3}}$ என்ற எண்கள் படிமூலம் என்ற வரையறைக்கு உட்பட்டதல்ல என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். ஏனெனில், $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{3}$ போன்றவை அளவுக் கிணங்காதவை.

4.3·2. இருபடி மூலம் (Quadratic Surd): ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண்ணின் அளவுக் கிணங்காத இருபடி மூலமே, இருபடி மூலம் எனப்படும். $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ போன்றவை இருபடி மூலம் எனப்பட மாட்டாது. இது ஒரு அளவுக்கிணங்காத எண்ணின் அளவுக்கிணங்காத இருபடி மூலம். இந்த வேறுபாடு முக்கியமாக கவனிக்க வேண்டியதாகும்.

4.4·1. உறுப்பு வேறுபாடுகள்:

(a) $\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{5}}{7}$, $\sqrt{8}$ ... முதலியவை ஒருறுப்பு இருபடி மூலம் எனப்படும் (Monomial Surd). இவைகளின் பொது அமைப்பு $c\sqrt{\frac{a}{b}}$ அல்லது $\frac{c\sqrt{a}}{b}$.

(b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ $-\frac{4\sqrt{8}}{7}$ ... போன்றவை ஈருறுப்பு இருபடி மூலம் எனப்படும் (Binomial Surd). பொது அமைப்பு : $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ அல்லது $a+\sqrt{b}$.

(c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $4+2\sqrt{3}-5\sqrt{6}$ ... போன்றவை மூவுறுப்பு இருபடி மூலம் எனப்படும் (Trinomial Surd). பொது அமைப்பு: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ அல்லது $a\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}$.

(d) $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e}$ ...போன்றவை பல்லுறுப்பு இருபடி மூலம் எனப்படும் (Multinomial Surds)..

4.4·2·1. வடிவொத்த இருபடி மூலங்கள் (Similar Surds) :

$a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$, $d\sqrt{b}$ ... போன்றவை வடிவொத்த இருபடி மூலங்கள் எனப்படும்.

(எ-கா.) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$;

$\sqrt{192}=8\sqrt{3}$. இவை வடிவொத்த இருபடி மூலங்கள்.

4.4·2·2. இரண்டு, அல்லது அதற்குமேற்பட்ட வடிவொத்த இருபடி மூலங்களைக் கூட்டலாம், கழிக்கலாம். அப்போது ஒரே ஒரு ஒருறுப்பு இருபடி மூலம் கிடைக்கும்.

(எ-கா.) $a\sqrt{b}\pm c\sqrt{b}=(a\pm c)\sqrt{b}$.

இரண்டு வடிவொத்த இருபடி மூலங்களைப் பெருக்கினாலோ, அல்லது ஒன்றால் ஒன்றை வகுத்தாலோ, ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் கிடைக்கும்.

(எ-கா.) $a\sqrt{b}\times c\sqrt{b}=abc$.

$a\sqrt{b}\div c\sqrt{b}=\frac{a}{c}$.

4·4·3. துணையிய இருபடி மூலங்கள் (Conjugate Surds) :

$a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$

$a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$;

$$a-\sqrt{b},\ a+\sqrt{b};$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b};$$

மேற்கண்ட இரட்டை எண்கள் துணையிய இருபடி மூலங்கள் எனப்படும்.

(எ-கா.) $\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\sqrt{3}.$

$3+\sqrt{5},\ 3-\sqrt{5}.$

$\sqrt{5}+\sqrt{3},\ \sqrt{5}-\sqrt{3}.$ இவை துணையிய இருபடி மூலங்களாகும்.

4.5. அளவுக் கிணக்கும் சினை (Rationalising Factor):

ஏதாமொரு படி மூலத்தை (இருபடி, முப்படி...) மற்றொரு சினையால் பெருக்கினால், வரும் தொகை, ஒரு அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்ணாகு மானால், அவ்விரு சினைகளும் ஒன்றுக்கொன்று அளவுக்கிணக்கும் சினைகள் எனப்படும்.

(எ-கா.) சினை	அளவுக்கிணக்கும் சினை
$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{9}$
$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$
$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$

மேற்கூறியவைகளைப் பார்க்கும்போது, ஈருறுப்பு இருபடி மூலங்களின் துணையிய இருபடி மூலங்களே, அவைகளை அளவுக் கிணக்கும் சினையாகின்றன என்பது புலப்படும்.

இப்போது பொதுவாக,

$\left(\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}\right)$ ன் அளவுக் கிணக்கும் சினை யாதெனப் பார்ப்போம். (p, q கூட்டு முழு எண்கள்).

$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots\ldots + y^{n-1}$ என நாம் அறிவோம்.

$x = \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ எனவும்

$y = \sqrt[q]{b} = b^{\frac{1}{q}}$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $a = x^p$

$b = y^q$ ஆகும்.

p, q என்ற எண்களின் அ. பொ. ம. (L. C. M.)

n எனக்கொள்க.

$n = k \cdot p$

$n = l \cdot q$ எனவாகட்டும்.

அப்போது $x^n = a^{\frac{n}{p}} = a^k$.

$y^n = b^{\frac{n}{q}} = b^l$.

$$a^k - b^l = x^n - y^n$$

$$= \left(x - y\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots\ldots + y^{n-1}\right)$$

$$= \left(a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{q}}\right)\left(a^{\frac{n-1}{p}} + a^{\frac{n-2}{p}} b^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{n-1}{q}}\right)$$

$\therefore a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{q}}$ அளவுக் கிணைக்கும் சினை.

$$a^{\frac{n-1}{p}} + a^{\frac{n-2}{p}} b^{\frac{1}{q}} + \ldots\ldots + b^{\frac{n-1}{q}}$$

என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}}$ ன் அளவுக் கிணைக்கும் சினை காண்க.

2, 4 ன் அ. பொ. ம. 4.

$a^{\frac{1}{2}} = x$

$b^{\frac{1}{4}} = y$ எனக் கொள்க.

$x^4 = (a^{\frac{1}{2}})^4 = a^2$

$y^4 = (b^{\frac{1}{4}})^4 = b.$

$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3).$

$\therefore a^2 - b = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{4}})$

∴ வேண்டிய அளவுக் கிணக்கும் சினை,

$(a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{4}}).$

(2) அவ்வாறே, $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}}$ ன் அளவுக் கிணக்கும் சினை காண்க.

$a^{\frac{1}{2}} = x$

$b^{\frac{3}{4}} = y$ எனக்கொள்க.

$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

$\therefore a^2 - b^3 = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{9}{4}})$

வேண்டிய அளவுக் கிணக்கும் சினை,

$(a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{9}{4}})$

பலவித எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

(எ-கா.) (1) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{30}, \sqrt[6]{50},$ இவைகளை ஏறு வரிசையில் (Ascending order) எழுதுக.

மூலப்படிகளான 2, 3, 4, 6 ன் அ. பொ. ம. 12.

$\sqrt{3} = (3)^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$

$\sqrt[3]{16} = (16)^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{16^4} = \sqrt[12]{65536}$

$\sqrt[4]{30} = (30)^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{30^3} = \sqrt[12]{27000}$

$\sqrt[6]{50} = (50)^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{50^2} = \sqrt[12]{2500}$

∴ ஏறு வரிசையில் $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{50}$, $\sqrt[4]{30}$, $\sqrt[3]{16}$ பெறப்படும்.

(எ–கா.) (2) கீழெண்களை அளவுக் கிணங்கியவையாக்கிச் சுருக்குக.

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{2}{5-\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{5}{5-\sqrt{3}}=\frac{2(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=\frac{10+2\sqrt{3}}{22}$$

$$\therefore \text{மதிப்பு} = 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-\left(\frac{5+\sqrt{3}}{11}\right)$$

$$=\frac{66\sqrt{3}-22\sqrt{2}-5-\sqrt{3}}{11}$$

$$=\frac{65\sqrt{3}-22\sqrt{2}-5}{11}$$

(எ–கா.) (3) கீழெண்ணை அளவுக் கிணங்கியதாக்குக:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(5+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(5+\sqrt{3}-\sqrt{2})(5+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{7-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{3})^2-2}$$

$$=\frac{7-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{25+3+10\sqrt{3}-2}$$

$$=\frac{7-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{26+10\sqrt{3}}\cdot\frac{26-10\sqrt{3}}{26-10\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(7-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6})\ (26-10\sqrt{3})}{676-300}$$

$$= \frac{(7-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-6)(26-10\sqrt{3})}{376}$$

(எ-கா.) (4) கீழெண்ணை அளவுக் கிணங்கியதாக்குக :

$$\frac{1}{(25)^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}+1}$$

மதிப்பு : $\frac{1}{5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}+1}$

$$= \frac{5^{\frac{1}{3}}+1}{(5^{\frac{1}{3}}+1)\ (5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}+1)}$$

$$= \frac{5^{\frac{1}{3}}+1}{5+1}$$

$$= \frac{5^{\frac{1}{3}}+1}{6}.$$

4·5. சில எளிய தேற்றங்கள் :

தேற்றம் 1 : ஓர் இருபடி மூலமானது, ஓர் அளவுக் கிணங்கிய எண், ஓர் அளவுக் கிணங்காத எண் என்ற இரண்டின் கூட்டுத் தொகையாகவோ, கழிவுத் தொகையாகவோ இருக்க முடியாது.

அதாவது $\sqrt{a} \neq b \pm \sqrt{c}$ என நிறுவ வேண்டும்.

முடியுமானல் $\sqrt{a} = b+\sqrt{c}$ எனக் கொள்வோம்.

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்கு உயர்த்த,

$a = b^2+c+2b\sqrt{c}$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore\ a-b^2-c = 2b\sqrt{c}$ என்ற சமன்பாடு வரும்.

அதாவது $\sqrt{c} = \frac{a-b^2-c}{2b}$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே ஒரு அளவுக் கிணங்காத எண், ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண்ணுக்குச் சமம் என்ற முரண்பாடான முடிவு கிடைக்கிறது. ஆகவே, கொள்கை தவருகும்.

$$\because \quad \sqrt{a} \neq b+\sqrt{c}$$

அவ்வாறே $\sqrt{a} \neq b-\sqrt{c}$ என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 2: $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ என்ற சமன்பாடு மெய்யானல், $a=c$, $b=d$ என நிறுவுக. (a, b, c, d என்பவை அளவுக் கிணங்கியவை).

அதாவது அளவுக் கிணங்கிய பகுதி, அளவுக் கிணங்கிய பகுதிக்குச் சமம்; அளவுக் கிணங்காத பகுதி அளவுக் கிணங்காத பகுதிக்குச் சமம் என நிறுவ வேண்டும்.

முடியுமானல் $a \neq c$ எனக் கொள்க.

அப்போது $a=c+x$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்டது $c+x+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$

$\therefore \quad x+\sqrt{b}=\sqrt{d}$ எனப் பெறப்படும்.

தேற்றம் 1ன்படி இது முடியாது.

ஆகவே $a=c$ எனப் பெறப்படும்.

அப்போது $b=d$ எனவாகும்.

4.6. $(a+\sqrt{b})$ன் இருபடி மூலம் காணல்:

$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ எனக் கொள்க.

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்த,

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$$

$\therefore$ தேற்றம் 2 ன் படி,

$$x+y=a \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$$

அதாவது $4xy=b$

அதாவது $xy=\dfrac{b}{4}$ (2)

இவ்விரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு x, y அறியலாம்.

$\therefore \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ எனப் பெறப்படும்.

அவ்வாறே $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ எனப் பெறப்படும்.

(எ-கா.) (1) $9+6\sqrt{2}$ன் இருபடி மூலம் காண்க.

$\sqrt{9+6\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ எனக் கொள்க.

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்த,

$$9+6\sqrt{2}=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\therefore x+y=9.$$

$$xy=18$$

$\therefore x=6$; $y=3$ என எளிதில் அறியலாம்.

$$\therefore \sqrt{9+6\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$$

(எ-கா.) (2) $14-4\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{15}$ன் இருபடி மூலம் காண்க.

$$\sqrt{14-4\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்த,

$$14-4\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{15}=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{zx}-2\sqrt{yz}$$

$$\therefore x+y+z=14.$$

$$-2\sqrt{xy}=-4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{zx}=4\sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{yz}=-2\sqrt{15}$$

$$\therefore x+y+z=14.$$

$$xy=12.$$

$$yz=15.$$

$$zx=20.$$

$$\therefore \quad x^2 y^2 z^2 = 3600$$
$$\therefore \quad x y z = 60$$
$$\therefore \quad z = 5;$$
$$x = 4;$$
$$y = 3.$$

$\therefore$ வேண்டிய இருபடி மூலம் $= \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$= \underline{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

பாடச் சுருக்கம் (4)

(1) $\sqrt{a} \neq b \pm \sqrt{c}$ (a, c இரண்டும் சரியான இருபடி யல்ல).

(2) $a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$ ஆனால்

$a = c$,

$b = d$.

பயிற்சி 4

1. மிக எளிய அமைப்புகளுக்குக் கொண்டுவந்து சுருக்குக: (முடியுமிடங்களில் வடிவொத்த இருபடி மூலங்கள் பயன்படும்).

(i) $\sqrt{96} + \sqrt{54} - 4\sqrt{6}$.

(ii) $\sqrt{27} - 4\sqrt{108} - 2\sqrt{18} + \sqrt{200}$

(iii) $6\sqrt{125} + 8\sqrt{5} - \sqrt{3125}$

2. கீழெண்களை அளவுக் கிணங்கியவையாக்குக:

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

(ii) $\dfrac{21}{\sqrt{6}}$

(iii) $\dfrac{4\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$

(iv) $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$ இவைகளுள் எது பெரிது?

(v) $3\sqrt{6}$, $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$ இவைகளை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

3. கீழெண்களை அளவுக் கிணங்கியவையாக்கிச் சுருக்குக.

(i) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

(iii) $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$

(iv) $\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$

4. கீழ் கண்டவைகளில் வடிவொத்த இருபடி மூலங்களை வகைப்படுத்தி யெழுதுக:

$\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{243}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{160}$, $\sqrt{80}$, $16\sqrt{5}$.

5. பின் வருவனவற்றிற்கு அளவுக் கிணைக்கும் சினைகள் காண்க.

(i) $\sqrt[3]{7}$

(ii) $\sqrt[5]{16}$

(iii) $\sqrt[4]{27}$

(iv) $5^{\frac{1}{3}} - 1$

(v) $4^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} + 1$

(vi) $\sqrt[4]{3} - \sqrt{5}$.

(vii) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

(viii) $\sqrt{13} - \sqrt{6} - \sqrt{3}$

6. $x = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ஆனல்,
$x^2 + 2xy + y^2$; $x^2 - 2xy + y^2$ ன் மதிப்புக்கள் அறிக.

7. $x = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $y = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ஆனல்

$3x^2+8xy+3y^2$ ன் மதிப்பை அறிக.

8. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ என்பது $x^3-6x-6=0$ ன் ஒரு தீர்வு என நிறுவுக.

9. பின் வருவனவற்றின் இருபடி மூலங்களைக் காண்க.

(i) $7+4\sqrt{3}$

(ii) $21+8\sqrt{5}$

(iii) $57-12\sqrt{15}$

(iv) $16+4\sqrt{5}-2\sqrt{35}-4\sqrt{7}$

(v) $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

10. $x^2=5+2\sqrt{6}$ ஆனல் $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$ ன் மதிப்பென்ன ?

5. மடக்கைகள்

(Logarithms)

5.1. பின்வரும் எண்களைக் கவனிப்போம் :

.........4096, 2048, 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$,...... (A)

இவைகளை முறையே 2^{12}, 2^{11}, 2^{10}, 2^{9}, 2^{8}, 2^{7}, 2^{6}, 2^{5}, 2^{4}, 2^{3}, 2^{2}, 2^{1}, 2^{0}, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}...... (B) என எழுதலாம்.

(A) வரிசையிலுள்ள இரண்டு எண்களைப் பெருக்கலாம்.

$$256 \times 8 = 2048$$

அதுவே $2^{8} \times 2^{3} = 2^{11} = 2048$ ஆகும்.

(A) வரிசையிலுள்ள இரண்டு எண்களை வகுக்கலாம்.

$$1024 \div 16 = 64$$

அதுவே $2^{10} \div 2^{4} = 2^{6} = 64$ ஆகும்.

இங்கு நாம் படிக்குறி விதிகளான $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$, $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$ என்பவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஆகவே, 2 ன் படிகளாக உள்ள எண்கள் யாவற்றையும் தொகுத்து ஒரு வாய்பாடாக எழுதினால், அவைகளில் ஒன்றை யொன்று பெருக்கவோ, வகுக்கவோ வேண்டுமாயின் அவ் வாய்பாட்டின் உதவிகொண்டு, நேரடியாகப் பெருக்காமலோ, வகுக்காமலோ, விடையை அறிய இயலும். இம்முறைதான் "மடக்கைகள்" முறையில் பெருக்கல், வகுத்தல் செய்யப் பயன்படுகிறது.

எண்	அது 2 ன் எந்தபடி	எண்	அது 2 ன் எந்தபடி	எண்	அது 2 ன் எந்தபடி
8192	13	32	5	$\frac{1}{8}$	− 3
4096	12	16	4	$\frac{1}{16}$	− 4
2048	11	8	3	$\frac{1}{32}$	− 5
1024	10	4	2	$\frac{1}{64}$	− 6
512	9	2	1	$\frac{1}{128}$	− 7
256	8	1	0	$\frac{1}{256}$	− 8
128	7	$\frac{1}{2}$	− 1	$\frac{1}{512}$	− 9
64	6	$\frac{1}{4}$	− 2	$\frac{1}{1024}$	− 10

$256 \times 8 = 2^8 \times 2^3 = 2^{11} = 2048$ (அட்டவணை பார்க்க)
$128 \times \frac{1}{32} = 2^7 \times 2^{-5} = 2^2 = 4$ (,,)
$4096 \div 128 = 2^{12} \div 2^7 = 2^5 = 32$ (,,)
$128 \div 8 = 2^7 \div 2^3 = 2^4 = 16$ (,,)
$128 \div \frac{1}{16} = 2^7 \div 2^{-4} = 2^{11} = 2048$(,,)

5.2. வரையறை: எந்தப் படிக்கு (Power) 2 ஐ உயர்த்தினல் ஒரு குறிப்பிட்ட எண் கிடைக்குமோ, அப் படி, குறிப்பிட்ட எண்ணின் 2 ன் அடிப்படையில், மடக்கை எனப்படும்.

இப்போது $2048 = 2^{11}$

அதையொட்டி மடக்கை $_2 2048 = 11$

என்று கூறப்படும். எழுதும் மரபும் இதுவாகும். இனி மடக்கை என முழுவதும் அச்சொல்லை எழுதுவதற்குப் பதிலாக, மகை என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்திப் பழக்கத்தில் கொண்டு வருவோம்.

எனவே, மகை$_2$ $(16) = 4$;
மகை$_2$ $(\frac{1}{16}) = -4$;
மகை$_2$ $(2) = 1$;
மகை$_2$ $(1) = 0$; என எழுதலாம்.

5.3. 2 என்ற எண்ணைக் கொண்டுதான் அதன் படிகள் வாயிலாக மடக்கைகள் காணவேண்டும் என்ற தேவை யேதுமில்லை. 2 க்கு ஒரு தனிச் சிறப்பும் இல்லை. எந்த எண்ணையும் அடியாகக் கொண்டு, அதன் படிகள் வழியாக, மற்ற எண்களின் மடக்கை கூறலாம்.

பின் கூறப்படுவதைக் கவனிக்க:

$3^3 = 27$ ∴ மகை$_3$ $(27) = 3$

$3^{-5} = \frac{1}{243}$ ∴ மகை$_3$ $(\frac{1}{243}) = -5$

$3^0 = 1$ ∴ மகை$_3$ $(1) = 0$

$5^2 = 25$ ∴ மகை$_5$ $(25) = 2$

$(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$ ∴ மகை$_{\frac{3}{4}}$ $(\frac{27}{64}) = 3$

$10^0 = 1$ ∴ மகை$_{10}$ $1 = 0$

$10^1 = 10$ ∴ மகை$_{10}$ $10 = 1$

$10^2 = 100$ ∴ மகை$_{10}$ $100 = 2$

$10^6 = 1{,}000{,}000$ ∴ மகை$_{10}$ $(1{,}000{,}000) = 6$.

எந்த அடிக்கு மகை கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதோ, அந்த அடியை, குறிப்பிட்ட எண்ணிற்கு முன்னீடு (Prefix) செய்து எழுதுவது மரபு. பொதுவாக, மகை $_ab = x$ எனக் கூறினல், அதன் பொருள் யாதெனில், "a என்ற அடியை x படிக்கு உயர்த்தினல், b பெறப்படும்" என்பதாகும். அதாவது $b = a^x$ என்பது மெய். எனவே, "ஒரு எண்ணின் மடக்கை" யென்று கூறும்போது, எந்த அடிக்கு மடக்கை கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது எனக் குறிப்பிடவேண்டும். அடி யில்லாது மடக்கைக்குப் பொருளில்லை. அடிக்குத் தக்கவாறு, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணின் மடக்கை மாறும்.

(எ–கா.) மகை$_2$ $16 = 4$.

மகை$_4$ $16 = 2$.

மகை$_8$ $16 = \frac{4}{3}$.

5.4 மடக்கை யடிகள், கூட்டு முழு எண்ணுகவும் இருக்கலாம், கூட்டு பின்னமாகவும் இருக்கலாம்; மடக்கைகள் முழு எண்களாகவும் இருக்கலாம்; பின்னங்களாகவும் இருக்கலாம். இவைகளை மேலே காட்டப்பட்ட எடுத்துக் காட்டுகளில் காணலாம்.

இப்படியாக நாம் அறிந்து கொள்வது யாதெனில் :

(1) மடக்கை அடியாக எப்படிப்பட்ட கூட்டு எண்ணை யும் நாம் கொள்ளலாம் :

(2) மடக்கையின் மதிப்பு, கூட்டு முழு எண், குறை முழு எண், கூட்டு பின்னம், குறை பின்னம் எதுவாகவும் இருக்கலாம். அது அடியைப் பொருத்தது. அது மட்டுமல்ல, பல எண்களுக்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட அடிக்கு, பெறப்படும் மடக்கை ஓர் அளவுக்கிணங்காத எண்ணுகவும் இருக்கலாம். அப்படிப் பட்ட நிலையில், ஓர் அணித்தான அளவுக்கிணங்கிய மதிப்பு (approximate rational value) எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

இதுவரை நாம் விரிவாக ஆராய்ந்ததை, மிகச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.

$$\mathrm{N} = a^n \text{ ஆனல்}$$

$$\text{மகை}_a\ \mathrm{N} = n \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \mathrm{N} = a^{(\text{மகை}_a\ \mathrm{N})}$$ என்பது ஒரு

முக்கியத் தொடர் பாகும்.

5.5. மேலும் மடக்கைகளைப் பற்றிய சில முக்கிய செய்தி களைக் காண்போம்.

(1) ஒரு குறையெண்ணுக்கு மடக்கை காண்பதில்லை (உயர் கணிதத்தில் இதைப் பற்றி மேலும் அறியலாம்) ;

(2) மடக்கை$_a$ $1=0$. (a எந்த எண்ணுயினும் சரி) ;

(3) மடக்கை$_a$ $a=1$ ($a^1=a$; எந்த எண்ணுக்கும் பொருந்தும்) ;

(4) மடக்கை$_a$ $\mathrm{N}=n$ எனக்கொள்ளும் போது, N மிக மிக உயர்ந்து செல்ல, n ம் உயர்ந்து கொண்டே செல்லும் ;

இதை மடக்கை$_a$ $\infty = \infty$ (கந்தழி) எனக்கொள்வது மரபு ;

(5) மடக்கை$_a$ $\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = n$ எனக் கொள்ளும்போது,

N மிக மிக உயர்ந்து செல்ல, $\frac{1}{\mathrm{N}}$ மிகமிகக் குறைந்து பூச்சிய எல்லையை நெருங்குகிறது. அப்போது, n மதிப்பு, குறை யெண்ணுகி, எல்லையற்றுக் குறைந்து செல்லும்.

இதை மடக்கை$_a$ O = − ∝ (குறைக் கந்தழி) எனக் கொள்வது மரபு.

5.6. பொதுவாக, கொள்கையளவில் (Theoretically) எந்த எண்ணேயும் மடக்கை அடியாகக்கொண்டு பொதுப் பண்புகளை நாம் ஆராய்ந்தாலும், நடைமுறையில் மடக்கை அடி 10 எனக்கொண்டு, மடக்கை வாய்பாடுகள் வகுக்கப் பட்டிருக்கின்றன.

(குறிப்பு: உயர்கணிதத்தில் மடக்கை அடி e என்ற ஒரு அளவுக்கிணங்காத எண்ணைக்கொண்டு மடக்கைகள் வகுக்கப்படும். அதைப் பற்றி மேல் படிப்பில் நீங்கள் அறிவீர்கள். ஆனால் தற்போது, 10 என்ற எண்ணே சாதாரணமாக மடக்கை அடி எனக் கொள்ளப்படும்).

10 என்ற எண்ணை மடக்கை அடியாகக்கொண்டு, மடக்கைகள் கணிப்பதில் சில அனுகூலங்கள் உண்டு.

இப்படி கணிக்கப்பட்ட மடக்கைகள் சாதாரண மடக்கைகள் (common logarithms) எனப்படும்.

மடக்கைகளைப் பற்றிய சில பொது விதிகள் :

5.7. இவ்விதிகளைத் தேற்றங்களாகவே கொள்ளலாம். எந்த மடக்கை அடிக்கும் பொருத்தமானவை.

5.7·1. இரண்டு எண்களின் பெருக்குத் தொகையின் மடக்கை அவ்விரு எண்களின் தனித்தனி மடக்கைகளின் கூட்டுத்தொகை.

அதாவது மகை$_a$ (MN) = மகை$_a$ M + மகை$_a$ N என நிறுவ வேண்டும்.

மகை$_a$ M = x எனவும்

மகை$_a$ N = y எனவும் கொள்க.

∴ வரையறைப்படி $M = a^x$

$N = a^y$

∴ $MN = a^x . a^y$

$= a^{x+y}$

∴ மகை$_a$ (MN) = $x + y$

= மகை$_a$ M + மகை$_a$ N.

கிளைத்தேற்றம் : இவ்வாறே,

$$மகை_a\ (MNP...) = மகை_a\ M + மகை_a\ N + மகை_a\ P + ...$$

5.7·2. இரண்டெண்களின் ஈவின் மடக்கை, மேலெண் மடக்கையிலிருந்து கீழெண்ணின் மடக்கையைக் கழித்து வரும் தொகை.

அதாவது $மகை_a\left(\frac{M}{N}\right) = மகை_a\ M - மகை_a\ N$ என நிறுவ வேண்டும்.

5.7·1ல் கொண்ட கொள்கைப்படி,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$= a^{x-y}$$

$$\therefore\ மகை_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y$$
$$= மகை_a\ M - மகை_a\ N.$$

கிளைத்தேற்றம் :

$$மகை_a\left(\frac{M\ N\ P......}{x\ y\ z.........}\right) = மகை_a\ M + மகை_a\ N + மகை_a\ P......$$
$$- மகை_a\ x - மகை_a\ y - மகை_a\ z - ......$$

5.7·3. ஒரு எண் n படிக்கு உயர்த்தப்பட்டால், அத்தொகையின் மடக்கை, எண்ணுக்குரிய மடக்கையைப்போல் n மடங்காகும்.

(ஒரு எண் எப்படிக்கு உயர்த்தப்பட்டாலும், அத்தொகையின் மடக்கை, எண்ணுக்குரிய படியையும், எண்ணின் மடக்கையையும் பெருக்கி வரும் தொகைக்குச் சமம்).

அதாவது $மகை_a(M^n) = n \times மகை_a\ M$ என நிறுவ வேண்டும்.

$M = a^x$ எனக்கொண்டால்,

$$M^n = (a^x)^n$$
$$= a^{nx}$$

$$\therefore\ மகை_a\ (M^n) = nx$$
$$= n \times மகை_a\ M.$$

கிளைத்தேற்றம் : (1) $மகை_a\ (M^{-n}) = -n \times மகை_a\ M.$

(2) $மகை_a(\sqrt[n]{M}) = \frac{1}{n} \times மகை_a M.$

5.8 மடக்கை அடி மாற்றம் (Change of Base) :

$மடக்கை_a\ N = x$ ஆனுல், மடக்கை அடியை b என மாற்றினுல்,

$மடக்கை_b\ N$ என்ன ?

$$N = a^x$$

$$\therefore\ மடக்கை_b\ N = மகை_b\ (a^x)$$

$$= x \times மகை_b\ a$$

$$= \underline{மகை_a\ N \times மகை_b\ a.}$$

இந்த அடி மாற்ற வாய்பாடு மிக முக்கியமானது.

5.9 மடக்கை அடி — எண் மாற்றல் :

$மகை_b\ a = x$ ஆனுல்

$மகை_a\ b$ என்ன ?

$a = b^x$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore\quad b = (a)^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore\quad மகை_a\ b = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{மகை_b\ a}$$

$\therefore\ மகை_a\ b \times மகை_b\ a = 1$ என்பது முக்கிய வாய்பாடாகும்.

மற்ருேர் முறை :

$a = b^x$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

இரு பக்கங்களுக்கும், $\underline{a}$ என்ற **அடிக்கு** மடக்கை கண்டால்,

$$மகை_a\ a = மகை_a\ (b^x)$$

$$= x \text{ மகை }_a b$$

ஆனால் $\text{மகை}_a\, a = 1$

$$\therefore \quad 1 = x \text{ மகை }_a b$$

$$\therefore \quad \text{மகை }_a b = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\text{மகை}_b\, a}$$

$$\therefore \quad \underline{\text{மகை}_a b \times \text{மகை}_b a = 1}$$

5.9·1 $\text{மகை}_b\, \text{N} = \dfrac{\text{மகை}_a\, \text{N}}{\text{மகை}_a\, b}$ என நிறுவுக.

5.8ல், $\text{மகை}_b\ \text{N} = \text{மகை}_a\ \text{N} \times \text{மகை}_b\ a$ என நிறுவப்பட்டது.

ஆனால் $\text{மகை}_b\, a = \dfrac{1}{\text{மகை}_a\, b}$

$$\therefore \quad \text{மகை}_b\ \text{N} = \frac{\text{மகை}_a\, \text{N}}{\text{மகை}_a\, b}$$

இந்த அமைப்பிலும் அடி - மாற்ற விதியை அல்லது வாய்பாட்டைக் கவனிக்கவேண்டும்.

(எ-கா.) (1) $\sqrt{5}$ என்ற மடக்கை அடிக்கு 25; 125ன் மடக்கை காண்க.

$$25 = (5)^2$$

$$= (\sqrt{5})^4$$

$$\therefore \text{ மகை }_{\sqrt{5}} 25 = 4$$

$$125 = (5)^3$$

$$= (\sqrt{5})^6$$

$$\therefore \text{ மகை }_{\sqrt{5}} 125 = 6.$$

(எ-கா.) (2) மகை$_{10}$ $2=0.3010$; மகை$_{10}$ $3=0.4771$; மகை$_{10}7=0.8451$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மகை$_{10}$ 126 ; மகை$_{10}$ 1512 ; மகை$_{10}$ $(\frac{28}{9})$ காண்க.

$$126=7\times3^2\times2$$

$\therefore$ மகை$_{10}$ $126=$ மகை$_{10}$ $7+2$ மகை$_{10}$ $3+$ மகை$_{10}$ 2

$$\begin{aligned}&=\ 0.8451\\&+\ 0.9542\\&+\ 0.3010\\\hline&=\ 2.1003\end{aligned}$$

$$1512=7\times3^3\times2^3.$$

மகை$_{10}$ $1512=$ மகை$_{10}$ $7+3$ மகை$_{10}$ $3+3$ மகை$_{10}$ 2

$$=0.8451+1.4313+0.9030$$

$$=3.1794$$

$$\frac{28}{9}=\frac{7\times2^2}{3^2}$$

$\therefore$ மகை$_{10}$ $(\frac{28}{9})$ $=$ மகை$_{10}$ $7+2$ மகை$_{10}$ $2-2$ மகை$_{10}$ 3

$$=0.4929.$$

(எ-கா.) (3) $\dfrac{1}{\text{மகை}_a(ab)}+\dfrac{1}{\text{மகை}_b(ab)}=1$ என நிறுவுக.

மகை$_a$ $(ab)=x$ எனவும்

மகை$_b$ $(ab)=y$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore\ ab=a^x$$

$$\therefore\ b=a^{x-1}$$

மேலும் $ab=b^y$

$$\therefore\ a=b^{y-1}.$$

$\therefore$ மகை$_a b=x-1.$

மகை$_b a=y-1$

$\therefore$ $x=1+$மகை$_a b$

$$y = 1 + \text{மகை}_b a$$

$$= 1 + \frac{1}{\text{மகை}_a b}$$

$z = \text{மகை}_a b$ எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

$$= \frac{1}{1+z} + \frac{z}{1+z}$$

$$= 1.$$

(எ-கா.) (4) $a^2 + b^2 = 7\,ab$ ஆனால்,

$$\text{மகை} \left(\frac{a+b}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\,(\text{மகை } a + \text{மகை } b)$$ என நிறுவுக.

கொடுத்த சமன்பாட்டை, $a^2 + b^2 + 2ab = 9\,ab$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad (a+b)^2 = 9ab$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$$

இருபக்கங்களுக்கும், எந்த அடிக்கும் மடக்கையெடுக்க,

$$2\left[\text{மகை} \left(\frac{a+b}{3}\right)\right] = \text{மகை } a + \text{மகை} b$$

$$\therefore \quad \text{மகை} \left(\frac{a+b}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\,(\text{மகை } a + \text{மகை } b).$$

(எ-கா.) (5): x ன் தீர்வு காண்க:

$$5^{2x}.\ 7^{2x-1} = 175$$

இதை $\frac{5^{2x}.7^{2x}}{7} = 175$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad 5^{2x} \cdot 7^{2x} = 1225$$

$$\therefore \quad (35)^{2x} = (35)^2$$

$$\therefore \quad 2\,x = 2$$

$$\therefore \quad \underline{x = 1.}$$

(எ-கா.) (6) $மகை_a b . மகை_b c . மகை_c a = 1$ என நிறுவுக.

x என்ற பொது மடக்கை அடிக்கு,

$மகை_x a = p,$

$மகை_x b = q,$

$மகை_x c = r$ எனக்கொள்க.

மடக்கை அடி – மாற்ற விதிப்படி,

$$மகை_a b = \frac{மகை_x b}{மகை_x a};$$

$$மகை_b c = \frac{மகை_x c}{மகை_x b};$$

$$மகை_c a = \frac{மகை_x a}{மகை_x c}.$$

மூன்றையும் பெருக்க, 1 கிடைக்கும்.

(எ-கா.) 7 : $x^2+y^2=z^2$ ஆனல்

$$\frac{1}{மகை_{z+y}\, x} + \frac{1}{மகை_{z-y}\, x} = 2$$ என நிறுவுக.

$$மகை_b\, a = \frac{1}{மகை_a\, b}$$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{மகை_{z+y}\, x} = மகை_x (z+y).$$

$$\frac{1}{மகை_{z-y}\, x} = மகை_x (z-y),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{மகை_{z+y}\, x} + \frac{1}{மகை_{z-y}\, x} = மகை_x (z+y) + மகை_x (z-y)$$

$$= மகை_x (z^2-y^2)$$

$$= மகை_x\, x^2$$

$$= \underline{2}$$

பயிற்சி 5 (1)

1. பின்வரும் மடக்கைகளைக் கணக்கிடுக.

(i) மகை $_{2\sqrt{2}}16$

(ii) மகை $_{3\sqrt{3}}243$

(iii) மகை $_{25}$ 3125

2. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) மகை $_{10}$ $625 = 4 - 4$ மகை $_{10}$ 2

(ii) மகை $_{10}$ $3200 = 2 + 5$ மகை $_{10}$ 2

(iii) மகை $_{10}$ $(8\frac{1}{3}) = 2 - 2$ மகை $2 -$ மகை 3.

3. மகை$_{10}$ $(.001)$; மகை$_5$ $(.04)$; மகை$_2$ $(.0625)$ மதிப்புக்களை அறிக.

4. மகை$_x$ $81 = \frac{4}{3}$ ஆனால் மடக்கையடி x என்ன?

5. $a^2+b^2=5\,ab$ ஆனால் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) மகை $(a+b)=\frac{1}{2}$ [மகை $7+$மகை $a+$மகை b]

(2) மகை $(a-b)=\frac{1}{2}$ [மகை $3+$மகை $a+$மகை b]

6. $a^2+b^2=nab$ ஆனால் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) மகை $(a+b)=\frac{1}{2}$ [மகை $(n+2)+$மகை $a+$மகை b]

(2) மகை $(a-b)=\frac{1}{2}$ [மகை $(n-2)+$மகை $a+$மகை b]

7. மகை $(x+y)=$மகை $3+\frac{1}{2}$ மகை $x+\frac{1}{2}$ மகை y ஆனால் $x^2+y^2=7\,xy$ என நிறுவுக.

8. 2 மகை $(x+y)=$மகை $n+$மகை $x+$மகை y ஆனால் $x^2+y^2=(n-2)\,xy$ என நிறுவுக.

9. $a^x=b^y=c^z$; $b=ac$; ஆனால் $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ என நிறுவுக.

10. $x=$ மகை$_{2a}$ a

$y=$ மகை$_{3a}$ $2a$

$z=$ மகை$_{4a}$ $3a$ ஆனால் $xyz+1=2yz$ என நிறுவுக.

11. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை விடுவிக்க :

(i) $3^{3x} \,.\, 5^{3x-3} = 27$

(ii) $3^{x-1} \,.\, 5^{2x} = 1875$

(iii) $4^{x} \,.\, 5^{4x} = 50$

12. மகை $(x^3\, y^2) = 3a+2b$; மகை $(x^2\, y^3) = 2a+3b$ ஆனல் a, b ன் சார்பாக மகை x, மகை y காண்க.

13. $f(x) =$ மகை $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ஆனல் $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ என நிறுவுக.

14. $f(x) =$ மகை $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ஆனல் $f\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right) = 2f(x)$ என நிறுவுக.

சாதாரண மடக்கைகள்

5·9. நடைமுறையில் நாம் 10 என்ற எண்ணையே மடக்கையடியாகக் கொள்கிறோம் என்று முன்னர் குறிப்பிட்டோம். இவைகள் சாதாரண மடக்கையெனப்படும். இனி மடக்கை அடி குறிப்பிடா விடத்து மடக்கை அடி 10 எனவே கொள்ளப்படும்.

5·9·1. மடக்கை முழு எண், மடக்கை பின்னம் (Characteristic, Mantissa) :

பின் வருவனவற்றைக் கவனிக்க :

$10^0 = 1 \quad \therefore$ மகை $1 = 0$.

$10^1 = 10 \quad \therefore$ மகை $10 = 1$.

$10^2 = 100 \quad \therefore$ மகை $100 = 2$.

$10^3 = 1000 \quad \therefore$ மகை $1000 = 3$.

$10^4 = 10000 \quad \therefore$ மகை $10000 = 4$.

....

$10^{-1} = 0.1 \quad \therefore$ மகை $0·1 = -1$.

$10^{-2} = 0·01. \quad \therefore$ மகை $0·01 = -2$.

$10^{-3} = 0·001. \quad \therefore$ மகை $0·001 = -3$.

....

(*a*) இப்போது ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு 10க்குக் குறைவான எண்களின் மடக்கை 0க்கும் 1க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு பின்னமாயிருக்கும்.

எடுத்துக் காட்டாக, 3·45ன் மடக்கை என்ன வெனப் பார்ப்போம்.

$$1 < 3{\cdot}45 < 10$$

∴ மகை 1 < மகை 3·45 < மகை 10

அதாவது 0 < மகை 3·45 < 1.

∴ மகை 3·45ன் மதிப்பு, 0க்கும் 1க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும். அதாவது 0.*xyz*...என்ற அமைப்பிலிருக்கும். மடக்கையின் முழு எண் பகுதி பூச்சியம் ; பின்னப் பகுதி 0·*xyz*......

(*b*) 10க்கும் 100க்கும் இடைப்பட்ட (31·7 போன்ற) எண்களின் மடக்கை 1க்கும் 2க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும்.

ஏனெனில் 10 < 31·7 < 100

∴ மகை 10 < மகை 31·7 < மகை 100

∴ மகை 1 < மகை 31·7 < 2.

அதாவது மகை 31·7 = 1· *x y z*.........என்ற அமைப்பில் இருக்கும். மடக்கையின் முழு எண் பகுதி 1; அதோடு ஒரு பின்னப் பகுதியும் சேர்ந்திருக்கும்.

(*c*) இவ்வாறே 100க்கும் 1000க்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கை 2க்கும் 3க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும் ; மடக்கையின் முழு எண் பகுதி 2; அதோடு ஒரு பின்னப் பகுதியும் சேர்ந்திருக்கும். அமைப்பு 2· *x y*·*z*...

(*d*) தொகுத்துக் கூறுமிடத்து :

(1) முழு எண் பகுதியில் (Integral Part) ஓரிலக்கமுள்ள எண்களின் மடக்கைகள், கூட்டு மதிப்புடையது, பூச்சியத்திற்கு மேற்பட்டதாய், ஒன்றுக்குக் குறைந்த ஒரு வெறும் பதின் பின்னமாயிருக்கும் (0· *x y z* ...).

(2) முழு எண் பகுதியில் இரண்டிலக்க முள்ள எண்களின் மடக்கைகள் 1க்கு மேற்பட்டு 2க்கு உட்பட்டதாய் 1· *x y z* ... என்ற அமைப்பிலிருக்கும்.

(3) முழு எண் பகுதியில் மூன்றிலக்க முள்ள எண்களின் மடக்கைகள் 2 க்கு மேற்பட்டதாய், 3 க்குட்பட்டதாய் $2\cdot xyz\ldots$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும்.

(4) பொதுவாக முழு எண் பகுதியில் n இலக்கங்களுள்ள எண்களின் மடக்கை $(n-1)$க்கு மேற்பட்டதாய் n க்குட்பட்டதாய் $(n-1)\cdot\ xyz\ldots$என்ற அமைப்பிலிருக்கும்.

5.9·2. வரையறை : ஒரு எண்ணின் மடக்கை ஒரு முழு எண்ணும், ஒரு பதின்பகுப்பு பின்னமும் கூடிய தொகையாய் அமையும்போது, முழுஎண் பகுதியை, மடக்கை முழுஎண் (Characteristic) எனவும் பதின் பகுதியை மடக்கை பின்னம் (Mantissa) எனவும் கூறுகிறோம்.

5.9·3. மகை அட்டவணை விளக்கமும், பயன்படுத்தும் முறையும்.

எண் முதல் – வரை	எண்ணின் முழு எண் பகுதியிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை	மடக்கை முழு எண் பகுதி
1 முதல் 10 வரை	1	0
10 ,, 100 ,,	2	1
100 ,, 1000 ,,	3	2
1000 ,, 10,000 ,,	4	3
— —	—	—
10^{n-1} முதல் 10^n வரை	n	$(n-1)$

இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில், ஒரு எண்ணின் முழு எண் பகுதியில் n இலக்கங்கள் இருப்பின் அதன் மடக்கை முழு எண் பகுதி $(n-1)$; அதோடு ஒரு பதின் பின்னமும் சேரும்.

எளிய எடுத்துக்காட்டுக்கள்

எண்	மடக்கை முழு எண் பகுதி
5.675	0
453.1	2
5800	3
17,456	4
10,000,000	7

5.9·4. இப்போது ஒன்றுக்குக் குறைபட்ட கூட்டு எண்களின் மடக்கைகளைப் பார்ப்போம். அதாவது இவ்வெண்களில் முழு எண் பகுதியே யிருக்காது, பதின் பகுதியே யிருக்கும்.

அமைப்பு : 0. *abc*......(0.71, 0.0054, 0.00007)

(*a*) $0.1 < M < 1$

$M = 0.65$ எனக் கொள்வோம்.

மகை $0.1 = -1$

மகை $1 = 0$

$\therefore$ மகை $0.1 <$ மகை $M <$ மகை 1

$\therefore \quad -1 <$ மகை $M < 0$

$\therefore$ 0.1 க்கும், 1 க்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கைகள் -1 க்கும் 0 க்கும் இடையிலிருக்கும். ஆகவே அவை குறையெண்களாயிருக்கும்.

(*b*) $0.01 < M < 0.1$

$M = 0.065$ எனக் கொள்வோம்.

மகை $0.01 = -2$

மகை $0.1 = -1$

$\because$ மகை $0.01 <$ மகை $M <$ மகை 0.1

$\therefore \quad -2 <$ மகை $M < -1.$

∴ 0.01க்கும் 0.1க்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கைகள் – 2 க்கும் – 1 க்கும் இடையிலிருக்கும். ஆகவே அவையும் குறை யெண்களாயிருக்கும்.

(c) $0.001 < M < 0.01$

$M = .0089$ எனக் கொள்வோம்.

மகை $0.001 = -3$

மகை $0.01 = -2$

∴ மகை 0.001 < மகை M < மகை 0,01

∴ $-3 <$ மகை M < -2.

∴ 0.001 க்கும் 0.01 க்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கைகள் – 3 க்கும் – 2 க்கும் இடையிலிருக்கும். அவைகளும் குறையெண்கள்.

பின்வரும் தொகுப்பினைக் காண்க.

எண்ணிடை	மகையிடை	மகை அமைப்பு.
$0{\cdot}1 < M < 1$	– 1 முதல் – 0	$-0{\cdot}\ a\ b\ c$.........
$0{\cdot}01 < M < 0.1$	– 2 முதல் – 1	$-1{\cdot}\ a\ b\ c$.........
$0{\cdot}001 < M < 0{\cdot}01$	– 3 முதல் – 2	$-2{\cdot}\ a\ b\ c$.........
$0{\cdot}0001 < M < 0{\cdot}001$	– 4 முதல் – 3	$-3{\cdot}\ a\ b\ c$.........

எனவே, ஒன்றுக்குக் குறைவான கூட்டு பதின் பின்னங்களின் (Pure decimal fractions) மடக்கைகள் (மடக்கை அடி 10க்கு) குறை யெண்கள். அவைகளின் பொதுத் தன்மைகளைப் பற்றிப் பின்னர் விளக்குவோம்.

5·9·5 (a) பின்வரும் எண்களைக் கவனிக்க :

67840, 6784, 678·4, 67·84, 6·784, 0·6784, 0·06784, 0·006784, 0·0006784,...... அடிக்கோடிட்ட 6·784ன் மடக்கை x எனக் கொள்வோம். (பின்னர் நீங்கள் மகை 6.784 = 0·8315 என நேரடியாக மடக்கை வாய்பாட்டிலிருந்து அறிந்து கொள்வீர்கள்). எனவே $10^x = 6{\cdot}784$. x ஒரு பதின் பின்னம். மடக்கையில் முழு எண் பகுதியில்லை. பின்னப் பகுதி யொன்றே உள்ளது. (5.9·1 a பார்க்க).

தற்காலிகமாக $x = 0{\cdot}8315$ எனக்கொள்வோம். அதாவது $10^{0{\cdot}8315} = 6{\cdot}784$.

$$மகை_{10} 6{\cdot}784 = x = 0{\cdot}8315.$$

$$67{\cdot}84 = 10 \times 6{\cdot}784$$

$$\therefore \quad மகை\ 67.84 = மகை\ 10 + மகை\ 6{\cdot}784$$

$$= 1 + x = 1{\cdot}8315.$$

$$678{\cdot}4 = 100 \times 6{\cdot}784$$

$$\therefore \quad மகை\ 678{\cdot}4 = மகை\ 100 + மகை\ 6{\cdot}784$$

$$= 2 + x = 2{\cdot}8315.$$

$$6784 = 1000 \times 6{\cdot}784$$

$$\therefore \quad மகை\ 6784 = மகை\ 1000 + மகை\ 6{\cdot}784$$

$$= 3 + x = 3{\cdot}8315.$$

$$67840 = 10{,}000 \times 6{\cdot}784$$

$$\therefore \quad மகை\ 67840 = மகை\ 10{,}000 + மகை\ 6{\cdot}784$$

$$= 4 + x = 4{\cdot}8315.$$

x ஒரு வெறும் பின்னப் பகுதி என்பதை மறந்து விடக் கூடாது.

எனவே, 6·784ன் மடக்கை x என்ற வெறும் பின்னப் பகுதி $(0 < x < 1)$ யானல், 6·784ல் உள்ள புள்ளியை வலது புறம் ஓர், ஓர், இலக்கமாகத் தள்ளிப் போடப் போட, மடக்கையின் மதிப்பு, ஒன்று, ஒன்ருக உயர்ந்து கொண்டே போகிறது. ஆனல் 6·784, 67·84, 678·4, 6784, 67840 இவைகளின் மடக்கை களின் பதின் பகுப்புப் பகுதி சமம் (x); முழு எண் பகுதிகள் முறையே 0, 1, 2, 3, 4 . . . என உயர்ந்து செல்கின்றன.

மடக்கை வாய்பாடுகளில் பின்னப் பகுதி மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முழு எண் பகுதிகளை 5.9·3ல் கண்ட படி, நாமே எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். திரும்பவும் கூறுங் கால், "ஒரு எண்ணின் முழு எண் பகுதியில் n இலக்கங்க ளிருப்பின் அதன் மடக்கை முழு எண் பகுதி $(n-1)$; பதின் பின்னப்பகுதி, மடக்கை வாய்பாடுகளிலிருந்து எடுத்து எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்".

(b) $10^x = 6{\cdot}784$

$\therefore$ மகை$_{10}6{\cdot}784 = x = 0{\cdot}8315.$

$0{\cdot}6784 = 10^{-1} \times 6{\cdot}784.$

$\therefore$ மகை $0{\cdot}6784 =$ மகை $10^{-1} +$ மகை $6{\cdot}784$

$= -1 + x = -1 + 0{\cdot}8315.$

$0{\cdot}06784 = 10^{-2} \times 6{\cdot}784.$

$\therefore$ மகை $0{\cdot}06784 =$ மகை $10^{-2} +$ மகை $6{\cdot}784$

$= -2 + x = -2 + 0{\cdot}8315.$

$0{\cdot}006784 = 10^{-3} \times 6{\cdot}784.$

$\therefore$ மகை $0{\cdot}006784 =$ மகை $10^{-3} +$ மகை $6{\cdot}784$

$= -3 + x = -3 + 0{\cdot}8315.$

எனவே, உண்மையாக, மகை $0{\cdot}6784 = -1 + 0{\cdot}8315$

$= -0{\cdot}1685$

அவ்வாறே மகை $0{\cdot}06784 = -2 + 0{\cdot}8315$

$= -1{\cdot}1685.$

ஆனால் இவைகளை இப்படி எழுதாமல், $\overline{1}.8315$, $\overline{2}.8315$, $\overline{3}.8315$ . . . என எழுதுவது அனுகூலமானது.

இங்கு, மடக்கை முழு எண் பகுதி, ஒரு குறை முழு எண் -1, -2, 3...போன்றவை; மடக்கை பதின் பகுப்புப் பின்னப் பகுதி கூட்டெண்.

படிக்கும் முறை: $\overline{1}.8315$ ஐப் படிப்பது "குறை ஒன்று, புள்ளி 8315"; $\overline{2}.8315$ ஐப் படிப்பது "குறை இரண்டு, புள்ளி 8315" என்று வழக்கில் வரவேண்டும்.

5.9·6. நாம் இதுவரை கண்ட மடக்கைகளை ஓர் அட்டவணையாக அமைத்துப் பார்ப்போம்.

(1) எண்	(2) மடக்கை (a) முழுஎண்பகுதி	(2) மடக்கை (b) பின்னப்பகுதி	மடக்கையை எழுதும் முறை
67840	4	+ 0.8315	4.8315
6784	3	+ 0.8315	3.8315
678.4	2	+ 0.8315	2.8315
67.84	1	+ 0.8315	1.8315
6.784	0	+ 0.8315	0.8315
0.6784	– 1	+ 0.8315	$\bar{1}.8315$
0.06784	– 2	+ 0.8315	$\bar{2}.8315$
0.006784	– 3	+ 0.8315	$\bar{3}.8315$
0.0006784	– 4	+ 0.8315	$\bar{4}.8315$

5.9·7. இப்போது முன்னிரண்டு பத்திகளில் நாம் கண்டதை, மேற்கண்ட அட்டவணையின் உதவிகொண்டு, திரும்பவும் வகைப் படுத்திக் கூறி, மடக்கைகளை அறிதற்குரிய சில முக்கியமான விதிகளை நிர்ணயிப்போம்.

(1) 6, 7, 8, 4 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு வரிசை மாற்ற மின்றி,

67840, 6784, 678·4, 67·84, 6·784, 0·6784, 0·06784 0·006784, . . . போன்ற பல எண்களை எழுதலாம். அவைகளின் மதிப்பு, பதின் புள்ளியிருக்குமிடத்தால் நிர்ணயிக்கப் படுகிறது. (அட்டவணை : நிரல் (1) – Column (1)).

(2) அப்படிக் குறிப்பிடப்பட்ட எண்ணின் மடக்கை இருபகுதிகளாகும் : ஒன்று – மடக்கை முழு எண் பகுதி (நிரல் 2(*a*)) ; மற்றொன்று – மடக்கை பதின் பகுப்புப் பகுதி (நிரல் 2(*b*)) அதாவது மடக்கை பின்னப் பகுதி.

(3) மடக்கை முழு எண் பகுதி (நிரல் 2(*a*)), பதின் புள்ளியின் இடத்தைப் பொருத்திருக்கிறது: பின்னப் பகுதி (நிரல் 2(*b*)) இலக்கங்களை மட்டுமே பொருத்திருக்கிறது.

(4) பதின் புள்ளியின் இடத்தை மாத்திரம் மாற்றி இலக்க வரிசையை அப்படியே கொண்டால், மடக்கை முழு எண் பகுதி மாறுகிறது; பின்னப் பகுதி மாருமல் இருக்கிறது (நிரல் 3).

இப்போது எல்லாக் கூட்டெண்களையும் இரண்டு பெரும் பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்:

(1) ஒன்றுக்கு மேற்பட்டவை: இவை வெறும் முழு எண்களாக இருக்கலாம் (8 ; 87 ; 967 ; 4376 ; . . . . .) ; அல்லது முழு எண் பகுதியும் பின்னப் பகுதியும் சேர்ந்தனவாக இருக்கலாம் (7·4 ; 76·43 ; 776·34, . . .).

(2) ஒன்றுக் குறைந்தவை (0·5 ; 0·047 ; 0·00437) ;

இவற்றின் மடக்கைகளை வாய்பாட்டில் கண்டு எழுதுவதற்குரிய விதிகள் பின் வருமாறு:

(1) மடக்கைகளில் ஒரு முழு எண் பகுதி உண்டு; ஒரு பின்னப் பகுதி உண்டு.

(2) (*a*) 1க்கு மேற்பட்ட கூட்டெண்களுடைய மடக்கை முழு எண் பகுதி காணும் முறை: கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் முழு எண் பகுதியில் n இலக்கங்கள் இருப்பின் மடக்கை முழு எண் பகுதி $= +(n-1)$ (கூட்டு முழு எண்).

(*b*) பின்னப் பகுதியை, மடக்கை வாய்பாட்டைப் பார்த்து எழுதிக் கொள்ள வேண்டும்.

முழு எண் பகுதியில் ஒரே இலக்கமிருப்பின், அதன் மடக்கையின் முழு எண் பகுதி பூச்சியம். 1 ; 10 ; 100 ; 1000 ; ...போன்ற பத்து என்ற எண்ணின் சரியான படிகளுக்கு, மடக்கை முறையே, 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . . ; பின்னப் பகுதிகள் கிடையாது.

(3) (*a*) 1க்குக் குறைவான கூட்டெண்களுடைய மடக்கைகளின் முழு எண் பகுதி காணும் முறை:

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணில், பதின் புள்ளிக்கு அடுத்து, உடனடியாக n பூச்சியங்கள் இருப்பின், மடக்கை முழு எண் பகுதி $= -(n+1)$; இதை வழக்கில் $\overline{n+1}$ என எழுதுகிறோம்.

(b) பின்னப் பகுதியை, மடக்கை வாய்பாட்டைப் பார்த்து எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். இது கூட்டு எண் மதிப்பே பெற்றிருக்கும். பதின் புள்ளிக்கு அடுத்து உடனடியாக பூச்சிய மில்லாமல் ஒரு எண் இருப்பின், அதன் மடக்கையின் முழு எண் பகுதி -1. $0{\cdot}1, 0{\cdot}01, 0{\cdot}001, 0{\cdot}0001 \ldots$ போன்ற பத்து என்ற எண்ணின் சரியான குறையெண் படி களுக்கு, மடக்கை முறையே $-1, \ -2, \ -3, \ -4 \ldots$ பின்னப் பகுதிகள் கிடையாது.

(4) எனவே, ஒரு எண்ணைக் கண்டவுடனேயே, அதன் மடக்கையிலுள்ள முழு எண் பகுதியை நேரடியாக எழுதி விடலா மாதலின், மடக்கை வாய்பாடுகளில் முழு எண் பகுதி கொடுக்கப்பட்டிராது. அதன் பதின் பகுதியே கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்.

5.9·7·1. இதுவரை கண்ட விதிகளின் மறுதலை விதிகள் :

(1) ஒரு எண்ணின் மடக்கையில், மடக்கை முழு எண் $+n$ ஆக விருப்பின், அவ்வெண் 1க்கு மேற்பட்டு, முழு எண் பகுதியில் $(n+1)$ இலக்கங்கள் பெற்றிருக்கும். மடக்கை முழு எண் பகுதி பூச்சியமாயிருப்பின், அதற்குரிய எண் 1க்கு மேற்பட்டு, முழு எண் பகுதியில் ஒரே இலக்கம் கொண்டிருக்கும்.

(2) ஒரு எண்ணின் மடக்கையில், மடக்கை முழு எண் $-n$ ஆக விருப்பின், அவ்வெண் ஒன்றுக்குக் குறைந்து பதின் புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக $(n-1)$ பூச்சியங்கள் பெற்று இருக்கும். எண்ணில் முழு எண் பகுதியே இருக்காது. மடக்கை முழு எண் பகுதி -1 ஆக இருப்பின், அவ்வெண், ஒன்றுக்குக்குறைந்து பதின் புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக, பூச்சியமல்லாத, ஒரு இலக்கம், மேலும் மற்ற இலக்கங்கள் பெற்றிருக்கும்.

[குறிப்பு : **புள்ளியை அடுத்து உடனடியாகப் பூச்சியங்களிருப்பின், அப்பூச்சியங்களைக் கடந்து, உடனடியாகவரும் முதல் இலக்கம், முதல் பொருளுடைய இலக்கம்** (First significant digit) எனப்படும்].

5.9·8. மடக்கை வாய்பாடு

மடக்கை வாய்பாட்டில் ஒரு பகுதி பின் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

Mean differences
இடை மிச்சங்கள்

எண்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	8261	—	—	—	—	—	—	—	8312		1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	—	—	—	—	—	8370			1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	—	—	—	—	—	—	—	—	8455	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	—	—	—	—	8482	—	—	—	—	1	1	2	2	3	4	4	5	6

மடக்கை வாய்பாடு முழுவதும் தேவைக்குத் தகுந்தபடி பயன்படுத்தப் பழக்கம் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

வாய்பாட்டமைப்பும், அதனைப் பயன்படுத்தும் முறையும் :

இவ்வாய்பாட்டில் இடது பக்க ஓரத்தில் முதல் நிரலில் மடக்கை காணவேண்டிய எண்களின் முதலிரண்டு இலக்கங்கள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன. அடுத்த பத்து நிரல்களின் உச்சி வரிசையில் மூன்ருவது இலக்கம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. கடைசியாக வலது புறத்தில் உள்ள இடை மிச்சங்கள் (Mean differences) என்ற ஒன்பது நிரல்களின் உச்சி வரிசையில் நான்காவது இலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

இப்போது 67.84 என்ற எண்ணின் மடக்கை எப்படி அறிவதெனக் காண்போம். முழு எண் பகுதியில் இரண்டு இலக்கங்கள் இருப்பதால், மடக்கை முழு எண் பகுதி 1. மடக்கையின் பின்னப்பகுதி யறிய, வாய்பாட்டில் "67" உள்ள வரிசையில் '8' என்ற நிரலில் "8312" உண்டு. மற்றும் அதே வரிசையில் "இடை மிச்சங்கள்" என்ற நிரலில் "4" என்ற நிரலில், இடை மிச்சம் "3" உண்டு"; "8312" ஒடு "3" ஐக் கூட்ட "8315" கிடைக்கும். இதுவே மடக்கையின் பின்னப்பகுதி = .8315.

∴ மகை $67.84 = 1.8315$

இவ்வாறே,

மகை $6.784 = 0.8315$

மகை $6784 = 3.8315$

மகை $0.06784 = \bar{2}.8315$

மகை $0.6784 = \bar{1}.8315$

மகை $0.00006784 = \bar{5}.8315$

மேலும், பின்வரும் மடக்கைகளைப் பார்த்து அறிக.

மகை $67 = 1.8261$

மகை $670 = 2.8261$

மகை $67000 = 4.8261$

மகை $0.0067 = \bar{3}.8261$

மகை $7000 = 3.8451$

மகை $0.7 = \bar{1}.8451$

5.9·9. இன மடக்கை வாய்பாடும் அதைப் பயன்படுத்தும் முறையும் :

இனமடக்கை வாய்பாட்டில் ஒரு பகுதி கீழே கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

இன மடக் கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	—	3177	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	—	—	3258	—	—	—	—	—	—	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	—	—	—	3342	—	—	—	—	—	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	—	—	—	—	3428	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7
.54	3467	—	—	—	—	—	3516	—	3532	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7

நான்கிலக்க இனமடக்கை வாய்பாட்டின் அமைப்பையும் அதைப் பயன்படுத்தும் முறையையும் நாம் அறிய முற்படுவோம். தேவைக்குத் தகுந்தபடி அதைப் பயன்படுத்த நன்ருகப் பழகிக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு எண்ணின் மடக்கை கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது, அவ் வெண்ணின் மதிப்பையறிய இவ் வாய்பாடு பயன்படுகிறது. இனமடக்கை (Anti Logarithm) என்ற சொற்ருெடரை "இனமகை" எனச் சுருக்கமாக எழுதி வழக்கில் கொண்டு வருவோம்.

இனமடக்கை வாய்பாட்டமைப்பு: இனமடக்கை வாய்பாட்டில் இடது கைப்புற ஓரத்தில் மடக்கை பின்னத்தின் முதலிரண்டு இலக்கங்கள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன. அடுத்து பத்து நிரல்களின் உச்சியில் மடக்கை பின்னத்தின் மூன்ருவது இலக்கம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. கடைசியாக வலப்புறத்தில் உள்ள ''இடை மிச்சம்'' என்ற நிரல்களின் உச்சியில் மடக்கை பின்னத்தின் நான்காவது இலக்கம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 2.5249 என்ற மடக்கை கொண்ட எண் யாதென அறிய முற்படுவோம்.

முதல் நிரல் : .52 என்ற வரிசையில் 4 என்ற நிரலில்

காணப்படும் எண்—	3342
அதே வரிசையில் '' இடை மிச்சம் '' தலைப்பில் 9 என்ற நிரலில் காணப் படும் எண்—	7
கூட்டுத் தொகை ...	3349

மடக்கை முழு எண் பகுதியில் '2' இருப்பதால், அதற்குரிய எண்ணுக்கு, முழு எண் பகுதியில் 3 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

எனவே இனமகை 2.5249 = 334.9 ஆகும். மடக்கை வாய்பாட்டில் மகை 334.9 என்ன எனக் கண்டு சரிபார்த்துக் கொள்க. சரிபார்ப்பதில் மிகச் சிறிய வேறுபாடுகளிருப்பின் பொருட் படுத்தாது விடுக.

அவ்வாறே,

இனமகை 1.5249 = 33.49

இனமகை 0.5249 = 3.349

இனமகை $\bar{1}.5249 = 0.3349$

இனமகை $\bar{4}.5249 = 0.0003349$

இனமகை 3.5249 = 3349

இனமகை 5.5249 = 334900

மேலும் இனமகை 2.50 = 316.2

இனமகை $\bar{2}.524 = 0.03342$

இனமகை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும்போது, மடக்கை முழு எண் பகுதியை விட்டு மடக்கை பின்னப்பகுதியையே எடுத்துக்கொண்டு இனமகை காண்க. முழு எண் பகுதியைக் கொண்டு புள்ளி வைக்கும் இடத்தை அறிக.

சில சமயங்களில் மடக்கை முழு எண் பகுதி 10, 11, 12... என இருக்குமானுல், நாலிலக்க எண்ணுகப் பெறப்படும் இனமகைக்கு, வேண்டிய அளவுக்குப் பூச்சியங்கள் எண்ணின் பின்னுல் சேர்த்து இனமகையை யெழுதுக.

மடக்கை முழு எண் பகுதியில் -1 இருந்தால், புள்ளி வைத்து இனமகையை உடனடியாக எழுதுக; -2 இருந்தால், புள்ளி வைத்து, பின் ஒரு பூச்சியமிட்டு, இனமகையை யெழுதுக; பொதுவாக $-n$ இருந்தால், புள்ளிவைத்து உடனடியாக $(n-1)$ பூச்சியமிட்டு, இனமகை யெழுதுக.

5.10 மடக்கை கோட்டுருவப்படம் :

$y=$ மகை $_{10}x$ன் கோட்டுருவப் படம் வரைந்து பார்க்க. அப்படத்தில் கவனிக்க வேண்டியவை :

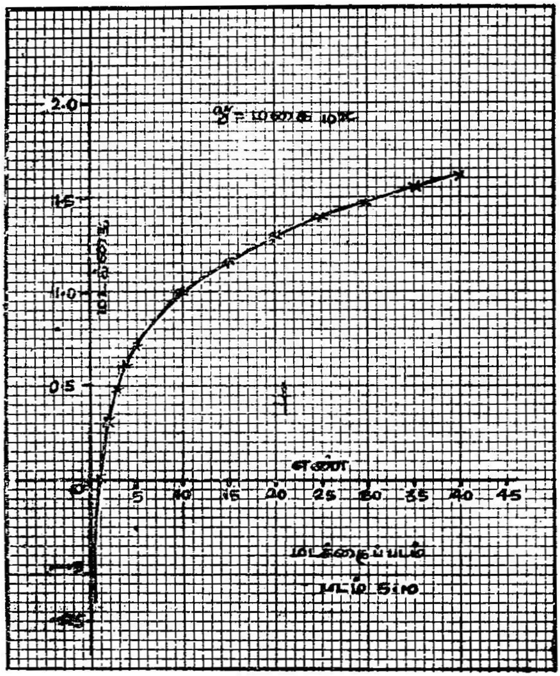
(1) $x=1$ க்கு $y=0$;

(2) x பூச்சியத்தை நெருங்கி வரவர, y கழிவுக் கந்தழி எல்லையை நெருங்குகிறது. (Minus Infinity);

(3) xன் மதிப்பு உயர, உயர yன் மதிப்பும் வளர்ந்து செல்கிறது ;

(4) x ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டிருக்கும் போது y கூட்டெண் மதிப்பேற்கிறது; xன் மதிப்பு ஒன்றுக்குக் குறைந்திருக்கும்போது, y குறையெண் மதிப்பேற்கிறது ;

(5) x ன் குறையெண் மதிப்புக்களுக்கு y எந்த மெய்யெண் மதிப்பையும் ஏற்பதில்லை. எனவே, கோட்டுருவப் படம் y – அச்சுக்கு வலப்புறம் மட்டுமே அமைந்திருக்கும்.



(எ-கா.) (1) மடக்கை வாய்பாடு கொண்டு, 256×27ன் மதிப்பறிக.

$$\text{மகை } 256 = 2.4082$$

$$\text{மகை } 27 = 1.4314$$

$$\text{கூட்டுத்தொகை} = \underline{3.8396}$$

பெருக்குத் தொகையின் மடக்கை $= 3.8396$

$\therefore$ பெருக்குத் தொகை $=$ இனமகை 3.8396

$= 6911.$

நேரடியாகப் பெருக்குத் தொகை $= 6912.$

இச் சிறு வேறுபாடு மடக்கை வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தும்போது ஏற்படத்தான் செய்யும்; விலக்க முடியாது. ஆனால் பெரிய பின்னங்களைப் பெருக்கி வகுக்கும்போதும், படி மூலங்கள் காணும்போதும் வேலை மிகச் சுருக்கமாக முடியும்.

(எ-கா.) (2) $\dfrac{2.45 \times 7.767}{14.36}$ ன் மதிப்பு காண்க.

$$\begin{aligned}
\text{மகை } 2.45 &= 0.3892 \\
\text{மகை } 7.767 &= 0.8903 \\
\text{கூட்டுத்தொகை} &= 1.2795 \\
\text{மகை } 14.36 &= 1.1571 \\
\text{மீதி } & 0.1224
\end{aligned}$$

இனமகை $0.1224 = 1.325 =$ வேண்டிய மதிப்பு.

(எ-கா.) (3) $\sqrt[4]{73.61}$ ன் மதிப்பு காண்க.

$$\begin{aligned}
\text{மகை } \sqrt[4]{73.61} &= \tfrac{1}{4} \text{ மகை } 73.61 \\
&= \tfrac{1}{4} \times 1.8670 \\
&= 0.4668 \text{ (தோராய மதிப்பு)}
\end{aligned}$$

இனமகை $0.4668 = 2.929 =$ வேண்டிய மதிப்பு.

(எ-கா.) (4) $(0.03794)^{\frac{11}{2}}$ ன் மதிப்பு காண்க.

$$\begin{aligned}
\text{மகை } (0.03794)^{\frac{11}{2}} &= \tfrac{11}{2} \times \text{மகை } 0.03794 \\
&= \tfrac{11}{2} \times \overline{2}.5791 \\
&= 11 \times \overline{1}.2896 \text{ (தோராயம்)} \\
&= 11(-1) + 11(0.2896) \\
&= -11 + 3.1856 \\
&= \overline{8}.1856
\end{aligned}$$

$\therefore \; (0.03794)^{\frac{11}{2}} =$ இனமகை $\overline{8}.1856 = 0.00000001533$.

(எ-கா.) (5) $(78.95)^{-\frac{3}{2}}$ ன் மதிப்பு காண்க.

$$\begin{aligned}
\text{மகை } (78.95)^{-\frac{3}{2}} &= -\tfrac{3}{2} \times \text{மகை } 78.95 \\
&= -\tfrac{3}{2} \times 1.8974 \\
&= -3 \times 0.9487 \\
&= -2.8461
\end{aligned}$$

இதற்கு நேரடியாக இனமகை காணமுடியாது.

இதை $-2.8461 = -3 + .1539 = \bar{3}.1539$ என எழுதி இனமகை காணவேண்டும்.

இனமகை $\bar{3}.1539 = 0.001425$ = வேண்டிய மதிப்பு.

(எ-கா.) (6) $(2)^{25}$ ல் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும்?

$$\text{மகை } (2)^{25} = 25 \times \text{மகை } 2$$
$$= 25 \times 0.3010$$
$$= 7.525$$

∴ இனமகை 7.525 ல் 8 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

(எ-கா.) (7) $(3)^{30}$, $(4)^{18}$ இதில் எது பெரிது?

$$\text{மகை } (3)^{30} = 30 \times \text{மகை } 3$$
$$= 30 \times 0.4771$$
$$= 14.313.$$

∴ $(3)^{30}$ ல் 15 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

$$\text{மகை } (4)^{18} = 18 \times \text{ மகை } 4$$
$$= 18 \times 0.6021$$
$$= 10.8378$$

∴ $(4)^{18}$ ல் 11 இலக்கங்கள் இருக்கும்

∴ $(3)^{30} > (4)^{18}$.

(எ-கா.) (8) $\left(\frac{101}{100}\right)^{1000} > 1000$ என நிறுவுக.

$$\text{மகை } \left(\frac{101}{100}\right)^{1000} = \text{மகை } (1.01)^{1000}$$
$$= 1000 \times \text{மகை } 1.01$$
$$= 1000 \times 0.0043$$
$$= 4.3$$

∴ $\left(\frac{101}{100}\right)^{1000}$ ல் 5 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

∴ $\left(\frac{101}{100}\right)^{1000} > 1000.$

பாடச் சுருக்கம் (5)

1. $\text{மகை}_a\ MN = \text{மகை}_a M + \text{மகை}_a N.$

2. $\text{மகை}_a MNP\ldots\ldots = \text{மகை}_a M + \text{மகை}_a N + \text{மகை}_a P + \ldots$

3. $\text{மகை}_a \left(\frac{M}{N}\right) = \text{மகை}_a M - \text{மகை}_a N.$

4. $\text{மகை}_a (M^n) = n\ \text{மகை}_a M$

5. $\text{மகை}_a (M^{-n}) = -n\ \text{மகை}_a M$

6. $\text{மகை}_a (\sqrt[n]{M}) = \frac{1}{n}\ \text{மகை}_a M$

7. $\text{மகை}_b\ N = \text{மகை}_a N \times \text{மகை}_b a$

$$= \frac{\text{மகை}_a N}{\text{மகை}_a b}.$$

8. $\text{மகை}_b a \times \text{மகை}_a b = 1.$

பயிற்சி 5 (2)

1. மடக்கைகளைக் கொண்டு பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(1) 42.1×38.9

(2) $\frac{27.4 \times 1452}{7655}$

(3) $\frac{(2.6)^5 \times (5.4)^3}{(11.7)^5}$

(4) $\sqrt[3]{36.16} \div \sqrt[4]{84.19}$

(5) $\sqrt{(83.2)^2 + (45.56)^2}$

(6) $\sqrt[3]{0.743}$

(7) $(1.435)^{-5}$

(8) $\sqrt[12]{1005}$

(9) $\frac{\sqrt{426.3}}{\sqrt{178.9}}$

(10) $3^{-3} \cdot 5^2 \cdot 4^{-4} \cdot 6^{\frac{3}{2}}$

2. மடக்கைகளின் உதவிகொண்டு பின் கொடுக்கப்பட்டவைகளை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

12^{25}, 49^{7}, 174^{8}, $(2.5)^{240}$, $(\sqrt{84,832,000})^{3}$.

3. (*a*) 3^{25}, 4^{16}, 8^{21}, 4.02^{9} இவற்றில் முழு எண் பகுதி எத்தனை இலக்கங்கள் பெற்றிருக்கும் ?

(*b*) 3^{-25}, 4^{-16}, 8^{-21}, $(4.02)^{-9}$ இவற்றில் புள்ளிக்குப் பின் உடனடியாக எத்தனை பூச்சியங்களுக்குப் பின் முதல் எண் தோன்றும் ?

4. $(7.41)^{19}$, $(19)^{7.41}$ இரண்டில் பெரிது எது ?

5. $\left(\frac{51}{50}\right)^{50}$ ன் மதிப்பென்ன ?

6. $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்பது ஒரு வாய்பாடு. $\pi=3.14$.

இதைப் பயன்படுத்தி, பின் வரும் மதிப்புக்களைக் காண்க.

(*a*) $t=2$, $g=981$; l மதிப்பென்ன ?

(*b*) $t=3.5$, $l=200$; g மதிப்பென்ன ?

(*c*) $g=32$, $l=3$; t மதிப்பென்ன ?

7. $t=2\pi\sqrt{\frac{k^2}{hg}}$ என்பது ஒரு வாய்பாடு. $\pi=3.14$.

$k=5.6$, $h=9.2$, $g=32$, ஆனால் t மதிப்பென்ன ?

8. மடக்கையடி 10க்கு உள்ள மடக்கை வாய்பாட்டைக் கொண்டு பின் வரும் மடக்கைகளைக் குறிப்பிட்ட அடிகளுக்குக்காண்க.

(1) $\text{மடக்கை}_5 100$

(2) $\text{மடக்கை}_{1.35} (.079)$

(3) $\text{மடக்கை}_e 10$ $(e=2.718)$

9. $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ என்பது கூட்டு வட்டி வாய்பாடு. இதைப் பயன்படுத்தி, பின் வருவனவற்றைக் காண்க.

(*a*) $P = 2500$; $r = 4\%$; $n = 7.5$; A என்ன ?

(*b*) $P = 4500$; $n = 10\%$; $A = 8100$; r என்ன ?

(*c*) $n = 6$; $r = 5\%$; $A = 160$; P என்ன ?

10. 2, 3, 4, 5 என்ற எண்களைக் குறைந்தது எந்த படிக்கு உயர்த்தினுல், அத்தொகை 1,00,000க்கு மேற்பட்டிருக்கும் ?

11. $S = 1+3+3^2+\ldots\ldots+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$ என்பது வாய்பாடு.

$S > 1000$ ஆனுல், nக்குக் குறைந்தது என்ன மதிப்பு இருக்க வேண்டும் ?

12. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ என்ற வாய்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது. a, b, c, பக்கங்களின் நீளங்கள் ; s சுற்றளவில் பாதி. பின் வரும் முக்கோணத்தின் பரப்பை அறிக :

$a = 376$ செ.மீ.; $b = 564$ செ.மீ ; $c = 716$ செ.மீ.

13. x ன் தீர்வுகள் காண்க :

(1) 2 மகை $x = 1 +$ மகை $\left(x+\frac{11}{10}\right)$

(2) $x^{\text{மகை}\, x} = 100\,x$.

6. விகிதமும், விகிதசமமும்

(Ratio and Proportion)

6.1 ஒரே விதமான இரண்டு அளவைகளை, நாம் இரு முறைகளில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக: ஒரு மரத்தின் உயரம் 15 மீட்டர்; மற்றொரு மரத்தின் உயரம் 10 மீட்டர். அவைகளின் உயரங்களை ஒப்பிடும்போது, (1) முதல் மரம் இரண்டாவது மரத்தை விட 5 மீட்டர் அதிக உயரம்; அல்லது, (2) முதல் மரத்தின் உயரம் இரண்டாம் மரத்தின் உயரத்தைப் போல $1\frac{1}{2}$ மடங்கு என்று சொல்லலாம்.

இவ்வாறே, ஒரு பொருளின் விலையை மற்றொரு பொருளின் விலையோடும், ஓர் ஊரின் மக்கள் தொகையை மற்றோர் ஊரின் மக்கள் தொகையோடும் ஒப்பிட்டுச் சொல்லலாம்.

6.2 **விகிதம்** (Ratio): ஒரே வகைப்பட்ட இரண்டு அளவுகளை, ஒப்பிட்டு, அவ்வொப்பீட்டை (அல்லது தொடர்பை), ஒன்றைப்போல் மற்றொன்று எத்தனை மடங்கு என்று கூறுவது விகிதமெனப்படும்.

a க்கும் b க்கும் உள்ள விகிதத்தை $\frac{a}{b}$, $a \div b$, $a : b$ என்ற முறைகளில் கூறலாம்.

இவ்விரண்டு அளவுகளில் a க்கு முன்னுறுப்பு (Antecedent) என்றும், b க்கு பின்னுறுப்பு (Consequent) என்றும் பெயரிடப் பட்டிருக்கிறது.

ஒரு விகிதம் ஒரு பின்னமாதலின், பின்னத்திற்குரிய பண்புகள் யாவும் ஒரு விகிதத்திற்கு அமையும்.

இரண்டு விகிதங்களைத் தெரிவிக்கும் பின்னங்கள் சமமானால், அவ்விகிதங்கள் சம விகிதங்களாகும்.

6 : 3 என்ற விகிதம் $\frac{6}{3}=2$ ஆகும்

8 : 4 என்ற விகிதம் $\frac{8}{4}=2$ ஆகும்.

$\therefore\ 6 : 3 = 8 : 4$

அவ்வாறே, $2 : 1 = 4 : 2 = 6 : 3 = 8 : 4$.........

$3 : 4 = 6 : 8 = 15 : 20$.........

6.3 கலப்பு விகிதம், இருபடி விகிதம், கீழ் இரட்டை விகிதம் (Compound ratio, Duplicate ratio, Sub-duplicate ratio):

(1) $\frac{a}{b}$ என்ற விகிதத்தை $\frac{c}{d}$ ஆல் பெருக்கிவரும் $\frac{ac}{bd}$ என்ற விகிதம், கலப்பு விகிதமெனப்படும்.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$ என்ற விகிதம் போன்றவையும் கலப்பு விகிதமாகும்.

