இயற் கணிதம் - II

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்கள்

தி. கோவிந்தராசன்

கொ. முத்துசாமி

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—223

இயற் கணிதம் - II

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்கள் :

தி. கோவிந்தராசன்,
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

கொ. முத்துசாமி,
துணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

First Edition—April, 1970

B.T.P. No. 223

© Bureau of Tamil Publications

ALGEBRA for B.Sc.—Vol. II

T. GOVINDARAJAN AND K. MUTHUSAMY

Net Price Rs. 3-25
(No discount)

Printed by
Muthukumaran Press
14-A, Kuppier St.,
Madras-1.

அணிந்துரை

(திரு இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாண வர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரி யர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்று விப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள் மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'இயற்கணிதம்-II' என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 223ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 258 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
11.	அணி கோவைகள்	...	1
12.	எண் கொள்கை	...	55
13.	சமன்பாட்டுக் கொள்கை	...	100
	விடைகள்	...	238
	கலைச்சொற்கள்	...	245
	List of technical terms	...	263

11. அணி கோவைகள்

(Determinants)

11·1. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதிலும், சில இராசிகளிடைப்பட்ட சமன்பாடுகளினின்றும் சில இராசிகள் விலக்கல் அல்லது நீக்கல் முறைகளிலும் அணி கோவைகள் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இவ்வணி கோவைகளின் அமைப்பு மிகச் சிக்கலான கோவைகளைச் சுருக்கமாகவும் ஒழுங்காகவும் எழுதப் பயன்படுகின்றன வாதலின் இவை கணிதத்திலும், கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தும் பல விஞ்ஞானப் பிரிவுகளிலும் ஏற்கப்படுகின்றன.

$$a_1 x + b_1 y = 0$$
$$a_2 x + b_2 y = 0$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளினின்றும் x, y ஐ விலக்க, நமக்கு $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு கிடைக்கிறது. இதை,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

என்ற முறையில் எழுதினுல், இதுவே, ஓர் 'இரு வரிசை அணி கோவை' (Determinant of the second order) எனப்படும். இவ்வணி கோவையில் இரண்டு நிரைகளும் (rows) இரண்டு நிரல்களும் (columns) உள்ளன.

11·1·1. மேலும்,
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டு அவைகளினின்றும் x, y, z என்ற இராசிகளை விலக்கிவரும் கோவையை (கட்டுப்பாடு) காண்போம். குறுக்குப் பெருக்கல் முறைப்படி, முதலிரண்டு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு,

$\dfrac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \dfrac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \dfrac{z}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ எனப் பெறுகிறோம்.
இதை மூன்றும் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ என்ற கட்டுப்பாடுக் கோவை கிடைக்கிறது.

$$\text{இதை} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

என எழுதுவதே அணி கோவை முறை எனப்படும். இது ஒரு மூன்று வரிசை 'அணி கோவை' (a determinant of the third order) எனப் படும். இதில் மூன்று நிரைகளும் மூன்று நிரல்களும் உள்ளன. $a_1, a_2, \ldots\ldots$ என்பவை அணி கோவையில் ஒரு "மூலகம்" (an element) எனப்படும்.

11 1·2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3$

என விரித்தெழுதலாம் என்பதை நோக்குவோம். பின் கூறப்படுவதைக் கவனிக்கவும் :

1. வலது கைப்புறக் கோவையில் ∠3 அல்லது 6 உறுப்புகள் உள்ளன;

2. ஒவ்வோர் உறுப்பிலும், மூன்று சினைகள் உள்ளன; ஒரு நிரையிலிருந்தோ நிரலிலிருந்தோ ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் தோன்றுகிறது;

3. ஆறு உறுப்புகளில் பாதி, அதாவது 3 உறுப்புகள் + குறியீடும், மீதி 3 உறுப்புகள்—குறியீடும் பெற்றிருக்கின்றன.

மேலும் உறுப்புகளை உற்றுநோக்கினால் அவ்வுறுப்புகள் யாவும் பின்வரும் திட்டப்படி அமைந்திருக்கின்றன :

(i) a, b, c என்ற எழுத்துகளை அப்படியே வைத்துக்கொண்டு பிற்குறியாக (suffix) 1, 2, 3 என்ற எண்களை வரிசை மாற்றி எழுதினால் ∠3 = 6 வெவ்வேறு உறுப்புகள் கிடைக்கும்.

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 1, 1.

(ii) இயற்கை வரிசை (Natural order) 1, 2, 3 எனக் கொள்ளப் படுகிறது. இதற்குரிய a_1, b_2, c_3 என்பது, அணி கோவையின் தலைமையுறுப்பு (Principal term) எனப்படும். அதற்கு + குறியீடு இடப்படுகிறது.

(iii) மற்ற உறுப்புகளில் 1, 2, 3 என்ற இயற்கை வரிசை மாறியுள்ளது. இதிலொன்றை யெடுத்துக்கொண்டு அதில் பிற்குறி வரிசையில் (எ.கா. 3, 2, 1) இயற்கை வரிசையினின்று எத்தனை நேர் மாற்றங்கள் (inversions) உள்ளனவெனப் பார்ப்போம்.

3, 2, 1 என்ற வரிசையை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டுவர முதலில் 1, 3, 2 என எழுதினால் '1' இரண்டு இடங்கள் மாறுகிறது. மேலும் 1, 3, 2 என்பதை 1, 2, 3 என எழுதினால '2' ஒரு இடம் மாறுகிறது. ஆகவே 3, 2, 1 என்ற வரிசையில் மூன்று நேர் மாற்றங்கள் உள்ளன.

பிறகு 2, 3, 1 என்ற வரிசையை எடுத்துக்கொள்வோம்; இதை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டுவர 1, 2, 3 என எழுதினால் '1' இரண்டு இடங்கள் மாறுகிறது. ஆகவே, 2, 3, 1 என்ற வரிசையில் இரண்டு நேர் மாற்றங்கள் உள்ளன.

இப்போது ஓர் உறுப்பில் பிற்குறி எண் வரிசையில் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றமிருப்பின் அதற்கு − குறியீடும், இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றமிருப்பின் அதற்கு + குறியீடும் கொள்வதை நெறி முறையாகக் (Rule) கொள்வோம்.

இந் நெறிப்படி தலைமையுறுப்பு $a_1\, b_2\, c_3$ போக, மீதி ஐந்து உறுப்புகளுக்கும் + அல்லது − குறியீடு கொடுத்து, அவ்வுறுப்புகளை யெல்லாம் எழுதினால் அணி கோவையின் உறுப்புகள் உரியகுறிகளோடு தோன்றுவதைப் பார்க்கலாம். மேற்கண்டபடி,

$a_3b_2c_1$ன் குறியீடோடு $-a_3b_2c_1$ (மூன்று நேர் மாற்றங்கள்)
$a_2b_3c_1$ன் குறியீடோடு $+a_2b_3c_1$ (இரண்டு நேர் மாற்றங்கள்)
$a_1b_3c_2$ன் குறியீடோடு $-a_1b_3c_2$ (ஒரு நேர் மாற்றம்)
$a_2b_1c_3$ன் குறியீடோடு $-a_2b_1c_3$ (ஒரு நேர் மாற்றம்)
$a_3b_1c_2$ன் குறியீடோடு $+a_3b_1c_2$ (இரண்டு நேர்மாற்றங்கள்)

இந் நெறிப்படி அணி கோவையின் விரிவு $a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$ எனப் பெறப்படுவதைக் காணலாம்.

மேல் கண்டவற்றை இப்போது ஒழுங்காகத் தொகுத்துக் கூறுவோம்:

(1) a, b, c என்ற எழுத்துகளை எழுதி 1, 2, 3 என்ற எண்களின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களையும், அவ்வெழுத்துகளின் பிற்குறியாக எழுதவும். ஆறு உறுப்புகள் வரும்.

(2) வரிசை மாற்றங்களில் 1, 2, 3 இயற்கை வரிசைக்கு + குறியும், இவ்வியற்கை வரிசைக்கு மாறாக உள்ள மற்ற வரிசைகளில் எத்தனை நேர் மாற்றங்கள் உள்ளன என்று கண்டு, ஒற்றைப்படை நேர் மாற்றங்கள் எனின் — குறியும், இரட்டைப்படை நேர் மாற்றங்கள் எனின் + குறியும் அவ்வுறுப்புகளுக்கு இட்டு எழுதி வரும் கோவையே,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ -ன் விரிவாகும்.

முக்கிய குறிப்பு: பின் வருவதை நாம் கவனிப்போம்: 1, 2, 3 என்ற பிற்குறி எண்களை மாற்றாமல் அப்படியே நிலைநிறுத்தி, a, b, c என்ற எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்து 1, 2, 3 என்பனவற்றைப் பிற்குறிகளாகப் பெறும்படி அந்த ஆறு வரிசை மாற்றிய எழுத்துகளையும் எழுதிப் பார்க்கவும்:

கீழேயுள்ள கட்டத்தில் அவைகளை முதல் நிரலில் எழுதியிருக்கிறோம். அவைகளுக்கு எதிராக மூன்றாவது நிரலில் முன்னர் a, b, c என்ற எழுத்துகளை மாற்றாமல் நிலைநிறுத்தி 1, 2, 3 என்ற பிற்குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்து எழுதிய உறுப்புகளை எழுதியிருக்

a, b, c, வரிசை மாற்றம்; 1,2,3 நிலைத்தவை	எழுத்துகளின் நேர் மாற்றங்களும் உரிய குறிகளும்	1,2,3, வரிசை மாற்றம், a,b,c நிலைத்தவை	எண்களின் நேர் மாற்றங்களும் உரிய குறிகளும்
$a_1\ b_2\ c_3$	0	$a_1\ b_2\ c_3$	0
$a_1\ c_2\ b_3$	(1) —	$a_1\ b_3\ c_2$	(1) —
$b_1\ c_2\ a_3$	(2) +	$a_3\ b_1\ c_2$	(2) +
$b_1\ a_2\ c_3$	(1) —	$a_2\ b_1\ c_3$	(1) —
$c_1\ a_2\ b_3$	(2) +	$a_2\ b_3\ c_1$	(2) +
$c_1\ b_2\ a_3$	(3) —	$a_3\ b_2\ c_1$	(3) —

கிறோம். இரண்டு நிரல்களையும் ஒப்பிட்டுப்பார்க்கவும். மேலும் இரண்டாவது நிரலில் a, b, c என்ற எழுத்துகள் இயற்கை வரிசை களெனக்கொண்டு, அவ் வரிசையினின்றும் பிறழ்ந்த வரிசைகளில் எத்தனை 'எழுத்துகள்' நேர் மாற்றம் என்பதையும் அதற்குரிய குறியையும் எழுதியிருக்கிறோம். நான்காவது நிரலில் 'எண்' நேர் மாற்றம் எத்தனை என்பதையும் அதற்குரிய குறியையும் எழுதியிருக் கிறோம்.

இவ்விரண்டு முறைகளிலும் அணி கோவையின் விரிவு தக்க குறிக ளோடு கிடைப்பதைப் பார்க்கிறோம். ஒன்றுக்கொன்று வேறுபாடில்லை யென்பதையும் காண்க.

11·2. அணி கோவை—பொது வரையறை

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

என்ற அமைப்பு ஒரு n வரிசை அணி கோவை யெனப்படும். இதில் n நிரைகளும் n நிரல்களும் உள்ளன. n^2 மூலகங்கள் உள்ளன. இதன் விரிவில் $\angle n$ உறுப்புகள் இருக்கும். தலைமை உறுப்பான $a_1b_2\dots l_n$ என் பது தலைமை மூலை வரையறுப்பு (Prinicipal diagonal term) எனப் படும். அதில் $1, 2, \dots n$ ஆக பிற்குறிகள் எண்களின் இயற்கை வரிசையி லிருக்கும். இந்த n எணகளைக் கொண்டு $\angle n$ வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம். அவ்வித ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்தை முறையே $a, b, \dots l$க்குப் பிற்குறியாகக் கொண்ட ஒவ்வோர் உறுப்பும் இவ்வணி கோவையின் உறுப்பாகும். அவ்வரிசை மாற்றத்தில் $1, 2, 3 \dots n$ என்ற இயற்கையினின்றும் பிறழ்ந்த நேர் மாற்றங்கள் எத்தனை உள்ளன வெனக் கண்டு, ஒற்றைப்படை நேர் மாற்றங்களிருப்பின் அவ்வுறுப் புக்கு — குறியும், இரட்டைப் படை நேர் மாற்றங்களிருப்பின் + குறியும் இட்டு, எல்லா வுறுப்புகளையும் எழுதினுல் அணி கோவையின் விரிவு பெறப்படும்.

இங்கு நாம் கவனிக்கவேண்டியது, ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தோ அல்லது நிரலிலிருந்தோ ஒரே ஓர் எழுத்துதான் எடுக்கப்படுகின்றது. இவ்வாருக ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் n எழுத்துகளிருக்கும். nக்குக் குறைந்தோ மிகுந்தோ இருக்க முடியாது. ஓர் உறுப்பில் a_r என்ற

எழுத்து இருந்தால் வேறொரு a_s போன்ற எழுத்து அவ்வுறுப்பிலிருக்காது ; K என்ற பிற்குறி கொண்ட எழுத்து ஓர் உறுப்பிலிருந்தால் மற்றொரு முறை எந்த எழுத்துக்கும் K பிற்குறியாக அவ்வுறுப்பில் தோன்றாது. அதாவது, 'எழுத்து' என்ற முறையில் ஓர் எழுத்து (எந்த பிற்குறியையுடையதாயினும்) ஒரு முறைக்கு மேல் ஓர் உறுப்பில் தோன்றாது. 'பிற்குறி' என்ற முறையில் ஓர் எண் ஒரு முறைக்கு மேல் ஓர் உறுப்பில் தோன்றாது. எடுத்துக்காட்டாக b_2 தோன்றுகிற உறுப்பில் வேறொரு bம் தோன்றாது ; வேறோர் எழுத்துக்கும் 2 பிற்குறியாகத் தோன்றாது.

முன் 11·1·2-ன் குறிப்பில் கூறியது n வரிசை பெற்ற அணி கோவைக்கும் பொருத்தமாகும். அதாவது,

(1) எழுத்துகளை நிலைநிறுத்தி, பிற்குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்து, பிற்குறிகள் வரிசையில் நேர் மாற்றத்தை யொட்டிக்குறியிட்டு (+ அல்லது —), அணி கோவையின் விரிவை எழுதலாம்; அல்லது

(2) பிற்குறி எண்களை நிலைநிறுத்தி, எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்து, எழுத்து வரிசையில் நேர் மாற்றத்தை யொட்டி குறியிட்டு (+ அல்லது —), அணி கோவையின் விரிவை எழுதலாம்.

இரு முறைகளும் ஓர் அணி கோவைக்கு ஒரே விரிவைத்தான் கொடுக்கும்.

11·2 1. பல அணி கோவைகளின் மூலகங்கள், $a, b, c \ldots$ என்ற எழுத்துகளாக அல்லாமலும் அல்லது 1, 2, 3 ... பிற்குறிகள் கொண்டதாக அல்லாமலும் இருக்குமாயின், அங்கு விரிவு காண நாம் முன் கண்ட முறைகளைத் தகுந்தாற்போல் கணித்துப் பயன்படுத்த வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பின் குறியை (+ அல்லது —) காண்பது எப்படி?

அவ்வுறுப்பில் தோன்றும் மூலகங்களை, முதல், இரண்டாம் மூன்றும், ... நிரைகளில் வரும் வரிசைப்படி எழுதுக; அல்லது மூலகங்களை, முதல், இரண்டாம், மூன்றும்... நிரல்களில் வரும் வரிசைப்படி எழுதுக, பின்னர் ஒற்றைப்படை, இரட்டைப்படை நேர் மாற்றங்களுக்குரிய நெறிப்படி — அல்லது + குறியிடுக.

எடுத்துக்காட்டாக :

1. $$\begin{vmatrix} l & m & n & p \\ q & r & s & t \\ u & v & w & x \\ y & z & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

என்ற அணி கோவையில் $\beta m\ q\ w$ என்ற உறுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

முதலில் $\beta m\ q\ w$ ஐ நிரை வரிசைப்படி எழுதினால் $m\ q\ w\ \beta$ என எழுதலாம். இவை தோன்றும் நிரல்கள் வரிசை 2,1,3,4 ; ஒரு நேர் மாற்றம் உள்ளது எனவே குறி—.

இரண்டாவதாக $\beta\ m\ q\ w$ ஐ நிரல் வரிசைப்படி எழுதினால் $q m w \beta$ என எழுதலாம். இவை தோன்றும் நிரை வரிசை 2,1,3,4 ; ஒரு நேர் மாற்றம் உள்ளது; எனவே, குறி—.

$$2.\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

என்ற அணி கோவையில் 8·3·10·13ன் குறியென்ன ?

நிரை வரிசைப்படி இந்த உறுப்பை யெழுதினால், 3·8·10·13 ; இவைகள் தோன்றும் நிரல் வரிசை 3,4,2,1 ; நேர்மாற்றம் (3+2)=5 ; எனவே, குறியீடு—.

நிரல் வரிசைப்படி இவ்வுறுப்பை யெழுதினால் 13·10·3·8. இவை தோன்றும் நிரை வரிசை 4, 3, 1, 2. நேர்மாற்றம் (2+2+1)=5 ; எனவே, குறியீடு—.

11·3·1. தேற்றம் 1

ஓர் அணி கோவையில் நிரைகளை நிரல்களாகவும் நிரல்களை நிரைகளாகவும், மாற்றி யெழுதினால் அத் துணி கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

தெரிப்பு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots k_2 \\ & & \\ a_n & b_n & c_n \ldots k_n \end{vmatrix} \text{ எனவும் } \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \\ & \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \end{vmatrix}$$

எனவும் கொள்க.

Δ, Δ' என்ற இரு அணி கோவைகளிலும் தலைமையுறுப்பு $a_1 b_2 c_3 \ldots k_n$ ஒன்றே.

$\triangle$ன் உறுப்புகளைக் காண $a, b, c, \ldots k$ என்ற எழுத்துகளை நிலைநிறுத்தி $1, 2, 3, \ldots n$ என்ற எண்களை வரிசை மாற்றம் செய்து எழுத்துகளுக்குப் பிற்குறியாக இட $\angle n$ உறுப்புகள் பெறப்படும். $1, 2, 3, \ldots n$ என்ற இயற்கை வரிசையிலிருந்து எத்தனை நேர் மாற்றங்கள் உள்ளனவென ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் கண்டு, ஒற்றைப்படையாயின் — குறியும், இரட்டைப்படையாயின் + குறியும் இடுக. $\triangle$ன் விரிவு கிடைக்கும்.

$\triangle'$ன் உறுப்புகளைக் காண $1, 2, 3 \ldots n$ என்ற பிற்குறிகளை நிலைநிறுத்தி $a, b, \ldots k$ என்ற எழுத்துகளை வரிசைமாற்றம் செய்து எழுத, $\angle n$ உறுப்புகள் பெறப்படும். எழுத்துகளின் இயற்கை வரிசையான $a, b, c, \ldots k$விருந்து எத்தனை நேர்மாற்றங்கள் உள்ளனவென ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் கண்டு, ஒற்றைப் படையாயின் — குறியும் இரட்டைப்படையாயின் + குறியும் இடுக. $\triangle'$ன் விரிவு கிடைக்கும்.

இப்போது $\triangle$, $\triangle'$ என்ற இரண்டு விரிவுகளிலும் ஒரே உறுப்புகள் தோன்றுகின்றன என நிறுவுவோம்.

$\triangle$ல் $a_1\ b_2 \ldots k_n$ என்ற தலைமையுறுப்பில் பிற்குறிகளான 1, 2 ஐ மட்டும் வரிசை மாற்றினால் $a_2\ b_1 \ldots k_n$ என்ற உறுப்புத் தோன்றும்.

$\triangle'$ல் $a_1\ b_2 \ldots k_n$ என்ற தலைமையுறுப்பின் a, bஐ மட்டும் வரிசை மாற்றினால் $b_1\ a_2 \ldots k_n$ என்ற உறுப்புத் தோன்றும்.

இவ்விரண்டு உறுப்புகளும் சமம் என்று தெரியவருகிறது.

இவ்வாறே $\triangle$ல் உள்ள மற்ற ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கு ஒப்ப, அதற்குச் சமமான உறுப்பு ஒன்று $\triangle'$ல் உள்ளது என நிறுவலாம்.

மேலும், $\triangle$ன் உறுப்பின் பிற்குறிகளில் எத்தனை நேர்மாற்றங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை நேர் மாற்றங்கள் $\triangle'$ன் உறுப்பின் எழுத்துகளில் உள்ளனவென்பதும் விளக்கம்.

எனவே, சமமான உறுப்புகள் ஒரே குறியை (— அல்லது +) பெறும்.

எனவே $\triangle = \triangle'$

11·3·2. தேற்றம் 2

ஓர் அணி கோவையின் ஓர் உறுப்பில் ஏதேனும் இரண்டு பிற்குறிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படுமானால், அவ்வணி கோவையின் மற்றோர் உறுப்பு கிடைக்கும். இவ்விரண்டு உறுப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட குறி பெற்றிருக்கும்.

தெரிப்பு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots g_1 \ldots k_1 \ldots p_1 \\ a_2 & b_2 \ldots g_2 \ldots k_2 \ldots p_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n & b_n \ldots g_n \ldots k_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

என்பது ஒரு n-வரிசை அணி கோவையெனக் கொள்வோம்.

$A \times g_r k_s$ என்பது Δல் ஓர் உறுப்பு எனக்கொள்வோம் $(r \neq s)$; A என்பது மீதி $(n-2)$ மூலகங்களின் பெருக்குத்தொகையெனக் கொள்வோம். r, s என்ற இரு பிற்குறிகளை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றினால் $A \times g_s k_r$ என்பது கிடைக்கும். உறுப்புகள் அமைப்பு நெறியையொட்டி, $A \times g_s k_r$ என்பது Δல் மற்றோர் உறுப்பு என்பது தெளிவாகிறது.

$A \times g_r k_s$ என்ற உறுப்பில் இயற்கை வரிசையினின்று m நேர் மாற்றங்கள் உள்ளனவெனக் கொள்வோம்.

இப்போது $A \times g_s k_r$ என்ற உறுப்பை $A \times g_r k_s$ என மாற்ற, ஒரு மாற்றம் தேவை; பிறகு $A \times g_r k_s$ என்ற உறுப்பின் பிற்குறிகளை இயற்கை வரிசைக்கு மாற்ற m நேர்மாற்றங்கள் உள்ளனவென முன் பத்தியில் கொண்டிருக்கிறோம். எனவே, $A \times g_s k_r$ல் $(m+1)$ பிற்குறிகள் நேர்மாற்றம் உள்ளன.

எனவே m இரட்டைப்படையெண்ணாயின் $(m+1)$ ஒற்றைப் படையெண்ணாகும்; அல்லது m ஒற்றைப்படையெண்ணாயின் $(m+1)$ இரட்டைப்படை எண்ணாகும்.

எனவே, $A \times g_r k_s$ என்ற உறுப்பும், $A \times g_s k_r$ என்ற உறுப்பும் மாறுபட்ட குறிகள் பெற்றிருக்கும்.

11·3·2·1. கிளைத்தேற்றம் : ஓர் அணி கோவையின் ஒருறுப்பில் இரண்டு எழுத்துகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படுமானால், அவ்வணி கோவையின் மற்றோர் உறுப்பு கிடைக்கும். இவ்விரண்டு உறுப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட குறி பெற்றிருக்கும்.

11·3·3. தேற்றம் 3

ஓர் அணி கோவையில் இரு நிரல்கள் (அல்லது இரு நிரைகள்) ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றிக்கொள்ளப்படுமானால் புதிதாகக் கிடைக்கப்பெறும் அணி கோவை முதல் அணி கோவையின் மதிப்பிற்கு எண் மதிப்பளவில் சமமாகி, மாறுபட்ட குறிபெற்றிருக்கும்.

11·3·2ல் உள்ள △ என்ற அணி கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். △ல் r ஆவது நிரையையும், s ஆவது நிரையையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றியமைத்து △′ என்ற மற்றோர் அணிகோவையை அமைப்போம். அப்போது,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots g_1 \ldots k_1 \ldots p_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r & b_r \ldots g_r \ldots k_r \ldots p_r \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s & b_s \ldots g_s \ldots k_s \ldots p_s \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n & b_n \ldots g_n \ldots k_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots g_1 \ldots k_1 \ldots p_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s & b_s \ldots g_s \ldots k_s \ldots p_s \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r & b_r \ldots g_r \ldots k_r \ldots p_r \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n & b_n \ldots g_n \ldots k_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

△ல் $Ag_r\, Bk_s\, C$ ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். △′ல் அதே இடங்களில் தோன்றும் மூலகங்களைக் கொண்டு பெறப்படும் உறுப்பு $Ag_s\, Bk_r\, C$ ஆகும்.

எனவே, நேர்மாற்ற நெறிப்படி, △ல் உள்ள $Ag_r\, Bk_s\, C$ம் (△ல் உள்ள நிரை வரிசைப்படியும்) △′ல் உள்ள $Ag_s\, Bk_r\, C$ம் (△′ல் உள்ள நிரை வரிசைப்படியும்) ஒரே குறியீடு பெற்றிருக்கும்.

ஆனால், தேற்றம் 2ன்படி, $Ag_s\, Bk_r\, C$ என்பது △ல் (இரு பிற்குறிகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றியமைக்கப்பட்ட) மற்றோர் உறுப்பு எனவும், இதன் குறியும் △ விலேயே தோன்றும் எனவும் $Ag_r\, Bk_s\, C$ன் குறியும் மாறுபட்டதாயிருக்கும் எனவும் நிறுவப்பட்டது.

