இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

தி. கோவிந்தராசன்

கொ. முத்துசாமி

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் - 191

இயற்கணிதம் - I

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்கள் :

தி. கோவிந்தராசன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

கொ. முத்துசாமி,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

First Edition—July, 1969

B.T.P. No. 191

© Bureau of Tamil Publications

ALGEBRA FOR B.Sc—Vol. I

T. GOVINDARAJAN AND K. MUTHUSAMY

Price Rs. 25 4-

Printed by
Manickam Press,
Madras-29

அணிந்துரை

(திரு செ. மாதவன், *தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்*)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி *எட்டு* ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. *குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும்* (P.U.C.), *1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.*

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'இயற்கணிதம்-I'** *என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின்* **191**ஆவது *வெளியீடாகும். இதுவரை* **226** *நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.*

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. மாதவன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. முன்னுரை (Introduction) ... 1

2. வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும் (Permutations and Combinations ... 8

3. பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions) ... 53

4. சமனின்மை (Inequalities) ... 73

5. கந்தழித் தொடர் முறைகள்—எல்லைகள் (Infinite Sequences—Limits) ... 105

6. கந்தழித் தொடர்கள்—குவிதலும் விரிதலும் (Infinite Series—Convergency and Divergency) ... 140

7. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்—அளவுக்கிணங்கிய படிகளுக்கு (The Binomial Theorem for a Rational Index) ... 212

8. படிக்குறித் தேற்றம் (The Exponential Theorem) ... 254

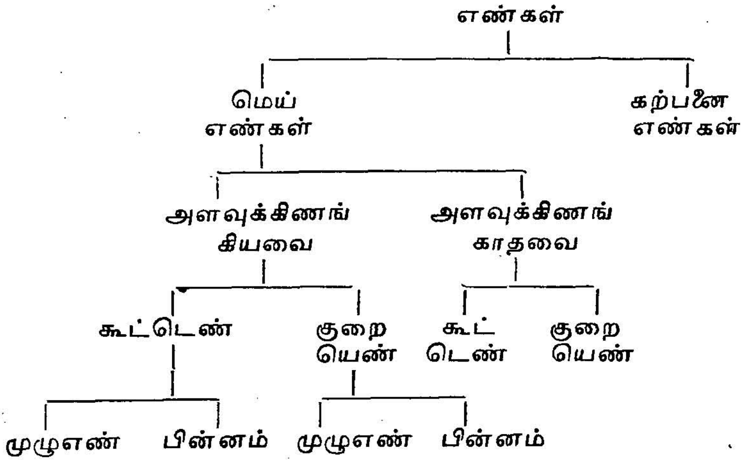
9. மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series) ... 286

10. தொடர்கள் கூட்டல் (Summation of Series) ... 308

1. முன்னுரை

(Introduction)

1·1 வாழ்க்கையில், கணக்கு (Arithmetic) எண்களைப் பயன்படுத்தும் கலையாகும். எண், எண்ணும் முறை, எண் மானம், எண்களின் இடமதிப்பு, எண்களைக் கொண்டு கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் முதலியன யாவும் அன்றாட சமூக வாழ்விற்கே இன்றியமையாதனவாக அமைந்து விட்டன. எண்ணினம் கூட்டு முழு எண்ணோடு நின்றுவிடாமல் தேவைக் கேற்ப, காலாவட்டத்தில் பெருகியது. புகுமுக வகுப்பில் எண்ணினங்களைப் பற்றி ஓரளவு அறிந்திருப்பீர்கள். (தி. கோ.-கொ. மு : புகுமுக வகுப்புக் கணிதநூல்: இயற்கணிதப் பகுதி - முன்னுரை காண்க). மறுபடியும் அக் கருத்துக்களை உங்கள் கவனத்திற்குக் கொண்டு வருகிறோம்.



1·1.1 இயற்கணிதமும் (Algebra) எண்களைப்பற்றிக் கூறும் கலைதான்.

கணக்கில் எண்களை 1, 2, ... $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ ...... எனக் கொள்கிறோம்; எண்கள் குறிப்பிட்ட மதிப்புடையவை. இயற்கணிதத்தில், a, b, c......α, β, γ ...... போன்ற எழுத்துக்கள் அவ்வெண்களைக் குறிக்குமாறு பொதுப்படுத்தி ஏற்றுக்கொள்கிறோம். அவ்வெழுத்துக்கள் எந்த எண்ணையும் குறிப்பனவென்று கொள்ளப்படுகிறது.

$2+3=5$ எனக் கூறுவது கணக்கில் உள்ளது. $a+b$ எனக் கூறுவது இயற் கணிதத்தில் தோன்றுவது. அவ்வாறே $4\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}\times 4\frac{1}{2}$, $8\div 6\frac{1}{3}$ என்று கணக்கில் கூறுவது எழுதுவதுபோல் இயற் கணிதத்தில் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தலுக்கு ஏற்பட்டுள்ள மரபுகள் $a+b$; $a-b$; $a\times b\ (=ab)$; $a\div b\left(=\frac{a}{b}\right)$ நடை முறையில் ஏற்றுக் கொள்ளப் பட்டிருக்கின்றன.

1·2 இயற்கணிதத்தில் பின்வரும் விதிகள் அடிப்படையானவை:

1. மாற்று விதி (Commutative law)

$$a+b=b+a\ ;\ ab=ba.$$

2. பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

$$c\,(a+b)=ca+cb.$$

3. தொகுப்பு விதி (Associative law)

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$
$$a\,(bc)=(ab)\,c.$$

4. சமன்பாட்டுத் தீர்வுடைமை (Solubility of Equation)

(i) $a+x=b$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க முடியும். தீர்வு $b+(-a)$ என்றோ, அல்லது $(b-a)$ என்றோ, எழுதலாம்.

(ii) $a\neq 0$, ஆனால் $ax=b$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க முடியும்.

தீர்வு $= \frac{b}{a}$ அல்லது $b \cdot \frac{1}{a}$ அல்லது $\frac{1}{a} \cdot b$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு: முதல் மூன்று விதிகளும் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட எண்களுக்கும் உண்மையென்பதை நிறுவலாம்.

எ-கா. $a+b+c=c+a+b=b+c+a$ ...... இந்த அடிப்படை விதிகளைக் கொண்டுதான் இயற்கணிதம் வளர்ந்திருக்கிறது.

1·3 இயற்கணிதச் சார்புகள் (Algebraic functions):

(a) பல்லுறுப்புச் சார்பு (கோவை) (Polynomial function).

(b) அளவுக்கிணங்கிய சார்பு (கோவை) (Rational function).

(c) அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு முழு எண்படி கொண்ட சார்பு (Rational integral function).

(d) நேர்முகமான இயற்கணிதச் சார்பு (Explicit algebraic function).

(e) மறைமுகமான இயற்கணிதச் சார்பு (Implicit algebraic function).

(f) பல் மாறிகள் கொண்ட சார்பு (Function with several variables).

(g) சமபடிச் சார்பு (Homogeneous function).

(h) சமச்சீர் சார்பு (Symmetric function).

(i) சமபடி-சமச்சீர் சார்பு (Homogeneous-symmetric function).

(j) இயற்கணித, நேர்மாறு சார்பு (Inverse algebraic function).

[$y=f(x)$; $x=f^{-1}(y)$ அமைப்பு];

முதலிய பல் வகையான இயற்கணிதச் சார்புகள் பற்றி நீங்கள் புகுமுக வகுப்பில் அறிந்திருப்பீர்கள்.

1·3.1 *இவையல்லாது,*

கோண *கணிதச் சார்புகள்* (Trigonometric functions); நேர்மாறு கோண *கணிதச் சார்புகள்* (Inverse Trigonometric functions) என்ற சார்புகள் பற்றியும் நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள்.

1·3.2 மேலும்,

படிக்குறிச் *சார்புகள்* (Exponential functions)

$$[\, e^{x} ; a^{x} ; x^{x} ; \{ f(x) \}^{\phi(x)} \ldots\ldots \text{ போன்றவை }];$$

மடக்கைச் சார்புகள் (Logarithmic functions) என்பன பற்றியும் ஓரளவு நீங்கள் அறிவீர்கள். இன்னும் விரிவாக அவைகளைப்பற்றிய தேற்றங்கள் பலவும் அவை சார்ந்த தொடர் முறைகளும், தொடர்களும் பற்றிப் பல உண்மைகள், இந்நூலில் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

1·4 *குறிப்பிட்ட விதிகளுக்குட்பட்ட தொடர் முறைகள்* பற்றியும் தொடர் பற்றியும் (கூட்டு, பெருக்கு, இசைத் தொடர்கள்) நீங்கள் அறிவீர்கள். இவைகளின் கூட்டுத் தொகை திட்டமான அளவுவரைக் காணவும் முடியும். இனி கந்தழித் தொடர் முறைகள், தொடர்கள் (Infinite sequences and series) *பற்றி நீங்கள் அறிய வேண்டும். அவைகளின்* இயல்புகள் வியக்கத்தக்கனவாயமையும்.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் (கூட்டு முழு எண்படிக்குரியது) நீங்கள் அறிந்ததாகும். கூட்டு முழு எண்படியல்லாது அளவுக்கிணங்கிய எந்த 'படி'க்கும் அத்தேற்றம் எப்படி, எந்தக் கட்டுப்பாடுகளின் அடிப்படையில் விரிவாக்கப்படுகின்றது என்பதும் அவைகளை நிறுவுங்காலை, எவ்வளவு நுட்பமான கருத்துக்களும், வரையறைகளும் கையாளப்படுகின்றன என்பதும் அறிவுப் பயிற்சியாகும்.

1·5 *சிறப்பாக,* சமன்பாடுகள் *பற்றிய* பலதிறப்பட்ட பொது உண்மைகள், சமன்பாட்டுக் கொள்கைகள் என்ற தலைப்பில் விரிவாக விளக்கப்படும்.

1·6 எண்களின் இயல்புகள் பற்றிய உண்மைகள் பலவாயிருக்கும். *அவைகள் பற்றியும்* ஓரளவு *அறிய வாய்ப்புக்கள்* உண்டு.

இயற்கணிதப் பரப்பு விரிந்து புதியதோர் கணித உலகம், உங்கள் பார்வைக்கும், கவனத்திற்கும், ஆய்விற்கும், மலர விருக்கின்றது.

1·7 இதுவரை இயற்கணிதத்தில் நீங்கள் கண்ட சில அடிப்படை முடிவுகள் கீழே உங்கள் கவனத்திற்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots = \left(\frac{pa^n + qc^n + re^n + \ldots\ldots}{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots\ldots}\right)^{1/n}$$

$$= \frac{a + c + e + \ldots.}{b + d + f + \ldots.}$$

(2) இருபடிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் பற்றியன: $ax^2 + bx + c = 0$ என்பது சமன்பாடு.

தீர்வுகள் : $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$

தீர்வுகளின் பெருக்கல் தொகை $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

தன்மை காட்டி $b^2 - 4ac$.

$b^2 - 4ac \gtreqless 0$க்கு ; தீர்வுகள் முறையே மெய்யெண்கள், தீர்வுகள் சமம், தீர்வுகள் கற்பனை யெண்கள்.

(3) $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் வேறு வேறு மெய்யெண்களாய், x அத்தீர்வுகளிடைப்பட்ட, ஒரு மதிப்பேற்காத வரையில், $ax^2 + bx + c$ என்ற கோவையின் மதிப்பு a ன் குறியீடு பெற்றிருக்கும்.

(4) (i) கூட்டுத் தொடர் :

$$T_n = a + (n-1)\, d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)\, d] = \frac{n}{2}\,[T_1 + T_n]$$

a, b க்குக் கூட்டிடை $= \dfrac{a+b}{2} = A$

(ii) பெருக்குத் தொடர்:

$T_n = ar^{n-1}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$

$|r| \angle 1$ ஆனல் $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

a, b க்குப் பெருக்கிடை $= \sqrt{ab} = G$ (+குறியுடையது).

(iii) இசைத் தொடர்:

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ...... கூட்டுத் தொடரிலிருக்குமாயின்

a, b, c ...... இசைத் தொடரிலிருக்கும்.

$$T_n = \frac{1}{\frac{1}{a} + (n-1)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

S_n இல்லை.

a, b க்கு இசையிடை $= \frac{2ab}{a+b} = H$

(iv) A, G, H மூன்றும் இறங்கு வரிசைப் பெருக்குத் தொடரில் இருக்கும்.

5. (i) $1+2+\ldots\ldots+n = S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2 = S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3 = S_3 = [S_1]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. (i) ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

(ii) ${}_nP_n = \underline{|n}$

(iii) ${}_nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}} = {}_nC_{n-r}$ $\left[\begin{array}{l}\underline{|0} = 1 \\ {}_nC_n = {}_nC_0 = 1\end{array}\right]$

(iv) ${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

7. ஈருறுப்புத் தேற்றம்:

(i) n கூட்டு முழு எண் : $(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \, x^{n-r} \, a^r$

(ii) $C_0+C_1+C_2+\ldots\ldots+C_n=2^n$

8. மடக்கைகள் :

(i) மடக்கை$_a$ $(mn)=$ மடக்கை$_a$ $m+$ மடக்கை$_a n$

(ii) மடக்கை$_a$ $\left(\frac{m}{n}\right)=$ மடக்கை$_a m -$ மடக்கை$_a n$

(iii) மடக்கை$_a$ $(m^x)=x$ மடக்கை$_a m$

(iv) மடக்கை$_a$ $\sqrt[p]{m}=\frac{1}{p}$ மடக்கை$_a m$

(v) மடக்கை$_a m = \dfrac{\text{மடக்கை}_b m}{\text{மடக்கை}_b a} =$ மடக்கை$_b m \times$ மடக்கை$_a b$

(vi) மடக்கை$_b a \times$ மடக்கை$_a b=1$

2. வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும்
(Permutations and Combinations)

2·1 எமது புகுமுக வகுப்பு கணிதநூல் இயற்கணிதப் பகுதியில், அந் நிலைக்குரிய பாடத் திட்டத்திற் கேற்ப, "வரிசை மாற்றமும் சேர்வுகளும்" என்ற பகுதியில் இவைகளைப்பற்றி ஓரளவு விளக்கப்பட்டிருக்கிறது. (தி.கோ-கொ.மு: கணித நூல்-இயற் கணிதப் பகுதி பக்கம் 236–264). இந்நூல் முன்னுரையில் [1.7 (6)] அவைகளுக்குரிய வாய்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

எனினும் இந் நூலைப் படிப்பவர்களுக்குப் பயன்படும் வகையில் சுருக்கமாக ${}_nP_r$, ${}_nC_r$ என்பவைபற்றிய தேற்றங்கள் முதற் பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. (விரிவாக அவைபற்றி அறிய விரும்புவோர் முன் குறிப்பிட்ட நூலைப் பார்க்கவும்).

2·2 இப் பகுதிக்கு அடிப்படையானதொரு தேற்றத்தை முதலில் நிறுவுவோம். அத்தேற்றம் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டால் எளிதில் விளங்கும்.

சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்ல இரண்டு வழிகளும், திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல மூன்று வழிகளும் இருக்கின்றன. ஒருவன் சேலத்திலிருந்து திருச்சி வழியாக எத்தனை விதங்களில் மதுரை போய்ச் சேரலாம்?

சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்ல A_1, A_2 என்ற இரண்டு வழிகளும் திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல B_1, B_2, B_3 என்ற மூன்று வழிகளும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

முதலில் சேலத்திலிருந்து திருச்சிக்கு A_1 வழியாகச் செல்வானானால் அதன் பிறகு B_1, B_2, B_3 என்ற மூன்று வழி

களில் ஏதாவது ஒரு வழியில் மதுரை சேரலாம்; அல்லது சேலத்திலிருந்து திருச்சிக்கு A_2 வழியாகச் செல்வானுனல் அதன் பிறகு B_1, B_2, B_3, என்ற மூன்று வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியாக மதுரை சேரலாம். சேலத்திலிருந்து திருச்சி செல்லும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஏற்ப, திருச்சியிலிருந்து மதுரை செல்ல மூன்று வழிகள் உள்ளன. ஆகவே அவன் சேலத்திலிருந்து திருச்சி வழியாக $2\times3=6$ வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் மதுரை சேரலாம்.

இவ் வடிப்படையில் பின்வரும் தேற்றத்தை ஆராய்வோம்:

2·2.1 தேற்றம்: ஒரு செயலை m வெவ்வேறு வழிகளில் செய்ய முடியும்; அச் செயல் அந்த m வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியில் செய்யப்பட்ட பின்பு, மற்றோர் செயல் இச் செயலினுல் தடைபடாமல் n வெவ்வேறு வழிகளில் செய்ய முடியுமானுல் இவ்விரண்டு செயல்களையும் ஒன்றன் பின் ஒன்றுக $m\times n$ வெவ்வேறு முறைகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம்.

முதற் செயலை A_1, A_2, ... A_m என்ற m வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம்; இரண்டாம் செயலை B_1, B_2, ... B_n என்ற n வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்யலாம் எனக் கொள்வோம்.

முதற் செயலைச் செய்யும் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் செயலை n வழிகளில் ஏதாவது ஒரு முறையில் செய்ய இடமுண்டு. ஆனுல் முதற் செயலை m வெவ்வேறு முறைகளில் செய்யலாம். இதில் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் செயலைச் செய்ய n வெவ்வேறு வழிகள் உள்ள வாதலின், இவ்விரண்டு செயல்களையும் ஒன்றன் பின் ஒன்றுக mn வெவ்வேறு முறைகளில் செய்யலாம்.

இத் தேற்றத்தை மேலும் விரிவுபடுத்தினுல் பின்வரும் கிளைத்தேற்றம் பெறப்படும்.

கிளைத் தேற்றம்: ஒரு செயலை m வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும், அதன் பிறகு இரண்டாவது செயலை n வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும், அதன் பிறகு மூன்றுவது செயலை p வழிகளில் ஏதாமொரு வழியிலும் ...... செய்ய முடியுமானுல்,

அச்செயல்களை ஒன்றன்பின் ஒன்றாக $m \times n \times p$ ...... வெவ்வேறு வழிகளில் ஏதாவது ஒரு வழியில் செய்யலாம்.

2·2.2 எ-கா. (1)

A இடம் 3 புத்தகங்களும், B இடம் 6 புத்தகங்களும் உள்ளன. எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் A-ம் B-ம் ஒவ்வொரு புத்தகத்தைத் தங்களுக்குள் மாற்றிக் கொள்ளலாம் ?

A தன்னிடமிருக்கும் 3 புத்தகங்களில் ஒன்றை B க்குக் கொடுத்தால், B தன்னிடமிருக்கும் 6 புத்தகங்களில் ஒன்றை A க்குக் கொடுப்பான். A இடம் 3 புத்தகங்கள் இருப்பதால், அவன் 3 விதங்களில் ஒரு புத்தகத்தை B க்குக் கொடுக்கலாம்.

இவ்விதமான ஒவ்வொரு முறைக்கும் B, 6 விதங்களில் A க்கு ஒரு புத்தகம் கொடுக்கலாம்.

எனவே இவ்விரண்டு செயல்களும் $3 \times 6 = 18$ முறைகளில் செய்யப்படலாம்.

எ-கா. (2)

ஒரு இருப்புத் தொடர்ப்பாதையில் 12 நிலையங்கள் உள்ளன. எத்தனை விதமான அனுமதிச் சீட்டுக்கள் அச்சடிக்க வேண்டும் ? (ஒரே ஒரு வகுப்பு வண்டிகள் உள்ளனவெனக் கொள்க.)

ஒவ்வொரு அனுமதிச் சீட்டிலும் " ...... " இடத்திலிருந்து " ...... " இடத்திற்கு என அச்சாக வேண்டும்.

சிறப்பாக A என்ற நிலையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். A-லிருந்து மற்ற பதினொரு நிலையங்களுக்கு 11 விதமான சீட்டுக்கள் அச்சாக வேண்டும்.

12 நிலையங்களில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் இவ்விதமாக 11 விதமான சீட்டுக்கள் அச்சாக வேண்டும்.

எனவே $11 \times 12 = 132$ விதமான சீட்டுக்கள் அச்சாக வேண்டும்.

பயிற்சி 2 (i)

1. ஒரு கல்லூரியில் இரண்டு மாணவ விடுதிகள் உள்ளன. முதல் விடுதியில் 100 பேரும், இரண்டாவது

விடுதியில் 48 பேரும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு விடுதியி லிருந்து ஒரு, ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப் படவேண்டும். எத்தனை விதங்களில் இத்தேர்வைச் செய்யலாம்?

2. ஒரு குழு அமைப்பில், ஒரு ஆங்கிலேயனும், ஒரு அமெரிக்கனும் இருக்க வேண்டும். 10 ஆங்கிலேயர், 5 அமெரிக்கர் உள்ள ஒரு சபையிலிருந்து எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் இக்குழு அமைக்கலாம்?

3. ஒரு எழு கோணத்தில் எத்தனை மூலைவரைகள் வரையலாம்?

4. ஒரு n பக்கமுள்ள நேர்க்கோட்டுருவத்தில் எத்தனை மூலை வரைகள் வரையலாம்?

5. ஒருவன் சேலத்திலிருந்து சென்னை செல்ல 3 வழிகளுண்டு. ஏதாமொரு வழியாகச் சென்று மற்றொரு வழியாகத் திரும்ப விரும்பினால், எத்தனை விதங்களில் அவன் தன் செலவை முடிக்கலாம்?

6. ஒரு எழுத்துப் பூட்டில் ஆறு வளையங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு வளையத்திலும் 5 எழுத்துக்கள் உள்ளன. எத்தனை விதங்களில் அப்பூட்டைத் திறக்க முயற்சிக்கலாம்? இவைகளில் பயனற்ற முயற்சிகள் எத்தனை?

7. ஒரு போக்கில் (direction) 12 இணைக்கோடுகளும் மற்றொரு போக்கில் 16 இணைக்கோடுகளும் உள்ளன. அவைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டு மிடங்கள் எத்தனை?

2·3 வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும் (Permutations and combinations).

a, b, c, d எனப் பெயர் கொண்ட நான்கு பொருள்கள் இருக்கின்றன. அவைகளினின்று, ஏதேனும் மூன்று பொருள்களைப் பொருக்க வேண்டுமாயின், அவை (abc); (abd); (acd); (bcd) என்ற ஏதாவது ஒரு குவியலாக இருக்கும். இதைத் தவிர வேறெந்த விதத்திலும் மூன்று பொருள்களைச் சேர்க்க முடியாது. இவ்விதமாக எடுத்துச் சேர்த்தலை, சேர்வுகள் (combinations) எனக் கூறுகின்றோம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட நான்கு பொருள்களிலிருந்து ஏதேனும் மூன்று பொருள்களை, நான்கு வெவ்வேறு விதங்களில் சேர்க்கலாம்.

பொதுவாக n வெவ்வேறு பொருள்களினின்று ஏதேனும் r பொருள்களைப் பொருக்கிச் சேர்ப்பது சேர்வு (combination) எனப்படும். எத்தனை விதங்களில் அவ்வாறு n பொருள்களினின்றும் r பொருள்களைப் பொருக்கிச் சேர்க்கலாம் என்பது ${}_nC_r$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். சற்று முன் நாம் கண்டது ${}_4C_3 = 4$. ${}_nC_r$ ஒரு எண்ணிக்கை.

இப்போது அந்த நான்கு பொருள்களில் ஏதேனும் மூன்றை எடுத்து வரிசைகளாக அடுக்கினுல், எத்தனை வெவ் வேறு வரிசைகள் பெறப்படும் ?

(abc) என்ற குவியலை (சேர்வை) எடுத்துக்கொள்வோம். அவற்றை வரிசையாக அடுக்கினுல் abc, acb, bca, bac, cab, cba என்று ஆறு விதங்களில் வரிசையாக அடுக்கலாம்.

அவ்வாறே abd என்ற மற்றொரு குவியலை ஆறு விதங் களில் வரிசையாக அடுக்கலாம். அவ்வாறே acd, bcd என்ற குவியல்களையும் ஆறு, ஆறு விதங்களில் வரிசையாக அடுக்கலாம்.

எனவே, 4 பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவை களில் ஏதேனும் மூன்று பொருள்களை யெடுத்து வரிசையாக அடுக்கினுல் 24 வெவ்வேறு வரிசைகள் பெறப்படும்.

பொதுவாக, n வெவ்வேறு பொருள்கள் கொடுக்கப்பட் டிருப்பின், அவைகளில் சிலவற்றையோ, எல்லாவற்றை யுமோ, வரிசையில் வைப்பதற்கு வரிசை அல்லது அடுக்கு எனப் பெயர். n பொருள்களைக் கொண்டு r, r ...... பொருள் களாக எடுத்து அடுக்கினுல் அல்லது வரிசை மாற்றம் செய் தால், எத்தனை வரிசைகள் உண்டு என்பது ${}_nP_r$ என்ற குறி யீட்டால் குறிக்கப்படும். இப்போது நாம் கண்டது

$${}_4P_3 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24 \text{ ஆகும்.}$$

${}_nP_r$ ஒரு எண்ணிக்கை.

2·3.1 சேர்வுகளுக்கும் வரிசைகளுக்கும் உள்ள வேறு பாடுகள் :

ஒரு சேர்வு என்று கூறும் போது, அச்சேர்வில் எத்தனை பொருள்கள் உள்ளன என்பது மாத்திரம் தான் நாம் கவனிக் கிறேம்.

ஒரு வரிசை என்று கூறும் போது, எத்தனை பொருள்கள் என்பது மட்டுமின்றி, எந்த வரிசையில் அவை அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன என்பதையும் நாம் கவனிக்கவேண்டும். *ab*, *ba* இரண்டும் ஒரே சேர்வுதான். ஆனால் இரண்டு வரிசைகளாகும்.

அவ்வாறே *abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba* யாவும் மூன்று பொருள்கள் கொண்ட ஒரே சேர்வுதான். ஆனால் கூறப்பட்டுள்ள ஆறு அமைப்புக்களும் அம் மூன்று பொருள்களால் அமைக்கப்பட்ட ஆறு வெவ்வேறு வரிசைகளாகும்.

2·3.2 $_nP_r$ ன் மதிப்புக் காணல் :-

n வெவ்வேறு பொருள்களைக் கொண்டு r, r, பொருள்கள் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறு வரிசைகள் அமைக்கலாம், அல்லது எத்தனை விதங்களில் அவைகளை r, r, ஆக அடுக்கலாம் என்பதைக் காண்போம்.

அதுவே $_nP_r$ ன் எண்ணிக்கை.

r கட்டங்கள் உள்ளன வெனக் கொள்வோம்.

□	□	□	……	□
1	2	3		r

எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் ஒவ்வொரு எழுத்து வைத்து வரிசைகள் அமைக்கலாம் என அறிவதே $_nP_r$ ன் மதிப்பைக் காண்பதாகும்.

n எழுத்துக்களில் ஏதேனும் ஒன்றை முதல் கட்டத்தில் வைக்கலாம். ஆகவே முதல் கட்டத்தை n விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம். இப்படி ஏதேனும் ஒரு எழுத்துக் கொண்டு முதல் கட்டத்தை நிரப்பிய பின்பு, எஞ்சியவை $(n-1)$ எழுத்துக்கள். அவைகளில் ஏதேனும் ஒன்றை இரண்டாவது கட்டத்தில் நிரப்பலாம். எனவே, முதல் கட்டத்தை n எழுத்துக்களில் ஏதாமொன்றைக் கொண்டு நிரப்பியபின், இரண்டாவது கட்டத்தை $(n-1)$ விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம்.

எனவே முதலிரண்டு கட்டங்களையும் $n(n-1)$ விதங்களில் நிரப்பலாம். அவ்வாறே முதல் மூன்று கட்டங்களை $n(n-1)(n-2)$ விதங்களிலும், முதல் r கட்டங்களை,

$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ விதங்களிலும் நிரப்பலாம்.

$$\therefore \quad {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

கிளைத் தேற்றம் :

(1) $_nP_n = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-n+2)(n-n+1)$

$= n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1.$

$= \underline{|n}$

(2) $_nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

(3) $\underline{|0} = 1.$

ஏனெனில் $_nP_n = \underline{|n}$.

வாய்பாட்டுப்படி $_nP_n = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}}$ (கிளைத் தேற்றம் 2)

$= \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$

$\therefore \quad \underline{|0} = 1.$

2·3.2.1. எ-கா. (1)

'உலகம்' என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு இரண்டிரண்டு எழுத்துக்களை எத்தனை வரிசைகளில் அமைக்கலாம் ?

நமக்கு வேண்டிய எண்ணிக்கை

$_4P_2 = 4 \times 3$

$= 12.$

எ-கா. (2)

'World' என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எத்தனை வரிசைகள் அமைக்கலாம்? இதில் 'W' என்ற எழுத்து எத்தனை வரிசைகளில் முதலில் வரும்? எத்தனை வரிசைகளில் 'W' என்ற எழுத்து முதலிடத்திலும் 'D' என்ற எழுத்து கடைசியிடத்திலும் வரும்?

இங்கு 5 எழுத்துக்களும் ஒருங்கே எடுத்துக் கொள்ளப் படுகின்றன.

எனவே வேண்டிய எண்ணிக்கை $= {_5P_5}$

$= |5$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 120$$

'W' என்ற எழுத்தை முதலிடத்தில் நிலைநிறுத்திவிடுவோம். மீதி இருக்கும் 4 எழுத்துக்களை $\underline{|4}$ விதங்களில் வரிசைமாற்றம் செய்து அடுக்கலாம். எனவே 'W' முதலெழுத்தாக $\underline{|4}$ அல்லது 24 வரிசைகளில் வரும்.

W-ஐ முதலிடத்திலும். 'D' ஐ கடைசி இடத்திலும் நிலை நிறுத்தி விடுவோம். எஞ்சியிருக்கும் 3 எழுத்துக்களை, 'W' க்கும் 'D' க்கும் இடையில் $\underline{|3}$ விதங்களில் வரிசை மாற்றம்செய்யலாம். எனவே 'W' முதலிடத்திலும் 'D' கடைசியிடத்திலும் $\underline{|3}$ அல்லது 6 வரிசைகளில் வரும்.

எ-கா. (3)

0, 5, 6, 7, 8 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க முழு எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை எண்கள் 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடாதவை யெனவும் எத்தனை ஒற்றைப்படை எண்களெனவும் அறிக.

நான்கு கட்டங்கள் □ □ □ □ கொள்வோம். 0, 5, 6, 7, 8 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க எண்கள் அமைக்கும் போது '0' ஐ முதலிடத்தில் கொள்ள முடியாது. ஏனெனில் எந்த முழு எண்ணிற்கும் '0' முதல் இலக்கமாக அமையமுடியாது. எனவே முதல் கட்டத்தை மீதியுள்ள நான்கு இலக்கங்களில், ஏதேனும் ஒன்றைக் கொண்டு நான்கு வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்ப முடியும். அப்படி ஏதேனும் ஒரு விதத்தில் முதல் கட்டத்தை நிரப்பிய பின்பு '0' உட்படவுள்ள எஞ்சிய நான்கு இலக்கங்களில், ஏதேனும் ஒன்றைக் கொண்டு நான்கு வெவ்வேறு விதங்களில் இரண்டாவது கட்டத்தை நிரப்பமுடியும். (ஏனெனில் ஒரு முழு எண்ணில் முதலிடம் தவிர மற்றெந்த இடத்திலும் '0' வரலாம்). பிறகு மூன்றும் கட்டத்தை, எஞ்சிய மூன்று இலக்கங்களில் ஏதேனும் ஒன்று கொண்டு மூன்று வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்ப முடியும். அவ்வாறே கடைசிக் கட்டத்தை, இரண்டு வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்ப முடியும். எனவே

$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ வெவ்வேறு நான்கிலக்க எண்கள் பெறப்படும்.

இந்த 96 எண்களில் 5-ஆல் வகுபடாத எண்கள் காண, 5-ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு 96-ல் கழிக்க, வேண்டிய எண்ணிக்கை கிடைக்கும்.

5-ஆல் வகுபட வேண்டுமாயின், கடைசி இலக்கம் 5 அல்லது 0 என இருக்கவேண்டும். இவைகளின் எண்ணிக்கையைப் பின்வருமாறு காண்போம்.

கடைசியிலக்கம் 0 : கடைசியிடத்தில் 0 ஐ நிலைபெறச் செய்க. முதல் மூன்று இடங்களை $4 \times 3 \times 2 = 24$ விதங்களில் நிரப்பலாம். எனவே 0-ல் முடியுமெண்கள் 24.

கடைசியிலக்கம் 5 : கடைசியிடத்தில் 5-ஐ நிலை பெறச் செய்க. முதல் இடத்தை 0 விலக்கி 3 விதங்களில் நிரப்பலாம். 0 உட்பட இரண்டாவது மூன்ருவது இடங்களை முறையே 3, 2 விதங்களில் நிரப்பலாம். ஆகவே 5-ல் முடியுமெண்கள் $3 \times 3 \times 2 = 18$.

எனவே நாம் அமைத்த 96-எண்களில் $24+18=42$ எண்கள் 5-ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடியவை. எனவே 5-ஆல் வகுபடாத எண்களின் எண்ணிக்கை $96 - 42 = 54$ ஆகும். ஏதாமொரு ஒற்றைப்படை எண்ணை இறுதியில் கொண்ட எண்களனைத்தும் ஒற்றைப்படை எண்களாகும். கடைசியிடத்தில் 5 அல்லது 7 வரும் போது அவ்வெண் ஒற்றைப்படை எண்ணுகும். 5, 7 கொண்டு கடைசி இடத்தை இரண்டு விதங்களில் நிரப்பலாம், '5' ஐ ஈற்றிலக்கமாகக் கொண்ட எண்களின் எண்ணிக்கை 18 எனச் சற்றுமுன் பார்த்தோம். அவ்வாறே '7' ஐ ஈற்றிலக்கமாகக் கொண்ட எண்களின் எண்ணிக்கையும் 18 ஆகும். எனவே நாம் கண்ட 96 எண்களில் $18 + 18 = 36$ எண்கள் ஒற்றைப்படை யெண்களாகும்.

எ-கா. (4)

n மாணவர்களை ஒரு வரிசையில் நிறுத்தும்போது எத்தனை வரிசை மாற்றங்களில் இரண்டு குறிப்பிட்ட மாணவர்கள் A, B அடுத்தடுத்து நிற்பார்கள்?

(AB) அல்லது (BA) என்ற வரிசையில் அவர்களை ஒரு தனிக் கூட்டு அல்லது ஒரே ஒரு உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

எனவே $(n-1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன வெனக் கொள் வோம். இவைகளை $\underline{|n-1}$ விதங்களில் வரிசைப் படுத்த லாம். (AB) என்ற கூட்டுக்கு $\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களும், (BA) என்ற கூட்டுக்கு $\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களும் கிடைக்கும்.

எனவே A, B இருவரும் $2\underline{|n-1}$ வரிசை மாற்றங்களில் அடுத்தடுத்து (AB) என்ற வரிசையிலோ, (BA) என்ற வரிசையிலோ இருப்பார்கள்.

எ–கா. (5)

1, 2, 3, 4 என்ற எண்களை எத்தனை முறைகள் வேண்டு மானாலும் பயன்படுத்தி எத்தனை ஐந்திலக்க எண்கள் அமைக் கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 20,000 க்கு மேற்பட்டிருக்கும்?

ஐந்து கட்டங்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். முதல் கட்டத்தை 4 விதங்களில் நான்கு எண்களைக் கொண்டு நிரப்ப லாம். ஒரே எண்ணை எத்தனை முறைகள் வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாமாதலின் இரண்டாவது கட்டத்தையும் 4 விதங்களில் நிரப்பலாம். அவ்வாறே மூன்றாவது, நான்கா வது, ஐந்தாவது கட்டங்களும். எனவே ஐந்திலக்க எண்கள் $4\times4\times4\times4\times4=1024$ ஆகும்.

அவ்வெண்கள் 20,000 க்கு மேற்பட்டு இருக்க வேண்டு மாயின் முதல் கட்டத்தில் 1 இருக்கக் கூடாது. 2, 3, 4 ஆகிய மூன்று எண்களில் எதுவேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். எனவே முதல் கட்டத்தை மூன்று விதத்திலும் மற்ற நான்கு, கட்டங்களையும் நான்கு, நான்கு விதங்களில் நிரப்பலாம். எனவே 20,000 க்கு மேற்பட்ட ஐந்திலக்க எண்களின் எண் ணிக்கை $3\times4\times4\times4\times4=768$ ஆகும்.

எ–கா. (6)

${}_nP_r = n\times {}_{n-1}P_{r-1}$ என்பதை நேரடியாக நிறுவுக. வாய் பாடுகளைக் கொண்டு சரிபார்க்க.

r கட்டங்கள் கொள்க:

□ | □ □ ...... □
1 | 2 3 r

இவைகளில் முதல் கட்டத்தைத் தனியாகவும், மீதி $(r-1)$ கட்டங்களை ஒரு கூட்டாகவும் கொள்க.

முதல் கட்டத்தை n விதங்களில் ஏதாமொரு விதத்தில் நிரப்பலாம்.

வரையறைப்படி மீதி $(r-1)$ கட்டங்களை எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களைக் கொண்டு ${}_{n-1}P_{r-1}$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

எனவே முதல் செயலை n விதங்களிலும் இரண்டாவது செயலை ${}_{n-1}P_{r-1}$ விதங்களிலும் செய்ய முடியுமாதலின், r கட்டங்களையும் $n \times {}_{n-1}P_{r-1}$ விதங்களில் நிரப்பலாம்.

$$\therefore \quad {}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}.$$

வாய்பாட்டுப்படி,

$${}_nP_r = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-r+1)$$

$${}_{n-1}P_{r-1} = (n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(\overline{n-1}-\overline{r-2})$$

$$= (n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-r+1)$$

$$\therefore \quad n \times {}_{n-1}P_{r-1} = n \times (n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-r+1)$$

$$= {}_nP_r.$$

பயிற்சி 2 (ii)

1. மதிப்பிடுக.

(i) ${}_{10}P_5$ (ii) ${}_{n+1}P_n$ (iii) ${}_{n+r}P_n$.

2. 'மதிப்பீடு' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவற்றையும் எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்? அவைகளில் எத்தனை வரிசைகளில் 'ம' முதலிலும் 'டு' கடைசியிலும் வரும்?

3. 0, 3, 4, 5 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு எத்தனை நான்கிலக்க முழு எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை எண்கள் 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்?

4. 3, 4, 5, 6, 7 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு நான்கு இலக்க எண்கள் எத்தனை, ஐந்திலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? நான்கிலக்க எண்களில் எத்தனை 5,000 க்கு

மேற்பட்டிருக்கும்? ஐந்திலக்க எண்களில் எத்தனை 50,000 க்குக் குறைந்தன வாயிருக்கும்?

5. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களைக் கொண்டு நான்கிலக்க எண்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை இரட்டைப்படை யெண்கள்?

6. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு 1,000 க்கு மேற்பட்டு 10,000 க்கு மேற்படாமல் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 5 ஆல் மீதியின்றி வகுபடக் கூடியவை?

7. 10 மாணவர்களை ஒரு வரிசையில் நிறுத்தவேண்டும். அவ்வரிசை மாற்றங்களில், குறிப்பிட்ட (1) இரு மாணவர்கள், (2) மூன்று மாணவர்கள் அடுத்தடுத்து எத்தனை வரிசைகளில் நிற்கமாட்டார்கள்?

8. ஒரு தேர்வுக்கு 12 கேள்வித்தாள்கள் உண்டு. குறிப்பிட்ட இரு கேள்வித்தாள்கள் அடுத்தடுத்து வராதபடி எத்தனை விதங்களில் அத்தேர்வை நடத்தலாம்?

9. 'உலகம்' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவும் வரிசை மாற்றம் செய்து அகர வரிசையில் அடுக்கப்படுகின்றன. 'உலகம்' என்ற சொல் எத்தனையாவது சொல்லாக விருக்கும்?

10. 'SALEM' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவும் வரிசை மாற்றம் செய்து அகராதி வரிசையில் அடுக்கப்படுகின்றன. அதில் 'SALEM' என்ற சொல் எத்தனையாவது இடம் பெறும்?

11. 'இயற் கணிதம்' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களை மெய்யெழுத்துக்கள் தம் இடம் பெயராது எத்தனை வரிசைகளில் அடுக்கலாம்?

12. 'WONDERFUL' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில், உயிரெழுத்துக்கள் (Vowels) தம் இடம் பெயராது எத்தனை வரிசைகளில் அடுக்கலாம்?

13. 4, 3, 5, 6 என்ற எண்களை எத்தனை முறைகள் வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தி எத்தனை ஐந்திலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 50,000 க்கு மேற்பட்டிருக்கும்?

14. எட்டு உருளைகளை வைக்க எட்டு பெட்டிகள் உள்ளன. ஐந்து உருளைகள் பெரிதானதால் மூன்று குறிப்பிட்ட பெட்டிகளில் வைக்க முடியாது. எத்தனை விதங்களில் உருளைகளைப் பெட்டிகளில் வைக்கலாம்?

15. 10 புத்தகங்களை ஒரு புத்தகத்தட்டில் (Book Shelf) வரிசையாக அடுக்கவேண்டும். அதில் 5 கணிதம், 3 வரலாறு, 2 பொருளாதார நூல்கள். ஒவ்வொரு பொருளைப் பற்றிய நூல்களும் அடுத்தடுத்து இருக்க வேண்டுமானால், எத்தனை விதங்களில் அடுக்கலாம்?

16. பின்வருவனவற்றை நேரடியாக நிறுவுக: வாய்பாடு கொண்டு சரிபார்க்க.

(i) ${}_{n}P_{r} = {}_{n-1}P_{r} + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$

(ii) ${}_{n}P_{r} = (n-r+1) \times {}_{n}P_{r-1}$

(iii) ${}_{(n+1)}P_{r} = {}_{n}P_{r} + r \cdot {}_{n}P_{r-1}$

(iv) ${}_{n+1}P_{r+1} = (n+1) \cdot {}_{n}P_{r}$

17. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் எல்லா இரட்டைப்படை எண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

18. 2, 3, 4, 5 என்ற எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகை யென்ன?

19. 1, 2, 3, ... 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு எல்லா ஒன்பதிலக்க எண்களும் பின்கண்ட நிபந்தனைகளின் கீழ் அமைக்கப்படுகின்றன. (1) கடைசியில் இரண்டு இரட்டைப் படை எண்கள் இருக்கவேண்டும். (2) எண்களை இடது புறமிருந்து வலது புறம் படிக்கும்போது ஒற்றைப்படை யெண்கள் உயர்ந்து செல்லும் வரிசையில் இருக்கவேண்டும். அப்படி 504 எண்கள் உள்ளன என நிறுவுக.

20. ${}_{n}P_{5} = 24 \times {}_{n}P_{4}$ ஆனால் n மதிப்பென்ன?

21. ${}_{m+n}P_{2} = 156$; ${}_{m-n}P_{2} = 20$ ஆனால் m, n மதிப்பென்ன?

22. $\lfloor 2n = 2^{n} \lfloor n \, (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots \overline{2n-1})$ என நிறுவுக.

சேர்வுகள் (Combinations)

2·4 ${}_nC_r$-ன் மதிப்புக் காணல் :

n வெவ்வேறு பொருள்களைக் கொண்டு, எத்தனை விதமாக, r பொருள்கள் பொருக்கலாம் அல்லது சேர்க்கலாம் என்பதே ${}_nC_r$-ன் மதிப்புக் காணலுக்குச் சமமாகும்.

${}_nC_1 = n$ என்பதும் ${}_nC_n = 1$ என்பதும் தெளிவு.

2·4.1 ${}_nP_r$-ன் மதிப்பைக் கொண்டு ${}_nC_r$ மதிப்புக்காணல் :

n வெவ்வேறு பொருள்களினின்றும் ஒரு சமயத்தில் r பொருள்களாக ${}_nC_r$ முறைகளில் பொருக்கலாம் என வைத்துக் கொள்வோம். (${}_nC_r$ன் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாது). அப்படி சேர்க்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட சேர்வை எடுத்துக் கொள்வோம். அச் சேர்வில் உள்ள r பொருள்களை $\underline{|r}$ முறைகளில் வரிசை மாற்றியமைக்கலாம் என நாம் அறிவோம்.

இவ்வாறே ${}_nC_r$ சேர்வுகளில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள r பொருள்களை வரிசை மாற்றி அடுக்கினால் மொத்தம் ${}_nC_r \times \underline{|r}$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும். ஆனால் இவைகள் யாவும் n பொருள்களினின்று r பொருள்கள் எடுத்து அமைக்கும் வரிசை மாற்றங்களே யாகும்.

$$\text{எனவே } {}_nC_r \times \underline{|r} = {}_nP_r$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r} \, . \, \underline{|r}} \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

இந்த முடிவைப் பெற நாம் ${}_nP_r$ ன் மதிப்பைப் பயன் படுத்தினோம்.

2·4.2 நேரடியாக ${}_nC_r$ மதிப்புக் காணல் :

இப்போது ${}_nP_r$ ன் மதிப்பையோ, r பொருள்களை $\underline{|r}$ முறைகளில் வரிசை மாற்றியமைக்கலாம், என்ற முடிவையோ பயன்படுத்தாமல் நேரடியாக ${}_nC_r$ ன் மதிப்பைக் காண முற்படுவோம்.

முதலில் $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ என்பதை நிறுவுவோம். ${}_nC_r$ சேர்வுகளையும் எழுதிவிட்டதாகக் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சேர்விலும் r எழுத்துக்கள் இருக்கும். ஆகவே ${}_nC_r$ சேர்வுகள் எல்லாவற்றிலும் உள்ள எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $r \times {}_nC_r$ ஆகும்.

இப்போது மற்றொரு முறையில் ${}_nC_r$ சேர்வுகளிலும் பயன்படுத்தப்பட்ட எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

${}_nC_r$ சேர்வுகள் எல்லாவற்றிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து a_s (அல்லது எந்த எழுத்தாயினும் சரி) எத்தனை முறை தோன்றுகிறது எனப் பார்ப்போம். அதையறிய, a_s என்ற எழுத்தை விலக்கி, மீதியுள்ள $(n-1)$ எழுத்துக்களினின்றும் $(r-1)$ எழுத்துக்களாகப் பொருக்கி எல்லா ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளையும் கண்டு பிடித்து, அவற்றில் ஒவ்வொரு சேர்வுக்கும் a_s என்ற எழுத்தைச் சேர்த்து விட்டால் இப்படி ஏற்பட்ட சேர்வுகள் ஒவ்வொன்றிலும் a_s என்ற எழுத்தும் மற்றும் $(r-1)$ எழுத்துக்களும் இருக்கும். ஆகவே முன் காணப்பட்ட ${}_nC_r$ சேர்வுகளில் ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளில் a_s என்ற எழுத்து தோன்றும். a_s ஐப் பற்றிய இம் முடிவு $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற ஒவ்வொரு எழுத்துக்கும் பொருந்தும் என்பதும் தெளிவு. எனவே $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற எழுத்துக்கள் ஒவ்வொன்றும் ${}_{n-1}C_{r-1}$ சேர்வுகளில் உள்ள எழுத்துக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ ஆகும். இவ்வெண்ணிக்கையை முன்னர் $r \times {}_nC_r$ எனக் கண்டோம்.

எனவே $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ என்ற முடிவு பெறப்படும்.

இந்த முடிவு, r க்கு உள்ள எந்த முழு எண் மதிப்புக்கும் பொருந்தும். ஆனால் $r \leq n$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. (ஏனெனில் $r > n$ ஆனல், n பொருள்களினின்று, n க்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் பொருக்கிச் சேர்க்க முடியாது).

எனவே $r \leq n$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு

$$r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

அதாவது $${}_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

இப்போது n க்குப் பதிலாக $n-1$, $n-2$, ... என்ற மதிப்புகளையும் ஈடு செய்யப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$_nC_r = \frac{n}{r} \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

$$_{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}_{n-2}C_{r-2}$$

$$_{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}_{n-3}C_{r-3}$$

....

$$_{n-\overline{r-2}}C_2 = \frac{n-\overline{r-2}}{2} \times {}_{n-\overline{r-1}}C_1$$

ஆனல் $_nC_1 = n$ என்பது வெளிப்படை. ஆகவே கடைசியாக உள்ள $_{n-\overline{r-1}}C_1 = {}_{n-r+1}C_1 = n-r+1$ ஆகும்.

இருபக்கங்களையும் தொடர்ச்சியாகப் பெருக்கிப் பொது உறுப்புக்களை நீக்க,

$$_nC_r = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \cdots\cdots \frac{n-r+2}{2} \times {}_{n-r+1}C_1$$

$$= \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \cdots\cdots \frac{n-r+2}{2} \cdot \frac{n-r-1}{1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 1} \times \frac{\underline{|n-r}}{\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$$ எனப் பெறப்படும். (வாய்பாடு)

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(i) $_nCr = {}_nC_{n-r}$ (வாய்பாடு)

r பொருள்களைச் சேர்ப்பதற்காகப் பொருக்கும் ஒவ்வொரு தடவையும் $(n-r)$ பொருள்கள் தவிர்க்கப்பட்டு நம்மை அறியாமலேயே $\underline{n-r}$ பொருள்கள் 'தவிர்க்கப்பட்டு' பொருக்கப்பட்டு விடுகின்றன. எனவே $_nC_r = {}_nC_{n-r}$

இதை $_nC_r$ ன் மதிப்பு வாய்பாட்டிலிருந்தும் நேரடியாகக் காணலாம்.

$$_{n}C_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}$$

$$_{n}C_{n-r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|n-\overline{n-r}}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|r}}$$

$$\therefore \quad {}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$$

(ii) $_{n}C_{0} = 1.$ (வாய்பாடு)

$$_{n}C_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}$$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \quad {}_{n}C_{0} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}\;\underline{|n}}$$

ஆனால் $\underline{|0} = 1$ என நாம் முன் ஏற்றுக் கொண்டோம்.

$$\therefore \quad {}_{n}C_{0} = \frac{\underline{|n}}{1 \,.\, \underline{|n}}$$

$= 1$ ஆகப் பெறப்படும்.

2·4.2.1 எ.கா. (1)

$_{20}C_{r+4} = {}_{20}C_{2r-4}$ ஆனால் r மதிப்பென்ன?

$_{20}C_{r+4} = {}_{20}C_{2r-4}$ ஆனபடியால்

$$r + 4 = 2r - 4$$

$$\therefore \quad r = 8$$

எ.கா. (2)

n பக்கங்கள் உள்ள பல்கோணத்தில் எத்தனை மூலை வரைகள் உள்ளன? அப்பல்கோணத்தில் உச்சிகளை இணைப்பதால், எத்தனை முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்?

n உச்சிகளை இரண்டிரண்டாகச் சேர்த்தால் ${}_nC_2$ கோடுகள் கிடைக்கும். அவைகளில் n பக்கங்கள் போக மீதி ${}_nC_2 - n$ மூலை வரைகள் கிடைக்கும்.

மூலை வரைகளின் எண்ணிக்கை $= {}_nC_2 - n$

$$= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - n$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

மூன்று, மூன்று புள்ளிகளாகப் பொருக்கி இணைத்தால் முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்.

∴ முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}_nC_3$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor 3 \cdot \lfloor n-3}$$

எ–கா. (3)

8 இந்தியரும் 8 பர்மியரும் உள்ள ஒரு சபையிலிருந்து எத்தனை விதங்களில் 13 பிரதிநிதிகள் தேர்ந்தெடுக்கலாம்? அவர்களுள் குறைந்தது ஒரு நாட்டவரில் 6 பிரதிநிதிகளேனும் இருக்க வேண்டுமானல், எத்தனை விதங்களில் அப்பதின் மூன்று பிரதிநிதிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

8 இந்தியரும் 8 பர்மியரும் உள்ள சபையில் இருப்பவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 16. இதில் 13 பிரதிநிதிகளை $16C_{13}$ விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

அதாவது, ${}_{16}C_{13} = {}_{16}C_{16-13}$

$$= {}_{16}C_3$$

$$= \frac{16 \times 15 \times 14}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 560$$

∴ 13 பிரதிநிதிகளை 560 விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

ஒரு நாட்டவரில் 6 பிரதிநிதிகளேனும் இருக்க வேண்டு மானால்,

6 இந்தியர் 7 பர்மியர் (A)

அல்லது 7 இந்தியர் 6 பர்மியர் (B)

என்ற முறைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

(A) 6 இந்தியர்களை ${}_8C_6$ விதங்களிலும் 7 பர்மியரை ${}_8C_7$ விதங்களிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இவ்விரண்டும் தனித் தனிச் செயல்கள்: ஆகவே 6 இந்தியரையும் 7 பர்மியரையும் ${}_8C_6 \times {}_8C_7$ விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவ்வாறே 7 இந்தியரையும் 6 பர்மியரையும் ${}_8C_7 \times {}_8C_6$ விதங்களில் தேர்ந் தெடுக்கலாம்.

எனவே 13 பிரதிநிதிகளை, குறைந்தது ஒரு நாட்டவரில் அறுவரேனும் கொண்டு,

$${}_8C_6 \times {}_8C_7 + {}_8C_7 \times {}_8C_6 = 2 \times {}_8C_6 \times {}_8C_7 = 2 \times 224 = 448$$

விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எ-கா. (4)

ஓர் இரட்டைத்தள உந்து வண்டியில் (Double decker bus) ஒவ்வொரு தளத்திலும் 15 இடங்கள் காலியுள்ளன. வண்டியில் 30 பேர் ஏற இருக்கிறார்கள். ஆனால் அவர்களுள் 10 பேர் அடித்தளத்தில் உட்கார மறுக்கிறார்கள். மேலும் 10 பேர் உயர் தளத்தில் உட்கார மறுக்கிறார்கள். எத்தனை விதங் களில் அவர்கள் விருப்பத்தை யொட்டி அவர்களை உட்கார வைக்கலாம்?

அடித் தளத்தில் உட்கார மறுக்கும் 10 பேர்களை மேல் தளத்தில் உட்கார வைத்து விட்டு, மேல் தளத்தில் உட்கார மறுக்கும் 10 பேர்களை அடித் தளத்தில் உட்கார வைத்து விடு வோம். மீதி இருக்கும் 10 பேர்களில் ஏதாவது 5 பேர்களை அடித்தளத்தில் உட்கார வைத்து விட்டால், மற்ற 5 பேர்கள் தானாக மேல்தளத்தில் உட்கார்ந்து விடுவார்கள்.

10 பேர்களில் 5 பேரை ${}_{10}C_5$ விதங்களில் பொருக்கி அடித்தளத்தில் உட்கார வைக்கலாம். மீதி 5 பேரும் மேல் தளத்தில் போய் விடுவார்கள்.

ஆகையால் $_{10}C_5 = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$

$$= 252$$

விதங்களில் அவர்களை உட்கார வைக்கலாம்.

எ–கா. (5)

r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $\underline{|r}$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடுமென நிறுவுக.

r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்கள்,

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots\ldots\ n+r-1$$

எனக் கொள்க. அவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= n(n+1)\,(n+2)\ \ldots\ldots\ (n+r-1)$$

$$= \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-1}}\, n(n+1)\,(n+2)\ \ldots\ldots\ (n+r-1)$$

$$= \frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|n-1}}$$ ஆகும்.

இதை $\underline{|r}$ ஆல் வகுத்தால்,

$$\text{ஈவு} = \frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|n-1}\ \underline{|r}}$$

$$= {}_{n+r-1}C_r.$$

இது ஒரு கூட்டு முழு எண். ஏனெனில் இது ஒரு குறிப்பிட்ட சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை. ஆகவே r அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $\underline{|r}$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

பயிற்சி 2 (iii)

1. பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க :

(i) $_{16}C_{14}$

(ii) $_{100}C_{98}$

(iii) $_{99}C_1$

(iv) $_{10}C_8$

2. $_nC_2 = 153$ ஆனல் n என்ன?

3. $_{n+1}C_2 = \frac{9}{40} \times {}_nC_3$ ஆனல் n மதிப்பென்ன?

4. ஒரு கோட்டின் மேல் m புள்ளிகள் உள்ளன. அதற்கு இணையாகவுள்ள மற்றொரு கோட்டின் மேல் n புள்ளிகள் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

5. 10 மாம்பழங்கள் உள்ளன. அவைகளில் மிகப் பெரியது ஒன்று. மிகச் சிறிது ஒன்று. (1) மிகப் பெரியதையும் மிகச் சிறியதையும் சேர்த்து எத்தனை விதங்களில் 6 பழங்கள் எடுக்கலாம்? (2) அவ் விரண்டையும் விலக்கி, எத்தனை விதங்களில் 6 பழங்கள் எடுக்கலாம்?

6. 10 இந்தியரும், 5 அரபியர்களும் உள்ள ஒரு குழுவிலிருந்து, இந்தியர்கள் பெருவாரியாக உள்ள 7 பேர் கொண்ட ஒரு உட்குழு அமைக்க வேண்டும். எத்தனை விதங்களில் இந்த உட்குழு அமைக்கப்படலாம்?

7. 7 கணிதம், 3 ஆங்கிலப் புத்தகங்களிலிருந்து 4 கணிதம், ஒரு ஆங்கிலப்புத்தகம் பொருக்கி, ஒரு புத்தகத் தட்டில் எத்தனை விதங்களில் அடுக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை அடுக்குகளில் ஆங்கிலப் புத்தகம் நடுவில் இருக்கும்?

8. 8 ஆண்களும் 5 பெண்களும் ஒரு அலுவலகத்தில் 6 காலி இடங்களுக்கு மனுச் செய்கிறார்கள். ஆண்களும் பெண்களும் சமமாக எடுக்க வேண்டுமாயின், எத்தனை விதங்களில் எடுக்கலாம்?

9. 10 பேர் இரண்டு வண்டிகளில் செல்ல வேண்டும். ஒரு வண்டியில் 4 பேருக்கு மேல் போக முடியாது. மற்றொரு வண்டியில் 8 பேருக்கு மேல் போக முடியாது. எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் செல்லலாம்?

10. ஒரு விருந்துக்கு வந்த 16 பேர், ஒரு மேசையில் இரு பக்கங்களிலும் 8, 8 பேராக உட்கார வேண்டும். அதில் மூவர்

மேசையின் வலது புறத்தில் உட்கார விரும்புகிறார்கள்; இருவர் மேசையின் இடது புறத்தில் உட்கார விரும்புகிறார்கள்; எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் சாப்பிட உட்காரலாம்?

11. m ஆண்களும், n பெண்களும் ஒரு வரிசையில் உட்கார வேண்டும். இரண்டு பெண்கள் கூட அடுத்தடுத்து உட்காரக் கூடாது. $m<n$ ஆனால் அவர்கள் $\frac{\underline{|m} \cdot \underline{|m+1}}{\underline{|m-n+1}}$ விதங்களில் உட்காரலாம் என நிறுவுக.

12. 7 ஆண்கள், 8 பெண்கள் உள்ள சபையின் சார்பில் 4 ஆண்கள், 3 பெண்கள் உள்ள ஒரு குழு அமைக்க வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண் மகன் A அக் குழுவிலிருந்தால் B என்ற ஒரு பெண் மகள் அக் குழுவிலிருக்க மறுக்கிறாள். எத்தனை விதங்களில் அக்குழு அமைக்கலாம்?

13. 52 சீட்டுகளை நான்கு சம பகுதிகளாக எத்தனை விதங்களில் பிரிக்கலாம்? எத்தனை விதங்களில் நாலு பேர்களுக்குச் சமமாகப் பங்கிடலாம்?

14. 8 புத்தகங்களை நான்கு, நான்காக எத்தனை விதங்களில் பிரிக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை விதங்களில் ஒரு குறிப்பிட்ட புத்தகம் தோன்ற இடமுண்டு?

15. ஓர் ஒரு ரூபாய், ஒரு 50 பைசா, ஒரு 25 பைசா, ஒரு 10 பைசா நாணயங்களை வைத்துக் கொண்டு எத்தனை விதங்களில் ஒருவருக்குப் பணம் கொடுக்கலாம்?

முன் கண்டவைகளைத் தொடர்ந்து இன்னும் சில வாய்பாடுகள் காண்போம்.

2·5.1 வரிசை மாற்றங்கள்:

தேற்றம் 1

ஒரு பொருள் எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் ஒரு வரிசையில் தோன்றலாமாயின், n வெவ்வேறு பொருள்கள் கொண்டு, r பொருள்கள் கொண்ட வெவ்வேறு வரிசைகள் அமைத்தால், அவ்வரிசைகளின் எண்ணிக்கை n^r.

r கட்டங்கள் உள்ளன வெனக் கொள்வோம்.

□ □ □ ...... □

1 2 3 r

n வெவ்வேறு பொருள்களை n வெவ்வேறு எழுத்துக்கள் எனக் கொள்வோம். முதல் கட்டத்தில் n எழுத்துக்களில் ஏதேனும் ஒன்றை வைக்கலாம். அதாவது முதல் கட்டத்தை n வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்பலாம். அப்படி ஏதேனும் ஒரு எழுத்து கொண்டு முதல் கட்டத்தை நிரப்பிய பின்பு, இரண்டாம் கட்டத்தையும் n வெவ்வேறு விதங்களில் நிரப்பலாம். ஏனெனில், ஒரு எழுத்து எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் ஒரு வரிசையில் தோன்றலாம் எனக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, இரண்டாவது கட்டத்தையும் n விதங்களில் ஏதாவது ஒரு விதத்தில் நிரப்பலாம். இவ்வாறே r கட்டங்களுக்கும் இது பொருத்தமாகும். எனவே அடிப்படை விதிப்படி r கட்டங்களை n^r விதங்களில் நிரப்பலாம். எனவே n^r வெவ்வேறு வரிசைகள் கிடைக்கும்.

கிளைத் தேற்றம் : இதே முறையில் n கட்டங்கள் n^n விதங்களில் நிரப்பப் படலாம். எனவே n பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்டு $n, n, \ldots\ldots$ பொருள்களாக, எவ்விதக் கட்டுப்பாடுமில்லாமல் வரிசைப்படுத்த n^n வரிசைகள் கிடைக்கும்.

2·5.2 தேற்றம். 2.

n பொருள்களில், p ஒரேமாதிரிப் பொருள்களாகவும், q மற்றோர் மாதிரியாகவும், r மற்றோர் மாதிரியாகவும் கொடுக்கப்பட்டால் எல்லாப் பொருள்களையும் கொண்டு செய்யக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\ \underline{|q}\ \underline{|r}}$.

[இதை நிறுவுவதற்கு முன்பு, ஒரு எளிய எடுத்துக்காட்டு கொண்டு விளக்கம் செய்து விட்டு, பின்னர் இத் தேற்றத்தை முறையாக நிறுவுவோம்.]

AABC என்ற நான்கு எழுத்துக்கள் கொள்வோம். இங்கு A, A என்ற இரண்டு எழுத்துக்களும் வெவ்வேறல்ல. இப்போது ABCA என்ற வரிசையை யெடுத்துக் கொள்ளுங்கள். இங்கு BC ஐ இடம் மாற்ருது வைத்துக் கொண்டு முதல்A ஐக் கடைசியிலும், கடைசி A ஐ முதலிலும் மாற்றியமைத்தால், புதியதோர் வரிசை கிடைக்காது. அல்லாமல் A_1, A_2 என அந்த இரண்டு A க்களும் வெவ்வேருயின்

$$A_1BCA_2$$
$$A_2BCA_1$$

என இரண்டு வெவ்வேறு வரிசைகள் என்று கணக்கிடுவோம்.

எனவே, இரண்டு A க்களும் ஒன்ருகக் கொள்வதால் கிடைக்கப்பெறும் ஒரே வரிசை, அவைகள் வெவ்வேருயின் இரண்டு (வெவ்வேறு) வரிசைகளாகக் கணக்கிடப்படும்.

இப்போது A_1A_2BC என்று எழுத்துக்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\underline{|4} = 24$ என நாம் அறிவோம்.

இப்போது AABC என்ற எழுத்துக்களைக் கொண்டு

AABC	BACA
AACB	CABA
ABCA	BAAC
ACBA	CAAB
BCAA	ABAC
CBAA	ACAB

என்ற 12 வெவ்வேறு வரிசைகள்தான் அமைக்கலாம். சற்று கவனித்தால், A, A என்பவை வெவ்வேருன A_1, A_2 என இருப்பின், மேல் எழுதியுள்ள ஒவ்வொரு வரிசையும் இரண்டு புது வரிசைகளுக்கு இடம் தரும்.

எடுத்துக் காட்டாக, கடைசி வரிசை ACAB ல் A, A ஐ ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றுவதால் வெவ்வேறு வரிசைகள் வராது. ஆனுல் A_1CA_2B எனவிருப்பின் A_1, A_2 ஐ ஒன்றுக் கொன்று இடம் மாற்றுவதால் A_1CA_2B ; A_2CA_1B என இரண்டு வெவ்வேறு வரிசைகள் வரும்.

இது அப்பன்னிரண்டு வரிசைகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே A, A வெவ்வேருயின் 12×2 வெவ்வேறு வரிசைகள் பெறப்படும். இதுவே $\underline{|4}$ க்குச் சமம், அதாவது நான்கு எழுத்துக்களும் வெவ்வேருயின் பெறப்படும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கையாம்.

இப்போது, இதேவிதமாக, பொதுவான தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.

n எழுத்துக்கள் : AAA ...... p எழுத்துக்கள்
BBB ...... q எழுத்துக்கள்
CCC ...... r எழுத்துக்கள்

எனக் கொள்வோம்.

இவைகள் யாவற்றையும் கொண்டு, நாம் அமைக்கக் கூடிய வெவ்வேறு வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை x

எனக் கொள்வோம். இந்த x வரிசை மாற்றங்களில் ஏதேனும் ஒரு வரிசையைத் தனியாக எடுப்போம்.

அதில் உள்ள A க்களை மாத்திரம் $A_1 A_2, \ldots\ldots A_p$ என மாற்றுவோம். இப்போது அவ்வரிசையிலுள்ள B, C க்களை இருக்குமிடத்திலேயே நிலையாக்கி, A க்களை மாத்திரம் இடம் மாற்றினால் $\underline{|p}$ புது வரிசைகள் கிடைக்கும்.

ஆனால் இவ்வாறு x வரிசைகள் உள்ளன என முதலில் கொண்டோம். இவைகள் யாவற்றிலும் A க்களை $A_1, A_2 \ldots\ldots A_p$ என மாற்றி, அவைகளை இடம் மாற்றினால் $x\,\underline{|p}$ வெவ்வேறு வரிசைகள் வரும்.

இந்த $x\,\underline{|p}$ வரிசைகளில் ஏதாமொரு வரிசையை யெடுத்து, அதிலுள்ள B க்களை $B_1, B_2, \ldots\ldots B_q$ என மாற்றி அவைகளை இடம் மாற்றினால் $\underline{|q}$ வெவ்வேறு வரிசைகள் வரும். $x\,\underline{|p}$ வரிசைகள் யாவற்றிலும் இதைச் செய்தால் மொத்தம் $x\,\underline{|p}\,\underline{|q}$ வெவ்வேறு வரிசைகள் வரும். இவ்வாறே C க்களையும் மாற்றினால் ($C_1, C_2, \ldots\ldots C_r$ என மாற்றினால்) மொத்தம் $x\,\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}$ வரிசைகள் வரும்.

அதாவது $A_1, A_2 \ldots\ldots A_p$, $B_1, B_2, \ldots\ldots B_q$, $C_1, C_2 \ldots\ldots C_r$ என்ற n வெவ்வேறு எழுத்துக்களைக் கொண்டு வரிசை மாற்றங்கள் $x\,\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}$ பெறப்படும்.

n எழுத்துக்களும் வெவ்வேறாதலின் மேற் சொன்ன வரிசை மாற்றங்கள் ${}_nP_n = \underline{|n}$ என நாம் முன்னர் பார்த்திருக்கிறோம்.

$$\therefore\quad x\,\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r} = \underline{|n}$$

$$\therefore\quad x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$$

$\therefore$ $p-$ Aக்களும், $q-$ Bக்களும், $r-$ Cக்களும் கொண்டு செய்யக் கூடிய வரிசை மாற்றங்கள் $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$ என நிறுவப்படுகிறது.

2·5.2.1 எ–கா. (1)

ANNAMALAI என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை எத்தனை விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்? அவைகளில்

எத்தனை வரிசைகளில் A க்கள் யாவும் அடுத்தடுத்து முதலில் வரும்? எத்தனை வரிசைகளில் A க்கள் யாவும் அடுத்தடுத்து வரும்?

இச்சொல்லில் 9 எழுத்துக்கள் உள்ளன. அவைகளில்

A—4
N—2
M—1
L—1
I—1

எனவே மொத்த வரிசை மாற்றங்கள் $\frac{\underline{|9}}{\underline{|4}\;\underline{|2}\;\underline{|1}\;\underline{|1}\;\underline{|1}}$

$$= \frac{\underline{|9}}{\underline{|4} \cdot \underline{|2}}$$

A க்களை ஒரு கட்டாகக் கட்டி, அதை ஒரு உறுப்பு எனக் கொண்டால் 6 உறுப்புக்கள்; அவைகளில் N மட்டும் இரண்டு. முதல் இடத்தில் A க்கள் உள்ள கட்டை வைத்து விட்டால், மீதி 5 உறுப்புக்களை அடுக்கினால் A க்கள் முதலில் இருக்கும். 5 ல் இரண்டு N கள்.

∴ A க்கள் யாவும் முதலில் இருக்கும் வரிசை மாற்றங்கள் $= \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}} = 60.$

A க்கள் கட்டு ஒரு உறுப்பு; மீதி 5 எழுத்துக்கள் யாவும் சேர்ந்து 6 உறுப்புக்கள்; N மாத்திரம் 2.

∴ A க்கள் யாவும் ஒன்றாக இருக்கும் வரிசை மாற்றங்கள் $= \frac{\underline{|6}}{\underline{|2}} = 360.$

பயிற்சி 2 (iv)

1. 3, 4, 5, 6, 7 என்ற இலக்கங்கள் கொண்டு, ஒரு இலக்கத்தை எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தி, எத்தனை நான்கிலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை 5000 க்கு மேற்பட்டிருக்கும்?

2. சாதாரண எண்ணமைப்புப்படி, நான்கிலக்க எண்கள் எத்தனையுண்டு?

3. மூன்று பரிசுகள் 10 மாணவர்களிடையே வழங்கப்பட வேண்டும். ஒரு மாணவன் எத்தனை பரிசுகள் வேண்டுமானாலும் பெறலாமெனின், எத்தனை விதங்களில் பரிசுகள் வழங்கப் படலாம்.

4. A, B, L, E என்ற எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எத்தனை 6 எழுத்துக்கள் கொண்ட சொற்கள் அமைக்கலாம்? (எழுத்துக்கள் ஒரு முறைக்கு மேல் பயன்படலாம்).

5. (*a*) 'MISSISSIPPI' (*b*) 'ENGINEER' (*c*) 'CONCURRENCY' என்ற சொற்களில் உள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்?

6. 'MISSISSIPPI' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் வரிசை மாற்றங்களில் எத்தனை வரிசைகளில் (1) 4 S கள் அடுத்தடுத்து வரும்? (2) 4 S கள் அடுத்தடுத்தும் 2 P க்களும் அடுத்தடுத்தும் தோன்றும்?

7. ஒரு நூல் n பிரிவுகளாக (Volume) கட்டடம் (Bind) செய்யப்பட்டிருக்கிறது. ஒவ்வொரு பிரிவிலும் m பிரதிகள் (Copies) உள்ளன. இவைகளை எத்தனை வெவ்வேறு விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்து அடுக்கலாம்?

2·6.1 வட்ட வரிசை மாற்றம் (Circular Permutation):

தேற்றம்: n வெவ்வேறு பொருள்களை ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி $\underline{|n-1}$ விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்.

n விருந்தினர் ஒரு வட்டமேசையைச் சுற்றி உட்காருவதாக வைத்துக்கொள்வோம். அவர்களே ஒரு வரிசையாகத் தரையில் உட்காருவதாகவும் கொள்வோம். $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்று அவர்கள் வட்டமேசையில் உட்கார்ந்த பின்பு, எழுந்து A_2 உட்கார்ந்த இடத்தில் A_1 ம், A_3 இடத்தில் A_2 ம், …… இவ்வாறாக மாறி A_{n-1} இடத்தில் A_n ம் A_n இடத்தில் A_1 ம் உட்கார்ந்தால் $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்ற அண்மை அல்லது ஒழுங்கு மாறாது. ஆனால் தரையில் உட்கார்ந்தவர்கள் எழுந்து மாறினால் $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ என்ற வரிசை $A_2 A_3 \ldots\ldots A_n A_1$

என மாறும். எனவே நேர் வரிசையில் வரிசை மாற்றம் ஏற்படும்; வட்ட வரிசையில் மாற்றம் ஏற்படாது.

மறுபடியும் வட்ட வரிசையில் உட்கார்ந்தவர்கள் ஓர் ஓர் இடமாகத் தள்ளி உட்கார்வார்களானாலும் வட்ட வரிசை ஒழுங்குமாறாது. ஆனால் தரை வரிசையில் $A_3\ A_4 \ldots\ldots A_n\ A_1\ A_2$ என மாறும்.

ஆகவே ஒரு வட்ட வரிசை ஒழுங்குக்குத் தரை வரிசையில் n வெவ்வேறு வரிசைகள் கிடைக்கும்.

வட்ட வரிசை ஒழுங்கில் x விதமாக அவர்கள் உட்கார்வார்களாயின் $n \,.\, x$ விதமாக அவர்கள் தரை ஒழுங்கு மாறும். ஆனால் நேர் வரிசையில் n பேர்கள் $\underline{|n}$ விதங்களில் உட்காரலாம்.

$$\therefore \quad n \,.\, x = \underline{|n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\underline{|n}}{n}$$

$$= \underline{|n-1}$$

எனவே n வெவ்வேறு பொருள்களை ஒரு வட்ட வரிசையில் $\underline{|n-1}$ விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்.

கிளைத் தேற்றம்:

$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ வட்ட வரிசையில் வலஞ்சுழியாகவும் உட்காரலாம்; இடஞ் சுழியாகவும் உட்காரலாம்.