(2) $\frac{a}{b}$ என்ற விகிதத்தை $\frac{a}{b}$ ஆலேயே பெருக்கி வரும் $\frac{a^2}{b^2}$ என்ற விகிதம் $\frac{a}{b}$ ன் இருபடி விகிதம் எனப்படும். அவ்வாறே $\frac{a^3}{b^3}$ என்ற விகிதம் $\frac{a}{b}$ ன் முப்படி விகித மெனப்படும். அவ்வாறே $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, ...$\frac{a^n}{b^n}$ போன்ற விகிதங்களும்.

(3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ என்ற விகிதம் $\frac{a}{b}$ன் கீழ் இரட்டைவிகிதம் எனப்படும். அவ்வாறே $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, ... $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ போன்ற விகிதங்களும்.

6.4 பெருஞ் சமனின்மை விகிதம், சிறு சமனின்மை விகிதம் (Ratio of greater ineqality, Ratio of lesser inequality) :

$\frac{a}{b}>1$ ஆனால், $\frac{a}{b}$ ஒரு பெருஞ்சமனின்மை விகிதமெனவும்,

$\frac{a}{b}<1$ ஆனால், $\frac{a}{b}$ ஒரு சிறு சமனின்மை விகிதமெனவும்,

$\frac{a}{b}=1$ ஆனால், $\frac{a}{b}$ ஒரு சமவிகிதமெனவும் சொல்லப்படும்.

பயிற்சி 6 (1)

1. $a:b=3:4$ ஆனால் $5a-3b : 3a-b$ ன் மதிப்பென்ன?

2. பின்வரும் விகிதங்களின் கலப்பு விகிதங்கள் யாவை?

(1) $a+b:b$

$a-b:a$

(2) $a+b:a-b$

$a^2-ab+b^2 : a^2+ab+b^2$

3. பின்வரும் விகிதங்களின் இருபடி, முப்படி விகிதங்கள் என்ன?

(1) $2:3$

(2) $4:5$

(3) $x+1 : x-1.$

விகிதங்களைப் பற்றிய தேற்றங்கள்

6.5·1. தேற்றம் 1 : ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்பையும், பின்னுறுப்பையும் (மேலெண்ணையும், கீழெண்ணையும்) ஒரே எண்ணால் பெருக்கினால், அல்லது வகுத்தால், அவ்விகிதம் மாறாது.

ஏனெனில் $\frac{a}{b}=\frac{m.a}{m.b}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$ ($m\neq0$ எனக்கொள்க)

$$\therefore \quad a : b = ma : mb.$$

$$a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

6.5·2. தேற்றம் 2 : ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்போடும், பின்னுறுப்போடும் ஒரே கூட்டெண்ணைக் கூட்டினுல்,

(a) ஒரு சம விகிதம் மாருது ;

(b) ஒரு பெருஞ் சமனின்மை விகிதம் குறையும் ;

(c) ஒரு சிறு சமனின்மை விகிதம் அதிகமாகும்.

(a) $\frac{a}{b} = 1$ அல்லது $a = b$.

$$\therefore \quad a+x : b+x = a+x : a+x$$

$$= \frac{a+x}{b+x}$$

$$= 1.$$

$$\therefore \quad a+x : b+x = a : b.$$

(b) $\frac{a}{b}$ ஒரு பெருஞ் சமனின்மை விகிதமாயின் $a<b$, அல்லது $a-b=$ ஒரு கூட்டெண்.

அப்போது, x ஒரு கூட்டெண்ணுயின்,

$$\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} = \frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)}$$

$$= \frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

= ஒரு கூட்டெண்.

$$\therefore \quad \frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$$

அல்லது $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$ ஆகுமென நிறுவப்பட்டது.

(c) $\frac{a}{b}$ ஒரு சிறு சமனின்மை விகிதமாஞல், $a<b$, அல்லது $a-b=$ ஒரு குறையெண்.

முன் கண்டபடி [(b)ல்], $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{(a-b)x}{b(b+x)}$ = குறையெண்.

$$\therefore \frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$$

$$\therefore \frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$$ என நிறுவப்பட்டது.

6.5·3. தேற்றம் 3: ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்பிலிருந்தும், பின்னுறுப்பிலிருந்தும், (இவ்விரு எண்களைவிடச் சிறியதான) ஒரு கூட்டெண்ணைக் கழித்தால்,

(a) ஒரு சம விகிதம் மாருது ;

(b) ஒரு பெருஞ் சமனின்மை விகிதம் அதிகமாகும் ;

(c) ஒரு சிறு சமனின்மை விகிதம் குறையும்.

6.5·2. ல் கண்டபடி, $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a-x}{b-x}$ கண்டு நிறுவுக.

6.6 தேற்றம்

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ என்பவை சம விகிதங்களானால், ஒவ்வொரு விகிதமும்

$\sqrt[n]{\frac{pa_1^n+qa_2^n+ra_3^n+\ldots\ldots}{pb_1^n+qb_2^n+rb_3^n+\ldots\ldots}}$ என்பதற்கு சமம். ($p,q,r\ldots$ எல்லாம் ஒருங்கே பூச்சியமாகாது)

தெரிப்பு : $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots\ldots K$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_1 = kb_1$$
$$a_2 = kb_2$$
$$a_3 = kb_3$$

....

....

$$\therefore \quad pa_1^n = pK^n b_1^n$$
$$qa_2^n = qK^n b_2^n$$

$$ra_3^n = rK^n b_3^n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இவைகளைக் கூட்டி, சமம் செய்ய,

$$(pa_1^n + qa_2^n + ra_3^n + \ldots) = k^n(pb_1^n + qb_2^n + rb_3^n + \ldots)$$

$$\therefore \quad K^n = \frac{pa_1^n + qa_2^n + ra_3^n + \ldots}{pb_1^n + qb_2^n + rb_3^n + \ldots}$$

$$\therefore \quad K = \sqrt[n]{\frac{pa_1^n + qa_2^n + ra_3^n + \ldots}{pb_1^n + qb_2^n + rb_3^n + \ldots}}$$

$$= \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots$$

கிளைத் தேற்றம் : $n = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots = \frac{pa_1 + qa_2 + ra_3 + \ldots}{pb_1 + qb_2 + rb_3 + \ldots}$$

மேலும் $p = q = r = \ldots = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$$

* 6.7 **தேற்றம் :** $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \ldots \frac{a_n}{b_n}$ என்பவை சில சமனின்மை விகிதங்கள் ; $b_1, b_2, b_3 \ldots$ கூட்டெண்கள் ; அப்போது அவ்விகிதங்களின் மீப்பெரு மதிப்புக்கும் (Maximum Value) மீச்சிறு மதிப்புக்கும் (Minimum Value) இடையே,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$$ ன் மதிப்பு இருக்கும்.

$\frac{a_m}{b_m}$ என்பது மீப்பெரு விகிதம் $= g$ எனக் கொள்க.

$\frac{a_l}{b_l}$ என்பது மீச்சிறு விகிதம் $= l$ எனக் கொள்க.

$\frac{a_m}{b_m}=g$ மீப்பெரு விகிதமாகலின்,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a_1}{b_1}<g\\ \frac{a_2}{b_2}<g\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_m}{b_m}=g\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_n}{b_n}<g\end{array}\right\} \text{(A)}$$

அவ்வாறே $\frac{a_l}{b_l}=l$ மீச்சிறு விகிதமாகலின்,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a_1}{b_1}>l\\ \frac{a_2}{b_2}>l\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_l}{b_l}=l\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_n}{b_n}>l\end{array}\right\} \text{(B)}$$

(A)-ல் இரு பக்கங்களையும் முறையே b_1, b_2......என்ற கூட்டெண்களால் பெருக்கினால் சமனின்மைத் தன்மை மாறாது. அதுவே (B) க்கும் பொருந்தும்.

$$\text{எனவே } \left.\begin{array}{l}a_1<b_1g\\ a_2<b_2g\\ \cdots\cdots\\ a_m=b_mg\end{array}\right\} \text{ஏனெனில் } b_1,\ b_2\ldots\ldots \text{ கூட்டெண்கள்.}$$

இரு நிரல்களையும் கூட்டிச் சமனீடு செய்ய,

$$a_1+a_2\ldots+a_n<g\ (b_1+b_2+\ldots b_n)$$

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<g$$ என நிறுவப்பட்டது.

அவ்வாறே

$$a_1+a_2+\ldots+a_n>l\ (b_1+b_2+\ldots b_n)$$

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}>l$$ என நிறுவப்பட்டது.

$$\therefore\ l<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<g$$ என நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு: $b_1, b_2\ldots$ கூட்டெண்களாகக் கொள்ளப் பட்டதின் காரணம் இப்போது புலனாகும். ஒரு சமனின்மை யமைப்பை, இருபக்கங்களையும் ஒரு கூட்டெண்ணால் பெருக்கினாலோ, அல்லது வகுத்தாலோ, சமனின்மைத் தன்மை மாறாது. a_1, a_2, $a_3\ldots$ போன்றவைகளுக்கு ஒரு கட்டுப்பாடும் கொள்ளப்படாததால், அவை கூட்டெண்ணாகவோ, குறை யெண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட விகிதங்களில், சில குறை யெண்மதிப்பும் வேறு சில கூட்டெண் மதிப்பும், பெற்றிருந்தால் கூட, இத்தேற்றம் பொருத்தமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{-3}{7}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{8}{17}$ என்ற கூட்டு, குறை மதிப்புக்கள் இருந்தால், $\frac{-3+4+5-2+8}{7+3+9+3+17}$ என்பதின் மதிப்பு, மீப்பெரு மதிப்பான $\frac{4}{3}$ க்கும், மீச்சிறு மதிப்பான $\frac{-2}{3}$ க்கும் இடையிலிருக்கும்.

அதாவது $\frac{-2}{3}<\frac{12}{39}<\frac{4}{3}$ என்பது தேற்றப் பொருள்.

(எ-கா.) $\frac{3x}{2}=\frac{4y}{3}=\frac{6z}{5}$ ஆனல் $x:y:z$ ன் விகிதமென்ன ?

$\frac{3x}{2}=\frac{4y}{3}=\frac{6z}{5}=$ K எனக் கொள்க.

$\therefore \quad x=\frac{2}{3}$ K.

$y=\frac{3}{4}$ K.

$z=\frac{5}{6}$ K.

3, 4, 6 என்ற எண்களின் அதமப் பொதுமடங்கு 12.

$\therefore \; x:y:z=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\times 12:\frac{3}{4}\times 12:\frac{5}{6}\times 12=8:9:10.$

(எ-கா.) (2) $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}$ ஆனல் $x:y:z$ என்ன ?

ஒவ்வொரு விகிதமும் $=\frac{x+y-y-z+z+x}{5-4+3}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$

$$=\frac{x+y+y+z-z-x}{5+4-3}=\frac{2y}{6}=\frac{y}{3}$$

$$=\frac{-x-y+y+z+z+x}{-5+4+3}=\frac{2z}{2}=z$$

$$\therefore \frac{x}{2}:\frac{y}{3}=\frac{z}{1}.$$

$$\therefore \; x:y:z=2:3:1.$$

(எ-கா.) (3) $\frac{x}{a^3(b-c)}=\frac{y}{b^3(c-a)}=\frac{z}{c^3(a-b)}$ ஆனல்,

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ என நிறுவுக.

6.6 கிளைத் தேற்றப்படி,

$$K=\frac{x}{a^3(b-c)}=\frac{y}{b^3(c-a)}=\frac{z}{c^3(a-b)}=\frac{x+y+z}{\Sigma a^3(b-c)}$$

$$=\frac{x+y+z}{-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}$$

மேலும் $K = \dfrac{x/a}{a^2(b-c)} = \dfrac{y/b}{b^2(c-b)} = \dfrac{z/c}{c^2(a-b)} = \dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\sum a^2(b-c)}$

$$= \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{-(b-c)\,(c-a)\,(a-b)}$$

$$\therefore\ K = \frac{x+y+z}{-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)} = \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{-(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$\therefore\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$ என நிறுவப்பட்டது.

(எ–கா.) (4) $a_1x+b_1y+c_1z=0$ (1)

$a_2x+b_2y+c_2z=0$ (2)

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$x : y : z$ என்ற விகிதம் கண்டுபிடிக்கவும்.

முதலில் இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளினின்றும் zஐ விலக்கி $x : y$ காணலாம்.

(1) $\times c_2$: $a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=0$

(2) $\times c_1$: $a_2c_1x+b_2c_1y+c_1c_2z=0$

கழிக்க, $(a_1c_2-a_2c_1)\,x+(b_1c_2-b_2c_1)\,y=0$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} \quad (3)$$

பின்னர் y ஐ விலக்கி, $x : z$ காணலாம்.

(1) $\times b_2$: $a_1b_2x+b_1b_2y+c_1b_2z=0$

(2) $\times b_1$: $a_2b_1x+b_1b_2y+c_2b_1z=0$

கழிக்க, $(a_1b_2-a_2b_1)\,x+(c_1b_2-c_2b_1)\,z=0$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad (4)$$

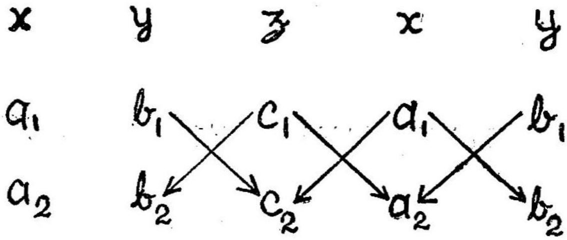
$\therefore$ (3), (4) இரண்டையும் தொடர்பு படுத்தினல்,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \quad x : y : z = (b_1\, c_2 - b_2\, c_1) : (c_1\, a_2 - c_2\, a_1) : (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)$$

இந்த முடிவை, நாம் இவ்வாறன சந்தர்ப்பங்களில், எளிதில் கையாளக்கூடிய முறையில், ஒரு விதியாக்கி, கவனத்தில் கொள்வது, நமக்குப் பல இடங்களில் பயன்படும்.

இவ் விதிமுறை ''குறுக்குப் பெருக்கல் விதி'' (Rule of cross multiplication) எனப்படும். இது பெறப்படும் முறையை கீழே கண்டு அறிக. இடது பக்கமிருந்து வலது பக்கம் செல்க.

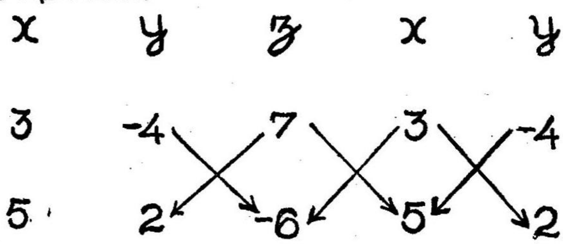


$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

இம் முறையை,

$$3x - 4y + 7z = 0$$
$$5x + 2y - 6z = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளில் பயன்படுத்தி $x : y : z$ என்ற விகிதத்தையறிவோம்.



$$\frac{x}{(-4)(-6) - (7)(2)} = \frac{y}{(7)(5) - (3)(-6)} = \frac{z}{(3)(2) - (-4)(5)}$$

$$\therefore \frac{x}{10} = \frac{y}{53} = \frac{z}{26}$$

$$\therefore x : y : z = 10 : 53 : 26$$

பயிற்சி 6 (2)

1. பின்கண்ட தொடர்புகளின் துணைகொண்டு $x : y$ என்ற விகிதம் காண்க.

(1) $16x^2+9y^2=24xy$

(2) $\frac{3x-2y+3}{x+3y+10}=\frac{3}{10}$

(3) $\frac{5x-y}{2x+3y}=\frac{7}{13}$

2. $x-2 : 3x-1=9 : 16$ ஆனால் x ன் மதிப்பென்ன?

3. $\frac{a}{a-b-c}=\frac{b}{b-c-a}=\frac{c}{c-a-b}$ ஆனால் ஒவ்வொரு விகிதமும் -1 க்குச் சமமென நிறுவுக.

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ஆனால் $\frac{ac}{bd}=\frac{2a^2-c^2}{2b^2-d^2}$ என நிறுவுக.

5. $\frac{x}{a-b-c}=\frac{y}{b-c-a}=\frac{z}{c-a-b}$ ஆனால்

$\Sigma (b-c)\, x=0$ என நிறுவுக.

6. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ஆனால்

$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(\Sigma x)^2+\Sigma a)^2}{(\Sigma x)+(\Sigma a)}$ என நிறுவுக..

7. $\frac{by+cz-ax}{bc}=\frac{cz+ax-by}{ca}=\frac{ax+by-cz}{ab}$ ஆனால்

$\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$ என நிறுவுக.

8. $\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ab}$ ஆனால்

$x+y+z=\frac{ax+by+cz}{a+b+c}$ என நிறுவுக.

9. $\frac{ay+bx}{a-b}=\frac{bz+cx}{b-c}=\frac{cy+az}{c-a}=\frac{ax+by+cz}{a+b+c}$ ஆனல்

ஒவ்வொன்றும் $x+y+z$ க்குச் சமம் என நிறுவுக.

10. $\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$ ஆனல்

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{bc+ca+ab}$ என நிறுவுக.

11. $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}$ ஆனல்

$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}$ என நிறுவுக.

12. $\frac{a^2-bc}{l}=\frac{b^2-ca}{m}=\frac{c^2-ab}{n}$ ஆனல்

$\frac{l^2-mn}{a}=\frac{m^2-nl}{b}=\frac{n^2-lm}{c}$ என நிறுவுக.

13. $\frac{x}{l(mb+nc-la)}=\frac{y}{m(nc+la-mb)}=\frac{z}{n(la+mb-nc)}$ ஆனல்

$\frac{a}{mz+ny}=\frac{b}{nx+lz}=\frac{c}{ly+mx}$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ஆனல்

$\frac{x^{n+1}}{a^n}+\frac{y^{n+1}}{b^n}+\frac{z^{n+1}}{c^n}=\frac{(x+y+z)^{n+1}}{(a+b+c)^n}$ என நிறுவுக.

15. $\frac{xyz}{y+z}-x^2=\frac{xyz}{z+x}-y^2$ ஆனல் இது $\frac{xyz}{x+y}-z^2$ க்குச்சமம்

என நிறுவுக. (x, y, z ஒன்றுக் கொன்று சமமில்லை).

16. $\dfrac{bz-cy}{b+c}=\dfrac{cx-az}{c+a}=\dfrac{ay-bx}{a+b}$ ஆனல்

$$x+y+z=\frac{ax+by+cz}{a+b+c}$$ என நிறுவுக.

17. $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\ldots\dfrac{a_n}{b_n}$ ஆனல்

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n+\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^n+\ldots\ldots+\left(\frac{a^n}{b^n}\right)^n=n\left(\frac{\Sigma a_1}{\Sigma b_1}\right)^n$$ என

நிறுவுக.

18. $\dfrac{a^{n+1}}{x^n}=\dfrac{b^{n+1}}{y^n}=\dfrac{c^{n+1}}{z^n}=x+y+z$ ஆனல்

ஒவ்வொன்றும் $\left({}_a\dfrac{n+1}{n}+{}_b\dfrac{n+1}{n}+{}_c\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

என நிறுவுக.

19. $\dfrac{a\,(b+c-a)}{\text{மகை } a}=\dfrac{b\,(c+a-b)}{\text{மகை } b}=\dfrac{c\,(a+b-c)}{\text{மகை } c}$ ஆனல்

$b^c\,c^b=c^a\,a^c=a^b\,b^a$ என நிறுவுக. (a, b, c கூட்டு முழு எண்கள் $\neq 1$.)

20. கீழ் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்புகளிலிருந்து $x:y:z$ என்ற விகிதம் அறிக :

(i) $ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=0$

(ii) $3x+2y-3z=15x-22y+9z=0$

(iii) $x=cy+bz$

$y=az+cx$

விகித சமம்

(Proportion)

6.8·1 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ அல்லது $a : b = c : d$ ஆனால், a, b, c, d என்ற நான்கும் விகித சமமுடையனவென்று சொல்லப்படும்.

d என்பது a, b, c என்ற மூன்றுக்கும் **விகிதசம நான்காம் உறுப்பு** (Fourth Proportional) என்று சொல்லப்படும்.

இவ்விகித சமத்தை,

$a : b :: c : d$ என்று எழுதுவதும் மரபு. a, d இரண்டும் **விகிதசம ஈறுகளெனவும்** (Extremes), b, c இரண்டும் **விகிதசம இடைகளெனவும்** (Means) கொள்ளப்படும்.

6.8·2 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ அல்லது $a : b = b : c$ ஆனால், b என்பது a, cக்கு **விகித சம இடை** (Mean Proportional) என்று சொல்லப்படும்.

c என்பது a, bக்கு **விகிதசம மூன்றும் உறுப்பு** (Third Proportional between a and c) என்று சொல்லப்படும்.

இவ்விகித சமத்தை,

$a : b :: b : c$ என்று எழுதுவதும் மரபு.

தொடர்ச்சியாக,

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots$ என ஒரு தொடர் வரிசை இருக்குமாயின், $a, b, c, d, \ldots$ முதலியவை **தொடர் விகித சமத்தில்** (Continued Proportion) இருக்கின்றன என்று சொல்லப்படும்.

6.9 விகிதசம இயல்புகள் :

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ஆனால், $ad=bc$ (குறுக்குப் பெருக்கல்).

இருபக்கங்களையும் bd ஆல் பெருக்கினால், $ad=bc$ எனப் பெறப்படும்.

(2) $ad=bc$ ஆனால், $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

இரு பக்கங்களையும் bd] ஆல் வகுத்தால், $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ எனப் பெறப்படும்.

(3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ஆனால்,

(a) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

(b) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; (கூட்டு விகித சமம்) (Componendo) ;

(c) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$; (கழி விகித சமம்) (dividendo) ;

(d) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; (கூட்டுக் கழி விகித சமம்)

(Componendo et dividendo) ;

(e) $ma^r+nb^r : pa^r+qb^r=mc^r+nd^r : pc^r+qd^r$.

மேற்கண்டவை, இந்நூலில் இடம் பெற்றிருக்கிற வடிவ கணிதத்திலும், அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படும். இவைகளை ஒவ்வொன்றாக நிறுவுவோம் :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

(a) இரு பக்கங்களையும் $\frac{b}{c}$ ஆல் பெருக்குக :

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ எனப் பெறப்படும்.

(*b*) இரு பக்கங்களுடன் 1 கூட்டிச் சுருக்குக :

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ எனப் பெறப்படும்.

(*c*) இரு பக்கங்களினின்றும் 1 கழித்துச் சுருக்குக :

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{c}$ எனப் பெறப்படும்.

(*d*) (*b*)ல் கண்ட முடிவை (*c*)ல் கண்ட முடிவால் வகுத்துச் சமன் செய்க.

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ எனப் பெறப்படும்.

(*e*) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ எனக் கொள்க.

$\therefore \quad a=bk\,; \quad c=dk$

$\therefore \quad \frac{ma^r+nb^r}{pa^r+qb^r}=\frac{mb^rk^r+nb^r}{pb^rk^r+qb^r}=\frac{mk^r+n}{pk^r+q}$:

மேலும் $\frac{mc^r+nd^r}{pc^r+qd^r}=\frac{md^rk^r+nd^r}{pd^rk^r+qd^r}=\frac{mk^r+n}{pk^r+q}$.

$\therefore \quad ma^r+nb^r : pa^r+qb^r=mc^r+nd^r : pc^r+qd^r.$

$r=1$ ஆனல்,

$ma+nb : pa+qb=mc+nd : pc+qd.$

(எ-கா.) (1) $\frac{ax+by}{ax-by}=\frac{7}{4}$ ஆனல் $x : y$ என்ன ?

$$\frac{ax+by}{ax-by}=\frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{ax+by+ax-by}{ax+by-ax+by}=\frac{7+4}{7-4}=\frac{11}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{2ax}{2by}=\frac{11}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{11b}{3a}$$

$$\therefore \quad x : y = 11b : 3a.$$

(எ-கா.) (2) x ன் தீர்வு காண்க :

$$\frac{\sqrt{x+13}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+13}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+13}+\sqrt{x+1}} = \frac{3+1}{3-1} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+13}}{2\sqrt{x+1}} = 2$$

இரு பக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்தி, குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய,

$$x+13=4(x+1)$$

$$\therefore \quad -3x=-9$$

$$\therefore \quad \underline{x=3}$$

(எ - கா.) (3) a, b, c, d தொடர் விகித சமத்திலிருந்தால், $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2$ என நிறுவுக.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad c=dk$$

$$b=ck=dk^2$$

$$a=bk=dk^3$$

இப்போது இடது பக்கம் $(a-d)^2=(dk^3-d)^2=d^2(k^3-1)^2$

வலது பக்கம் $=(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2$

$$=(dk^2-dk)^2+(dk-dk^3)^2+(dk^2-d)^2$$

$$=d^2k^2(k-1)^2+d^2k^2(1-k^2)^2+d^2(k^2-1)^2$$

$$=d^2[k^2(k-1)^2+k^2(1-k^2)^2+(k^2-1)^2]$$

$$=d^2[k^6-2k^3+1]$$

$$=d^2(k^3-1)^2$$

$=(a-d)^2$ என நிறுவப்பட்டது.

பாடச் சுருக்கம் (6)

1. $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\sqrt[n]{\frac{pa_1{}^n+qa_2{}^n+ra_3{}^n+\ldots}{pb_1{}^n+qb_2{}^n+rb_3{}^n+\ldots}}$$

$$=\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\ldots\ldots\ldots}{pb_1+qb_2+rb_3+\ldots\ldots\ldots}$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ஆனல்

(i) $ad = bc$;

(ii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

(iii) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

(iv) $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$;

(v) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(vi) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

பயிற்சி 6 (3)

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் விகிதசம நான்காம் உறுப்புக் காண்க :

(i) $5, 7, 15$

(ii) $a, \frac{1}{a}, a^2$

(iii) ab, bc, cd

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் விகிதசம இடைகள் காண்க :

(i) $4, 64$

(ii) $a, \frac{1}{a}$

(iii) a^2b, bc^2

(iv) $\frac{1}{ax}, a^5x^5$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ஆனல் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $(a^2+c^2)(b^2+d^2) = (ab+cd)^2$

(ii) $(a^2+c^2)\,bd = (b^2+d^2)\,ac$

(iii) $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{ab}{cd}$

(iv) $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(v) $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2} = \frac{c^4+d^4}{c^2d^2}$

(vi) $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c+d}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

4. a, b, c, d......தொடர் விகித சமமுடையதாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

(ii) $(b+c)^2 = (a+b)(c+d)$

(iii) $(a+b)(b+c)(c+d) = ad(a+3b+3c+d)$

(iv) $\sqrt{ab} - \sqrt{bc} + \sqrt{cd} = \sqrt{(a-b+c)(b-c+d)}$

(v) $(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2) = a^4+b^4+c^4$

5. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ என்ற n எண்கள் தொடர் விகித சமமுடையதாயின்

$$a_1 : a_n = a_1^{n-1} : a_2^{n-1} = a_2^{n-1} : a_3^{n-1} = \ldots\ldots$$ என நிறுவுக.

6. x ன் தீர்வு காண்க.

(i) $\dfrac{\sqrt{x+20}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4}} = 4$

(ii) $\dfrac{x+\sqrt{12m-x}}{x-\sqrt{12m-x}} = \dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{3x+10}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x+10}+\sqrt{4x+1}} = \dfrac{1}{7}$

(iv) $\dfrac{x^2+3x}{3x^2+1} = 1$

(v) $\dfrac{8x^2+6x}{12x^2+1} = \dfrac{76}{49}$

(vi) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}} = \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$

$$y(x+y) = 2.$$

7. இருபடிச் சமன்பாடுகள்

(Quadratic Equations)

7.1 $Ax^2 + Bx + C = Px^2 + Qx + R$ என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு.

இச் சமன்பாட்டில் x என்பது தேராக்கணியம் (unknown quantity) எனப்படும். சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் (சரியாக்கும்) x ன் மதிப்பை அறிவதே, அல்லது கணிப்பதே, இச் சமன்பாட்டை விடுவிப்பதாகும். இப்படியாகக் கிடைக்கப் பெற்ற x ன் மதிப்பு, இச் சமன்பாட்டின் தீர்வு எனப்படும்.

முதல்கூறிய சமன்பாட்டை,

$(A - P)x^2 + (B - Q)x + (C - R) = O$ எனவும் எழுதலாம். பொதுவாக, எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளையும்

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற திட்ட உருவத்திற்குக் கொண்டுவரலாம் (Standard form). இதில் x தேராக்கணியம், a, b, c என்பவை குறிப்பிட்ட நிலை எண்கள்.

a பூச்சியமானல், $bx + c = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். ஆனல் இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகாது. எனவே, பின் வரும் பத்திகளில் a பூச்சியமாகக் கொள்ளப்பட மாட்டாது; b பூச்சியமாகலாம்; c கூட பூச்சிய மாகலாம்.

7.2 தேற்றம்: ஒவ்வொரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும், இரண்டு, மேலும் இரண்டே தீர்வுகள் உண்டு. (Two and only two roots).

தெரிப்பு: $ax^2 + bx + c = 0$ எனச் சமன்பாட்டைக் கொள்வோம்.

$$ax^2+bx+c \equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$\equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$p^2-q^2 \equiv (p-q)(p+q)$ என்பதை யொட்டி,

$$ax^2+bx+c \equiv a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$\equiv a\left\{x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right.$$

$$\left.\left\{x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}\right.$$ என எழுதலாம்.

இப்போது $ax^2+bx+c=0$ என்பது சமன் பாடாகையால், அதை

$$a\left\{x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}=0$$

என எழுதலாம்.

$\because a \neq 0$

$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என இரண்டு தீர்வுகள் x க்குப் பெறப்படும்.

இத் தீர்வுகளை, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்ற வாய்பாட்டு முறையில் எழுதுவது மரபு. இது கவனத்திலிருக்கவேண்டிய முக்கிய வாய்பாடாகும்.

இப்போது,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \alpha \text{ எனவும்}$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \beta \text{ எனவும் கொள்வோம்.}$$

எனவே,

$ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ என எழுதலாம். (இம் முறையில் எழுதுவது பல இடங்களில் பயன்படும்).
சமன்பாடு

$ax^2+bx+c=0$ என்பதை,

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ என எழுதலாம். $(a \neq 0)$

இப்போது, இரண்டே தீர்வுகள் உள்ளன என நிறுவலாம்.

α, β அல்லாது γ என்ற மற்றோர் தீர்வு இச்சமன்பாட்டைச் சரியாக்குகிறது எனக் கொள்வோம். அப்படிக் கொண்டால், x க்கு γ ஐ ஈடு செய்ய,

$a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=0$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

$a \neq 0$; $\gamma \neq \alpha$; $\gamma \neq \beta$.

எனவே $a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \neq 0$ எனப் பெறப்படும். ஆகவே, γ என்பது சமன்பாட்டின் தீர்வாகாது என்று நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, α, β என்ற இரண்டு மட்டுமே, $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

7.2·1 வேறோர் முறையிலும் $ax^2+bx+c=0$ ன் **தீர்வுகளைக் காணலாம்.**

$ax^2+bx+c=0$ என்பது சமன்பாடு. இரு பக்கங்களையும் $4a$ ஆல் பெருக்க,

$4a^2x^2+4abx+4ac=0$ எனப் பெறப்படும். இடது புறத்திற்கு b^2 ஐ கூட்டிக் கழிக்க

$4a^2x^2+4\ ab\ x+b^2-b^2+4\ ac=0$ ஆகும்.

$\therefore\quad (2ax+b)^2 = b^2-4ac$

$\therefore\quad 2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore\quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ எனத் தீர்வுகள் பெறப்படும்.

குறிப்பு: இம் முறையில் தீர்வுகள் பெற முடியுமாயினும், α, β என்பவை $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல்,

கோவை $ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ என்ற முற்ருெருமையமைப்பு பெற்றது என்று நாம் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

7.3 மறுதலையாக, α, β என்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாடு என்ன எனக் காண்போம். மேலெழுந்த வாரியாகப் பார்த்தால், இச் சமன்பாடு $(x-\alpha)\ (x-\beta)=0$ என்பதாக எளிதில் விளங்கும். அதாவது,

$x^2-(\alpha+\beta)\ x+\alpha\beta=0$ என்பது நாம் வேண்டும் சமன்பாடாகும்.

*7.3·1 ஆனல் பின்வரும் நிறுவன் முறையை யறிதல் ஒரு நல்ல கணித முறை – அறிவுப் பயிற்சியாகும். முதலில் இந் நூலைப் படிப்பவர்கள் இதை வேண்டுமானல் விட்டுவிடலாம்.

நிறுவன் முறை: α, β என்ற தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ என்ற அமைப்பில் உள்ளதெனக் கொள்வோம்.

$\therefore\quad a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ஆக இருக்கவேண்டும். மிச்ச விதிப்படி, $(x-\alpha)$ என்பது ax^2+bx+c என்ற கோவையின் (Expression) ஒரு சினையாகும். அவ்வாறே, $(x-\beta)$ என்பதும் ax^2+bx+c என்ற கோவையின் மற்ருேர் சினையாகும். எனவே $ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ என்ற முற்ருெருமையமைப்பு பொருத்தமாகும். $a\neq 0$ ஆகையால், $(x-\alpha)\ (x-\beta)=0$ என்ற சமன்பாடு நாம் வேண்டும் சமன்பாடாகும்.

(எ–கா.) (1) $(p+4)\ x^2+(2p+3)\ x+(p-1)=0$ ன் தீர்வுகள் காண்க.

$a = p+4$

$b = 2p+3$

$c = p-1 \quad \therefore \; x = \dfrac{-(2p+3) \pm \sqrt{(2p+3)^2 - 4(p+4)(p-1)}}{2(p+4)}$

$$= \frac{-(2p+3) \pm \sqrt{25}}{2(p+4)}$$

$$= -\left(\frac{p-1}{p+4}\right), \; -1 \text{ தீர்வுகளாகும்.}$$

(எ-கா.) (2) -2, 6 தீர்வுகள் உள்ள சமன்பாடு காண்க.

சமன்பாடு : $(x+2)(x-6) = 0$

அதாவது $x^2 - 4x - 12 = 0$.

(எ-கா.) (3) $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ தீர்வுகள் உள்ள சமன்பாடு காண்க.

சமன்பாடு : $\{x-(\alpha+\beta)\}\{x-(\alpha-\beta)\} = 0$

அதாவது $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2) = 0$.

7.4. ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டில் உள்ள கெழுக்களுக்கும் (co-efficients) அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு :

α, β என்பவை $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல்,

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$$

அதாவது $a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right) \equiv \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$

இருபக்கங்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ என்ற தொடர்புகள் பெறப்படும்.

அதாவது தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை $= -\dfrac{(x\text{ன் கெழு})}{(x^2\text{ன் கெழு})}$;

தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $= \dfrac{\text{மாறிலி}}{(x^2\text{ன் கெழு})}$;

இத் தொடர்புகளை, $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

எனவும் கொண்டு, கூட்டியும் பெருக்கியும், $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$;

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ எனவும் பெறலாம். பயிற்சியாகக் கொண்டு பெறுக.

(எ-கா.) (1) α, β என்பவை $3x^2 - x - 2 = 0$ ன் தீர்வுகள். அத்தீர்வுகளை வாய்பாடு கொண்டு கணக்கிடாமல்,

(1) $\alpha^2+\beta^2$, (2) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$, (3) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$, (4) $\alpha^4+\beta^4$ ன் மதிப்புக்களைக் காண்க. மேலும் நேரடியாகத் தீர்வுகள் கண்டு சரிபார்க்க :

$\alpha+\beta = \dfrac{1}{3}$;

$\alpha\beta = -\dfrac{2}{3}$ என்பவை சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

(1) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{13}{9}.$$

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})^3 - 3(-\frac{2}{3})(\frac{1}{3})}{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\frac{1}{27} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{19}{12}$$

(3) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= \frac{-2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-2}{9}.$$

(4) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= \left(\frac{13}{9}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{97}{81}$$

(எ-கா.) (2) $ax^2 - 2bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β ஆனால்,

(1) $\frac{\alpha}{n\beta} + \frac{\beta}{n\alpha}$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ ன் மதிப்புக்களை a, b, c ன் சார்புகளாகக் காண்க.

சமன்பாட்டின்படி $\alpha + \beta = \frac{2b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$\therefore$ (1) $\frac{\alpha}{n\beta} + \frac{\beta}{n\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{n\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{n\alpha\beta}$$

$$= \frac{\left(\frac{2b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{n\left(\frac{c}{a}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{nc}{a}}$$

$$= \frac{4b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{nc}$$

$$= \frac{4b^2 - 2ac}{nac}$$

(2) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$$= \frac{8b^3}{a^3} - \frac{3c}{a} \cdot \frac{2b}{a}$$

$$= \frac{8b^3 - 6abc}{a^3}$$

(எ-கா.) (3) $x^2 - 2bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β ஆனால்,

(1) $\frac{\alpha^2}{\beta}$, $\frac{\beta^2}{\alpha}$;

(2) $\alpha^2 + \frac{1}{\beta^2}$, $\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2}$; என்ற தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடுகள் காண்க.

7.3 ல் கண்டபடி, k, l தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடு

$(x-k)(x-l) = x^2 - x(k+l) + kl$

$= x^2 - x$ (தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை)

$+$ (தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை)

$= 0$ எனவாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின்படி,

$$\alpha+\beta=2b.$$

$$\alpha\beta=c.$$

(1) தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$.

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{8b^3-6bc}{c}$$

தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $=\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\alpha\beta=c.$

$\therefore\ \frac{\alpha^2}{\beta},\ \frac{\beta^2}{\alpha}$ என்ற தீர்வுகளைப் பெற்ற சமன்பாடு,

$x^2-x\left(\frac{8b^3-6bc}{c}\right)+c=0$ ஆகும்.

அதாவது $cx^2-(8b^3-6bc)\,x+c^2=0$

அதாவது $cx^2+(6bc-8b^3)\,x+c^2=0$

(2) தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை $=\alpha^2+\frac{1}{\beta^2}+\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}$

$$=\alpha^2+\beta^2+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=(4b^2-2c)+\frac{(4b^2-2c)}{c^2}$$

$$=\frac{(c^2+1)\,(4b^2-2c)}{c^3}$$

தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $=\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)$

$$= \frac{(\alpha^2\beta^2+1)^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{(c^2+1)^2}{c^2}$$

$\therefore$ $\alpha^2+\frac{1}{\beta^2}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}$ என்ற தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடு,

$$x^2 - x\left[\frac{(c^2+1)(4b^2-2c)}{c^2}\right] + \frac{(c^2+1)^2}{c^2} = 0$$

அதாவது $c^2x^2 - x[(c^2+1)(4b^2-2c)] + (c^2+1)^2 = 0$

பயிற்சி 7

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண்க:

(1) $x^2-16x+48=0$ (4) $x^2+4x+1=0$

(2) $2x^2-7x-15=0$ (5) $ax^2+2bx+c=0$

(3) $ax^2-(a+b)x+b=0$

2. பின்வரும் தீர்வுகளுடைய சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(1) $-1, 2$ (4) $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$

(2) $3, \frac{1}{3}$ (5) $m, -n$

(3) $3+\sqrt{7}$, $3-\sqrt{7}$ (6) $a+\frac{1}{a}$, $a-\frac{1}{a}$

3. α, β என்பவை $2x^2-x+1=0$ ன் தீர்வுகளானால் $\alpha^3\beta^3$ ன் மதிப்பென்ன?

4. α, β என்பவை $ax^2+2bx+c=0$ ன் தீர்வுகளானல் பின்வரும் கோவைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (4) $(K\alpha+\beta)(K\beta+\alpha)$

(2) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ (5) $\alpha^2-\beta^2$;

(6) $\alpha^3-\beta^3$;

(3) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (7) $\alpha^4+\alpha^4$;

5. α, β என்பவை $x^2 - bx + c = 0$ ன் தீர்வுகளானால், பின்வரும் தீர்வுகளைப் பெற்ற சமன்பாடுகள் காண்க.

(1) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (4) $(\alpha + \frac{1}{\beta}), \quad (\beta + \frac{1}{\alpha})$

(2) $\frac{1}{\alpha+2\beta}, \frac{1}{\beta+2\alpha}$ (5) $\frac{-\alpha}{1+\beta}, \frac{-\beta}{1+\alpha}$

(3) $\alpha + a\beta, \beta + a\alpha$ (6) $\alpha^2 - \alpha\beta, \beta^2 - \alpha\beta$

6. $x^2+x+1=0$ன் தீர்வுகள் α, β ஆனால் $2\alpha + \frac{\alpha\beta}{2}$, $2\beta + \frac{\alpha\beta}{2}$ தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடு காண்க.

7.5. இருபடிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின் தன்மை :

$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள், $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ எனக் கண்டோம்.

பொதுவாக a, b, c என்ற கெழுக்கள் அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்களெனக் கொள்வோம்.

இப்போது,

(1) $b^2 - 4ac$ என்ற தொகை கூட்டெண்ணுயிருப்பின் அதன் இருபடி மூலம் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். (அது அளவுக் கிணங்கியதாய் அல்லது அளவுக்கிணங்காததாய் இருக்கலாம்);

(2) $b^2 - 4ac$ என்ற தொகை பூச்சியமானால், அதன் இருபடி மூலமும் பூச்சியமாகும்;

(3) $b^2 - 4ac$ என்ற தொகை குறையெண்ணுயிருப்பின், அதன் இருபடி மூலம் கற்பனையெண்ணாகும்.

(1) மேலும், (1)ல் $b^2 - 4ac$ கூட்டெண்ணாகவிருக்கும்போது அதன் மதிப்பு (i) ஓர் அளவுக் கிணங்கிய மெய் யெண்ணின் இருபடியாக இருக்கலாம் (4, $\frac{25}{49}$ போன்றவை); அல்லது (ii) ஓர் அளவுக்கிணங்காத மெய் யெண்ணின் இருபடியாக இருக்கலாம் (2, 3, $\frac{4}{5}$ போன்றவை). இவ்விரண்டு நிலைகளிலும், தீர்வுகள் எத்தன்மை பெறுகின்றன வெனப் பார்ப்போம்.

(i) b^2-4ac ஓர் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்ணின் இருபடியானல், அதாவது b^2-4ac ன் இருபடி மூலம் ஓர் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்ணானல், இரு தீர்வுகளும், மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, வேறுபட்டவை, (Real, Rational and unequal).

(ii) அப்படியின்றி b^2-4ac ஓர் அளவுக் கிணங்காத மெய்யெண்ணின் இருபடியானல், அதாவது b^2-4ac ன் இருபடி மூலம் ஓர் அளவுக் கிணங்காத மெய்யெண்ணானல், இரு தீர்வுகளும் மெய் யெண்கள், அளவுக் கிணங்காதவை, வேறு பட்டவை (Real, Irrational, unequal).

(2) அப்படியின்றி $b^2-4ac=0$ ஆனல், தீர்வுகள் இரண்டும் $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a}$ என்ற மெய்யெண்கள், அளவுக் கிணங்யவை, சமமானவை.

இவைகளைத் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து :

b^2-4ac ன் மதிப்புத் தன்மை	தீர்வுகளின் தன்மை
>0, அதாவது	
கூட்டெண் (i) சரியான இருபடி	மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, வேறுபட்டவை.
(ii) சரியான இருபடியல்ல	மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்காதவை, வேறுபட்டவை.
$=0$	மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, சமமானவை.
<0, அதாவது குறையெண்	கற்பனையெண்கள்.

இப்படியாக, தீர்வுகளின் தன்மையறிய நமக்குப் பயன் பட்டது (b^2-4ac) என்ற கோவையின் மதிப்பு (அல்லது தன்மை).

எனவே (b^2-4ac) என்ற கோவைக்கு, (தீர்வுகளின்) தன்மை காட்டி (Discriminant) என்று பெயர்.

(எ-கா.) (1) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை முறைப்படி கண்டு பிடிக்காமல், தன்மை காட்டியைக் கொண்டு தீர்வுகளின் தன்மை அறிக.

(1) $x^2-8x+12=0$ (3) $4x^2-4x+37=0$

(2) $x^2+8x+16=0$ (4) $4x^2+3(a+b)x-(a+b)^2=0$

(1) தன்மை காட்டி $b^2-4ac=64-48=16=4^2$. எனவே தீர்வுகள் மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, வேறு பட்டவை.

(2) தன்மை காட்டி $=64-64=0$. எனவே தீர்வுகள் மெய் யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, சமம்.

(3) தன்மை காட்டி $=16-592=-576$. எனவே தீர்வுகள் கற்பனை யெண்கள்.

(4) தன்மை காட்டி $=9(a+b)^2+16(a+b)^2=[5(a+b)]^2$. எனவே தீர்வுகள், மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, வேறுபட்டவை.

(எ-கா.) (2) $(a+2)x^2-(a+6)x+1$ என்ற கோவை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் இருபடியானால் $\underline{a}$ ன் மதிப்பென்ன?

$(a+2)x^2-(a+6)x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமானால், அக்கோவை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் இருபடி யாகும்.

எனவே, இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாக வேண்டிய நிபந்தனையைக் கண்டால் $\underline{a}$ ன் மதிப்பு பெறப்படும்.

தீர்வுகள் சமமாக வேண்டுமானால், தன்மை காட்டி பூச்சிய மாக வேண்டும்.

அதாவது $(a+6)^2-4(a+2)^2=0$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore\ (a+6)^2=4(a+2)^2$$

$$\therefore\ a+6=\pm 2(a+2)$$

எனவே $a=2, -\frac{10}{3}$ என்ற எம்மதிப்புக்கும் அஃதோர் இருபடியாகும்.

(எ-கா.) (3) $u\equiv x^2-2x+4$; $v\equiv x^2+2x-1$ எனக் கொண்டால், $u+kv=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாயிருக்கின்றன. k ன் மதிப்பென்ன ?

$$u+kv=x^2-2x+4+k(x^2+2x-1)$$
$$=x^2(1+k)+2x(k-1)+(4-k)$$

$\therefore\ x^2(1+k)+2x(k-1)+(4-k)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

எனவே தன்மை காட்டி $4(k-1)^2-4(1+k)(4-k)=0$ ஆகும்.

அதாவது $8K^2-20K-12=0$ ஆகும்.

$$\therefore K=\frac{20\pm\sqrt{400+384}}{16}$$

$$=\frac{20\pm 28}{16}$$

$$=3,\ -\tfrac{1}{2}.$$

$k=3,\ k=-\frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $u+kv=0$ என்ற சமன்பாடு சமதீர்வுகளைப் பெறும்.

7. தீர்வுத் தொடர்புகளும், அத் தொடர்புகளுக்குரிய கட்டுப்பாடுகளும் :

ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்றோடொன்று ஏதாவது தொடர்பு பெற்றிருக்கலாம். அத் தொடர்பின் அடிப்படையில். a, b, c என்பவைகளுக்கிடையே என்ன கட்டுப்பாடு நிலவலாம் என்பதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுக்களைக் கொண்டு விளக்குவோம்.

(எ–கா.) (1) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றைப்போல் இரு மடங்கானால், அதற்குரிய கட்டுப்பாடு (Condition) காண்க.

கொடுத்தபடி, தீர்வுகள் α, 2α எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \alpha+2\alpha=-\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$2\alpha^2=\frac{c}{a} \quad (2)$$

இவ்விரண்டிலிருந்தும் α ஐ விலக்க, a, b, c மூன்றையும் இணைக்கும் கட்டுப்பாடு தெரியும்.

(1) லிருந்து $\alpha=-\dfrac{b}{3a}$

அதை (2)ல் ஈடு செய்ய, $2\left(\dfrac{b^2}{9a^2}\right)=\dfrac{c}{a}$

அல்லது $2b^2=9ac$ என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(எ–கா.) (2) $ax^2-bx+c=0$ ன் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றின் இருபடியானால், a, b, c ஐ இணைக்கும் கட்டுப்பாடு யாது ?

கொடுத்தபடி, α, α^2 எனத் தீர்வுகளைக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \alpha+\alpha^2=\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\alpha^3=\frac{c}{a} \quad (2)$$

இவ்விரண்டிலிருந்தும் α ஐ விலக்க, a, b, c ஐ இணைக்கும் கட்டுப்பாடு தெரியும்.

(2) லிருந்து $\alpha=\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

அதை (1)ல் ஈடு செய்ய, $\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{b}{a}$

என்ற கட்டுப்பாடு கிடைக்கப் பெறும்.

இக்கட்டுப்பாட்டை, படி மூலங்கள் நீக்கி எழுதினல் $ac(a+c)+3abc=b^3$ என இக் கட்டுப்பாடு அமையும். செய்து பார்க்க.

பயிற்சி 7 (2)

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை, விடுவிக்காமல், தீர்வுகளின் தன்மை காண்க. (a, b, c, k மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை, வேறுபட்டவை)

(1) $x^2-6x-7=0$ (4) $ax^2+(a+b)x+b=0$

(2) $2x^2-7x-5=0$ (5) $(a^2+b^2)^2x^2-4abx+4=0$

(3) $4x^2-4x+1=0$ (6) $2x^2+x+10=0$

2. $x^2+(3k-2)x+2k=0$ ன் தீர்வுகள் சமமாயின், k ன் மதிப்பென்ன ?

3. $x^2+(k+2)x+(2k+4)=0$ ன் தீர்வுகள் சமமாயின், k ன் மதிப் பென்ன ?

4. $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய்யெண்களென நிறுவுக.

5. பின் வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் மெய்யெண்களென நிறுவுக. (a, b, c...முதலியன மெய்யெண்கள்)

(1) $(a-x)(b-x)=k^2$

(2) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

(3) $2x(x+b)+2a(a-c)=(2a-c)(2x+b)$

6. பின் வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் சமமாயின், k ன் மதிப்பைக் காண்க. பின்னர் k ன் அம்மதிப்பைச் யொட்டி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கண்டு சரிபார்க்க.

(1) $x^2+(k+2)x-2k(k+1)=0$

(2) $(x+1)(x+2)=k(3x+7)$

(3) $k^2x^2+2(k+1)x+4=0$

(4) $x^2+2(2k+1)x+(2k^2+1)=0$

7. $(p^2-2q+2)\,x^2+2p\,(1+q)\,x+\,(p^2+2q^2-2q)=0$ ன் தீர்வுகள் சமமாயின் $p^2=4q$ என நிறுவுக.

8. $u\equiv 16x^2+3x+18,\quad v\equiv x^2+3x-1$ எனக் கொண்டால், $u+kv=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாயிருக்கின்றன. kன் மதிப்பு என்ன ?

9. $ax^2+bx+c=0$ன் தீர்வுகள் $3:2$ என்ற விகிதத்திலிருப்பின் a, b, cக் கிடையுள்ள தொடர்பு யாது?

10. $x^2-2bx+c=0$ ன் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றின் இருபடியானால் b, c ஐ இணைக்கும் தொடர்பு என்ன?

11. $(3+2a)\,x^2-6x-(a-4)$ என்ற கோவை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் இருபடியானால், a ன் மதிப்பென்ன?

[குறிப்பு: $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$ ன் தீர்வுகள் சமமானால் $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=(lx+m)^2$ என்ற அமைப்பில் ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் இருபடியாகவிருக்கும்.]

12. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கியவை யென நிறுவுக.

(i) $(b-c-a)x^2-2cx+(a-b-c)=0$

(ii) $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+1=0.$

(iii) $ax^2+bx+c=0$ (கட்டுப்பாடு : $a+b+c=0$)

13. $(a^2+b^2)x^2+2\,(ap+bq)x+(p^2+q^2)=0$ ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்களாயிருப்பின், அவை சமமாக விருக்குமென நிறுவுக.

14. a, b, c ன் மதிப்புக்கள் அளவுக் கிணங்கியவையாயிருப்பின் $(c+2a-3b)x^2+(b+2c-3a)x+(a+2b-3c)=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் மெய்யெண்களென நிறுவுக.

15. $ax^2+bx+c=0$ ன் தீர்வுகள் $\alpha,\ \alpha+1,$ ஆனால் $b^2=a^2+4ac$ என நிறுவுக.

16. $x^2+px+q=0$ ன் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை தீர்வுகளினிடைப்பட்ட வேறுபாட்டைப்போல் k மடங்கு இருக்குமாயின் $p^2(k^2-1)=4\,k^2q$ என நிறுவுக. இது $x^2-px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கும் பொருத்தமானதென உய்த்தறிக.

17. $ax^2+bx+c=0$ ன் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றைப் போல் r மடங்கு இருக்குமானால் r ன் மதிப்பு $acr^2+(2ac-b^2)r+ac=0$ என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது என நிறுவுக.

18. $x^2+bx+16=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய் யெண்களானால், bன் மதிப்பு -8க்கும் $+8$க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்புக்களைப் பெறக்கூடாது என நிறுவுக.

7.6. முன்னர் தன்மை காட்டி (b^2-4ac)ன் மதிப்பைக் கொண்டு தீர்வுகளின் தன்மை யறிந்தோம்.

இப்போது, மேலும் a, b, c ன் தன்மைகளைக் கொண்டு வேறு சில தன்மைகளை அறியும் வழி வகைகளைக் காண்போம்.

இப்பகுதியில், பொதுவாக, தீர்வுகள் மெய்யெண்களெனவும், வேறுபட்டவை யெனவும் கொள்ளப்படும். ஏனெனில் சமத் தீர்வுகளுக்கும், கற்பனைத் தீர்வுகளுக்கும், முறையே தன்மை காட்டி, $b^2-4ac \overset{=}{<} 0$ என்ற கட்டுப்பாடு போதுமானது.

இப்போது, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்,

(1) இரண்டும் கூட்டெண்கள் ;

(2) இரண்டும் குறையெண்கள் ;

(3) ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட குறியீடுகள் பெற்றவை;

(4) ஒன்றுக் கொன்று மாறுபட்ட குறியீடுகளை பெற்றுத் தனி மதிப்பில் சமமானவை ;

(5) ஒரு தீர்வு பூச்சியம்;

ஆனல், ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும், a, b, c என்பவை களுக்கிடையே உள்ள கட்டுப்பாடுகளை ஒவ்வொன்றாகக் காண்போம்.

(1) α, β என்ற இரு தீர்வுகளும் கூட்டெண்களாயின்,

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \text{கூட்டெண்} ;$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \text{கூட்டெண்}.$$

எனவே, a ன் மதிப்பும். b ன் மதிப்பும் மாறுபட்ட குறியீடுகள் பெற்றிருக்க வேண்டும் ; c ன் மதிப்பும், a ன் மதிப்பும் ஒரே குறியீடு பெற்றிருக்க வேண்டும். இவ்விரண்டு கட்டுப்பாடுகளையும் இணைத்தால், b ன் குறியீடு, a, c ன் குறியீட்டுக்கு மாறுபட்டதாய் இருக்க வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(2) $\propto, \beta$ என்ற இரு தீர்வுகளும் குறையெண்களாயின்,

$$\propto + \beta = \frac{-b}{a} = \text{குறையெண்.}$$

$$\propto \beta = \frac{c}{a} = \text{கூட்டெண்.}$$

எனவே, a, b, c ன் மதிப்புக்கள் மூன்றும் ஒரே குறியீடு பெற்றிருக்க வேண்டுமென்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(3) $\propto, \beta$ என்ற இரு தீர்வுகளில், ஒன்று கூட்டெண்ணாகவும், மற்றொன்று குறையெண்ணாகவுமிருப்பின்,

$$\propto + \beta = \frac{-b}{a} = \text{கூட்டு, அல்லது குறையெண்;}$$

$$\propto \beta = \frac{c}{a} = \text{குறையெண்.}$$

எனவே, a ன் மதிப்பும், c ன் மதிப்பும் மாற்றுக் குறியீடுகள் பெற்றிருக்க வேண்டுமென்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(4) $\propto, \beta$ என்ற தீர்வுகளுக்கிடையே, $\propto = -\beta$ என்ற தொடர்பு இருக்குமாயின்,

$$\propto + \beta = \frac{-b}{a} = 0$$

$$\propto \beta = \frac{c}{a} = \text{குறையெண்.}$$

எனவே $b = 0$; c ன் மதிப்பும் a ன் மதிப்பும் மாறுபட்ட குறியீடுகள் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(5) $\propto = 0$, β ஏதாவது ஒரு மதிப்பு பெற்றிருக்குமானால்,

$$\propto + \beta = \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\propto\beta = \frac{c}{a} = \text{பூச்சியம்.}$$

∴ c பூச்சியம் என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

(6) $\propto, \propto$ ஆனால் $\propto + \beta = \propto = \frac{-b}{a}$; அப்போது a பூச்சிய மாகிறது. ஆனால் அப்போது இருபடிச் சமன்பாடு இல்லை.

7.7 பொதுத் தீர்வு பெற்ற சமன்பாடுகள் (Common Roots):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a^1x^2 + b^1x + c^1 = 0$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும், ஒரு தீர்வு பொதுவானால், கட்டுப்பாடென்ன, அப்பொதுத் தீர்வு என்ன என்பதைக் காண்போம்.

பொதுத் தீர்வு $\propto$ எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$a\propto^2 + b\propto + c = 0$$

$a^1\propto^2 + b^1\propto + c^1 = 0$ என்பவை பொருத்தமாகும்.

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளை, $\propto, \propto^2$ என்ற இரு தேராக் கணியங்களின் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகக் கொள்வோம். குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி,

$$\frac{\propto^2}{bc^1 - b^1c} = \frac{\propto}{ca^1 - c^1a} = \frac{1}{ab^1 - a^1b}$$

∴ பொதுத் தீர்வு $\propto = \frac{ca^1 - c^1a}{ab^1 - a^1b}$

$$\propto^2 = \frac{bc^1 - b^1c}{ab^1 - a^1b}$$

எனவே, பொதுவாக உள்ள தீர்வு $= \frac{ca^1 - c^1a}{ab^1 - a^1b}$

கட்டுப்பாடு: $\propto^2 = (\propto)^2$ ஆகையால்,

$$\frac{bc^1 - b^1c}{ab^1 - a^1b} = \left(\frac{ca^1 - c^1a}{ab^1 - a^1b}\right)^2$$

∴ $(bc^1 - b^1c)\ (ab^1 - a^1b) = (ca^1 - c^1a)^2$ என்பது கட்டுப்பாடாகும்.

மேலும், முதல் சமன்பாட்டின் மற்றொரு தீர்வு

$$= \frac{c}{a\alpha} = \frac{c(ab^1 - a^1b)}{a(ca^1 - c^1a)}$$

இரண்டாம் சமன்பாட்டின் மற்ற தீர்வு

$$= \frac{c^1}{a^1\alpha} = \frac{c^1(ab^1 - a_1b)}{a^1(ca^1 - c^1a)}$$

பாடச் சுருக்கம் (7)

1. $ax^2+bx+c=0$ ன் தீர்வுகள் α, β ஆனல்,

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ; \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}\ ; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$

3. α, β என்பவைகளைத் தீர்வாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாடு : $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

அதாவது $(x^2 - \overline{\alpha+\beta}\, x + \alpha\beta)=0$

4. $\triangle = b^2-4ac \rightarrow$ தீர்வுகளின் தன்மை காட்டி.

பயிற்சி 7 (3)

1. $x^2-5x+4=0$ ம் $x^2-7x+a=0$ ம் ஒரு பொதுத் தீர்வை உடையதாயின் a ன் மதிப்பை யறிக. பொதுத் தீர்வையும், மற்ற தீர்வுகளையும் கணக்கிடுக.

2. $ax^2+bx+c=0$; $bx^2+cx+a=0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வு பொதுவானுல் $a^3+b^3+c^3=3abc$ என நிறுவுக.

3. $x^2+ax+b=0$; $x^2+bx+a=0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொதுத்தீர்வு இருப்பின், $a=b$ அல்லது $a+b+1=0$ என நிறுவுக. மேலும் அவைகளின் மற்ற தீர்வுகள் $x^2+x+ab=0$ ன் தீர்வுகளென நிறுவுக.

4. $ax^2+2x+1=0$; $x^2+2x+a=0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு, ஒரு பொதுத் தீர்வு இருப்பின் $a=1$ அல்லது -3 என நிறுவுக.

5. $x^2+px+aq=0$; $x^2+ax+pq=0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொதுத்தீர்வு இருப்பின் அவைகளின் மற்றைய தீர்வுகள் $x^2+qx+ap=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும் என நிறுவுக.

6. $a\,(b-c)x^2+b\,(c-a)\,xy+c\,(a-b)y^2$ ஒரு முழு இருபடியக் கோவையாக (perfect square) இருக்க வேண்டுமானல் என்ன கட்டுபாடு அவசியம்.

7. $ax^2+bx+c=0$; $a^1x^2+b^1x+c^1=0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு முறையே $\alpha, -\alpha$ என்ற ஒரு தீர்வு உண்டு. அப்போது $(ca^1-c^1a)^2+(bc^1+b^1c)\,(ab^1+a^1b)=0$ என நிறுவுக.

8. $x^3-1=0$ என்ற சமன்பாட்டை $(x-1)$ $(x^2+x+1)=0$ எனப்பிரித்து, அதன் தீர்வுகளைக் காண்க. $x^2+x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ω, w^2 என்ற அமைப்பில் உள்ளன என நிறுவுக.

9. 1, ω, ω^2 என்பவை $x^3-1=0$ ன் தீர்வுகளானல் $1+\omega+\omega^2=0$ என நிறுவுக.

10. $x^2+abx+c=0$; $x^2+acx+b=0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொதுத்தீர்வு இருப்பின் $a(b+c)x^2+(b+c)x-abc=0$ ன் தீர்வுகள் முன் கூறப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளின் மற்றைய தீர்வுகளென நிறுவுக.

11. $x^2-ax+b=0$; $x^2-px+q=0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொதுத்தீர்வு இருக்கிறது. இரண்டாம் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமம். அப்போது $2(b+q)=ap$ என நிறுவுக.

8. இருபடிச் சார்புகள்

(Quadratic functions)

8.1. இரண்டாவது பகுதியில் சார்புகளைப் பற்றி சில வரையறைகளையும் பண்புகளையும் கண்டோம். இப்போது சிறப்பாக, $y=ax^2+bx+c$ என்ற இருபடிச் சார்பை எடுத்து அதன் சில பண்புகளை ஆராய்வோம்.

அதற்கு முன்பு, இருபடிச் சமன்பாடுகள், கோவைகள், சார்புகள் என்பவைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகள் என்ன என்றும், அவைகளை எப்படிப் பொதுவாக வரையறுப்பது என்றும் காண்போம்.

$ax^2+bx+c=0$ என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு (Quadratic Expression). இதற்குத் தீர்வு என்ற பேச்சே கிடையாது. x ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பேற்கும். $y=ax^2+bx+c$ என்பது ஓர் இருபடிச் சார்பு (Quadratic function). இங்கு y என்பது x ன் ஒரு சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. x சார்பில்மாறி (Independent variable), y சார்புடை மாறி (Dependent Variable) எனவும் பெயர் பெறும். ஒரு குறிப்பிட்ட xன் மதிப்பிற்கு, அதற்கிணங்க y க்கு ஒரு மதிப்பு பெறப்படும்.

சமன்பாடு, கோவை, சார்பு என்பவைகளிடைப்பட்ட வேறுபாடுகளின் நுணுக்கங்களையறிக. ஒன்றுக்கொன்று பற்றிக் குழப்பம் ஏற்படலாகாது.

இப்போது $y=ax^2$ $bx+c$ என்ற ஓர் இருபடிச் சார்பை யெடுத்துக்கொண்டு, அதன் கோட்டுருவப்படம் வரைந்து, அவ்வழியே அச்சார்பின் சில பண்புகளை அறிய முற்படுவோம்.

8.1·1. கோட்டுருவப்படம் (Graph): x க்கு பல்வேறு மதிப்புக்கள் ஈடுசெய்து, அம்மதிப்புக்களுக்கிணங்கிய y ன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிட்டு, கோட்டுப்படத் தாளில் $(x_1\ y_1)$; $(x_2\ y_2)$;...என்ற மதிப்பிணைகளை இடங்குறிச் செய்தால் (Plot on a graph paper) பல புள்ளிகள் பெறப்படும். அப்புள்ளிகள் வழியாக ஒரு மெல்லிழை வளைவரை (Smooth Curve) வரைந்தால், அவ்வளை வரை இவ்விருபடிச் சார்பின் கோட்டுப்படம் (Graph) எனப்படும்.

இக் கோட்டுப் படத்தை $y=ax^2+bx+c$ என்ற சார்பின் கோட்டுப்படம் என்று கூறுவது மரபு. ($y=ax^2+bx=c$ என்பதை ஒரு சமன்பாடு என்று கூறுவதும் பொருத்தமாகும்.)

குறிப்பு: இந்நூலில் இயன்முறை வடிவ கணிதப் பகுதியில் ஆரம்பத்தில் கூறப்பட்டதைப் படித்து இதைப் பற்றி மேலும் விரிவாக அறியலாம்.

8.2. முதலில், கீழ்க்கண்ட, சார்புகளின் கோட்டுப் படம் வரைந்து, பின்னர் அப் படங்களின் உதவி கொண்டு, இருபடிச் சார்புகளின் சில பண்புகளை ஆராய்வோம்.

(1) $y=x^2$;

(2) $y=-x^2$;

(3) $y=x^2-x-6$;

(4) $y=-x^2+x+6$;

(5) $y=x^2+6x+9$;

(6) $y=2x^2-x+3$;

(7) $y=-x^2+2x+4$.

8.2·1. $y=x^2$ என்ற சார்புக்குறிய இணைமதிப்புக்கள்:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
$y=x^2$	0	1	4	9	1	4	9

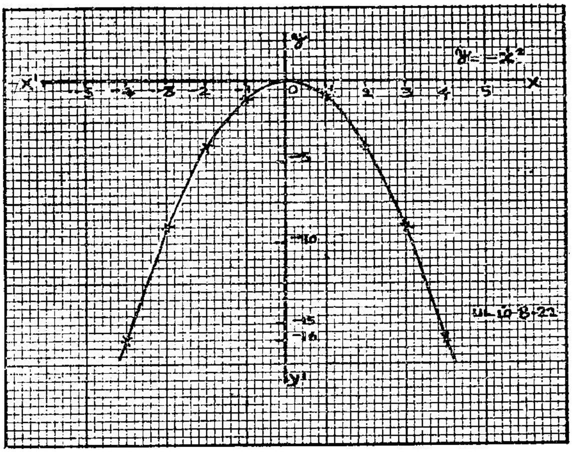
இயன்முறை வடிவ கணிதப் பகுதியில் பத்தி 1·5 ஐயும், அதற்குரிய படம் 1·5ஐயும் காண்க.

வளை வரை, ஆய ஆதியான (0, 0) வழியாகச் செல்கிறது. மேலும் வளைவரை x அச்சுக்குக் கீழேயில்லை. அது y அச்சுக்குச் சமச் சீருடையதாய் (Symmetric), y அச்சுக்கு இரு பக்கங்களிலும் விரிந்து செல்கிறது.

x ன் தனியெண் மதிப்பு (absolute value $|x|$) வரம்பின்றி வளர, வளர, yன் மதிப்பு கூட்டெண்ணாய், வேகமாக, வரம்பின்றி அதிகரித்துக் கொண்டே செல்கிறது.

8.2.2 $y = -x^2$ என்ற சார்பின் இணை மதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
$y = -x^2$	0	−1	−4	−9	−16	−1	−4	−9	−16



படம் 8·2·2 காண்க.

அளவுச் சட்டம் : (OX – 5 பிரிவு=1 அலகு; OY – 2 பிரிவு=1 அலகு.)

வளைவரை (0, 0) வழியாகச் செல்கிறது. மேலும் வளைவரை x–அச்சுக்கு மேலேயில்லை. y–அச்சுக்குச் சமச் சீருடையதாய், y-அச்சை மையங்கொண்டு, x–அச்சுக்குக் கீழே விரிந்து செல்கிறது.

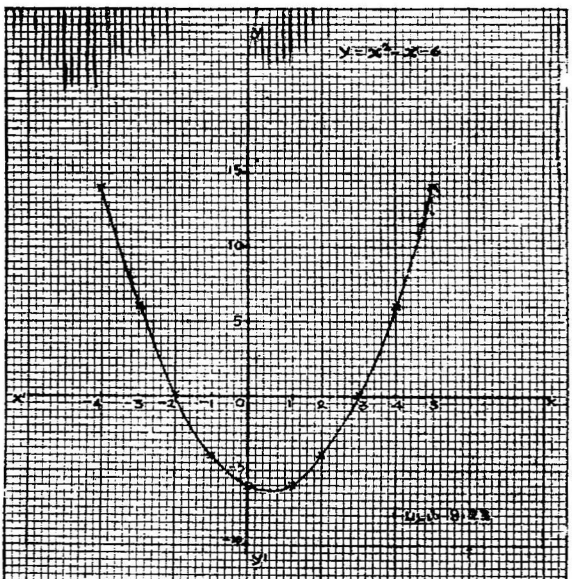
x–ன் தனியெண் மதிப்பு வரம்பின்றி வளர, வளர, y-ன் மதிப்பு குறையெண்ணாய், வேகமாக வரம்பின்றி குறைந்து கொண்டே போகிறது.

8·2·3. $y = x^2 - x - 6$ என்ற சார்பின் இணை மதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4
x^2	0	1	4	9	16	25	1	4	9	16
$-x$	0	-1	-2	-3	-4	-5	1	2	3	4
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
$y = x^2 - x - 6$	-6	-6	-4	0	6	14	-4	0	6	14

இணைப் புள்ளிகள் :

$(0, -6)$; $(1, -6)$; $(2, -4)$; $(3, 0)$; $(4, 6)$; $(5, 14)$; $(-1, -4)$; $(-2, 0)$; $(-3, 6)$; $(-4. 14)$



அளவுச் சட்டம் : (OX – 5 பிரிவு = 1 அலகு ; OY – 2 பிரிவு = 1 அலகு.)

வளைவரை, x – அச்சை

$x = -2$ என்ற புள்ளியிலும்,

$x = \ \ 3$ என்ற புள்ளியிலும்,

வெட்டுகிறது. அங்கு $y = 0$ ஆகிறது.

எனவே $x^2-x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $x=-2, 3$ எனப் பெறப்படும். சமன்பாட்டை விடுவித்து இதைச் சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

$x=-2$ முதல் $x=3$ என்ற மதிப்புக்கு இடைப்பட்ட எந்த மதிப்பை x ஏற்றாலும், yன் மதிப்பு—அதாவது அச் சார்பின் மதிப்பு—குறையெண் மதிப்பாயிருக்கிறது. அந்த இரு எல்லை களுக்கு அப்பாற்பட்ட xன் மதிப்புகளுக்கு, சார்பின் மதிப்பு கூட்டெண் மதிப்பாகும். எனவே,

$-2<x<3$ என்ற இடைவெளியில் y மதிப்பு குறையெண்;

$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\ \ \ 3 \end{array}\right\}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $y=0$;

$x<-2$ என்ற வெளியிலும்,

$x>\ \ 3$ என்ற வெளியிலும் y மதிப்பு கூட்டெண்.

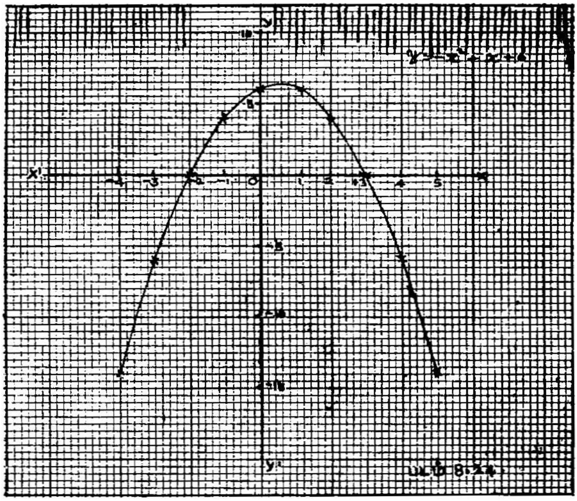
படத்தில் பார்த்தால் $x=\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியில், y தனது மிகச் சிறு மதிப்பாகிய (ஏறத்தாழ, படத்தில்) $-6\frac{1}{4}$ என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது, எனக் காணலாம். இதை x^2-x-6 என்ற கோவையில் $x=\frac{1}{2}$ என ஈடுசெய்து $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6=-6\frac{1}{4}$ எனவும் பார்க்கலாம். ஆகவே சார்பின் மீச் சிறு மதிப்பு $=-6\frac{1}{4}$.

8.2·4. $y=-x^2+x+6$ என்ற சார்பின் **இணைமதிப்புக்கள் :**

இணைமதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3	−4
$-x^2$	0	−1	−4	−9	−16	−25	−1	−4	−9	−16
x	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3	−4
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
$y=-x^2+x+6$	6	6	4	0	−6	−14	4	0	−6	−14

(0, 6); (1, 6); (2, 4); (3, 0); (4, −6); (5, −14); (−1, 4); (−2, 0); (−3, −6); (−4, −14)



அளவுச் சட்டம் : (OX – 5 பிரிவு 1 = அலகு. OY – 2 பிரிவு = 1 அலகு.)

8.2·3.–ல் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சார்பு,

$$y = x^2 - x - 6$$

இப்போது நாம் கொண்டுள்ள சார்பு,

$$y = x^2 + x + 6$$
$$= -(x^2 - x - 6)$$

இவ்விரண்டையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது முதல் சார்பும் இரண்டாவது சார்பும் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்க் குறியீடு பெற்றவை யென்பது புலப்படும்.

வளை வரைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், ஒரு வளைவரை மற்றையதைத் தலைகீழ் வைத்த மாதிரி இருக்கிறதெனத் தெளிவாகும்.

$x^2 - x - 6 = 0$ ன் தீர்வுகளும்

$-(x^2 - x - 6) = 0$ ன் தீர்வுகளும் சமம் என்பது கண்கூடு.

வளைவரை, x – அச்சை, -2, 3 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

எனவே $x = -2, 3$, என்பவை $-x^2 + x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$x=-2$, முதல் $x=3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கிடைப்பட்ட எந்த மதிப்பை x ஏற்ருலும், yன் மதிப்பு, அதாவது சார்பின் மதிப்பு, கூட்டெண்ணுகும். அந்த எல்லைகளுக்கு அப்பாற்பட்ட xன் மதிப்புக்களுக்கு, சார்பின் மதிப்பு குறையெண்ணுகும்.

$-2<x<3$ என்ற இடைவெளியில் y கூட்டெண் ;

$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\ \ 3 \end{array}\right\}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $y=0$;

$x<-2$ என்ற வெளியிலும்,

$x>\ \ 3$ என்ற வெளியிலும், y குறையெண்.

படத்தில் பார்த்தால், $x=\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியில், y தனது மீப்பெரு மதிப்பாகிய (ஏறத்தாழ, படத்தில்) $6\frac{1}{4}$ என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது, எனக் காணலாம். இதை $-x^2+x+6$ என்ற கோவையிலே, $x=\frac{1}{2}$ என ஈடுசெய்து $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+6=6\frac{1}{4}$ எனவும் பார்க்கலாம். ஆகவே சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு $=6\frac{1}{4}$.

8.2·5. $y=x^2+6x+9$

$=(x+3)^2$ என்ற சார்பின் இணைமதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$(x+3)$	3	4	5	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$y=(x+3)^2$	9	16	25	4	1	0	1	4	9	16

இணைமதிப்புக்கள் ;

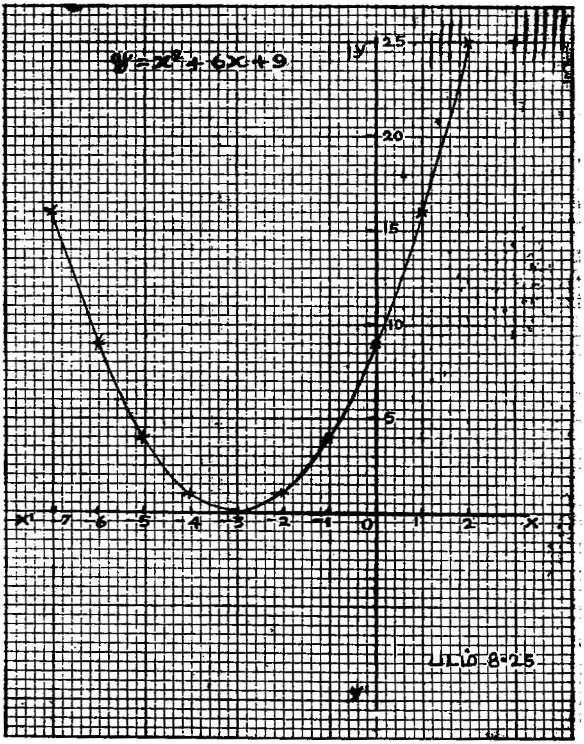
$(0, 9)$; $(1, 16)$; $(2, 25)$; $(-1, 4)$; $(-2, 1)$; $(-3, 0)$; $(-4, 1)$; $(-5, 4)$: $(-6, 9)$; $(-7, 16)$.

வளைவரை, x - அச்சை, $x=-3$ என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. அங்கு $y=0$ ஆகிறது.

$\because\ x^2+6x+9=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x=-3, -3$ என்ற இரு சம தீர்வுகளாகும்.

$x=-3$ல் தொட்டுக் கொண்டு, வளைவரை x - அச்சுக்கு மேலேயே விரிந்து செல்கிறது.

x எம்மதிப் பேற்ருலும் yன் மதிப்பு, அதாவது சார்பின் மதிப்பு எப்பொழுதும் கூட்டெண்ணுகவே யிருக்கும்.



படம் 8·25

அளவுச் சட்டம் : (OX – 5 பிரிவு=1 அலகு; OY – 2பிரிவு=1 அலகு.)

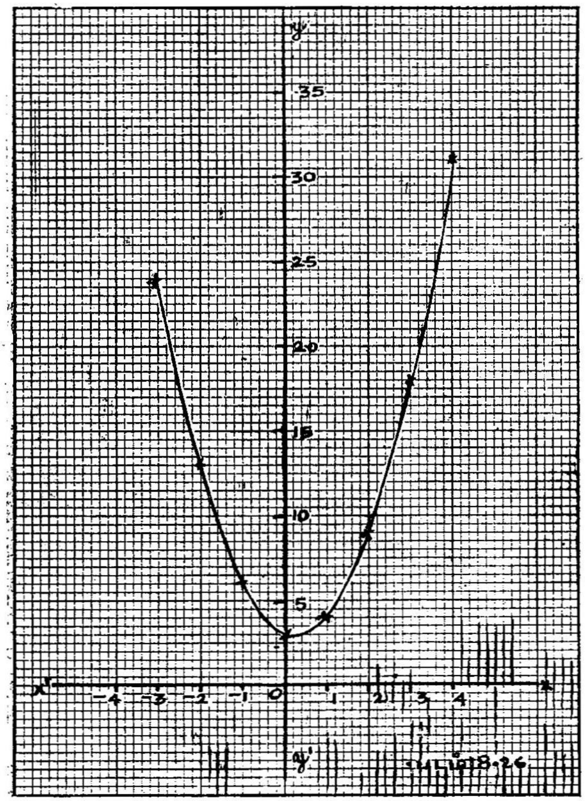
$x=-3$ என்ற இடத்தில் மீச்சிறுமதிப்பான 0 பெறப்படுகிறது.

8.2·6. $y=2x^2-x+3$ என்ற சார்பின் இணைமதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
x^2	0	1	4	9	16	1	4	9	16
$2x^2$	0	2	8	18	32	2	8	18	32
$-x$	0	−1	−2	−3	−4	1	2	3	4
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$y=2x^2-x+3$	3	4	9	18	31	6	13	24	39

இணைமதிப்புக்கள் :

(0, 3); (1, 4); (2, 9); (3, 18), (4, 31); (−1, 6); (−2, 13); (−3, 24); (−4, 39). (கடைசி புள்ளி படத்தில் காட்டப்படவில்லை).