எனவே, $\triangle$லும் $\triangle'$லும் ஒரே உறுப்புகள் தோன்றுகின்றன.

மேலும் $\triangle$ல் தோன்றும் $Ag_s\ Bk_r\ C$ம்

$\triangle'$ல் தோன்றும் $Ag_s\ Bk_r\ C$ம்

மாறுபட்ட குறியுடையதாயிருக்குமென நிறுவப்பட்டிருக்கிறது.

$\therefore \quad \triangle = -\triangle'$

இத் தேற்றம் நிரல்கள் மாற்றத்திற்கும் பொருந்தும்.

11·3·4 தேற்றம் 4: ஓர் அணி கோவையில் இரு நிரைகள் (அல்லது இரு நிரல்கள்) முற்றொருமை பெற்றிருப்பின் அதன் மதிப்பு பூச்சியம்.

தேற்றம் 3ன்படி $\triangle$ என்ற அணி கோவையில் இரு நிரைகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்பட்டால், மாற்றப்பட்ட அணி கோவையின் மதிப்பு $-\triangle$ என அறிவோம். இப்போது முற்றொருமை பெற்ற இரு நிரைகளை மாற்றியமைப்பதால் பெறப்படும் அணி கோவை அப்படியே தானிருக்கும்.

எனவே, $\triangle = -\triangle$

$\therefore \quad \triangle = 0$ என்று அறிகிறோம்.

11·3·4·1. கிளைத் தேற்றம் 1

ஓர் அணி கோவையில் x சார்புடைய இயற்கணிதக் கோவைகள் மூலகங்களாயிருந்து $x=a$ என ஈடு செய்தால், இரண்டு நிரைகளோ, நிரல்களோ முற்றொருமை பெறுமாயின், அக் கோவைக்கு $(x-a)$ ஒரு சினையாகும். இது மிச்சத் தேற்றப்படி உண்மையாகும்.

11·3·4·2. கிளைத் தேற்றம் 2

இரு நிரைகள் (இரு நிரல்களோ) மட்டுமல்லாமல் r நிரைகளோ (r நிரல்களோ) முற்றொருமை பெறுமாயின், அக்கோவைக்கு $(x-a)^{r-1}$ ஒரு சினையாகும்.

குறிப்பு: நடைமுறையில் இத் தேற்றமும், இதன் கிளைத் தேற்றங்களும் அணி கோவை விரிவில் பெரிதும் பயன்படும்.

11·3·4·3. எ.கா. 1

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$ ன் விரிவு காண்க.

இதன் விரிவை aன் சார்பெனக் கொள்ளலாம். $a=b$ என அணிகோவையில் ஈடு செய்தால் இரண்டு நிரைகள் முற்றொருமை பெறுகின்றன ; அதாவது $\triangle=0$

$\therefore$ $(a-b)$ என்பது $\triangle$ன் விரிவில் ஒரு சினை. அவ்வாறே $(b-c)$ என்பதும் $(c-a)$ என்பதும் $\triangle$ன் விரிவில் சினைகளாகும்.

$\triangle$ன் விரிவு, மூன்றும்படி பெற்றது, அதில் தலைமையுறுப்பின் குறி. அதாவது bc^2ன் குறி $+$.

எனவே $\triangle=k\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$

எனக் கொண்டால் $k=1$ என அறியப்படுகிறது.

$\therefore \quad \triangle=(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$

எ.கா. 2

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$ -ன் விரிவு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு (1)ல் கண்டபடி,

$\triangle$ன் மூன்று சினைகள் $(b-c)$, $(c-a)$, $(a-b)$ ஆகும். ஆனால், $\triangle$ன் விரிவு 5ஆம் படி; a, b, c என்பவை சமச்சீர் முறையில் அமைந்திருக்கின்றன. எனவே,

$\triangle\equiv k\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ என எழுதினால் $k\equiv l\,(a^2+b^2+c^2)+m\,(ab+bc+ca)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்; l, m மாறிலி எண்கள். அணி கோவை விரிவில், a, b, cன் மீப்பெரும்படி 3 (ஒவ்வொன்றும்). $\{\,l\,(a^2+b^2+c^2)+m\,(ab+bc+ca)\,\}\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$-ல் a^4, b^4, c^4 வருகிறதாகையால் $l=0$ ஆகும்.

எனவே, $\triangle\equiv m\,(ab+bc+ca)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ என்ற அமைப்பில்தானிருக்கும்.

$\triangle$ல் b^2c^3ன் கெழு $+1$.

$m\,(ab+bc+ca)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ல் b^2c^3ன் கெழு $+m$.

$\therefore \quad m=1$

$\therefore \quad \triangle=(b-c)\,(c-a)\,(a-b)\,(ab+bc+ca)$

11·3·5. தேற்றம் 5

ஓர் அணி கோவையின் ஒரு நிரையில் (அல்லது ஒரு நிரலில்) உள்ள எல்லா மூலகங்களும் K என்ற ஓர் எண்ணுல் பெருக்கப்படுமாளுல், பெறப்படும் அணி கோவை, முதல் அணி கோவையைப் போல K மடங்கு இருக்கும்.

ஓர் அணி கோவையின் விரிவு காண ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் ஒவ்வொரு நிரை அல்லது ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்து ஒரு மூலகம் எடுக்கப்படுகிறது.

எனவே, ஒரு நிரை அல்லது ஒரு நிரலிலுள்ள எல்லா மூலகங்களையும் K ஆல் பெருக்குவதால், அணி கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் K ஆல் பெருக்கப்படுகிறது.

11·3·5·1. கிளைத் தேற்றம் 1

ஓர் அணி கோவையில், ஒரு நிரை அல்லது ஒரு நிரலில் உள்ள மூலகங்கள் K என்ற ஒரு பொதுச் சினை பெற்றிருப்பின், Kஐ அணி கோவைக்கு வெளியே ஒரு சினையாக எடுத்துவிடலாம்.

11·3·5·2. கிளைத் தேற்றம் 2

ஓர் அணி கோவையில் ஒரு நிரை அல்லது நிரலிலுள்ள மூலகங்கள் முறையே மற்ளெரு நிரை அல்லது நிரலிலுள்ள மூலகங்களைப்போல K மடங்கு இருக்குமாளுல், அவ்வணி கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

11·3·5·3. விளக்கம் 1

(1) $$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ (இரு நிரைகள் முற்ளெருமை)

11·3·5·4. எ.கா. 1.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b_3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c_2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$= (b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$ என நிறுவுக.

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரைகளை முறையே a, b, c ஆல் பெருக்கினால்,

$$\Delta abc = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & c^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

வலது கைப்புற அணி கோவை

$(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$ என முன்னர் 11·3·4·3(2)-ல் நிறுவப்பட்டதைக் காண்க.

எ.கா. 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

என நிறுவுக.

வலது கைப்புற அணி கோவையை $\triangle$ எனக்கொண்டு, அதில், இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் நிரைகளை முறையே bc, ca, ab ஆல் பெருக்குக.

$$\triangle \cdot bc \cdot ca \cdot ab = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & b^2c \\ abc & c^2a & 0 & ca^2 \\ abc & ab^2 & a^2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & 0 & bc^2 & b^2c \\ 1 & c^2a & 0 & ca^2 \\ 1 & ab^2 & a^2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரல்களிலிருந்து பொதுச் சினையான a, b, c ஐ அணி கோவைக்கு வெளியே கொணர்க.

$$\therefore \triangle \cdot a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ $\triangle$ = இடது கைப்புற அணி கோவை.

எ.கா. 3.

$$\begin{vmatrix} l^2x & lmy & lnz \\ lmp & m^2q & mnr \\ l^2n & m^2n & n^3 \end{vmatrix} = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix},$$

என நிறுவுக.

இடது கைப்புற அணி கோவை

$$\Delta = lmn\begin{vmatrix} lx & my & nz \\ lp & mq & nr \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரைகளினின்று முறையே l, m, nஐ வெளிக் கொணர்க.

$$= l^2m^2n^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரல்களினின்று முறையே l, m, nஐ வெளிக் கொணர்க.

பயிற்சி 11 (i)

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $$\begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & c+a & c^2+a^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

2. $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

3. $2s = a+b+c$ ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$$

4. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$

7. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$

8 $\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)\times(a^2+b^2+c^2)$

9. $\begin{vmatrix} 0 & xy & yz & zx \\ xy & 0 & zx & yz \\ yz & zx & 0 & xy \\ zx & yz & xy & 0 \end{vmatrix} = x^4y^4z^4 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{z^2} & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{y^2} & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

11·4. அணி கோவை : *சீறி* (Minor)

வரையறை :

$\triangle$ என்ற அணி கோவையில் r நிரைகளையும் அவைகளுடனிணைந்த நிரல்களையும் விலக்கினால் பெறப்படும் அணி கோவை, $\triangle$ன் ஒரு '*r* ஆவது *சீறி*' (*r*th minor) எனப்படும். அது $(n-r)$ வரிசை பெற்ற ஒரு புது அணி கோவையாகும். ஒரு நிரை அதனோடிணைந்த ஒரு நிரல் மட்டும் விலக்கிப் பெறப்படும் அணி கோவை $\triangle$ன் '**ஒன்றாவது *சீறி***' (**First Minor**), இரண்டு நிரை நிரல்கள் விலக்கிப் பெறப்படுவது $\triangle$ன் '**இரண்டாவது *சீறி***' (**Second Minor**) எனப்படும்.

b_s தோன்றும் நிரை நிரல்களை நீக்கி எழுதப்படும் அணி கோவை $\triangle b_s$ அல்லது B'_s என்று குறிக்கப்படும். இது ஓர் 'ஒன்ருவது சீறி' யாகும்.

எ கா.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

$$\triangle b_2 = B'_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\triangle d_4 = D'_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

இவை முதல் சீறிகளாகும்.

முதல், மூன்ருவது நிரை, நிரல்களை நீக்கி எழுதப்படும் இரண்டாம் சீறி= $\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}$

குறிப்பு : b_s என்ற மூலகத்தை நீக்கும்போது, b_s தோன்றும் நிரை நிரல்களை நீக்குகிருேம்.

11·4·1. ஓர் அணி கோவையின் விரிவு

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots k_1 \ldots p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots k_2 \ldots p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_r & b_r & c_r \ldots k_r \ldots p_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots k_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

என்ற அணி கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இதை $\Delta=[a_1b_2c_3d_4\ldots k_r\ldots p_n]$ என்றும் எழுதுவது மரபு.

இவ்வணி கோவையின் விரிவிலுள்ள உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தி எழுதலாம்.

(1) a_1 என்ற மூலகத்தைக் கொண்ட உறுப்புகள்
(2) a_2 ,, ,, ,,
(3) a_3 ,, ,, ,,
... ...
(n) a_n ,, ,, ,,

Δவிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், ஒவ்வொரு நிரை, நிரலிலும் ஒரே ஒரு மூலகத்தைக் கொண்டிருப்பதால், மேலே வகைப்படுத்திக் கூறப்பட்ட உறுப்புகள் யாவும் கொண்டதே Δன் விரிவு ஆகும்.

$\therefore\quad \Delta=a_1A_1+a_2A_2+\ldots\ldots+a_nA_n$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறே

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=b_1B_1+b_2B_2+\ldots+b_nB_n \text{ எனவும்}\\&=c_1C_1+c_2C_2+\ldots+c_nC_n \text{ எனவும்}\\&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\&=p_1P_1+p_2P_2+\ldots\ldots+p_nP_n \text{ எனவும்}\end{aligned}\right\}\text{நிரல் மூலகங்கள் கொண்டவை}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+\ldots+p_1P_1 \text{ எனவும்}\\&=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2+\ldots+p_2P_2 \text{ எனவும்}\\&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\&=a_nA_n+b_nB_n+c_nC_n+\ldots+p_nP_n \text{ எனவும்}\end{aligned}\right\}\text{நிரை மூலகங்கள் கொண்டவை}$$

எழுதலாம்.

A_r என்பது a_r என்ற மூலகத்தின் இணைச்சினை (Co factor) எனவும் B_s என்பது b_s என்ற மூலகத்தின் இணைச்சினை எனவும் கூறப்படும்.

(1) இப்போது அணி கோவையின் விரிவில் a_1 தோன்றும் உறுப்புகளைப்பின்வருமாறு பெறலாம்.

$a_1b_2c_3\ldots p_n$ என்ற தலைமையுறுப்பைக்கொண்டு, a_1ஐ ஒரேயிடத்தில் நிலைநிறுத்தி, பின்னர் தோன்றும் 2, 3 ...n என்ற பிற்குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்து முறையே b, c, . p-க்கு இட்டால், வரக்கூடிய உறுப்புகள் யாவற்றிலும் a_1 தோன்றும்.

$\therefore$ a_1 தோன்றும் உறுப்புகள் $a_1[b_2c_3\ldots p_n]$.
இது $A_1=b_2c_3\ldots p_n]$ என்ற அணி கோவை.

(2) a_2 தோன்றும் உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம் $a_1b_2\ldots p_n$ல் 1, 2 என்ற பிற்குறிகளை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்ற $-a_2b_1c_3\ldots p_n$ என்ற உறுப்புக் கிடைக்கும் $-a_2$ஐ அங்கே நிலை நிறுத்தி, பின்னர் தோன்றும் 1, 3,...n என்ற பிற்குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்து முறையே b, $c\ldots p$-க்கு இட்டால் வரக்கூடிய உறுப்புகள் யாவற்றிலும் a_2 தோன்றும்.

$\therefore$ a_2 தோன்றும் உறுப்புகள் $-a_2$ $[b_1c_3\ldots p_n]$.
இங்கு $A_2=-[b_1c_3\ldots p_n]$ என்ற அணி கோவை.

(3) a_3 தோன்றும் உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம். $a_1b_2c_3\ldots p_n$ல் 1, 3 என்ற பிற்குறிகளை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்ற $+a_3b_2c_1\ldots p_n$ என்ற உறுப்புக் கிடைக்கும். இது + குறியுடையது; ஏனெனில், $a_3b_2c_1\ldots p_n$ல் 2 நேர் மாற்றங்கள் உள்ளன.

a_3ஐ அங்கே நிலை நிறுத்தி. பின்னர் தோன்றும் 2, 1,.. n என்ற பிற்குறிகளை வரிசைமாற்றம் செய்து முறையே $b, c\ldots p$-க்கு இட்டால், வரக்கூடிய உறுப்புகள் யாவற்றிலும் a_3 தோன்றும்.

$\therefore$ a_3 தோன்றும் உறுப்புகள் $+a_3[b_2c_1\ldots p_n]$.
இங்கு $A_3=+[b_2c_1\ldots p_n]$ என்ற அணி கோவை.

11·4·1·1. இப்போது 11·4ல் கண்ட 'சீறி'களுக்கும் 'இணைச்சினை' களுக்கும் உள்ள தொடர்பை எளிதில் காணலாம்.

$$A_1=\ \Delta a_1=\ A'_1$$
$$A_2=-\Delta a_2=-A'_2$$
$$A_3=\ \Delta a_3=\ A'_3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

பொதுவாக $A_r=(-1)^{r-1}\Delta a_r=(-1)^{r-1}A'_r$
$$A_n=(-1)^{n-1}\Delta a_n=(-1)^{n-1}A'_n$$

$\therefore$ $\Delta=a_1\,\Delta a_1-a_2\,\Delta a_2+a_3\,\Delta a_3+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}a_n\,\Delta a_n$ எனவும், Δன் விரிவைச் சீறிகளின் துணைகொண்டு எழுதலாம்.

குறிப்பு (1)

இணைச் சினையை, உரிய குறியிடப்பட்ட சீறிக்குச் சமமெனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு (2)

இப்போது d_4க்கு உரிய இணைச் சிறை யென்னவெனக் காண வேண்டின்,

(i) முதலில் d_4 முதல் நிரலுக்கு வர 3 நேர் மாற்றங்கள் தேவை. ஆகவே, புது Δன் மதிப்பு − குறி பெறுகிறது.

(ii) இப்போது புது Δல் d_4ன் இணைச்சிறை $=(-1)^3 D_4=-D_4$

(iii) (i)ம் (ii)ம் ஒப்பிட D_4 குறி+, அதாவது $D_4=\Delta d_4$

$$\Delta d_4=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \ldots p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \ldots p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 \ldots p_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 & e_5 \cdot p_5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_n & b_n & c_n & e_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

11·5·1. தேற்றம் 6

ஒரு அணி கோவையின் ஒரு நிரையிலுள்ள (அல்லது நிரலிலுள்ள) மூலகங்களை மற்றோர் நிரையிலுள்ள (அல்லது நிரலிலுள்ள) ஒத்த மூலகங்களின் இணைச் சிறைகளால் பெருக்கி வரும் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

அதாவது $a_sA_r+b_sB_r+c_sC_r+\ldots+p_sP_r=0$ என்பது தேற்றம்.

$\Delta=(a_1b_2\ldots p_n)$ எனக் கொண்டால், $\Delta=a_rA_r+b_rB_r+c_rC_r+\ldots$ $\ldots+p_rP_r$ என்பது நாம் கண்டோம். இங்கு $A_r, B_r,\ldots P_r$ல் முறையே $a_r, b_r,\ldots p_r$ தோன்றாது.

இப்போது rஆவது நிரையில் $a_r, b_r,\ldots p_r$க்குப் பதிலாக முறையே $a_s, b_s,\ldots p_s$ என்ற மூலகங்களைப் பிரதி செய்ய, இவ்வாறு பிரதி செய்யப் பட்ட அணி கோவையின் மதிப்பு $\Delta'=a_sA_r+b_sB_r+c_sC_r+\ldots p_sP_r$ ஆகும். ஆனால், Δ'ல் rஆவது நிரையும், sஆவது நிரையும் முற்றொருமை பெற்றதாகலின் $\Delta'=0$

$\therefore\ a_sA_r+b_sB_r+c_sC_r+\ldots+p_sP_r=0$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ல்}$$

$$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2$$
$$A_2 = -(b_1c_3 - b_3c_1)$$
$$A_3 = b_1c_2 - b_2c_1$$
$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Δல் b_1, b_2, b_3ஐ முறையே A_1, A_2, A_3ஆல் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$b_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 - b_1b_2c_3 + b_2b_3c_1 + b_1b_3c_2 - b_2b_3c_1 = 0$$

அதாவது, $b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$

அவ்வாறே $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$

நிரைகளை யொட்டி,

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$
$$0 = a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$$
$$0 = a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1$$

11·5·2. தேற்றம் 7

ஓர் அணி கோவையில் ஏதாமொரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள மூலகங்கள் யாவும் இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகைகளாயமையுமானல், அவ்வணி கோவையை, இரு அணி கோவைகளின் கூட்டுத் தொகையாகக் கொள்ளலாம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \ldots p_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \ldots p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_n+\alpha_n & b_n & c_n \ldots p_n \end{vmatrix} \text{ எனக் கொள்க}$$

நிரல் வரிசையில் இவ்வணி கோவையை விரித்தெழுத $\Delta = (a_1 + \alpha_1)A_1 + (a_2 + \alpha_2)A_2 + \ldots + (a_n + \alpha_n)A_n$. இங்கு

$A_1, A_2, \ldots A_n$ என்பவை முறையே முதல் நிரலிலுள்ள மூலகங்களின் இணைச்சிறைகள்.

$$\therefore \quad \Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n + \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \ldots + \alpha_nA_n = \Delta_1 + \Delta_2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots p_1 \\ a_2 & b_2 \ldots p_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_n & b_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \ldots p_1 \\ \alpha_2 & b_2 \ldots p_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \alpha_n & b_n \ldots p_n \end{vmatrix}$$

11·5·2·1. கிளைத் தேற்றம் 1

ஓர் அணி கோவையில், ஏதாமொரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள மூலகங்கள் யாவும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்களின் கூட்டு அல்லது குறை தொகைகளாயமையுமாயின், அவ்வணி கோவையை அத்தனை அணி கோவைகளின் கூட்டு அல்லது குறை தொகைகளாகக் கொள்ளலாம்.

விளக்கம் :

$$\begin{vmatrix} a_1 - \alpha_1 + \alpha'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - \alpha_2 + \alpha'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 - \alpha_3 + \alpha'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = [a_1b_2c_3] - [\alpha_1b_2c_3] + [\alpha'_1b_2c_3]$$

11·5·2·2. கிளைத்தேற்றம் 2

ஓர் அணி கோவையில், ஒரு நிரலிலுள்ள (அல்லது நிரையிலுள்ள) மூலகங்கள், மற்ற நிரல்களிலுள்ள (அல்லது நிரைகளிலுள்ள)

மூலகங்களை ஒரே மாறிலிகளால் பெருக்கிக் கூட்டி வரும் மதிப்புகளுக்கு முறைப்படி சமமாகுமானல், அவ்வணி கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

விளக்கம் :

$$\begin{vmatrix} ma_1+nb_1 & a_1 & b_1 \\ ma_2+nb_2 & a_2 & b_2 \\ ma_3+nb_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & a_1 & b_1 \\ ma_2 & a_2 & b_2 \\ ma_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nb_1 & a_1 & b_1 \\ nb_2 & a_2 & b_2 \\ nb_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0+0$$

$$= 0$$

11·5·3. தேற்றம் 8

ஓர் அணி கோவையில் ஒரு நிரலிலுள்ள (அல்லது நிரையிலுள்ள) மூலகங்களுக்கு முறையே மற்ற நிரல்களிலுள்ள (அல்லது நிரைகளிலுள்ள) மூலகங்களை (அல்லது அம் மூலகங்களைக் குறிப்பிட்ட மாறிலி எண்ணால் பெருக்கி வந்த தொகைகளையோ) கூட்டினால் (அல்லது கழித்தால்) பெறப்படும் அணி கோவை முதல் கொடுக்கப்பட்ட அணி கோவைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1-nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2-nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3-nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்பது தேற்றத்தின் ஒரு சிறப்பமைப்பு.

இரண்டாவது அணி கோவை

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - n\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஏனெனில் மற்றிரு அணி கோவைகளில் இரு நிரல்கள் முற்றொருமை பெற்றவை; ஆகவே, அவை தனித்தனியே பூச்சியமாகும்.

11·5·3·1. எ.கா. 1

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

என நிறுவுக.

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} c & b \\ a & c \end{vmatrix}$$

$$= a(a^2-bc)-b(ac-b^2)+c(c^2-ab)$$

$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

மற்றொரு முறை :

நி (1)+ நி (2)+ நி (3) கூட்டி நிரல் (1) ஆக எழுதினால், தேற்றம் 8ன்படி (11·5 3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & c & b \\ a+b+c & a & c \\ a+b+c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \{ 1(a^2-bc)-1(ac-b^2)+1(c^2-ab) \}$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

எ.கா. 2

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$=2(24-25)-3(18-20)+4(15-16)$

$=-2+6-4$

$=0$

எ.கா. 3

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$ என நிறுவுக.

$$\Delta=0\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix}-z\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}$$

முதல் அணி கோவை $=0$

இரண்டாவது அணி கோவை

$=-x[x(0-x^2)-z(0-xz)+y(xy-0)]$

$=x^4-x^2z^2-x^2y^2$

அவ்வாறே மூன்றாவது அணி கோவை $=y^4-y^2z^2-y^2x^2$

" நான்காவது " $=z^4-z^2x^2-z^2y^2$

$\therefore \quad \Delta=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

எ.கா. 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பறிக

$$\Delta = a(bc-f^2)-h(ch-fg)+g(hf-bg)$$
$$=abc-af^2-ch^2+fgh+fgh-bg^2$$
$$=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

எ.கா. 5

$$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$ என நிறுவுக.

நிரை (2)—நிரை (1); நிரை (3)—நிரை (1); நிரை (4)—நிரை (1); செய்து எழுதினால் 8 ஆம் தேற்றப்படி (11 5 3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha-x & x-l & n-m & 0 \\ \alpha-x & \beta-l & x-m & 0 \\ \alpha-x & \beta-l & \gamma-m & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & l & m & x \\ 0 & x-l & n-m & \alpha-x \\ 0 & \beta-l & x-m & \alpha-x \\ 0 & \beta-l & \gamma-m & \alpha-x \end{vmatrix}$$ முதல், நான்காவது நிரல்களை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றல்; குறிமாறும்.

$$= -\begin{vmatrix} x-l & n-m & \alpha-x \\ \beta-l & x-m & \alpha-x \\ \beta-l & \gamma-m & \alpha-x \end{vmatrix} +0+0+0$$

$$= -(\alpha - x)\begin{vmatrix} x-l & n-m & 1 \\ \beta-l & x-m & 1 \\ \beta-l & \gamma-m & 1 \end{vmatrix}$$ மூன்ருவது நிரலிலுள்ள $(\alpha - x)$ என்ற சினையை வெளியே எடுத்தல்.

$$= (x-\alpha)\begin{vmatrix} x-l & n-m & 1 \\ \beta-l & x-m & 1 \\ \beta-l & \gamma-m & 1 \end{vmatrix}$$

நிரை (2) – நிரை (1); நிரை (3) – நிரை (1) (8ஆம் தேற்றப்படி)

$$\Delta = (x-\alpha)\begin{vmatrix} x-l & n-m & 1 \\ \beta-x & x-n & 0 \\ \beta-x & \gamma-n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & n-m & x-l \\ 0 & x-n & \beta-x \\ 0 & \gamma-n & \beta-x \end{vmatrix}$$ முதல், மூன்ரும் நிரல்களை மாற்றல்.

$$= -(x-\alpha)\,[(x-n)(\beta-x)-(\gamma-n)(\beta-x)]$$
$$= -(x-\alpha)(\beta-x)(x-n-\gamma+n)$$
$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

எ.கா. 6

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2+d^2$$ என நிறுவுக.

$$\Delta = abcd\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ a & b+\frac{1}{b} & c & d \\ a & b & c+\frac{1}{c} & d \\ a & b & c & d+\frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

நிரை (2)—நிரை (1); நிரை (3) - நிரை (1); நிரை (4)—நிரை (1)

$$\Delta = abcd \begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

நிரை (1)+நிரை (2); நிரை (3)—நிரை (2); நிரை (4)—நிரை (2)

$$\Delta = abcd \begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{b} & c & d \\ -\frac{1}{a} & b & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= abcd \quad \Delta'$$

$$\Delta' = a \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} b+\frac{1}{b} & c & d \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{1}{cd} - 0\right) + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} b+\frac{1}{b} & c & d \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$= \frac{a}{bcd} + \Delta''$

Δ''ல் நிரை (1)+நிரை (2) ; நிரை (3)−நிரை (2)

$$\Delta'' = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} b & c+\frac{1}{c} & d \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{b}{cd} - 0\right] + \frac{1}{ab}\left[\frac{c}{d} + \frac{1}{cd} + \frac{d}{c}\right]$$

$$= \frac{b}{acd} + \frac{c}{abd} + \frac{1}{abcd} + \frac{d}{abc}$$

$$\therefore \quad \Delta^1 = \frac{a}{bcd} + \frac{b}{cad} + \frac{d}{abc} + \frac{c}{abd} + \frac{1}{abcd}$$

$$\Delta = abcd \quad \Delta^1$$

$$= abcd\left[\frac{a}{bcd} + \frac{b}{cad} + \frac{d}{abc} + \frac{c}{abd} + \frac{1}{abcd}\right]$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1.$$

எ.கா. 7.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$ -ன் மதிப்பென்ன ?