இவ் விரண்டு முறைகளும் ஒரேவிதம் என்று கணக்கிட்டால்

$$2n \,.\, x = \underline{|n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\underline{|n-1}}{2}$$

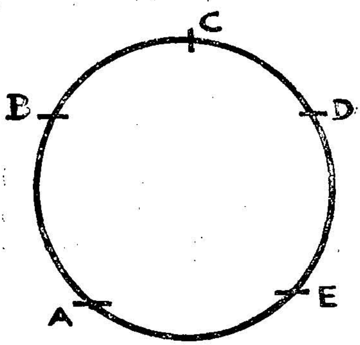
வலஞ் சுழி, இடஞ் சுழி முறைகளை வெவ்வேறாகக் கணக்கிட்டால்

$$x \,.\, n = \underline{|n}$$

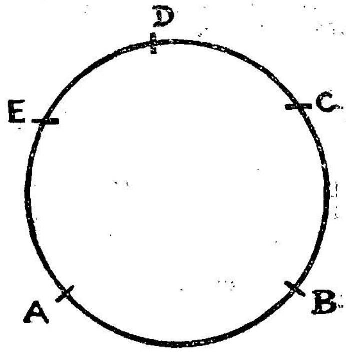
$$\therefore \quad x = \underline{|n-1}$$

2·6.2 எ-கா. (1)

5 வெவ்வேறு வண்ண மலர்களை ஒரு மாலையாகத் தொடுத்தால் எத்தனை விதங்களில் அம்மாலை அமைக்கலாம்? ஐந்து வண்ணங்களை A, B, C, D, E எனக் குறிப்போம்.



படம் 1



படம் 2

என்ற இரண்டு வட்ட வரிசையும் வெவ்வேறு எனக் கொள்வோம். முதல் வட்ட வரிசை இடஞ் சுழி; இரண்டாவது வட்ட வரிசை வலஞ்சுழி.

(1) என்ற அமைப்பிலுள்ள மலர் மாலையைத் திருப்பினுல் (2) என்ற அமைப்பு வரும். ஆகவே இவ்விரண்டு வட்ட வரிசைகளையும் ஒரே மாலையெனக் கொள்ளவேண்டும்.

$$x \,.\, 2 = \frac{\underline{|5}}{5} = \underline{|4} = 24.$$

$$\therefore \quad x = 12.$$

12 விதமாக அம்மலர்களை மாலையாகத் தொடுக்கலாம்.

பயிற்சி 2 (v)

1. 8 பேர்கள் ஒரு வட்டமேசையைச் சுற்றி எத்தனை விதங்களில் உட்காரலாம்?

2. 8 வெவ்வேறு வண்ண மலர்களைக் கொண்டு, எத்தனை விதமாக ஒரு மாலை தொடுக்கலாம்?

3. 5 தாமரை மலர்களும், 5 அல்லி மலர்களும், ஒரு வட்டமாக அடுக்கப்படவேண்டும். இரண்டு அல்லி மலர்களிடையே ஒரு தாமரை மலர் இருக்க வேண்டுமாயின் இது எத்தனை விதங்களில் முடியும்?

4. 2 குறிப்பிட்ட மலர்கள் அடுத்தடுத்து இருக்கும் வகையில் 8 வெவ்வேறு வண்ண மலர்களைக் கொண்டு, எத்தனை விதங்களில் மாலைகள் தொடுக்கலாம்?

சேர்வுகள்

2·7 தேற்றம் 3.

$(m+n)$ பொருள்களை இரு கூறுகளாக, முதற் கூறில் m பொருள்களும், இரண்டாம் கூறில் n பொருள்களும் உள்ளபடி $\dfrac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,.\,\underline{|n}}$ விதங்களில் பிரிக்கலாம்.

$(m+n)$ பொருள்களில் m பொருள்களை ${}_{m+n}C_m$ விதங்களில் பொருக்கலாம்; அப்போது மீதி n பொருள்கள் தானாக ஒரு, ஒரு கூறாக அமைந்து விடுகின்றன.

எனவே மொத்த முறைகள் $= {}_{m+n}C_m$

$$= \frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,.\,\underline{|n}}$$

கி.தே: (1) $2m$ பொருள்களை இருவருக்குச் சம பாதியாக $\dfrac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\,.\,\underline{|m}}$ விதங்களில் பிரித்துக் கொடுக்கலாம்.

m பொருள்களைப் பொருக்கி முதல்வனுக்குக் கொடுத்துவிட்டால், எஞ்சிய m பொருள்கள் தானாக இரண்டாமவனுக்குச் சேர்கிறது. எனவே மொத்த விதங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}_{2m}C_m$$

$$= \frac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}}$$

கி.தே: (2) $2m$ பொருள்களை இரு சம கூறுகளாக $\dfrac{\underline{|\,2m}}{\underline{|\,2}\ \underline{|\,m}\ \underline{|\,m}}$ விதங்களில் பிரிக்கலாம்.

x விதங்களில் இருசம கூறுகளாகப் பிரிக்கலாமெனக் கொள்வோம். அதில் ஒரு கூறை முதல்வனுக்குக் கொடுத்தாலும் கொடுக்கலாம், இரண்டாமவனுக்குக் கொடுத்தாலும் கொடுக்கலாம்.

எனவே x. $\underline{|\,2}$ என்பது $2m$ பொருள்களை இரு சமபாதியாக இருவருக்குப் பகிர்ந்து கொடுக்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை.

$$\therefore\quad x\ \underline{|\,2} = \frac{\underline{|\,2m}}{\underline{|\,m}\ .\ \underline{|\,m}}$$

$$\therefore\quad x = \frac{\underline{|\,2m}}{\underline{|\,2}\ .\ \underline{|\,m}\ .\ \underline{|\,m}}$$ ஆகும்.

இவ்வாறே பின்வரும் தேற்றங்கள், நாம் சற்று முன்கண்ட தேற்ற, கிளைத் தேற்றங்களின் விரிவாகும்.

தேற்றம்: 4 $(m+n+p)$ பொருள்களை முறையே m, n, p பொருள்கள் கொண்ட மூன்று பிரிவுகளாக $\dfrac{\underline{|\,m+n+p}}{\underline{|\,m}\ .\ \underline{|\,n}\ .\ \underline{|\,p}}$ விதங்களில் பிரிக்கலாம்.

கி. தே. (1): $3m$ பொருள்களை மூவருக்குச் சம பாகங்களாக (அதாவது m, m, m பொருள்களாக) $\dfrac{\underline{|\,3m}}{\underline{|\,m}\ \underline{|\,m}\ \underline{|\,m}}$ விதங்களில் பிரித்துக் கொடுக்கலாம்.

கி. தே. (2): $3m$ பொருள்களை மூன்று சம கூறுகளாக $\dfrac{\underline{|\,3m}}{\underline{|\,3}\ \underline{|\,m}\ \underline{|\,m}\ \underline{|\,m}}$ விதங்களில் பிரிக்கலாம்.

தெரிப்பு முன் கண்ட முறைப்படியே :

2·7.1 மொத்த சேர்வுகள் (Total Combinations)

தேற்றம் 5 : n வெவ்வேறு பொருள்கள் கொண்டு எத்தனை பொருள்கள் வேண்டுமானாலும் ஒரு சமயத்தில் தேர்ந்தெடுக்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^n - 1$.

எத்தனை பொருள்கள் வேண்டுமானாலும் ஒரு சமயத்தில் தேர்ந்தெடுப்பது யாதெனில் :

(1) ஒரு பொருளை எடுக்கலாம் ; அல்லது

(2) இரண்டு பொருள்களை எடுக்கலாம் ; அல்லது

(3) மூன்று பொருள்களை எடுக்கலாம் ; அல்லது

... ...

... ...

(r) r ,, ,, ; அல்லது

... ...

(n) n பொருள்களையும் எடுக்கலாம்.

இவைகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots\ldots + {}_nC_n$$
$$= C_0 + C_1 + \ldots\ldots + C_n - C_0$$
$$= 2^n - 1.$$

2·7.2 தேற்றம் 6 : m பொருள்கள் கொண்ட ஒரு குவியலும், n பொருள்கள் கொண்ட மற்றொரு குவியலும் உள்ளன. முதற் குவியலிலிருந்து r பொருள்களும், இரண்டாம் குவியலிலிருந்து s பொருள்களும் ${}_mC_r \times {}_nC_s$ விதங்களில் சேர்க்கலாம்.

முதற் சேர்வு எண்ணிக்கை $= {}_mC_r$.

இரண்டாம் சேர்வு எண்ணிக்கை $= {}_nC_s$. இரண்டு செயல்களும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை.

எனவே விடை $= {}_mC_r \times {}_nC_s$.

கி. தே : தேற்றத்தில் கூறியபடி உள்ள இருகுவியல்களிலிருந்தும் முறையே r, s பொருள்களை யெடுத்து ${}_mC_r \times {}_nC_s \times \underline{|r+s}$ விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்.

2·7.2.1 எ.கா. (1) 21 வெவ்வேறு சிகப்பு பொம்மைகளும், 5 வெவ்வேறு நீலநிற பொம்மைகளும் உள்ளன.

குறைந்தது ஒரு நீல பொம்மையும் 2 சிகப்பு பொம்மைகளும் உள்ள மாதிரி நான்கு பொம்மைகளை எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றம் செய்து அடுக்கலாம்?

4 பொம்மைகள் தேர்ந்தெடுக்கும் முறைகள் :

(1) ஒரு நீல பொம்மை, 3 சிகப்பு பொம்மை, அல்லது

(2) இரு நீல பொம்மைகள், இரு சிகப்பு பொம்மைகள்

(1) படி அமைக்கப்பட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= |\underline{4} \times {}_5C_1 \times {}_{21}C_3$

$$= 24 \times 5 \times \frac{21 \times 20 \times 19}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 1,59,600.$$

(2) படி அமைக்கப்பட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= |\underline{4} \times {}_5C_2 \times {}_{21}C_2$

$$= 24 \times 10 \times 210$$

$= 50,400$ வரிசைகள்

மொத்த வரிசை மாற்றங்கள் 2,10,000.

எ.கா. (2) n பொருள்கள் உள்ளன; குறிப்பிட்ட p பொருள்கள் உள்ளவாறு r பொருள்கள் எடுத்து, எத்தனை விதங்களில் அவைகளை வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்?

குறிப்பிட்ட p பொருள்களை முதலில் எடுத்து வைத்துக் கொள்க. மீதி $(n-p)$ பொருள்களில் மீதி $(r-p)$ பொருள்களை ${}_{n-p}C_{r-p}$ விதங்களில் பொறுக்கியெடுக்கலாம்.

அதாவது $\dfrac{|\underline{n-p}}{|\underline{r-p} \cdot |\underline{(n-p)-(r-p)}} = \dfrac{|\underline{n-p}}{|\underline{r-p} \cdot |\underline{n-r}}$

இவைகளை $\dfrac{|\underline{n-p} \cdot |\underline{r}}{|\underline{r-p} \cdot |\underline{n-r}}$ விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்.

எ.கா. (3) 'RAMAYANAM' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு, 6 எழுத்துக்கள் எடுத்து எத்தனை விதங்களில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்?

சொல்லில் 9 எழுத்துக்கள் உள்ளன; அவை

R—1

A—4

M—2

Y—1

N—1

பின் தொகுத்துக் கூறும் வகையில் 6 எழுத்துக்கள் எடுத்து, வரிசை மாற்றம் செய்யலாம்.

1. 4 ஒரு மாதிரி, 2 மற்றோர் மாதிரி (4 A க்கள், 2 M கள்)
சேர்வு $= 1 \times 1 = 1.$

$$\therefore \text{ வரிசை மாற்றம் } = 1 \,.\, \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \,.\, \lfloor 2} = 15.$$

2. 4 ஒரு மாதிரி, 2 வெவ்வேறு (4 A க்கள், 2 வெவ்வேறு)
சேர்வு $= 1 \times {}_4C_2 = 6.$

$$\therefore \text{ வரிசை மாற்றம் } = 6 \,.\, \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \; \lfloor 1 \; \lfloor 1} = 180.$$

3. 3 ஒரு மாதிரி; 2 மற்றோர் மாதிரி; 1 வேறு.

4 A க்களில் 3;

2 M கள்;

R, Y, N என்ற மூன்றில் ஒன்று.

சேர்வு $= 1 \times 1 \times {}_3C_1 = 3.$

$$\therefore \text{ வரிசை மாற்றம் } = 3 \,.\, \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \; \lfloor 2} = 180.$$

4. 3 ஒரு மாதிரி; 3 வெவ்வேறு.

4 A க்களில் 3;

M, R, Y, N ல் 3.

சேர்வு $= 1 \times {}_4C_3 = 4.$

$\therefore$ வரிசை மாற்றம் $= 4 \cdot \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = 480.$

5. 2 ஒரு மாதிரி; 2 மற்ரோர் மாதிரி, 2 வெவ்வேறு.

4 A க்களில் 2;

2 M களில் 2;

R, Y, N ல் 2;

சேர்வு $= 1 \times 1 \times {}_3C_2 = 3.$

$\therefore$ வரிசை மாற்றம் $= 3 \cdot \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \; \lfloor 2} = 540.$

6. 2 ஒருமாதிரி; 4 வெவ்வேறு.

4 Aக்களில் 2;

M, R, Y, Nல் 4;

அல்லது 2 M களும்,

A, R, Y, N ல் 4.

சேர்வு$=1\times1+1\times1=2.$

$\therefore$ வரிசை மாற்றங்கள் $= 2. \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2} = 720.$

$\therefore$ மொத்த வரிசை மாற்றங்கள்

$= 15+180+180+480+540+720=2115.$

2·7.3 தேற்றம். 7 ஒரே மாதிரி p பொருள்கள், மற்ரோர் மாதிரி q பொருள்கள், மற்ரோர் மாதிரி r பொருள்கள்......இவ்வாருகப் பொருள்கள் தொகுத்துக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு சமயத்தில் எத்தனை பொருள்கள் வேண்டுமாயினும் எத்தனை தொகுப்பிலிருந்தும் எடுக்கலாமெனின், இச் சேர்வு $[(p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots]-1$ விதங்களில் செய்யலாம்.

முதல் தொகுப்பிலிருந்து ஒரு சமயத்தில் 0 அல்லது 1, அல்லது 2...... அல்லது p பொருள்கள் எடுக்கலாம். எனவே முதல் தேர்வு $(p+1)$ விதங்களில் செய்யலாம்.

அவ்வாறே இரண்டாம் தொகுப்பிலிருந்து $(q+1)$ விதங்களிலும் செய்யலாம்.

அதாவது $(p+1)$ $(q+1)$ $(r+)$ ...... விதங்களில் இப் பொருள்களை யெல்லாம் கொண்டு நாம் தேர்வுகள் செய்ய லாம். ஆனால் ஒரு தொகுப்பிலிருந்தும் ஒரு பொருள் கூட எடுக்காத விதமும் இவ் வெண்ணிக்கையில் சேர்ந்திருக்கிறது. எனவே குறைந்தது ஏதாவது ஒரு பொருளேனும் உண்டெனில் மொத்தச் சேர்வு முறைகளின் எண்ணிக்கை $= [(p+1)(q+1)(r+1)\ ......\ ]-1$.

பயிற்சி 2 (vi)

1. $(m_1+m_2+\ ......\ m_k)$ பொருள்களை முறையே m_1, m_2, ... m_k, எண்ணிக்கையுள்ள பொருட் குவியல்களாக $\dfrac{|\underline{m_1+m_2+\ ......\ m_k}}{|\underline{m_1}\ |\underline{m_2}\ ......\ |\underline{m_k}}$ விதங்களில் பிரிக்கலாமென நிறுவுக.

2. $m_1=m_2=\ ......\ =m_k=m$ ஆனால், mk பொருள்களை எத்தனை விதங்களில் k சம கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்?

3. மேற் கூறிய கணக்கில் (2 ல்) mk பொருள்களை எத்தனை விதங்களில் k பேர்களுக்கு சமமாகப் பங்கீடு செய்யலாம்?

4. 3, 5, 7, 11, 13 என்ற எண்களைக் கொண்டு எத்தனை பெருக்குத் தொகைகள் பெறலாம்? (ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரே முறைதான் பயன் படுத்தப்பட வேண்டும்)

5. n பகாயெண்களைக் கொண்டு (prime numbers) எத்தனை பெருக்குத் தொகைகள் பெறலாம்? (ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரே முறைதான் பயன் படுத்தப்பட வேண்டும்)

6. pq பொருள்கள் உள்ளன; அவைகளுள் $(p-1)\ q$ பொருள்கள் ஒரே மாதிரியானவை; அவைகளைக் கொண்டு எத்தனை விதங்களில் $(p-1)\ q$ பொருள்கள் பொருக்கலாம்?

7. ஒரு மலர்க் கூடையில் 5 வெள்ளை, 4 சிகப்பு, 6 நீல மலர்கள் உள்ளன; எத்தனை விதங்களில் அக் கூடையிலிருந்து மலர்கள் எடுக்கலாம்?

8. 20 விவிலிய நூல் பிரதிகள், 10 கொரான் பிரதிகள், 25 திருவாசகப் பிரதிகள் உள்ளன. இரு விற்பனையாளர்கள் எத்

தனை விதங்களில் இந் நூல்களைத் தங்களிடையே பிரித்துக் கொள்ளலாம் ?

9. m கூட்டுக் குறிகளும் $(+)$, n குறைக் குறிகளும் $(-)$ ஒரு வரிசையில், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குறைக் குறிகள் ஒன்றன்பின் ஒன்று வராமல், வைக்கப்படுகின்றன. அம்மாதிரியாக $\dfrac{\lfloor m+1}{\lfloor n \,.\, \lfloor m-n+1}$ விதங்களில் அடுக்கலாமென நிறுவுக.

10. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் மேல் (Plane) ஒரு புள்ளி வழியாக m நேர்க் கோடுகளும், மற்றொரு புள்ளி வழியாக n நேர்க் கோடுகளுமாக $(m+n)$ நேர்க் கோடுகள் உள்ளன. ஆனால் அவைகளுள் எதுவும் ஒன்றோடு ஒன்று இணைந்தவையல்ல, இணைகோடுகளுமல்ல. இக் கோடுகள் அவைகளைத் தாங்கும் தளத்தை $(mn+2m+2n-1)$ பிரிவுகளாகப் பிரிக்கின்றன வென நிறுவுக.

2.8 $_nC_r$ ன் மீப்பெருமதிப்பு:

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$$

$$_nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{\lfloor r-1}$$

$$\therefore \quad \frac{_nC_r}{_nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

இப்போது $\dfrac{n-r+1}{r} \gtreqless 1$ என்ற தொடர்பை யொட்டி

$_nC_r \gtreqless {_nC_{r-1}}$ ஆகவிருக்கும்.

அதாவது $n-r+1 \gtreqless r$ என்பதை யொட்டி,

,, $n+1 \gtreqless 2r$,,

,, $\dfrac{n+1}{2} \gtreqless r$,,

,, $r \lesseqgtr \dfrac{n+1}{2}$,,

முதலாவதாக n ஒற்றைப் படை யெண்ணெனக் கொள்க.

$\therefore \quad \frac{n+1}{2}$ = ஒரு முழு எண் p எனக் கொள்ளலாம் (அதாவது $n=2p-1$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும்).

$r=1, 2, 3 \ldots\ldots p-1, p, p+1, \ldots\ldots n$ என முறையாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$
\begin{aligned}
&{}_nC_1 > {}_nC_0\\
&{}_nC_2 > {}_nC_1\\
&{}_nC_3 > {}_nC_2\\
&{}_nC_4 > {}_nC_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&{}_nC_{p-1} = {}_nC_p \quad \left(= \frac{\lfloor 2p-1}{\lfloor p \; \lfloor p-1}\right)\\
&{}_nC_{p+1} < {}_nC_p\\
&{}_nC_{p+2} < {}_nC_{p+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&{}_nC_n < {}_nC_{n-1}
\end{aligned}
$$

என்ற சமனின்மைத் தொடர்புகள் பெறப்படும்.

$${}_nC_0 < {}_nC_1 < {}_nC_2 < {}_nC_3 \ldots < {}_nC_{p-1} = {}_nC_p > {}_nC_{p+1} > {}_nC_{p+2} > {}_nC_n.$$

இங்கு நமக்குப் புலப்படுவது,

(i) $r = 0$ முதல் $(p-1)$ வரையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முன்னிருக்கும் உறுப்பை விடப் பெரிது.

(ii) $r = p$ ஆனல் ${}_nC_{p-1} = {}_nC_p = \frac{\lfloor 2p-1}{\lfloor p \; \lfloor p-1}$

(iii) $r=p+1$ முதல் n வரையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முன்னிருக்கும் உறுப்பை விடச் சிறியது. எனவே ${}_nC_r$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு ${}_nC_p$ அல்லது ${}_nC_{p-1}$.

அதாவது n ஒரு ஒற்றைப்படை யெண்ணுயின் [$(2p-1)$ என்ற அமைப்பிலிருப்பின்], ${}_nC_r$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு

$${}_nC_p = {}_nC_{p-1} = \frac{\lfloor 2p-1}{\lfloor p \; \lfloor p-1}$$

$$\frac{\lfloor n}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right. \; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right.}$$

இரண்டாவதாக,

n ஒரு இரட்டைப் படையெண் எனக் கொள்க.

இங்கு $\frac{n+1}{2}$ ஒரு முழு எண்ணுயிருக்காது.

$\therefore \quad r = \frac{n+1}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு இடமில்லாது போகும்.

$\therefore \quad r \lessgtr \frac{n+1}{2}$ ஆக விருப்பின்,

$_nC_r \lessgtr {_nC_{r-1}}$ ஆக விருக்கும்.

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ன் முழு எண் பகுதி q எனக் கொள்க.

$\therefore \quad r = 0$ முதல் q வரையில்,

$_nC_0 < {_nC_1} < {_nC_2} \ldots\ldots < {_nC_q}$

$r = q$ முதல் n வரையில்,

$_nC_q > {_nC_{q+1}} > {_nC_{q+2}} \ldots\ldots$

எனவே n ஓர் இரட்டைப்படை யெண்ணுயின், $_nC_r$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு $_nC_q$ $\Big($$q$ என்பது $\frac{n+1}{2}$ ன் முழு எண் பகுதி, அதாவது $q = \frac{n}{2}\Big)$. எனவே n ஓர் இரட்டைப்படை யெண்ணுயின்,

$$_nC_r \text{ ன் மீப் பெரு மதிப்பு } = \frac{\lfloor n}{\left(\lfloor \frac{n}{2}\right)^2}$$

2.9 வாண்டர் மாண்டே தேற்றம். தேற்றம் : 8 (Vandermonde's Theorem)

$_{m+n}C_r = {_mC_r} + {_mC_{r-1}} \cdot {_nC_1} + {_mC_{r-2}} \cdot {_nC_2} + \ldots\ldots + {_nC_r}$ என புகுமுக வகுப்பில் நாம் கண்டிருக்கிரேம் (தி.கோ-கொ.மு : கணித நூல் I பக்கம் 262, பயிற்சி 14 (3) எண் 7).

இங்கு m, n கூட்டு முழு எண்கள் ; m, n இரண்டையும் விட r சிறிய கூட்டு முழு எண். அப்போதுதான் கணக்கில் வரும் சேர்வுத் தொகைகளுக்குப் பொருளுண்டு.

இப்போது $a(a-1)\ldots\ldots(a-r+1)$ என்ற தொடர்ப் பெருக்கல் தொகையை $(a)_r$ எனக் குறிப்பிட்டால், ${}_{m+n}C_r$ ன் மதிப்பைப் பின் வருமாறு எழுதலாம். அதாவது,

$$\frac{(m+n)_r}{\underline{|r}} = \frac{(m)_r}{\underline{|r}} + \frac{(m)_{r-1}}{\underline{|r-1}}\cdot\frac{(n)_1}{\underline{|1}} + \frac{(m)_{r-2}}{\underline{|r-2}}\cdot\frac{(n)_2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots + \frac{(n)_r}{\underline{|r}}$$

இரு பக்கங்களையும் $\underline{|r}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$(m+n)_r = (m)_r + r\,.\,(m)_{r-1}\,.\,(n)_1 + \frac{r(r-1)}{\underline{|2}}(m)_{r-2}\,.\,(n)_2 + \ldots + (n)_r$$

எனப் பெறப்படும்.

அதாவது,

$$\begin{aligned}(m+n)_r = (m)_r &+ {}_rC_1\,(m)_{r-1}.\,(n)_1\\ &+ rC_2\,(m)_{r-2}.\,(n)_2\\ &+ {}_rC_3\,(m)_{r-3}.\,(n)_3\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (n)_r\end{aligned}$$

இதுவே வாண்டர் மாண்டேயின் தேற்ற அமைப்பு. ஆனால் இங்கு m, n, r கூட்டு முழு எண்கள் எனவும் $r < m, n$ எனவும் கொள்ளப்பட்டது.

வாண்டர் மாண்டேயின் தேற்றம், மேலும் விரிவாக்கப் பட்டு, m, n ன் எந்த அளவுக் கிணங்கிய எண்ணுக்கும் பொருந்துமென நிறுவப் பட்டிருக்கிறது.

[1] 2·9.1 வாண்டர் மாண்டேயின் விரிவுத் தேற்றம்.

a, b என்பவை எந்த அளவுக் கிணங்கிய மதிப்பேற்பினும், n ஒரு கூட்டு முழுயெண்ணாயின்,

$$\begin{aligned}(a+b)_n = (a)_n + {}_nC_1\,(a)_{n-1}.\,(b)_1 + {}_nC_2\,(a)_{n-2}.\,(b)_2 &+\\ \ldots\ldots + {}_nC_{r-1}\,(a)_{n-(r-1)}\,.\,(b)_{r-1} + {}_nC_r\,(a)_{n-r}\,.\,(b)_r &+\\ \ldots\ldots + (b)_n \qquad &\text{(A)}\end{aligned}$$

[முன்னர் கூறப்பட்டபடி, $(a)_r$ என்பது $a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-r+1)$ என்பதைக் குறிக்கும் குறியீடெனக் கொள்க. இத் தேற்றத் தெரிப்பு பேராசிரியர் கெய்லி உருவாக்கியதாகும். தெரிப்பு முறை தொடர் முறைத் தெரிப்பு (Proof by Mathematical Induction) வகைப்படும்.]

---

[1] மாற்று முறையில் எளிதாக இத்தேற்றம் 2·9.1.1-ல் நிறுவப்பட்டிருக்கிறது.

(A) ல் கொடுக்கப்பட்ட தேற்றம் $n = m$ என்ற கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்கு உண்மை யெனக் கொள்க.

அதை யேற்றுக் கொண்டு, $n=m$ க்குத் தேற்றம் உண்மையானால் அடுத்த $(m+1)$ க்கு உண்மை யென நிறுவுவோம்.

(A) ல் கொடுக்கப் பட்டபடி,

$$(a+b)_m = (a)_m + {}_mC_1(a)_{m-1} \cdot (b)_1 + {}_mC_2(a)_{m-2} \cdot (b)_2 + \ldots\ldots$$
$$+ {}_mC_{r-1}(a)_{m-(r-1)} \cdot (b)_{r-1} + {}_mC_r(a)_{m-r} \cdot (b)_r + \ldots\ldots$$

$+(b)_m$ என்பதை உண்மையெனக் கொள்வோம். (B)

அப்போது $(a+b)_{m+1}$ ன் மதிப்பு, $(a+b)_m \cdot (a+b-m)$ ஆகும்.

எனவே (B) ன் இரு பக்கங்களையும் $(a+b-m)$ ஆல் பெருக்க,

$$(a+b)_{m+1}$$
$$= (a+b)_m \cdot (a+b-m)$$
$$= (a+b-m)\,[(a)_m + {}_mC_1(a)_{m-1} \cdot (b)_1 + {}_mC_2(a)_{m-2} \cdot (b)_2 +$$
$$\ldots\ldots + {}_mC_{r-1}(a)_{m-(r-1)} \cdot (b)_{r-1} + {}_mC_r(a)_{m-r} \cdot (b)_r +$$
$$\ldots\ldots + \ldots\ldots + (b)_m] \quad \text{(C)}$$

$(a+b-m)$ என்பதைப் பின்வருமாறு பிரித்து, முதல், இரண்டாம்,......rவது, $(r+1)$ வது உறுப்பால் பெருக்குவோம்.

இப்போது $(a+b-m) = (a-m)+b$

$$(a+b-m) = (a-\overline{m-1})+(b-1)$$
$$(a+b-m) = (a-\overline{m-2})+(b-2)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(a+b-m) = (a-m+r-1)+(b-r+1)$$
$$= \{a-(m-\overline{r-1})\}+\{b-(r-1)\}$$
$$(a+b-m) = \{a-(m-r)\}+(b-r)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(a+b-m) = a+(b-m)$$

∴ (C) ன் வலது கைப்புறம் பின்வருமாறு :

$$(a-m)\ (a)_m+\underline{b(a)_m+{}_mC_1(a)_{m-1}(a-\overline{m-1})(b)_1}$$
$$+{}_mC_1(a)_{m-1}\,.\,(b)_1(b-1)+{}_mC_2\,.\,(a)_{m-2}\,.\,(a-\overline{m-2})\,.\,(b)_2$$
$$+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\left.\begin{array}{l}+{}_mC_{r-1}(a)_{m-(r-1)}\,.\,(b)_{r-1}\,.\,\{b-(r-1)\}\\ +{}_mC_r\,.\,(a)_{m-r}\,.\,\{a-(m-r)\}(b)_r+\ldots\ldots\end{array}\right\}\ (D)$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$+(b)_m\ (b-m) \qquad (E)$$

(D) என்ற இரண்டு உறுப்புக்களை யெடுத்துப் பார்ப்போம். அவைகளில்

$$(b)_{(r-1)}\,.\,\{b-(r-1)\}=(b)_r$$
$$(a)_{(m-r)}\,.\,\{a-(m-r)\}=(a)_{m-r+1}=(a)_{m+1-r}$$

எனவே (D) எனக் குறிப்பிட்ட உறுப்புக்கள்

$$={}_mC_{r-1}(a)_{m-(r-1)}(b)_r$$
$$+{}_mC_r(a)_{m-(r-1)}\,.\,(b)_r$$
$$=({}_mC_{r-1}+{}_mC_r)\ [(a)_{(m+1)-r}\,.\,(b)_r] \qquad (F)$$

மேலே கோடிட்ட இரு உறுப்புக்களைக் காண்க :

$$\text{அவை}\quad b(a)_{m+m}C_1\,.\,(a)_{(m-1)}(a-\overline{m-1})\,.\,(b)_1$$
$$=(a)_m\,.\,(b)_1+{}_mC_1\,.\,(a)_m(b)_1$$
$$=({}_{1+m}C_1)\,.\,(a)_m\,.\,(b)_1 \qquad (G)$$

முதல் உறுப்பான $(a-m)\,.\,(a)_m=(a)_{m+1}$ (H)

கடைசி உறுப்பான $(b-m)\,.\,(b)_m=(b)_{m+1}$ (K)

எனவே, (F), (G), (H), (K) இவைகளைப் பயன் படுத்தினால் (C) ன் வலது கைப்புற விரிவான,

$$E=(a)_{m+1}+({}_{1+m}C_1)\ (a)_m\ (b)_{1+}\ldots\ldots$$
$$+({}_mC_{r-1}+{}_mC_r)\ [(a)_{(m+1)-r}\,.\,(b)_r]$$
$$+\ \ldots\ldots$$
$$+(b)_{m+1}$$

ஆனால் $1_{+m}C_1={}_mC_0+{}_mC_1={}_{m+1}C_1$

பொதுவாக ${}_mC_{r-1}+{}_mC_r={}_{m+1}C_r$

எனவே,

$$(E)=(a)_{(m+1)}+{}_{(m+1)}C_1\ (a)_m\cdot(b)_1+{}_{(m+1)}C_2\ (a)_{m-1}\cdot(b)_2+\ldots\ldots$$
$$+\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots$$
$$+{}_{(m+1)}C_r\ [(a)_{(m+1)-r}\cdot(b)_r]+\ldots\ldots$$
$$+\ \ldots\ldots\ +\ (b)_{m+1} \qquad (L)$$

(C) ன் விரிவாகிய (E)=(L) என்பதை நோக்குமிடத்து,

$$(a+b)_{(m+1)}=(a)_{m+1}+{}_{(m+1)}C_1\ .\ (a)_m\ .\ (b)_1+{}_{(m+1)}C_2\ .\ (a)_{(m-1)}\cdot(b)_2$$
$$+\ \ldots\ldots\ +\ {}_{(m+1)}C_r\ [(a)_{(m+1)-r}\ .\ (b)_r]$$
$$+\ \ldots\ldots\ +\ (b)_{(m+1)}\quad \text{என}$$

நிறுவப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே, எடுத்துக் கொண்ட தேற்றம், m என்ற மதிப்புக்கு உண்மையானுல், அடுத்த $(m+1)$ என்ற மதிப்புக்கும் உண்மையென நிறுவப்பட்டது.

இப்போது $m=2$ க்கு உண்மையா வெனப் பார்ப்போம். தேற்றப்படி $(a+b)_2=(a)_2+2C_1\ .\ (a)_1\ .\ (b)_1+(b)_2$ என்ற சமன்பாடு உண்மையாயிருக்கவேண்டும்.

இடது கைப்புறம் $=(a+b)\ (a+b-1)=(a+b)^2-(a+b)$

வலது கைப்புறம் $=a(a-1)+2\ .\ a\ .\ b+b\ (b-1)$

$$=a^2-a+2a\ b+b^2-b$$
$$(a+b)^2-(a+b)$$

எனவே $m=2$ க்குத் தேற்றம் உண்மை.

ஆனுல் $n=m$ க்கு உண்மையானுல் அடுத்த $n=(m+1)$க்கு உண்மை யெனப் பொதுவாக நிறுவப்பட்டது. ஆகவே $n=3$ க்கு உண்மை, ஆகவே $n=4$ க்கு உண்மை. இவ்வாருக $n=$ கூட்டு முழு எண்ணுக்கு உண்மை எனப் பொதுவாக நிறுவப்படுகிறது.

இத் தேற்றம் அளவுக்கிணங்கிய 'படி'க்கு, ஈருறுப்புத் தேற்றம் நிறுவுங்காலே பயன்படும்.

மற்றும் சில சேர்வுத் தேற்றங்கள் ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றப் பகுதியில் நிறுவப்படுகின்றன. அவைகளே ஈருறுப்புத் தேற்றம் முடிந்த பின்பு அறிந்து கொள்க.

2.9.1.1 வாண்டர் மாண்டேயின் விரிவுத் தேற்றம் (மாற்றுத் தெரிப்பு) :

a, b என்பவை எந்த அளவுக்கிணங்கிய மதிப்பேற்பினும், n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயின்,

$$(a+b)_n=(a)_n+{}_nC_1\,(a)_{n-1}\,(b)_1+{}_nC_2\,(a)_{n-2}\,(b)_2+\ldots\ldots+\ldots\ldots+(b)_n$$

முதலில் a, b கூட்டு முழு எண்களெனவும் இரண்டும் தனித் தனியே n ஐ விடப் பெரிதெனவும் கொள்வோம்.

$(a+b)$ பொருள்களினின்று n பொருள்கள் ${}_{(a+b)}C_n=\dfrac{\lfloor a+b}{\lfloor n\;\lfloor (a+b)-n}$ முறைகளில் சேர்வு செய்யலாமென நாம் அறிவோம்.

இப்படி n பொருள்களைச் சேர்க்கும் வழிகள் பின்வருமாறு :

'a' லிருந்தே n பொருள்கள் சேர்ப்பது;

'a' லிருந்து $(n-1)$ பொருள்களும், 'b' லிருந்து ஒரு பொருளும் சேர்ப்பது;

'a' லிருந்து $(n-2)$ பொருள்களும், 'b' லிருந்து இரண்டு பொருள்களும்;

....

பொதுவாக 'a' லிருந்து $(n-r)$ பொருள்களும், 'b' லிருந்து 'r' பொருள்களும்;

....

'b' லிருந்தே n பொருள்கள் சேர்ப்பது.

இவைகளின் எண்ணிக்கை ${}_{(a+b)}C_n$ ஆகும்.

$$\therefore\quad {}_{(a+b)}C_n={}_aC_n+{}_aC_{n-1}\cdot{}_bC_1+{}_aC_{n-2}\cdot{}_bC_2+\ldots\ldots+{}_aC_{n-r}\,{}_bC_r+\ldots\ldots+{}_bC_n\,.$$

$$\therefore\quad \frac{(a+b)_n}{\lfloor n}=\frac{(a)_n}{\lfloor n}+\frac{(a)_{n-1}}{\lfloor n-1}\cdot\frac{(b)_1}{\lfloor 1}+\frac{(a)_{n-2}}{\lfloor n-2}\cdot\frac{(b)_2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\frac{(a)_{n-r}}{\lfloor n-r}\cdot\frac{(b)_r}{\lfloor r}+\ldots\ldots\frac{(b)_n}{\lfloor n}.$$

∴ இருபக்கங்களை $\lfloor n$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$(a+b)_n=(a_n+{}_nC_1\,(a)_{n-1}\,(b)_1$$
$$+{}_nC_2\,(a)_{n-2}\,(b)_2+\ldots\ldots$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$+{}_nC_r\,(a)_{n-r}\,(b)_r+\ldots\ldots+(b)_n\,. \quad (A)$$

இது a, b, n கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்களுக்கு $[a > n, b < n]$ உண்மை யென நிறுவப்பட்டது.

b ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட முழு எண்ணைக் கொண்டால், (A) என்ற சமன்பாடு, a க்கு எந்தக் கூட்டு முழு எண் மதிப்பு கொடுத்தாலும் பொருத்தமாகும். (A) ஐ a என்ற இராசியின் n படியுள்ள ஒரு இயற் கணிதச் சமன்பாடு எனக் கொள்ளலாம். n க்கு மேற்பட்ட மதிப்புக்களுக்கு அது மெய்யாவது நாம் காண்கிரோம்.

அவ்வாறே a ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட முழு எண்ணைக் கொண்டால் (A) என்ற சமன்பாட்டிற்கு நாம் சற்று முன் கூறியவை யாவும் பொருந்தும்.

எனவே (A) ஒரு முற்றொருமையாகும். எனவே a, b ன் எல்லா அளவுக் கிணங்கிய மதிப்புக்கும்

$$(a+b)_n=(a)_n+{}_nC_1\,(a)_{n-1}\,(b_1)+{}_nC_2\,(a)_{n-2}\,(b)_2+\ldots\ldots+(b)_n$$

நிறுவப்படுகிறது.

இத் தெரிப்பு முறை கணித முறை உய்த்தறிதல் முறையை விட எளிதாகத் தோற்றினும், கணித முறை உய்த்தறிதல் பயிற்சி பெற, அம் முறையை அறிந்து கொள்வது நல்லது. (புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் I—தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி—பக்கம் 262, பயிற்சி 14 (3) கணக்கு 7 காண்க).

பயிற்சி 2 (vii)

1. ${}_{15}C_r$; ${}_{16}C_r$ ன் மீப்பெரு மதிப்புக்கள் காண்க.

3. பகுதிப் பின்னங்கள்.
(Partial Fractions)

3·1 சார்புகள் :

சார்புகள், பற்றி ஓரளவு புகுமுக வகுப்பில் நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். (குறிப்பு : இவ்வாசிரியர்களின் புகுமுக வகுப்புக் கணிதநூலில் இயற்கணிதப் பிரிவில் இரண்டாம் பகுதியான "சார்புகள்" என்ற பகுதியை மறுபடியும் படிக்கலாம்.)

$y = F(x)$ என்பது இயற்கணிதத்தில் ஒரு முக்கியக் குறியீடு.

3·1.1 பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவைச் சார்பு : (Polynomial Function)

$$F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$$

$$\equiv \sum_{r=0}^{n} a_r\, x^{n-r}$$

என்பது இவ்விதக் கோவையின் (சார்பின்) பொது அமைப்பு. n ஒரு கூட்டு முழு எண் ; $a_0, a_1, \ldots\ldots$ முதலியவைகளோடு, x, n இரண்டிற்கும் ஒரு விதத் தொடர்பும் இல்லை. ஆனால் $a_0, a_1, \ldots\ldots$ அளவுக்கிணங்காத மெய்யெண்களாகவும் இருக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக,

$$F(x) = 2x^{12} - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{2}\, x^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}\, x^2 + (\sqrt{3} + 1)$$

என்ற இரு சார்புகள் இவ்வரையறையில் அடங்கும். இப்படிப்பட்ட சார்பை, அளவுக்கிணங்கி முழுப்'படி'யோடு, n 'படி'

யுடைய xன் சார்பு (Rational, integral function of the n^{th} degree in x) என்றும் கூறுவதுண்டு.

சிறப்பாக, ஒரு மாறிலியை, 0 (பூச்சியம்) படியுடைய சார்பு எனக் கூறலாம்.

3·1.2 இவ்வரையறைக்குட்பட்டு, $P = Q \times R$ என்ற தொடர்புடைய மூன்று சார்புகள் இருக்குமானால் Q, R என்பவை P ன் சினைகள் (காரணிகள்-factors) எனப்படும்.

இவ்விதச் சார்புகளில் சிலவற்றிற்குச் சினைகளே யில்லாமல், தானும், மாறிலிகளுமே சினைகளாயிருப்பின், அவை பகாச் சார்புகள் எனப்படும் (Prime functions).

இரு சார்புகளுக்கிடையே, ஒரு சினை கூடப் பொதுவாக இல்லாதிருப்பின், அவ்விரு சார்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று பகாத்தன்மையுடையன எனக் கூறப்படும். (Prime to each other)

எடுத்துக்காட்டுகள் :

x^2+x+1—பகாச் சார்பு.

(x^2+1)ம் (x^2+x+1) ம்—ஒன்றுக்கொன்று பகாச் சார்புகள்.

(x^2-2x+1) ம் (x^3+1) ம்-ஒன்றுக்கொன்று பகாச்சார்புகள்.

3·1.3 ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக்கோவையையும், $(ax+b)$ன் சார்பாக [அல்லது $(ax+b)$ ன் பல்லுறுப்பியாக]க் காணலாம்.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots+a_n$$

$y=ax+b$ என ஈடு செய்தால்

$x=\dfrac{y-b}{a}$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore\quad f(x)=a_0\left[\frac{y-b}{a}\right]^n+a_1\left[\frac{y-b}{a}\right]^{n-1}+\dots\dots+a_n$$

$$=A_0y^n+A_1y^{n-1}+\dots\dots+A_n$$

$$=A_0(ax+b)^n+A_1(ax+b)^{n-1}+\dots\dots+A_n$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$x^3+3x+1=(x+1)^3-3(x+1)^2+6(x+1)-3$ என எழுத இயலும்.

முறை: $x^3+3x+1 \equiv A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D$ என எழுதி A, B, C, D ஐக் கண்டால் போதுமானது.

P, Q என்பவை 3·1.1 ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளாயின் $\frac{P}{Q}$ என்பது ஒரு அளவுக் கிணங்கிய பின்னம் அல்லது சார்பு எனப்படும். (Rational fraction or function).

Q ன், 'படி', P ன் 'படி' யை விட உயர்ந்திருப்பின் $\frac{P}{Q}$ ஐ தகுபின்னம் எனவும், P ன் படியை விடக் குறைந்திருப்பின் $\frac{P}{Q}$ ஐ, தகா பின்னம் எனவும் கூறுவது மரபு.

ஒரு தகா பின்னத்தை, வகுத்தெழுதினால், அதை ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கை + ஒரு தகு பின்னமாக எழுதலாம்.

எ-கா. $\frac{x^3+4x+1}{x^5+5x^2+6}$ அளவுக் கிணங்கிய தகு பின்னம்.

$\frac{x^5+5x+6}{x^3+4x+1}$ அளவுக் கிணங்கிய தகா பின்னம்.

$$\frac{x^5+5x+6}{x^3+4x+1} = x^2 - 4 + \frac{10+21x-x^2}{x^3+4x+1}$$

3·2 தேற்றம் 1. $A + \frac{P}{Q} \equiv B + \frac{R}{S}$ என்பது ஒரு முற்றொருமை; A, B பல்லுறுப்புக் கோவைகள், $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$ தகு பின்னங்கள், என்பவை கொடுக்கப்பட்டால் $A \equiv B$, $\frac{P}{Q} \equiv \frac{R}{S}$ என்பது முடிவு.

தெ: $A + \frac{P}{Q} \equiv B + \frac{R}{S}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$A \neq B$ என ஏற்றுக் கொண்டால்,

$$A - B \equiv \frac{R}{S} - \frac{P}{Q}$$

$$\equiv \frac{RQ - PS}{SQ}$$

இங்கு (A − B) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை; QS ன் 'படி', RQ ன் 'படி' யையும் PS ன் 'படி' யையும் விட உயர்ந்தது. எனவே $\frac{RQ - PS}{SQ}$ ஒரு தகு பின்னமாகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை, ஒரு தகுபின்னத்திற்குச் சமமாகாதாதலின், $A \equiv B$; $\frac{R}{S} \equiv \frac{P}{Q}$ என நிறுவப்படுகிறது.

3·3 பகுதிப் பின்னங்கள் :

இப்போது $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ ஐச் சுருக்கி $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ என எழுதுகிறோம். மாறாக, $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ ஐ $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ எனப் பிரித்து எழுதினால், அதுவே $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் எனப்படும். (Resolution or splitting into partial fractions).

இப்பகுதியில், அதற்குரிய கொள்கைகளை (Theory) விரிவாக விளக்காமல், நடை முறையில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கிணங்கிய பின்னத்தை எப்படிப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிப்பது என்பதைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

3·3.1 செய்முறை :

$\frac{f(x)}{F(x)}$ என்ற அளவுக் கிணங்கிய பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னமாகப் பிரிக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

(i) $f(x)$ ன் 'படி' $F(x)$ ன் 'படியை' விட உயர்ந்திருப்பின், முதல் $f(x)$ ஐ $F(x)$ ஆல் வகுத்து ஈவு $Q(x)$ எனவும் மீதி $R(x)$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $f(x) \equiv Q(x) . F(x) + R(x)$

$$\therefore \frac{f(x)}{F(x)} \equiv Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)}.$$

இப்போது $\frac{R(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும்.

$\frac{R(x)}{F(x)}$ ஐயே, பகுதிப் பின்னமாகப் பிரிக்க முடியும்.

(ii) $f(x)$ ன் 'படி', $F(x)$ ன் 'படி' க்குச் சமமாக விருப்பின் $f(x) \equiv A \cdot F(x) + R(x)$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கும்.

$$\therefore \frac{f(x)}{F(x)} = A + \frac{R(x)}{F(x)}$$

A ஓர் மாறிலியாக விருக்கும். இப்போது $\frac{R(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும்.

$\frac{R(x)}{F(x)}$ ஐயே, பகுதிப் பின்னமாகப் பிரிக்க முடியும்.

(iii) $f(x)$ ன் 'படி', $F(x)$ ன் 'படி' க்குக் குறைவாக விருப்பின் $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஏ, ஒரு தகு பின்னமாகும்.

இந்த மாதிரியாக $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஐ ஆராய்ந்து விட்டபின் $\frac{R(x)}{F(x)}$ என்ற ஒரு தகு பின்னம் கிடைக்கும். இல்லையேல் $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஏ ஒரு தகு பின்னமாயிருக்கும். இத்தகு பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கும் முறையைப் பார்ப்போம்.

பொதுவாக $\frac{f(x)}{F(x)}$ என்ற பின்னத்தை யெடுத்துக் கொள்வோம்; $f(x)$ ன் 'படி', $F(x)$ ன் 'படி' யை விடச் சிறியதெனவும் கொள்வோம். அப்போது $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஏ ஒரு தகு பின்னமாகும்.

(A) $F(x) \equiv (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots\ldots (a_nx + b_n)$ எனக் கொள்வோம்.

$F(x)$ ன் n சினைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு பகுதிப் பின்னமுண்டு.

இப்போது,

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots\ldots + \frac{A_r}{a_rx+b_r} + \ldots\ldots \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

எனப் பிரித் தெழுதுவதே, பகுதிப் பின்னம் காணல் எனக் கூறப்படும்.

இந்த முற்றொருமையைக் கொண்டு, $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ ஐக் கண்டு பிடிப்போம். இருபக்கங்களையும் $F(x)$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$f(x) \equiv A_1 (a_2 x + b_2)(a_3 x + b_3) \ldots\ldots (a_n x + b_n)$$
$$+ A_2 (a_1 x + b_1)(a_3 x + b_3) \ldots\ldots (a_n x + b_n)$$
$$+ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$ எனக் கிடைக்கும்.

இது முற்றொருமையாதலின் x ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

$x = -\frac{b_r}{a_r}$ எனக் கொண்டால்,

$$f\left(-\frac{b_r}{a_r}\right) = A_r \left(-\frac{b_r}{a_r} a_1 + b_1\right)\left(-\frac{b_r}{a_r} a_2 + b_2\right)$$
$$\ldots\ldots \left(-\frac{b_r}{a_r} a_n + b_n\right)$$

[$-\frac{b_r}{a_r} a_r + b_r$ மாத்திரம் இதில் இருக்காது]

$\therefore \quad A_r = \dfrac{f\left(-\frac{b_r}{a_r}\right)}{\left(\frac{F(x)}{a_r x + b_r}\right)}$ என்பதில் $x = -\frac{b_r}{a_r}$ என ஈடு செய்தால் கிடைக்கும்.

($\frac{F(x)}{a_r x + b_r}$ ன் வகுத்தல் ஈவில் தான் $x = -\frac{b_r}{a_r}$ என ஈடுசெய்ய வேண்டும்).

இது r ன் 1, 2, 3, ... n மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

(B) $F(x) = (ax+b)^r (a_{r+1}x + b_{r+1}) \ldots\ldots (a_n x + b_n)$ என விருப்பின், $F(x)$ ன் சினைகள்

$(ax+b)$; $(ax+b)^2$ ...... $(ax+b)^r$; $(a_{r+1}x+b_{r+1})$; ......$(a_n x + b_n)$

ஒவ்வொரு சினைக்கும் ஒரு பகுதிப் பின்னமுண்டு. எனவே

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_r}{(ax+b)^r} + \frac{A_{r+1}}{(a_{r+1}x+b_{r+1})} + \ldots\ldots + \frac{An}{(a_n x+b_n)}$$

என எழுதி $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ காணவேண்டும்.

(C) $F(x) = (ax^2+bx+c)(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots\ldots(a_nx+b_n)$ என இருந்து, ax^2+bx+cன் சினைகள் மெய்ச் சினைகளாகக் காண முடியாவிடத்தும் (அதாவது $b^2-4ac<O$ ஆகும்போது ax^2+bx+c க்கு மெய்ச் சினைகள் காணமுடியாது), ax^2+bx+cன் சினைகள் அளவுக் கிணங்காதபடி மூலங்கள் கொண்டதாக வருமிடத்தும், (அதாவது $b^2-4\,ac$ ஒரு சரியான இரு படியாக இல்லாதபோது),

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_1}{A_1x+b_1} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$ எனக்

கொண்டு $A, B, A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ காண வேண்டும்.

(D) $F(x) \equiv (ax^p+bx^{p-1}+\ldots\ldots+l)(a_{p+1}x+b_{p+1})\ldots\ldots(a_nx+b_n)$ என இருந்து $(ax^p+bx^{p-1}+\ldots\ldots+l)$ன் சினைகள் மெய்ச் சினைகளாகக் காண முடியா விடத்தும் (அதாவது $ax^p+bx^{p-1}+\ldots\ldots+l=O$ என்ற சமன் பாட்டின் தீர்வுகள் யாவும் கற்பனை யெண்களாயின்), $ax^p \times bx^{p-1}+\ldots\ldots+l$ன் சினைகள் அளவுக் கிணங்காத படி மூலங்கள் கொண்டதாக வருமிடத்தும்,

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{Ax^{p-1}+Bx^{p-2}+\ldots\ldots+k}{ax^p+bx^{p-1}+\ldots\ldots+l} + \frac{A_{p+1}}{a_{p+1}x+b_{p+1}} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

எனக் கொண்டு $A, B, \ldots\ldots K, A_{p+1}, \ldots\ldots A_n$ காண வேண்டும்.

(E) இவ்வாறே $(ax^2+bx+c)^3$, $(ax^3+bx^2+cx+d)^2$ .... போன்ற சினைகளுக்குரிய பகுதிப் பின்னங்கள் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு: ஒவ்வொரு சினைக்கும் ஒரு பகுதிப் பின்னமுண்டு; இருபடிச் சினையாயின் அதற்குரிய மேலெண் ஒரு

படிக் கோவை, p 'படி'ச் சினையாயின் அதற்குரிய மேலெண் $(p-1)$ படிக்கோவை ...... போன்ற சிறப்புக் கொள்கைகள் கவனத்திலிருக்கவேண்டியவை.

3·3.2 சென்ற பத்தியில் பொதுவாக $\frac{f(x)}{F(x)}$ ன் பகுதிப் பின்னங்கள் எந்த அமைப்பில் இருக்கும் எனக் கண்டோம்.

இப் பத்தியில், நடைமுறையில், எளிதாக, மாறிலிகளான A, B, ... A_1, B_1, ... முதலியவற்றைக் கணக்கிடப் பொதுவான, எளிய வழிவகைகளைக் காண்போம்.

(i) 3·3.1 ல் (A) அமைப்பு :

$$F(x) \equiv (a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \ldots\ldots (a_nx+b_n)$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

முதல்வழி : இரு பக்கங்களையும் $F(x)$ ஆல் பெருக்க, $f(x) \equiv \sum A_1 (a_2x+b_2) \ldots\ldots (a_nx+b_n)$ என்பது பெறப்படும்.

வலது கைப் புறத்தை விரித் தெழுதி அவ்விரிவில் x^{n-1}, x^{n-2}, ... x ன் கெழுக்களையும், மாறிலி எண்ணையும், $f(x)$ல், அவ்வாறான x^{n-1}, x^{n-2}, ... x ன் கெழுக்களையும் மாறிலி எண்ணையும், முறையே ஒப்பிட்டுச் சமன் செய்ய, A_1, A_2, ... A_n என்பவற்றை இணைக்கும் ஒன்றுக் கொன்று தொடர்பற்ற n சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

அவைகளின் தீர்வுகாண $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ கிடைக்கப் பெறும்.

இரண்டாவது வழி : 3·3.1 (A)ல் விளக்கப்பட்ட படி, A_rன் மதிப்பு $\dfrac{f\left(-\frac{b_r}{a_r}\right)}{\frac{F(x)}{(a_rx+b_r)}}$ ல் $x = -\frac{b_r}{a_r}$ என்று ஈடு செய்து பெறப்படும் மதிப்பாகும்.

(ii) 3·3.1ன் (B), (C), (D), (E) அமைப்புக்களில் முதல் வழியைப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால் இரண்டாவது வழியில் A, B, C ...... A_1, A_2, ... A_n யாவும் பெறமுடியாது.

அந்த நிலையில் x க்கு விரும்பிய மதிப்புக்கள் கொடுத்து, வேண்டுமளவு A, B, C, ... A_1, A_2,...... ஐ இணைக்கும் சமன்பாடுகள் பெற்று அவைகளைக் காணலாம்.

3·3.3 பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் இம்முறைகளை மேலும் தெளிவாக விளக்கம் செய்யும்.

எ–கா. (1) $\dfrac{1-5x}{(x^2-1)(x-2)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

கீழ்க் கோவையின் சினைகள் $(x+1)(x-1)(x-2)$

எனவே $\dfrac{1-5x}{(x^2-1)(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$ எனக் கொள்க.

இரு பக்கங்களையும் $(x^2-1)(x-2)$ ஆல் பெருக்கினல்,
$1-5x \equiv A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)$.

முதல் வழி :

$$1-5x \equiv x^2(A+B+C)+x(-3A-B)+(2A-2B-C)$$

இரு பக்கங்களிலும் ஒத்த படிகளின் கெழுக்களை சமன் செய்து பார்த்தால்,

$$A+B+C=0$$
$$-3A-B=-5$$
$$2A-2B-C=1$$

என்று மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

இவைகளின் தீர்வுகாண

$$A=1, \quad B=2, \quad C=-3$$

∴ வேண்டிய பகுதிப் பின்னங்கள்

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x-2}.$$

இதைச் சுருக்கி $\dfrac{1-5x}{(x^2-1)(x-2)}$ வருகிறதா எனச் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

இரண்டாவது வழி :

$$A = A_1 = \frac{1+5}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$B = A_2 = \frac{1-5}{(1+1)(1-2)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$C = A_3 = \frac{1-10}{(2+1)(2-1)} = \frac{-9}{3} = -3$$

மற்றவை பழையபடியே.

எ-கா. (2) $\frac{x^4+2x^3+4}{(x+1)^3(x-1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

மேல் கோவைப் 'படி', கீழ்க் கோவைப் 'படி'க்குச் சமமா யிருக்கிறது. எனவே முதலில் வகுத்து, $1+\frac{2x+5}{(x+1)^3(x-1)}$ எனக் கொள்க.

இப்போது $\frac{2x+5}{(x+1)^3(x-1)}$ ஐத்தான் பகுதிப் பின்னங்க ளாகப் பிரிக்க முடியும்.

கீழ்க் கோவையின் சினைகள், $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)$, $(x-1)$ இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு பகுதிப் பின்னம் உண்டாதலின்

$$\frac{2x+5}{(x+1)^3(x-1)} \equiv \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{x-1}$$

எனக் கொள்க.

இரு பக்கங்களையும் $(x+1)^3(x-1)$ ஆல் பெருக்கினால்

$$2x+5 \equiv A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2(x-1) + D(x+1)^3$$

முதல் வழி :

$$2x+5 \equiv x^3(C+D) + x^2(B+C+3D) + x(A-C+3D) + (-A-B-C+D)$$

இரு பக்கங்களிலும், ஒத்த படிகளின் கெழுக்களைச் சமன் செய்து பார்த்தால்,

$$C+D=0 \quad (1)$$

$$B+C+3D=0 \quad (2)$$

$$A - C + 3D = 2 \qquad (3)$$
$$-A - B - C + D = 5 \qquad (4)$$

என்ற நான்கு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். இவைகளின் தீர்வாக

$$A = -\frac{3}{2};\ B = -\frac{7}{4};\ C = -\frac{7}{8};\ D = \frac{7}{8}$$

என்பவை பெறப்படும்.

எனவே வேண்டிய விடை

$$\frac{7}{8(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)^3} - \frac{7}{4(x+1)^2} - \frac{7}{8(x+1)}$$

இரண்டாவது வழி:

$$2x+5 \equiv A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2(x-1) + D(x+1)^3$$

$x=1$ என ஈடு செய்ய, $7 = 8D \quad \therefore \quad D = \frac{7}{8}$

$x=-1$ என ஈடு செய்ய, $3 = -2A \quad \therefore \quad A = -\frac{3}{2}$

$x=0$ என ஈடு செய்ய, $5 = -A - B - C + D$ (1)

$x=2$ என ஈடு செய்ய, $9 = A + 3B + 9C + 27D$ (2)

A, D ன் மதிப்புக்களை (1), (2) ல் ஈடு செய்தால்

$$B + C = -\frac{21}{8} \qquad (3)$$

$$B + 3C = -\frac{35}{8} \qquad (4)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

இவைகளினின்று $B = -\frac{7}{4}$ எனவும் $C = -\frac{7}{8}$ எனவும் கிடைக்கும்.

எனவே $A = -\frac{3}{2};\ B = -\frac{7}{4};\ C = -\frac{7}{8};\ D = \frac{7}{8}$ எனக் கொண்டு பகுதிப் பின்னங்களை எழுதலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட கோவை

= 1 + நாம் கண்ட நான்கு பகுதிப் பின்னங்கள்.

எ-கா. (3) $\dfrac{x}{(x^2+x+1)(2x+1)}$ ன் பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க.

(x^2+x+1) ஐ மெய்ச் சினைகளாகப் பிரிக்க முடியாது.

எனவே $\dfrac{x}{(x^2+x+1)(2x+1)} \equiv \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{C}{2x+1}$ எனக் கொள்க.

இருபக்கங்களையும் $(x^2+x+1)(2x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$x \equiv (Ax+B)(2x+1) + C(x^2+x+1).$$

முதல் வழி:

$$x \equiv x^2(2A+C) + x(A+2B+C) + (B+C)$$

ஒத்த படிக் கெழுக்களை ஈடு செய்ய

$$2A + C = 0 \qquad (1)$$
$$A + 2B + C = 1 \qquad (2)$$
$$B + C = 0 \qquad (3)$$

இவ் வொருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு கண்டால்,

$A = \dfrac{1}{3}$; $B = \dfrac{2}{3}$; $C = -\dfrac{2}{3}$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ வேண்டிய விடை $= \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \dfrac{2}{3(2x+1)}$

இரண்டாவது வழி:

$$x \equiv (Ax+B)(2x+1) + C(x^2+x+1)$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ என ஈடு செய்ய, $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3C}{4}$ $\quad \therefore C = -\dfrac{2}{3}$

$x = 0$ என ஈடு செய்ய, $O = B + C$ $\quad \therefore B = \dfrac{2}{3}$

$x = 1$ என ஈடு செய்ய, $1 = 3(A+B) + 3C$ $\quad \therefore A = \dfrac{1}{3}$

எ-கா. (4) $\dfrac{1}{x^2(x^2+4x+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

$x^2 + 4x + 1 = 0$ ன் தீர்வுகள் $\dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

எனவே $x^2 + 4x + 1 \equiv (x + 2 - \sqrt{3})\ (x + 2 + \sqrt{3})$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2(x^2+4x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2-\sqrt{3}} + \frac{D}{x+2+\sqrt{3}}$$

இரு பக்கங்களையும் $x^2(x^2 + 4x + 1)$ ஆல் பெருக்க,

$$1 \equiv Ax(x^2 + 4x + 1) + B(x^2 + 4x + 1) + Cx^2(x + 2 + \sqrt{3}) + Dx^2(x + 2 - \sqrt{3})$$

$$\equiv x^3(A + C + D) + x^2(4A + B + \overline{2+\sqrt{3}}\,C + \overline{2-\sqrt{3}}\,D) + x(A + 4B) + B$$

$$A + C + D = 0 \qquad (1)$$

$$4A + B + \overline{2+\sqrt{3}}\,C + \overline{2-\sqrt{3}}\,D = 0 \qquad (2)$$

$$A + 4B = 0 \qquad (3)$$

$$B = 1 \qquad (4)$$

$$\therefore \quad A = -4$$

(1) ம் (2) ம் கொண்டால்,

$$C + D = 4 \qquad (5)$$

$$\overline{2+\sqrt{3}}\,C + \overline{2-\sqrt{3}}\,D = 15 \qquad (6)$$

(5) ஐ (6) ல் ஈடு செய்ய $\sqrt{3}\,(C - D) = 7$

$$\therefore \quad C - D = \frac{7\sqrt{3}}{3} \qquad (7)$$

(5) ம் (7) ம் கொண்டால், $C = 2 + \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

$$D = 2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

இப்போது வேண்டிய விடை,

$$-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{12+7\sqrt{3}}{6(x+2-\sqrt{3})}+\frac{12-7\sqrt{3}}{6(x+2+\sqrt{3})}$$

கடைசி இரண்டு உறுப்புக்களையும் கூட்டினால் வரும் கூட்டுத் தொகை,

$$=\frac{(12+7\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})+(12-7\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{6(x^2+4x+1)}$$

$$=\frac{24x+90}{6(x^2+4x+1)}$$

$$=\frac{4x+15}{x^2+4x+1}$$

எனவே வேண்டிய விடை

$$=-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4x+15}{x^2+4x+1}$$

எனவே, $\frac{C}{x+2-\sqrt{3}}+\frac{D}{x+2+\sqrt{3}}$ என்ற இரு பகுதிப் பின்னங்களை யெடுப்பதற்குப் பதிலாக,

$$\frac{1}{x^2(x^2+4x+1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Px+Q}{x^2+4x+1}$$

என எடுத்து எளிதில் பகுதிப் பின்னங்கள் காணலாம்.

3.3·1 (C) (D) ல் கூறியிருப்பதைக் கவனித்து அதன் பயனையடையலாம்.

எனவே, பொதுவாக (ax^2+bx+c) க்கோ

$(ax^p+bx^{p-1}+cx^{p-2}+\ldots\ldots+l)$ க்கோ அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்கள் கொண்ட சினைகள் காண முடியாவிட்டால் (அதாவது படி மூலங்கள் சினைகளில் தோன்றுமானால்) அல்லது கற்பனை யெண்கள் கொண்ட சினைகள் தோன்றுமானால்,

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\ \frac{Ax^{p-1}+Bx^{p-2}+\ldots\ldots+K}{ax^p+bx^{p-1}+\ldots\ldots+l}$$

என்ற பகுதிப் பின்னங்களைக் கொள்ளலாம் என மறுபடியும் வலியுறுத்தப்படுகிறது.

எ-கா. (5) $\dfrac{\lfloor n}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

3·3.1 (A) ல் கண்டபடி $A_0 = \dfrac{\dfrac{f(0)}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}}{x}$ என்பதில் x என்ற பொதுச்சினையை அடித்து விட்டு $x=0$ என ஈடு செய்தால் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad A_0 = \frac{\lfloor n}{1.2.3\ldots\ldots n} = 1.$$

$A_r = \dfrac{\dfrac{f(-r)}{x(x+1)\ldots\ldots(x+r)\ldots\ldots(x+n)}}{(x+r)}$ என்பதில் $(x+r)$

என்ற பொதுச் சினையை அடித்து விட்டு $x=-r$ என ஈடு செய்தால் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad A_r = \frac{\lfloor n}{(-r)(1-r)(2-r)\ldots(r-1-r)(r+1-r)\ldots(n-r)}$$

$$= \frac{\lfloor n}{(-1)^r \cdot \lfloor r \cdot \lfloor n-r}$$

$$= (-1)^r \, {}_nC_r$$

$\therefore$ வேண்டிய விடை

$$= \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r \, {}_nC_r}{x+r}$$

எ-கா. (6) $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)} \equiv \dfrac{A}{1-ax} + \dfrac{B}{1-bx}$ ஆனால்

$$\frac{1}{(1-ax)^2(1-bx)} \equiv \frac{A}{(1-ax)^2} + \frac{AB}{1-ax} + \frac{B^2}{1-bx}$$

என நிறுவுக.

$$\frac{1}{(1-ax)^2(1-bx)} \equiv \frac{1}{1-ax}\left[\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}\right]$$

$$\equiv \frac{1}{1-ax}\left[\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}\right]$$

$$\equiv \frac{A}{(1-ax)^2}+\frac{B}{(1-ax)(1-bx)}$$

$$\equiv \frac{A}{(1-ax)^2}+B\left[\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}\right]$$

$$\equiv \frac{A}{(1-ax)^2}+\frac{AB}{1-ax}+\frac{B^2}{1-bx}$$

இதையொட்டி $\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$ ன் பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க.

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x}+\frac{2}{1-2x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1-x)^2(1-2x)} = -\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}+\frac{4}{1-2x}$$

$(A=-1,\ B=2)$.

அது போல,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}-\frac{2}{(1-2x)}+\frac{1}{1-x}$$

எ-கா. (7) $L(x+2)^3+M(x+3)^2=1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கொப்ப L, M ஐ அறிக.

$L = Ax+B$

$M = Cx^2+Dx+E$ எனவும் கொள்க.

$$(Ax+B)(x^3+6x^2+12x+8)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+6x+9)=1$$

$\therefore$ x^4, x^3, x^2, x ன் கெழுக்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாகும். மாறிலி '1' க்குச் சமமாகும்.

$$A + C = 0$$
$$6A + B + 6C + D = 0$$
$$12A + 6B + 9C + 6D + E = 0$$
$$8A + 12B + 9D + 6E = 0$$
$$8B + 9E = 1$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்,

$A = -3;\quad B = -10;\quad C = 3;\quad D = 10;\quad E = 9$

$\therefore\quad L \equiv -(3x+10)$

$M \equiv 3x^2 + 10x + 9.$

இதை யொட்டி $\dfrac{1}{(x+2)^3\,(x+3)^2}$ ன் பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க.

$-(3x+10)(x+2)^3 + (3x^2+10x+9)(x+3)^2 = 1$ என நாம் நிறுவினேம்.

இருபக்கங்களையும் $(x+2)^3\,(x+3)^2$ ஆல் வகுத்தால்

$$-\frac{(3x+10)}{(x+3)^2} + \frac{(3x^2+10x+9)}{(x+2)^3} = \frac{1}{(x+3)^2\,(x+2)^3}$$

$$\text{இ. கை. பு.} = \frac{-3(x+3)-1}{(x+3)^2} + \frac{3(x+2)^2-2(x+2)+1}{(x+2)^3}$$

$$= -\frac{3}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2\,(x+2)^3} \quad \text{(வ. கை. பு.)}$$

எ-கா. (8) $\dfrac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ன் ஈவு கண்டு பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

அதை யொட்டி $\Sigma\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ ன் மதிப்புக் காண்க.

$$\frac{x^4}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)} \equiv x+K+\frac{R}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)}$$
எனக் கொள்க.

இங்கு K ஒரு x சார்பற்ற எண்ணாகவும் R, x ன் இருபடிக் கோவையாகவும் இருக்கும். இருபக்கங்களையும் $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)$ ஆல் பெருக்க, $x^4 \equiv (x+K) \prod (x-a)+R$ (R – இருபடிக் கோவை) இரு பக்கங்களிலும் x^3 ன் கெழுவை ஒப்பிட்டால், $O = K-(a+b+c)$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad K=a+b+c$$

$$\therefore \quad \frac{x^4}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)} \equiv x+a+b+c+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$
எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கங்களையும் $(x-a)$ ஆல் பெருக்கினல்

$$\frac{x^4}{(x-b)\ (x-c)} \equiv (x+a+b+c)\ (x-a)+A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right]$$
எனக் கிடைக்கும். $x=a$ என ஈடு செய்தால்

$$\frac{a^4}{(a-b)\,(a-c)} = A.$$

இவ்வாறே $B=\dfrac{b^4}{(b-a)\,(b-c)}$; $C=\dfrac{c^4}{(c-a)\ (c-b)}$

$$\therefore \quad \frac{x^4}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)} \equiv x+a+b+c+\frac{a^4}{(a-b)\,(a-c)}\cdot\frac{1}{(x-a)}$$

$$+\frac{b^4}{(b-c)\ (b-a)}\cdot\frac{1}{(x-b)}$$

$$+\frac{c^4}{(c-a)\ (c-b)}\cdot\frac{1}{(x-c)}$$

இப்போது $x=d$ என ஈடு செய்யின்

$$\Sigma\frac{a^4}{(a-b)\ (a-c)\ (a-d)} = a+b+c+d$$
என்ற மதிப்பு பெறப்படும்.

பயிற்சி 3

பின்வருவனவற்றைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

1. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

2. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

3. $\dfrac{3}{x^2-x-12}$

4. $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$

5. $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$

6. $\dfrac{x}{(2x-1)(2x+1)}$

7. $\dfrac{1}{x^3(x+2)}$

8. $\dfrac{(2x-3)(1-5x)(6x+1)}{(4x-1)^3}$

9. $\dfrac{5x+3}{x^2(x+2)^2}$

10. $\dfrac{x^2-19x-15}{(x+2)^3(x^2+1)}$

11. $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$

12. $\dfrac{x^3}{x^3+27}$

13. $\dfrac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$

14. $\dfrac{3x^2+6x-2}{(x^2+2)(x^2+4x+8)}$

15. $\dfrac{1}{x^2(x^2+a^2)^2}$

16. $A(x-1)^2 - B(x+1)^2 \equiv 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் A, B காண்க.

17. $A(x^2+1) + B(x^2+x+1) \equiv 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் A, B காண்க.

18. $\dfrac{y^2-5y+1}{(y+1)(y+2)(y+3)}$ என்ற கோவையை

$$\frac{A}{y+1}+\frac{B}{(y+1)(y+2)}+\frac{C}{(y+1)(y+2)(y+3)}$$

என்ற அமைப்பில் கொண்டால் A, B, C கணக்கிடுக.

19. எ-கா. (6) ல் பெறப்பட்ட முடிவைப் பொதுப்படுத்தி

$$\frac{1}{(ax+b)^n(cx+d)}=\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{AB}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{AB^2}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{AB^{n-1}}{(ax+b)}+\frac{B^n}{cx+d}$$

என நிறுவுக.

20. $\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து இலகிராஞ்சியின் இடைச் செருகல் வாய்பாடான (Lagrange's Interpolation formula)

$$\frac{f(x)}{\prod_{r=1}^{n}(x-a_r)}=\Sigma\left[\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)}\cdot\frac{1}{x-a_1}\right]$$ ஐ

நிறுவுக. அதையொட்டி

$$\sum_{a_0}^{a_n}\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)}=0$$ என நிறுவுக.

4. சமனின்மை.

(Inequalities)

4·1 பொது இயல்புகள்: இயற் கணிதத்தில் பல்வேறு இடங்களில் சமனின்மை பற்றிய இயல்புகள் பயன்படுகின்றன. புகுமுக வகுப்பிலேயே 'விகிதம்' என்ற தலைப்பிலும் 'இருபடிச் சார்புகள்' என்ற தலைப்பிலும், சமனின்மை பற்றிய சில இயல்புகளைப் பார்த்திருப்பீர்கள். இப்பகுதியில் நாம் காண இருக்கும் இயல்புகள், 'எல்லைகள்' (limits) 'கந்தழித் தொடர்கள்' (infinite series) என்ற பகுதிகளில் நாம் காண இருக்கும் பல உண்மைகளுக்குப் பெரிதும் தொடர்புடையன. சமனின்மை பற்றிய பல கோட்பாடுகளின் அடிப்படையிலேதான் 'கந்தழித் தொடர்கள்' பற்றி நாம் பின்னர் அறியவிருக்கிறோம்.