$(y = 2x^2 - x + 3)$

அளவுச் சட்டம் : (OX − 5 *பிரிவு*=1 *அலகு*; OY − 2 *பிரிவு*=1 *அலகு*.)

வளைவரை, முற்றிலும் x− அச்சுக்கு மேலேயே யிருக்கிறது. x− அச்சைத் தொடவுமில்லை, வெட்டவுமில்லை. ஏன்? $2x^2 - x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4}$$ என்ற கற்பனை எண்கள்.

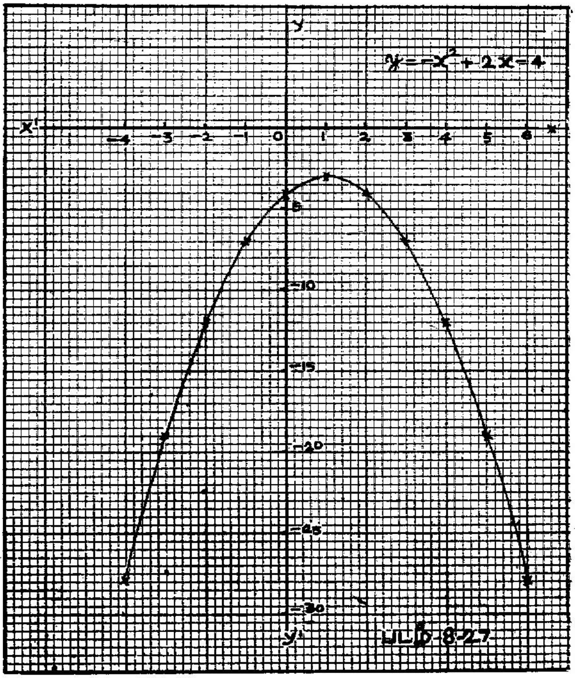
எனவேதான், எந்த மெய்யெண் மதிப்புக்கும் y பூச்சியமாகாது. அதாவது $2x^2 - x + 3$ ன் மதிப்பு பூச்சியமாகாது. அதனால்தான் $y = 2x^2 - x + 3$ என்ற வளைவரை x – அச்சை வெட்டவில்லை. மீச்சிறு மதிப்பு $x = \frac{1}{4}$ என்ற இடத்தில் $2\frac{7}{8}$. படத்திலிருந்து இதைத் தோராயமாகத் தான் அறியலாம்.

8.2·7. $y = -x^2 + 2x - 4$ என்ற சார்பின் இம்மதிப்புக்கள் :

x	0	1	2	3	4	5	6	−1	−2	−3	−4
$-x^2$	0	−1	−4	−9	−16	−25	−36	−1	−4	−9	−16
$2x$	0	2	4	6	8	10	12	−2	−4	−6	−8
-4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4
$y = -x^2 + 2x - 4$	−4	−3	−4	−7	−12	−19	−28	−7	−12	−19	−28

இணைமதிப்புக்கள் :

(0, −4) ; (1, −3) ; (2, −4) ; (3, −7) ; (4, −12) ; (5, −19) ; (6, −28) ; (−1, −7) ; (−2, −12) ; (−3, −19) ; (−4, −28).



அளவுச் சட்டம் : (OX – 5 பிரிவு=1 அலகு; OY – 2 பிரிவு=1 அலகு.)

வளைவரை முற்றிலும் x அச்சுக்குக் கீழேயே யிருக்கிறது. x – அச்சைத் தொடவுமில்லை, வெட்டவுமில்லை.

ஏன் ?

$-x^2+2x-4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்,

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{-2}$$

$=1\pm i\sqrt{3}$ என்ற கற்பனை யெண்கள். எனவேதான் எந்த மெய்யெண் மதிப்பிற்கும் $-x^2+2x-4$ என்ற சார்பு பூச்சியமாகாது. அதனால்தான், $y=-x^2+2x-4$ என்ற வளை வரை x – அச்சை வெட்டவில்லை.

மீப்பெரு மதிப்பு $x=1$ என்ற இடத்தில் – 3.

8.3. இந்த வளைவரைகளை ஆராயுங்கால், பின் கூறப் படும் உண்மைகள் புலனாகும். $y=ax^2+bx+c$ என்பது இரு படிச் சார்பின் பொது அமைப்பு.

(1) x^2 ன் கெழுவான a கூட்டெண்ணானால், $y=ax^2+bx+c$ன் வளைவரை x–அச்சுக்கு மேலே விரிந்து செல்கிறது; a குறையெண்ணானால், வளைவரை x–அச்சுக்குக் கீழே விரிந்து செல்கிறது.

(2) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இரண்டு வெவ்வேறு மெய்யெண்களாயின், வளைவரை x–அச்சை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. வெட்டு மிடங்கள், சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் குறிக்கின்றன.

(3) $ax^2+bx+c=0$ன் தீர்வுகள் சமமாயின், வளைவரை x–அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. தொடுமிடம், சமன்பாட்டின் இரு சம தீர்வுகளாகும்.

(4) $ax^2+bx+c=0$ன் தீர்வுகள் கற்பனை எண்களாயின், வளைவரை x–அச்சை வெட்டுவதேயில்லை. a கூட்டெண்ணா யின், வளைவரை x–அச்சுக்கு முற்றிலும் மேலேயேயிருக் கிறது; a குறையெண்ணாயின், வளைவரை x–அச்சுக்கு முற்றி லும் கீழேயேயிருக்கிறது.

(5) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கற்பனை யெண்களாயின், x எந்த மெய்யெண் மதிப்பு ஏற்றபோதிலும், ax^2+bx+c என்ற சார்பின் மதிப்பு, a ன் குறியீட்டையே பெற் றிருக்கிறது. அதாவது a கூட்டெண்ணாயின் சார்பின் மதிப்பு எப்போதும் கூட்டெண்; a குறையெண்ணாயின் சார்பின் மதிப்பு எப்போதும் குறையெண்.

(6) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சம மான மெய்யெண்களாயின், x எந்த மெய்யெண் மதிப்பு ஏற்ற போதிலும், சார்பின் மதிப்பு a ன் குறியீட்டையே பெற்றிருக் கிறது. $x=\dfrac{-b}{2a}$ என்ற தீர்வின் மதிப்புக்கு மாத்திரம், சார்பின் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது.

a கூட்டெண்ணாயின் மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சியம்; குறை யெண்ணாயின் மீப்பெரு மதிப்பு பூச்சியம்.

(7) $ax^2+bx+c=0$ ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்களாய், வேறுபட்ட மதிப்புக்கள் பெறும்போது, x ன் மதிப்பு, அத்தீர்வுகளுக் கிடைப்பட்ட எம்மதிப்பைப் பெற்ற போதிலும், ax^2+bx+c என்ற சார்பின் மதிப்பு, $\underline{a}$ ன் குறியீட்டுக்கு மாறுபட்ட குறியீடுள்ள மதிப்பைப் பெறுகிறது; x ன் மதிப்பு, தீர்வுகளுக் கிடைப்படாத வெளிகளில் அம்மதிப்பைப் பெற்றபோதிலும், சார்பின் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீட்டையே பெறுகிறது.

இதை இன்னும் சற்று விரிவாகக் கூறுங்கால் :

(a) $\underline{a}$ கூட்டெண் ; α, β சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ; $\beta > \alpha$.

இங்கு $\alpha < x < \beta$ என்ற இடைவெளியில் ax^2+bx+c என்ற சார்பின் மதிப்பு குறையெண் மதிப்பு பெறுகிறது.

$x < \alpha$; $x > \beta$ என்ற இரு வெளிகளிலும், ax^2+bx+c ன் மதிப்பு, கூட்டெண்.

(b) $\underline{a}$ குறையெண் :

இங்கு $\alpha < x < \beta$ என்ற இடைவெளியில் ax^2+bx+c ன் மதிப்பு கூட்டெண் மதிப்பாகும். $x < \alpha$; $x < \beta$ என்ற இரு வெளிகளிலும், ax_2+bx+c ன் மதிப்பு குறையெண் மதிப்பாகும்.

இப்பத்தியில் கூறிய யாவற்றையும் தொகுத்து, சுருக்கமாகக் கூறுமிடத்து,

"$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெவ்வேறு மெய்யெண்களாய், x ன் மதிப்பு அத்தீர்வுகளின் இடைப்பட்டதாயிருந்தாலொழிய, x ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும், ax^2+bx+c என்ற சார்பின் மதிப்பு, $\underline{a}$ ன் குறியீட்டையே பெற்றிருக்கும்."

8 (a) a கூட்டெண்ணுயின், சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு,

$x = \dfrac{-b}{2a}$ என்ற இடத்தில் பெறப்படுகிறது.

$ax^2+bx+c \equiv a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ என நாம் கண்டோம் (7·1 காண்க).

அடைப்புகளுக்குள்ள பகுதியில் $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ன் மதிப்பு, x ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்கும், ஒரு கூட்டெண் மதிப்பு பெறும்.

$x=\frac{-b}{2a}$ என்ற x ன் மதிப்புக்கு $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். அதுவே $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ன் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

எனவே,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \text{ ன் மீச்சிறு மதிப்பு}$$

$x=\frac{-b}{2a}$ என்ற மதிப்புக் குரிய $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ஆகும்.

(b) a குறையெண்ணுயின், சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு $x=\frac{-b}{2a}$ என்ற இடத்தில் பெறப்படுகிறது.

இங்கு ax^2+bx+c ன் மதிப்பு $=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ஆகும்.

(எ-கா.) (1) $y=x^2$ என்ற வளைவரை வரைந்து, $x^2-6x+5=0$ என்ற சமன் பாட்டின் தீர்வுகள் காண்க.

$y=x^2$ எனக் கொண்டால்,

$y=x^2=6x-5$ எனப் பெறப்படும்.

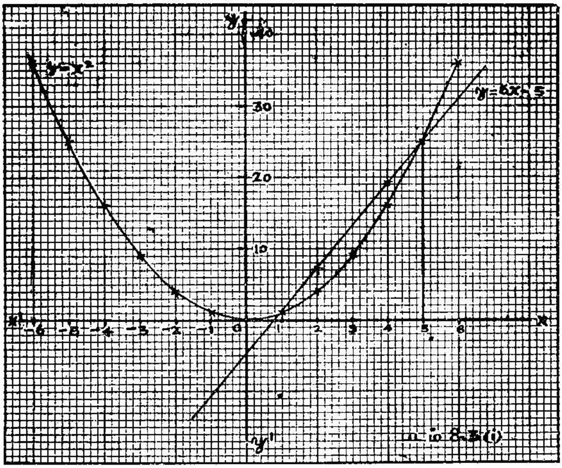
$y=x^2$ என்ற வளைவரையும், $y=6x-5$ என்ற நேர்கோடும் வெட்டு மிடங்களே, $x^2-6x+5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

$y=x^2$ – இணை மதிப்புக்கள்

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
$y=x^2$	0	1	4	9	16	25	36

$y=6x-5$ இணை மதிப்புக்கள்

x	2	4
$y=6x-5$	7	19



அளவுச் சட்டம் : (OX - 5 பிரிவு=1; அலகு OY - 1 பிரிவு=1 அலகு.)

$y=x^2$; $y+6x-5$ இரண்டும் வெட்டு மிடங்களில் $x^2=6x-5$ அல்லது, $x^2-6x+5=0$.

எனவே, $x^2-6x+5=0$ ன் தீர்வுகள் $x=1, 5$.

பயிற்சி 8 (1)

1. பின்வரும் இருபடிச் சார்புகளின் வளைவரை வரைந்து, வளைவரை,

(i) x – அச்சை, வெட்டுகிறதா, தொடுகிறதா, வெட்டவில்லையா ?

(ii) வெட்டினுல் / தொட்டால் அங்கு x ன் மதிப்பென்ன ?

(iii) x – அச்சுக்கு மேல்பக்கம் / கீழ்பக்கம் விரிவா ?

(iv) மீச்சிறு / மீப்பெரு மதிப்புக்கள் என்ன ?

முதலிய தன்மைகளைச் சுருக்கமாக எழுதுக.

(a) $x^2-6x+9=y$; (c) $-3x^2-3x+2=y$;

(b) $3x^2+x+1=y$; (d) $x^2-7x+12=y$.

2. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கோட்டுருவப்படம் வழியாகக் கண்டுபிடிக்க :

(a) $x^2+8x-9=0$

(b) $3x^2-x-2=0$

(c) $-2x^2-x+3=0$.

8.4. $ax^2+bx+c=0$; ax^3+bx+c; $y=ax+bx+c$ எனப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு, இருபடிக்கோவை, இருபடிச் சார்பு பற்றிய நுணுக்கமான வேறுபாடுகளைப் பற்றி, 8·1 ல் பார்த்தோம்.

மேலும், x என்ற சார்பில் மாறி, பல மெய்யெண் மதிப்புக்களை யேற்கும்போது, $y=ax^2+bx+c$ என்ற சார்பு என்னென்ன மதிப்புக்களைப் பெறுகிறது, அம்மதிப்புக்கள் எவ்வெவ்வாறு மாறுகின்றன, அம்மதிப்புக்களின் குறியீடுகளென்ன, முதலியவற்றை, கோட்டுருவப் படங்களின் துணை கொண்டு நாம் ஒருவாறு கண்டறிந்தோம். இப்போது, அவைகளை யெல்லாம் இயற்கணித முறைப்படி நேரடியாக விளக்கி ஒரு தேற்ற முறையில் அமைப்போம்.

8.4·1. தேற்றம் : $ax^2+bx+c-0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெவ்வேறு மெய் யெண்களாய், xன் மதிப்பு அத்தீர்வுகளுக்கு இடைபட்டா லொழிய, xன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும் ax^2+bx+c என்ற கோவையின் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீட்டையே பெற்றிருக்கும்.

(The value of the expression ax^2+bx+c has the same sign as $\underline{a}$ except when the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ are real and unequal and x takes a value lying between them).

தெரிப்பு : $ax+^2+bx+c\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ என்ற முற்றொருமை யமைப்பை நாம் 7·2 ல் கண்டோம்.

(1) முதலாவதாக,

$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கற்பனையெண்களெனக் கொள்வோம். அப்போது தன்மை காட்டி (b^2-4ac) ன் மதிப்பு ஒரு குறையெண். எனவே $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ ன் மதிப்பு ஒரு கூட்டெண்ணாகிறது.

$\therefore \ ax^2+bx+c = a$ (ஒரு சரியான இருபடி + ஒரு கூட்டெண்)
$= a$ (கூட்டெண்).

$\therefore \ ax^2+bx+c$ ன் மதிப்பு, $\underline{a}$ ன் குறியீட்டைப் பெறும்.

(2) இரண்டாவது,

$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமெனக் கொள்வோம். அப்போது தன்மை காட்டி (b^2-4ac) பூச்சிய மாகிறது.

$$\therefore \ ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$= a$ (ஒரு சரியான இருபடி).

$\therefore \ ax^2+bx+c$ ன் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீட்டைப் பெறும்.

(3) மூன்ருவதாக,

$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், α, β என்ற இரண்டு வெவ்வேறு மெய்யெண்களாகக் கொள் வோம். வெவ்வேருதலின், ஏதாமொன்று மற்றென்றை விடப் பெரிதாக விருக்கும். αஐ விட β பெரிதெனக் கொள்வோம். அதாவது $\beta > \alpha$. 7·2ன் படி, $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட் டின் தீர்வுகள் α, β ஆக விருந்தால்,

$ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்ற முற்றொருமை யமைப் பில் எழுதலாம்.

(a) $\beta > \alpha$ எனக் கொள்ளப்பட்டது. αக்குக் குறைவாக, x எந்த மெய்யெண் மதிப்புக் கொண்டாலும்,

$x-\alpha =$ ஒரு குறையெண்,
$x-\beta =$ ஒரு குறையெண்.

எனவே, அப்போது (அதாவது $x < \alpha$ ஆனல்),

ax^2+bx+c ன் மதிப்பு $= \underline{a}$ (குறையெண்) × (குறையெண்)
$= \underline{a}$ (கூட்டெண்)

எனவே, $x < \alpha$ ஆக எம் எம்மதிப்புபெற்ருலும், ax^2+bx+c ன் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீடு பெறும்.

மேலும் β க்கு அதிகமாக, x எந்த மதிப்பு பெற்ருலும்,

$x-\alpha =$ ஒரு கூட்டெண் ;
$x-\beta =$ ஒரு கூட்டெண்.

எனவே, அப்போது (அதாவது $x > \beta$ ஆனல்) (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு a ன் குறியீடு பெறும். இவ்விரண்டு முடிவுகளையும் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து, xன் மதிப்பு αக்குக் குறைவாகவும், βக்கு அதிகமாகவும் இருக்குமானல், (அதாவது xன் மதிப்பு இருதீர்வுகளுக்கும் இடையில் எந்த மதிப்பும் பெருவிட்டால்)

(ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீடு பெறும்.

(b) இப்போது, α, β என்ற இடைவெளியில் x என்ன மதிப்பு பெற்ருலும் (அதாவது $\alpha < x < \beta$)

$x - \alpha =$ ஒரு கூட்டெண்;

$x - \beta =$ ஒரு குறையெண்.

அப்போது, (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு $= a(x-\alpha)\ (x-\beta)$

$= a$ (ஒரு கூட்டெண்) $\times$ (ஒரு குறையெண்)

$= a$ (குறையெண்).

எனவே $\alpha < x < \beta$ என்ற கட்டுப்பாட்டில், x என்ன மதிப் பேற்ருலும்,

(ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு $\underline{a}$ க்கு மாறுபட்ட குறியீட்டைப் பெறும்.

ஆகவே,

(1) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கற்பனையெண்களாயின், (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு எப்போதும் $\underline{a}$ ன் குறியீடு பெறும்;

(2) தீர்வுகள் சமமாயின், (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு எப்போதும் $\underline{a}$ ன் குறியீடுபெறும்;

(3) (a) தீர்வுகள் வேறுபட்டு, x-ன் மதிப்பு தீர்வுகளுக்கிடைப்படாத எந்த மதிப்பேற்பினும், (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீடு பெறும்;

(b) தீர்வுகள் வேறுபட்டு, x-ன் மதிப்பு தீர்வுகளுக்கிடைப்பட்ட எந்த மதிப்பேற்பினும், (ax^2+bx+c)ன் மதிப்பு $\underline{a}$ ன் குறியீட்டுக்கு மாறுபட்டதாயிருக்கும்.

இவையெல்லாம், ஒன்றுபடுத்தி, சுருக்கமாகக் கூறுமிடத்து,

"$ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெவ்வேறு மெய்யெண்களாய், x-ன் மதிப்பு அத்தீர்வுகளுக் கிடைப்பட்டிருந்தாலொழிய, x-ன், எல்லாமெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும், ax^2+bx+c என்ற கோவையின் மதிப்பு, $\underline{a}$ ன் குறியீட்டையே பெறும்" என அறியலாம்.

8.4·3. சில இருபடிச் சார்புகளை அல்லது கோவைகளைக் கொண்டு, ஓரளவு, மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புக்களைப்பற்றிச் சிறிது ஆராயலாம்.

(எ-கா.) (1) $y = f(x) = 8-2(4-x)^2$.

$(4-x)^2$ ஒரு இருபடிக் கோவையாதலின் அதன் மதிப்பு எப்போதும் கூட்டெண்; பூச்சியத்திற்குக் குறையாது. அதனுடைய மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சியம். எனவே,

$8-2(4-x)^2$ன் மதிப்பு, எப்போதும் 8க்கு மேற்படாது.

$\therefore$ $8-2(4-x)^2$ன் மீப்பெரு மதிப்பு, அதைவிட அதிகமாக முடியாது. $x=4$ என்ற மதிப்புக்கு, கோவை 8 என்ற மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(எ-கா.) (2) $y=f(x)= 4(x-2)^2+10$.

$(x-2)^2$ என்பது ஓர் இருபடியாதலில், அதன் மதிப்பு எப்போதும் கூட்டெண்; பூச்சியத்திற்குக் குறையாது. $x=2$ என்ற மதிப்புக்கு $(x-2)^2$ தனது மீச்சிறு மதிப்பாகிய 0 என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது.

ஆகவே, $4(x-2)^2+10$ ன் மதிப்பு, எப்போதும் 10க்கு மேற்பட்டிருக்குமே யொழிய 10 க்குக் குறைபடாது. எனவே, $y=4(x-2)^2+10$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு 10; அது $x=2$ என்ற மதிப்புக்குப் பெறப்படுகிறது.

8.4·4. (ax^2+bx+c) ன் மீப்பெரு/மீச்சிறு மதிப்பு :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\text{K}. \quad \left[\text{K}=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right]$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ஓர் இருபடியாதலின், அதன் மதிப்பு எப்பொழுதும் கூட்டெண், பூச்சியத்திற்குக் குறையாது. அதன் மீச்சிறு மதிப்பு, $x = \frac{-b}{2a}$ என ஈடு செய்ய பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, a ஒரு கூட்டெண்ணுயின்,

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K$ எப்போதும் K ஐ விட அதிகமாக இருக்கும்; K க்குக் குறைபடாது.

எனவே, a ஒரு கூட்டெண்ணுயின்,

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K$ ன் மீச் சிறு மதிப்பு $K = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ஆகும். அதற்குரிய xன் மதிப்பு $= \frac{-b}{2a}$.

மேலும் a ஒரு குறையெண்ணுயின்,

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K$ எப்போதும் K ஐ விடக் குறைவாயிருக்கும்; K க்கு மிகைபடாது.

எனவே a ஒரு குறையெண்ணுயின்,

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு $K = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

அதற்குரிய x ன் மதிப்பு $=\frac{-b}{2a}$

ஆகவே ax^2+bx+c என்ற கோவையில் a ஒரு கூட்டெண்ணுயின், அக் கோவைக்கு ஒரு மீச்சிறு மதிப்புண்டு; a குறையெண்ணுயின் அக்கோவைக்கு ஒரு மீப்பெரு மதிப்புண்டு.

a கூட்டெண்ணுயின் $x=\frac{-b}{2a}$ என்று ஈடுசெய்ய, மீச்சிறு மதிப்பான $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ பெறப்படும்.

a குறை யெண்ணுயின், $x = \frac{-b}{2a}$ என்று ஈடுசெய்ய, மீப் பெருமதிப்பான $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ பெறப்படும்.

(எ-கா.) (1) x க்கு மெய்யெண் மதிப்புக்கள் கொடுக்கும் போது, பின் வருவனவற்றின் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

(1) $3x^2-8x-11$ (2) $3-2x-5x^2$

(1) $y = 3x^2-8-11$

$= 3[(x-\frac{4}{3})^2 - \frac{16}{9} - \frac{11}{3}]$

$= 3[(x-\frac{4}{3})^2 - \frac{49}{9}]$

$= 3(x-\frac{4}{3})^2 - \frac{49}{3}$.

இதன் மதிப்பு $-\frac{49}{3}$ க்குக் குறைபடாது.

$\therefore$ $x=\frac{4}{3}$ என்ற மதிப்புக்கு, மீச்சிறு மதிப்பு $-\frac{49}{3}$ ஆகும்.

மற்ருேர் வழி : $3x^2-8x-11-y=0$ எனக் கொள்வோம்.

இச் சமன்பாட்டில், x மெய்யெண் மதிப்புடைய தீர்வாக இருக்க வேண்டுமானல்,

தன்மைகாட்டி $64+12\ (11+y) \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $12y+196 \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $y \geq -\frac{196}{12} = -\frac{49}{3}$

எனவே y அல்லது $3x^2-8x-11$ ன் மதிப்பு

எப்போதும் $\geq \frac{49}{3}$ ஆகும்,

எனவே மீச் சிறு மதிப்பு $= -\frac{49}{3}$.

(2) $y = 3-2x-5x^2$

$= -5\ (x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{5})$

$= -5\ [\ (x+\frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25} - \frac{3}{5}\ ]$

$= -5\ [\ (x+\frac{1}{5})^2 - \frac{16}{25}\ ]$

$= -5\ [\ (x+\frac{1}{5})^2 + \frac{16}{5}$.

இதன் மதிப்பு $\frac{16}{5}$ க்கு மிகைபடாது, எனவே, $x = -\frac{1}{5}$ என்ற மதிப்புக்கு, அக்கோவையின் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{16}{5}$ ஆகும்.

மற்ருேர் வழி :

$y = 3 - 2x - 5x^2$ என்ற சார்பை,

$5x^2 + 2x + (y - 3) = 0$ என எழுதலாம். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வான x, மெய்யெண் மதிப்புப்பெற வேண்டுமாயின்,

தன்மைகாட்டி $4 - 20\,(y - 3) \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $64 - 20\,y \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $20\,y \leq 64$

அதாவது $y \geq \frac{16}{5}$

எனவே $y = 3 - 2x - 5x^2$ ன் மீப்பெருமதிப்பு $\frac{16}{5}$ எனப்பெறப்படும்.

(எ–கா.) (2) x மெய்யெண்ணுல், $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ ன் மீச்சிறு, மீப் பெரு மதிப்புக்கள் யாவை ?

$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $x^2(y - 1) - x\,(y + 1) + (y - 1) = 0.$

இச் சமன்பாட்டில், x மெய்யெண் தீர்வாக வேண்டுமாயின்,

தன்மைகாட்டி $(y + 1)^2 - 4\,(y - 1) \geq 0$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது, $-3y^2 + 10\,y - 3 \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது, $-3\,(y - 3)\,(y - \frac{1}{3}) \geq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

தேற்றம் 8·4·1 ன் படி, y ன் மதிப்பு $\frac{1}{3}$ க்கும் 3 க்கும் இடைப்பட்டிருக்கவேண்டும்.

அதாவது $\frac{1}{3} \leq y \leq 3.$

$\therefore\ y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ ன் $\left.\begin{array}{l}\text{மீச்சிறு மதிப்பு } \frac{1}{3} \\ \text{மீப்பெரு மதிப்பு } \frac{1}{3}\end{array}\right\}$

*(எ-கா. (3) x, y என்ற மெய்யிராசிகள் :

$8x^2 - 6\,xy - 9y^2 + 10x + 12y - 3 = 0$ என்பது இவ்விரு மெய்யிராசிகளை இணைக்கும் சமன்பாடு ஆனுல், x, yன் எல்லைகளைக் காண்க.

முதலில் இச் சமன்பாட்டை,

$8x^2 + x(10 - 6y) - (9y^2 - 12y + 3) = 0$ என, x – தேராக் கணியமான இருபடிச் சமன் பாடெனக் கொள்க.

x மெய்யெண்ணாக விருக்க வேண்டுமாயின், தன்மை காட்டி, $(10-6y)^2+32(9y^2-12y+3)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $324y^2-504y+196\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $81y^2-126y+49\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $(9y-7)^2\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

இது ஒரு சரியான இருபடியாதலின், yன் எல்லா மெய் யெண் மதிப்புக்களுக்கும், இதன் மதிப்பு எப்போதும் ≥ 0 ஆக விருக்கும்.

$\therefore$ y எம்மெய்யெண் மதிப்பும் பெறலாம்.

இரண்டாவதாக, இச்சமன்பாட்டை, $-9y^2+y(12-6x)+(8x^2+10x-3)=0$ என y – நேராக் கணியமான இருபடிச் சமன் பாடெனக் கொள்க.

y மெய்யெண்ணாக விருக்க வேண்டுமாயின், தன்மை காட்டி, $(12-6x)^2+36(8x^2+10x-3)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $324x^2+216x+36\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $81x^2+54x+9\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $9x^2+6x+1\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $(3x+1)^2\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

இது ஒரு சரியான இருபடியாதலின், x-ன் எல்லா மெய் யெண் மதிப்புக்களுக்கும், இதன் மதிப்பு, எப்போதும் ≥ 0 ஆக விருக்கும்.

$\therefore$ x எம் மெய்யெண் மதிப்பும் பெறலாம்.

எனவே, x, y எந்த மெய்யெண் மதிப்பேற்றாலும் $8x^2-6xy-9y^2+10x+12y-3=0$ என்ற சமன்பாடு பொருத்தமாகும்.

*(எ-கா.) (4) x, y என்பவை இருமெய் யிராசிகள். $9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$ என்பது இவ்விரு மெய்யிராசி களையும் இணைக்கும் சமன்பாடானால், x, y ன் எல்லைகளைக் காண்க.

முதலில் இச்சமன்பாட்டை,

$9x^2+x(2y-92)+(y^2-20y+244)=0$ என x– தேராக் கணிய மான, இருபடிச் சமன்பாடாகக் கொள்க.

x– மெய்யெண்ணாக விருக்க வேண்டுமாயின், தன்மை காட்டி, $(2y-92)^2-36\ (y^2-20y+244)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $-32y^2+352y-320\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $-y^2+11y-10\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $-(y-10)(y-1)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, இந்தக் கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதாதலின், தேற்றம் 8.4·1. ன் படி, y ன் மதிப்பு 1 க்கும் 10 க்கும் இடைப் பட்டிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, x மெய்யெண்ணாக விருக்கவேண்டுமெனின்,

$1\leq y\leq 10$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதது.

பிறகு, இச்சமன்பாட்டை,

$y^2+y\ (2x-20)+(9x^2-92x+244)=0$ என y–தேராக் கணிய மான, இருபடிச் சமன்பாடெனக் கொள்க.

y மெய்யெண்ணாக விருக்கவேண்டுமாயின், தன்மை காட்டி, $(2x-20)^2-4\ (9x^2-92x+244)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $-32x^2+288x-576\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $-x^2+9x-18\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $-(x-6)(x-3)\geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, இந்தக் கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதாதலின் தேற்றம் 8·4·1 படி, x ன் மதிப்பு 3 க்கும் 6 க்கும் இடைப்பட் டிருக்கவேண்டும்.

அதாவது y மெய்யெண்ணாக விருக்கவேண்டுமாயின், $3\leq x\leq 6$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதது.

அத்தியாயச் சுருக்கம் (8)

1. தேற்றம் 8.4·1

2. ax^2+bx+c-ன் மீப்பெரு/மீச் சிறு மதிப்புக்கள் :

(i) $\underline{a}$ கூட்டெண்ணுயின், மீச் சிறு மதிப்பு $= -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(ii) $\underline{a}$ குறையெண்ணுயின், மீப்பெரு மதிப்பு $= -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

இரண்டும் $x = \frac{-b}{2a}$ என்ற மதிப்புக்கும் பெறப்படுவன.

பயிற்சி 8 (2)

1. பின்வரும் கோவைகள் x-ன் எம்மதிப்புக்கு மீச் சிறு/மீப்பெரு மதிப்பு பெறுகின்றன, அம்மதிப்பு யாது என்பதைக் கணக்கிடுக.

(i) $4x^2-4x+1$ (iv) $-x^2+2x+2$

(ii) $2x^2-7x+7$ (v) $-x^2+6x$.

(iii) x^2+9x+9

2. x மெய்யெண்ணுயின் $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ என்ற கோவை 5க்கும் 9க்கும் இடைப்பட்ட எம்மதிப்பையும் ஏற்க முடியாதென நிறுவுக.

3. aன் மதிப்பு 1க்கும் 3க்கும் இடைப்பட்டிருப்பின், $(a-2)x^2+2(2a-3)x+(5a-6)$ என்ற கோவையை இரண்டு மெய்க் காரணிகளாக (சினைகள் – Factors)ப் பிரிக்கலாமென நிறுவுக.

4. x – மெய்யெண்ணுயின், பின்வரும் கோவைகளுக்கு ஆங்காங்கே குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன வென நிறுவுக.

(i) $\frac{1}{2} < \frac{x^2-2x+9}{x^2+2x+9} < 2$ (ii) $-3 < \frac{x^2+x+1}{x+1} < 1$

(iii) $-\frac{1}{3} < \frac{x+1}{x^2+x+1} < 1$

5. x மெய்யெண்ணுனல்;

(1) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{(x+1)(3x+1)}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு 1க்கும் 4க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்பு எதுவும் பெற முடியாதென நிறுவுக.

(2) $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+3)}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு 1க்கும் $2\frac{1}{4}$க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்பு எதுவும் பெற முடியாதென நிறுவுக.

6. x - மெய்யெண்ணுயின், பின்வரும் கோவைகளின் மதிப்புக்களுக்கு எல்லை காண்க.

(i) $\frac{x^2}{x^2+2x+4}$ (iii) $\frac{1-x}{x^2-7x+12}$

(ii) $\frac{3x^2+2}{2x^2-2x+1}$ (iv) $\frac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}$

7. $0 < c < 1$ என்ற நிபந்தனையில் x மெய்யெண்ணுகவிருக்க வேண்டுமேயானுல், $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+c}$ எந்த மெய்யெண் மதிப்பும் பெறலாம் என நிறுவுக.

*8. x, y என்ற இரண்டு மெய்யிராசிகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. x க்கும் y க்கும் உரிய எல்லைகளைக் காண்க.

(1) $4x^2+9y^2-40x-18y+108=0$

(2) $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$

(3) $x^2+4y^2-8x-16y-4=0$

(4) $x^2+2y^2-2x-6y-\frac{3}{4}=0$

9. பின்வரும் கோவைகளின் மதிப்பு மாற்றங்களைச் சுருக்கமாக எழுதி, கோட்டுப்படம் வரைந்து அவைகளை விளக்குக.

(i) x^2-2x-3 (iii) $-x^2+7x+8$

(ii) $2x^2-5x+9$ (iv) $-3x^2+6x-17$

9. பல் விதச் சமன்பாடுகள்

(Miscellaneous Equations)

பகுதி A

9.1. இதுவரை நாம் அறிந்த ஓரினச் சமன்பாடுகள், (ஒரு படிச் சமன்பாடுகள்—(Simple Equations in one unknown) ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள், (Simultaneous Equations), இருபடிச் சமன்பாடுகள், முதலியவற்றின் தீர்வுகளைக் காணும் வழிவகைகளைக் கையாண்டு, வேறு பலவிதச் சமன்பாடுகளை விடுவித்து அவைகளின் தீர்வுகள் காணும் முறைகளை இப் பகுதியில் பார்ப்போம்.

அச்சமன்பாடுகள், நாம் இதுவரை கண்ட சமன்பாட்டமைப்பில் இல்லாவிடினும், சில குறிப்பிட்ட அமைப்பில் இருக்குமானல், அவைகளைச் சில யுக்தி முறைகளைக் கொண்டு அல்லது ஈடுசெய் முறைகளைக் கொண்டு, நாம் அறிந்த சமன்பாட்டமைப்பிற்குக் கொணர்ந்து, பின்னர் அவைகளின் தீர்வுகளையறிய முயல்வோம்.

9.2. (1) $x^{2n}+ax^n+b=0$ என்ற அமைப்பு :

$x^n=y$ என ஈடுசெய்தால், ஒரு இருபடிச் சமன்பாடான, $y^2+ay+b=0$ கிட்டும்.

இதை விடுவிக்க, $y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ எனப்பட்ட, α, β என்ற இரு தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

$\therefore\quad x^n=\alpha;\quad x^n=\beta$

$\therefore\quad x=\sqrt[n]{\alpha}\ ;\ x=\sqrt[n]{\beta}$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

$x^4 = y$ என ஈடு செய்ய,

$y^2 - 17y + 16 = 0$ பெறப்படும்.

இங்கு $y = 1, 16$ தீர்வுகளாகும்.

அதாவது, $x^2 = \pm 1$, $x^2 = \pm 4$

அதாவது $x = \pm 1, \pm i, \pm 2, \pm 2i$ என்ற 8 தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(3) $(x+a)^4 - 6(x+a)^2 + 8 = 0$ ன் தீர்வு காண்க.

$(x+a)^2 = y$ என ஈடுசெய்ய,

$y^2 - 6y + 8 = 0$ பெறப்படும்

$\therefore\ y = 2, 4$

$(x+a)^2 = 2$; $(x+a)^2 = 4$

$\therefore\ x + a = \pm\sqrt{2}$; $(x+a) = \pm 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{2} - a$; $x = \pm 2 - a$.

$\sqrt{2} - a$; $-\sqrt{2} - a$; $2 - a$; $-2 - a$ என்ற நான்கு தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(4) $2x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0$ ன் தீர்வு காண்க.

$x^{\frac{1}{3}} = y$ என ஈடுசெய்ய,

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$\therefore\ y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$= 2, \tfrac{1}{2}.$$

$\therefore\ x^{\frac{1}{3}} = 2$, அதாவது $x = 8$;
$x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, அதாவது $x = \frac{1}{8}$ } தீர்வுகள்.

9.3. (1) $\underline{(ax^2+bx+c)+p\,(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}+q=0}$ என்ற அமைப்பு :

$$(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}=y \text{ என ஈடுசெய்ய,}$$

$y^2+py+q=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதை விடுவித்தால் $y=\alpha,\ \beta$ என்ற இரு தீர்வுகள் $\left(\text{அதாவது } \dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$ கிடைக்கும்.

$$\therefore\quad (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}=\alpha,\ \beta.$$

அதாவது $ax^2+bx+c=\alpha^2$

$ax^2+bx+c=\beta^2$ என்ற இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். இவைகளை விடுவிக்க, xக்கு நான்கு தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(2) $(2x^2+x+4)-4(2x^2+x+4)^{\frac{1}{2}}-5=0$ன் தீர்வுகள் காண்க.

$y=(2x^2+x+4)^{\frac{1}{2}}$ என ஈடுசெய்ய,

$y^2-4y-5=0$ பெறப்படும்.

$\therefore\quad y=5,\ -1$ தீர்வுகளாம்.

$\therefore\quad 2x^2+x+4=25$

$2x^2+x+4=1$ என இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

இவைகளை விடுவித்தால், xன் நான்கு தீர்வுகள் கிடைக்கும். அவையாவன :

$$3,\ -\tfrac{7}{2},\ \frac{-1\pm i\sqrt{23}}{4}$$

9.4. (1) அமைப்பு : $(a+b)=(c+d)$ என்பதற்கொப்ப, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=p$ என்ற சமன்பாடு :

$$\therefore\quad (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)-p=0$$

$$\therefore\quad (x^2+x\,\overline{a+b}+ab)(x^2+\overline{c+d}\,x+cd)-p=0$$

$$x^2+x\,\overline{a+b}=y \text{ என ஈடுசெய்ய,}$$

$(y+ab)(y+cd)-p=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதை விடுவித்தால், $y=\alpha,\ \beta$ என இரு தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

எனவே $x^2+x(a+b)=\alpha$

$x^2+x(a+b)=\beta$ என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.
இவைகளை விடுவிக்க xன் தீர்வுகள், நான்கு கிடைக்கும்.

(2) $(x+2)\ (x+5)\ (x+7)\ (x+10)+36=0$ ன் தீர்வுகள் காண்க:

$(x+2)\ (x+10)=x^2+12x+20=y$ என கொள்க.

$(x+5)\ (x+7\ )=x^2+12x+35=y+15$ ஆகும்.

$\therefore\ y\ (y+15)+36=0$

$\therefore\ y^2+15y+36=0$

$$\therefore\ y=\frac{-15\pm\sqrt{225-144}}{2}$$

$$=\frac{-15\pm 9}{2}$$

$=-12,\ -3$ தீர்வுகளாகும்.

$\therefore\ x^2+12x+20=-12$

அதாவது $x^2+12x+32=0$

$\therefore\ x=-4,\ -8$ இரண்டு தீர்வுகள்.

மேலும் $x^2+12x+20=-3$

அதாவது $x^2+12x+23=0$

$$\therefore\ x=\frac{-12\pm\sqrt{144-92}}{2}$$

$$=\frac{-12\pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$=-6\pm\sqrt{13}$ மற்றிரண்டு தீர்வுகள்.

$\therefore$ தீர்வுகள்: $-4,\ -8,\ -6,\pm\sqrt{13}$.

9.5. (1) அமைப்பு: $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{px+q}$
இரு பக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்த,

$ax+b+cx+d+2\sqrt{(ax+b)\ (cx+d)}=px+q$

$\therefore\ 2\sqrt{(ax+b)\ (cx+d)}=x(p-a-c)+(q-b-d)$

மறுபடியும் இருபக்கங்களேயும் இருபடிக்குயர்த்த,

$4(ax+b)(cx+d)=x^2(p-a-c)^2+2x(p-a-c)(q-b-d)+(q-b-d)^2$

இதைச் சுருக்கினுல்.

$Ax^2+Bx+C=O$ என்ற அமைப்பில் ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதன் தீர்வுகளை முறைப்படி யறியலாம்.

(2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x-21}=\sqrt{2x+4}$ ன் தீர்வு காண்க.

இரு பக்கங்களேயும் இருபடிக்குயர்த்த,

$x-5+x-21+2\sqrt{x^2-26x+105}=2x+4$

$\therefore\ 2\sqrt{x^2-26x+105}=30$

இரு பக்கங்களேயும் 2 ஆல் வகுத்து, இருபடிக்குயர்த்த,

$x^2-26x+105=225$ பெறப்படும்.

$\therefore\ x^2-26x-120=0$

$$\therefore\ x=\frac{26\pm\sqrt{676+480}}{2}$$

$=30, -4$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

9.6. (1) அமைப்பு: $ax^2+bx+c=\dfrac{p}{ax^2+bx+c^1}$

$ax^2+bx=y$ எனக் கொள்க.

$\because\ (y+c)(y+c^1)=p$ என்ற ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இதை விடுவித்தால் $y=\alpha, \beta$ என இருதீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(2) $x^2+5x=\dfrac{8}{x^2+5x+2}$ ன் தீர்வுகள் காண்க.

$x^2+5x=y$ எனக் கொள்க.

$\therefore\ y(y+2)-8=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$\therefore\ y^2+2y-8=0$

$\therefore\ y=2, -4$

$\therefore\ \left.\begin{matrix}x^2+5x=2\\ x^2+5x=-4\end{matrix}\right\}$ என்ற இருசமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$x^2+5x-2=0$

$\because \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$ இரண்டு தீர்வுகள்.

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$\therefore \quad x = -1, \ -4$ மற்றிரண்டு தீர்வுகள்.

தீர்வுகளாவன : $-1, \ -4, \ \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$

9.7. (1) அமைப்பு : $a^{2x} + b.a^x + c = 0.$

$a^x = y$ எனக்கொள்க,

$y^2 + by + c = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இதன் தீர்வுகள் α, β எனக் கொண்டால்,

$$a^x = \alpha$$

$$x \text{ மகை } a = \text{மகை } \alpha$$

$$\therefore \quad x = \frac{\text{மகை } \alpha}{\text{மகை } a} \text{ ஒரு தீர்வு.}$$

அவ்வாறே $x = \frac{\text{மகை } \beta}{\text{மகை } a}$ மற்றொரு தீர்வு.

(2) $4^x + 2 \cdot 2^x = 24.$

$2x = y$ எனக் கொள்க.

$y^2 + 2y - 24 = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2}$$

$$= 4, \ -6.$$

$2x = 4$

$\therefore \quad x = 2$ ஒரு தீர்வு.

$2x = -6$ என்பதற்குக் கற்பனையெண் தீர்வுதான் கிடைக்கும்.

ஏனெனில்,

x மகை $2 =$ மகை (-6)

மகை (-6) ஒரு மெய்யெண்ணாகாது.

பயிற்சி 9 (1)

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(1) $x^6 - 5x^3 - 24 = 0$

(2) $(2x-5)^4 - 10(2x-5)^2 + 9 = 0.$

(3) $2\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) - 25 = 0$

(4) $3\sqrt{x} + x = 10$

(5) $x^{\frac{4}{5}} - 3x^{\frac{2}{5}} = 4$

(6) $4(2x^2+3x+4) + 5(2x^2+3x+4)^{\frac{1}{2}} = 51$

(7) $(x^2+5x) - 5\sqrt{x^2+5x} = 6$

(8) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$

(9) $x(x+5)(x+3)(x+8) = 16$

(10) $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7) - 9 = 0$

(11) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{5x-4}$

(12) $\sqrt{1-3x} + \sqrt{3x+7} = 2\sqrt{x+5}$

(13) $x^2 - 5x + 3 = \frac{3}{x^2 - 5x + 5}$

(14) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

(15) $6^{2x} - 18 \cdot 6^x + 72 = 0.$

பகுதி B.

ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்

(Simultaneous Equations):

9·8. $ax+by+c=0$

$a^1x+b^1y+c^1=0$ என்ற அமைப்பிலுள்ள ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளில் x, yன் தீர்வுகளைக் காணும் முறைகளை நாம் அறிவோம்.

குறுக்குப் பெருக்கல் முறைப்படி,

$$\frac{x}{bc^1-b^1c}=\frac{y}{ca^1-c^1a}=\frac{1}{ab^1-a^1b}$$

$$\therefore \quad x=\frac{bc^1-b^1c}{ab^1-ab^1},$$

$$y=\frac{ca^1-c^1a}{ab^1-a^1b},$$ என்பவை தீர்வுகளாகும்.

அல்லது, இரு சமன்பாடுகளையும் முறையே a^1, aஆல் பெருக்கி, ஒன்றிலிருந்து ஒன்றைக் கழித்து, yஐ முதலில் கண்டு கொண்டு, பின்னர் ஒரு சமன்பாட்டில் yக்கு ஈடுசெய்து, x ஐக் காணலாம் என்று நாம் அறிவோம்.

முதல் கூறப்பட்டது "குறுக்குப் பெருக்கல்" முறை (Method of Cross Multiplication).

இரண்டாவது கூறப்பட்டது "விலக்கல் முறை" (Method of Elimination).

9·8·1. விலக்கல் முறை : இம்முறை கொண்டு, ஒரு படி, ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் யாவற்றையும் விடுவிக்கலாம். எத்தனை தேராக்கணியங்கள் உள்ளனவோ, அத்தனை சார்பிலா ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Independent Equations) கொடுக்கப் பட்டால், அத்தனை தேராக் கணியங்களின் தீர்வுகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

x, y, z என்ற தேராக்கணியங்களை இணைத்து, மூன்று சார்பிலா ஒரு படிச் சமன்பாடுகள் இருந்தால், அவைகளைக் கண்டு x, y, zன் தீர்வுகள் காணலாம்.

பொது அமைப்பு.

$$ax+by+cz=d$$
$$a^1x+b^1y+c^1z=d^1$$
$$a^{11}x+b^{11}y+c^{11}z=d^{11}$$

முதலிரண்டையும், முறையே a^1, a ஆல் பெருக்கிக் கழிக்க, $Ay+Bz=D$ என்ற ஓர் சமன்பாடு வரும்.

இரண்டாவதையும், மூன்ருவதையும், முறையே a^{11}, a^1 ஆல் பெருக்கிக் கழிக்க,

$A^1y+B^1z=D^1$ என்ற ஓர் சமன்பாடு வரும்.

y, z ஆல் ஆன இவ்விரு சமன்பாடுகளினின்றும், y, zன் தீர்வுகளைக் கண்டு, முதல் கொடுக்கப்பட்ட, மூன்று சமன் பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் அத்தீர்வுகளை ஈடுசெய்ய, x பெறப்படும்.

(எ-கா.) (1) $2x-3y+3z=5$ (A)

$$3x+6y-4z=3 \quad \text{(B)}$$
$$4x+3y-2z=4 \quad \text{(C)}$$

என்ற சமன்பாடுகளினின்று x, y, z காண்க.

(A) × 3 : $6x-9y+9z=15$

(B) × 2 : $6x+12y-8z=6$

கழிக்க, $-21y+17z=9$ (D)

$$(B)\times 4:\quad 12x+24y-16z=12$$

$$(C)\times 3:\quad 12x+9y-6z=12$$

கழிக்க, $15y-10z=0$ (E)

$$(D)\times 5:\quad -105y+85z=45$$

$$(E)\times 7:\quad 105y-70z=0$$

கூட்டினல், $15z=45$

$$z=3$$

$z=3$ என (E)ல் ஈடு செய்ய $y=2$

$y=2, z=3$ என (A)ல் ஈடு செய்ய $x=1$

எனவே $x=1$; $y=2$; $z=3$ என்ற தீர்வுகள் பெறப்படும்.

(எ-கா.) (2) (a): சிறப்பாக, இப்படிப்பட்ட மூன்று சமன்பாடுகளில் இரண்டு சமன்பாடுகள் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக, மூன்ருவது சமன்பாடு, ஏதாவதொரு எண்ணுக்குச் சமமாக்கப்பட்டால், குறுக்குப் பெருக்கல் முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

அமைப்பு: $ax+by+cz=0$

$$a^1x+b^1y+c^1z=0$$

$$a^{11}x+b^{11}y+c^{11}z+d$$

முதலிரண்டு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு, குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில்,

$$\frac{x}{bc^1-b^1c}=\frac{y}{ca^1-c^1a}=\frac{z}{ab^1-a^1b}=t$$

எனக் கொள்க.

அப்போது $x=(bc^1-b^1c)\ t$;

$$y=(ca^1-c^1a)\ t;$$

$$z=(ab^1-a^1b)\ t;$$

இவற்றை மூன்றும் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய, t ன் மதிப்பு கிடைக்கும். அதைப் பயன்படுத்தி x, y, z தீர்வுகளைக் காண்க.

(எ-கா.) (2) (b) விடுவிக்க : $5x-3y+2z = 0$ (A)

$3x+4y-22z = 0$ (B)

$2x+3y+4z = 20$ (C)

(A), (B) இரண்டையும் கொண்டு, குறுக்குப் பெருக்கல் முறைப்படி,

$$\frac{x}{66-8} = \frac{y}{6+110} = \frac{z}{20+9} = t$$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad x = 58\,t\,;$$
$$y = 116\,t\,;$$
$$z = 29\,t\,;$$

இதை (C)ல் ஈடு செய்ய,

$$116\,t + 348\,t + 116\,t = 20$$

$$\therefore \quad 580\,t = 20$$

$$\therefore \quad t = \frac{20}{580} = \frac{1}{29}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x = 58t = 2 \\ y = 116t = 4 \\ z = 29t = 1 \end{array}\right\}$$ தீர்வுகளாகும்.

9·8·2. பொதுவாக, n தேராக்கணியங்களை இணைத்து, n ஒருபடி ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் (சார்பில்லாதவை) கொடுக்கப்பட்டால், அவைகள் யாவற்றையும் விலக்கல் முறை கொண்டு விடுவிக்கலாம்.

9.8·3. x, y என்ற இரு தேராக் கணியங்களையிணைத்து, ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடும், மற்றோர் இருபடிச் சமன்பாடும் கொடுக்கப்பட்டால், x, yன் தீர்வுகளை அறியும் முறையைக் காண்போம்.

பொது அமைப்பு. $px+qy+r=0 \quad (1)$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad (2)$$

(1) லிருந்து x ஐ அல்லது, y ஐ மற்றொன்றின் சார்பாக முதலில் கொள்வோம்.

$$x=\frac{-(qy+r)}{p}; \text{ அல்லது } y=\frac{-(px+r)}{q}.$$

இதில் ஏதாமொன்றை இரண்டாவது இருபடிச் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய, yல் அல்லது xல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். அதைவிடுவிக்க, ஒன்றன் தீர்வு கிட்டும். அதை (1)ல் ஈடுசெய்ய, மற்றொன்றின் தீர்வு கிட்டும்.

(எ-கா.) $x+y=6$;

$x^2+y^2+3xy-4x=28$; x, yன் தீர்வுகள் காண்க.

$x=6-y$ என இரண்டாவது சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய,

$$(6-y)^2+y^2+3y(6-y)-4(6-y)=28$$

அதாவது $\quad -y^2+10y-16=0$

அதாவது $\quad x^2-10y+16=0$

$\therefore \quad y=8, 2.$

$y=-2, 4.$

பொருத்தமான தீர்வுகள் :

x	-2	4
y	8	2

9.8·4. இருசமன்பாடுகளும் இருபடிச் சமன்பாடுகளாயின் விடுவிக்கும் முறை :

பொது அமைப்பு :

$$ax^2 + 2\,hxy + by^2 + 2\,gx + 2\,fy + c = 0$$

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

(எ-கா.) (1)

விடுவிக்க : $3x^2 - xy + y^2 + x - y = 12 \qquad (1)$

$16x^2 - 9xy + 5y^2 + 11x - 5y = 60 \qquad (2)$

(1) × 5 : $15x^2 - 5xy + 5y^2 + 5x - 5y = 60 \qquad (3)$

(2) − (3) : $x^2 - 4xy + 6x = 0$

$\therefore \quad x(x - 4y + 6) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ ஒரு தீர்வு.

$x = 4y - 6$ என்ற தொடர்பும் பெறப்படும்.

$x = 0$ ஆனல் (1)ல் ஈடுசெய்ய,

$y^2 - y - 12 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore \quad y = 4, -3$

$x = 4y - 6$ என (1)ல் ஈடுசெய்ய,

$3(4y - 6)^2 - y(4y - 6) + y^2 + 4y - 6 - y = 12$ பெறப்படும்.

$\therefore \quad 45y^2 - 135y + 90 = 0$

அதாவது $y^2 - 3y + 2 = 0$

$\therefore \quad y = 1, 2$

உரிய $x = -2, 2.$

எனவே பொருத்தமான தீர்வுகள் பின்வருமாறு :

x	0	0	−2	2
y	4	−3	1	2

(எ–கா.) (2) : விடுவிக்க : $x^2+y^2+x+y=18$ (1)

$xy=6$ (2)

(1)+(2)×2 : $x^2+y^2+2xy+x+y=30$ பெறப்படும்.

$\therefore\ (x+y)^2+(x+y)-30=0$

$x+y=z$ என ஈடுசெய்ய,

$z^2+z-30=0$

$\therefore\ z=-6,\ 5.$

அதாவது $\left.\begin{aligned} x+y&=-6 \\ x+y&=5 \end{aligned}\right\}$ இரு தீர்வுத் தொடர்கள்.

இப்போது $\left.\begin{aligned} x+y&=-6 \\ xy&=6 \end{aligned}\right\}$ என்ற இரு சமன்பாடுகளையும்

$\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ xy&=6 \end{aligned}\right\}$ என்ற இரு சமன்பாடுகளையும்

தனித் தனியாக விடுவிப்போம்.

$x+y=-6$

$\therefore\ x=-6-y$

$xy=6$ என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய, $y(-6-y)=6$ பெறப்படும்.

$$\therefore\ y^2+6y+6=0$$

$$\therefore\ y=\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &= -3\pm\sqrt{3} \\ \text{உரிய } x &= -3\pm\sqrt{3}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ xy&=6\end{aligned}\right\}$$

$x=5-y$ என $xy=6$ என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$y(5-y)=6$ பெறப்படும்.

$\therefore\ y^2-5y+6=0$

$\therefore\ y=2,\ 3$

$x=3,\ 2$

பொருத்தமான தீர்வுகள் :

x	$-3+\sqrt{3}$	$-3-\sqrt{3}$	2	3
y	$-3-\sqrt{3}$	$-3+\sqrt{3}$	3	2

(எ-கா.) (3) : விடுவிக்க : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$ (1)

$8\,xy=1$ (2)

(1) ஐ $x+y=6\,xy$ என எழுதலாம்.

$xy=\frac{1}{8}$ என இதில் ஈடு செய்ய,

$x+y=\frac{6}{8}$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore\ \left.\begin{aligned} x+y&=\tfrac{3}{4} \\ xy&=\tfrac{1}{8}\end{aligned}\right\}$ என்ற இரு சமன்பாடுகள் கொண்டு x, yன் தீர்வுகள் காணலாம்.

$x=\frac{3}{4}-y$ என $xy=\frac{1}{8}$ என்ற சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய,

$y\left(\frac{3}{4}-y\right)=\frac{1}{8}$ பெறப்படும்.

$\therefore\ y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{8}=0$

அதாவது $8y^2-6y+1=0$

$\therefore\ y=\frac{6\pm 2}{16}$

$=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$

பொருத்தமான தீர்வுகள் :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

9.8·5. சிறப்பாக, இரு சமன்பாடுகளிலும் x, y சார்புடைய பகுதிகள் மட்டும், சமபடித்தானவையாயிருந்தால், அவை சமபடிச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous Equations) எனப்படும்.

அவைகளை ஒரு சிறப்பான முறையில் விடுவிக்க முடியும்.

அமைப்பு : $ax^2+2hxy+by^2=d$

$\mathrm{A}x^2+2\mathrm{H}xy+\mathrm{B}y^2=\mathrm{D}$

(எ-கா.) $2x^2-3xy+4y^2=12$

$x^2-xy+2y^2=7$

இங்கு $y=vx$ என ஈடு செய்வோம்.

அப்போது $2x^2-3vx^2+4v^2x^2=12$

$x^2-vx^2+2v^2x^2=7$

என்ற சமன்பாடுகள் பெறப்படும். ஒன்றை, மற்றொன்றால் வகுக்க,

$\frac{x^2(2-3v+4v^2)}{x^2(1-v+2v^2)}=\frac{12}{7}$ எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore \quad \frac{2-3v+4v^2}{1-v+2v^2}=\frac{12}{7}$$

$$\therefore \quad 14-21v+28v^2=12-12v+24v^2$$

$$\therefore \quad 4v^2-9v+2=0$$

$$\therefore \quad v=\frac{9\pm7}{8}$$

$$=2,\ \tfrac{1}{4}$$

$\therefore$ $y=2x$ என்பது ஒரு தொடர்பு;

$y=\frac{1}{4}x$ மற்றோர் தொடர்பு.

$y=2x$ என முதல் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$$2x^2-6x^2+16x^2=12$$

$$\therefore \quad 12x^2=12$$

$$\therefore \quad x^2=1$$

$$\therefore \quad x=\pm1$$

$\therefore$ உரிய $y=\pm2$

$y=\frac{1}{4}x$ என முதல் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய,

$$2x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^2}{4}=12$$

$$\therefore \quad 8x^2-3x^2+x^2=48$$

$$\therefore \quad 6x^2=48$$

$$\therefore \quad x^2=8$$

$$\therefore \quad x=\pm2\sqrt{2}$$

$\therefore$ உரிய $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

பொருத்தமான தீர்வுகள் :

x	1	-1	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
y	2	-2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

பயிற்சி 9 (2)

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண்க :

1. $2x-y+6z=0$
   $x+y-8z=0$
   $2x-4y+37z=27$

2. $x+y=5$
   $x^2+y^2=17$

3. $x-y=6$
   $xy=16$

4. $2x-y=3$
   $x^2+xy+y^2=7$

5. $x^2-xy=8x+3$
   $xy-y^2=8y-6$

6. $x^2+y^2=xy+7$
   $x^2-y^2=xy-1$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$
   $x^2+y^2=5$

8. $x^2y^2+2(x+y)=15$
   $xy+6=0$

9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$
   $2x^2-2y^2=5xy$

10. $3x^2-2xy+3y^2=27$
    $2x^2-3xy+2y^2=8$

11. $x^2+y^2=193$
    $xy=84$

12. $x^2-y^2=27$
    $xy=18$

13. $x+y=8$
    $x^3-y^3=224$

(குறிப்பு : $\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$)

14. $x-y=4$
    $x^3-y^3=124$

15. $x^2+xy+y^2=19$
    $x^2-xy+y^2=7$

10. கூட்டுத் தொடர்

(Arithmetical Progression):

10.1. ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி ஒன்றன்பின் ஒன்ருக அடுக்கப்பட்ட இராசிகளுக்கு ஒரு தொடர் (Sequence) என்று பெயர். ஒவ்வொரு இராசியும் அத் தொடரின் உறுப்பு எனப் படும்.

தொடர்கள் பொதுவாக இருவகைப்படும். அவை, முடிவுள்ள தொடர் (Finite Sequence), முடிவற்ற தொடர் (Infinite Sequence) எனப்படும்.

முடிவுள்ள தொடர்: ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புக் களின் எண்ணிக்கை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுக விருப்பின் அதற்கு முடிவுள்ள தொடர் என்று பெயர்.

(எ-கா.) 1, 2, 3... 100 வரை (நூறு உறுப்புக்கள்).

முடிவற்ற தொடர்: ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புக் களின் எண்ணிக்கை அளவற்றதாக போய்க்கொண்டே இருக்குமாயின் அதற்கு முடிவற்ற தொடர் என்று பெயர்.

(எ-கா.) (1) 1, 2, 3............கந்தழி வரை,

(2) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$............கந்தழி வரை.

10.2. நாம், புகுமுக வகுப்பு நிலையில், பெரும்பாலும் முடிவுள்ள தொடர்களைப் பற்றித்தான் ஆராய்வோம். விதி விலக் காக, ஓரிரண்டு, முடிவற்ற தொடர்களைப் பற்றியும் தெரிந்து கொள்வோம்.

கூட்டுத் தொகை (Sum of a Series): ஒரு முடிவுள்ள தொடரில் உள்ள இராசிகளை (உறுப்புக்களை)க் கூட்டி வரும் தொகைக்கு அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகை என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டாக, $u_1, u_2, \ldots u_n$ என்ற n இராசிகள் (உறுப்புக்கள்) உள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகை,

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$.

ஓர் முடிவற்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகை கொஞ்சம் சிக்கலானது. இந்நூலில் அதைப்பற்றி விரிவாகக் கூறப்படமாட்டாது.

10.3. கூட்டுத் தொடர்—வரையறை :

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புக்கள் ஒன்றன் பின் ஒன்று ஒரே எண் வித்தியாசத்தால் உயர்ந்து கொண்டோ. குறைந்து கொண்டோ போகுமானல், அத் தொடருக்குக் கூட்டுத் தொடர் என்று பெயர்.

3, 7, 11, 15, 19... என்ற தொடரைப் பார்ப்போம். இத் தொடரில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முன்னிருக்கும் உறுப்பைவிட 4 அதிகமாக இருக்கிறது. இந்த விதிப்படி, நாம் மேலும் உறுப்புக்களை 23, 27, 31... என்று எழுதிச் செல்லலாம்.

1, 3, 5, 7, 9,... என்ற தொடரும் அவ்வாறே உறுப்புக்கள் இரண்டு, இரண்டாக, உயர்ந்து செல்கின்றன.

17, 14, 11, 8, 5, 2, −1, −4... என்ற தொடரும் அவ்வாறே. ஆனல் உறுப்புக்கள், மூன்று, மூன்ருகக் குறைந்து செல்கின்றன.

பொதுவாக, இந்த அமைப்பை, இயற் கணித முறையில்,

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ என்று எழுதலாம். d கூட்டெண்ணுகவோ, அல்லது குறையெண்ணுகவோ இருக்கலாம்.

இங்கு, a கூட்டுத் தொடரின் முதலுறுப்பு (First Term) எனவும், d கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு (Common difference) எனவும் கூறப்படும்.

எனவே, ஒரு கூட்டுத் தொடரில், முதல் உறுப்பும், பொது வேறுபாடும் கொடுக்கப் பட்டால், அத் தொடர் முழுதும் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது.

பின் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களைக் காண்க :

கூட்டுத் தொடர்கள்	முதல் உறுப்பு a	பொது வேறுபாடு $d\ (\pm)$
$3,\ 7.\ 11,\ 15,\ 19 \ldots\ldots\ldots\ldots$	3	$4\ (+)$
$17,\ 14,\ 11,\ 8,\ 5,\ 2, -1, -4, \ldots$	17	$-3\ (-)$
$-7,\ -10,\ -13,\ -16, \ldots\ldots\ldots$	-7	$-3\ (-)$
$-8,\ -4,\ 0,\ 4,\ 8, \ldots\ldots\ldots$	-8	$4\ (+)$
$1,\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{3},\ 3, \ldots\ldots\ldots$	1	$\frac{2}{3}\ (+)$
$a,\ a-d,\ a-2d, \ldots\ldots\ldots\ldots$	a	$-d$

10.4. கூட்டுத் தொடரில் பொது உறுப்பு (General Term) :

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் உறுப்பும், பொது வேறுபாடும் கொடுக்கப்பட்டால், அத் தொடரில் எந்த உறுப்பையும் கண்டு பிடிக்கலாம்.

முதல் உறுப்பு $\underline{a}$; பொது வேறுபாடு $\underline{d}$.

இரண்டாம் உறுப்பு $= a + d$

மூன்றாவது உறுப்பு $= a + 2d$

இந்த நியதிப்படி, r–வது உறுப்பு $= a + (r-1)d$.

பொதுவாக, n–வது உறுப்பு $T_n = a + (n-1)\ d$.

என எழுதுவது மரபு.

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் இரண்டு உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், அத் தொடர் கிடைக்கப் பெறும்.

a, b ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் இரண்டு உறுப்புக்களாயின், பொது வேறுபாடு $(b-a)$.

எனவே $T_n = a + (n-1)\ (b-a)$.

10·4,1 : $a, a+d, a+2d, \ldots\ldots\ldots a+\overline{n-2}d, a+\overline{n-1}d$ என்ற ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களை, தலைகீழ் வரிசையாக,

$a+\overline{n-1}d, a+\overline{n-2}d, \ldots\ldots\ldots a+2d, a+d, a$ என எழுதினால் மற்றொரு கூட்டுத் தொடர் பெறப்படும்.

இங்கு $l= a+\overline{n-1}d$ என்று முதலுறுப்பைக் குறிப்பிட்டால், பின் கூறப்பட்ட தொடர், $l, l-d, l-2d, \ldots\ldots\ldots l-\overline{n-2}d, l-\overline{n-1}d$ பெறப்படும். இங்கு வேறுபாடு $= -d$.

10·5. கூட்டுத் தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை (Sum of the first n terms) :

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ (a+\overline{n-2}d)+(a+\overline{n-1}d)$$

10.4.1 படி $S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ (l-\overline{n-2}d)+(l-\overline{n-1}d)$

இரு வரிசைகளையும் கூட்ட,

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots\ n \text{ முறைகள்}$$
$$=n(a+l).$$

$$\therefore S_n=\frac{n}{2}\left[a+l\right] \qquad \text{(வாய்பாடு).}$$

$$=\frac{n}{2}\left[a+a+\overline{n-1}d\right]$$

$$=\frac{n}{2}\left[2a+\overline{n-1}\,d\right] \qquad \text{(வாய்பாடு).}$$

இங்கு $l=a+\overline{n-1}d=n$ வது உறுப்பு T_n.

$\therefore S_n=\frac{n}{2}\left(T_1+T_n\right)$ எனவும் கவனத்தில் வைக்கலாம்.

(T_1 : முதலுறுப்பு ; T_n : nவது உறுப்பு).

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(1) 1 முதல் n வரையுள்ள இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகை $=\frac{n}{2}(1+n)$.

(2) 1 முதல் n ஒற்றைப் படை எண்களின் கூட்டுத் தொகை $= n^2$

1, 3, 5, ... என்ற தொடரில் n வது உறுப்பு $= 2n - 1$

$$\therefore\ 1+3+5 \ldots + (2n-1) = \frac{n}{2}[1+2n-1]$$

$$= \underline{n^2}.$$

(3) 2 முதல் n இரட்டைப் படை எண்களின் கூட்டுத் தொகை $= n\,(n+1)$.

2, 4, 6, ... என்ற தொடரில் n வது உறுப்பு $= 2n$

$$\therefore\ 2+4+6+ \ldots 2n\ \frac{n}{2} = (2+2n)$$

$$= \underline{n(n+1)}.$$

(எ-கா.) (1) 12, 9, 6, ... என்ற கூட்டுத் தொடரில் 20வது உறுப்பென்ன? nவது உறுப்பென்ன? முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை யென்ன?

முதலுறுப்பு $a = 12$

பொது வேறுபாடு $d = -3$

$$\therefore\ T_{20} = 12+(20-1)(-3)$$
$$= 12-57$$
$$= -45$$

$$T_n = 12+(n-1)(-3)$$
$$= 15-3n$$

$$S_n = \frac{n}{2}[12+15-3n]$$

$$= \frac{n(27-3n)}{2}.$$

(எ-கா.) (2) a, b, c, d ... கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமானல்

(1) $a+k, b+k, c+k,$ ...... கூட்டுத் தொடர்:

(2) $a-k, b-k, c-k,$ ...... கூட்டுத் தொடர்:

(3) $ma, mb, mc,$ ...... கூட்டுத் தொடர்:

(4) $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m},$ ...... கூட்டுத் தொடர்;

என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட a, b, c, d ... என்ற கூட்டுத் தொடரில்

பொது வேறுபாடு $= b-a$

$= c-b$

$= d-c$ (சமமானவை)

(1) $a+k, b+k, c+k$ ... என்ற தொடரில் பொது

வேறுபாடு $= b-a$

$= c-b$ (சமமானவை)

(2) $a-k, b-k, c-k$ ... என்ற தொடரில் பொது

வேறுபாடு $= b-a$

$= c-b$ (சமமானவை)

(3) ma, mb, mc ... என்ற தொடரில் பொது

வேறுபாடு $= m(b-a)$

$= m(c-b)$ (சமமானவை)

(4) $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m},$ ... என்ற தொடரில்

பொது வேறுபாடு $= \frac{1}{m}(b-a)$

$= \frac{1}{m}(c-b)$ (சமமானவை)

அதாவது, பொதுவாக,

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் உள்ள உறுப்புக்கள்

(a) ஒவ்வொன்ருேடு ஒரு குறிப்பிட்ட எண் (மாறிலி) கூட்டினுலும்,

(b) ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணை (மாறிலியை)க் கழித்தாலும்,

(c) ஒவ்வொன்றையும். ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுல் (மாறிலியால்) பெருக்கினுலும், வகுத்தாலும், பெறப்படும் தொடர்கள், கூட்டுத் தொடர்களாகும் என்பது தெளிவு.

(எ.-கா.) (3) ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 10–வது உறுப்பு 31; 18–வது உறுப்பு 55. அக் கூட்டுத்தொடர் காண்க.

முதலுறுப்பு $\underline{a}$ எனவும், பொது வேறுபாடு $\underline{d}$ எனவும் கொள்க.

$$T_{10} = a + 9d = 31$$

$$T_{18} = a + 17d = 55$$

எனவே, $8d = 24$

$$\therefore \quad d = 3$$

மேலும் $a = 4$

எனவே அக்கூட்டுத் தொடர்,

$$4, 7, 10, 11, \ldots\ldots\ldots 4 + 3(n-1) \ldots\ldots$$

(எ. கா.) (4) ஒரு கூட்டுத் தொடரில் m வது உறுப்பு n; n வது உறுப்பு m; அக்கூட்டுத் தொடரின் முதலுறுப்பு, பொது வேறுபாடு, முதல் $m+n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$$Tm = a + (m-1)\,d = n$$

$$Tn = a + (n-1)\,d = m$$

$$\therefore (m-n)\,d = n-m$$

$\therefore d = -1$ எனவும்

$a = m+n-1$ எனப் பெறப்படும்,

முதல் $(m+n)$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}\left[2(m+n-1) + (m+n-1)(-1)\right]$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$$

(எ-கா.) (5) ஒரு தொடரின் n வது உறுப்பு $a+bn$. அது ஒரு கூட்டுத் தொடரென நிறுவி, முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$$T_n = a + bn.$$

$$\therefore \quad T_1 = a + b$$

$$T_2 = a + 2b$$

$$T_3 = a + 3b$$

$$T_4 = a + 4b$$

$$T_2 - T_1 = b = T_3 - T_2 = T_4 - T_3 \ldots\ldots\ldots$$

எனவே, அக்கூட்டுத் தொடரின்
முதலுறுப்பு $= a + b$;

பொது வேறுபாடு $= b$.

$\therefore$ முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= \frac{n}{2}\left[2(a+b) + (n-1)b\right]$$

$$= \frac{n}{2}(2a + \overline{n+1}b).$$

$$= an + \frac{n(n+1)b}{2}.$$

$= An^2 + Bn$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது. இங்கு $A = \frac{b}{2}$; $B = \left(a + \frac{b}{2}\right)$. அடுத்த எடுத்துக் காட்டில் இதன் மறுதலையாக, ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $An^2 + Bn$ என்ற அமைப்பில் இருக்குமானல், அத் தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் என நிறுவுவோம்.

(எ.-கா.) (6) ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $An^2 + Bn$. அது ஒரு கூட்டுத்தொடரென நிறுவுக.

$S_1 = T_1 = A + B.$ $\qquad T_1 = A + B.$

$S_2 = T_1 + T_2 = 4A + 2B$ $\qquad \therefore T_2 = 3A + B.$

$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 9A + 3B$ $\qquad \therefore T_3 = 5A + B.$

$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 16A + 4B$ $\therefore T_4 = 7A + B$

எனவே $T_2 - T_1 = 2A = T_3 - T_2 = T_4 - T_3$.

$\therefore$ முதலுறுப்பு $A + B$; பொது வேறுபாடு $2A$ கொண்ட கூட்டுத்தொடர் எனத்தெரிகிறது. இப்படியான கூட்டுத் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{n}{2}\left[2A + 2B + (n-1)2A\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2nA + 2B\right]$$

$= An^2 + Bn$ எனச் சரி பார்க்கலாம்.

(எ-கா.) (7) 75. 72, 69,......என்ற கூட்டுத்தொடரில் முதலிலிருந்து எத்தனை உறுப்புக்களைக் கூட்டினால், கூட்டுத்தொகை 702 கிடைக்கும்?

முதல் n உறுப்புக்கள் கூட்டினால் 702 கிடைக்கும் எனக் கொள்வோம்.

வாய்பாடு படி $Sn = \frac{n}{2}[2 \times 75 + (n-1)(-3)] = 702$

$$\therefore \frac{n}{2}(150 - 3n + 3) = 702$$

$$\therefore 153n - 3n^2 = 1404$$

$$\therefore 3n^2 - 153n + 1404 = 0$$

$$\therefore n^2 - 51n + 468 = 0$$

$$\therefore (n-39)(n-12) = 0$$

$\therefore n = 39$ அல்லது 12.

இரண்டு தீர்வுகளும் செல்லுபடியாகும்.

விடை சரி பார்த்துக் காரணம் அறிக.

(எ-கா.) (8) 400க்கும் 700க்கும் இடையில் அமைந்து, 6ஆல் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

400ஐ 6ஆல் மீதியின்றி வகுக்க முடியாது. 400க்கு மேற்பட்டு, 6ஆல் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய மீச் சிறு எண் 402.

700க்கு குறைந்து, 6ஆல் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய மீப் பெரு எண் 696.

ஆகவே 402 முதல், 408, 414,.........696 வரை உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை வேண்டும். அதை யறிய 402, 408, 414,.........696 வரை அக்கூட்டுத் தொடரில் எத்தனை உறுப்புக்கள் இருக்கின்றன வென முதலில் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். n உறுப்புக்கள் இருந்தால்,

$$696 = 402 + (n-1)\,6$$

$$\therefore\ n = \frac{702-402}{6}$$

$$= 50.$$

∴ வேண்டிய கூட்டுத்தொகை

$$= \tfrac{50}{2}\,[402 + 696]$$

$$= 25 \times 1098$$

$$= \underline{27450}$$

(எ-கா.) (9) a^2, b^2 c^2 கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், $(c+a)(a+b)$, $(a+b)(b+c)$, $(b+c)(c+a)$ மூன்றும் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன வென நிறுவுக.

$$(c+a)\,(a+b) = a^2 + bc + ca + ab\,;$$

$$(a+b)\,(b+c) = b^2 + bc + ca + ab\,;$$

$$(b+c)\,(c+a) = c^2 + bc + ca + ab.$$

a^2, b^2, c^2 கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின் இவை கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன வென்பது கண்கூடு. (எடுத்துக்காட்டு 2ஐப் பார்க்கவும்).

(எ-கா.) (10) ஒரு கூட்டுத் தொடரில், முதல் n, $2n$, $4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைகள், முறையே s_1, s_2, s_4 ஆனால்,

$s_4 = 6s_2 - 8s_1$ என நிறுவுக.

$$s_1 = \frac{n}{2} [2a + \overline{n-1}d];$$

$$s_2 = \frac{2n}{2} [2a + \overline{2n-1}d] = n [2a + \overline{2n-1}d]$$

$$s_4 = \frac{4n}{2} [2a + \overline{4n-1}d] = 2n [2a + \overline{4n-1}d].$$

$$6s_2 - 8s_1 = 6n [2a + \overline{2n-1}d] - 4n [2a + \overline{n-1}d]$$

$$= 4na + (8n^2 - 2n)d$$

$$= 4na + 2n (4n-1)d$$

$$= 2n [2a + \overline{4n-1}d]$$

$= s_4$ என நிறுவப்பட்டது.

10.6·1 கூட்டுத் தொடர் இடையுறுப்புக்கள் அல்லது கூட்டிடைகள் (Arithmetic Means):

கூட்டிடை (Arithmetic Mean): வரையறை:

a, b, c என்ற மூன்று எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால்,

b என்பது a க்கும் c க்கும் கூட்டிடை யெனப்படும்.

a, b, c கூட்டுத் தொடரிலிருப்பதால்,

பொது வேறுபாடு $= b - a = c - b$

$\therefore\ 2b = c + a$

$\therefore\ b = \frac{c+a}{2}$ எனவாகும்.

எனவே, பொதுவாக, x, y என்ற இராசிகளின் கூட்டிடை $= \frac{x+y}{2}$.

10.6·2 கூட்டிடைகள் : வரையறை :

$a, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, b$ என்பவை கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால்,

$x_1. x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை a க்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட n கூட்டிடைகள் எனப்படும்.

10.6·3. a, b என்பவற்றின் இடையே n கூட்டிடைகள் நுழைப்பது எப்படியெனப் பார்ப்போம்.

அக்கூட்டிடைகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ எனக் கொள்க.

எனவே $a, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, b$ என்பவை கூட்டுத் தொடரில் இருக்கவேண்டும்.

இக் கூட்டுத் தொடரில் a முதலுறுப்பு; b என்பது $(n+2)$ வது உறுப்பு.

தொடரின் பொதுவேறுபாடு d எனக்கொண்டால்

$$b = a+(n+2-1)\ d$$
$$= a+(n+1)\ d.$$
$$\therefore\ d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{எனவே } x_1 &= a+\frac{(b-a)}{(n+1)} \\ x_2 &= a+\frac{2(b-a)}{(n+1} \\ x_3 &= a+\frac{3(b-a)}{(n+1)} \\ \ldots\quad &\ldots\quad \ldots \\ x_n &= a+\frac{n(b-a)}{(n+1)} \end{aligned}\right\}\quad (A)$$

இதன்படியாக $b = a+\dfrac{(n+1)(b-a)}{(n+1)}$

$= b$ எனப் பெறப்படும்.

(A) தொகுப்பிலுள்ளவை யாவும், a, b க்கு இடைப்பட்ட n கூட்டிடைகள்.

(எ-கா.) 4 க்கும் 121 க்கும் இடையே 51 கூட்டிடைகள் காண்க.

4, x_1, x_2,......x_{51}, 121 என அக்கூட்டுத் தொடரைக் கொண்டால், அதன் முதலுறுப்பு 4; 53 வது உறுப்பு 121 ஆகும்.

$$\therefore\ 4+(53-1)d=121$$

$$\therefore\ 52d=117$$

$$\therefore\ d=\tfrac{117}{52}$$

$$=\tfrac{9}{4}$$

எனவே அக்கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு $2\frac{1}{4}$ ஆகும்.

∴ கூட்டிடைகளாவன :

$6\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$, $10\frac{3}{4}$,......$116\frac{1}{2}$, $118\frac{3}{4}$, ஆகும்.

பாடச்சுருக்கம் (10)

(1) கூட்டுத் தொடர் பொது உறுப்பு $T_n=a+(n-1)d$.

(2) முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$S_n=\frac{n}{2}[\,2a+(n-1)d\,]$$

$$=\frac{n}{2}[\,T_1+T_n]$$

(3) x, y க்கும் கூட்டிடை $A=\dfrac{x+y}{2}$.

பயிற்சி 10

1. பின் வரும் தொடர்கள் கூட்டுத் தொடர்களா இல்லையா எனக்கூறு.

(1) $2, 1, 0, -1, -2, \ldots$

(2) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

(3) $a, a+1, a-1, a+2, a-2, \ldots$

(4) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

(5) $a, a, a, a, \ldots$

(6) $1-a, 1-2a, 1-3a, 1-4a, \ldots$

(7) $a-\frac{1}{2}, a-1, a-1\frac{1}{2}, a-2, \ldots$

2. பின் வரும் கூட்டுத் தொடர்களில் குறிப்பிட்ட உறுப்பைக் கண்டு பிடிக்க.

(1) $a+1, a+5, a+9, \ldots$ 20வது உறுப்பு.