Δல் நிரல் (4)—நிரல் (1)—நிரல் (3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 15 & 29 & 2 & -3 \\ 16 & 19 & 3 & -2 \\ 33 & 39 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

இங்கு நிரை (2)—நிரை (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -18 & -10 & -6 & 0 \\ 16 & 19 & 3 & -2 \\ 33 & 39 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

இங்கு நிரை (2) + 6 × நிரை (1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 16 & 19 & 3 & -2 \\ 33 & 39 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 16 & 19 & 3 & -2 \\ 33 & 39 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 19 & 16 & 3 & -2 \\ 39 & 33 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 16 & 3 & -2 \\ 33 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2[3(-9+16)-1(-48+66)]$$

$$= 2(21-18)$$

$$= 6.$$

எ.கா. 8

தீர்வு காண்க:

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

நிரல் (1)+(2)+(3)

$$\triangle = \begin{vmatrix} a+b+c-x & c & b \\ a+b+c-x & b-x & a \\ a+b+c-x & a & c-x \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\quad x=(a+b+c)$ ஒரு தீர்வு.

$$\therefore\quad \triangle' = \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

நிரை (2)—நிரை (1); நிரை (3)—நிரை (1)

$$\therefore\quad \triangle' = \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & b-c-x & a-b \\ 0 & a-c & c-b-x \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\quad (b-c-x)(c-b-x)-(a-b)(a-c)=0$

$\therefore\quad (x+c-b)(x+b-c)=(a-b)(a-c)$

$\therefore\quad x^2-(b-c)^2=(a-b)(a-c)$

$x^2=(a-b)(a-c)+(b-c)^2$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

$\therefore$ தீர்வுகள் $(a+b+c)$; $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

எ.கா. 9

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1}$$

என நிறுவுக.

(2) ஆவது நிரல் முதல் (n) ஆவது நிரல் வரை நிரல் (1) உடன் கூட்டுக.

$$\Delta = \begin{vmatrix} n+x & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots 1 \\ n+x & 1+x & 1 & \dots & \dots & \dots 1 \\ n+x & 1 & 1+x & \dots & \dots & \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+x & 1 & 1 & \dots & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & \dots 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} \quad (A)$$

ஆனால் $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = x$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^2$$

அவ்வாறே $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & 1+x & 1 \ldots . 1 \\ 1 & 1 & 1+x \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \end{vmatrix} = x^{n-1}$

$\therefore \quad \Delta = (n+x)\, x^{n-1}$

மாற்று முறை: (A) என்ற அணி கோவைப் பகுதியை எடுத்துக் கொள்க.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & 1+x & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & 1 & 1+x \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots 1+x \end{vmatrix}$$

நிரை (2)—நிரை (1); நிரை (3)—நிரை (1)... செய்தால்,

அணி கோவைப் பகுதி $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & x & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & x \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x \end{vmatrix}$

$= x^{n-1}$

$\therefore \quad \Delta = (n+x)x^{n-1}$

பயிற்சி 11 (ii)

1. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3-x \\ b & b^2 & b^3-x \\ c & c^2 & c^3-x \end{vmatrix} = 0$ ஆனால் $abc = x$ என நிறுவுக.

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

3. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ என நிறுவுக.

4. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ என நிறுவுக.

5. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ என நிறுவுக.

இதையொட்டி

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots n \text{ மூலகங்கள்} \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \quad \ldots\ldots 1+n \end{vmatrix}$$

$= abcd\ldots\ldots n\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots\frac{1}{n}\right)$ என நிறுவுக.

$a=b=c\ldots=n=x$ ஆனால் இவ்வணி கோவையின் மதிப்பறிக. (எடுத்துக்காட்டு 9 காண்க)

6. $\begin{vmatrix} x & 2x & a & b \\ 2x & 4x & c & d \\ 3x & 6x & e & f \\ 4x & 8x & g & h \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

8. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$ என நிறுவுக.

9. $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$ என நிறுவுக.

11. $\begin{vmatrix} a+b & x & y & z \\ 0 & b+c & z & x \\ 0 & 0 & c+d & y \\ 0 & 0 & 0 & d+a \end{vmatrix} = (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ என நிறுவுக.

12. $\begin{vmatrix} (y-z)^2 & z^2 & y^2 \\ z^2 & (x-z)^2 & x^2 \\ y^2 & x^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2(xy-yz-zx)^3$ என நிறுவுக.

13. $\begin{vmatrix} x-y & -y & y \\ y & x-y & y \\ y & y & x-y \end{vmatrix} = x(x-y)\ (x-2y)$ என நிறுவுக.

14. தீர்வு காண்க.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+3 & 3 \\ 2 & 4x+5 & 6x+5 & 7 \\ 1 & 3x+6 & 5x+6 & 5 \\ 3 & 7x+2 & 3x+4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

15. $\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = (a+1)\ (b+1)\ (c+1)\ (d+1) \left[1-\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}-\frac{d}{a+1}\right]$ என நிறுவுக.

இதை n மூலகங்களுக்குப் பொதுப்படுத்துக.

16. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

17. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

18. $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8\,abc$ என நிறுவுக.

19. $x \neq y \neq z \neq 0$ ஆகி மேலும்

$\begin{vmatrix} x & x^3 & x^4-1 \\ y & y^3 & y^4-1 \\ z & z^3 & z^4-1 \end{vmatrix} = 0$ ஆனால்,

$xyz(yz+zx+xy) = x+y+z$ என நிறுவுக.

20. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)$
$(x+y-z)$ என நிறுவுக.

21. $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = x^2(x+6)$ என நிறுவுக.

22. மேல் கணக்கைப் பொதுப்படுத்தி,

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \ldots\ldots n \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \ldots\ldots n \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \ldots\ldots n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n+x \end{vmatrix}$$

$x = {}^{n-1}[x+\frac{1}{2}n(n+1)]$ என நிறுவுக.

23. $\begin{vmatrix} x & c & b & a \\ c & x & a & b \\ b & a & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)$
$(x+b-c-a)(x+c-a-b)$
என நிறுவுக.

24. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $$\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ 2 & x+1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$$

(2) $$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}=0$$

(3) $$\begin{vmatrix} x^2-a^2 & x & 1 \\ b^2-a^2 & b & 1 \\ c^2-a^2 & c & 1 \end{vmatrix}=0$$

25. $$\Delta_n=\begin{vmatrix} a^{n+2} & b^{n+2} & c^{n+2} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ ஆனால்,

$\dfrac{\Delta_n}{\Delta_0}$ ன் மதிப்பு, a, b, c கொண்டு அமைக்கப்பட்ட n படி கொண்ட ஒரு சமபடிச் சார்பென நிறுவுக.

26. $f(x)$ ஓர் இருபடிச் சார்பாயின்,

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\equiv\begin{vmatrix} \dfrac{f(a)}{x-a} & \dfrac{f(b)}{x-b} & \dfrac{f(c)}{x-c} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

என நிறுவுக.

11·5·4 தேற்றம் 9

பெருக்கல் தேற்றம் : இரு அணி கோவைகளின் பெருக்கல் தொகை :

ஒரே 'வரிசையிலுள்ள' இரு அணி கோவைகளின் பெருக்கல் தொகையை அதே 'வரிசையிலுள்ள' ஓர் அணி கோவையாக எழுதலாம்.

பின்வரும் அணி கோவையைக் காண்க :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

என முதலில் நிறுவுவோம்.

$\Delta_1 = [a_1 b_2 c_3]$ எனவும் $\Delta_2 = [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]$ எனவும் கொள்க.

Δ_1-ல் ஏதாமோர் உறுப்பையும், Δ_2ல் ஏதாமோர் உறுப்பையும் பெருக்கி வரும் உறுப்பு 'ஓர்' ஆறு வரிசை அணி கோவையின் உறுப்பாக இருக்கும் என்பது தெளிவு.

$\therefore$ Δ-ல் தோன்றும் உறுப்புகள் $\Delta_1 \times \Delta_2$ல் தோன்றும் உறுப்புகளும், மேலும் $l, m \ldots\ldots u$, தோன்றும் உறுப்புகளும் சேர்ந்ததாய் இருக்கும்.

Δlஐ எடுத்துக்கொண்டால், அது ஐந்து மூலகங்கள் கொண்டது. அவ்வைந்து மூலகங்களில் கடைசி மூன்று நிரைகளிலிருந்து ஒவ்வோர் மூலகத்தை எடுக்கவேண்டியிருக்கும் ; அவைகளில் இரண்டு மட்டுமே கடைசி இரண்டு நிரல்களிலிருந்து எடுக்கலாம். ஏனெனில், l தோன்றும் நிரலிலிருந்து Δ lக்கு மூலகம் கொள்ள முடியாது; ஆகவே அம் மூன்றில் இரண்டுபோக, ஒன்று கட்டாயம் 0 (பூச்சியமாக) இருக்கவேண்டும். எனவே, Δl-ல் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 0 ஆகும்.

$\therefore$ $\Delta l = 0$; அவ்வாறே Δm, $\Delta n \ldots \Delta u$-க்கு உரிய உறுப்புகளே இருக்காது.

$\therefore$ $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ என நிறுவப்படுகிறது.

இவ்வாறே $2n$ வரிசையுள்ள ஓர் அணி கோவை, இரு n வரிசையுள்ள அணி கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையென நிறுவப் படுகிறது.

11·5·4·1. இந்த எடுத்துக்காட்டை வைத்துக்கொண்டு $\Delta_1 \times \Delta_2$ஐ ஒரு 'மூன்று' வரிசை அணி கோவையாக எழுதலாம் எனக் காட்டுவோம்.

சென்ற எடுத்துக்காட்டின்படி,

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (A)$$

என்பது விளக்கமாகிறது.

$\alpha_1 \times$ நிரை $(1) + \beta_1 \times$ நிரை $(2) + \gamma_1 \times$ நிரை (3) சேர்த்து நாலாவதுநிரையோடு கூட்டுக:

$\alpha_2 \times$ நிரை $(1) + \beta_2 \times$ நிரை $(2) + \gamma_2 \times$ நிரை (3) சேர்த்து ஐந்தாவது நிரையோடு கூட்டுக;

$\alpha_3 \times$ நிரை $(1) + \beta_3 \times$ நிரை $(2) + \gamma_3 \times$ நிரை (3) சேர்த்து ஆறுவது நிரையோடு கூட்டுக.

அப்போது (A) என்ற அணி கோவை

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \gamma_1 a_3 & \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2 + \gamma_1 b_3 & \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1 c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \gamma_2 a_3 & \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 + \gamma_2 b_3 & \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 + \gamma_2 c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 a_1 + \beta_3 a_2 + \gamma_3 a_3 & \alpha_3 b_1 + \beta_3 b_2 + \gamma_3 b_3 & \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 + \gamma_3 c_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

இதன் மதிப்பு

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1+\beta_1 a_2+\gamma_1 a_3 & \alpha_1 b_1+\beta_1 b_2+\gamma_1 b_3 & \alpha_1 c_1+\beta+\gamma_1 c^8{}_1 c_2 \\ \alpha_2 a_1+\beta_2 a_2+\gamma_2 a_3 & \alpha_2 b_1+\beta_2 b_2+\gamma_2 b_3 & \alpha_2 c_1+\beta_2 c_2+\gamma_2 c_3 \\ \alpha_3 a_1+\beta_3 a_2+\gamma_3 a_3 & \alpha_3 b_1+\beta_3 b_2+\gamma_3 b_3 & \alpha_3 c_1+\beta_3 c_2+\gamma_3 c_3 \end{vmatrix} \quad (B)$$

என்பது விளக்கம்.

ஏனெனில்
$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$
என்ற நிரல்களை

மூன்று நிரல் மாற்றம் செய்தால் இம்மூன்று நிரல்களும் முதல் மூன்று நிரல்களாகும்; அணி கோவையின் மதிப்பு குறி மாறும். எனவே $-(-1)\ (-1)\ (-1)$ஆல் (B)ஐப் பெருக்க $+(B)$ என்ற அணி கோவையே வரும்.

எனவே $\Delta_1 \times \Delta_2 = (B)$ என்ற மூன்று வரிசை அணி கோவை என நிறுவப்படுகிறது.

11·5·4·2. எ.கா. 1

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

A_1, A_2......முறையே a_1, b_1......ன் இணைச்சிணைகள் ஆனால்

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2$$ என நிறுவுக.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 \\ a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

$$= \Delta^3$$

$$\therefore \quad [A_1\ B_2\ C_3] = \Delta^2$$

பொதுவாக $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots p_n \end{vmatrix}$ என்பது ஒரு

n வரிசை அணிகோவையானல்

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \ldots\ldots P_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \ldots\ldots P_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ A_n & B_n & C_n \ldots\ldots P_n \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}$$ என நிறுவலாம்.

எ.கா. 2

$(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$ஐ நான்கு சரியான இரு படிகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம் என நிறுவுக.

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} = (a^2+b^2)-(-d^2-c^2)$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2$$

அவ்வாறே

$$\begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ -\gamma+i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

$\therefore\ (\Sigma a^2)\times(\Sigma\alpha^2)=$

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ -\gamma+i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+ib)(\alpha+i\beta)+(c+id)(-\gamma+i\delta) & (a+ib)(\gamma+i\delta)+(c+id)(\alpha-i\beta) \\ (-c+id)(\alpha+i\beta)+(a-ib)(-\gamma+i\delta) & (-c+id)(\gamma+i\delta)+(a-ib)(\alpha-i\beta) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P+iQ & R+iS \\ -R+iS & P-iQ \end{vmatrix}$$

$$= P^2+Q^2+R^2+S^2$$

இங்கு

$$P=a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta$$

$$Q=a\beta+b\alpha-d\gamma+c\delta$$

$$R=a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta$$

$$S=a\delta+b\gamma+d\alpha-c\beta$$

எ கா. 3

$S_r=a^r+b^r+c^r+d^r$ ஐக் குறிக்குமானால்

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = [(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2$$

எனத் திறுவுக.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & \Sigma a & \Sigma a^2 & \Sigma a^3 \\ \Sigma a & \Sigma a^2 & \Sigma a^3 & \Sigma a^4 \\ \Sigma a^2 & \Sigma a^3 & \Sigma a^4 & \Sigma a^5 \\ \Sigma a^3 & \Sigma a^4 & \Sigma a^5 & \Sigma a^6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}$$

ஆனால்

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ என எளிதில் நிறுவலாம்.

எனவே நிறுவப்படவேண்டியது நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 11 (iii)

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ ஐ $\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$ ஆல் பெருக்கி

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

என நிறுவுக.

2. $[a_1b_2c_3]$ல் $A_1, B_1, \ldots\ldots$ முறையே $a_1, b_1 \ldots$ன் இணைச்சிறிகள் ஆனால்

$$\begin{vmatrix} B_1+C_1 & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ B_2+C_2 & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ B_3+C_3 & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix} = 2[a_1b_2c_3]^2$$

என நிறுவுக.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

ஒரு மூவரிசை அணி கோவையாக எழுதி $(\Sigma a^3-3abc)\times \Sigma\alpha^3-3\alpha\beta\gamma) = \Sigma X^3-3XYZ$ என எழுதலாம் எனக் காட்டுக. (இங்கு $X=a\alpha+b\gamma+c\beta$; $Y=a\beta+b\alpha+c\gamma$; $Z=a\gamma+b\beta+c\alpha$)

4. $s_r=a^r+b^r+c^r$ஐக் குறிக்குமானால்

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (a-b)^2\,(b-c)^2\,(c-a)^2$$

என நிறுவுக.

11·6·1. அணி கோவைகள் பயன்படும் இடங்கள் :

1. அணி கோவைகளைக் கொண்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல் :

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad (2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \qquad (3)$$

இன் தீர்வுகள் காண்போம்.

$$\triangle \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ எனக் கொள்வோம்.

இதில் A_1, B_1......முறையே a_1, b_1...ன் இணைச்சினைகள் எனக்கொள்வோம்.

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளை முறையே A_1, A_2, A_3 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$x(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)+y(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)+$$
$$z(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)=(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3)$$

ஆனால் $\triangle=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 \qquad (11\cdot4\cdot1)$

$$\left.\begin{aligned} 0&=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 \\ 0&=c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 \end{aligned}\right\} \qquad (11\cdot5\cdot1)$$

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$$

$$\therefore \quad \triangle\cdot x=[d_1b_2c_3]$$

$$\therefore \quad x=\frac{[d_1b_2c_3]}{[a_1b_2c_3]}$$

அவ்வாறே (1), (2), (3) சமன்பாடுகளை முறையே B_1, B_2, B_3 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\triangle\cdot y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad y=\frac{[a_1\ d_2\ c_3]}{[a_1\ b_2\ c_3]}$$

அவ்வாறே (1), (2), (3) சமன்பாடுகளை முறையே C_1, C_2, C_3 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\Delta \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad z = \frac{|a_1\ b_2\ d_3|}{|a_1\ b_2\ c_3|}$$

இது கிரேமர் விதி (Cramer's rule) எனப்படும். ஆனால் $\Delta = 0$ ஆனால் இவ்வழியிலே நாம் தீர்வுகள் காண முடியாது ஆகவே $\Delta \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இவ்விதி பயன்படும்.

11.6·2 அணிகோவைகளின் உதவி கொண்டு, சமன்பாடுகளின இசைவு நிலை (consistency of equations) காணல்.

இப்போது $x + y + z = 3$

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

$$2x - 2y + 5z = 4$$

என்ற நான்கு சமன்பாடுகள், மூன்று தெராக் கணியங்கள் x, y, zஐ இணைத்துக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவுடையனவெனின் (are consistent), ஏதேனும் மூன்றினைக்கொண்டு, நாம் x, y, zன் தீர்வுகளைக் கண்டுவிடலாம்; அத் தீர்வுகள் நாலாவது சமன்பாட்டில் பொருத்தப்பட்டால், நாலாவது சமன்பாடு சரியாக வேண்டும்; அப்படி இருந்தால்தான், இந் நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவுடையன எனக் கூறலாம். அப்படி இல்லாவிடில் என்ன ஆவது? ஏதாவது மூன்று சமன்பாடுகளைக் கொண்டு கண்ட தீர்வுகள், நாலாவது சமன்பாட்டில் பொருந்தாவிடில், இந் நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவு பெற்றன அல்ல என்று கூறவேண்டும்.

முதல் மூன்று சமன்பாடுகளை விடுவிப்பதால் $x = 1 = y = z$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும். அத்தீர்வுகள் நாலாவது சமன்பாட்டில் பொருந்தவில்லை என நேரடியாகவே தெரிகிறது.

எனவே அந் நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவுடையனவல்ல என்று கூறவேண்டும்.

இன்னும் எளிதான எடுத்துக் காட்டாக:

$$2x - 3y = 7$$

$$3x + 2y = 4$$

$$5x + y = 9$$

என்பன வ மூன்றும் இசைவுடையனவெனவும்

$$2x-3y=7$$
$$3x+2y=4$$
$$5x+y=5$$

என்பவை மூன்றும் இசைவுடையனவல்லவெனவும் நேரடியாகவே பார்க்கலாம்.

பொதுவாக n தேராக்கணியங்களை இணைத்து n ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை) கொடுக்கப்பட்டால், அந்த n தேராக்கணியங்களின் தீர்வுகளைக் காணலாம். அவை தனிச் சிறப்புடையவை (unique). அந்த n தீர்வுகள் தவிர, வேறெந்தத் தீர்வுத் தொகுதியும் அச் சமன்பாடுகளுக்குப் பொருத்தமாகாது. அதற்கு மேலும் ஒன்று, இரண்டு, ... சமன்பாடுகள் அதே n தேராக்கணியங்களைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அவைகளில் நாம் முதல் n சமன்பாடுகளைக் கொண்டு கண்ட தீர்வுகளை ஈடு செய்தால், அச் சமன்பாடுகள் சரியாகுமாயின், அந்த n சமன்பாடுகளோடு மேலும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளும் இசைவு பெற்றன வெனக் கூறப்படும். பொருந்தாவிடில் இசைவுடையனவல்ல என்று கூறப்படும்.

இவ் விசைவுடைத் தன்மையை அல்லது இசைவற்ற தன்மையை யறிய அணிகோவைகள் பயன்படும்.

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$
$$a_4x+b_4y+c_4z=d_4$$

என்பவை இசைவுடையனவா, இசைவுடையனவாயின் என்ன கட்டுப்பாடு தேவையென்பதைக் காண்போம் :

முதல் மூன்று சமன்பாடுகளைக் கொண்டு,

$$x=\frac{[d_1b_2c_3]}{[a_1b_2c_3]};\ y=\frac{[a_1d_2c_3]}{[a_1b_2c_3]};\ z=\frac{[a_1b_2d_3]}{[a_1b_2c_3]}$$

எனத் தீர்வுகள் கண்டோம். இம் மதிப்புக்களை நான்காம் சமன்பாட்டில் ஈடுசெய்ய

$$a_4\ \frac{[d_1b_2c_3]}{[a_1b_2c_3]}+b_4\ \frac{[a_1d_2c_3]}{[a_1b_2c_3]}+c_4\ \frac{[a_1b_2d_3]}{[a_1b_2c_3]}=d_4$$

என்பது பொருந்தவேண்டும்.

பொருந்தினுல் நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவுடையன ; இல்லையாயின், நான்கு சமன்பாடுகளும் இசைவுடையனவல்ல.

எனவே, அவை இசைவுடையனவாயின் a, b, c. d களுக்கு இடையே இருக்கவேண்டிய கட்டுப்பாடு,

$$a_4\,[d_1d_2c_3] + b_4\,[a_1d_2c_3] + c_4\,[a_1b_2d_3] = d_4\,[a_1b_2c_3]$$

அதாவது

$$-a_4\,[d_1b_2c_3] - b_4\,[a_1d_2c_3] - c_4\,[a_1b_2d_3] + d_4\,[a_1b_2c_3] = 0$$

என்பது கட்டுப்பாடாகும்.

அதாவது

$$-a_4\,[b_1c_2d_3] + b_4\,[a_1c_2d_3] - c_4\,[a_1b_2d_3] + d_4[a_1b_2c_3] = 0$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = O$$

என்பதே இசைவுடைமைக்குரிய கட்டுப்பாடாகும். இது x, y, z, ஐ இந் நான்கு சமன்பாடுகளினின்றும் விலக்கிய "நீக்குறு", (Eliminant) ஆகும்.

இதே முறைப்படி, $(n+1)$ சமன்பாடுகளினின்றும் n தேராக் கணியங்களை விலக்கி அதன் 'நீக்குறு' காணலாம். அதுவே $(n+1)$ சமன்பாடுகளின் இசைவுடைமைக்குரிய கட்டுப்பாடாகும்.

குறிப்பு: $a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0$ $(r=1, 2, 3, 4)$ என்ற நான்கு சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டால்

நீக்குறுவாவது $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & -d_4 \end{vmatrix} = 0$

அதாவது முன் கண்ட $[a_1b_2c_3d_4]=0$ வே ஆகும்.

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\ldots\ldots+p_1x_n=0$$
$$a_2x_2+b_2x_2+c_2x_3+\ldots\ldots+p_2x_n=0$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_n+\ldots\ \ldots+p_nx_n=0$$

என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவானால் என்ன கட்டுப்பாடு தேவையெனக் காண்போம்.

$x_1=x_2=\ldots\ldots=x_n=0$ ஆனால், எல்லாச் சமன்பாடுகளும் இசைவுடையனவேயாம்.

ஆனால் எல்லாம் 0 ஆக இல்லையானால், $x_n \neq 0$ எனக்கொண்டு எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் x_n ஆல் வகுப்போம்.