இப்பகுதியில், இயற்கணித மெய்யிராசிகள் (real algebraic quantities) மட்டுமே நம் கவனத்திற்குரியதாகும். கற்பனை எண்களும், கலப்பெண்களும் இப்பகுதியில் இடம் பெரு. கண்டிப்பாகப் பார்க்குமிடத்து கூட்டு மெய்யிராசிகள் பற்றியே சமனின்மை பற்றிய பண்புகள் ஆராயப்படுவது மரபு. ஆனல் சற்று விதி விலக்காக, குறை மெய்யிராசிகளோடு அப் பண்புகளையும் ஆராயலாம்.

ஆகவே இப்பகுதியில் வேறென்றும் கூறப்படா விடத்து, எல்லாக் குறியீடுகளும் (இயற் கணிதக் குறியீடுகளும்) கூட்டு மெய்யிராசிகளையே (எண்களும் கூட) குறிக்கும். அதாவது, இராசி, எண் எனக் கூறு மிடமெல்லாம் அது, கூட்டு மெய்யிராசியையோ, கூட்டு மெய்யெண்ணேயோ மட்டும் தான் குறிக்கும். விலக்குகள் கூறப்படு மிடத்தே, உரிய விலக்குகள் சிறப்பாகக் குறிப்பிடப்படும்.

4·2 $a > b$; $a < b$; வரையறை :

$(a-b)$ ன் மதிப்பு ஒரு கூட்டெண்ணுயின் b ஐ விட a பெரிது எனக் கூறுகிறேம்; அதை $a>b$ என்ற குறியீடு கொண்டு தெரிவிப்போம்.

$(a-b)$ ன் மதிப்பு ஒரு குறை யெண்ணுயின் b ஐ விட a சிறிது எனக் கூறுகிறேம்; அதை $a<b$ என்ற குறியீடு கொண்டு தெரிவிப்போம்.

குறிப்பு : இவ்வரையறை கொண்டே, குறை மெய்யெண் களின் சமனின்மையும் கொள்ளப்படும். எடுத்துக் காட்டாக

$$-5 < -3$$
$$-3 > -5.$$

4·3 சமனின்மை பற்றிய எளிய தேற்றங்கள் :

(i) இரு பக்கங்களுடனும் ஒரே கூட்டு எண்ணைக் கூட்டுவ தாலோ, இரு பக்கங்களினின்றும் ஒரே கூட்டு எண்ணைக் கழிப்பதாலோ, சமனின்மைக் குறியீடு மாருது, சமனின்மைத் தன்மையும் மாருது.

$a>b$ என்றே $a<b$ என்றே கொடுக்கப்பட்டால், முறையே $a\pm x>b\pm x$ என்பதும் $a\pm x<b\pm x$ என்பதும் பொருத்தமாகும்.

தெ: $a>b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $(a-b)$ ன் மதிப்பு ஒரு கூட்டெண் என்பது வரையறை.

இப்போது $(a\pm x)-(b\pm x)=(a-b)$

$=$ கூட்டெண்

எனவே $a\pm x>b\pm x$.

அவ்வாறே $a<b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $(a-b)$ ன் மதிப்பு குறையெண் என்பது வரையறை.

எனவே $(a\pm x)-(b\pm x)=(a-b)=$ குறையெண்.

எனவே $a\pm x<b\pm x$.

(ii) $a \gtrless b$ ஆனல்

$-b \gtrless -a$ என்பது வெள்ளிடை.

(iii) பின் வருவனவற்றை எளிதில் நிறுவலாம். (m, n கூட்டு முழு எண்கள் அல்லது கூட்டு பின்னங்கள்) (பயிற்சியாகக் கொள்க).

$a \gtrless b$ ஆனுல்

(i) $ma \gtrless mb$; (ii) $\frac{a}{m} \gtrless \frac{b}{m}$;

(iii) $\frac{1}{a} \lessgtr \frac{1}{b}$; (iv) $a^m \gtrless b^m$;

(v) $a^{\frac{m}{n}} \gtrless b^{\frac{m}{n}}$

(iv) $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ ஆனுல், $ad \gtrless bc$ என்பது பொருந்தும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாம்.

(v) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n$ ஆனுல், $a_1 > a_n$ என்பது பொருத்தம்.

(vi) $a_1 > b_1$; $a_2 > b_2$; …… $a_n > b_n$ ஆனுல்

$a_1 a_2 \ldots\ldots a_n > b_1 b_2 \ldots\ldots b_n$ என்பது பொருத்தம்.

4·3.1 $\frac{a}{b} > 1$ ஆனுல், $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x} > 1$ என நிறுவலாம்.

தெ : $\frac{a}{b} > 1$ என்பது கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால், $a > b$ ஆகும்; அதாவது $(a-b)$ ன் மதிப்பு கூட்டெண்.

$$\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} = \frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)}$$

$$= \frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

= கூட்டெண் மதிப்பு.

எனவே $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$ என நிறுவப்பட்டது.

மேலும் $\frac{a+x}{b+x} - 1 = \frac{a+x-b-x}{b+x}$

$$= \frac{a-b}{b+x}$$

= கூட்டெண் மதிப்பு.

எனவே $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x} > 1.$

கிளைத் தேற்றங்கள்:

(நிறுவன் முறை முன் கூறப்பட்டபடி)

(i) $\frac{a}{b} > 1$ ஆனால், $\frac{a-x}{b-x} > \frac{a}{b} > 1.$ $(x<b)$

(ii) $\frac{a}{b} < 1$ ஆனால், $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} < 1$

(iii) $\frac{a}{b} < 1$ ஆனால், $\frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b} < 1$ $(x<a)$

எ-கா. (1) x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $1+x^n > x^{n-1}$ என நிறுவுக. (n ஒரு கூட்டு முழு எண்)

$x>1$ ஆனால், $x^n > x^{n-1}$

எனவே $1+x^n > x^{n-1}$

$x \leq 1$ ஆனால் $1 \geq x^{n-1}$

எனவே $1+x^n > x^{n-1}$

4.3·2 எ-கா. (2)

$\frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6......2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ என நிறுவுக.

$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} < 1$ என்பது தெளிவு

முறையே $x=1, 3, 5, 7 \ldots\ldots$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$$

இருபக்கங்களையும் பெருக்கிப் பார்த்தால்,

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} < \frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}$$

அதாவது $1^2.3^2.5^2\ldots\ldots(2n-1)^2(2n+1) < 2^2.4^2.6^2\ldots\ldots(2n)^2$

$$\therefore \quad \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots(2n)^2} < \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

எ-கா. (3) $(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2) > (al+bm+cn)^2$ என நிறுவுக.

$$(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2) - (al+bm+cn)^2$$
$$= (bn-cm)^2+(cl-an)^2+(am-bl)^2$$

என்பது எளிதில் காணலாம்.

வலது கைப்புறக் கோவை எப்போதும் கூட்டு எண் மதிப்புப் பெறும்; ஏனெனில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சரியான இருபடி. எனவே வேண்டியது நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 4 (i)

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

1. $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.

2. $a^n + b^n > a^{n-1}b + ab^{n-1}$ $(n > 1)$.

3. $a^m + a^{-m} > a^n + a^{-n}$ $(m > n)$.

4. $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$.

5. $\dfrac{a-x}{a+x} < \dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ $(x < a)$.

6. $(\underline{|n})^2 > n^n$ $(n > 2)$.

7. $a^{p+q} + b^{p+q} \nless a^p b^q + a^q b^p$.

8. x, y, z ...... ஏதேனும் n மெய்யெண் இராசிகள்; p, q இரண்டும் ஒரே குறியீடுடைய இரு மெய்யெண்கள்;

அப்போது $n \sum x^{p+q} > \sum x^p y^q$ என நிறுவுக.

9. $\dfrac{1.3 \ldots\ldots (2n-1)}{2.4 \ldots\ldots 2n} > \dfrac{\sqrt{(n+1)}}{2n+1}$ என நிறுவுக.

4·4 தேற்றம் 1:

இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், அவ் வெண்கள் சமமாயிருக்கும் போதுதான், அவைகளின் பெருக்குத் தொகை மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத் தொகை $2a$ ஆனால், அவ்விரு எண்களையும் $a+x$, $a-x$ எனக் கொள்ளலாம். அப்போது அவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$(a+x)(a-x) = a^2 - x^2$$

இதன் மதிப்பு எப்போதும் a^2 ன் மதிப்புக்குக் குறைவாயிருக்கும். $x=0$ ஆகும் போது, இதன் மீப் பெருமதிப்பு a^2 எனப் பெறப்படும்; அதாவது இரு எண்களும் a, a என்ற சம மதிப்புக்கள் பெறும் போது தான்.

4·5 தேற்றம் 2:

கூட்டு முழு எண் $n > 2$ ஆனால்,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n > \left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}$$

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{p}{n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{p^2}{n^2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\frac{p^3}{n^3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}\cdot\frac{p^r}{n^r}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\cdot 1}{\lfloor n}\cdot\frac{p^n}{n^n}$$

$$=1+p+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}p^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}p^3+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}p^r+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{\lfloor n}p^n \qquad \text{(A)}$$

அவ்வாறே

$$\left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}=1+p+\frac{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}{\lfloor 2}p^2+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n-1}\right)}{\lfloor r}p^r+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)}{\lfloor n-1}p^{n-1} \qquad \text{(B)}$$

இப்போது,

$$1-\frac{1}{n}>1-\frac{1}{n-1}$$

$$1-\frac{2}{n}>1-\frac{2}{n-1}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$1-\frac{r}{n}>1-\frac{r}{n-1}$$

எனவே $\prod_{r=1}^{r}\left(1-\frac{r}{n}\right)>\prod_{r=1}^{r}\left(1-\frac{r}{n-1}\right)$, $r=1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1)$.

$$\therefore \quad \frac{p^r\prod_{r=1}^{r}\left(1-\frac{r}{n}\right)}{\lfloor r} > \frac{p^r\prod_{r=1}^{r}\left(1-\frac{r}{n-1}\right)}{\lfloor r}, \quad r=1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1).$$

ஆகவே, (A) (B), ன் வலப்பக்கங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, (A) லுள்ள 3, 4, 5 ...... n வது உறுப்புக்கள், முறையே (B) லுள்ள 3, 4, 5, ... n வது உறுப்புக்களை விடப் பெரியதாயிருக்கின்றன; மேலும், இரண்டிலும் முதல் இரு உறுப்புக்கள் சமம்; மேலும், (A) ல் $(n+1)$ வது உறுப்பு ஒன்று அதிகமாக உள்ளது.

எனவே, $\left(1+\frac{p}{n}\right)^n > \left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}$ என நிறுவப்படுகிறது.

கிளைத்தேற்றம் :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

4.6 கூட்டிடை, பெருக்கிடை, இசையிடை :

பொது வரையறை :

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற எண்களின் கூட்டிடை

$$(\text{A.M.}) = \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n};$$

பெருக்கிடை (G.M.) = $\sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots\ldots.a_n}$ (கூட்டெண் மதிப்பு)

$$\text{இசையிடை (H.M.)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

4.7·1 தேற்றம் 3 :

n வெவ்வேறு கூட்டு மெய்யெண்களின் கூட்டிடை மதிப்பு அவ்வெண்களின் மீப்பெரு மதிப்புக்கும் மீச்சிறு மதிப்புக்கும் இடைப்பட்டது.

$a_1 > a_2 > a_3 \ldots\ldots > a_n$ ஆனால் $a_1 > \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} > a_n$ என நாம் நிறுவ வேண்டும்.

தெ :

$$a_1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \frac{na_1 - (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)}{n}$$

$$= \frac{(a_1 - a_2) + (a_1 - a_3) + \ldots\ldots + (a_1 - a_n)}{n}$$

> 0 (ஏனெனில் a_1 எல்லாவற்றை யும் விடப் பெரியது)

எனவே $a_1 > \frac{\sum a_r}{n}$.

மேலும் $\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} - a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n - na_n}{n}$

$$= \frac{(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots\ldots + (a_{n-1} - a_n)}{n}.$$

< 0 (ஏனெனில் a_n எல்லாவற்றிலும் சிறியது)

குறிப்பு : $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots\ldots \geq a_n$ ஆனாலும் இது பொருந்தும்.

4·7.2 தேற்றம் 4 :

$a_{n+1} \gtrless \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$ என்ற கட்டுப் பாட்டுக் கொப்ப $\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n+1}}{n+1} \gtrless \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$.

தெ : $\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \text{A}$ எனக் கொள்க.

அப்போது $\Sigma\ a_n = n\text{A}$.

$$\therefore \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$$

$$= \frac{nA+a_{n+1}}{n+1} - A.$$

$$= \frac{a_{n+1} - A}{n+1}$$

$\gtrless 0$ ($a_{n+1} \gtrless A$ என்ற கட்டுப் பாட்டுக்கொப்ப)

4·7.3 தேற்றம் 5:

$x \gtrless 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கொப்ப,

$$\frac{1+x+\ldots\ldots+x^n}{n+1} \gtrless \frac{1+x+\ldots\ldots+x^{n-1}}{n}$$

தெ: $\frac{1+x+\ldots\ldots+x^n}{n+1} - \frac{1+x+\ldots\ldots+x^{n-1}}{n}$

$$= \frac{nx^n - (1+x+\ldots\ldots+x^{n-1})}{n\,(n+1)}$$

$$= \frac{(x^n-1)+(x^n-x)+(x^n-x^2)+\ldots\ldots+(x^n-x^{n-1})}{n\,(n+1)}$$

$\gtrless 0$ · (ஒவ்வொரு அடைப்பிணைக்குள் உள்ளது $x \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப, கூட்டு அல்லது குறை மதிப்புடையது.)

4·7.4 முக்கியமான தேற்றம் 6:

n வெவ்வேறு கூட்டு எண்களின் கூட்டிடை, அவைகளின் பெருக்கிடையை விடப் பெரிது.

அதாவது $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பவை வேறுபட்ட கூட்டு இராசிகள்.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots\ldots a_n}$$

என்பது தேற்றமாம்.

தெ: (பொதுத் தன்மை மாறுமல்), $a_1 > a_2 > a_3 \ldots\ldots > a_n$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n > na_n$ என்பது வெள்ளிடை.

எனவே,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{a_n} > n.$$

இப்போது, $\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{a_n} = n+p$ எனக் கொள்வோம். p ஒரு கூட்டு மதிப்புடையதாகும்.

$$\therefore \quad n+p-1 = \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{a_n} - 1$$

$$= \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}}{a_n}$$

ஆனல் 4.5–ல் கண்ட தேற்றம் 2–ன் படி

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n > \left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}$$

அதாவது,

$$\left(\frac{n+p}{n}\right)^n > \left(\frac{n+p-1}{n-1}\right)^{n-1}$$

எனவே,

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n.a_n}\right)^n > \left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}}{(n-1)\,a_n}\right)^{n-1}$$

இருபக்கங்களையும் $(a_n)^n$ ஆல் பெருக்க,

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n}\right)^n > a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$> a_n a_{n-1}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-2}}{n-2}\right)^{n-2}$$

(பொதுப்படுத்திஞல்)

... ...

$$>a_n a_{n-1}\ldots\ldots a_3\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

$$>a_n.a_{n-1}\ldots\ldots a_3.a_2.a_1.$$

$\therefore\ \dfrac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n}>(a_1a_2\ldots\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ என நிறுவப்படு கிறது.

கிளைத் தேற்றம் :

$a_1=a_2=\ldots\ldots=a_n$ ஆனல், கூட்டிடை = பெருக்கிடை.

எனவே, பொதுவாக,

கூட்டிடை $\nless$ பெருக்கிடை.

அல்லது கூட்டிடை $\geq$ பெருக்கிடை.

குறிப்பு : இத் தேற்றத்தைத் தொடர்முறைத் தெரிப்பு முறையிலும் நிறுவலாம். அம்முறை இங்குக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

4·7.4.1 மாற்றுத் தெரிப்பு (தொடர்முறைத் தெரிப்பு).

தெ: இரண்டு வெவ்வேறு எண்களுக்குக் கூட்டிடை $>$ பெருக்கிடை என நாம் அறிவோம்.

அதாவது $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ என்பது புகுமுக வகுப்பிலே நாம் அறிவோம்.

இதன் தெரிப்பு எளிது :

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$$

$$\therefore\ a+b-2\sqrt{ab}>0$$

$\therefore\ \dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ எனப் பெறப்படும்.

இப்போது,

n கூட்டு எண்களுக்கு இத்தேற்றம் உண்மையெனக் கொள்வோம். அதாவது, $\dfrac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots\ldots a_n}$ எனக் கொள்வோம்.

அதை ஏற்றுக் கொண்டு, இத்தேற்றம் $2n$ எண்களுக்கு உண்மையென நிறுவுவோம்.

ஏற்றுக்கொண்டபடி,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n} = A > \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots\ldots+a_{2n}}{n} = A^1 > \sqrt[n]{a_{n+1} \,.\, a_{n+2} \ldots\ldots a_{2n}}$$

என்ற இரண்டு சமனின்மைகளும் பொருந்தும். இங்கு எண்களை எடுப்பதில் $A \neq A^1$ என்பதற்கு ஏற்பாடு செய்து கொள்ளலாம். இரு எண்களுக்கு, கூட்டிடை > பெருக்கிடையென்பதையொட்டி,

$$\frac{A+A^1}{2} > \sqrt{AA^1}.$$

அதாவது,

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2+\ldots\ldots a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots\ldots+a_{2n}}{n}}{2}$$

$$> \left(\sqrt[n]{a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n} \,.\, \sqrt[n]{a_{n+1} \,.\, a_{n+2} \ldots\ldots a_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

அதாவது $> \sqrt[2n]{a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{2n}}.$

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{2n}}{2n} > \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_{2n}}$$

என நிறுவப்படுகிறது.

எனவே தேற்றம் n எண்களுக்கு உண்மையானால், $2n$ எண்களுக்கும் உண்மையாகும்.

ஆனால் தேற்றம் இரண்டு எண்களுக்கு உண்மையென நாம் அறிவோம்; ஆகவே, அது 4 எண்களுக்கும் பொருந்தும்; ஆகவே, அது 8 எண்களுக்கும் பொருந்தும் என்று தொடர்ச்சியாக 2^m எண்களுக்குப் பொருந்துமென நிறுவப்படுகிறது. ஆனால் n எப்போதும் 2^m க்குச் சமமாயிருக்காது. எனவே, n எப்படிப்பட்ட எண்ணாயினும்,

$n+p=2^m$ என்ற அமைப்பில் வருமாறு p எண்கள் A, A, A …… சேர்ப்போம்.

$$\therefore \quad \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n+A+A+\ \ldots\ldots A}{n+p} \quad (p\text{-A க்கள்})$$

$$> \sqrt[n+p]{a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n \cdot A^p}$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots a_n}{n} = A \text{ ஆகையால்}$$

$$\frac{nA+pA}{n+p} > \sqrt[n+r]{a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n \cdot A^p}$$

$$\therefore \quad A^{n+p} > a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n \cdot A^p$$

$$\therefore \quad A^n > a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n$$

$$\therefore \quad A > \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n}.$$

என எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும், தேற்றம் உண்மையாகிறது.

4·7.5 முன் நிறுவப்பட்ட தேற்றத்தின் பொது அமைப்பு :

தேற்றம் 7 : a_1, a_2, …… a_n என்பவை n மெய்யெண்கள் ; m_1, m_2, …… m_n என்பவை n அளவுக்கிணங்கிய எண்களானால்,

$$\left(\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ \ldots\ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ \ldots\ldots + m_n}\right)^{m_1 + m_2 + \ \ldots\ldots + m_n}$$

$$> a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \ \ldots\ldots \ a_n^{m_n}$$

தெ : m_1, m_2, …… m_n என்பவை அளவுக் கிணங்கிய எண்களாதலின் $\left(= \dfrac{p}{q} \text{ என்ற அமைப்பு}\right)$ அவைகளின் (பின்னக்) கீழெண்களின் (Denominators) அதமப் பொது மடங்கு (L. C. M) l எனக் கொள்வோம். அப்போது lm_1, lm_2, …… lm_n யாவும் கூட்டு முழு எண்களாகும்.

$a_1, a_1, \ldots\ldots$ என lm_1 எண்களும்

$a_2, a_2, \ldots\ldots$ என lm_2 எண்களும்

... ...

$a_n, a_n, \ldots\ldots$ என lm_n எண்களும் கொண்டு, இந்த $l(m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n)$ எண்களுக்குக் கூட்டிடை > பெருக்கிடை என்ற தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தினுல்,

$$\left(\frac{lm_1 a_1 + lm_2 a_2 + \ldots\ldots + lm_n a_n}{lm_1 + lm_2 + \ldots\ldots + lm_n}\right)$$

$$> \left(a_1^{lm_1} \cdot a_2^{lm_2} \ldots\ldots a_n^{lm_n}\right)^{\frac{1}{l(m_1+m_2+\ldots\ldots m_n)}}$$

என்ற முடிவு கிடைக்கும்.

இதைச் சுருக்கி யெழுதினுல்,

$$\left(\frac{\sum m_1 a_1}{\sum m_1}\right) > \left(a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \ldots\ldots a_n^{m_n}\right)^{\frac{1}{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n}}$$

அல்லது

$$\left(\frac{\sum m_1 a_1}{\sum m_1}\right)^{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n} > \prod \left(a_1^{m_1}\right)$$

என்ற முடிவு பெறப்படும்.

4·7.6 கூட்டிடை > பெருக்கிடை என்ற தேற்றத்தை யொட்டி இரண்டு முக்கிய கிளைத் தேற்றங்கள் உள்ளன. அவைகள் பெரிதும் பயன்படும்.

4·7.6.1 கிளைத் தேற்றம் :

n கூட்டெண்களின் கூட்டுத் தொகை குறிப்பிட்ட ஒரு மாறிலியாயின், அவைகளின் மீப்பெரு பெருக்குத் தொகை, அவ்வெண்கள் சமமாயின் கிடைக்கும்.

தெ : $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = s$ (மாறிலி) எனக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. இக்கட்டுப்பாட்டுக் குட்பட்டு $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ மாறுகின்றன (ஆனுல் எவையும் குறையெண்களாவதில்லை).

அப்போது

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = \frac{s}{n}$$ என்ற மதிப்பை யொட்டிய பெருக்குத் தொகை

$$a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n = \left(\frac{s}{n}\right)^n$$ என்பதே,

$a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_n$ என்பதன் மீப் பெரு மதிப்பாகும் என நிறுவ வேண்டும்.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \frac{s}{n}$$ எனக் கொள்க.

ஆனல் $A \nless (a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ என்பது தெரியும்.

$$\therefore \quad (a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n) \ngtr A^n$$

ஆகவே $a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n$ன் மீப் பெரு மதிப்பு $A^n = \left(\frac{s}{n}\right)^n$

4·7.6.2 கிளைத் தேற்றம் :

n கூட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகை குறிப்பிட்ட ஒரு மாறிலியாயின், அவைகளின் மீச்சிறு கூட்டுத் தொகை, அவ்வெண்கள் சமமாயின் கிடைக்கும்.

தெ : $a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n = P$ என்ற மாறிலி எனக் கொள்வோம். இக் கட்டுப்பாட்டுக் குட்பட்டு $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ மாறுகின்றன. (ஆனல் எவையும் குறையெண்களாவதில்லை).

அப்போது,

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = (P)^{\frac{1}{n}}$$ என்ற மதிப்பை யொட்டிய கூட்டுத் தொகை

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = n\,(P)^{\frac{1}{n}}$$ என்பதே

$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ என்பதன் மீச்சிறு மதிப்பாகும் என நிறுவ வேண்டும்.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = A$$ எனக் கொள்வோம்.

முன் பத்தியில் கூறியபடி,

$$A \nless (a_1 \,.\, a_2 \,\ldots\ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore\ nA \nless n\,(P)^{\frac{1}{n}}$$

அதாவது nA ன் மீச்சிறு மதிப்பு $n\,(P)^{\frac{1}{n}}$ என நிறுவப்படுகிறது.

அதாவது $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ ன் மீச்சிறு மதிப்பு $n(P)^{\frac{1}{n}}$

4.7·6.3 எ-கா. (1) $a^3+b^3+c^3 > 3abc$ என நிறுவுக.

கூட்டிடை > பெருக்கிடை யென்பதை யொட்டி

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} > \sqrt[3]{a^3\, b^3\, c^3},$$

$$> abc.$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3 > 3abc.$$

எ-கா. (2) $(n+1)^n > 2^n\,(\underline{|n})$ என நிறுவுக.

1, 2. 3, ... n என்ற முதல் n இயற்கை யெண்களை யெடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது $\dfrac{1+2+3+\ldots\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1.2.3\ldots\ldots n}$

$$\therefore\ \frac{n\,(n+1)}{2n} > (\underline{|n})^{\frac{1}{n}}$$

எனவே இருபக்கங்களையும் n படிக்கு உயர்த்திச் சுருக்கி, $(n+1)^n > 2^n\,(\underline{|n})$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (3) $a+b+c=1$ ஆனால்,

$$\frac{(1-a)\,(1-b)\,(1-c)}{8} < \frac{1}{27}$$

என நிறுவுக.

கூட்டிடை > பெருக்கிடையாதலின்

$$\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} > \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$\therefore \quad \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 > (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{27} > \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{8}$$

அதாவது $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{8} < \frac{1}{27}$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (4) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \nless 9$ என நிறுவுக.

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{3} > \sqrt[3]{\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}}$$

மேலும்

$$\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}}{3} > \sqrt[3]{\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}\cdot\frac{c}{z}}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கினல்

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) > 9$$

எனப் பெறப்படும்.

எ-கா. (5) $x+y+z=c$ (மாறிலி) ஆனல் $x^m y^n z^p$ ன் மீப்பெரு மதிப்பை யறிக. (m, n, p கூட்டு முழு எண்களெனக் கொள்க.)

$$\frac{x}{m}, \frac{x}{m}, \ldots\ldots \frac{x}{m} \ldots\ldots m \text{ முறைகளும்}$$

$$\frac{y}{n}, \frac{y}{n}, \ldots\ldots \frac{y}{n} \ldots\ldots n \text{ முறைகளும்}$$

$\frac{z}{p}, \frac{z}{p}, \ldots\ldots \frac{z}{p} \ldots\ldots p$ முறைகளும் கொண்டால், இவைகளின் கூட்டுத் தொகையான $x + y + z = c$ என்ற மாறிலியாம்.

4.7·6.1 படி, இவைகளின் பெருக்குத் தொகையான

$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p$ ன் மீப்பெருமதிப்பு

$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமையும்.

கட்டுப்பாடு

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{x+y+z}{m+n+p} = \frac{c}{m+n+p} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $x = \frac{mc}{m+n+p}, \quad y = \frac{nc}{m+n+p},$

$z = \frac{pc}{m+n+p}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு

$x^m y^n z^p$ ன் மீப் பெருமதிப்பு பெறப்படும்.

$\therefore$ $x^m y^n z^p$ ன் மீப்பெருமதிப்பு

$$= \left(\frac{mc}{m+n+p}\right)^m \left(\frac{nc}{m+n+p}\right)^n \left(\frac{pc}{m+n+p}\right)^p$$

$$= \frac{c^{m+n+p} \cdot m^m \cdot n^n \cdot p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$$

இம் முடிவு m, n, p என்பவை அளவுக் கிணங்கிய கூட்டெண்களாயினும் ஏற்புடைத்தாம். தெரிப்பு முறை 4.7.5 ஐ ஒட்டியதாகும்.

4.8 தேற்றம் 8:

$m \geq r \geq 0$ ஆனல்,

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots\ldots + a_n^m}{n} \geq \frac{a_1^r + a_2^r + \ldots\ldots + a_n^r}{n}$$

$$\times \frac{a_1^{m-r} + a_2^{m-r} + \ldots\ldots + a_n^{m-r}}{n}$$

தெரிப்பில் $\sum_{p=1}^{r} a_p^r = a_1^r + a_2^r + \ldots\ldots a_n^r$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

$$\frac{\Sigma a_p^m}{n} \geq \frac{\Sigma a_p^r}{n} \times \frac{\Sigma a_p^{m-r}}{n}$$ என நிறுவ

$n \Sigma a_p^m - \Sigma a_p^r \times \Sigma a_p^{m-r} \geq 0$ என நிறுவினால் போதுமானது.

$$n \Sigma a_p^m - \Sigma a_p^r \,.\, \Sigma a_p^{m-r}$$

$$= n \Sigma a_p^m - \Sigma a_p^m - \sum_{p \neq q} \left(a_p^r a_q^{m-r} + a_p^{m-r} a_q^r \right)$$

[அடைப்புக்குள் இருக்கின்ற உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ${}_nC_2$]

$$= \sum_{p \neq q} \left(a_p^m + a_q^m - a_p^r a_q^{m-r} - a_p^{m-r} \,.\, a_q^r \right)$$

$$= \Sigma \left(a_p^r - a_q^r \right) \left(a_p^{m-r} - a_q^{m-r} \right)$$

≥ 0 [ஏனெனில் $a_p \gtrless a_q$ ஆனால் அடைப்புகளுக்குள்ளிருக்கும் இரு தொகைகளும் முறையே கூட்டு அல்லது குறையாகவிருக்கும். எனவே அவைகளின் பெருக்குத் தொகை கூட்டு மதிப்புடையதாகும்].

மேலே நிறுவப்பட்ட சமனின்மைத் தேற்றம் 'வலிமை' யுடையதெனக் கூறலாம் (powerful inequality).

கிளைத்தேற்றமாக,

$$\frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^{p+q}}{n} > \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^p}{n} \times \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^q}{n}$$

எனக் கொள்ளலாம். (p, q இரண்டும் > 0)

மேலும், விரிவுபடுத்திய தேற்றமாக,

$$\frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^{p+q+m}}{n} > \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^{p}}{n} \times \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^{q}}{n} \times \frac{\sum_{r=1}^{n} a_r^{m}}{n}$$

எனவும் கொள்ளலாம். (p, q, r மூன்றும் > 0)

4·8.1 எ-கா. (1) $\frac{b^4+c^4}{b+c} + \frac{c^4+a^4}{c+a} + \frac{a^4+b^4}{a+b} \geq 3\,abc$ என நிறுவுக.

$$\frac{b^4+c^4}{2} \geq \left(\frac{b^3+c^3}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{b^4+c^4}{b+c} \geq \frac{b^3+c^3}{2}$$

அவ்வாறே $\frac{c^4+a^4}{c+a} \geq \frac{c^3+a^3}{2}$

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} \geq \frac{a^3+b^3}{2}$$

மூன்றையும் கூட்ட,

$$\frac{b^4+c^4}{b+c} + \frac{c^4+a^4}{c+a} + \frac{a^4+b^4}{a+b} \geq a^3+b^3+c^3$$

$$= 3\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)$$

$$\geq 3\,abc.$$

எ-கா. (2) $a^5+b^5+c^5+d^5 \nless abcd\,(a+b+c+d)$ என நிறுவுக.

$$\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4} \nless \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \times \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\therefore \quad a^5+b^5+c^5+d^5 \nless \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \times (a+b+c+d)$$

$$\nless \sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4}\,.\,(a+b+c+d)$$

$$\nless abcd\,(a+b+c+d).$$

4·9 தேற்றம் 9:

$x \neq 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயிருப்பின் $\frac{x^{n+1}-1}{n+1} > \frac{x^n-1}{n}$.

(i) $x > 1$ ஆனால்,

$$\frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n}{n+1} > \frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}}{n}$$

என 4·7.3 ல் நிறுவப்பட்டது (தேற்றம் 5).

அதாவது $\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)(n+1)} > \frac{x^n-1}{(x-1)n}$

$(x-1)$ ஒரு கூட்டெண்ணுதலால், இரு பக்கங்களுக்கும் பொதுவாக உள்ள $(x-1)$ என்ற சினையை நீக்கினுல், சமனின்மை மாறுபடாது.

$$\therefore \quad \frac{x^{n+1}-1}{n+1} < \frac{x^n-1}{n}$$

(ii) $x < 1$ ஆனுல்

$$\frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n}{n+1} < \frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}}{n}$$

என 4·7.3 ல் மேலும் நிறுவப்பட்டது.

அதாவது $\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} < \frac{1-x^n}{(1-x)n}$

$(1-x)$ ஒரு கூட்டெண்ணுதலின், முன் கூறிய விதிப்படியே $\frac{1-x^{n+1}}{n+1} < \frac{1-x^n}{n}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

இரு பக்கங்களின் குறிகளை மாற்றினுல், சமனின்மைக் குறி $<$ என்பது $>$ ஆக மாறும். எனவே,

$$\frac{x^{n+1}-1}{n+1} > \frac{x^n-1}{n}$$

எனவே $x \gtrless 1$ ஆனுல், அதாவது $x \neq 1$ ஆனுல் $\frac{x^{n+1}-1}{n+1} > \frac{x^n-1}{n}$ என்பது பொதுவாகவே பெறப்படுகிறது.

கிளைத் தேற்றம் :

p, q கூட்டு முழு எண்களாய் $x \neq 1$ ஆனால் $p \gtrless q$க்கு ஒப்ப,

$$\frac{x^p - 1}{p} \gtrless \frac{x^q - 1}{q} .$$

ஏனெனில் $p > q$ ஆனால்

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^{p-1} - 1}{p-1} > \ldots\ldots > \frac{x^q - 1}{q}$$

4·9.1 தேற்றம் 10 :

m ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண் ; $x \neq 1$; $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப,

$$x^m - 1 \gtrless m\,(x - 1)$$

தெ : $m = \frac{p}{q}$ என்ற அமைப்பில் ஒரு அளவுக்கிணங்கிய எண். p, q கூட்டு முழு எண்கள்.

4·9 ல் கிளைத் தேற்றத்தில் கண்டபடி, $p \gtrless q$ க்கு ஒப்ப,

$$\frac{y^p - 1}{p} \gtrless \frac{y^q - 1}{q}$$

இங்கு $y^q = x$ அதாவது, $y = x^{\frac{1}{q}}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $q \gtrless q$ க்கு ஒப்ப

$$\frac{x^{\frac{p}{q}} - 1}{p} \gtrless \frac{x - 1}{q}$$

அதாவது $x^{\frac{p}{q}} - 1 \gtrless \frac{p}{q}\,(x - 1)$

அதாவது $x^m - 1 \gtrless m\,(x - 1)$ $\left[m \gtrless 1 \text{ க்கொப்ப} \right]$

4·9.2 தேற்றம் 11: m ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண்; $x \neq 1$; $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப, $m\,x^{m-1}\,(x-1) \gtrless x^m - 1$.

4·9.1 ல் கண்டபடி, $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப,

$$y^m - 1 \gtrless m\,(y-1) \quad [\text{தேற்றம் } 10]$$

இங்கு $y = \dfrac{1}{x}$ எனக் கொண்டால்,

$m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப, $\dfrac{1}{x^m} - 1 \gtrless m\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

அதாவது, சுருக்கி எழுதினல், $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப

$$\frac{1-x^m}{x^m} \gtrless m\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

அதாவது $1 - x^m \gtrless m\,x^{m-1}\,(1-x)$

மாற்றி எழுதினல், $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப,

$$m\,x^{m-1}\,(x-1) \gtrless x^m - 1.$$

4·9.3 தேற்றம் 12: $x \neq y$; m ஒரு அளவுக் கிணங்கிய எண். $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப

$$m\,x^{m-1}\,(x-y) \gtrless x^m - y^m \gtrless m y^{m-1}\,(x-y)$$

4.9.2, 4·9.1 ல் கண்டபடி $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப, $a \neq 1$ ஆனல்,

$$m\,a^{m-1}\,(a-1) \gtrless a^m - 1 \gtrless m\,(a-1) \quad (\text{தேற்றங்கள் } 11;\ 10)$$

இங்கு $a = \frac{x}{y}$ எனக் கொண்டால் $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப

$$\frac{mx^{m-1}}{y^{m-1}}\left(\frac{x-y}{y}\right) \gtrless \frac{x^m - y^m}{y^m} \gtrless \frac{m(x-y)}{y} \quad (x \neq y)$$

முழுவதையும் y^m ஆல் பெருக்கினுல் $m \gtrless 1$ க்கு ஒப்ப, $x \neq y$

ஆனுல் $mx^{m-1}(x-y) \gtrless x^m - y^m \gtrless my^{m-1}(x-y)$

எனப் பெறப்படும்.

4·9.4 தேற்றம் 13: $x > y$ ஆனுல்

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

$m > 1$ ஆனுல், $a^m - 1 > m(a-1)$ என 4·9.1 ல் கண்டோம்

இங்கு $a = 1 + \frac{1}{x}$ எனவும்,

$m = \frac{x}{y} (> 1)$ என ஈடு செய்தால்,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{y}} - 1 > \frac{x}{y}\left(1+\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{y}} > \left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$ எனப் பெறப்படும்.

4·9.5 தேற்றம் 14: $x > y$ ஆனுல்

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} < \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$m > 1$ ஆனுல் $a^m - 1 > m(a-1)$ என 4·9.1 ல் கண்டோம்.

இங்கு $a = 1 - \frac{1}{x}$ எனவும் $m = \frac{x}{y}\ (>1)$ எனவும் கொண்டால்

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{y}} - 1 > \frac{x}{y}\left(1-\frac{1}{x}-1\right) = -\frac{1}{y}$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{y}} > \left(1-\frac{1}{y}\right)$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}}$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} < \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$ எனப் பெறப்படும்.

4·9.6 வியர்ஸ்டராஸ் சமனின்மைகள் (Inequalities of Weierstrass):

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ யாவும் கூட்டெண்கள்.

4·9.6.1 தேற்றம் 15: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ ஆனல்

$$\prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \equiv (1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n) > 1 + s_n.$$

தெ: $(1+a_1)\ (1+a_2) = 1+a_1+a_2+a_1 a_2$
$> 1+a_1+a_2$

$\therefore\ (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) > (1+a_1+a_2)\ (1+a_3)$
$= 1+a_1+a_2+a_3+a_3\ (a_1+a_2)$
$> 1+a_1+a_2+a_3.$

$\therefore$ தொடர்ச்சியாக,

$(1+a_1)\ (1+a_2)\ (1+a_3)\ \ldots\ldots\ (1+a_n) > 1+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$
அதாவது $> 1 + s_n.$

கிளைத் தேற்றம்:

$$(1+a)^n > 1+na.$$

4·9.6.2 தேற்றம் 16: $r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ என்ற மதிப்புக் களுக்கு $0 < a_r < 1$ ஆனால்,

$$\prod_{r=1}^{n} (1-a_i) \equiv (1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_n) > 1-s_n.$$

தெ: $(1-a_1)(1-a_2) = 1-a_1-a_2+a_1a_2$

$$> 1-a_1-a_2.$$

இருபக்கங்களையும் $(1-a_3)$ என்ற கூட்டெண்ணால் பெருக்க,

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) > (1-a_1-a_2)(1-a_3)$$
$$= 1-a_1-a_2-a_3+a_3(a_1+a_2)$$
$$> 1-(a_1+a_2+a_3)$$

எனவே தொடர்ச்சியாக,

$$\prod_{i=1}^{n} (1-a_i) > 1-s_n.$$

4·9.6.3 தேற்றம் 17: $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n = s_n < 1$ ஆனால்

(1) $$\frac{1}{1+s_n} > \prod_{i=1}^{n} (1-a_i);$$

(2) $$\frac{1}{1-s_n} > \prod_{i=1}^{n} (1+a_i).$$

தெ: $0 < a_1 < 1$ ஆகையால்,

$1-a_1^2 < 1$ ஆகும்.

$$\therefore\ 1-a_1 < \frac{1}{1+a_1}$$

அவ்வாறே $1 - a_2 < \dfrac{1}{1 + a_2}$

$$1 - a_3 < \frac{1}{1 + a_3}$$

....

இருபக்கங்களும் கூட்டெண்களாகையால், இருபக்கங்களையும் பெருக்கினால், சமனின்மை மாறாது.

$$\therefore \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) < \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i)}$$

$$< \frac{1}{1 + s_n} \quad \text{(தேற்றம் 15)}$$

மேலும் $1 + a_1 < \dfrac{1}{1 - a_1}$

$$1 + a_3 < \frac{1}{1 - a_2}$$

$$1 + a_3 < \frac{1}{1 - a_3}$$

பெருக்க, $\displaystyle \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) < \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)}$

$$< \frac{1}{1 + s_n} \quad \text{(தேற்றம் 16)}$$

4·9·7 மற்றும் சில தேற்றங்கள் : பயிற்சியாகக் கொள்க.

4·7·5 ல் நிறுவப்பட்ட பொது அமைப்பு :

$$\left(\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots\ldots m_n a_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}\right)^{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}$$

$$> a_1^{m_1} \,.\, a_2^{m_2} \ldots\ldots a_n^{m^n} \quad \text{(தேற்றம் 7)}$$

இங்கு தகுந்த ஈடு செய்து, பெறக் கூடிய சில சமனின்மைத் தேற்றங்கள்:

(i) $m_1 = a$; $m_2 = b$; ......

$a_1 = \frac{1}{a}$; $a_2 = \frac{1}{b}$; ...... என ஈடு செய்க.

அப்போது

$$\left(\frac{n}{a+b+c+\ldots\ldots}\right)^{a+b+c+\ldots\ldots} > \frac{1}{a^a\, b^b\, c^c\, \ldots\ldots}$$

அதாவது

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}\right)^{a+b+c+\ldots\ldots} < a^a\, b^b\, c^c\, \ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

(ii) $m > r$; $m_1 = a^r$; $m_2 = b^r$; ......

$a_1 = a^{m-r}$; $a_2 = b^{m-r}$; ...... என ஈடு செய்க.

அப்போது

$$\left(\frac{a^m+b^m+\ldots\ldots}{a^r+b^r+\ldots\ldots}\right)^{a^r+b^r+\ldots\ldots} > \left(a^{a^r} . b^{b^r} \ldots\ldots\right)^{m-r} \qquad \text{(B)}$$

(iii) $t \angle r$; $m_1 = a^r$; $m_2 = b^r$; ......

$a_1 = a^{t-r}$; $a_2 = b^{t-r}$; ...... என ஈடு செய்க.

அப்போது

$$\left(\frac{a^t+b^t+\ldots\ldots}{a^r+b^r+\ldots\ldots}\right)^{a^r+b^r+\ldots\ldots} > \left(a^{a^r} . b^{b^r} + \ldots\ldots\right)^{t-r}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a^r+b^r+\ldots\ldots}{a^t+b^t+\ldots\ldots}\right)^{a^r+b^r+\ldots\ldots} < \left(a^{a^r} . b^{b^r} \ldots\ldots\right)^{r-t} \qquad \text{(C)}$$

$m > r > t$ ஆகையால், $(m-r)$, $(r-t)$ இரண்டும் கூட்டு மதிப்புப் பெற்றவை. எனவே, (B), (C) ல் கண்ட முடிவுகளைக் கொண்டு

$$\left(\frac{a^m+b^m+\ldots\ldots}{a^r+b^r+\ldots\ldots}\right)^{\frac{1}{m-r}} > \left(\frac{a^r+b^r+\ldots\ldots}{a^t+b^t+\ldots\ldots}\right)^{\frac{1}{r-t}}$$ ஆகும்.

எனவே, $m>r>t$ ஆனால்,

$$(a^m+b^m+\ldots\ldots)^{r-t}\times(a^r+b^r+\ldots\ldots)^{t-m}\times(a^t+b^t+\ldots\ldots)^{(m-r)} >1 \quad (D)$$

இம்முடிவின் வழியாகப் பல சிறப்புத் தேற்றங்கள் பெறலாம்.

(iv) $t=0$ எனக் கொண்டால்,

$$\left(\frac{a^m+b^m+\ldots\ldots}{n}\right)^r > \left(\frac{a^r+b^r+\ldots\ldots}{n}\right)^m \quad (E)$$

(v) $t=0$; $m=1$ எனக் கொண்டால் $m>r>t$ ஆதலில் r ஒரு முறையான பின்னம் (<1). எனவே $r<1$ என்ற ஒருமுறையான பின்னமாயின்

$$\left(\frac{a+b+\ldots\ldots}{n}\right)^r > \left(\frac{a^r+b^r+\ldots\ldots}{n}\right) \quad (F)$$

(vi) $t=0$; $r=1$ எனக் கொண்டால், $m>1$ ஆகிறது. எனவே $m>1$ எனக் கொண்டால்,

$$\left(\frac{a^m+b^m+\ldots\ldots}{n}\right) > \left(\frac{a+b+\ldots\ldots}{n}\right)^m \quad (G)$$

இது ஒரு முக்கியமான தேற்றம்.

(vii) $m=1$; $r=0$ எனக் கொண்டால் t குறையெண்; எனவே t ஒரு குறையெண்ணாயின் (D ன் உதவி கொண்டு).

$$(a+b+\ldots\ldots)^{-t}\times n^{t-1}\times(a^t+b^t+\ldots\ldots) > 1$$

$$\therefore \quad \frac{a^t+b^t+\ldots\ldots}{n} > \left(\frac{a+b+\ldots\ldots}{n}\right)^t \quad (H)$$

(F), (G) என்ற முடிவுகளைத் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து, x கூட்டெண்ணாய் $\gtrless 1$ என்பதற்கொப்ப

$$\left(\frac{a^x+b^x+\ldots\ldots}{n}\right) \gtrless \left(\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}\right)^x$$ என்பதும்

x குறையெண்ணாயின்,

$$\frac{a^x+b^x+\ldots\ldots}{n} > \left(\frac{a+b+\ldots\ldots}{n}\right)^x$$ என்பதும்

கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

பயிற்சி 4 (ii)

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக (1 – 16).

1. $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \nless xyz\,(x + y + z)$.

2. $(al+bm+cn+\ldots\ldots)\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n}\ldots\ldots\right)$
$\nless (a+b+c+\ldots\ldots)^2$.

3. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \ldots\ldots + \frac{x_{n-1}}{n_n} \geq n$.

4. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{u}{d}\right) \times \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{u}\right) \geq 16$.

5. $(bc + ca + ab)^2 \geq 3\,abc\,(a + b + c)$.

6. $\frac{3}{b+c+d} + \frac{3}{c+d+a} + \frac{3}{d+a+b} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$.

7. $(b + c)\,(c + a)\,(a + b) \geq 8\,abc$.

8. $\frac{a + a^2 + \ldots\ldots + a^{2n}}{n} \leq 1 + a^{2n+1}$

9. $s = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ எனின்

$$\frac{s}{s-x_1} + \frac{s}{s-x_2} + \ldots\ldots + \frac{s}{s-x_n} > \frac{n^2}{n-1}$$ என நிறுவுக.

10. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\,(a + b + c)$.

11. $\frac{1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{2n}}{2n + 1} \geq x^n$.

12. a, b, c என்ற இராசிகளிடையே, ஏதேனுமிரண்டின் கூட்டுத் தொகை மூன்றாவதை விடப் பெரிதாயிருக்குமாயின்

(i) $abc \geq (b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)$.

(ii) $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{9}{a+b+c}$.

13. $\frac{3\,.\,7\,.\,11\,\ldots\ldots\,(4n-1)}{5\,.\,9\,.\,13\,\ldots\ldots\,(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

14. $n > 2$ ஆனல் $(\lfloor n)^2 > n^n$.

15. $p > q > r$ அல்லது $q > r > p$ அல்லது $r > p > q$ ஆனால்

$$x^p (q-r) + x^q (r-p) + x^r (p-q) > 0.$$

16. $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2}{n} > \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right)^2.$

17. $x + y + z = 9$ ஆனால் $x^2 y^3 z^4$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

18. n கூட்டெண்களின் கூட்டுத் தொகை மாறிலியான nc. அவ்வெண்களின் பெருக்குத் தொகையின் மீப் பெரு மதிப்பு c^n எனவும், அவ்வெண்களின் இருபடிக் கூட்டுத் தொகை nc^2 க்கும் n^2c^2 க்கும் இடைப்பட்ட தெனவும் நிறுவுக.

19. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு ஒரு மாறிலி; அம் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாயின், அதன் பரப்பு மீப் பெரு மதிப்புப் பெறுகிறது என நிறுவுக.

20. $n^n > 1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)$ என நிறுவுக.

21. $x^3y^2z = 10$ ஆனால் $(x + 2y + 3z)$ ன் மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

22. x ன் மதிப்பு $-\dfrac{5}{2}$ க்கும் 7 க்கும் இடைப்பட்டதாயின் $(2x+5)^5 (7-x)^2$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

23. $m > 1$ ஆனால், முதல் n இரட்டைப் படை எண்களின் m படிகளின் கூட்டுத் தொகை $n(n+1)^m$ ஐ விடப் பெரிது

அதாவது $2^m + 4^m + \ldots\ldots + (2n)^m > n(n+1)^m$. என நிறுவுக.

24. $a, b, \ldots\ldots l$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையிலிருந்தால் $a^a b^b \ldots\ldots l^l > a^n l^n$ என நிறுவுக.

25. $s = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ ஆனால்

$$\prod \frac{s}{(a_r - 1)^{a_r}} < (n-1)^s$$ என நிறுவுக.

5. கந்தழித் தொடர் முறைகள் - எல்லைகள்

(Infinite Sequences and Limits)

(A)

5.1 புகு முக வகுப்பில், கூட்டு, பெருக்கு, இசைத் தொடர் முறைகள் பற்றியும், மற்றும் சில ஒழுங்கான தொடர் முறைகளைப் பற்றியும் நாம் பார்த்திருக்கிறோம். அத் தொடர் முறைகளில் தோன்றும் உறுப்புக்கள், ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சட்ட திட்டங்களுக்குட்பட்டு, ஒன்றன் பின் ஒன்றாக ஒரு ஒழுங்கு வரிசையில் வருவதையும், அவ்வொழுங்கிற்கேற்ப, எந்தப் பொது உறுப்பையும் காணலாம் என்பதையும் நாம் அறிவோம்.

இவ்விதமான தொடர் முறைகளைப் பற்றிச் சில அடிப்படையான கருத்துக்களைத் தொகுத்து, அவை பற்றிய சில எளிய கோட்பாடுகளை, இப்பகுதியில் சற்று விளக்கமாக ஆராய்வோம்.

5.2 கந்தழித் தொடர் முறைகள் (Infinite Sequences) :

வரையறை :

n என்ற ஒவ்வொரு கூட்டு முழு எண்ணுடன் ஏதாவது ஒரு (அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட) விதிப்படி, a_n என்ற மற்றோர் எண்ணை (அல்லது இராசியை)த் தொடர்பு படுத்த முடியும் என வைத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது,

1, 2.3,4,...... n, ... என்ற எண் வரிசையையொட்டி

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ என்பது ஒரு கந்தழித் தொடர் முறை அல்லது பொதுவாக, தொடர்முறை என்று கூறப்படும்.

[Bromurch : Theory of Infinite Series என்ற நூலில் உள்ள வரையறையையொட்டி, இவ்வரையறை வகுக்கப்பட்டிருக்கிறது.]

5·2·1 (a_n) என்பது (அடைப்புக்களுள்ள a_n) இக் கந்தழித் தொடர் முறையைக் குறியீடு செய்து நிற்கும்.

'முடிவிலா' அல்லது 'கந்தழி' என்று கூறுங்காலை, ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும், அடுத்த மற்றோர் உறுப்பு உள்ளது என்பதே பொருளாம். 'முதல்' உறுப்பு என ஒன்றிருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக ;

1. $a_n = n^2$; 1, 4, 9, 16, ... என்பது தொடர்முறை ;

2. $a_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...... என்பது தொடர்முறை ;

3. அளவுக்கிணங்கிய எல்லா கூட்டு பின்னங்களும், மதிப்பு வரிசையில் அடுக்கப்பட்டால், அவை கந்தழித் தொடர் முறையாகாது. ஏனெனில் $\frac{1}{2}$ என்ற ஒரு பின்னமிருப்பின், அதற்கு முன் $\frac{1}{4}$ இருக்கலாம்; அவ்வாறே அதற்கு முன் $\frac{1}{16}$ இருக்கலாம். எனவே இத்தொடர் முறைக்கு 'முதல்' உறுப்பு என்று எதுவும் இருக்க முடியாது. எனவே 1, 2, 3 .... என்ற எண் தொடர்முறையோடு தொடர்பு படுத்தும் முறையில், இப் பின்னங்கள் அமையா. ஆகவே, நாம் முதலில் வகுத்த வரையறைப்படி, கூட்டு முழு பின்னங்கள் ஒரு தொடர் முறையில் அமையா.

ஆனால் இப் பின்னங்களை, முதலில் கீழெண் மதிப்பையொட்டியும், பின்னர், மேலெண் மதிப்பை யொட்டியும், எழுதினால் அத் தொடர்முறை வரையறைக்குட்பட்ட முடிவிலாத் தொடர் முறையாகும்.

அதாவது,

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \ldots \ldots$ என்ற முறையில் எழுதினால் இஃதோர் முடிவிலாத் தொடர் முறையாகும். இத் தொடர் முறைக்கு, 'முதல்' உறுப்பு ஒன்றுண்டு; அதற்குப்பின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் அடுத்த ஓர் உறுப்பு உண்டு. இத் தொடர் முறை ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி அமைந்திருக்கிறது.

பின் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முறைகளையும் காண்க.

எண்	1	2	3	4		n	$n+1$	......
தொடர் முறை.								
(i) (a_n)	-1	-2	-3	-4	....	$-n$	$-(n+1)$	......
(ii) (a_n)	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$	....	$1+\frac{n-1}{n}$	$1+\frac{n}{n+1}$	......
(iii) (a_n)	$\frac{x}{(x+d)}$	$\frac{x^2}{(x+d)^2}$	$\frac{x^3}{(x+d)^3}$	$\frac{x^4}{(x+d)^4}$	....	$\frac{x^n}{(x+d)^n}$	$\frac{x^{n+1}}{(x+d)^{n+1}}$	......
(iv) (a_n)	r	r^2	r^3	r^4	....	r^n	r^{n+1}	......
(v) (a_n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	....			

(v) ன் விதி : n இரட்டைப்படை யெண்ணுயின் (அதாவது $n=2m$), $a_n=\frac{1}{n}=\frac{1}{2m}$

n ஒற்றைப்படை யெண்ணுயின் (அதாவது $n=2m-1$), $a_n=\frac{n}{n+1}=\frac{2m-1}{2m}$.

5·2·2 மட்டு (Modulus):

x என்ற ஒரு எண்ணின் அல்லது இராசியின் 'எண்' மதிப்பு (numerical value) மாத்திரம், அதாவது 'தனி' மதிப்பு மாத்திரம் (absolute value) $|x|$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப் படும். இதைப் படிப்பது 'மட்டு x' என்று; எழுதுவது $|x|$ என்று.

எடுத்துக் காட்டாக:

$|4| = 4 = |-4|$;

$|5-7| = 2 = |7-5|$;

$|7+5| = 12 = |-7-5|$;

$a > b$ ஆனால் $|a-b| = (a-b)$;

$a < b$ ஆனால் $|a-b| = (b-a)$;

$|a| . |b| = |ab|$.

பின் வரும் முடிவுகள் எளிதில் விளங்கும்:

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(ii) $|x+y+z+u+ \ldots\ldots|$
$\leq |x| + |y| + |z| + |u| + \ldots\ldots$;

(iii) $|x| < 3$ ஆனால் $-3 < x < 3$;

(iv) $|x| < \epsilon$ ஆனால் $-\epsilon < x < \epsilon$; (ϵ - கூட்டெண்)

(v) $|x-a| < \epsilon$ ஆனால் $a-\epsilon < x \vee a+\epsilon$.

(vi) $|x| > a$ ஆனால் $x < a$, அல்லது $x < -a$
(a - ஒரு கூட்டெண்).

5·3 எல்லை (Limit): நுண் கணிதத்திலும் (Infinitesimal Calculus) கோண கணிதத்திலும் ஓரளவு 'எல்லை' யென்றால் என்ன என்பதுபற்றியும் 'எல்லை'யைப்பற்றிய சில கருத்துக் களையும் நாம் அறிவோம்.

பல முடிவிலாத் தொடர் முறைகளை நாம் பார்க்கும்போது, n வளர்ந்து சென்று, கந்தழியை (Infinity) அணுகும்போது, a_n ஒரு எல்லையை நெருங்குவதை நாம் காண்கிறோம்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \ldots\ldots 1+\frac{n-1}{1} \ldots\ldots$ என்பது '2' என்ற எல்லையை நெருங்குவதும்,

$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots\ldots \quad 2+\frac{1}{n+1} \quad \ldots\ldots$

என்பதும் '2' என்ற எல்லையை நெருங்குவதும்,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n} \ldots\ldots$ என்பது '0' என்ற எல்லையை நெருங்குவதும், உற்றுநோக்கின் தெரியவருகிறது.

இக் கருத்தை, அடுத்த பத்தியில் நாம் செப்பமாகவும், திட்டமாகவும், கணித நுட்பத்தோடு வரையறுப்போம்.

அதற்கு முன்பாக, உயர் கணிதத்தில் பல இடங்களில் அடிக் கொருமுறை, பயன்படுத்தப்படும், '$\in$', 'm', 'N' என்ற குறியீடுகளைப் பற்றிச் சிறிது அறிந்து கொள்ள வேண்டும்.

5·3.1 '$\in$', 'm', 'N' என்ற குறியீடுகள் :

'$\in$' என்பது முதலிலேயே கொடுக்கப்பட்ட, அல்லது நாம் முதலிலேயே எடுத்துக் கொள்ளும், ஏதாமொரு, மிகச் சிறிய கூட்டெண். (அதாவது $\in = \cdot 01, \cdot 001, \cdot 00004, \ldots\ldots$ போன்ற எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண்ணாகவும் இருக்கலாம்).

'm' என்பது அவ்வாறே, முதலிலேயே கொடுக்கப்பட்ட, அல்லது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும், ஏதாமொரு கூட்டு முழு எண். (அதாவது $m = 10$; 100; 500; 70000 போன்ற பெரிய எண்ணாக இருக்கலாம்.) பல இடங்களில் m க்கும் $\in$ க்கும் ஏதாவது தொடர்பு இருக்கலாம்; ஆகவே $m_{\in}$ எனக் கூட கொள்வது மரபாகும்.

'N' என்பது எவ்வளவு பெரிய எண்ணாகவும் இருக்கலாம்.

5·4.1 எல்லை – வரையறை :

$n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, $l - \in < a_n < l + \in$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காண முடியுமானால்,

(a_n) என்ற கந்தழித் தொடர் முறையின் எல்லை $\underline{l}$ என்பது வரையறை.

a_n என்ற உறுப்பின் எல்லையும் $\underline{l}$ எனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு : m ன் மதிப்பு ϵ ஐப் பொருத்திருக்குமாதலால் $n > m$, அதாவது $m(\epsilon)$ அல்லது m_ϵ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

$l-\epsilon < a_n < l+\epsilon$ என்ற இரு சமனின்மைகளையும்,

$|l-a_n| < \epsilon$ எனவும் குறிப்பிடுதல் பொருத்தமாகும் என்பதையும் காண்க. (5·2·2 v காண்க).

பின் காட்டப்பட்ட குறியீடுகள், எதுவொன்றுலும், இந்த 'எல்லை' வரையறையைக் குறிப்பிடும். இக் குறியீடுகள் வழக்கிலுள்ளவை.

(1) $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ (a_n)=l$

(2) எல்லை $(a_n)=l$

(3) $(a_n)\to l$ அல்லது $a_n\to l$

5·4.2 பல கந்தழித் தொடர் முறைகளுக்கு, எல்லையிருக்காது. அவைகளில் நாம் சிறப்பாகப் பாகு படுத்திப் பார்க்க வேண்டுவது, கந்தழி (∞) எல்லையுள்ள தொடர் முறைகளாகும்.

வரையறை : எவ்வளவு பெரிய கூட்டெண் 'N' கொடுக்கப் பட்டாலும், $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $a_n > N$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காண முடியுமானல், (a_n) என்ற தொடர் முறையின் எல்லை கந்தழியாகும் (∞) என்பது வரையறை.

இதை

(1) $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ (a_n)=\infty$

(2) எல்லை $(a_n)=\infty$

(3) $(a_n)\to\infty$ அல்லது $a_n\to\infty$ என்ற எந்தக் குறியீட்டினுலும் தெரியப்படுத்தலாம்.

இவ்வாறே எல்லை $\lim_{n \to \infty} (a_n) = -\infty$ என்பதற்கும் வரையறை வகுக்கலாம்.

5·4·3 குவிதொடர் – விரிதொடர் – அலைதொடர் முறைகள் :

(a_n) என்ற தொடர் முறை l என்ற ஒரு திட்டமான எல்லையை நெருங்குமாயின், அத் தொடர் முறை ஒரு 'குவி தொடர் முறை' (Convergent Sequence) அல்லது 'குவியும் தொடர் முறை' எனக் கூறப்படும்.

(a_n) என்ற தொடர் முறை கந்தழி எல்லையை நெருங்குமாயின் அது ஒரு 'விரி தொடர்' முறை எனக் கூறப்படும். (Divergent Sequence)

குறிப்பு: $(a_n) \to +\infty$; அல்லது $(a_n) \to -\infty$; ஆனாலும் இரு தொடர் முறைகளும் 'விரி தொடர்' முறை என்றே கூறப்படும்.

(a_n) என்ற தொடர் முறை, முன் கூறப்பட்ட இரு பண்புகளில் ஏதும் இல்லாதிருக்குமாயின், அது ஒரு 'அலை தொடர் முறை' எனக் கூறப்படும். (Oscillating Sequence)

5·4·4 இப்போது, 5·2·1 ன் முற்பகுதியில் கண்ட மூன்று தொடர் முறைகளையும் சற்று முன் வகுத்த வரையறைகள் கொண்டு சோதிப்போம்.

(1) $a_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{n} \ldots\ldots$ என்பது ஒரு குவிதொடர்; ϵ கொடுக்கப்பட்டால், m ன் மதிப்பு $I\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, அதாவது $\frac{1}{\epsilon}$ ன் முழு எண் பகுதி. $n > I\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $| a_n - 0 | > \epsilon$ எனவே $(a_n) \to 0$.

(2) $a_n = n^2$; $1, 4, 9, 16, \ldots\ldots n^2 \ldots\ldots$ என்பது ஒரு விரி தொடர் முறை; N என்ற எந்த பெரிய கூட்டெண் கொடுக்கப் பட்டாலும், $n > \sqrt{N} + 1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $a_n > N$. எனவே $(a_n) \to \infty$.

(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறையைப் பார்ப்போம். இத்தொடர் முறையில், நாம் எவ்வளவு தூரம் சென்றாலும், '0' எல்லையை

நெருங்கும் எண்ணற்ற உறுப்புக்களும், '1' எல்லையை நெருங்கும் எண்ணற்ற உறுப்புக்களும் உள்ளன. ஆகவே, இத் தொடர் முறை ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையை நெருங்காமல், '0' க்கும் '1' க்கும் இடையில் 'அலைந்து' கொண்டு இருக்கிறது. இது ஓர் அலை தொடர் முறை.

5·4·5 இவ்வாறே, 5·2·1 ன் பிற்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முறைகளைப் பார்ப்போம். அவைகளைப் பின் வருமாறு பாகுபடுத்தலாம்.

(i) $a_n = -n$; பண்பு: விரிதொடர் முறை;

$(a_n) \to -\infty$.

(ii) $a_n = 1 + \frac{n-1}{n}$; பண்பு: குவிதொடர் முறை;

$(a_n) \to 2$.

(iii) $a_n = \frac{x^n}{(x+nd)^n}$; பண்பு x ன் மதிப்பை யொட்டியிருக்கும். இதைப் பற்றிப் பின்னர் விரிவாகக் காண்போம்.

(iv) $a_n = r^n$; பண்பு r ன் மதிப்பை யொட்டியிருக்கும். இதைப் பற்றிப் பின்னர் விரிவாகக் காண்போம்.

(v) $a_n = \frac{1}{2m}$ ($n = 2m$ இரட்டைப் படையெண்)

$a_n = \frac{2\ m-1}{2m}$ ($n = 2m-1$ என்ற ஒரு ஒற்றைப்படையெண்)

(a) $(a_n) \to 0$ (n ன் இரட்டைப்படையெண் மதிப்புக்களுக்கு)

(b) $(a_n) \to 1$ (n ன் ஒற்றைப்படையெண் மதிப்புக்களுக்கு)

எனவே (a_n) ஒரு அலை தொடர் முறை.

5·4·6 'ϵ'; 'm'; 'N' முறை.

இக்குறியீடுகள் பற்றி 5·3.1 ல் சிறிது கூறினோம். இவை, உயர் கணிதத்தில் 'Analysis' எனப்படும் 'கணிதப் பகுப்பு முறை' என்ற பெரும் பகுதியில் பெரிதும் பயன்படுத்தப் படும். இம் முறை, மிகச் சிறப்பும் ஆற்றலும் வாய்ந்ததோர் அடிப்படையான முறையாகும். இதை ஐயந்திரிபற கணித மாணவர்கள் அறிவது இன்றியமையாததாகும்.

இம் முறையைப் பற்றிச் சற்று விரிவாக,

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{4},\ \ldots\ldots\ 1+\frac{n-1}{n}\ \ldots\ldots$$

என்ற தொடர்முறை கொண்டு விளக்க முயல்வோம். இங்கு

$$a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

$| a_n - 2 | = \frac{1}{n}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

$\epsilon = \frac{1}{1000}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

$n > 1000$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$| a_n - 2 | < \frac{1}{1000}$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும்.

இங்கு $m = \frac{1}{\epsilon} = 1000$ எனக் கொள்கிறோம். ஆனல் 'எல்லை' நிறுவுவதில், 'm'ன் மீச்சிறு மதிப்பைத்தான் கணக்கிடவேண்டுமென்ற கட்டாயமில்லை.

$\epsilon = \frac{1}{1000}$ க்கு $m \geq 2000$ என்று கூறுவதில் தவறேதுமில்லை. நமக்கு வேண்டுவதெல்லாம், $n > m$ க்கு, $| a_n - 2 | < \frac{1}{1000}$ ஆக இருக்கவேண்டும். m ன் மதிப்பு 1000 அல்லது அதற்குயர்ந்த எக் கூட்டெண் மதிப்பையும் கொள்ளலாம்.

$\epsilon = \frac{1}{10^{10}}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், $m = 10^{10}$ அல்லது அதற்குயர்ந்த முழு எண் மதிப்பு பெறும்.

$n > 10^{10}$ க்கு $|a_n - 2| < \frac{1}{10^{10}}$ ஆகும்; அல்லது,

$n \geq 10^{10} +$ ஏதாமொரு கூட்டு முழு எண்ணுக்கு, $|a_n - 2| < \frac{1}{10^{10}}$ ஆகும். எனவே, வரையறைப்படி, இத் தொடர் முறையில் எல்லை $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 2$ என உருவாகிறது.

கந்தழி எல்லையுடைய, $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$N = 1{,}000{,}000$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், $n > 1000$ அல்லது $n \geq 1001$ என்று n மதிப்பேற்ருல், $a_n > 1{,}000{,}000$ ஆகும்.

5·4·6·1 'எல்லை' வரையறை பற்றிய சில குறிப்புக்களும் இடர்க்குழிகளும்:

1. சில சமயங்களில் 'எல்லை' பற்றி வரையறுக்குங் காலை பின்வருமாறு கூறப்படுகிறது:

'n' பெரிதாக எடுத்துக் கொண்டால், $|a_n - l|$ ன் மதிப்பு நாம் விரும்புமளவு மிகமிகச் சிறிதாக்க முடியுமாயின், $a_n \to l$.

ஆனல் இது குவிதொடர் முறைகளுக்குப் பொருந்து மாயினும், சில அலைதொடர்களுக்கும் இவ்வரையறை ஏற்பு டைத்தாய் அமையலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{6}{7} \ldots\ldots$$

என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு, n ஒரு இரட்டைப்படை முழு எண்ணுயின் $a_n = \frac{2}{n+4}$; ஒற்றைப்படை முழு எண்ணுயின் $a_n = \frac{n+1}{n+3}$. இங்கு நாம் முதலில் கூறியபடி n ஐ ஒரு பெரிய இரட்டைப்படை யெண்ணுகக் கொண்டால் a_n ஐ எவ்வளவு சிறிய மதிப்பையும் விடச் சிறியதாக்கலாம்; n ஐ ஒரு பெரிய ஒற்றைப்படை யெண்ணுகக் கொண்டாலோ,

a_n ன் மதிப்பு '1' க்கு மிக அண்மையில் வந்து விடும். எனவே (a_n) என்ற தொடர்முறை '0' க்கும் '1' க்கும் இடைப்பட்ட ஓர் அலை தொடர்முறையாகிறது.

எனவே, 'எல்லை' யைப்பற்றிய வரையறை, இப்பத்தியின் முதலில் குறிப்பிட்டபடி, தெளிவில்லாத ஒன்ருக இருக்கக் கூடாது. 5·4·1 ல் குறிப்பிட்டபடி, துல்லியமாகவும், எவ்விதத் திலும் பொருத்தமுடையதாகவும் இருக்கவேண்டியது, மிக, மிக இன்றியமையாதது.

2. கந்தழி (∞): '∞' என்ற குறி, 'முடிவிலா', 'மிக மிகப்பெரிய' என்ற சொற்கள் இவை மூன்றிற்கும், வழக்க மான பொருளேயுண்டு. எட்ட முடியாத உச்ச வரம்பு அல்லது எல்லை என்று வேண்டுமானுலும் கொள்ளலாம், இதையே வரையறுத்து, எவ்வளவு பெரிய N கொடுக்கப் பட்டபோதிலும், அதை விடப் பெரியது என்று நுட்பமாகக் கூறுகிருேம். 'எண்ணிறந்த' உறுப்புக்கள் எனக் கூறு மிடத்து, அவ்வுறுப்புக்களை எண்ணி முடித்துவிட முடியாது என்றே பொருள்.

a_n, கந்தழியாகிறது, அல்லது கந்தழி எல்லையை நெருங்கு கிறதெனக் கூறுங்காலை, a_n, எல்லையின்றி வளர்ந்து செல்கிறது என்பதே பொருள்.

3. ஒரு தொடர் முறையில், திட்டமான (குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள) சில உறுப்புக்களைச் சேர்த்தாலோ, குறைத்தாலோ, அத்தொடர் முறையின் எல்லை மாருது.

ஆனுல் எண்ணிறந்த உறுப்புக்களை ஒரு தொடர் முறை யில் நீக்கிவிடின், தொடரின் தன்மையே கூட மாறக் கூடும்.

(a) எடுத்துக்காட்டாக

$$10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ldots\ldots$$

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{11},\ \tfrac{1}{12}\ \ldots\ldots$$

என்ற மூன்று தொடர் முறைகளின் பண்பும் எல்லையும் மாற வில்லை. எல்லாம் குவிதொடர்கள்; '0' எல்லையுடையன.

(*b*) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறையில் $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$ என்ற எண்ணிறந்த உறுப்புக்களை நீக்கினால், அலைதொடர்ப்பண்பு, குவிதொடர்ப்பண்பாக மாறுகிறது.

4. ஒரு குவி தொடர் முறையின் ' எல்லை '

(*a*) தொடர் முறையிலேயேயுள்ள எல்லா உறுப்புக்களுக்கும் சமமாயிருக்கலாம் ; அல்லது எண்ணிறந்த உறுப்புக்களுக்கும் சமமாயிருக்கலாம் ; அல்லது

(*b*) திட்டமான எண்ணிக்கையுள்ள சில உறுப்புக்களுக்குச் சமமாயிருக்கலாம் ; அல்லது

(c) தொடர் முறையிலுள்ள எந்த உறுப்பும் சமமில்லாமலும் இருக்கலாம்.

5·4.6.2 எடுத்துக் காட்டுகள் :

(1) $(a_n) : 1, 1, 1, \ldots\ldots 1, \ldots\ldots$; எல்லை 1 ; எல்லா உறுப்புக்களும் எல்லை '1' க்குச் சமம்.

(2) $(a_n) : \frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}, \ \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}, \ \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{3}, \ldots\ldots$

$\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{n}, \ldots\ldots$ இதன் எல்லை $= 0$.

எண்ணிறந்த உறுப்புக்கள் எல்லை '0' க்குச் சமம்.

(3) $(a_n) : a_n = \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{8}{n^3}$ என்ற விதி. எல்லை 0 ; இரண்டாவது, நான்காவது உறுப்புக்கள் மட்டுமே, எல்லை '0' க்குச் சமம்.

(4) $(a_n) : \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots\ldots \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ எல்லை $\underline{0}$; எந்த உறுப்பும் '0' என்ற எல்லைக்குச் சமமல்ல.

5·4.7 வரம்புள்ள தொடர் முறைகளும், மேல் வரம்பும், கீழ் வரம்பும் (Bounded Sequences ; upper and lower bounds).

பல தொடர் முறைகளில் $L \leq a_n \leq M$ என்ற சமனின்மைக் கொப்ப, n ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும், L, M என இரு எண்கள் (அல்லது இராசிகள்) காண முடியலாம்.

அப்படிப்பட்ட தொடர் முறைகள் வரம்புடையன (are bounded) எனவும், L அதன் கீழ் வரம்பு எனவும் (Lower bound) M அதன் மேல் வரம்பு எனவும் (Upper bound) கூறப் படும்.

அவ்வாறே $L' < L$ எனவும், $M' > M$ எனவும், L', M' என இரு எண்கள் இருக்குமாயின், L', M' என்பவை கூட முறையே கீழ் வரம்பு, மேல் வரம்பு எனவும் கூறுவதில் தவறில்லை.

இப்படிப் பார்க்கும் போது, மேல் வரம்பு எண்களில் ஒரு மீச்சிறு எண்ணும், கீழ் வரம்பு எண்களில் ஒரு மீப்பெரு எண்ணும் இருக்கும். (இதன் தெரிப்பு, Bromwich: An Introduction to the Theory of Infinite Series, பக்கங்கள் 15 – 18 ல் காண்க). இவ்விதம் கிடைக்கப் பெறும் மீச்சிறு எண்ணும், மீப்பெரு எண்ணும் முறையே அத்தொடர் முறையின் மேல் வரம்பு எனவும், கீழ்வரம்பு எனவும் கூறப்படும். (இவை யாவும், உயர்கணிதத்தில் கணிதப் பகுப்பு முறையில் நிறு வப்படும். இப்போது நாம் அவைகளைத் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக்கொள்வோம்).

எ–கா. $1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{4}{5},\ \ldots\ldots$ இங்கு $L = 1$ எனவும், $M = 2$ எனவும் அமைவது காண்க; $1 \leq a_n < 2$.