(2) $a-1, a-5, a-9, \ldots$ 10வது உறுப்பு.

(3) $1, 1-5b, 1-10b, \ldots$ 8வது உறுப்பு.

(4) $x+y, x-2y, x-5y, \ldots$ nவது உறுப்பு.

(5) $a+x, a-x, a-3x, \ldots$ rவது உறுப்பு.

3. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 10வது 16வது உறுப்புக்கள் முறையே 10,14. முதல் உறுப்பு, பொது வேறுபாடு காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட தொடர்களில் பொது உறுப்பாகிய T_n (nவது உறுப்பு) கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அத்தொடர், கூட்டுத் தொடரா அல்லவா எனக்கண்டு, கூட்டுத் தொடராயின் முதல் 'n' உறுப்புக்களுக்கு கூட்டுத்தொகை காண்க.

(1) $4+3n$ (2) $3-2n$

(3) $a+n$. (4) n^2+1.

5. ஒரு கூட்டுத்தொடர் 8,15,22...... இதில் எத்தனை உறுப்புக்கள் கூட்டினால் 855 வரும்?

6. ஒரு கூட்டுத்தொடர் 35,28,21...... இதில் எத்தனை உறுப்புக்கள் கூட்டினால் 63 வரும்?

7. 100க்கும் 200க்கும் இடைப்படும் 3ஆல் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

8. 500 க்குக் குறையாமல் 1000 க்கு மேற்படாமல் உள்ள 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடிய எண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

9. சில தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகள் கூட்டுத் தொடர்களென நிறுவி, அத் தொடர்களின் முதலுறுப்பு, பொது வேறுபாடு என்ன எனக் காண்க.

(1) $4n^2 - 3n$; (2) $n^2 + 3n$;

(3) $5n - n^2$; (4) $2an + 3bn^2$.

10. $\frac{1}{a}$, b, $\frac{1}{c}$ என்பவை கூட்டுத் தொடரிலுள்ளன. அப்போது $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ கூட்டுத் தொடரிலுள்ளன வென நிறுவுக.

11. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் p, q, r வது உறுப்புக்கள் முறையே a, b, c ஆனால்

$(q-r)\,a + (r-p)\,b + (p-q)\,c = o$ என நிறுவுக.

12. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் முதல் n, $2n$, $3n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை முறையே s_1, s_2, s_3 ஆனால் $s_3 = 3\ (s_2 - s_1)$ என நிறுவுக.

13. 200, 195, 190, ... என்ற ஒரு கூட்டுத் தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பில் ஆரம்பித்து 40 அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 11500. அக்குறிப்பிட்ட உறுப்பு யாது?

14. ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள 3 அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 30; அவைகளின் பெருக்குத் தொகை 960. அத்தொடரைக் காண்க.

[குறிப்பு: மூன்று எண்கள் $a-d, a, a+d$ எனக் கொள்க].

15. ஒரு கூட்டுத் தொடரிலுள்ள 3 அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 15. அவைகளின் இருபடியின் கூட்டுத்தொகை 83. கூட்டுத் தொடர் என்ன?

16. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் முதல் p, q, r உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைகள் முறையே A, B, C ஆனல் $\frac{A(q-r)}{p}+\frac{B(r-p)}{q}+\frac{C(p-q)}{r}=o$ என நிறுவுக.

17. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் உறுப்பு 'a'. அதன் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம். அதற்குப் பின் வரும் m உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $-\frac{a(m+n)m}{n-1}$ என நிறுவுக.

18. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்களின் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகள் $4n+2 : 7n+1$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவைகளின் mவது உறுப்புக்களின் விகிதமென்ன?

19. ஒரு ஓட்டப்பந்தயத்தில், ஆரம்பிக்கும் இடத்திலிருந்து 2 மீட்டர், 2 மீட்டர் தூரத்தில் 20 உருளைக்கிழங்குகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒன்ருென்ருக எடுத்து வந்து ஆரம்பிக்கும் இடத்தில் வைக்க வேண்டும். அப்படி எடுத்து வர மொத்தம் ஓடவேண்டிய தூரம் என்ன?

*20. இயற்கை எண்கள்

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

என்ற வரிசைகளில் அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. 'n'வது வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ என நிறுவுக.

n வரிசைகள் எல்லாவற்றிலும் இருக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{8} n (n+1) (n^2+n+2)$ என நிறுவுக.

21. $a, 2a$ என்ற இரு எண்களுக்கிடையில் n கூட்டிடைகள் காண்க.

22. a, b, c ஒரு கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ ஒரு கூட்டுத்தொடரில் உள்ளன என நிறுவுக.

23. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் 11வது, 13வது உறுப்புக்களின் கூட்டிடை 26: 21வது 23வது உறுப்புக்களின் கூட்டிடை 46; அக்கூட்டுத் தொடர் என்ன ?

24. 40க்கும் 83க்கு இடையில் 85 கூட்டிடைகள் நுழைக்கவும்.

11. இசைத் தொடர்

(Hormonic Progression):

11.1. வரையறை: ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்கள் கூட்டுத் தொடரிலிருந்தால் முதல் கூறப்பட்ட தொடரின் உறுப்புக்கள் இசைத் தொடரில் உள்ளன என்பது வரையறை.

இதை மறுதலையாகக் கூறுமிடத்து ;

a, b, c......ஒரு கூட்டுத் தொடரிலிருப்பின்,

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$......ஒரு இசைத் தொடரிலிருக்கும்.

(எ-கா.) (1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$......ஓர் இசைத் தொடர் ;

ஏனெனில் 1, 2, 3, 4......ஒரு கூட்டுத் தொடர்.

(2) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}$......ஓர் இசைத் கொடர் ;

ஏனெனில் $a, a+d, a+2d,$...... ஒரு கூட்டுத் தொடர்.

11.2. ஒரு இசைத் தொடரின் பண்புகளைக்காண, அதன் தலைகீழ் உறுப்புக்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன என்ற வரையறையைப் பயன்படுத்தித்தான் முயலவேண்டும்.

ஒரு இசைத் தொடரில் n வது உறுப்பு :

a_1, a_2, a_3......என்ற ஓர் இசைத் தொடரின் n வது உறுப்பு என்ன ?

வரையறைப்படி, $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்.

$\therefore$ பொது வேறுபாடு $= \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = d.$

$\therefore$ கூட்டுத் தொடரின் n வது உறுப்பு $= \frac{1}{a_1} + (n-1)d$

$$= \frac{1}{a_1} + \frac{(n-1)\,(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

$$= \frac{a_2 + (n-1)\,(a_1 - a_2)}{a_1\, a_2}$$

$\therefore$ இவ் விசைத் தொடரின் n வது உறுப்பாகிய

$$T_n = \frac{a_1\, a_2}{a_2 + (n-1)\,(a_1 - a_2)}$$

இதை ஒரு வாய்பாடாகக் கொள்ளத் தேவை யில்லை. உடனுக்குடனே, உரிய கூட்டுத் தொடரின் உதவிகொண்டு, இசைத் தொடரின் பொது உறுப்பை யறியலாம்.

(எ–கா.) 2, 3, 6......என்ற இசைத்தொடரின் n வது உறுப்புகாண்க.

உரிய கூட்டுத் தொடர் $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$

பொது வேறுபாடு $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}.$

$\therefore$ உரிய கூட்டுத் தொடரின் n வது உறுப்பு

$$= \tfrac{1}{2} + (n-1)\,(-\tfrac{1}{6})$$

$$= \frac{3-(n-1)}{6}$$

$$= \frac{4-n}{6}$$

$\therefore$ இசைத்தொடரின் n வது உறுப்பு $= \frac{6}{4-n}$

11.3 ஒரு இசைத் தொடர் உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை வாய்பாடு கிடையாது.

11.4 இசையிடை (Harmonic mean) : வரையறை :

$a, b, c \dots$ என்பவை இசைத் தொடரில் இருக்குமானால், b என்பது a க்கும் c க்கும் இசையிடை எனப்படும்.

உரிய கூட்டுத் தொடரைக் கொண்டு பார்க்கும் போது, $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

$$\therefore \quad \frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$$

$$=\frac{a+c}{ac}$$

$$\therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c}. \quad \text{(வாய்பாடு)}$$

எனவே, பொதுவாக,

x, y என்ற இரு இராசிகளுக்கும் இடைப்பட்ட

இசையிடை $=\frac{2xy}{x+y}$. (வாய்பாடு)

11.4·1. முன்கண்டபடி, $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$$ என்ற தொடர்பும்

$a, b, c \dots$ என்ற இசைத் தொடரிலுள்ள, முதல் மூன்று உறுப்புக்களை இணைக்கிறது.

11.5. இசையிடைகள் (Harmonic Means) : வரையறை :

$a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, b$ என்பவை இசைத் தொடரில் இருக்கு மாயின், $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை a, b இவைகளுக்கிடைப்பட்ட இசையிடைகள் எனப்படும்.

இப்போது, a, b இவைகளுக்கிடைப்பட்ட n இசையிடைகள் காண்பதெப்படி?

$a, x_1, x_2, \ldots x_n, b$ இசைத் தொடரில் உள்ளன எனக் கொள்வோம். $x_1, x_2, \ldots x_n$ காணவேண்டும்.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}, \frac{1}{b}$ கூட்டுத் தொடரிலிருக்கும்.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ இவைகளுக்கிடைப்பட்ட n கூட்டிடைகள் காண்போம். அவைகளின் தலைகீழ்ப் பின்னங்களே, வேண்டிய இசையிடைகளாகும். கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு d எனக் கொண்டால்,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+2-1)d$$

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (n+1)d$$

$$\therefore d = \frac{(a-b)}{(n+1)\,ab}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} = \frac{1}{a} + \frac{(a-b)}{(n+1)ab}$$

$$= \frac{(n+1)b+(a-b)}{(n+1)\,ab}$$

$$= \frac{a+nb}{(n+1)ab}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{a} + \frac{2(a-b)}{(n+1)ab}$$

$$= \frac{(n+1)\,b+2(a-b)}{(n+1)ab}$$

$$= \frac{2a+(n-1)b}{(n+1)ab}$$

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}+\frac{n(a-b)}{(n+1)ab}$$

$$=\frac{(n+1)b+na-nb}{(n+1)\,ab}$$

$$=\frac{na+b}{(n+1)\,ab}.$$

∴ இசையிடைகளான $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை,

$$\frac{ab\,(n+1)}{a+nb},\quad \frac{ab\,(n+1)}{2a+(n-1)\,b},\ \ldots\ldots\ \frac{ab\,(n+1)}{na+b}.$$

(எ-கா.) (1) 1, m இரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட n இசையிடைகள் காண்க,

இசைஇடைகள், $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ஆனல்;

$\frac{1}{1}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x_n}, \frac{1}{m}$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்.

∴ d என்பது பொது வேறு பாடாயின்,

$$\frac{1}{m}=1+(n+2-1)\,d$$

$$=1+(n+1)\,d$$

$$\therefore\ \frac{1}{m}-1=(n+1)\,d$$

$$\therefore\ d=\frac{1-m}{m\,(n+1)}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x_1}=1+\frac{1-m}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{mn+m+1-m}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{1+mn}{m\,(n+1)}$$

$$\frac{1}{x_2}=\frac{1+2\,(1-m)}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{mn+m+2-2m}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{2+m\,(n-1)}{m\,(n+1)}$$

$$\frac{1}{x_3}=1+\frac{3\,(1-m)}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{mn+m+3-3m}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{3+m\,(n-2)}{m\,(n+1)}$$

... ...

$$\frac{1}{x_n}=1+\frac{n\,(1-m)}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{mn+m+n-mn}{m\,(n+1)}$$

$$=\frac{n+m}{m\,(n+1)}$$

∴ இசையிடைகளாவன :

$$\frac{m(n+1)}{1+mn},\ \frac{m\,(n+1)}{2+m\,(n-1)},\ \frac{m\,(n+1)}{3+m\,(n-2)},\ \ldots\ldots\ \frac{m\,(n+1)}{n+m}.$$

(எ-கா.) (2) $a,\ b,\ c$ இசைத் தொடரில் இருக்குமாயின், $\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b}$ இசைத் தொடரில் உள்ளன என நிறுவுக.

இப்போது $\frac{b+c}{a},\ \frac{c+a}{b},\ \frac{a+b}{c}$ கூட்டுத் தொடரில் உள்ளனவென நிறுவினுல் போதுமானது.

இதை நிறுவ, ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் 1 (ஒன்று) கூட்டுக.

இப்போது,

$\frac{b+c}{a}+1,\ \frac{c+a}{b}+1,\ \frac{a+b}{c}+1$ கூ. தொ.வில் உள்ளன வென நிறுவினுல் போதுமானது.

அதாவது, $\frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$,, ,,

,, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$,, ,,

,, $a,\ b,\ c,$ இசைத் தொடரிலுள்ளன வென நிறுவினுல் போதுமானது. ஆனுல் இது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே, $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ இசைத் தொடரில் உள்ளன வென நிறுவப்படுகிறது.

(எ-கா.) (3) $a_1, a_2, a_3. \dots a_n$ என்பவை இசைத் தொடரிலிருந்தால்,

$a_1\ a_2 + a_2\ a_3 + a_3\ a_4 + \dots + a_{n-1}\ a_n = (n\text{-}1)\ a_1\ a_n$ என நிறுவுக.

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ இசைத் தொடரிலிருப்பதால், $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ கூட்டுத் தொடரில் இருக்கும்.

$$\therefore \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = d$$

$$\therefore \frac{a_1 - a_2}{a_1\ a_2} = \frac{a_2 - a_3}{a_2\ a_3} = \dots = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}\ a_n} = d$$

$$\therefore d = \frac{a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \dots\ a_{n-1} - a_n}{a_1\ a_2 + a_2\ a_3 + a_3\ a_4 + \dots + a_{n-1}\ a_n}$$

$$= \frac{(a_1 - a_n)}{a_1\ a_2 + a_2\ a_3 + \dots + a_{n-1}\ a_n} \text{A}$$ [விகிதப் பொருத்தத் தேற்றம். 6. 6. கீழ்]

ஆனல் $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\, d$

$$\therefore \qquad d = \frac{a_1 - a_n}{(n-1)\; a_1\, a_n}$$

$$\therefore \frac{a_1 - a_n}{a_1\, a_2 + a_2\, a_3 + . + a_{n-1}\, a_n} = d = \frac{a_1 - a_n}{(n-1)\; a_1\, a_n}$$

$\therefore a_1\, a_2 + a_2\, a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1}\, a_n \;=\; (n-1)\, a_1\, a_n$ என நிறுவப்படுகிறது.

(எ-கா.) (4) ஒரு இசைத் தொடரில் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 13· அவைகளின் இருபடிக் கூட்டுத் தொகை 61· இசைத் தொடரென்ன ?

$\frac{1}{a-d}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+d}$ என இசைத் தொடர் கொள்க.

$$\frac{1}{a-d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} = 13 \quad (A)$$

$$\frac{1}{(a-d)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+d)^2} = 61 \quad (B)$$

இவைகளிலிருந்து a, d காணவேண்டும்.

(A)ன்படி $a(a+d)+(a+d)(a-d)+a(a-d) = 13a(a^2-d^2)$;

(B)ன்படி $a^2(a+d)^2+(a-d)^2(a+d)^2+a^2(a-d)^2 = 61a^2(a^2-d^2)^2$

$$\therefore \quad 3a^2 - d^2 = 13a(a^2-d^2)$$
$$3a^4 + d^4 = 61a^2(a^2-d^2)^2$$

$$\therefore \quad \frac{(3a^2-d^2)^2}{3a^4+d^4} = \frac{169a^2(a^2-d^2)^2}{61a^2(a^2-d^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(3a^2-d^2)^2}{(3a^4+d^4)} = \frac{169}{61}$$

$$\therefore \quad 61\,(9a^4 - 6a^2d^2 + d^4) = 507a^4 + 169d^4$$

$$\therefore \quad 42a^4 - 366a^2d^2 - 108d^4 = 0$$

$$\therefore \quad 7a^4 - 61a^2d^2 - 18d^4 = 0$$

$$\therefore \quad 7\left(\frac{a^2}{d^2}\right)^2 - 61\left(\frac{a^2}{d^2}\right) - 18 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{d^2} = \frac{61 \pm \sqrt{3721+504}}{14}$$

$$= \frac{61 \pm 65}{14}$$

$= 9$ அல்லது $-\frac{2}{7}$

$\therefore \quad a = \pm 3d$; அல்லது $a = \pm i\sqrt{\frac{2}{7}}\, d$.

$a = 3d$ என A-ல் ஈடுசெய்வோம்.

$$\frac{1}{2d} + \frac{1}{3d} + \frac{1}{4d} = 13$$

$$\therefore \quad \frac{13}{12d} = 13$$

$$\therefore \quad 12d = 1$$

$$\therefore \quad d = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \quad a = 3d$$

$$= \frac{1}{4}.$$

$\therefore$ இசைத் தொடர் உறுப்புக்கள்,

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}}, \quad \frac{1}{\frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}}$$

அதாவது 6, 4, 3 என்பது வேண்டிய இசைத் தொடராகும்.

குறிப்பு: $a = -3d$ என ஈடு செய்தாலும் இதே விடை 3, 4, 6 என்ற வரிசையில் கிடைக்கும். மேலும் $a = \pm i\sqrt{\frac{2}{7}}$ என்ற கற்பனை எண் தீர்வை விலக்கி விடலாம்.

(எ-கா.) (5) x, y என்பவற்றின் இடையே a_1, a_2, a_3 மூன்று கூட்டிடைகள், h_1, h_2, h_3 மூன்று இசையிடைகள் எனவாயின், $a_1 h_3 = a_2 h_2 = a_3 h_1 = xy$ என நிறுவுக.

முதலில், கூட்டிடைகளையும், இசையிடைகளையும் காண்போம்.

கூட்டிடைகள் : $y = x + 4d$

$$\therefore \quad d = \frac{y-x}{4}$$

$$\therefore \quad a_1 = x + \frac{y-x}{4} = \frac{3x+y}{4};$$

$$a_2 = x + \frac{2(y-x)}{4} = \frac{2x+2y}{4};$$

$$a_3 = x + \frac{3(y-x)}{4} = \frac{x+3y}{4}$$

இசையிடைகள் : $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + 4d$

$$\therefore \quad d = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-y}{xy}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{h_1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\frac{(x-y)}{xy} = \frac{x+3y}{4xy};$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{4}\frac{(x-y)}{xy} = \frac{2x+2y}{4xy};$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\frac{(x-y)}{xy} = \frac{3x+y}{4xy}$$

$$\therefore \quad h_1 = \frac{4\,xy}{x+3y};$$

$$h_2 = \frac{4\,xy}{2x+2y};$$

$$h_3 = \frac{4\,xy}{3x+y};$$

$$\therefore\ a_1 h_3 = \frac{3x+y}{4} \cdot \frac{4\,xy}{3x+y} = xy\ ;$$

$$a_2 h_2 = \frac{2x+2y}{4} \cdot \frac{4\,xy}{2xy+2y} = xy\ ;$$

$$a_3 h_1 = \frac{x+3y}{4} \cdot \frac{4\,xy}{x+3y} = xy.$$

$\therefore\ a_1 h_3 = a_2 h_2 = a_3 h_1 = xy$ என நிறுவப்பட்டது.

பாடச் சுருக்கம் 11

1. $a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ கூட்டுத் தொடராயின்,

$\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \ldots\ \dfrac{1}{a_n}, \ldots$ இசைத் தொடரில் இருக்கும்.

2. $a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$ இசைத் தொடராயின்,

$\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \ldots\ \dfrac{1}{a_n},\ \ldots$ கூட்டுத் தொடரிலிருக்கும்.

3. $x,\ y$ க்கும் இசையிடை $\mathrm{H} = \dfrac{2xy}{x+y}$

4. முதல் n உறுப்புகளுக்குக் கூட்டுத் தொகை வாய்பாடு கிடையாது.

பயிற்சி 11

1. கீழ் வரும் இசைத் தொடர்களின் nவது உறுப்பைக் காண்க.

(1) 2, 3, 6...... (2) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}$......

(3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}$...... (4) $(a-1), \frac{(a^2-1)}{a}, (a+1)$...

2. $\frac{1}{3}$க்கும் $\frac{1}{35}$க்கும் இடையில் 15 இசையிடைகள் காண்க.

3. a, b, c, d இசைத் தொடரிலிருந்தால் $ab+cd=2ad$ என நிறுவுக.

4. ஒரு இசைத்தொடரில் pவது, qவது, rவது உறுப்புக்கள் முறையே a, b, c ஆனல், $(q-r)\,bc+(r-p)\,ca+(p-q)\,ab=o$ என நிறுவுக.

5. a, b, c இசைத் தொடரில் இருக்குமானல் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) bc, ca, ab கூட்டுத்தொடரிலிருக்கும்

(2) $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{a-c} = 2$ (உண்மை)

(3) $\frac{a}{a-b} = \frac{a+c}{a-c}$ (உண்மை)

(4) $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$ கூட்டுத் தொடரிலிருக்கும்

(5) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=\frac{4}{ac}-\frac{3}{b^2}$ (உண்மை)

6. ஒரு கூட்டுத் தொடரும் இசைத் தொடரும், a, b என முதலிரண்டுறுப்புக்கள் பெற்றவை. அவைகளின் 'n'வது உறுப்புக்கள் முறையே x, y ஆனால், $(x-a):(y-a) = b:y$ என நிறுவுக.

7. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மேலும் a, b, c கூட்டுத் தொடரில் இருக்கின்றன. b, c, d இசைத் தொடரிலுள்ளனவென நிறுவுக.

8. n உறுப்புக்கள் உள்ள ஒரு கூட்டுத்தொடரும் இசைத் தொடரும் 'a' ஐ முதலுறுப்பாகவும், 'b' ஐ கடைசியுறுப்பாகவும் பெற்றுள்ளன. கூட்டுத் தொடரின் $(r+1)$வது உறுப்பையும், இசைத் தொடரின் $(n-r)$வது உறுப்பையும் பெருக்கி வரும் தொகை $a\,b$ என நிறுவுக.

9. ஒரு இசைத் தொடரின் pவது உறுப்பு q; qவது உறுப்பு p. அதன் pqவது உறுப்பு 1 என நிறுவுக.

10. b^2, a^2, c^2 கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமானால், $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ இசைத் தொடரில் இருக்குமென நிறுவுக.

12. பெருக்குத் தொடர்

(Geometrical Progression) :

12·1 பெருக்குத் தொடர் :

கீழ்வரும் தொடர்களைக் கவனிக்க:

(a) 1. 2, 4, 8. 16,......

(b) 2, – 6, 18, – 54, 162,......

(c) 4, 2, 1; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,......

(d) a, ar, ar^2, ar^3......

(e) $a, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r^3}$,......

இத்தொடர்களில், ஒவ்வொரு உறுப்பும், அதற்கு முன் உறுப்பை ஒரு குறிப்பிட்ட (மாறிலி) எண்ணால் பெருக்கிப் பெறப்படுகின்றது.

இப்படிப்பட்ட தொடர்கள் பெருக்குத் தொடர்கள் எனப் படும். பொது அமைப்பு, a, ar, ar^2,......எனக்கொள்ளலாம்.

இங்கு a முதலுறுப்பு எனவும், r பொது விகிதம் (Common-ratio) எனவும் கூறப்படும்.

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களை இந்த முறையில் பாகுபடுத்திப் பார்ப்போம்.

பெருக்குத் தொடர்கள்.	முதல் உறுப்பு a	பொது விகிதம் r
$1, 2, 4, 8, 16...$	1	2
$2, -6, 18, -54,...$	2	-3
$4, 2, 1, \frac{1}{2},...$	4	$\frac{1}{2}$
$a, ar, ar^2, ar^3,...$	a	r
$a, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r^3}...$	a	$\frac{1}{r}$

12·2 எனவே, பெருக்குத் தொடரைப் பின் வருமாறு வரை யறுக்கலாம் :

வரையறை: ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்கள், ஒரே விகிதத்தில் அதிகமாகிக் கொண்டோ, குறைந்து கொண்டோ போகுமானல், அத்தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடரெனப்படும். மாறிலா விகிதம் அத்தொடரின் பொது விகிதம் எனப்படும்.

பொது விகிதம், கூட்டெண் அல்லது குறையெண், அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்டது, அல்லது ஒன்றுக்குக் குறைப்பட்டது, இவைகளில் எதுவாகவேனும் இருக்கலாம்.

12·3. பெருக்குத் தொடரில் பொது உறுப்பு (T_n) :

$a, ar, ar^2......$ என்ற தொடரில் பொது உறுப்பு அல்லது n வது உறுப்பு ar^{n-1} என்பது கண்கூடு.

$a, -ar, ar^2, -ar^3......$என்ற தொடரில் பொது விகிதம் $-r$. அதில் n வது உறுப்பு $a(-r)^{n-1}$ அல்லது $(-1)^{n-1}$ arn^{-1} என எழுதப்படலாம்.

பொதுவாக, ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதலுறுப்பும் பொது விகிதமும் கொடுக்கப்பட்டால், பெருக்குத் தொடர் முழுவதும் கொடுக்கப்பட்டதாகும். அல்லது முதலிரண்டு உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், போதுமானது. ஏனெனில் இரண்டாவது உறுப்பை, முதல் உறுப்பால் வகுக்க, பொது விகிதம் கிடைத்துவிடும்.

12·4. பெருக்குத் தொடரில் முதல் n -உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை :

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ எனக் கொள்க (1)

$\therefore\ r \times S_n = \quad ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n$ ஆகும் (2)

$$(1) - (2) : \quad S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\therefore \quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \text{ (வாய்பாடு).}$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$ எனவும் எழுதலாம். (வாய்பாடு).

12·4.1 சிறப்பாக, பொது விகிதம் $r < 1$ உள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடர் எல்லையற்றுப் போய்க்கொண்டிருக்குமாயின், அதன் கூட்டுத் தொகையைக் கந்தழி வரையில் ஒருவாறு அறிய முயல்வோம்.

முதலில் r ஒரு கூட்டெண் மதிப்பு பெற்றதெனக் கொள்வோம், அதாவது r ஒரு கூட்டு தகுபின்னமெனக் கொள்வோம்.

இப்போது, $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots$ கந்தழி வரையிருக்குமானால், அதற்கு ஒரு கூட்டுத் தொகை உண்டா, இருக்குமானல், அக் கூட்டுத் தொகை யென்ன வென்பதை ஆராய்வோம்.

நாம் $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1=r)}$ என்று முன்பத்தியில் (12·4) கண்டோம்,

இப்போது $n = 1000 ;\ 1{,}000.000_1\ \ldots$ என்ற மதிப்பு வளர்ந்து கொண்டே செல்கிறதெனக் கொள்வோம்,

$r < 1$ ஆனல், n வளர, வளர r^n குறைந்துகொண்டே போய், மிக மிகத் தேய்ந்து, பூச்சியத்திற்கு மிகமிக நெருக்கமாகும். இக்கருத்தைப் பின்வருமாறு குறியீடு செய்து கூறுவோம் :

'n' மதிப்பு உயர்ந்து, கந்தழி ($\propto$) எல்லையை நெருங்கும் போது, r^n ன் மதிப்பு, மிகமிகத் தேய்ந்து, பூச்சிய எல்லையை நெருங்குகிறது'.

'எல்லை $\underset{n \to \propto}{} r^n \to O$' எனக் குறியீடு செய்வது மரபு. (Limit $\underset{n \leftarrow \propto}{} r^n \to O$).

இந்தக் கருத்தைக் கொண்டு, n வளர, வளர, S_n எந்த எல்லையை நெருங்குகிறதெனப் பார்ப்போம்.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$
$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{1-r}r^n.$$

a, r இரண்டும் குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெற்றவையாதலின் $\frac{a}{a-r}$க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புப் பெறப்படும்.

n வளர, வளர, $\frac{a}{1-r}$ r^n ன் மதிப்பு தேய்ந்துகொண்டே சென்று, பூச்சியத்தை நெருங்கும்.

எனவே எல்லை $\underset{n \to \propto}{} \frac{a}{1-r} r^n \to 0$ எனவாகும்.

ஆகவே, n கந்தழி எல்லையை நெருங்கும்போது எல்லை $\underset{n \to \propto}{} S_n \to \frac{a}{1-r}$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது.

இதையே, சாதாரணமாக, $r<1$ ஆனால் $a+ar+ar^2+\ldots\propto$ வரை கூட்டிவரும் தொகை $\frac{a}{1-r}$ எனக் கூறுவதுண்டு.

இம்முடிவு, r ஒரு குறை வெண்ணுக விருந்து அதன் தனி மதிப்பு<1 ஆக இருந்தாலும் பொருந்தும்.

இரு முடிவுகளும் $|r|<1$ ஆனுல் பொருந்து மெனக் கூறலாம்.

[குறிப்பு : $|r|<1$ என்ற குறியீட்டின் பொருள் யாதெனின் : r கூட்டுத் தகு பின்னம், குறை தகு பின்னம் எது வாக இருப்பினும் அதன் தனி மதிப்பு (absolute value), 1 க்குக் குறைவாக இருக்கிற தென்பதாம், $r=\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{5}$, $-\frac{5}{6}\ldots$எல்லாம் $|r|<1$ என்ற நிபந் தனைக் குட்பட்டவை]

இங்கு நாம் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டுவது $r<1$ என்ற இன்றியமையாக் கட்டுப்பாடாகும். $|r|<1$ எனினும் இது பொருந்தும் என்பதையும் இதோடு கவனிக்கவேண்டும்.

ஆனல் $r>1$ ஆனல் இது பொருந்தாது. $|r|>1$ ஆக விருந்தாலும் பொருந்தாது.

(எ-கா.) (1) 2, 6, 18,......என்ற பெருக்குத் தொடரில் முதல் n உருப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை என்ன ?

முதலுறுப்பு 2.

பொது விகிதம் 3.

$$\therefore \quad S_n = \frac{2\,(3^n-1)}{(3-1)}$$

$$= \underline{3^n-1} \text{ ஆகும்.}$$

(எ-கா.) (2) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும், கந்தழிவரை கூட்டுத் தொகையும் காண்க.

முதலுறுப்பு 2.

பொதுவிகிதம் $\frac{2}{3}$.

$$\therefore \quad S_n = \frac{2[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 6 - 6\,(\tfrac{2}{3})^n$$

n உயர, உயர, எல்லை $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n \to 0$

$$\therefore \quad 6(\tfrac{2}{3})^n \to 0$$

$\therefore \quad S_\infty = 6$ எனக் கொள்க.

(எ-கா.) (3) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27} \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும், கந்தழிவரையும் கூட்டுத்தொகை காண்க.

முதலுறுப்பு 1.

பொதுவிகிதம் $(-\frac{1}{3})$.

$$\therefore \quad S_n = \frac{1[1-(-\frac{1}{3})^n]}{1+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n}$$

n உயர, உயர, எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} \to 0$

$$\therefore \quad \frac{-3}{4} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} \to 0$$

$\therefore \quad S_\infty = \frac{3}{4}$ எனக் கொள்க.

*(எ-கா.) (4) 3, 33, 333, 3333,......என்ற தொடரில், முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

இது ஒரு பெருக்குத் தொடரல்ல; ஆனால் இதில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$S_n = 3+33+333+3333+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்கள்வரை

$= 3\,(1+11+111+1111+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்கள் வரை)

$= \frac{3}{9}\,[\,9+99+999+9999+\ldots\ldots\,]$

$= \frac{3}{9}\,[\,(10-1)+(10^2-1)+10^3-1)+(10^4-1)\ldots\ldots\,]$

$= \frac{3}{9}\,(10+10^2+10^3+10^4+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்கள்)

$\quad - \frac{3}{9}\,(1+1+1+1+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்கள்)

$$= \frac{3}{9}\left[\frac{10\,(10^n-1)}{10-1}\right] - \frac{3}{9}\,n$$

$$= \frac{10\,(10^n-1)}{27} - \frac{1}{3}\,n.$$

இதே முறையில்

$2+22+222+\ldots\ldots$

$4+44+444+\ldots\ldots$

போன்ற தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காணலாம்.

*(எ-கா.) (5) $0.7+0.77+0.777+\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை என்ன?

$$S_n = 7\,(0.1+0.11+0.111+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள்வரை})$$

$$= \tfrac{7}{9}\,(0.9+0.99+0.999+\ldots\ldots)$$

$$= \tfrac{7}{9}\,[\,(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\ldots\ldots\,]$$

$$= \tfrac{7}{9}\,(1+1+1+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள்})$$

$$-\tfrac{7}{9}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள்}\right)$$

$$= \tfrac{7}{9}\,n - \tfrac{7}{9}\left[\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{7}{9}n - \frac{7}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{7}{9}n - \frac{7}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

இவ்வாறே,

$0.2+0.22+0.222+\ldots\ldots$

$0.3+0.33+0.333+\ldots\ldots$

போன்ற n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காணலாம்.

*(எ-கா.) (6) $0.666\ldots\ldots$ என்ற மடக்குப்பதின் பின்னத்தின் (Recurring Decimal) மதிப்பென்ன?

$$N = 0.666\ldots\ldots \text{ எல்லையற்றது.}$$

$$= 0.6+0.06+0.006+\ldots\ldots$$

$$= 6(0.1+0.01+0.001+\ldots\ldots \text{ எல்லையற்றது})$$

$$= 6\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\ldots \text{ எல்லையற்றது}\right)$$

$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்; முதலுறுப்பு $\frac{1}{10}$. பொது விகிதம் $\frac{1}{10}$. பொது விகிதம் < 1.

$$\therefore \frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\ldots \text{ கந்தழி வரை}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{10}{9}$$

$$=\frac{1}{9}$$

$$\therefore N=\frac{6}{9}$$

$$=\frac{2}{3} \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

இவ்வாறே

$0\cdot111\ldots=\frac{1}{9}$

$0\cdot222\ldots=\frac{3}{9}$

$0\cdot333\ldots=\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

போன்ற மதிப்புக்களை யறியலாம்.

*(எ-கா.) (7) $0\cdot8\dot{5}\dot{3}\ldots$ என்ற மடக்குப்பதின் பின்னத்தின் மதிப்பென்ன ?

$$N=0\cdot8\dot{5}\dot{3}\ldots\ldots$$

$$=0\cdot8+(0\cdot05+0\cdot0005+0\cdot000005+\ldots\ldots\infty)$$
$$+(0\cdot003+0.00003+0\cdot0000003+\ldots\ldots\infty)$$

$$=0\cdot8+5\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\ldots\infty\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\ldots\ldots\infty\right)$$

$$=0\cdot 8+5\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}+3\cdot\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{5}{100}\times\frac{100}{99}+\frac{3}{1000}\times\frac{100}{99}$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{5}{99}+\frac{1}{330}$$

$$=\frac{792+50+3}{990}$$

$$=\frac{845}{960}$$

$$=\frac{169}{198}$$

இவ்வாறே, $0\cdot\dot{a}\,\dot{b}\,\dot{c}\,\dot{d}$...... போன்ற மடக்குப்பதின் பின்னங்களின் மதிப்பைக் காணலாம்.

(எ–கா.) (8) ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதல் 3 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 28 ; அவைகளின் பெருக்குத் தொகை 512. அப் பெருக்குத் தொடரென்ன ?

உறுப்புக்கள் $\frac{a}{r}$, a, ar எனக் கொள்க.

முதலுறுப்பு $\frac{a}{r}$; பொது விகிதம் r.

கூட்டுத் தொகை $\frac{a}{r}+a+ar=28$ (1)

பெருக்குத் தொகை $a^3=512$ (2)

$$\therefore\ a=\sqrt[3]{512}$$

$$=\sqrt[3]{4\times4\times4\times2\times2\times2}$$

$$=8$$

∴ (1) ல் ஈடுசெய்ய,

$$\frac{8}{r}+8+8r=28$$

$$\therefore \frac{8}{r}+8r=20$$

$$\therefore 8+8r^2=20r$$

$$\therefore 8r^2-20r+8=0$$

$$\therefore r=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{16}$$

$$=\frac{20\pm12}{16}$$

$r=2$ ஆனால் $=2$ அல்லது $\frac{1}{2}$.

உறுப்புக்கள் $\frac{8}{2}$, 8, 8×2.

அதாவது 4, 8, 16.

$r=\frac{1}{2}$ ஆனால் உறுப்புக்கள் 16, 8, 4 என அதே உறுப்புக்கள் தலைகீழ் வரிசையில் பெறப்படும்.

(எ-கா.) (9) a, b, c ...... என்பவை பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின்,

(1) $ak, bk. ck$ ...... என்பவை,

(2) $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$,...... என்பவை,

(3) a^n, b^n, c^n ...... என்பவை,

பெருக்குத் தொடரில் உள்ளனவென நிறுவுக.

a, b, c ...... என்பவை பெருக்குத் தொடரிலிருப்பின் பொது விகிதம் $r=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$.

(1) ak, bk, ck ...... என்ற தொடரில்,

$r=\frac{bk}{ak}=\frac{ck}{bk}$ என்பது பொது விகிதமாகும்.

∴ ak, bk, ck பெருக்குத் தொடரிலிருக்கும்.

(2) $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, ... என்ற தொடரில்,

$$r = \frac{\frac{b}{k}}{\frac{a}{k}} = \frac{\frac{c}{k}}{\frac{b}{k}}$$ என்பது பொது விகிதமாகும்.

$\therefore \frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ பெருக்குத் தொடரிலிருக்கும்.

(3) a^n, b^n, c^n ...... என்ற தொடரில்

$$\frac{b^n}{a^n} = r^n ; \frac{c^n}{b^n} = r^n$$

$$\therefore R = r^n = \frac{b^n}{a^n} = \frac{c^n}{b^n}$$

$\therefore$ a^n, b^n, c^n ...... பெருக்குத் தொடரிலிருக்கும். பொது விகிதம் r^n.

எனவே, a, b, c ...... என்பவை பெருக்குத் தொடரிலிருப்பின் :

(1) ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒருமாறிலி k ஆல் பெருக்கினாலோ, வகுத்தாலோ, கிடைக்கும் தொடர்களும் பெருக்குத் தொடரில் இருக்கும் ;

(2) ஒவ்வொரு உறுப்பையும், எந்த ஒரே படிக்கு உயர்த்தினாலும், கிடைக்கும் தொடர் பெருக்குத் தொடரில் இருக்கும்.

(எ-கா.) (10) $1+5+5^2+......n$ உறுப்புக்கள்வரை யுள்ள கூட்டுத்தொகை 2000க்கு மேல் இருக்கவேண்டுமானால், குறைந்தது n க்கு என்ன மதிப்பு இருக்கவேண்டும்?

$1+5+5^2+......n$ உறுப்புக்கள் வரை $= \frac{1(5^n-1)}{(5-1)}$

$= \frac{5^n-1}{4}$.

இப்போது, $\frac{5^n-1}{4} > 2000$ ஆக இருக்க வேண்டுமானால்,

$5^n - 1 > 8000$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $5^n > 8001$ ஆக இருக்கவேண்டும். இரு பக்கங்களின் மடக்கை காண,

n மகை $5 >$ மகை 8001 ஆக இருக்கவேண்டும்.

$\therefore n > \frac{\text{மகை } 8001}{\text{மகை } 5}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $n > \frac{3.9032}{0.6990}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $n > 5.584$

எனவே n க்கு மீச்சிறு மதிப்பு 6 ஆக இருக்கவேண்டும்.

$1+5+25+125+625<2000$

$1+5+25+125+625+3125>2000$

12.5. பெருக்கிடை (Geometric Mean) வரையறை:

a, b, c என்பவை பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின் b என்பது a க்கும் c க்கும் பெருக்கிடை யெனப்படும்.

$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ என்பது a, b, c க்கு இடைப்பட்ட தொடர்பு.

$\therefore b^2 = ac$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது.

$\therefore b = \pm\sqrt{ac}$

சாதாரணமாக, கழிவுக்குறி கொண்ட எண்ணை விலக்கி $b = \sqrt{ac}$ எனக்கொள்வோம். பொதுவாக, x, y எனற கூட்டெண்களுக்கு இடைப்பட்ட பெருக்கிடை $\sqrt{xy}$ என்பது தெளிவு.

[குறிப்பு: (1) $b = -\sqrt{ac}$ என்று கூறுவதில் தப்பேதுமில்லை; அதுவும் bன் ஒரு மதிப்பென்பதை நாம் மறந்து விடக்கூடாது.

(2) x, y இரண்டும் குறையெண்களாயினும், அவைகளுக்கிடைப்பட்ட பெருக்கிடை $\sqrt{xy}$; $-\sqrt{xy}$ எனவும் கொள்ளலாம்.

(3) x, கூட்டெண்ணுகவும், y குறையெண்ணுகவும் இருக்குமாயின், xyன் பெருக்குத்தொகை குறையெண்ணுகும். அவைகளுக்கிடைப்பட்ட பெருக்கிடை ஒரு கற்பனை யெண்ணுகும்.]

12·6 பெருக்கிடைகள் (Geometric Means) வரையறை: $a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, b$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானல். $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட n பெருக்கிடைகள் எனப்படும்.

12.6.1. a, b இவைகளுக்கிடையில் n பெருக்கிடைகள் காண்க:

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பவை aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட n பெருக்கிடைகள் எனக்கொள்க.

$a, x_1, x_2, \ldots x_n, b$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன. இந்த பெருக்குத் தொடரின் பொது விகிதம் r எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $b = ar^{n+2-1}$

$$= ar^{n+1}$$

$$\therefore r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$ எனப்பெறப்படும்.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad x_1 &= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}; \\ x_2 &= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}; \\ x_3 &= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}; \\ \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\ x_n &= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \end{aligned}\right\}$$ இவை பெருக்கிடைகள்

$$b = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n+1}{n+1}}$$

$= b$ என்பது பெறப்படும்.

(எ-கா.) (1) 4096க்கும் 64க்கும் இடையே அமையக் கூடிய 5 பெருக்கிடைகள் காண்க.

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 பெருக்கிடைகளெனக் கொள்வோம்.

4096, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 64 பெருக்குத் தொடராகும்.

r பொது விகிதமாயின்,

$$64 = 4096\,(r)^6$$

$$\therefore\quad r^6 = \frac{64}{4096} = \frac{1}{64}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 2048 \\ x_2 &= 1024 \\ x_3 &= 512 \\ x_4 &= 256 \\ x_5 &= 128 \end{aligned}\right\}$$

(எ-கா.) (2) 1, a என்பவைகளுக்கிடையே n பெருக்கிடைகள் காண்க. அப்பெருக்கிடைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$\frac{a - \sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a} - 1}$$ என நிறுவுக.

1, $x_1, x_2, \ldots x_n$, a என்பவை பெருக்குத் தொடரெனக் கொள்க.

r பொது விகிதமெனக் கொள்க.

$$\therefore\quad a = 1.\, r^{n+1}$$

$$\therefore\quad r = (a)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad x_1 &= (a)^{\frac{1}{n+1}} \\ x_2 &= (a)^{\frac{2}{n+1}} \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \\ x_n &= (a)^{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}\right\} \text{ பெருக்கிடைகள்}$$

$$\therefore\quad x_1+x_2+\dots+x_n = \frac{(a)^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n+1}}-1}$$

$$= \frac{a-\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{a}-1}$$

என நிறுவப்பட்டது.

(எ-கா.) (3) a, b, c பெருக்குத் தொடரிலிருந்தால், $\frac{a^3}{c}$, b^2, $\frac{c^3}{a}$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன வென நிறுவுக.

பொது விகிதம் r எனின்,

$$b = ar$$

$$c = ar^2$$

$$\frac{a^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a} = a^2\ c^2$$

$$= a^2\ .\ a^2r^4$$

$$= a^4r^4$$

$$= (a^2r^2)^2$$

$$= (b^2)^2.$$

$\therefore$ b^2 என்பது $\frac{a^3}{c}$ க்கும் $\frac{c^3}{a}$ க்கும் இடைப்பட்ட பெருக் கிடையாகிறது.

$\therefore$ $\frac{a^3}{c}$, b^2, $\frac{c^3}{a}$ பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன.

பாடச்சுருக்கம் (12)

1. பெருக்குத் தொடரில் பொது உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$

2. பெருக்குத் தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

$$= \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$

3. $|r| < 1$, ஆனல் $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

4. x, y க்கும் பெருக்கிடை $G = \sqrt{xy}$. ஆனல் x, y இரண்டும் கூட்டு, அல்லது குறை யெண்ணாக விருக்க வேண்டும்.

ஒன்று கூட்டெண்ணாகவும், மற்ரென்று குறை யெண்ணாகவுமிருப்பின் அவைகளின் பெருக்கிடை ஒரு கற்பனை யெண்ணாகும்.

பயிற்சி 12

1. பின்வரும் தொடர்கள் பெருக்குத் தொடரா என்று நிர்ணயித்து, அப்படியாயின் 'n' வது உறுப்பையும் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

(2) $2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$

(3) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\ldots$

(4) $a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^5}, \ldots\ldots$

(5) $4, 44, 444, \ldots\ldots$

2. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் மூன்ருவது உறுப்பு 4; ஆருவது $\frac{1}{2}$. அதன் முதல் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் 5 வது உறுப்பு $\frac{4}{27}$; பொது விகிதம் $\frac{1}{3}$. முதல் உறுப்பைக் காண்க. முதல் 10 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை யென்ன ? கந்தழி வரை கூட்டுத் தொகை என்ன ?

4. a, b, c என்பவை முறையே ஒரு பெருக்குத் தொடரின் p, q, r வது உறுப்புக்கள் ;

$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = 1$ என்பதை நிறுவுக.

*5. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

(1) $4+4{\cdot}4+4{\cdot}44+4{\cdot}444+\ldots\ldots$

(2) $0{\cdot}5+0{\cdot}55+0{\cdot}555+\ldots\ldots$

(3) $a+\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}+\frac{a}{b^3}+\ldots\ldots$

*6. பின் வரும் மடக்குப் பதின் பின்னங்களுக்குரிய மதிப்பைக் காண்க.

(1) $0.1\dot{3}$

(2) $0\cdot\dot{0}\dot{5}$

(3) $0\cdot\dot{3}\dot{1}$

(4) $0\cdot\dot{3}0\dot{0}$

7. n பெருக்குத் தொடர்கள் முறையே $a, 2a, 3a \ldots na$ என்ற முதலுறுப்புக்கள் பெற்றவை. யாவற்றிற்கும் பொது விகிதம் r. $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ என்பவை முறையே அத்தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை.

$s_1+s_2+s_3 \ldots\ldots+s_n = \frac{n(n+1)}{2}.\ \frac{r^n-1}{r-1}a$ என்பதை நிறுவுக.

8. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் முதல் n, $2n$, $3n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைகள் முறையே s_1. s_2, s_3, ஆகும். $(s_2-s_1)^2 = s_1\ (s_3-s_2)$ என நிறுவுக.

9. $x=1+a+a^2+\ldots\ldots \propto (a<1)$
$y=1+b+b^2+\ldots\ldots \propto (b<1)$
என்பன கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அப்படியானல் $1+ab+a^2b^2+\ldots \propto = \dfrac{xy}{x+y-1}$ என நிறுவுக.

10. $1+3+3^2+\ldots n$ உறுப்புக்கள் வரையுள்ள கூட்டுத் தொகை 3000க்கு மேற்பட்டிருக்க வேண்டுமானல், 'n'க்குக் குறைந்தது என்ன மதிப்பிருக்கவேண்டும்?

*11

$$\begin{matrix} x & y & z \\ l & m & n \\ a & b & c \end{matrix}$$

இங்கு நிரல்கள் பெருக்குத் தொடரிலும் வரிசைகள் கூட்டுத் தொடரிலும் உள்ளன. அம்மூன்று பெருக்குத் தொடர்களின் பொது விகிதங்கள் சமமென நிறுவுக.

12. x, y, z என்பவை ஒரு பெருக்குத் தொடரில் p, q, rவது உறுப்புக்களாயின் $(q-r)$மகை$x+(r-p)$மகை$y+(p-q)$ மகை$z=o$. என நிறுவுக.

13. 1 ஐ முதலுறுப்பாகவும், முறையே $1, 2, 3,\ldots n$ பொது விகிதமாகவும் கொண்ட, n பெருக்குத் தொடர்களில் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைகள் முறையே $s_1, s_2\ldots s_n$ ஆனல் $s_1+s_2+2s_3+3s_4+\ldots\ldots (n-1)s_n = 1^n+2^n+3^n+\ldots\ldots +n^n$ என நிறுவுக.

*14. இயற்கையெண்கள் பின்வருமாறு அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & 5 & & 6 & 7 & \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{matrix}$$

இதில் n வது வரிசையில் 2^{n-1} எண்கள் உள்ளன. அவ்வரிசையில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை $2^{n-2}(2^n+2^{n-1}-1)$ என நிறுவுக.

*15. ஒரு எல்லையற்ற பெருக்குத் தொடரில், எந்த உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டாலும், அதற்கும் அதற்குப் பின் வரும் எல்லா உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் உள்ள விகிதம் $1 : p$. அத்தொடரின் பொது விகிதமென்ன?

16. 9 க்கும் $\frac{1}{81}$ க்கும் இடையில் 5 பெருக்கிடைகள் காண்க.

17. a க்கும் $\frac{1}{a}$ க்கும் இடையே 15 பெருக்கிடைகள் காண்க. அப் பெருக்கிடைகளின் கூட்டுத் தொகை $\frac{\sqrt[4]{a^{11}} - \sqrt[8]{a^{7}}}{\sqrt[8]{a} - 1}$ என நிறுவுக.

18. a க்கும் b க்கும் நடுவில் n பெருக்கிடைகள் இருக்குமானல், அவைகளின் தொடர்ச்சியான பெருக்குத் தொகை $\sqrt{a^n b^n}$ என நிறுவுக.

19. ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 13; அவைகளின் இருபடிகளின் கூட்டுத் தொகை 91 அத்தொடரென்ன?

13. கூட்டு, இசை, பெருக்குத்தொடர் களுக்குள்ள சில தொடர்புகள் - அத்தொடர்களை யொட்டிய மற்ற சில தொடர்புகள்

(Relationships among the Arithmetic, Harmonic and Geometrical Series - Associated Series) :

13·1. நாம் இதுவரை தனித்தனியாகக் கண்ட கூட்டு, இசை, பெருக்குத் தொடர்களுக் கிடையே, சில பொதுவான தொடர்புகள் உள்ளன. அவைகளையும், மற்றும் அத்தொடர் களைச் சார்ந்த சில தொடர்களையும் காண்போம்.

13.2. கூட்டு, பெருக்கு, இசை யிடைகளுக் கிடைப்பட்ட முக்கிய தொடர்பு :

தேற்றம் : இரண்டு கூட்டெண்களின் கூட்டிடை, பெருக் கிடை, இசையிடை ஆகிய மூன்றும் குறைந்துவரும் (இறங்கு வரிசையிலிருக்கும்) ஒரு பெருக்குத் தொடரிலிருக்கின்றன.

x, y என்ற இரு கூட்டெண்களின்

$$\text{கூட்டிடை A} = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{பெருக்கிடை G} = \sqrt{xy}$$

$$\text{இசையிடை H} = \frac{2xy}{x+y}$$

என நாம் அறிவோம்.

A, G, H, மூன்றும் இறங்கு வரிசையிலுள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ளன வென நிறுவவேண்டும்.

அதாவது (1) $G^2 = AH$ எனவும்
(2) $A > G > H$ எனவும் நிறுவவேண்டும்.

$$G^2 = (\sqrt{xy}\ )^2 = xy$$

$$A\ H = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{2xy}{x+y} = xy$$

$\therefore\ G^2 = A\ H$ என நிறுவப்படுகிறது.

மேலும் $A>G>H$ என நிறுவ, பொது விகிதமான $\frac{G}{A} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{xy}{2}} = \frac{H}{G}$ ஒன்றுக்குக்குறைபட்டது என நிறுவவேண்டும்.

முதலில் $A>G$ என நேரடியாக நிறுவ முற்படுவோம்,

$$A - G = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$$

$$= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2}$$

= கூட்டெண் (சரியான இருபடி)

எனவே $A>G$ என நிறுவப்படுகிறது. இப்படியல்லாமல், $\frac{G}{A} - \frac{H}{G} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1$ என நிறுவினாலும் போதுமானது.

$\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1$ என நிறுவ,

$2\sqrt{xy} < x+y$ என நிறுவவேண்டும்.

அதாவது $x+y > 2\sqrt{xy}$,, ,,

அதாவது $(x+y-2\sqrt{xy}) > 0$,,

அதாவது $(\sqrt{x}-\sqrt{y}\ )^2 > 0$,, ,,

இது உண்மை; ஏனெனில் $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ ஒரு சரியான இருபடி. எனவே >0 ஆகும்.

∴ பொது விகிதமான $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}<1$ என நிறுவப்பட்டது,

எனவே $A>G>H$ என நிறுவப்பட்டது. இவ்விரண்டு வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை ஏற்கலாம்,

13·3.1 மற்றும் சில தொடர்புகள்:

(1) a, b, c, d கூட்டுத் தொடரிலிருப்பின் $bc>ad$

(2) a, b, c, d இசைத் தொடரிலிருப்பின் $bc<ad$

(3) a, b, c, d பெருக்குத் தொடரிலிருப்பின் $bc=ad$

இவைகளை ஒவ்வொன்ருக நிறுவுவோம்.

(1) கூட்டுத் தொடர் a, b, c, d ன் பொது வேறுபாடு k ஆயின்,

$$b=a+k$$
$$c=a+2k$$
$$d=a+3k$$

$$\begin{aligned} bc-ad &= (a+k)(a+2k)-a(a+3k) \\ &= a^2+3ak+2k^2-a^2-3ak \\ &= 2k^2 \\ &> o \end{aligned}$$

∴ $bc>ad$ என நிறுவப்பட்டது.

(2) இசைத்தொடர் a, b, c, d ஆனுல் இணைந்த கூட்டுத் தொடர் $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$. சற்று முன் நிறுவியதை யொட்டி $\frac{1}{bc}>\frac{1}{ad}$ என்பது பொருந்தும்,

∴ $bc<ad$ என நிறுவப்பட்டது.

(3) பெருக்குத் தொடர் a, b, c, d ன் பொது விகிதம் r எனக் கொண்டால்,

$$b=ar$$
$$c=ar^2$$
$d=ar^3$ எனப் பெறப்படும்.
$$bc=a^2r^3$$
$$ad=a^2r^3$$
∴ $bc=ad$ என நிறுவப்பட்டது.

13.3·2. ஒரு பெருக்குத் தொடரில், அடுத்தடுத்த இரு உறுப்புக்களுக்கிடையே, அவைகளின் இசையிடைகள் கண்டால், அவ்விசையிடைகள் மற்றொரு பெருக்குத் தொடரில் அமையும் என நிறுவுக. அத் தொடரின் பொது விகிதம் காண்க.

$$a, \quad h_1, \quad ar$$
$$ar, \quad h_2, \quad ar^2$$
$$ar^2, \quad h_3, \quad ar^3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

என்ற அடுக்குகளில் a, ar க்கு இடைப்பட்ட இசையிடை h_1; அவ்வாறே h_2, h_3...முதலியன.

இப்போது $h_1 = \dfrac{2a^2r}{a(1+r)}$;

$$h_2 = \frac{2a^2r^3}{ar(1+r)};$$

$$h_3 = \frac{2a^2r^5}{ar^2(1+r)};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{2a^2r^3}{ar(1+r)} \cdot \dfrac{a(1+r)}{2a^2r} = r$ எனக் காணலாம்.

$\dfrac{h_3}{h_2} = \dfrac{2a^2r^5}{ar^2(1+r)} \cdot \dfrac{ar(1+r)}{2a^2r^3} = r$ எனக் காணலாம்.

எனவே $h_1, h_2, h_3, \ldots\ldots$ என்பவை ஒரு பெருக்குத் தொடரிலுள்ளன வென நாம் காண்கிறோம். அத்தொடரின் பொது விகிதம் r.

13.3·3. x, y என்ற இராசிகளிடையே, $(2n-1)$ கூட்டிடைகள், பெருக்கிடைகள், இசையிடைகள் கணக்கிட்டால், அவைகளில் n வது இடைகள் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் உள்ளனவென நிறுவுக.

$$y = x + 2\,nd$$

$$\therefore \quad d = \frac{y-x}{2n}$$

$$\therefore\ n \text{ வது கூட்டிடை } A_n = x + \frac{n(y-x)}{2n}$$

$$= x + \frac{y-x}{2}$$

$$= \frac{x+y}{2}$$

பெருக் கிடைகள் காண :

$$x = xr^{2n}$$

$$\therefore\ r = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}n}$$

$$\therefore\ n \text{ வது பெருக்கிடை } G_n = x\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{n}{2n}}$$

$$= \sqrt{xy}$$

இசையிடைகள் காண :

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + 2\,n\,d_1$$

$$\therefore\ d_1 = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x-y}{2nxy}$$

$$\therefore\ n \text{ வது இசையிடை} H_n = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{n(x-y)}{2nxy}}$$

$$= \frac{2nxy}{n(x+y)}$$

$$= \frac{2xy}{x+y}$$

$$A_n = \frac{x+y}{2}\ ;$$

$$G_n = \sqrt{xy}\ ;$$

$$H_n = \frac{2xy}{x+y}.$$

இவைகள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன என்பது முன்னரே நிறுவப்பட்டது. (13·2 காண்க)

13·4. கூட்டு-பெருக்குத் தொடர் (Arithmetic-Geometric Series) :

$$a, (a+d)r, (a+2d)r^2 \ldots\ldots (a+\overline{n-1}d)r^{n-1}$$

என்ற தொடரின் அமைப்பைக் காண்க.

இத் தொடர் எவ்வாறு அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது என்பதைக் கீழ்க்கண்ட நிரல்களில் காண்க.

நிரல் (2)ல் ஒரு கூட்டுத்தொடரும் நிரல் (3)ல் ஒரு பெருக்குத் தொடரும் எழுதப்பட்டிருக்கின்றன. ஒத்த உறுப்புக்கள் (Corresponding terms) பெருக்கப்பட்டு கடைசி நிரலில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவை, ஒரு கூட்டு-பெருக்குத்தொடர் என்று வரையறுக்கப்படும்.

நிரல் (1)	நிரல் (2)	நிரல் (3)	நிரல் (4)
உறுப்புக்களின் எண்	கூட்டுத் தொடர்	பெருக்குத் தொடர்	கூட்டு-பெருக்குத் தொடர்
முதல் உறுப்பு	a	1	a
இரண்டாவது ,,	$a+d$	r	$(a+d)r$
மூன்ருவது ,,	$a+2d$	r^2	$(a+2d)r^2$
...	...	...	...
nவது உறுப்பு	$a+\overline{n-1}d$	r^{n-1}	$(a+\overline{n-1}d)r^{n-1}$.

இக்கூட்டு-பெருக்குத் தொடரில் பொது உறுப்பு அல்லது nவது உறுப்பு $=(a+\overline{n-1}d)r^{n-1}$

எடுத்துக்காட்டு:

$$1, 5\cdot2, 9\cdot2^2, 13\cdot2^3, \ldots\ldots (4n-3)2^{n-1}$$

இங்கு முதலுறுப்பு 1; பொது வேறுபாடு 4; பொது விகிதம் 2.

13·4·1. கூட்டு-பெருக்குத் தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை :

$$(1)\ s_n = a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\dots+(a+\overline{n-2}d)r^{n-2} + (a+\overline{n-1}\,d)r^{n-1}$$

$$(2)\ r\times s_n = ar+(a+d)r^2+\dots+(a+\overline{n-2}d)r^{n-1}+(a+\overline{n-1}d)r^n$$

$$(1)-(2) : s_n(1-r) = a+dr+dr^2+\dots+dr^{n-1}-(a+\overline{n-1}d)r^n$$
$$= a-(a+\overline{n-1}d)r^n+(dr+dr^2+\dots dr^{n-1})$$
$$= a-(a+\overline{n-1}d)r^n+\frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)}$$

(பெருக்குத் தொடரில் $(n-1)$ உறுப்புக்கக்களே உள்ளன)

$$\therefore s_n = \frac{a}{1-r} - \frac{(a+\overline{n-1}d)r^n}{1-r} + \frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}.$$

இதை ஒரு வாய்பாடாக, கவனத்தில் வைக்கவேண்டியதில்லை. அப்போதைக்கப்போது, பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

13.4·2. $r<1$ ஆகவிருந்தால் (r - ஒரு கூட்டு தகு பின்னம்), இக் கூட்டு – பெருக்குத்தொடர் கந்தழிவரை செல்லும் போது, அதன் கூட்டுத் தொகை எந்த எல்லையை நெருங்குகிறது என அறியலாம்.

$r<1$ ஆக இருந்தால் எல்லை $\lim_{n\to\infty} r^n \to 0$ என முன் கண்டோம் (12·4·1 காண்க).

எனவே n கந்தழி எல்லையை நெருங்கும்போது, S_n நெருங்கும் எல்லை $= \frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$ என்று கொள்வது வழக்கம்.

இது $|r|<1$ ஆக இருந்தாலும் மெய்யெனக் காண்க. எனவே $|r|<1$, ஆனால், இக்கூட்டு-பெருக்குத் தொடர், கந்தழிவரை செல்லும்போது, இதன் கூட்டுத் தொகை $= \frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$ எனக் கொள்ளப்படும்

(எ-கா.) (1) $1+5\cdot2+9\cdot2^2+\ldots\ldots+(4n-3)2^{n-1}$ ன் கூட்டுத் தொகை யறிக.

$$S_n=1+5\cdot2+9\cdot2^2+\ldots\ldots+(4n-7)2^{n-2}+(4n-3)2^{n-1}$$

$$2\times S_n = \quad 1\cdot2+5\cdot2^2+\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ +(4n-7)2^{n-1}+(4n-3)2^n$$

$$\therefore S_n-2S_n=-S_n$$

$$=1+4\cdot2+4\cdot2^2+\ldots4\cdot2^{n-1}-(4n-3)2^n$$

$$=1+4(2+2^2+\ldots\overline{n-1}\text{ உறுப்புக்கள்})-(4n-3)2^n$$

$$=1+\frac{4\cdot2(2^{n-1}-1)}{(2-1)}-(4n-3)2^n$$

$$\therefore\quad S_n=(4n-3)2^n-1-8(2^{n-1}-1)$$

$$=(4n-3)2^n+7-2^{n+2}$$

$n=2, 3\ldots$ போன்ற சிறிய மதிப்புக்கள் கொடுத்துச் சரி பார்த்துக் கொள்க.

(எ-கா.) (2) $2+5\left(\frac{1}{3}\right)+8\left(\frac{1}{3}\right)^2+11\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots n$ உறுப்புக் கள்வரை கூட்டுத்தொகை காண்க. கந்தழி வரையும் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$S_n=2+5\left(\tfrac{1}{3}\right)+8\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\ldots\ldots+(3n-4)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2}+(3n-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\tfrac{1}{3}\times S_n=\quad 2\left(\tfrac{1}{3}\right)+5\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\ldots\ldots+(3n-4)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}+(3n-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore S_n\left(1-\tfrac{1}{3}\right)=2+3\left(\tfrac{1}{3}\right)+3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\ldots\ldots+3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}-(3n-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$=3+3\left(\tfrac{1}{3}\right)+\ldots\ldots+3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}-1-(3n-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}-1-(3n-1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{9}{2\cdot3^n}-1-\frac{(3n-1)}{3^n}$$

$$=\frac{7}{2}-\frac{9}{2\cdot3^n}-\frac{3n-1}{3^n}$$

$$=\frac{7}{2}-\frac{1}{3^n}\left(3n+\frac{7}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{2}{3} S_n = \frac{7}{2} - \frac{1}{3^n}\left(3n + \frac{7}{2}\right)$$

$$\therefore S_n = \frac{21}{4} - \frac{3}{2}\left(3n + \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$\therefore S_{\propto} = \dfrac{21}{4}$ எனக் கொள்ளப்படும்.

13.5. சில தொடர்களின் கூட்டுத்தொகை காணல் :

கூட்டுத் தொடர், பெருக்குத் தொடர், கூட்டுப்பெருக்குத் தொடர் மூன்றைப் பற்றியும், அவைகளின் கூட்டுத் தொகைகள் அறியும் வழிகளையும் நாம் கண்டோம்.

இப்போது, இயற்கை எண்களான, 1, 2, 3 . . . . ., இவைகளின் இருபடிகள், முப்படிகள் இவைகளின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண முற்படுவோம்.

13.5·1. $1+2+3 \ldots\ldots + n$ என்ற முதல் n இயற்கை யெண்களின் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{n(n+1)}{2}$ என முன் நாம்கண்டோம். (10.5 (1) காண்க).

அதையே, வேறோர் பொது முறை வகுத்துக் காண்போம்.

முதல் n இயற்கை யெண்களின் கூட்டுத் தொகை :

$1+2+3+\ldots\ldots+n = s_1$ எனக் கொள்வோம்.

$(x+1)^2 - x^2 \equiv 2x+1$ என்பது ஒரு முற்றொருமை. இது எல்லா x மதிப்புக்களுக்கும் பொருத்தமானது. இம்முற்றொருமையில், முறையே $x = 1, 2, 3 \ldots n$ என ஈடு செய்து எழுதுவோம்.

$$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1.$$

இருபக்க நிரல்களையும் கூட்டிச் சமன்பாடு செய்தால்,

$$(n+1)^2-1^2=2(1+2+3+\ldots+n)+n$$
$$=2s_1+n$$
$$\therefore 2\,s_1=(n+1)^2-1^2-n$$
$$=n^2+n$$

$\therefore\ s_1=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ எனப் பெறப்படும்.

(வாய்பாடு)

13.5·2. இப்போது முதல் n இயற்கை யெண்களின் இருபடிகளின் கூட்டுத்தொகை காண்போம்.

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=s_2$ எனக் கொள்க.

இதை யறிய,

$(x+1)^3-x^3\equiv 3x^2+3x+1$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன் படுத்துவோம்.

இம் முற்றொருமையில், முறையே $x=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n$ என ஈடு செய்து எழுதுவோம்.

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

இருபக்க நிரல்களையும் கூட்டிச் சமன் செய்தால்,

$$(n+1)^3-1^3=3\,(1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2)$$
$$+3\,(1+2+\ldots\ldots+n)$$
$$+n$$ வரும்.

$$\therefore \quad 3s_2+3s_1=n^3+3n^2+3n-n$$

$$\therefore \quad 3s_2=n^3+3n^2+2n-\frac{3(n^2+n)}{2}\left[\because s_1=\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad s_2=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad \text{(வாய்பாடு)}$$

13.5·3. இப்போது முதல் n இயற்கை யெண்களின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை காண்போம்.

$s_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ எனக் கொள்வோம்.

$(x+1)^4-x^4\equiv 4x^3+6x^2+4x+1$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்துவோம்.

முறையே $x=1, 2, 3,\ldots n$ என ஈடு செய்து எழுதுவோம்.

$$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$$

$$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$$

$$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\,n^2+4\cdot n+1$$

இருபக்க நிரல்களேயும் கூட்டிச் சமன் செய்ய,

$$(n+1)^4-1^4=4(1^3+2^3+\ldots+n^3)$$
$$+6(1^2+2^2+\ldots+n^2)$$
$$+4(1+2+\ldots+n)$$
$$+n \quad \text{வரும்.}$$

$$\therefore \quad 4s_3+6s_2+4s_1 = n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1-n$$
$$= n^4+4n^3+6n^2+3n$$

$$\therefore \quad 4s_3=n^4+4n^3+6n^2+3n-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=n^4+4n^3+6n^2+3n-2n^3-3n^2-n-2n^2-2n$$

$$=n^4+2n^3+n^2$$

$$\therefore \quad s_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$= s_1{}^2$ எனப் பெறப்படும். (வாய்பாடு)

13·6 இப்போது s_1, s_2, s_3, வாய்பாடுகளைக் கொண்டு சில குறிப்பிட்ட அமைப்புக்களில் உள்ள தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை காணலாம். பொதுவாக, ஒரு தொடரின் பொது வுறுப்பு, அதாவது nவது உறுப்பு $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம். அவ்வுறுப்பைத் தனது nவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையை s_1, s_2, s_3 வாய் பாடுகளைக் கொண்டு காணலாம்.

$$T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

எனவே
$$T_1 = a\cdot1^3 + b\cdot1^2 + c\cdot1 + d$$
$$T_2 = a\cdot2^3 + b\cdot2^2 + c\cdot2 + d$$
$$T_3 = a\cdot3^3 + b\cdot3^2 + c\cdot3 + d$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$T_n = a\cdot n^3 + b\cdot n^2 + c\cdot n + d$$

$$\therefore \quad S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$
$$= a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ c(1 + 2 + \ldots + n) + (d + d \ldots n \text{ முறைகள்})$$
$$= as_3 + bs_2 + cs_1 + nd$$

s_1, s_2. s_3க்குரிய மதிப்புக்களை ஈடு செய்து சுருக்கினல் S_n மதிப்பு கிடைக்கும்.

எடுத்துக் காட்டாக: $T_n = n^3 + 2n + 1$ என்ற பொதுவுறுப்பைக் கொண்ட தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையான $S_n = \sum_1^n T_n = \sum_1^n n^3 + 2\sum_1^n n + (1 + 1 + \ldots n$ முறைகள்$)$

$= s_3 + 2s_1 + n$ ஆகும்.

இம்முறை நமக்கு நன்ருக விளக்கமாகி விட்டால், $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ என்ற உறுப்பைத் தனது nவது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையை உடனடியாக, $as_3 + bs_2 + cs_1 + dn$ என எழுதிச் சுருக்கலாம்.

(எ-கா.) (1) $1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + (2n-1)^2$ன் கூட்டுத் தொகையென்ன?

nவது உறுப்பு $= (2n-1)^2$

$$= 4n^2 - 4n + 1$$

$$\therefore S_n = 4s_2 - 4s_1 + n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

$n = 2,\ 3\ldots$போன்ற மதிப்புக்கள் ஈடுசெய்து, விடையைச் சரிபார்த்துக் கொள்க.

(எ-கா.) (2) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots = (2n)^3$ன் கூட்டுத் தொகையென்ன?

nவது உறுப்பு $= 8n^3$

$$\therefore S_n = 8\Sigma n^3$$

$$= 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$= 2[n(n+1)]^2$$

(எ-கா.) (3) 1·2, 3·4, 5·6,...என்ற தொடரில் முதல் n உறுப்புக்கள் வரை கூட்டுத்தொகை யென்ன?

இங்கு முதலில் nவது உறுப்பை யறியவேண்டும். ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் 2 சினைகள் உள்ளன.

முதற்சினைகள் 1, 3, 5,...

இரண்டாம் சினைகள் 2,4, 6,...

$\therefore$ T_nல் முதற்சினை 1,3,5...ன் nவது உறுப்பு $= 2n - 1$;

T_nல் இரண்டாம் சினை 2,4,6,...ன் nவது உறுப்பு $= 2n$

$$\therefore T_n = (2n-1)2n$$
$$= 4n^2 - 2n$$

$$\therefore \ S_n = 4s_2 - 2s_1$$
$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{3}$$
$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

(எ–கா.) (4) $1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 9 + \ldots$ n உறுப்புக்கள்வரை கூட்டுத் தொகை காண்க.

ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் 3 சினைகள் உள்ளன.

முதல் சினை : 1, 2, 3,...... $\therefore$ n வது உறுப்பு $= n$.

இரண்டாம் சினை : 2, 3, 4,...... $\therefore$ n வது உறுப்பு $= (n+1)$.

மூன்றும் சினை : 5, 7, 9,...... $\therefore$ n வது உறுப்பு $= 2n+3$.

$$\therefore \ T_n = n(n+1)(2n+3)$$
$$= 2n^3 + 5n^2 + 3n$$

$$\therefore \ S_n = 2s_3 + 5s_2 + 3s_1$$
$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + 13n + 14)}{6}$$

$n = 1, 2...$ ஈடு செய்து சரிபார்த்துக் கொள்க.

(எ–கா.) (5) ஒரு தொடரின் n வது உறுப்பு $T_n = n^2 - 2n + 3 \cdot 6^n$. அத்தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$T_n = n^2 - 2n + 3 \cdot 6^n$$

$$\therefore\ T_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6$$

$$T_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6^2$$

$$T_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6^3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$T_n = n^2 - 2 \cdot n + 3 \cdot 6^n$$

$$\therefore\ S_n = s_2 - 2s_1 + 3(6 + 6^2 + 6^3 + \ldots 6^n)$$

$$= s_2 - 2s_1 + \frac{3 \cdot 6(6^n - 1)}{6 - 1}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + \frac{18}{5}(6^n - 1)$$

$n = 2$ எனக் கொண்டால் முதல் இரண்டு உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $= (1 - 2 + 18) + (4 - 4 + 108)$

$$\therefore\ T_1 + T_2 = 17 + 108$$

$$= 125$$

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + \dfrac{18}{5}(6^n - 1)$ என்ற கோவையில் $n = 2$ ஈடுசெய்தால்,

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} - 2 \cdot 3 + \frac{18}{5}(36 - 1) \quad = 5 - 6 + 126$$

$= 125$ எனக்கிடைக்கிறது.

இதுவே விடை சரிபார்க்கும் முறை.

குறிப்பு: இந்த எடுத்துக் காட்டில், n வது உறுப்பில் கடைசிப் பகுதி ஒரு பெருக்குத் தொடரின் பொது உறுப்பு. ஆகவே, $T_1, T_2, T_3 \ldots T_n$ வரை எழுதி, நிரல் நிரலாக நாம் அறிந்த கூட்டுத் தொகை வாய்பாடுகளைக் கொண்டு மதிப்பிட்டுக் கூட்டினால், வேண்டிய கூட்டுத் தொகை கிடைக்கும்.

பாடச்சுருக்கம் 13

1. முறையான குறியீடுபடி, A, G, H மூன்றும் இறங்கு வரிசையிலுள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடர்.

எனவே $G^2 = AH$

$A > G > H$. (G கற்பனையெண்ணுக விருத்தல் விலக்கப் பட்டது.)

2. $s_1 = 1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$s_2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s_3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$= s_1^2$$
$$= (1+2+3+\quad+n)^2$$

பயிற்சி 13

1. p, q, r என்பவை கூட்டுத் தொடரிலிருப்பின், ஒரு பெருக்குத் தொடரின் p, q, r வது உறுப்புக்கள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன என நிறுவுக.

2. m, n க்கு இடைப்பட்ட கூட்டிடையும் a, b க்கு இடைப் பட்ட பெருக்கிடையும் சமம். அதன் மதிப்பு $\dfrac{ma+nb}{m+n}$ ஆனல் m, n, a, b இவைகள் எவ்வாறு தொடர்பு பெற்றன வெனக் காண்க.

3. a, b, c பெருக்குத் தொடரிலுள்ளன ; a, b க்கு இடைப் பட்ட கூட்டிடை x; b, c க்கு இடைப்பட்ட கூட்டிடை y; அப்போது $cx+ay=2xy$ என நிறுவுக.

4. x, z க்கு இடைப்பட்ட கூட்டிடை y, பெருக்கிடை ny. அப்போது x, z க்கு இடைப்பட்ட இசையிடை n^2y என நிறுவுக.

5. x, y க்கு இடைப்பட்ட கூட்டிடை, அவைகளிடைப் பட்ட பெருக்கிடையை விட 5 அதிகம்; அவைகளின் இசை யிடை, x, y இரண்டில் பெரிய எண்ணில் ஐந்திலொரு பங்கு. x, y என்ன ?

6. இரண்டு கூட்டெண்களுக் கிடைப்பட்ட கூட்டிடை பெருக்கிடையை விட 5 அதிகம்; பெருக்கிடை இசை யிடையை விட 4 அதிகம். அவ்வெண்கள் யாவை?

7. a, b, c, d விகித சமத்தில் உள்ளன. a, b, c கூட்டுத் தொடரிலுள்ளன. அப்போது $b. c, d$ இசைத் தொடரில் உள்ளன என நிறுவுக.

8. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் l, m, n வது உறுப்புக்கள் x, y, z; ஒரு பெருக்குத் தொடரின் l, m, n வது உறுப்புக் களும் அவைகளே. அப்போது $(y-z)$மகை$x+(z-x)$மகைy $+(x-y)$ மகை $z=0$ என நிறுவுக.

9. $x, a_1\ a_2, y$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்; $x, g_1; g_2, y$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்; x, h_1, h_2, y ஒரு இசைத் தொடர். அப் போது $\frac{g_1}{h_1}\frac{g_2}{h_2}=\frac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$ என நிறுவுக.

10. பின்வரும் கூட்டு – பெருக்குத் தொடர்களில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க. முடியுமான இடத்தில் கந்தழி வரையும் கூட்டுத்தொகை காண்க.

(1) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots(x>1\ ;\ x<1)$

(2) $\frac{a}{x}+\frac{3a}{x^2}+\frac{5a}{x^3}+\ldots\ldots(x>1)$

(3) $\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{20}+\frac{13}{40}+\ldots\ldots$

(4) $5+(5+a)2+(5+2a)\ 2^2+\ldots\ldots$

11. $1+2\left(1+\frac{1}{x}\right)+3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\ldots\ldots+x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-1}=x^2$ என நிறுவுக.

12. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

(1) $5.6+6.7+7.8+\ldots\ldots$

(2) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots\ldots$

(3) $1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots$

(4) $1.3.4+3.5,6+5.7.8+\ldots\ldots$

(5) $1^2.2+2^2.3+3^2.4+$

(6) $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots\ldots$

(7) $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots\ldots+(1+2+\ldots\ldots+n)$

(8) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots+(1^2+2^2+\ldots+n^2)$

13, பின் கொடுக்கப்பட்டன, ஒரு தொடரின் n வது உறுப்பு. அத் தொடர்களில் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க,

(1) $2n^2+3$

(2) n^2-n+2

(3) $an+b^n$

(4) $2n+2^n$

(5) $n^2+4\,.\,3^{n-1}$

14. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புக்களோடு, இரண்டாவது உறுப்பு கூட்டப்படுகிறது. அப்படி கிடைக்கப் பெறும் உறுப்புக்கள் இசைத் தொடரில் உள்ளன என நிறுவுக.

14 வரிசை மாற்றமும் சேர்வுகளும்

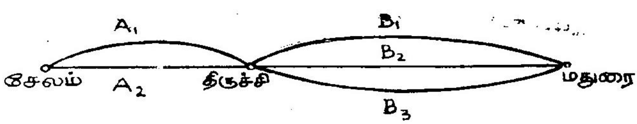
(Permutations and Combinations) :

14·1. தொடக்கக் கூறு (Introduction) :

இப்பகுதிக்கு அடிப்படையானதொரு தேற்றத்தை முதலில் நிறுவுவோம். அத்தேற்றம் பின் வரும் எடுத்துக்காட்டால் விளங்கும்.

சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்ல இரண்டு வழிகளும், திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல மூன்று வழிகளும் இருக்கின்றன. ஒருவன் சேலத்திலிருந்து திருச்சி வழியாக எத்தனை விதங்களில் மதுரை போய்ச் சேரலாம் ?

கீழ் வரும் படத்தைக் காண்க,



சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்ல — { A_1 ஒரு வழி; A_2 மற்றொரு வழி }

திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல { B_1 ஒரு வழி; B_3 இரண்டாவதுவழி; B_3 மூன்றாவது வழி }

ஒருவன் சேலத்திலிருந்து திருச்சி வழியாக, கீழே குறிப்பிட்ட ஆறு விதங்களில் ஏதாவது ஒரு முறையில் மதுரை சேரலாம்.