அப்போது,

$$a_1 \frac{x_1}{x_n} + b_1 \frac{x_2}{x_n} + c_1 \frac{x_3}{x_n} + \ldots\ldots + p_1 = 0$$

$$a_2 \frac{x_1}{x_n} + b_2 \frac{x_2}{x_n} + c_2 \frac{x_3}{x_n} + \ldots\ldots + p_2 = 0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_n \frac{x_1}{x_n} + b_n \frac{x_2}{x_n} + \ldots\ldots + p_n = 0$$

இவை n சமன்பாடுகள் $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots\ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ என்ற $(n-1)$ தோரக கணியங்களை இணைப்பவை. ஆகவே இவை இசைவுடையனவாயின் தேவைப்படும் கட்டுப்பாடு,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots\ldots p_1 \\ a_2 & b_2 \ldots\ldots p_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_n & b_n \ldots\ldots p_n \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இது நீக்குறுவாகும்.

எ.கா. 1.

$$x + y - 2 = 0$$
$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$ax + y - 7 = 0$$

என்ற மூன்று நேர்க்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமாயின் a ன் மதிப்பறிக.

இம் மூன்று சமன்பாடுகளும் இசைவுடையதாயின் இக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

∴ தேவைப்படும் கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ a & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ a & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

அதாவது $1(21-5)-2(7-2)+a(5-6)=0$

அதாவது $16-10-a=0$

$\therefore\ a=6.$

எ.கா. 2.

அணி கோவையைப் பயன்படுத்தி

$$x-2y+z=0$$
$$2x\quad +z=3$$
$$5x-3y\quad =2$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1(0+3)-2(0+3)+5(-2+0)$$
$$=3-6-10$$
$$=-13$$

$$x= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-13}$$

$$=\frac{-3(0+3)+2(-2)}{-13}$$

$$=\frac{-13}{-13}$$

$$=1.$$

$$y= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{}$$

$$-13$$

$$=\frac{1(0-2)+1(4-15)}{-13}$$

$$=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{-13}$$

$$=\frac{1(0+9)+2(4-15)}{-13}$$

$$=1$$

$$\therefore \quad x=y=z=1.$$

எ.கா. 3.

$ax^3+bx^2+cx+d=0$; $px^2+qx+r=0$ என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளினின்றும் xஐ விலக்குக.

$$\begin{aligned} ax^4+bx^3+cx^2+dx &= 0 \\ ax^3+bx^2+cx+d &= 0 \\ px^4+qx^3+rx^2 &= 0 \\ px^3+qx^3+rx &= 0 \\ px^2+qx+r &= 0 \end{aligned}$$

இவ்வைந்து சமன்பாடுகளில் x, x^2, x^3, x^4 தனித்தனி நேரக் கணியங்களெனக் கொண்டால், தேவைப்படும் நீக்குறு,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ p & q & r & o & o \\ o & p & q & r & o \\ o & o & p & q & r \end{vmatrix}=0 \text{ ஆகும்.}$$

இது சில்வெஸ்டர் முறை விலக்கலெனப்படும்.

பயிற்சி 11 (iv)

1. அணி கோவை முறைகொண்டு, பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$x+y+4z=0$$
$$2x+3y+z=10$$
$$x+y-z=5$$

2. a, b, c, d மெய்யெண் மதிப்புடையதாயின், பின்வரும் சமன்பாடுகள் இசையுடையனவல்ல என நிறுவுக.

$$ax+by+cz+d=0$$
$$-bx+ay-dz+c=0$$
$$-cx+dy+az-b=0$$
$$-dx-cy+bz+a=0$$

3. தீர்வு காண்க.

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+cz=1$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=1$$

4. பின்வரும் மூன்று சமன்பாடுகளினின்றும் x, y, z விலக்குக.

(i) $ax+by+cz=0$

$bx+cy+az=0$

$cx+ay+bz=0$

(ii) $x=cy+bz$

$y=az+cx$

$z=bx+ay$

5. $x=\dfrac{a}{b-c}$; $y=\dfrac{b}{c-a}$; $z=\dfrac{c}{a-b}$ ஆனால்

$yz+zx+xy+1=0$ என நிறுவுக.

6. $(a+b)x+c(y+z)=0$

$(b+c)y+a(z+x)=0$

$(c+a)z+b(x+y)=0$

என்பவை இசைவுடையனவாயின், a அல்லது b அல்லது c பூச்சியமாக வேண்டும் என நிறுவுக

12. எண் கொள்கை

(Theory of Numbers)

12·1 இப் பகுதி முழுவதும் 'எண்' என்பது கூட்டு முழுஎண்களை மட்டுமே குறிக்கும். 'வகுபடும்' என்றால் மீதியின்றி வகுபடும் என்பதைக் குறிக்கும்.

M(p) என்பது pன் மடங்கு என்ற (multiple of p) பொருளில் பயன்படுத்தப்படும்.

12·1·1. பகா எண் (Prime number): வரையறை

தன்னாலும் ஒன்றாலும் (1) மட்டுமே வகுபடக் கூடிய எண், பகாஎண் எனப்படும்.

எ. கா. 2, 3, 5, 7, 31, 37, 43,.........

தொகுப்பெண் (Composite number):

மற்ற எண்களால் வகுபடும் எண் தொகுப்பெண் எனப்படும்.

எ. கா. 4, 9, 15, 24.........

ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்கள் (Numbers prime to each other):

இரு எண்களுக்கு ஒன்றைத் தவிர (எண் 1) பொதுச் சினை அல்லது பொதுக் காரணி ஒன்றும் இல்லையெனின் அவ்வெண்கள் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்களெனப்படும்.

எ. கா. 10 ம் 27 ம்;
18 ம் 121 ம்;
28 ம் 45 ம்.

12·1·1·1 எரற்றொத் தெனிசுவின் வடிதட்டு (The Sieve of Eratosthenes):

மனிதன் எண்களைப் பற்றி அறிய முற்பட்ட காலந் தொட்டே பகா எண்கள் பற்றிய ஆராய்ச்சியில் ஈடுபட்டு வந்திருக்கிறான். ஏறத்தாழ கி.மு. மூன்றாம்—இரண்டாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த எரற்றொத் தெனிசு என்ற கணித மேதை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுக்குக் குறைந்த

எல்லாப் பகா எண்களையும் காணும் வடிகட்டு முறையைக் கண்டுபிடித்திருக்கிறார். 50க்குக் குறைந்த பகா எண்களை அறிய, அவர் கண்ட முறை பின் வருமாறு:

1 முதல் 50 வரை எழுதுக ;

1, 2 3 பகா எண்கள்.

2-ன் மடங்குகளாகிய 4, 6, 8,...... என்ற எண்களை நீக்கி விடுக ;

பின்னர் 3-ன் மடங்குகளாகிய 6, 9, 12,... என்ற எண்களை நீக்கி விடுக. இவைகளில் சில முன்னரே 2-ன் மடங்குகளாக நீக்கப்பட்டிருக்கும். 5-இதுவரை நீக்கப்பட்டிராது; நீக்க வேண்டியதுமில்லை. ஏனெனில் அது 2-ன் மடங்குமல்ல: 3-ன் மடங்குமல்ல ; பின்னர் 5-ன் மடங்குகளாக 10, 15, 20...என்ற எண்களை நீக்கி விடுக. இவைகளில் சில முன்னரே 2-ன், 3-ன் மடங்குகளாக நீக்கப்பட்டிருக்கும். இவ்வாறே நீக்கப்படாத எண்களின் மடங்குகளை நீக்கிக்கொண்டே சென்றால், 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்களின் தொகுப்பு கிடைக்கும். அடிக் கோடிட்ட எண்கள் நீக்கப்பட்டவை.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

எனவே 1 முதல் 30 வரை உள்ள பகா எண்கள்,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

12 1·1 2 ஒரு தொகுப்பெண் இரு கிளைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், ஒரு கிளை அவ்வெண்ணின் படி மூலத்தைவிடப் (Square root) பெரிதாகவும் மற்றொரு கிளை அப் படிமூலத்தைவிடச் சிறியதாகவும் இருக்கும் ; அல்லது இரண்டும் சமமாகவும் இருக்கலாம்.

எ. கா. 1:

$$64 = 16 \times 4$$

$$16 > 8 ; 4 < 8$$

$$64 = 8 \times 8;$$

$$396 = 33 \times 12$$

$$\sqrt{396} < 20$$

இங்கு $33 > 20$; $12 < 20$.

எனவே, ஒரு எண் 64 ஐப் போல, ஒரு சரியான இருபடியாக இருக்குமாயின், அதன் இரு கிளைகள் ஒன்றுக் கொன்று சமமாயிருக்கலாம், அல்லது இரு கிளைகளில் ஒன்று படி மூலத்தைவிடப் பெரிதாகவும், மற்றொன்று அப்படி மூலத்தைவிடச் சிறிதாகவும் இருக்கலாம்.

ஒரு எண் ஒரு சரியான இருபடியாக இல்லாவிடத்தும் இது பொருந்தும்.

எனவே ஒவ்வொரு தொகுப் பெண்ணும், அதன் தோராயமான இருபடி மூலத்தைவிடச் சிறிதாக உள்ள ஒரு பகா எண்ணால் வகுபடலாம். இந்த அடிப்படையில்,

121க்குக் குறைவான பகா எண்கள் வேண்டுமானால் 2, 3, 5, 7 (அதாவது $\sqrt{121} = 11$க்குக் குறைவாக உள்ள) என்ற எண்களால் வகுபடக்கூடிய, 121 க்குக் குறைந்த எண்களை யெல்லாம் நீக்கி, விட்டால், 121க்குக் குறைவான பகா எண்கள் கிடைக்கும்.

169க்குக் குறைவான பகா எண்கள் வேண்டுமானால் 2, 3, 5, 7, 11 என்ற எண்களால் வகுபடக்கூடிய 169க்குக் குறைந்த எண்களை நீக்கி விட்டால், 169க்குக் குறைவான பகா எண்கள் கிடைக்கும்.

இவ்வாறே 1000க்குக் குறைவான பகா எண்கள் வேண்டு மெனின் 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31ன் மடங்குகளை நீக்கினால் 1000க்குக் குறைவான பகா எண்கள் கிடைக்கும்.

12·2·1 தேற்றம் .1

a ஐ bஆல் வகுக்கும்போது q ஈவாகவும் r மீதியாகவும் வரின் aக்கும் bக்கும் பொதுவாக உள்ள சினைகள், bக்கும் rக்கும் பொதுவாக உள்ள சினைகளேயாம்.

$a=bq+r$ என்பது கொடுக்கப்பட்டது. எனவே a, bஐ மீதியின்றி வகுக்கும். அப்படி வகுக்க வில்லையாயின்,

முழுஎண் = முழுஎண் + பின்னம், எனவரும். இது பொருந்தா தாகையால், a, bன் பொதுச் சினைகள். b, rன் பொதுச் சினைகளாகும்.

12 2·2 தேற்றம் : 2

ஒரு எண் வேறிரு எண்களின் பெருக்குத் தொகையை மீதியின்றி வகுக்கிறது. முதல் எண்ணும் பின்னிரு எண்களில் ஒன்றும், ஒன்றுக் கொன்று பகா யெண்களாயின், முதல் எண் பின்னிரு எண்களில் மற்றொன்றை மீதியின்றி வகுக்கும்.

$$ab=(Mx)=Kx$$

xம் bம் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்கள்; அதாவது xக்கும் bக்கும் பொதுச்சினை '1' தான். இரு பக்கங்களையும் xஆல் வகுத்தால், வலது கைப்புறம் K கிடைக்கும். இடது கைப் புறத்தில் bக்கும் xக்கும் பொதுச் சினை '1' தான். எனவே a என்ற எண் xஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

அப்போது தான் $b\times$முழுஎண் = Kஎன்ற முழு எண்ணாகும்.

எ. கா. $126\times 25=M(18)$

18-ம் 25ம் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்கள்.

$\therefore\quad 126=M(18)=7\times 18$ ஆகிறது

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(1) a^mஐ ஒரு பகா யெண் p வகுக்குமாயின், $a=M(p)$

(2) a என்ற எண்ணும் α, β, γ......என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றும், ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின் a-ம் $\alpha\beta\gamma$...... என்ற எண்ணும் ஒவ்வொன்றும், ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின் a-ம் $\alpha\beta\gamma$......என்ற எண்ணும் ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்கள்.

(3) a, b இரண்டும் ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்களாயின் a^m-ம், b^nம் ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்கள்.

(4) p என்ற பகா எண் $\alpha\beta\gamma$......என்ற பெருக்குத் தொகையை வகுக்குமாயின், p என்பது α, β, γ......என்ற எண்களில் குறைந்தது ஒரு எண்ணையேனும் வகுக்கும்.

12 2·3. தேற்றம் : 3

ஒவ்வொரு தொகுப்பு எண்ணுக்கும் குறைந்தது ஒரு பகா யெண் சினையுண்டு.

தெ : N ஒரு தொகுப்பு எண்ணுதலின் 1, N தவிர, வேறு சினைகளும் உண்டு. அச்சினைகளில் மீச்சிறு சினை, அதாவது மற்ற எல்லாவற்றையும் விடக் குறைந்த சினை யொன்று இருக்கும். அதை a எனக் கொள்க. அப்போது a ஒரு பகா யெண்ணுயிருக்கும் என நிறுவலாம்.

a பகாயெண் இல்லையெனில் அதற்குச் சினைகள் இருக்கும். அவை aஐவிடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் a தான் மிகச் சிறிய சினை என்று கொண்டதற்கு இது முரண்பட்டது. எனவே a என்பதே Nன் பகாயெண் சினையாயிருக்கும்.

குறிப்பு: பகாயெண் சினைகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டும் இருக்கலாம் ; குறைந்தது ஒன்று இருக்கிறது என்பதே தேற்றம்.

12·2·4. தேற்றம் : 4

ஒவ்வொரு தொகுப்பு எண்ணையும் ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான (Unique) முறையில் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம்.

தெ : தேற்றம் 3-ன்படி, N என்ற தொகுப்புக்குக் குறைந்தது ஒரு பகா எண் சினையிருக்க வேண்டும். அதை a எனக் கொள்க. ஆகவே $N=aM$ என எழுதலாம். Mம் பகா எண்ணுயின் $N=aM$ என்று சிறப்பாக எழுதலாம்.

M ஒரு தொகுப் பெண்ணுயின், அதற்கு b என்றவொரு பகா யெண் சினையிருக்க வேண்டும்.

$M=bP$ ஆனுல்,

$N=aM=abP=......$ என எழுதிக் கொண்டு போனுல், கடைசியாக ஒரு பகாயெண் சினையில் வந்து நிற்கும்.

$\therefore\ N=abcd\ldots K$ எனப் பல பகாயெண்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம்.

இரண்டாவது $N=abc\ldots\ldots K$ என்ற ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பு முறையில் தான் எழுத முடியும் என்பதை நிறுவவேண்டும்,

வேறேதாவது விதத்தில், $N=\alpha\beta\gamma\ldots\ldots K$ என்ற முறையிலும் Nஐப் பல பகாயெண்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுத முடியு மெனக் கொள்வோம்.

அப்படி யெழுத முடியுமாலுல்,

$N=abc\ldots\ldots K=\alpha\beta\gamma\ldots\ldots K$ என்பது பொருத்தம். α என்பது Nஐ வகுக்குமாதலின் α என்பது $abc\ldots\ldots K$ ஐயும் வகுக்கவேண்டும். ஆனுல் $a, b, c\ldots\ldots K$ யாவும் பகாயெண்கள். எனவே α என்பது $a, b, c\ldots\ldots K$ல் ஏதாவது ஒன்றுக்குச் சமமாக விருக்க வேண்டும். அவ்வாறே $\beta, \gamma\ldots\ldots$ம்.

எனவே $a, b, c\ldots\ldots K$ என்ற தொகுப்பில் உள்ள எண்களும $\alpha, \beta, \gamma,\ldots\ldots K$ என்ற தொகுப்பில் உள்ள எண்களும் ஒன்றே.

எனவே $N=abc\ldots\ldots K$ என்ற தொகுப்பில் உள்ள எண்களும் ஒன்றே.

எனவே $N=abc\ldots\ldots K$ என்ற முறையில் $a, b, c\ldots$ என்ற பல பகாயெண்களின் பெருக்குத் தொகையாக ஒரே தனிச் சிறப்பான முறையில் தான் எழுதமுடியும் என நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு: $N=a^pb^qc^r\ldots\ldots$ என்ற முறையிலும் எழுதலாம்.

எ. கா. 3

$$9216=2^{10}\cdot 3^2$$

எ. கா. 4

$$\begin{aligned}24948 &= 4\times 6237\\ &= 2^2\times 9\times 693\\ &= 2^2\times 3^2\times 9\times 77\\ &= 2^2\times 3^2\times 3^2\times 7\times 11\\ &= 2^2\times 3^4\times 7\times 11.\end{aligned}$$

12·25 பகாயெண்கள்: எண்ணினத்தில் பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை, முடிவுள்ளவையா அல்லது முடிவில்லாதவையா (finite or infinite) என்பது ஒரு முக்கியமான கேள்வி.

ஆயிலர் என்ற கணித மேதை, பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதவை (கணக்கிலடங்காதவை) யென நிறுவியிருக்கிறார். ஆகவே பின்வரும் தேற்றம்.

12 2 1· தேற்றம் : 5.

பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்காது (The number of primes is infinite) :

மொத்தம் n (ஒரு திட்டமான எண்) பகாயெண்களே உள்ளன வென்று கொள்வோம். பகா எண்கள் முழுவதும் $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ எனக் கொள்வோம். எனவே இந்த n எண்கள் தவிர, மற்ற எண்கள் யாவும் தொகுப் பெண்களாம் என்பது நமது கொள்கைப்படி பொருத்த மாகும்.

இப்போது $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_n + 1$ என்ற எண்ணையெடுத்துக் கொள்வோம். இத்த எண்ணை $p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots p_n$ என்ற எந்தப் பகா யெண்ணால் வகுத்தாலும் '1' மீதிவரும் எனவே N என்ற எண், எந்தப் பகாயெண்ணாலும் மீதியின்றி வகுக்கமுடியாதென்பது தெளிவு. ஆகவே Nம் ஒரு பகாயெண்ணாகும். இது நாம் முதலில் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பட்டது.

எனவே, நாம் முதலில் கொண்ட கொள்கை, அதாவது எல்லாப் பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை n என்பது பொருந்தாது. ஆகவே, பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்காது.

மற்றொரு முறையில் தெரிப்பு :

பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்கியது எனக் கொண்டால், p என்பது பகாயெண்களின் மிகப் பெரிய எண் எனக் கொள்வோம் $\angle p > p$ என்பது தெளிவு; மேலும் $\angle p$ஐ p மீதியின்றி வகுக்கும்; மற்றும் pஐ விடச் சிறிய பகாயெண்களும் $\angle p$ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

$\angle p+1$ என்ற எண்ணை மிகப் பெரிய பகா எண் pம், pஐ விடச் சிறிய பகாயெண் எதுவும் மீதியின்றி வகுக்கமுடியாது. ஆகவே $\angle p+1$ என்ற எண்ணை pஐ விடப் பெரிய பகாயெண்ணால் வகுக்க முடியலாம்; அல்லது $\angle p+1$ என்ற எண்ணே ஒரு பகாயெண்ணாக விருக்கலாம் என்ற முடிவுக்குத்தான் வரவேண்டும்.

எனவே மீப்பெரு பகாயெண் என ஒரு எண் இருக்கமுடியாது. ஆக, பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்காது.

12·2·5·2. தேற்றம் 6:

பகா எண்களை மட்டும் குறிக்கும் ஒரு வாய்பாடு (rational integral algebraic formula) காணமுடியாது.

முடியுமானால் $a \pm bx \pm cx^2 \pm dx^3 \pm$ ..... என்பது xன் முழு எண் மதிப்புகளுக்கு ஒரு பகாயெண்ணைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்வோம் $x = m$ என ஈடு செய்வோம்.

$p = a \pm bm \pm cm^2 \pm dm^3 \pm$......ஒரு பகாயெண்ணைக் குறிக்கிறதெனக் கொள்வோம். ($p \neq 0$ அல்லது 1) இப்போது $x = m + np$ என ஈடு செய்தால், புதிதாக அவ்வாய்பாடு கொடுக்கும் எண்,

$= a \pm b(m+np) \pm c(m+np)^2 \pm \ldots\ldots$

$= a \pm bm \pm cm^2 + \ldots\ldots + M(p)$

$= p + M(p)$

$+ M(p)$ ஆகிறது.

எனவே இவ்வாய்பாடு, எண்ணற்ற xன் மதிப்புகளுக்கு, பகாவெண்ணைத் தராது. ஆகவே ஒரு இயற் கணித வாய்பாடு கொண்டு பகாயெண்களைக் குறிக்க முடியாது.

குறிப்பு: ஆனால் சில குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள், அவ்வாறுள்ள வாய்பாடுகள் உள்ளன. அவை அவ் வெல்லைகளுக்கப்பால் பகாயெண்களாகாது.

(i) $x < 40$ ஆனால் $x^2 + x + 41$ ஒரு பகாயெண் (ஆய்லர்) (Euler)

(2) $x < 16$ ஆனால், $x^2 + x + 17$ ஒரு பகாயெண் (பார்லோ) (Barlow)

(3) $x < 29$ ஆனால் $2x^2 + 29$ ஒரு பகாயெண் (பார்லோ) (Barlow)

12·2·5·3. தேற்றம் 7:

$N = a^p \cdot b^q \cdot c^r \ldots K^u$ என்று பகாயெண்களின் பெருக்குத்தொகையாகக் கொண்டால் Nஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $(p+1)\ (q+1)\ (r+1)$.........$(u+1)$

தெ: Nஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்,

$a^{p_1} \cdot b^{q_1} \ldots\ldots k^{u_1}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

இதில் $0 \leq p_1 \leq p$;

$0 \leq q_1 \leq q$; .....$0 \leq u_1 \leq u$ என்பவை பொருத்தம் ஆகும்.

எனவே, இதைப்போன்ற எண்கள் யாவும்,
$(1+a+a^2+\ldots a^p)(1+b+b^2+\ldots b^q)\ldots(1+k+k^2+\ldots+k^u)$
என்ற பெருக்குத் தொகையில் வரும் எண்களால் குறிக்கப்படும்.

$\therefore N$ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $=(p+1)(q+1)\ldots\ldots(u+1)$

குறிப்பு: இந்த எண்ணிக்கையில் '1'ம், 'N'ம், Nஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்களாகக் கணக்கிடப் பட்டிருக்கிறது.

12·2.5.4. எ.கா. 6: $280=2^3\cdot5\cdot7$

280ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $4\times2\times2=16$. இந்த எண்ணிக்கையில் '1'ம் '280'ம் வகுக்கும் எண்களாகக் கணக்கிடப் பட்டிருக்கின்றன.

வகுக்கும் எண்கள்: $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7)$ என்பதில் தோன்றும் உறுப்புக்கள்:

1, 2, 2^2, 2^3, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140, 280.

12·2.5.5. தேற்றம் 8: $N=a^p.b^qc^r\ldots\ldots k^u$ என்ற தொகுப்பெண்ணின் எல்லாச் சினைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\times\ldots\ldots\times\frac{k^{u+1}-1}{k-1}$$ ஆகும்.

சென்ற தேற்றத்தில் N எல்லாச் சினைகளும் $(1+a+a^2\ldots+a^q)$ $(1+b+b^2+\ldots+b^q)\ldots\ldots(1+k+k^2\ldots+k^u)$ன் பெருக்குத் தொகையில் தோன்றும் உறுப்புக்கள் என நாம் கண்டோம்.

ஆகவே அவைகளின் கூட்டுத் தொகை,

$$=\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\ldots\ldots\frac{k^{u+1}-1}{k-1}$$

12·2.5.6. எ.கா. 7: 16464ஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவைகளின் கூட்டுத்தொகையென்ன?

$16464=2^4.\ 3\cdot7^3$

$\therefore$ வகுக்கக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை

$=5\times2\times4$

$=40$ ஆகும்.

அவைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$=(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1\times7+7^2+7^3)$$
$$=\frac{2^5-1}{2-1}\times\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{7^4-1}{7-1}$$
$$=31\times4\times400$$
$$=49,600.$$

12·2.5.7. தேற்றம் 9 :

$\angle n$ ல் p என்ற பகா யெண் தோன்றும் 'படி' (Power)

$$I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots\ldots$$

தெ : $\angle n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n$

இப் பெருக்குத் தொகையில் p ஒரு முறையேனும் தோன்றும் உறுப்புகள்,

$$p,\ 2p,\ 3p, \ldots\ldots I\left(\frac{n}{p}\right)p \qquad (A)$$

இவைகளில் p^2 ஐச் சினையாகக் கொண்ட உறுப்புகள்,

$$p^2,\ 2p^2, \ldots\ldots I\left(\frac{n}{p^2}\right)p^2 \qquad (B)$$

அவ்வாறே, p^3 ஐச்சினையாகக் கொண்ட உறுப்புகள்,

$$p^3,\ 2p^3, \ldots\ldots I\left(\frac{n}{p^3}\right)p^3 \qquad (C)$$

அவ்வாறே, p^4, p^5 .....க் குரிய உறுப்புகளை எழுதலாம்.

ஒரு நிலையில் $I\left(\frac{n}{pk}\right) = O$ ஆகும்.

(B) வரிசையில் உள்ள எண்கள் p^2 ஐ ஒரு சினையாகக் கொண்டவை; ஆனால் அவையாவும் ஒரு முறை (A) வரிசையில் தோன்றியிருக்கும்.