எடுத்துக் காட்டுகள் :

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ldots$ $\begin{cases} \text{மேல் வரம்பு } 1. \\ \text{கீழ் வரம்பு } 0. \end{cases}$

(2) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots\ldots$ $\begin{cases} \text{மேல் வரம்பு } \infty. \\ \text{கீழ் வரம்பு } 1. \end{cases}$

(3) $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots$ $\begin{cases} \text{மேல் வரம்பு } -1. \\ \text{கீழ் வரம்பு } -\infty. \end{cases}$

(4) $1, \ -2\frac{1}{2}, \ 3\frac{1}{3}, \ -4\frac{1}{4}, \ \ldots\ldots$ { மேல் வரம்பு $+\infty$. கீழ் வரம்பு $-\infty$.

(5) $\cos 0, \ \cos\frac{\pi}{2}, \ \cos\pi, \ \cos\frac{3\pi}{2}, \ \ldots\ldots$ { மேல் வரம்பு 1. கீழ் வரம்பு -1.

(6) $\left|\sec 0\right|, \ \left|\sec\frac{\pi}{2}\right|, \ \left|\sec\pi\right|, \ \ldots\ldots$ { மேல் வரம்பு $+\infty$ கீழ் வரம்பு $+1$.

5·4.7.1 அலை தொடர் முறைகள் (Oscillating Sequences) :

ஒரு எல்லையை நெருங்காத தொடர் முறைக்கு, மேல், கீழ் வரம்புகள் அளவுக்கு உட்பட்டு, இருக்குமாயின், அது அளவுக் குட்பட்ட எல்லைகட்கு இடைப்பட்டதோர் அலை தொடர் முறையாகும்.

$$\sin 0, \ \sin\frac{\pi}{2}, \ \sin\frac{2\pi}{2}, \ \sin\frac{3\pi}{2}, \ \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2} \ldots\ldots$$

இப்படிப்பட்ட அலை தொடராகும். இது -1 க்கும் $+1$ க்கும் இடைப்பட்டதோர் அலை தொடர் முறை.

ஒரு எல்லையை நெருங்காத தொடர் முறைக்கு, மேல், கீழ் வரம்புகள் இல்லையாயின், அது அளவுக்குட்படாத (முடிவற்ற) அலை தொடராகும்.

$1, \ -3, \ 5, \ -7, \ \ldots\ldots (-1)^{n-1} \ (2n-1) \ \ldots\ldots$ இப்படிப்பட்ட அலை தொடராகும். இது $-\infty$ க்கும் $+\infty$ க்கும் இடைப்பட்ட தோர் அலை தொடர் முறை.

சூனியத் தொடர் முறை (Null Sequence) : ஒரு தொடர் முறையின் எல்லை பூச்சியமானால், அது ஒரு சூனியத் தொடர் முறையெனப்படும்.

5·4.7.2 தேற்றம் 1 : ஒரு தொடர் முறை குவியுமாயின் அது வரம்பு பெற்றதாகும்.

(a_n) என்ற தொடர் முறை 'l' என்ற எல்லையைப் பெற்றிருக்கட்டும்.

வரையறைப்படி, ϵ என ஒரு மிகச்சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டால், $n \geq m$ க்கு, $| a_n - l | < \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில் ஒரு $\underline{m}$ காணலாம்.

எனவே, $n \geq m$ க்கு, $| a_n - l | < \epsilon$ ஆக விருக்கும்.

அதாவது, $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$. ($n < m$ ஆனல்) இப்போது, கீழ் குறிப்பிட்ட $(m + 1)$ உறுப்புக்களான,

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{m-1}$, $l - \epsilon$, $l + \epsilon$ என்பவற்றை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அவைகளில் மிகச் சிறிது L எனவும், மிகப் பெரியது M எனவும் இருக்கட்டும்.

அப்போது, $n \leq m - 1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு,

$$L \leq a_n \leq M.$$

மேலும் $n \geq m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு,

$$L \leq l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \leq M.$$

$\therefore$ n ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்,

$$L \leq a_n \leq M.$$

$\therefore$ (a_n) என்ற தொடர் முறை வரம்புடையது.

கிளைத் தேற்றம்: $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை இருக்குமானல், $| a_n | < G$ என்பதற் கொப்ப G என்ற ஒரு கூட்டு எண் உண்டு. அந்த G ன் மதிப்பு, $| L |$, M என்ற இரண்டில் பெரிய எண்ணை விடப் பெரிதாயிருக்கும்.

(B)

5·5.1 தொடர் முறைகளைப் பற்றிய சில தேற்றங்கள் (தெரிப்பின்றி கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன).

குவி தொடர் முறைகளைப் பற்றிய சில முக்கியமான தேற்றங்கள் :

(1) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n) = A$ ஆனால்

(a) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n + K) = A + K$;

(b) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (K\, a_n) = K\, A$; ($K \neq 0$ கட்டுப்பாடு)

(c) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{A}$; ($A \neq 0$ கட்டுப்பாடு)

(2) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n) = A$; $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (b_n) = B$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

(a) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n \pm b_n) = A \pm B$;

(b) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n \cdot b_n) = AB$;

(c) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ (கட்டுப்பாடு $B \neq 0$)

5·5.2 சூனியத் தொடர் முறைகளைப் பற்றி சில முக்கியமான தேற்றங்கள் :

(1) (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாயின்,

அதாவது $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (a_n) = 0$ ஆனால்

(a) $\lim_{n \to \infty} K(a_n) = 0$

(b) $\lim_{n \to \infty} (-a_n) = 0.$

(2) $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$; மேலும் (b_n) ஒரு வரம்புள்ள தொடர் முறை எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

(b_n) ஒரு குவிதொடர் முறையாயிருப்பினும் இது பொருந்தும்.

(3) (a_n), (b_n) என்பவை இரு சூனியத் தொடர்களாயின்,

(a) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 0$

(b) $\lim_{n \to \infty} (a_n - bn) = 0.$

(4) $|r| < 1$ ஆனால் $1, r, r^2 \ldots\ldots r^{n-1} \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறை சூனியத் தொடர் முறையாகும். அவ்வாறே a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}, ... என்ற தொடர் முறையும் சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(5) $a_n = \dfrac{1}{n^p}$; $p > 0$ ஆனால் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(6) (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாய், l என்ற எல்லை பெற்றதாயிருப்பின்,

$\lim_{n \to \infty} (a_n - l) = 0.$

இதன் மறுதலையும் உண்மையாம்.

C

ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறைகள்
(Monotonic Sequences).

5 6.1.1 ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை (Monotonic Increasing Sequence) :

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \ldots\ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \ldots\ldots$ என்ற விதிப்படி (a_n) என்ற ஒரு தொடர் முறை இருக்குமாயின் அது ஒரு 'ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை' எனப்படும். எல்லா n கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்களும் $a_{n+1} \geq a_n$ என்பது இத் தொடர் முறை விதியாகும்.

5.6.1.2 ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை (Monotonic Decreasing Sequence) :

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots\ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \ldots\ldots$ என்ற விதிப்படி (a_n) என்ற ஒரு தொடர் முறை இருக்குமாயின் அது ஒரு 'ஓரியல் பான இறங்கு தொடர் முறை' எனப்படும். எல்லா n கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்களும் $a_{n+1} \leq a_n$ என்பது இத் தொடர் முறை விதியாகும்.

இவ்விரு வகைத் தொடர் முறைகளும் 'ஓரியல்பான தொடர் முறைகள்' எனப்படும். இவைகளுக்கு ஒரு பொதுப் பண்புண்டு :

'ஓரியல்பான தொடர் முறைகளுக்கு ஒரு முடிவான (திட்டமான அல்லது அளவுக்குட்பட்ட) அல்லது ஒரு முடிவற்ற (கந்தழி) எல்லையுண்டு'.

ஓர் ' ஓரியல்பான தொடர் முறையில்' எல்லா n மதிப்புக் களுக்கும்,

$| a_n | < | A$ ஆக விருப்பின் அது ஒரு குவி தொடர் முறையாகும். இல்லையேல் அது ஒரு விரி தொடர் முறை.

இது ஒருவாறாகப் பின்னர் நிறுவப்பட்டிருக்கிறது. (தெரிப்பு முறை : Bromwich : An Introduction to Theory of Infinite Series. பக்கம் 7). (ஆனல் மிகவும் நுணுக்கமாகக் கட்டுப்பாடான கணித முறையில் தெரிப்பு வேண்டின் Bromwich நூலில் Appendix I Article 143, பக்கம் 409 – 410 காண்க).

தேற்றம் :

ஒரு ஓரியல்பான தொடர் முறை, ஓர் எல்லையை நெருங்கும்; அவ்வெல்லை திட்டமான மதிப்புடைய தாயிருக்கலாம், அல்லது கந்தழியாகவும் இருக்கலாம்.

$|a_n|$ மதிப்பு, n ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும், n ஓடு தொடர்பில்லாத A என்ற ஒரு திட்டமான மதிப்புக்குக் குறைவாகவேயிருப்பின், அத் தொடர் முறை ஒரு குவி தொடர் முறையாகும்; இல்லையேல் அது ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

இதன் தெரிப்பு, 'Bromwich: An Introduction to the Theory of Infinite Series', பக்கம் 7 ல் கண்ட முறையை ஒட்டி எழுதப்பட்டது.

தெ: $a_{n+1} \geq a_n$ என அமையும் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

a_n எப்போதும் A ஐ விடக் குறைந்தது எனக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது.

எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண் ϵ கொடுக்கப்பட்டாலும், $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $a_n < a_m + \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில் ஒரு m கண்டு பிடிக்க இயலும்.

அது முடியாவிட்டால், $a_p > a_1 + \epsilon$, $a_q > a_p + \epsilon$, $a_r = a_q + \epsilon$, $a_s = a_r + \epsilon$ ...... என்னும் வகையில் p, q, r, s ...... என்ற கூட்டு முழு எண்கள் காண இயலும். p, q, r, s ...... என்ற தொடர் முறையில் வெகு தூரம் சென்ருல் $a_v > A$ என்பதற்கொப்ப ஒரு v காணமுடியும். இது, முதலில் நாம் கொண்ட கொள்கைக்கு (அதாவது $|a_n| < A$) முரண்படும்.

எனவே $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $a_n < a_m + \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில் ஒரு m காண முடியும்.

ஆக $n > m$ என்ற மதிப்புகளுக்குரிய a_{m+1}, a_{m+2}, ... யாவும் a_m க்கு அப்பால் ϵ என்ற ஒரு (ϵ எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண்ணுயினும் சரி) சிறு இடை வெளியில் (அதாவது a_m முதல் $a_m + \epsilon$ என்ற இடைவெளியில்) கிடைக்கும். ஆகவே (a_n) என்ற தொடர் முறை $l \leq A$ என்ற எல்லையை நெருங்க வேண்டுமெனத் தெரிகிறது.

மாருக, (a_n) என்ற ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறையில் உள்ள உறுப்புக்கள் மேல் வரம்பற்றதாயிருப்பின், அது ஏறும் தொடர்முறையாயிருப்பதால் எல்லையற்று கந்தழிவரை செல்லும்.

இவ்வாறே ஓரியல்பான இறங்கு தொடர்முறைக்கும், உரிய உண்மைகளை நிறுவலாம்.

5·6.2 தொகுத்த தேற்றங்கள் : ஏறு, இறங்கு தொடர் முறைகளைப் பற்றிய சில முக்கியமான தேற்றங்கள் பின்னர் (தெரிப்புக்களின்றி) கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன :

1. ஓர் 'ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை' மேல் வரம் புடைத்தாயின் அது ஒரு குவிதொடர் முறையாகும்.

2. ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை மேல் வரம்பற்ற தாயின், அது ஒரு விரி தொடர்முறையாகும்; எல்லை $+$கந்தழி.

3. ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர்முறை கீழ்வரம்புடைத் தாயின், அது ஒரு குவி தொடர் முறையாகும்.

4. ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை கீழ் வரம்பற்ற தாயின், அது ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்; எல்லை $-$ கந்தழி.

மேற்கூறியவற்றிற்கு எடுத்துக் காட்டுகள் :

(1) $1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{4},\ \ldots\ldots\ 1+\frac{n-1}{n},\ \ldots\ldots$ ஏறும் தொடர் முறை ; குவியும் ; மேல் வரம்பு 2.

(2) $1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$ ஏறும் தொடர் முறை ; விரியும் ; மேல் வரம்பு $+\infty$.

(3) $2,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3},\ \ldots\ldots\ 2-\left(\frac{n-1}{n}\right)\ \ldots\ldots$ இறங்கு தொடர் முறை ; குவியும் ; கீழ் வரம்பு '1'.

(4) $-1^2,\ -2^2,\ -3^2,\ \ldots\ldots\ -n^2,\ \ldots\ldots$ இறங்கு தொடர் முறை ; விரியும் ; கீழ் வரம்பு $-\infty$.

5·7.1 தேற்றம் 2 : (a_n) கூட்டெண்களால் அமைந்த ஒரு தொடர் முறை; இதில் முதலிலிருந்தோ, அல்லது முதல் $(m-1)$ (திட்டமான கூட்டு முழு எண்) உறுப்புக்களுக்குப் பின்போ,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$ என்ற சமனின்மை நிலவுமாயின், (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

தெரிப்பு: இச் சமனின்மை முதல் m உறுப்புக்களுக்குப் பொருந்தவில்லையெனின், முதல் $(m-1)$ உறுப்புக்களை விட்டு விடுக. அதற்குப் பின்பு,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} > k ; \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > k ; \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} > k ; \ldots\ldots \frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} > k \ldots\ldots$$

ஆகும் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{a_{m+r}}{a_{m+r-1}} \cdot \frac{a_{m+r-1}}{a_{m+r-2}} \ldots\ldots \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdot \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

$$> k^r$$

$$\therefore \quad a_{m+r} > k^r a_m$$

$k>1$, ஆகையால் $\lim_{r \to \infty} a_{m+r} = \infty$

$\therefore$ (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

5·7.2 தேற்றம் 3: $n \geq m$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும், $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < k < 1$ என்ற சமனின்மை பொருந்துமாயின், (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும். (k ஒரு மாறிலி.)

சென்ற தேற்றம் (2) ன் முறைப்படி,

$0 < | a_{m+r} | < k^r | a_m |$ எனக் கிடைக்கும். $k < 1$ ஆகையால் $\lim_{r \to \infty} k^r | a_m | = 0$. எனவே, (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

5·7.3 தேற்றம் 4: முதல் உறுப்பிலிருந்தோ, அல்லது முதல் $(m-1)$ உறுப்புக்களுக்குப் பின்போ, a_n கூட்டு மதிப்புடையதாய், $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ என்பது பொருந்துமாயின் (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும். (l ஒரு மாறிலி).

தெ : $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ ஆகையால், ϵ என்ற எவ்வளவு சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், ஒரு குறிப்பிடக் கூடிய m_1 க்கு அதிகமான n ன் மதிப்புக்களுக்கு,

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon.$$

m, m_1 ஐ விடப் பெரிய எண் M ஒன்று கொள்வோம். எனவே $n \geq M$ மதிப்புக்களுக்கு,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon.$$

$l > 1$ ஆகையால், $l - \epsilon > k > 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கொப்ப k என்ற ஓர் எண் காணலாம். (குறிப்பு $l = 1\frac{1}{2}$; $\epsilon = \frac{1}{16}$; $k = 1\frac{1}{2} - 2\epsilon = 1\frac{3}{8}$ என்பது போன்றவை)

$\therefore$ $n \geq M$ க்கு

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > K > 1.$$

$\therefore$ முன் தேற்றப்படி (தேற்றம் 2), (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

5·7.4 தேற்றம் 5: முதல் உறுப்பிலிருந்தோ, அல்லது முதல் $(m-1)$ உறுப்புக்களுக்குப் பின்போ, a_n ஒரு கூட்டு மதிப்புடையதாய்,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1 \text{ என்பது}$$

பொருத்தமானல், (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும் (l ஒரு மாறிலி).

தெ : $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ ஆகையால், ϵ என்ற எவ்வளவு சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், ஒரு குறிப்பிடக் கூடிய m_1 க்கு அதிகமான n ன் மதிப்புக்களுக்கு,

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon.$$

m, m_1 ஐ விடப் பெரிய எண் M ஒன்று கொள்வோம்.

எனவே $n \geq M$ மதிப்புக்களுக்கு,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\epsilon$$

$l < 1$ ஆனபடியால் $l+\epsilon < K < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கொப்ப, K என்ற ஒரு எண் காணலாம். (குறிப்பு: $l=\frac{1}{2}$; $\epsilon=\frac{1}{16}$; $K=\frac{1}{2}+2\epsilon=\frac{5}{8}$ என்பது போன்றவை)

$\therefore \quad n \geq M$ க்கு,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < K < 1.$$

$\therefore$ முன் தேற்றப்படி (தேற்றம் 3), (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும். அது மட்டுமல்ல, (a_n) ஒரு சூனியத் தொடராகும்.

D

5·7·5 சில தொடர் முறைகள் :

1. $(a_n)=x, x^2, x^3 \ldots\ldots x^n \ldots\ldots$ என்ற தொடர் முறை.

$a_n=x^n$ [5·4·5 (iv) ன் விளக்கம் இங்கு காண்க].

(a) $x > 1$, ஆனால் (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறை ;

(b) $|x| < 1$, ஆனால் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறை ;

(c) $x=1$, ஆனால் (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறை ; எல்லை $=1$.

(d) $x=-1$, ஆனால் (a_n) ஒரு அலை தொடர் முறை ; (-1 க்கும் $+1$ க்கும் இடைப்பட்டது)

(e) $x < -1$;

$x=-y$ எனக் கொண்டால், y கூட்டெண் >1.

$$\therefore \quad x^n=(-y)^n$$
$$=(-1)^n y^n$$
$$\therefore \quad a_n=(-1)^n y^n.$$

ஒற்றைப் படை உறுப்புக்கள் குறை மதிப்புடையவை ;

இரட்டைப் படை உறுப்புக்கள் கூட்டு மதிப்புடையவை.

$\therefore \quad a_n = \pm\, y^n$

மேலும் $y > 1$, ஆகையால், $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; y^n = \infty$

எனவே இத் தொடர் முறை $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை, ஓர் அலை தொடராயமைகிறது.

(2) $a_n = \dfrac{x^n}{(x+nd)^n}$ என்ற பொதுவுறுப்பு கொண்ட தொடர் முறை. [5·4·5 (iii) ன் விளக்கம் இங்கு காண்க].

(a) $x = 1$ ஆனால் $a_n = \dfrac{1}{(1+nd)^n}$

$$(1+nd)^n > (1+nd) \to \infty$$

$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; a_n = 0$

$\therefore \quad (a_n)$ ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

(b) $x > 1$ ஆனால் $a_n = \dfrac{x^n}{(x+nd)^n}$

$$= \frac{x^n}{x^n\left(1+\dfrac{nd}{x}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\dfrac{nd}{x}\right)^n}$$

இப்போது $\left(1+\dfrac{nd}{x}\right) > 1.$

$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\dfrac{nd}{x}\right)^n = \infty$

$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{nd}{x}\right)^n} = 0$

இதுவும் ஒரு சூனியத் தொடர்முறையாகும்.

(c) $0 < x < 1$, ஆனாலும் $a_n \to 0$

$\therefore$ இதுவும் ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும்.

x ன் குறையெண் மதிப்புக்களுக்கு இவ்வழியே (a_n) ன் பண்புகளை அறிக.

(3) சிறப்பான தொடர் முறை :

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்ற பொது வுறுப்பைக் கொண்ட தொடர் முறை.

(a_n) ஒரு குவி தொடர் முறை யெனவும் ஒரு திட்டமான எல்லை பெற்றது எனவும் நிறுவுவோம்.

4·5, தேற்றம் இரண்டின் கீழ்த் தேற்றமாக,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டது.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ஆகும்.}$$

எனவே (a_n) ஓர் 'ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை' ஆகும்.

மேலும் $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{\underline{|n}}$$

$$< 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\underline{|n}}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 3$$

மேலும் $a_n > 1$

∴ எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும்,

$$1 < a_n < 3$$

∴ (a_n) ஓர் 'ஓரியல்பான' ஏறும் தொடர் முறை; கீழ், மேல் வரம்புகள் பெற்றது. ஆகவே (a_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும்; ஒரு திட்டமான எல்லை பெறும்; அவ்வெல்லை e எனக் கணிதத்தில் பல இடங்களில் பயன்படும். இந்த e நேப்பியர் மடக்கை முறையில் மடக்கை அடியாய் அமைகிறது.

(4) அவ்வாறே,

$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ என்று பொதுவுறுப்பைக் கொண்ட தொடர் முறையும் குவி தொடர் முறை யெனவும், e என்ற எல்லை பெற்ற தெனவும் நிறுவலாம்.

இங்கு $a_n > a_{n+1}$ எனவும், ஆகவே, (a_n) ஒரு ஓரியல் பான இறங்கு தொடர் முறை யெனவும் நிறுவலாம்.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n\to\infty} a_n = \text{எல்லை}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \text{எல்லை}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= e.$$

5 இப்போது, (3), (4) ல் உருவாகிய எல்லையைப் பொதுப் படுத்தி,

(a) $\text{எல்லை}_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ என்பது x ன் எல்லா கூட்டெண் மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்து மெனவும்

(b) $\text{எல்லை}_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ என்பது x ன் எல்லா குறையெண் மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்து மெனவும், நிறுவுவோம்.

(a) தெரிப்பு: $n \leq x \leq n+1$ என்ற x ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore$ 4·9.4 ல் கண்ட தேற்றம் 13 ஐப் பயன் படுத்தினல்

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

ஆனல் $\text{எல்லை}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ எனவும்

$\text{எல்லை}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ எனவும்

நாம் அறிவோம்.

$\therefore$ $\text{எல்லை}_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ என்பது நிறுவப்படுகிறது.

(b) தெரிப்பு: $x = -y$ எனக் கொள்வோம் (y கூட்டெண்).

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \text{எல்லை}_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$n \leq y \leq n+1$ எனக் கொள்வோம்.

∴ 4·9.5 ல் கண்ட தேற்றம் 14 ஐப் பயன்படுத்தினல்

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \geq \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} \geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

ஆனல் $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ எனவும்

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = e$ எனவும்

நாம் கண்டோம்.

∴ $\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = e$ என்பது பொருந்துகிறது.

∴ $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ என நிறுவப்படுகிறது.

(6) மேற்கண்டவைகளை யொட்டி, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ என்பதும் பொருந்தும்.

ஏனெனில்,

$x = \frac{1}{y}$ எனக் கொண்டால் x ன் மதிப்பு பூச்சிய எல்லையை நெருங்கும்போது, y ன் மதிப்பு $\pm\infty$ என்ற எல்லையை நெருங்கும்.

∴ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$

என நிறுவப்படுகிறது.

(7) மற்றுமோர் சிறப்பான தொடர் முறையைப் பார்ப்போம்.

அது $a_n = \sqrt[n]{n}\ \left[=(n)^{\frac{1}{n}}\right]$ என்ற பொதுவுறுப்பைக் கொண்ட தொடர் முறை.

$n=1$ ஆனல் $a_1=1$

$n=2$ ஆனல் $a_2=\sqrt{2}$

$n \geq 3$ ஆனல்,

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$ என நாம் அறிவோம்.

$\therefore \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$\therefore \quad n^{n+1} > (n+1)^n$

$\therefore \quad n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore \quad n \geq 3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு,

$a_n > a_{n+1}$

முதல் 3 உறுப்புக்களுக்கு,

$a_1 < a_2 < a_3$ என்பது பொருந்து மென அறிக.

அதற்குப் பின்பு, $a_3 > a_4 > a_5 \ldots\ldots$, அதாவது $a_n > a_{n+1}$

$\therefore$ முதல் இரண்டு உறுப்புக்களுக்குப் பின்பு (a_n) ஓரியல் வான இறங்கும் தொடர் முறை.

மேலும், எல்லா n மதிப்புக்களுக்கு,

$n \geq 1^n$ ஆகையால்,

$n^{\frac{1}{n}} \geq 1$

$\therefore \quad a_n \geq 1$

$\therefore \quad (a_n)$ ன் கீழ் வரம்பு 1.

(a_n) ன் மேல் வரம்பு $3^{\frac{1}{3}}$.

ஆகவே, (a_n) ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர், முறையாய், 1 என்ற கீழ் வரம்பும், $3^{\frac{1}{3}}$ என்ற மேல் வரம்பும் பெற்றிருப்பதால்,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \geq 1$$ எனத்தான் இருக்கமுடியும்.

ஆனால் $l = 1$ எனவே பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட சிறிய கூட்டு எண் $\in$ கொடுக்கப் பட்டால்,

$$(1+\in)^n = 1 + n\cdot\in + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\in^2 + \ldots\ldots$$

$$> 1 + n\cdot\in + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\in^2.$$

$$> \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\in^2.$$

இப்போது $m = I\left(\frac{2}{\in^2}\right) + 1$ என்ற மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வோமானால்,

$n \geq m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு,

$\frac{n-1}{2}\in^2 > 1$ ஆகவிருக்கும்.

$\therefore$ அப்படிப்பட்ட $n \geq m$ மதிப்புக்களுக்கு,

$(1+\in)^n > n$ ஆகும்.

$\therefore$ $(1+\in) > n^{\frac{1}{n}}$ ஆகும்.

அதாவது $n^{\frac{1}{n}} < 1+\in$ ஆகும்.

அதாவது $\left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \in$ ஆகும்.

எனவே 'எல்லே' வரையறைப்படி,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லே}} (n)^{\frac{1}{n}} = 1$$ என்பது நிறுவப்படுகிறது.

E

தொடர்ச்சியான சார்புகள். (Continuous functions)

5.8.1 தொடர்ச்சியான சார்புகள்: வகை நுண்கணிதத்தில் (Differential Calculus) தொடர்ச்சியான சார்புகள் பற்றியும் அவைகளின் இயல்புகள் பற்றியும் விரிவாக விளக்கப்படும். உயர் கணிதத்தில் 'Analysis' எனப்படும் கணிதப் பகுப்பு முறையில், இன்னும் நுணுக்கமாக இவ்வித சார்புகளின் இயல்புகள் ஆராயப்படும்.

ஆனல் மிகவும் சுருக்கமாக இச் சார்புகளேப்பற்றி, இந் நூலில் காண்போம்.

5.8.2.1 தொடர்ச்சியான சார்பு–வரையறை:

$x > a$ ஆக விருந்து, $\underline{a}$ ஐ அணுகும் போதும், $x < a$ ஆக விருந்து, $\underline{a}$ ஐ அணுகும் போதும், $f(x)$ எல்லே மதிப்புக் கள் பெற்று, அவ்விரு எல்லே மதிப்புக்களும் $f(a)$ க்குச் சமமானல், $f(x)$ என்பது $\underline{a}$ என்ற மதிப்புக்கு (அல்லது $\underline{a}$ என்ற புள்ளியில்) தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

$x > a$ ஆக விருந்து $\underline{a}$ ஐ அணுகுவதை $\underset{x \to a+0}{\text{எல்லே}} f(x)$

என்றும், $x < a$ ஆக விருந்து $\underline{a}$ ஐ அணுகுவதை $\underset{x \to a-0}{\text{எல்லே}} f(x)$

என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

எ-கா.: $2+0$ என்பது $2{\cdot}1,\ 2{\cdot}001,\ 2{\cdot}00001 \ldots\ldots \to 2$

$2-0$ என்பது $1{\cdot}9,\ 1{\cdot}99,\ 1{\cdot}9999 \ldots\ldots \to 2$

$f(x) = x^2$ எனக் கொண்டால்,

$$\underset{x \to 2+0}{\text{எல்லே}} f(x) = 4$$

$$\underset{x \to 2-0}{\text{எல்லை}} f(x) = 4$$

$$x = 2 \text{ ஆனல் } f(x) = 4$$

எனவே $f(x) = x^2$ என்ற சார்பு $x = 2$ என்ற மதிப்புக்கு (அல்லது $x = 2$ என்ற புள்ளியில்) தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

5.8·2.2 இந்த வரையறையை இன்னும் நுட்பமாகக் கூறுவது பின் வருமாறு :

பின்வரும் கட்டுப் பாடுகளுக்குட்பட்டால், $f(x)$ என்ற சார்பு, $x = a$ என்ற மதிப்புக்கு (அல்லது $x = a$ என்ற புள்ளியில்) தொடர்ச்சியான சார்பெனப்படும் :

' "$\in$' என எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப் பட்டாலும், $|x - a| < h$ என்ற இடைவெளியில் (அதாவது $a - h < x < a + h$ என்ற இடை வெளியில்) உள்ள எல்லா x ன் மதிப்புக்களுக்கும்,

$|f(x) - f(a)| < \in$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில், $h > 0$ என்ற ஒரு எண் காணமுடிய வேண்டும்."

அப்படி ஒரு $h > 0$ காண முடியுமாயின், $f(x)$ என்ற சார்பு 'a' என்ற மதிப்புக்கு (அல்லது $\underline{a}$ என்ற புள்ளியில்) தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

குறிப்பு 1: இது

$$\underset{x \to a+0}{\text{எல்லை}} = \underset{x \to a-0}{\text{எல்லை}} = f(a)$$

என்பதே யாகுமெனக் காண்க.

5.8 3 (a, b) என்ற ஆயிடையில் (Interval) தொடர்ச்சியான சார்பு:

(a, b) என்ற ஆயிடையிலுள்ள எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் (அதாவது $\underline{a, b}$ என்ற ஆயிடையிலுள்ள எல்லா மதிப்புக் களுக்கும்) $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகு மாயின், $f(x)$ அவ்வாயிடையில் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

5.8.3.1 மற்ரோர் வரையறை :

பின் கூறப்படும் இரு கட்டுப் பாடுகளும் (a, b) என்ற ஆயிடையில் $f(x)$ க்குப் பொருந்துமாயின் $f(x)$ என்பது (a, b) என்ற ஆயிடையில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பெனப்படும்:

(1) $f(a)$; $f(b)$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு இடைப்பட்ட ஒவ்வொரு மதிப்பையும், குறைந்தது ஒரு முறையேனும் $f(x)$ அவ்விடை வெளியில் $[(a, b)]$ ஏற்கவேண்டும்.

(2) (a, b) என்ற இடை வெளியில் $f(x)$ ன் மேல் கீழ் வரம்பு மதிப்புக்களாகிய, H, h என்ற மதிப்புக்களைக் குறைந்தது ஒரு முறையேனும் $f(x)$ அவ்விடை வெளியில் ஏற்க வேண்டும்.

[Bromwich ; Carslaw நூல்கள் காண்க].

5.8.4 இந்த வரையறையை யொட்டி, $f(x)$, $F(x)$ என்ற சார்புகள் $\underline{a}$ என்ற மதிப்புக்குத் தொடர்ச்சியான சார்புகளாயின், $[f(x) \pm F(x)]$ ம் $[f(x) \times F(x)]$ ம் அதே மதிப்புக்குத் தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$F(a) \neq 0$ என்ற விலக்கோடு, $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ ம் அதே மதிப்புக்குத் தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$F[f(x)]$ ம் அவ்வாறே.

5.8.4.1 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை, x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும், தொடர்ச்சியான சார்பாகும். இம் முக்கியமான இயல்பு, சமன்பாட்டுக் கொள்கையில் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும். மேலும், x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்

5.8.4.2 e^x என்ற சார்பும், $x > 0$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $\log x$ அல்லது மகை x என்ற சார்பும் தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.

மற்றும் விவரமான இயல்புகள் மேல் கூறப்பட்ட, Bromwich, Carslaw போன்ற நூல்களில் விரிவாகக் காணலாம்.

பயிற்சி 5

1. பின்வரும் தொடர் முறைகளின் தன்மைகளையறிக. மேல், கீழ் வரம்புகளிருப்பின் அவைகளையும், எல்லையிருப்பின் அவ்வெல்லைகளையும் அறிக.

(1) $a_n = (-1)^{n-1} \times n$

(2) $a_n = I\left(\frac{n}{3}\right)$

(3) $a_n = \frac{1}{\lfloor n}$

(4) $a_n = -\frac{5^n}{\lfloor n}$

(5) $a_n = m + (-1)^n$

(6) $a_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

(7) $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n^3}$

(8) $a_n = n[1 + (-1)^n]$

(9) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

(10) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

2. $a_n = \frac{\log n}{n}$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக.

3. $a_n = \frac{x^n}{\lfloor n}$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக.

4. $|r| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில், (செ.ப.க.)

$a_n = nr^n$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக.

5. $a_n = \{\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3 - n}\}$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக.

6. $a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$ என நிறுவுக.

7. $\lim_{n\to\infty} (a_n) = A$; $\lim_{n\to\infty} (b_n) = B$ ஆனால்

$\lim_{n\to\infty} (K\,a_n + qb_n) = K\,A + q\,B$ என நிறுவுக.

8. $x > 0$ ஆனால்

(a) $e^x > 1+x$ எனவும்,

(b) $x > \log_e (1+x)$ எனவும் நிறுவுக.

9. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$; $b_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ ஆனால்

$a_n < b_n$ என நிறுவி, $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ என நிறுவுக.

அவ்வழியாக $\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n)$ என நிறுவுக.

6. கந்தழித் தொடர்கள் குவிதலும், விரிதலும்

(Infinite Series - Convergency and Divergency)

A

6.1 தொடர்: நாம் $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர் முறை (முடிவிலாத் தொடர் முறை) பற்றி சென்ற பகுதியில் கண்டோம். அத்தொடர் முறையின் உறுப்புக்களை + என்ற குறியீட்டால் இணைத்துப் பெறப்படும். $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n+\ldots\ldots$ என்பது ஒரு தொடர் எனப்படும்.

6·1.1 முடிவுள்ள தொடர்: இத் தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை வரை, உறுப்புக்கள் கொண்டால், அது ஒரு 'முடிவுள்ள' (Finite) தொடரெனப்படும்.

கந்தழித் தொடர்: கந்தழிவரை உறுப்புக்களைக் கொண்டு செல்வோமாயின், அது ஒரு 'முடிவிலாத் தொடர்' அல்லது 'கந்தழித் தொடர்' (Infinite Series). இவ்விதத் தொடர்களை 'கந்தழித் தொடர்' எனவே இனி கூறுவோம்.

6·1.1.1 எடுத்துக் காட்டு:

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{100}}$ என்பது 101 உறுப்புக்கள் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள பெருக்குத் தொடர்.

எழுதும் முறை $\sum_{1}^{101} \frac{1}{2^{n-1}}$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\infty$ என்பது ஒரு கந்தழிப் பெருக்குத் தொடர்.

எழுதும் முறை $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

எந்த ஒரு முடிவுள்ள தொடருக்கும் ஒரு திட்டமான கூட்டுத் தொகையுண்டு, என்பது வெள்ளிடை. (1) என இங்கு குறிப்பிட்ட தொடருக்கு,

முதல் 101 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை

$$=\frac{1\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2^{101}-1}{2^{101}}\right)$$

$$= \frac{2^{101}-1}{2^{100}}.$$

ஆனால் (2) என்ற குறிப்பிட்ட கந்தழித் தொடருக்கு அவ்வாறான கூட்டுத் தொகை உண்டா, இல்லையா, இருப்பின் எப்படி அக் கூட்டுத் தொகை வரையறுக்கப்படுகின்றது என்பதைப் பற்றி இப் பகுதியில் ஓரளவு பார்ப்போம்.

6·2 கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை — வரையறை :

$a_1+a_2+a_3+ \ldots\ldots \infty$ வரை ஒரு தொடர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதைத் கொண்டு $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n, \ldots\ldots$ என்ற (s_n) தொடர் முறையமைப்போம்.

$s_1 = a_1$ (முதல் உறுப்பு)

$s_2 = a_1 + a_2$ (முதல் இரண்டு உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை)

அவ்வாறே,

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

... ...

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n$ (முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை)

... ...

... ...

இப்போது (s_n) என்ற தொடர் முறை குவிந்து S என்ற எல்லையைப் பெறுமாயின்,

கந்தழித் தொடரான,

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots \infty = \sum_{1}^{\infty} a_n$$

$$= \sum a_n$$

ஒரு குவி தொடரெனப்படும்; அதன் கூட்டுத் தொகை S என வரையறுக்கப்படுகிறது (Convergent Series, with a sum S).

குறிப்பு: S என்பது ஒரு எல்லை (அல்லது ஓர் அணுகி) என்பது வலியுறுத்தற் குரியதோர் அடிப்படைக் கருத்து. S என்பது ஒரு தொடரைக் கூட்டிப் பெறப்படும் தொகையல்ல, அது ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லைதான்.

ஆகவே எல்லை $\underset{n \to \infty}{} s_n = S$ என்று கூறுவது 'எல்லை' க் கருத்தை வலியுறுத்துவதாகும். S என்பது அக் கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை யென்பது ஒரு மரபே யொழிய, வேறல்ல.

அவ்வாறே (s_n) என்ற தொடர் முறை, விரியுமாயின் அல்லது அலையுமாயின், Σa_n என்ற கந்தழித் தொடர் முறையே ஒரு விரி தொடரெனவும் ஒரு அலை தொடரெனவும் கூறப்படும். (Divergent Series/Oscillating Series).

6·2.1 குவி தொடர் — எடுத்துக்காட்டு.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots \infty$ என்ற கந்தழித் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$s_1 = 1 \qquad\qquad = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad\qquad = 1\frac{1}{2}$$

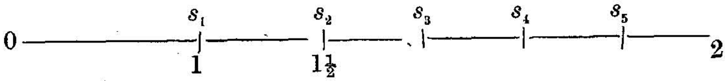
$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad\qquad = 1\frac{3}{4}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1\frac{7}{8}$$

... ...

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$$

இக்கூட்டுத் தொகைகளை ஒரு நேர்க் கோட்டின் மேல் புள்ளிக் குறியீடு செய்வோம்.



மேல் படத்தைப் பார்த்தால், பின்கூறப்படும் அமைப்பு விளங்கும்.

s_n $(n = 2, 3, 4, \ldots\ldots)$ வேண்டுமாயின், s_{n-1} க்கும் 2 க்கும் இடைப்பட்ட நடுப்புள்ளியை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எனவே, n எல்லையற்று வளர்ந்து செல்லும் போது,

$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\, s_n = 2$ என்பது தெரிய வருகிறது.

எனவே $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \infty$ என்ற கந்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை 2 என வரையறுக்கப்பட்டபடி கொள்ளப்படுகிறது.

நாம் புகுமுக வகுப்பில் அறிந்தபடி,

$$s_n = \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

$$\therefore \quad \left| s_n - 2 \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$n > m$ க்கு $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ என்ற சமனின்மைக் கொப்ப, எவ்வளவு சிறிய கூட்டு எண் ϵ கொடுக்கப்பட்டாலும், அதற்குரிய $\underline{m}$ கண்டுபிடிக்கலாம்.

$\therefore$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} s_n = 2$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore \quad S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \infty = 2$ என்ற மரபு கொள்ளலாம்.

6·3.1 தேற்றம் 1 : $\sum_{1}^{\infty} a_n$ என்ற தொடர் A என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும் $\sum_{1}^{\infty} b_n$ என்ற தொடர் B என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும் குவியுமானல்,

(i) $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர் $A + B$ என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும்,

(ii) $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர் $A - B$ என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும்,

(iii) $Ka_1 + Ka_2 + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர் KA என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும் குவியும்.

தெ : $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = A_n$ எனவும்

$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n = B_n$ எனவும் கொள்க.

வரையறைப்படி,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} A_n = A$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} B_n = B$$

$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots\ldots + (a_n + b_n)$ எனக்கொள் வோம்.

$$\text{அப்போது } s_n = \sum_1^n a_n + \sum_1^n b_n$$

$$= A_n + B_n$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (A_n + B_n)$$

$$= A + B$$

(5·5.1—2 (a) காண்க)

அவ்வாறே,

$t_n = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots\ldots + (a_n - b_n)$ எனக்கொள்வோம்.

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} (A_n - B_n)$$

$$= A - B$$

(5·5.1—2 (a) காண்க).

$p_n = Ka_1 + Ka_2 + \ldots\ldots + Ka_n$ எனக் கொள்வோம்.

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} KA_n$$

$$= KA$$

(5·5.1—1 (b) காண்க).

Σa_n ம் Σb_n ம் இரண்டும் பெருக்கப்பட்டாலோ, ஒன்றையொன்று வகுத்தாலோ, பெறப்படும் தொடர்கள் பற்றிய இயல்புகள் எளிதில் பெறப்படா. அவை பற்றிப் பின்னர் பார்ப்போம்.

6.3.2 தேற்றம் 2: ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்கள் நீக்கப்பட்டுவிடுமாயினும், அத்தொடரின், குவிதன்மை, விரிதன்மை, அலைதன்மை மாறுபடாது.

தெ: ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு திட்டமான (Finite) தொகையாகும்.

ஆகவே, முதலில் கொண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகை S க்குக் குவியுமாயின், இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுத் தொகை, S – ஒரு திட்டமான தொகைக்குக் குவியும், $(S-S_1)$.

அல்லது முதலில் கொண்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை $\pm\infty$க்கு விரியுமானாலும் சரி அல்லது குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு இடைப்பட்டோ, அல்லது $\pm\infty$ க்கு இடைப்பட்டோ, அலையுமாயினும் சரி, ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை S_1 ஐ எடுத்து விட்டாலும், இரண்டாவது தொடர் அதே விரி அல்லது அலை தன்மையை இழக்காது.

குறிப்பு: ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரில், நமது விருப்பப்படி, அடைப்புக்களிட்டால், அவ் வழியாகக் கிடைக்கும் தொடரின் தன்மைகள், தனியாக ஆராயப்பட வேண்டும். திட்டமான வரம்புகளுக் கிடையே அலையும் ஒரு தொடரை, அடைப்புக்களிட்டு, புதிய அமைப்பில் அத் தொடர்களைக் கொண்டால், சில சமயங்களில் தொடரின் தன்மை மாறலாம்-அதாவது அலைதொடர் குவி தொடராகவும், கூட்டுத்தொகை வேறாகவும் மாறலாம்.

6.3.2.1 எ-கா. (1)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\ldots\ldots$$

என்ற தொடர் 0·306 ...... க்கும் 1·306 க்கும் இடையில் அலை தொடர்.

ஆனால் $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)\ldots$ என்பது 0·306 ...... என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும் தொடர்.

மேலும் $1-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)\ldots\ldots$ என்பது 1·306 என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும் தொடர்.

6.3.2.2 முக்கியமான எ-கா :

$1+r+r^2+\ldots\ldots\infty$ என்ற கந்தழிப் பெருக்குத் தொடர்,

(1) $|r|<1$ ஆனல் குவியும் ;

(2) $r\geq 1$ ஆனல் விரியும் ;

(3) $r\leq -1$ ஆனல் அலையும்.

$r = 1$ என்ற மதிப்புக்கு $s_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 = n$ $\lim_{n \to \infty} (s_n) = \infty$ என்பது வெள்ளிடை. $r = 1$ என்ற மதிப்புக்குத் தவிர, $s_n = \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

(1) $|r| < 1$, ஆனால் அதாவது $-1 < r < 1$ ஆனால்

$|r| = \dfrac{1}{1 + a}$ என எழுதலாம்; a ஒரு கூட்டெண்.

$$\therefore \quad |r|^n = \frac{1}{(1 + a)^n}$$

$$< \frac{1}{1 + na} \text{ (ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை யொட்டி).}$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; r^n = 0 \quad \left(\because \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; \frac{1}{na} = 0\right)$$

$$\therefore \quad S = \text{எல்லை}_{n \to \infty} \; s_n$$

$$= \text{எல்லை}_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - r}$$

[அல்லது $\left|s_n - \dfrac{1}{1 - r}\right| = \left|\dfrac{r^n}{1 - r}\right|$

$n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $\left|\dfrac{r^n}{1 - r}\right| < \epsilon$ என்பதற்கொப்ப நாம் m காணலாம்.]

$\therefore \quad |r| < 1$ ஆனால் இக் கந்தழித் தொடர் குவிகிறது; கூட்டுத்தொகை $\dfrac{1}{1 - r}$

(2) $r > 1$ ஆனால், $r = 1 + k$ எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad r^n = (1 + k)^n$$

$$> 1 + nk$$

ஆனால் $s_n = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

$\therefore$ $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு எவ்வளவு பெரிய N கொடுக்கப்பட்டாலும், $s_n >$ N என்பதற்கொப்ப ஒரு m காணலாம்.

$\therefore$ (s_n) விரி தொடர் முறை

$r > 1$ க்கு இக்கந்தழித் தொடர் விரி தொடராகும்.

(3) $r < -1$ ஆனால் $r = -(1 + b)$ எனக் கொள்க ; b ஒரு கூட்டெண்.

$$\therefore \quad (-r)^n = (1 + b)^n$$

$$> 1 + nb$$

n ஒற்றைப் படை முழு எண்ணாயின்,

$$s_n = \frac{1 + (1 + b)^n}{1 + (1 + b)}$$

$$> \frac{2 + nb}{2 + b}$$

n இரட்டைப் படை முழு எண்ணாயின்

$$s_n = \frac{1 - (1 + b)^n}{1 + (1 + b)}$$

$$< \frac{-nb}{1 + b}$$

$\therefore$ s_n ன் கீழ் வரம்பு $-\infty$; மேல் வரம்பு $+\infty$.

$\therefore$ $r < -1$ ஆனால் இக்கந்தழித் தொடர் $-\infty$ க்கும் $+\infty$ க்கும் இடைப்பட்டு அலைகிறது.

மேலும் $r = -1$ ஆனால், n ஒற்றைப் படை முழு எண்ணாயின், $s_n = 1$;

n இரட்டைப் படை முழு எண்ணாயின் $s_n = 0$.

$\therefore$ $r = -1$ ஆனால் இக்கந்தழித் தொடர் 0 க்கும் 1 க்கும் இடைப் பட்டு அலைகிறது.

6·3.3 எச்சம் (Remainder):

$a_1+a_2+ \ldots\ldots +a_n + \ldots\ldots \infty$ என்ற கந்தழித் தொடர் கொள்வோம்.

$$s_{n+m}=a_1+a_2+ \ldots\ldots +a_n+ \ldots\ldots +a_{n+m};$$

$$s_n=a_1+a_2+ \ldots\ldots +a_n.$$

$$\therefore \quad s_{n+m}-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+ \ldots\ldots a_{n+m} \qquad \textbf{(A)}$$

(A) என்பதை ${}_m\mathrm{R}_n=s_{m+n}-s_n$ எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு.

${}_m\mathrm{R}_n$ என்பது பகுதி எச்சம் (Partial Residue) எனப்படும்.

அவ்வாறே $a_{n+1}+a_{n+2}+ \ldots\ldots \infty$ வரை R_n எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு; அதாவது முதல் n உறுப்புக்களை விட்டு, மீதியுள்ள பகுதி. இது எச்சம் (Residue) எனப்படும்.

6·3.4 தேற்றம் 3: $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ ஒரு குவி தொடராயின்

$\lim\limits_{n\to\infty} {}_m\mathrm{R}_n=0$ என்பது தேற்றம்.

தெ: $s_n=\sum\limits_{1}^{n} a_n$; $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ ஒரு குவி தொடரெனக் கொடுக்கப்பட்டதால் $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\mathrm{S}$ என்ற ஒரு திட்டமான எண். 'எல்லை' வரையறைப்படி, ஏதாமொரு சிறிய ϵ கொடுக்கப்பட்டால், $n>\mathrm{N}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு

$|s_n-s|<\dfrac{\epsilon}{2}$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும்.

$n>\mathrm{N}$ ஆகும் போது $(n+m)$ ம் $>\mathrm{N}$ ஆகும்.

$\therefore \quad |s_{n+m}-s| < \dfrac{\epsilon}{2}$ என்ற சமனின்மையும் $n>\mathrm{N}$ க்குப் பொருந்தும்.

இப்போது,

$$|{}_m R_n| = |s_{n+m} - s_n|$$
$$= |s_{n+m} - S + S - s_n|$$
$$\leq |s_{n+m} - S| + |s_n - S|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

அதாவது $|{}_m R_n| < \epsilon$ எனப்படும்.

$$\therefore \text{எல்லை}_{n \to \infty} {}_m R_n = 0$$

குறிப்பு (1) சிறப்பாக, $m = 1$ ஆனுல்

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} {}_1 R_n = 0,$$

$$\text{அதாவது எல்லை}_{n \to \infty} a_{n+1} = 0$$

$$\text{அதாவது பொதுவாக எல்லை}_{n \to \infty} a_n = 0.$$

இந்த அடிப்படையில், நாம் மேலும் அறிவது யாதெனின், ஒரு கந்தழித் தொடர் குவியுமாயின், அதன் n வது உறுப்பு, n கந்தழி யெல்லையில் 0 எல்லையை அணுகும். இது ஒரு முக்கியமான பண்பாகும்.

குறிப்பு (2) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ குவிய வேண்டுமாயின் $\text{எல்லை}_{n \to \infty} {}_m R_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு m ன் எல்லாக் கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் பொருத்தமாயிருக்க வேண்டும்.

இது 'தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடாகும் (Necessary and Sufficient Condition).

இது 'தேவையான' கட்டுப்பாடு என இத் தேற்றத்தில் நிறுவப்பட்டது. இது 'போதுமான' கட்டுப்பாடும் ஆகும் என்பது இந்நூல் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்ட தென விடுக்கப்பட்டது. அதன் உண்மையைத் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக் கொள்

வோம். (தெரிப்பு காண விழைவோர், Carslaw : Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals பக்கம் 38–40 காண்க.)

குறிப்பு (3) ஆனுல் $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு (குறிப்பு (1) ல் சிறப்பாகக் கண்டது) தேவையானதாகுமே ஒழிய, போதுமான தாகாது. அதாவது ஒரு தொடரில் $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ஆனுல், அத் தொடர் குவியா தெனக் கூறி விடலாம்.

ஆனுல் மறுதலையாக, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ மாத்திரம் ஒரு தொடருக்குப் பொருந்துமாயின், அத் தொடர் குவியுமெனக் கூறி விட முடியாது ; அத் தொடர் குவியினும் குவியலாம், அல்லாது போனுலும் போகலாம்.

'தேவையான, போதுமான' நிபந்தனை $\lim_{n\to\infty} {}_mR_n = 0$ என்பது தான்.

குறிப்பு (4) எனவே சில தொடர்களில் $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ஆக அமைந்து $\lim_{n\to\infty} {}_mR_n \neq 0$ ஆகுமாயின் அத் தொடர் குவியாது.

குறிப்பு (5) : சென்ற குறிப்பு (3), (4) ல் கூறப்பட்ட உண்மையை, பின் வரும் எடுத்துக் காட்டு ஐயந்திரிபற விளக்கும்.

எ–கா. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரில்

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$

ஆனுல்

$${}_nR_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$> \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$= n. \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \; {}_nR_n \neq 0$$

எனவே $a_n \to 0$; அப்படியிருப்பினும் ${}_nR_n$ எல்லை பூச்சியத்தை அணுகாதாகையால் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \infty$ என்ற கந்தழித் தொடர் குவி தொடராகாது. இது ஒரு விரி தொடரென சோதனை 5 (*b*) (i) ல் பார்ப்போம்.

எனவே ${}_mR_n \to 0$ என்பதே ஒரு தொடர் குவிதற்கு 'தேவையான, போதுமான' கட்டுப்பாடு; $a_n \to 0$ என்பது 'ஒரு தேவையான' கட்டுப்பாடு; ஆனல் போதுமானதல்ல, என்பது, இவ்வெடுத்துக் காட்டால் விளக்கப்படுகிறது. ஆனல் இது பொதுவான தெரிப்பல்ல என்பதை மறந்து விடக் கூடாது.

எனவே, மீண்டும், ஒரு முறை, 'தேவையான, போதுமான' கட்டுப்பாடுகளை வரையறுப்போம்.

'ϵ என்ற எவ்வளவு சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டாலும், $n \geq N$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு m என்ற மற்ருெரு கூட்டு முழு எண்ணுக் கொப்ப,

$$| s_{n+m} - s_n | < \epsilon$$

என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும் வகையில் N என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காண முடியுமாயின் Σa_n குவி தொடராகும்.

B

இனி, முதலில், கூட்டெண்கள் மட்டுமே உறுப்புக்களாய்க் கொண்ட, தொடர்களின் குவி, விரி, அலே தன்மைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

6.4.1 தேற்றம் 4: Σa_n என்ற தொடரின் உறுப்புக்கள் யாவும் கூட்டு மதிப்பு உடையனவாயின், $(s_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ என்ற தொடர் முறை ஓர் 'ஓரியல்பான' ஏறும் தொடர் முறையாகும்.

(அவ்விதத் தொடர் முறையின் இயல்பை யொட்டி, (s_n) குவியுமா, அல்லது விரியுமா [5·6.2 (1), (2) காண்க] என்பதை நாம் காணவேண்டும்.)

தெரிப்பு எளிது: ஏனெனில் உறுப்புக்கள் யாவும் கூட்டெண்கள். ஆகவே $s_n > s_{n-1} > s_{n-2} > \ldots\ldots > s_2 > s_1$.

6.4.2 (1) தொடர் முறை (s_n) ஒரு மேல் வரம்புடைத்தாயின் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும். (2) தொடர் முறை (s_n) மேல் வரம்பற்றதாயின் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

6.4.3 *கிளைத் தேற்றம் :* Σa_n என்ற தொடரின் உறுப்புக்கள் *யாவும் குறை மதிப்புடையனவாயின்,*

$(s_n) = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)$ என்ற தொடர்முறை, ஓர் 'ஓரியல்பான' இறங்கும் தொடர்முறையாகும்.

இங்கு,

(1) தொடர் முறை (s_n) ஒரு கீழ் வரம்புடைத்தாயின் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) தொடர் முறை (s_n) ஒரு கீழ் வரம்பற்றதாயின் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும். $-\infty$ க்கு விரியும்.

6.5 சோதனைகள் : பின்னர் ஒரு கந்தழித் தொடர் Σa_n (கூட்டெண் உறுப்புக்கள் கொண்டது) குவியுமா, விரியுமா என்பதை அறிய சில சோதனை முறைகள் வகுத்துக் கூறப்பட்டிருக்கின்றன. தேவைக்குத் தக்கபடி, அச் சோதனைகளைப் பயன் படுத்தி குவி, அலே, விரி தன்மைகளை அறியலாம்.

இச் சோதனைகளில் கொடுக்கப்படும் கட்டுப்பாடுகள், தொடரின் முதல் உறுப்பிலிருந்தே பொருத்தமாயிருக்க வேண்டுமென்ற தேவையில்லை. முதலில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களை விடுத்து, அதற்குப் பின்பு அக்கட்டுப்பாடுகள் பொருந்துமாயினும் போதுமானது. ஏனெனில், 6.3.2, தேற்றம் 2-ல் கண்டபடி, 'ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்கள் நீக்கப்பட்டு விடுமாயினும், அத் தொடரின் குவி தன்மை, விரிதன்மை மாருது'.

எனவே பின்வரும் சோதனைகளில் ஒவ்வொன்றிலும் 'ஒரு தொடரின் உறுப்புக்கள், முதலில் இருந்தோ, அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களை விடுத்து, அதற்குப்பின்னே .... என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டால் ....' என்று சேர்த்துக் கொள்வது பொருத்த முடைத்து. ஆனால் 6·3.2, தேற்றம் 2-ஐ யொட்டி, இதை ஒவ்வொரு இடத்திலும் கூறுமல் விடப்பட்டிருக்கிறது.

6.5.1 சோதனை 1: ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள் (Comparison Tests).

எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும்,

(*a*) $0 < a_n \leq kb_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில், $\Sigma\, b_n$ குவி தொடரானல், $\Sigma\, a_n$ ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(*b*) $a_n \geq kb_n > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\Sigma\, b_n$ விரி தொடரானல், $\Sigma\, a_n$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(*a*) தெ : $\sum_1^\infty b_n$ என்பது ஒரு குவி தொடர் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad \sum_1^\infty b_n = \text{B} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\text{மேலும் } \sum_1^n a_n = \text{A}_n \text{ எனவும்}$$

$$\sum_1^n b_n = \text{B}_n \text{ எனவும் கொள்க.}$$

$\sum_1^\infty b_n$ ஒரு குவி தொடர் ஆகையால்,

$$\text{B}_n < \text{B}\,; \quad \text{K}\,.\,\text{B}_n < \text{K}\,.\,\text{B}.$$

$$\therefore \quad \text{A}_n \leq \text{K}\,.\,\text{B}_n < \text{K}\,.\,\text{B}.$$

எனவே (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை ; அதற்கு ஒரு மேல் வரம்புண்டு.

$\therefore$ (A_n) குவியும்.

$\therefore$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

அதன் கூட்டுத் தொகை A ஆனால் $A < KB$ ஆக இருக்கும்.

$K = 1$ என்பதும் சிறப்பாகப் பொருந்தும் என்பதையும் கொள்க.

(b) தெ: $\sum_{1}^{\infty} b_n$ ஒரு விரி தொடர் எனக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

$\therefore$ N என்ற எவ்வளவு பெரிய எண் கொடுக்கப் பட்டாலும், $B_n > \frac{N}{K}$ என்பதற் கொப்ப, ஒரு $n = m$ கண்டு பிடிக்க முடியும். அப்படிப்பட்ட $n \geq m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $B_n > \frac{N}{K}$ ஆக விருக்கும். கொடுக்கப்பட்டபடி, $n \geq m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, $A_n \geq KB_n$, அதாவது $A_n \geq N$.

எனவே (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, மேல் வரம்பற்றது.

$\therefore$ (A_n) விரியும்.

$\therefore$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

6.5.1.1 முக்கியமான குறிப்பு:

$K = 1$ என்ற மதிப்புப் பெற்றாலும் இவ்விரு சோதனைகளும் பொருந்தும். எனவே இச் சோதனைகள், சிறப்பாக, பின் வருமாறு உருவம் பெறும்.

(a) $0 < a_n < b_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum b_n$ குவி தொடரானால், $\sum a_n$ ம் ஒரு குவி தொடராகும்;

(b) $a_n > b_n > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum b_n$ விரி தொடரானால், $\sum a_n$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

இச் சோதனைகளைப் பின் வருமாறும் பொது உருவம் பெறச் செய்யலாம் :

(a) ஒரு தொடரின் உறுப்புக்கள், முறையே (ஒன்றிற் கொன்று) மற்றொரு குவி தொடரின் உறுப்புக்களை விடச் சிறிதாயின் முதல் தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும்.

(b) ஒரு தொடரின் உறுப்புக்கள் முறையே (ஒன்றிற் கொன்று) மற்றொரு விரி தொடரின் உறுப்புக்களை விடப் பெரியதாயின், முதல் தொடரும் ஒரு விரி தொடராகும்.

இச் சோதனைகளைப் பயன்படுத்த, பல இடங்களில், பெருக்குத் தொடர், $1 + r + r^2 + \ldots\ldots + r^n \ldots\ldots$ ன் பண்புகள் துணை நிற்கும். ஆகவே அத்தொடரின் பண்புகளை நாம் கவனப்படுத்திக் கொள்வோம்.

$r \geq 1$ ஆனல், பெருக்குத் தொடர் விரியும்; $0 < r < 1$ ஆனல், பெருக்குத் தொடர் குவியும்.

6·5.2 சோதனை 2 : எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும் $0 < \mathrm{L} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \mathrm{M}$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும் வகையில், L, M என இரண்டு திட்டமான எண்கள் இருக்குமாயின், $\Sigma\, a_n$ ம் $\Sigma\, b_n$ ம் ஒருங்கே குவியும், அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

தெ : கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$a_n \leq \mathrm{M} \,.\, b_n ; \quad a_n \geq \mathrm{L} \,.\, b_n .$$

எனவே, சோதனை (1) ன் படி, $\Sigma\, b_n$ குவியுமாயின், $\Sigma\, a_n$ ம் ஒரு குவிதொடராகும்; $\Sigma\, b_n$ விரியுமாயின், $\Sigma\, a_n$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

மேலும் கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$b_n \leq \frac{a_n}{\mathrm{L}} ; \quad b_n \geq \frac{a_n}{\mathrm{M}}$$

எனவே, சோதனை (1) ன் படி, $\Sigma\, a_n$ குவியுமாயின், $\Sigma\, b_n$ ம் ஒரு குவி தொடராகும்; $\Sigma\, a_n$ விரியுமாயின், $\Sigma\, b_n$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

எனவே $\Sigma\, a_n$ ம் $\Sigma\, b_n$ ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

6·5.3 சோதனை 3. (இதை சோதனை 2ன் கிளைச் சோதனையாகவும் கொள்ளலாம்).

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0$$ என்ற ஒரு திட்டமான எல்லை இருக்குமாயின், Σa_n ம், Σb_n ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

'எல்லை' வரையறைப்படி, ϵ என்ற எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும், $n \geq m$ என்ற மதிப்புக்களுக் கொப்ப,

$$K - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \epsilon$$ என்ற சமனின்மை பொருந்தும் வகையில், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் காணமுடியும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்களின் முதல் m உறுப்புக்களுக்குப் பின்பு,

$$0 < K - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \epsilon$$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தும்.

எனவே சோதனை 2ன் படி, இரு தொடர்களும் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் தொடர்களாகும்.

6·5.3.1 எடுத்துக் காட்டுகள் :

எ-கா. (1) $1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையை அறிக.

முதல் உறுப்பு '1' ஐ விட்டு,

$$S = \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots$$
$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots$$

இது ஒரு பெருக்குத் தொடர்; பொதுத்தகவு $r = \frac{1}{2} < 1$. எனவே குவி தொடராகும்.

∴ சோதனை (1) முதற் பிரிவின்படி,

$$1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} \; \ldots\ldots$$ ஒரு குவி

தொடராகும்.

எ-கா. (2) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{(a+x)\,(2a+x)}{(b+x)\,(2b+x)} + \frac{(a+x)\,(2a+x)\,(3a+x)}{(b+x)\,(2b+x)\,(3b+x)} + \ldots\ldots$

என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மை அறிக. a, b, x கூட்டெண்கள் ; $a < b$.

$$r > 1 \text{ ஆனால் } \frac{ra+x}{rb+x} - \frac{a+x}{b+x}$$

$$= \frac{x\,(r-1)\,(a-b)}{(rb+x)\,(b+x)}$$

$$= \text{குறையெண்} \quad (a < b \text{ ஆகையால்})$$

$$\therefore \quad \frac{ra+x}{rb+x} < \frac{a+x}{b+x}.$$

$$\therefore \quad \frac{a+x}{b+x} + \frac{(a+x)\,(2a+x)}{(b+x)\,(2b+x)} + \ldots\ldots$$

$$< \left(\frac{a+x}{b+x}\right) + \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2 + \ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

$$a < b \text{ ஆகையால்}, \quad \frac{a+x}{b+x} < 1$$

(A) ஒரு பெருக்குத் தொடர்; பொது விகிதம் $\frac{a+x}{b+x} < 1$, எனவே அது ஒரு குவி தொடர்.

∴ சோதனை 1, முதற் பிரிவின்படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் குவி தொடராகும்.

எ-கா. (3) $\Sigma \sqrt{\frac{1 + 3^{2n}}{1 + 6^{2n}}}$ ன் குவி/அலை தன்மை அறிக.

$$a_n = \sqrt{\frac{1 + 3^{2n}}{1 + 6^{2n}}} \text{ எனக் கொள்க.}$$

$b_n = \sqrt{\frac{3^{2n}}{6^{2n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ என்ற n வது உறுப்புடைய தொடரைத் துணைத் தொடராகக் கொள்வோம்.

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{எல்லை}_{n \to \infty} \sqrt{\frac{3^{2n}\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)}{6^{2n}\left(1+\frac{1}{6^{2n}}\right)}} \cdot 2^n$$

$$= \text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3^{2n}}}{1+\frac{1}{6^{2n}}}} \cdot 2^n$$

$$= 1.$$

ஆனால்

$\Sigma\, b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர், பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$, குவி தொடராகும்.

$\therefore$ சோதனை 3 ன் படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடரும், குவி தொடராகும்.

எ-கா. (4) $\Sigma \frac{1}{(x^n+x^{-n})}$ ன் குவி/விரி தன்மை அறிக.

$x > 0$ எனவே கொள்வோம்.

(1) $x > 1$ ஆனால்

$x^n + x^{-n} > x^n$

$\therefore \quad \frac{1}{x^n+x^{-n}} < \frac{1}{x^n}$

ஆனால் $\Sigma \frac{1}{x^n}$ ஒரு பெருக்குத் தொடர், பொது விகிதம் $\frac{1}{x} < 1$

$\therefore \quad \Sigma \frac{1}{x^n}$ ஒரு குவி தொடர்.

$\therefore \quad x > 1$ ஆனுல், சோதனை 1ன் படி, $\Sigma \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$ ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) $x = 1$ ஆனுல்

$$\frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (}n\text{ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)}$$

$$\therefore \quad \Sigma \frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots\cdots$$

= விரி தொடர்.

(3) $0 < x < 1$ ஆனுல்

$$x^n + x^{-n} > x^{-n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^{-n}} = x^n.$$

ஆனுல் Σx^n ஒரு பெருக்குத் தொடர், பொது விகிதம் $x < 1$, எனவே குவி தொடர்.

$\therefore \ \Sigma \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$ ம், $0 < x < 1$ ஆனுல் குவி தொடர்.

$\therefore \quad x$ கூட்டெண்ணுகி,

$x \gtrless 1$ க்கு, $\Sigma \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$ ஒரு குவி தொடர்.

$x = 1$ க்கு, $\Sigma \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$ ஒரு விரி தொடர்.

6·5.4 சோதனை 4.

(a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ ஆனுல்,

Σb_n ஒரு குவி தொடராயின், Σa_n ம் ஒரு குவி தொடராகும் ;

(b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ஆனால்,

$\Sigma\, b_n$ ஒரு விரி தொடராயின், $\Sigma\, a_n$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(a) $\Sigma\, b_n \to B$ எனக் கொள்வோம்.

மேலும் $\sum_1^n b_n = B_n$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $B_n < B$.

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

$$= a_1\left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1} + \ldots\ldots\right)$$

$$\leq a_1\left(1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_2}{b_1}\ldots\ldots\right)$$

$$= a_1\left(1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \ldots\ldots + \frac{b_n}{b_1}\right)$$

$$= \frac{a_1}{b_1}\left(b_1 + b_2 + b_3 \ldots\ldots + b_n\right)$$

$$< \frac{a_1}{b_1} B$$

$\therefore$ (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, மேல் வரம்பு பெற்றது. ஆகவே,

(A_n) ஒரு குவி தொடர் முறையாகும்.

$\therefore$ $\Sigma\, a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(b) $\Sigma\, b_n$ ஒரு விரி தொட ரெனக் கொண்டால், $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, எவ்வளவு பெரிய N கொடுக்கப்பட்டாலும்,

$$B_n = \sum_1^n b_n > N \text{ ஆக விருக்கும்.}$$

சற்று முன் (a) ல் கண்ட முறையை யொட்டி,

$$A_n = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)$$

$$\geq \frac{a_1}{b_1}(b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_n) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $A_n \geq \frac{a_1}{b_1} B_n$

ஆனல் (B_n) ஒரு விரி தொடர் முறை, மேல் வரம்பற்றது; ஆகவே (A_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

$\therefore \quad \Sigma a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

பயிற்சி 6 (i)

பின்வரும் கந்தழித் தொடர்களின் குவி/விரிதன்மையை அறிக.

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\ldots$

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\ \frac{1}{a+2b} + \ldots\ldots$

(3) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1}\ \frac{1}{2x+2} + \ldots\ldots$

(4) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots\ldots\ \frac{1}{(2n+)\ (2n+2)} + \ldots\ldots$

(5) $\frac{1}{a(a+b)}\ \frac{1}{(a+2b)\ (a+3b)} + \frac{1}{(a+4b)\ (a+5b)} + \ldots\ldots$

(6) $\frac{8}{2\cdot 3} + \frac{16}{3\cdot 4} + \frac{8n}{(n+1)\ (n+2)} + \ldots\ldots$

6·5.5 சோதனை 5 :

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\ldots \infty$$ என்ற தொடர்

$$\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right),$$

(a) $p>1$ ஆனல் குவி தொடராகும் ;

(b) $p\leq$ ஆனல் விரி தொடராகும்.

(a) $p>1$ எனக் கொள்வோம்.

r என்ற ஏதாமொரு கூட்டு முழு எண் கொள்வோம்.

அப்போது, $r<(r+1)$

$$\therefore\ r^p<(r+1)^p$$

$$\therefore\ \frac{1}{r^p}>\frac{1}{(r+1)^p}$$

இது $r=1, 2, 3, \ldots\ldots$ என்ற எல்லா கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும். இப்போது கொடுக்கப்பட்ட தொடர்,

$$=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\ldots\infty$$

$$=\frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{7^p}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{8^p}+\ldots\ldots\frac{1}{15^p}\right)+\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

எனக் கொள்ளலாம்.

ஆனல் $\frac{1}{r^p}>\frac{1}{(r+1)^p}$

$\therefore\ \frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>\frac{1}{4^p}>\ldots\ldots$ என்பது உண்மையாகும்.

$$\therefore\ \frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{7^p}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{8^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{15^p}\right)+\ldots\ldots$$

$$> \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \ldots\ldots \text{(B)}$$

இத்தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடர்; பொது விகிதம் $\frac{1}{2^{p-1}}$.

$p > 1$ ஆகையால், $p - 1 > 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad 2^{p-1} > 2^0$

அதாவது $2^{p-1} > 1$

$\therefore \quad \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ஆகும்.

$\therefore$ (B) எனக் கண்ட பெருக்குத் தொடர்குவியும்.

$\therefore \quad \Sigma \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடரின் உறுப்புக்களை வசதியாக அடைப்புக்குள் இடுவோமாயின், பெறப்படும் தொடரின் உறுப்புக்கள் (அதாவது தொடர் (A) ன் உறுப்புக்கள்) முறையே மற்றோர் குவி தொடரின் உறுப்புக்களுக்குக் குறைவாக இருக்கின்றன.

எனவே, சோதனை (1) முதற் பிரிவின்படி, $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ஒரு குவி தொடராகும். இங்கு $p > 1$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமையாதது.

(b) $p \leq 1$ என்ற கட்டுப் பாட்டின் கீழ் $\Sigma \frac{1}{n^p}$ என்னவாகிற தெனப்பார்ப்போம்.

(i) $p = 1$ எனக் கொண்டால், தொடர்

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots\ldots \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \ldots\ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots\ldots \text{(C)}$$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ ...... ஆதலால்,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots\ldots \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots\ldots \frac{1}{16}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{16}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots \text{(D)}$$

இது ஒரு விரி தொடரென எளிதில் புலனுகிறது.

$\therefore\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \infty$ என்ற தொடரின் உறுப்புக்களை வசதியாக அடைப்புக்குள் இடுவோமாயின், பெறப்படும் தொடரின் உறுப்புக்கள் (தொடர் C) முறையே மற்ருேர் விரி தொடரின் உறுப்புக்களை விடப் பெரிதாக இருக்கின்றன. ஆகவே, சோதனை 1, இரண்டாம் பிரிவின்படி, $p=1$ ஆனுல் $\Sigma \frac{1}{n^p} = \Sigma \frac{1}{n}$ ஒரு விரி தொடராகும். இது ஒரு முக்கியமான தொடர்.

(ii) $p < 1$ எனக் கொள்வோம். அப்போது, r என்ற எந்த கூட்டு முழு எண் மதிப்புக்கும்,

$$r^p < r^1$$

$$\therefore\ \frac{1}{n^p} > \frac{1}{r}$$

$\therefore\ \frac{1}{2^p} > \frac{1}{2};\ \frac{1}{3^p} > \frac{1}{3};$ ...... என்பவை பொருந்தும்.

$$\therefore\ \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots \text{(விரிதொடர்)}$$

எனவே, சோதனை (1) இரண்டாம் பிரிவின் படி, $p<1$ ஆனுல் $\Sigma \frac{1}{n^p}$ விரி தொடராகிறது.

6.5.5.1 பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளில், சோதனை 5-ல் நாம் கண்ட, $\Sigma \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர் துணைத் தொடராகப் பயன்படுத்தப்படும் முறையையும், சோதனை 3 பயன்படும் முறையையும் கூர்ந்து அறிவது நல்லது.

எ-கா. (5) $a_n = (\sqrt{n^6+1} - \sqrt{n^6-1})$ என்ற பொதுவுறுப்பு கொண்ட தொடரின் குவி/விரி தன்மை அறிக.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^6+1} - \sqrt{n^6-1})(\sqrt{n^6+1} + \sqrt{n^6-1})}{(\sqrt{n^6+1} + \sqrt{n^6-1})}$$

$$= \frac{(n^6+1)-(n^6-1)}{n^3\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^6}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^6}}\right]}$$

$$= \frac{2}{n^3\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^6}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^6}}\right]}$$

துணைத் தொடராக, $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^3}$ கொள்க.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_n}{b_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^6}}}$$

$$= 1.$$

சோதனை 3 ன் படி, Σa_n, Σb_n இரண்டும் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும்.

ஆனல் சோதனை 5 ன் படி, $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^3}$ ஒரு குவி தொடர் $(p = 3 > 1)$.

$\therefore$ Σa_n ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எ-கா. (6) $\sum\left(\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n^p}\right)$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மை அறிக.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+2-n}{n^p \cdot n^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]}$$

$$= \frac{2}{n^{p+\frac{1}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]}$$

துணைத் தொடர், $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{எல்லை}_{n\to\infty} \frac{2}{n^{p+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{p+\frac{1}{2}}}{\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

$\therefore$ சோதனை 3ன் படி, Σa_n ம், Σb_n ம் ஒருங்கே குவியும்/ விரியும்.

ஆனல் $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ன் பண்புகள் p ன் மதிப்பை யொட்டி, சோதனை 5ன் உதவி கொண்டு காணப் பட வேண்டும்.

(a) $p + \frac{1}{2} > 1$, Σb_n ம் Σa_n ம் குவியும் அதாவது $p > \frac{1}{2}$ ஆனல் Σa_n குவியும்.