சேலம்–திருச்சி		திருச்சி–மதுரை
A_1	$\rightarrow$	B_1
A_1	$\rightarrow$	B_2
A_1	$\rightarrow$	B_3
A_2	$\rightarrow$	B_1
A_2	$\rightarrow$	B_2
A_2	$\rightarrow$	B_3

அதாவது முதலில் சேலத்திலிருந்து திருச்சிக்கு A_1 வழியாகச் செல்வானுனல், அதன் பிறகு B_1, B_2, B_3 என்ற மூன்று வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியில் மதுரை சேரலாம்; அல்லது சேலத்திலிருந்து திருச்சிக்கு A_2 வழியாகச் செல்வானுனல் அதன் பிறகு B_1, B_2, B_3 என்ற மூன்று வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியாக மதுரை சேரலாம், சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்லும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஏற்ப, திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல மூன்று வழிகள் உள்ளன, ஆகவே, அவன் சேலத்திலிருந்து திருச்சி வழியாக $2 \times 3 = 6$ வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் மதுரை சேரலாம், அவ்வாருன விதங்கள் $(A_1\ B_1)$; $(A_1\ B_2)$; $(A_1\ B_3)$; $(A_2\ B_1)$; $(A_2\ B_2)$; $(A_2\ B_3)$.

14·2, இவ் வடிப்படையில் பின்வரும் தேற்றத்தை ஆராய்க :

தேற்றம் : ஒரு செயலை m வெவ்வேறு வழிகளில் செய்ய முடியும் ; அச்செயல் அந்த m வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியில் செய்யப்பட்ட பின்பு, மற்ருேர் செயல் இச்செயலினுல் தடைபடாமல், n வெவ்வேறு வழிகளில் செய்ய முடியுமானுல், இவ்விரண்டு செயல்களையும் ஒன்றன் பின் ஒன்ருக $m \times n$ வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம்.

முதற் செயலை $A_1, A_2, \ldots A_m$ என்ற m வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம்; இரண்டாம் செயலை $B_1, B_2, \ldots B_n$ என்ற n வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம் எனக் கொள்வோம்.

முதற் செயலைச் செய்யும் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் செயலை, n வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்ய இடமுண்டு. ஆனால் முதற் செயலை m வெவ்வேறு முறைகளில் செய்யலாம். இதில் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் செயலைச் செய்ய n வெவ்வேறு வழிகள் உள்ளவாதலின், இவ்விரண்டு செயல்களையும் ஒன்றன் பின் ஒன்ருக mn வெவ்வேறு முறைகளில் செய்யலாம். அம் முறைகள் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$A_1 B_1$	$A_2 B_1$	$A_3 B_1$	...	$A_{m-1} B_1$	$A_m B_1$
$A_1 B_2$	$A_2 B_2$	...	...	...	$A_m B_2$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
$A_1 B_n$	$A_2 B_n$	...	...	$A_{m-1} B_n$	$A_m B_n$

இவைகளின் எண்ணிக்கை $m \times n$ ஆகும். இத் தேற்றத்தை மேலும் விரிவுபடுத்தினல் பின்வரும் கிளைத்தேற்றம் பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் : ஒரு செயலை m வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும், அதன் பிறகு இரண்டாவதொரு செயலை n வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும், அதன் பிறகு மூன்ருவதொரு செயலை p வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும் செய்ய முடியுமாளுல், அம் மூன்று செயல்களையும் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக $m \times n \times p$ வெவ்வேறு வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியில் செய்யலாம்.

இதில் கவனிக்க வேண்டியது யாதெனில், முதல் வழியில் ஏதாவது ஒரு வழியில் செய்யலாம்; அதன் பிறகு இரண்டாவது செயலைச் செய்யும்போது, முதல் செயல் எந்த வழியில் செய்யப்பட்டிருந்தாலும், இரண்டாவது செயலைச் செய்ய *n* வழிகளுண்டு. அம்மாதிரியே மற்றவையுமெனக் கொள்க.

(எ-கா.) (1) A இடம் 3 புத்தகங்களும், B இடம் 6 புத்தகங்களும் உள்ளன. எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் A ம் B ம் ஒவ்வொரு புத்தகத்தைத் தங்களுக்குள் மாற்றிக் கொள்ளலாம்?

A தன்னிடமிருக்கும் 3 புத்தகங்களில் ஒன்றை B க்குக் கொடுத்தால், B தன்னிடமிருக்கும் 6 புத்தகங்களில் ஒன்றை A க்குக் கொடுப்பான். A இடம் 3 புத்தகங்கள் இருப்பதால், அவன் 3 விதங்களில் ஒரு புத்தகத்தை B க்குக் கொடுக்கலாம்.

இவ்விதமான ஒவ்வொரு முறைக்கும் B 6 விகிதங்களில் A க்கு ஒரு புத்தகம் கொடுக்கலாம்.

எனவே இவ்விரண்டு செயல்களும் $3 \times 6 = 18$ முறைகளில் செய்யப்படலாம்.

(எ-கா.) (2) ஒரு இருப்புத் தொடர்ப்பாதையில் 12 நிலையங்கள் உள்ளன. எத்தனை விதமான அனுமதிச் சீட்டுகள் அச்சடிக்க வேண்டும். (ஒரே ஒரு வகுப்பு வண்டிகள் உள்ளனவெனக் கொள்க.)

ஒவ்வொரு அனுமதிச் சீட்டிலும் "......" இடத்திலிருந்து " " இடத்திற்கு என அச்சாக வேண்டும்.

சிறப்பாக, A என்ற நிலையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். "A"லிருந்து மற்ற பதினொரு நிலையங்களுக்கு 11 விதமான சீட்டுகள் அச்சாக வேண்டும்.

12 நிலையங்களில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் இவ்விதமாக 11 விதமான சீட்டுகள் அச்சாக வேண்டும்.

எனவே $11 \times 12 = 132$ விதமான சீட்டுகள் அச்சாக வேண்டும்.

பயிற்சி 14 (1)

1. ஒரு கல்லூரியில் இரண்டு மாணவ விடுதிகள் உள்ளன. முதல் விடுதியில் 100 பேரும், இரண்டாவது விடுதியில் 48 பேரும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு விடுதியிலிருந்து ஒரு, ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். எத்தனை விதங்களில் இத்தேர்வைச் செய்யலாம்?

2. ஒரு குழு அமைப்பில், ஒரு ஆங்கிலேயனும், ஒரு அமெரிக்கனும் இருக்கவேண்டும். 10 ஆங்கிலேயர், 5 இந்தியர், 5 அமெரிக்கர் உள்ள ஒரு சபையிலிருந்து எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் இக்குழு அமைக்கலாம்?

3. ஒரு எழு கோணத்தில் எத்தனை மூலை வரைகள் வரையலாம்?

4. ஒரு n பக்கமுள்ள நேர்கோட்டுருவத்தில் எத்தனை மூலை வரைகள் வரையலாம்?

5. ஒருவன் சேலத்திலிருந்து சென்னை செல்ல 3 வழிகளுண்டு. ஏதாமொரு வழியாகச் சென்று மற்றொரு வழியாகத் திரும்ப விரும்பினால், எத்தனை விதங்களில் அவன் தன் செலவை முடிக்கலாம்?

6. ஒரு எழுத்துப் பூட்டில் ஆறு வளையங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வளையத்திலும் ஐந்து எழுத்துக்கள் உள்ளன. எத்தனை விதங்களில் அப்பூட்டைத் திறக்க முயற்சிக்கலாம்? இவைகளில் பயனற்ற முயற்சிகள் எத்தனை?

7. ஒரு போக்கில் (direction) 12 இணைக்கோடுகளும் மற்றொரு போக்கில் 16 இணைக் கோடுகளும் உள்ளன. அவைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டு மிடங்கள் எத்தனை?

14.3. வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும் (Permutations and Combinations):

a, b, c, d எனப் பெயர் கொண்ட நான்கு பொருள்கள் இருக்கின்றன. அவைகளினின்று, ஏதேனும் மூன்று பொருள்களைப் பொருக்க வேண்டுமாயின், அவை (abc); (abd); (acd); (bcd) என்ற ஏதாவது ஒரு குவியலாக இருக்கும். இதைத் தவிர வேறெந்த விதத்திலும் மூன்று பொருள்களைச் சேர்க்க முடியாது. இவ்விதமாக எடுத்துச் சேர்த்தலை, சேர்வுகள் (Combinations) எனக் கூறுகின்றோம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட நான்கு பொருள்களிலிருந்து ஏதேனும் மூன்று பொருள்களை, நான்கு வெவ்வேறு விதங்களில் சேர்க்கலாம்.

பொதுவாக n பொருள்களினின்று ஏதேனும் r பொருள்களைப் பொருக்கிச் சேர்ப்பது சேர்வு (Combination) எனப்படும். எத்தனை விதங்களில் அவ்வாறு n பொருள்களினின்றும் r பொருள்களைப் பொருக்கிச் சேர்க்கலாம் என்பது ${}_nC_r$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். சற்று முன் நாம் கண்டது ${}_4C_3=4$. ${}_nC_r$ ஒரு எண்ணிக்கை.

இப்போது அந்த நான்கு பொருள்களில் ஏதேனும் மூன்றை எடுத்து வரிசைகளாக அடுக்கினல், எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் பெறப்படும்?

(abc) என்ற ஒரு குவியலை (சேர்வை) எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றை வரிசையாக அடுக்கினல்,

$a\ b\ c$	$b\ c\ a$	$c\ a\ b$
$a\ c\ b$	$b\ a\ c$	$c\ b\ a$

என்று ஆறு விதங்களில் வரிசையாக அடுக்கலாம்.

அவ்வாறே (abd) என்ற மற்றொரு குவியலை ஆறு விதங்களில் வரிசையாக அடுக்கலாம். அவ்வாறே, (acd); (bcd) என்ற குவியல்களையும் ஆறு, ஆறு விதங்களில் வரிசையாக அடுக்கலாம்.

எனவே, 4 பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவைகளில் ஏதேனும் மூன்று பொருள்களை யெடுத்து வரிசையாக அடுக்கினல், 24 வெவ்வேறு வரிசைகள் பெறப்படும்.

பொதுவாக, n வெவ்வேறு பொருள்கள் கொடுக்கப் பட்டிருப்பின், அவைகளில் சிலவற்றையோ, எல்லாவற்றையுமோ, வரிசையில் வைப்பதற்கு வரிசை அல்லது அடுக்கு எனப் பெயர். n பொருள்களைக் கொண்டு, r, r...... பொருள்களாக எடுத்து அடுக்கினல் அல்லது வரிசை மாற்றம் செய்தால், எத்தனை வரிசைகள் உண்டு என்பது ${}_nP_r$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். இப்போது நாம் கண்டது ${}_4P_3=6+6+6+6=24$ ஆகும். ${}_nP_r$ ஒரு எண்ணிக்கை.

14.3.1. சேர்வுகளுக்கும் வரிசைகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடுகள் :

ஒரு சேர்வு என்று கூறும் போது, அச்சேர்வில் எத்தனை பொருள்கள் உள்ளன என்பது மாத்திரம் தான் நாம் கவனிக்கிறோம்.

ஒரு வரிசை என்று கூறும்போது, எத்தனை பொருள்கள் என்பது மட்டுமின்றி, எந்த வரிசையில் அவை அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன என்பதையும் நாம் கவனிக்க வேண்டும்.

(ab), (ba) இரண்டும் ஒரே சேர்வு தான் ; ஆனால் இரண்டு வரிசைகளாகும்.

அவ்வாறே (abc), (acb), (bca), (bac), (cab), (cba) யாவும் மூன்று பொருள்கள் கொண்ட ஒரே சேர்வு தான்; ஆனால் கூறப்பட்டுள்ள ஆறு அமைப்புகளும் அம் மூன்று பொருள்களால் அமைக்கப்பட்ட ஆறு வெவ்வேறு வரிசை களாகும்.

14.4. $_nP_r$ ன் மதிப்புக் காணல் :

n வெவ்வேறு பொருள்களைக் கொண்டு $r-r-$ பொருள்கள் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் அமைக்கலாம் அல்லது எத்தனை விதங்களில் அவைகளை $r-r-$ ஆக அடுக்கலாம் என்பதைக் காண்போம்.

அதுவே $_nP_r$ ன் எண்ணிக்கை.

r கட்டங்கள் உள்ளன வெனக் கொள்வோம்.

☐	☐	☐	……	☐
1	2	3		r

எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் ஒவ்வொரு எழுத்து வரிசைகள் அமைக்கலாம் என அறிவதே, $_nP_r$ ன் மதிப்பைக் காண்பதாகும்.

n எழுத்துக்களில் ஏதேனும் ஒன்றை முதல் கட்டத்தில் வைக்கலாம். ஆகவே முதல் கட்டத்தை n விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம். இப்படி ஏதேனும் ஒரு எழுத்தைக் கொண்டு முதல் கட்டத்தை நிரப்பிய பின்பு, எஞ்சியவை $(n-1)$ எழுத்துக்கள். அவைகளில் ஏதேனும்

ஒன்றை இரண்டாவது கட்டத்தில் நிரப்பலாம். எனவே, முதல் கட்டத்தை n எழுத்துக்களில் ஏதாமொன்றைக் கொண்டு நிரப்பிய பின், இரண்டாவது கட்டத்தை $(n-1)$ விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம்.

எனவே 14·2 ல் கண்ட தேற்றத்தின்படி, முதலிரண்டு கட்டங்களையும் $n(n-1)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். அவ்வாறே முதல் மூன்று கட்டங்களை $n(n-1)(n-2)$ விதங்களிலும், முதல் r கட்டங்களை,

$n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ விதங்களிலும் நிரப்பலாம்.

$$\therefore \ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$$

கிளைத் தேற்றம் :

$$(1) \ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)......(n-n+2)(n-n+1)$$
$$= n(n-1)(n-2)......3\times 2\times 1$$

${}_nP_r$ மதிப்பில் r க்கு n ஈடுசெய்ய இவ்வாய்பாடு கிடைக்கும்.

இம்மதிப்பாகிய $n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$ ஐ $\angle n$ அல்லது $n!$ என்ற குறியீட்டால் அறிவிப்போம்.

படிக்கும்போது n படிவரிசைப் பெருக்கம் எனப் படிக்கலாம் (Factorial n).

$$(2) \quad {}_nP_r = \frac{\angle n}{\angle \underline{n-r}}$$

ஏனெனில்,

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}$$

$$= \frac{\angle n}{\angle \underline{n-r}}$$

$$= \frac{n \text{ படி வரிசைப் பெருக்கம்}}{(n-r) \text{ படி வரிசைப் பெருக்கம்}}$$

14.4·1. (*a*) $\angle 1 = 1$ ஆகும்.

(*b*) $\angle 0$ன் மதிப்பென்ன வெனப் பார்ப்போம்.

$${}_nP_r = \frac{\angle n}{\angle \underline{n-r}}$$ எனப் பார்த்தோம்.

$r = n$ என ஈடு செய்ய,

$${}_nP_n = \frac{\angle n}{\angle \underline{n-n}}$$

$$= \frac{\angle n}{\angle 0}$$ ஆகும்.

ஆனல் ${}_nP_n = \angle n$ எனப் பார்த்தோம்.

$\therefore\ \angle 0 = 1$ என்ற மதிப்பு பொருத்தமாகும்.

(எ–கா.) (1) 'உலகம்' என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு, இரண்டிரண்டு எழுத்துக்களை எத்தனை வரிசைகளில் அமைக்கலாம்?

நமக்கு வேண்டிய எண்ணிக்கை ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$.

(எ–கா.) (2) (*a*) 'World' என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எத்தனை வரிசைகள் அமைக்கலாம்?

இங்கு 5 எழுத்துக்களும் ஒருங்கே எடுத்துக் கொள்ளப் படுகின்றன.

எனவே வேண்டிய எண்ணிக்கை $= {}_5P_5$

$$= \angle \underline{5}$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 120.$$

(*b*) முன் கூறப்பட்ட கணக்கில், 'W' என்ற எழுத்து எத்தனை வரிசைகளில் முதலில் வரும்? எத்தனை வரிசைகளில் 'W' என்ற எழுத்து முதலிடத்திலும் 'D' என்ற எழுத்து கடைசியிடத்திலும் வரும்?

'W' என்ற எழுத்தை முதலிடத்தில் நிலை நிறுத்தி விடுவோம். மீதி இருக்கும் 4 எழுத்துக்களை ∠4 விதங்களில் வரிசைமாற்றம் செய்து அடுக்கலாம். எனவே, 'W' முதலெழுத்தாக ∠4 அல்லது 24 வரிசைகளில் வரும்.

அடுத்தபடியாக,

'W'ஐ முதலிடத்திலும் 'D'ஐ கடைசி இடத்திலும் நிலை நிறுத்தி விடுவோம். எஞ்சியிருக்கும் 3 எழுத்துக்களை, 'W'க்கும் 'D'க்கும் இடையில் ∠3 விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம். எனவே 'W' முதலிடத்திலும், 'D' கடைசியிடத்திலும் ∠3 அல்லது 6 வரிசைகளில் வரும்.

(எ–கா,) (3) 0, 3, 4, 5 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு, எத்தனை நான்கிலக்க முழு எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை எண்கள் 5ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்?

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் இலக்கங்களைக் கொண்டு, எண்கள் அமைக்கும்போது, எந்த இலக்கமும் (வேறு விதமாகக் கூறப்படாவிடத்து) ஒரே ஒரு முறைதான் பயன்படுத்தப்படுகிறது எனக் கொள்ளவேண்டும்,

நான்கு கட்டங்கள் ▭ ▭ ▭ ▭ கொள்வோம்.

0, 3, 4, 5 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க எண்கள் அமைக்கும்போது, 0 ஐ முதலிடத்தில் கொள்ள முடியாது.

எனவே முதலிடத்தில் 3, 4, அல்லது 5 என்ற ஒரு எண்ணைத்தான் கொள்ளலாம். ஆக, முதல் கட்டத்தை 3 விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம். முதல் கட்டத்தை அவ்வாறு ஒரு இலக்கத்தைக் கொண்டு நிரப்பிய பின்பு, இரண்டாவது இடத்தை, 0 உட்படவுள்ள மூன்று இலக்கங்களில் ஏதேனுமொரு இலக்கங்கொண்டு நிரப்பலாம். அப்படி இரண்டாமிடத்தை நிரப்பிய பின் எஞ்சிய இலக்கங்கள் இரண்டு. இவைகளில் ஏதாமொரு இலக்கங்கொண்டு மூன்றுமிடத்தை நிரப்பி விட்டால், எஞ்சிய இலக்கம் ஒன்றுதும். அதைக் கொண்டு நான்காமிடத்தை நிரப்பலாம்.

இங்குச் சிறப்பாக நாம் கவனிக்க வேண்டியது 0 என்ற இலக்கத்தை, முதலிடம் தவிர, மற்ற எந்த இடத்திலும் வைக்கலாம்.

எனவே நான்கிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை

$= 3 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 18$ எனப் பெறப்படும்.

இந்த 18 எண்களில் எத்தனை 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனக் காணவேண்டும்.

5 ஆல் வகுபட வேண்டுமாயின், கடைசி இலக்கம் 5 அல்லது 0 என இருக்கவேண்டும். இவைகளைப் பின்வருமாறு காண்போம்:

பின்வரும் கட்டங்களைக் காண்க:

வகை (1) கடைசியிலக்கம் 0	▭ ▭ ▭ [0] கடைசியிடத்தில் 0ஐ நிலைபெறச் செய்க. முதல் மூன்று இடங்களை $3 \times 2 \times 1 = 6$ விதங்களில் நிரப்பலாம். ஆகவே, 0ல் முடியுமெண்கள் 6.
வகை (2) கடைசியிலக்கம் 5	▭ ▭ ▭ [5] கடைசியிடத்தில் 5 ஐ நிலைபெறச் செய்க. முதல் இடத்தை 0 விலக்கி 2 விதங்களில் நிரப்பலாம். 0 உட்பட இரண்டாம் இடத்தை 2 விதங்களில் நிரப்பலாம். ஆகவே, 5 ல் முடியுமெண்கள் $2 \times 2 \times 1 = 4$

எனவே அப்பதினெட்டு எண்களில் $6 + 4 = 10$ எண்கள் 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எண்களாகும்.

(எ-கா.) (4) n மாணவர்களை ஒரு வரிசையில் நிறுத்தும் போது, எத்தனை வரிசை மாற்றங்களில் இரண்டு குறிப்பிட்ட மாணவர்கள் A, B அடுத்தடுத்து நிற்பார்கள்.

(AB) அல்லது (BA) என்ற வரிசையில் அவர்களை ஒரு தனிக்கூட்டு அல்லது ஒரே ஒரு உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $(n-1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளனவெனக் கொள் வோம். இவைகளை $\underline{|n-1}$ விதங்களில் வரிசைப்படுத்தலாம். (AB) என்ற கூட்டுக்கு $\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களும், (BA) என்ற கூட்டுக்கு $\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களும் கிடைக்கும்.

எனவே, A, B இருவரும் $2\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களில் அடுத்தடுத்து (AB) என்ற வரிசையிலோ, (BA) என்ற வரிசை யிலோ இருப்பார்கள்.

(எ-கா.) (5) ${}_{m+n}P_2=56$; ${}_{m-n}P_2=12$ ஆனல் m, n ன் மதிப் பென்ன?

$$ {}_{m+n}P_2=(m+n)(m+n-1)=56 \qquad (1)$$

$$ {}_{m-n}P_2=(m-n)(m-n-1)=12 \qquad (2)$$

என்ற இரண்டு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். அவைகளை விடுவிக்க m, n கிடைக்கும்.

(1) $(m+n)^2-(m+n)-56=0$

$\therefore$ $m+n=x$ எனக்கொண்டால்,

$\therefore$ $x^2-x-56=0$

$\therefore$ $x=8$ அல்லது -7 ; -7 விலக்கப்பட வேண்டும்.

$\therefore$ $m+n=8$

$\therefore$ $m=8-n$ என இரண்டாவது சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய, $(8-n-n)(8-n-n-1)=12$

$\therefore$ $(8-2n)(7-2n)=12$

$\therefore$ $4n^2-30n+44=0$

$n=2$ அல்லது $6\frac{3}{4}$

$n=6\frac{3}{4}$ விலக்கப்படவேண்டிய தீர்வு: ஏனெனில் n கூட்டு முழு எண்ணாகத்தான் இருக்க முடியும்.

$\therefore$ $n=2$; $m=6$ என்பவை வேண்டிய மதிப்புகள்.

(எ-கா.) (6) $_{n}P_{r} = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$ என்பதை நேரடியாக நிறுவுக. வாய்பாடுகளைக் கொண்டு சரிபார்க்க.

r கட்டங்கள் கொள்க.

□	□	□	□	......	□
1	2	3	4		r

இவைகளில் முதல் கட்டத்தைத் தனியாகவும், மீதி $(r-1)$ கட்டங்களை ஒரு கூட்டாகவும் கொள்க.

முதல் கட்டத்தை n விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம்.

வரையறைப்படி, மீதி $(r-1)$ கட்டங்களை எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களைக்கொண்டு $_{n-1}P_{r-1}$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

எனவே 14·2 ல் கண்ட அடிப்படைத் தேற்றப்படி,

முதல் செயலை n விகிதங்களிலும்,

இரண்டாவது செயலை $_{n-r}P_{r-1}$ விதங்களிலும் செய்ய முடியுமாதலின்,

r கட்டங்களையும் $n \times {}_{n-1}P_{r-1}$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

$$\therefore {}_{n}P_{r} = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

வாய்பாடு படி, $_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

$$_{n-1}P_{r-1} = (n-1)(n-2)\ldots(\overline{n-1}-\overline{r-2})$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$\therefore n \times {}_{n-1}P_{r-1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$= {}_{n}P_{r}$$

பயிற்சி 14 (2)

1. மதிப்பிடுக :

(1) ${}_{10}P_5$

(2) ${}_{n+1}P_n$

(3) ${}_{n+r}P_n$

2. 'மதிப்பீடு' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவற்றையும் எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்? அவைகளில் எத்தனை வரிசைகளில் 'ம' முதலிலும் 'டு' கடைசியிலும் வரும்?

3. 0, 5, 6, 7, 8 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க முழு எண்கள் எத்தனையமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை எண்கள் 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடாதவையெனவும், எத்தனை ஒற்றைப் படை எண்களெனவும் அறிக.

4. 3, 4, 5, 6, 7 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கு இலக்க எண்கள் எத்தனை, ஐந்திலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? நான்கிலக்க எண்களில் எத்தனை 5000க்கு மேற்பட்டிருக்கும்? ஐந்திலக்க எண்களில் எத்தனை 50,000க்குக் குறைந்தனவாயிருக்கும்?

5. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை இரட்டைப் படையெண்கள்?

6. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு 1,000 க்கு மேற்பட்டு 10,000 க்கு மேற்படாமல் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடியவை?

7. 10 மாணவர்களை ஒரு வரிசையில் நிறுத்தவேண்டும். அவ்வரிசை மாற்றங்களில், குறிப்பிட்ட (1) இரு மாணவர்கள் (2) மூன்று மாணவர்கள் அடுத்தடுத்து எத்தனை வரிசைகளில் நிற்கமாட்டார்கள்?

8. ஒரு தேர்வுக்கு 12 கேள்வித்தாள்கள் உண்டு. குறிப்பிட்ட இரு கேள்வித் தாள்கள் அடுத்தடுத்து வராதபடி எத்தனை விதங்களில் அத்தேர்வை நடத்தலாம்?

9. 'உலகம்' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவும் வரிசை மாற்றம் செய்து அகர வரிசையில் அடுக்கப் படுகின்றன. 'உலகம்' என்ற சொல் எத்தனையாவது சொல் லாக விருக்கும்?

10. 'SALEM' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவும் வரிசை மாற்றம் செய்து அகராதி வரிசையில் அடுக்கப் படுகின்றன. அதில் 'SALEM' என்ற சொல் எத்தனையாவது இடம் பெறும்?

11. 'இயற் கணிதம்' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக் களை, மெய் யெழுத்துக்கள் தம் இடம் பெயராது எத்தனை வரிசைகளில் அடுக்கலாம்?

12. 'WONDERFUL' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக் களில், உயிரெழுத்துக்கள் (Vowels) தம் இடம் பெயராது எத்தனை வரிசைகளில் அடுக்கலாம்?

13. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களை எத்தனை முறைகள் வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தி எத்தனை ஐந்திலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 20,000 க்கு மேற்பட் டிருக்கும்?

14. எட்டு உருளைகளை வைக்க எட்டு பெட்டிகள் உள்ளன. ஐந்து உருளைகள் பெரிதானதால் மூன்று குறிப் பிட்ட பெட்டிகளில் வைக்க முடியாது. எத்தனை விதங்களில் உருளைகளைப் பெட்டிகளில் வைக்கலாம்?

15. 10 புத்தகங்களை ஒரு புத்தகத்தட்டில் (Book shelf) வரிசையாக அடுக்க வேண்டும். அதில் 5 கணிதம், 3 வர லாறு, 2 பொருளாதார நூல்கள். ஒவ்வொரு பொருளைப் பற்றிய நூல்களும் அடுத்தடுத்து இருக்க வேண்டுமானால், எத்தனை விதங்களில் அடுக்கலாம்.

16. ஒரு கணிதநூல் மூன்று பிரிவுகளாக (three parts) உள்ளது. மற்றும் 2 வரலாறு, 2 பொருளாதார நூல்களோடு இவைகளை அடுக்கவேண்டும். கணிதநூல் பிரிவு 1, பிரிவு 2, பிரிவு 3 மூன்றும் அதே வரிசையில் ஒருங்கே இருக்க வேண்டு மானால் எத்தனை விதங்களில் ஒரு புத்தகத்தட்டில் அடுக்க லாம்?

17. பின்வருவனவற்றை நேரடியாக நிறுவுக. வாய்பாடு கொண்டு சரிபார்க்க :

(1) $_{n}P_{r} = {}_{n-1}P_{r} + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$

(2) $_{n}P_{r} = (n-r+1) \times {}_{n}P_{r-1}$

(3) $_{n+1}P_{r} = {}_{n}P_{r} + r \cdot {}_{n}P_{r-1}$

(4) $_{n+1}P_{r+1} = (n+1) \cdot {}_{n}P_{r}$

18. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் எல்லா இரட்டைப்படை எண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

19. 2, 3, 4, 5 என்ற எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகையென்ன ?

20. 1, 2, 3... 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு எல்லா ஒன்பதிலக்க எண்களும் பின்கண்ட நிபந்தனைகளின் கீழ் அமைக்கப்படுகின்றன: (1) கடைசியில் இரண்டு இரட்டைப் படை எண்கள் இருக்கவேண்டும். (2) எண்களை இடதுபுறமிருந்து வலதுபுறம் படிக்கும்போது ஒற்றைப்படை யெண்கள் உயர்ந்து செல்லும் வரிசையில் இருக்கவேண்டும். அப்படி 504 எண்கள் உள்ளன என நிறுவுக.

21. $_{n}P_{8} = 24 \times {}_{n}P_{4}$ ஆனால் n மதிப்பென்ன ?

22. $_{m+n}P_{2} = 156$; $_{m-n}P_{2} = 20$ ஆனால் m, n மதிப்பென்ன ?

23. $\angle \underline{2n} = 2^{n} \angle n \, (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots \overline{2n-1})$ என நிறுவுக.

B

சேர்வுகள் (Combinations):

14.5. $_nC_r$ ன் மதிப்புக் காணல்:

n வெவ்வேறு பொருள்களைக் கொண்டு, எத்தனை வித மாக, r பொருள்கள் பொருக்கலாம் அல்லது சேர்க்கலாம் என் பதே $_nC_r$ ன் மதிப்புக் காணலுக்குச் சமமாகும்.

$_nC_1 = n$ என்பதும் $_nC_n = 1$ என்பதும் தெளிவு.

14.5·1. $_nP_r$ ன் மதிப்பைக் கொண்டு $_nC_r$ மதிப்புக் காணல்:

n வெவ்வேறு பொருள்களினின்றும் ஒரு சமயத்தில் r பொருள்களாக $_nC_r$ முறைகளில் பொருக்கலாம் என வைத்துக் கொள்வோம். ($_nC_r$ ன் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாது). அப்படி சேர்க்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட சேர்வை எடுத்துக் கொள் வோம். அச்சேர்வில் உள்ள r பொருள்களை $\angle r$ முறைகளில் வரிசை மாற்றி யமைக்கலாம் என நாம் அறிவோம்.

இவ்வாறே $_nC_r$ சேர்வுகளில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள r பொருள்களை வரிசை மாற்றி அடுக்கினுல் மொத்தம் $_nC_r \times \angle r$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும். ஆனுல் இவைகள் யாவும் n பொருள்களினின்று r பொருள்கள் எடுத்து அமைக்கும் வரிசை மாற்றங்களே யாகும்.

எனவே $_nC_r \times \angle r = {_nP_r}$

$$= \frac{\angle n}{\angle \underline{n-r}}$$

$$\therefore \; _nC_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle \underline{n-r}}$$ எனப் பெறப்படும். இந்த

முடிவைப் பெற நாம் $_nP_r$ ன் மதிப்பைப் பயன்படுத்தினேம்.

14.5·2. நேரடியாக ${}_nC_r$ மதிப்புக் காணல் :

இப்போது ${}_nP_r$ ன் மதிப்பையோ, r பொருள்களை $\angle r$ முறைகளில் வரிசை மாற்றியமைக்கலாம் என்ற முடிவையோ பயன்படுத்தாமல் நேரடியாக ${}_nC_r$ ன் மதிப்பைக் காண முற்படுவோம்.

முதலில் $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ என்பதை நிறுவுவோம்.

n பொருள்களை $a_1, a_2, \ldots a_n$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

${}_nC_r$ சேர்வுகளையும் எழுதிவிட்டதாகக் கொள்வோம்.

$$(A) \quad \left.\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots a_r, \\ a_2, a_3, \ldots a_{r+1} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{matrix}\right\} {}_nC_r \text{ சேர்வுகள்.}$$

ஒவ்வொரு சேர்விலும் r எழுத்துக்கள் இருக்கும். ஆகவே ${}_nC_r$ சேர்வுகள் எல்லாவற்றிலும் எழுதப்பட்ட எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $r \times {}_nC_r$ ஆகும்.

இப்போது மற்ெருரு முறையில் ${}_nC_r$ சேர்வுகளிலும் பயன் படுத்தப்பட்ட எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண் போம்.

(A) ல் எழுதப்பட்டிருக்கும் ${}_nC_r$ சேர்வுகள் எல்லாவற்றிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து a_s (அல்லது எந்த் எழுத்தாயினும் சரி) எத்தனை முறை தோன்றுகிறது எனப் பார்ப்போம். அதையறிய, a_s என்ற எழுத்தை விலக்கி, மீதியுள்ள $(n-1)$ எழுத்துக்களினின்றும் $(r-1)$ எழுத்துக்களாகப் பொருக்கி, எல்லா ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளையும் கண்டுபிடித்து, அவற்றில் ஒவ்வொரு சேர்வுக்கும் a_s என்ற எழுத்தைச் சேர்த்துவிட்டால், இப்படி ஏற்பட்ட சேர்வுகள் ஒவ்வொன்றிலும் a_s என்ற எழுத்தும், மற்றும் $(r-1)$ எழுத்துக்களும் இருக்கும். ஆகவே முன் காணப்பட்ட ${}_nC_r$ சேர்வுகளில் ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளில் a_s என்ற எழுத்து தோன்றும். a_s ஐப் பற்றிய இம்முடிவு, $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்ற ஒவ்வொரு எழுத்துக்கும் பொருந்தும் என்பது தெளிவு. எனவே, $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்ற எழுத்துக்கள் ஒவ்வொன்றும் (A) ல் ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளில் தோன்றும். ஆகையால் (A)ல் கண்ட எல்லாச் சேர்வுகளிலும் உள்ள எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ ஆகும்.

ஆனல் (A)ல் கண்ட $_nC_r$ சேர்வுகள் யாவற்றிலும் தோன்றும் மொத்த எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை $r \times {}_nC_r$ என முன்னர் கண்டோம்.

$\therefore \quad r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ என்ற முடிவு பெறப்படும்.

இந்த முடிவு, rக்கு உள்ள எந்த முழு எண் மதிப்புக்கும் பொருந்தும். ஆனல் $r \leq n$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. (ஏனெனில் $r > n$ ஆனல், n பொருள்களினின்று, n க்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் பொருக்கிச் சேர்க்க முடியாது)

எனவே $r \leq n$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு,

$$r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

அதாவது $_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1}$

இப்போது nக்குப் பதிலாக, $n-1, n-2, \ldots$ என்ற மதிப்புகளையும் ஈடுசெய்ய, பின்வரும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

$$_{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}_{n-2}C_{r-2}$$

$$_{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}_{n-3}C_{r-3}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$_{\overline{n-r-2}}C_2 = \frac{\overline{n-r-2}}{2} \times {}_{\overline{n-r-1}}C_1$$

ஆனல் $_mC_1 = m$ என்பது வெளிப்படை. ஆகவே கடைசியாக உள்ள $_{\overline{n-r-1}}C_1 = {}_{n-r+1}C_1 = n - r + 1$ ஆகும்.

இரு பக்கங்களையும் தொடர்ச்சியாகப் பெருக்கி ஈடு செய்தால்,

$$ {}_nC_r \times {}_{n-1}C_{r-1} \times {}_{n-2}C_{r-2} \times \dots {}_{n-r+2}C_2 $$

$$ = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \dots \frac{n-r+2}{2} \cdot {}_{n-1}C_{r-1} \times {}_{n-2}C_{r-2} \times \dots {}_{n-r+1}C_1 $$

இரு பக்கங்களிலும்,

${}_{n-1}C_{r-1},\ {}_{n-2}C_{r-2}, \dots {}_{n-r+2}C_2$ தோன்றும். அவைகளை நீக்கி விட்டால் (Cancel)

$$ {}_nC_r = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \dots \frac{n-r+2}{2} \times {}_{n-r+1}C_1 $$

$$ = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \dots \frac{n-r+2}{2} \cdot \frac{n-r+1}{1} $$

$$ = \frac{n(n-1)(n-2) \quad (n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\dots 2\cdot 1} \times \frac{\angle\underline{n-r}}{\angle\underline{n-r}} $$

$$ = \frac{\angle n}{\angle r \angle\underline{n-r}} $$ எனப் பெறப்படும் (வாய்பாடு).

கிளைத்தேற்றங்கள் :

(1) ${}_nC_r = {}_nC_{n-}C_r$ (வாய்பாடு)

ஏனெனில் r பொருள்களைச் சேர்ப்பதற்காகப் பொருக்கும் ஒவ்வொரு தடவையும், $(n-r)$ பொருள்கள் தவிர்க்கப்பட்டு, நம்மை அறியாமலேயே $\underline{n-r}$ பொருள்கள் 'தவிர்க்கப்பட்டு' பொருக்கப்பட்டு விடுகின்றன.

$\therefore\ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ என்பது விளக்கம். இதை ${}_nC_r$ ன் மதிப்பு வாய்பாட்டிலிருந்தும் நேரடியாகக் காணலாம்.

$$ {}_nC_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle\underline{n-r}} $$

$$ {}_nC_{n-r} = \frac{\angle u}{\angle\underline{n-r}\ \angle\underline{n-\overline{n-r}}} $$

$$ = \frac{\angle n}{\angle\underline{n-r}\angle r} $$

எனவே $_nC_r = {_nC_{n-r}}$ எனக் காணலாம்.

(2) (a) $_nC_r = {_{n-1}C_r} + {_{n-1}C_{r-1}}$
(b) $_{n+1}C_r = {_nC_r} + {_nC_{r-1}}$ } வாய்பாடுகள்.

மேற் கூறிய இரண்டும் ஒரே விதமான முடிவைத்தான் கூறுகின்றன. முதல் முடிவு nக்குப் பொருத்தம்; இரண்டாவது முடிவு $(n+1)$க்குப் பொருத்தம்.

(a) தெரிப்பு: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ என n எழுத்துக்கள் உள்ளனவெனக் கொள்வோம். இவைகளைக் கொண்டு $_nC_r$ சேர்வுகள் அமைக்கலாம்.

இந்த $_nC_r$ சேர்வுகளை இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) a_3 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்துத் தோன்றும் சேர்வுகள்;

(2) a_3 என்ற அக்குறிப்பிட்ட எழுத்துத் தோன்றுத சேர்வுகள்.

இவ்விரண்டின் கூட்டுத் தொகையே $_nC_r$ன் மதிப்பாகும்.

a_3 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து உள்ள சேர்வுகள் $_{n-1}C_{r-1}$ என்று 14·5·2ல். நிறுவப்பட்டது.

a_3 தோன்றுத சேர்வுகளின் எண்ணிக்கைகாண, எஞ்சிய $(n-1)$ எழுத்துக்களைக் கொண்டு, (a_3ஐ விலக்கிவிட்டு) r எழுத்துக்கள் உள்ள சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடித்தால் நாம் விரும்பும் எண்ணிக்கை கிடைக்கும். அவ்வெண்ணிக்கை $_{n-1}C_r$.

$\therefore\ _nC_r = {_{n-1}C_r}$ [ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து இல்லாத சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை]

$+\ _{n-1}C_{r-1}$ [அக் குறிப்பிட்ட எழுத்து தோன்றும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை]

இதை $_nC_r = \frac{\angle\underline{n}}{\angle r \angle \underline{n-r}}$ என்ற வாய்பாடு கொண்டும் நிறுவலாம்.

$$_{n-1}C_r + _{n-1}C_{r-1} = \frac{\angle\underline{n-1}}{\angle r \angle\underline{n-r-1}} + \frac{\angle\underline{n-1}}{\angle\underline{r-1}\ \angle\underline{n-r}}$$

$$= \frac{\angle\underline{n-1}\,.\,(n-r) + \angle\underline{n-1}\,.\,r}{\angle\underline{n-r}\,\angle\underline{r}}$$

$$= \frac{\angle\underline{n-1}\ (n-r+r)}{\angle\underline{n-r}\ \angle\underline{r}}$$

$$= \frac{n\angle\underline{n-1}}{\angle\underline{n-r}\ \angle\underline{r}}$$

$$= \frac{\angle\underline{n}}{\angle\underline{n-r}\ \angle\underline{r}}$$

$= {_nC_r}$ எனப் பெறப்படும்.

(b) முன் கண்ட முடிவில், nக்குப் பதிலாக, $(n+1)$ ஈடு செய்தால்,

$$_{n+1}C_r = {_{n+1-1}C_r} + {_{n+1-1}C_{r-1}}$$
$= {_nC_r} + C_{r-1}$ எனப் பெறப்படும்.

(3) $\underline{_nC_o = 1}$ (வாய்பாடு)

$_nC_r = \frac{\angle n}{\angle r\ \angle\underline{n-r}}$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore\ _nC_o = \frac{\angle n}{\angle o \angle n}$$

ஆனால் $\angle o = 1$ என நாம் முன் ஏற்றுக் கொண்டோம். [14·4.1 காண்க].

$$\therefore {_nC_o} = \frac{\angle\underline{n}}{1\angle\underline{n}}$$

$= 1$ ஆகப் பெறப்படும்.

இதுவும் நேரடியாகப் பார்த்தாலும் ஒரு விதத்தில் உண்மையாகும். n பொருள்களிலிருந்து ஒன்றும் பொருக்காமலிருக்க ஒரே வழிதான் உண்டு. அதாவது சும்மாவிருப்பது.

(எ–கா) (1) ${}_nC_{10} = {}_nC_6$ ஆனால் $= {}_nC_{14}$ என்ன ?

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \text{ ஆனபடியால்}$$

$$r = 10,\ n - r = 6 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ n = 16$$

$$\therefore\ {}_{16}C_{14} = \frac{16 \times 15}{1 \times 2} = 120$$

(எ–கா.) (2) n பக்கங்கள் உள்ள பல்கோணத்தில் எத்தனை மூலை வரைகள் உள்ளன? அப் பல்கோணத்தில் உச்சிகளை இணைப்பதால், எத்தனை முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்?

n உச்சிகளை இரண்டிரண்டாகச் சேர்த்தால் ${}_nC_2$ கோடுகள் கிடைக்கும். அவைகளில் n பக்கங்கள் போக, மீதி ${}_nC_2 - n$ மூலைவரைகள் கிடைக்கும்.

$$\text{மூலைவரைகளின் எண்ணிக்கை} = {}_nC_2 - n$$

$$= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

மூன்று, மூன்று புள்ளிகளாகப் பெருக்கி இணைத்தால் முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்.

$$\therefore \text{ முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை} = {}_nC_3$$

$$= \frac{\angle n}{\angle 3 \angle n-3}$$

(எ–கா.) (3) 10 இந்தியரும், 5 அரபியர்களும் உள்ள ஒரு குழுவிலிருந்து, இந்தியர்கள் பெருவாரியாக உள்ள 7 பேர் கொண்ட ஒரு உட்குழு அமைக்க வேண்டும். எத்தனை விதங்களில் இந்த உட்குழு அமைக்கப்படலாம்.

7 பேர் கொண்ட உட்குழுவில் இந்தியர் பெருவாரியாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

6 இந்தியர், 1 அரபியர் (A)

அல்லது 5 இந்தியர், 2 அரபியர் (B)

அல்லது 4 இந்தியர், 3 அரபியர் (C)

அவ்வுட்குழுவில் இருக்கவேண்டும்.

(A) 6 இந்தியர்களை ${}_{10}C_6$ விதங்களில் சேர்க்கலாம்.

1 அரபியரை ${}_5C_1$ விதங்களில் சேர்க்கலாம்.

இவ்விரண்டும் தனித்தனிச் செயல்கள்; ஆகவே 6 இந்தியரையும், ஒரு அரபியரையும் கொண்ட உட்குழுவை ${}_{10}C_6 \times {}_5C_1$ விதங்களில் அமைக்கலாம்.

$$\text{அதாவது } \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 5 = 1050 \text{ விதங்கள்.}$$

(B) அவ்வாறே 5 இந்தியர்களையும், 2 அரபியர்களையும் கொண்ட உட்குழுவை,

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_2 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2}$$

$= 2520$ விதங்களில் அமைக்கலாம்.

(C) அவ்வாறே, 4 இந்தியர்களையும், 3 அரபியர்களையும் கொண்ட உட்குழுவை,

$${}_{10}C_4 \times {}_5C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2}$$

$= 2100$ விதங்களில் அமைக்கலாம்.

எனவே, அந்த உட்குழுவை, $1050 + 2520 + 2100 = 5670$ விதங்களில் அமைக்கலாம்.

(எ-கா.) (4) ஓர் இரட்டைத்தள உந்து வண்டியில் (Double decker bus) ஒவ்வொரு தளத்திலும் 15 இடங்கள் காலியுள்ளன. வண்டியில் 30 பேர் ஏற இருக்கிறார்கள். ஆனால் அவர்களுள் 10 பேர் அடித்தளத்தில் உட்கார மறுக்கிறார்கள். மேலும் 10 பேர் உயர்தளத்தில் உட்கார மறுக்கிறார்கள். எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் விருப்பத்தை யொட்டி அவர்களை உட்கார வைக்கலாம்?

அடித்தளத்தில் உட்கார மறுக்கும் 10 பேர்களை மேல் தளத்தில் உட்கார வைத்துவிட்டு, மேல் தளத்தில் உட்கார மறுக்கும் 10 பேர்களை அடித்தளத்தில் உட்கார வைத்து விடுவோம்.

மீதி இருக்கும் 10 பேர்களில் ஏதாவது 5 பேர்களை அடித் தளத்தில் உட்கார வைத்து விட்டால், மற்ற 5 பேர்கள் தானாக மேல் தளத்தில் உட்கார்ந்து விடுவார்கள்.

10 பேர்களில் 5 பேரை ${}_{10}C_5$ விதங்களில் பொருக்கி அடித் தளத்தில் உட்கார வைக்கலாம். மீதி 5 பேரும் மேல் தளத் தில் போய்விடுவார்கள்.

ஆகையால், ${}_{10}C_5 = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$

$= 252$ விதங்களில் அவர்களை உட்கார வைக்கலாம்.

(எ-கா.) (5) r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $\lfloor r$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடுமென நிறுவுக.

r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்கள்,

$n, n+1, n+2, n+3, \ldots n+r-1$ எனக் கொள்க. அவை களின் பெருக்குத் தொகை

$$= n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)$$

$$= \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-1} \cdot n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)$$

$$= \frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor n-1}$$ ஆகும்.

இதை $\lfloor\underline{r}$ ஆல் வகுத்தால்,

$$\text{ஈவு} = \frac{\lfloor\underline{n+r-1}}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{r}}$$

$$= {}_{n+r-1}C_r$$

இது ஒரு கூட்டு முழு எண். ஏனெனில் இது ஒரு குறிப்பிட்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை. ஆகவே, r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $\lfloor\underline{r}$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

(எ–கா.) (6) $(m+n+p)$ வெவ்வேறு புத்தகங்களை, மூன்று பெட்டிகளில் முறையே, m, n, p புத்தகங்களாக, எத்தனை விதங்களில் வைக்கலாம்? ($m \neq n \neq p$ எனக் கொள்க.)

முதலில் m புத்தகங்களை ${}_{m+n+p}C_m$ விதங்களில் பொருக்கலாம். பின்னர் எஞ்சிய $n+p$ புத்தகங்களிலிருந்து ${}_{n+p}C_n$ விதங்களில் n புத்தகங்கள் பொருக்கலாம். கடைசியாக மூன்றாவது பெட்டிக்கு p புத்தகங்கள் தானாக நின்றுவிடும்.

$\therefore$ இச் செயல்களை,

${}_{m+n+p}C_m \times {}_{n+p}C_n$ விதங்களில் செய்யலாம்.

$$\text{அதாவது} \quad \frac{\lfloor\underline{m+n+p}}{\lfloor\underline{m}\,\lfloor\underline{n+p}} \; \frac{\lfloor\underline{n+p}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{p}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{m+n+p}}{\lfloor\underline{m}\,\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{p}}$$ விதங்களில் அவைகளை விரும்பியபடி, மூன்று பெட்டிகளில் வைக்கலாம்.

பாடச் சுருக்கம் (14)

1. $\lfloor\underline{n} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

2. $\lfloor\underline{1} = 1$; $\lfloor\underline{0} = 1$

3. ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$

   ${}_nP_n = \lfloor\underline{n}$

4. ${}_nC_r \times \lfloor\underline{r} = {}_nP_r$

5. $_nC_r = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$

6. $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$

7. (i) $_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$

(ii) $_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

8. $_nC_n = 1$

9. $_nC_0 = 1$

10. $_nC_1 = 1$

11. $_nC_r = {}_nC_{n-r}$

பயிற்சி 14 (3)

1. பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்க.

(1) $_{16}C_{14}$

(2) $_{100}C_{98}$

(3) $_{99}C_1$

(4) $_{10}C_3$

2. $_nC_2 = 153$ ஆனுல் n என்ன?

3. $_{n+1}C_2 = \frac{9}{40} \times {}_nC_3$ ஆனுல் r மதிப்பென்ன ?

4. $_{20}C_{r+4} = {}_{20}C_{2r-4}$ ஆனுல் n மதிப்பென்ன?

5. $_nC_r = {}_{n-2}C_r + 2.\ {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2}$ என நிறுவுக.

6. $_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-1} + \dots + {}_{r-1}C_{r-1}$ என நிறுவுக.

7. $r < m,\ r < n$ ஆனுல்,

$_{m+n}C_r = {}_mC_r + {}_mC_{r-1} \cdot {}_nC_1 + {}_mC_{r-2} \cdot {}_nC_2 + \dots + {}_nC_r$

என நிறுவுக.

8. ஒரு கோட்டின் மேல் m புள்ளிகள் உள்ளன. அதற்கு இணையாகவுள்ள மற்ருெரு கோட்டின் மேல் n புள்ளிகள் உள்

ளன. இந்தப் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

9. 10 மாம்பழங்கள் உள்ளன. அவைகளில் மிகப்பெரியது ஒன்று, மிகச் சிறியது ஒன்று. (1) மிகப் பெரியதையும் மிகச் சிறியதையும் சேர்த்து எத்தனை விதங்களில் 6 பழங்கள் எடுக்கலாம்? (2) அவ்விரண்டையும் விலக்கி, எத்தனை விதங்களில் 6 பழங்கள் எடுக்கலாம்?

10. 8 இந்தியரும், 8 பர்மியரும் உள்ள ஒரு சபையிலிருந்து எத்தனை விதங்களில் 13 பிரதிநிதிகள் தேர்ந்தெடுக்கலாம்? அவர்களுள் குறைந்தது ஒரு நாட்டவரில் 5 பிரதிநிதிகளேனும் இருக்கவேண்டுமானால், எத்தனை விதங்களில் அப் பதின்மூன்று பிரதிநிதிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

11. ஒரு சர்வதேசக் குழுவில் 3 இந்திய, 3 ஆங்கிலேய, 2 அமெரிக்க நீதிபதிகள் உள்ளனர். அவர்களைக் கொண்டு 4 நீதிபதிகள் கொண்ட ஒரு பொது நீதிமன்றம் அமைக்க வேண்டும். அவ் வமைப்பில் மூந் நாட்டவருக்கும் ஒரு இடமேனும் இருக்க வேண்டும். எத்தனை விதங்களில் அந் நீதிமன்றம் அமைக்கலாம்?

12. 7 கணிதம், 3 ஆங்கிலப் புத்தகங்களிலிருந்து 4 கணிதம், ஒரு ஆங்கிலப் புத்தகம் பொருக்கி, ஒரு புத்தகத் தட்டில் எத்தனை விதங்களில் அடுக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை அடுக்குகளில் ஆங்கிலப் புத்தகம் நடுவில் இருக்கும்?

13. 8 ஆண்களும் 5 பெண்களும் ஒரு அலுவலகத்தில் 6 காலி இடங்களுக்கு மனுச் செய்கிறார்கள். ஆண்களும் பெண்களும் சமமாக எடுக்க வேண்டுமாயின், எத்தனை விதங்களில் எடுக்கலாம்?

14. 10 பேர் இரண்டு வண்டிகளில் செல்ல வேண்டும். ஒரு வண்டியில் 4 பேருக்கு மேல் போக முடியாது. மற்றொரு வண்டியில் 8 பேருக்கு மேல் போக முடியாது. எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் செல்லலாம்?

15. ஒரு விருந்துக்கு வந்த 16 பேர், ஒரு மேசையில் இரு பக்கங்களிலும் 8, 8 பேராக உட்காரவேண்டும். அதில் மூவர் மேசையின் வலது புறத்தில் உட்கார விரும்புகிறார்கள்; இருவர் மேசையின் இடது புறத்தில் உட்கார விரும்புகிறார்கள். எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் சாப்பிட உட்காரலாம்?

16. m ஆண்களும், n பெண்களும் ஒரு வரிசையில் உட்கார வேண்டும். இரண்டு பெண்கள்கூட அடுத்தடுத்து உட்காரக்கூடாது. $m>n$ ஆனல் அவர்கள் $\frac{\lfloor m \cdot \lfloor m+1}{\lfloor m-n+1}$ விதங்களில் உட்காரலாம் என நிறுவுக.

17. 7 ஆண்கள், 8 பெண்கள் உள்ள சபையின் சார்பில் 4 ஆண்கள், 3 பெண்கள் உள்ள ஒரு குழு அமைக்க வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண் மகன் A அக்குழுவிலிருந்தால் B என்ற ஒரு பெண்மகள் அக்குழுவிலிருக்க மறுக்கிருள். எத்தனை விதங்களில் அக்குழு அமைக்கலாம்?

18. 52 சீட்டுகளை நான்கு சம பகுதிகளாக எத்தனை விதங்களில் பிரிக்கலாம்? எத்தனை விதங்களில் நாலு பேர்களுக்குச் சமமாகப் பங்கிடலாம்?

19. 8 புத்தகங்களை நான்கு, நான்காக எத்தனை விதங்களில் பிரிக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை விதங்களில் ஒரு குறிப்பிட்ட புத்தகம் தோன்ற இடமுண்டு?

20. ஓர் ஒரு ருபாய், ஒரு 50 பைசா, ஒரு 25 பைசா, ஒரு 10 பைசா நாணயங்களை வைத்துக் கொண்டு எத்தனை விதங்களில் ஒருவருக்குப் பணம் கொடுக்கலாம்?

* 15. தொடர் முறைத் தெரிப்பு

(Proof by Mathematical Induction) :

[இப்பகுதி, நேரடியாக, புகுமுக வகுப்பு கணித பாடத் திட்டத்தில் இல்லையானாலும், இந்த முறைப்படித் தெரிப்பு கூறல், கணிதப் படிப்பில் பல இடங்களில் பயன்படுகின்ற தாதலின், இந்நூலில் சேர்க்கப்பட்டிருக்கிறது. விலக்க விரும் பினால் விலக்கி விடுக. ஆனால் அறிதல் பயன் பயக்கும்.]

15.1. தொடர்முறைத் தெரிப்பு விளக்கம் : ஏரண நூலில் (Logic) இம்முறை உய்த்தறிதல் (Induction) எனத் தாராள மாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. கணித இயலில், இம்முறை தொடர் முறைத் தெரிப்பு முறை எனப்படும். இம்முறைப்படி பல தேற்றங்கள் நிறுவலாம் ; மற்ற முறைகளைவிட எளிதாக விருக்கும். இது செல்லச் செல்ல உணரப்படும்.

இங்கு நாம் கையாளும் முறை, மூன்று திட்டமான நிலை களில் அமையும்.

நிலை : (1) ஒரு எளிய உறுவலில் (Simple case) அல்லது எடுத்துக்காட்டில் அதன் முடிவை நேரடியாகச் சரியென வறிதல் ;

நிலை : (2) ஒரு பொது உறுவலில் (General case) தேற் றத்தை மெய்யெனக் கொண்டு, அதற்கு அடுத்தபடியான உறுவலில் தேற்றம் சரியென நிறுவுதல் ;

நிலை : (3) இவ்விரண்டையும் தொடர்பு படுத்தி, பொதுத் தேற்றத்தை நிறுவுதல்.

15·2. சில எடுத்துக் காட்டுகளால், நாம் முன்னர் அறிந்த சில தேற்றங்களை, இம்முறையில் நிறுவி, இம் முறையின் நுட் பங்களை யறிய முற்படுவோம்.

(a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ எனத் தொடர்முறையால் நிறுவுக.

நிலை (1) : $n=2$ எனக்கொண்டால், $1+2=\dfrac{2\times3}{2}$

$=3$

என்பது இவ்வாய்பாடு சரியெனக் காட்டுகிறது. அவ்வாறே

$n=3$ ஆனால் $1+2+3=\dfrac{3\times4}{2}$

$=6$ என்பதும் பொருத்தமே.

நிலை (2): பொதுவாக, $n=m$ ஆனால்,

$1+2+3+\ldots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$ என்பது ஏற்புடைத்து எனக் கொண்டு, mக்கு அடுத்த $(m+1)$ என்ற மதிப்பை n ஏற்கு மானால்,

$1+2+3+\ldots+m+(m+1)=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$ என நிறுவ முற்படுவோம். இதுவே இரண்டாம் நிலை.

$1+2+3+\ldots+m+(m+1)=\dfrac{m(m+1)}{2}$ [ஏற்புடைத்து எனக் கொள்ளப்பட்டது]

$+(m+1)$

$=(m+1)\left(\dfrac{m}{2}+1\right)$

$=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$ என நிறுவப் பட்டது.

எனவே இரண்டாம் நிலையில்,

இத்தேற்றம் $n=m$ என்ற மதிப்புக்கு ஏற்புடைத்தாயின், $n=(m+1)$ என்ற அதற்கடுத்த மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப்பட்டது.

நிலை (3) : $n=2$ என்ற மதிப்புக்கு இத்தேற்றம் உண்மை யாகிறதென நிலை (1)ல் கண்டோம்.

நிலை (1) ல் கண்டதையும், நிலை (2) ல் கண்டதையும் தொடர்பு படுத்த,

"தேற்றம் $n = m$ க்கு ஏற்புடைத்தாயின், அதற்கடுத்த $n=m+1$ என்ற மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப்பட்டது; மேலும் $n=2$ என்ற மதிப்புக்குச் சரியெனக் காணப்பட்டது; ஆகவே $n=2$ க்குச் சரியானுல் அடுத்த $n=3$ க்குச் சரியாகும்; $n=3$ க்குச் சரியானுல் அடுத்த $n=4$ க்குச் சரியாகும்: அவ் வாறே தொடர்ந்து சரியாகும்" எனத் தேற்றத்தின் பொதுத் தன்மை நிறுவப் படுகிறது.

(*b*) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ என்பதைத் தொடர் முறையால் நிறுவுக.

நிலை (1) $n=2$ எனக் கொண்டால் $1^2+2^2=5=\dfrac{2\times3\times5}{6}$ என்பது இவ் வாய்பாடு சரியெனக் காட்டுகிறது.

நிலை (2) பொதுவாக $n=m$ ஆனுல்,

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+m^2=\dfrac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}$ என்பது ஏற்புடைத்து எனக்கொண்டு,

m க்கு அடுத்த $(m+1)$ என்ற மதிப்பை n ஏற்குமானுல்,

$$1^2+2^2+3^2\ldots\ldots+m^2+(m+1)^2=\frac{(m+1)\,(m+2)\,(2\overline{m+1}+1)}{6}$$

என நிறுவ முற்படுவோம். இதுவே இரண்டாம் நிலை.

$$1^2+2^2+\ldots\ldots m^2+\,(m+1)^2=\frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}\ \text{[ஏற்புடைத்து எனக்கொள்ளப் பட்டது]}$$

$$+\,(m+1)^2$$

$$=(m+1)\left[\frac{m(2m+1)}{6}+(m+1)\right]$$

$$=\frac{(m+1)\,(2m^2+m+6m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2\overline{m+1}+1)}{6}$$

என நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, இரண்டாம் நிலையில்,

இத்தேற்றம் $n=m$ என்ற மதிப்புக்கு ஏற்புடைத்தாயின், $n=m+1$ என்ற அடுத்த மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப் படுகிறது.

நிலை (3) $n=2$ என்ற மதிப்புக்கு இத்தேற்றம் உண்மை யாகிறதென நிலை (1)ல் கண்டோம்.

நிலை (1)ல் கண்டதையும், நிலை (2)ல் கண்டதையும் தொடர்புபடுத்த,

"தேற்றம் $n=m$க்கு ஏற்புடைத்தாயின், அடுத்த $n=m+1$ என்ற மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப்பட்டது. ஆனல் $n=2$க்குச் சரியெனக் காணப்பட்டது. ஆகவே, $n=2$க்குச் சரி யானல் அடுத்த $n=3$க்குச் சரி ; $n=3$க்குச் சரியானல் அடுத்த $n=4$க்குச் சரி ; அவ்வாறே தொடர்ந்து சரியாக விருக்கிறது" எனத் தேற்றத்தின் பொதுத் தன்மை நிறுவப்படுகிறது.

(c) $10^n+3\cdot4^{n+2}+5$ என்ற எண் 9ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடியதென நிறுவுக.

நிலை (1) $n=2$ எனக் கொள்க.

$$10^n+3\cdot4^{n+2}+5=10^2+3\cdot4^4+5$$
$$=100+768+5$$
$$=873$$

இந்த எண் 9ஆல் மீதியின்றி வகுபடுகின்றது.

நிலை (2) பொதுவாக $n=m$ ஆனல்,

$$10^m+3\cdot4^{m+2}+5=M(9)$$ [9ன் மடங்கு Multiple of 9]

என ஏற்றுக்கொண்டு, mக்கு அடுத்த $(m+1)$ என்ற மதிப்பை n ஏற்குமானல்

$10^{m+1}+3\cdot4^{m+1+2}+5=\text{M }(9)$ என நிறுவ முற்படுவோம். இதுவே இரண்டாம் நிலை.

$$\begin{aligned}10^{m+1}+3\cdot4^{m+3}+5 &= 10\cdot10^{m}+12\cdot4^{m+2}+5\\ &= 10\cdot10^{m}+30\cdot4^{m+2}+50-18\cdot4^{m+2}-45\\ &= 10(10^{m}+3\cdot4^{m+2}+5)-9(2\cdot4^{m+2}+5)\\ &= \text{M }(9)-\text{M }(9)\\ &= \text{M }(9)\end{aligned}$$

என நிறுவப்படுகிறது,

நிலை (3): $n=2$ என்ற மதிப்புக்கு இத்தேற்றம் உண்மையாகிறது என்று நிலை (1)ல் கண்டோம்.

நிலை (1)ல் கண்டதையும், நிலை (2)ல் கண்டதையும் தொடர்புபடுத்த,

"தேற்றம் $n=m$க்கு ஏற்புடைத்தாயின், அடுத்த $n=m+1$ என்ற மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப்பட்டது; ஆனால் n=2க்குச் சரியென நிலை (1)ல் கண்டோம். ஆகவே $n=2$க்குச் சரியானால், அடுத்த $n=3$க்குச் சரியாகும்; $n=3$க்குச் சரியானால், அடுத்த $n=4$க்குச் சரியாகும்; அவ்வாறே தொடர்ந்து சரியாகும்" எனத்தேற்றத்தின் பொதுத்தன்மை நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 15

பின் வருவனவற்றைத் தொடர் முறையில் நிறுவுக.

1. $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

2. $1+3+5+\dots(2n-1) = n^2$

3. $1\cdot2+2\cdot3+\dots+n\cdot(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

5. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

6. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7. $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ என்ற எண் 14 ஆல் மீதியின்றி வகுபடுமென நிறுவுக.

8. ஒரு முழு எண்ணுக்கும் அதன் முப்படிக்குமுள்ள வித்தியாசம், 6 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனத் தொடர்முறையில் நிறுவுக.

16. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்-முழு எண்படி

(The Binomial Theorem - Positive Integral Index):

ஈருறுப்புத் தேற்றம் :

16.1. $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

என்பவை நமக்குத் தெரியும்.

உலகப் புகழ் பெற்ற விஞ்ஞானியும், கணித மேதையுமான ஸர் ஐஸாக் நியூட்டன்,

$$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}a + {}_nC_2 x^{n-2}a^2 + \ldots + {}_nC_r x^{n-r}a^r + \ldots + a^n$$

என்று $(x+a)^n$ன் விரிவு மதிப்பை ஒரு தொடராகக் கண்டு பிடித்து உலகிற்கு வழங்கினர். n ஒரு கூட்டு முழு எண் மதிப்புப் பெற்றது என்பது கவனிக்க வேண்டுவதாகும்.

அதாவது $(x+a)$ என்ற ஈருறுப்புச் சேர்க்கையை (Binomial) n என்ற எந்த முழு எண் மதிப்புக்கு உயர்த்தினலும் அப் பெருக்குத் தொகையை ஒரு முறையான தொடராக எழுதும் விதத்தை நியூட்டன் அறிவித்தார்.

$(x+a)$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புச் சேர்க்கையாதலின் $(x+a)^n$ன் மதிப்பைக் கொடுக்கும் தேற்றம் ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் எனப் பெயர் பெற்றது.

இனி, சுருக்கமாக, இத்தேற்றத்தை ''ஈருறுப்புத் தேற்றம்'' எனவே குறிப்பிடுவோம். ''ஈருறுப்புச் சேர்க்கை'' என்ற சொற்றொடருக்குப் பதிலாக ''ஈருறுப்புக் கட்டு'' என்ற சொற்றொடரைப் பயன்படுத்துவோம்.

16.1·1. $(x+a_1)(x+a_2)=x^2+x(a_1+a_2)+a_1a_2$;

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+x^2(a_1+a_2+a_3)+x(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)+a_1a_2a_3$$

என நேரடியாகப் பெருக்கி அறியலாம்.

அவ்வாறே, $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)$ என்ற நான்கு ஈருறுப்புக் கட்டுகளை நேரடியாகப் பெருக்கினால்,

$$\text{அதன் மதிப்பு} = x^4+x^3(a_1+a_2+a_3+a_4)$$
$$+x^2(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)$$
$$+x(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)$$
$$+a_1a_2a_3a_4$$

இங்கு $s_1=a_1+a_2+a_3+a_4=\sum a_1$

$s_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_3a_4=\sum a_1a_2$

$s_3=a_1a_2a_3+\ldots+a_2a_3a_4=\sum a_1a_2a_3$

$s_4=a_1a_2a_3a_4$

எனக் குறியீடு செய்தால்,

$$\text{பெருக்குத் தொகை} = x^4+x^3s_1+x^2s_2+xs_3+s_4$$

இப்போது a_1,a_2,a_3,a_4 என்ற நான்கு எழுத்துக்களிலிருந்து ஒரு, ஒரு எழுத்தாக எடுத்து, அவைகளின் கூட்டுத் தொகை s_1 எனக் கொள்வோம்; அவ்வாறே, இரண்டிரண்டாகவும், மூன்று, மூன்றாகவும், எடுத்து, அவைகளின் பெருக்கி வந்த பலன்களின் கூட்டுத் தொகையை முறையே s_2, s_3 எனக் கொள்வோம்; நான்கின் பெருக்குத் தொகையையும் s_4 எனக் கொள்வோம்.

s_1 ல் ${}_4C_1$ உறுப்புக்களிருக்கும் $({}_4C_1=4)$;
s_2 ல் ${}_4C_2$ உறுப்புக்களிருக்கும் $({}_4C_2=6)$;
s_3 ல் ${}_4C_3$ உறுப்புக்களிருக்கும் $({}_4C_3=4)$;
s_4 ல் ${}_4C_4$ உறுப்பு இருக்கும் $({}_4C_4=1)$.

இதே வழியாக,

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n)$

$=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\ldots+s_rx^{n-r}+\ldots+s_n$ என்று நிறுவலாம். இங்கு a_1, a_2, a_3, . . . a_n என்ற n எழுத்துக்கள் கொண்டு

அமையப்பெறும். s_1 ல் ${}_nC_1$ உறுப்புக்களும், s_3 ல் ${}_nC_3$ உறுப்புக்களும், . . . பொதுவாக s_r ல் ${}_nC_r$ உறுப்புக்களும் . . . s_n ல் ${}_nC_n(=1)$ உறுப்பும் இருக்கும்.

$s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (ஒன்று, ஒன்ருக . . .)

$s_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots$ (இரண்டிரண்டாகப் பெருக்கி)

$s_3 = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots$ (மூன்று மூன்ருகப் பெருக்கி)

. . . .

$s_r = a_1a_2a_3 \ldots a_r + a_2a_3 \ldots a_r + \ldots$ (r-,r. . . ஆகப் பெருக்கி)

$sn = a_1a_2a_3 \ldots n.$

இந்தப்பத்தியில் அடிக்கோடிட்டதை (underlined) நிறுவ, அப்பெருக்குத் தொகையில், பொதுவாக x^{n-r}ன் கெழு (coefficient), s_r என்பதை நிறுவுவோம். $(x+a)$, $(x+a_2)$, $(x+a_3)$,...$(x+a_n)$ என்று n சினைகள் உள்ளன. அவைகளில் ஏதாவது r சினைகளிலுள்ள ஒவ்வொரு aஐயும் பெருக்கி வந்த தொகையை, எஞ்சிய $(n-r)$ சினைகளிலுள்ள xகளைப் பெருக்கி வந்த தொகையோடு, மறுபடியும் பெருக்கினல், x^{n-r} கொண்ட உறுப்பு கிடைக்கும். $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ போன்ற r உறுப்புக்களின் பெருக்குத் தொகையால், x^{n-r}ஐப் பெருக்கப்பெற்ற தொகைகள் சேர்ந்தனவே x^{n-r}ன் கெழுவாகும்.

எனவே,

x^{n-r}ன் கெழு $= a_1, a_2 \ldots a_r + \ldots = s_r$.

இங்கு s_r என்ற தொகை x தொடர்பற்றது என்பது தெளிவு.

$\therefore\ (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n)$

$$= x^n + \sum_{r=1}^{r=n-1} s_r x^{n-r} + s_n$$ என எழுதப்படும்.

இங்கு $s_0 = 1$ எனவும் கொண்டால்,

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = \sum_{r=0}^{n} s_r x^{n-r}$$ என்றும்

இன்னும் சுருக்கமாக எழுதலாம்.

16·2 ஈருறுப்புத் தேற்றம்: தெரிப்பு.

சென்ற பகுதியில் $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$ எனக்கொள்வோம். அப்போது,

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$$
$$=(x+a)(x+a)\ldots(x+a) n \text{ முறைகள்}$$
$$=(x+a)^n$$

$$s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = {}_nC_1 a$$
$$s_2 = a_1 a_2 + \ldots = {}^nC_2 a^2$$
$$s_3 = a_1 a_2 a_3 + \ldots = {}_nC_3 a^3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$s_r = a_1 a_2 \ldots a_r + \ldots = {}_nC_r a^r$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$s_n = a_1 a_2 \ldots a_n = a^n$$
$$\therefore (x+a)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 \ldots$$
$$+ \ldots + {}_nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n$$

என நிறுவப்படும்.

இதுவே ஈருறுப்புத் தேற்றம்; n ஒரு கூட்டு முழு எண் மதிப்பு ஏற்கும்போது பொருத்தமாகும்.

* 16·3 ஈருறுப்புத் தேற்றம்: தொடர் முறைத் தெரிப்பு:

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயின்,

$$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots$$
$$+ {}_nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n$$

என்ற தேற்றத்தை, இப்போது தொடர் முறையில் நிறுவ முற்படுவோம்.

நிலை (1) $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$= x^2 + {}_2C_1 x^{2-1} a^1 + a^2$$
$$= x^2 + {}_2C_1 xa + a^2.$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3$$
$$= x^3 + {}_3C_1 x^{3-1} a + {}_3C_2 x^{3-2} a^2 + a^3$$
$$= x^3 + {}_3C_1 x^2 a + {}_3C_2 xa^2 + a^3$$

என்பவையிரண்டும் சாதாரணப் பெருக்கலினல் உண்மை யென அறிகிரேம்.

அதாவது, $n=2$, $n=3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு இத் தேற்றம் உண்மை யாகிறது.

நிலை (2) பொதுவாக $n=m$ ஆனல்,

$$(x+a)^m = x^m + {}_mC_1 x^{m-1} a + {}_mC_2 x^{m-2} a^2 + \ldots\ldots + {}_mC_{r-1} x^{m-r+1} a^{r-1} + {}_mC_r x^{m-r} a^r + \ldots\ldots + a^m$$

ஏற்புடைத்து என எடுத்துக்கொண்டு, m க்கு அடுத்த $(m+1)$ என்ற மதிப்பை n ஏற்குமானல்,

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + {}_{m+1}C_1 x^m a + {}_{m+1}C_2 x^{m-1} a^2 + \ldots\ldots + {}_{m+1}C_r x^{m+1-r} a^r + \ldots\ldots + a^{m+1}$$

என்பது பொருத்தமாகும் என நிறுவ முற்படுவோம்.

$$\begin{aligned}(x+a)^{m+1} &= (x+a)(x+a)^m \\ &= (x+a)(x^m + {}_mC_1 x^{m-1} a + {}_mC_2 x^{m-2} a^2 + \ldots\ldots \\ &\quad + {}_mC_{r-1} x^{m-r+1} a^{r-1} + {}^{r-1} + {}_mC_r x^{m-r} a^r + \ldots a^m) \\ &= x^{m+1} + x^m (a + {}_mC_1 a) \\ &\quad + x^{m-1} ({}_mC_1 a^2 + {}_mC_2 a^2) + \ldots\ldots \\ &\quad + x^{m+1-r} ({}_mC_{r-1} a^r + {}_mC_r a^r) + \ldots\ldots \\ &\quad + a^{m+1}\end{aligned}$$

ஆனல் ${}_{m+1}C_r = {}_mC_{r-1} + {}_mC_r$ என நாம் அறிவோம். [14·5·2 கிளைத் தேற்றம் (2)]

$$\begin{aligned}\therefore\ {}_{m+1}C_1 &= {}_mC_0 + {}_mC_1 \\ &= 1 + {}_mC_1\end{aligned}$$

${}_{m+1}C_2 = {}_mC_1 + {}_mC_2$ என்பவை தெளிவு

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)^{m+1} &= x^{m+1} + x^m a (1 + {}_mC_1) + x^{m-1} a^2 ({}_mC_1 + {}_mC_2) \\ &\quad + \ldots\ldots + x^{m+1-r} a^r ({}_mC_{r-1} + {}_mC_r) + \ldots\ldots + a^{m+1} \\ &= x^{m+1} + {}_{m+1}C_1 x^m a \\ &\quad + {}_{m+1}C_2 x^{m-1} a^2 + \ldots \\ &\quad + {}_{m+1}C_r x^{m+1-r} a^r + \ldots \\ &\quad + a^{m+1}\end{aligned}$$

எனவே, $n=m$ என்ற மதிப்புக்கு இத்தேற்றம் உண்மையானால், அடுத்த மதிப்பாகிய $n=(m+1)$க்கு இத்தேற்றம் உண்மையென நிறுவப்பட்டது.

நிலை (3): $n=2, 3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, இத்தேற்றம் உண்மையென நிலை (1)ல் கண்டோம். நிலை (1)ல் கண்டதையும், நிலை (2) ல் கண்டதையும் தொடர்பு படுத்த,

"தேற்றம் $n=m$ க்கு ஏற்புடைத்தாயின், அடுத்த $n=m+1$ என்ற மதிப்புக்கும் ஏற்புடைத்தென நிறுவப்பட்டது; $n=2, 3$க்குச் சரியெனக் கண்கூடாகத் தெரிகிறது; ஆகவே, n = 3க்குச் சரியானால், அடுத்த $n=4$க்குச் சரி; $n=4$க்குச் சரியானால், அடுத்த $n=5$க்குச் சரி; அவ்வாறே தொடர்ந்து சரியாகும்"

எனத் தேற்றத்தின் பொதுத் தன்மை நிறுவப்படுகிறது.

ஆகவே, தொடர் முறைப்படி, n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணானால்,

$$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}a + {}_nC_2 x^{n-2}a^2 + \ldots + {}_nC_r x^{n-r}a^r + \ldots + a^n$$ என்ற ஈருறுப்புத் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

முக்கியமான குறிப்பு: n ஒரு கூட்டு முழு எண் ($n = a$ positive integer)

16·4 ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பற்றிய சில பண்புகள் :

(a) $(x+a)^n$ ன் பெருக்குத் தொகையில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

(b) முதலுறுப்புக் கெழு $= 1 = {}_nC_0$

கடைசி உறுப்புக் கெழு $= 1 = {}_nC_n$

இரண்டாவது உறுப்புக் கெழு $= {}_nC_1 = n$

கடைசியிலிருந்து இரண்டாவது உறுப்புக் கெழு $= {}_nC_{n-1} = {}_nC_1 = n.$

மூன்ருவது உறுப்புக் கெழு $= {}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{1.2}$

கடைசியிலிருந்து மூன்ருவது உறுப்புக் கெழு $= {}_nC_{n-2}$

$$= {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$(r+1)$ வது உறுப்புக் கெழு $= {}_nC_r$.

கடைசியிலிருந்து $(r+1)$ வது உறுப்புக் கெழு

$$= {}_nC_{n-r} = {}_nC_r$$

எனவே, முதலிலிருந்தும் கடைசியிலிருந்தும் சம தூரத்தி லுள்ள உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் சமம். இது ஒரு முக்கிய பண்பு.

(c) $(x-a)^n = [x+(-a)]^n$

$$= x^n + {}_nC_1x^{n-1}(-a) + {}_nC_2x^{n-2}(-a)^2 + \dots + {}_nC_rx^{n-r}(-a)^r + \dots + (-a)^n$$

$$= x^n - {}_nC_1x^{n-1}a + {}_nC_2x^{n-2}a^2 \dots + (-1)^r{}_nC_rx^{n-r}a^r + \dots + (-1)^na^n$$

இதை ஒரு முக்கிய சிஜேத் தேற்றமாகக் கொள்ளலாம்.

(d) $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \dots + {}_nC_rx^{n-r} \dots + 1$

தலைகீழ் மாற்றி எழுதினல்

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nc_rx^r + \dots + x^n$$

(e) $(x-1)^n = 1 - {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} \dots + (-1)^r{}_nC_rx^{n-r} \dots + (-1)^n$

$$(1-x)^n = 1 - {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 \dots + (-1)^r{}_nC_rx^r \dots + (-1)^nx^n$$

(f) $(x+a)^n$ல் $(r+1)$வது உறுப்பு, பொது உறுப்பு எனப் படும் (General Term).

அது $T_{r+1} = {}_nc_rx^{n-r}a^r$ என எழுதப்படும்.

$(x-a)^n$ ல் பொது உறுப்பு, $T_{r+1} = (-1)^r{}_nC_rx^{n-r}a^r$ என எழுதப்படும்.

(g) $(x+a)^n$: இங்கு n ஓர் இரட்டைப் படை எண்ணு யிருப்பின் $n = 2m$ எனக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் (Expansion) $2m+1$ உறுப்புக்கள் இருக்கும். நடு உறுப்பு $(m+1)$ வது உறுப்பாகும்.

$$T_{m+1} = {}_{2m}C_mx^{2m-m}a^m$$

$$= \frac{\angle 2m}{(\angle m)^2}x^ma^m$$

இரண்டாவதாக, n ஒற்றைப்படை யெண்ணு யிருப்பின் $n=2m+1$ எனக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் $(2m+2)$ உறுப்புக்கள் இருக்கும். நடு உறுப்புக்கள் இரண்டு, T_{m+1}, T_{m+2} ஆகும்.

$$T_{m+1} = {}_{2m+1}C_m x^{m+1} a^m$$

$$= \frac{\angle \underline{2m+1}}{\angle \underline{m} \; \angle \underline{m+1}} x^{m+1} a^m$$

$$T_{m+2} = {}_{2m+1}C_{m+1} x^m a^{m+1}$$

$$= \frac{\angle \underline{2m+1}}{\angle \underline{m+1} \; \angle \underline{m}} x^m a^{m+1}$$

இவ்விரு உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் சமமெனக் காண்க.

(எ-கா.) $(x+a)^5$ன் விரிவை எழுதுக.

$$(x+a)^5 = x^5 + {}_5C_1 x^4 a + {}_5C_2 x^3 a^2 + {}_5C_3 x^2 a^3 + {}_5C_4 x a^4 + a^5$$

$$= x^5 + 5x^4 a + \frac{5\cdot4}{1\cdot2} x^3 a^2 + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} x^2 a^3 + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4} x a^4 + a^5$$

$$= x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5x a^4 + a^5$$

இங்கு ${}_5C_3 = {}_5C_2$; ${}_5C_4 = {}_5C_1$ என்பதையும் பயன்படுத்திப் பழகலாம்.