அவ்வாறே (C) வரிசையில் உள்ள எண்கள் p^3 ஐ ஒரு சினையாகக் கொண்டவை; ஆனால் அவை ஒரு முறை (A) வரிசையிலும் ஒருமுறை (B) வரிசையிலும் தோன்றியிருக்கும். அவ்வாறே மற்றவை, எனவே $\angle n$ல் p தோன்றும் மீப்பெரு 'படி'

$$I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots\ldots + I\left(\frac{n}{p^{k-1}}\right)$$

12·2.5.8. விளக்கக் குறிப்பு :

$\angle 101$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\angle 101 = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times 99 \times 100 \times 101$

இங்கு 3 ஆல் வகுபடக் கூடியவை,

3, 6, 9, 12, 15, 18 21, 24 27, 30, 33, 36, 39, 42......99 வரை.

(எண்ணிக்கை 33) (A)

3^2 ஆல் வகுபடக் கூடியவை :

9 18, 27 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99

(எண்ணிக்கை 11) (B)

3^3 ஆல் வகுபடக் கூடியவை :

27, 54, 81 (எண்ணிக்கை 3) (C)

3^4 ஆல் வகுபடக் கூடியவை :

81 ஒன்றுதான் (D)

$9 = 3^2$; இந்த 2 படிகள் (A)ல் ஒரு முறையும்

(B)ல் ஒரு முறையும்,

அவ்வாறே

$27 = 3^3$; இந்த 3 படிகள் (A)ல் ஒரு முறையும்

(B)ல் ஒரு முறையும்

(C)ல் ஒரு முறையும்

அவ்வாறே

$81 = 3^4$; இந்த 4 படிகள் (A)ல்; (B ல், (C)ல், (D)ல் ஒவ்வொரு முறையாக 4 முறை கூட்டப்படுகிறது.

இவ்வாறே ஒவ்வொரு எண்ணிலுள்ள படியும். எனவே $\angle 101$ல் 3ன் மீப்பெருபடி

$= 33 + 11 + 3 + 1$

$= 47$

12·31. தேற்றம் 10:

அடுத்தடுத்த n முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை $\angle n$ ஆல் வகுபடும். (எண்கள் ஏறு வரிசையில் கொள்ளப்படும்)

$\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+n)}{\angle n}$ ஒரு முழு எண் என நிறுவ வேண்டும்.

தெ: $(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n) = \dfrac{\angle x+n}{\angle x}$

$$\therefore \quad \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{\angle n} = \frac{\angle x+n}{\angle x \cdot \angle n}$$

$$= {}^{x+n}C_n$$

$$= {}^{x+n}C_x$$

இது ஒரு கூட்டு முழு எண். எனவே தேற்றம் நிறுவப்படும். [${}^{x+n}C_n$ என்பது $(x+n)$ பொருள்களைக் கொண்டு $x, x, x, \ldots\ldots$ ஆக எடுக்கக்கூடிய சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை]

12·3·1·1 மாற்று முறைத் தெரிப்பு: தேற்றம் 9-ன் முடிவு கொண்டு இத் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

அதாவது $\dfrac{\angle \underline{x+n}}{\angle x \angle n}$ = ஒரு முழு எண் என நிறுவவேண்டும்.

இதை நிறுவ, $\angle \underline{x+n}$ல் p என்னும் ஒரு பகாயெண் தோன்றும் மீப்பெருபடியைவிட, $\angle x \cdot \angle n$ல் p தோன்றும் மீப்பெருபடி மிகையாகாது. (குறைந்ததாகவோ, அல்லது சமமாகவோ தானிருக்கும்) என நிறுவினல் $\dfrac{\angle \underline{x+n}}{\angle x \cdot \angle n}$ = ஒரு முழு எண் என நிறுவப்படும்.

$\angle \underline{x+n}$, $\angle x$, $\angle n$ என்பவற்றில் p என்னும் பகாயெண் தோன்றும் மிகப் பெரியபடி, முறையே

$$\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p^2}\right)+\ldots\ldots \qquad (A)$$

$$\mathrm{I}\left(\frac{x}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x}{p^2}\right)+\ldots\ldots \qquad (B)$$

$$\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\ldots\ldots \qquad (C)$$

$\therefore$ $\angle x \cdot \angle n$ல் p தோன்றும் மிகப் பெரியபடி,

$$\mathrm{I}\left(\frac{x}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\ldots\ldots$$

இப்போது நாம் நிறுவவேண்டுவது

$$\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p^2}\right)\ldots\ldots$$

$$\geq \mathrm{I}\left(\frac{x}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\ldots\ldots$$ ஆகும்.

$\mathrm{I}(a+b) \geqslant \mathrm{I}(a)+\mathrm{I}(b)$ என்பதை நிறுவலாம்.

a, b கூட்டு எண்கள்.

$a = i_1 + f_1$

$b = i_2 + f_2$ எனவும் கொள்வோம்.

இங்கு $i_1 = \mathrm{I}(a)$

$i_2 = \mathrm{I}(b)$

f_1, f_2 இரண்டும் கூட்டுபின்னங்கள்; இரண்டும் '1'ஐவிடத் தனித் தனியாகக் குறைந்தவை.

$\therefore \quad a+b = i_1 + i_2 + f_1 + f_2$

$f_1 + f_2 = 1 + f_3$ ஆகவோ $(0 < f_3 < 1)$

அல்லது $f_1 + f_2 = f^1$ $(0 < f^1 < 1)$ ஆகவோ இருக்கலாம்.

$\therefore \quad a+b=i_1+i_2+1+f_3$

அல்லது $=i_1+i_2+f^1$

$\therefore \quad \mathrm{I}\,(a+b)=i_1+i_2+1$ அல்லது i_1+i_2

$\therefore \quad \mathrm{I}\,(a+b) > \mathrm{I}\,(a)+\mathrm{I}\,(b)$

எனவே,

$$\mathrm{I}\,(a+b+c+\ldots\ldots) > \mathrm{I}\,(a)+\mathrm{I}\,(b)+\mathrm{I}\,(c)+\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \mathrm{I}\left[\frac{x+n}{p\alpha}\right] > \mathrm{I}\left[\frac{x}{p\alpha}\right]+\mathrm{I}\left[\frac{n}{p\alpha}\right]$$

எனவே $\alpha=1,\ 2\ldots\ldots$ எனக் கொண்டால்

$$\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p}\right) > \mathrm{I}\left(\frac{x}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)$$

$$\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p^2}\right) > \mathrm{I}\left(\frac{x}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

எனவே

$$\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x+n}{p^3}\right)+\ldots\ldots$$

$$> \mathrm{I}\left(\frac{x}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{x}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\ldots\ldots$$

$\therefore \quad \angle\overline{x+n}$ல் pன் மீப்பெருபடி

$> \angle x \cdot \angle n$ஐ pன் மீப்பெருபடி.

இது எல்லாப் பகாவெண் சினைகளுக்கும் பொருந்தும்.

$$\therefore \quad \frac{\angle\overline{x+n}}{\angle x\ \angle n}=\text{ஒரு முழு எண்.}$$

அதாவது $\dfrac{(x+1)\ (x+2)\ldots\ldots(x+n)}{\angle n}$ = ஒரு முழு எண் என நிறுவப்படுகிறது.

12·3·2. தேற்றம் 11

n ஒரு பகாவெண்ணுயின் ncrஐ n மீதியின்றி வகுக்கும்.

தெ : $ncr=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ \ (n-r+1)}{\angle r}$

இது ஒரு முழு எண்.

$n>r$ ஆகையாலும், n ஒரு பகாவெண்ணுயிருப்பதாலும் $\angle r$ இன்ன $1,2,3,\ldots\ldots r$ ஒவ்வொன்றும் nக்கு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்.

$$\therefore \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r} = \text{முழு எண்.}$$

$$\therefore n \left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{\lfloor r}\right] = M(n)$$

அதாவது $ncr = M(n)$ ஆகிறது.

12. 3. 2. 1 எ.கா.9 : $\lfloor 1000$ல் 7ன் மிகப் பெரியபடி என்ன ?

$$I\left(\frac{1000}{7}\right) = 142$$

$$I\left(\frac{1000}{49}\right) = 20$$

$$I\left(\frac{1000}{343}\right) = 2$$

$$I\left(\frac{1000}{7 \times 343}\right) = 0$$

$\therefore$ 7ன் மிகப் பெரியபடி $= 142 + 20 + 2$
$= 164$

எ.கா. 10 :

$\angle 82$ன் இறுதியில் எத்தனை பூச்சியங்கள் உண்டு ?

$\angle 82$ல் 2ன் பெரியபடியும், 5ன் பெரிய படியும் காணலாம்.

$$I\left(\frac{82}{2}\right) = 41$$

$$I\left(\frac{82}{4}\right) = 20$$

$$I\left(\frac{82}{8}\right) = 10$$

$$I\left(\frac{82}{16}\right) = 5$$

$$I\left(\frac{82}{32}\right) = 2$$

$$I\left(\frac{82}{64}\right) = 1$$

$\therefore$ 2ன்படி $= 79$.

$$I\left(\frac{82}{5}\right) = 16$$

$$I\left(\frac{82}{25}\right) = 3$$

$$I\left(\frac{82}{125}\right) = 0$$

$\therefore$ 5-ன் படி $= 19$.

$\therefore$ $\lfloor 82$ல் 10-ன் பெரிய படி $= 19$.

$\therefore$ $\angle 82$ல் இறுதியில் 19 பூச்சியங்களிருக்கும்.

12·4. வரையறை

நிறையெண் (perfect number)

Nஐ வகுக்கும் எண்களில் Nஐ விட்டு, மீதியெண்களைக்கூட்டி வரும் தொகை Nக்குச் சமமானல் அது ஒரு நிறையெண் எனப் படும்.

எனவே Nஐயும் சேர்த்து, அதை வகுக்கும் எண்களைக்கூட்டி வரும் தொகை $2N$க்குச் சமமாகும்.

ஆகவே ஒரு நிறையெண்ணை வகுக்கக்கூடிய எல்லா எண்களையும் (1ம், அவ்வெண்ணும் உட்பட) கூட்டினால், கூட்டுத்தொகை அவ்வெண்ணைப் போல இரு மடங்காகும். இதையும் நிறையெண்ணின் வரையறைக்கு அடிப்படையாகக் கொள்ளலாம். ஆனால் முதல் எடுத்த வரையறைப்படி சொல்வதே மரபாகும்.

12·4·1. எ.கா. 11

6ஐ வகுக்கும் எண்கள் 1, 2, 3, 6. $1+2+3=6$; எனவே, 6 ஒரு நிறையெண். 28ஐ வகுக்கும் எண்கள் 1, 2, 4, 7, 14, 28 $1+2+4+7+14=28$; எனவே 28 ஒரு நிறையெண்.

எ.கா. 12

2^n-1 ஒரு பகாயெண்ணுயின் $2^{n-1}(2^n-1)$ என்பது ஒரு நிறையெண்ணென நிறுவுக.

$$N=2^{n-1}(2^n-1)$$
$$=p^{n-1}.\ q$$

இங்கு $p=2$; $q=2^n-1=$ ஒரு பகாயெண்.

$\therefore$ Nஐ வகுக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$=(1+p+p^2+\dots\dots+p^{n-1})(1+q) \qquad \text{[தேற்றம் 8]}$$
$$=\frac{p^n-1}{p-1}.\ (q+1)$$
$$=(2^n-1)\ 2^n$$

$=2N$. $\therefore$ N ஒரு நிறையெண்ணுகிறது.

எ.கா. 13

$n=5$ ஆனல், $2^5-1=31$ ஒரு பகாயெண்.

$\therefore$ $2^4(2^5-1)=16\times31$

$=496$ ஒரு நிறையெண்ணுகும்.

$496=2^4\times31.$

496ஐ வகுக்கும் எண்கள் 496 தவிர 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $=496$

$n=7$ ஆனல்

$2^7-1=127$ ஒரு பகா எண்.

$\therefore$ $2^6(2^7-1)=64\times127$ ஒரு நிறையெண். இவ்வாறே நிறையெண்கள் பல அறியலாம்.

12. 5 ஆய்லர் சார்பு $\phi(N)$ (The Euler function $\phi(n)$)

N என்ற எண்ணுக்குக் குறைந்ததாய் N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை $\phi(N)$ என்ற சார்பால் ஆய்லர் என்னும் கணித மேதையால் குறிக்கப்பட்டு, இப்போது வழக்கிலிருக்கிறது.

$\phi(1)$ என்பது இவ்வரையறைபடி பொருளற்றதாயிருப்பதால், $\phi(1)=1$ என்று மாத்திரம் ஏற்றுக்கொள்வோம்.

$\phi(2)=1$ (1 மாத்திரம்)

$\phi(3)=2$ (1, 2 என்ற இரு எண்கள்)

$\phi(4)=2$ (1, 3 என்ற இரு எண்கள்)

$\phi(5)=4$ (1, 2, 3, 4 என்ற நான்கு எண்கள்)

$\phi(6)=2$ (1, 5 என்ற இரு எண்கள்)

$\phi(7)=6$ (1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற ஆறு எண்கள்)

$\phi(8)=4$ (1, 3, 5, 7 என்ற நான்கு எண்கள்)

12·5.1. தேற்றம் 12 $\phi(N)$தேற்றம்:

$N=a^p b^q c^r \ldots k^u$ ஆனால், Nக்குக் குறைவாய், N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\;-\frac{1}{k}\right)$$ ஆகும்.

இங்கு Nம் 1ம் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண் என்று கணக்கிடப் படுகிறது.

($a, b, c, \ldots\ldots k$ பகாயெண்கள்)

தெ: முதலில் Nக்குக் குறைவாய், N ஓடு ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்ணாயில்லாத எண்களின் எண்ணிக்கை யென்ன வென்பதைக் காண்போம். [அவ்வாறான எண்கள், $a, b, c \ldots\ldots k$ என்ற எண்களின் ஒன்றோ, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகவோ, $a^2, a^3, \ldots\ldots a^p; b^2, b^3, \ldots . b^q, \ldots\ldots$ போன்ற எண்களில் ஒன்றோ, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்களின் பெருக்குத் தொகையாவோ இருக்கும்.]

$1, 2, 3 \ldots\ldots N$ என்ற எண்களில், a ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்கள்,

$$a, 2a \ldots\ldots \left(\frac{N}{a}\right) a;$$ இவைகளின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{a}$.

அவ்வாறே b ஆல், c ஆல்......k ஆல் வகுபடக் கூடிய எண்களின்

எண்ணிக்கை முறையே $\frac{N}{b}$, $\frac{N}{c}$, ... $\frac{N}{k}$ ஆகும்.

அவ்வாறே abஆல் வகுபடக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{ab}$; அவ்வாறே மற்றவைகளின் எண்ணிக்கையுமாகும்.

இப்போது,

$$\Sigma\frac{N}{a}-\Sigma\frac{N}{ab}+\Sigma\frac{N}{abc}-\Sigma\frac{N}{abcd}+\ldots\ldots(A)$$

என்ற தொடரை ஆராய்வோம்.

இத்தொடரில் N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்ணாயில்லாத எண்கள் ஒரே ஒரு முறைதான் எண்ணப்படுகிற தென்பதை நிறுவுவோம்.

Nக்குக் குறைந்த ஒரு எண், a என்ற ஒரே ஒரு பகாயெண்ணால் மாத்திரம் வகுபடக் கூடியதானால், அது ஒரு எண்ணாக $\frac{N}{a}$ல் எண்ணப்படுகிறது.

இப்போது $a, b, c\ldots\ldots k$ என்ற பகாயெண்களில் r எண்களின் பெருக்குத் தொகையால் வகுபடக்கூடிய எண்கள் $\Sigma\frac{N}{ab}$ல் r முறையெண்ணப்படும்; $\Sigma\frac{N}{ab}$ல் ${}_rC_2$ அல்லது $\frac{r(r-1)}{1\cdot2}$ முறைகள் எண்ணப்படும்; $\Sigma\frac{N}{abc}$ல் ${}_rC_3$ அல்லது $\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}$ முறைகள் எண்ணப்படும். ஆகவே அவை (அதாவது $a, b, c\ldots\ldots k$ என்ற எண்களில் r எண்களின் பெருக்குத் தொகையால் வகுபடக்கூடிய யெண்கள்) மொத்தமாக (A) என்ற தொடரில்

$$r-\frac{r(r-1)}{1\cdot2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}\ldots\ldots+(1)^{r-1}\frac{r(r-1)\ldots\ldots1}{\angle r}$$

முறைகள் கணக்கிடப்படும்.

அதாவது,

$$r-\frac{r(r-1)}{1\cdot2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}\ldots+(-1)^{r-1}\frac{r(r-1)\ldots\ldots1}{\angle r}$$

$$=1-1+r-\frac{r(r-1)}{1\cdot2}+(-1)^{r-1}\frac{r(r-1)\ldots1}{\angle r}$$

$$=1-(1-1)^r$$

$= 1.$ ஒரு முறைதான் எண்ணப்படும்.

எனவே (A) என்ற தொடரில் N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்களாயில்லாத எண்கள் ஒரே ஒரு முறை கணக்கிடப்படுகிறது (counted).

∴ N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாயிருக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$$N - \Sigma \frac{N}{a} + \Sigma \frac{N}{ab} - \Sigma \frac{N}{abc} + \dots\dots$$

$$= N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\dots\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு 1ம் ஒரு பகாயெண் எனக் கணக்கிடப்பட்டிருக்கிறது.

12·5·1·1. எ.கா. 14. 50க்குக் குறைவான பகாயெண்கள் எத்தனை?

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

பகாயெண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 50(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{5})$$
$$= 50 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{4}{5}$$
$$= 20.$$

பகாயெண்களாயில்லாதவை 2-ம், அதன் மடங்குகளும். எண்ணிக்கை 25.

5ம் அதன் ஒற்றைப்படை மடங்குகளும் எண்ணிக்கை : 5.

ஆக மொத்தம் 30.

மீதி 20 பகாயெண்கள்.

12·5·1 2. முக்கியமான எ. கா. 15.

$\phi(n)$ ஒரு இரட்டைப்படை யெண்ணெனவும், nக்குக் குறைவாய் n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாயுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}n \times \phi(n)$ எனவும் நிறுவுக.

aம் nம் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாயின் $(n-a)$ம் nம் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாகும். எனவே n ஓடு ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்களாயுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாகும்.

அப்படிப்பட்ட இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகை n.

அதைப்போல் $\frac{1}{2}\phi(n)$ இணை யெண்கள் உள்ளன.

∴ அவைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= n \times \tfrac{1}{2}\phi(n)$$

எ.கா. 16 ; n ஒற்றைப்படையெண்ணாயின்

$2^{2n}+1=M(5)$ எனவும்,

n இரட்டைப்படையெண்ணாயின்

$2^{2n}-1=M(5)$ எனவும் நிறுவுக.

(1) n—ஒற்றைப் படையெண்:

$$2^{2n}=4^n$$
$$=(5-1)^n$$
$$=5^n+M(5)-1.$$
$$=M(5)-1$$
$$\therefore \quad 2^{2n}+1=M(5)$$

(2) n—ஒரு இரட்டைப் படையெண்.

$$2^{2n}=(5-1)^n$$
$$=M(5)+1.$$
$$\therefore \quad 2^{2n}-1=M(5)$$

எ. கா. 17

$8^{n+1}-7n+41=M(49)$ என நிறுவுக.

தொடர் முறைத் தெரிப்பு இங்குப் பயன்படும். $n=1$ ஆனுல் $8^2-7+41=98=M(49)$

$n=m$க்கு இம் முடிவு பொருந்துமெனக் கொண்டு $n=m+1$ க்கு இது பொருந்துமென நிறுவுவோம்.

$8^{m+1}-7m+41=M(49)$ எனக் கொள்வோம்.

$$8^{m+2}-7(m+1)+41=8\cdot8^{m+1}-7m+34$$
$$=8^{m+1}-7m+41+7\cdot8^{m+1}-7$$
$$=M(49)+7[(7+1)^{m+1}-1]$$
$$=M(49)+7[M(7)+1-1]$$
$$=M(49)+M(49)$$
$$=M(49)$$

$n=m$க்கு இம் முடிவு பொருந்துமானுல் அடுத்த $(m+1)$க்குப் பொருந்தும் என நிறுவப்பட்டது. ஆனுல் $n=1$க்கு இது பொருந்துமென நாம் பார்க்கிறேம். ஆகவே $n=2,3......$பொதுவாகப் பொருந்துமென நிறுவப்படுகிறது.

எ.கா. 18

12 எண்களால் வகுபடக்கூடிய மிகச் சிறு எண் காண்க.

$N=a^p b^q c^r......$என அவ்வெண்களைக் கொள்க. இது மிகச் சிறிய எண்ணாகயிருக்கவேண்டுமானுல் $a, b, c......2, 3, 5$ என்று இருக்க வேண்டும்; $p, q, r...$இறங்கு வரிசையில் இருக்கவேண்டும்.

$$12=(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$$
$$=3\times 2\times 2$$

$\therefore\quad (p+1)=3;\ (q+1)=2;\ (r+1)=2.$

$\therefore$ மிகச் சிறிய எண் $=2^2\cdot 3\cdot 5$
$=60.$

எ.கா. 19

$N=a^p b^q c^r \ldots\ldots k^u$ ஆனால், Nஐ வகுக்கும் எண்கள் யாவற்றின் பெருக்குத்தொகை யென்ன ?

வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை
$$=(p+1)(q+1)\ldots\ldots(u+1)$$

(i) முதலில் $N\neq m^2$ எனக் கொள்க.

Nஐ x வகுக்குமானால், Nஐ $\dfrac{N}{x}$ ம் வகுக்கும். எனவே, Nஐ வகுக்கும் எண்களை இரட்டை இரட்டையாக இவ்வாறு சேர்த்துப் பெருக்கினால், அவைகளின் பெருக்குத் தொகை N.

ஆகவே $(p+1)(q+1)\ldots(u+1)$ வகுக்கும் எண்களையும் $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\ldots(u+1)$ இரட்டைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$=N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\ldots(u+1)}$$

(ii) $N=m^2$ என ஒரு எண்ணின் சரியான இருபடியானால், ஒரு சிறு மாற்றம் ஏற்படும்,

Nஐ mஆல் வகுத்தால், $\dfrac{N}{m}=m$ எனவே கிடைக்கும். ஆகவே mக்கு இணையாக இரட்டை சேர்ப்பதற்கு வேறு ஒரு சினையும் இராது. எனவே, இரட்டை சேர்க்கக்கூடிய சினைகளின் எண்ணிக்கை $(p+1)(q+1)\ldots(u+1)-1$ ஆகும். இவைகளை இரண்டிரண்டாக, $\left(x,\dfrac{N}{x}\right)$ எனச் சேர்த்துப் பெருக்கினால், அவைகளின் பெருக்குத்தொகை,

$$=N^{\frac{1}{2}[(p+1)(q+1)\ldots\ldots(u+1)-1]}$$

$$=\frac{N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\ldots(u+1)}}{N^{\frac{1}{2}}}$$

இப்போது இணையில்லாது விடுத்த m ஐயும் சேர்த்துப் பெருக்கினால், பெறப்படும் தொகை

$$= \frac{N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\dots(u+1)}}{N^{\frac{1}{2}}} \times m$$

$$= \frac{N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\dots(u+1)}}{N^{\frac{1}{2}}} \times N^{\frac{1}{2}}$$

$$= N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\dots(u+1)}.$$

எனவே, $N \neq m^2$, $N = m^2$ என்ற இரு அமைப்பிலும், Nன் சினைகளின் பெருக்குத்தொகை $N^{\frac{1}{2}(p+1)(q+1)\dots(u+1)}$; நிறுவன் முறையில் மட்டுமே, சிறிது மாற்றம் இருக்கிறது.

எ.கா. 20

n ஒரு ஒற்றைப்படையெண்ணுயின் $(n-1)n(n+1) = M(24)$ என நிறுவுக.

$n = 2m+1$ எனக்கொள்க.

$$\begin{aligned}(n-1)n(n+1) &= 2m(2m+1)(2m+2)\\ &= 2m(2m+2)(2m+4-3)\\ &= 2m(2m+2)(2m+4) - 3\cdot 2m(2m+2)\\ &= 8m(m+1)(m+2) - 12\,m(m+1)\\ &= M(48) - M(24)\\ &= M(24)\end{aligned}$$

12·6. ஒருங்கிசைவு (Congruence) வரையறை :

m என்ற எண்ணுல் a, b என்ற எண்களை வகுக்கும்போது, மீதி சமமாக வருமாயின், 'm' என்ற மட்டு (Modulus)ஐ ஒட்டி, a, b என்ற இரு எண்களும் ஒருங்கிசைவுடையன (arc congruent) என்பது வரையறை.

இதை எழுதும் மரபு $a \equiv b$ (மட்டு m)

$a = pm + c$

$b = qm + c$ என இருக்குமானுல்,

'm'ஐ ஒட்டி a, b ஒருங்கிசைவு பெற்றனவென்பது தெளிவாகிறது.

அப்போது $a - b = M(m)$ என்பதும் தெரிகிறது. இதையொட்டியும், ஒருங்கிசைவு, வரையறுக்கப்படலாம்;

மாற்று வரையறை :

$a - b = km$ ஆனுல் (k ஏதாமொரு, கூட்டு குறை முழு எண் அல்லது பூச்சியம்) m என்ற 'மட்டை' யொட்டி, a, b என்பவை ஒருங்கிசைவுடையன. எடுத்துக்காட்டாக,

$48 \equiv 30$ (மட்டு 9)

$48 \equiv 3$ (மட்டு 9)

$48 \equiv 9n+3$ (மட்டு 9)

$50 \equiv 6$ (மட்டு 11)

எச்சம் (Residue) வரையறை:

a, b என்பவை m என்ற மட்டையொட்டி ஒருங்கிசைவுடையன வாயின், a, b என்பவை ஒன்று மற்றொன்றின் எச்சம் எனப்படும் (Residue).