(b) $p + \frac{1}{2} \leq 1$, Σb_n ம் Σa_n ம் விரியும் அதாவது $p \leq \frac{1}{2}$, ஆனல் Σa_n விரியும்.

எ-கா. (7)

$$\sum a_n = \frac{\sum (p_1 n+a_1)(p_2 n+a_2) \ldots\ldots (p_k n+a_k)}{\left(p_1^1 n+a_1^1\right)\left(p_2^1 n+a_2^1\right) \ldots\ldots \left(p_k^1 n+a_k^1\right)\left(p_{k+1}^{1n}+a_{k+1}^1\right)}$$

என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மை காண்க.

துணைத் தொடர் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$

எல்லை $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{p_1 p_2 \ldots\ldots p_k}{p_1^1 p_2^1 \ldots\ldots p_k^1 \; p_{k+1}^1}$ (திட்டமானது).

எனவே சோதனை 3-ன் படி, இரு தொடர்களும் ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

ஆனல் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ விரி தொடர்

$\therefore \quad \sum a_n$ ம் விரி தொடர்.

சோதனை 6.

6.5.6 தாலம்பெயரின் விகித சோதனை (D'Alembert's Ratio Test).

முதல் உறுப்பிலிருந்தோ, அல்லது, m உறுப்புக்களுக்குப் பின்போ, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ என்ற சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருந்துமாயின் $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

முதல் m உறுப்புக்களை எடுத்து விடுவதால், தொடரின் குவி தன்மை, விரிதன்மை மாருது (6·3.2 தேற்றம் 2).

தெ : கொடுக்கப்பட்டபடி, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ என்பது பொதுத் தொடர்பு.

$$\therefore \quad \frac{a_2}{a_1} < k \qquad \therefore \quad a_2 < a_1 k.$$

$$\frac{a_3}{a_2} < k \qquad \therefore \quad a_3 < a_2 k.$$

$$< a_1 k^2.$$

$$\frac{a_4}{a_3} < k \qquad \therefore \quad a_4 < a_3\, k.$$

$$< a_1\, k^3.$$

... ...

... ...

அவ்வாறே $\qquad a_n < a_1 \,.\, k^{n-1}$

$$\therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \propto$$

$$< a_1 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots\ldots + a_1 k^{n-1} + \ldots\ldots \propto$$

$$= a_1\,(1 + k + k^2 + \ldots\ldots \propto).$$

$k < 1$ ஆனால், இத்தொடர் குவி தொடராகு மோர் பெருக்குத் தொடர்.

$\therefore$ சோதனை 1, முதற் பிரிவின் படி, $\Sigma\, a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

மாற்றுத் தெரிப்பு :

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n < a_1\,(1 + k + \ldots\ldots k^{n-1})$$

$$= \frac{a_1\,(1 - k^n)}{(1 - k)} < \frac{a_1}{(1 - k)}$$

$\therefore$ (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர், $\frac{a_1}{1 - k}$ என்ற மேல் வரம்புடைத்து.

$\therefore$ (A_n) ஒரு குவியும் தொடர் முறையாகும்.

$\therefore$ $\Sigma\, a_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

குறிப்பு: இங்கு $k < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு இன்றியமை யாதது ; அதாவது $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ஆக இருந்தால் மட்டும் போதாது; $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ என்பது 1 க்குக் குறைவான ஒரு திட்டமான k ஐ விடக் குறைவாயிருக்க வேண்டும் என்பது தேவை.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ என்ற தொடரில் $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$;

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ ... ... $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$

ஆனுல் சோதனை 5-ன் படி, முதல் தொடர் $\Sigma \frac{1}{n}$ ஒரு விரி தொடர்; அதே சோதனைப்படி, இரண்டாம் தொடர் $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ஒரு குவி தொடர். குறிப்பில் கண்ட நுட்பத்தை வலியுறுத்தவே, இவ்விரு தொடர்களின் தன்மைகள் விளக்கப்பட்டன.

இரு தொடர்களிலும் $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ஆக விருப்பினும்,

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ஆக விருந்து எல்லை 'ஒன்று' ஆனுல் அப்பண்புடைய தொடர் குவியினும் குவியலாம்; விரியினும் விரியலாம். சோதனை 7-ல் மேலும் இதைப் பற்றிக் குறிப்பிடு வோம்.

6·5.6.1 சோதனை 6*a* :

தாலம் பெயரின் விகித சோதனை-விரி தொடர்களுக்குரியது. Σa_n என்ற தொடரில், முதலிலிருந்தோ, முதல் m உறுப்புக் களுக்குப் பின்போ, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ஆனுல், Σa_n ஒரு விரி தொட ராகும்.

கொடுக்கப்பட்டபடி, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$

$\therefore \quad \frac{a_2}{a_1} \geq 1 \qquad \therefore \quad a_2 \geq a_1$

$\frac{a_3}{a_2} \geq 1 \qquad \therefore \quad a_3 \geq a_2$

$\geq a_1.$

$$\therefore \; a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \infty$$
$$\geq a_1 + a_1 + a_1 + \ldots\ldots \infty$$
$$= a_1 (1 + 1 + 1 \ldots\ldots \infty)$$

இது ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore$ சோதனை (1) இரண்டாம் பிரிவின்படி, Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

மாற்றுத் தெரிப்பு :

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$
$$\geq a_1 + a_1 + a_1 + \ldots\ldots + a_1 \; (n \text{ உறுப்புக்கள்})$$
$$\geq na_1.$$

எவ்வளவு பெரிய N எடுக்கப்பட்டாலும், $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $na_1 > N$ ஆகும் வகையில் m காணமுடியும்.

$\therefore$ (A_n) ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை, மேல் வரம்பற்றது.

$\therefore$ (A_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

$\therefore$ Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

6·5.7 சோதனை 7 : தாலம் பெயரின் சோதனைகளின் விரிவு :

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \text{ என்ற நிலையில்,}$$

(1) $l < 1$ ஆனால் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்;

(2) $l > 1$ ஆனால் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

(1) தெ : $l < 1$ எனக் கொள்வோம்.

5·7.4—தேற்றம் 5 பார்க்கவும். அங்கு காட்டிய முறைப்படியே, $n \geq M$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ என்பதற் கொப்ப ஒரு M காண முடியும்.

∴ சோதனை 6 ன் படி, Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்.

(2) தெ: $l > 1$ எனக் கொள்வோம்.

5·7.3—தேற்றம் 4 பார்க்கவும். அங்குக் காட்டிய முறைப் படியே, $n \geq M$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$ என்பதற் கொப்ப ஒரு M காண முடியும்.

∴ சோதனை 6 *a* ன் படி, Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

குறிப்பு: $l = 1$ ஆனால், தொடர் குவியுமா, விரியுமா என்று கூற இயலாது. அதைப்பற்றிய தன்மை உயர் கணிதத்தில் இடம் பெறும். $l = 1$ என்ற நிலையில் இச் சோதனை பயன்படாது. வேறு சோதனைகள் கொண்டு தான் தொடரின் தன்மை காண முடியும். சோதனை (6) ன் கீழ் கொடுக்கப்பட்ட குறிப்பையும் கவனிக்க.

6·5.8 சோதனை 8: கோசியின் மூலசோதனை (Cauchy's Root Test).

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l \text{ என்ற நிலையில்,}$$

(1) $l < 1$, ஆனால் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்;

(2) $l > 1$, ஆனால் Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

(1) தெ: $l < 1$ எனக் கொள்வோம்.

'எல்லை' வரையறைப்படி, $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு

$l - \epsilon < (a_n)^{\frac{1}{n}} < l + \epsilon$ என்பதற் கொப்ப, ஒரு குறிப்பிட்ட சிறிய ϵ க்கு, ஒரு m காணமுடியும். ϵ எவ்வளவு சிறியதாயிருப்பினும் இது பொருந்தும்.

∴ $l + \epsilon = k < 1$ என்பது பொருந்தும் வகையில் ϵ எடுத்துக்கொள்க.

∴ $n > m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு,

$l - \epsilon < (a_n)^{\frac{1}{n}} < l + \epsilon = k < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும்.

$\therefore \quad (a_n)^{\frac{1}{n}} < k < 1 \quad (n > m$ க்கு$)$

$\therefore \quad (a_n) < k^n$

$$\therefore \quad \sum_{1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots \infty)$$

$$< s_m + k^{m+1} + k^{m+2} + \ldots\ldots \infty$$

அதாவது $\quad < s_m + k^{m+1}(1 + k + k^2 \ldots\ldots \infty)$

$1 + k + k^2 + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் $k < 1$; எனவே அது ஒரு குவி தொடராகும்.

எனவே $\sum_{1}^{\infty} a_n$ குவியும்.

(சோதனை 1, முற்பகுதி பார்க்கவும்)

(2) தெ: $l > 1$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $l - \epsilon_1 = k_1 > 1$ என்பது பொருந்தும் வகையில் ϵ_1 எடுத்துக்கொள்க.

$\therefore \quad n > m_1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு

$l - \epsilon_1 = k_1 < (a_n)^{\frac{1}{n}}$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும்.

$\therefore \quad (a_n)^{\frac{1}{n}} > k_1 > 1 \quad (n > m_1$ க்கு$)$.

$\therefore \quad (a_n) \quad > (k_1)^m$

$$\therefore \quad \sum a_n = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \ldots\ldots \infty)$$

$$> s_{m_1} + k_1^{m_1+1} + k_1^{m_1+2} + \ldots\ldots \infty$$

அதாவது, $\quad > s_{m_1} + k_1^{m_1+1}(1 + k_1 + k_1^2 + \ldots\ldots \infty)$

$1 + k_1 + k_1^2 + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் $k_1 > 1$; எனவே அது ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore \quad \sum_{1}^{\infty} a_n$ விரியும்.

(சோதனை 1, பிற்பகுதி பார்க்கவும்).

குறிப்பு: சோதனை 6, 6 (a) ல் மாற்றுத் தெரிப்பு காட்டிய முறையையும் கையாளலாம்.

6·5 9 சோதனை 9: இராபேயின் விகிதச் சோதனை (Raabe's Ratio Test):

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = l$ என்ற நிலையில்,

(1) $l > 1$ ஆனல் Σa_n ஒரு குவி தொடராகும்;

(2) $l < 1$ ஆனல Σa_n ஒரு விரி தொடராகும்.

தெ. (இரண்டிற்கும் பொதுவான பகுதி)

$\Sigma b_n = \Sigma \dfrac{1}{n^p}$ என்ற தொடர் கொள்க.

இது நமக்குத் துணைத் தொடர்.

$$\text{எல்லை}_{n\to\infty}\, n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \text{எல்லை}_{n\to\infty}\, n\left[\frac{(n+1)^p}{n^p} - 1\right]$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty}\, n\left[\frac{n^p}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right]$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}\right]$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to 1}\, \frac{x^p - 1}{x - 1} \quad \left(x = 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$= p \, . \, 1^{p-1}$ [வகைநுண் கணிதத் தேற்றம்]

$= p.$

∴ 'எல்லை' வரையறைப்படி, $\in$ என்ற எவ்வளவு சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும் $n > m_1$ ஆனல்,

$$p-\epsilon < n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right) < p+\epsilon$$

என்பதற் கொப்ப ஒரு m_1 காணமுடியும்.

அவ்வாறே, $n > m_2$ ஆனால்

$$l-\epsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < l+\epsilon$$

என்பதற் கொப்ப, ஒரு m_2 காணமுடியும் m_1. m_2 இரண்டையும் விடப் பெரிதான m என்ற கூட்டு முழு எண் கொள்வோம்.

சிறப்பாக,

(1) $l > 1$ ஆனால் l க்கும் 1 க்கும் இடைப்பட்டு $l-\epsilon > p+\epsilon$ என்ற வகையில் $l > p > 1$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக ஒரு p கொள்க.

இந்த p மதிப்பையே $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^p}$ ல் முதலில் ஏற்றுக் கொள்வோம்.

எனவே $n > m$ ஆனால்

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > (l-\epsilon) > (p+\epsilon) > n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)$$

என்பது பொருந்தும்.

$$\therefore \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad (n > m \text{ க்கு})$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n} \; (n > m \text{ க்கு})$$

$p > 1$ ஆகையால், $\sum_1^\infty b_n$ ஒரு குவி தொடர். எனவே, சோதனை 4, (a) பிரிவின் படி, $\sum_1^\infty a_n$ ம் ஒரு குவி தொடராகும் என நிறுவப்படுகிறது.

(2) $l < 1$ ஆனால், l க்கும் 1 க்கும் இடைப்பட்டு $l+\epsilon < p-\epsilon$ என்ற வகையில் $l < p < 1$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக ஒரு p கொள்க.

இந்த p மதிப்பை, இப்போது $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^p}$ ல் இரண்டாவதாக ஏற்றுக் கொள்வோம்.

எனவே $n > m$ ஆனால்

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < (l+\epsilon) < (p-\epsilon) < n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right)$$

என்பது பொருந்தும்.

$$\therefore \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad (n > m \text{ க்கு})$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$p < 1$ ஆகையால், $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^p}$ ஒரு விரி தொடராகும்.

எனவே, சோதனை 4 (b) பிரிவுப்படி, $\sum a_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

6·5.9.1 விளக்கக் குறிப்பு:

(1) $l = 1.3$; $\epsilon = .05$ எனக் கொள்வோம்.

$l - \epsilon = 1.25$

$p = 1.1$ எனக் கொண்டால்,

$l - \epsilon = 1.25 > p + \epsilon = 1.15$.

(2) $l = 0.8$; $= \epsilon .05$ எனக் கொள்வோம்.

$l + \epsilon = 0.85$

$p = 0.87$

$l + \epsilon = .85 > p - \epsilon = 0.82$.

முதல் m உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையாகும். ஆகவே அவைகளைக் கூட்டினாலும், குறைத்தாலும், ஒரு தொடரின் குவி/விரி தன்மை பழுது படாது என நாம் அறிவோம்.

இராபேயின் விகிதச் சோதனை – மாற்றமைப்பு :

முன் கண்ட சோதனை 9 ஐப் பின்வருமாறும் கூறலாம் :

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l \text{ என்ற நிலையில்}$$

(1) $l > 1$, ஆனல் Σa_n குவியும்.

(2) $l < 1$, ஆனல் Σa_n விரியும்.

இங்கும் $l = 1$ ஆனல், இச் சோதனை பயன்படாது. வேறே தாவது சோதனை கொண்டுதான் Σa_n ன் தன்மை காண வேண்டும்.

ஆனல் சோதனை 7 ன் கீழ் கொடுக்கப்பட்ட குறிப்பின் படி, $l = 1$ ஆகும் நிலையில், அதாவது தாலம் பெயரின் 'எல்லை'ச் சோதனை பயனிலாது போகும் போது, இச் சோதனை பயன் படக் கூடும்.

6·5.10 சோதனை 10 : கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனை (Cauchy's Condensation Test) :

$f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(n) \ldots\ldots$ என்ற தொடர் உண்டு. எல்லா உறுப்புக்களும் கூட்டெண் மதிப்புடையவை. இங்குள்ள தொடர் முறை ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை யெனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. [அதாவது $f(n+1) \leq f(n)$].

$a > 1$ என்ற ஏதாமொரு கூட்டு முழு எண் கொண்டால்,

$\Sigma f(n)$ ம், $\Sigma a^n f(a^n)$ ம் ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும் என்பது தேற்றம்.

தெ : $\Sigma f(n)$ ன் உறுப்புக்களைப் பின் வருமாறு வகுத்து, அடைப்புக்களுக்குள் கூட்டு சேர்க்கவும்.

$$\begin{aligned}
\Sigma f(n) = & [\, f(1) + f(2) + \ldots\ldots f(a) \,] \\
& + [\, f(a+1) + f(a+2) + \ldots\ldots + f(a^2) \,] \\
& + [\, f(a^2+1) + f(a^2+2) + \ldots\ldots + f(a^3) \,] \\
& \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& + [\, f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \ldots\ldots + f(a^n) \,] \\
& + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

ஒவ்வொரு சதுர அடைப்புக்களுக்குள்ளிருக்கும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை முறையே,

$a,\ a^2-a,\ a^3-a^2,\ \ldots\ldots\ a^n-a^{n-1},\ \ldots\ldots$

$\therefore\ \ \Sigma f(n)=u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots=\Sigma u_n$ என எழுதலாம்.

இங்கு $u_n=[\,f(a^{n-1}+1)+f(a^{n-1}+2)+\ldots\ldots+f(a^n)\,]$.

$f(n)$ என்பது, $f(n+1)\leq f(n)$ என்ற தன்மையுடையதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால்,

$$f(a^{n-1})\geq f(a^{n-1}+1)\geq f(a^{n-1}+2)\geq\ldots\ldots\geq f(a^n).$$

$$\therefore\ \ (a^n-a^{n-1})\,f(a^{n-1})\geq u_n\geq(a^n-a^{n-1})\,f(a^n).$$

அதாவது,

$$a^{n-1}(a-1)\,f(a^{n-1})\geq u_n\geq a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)f(a^n)\ldots\ldots\qquad\text{(A)}$$

அதேபோல்,

$a^n(a-1)\,f(a^n)\geq u_{n+1}$ என்பதும் பொருந்தும்.

$$\therefore\ \ u_{n+1}\leq a^n(a-1)\,f(a^n)\ldots\ldots\qquad\text{(B)}$$

$\therefore$ இதை யொட்டி,

$$u_2+u_3+u_4+\ldots\ldots\infty$$
$$\leq(a-1)\,[a\,f(a)+a^2 f(a^2)+\ldots\ldots].$$

$\therefore$ சோதனை 1, முதற் பிரிவின்படி,

$\Sigma\,a^n f(a^n)$ ஒரு குவி தொடராயின்,
$(u_2+u_3+\ldots\ldots\infty)$ ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

u_1 ஐக் கூட்டுவதால், $u_2+u_3+\ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின் குவி தன்மை மாறுது.

$\therefore\ \ \Sigma u_n$ ஒரு குவி தொடர், அதாவது $\Sigma f(n)$ ஒரு குவி தொடராகும்.

மேலும், (A) ன் படி,

$$u_n\geq a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)f(a^n)$$

$\therefore \quad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \propto$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad [a\, f(a) + a^2\, f(a^2) + \ldots\ldots + \propto]$$

$\therefore$ சோதனை 1, இரண்டாம் பிரிவின்படி,

$\Sigma\, a^n f(a^n)$ ஒரு விரி தொடராயின்,

$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ ம் ஒரு விரி தொடராகும்,

அதாவது

$\Sigma\, u_n = \Sigma\, f(n)$ ம் ஒரு விரி தொடரென நிறுவப்படுகிறது.

$\therefore \quad \Sigma\, f(n)$ ம் $\Sigma\, a^n\, f(a^n)$ ம் ஒருங்கே குவியும், அல்லது விரியும்.

ஒடுக்கற் சோதனை எடுத்துக்காட்டு :

$$f(n) = \frac{1}{n\,(\log n)^p} \text{ ஆனல்,}$$

$$a^n\, f(a^n) = \frac{a^n}{a^n\,(\log a^n)^p}$$

$$= \frac{1}{n^p\,(\log a)^p}$$

$$\therefore \quad \Sigma\, a^n\, f(a^n) = \frac{1}{(\log a)^p} \cdot \Sigma\, \frac{1}{n^p}$$

$\therefore \quad p > 1$ ஆனல், $\sum_{2}^{\propto} f(n)$ குவி தொடராகும்,

$p \leq 1$ ஆனல், $\sum_{2}^{\propto} f(n)$ விரி தொடராகும்.

6·5.10.1 பொதுக் குறிப்பு :

சிறப்பாக, தாலம் பெயரின் சோதனைகளும், அச்சோதனைகள் பயன்படா விடத்து, கோசி, இராபேயின் சோதனைகளும்,

பல தொடர்களின் தன்மையைச் சோதிக்குங்கால் பயன்படும். இவையாவும் மிக 'ஆற்றலுடைய' (Powerful) சோதனைகளாகும். இவைகளைப் பயன்படுத்தும் போது, நமக்கு, 'எல்லை' காணவேண்டிய இன்றியமையாமை ஏற்படும். ஆகவே 'எல்லை' காணும் முறைகள் நமக்கு ஐயந்திரிபு அறத் தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

மேலும் x என்ற இராசியோ, மற்று எந்த இராசிகளோ, தொடரின் கண், தோன்றுங்கால், x ன் எல்லா வகையான மதிப்புக்களுக்கும், நாம் தொடரின் குவிதன்மை/அல்லாமை காணவேண்டும்.

இது வரை கண்ட சோதனைகளைக் கொண்டு

$$0 < x \lesseqgtr 1 \text{ அல்லது } 0 < x \lesseqgtr m$$

என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களுக்கு நாம் தொடர்களின் தன்மை காணலாம். x ன் குறையெண் மதிப்புக்களுக்கு, பின்னர் முறைகளைப் பார்ப்போம்.

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுக்கள் பல்விதத் தொடர்களின் தன்மைகளை விளக்கும். வேறொன்றும் கூறப்படா விடத்து, உறுப்புக்கள் கூட்டெண் மதிப்புடையன அல்லது கூட்டு மதிப்புடைய இராசிகள் எனவே கொள்வோம்.

6·5.10.2 எ-கா. (8)

$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^k}$ ன் குவி/விரி தன்மையறிக.

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{(2n-1)^k}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^n}{(2n+1)^k}$$

$$\therefore \text{ எல்லை}_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{எல்லை}_{n \to \infty} \frac{(2n-1)^k}{(2n+1)^k} \cdot \frac{x^n}{x^{n-1}}$$

$$= \text{எல்லை}_{n \to \infty} x \cdot \frac{(2n)^k \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^k}{(2n)^k \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}$$

$$= x.$$

∴ சோதனை 7ன் படி (தாலம் பெயரின் சோதனையின் விரிவு)

$0 < x < 1$ ஆனால் தொடர் குவியும்.

$x > 1$ ஆனால் தொடர் விரியும்.

$x = 1$ க்கு, சோதனை பயன்படாது தோல்வியுறும்.

$x = 1$, ஆனால்

$$\text{தொடரமைப்பு} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \ldots\ldots \propto.$$

இங்கு $a_n = \dfrac{1}{(2n - 1)^k}$

$b_n = \dfrac{1}{n^k}$ எனக் கொள்க.

$\Sigma\, b_n$ நமக்குத் துணைதொடராயிருக்கட்டும்.

$$\underset{n \to \propto}{\text{எல்லை}} \frac{a_n}{b_n} = \underset{n \to \propto}{\text{எல்லை}} \frac{n^k}{(2n - 1)^k}$$

$$= \underset{n \to \propto}{\text{எல்லை}} \frac{n^k}{n^k\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)^k}$$

$$= \underset{n \to \propto}{\text{எல்லை}} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$$

$$= \underset{n \to \propto}{\text{எல்லை}}\ 2^{-k}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-k}$$

$$= 2^{-k}$$

$$= \frac{1}{2^k} \text{ என்ற ஒரு திட்டமான எண் மதிப்பு.}$$

∴ $\Sigma\, a_n$ ம் $\Sigma\, b_n$ ம், சோதனை 3-ன் படி ஒருங்கே குவியும், அல்லது ஒருங்கே விரியும். எனவே $x = 1$ என்ற நிலையில்

$k > 1$ ஆனால் குவியும்.

$k \leq 1$ ஆனால் விரியும்.

எல்லாவற்றையும் ஒருங்கே சேர்த்துக் கூறினல்,

$x < 1$, ஆனல் தொடர் குவியும்

$x > 1$, ஆனல் தொடர் விரியும்.

$x = 1$ ஆகி,

$k > 1$ ஆனல் தொடர் குவியும்

$k \leq 1$ ஆனல் தொடர் விரியும்.

எ-கா. (9) : $a_n = \dfrac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$ என்ற பொது உறுப்பு கொண்ட தொடரின் தன்மை காண்க.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{x^{2n}}{(n+2)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n}}{x^{2n-2}}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \frac{x^2 \cdot n^{3/2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= x^2.$$

$\therefore$ சோதனை 7-ன் படி,

$x^2 < 1$ ஆனல், தொடர் குவியும்,

$x^2 > 1$ ஆனல், தொடர் விரியும்,

$x^2 = 1$ ஆனல், சோதனை தோல்வியுறும்.

$(2n - 2)$ என்பது இரட்டைப் படை யெண்ணுதலின், x எந்த மெய்யெண் மதிப்புப் பெற்ருலும் (கூட்டு அல்லது குறை) எல்லா உறுப்புக்களும் கூட்டெண் மதிப்புப் பெறும்.

$\therefore$ $|x| < 1$, ஆனல், தொடர் குவியும்,

$|x| > 1$, ஆனல், தொடர் விரியும்,

$|x| = 1$, ஆனல், சோதனை தோல்வியுறும்.

தோல்வியுறும் போது, தொடரமைப்பு $= \Sigma \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$

$a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ எனவும் துணைத் தொடரின் பொது உறுப்பாக $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_n}{b_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{n^{3/2}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= 1.$$

$\therefore$ $\Sigma\, a_n$ ம் $\Sigma\, b_n$ ம், சோதனை 3-ன் படி ஒருங்கே குவியும் அல்லது ஒருங்கே விரியும். சோதனை 5-ன் படி, $\Sigma \dfrac{1}{n^{3/2}}$ குவி தொடர்.

$\therefore$ $|x| = 1$, ஆனால், $\Sigma\, a_n$ குவி தொடராகும்.

எனவே, $|x| \leq 1$, $\Sigma\, a_n$ குவியும்,

$|x| > 1$, $\Sigma\, a_n$ விரியும்.

எ-கா. (10)

$$x^2 + \frac{2^2}{3\,.\,4} x^4 + \frac{2^2\,.\,4^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} x^6 + \frac{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8} x^8$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2 \ldots\ldots \{2(n-1)\}^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6 \ldots\ldots 2n} x^{2n} + \ldots\ldots \text{ன்}$$

தன்மையறிக.

a_n எழுதப்பட்டிருக்கிறது.

$$a_{n+1} = \frac{2^2\,.\,4^2 \ldots\ldots \{2(n-1)\}^2\,.\,\{2n\}^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6 \ldots\ldots 2n\,(2n+1)\,(2n+2)} x^{2n+2}$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{4n^2}{(2n+1)\,(2n+2)}\, x^2$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{4n^2}{4n^2\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{2}{2n}\right)} x^2$$

$$= x^2.$$

∴ சோதனை 7-ன் படி.

$x^2 < 1$ ஆனல், தொடர் குவியும்

$x^2 > 1$ ஆனல், தொடர் விரியும்

$x^2 = 1$ ஆனல், சோதனை தோல்வியுறும்.

∴ $|x| < 1$, ஆனல், குவியும்;

$|x| > 1$, ஆனல், விரியும்;

$|x| = 1$, ஆனல், சோதனை தோல்வியுறும்.

$|x| = 1$, ஆனல், $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

துணைத் தொடராகவும் ஏதும் காண முடியாது.

ஆகவே, இராபேயின் சோதனை (சோதனை 9) கொண்டு பார்ப்போம்.

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left(\frac{4n^2 + 6n + 2}{4n^2} - 1\right)$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\ n\left(\frac{6n + 2}{4n^2}\right)$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{6n^2\left(1 + \frac{2}{6n}\right)}{4n^2}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1.$$

∴ இராபேயின் சோதனைப்படி (சோதனை 9)

$|x| = 1$, ஆனல், தொடர் குவியும்

∴ $|x| \leq 1$, ஆனல், தொடர் குவியும்

$|x| > 1$, ஆனல், தொடர் விரியும்.

எ.கா. (11)

$$\frac{2}{3.4}+\frac{2.4}{3.5.6}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8}+\ldots\ldots\infty$$

என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையறிக.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{2.4.6\ldots\ldots 2n.(2n+2)}{3.5.7.9\ldots\ldots(2n+1)(2n+3)(2n+4)}}{\dfrac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7.9\ldots\ldots(2n+1)(2n+2)}}$$

$$=\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{a_{n+1}}{a_a}=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{4n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{4n^2\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)\left(1+\dfrac{4}{2n}\right)}$$

$$=1.$$

∴ தாலம் பெயரின் 'எல்லை'ச் சோதனை பயன் படாது.

இராபேயின் சோதனைப் படி,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{(2n+3)\ (2n+4)}{(2n+2)2}-1\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ n\left[\frac{4n^2+14n+12-4n^2-8n-4}{4n^2+8n+4}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{6n^2+8n}{4n^2+8n+4}$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{n^2\left(6+\dfrac{8}{n}\right)}{n^2\left(4+\dfrac{8}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1$$

எனவே இராபேயின் சோதனைப்படி, இது ஒரு குவி தொடராகும்.

எ-கா. (12)

$$\frac{3}{4+1}x+\frac{3^2}{4^2+1}x^2+\frac{3^3}{4^3+1}x^3+\ldots\ldots$$

$+\dfrac{3^n}{4^n+1}x^n+\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மையறிக.

இங்கு கோசியின் மூலச் சோதனையை (சோதனை 8)ப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\,(a_n)^{\frac{1}{n}}=\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(\frac{3^n}{4^n+1}x^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=x\,.\,\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left\{\frac{3^n}{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3}{4}x$$

$\therefore\quad \frac{3}{4}x<1$ ஆனால், தொடர் குவியும்

$\frac{3}{4}x>1$ ஆனால், தொடர் விரியும்

$\frac{3}{4}x=1$ ஆனால், சோதனை பயன்படாது.

$\therefore\quad x<\frac{4}{3}$ ஆனால், தொடர் குவியும்

$x>\frac{4}{3}$ ஆனால், தொடர் விரியும்.

$x = \frac{4}{3}$ என்பதற்கு, தொடரமைப்பு

$$= \frac{3}{4+1} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3^2}{4^2+1} \cdot \frac{4^2}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{3^n}{4^n+1} \cdot \frac{4^n}{3^n} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4^2}\right)} + \ldots\ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4^n}\right)} + \ldots\ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots$$

$\therefore \quad x = \frac{4}{3}$ க்கு இத் தொடர் விரிகிறது.

எனவே,

$x < \frac{4}{3}$, ஆனல், தொடர் குவியும்

$x \geq \frac{4}{3}$, ஆனல், தொடர் விரியும்.

C

6.6 கூட்டெண்கள், குறையெண்கள் கலந்த தொடர்கள்:

B பகுதியில் நாம் பார்த்த சோதனைகள் யாவும் கூட்டெண் களாலாகிய தொடர்களுக்கே பயன்படும்.

இப்போது கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த தொடர் களின் குவி/விரி/அலை தன்மைகளைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

அறக் குவிதல் (Absolute Convergence):

$a_1+a_2+a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots +$ என்ற கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித் தொடர் எடுத்துக் கொள் வோம். இத் தொடரைக் கொண்டு,

$|a_1| + |a_2| + a_3| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots$ என்ற கந்தழித் தொடர் அமைப்போம். பின்னர் அமைக்கப்பட்ட தொடர், ஒரு குவி தொடராயிருப்பின், முதல் கூறப்பட்ட கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த தொடர் ஒரு அறக் குவியும் தொடர் (Absolutely Convergent Series) எனப்படும்.

எ-கா.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots \infty$$ என்ற

தொடரைக் கொண்டு

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots \infty$$ என்ற

தொடர் அமைப்போம்.

பின் கூறப்பட்ட தொடர் ஒரு குவி தொடர். எனவே, வரையறைப்படி, முன் கூறப்பட்ட தொடர் அறக் குவியும் தொடர் எனப்படும்.

நிபந்தனைக் குவிதல் (Conditional Convergence):

கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித் தொடர் தானாகவே ஒரு குவி தொடராயிருந்து, அது அறக் குவியும் தொடராக யில்லையாயின், அத் தொடர் ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடர் (Conditionally Convergent Series) எனப்படும்.

எ-கா: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\ldots \infty$ என்பது பின்னர் ஒரு குவி தொடரென நிறுவப்படும். அதை ஏற்றுக் கொள் வோம்.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots \infty$ என்பது விரி தொடரென நாம் அறிவோம்.

$\therefore\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots$ என்பது ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடரெனப்படும்.

6.6.1 ஒரு தொடர் அறக்குவியும் தொடராவென அறிய B பகுதியிலுள்ள சோதனைகள் கொண்டு அறியலாம். ஏனெனில் $\Sigma\,|\,a_n\,|$ என்ற தொடரில் உள்ள உறுப்புக்கள் யாவும் கூட்டெண்கள்.

6.6.2 பின்வரும் தேற்றங்களை நாம் நிறுவாமல் ஏற்றுக் கொள்வோம் :

(1) ஒரு 'அறக் குவியும்' தொடரில் உள்ள உறுப்புக் களை இடம் மாற்றி எழுதினால் பெறப்படும் தொடரும் ஒரு குவி' தொடராகும்.

(2) ஒரு 'நிபந்தனைக் குவி' தொடரில் உள்ள உறுப்புக் களைத் தகுந்தபடி இடம் மாற்றி எழுதினால் பெறப்படும் தொடரை $-\infty$ முதல் $+\infty$ வரை அலையும் தொடராகவும் அமைக்கலாம்.

6·7.1 தேற்றம் 4(a): ஒரு 'கலப்புத்' தொடர் (கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த தொடர்) அறக் குவியுமாயின், அக் கலப்புத் தொடரும் குவியும்.

தெ: Σa_n என்ற கலப்புத் தொடர் 'அறக் குவியும்' தொடராகக் கொள்வோம்.

அதாவது $|a_n| = b_n$ ஆனால், Σb_n ஒரு குவி தொடர். $\Sigma b_n = B$ எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது $C_n = a_n + b_n$ என்ற அமைப்பில் ஒரு புதுத் தொடரைக் கொள்வோம்.

a_n குறை யெண்ணாயின் $C_n = 0$

a_n கூட்டு எண்ணாயின் $C_n = 2\, b_n$ ஆகும்

எனவே எப்போதும் $0 \leq C_n \leq 2\, b_n$.

Σb_n ஒரு குவி தொடராகையால்

ΣC_n ம் ஒரு குவி தொடர்.

$\Sigma C_n = C$ எனக் கொள்வோம்.

$A_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ ஆனால்

$$A_n = (C_1 - b_1) + (C_2 - b_2) + \ldots\ldots + (C_n - b_n)$$
$$= (C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n) - (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$$
$$= C_n - B_n$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n\to\infty} A_n = \text{எல்லை}_{n\to\infty} (C_n - B_n)$$

$$= C - B$$

$\therefore \quad \Sigma a_n$, தானே ஒரு குவி தொடராகும்.

6·8.1 சோதனை 11 : ஒரு தொடரில் ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்பு கூட்டு, குறை எண்களாய், உறுப்புக்களின் 'தனி' (மட்டு) மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போய், பூச்சிய எல்லையை நெருங்குமாயின், அத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

கொடுக்கப்பட்டது :

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ கூட்டெண்கள்;

$a_1 > a_2 > a_3 \ldots\ldots > a_n \ldots\ldots$; எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

தொடர் $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$ இத்தொடர் குவி தொடரென நிறுவ வேண்டும்.

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$
$$> s_{2n} \qquad \text{(A)}$$

மேலும் $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7)$
$- \ldots\ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$
$< a_1 \qquad \text{(B)}$

$\therefore$ (A) ன் படியாக,

$s_2, s_4, \ldots\ldots s_{2n}, \ldots\ldots$ ஓர் ஓரியல்பான ஏறும் தொடர்முறை; a_1 என்ற மேல் வரம்புடையது (B ன் படி)

$\therefore \quad (s_{2n}) \to l \quad (0 < l < a_1).$

மேலும் $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}.$

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} =$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n} +$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_{2n+1}$

$$= l + 0$$
$$= l.$$

$\therefore \; m$ ஒற்றைப் படையாயினும், இரட்டைப் படையாயினும் சரி,

எல்லை $\lim_{m \to \infty} s_m = l.$

$\therefore \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ ஒரு குவி தொடராகும்.

முக்கிய எடுத்துக்காட்டு.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்குட்படுவதால் ஒரு குவி தொடராகும். 'நிபந்தனை' க் குவிதல் என்ற தலைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு, இங்கு நிறுவப்படுகிறதைக் காண்க.

6·8.2 சோதனை 12: ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்பு கூட்டு, குறையெண்களாய், உறுப்புக்களின் 'தனி' (மட்டு) மதிப்பு குறைந்து கொண்டு போகும் $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ என்ற தொடரில் எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_n = k \neq 0$ ஆனால், இத்தொடர் ஒரு அலை தொடராகும்.

சோதனை 11 ன் படி, எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n} = l < a_1$.

ஆனால் எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} =$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} s_{2n} +$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} a_{2n+1}$

$$= l + k.$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் l க்கும் $l + k$ க்கும் இடைப்பட்ட அலை தொடராகும்.

6·8.3 சோதனை 13: ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்பு கூட்டு, குறை யெண்களாய், உறுப்புக்களின் 'தனி' (மட்டு) மதிப்பு உயர்ந்து கொண்டு போகும் $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ என்ற தொடர் ஒரு அலை தொடராகும்.

$0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n \ldots\ldots$ என்பது கொடுக்கப்பட்டது.

இங்கு $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots\ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

$$< 0$$

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \ldots\ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

$$> a_1$$

n கந்தழி எல்லையை நெருங்கும் போது, s_{2n} ம் s_{2n+1} ம் ஒரே எல்லையை நாட முடியாது; ஏனெனில் அவ்வாறு l என ஒரு

எல்லை இருப்பின், l ஒருங்கே பூச்சியத்திற்குக் குறைவாகவும், a_1 க்கு மேற்பட்டதாகவும் $(a_1 > 0)$ இருக்கமுடியாது.

மேலும் s_{2n} ம் s_{2n+1} ம் $+\infty$ க்கோ, அல்லது $-\infty$ க்கோ நெருங்கமுடியாது.

$\therefore\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ என்ற தொடர், இந்த நிலையில் திட்டமான மதிப்புக்களிடை அலை தொடராயிருக்கும்.

6·8.4 தேற்றம் 5 : Σa_n ம் Σb_n ம் இரண்டு அறக்குவியும் தொடர்கள்; அவைகளின் கூட்டுத்தொகை முறையே A, B; அப்போது அவ்விரண்டு தொடர்களின் உறுப்புக்களைப் பெருக்கிப் பெறப்படும் தொடரான

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots\ldots$$

என்ற தொடரும் ஒரு அறக்குவியும் தொடராகும்; கூட்டுத் தொகை A . B.

தெ : முதலாவதாக,

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \infty = \mathrm{A}$$

$$\Sigma b_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots \infty = \mathrm{B}$$

என்ற இரு தொடர்களும் கூட்டு எண்கள் மட்டுமே பெற்றவையெனக் கொள்வோம்.

$\sum\limits_{1}^{n} a_n = \mathrm{A}_n$; $\sum\limits_{1}^{n} b_n = \mathrm{B}_n$ ஆகக் கொள்வோம்.

மேலும் $s_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \ldots\ldots + a_nb_n$

ஆகவும், $\sum\limits_{1}^{n} s_n = \mathrm{S}_n$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2n} &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots\ldots \\ &\quad + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots\ldots + a_nb_1) + \ldots\ldots \\ &\quad + (a_1b_{2n} + a_2b_{2n-1} + \ldots\ldots + a_{2n}b_1). \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{2n}) \\ &\quad + a_2(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{2n-1})\end{aligned}$$

$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+ a_n (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{n+1})$$
$$+ a_{n+1} (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$$
$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$+ a_{2n}\, b_1$$
$$> (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$$
$$= A_n \cdot B_n.$$

மேலும் $S_{2n} < (a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_{2n})(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{2n})$
$$= A_{2n} \cdot B_{2n}$$

$$\therefore \quad A_n B_n < S_{2n} < A_{2n} B_{2n}.$$

5·5.1. 2 (b) ல் நாம் கண்டபடி,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} A_n B_n = AB.$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} A_{2n} B_{2n}$ ம் $= AB.$

$\therefore$ எல்லை $\lim_{n \to \infty} S_{2n} = AB$ (1)

மேலும் $S_{2n+2} > S_{2n+1} > S_{2n}$

மேலும் எல்லை $\lim_{n \to \infty} S_{2n+2} = AB;$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} S_{2n} = AB;$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = AB.$ (2)

$\therefore$ n ஒற்றைப்படை யெண்ணுயினும் சரி, இரட்டைப் படை யெண்ணுயினும் சரி, (1), (2) ன் வழியாக,

எல்லை $\lim_{n \to \infty} S_n = AB$ என நிறுவப்படுகிறது.

(2) இரண்டாவதாக,

$\sum a_n$ ம் $\sum b_n$ ம், கூட்டெண், குறையெண் கலந்ததாக விருக்கட்டும்.

$$|a_1| + |a_2| + \ldots\ldots + |a_n| = A_n^1 \text{ எனவும்}$$
$$|b_1| + |b_2| + \ldots\ldots + |b_n| = B_n^1 \text{ எனவும்}$$
$$|a_1| + |a_2| + \ldots\ldots \propto = A^1 \text{ எனவும்}$$
$$|b_1| + |b_2| + \ldots\ldots \propto = B^1 \text{ எனவும்}$$

கொள்வோம்.

மேலும் $s_n^1 = |a_1|\ |b_n| + |a_2|\ |b_{n-1}| + \ldots\ldots + |a_{n-1}|\ |b_2| + |a_n|\ |b_1|$ எனவும்,

$\sum\limits_1^n s_n^1 = S_n^1$ எனவும் கொள்வோம்.

$$|s_n| = |a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1|$$
$$\leq |a_1|\ |b_n| + |a_2|\ |b_{n-1}| + \ldots\ldots + |a_n|\ |b_1|$$
$$\leq s_n^1$$

முதல் பகுதித் தெரிப்பின்படி,

$\sum\limits_1^{\propto} s_n^1$ ஒரு குவி தொடர், அதன் கூட்டுத் தொகை $A^1 \cdot B^1$.

$\therefore\ \sum\limits_1^{\propto} |s_n|$ ஒரு குவி தொடராகும்.

அதாவது $\sum\limits_1^{\propto} s_n$ ஒரு அறக்குவியும் தொடராகும்.

ஆகவே, தேற்றம் 4 ன் படி,

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots\ldots \propto$$

ஒரு குவி தொடராகும் (ஒரு கலப்புத் தொடர் அறக்குவியுமாயின், அக்கலப்புத் தொடரும் அப்படியே குவி தொடராகும்).

இப்போது

$$| A_n B_n - S_n | \leq A^1_n . B^1_n - S_n$$

ஏனெனில் $| A_n B_n - S_n |$ என்பது பல உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையின் 'மட்டு' த் தொகை; $A^1_n B^1_n - S_n$ அவ் வுறுப்புக்களின் 'மட்டு' மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை. (5·2.2, (ii) காண்க) (The modulus of the sum of a number of terms is less than the sum of their modulii).

ஆனால் $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left| A^1_n B^1_n - S^1_n \right| = 0$

$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left| A_n B_n - S_n \right| = 0$

$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} S_n = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} (A_n . B_n)$

$= \mathbf{A . B.}$

6·8.4.1 வலுத் தொடர் (Power Series):

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$ என்பது x-ல் ஒரு வலுத் தொடரெனப்படும். இங்கு $a_0, a_1 a_2, \ldots\ldots$ என்ற கெழுக்கள் x-ன் சார்பற்றவை.

சென்ற தேற்றத்தை (6·8.4, தேற்றம் 5) இருவலுத் தொடர்களுக்குப் பயன்படுத்துவோமாயின், பின்வரும் தேற்றம் பெறப்படும்:

தேற்றம் 6: $\sum a_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $| x | < l$ க்கு ஒரு அறக் குவியும் தொடர்; $\sum b_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $| x | < m$ க்கு ஒரு அறக் குவியும் தொடர்; அவைகளின் கூட்டுத் தொகை முறையே $f(x)$ ம் $\phi(x)$ ம்;

l, m இரண்டு மதிப்புக்களில் சிறியதான மதிப்பு k எனக் கொண்டால்,

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots + \ldots \infty$$

என்ற கந்தழித் தொடர் $| x | < k$ க்கு ஒரு அறக் குவியும் தொடராகும். அப்பெருக்கிய தொடரின் கூட்டுத் தொகை $f(x) . \phi(x)$ என்பது தேற்றம்.

தெரிப்பு, தேற்றம் 5-ல் கண்ட தெரிப்பு முறையேயாம்; (6·8.4).

6·8.5 தேற்றம் 7. வலுத் தொடர்களின் முற்றொருமை :

$|x| < l$ க்கு, இருவலுத் தொடர் $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ ம் $\sum_{0}^{\infty} b_n x^n$ ம், குவி தொடர்களாகி, மேலும் அவைகளின் கூட்டுத் தொகைகள் சமமாயிருப்பின், $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; ...... $a_n = b_n$; ...... ஆகும்.

தெரிப்பு : $\sum a_n x^n$ ம் $\sum b_n x^n$ ம் குவி தொடர்களாயிருப்பதாலும், $|x| < l$ க்கு இரண்டும் சம கூட்டுத் தொகைகள் பெற்றிருப்பதாலும், அவைகளின் வேறுபாடான,

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots\ldots \infty \quad \text{(A)}$$

என்ற தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும்; அதன் கூட்டுத் தொகை $|x| < l$ க்குப் பூச்சிய மாகும்.

ஆனல் (A) என்ற தொடர், $x = 0$ க்குக் குவி தொடராயிருப்பது வெள்ளிடை. எனவே $x = 0$ என ஈடுசெய்தால், $a_0 - b_0 = 0$, அதாவது $a_0 = b_0$ என்பது பெறப்படும்.

மேலும் இப்போது, $|x| < l$ ஆனல்,

$$x[(a_1 - b_1) + x(a_2 - b_2) + x^2(a_3 - b_3) + \ldots\ldots \infty] = 0 \quad \text{(B)}$$

எனக் கிடைக்கப் பெறுகிறது.

(B) என்பது, $x \neq 0$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு உண்மையாதலின், x-ஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுத்தால்,

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 \ldots\ldots \infty = 0 \quad \text{(C)}$$

என்பது உண்மையாகிறது.

(A) என்ற தொடர் $|x| < l$ க்குக் குவி தொடராதலின், முதல் இரண்டு உறுப்புக்களை எடுத்து விட்ட பின்பும், $|x| < l$, அதாவது $x \neq 0$ என்ற கட்டுப் பாட்டில்,

$$(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)x + \ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore \; (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)x + \ldots\ldots \to L$ (ஒரு திட்டமான மதிப்பு-எல்லையாகும்).

இப்போது (C)-ன் படி, $|x| < l,\ x \neq 0$ என்ற நிபந்தனைக் கீழ்,

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 \ldots\ldots = 0$ ஆகலின்

$(a_1 - b_1) = -x \cdot L$ என எழுதலாம்.

$\therefore \quad |a_1 - b_1| = |x|\ |L|$.

இப்போது, எவ்வளவு சிறிய ஒரு ϵ கொடுக்கப்பட்டாலும், $x \neq 0$ என்ற நிபந்தனையின் கீழ் $|x| < \frac{\epsilon}{L}$ என்ற மதிப்பை ஈடு செய்வோமாயின் $|a_1 - b_1| < \epsilon$ எனக் கிடைக்கும்.

a_1, b_1 என்பவை குறிப்பிட்ட திட்டமான மாறிகளாதலின் $|a_1 - b_1| < \epsilon$ என்பது முடியவே முடியாது.

$\therefore \quad a_1 = b_1$ ஆகும். அவ்வாறே, $a_2 = b_2;\ a_3 = b_3;\ \ldots\ldots$ என்பவை நிறுவப்படும்.

6 8.5.1 மேற்கண்ட தேற்றத்தின் உண்மை ஒரு அடிப்படையான முடிவாகும்.

குறிப்பு: $(n+1)$ உறுப்புக்கள் மட்டுமே யுள்ள,

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n;\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_nx^n$

என்ற இரு தொடர்களும் n-க்கு மேற்பட்ட x-ன் மதிப்புக்களுக்குச் சமமாயிருக்குமாயின், $a_0 = b_0;\ a_1 = b_1;\ a_2 = b_2;\ \ldots\ldots$ என்ற படி, சமபடிகள் உள்ள x-ன் கெழுக்கள் சமமாகும். (C. Smith-இயற்கணிதம், Chapter VI, § 90, 91 காண்க).

இங்கு கந்தழித் தொடர்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை; ஆனால் 6·8.5, தேற்றம் 7 கந்தழித் தொடர்களைப் பொருத்திய உண்மையாகும்.

இம் முடிவு, பின்னர் நிறுவப்பட விருக்கும் (1) அளவுக்கிணங்கிய 'படி' களுக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for a Rational index); (2) படிக்குறித் தேற்றம் (Exponential Theorem); (3) மடக்கைத் தேற்றம் (Logarithmic Series Theorem) முதலிய தேற்றங்களின் தெரிப்புக்களில் அடிப்படையாய் அமைகிறது.

6·8.6 கூட்டு, குறை யெண்கள் கலந்த ஒரு கந்தழித் தொடர் அறக் குவியுமாயின், அக் 'கலப்பு' த் தொடரும் அப் படியே குவியும் என்ற தேற்றம் 4(a) (6, 7.1) துணை கொண்டு, கூட்டு, குறையெண்கள் கலந்த பல தொடர்களின் குவி/விரி தன்மையறியலாம்.

இங்கு தாலம் பெயரின் விகித சோதனையின் மற்றோர் விரிவைக் காண்போம்.

தேற்றம் 8: கூட்டு, குறை எண்கள் கலந்த Σa_n என்ற தொடரில் எல்லை $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$ ஆகுமாயின், Σa_n அறக்குவியும்; எனவே தானும் குவியும்.

தெரிப்பு முன் 6·5.7, சோதனை 7-க் குரியதேயாகும்.

6·9 *சில முக்கியமான கந்தழித் தொடர்களின் குவி/விரி/அலை தன்மைகளைப் பார்ப்போம்:*

6·9.1 (1) ஈருறுப்புத் தொடர்-கந்தழித் தொடர் (Binomial Series)

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{\lfloor n}x^n+\ldots\ldots$$

$+\ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர் ஈருறுப்புத் தொடர் எனப்படும். (m கூட்டு முழு எண் அல்ல; அளவுக் கிணங்கிய, கூட்டு முழு எண் மதிப்பு மட்டும் ஏற்காத எண்ணுகும்).

m கூட்டு முழு எண்ணுயின், தொடரில் $(m+1)$ உறுப்புக்கள் மட்டுமேயிருக்கும். அது கந்தழித் தொடராகாது; எனவே குவிதல், விரிதல், அலைதல் போன்ற கேள்விகள் எழா.

இனி இக் கந்தழித் தொடரின் குவி தன்மை பற்றிப் பார்ப்போம்.

m, x ன் மதிப்புக்களை யொட்டி, இத் தொடரில் உள்ள உறுப்புக்கள், கூட்டு, குறை மதிப்புக்கள் பெறும். பொதுவாக இத் தொடர் ஒரு 'கலப்பு'த் தொடராகும்.

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}} x^n ;$$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)}{\underline{|n-1}} x^{n-1} ;$$

$$\therefore \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n+1}{n} \cdot x \right|$$

$$= \left| \frac{m-n+1}{n} \right| \cdot | x |$$

$$= \left| -1 + \frac{m+1}{n} \right| \cdot | x | .$$

எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{m+1}{n} = 0$ என்று நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = | -1 | \cdot | x |$$

$$= | x | \quad \text{ஆகும்.}$$

$\therefore \quad | x | < 1$, ஆனல், தொடர் அறக்குவிகிறது. எனவே, தானுகவும் குவியும்.

மேலும் $| x | > 1$ ஆனல், தொடர் குவியாது.

$| x | = 1$ ஆனல், இத் தொடர் என்னவாகிறது என்பது இந்நூல் திட்ட வரம்பிற்கப்பாற் பட்டதாக விடப்பட்டது.

எனினும் $x = 1$ ஆனல் $m > -1$ ஆக விருப்பின் இத் தொடர் குவி தொடராகும் என்பதும்,

$x = -1$ ஆனல், $m > 0$ ஆக விருப்பின் இத் தொடர் குவி தொடராகும் என்பதும் தெரிப்பின்றி ஏற்றுக் கொள்வோம்.

6·9.2 படிக் குறித் தொடர் (Exponential Series);

$$1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடர் படிக் குறித் தொடர் எனப்படும். இங்கு x கூட்டெண்ணுயின், எல்லா உறுப்புக்களும் கூட்டெண் மதிப்பு

பெறும்; x குறையெண்ணுயின், ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்புக்கள் கூட்டு, குறை மதிப்பு பெறும். பொதுவாக,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^n}{\lfloor n} \times \frac{\lfloor n-1}{x^{n-1}}\right|$$

$$= \left|\frac{x}{n}\right|$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left|\frac{x}{n}\right|$$

$$=0 \; (< 1 \text{ ஆகும்})$$

எனவே, தாலம் பெயரின் 'எல்லை'ச் சோதனைப்படி, x ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும், $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{\lfloor n}$ ஒரு அறக் குவியும் தொடராகும், எனவே குவி தொடராகும்.

6·9.3 மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series) :

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \frac{x^4}{4} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ldots\ldots$ என்ற தொடர் மடக்கைத் தொடர் எனப்படும்.

இங்கு x கூட்டெண்ணுயின், உறுப்புக்கள் ஒன்று விட்டு ஒன்று, கூட்டு, குறை மதிப்பு பெற்றும், x குறை யெண்ணுயின், எல்லாம் குறை மதிப்பு பெற்றும் இருக்கும்.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

$$a_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\therefore \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right|.$$

$$= |x| \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

(எல்லை = lim)

$$= |x|.$$

தாலம் பெயரின் 'எல்லைச் சோதனைப்படி, $|x| < 1$, ஆனால் மடக்கைத் தொடர் அறக்குவியும், எனவே, அப்படியே குவியும்.

$|x| > 1$ ஆனால் குவியாது.

$x = -1$ ஆனால்

$$\text{தொடர்} = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots \infty\right)$$

= விரி தொடர், $-\infty$ க்கு.

$x = 1$ ஆனால்

$$\text{தொடர்} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \ldots\ldots \infty$$

இது சோதனை 11 ன் படி, குவி தொடராகும். எனவே, $|x| < 1$ க்கும் $x = 1$ க்கும் இத் தொடர் குவி தொடராம்.

6·9.4 கூட்டு, குறையெண் கலந்த கந்தழித் தொடர்கள்—சில எடுத்துக் காட்டுக்கள் :

எ-கா. (13)

$$\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}-\frac{x^4}{1+x^4} \ldots\ldots \infty \; (0 < x < 1)$$

-ன் குவி/விரி/அலை தன்மை காண்க.

இத் தொடரை

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ எனக் கொள்வோம்.

$$a_n = \frac{x^n}{1+x^n} > 0.$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{x^n}{1+x^n} - \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}$$

$$= \frac{x^n + x^{2n+1} - x^{n+1} - x^{2n+1}}{(1+x^n)\ (1+x^{n+1})}$$

$$= \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^n)\,(1+x^{n+1})}$$

$$= \frac{x^n\,(1-x)}{(1+x^n)\,(1+x^{n+1})}$$

$$> 0 \quad (0 < x < 1).$$

∴ எல்லா n மதிப்புக்களுக்கும் $a_n > a_{n+1}$.

$$\text{மேலும்}\ \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{x_n}{1+x^n} = 0$$

∴ சோதனை 11 ன் படி, $0 < x < 1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, இது ஒரு குவி தொடர் ஆகும்.

எ-கா. (14)

$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$ ...... என்ற தொடரின் குவி தன்மை காண்க.

சோதனை 5 ன் படி $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ஒரு குவி தொடர்.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர், ஒரு அறக் குவியும் தொடர்; எனவே தானும் குவி தொடர்.

சோதனை 11 கொண்டும் இதை நிறுவிக் காண்க.

எ-கா. (15) $a, b, c > 0$ ஆனல்,

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,an}{bn^2+c}$ என்ற தொடரின் குவி/விரி/அலை தன்மையறிக.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{an}{b_n^{\,2}+c} - \frac{a\,(n+1)}{b\,(n+1)^2+c}$$

$$= \frac{an(bn+1) - ac}{\text{கூட்டுத் தொகை}}.$$

$$> 0 \quad (n > m\ \text{க்கு})$$

$\therefore$ $n > m$ என்ற கட்டுப் பாட்டில் $a_n > a_{n+1}$

மேலும் $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{an}{bn^2+c} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a}{bn+\dfrac{c}{n}}$

$= 0$

$\therefore$ சோதனை 11 ன் படி, இது ஒரு குவி தொடர்.

இத் தொடர் அறக் குவியுமா வெனப் பார்ப்போம்.

$|a_n| = b_n = \dfrac{an}{bn^2+c}$ எனக் கொள்க.

$u_n = \dfrac{1}{n}$ என ஒரு துணைத் தொடர் கொள்க.

$$\frac{b_n}{u_n} = \frac{an \cdot n}{b_n^2+c}$$

$$= \frac{an^2}{n^2\left(b + \frac{c}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{a}{b + \frac{c}{n^2}}$$

$\therefore$ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_n}{u_n} = \dfrac{a}{b}$ (ஒரு திட்டமான எண்).

$\therefore$ சோதனை 3 ன் படி, $\Sigma\, b_n$ ம் $\Sigma\, u_n$ ம் ஒருங்கே குவியும், அல்லது ஒருங்கே விரியும்.

ஆனால் $\Sigma\, u_n = \Sigma\, \dfrac{1}{n}$ ஒரு விரிதொடர்.

$\therefore$ $\Sigma\, b_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore$ $\Sigma\, |a_n|$ ஒரு விரிதொடர்.

ஆனால் $\Sigma\, a_n$ ஒரு குவிதொடரென, சோதனை 11 ன் படி நாம் கண்டோம்.

∴ Σa_n ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடர் (conditionally convergent series).

எ-கா. (16)

எல்லா x-ன் மதிப்புக்களுக்கும், $\Sigma a_n = \Sigma \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ன் குவி/விரி/அலை தன்மை காண்க.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right|$$

$$= |x| \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= |x|.$$

∴ $|x| < 1$, ஆனால், இது ஒரு அறக்குவியும் விரி தொடராகும்; எனவே தானும் குவியும்.

(ii) $x = 1$ ஆனால் தொடர் $= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots\ldots \infty$

சோதனை 5-ன் படி இது ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $x = -1$ ஆனால் தொடர் $= -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \ldots$

இது, சோதனை 11-ன் படி, ஒரு குவி தொடராகும்.

(iv) $x > 1$ ஆனால், இத்தொடர் விரியும்.

(v) $x < -1$ ஆனால், $x = -y$ எனக் கொள்வோம். அப்போது $y > 1$.

$$\text{தொடர்} = -y + \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{3}} + \frac{y^4}{\sqrt{4}} \ldots\ldots$$

$y + \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \frac{y^3}{\sqrt{3}} + \frac{y^4}{\sqrt{4}} \ldots\ldots \infty$ ஆகையால்,

$$-y+\frac{y^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{3}}+\frac{y^4}{\sqrt{4}}\ldots\ldots$$ ஒரு அலை தொடர் ஆகும்.

தொகுத்துக் கூறு மிடத்து,

$-1 \leq x < 1$ ஆனால் குவி தொடர்;

$x \geq 1$ ஆனால் விரி தொடர்.

$x < -1$ ஆனால் அலை தொடர்.

6·9.5 குவி/விரி/அலை தன்மையை ஆய்வதற்குரிய சில வழி வகைகள் :

B.Sc. பாடத் திட்ட நிலையில் வரும் பெருவாரியான தொடர்களின் குவி/விரி/அலை தன்மைகளை ஆராய, சில நினைவுக் குறிப்புக்கள் இங்கு ஒருவாறுகத் தொகுத்துக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஆனால் அவை, எல்லாத் தொடர்களையும் பற்றி ஆராய்வதற்குப் பயன்படும் என்று திட்டமாகக் கூற முடியாது. எனினும் அவைகளை முறையாக, தேவைக்குத் தக்கபடி பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம்.

I. கூட்டெண் உறுப்புக்கள் மட்டுமே உள்ள தொடர்கள் :

(1) x, x^2, x^3, ... போன்ற உறுப்புக்கள் தோன்றுமல், வெறும் 1, 2, 3, ... என்ற எண்கள் மட்டுமே தோன்றுமாயின், சோதனை (1) ன் இரு பகுதிகளைப் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். அங்கு $1+r+r^2+\ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரையும் $\Sigma\ \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடரையும் துணைத் தொடர்களாகக் கொள்ளலாம்.

(2) சோதனை 1, பயன்படா விடத்து, சோதனை (2) அல்லது (3) ஐப் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். சோதனை (3) தான் பெரிதும் பயன்படும். எல்லைகள் காணும் போது, சற்று விழிப்புடன் இருக்கவேண்டும்.

சோதனை (4) ம் பயன் படலாம்.

(3) சோதனை 1, 2, 3, 4 ம் பயன்படா விடத்து, தாலம் பெயரின் சோதனைகளையும், அவைகளின் 'எல்லை' விரிவுகளை யும் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். இங்கு எல்லை $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ஆகிவிட்டால், கோசியின் மூலச் சோதனை (சோதனை 8) அல்லது இராபேயின் எல்லைச் சோதனை (சோதனை 9) முதலிய வற்றைப் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம். கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனையான, சோதனை 10 ம் பயன்படக் கூடும்.

(4) $x, x^2, x^3, \ldots\ldots$ என்ற இயற்கணித இராசிகள் உறுப் புக்களில் தோன்றுமாயின், தாலம் பெயரின் விகித சோதனை களையும், அவைகளின் 'எல்லை' விரிவுகளையும் முதலில் பயன் படுத்திப் பார்க்கலாம். பெரும்பாலும் 'எல்லை'ச் சோதனை (சோதனை 7), பல தொடர்களின் தன்மையை அறிவித்து விடும். இங்கு $x \gtrless 1$ என்ற மதிப்புக்களுக்குத் தனித் தனி யாக முடிவுகாண வேண்டும். சில தொடர்களில் $x \gtrless m$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு வெவ்வேறு தன்மைகள் பெறப்படும்.

(5) 'எல்லை'ச் சோதனையில் எல்லை $x=1$ எனப் பெறப் படின், தாலம் பெயரின் சோதனை தோல்வியுறும்; அப்போது, இராபேயின் 'எல்லை'ச் சோதனையைப் பயன்படுத்திப் பார்க் கலாம்.

(6) $x=1$ எனக் கொண்டு தொடரை எழுதி, அத் தொட ரில் a_n கண்டுபிடிக்க வேண்டியிருக்கும். அதன் குவி/விரி/ தன்மை காண, பெருக்குத் தொடர் பயன்படா விடத்து, a_n ன் n ன் நிகரப்படி என்னவெனக் கண்டு, அந்நிகரப்படி p ஆனுல் $\Sigma b_n = \Sigma n^p$ என்ற துணைத் தொடர் கொண்டு, சோதனை 3 ன் உதவியால் Σa_n ன் தன்மை காணலாம்.

எ-கா.

$\frac{an^2+nb+c}{(An+B)(Kn+L)(rn+s)(pn+q)}$ ல் nன் நிகரப்படி $\frac{n^2}{n^4}$ ல் உள்ள -2.

$\therefore$ துணைத் தொடர் $\sum b_n = \frac{1}{n^2}$.

(7) இராபேயின் 'எல்லை'ச் சோதனையிலும் எல்லை 1 வரின், கோசியின் மூல சோதனை அல்லது கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனை பயன்படுமா வெனப் பார்க்கலாம்.

(8) மற்ற வழி வகைகள், தொடர்களைச் சோதிக்கச் சோதிக்கத்தான் கை வரும்.

II. கூட்டு, குறை யெண் கலந்த 'கலப்பு'த் தொடர்கள் :

(1) 6·7.1, தேற்றம் 4 (a) ன் படி, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் அறக் குவியுமா வெனக் கண்டு, அறக் குவியுமாயின் உரிய 'கலப்பு'த் தொடரும் குவியு மெனக் கொள்ள.

அறக்குவிதல் தன்மையைக் காண, கூட்டெண் தொடர்களுக்குரிய, மேற்கண்ட முறைகளைக் கையாண்டு பார்க்கலாம்.

(2) ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்புக்கள், கூட்டு, குறை யெண்களாயின் சோதனை 11 ஐப் பயன் படுத்தலாம். கட்டுப்பாடுகள் பொருந்துகின்றனவா வென ஆராய்க.

(3) சோதனை 12 ம் 13 ம் சில பல இடங்களில் பயன் படும்.

பயிற்சி 6 (ii)

1. $\sum a_n$ ஒரு குவி தொடர், கூட்டெண் உறுப்புக்களுடையதாயின் $\sum a_n^2$, $\sum a_n^3$ ...... முதலியனவும் குவி தொடர்களென நிறுவுக.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ என்ற தொடரில் முதல் 10 இலட்சம் உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 21-ஐ விடச் சிறியதென நிறுவுக. (செ.ப.க.).

3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ என்ற தொடரில் ${}_mR_n > \frac{m}{m+n}$

என நிறுவுக. இதை யொட்டி $\Sigma \frac{1}{n}$ ஒரு விரி தொடரென நிறுவுக.

சில தொடர்களின் n வது உறுப்பு கீழே கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. அவ்வத் தொடரின் குவி/விரி/அலை தன்மை யறிக. (4 முதல் 20 வரை).

4. $\frac{n^2}{n^3+1} x^{n-1}$ (செ.ப.க.)

5. $\left(\frac{x^n}{\lfloor n}\right)^2$ (செ.ப.க.)

6. $\frac{1}{1+n^2x^n}$ (செ.ப.க.)

7. $\frac{n}{(n+1)^p}$

8. $n^{100} x^n$ (கே.ப.க.)

9. $\frac{x^n}{n^2+n}$ (கே.ப.க.)

10. $\sqrt{\frac{5^{n+1}}{3^n+4^n}}$

11. $\frac{2nx^n}{n^2+1}$

12. $\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{n^p}$

13. $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}}}$

14. $\frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots\ldots (3n+1)} \cdot \frac{2^n}{3n+2}$

15. $\frac{n}{n+1}$

16. $\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

17. $\dfrac{n}{(n+1)^2}$

18. $\dfrac{an^2+b}{cn^3+d}$

19. $\dfrac{1+2+3+\ldots\ldots+n}{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2}$

20. $\dfrac{(n+1)^{3/2}}{1+n^{5/2}}$

பின் வரும் கந்தழித் தொடர்களின் குவி/விரி/அலை தன்மையறிக.

21. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{4\,.\,7}{5\,.\,8}+\dfrac{4\,.\,7\,.\,10}{5\,.\,8\,.\,11}.$

22. $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\,.\,5}{5\,.\,6}\cdot\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{3\,.\,5\,.\,7}{5\,.\,6\,.\,7}\cdot\dfrac{1}{2^5}$

23. $\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots\ldots$

$$+\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

24. $\Sigma\,\dfrac{an^2+bn+c}{pn^q}\quad(q\geq 4).$

25. $\Sigma\,\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

26. $\sum_{2}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

27. $\sum_{2}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3-3}\right)$

28. $\Sigma \dfrac{x^n}{1+x^n}$. (கே.ப.க.)

29. $1 + \dfrac{1+2}{1+2^2} + \dfrac{1+3}{1+3^2} + \ldots\ldots + \dfrac{1+n}{1+n^2} + \ldots\ldots$

30. $\Sigma \dfrac{1}{1+nx}$

31. $\Sigma \dfrac{1}{x+n}$

32. $\Sigma \dfrac{n^m}{(n+1)^{m+x}}$

33. $\Sigma \dfrac{n}{1+nx^n}$

34. $\Sigma \dfrac{2^n+1}{3^{5n}+1}$

35. $\Sigma \sqrt{\dfrac{a^n+p}{b^n+q}}$ $(a, b > 1)$

36. $\Sigma \dfrac{1}{(1+n)^p(2+n)^q}$

37. $\Sigma \dfrac{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots\ldots (2n-1)^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots\ldots (2n)^2}$

38. $\Sigma\, n^k [\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n-2} + \sqrt{n-3}]\, x^n$

39. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{x} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x^2} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{x^3} + \ldots\ldots$ $(x \neq 0)$

40. $\dfrac{2x}{1^3 . a} + \dfrac{5x^2}{2^3 . a^2} + \dfrac{10x^3}{3^3 . a^3} + \dfrac{17x^4}{4^3 . a^4} + \ldots\ldots$ (a – மாறிலி)

41. $\Sigma \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

42. $\Sigma\, (-1)^{n-1}\, nx^{n-1}$

43. $\Sigma \dfrac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n}$

44. $\dfrac{(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1})}{n}$

45. $(-1)^n \dfrac{x^n}{1+na}$.

46. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) n^m x^n$

47. $\dfrac{ax}{2} + \dfrac{a^2x^2}{5} + \dfrac{a^3x^3}{10} + \ldots\ldots + \dfrac{a^nx^n}{n^2+1} + \ldots\ldots \; (a > 0)$

48. $1 - \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3.4} + \ldots\ldots$

49. $\sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{5n+1}{\lfloor 2n+1}$

50. $\Sigma\, n \log \left\{\dfrac{(2n+1)}{(2n-1)} - 1\right\}$

51. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{1^{\alpha}} + \dfrac{1}{2^{\alpha}} + \ldots\ldots \dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)}{n^{\alpha}}$

52. $\Sigma \dfrac{1}{[\sqrt{n^2-n}\,\{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\}]}$

53. $\Sigma \left(\dfrac{n^p}{(n+1)^{p+\alpha}}\right)$

54. $\Sigma \dfrac{1}{n \log n \,\{\log \log n\}^{\alpha}}$

55. $\Sigma \dfrac{1}{(n+1+\cos n\pi)^2}$

7. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்—அளவுக் கிணங்கிய படிகளுக்கு

(The Binomial Theorem for a Rational Index) :

7·1 புகுமுக வகுப்பில் ஈருறுப்புத் தேற்றம் கூட்டுமுழு எண் படிக்கு நிறுவப்பட்டது.

n கூட்டு முழு எண்ணுயின்

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}.\, a + \ldots\ldots + {}_nC_r\, x^{n-r}.\, a^r \ldots\ldots + a^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

$$(x-a)^n = x^n - {}_nC_1\, x^{n-1}\, a + {}_nC_2\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^r\, {}_nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots\ldots + (-1)^n a^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}_nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1\, x + {}_nC_2\, x^2 + \ldots\ldots + {}_nC_r\, x^r + \ldots\ldots + x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - {}_nC_1\, x + {}_nC_2\, x^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\, {}_nC_r x^r + \ldots\ldots + (-1)^n\, x^n$$

என்ற அமைப்புக்கள் யாவும் நாம் கண்டோம்.

(தி. கோ – கொ. மு. கணித நூல்-I பகுதி 16)

7·1.1 n கூட்டு முழு எண்ணுயல்லாமல், ஏதாமொரு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணுயிருப்பினும், $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+$$

...... கந்தழி வரை

என்ற தேற்றம் ஒப்புக் கொள்ளப்பட்டு அத் தேற்றம் பயன் படுத்தப்பட்டது.

(தி. கோ. – கொ. மு : கணித நூல் I–பகுதி 17)

7·2 n ஒரு அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்ணுயிருப்பின், $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\ldots\ldots\infty$$

என்ற தொடர் முடிவற்ற தொடராகிறது என்பது பார்த்தால் தெரியும் (Infinite Series).

$n = -3\frac{1}{2}$ எனக் கொண்டால்,

$-3\frac{1}{2}\times-4\frac{1}{2}\times-5\frac{1}{2}\times$......என்பது முடிவு பெருது சென்று கொண்டே இருக்கும்.

$n = +\frac{1}{2}$ எனக் கொண்டாலும்,

$\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-1\frac{1}{2}\times$...... என்பதும் முடிவு பெருது சென்று கொண்டே இருக்கும். எனவே

$1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+$...... என்பது கந்தழி வரைத் தொடராகவேயிருக்கும். n கூட்டு முழு எண்ணுயின் தொடரில் $(n+1)$ உறுப்புக்களே இருக்கும். அதற்கு ஒரு திட்டமான கூட்டுத் தொகையிருக்கும். ஆனல் ஒரு கந்தழித் தொடர் குவியலாம், விரியலாம், அல்லது அலையலாம். ஆகவே

$1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots\infty$ என்ற கந்தழித் தொடர் குவிந்தாலொழிய அது $(1+x)^n$ என்ற ஒரு திட்டமான மதிப்புக்குச் சமமாகாது. எனவே n ஒரு அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண் (கூட்டு முழு எண் தவிர) ணுயிருப்பின் $(1+x)^n =$ ஒரு கந்தழித்

தொடர் என நிறுவுவதில் சில நுட்பங்களுண்டு. அவை யாவும் இப் பகுதியில் ஆராயப்பட்டு நிறுவப்படும்.

மேலும் இதை யொட்டி இத் தேற்றம் மற்ற இடங்களில் பயன்படுவதும் விளக்கப்படும்.