(எ-கா.) (2) $(x-a)^6$ ன் விரிவை எழுதுக.

$$(x-a)^6 = x^6 - 6x^5 a + \frac{6\cdot5}{1\cdot2} x^4 a^2 - \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} x^3 a^3$$

$$+ \frac{6\cdot5}{1\cdot2} x^2 a^4 - 6x a^5 + a^6$$

$$= x^6 - 6x^5 a + 15x^4 a^2 - 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4 - 6x a^5 + x^6$$

(எ-கா.) (3) $\left(2a+\frac{3}{b}\right)^4=(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3\left(\frac{3}{b}\right)$

$+{}_4C_2(2a)^2\left(\frac{3}{b}\right)^2+{}_4C_3(2a)\left(\frac{3}{b}\right)^3+\left(\frac{3}{b}\right)^4$

$$=16a^4+\frac{96a^3}{b}+\frac{216a^2}{b^2}+\frac{216a}{b^3}+\frac{81}{b^4}$$

(எ-கா.) (4) $(a^2-2ab)^{15}$ என்ற விரிவில் 7 வது, 10 வது உறுப்புக்களைக் காண்க.

$$T_7=(-1)^6{}_{15}C_6(a^2)^9(2ab)^6$$
$$={}_{15}C_6a^{18}2^6a^6b^6$$
$$={}_{15}C_6\cdot 64a^{24}b^6$$
$$T_{10}=(-1)^9{}_{15}C_9(a^2)^6(2ab)^9$$
$$=-{}_{15}C_9a^{12}.2.^9a^9b^9$$
$$=-{}_{15}C_9\cdot 512a^{21}b^9$$

(எ-கா.) (5) $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^9$ என்ற விரிவில் x ன் சார்பற்ற உறுப்பைக்காண்க. மேலும் x^6ன் கெழுவும், $\frac{1}{x^3}$ ன் கெழுவும் காண்க.

முதலில் பொது உறுப்பை எழுதிக்கொண்டு கணக்கைச் செய்ய முற்படவேண்டும்.

பொது உறுப்பு $T_{r+1}={}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r$

$$={}_9C_r\,\frac{x^{18-2r}.3^r}{x^r}$$

$$={}_9C_r\,x^{18-3r}\cdot 3^r$$

x சார்பற்ற உறுப்பு வேண்டுமாயின், $18-3r$ பூச்சியத்திற்குச் சமமாக வேண்டும்.

$\therefore\ r=6$

எனவே 7வது உறுப்பு x – சார்பற்றது,

$T_7 = {}_9C_6 3^6 x^{18-18}$

$= {}_9C_6 3^6$

x^6 தோன்றும் உறுப்பு வேண்டுமெனின்,

$18 - 3^r = 6$ ஆகவிருக்க வேண்டும்

$\therefore\ r = 4$

எனவே 5வது உறுப்பில் x^6 தோன்றும்.

$$T_5 = {}_9C_4 3^4 . x^{18-12} = {}_9C_4 3^4 . x^6$$

$\therefore\ x^6$ன் கெழு ${}_9C_4\ 3^4$

$\frac{1}{x^3}$ தோன்றும் உறுப்பு வேண்டுமெனின்,

$18 - 3^r = -3$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$\therefore\ r = 7$

எனவே 8வது உறுப்பில் $\frac{1}{x^3}$ தோன்றும்.

$T_8 = {}_9C_7 3^7 \cdot x^{18-21}$

$= \frac{{}_9C_7 . 3^7}{x^3}$

$\therefore\ \frac{1}{x^3}$ன் கெழு $= {}_9C_2 . 3^7$

(எ-கா.) (6) $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{22}$ என்பதில் x – சார்பற்ற உறுப்பென்ன ?

பொது உறுப்பு $T_{r+1} = (-1)^r {}_{22}C_r \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{22-r} \left(\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^r$

$$= (-1)^r {}_{22}C_r \frac{x^{\frac{22-r}{3}} \cdot 2^r}{x^{\frac{3r}{2}}}$$

$$= (-1)^r {}_{22}C_r 2^r x^{\frac{22-r}{3} - \frac{3r}{2}}$$

$$= (-1)^r {}_{22}C_r 2^r \cdot x^{\frac{44-11r}{6}}$$

இது x – சார்பற்றதாக விருக்க வேண்டுமாயின் $\frac{44-11^r}{6}$ பூச்சியமாகவேண்டும்.

$\therefore\ r=4$

எனவே 5 வது உறுப்பு x சார்பற்றது.

$$T_5 = (-1)^4 {}_{22}C_4 2^4 x^{\frac{44-44}{9}}$$

$$= (-1)^4 {}_{22}C_4 2^4$$

$$= {}_{22}C_4 \cdot 2^4$$

(எ–கா.) (7)

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ஐயும் $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ஐயும் விரித்தெழுதுக.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8 = x^8+8x^7\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{8.7}{1\cdot2}x^6\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\ 3}x^5\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}x^3\left(\frac{1}{x^5}\right)+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}x^2\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$$+8x\left(\frac{1}{x^7}\right)+\frac{1}{x^8}$$

$$= x^8+8x^6+28x^4+56x^2+70+\frac{56}{x^2}$$

$$+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}$$

$$= \left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)+8\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+28\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$+56\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+70.$$

அவ்வாறே,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^8=\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)-8\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+28\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$-56\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+70$$

(எ-கா.) (8) $(1{\cdot}02)^5$ன் மதிப்பை, நான்கு பதின் பின்னத் திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$$(1+{\cdot}02)^5=1+5({\cdot}02)+10({\cdot}02)^2+10({\cdot}02)^3+\ldots$$

$$=1+0{\cdot}1+0{\cdot}004+0{\cdot}00008$$

$$=1{\cdot}10408$$

$=1{\cdot}1041$ (நான்கு இடங்களுக்குத் திருத்தமாக) இதற்குமேல் எழுதிச் சுருக்கவேண்டிய தேவையில்லை.

*(எ-கா.) (9) 8^n-7n-1ஐ 49ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலா மென நிறுவுக.

$8^n-7n-1=M(49)$ என நிறுவவேண்டும்.

$$8^n=(7+1)^n=7^n+n7^{n-1}+{}_nC_27^{n-2}+\ldots+n7+1$$

$$\therefore\ 8^n-7n-1=7^n+n7^{n-1}+{}_nC_27^{n-2}\ldots+C_{n2}7^2$$

$=7^2$ (ஒரு கூட்டு முழு எண்)

$=M\ (49).$

எனவே 8^n-7n-1 என்பது எல்லா n முழு எண் மதிப்புக்களுக் கும் 49ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். $(n>1)$

இதைத் தொடர் முறையிலும் நிறுவலாம்.

சுருக்கமாக : $n=2$ ஆனல் $64-14-1=49$.

$n=m$க்குச் சரியானுல் $8^m-7m-1=M(49)$ எனக் கொள்க.

$n=m+1$ ஆனல் $8^{m+1}-7(m+1)-1$

$$=8(8^m-7m-1)+49m$$

$$=M(49)$$

பயிற்சி 16 (1)

1. பின்வரும் கோவைகளை எழுதுக.

 (1) $(1-x)^7$

 (2) $(3+2x)^5$

 (3) $(1-5x)^n$

2. $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^{17}$ ல் x^{11}ன் கெழு என்ன? x^{-10}ன் கெழு என்ன?

3. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^{20}$ ல் xன் சார்பற்ற உறுப்பென்ன?

4. $(2x-y)^{13}$ ல் இரண்டு நடு உறுப்புக்கள் என்ன?

5. $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ ல் x ன் சார்பற்ற உறுப்பென்ன?

6. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{15}$ ல் இரண்டு நடு உறுப்புக்கள் என்ன?

7. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{16}$ ல் நடு உறுப்பு என்ன?

8. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{a^2}{x}\right)^8$ ல் நடு உறுப்பு 1120 ஆனல் a ன் மதிப்பென்ன?

9. $(1+ax)^n$ ன் விரிவில் முதல் மூன்று உறுப்புக்கள் $1+6x+16x^2$ ஆனல் a, n மதிப்புக்களை அறிக.

10. $(7x+8)^{44}$ ன் விரிவில் இரண்டு அடுத்தடுத்த கெழுக்கள் சமமானல், அவ்வுறுப்புக்கள் என்ன ?

11. $\left(bx^2+\dfrac{1}{ax}\right)^{11}$ ன் x^7 ன் கெழுவும் $\left(bx+\dfrac{1}{ax^2}\right)^{11}$ ன் x^{-7} ன் கெழுவும் சமமானல் $ab=1$ என நிறுவுக.

12. $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n+1}$ ல் x^{3r+1} ன் கெழுவைக் காண்க.

13. $(1+)x^{20}$ ல் $T_{r+1} : T_r = 6 : 1$ ஆனல் r ன் மதிப்பென்ன ?

14. $(1+x)^{43}$ ன் விரிவில் T_{2r+1}, T_{r+2} ல் உள்ள கெழுக்கள் சமமானல், r என்ன ?

15. $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ ன் விரிவில் x^r தோன்றுமானல், அதன் கெழு என்ன ?

16·5 ஈருறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவைகளில் தோன்றும் கெழுக்கள் (இரு சேர்க்கெழுக்கள் – Binomial Coefficients) :

இனி வரும் பகுதிகளில்

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \ldots + {}_nC_rx^r + \ldots + {}_nC_nx^n$$

என்ற கோவையில், n என்ற முன் அடி எழுத்தை விலக்கி (Prefix)

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^r + \ldots + C_nx^n$$

என எழுதுவோம்.

மேலும் தேற்றத்தில் தோன்றும் கெழுக்களை, $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ எனக் கொள்வோம். வேறெரு முன் அடியெழுத்தும் இல்லாவிடின் முன் அடியெழுத்து, n எனவே கொள்க.

$1 = C_0 = C_n$; $C_1 = C_{n-1}$; $C_2 = C_{n-2}$;...

$C_r = C_{n-r}$;...என நாம் கண்டோம்.

(16·4(b) காண்க). இவை முக்கியமானவை.

$C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ என்ற கெழுக்களை, இனிச் சுருக்கமாக இரு சேர்க்கெழுக்கள் எனக் கூறுவோம்.

16·6 இரு சேர்க் கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை (Sum of the Binomial Coefficients) :

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^r + \ldots + C_n$$

$x = 1$ என ஈடு செய்தால்,

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_r + \ldots + C_n$ என்பது ஒரு வாய்பாடு.

$$(1-x)^n = C_0 - C_1x + C_2x^2 - C_3x^3 \ldots + (-1)^n C_n x^n$$

$x = 1$ என ஈடு செய்தால்,

$$0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 \ldots + (-1)^n C_n$$

$\therefore\ C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 \ldots$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது, ஒற்றைப் படை இருசேர்க் கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும், இரட்டைப் படை இருசேர்க் கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும் சமம். அக்கூட்டுத் தொகை S எனக் கொண்டால்,

$S + S = 2^n$ எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore\ S = C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots$$
$$= C_1 + C_3 + C_5 + \ldots\ldots$$
$$= 2^{n-1}$$ (வாய்பாடு)

16.6·1. இவ்வாய்பாடுகளைக் கொண்டு,

$a.C_0 + (a+d).C_1 + (a+2d).C_2 + \ldots + (a+nd).C_n$ன் கூட்டுத் தொகையை அறியலாம்.

(1) $S = a.C_0 + (a+d)\cdot C_1 + (a+2d)\cdot C_2 + \ldots\ldots + (a+nd)\cdot C_n$

(2) $S = (a+nd)C_0 + (a+\overline{n-1}d)C_1 + \ldots\ldots + a\,C_n$

ஏனெனில் $C_0 = C_n$; $C_1 = C_{n-1}$; ... $C_r = C_{n-r}$

$$\therefore\ 2S = (2a+nd)\,C_0 + (2a+nd)C_1 + \ldots(2a+nd)C_n$$
$$= (2a+nd)\,(C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$$
$$= (2a+nd)\cdot 2^n$$
$$\therefore\ S = (2a+nd)\cdot 2^{n-1}$$

(எ–கா.) (1) $C_1 + 3C_2 + 5C_3 + \ldots + (2n-1)\,C_n$ கூட்டுத் தொகை காண்க.

இங்கு C_0 உறுப்பு இல்லை என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்.

(1) $S = C_1 + 3C_2 + 5C_3 + \dots \quad + (2n-3)C_{n-1} + \quad (2n-1)C_n$
தலைகீழ் மாற்றி எழுதி $C_r = C_{n-r}$ என்பதைப் பயன்படுத்தினல்,

(2) $S = (2n-1)C_0 + (2n-3)C_1 + (2n-5)C_2 + \dots + 1 \cdot C_{n-1}$
கிடைக்கும்.

இரண்டையும் கூட்ட,

$$2S = (2n-1)C_0 + (2n-2)C_1 + (2n-2)C_2 + \dots + (2n-2)C_{n-1} + (2n-1)C_n$$

$$+ C_0 + C_n + (2n-2)[C_0 + C_1 + C_2 + \dots C_n]$$

$$= 2 + (2n-2)2^n.$$

$$\therefore \; S = 1 + (n-1)\,2^n$$

(எ-கா.) (2) $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \dots\dots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ என நிறுவுக.

$$C_0 = 1 = \frac{1}{n+1}\,(n+1) = \frac{n+1}{1}\,{}_{n+1}C_1.$$

$$\frac{C_1}{2} = \frac{n}{2} = \frac{1}{n+1}\;\frac{(n+1)n}{1\cdot 2} = \frac{1}{n+1}\,{}_{n+1}C_2.$$

$$\frac{C_2}{3} = \frac{n(n-1)}{3\cdot 1\cdot 2} = \frac{1}{n+1}\;\frac{(n+1)n(n-1)}{\angle 3} = \frac{1}{n+1}\,{}_{n+1}C_3.$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\;\frac{(n+1)n\dots\dots 1}{(n+1)n\dots\dots 1} = \frac{1}{n+1}\,{}_{n+1}C_{n+1}.$$

$\therefore$ கூட்டுத் தொகையான,

$$S = \frac{1}{n+1}\,[{}_{n+1}C_1 + {}_{n+1}C_2 + \dots\dots + {}_{n+1}C_{n+1}]$$

$$= \frac{1}{n+1}\,[{}_{n+1}C_0 + {}_{n+1}C_1 + \dots\dots + {}_{n+1}C_{n+1} - {}_{n+1}C_0.]$$

$$=\frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]$$ என நிறுவப்பட்டது.

(எ-கா.) (3)

$C_0-2C_1+3C_2-4C_3\ldots\ldots+(-1)^n(n+1)C_n=0$ என நிறுவுக.

$C_0-C_1+C_2-C_3\ldots\ldots+(-1)^n C_n=0$ என நமக்குத் தெரியும், எனவே இத்தொகையைக் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிலிருந்து விலக்க,

$-C_1+2C_2-3C_3\ldots\ldots+(-1)^n nC_n=0$ என நிறுவவேண்டும்.

$$C_1=n \qquad =n.$$

$$-2C_2=-2\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}=-n(n-1)$$

$$3C_3=3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{\angle\underline{2}}$$

∴ கூட்டுத் தொகை,

$$=-\left[n-n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{\angle\underline{2}}\cdots\right]$$

$$=-n[1-{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2-\ldots]$$

$$=-n[{}_{n-1}C_0-{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2\ldots]$$

$$=-n(1-1)^{n-1}$$

$$=0$$

∴ $C_0-2C_1+3C_2-4C_3\ldots+(-1)^n(n+1)C_n=0$ என நிறுவப்பட்டது,

(எ-கா.) (4) $C_0^2+C_1^2+C_2^2\ldots+C_n^2=\dfrac{\angle\underline{2n}}{(\angle\underline{n})^2}$ என நிறுவுக.

(1) $(1+x)^n=C_0+C_1x+\ldots\ldots+C_nx^n$

(2) $(1+x)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+\ldots\ldots+C_n$ எனவும் தலைமாற்றி எழுதலாம்.

(1)ஐயும் (2)ஐயும் பெருக்க, பெருக்குத் தொகையில், x^nன் கெழு $=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\ldots\ldots+C_n^2$

எனவே இக்கூட்டுத் தொகை,

$(1+x)^{2n}$ன் பெருக்கத்தில் x^nன் கெழுவுக்குச் சமமாயிருக்கும்.

$(1+x)^{2n}$ ல் x^n உறுப்பின் கெழு $= {}_{2n}C_n$.

ஏனெனில்,

$$(1+x)^{2n} = 1 + {}_{2n}C_1 x + {}_{2n}C_2 x^2 + \dots\dots + {}_{2n}C_n x^n + \dots\dots + x^{2n}$$

$$\therefore\ C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots\dots + C_n^2 = {}_{2n}C_n$$

$$= \frac{\angle \underline{2n}}{\angle \underline{n}\ \angle \underline{n}}$$ என

நிறுவப்பட்டது.

பாடச் சுருக்கம் 16

1. n கூட்டு முழு எண்ணானால்

$$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}a + {}_nC_2 x^{n-2}a^2 + \dots + \dots$$
$$+ {}_nC_r x^{n-r} a^r + \dots + a^n$$

பொது உறுப்பு $T_{r+1} = {}_nC_r x^{n-r} a^r$

2. n கூட்டு முழு எண்ணானால்,

$$(x-a)^n = x^n - {}_nC_1 x^{n-1}a + {}_nC_2 x^{n-2}a^2 \dots\dots$$
$$+ (-1)^r {}_nC_r x^{n-r} a^r \dots\dots + (-1)^n a^n$$

பொது உறுப்பு $T_{r+1} = (-1)^r {}_nC_r x^{n-r} a^r$

3. $$(x+1)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} + \dots +$$
$$+ {}_nC_r x^{n-r} + \dots + 1$$

4. $$(x-1)^n = x^n - {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} \dots\dots$$
$$+ (-1)^r {}_nC_r x^{n-r} \dots\dots + (-1)^n$$

5. ${}_nC_r$ன் மீப்பெரு மதிப்பு:

(i) n இரட்டைப் படை யெண்ணாயின் $n C_{\frac{n}{2}} = \dfrac{\lfloor n}{\left(\lfloor \frac{n}{2}\right)^2}$

(ii) n ஒற்றைப் படை யெண்ணுயின் இரு மீப்பெரு மதிப்புக்கள் :

$$ {}_{n}C_{\frac{n-1}{2}} = {}_{n}C_{\frac{n+1}{2}} $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \; \lfloor \frac{n+1}{2}} $$

6. $(1+x)^n$ல் மீப்பெரு உறுப்பு :

$r = I\left(\frac{\overline{n+1}\,x}{x+1}\right)$ ஆனல் T_{r+1} மீப்பெரு உறுப்பு ;

$r = \frac{\overline{n+1}\,x}{x+1}$ = கூட்டு முழு எண் ஆனல், இரு மீப்பெரு உறுப்புக்கள் $T_r = T_{r+1}$ (16·6 காண்க)

7. $C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n = 2^n$

8. $C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 \dots$

$$ = 2^{n-1} $$

பயிற்சி 16 (2)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :

(1) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = 2^{n-1}(n+2)$

(2) $2C_0 + 5C_1 + 8C_2 + \dots (3n+2)C_n = (3n+4)2^{n-2}$.

(3) $3C_1 + 7C_2 + 11C_3 + \dots n$ உறுப்புக்கள் $= (2n-1)2^n + 1$.

(4) $3C_0 + 5C_1 + 7C_2 + \dots + (2n+3)C_n = (n+3)2^n$.

(5) $2C_0 - 3C_1 + 4C_2 - 5C_3 \dots (n+1)$ உறுப்புக்கள் $= 0$.

(6) $\frac{C_0}{1} - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} - \dots (n+1)$ உறுப்புக்கள் $= \frac{1}{n+1}$

(7) $\frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{4} \dots + \frac{C_n}{n+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

(8) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 \ldots + (-1)^n C_n^2 = 0$ அல்லது

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\angle\underline{n}}{\left(\left|\underline{\tfrac{n}{2}}\right.\right)^2}$$

(9) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots\ldots + C_{n-1}C_n = \dfrac{\angle\underline{2n}}{\angle\underline{n+1}\ \angle\underline{n-1}}$

(10) $\dfrac{C_0}{1} + \dfrac{C_2}{3} + \dfrac{C_4}{5} + \dfrac{C_6}{7} \ldots\ldots = \dfrac{2^n}{(n+1)}$

(11) $C_0x + \dfrac{C_1}{2}x^2 + \dfrac{C_2}{3}x^3 + \ldots\ldots + \dfrac{C_n}{n+1}x^{n+1} = \dfrac{(1+x)^{n+1} - 1}{(n+1)}$

(12) $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \ldots\ldots + C_{n-2}C_n = \dfrac{\angle\underline{2n}}{\angle\underline{n+2}\ \angle\underline{n-2}}$

*17. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (அளவுக் கிணங்கியபடி)

(Binomial Theorem-Rational Index) :

[மதுரைப் பல்கலைக் கழக பாடத்திட்டத்தில் உள்ள பகுதி.]

17.1. n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாயின்,

$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + x^n$ என்ற தேற்றத்தை முன் பகுதியில் நிறுவினோம்.

ஆனால் 'n'ஐ அவ்வாறு கட்டுப்படுத்தாமல், n ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண் மதிப்பேற்குமாயின், இத்தேற்றத்தின் அமைப்பைப் பார்ப்போம்.

"$|x| < 1$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, n ஓர் அளவுக் கிணங்கிய மதிப்பேற்குமாயின், $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\angle 2} x^2 + \dots \infty$" என்பது அளவுக்கிணங்கிய படிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றம்.

இத்தேற்றத்தை நிறுவும் முறை, இந்நிலையில் இயலாதாதலின், தேற்றத்தின் முடிவை உண்மையென ஏற்றுக்கொள்வோம்.

இத்தேற்ற அமைப்பில் நாம் நன்று, கவனிக்க வேண்டிய சில நுட்பங்கள் பின் வருமாறு :

(1) $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதது; x கூட்டு, அல்லது குறையெண்ணாயிருக்கலாம்; ஆனால் அதன் தனி மதிப்பு, ஒன்றுக்குக் குறைவாயிருக்க வேண்டும் ;

(2) n மதிப்பு, ஒரு குறை முழு எண், கூட்டு அல்லது குறை பின்னமாயிருக்கலாம் ;

(3) $1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots$ என்பது ஒரு முடிவற்ற தொடர். ஆனால் கூறப்பட்ட நிபந்தனைகளின் கீழ், அதன் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட திட்டமான எண் மதிப்பை நெருங்கிக் கொண்டே போகும்.

17.2. பின்வரும் விரிவுகளைச் சரிபார்த்துக் கொள்க :

(1) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots+x^m+\ldots\infty$

(2) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2\ldots+(-1)^m x^m+\ldots\infty$

(3) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\ldots+(m+1)x^m+\ldots\infty$

(4) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2\ldots+(-1)^m(m+1)x^m+\ldots\infty$

(5) $$(1-x)^{-\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\ldots\infty$$

(6) $$(1+x)^{-\frac{p}{q}}=1-\frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2-\frac{p(p+q)p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3\ldots\infty$$

(7) $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\infty$

(8) $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2-\ldots\infty$

(9) (a) $\left|\frac{y}{x}\right|<1$ ஆனால்,

$(x+y)^n=x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n$ என எழுதி விரிவுபடுத்துக.

(b) $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ ஆனால்,

$(x+y)^n=y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n$ என எழுதி விரிவுபடுத்துக.

(எ-கா.) (1) $|x| < 1$ ஆனால்

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ஐ விரித் தெழுதுக.

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1+(-\tfrac{1}{2})(-x)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{\angle\underline{2}}(-x)^2$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{\angle\underline{3}}(-x)^3+\ldots\infty$$

$$=1+\frac{1}{\angle\underline{1}}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1\cdot 3}{\angle\underline{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{\angle\underline{3}}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\infty$$

(எ-கா.) (2) $\sqrt[3]{1004}$ ன் மதிப்பை 6 இடங்களுக்குத் திருத்தமாக எழுதுக.

$$\sqrt[3]{1004} = (1000+4)^{\frac{1}{3}}$$

$$=10\ (1+0\cdot 004)^{\frac{1}{3}}$$

$$=10\left[1+\tfrac{1}{3}(0\cdot 004)+\frac{\frac{1}{3}\times-\frac{2}{3}}{\angle\underline{2}}(0\cdot 004)^2\ldots\right]$$

$$=10\ [1+0\cdot 0013333-0\cdot 0000018\ldots]$$

$$=10\ [1\cdot 0013315]$$

$$=10\cdot 013315$$

(எ-கா.) (3) $\dfrac{1}{1-x+x^2}$ ன் விரிவை, உயர்ந்து செல்லும் x படிகளில் (ascending powers of x) எழுதி, அதில் x^3, x^4, x^5 ன் கெழுக்களைக் காண்க.

$$\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1+x}{1+x^3}$$

$$=(1+x)\ (1+x^3)^{-1}$$

$$=(1+x)\ (1-x^3+x^6-x^9+x^{12}\ldots+(-1^n x^{3n}\ldots))$$

$$=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-x^9-x^{10}\ldots\ldots$$

x^3 ன் கெழு -1

x^4 ன் கெழு -1

x^5 ன் கெழு 0

(எ–கா.) (4) x மிகச்சிறிது. ஆகவே x^2, x^3,...... போன்றவைகளை விலக்கி விட்டால்,

$$\frac{\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+2x}}=2-\frac{11x}{6} \text{ (தோராய மதிப்பு)}$$

என நிறுவுக.

$$\sqrt[3]{1-3x}=(1-3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1-x+\ldots\ldots$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\tfrac{1}{2}x\ldots\ldots$$

$$\therefore \sqrt[3]{1-3x}+\sqrt{1+x} = 2-\tfrac{1}{2}x$$

$$\therefore \frac{2-\frac{1}{2}x}{\sqrt[3]{1+2x}} = (2-\tfrac{1}{2}x)(1+2x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=(2-\tfrac{1}{2}x)(1-\tfrac{2}{3}x\ldots)$$

$$=2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{4}{3}x\ldots$$

$$=2-\tfrac{11}{6}x \text{ (தோராய மதிப்பு)}$$

பாடச் சுருக்கம் (17)

1. $|x|<1$, ஆனால், n எந்த அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண் மதிப்பு ஏற்றபோதிலும்,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots \text{ கந்தழிவரை.}$$

2. 17·2 ல் கொடுக்கப்பட்ட விரிவமைப்புகள்.

பயிற்சி 17

1. பின்வருவனவற்றில் முதல் நான்கு உறுப்புக்கள் வரை விரித்தெழுதுக.

(1) $(1+x)^{-5}$ (3) $(1+3x)^{-\frac{1}{3}}$

(2) $(1-4x^2)^{-n}$ (4) $(1-x)^{-\frac{2}{5}}$

2. $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1-x}}$ ன் விரிவின் பொது உறுப்பை எழுதுக.

3. $(3x^3 - x^2y)^{\frac{5}{3}}$ ஐ விரித்து எழுதுவதில், x^2, x^3, x^4 கெழுக்களை எழுதுக.

4. $\sqrt[3]{1-x^2}$ ல் x^{20}ன் கெழு காண்க.

5. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^6$ன் விரிவில் x^5ன் கெழு காண்க.

6. $\dfrac{1+x}{(1-x)^4}$ என்பதை விரித்தெழுதுவதில் பொது உறுப்பு காண்க.

7. பின் வருவனவற்றை, மூன்று இடங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடிக்க. மடக்கைகள் கொண்டு சரிபார்க்க.

(1) $\sqrt[2]{85}$ (4) $\sqrt{105}$

(2) $\sqrt[4]{650}$ (5) $\sqrt[6]{65{\cdot}28}$

(3) $\sqrt[3]{999}$

8. x மிகச் சிறியதாய், x^2, x^3 மதிப்புக்களைப் பொருட்படுத்த வேண்டியதில்லை யெனின்,

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}} = \dfrac{x}{24}$ என நிறுவுக.

(2) $2\sqrt[3]{x^3+27} - 3\sqrt{4-x} = \dfrac{3x}{4}$ என நிறுவுக.

9. N ஒரு மிகப் பெரிய எண் ;

பின்வரும் தோராய மதிப்புக்கள் சரியா எனக் காண்க.

(1) $\sqrt{N^2 \pm n} = N \pm \dfrac{n}{2N}$

(2) $\sqrt[3]{N^3 \pm n} = N \pm \dfrac{n}{4N^2}$

(3) $\sqrt[4]{N^4 \pm n} = N \pm \dfrac{n}{4N^3}$

இவைகளைக் கொண்டு

$\sqrt{110}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt[3]{1010}$; $\sqrt[3]{990}$; $\sqrt[4]{10010}$; $\sqrt[4]{9990}$ ன் தோராய மதிப்புக்களைக் காண்க.

இயற்கணிதம் - விடைகள்

பயிற்சி 1

1. (1) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; கூட்டு பின்னம்.
   (2) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; குறை முழுஎண்.
   (3) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; குறை முழுஎண்.
   (4) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ;
   (1) கூட்டு முழு எண். (2) குறை முழு எண்.
   (5) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ;
   (1) கூட்டு எண். (2) குறையெண்.
   (6) கற்பனை எண்கள்.
   (7) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; கூட்டு முழுஎண்.
   (8) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ;
   (1) கூட்டு எண். (2) குறை யெண்.
   (9) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ;
   (1) கூட்டு எண். (2) குறையெண்.

2. (1) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; கூட்டு பின்னம்.
   (2) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; குறை பின்னம்.
   (3) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்கியது ; குறை பின்னம்.
   (4) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ; கூட்டெண்.
   (5) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ; கூட்டெண்.
   (6) கற்பனை எண். (7) கற்பனை எண்.
   (8) மெய்யெண் ; அளவுக்கிணங்காதது ; கூட்டெண்.
   (9) கற்பனை எண். (10) கற்பனை எண்.

பயிற்சி 2

1. (1) $(x-1)^2(x+2)$ (2) $(2x+1)(2x-1)(x+2)$
5. $a=20$ 6. $a=-3;\ b=-1$
7. $a=1;\ b=-5$ 8. $3\sum x^2+2\sum xy$
11. $a=0;\ b=3$
12. (1) $-(x-y)(y-z)(z-x)$
(2) $-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$
(3) $3(y+z)(z+x)(x+y)$

பயிற்சி 3

1. (i) 20 (ii) -4 (iii) $\frac{1}{8000}$ (iv) $\frac{4}{729}$ (v) $n=4$
2. (i) $\frac{9}{8}$ (ii) $9x^2y^2$ (iii) $-\frac{1}{x^2a^2}$ (iv) 1 (v) $\left(\frac{y}{x}\right)^{6n}$
(vi) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$ (vii) $x-y$ (viii) $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}$ (ix) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$
15. (1) $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ (2) $x=2$ (3) $x=\frac{2}{3}$

பயிற்சி 4

1. (i) $3\sqrt{6}$ (ii) $4\sqrt{2}-21\sqrt{3}$ (iii) $13\sqrt{5}$
2. (i) $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ (ii) $\frac{7}{2}\sqrt{6}$ (iii) $\frac{8}{5}\sqrt{10}$
(iv) $6\sqrt{3}$ (v) $3\sqrt{6}$, $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$
3. (i) $3+2\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5-2\sqrt{6}}{3}$
(iii) $4-2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}$ (iv) $\frac{11\sqrt{6}-6}{23}$
4. $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{243}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{80}$, $16\sqrt{5}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{160}$
5. (i) $\sqrt[3]{49}$ (ii) $\sqrt[5]{2}$ (iii) $\sqrt[4]{3}$ (iv) $(25)^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}+1$
(v) $2^{\frac{2}{3}}-1$ (vi) $(p^3+p^2q+pq^2+q^3)$; $p=\sqrt[4]{3}$; $q=\sqrt{5}$

(vii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$
$(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

(viii) $(\sqrt{13}+\sqrt{6}+\sqrt{3}(4+6\sqrt{2})$

6. 5 ; 3.

7. $\dfrac{14a^2+14b^2+20ab}{(a-b)^2}$

9. (i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $2-\sqrt{3}$ (iii) $4+\sqrt{5}$
(iv) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ (v) $2+\sqrt{5}-\sqrt{7}$
(vi) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

10. $\sqrt{6}$

பயிற்சி 5 (1)

1. (i) $\frac{8}{3}$ (ii) $\frac{10}{3}$ (iii) $2\frac{1}{2}$
3. -3 ; -2 ; -4
4. 27.
11. (i) $x=1$ (ii) $x=2$ (iii) $x=\frac{1}{2}$ 12. a, b.

பயிற்சி 5 (2)

1. (1) 1638 (2) 5·198 (3) 0·08535
(4) 1·091 (5) 94·86 (6) 0·9057
(7) 0·1644 (8) 1·779 (9) 1·544
(10) $\dot{0}$·05316.

2. 49^7 ; $(\sqrt{84,832,000})^3$; 174^8 ; 12^{25} ; $(2·5)^{240}$
3. (a) 12 ; 10 ; 19 ; 6. (b) 11 ; 9 ; 18 ; 5.
4. $(7·41)^{19}$ 5. 2·692.
6. (a) $99·51=l$ (b) $643·7=g$ (c) $1·923=t$ 7. $2·049=t$
8. (1) 2·801 (2) $-8·459$ (3) 2·302
9. (a) A = 3353 (b) $y=6\%$ (c) P = 119·3
10. 17 ; 11 ; 9 ; 8 11. 7 12. 1,05,200
13. (1) 11. (2) 100 ; $\frac{1}{10}$

பயிற்சி 6 (1)

1. 3 : 5
2. (1) $a^2-b^2 : ab$ (2) a^3+b^3 ; a^3-b^3

3. (1) 4 : 9   (2) 16 : 25   (3) $(x+1)^2 : (x-1)^2$

8 : 27   64 : 125 $(x+1)^3 : (x-1)^3$

பயிற்சி 6 (2)

1, (1) $x : y = 3 : 4$ (2) $x : y = 29 : 27$ (3) $x : y = 2 : 3$.

20. (i) $x : y : z = \dfrac{b-c}{a} : \dfrac{c-a}{b} : \dfrac{a-b}{c}$

(ii) $x : y : z = 2 : 3 : 4$

(iii) $x : y : z = (ca+b) : (a+bc) : (1-c^2)$

பயிற்சி 6 (3)

1. (i) 21. (ii) 1. (iii) c^2d/a.
2. (i) 16. (ii) 1. (iii) abc. (iv) a^2x^2.
6. (i) 5. (ii) $3m$. (iii) 2. (iv) 1. (v) 2, (vi) $x = y = 1$.

பயிற்சி 7 (1)

1. (1) 4 ; 12   (2) $-\frac{3}{2}$; 5

(3) 1, $\dfrac{b}{a}$ (4) $-21 \pm \sqrt{3}$

(5) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

2. (1) $x^2 - x - 2 = 0$ (2) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (4) $6x^2 + 7x + 2 = 0$

(5) $x^2 - m^2 = 0$ (6) $x^2 - 2ax + \left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right) = 0$

3. $-\frac{5}{8}$.

4. (1) $\dfrac{4b^2 - 2ac}{a^2}$ (5) $\pm \dfrac{4b\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

(2) $\dfrac{-8b^2 + 6abc}{ac^2}$ (6) $\pm \dfrac{2\sqrt{b^2 - ac}\,(4b^2 - ac)}{a^3}$

(3) $\dfrac{(4b^2 - 2ac)^2 - 2c^2a^2}{a^2c^2}$ (7) $\left(\dfrac{4b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a}\right)^2 - \dfrac{2c^2}{a^2}$

(4) $(k^2+1)\dfrac{c}{a} + k\dfrac{(4b^2 - 2ac)}{a^2}$

5. (1) $cx^2-bx+1=0$

(2) $(2b^2+c)x^2-3bx+1=0$

(3) $x^2-b(a+1)x+(a^2+1)c+a(b^2-2c)=0$

(4) $cx^2-b(c+1)x+(c+1)^2=0$

(5) $(b+c+1)x^2+(b^2+b-2c)x+c=0$

(6) $x^2-(b^2-4c)x+4c^2-b^2c=0$

6, $4x^2+4x+13-0$

பயிற்சி 7 (2)

1. (1) மெய்யெண்கள்; அளவுக்கிணங்கியவை; வேறுபட்டவை.

(2) மெய்யெண்கள்; அளவுக்கிணங்காதவை; வேறுபட்டவை.

(3) மெய்யெண்கள்; அளவுக்கிணங்கியவை; சமம்.

(4) மெய்யெண்கள்; அளவுக்கிணங்கியவை; வேறுபட்டவை.

(5) கற்பனை எண்கள். (6) கற்பனை எண்கள்.

2. 2, $\frac{2}{9}$. 3. 6, −2.

6. (1) $k=-\frac{2}{3}$; $x=-\frac{2}{3}$.

(2) $k=-1, -\frac{1}{9}$; $x=-3, -\frac{5}{3}$,

(3) $k=1, -\frac{1}{3}$; $x=-2, -6$.

(4) $k=0, -2$; $x=-1, 3$.

8. $k=9$ 9. $6b^2=25ac$ 10. $8b^3=6bc+c+c^2$ 11. $3, -\frac{1}{2}$

பயிற்சி 7 (3)

1. $a=6, 12$.

$a=6$; பொதுத்தீர்வு 1. மற்ற தீர்வுகள் 4, 6.

$a=12$; பொதுத்தீர்வு 4. மற்ற தீர்வுகள் 1, 3.

6. $b^2(c-a)^2=4ac(a-b)(b-c)$

பயிற்சி 8 (2)

1. (i) மீச்சிறு மதிப்பு 0; $x=\frac{1}{2}$

(ii) ,, $\frac{7}{8}$; $x=\frac{7}{4}$

(iii) ,, $\frac{279}{4}$; $x=-\frac{9}{2}$

(iv) மீப்பெரு மதிப்பு −1; $x=1$

(v) ,, 9; $x=3$

6. (i) 0 க்கும் $\frac{4}{3}$ க்கும் இடையில் முடியாது.
(ii) 1 க்கும் 6 க்கும் இடையில் முடியாது.
(iii) $5-\overline{26}$ க்கும் $5+2\sqrt{6}$ க்கும் இடையில் முடியாது.
(iv) எல்லையில்லை.

8. (1) $\frac{2}{3}<y<\frac{1}{3}$; $4\frac{1}{2}<x<5\frac{1}{2}$
(2) எல்லா மதிப்புக்களும்
(3) $-1<y<5$; $-2<x<10$
(4) $-\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$; $\frac{6-5\sqrt{2}}{4}<y<\frac{6+5\sqrt{2}}{4}$

பயிற்சி 9 (1)

1. $2,\ (-3)^{\frac{1}{3}}$
2. 1, 2, 3, 4
3. $\frac{1\pm i\sqrt{119}}{10},\ \frac{1\pm i\sqrt{14}}{5}$
4. 4, 25
5. $32,\ \pm i$
6. $-\frac{5}{2},\ 1,\ \frac{-3\pm\sqrt{555}}{4}$
7. $4,\ -9,\ \frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$
8. $-4,\ -4,\ -4\pm\sqrt{10}$
9. $-4,\ -4,\ -4\pm\sqrt{17}$
10. $-2,\ -2,\ \frac{-4\pm\sqrt{10}}{2}$
11. $4,\ \frac{24}{5}$
12. $-1,\ -\frac{29}{13}$
13. $2,\ 3,\ \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$
14. 2
15. 1, $\frac{\text{மகை } 12}{\text{மகை } 6}$

பயிற்சி (9) 2

1. $x=2,\ z=3$
$y=22,$
2. $x=1,\ 4$
$y=4,\ 1$
3. $x=8,-2$
$y=2,-8$
4. $x=2,\ \frac{1}{7}$
$y=1,\ -\frac{19}{7}$
5. $x=-\frac{1}{3},3$
$y=\frac{2}{3},-6$
6. $x=3,-3,1,-1$
$y=2,-2,-2,2$
7. $x=1,-2,\ \frac{5\pm\sqrt{-15}}{2}$
$y=-2,\ 1,\ \frac{5\pm\sqrt{-15}}{2}$
(8) $x=3,-2,\ \frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$
$y=-2,\ 3,\ \frac{-3\mp\sqrt{33}}{2}$

9. $x = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{20}$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{20}$

10. $x = \pm 2, \pm 3$

$y = \pm 3, \pm 2$

11. $x = 12, 7$

$y = 7, 12$

12. $x = 6, \pm 3i$

$y = 3, \pm 6i$

13. $x = 6, 2$

$y = 2, 6.$

14. $x = 5, -1$

$y = 1, -5$

15. $x = \pm 3, \pm 2$

$y = \pm 2, \pm 3.$

பயிற்சி 10

1. (1) கூட்டுத் தொடர் (2) இல்லை.
   (3) இல்லை. (4) இல்லை.
   (5) கூட்டுத் தொடர் (6) கூட்டுத்தொடர்.
   (7) கூட்டுத் தொடர்
2. (1) $a+77$ (2) $a-37$
   (3) $1-35b$ (4) $x-(3n-4)y$
   (5) $a+(3-2r)x$.
3. 4, $\frac{2}{3}$
4. (1) $\frac{3n^2+11n}{2}$ (கூ.தொ) (2) $2n-n^2$ (கூ.தொ)
   (3) $\frac{n^2+n(2a+1)}{2}$ (கூ.தொ) (4) இல்லை.

5. 15 6. 2,9 7. 4950 8. 75750

9. (1) 1,8 (2) 4,2 (3) 4, −2 (4) $2a+3b$, $6b$

13. 385 14. 8,10,12 15. 3,5,7

18. $4m-1 : 7m-3$ 19. 840 மீ.

21. பொது வேறுபாடு $\frac{a}{n+1}$

23. $a=4$; $d=2$ 24. 40, $40\frac{1}{2}$, 41,......$84\frac{1}{2}$, 85

பயிற்சி 11

1. (1) $\frac{6}{4-n}$ (2) $\frac{3}{2n+3}$
   (3) $\frac{1}{4n-1}$ (4) $\frac{a^2-1}{a-n+2}$
2. $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots \frac{1}{33}$

பயிற்சி 12

1. (1) பெருக்குத் தொடர் $\frac{1}{2^{n-1}}$; $2(1-\frac{1}{2^n})$

(2) பெருக்குத் தொடர் 2^n ; $2(2^n-1)$

(3) பெருக்குத் தொடரில்லை.

(4) பெருக்குத் தொடர் $\frac{1}{a^{2n-2}}$; $\frac{a^2(a^{2n}-1)}{a^{2n}(a^2-1)}$

(5) பெருக்குத் தொடரில்லை.

2. 16, $\frac{1}{2}$.

3. 12 ; $\frac{18(3^{10}-1)}{3^{10}}$; 18

5. (1) $\frac{4}{9}\left[10n-\frac{10(10^n-1)}{9\,10^n}\right]$

(2) $\frac{5}{9}\left[n-\frac{10(10^n-1)}{9\cdot10^n}\right]$

(3) $a.\frac{(b^n-1)}{b^{n-1}(b-1)}$

6. (1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{5}{99}$ (3) $\frac{31}{99}$ (4) $\frac{100}{333}$

10. $n=8$ 15. $\frac{p}{1+p}$ 16. 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$.

17. பொது விகிதம் $\frac{1}{\sqrt[8]{a}}$ 19. 1, 3, 9.

பயிற்சி 13

2. $m=\frac{2ab-2b\sqrt{ab}}{a-b}$; $n=\frac{2ab-2a\sqrt{ab}}{b-a}$

5. $\frac{5}{2}$, $\frac{45}{2}$ 6. 10, 40.

10. (1) $x \lessgtr 1$: $S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{n\,x^n}{1-x}$

$x<1$; $S_\infty=\frac{1}{(1-x)^2}$

(2) $S_n=\frac{2a(x^n-1)}{x^{n-1}(x-1)^2}-\frac{a}{x-1}-\frac{(2n-1)a}{x^n(x-1)}$; $S_\infty=\frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$

(3) $S_n=\frac{14}{5}-\frac{3n+7}{5\cdot2^{n-1}}$; $S_\infty=\frac{14}{5}$

(4) $S_n = (5 + \overline{n-2}\,a)\, 2^n + (2a-5)$

12. (1) $\dfrac{n^3+15n^2+74n}{3}$

(2) $\frac{1}{4}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

(3) $n\,(n+1)\,(2n^2-2n+1)-n$

(4) $\dfrac{n(n+1)\,(6n^2+14n+1)-6n}{3}$

(5) $\dfrac{n(n+1)\,(3n^2+7n+2)}{12}$

(6) $\dfrac{n(n+1)\,(3n^2+11n+10)}{12}$

(7) $\dfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)$ (8) $\dfrac{1}{12}n(n+1)^2\,(n+2)$

13. (1) $\dfrac{n(2n^2+3n+10)}{3}$ (2) $\dfrac{n(n^2-1)}{3}+2n$

(3) $\dfrac{n(n+1)}{3}a+\dfrac{b(b^n-1)}{(b-1)}$

(4) $n(n+1)+2^{n+1}-2$

(5) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot 3^n-2$

பயிற்சி 14 (1)

1. 4800 2. 250 3. 14 4. $\dfrac{n(n-1)}{2}-n$

5. 6 6. 5^6 விதங்கள் ; 5^6-1 7. 192

பயிற்சி 14 (2)

1. (1) 30,240 (2) $\lfloor\underline{n+1}$ (3) $\dfrac{\lfloor\underline{n+r}}{\lfloor\underline{r}}$

2. $\lfloor\underline{5}$; $\lfloor\underline{3}$

3. 96 ; 54 ; 36. 4. 120 ; 120 ; 72 ; 48

5. 24 ; 12. 6. 4536 ; 952

7. $\lfloor\underline{10}-2\lfloor\underline{9}$

$\lfloor\underline{10}-\lfloor\underline{3}\;\lfloor\underline{8}$

8. $\lfloor\underline{12}-2\lfloor\underline{11}$

9. 5 10. 99

11. 120 12. 720

13. 1024 ; 768 14. 720

15. $\lfloor 5 \cdot \lfloor 3 \cdot \lfloor 3 \cdot \lfloor 2$ 16. $\lfloor 3 \cdot \lfloor 5$

18. $28 \times 1110 + 36$ 19. 84×1111

21. 8 22. $m = 9$; $n = 4$.

பயிற்சி 14 (3)

1. (1) 120 (2) 4950 (3) 99 (4) 120.

2. $n = 18$. 3. $n = 17$.

4. $r = 8$. 8. ${}_{m+n}C_3 - {}_{m}C_3 - {}_{n}C_3$.

9. ${}_{8}C_4$; ${}_{8}C_6$. 10. ${}_{16}C_3$; 560.

11. 45. 12. 12600 ; 2520.

13. ${}_{6}C_2 \times {}_{5}C_3$. 14. ${}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2$.

15. ${}_{11}C_5 \times (\lfloor 8)^2$ 17. 1540.

18. $\dfrac{\lfloor 52}{\lfloor 4 \; \lfloor 13.4}$; $\dfrac{\lfloor 52}{(\lfloor 13)^4}$

19. 70 ; 35 20. 15

பயிற்சி 16 (1)

1. (1) $1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$

   (2) $243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$

   (3) $1 - 5nx + \dfrac{n(n-1)}{2} 25x^2 \ldots\ldots + (-1)^n 5^n x^n$

2. 544 ; ${}_{17}C_9 \cdot 2^9$ 3. $16 \times {}_{20}C_4$

4. ${}_{13}C_6 \times 2^7 x^7 y^6$; $- {}_{13}C_7 \times 2^6 x^6 y^7$ 5. $16 \times {}_{12}C_8$

6. $- {}_{15}C_7 x$; ${}_{15}C_8 \cdot \dfrac{1}{x}$ 7. ${}_{16}C_8 \times x^8$

8. $a = 2$ 9. $a = \frac{2}{3}$; $n = 9$

10. 24, 25 12. $(-1)^{n-r} {}_{3n+1}C_{n-r}$

13. 3 14. $r = 14$

15. ${}_{n}C_{\frac{2n-r}{5}}$

பயிற்சி 17

1. (1) $1-5x+15x^2-35x^3+\ldots\ldots$

   (2) $1+4nx^2+8n(n+1)x^4+\frac{32}{3}\cdot n(n+1)(n+2)x^6$

   (3) $1-x+2x^2-\frac{14}{3}x^3$

   (4) $1+\frac{2}{5}x+\frac{2\cdot7}{1\cdot2}\left(\frac{x}{5}\right)^2+\frac{2\cdot7\cdot12}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{5}\right)^3$

2. $\frac{1.4.7\ldots\ldots(3r-2)}{\lfloor\underline{r}}3^{-r}x^{r+2}$

3. $3^{-\frac{16}{3}}\cdot5y^3x^2$; $3^{-\frac{7}{3}}\cdot5y^2\cdot x^3$; $3^{-\frac{1}{3}}\cdot5y\,x^4$.

4. $-\frac{2\cdot5\cdot8\ldots\ldots26}{3^{10}\,\lfloor\underline{10}}$

5. 246

6. $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(2r+3)$

7. (1) 9.220 (2) 5·049
   (3) 9.997 (4) 10·24
   (5) 2.006

9. 10·5 ; 9·5 ; 10·03 ; 9·97 ; 10.0025 ; 9·9975.

இயல்முறை வடிவ கணிதம்

(Analytical or Algebraic Geometry):

1. ஆயத்தொலைகள்

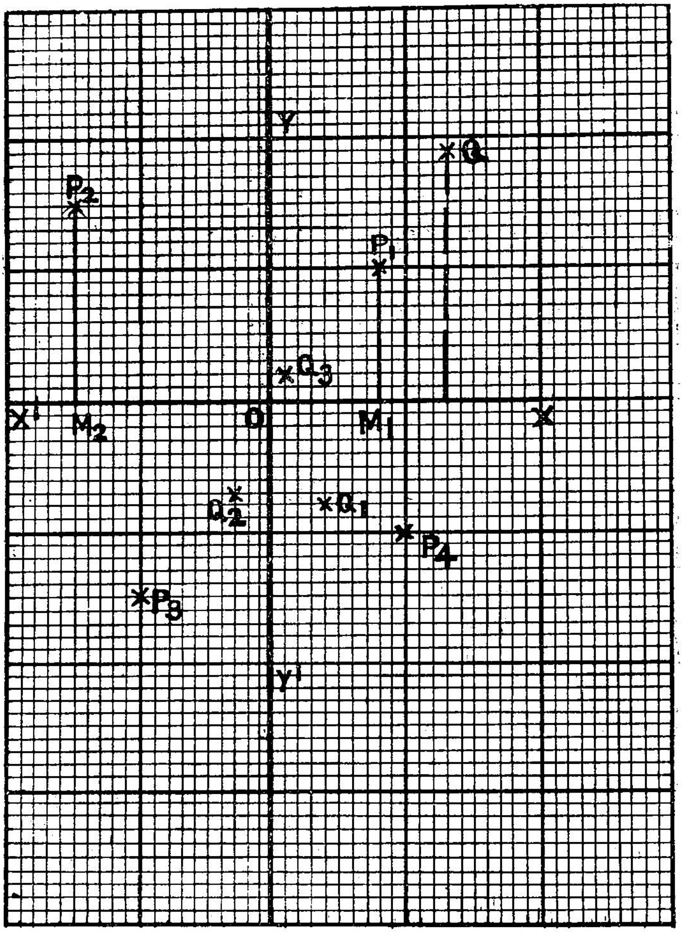
(Co-ordinates)

1.1. செவ்வக ஆயத்தொலைகள்: O என்பது ஒரு புள்ளி. அதன் வழியாக X^1OX, என ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்க்கோடுகள் வரைவோம். (படம் 1)

இவை போன்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகள் ஆய அச்சுக்கள் எனப்படும்: X^1OX என்ற கோடு x-அச்செனவும், Y^1OY என்ற கோடு y-அச்செனவும் கொள்வது மரபு. அவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் O என்ற புள்ளி அவ்வச்சுக்களுக்குரிய ஆய ஆதி யெனப்படும்.

(ஏதாமொரு குறிப்பிட்ட ஆய ஆதியைக் கொண்டு நாம் வேண்டிய முறையில் ஆய அச்சுக்கள் அமைத்துக் கொள்ளலாம். சிறப்பாக, அவ்வச்சுக்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக விருக்கும். ஆனல் அவை செங்குத்தாக இருக்கவேண்டுமென்ற இன்றியமையாமையில்லை. அவ்வச்சுக்கள் பொதுவாக எந்தக் கோணத்திலும் வெட்டிக் கொள்ளலாம். நாம் இந்நூலில் சிறப்பாகக் கூறப்பட்ட செங்குத்தான அச்சுக்களையே பயன்படுத்துவோம். அவை செவ்வக அச்சுக்கள் எனப்படும். பொதுவாக, எக்கோணத்திலும் ஒன்றையொன்று

வெட்டிக்கொள்ளும் அச்சுக்கள் சாய்வு அச்சுக்கள் எனப் படும்.)



படம் 1

இப்போது X^1OX, Y^1OY என்ற கோடுகள் இருக்கும் மட்டத்தில் (Plane) P_1 என ஒரு புள்ளி எடுத்துக் கொள்வோம். P_1 லிருந்து P_1M_1 என OX க்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைய, அது OX ஐ M_1 ல் சந்திக்கட்டும். படம் 1 என்ற கோட்டுப்படத் தாளில் ஒவ்வொரு சிறு பிரிவும் ஓர் அலகு எனக் கொள்வோம். (அதாவது ஓர் அங்குலம் = 10 அலகுகள்

என்பது அளவுச் சட்டமாகும்) அவ் வளவுச் சட்டப்படி, $OM_1 = 8$ அலகுகள், $M_1P_1 = 10$ அலகுகள்.

P_1 என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் x – ஆயத் தொலை 8 எனவும், y–ஆயத்தொலை 10 எனவும் கொள்வது மரபு. இதை P_1 ன் ஆயத் தொலைகள் (8, 10) எனக் குறிப் பிடுவோம். இது மரபு. முதல் குறிக்கப் பட்ட '8' என்பது x – ஆயத் தொலையையும், இரண்டாவது குறிக்கப்பட்ட '10' என்பது y – ஆயத் தொலையையும் சாதாரணமாக எப் போதும் குறிக்கும்.

ஆயத் தொலைகள் குறிக்கப்படும்போது பின்வரும் மரபு கள் கையாளப்படுவது வழக்கமாம் :

(i) O விலிருந்து OX என்ற திசையில் அளக்கப்படும் நீளம், கூட்டெண் ஆயத்தொலை ($x \rightarrow +$ எண்)

(ii) O விலிருந்து OX^1 என்ற திசையில் அளக்கப்படும் நீளம், குறையெண் ஆயத்தொலை ($x \leftarrow -$ எண்)

(iii) O விலிருந்து OY என்ற திசையில் அளக்கப்படும் நீளம், கூட்டெண் ஆயத்தொலை ($y \uparrow +$ எண்)

(iv) O விலிருந்து OY^1 என்ற திசையில் அளக்கப்படும் நீளம், குறையெண் ஆயத்தொலை ($y \downarrow -$ எண்)

இம் மரபைக் கொண்டு

P_2ன் ஆயத் தொலைகள் (– 15, 15)
P_3ன் ஆயத் தொலைகள் (– 10, – 15)
P_4ன் ஆயத் தொலைகள் (10, – 10)

என அறிவது எளிதாகும். (படம் 1)

இம்மரபுகள் மற்றொரு விதத்தில் பின்வருமாறும் கூறப் படலாம்.

புள்ளியிருக்கும் வட்ட நாற்கூறு	X – ஆயத் தொலை	Y – ஆயத் தொலை
முதல் வட்ட நாற்கூறு : XOY	+ எண்	+ எண்
இரண்டாவது வட்ட நாற்கூறு : YOX^1	– எண்	+ எண்
மூன்றாவது வட்ட நாற்கூறு : X^1OY^1	– எண்	– எண்
நான்காவது வட்ட நாற்கூறு : Y^1OX	+ எண்	– எண்

1.1.1. இப்போது ஏதாமொரு புள்ளியின் நிலையை அறிய வேண்டுமாயின், அதாவது அப்புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டுமாயின் அதற்குரிய x,– , y–ஆயத் தொலைகள் கொடுக்கப் பட்டால், அப் புள்ளியின் இடத்தை நிலை நிறுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக Qஐ (13, 19) எனக் குறிக்கலாம். மறுதலையாக, ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் கொடுக்கப்படு மானல், அப்புள்ளியின் நிலையை அறியலாம்.

படம் 1 காண்க:

Q_1 (4, –8); Q_2 (–3, –7); Q_3 (1, 2)

இவை முறையே நான்காம், மூன்றும், முதல் வட்ட நாற் கூறுகளில் அமைந்திருக்கின்றன.

1.1·2. ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய ஆதியையும், குறிப்பிட்ட x–, y–அச்சுக்களையும், அடிப்படையாகக் கொண்டு, ஏதா மொரு புள்ளிக்குரிய ஆயத்தொலைகள் கொடுக்கப்பட்டால், அப்புள்ளியை நிலை நிறுத்தலாம் என நாம் சென்ற பத்தியில் கண்டோம். அவ்வாயத் தொலைகள், அந்த அமைப்பிற்குச் சிறப்பானவை.

வேறொரு ஆய ஆதியைக் கொண்டாலும் சரி, வேறொரு குறிப்பிட்ட இரு செங்குத்துக் கோடுகளைக் கொண்டாலும் சரி, முன் குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கு வேறு ஆயத் தொலைகள் பெறப்படும். ஆகவே, ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலை களென நாம் இரு எண்களைக் குறிக்கும்போது, அப்புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய ஆதியையும், குறிப்பிட்ட திசைகளி லுள்ள இரு செங்குத்து அச்சுக்களையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது என்பது பொருள்.

அதாவது, வேறு முறையில், விளங்கக்கூறுமிடத்து, ஆய ஆதியும், ஆய அச்சுக்களின் திசையும் மாறுமிடத்து, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் மாறும்.

1.1·3. சுருக்கம்: படம் 1ல் காட்டியபடி, $X'OX$, $Y'OY$ எனக் குறிப்பிட்ட அச்சுக்களுக்கொப்ப, அம்மட்டத்திலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளியின் நிலை (x, y) என்ற இரு ஆயத்தொலை களால் குறிக்கப்படும்.

x என்பது அப்புள்ளியின் x–ஆயத்தொலை;

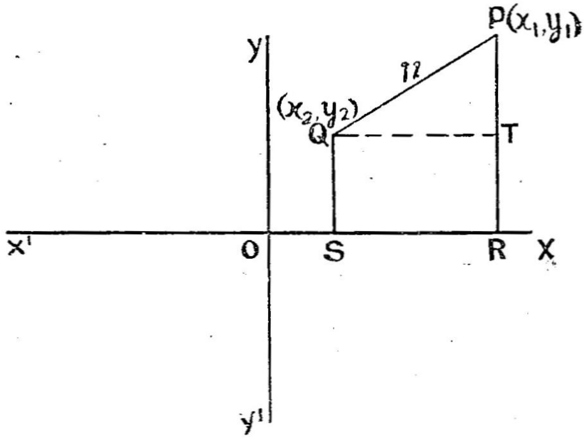
y என்பது அப்புள்ளியின் y–ஆயத்தொலை.

இரு அச்சுக்களும் வெட்டுமிடம் ஆய ஆதி. ஆய ஆதியின் ஆயத்தொலைகள் (O, O).

1.2. இருபுள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூர வாய்பாடு :

(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்ற இரு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம்

P (x_1, y_1) ;
Q (x_2, y_2).
PQன் நீளம் யாது?
PQன் நீளம் r
எனக்கொள்க.



படம் 2

P, Q விலிருந்து, PR, QS என x – அச்சுக்குக் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

x – அச்சுக்கு இணையாக QT என்ற கோடுவரைக.

$$QT = OR - OS$$
$$= x_1 - x_2.$$
$$TP = RP - RT$$
$$= y_1 - y_2.$$
$$\therefore r^2 = PQ^2 = QT^2 + TP^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

$\therefore \quad r = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$

குறிப்பு : P. Q என்ற புள்ளிகள் எந்த வட்ட நாற் கூறிலிருப்பினும் இந்த வாய்பாடு மாறுபடாது.

கிளைத்தேற்றம் : ஆய ஆதியிலிருந்து, அதாவது (0, 0) விலிருந்து, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் தூரம்

$$= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

எடுத்துக்காட்டு : (1) (7, – 24); (– 15, – 20); (0, 0) என்ற புள்ளிகள் ஓர் இரு சம முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

A (7 – 24); B (– 15, – 20); C (0, 0) எனக் கொள்க.

$$AB^2 = (7+15)^2 + (-24+20)^2$$
$$= 484 + 16$$
$$= 500$$
$$BC^2 = (-15-0)^2 + (-20-0)^2$$
$$= 225 + 400$$
$$= 625$$
$$CA^3 = (0-7)^2 + (0+24)^2$$
$$= 49 + 576$$
$$= 625$$

$$\therefore \; BC = CA = \sqrt{625} = 25.$$

(எ–கா.) (2) (2, 5); (4, 6); (8, 8) என்ற புள்ளிகள் ஒரு வரைமையுடையன வென நிறுவுக.

A (2, 5); B (4, 6); C (8,8) எனக்கொள்வோம்.

$$AB^2 = (2-4)^2 + (5-6)^2$$
$$= 5$$
$$BC^2 = (4-8)^2 + (6-8)^2$$
$$= 20$$

$$CA^2 = (8-2)^2 + (8-5)^2$$
$$= 45$$

$$\therefore AB = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$CA = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\therefore CA = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = AB + BC.$$

$\therefore$ AB + BC = AC. A, B, C, ஒரே நேர்க்கோட்டிலுள்ளன.

(எ-கா.) (3) A(8, −10); B(7, −3); C(0, −4); D(1, −11) என்ற புள்ளிகள் ஒரு சதுரமாக அமையுமென நிறுவுக.

$$AB^2 = (8-7)^2 + (-10+3)^2$$
$$= 50$$
$$BC^2 = (7-0)^2 + (-3+4)^2$$
$$= 50$$
$$CD^2 = (0-1)^2 + (-4+11)^2$$
$$= 50$$
$$DA^2 = (1-8)^2 + (-11+10)^2$$
$$= 50$$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA = \sqrt{50}$. ஆனல் இதைக் கொண்டு மாத்திரம் இது ஒரு சதுரமாகும் எனக் கூறுவது முறையாகாது; ஏனெனில் இது ஒரு சாய் சதுரமாகவும் (Rhombus) அமையலாம். ஆனல் மூலைக்கோடுகள் AC ம் BD ம் சமமென நிறுவிஞல், இது ஒரு சதுரமென நிறுவப்படும்.

$$AC^2 = (8-0)^2 + (-10+4)^2$$
$$= 100$$
$$BD^2 = (7-1)^2 + (-3+11)^2$$
$$= 100$$

$\therefore$ $AC = BD = \sqrt{100} = 10$. ஆகவே ABCD ஒரு சதுரமென நிறுவப்படும்.

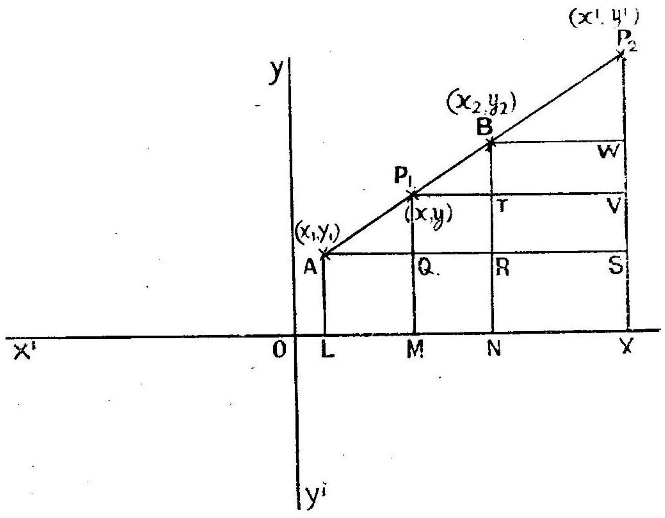
அல்லது

$$AC^2 = 100$$
$$= AB^2 + BC^2$$
$$= 50 + 50$$

∴ ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம், அதாவது $\angle B = 90°$. எனவே இம்முறையிலும் ABCD ஒரு சதுரமென நிறுவப்படும்.

1.3 விகிதப் பிரிவுப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்:

A (x_1, y_1); B (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் AB என்ற கோட்டை, P என்ற புள்ளியில் $m: n$ என்ற விகிதத்தில் (உள்ளும், புறமும்) பிரித்தால், Pன் ஆயத் தொலைகள்:



(படம். 3)

(i) உட் பிரிவு:

AB என்ற கோடு P_1 என்ற புள்ளியில் $m: n$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கப்படுகிறது எனக் கொள்க. அதாவது

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{m}{n}$$

P_1ஐ (x, y) எனக் கொள்க.

A, P_1, B என்ற புள்ளிகளிலிருந்து, முறையே AL, P_1M, BN என OXக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

A வழியாக OXக்கு இணைக்கோடாக, AQR என்ற கோடு வரைக.

இப்போது $OM = x$

$MP_1 = y$

$\triangle$ ABRல், $P_1Q \parallel BR$

$$\therefore \frac{AQ}{QR} = \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \frac{AQ}{QR} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx.$$

அதாவது $(m+n)\,x = mx_2 + nx_1$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

அவ்வாறே, $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}$ என நிறுவலாம்.

[குறிப்பு : $\dfrac{m}{n} = \dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{QP_1}{TB} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$]

எனவே, (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை, $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் P_1 என்ற புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

(ii) வெளிப்பிரிவு :

AB என்ற கோடு, P_2 என்ற புள்ளியில் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் வெளியே பிரிக்கப்படுகிறது எனக் கொள்க.

அதாவது $\dfrac{AP_2}{P_2B} = \dfrac{m}{n}$ (படம் 3)

இங்கு P_2 என்ற புள்ளி, ABன் நீட்டலில் உள்ளது.

$P_2(x^1, y^1)$ எனக் கொள்க.

முன் பத்தியில் கூறியபடி உரிய கோடுகள் வரைந்தால்,

$$\frac{AS}{SR} = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \frac{AS}{SR} = \frac{x^1 - x_1}{x^1 - x_2} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad nx^1 - nx_1 = mx^1 - mx_2$$

$$\therefore \quad (n-m)x^1 = nx_1 - mx_2$$

$$\therefore \quad x^1 = \frac{nx_1 - mx_2}{n-m}$$

அல்லது $= \dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

அவ்வாறே, $y^1 = \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}$ என நிறுவலாம்.

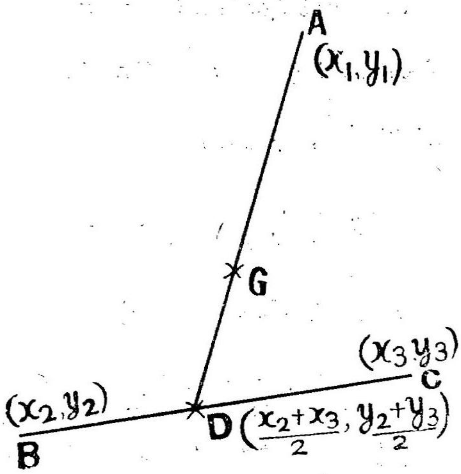
1.3.1. கிளைத்தேற்றம் : (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையம் $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ என வாகும்.

ஏனெனில் மையப் புள்ளி 1 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. இது உட்பிரிவுக்கே பொருந்தும்.

(எ-கா.) (1) ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3). அம் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள் காண்க.

AD என்ற மையக் கோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். A என்பது (x_1, y_1) ; D என்பது BCன் மையப்புள்ளி ; ஆகவே

Dன் ஆயத்தொலேகள் $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. G என்ற மையக்



(படம். 4)

கோட்டுச் சந்தி, AD என்ற கோட்டை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது, அதாவது $\frac{AG}{GD}=\frac{2}{1}$

எனவே 1.3ன் படி, Gன் ஆயத்தொலேகள்,

$$\left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1.x_1}{2+1}, \quad \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.y_1}{2+1}\right]$$

அதாவது $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

இதை ஒரு வாய்பாடாகவும் கொள்ளலாம்,

(எ-கா.) (2) ABன் மையம் (3, 6); Aன் ஆயத்தொலேகள் (5, 9) ஆனல் Bன் ஆயத்தொலேகள் என்ன?

B என்பது (x, y) ஆனல்,

$$\frac{x+5}{2}=3; \quad \therefore x=1$$

$$\frac{y+9}{2}=6; \quad \therefore y=3$$

$\therefore$ Bன் ஆயத்தொலேகள் (1, 3)

(எ-கா.) (3) ABC என்ற முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி G. A, B, G ன் ஆயத் தொலைகள் முறையே (6, 8); (3, 2); (6, 3). Cன் ஆயத்தொலைகள் என்ன ?

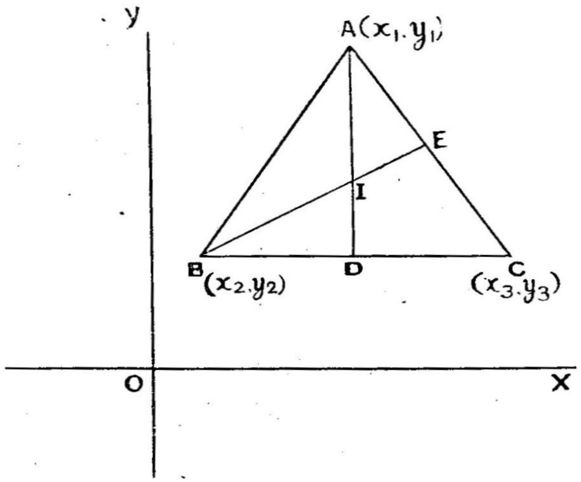
Cன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{6+3+x}{3}=6 \quad \therefore x=9$$

$$\frac{8+2+y}{3}=3 \quad \therefore y=-1.$$

$\therefore$ C ன் ஆயத் தொலைகள் $(9, -1)$

*(எ-கா.) (4) A (x_1, y_1); B (x_2, y_2); C (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் உள்தொடு வட்டத்தின் மையம் காண்க. வழக்கப்படி, முக் கோணத்தின் பக்கங்கள் a, b, c எனக் கொள்க.



(படம் 5)

ABC என்ற முக்கோணத்தின் ∟A, ∟B ன் மைய வெட்டிகள் AD, BE ஆவன. அவை வெட்டு மிடமான I என்பது உள் தொடு வட்டத்தின் மையம். அதன் ஆயத் தொலைகள் காணவேண்டும்.

வடிவ கணிதத் தேற்றம் 3ன் படி, AD என்பது a என்ற பக்கத்தை D என்ற இடத்தில் $c : b$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. $\therefore$ BD $= \frac{ac}{b+c}$

$$\therefore \quad \text{D என்பது} \left(\frac{bx_2c+x_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c} \right)$$

$\triangle$ ABDல் BI என்பது $\angle$Bன் மையவெட்டி

$$\therefore \quad AI : ID = BA : BD$$

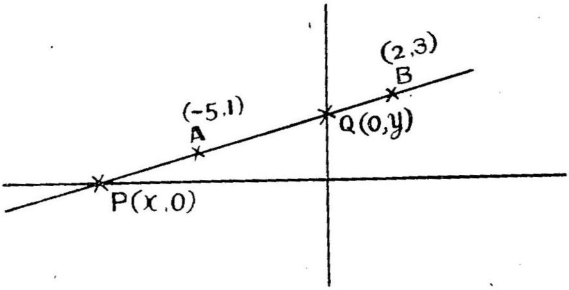
$$= c : \frac{ac}{b+c}$$

$$= b+c : a \quad \therefore \text{ I என்பது,}$$

$$\left[\frac{(b+c)\left(\frac{bx_2+cx_3}{b+c}\right) + a.x_1}{a+b+c} \right], \quad \left[\frac{(b+c)\left(\frac{by_2+cy_3}{b+c}\right) + ay_1}{a+b+c} \right]$$

$$\text{அதாவது} \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c} \right)$$

(எ–கா.) (5): $(-5, 1)$; $(2, 3)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை, x–அச்சும், y–அச்சும் எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன?



(படம் 6)

AB என்ற கோடு, x–அச்சை P(x, o)லும்,

y–அச்சை Q (o, y) லும் வெட்டட்டும்.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$ எனவும்,

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{p}{q}$$ எனவும் கொள்க.

P ன் y – ஆயத் தொலை $= \frac{3m-n}{m-n} = 0$

$\therefore \quad 3m = n$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ (வெளியே)

அவ்வாறே,

Q ன் x – ஆயத் தொலை $= \frac{2p-5q}{p+q} = 0$

$\therefore \quad 2p = 5q$

$\therefore \quad \frac{p}{q} = \frac{5}{2}$ (உள்ளே)

$\therefore$ x – அச்சு, அக்கோட்டை, வெளியே 1: 3 என்ற விகிதத்திலும்,

y – அச்சு, அக்கோட்டை, உள்ளே 5: 2 என்ற விகிதத்திலும் வெட்டுகின்றன.

பயிற்சி 1 (i)

1. பின்வரும் புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

(1) (9, 12); (3, 4).
(2) (–4, –6); (2, –3).
(3) ($a \cos \theta$, $b \sin \theta$); ($a \cos \phi$, $b \sin \phi$).

2. பின் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் இரு சம பக்க முக்கோணங்களா யமைகின்றனவென நிறுவுக.

(1) (3, –1); (–1, 2); (2, –2).
(2) (3, 1); (–5, –3); (0, –3).
(3) 3, –4); (7, 10); (–2, 5).

3. பின் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் இரு சம பக்க செங் கோண முக்கோணங்களாயமைகின்றனவென நிறுவுக.

(1) (0, 2); (1, 0); (3, 1).

(2) (–3, 3); (3, –7); (7, 9).

4. (2, 2); (–2, –2); $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகளாலமைவது ஒரு சம பக்க முக்கோணமென நிறுவுக.

5. (0, 1); (1, 2); (2, –3) என்ற புள்ளிகளாலமையும் முக் கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் காண்க.

6. (1, 2); (4, 2); (3, 7); (–1, 6) என்பவை முறையே ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகள். அந்நாற்கரத்தின் பக்கங்கள், மூலை விட்டங்களின் நீளம் காண்க.

பயிற்சி 1 (ii)

1. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (3, 4); (7, 1); (5, 8). அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள் காண்க.

2. (–1, 6); (7, –2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, உள்ளும், புறமும் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக் கிறது. பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் என்ன?

3. (2, 6); (8, 4) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது; பிரிக் கும் புள்ளிகள் காண்க.

4. A (–2, 9); B (3, – 1) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நீட்டத்தில் 5 BP = 3AB என்பதற் கிணங்க P எனும் புள்ளி உள்ளது. Pன் ஆயத் தொலைகள் (6, –7) என நிறுவுக.

5. A (3, 4); B (–8, 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, x –, y – அச்சுக்களை முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. $\frac{AP}{PB}$, $\frac{AQ}{QB}$ ன் மதிப்புக்களை யறிக.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் (5, 3); (6, 5); (4, 6). அம் முக்கோணத்தின் உச்சிகள் யாவை?

7. இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளி கள்

(1) (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3).

(2) $(0, y_1)$; $(x_1, 0)$; (x_2, y_2).

முக்கோணங்களின் உச்சிகள் காண்க.

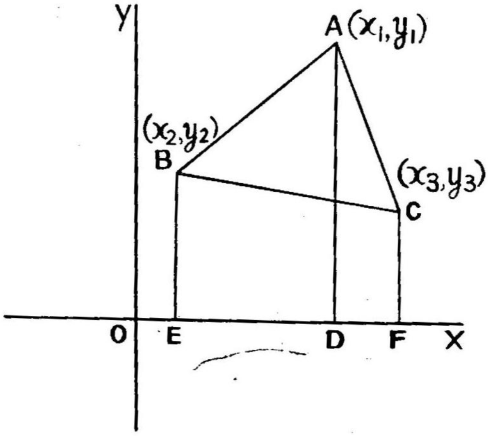
8. ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி $(-2, -4)$; இரு உச்சிகளின் ஆயத் தொலைகள் $(-5, -6)$; $(2, -11)$ ஆனால் மூன்றும் உச்சி என்ன ?

9. ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி ஆய ஆதியிலுள்ளது. இரு உச்சிகள் $(4, -5)$; $(-6, 7)$ ஆனால், மூன்றும் உச்சி யாது ?

10. $(3, 1)$; $(2, 2)$; $(-2, 1)$ என்பவை ஒரு இணைக்கரத்தின் மூன்று மூலைகளின் ஆயத் தொலைகள். நான்காவது மூலை காண்க.

11. $(2, 3)$; $(-2, -5)$; $(-4, 6)$ என்ற உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள்தொடு வட்ட மையம் காண்க.

1·4. உச்சிகளின் ஆயத் தொலைகள் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு (வாய்பாடு):



(படம். 7)

A (x_1, y_1); B (x_2, y_2); C (x_3, y_3) என்பன முக்கோண அமைப்பு. அம் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண வேண்டும்.

A, B, Cஇலிருந்து முறையே AD, BE, CF என x–அச்சுக்குக் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

ABED, BCFE, CADF என்பவை சரிவகங்களாகும்.

a, b என்ற நீளமுள்ள இணைக்கோடுகளாலமைந்து, h உயரமுள்ள சரிவகத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}h(a+b)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\text{பரப்பு } \triangle ABC = \text{சரிவகம் } ABED + \text{சரிவகம் } CADF - \text{சரிவகம் } BCFE.$$

$$= \tfrac{1}{2}[\,ED\,(EB+DA)+DF\,(DA+FC) - EF\,(EB+FC)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\,(x_1-x_2)(y_2+y_1)+(x_3-x_1)(y_1+y_3)-(x_3-x_2)(y_2+y_3)\,]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\,(x_1y_2-x_2y_1)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_2y_3-x_3y_2)\,]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,] \text{ அல்லது}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\,y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)\,]$$

இவைகளை ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு குறிக்கும் வாய்பாடுகளாகக் கொள்ளலாம். இவை வட்ட (cyclic) அமைப்பிலுள்ளவை யென்பதை நோக்கின் அறியலாம்.

1.4.1. கிளைத்தேற்றம் (i): ஆய ஆதியை ஓர் உச்சியாகவும் (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) என்பவைகளை மற்றிரு உச்சிகளாகவும் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

1.4.2. கிளைத்தேற்றம் (ii) : (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியமானால், அம் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு வரைமையுடைத்தாம்.

இதைப் பயன் படுத்தி மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளனவா என அறியலாம்.

குறிப்பு (i): மரபுப் படி, A B C ஐ A, B, C என்ற வரிசையில் சுற்றினால் முக்கோணம் இடது பக்கமிருப்பின் அதன் பரப்பு கூட்டெண் மதிப்புடைய தெனவும், வலது பக்கமிருப்பின், பரப்பு குறையெண் மதிப்புடைய தெனவும் கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு (ii) : ஆனால், பொதுவாக, நமக்குப் பரப்பளவு கூட்டெண் மதிப்பாக வரினும் சரி, குறையெண் மதிப்பாக

வரினும் சரி, பரப்பு கூட்டெண் மதிப்பாகவே கொள்ளுவோம். உயர்கணிதப் பகுதியிலே மாத்திரம் கூட்டு, குறை மதிப்பு வேறு பாடுடைத்து.

(எ–கா. (i) A (1, 2) ; B (5, 4) ; C(4, 8) ; D(−1, 6) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பறிக.

$\triangle$ ABCன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\,[1(4-8)+5(8-2)+4(2-4)]$

$= \frac{1}{2}\,[-4+30-8]$

$= 9$ சதுர அலகுகள்

$\triangle$ ACDன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\,[1(8-6)+4(6-2)+(-1)(2-8)]$

$= \frac{1}{2}\,[2+16+6]$

$= 12$ சதுர அலகுகள்

$\therefore$ நாற்கரத்தின் பரப்பு $= 9+12 = 21$ சதுர அலகுகள்.

இதையே, $\triangle$ ABD, $\triangle$ BCDன் பரப்புக்களைக் கூட்டியும் காணலாம். சரிபார்க்க உதவும் பயிற்சியாக இம் முறையைப் பயன்படுத்திப் பரப்பு அறியவும்.