எனவே, $a=b+km$ ஆனால், m என்ற மட்டையொட்டி, b என்பது aன் எச்சம் என்றும் மறுதலையாக a என்பது bன் எச்சம் என்றும் கூறப்படும்.

12·6·1. ஒருங்கிசைவு பற்றிய சில எளிய தேற்றங்கள்

தேற்றம் 13 (முக்கியமான முடிவுகள்).

$a \equiv b$ (மட்டு m); $a_1 = b_1$ (மட்டு m) ஆனால் பின் வருவன தேற்றங்களாம்.

(i) $qa+ra_1 \equiv qb=rb_1$ (மட்டு m)

(ii) $aa_1 \equiv bb_1$ (மட்டு m)

(iii) c ஏதாவதொரு முழு எண்ணாயின்

$ac \equiv bc$ (மட்டும் m)

(iv) cம் mம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாய், மேலும் a, b இரண்டையும் c மீதியின்றி வகுக்குமாயின்,

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \quad (\text{மட்டு } m)$$

(i) தெ: $a \equiv b$ (மட்டு m)

$\therefore \quad a_1 \equiv b_1$ (மட்டு m)

$\therefore \quad a-b=\kappa m$

$a_1 - b_1 = lm$

$\therefore \quad a = b + km$

$a_1 = b_1 + lm$

$\therefore \quad qa+ra_1 = qb+rb_1+qkm+rlm$

$= qb+rb_1+k_1 m$

$\therefore \quad (qa+ra_1)-(qb+rb_1) = k_1 m$

$\therefore \quad qa+ra_1 \equiv qb+rb_1$ (மட்டு m)

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(a) $a \pm a_1 \equiv b \pm b_1$ (மட்டு m)

(b) $a_r \equiv b_r$ (மட்டு m) $r=1, 2, 3 \ldots\ldots$ ஆனல்,

$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots \equiv b_1+b_2+b_3\ldots\ldots$ (மட்டு m)

(*ii*) தெரிப்பு :

$$a\,a_1=(b+km)(b_1+lm)$$
$$=b\,b_1+k_1m$$
$$\therefore\ a\,a_1 \equiv b\,b_1 \text{ (மட்டு } m)$$

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(a) $a_r \equiv b_r$ (மட்டு m)

$r=1, 2, 3 \ldots\ldots$ ஆனல்,

$a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots \equiv b_1\,b_2\,b_3\ldots\ldots$ (மட்டு m)

(b) $a \equiv b$ (மட்டு m) ஆனல்

$a^n \equiv b^n$ (மட்டு m)

(iii) தெ :

$$ac-bc=ckm=M\,(m)$$
$$\therefore\ ac \equiv bc \text{ (மட்டு } m)$$

(iv) தெ :

$$a=b+km$$
$$\therefore\ a-b=km.$$

$\left.\begin{array}{l} a=f_1\,c \\ b=f_2\,c \end{array}\right\}$ எனக் கொள்க.

மேலும் mம் cம் ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்கள் என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$km=a-b=(f_1-f_2)\,c$$
$$\frac{km}{c}=\frac{a-b}{c}=(f_1-f_2) \text{ (முழுஎண்)}$$

mம் cம் ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்ணுதலால் $\frac{k}{c}$ ஒரு முழுஎண் ஆகும்.

$$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{b}{c}\,k^1m.$$

12·6·2. தேற்றம் 14 :

$f(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவை $x \equiv r$ (மட்டு m) ஆனல், $f(x) \equiv f(r)$ (மட்டு m) என்பது தேற்றம்.

$f(x)=a+bx+cx^2+\ldots\ldots+kx^n$ எனக் கொள்க. $x\equiv r$ (மட்டு m) ஆகக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $x=qm+r$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

எனவே $x^n=(qm+r)^n$

$=M(m)+r^n$

அவ்வாறே $(qm+r)^{n-1}=M(m)+r^{n-1}$

இவ்வாறே $(qm+r)$ன் மற்ற படிகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

$\therefore$ $x=qm+r$ எனக் கொண்டால்,

$$f(x)=f(qm+r)$$
$$=a+b(qm+r)+c(qm+r)^2+\ldots\ldots+k(qm+r)^n$$
$$=a+br+cr^2+\ldots\ldots+kr^n+M(m)$$
$$=f(r)+M(m)$$

$\therefore$ $f(x)\equiv f(r)$ (மட்டு m) என நிறுவப்படுகிறது. இதைச்சென்ற 13ம் தேற்றக் கோவையின் கிளைத் தேற்றமாகவும் கொள்ளலாம்.

12·6·2·1. எ.கா. 21

ஒருங்கிசைவுப் பண்புகளைக்கொண்டு, 3, 9, 11 என்ற எண்களால் வகுபடக்கூடிய எண்களின் தன்மைகளைக் காணலாம்.

$N=\ldots\ldots edcba$ எனக் கொள்வோம். (இலக்கங்கள் எழுதப்பட்டிருக்கின்றன.)

'ஒன்று', 'பத்து', 'நூறு'..............இடங்களில் a, b, c ...., முறையே இருக்கின்றன.

$\therefore$ $N=a+10b+100c+1000d+\ldots\ldots$

(1) $1\equiv1$ (மட்டு 3)

$10\equiv1$ (மட்டு 3)

$100\equiv1$ (மட்டு 3)

$1000\equiv1$ (மட்டு 3)

$\therefore$ $N\equiv a+b+c+d\ldots\ldots$(மட்டு 3) [தேற்றம் 13]

எனவே N என்ற எண் 3 ஆல் வகுபடக் கூடியதாயின் அதன் இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 3ஆல் வகுபடக் கூடியதாயிருக்க வேண்டும்.

(2) $1\equiv1$ (மட்டு 9)

$10\equiv1$ (மட்டு 9)

$100\equiv1$ (மட்டு 9)

$1000\equiv1$ (மட்டு 9)

$\therefore$ $N=a+b+c+d\ldots\ldots$(மட்டு 9) (தேற்றம் 13)

எனவே N என்ற எண் 9ஆல் வகுபடக் கூடியதாயின் அதன் இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 9ஆல் வகுபடக் கூடியதாயிருக்க வேண்டும்.

(3) $1 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$10 \equiv -1$ (மட்டு 11)

$100 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$1000 \equiv -1$ (மட்டு 11)

$\therefore \quad N \equiv a-b+c-d\ldots$ (மட்டு11) (தேற்றம் 13)

எனவே N என்ற எண் 11ஆல் வகுபடக்கூடியதாயின் ஒன்று விட்டு ஒன்று இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து ஒன்று விட்டு ஒன்று இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கழித்த தொகை 11ஆல் வகுபடக் கூடியதாயிருக்க வேண்டும்; அதாவது,

$a-b+c-d\ldots \equiv 0$ (மட்டு11)

அதாவது $a-b+c-d\ldots = M(11)$.

எ. கா. 22 8, 7, 6, 5ஆல் வகுத்தால் முறையே 5, 4, 3, 2, மீதி வரும் மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.

அந்த எண் N எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad N \equiv 5$ (மட்டு 8) அல்லது $N \equiv -3$ (மட்டு 8)

$N \equiv 4$ (மட்டு 7) அல்லது $N \equiv -3$ (மட்டு 7)

$N \equiv 3$ (மட்டு 6) அல்லது $N \equiv -3$ (மட்டு 6)

$N \equiv 2$ (மட்டு 5) அல்லது $N \equiv -3$ (மட்டு 5)

$\therefore \quad N \equiv -3$ (மட்டு 8, 7, 6, 5ன் உத்தமப் பொது அளவு L.C.M.)

$\equiv -3$ (மட்டு 840)

N மிகச் சிறிய எண்ணாதலின்

$$N+3=840$$

$$N=837.$$

எ கா. 23 2^{100}ஐ 17ல் வகுத்தால் மீதி என்ன?

$$2^4=16$$

$$\equiv -1 \text{ (மட்டு17)}$$

$\therefore \quad (2^4)^{25} \equiv (-1)^{25}$ (மட்டு 17) [தேற்றம் 12 (ii)b]

$\equiv (-1)$ (மட்டு 17)

$\therefore \quad 2^{100}+1 = M$ (17)

$2^{100}+1-17 = M$ (17)

$\therefore \quad 2^{100}-16=M(17)$

$\therefore$ மீதி 16.

மற்றோர் வழி:

$2^5=32$

$\equiv 15$ (மட்டு 17)

$2^{10}=(2^5)^2 \equiv 15^2$ (மட்டு 17)

$\equiv 225$ (மட்டு 17)

$\equiv 4$ (மட்டு 17)

$2^{50}=(2^{10})^5 \equiv 4^5$ (மட்டு 17)

$\equiv 1024$ (மட்டு 17)

$\equiv 4$ (மட்டு 17)

$2^{100}=(2^{50})^2 \equiv (4^2$ (மட்டு 17)

$\equiv 16$ (மட்டு 17)

$\therefore$ 2^{100} ஐ 17ஆல் வகுத்தால் மீதி 16.

எ.கா. 24 3^{24}ஐ 28ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன ?

$3^3=27$

$\equiv -1$ (மட்டு 28)

$\therefore \quad 3^{24}=(3^3)^8 \equiv (-1)^8$ (மட்டு 28)

$\equiv 1$ (மட்டு 28)

$\therefore$ $3^{24}=$ஐ 28ல் வகுத்தால் மீதி 1.

எ.கா. 25.

2^{46} ஐ 31ஆல் வகுத்தால் மீதியென்ன?

$2^5=32$

$\equiv 1$ (மட்டு 31)

$2^{45}=(2^5)^9 \equiv (1)^9$ (மட்டு 31)

$\equiv 1$ (மட்டு 31)

$2^{46}=2^{45} \times 2 \equiv 2 \times 1$ (மட்டு 31)

$\equiv 2$ மட்டு 31)

$\therefore$ 2^{46}ஐ 31ல் வகுத்தால் மீதி 2.

எ.கா. 26

$3^{4n+2}+5^{2n+1}=M$ 14) என நிறுவ

$3^{4n+2}=3^2 \cdot 3^{4n}$

$= 9 \cdot 9^{2n}$

$= 9 \cdot 81^n$

$$= 9 \cdot (5 \times 14 + 11)^n$$
$$\equiv 9 \cdot 11^n \text{ (மட்டு } 14)$$
$$5^{2n+1} = 5 \cdot 5^{2n}$$
$$= 5 \cdot (25)^n$$
$$= 5\,(14+11)^n$$
$$\equiv 5 \cdot 11^n \text{ (மட்டு } 14)$$
$$\therefore \quad 3^{n+2} + 5^{2n+1} \equiv 14 \cdot 11^n \text{ (மட்டு } 14)$$

ஆனால் $14 \cdot 11^n = M\,(14)$

$$\therefore \quad 3^{n+2} + 5^{2n+1} = M\,(14)$$

இதைத் தொடர்ச்சி முறையில் நிறுவலாம் என்பதற்குரிய குறிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன:

$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = M\,(14)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = M\ 14$ என நிறுவுவோம்.

$$3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 3^{4n+2} \cdot 3^4 + 5^{2n+1} \cdot 5^2$$
$$= 3^{4n+2} \cdot 81 + 5^{2n+1} \cdot 25$$
$$= 3^{4n+2}\,(70+11) + 5^{2n+1}\,(14+11)$$
$$= 3^{4n+2} \cdot 70 + 5^{2n+1} \cdot 14 + 11\,(3^{4n+2} + 5^{2n+1})$$
$$= M\,(14) + M\,(14) + M\,(14)$$
$$= M\,(14)$$

$$n=1: \; 3^6 + 5^3 = 729 + 125$$
$$= 854$$
$$= M\,(14)$$

எ. கா. 27

$17^{2n} - 1 = M\,(288)$ என நிறுவுக

$$17^{2n} - 1 = (17^2)^n - 1$$
$$= (289)^n - 1$$
$$= (288+1)^n - 1$$
$$= M\,(288)$$

எ. கா. 28

$3^{2n-1} + 2^{n+1} = M\,(7)$ என நிறுவுக.

$$3^{2n-1} = 3^{2n-2} \cdot 3$$
$$= 9^{n-1} \cdot 3$$

$$=(7+2)^{n-1}\cdot 3$$
$$=M(7)+3\cdot 2^{n-1}$$
$$3^{2n-1}+2^{n+1}=M(7)+3\cdot 2^{n-1}+2^{n+1}$$
$$=M(7)+3\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}\cdot 4$$
$$=M(7)+7\cdot 2^{n-1}$$
$$=M(7)$$

12·6·3. தேற்றம் 15

a, b இரண்டு எண்களும் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களா யின், $a, 2a, 3a \ldots\ldots (b-1)a$ என்பவற்றை 'b'ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகள் வரும் அம் மீதிகள் எந்த வரிசையில் வந் தாலும் 1, 2,... $(b-1)$ ஆகவிருக்கும்.

முடியுமானுல் qa, ra இரண்டையும் bஆல் வகுத்தால் ஒரே மீதி R வருகிறது எனக் கொண்டு, அம் முடிவு பொருந்தா முடிவெனக் காட்டி, மீதிகள் வெவ்வேறு எனக் காட்டுவோம்.

$qa-R=M(b)$

$ra-R=M(b)$ எனக் கொள்வோம். அப்போது $(q-r)a=M(b)$ எனப் பெறப்படும். ஆனுல் a, b இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்கள்; q, r இரண்டும் bக்குச் சிறியவை; ஆகவே $(q-r) \neq M(b)$

$\therefore$ $(q-r)\,a=M(b)$ என்பது ஒரு பொருந்தா முடிவாகிறது.

எனவே qa, ra இரண்டையும் bஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகள் வரவேண்டுமென நிறுவப்படுகிறது.

வெவ்வேறு மீதிகளாதலால், அம் மீதிகள் எந்த வரிசையில் வந் தாலும் 1, 2, 3,......$(b-1)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

கிளைத் தேற்றம் :

a, b இரண்டு எண்களும் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்கள்; n ஏதாமொரு எண்ணுயின், $n, n+a, n+2a, \quad n+3a\ldots\ldots n+(b-1)a$ என்பவற்றை bஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகள் வரும். அம் மீதி கள் எந்த வரிசையில் வந்தாலும், 1, 2, 3......$(b-1)$ ஆகும். தெரிப்பு முறையும் அவ்வாறே அமையும்.

12·6·4. தேற்றம் 16

1 பெர்மாட் தேற்றம் (Fermat's Theorem)

p ஒரு பகாயெண்; aம் pம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களா ஞல் $a^{p-1}=1=M(p)$ என்பது தேற்றம்.

$a, 2a, 3a \ldots\ldots (p-1)\,a$ என்பவற்றை pஆல் வகுத்தால் மீதிகள் வெவ்வேறு; அவை 1, 2, 3,......$(p-1)$ என்று நாம் தேற்றம் 15ன்படி அறிவோம்.

$\therefore \quad a \equiv r_1$ (மட்டு p)

$2a \equiv r_2$ (மட்டு p)

$3a \equiv r_3$ (மட்டு p)

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$(p-1)a \equiv r_{p-1}$ (மட்டு p)

இங்கு $r_1, r_2 \ldots\ldots r_{p-1}$ என்பவை ஏதோ ஒரு வரிசையில் 1, 2, 3 .. $(p-1)$ ஆகும்.

$\therefore \quad a \cdot 2a \cdot 3a \ldots\ldots (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \ldots\ldots r_{p-1}$ (மட்டு p)

$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (p-1)$ (மட்டு p)

தேற்றம் 13 (ii) ஆ

$\therefore \quad \angle p-1 \cdot a^{p-1} \equiv \angle p-1$ (மட்டு p)

$\therefore \quad (a^{p-1}-1) \angle p-1 = M(p)$

ஆனால் $\angle p-1$ என்பது pஆல் வகுபடாது: ஏனெனில் q ஒரு பகாவெண்.

$\therefore \quad a^{p-1}-1 = M(p)$

கிளைத்தேற்றம் 1: p ஒரு பகாவெண்; pம் aம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்; அப்போது $a(a^{p-1}-1) = a\,M(p)$; அதாவது $a^p - a = M(p)$ என்பது கிளைத் தேற்றம். pம் aம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களில்லையானால் a என்பதே $M(p)$ ஆகலாம்.

கிளைத் தேற்றம் 2: p ஒரு ஒற்றைப்படைப் பகாவெண்; pம் aம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயின் $a^{\frac{p-1}{2}}+1$ அல்லது $a^{\frac{p-1}{2}}-1 = M(p)$ என்பது தேற்றம்.

தெ: $a^{p-1}-1 = M(p)$ என நாம் தேற்றம் 16-ல் கண்டோம்.

$\therefore \quad M(p) = a^{p-1}-1 = (a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)$

p ஒரு பகாவெண்ணாதலால்

$$a^{\frac{p-1}{2}}+1 = M(p)$$

அல்லது $$a^{\frac{p-1}{2}}-1 = M(p)$$

12·6·4.1 எ.கா: 29

$a, b,$ என்பவை, n என்ற பகாவெண்ணுக்கு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயும் இருக்குமானால் $a^{n-1}-b^{n-1} = M(n)$ என நிறுவுக.

$a^{n-1}-1=M(n)$

$b^{n-1}-1=M(n)$ என பெர்மாட் தேற்றத்தின்படி நாம் அறிவோம்.

$\therefore\ (a^{n-1}-1)-(b^{n-1}-1)=M(n)$

$\therefore\ a^{n-1}-b^{n-1}=M(n)$

எடுத்துக்காட்டாக,

இதையொட்டி $a^{12}-b^{12}=M(1365)$ என நிறுவலாம்.

13 ஒரு பகாவெண்.

$\therefore\ a^{12}-b^{12}=M(13)$

மேலும் $a^{12}-b^{12}=(a^6-b^6)(a^6+b^6)$

இங்கு 7 ஒரு பகாவெண்;

$\therefore\ a^6-b^6=M(7)$

மேலும் $a^{12}-b^{12}=(a^4-b^4)(a^8+a^4b^4+b^8)$

5 ஒரு பகா எண்.

$\therefore\ a^4-b^4=M(5)$

மேலும் $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ a^2-b^2=M(3)$

ஆனால் 3, 5, 7, 13 எல்லாம் பகாவெண்கள். இவையெல்லாம் $(a^{12}-b^{12})$ன் சினைகளாயுள்ளன.

$$\therefore\ a^{12}-b^{12}=M(3\times5\times7\times13)$$
$$=M(1365)$$

எ.கா. 30

$n^{13}-n=M(2730)$ என நிறுவுக.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$$
$$=n(n^6-1)(n^6+1)$$
$$=n(n^2-1)(n^4+n^2+1)(n^6+1)$$
$$=n(n^2-1)(n^4+n^2+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)$$

மேலும் $n^{13}-n=n(n^3-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^6+1)$

$2730=2\times3\times5\times7\times13$

$n^{12}-1=M(13)$

$n^6-1=M(7)$

5 ஓர் ஒற்றைப்படை பகாவெண்.

$\therefore$ கிளைத்தேற்றம் 16(2)ன் படி,

$n^2-1=M(5)$

அல்லது $n^2+1=M(5)$

மேலும் $n(n^2-1)=M(\angle 3)$

$=M(3\times 2)$

$\therefore$ 2, 3, 5, 7, 13 என்பவை யாவும் $n(n^{12}-1)$ன் சினைகளாகும்.

$\therefore\ n^{13}-n=M(2\times 3\times 5\times 7\times 13)$

$-M(2730)$.

எ.கா. 31

m, n என்பவை பகாவெண்களாயின், $m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)$ என நிறுவுக.

$$M^{n-1}-1=M(n)$$
$$n^{m-1}-1=M(m)$$
$$\therefore\ (m^{n-1}-1)(n^{m-1}-1)=M(mn)$$
$$\therefore\ m^{n-1}\cdot n^{m-1}-m^{n-1}-n^{m-1}+1=M(mn)$$
$$\therefore\ -m^{n-1}\cdot n^{m-1}+m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)$$
$$-M(mn)+m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)$$
$$\therefore\ m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)+M(mn)$$
$$=M(mn)$$

12·6·5. தேற்றம் 17

ஆய்லர் பொதுமையாக்கிய பெர்மாட் தேற்றம் (Euler's extension of Fermat's Theorem)

n ஏதாமொரு எண்; aம் nம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்; $\phi(n)\ -1=M(n)$ என்பது தேற்றம்.

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_{\phi(n)}$ என்பவை nக்குக் குறைவாய் n ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களெனக் கொள்வோம்.

முதலில் $aa_1,\ aa_2,\ aa_3\ldots\ldots a_{\phi(n)}$ என்ற எண்களை n ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதிகள் யாவும் n ஒடு ஒன்றுக்கு ஒன்று பகாவெண்களாக இருக்குமென நிறுவுவோம்.

$aa_q=M(n)+k$ எனக்கொள்வோமானல்

$aa_q-k=M(n)$ ஆகும்.

a, a_q, n மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்; ஆகவே kம் nம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயிருக்கும்.

பிறகு $aa_1,\ aa_2,\ aa_3\ldots\ldots aa_{\phi(n)}$ என்ற எண்களை n ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதிகள் வெவ்வேருக இருக்குமென நிறுவுவோம். முடியுமானல் aa_qஐயும் aa_rஐயும் n ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி k, k

என ஒன்றாக இருக்கின்றனவெனக்கொண்டு, அம் முடிவு பொருந்த முடிவாகுமெனக்காட்டி, மீதிகள் வெவ்வேறெனக் காட்டுவோம்.

$$aa_q = M(n) + k$$

$aa_r = M(n) + k$ எனக் கொள்க

$$\therefore\ a\,(a_q - a_r) = M(n)$$

aம் nம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்; மேலும் a_qம் a_rம் nஐ விடச் சிறியவை, அவைகளும் nம ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள். எனவே $(a_q - a_r)$ஐ n மீதியின்றி வகுக்காது.

ஆகவே $a(a_q - a_r) = M(n)$ என்பது ஒரு பொருந்தா முடிவாகும்.

எனவே, aa_qஐயும், aa_rஐயும் n ஆல் வகுத்து வரும் மீதிகள் வெவ்வேறு.

மேலும் அவை ஒவ்வொன்றும் nஒடு ஒன்றுக்கொன்று பாகயெண்கள். ஆகவே அம் மீதிகள் யாவும் ஏதாவது ஒரு வரிசையில் $a_1, a_2, \ldots\, a_{\phi(n)}$ ஆகத்தானிருக்க வேண்டும்.

இப்போது $aa_1 = M\,(n) + r_1$

$$aa_2 = M\,(n) + r_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$aa_{\phi(n)} = M(n) + r_{\phi(n)}$$

$$\therefore\quad aa_1 \equiv r_1 \ (\text{மட்டு } n)$$

$$aa_2 \equiv r_2 \ (\text{மட்டு } n)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$aa_{\phi(n)} \equiv r_{\phi(n)} \ \text{மட்டு } (n)$$

ஆனால் $r_1, r_2, \ldots\ldots r_{\phi(n)}$ என்பவை ஏதாவது ஒரு வரிசையில் $a_1,\ a_2, \ldots a_{\phi(n)}$ ஆகத்தானிருக்கவேண்டும் என முன்னர் கண்டோம்.

$$\therefore\quad aa_1 \cdot aa_2 \cdot aa_3 \cdot \ldots aa_{\phi(n)} \equiv a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots a_{\phi(n)} \ [\text{மட்டு } n]$$

$$\therefore\quad a^{\phi(n)} \cdot a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{\phi(n)} - a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{\phi(n)} = M(n)$$

$$\therefore\quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots a_{\phi(n)} \left[a^{\phi(n)} - 1 \right] = M(n)$$

ஆனால் $a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_{\phi(n)}$ என்பவை nக்குக் குறைவாய், ஒவ்வொன்றும் nஒடு பகாயெண்கள். ஆகவே $a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\phi(n)}$ என்ற பெருக்குத்தொகை nன் மடங்காக இருக்கமுடியாது.

$\therefore \quad a^{\phi(n)} - 1 = M(n)$ என்ற முடிவு பெறப்படுகிறது.

12·6 5·1. எ. கா. 32

$n = 15$ எனவும், $a = 4$ எனவும் கொள்வோம். 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 என்ற 8 எண்களும் nக்குக் குறைவானவை ; 15 ஓடு ஒன்றுக் கொன்று பகா யெண்கள்.

$$\phi(n) = 15\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)\left(1 - \tfrac{1}{5}\right)$$
$$= 15 \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{4}{5}$$
$$= 8.$$

$$a^{\phi(n)} - 1 = 4^8 - 1$$
$$= 2^{16} - 1$$
$$= (256)^2 - 1$$
$$= 65535$$
$$= M(15).$$

மேலும் 4×1, 4×2, 4×4, 4×7, 4×8, 4×11, 4×13, 4×15ஐ 15ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதிகள் 4, 8, 1, 13, 2, 14 7, 11 என்பவை. இவைதான் 15க்குக் குறைவாய், 15ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்களானவை.

கிளைத்தேற்றம் : n ஒரு பகாயெண்ணாகவே யிருக்குமானால், $\phi(n) = n - 1$; அப்போது $a^{n-1} - 1 = M(n)$ என்ற பெர்மாட் தேற்றம் (முதல் கூறப்பட்டது, தேற்றம் 16) கிடைக்கும்.

எ. கா. 32

n ஒரு பகாயெண் $> x$. ஆனால்,

$x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots\ldots + x + 1 \equiv 0$ மட்டு (n) என நிறுவுக.

$x^{n-1} - 1 = M(n)$ என நாமறிவோம்.