7·3 அளவுக் கிணங்கிய படிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றம் (The Binomial Theorem for a rational index):

தேற்றம் 1: $|x| < 1$ ஆனால் n ன் அளவுக் கிணங்கிய மதிப்புக்களுக் கெல்லாம்,

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\ldots\ldots\infty$$

தெரிப்பு:

$$f(p)=1+\frac{p_1}{\underline{|1}}x+\frac{p_2}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\frac{p_r}{\underline{|r}}x^r+\ldots\ldots\infty \qquad (1)$$

$$f(q)=1+\frac{q_1}{\underline{|1}}x+\frac{q_2}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\frac{q_r}{\underline{|r}}x^r+\ldots\ldots\infty \qquad (2)$$

இங்கு $p_r = p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-r+1)$ எனக் கொள்க.

$$f(p+q)=1+\frac{(p+q)_1}{\underline{1}}x+\frac{(p+q)_2}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots+\frac{(p+q)_r}{\underline{|r}}x^r+\ldots\ldots\infty \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ம் முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$|x| < 1$ ஆனால் இம் மூன்று தொடர்களும், குவியும் ஈருறுப்புத் தொடர்களாம். அவை அறவே குவியும் தொடர்களுமாம். (6·9.1)

இப்போது $f(p) \times f(q)$ என்ற பெருக்கல் படி வரும் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$f(p)\times f(q)=1+x\left(\frac{p_1}{\underline{|1}}+\frac{q_1}{\underline{|1}}\right)$$
$$+x^2\left(\frac{p_2}{\underline{|2}}+\frac{p_1}{\underline{|1}}\cdot\frac{q_1}{\underline{|1}}+\frac{q_2}{\underline{|2}}\right)+\ldots\ldots$$

$$+x^r\left(\frac{p_r}{\underline{|r}}+\frac{p_{r-1}}{\underline{|r-1}}\cdot\frac{q_1}{\underline{|1}}+\frac{p_{r-2}}{\underline{|r-2}}\cdot\frac{q_2}{\underline{|2}}+\ldots\ldots\frac{q_2}{\underline{|r}}\right)$$
$$+\ldots\ldots\infty \qquad (4)$$

(4) ல் x^r ன் கெழு $=\dfrac{1}{\underline{|r}}\left(p_r+\dfrac{r}{\underline{|1}}p_{r-1}q_1+\dfrac{r(r-1)}{\underline{|2}}p_{r-2}q_2+\ldots\ldots+q_r\right) \qquad (5)$

$f(p+q)$ ல் x^r ன் கெழு $=\dfrac{(p+q)_r}{\underline{|r}} \qquad (6)$

வாண்டர்மாண்டுவின் தேற்றப்படி,

$$(p+q)_r=p_r+\frac{r}{\underline{|1}}p_{r-1}q_1+\frac{r(r-1)}{\underline{|2}}p_{r-2}\,q_2+\ldots\ldots+q_r$$

எனவே $f(p)\times f(q)$ ன் பெருக்குக் கோவையில் (5) நாம் கண்ட x^r ன் கெழு $=f(p+q)$ ல் x^r ன் கெழுவுக்குச் சமம் (6).

$\therefore$ குவி தொடர் பெருக்கல் தேற்றப்படி, $|x|<1$ ஆனுல் $f(p+q)=f(p)\times f(q)$ என நிறுவப்படுகிறது. (6·8.4.1)

இம் முடிவை, மேலும் விரிவுபடுத்தினுல்

$f(p+q+s+t+\ldots\ldots)=f(p)\times f(q)\times f(s)\times f(t)\ldots\ldots$ (7)
எனப் பெறப்படுகிறது.

(i) முதலில் $p=q=s=t=\ldots\ldots=\dfrac{l}{m}$ எனக் கொள்க. l, m இரண்டும் கூட்டு முழு எண்களெனக் கொள்வோம்.

$n=\dfrac{l}{m}$ எனக் கொண்டால், n ஓர் அளவுக் கிணங்கிய கூட்டு மெய்யெண்.

(7) ன் படி,

$$f\left(\frac{l}{m}+\frac{l}{m}+\ldots\ldots+m \text{ முறைகள்}\right)$$

$$= f\left(\frac{l}{m}\right) \times f\left(\frac{l}{m}\right) \times \ldots\ldots m \text{ முறைகள்}$$

$$\therefore \quad f(l) = \left[f \frac{l}{m} \right]^m \qquad (8)$$

ஆனல், l ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுதலால்,

$$f(l) = 1 + \frac{l_1}{\underline{|1}} x + \frac{l_2}{\underline{|2}} x^2 + \ldots\ldots + x_n$$

$= (1+x)^l$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \quad \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^m = (1+x)^l$$

$$\therefore \quad (8) \text{ ன் படி, } f\left(\frac{l}{m}\right) = (1+x)^{\frac{l}{m}}$$

$\therefore \quad f(n) = (1+x)^n$. (ஏனெனில் $n = \dfrac{l}{m}$ எனக் கொள்ளப் பட்டது); அதாவது, n ஓர் அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு மெய் யெண்ணுனல்,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^2 + \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவப்பட்டது.

எச்சரிக்கையாக, $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டின் இன்றி யமையாமையை நாம் எப்போதும் மறந்து விடக் கூடாது.

எனவே, ஈருறுப்புத் தேற்றம், ஒரு அளவுக் கிணங்கிய கூட்டு மெய்யெண் n $\left(= \dfrac{l}{m}\right)$ என்ற 'படி'க்குப் பொருத் தம் என நிறுவப்பட்டது.

(ii) இரண்டாவதாக $n =$ ஒரு குறை முழு எண் எனக் கொள்வோம்; அதாவது $n = -m$ (m கூட்டு முழு எண் எனக் கொள்க)

(7) ன் படி, $f(m-m) = f(m) \times f(-m)$

$$\therefore \quad f(0) = f(m) \times f(-m)$$

$$\therefore \quad f(-m) = \frac{f(0)}{f(m)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^m} \quad (m \text{ கூட்டு முழு எண்})$$

$$= (1+x)^{-m}$$

$\therefore \quad f(n) = (1+x)^n$ என நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, ஈருறுப்புத் தேற்றம், n ஒரு குறை முழு எண்ணுனல்,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^2 + \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவப்பட்டது.

(iii) மூன்ருவதாக, n = ஒரு குறை, அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண் எனக் கொள்வோம்; அதாவது $n = \frac{l}{m}$ (l ஒரு குறை முழு எண்; m ஒரு கூட்டு முழு எண் எனக் கொள்க)

(7) படி,

$$f\left(\frac{l}{m} + \frac{l}{m} + \ldots\ldots m \text{ முறைகள்}\right) = \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^m$$

$$\therefore \quad f(l) = \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^m$$

l ஒரு குறை முழு எண்ணுதலின், இரண்டாவதாக நிறுவப் பட்டபடி,

$$f(l) = (1+x)^l$$

$$\therefore \quad (1+x)^l = \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^m$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{l}{m}\right) = (1+x)^{\frac{l}{m}}$$

அதாவது $f(n) = (1+x)^n$ [n = ஒரு குறை, அளவுக்கிணங்கிய எண்]'

எனவே, ஈருறுப்புத் தேற்றம், n, ஒரு குறை அளவுக்கிணங்கிய எண்ணுனல்,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^2 + \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவப்பட்டது.

இவ்வாருக, கூட்டு முழு எண் 'படி'க்கு நாம் முன்னர் அறிந்த ஈருறுப்புத் தேற்றம் இப்போது முறையாக, கூட்டு அளவுக்கிணங்கிய எண், குறை முழு எண், குறை அளவுக்கிணங்கிய எண், என்ற மூன்றினுக்கும் உண்மையாம் என நிறுவப்படுகிறது ; ஆனல் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டின் அடிப்படையில்தான், இத் தேற்றம், எல்லா அளவுக்கிணங்கிய 'படி' களுக்கும் உண்மையாகும் என்பதை எப்போதும் கவனம் வைக்க வேண்டும்.

இத் தேற்றம், கணித இயலில், ஓர் அடிப்படைத் தேற்றமாகும். $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டின் அடிப்படையில், குவிதல் தன்மை பயன்படுவதையும் நன்ருகப் புரிந்து கொண்டு கவனத்தில் வைக்க வேண்டும்.

குறிப்பு (1) : $x = 1$ ஆகி, $n > -1$ ஆனலும் ; $x = -1$ ஆகி, $n > 0$ ஆனலும், ஈருறுப்புத் தேற்றம் உண்மையாகும். ஏனெனில் இம் மதிப்புக்களுக்கு $f(n)$ ஒரு குவி தொடர் என நிறுவலாம்.

குறிப்பு (2) : $(x+y)^n$ ன் விரிவு :

$|x| > |y|$ ஆக விருப்பின் $(x+y)^n = x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$ எனவும்,

$|y| > |x|$ ஆக விருப்பின், $(x+y)^n = y^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$ எனவும் எழுதி, முறையே $\left|\frac{y}{x}\right|$ அல்லது $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ ஆகக் கொண்டு, ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

7·4 பின் வருவன, அடிக்கடி தோன்றும் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தையொட்டிய விரிவுகள் :

$$(1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)}{\underline{|2}}(-x)^2 + \ldots\ldots \propto$$

$$= 1+x+x^2+\ldots\ldots+x^r+\ldots\ldots \propto$$

$$(1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{\underline{|2}}(x)^2 + \ldots\ldots \propto$$

$$= 1-x+x^2 - \ldots\ldots + (-1)^r x^r + \ldots\ldots \propto$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{\underline{|2}}(-x)^2 + \ldots\ldots \propto$$

$$= 1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(r+1)x^r+\ldots\ldots \propto$$

$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2 \ldots\ldots + (-1)^r (r+1) x^r + \ldots\ldots \propto$$

$$(1-x)^{-3} = 1+3x+\frac{3\,.\,4}{1\,.\,2}x^2+\ldots\ldots+\frac{(r+1)(r+2)}{1\,.\,2}x^r+\ldots\ldots \propto$$

$$(1+x)^{-3} = 1-3x+\frac{3\,.\,4}{1\,.\,2}x^2+\ldots\ldots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1\,.\,2}x^r+\ldots \propto$$

$$(1-x)^{-4} = 1+4x+\frac{4\,.\,5}{1\,.\,2}x^2+\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\frac{5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}x^4+\ldots\ldots$$
$$+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1\,.\,2\,.\,3}x^r+\ldots\ldots \propto$$

$$(1+x)^{-4} = 1-4x+\frac{4\,.\,5}{1\,.\,2}x^2-\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\frac{5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}x^4+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1\,.\,2\,.\,3}x^r+\ldots\ldots \propto$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{r=1}^{\propto}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}\right\}x^r$$

$$(1+x)^{-n} = 1 + \sum_{r=1}^{\propto}(-1)^r\left\{\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}\right\}x^r$$

7·5 இரண்டு முக்கியமான விரிவுகள் :

(A) $$(1-x)^{-\frac{p}{q}} = 1 + \left(-\frac{p}{q}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)}{\underline{|2}}(-x)^2$$

$$+\frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)\left(-\frac{p}{q}-2\right)}{\underline{|3}}(-x)^3 + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \frac{p}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p\,(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p\,(p+q)\,(p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p\,(p+q)\,(p+2q)\ldots\ldots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r$$

(B) அவ்வாறே,

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{1}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p\,(p+q)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{q}\right)^2 - \frac{p\,(p+q)\,(p+2q)}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{p\,(p+q)\,(p+2q)\ldots\ldots(p+\overline{r-1}q)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{q}\right)^r$$

இவ்வமைப்புக்களை நோக்குமிடத்துப் பின் வரும் விதிகள் புலப்படும் :

(1) கீழெண்கள் முறையே $\underline{|0}$, $\underline{|1}$, $\underline{|2}$ ...... என வாகின்றன ;

(2) $\left(\frac{x}{q}\right)$ என்ற இராசி, முறையாக $\left(\frac{x}{q}\right)^0$, $\left(\frac{x}{q}\right)^1$, $\left(\frac{x}{q}\right)^2$, ... என்ற 'படி'க்கு படிப்படியாய் உயர்த்தப்பட்டிருக்கிறது ;

(3) இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து, மேலெண்கள், முறையே p, $p\,(p+q)$, $p\,(p+q)\,(p+2q)$ ...... எனவாகின்றன ;

பெருக்கும் உறுப்புக்கள், $p, (p+q), (p+2q)$ ...... என்ற கூட்டுத் தொடர் முறை அமைப்பில் உள்ளன.

(4) $(1-x)^{-p/q}$ ன் விரிவில் உள்ள எல்லா உறுப்புக்களும் கூட்டுக் குறியுள்ளன; $(1+x)^{-p/q}$ ன் விரிவில் ஒன்றை விட்டு ஒரு உறுப்பு +, – என்ற குறிகளைப் பெற்றிருக்கின்றன.

7·5.1 7·5 ல் கண்ட, இரு விரிவுகளையும் பயன்படுத்தி அவ்வாறான அமைப்பிலுள்ள (அல்லது சிறு மாறுதல்களோடு அவ்வாறான அமைப்புக்குக் கொண்டுவரக்கூடிய) முடிவிலாத் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையை நாம் அறியலாம்.

பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் இம்முறை விளக்கப்படும்.

எ-கா. (1)

$$1+\frac{3}{4}+\frac{3 \,.\, 5}{4 \,.\, 8}+\frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7}{4 \,.\, 8 \,.\, 12}+\ldots\ldots \infty$$

என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$S = 1+\frac{3}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3\,(3+2)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3\,(3+2)\,(3+2\,.\,2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$+\ldots\ldots$ என எழுதலாம்.

$(1-x)^{-p/q}$ ன் விரிவோடு இதை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் போது $p=3$

$q=2$

$\frac{x}{q}=\frac{1}{4}$ எனக் காணலாம்.

எனவே $x=\frac{q}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

எனவே $S=(1-\tfrac{1}{2})^{-p/q}$

$=(1-\tfrac{1}{2})^{-3/2}$

$=(\tfrac{1}{2})^{-3/2}$

$=2\sqrt{2}$

எ-கா. (2)

$$\frac{11\,.\,14}{10\,.\,15\,.\,20}+\frac{11\,.\,14\,.\,17}{10\,.\,15\,.\,20\,.\,25}+\frac{11\,.\,14\,.\,17\,.\,20}{10\,.\,15\,.\,20\,.\,25\,.\,30}+\ldots\ldots\infty$$

வரை கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$S=\frac{11\,.\,14}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}+\frac{11\,.\,14\,.\,17}{\lfloor 5}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}+\frac{11\,.\,14\,.\,17\,.\,20}{\lfloor 6}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}+\ldots\ldots\infty$$

இது $(1-x)^{-p/q}$ ன் விரிவுக்குரிய அமைப்பிலில்லை. எனவே அவ்வமைப்புக்குக் கொண்டுவருவோம்.

$$S\times\frac{1}{5}=\frac{11\,.\,14}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}+\frac{11\,.\,14\,.\,17}{\lfloor 5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}+\ldots\ldots$$

இன்னும் அவ்வமைப்பிலில்லை.

11, 14, 17 ...... என்ற தொடர் முறையை, இடதுபக்கம் எடுத்துச் செல்ல 5, 8, 11, 14, 17 ...... என்ற தொடர் முறை கிடைக்கும். முதலுறுப்பில் $\lfloor 4$ க்கும் $\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$ க்கும் ஒப்ப, அவ்வுறுப்பின் மேலெண்ணில் நான்கு சினைகள் இருக்க வேண்டும்; அவை 5, 8 என ஊகித்தறியலாம். ஆகவே இருபக்கங்களையும் 5 . 8 ஆல் பெருக்க,

$$5\times 8\times S\times\frac{1}{5}=\frac{5\,.\,8\,.\,11\,.\,14}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}+\frac{5\,.\,8\,.\,11\,.\,14\,.\,17}{\lfloor 5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}+\ldots$$

இன்னும் அவ்வமைப்பில் முழுதுமில்லை. சில உறுப்புக்களைச் சேர்த்தால் அவ்வமைப்புப் பெறலாம். அவ்வுறுப்புக்களாவன,

$$1,\ \frac{5}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{5}\right),\ \frac{5\,.\,8}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2},\ \frac{5\,.\,8\,.\,11}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}.$$

எனவே இவ்வுறுப்புக்களை இருபக்கங்களுக்கும் கூட்டினால்,

$$5\,.\,8\,.\,S\,.\,\frac{1}{5}+1+\frac{5}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{5\,.\,8}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}+\frac{5\,.\,8\,.\,11}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$$

$$= 1 + \frac{5}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{5 . 8}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{5 . 8 . 11}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{5 . 8 . 11 . 14}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \ldots\ldots \infty$$

இப்போது வலதுபக்கம் $(1-x)^{\frac{-p}{q}}$ என்ற விரிவமைப்பிலுள்ளது ; ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$p = 5$$

$$q = 3$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad 5 . 8 . S . \frac{1}{5} + 1 + 1 + \frac{4}{5} + \frac{44}{75} = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{-5/3}$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{5/3}$$

$$\therefore \quad 8\,S = \left(\frac{5}{2}\right)^{5/3} - \frac{254}{75}$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{8}\left[\frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{25}{4}} - \frac{254}{75}\right].$$

எ-கா. (3)

$\frac{3}{1} - \frac{3 . 5}{1 . 2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3 . 5 . 7}{1 . 2 . 3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

ஒன்று விட்டு ஒரு உறுப்புக்கள் மாற்றுக் குறியீடு பெற்றிருக்கின்றன.

$$S = \frac{3}{\lfloor 1} - \frac{3 . 5}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3 . 5 . 7}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ldots\ldots \infty$$

இது $(1+x)^{\frac{-p}{q}}$ என்ற அமைப்பிலில்லை. அவ்வமைப்புக்குக் கொண்டு வருவோம்.

இருபக்கங்களையும் $\left(\frac{1}{3}\right)$ ஆல் பெருக்குவோம்.

$$S = \frac{3}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3.5}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3.5.7}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \ldots\ldots$$

$$-S = -\frac{3}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3.5}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3.5.7}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$$

இரு பக்கங்களுக்கும் 1 கூட்டினால்,

$$1 - S = 1 - \frac{3}{\lfloor 1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3.5}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3.5.7}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$$

வலது பக்கத்தையும் $(1+x)^{-p/q}$ ன் விரிவையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$$p = 3$$

$$q = 2$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3} \text{ எனப் பெறப்படுகிறது.}$$

$$1 - S = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\therefore \quad S = 1 - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

7·6 தேற்றம் 2: $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடர், ஓர் அறக் குவியும் தொடராயிருப்பின், அத் தொடரில் முதல் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை மதிப்பு $\frac{f(x)}{1-x}$ ன் விரிவில் x^r ன் கெழுவுக்குச் சமம்.

தெ: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots \infty$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots \infty \quad [\,|x| < 1]$$

$f(x)\,(1-x)^{-1}$ ன் பெருக்குத் தொடரில் x^r ன் கெழு

$$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_r$$

= முதல் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை. குவி தொடர்களை யொட்டிய பெருக்கல் தேற்றம் இங்கு எங்கு பயன் பட்டதென்பதைத் தெளிந்தறிக.

7·7 கூட்டு முழு எண்படிக்குரிய பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (The Multinomial theorem for a positive integral index).

n கூட்டு முழு எண்ணுயின், $(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_m)^n$

$$= \Sigma \frac{\lfloor n}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \ldots\ldots \lfloor p_n} a_2^{p_1} a_1^{p_2} \ldots\ldots a_m^{p_m}$$

இங்கு, $p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_m = n$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் குட்பட்டு, $p_1, p_2, \ldots\ldots p_m$ யாவையும் 0 முதல் n வரை கூட்டு முழு எண் மதிப்பேற்கும்.

$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m)^n$ ஐ விரித் தெழுதினுல், அதில் ஒவ் வொரு உறுப்பும் n 'படி' பெற்றிருக்கும். $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots\ldots a_m^{p_n}$ என்ற உறுப்பு பெறப்படும் விதம் யாதெனில், p_1 முறைகள் a_1 ஐப் பொருக்கியும் அதன் பின்பு p_2 முறைகள் a_2 ஐப் பொருக்கியும் இவ்வாருகப் பெறப்படும். இப்படிப்பட்ட பெருக்கிய உறுப்பை,

$$ {}_nC_{p_1} \times {}_{n-p_1}C_{p_2} \times {}_{n-(p_1+p_2)}C_{p_3} \times \ldots\ldots\ldots \times {}_{n-(p_1+p_2+\ldots\ldots p_{m-1})}C_{p_m}$$

வெவ்வேறு விதங்களில் பெறலாம், அதாவது

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \lfloor p_3 \ldots\ldots \lfloor p_m}.$$

இவ்வாருக இத் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

7·7.1 அளவுக் கிணங்கிய படிக்குரிய பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (The Multinomial theorem for a rational index).

n ஓர் அளவுக் கிணங்கிய எண் :

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots a_mx^m)^n$

$$= a_0^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \ldots\ldots + \frac{a_m}{a_0}x^m\right)^n$$

$$= a_0^n \left(1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_mx^m\right)^n$$

எனக் கொள்வோம்.

$$= a_0^n \left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n_r}{\underline{|r}} \left(p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_mx^m\right)^r\right\}$$

எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $| p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_mx^m | < 1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

7·7.2 தேற்றம் 3 :

$| x | < l$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரும்

$| x | < m$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\phi(x) \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரும் அறக் குவியும் தொடர்களாகுமாயின்,

$a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots\ldots + a_rb_0$ என்ற கோவையின் கூட்டுத் தொகை, $f(x) \cdot \phi(x)$ ன் பெருக்குத் தொகையில் x^r ன் கெழுவுக்குச் சமம்.

தெ: $| x | < l$; $| x | < m$; என்ற கட்டுப்பாடுகளுக் குட்பட்டு, குவி தொடர் பெருக்கல் தேற்றத்தின் படி,

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ (a_0b_r + a_1b_{r-1} + \ldots\ldots + a_rb_0)x^r + \ldots\ldots$$

என்ற தொடரும் ஓர் அறக்குவியும் தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $f(x) \cdot \phi(x)$ க்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, $f(x) \cdot \phi(x)$ என்ற பெருக்குத் தொகையை ஒரு குவி தொடராக விரித்தெழுதினுல், வலுத்தொடர் முற்றொருமைப்படி, நாம் வேண்டுவது நிறுவப்படுகிறது. (6·8,4.1 காண்க).

கிளைத்தேற்றம் : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots$ ஓர் அறவும் குவி தொடராயின், முதல் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை, (அதாவது $(a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_r)$

$\dfrac{f(x)}{1-x}$ ன் விரிவில் x^r ன் கெழுவுக்குச் சமமாகும்.

$\phi(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1-x}$ எனக் கொள்க.

அப்போது $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots\ldots = b_r = \ldots\ldots = 1.$

எனவே முதல் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையான $a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_r$ என்பது, $\dfrac{f(x)}{1-x}$ ன் விரிவில் x^r ன் கெழுவுக்குச் சமம். எனவே, 7.6-ல் கண்டது இங்கு ஒரு சிறப்புக் கிளைத் தேற்றமாகப் பெறப்படுகிறது.

பயிற்சி 7 (i)

பின்வரும் தொடர்கள் கந்தழிவரை கூட்டுத் தொகை காண்க.

1. $1 + \dfrac{1}{\underline{|1}} \cdot \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{1.3}{\underline{|2}} \cdot \dfrac{3^2}{2^6} + \dfrac{1.3.5}{\underline{|3}} \cdot \dfrac{3^3}{2^9} + \ldots\ldots$

2. $1 + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3.5}{4.8} + \dfrac{3.5.7}{4.8.12} + \ldots\ldots$

3. $1 + 2 \cdot \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{2.5}{1.2} \cdot \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{2.5.8}{1.2.3} \cdot \dfrac{1}{3^6} + \ldots\ldots$

4. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1.3}{3.6} + \dfrac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots\ldots$

5. $\dfrac{3}{2.4} + \dfrac{3.4}{2.4.6} + \dfrac{3.4.5}{2.4.6.8} + \ldots\ldots$

6. $\dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6.12} + \dfrac{5.8}{6.12.18} + \dfrac{5.8.11}{6.12.18.24} + \ldots\ldots$

7. $1 + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2.5}{9.18} + \dfrac{2.5.8}{9.18.27} + \ldots\ldots$

8. $1 - \frac{1}{6} + \frac{1 . 3}{6 . 12} - \frac{1 . 3 . 5}{6 . 12 . 18} + \ldots\ldots$

9. $\Sigma \frac{1 . 4 . 7 \ldots\ldots (3n - 2)}{\underline{|n}} \frac{1}{4^n}$

10. $\frac{1}{4} + \frac{1 . 5}{4 . 8} + \frac{1 . 5 . 7}{4 . 8 . 12} + \frac{1 . 5 . 7 . 9}{4 . 8 . 12 . 16} + \ldots\ldots$

11. $1 - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} + \frac{1 . 3}{2 . 4} . \frac{1}{2^2} - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} . \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$

12. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1 . 3}{4 . 8} - \frac{1 . 3 . 5}{4 . 8 . 12} + \ldots\ldots$

13. $\frac{3 . 5}{3 . 6} + \frac{3 . 5 . 7}{3 . 6 . 9} + \frac{3 . 5 . 7 . 9}{3 . 6 . 9 . 12} + \ldots\ldots$

14. $\frac{7}{72} + \frac{7 . 28}{72 . 96} + \frac{7 . 28 . 49}{72 . 96 . 120} + \ldots\ldots$

15. $1 - \frac{1^2}{2} . \frac{1}{2} + \frac{1 . 3^2}{2 . 4} . \frac{1}{2^2} - \frac{1 . 3 . 5^2}{2 . 4 . 6} . \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$

தோராய மதிப்புக்கள் :

7·8 $|x|$ மிகச் சிறிய தாயிருப்பின், $|x|^2, |x|^3 \ldots\ldots$ என் மதிப்புக்கள் குறைந்துகொண்டேபோகும். அவை, பொருட்படுத்தத் தேவையில்லாத அளவுக்குக் குறையலாம். ஆகவே, அந்த நிலையில், ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் உதவி கொண்டு, எந்த அளவுக்கு நமக்குத் தோராய மதிப்புத் தேவைப்படுகிறதோ, அந்த அளவிற்கு $(1+x)^n$ ஐ விரித்தெழுதி, தோராய மதிப்புக்கள் பெறலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் இதை விளக்கும்.

எ-கா. (1) l ஒடு ஒப்பிடும் போது c மிகக் குறைவானால், $\left(\frac{l}{l+c}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3c^2}{4b^2}$ (தோராயமாக). எனக் காட்டுக. இங்குக் கொடுக்கப்பட்டது $\frac{c}{l}$ மிகச் சிறியதாம்.

$$\left(\frac{l}{l+c}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{l}{l\left(1+\frac{c}{l}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{l}{l\left(1-\frac{c}{l}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{c}{l}\right)^{-1/2} + \left(1-\frac{c}{l}\right)^{-1/2}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{c}{l} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(\frac{c^2}{l^2}\right) + \ldots\ldots$$

$$+1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{c}{l}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(\frac{c^2}{l^2}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{c}{2l} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{l^2} + \ldots\ldots + 1 + \frac{c}{2l} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{l^2} + \ldots\ldots$$

$$= 2 + \frac{3c^2}{4l^2}$$ (தோராயமாக)

எ–கா. (2) x சிறியதாயின் $\frac{\sqrt{1+2x+2x^2}}{1-3x} = 1+4x+\frac{25}{2}x^2$ (தோராயமாக) எனக் காட்டுக.

$$\frac{\sqrt{1+2x+2x^2}}{1-3x} = (1+\overline{2x+2x^2})^{1/2}(1-3x)^{-1}$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{2}(2x+2x^2) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(2x+2x^2)^2 + \ldots\ldots\right\}$$
$$\times (1+3x+9x^2+\ldots\ldots)$$

$$= \left(1+x+x^2-\frac{1}{2}x^2\ldots\ldots\right)\left(1+3x+9x^2+\ldots\ldots\right)$$

$$= 1+x+3x+x^2+3x^2+9x^2-\frac{1}{2}x^2$$

$$= 1+4x+\frac{25}{2}x^2$$ (தோராயமாக).

மேலே கொள்ளப் பட்ட, இரு எடுத்துக் காட்டுகளிலும், வேண்டிய தோராய மதிப்பு இரண்டாவது 'படி' க்கு மட்டும் தேவைப்படுவதால், விரிவுகள் யாவும் இரு 'படி'க்கே கொள்ளப்பட்டன; மூன்று 'படி' அதற்கு மேற்பட்ட 'படி' களுக்கு விரிவு எடுத்துச் செல்லப்பட வில்லை. இந்த முறையை நாம் கவனமாகக் கையாண்டால் தேவைப் படாத சுருக்கல் வேலையை விட்டு விடலாம்.

எ-கா. (3) $\left(\frac{0\cdot998}{1\cdot002}\right)^{-2/3}$ ன் மதிப்பை, நான்கு பதின் பகுப்பு இடம் வரை காண்க.

$$\left(\frac{0\cdot998}{1\cdot002}\right)^{-2/3} = \left(\frac{1 - \cdot002}{1 + \cdot002}\right)^{-2/3}$$

$$= \left(\frac{1 + \cdot002}{1 - \cdot002}\right)^{2/3}$$

$$= (1 + \cdot002)^{2/3}\,(1 - \cdot002)^{-2/3}$$

$$\times \left\{1 + \frac{2}{3}(\cdot002) - \frac{1}{9}(\cdot000004) + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \left\{1 + \frac{2}{3}(\cdot002) + \frac{1}{9}(\cdot000004) + \ldots\ldots\right\}$$

$$= 1 + \frac{4}{3}(\cdot002)$$

$$= 1 + \cdot00266$$

$$= 1\cdot0027.$$

பயிற்சி 7 (ii)

1. பின் வருவனவற்றில், x மிகச் சிறியதானால், இடது கைப்புறக் கோவையின் தோராய மதிப்பு வலது கைப் புறத்தில் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. அது சரியென நிறுவுக.

(i) $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{7}{64}x^4$ (செ.ப.க.)

(ii) $\frac{(1+x)^{1/2}(4-3x)^{3/2}}{(8+5x)^{1/3}} = 4 - \frac{10}{3}x$ (செ.ப.க.)

(iii) $\frac{(1-3x)^{-2/3}+(1-4x)^{-3/4}}{(1-3x)^{-1/3}+(1-4x)^{-1/4}} = 1 + \frac{3}{2}x + 4x^2$ (செ.ப.க.)

(iv) $\frac{(1+x+x^2)(1+x)^2}{1-x+x^2} = 1+4x+7x^2+6x^3$ (செ.ப.க.)

2. x-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாயின்,

$$\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+9} = \frac{7}{2x} \text{(தோராய மதிப்பு)}$$

என நிறுவுக (தி.ப.க.)

3. x-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு நெருக்கமாக விருப்பின்,

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$ ஏறக்குறைய 4 என நிறுவுக.

4. எல்லை $_{x \to 2a}$ $\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a} + \sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4x^2}}\right)$ என்ன என அறிக.

5. p அல்லது q வுடன் ஒப்பிடும் போது $p - q$ ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாயின்,

$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/n} = \text{(தோராயமாக)} \frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ என நிறுவுக.

இதைப் பயன்படுத்தி, $\sqrt[7]{\frac{131}{133}}$ ன் மதிப்பறிக. (செ.ப.க.)

6. $(1{\cdot}01)^{1/2} - (0{\cdot}99)^{1/2}$ ன் மதிப்பை 6 பதின் பின்ன இடங் களுக்குக் காண்க.

7. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ன் விரிவை, x^5 வரை எழுதுக.

8. $H = \frac{M}{2l}\left[\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{(x+l)^2}\right]$ என்பது காந்த இயலில் ஒரு வாய்பாடு.

x ஒடு ஒப்பிடும்போது l மிகச் சிறிதானல், H ன் தோராய மதிப்பு $\frac{2M}{x^3}$ என நிறுவுக.

9. x மிகச் சிறியதானல், $\sqrt{1+x}$ ன் தோராய மதிப்பை $\frac{2+x}{4} + \frac{1+x}{1-x}$ எனத் தோராயமாகக் கொள்வதில் ஏற்படும் குறைபாடு ஏறக் குறைய $\frac{x^4}{2^7}$ என நிறுவுக.

10. $a < n^5$ ஆனல், $(n^5+a)^{1/5}$ ன் விரிவை முதல் நான்கு உறுப்புக்கள் வரை எழுதுக. அதையொட்டி $(n^5+a)^{1/5}$ ன் தோராய மதிப்பு $n \cdot \frac{5n^5+3a}{5n^5+2a}$ என நிறுவுக. அதன் வழியாக, $(100100)^{1/5} \backsim \frac{50030}{5002}$ என்ற வேறுபாடு $\frac{1}{10^{10}}$ என்ற அளவில் உள்ளது என நிறுவுக.

7·8.1 பல்வேறு எடுத்துக் காட்டுகள்:

எ-கா. (1) $\frac{4-x}{(2-x)(1-x)^2}$ ஐ x ன் 'படி'கள் ஏறு வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதுக; அவ்விரிவில் x^n ன் கெழு காண்க; x ன் எம் மதிப்புக்களுக்கு இவ் விரிவு உண்மையாகும் எனக் கூறுக.

முதலில் $\frac{4-x}{(2-x)(1-x)^2}$ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக்குவோம் (Partial fractions).

$$\frac{4-x}{(2-x)(1-x)^2} \equiv \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2}$$ எனக் கொண்டு, A, B, C ஐக் கண்டு பிடிப்போம்.

$$4-x \equiv A(1-x)^2 + B(2-x)(1-x) + C(2-x)$$
முறைப்படி செய்தால்,

$$A=2;\quad B=-2;\quad C=3.$$

$$\therefore\quad \frac{4-x}{(2-x)(1-x)^2}=\frac{2}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}-\frac{2}{1-x}+\frac{3}{(1-x)^2}$$

$$=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}-2(1-x)^{-1}+3(1-x)^{-2}$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\ldots\right)$$

$$-2(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots)$$

$$+3(1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(n+1)x^n+\ldots\ldots)$$

x^n ன் கெழு $= \dfrac{1}{2^n}-2+3(n+1)$

$$=3n+1+\frac{1}{2^n}$$

ஈருறுப்புத் தேற்றக் கட்டுப்பாட்டின் படி $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1;$ $|x|<1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore\quad |x|<2;\ |x|<1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore\quad |x|<1$ என்ற மதிப்புக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும்.

எ–கா. (2) $\dfrac{a+bx}{(1-x)^2}$ ன் விரிவில் n வது உறுப்பு $(3n-2)x^{n-1}$ ஆனல், a, b ன் மதிப்பறிக.

$$(a+bx)(1-x)^{-2}=(a+bx)(1+2x+3x^2+\ldots\ldots$$
$$+nx^{n-1}+\overline{n+1}\,x^n+\ldots\ldots)$$

வலது கைப்புறப் பெருக்கல் விரிவில் n வது உறுப்பு

x^{n-1} ன் கெழு

$$= an + b(n-1)$$

$$= (a+b)\,n - b$$

$$= 3n - 2 \text{ (கொடுக்கப்பட்டது).}$$

$\therefore\quad b = 2;\ a = 1$ எனப் பெறப்படும்.

எ-கா. (3) $\dfrac{1}{1-2x-3x^2}$ ன் விரிவில், முதல் n உறுப்புக் களுடைய, கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை யறிக.

7·6 ன் படி, $\dfrac{1}{1-2x-3x^2}$ ன் விரிவு $a_0+a_1x+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots$ எனக் கொண்டால், $(a_0+a_1+\ldots\ldots+a_{n-1})$ ன் கூட்டுத் தொகை $\dfrac{1}{1-2x-3x^2}\times\dfrac{1}{1-x}$ ன் விரிவில் x^{n-1} ன் கெழுவாகும்.

எனவே $\dfrac{1}{1-2x-3x^2}\times\dfrac{1}{1-x}$ ன் விரிவில் x^{n-1} ன் கெழு காணவேண்டும். எனவே,

$$\frac{1}{(1-2x-3x^2)(1-x)} \equiv \frac{1}{(1-3x)(1+x)(1-x)}$$

$$\equiv \frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{1-x}$$

எனக் கொண்டு A, B, C காண்போம்.

முறைப்படி, $A = \dfrac{9}{8};\ B = \dfrac{1}{8};\ C = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ வேண்டிய பகுதிப் பின்னம்

$$= \frac{9}{8(1-3x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1}{4(1-x)}$$

$$= \frac{9}{8}(1-3x)^{-1}+\frac{1}{8}(1+x)^{-1}-\frac{1}{4}(1-x)^{-1}$$

$$= \frac{9}{8}\left(1+3x+3^2x^2+\ldots\ldots+3^{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{8}\ (1-x+x^2-\ \ldots\ldots+(-1)^{n-1}\,x^{n-1}+\ldots\ldots)$$

$$-\frac{1}{4}\ (1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}+\ldots\ldots)$$

இங்கு x^{n-1} ன் கெழு $= \frac{9}{8}\,.\,3^{n-1}+\frac{1}{8}(-1)^{n-1}-\frac{1}{4}$

$$=\frac{1}{8}\ [3^{n+1}+(-1)^{n-1}-2]$$

இதுவே $\frac{1}{1-2x-3x^2}$ ன் விரிவில் முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

பயிற்சி 7 (iii)

1. $\frac{(1+2x)^3}{(1-x)^2}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழு $27(n-1)$ என நிறுவுக $(n > 2)$.

2. பின் வருவனவற்றைப் பகுதிப் பின்னங்களாக்கி அவைகளின் விரிவில் x^n ன் கெழு காண்க:

(i) $\frac{x}{(1+2x)^2\,(1-3x)}$ (ii) $\frac{x+4}{x^2+5x+6}$

(iii) $\frac{x+1}{(x-1)^2\,(x-2)}$ (iv) $\frac{1-x-x^2}{(1-2x)\,(1-x^2)}$

(v) $\frac{1}{(1-x)\,(1-2x)\,(1-3x)}$ (vi) $\frac{(3x+2)\,(4x+5)}{(x+6)\,(5x+6)}$

(vii) $\frac{x}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}$

3. பின் வருவனவற்றின் விரிவில் x^n ன் கெழு காண்க.

(i) $\frac{(1+2x)^n}{1-x}$ (ii) $\frac{(1+x)}{(1-x)^m}$

4. $\dfrac{(1-3x)^n}{1-4x}$ ன் விரிவில் x^{n+r} ன் கெழு 4^r என நிறுவுக.

5. $\dfrac{(1+x^2)^n}{(1-x)^3}$ ன் விரிவில் x^{2n} ன் கெழு $2^{n-1}(n^2+4n+2)$ என நிறுவுக.

6. $\dfrac{p+qx}{(1-x)^2}$ ன் விரிவில் $(n+1)$ வது உறுப்பு $(3n+1)x^n$ ஆனால் p, q என்ன?

7. $\dfrac{p+qx+rx^2}{(1-x)^3}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழு n^2+1 ஆனால் p, q, r என்ன?

8. $p+\dfrac{q}{2x+1}-\dfrac{r}{1-3x^2}$ ன் விரிவு $1+x+2x^2+ax^3+\ldots\ldots$ என எழுத முடியுமானால் p, q, r என்ன?

9. n ன் மதிப்பு $3r$, $3r-1$, $3r+1$ என்ற மதிப்புக்களை யொட்டி $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழு முறையே 1, 0, -1 என நிறுவுக.

10. n ன் மதிப்பு $4r$, $4r+1$ என்ற மதிப்புக்களை யொட்டி $\dfrac{1}{1-x+x^2-x^3}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழு, 1 எனவும், $4r+2$, $4r+3$ என்ற மதிப்புக்களை யொட்டி x^n ன் கெழு 0 எனவும் நிறுவுக.

7·8.2 முற்றொருமைகள்: ஏதாமொரு x ன் சார்பு, இரண்டு வெவ்வேறு முறைகளில் குவி தொடர்களாக விரித் தெழுதப் படுமானால், அத்தொடர்களில் ஒரே படியுள்ள x ன் கெழுக்கள் சமம். (ஆனால் விரித்தெழுதப்படும் தொடர்கள் கட்டாயம் குவி தொடர்களாயிருத்தல் வேண்டும்.)

இவ்வுண்மையை நாம் நிறுவாமலே ஏற்றுக் கொண்டு, பின்னர் சில எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள் செய்வோம்.

7·8.3. $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ ன் ஈவுத் தொகையை $(a + b)$, ab, இவைகளின் வாயிலாகவே விரித்தெழுதலாம் என்பதை இப்போது காண்போம்.

$$\frac{1}{1 - ax} - \frac{1}{1 - bx} \equiv \frac{(a - b)\,x}{1 - px + qx^2}$$

என்றெழுதலாம். இங்கு $p = a + b$; $q = ab$

$$\text{எனவே } \frac{x}{1 - px + qx^2} \equiv \frac{1}{a - b}\left[(1 - ax)^{-1} - (1 - bx)^{-1}\right]$$

$$\equiv \frac{1}{a - b}\Big[(a - b)\,x + (a^2 - b^2)\,x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ (a^n - b^n)\,x^n + \ldots\ldots\Big] \quad \text{(A)}$$

இங்கு வலது கைப்புறம், x^n ன் கெழு $= \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$

$\dfrac{x}{1 - px + qx^2}$ ல் x^n ன் கெழு ;

$= \dfrac{1}{1 - px + qx^2}$ ல் x^{n-1} ன் கெழு ;

$= [1 - x(p - qx)]^{-1}$ ல் x^{n-1} ன் கெழு ;

அதாவது $1 + x(p - qx) + x^2(p - qx)^2 + \ldots\ldots$

$+ x^{n-1}(p - qx)^{n-1} \ldots\ldots$ ல் x^{n-1} ன் கெழு.

இங்கு x^{n-1} ன் கெழு, $x^{n-1}(p - qx)^{n-1}$ என்ற உறுப்புக்குப் பிற்பட்டுத் தோன்றும் உறுப்புக்களுக்கு அப்பால் இருக்க முடியாது. இக் கெழுக்களைப் பின் வருமாறு தொகுத்தெழுதலாம்.

$x^{n-1}(p - qx)^{n-1}$ ல் x^{n-1} ன் கெழு $= p^{n-1}$

$x^{n-2}(p - qx)^{n-2}$ ல் ,, $= -\,{}_{n-2}C_1\, p^{n-3}\, q$

$x^{n-3}(p-qx)^{n-3}$ ல் ,, $= {}_{n-3}C_2\, p^{n-5}\, q^2$

... ...

$x^{n-r}(p-qx)^{n-r}$ல் ,,

$$= (-1)^{r-1}\, {}_{n-r}C_{r-1}\, p^{n-2r+1}\, q^{r-1}$$

இவ்வாருக $\dfrac{1}{1-px+qx^2}$ ல் x^{n-1} ன் கெழு பெறப்படும்.

எனவே,

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = p^{n-1} - {}_{n-2}C_1\, p^{n-3}q + {}_{n-3}C_2\, p^{n-5}q^2 \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{r-1}\, {}_{n-r}C_{r-1}\, p^{n-2r+1}\, q^{r-1} + \ldots\ldots$$

$$= (a+b)^{n-1} - {}_{n-2}C_1\,(a+b)^{n-3}\, ab$$

$$+ {}_{n-3}C_2\,(a+b)^{n-5}\, a^2b^2 - {}_{n-4}C_3\,(a+b)^{n-7}\, a^3b^3$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1}\, {}_{n-r}C_{r-1}\,(a+b)^{n-2r+1} a^{r-1}\, b^{r-1} + \ldots\ldots$$

சிறப்பாக, இதைப் பயன்படுத்திஞல்,

1. $\dfrac{a^3-b^3}{a-b} = (a+b)^2 - {}_1C_1\,(a+b)^0\, ab$

$$= (a+b)^2 - ab$$

$$= a^2 + ab + b^2.$$

2. $\dfrac{a^4-b^4}{a-b} = (a+b)^3 - {}_2C_1\,(a+b)\, ab$

$$= (a+b)^3 - 2\,(a+b)\, ab.$$

3. $\dfrac{a^5-b^5}{a-b} = (a+b)^4 - {}_3C_1\,(a+b)^2\, ab + {}_2C_2\,(a+b)^0\, a^2b^2$

$$= (a+b)^4 - 3\,(a+b)^2\, ab + a^2b^2.$$

எ-கா. (1)

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுஞல்,

$$1 - \frac{n\,(n+1)}{1^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n+1)\,(n+2)}{1^2\,.\,2^2}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2 . 2^2 . 3^2}+ \ldots\ldots (n+1)$$

உறுப்புக்கள் வரை, கூட்டுத் தொகை $(-1)^n$ என நிறுவுக.

7·8 ல் கூறிய முடிவை இக் கணக்கில் பயன்படுத்துவோம்.

$$(1-x)^{-n+1}=1+\frac{(n+1)}{1}x+\frac{(n+1)(n+2)}{1 . 2}x^2$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 . 2 . 3}x^3+\ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

$$(x-1)^n=x^n-\frac{n}{1}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1 . 2}x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^{n-3}$$
$$+\ldots\ldots+(-1)^n \qquad \text{(B)}$$

$|x|<1$ ஆனல் (A) ஒரு குவி தொடர்.

(B) எம் மதிப்புக்கும் ஒரு அளவான தொகையுடையது.

(A) × (B) ஐப் பெருக்கி, அப் பெருக்குத் தொகையில் x^n ன் கெழு என்னவெனில்

$$1-\frac{n(n+1)}{1^2}+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1^2 . 2^2}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2 . 2^2 . 3^2}+\ldots\ldots \qquad \text{(C)}$$

(B) தொடர், முடிவுள்ள தொடர். அதில் $(n+1)$ உறுப்புக்களே உள்ளன; கடைசியுறுப்பான $(-1)^n$ ஐ, (A) தொடரிலுள்ள x^n ன் கெழுவால் பெருக்கினல் (C) தொடரின் கடைசி உறுப்பு (அதாவது $\overline{n+1}$ வது உறுப்பு) பெறப்படும்.

எனவே 7·8.2 ல் கூறியபடி, (C) தொடரின் கூட்டுத் தொகை $=(1-x)^{-(n+1)}\times(x-1)^n$ ல் x^n ன் கெழுவாகும்.

$$(1-x)^{-(n+1)}(x-1)^n=(-1)^n(1-x)^n(1-x)^{-n-1}$$
$$=(-1)^n(1-x)^{-1}$$
$$=(-1)^n(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots)$$

எனவே இங்கு x^n ன் கெழு $=(-1)^n$

$\therefore$ (C) தொடரின் கூட்டுத் தொகை $=(-1)^n$

பயிற்சி 7 (iv)

1. $(1-x)^{-n}$ ன் விரிவில் முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை $\dfrac{\lfloor (2n-1)}{\lfloor n \lfloor n-1}$ என நிறுவுக.

2. $\dfrac{1}{(1+x)(1-3x)}$ ன் விரிவில் முதல் r கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை $\dfrac{1}{8}\,[3^{r+1}+(-1)^{r-1}-2]$ என நிறுவுக.

3. $\dfrac{1}{(1-x)(1+2x)(1-2x)}$ ன் விரிவில் முதல் $(2r-1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை $\dfrac{1}{9}\,[5\,(2^{2r}-1)-6r]$ என நிறுவுக.

4. $\dfrac{1}{1-ax+bx^2}=1+p_1x+p_2x^2+\ \ldots\ldots$ ஆனால்

$1+p_1+p_2+\ \ldots\ldots\ +p_n=\dfrac{1+bp_n-p_{n+1}}{1-a+b}$ என நிறுவுக.

5. மேற் கூறிய கணக்கில்

$$p_n=a^n-(n-1)\,a^{n-2}b+\frac{(n-2)\,(n-3)}{\lfloor 2}\,a^{n-4}b^2+\ \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

அதை அடுத்து, α, β என்பவை $t^2-at+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால்,

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=a^{n-1}-\frac{n-2}{\lfloor 1}\,a^{n-3}b+\frac{(n-3)\,(n-4)}{\lfloor 2}\,a^{n-5}b^2\ \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

6. $\dfrac{(1-3x)^n}{(1-x)}$ ன் விரிவில் முதல் $(n+r)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை $(-1)^n\,2^{n-1}\,(2r-n)$ என நிறுவுக.

7. $1 - \frac{n^2}{1 . 2} + \frac{n^2 (n^2 - 1^2)}{1^2 . 2^2} - \frac{n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots\ldots = 0$

என நிறுவுக. (n கூட்டு முழு எண்)

8. $n - \frac{n (n^2 - 1^2)}{\underline{|1} . \underline{|2}} + \frac{n (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{\underline{|2} . \underline{|3}} \ldots\ldots = (-1)^{n-1}$

என நிறுவுக. (n கூட்டு முழு எண்)

9. n ஒற்றைப் படை அல்லது இரட்டைப் படை முழு எண் என்பதை யொட்டி,

$1 - n^2 + \frac{n^2 (n-1)^2}{(\underline{|2})^2} - \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2}{(\underline{|3})^2} + \ldots\ldots (n+1)$

உறுப்புக்கள் வரை கூட்டுத் தொகை முறையே $= 0$

அல்லது $(-1)^n \frac{\underline{|n}}{\left(\underline{|\frac{n}{2}}\right)^2}$ என நிறுவுக. (செ. ப. க)

10. $f(n) = 1 + \frac{n}{1} . \frac{1}{2} + \frac{n(n+1)}{1 . 2} . \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots$ n உறுப்புக்கள் வரை, எனின்,

$f(n) = 2 f(n-1)$ எனவும்

$f(n) = 2^{n-1}$ எனவும் நிறுவுக. (செ. ப. க)

11. $(1-x)^{-3/2} . (1-x)^{-1} \equiv (1-x)^{-5/2}$ என்ற முற்றொருமை கொண்டு,

$1 + \frac{3}{2} + \frac{3 . 5}{2 . 4} + \frac{3 . 5 . 7}{2 . 4 . 6} + \ldots\ldots (n+1)$ உறுப்புக்கள்

வரை $\frac{5 . 7 . 9 \ldots\ldots (2n+3)}{\underline{|n}\ (2)^n}$ என நிறுவுக.

12. $2^n - {}_{n-1}C_1 . 2^{n-2} + {}_{n-2}C_2 . 2^{n-4} \ldots\ldots = n+1$ என நிறுவுக.

13. $1 - {}_{3n}C_1 + {}_{3n-1}C_2 - {}_{3n-2}C_3 + \ldots\ldots = (-1)^n$ என நிறுவுக.

14. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \Sigma a_r x^r$ எனக் கொண்டால்

$a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \ldots\ldots + a_0 a_n = 1$ என நிறுவுக.

7.9.1 சமபடிப் பெருக்கங்கள் (Homogeneous Products) :

a, b என்ற இராசிகளைக் கொண்டு, a^3, a^2b, ab^2, b^3 என முப்படிப் பெருக்கங்கள் அமைக்கலாம் ; a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4 என நாற்படிப் பெருக்கங்கள் அமைக்கலாம். இவை முறையே முச்சமபடி, நாற்சமபடிப் பெருக்கங்கள் எனப்படும். (Homogeneous products of the third order, fourth order or dimension)

7·9.2 r – சமபடிப் பெருக்கங்கள் (Homogeneous products of the r th order or dimension) :

பொதுவாக $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots\ldots a_m^{m_n}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள பெருக்கங்களில் $m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n=r$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவுமாயின், அவ்விதப் பெருக்கங்கள் ($a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ஐ ஒட்டிய r–சமபடிப் பெருக்கங்கள் எனப்படும் ; இங்கு m_1, m_2 ...... m_n என்பவை யாவும் கூட்டு முழு எண்கள், அல்லது ஒன்றே, சிலவோ பூச்சிய மதிப்பையும் பெறலாம்)-

7·9.2.1 சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை. (The number of homogeneous products) :

7.9.1 ல் கண்டபடி a^3, a^2b, ab^2, b^3 என a, b என்ற இராசிகளைக் கொண்டு நான்கு முச்சமபடிப் பெருக்கங்கள் காணலாம். இவ்வெண்ணிக்கை ${}_2H_3=4$ என எழுதப்படும்.

பொதுவாக n இராசிகளைக் கொண்டு காணக் கூடிய r–சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை ${}_nH_r$ எனக் குறிக்கப்படும் (படிப்பது n, H, r என).

7 9.2.2 தேற்றம் : 4

n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கக் கூடிய r-சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}$

$$\left[\text{அதாவது } {}_nH_r=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}\right.$$

$$\left.=\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r \; \lfloor n-1}\right]$$

தெ : $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற n இராசிகளைக் கொள்க.

இப்போது

$(1+a_1x+a_1^2x^2\ldots\ldots)(1+a_2x+a_2^2x^2+\ldots)\ldots(1+a_nx+a_n^2x^2+\ldots\ldots)$ $\equiv 1+S_1x+S_2x^2+\ldots\ldots+S_rx^r+\ldots\ldots$ என எழுதலாம். இங்கு S_r என்பது $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ என்ற n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட, எல்லா r-சமபடிப் பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

இங்கு $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 1$ என ஈடு செய்தால் S_r என்ற கோவையிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை பெறப்படும்; அதாவது இந்த ஈடு செய்தால் ${}_nH_r$ ன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

$\therefore\ (1+x+x^2+\ldots.)(1+x+x^2\ldots.)\ (1+x+x^2+\ldots.)$ என n சினைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= 1 + {}_nH_1x + {}_nH_2x^2 + \ldots\ldots + {}_nH_rx^r + \ldots\ldots$$

எனப் பெறப்படும்.

$\therefore\ {}_nH_r = (1+x+x^2+\ldots\ldots)^n$ ல் உள்ள x^r ன் கெழுவாகும்.

$$\therefore\ {}_nH_r = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$ ல் உள்ள x^r ன் கெழுவாகும்.

அதாவது $(1-x)^{-n}$ ல் உள்ள x^r ன் கெழு,

ஆனல்

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}x^r + \ldots\ldots$$

$\therefore\ {}_nH_r = (1-x)^{-n}$ ல் உள்ள x^r ன் கெழு

$$= \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}$$
$$= \frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r}\ \underline{|n-1}}$$
$$= {}_{n+r-1}C_r$$
$$= {}_{n+r-1}C_{n-1}$$

7·9.2.3 கிளைத் தேற்றங்கள் :

(1) $m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n = r$ என்ற கட்டுப்பாட்டில், $a_1^{m_1} . a_2^{m_2} \ldots\ldots a_n^{m_n}$ என்பது $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற n இராசிகளைக் கொண்டு, அமைக்கப்பட்ட r-படி பெற்ற ஒரு உறுப்பு. ஆகவே அதை $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ என்ற இராசிகளில், a_1 என்பது m_1 முறையும், a_2 என்பது m_2 முறையும் ...... இவ்வாருக a_n என்பது m_n முறையும் தோன்றும் வகையில் r இராசிகளின் சேர்வு (Combination) எனக் கூறலாம்.

$\therefore$ ${}_n\mathrm{H}_r$ ன் எண் மதிப்பு யாதெனில், $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற எழுத்துக்களைத் திரும்பத் திரும்ப எத்தனை முறைகள் வேண்டுமாஞலும் பயன்படுத்தி r எழுத்துக்கள் சேர்ப்பதற்குச் சமமாகும்.

(2) $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)^r$ ன் விரிவில் ${}_n\mathrm{H}_r$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

(3) ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n-1}\mathrm{H}_r + {}_n\mathrm{H}_{r-1}$.

(குறிப்பு: இக்கிளைத் தேற்றம் ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r-1}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது என்பதைக் கவனிக்கவும்).

தெரிப்பு முறையும் ஏறக்குறைய அவ்வாறே அமையும்.

தெ: ${}_n\mathrm{H}_r$ என்ற எண் மதிப்பைப் பின் வருமாறு இரு பிரிவுகளாகக் கொள்ளலாம்.

(1) ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து a_k என்பது ஒரு முறை கூடத் தோன்ருத r-படிப் பெருக்கங்கள்;

(2) அக்குறிப்பிட்ட எழுத்து a_k என்பது குறைந்தது ஒரு முறையாவது தோன்றும் r-படிப் பெருக்கங்கள்.

a_k ஒரு முறை கூடத் தோன்ருத பெருக்கங்களைக் காண: a_k ஐ விலக்கி மீதி $(n - 1)$ எழுத்துக்கள் மட்டும் தோன்றும் r-படிப் பெருக்கங்கள் $= {}_{n-1}\mathrm{H}_r$ என்பது விளக்கம்.

இரண்டாவது a_k ஒரு முறையேனும் தோன்றும் பெருக்கங்களைக் காண:

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_k, \ldots\ldots a_n$ என்ற n எழுத்துக்களாலான $(r-1)$ படி உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ${}_n\mathrm{H}_{r-1}$. இவை ஒவ்வொன்

றையும் a_k ஆல் பெருக்கினுல், a_k குறைந்தது ஒரு முறை யாவது தோன்றும் r-படிப்பெருக்கங்கள் கிடைக்கும். ஆகவே குறிப்பிட்ட a_k, ஒரு முறையேனும் தோன்றும் r-படிப் பெருக் கங்களின் எண்ணிக்கை $= {}_nH_{r-1}$.

$\therefore \quad {}_nH_r = {}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1}$ என்பது நிறுவப்படுகிறது.

மாற்று முறைத் தெரிப்பு :

${}_nH_r$ ன் மதிப்பு வாய்பாடு கொண்டும் இதை நிறுவலாம்.

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1} &= \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\ldots\ldots(n+r-2)}{\underline{|r}} \\
&\quad + \frac{n\,(n+1)\ldots\ldots(n+r-2)}{\underline{|r-1}} \\
&= \frac{n\,(n+1)\ldots\ldots(n+r-2)}{\underline{|r}}\left[(n-1)+r\right] \\
&= \frac{n\,(n+1)\ldots\ldots(n+r-2)(n+r-1)}{\underline{|r}}.
\end{aligned}
$$

$= {}_nH_r$ என நிறுவப்படுகிறது.

(4) கிளைத் தேற்றம் (3) ஐ படிப்படியாக விரித்துச் சென்றுல்,

$$
\begin{aligned}
{}_nH_r &= {}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1} \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_nH_{r-2} \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + {}_nH_{r-3} \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + {}_{n-1}H_{r-3} \\
&\qquad + \ldots\ldots + {}_{n-1}H_1 + 1.
\end{aligned}
$$

என்ற கிளைத்தேற்றம் கிடைக்கும்.

ஆகவே இத்தேற்றம் :

$${}_nH_r = {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + \ldots\ldots + {}_{n-1}H_1 + 1$$

என்பதாகும்.

இங்கு ${}_{n-1}H_r$ = ஒரு குறிப்பிட்ட எழுத்து a_k ஒரு முறை கூடத்தோன்றுத r-படிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை.

$_{n-1}H_{r-1} = a_k$ ஒரே முறை (அதாவது 'ஒரு' படியில்) தோன்றும் r-படிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை.

$_{n-1}H_{r-2} = a_k$ இருமுறை மட்டுமே (அதாவது, 'இரு'படியில் a_k^2 ஆக) தோன்றும் r-படிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை.

... ...

$_{n-1}H_1 = a_k$ என்பது $(r-1)$ முறை மட்டுமே [அதாவது '$(r-1)$' படியில் a_k^{r-1} ஆக] தோன்றும் r-படிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை.

$_{n-1}H_0 = a_k$ என்பது r முறையும் [அதாவது a_k^r ஆக] தோன்றும் r-படிப் பெருக்கம். அதன் எண்ணிக்கை '1' தான்.

$= 1$. இது நமக்கு நேரடியாகவே தெரிகிறது.

மேலும் இங்கு, $_{n-1}H_1$ என்ற எண்ணிக்கை கொடுக்கும் உறுப்புக்களாவன:

$$a_1 a_k^{r-1} + a_2 a_k^{r-1} + a_3 a_k^{r-1} + \ldots\ldots + a_n a_k^{r-1}$$

இவைகளின் எண்ணிக்கை $(n-1)$; $_{n-1}H_0 = 1$ என்ற எண்ணிக்கை கொடுக்கும் உறுப்பு a_k^r என்ற ஒரு உறுப்பு மட்டுமே.

கிளைத் தேற்றம் 5:

பொதுத் தேற்றத்தில் நாம் கண்டபடி,

$$(1+a_1x+a_1^2x^2+\ldots\ldots)(1+a_2x+a_2^2x^2+\ldots)\ldots(1+a_nx+a_n^2x^2+\ldots\ldots)$$

$$\equiv 1+S_1x+S_2x^2+\ldots\ldots+S_rx^r+\ldots\ldots$$

அதாவது இம் முற்றொருமையை

$$\frac{1}{1-a_1x}\cdot\frac{1}{1-a_2x}\cdots\cdots\frac{1}{1-a_nx} \equiv 1+S_1x+S_2x^2+\ldots\ldots+S_rx^r+\ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

எனவே $\dfrac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots\ldots(1-a_nx)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக்கி, அவைகளின் விரிவில் x^r ன் கெழுகாண, S_r ன் மதிப்பு பெறப்படும்.

எடுத்துக் காட்டாக (1)

a, b என்ற இரு இராசிகள் எடுத்துக்கொள்வோம். இவைகளைக் கொண்டு, நாற்படிப் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை காண்போம்.

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} \equiv \frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx}\right]$$

$$\equiv \frac{1}{a-b}[a(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+\ldots\ldots)$$

$$-b(1+bx+b^2x^2+b^3x^3+b^4x^4+\ldots\ldots)]$$

இங்கு x^4 ன் கெழு $= \dfrac{a^5-b^5}{a-b}$ a, b என்ற இரு இராசிகள் கொண்டு அமைக்கப்படும் நாற்படிப் பெருக்க உறுப்புக்களாவன :

$$a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3,\ b^4.$$

இவைகளின் கூட்டுத் தொகையான

$$S_4 = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$= \frac{a^5-b^5}{a-b}$$ என்பது விளக்கமாகிறது.

எ–கா. (2) a, b, c என்ற மூன்று எழுத்துக்களைக் கொண்ட n படி சமபடித்தான பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$\frac{a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$ என நிறுவுக.

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} \equiv \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{1-ax}$$

$$+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{1-bx}$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{1-cx} \qquad \text{(A)}$$

என்ற பகுதிப் பின்ன முற்றொருமையை நாம் எளிதில் பெறலாம்.

கி. தே. 5ல் கண்டபடி (7·9.2.3) நாம் பெற வேண்டிய கூட்டுத்தொகை

$$(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots)\ (1+bx+b^2x^2\ \ldots\ldots)\ (1+cx+c^2x^2\ \ldots\ldots)$$

என்பதின் விரிவில் x^n ன் கெழுவாகும்;

அதாவது $\dfrac{1}{1-ax}\cdot\dfrac{1}{1-bx}\cdot\dfrac{1}{1-cx}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழுவாகும்.

எனவே (A) ன் படி,

$\Sigma\ \dfrac{a^2}{(a-b)\ (a-c)}\cdot\dfrac{1}{1-ax}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழுவாம்.

இதில் x^n ன் கெழு

$$=\frac{a^2}{(a-b)\ (a-c)}\cdot a^n+\frac{b^2}{(b-c)\ (b-a)}\cdot b^n+\frac{c^2}{(c-a)\ (c-b)}\cdot c^n$$

$$=\frac{a^{n+2}\ (b-c)+b^{n+2}\ (c-a)+c^{n+2}\ (a-b)}{-\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)}$$

$$=\frac{a^{n+2}\ (b-c)+b^{n+2}\ (c-a)+c^{n+2}\ (a-b)}{(a-b)\ (b-c)\ (a-c)}$$

எனப் பெறப்படுகிறது.

7·9.3 நாம் புகுமுக வகுப்பில், n வெவ்வேறு பொருள்கள் இருப்பின், அவைகளினின்று r, $-r$, $-r$, ... பொருள்களாகப் பொருக்கி எத்தனை சேர்வுகள் சேர்க்கலாம் எனப் பார்த்திருக்கிறோம். அச்சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$${}_nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}\quad \text{எனவும் நாம் அறிவோம்.}$$

ஆனால் அங்கு n பொருள்களும் ஒன்றுக்கு ஒன்று வெவ்வேறு: (தி. கோ-கொ. மு. கணித நூல்-பக்கம் 252).

மேலும் a, a, ... என p எழுத்துக்கள் b, b, ... என q எழுத்துக்கள், ... என மொத்தம் n எழுத்துக்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவ்வெல்லா n எழுத்துக்களையும் எத்தனை விதங்களில் வெவ்வேறு வரிசைப்படுத்தலாம் எனவும் பார்த்திருக்கிறோம். அவ்வித வரிசைகளின் எண்ணிக்கை

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\ \lfloor q\ \lfloor r}\quad \text{எனவும் நாம் பார்த்திருக்கிறோம். (2·2.2).}$$

இப்போது a, a ...... என p எழுத்துக்கள் b, b ...... என q எழுத்துக்கள், c, c ...... என s எழுத்துக்கள் ...... என மொத்தம் n எழுத்துக்கள் உள்ளன; அவைகளினின்று $r, -r, -r$ எழுத்துக்களாகப் பொருக்கி, எத்தனை சேர்வுகள் சேர்க்கலாம் எனக் காண்போம். (Combinations of n things not all different, taken r at a time).

a, b, c ...... என வெவ்வேறு எழுத்துக்கள் f எனக் கொள்வோம்.

$(1 + ax + a^2x^2 + \ldots\ldots + a^px^p)\ (1 + bx + b^2x^2 + \ldots\ldots + b^qx^q)$ $(1 + cx + c^2x^2 + \ldots\ldots + c^sx^s)$ ...... + சினைக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையைப் பார்ப்போம்.

இப்பெருக்குத் தொகையில் தோன்றும் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் பின்வரும் பண்புகளைக் காணலாம்.

(1) x ன் படி, அவ்வுறுப்பில் தோன்றும் a, b, c ...... ன் படிகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்;

(2) x^r ன் கெழு, தோன்றும் விதம்:

$a^{m_1}\ b^{m_2}\ c^{m_3}$ ...... என்ற அமைப்பில் $m_1 \ngtr p$; $m_2 \ngtr q$; $m_3 \ngtr s$, ... என்பதற் கொப்பவும் $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots = r$ என்பதற் கொப்பவும் இருக்கும்.

எனவே, பெருக்குத் தொகை அமைப்பு

$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots = r$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கொப்பிய

$$\sum_{r=0}^{p+q+s+\cdots} \left(a^{m_1}\ b^{m_2}\ c^{m_3} \ldots\ldots\right) x^r$$

மேலும் $0 \leq m_1 \leq p$; $0 \leq m_2 \leq q$; ......

எனவே, நாம் விரும்பும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை x^r ன் கெழுவில் தோன்றும் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையாகும். இவ்வெண்ணிக்கையைப் பெற $a = b = c = \ldots\ldots = 1$ என x^r ன் கெழுவில் ஈடு செய்தால் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை பெறலாம். ஆகவே, $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^p)\ (1+x+x^2+\ldots\ldots+x^q)$ $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^s)$ ...... ன் பெருக்குத் தொகையில் x^r ன் கெழு, நாம் விரும்பும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் கொடுக்கும்.

7·9·4 எ–கா. (1) ஒரு தாயக் கட்டையின் ஆறு முகங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்கள் பொறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அது போன்ற நான்கு தாயக் கட்டைகள் கொண்டு விளையாடும் போது, எத்தனை விதங்களில் 16 கூட்டுத் தொகையாகக் கிடைக்கும்?

$(x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^6)$ $(x+x^2+\ldots\ldots+x^6)$ $(x+x^2+\ldots\ldots x^6)$ $(x+x^2+\ldots\ldots+x^6)$ என்ற தொடர்ப் பெருக்கத்தைப் பார்க்க. முதல், இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது கட்டைகள் காட்டும் எண்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ எனக் கொள்வோம். ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ யாவும் $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq 6$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்படும்).

இங்கு $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 16$ என்ற சமன்பாடு பொருத்தமானல், எத்தனை விதங்களில் இச் சமன்பாடு பொருந்துமோ, அத்தனை விதங்களில் '16' கூட்டுத் தொகையாகக் கிடைக்கும்.

எனவே $(x + x^2 + \ldots\ldots + x^6)^4$ ன் விரிவில் x^{16} ன் கெழு, எத்தனை விதங்களில் '16' கூட்டுத் தொகை கிடைக்குமென அறிவிக்கும். $(x + x^2 + \ldots\ldots + x^6)^4$ ன் விரிவில் x^{16} ன் கெழு,

$= x^4 (1 + x + \ldots\ldots + x^5)^4$ ன் விரிவில் x^{16} ன் கெழு

அதாவது $x^4 \left(\dfrac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4$ ன் விரிவில் x^{16} ன் கெழு

அதாவது $\left(\dfrac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4$ ன் விரிவில் x^{12} ன் கெழு

அதாவது $(1 - 4x^6 + 6x^{12} - \ldots\ldots + x^{24})\ (1 - x)^{-4}$ ன் x^{12} ன் கெழு

அதாவது $(1 - 4x^6 + 6x^{12} + \ldots\ldots + x^{24})$

$$\left(1 + 4x + \frac{4\ .\ 5}{1\ .\ 2}x^2 + \frac{4\ .\ 5\ .\ 6}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3 + \frac{5\ .\ 6\ .\ 7}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^4 + \ldots\ldots + \frac{7\ .\ 8\ .\ 9}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^6 + \ldots\ldots + \frac{13\ .\ 14\ .\ 15}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^{12} + \ldots\ldots\right)$$ ல்

x^{12} ன் கெழு

$$x^{12} \text{ ன் கெழு} = \frac{13\ .\ 14\ .\ 15}{1\ .\ 2\ .\ 3} - 4\ .\ \frac{7\ .\ 8\ .\ 9}{1\ .\ 2\ .\ 3} + 6$$

$$= 455 - 336 + 6$$

$$= 125.$$

குறிப்பு : இம்முறை நிகழ் தகவுக் கொள்கையில் சில கணக்குகள் போடப் பயன்படும். (Theory of Probability).

எ-கா. (2) ஒரு மாணவன் நான்கு தேர்வுகள் எழுத வேண்டும். ஒவ்வொரு தேர்வுக்கும் m மார்க்குகள் உண்டு. நான்கு தேர்வுகளும் எழுதினுல், அவன் எத்தனை விதங்களில் மொத்தம் $2m$ மார்க்குகள் பெறமுடியும் ?

$$(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)\,(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)$$
$$(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)\,(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)$$

என்ற தொடர்ப் பெருக்கத்தில் x^{2m} ன் கெழுவை அறிந்தால், எத்தனை விதங்களில் அவன் மொத்தம் $2m$ மார்க்குகள் பெற முடியுமென அறியலாம்.

இப்போது $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)^4$ ன் பெருக்கத்தில் x^{2m} ன் கெழு $= (1-4x^{m+1}+6x^{2m+2}\ldots\ldots+x^{4m+4})\times$

$$\left(1+4x+\frac{4\,.\,5}{1\,.\,2}x^2+\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots\ldots+\frac{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3}x^m\ldots\ldots\right)$$ ல் x^{2m} ன் கெழு.

$$x^{2m} \text{ ன் கெழு } = \frac{(2m+1)\,(2m+2)\,(2m+3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 4\,\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$= \frac{1}{6}\,(2m+2)\,[\,(2m+1)\,(2m+3) - 2m\,(m+2)\,]$$

$$= \frac{m+1}{3}\,[4m^2+8m+3-2m^2-4m]$$

$$= \frac{(m+1)\,(2m^2+4m+3)}{3}$$

எனவே $\frac{(m+1)\,(2m^2+4m+3)}{3}$ விதங்களில் அம்மாணவன் மொத்தம் $2m$ மார்க்குகள் பெறமுடியும்.

எ-கா. (3).

'பற்றற்றவன்' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு, 4 எழுத்துக்கள் கொண்ட சேர்வுகள் எத்தனை அமைக்கலாம் ?

ப —1

ற் —2

ற —2

வ —1

ன் —1

வேண்டிய சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$= (1+x)\,(1+x+x^2)\,(1+x+x^2)\,(1+x)\,(1+x)$ ன் தொடர்ப் பெருக்கத்தில் x^4 ன் கெழுவாகும்.

அதாவது $(1+x)^3\,(1+x+x^2)^2$ ல் x^4 ன் கெழு,

அதாவது $(1+3x+3x^2+x^3)\,(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$ ல் x^4 ன் கெழு

$$x^4 \text{ ன் கெழு} = 1+6+9+2$$
$$= 18.$$

பயிற்சி 7 (v)

1. a, b, c என்ற இராசிகள் கொண்டு பத்து சமபடி கொண்ட எத்தனை உறுப்புக்கள் அமைக்கலாம்? அவைகளில் எத்தனை உறுப்புக்களில் a, b, c ன் 'படி'கள் முறையே 9, 7, 5 க்கு மேற்படாமலிருக்கும்? குறையாமலிருக்கும்?

2. (a) 4 a-க்கள், 3 b க்கள், 2 c க்கள் கொண்டு ஆறெழுத்துச் சேர்வுகள் எத்தனை எடுக்கலாம்?

(b) 'PARALLEL' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு, நான்கு நான்காக எத்தனை சேர்வுகள் அமைக்கலாம்?

3. நான்கு தாயக் கட்டைகளின் ஒவ்வொன்றின் அறு முகங்களிலும் (0, 1, 2, 3, 4, 5) என்ற எண்கள் பொறிக்கப் பட்டிருக்கின்றன. அவைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டினால், எத்தனை விதங்களில் மொத்தம் 15 கிடைக்கும்?

4. (a) 10,000,000 என்ற எண்ணுக்குக் குறைந்த எத்தனை எண்களது இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 7 க்குச் சமம்?

(b) 1,000,000 என்ற எண்ணுக்குக் குறைந்த எத்தனை எண்களது இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 6 க்குச் சமம்?

5. 20 புத்தகங்களை 5 மாணவர்களிடையே பங்கிட வேண்டும். ஒவ்வொருவனும் குறைந்தது 2 புத்தகங்கள் பெற வேண்டும். குறிப்பிட்ட இருவர் 5 புத்தகங்களுக்கு மேல் பெறக்கூடாது. எத்தனை விதங்களில் இவ்விதப் பங்கீடு செய்யலாம்?

6. மூன்று தாயக் கட்டைகள் ஒவ்வொன்றின் அறு முகங்களிலும் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்கள் பொறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. எத்தனை விதங்களில்

(1) மொத்தம் 12 கிடைக்கும்?

(2) மொத்தம் 15 கிடைக்கும்?

7. நான்கு தாயக் கட்டைகள் ஒவ்வொன்றின் அறுமுகங்களிலும் $-1, 1, 3, 5, 7, 9$ என்ற எண்கள் பொறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. எத்தனை விதங்களில்

(1) மொத்தம் 14 கிடைக்கும்?

(2) மொத்தம் 16 கிடைக்கும்?

(3) மொத்தம் 21 கிடைக்கும்?

8. ஒரு மாணவன் 3 தேர்வுகள் எழுத வேண்டும்; ஒவ்வொரு தேர்வுக்கும் 100 மார்க்குகள் உண்டு; எந்தத் தேர்விலும் 25 மார்க்குகளுக்குக் குறையாமல், அவன் எத்தனை விதங்களில் மொத்தம் 100 மார்க்குகள் வாங்கலாம்.

9. ஒரு மாணவன் நான்கு தேர்வுகள் எழுதவேண்டும். முதல் மூன்றிற்கு n மார்க்குகள் வீதமும், நான்காவது தேர்விற்கு $2n$ மார்க்குகளும் உண்டு. அவன் நான்கு தேர்வுகளும் எழுதி $\frac{1}{6}(n+1)(5n^2+10n+6)$ விதங்களில் மொத்தம் $3n$ மார்க்குகள் வாங்கலாமென நிறுவுக.