(எ–கா.) (2) (2, 8); (−3, −2); (x, 12) என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இருக்குமாயின் x என்ன?

மூன்று புள்ளிகள் ஒரு வரைமையுடையதாயின், அப் புள்ளிகள் கொண்டமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சிய மாகுமென நாம் அறிவோம். (கிளைத்தேற்றம் 1·4·2).

முக்கோணப் பரப்பு $= \frac{1}{2}\,[2\,(-2-12)-3\,(12-8)$
$+x\,(8+2)]$

$= [-40+10x].$

$= 0$

$\because\ \underline{x\ = 4}$

பயிற்சி 1 (iii)

1. பின்வரும் முக்கோணங்களின் பரப்பை அறிக: (மூன்று உச்சிகளின் ஆயத்தொலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன).

(1) $(2, -3); (5, 10); (15, 0)$.

(2) $(0, 0); (4, 0); (0, 5)$.

(3) $(-5, -5;) (2, 3); (2, -3)$.

(4) $(0, 0); (5, 5); (5, 5); (5, -5)$.

2. பின் வரும் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளனவென நிறுவுக.

(1) $(-10, 12); (8, 6); (5, 7)$.

(2) $(7, -4); (2, 6); (6, -2)$.

(3) $(a, 0); (0, b); \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

3. $(6, 2); (-8, 8); (x, 5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிருப்பின் x என்ன?

4. $(3, 4); (-4, 3); (x, y)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலிருப்பின் x, yக்கு உரிய தொடர்பு காண்க.

5. $(2, 4); (-4, 6); (-5, -8); (3, -7)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு காண்க.

6. $(0, 0); (4, 0); (3, -8); (0, -5)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு காண்க.

7. $(0, 4); (4, 2); (4, -6); (0, -4)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு காண்க.

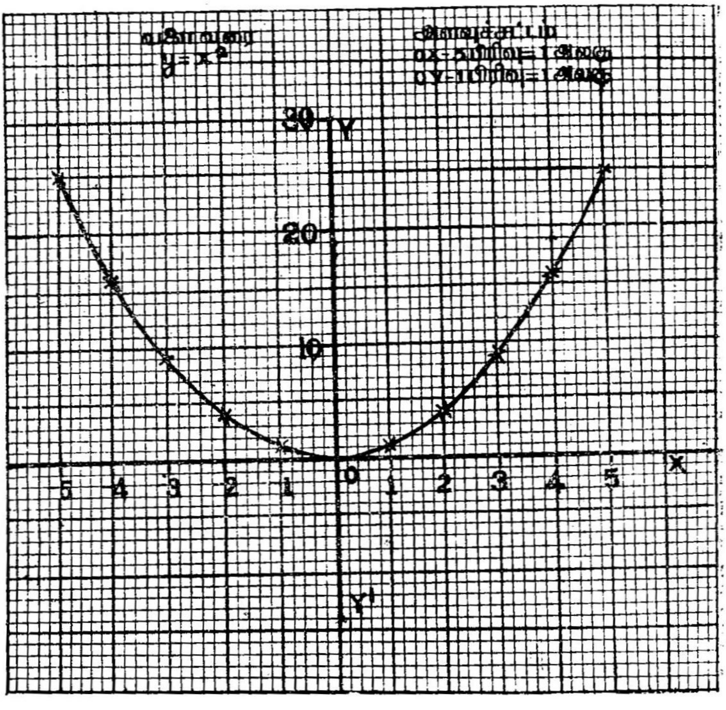
1.5 ஒரு வளைவரையின் சமன்பாடு :

ஒரு புள்ளியின் நிலை அதன் $x-$, $y-$ ஆயத் தொலைகளால் நிலை நாட்டப்படுகிறது என நாம் அறிவோம். இந்த $x-$, $y-$ ஆயத் தொலைகள் ஒரு சார்பால் இணைக்கப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். எடுத்துக் காட்டாக, $x-$, $y-$ ஆயத் தொலைகள் $y = x^2$ என்ற சார்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்வோம்.

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5$ என மதிப்பேற்கும் போது, முறையே,

$y = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 1, 4, 9, 16, 25$ என்று மதிப்பேற்கும்.

அதாவது (0, 0) ; (1, 1) ; (2, 4) ; (3, 9) ; (4, 16) ; (5, 25) ; (−1, 1) ; (−2, 4) ; (−3, 9) ; (−4, 16) ; (5, 25) என்பவை இணைக்கப்பட்ட ஆயத் தொலைகள். இவைகளை நாம் ஒரு கோட்டுப் படத்தாளில் இடங் குறித்துப் பார்ப்போம். படம் 8ஐக் காண்க.



(படம் 8)

அப்புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வரையால் (Smooth Curve) இணைத்தால், படம் 8ல் கண்ட ஒரு வளை வரை கிடைக்கும்.

எனவே, $y=x^2$ என்ற சார்பிற்கொப்ப (அல்லது சமன்பாட்டிற்கொப்ப) இணைந்த ஆயத் தொலைகளுக்குரிய புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வரையால் சேர்த்தால் ஒரு வரை படம் கிடைக்கும். அவ்வரை படம் $y=x^2$ என்ற சார்பிற்குரிய வளை வரையாகும். வேறு முறையில் கூறுமிடத்து, அவ்வளைவரைக்குரிய சார்பு அல்லது சமன்பாடு $y=x^2$.

இவ்வாறே மற்ற சார்புகளுக்கும் அல்லது சமன்பாடு களுக்கும், அவ்வவைக்குரிய வடிவங்கள் கோட்டுப் படத் தாளில் வரைந்து காணலாம்.

மேலும் எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $y = -x^2$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய வடிவம் படம் 8க்கு வடிவொத்ததாக x– அச்சுக்குக் கீழே அமையும்;

(2) $x^2+y^2=16$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய வடிவம் ஆய ஆதியை மையமாகக் கொண்டு, 4 அலகுகள் ஆரமுடைய ஒரு வட்டமாகும்;

(3) $y=2x$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய வடிவம் ஆய ஆதி யின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க் கோடாகும்.

1·6. இயங்குவழி அல்லது நியமப் பாதை (Locus):

ஒரு குறிப்பிட்ட நியதிப்படி ஒரு புள்ளி இயங்குமாயின் அப்புள்ளியின் பாதை இயங்கு வழி அல்லது நியமப் பாதை எனப்படும்.

பத்தி 1·5ல், $y=x^2$ என்ற நியதிப்படி (x, y) எனக் குறிப் பிடும் புள்ளி இயங்கும்போது, அப்புள்ளிகள் ஒரு வளை வரை யாக அமைகின்றனவெனக் கண்டோம்.

மேலும், எடுத்துக்காட்டாக,

(1) ஒரு புள்ளி, மற்றொரு குறிப்பிட்ட நிலைத்த புள்ளி யிலிருந்து, ஒரே தூரத்தில் இருக்கும் முறையில் இயங்கு மாயின், அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாயிருக்கும். நிலைத்த புள்ளி, அவ்வட்டத்தின் மையமாகவும், குறிப்பிட்ட தூரம் அவ்வட்டத்தின் ஆரமாயும் இருக்கும்.

(2) இரண்டு குறிப்பிட்ட நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து, சம தூரத்தில் இருக்கும்படியாக, வேறோர் புள்ளி இயங்கு மாயின், அப் புள்ளியின் நியமப் பாதை, நிலைத்த புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின், செங்குத்து மைய வெட்டியாக விருக்கும்.

இயங்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் பொதுவாக (x, y) எனவே கொள்ளப்படும். இவை இயங்கும் ஆயத்தொலைகள் (Running Co-ordinates) அல்லது நடப்பு ஆயத் தொலைகள் (Current Co-ordinates) எனப்படும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நியதிக்குட்பட்டு, ஒரு புள்ளி (x, y) இயங்குமாயின் அந்நியதிக்குரிய நியமப்பாதையை, x, y என்பவைகளை இணைக்கும் ஒரு சார்பால் அல்லது சமன்பாட்டால் தெரிவிக்கலாம். அச்சமன்பாடு அப்புள்ளியின் நியமப் பாதையெனப்படும்.

1.6·1. பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மேல் கூறியவற்றை விளக்கம் செய்யும்:

(i) நியதி: ஒரு புள்ளி, x – அச்சுக்கு C என்ற ஒரே தூரத்தில் இயங்குகிறது. அதன் நியமப்பாதை, $y = C$. இக்கோடு x – அச்சுக்கு C-தூரத்திலுள்ள ஒரு இணைக்கோடு.

(ii) நியதி: ஒரு புள்ளி, y – அச்சுக்கு C என்ற ஒரே தூரத்தில் இயங்குகிறது. அதன் நியமப்பாதை $x = C$. இக்கோடு y – அச்சுக்கு C – தூரத்திலுள்ள ஒரு இணைக்கோடு.

(iii) நியதி: ஒரு புள்ளி, x – அச்சிலிருந்து இருக்கும் தூரம், $(1, 2)$ இலிருந்து இருக்கும் தூரத்திற்கு எப்போதும் சமம்.

அப்புள்ளியைப் பொதுவாக (x, y) எனக் கொள்வோம். அது x – அச்சிலிருந்திருக்கும் தூரம் y ஆகும்;

அது $(1, 2)$ விலிருந்து இருக்கும் தூரம் $= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

$\therefore$ நியமப் பாதையாவது,

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

அதாவது, $y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

சுருக்கி நிலைமாற்றி எழுதினால்,

$(x-1)^2 = 4y - 4$. இதுவே நியமப் பாதை.

(iv) நியதி: ஒரு புள்ளி, $(2, 3)$ என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து எப்போதும் 4 அலகுகள் தூரத்திலேயே போய்க்கொண்டிருக்கிறது.

(x, y) என்ற புள்ளிக்கும் $(2, 3)$ என்ற புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் $=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

நியதிப்படி, $\sqrt{(x-2^2+(y-3)^2} = 4$

அதாவது, $(x-2)^2+(y-3)^2 = 16$

அல்லது $x^2+y^2-4x-6y-3=0$

என்பது நியமப் பாதையின் சமன்பாடாகும்.

(v) நியதி: ஒரு புள்ளி, $(a, 0); (-a, 0)$ என்ற நிலைத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து எப்போதும் $1: k$ என்ற விகிதமுள்ள தூரத்தில் இயங்குகிறது.

$A(a, 0)$; $B(-a, 0)$; $P(x, y)$ எனவும் கொள்வோம்.

$PA : PB = 1 : k$ என்பது நியதி.

$$\frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\frac{1}{k}$$

$\therefore$ இரு பக்கங்களையும் இருபடிக்கு உயர்த்த,

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=\frac{1}{k^2}$$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ $k^2\,[(x-a)^2+y^2]=(x+a)^2+y^2$ என்பது நியமப் பாதையாகும்.

பாடச் சுருக்கம் (1)

1. (x_1, y_1); (x_2, y_2) க்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

2. ஆய ஆதியிலிருந்து (x_1, y_1) க் குள்ள தூரம்

$$r=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

3. (x_1, y_1); (x_2, y_2) இரண்டு புள்ளிகள் :

(i) அவைகளுக் கிடைப்பட்ட நீளத்தை, உள்ளும் வெளியும் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் :

(உள்ளே): $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$; $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$

(வெளியே): $x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$; $y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$

(ii) அவைகளுக் கிடைப்பட்ட நீளத்தின் மையப் புள்ளி,

$\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$; $\overline{y}=\frac{y_1+y_2}{2}$

4. (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) என்ற உச்சிகளை யுடைய முக்கோணம் :

(i) முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி G :

$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $\overline{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

(ii) முக்கோணத்தின் பரப்பு :

$\triangle=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$

$\triangle=\frac{1}{2}\left[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\right]$

5. $x=0$, y – அச்சைக் குறிக்கும் ;

$y=0$, x – அச்சைக் குறிக்கும்.

6. $x=c$, $y=c$, முறையே, y – அச்சிலிருந்து c தூரம், x – அச்சிலிருந்து c தூரம் உள்ள கோடுகள்,

இவை முறையே, x – அச்சுக்கும் y – அச்சுக்கும் இணைக் கோடுகளாகும்.

பயிற்சி 1 (iv)

1. (2, 4); (5, 1) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் ஒரு புள்ளி இயங்குகிறது. அதன் நியமப் பாதை என்ன?

2. ஒரு புள்ளி, (2, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து எப்போதும் 6 அலகுகள் தூரத்தில் இயங்குகிறது. அதன் நியமப்பாதை என்ன ?

3. ஒரு புள்ளி (x, y), $(2, 1)$; $(1, 2)$ என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து இருக்கும் தூரங்கள் $1 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. (x, y)ன் நியமப் பாதை என்ன ?

4. (a, b) என்ற ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து, மற்றோர் புள்ளி எப்போதும் $2r$ என்ற தூரத்தில் இயங்குகிறது. அப் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

5. பின் கொடுக்கப்பட்ட நியதிகளுக்குட்பட்டு, (x, y) என்ற புள்ளி இயங்குகிறது. நியமப் பாதைகள் காண்க.

(1) $(2, 1)$; $(-2, -1)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து (x, y)ன் தூரங்களின் கூட்டுத் தொகை 10.

(2) $(-3, 1)$; $(4, 4)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து (x, y)க்கு உள்ள தூரங்களின் இருபடிக் கூட்டுத் தொகை 120.

(3) $(2, 3)$; $(-3, 4)$ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தில் இரு உச்சிகள் ; (x, y) ஐ மூன்றாவது உச்சியாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு எப்போது 17 சதுர அலகுகள் ?

2. நேர்க்கோடுகள்

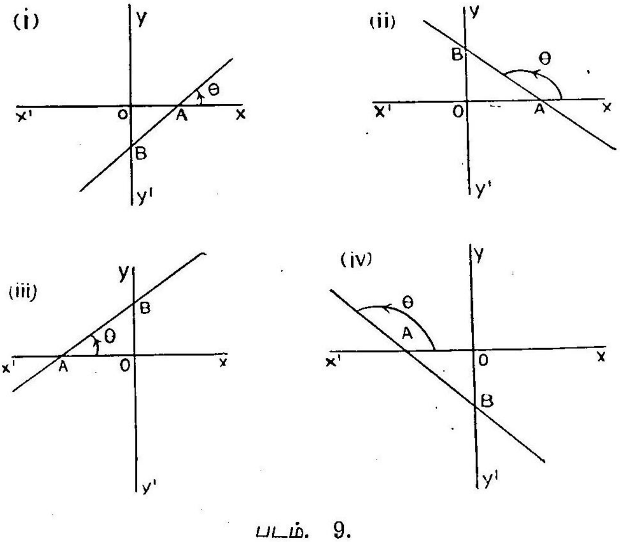
(Straight Lines) :

2.1. சென்ற பகுதியில் 1·7 குறிப்பில் $x=c$; $y=c$ என்பவை முறையே y–அச்சுக்கும், x–அச்சுக்கும், c–என்ற தூரத்தில் அமைந்த இணைக்கோடுகள் எனக் கண்டோம்.

மேலும், $x=0$; $y=0$ என்பவை, y–அச்சையும் x–அச்சையும் குறிக்கும் சமன்பாடுகளெனவும் கண்டோம்.

இப்போது, ஆய அச்சுக்கள் அமைந்த மட்டத்தில் உள்ள, நேர்க்கோடுகளுக்குரிய சமன்பாடுகள் யாவையென அறிய முயல்வோம். ஒரு நேர்க்கோட்டை ஒரு மட்டத்தில் நிலை நிறுத்த சில முறைகளுண்டு என உங்களுக்குத் தெரியும். அம்முறைகளைக் கொண்டு, இயல் முறை வடிவ கணிதத்தில் நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பிடக் கூடிய சமன்பாடுகள் தொகுதியை ஆராய்வோம்.

2.2. நேர்க்கோட்டின் சரிவு (Slope) அல்லது சாய்வு வீதம் (Gradient) :



படம். 9.

AB என்ற ஒரு நேர்க்கோடு, x–அச்சை A என்ற இடத்தில் வெட்டட்டும்.

AX என்ற கோடு, Aல் ஆரம்பித்து இடஞ் சுழியாகச் சுற்றி (anti-clockwise) AB என்ற நிலைக்கு வரட்டும். அது எவ்வளவு கோண அளவு சுற்றியிருக்கிறதோ, அக்கோணத்தை θ எனக் குறிப்போம்.

படம் (i), (iii)ல், θ ஒரு குறுங்கோணம் ($0 < \theta < 90°$)

படம் (ii), (iv)ல், θ ஒரு விரிகோணம் ($90° < \theta < 180°$)

எனவே, ஒரு கோடு, எப்படி x-அச்சை வெட்டினாலும், θ என்பது $0°$க்கு மேல் $180°$க்கு உட்பட்டதாயிருக்கும்.

$\tan\theta$ என்பது நேர்க்கோட்டின் சரிவு அல்லது சாய்வு **வீதம்** எனப்படும். பொதுவாக, அதற்கு m என்ற குறியீடு பயன்படுத்துவது மரபு.

அதாவது, $\tan\theta = m$

θ குறுங்கோணமாயின், $m = \tan\theta$ கூட்டெண்ணாகும்.

θ விரிகோணமாயின், $m = \tan\theta$ குறையெண்ணாகும்.

2·3. வெட்டுத்துண்டு (Intercept): ஏதாமொரு நேர்க்கோடு, x-, y-அச்சுக்களை முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

O என்பது ஆய ஆதியாயின், OA என்பது, x-வெட்டுத் துண்டு எனவும்,

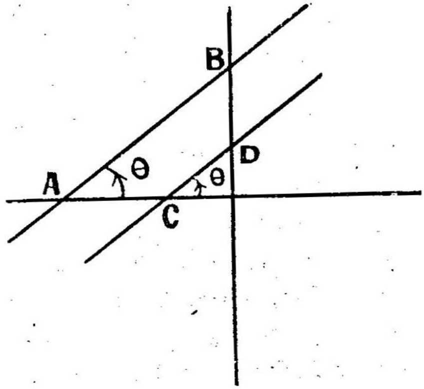
OB என்பது, y-வெட்டுத் துண்டு எனவும் கூறப்படும். அவ்வெட்டுத் துண்டுகள் சில கூட்டெண் மதிப்புடையன வெனவும், சில குறையெண் மதிப்புடையனவெனவும், கவனிக்க வேண்டியதாம்.

படம் 2·2ல் உள்ள வெட்டுத் துண்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

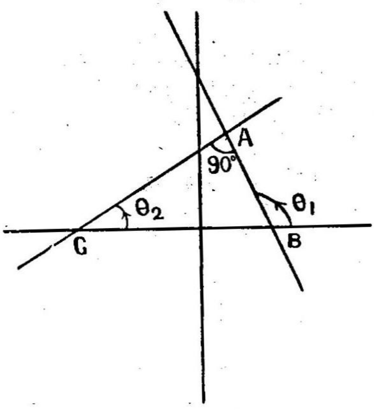
	x- வெட்டுத்துண்டு + அல்லது -	y- வெட்டுத்துண்டு + அல்லது -
(i)	OA +	OB -
(ii)	OA +	OB +
(iii)	OA -	OB +
(iv)	OA -	OB -

2.4. சரிவு பற்றிய சில பண்புகள்:

(1) இரண்டு இணைக்கோடுகளின் சரிவுகள் சமம். ஏனெனில் அவை x-அச்சை வெட்டுமிடத்து x-அச்சோடு சம கோணத்தில் அமைந்திருக்கும். படம் 10ல் AB, CD இணைக் கோடுகள்.



படம் 10.



படம் 11.

(2) இரண்டு நேர்க் கோடுகள் ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தாக விருப்பின், அவைகளின் சரிவுகள் m, m^1. என்பவையிடையே $m\,m^1 = -1$ என்ற சார்வு நிலவும். எப்படியெனில்:

படம் 11ல்

ABன் சரிவு $m = \tan\ \theta_1$

ACன் சரிவு $m^1 = \tan\ \theta_2$

$\angle CAB = 90^\circ$ (ஏனெனில் $AB \perp AC$)

$\therefore\ \theta_1 = 90 + \theta_2$

$\therefore\ m = \tan\theta_1 = \tan(90+\theta_2)$

$= -\text{Cot}\,\theta_2$

$= -\dfrac{1}{m^1}$

$\therefore\ mm^1 = -1$ என்பது விளக்கம்.

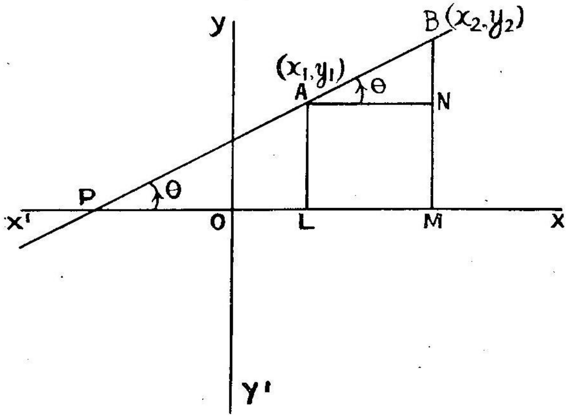
(3) x – அச்சின் சரிவு $= \tan 0 = 0$ (பூச்சியம்).

(4) y – அச்சின் சரிவு $= \tan 90^\circ = \propto$ (கந்தழி)

(5) 2·4 (1)ன்படி, x – அச்சுக்கு இணைக்கோடாகவுள்ள எக்கோட்டிற்கும் சரிவு பூச்சியம் (0).

அவ்வாறே, y – அச்சுக்கு இணைக்கோடாகவுள்ள எக்கோட்டிற்கும் சரிவு கந்தழி ($\propto$).

(6) A (x_1, y_1); B (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சரிவு $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ அல்லது $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ என்பது பின் வரும் படத்தால் விளங்கும்.



படம் 12.

படத்தில் காண, $m = \tan\theta = \dfrac{NB}{AN}$

$= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ என விளங்கும்.

2·5. நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்:

$x-$, $y-$ அச்சுக்கள் உள்ள மட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க்கோட்டை, பின்வரும் ஏதாமொரு முறையில் நிலைக்கச் செய்யலாம்.

(1) (x_1, y_1); (x_2, y_2) எனக் குறிப்பிட்ட இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு (இரு புள்ளியமைப்பு);

(2) $m-$ சரிவுடன், $(x_1\ \ y_1)$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியே செல்லும் கோடு (புள்ளி–சரிவு அமைப்பு);

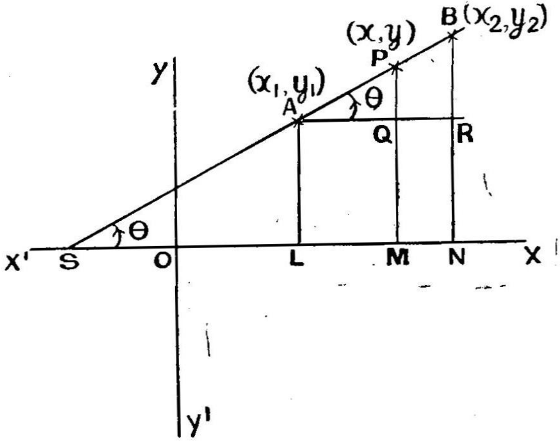
(3) $m-$ சரிவுடன், $y-$ அச்சின் மேல் c எனவொரு குறிப்பிட்ட வெட்டுத் துண்டுடைய கோடு (வெட்டு – சரிவு அமைப்பு);

(4) $x-$, $y-$ அச்சுக்களின் மேல் குறிப்பிட்ட வெட்டுத் துண்டுகள் a, b உடைய கோடு. (இரு வெட்டு அமைப்பு);

(5) ஆய ஆதியிலிருந்து, குறித்த (நிலைத்த) நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் நீளமும், அக்குத்துக் கோட்டிற்கும் $x-$ அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட கோணமும் உடைய நேர்க்கோடு (குத்துக்கோடு—சாய்வு அமைப்பு).

மேலே கூறப்பட்ட முறைகள் ஒவ்வொன்றிலும், ஒரே ஒரு ''ஒரு தனி'' (unique) நேர்க்கோடு பெறப்படும். அவ்வக் கோடுகள் OX, OY என்ற நிலைத்த அச்சுக்களோடு தொடர்புடைத்தாயிருக்கும். ஆகவே, அவைகளின் சமன்பாடுகளை அறிய முற்படுவோம். (''ஒரு தனி''த் தன்மையை ஆய்ந்து அறிக.

2·5.1 $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ எனக் குறிப்பிட்ட இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு : (இரு புள்ளி யமைப்பு—Two-Point form)



படம் 13

AB என்பது (x_1, y_1) ; $(x_2, (y_2)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க் கோடு. படம் (13) ல் காட்டியபடி, x – அச்சுக்கும் y–அச்சுக் கும் இணைக்கோடுகள் வரைக.

P என்பது அக்கோட்டின் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளி (x, y).

x ஐயும் y ஐயும் இணைக்கும் சார்பே, AB என்னும் கோட்டுக்குரிய சமன்பாடாகும். ஆகவே அச்சார்பு என்ன வென அறிவதே நமது நோக்கம். (இம்முறையே மற்ற முயற்சி களிலும் பயன்படும்.)

அக்கோட்டின் சாய்வு $\tan\ \theta = \tan BS X = \tan\ BAR$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{AQ} = \frac{BR}{AR}$$

$$\therefore\ \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

இதுவே $(x,\ y)$ ஐ $(x_1,\ y_1)$; (x_2, y_2) என்பவைகளோடு இணைக்கும் சார்பாகும்,

எனவே (x_1, y_1); (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

இதையே $\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ எனவும் நிறுவலாம்.

(எ-கா.) (2, 4); (5, 9) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு யாது? அக்கோட்டின் சாய்வென்ன?

கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{9-4}{5-2}=\frac{5}{3};$$

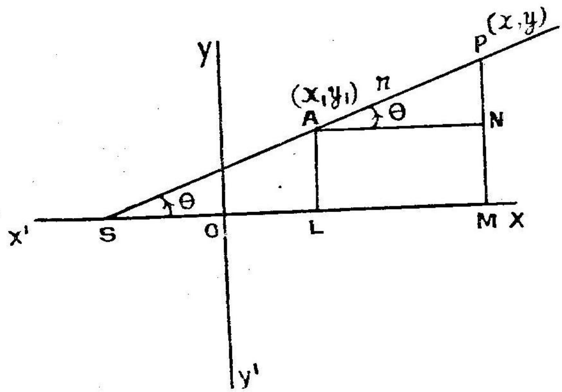
அதாவது $3(y-4)=5(x-2)$;

அதாவது $3y-5x-2=0$

அல்லது $5x-3y+2=0$

சாய்வு $=\frac{9-4}{5-2}=\frac{5}{3}$

2.5·2. m - சரிவுடன், $(x_1\ y_1)$ என்ற குறித்த புள்ளியின் வழியே செல்லும் நேர்க்கோடு (புள்ளி–சரிவு அமைப்பு-Point-Slope form) :



படம் 14

$m=\tan\ \theta$ என்ற சரிவுடன் (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லும் கோடு PAS எனக்கொள்க. (படம் 14) ல் காட்டியபடி x - அச்சுக்கும், y - அச்சுக்கும் இணைக்கோடுகள் வரைக.

$$\theta = \angle ASX$$
$$= \angle PSX$$
$$= \angle PAN \text{ என்பது அறியப்படும்.}$$
$$\therefore \quad m = \tan\theta$$
$$= \tan \angle PAN$$
$$= \frac{PN}{AN}$$
$$= \frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ என்பது இக்கோட்டின் சமன் பாடாகும்.

இதை, $(y-y_1) = m\,(x-x_1)$ எனவும் எழுதுவது மரபு.

(எ-கா. (1) : $(-4, 6)$ வழியாக சரிவு '2' உடைய நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

சமன்பாடு : $y-6 = 2\,(x+4)$

அதாவது $y = 2x+14$ என்பதாகும்.

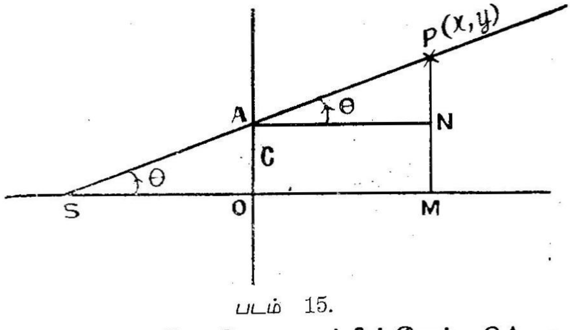
(எ-கா.) (2) : $(-3, -7)$ வழியாக, x – அச்சுக்கு $120°$ சாய்ந்திருக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

சமன்பாடு : $y+7 = (x+3)\tan 120$
$$= -\sqrt{3}\,(x+3)$$

அதாவது $y = -\sqrt{3}x - 7 - 3\sqrt{3}$

அல்லது $y + \sqrt{3}x + (7+3\sqrt{3}) = 0$

2·5.3 : m – சரிவுடன், y – அச்சின்மேல், c என்ற குறிப்பிட்ட வெட்டுத்துண்டுடைய கோடு :



படம் 15.

SAP என்ற நேர்க்கோடு, y – அச்சின்மேல், $OA = c$ என்ற வெட்டுத்துண்டுடைத்து.

படம் 15 ல் காட்டியபடி, $x-$, $y-$ அச்சுக்களுக்கு இணைக் கோடுகள் வரைக.

கொடுக்கப்பட்ட $m=\tan\theta$

$$=\tan\angle\ \text{PSM}$$

$$=\tan\angle\ \text{PAN}$$

P என்பது கோட்டின் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளி.

$$\therefore\ m=\tan\angle\ \text{PAN}$$

$$=\frac{\text{PN}}{\text{AN}}=\frac{\text{MP}-\text{MN}}{\text{AN}}$$

$$=\frac{y-c}{x}$$

$$\therefore\ y-c=mx$$

அல்லது $y=mx+c$ என்பது அக்கோட்டின் சமன்பாடு.

சிறப்பாக, $c=0$ ஆனல், அதாவது, நேர்க்கோடு ஆய ஆதியான (0, 0) வழியாகச் செல்லுமாயின்,

$y=mx$ என்பது அக்கோட்டின் சமன்பாடாகும். (இது கவனத்தி லிருக்கவேண்டிய ஒரு வாய்பாடாகும்.)

கிளைத் தேற்றம்: $y=0$ என்பது $x-$அச்சையும், $x=0$ என்பது y அச்சையும் குறிக்கும் சமன்பாடுகளாகும்.

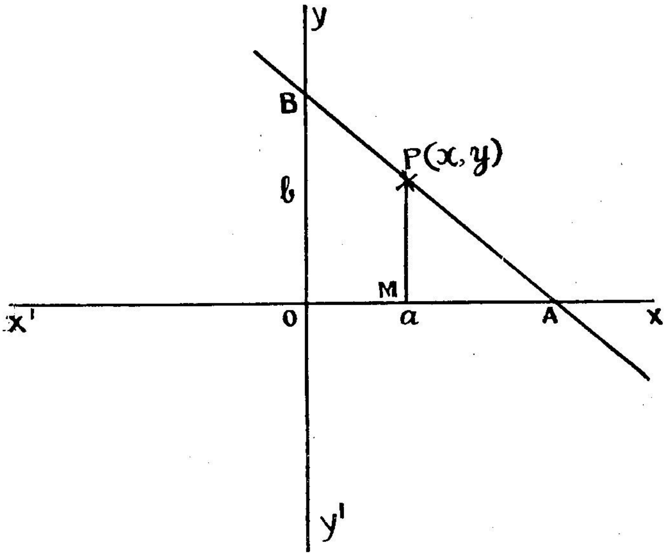
(எ-கா.) (1) -3 என்ற சரிவுடன் $y-$ அச்சின் மேல் 6 அலகுகள் துண்டு விட்டுச் செல்லும் நேர்க்கோட்டுச் சமன் பாடு, $y=-3x+6$ என்பதாகும்.

(எ-கா.) (2) ஆய ஆதியின் வழியாக $x-$அச்சுக்கு 45° சாய்ந்துள்ள கோட்டுச் சமன்பாடு,

$$y=x\tan 45$$

அல்லது $y=x$ ஆகும்.

2.5·4. $x-$, $y-$ **அச்சுக்களின் மேல். குறிப்பிட்ட வெட்டுத் துண்டுகள்** a, b, **விட்டுச்செல்லும் நேர்க்கோடு : (வெட்டு அமைப்பு** – Intercept Form.)



படம் 16

AB என்ற கோடு, படம் 16 படி, $x-$ அச்சை Aயிலும், $y-$ அச்சை Bயிலும் வெட்டட்டும்.

$OA=a$ எனவும் $OB=b$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$P(x, y)$ என்று கோட்டின் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

படத்தில் காட்டியபடி, $y-$ அச்சுக்கு இணையாக PM என்ற கோடு வரைக.

$$\triangle\ OAB\ |||\ \triangle\ MAP$$

$$\therefore\ \frac{OA}{OB}=\frac{MA}{MP}$$

அதாவது $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a-x}{y}$

$\therefore \quad ay = ab - bx$

$\therefore \quad bx + ay = ab$

இரு பக்கங்களையும், ab ஆல் வகுக்க,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற அமைப்பில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

குறிப்பு: இச்சமன்பாட்டை, 2·5·1, 2·5·2, 2·5·3 என்ற பத்திகளில் காட்டியபடியும் பெறலாம்.

2·5·1 படி: இக்கோடு $(a, 0)$; $(0, b)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோடெனக் கொள்க. அப்போது அதன் சமன்பாடு,

$\frac{y-0}{x-a} = \frac{0-b}{a-0}$ என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

அதாவது $ay = -bx + ab$

அல்லது $bx + ay = ab$.

அதாவது $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனவாகும்.

2.5·2. படி: $m = \tan \theta$

$= \tan \text{XAB}$

$= \tan (180° - \text{OAB})$

$= -\tan \text{OAB}$

$= -\frac{b}{a}$.

இக்கோடு, இச்சரிவோடு, (a, o) வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே இதன் சமன்பாடு,

$y - 0 = -\frac{b}{a}(x-a)$ ஆகும்.

அதாவது $ay = -bx + ab$

அல்லது $bx + ay = ab$

அதாவது $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனவாகும்.

2.5·3. படி : $m = -\frac{b}{a}$; y – அச்சில் வெட்டுத் துண்டு $= OB = b$.

$\because$ அதன் சமன்பாடு $y = -\frac{b}{a}x + b$ ஆகும்.

அதாவது $ay = -bx + ab$

அல்லது $bx + ay = ab$

அதாவது $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனவாகும்.

(எ-கா. 1): x – அச்சின்மேலும், y – அச்சின்மேலும் 3, 5 அலகுகள் துண்டு விட்டுச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன் பாடு $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ ஆகும்.

(எ–கா. 2) துண்டுகள் OX^1 மேலும், OY^1 மேலும் $-p, -q$ என அமையுமாயின், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

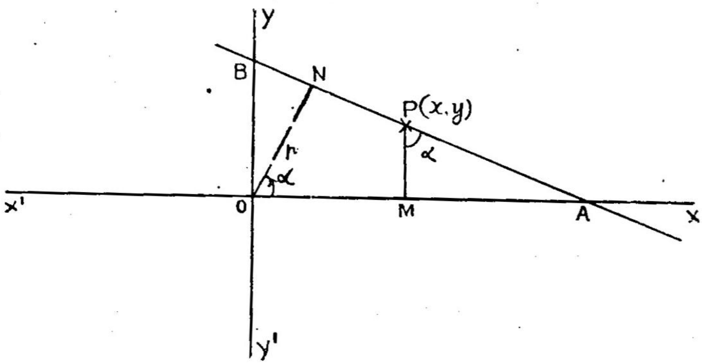
$$\frac{x}{-p} + \frac{y}{-q} = 1 \text{ அல்லது}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + 1 = 0 \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

குறிப்பு: வெட்டுத் துண்டுகள் அச்சுக்களின் கூட்டெண் பக்கத்திலுள்ளனவா, அல்லது குறையெண் பக்கத்திலுள் ளனவா, என்பதை ஆய்ந்து, சமன்பாட்டில் அதற்குரிய கூட் டல், அல்லது கழித்தல் குறியைப் பயன்படுத்தி விடை பெற வேண்டும்.

2.5·5. ஆய ஆதியிலிருந்து, குறித்த (நிலைத்த) நேர்க்கோட் டிற்கு வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் நீளமும், அக்குத்துக் கோட்டிற்கும் x – அச்சுக்கும் இடைப் பட்ட கோணமும் உடைய

நேர்க் கோடு. (குத்துக்கோடு – சாய்வு அமைப்பு The Normal form or The Normal-Slope form):



படம் 17

AB ஒரு நேர்க்கோடு.

ON என்பது ஆய ஆதியிலிருந்து ABக்குச் செங்குத்துக் கோடு. $ON = p$, $\angle AON = \alpha$ என்பவை இரண்டும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன.

p, α வின் சார்பாக, ABன் சமன் பாடு காணவேண்டும்.

இங்கு x – அச்சின்மேல் அக்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு $= OA = p \sec \alpha$.

அவ்வாறே y – அச்சின்மேல் அக்கோட்டின்மேல் வெட்டுத் துண்டு $= OB = p \operatorname{cosec} \alpha$.

எனவே, 2·5.4ல் கண்டபடி, இக்கோட்டின் சமன் பாடு,

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \text{ என அமையும்.}$$

அதாவது $$\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

அதாவது $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற அமைப்பில் கிடைக்கப் பெறும்.

இருபக்கங்களையும் $\cos \alpha$ ஆல் பெருக்க,

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற அமைப்பில் ABன் சமன்பாடு பெறப்படும்.

எடுத்துக் காட்டு : ஒரு நேர்க்கோட்டின்மேல் ஆய ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 3 அலகுகள் ; அக்குத்துக் கோட்டுக்கும் x – அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 60°. அக்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

$$p = 3$$

$$\alpha = 60°$$

$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos } 60 = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Sin } \alpha = \text{Sin } 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x \frac{1}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

அதாவது $x + \sqrt{3}\ y = 6$ ஆகப் பெறும்.

பயிற்சி 2 (i)

1. பின் வரும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் சரிவுகளையும் அவைகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க :

(1) (2, – 3) ; (6, 1) (2) (5, 6) ; (0, 4) (3) (7, 0) ; (– 5, 3)

2. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சரிவும் அக்கோடுகள் செல்லும் வழியிலுள்ள ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் சமன்பாடுகள் காண்க :

(1) $m = 2$; (2, – 3) (2) $m = -4$; (– 6, 7)

(3) $m = 6$; (0, 0) (4) $\theta = 60°$; (4, – 1)

3. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சரிவும், அக்கோடுகள் y – அச்சின்மேல் விடும் துண்டும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் சமன்பாடுகள் காண்க :

(1) $m = 2$; வெ. துண்டு -4

(2) $\theta = \frac{\pi}{4}$; வெ. துண்டு 6

(3) $m = -5$; வெ. துண்டு -3

(4) $m = \frac{p}{q}$; வெ. துண்டு a

4. நேர்க்கோடுகள், முறையே, $x-$, $y-$ அச்சுக்களின் மேல் விட்டுச் செல்லும் துண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(1) $x \rightarrow 4$; $y \rightarrow 3$. (2) $x \rightarrow -5$; $y \rightarrow 6$. (3) $x \rightarrow a$; $y \rightarrow -a$.

இங்கு $\rightarrow$ என்னும் குறி, அவ்வவ்வச்சுக்களுக் குரிய வெட்டுத் துண்டுகளைக் குறிக்கும்.

2.5·6. 2.5·2 ல் கண்ட சமன்பாட்டை யொட்டி, மற்றோர் நேர்க் கோட்டுச் சமன்பாடு :

படம் 2.5·2ல், A (x_1, y_1); P (x, y) என்ற புள்ளிகளுக் கிடைப்பட்ட தூரம் r எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $AP = r$.

படத்தைப் பார்க்க.

$$x - x_1 = AN = r \cos \theta$$

$$y - y_1 = PN = r \sin \theta$$

என்பவை தெரிகின்றன.

$$\therefore \frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r$$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

'θ' சாய்வுடன், (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்குரிய சமன்பாடாகவும் மேற்கூறிய சமன்பாட்டைக் கொள்ளலாம். r என்பது (x_1, y_1) க்கும், (x, y) க்கும் இடைப்பட்ட தூரமாகும்.

இவ் வாய்பாடு இயல்முறை வடிவ கணிதத்தில் பல்வேறு இடங்களில் பயன்படும் ; கவனத்திற் குரியதாம்.

2.6. பொதுவாக, $ax+by+c=0$ என்ற ஒருபடிச் சமன்பாடு எப்போதும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும்.

2.5·1 முதல் 2.5·5 வரை பார்த்த சமன்பாடுகள் யாவற்றையும் $ax+by+c=0$ என்ற அமைப்பில் எழுதிப் பார்ப்போம்.

2.5·1. $x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+(x_1y_2-x_2y_1)=0$

2.5·2. $mx-y+(y_1-mx_1)=0$

2.5·3. $mx-y+c=0$

2.5·4. $bx+ay-ab=0$

2.5·5. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$

இவையாவும், x, y கொண்டு, அமைக்கப்பட்ட முதற்படி சமன்பாடுக ளென்பது தெளிவு. எனவே, $ax+by+c=0$ என்ற பொது அமைப்பில், நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடுகள் அமையும் என்பது வெள்ளிடை.

மேலும், மறுதலையாக. $ax+by+c=0$ என்ற சமன்பாட்டை, குறிப்பாக, 2.5·3, 2.5·4, 2.5·5 என்ற அமைப்பிலும் எழுதலாம்.

2.5·3 அமைப்பு: $ax+by+c=0$

$$\therefore\ y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

2.5·4 அமைப்பு: $\dfrac{x}{\frac{-c}{a}}+\dfrac{y}{\frac{-c}{b}}=1$

2.5·5 அமைப்பு: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=-\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

இவ்வமைப்பில், $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\text{Sin}\,\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$; $p=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. இங்கு α என்ற கோணத்தைக் காணமுடியும்.

2·6·1 ஆனல், $ax+by+c=o$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்குமென, நேரடியாகவும் நிறுவலாம்.

நிறுவன் முறை: $ax+by+c=0$ ஏதாமொரு இயங்குவழியெனவும், அவ்வியங்கு வழி ஒரு நேர்க்கோடெனவும் நிறுவ முயல்வோம். இயங்கு வழியின்மேல் (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) என ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க.

அதாவது,

$$ax_1+by_1+c=0$$

$$ax_2+by^2+c=0$$

$$ax_3+by_3+c=0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளும் உண்மையாவனவாம்.

இச் சமன்பாடுகளை முறையே, (y_2-y_3); (y_3-y_1); (y_1-y_2) என்பவையால் பெருக்கிக் கூட்டினல்

$a\ [\ x_1\ (y_2-y_3)\ +\ x_2\ (y_3-y_1)\ +\ x_3\ (y_1-y_2)\ ]\ =\ 0$ ஆகும்.

ஆனல் $a \neq 0$

ஆகவே,

$x_1\ (y_2-y_3)\ +\ x_2\ (y_3-y_1)\ +\ x_3\ (y_1-y_2)=0$ ஆகிறது.

எனவே, பகுதி 1, பத்தி 4ல் கிடைக்கப்பெற்ற 1·4 (2) கிளைத்தேற்றப்படி, (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டிலுள்ளனவென நிறுவப்படுகிறது.

ஒரு வரைகோடாகிய $ax+by+c=0$ன் மேல் ஏதாவது மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையுமானல், அவ்வரை கோடு அல்லது இயங்கு வழி ஒரு நேர்க்கோடு என்பது விளக்கம்.

2·8. பலவித எடுத்துக் காட்டான கணக்குகள்:

(எ-கா.) (1) $3x-6y+12=0$ என்ற நேர்க்கோடு இருக்கிறது. அதன் சரிவு, $x-$, $y-$ அச்சுக்களின்மேல் விடப்படும் வெட்டுத் துண்டுகள், ஆய ஆதியிலிருந்து அக் கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம், அக்குத்துக் கோடு, $x-$ அச்சோடு பெற்ற சாய்வு, முதலியவைகளைக் காண்க.

சரிவு $3x-6y+12=0$

$\therefore\ 6y=3x+12$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+2$ ($y=mx+c$ அமைப்பு)

$\therefore$ கோட்டின் சரிவு $\frac{1}{2}$

$x-$, $y-$ அச்சுக்களின்மேல் விடப்படும் வெட்டுகள் :

$$3x-6y=-12$$

$$\therefore\ \frac{3x}{-12}-\frac{6y}{-12}=1$$

$$\therefore\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1 \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ அமைப்பு}\right)$$

$x-$ அச்சின்மேல் -4 ($0X^1$ பக்கமிருக்கும்)

$y-$ அச்சின்மேல் 2 ($0Y$ பக்கமிருக்கும்)

குத்துக்கோடு நீளம், $x-$ அச்சோடு சாய்வு,

$$3x-6y=-12$$

$$\therefore\ \frac{3x}{\sqrt{3^2+6^2}}-\frac{6y}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{-12}{\sqrt{3^2+6^2}}$$

அதாவது $x\left(\frac{3}{3\sqrt{5}}\right)+y\left(\frac{-6}{3\sqrt{5}}\right)=\frac{-12}{3\sqrt{5}}$

அதாவது $x\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+y\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{-4}{\sqrt{5}}$

செங்குத்துக் கோடு நீளம் $\frac{4}{\sqrt{5}}$

$$\text{Cos } \alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Sin } \alpha=\frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha=-2$$

இங்கு α ன் மதிப்பு $> \frac{3\pi}{2}$ ஆகவும் $< 2\pi$ ஆகவும் இருக்கு மென்பதையும் கண்டு கொள்க.

(எ-கா. 2) $4x+y=2$ம், $12x+3y=7$ என்ற கோடும் இணைக் கோடுகள் என நிறுவுக.

முதல் கோட்டை $y=-4x+2$ எனவும்,

இரண்டாம் கோட்டை $y=-4x+\frac{7}{3}$ எனவும், எழுதலாம்.

$\therefore$ இரு கோடுகளும் ஒரே சரிவை $(m=-4)$ உடையன. எனவே இணைக்கோடுகளாகும்.

(எ-கா. 3) A (7, 4); B (5, 10); C (−3, −8) உச்சிகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(i) BCன் மையம் $D = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{10-8}{2}\right)$

$= (1, 1)$

ADன் மையக் கோடு (7, 4); (1, 1) வழியாகச் செல்வது. அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{y-4}{x-7} = \frac{4-1}{7-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; x-7 = 2y-8$$

அதாவது $x-2y+1=0$ என்பது AD.

(ii) CAன் மையம் $E = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-8+4}{2}\right)$

$= (2, -2)$

BE மையக் கோடு (5, 10); (2, −2) வழியாகச் செல்வது. அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{y-10}{x-5} = \frac{10+2}{5-2} = 4$$

$\therefore \quad 4x - 20 = y - 10$

அதாவது $4x - y - 10 = 0$ என்பது BE.

(iii) ABன் மையம் $F = \left(\frac{7+5}{2}, \frac{4+10}{2}\right)$

$= (6, 7)$

CF மையக் கோடு $(-3, -8)$; $(6, 7)$ வழியாகச் செல்வது. அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{y+8}{x+3} = \frac{-8-7}{-3-6} = \frac{5}{3}$$

$\therefore \quad 5x + 15 = 3y + 24$

அதாவது $5x - 3y - 9 = 0$ என்பது CF.

(எ–கா. 4) $(9, 3)$; $(1, -7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு இணைகோடாக $(3, 6)$ வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$(9, 3)$; $(1, -7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின்

$$\text{சரிவு} = \frac{3+7}{9-1} = \frac{5}{4}.$$

எனவே, $(3, 6)$ வழியாக $m = \frac{5}{4}$ உள்ளகோடு யாதெனின்
$(y - 6) = \frac{5}{4}(x - 3)$

அதாவது $4y - 24 = 5x - 15$

அதாவது $4y - 5x = 9$ என்பதாம்.

(எ-கா.) (5) ஒரு நேர்க்கோடு, $x-$, $y-$ அச்சுக்களின் மேல் விடும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூட்டுத்தொகை 10. அது $(-4, 9)$ வழியாகச் செல்லுமாயின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

அக்கோடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனக் கொள்க.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ -\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}=1 \end{array}\right\}$$ என்பவை கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

இவ்விரண்டு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண, a, b கிடைக்கும்.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ -4b+9a=ab \end{array}\right\}$$ என்பவை சமன்பாடுகள்.

$$a=10-b$$

$$\therefore \quad -4b+9(10-b)=b(10-b)$$

அதாவது $-4b+90-9b=10b-b^2$

அதாவது $b^2-23b+90=0$

$$(b-5)(b-18)=0$$

$$\therefore\ b=5 \quad \text{or} \quad b=18$$

அப்போது $a=5$ or $a=-8$

$\therefore \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5}=1$ அல்லது

$\dfrac{x}{-8}+\dfrac{y}{18}=1$ என்ற இருகோடுகளும் கொடுத்த நிபந்தனைகட்குக் கட்டுப்பட்டன.

பாடச் சுருக்கம் (2)

1. குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளின் கீழ், நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு (சில அமைப்புக்கள்):

(i) $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$; இதன் சாய்வு $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(ii) $y-y_1=m\,(x-x_1)$;

(iii) $y=mx+c$;

(iv) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$;

(v) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$

(vi) $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y-y_1}{\sin\theta} = r.$

2. பொதுவாக $ax+by+c=0$ என்பது ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

பயிற்சி 2 (ii)

1. பின் கூறப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் சரிவு, $x-$, $y-$ அச்சுக்களின் மேல் வெட்டப்படும் துண்டுகள், ஆய ஆதியிலிருந்து அக்கோடுகள் மேல் வரையப் படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள், காண்க.

(1) $3x+2y=6$

(2) $4x+3y+12=0$

(3) $px+qy+p+q=0$

(4) $3x=5y+60$

(5) $ax+by+ab=0$

2. பின்வரும் கோடுகளுக்கு இணைக்கோடாக, குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(1) $3x+2y=6$; $(-1, 3)$ வழியாக;

(2) $5x+3y=1$; $(-3, 6)$ வழியாக;

(3) $ax+by+c=0$; $(-1, -1)$ வழியாக;

(4) $y=mx+c$; (a, b) வழியாக;

(5) $lx+my+n=0$; $\left(\dfrac{1}{l}, \dfrac{1}{m}\right)$ வழியாக.

3. $(3, -1)$ வழியாக, சரிவு 2 உடைய ஒரு கோடு, $(-3, y)$ வழியாகச் செல்கிறது. yன் மதிப் பென்ன?

4. $ax+by=6$ என்ற கோடு, $x-$, $y-$ அச்சுக்களோடு சம சாய்வுடைய தாயிருப்பின், $a=b$ என நிறுவுக.

5. $x=\pm 2$; $y=\pm 5$ என்ற கோடுகளா லமையும் செவ்வகத்தின் பரப்பென்ன?

6. ஒரு நேர்க்கோடு, $x-$, $y-$அச்சுக்களை A, B என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. ABன் மையம் (2, −3) ஆனால், அக் கோட்டின் சமன் பாடு என்ன?

7. மேற்கண்ட கணக்கில் AB என்ற கோட்டில் AP : PB = 1 : 2 என P இருக்குமானால், Pன் ஆயத்தொலைகள் (2, −3) எனக் கொண்டு அக்கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

8. பின் கூறப் படும் புள்ளித் தொகுப்புக்களால் அமையும் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், மைய வெட்டிகள், இவைகளின் சமன் பாடுகள் காண்க:

(1) (2, 4); (4, 6); (−6, −10);

(2) (2, 4); (−4, 1); (2, −3).

9. இரு அச்சுக்களின் இடைப்பட்ட ஒரு நேர்க்கோட்டின் மையம் (a, b). அக்கோட்டின் சமன்பாடு, $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$ என நிறுவுக.

10. A (−1, −2); B (2, 1); C (3, 4); D (1, 2) என்பவை ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகள். அதன் மூலைக் கோடுகளுக்கு, ஆய ஆதியின் வழியாக அமையும் இணைக்கோடுகள் யாவை?

11. A (2, 2); B (2, 8); C (−6, 2) என்பவை ஒரு முக்கோண உச்சிகள்; D, E, F என்பவை முறையே BC, CA, ABன் மையப் புள்ளிகள். AB, BC, CA, FD, DE, EF இவைகளின் சமன்பாடுகள் கண்டு, BC ∥ DE, CA ∥ EF, AB ∥ FD என நிறுவுக.

12. ஒரு நேர்க்கோடு (10, −6) வழியாகச் செல்கிறது. அது $x-$, $y-$ அச்சுக்களின்மேல் விடும் வெட்டுத் துண்டுகளின் கூட்டுத் தொகை 11. கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. கோட்டின் சமன்பாட்டை $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ என்ற அமைப்பிலிட்டு, p ன் மதிப்பு காண்க.

13. $4x=7y-4$ என்ற கோடு P $(t+1,\ 3t-11)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறதாயின், t ன் மதிப்பென்ன? P ன் ஆயத் தொலைகளென்ன?

14. (2, −5); (−6, 4); (7, 1) என்ற புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணத்தின் மைய வெட்டிகளின் சமன்பாடு காண்க.

3. இரண்டும், அதற்குமேற்பட்ட நேர்க்கோடுகள்

(Two and more Straight limes):

3·1. இரண்டு நேர்க்கோடுகள் சந்திக்குமிடம் :

பொதுவாக, $ax+by+c=0$ என்ற நேர்க்கோடும்
$px+qy+c=0$ என்ற நேர்க்கோடும்

ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அல்லது வெட்டுமென நாம் அறிவோம். (சிறப்பாக, அவ்விரண்டுகோடுகளும் இணைக் கோடுகளாய் இருந்தால் மட்டுமே, அவை இரண்டும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காது. அப்போது இரு கோடுகளின் சரிவும் சமமாயிருக்கும், அதாவது $-\frac{a}{b}$ ம் $-\frac{p}{q}$ ம் சமமாயிருக்கும்)

ஆகவே, இணைக்கோடுகளல்லாத இரு நேர்க்கோடுகள் எடுத்துக் கொள்வோம். அவை சந்திக்கும் இடம் (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், (x_1, y_1) இரு கோடுகளுக்கும் பொது, அதாவது

$$ax_1+by_1+c=0$$
$$px_1+qy_1+r=0$$

என்ற இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் பெறப்படும். அவை களின் தீர்வே, சந்திக்குமிடமாகும். குறுக்குப் பெருக்கல் முறைப்படி,

$$\frac{x_1}{br-cq}=\frac{y_1}{cp-ar}=\frac{1}{aq-bp}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{br - cq}{aq - bp};$$

$y_1 = \dfrac{cp - ar}{aq - bp}$ என்ற ஆயத் தொலைகள் சந்திக்குமிடத்தைக் கொடுக்கும்.

குறிப்பு: $aq - bp = 0$ ஆனால், அதாவது $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ ஆகும் போது, இரு கோடுகளும் இணைக்கோடாய், சந்திக்குமிடம் கந்தழிப் புள்ளி ஆகின்றது.

(எ-கா.) (1) $3x + 2y = 7 \quad (a)$

$x - 7y = -13 \quad (b)$

$(b) \times 3$: $3x - 21y = -39 \quad (c)$

$(a) - (c)$: $23y = 46$

$\therefore \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\}$ வெட்டுமிடம் (1, 2)

(எ-கா.) (2) $x + 2y = 5$; $3x - 2y = 1$ என்ற நேர்க்கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாகவும், $(4, -6)$ வழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோடு காண்க.

$$x + 2y = 5$$

$$3x - 2y = 1$$

கூட்டினல், $4x = 6$

$\therefore \; x = \frac{3}{2}$;

மேலும் $y = \frac{7}{4}$.

இப்போது $(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$; $(4, -6)$ வழியாகச் செல்லும் கோடு என்னவெனக் காணவேண்டும்.

அக்கோடு, $\dfrac{y + 6}{x - 4} = \dfrac{-6 - \frac{7}{4}}{4 - \frac{3}{2}}$ ஆகும்.

சுருக்கினல் $31x + 10y = 64$ என்ற நாம் வேண்டும் நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு பெறப்படும்.

(எ-கா.) (3) $x + y = 7$; $2x - y = 5$; $ax + 2y = 34$ என்ற கோடுகள், ஒரே புள்ளியில் சந்திக்குமாயின் $\underline{a}$ ன் மதிப்பென்ன?

$$x+y=7$$
$$2x-y=5$$

என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x=4$, $y=3$ எனக் கிடைக்கும்.

$ax+2y=34$ என்ற கோடும் (4, 3) வழியாகச் செல்லுமாயின் $4a+6=34$ அல்லது $a=7$ எனப் பெறப்படும்.

3.2. இரு நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் பொது அமைப்பு :

$$a_1 x+b_1 y+c_1=0$$
$$a_2 x+b_2 y+c_2=0$$

என்ற நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் வழியாகச் செல்லும் எந்த நேர்க்கோடும்,

$$a_1 x+b_1 y+c_1+k\ (a_2x+b_2 y+c_2)=0$$

என்ற சமன்பாட்டில் அமையும். k என்பது ஏதாமொரு மாறிலி.

இதை நிறுவுவது பின்வருமாறு :

$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$ என்பதை
$x\ (a_1+ka_2)+y(b_1+kb_2)+(c_1+kc_2)=0$ என்று எழுதினுல் இது

$Ax+By+C=0$ என்ற அமைப்பில் இருக்கிறதென நாம் பார்க்கிரேும். எனவே இது ஒரு நேர்க் கோட்டின் சமன் பாடாம். மேலும் அவ்விரு கோடுகளும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். ஆகவே

$$a_1 x_1+b_1 y_1+c_1=0$$
$$a_2 x_1+b_2 y_1+c_2=0$$

என்ற இரு கட்டுப் பாடுகளும் பொருத்தமாகும். எனவே இப்போது kக்கு எம் மதிப்புக் கொடுத்தாலும் $a_1x_1+b_1y_1+c_1+k\ (a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$ என்ற கட்டுப்பாடும் பொருத்தமாகும்.

ஆகவே $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$ என்ற நேர்க் கோடு (x_1, y_1) வழியாகச் செல்கிறதெனத் தெரிகிறது.

$\therefore \quad a_1x+b_1y+c_1+k \ (a_2x+b_2y+c_2)=0$ என்ற நேர்க்கோடு

$$a_1x+b_1 y+c_1=0$$

$$a_2 x+b_2 y+c_2=0$$

என்ற நேர்க்கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு என நிறுவப் படுகிறது.

முதல் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகள் சந்திக்கும் வழியாக நாம் எத்தனை நேர்க்கோடுகள் வேண்டுமானாலும் வரையலாம். அவைகளில் நாம் குறிப்பிடும் அல்லது விரும்பும் நேர்க்கோட்டுக்குத் தகுந்தபடி kன் மதிப்பை நிர்ணயிக்கலாம்.

இன்னும் விளக்கமாக, ஒரு எடுத்துக்காட்டோடு, kன் பொருளைக் கூறுவோம்.

இப்போது முதல் இரண்டு கோடுகளும் வெட்டும் இடம் ஒன்று இருக்கிறது. அதன் வழியாக, வேறோர் கோடு (m, n) என்ற குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோடு எனக் கொள்வோம். அதாவது,

$a_1m+b_1n+c_1+k(a_2m+b_2n+c_2)=0$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

ஆகவே, $k=\dfrac{(-a_1m+b_1n+c_1)}{(a_2m+b_2n+c_2)}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

எனவே kக்கு இம்மதிப்பு கொடுத்தால்,

$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$ என்ற நேர்க்கோடு, முதலில் குறிப்பிட்ட இரு கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாகவும், $(m_1 \ n)$ வழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோடாகும். பின்னர் செய்யப்பட்டிருக்கும் கணக்குகளிலிருந்து, இந்த முறை மேலும் விளக்கமாகும்.

(எ-கா.) (1) $3x+y=5$; $2x+3y=8$ என்ற கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாகவும், $(-1, 6)$ வழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோடு என்ன?

நாம் வேண்டிய கோட்டின் பொது அமைப்பு,

$3x+y-5+k \ (2x+3y-8)=0.$

இது $(-1, 6)$ வழியாகச் செல்கிறதாதலின்,

$-3+6-5+k \ (-2+18-8)=0$

$\therefore k=\frac{1}{4}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

$\therefore$ நாம் வேண்டும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$3x+y-5+\frac{1}{4}(2x+3y-8)=0$;

அதாவது $14x+7y-28=0$;

அதாவது $2x+y-4=0$ எனவாகும்.

3.2. ல் கூறப்பட்ட முறையை மேற்கொள்ளாது, பின் வரும் முறையிலும் இக்கணக்கைச் செய்யலாம்.

இரு கோடுகளின் வெட்டுமிடம் (1, 2) என நாம் சமன் பாடுகளின் தீர்வு கண்டு அறியலாம். இப்போது நாம் வேண்டும் கோடு,

(1, 2); (−1, 6) வழியாகச் செல்வதாகும். அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{2-6}{1+1}=-2$$

அதாவது $2x+y=4$ என்பதாம்.

(எ-கா.) (2) $3x+4y+6=0$; $x+3y+7=0$ என்ற கோடு களின் சந்திப்பின் வழியாக,

(1) $y=x+5$ என்ற கோட்டிற்கு இணைகோடு யாது?

(2) $x+3y+7=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துக்கோடு என்ன ?

நாம் விரும்பும் கோடுகளின் பொது அமைப்பு,

$3x+4y+6+k(x+3y+7)=0$

இது $y=x+5$ க்கு இணைகோடாக இருக்கவேண்டுமாயின், பொது அமைப்பில் பெற்ற கோட்டின் சரிவு (m), $y=x+5$ ன் சரிவுக்குச் சமமாயிருக்கவேண்டும்.

அதாவது $-\left(\frac{3+k}{4+3k}\right)=1$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$\because -3-k=4+3k$

அதாவது $k=-\frac{7}{4}$.

$\therefore y=x+5$ க்கு இணைக்கோடாக நாம் வேண்டும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$3x+4y+6-\frac{7}{4}(x+3y+7)=0$ ஆகும். அதாவது சுருக்கினல், $y=x-5$ எனப் பெறப்படும்.

(ii) $x+3y+7=0$ என்பதற்குச் செங்குத்தாக வேண்டியிருப்பின், இதன் சரிவும், பொது அமைப்பிலுள்ள கோட்டின் சரிவும் பெருக்கிவரும் தொகை -1 ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $-\left(\frac{3+k}{4+3k}\right)\times-\frac{1}{3}=-1$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

எனவே, $\frac{3+k}{3(4+3k)}=-1$ ஆகவேண்டும்.

அப்போது $3+k=-12-9k$

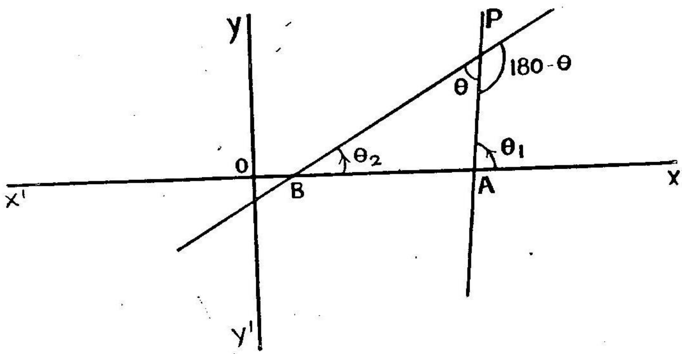
அதாவது $10k=-15$

அதாவது $k=\frac{-3}{2}$

$\therefore$ $x+3y+7=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக நாம் விரும்பும் கோட்டின் சமன்பாடு $3x+4y+6-\frac{3}{2}(x+3y+7)=0$

அதாவது $3x-y=9$ ஆகும்.

3·3. $y=mx+c$; $y=m^1x+c^1$ என்ற கோடுகளுக்கிடைப் பட்ட கோணம் அறிதல் :



படம் 18

PA, PB என்பவை முறையே,
$y=mx+c$;
$y=m^1x+c^1$ எனக் கொள்வோம்.
படத்தில் உள்ளபடி.

$$m=\tan\theta_1$$
$$m^1=\tan\theta_2$$

இவ்விரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் BPA $= \theta_1 - \theta_2$ எனப் படத்தில் அறியலாம்.

$\theta_1 - \theta_2 = \theta$ எனக் கொண்டால்,

$$\tan \theta = \tan (\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{m - m_1}{1 + mm^1}$$ என அறியலாம்.

குறிப்பு : $\frac{m - m^1}{1 + mm^1}$ கூட்டெண் மதிப்புப் பெறின் 0 என்பது இரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தைக் குறிக்கும் ; அது குறையெண் மதிப்புப் பெறின், 0 என்பது இரு கோடுகளுக்கும் இடைப் பட்ட விரி கோணத்தைக் குறிக்கும்.

3.3.1. (i) இரு கோடுகளும் இணை கோடுகளாயின், $m = m^1$; ஏனெனில் $\theta = 0$, ஆகவே, $\tan \theta = 0$.

(ii) இரு கோடுகளும் செங்குத்துக் கோடுகளாயின், $\theta = 90°$; அப்போது $\tan\theta = \tan 90° = \propto$ அதாவது,

$$\frac{m - m^1}{1 + mm^1} = \propto$$

அப்போது $1 + mm^1 = 0$ அல்லது $mm^1 = -1$ என்ற கட்டுப் பாடு பெறப்படும். [2.4 (2) காண்க]. இக்கட்டுப்பாடு கவனத்திலிருக்கவேண்டிய தொன்றாகும்.

3.3.2. முக்கிய பயிற்சி ; $ax + by + c = 0$; $a^1x + b^1y + c^1 = 0$ என்ற கோடுகளுக்கிடைப் பட்ட கோணம் யாது? அவை ஒன்றுக்கொன்று

(1) இணைகோடுகளாயிருப்பின் என்ன நிபந்தனை ?

(2) செங்குத்துக் கோடுகளாயிருப்பின் என்ன நிபந்தனை ?

$ax + by + c = 0$

$a^1x + b^1y + c^1 = 0$ என்ற சமன் பாடுகளை முறையே

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$ எனவும்

$$y = -\frac{a^1}{b^1}x - \frac{c^1}{b^1}$$ எனவும் எழுதலாம்.

இவை $y=mx+c$ என்ற அமைப்பிலுள்ளன.

$$m=-\frac{a}{b}\ ;\ m^1=-\frac{a^1}{b^1}.$$

எனவே, 3.3 படி,

$$\tan\theta=\frac{m-m^1}{1+mm^1}=\frac{-\frac{a}{b}+\frac{a^1}{b^1}}{1+\frac{aa^1}{bb^1}}$$

$$=\frac{a^1b-ab^1}{aa^1+bb^1}$$

(1) மேலும் இவை இணைக்கோடுகளாயிருப்பின்

$$\theta=0\ ;\ \text{ஆகவே}\ \tan\theta=0=\frac{a^1b-ab^1}{aa^1-bb^1}$$

$\therefore\quad a^1b-ab^1=0$ ஆக வேண்டும்.

அதாவது $\frac{a}{a^1}=\frac{b}{b^1}$ என்ற நிபந்தனை பெறப்படும்.

அதாவது இரு கோடுகள் இணைக்கோடுகளாயிருப்பின், அவைகளுக்குரிய சமன்பாடுகளில்,

xன் கெழுக்களின் விகிதம் $=$ yன் கெழுக்களின் விகிதமாக அமையும். இதுவே இணைக்கோடுகளைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகளின் உள்ள கெழுக்களை யொட்டிய நிபந்தனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$ax+by+c=0$ என்ற கோடும்

$kax+kby+c^1=0$ என்ற கோடும்

இணைக்கோடுகளாம்.

(2) மற்றும், இவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாயின், $\theta=90°$

$$\therefore\ \tan\theta=\tan 90°=\infty=\frac{a^1b-ab^1}{aa^1+bb^1}\ \text{ஆகும்.}$$

அப்போது $aa^1+bb^1=0$ என்ற நிபந்தனை பெறப்படும்.

அதாவது, xன் கெழுக்களின் பெருக்குத் தொகையும், yன் கெழுக்களின் பெருக்குத் தொகையும் சேர்ந்த கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகுமெனவறிக.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$ax+by+c=0 \text{ என்ற கோடும்}$$

$$bx-ay+c^1=0 \text{ என்ற கோடும்}$$

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துக் கோடுகளாம்.

அவ்வாறே, $ax+by+c=0$ ம்

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+c^1=0 \text{ ம்}$$

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துக் கோடுகளாம்.

இவ்வெடுத்துக் காட்டுகளால் அறியப்படும் முறைகளை, நடைமுறையில், நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள மற்றோர் கோடு காணப் பயன்படுத்தலாம்.

சில பயிற்சி எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $3x+4y+k=0 \parallel 3x+4y+k^1=0$

(ii) $3x+4y+k=0 \perp 4x-3y+k^1=0$

(iii) $3x+4y+k=0 \perp \frac{x}{3}-\frac{y}{4}+k^{11}=0$

மேலே கூறப்பட்டவை பொது அமைப்பைக் குறிப்பன.

(iv) சிறப்பாக, $13x+6y=3$ என்ற கோட்டிற்கு இணைக் கோடாக, $(1,-3)$ வழியாகச் செல்லும் கோடு என்ன?

இணைக் கோட்டின் பொது அமைப்பு $13x+by=k$ ஆகும்.

இது $(1,-3)$ வழியாகச் செல்லுமாயின் $13-18=k$ அல்லது $k=-5$.

எனவே, நாம் வேண்டும்கோடு $13x+6y=-5$.

(v) $13x+6y=3$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக, $(1,-3)$ வழியாகச் செல்லும் கோடு என்ன?

செங்குத்துக் கோட்டின் பொது அமைப்பு $6x-13y=k$ ஆகும்.

இது $(1,-3)$ வழியாகச் செல்லுமாயின் $7+39=k$ அல்லது $k=45$

என்வே நாம் வேண்டும் கோடு $6x-13y=45$.

(vi) $7x+y=10$; $x-2y+5=0$; $x+y+2=0$ என்ற கோடுகளா லமையும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் யாது?

ABC என முக்கோணம் கொள்வோம்.

BC ன் சமன்பாடு $7x+y=10$ எனவும்,

CA ன் சமன்பாடு $x-2y+5=0$ எனவும்,

AB ன் சமன்பாடு $x+y+2=0$ எனவும் கொள்வோம்.

முறையே, A, B, Cலிருந்து. BC, CA, ABக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகள் AD, BE, CF எனக்கொள்வோம். அவை சந்திக்குமிடம் O, என்ற செங்கோட்டு மையம் எனக் கொள்வோம்.

CA, AB சந்திக்கும் வழியாகச் செல்லும் எந்தக் கோடாயினும் சரி, அதன் அமைப்பு,

3.2 படி $x-2y+5+k_1(x+y+2)=0$

இக்கோடு, மேலும் BCக்குச் செங்குத்தாயிருப்பின், அது Aலிருந்து BCக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் AD என்ற செங்கோடாகும்.

இப்போது,

$x-2y+5+k_1(x+y+2)=0$ என்ற கோட்டை,

$x(1+k_1)+y(k_1-2)+(2k_1+5)=0$ என எழுதலாம்.

இது $7x+y=10$க்குச் செங்குத்தாயின், $7(1+k_1)+1(k_1-2)=0$ என்ற நிபந்தனை உண்டு.

$\therefore\ 8k_1=-5$ அல்லது $k_1=-\frac{5}{8}$

எனவே சமன்பாடு,

$$x-2y+5-\frac{5}{8}(x+y+2)=0$$

அதாவது $3x-21y+30=0$

இவ்வாறே, BE, CF என்ற செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளும் அறிய வேண்டும்.

BEன் சமன்பாடு, பின்வருமாறு:

$7x+y-10+k_2(x+y+2)=0$ என்ற கோடும் $x-2y+5=0$ என்ற கோடும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்க வேண்டும்.

∴ அதாவது $(7+k_2)\,1+(1+k_2)\,(-2)=0$ என்பது நிபந்தனை யாகும்.

அதாவது $-k_2+5=0$

அல்லது $k_2=5$

∵ BEன் சமன்பாடு

$7x+y-10+5\,(x+y+2)=0$ ஆகும்.

அதாவது $12x+6y=0$

அதாவது $2x+y=0$.

எனவே, AD ன் சமன்பாடு, $3x-21y+30=0$

BE ன் சமன்பாடு, $2x+y=0$

இவைகள் சந்திக்குமிடம், இவைகளை ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு தீர்வு காண, செங்கோட்டு மையம் கிடைக்கும்.

$$3x-21y+30=0 \quad (a)$$

$$2x+y=0 \quad (b)$$

$$\therefore\ y=-2x$$

(a) ல் ஈடுசெய்ய $3x+42x+30=0$

$$\therefore\ 45x=-30$$

$$x=-\tfrac{30}{45}=-\tfrac{2}{3}$$

$$y=-2x=\tfrac{4}{3}$$

∴ $(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3})$ செங்கோட்டு மையமாகும்.

இதைச் சரிபார்க்க, CF ன் சமன்பாட்டையும் காண்போம்: பின்வருமாறு :

$7x+y-10+k_3\,(x-2y+5)=0$ ம்

$x+y+2=0$ ம் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $(7+k_3)\,1+(1-2k_3)\,1=0$

∴ $-k_3+8=0$

அல்லது $k_3=8$

∴ CFன் சமன்பாடு,

$7x+y-10+8\,(x-2y+5)=0$ ஆகும்.

அதாவது $15x-15y+30=0$

இது $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ வழியாகச் செல்லுகிறதா என்று சரிபார்த்தால், செங்கோட்டு மையம் சரியென அறியலாம்.

$15x-15y+30=15(-\frac{2}{3})-15(\frac{4}{3})+30=0$ என வெளிப்படை.

$\therefore$ செங்கோட்டு மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$,

பாடச் சுருக்கம் (3)

1. $y=mx+c$; $y=m^1x+c^1$ என்பவை இரு நேர்க்கோடுகள்:

(i) இவைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ:

$$\tan\theta = \frac{m \sim m^1}{1+mm^1}.$$

(ii) இவை இணைக் கோடுகளாயின்,

$$m=m^1.$$

(iii) இவை செங்குத்துக் கோடுகளாயின்,

$$mm^1+1=0$$

அல்லது $mm^1=-1$

அல்லது $m^1=-\dfrac{1}{m}$.

2. $L_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$;

$L_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$; என்பவை இரு நேர்க்கோடுகள்.

(i) இவை வெட்டுமிடம்: $\left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a^1b_2-a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

(ii) இடைப்பட்ட கோணம் θ:

$$\tan\theta = \frac{a_1b_2 \sim a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$$

(iii) இவை இணைக்கோடுகளாயின்,

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

(iv) இவை செங்குத்துக் கோடுகளாயின்,

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

(v) வெட்டுப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடும்,

$L_1+K\,L_2=0$ (K ஏதாமொரு மாறிலி)

பயிற்சி 3

1. பின்வரும் கோடுகள் எங்கு சந்திக்கின்றனவென அறிக.

(1) $x+y+2=0$; $2x-y+1=0$

(2) $3x-5y+1=0$; $2x-y=4$

(3) $x+y+5=0$; $3x-y=9$

(4) $ax+by=0$; $ax-by=c$

(5) $y=mx+c$; $y+m^1x+c$

2. பின்வரும் கோடுகளுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகளாகக் குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க:

(1) $4x-3y=6$; (5. 0) வழியாக;

(2) $5x+8y=1$; $(0,-3)$ வழியாக;

(3) $ax+by=c$; $(-1,-1)$ வழியாக;

(4) $ax-by=c$; $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ வழியாக;

(5) $lx+my+n=0$; (a, b) வழியாக;

(6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $(0, 0)$ வழியாக;

(7) $x \operatorname{Cos}\alpha+y \operatorname{Sin}\alpha=p$; $(a \operatorname{Sin}\alpha, -a \operatorname{Cos}\alpha)$ வழியாக.

3. $x+2y+5=0$; $x-y+7=0$ என்ற கோடுகளின் சந்திப்பின் வழியாக, (1) முதல் கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க;

(2) $5x+2y=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடும், இணைக்கோடும் காண்க.

4. $y+1=0$; $y+3=0$; $x+2y+1=0$; $x=2y+4=0$ என்ற கோடுகளால் அமையும் வடிவம் ஒரு இணைக்கரமென நிறுவுக. அவ்விணைக் கரத்தின் மூலைக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

5. $x+3y=6$; $x+3y=10$; $3x-y=8$; $3x-y=20$ என்ற கோடுகளாலமையும் வடிவம் ஒரு செவ்வகமென நிறுவுக.

அதன் மூலைக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமவெட்டிக ளெனவும் நிறுவுக. வெட்டுமிடம் யாது?

6. $2x-3y=7$; $3x+4y=53$; $2x+y=27$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன வென நிறுவுக. சந்தி யாது?

7. $2x-y=6$; $5x-8y=4$; $ax-2y=8$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமானால், aன் மதிப்பென்ன?

8. $\frac{ax}{2}+y+c=0$; $ax+by=11$; $ax-2by=20$ என்ற கோடுகள் $(7, -1)$ வழியாகச் செல்லுகின்றன. a, b, cன் மதிப்பு காண்க.

9. $x+2y=0$; $3x-y=0$ என்ற கோடுகளின் இடைப் பட்ட குறுங்கோணம் என்ன? விரிகோணம் என்ன?

10. $2x-y=0$ என்ற கோட்டிற்கு $45°$ சாய்வுடன் ஆய ஆதி யின் வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

11. $3x-y=0$ என்ற கோட்டிற்கு $45°$ சாய்வுடன் $(4, 3)$ வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

12. $y=mx$ என்ற கோட்டிற்கு $45°$ சாய்வுள்ள கோட்டின் சரி வென்ன?

13. $(3, 1)$; $(5, 1)$; $(7, 3)$; என்ற புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணத்தின் செங்கோடுகளின் சமன் பாடுகள் காண்க.

14. $3x+2y=7$ என்ற கோட்டிற்கு $(0, 0)$ வழியாகச் செல் லும் செங்குத்துக் கோடு காண்க. இக்கோடு $3x+2y=7$ என்ற கோட்டை எங்கு சந்திக்கிறதெனக் கண்டு, அதன் மூலம் $(0, 0)$ விலிருந்து $3x+2y=7$ என்ற கோட்டிற்கு வரையப் படும் செங் குத்துக் கோட்டின் நீளம் அறிக. $3x+2y=7$ என்ற கோட்டை $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற அமைப்பிலிட்டுச் சரி பார்க்க.

15. $(3, 1)$; $(6, 10)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட் டின் மேல் P, Q என்ற புள்ளிகள் அப்புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட நீளத்தை மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. P, Q வழி யாக அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடுகளின் சமன் பாடு கள் காண்க. $(7, 8)$ வழியாக, முதற் கோட்டிற்கு இணைக் கோட்டின் சமன் பாடு காண்க. இந்த அமைப்பில் ஏற்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பு காண்க.

16. AB என்ற கோட்டின் மையச் செங்குத்து வெட்டியின் சமன்பாடு $x+3y-31=0$. Aன் ஆயத் தொலைகள் (6, 5) ஆனல், Bன் ஆயத் தொலைகளென்ன ?

17. ஒரு சதுரத்தின் இரு எதிர் உச்சிகள் (1, 5) ; (3, −3) ; மற்றிரண்டு உச்சிகளின் ஆயத் தொலைகளையும், சதுரப் பக்கங் களின் சமன் பாடுகளையும் காண்க. சதுரத்தின் பக்க நீள மென்ன ?

18. (3, 4) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு, ஆய ஆதி யிலிருந்து 5 அலகுகள் தூரத்தில் உள்ளது. அதன் சமன் பாடியாது ?