$\therefore \quad (x-1)\,(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots\ldots x + 1) = M(n)$

$(x-1)$ம் nம் ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண்களாதலால்,

$x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots\ldots + x + 1 = M(n)$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ. கா. 33

$16^{99} - 1 = M(437)$ என நிறுவுக.

$$437 = 19 \times 23$$

$$\therefore \quad \phi(437) = 437\left(1 - \tfrac{1}{19}\right)\left(1 - \tfrac{1}{23}\right)$$
$$= 437 \times \tfrac{18}{19} \times \tfrac{22}{23}$$
$$= 396.$$

$$16^{99} = (2^4)^{99}$$
$$= 2^{396}$$
$$\therefore \quad 2^{396} - 1 = M(437)$$

அதாவது $16^{99} - 1 = M(437)$ என நிறுவப்பட்டது.

12·6·6. தேற்றம். 18

வில்சன் தேற்றம் : p ஒரு பகாயெண்ணாயின் $\angle \underline{p-1} + 1 = M(p)$ என்பது தேற்றம்.

தெ : $a < p$ என ஏதாமொரு எண் aஐ எடுத்துக் கொள்வோம். p ஒரு பகாயெண்ணாதலால் aம் pம் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாகும் $\therefore$ $a, 2a, 3a\ldots\ldots(p-1)a$ என்ற எண்களை pஆல் வகுத்தால், மீதி $1, 2, 3\ldots\ldots(p-1)$ ஏதாமொரு வரிசையில் தோன்றும்.

ஆகவே a என்ற எண்ணை $1, 2, 3\ldots\ldots(p-1)$ என்ற எண்களில் ஏதோ என்றால் (ஒன்றுமட்டுமே) பெருக்கி pஆல் வகுத்தால் தான் மீதி 1 கிடைக்குமெனத் தெரிகிறது. அப்படி pஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும் படியான எண் ba எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $ba \equiv 1$ (மட்டுp)

அதாவது $ba - 1 = M(p)$

இத்தக் கட்டுப்பாட்டில், எந்த நிலைகளில், bம் aம் சமமாகும் எனப் பார்ப்போம்.

அதாவது $a^2 - 1 = M(p)$ என்பது எப்போது பொருந்தும்? அப்படி,

$a^2 - 1 = M(p)$ பொருந்துமானால்,

$(a-1)(a+1) = M(p)$

$a < p$ எனக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதால் $a = 1$ அல்லது $a+1 = p$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது.

அதாவது $1^2 - 1 = M(p)$

அல்லது $(p-1)^2 - 1 = M(p)$

எனவே $a = 1$ அல்லது $a = p-1$ ஆனால், $a^2 - 1 = M(p)$ என்பது பொருத்தமாகும். இப்போது $1, 2, 3, \ldots\ldots(p-1)$ என்ற வரிசையில் 1ஐயும் $(p-1)$ஐயும் விலக்கி, எஞ்சியுள்ள $2, 3, \ldots\ldots(p-2)$ என்ற $(p-3)$ எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு 2க்குப் பொருத்தமாக r_1 என்ற எண்ணும் 3க்கும் பொருத்தமாக r_2 என்ற எண்ணும்......$2r_1 \equiv 1$ (மட்டுp), $3r_2 \equiv 1$ (மட்டுp) என்ற முறையில் இரண்டிரண்டு எண்களாக இணை சேர்க்கலாம். அப்படி $\frac{p-3}{2}$ இணைகள் பெறப்படும். இங்கு $r_1, r_2\ldots$ ......என்பது ஏதாவது ஒரு வரிசையில் $2, 3, \ldots\ldots(p-2)$ ஆகும்.

$$\text{எனவே}\quad \left.\begin{array}{l} 2r_1 \equiv 1\ (\text{மட்டு}\,p) \\ 3r_2 \equiv 1\ (\text{மட்டு}\,p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \left(\frac{p-3}{2}\right) \text{ வரிசைகள்}$$

$\therefore \quad 2\cdot3\ldots\ldots(p-2) \equiv 1$ (மட்டுp)

$\therefore \quad \angle\underline{p-2} - 1 = M(p)$

$\therefore \quad (p-1)\,[\angle\underline{p-2} - 1] = M(p)$

$\therefore \quad \angle\underline{p-1} - (p-1) = M(p)$

$\therefore \quad \angle\underline{p-1} + 1 \quad = M(p) + p$

$= (p)$ என நிறுவப்படுகிறது.

12·6 6·1. மறுதலையாக

$\angle\underline{n-1} + 1 = M(n)$ ஆனல் ஒரு பகாவெண்ணாகும் என்பது தேற்றமாகும்.

a ஒரு பகாவெண்ணாயில்லாது போனல் 1, 2, 3,......$(n-1)$ என்ற எண்களுள் a என்ற ஏதாமொரு எண்ணால் வகுபடக்கூடும். ஆகவே அப்படி வகுக்கக்கூடிய எண் a என்பது $\angle\underline{n-1}$ ஐயும் மீதியின்றி வகுக்கும். எனவே a என்பது $\angle\underline{n-2}+1$ஐ மீதியின்றி வகுக்காது. ஆனல் $\angle\underline{n-1}+1 = M(n)$; ஆகையால் $\angle\underline{n-1}+1$ என்ற எண்ணை nன் எச்சினையும் வகுக்கும். இது ஒரு பொருந்தா முடிவாகையால், n ஒரு பகாவெண்ணல்ல என்ற கொள்கை பொருந்தாது. எனவே n ஒரு பகாவெண்ணாகத்தானிருக்க வேண்டும்.

11·6·6·2 விளக்கக்குறிப்பு:

$p=11$; $a=9$ எனக் கொள்வோம். pக்குக் குறைவான எண்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

$p-1=10$: $\quad (10^2 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$2\cdot6 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$3\cdot4 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$5\cdot9 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$7\cdot8 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$\therefore \quad \angle 9 \equiv 1$ (மட்டு 11)

$\therefore \quad \angle 9 - 1 = M(11)$

$\therefore \quad 10\,(\angle 9 - 1) = M(11)$

$\therefore \quad 10\angle 9 - 10 = M(11)$

$\therefore \quad \angle 10 - 11 + 1 = M(1)$

$\therefore \quad \angle 10 + 1 = M\ (11)$

12 6·7. தேற்றம் 19.

பொதுமைப்படுத்திய வில்சன் தேற்றம்: p ஒரு பகா எண்; $r<p$ ஆனால் $\angle\underline{p-r}\cdot\angle\underline{r-1}+(-1)^{r-1}\equiv 0$ (மட்டு p) அல்லது $\angle\underline{p-r}\cdot\angle\underline{r-1}+(-1)^{r-1}=M(p)$ என்பது தேற்றம்.

தெ.: வில்சன் தேற்றப்படி,

$$\angle\underline{p-1}+1=M(p)$$

அதாவது $\angle\underline{p-1}\equiv -1$ (மட்டு p)

$\therefore\quad 1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-r)(p-r-1)\ldots(p-1)\equiv -1$ (மட்டு p)

$(p-r)$ என்ற உறுப்பிற்குப் பின்னுள்ள pன் மடங்குகள் யாவற்றையும் நீக்கிவிட்டால்,

$$\angle\underline{p-r}(-1)^{r-1}\angle\underline{r-1}\equiv -1 \quad (\text{மட்டு } p)$$

$$\therefore\quad \angle\underline{p-r}\,\angle\underline{r-1}\equiv(-1)^{r} \quad (\text{மட்டு } p)$$

$$\therefore\quad \angle\underline{p-r}\,\angle\underline{r-1}-(-1)^{r}=M(p)$$

$$\therefore\quad \angle\underline{p-r}\cdot\angle\underline{r-1}+(-1)^{r-1}=M(p)$$

கி.தே.: $r-1=p-r$ ஆனால்

$$r-1=p-r=\tfrac{1}{2}(r-1+p-r)$$

$$=\tfrac{1}{2}(p-1)$$

$$\therefore\quad \left\{\angle\underline{\tfrac{1}{2}(p-1)}\right\}^{2}+(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}=M(p)$$

கி.தே. (2):

$p=4n+1$ ஆனால்; $2n=\tfrac{1}{2}(p-1)$

$$\therefore\quad \left\{\angle\underline{\tfrac{1}{2}(p-1)}\right\}^{2}+1=M(p)$$

கி.தே. (3):

$p=4n-1$ ஆனால் $2n-1=\tfrac{1}{2}(p-1)$

$$\therefore\quad \left\{\angle\underline{\tfrac{1}{2}(p-1)}\right\}^{2}-1=M(p)$$

12·6·8. தேற்றம் 20.

$a, b, c\ldots\ldots$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாயின், $\phi(n)$ என்ற குறியீட்டின் பொருளின்படி, $\phi(abc\ldots)\phi=(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\ldots\ldots$ இங்கு '1' எல்லா எண்களோடும் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்ணெனக் கொள்ளப்படுகிறது.

தெ: a, b என்ற எண்களையும், அவைகளின் பெருக்குத்தொகை ab என்ற எண்ணையும் கொண்டு, $1, 2, \ldots ab$ என்ற எண்களைப் பின்வருமாறு எழுதுக.

1	2	3	……	k	……	a
$a+1$	$a+2$	$a+3$	……	$a+k$	……	$2a$

$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$	......	$2a+k$	......	$3a$
—	—	—	......	—	......	—
—	—	—	......	—	......	—
$(b-1)a+1$	$(b-1)a+2$	$(b-1)a+3$	......	$(b-1)a+k$	......	ba

kம் aம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயின், $k, a+k...(b-1)a+k$ என்ற நிரலில் தோன்றும் எண்கள் யாவும், aம் ஒன்றுக்கொன்றும் பகாவெண்களாகும்.

முதல் நிரலையும் கணக்கிக்கொண்டு பார்த்தால், a ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயுள்ள எண்கள் $\phi(a)$ நிரல்களின் தோன்றும்.

மேலும் aம் bம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்; k ஏதாமொரு எண். எனவே தேற்றம் 15 கிளைத்தேற்றத்தின்படி, $k, a+k, 2a+k......(b-1)a+k$, என்ற எண்களை bஆல் வகுத்தால், வரும் மீதிகள் வெவ்வேறாகவிருக்கும் அவை ஏதாவதொரு வரிசையில் $1, 2, ... (b-1)$ ஆகும். kஐ b ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதியும் bம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயின், kம் bம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாகும். மீதிகள் $1, 2, 3, ...(b-1)$; இவைகளில் b ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயுள்ளவையின் எண்ணிக்கை $\phi(b)$.

எனவே இவ்விதமான $\phi(a)$ நிரல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் $\phi(b)$ எண்கள் b ஒடு ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயிருக்கும்.

எனவே முதல் எழுதப்பட்ட நிரல்களில் $\phi(a)\,\phi(b)$ எண்கள் aக்கும், bக்கும் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாயிருக்கும். இவை யாவும் ஒன்றுக்கொன்று a, bக்குப் பகாவெண்களாயிருக்கும்.

$$\therefore \quad \phi(ab)=\phi(a)\cdot\phi(b)$$

இந்த முடிவை, விரிவுபடுத்தினல்

$$\phi(abc...)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)......$$

கி.தே.: $n=p^a q^b r^c......$ ஆனல்

$$\phi(n)=\phi(p^a)\cdot\phi(q^b)\cdot\phi(r^c)......$$

ஏனெனில் $\phi, q, r...$ பகாவெண்கள், எனவே ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். மேலும் $\phi(p^a)=p^a-p^{a-1}$; ஏனெனில் p^aஐ விடக் குறைந்து p^a ஒடு ஒன்றுககொன்று பகாவெண்களாயல்லாமல் இருக்கக் கூடியவை

$$p\ \ 2p,\ 3p,...(p^{a-1})p.$$

$$\therefore \quad \phi(n)=(p^a-p^{a-1})\,(p^b-q^{b-1})(r^c-r^{c-1})......$$

$$=p^a\left(1-\frac{1}{p}\right)q^b\left(1-\frac{1}{q}\right)r^c\left(1-\frac{1}{r}\right)......$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots\ldots$$

(தேற்றம் 12ல் இது நிறுவப்பட்டது).

12·6·9. தேற்றம் 21

Nஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் $d_1, d_2, d_3 \ldots d_r$ $(d^1=1, d_r=N)$ ஆனால் $\phi(d_1)+\phi(d_2)+\phi(d_3)\ldots\ldots+\phi(dn)=N$.

தெ : $N=p_1{}^a\, p_2 b \ldots\ldots p_n{}^k$ எனக்கொள்க.

$p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ எல்லாம் பகாயெண்கள்.

Nஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் யாவும் $p_1{}^x p_2{}^y p_3{}^z \ldots\ldots$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும்.

$x \leq a$; $y \leq b$; $z \leq c$ ஆகவிருக்கும்.

ஆனால் $\phi(p_1{}^x p_2{}^y p_3{}^z \ldots\ldots) = \phi(p_1{}^x)\cdot\phi(p_2{}^y)(p_3{}^z)\ldots\ldots$ என நாம் அறிவோம். (தேற்றம் 20).

எனவே $\phi(d_1)$. $\phi(d_2)$, $\phi(d_3)\ldots\phi(dr)$ என்பவை

$$\{1+\phi(p_1)+\phi(p_1{}^2)\ldots+\phi(p_1{}^a\}$$
$$\times\{1+\phi(p_2)+\phi(p_2{}^2)+\ldots\phi p_2{}^b)\}$$
$$\times\{1+\phi(p_3)+\phi(p_3{}^2)+\ldots+\phi(p_3{}^c)\}$$
$$\times\{1+\phi(p_n)+\phi(p_u{}^2)+\ldots\phi(p_n{}^r)\}$$

என்ற பெருக்குத் தொகையிலுள்ள உறுப்புகளாகும். (1)

$\therefore$ $\phi(d_1)+\phi(d_2)+\ldots+\phi(d_r)$

= (1)ல் கண்ட பெருக்குத்தொகையாகும்.

முதலில்

$$1+\phi(p_1)+\phi(p_1{}^2)+\ldots\ldots+\phi(p_1{}^a)$$

$$=1+p_1\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+p_1{}^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\ldots\ldots p_1{}^a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$$

$$=1+p_1-1+p_1{}^2-p_1+p_1{}^3-p_1{}^2\ldots\ldots p_1{}^a-p_1{}^{a-1}$$

$$=p_1{}^a$$

அவ்வாறே $1+\phi(p_2)+\phi(p_2{}^2)+\ldots\ldots+\phi(p_2{}^b)=p_2{}^b$

எனவே $\phi(d_1)+\phi(d^2)+\ldots\ldots+\phi(d_r)$

$$=p_1{}^a\, p_2{}^b\cdot p_3{}^c\ldots\ldots\ldots p_n{}^k$$

$$=N.$$

12·7. தேற்றம் 22

இலகிராஞ்சியின் தேற்றம் (Lagrange's Theorem)

p ஒரு பகாயெண் :

$(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p-1)=x^{p-1}+A_2x^{p-2}+A_3x^{p-3}+\ldots\ldots+A_p$ ஆனுல், $A_2, A_3,\ldots\ldots A_{p-1}$ ஒவ்வொன்றும் p ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் என்பது தேற்றம்.

தெ: xஐ $(x+1)$ ஆக மாற்றியெழுதினுல்,

$(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+p)=(x+1)^{p-1}+A_2(x+1)^{p-2}+A_3(x+1)^{p-3}+\ldots\ldots+A_p$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore\quad (x+1)[(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+p)]\qquad (1)$

$\equiv(x+1)[(x+1)^{p-1}+A_2(x+1)^{p-2}+\ldots\ldots+A_p]$

$\equiv(x+1)^p+A_2(x+1)^{p-1}+A_3(x+1)^{p-2}+\ldots\ldots+A_p(x+1)\qquad (2)$

மேலும், $(1)\equiv(x+p)[(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p-1)]$

$\equiv(x+p)[(x^{p-1}+A_2x^{p-2}+A_3x^{p-3}+\ldots\ldots+Ap]\qquad (3)$

$\therefore\quad (1)\equiv(2)\equiv(3)$

$\equiv x^p+px^{p-1}+A_2x^{p-1}$

$+A_2px^{p-2}+A_3x^{p-2}$

$+A_3px^{p-3}+A_4x^{p-3}$

$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

$+A_{p-1}\cdot px+A_px+p\cdot A_p\qquad (4)$

$\therefore\quad (2)\equiv(4)$ உறுப்புக்களை இடம் மாற்றி எழுதினுல்,

$\therefore\quad \{(x+1)^p-x^p\}+A_2\{(x+1)^{p-1}-x^{p-1}\}+A_3\{(x+1)^{p-2}-x^{p-2}\}+\ldots\ldots+A_p\{(x+1)-x\}$

$\equiv p\cdot x^{p-1}+A_2p\cdot x^{p-2}+A_3px_p^{p-3}+\ldots\ldots+A_{p-1}\,px+p\,A_p$

$x^{p-1}, x^{p-2}, x^{p-3}\ldots\ldots$ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

(1) $p=p$

(2) $pA_2=pC_2+{}_{p-1}C_1\cdot A_2$

(3) $pA_3=pC_3+{}_{p-1}C_2A_2+{}_{p-2}C_1\cdot A_3$

(4) $pA_4={}_pC_4+{}_{p-1}C_3A_2+{}_{p-2}C_2A_3+{}_{p-3}C_1A_4$

$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

$(a)\quad pA_p=1+A_2+A_3+\ldots\ldots+A_{p-2}+A_p$

p ஒரு பகாயெண்ணுதலால்,

$_{p-1}C_1$; $_{p-2}C_1$; $_{p-3}C_1$; . . ...என்பவை p ஆல் வகுபடாது.
மேற்கூறிய சமன்பாடு (2)ஐப் பார்க்க
இ. கை. பு. p ஆல் வகுபடும்.

வ. கை புறத்தில் $pC_2=\frac{p(p-1)}{2}$ என்பது pஆல் வகுபடும்.

(தேற்றம் 11)

∴ வ. கை புறத்தில் உள்ள அடுத்த உறுப்பான $_{p-1}C_1A_2$ என்பதும் p ஆல் சரியாக வகுபட வேண்டும். ஆனால் p ஒரு பகா எண்ணாதலால் $_{p-1}C_1$ என்பது p ஆல் வகுபடாது.

∴ A_2 என்பது pஆல் வகுபடும்.

சமன்பாடு (3)ல்,

இ. கை. புறம் p ஆல் வகுபடும்

வ. கை புறத்தில்

(i) $_pC_3$ என்பது p ஆல் வகுபடும் (தேற்றம் 11)

(ii) $_{p-1}C_2A_2$ என்பது p ஆல் வகுபடும் (சற்று முன் A_2 என்பது p ஆல் வகுபடுமென நிறுவப்பட்டது)

ஆகவே, $_{p-2}C_1A_3$ என்பதில் உள்ள $_{p-2}C_1$ என்பது pஆல் வகுபடாதாகையால், A_3 என்பது pஆல் வகுபடும்.

இவ்வாறே A_4, A_5......A_{x-1} என்பவையும் p அல் வகுபடும் என நிறுவலாம்.

எனவே A_2, A_3 ......A_{p-1} யாவும் p ஆல் வகுபடும் என நிறுவப்படுகிறது.

கி தே: (1) கடைசி சமன்பாடாகிய (a லிருந்து,

$M(p)=M(p+1+A_p$ எனப் பெறப்படும்.

∴ $A_p+1=M(p)$ என அறிகிறோம்.

அதாவது $\angle p-1+1=M(p)$ என்ற வில்சன் தேற்றம் இங்கு கிளைத் தேற்றமாகப் பெறப்படுகிறது. (தேற்றம் 18)

கி. தே. (2)

$$x(x+1)(x+2)......(x+p-1)$$
$$=x^p+A_2x^{p-1}+A_3x^{p-2}+......+A_p\,x$$
$$=x^p+M(p)+x(A_p+1-1)$$
$$=x^p+M(p)+M(p)-x$$

ஆனால் இடது கைப்புறமுள்ள $x(x+1)......(x+p-1)=M(p)$ என நாம் அறிவோம். ஏனெனில் அது x-ல் ஆரம்பித்து அடுத்தடுத்த p எண்களின் தொடர் கூட்டுத் தொகை.

$$\therefore \quad M(p)=x^p+M(p)-x$$

$$\therefore \quad x^p-x=M(p)$$

$$\therefore \quad x(x^{p-1}-1)=M(p)$$

p-ம் x-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்களாதலின் (ஏனெனில் p ஒரு பகாவெண்) $x^{p-1}-1=M(p)$ என்ற பெர்மாட் தேற்றம் பெறப்படும். (தேற்றம் 16)

குறிப்பு (1): இலகிராஞ்சியின் தேற்றத்திலிருந்து, வில்சன் தேற்றமும், பெர்மாட் தேற்றமும் கிளைத் தேற்றங்களாய் நிறுவப்படுவதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு (2): கி. தே. (1) ஆகிய வில்சன் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் இலகிராஞ்சியின் தேற்றம் கொண்டு நிறுவலாம். இலகிராஞ்சியின் தேற்றத்தில, முறையே $x=0$, $x=1$ என ஈடு செய்தால்,

$$\angle \underline{p-1}=1\cdot 2\cdot 3......(p-1)=A_p \qquad (1)$$

$$\angle p=2\cdot 3\cdot 3......p=1+A_2+A_3+......4A \qquad (2)$$

$$\therefore \quad (2)\text{ன் படி, } \angle p=A_p+1+M(p)$$

$$=\angle \underline{p-1}+1+M(p)$$

$$\therefore \quad \angle p-M(p)=\angle \underline{p-1}+1$$

$$\therefore \quad M(p)=\angle \underline{p-1}+1 \text{ எனப் பெறப்படும்;}$$

குறிப்பு (3): இலகிராஞ்சியின் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் கூறலாம் p ஒரு பகாவெண். அப்போது $(x-1)\ (x-2)........ (x+p-1)\equiv x^{p-1}-S_2\ \ x^{p-2}+S_3\ \ x^{p-3}......+(-1)^{p-1}S_p$ ஆனால், $S_2, S_3......S_{p-1}$ யாவும் pஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

12·7·1. எ.கா. 34.

$\angle \underline{712}+1=M(719)$ என நிறுவுக.

$719=\angle 6-1=$ ஒரு பகா எண்.

பொதுமைப்படுத்திய வில்சன் தேற்றப்படி (தேற்றம் 19), $n=719$, $r=7$ எனக் கொண்டால்,

$$\angle \underline{719-7}\ \angle \underline{7-1}+(-1)^{7-1}=M(719)$$

$$\therefore \quad \angle \underline{712}\ \angle 6+1=M(719)$$

$$\angle \underline{712}-\angle 6+\angle 6-\angle 6+11=M(719)$$

$$\therefore \quad \angle 6(\angle \underline{712}+1)-719=M(719)$$

$\therefore \quad \angle 6\,(\underline{\angle 712} + 1) = M\,(719)$

ஆனால் $\angle 6$ —ம் 719-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள்

$\therefore \quad \underline{\angle 712} + 1 = M\,(719)$

எ.கா. 35 n ஒரு பகாவெண்; N-ம் n-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள். $N^{n^3-n^2} - 1 = M\,(n^3)$ என நிறுவுக.

$$\phi\,(n^3) = n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^3 - n^2$$

பெர்மாட் பொதுத் தேற்றப்படி (தேற்றம் 16)

$$N^{\phi\,(n^3)} - 1 = (M\,(n^3)$$

$\therefore \quad N^{n^3\ n^2} - 1 = M\,(n^3)$ என நிறுவப்படுகிறது.

பொதுவாக $N^{n^m - n^{m-1}} - 1 = M\,(n^m)$ என நிறுவலாம்.

எ. கா. 36 எண்களின் இருபடிகள் யாவற்றையும் $3m$ அல்லது $3m+1$ என்ற அமைப்பில் எழுத முடியும்.

N என்ற எண்ணை 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 0, 1, 2 என்பவை வரும்.

எனவே எல்லா எண்களையும் $3r$, $3r+1$, $3r+2$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

ஆனால், $3r+2 = 3(r+1) - 1 = 3r^1 - 1$ என்ற அமைப்பில் எழுதப்படலாம்.

இவைகளின் இருபடிகள் $9r^2$, $(3r \pm 1)^2$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும். அவைகளை

$9r^2 = 3m$ எனவும்

$(3r \pm 1)^2 = 9r^2 = 9r^2 \pm 6r + 1$

$= 3m + 1$ எனவும் எழுதலாம்.

எ. கா. 37 எண்களின் நாற்படிகளை $5m$ அல்லது $5m+1$ என்ற அமைப்பில் எழுதமுடியும்.

N என்ற எண்ணை 5 ஆல் வகுத்தால் மீதி 0, 1, 2, 3, 4 என்பவை யாகும்.

எனவே எல்லா எண்களையும்,

$5r,\ 5r+1,\ 5r+2,\ 5r+3,\ 5r+4$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

$5r + 3 = 5r + 5 - 2$

$= 5r^2 - 2$ என்ற அமைப்பில்

எழுதப்படலாம்.

அவ்வாறே $5r+4=5r+5-1$
$=5r^{11}-2$ என்ற அமைப்பில் எழுதப்படலாம்.
அவ்வாறே $5r+4=5r+5-1$
$=5r^{11}-$ என்ற அமைப்பில் எழுதப்படலாம்.

எனவே எண்களை
$5r,\ 5r\pm 1,\ 5r\pm 2$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.
$(5r)^4=M(5)=5m$ என எழுதலாம்.
$(5r\pm1)^4=M(5)+1=5m+1)$ என எழுதலாம்.

$$(5r\pm2)^4 = M(5)+16$$
$$= M(5)+5(3)+1$$
$$= M(5)+1$$
$$= 5m+1$$ என எழுதலாம்.