10. 'EXAMINATION' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எத்தனை விதங்களில் ஆறு எழுத்துச் சேர்வுகள் அமைக்கலாம்?

8. படிக்குறித் தேற்றம்

(The Exponential Theorem) :

8·1 தேற்றம் 1.

$+\infty$ (கந்தழி) அல்லது $-\infty$ ஐ n நெருங்குங்காலை $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ஒரு திட்டமான எல்லையை நெருங்குகிறது.

(5·7.5 (3) ல் நிறுவப்பட்டது).

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(i) $m = \frac{1}{n}$ எனக் கொண்டால் $n \to \pm\infty$ ஆகும்போது $m \to 0$

$$\therefore \underset{n\to\pm\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underset{m\to 0}{\text{எல்லை}} (1+m)^{1/m}$$

$$\therefore \underset{m\to 0}{\text{எல்லை}} (1+m)^{1/m} = e.$$

(ii) $x \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஏதாமொரு மெய்யெண்ணையின்,

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ஏனெனில், $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^n$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{n/x}\right]^x.$$

$$= e^x$$

$n \to \infty$ ஆகும்போது $\frac{n}{x}$ம் $\to \infty$

$x=0$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 = e^0 = e^x$

$x=1$ ஆனால் $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

எனவே $x =$ (பூச்சியமுட்பட) ஒரு மெய்யெண்ணுயின்

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

8·2. $1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty$ (கந்தழி) வரை உள்ள தொடர், படிக்குறித் தொடரெனப்படும் (Exponential Series).

இத் தொடர் $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{\lfloor n}$ என்பது, x ன் எல்லா மதிப்புக் களுக்கும் ஒரு அறக் குவியும் தொடர், எனவே குவி தொடர் என 6·9.2 ல் நிறுவப்பட்டதைக் காண்க. அத் தொடரை E (x) எனக் குறியீடு செய்வோம்.

8·3. படிக் குறித் தேற்றம் : தேற்றம் 2.

$e = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \infty$ ஆனால் x ன் எல்லா அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும்,

$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \infty$ என்பது படிக் குறித் தேற்றமாம்.

$$\text{E}(p) = 1 + \frac{p}{\lfloor 1} + \frac{p^2}{\lfloor 2} + \frac{p^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{p^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty \quad \text{(A)}$$

$$\text{E}(q) = 1 + \frac{q}{\lfloor 1} + \frac{q^2}{\lfloor 2} + \frac{q^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{q^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty \quad \text{(B)}$$

$$\text{E}(p+q) = 1 + \frac{(p+q)}{\lfloor 1} + \frac{(p+q)^2}{\lfloor 2} + \frac{(p+q)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{(p+q)^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty \quad \text{(C)}$$

எனக் கொள்க.

அப்போது,

$$E(1) = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots = e.$$

8·2 ல் நாம் கண்டபடி (A), (B) ல் உள்ள கந்தழித் தொடர்கள், எல்லா p, q ன் மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும் அறவும் குவி தொடர்களாகும்.

$$E(p) \times E(q) = 1 + \left(\frac{p}{\underline{|1}} + \frac{q}{\underline{|1}}\right)$$

$$+ \left(\frac{p^2}{\underline{|2}} + \frac{p}{\underline{|1}} \cdot \frac{q}{\underline{|1}} + \frac{q^2}{\underline{|2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\left(+\frac{p^r}{\underline{|r}} + \frac{p^{r-1}}{\underline{|r-1}} \cdot \frac{q}{\underline{|1}} + \frac{p^{r-2}}{\underline{|r-2}} \cdot \frac{q^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots + \frac{q^r}{\underline{|r}}\right)$$

$$+ \ldots\ldots \text{ கந்தழி வரை } \quad (D)$$

பெருக்கல் தேற்றப்படி, இத் தொடரும் ஓர் அறவும் குவி தொடராகும். இதன் கூட்டுத்தொகை மதிப்பு $= E(p) \times E(q)$. [6·8.4].

இப்போது (D) ன் $(r + 1)$ வது உறுப்பு,

$$\left(\frac{p^r}{\underline{|r}} + \frac{p^{r-1}}{\underline{|r-1}} \cdot \frac{q}{\underline{|1}} + \frac{p^{r-2}}{\underline{|r-2}} \cdot \frac{q^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots + \frac{q^r}{\underline{|r}}\right.$$

$$= \frac{1}{\underline{|r}}\left(p^r + {}_rC_1\, p^{r-1} q + {}_rC_2\, p^{r-2} q^2 + \ldots\ldots + q^r\right)$$

$$= \frac{1}{\underline{|r}}\,(p + q)^r$$

தொடர் (C) ன் $(r + 1)$ வது உறுப்பு $= \dfrac{1}{\underline{|r}}\,(p + q)^r$

$$\therefore \quad E(p) \times E(q) = E(p + q)$$

இவ்வாறே,

$$E(p) \times E(q) \times E(s) \times E(t) \times \ldots\ldots x \text{ உறுப்புக்கள்}$$

$$= E(p + q + s + t + \ldots\ldots)$$

(1) இப்போது x ஒரு கூட்டு முழு எண்.

$p = q = \ldots\ldots = 1$ எனக் கொண்டால் $E(1) \times E(1) \times \ldots\ldots x$ உறுப்புக்கள்வரை $= E(1 + 1 + \ldots\ldots x$ முறைகள்)

$$\therefore \quad [E(1)]^x = E(x)$$

$\therefore$ x ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுயின்

$$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \propto \text{ வரை}$$

(2) இரண்டாவதாக, x ஒரு குறை முழு எண்ணெனக் கொள்க; அதாவது $x = y$, இங்கு y கூட்டு முழு எண்.

$$\therefore \quad E(y) \times E(-y) = E(y - y)$$
$$= E(0)$$
$$= 1$$

$$\therefore \quad E(-y) = \frac{1}{E(y)}$$
$$= \frac{1}{e^y}$$
$$= e^{-y}$$

$$\therefore \quad e^x = E(x)$$
$$= 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \propto \text{ வரை}$$

(x குறை முழு எண்)

(3) மூன்ருவதாக, $x = \frac{m}{n}$ என்ற ஓர் அளவுக் கிணங்கிய கூட்டு அல்லது குறை யெண் ணெனவும் (m கூட்டு அல்லது குறை முழு எண், n கூட்டு முழு எண்) கொள்க.

நாம் முதலில் நிறுவியபடி,

$$E\left(\frac{m}{n}\right) \times E\left(\frac{m}{n}\right) \times \ldots\ldots n \text{ உறுப்புக்கள்}$$

$$= E\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots\ldots n \text{ முறைகள்}\right)$$

$$\therefore \quad \left[E\left(\frac{m}{n}\right)\right]^{n} = E(m)$$

$= e^{m}$ (m – கூட்டு அல்லது குறை முழு எண்).

$$\therefore \quad E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}$$

$$\therefore \quad e^{x} = E(x)$$

$$= 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^{2}}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \infty \text{ வரை.}$$

இங்கு x ஒரு கூட்டு அல்லது குறை அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்.

எனவே, x-ன் எல்லா அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும்

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^{2}}{\lfloor 2} + \frac{x^{3}}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \infty \text{ வரை}$$

என நிறுவப்பட்டது.

இத் தேற்றம் x-ன் அளவுக் கிணங்கிய மதிப்புக்களுக்கு மாத்திரம் நிறுவப்பட்டது.

8·3.1 x எம்மெய்யெண் மதிப்பு ஏற்குலும்

$$e^{x} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$= 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^{2}}{\lfloor 2} + \frac{x^{3}}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{x^{n}}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty$$

எனவும் நிறுவலாம். அம் முறையை இப்போது காண்போம்.

ஆனல் இந்நிறுவன் முறையில், n மதிப்பு, கூட்டு முழு எண்ணுக மட்டுமே உயர்ந்து உயர்ந்து ∞ (கந்தழி) வரை செல்கிறது எனக் கொள்ள வேண்டும்.

தெ: $S_{n} = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^{2}}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}$ எனக் கொள்க.

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+n\,.\,\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{n}\right)^3$$

$$+\;......+\frac{n(-1)......(n-r+1)}{|\underline{r}}\left(\frac{x}{n}\right)^r+......$$

$$+\frac{n(n-1)......(n-n+1)}{|\underline{n}}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}\,.\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^3}{|\underline{3}}\,.\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+......+\frac{x^r}{|\underline{r}}\,.\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{r-1}{n}\right)+......$$

$$+\frac{x^n}{|\underline{n}}\,.\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

ஆனல்,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

$$>1-\frac{1+2+3+...+\overline{r-1}}{n}$$

என எளிதில் நிறுவலாம். (4.9.6.2-தேற்றம் 16).

அதாவது,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{r-1}{n}\right)>1-\frac{r\,(r-1)}{2n}$$

$$\therefore\quad\left(1+\frac{x}{n}\right)^n>1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}\left(1-\frac{1.2}{2n}\right)+\frac{x^3}{|\underline{3}}\left(1-\frac{2.3}{2n}\right)$$

$$+......+\frac{x^r}{|\underline{r}}\left(1-\frac{\overline{r-1}\,.\,r}{2n}\right)+......+\frac{x^n}{|\underline{n}}\left(1-\frac{\overline{n-1}\,.\,n}{2n}\right)$$

$$\therefore\quad S_{n+1}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<S_{n+1}-\left[1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}\left(1-\frac{1.2}{2n}\right)\right.$$

$$\left.+......+\frac{x^n}{|\underline{n}}\left(1-\frac{\overline{n-1}\,.\,n}{2n}\right)\right]$$

$$< \frac{x^2}{\lfloor 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2n} + \frac{x^3}{\lfloor 3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2n} + \ldots\ldots \frac{x^n}{\lfloor n} \frac{(n-1)\, n}{2n}$$

$$< \frac{x^2}{2n} \left(1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2}\right)$$

$$\therefore \quad S_{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{x^2}{2n} \left(1 + \frac{|x|}{\lfloor 1} + \frac{|x^2|}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{|x^{n-2}|}{\lfloor n-2}\right)$$

$$< \frac{x^2}{2n} \left(1 + \frac{|x|}{\lfloor 1} + \frac{|x^2|}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \infty \text{ வரை}\right)$$

$$< \frac{x^2}{2n} E(|x|)$$

x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்

$\frac{|x|^2}{2n} E(|x|)$ ஒரு திட்டமான மதிப்புடையது.

$$\therefore \quad n \to \infty \text{ ஆகும் போது } \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{|x|^2 E(|x|)}{2n} \to 0$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left| S_{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| = 0$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^x = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} S_{n+1}$$

$$= 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty$$

ஆனால் தேற்றம் 1, கிளைத்தேற்றம் (ii) ன் படி,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\therefore \quad e^x = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \infty$$

குறிப்பு: $x = 1$ ஆனால்,

$$e = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \infty$$

ஆகவே, $e = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$ ஆனல்

$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \infty$ என நிறுவப்பட்டது. இது x ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும் பொருத்தமாகும்.

8·4. தேற்றம் 3 :

$e = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \infty$ என்பதன் மதிப்பு ஓர் அளவுக்கிணங்கிய எண் அல்ல : (e is not a rational number)

முடியுமானல் $e = \frac{m}{n}$ (m, n கூட்டு முழு எண்கள்) எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\lfloor n} + \frac{1}{\lfloor n+1} + \frac{1}{\lfloor n+2} + \ldots$$

இரு பக்கங்களையும் $\lfloor n$ ஆல் பெருக்கினல்,

$\frac{m}{n} \lfloor n$ = ஒரு கூட்டு முழு எண்.

$$= \text{கூட்டு முழு எண்} + \frac{\lfloor n}{\lfloor n+1} + \frac{\lfloor n}{\lfloor n+2} + \ldots\ldots \infty$$

$$= \text{கூட்டு முழு எண்} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots \infty$$

எனவே, கட்டாயம் $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots \infty$ ஒரு கூட்டு முழு எண் மதிப்புப் பெறவேண்டும்.

ஆனல் $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots \infty$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\ldots \infty$$

$$< \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

அதாவது $< \frac{1}{n}$

ஆனல் ஒரு கூட்டு முழு எண் $\frac{1}{n}$ க்குக் குறைவாக இருக்க முடியாது. எனவே, பொருந்தா முடிவு என்ற முறைப்படி $e = \frac{m}{n}$ என நாம் முதலில் கொண்டதை ஏற்க முடியாது.

8·4.1 e ன் தோராய மதிப்பை வேண்டிய அளவுக்கு நாம் பெறலாம்.

சென்ற பத்தியில் காட்டியபடி, முதல் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் வரை கொண்டு, e ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டால், அத் தோராய மதிப்புக்கும் உண்மை மதிப்புக்கும் உள்ள வேறு பாடு மிக மிகச் சிறிதாகும்.

இந்த நிலையில்,

$$\left[e - \left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \dots \frac{1}{\underline{|n}}\right)\right] = \frac{1}{\underline{|n+1}} + \frac{1}{\underline{|n+2}} + \dots$$

$$= \frac{1}{\underline{|n+1}}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\dots\right)$$

$$< \frac{1}{\underline{|n+1}}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\dots\right)$$

அதாவது $< \frac{1}{\underline{|n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$

அதாவது $< \frac{1}{n \cdot \underline{|n}}$

எனவே e ன் தோராய மதிப்பாக

$$1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \dots\dots \frac{1}{\underline{|n}}$$

எனக் கொண்டால் வரும் வேறுபாடு (அல்லது குறைபாடு)

$> \dfrac{1}{\underline{|n+1}}$ ஆகவும், $< \dfrac{1}{n\,.\,\underline{|n}}$ ஆகவும் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $n=5$ எனக் கொண்டால், முதல் ஆறு உறுப்புக்கள் கொண்டு e ன் தோராய மதிப்புக் காணும்போது தோராய மதிப்புக்கும் சரியான மதிப்புக்கும் உள்ள

வேறுபாடு $> \dfrac{1}{\underline{|6}}$ ஆகவும்,

$< \dfrac{1}{5\,\underline{|5}}$ ஆகவும் இருக்கும்.

அதாவது $\dfrac{1}{600} >$ வேறுபாடு $> \dfrac{1}{720}$

$n=10$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{1}{10\,\underline{|10}} > \text{வேறுபாடு} > \frac{1}{\underline{|11}}$$

8·4.2 e ன் தோராய மதிப்பு

$$1 = 1{\cdot}00000$$

$$\frac{1}{\underline{|1}} = 1{\cdot}00000$$

$$\frac{1}{\underline{|2}} = 0{\cdot}50000$$

$$\frac{1}{\underline{|3}} = 0{\cdot}16667$$

$$\frac{1}{\underline{|4}} = 0\ 04167$$

$$\frac{1}{\underline{|5}} = 0{\cdot}00833$$

$$\frac{1}{\underline{|6}} = 0{\cdot}00139$$

$$\frac{1}{\underline{|7}} = 0{\cdot}00020$$

$$\frac{1}{\underline{|8}} = 0{\cdot}00003$$

$$\overline{2{\cdot}71829}$$

$\therefore$ $e = 2{\cdot}7183$ (நான்கு பதின் பகுப்புவரைத் தோராய மதிப்பு)

$$\text{வேறுபாடு} < \frac{1}{8\,\underline{|8}}$$

$$\text{அதாவது} < {\cdot}000004.$$

8·5. e^x பற்றிய சில கூட்டுத் தொடைகள் :

$$e = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \qquad (1)$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \qquad (2)$$

$$(1) + (2): \quad e + e^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|6}} + \ldots\ldots \infty = \frac{e + e^{-1}}{2} \qquad (3)$$

அவ்வாறே

$$(1) - (2): \quad e - e^{-1} = 2\left(\frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|5}} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|5}} + \ldots\ldots \infty = \frac{e - e^{-1}}{2} \qquad (4)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \qquad (5)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \qquad (6)$$

[(5)+(6)] ஐயும் [(5) – (6)] ஐயும் அறிந்தால்,

$$1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \infty = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ எனவும்} \qquad (7)$$

$$x + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + \ldots\ldots \infty = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ எனவும்} \qquad (8)$$

கிடைக்கப்பெறும்.

உயர்தர கோண கணிதத்தில், இவைகளை நாம்,

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \propto \qquad (7)$$

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + \ldots\ldots \propto \qquad (8)$$

எனப்படும் அதிபரவளைச் சார்புகளாக (Hyperbolic functions)க் காண்போம்.

(1) முதல் (8) வரை கண்ட வாய்பாடுகள், பலவிதமான கூட்டுத் தொகைகளைக் காணப் பயன்படும். சில எடுத்துக் காட்டுகளால் பின்னர் இவைகளின் பயன் விளக்கப்படும்.

8.5·1 a^x ன் விரிவு $(a > 0)$

$$a^x = e^{x \log_e a}$$

$$= 1 + x \log_e a + \frac{x^2}{\underline{|2}} (\log_e a)^2 + \ldots\ldots \propto \text{ வரை}$$

8·5.2 8.5 ல் கண்ட கூட்டுத் தொகைகளை, சுருக்கமாக Σ குறியீடு கொண்டு பின்வருமாறு எழுதலாம். ஆனால் மிகவும் எச்சரிக்கையாக $n=0$ முதற் கொண்டா அல்லது $n=1, 2$ முதற் கொண்டா என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.

$$\sum_{n=0}^{\propto} \frac{x^n}{\underline{|n}} = e^x$$

$$\sum_{n=1}^{\propto} \frac{x^n}{\underline{|n}} = e^x - 1$$

$$\sum_{n=0}^{\propto} \frac{(-1)^n x^n}{\underline{|n}} = e^{-x}$$

$$\sum_{n=2}^{\propto} \frac{x^n}{\underline{|n}} = e^x - 1 - x$$

$$\sum_{n=0}^{\propto} \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cos\text{h}\, x$$

$$\sum_{n=1}^{\propto} \frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sin\text{h}\, x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1$$

இவைகளை அவ்வப்போது எழுதிப் பார்த்துக் கொள்ளலாம். குருட்டுப் பாடமாக மனதில் வைக்க வேண்டியதில்லை.

பயிற்சி 8 (i)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $$\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\right)^2 = 1+\left(1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\ldots\ldots\right)^2$$

2. $$\frac{\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\ldots\ldots}{1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\ldots} = \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

3. $$\frac{\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots\ldots}{\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\ldots} = \frac{e+1}{e-1}$$

4. $$\log 2+\frac{(\log 2)^2}{\underline{|2}}+\frac{(\log 2)^3}{\underline{|3}}\ldots\ldots \infty = 1$$

5. $$\log x-\frac{(\log x)^2}{\underline{|2}}+\frac{(\log x)^3}{\underline{|3}}-\frac{(\log x)^4}{\underline{|4}}\ldots\ldots \infty = 1-x$$

8.6 $(e^x-1)^n$ என்பதை, இருவேறு முறைகளில் விரித்தெழுதிச் சில முடிவுகளையறிதல் :

(n கூட்டு முழு எண்).

$$(e^x-1)^n = \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots\ldots\right)^n \qquad \text{(A)}$$

$$= e^{nx} - ne^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\, e^{(n-2)x}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\, e^{(n-3)x} + \ldots\ldots + (-1)^n \qquad \text{(B)}$$

(i) $r < n$ ஆனுல், (A) ல் x^r ன் கெழு $=0$

(B) ல் x^r ன் கெழு $= \dfrac{n^r}{\lfloor r} - \dfrac{n(n-1)^r}{\lfloor r}$

$$+ \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot \frac{(n-2)^r}{\lfloor r} \ldots\ldots$$

$\therefore$ $r < n$ ஆனுல்,

$$n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^r - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(n-3)^r$$

$$- \ldots\ldots = 0 \qquad \text{(C)}$$

(ii) $r=n$ ஆனுல் (A) ல் x^r ன் கெழு $=1$

(B) ல் x^n ன் கெழு, $= \dfrac{n^n}{\lfloor n} - \dfrac{n(n-1)^n}{\lfloor n}$

$$+ \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot \frac{(n-2)^n}{\lfloor n} \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{1}{\lfloor n}\left[n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \quad n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n \ldots\ldots = \lfloor n \qquad \text{(D)}$$

(iii) $r=(n+1)$ ஆனுல் (A) ல் x^r ன் கெழு $= \dfrac{n}{2}$

(B) ல் x^{n+1} ன் கெழு $= \dfrac{n^{n+1}}{\lfloor n+1} - \dfrac{n(n-1)^{n+1}}{\lfloor n+1}$

$$+ \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot \frac{(n-2)^{n+1}}{\lfloor n+1} \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} \ldots\ldots = \frac{n\lfloor n+1}{2}$$

(iv) இவ்வாறே, $r = (n+2)$; $(n+3)$; என்ற மதிப்புக்களுக்கும் இவ்வாருன உண்மைகள் காணலாம்.

8·6.1 மேலே கூறியவற்றை மேலும் பொதுப்படுத்தலாம்.

$$(e^{ax} - e^{bx})^n = e^{nax} - {}_nC_1\, e^{\overline{(n-1}a+b)x} + {}_nC_2\, e^{\overline{(n-2}a+2b)x} + \ldots\ldots \text{(A)}$$

$$= e^{nbx}\,(e^{\overline{a-b}\,x} - 1)^n$$

$$= e^{nbx}\left[(a-b)x + \frac{(a-b)^2 x^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots\right]^n \qquad \text{(B)}$$

(A) லும் (B) லும் x^n, x^{n+1} ...... ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், சில தொடர்புகள் பெறப்படும்.

$$\text{(A) ல் } x^n \text{ கெழு} = \frac{1}{\lfloor n}\left[(na)^n - n\,(\overline{n-1}\,a+b)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(\overline{n-2}\,a+2b)^n + \ldots\ldots\right]$$

$$\text{(B) ல் } x^n \text{ ன் கெழு} = (a-b)^n$$

$$\therefore\quad (na)^n - n\,(\overline{n-1}\,a+b)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(\overline{n-2}\,a+2b)^n - \ldots\ldots = (a-b)^n \lfloor n \qquad \text{(C)}$$

இங்கு $na = x$ எனவும் $b-a=y$ எனவும் ஈடு செய்தால்

$$x^n - n\,(x+y)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(x+2y)^n \ldots\ldots = (-1)^n y^n \lfloor n \qquad \text{(D)}$$

மேலும் $k < n$ என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுக்கு,

$$x^k - n\,(x+y)^k + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(x+2y)^k + \ldots\ldots (n+1) \text{ உறுப்புக்கள் வரை} = 0 \qquad \text{(E)}$$

இங்கு $x = y = 1$ ஆனால்

$$1^k - n\,.\,2^k + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,3^k \ldots\ldots (n+1) \text{ உறுப்புக்கள் வரை} = 0 \qquad \text{(F)}$$

மேலும் $x = m$, $y = -1$ ஆனால்

$$m^k - n\,(m-1)^k + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(m-2)^k \ldots\ldots (n+1) \text{ உறுப்புக்கள் வரை} = 0 \qquad \text{(G)}$$

(C) ல் $a = 1$, $b = -1$ எனக் கொண்டால்,

$$n^n - n\,(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(n-4)^n \ldots\ldots (n+1) \text{ உறுப்புக்கள் வரை} = 2^n \lfloor n \qquad \text{(H)}$$

8·6.2 e^{e^x} ஐ விரித்தெழுதினுல் சில தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை காணப் பயன்படும். அவை பின்வருமாறு :

$$e^{e^x} = 1 + e^x + \frac{e^{2x}}{\lfloor\underline{2}} + \frac{e^{3x}}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \ldots\ldots + \frac{x^r}{\lfloor\underline{r}} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$+ \frac{1}{\lfloor\underline{2}}\left(1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{\lfloor\underline{2}} + \ldots\ldots + \frac{2^r x^r}{\lfloor\underline{r}} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$+ \frac{1}{\lfloor\underline{3}}\left(1 + 3x + \frac{3^2 x^2}{\lfloor\underline{2}} + \ldots\ldots + \frac{3^r x^r}{\lfloor\underline{r}} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$\therefore$ e^{e^x} ல் x^r ன் கெழு

$$= \frac{1}{\lfloor\underline{r}}\left(\frac{1^r}{\lfloor\underline{1}} + \frac{2^r}{\lfloor\underline{2}} + \frac{3^r}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots \infty\right) \qquad \text{(A)}$$

மற்ருேர் முறையில்

$e^{e^x} = e^{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots}$ எனவும் எழுதலாம்.

அதாவது $e^{e^x} = e\left(e^{x + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots}\right)$

$$= e\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots\right)^2}{\lfloor\underline{2}} + \ldots\ldots\right] \qquad \text{(B)}$$

இப்போது $r = 2$ எனக் கொண்டால், (A) ன் படி

e^{e^x} ல் x^2 ன் கெழு $= \dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}\left(\dfrac{1^2}{\lfloor\underline{1}} + \dfrac{2^2}{\lfloor\underline{2}} + \dfrac{3^2}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots \infty\right)$

எனவாகும்.

(B) ல் x^2 ன் கெழு $= e\left(\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}} + \dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}\right)$

$$= e$$

∴ இருவிதங்களிலும் e^{e^x} ஐ விரிவு படுத்திய தொடர்களில் x^2 ன் கெழுவை ஒப்பிட்டால்,

$$\frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{1^2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{3^2}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\right)=e$$

$$\therefore \sum_1^{\infty}\frac{n^2}{\lfloor n}=2e$$ என்ற கூட்டுத் தொகை கிடைக்கும்.

மேலும் $r=3$ எனக் கொண்டால் (A) ன் படி

$$e^{e^x} \text{ ல் } x^3 \text{ ன் கெழு }=\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{1^3}{\lfloor 1}+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\infty\right)$$

$$\text{(B) ல் } x^3 \text{ ன் கெழு }=e\left(\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}\right)$$

$$=\frac{5}{6}e$$

$$\therefore \frac{1}{\lfloor 3}\sum_1^{\infty}\frac{n^3}{\lfloor n}=\frac{5}{6}e$$

$$\therefore \sum_1^{\infty}\frac{n^3}{\lfloor n}=5e$$

மேலும் $r=4$ எனக் கொண்டால் (A) ன் படி

$$e^{e^x} \text{ ல் } x^4 \text{ ன் கெழு }=\frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{1^4}{\lfloor 1}+\frac{2^4}{\lfloor 2}+\frac{3^4}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\right)$$

(B) ல் x^4 ன் கெழு

$$=e\left(\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 2\,(\lfloor 2)^2}+\frac{2}{\lfloor 2\,.\lfloor 3}+\frac{3}{\lfloor 2\,.\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}\right)$$

$$=\frac{15e}{\lfloor 4}$$

$$\therefore \frac{1}{\lfloor 4}\sum_1^{\infty}\frac{n^4}{\lfloor n}=\frac{15e}{\lfloor 4}$$

$$\therefore \sum_1^{\infty}\frac{n^4}{\lfloor n}=15e$$

8·6.3 $\dfrac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ ன் விரிவில் x^r ன் கெழுவை இரு விதங்களில் கண்டு, சில தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளை யறியலாம். அவை பின்வருமாறு.

$$\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=\frac{e^{nx}-1}{1-\dfrac{1}{e^x}}$$

$$=\frac{e^{(n+1)x}-e^x}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x\,(e^{nx}-1)}{(e^x-1)}$$

$$=e^x\,[e^{(n-1)x}+e^{(n-2)x}+\ldots\ldots+1]$$

$$=e^{nx}+e^{(n-1)x}+\ldots\ldots+e^x$$

இங்கு x^r ன் கெழு $=\dfrac{n^r}{\lfloor r}+\dfrac{(n-1)^r}{\lfloor r}+\ldots\ldots+\dfrac{1^r}{\lfloor r}$

$$=\frac{1}{\lfloor r}\,(1^r+2^r+3^r+\ldots\ldots+n^r)\quad\text{(A)}$$

மற்ருேர் முறையில்,

$$\frac{(e^{nx}-1)}{(1-e^{-x})}=\left(nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{n^4x^4}{\lfloor 4}\ldots\ldots\right)\times\left(x-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}-\frac{x^4}{\lfloor 4}-\ldots\ldots\right)^{-1}$$

$$=\left(nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{n^4x^4}{\lfloor 4}\ldots\ldots\right)\times\frac{\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\ldots\ldots\right)^{-1}}{x}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{2}+\frac{n^3x^2}{6}+\frac{n^4x^3}{24}\ldots\ldots\right)\times$$

$$\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots\ldots+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\ldots\ldots\right)^2-\ldots\ldots\right]\quad\text{(B)}$$

(B) ல் x^2 ன் கெழு

$$= \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{6} + \frac{n}{4}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 - 2n + 3n}{12}$$

$$= \frac{n\,(2n^2 + 3n + 1)}{12}$$

(A) ஒடு ஒப்பிடும் போது

$$\frac{1}{\underline{|2}} \sum_1^n n^2 = \frac{n\,(2n^2 + 3n + 1)}{12}$$

$$\therefore \quad \sum_1^n n^2 = \frac{n\,(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

(B) ல் x^3 ன் கெழு,

$$= \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{12} + \frac{n}{24} + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{n}{8}$$

$$= \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n}{24} - \frac{n}{6} + \frac{n}{8}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 - 2n^2 + 3n^2 + n - 4n + 3n}{24}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{24}$$

(A) ஒடு ஒப்பிடும் போது,

$$\frac{1}{\underline{|3}} \sum_1^n n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{24}$$

$$\therefore \quad \sum_1^n n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

இவ்வாறே $\sum_1^n n^4$ போன்ற கூட்டுத் தொகைகளைக் காணலாம்.

8.7 பொதுக் கூட்டல் தொகையமைப்பு:

ஒரு கந்தழித் தொடரில் n-வது உறுப்பு, $\frac{f(n)}{\lfloor n}$; இங்கு

$$f(n) = a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots\ldots + a_r$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது எனவும் கொள்க.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{\lfloor n}$ ன் கூட்டுத் தொகை காணும் முறை:

$$\begin{aligned} a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots\ldots + a_r \equiv\ & a_0 n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1) \\ & + A_1\, n(n-1)\ldots\ldots(n-r+2) \\ & + A_2\, n(n-1)\ldots\ldots(n-r+3) \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & + A_{r-2}\, n(n-1) \\ & + A_{r-1}\, n \\ & + A_r \end{aligned}$$

என முற்றொருமை செய்து $A_1, A_2, \ldots\ldots A_r$ என்பவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும். ($a_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_r$ மாறிலி எண்களாகும்).

பின்னர் $\frac{f(n)}{\lfloor n} \equiv \frac{a_0}{\lfloor n-r} + \frac{A_1}{\lfloor n-r+1} + \frac{A_2}{\lfloor n-r+2}$

$+ \ldots\ldots + \frac{A_{r-1}}{\lfloor n-1} + \frac{A_r}{\lfloor n}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad T_1 = A_{r-1} + \frac{A_r}{\lfloor 1}$$

$$T_2 = A_{r-2} + \frac{A_{r-1}}{\lfloor 1} + \frac{A_r}{\lfloor 2}$$

$$T_3 = A_{r-3} + \frac{A_{r-2}}{\lfloor 1} + \frac{A_{r-1}}{\lfloor 2} + \frac{A_r}{\lfloor 3}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$T_r = a_0 + \frac{A_1}{\lfloor 1} + \ldots\ldots + \frac{A_r}{\lfloor r}$$

$$T_{r+1} = \frac{a_0}{\underline{|1}} + \frac{A_1}{\underline{|2}} + \dots\dots + \frac{A_r}{\underline{|r+1}}$$

... ...

$$S_\infty = a_0 e + A_1 e + \dots\dots + A_{r-1}\, e + A_r\,(e-1)$$

$$= (a_0 + A_1 + \dots\dots + A_r)\, e - A_r$$ எனக் கிடைக்கும்.

இத்தொடரே $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f\,(n)}{\underline{|n}}$ ஆக இருக்குமானல்

$S_\infty = (a_0 + A_1 + A_2 + \dots\dots + A_r)\; e$ எனவாகும் என்பதை ஆராய்ந்தறிக.

8·8. எ-கா. (1) $\frac{2}{\underline{|3}} + \frac{4}{\underline{|5}} + \frac{6}{\underline{|7}} + \dots\dots = e^{-1}$ என நிறுவுக.

$$\frac{2}{\underline{|3}} = \frac{3-1}{\underline{|3}} = \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$\frac{4}{\underline{|5}} = \frac{5-1}{\underline{|5}} = \frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{\underline{|5}}$$

$$\frac{6}{\underline{|7}} = \frac{7-1}{\underline{|7}} = \frac{1}{\underline{|6}} - \frac{1}{\underline{|7}}$$

....

∴ கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{\underline{|5}} \dots\dots \infty$$

$$= 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{\underline{|5}} \dots\dots \infty.$$

$$= e^{-1}.$$

எ-கா. (2) $\left(1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|6}} + \dots\dots\right)^2$

$$= 1+\left(1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 7}+\ldots\ldots\right)^2$$

என நிறுவுக.

$$1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\ldots\ldots = \frac{e+e^{-1}}{2} \qquad (8{\cdot}5\ (3))$$

$$1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 7}+\ldots\ldots = \frac{e-e^{-1}}{2} \qquad (8{\cdot}5\ (4))$$

இ. கை. பு $= \left(\dfrac{e+e^{-1}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\ (e^2+e^{-2}+2)$

வ. கை. பு $= 1+\left(\dfrac{e-e^{-1}}{2}\right)^2 = 1+\dfrac{1}{4}(e^2+e^{-2}-2)$

$$= \tfrac{1}{4}\ (e^2+e^{-2}+2)$$

எனவே இ. கை. பு = வ. கை. பு என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (3) $1+\dfrac{(1+2x)}{\lfloor 1}+\dfrac{(1+2x)^2}{\lfloor 2}+\dfrac{(1+2x)^3}{\lfloor 3}\ldots\ldots\infty$ என்ற கந்தழித் தொடரில் x^n ன் கெழு $\dfrac{2^n\,.\,e}{\lfloor n}$ என நிறுவுக.

$$1+\frac{1+2x}{\lfloor 1}+\frac{(1+2x)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\infty = e^{1+2x}$$

$$= e\,.\,e^{2x}$$

$$= e\left(1+2x+\ldots\ldots\frac{2^n x^n}{\lfloor n}\ldots\ldots\right)$$

எனவே x^n ன் கெழு $= \dfrac{e\,.\,2^n}{\lfloor n}$

எ-கா. (4) $\dfrac{1}{\lfloor 1}+\dfrac{4}{\lfloor 2}+\dfrac{7}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\infty$ வரை கூட்டுத்தொகை காண்க.

$u_n = n$ வது உறுப்பெனக் கொள்வோம்.

$$u_n = \frac{1+(n-1)\,3}{\lfloor n}$$

$$= \frac{3n-2}{|\underline{n}}$$

$$= \frac{3}{|\underline{n-1}} - \frac{2}{|\underline{n}}$$

$$\therefore \quad u_1 = 3 - \frac{2}{|\underline{1}}$$

$$u_2 = \frac{3}{|\underline{1}} - \frac{2}{|\underline{2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_\infty = 3\left(1 + \frac{1}{|\underline{1}} + \frac{1}{|\underline{2}} + \dots\dots\right) - 2\left(1 + \frac{1}{|\underline{1}} + \frac{1}{|\underline{2}} + \dots\dots - 1\right)$$

$$= 3e - 2(e-1)$$

$$= e + 2$$

எ-கா. (5) $\frac{1}{|\underline{1}} + \frac{1+5}{|\underline{2}} + \frac{1+5+5^2}{|\underline{3}} + \dots\dots \infty$ வரை கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{1+5+5^2+\dots\dots+5^{n-1}}{|\underline{n}}$$

$$= \frac{5^n-1}{5-1} \cdot \frac{1}{|\underline{n}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{5^n-1}{|\underline{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{5^n}{|\underline{n}} - \frac{1}{|\underline{n}}\right)$$

$$u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{|\underline{1}} - \frac{1}{|\underline{1}}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{5^2}{|\underline{2}} - \frac{1}{|\underline{2}}\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{5^3}{\underline{|3}} - \frac{1}{\underline{|3}}\right)$$

....

$$S_\infty = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{\underline{|1}} + \frac{5^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \infty - 1\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \infty - 1\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}(e^5 - 1) - \tfrac{1}{4}(e - 1)$$

$$= \frac{e^5 - e}{4}$$

எ-கா. (6) $\Sigma \frac{2n^3+1}{\underline{|n}}$ ன் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$2n^3+1 = 2n(n-1)(n-2) + An(n-1)+Bn+C$ என எழுதி A, B, C காண்போம்.

$n=0$ ஆனுல் $1=C$

$n=1$ ஆனுல் $3=B+C$

$\therefore\ 2=B$

$n=2$ ஆனுல் $17=2A+2B+C$

$=2A+4+1$

$\therefore\ 6=A$

$$\therefore\ u_n = \frac{2n^3+1}{\underline{|n}} = \frac{2n(n-1)(n-2)+6n(n-1)+2n+1}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{2}{\underline{|n-3}} + \frac{6}{\underline{|n-2}} + \frac{2}{\underline{|n-1}} + \frac{1}{\underline{|n}} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore\ u_1 = 2 + \frac{1}{\underline{|1}}$$

$$u_2 = 6 + \frac{2}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}}$$

$$u_3 = 2 + \frac{6}{\underline{|1}} + \frac{2}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$u_4 = \frac{2}{\underline{|1}} + \frac{6}{\underline{|2}} + \frac{2}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\therefore \quad S_\infty = 2e + 6e + 2e + (e-1)$$
$$= 11e - 1.$$

இது $\sum_{1}^{\infty} \frac{f(n)}{\underline{|n}}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

எ-கா. (7)

$1 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 5}{\underline{|1}} x + \frac{3 \cdot 7}{\underline{|2}} x^2 - \ldots\ldots \infty$ வரை

கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = (-1)^{n-1} \times \frac{n\,[3+(n-1)2]}{\underline{|n-1}} \cdot x^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n\,(2n+1)}{\underline{|n-1}} \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{n(2n+1)}{\underline{|n-1}} = \frac{2n^2+n}{\underline{|n-1}}$$

$$= \frac{2\,(n-1)\,(n-2) + 7\,(n-1) + 3}{\underline{|n-1}}$$

$$= \frac{2}{\underline{|n-3}} + \frac{7}{\underline{|n-2}} + \frac{3}{\underline{|n-1}}$$

$$\therefore \quad u_n = \left(\frac{2}{\underline{|n-3}} + \frac{7}{\underline{|n-2}} + \frac{3}{\underline{|n-1}}\right) x^{n-1}(-1)^{n-1}$$

$$\therefore \quad u_1 = \qquad\qquad 3$$

$$u_2 = \qquad - \; 7x \; - \frac{3}{\underline{|1}} x$$

$$u_3 = 2x^2 + \frac{7}{\underline{|1}} x^2 + \frac{3}{\underline{|2}} x^2$$

$$u_4 = -\frac{2x^3}{\underline{|1}} - \frac{7}{\underline{|2}}x^3 - \frac{3}{\underline{|3}}x^3$$

... ...

$$\therefore \quad S_\infty = 2x^2\left(1 - \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} \cdots\cdots\right)$$

$$-7x\left(1 - \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} \cdots\cdots\right)$$

$$+3\left(1 - \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots\right)$$

$$= 2x^2e^{-x} - 7xe^{-x} + 3e^{-x}$$

$$= (2x^2 - 7x + 3)e^{-x}$$

எ-கா. (8)

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{x^n}{\underline{|n}}$ ன் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{x^n}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{(n+1)^2\,(n+2)}{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)} \cdot \frac{x^n}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{(n+1)^2\,(n+2)}{\underline{|n+3}} \cdot x^n$$

$(n+1)^2\,(n+2) \equiv (n+3)\,(n+2)\,(n+1) + A\,(n+3)\,(n+2) + B\,(n+3) + C$ எனக் கொள்வோம். A, B, C காண்போம்.

$n = -3\,;\qquad -4 = C$

$n = -2\,;\qquad 0 = B + C$

$\therefore\quad B = 4$

$n = -1\,;\qquad 0 = 2A + 2B + C$

$= 2A + 8 - 4$

$\therefore\quad A = -2$

$$\therefore \quad u_n = \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 2(n+3)(n+2) + 4(n+3) - 4}{\underline{|n+3}}\, x^n$$

$$= \left(\frac{1}{\underline{|n}} - \frac{2}{\underline{|n+1}} + \frac{4}{\underline{|n+2}} - \frac{4}{\underline{|n+3}} \right) x^n$$

$$u_1 = \frac{x}{\underline{|1}} - \frac{2x}{\underline{|2}} + \frac{4x}{\underline{|3}} - \frac{4x}{\underline{|4}}$$

$$u_2 = \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{2x^2}{\underline{|3}} + \frac{4x^2}{\underline{|4}} - \frac{4x^2}{\underline{|5}}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$S_\infty = \left(\frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \right)$$

$$-2\left(\frac{x}{\underline{|2}} + \frac{x^2}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty \right)$$

$$+4\left(\frac{x}{\underline{|3}} + \frac{x^2}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \infty \right)$$

$$-4\left(\frac{x}{\underline{|4}} + \frac{x^2}{\underline{|5}} + \ldots\ldots \infty \right)$$

$$= e^x - 1 - \frac{2}{x}\left(1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \infty - 1 - \frac{x}{\underline{|1}} \right)$$

$$+ \frac{4}{x^2}\left(1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} \ldots\ldots \infty - 1 - \frac{x}{\underline{|1}} - \frac{x^2}{\underline{|2}} \right)$$

$$- \frac{4}{x^3}\left(1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \infty - 1 - \frac{x}{\underline{|1}} - \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} \right)$$

$$= e^x - 1 - \frac{2}{x}(e^x - 1 - x)$$

$$+\frac{4}{x^2}\left((e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$-\frac{4}{x^3}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

$$=e^x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)-1+2-2+\frac{4}{6}$$

$$+\frac{2}{x}-\frac{4}{x}+\frac{4}{2x}$$

$$-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}$$

$$=e^x\left(\frac{x^3-2x^2+4x-4}{x^3}\right)-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^3}$$

எ-கா. (9)

$\sum_{0}^{\infty}\frac{4n^2+2n+1}{\lfloor 2n}=2e$ என நிறுவுக.

$4n^2+2n+1\equiv 2n\ (2n-1)+A\ .\ 2n+B$

எனக் கொண்டு A, B காண்க.

$n=0\ ;\qquad 1=B$

$n=\frac{1}{2}\ ;\qquad 3=A+B$

$\therefore\quad A=2.$

$$\therefore\quad u_n=\frac{2n\ (2n-1)+2\ .\ 2n+1}{\lfloor 2n}$$

$$=\frac{1}{\lfloor 2n-2}+\frac{2}{\lfloor 2n-1}+\frac{1}{\lfloor 2n}$$

$$u_0=\qquad 1$$

$$u_1=1+\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}$$

$$u_2=\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}$$

$$u_3 = \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{2}{\underline{|5}} + \frac{1}{\underline{|6}}$$

... ...

$$S_{\infty} = \frac{e+e^{-1}}{2} + 2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + \frac{e+e^{-1}}{2}$$

$= 2e$ என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 8 (ii)

1. $\sqrt{e}$ ன் மதிப்பை நான்கு பதின் பகுப்பு இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

2. $ae^{bx} + be^{ax}$ ன் விரிவில் முதல் 5 உறுப்புக்களை x-ன் ஏறுபடி வரிசையில் எழுதுக.

$m^2 - pm + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் a, b ஆனால், அவ்வைந்து உறுப்புக்களில் முதல் நான்கு $p + 2qx + \frac{1}{2} pqx^2 + \frac{1}{6} q(p^2 - 2q) x^3$ என நிறுவுக. ஐந்தாவது உறுப்பை p, q ன் சார்பாகக் காண்க.

3. எல்லை $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$ என நிறுவுக.

4. $e^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots\ldots$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}$$ என நிறுவுக.

5. பின்வரும் தொடர்களின் கந்தழி (∞) வரைக் கூட்டுத் தொகை காண்க.

(a) $2 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 5}{\underline{|1}} x + \frac{4 \cdot 6}{\underline{|2}} x^2 + \ldots\ldots$

(b) $\frac{1^2}{\lfloor 1} + \frac{3^2}{\lfloor 2} \log 2 + \frac{5^2}{\lfloor 3} (\log 2)^2 + \ldots\ldots$ (செ.ப.க.)

(c) $1 + \frac{3}{\lfloor 2} + \frac{5}{\lfloor 3} + \frac{7}{\lfloor 4} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(d) $\frac{2 \,.\, 3}{\lfloor 3} + \frac{3 \,.\, 5}{\lfloor 4} + \frac{4 \,.\, 7}{\lfloor 5} + \frac{5 \,.\, 9}{\lfloor 6} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(e) $1 + \frac{1+3}{\lfloor 2} + \frac{1+3+3^2}{\lfloor 3} + \frac{1+3+3^2+3^3}{\lfloor 4} + \ldots\ldots$

(செ. ப. க.)

(f) $\frac{3+6}{\lfloor 2} - \frac{3+6+9}{\lfloor 3} + \frac{3+6+9+12}{\lfloor 4} - \ldots\ldots$

(g) $\frac{3}{\lfloor 1} + \frac{4}{\lfloor 3} + \frac{5}{\lfloor 5} + \frac{6}{\lfloor 7} + \ldots\ldots$ (அ. ப. க.)

(h) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n^2+n)\, x^n}{\lfloor n}$ (அ. ப. க.)

(i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2) \lfloor n} x^n$ (செ. ப. க.)

(j) $1 \,.\, 3 - \frac{2 \,.\, 5}{\lfloor 1} x + \frac{3 \,.\, 7}{\lfloor 2} x^2 - \ldots\ldots$

(k) $\sum_{0}^{\infty} \frac{5n+1}{\lfloor 2n+1}$ (செ. ப. க.)

(l) $\frac{2^2}{\lfloor 1} + \frac{3^2}{\lfloor 2} + \frac{4^2}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(m) $1 - \frac{2^2}{\lfloor 1} + \frac{3^2}{\lfloor 2} - \frac{4^2}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(n) $\frac{3^2}{\lfloor 1} + \frac{5^2}{\lfloor 3} + \frac{7^2}{\lfloor 5} + \ldots\ldots$

(o) $\frac{1}{4 \,.\, \lfloor 2} + \frac{2}{5 \,.\, \lfloor 3} + \frac{3}{6 \,.\, \lfloor 4} + \ldots\ldots$

(p) $\Sigma \dfrac{n^4}{|\underline{n}}$

(q) $\dfrac{1^3}{|\underline{1}} + \dfrac{1^3+2^3}{|\underline{2}} + \dfrac{1^3+2^3+3^3}{|\underline{3}} + \ldots\ldots$

(r) $1^3 - \dfrac{2^3}{|\underline{1}} + \dfrac{3^3}{|\underline{2}} - \dfrac{4^3}{|\underline{3}} + \ldots\ldots$

(s) $\sum_1^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{(n+3)\ |\underline{n-1}}$

(t) $\sum_1^{\infty} \dfrac{4n^2+n-3}{|\underline{2n+1}} x^{2n}$

(u) $1 + \sum_1^{\infty} \dfrac{4^{2n}}{|\underline{2n+1}}$

(v) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,.\,4} + \dfrac{1}{2\,.\,4\,.\,6} - \dfrac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} + \ldots\ldots$

(w) $\dfrac{1^2\,.\,2^2}{|\underline{1}} + \dfrac{2^2\,.\,3^2}{|\underline{2}} + \dfrac{3^2\,.\,4^2}{|\underline{3}} + \ldots\ldots$

(x) $\dfrac{1^2}{|\underline{3}} + \dfrac{2^2}{|\underline{5}} + \dfrac{3^2}{|\underline{7}} + \ldots\ldots$

(y) $x + \dfrac{x^2}{|\underline{3}} + \dfrac{x^3}{|\underline{5}} + \ldots\ldots$

(z) $1\,.\,2+2\,.\,3\,x+3\,.\,4\,\dfrac{x^2}{|\underline{2}} + 4\,.\,5\,\dfrac{x^3}{|\underline{3}} + \ldots\ldots$

6. பின் வருவனவற்றின் விரிவெழுதி, x^n ன் கெழு காண்க.

(a) $\dfrac{1+2x+3x^2}{e^x}$ (b) $\dfrac{1+2x-3x^2}{e^x}$

(c) $(1+2x+3x^2)\ e^{2x}$ (d) $\left(\dfrac{p+qx}{e^x}\right)^2$

(e) $\sum_1^{\infty} \dfrac{(1+2x)^r}{|\underline{r}}$ (f) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2+3x)^n}{|\underline{n}}$

7. $(1+x)\, e^{1+x}$ ன் விரிவில் x^n ன் கெழு காண்க.
(செ. ப. க.)

8. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(a+bx)^n}{\lfloor n}$ ன் விரிவில் x^{14} ன் கெழு : x^{15} ன் கெழு மூன்றானல், x^{24} ன் கெழு : x^{25} ன் கெழு $= 5$ என நிறுவுக.

9. $(a+bx)\, e^x$ ன் விரிவில் x^3, x^4 ன் கெழுக்கள் முறையே 2, $\dfrac{3}{4}$ ஆனல் x^n ன் கெழு என்ன ?

10. $(e^x + e^{-x})$ ஐ இருவிதங்களில் விரித்தெழுதி,

$n^2 + {}_nC_1\,(n-2)^2 + {}_nC_2\,(n-4)^2 + \ldots\ldots (n+1)$ உறுப்புக்கள் வரை கூட்டுத் தொகை $2^n \,.\, n$ என நிறுவுக.

11. n ஓர் இரட்டைப்படை யெண்ணுயின்,

$$\frac{1}{\lfloor 1} \cdot \frac{1}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor 3} \cdot \frac{1}{\lfloor n-3} + \frac{1}{\lfloor 5} \cdot \frac{1}{\lfloor n-5} + \ldots\ldots + \frac{1}{\lfloor n-1} \cdot \frac{1}{\lfloor 1}$$

$= \dfrac{2^{n-1}}{\lfloor n}$ என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

12. $\sum_{0}^{\infty} \dfrac{x\, e^{-\lambda}\, \lambda^x}{\lfloor x} = \lambda$ என நிறுவுக. λ ஒரு மாறிலி.
(செ. ப. க.)

9. மடக்கைத் தொடர்

(Logarithmic Series) :

9·1 புகுமுக வகுப்பு நிலையில் நீங்கள் மடக்கைகள் பற்றி ஓரளவு அறிந்திருப்பீர்கள். அங்கு 10 என்ற எண்ணை மடக்கையடியாகக் கொண்டு மடக்கை வாய்பாடு வகுக்கப் பட்டுப் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆனால் உயர் கணிதத்தில் மடக்கை அடி e என்ற ஒரு அளவுக்கிணங்காத எண்ணைக் கொண்டு மடக்கைகள் வரையறுக்கப்படும் எனக் குறிப்பிடப் பட்டது. இம்முறையில் வரையறுக்கப்பட்ட வாய்பாடு நேப் பியரின் மடக்கை (Napierian log) எனப்படும். இப்போது $e = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \infty$ என்பது உங்களுக்குத் தெரியும்.

உயர் கணிதத்தில், இயற்கணிதத்திலும், நுண் கணிதத் திலும், மற்றைய துறைகளிலும், வேறென்றும் கூறப்படா விடத்து மடக்கையடி e எனவே கொள்ளப்படும். அதாவது மடக்கை N எனில் மடக்கை$_e$N என்றே பொருள்படும். 'மடக்கை' யென்ற சொல்லுக்குப் பதிலாக 'log' என்ற சொல் பயன்படுத்தப்படும்.

9·2 முக்கிய தேற்றம் : $|x| < 1$ ஆனால்,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ldots\ldots \infty$$

வரை.

தெ : $|x| < 1$ ஆனால் $1 + x > 0$ என்பது விளக்கம்.

$$\therefore \quad (1+x)^y = e^{\log(1+x)^y}$$

$$= e^{y \log (1+x)}$$

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி, $|x| < 1$ ஆனல்,

$$(1 + x)^y = 1 + y \cdot x + \frac{y(y-1)}{1.2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots \infty \quad (A)$$

இதை $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \ldots\ldots$ என y-ல் ஒரு வலுத் தொடராகவும் எழுதலாம். $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ யாவும் x-ன் சார்புகளாகும்.

படிக்குறித் தேற்றப்படி

$$(1 + x)^y = e^{y \log (1+x)}$$

$$= 1 + y \log (1+x) + \frac{y^2 [\log (1+x)]^2}{1.2} + \ldots\ldots \infty \quad (B)$$

(A) என்ற தொடர் $|x| < 1$ என்ற மதிப்புக்கு, ஒரு அறவும் குவியும் வலுத் தொடர்.

(B) என்ற தொடர் y-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஒரு குவி தொடர். ஒரே ஒரு கட்டுப்பாடு $(1 + x) > 0$: இது $|x| < 1$ ஆனல் எப்போதும் உண்மையாகும்.

ஆகவே, $|x| < 1$ க்கு, (B) என்ற தொடர் y-ல் ஒரு குவியும் வலுத் தொடர்; அதன் கூட்டுத் தொகை $(1+x)^y$ க்குச் சமம்.

(A)-ம் (B)-ம் அறக்குவியும் வலுத் தொடர்கள்.

(A)-ன் கூட்டுத் தொகை = (B)-ன் கூட்டுத்தொகை

$$= (1 + x)^y$$

எனவே வலுத்தொடர் முற்றொருமைத் தேற்றப்படி, இரு தொடர்களிலும், $y, y^2 \ldots\ldots$ ன் கெழுக்கள் முறையாகச் சமமாகும். (6.8.5, தேற்றம் 7).

இரு தொடர்களிலும் y-ன் கெழுவை ஒப்பிடின்,

$$\log_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \infty$$

குறிப்பு (1) $x = 1$ என்ற மதிப்புக்கும் இது பொருந்தும், ஆனால் $x = -1$ க்குப் பொருத்த மில்லை. தெரிப்பு இந்நிலையில் விடுக்கப்பட்டது ;

குறிப்பு (2). $1 + x > 0$ ஆனால் தான் $\log(1+x)$ என்ற மெய்யெண்ணுக்கு ஒரு மெய்யெண் மடக்கையுண்டு; $1 + x < 0$, ஆனால் $x = 1$ ஆகும் போது, $\log(1+x)$ என்பது, ஒரு குறை யெண்ணின் மடக்கையாகும். குறை யெண் மடக்கைகள் கற்பனை எண்களாகும்.

$$\log(1+1) = \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots \qquad \text{(C)}$$

(C) ஒரு குவி தொடர் என நீங்கள் அறிவீர்கள் (6·9.3 காண்க).

ஆகவே, $-1 < x \leq 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots \infty$$

என்ற தேற்றம் நிறுவப்பட்டது. இது ஓர் அடிப்படைத் தேற்றம்.

9·2.1 மடக்கைத் தொடர் :

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ldots\ldots \infty$ என்ற முடிவிலாத் தொடர் மடக்கைத் தொடர் எனப்படும்.

இத்தொடர், $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஓர் அறவும் குவியும் தொடராகும்.

$x = 1$ ஆகும் போதும், அதாவது $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots$ என்பது ஒரு குவிதொடர் (அறவும் குவியும் தொடரல்ல).

$x = -1$ ஆகும்போது,

அதாவது $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots$

என்பது ஒரு விரிதொடர். இவையாவும் 6.9.3-ல் நிறுவப்பட்டன. கட்டுப்பாடுகள் முக்கியமானவை, கவனத்தில் இருக்க வேண்டியவை.

9·2.2 மடக்கைத் தேற்றம் : கிளைத்தேற்றங்கள்.

(i) $|x| < 1$ ஆனல்,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \infty \qquad (A)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \infty \qquad (B)$$

$$\therefore \log(1+x) - \log(1-x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots \infty\right) \qquad (C)$$

(ii) (C)-ல் $x = \dfrac{m-n}{m+n}$ என ஈடு செய்ய வேண்டு மானல், $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு $\left|\dfrac{m-n}{m+n}\right|$ ஐயும் கட்டுப் படுத்த வேண்டும்.

அதாவது $-1 < \dfrac{m-n}{m+n} < 1$ என்பது கட்டுப்பாடாகும்.

$m+n > 0$ ஆனல் $-m-n < m-n < m+n$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. அதாவது $-2m<0$; $-2n<0$; அதாவது $m > 0$; $n > 0$ எனப் பெறப்படும்.

$m+n < 0$ ஆனல் $-m-n > m-n > m+n$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. அதாவது $-2m > 0$; $-2n > 0$; அதாவது $m < 0$; $n<0$ எனப் பெறப்படும். எனவே $x = \dfrac{m-n}{m+n}$ என ஈடு செய்யவேண்டுமாயின் m, n இரண்டும் > 0 அல்லது இரண்டும் < 0 ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே m, n ஒரே குறி (+ அல்லது −) பெற்றிருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, m, n இரண்டும் குறையெண், இரண்டும் கூட்டெண்ணுக இருப்பின்

$$\log\left\{\frac{1+\frac{m-n}{m+n}}{1-\frac{m-n}{m+n}}\right\} = \log\frac{m}{n} = 2\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \ldots\ldots \infty\right]$$

என்பது ஒரு முக்கியமான கிளைத் தேற்றமாகும். (D)

இங்கு $\frac{m}{n} = x$ எனக் கொண்டால், அதாவது $x > 0$ ஆனல்,

$$\log x = 2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\ldots \propto\right] \quad (E)$$

இதையும் ஒரு கிளைத் தேற்றமாகக் கொள்ளலாம்.

9·2.3 $\log_e 2$, $\log_e 3$ ...... முதலியவைகளின் தோராய மதிப்பறிதல்:

9·2.2-ல் வாய்பாடு (D) ஐப் பயன்படுத்தி முதலில் $\log_e 2$ காண்போம்.

$m = 2$, $n = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$\log_e\left(\frac{2}{1}\right) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots\ldots \propto\right)$$

$$\frac{1}{3} = 0{\cdot}33333$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} = 0{\cdot}01234$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} = 0{\cdot}00082$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} = 0{\cdot}00006$$

$$0{\cdot}34655$$

$\therefore \quad \log_e 2 = 2\,(0{\cdot}34655)$

$= \underline{0{\cdot}6931}$ (தோராய மதிப்பு)

$\log_e 3$ ஐக்காண, $m = 3$, $n = 2$ எனக் கொள்வோம்.

$$\log_e\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \ldots\ldots \propto\right]$$

$$\frac{1}{5} = 0{\cdot}20000$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} = 0{\cdot}00267$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} = 0{\cdot}00006$$

$$\overline{\underline{0{\cdot}20273}}$$

$$\therefore \quad \log_e 3 - \log_e 2 = 2\,(0{\cdot}20273)$$

$$= 0{\cdot}40546$$

$$\therefore \quad \log_e 3 = 0{\cdot}40546 + 0{\cdot}6931 = 1{\cdot}09856$$

$= 1{\cdot}0986$ (நான்கு பதின் பகுப்பு இடங்களுக்கு).

$$\log_e 4 = 2 \,.\, \log_e 2 = 2 \times 0{\cdot}6931$$

$$= \underline{1{\cdot}3962}$$

இவ்வாறே,

$m = 5, \; n = 4$ எனக் கொண்டு $\log_e 5$-ன் மதிப்பையும்

$m = 6 ; \; n = 5$,, $\log_e 6$

... ...

கண்டு கொண்டே போகலாம்.

9·2.4 எ-கா. (1)

$$\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^5 + \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவுக.

வ.கை.பு $= y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \ldots\ldots$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது ; $y = \frac{2ax}{a^2+x^2}$

9·2.2-ல் வாய்பாடு (C) படி,

$$y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots\ldots \infty = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1+\dfrac{2ax}{a^2+x^2}}{1-\dfrac{2ax}{a^2+x^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$$

$$= \log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

என நிறுவப்படும்.

எ-கா. (2)

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2.3(n+1)^2} - \frac{1}{3.4(n+1)^3}$$

...... என நிறுவுக.

வ.கை.புறத்திலுள்ள

$$\left[\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2.3(n+1)^2} + \frac{1}{3.4(n+1)^3} + \ldots\ldots\right] \text{ஐ}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடரில் r வது உறுப்பு

$$= \frac{1}{r(r+1)(n+1)^r}$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)\frac{1}{(n+1)^r}$$

∴ இத்தொடரில் u_r என்பது r வது உறுப்பானால்,

$$u_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n+1}$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{(n+1)^3}$$

... ...

கூட்டுத் தொகை

$$S_\infty = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^3} \ldots\ldots$$

$$- \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots\right)$$

$\frac{1}{m+1} = x$ எனக் கொள்க.

$$S_\infty = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\ldots$$

$$- \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \ldots\ldots\right)$$

$$= -\log(1-x) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots - x\right)$$

$$= -\log(1-x) - \frac{1}{x}[-\log(1-x) - x]$$

$$= -\log(1-x) + \frac{1}{x}\log(1-x) + 1$$

$$= \left(\frac{1}{x} - 1\right)\log(1-x) + 1$$

$$= (n+1-1)\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 1$$ $\left[x = \frac{1}{n+1}\right.$ என ஈடு செய்க$\left.\right]$

$$= n\log\left(\frac{n}{n+1}\right) + 1$$

வேண்டிய கூட்டுத் தொகை

$$= 1 - \left[n\log\left(\frac{n}{n+1}\right) + 1\right]$$

$$= -n\log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (3)

$$\log\frac{4}{e} = \frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} - \frac{1}{4\,.\,5} \ldots\ldots$$ என நிறுவுக.

$$|\, n \text{ வது உறுப்பு } | = |\, u_n \,| = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$ என எழுதலாம்.

$$\therefore\ u_1 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}$$

$$u_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$

$$u_3 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$

$$u_4 = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_\infty = 1 - 2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + 2\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots - 1\right)$$

$$= 1 + 2\log_e 2 - 2$$

$$= 2\log_e 2 - 1$$

$$= \log 4 - \log e$$

$$= \log\frac{4}{e}$$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (4)

$\log(1 - x + x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots\ldots$ எனின், $a_3 + a_6 + a_9 \ldots\ldots = \frac{2}{3}\log 2$ என நிறுவுக.

$$\log(1 - x + x^2) = \log\left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)$$

$$= \log(1+x^3) - \log(1+x)$$

$$= \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{3n}}{n}\ldots\ldots\right)$$

$$-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cdots\cdots\right)$$

$$a_3 = \quad 1-\tfrac{1}{3}$$

$$a_6 = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}$$

$$a_9 = \quad \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}$$

$$a_{12} = -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}$$

$$\cdots\cdots\;\cdots\cdots\cdots$$

$$S_\infty = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots\cdots$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\cdots\cdots\right)$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\cdots\cdots\right)$$

$=\tfrac{2}{3}\log_e 2$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (5)

$$\log(x+2a)=2\log(x+a)-\log x$$

$$-\left\{\frac{a^2}{(x+a)^2}+\frac{a^4}{2(x+a)^4}+\frac{a^6}{3(x+a)^6}\cdots\cdots\right\}$$

என நிறுவுக.

$y=\dfrac{a^2}{(x+a)^2}$ என ஈடு செய்தால்

$$\frac{a^2}{(x+a)^2}+\frac{a^4}{2(x+a)^4}+\frac{a^6}{3(x+a)^6}\cdots\cdots=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\cdots\cdots$$

$$=-\log(1-y)$$

$$=-\log\left(1-\frac{a^2}{(x+a)^2}\right)$$

$$=-\log\left(\frac{x^2+2ax}{(x+a)^2}\right)$$

$$=2\log(x+a)-\log x(x+2a)$$

$$=2\log(x+a)-\log x-\log(x+2a)$$

$$\therefore \quad \text{வ.கை.பு.} = 2\log(x+a) - \log x - 2\log(x+a) + \log x + \log(x+2a)$$

$= \log(x+2a)$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (6).

$\frac{4x}{1 \cdot 3} + \frac{6x^2}{2 \cdot 4} + \frac{8x^3}{3 \cdot 5} + \ldots\ldots$ என்ற முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

n வது உறுப்பு $u_n = \frac{2(n+1)}{n(n+2)} x^n$

$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right) x^n$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad u_1 = x + \frac{1}{3} x$$

$$u_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} x^2$$

$$u_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5} x^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_\infty = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{5} x^3 + \ldots\ldots\right)$$

வ.கை.பு முதற்பகுதி $= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$

$$= -\log(1-x)$$

இரண்டாம் பகுதி $= \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \ldots\ldots$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \times -\log(1-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad S_\infty = -\log(1-x) - \frac{1}{x^2}\log(1-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{x+2}{2x} - \frac{x^2+1}{x^2}\log(1-x)$$

எ·கா. (7)

$x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $p, q,$ ஆனால்,

$$\log(1-ax+bx^2) = (p+q)\,x - \frac{p^2+q^2}{2}x^2 + \frac{p^3+q^3}{3}x^3 - \dots$$

என நிறுவுக.

கொடுத்தபடி, $p+q = -a$

$$pq = b$$

$$(1-ax+bx^2) = (1+\overline{p+q}x+pqx^2)$$

$$= (1+px)(1+qx)$$

$$\therefore \quad \log(1-ax+bx^2) = \log(1+px) + \log(1+qx)$$

$$= px - \frac{p^2x^2}{2} + \frac{p^3x^3}{3} - \dots\dots$$

$$+qx - \frac{q^2x^2}{2} + \frac{q^3x^3}{3}\dots\dots$$

$$= (p+q)\,x - \frac{p^2+q^2}{2}x^2 + \frac{p^3+q^3}{3}x^3 \dots\dots$$

எ·கா. (8)

$a+b+c=0$ ஆனால்,

$$\frac{\Sigma a^5}{5} = \frac{\Sigma a^3}{3} \times \frac{\Sigma a^2}{2}$$ என நிறுவுக.

$(1-ax)(1-bx)(1-cx)$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

$p = ab+bc+ca$; $q = abc$ எனவும் கொள்க.

அப்போது

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 - (a+b+c)\,x + (bc+ca+ab)\,x^2 - abc\,x^3$$

$$= 1 + px^2 - qx^3 \quad [\because \ a+b+c = 0]$$

$$= 1 - x^2 (qx - p)$$

$$\therefore \ \log (1-ax)(1-bx)(1-cx) = \log [1 - x^2 (qx-p)]$$

$| x^2 (qx-p) | < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டை ஏற்றுக் கொள்க.

இரு பக்கங்களையும், மடக்கைத் தொடர் விதிப்படி விரித்தெழுதினல்

$$\left(ax + \frac{1}{2} a^2x^2 + \frac{1}{3} a^3x^3 + \ldots\ldots\right) + \left(bx + \frac{1}{2} b^2x^2 + \ldots\ldots\right) + \left(cx + \frac{1}{2} c^2x^2 + \ldots\ldots\right)$$

$$= x^2 (qx-p) + \frac{1}{2} [x^4 (qx-p)^2] + \ldots\ldots$$

x^2, x^3, x^5 ன் கெழுக்களை இரு பக்கங்களிலும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க

$$= \frac{1}{2} (a^2+b^2+c^2) = -p$$

$$= \frac{1}{3} (a^3+b^3+c^3) = +q$$

$$= \frac{1}{5} (a^5+b^5+c^5) = -\frac{1}{2} \times 2pq$$

$$= -pq$$

$$\therefore \ \frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \times \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (9)

$(a^n + b^n)$ என்பதை $(a + b)$, ab என்ற இராசிகளை யொட்டி எழுதுக.

$$(1-ax)(1-bx) \equiv 1 - (a+b)x + ab\,x^2$$

$(a+b) = p$; $ab = q$ எனவும் கொள்க.

அப்போது $\log (1-ax)(1-bx) \equiv \log (1-px+qx^2)$

$$\therefore \ -\log (1-ax) - \log (1-bx) = -\log [1 - x(p-qx)]$$

$$\text{இ. கை. புறத்தில் } x^n \text{ ன் கெழு} = \frac{a^n + b^n}{n}$$

$$\text{வ. கை. புறம்} = x(p-qx) + \frac{x^2(p-qx)^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^n(p-qx)^n}{n} + \ldots\ldots$$

இத்தொடரில் x^n ன் கெழுக்கள், $\frac{x^n(p-qx)^n}{n}$ என்ற உறுப்பிலும் அதற்கு முன் உள்ள உறுப்புக்களிலும் மட்டுமே இருக்கும். அவையாவன :

$\frac{x^n(p-qx)^n}{n}$ ல் x^n கெழு $\frac{p^n}{n}$

$\frac{x^{n-1}(p-qx)^{n-1}}{n-1}$ ல் x^n ன் கெழு $-\frac{{}_{n-1}C_1\, p^{n-2}q}{n-1}$

$\frac{x^{n-2}(p-qx)^{n-2}}{n-2}$ ல் x^n ன் கெழு $\frac{{}_{n-2}C_2\, p^{n-4}q^2}{n-2}$

... ... முதலியன.

$$\text{எனவே } \frac{a^n+b^n}{n} = \frac{p^n}{n} - {}_{n-1}C_1\frac{p^{n-2}q}{n-1}$$

$$+ {}_{n-2}C_2\frac{p^{n-4}q^2}{n-2} + \ldots\ldots + (-1)^r\,{}_{n-r}C_r\frac{p^{n-2r}q^r}{n-r} + \ldots\ldots$$

இவ்வாறுன கெழுக்களின் எண்ணிக்கை,

n இரட்டைப்படை யெண்ணுயின் $\frac{n}{2}+1$;

n ஒத்தைப்படை யெண்ணுயின் $\frac{n+1}{2}$

$|ax| < 1$, $|bx| < 1$, ஆனுல் இந்த விரிவுகள் யாவும் பொருத்தமாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக, $n = 3$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{a^3+b^3}{3} = \frac{p^3}{3} - \frac{{}_2C_1\, pq}{2}$$

$$= \frac{(a+b)^3}{3} - \frac{2}{2}(a+b)\,ab$$

$$\therefore \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab\,(a+b)$$

$n = 4$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{a^4+b^4}{4} = \frac{p^4}{4} - \frac{{}_3C_1\, p^2 q}{3} + \frac{{}_2C_2\, q^2}{2}$$

$$= \frac{(a+b)^4}{4} - \frac{3}{3}\,(a+b)^2\, ab + \frac{a^2\, b^2}{2}$$

$$\therefore \quad a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4\,(a+b)^2\, ab + 2a^2\, b^2$$

இவ்வாறே, n க்குரிய மற்ற முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும்,

$a^n + b^n = F\,(a+b,\, ab)$ என எழுத முடியும்.

எ-கா. (10)

n பெரிய மதிப்பேற்கும் போது,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = e\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \quad \text{(தோராய மதிப்பு)}$$

என நிறுவுக.

$y = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ எனக் கொள்க.

$$\log y = n \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= -\,n \log\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= -\,n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= -\,n \times -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \qquad \text{(தோராயம்)}$$

$$\therefore \quad y = e^{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}$$

$$= e\left(e^{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}\right)$$

$$= e\left[1+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)+\frac{\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\right]$$

$$= e\left[1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{8n^2}+\ldots\ldots\right]$$

$$= e\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)$$ (தோராய மதிப்பு) என நிறுவப்படுகிறது.

எ-கா. (11)

(a^n+b^n) என்பதை $(a+b)$, ab என்ற இராசிகளை யொட்டி, எழுதுக.

$$(1-ax)(1-bx) \equiv 1-(a+b)x+ab\,x^2$$

$(a+b) = p$; $ab = q$ எனவும் கொள்க.

பயிற்சி 9

1. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $$\frac{1}{2n^2-1}+\frac{1}{3(2n^2-1)^3}+\frac{1}{5(2n^2-1)^5}\ldots\ldots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{n^2-1}\right)$$

(b) $$\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3(2x-1)^3}+\frac{1}{5(2x-1)^5}\ldots\ldots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(c) $$\frac{2n}{n^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3+\ldots\ldots = \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

(d) $\log x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \ldots\ldots$

(e) $n = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^3} + \frac{1}{3e^2} + \ldots\ldots \propto$ ஆனல்

$e^{n+1} - e - 1 = 0$ என நிறுவுக.

2. பின்வரும் கந்தழித் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

(a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots\ldots$

(b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(c) $2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} + \ldots\ldots\right)$ (செ. ப. க.)

(d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\ldots$

(e) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots\ldots$

(f) $\sum_1^{\infty} \frac{9n+26}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{10^n}$

(g) $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2+5n+4}{n(n+1)(n+2)}$

(h) $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2} + \ldots\ldots$ (கே.ப.க.)

(i) $\log_3 e - \log_9 e + \log_{27} e - \log_{81} e + \ldots\ldots$ (அ. ப. க.)

(j) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \ldots\ldots \; |x| < 1$ (அ. ப. க.)

(k) $1 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(l) $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{9^2} + \ldots\ldots$

(செ. ப. க.)

(m) $\frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 5} + \frac{x^6}{5 \cdot 7} + \ldots\ldots$

(n) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots\ldots$

(o) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\ldots$ (செ. ப. க.)

(p) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(9n^2 - 1)}$

3. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\ldots = \log\left(\frac{8}{e}\right)$

(b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{13}{7 \cdot 8 \cdot 9}$

$= \frac{5}{2} - 3 \log 2$

(c) $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots\ldots = \frac{3}{4} - \log 2$

(d) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}$

$= 2 \log 2 - \frac{5}{4}$

4. பின் வருவனவற்றில் முதல் நிரலில் ஒரு மடக்கைக் கோவையும், இரண்டாவது நிரலில் அதற்கெதிராக அதன் விரிவில் தோன்றும் x^n ன் கெழுவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவை சரிதானு எனக் காண்க.