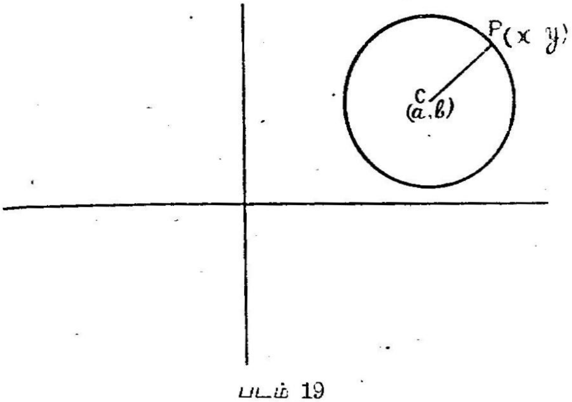
4. வட்டம்

(The Circle):

4.1. வட்டம்: ஒரு நியமப் பாதை:

பகுதி 1, பத்தி 1.6 (1)ல் ஒரு வட்டம் வரையறுக்கப் பட்டது. அதன்படி, ஒரு புள்ளி, மற்றொரு குறிப்பிட்ட நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்கும்படி இயங்கு மாயின் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும். நிலைத்த புள்ளி அவ்வட்டத்தின் மையம்; குறிப்பிட்ட தூரம், அவ்வட்டத்தின் ஆரம்.

4.2. (a, b) மையமாகவும், r ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு:



படம் 19

படம் 19 ல் உள்ள வட்டத்தில்,

r ஆரம்; C (a, b) மையம். P (x, y) அவ்வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளி யெனக் கொள்வோம்.

P (x, y) அவ்வட்டத்தின்மேல் எங்கிருப்பினும்

$$r^2 = \mathrm{C\,P}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

கிளைத் தேற்றம் : (a, b) ஆய ஆதியோடு ஒன்றுமாயின் இச்சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$, அதாவது, ஆய ஆதி மையமாகப் பெற்ற $\underline{r}$ என்ற ஆரமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 = r^2$ ஆகும்.

4.3. பொதுவாக, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டை,

$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்கு வழியை நாம் ஆராயும் போது,

இது, $(-g, -f)$ என்ற நிலைத்த புள்ளிக்கும், (x, y) என்ற ஒரு இயங்கு புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் எப்போதும் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ என்ற நிலைத்த மதிப்புடையதாயிருக்கிறதெனத் தெரிகிறது.

எனவே, இது $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ என்ற ஆரமுடைய ஒரு வட்டமென அறிகிறோம்.

குறிப்பு: (i) $g^2 + f^2 - c$ ஒரு கூட்டெண்ணுயின், வட்டம் ஒரு உண்மையான வட்டமாயிருக்கும். (Real Circle). அதன் மையம் $(-g, -f)$; ஆரம் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

(ii) $g^2 + f^2 - c$ பூச்சியமானால் வட்டம் ஒரு புள்ளி வட்டமெனப்படும் (Point Circle); ஏனெனில் அதன் ஆரம் 0, ஆனால் மையம் $(-g, -f)$ தான். எனவே, $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியே புள்ளி வட்டமாகும்.

(iii) $g^2 + f^2 - c$ ஒரு குறையெண்ணுயின் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ஒரு கற்பனையெண்ணுகும். ஆகவே, அப்போது, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது ஒரு கற்பனை வட்டமெனக் கொள்ளப்படும் (Imaginary Circle). ஆனால் அதன் மையம் $(-g, -f)$ எனவே கொள்ளப்படும்.

4.3·1. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இருபடிப் பொதுக்கோவைச் சமன்பாட்டை நாம் கவனிப்போம்.

இங்கு $a=b$ எனவும், $h=0$ எனவும் கொண்டால் அது ஒரு வட்டமாகும். ஏனெனில் அப்போது இச்சமன்பாடு,

$ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ எனவாகும். இருபக்கங்களையும் a ஆல் வகுத்தால்,

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$ கிடைக்கப்பெறும்.

இது ஒரு வட்டத்திற்குரிய சமன்பாட்டமைப்பில் உள்ளது. எனவே இது ஒரு வட்டம்.

இதன் மையம் $\left(-\frac{g}{a},\ -\frac{f}{a}\right)$; ஆரம் $=\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}$

எனவே, பொதுவாக நோக்குமிடத்து, ஒரு வட்டத்திற்குரிய சமன்பாட்டில் x-ன் கெழுவும், y-ன் கெழுவும் சமம், xy ன் கெழு பூச்சியம். இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்ட x, y ஆல் பெறப்படும் இருபடிக் கோவையொன்று பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்திற்குரிய சமன்பாடாகும்.

பின் கூறப்பட்டவை யாவும் வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

(1) $x^2+y^2+4x+6y+1=0$

(2) $3x^2+3y^2+14x-7y+2=0$

(3) $mx^2+my^2+px+qy+r=0$

இவைகளின் மையங்கள், ஆரங்கள் பின்கண்டவாறு :

வட்டம்	மையம்	ஆரம்
(1)	$(-2,-3)$	$2\sqrt{3}$
(2)	$(-\frac{7}{3},\ \frac{7}{6})$	$\frac{\sqrt{221}}{6}$
(2)	$\left(-\frac{p}{2m},\ -\frac{q}{2m}\right)$	$\sqrt{\frac{p^2}{4m^2}+\frac{q^2}{4m^2}-\frac{r}{m}}$

4.3·2. பொதுவாக, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன் பாடு, ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறதென்று கொண்டு மேலும் அவ் வட்டத்தின் சிறப்புப் பண்புகளை ஆராய்வோம்.

(1) $g=0$; $f=0$; $c=0$ ஆனல் $x^2+y^2=0$ என்பது ஆய ஆதியான புள்ளி வட்டத்தைக் குறிக்கும். (The origin as point circle).

(2) $g=0$; $f=0$; $c\neq 0$ ஆனல் $x^2+y^2=-c$ எனப் பெறப் படும். அப்போது, c குறையெண் மதிப்புடையதாயின் ஆய ஆதியை மையமாகக் கொண்டு $\sqrt{-c}$ [c குறையெண்; எனவே $-c$ கூட்டெண்] ஆரமாகக் கொண்ட வட்டம் கிடைக் கும்; c கூட்டெண் மதிப்புடையதாயின் $\sqrt{-3}$ ஒரு கற்பனை எண்; அப்போது வட்டம் இல்லை. கற்பனை வட்டமே.

(3) $c=0$ ஆனல் $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ கிடைக்கப் பெறு கிறது. இது $(0, 0)$ வழியாக, அதாவது ஆய ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம். மையம் $(-g, -f)$; ஆரம் $=\sqrt{g^2+f^2}$

(4) $g=0$; $f\neq 0$; $c\neq 0$ ஆனல் $x^2+y^2+2fy+c=0$ கிடைக்கப் பெறும். வட்டத்தின் மையம் $(0, -f)$; ஆரம் $=\sqrt{f^2-c}$; அதாவது மையம் y- அச்சின் மேலிருக்கும்.

(5) $f=0$; $g\neq 0$; $c\neq 0$ ஆனல் $x^2+y^2+2gx+c=0$ கிடைக் கப்பெறும். வட்டத்தின் மையம் $(-g, 0)$; ஆரம் $=\sqrt{g^2-c}$; அதாவது மையம் x - அச்சின் மேலிருக்கும்.

4.3.3. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன்பாட்டில், g, f, c என்ற மூன்று சார்பற்ற எண்கள் உள்ளன. ஆகவே, ஒரு வட்டம், மூன்று சார்பற்ற, அதாவது ஒன்றுக்கொன்று தொடர் பில்லாத (independent) வடிவக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்படும் தன்மை யுடைத்தாகும்.

மேலும் விளக்கமாகக் கூறுமிடத்து,

(i) ஏதாவது மூன்று புள்ளிகள் வழியாக ஒரே ஒரு வட்டம்தான் செல்ல முடியும்; அல்லது

(ii) ஏதாவது மூன்று கோடுகளைத் தொடும் முறையில் ஓரே ஒரு வட்டம்தான் செல்ல முடியும் : அல்லது

(iii) ஏதாவது இரண்டு கோடுகளைத் தொட்டு, ஏதாவது ஒருபுள்ளி வழியாக ஒரே ஒருவட்டம் தான் செல்ல முடியும்: அல்லது

(iv) ஏதாவது, ஒரு கோட்டைத் தொட்டு, ஏதாவது இரண்டு புள்ளிகள் வழியாக ஒரே ஒரு வட்டம் தான் செல்ல முடியும்.

இவைதான் வடிவக் கட்டுப் பாடுகள் எனப்படும்.

[குறிப்பு: ஏதாவது நான்கு புள்ளிகள் வழியாக, நாம் ஒரு வட்டம் வரைய இயலாது; அப்படி ஒரு வட்டம் நான்கு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்ல வேண்டுமாயின், அப் புள்ளிகள் ஒரு கட்டுப்பாட்டுக்கு அடங்க வேண்டுமென்று நாம் அறிவோம். அக்கட்டுப்பாடு என்னவெனில்: அந்நான்கு புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தில் எதிர் எதிர்கோணங்கள், நிமிர்க் கோணங்களாய் (Supplementary angles) இருக்க வேண்டியது இன்றியமையாதது.]

4.3·4. ஏதானும் மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு :

(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் யாது?

அவ்வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்வோம், அம் மூன்று புள்ளிகளும் இவ்வட்டத்தின் மேல் இருப்பதானல்.

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$
$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$$
$$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0$$

என்ற மூன்று ஒருங்கமைச் சமன் பாடுகள் கிடைக்கும். இவைகளைக் கொண்டு, g, f, c என்ற மூன்றின் மதிப்புக்களை அறியலாம். உடனே சமன்பாட்டில், இம் மதிப்புக்களை ஈடு செய்ய. சமன் பாடு கிடைக்கும்.

(எ-கா.): $(-2, 3)$; $(2, -1)$; $(4, 0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க. முன் கண்டபடி,

$$4+9-4g+6f+c=0$$
$$4+1+4g-2f+c=0$$
$$16+0+8g+c=0$$

இவைகளின் தீர்வு காண்க.

$g = -\frac{3}{2}$; $f = -\frac{5}{2}$; $c = -4$ எனப்பெறப்படும். எனவே அம் மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y - 4 = 0.$$

குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் இச் சமன் பாட்டைச் சரிப்படுத்து கின்றனவா, என்று சரிபார்த்துக்கொள்ளவும்.

இதன் மையம் $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 4}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(எ–கா.) (1) (0,0) மையங்கொண்டு, 4 அலகுகள் ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

சமன்பாடு: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16$

அதாவது $x^2 + y^2 = 16$

(எ–கா.) (2) $(-2, 3)$ மையங்கொண்டு, $5\frac{1}{2}$ அலகுகள் ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

சமன்பாடு: $(x+2)^2 + (y-3)^2 - (5\frac{1}{2})^2 = \frac{121}{4}$

அதாவது $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y - 69 = 0.$

(எ–கா.) (3) (0,0) மையங்கொண்டு, (5, 12) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(5, 12) வழியாகச் செல்வதாலும், (0, 0) மையமாக விருப்பதாலும், வட்டத்தின் ஆரம் இவ்விரண்டு புள்ளிகளுக்கு மிடைப்பட்ட தூரம். அதாவது, ஆரம் $= \sqrt{(5-0)^2 + (12-0)^2}$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

∴ சமன்பாடு: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 13^2$

அதாவது $x^2 + y^2 = 169.$

(எ-கா.) (4): $(-2, -7)$ மையங்கொண்டு $(7, 5)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(எ-கா. 3)ல் கூறியபடி, $(-2, -7)$; $(7, 5)$ என்ற புள்ளிகளினிடைப்பட்ட தூரம் ஆரமாகும்.

$$\therefore \text{ ஆரம் } = \sqrt{(7+2)^2+(5+7)^2}$$

$$= \sqrt{225}$$

$$= 15$$

$\therefore$ சமன்பாடு: $(x+2)^2+(y+7)^2=15^2$

அதாவது $x^2+y^2+4x+14y-172=0$

(எ-கா.) (5) $x^2+y^2-8x+12y-5=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

இச் சமன்பாட்டை,

$(x-4)^2+(y+6)^2=57$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ எனற சமன்பாடு (a, b) மையங்கொண்டு r ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்குமென நாமறிவோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் $(4, -6)$; ஆரம் $=\sqrt{57}$.

இதை மற்ருேர் முறையிலும் செய்யலாம் :

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது ஒரு வட்ட மெனவும், $(-g, -f)$ அதன் மையமெனவும், $\sqrt{g^2+f^2-c}$ அதன் ஆரமெனவும் நாம் அறிவோம். கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தோடு ஒப்பிடும்போது, $2g=-8$; $2f=12$; $c=-5$;

$\therefore$ வட்ட மையம் $(-g, -f)$ க்குச் சமமான $(4, -6)$

$$\text{வட்ட ஆரம்} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

$$= \sqrt{4^2+(-6)^2+5} = \sqrt{57}.$$

அதாவது ஒரு வட்டத்தின் மையம் காண அதற்குரிய சமன்பாட்டை, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என அமைத்துக் கொள்வோமானல்,

$$\text{வட்ட மையத்தின் } x \text{ - ஆயத்தொலை} = \frac{-x \text{ ன் கெழு}}{2}$$

$$\text{வட்ட மையத்தின் } y \text{ - ஆயத்தொலை} = \frac{-y \text{ ன் கெழு}}{2}$$

ஆரம் $=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ஆகும்.

(எ-கா.) (6) $4x^2+4y^2-20x+18y-9=0$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம், மையம் காண்க.

முதலில் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை, இருபக்கங்களையும் 4ஆல் வகுத்து,

$x^2+y^2-5x+\frac{9}{2}y-\frac{9}{4}=0$ என்ற அமைப்பில் எழுதிக்கொள்க. (அதாவது x^2ன் கெழுவும், y^2ன் கெழுவும் 1ஆக உள்ள அமைப்பு)

$2g=-5;\quad 2f=\frac{9}{2};\quad c=-\frac{9}{4}$

$\therefore\ g=-\frac{5}{2};\quad f=\frac{9}{4}$

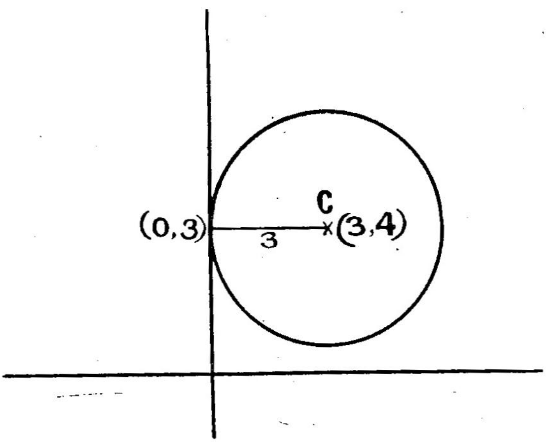
$\therefore$ வட்டமையம் $(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$ [அதாவது $(-g,-f)$]

ஆரம் $=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{4}}$

$=\sqrt{\frac{217}{16}}=\frac{\sqrt{217}}{4}$

(எ-கா.) (7): (3, 4) மையங்கொண்டு, (i) y-அச்சைத் தொடும் வட்டம் யாது? (ii) x-அச்சைத் தொடும் வட்டம் யாது?

y-அச்சைத் தொடுவதாயின், y-அச்சு அவ்வட்டத்தின் தொடுவரையாகும். மேலும், ஒரு தொடுவரையும், அத்தொடு வரை தொடும் இடத்தின் வழியான ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையென நாம் அறிவோம்.



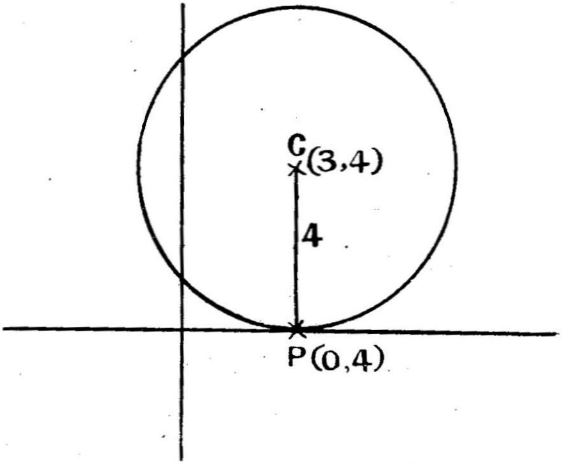
படம் 20

படம் 20ஐப் பார்த்தால், அவ்வட்டத்தின் ஆரம் 3 என விளங்கும்.

எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-3)^2+(y-4)^2=9$$

அதாவது $x^2+y^2-6x-8y+16=0$.



படம் 21

படம் 21ஐப் பார்த்தால், x – அச்சைத்தொடும் வட்டத்தின் ஆரம் 4 என விளங்கும்.

எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-3)^2+(y-4)^2=16$$

அதாவது $x^2+y^2-6x-8y+9=0$.

(எ.கா) (8): (0, 5) மையங்கொண்டு, x – அச்சைத்தொடும் வட்டம் யாது? அவ்வாறே (6, 0) மையங்கொண்டு, y – அச்சைத்தொடும் வட்டம் யாது?

முதல் வட்டத்தின் ஆரம் 5.

ஆகவே அதன் சமன் பாடு,

$$(x-0)^2+(y-5)^2=25$$

அதாவது $x^2+y^2-10y=0$

இரண்டாவது வட்டத்தின் ஆரம் 6.

ஆகவே அதன் சமன் பாடு,

$$(x-6)^2+(y-0)^2=36$$

அதாவது $x^2+y^2-12x=0$.

(எ-கா.) (9): x – அச்சின்மேல் மையங்கொண்டு, $(3, 1)$; $(-15, -1)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3.3·2. (5)ன் படி, அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2+y^2+2gx+c=0$ என்ற அமைப்பி லிருக்கும்.

$(3, 1)$; $(-15, -1)$ வழியாக அவ்வட்டம் செல்வதால்,

$$9+1+6g+c=0$$

$225+1-30g+c=0$ என்பவை ஏற்புடைத்தாகும்.

இவைகளிலிருந்து, g, c காணவேண்டும்.

ஒன்றிலொன்றைக் கழிக்க $-216+36g=0$

$$\therefore\ g=6$$

$$c=-46$$

எனவே அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+12x-46=0.$$

மையம் $(-6, 0)$; ஆரம் $=\sqrt{36+46}=\sqrt{82}$

இதை மற்றோர் முறையிலும் காணலாம்.

மையம் $(a, 0)$ எனக்கொள்க.

$(3, 1)$ வழியாக உள்ள ஆர நீளம் $=\sqrt{(a-3)^2+(1-0)^2}$

$$=\sqrt{a^2-6a+10}$$

$(-15, -1)$ வழியாக உள்ள ஆர நீளம் $=\sqrt{(a+15)^2+(1-0)^2}$

$$=\sqrt{a^2+30a+226}$$

ஆரங்கள் சம மாதலின்

$$a^2-6a+10=a^2+30a+226$$

அதாவது $-36a=216$

அல்லது $a=-6$

எனவே, மையம் $(-6, 0)$

ஆரம் $=\sqrt{a^2-6a+10}$ அல்லது $\sqrt{a^2+30a+226}$

$=\sqrt{36+36+10}$ அல்லது $\sqrt{36-180+226}$

$=\sqrt{82}$.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x+6)^2+(y-0)^2=82$$

அதாவது $x^2+y^2+12x-46=0$.

ஆனல் முதலில் கூறப்பட்ட முறையைக் கொள்வதே பழக்கமாம்.

(எ–கா.) (10) (0. 0); (2, 1); (3, –5) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

ஆய ஆதி வழியாகச் செல்வதால், வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும் [4·3.2(3)].

(2, 1); (3, –5) வழியாகச் செல்வதால்,

$$4+1+4g+2f=0$$

$$9+25+6g-10f=0$$

என்ற சமன்பாடுகளினின்று, g, f மதிப்பையறிய வேண்டும்.

$$4g+2f=-5$$

$$6g-10f=-34$$

இவைகளினின்று, $g=-\frac{59}{26}$

$$f=\frac{53}{26}$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2-\frac{59}{13}x+\frac{53}{26}y=0$$

அதாவது $13x^2+13y^2-59x+53y=0$

(எ-கா.) (11). $x+y=6$; $2x-3y=2$ என்ற கோடுகளை விட்டமாகக் கொண்டு, ஆரம் 6 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

இரண்டு விட்டங்களும் வெட்டுமிடம் மையம். எனவே,
$x+y=6$

$2x-3y=2$ என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், மையத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் கொடுக்கும்.

$x=4$; $y=2$ எனப் பெறப்படும் மையம் (4, 2) கொண்டு, ஆரம் 6 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-4)^2+(y-2)^2=36$$

அதாவது $x^2+y^2-8x-4y-16=0$.

(எ-கா.) (12) $3x+4y=7$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் மையங்கொண்டு, (0, 4); (4, 2) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் யாது?

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடு எனக் கொள்வோம்.

மையம் $(-g, -f)$, $3x+4y=7$ என்ற நேர்க்கோட்டிலிருக்கிறதாகையால் $-3g-4f = 7$.

மேலும், வட்டம் (0, 4) ; (4, 2) வழியாகச் செல்வதால்,

$$0+16+0.g+8f+c=0$$

$$16+4+8g+4f+c=0$$

என்பவை ஏற்புடைத்தாம்.

ஆக, g, f, c அறிய மூன்று ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் பெறுகிறோம்.

$$-3g-4f = 7$$

$$8f+c = -16$$

$$8g+4f+c = -20$$

இவைகளைக்கொண்டு, g, f, c அறிக. $g=-1$; $f=-1$; $c=-8$ எனப்பெறப்படும். ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2-2x-2y-8=0$$

மையம் (1, 1) ; ஆரம் $=\sqrt{10}$

(எ-கா.) (13) : x - அச்சுக்கு 45° சாய்வுடன், $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ என்ற வட்டத்திலுள்ள விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

மையம் (2, 1)

இதன் வழியாக எல்லா விட்டங்களும் செல்கின்றன. இவற்றில் x - அச்சுக்கு 45° சாய்வுடன் கூடிய விட்டத்தின் சமன்பாடு அறியவேண்டும்.

45° சாய்வெனின், $m=1$

∴ அவ்விட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(y-1)=1(x-2)$$

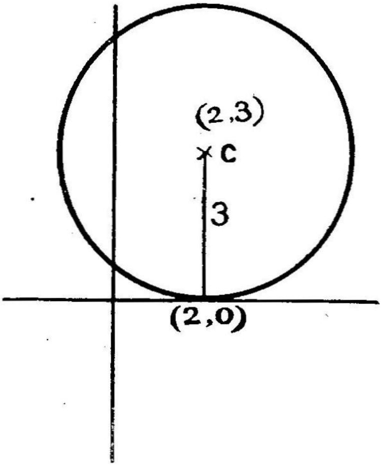
அல்லது $x-y=1$

(எ-கா.) (14): 3 அலகுகள் ஆரங்கொண்டு x - அச்சை (2, 0) என்ற புள்ளியில் தொடும் வட்டம் என்ன ?

படத்தில் காண, மையம் (2. 3) என்ற இடத்தில் உள்ளது. ஆகவே, வட்டமாவது

$$(x-2)^2+(y-3)^2=9$$

அதாவது $x^2+y^2-4x-6y+4=0$

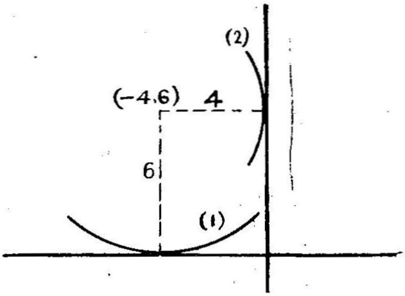


படம். 22.

(எ-கா.) (15): $x^2+y^2+8x-12y+3=0$ என்ற வட்டத்தோடு 'ஒரு' மையங்கொண்டு,

(1) x - அச்சைத்தொடும் வட்டம் யாது?

(2) y - அச்சைத்தொடும் வட்டம் யாது?



படம். 23.

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் (−4, 6)

படம் 23: (1) x - அச்சைத்தொடும் வட்டம்: அதன் ஆரம் 6 என விளங்கும்.

ஆகவே, x - அச்சைத்தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x+4)^2+(y-6)^2=36$$

அதாவது $x^2+y^2+8x-12y+16=0$.

படம் 23 : (2) y – அச்சைத்தொடும் வட்டம்: அதன் ஆரம் 4 என விளங்கும்.

ஆகவே, y – அச்சைத்தொடும் வட்டத்தின் சமன் பாடு,

$$(x+4)^2+(y-6)^2=16$$

அதாவது $x^2+y^2+8x-12y+36=0$.

பயிற்சி 4 (1)

1. கீழ்க் கண்ட புள்ளிகளை மையங்கொண்டு, குறிப்பிட்ட ஆரங்கள் உடைய வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் காண்க.

வட்டமையம்	ஆரம்
(1) (0, 0)	3
(2) (1, – 1)	2
(3) (2, 3)	1
(4) (– 6, 1)	2
(5) $(-a, -b)$	r
(6) (5, 0)	3
(7) (0, – 2)	5

2. கீழே சில வட்டங்களின் மையங்களும், அவ்வவ்வட்டங்களின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் காண்க.

மையம்	வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி
(1) (0, 0)	(3, 4)
(2) (1, 1)	(4, 5)
(3) (2, −1)	(1, −2)
(4) (a, b)	(m, n)

3. (2, 3) மையங்கொண்டு ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

4. $x^2+y^2+12x-6y+20=0$ என்ற வட்டத்தோடு 'ஒரு' மைய வட்டமாக வமைந்து (−2,3) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் யாது?

5. ஒரு வட்டத்தில் $x+y=4$; $2x-y=5$ என்பவை இரண்டு விட்டங்கள். விட்ட நீளம் 10. அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

6. ஒரு வட்டம் (5, −2) வழியாகச் செல்கிறது. அதில் இரு விட்டங்கள் $2x+y=3$; $y-3x+2=0$. அவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. கீழ்க்கண்ட வட்டங்களின், மையங்கள், ஆரங்கள் கண்டுபிடிக்க:

(1) $x^2+y^2-14x+6y+1=0.$

(2) $x^2+y^2+4x-2y+1=0.$

(3) $x^2+y^2+2px-2qy=0.$

(4) $2x^2+2y^2+6x-3y+1=0$

(5) $x^2+y^2+6x+1=0$

(6) $x^2+y^2-4y+2=0$

(7) $x^2+y^2+ax+by+c=0.$

8. $x^2+y^2=9$; $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ என்ற வட்டங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியை மையமாகக்கொண்டு, இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்களுடைய கூட்டுத்தொகையை ஆரமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x^2+y^2-2x-4y+1=0$; $2x^2+2y^2-4x-8y-3=0$ என்பவை 'ஒரு' மைய வட்டங்களென நிறுவுக. இவைகளில் வெளிவட்டமெது?

10. x - அச்சைத் தொட்டுக்கொண்டு $(4, 5)$ மையங் கொண்ட வட்டம் யாது?

11. y - அச்சைத் தொட்டுக்கொண்டு $(2, 3)$ மையங் கொண்ட வட்டம் யாது?

12. x - , y - அச்சுக்களைத் தொட்டுக்கொண்டு, $(2, 2)$ மையங்கொண்ட வட்டம் யாது?

13. $(9, 8)$ என்ற புள்ளி வழியாக, $x^2+y^2-12x-10y+43=0$ என்ற வட்டம் செல்கிறதென நிறுவுக. $(9, 8)$ வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

14. $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ என்ற வட்டத்தில் $(1, 1)$ ஒரு விட்டத்தின் முனையானால், மறுமுனை யென்ன?

15. $x^2+y^2-6x+8y+11=0$ என்ற வட்ட மையம் $x-y-7=0$ என்ற கோட்டின் மேலுள்ளதென நிறுவுக.

16. $8y-4x+9=0$ என்ற கோட்டின் மேல் மையங்கொண்டு $(2, 1)$; $(2, -2)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

17. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ என்ற கோடு, x - , y - அச்சுக்களோடு அமைக்கும் முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

18. $x=6$; $y=6$; என்ற கோடுகளோடு, ஆய அச்சுக்கள் சேர்ந்து அமையும் சதுரத்தின் சுற்று வட்டம் என்ன?

19. $x=2a$; $y=2a$; என்ற கோடுகளோடு, ஆய அச்சுக்கள் சேர்ந்து அமையும் சதுரத்தின் சுற்று வட்டம் என்ன?

20. பின் கண்ட புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் காண்க.

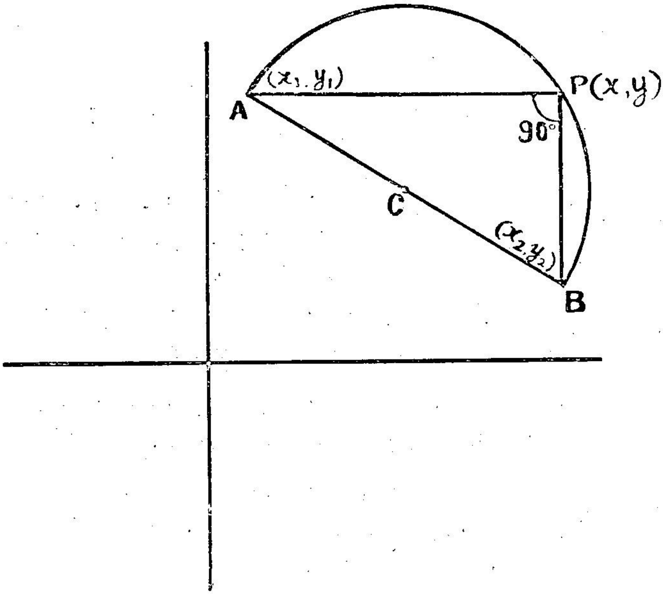
(1) (0, 0); (1, 2); (- 5, 3);

(2) (2, 1); (- 1, - 1); (4, - 2);

(3) (0, 1); (3, 2); (- 1, 3);

(4) (1, 1); (- 1, 2); (2, 3)

4.4. (x_1, y_1); (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை விட்ட மாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன் பாடு :



படம். 24

AB என்பது இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடு. (வட்டத்தின் விட்டம்). P(x, y) என்ற ஏதாமொரு புள்ளி அவ் வட்டத்தின் மேல் இருக்கட்டும்.

$\angle APB = 90^\circ$ எனத் தெரியும்.

எனவே, அவ்வட்டத்தை, பின் கூறப்படும் இயங்கு வழி யாகக் கொள்ளலாம் :

"(x_1, y_1); (x_2, y_2) என்ற இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் உள்ளன. அவைகளை (x, y) என்ற ஒரு இயங்கும் புள்ளியோடு இணைக்கும் கோடுகள் எப்போதும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. (x, y)ன் இயங்கு வழியே, நாம் வேண்டும் வட்டம்."

APன் சரிவு $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$;

BPன் சரிவு $\dfrac{y - y_2}{x - x_2}$.

$\therefore$ $\angle APB = 90°$ ஆனல், $\left(\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\dfrac{y - y_2}{x - x_2}\right) + 1 = 0$

என்ற நிபந்தனை பெறப்படும்.

எனவே (x, y)ன் இயங்குவழி, அதாவது AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(y - y_1)(y - y_2) + (x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதன் மையம் $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

இதன் ஆரம் $= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

(எ-கா.) (1) $(4, 6)$; $(-8, -10)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

4·4ல் உள்ள வாய்பாட்டின்படி, வட்டத்தின் சமன்பாடு,
$(y - 6)(y + 10) + (x - 4)(x + 8) = 0$
அதாவது $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 92 = 0$.
இதை மற்ருேர் முறையிலும் காணலாம்.
வட்டமையம், $(4, 6)$; $(-8, -10)$ இணைக்கும்கோட்டின் மையமாகும்; அதாவது $\left(\dfrac{4 - 8}{2}, \dfrac{6 - 10}{2}\right)$,

(அதாவது $(-2, -2)$,

வட்டத்தின் ஆரம் $= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-2 - 6)^2}$

அல்லது $\sqrt{(-2 + 8)^2 + (-2 + 10)^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x+2)^2+(y+2)^2=100,$$

அதாவது $x^2+y^2+4x+4y-92=0$.

எம்முறையை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம்.

(எ-கா.) (2) AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$. அது x -, y - அச்சுக்களை A, B என்ற புள்ளிகளில் முறையே வெட்டுகிறது. ABஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Aன் ஆயத் தொலைகள் (8, 0)

Bன் ஆயத் தொலைகள் (0, 12).

AB என்ற கோட்டை, விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு, வாய்பாட்டின்படி

$$(x-0)(x-8)+(y-0)(y-12)=0$$

அதாவது $x^2+y^2-8x-12y=0$

இது (0, 0) வழியாகச் செல்கிறதென்பது விளக்கம்.

குறிப்பு: (1) இது (8, 12) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்கிறதென்பதை, மதிப்பீடு செய்து காண்க.

எனவே, (0, 0); (8, 0); (8, 12); (0, 12) என்ற புள்ளிகளாலமையும் செவ்வகத்தின் சுற்றுவட்டம் $x^2+y^2-8x-12y=0$.

குறிப்பு: (2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற கோடு, x –, y – அச்சுக்களை முறையே A, B என்ற இடங்களில் வெட்டுமானால், ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2+y^2-ax-by=0$ எனக் காண்க.

இவ்வட்டம் (0, 0) ; (a, 0) ; (a, b) ; (0, b) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் செவ்வகத்தின் சுற்று வட்டமாகும்.

பயிற்சி 4 (ii)

1. ஒரு வட்டத்தின் விட்ட முனைகள் (4, 3) ; (12, 5). அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ? மையமென்ன ?

2. $x^2+y^2=9$; $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ என்ற வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டை ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3. $x+y=5$ என்ற கோடு ஆய அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளை ஒரு விட்ட முனைகளாகக் கொண்ட வட்டம் யாது? அதன் மையம், ஆரம் காண்க.

4.5. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ **என்ற வட்டத்தின் மேல்** (x_1, y_1) **என்ற புள்ளி உள்ளது. அங்கே அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரையின் சமன் பாடு காண்க.**

இவ்வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$.

(x_1, y_1); $(-g, -f)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் ஆரம், (x_1, y_1)ல் வரையப்படும் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாக விருக்கும். இந்த உண்மையையும், தொடுவரை (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகிறது என்பதையும், பயன்படுத்தி, தொடுவரையின் சமன் பாடு காண்போம்.

(x_1, y_1); $(-g, -f)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் ஆரத்தின் சரிவு $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$.

இந்த ஆரத்திற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சரிவு,

$$-\left(\frac{x_1+g}{y_1+f}\right) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே தொடுவரை, (x_1, y_1) வழியாக $-\left(\dfrac{x_1+g}{y_1+f}\right)$ சரிவுடைய நேர்க் கோடாகும்.

எனவே, தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$y-y_1=-\left(\frac{x_1+g}{y_1+f}\right)(x-x_1) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$(y-y_1)(y_1+f)+(x_1+g)(x-x_1)=0 \text{ ஆகும்.}$$

இதைச் சுருக்கிச் சரிவர எழுதினுல்,

$$xx_1+yy_1+gx+fy-gx_1-fy_1-x_1^2-y_1^2=0 \text{ ஆகும்.}$$

(x_1, y_1) வட்டத்தின் மேல் இருப்பதால்

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

இந்த உண்மையைப் பயன் படுத்தினல்; தொடுவரையின் சமன் பாடு,

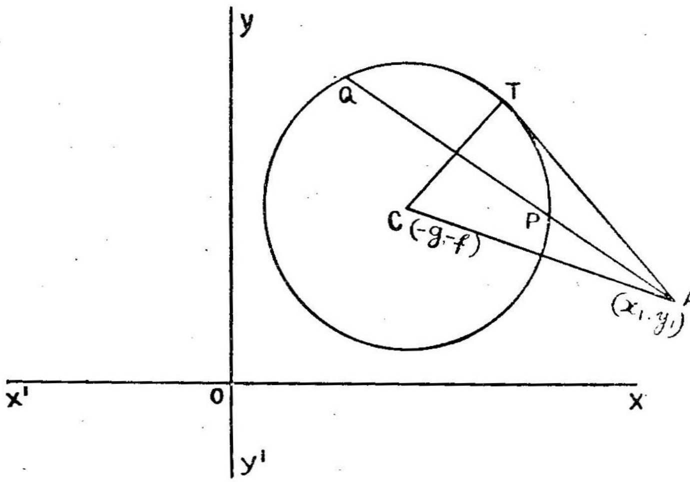
$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ எனப் பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் : $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு அதன் மேலுள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப் படும் தொடு வரையின் சமன் பாடு,

$$xx_1+yy_1=a^2.$$

இதை, இப்பத்தியில் கண்ட முறைப்படி, நேரடியாகவும் காணலாம்.

4·6. (x_1, y_1) என்ற வெளிப்புள்ளியிலிருந்து, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு வரையின் நீளம் :



படம் 25

$A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியினின்று வட்டத்திற்கு வரையப் படும் தொடுவரை AT. அதன் நீளம் t எனக் கொள்க.

C என்பது வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$; CT என்பது தொடுவரை, வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி வழியான ஆரம்.

$\angle$ CTA $=90°$

$CT^2=(\text{ஆரம்})^2=g^2+f^2-c$

$AC^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$

$$\therefore\ t^2 = AT^2$$
$$= AC^2 - CT^2$$
$$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$\therefore$ தொடுவரையின் நீளம் $= \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

குறிப்பு : குறிப்பிட்ட வட்டத்திற்கு, (x_1, y_1)ஐ ஒட்டி, $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ என்பதின் மதிப்பு, அப்புள்ளியின் 'படி' (Power of the point) எனப்படும்.

4·6.1: படம் 25ல், APQ வட்டத்திற்குரிய ஒரு வெட்டு வரை (Secant).

AP. AQ = AT^2 என நாம் அறிவோம்.

எனவே AP. AQ $= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$.

$=(x_1, y_1)$ஐ ஒட்டிய "படி".

(எ-கா.) $x^2+y^2-2x+3y-7=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (5, 7) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடு வரையின் நீளம் என்ன?

தொடு வரையின் நீளம் $= \sqrt{25+49-10+21-7}$

$= \sqrt{78}.$

இவ்வட்டத்திற்குரிய (5, 7)ன் "படி" 78 ஆகும்.

(5, 7) இலிருந்து இவ்வட்டத்திற்கு ஏதாமொரு வெட்டு வரை வரைந்தால், அது வட்டத்தை, P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். (5, 7) என்ற புள்ளியை A எனக் கொண்டால்,

AP × AQ = 78 ஆகும்.

*4.6·2: சென்ற பத்தியில் கண்டபடி, (x_1, y_1)ன் படி $= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$.

இதன் மதிப்பு கூட்டெண்ணுயிருப்பின், (x_1, y_1) என்ற புள்ளி, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே யிருக்கும். இதன் மதிப்பு பூச்சியமாயிருப்பின், (x_1, y_1) வட்டத்தின் மேலேயே யிருக்கும். இதன் மதிப்பு குறையெண்ணு யிருப்பின், (x_1, y_1) வட்டத்திற்கு உள்ளே யிருக்கும். இது ஏன்?

இக்கேள்விக்குப் பதில் காணும் வழியாக,

$S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

(1) வட்டத்திற்கு வெளியே (x_1, y_1) இருக்குமானால், அங்கிருந்து வட்டத்திற்கு ஒரு கண்கூடான தொடுவரை வரைய இயலும். அதன் நீளம் $= \sqrt{S_1}$. S_1 கூட்டெண் மதிப்புடையதாயின் $\sqrt{S_1}$ ஒரு மெய்யெண்ணாகும். அதுவே அத்தொடுவரையின் நீளம்.

(ii) வட்டத்தின் மேலேயே (x_1, y_1) இருக்குமானால், அங்கிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரையின் நீளம் பூச்சியமாகும். எனவே $\sqrt{S_1} = 0$, அதாவது $S_1 = 0$. இது சரி. ஏனெனில் (x_1, y_1) வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளியாதலின் $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ஆகிறது.

(iii) வட்டத்திற்கு உட்புறத்தில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி இருக்குமானால், அங்கிருந்து வட்டத்திற்கு ஒரு கண்கூடான தொடுவரை வரையமுடியாது. எனவே, அது ஒரு கற்பனைத் தொடுவரையாகத்தானிருக்க முடியும். அந்த நிலையில் S_1 மதிப்பு ஒரு குறையெண்ணாய், $\sqrt{S_1}$ ஒரு கற்பனையெண்ணாகும்.

பொதுவாக, எந்தப் புள்ளியிலிருந்தும் ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுவரை வரைய முடியுமென நாம் கொள்வோமானால் :

(1) அப்புள்ளி, வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், தொடுவரை கண்கூடானது ; S_1 கூட்டெண் ; $\sqrt{S_1}$ ஒரு மெய்யெண்ணாகும் ;

(2) அப்புள்ளி, வட்டத்தின்மேல் இருந்தால், அதன் நீளம் பூச்சியம் ; $S_1 = 0$; $\sqrt{S_1} = 0$;

(3) அப்புள்ளி, வட்டத்திற்கு உள்ளே இருந்தால், தொடுவரையே வரைய முடியாது ; ஆகவே, தொடுவரை ஒரு கற்பனைத் தொடுவரையெனக் கொள்ள வேண்டியதாயிருக்கிறது ; S_1 குறையெண் ; $\sqrt{S_1}$ ஒரு கற்பனை யெண்ணாகும்.

இந்த உண்மைகளைக் கொண்டு, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி (x_1, y_1), ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தின் $(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0)$ (i) வெளியே, அல்லது (ii) மேலே அல்லது (iii) உள்ளேயிருக்கிறதாவென அறிய முடியும்.

பின் வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் மேல் கூறியவைகளைத் தெளிவுபடுத்தும்.

(எ-கா.) (1) $x^2+y^2-2x-6y=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (0,0) என்ற இடத்தில் தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டமையம் (1,3)

(0,0) வழியாக இருக்கும் ஆரத்தின் சரிவு

$$=\frac{3-0}{1-0}=3.$$

∴ (0,0) வழியாக வரையக்கூடிய தொடு வரையின் சரிவு $= -\frac{1}{3}$.

∴ தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$y-0=-\tfrac{1}{3}(x-0)$$

அதாவது $x+3y=0$

(எ-கா.) (2) $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (4,1) என்ற புள்ளியில் தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க. முதலில் (4, 1) வட்டத்தின் மேலிருக்கிறதாவென அறிந்து கொள்வோம்.

$$4^2+1^2-8+6-15=0$$

∴ இருக்கிறது. மையம் $(1,-3)$

(4, 1) வழி செல்லும் ஆரத்தின் சரிவு $=\frac{1+3}{4-1}=\frac{4}{3}$

∴ (4, 1)ல் தொடுவரையின் சரிவு $-\frac{3}{4}$ ஆகும்.

∴ தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$(y-1)=-\tfrac{3}{4}(x-4)$$

அதாவது $3x+4y=16$.

(எ-கா.) (3) $x^2+y^2-8x+6y+1=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (0, 0)விலிருந்தும் $(-5, 1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்தும் வரையக் கூடிய தொடுவரைகளின் நீளங்களைக் காண்க.

(0, 0)விலிருந்து வரையப் பெறும் தொடுவரையின் நீளம்

$$=\sqrt{0+0-0+0+1}$$

$$=1$$

$(-5, 1)$விலிருந்து தொடுவரையின் நீளம்

$$=\sqrt{25+1+40+6+1}$$

$$=\sqrt{73}$$

(எ-கா.) (4) $(0, 0)$; $(5, 1)$; $(4, 3)$; $(-2, -7)$; $(1, -3)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்ற வட்டத்தின் மேலே, உள்ளே, வெளியே எங்கிருக்கின்றன என அறிக.

$(0,0)$ன் "படி" $= -15$: உள்ளே யிருக்கும்

$(5,1)$ன் "படி" $=25+1-10+6-15=17$: வெளியே யிருக்கும்

$(4,3)$ன் "படி" $=16+9-8+18-15=20$: வெளியே யிருக்கும்

$(-2,-7)$ன் "படி" $=4+49+4-42-15=0$: மேலே யிருக்கும்

$(1,-3)$ன் "படி" $=1+9-2-18-15=-25$: உள்ளேயிருக்கும்

பயிற்சி 4 (iii)

1. $x^2+y^2-5x+y-14=0$ என்ற வட்டத்திற்கு $(2, -5)$ என்ற புள்ளியிலுள்ள தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

2. $x^2+y^2-8x-6y=0$ என்ற வட்டத்திற்கு ஆய ஆதியில் வரையக்கூடிய தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

3. $x^2+y^2-6x-10y+9=0$ என்ற வட்டம் $(7, 8)$ வழியாகச் செல்கிறதென நிறுவுக. அப்புள்ளியிலுள்ள தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

4. $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ என்ற வட்டத்திற்கு $(2, 3)$லிருந்து வரையப்படும் தொடுவரையின் நீளம் என்ன ?

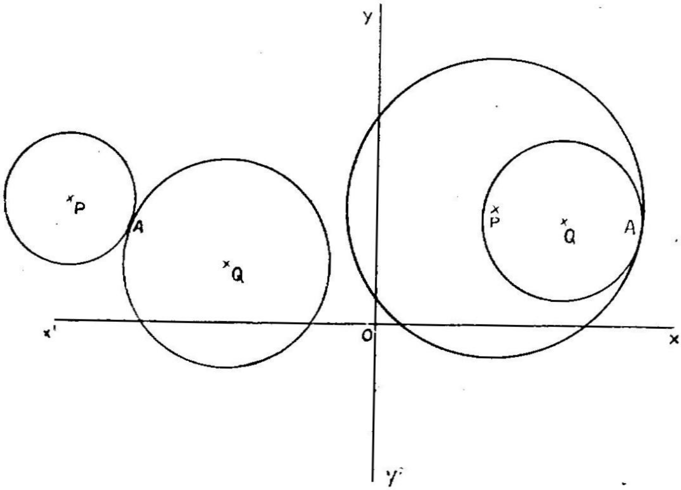
5. $3x^2+3y^2-12x+14y+17=0$ என்ற வட்டத்திற்கு $(-2, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுவரையின் நீளம் என்ன ?

6. பின் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள், $x^2+y^2+3x-7y+2=0$ என்ற வட்டத்திற்கு உள்ளே, வெளியே, மேலே எங்குளது என அறிக :

$(1, 1)$; $(2, -1)$; $(-3, -5)$; $(2, 4)$; $(-2, 1)$; $(-5, 4)$;

மேலே உள்ள புள்ளிகளில் வரையக்கூடிய தொடுவரைகளின் சமன்பாடு காண்க.

4·7. ஒன்றையொன்று தொடும் வட்டங்கள் :



படம் 26 படம் 27

(i) படம் 26ல் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$$

என்ற வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று வெளியே A என்ற புள்ளியில் தொடுகின்றன.

(ii) படம் 27ல் A என்ற புள்ளியில் உள்ளே தொடு கின்றன.

(i) வட்டமையங்கள் : $P(-g, -f)$; $Q(-g, -f^1)$.

வட்ட ஆரங்கள் : $\sqrt{g^2+f^2-c}$; $\sqrt{g_1{}^2+f_1{}^2-c_1}$..

வெளியே தொடுவதாயின், வட்டமையங்களிடைப் பட்ட தூரம், வட்ட ஆரங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது,

$$\sqrt{(g-g^1)^2+(f-f^1)^2} = \sqrt{g^2+f^2-c} + \sqrt{g_1{}^2+f_1{}^2-c_1}$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையாகிறது.

(ii) உள்ளே தொடுவதாயின், வட்டமையங்களிடைப்பட்ட தூரம், வட்ட ஆரங்கள் வித்தியாசத் தொகைக்குச் சமமாகும். அதாவது,

$$\sqrt{(g-g^1)^2+(f-f^1)^2} = \sqrt{g^2+f^2-c} \sim \sqrt{g_1{}^2+f_1{}^2-c_1}.$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையாகிறது.

எனவே, வட்ட சமன் பாடுகளிலுள்ள g, f, c ; g^1, f^1, c^1ன் மதிப்புக்கள், மேற்கூறப் பட்ட நிபந்தனைகட்கு உட்பட வேண்டியிருக்கும்.

குறிப்பு : வட்டமையங்களுக்கு இடைப் பட்ட தூரம் d, வட்ட ஆரங்கள் r_1, r_2 ஆனால் $d=r_1+r_2$; $d=r_1 \sim r_2$ என்பவை முறையே அவ்வட்டங்கள் வெளியே, உள்ளே தொடுவதற் குரிய கட்டுப்பாடுகளாகும்,

(எ-கா.) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$; $x^2+y^2-5x+6y+15=0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றனவென நிறுவுக. உள்ளேயா அல்லது வெளியேயா? தொடும் புள்ளி என்ன?

முதல் வட்டத்தின் மையம் $(1, -3)$; ஆரம் $= \sqrt{1+9-6}$

$= 2$

இரண்டாம் வட்டத்தின் மையம் $(\frac{5}{2}, -3)$;

ஆரம் $= \sqrt{\frac{25}{4}+9-15}$

$= \frac{1}{2}$.

மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம்,

$= \sqrt{(1-\frac{5}{2})^2+(-3+3)^2}$

$= 1\frac{1}{2}$

ஆரங்களின் கூட்டுத் தொகை $= 2\frac{1}{2}$

ஆரங்களின் வித்தியாசம் $= 1\frac{1}{2}$

எனவே வட்டங்கள் உள்ளே தொடுகின்றன.

தொடும் புள்ளி இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பொதுவாக லின், வட்டங்களுக்குரிய சமன்பாடுகளை ஒருங்கமைச் சமன் பாடுகளாகக் கொண்டு, தீர்வு காணக் கிடைக்கும்.

$x^2+y^2-2x+6y+6=0$

$x^2+y^2-5x+6y+15=0$

கழிக்க, $3x-9=0$

$\therefore x=3$

y காண, $9+y^2-6+6y+6=0$

அதாவது $y^2+6y+9=0$

$\therefore\ y=-3$

$\therefore$ இரண்டு வட்டங்களும் $(3,-3)$ என்ற புள்ளியின் கண் உள்ளே தொடுகின்றன.

(எ-கா.) (1) $x^2+y^2-x-5y+4=0$ என்ற வட்டத்தை. (i) $x-3y+7=0$ எந்த புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது? (ii) $x-$, $y-$ அச்சுக்கள் எங்கு வெட்டுகின்றன?

$$x^2+y^2-x-5y+4=0$$

$$x-3y+7=0$$

என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(i) $x=3y-7$ என வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய, $(3y-7)^2+y^2-(3y-7)-5y+4=0$ பெறப்படும்.

அதாவது $9y^2-42y+49+y^2-3y+7-5y+4=0$

அதாவது $10y^2-50y+60=0$

அதாவது $y^2-5y+6=0$

இதன் தீர்வுகள் $y=3$; $y=2$

அதற்குரிய தீர்வுகள் $x=2$; $x=-1$

எனவே வட்டமும் நேர்க்கோடும் வெட்டுமிடங்கள் $(2, 3)$; $(-1, 2)$.

(ii) $x-$ அச்சை வெட்டுமிடம் :

$x-$ அச்சின் சமன்பாடு, $y=0$

$y=0$ என, வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$x^2-x+4=0$ பெறப்படும்

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-16}}{2}$$

இவை கற்பனைத் தீர்வுகள்.

எனவே, வட்டம், $x-$ அச்சை வெட்டாது.

$y-$ அச்சை வெட்டுமிடம் :

$y-$ அச்சின் சமன்பாடு, $x=0$

$x=0$ என, வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய,

$y^2-5y+4=0$ பெறப்படும்.

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$

$= 4$ அல்லது 1

ஆகவே, வட்டம் y அச்சை $(1, 0)$; $(4, 0)$ என்ற புள்ளி களில் வெட்டுகிறது.

இவையாவும், நாம், இக்கோட்டையும், வட்டத்தையும் ஒரு கோட்டுப் படத்தாளில் வரைந்து காணலாம்.

செயல்முறை : வட்டம் : மையம் $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$; ஆரம் $=\frac{\sqrt{10}}{2}=1{\cdot}6$

ஆரத்தின் மதிப்பு, தோராயமாகக் கொள்ளப்பட்டது. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ மையம் கொண்டு, 1·6 ஆரம் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

$x-3y+7=0$ என்ற நேர்க்கோடும் வரைக.

x	5	−4
y	4	1

இப்புள்ளிகளையிணைக்க நேர்க்கோடு பெறப்படும்.

படத்தில், நேர்க்கோடும், வட்டமும் எங்கு வெட்டுகின் றன ; x – அச்சும், y – அச்சும் வட்டமும் எங்கெங்கே வெட்டு கின்றனவென அறிக. பயிற்சியாகக் கொள்க.

(எ-கா.) (2) $x^2+y^2-8x-10y+16+0$ என்ற வட்டம் x – அச்சை எங்கெங்கு வெட்டுகிறது என அறிக.

x-அச்சின் சமன்பாடு, $y=0$.

$y=0$ என வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$x^2-8x+16=0$ பெறப்படும்.

$x=4$, 4 என இரு சமத்தீர்வுகள்.

எனவே, இவ்வட்டம் x – அச்சை $(4, 0)$; $(4, 0)$ என்ற ஒன்றிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அதாவது x-அச்சு, இவ் வட்டத்திற்கு $(4, 0)$ என்ற புள்ளியில் தொடுவரை.

y – அச்சின் சமன்பாடு, $x=0$

$x=0$ என வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய,

∴ $y^2-10y+16=0$ பெறப்படும்.

$y=2, 8.$

எனவே, இவ்வட்டம் y அச்சை $(0,2)$; $(0, 8)$ என்ற புள்ளி களில் வெட்டுகிறது.

ஆக, இவ்வட்டம் x-அச்சை $(4,0)$ல் தொட்டு, y-அச்சை $(0,2)$; $(0,8)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

(எ-கா.) (3) $x^2+y^2-8x-16y+15=0$ என்ற வட்டம், (i) $2x+y+8=0$ என்ற கோட்டை எங்கெங்கு வெட்டுகிறது? (ii) x-, y- அச்சுக்களை எங்கெங்கு வெட்டுகிறது?

(i) நேர்க்கோடு, $y=-2x-8$ ஆகும். yன் மதிப்பை, வட்டச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$$x^2+(2x+8)^2-8x-16(-2x-8)+15=0.$$

அதாவது $5x^2+56x+207=0$ பெறப்படும்.

$$x=\frac{-56\pm\sqrt{3136-4140}}{10}$$

= கற்பனைத் தீர்வுகள்.

x - கற்பனை எண்ணுயின், அதற்குரிய yம் கற்பனை யெண் ணுகும்.

எனவே நேர்க்கோடு வட்டத்தை வெட்டாது.

(ii) x-அச்சை வெட்டுமிடங்கள் காண, $y=0$ என சமன்பாட்டில் ஈடு செய்க.

$x^2-8x+15=0$ பெறப்படும்.

∴ $x=5, 3.$ தீர்வுகள்

எனவே x-அச்சை, $(5, 0)$; $(3, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டும்.

y-அச்சை வெட்டுமிடங்கள் காண,

$x=0$ எனச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்க.

$y^2-16y+15=0$ பெறப்படும்.

$y=1, 15.$ தீர்வுகள்.

எனவே y-அச்சை $(0,1)$; $(0,15)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டும்.

(எ-கா.) (4) $x^2+y^2-6x-6y+9=0$ என்ற வட்டம் $x-$, $y-$ அச்சுக்களை எங்கு வெட்டுகிறது?

$y=0$ என ஈடு செய்க.

$x^2-6x+9=0$ பெறப்படும்.

$x=3,3$ என்ற சமத்தீர்வுகள்

எனவே, $x-$அச்சை வட்டம் (3,0); (3,0) என்ற இடங்களில் வெட்டும், அதாவது (3, 0)ல் தொடும்.

$x=0$ என ஈடு செய்க.

$y^2-6y+9=0$ பெறப்படும்.

$y=3, 3$ என்ற சமத் தீர்வுகள்

எனவே, $y-$அச்சை வட்டம் (0,3); (0,3) என்ற இடங்களில் வெட்டும், அதாவது (0,3)ல் தொடும்.

எனவே இவ்வட்டம், $x-$அச்சையும், $y-$அச்சையும் முறையே (3,0), (0,3) என்ற இடங்களில் தொடுவரையாகக் கொண்டது.

*4.10: இரு வட்டங்கள் வெட்டு மிடங்கள் வழியாகச் செல்லும் மற்றோர் வட்டம் :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$$

என்ற வட்டங்கள் வெட்டுமிடங்கள் வழியாகச் செல்லும் எந்த வட்டத்தையும்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c+k(x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1)=6$$

என்ற சமன் பாட்டால் அறியலாம்.

$k=-1$ ஆனுல் இச் சமன்பாடு,

$$2(g-g^1)x+2(f-f^1)y+(c-c^1)=0$$

என்று ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

இதைப்பற்றி விரிவாக மேற்படிப்பில் அறிவீர்கள்.

பாடச் சுருக்கம் (4)

1. $x^2+y^2=a^2$ என்பது (0, 0) மையங்கொண்டு $\underline{a}$ ஆரம் கொண்ட வட்டம்.

2. $x^2+y^2=0$ என்பது (0, 0) என்ற புள்ளி வட்டம்.

3. (a, b) மையங்கொண்டு, r ஆரம் கொண்ட வட்டம்

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

4. $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$S^1\equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$$

என்பவை இரு வட்டங்கள்.

(i) $S=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$

(ii) $S=0$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{g^2+f^2-c}$

5. (x_1, y_1); (x_2, y_2) ஐ இணைக்கும் நேர்க்கோட்டை விட்டமாகவும், விட்ட அளவாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன் பாடு : $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

ஆரம் : $\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

மையம் : $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

6. $(x_1\ y_1)$லிருந்து $S=0$க்கு வரையப்படும் தொடுவரையின் நீளம் : $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy+c}$

7. $S=0$ என்ற வட்டத்தின் மேலுள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

8. $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் மேலுள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடும் தொடுவரையின் சமன் பாடு

$$xx_1+yy_1=a^2.$$

9. g, f என்பவை நிலைத்த மாறிலியாய், kன் பல் வேறு மதிப்புக்களுக்கு

$x^2+y^2+2gx+2fy+k=0$ என்பவை பல "ஒரு" மைய வட்டங்கள்.

10. $S=0$ம் $S^1=0$ ம் உள்ளே தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை :

$$\sqrt{(g-g^1)^2+(f-f^1)^2}=\sqrt{g^2+f^2-c}\sim\sqrt{g^{1^2}+f^{1^2}-c^1}$$

அவைவெளியே தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை :

$$\sqrt{(g-g^1)+(f-f^1)_2}=\sqrt{g^2+f^2-c}+\sqrt{g^{1^2}+f^{1^2}-c^1}$$

11. $S=0$, $S^1=0$ என்பவை வெட்டும் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S+KS^1=0$; k ஏதாமொருமாறிலி.

பயிற்சி 4 (iv)

1. $x^2+y^2-4x-6y=0$ என்ற வட்டம், $x-$, $y-$ அச்சுக்களை வெட்டுமிடங்களில் வரையக்கூடிய தொடுவரைகளின் சமன்பாடு காண்க.

2. $x^2+y^2+18x+6y+26=0$; $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ என்ற வட்டங்கள் தொடுகின்றனவென நிறுவுக. வெளியேயா, உள்ளேயா?

3. $x=2y+1$ என்ற கோடு $x^2+y^2-2x-y+1=0$ என்ற வட்டத்தை யெங்கெங்கே வெட்டுகிறது?

4. $x^2+y^2-7x+7y+6=0$ என்ற வட்டம் $x-$, $y-$ அச்சுக்களை வெட்டுமிடங்களென்ன? அவ்வச்சுக்களின்மேல் துண்டிக்கப்பட்ட நீளங்கள் என்ன?

5. $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ என்ற வட்டத்தை, (1) $x+y+1=0$ (2) $y-3x=12$ என்ற கோடுகள் வெட்டுகின்றனவா, இல்லையா யெனக் காண்க.

6. $x^2+y^2+5x-7y+6=0$ என்ற வட்டம், $x-$, $y-$ அச்சுக்களை வெட்டுமிடங்களென்ன?

7. $x^2+y^2+18x-18y+81=0$ என்ற வட்டம், $x-$, $y-$ அச்சுக்களைத் தொடுவரையாகக் கொண்டுள்ளனவென நிறுவுக. தொடும் இடங்கள் யாவை?

8. பின்வரும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றனவா, அல்லவா என அறிக. தொடுவதாயின் உள்ளேயா, வெளியேயா எனக் காண்க.

(1) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$; $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

(2) $x^2+y^2=100$; $x^2+y^2-6x-6y-82=0$

(3) $x^2+y^2-2x-8=0$; $x^2+y^2+8x+12=0$

(4) $x^2+y^2-6x+8y=0$; $x^2+y^2-8x+6y=0$

பயிற்சி 4 (v)

(1) $x^2+y^2+6x+4y+6=0$; $x^2+y^2-4x-8y+3=0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் வழியாகவும், ஆய ஆதியின் வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. மையம் யாது?

2. $x^2+y^2+x+y-6=0$; $x^2+y^2+2x+3y-5=0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் வழியாகவும் (1, 1) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

பல்கலைக் கழக வினாத்தாள்களிலிருந்து.

நேர்க்கோடுகள்

1. x-, y- அச்சுக்களின்மேல் a, b வெட்டுத் துண்டுகள் விட்டுச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

2. ஆய ஆதியிலிருந்து $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டின் மேல் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் என்ன?

3. (x_1, y_1) வழியாக, x- அச்சோடு θ என்ற சாய்வுடன் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம் என நிறுவுக. [r என்பது (x, y); (x_1, y_1)க்கு இடைப்பட்ட நீளம் எனக் கொள்க.]

4. $3x+y+4=0$; $3x+4y-15=0$; $24x-7y-3=0$ என்ற கோடுகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன வென நிறுவுக.

5. (1, 2) வழியாக, $3x-2y+7=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணைக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

6. (3, −5); (−5, −4); (7, 10); (15, 9) என்ற புள்ளிகளை முறையாகக் கொண்டால் அவை ஒரு இணைக்கரத்தின் உச்சிகளாகுமென நிறுவுக.

7. $x+2y=0$; $4x+3y=5$; $3x+y=0$ என்ற கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டுச் சந்தியை அறிக.

8. A(1, −2); B(3, 1); C(−2, 3) என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள். A வழியாக, BCக்கு இணைக்கோடாக வரையப்படும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை யறிக.

9. (−4, −2) வழியாக x- அச்சோடு 45° சாய்வுள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

10. (1, 2) வழியாக, $2x+3y=4$ என்ற கோட்டிற்கு இணைக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

11. $(2,-2)$; $(-1, 2)$; $(3, 5)$ என்ற புள்ளிகள் ஓர் இரு சம பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.

12. AB ஒரு நேர்க்கோடு. A(5, 6); $2x-3y-4=0$ என்ற நேர்க்கோடு ABன் செங்குத்துமைய வெட்டி. Bன் ஆயத் தொலைகள் என்ன ?

13. (2, 3); $(3, -1)$; $(-4, 2)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சி களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மைய வெட்டிச் சமன் பாடுகள் காண்க.

14. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் இரு உச்சிகள் (3, 4), $(-2, 3)$. மூன்ருவது உச்சி யென்ன ?

15. $(5, -2)$; $(-\frac{3}{2}, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நீளத்தை 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி யென்ன ?

16. $(-1, 3)$ வழியாக ஒரு நேர்க்கோடுண்டு. அது $x-$அச்சின் மேல் விடும் வெட்டுத்துண்டு $y-$அச்சின் மேல் விடும் துண்டைப் போல மூன்று மடங்காஞல், அக்கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

17. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு உச்சிகள் (7, 2); (1, 6). அதன் மைய வெட்டுச் சந்தி (4, 6); மூன்ருவது உச்சி யெங்குளது ?

18. $(0, -1)$; (2, 1); (0, 3); $(-2, 1)$ என்ற புள்ளிகளை இணைப்பதால் பெறப் படுவது ஒரு சதுரம் என நிறுவுக.

19. (2, 3) வழியாக $2x+3y=5$க்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

20. $(1, -3)$; $(-1, -5)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நீளத்தை (7, 3) என்ற புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது ?

21. (2, 1); (5, 4); (1, 4) என்ற புள்ளிகள் முறையே ஒரு இணைக்கரத்தின் மூன்று புள்ளிகள்; (2, 1)க்கு நேர் எதிரிலுள்ள புள்ளியென்ன ?

22. $p-$ ஒரு மாறிலி எண். $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் ஆய அச்சுக்களுக்கிடைப்பட்ட நீளத் தின் மையத்தினுடைய இயங்கு வழி காண்க.

23. $2x+y=1$; $x+2y=1$; $2x+y=3$; $x+2y=2$ என்ற கோடுகள் ஒரு சாய் சதுரத்தை அமைக்கின்றனவென நிறுவுக.

24. (7, 9); (3, -4); (-3, 3) என்ற புள்ளிகள் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தை யமைக்கின்றனவென நிறுவுக.

25. (1, 3); (2, 7) என்ற புள்ளிகளை யிணைக்கும் நீளத்தை (-2, -9) என்ற புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?

26. (2, 3); (3, -1); (-4, 2) என்ற புள்ளிகளா லமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

27. A(2, 4); B(4, 6); C(-6, -10) என்ற புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள். A வழியாக வரையப்படும் மையக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

28. $4x-3y-8=0$; $3x-4y+6=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டு மிடமென்ன?

29. (2, 4); (4, 6); (-6, -10) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் மையவெட்டிகளின் சமன்பாடு காண்க.

30. ஒரு நேர்க்கோட்டில், x-, y- அச்சுக்களுக்கிடைப் பட்ட நீளத்தின் மையம் (x_1, y_1) அந்நேர்க்கோட்டின் சமன் பாடு காண்க.

31. (4, 5) வழியாக, $x+2y+1=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணைக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டங்கள்

1. $(-2, 3)$ மையங்கொண்டு $\sqrt{10}$ ஆரமுள்ள வட்டத் தின் சமன்பாடு காண்க. அது ஆய அச்சுக்களை வெட்டு மிடங்களென்ன?

2. $x^2+y^2=100$ என்ற வட்டத்திலுள்ள ஒரு நாணின் மையம் (1, 2). அந்நாணின் நீளம் காண்க.

3. $5x^2+5y^2+4x-8y=18$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

4. (h, k) மையங்கொண்டு (α, β) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு அறிக.

5. (1, 2); (2, 4) என்ற புள்ளிகளை விட்ட முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

6. (0, 0); $(a, 0)$; (a, a); $(0, a)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. 5 அலகுகள் ஆரம் கொண்டு, மையம் x- அச்சின் மேல் அமைந்து, (2, 3) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க.

8. $(-4, -5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரையின் நீளம் கண்டுபிடி.

9. $x^2+y^2-22x-4y+25=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

10. $(1, -8)$; $(-6, -1)$; $(6, -9)$ என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

11. $(9, 3)$; $(7, -1)$; $(1, -1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. அதன் மையம் $(4, 3)$ என நிறுவுக.

12. $2x-3y=6$ என்ற நேர்க்கோடு, ஆய அச்சுக்களை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. வட்டத்தின் ஆரம் என்ன ?

13. (x_1, y_1); (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க.

14. OABC ஒரு செவ்வகம் ; 0 ஆய ஆதி ; A, C முறையே $x-$, $y-$ அச்சுக்களின் மேலுள்ளன. $OA=a$; $OB=b$ ஆனல் AC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க.

15. $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ என்ற வட்டத்தில் $(2, 3)$ மைய மாகக் கொண்ட நாணின் நீளம் காண்க.

16. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன் பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறதென நிறுவுக. அதன் மையம், ஆரம் காண்க.

17. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற கோடு, $x-$, $y-$ அச்சுக்களை முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB ஐ விட்ட மாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க.

18. $(-3, 4)$ மையங் கொண்டு ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன் பாடு காண்க.

19. $2x^2+2y^2-5x+7y-1=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம். ஆரம் காண்க.

20. $x^2+y^2-10x-6y+9=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க. அவ்வட்டத்தில் $\frac{4}{3}$ சரிவுடைய விட்டத்தின் சமன் பாடும் காண்க.

இயல்முறை வடிவ கணிதம் - விடைகள்

பயிற்சி 1 (i)

(1) 10 ; (2) $3\sqrt{5}$; (3) $[a^2(\cos\theta - \cos\phi)^2 + b^2(\sin\theta - \sin\phi)^2]^{\frac{1}{2}}$ (5) $\sqrt{2}$, $\sqrt{26}$, $2\sqrt{5}$; (6) 3, $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$; $\sqrt{29}$. $\sqrt{41}$.

பயிற்சி 1 (ii)

(1) $(5, \frac{13}{3})$; (2) உள் (2,3), வெளி(−13,18) (3) $(4, 5\frac{1}{3})$, $(6, 4\frac{2}{3})$; (5) $\frac{AP}{PB} = 2 : 1$ (வெளி), $\frac{AQ}{QB} = 8 : 3$ (உள்); (6) (5, 8), (3, 4), (7, 2.).

(7) (1) $[(x_1+x_2-x_3), (y_1+y_2-y_3)]$;
$[(x_2+x_3-x_1), (y_2+y_3-y_1)]$;
$[(x_3+x_1-x_2), (y_3+y_1-y_2)]$.

(2) $[(x_1-x_2), (y_1+y_2)]$; $[(x_2-x_1), (y_1-y_2)]$;
$[(x_1+x_2), (y_2-y_1)]$.

(8) (−3, 5) ; (9) (2, −2) ; (10) (−1, 0) ; (11) (−1, 2)

பயிற்சி 1 (iii)

(1) (1) 80 ; (2) 10 ; (3) 21 ; (4) 25.
(3) $x = -1$; (4) $x - 7y + 25 = 0$: (5) $87\frac{1}{2}$; (6) $23\frac{1}{2}$; (7) 32

பயிற்சி 1 (iv)

(1) $x - y = 1$: (2) $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$;
(3) $4x^2 + 4y^2 - 17x - 7y + 20 = 0$

(4) $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4r^2=0$

(5) (1) $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=10$

(2) $2x^2+2y^2-2x-10y-78=0$

(6) $x+5y+17=0$

பயிற்சி 2 (i)

1. (1) $x-y=5$; 1. (2) $2x-5y+20=0$; $\frac{2}{5}$.
(3) $x+4y=7$; $-\frac{1}{4}$.

2. (1) $2x-y=7$. (2) $4x+y+17=0$
(3) $6x-y=0$ (4) $\sqrt{3}\,x-y=1+4\sqrt{3}$

3. (1) $2x-y=4$. (2) $x-y+6=0$.
(3) $5x+y+3=0$. (4) $px-qy+qa=0$.

4. (1) $3x+4y=12$. (2) $6x-5y+30=0$. (3) $x-y=a$.

பயிற்சி 2 (ii)

சரிவு	x - அச்சுத் துண்டு	y - அச்சுத் துண்டு	p - கூட்டெண் மதிப்பு
(1) $\frac{-3}{2}$	2	3	$\frac{6}{\sqrt{13}}$
(2) $\frac{-4}{3}$	3	4	$2\frac{2}{5}$
(3) $\frac{-p}{q}$	$\frac{-p}{p+q}$	$\frac{-q}{p+q}$	$\frac{(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$
(4) $\frac{3}{5}$	20	-12	$\frac{60}{\sqrt{34}}$
(5) $\frac{-a}{b}$	$-b$	$-a$	$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. (1) $3x+2y=3$. (2) $5x+3y=3$. (3) $ax+by+a+b=0$.
(4) $y+am=mx+b$. (5) $lx+my=2$.

3. $y=-13$. 5. 40. (6) $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$

7. $3x-4y=18$

8. (1)

	பக்கங்கள்	மைய வெட்டிகள்
(1)	$8x-5y=2$	$y=2x$
	$x-y+2=0$	$3y=5x$
	$7x-4y+2=0$	$2y=3x$
(2)	$x-2y+6=0$	$4x+7y=58$
	$2x+3y+5=0$	$15x+24y=22$
	$x-2=0$	$174x-319y+102=0$

10. $3x-2y=0$; $x+y=0$.

11. பக்கம்: $3x-4y+26=0$; $y+6=0$; $x-2=0$
இணைக்கோடு: $3x-4y+14=0$; $y+5=0$; $x+2=0$

12. $6x+5y=30$; $\frac{6}{\sqrt{61}}x+\frac{5}{\sqrt{61}}y=\frac{30}{\sqrt{61}}$; $p=\frac{30}{\sqrt{61}}$

13. $t=5$; $(6, 4)$

14. $5x+y=5$. $4x+7y=4$. $x-6y=1$.

பயிற்சி 3

1. (1) $(-1, -1)$. (2) $(3, 2)$. (3) $(1, -6)$.
(4) $\left(\frac{c}{2a}, -\frac{c}{2b}\right)$ (5) $(0, c)$

2. (1) $3x-4y=15$. (2) $8x-5y=15$. (3) $bx-ay=a-b$.
(4) $ab\,(bx+ay)=a^2+b^2$. (5) $mx-by=ma-lb$.
(6) $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$ (7) $x\sin\alpha-y\cos\alpha=a$.

3. (1) $6x-3y+40=0$. (2) $2x-6y+16=0$.
$15x+6y+28=0$.

4. $2x+y=1$. $2x+7y+11=0$ 5. $(5, 1)$. 6. $(11, 5)$.

7. $a=3$. 8. $a=2$: $b=3$; $c=-6$.

9. $m=7$; குறுங்கோணம் $=81° 54'$

விரிகோணம் $=98° 6'$

10. $y=\frac{1}{3}x$ 11. $2y-x=2$. 12. $\frac{m-1}{m+1}$

13. $x+y=4$. $2x+y=11$. $x=7$.

14. $2x-3y=0$; $\left(\frac{21}{13}, \frac{14}{13}\right)$; $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

15. $x+3y=16$. $x+3y=26$ $3x-y=13$. 5 சதுர அலகுகள்.

16. $(8, 11)$ 17. $(6, 2)$; $(-2, 0)$; $\sqrt{34}$.

18. $3x+4y=25$.

பயிற்சி 4 (i)

1. (1) $x^2+y^2=9$. (2) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$.
(3) $x^2+y^2-4x-6y+12=0$.
(4) $x^2+y^2+12x-2y+33=0$.
(5) $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2-r^2=0$.
(6) $x^2+y^2-10x+16=0$. (7) $x^2+y^2+4y-21=0$.

2. (1) $x^2+y^2=25$. (2) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$.
(3) $x^2+y^2-4x+2y+3=0$.
(4) $(x-a)^2+(y-b)^2=(m-a)^2+(n-b)^2$.

3. $x^2+y^2-4x-6y=0$. 4. $x^2+y^2+12x-6y+29=0$.

5. $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ 6, $(x-5)^2+(y+2)^2=1$.

7. (1) $(7, -3)$; $\sqrt{57}$. (2) $(-2, 1)$; 2
(3) $(-p, q)$; $\sqrt{p^2+q^2}$. (4) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$; $\sqrt{\frac{37}{4}}$.
(5) $(-3, 0)$; $\sqrt{8}$. (6) $(0, 2)$; $\sqrt{2}$.
(7) $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

8. $x^2+y^2-2x-4y-59=0$. 9. பின் சொல்லப்பட்டது.

10. $x^2+y^2-8x-10y+16=0$. 11. $x^2+y^2-4x-6y+9=0$.

12. $x^2+y^2-4x-4y+4=0$. 13. $y-x+1=0$. 14. $(5, 5)$

16. $2x^2+2y^2-5x+2y-2=0$, 17. $x^2+y^2-ax+by=0$,
18. $x^2+y^2-6x-6y=0$. 19. $x^2+y^2-2ax-2ay=0$.
20. (1) $13x^2+13y^2+53x-59y=0$
(2) $x^2+y^2-3x+3y-2=0$
(3) $7x^2+7y^2-15x-39y+32=0$.
(4) $x^2+y^2-x-5y+4=0$.

பயிற்சி 4 (ii)

1. $x^2+y^2-16x-8y+63=0$; $(8, 4)$,
2. $x^2+y^2-2x-3y=0$.
3. $x^2+y^2-5x-5y=0$; $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$; $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

பயிற்சி 4 (iii)

1. $x+9y+43=0$ 2. $4x+3y=0$. 3. $4x+3y=52$.
4. $3\sqrt{3}$ 5. $\sqrt{14}$.
6. $(1, 1)$ – மேல் ; —— தொடுவரை ; $y=x$.
$(2, -1)$ – வெளியே ; $(-3, -5)$ – வெளியே ;
$(2, 4)$ – மேல் ; —— தொடுவரை : $7x+y-18=0$.
$(-2, 1)$ – உள்ளே
$(-5, 4)$ – மேலே —— தொடுவரை : $13x-y=61$.

பயிற்சி 4 (iv)

1. $3y-2x+8=0$; $3y-2x-18=0$ 2. வெளியே.
3. $[(1, 0); (\frac{7}{5}, \frac{1}{5})]$.
4. x – அச்சு : $(6, 0)$; $(1, 0)$; துண்டு நீளம் 5.
y – அச்சு : $(0, -6$; $(0, -1)$; துண்டு நீளம் 1.
5. (1) வெட்டுகின்றது (2) வெட்டாது.
6. x – அச்சு : $(-3, 0)$; $(-2, 0)$.
y – அச்சு : $(0, 1)$; $(0, 6)$.
7. x – அச்சைத் தொடுமிடம் : $(-9, 0)$;
y – அச்சைத் தொடுமிடம் : $(0, 9)$
8. (1) வெட்டும் (2) வெட்டும் (3) வெளியே. தொடும் : $(-2, 0)$ (4) வெட்டும்.

பயிற்சி 4 (v)

1. $x^2+y^2-14x-20y=0$; மையம் $(7, 10)$.
2. $x^2+y^2+\frac{3}{2}x+2y-\frac{11}{2}=0$.

பல்கலைக் கழக வினாத்தாள்களிலிருந்து

நேர்க் கோடுகள்

(1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{b}=1$ (2) $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (5) $3x-2y+1=0$.

(7) $(-4, -3)$. (8) $2x+5y+8=0$. (9) $x-y+2=0$.

(10) $2x+3y=8$ (12) $(\frac{113}{43}, \frac{6}{13})$. (13) $x-y+1=0$; $7x+8y=13$;

$2x+13y=18$. (14) $\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{7\mp5\sqrt{3}}{2}\right)$ (15) $(\frac{31}{14}, 2)$.

(16) $x+3y=8$. (17) $(4, 10)$. (19) $3x-2y=0$. (20) வெளியே

$3:4$. (21) $(-2, 1)$. (22) $\frac{p^2}{4x^2}+\frac{p^2}{4y^2}=1$. (25) வெளியே $3:4$

(26) $12\frac{1}{2}$ (27) $2x-y=0$ (28) $(\frac{50}{7}, \frac{48}{7})$ (29) $2x-y=0$;

$3x-2y=0$; $5x-3y=0$. (30) $\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$ (31) $x+2y=14$.

வட்டங்கள்

(1) $x^2+y^2+4x-6y+3=0$; x - அச்சு $(-1, 0)$; $(-3, 0)$;
y - அச்சு $(0, 3\pm2\sqrt{2})$.

(2) $4\sqrt{5}$. (3) $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$; $r=\sqrt{\frac{110}{5}}$.

(4) $(x-h)^2+(y-k)^2=(\alpha-h)^2+(\beta-k)^2$.

(5) $x^2+y^2-3x-6y+10=0$. (6) $x^2+y^2-ax-ay=0$.

(7) $x^2+y^2-12x+11=0$ அல்லது $x^2+y^2+4x-21=0$.

(8) $\sqrt{91}$. (9) $(11, 2)$; ஆரம் $=10$.

(10) $x^2+y^2-12x-8y-117=0$. (11) $x^2+y^2-8x-6y=0$.

(12) $x^2+y^2-3x+2y=0$; $r=\sqrt{\frac{13}{2}}$

(13) $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$

(14) $z^3+y^2-ax-by=0$. (15) $4\sqrt{2}$.

(17) $x^2+y^2-ax-by=0$. (18) $x^2+y^2+6x-8y=0$.

(19) $(\frac{5}{4}, -\frac{7}{4})$; $r=\sqrt{\frac{82}{4}}$. (20) $(5, 3)$; $r=5$; $4x-3y-11=0$.