(1)	(2)
(a) $\log (1+5x+6x^2)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(2^n+3^n)}{n}$
(b) $\log \dfrac{1}{6+x-x^2}$	$\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]$
(c) $\log \left(\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$	$n=2r$; கெழு 0 $n=6r\pm 1$; கெழு $\dfrac{2}{n}$ $n=6r+3$; கெழு $-\dfrac{4}{n}$
(d) $\log (1+x+x^2+x^3+x^4)$	$n=5r$; கெழு $-\dfrac{4}{n}$ $n\neq 5r$; கெழு $\dfrac{1}{n}$
(e) $\log \left(\dfrac{1}{2x^2-5x+2}\right)$	$\lvert x \rvert < \dfrac{1}{2}$ ஆனல் $\dfrac{1}{n}\left(2n+\dfrac{1}{2n}\right)$

5. $$\log \frac{n}{a} = \frac{n-a}{n-b} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-a}{n-b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n-a}{n-b}\right)^3 + \ldots\ldots$$
$$+ b\left(\frac{a-n}{an}\right) + \frac{b^2}{2}\left(\frac{a^2-n^2}{a^2n^2}\right) + \frac{b^3}{3}\left(\frac{a^3-n^3}{a^3n^3}\right) + \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

6. $\log\{1-(a-b)x\} \times \log\{1-(b-c)x\}$ $\times \log\{1-(c-a)x\}$ என்ற மடக்கைக் கோவையின் விரிவில்

$$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5+5(a-b)(b-c)(c-a)\times$$

$$[(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)]=0$$ என நிறுவுக.

7. $\log(1-3x+2x^2)$ ன் விரிவை இருவிதங்களில் கண்டு $3^n-n\,.\,3^{n-2}\,.\,2+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\,.\,3^{n-4}\,.\,2^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,3^{n-6}\,.\,2^3$ $+\ldots\ldots=2^n+1$ என நிறுவுக.

8. பின் வருவனவற்றில் முதல் நிரலில் ஒரு கோவையும், இரண்டாவது நிரலில் (குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு) அதன் தோராய மதிப்பும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன. அவற்றைச் சரிபார்த்து நிறுவுக.

கோவை	தோராய மதிப்பு
(a) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$	$e^x\left[1+\frac{x^2}{2y}+\frac{x^3}{24\,y^2}(3x-4)\right]$ (எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)
(b) $(1+x)^{1+x}$	$1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3$; (x^4 ம் அதற்கு மேற்பட்ட x ன் படிகளும் விடுக்கப் பட்டன)
(c) $\log\left(\frac{1+2e^x}{3}\right)$	$\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}x^2$ (x சிறியது)
(d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$	$e^{1+\frac{1}{12n^2}}$ (n பெரிது)
(e) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$	$\frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

9. $a+b+c=0$ ஆனால் பின் வருவதை நிறுவுக.

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{4}\times\frac{a^3+b^3+c^3}{2}$$

10. (a^5+b^5) ஐயும் (a^6+b^6) ஐயும் $(a+b)$, ab என்ற இராசிகளின் சார்பாக எழுதுக.

11. a, b, c மூன்று அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்களானால்

$$\log b=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{2}\log c+\frac{1}{2ac+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2ac+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2ac+1)^5}+\ldots\ldots$$ என நிறுவுக.

12. $\log(1+x+x^2)$ ன் விரிவிலும்

$\log\left(\dfrac{1}{1-x-x^2+x^3}\right)$ ன் விரிவிலும்

x^n ன் கெழுக்கள் காண்க.

13. பின் வரும் எல்லைகளை நிறுவுக.

(i) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{e^x-\log(e+ex)}{x^2}=1$

(ii) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{\log x}{x^2-3x+2}=-1$

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\log(1+x^2)}=0$

(iv) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=1$

14. $$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\cdots\right]$$

என்ற முடிவின் அடிப்படையில், log 17 ன் தோராய மதிப்பை நான்கு பதின் பகுப்புப் பின்னங்கள் வரை காண்க.

($\log_e 2 = 0{\cdot}6932$ எனக் கொள்க)

15. $$\log\frac{n+1}{n-1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \cdots\cdots$$

என்ற முடிவின் அடிப்படையில், $\log\frac{4}{3}$ ன் தோராய மதிப்பை நான்கு பதின் பகுப்புப் பின்னங்கள் வரை காண்க.

16. $x > 0$, ஆனல் $x \neq 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\frac{x-1}{x} < \log x < (x-1)$ என நிறுவுக.

10. தொடர்கள் கூட்டல்

(Summation of Series)

10·1 சில நெறிகளுக்குட்பட்ட தொடர்களின் கூட்டுத் தொகை, காணும் முறைகளைப் புகுமுக வகுப்பு நிலையில் நாம் பார்த்திருக்கிறோம். அவைகளைத் தொகுத்து, முன்னுரையில் 1.5, (3), (4), (5)-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

10.2 குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய உறுப்புக்கள் உள்ள தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகள் மட்டுமேயன்றி, கந்தழித் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பற்றியும் இப்போது ஓரளவு தெரியும். 6-ம் பகுதியில் குவி தொடர்களில் சிலவற்றைப் பார்த்தோம். நாம் மேலும் 7, 8, 9 பகுதிகளில் ஈருறுப்புத் தேற்றம், படிக்குறித் தேற்றம், மடக்கைத் தொடர்த் தேற்றம், முதலியவைகளைப்பயன் படுத்தி, திட்டமான வடிவிலுள்ள சில தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணும் முறைகளையும் நாம் அறிவோம்.

10·3 இப் பகுதியில், மேலும், வேறு சில விதிகளுக்குட்பட்ட சில தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகள் காணும் முறைகளைக் காண்போம். கந்தழித் தொடர்கள், குவி தொடர்களாயிருப்பின் அவைகளின் கூட்டுத் தொகைகளையும் அறிய நாம் முயல்வோம். ஒரு தொடரில் S_n என்பது முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் S_∞ என்பது கந்தழிக் குவி தொடரின் கூட்டுத் தொகையையும் குறிக்கும்.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n;$$

$$S_\infty = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n + \dots\dots \infty \text{ (குவி தொடர்)}.$$

10·4 வேறுபாடு முறை (Method of differences) :

இது ஒரு பொதுப்பட்ட முறையாகும். u_r ன் மதிப்பை $v_{r+1} - v_r$ அல்லது $v_r - v_{r+1}$ என்கிற வகையில் அமைக்க (v_r) என்னும் ஒரு தொடர் முறையை நாம் காண முடியுமானல் இம்முறை பயன்படும்.

அப்போது,

$$u_1 = \pm (v_2 - v_1)$$
$$u_2 = \pm (v_3 - v_2)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$u_n = \pm (v_{n+1} - v_n) \quad \text{ஆனல்}$$

நிரல்களைக் கூட்டிச் சமன் செய்ய,

$$S_n = \pm (v_{n+1} - v_1) \text{ என்ற கூட்டுத்}$$

தொகை கிடைக்கும்.

$$\lim_{n \to \infty} (v_1 - v_{n+1}) = L_1 \text{ அல்லது}$$

$$\lim_{n \to \infty} (v_{n+1} - v_1) = L_2 \text{ என நாம் காண முடியுமாயின்,}$$

$S_\infty = L_1$ அல்லது L_2 என்று பொருந்தும் வகைப்படி கொள்ளலாம்.

10·4.1 வேறுபாடு முறை-பகுதிப்பின்னங்கள் :

u_r ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக்கி, அப்பகுதிப் பின்னங்களே v_{r+1}, v_r என்ற முறையில் அமையுமானல், வேறுபாடு முறை கொண்டு S_n, முடியுமானல் S_∞ அறியலாம்.

10 4.2 எ-கா. (1) : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ எனக் கொண்டால்,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிவுபடும்.}$$

முறையே $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என ஈடு செய்ய,

$$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

நிரல்களைக் கூட்ட,

$$\sum_{1}^{n} u_n = S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

எல்லை $S_n = 1$ எனவும் பெறப்படும்.
$n \to \infty$

எனவே $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ என்ற தொடருக்கு $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ எனவும் $S_\infty = 1$ எனவும் நாம் பெறுகிறோம்.

எ-கா. (2) :

$$\frac{1}{3 \,.\, \lfloor\underline{1}} + \frac{1}{4 \,.\, \lfloor\underline{2}} + \frac{1}{5 \,.\, \lfloor\underline{3}} \cdots\cdots$$

என்ற தொடரின் S_n, முடியுமானால் S_∞ காண்க.

$$u_n = \frac{1}{(n+2) \,.\, \lfloor\underline{n}}$$

$$= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)\lfloor\underline{n}}$$

$$= \frac{n+1}{\lfloor\underline{n+2}}$$

$$= \frac{n+2-1}{\lfloor\underline{n+2}}$$

$$= \frac{1}{\lfloor\underline{n+1}} - \frac{1}{\lfloor\underline{n+2}}$$

$n = 1, 2, 3......$ என ஈடு செய்ய,

$$u_1 = \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{\underline{|3}} - \frac{1}{\underline{|4}}$$

... ...

$$u_n = \frac{1}{\underline{|n+1}} - \frac{1}{\underline{|n+2}}$$

நிரல்களைக் கூட்டிச் சமன் செய்ய,

$$\sum_{1}^{n} u_n = S_n = \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|n+2}}$$

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \; S_n = \frac{1}{\underline{|2}}$$

10·4·3 $u_n = (a+\overline{n-1}\,b)(a+nb)(a+\overline{n+1}\,b)...(a+\overline{n+r-2}\,b)$ என்ற n வது உறுப்பைக் கொண்ட தொடருக்கு S_n காண்போம்.

n வது உறுப்பிற்குக் கீழ்க் கூறப்படும் பண்புகள் உண்டு:

(1) அதில் $\underline{r}$ சினைகள் உண்டு;

(2) அவையாவும் கூட்டுத் தொடர் முறையில் உள்ளன; பொது வேறுபாடு b.

(3) உறுப்புக்களின் முதல் சினைகளான $a, a+b, a+2b,$ ...... என்பவை, அதே கூட்டுத் தொடர் முறையில், அதாவது அதே பொது வேறுபாடு b பெற்று உள்ளன.

இப்போது, $v_n = u_n\ (a+\overline{n+r-1}\,b)$ எனக் கொள்வோம். அதாவது u_n ஐ, அதன் கடைசிச் சினைக்கு அடுத்த சினையால் பெருக்கி வருவது v_n ஆகிறது.

$\therefore \quad v_{n-1} = u_{n-1}\ (a+\overline{n+r-2}\,b)$ எனவிருக்கும்.

$$v_n - v_{n-1} = u_n\ (a+\overline{n+r-1}\,b) - u_{n-1}\ (a+\overline{n+r-2}\,b)$$

$$= u_n\ [(a+\overline{n+r-1}\,b) - (a+\overline{n-2}\,b)]$$

$$= u_n\ (r+1)\,b \qquad \text{(A)}$$

இது பொதுத் தொடர்பாகையால்,

$n=1, 2, 3$ ...... என ஈடு செய்ய,

$$v_1-v_0=u_1\,(r+1)\,b$$
$$v_2-v_1=u_2\,(r+1)\,b$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\underline{v_n-v_{n-1}=u_n\,(r+1)\,b}$$

நிரல்களைக் கூட்டிச் சமன் செய்ய,

$$v_n-v_0=(r+1)\,b\,S_n$$
$$\therefore\quad S_n=\frac{(v_n-v_0)}{(r+1)\,b}$$

இங்கு $v_0=(a-b)\,a\,(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{r-1}\,b)$

கிளைத்தேற்றங்கள் :

(1) $a=b$ ஆனால் $v_0=0$

$$\therefore\quad S_n=\frac{v_n}{(r+1)\,a}$$

(2) $a=1,\ b=1$ எனக் கொண்டால்,

$u_n=n\,(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)$ ஆகும்.

$$\therefore\quad S_n=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)\,(n+r)}{(r+1)}$$

இதையொட்டி, பின் வரும் சில முடிவுகள் பெறலாம் :

$u_n=n\,(n+1)$ ஆனால், அதாவது

தொடர் $=1\,.\,2+2\,.\,3+3\,.\,4+\ldots\ldots+n\,(n+1)$ ஆனால்,

$$S_n=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$

$u_n=n\,(n+1)\,(n+2)$ ஆனால், அதாவது

தொடர் $=1\,.\,2\,.\,3+2\,.\,3\,.\,4+3\,.\,4\,.\,5+\ldots\ldots+n\,(n+1)\,(n+2)$ ஆனால்,

$$S_n=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$$

10·4.3.1 எ-கா. (1)

$$2\,.\,5\,.\,8+5\,.\,8\,.\,11+\ldots\ldots+(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)$$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையறிக.

$$u_n=(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)$$

ஆகவே, $v_n=(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)\,(3n+8)$ எனக் கொள்ளப்படும்.

$$\begin{aligned} v_n-v_{n-1} &= (3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)\,(3n+8) \\ &\quad -(3n-4)\,(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5) \\ &= (3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)\,[(3n+8)-(3n-4)] \\ &= 12\,u_n \end{aligned}$$

$n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ என ஈடு செய்ய,

$$\begin{aligned} v_1-v_0 &= 12u_1 \\ v_2-v_1 &= 12u_2 \\ \ldots\ \ \ldots & \ \ \ldots \\ \ldots\ \ \ldots & \ \ \ldots \\ v_n-v_{n-1} &= 12u_n \end{aligned}$$

$$\therefore\ v_n-v_0=12\,S_n$$

$$\therefore\ \sum_1^n u_n=S_n=\frac{v_n-v_0}{12}$$

$$v_0=-1\,.\,2\,.\,5\,.\,8=-80$$

$$\therefore\ S_n=\frac{v_n+80}{12}$$

$$=\frac{1}{12}[(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)\,(3n+8)-80]$$

எ-கா. (2)

$$1\,.\,2\,.\,5+2\,.\,3\,.\,7+3\,.\,4\,.\,9+\ldots\ldots n\,(n+1)\,(2n+3)$$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

இத்தொடர் 10·4.3 ல் கண்ட அமைப்பிலில்லை. ஒவ்வொரு உறுப்பிலும், முதல் இரு சினைகளுக்கு உள்ள வேறுபாடு 1; மூன்றுவது சினைகளுக்குள்ள வேறுபாடு 2. ஆகவே முதலில் 10·4.3 ல் உள்ள அமைப்பிற்கு u_n ஐக் கொண்டு வரவேண்டும்.

$$u_n = n(n+1)(2n+3)$$
$$= n(n+1)(2n+4-1)$$
$$= 2n(n+1)(n+2) - n(n+1)$$
$$\therefore \quad S_n = 2\Sigma n(n+1)(n+2) - \Sigma\, n(n+1)$$
$$= 2\,.\,\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(10·4.3, கிளைத் தேற்றம் 2 காண்க)

எ-கா. (3)

$\sum\limits_{1}^{n} n^4$ ன் மதிப்பறிக.

n^4 ஐ $\quad n^4 \equiv n(n+1)(n+2)(n+3) + An(n+1)(n+2) + Bn(n+1) + Cn + D$

என்ற அமைப்பிலிட்டு, A, B, C, D, கண்டு 10·4.3 கிளைத் தேற்றம் 2 ஐப் பயன்படுத்துக.

$A = -6,\ B = 7,\ C = -1,\ D = 0$ எனப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad \sum_{1}^{n} n^4 = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$- \frac{6}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$+ \frac{7}{3} n(n+1)(n+2)$$
$$- \frac{n(n+1)}{2}$$

10·4.4 $u_n = \dfrac{1}{(a+\overline{n-1}\,b)(a+nb)\ldots\ldots(a+\overline{n+r-2}\,b)}$ ஆனல் S_n காண்க.

இங்கு u_n என்பது, 10.4.3 ல் கண்ட u_n ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்.

இங்கு $v_n = \dfrac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}\,b)\ldots\ldots(a+\overline{n+r-2}\,b)}$

எனக் கொள்க, அதாவது u_nன் கீழ்ப் பகுதியில் முதல் உறுப்பு நீக்கப்பட்டதாகும்.

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}\,b)\ldots\ldots(a+\overline{n+r-2}\,b)}$$

$$- \frac{1}{(a+\overline{n-1}\,b)(a+nb)\ldots\ldots(a+\overline{n+r-3}\,b)}$$

$$= u_n\left[(a+\overline{n-1}\,b) - (a+\overline{n+r-2}\,b)\right]$$

$$= -(r-1)\,b\,.\,u_n$$

இங்கு $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ என ஈடுசெய்ய,

$$v_1 - v_0 = -(r-1)\,b\,.\,u_1$$

$$v_2 - v_1 = -(r-1)\,b\,.\,u_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = -(r-1)\,b\,.\,u_n}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = -(r-1)\,b\,.\,S_n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_0 - v_n}{(r-1)\,b}$$

இங்கு $v_0 = \dfrac{1}{a(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{r-2}\,b)}$

10·4.4.2 எ-கா. (1)

$\dfrac{1}{3\,.\,5\,.\,7} + \dfrac{1}{5\,.\,7\,.\,9} + \ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$v_n = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= u_n(\overline{2n+1} - \overline{2n+5})$$

$$= -4u_n$$

$$\therefore \quad v_1 - v_0 = -4u_1$$

$$v_2 - v_1 = -4u_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = -4u_n}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = -4\,S_n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_0 - v_n}{4}$$

இங்கு $v_0 = \dfrac{1}{3\,.\,5}$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3\,.\,5} - \frac{1}{(2n+3)\,(2n+5)}\right]$$

$$S_\infty = \frac{1}{60}$$

எ-கா. (2)

$\dfrac{4}{2\,.\,3\,.\,4} + \dfrac{7}{3\,.\,4\,.\,5} + \dfrac{10}{4\,.\,5\,.\,6} + \dots\dots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

(செ.ப.க. 1940 B.A.)

$$u_n = \frac{3n+1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{3n+9-8}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{3}{(n+1)\,(n+2)} - \frac{8}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$\therefore \quad \sum_1^n u_n = \sum_1^n \frac{3}{(n+1)\,(n+2)} - \sum_1^n \frac{8}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{3}{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) - 8\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,.\,3} - \frac{1}{(n+2)\,(n+3)}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{n+2} + \frac{4}{(n+2)\,(n+3)}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{5}{6} - \frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$$

$$S_\infty = \frac{5}{6}$$

10·4.5 $u_n = \dfrac{a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+\overline{n-1}\,d)}{b(b+d)(b+2d)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}\,d)}$ ஆனல்

முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

இங்கு $v_n = u_n(a+nd)$ எனக் கொள்க.

$$v_{n-1} = u_{n-1}(a+\overline{n-1}\,d)$$

$$= \frac{a(a+d)\ldots\ldots(a+\overline{n-2}\,d)}{b(b+d)\ldots\ldots(b+\overline{n-2}\,d)}(a+\overline{n-1}\,d)$$

$$= u_n(b+\overline{n-1}\,d)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = u_n[(a+nd)-(b+\overline{n-1}\,d)]$$

$$= u_n(a+d-b)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என ஈடு செய்ய,

$$v_1 - v_0 = u_1(a+d-b)$$

$$v_2 - v_1 = u_2(a+d-b)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = u_n(a+d-b)}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = S_n(a+d-b)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_n - v_0}{(a+d-b)}$$

இங்கு $v_0 = v_1 - u_1(a+d-b)$

$$= \frac{a}{b}(a+d) - \frac{a}{b}(a+d-b)$$

$$= a$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{v_n - a}{(a+d-b)}$$

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட தொடரை, கந்தழி வரை எடுத்துச் சென்றால், அது ஏதாவது நிபந்தனைக்குட்பட்டால், குவிதொடராகுமா எனப் பார்ப்போம்.

இராபேயின் சோதனை (6·5.9) யைப் பயன்படுத்த, $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{b-a}{d}$ எனக் காணலாம்.

அச்சோதனைப்படி, $\frac{b-a}{d} > 1$ ஆனால் $\sum_{1}^{\infty} u_n$ ஒரு குவிதொடராகும்.

அதாவது $b - a > d$,

அதாவது $b > a + d$ ஆனால்

$\sum_{1}^{\infty} u_n$ குவி தொடர்.

அந்தக் கட்டுப்பாட்டில், $\sum_{1}^{\infty} u_n$ ன் கூட்டுத் தொகை காண்போம்.

$$S_n = \frac{a}{a+b-d}\left[\frac{(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+nd)}{b(b+d)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}\,d)} - 1\right]$$

$\lim_{n \to \infty} S_n$ என்னவெனப் பார்ப்போம்.

இதற்காக, $\lim_{n \to \infty} \frac{b(b+d)(b+2d)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}\,d)}{(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+nd)}$ என்ன எனக் காணவேண்டும்.

$b > a + d$ எனக் கொண்டால்,

$b = a + d + x$ எனக் கொள்வோம் (x ஒரு கூட்டு முழு எண்).

$$\frac{b+\overline{r-1}\,d}{a+rd} = \frac{a+d+x+\overline{r-1}\,d}{a+rd}$$

$$= \frac{(a+rd)+x}{a+rd}$$

$$= 1 + \frac{x}{a+rd} \quad (x > 0)$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a+d} \times \frac{b+d}{a+2d} \times \ldots\ldots \times \frac{b+\overline{n-1}\,d}{a+nd} \ldots\ldots \infty$$

$$= \left(1+\frac{x}{a+d}\right)\left(1+\frac{x}{a+2d}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x}{a+nd}\right)\ldots\ldots\infty$$

$$> 1+x\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}+\ldots\ldots\frac{1}{a+nd}\ldots\ldots\infty\right)$$

(வியர்ஸ்டிராஸ் சமனின்மைத் தேற்றம் 4·9.6.1)

ஆனல் $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a+nd}$ ஒரு விரிதொடரென நாம் எளிதில்

காணலாம் (தேற்றம் 6·5.3. துணைத் தொடர் $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$)

$$\therefore \quad \frac{b}{a+d} \times \frac{b+d}{a+2d} \times \ldots\ldots \frac{b+\overline{n-1}\,d}{a+nd} \ldots\ldots \to \infty$$

$$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \; \frac{a+d}{b} \times \frac{a+2d}{b+d} \times \ldots\ldots \times \frac{a+nd}{b+\overline{n-1}\,d} \ldots\ldots \to 0$$

$$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \; S_n = \frac{a}{a+d-b}\left[\frac{(a+d)\,(a+2d)\ldots\ldots(a+nd)}{b\,(b+d)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}\,d)} - 1\right]$$

$$= -\frac{a}{b-(a+d)} \times -1$$

$$= \frac{a}{b-(a+d)}$$

எனவே நாம் கொண்ட தொடர் $\sum_{1}^{\infty} u_n$, $b > a+d$ ஆனல் ஒரு குவி தொடர். அப்போது அதன் கூட்டுத் தொகை $\frac{a}{b-(a+d)}$. $b < a+d$ ஆனல் அது ஒரு விரி தொடராகும்.

10·4.5.1. எ-கா. (1) $\frac{1}{4} + \frac{1\,.\,3}{4\,.\,6} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{4\,.\,6\,.\,8} + \ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots (2n+2)}$$

$$v_n = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots (2n+2)} . (2n+1)$$

$$v_{n-1} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-3)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots 2n} . (2n-1)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots (2n+2)} . [(2n+1)-(2n+2)]$$

$$= -u_n$$

$$\therefore \quad v_1 - v_0 = -u_1$$

$$v_2 - v_1 = -u_2$$

$$v_3 - v_2 = -u_3$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = -u_n}$$

$$\therefore \quad v_n - v_0 = -S_n$$

$$\therefore \quad S_n = v_0 - v_n$$

இங்கு $v_0 = v_1 + u_1$

$$= \frac{1 . 3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad S_n = 1 - \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots (2n+2)} . (2n+1)$$

இங்கு $a=1$; $d=2$; $b=4$

$$\therefore \quad b = 4 > a+d$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{n \to \infty} S_\infty = 1 = \frac{a}{b-(a+d)}$$

∴ இது கந்தழிவரை கொள்ளப்பட்டால், ஒரு குவி தொடராகி, கூட்டுத்தொகை 1 எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 10 (i)

பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையும், முடியுமிடத்து கந்தழிக் கூட்டுத் தொகையும் காண்க. (1 – 14 ; 18 – 26)

1. $\dfrac{1}{3\,\underline{|1}}+\dfrac{1}{4\,\underline{|2}}+\dfrac{1}{5\,\underline{|3}}+\ldots\ldots$

2. $\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{2}{\underline{|3}}+\dfrac{3}{\underline{|4}}+\ldots\ldots$

3. $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\dfrac{1}{6^2-1}+\ldots\ldots$

4. $\dfrac{1}{a\,(a+b)}+\dfrac{1}{(a+b)\,(a+2b)}+\ldots\ldots$

5. $\dfrac{1}{(1+a)\,(1+2a)}+\dfrac{1}{(1+2a)\,(1+3a)}+\ldots\ldots$

6. $\dfrac{2}{1\,.\,3}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{3}{3\,.\,5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{5\,.\,7}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots$

7. $\dfrac{1\,.\,2}{\underline{|3}}+\dfrac{2\,.\,2^2}{\underline{|4}}+\dfrac{3\,.\,2^3}{\underline{|5}}+\ldots\ldots$

8. $\dfrac{1}{(1+x)\,(1+ax)}+\dfrac{a}{(1+ax)\,(1+a^2x)}+\dfrac{a^2}{(1+a^2x)\,(1+a^3x)}+\ldots\ldots$

9. $1\,.\,3\,.\,5\,.\,7+3\,.\,5\,.\,7\,.\,9+\ldots\ldots$

10. $1\,.\,2\,.\,4^2+2\,.\,3\,.\,5^2+3\,.\,4\,.\,6^2+\ldots\ldots$

11. $3\,.\,7\,.\,11+7\,.\,11\,.\,15+11\,.\,15\,.\,19+\ldots\ldots$

12. $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4+2\,.\,3\,.\,4\,.\,5+\ldots\ldots$

13. $1\,.\,3\,.\,4+2\,.\,4\,.\,5+3\,.\,5\,.\,6+\ldots\ldots$

14. $1\,.\,1^2+2\,(1^2+2^2)+3\,(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots$

15. $\sum_{r=1}^{n} r\,(n-r+1)\,(n-r+2)$

$$= \frac{1}{12}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$ என நிறுவுக.

16. முதல் n இயற்கை யெண்களைக் கொண்டு, இரண்டிரண்டாகப் பெருக்கிய தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$\frac{1}{24}\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2)$$ என நிறுவுக.

17. $1.n+2.(n-1)+3.(n-2)+\ldots+n.1 = \frac{1}{6}\,n(n+1)\,(n+2)$

என நிறுவுக.

18. $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots\ldots$

19. $\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{7.11.15}+\frac{1}{11.15.19}+\ldots\ldots$

20. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots\ldots$

21. $\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.4.6}+\ldots\ldots$

22. $\frac{1}{1.3.4}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{5}{3.5.6}+\ldots\ldots$

23. $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{10}{4.5.6}+\ldots\ldots$

24. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+3)}$; S_n ம் கூட்டு.

25. $\sum\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+5)}\ldots\ldots$

26. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{1^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1^2+2^2}{1^3+2^3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1^2+2^2+3^2}{1^3+2^3+3^3}+\ldots\ldots$

27. பின்வரும் தொடர்களில், முதல் n உறுப்புக்கள் வரையிலும், முடியுமிடத்து கந்தழி வரையிலும் காண்க:

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\ldots$

(ii) $\frac{11}{14}+\frac{11.13}{14.16}+\frac{11.13.15}{14.16.18}+\ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\ldots\ldots$

(iv) $\frac{4}{5}+\frac{4.7}{5.8}+\frac{4.7.10}{5.8.11}+\ldots\ldots$

(v) $\frac{1}{4}+\frac{1.2}{4.5}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\frac{1.2.3.4}{4.5.6.7}$

28. $(b-1)>a>0$, ஆனல்,

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\ldots\ldots$$

என்ற தொடரின் கந்தழிக் கூட்டுத் தொகை $\frac{b-1}{b-a-1}$ என நிறுவுக.

(10·4.5 பின் பகுதியில் உள்ள முறையைக் காண்க).

முதலில் படிப்பவர்கள் 10·5 முதல் 10·7.1 வரை விலக்கிப் படிக்கலாம்.

*10·5 வேறுபாட்டு வரிசைகள் – அவ்வழிக் கூட்டல். (Method of differences-Summation by that method).

$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ என்பவை ஒரு தொடர் முறையின் உறுப்புக்கள் எனக் கொள்வோம்.

u_2-u_1; u_3-u_2; u_4-u_3; ...... u_n-u_{n-1}; ...... என்பவை அத்தொடரின் உறுப்புக்களின் முதல் வரிசை வேறுபாடு (First order of differences) எனப்படும்.

அவைகளைக் குறிப்பிடும் முறை :

$$u_2-u_1=\triangle u_1$$

$$u_3-u_2=\triangle u_2$$

பொதுவாக $u_{n+1}-u_n=\triangle u_n$

மேலும்,

$$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$$

$$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$$

பொதுவாக,

$$\Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta^2 u_n$$

என, இரண்டாவது வரிசை வேறுபாடுகள் குறிப்பிடப்படும்.

கீழ் வரும் கட்டம், ஒரு எடுத்துக் காட்டு முறையில் இதை விளக்கும் :

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$	$\Delta^5 u_x$
1	2	$\Delta u_1 = 15$	$\Delta^2 u_1 = 50$	$\Delta^3 u_1 = 60$	$\Delta^4 u_1 = 24$	0
2	17	$\Delta u_2 = 65$	$\Delta^2 u_2 = 110$	$\Delta^3 u_2 = 84$	$\Delta^4 u_2 = 24$	
3	82	$\Delta u_3 = 175$	$\Delta^2 u_3 = 194$	$\Delta^3 u_3 = 108$		
4	257	$\Delta u_4 = 369$	$\Delta^2 u_4 = 302$			
5	626	$\Delta u_5 = 671$				
6	1297					

$\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, $\Delta^4 u_x$ ...... என்பவை முறையே இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் ...... வரிசை வேறுபாடுகள் எனப்படும். (Second, third, fourth, ... order of differences)

$\Delta^r u_x$ என்பது பொதுவாக r-ஆம் வரிசை வேறுபாடு எனப்படும்.

10·6 ஒரு தொடர் முறை பொது உறுப்பு, அதாவது n-வது உறுப்பு, $u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots\ldots + a_k$ எனக்கொள்வோம்.

இதற்கு, வரையறைப்படி,

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= a_0 [(n+1)^k - n^k] \\ &+ a_1 [(n+1)^{k-1} - n^{k-1}] + \\ &+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &+ a_{k-1} [(n+1) - n] + (a_k - a_k) \\ &= A_0 n^{k-1} + A_1 n^{k-2} + \ldots\ldots + A_{k-1}\end{aligned}$$

எனப் பெறப்படும்.

அதாவது $\triangle u_n$ என்பது $(k-1)$ 'படி'யுள்ள n-ஐச் சார்ந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

அவ்வாறே,

$$\triangle^2 u_n = B_0 n^{k-2} + \ldots\ldots + B_{k-2}$$
$$\triangle^3 u_n = C_0 n^{k-3} + \ldots\ldots + C_{k-3}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\triangle^k u_n = L_n^{k-k} = \text{ஒரு மாறிலி}$$
$$\triangle^{k+1} u_n = 0$$

ஆகவே, u_n என்ற உறுப்பு, n ஆலாகிய ஒரு 'k' 'படி' பல்லுறுப்புக்கோவையானல், அதன் $\triangle^k u_n$ ஒரு மாறிலியாகவும், K க்கு மேற்பட்ட வேறுபாட்டு வரிசைகள் பூச்சியமும் ஆகின்றன.

10·6.1 செயலிகள் (operators) $\triangle$; E :

$\triangle u_x$ என்று கூறும்போது, $\triangle$ என்பது u_x ஐப் பெருக்குகின்றது என்ற பொருளில் பயன் படுத்துவதாக அல்ல ; அது ஒரு செயலைக் குறிக்கிறது (operation). வகை நுண் கணிதத்தில் Dy, $\frac{d}{dx}(y)$ என்ற செயலிகள் பயன்படுவதுபோல, $\triangle$-ம் ஒரு செயலியாகிறது. $\triangle u_x$ என்பதன் பொருள் $u_{x+1} - u_x$ என்ற செயற்பாடு. (operation).

$\triangle$ என்பது ஒரு செயலி (operator) எனக் கூறப்படும்.

அவ்வாறே E என்னும் மற்ெருரு செயலி வழக்கில் உள்ளது.

$E u_x = u_{x+1}$ என்ற செயற் பாட்டைக் குறிக்கும்.

இப்போது E என்ற செயலிக்கும் $\triangle$ என்ற செயலிக்கும் உள்ள ஒரு தொடர்பைப் பார்ப்போம்.

$$\triangle u_x = u_{x+1} - u_x$$
$$\therefore \quad u_x + \triangle u_x = u_{x+1}$$
$$\therefore \quad (1 + \triangle) u_x = E u_x$$
$$\therefore \quad 1 + \triangle \equiv E$$

என்ற செயலி முற்றொருமை (operational identity) கிடைக்கும். இச் செயலிகள் இயற்கணித வரையறைகளுக்கு உட்படுகின்றன.

$$E^2 u_x = E(E u_x)$$
$$= E(u_{x+1})$$
$$= u_{x+2}$$

$$E^3 u_x = E[E\{E u_x\}]$$
$$= E(u_{x+2}) = u_{x+3}$$

தொடர்ச்சியாகப் போனால்

$E^n u_x = u_{x+n}$ எனப் பெறப்படும்.

தொடர் முறை $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$ ல்

$E^n u_1 = u_{n+1}$ எனப்பெறப்படும்.

அதை யொட்டி $E^{n-1} u_1 = u_n$ எனப் பெறலாம்.

$E \equiv 1 + \triangle$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி, $E^{n-1} u_1 = (1 + \triangle)^{n-1} u_1$ என எழுதி $(1 + \triangle)^{n-1}$ ஐ, ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி, விரித்தெழுதி, செய்லிகளைப் பயன்படுத்தினல், கிடைக்கப் பெறும் முடிவு உண்மை என நியூட்டன் ஒரு தேற்றம் நிறுவியிருக்கிருர். அதன் தெரிப்பு இங்கு கொடுக்கப் பட வில்லை. (ஆனல் Freeman: Mathematics for Actuarial Students Vol II, Chapter II-ல் காண்க).

எனவே, தெரிப்பின்றி பின்வரும் நியூட்டன் தேற்றத்தை ஏற்றுக் கொள்வோம்.

$E^{n-1} u_1 = (1 + \triangle)^{n-1} u_1$ அதாவது

$$u_n = (1 + {}_{n-1}C_1 \triangle + {}_{n-1}C_2 \triangle^2 + \ldots\ldots + \triangle^{n-1}) u_1$$
$$= u_1 + {}_{n-1}C_1 \triangle u_1 + {}_{n-1}C_2 \triangle^2 u_1 + {}_{n-1}C_3 \triangle^3 u_1 + \ldots\ldots \triangle^{n-1} u_1$$

இவ் வாய்பாடு, பின்னர் சில தொடர்க் கூட்டல்களில் பயன்படும்.

10·7.1 தொடர் உறுப்புக்களின் அமைப்பு விதி எளிதில் காண முடியாவிடத்து, கூட்டல் முறை:

அமைப்பு விதி எளிதில் காண முடியாத நிலையில், வேறு பாட்டு வரிசைகளைக் கொண்டு சில சமயங்களில் நாம் பொது உறுப்பாகிய n வது உறுப்பைக் காண இயலும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 + \ldots\ldots$ என்ற தொடரில் n வது உறுப்பின் அமைப்பைக் காண்போம்.

உறுப்பின் x	உறுப்பு u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
1	4	10	6	0
2	14	16	6	0
3	30	22	6	0
4	52	28	6	
5	80	34		
6	114			

மூன்றாவது வரிசை வேறுபாடு பூச்சியமாகிறது.

இங்கு 10.6.1 கண்ட நியூட்டன் வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தினால்

$$
\begin{aligned}
u_n = E^{n-1} u_1 &= (1 + \Delta)^{n-1} u_1 \\
&= u_1 + {}_{n-1}C_1 \, \Delta u_1 + {}_{n-1}C_2 \, \Delta^2 u_2 \\
&= 4 + (n - 1)\, 10 + \frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}\, 6 \\
&= 4 + 10n - 10 + 3n^2 - 9n + 6 \\
&= 3n^3 + n
\end{aligned}
$$

எனப் பெறப்படுகிறது.

இதை $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என ஈடுசெய்து, தொடர் உறுப்புக்கள்,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 3 \,.\, 1^2 + 1 = 4 \\
u_2 &= 3 \,.\, 2^2 + 2 = 14 \\
u_3 &= 3 \,.\, 3^2 + 3 = 30 \\
\ldots &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

எனச் சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம். இப்போது $u_n = 3n^2 + n$ எனக் கண்டு கொண்டோமாதலின்,

$$\Sigma u_n = 3 \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

எனப் பெறப்படும்.

10.7.2 மாற்று முறை :

இரண்டாம் வரிசை வேறுபாடு, மாறிலியாக விருப்பதால், 10·6-ன் படி, $u_n = an^2 + bn + c$ எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு a, b, c காண்பது எளிது.

$$4 = u_1 = a(1)^2 + b(1) + c$$
$$= a + b + c \qquad (1)$$

$$14 = u_2 = a(2)^2 + b(2) + c$$
$$= 4a + 2b + c \qquad (2)$$

$$30 = u_3 = a(3)^2 + b(3) + c$$
$$= 9a + 3b + c \qquad (3)$$

∴ (1), (2), (3) என்ற சமன் பாடுகளின் தீர்வுகாண $a = 3$; $b = 1$; $c = 0$ எனப் பெறப்படும்.

∴ $u_n = 3n^2 + n$ எனக் கண்டு

$\Sigma u_n = 3 \Sigma n^2 + \Sigma n$ என அறியலாம்.

10·7.3 ஆனால் ஏதாவது ஒரு தொடரின் K வது வரிசை வேறுபாடு, பெருக்குத் தொடரில் வருமாயின், முன் கூறிய முறைகளைப் பயன்படுத்துவது பொருந்தாது.

அங்கு $u_n = a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots\ldots + a_k + ax^{n-1}$ எனக் கொள்ளலாம்.

அதை விட, பின்வரும் எடுத்துக் காட்டில் உள்ள வழியை நேரடியாகப் பயன்படுத்தலாம்.

உறுப்பின் u_x	உறுப்பு u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	
1	10	13	24	
2	23	37	72	இது பெருக்குத்
3	60	109	216	தொடரில் உள்ளது.
4	169	325		
5	494			

u தொடர் முறை	10,	23,	60,	169,	494
v தொடர் முறை முதல் வரிசை வேறுபாடு	13,	37,	109,	325	
w தொடர் முறை இரண்டாம் வரிசை வேறுபாடு.	24,	72	216		

$$w_1 = v_2 - v_1 = 24$$
$$w_2 = v_3 - v_2 = 24 \times 3$$
$$w_3 = v_4 - v_3 = 24 \times 3^2$$
$$\underline{w_{n-1} = v_n - v_{n-1} = 24 \times 3^{n-2}}$$

$$\therefore \sum_{1}^{n-1} w_r = v_n - v_1 = \frac{24\,(3^{n-1} - 1)}{(3 - 1)}$$
$$= 12\,.\,3^{n-1} - 12$$
$$= 4\,.\,3^n - 12$$

$$\therefore \quad v_n = 4\,.\,3^n - 12 + 13$$
$$= 4\,.\,3^n + 1$$

$$\therefore \quad v_{n-1} = 4\,.\,3^{n-1} + 1$$

மேலும் $v_1 = u_2 - u_1 = 4\,.\,3 + 1$

$$v_2 = u_3 - u_2 = 4\,.\,3^2 + 1$$
$$v_3 = u_4 - u_3 = 4\,.\,3^3 + 1$$
$$\underline{v_{n-1} = u_n - u_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} + 1}$$

$$\therefore \sum_{1}^{n-1} v_r = u_n - u_1 = \frac{4 \cdot 3\,(3^{n-1} - 1)}{(3-1)} + (n-1)$$

$$= 6\,(3^{n-1} - 1) + (n - 1)$$

$$= 2 . 3^n + n - 7$$

$$\therefore \quad u_n = 2 . 3^n + n - 7 + u_1$$

$$= 2 . 3^n + n + 3$$

இப்போது $\Sigma\, u_n = \Sigma\, 2 . 3^n + \Sigma\, n + 3n$

$$= 2[3^1 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^n] + \frac{n\,(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{2 . 3\,(3^n - 1)}{(3-1)} + \frac{n\,(n+1)}{2} + 3n$$

$$= 3^{n+1} + \frac{n\,(n+1)}{2} + 3n - 3$$

$n = 1, 2, 3$ ...... எனக் கொண்டு S_1, S_2, S_3, ... மதிப்பறிந்து சரிபார்த்துக் கொள்ளவும்.

மற்றோர் முறை :

10·7·3 ஆரம்பத்தில் கூறியதை யொட்டி, $u_n = a_1 n + a_2 + a x^{n-1}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad 10 = u_1 = a_1 + a_2 + a$$

$$23 = u_2 = 2a_1 + a_2 + ax$$

$$60 = u_3 = 3a_1 + a_2 + ax^2$$

$$169 = u_4 = 4a_1 + a_2 + ax^3$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, $a = 6$; $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $x = 3$ எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore \quad u_n = n + 3 + 6 . 3^{n-1}$$

$$= n + 3 + 2 . 3^n$$

$$\therefore \quad \sum_{1}^{n} u_n = \frac{n\,(n+1)}{2} + 3n + \frac{2 . 3\,(3^n - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{n\,(n+1)}{2} + 3n + 3^{n+1} - 3$$

10·8.1 மடங்கி வரும் தொடர்கள் : (Recurring Series)

$\dfrac{a+bx+cx^2}{1+px+qx^2+rx^3}$ என்ற அளவுக்கிணங்கிய பகாபின்னச் சார்பை விரித்தெழுதினுல், (வகுத்தால் விரிவு பெறப்படும்) $u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots\ldots+u_nx^n\ldots\ldots$ என்ற ஒரு குவி தொடர் (Convergent Series) கிடைக்கிறதெனக் கொள்வோம்.

அப்போது

$$a+bx+cx^2 \equiv (1+px+qx^2+rx^3)\,(u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots\ldots\infty)$$
$$\equiv u_0+x\,(pu_0+u_1)+x^2\,(qu_0+pu_1+u_2)$$
$$+\,x^3\,(ru_0+qu_1+pu_2+u_3)$$
$$+\,x^4\,(ru_1+qu_2+pu_3+u_4)$$
$$+\ldots\ldots+x^n\,(ru_{n-3}+qu_{n-2}+pu_{n-1}+u_n)+\ldots\ldots$$

இருபக்கங்களிலும் சம 'படி' க் கெழுக்களைச் சமன் செய்தால்

$$u_0 = a \qquad \text{——} \quad (1)$$
$$pu_0+u_1 = b \qquad \text{——} \quad (2)$$
$$qu_0+pu_1+u_2 = c \qquad \text{——} \quad (3)$$
$$ru_0+qu_1+pu_2+u_3 = 0 \qquad \text{——} \quad (4)$$
$$ru_1+qu_2+pu_3+u_4 = 0 \qquad \text{——} \quad (5)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$ru_{n-3}+qu_{n-2}+pu_{n-1}+u_n = 0\ \ldots\ldots$$

எனவே, (1), (2), (3) சமன்பாடுகளுக்குப் பின்பு, அடுத்தடுத்து வரும் நான்கு கெழுக்கள்

$[u_s : s = 0, 1, 2, 3;\ \ u_s : s = 1, 2, 3, 4;$
$u_s : s = 2, 3, 4, 5;\ \ldots\ldots\ u_s : s = (n-3), (n-2), (n-1), n]$

ஓர் 'ஒரு படித் தொடர்பு' பெற்றிருக்கும். (connected by a linear relation). இப்படி 'ஒரு படித் தொடர்பு' பெற்ற கெழுக்களையுடைய $u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots\ldots u_nx^n+\ldots\ldots$ என்ற தொடர் மடங்கி வரும் தொடர் எனப்படும்.

10·8·2 பொதுவாக $u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots\ldots+u_nx^n+\ldots\ldots$ என்ற தொடரில், தொடர்ந்தாற் போல, $(r+1)$ கெழுக்களிடை, ஓர் 'ஒருபடித் தொடர்பு' நிலவுமாயின், அது ஒரு மடங்கிவரும் தொடரெனவும், அதன் வரிசை 'r' எனவும் கூறப்படும். (a recurring series of the rth order).

இப்படியான 'ஒரு படித் தொடர்பு' நிலவ,

$$1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r$$

என்ற ஒரு r படிச் சார்பு இருக்கவேண்டும்.

அப்படி யிருப்பின்,

$$p_r u_{n-r} + p_{r-1} u_{n-r+1} + \ldots\ldots p_2 u_{n-2} + p_1 u_{n-1} + u_n = 0$$

என்று நாம் ஓர் 'ஒருபடித் தொடர்பு' பெற முடியும். இந்த நிலையில், $1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r$ என்பது அம் மடங்கி வரும் தொடரின் அளவுச் சட்டம் (Scale of Relation) எனப் படும்.

10·8.1–ல் நாம் கண்ட, (4). (5), ... என்ற தொடர்புகள் யாவும், கெழுக்களிடை நிலவும் தொடர் பெனவும், அத் தொடரின் வரிசை (order of the recurring series) மூன்று எனவும் அத் தொடரின் அளவுச் சட்டம் $1 + px + qx^2 + rx^3$ எனவும் அமையும்.

10·8.3 தேற்றம் 1. ஒரு மடங்கு தொடரின் முதல் $2r$ உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டால், r வரிசை பெற்ற ஒரு மடங்கு தொடர் காணலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் :

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots\ldots + u_rx^r + \ldots\ldots + u_{2r-1}\,x^{2r+1} + \ldots\ldots$$

எனக் கொள்வோம். இங்கு u_0 முதல் u_{2r-1} வரை கெழுக் களின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம்.

இம் மடங்கு தொடரின் அளவுச் சட்டம்

$$1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r$$

எனக் கொள்வோம்.

அப்போது,

$$p_ru_0 + p_{r-1}\,u_1 + \ldots\ldots + p_1u_{r-1} + u_r = 0 \qquad (1)$$

$$p_ru_1 + pr_{-1}\,u_2 + \ldots\ldots + p_1u_r + u_{r+1} = 0 \qquad (2)$$

... ...

... ...

$$p_ru_{r-1} + p_{r-1}\,u_r + \ldots\ldots + p_1u_{2r-2} + u_{2r-1} = 0 \qquad (r)$$

என்ற r சமன்பாடுகள் பெறப்படும். இவைகளில் தேராக் கணியங்கள் $p_1, p_2 \ldots\ldots p_r$ என்ற r கணியங்கள் ஆகும். இந்த r சமன்பாடுகள் கொண்டு $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ என்ற தேராக் கணியங்களைக் கண்டு, அளவுச் சட்டத்தை நிலை நிறுத்தலாம்.

10·8.3.1 எடுத்துக் காட்டாக, $u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots\ldots$ என்ற மடங்கு தொடரில் u_0, u_1, u_2, u_3-ன் மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அம்மடங்கு தொடரின் அளவுச் சட்டமான $(1 + px + qx^2)$ ஐ அறியலாம். p, q காண உதவும் சமன் பாடுகள்,

$$qu_0 + pu_1 + u_2 = 0$$
$$qu_1 + pu_2 + u_3 = 0$$

ஆறு உறுப்புக்கள் $u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+u_4x^4+u_5x^5+\ldots\ldots\ldots$ கொடுக்கப்பட்டால், $1 + px + qx^2 + rx^3$ என்ற அளவுச் சட்டத்தை அறியலாம். p, q, r ஐக்காண உதவும் சமன்பாடுகள்

$$ru_0 + qu_1 + pu_2 + u_3 = 0$$
$$ru_1 + qu_2 + pu_3 + u_4 = 0$$
$$ru_2 + qu_3 + pu_4 + u_5 = 0$$

10·8.4 பிறப்பிக்கும் சார்பு (Generating function):

$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots\ldots + u_nx^n \ldots\ldots$ என்பது ஒரு குவி தொடராயின் அத்தொடரின் (கந்தழி வரையான) கூட்டுத் தொகை, அத்தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பு எனப்படும்.

$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots$ என்பதன் கூட்டுத் தொகை $f(x)$ எனக் கொள்வோம்;

அளவுச் சட்டம் $(1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r)$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது,

$$\begin{aligned}(u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 \ldots\ldots)(1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r)\\ \equiv u_0 + x(p_1u_0 + u_1) + x^2(p_2u_0 + p_1u_1 + u_2) +\\ x^3(p_3u_0 + p_2u_1 + p_1u_2 + u_3) + \ldots\ldots\\ + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ + (p_{r-1}u_0 + p_{r-2}u_1 + \ldots\ldots + p_1u_{r-2}\\ + u_{r-1})x^{r-1} \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

$\equiv g(x)$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

[(A) என்ற தொடர் x^{r-1} ஒடு நின்று விடும் என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.] (ஏனெனில் x^r, ... அதற்கு மேற்பட்ட படிகளுள்ள உறுப்புக்கள் யாவும் பூச்சியமாகி விடுகின்றன) (10·8·3 ல் r சமன்பாடுகளைக் காண்க.)

$$\therefore \quad u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots\ldots \equiv \frac{g(x)}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_rx^r}$$

[$g(x)$ ன் படி $(r-1)$].

ஆகவே $\dfrac{g(x)}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_rx^r}$ என்பது இம்மடங்கு தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பு. அதை (வகுத்து) விரித்தெழுதினுல் $u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots\ldots \infty$ என்ற மடங்கு தொடர் கிடைக்கும்.

10·8.5 மடங்கு தொடர் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் அளவுச் சட்டம், n வது உறுப்பு முதலியன, செயல் முறையில் கண்டு பிடிக்கும் முறை:

மடங்கு தொடரில் முதல் 4 உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அளவுச்சட்டம் $1 + px + qx^2$ எனக் கொள்க.

$$qu_0 + pu_1 + u_2 = 0$$

$$qu_1 + pu_2 + u_3 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் p, q காண உதவும். எனவே, அம்மடங்கு தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பு $\dfrac{u_0 + x(pu_0 + u_1)}{1 + px + qx^2}$ இதை, பகுதிப் பின்னங்களாக்கி, அதாவது இதை $\dfrac{A}{1 + \alpha x} + \dfrac{B}{1 + \beta x}$ எனப் பிரித்து, ஈருறுப்புத் தேற்றம் கொண்டு, விரித்தெழுதி, n வது உறுப்பு காண்க.

மடங்கு தொடரின், முதல் 5 உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், அளவுச் சட்டம் $1 + px + qx^2$ எனத்தான் கொள்ள முடியும்.

முதல் 6 உறுப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அளவுச் சட்டம் $1 + px + qx^2 + rx^3$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$ru_0 + qu_1 + pu_2 + u_3 = 0$$
$$ru_1 + qu_2 + pu_3 + u_4 = 0$$
$$ru_2 + qu_3 + pu_4 + u_5 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் கொண்டு p, q, r அறிக.

பின்னர் அம்மடங்கு தொடரைப் பிறப்பிக்கும் சார்பு

$$\frac{u_0 + x(pu_0 + u_1) + x^2(qu_0 + pu_1 + u_2)}{1 + px + qx^2 + rx^3}$$

எனப் பெறப்படும்.

இதை, $\frac{A}{1+\alpha x} + \frac{B}{1+\beta x} + \frac{C}{1+\gamma x}$ எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து, ஈருறுப்புத் தேற்றங் கொண்டு, விரித்தெழுதி n வது உறுப்பு காண்க.

10·8.6 எ-கா. $4 + x + 7x^2 - 5x^3 \ldots\ldots$ என்ற மடங்கு தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும், n வது உறுப்பையும் காண்க.

நான்கு உறுப்புக்கள் கொடுத்திருக்கிறபடியால், அளவுச் சட்டம் $1 + px + qx^2$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

$$(4+x+7x^2-5x^3\ldots\ldots)(1+px+qx^2)$$
$$=4+x(1+4p)+x^2(7+p+4q)+x^3(-5+7p+q)+\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad 7 + p + 4q = 0.$$
$$-5 + 7p + q = 0$$
$$\therefore \quad p = 1, \quad q = -2$$

$\therefore$ அளவுச் சட்டம் $= 1 + x - 2x^2$

$$\therefore \quad 4 + x + 7x^2 - 5x^3 \ldots = \frac{4+x(1+4p)}{1+px+qx^2}$$
$$= \frac{4+5x}{1+x-2x^2}$$
$$= \frac{4+5x}{(1-x)(1+2x)}$$

$$\frac{4+5x}{(1-x)(1+2x)} \equiv \frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+2x}$$

$$\equiv 3(1-x)^{-1} + (1+2x)^{-1}$$

$$= 3[1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n\ldots\ldots]$$

$$+ [1-2x+2^2x^2\ldots\ldots+(-1)^n2^nx^n\ldots\ldots]$$

$\therefore$ பிறப்பிக்கும் சார்பு $= \dfrac{4+5x}{1+x-2x^2}$

n வது உறுப்பு $= [3+(-1)^{n-1} \,.\, 2^{n-1}]\, x^{n-1}$

x^n ன் கெழு $= [3+(-1)^n \,.\, 2^n]$

எ-கா. (2)

எ-கா. 1 ஐ ஒட்டி, $4+1+7-5\ldots\ldots$ என்ற மடங்கு வரிசைத் தொடரின் முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$u_n = [3+(-1)^{n-1} \,.\, 2^{n-1}]$ என நாம் கண்டோம்.

எனவே, $u_1 = 3+(-2)^0$

$u_2 = 3+(-2)^1$

$u_3 = 3+(-2)^2$

$u_4 = 3+(-2)^3$

... ...

$u_n = 3+(-2)^{n-1}$

$$\therefore \quad S_n = 3n + \frac{[(-2)^n - 1]}{(-2)-1}$$

$$= 3n - \frac{1}{3}[(-2)^n - 1]$$

$$= \frac{9n+1-(-2)^n}{3}.$$

பயிற்சி 10 (ii)

வேறுபாட்டு முறை கொண்டு, பின்வரும் தொடர்களின் n வது உறுப்பையும், முதல் உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் அறிக.

1. $8 + 11 + 16 + 25 + 42 + \ldots\ldots$

2. $6 + 9 + 14 + 23 + 40 + \ldots\ldots$

3. $8 + 4 + 2 + 8 + 28 + 68 + 134 + \ldots\ldots$

4. $3 + 5 + 9 + 17 + 33 + \ldots\ldots$

5. $9 + 22 + 59 + 168 + 493 + \ldots\ldots$

6. $3 + 8 + 15 + 24 + 35 + \ldots\ldots$

7. $4 + 11 + 20 + 31 + 44 + \ldots\ldots$

8. $4 \,.\, 3 + 11 \,.\, 8 + 20 \,.\, 15 + 31 \,.\, 24 + 44 \,.\, 35 + \ldots\ldots$

9. $2 + 5 + 12 + 31 + 86 + 249$

பின் வரும் மடங்கு தொடர்களின் (a) பிறப்பிக்கும் சார்பு (b) பொது உறுப்பு காண்க.

10. $3 + x + 3x^2 + x^3 + \ldots\ldots$

11. $3 + 7x + 17x^2 + 43x^3 + \ldots\ldots$

12. $3 + 6x + 14x^2 + 36x^3 + 98x^4 + 276x^5 + \ldots\ldots$

13. $1 + 6x + 40x^2 + 288x^3 + \ldots\ldots$

பின் வரும் மடங்கு தொடர்க் கெழுக்களின் (a) n வது உறுப்பையும் (b) முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

14. $3 + 5 + 9 + 17 + 33 + \ldots\ldots$

15. $1 + 6 + 24 + 84 + \ldots\ldots$

பின்வரும் மடங்கு தொடர்களின் (*a*) n வது உறுப்பையும் (*b*) முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

16. $1 + 2x + 7x^2 + 20x^3 + \ldots\ldots$

17. $2 + 5x + 13x^2 + 35x^3 + \ldots\ldots$

18. $1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 \ldots\ldots$

19. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x + 2x^2 + x^3 + ax^4 + \ldots\ldots$ என்ற மடங்கு தொடரின் அளவுச் சட்டம் ஓர் இருபடிச் சார்பு. a ன் மதிப்பையும், அளவுச் சட்டத்தையும், பொது உறுப்பையும் காண்க.

20. $5x + 15x^3 + 23x^5 + 51x^7 + 95x^9 + 195x^{11} + \ldots\ldots$ என்ற மடங்கு தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 2 (i)

1. 4800 2. 50 3. 14 4. $\frac{n(n-1)}{2} - n$ 5. 6

6. 5^6 விதங்கள் ; $5^6 - 1$ 7. 192.

பயிற்சி 2 (ii)

1. (i) 30,240 (ii) $\underline{|n+1}$ (iii) $\frac{\underline{|n+r}}{\underline{|r}}$

2. $\underline{|5}$; $\underline{|3}$ 3. 18 ; 10 4. 120 ; 120 ; 72 ; 48

5. 24 ; 12 6. 4536 ; 952 7. $\underline{|10} - 2\underline{|9}$; $\underline{|10} - \underline{|3}\ \underline{|8}$

8. $\underline{|12} - 2\underline{|11}$ 9. 5 10. 99 11. 120 12. 720

13. 1024 ; 512 14. 720 15. $\underline{|5} \div \underline{|3} \cdot \underline{|3} \cdot \underline{|2}$

17. $28 \times 1110 + 36$ 18. 84×1111 20. 8 21. $m = 9$; $n = 4$.

பயிற்சி 2 (iii)

1. (i) 120 (ii) 4950 (iii) 99 (iv) 120

2. $n=18$ 3. $n=17$ 4. ${}_{m+n}C_3 - {}_{m}C_3 - {}_{n}C_3$. 5. ${}_{8}C_4$; ${}_{8}C_6$.

6. 5670 7. 12600 ; 2520 8. ${}_{8}C_3 \times {}_{5}C_3$ 9. ${}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2$.

10. ${}_{11}C_5 \times (\underline{|8})^2$ 11. 1540 13. $\dfrac{\underline{|52}}{\underline{|4}\ \underline{|13} \cdot 4}$; $\dfrac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4}$ 14. 70 ; 35 15. 15.

பயிற்சி 2 (iv)

1. 625 ; 375 2. $9 \times 10^6 = (9999 - 1000) + 1$ 3. 10^3 4. 4^6.

5. (a) $\dfrac{\underline{|11}}{\underline{|4}\ \underline{|4}\ \underline{|2}}$; (b) $\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|3}\ \underline{|2}}$; (c) $\dfrac{\underline{|11}}{\underline{|2}\ \underline{|3}\ \underline{|2}}$

6. (1) $\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|4}\ \underline{|2}}$; (2) $\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|4}}$ 7. $\dfrac{\underline{|mn}}{(\underline{|m})^n}$

பயிற்சி 2 (v)

1. $\underline{|7}$ 2. $\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|2}}$ 3. 2880 4. $2\underline{|6}$.

பயிற்சி 2 (vi)

2. $\dfrac{\underline{|km}}{\underline{|k}\ (\underline{|m})^k}$ 3. $\dfrac{\underline{|km}}{(\underline{|m})^k}$ 4. $2^5 - 6$.

5. $2^n - 1 - n$ 6. 2^a 7. $6 \times 5 \times 7 - 1$ 8. $21 \times 11 \times 26 - 1$

பயிற்சி 2 (vii)

1. ${}_{15}C_7 = {}_{15}C_8$; ${}_{16}C_8$

பயிற்சி 3

1. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ 2. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ 3. $\frac{3}{7(x-4)}-\frac{3}{7(x+3)}$

4. $\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right]$ 5. $\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right]$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right]$

7. $\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8x}-\frac{1}{8(x+2)}$

8. $\frac{-15}{16}+\frac{47}{16}\cdot\frac{1}{4x-1}+\frac{135}{16}\cdot\frac{1}{(4x-1)^2}+\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{(4x-1)^3}$

9. $\frac{3}{4x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{7}{4(x+2)^2}-\frac{1}{2(x+2)}$

10. $\frac{x-2}{x^2+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{3}{(x+2)^3}$

11. $\Sigma\frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$

12. $1+\frac{x-6}{x^2-3x+9}-\frac{1}{x+3}$

13. $\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2x+2}$ 14. $\frac{x}{x^2+2}-\frac{x+1}{x^2+4x+8}$

15. $\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$

16. $A=\frac{x+2}{4}$; $B=\frac{x-2}{4}$

17. $A=x^3+1$; $B=x^2-x+1$

18. $A=1$; $B=-10$; $C=25$

பயிற்சி 4 (ii)

17. $2^2 . 3^3 . 4^4$ 21. $2\sqrt[6]{810}$ 21. $12500\left(\frac{19}{9}\right)^7$

பயிற்சி 5

(வி)–விரி தொடர் முறை ; (கு)-குவி தொடர் முறை.
(ஓ)-ஓரியல்பான.

1	தன்மை	கீழ் வரம்பு	மேல் வரம்பு	எல்லை
1.	அலை தொடர்	$-\infty$	∞	இல்லை
2.	ஓரியல்பான ஏறு தொடர் (வி)	0	∞	$+\infty$
3.	(ஓ) இறங்கு தொடர் (கு)	0	1	0
4.	ஐந்தாவது உறுப்பிலிருந்து ஓ. இறங்கு தொடர் (கு)	0	$26\frac{1}{24}$	0
5.	அலை தொடர்	$m-1$	$m+1$	இல்லை
6.	குவி தொடர்	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$	5
7.	விரி தொடர்	0	∞	∞
8.	அலை தொடர்	0	∞	இல்லை
9.	குவி தொடர்	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0
10.	அலை தொடர்	-1	1	இல்லை

பயிற்சி 6 (i)

1. விரி 2. விரி 3. விரி 4. குவி 5. குவி 6. விரி.

பயிற்சி 6 (ii)

4. $|x| < 1$ (கு); $|x| \geq 1$ (வி) 5. எல்லா x-க்கும்

குவியும். 6. $x \geq$ (கு) ; $x < 1$ (வி) 7. $p > 2$ (கு) ; $p \leq 2$ (வி) 8. $|x| < 1$ (கு) ; $x \geq 1$ (வி) ; $x \leq -1$ (அ) 9. $|x| \leq 1$ (கு) ; $x > 1$ (வி) ; $x < -1$ (அ) 10. விரியும் 11. $x < 1$ (கு); $x \geq 1$ (வி) 12. $p > \frac{1}{2}$ (கு) ; $p \leq \frac{1}{2}$ (வி) 13. குவியும் 14. விரியும் 15. விரியும் 16. விரியும் 17. விரியும் 18. விரியும் 19. விரியும் 20. விரியும் 21. விரியும் 22. குவியும் 23. விரியும் 24. குவியும் 25. விரியும் 26. விரியும் 27. குவியும் 28 $x < 1$ (கு) ; $x \geq 1$ (வி) 29. விரியும் 30. விரியும் 31. விரியும் 32. $x > 1$ (கு) ; $x \leq 1$ (வி) 33. $x > 1$ (கு) ; $x \leq 1$ (வி) 34. குவியும் 35. $a < b$ ஆனுல் குவியும் ; $a \geq b$ ஆனுல் விரியும் 36. $p+q > 1$ ஆனுல் குவியும் $p+q \leq 1$ ஆனுல் விரியும் 37 விரியும் 38. $x < 1$ (கு) ; $x > 1$ (வி) ; $x = 1$, $k < \frac{1}{2}$ (கு) ; $x = 1$, $k \geq \frac{1}{2}$ (வி).

39. $\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right\}$ (கு); $0 < x \leq 1$ (வி) ; $-1 < x < 0$ (அ) 40. $-a \leq x < a$ குவியும் ; $x \geq a$ விரியும் ; $x < -a$ அலையும் 41. $p > 0$ (கு) ; $p \leqq 0$ (அ) 42. $|x| < 1$ (கு) ; $x \leq = 1$ (வி) ; $x \geq 1$ (அ) 43. குவியும் 44. குவியும் 45. $x \leq 1$ (கு); $x > 1$ (வி) 46. $x < 1$ (கு) ; $x > 1$ (வி) : $x = 1$, $m < \frac{1}{2}$ (கு) ; $x = 1$, $m \geq \frac{1}{2}$ (வி) 47. $ax < 1$ (கு) ; $ax > 1$ (வி)

$x = 1$ $\left\{\begin{array}{l} a < 1 \text{ (கு)} \\ a > 1 \text{ (வி)} \end{array}\right.$ $x = 1$ $a = 1$ (கு)

48 விரி 49. குவி 50. குவி 51. $\alpha > 1$ குவி ; $\alpha \ngtr 1$ விரி 52. விரி 53. $\alpha > 1$ குவி ; $\alpha \ngtr 1$ விரி 54. $\alpha > 1$ குவி ; $\alpha \ngtr 1$ விரி 55. குவி.

பயிற்சி 7 (i)

1. 2 2. $2\sqrt{2}$ 3. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{18}$ 4. $(\sqrt{3}-1)$ 5. 1 6. $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}-1)$

7. $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ 8. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 9. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 10. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ 11. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

12. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 13. $3\sqrt{3}-2$ 14. $\frac{37}{245}$ 15. $\left(\frac{7}{4}-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

பயிற்சி 7 (ii)

4. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 5. $\frac{923}{925}$ 6. 0·010000

7. $1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{8}x^5$

பயிற்சி 7 (iii)

2. (i) $\frac{3^{n+1} - (-2)^n(5n+3)}{25}$ (ii) $(-1)^n\left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right]$

(iii) $1 - 2n - \frac{3}{2^{n+1}}$ (iv) $2^n + n$

(v) $\frac{1}{2}(3^{n+2} - 2^{n+3} + 1)$ (vi) $-\frac{1}{90}\left(-\frac{1}{6}\right)^n(190 + 5^n)$

(vii) $\Sigma \frac{1}{a^r(c-a)(c-b)}$

3. (i) 3^n (ii) $\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-2)}{\lfloor n}(m+2n-1)$

6. $p=1$; $q=2$ 7. $p=1$; $q=-1$; $r=2$

8. $p=\frac{1}{6}$; $q=-\frac{1}{2}$; $r=\frac{4}{3}$

பயிற்சி 7 (v)

1. 66; 44 2 (*a*). 9 (*b*) 18 3. 56 4. (*a*) 1716 (*b*) 462 5. 596 6. (i) 25; (ii) 10 7. (i) 140; (ii) 146; (iii) மொத்தம் 21 கிடைக்காது 8. 351 10. 179.

பயிற்சி 8 (ii)

1. 1·6487 2. $\frac{q(p^3-3pq)}{24}$.

5. (a) $(x^2+7x+8)e^x$; (b) $8\log_e 2+\frac{1}{\log_e 2}$;

(c) $e+1$; (d) $2e-\frac{7}{2}$; (e) $\frac{1}{2}e(e^2-1)$; (f) $3-\frac{3}{2e}$;

(g) $\frac{3e}{2}-\frac{1}{e}$; (h) $(x^2+2x)e^x$; (i) $\frac{[2(x^2-3x+3)e^x+(x^2-6)]}{2x^3}$;

(j) $(2x^2-7x+3)e^{-x}$; (k) $\frac{e}{2}+\frac{2}{e}$; $5e-1$; (m) $-\frac{1}{e}$;

(n) $5e$: (o) $e-\frac{5}{2}$; (p) $15e$; (q) $\frac{27e}{4}$; (r) $-\frac{1}{e}$;

(s) $e^{-x}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)-\frac{6}{x^3}$

(t) $e^x\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4x}\right)+e^{-x}\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4x}\right)+3$

(u) $\frac{1}{8}\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$; (v) $1-\frac{1}{\sqrt{e}}$; (w) $27e$; (x) $\frac{e-3e^{-1}}{8}$

(y) $\frac{\sqrt{x}\,(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})}{2}$; (z) $(x^2+4x+2)e^x$

6. (a) $\frac{(-1)^n(3n^2-5n+1)}{\lfloor n}$; (b) $\frac{(-1)^n(1+n-3n^2)}{\lfloor n}$

(c) $\frac{2^{n-2}(3n^2+n+4)}{\lfloor n}$

(d) $(-1)^n 2^{n-2}\left\{\frac{4n^2-4pqn+b^2n(n-1)}{\lfloor n}\right\}$

(e) $\dfrac{e \cdot 2^n}{\lfloor n}$; (f) $(-1)^n e^{-2} \cdot \dfrac{3^n}{\lfloor n}$

7. $\dfrac{n+1}{\lfloor n} e$

9. $\dfrac{6(n-1)}{\lfloor n}$

பயிற்சி 9

2. (a) $\log_e 2$; (b) $\log_e \dfrac{4}{3}$; (c) $\log_e \dfrac{4}{3}$; (d) $\dfrac{1}{2} \log_e 2$;

(e) $\dfrac{1}{3} \log_e 2 - \dfrac{1}{12}$; (f) $-243 \log_e \dfrac{9}{10} - 25$;

(g) $4 \log_e 2 - \dfrac{3}{2}$; (h) $\dfrac{1}{2} \log_e 12$; (i) $\dfrac{\log_e 2}{\log_e 3}$;

(j) $\dfrac{x}{1-x} + \log_e (1-x)$; (k) $\log_e 3$; (l) $\log_e 3$;

(m) $\dfrac{1}{4} \left\{ 2 + \dfrac{x^2-1}{x} \log_e \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right) \right\}$; (n) $\dfrac{1}{2} \log_e 2$;

(o) $\log_e 2 - \dfrac{1}{2}$; (p) $\log_e 27 - 3$.

12. (i) $n = 3r$ ஆனல் $-\dfrac{2}{n}$, $n \neq 3r$ ஆனல் $\dfrac{1}{n}$;

(ii) n ஒற்றைப்படை யெண் : $\dfrac{1}{n}$

n இரட்டைப்படை: $\dfrac{3}{n}$.

14. 2·8332 15. 0·2877

பயிற்சி 10 (i)

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\underline{|n+1}}$; $\frac{1}{2}$ 2. $1-\frac{1}{\underline{|n+1}}$; 1

3. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$; $\frac{1}{2}$. 4. $\frac{n}{a\,(a+nb)}$

5. $\frac{n}{(1+a)\,(1+\overline{n+1}\,a)}$ 6. $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$; $\frac{1}{4}$

7. $1-\frac{2^{n+1}}{\underline{|n+2}}$. 8. $\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{a^n}{1+a^n x}\right)$

9. $\frac{n\,(16\,n^4+120n^3+280\,n^2+180\,n-71)}{5}$

10. $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(12n^2+99n+209)}{60}$

11. $\frac{1}{16}(4n-1)\,(4n+3)\,(4n+7)\,(4n+11)+\frac{3\,.\,7\,.\,11}{16}$

12. $\frac{1}{5}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)$

13. $\frac{1}{12}\,n\,(n+1)\,(3n^2+23n+46)$

14. $n\,(n+1)\,(n+2)-\frac{3}{4}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

$+\frac{1}{9}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)$

18. $\frac{1}{18}-\frac{1}{3\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$; $\frac{1}{18}$

19. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3\,.\,7}-\frac{1}{(4n+3)\,(4n+7)}\right)$; $\frac{1}{168}$

20. $\frac{2n}{n+1}$; 2

21. $\frac{7}{36} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; $\frac{7}{36}$

22. $\frac{2n}{3(n+3)} + \frac{3n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{5}{36}$; $\frac{19}{36}$

23. $\frac{5}{6} - \frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$; $\frac{5}{6}$

24. $\frac{7}{36}$; $\frac{7}{36} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$

25. $\frac{11}{180} - \frac{6n+11}{12(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$; $\frac{11}{180}$ 26. $\frac{2}{9}$

27. (i) $\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n} - 1\right)$; (ii) 11; (iii) 1;

(iv) $\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots\ldots (3n+4)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots\ldots (3n+2)} - 2.$

(v) $\frac{1}{2}\left[1 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n \cdot (n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots (n+2)(n+3)}\right].$

பயிற்சி 10 (ii)

1. $2^n + n + 5$; $2^{n+1} + \frac{(n^2+11n-4)}{2}$

2. $2^n + n + 3$; $2^{n+1} \frac{(n^2+7n-4)}{2}$

3. $n^3 - 5n^2 + 4n + 8$; $\frac{n}{12}[3n^3 - 14n^2 - 3n + 110]$

4. $2^n + 1$; $2^{n+1} + n - 2$

5. $2 . 3^n+n+2$; $3^{n+1}-3+\dfrac{n(n+1)}{2}+2n$

6. n^2+2n ; $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)$

7. n^2+4n-1 ; $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2n(n+1)-n$

8. $(n^2+2n)(n^2+4n-1)$; $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

$$-\frac{4n(n+1)(n+2)}{3}-2n(n+1)$$

9. $3^{n-1}+n$; $\dfrac{3^n+n^2+n-1}{2}$

10. $\dfrac{3+x}{1-x^2}$; $x^{n-1}[2+(-1)^{n-1}]$

11. $\dfrac{3-8x}{1-5x+6x^2}$; $x^{n-1}(3^{n-1}+2^n)$

12. $\dfrac{11x^2-12x+3}{1-6x+11x^2-6x^3}$; $(1+2^n+3^n)x^n$

13. $\dfrac{1-6x}{1-12x+32x^2}$; $\dfrac{1}{2}x^{n-1}[8^{n-1}+4^{n-1}]$

14. $(2^n+1)x^{n-1}$; $\dfrac{1-x^n}{1-x}+2.\left(\dfrac{1-2^n x^n}{1-2x}\right)$

15. $4.3^{n-1}-3.2^{n-1}$; $2.3^n-3.2^n+1$

16. $\dfrac{3^n+(-1)^{n-1}}{4}x^{n-1}$; $\dfrac{1-(-x)^n}{4(1+x)}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{(1-3^n x^n)}{(1-3x)}$

17. $(2^{n-1}+3^{n-1})x^{n-1}$; $\dfrac{1-2^n x^n}{1-2x}+\dfrac{1-3^n x^n}{1-3x}$

18. $[(-1)^{n-1}\,2n+(-1)^{n}]\,x^{n-1}$;

$$2\left[\frac{1-(-x)^{n}}{(1+x)^{2}}-\frac{n(-1)^{n}x^{n}}{1+x}-\frac{1-(-x)^{n}}{1+x}\right]$$

19. $1-x-2x^{2}$; $a=5$; $\{\,^{n-3}+(-1)^{n-1}\}\,x^{n-1}$

20. $x\left[\frac{6\,(2^{n}.x^{2n}-1)}{(2x^{2}-1)}-\frac{2}{1+x^{2}}\{1-(-1)^{n}x^{2n}\}+\frac{x^{2n}-1}{x^{2}-1}\right]$