எனவே எந்த எண்ணின் நாற்படியையும், $5m$ அல்லது $5m+1$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

பயிற்சி 12 (i)

1. 1ஐயும் 500-ஐவும் தவிர்த்து 500-ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களெத்தனை ?

2. ஒரு எண் சரியான இருபடியாயிருந்தால் மட்டுமே, அவ்வெண்ணை மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் ஒற்றைப்படையாயிருக்குமென நிறுவுக.

3. N-ஐ வகுக்கும் எண்கள் (1-ம் N-ம் உட்பட) n-இருக்குமானுல் அவைகளின் தொடர் பெருக்குத்தொகை $\sqrt{N^n}$ என நிறுவுக.

4. 20 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச்சிறிய எண் காண்க.

5. 500-க்கு குறைவாய், எத்தனை எண்களோடு, 500 ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்ணுயிருக்கும் ?

6. n-க்குக் குறைவாய், n-ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்களாயிருக்கும் எண்களின் கூட்டிடை (Arithmetic Mean) $\frac{n}{2}$ என நிறுவுக.

7. $N=a^x\, b^y\, c^z\ldots\ldots$ ஆனுல் ($a, b, c\ldots$பகாயெண்கள்) N-க்குக் குறைவாய் N ஓடு பகாயெண்களாயிருக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{N^2}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{c}\right)$

எனவும், அவ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots+$$
$$\frac{N}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\ldots\ldots$$ எனவும் நிறுவுக.

பயிற்சி 12 (ii)

1. 2, 5, 7, 11, 13 என்ற எண்கள் எந்தப் படிகளில் (i) $\angle 100$ (ii) $\angle 500$ல் தோன்றும்?

2. (i) $\angle 60$ (ii) $\angle 101$ (iii) $\angle 256$ என்ற எண்கள் எத்தனை பூச்சியங்களோடு முடிகின்றன?

பின்வரும் கொடுக்கப்பட்டவைகளை நிறுவுக.

3. n ஒரு ஒற்றைப்படை யெண்ணுயின்
$(n-1)\,n\,(n+1) = M\,(24)$

4. $n^5 - n = M\,(30)$

5. $n\,(n-1)\,(n+25)\,(n+50) = M\,(24)$

6. $n\,(n+1)\,(2n+1) = M\,(6)$

7. n ஒரு ஒற்றைப் படை யெண்ணுயின்,
(i) $(n^2+3)\,(n^2+7) = M\,(32)$
(ii) $n^4 + 4n^2 + 11 = M\,(16)$

8. $7^{2n+1} + 1 = M\,(8)$

9. $19^{2n} - 1 = M\,(360)$

10. $n>3$ என்ற பகா யெண்ணுயின்
$n\,(n^2-1)(n^2-4) = M\,(360)$

பயிற்சி 12 (iii)

1. n ஒரு பகாயெண்ணுயின்,
$$1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} \ldots\ldots (n-1)^{n-1} + 1 = M\,(n)$$
என நிறுவுக.

2. a, b என்ற எண்கள் n ஓடு ஒன்றுக் கொன்று பகாயெண் களாயின்
$$a^{n-1} - b^{n-1} = M\,(n) \text{ என நிறுவுக.}$$

3. $n^7 - n = m\,(42)$ என நிறுவுக.

4. m, n, p யாவும் பகாயெண்களாயின்,
$$(np)^{m-1} + (pm)^{n-1} + (mn)^{p-1} - 1 = M\,(mnp)$$ என நிறுவுக.

5. ஒரு எண்ணின் குறிப்பிட்ட படிகள், குறிப்பிட்ட அமைப்பிலிருக்குமென பின்வரும் உண்மைகளை நிறுவுக.

n = எண்ணின் படி	N^nன் அமைப்பு
2	$3n$ அல்லது $3m+1$
2	$5m$ அல்லது $5m \pm 1$
3	$7m$ அல்லது $7m \pm 1$
3	$9m$ அல்லது $9m \pm 1$
4	$5n$ அல்லது $5m + 1$
8	$17m$ அல்லது $17m \pm 1$
11	$23m$ அல்லது $23m \pm 1$
12	$13n$ அல்லது $13m + 1$

6. 4725 என்ற எண்ணைக் குறைந்தது எந்த எண்ணுல் பெருக்கிஞல் அது (1) சரியான இருபடி (2) சரியான முப்படி எண்ணுகும்?

7. N என்ற எண்ணைவிடக் குறைவாய், அதோடு ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்களாய் உள்ள எண்களில் எண்ணிக்கை ஒரு இரட்டைப் படையெண் எனவும், அவைகளில் பாதி எண்கள் $\frac{N}{2}$ க்குக் குறைவாயிருக்குமெனவும் நிறுவுக.

8. $a^2+b^2=c^2$ ஆனுல் $abc = \mathrm{M}(60)$ என நிறுவுக.

9. சரியான இருபடியெண் எதுவும் 2, 3, 7 அல்லது 8 என்ற இலக்கத்தைக் கடைசியில் பெருது என நிறுவுக.

10. அடுத்தடுத்து நான்கு எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு சரியான இருபடியாகவிருக்க முடியாதென நிறுவுக.

பின் கொடுக்கப்பட்ட முடிவுகளை நிறுவுக (11 25).

11. $a^{4m+p} - a^{4n+p} = M(30)$

12. n ஒரு பகாயெண்; N-ம் n-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகாயெண்கள்;

$N^{4 \cdot b} + \cdot\cdot^{4n} \pm 1$ [illegible] $M($[illegible]$)$

13. $\dfrac{\angle nr}{\angle n[\angle r]^n}$ = முழு எண்.

14. $\dfrac{\angle 2n}{\angle n+1 \ \angle n}$ = முழு எண்.

15. n ஒற்றைப் படை யெண்ணாயின்,
$(n + 2m)^n - (n + 2m) = M(24)$

16. $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 = = M(54)$

17. $3^{4n+2} + 2.4^{3n+1} = M(17)$

18. $6\cdot5^{n} + 4.7^n - 10 = M(48)$

19. $5^{2n} + 23 = M(24)$

20. $\angle 18 + 1 = M(437)$

21 $16^{99} - 1 = M(437)$

22. $8^{n+1} - 7n + 1 = M(49)$

23. $2n(2n + 2)(2n + 4) = M(48)$

24. $n(n^2 + 20) = M(48)$

25. $\angle 36 + 1037 = M(1517)$

26. இரண்டு ஒற்றைப்படை யெண்களின் இருபடிகளின் வித்தியாசம் 4ஆல் வகுபடுமென நிறுவுக.

27. $\dfrac{1}{1^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n} + \dots\dots \infty$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)^{-1} \dots\dots$$ என நிறுவுக.

28. ஒவ்வொரு சரியான இருபடியையும், இரண்டு சரியான இருபடிகளின் வித்தியாசமாக எழுதலாமென நிறுவுக.

29. $x^{16} - 1 = M(680)$ ஆகவேண்டுமானல் 20க்குக் குறைந்த xன் மதிப்புகள் காண்க.

30. p ஒரு ஒற்றைப்படைப் பகாயெண்ணாயின் $\left(1\cdot2\cdot3\dots\dots\frac{p-1}{2}\right)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} = M(p)$ என நிறுவுக.

13. சமன்பாட்டுக் கொள்கை
(Theory of Equations)

13·1. பொது இயல்புகள் (General Properties): 13·1·1 அளவுக்கிணங்கிய கூட்டு முழு எண்படி கொண்ட சார்புகள் (Rational integral function) பற்றி நாம் முன்னர் அறிந்திருக்கின்றோம். அச் சார்புகளில் சார்பில் மாறியின் (x ன்) படி மூலங்கள் (Roots) சார்பில் மாறி தோன்றுது அதாவது சார்பில் மாறி கூட்டு முழு எண் படிக்கே உயர்த்தப்பட்டிருக்கும்.

n கூட்டு முழு எண்ணுனல் $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_n$ என்பது ஒரு அளவுக் கிணங்கிய கூட்டு முழு எண் படி கொண்ட சார்பு.

13·1·1·1 $f(x) \equiv a_0x^n + a_1 x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a^n = 0$ என்பது xல் ஒரு n படிச் சமன்பாடாகும். $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற கெழுக்கள் மாறிலிகள்; x சார்பற்ற a_n என்பது சமன்பாட்டின் தனியுறுப்பு (Independent term) எனப்படும்.

இவ்வகைப்பட்ட சமன்பாட்டில் a_0 முதல் a_n வரை எதுவும் பூச்சியமாக இல்லாவிட்டால், இது ஒரு முற்றிய n படிச் சமன்பாடு (Complete equation) எனப்படும். அக்கெழுக்களில் a_0 தவிற ஏதாமொன்ரே, பலவோ பூச்சியமாளுல் அது ஒரு முற்ருத n படிச் சமன்பாடு (Incomplete equation) எனப்படும். ($a_0 = 0$ ஆகிவிட்டால், அச் சமன்பாடு n படிச்சமன்பாடு அல்லவாகலின் $a_0 \neq 0$ எனக் கொள்ளப்பட வேண்டும்)

$n = 2, 3, 4$ ஆனுல், அச்சமன்பாடுகள் முறையே இருபடி, முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

13·1·1·2 $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களையும் $a_0\ (\neq 0)$ ஆல் வகுத்தால் சமன்பாட்டுத் தன்மைகள் மாருது; ஆகவே, சமன் பாட்டை,

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

அல்லது,

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + - + p_{n-1} x + p_n = 0$$

எனப் பொதுவாக எழுதலாம். x^n-ன் கெழு 'ஒன்று' என்று கொள்வதில் சில அனுகூலங்கள் உண்டாதலால், ஒரு n படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு,

$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots\dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ எனக் கொள்வது மரபு.

13· ·2 வரையறை: $f(\alpha) = 0$ ஆனல் α என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு எனப்படும்.

3·1·2·1 தேற்றம் 1. ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் ஒரு தீர்வு உண்டு. (அத்தீர்வு மெய்யெண் அல்லது கற்பனை யெண்ணாக விருக்கலாம்.)

இது சமன் பாட்டுக் கொள்கையின் அடிப்படைத் தேற்றம் இதன் அடிப்படையிலேதான் சமன்பாட்டுக் கொள்கைகள் அமைக்கப்பட்டு நிறுவப்படுகின்றன.

குறிப்பு: இந்த அடிப்படைத் தேற்றம் கோசி (Cauchy கிளிப்போர்ட்டு (Clifford) இன்னும் மற்றையோர்களால் நிறுவப் பட்டிருக்கிறது. ஆனல் நிறுவன் முறை நீளமானது, கடினமும் சிக்கலும் உள்ளதென்பதற்காக இந்நூலில் நிறுவாமல் ஏற்றுக். கொள்ளப்படும்

13 1·3 தேற்றம் 2

ஒவ்வொரு n படிச் சமன்பாட்டிற்கும் n தீர்வுகள் மட்டுமே, உள்ளன.

தெரிப்பு: $f(x) = 0$ ஒரு n படிச் சமன் பாடெனக் கொள் வோம்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டெனக் கொள்ளப்பட்ட அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி α_1 ஒரு தீர்வு எனக் கொள்வோம். (தேற்றம் 1).

இப்போது $f(\alpha_1) = 0$.

$\therefore$ $(x - \alpha_1)$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு சினையாகும்.

$\therefore$ $f(x) \equiv (x - \alpha_1) f_1(x)$.

$f_1(x)$ என்பது $(n-1)$ படி பல்லுறுப்புக் கோவை. எனவே) $f_1(x) = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு தீர்வு பெற்று இருக்கும்.

அத்தீர்வு α_2 எனக் கொள்வோம்.

இப்போது $f_1(\alpha_2) = 0$.

$\therefore$ $(x - \alpha_2)$ என்பது $f_1(x)$-ன் ஒரு சினையாகும்.

$\therefore$ $f_1(x) \equiv (x - \alpha_2) f_2(x)$

ஆகவே $f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$

$f_2(x)$ என்பது $(n-2)$ படி பல்லுறுப்புக் கோவை.

இவ்வாறே ஒவ்வொரு தீர்வுக்கும் உரிய சினைகள் கண்டு சென்றால்,

$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots\ldots (x-\alpha_n)f_n(x)$ எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $f_n(x)$-ன் படி $n-n=0$.

அதாவது $f_n(x)$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும். அதனை k எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad f(x) \equiv k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_n)$

$f(x) \equiv x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots p_n = 0$ எனக் கொண்டால் $k=1$ என்பது தெளிவு.

$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n = 0$ எனக்கொண்டால் $k = a_0$ என்பது தெளிவு:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் n தீர்வுகளாகும்.

மேலும் x, மேலே கூறிய n மதிப்புகள் தவிர, வேறு எந்த மதிப் பேற்ற போதிலும் $f(x) \neq 0$ என்பதும் விளக்கமாகிறது.

எனவே $f(x)=0$ என்னும் n படிச் சமன்பாடு n தீர்வுகள் மட்டுமே கொண்டுள்ளது. அவை $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$.

குறிப்பு: மேலே கூறிய n தீர்வுகளில் r தீர்வுகள் α —க்குச் சமமானால்,

$$f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$$

$\phi(x)$ என்பது $(n-r)$ படிக்கோவையாகும். α என்பது $f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் r முறை மடங்குத் தீர்வுகள் (r — Multiple roots) எனப்படும்.

அவ்வாறே $f(x) = (x-\alpha_1)^p(x-\alpha_2)^q(x-\alpha_3)^r \ldots\ldots\ldots$ எனவும் இருக்கலாம். அப்போது p முறை மடங்குத் தீர்வுகள் α_1; q முறை மடங்குத் தீர்வுகள் α_2; r முறை மடங்குத் தீர்வுகள் $\alpha_3 \ldots\ldots$ இருக்கும். அப்போது $p+q+r+\ldots\ldots = n$ ஆகும்.

13·1·4 ஒரு சமன் பாட்டில் கெழுக்களுக்கும் தீர்வுகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகள்:

தேற்றம் 3

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots a_rx^{n-r} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் S_r என்பது $r, r, \dots$ தீர்வுகளாகப் பெருக்கிப் பெருக்கிக் கூட்டிய தொகையை (அதாவது $S_r = \alpha_1\alpha_2 \dots\dots \alpha_r + \alpha_2\alpha_3 \dots\dots \alpha_{r+1} + \dots\dots\dots {}_nC_r$ உறுப்புகள்) குறிக்குமானல்.

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_r = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

தெ: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots\dots \alpha_n$ எனக் கொள்வோம்.

தேற்றம் (2)ல் நிறுவியபடி

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_r x^{n-r} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n$$
$$\equiv a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots\dots\dots (x-\alpha_n)$$
$$\equiv a_0 [x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \dots\dots + (-1)^r S_r x^{n-r} \dots\dots\dots + (-1)^n S_n]$$

இரு புறமும் சமப்படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட

$a_0 = a_0$ $\qquad -a_0 S_1 = a_1 \qquad \therefore S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$

$a_0 S_2 = a_2 \qquad \therefore S_2 = \frac{a_2}{a_0}$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$(-1)^r a_0 S_r = a_r \qquad \therefore S_r = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}$

இவ்வாறே $S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

குறிப்பு :

இப்போது ஒரு சமன்பாட்டிற் குரிய $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ என்ற தீர்வுகளைத் தொடர்பு படுத்தும்.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= K_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n &= K_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n &= K_n \end{aligned}\right\}$$ [K_1, K_2, ……… K_n ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன]

n தொடர்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் மட்டும் இவைகளினின்று $\alpha_1, \alpha_2,$ ……… α_n என்ற தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் இந்த n தொடர்புகளை n சமன்பாடுகளெனக் கொண்டு படிப்படியாக வந்தால் கடைசியாக $a_0 \alpha_r^n + a_1 \alpha_r^{n-1} + a_2 \alpha_r^{n-2} + \dots + a_n = 0$ போன்ற சமன்பாடுதான் கிடைக்கும் (அதாவது xக்குப் பதிலாக α_r கொண்ட சமன்பாடு).

13·1·4·1 எடுத்துக்காட்டாக,

$\alpha + \beta + \gamma = 6$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 10$

$\alpha\beta\gamma = 6$ என்பவை கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

$$\alpha + \beta = 6 - \gamma$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{\gamma}$$

$$\therefore \quad \frac{6}{\gamma} + (\alpha + \beta)\gamma = 10$$

$$\therefore \quad \frac{6}{\gamma} + \gamma(6 - \gamma) = 10$$

$$\therefore \quad 6 + 6\gamma^2 - \gamma^3 = 10\gamma$$

$$\therefore \quad \gamma^3 - 6\gamma^2 + 10\gamma - 6 = 0$$

என்ற சமன்பாடுதான் கிடைக்குமேயொழிய அம் மூன்று தொடர்புகளைக் கொண்டு மாத்திரம் α, β, γ கண்டுபிடிக்க இயலாது. இங்கு $x^3 - 6x^2 + 10x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ என்பது மட்டுமேதான் திரும்பவும் பெறப்படும்.

ஆனால், இவையல்லாத ஒரு தொடர்பு தீர்வுகளுக்கிடையே கொடுக்கப்பட்டிருக்குமானால் இத்தேற்றத்தின் முடிவுகளைக் கொண்டு அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைச் சில சமயங்களில் எளிதில் காண இயலும்.

எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரிலுள்ளன, அல்லது இரண்டு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் போன்ற ஒரு தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்குமானால் இத் தேற்றத்தின் முடிவுகளைக் கொண்டு சில சமன்பாடுகளின்

தீர்வுகளை எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் இதைத் தெளிவுபடுத்தும்.

13·1·5 எ. கா. (1)

$x^4 - 12x^3 + 14x^2 + 132x - 135 = 0$ ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின், சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்க

$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம்.

$$S_1 = a - 3d + a - d + a + d + a + 3d$$
$$= 4a$$

ஆனால் $S_1 = -(-12)$

$\therefore \quad 4a = 12$

$\therefore a = 3$

$$S_2 = (a - 3d)(a - d) + (a - 3d)(a + d) + (a - 3d)(a + 3d) + (a - d)(a + d) + (a - d)(a + 3d) + (a + d)(a + 3d)$$
$$= 6a^2 - 10d^2$$
$$= 54 - 10d^2$$

ஆனால் $S_2 = 14$

$\therefore \quad 14 = 54 - 10d^2$

$\therefore \quad 10d^2 = 40$

$d^2 = 4$

$\therefore \quad d = \pm 2$

$d = 2$ என எடுத்துக் கொள்ள, தீர்வுகள்

$-3, 1, 5, 9.$

$d = -2$ என எடுத்துக் கொண்டாலும் இதே தீர்வுகள் தலை கீழ் வரிசையில் கிடைக்கும்.

எ. கா. (2)

$2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் இரண்டின் பெருக்குத் தொகை மற்ற இரண்டின் பெருக்குத் தொகையைப் போல் மூன்று மடங்காயின் தீர்வுகளைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\alpha\beta = 3\gamma\delta$ கொடுக்கப்பட்டது.

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{13}{2} \quad (1)$$

$$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 14$$

$$\therefore \quad 4\gamma\delta + (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 14 \qquad (2)$$

$$S_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta(\gamma+\delta)$$

$$+ \gamma\delta(\alpha+\beta) = \frac{23}{2} \qquad 2\,(a)$$

$$S_4 = \alpha\beta\gamma\delta = 3$$

$$\therefore \quad 3(\gamma\delta)(\gamma\delta) = 3$$

$$\therefore \quad \gamma^2\delta^2 = 1$$

$$\therefore \quad \gamma\delta = \pm 1 \qquad \ldots(3)$$

$\gamma\delta = 1$ எனக் கொண்டால்

(2)ன்படி $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 10$ ...(4)

$\alpha + \beta = p$ எனவும் $\gamma + \delta = q$ எனவும் கொள்வோம்.

(1), (4) ன்படி $p + q = \frac{13}{2}$

$$pq = 10$$

$$p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}$$

$$= \sqrt{\frac{169}{4} - 40}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\therefore \quad p - q = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad p = 4$$

$$q = \frac{5}{2}$$

அதாவது $\alpha + \beta = 4; \quad \gamma + \delta = \frac{5}{2}$

$$\gamma + \delta = \frac{5}{2}; \ \gamma\delta = 1$$

$$\gamma - \delta = \sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \gamma = 2$$

$$\delta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha + \beta = 4$$

$$\alpha\beta = 3$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{16 - 12}$$

$$= 2$$

$$\therefore \quad \alpha = 3$$

$$\beta = 1$$

$\therefore \quad \gamma\delta = 1$ எனக் கொண்டால், தீர்வுகள் 3, 1, 2, $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

இப்போது $\gamma\delta = -1$ என்ற கட்டுப்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது $\alpha\beta = -3$ ஆகும்.

$\alpha\beta = -3, \gamma\delta = -1$ என (2) ல் ஈடு செய்தால்

$$-4 + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 14$$

$$\therefore \quad (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 18 \qquad \ldots(5)$$

$\gamma\delta = -1, \quad \alpha\beta = -3$ என 2 (a)ல் ஈடுசெய்தால்

$$-3(\gamma + \delta) - 1(\alpha + \beta) = \frac{23}{2}$$

$$\therefore -(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2(\gamma + \delta) = \frac{23}{2}$$

ஆனல் $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{13}{2}$

$$\therefore \quad -2(\gamma + \delta) = \frac{23}{2} + \frac{13}{2}$$

$$= 18$$

$$\therefore \quad (\gamma + \delta) = -9$$

$\therefore \quad$ (5)ன்படி $(\alpha + \beta) = -2$

$$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = -11$$

ஆனல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில்

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{13}{2}$$

ஆகவே $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -11$ ஆகக் காணப்பட்டது பொருந்தாது.

எனவே $\gamma\delta = -1$ என்று எடுத்துத் தீர்வுகள் காண்பது, பொருந்தாத் தீர்வுகளைக் கொடுப்பதால் $\gamma\delta = -1$ என்ற மதிப்பு விலக்கப்பட வேண்டும்.

எனவே, இச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமான தீர்வுகள் $3, 1, 2, \frac{1}{2}$ என்பவையே.

எ. கா. (3)

$x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகளுக்கு உள்ள விகிதம் 3 : 2 எனின் தீர்வுகள் காண்க.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் 3α, 2α, β எனக் கொள்வோம்.

$_1 = 3\alpha + 2\alpha + \beta = 9$

அதாவது, $5\alpha + \beta = 9$

$\therefore \quad \beta = 9 - 5\alpha$ ...(1)

$S_3 = 3\alpha . 2\alpha . \beta = -24$

$\alpha^2 \beta = -4$ ...(2)

(1), (2) ல் இருந்து β ஐ நீக்க

$\alpha^2 (9 \quad 5\alpha) = -4$

$5\alpha^3 - 9\alpha^2 - 4 = 0$

இதிலிருந்து $\alpha = 2$ எனத் தெரிகிறது.

$\alpha = 2$ எனின், $\beta = -1$

எனவே சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாவன

6, 4, − 1.

எ. கா. (4)

$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டு தீர்வுகள் அளவில் சமமாகவும் குறியில் மாறுபட்டதாகவும் இருப்பின் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கவும்.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ தீர்வுகளெனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\gamma = -\delta$

அதாவது $\gamma + \delta = 0$ ...(1)

$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ ...(2)

$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 4$ ...(3)

$S_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta = -6$ ...(4)

$S_4 = \alpha\beta\gamma\delta = -21$ ...(5)

(1), (2) லிருந்து $\alpha + \beta = 2$ ...(6)

(3) ஐ $\alpha\beta + \gamma\delta + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 4$ என எழுத,

$\alpha\beta + \gamma\delta = 4$ ...(7)

(4) ஐ $\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -6$ என எழுத

$\gamma\delta(\alpha + \beta) = -6$ ஆகும். ...(8)

(6), (8) லிருந்து $\gamma\delta = -3$ ...(9)

$\gamma + \delta = 0$

$$\therefore \gamma - \delta = \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta}$$
$$= \sqrt{12}$$
$$\therefore \gamma = \sqrt{3}; \quad \delta = -\sqrt{3}$$

மேலும் $\alpha\beta = 7$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$
$$= \sqrt{4 - 28}$$
$$= \sqrt{-24}$$
$$= 2\sqrt{6}\, i$$
$$\therefore \alpha = 1 + i\sqrt{6}$$
$$\beta = 1 - i\sqrt{6}$$

தீர்வுகள் $1 + i\sqrt{6}; \quad 1 - i\sqrt{6}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

13·1·6 இப்போது தீர்வுகளிடையே ஒரு தொடர்பு நிலவுமாயின், அதன் காரணமாகச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களிடையே ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தொடர்புகள் நிலவத்தான் செய்யும்; ஏனெனில் தீர்வுகளுக்கும் கெழுக்களுக்கும் ஒரு திட்டமான தொடர்பு அமைந்திருக்கிறது (தேற்றம் 3). இந்த உண்மையைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் விளக்கம் செய்யும்.

13·1·6·1 எ. கா. (5)

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமாயின் $2p^3 + 27r = 9pq$ என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை $a - d,\ a,\ a + d$ எனக் கொள்வோம்.

$$S_1 = a - d + a + a + d = 3a = -p$$
$$\therefore a = -\frac{p}{3}$$

a ஒரு தீர்வாதலின்

$$a^3 + pa^2 + qa + r = 0$$

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = 0$$

$$-\frac{p^3}{27} + \frac{p^3}{9} - \frac{pq}{3} + r = 0$$

அதாவது $2p^3 + 27r = 9pq$

மற்றொரு வழியிலும் இதைச் செய்யலாம்.

இங்கு $S_1 = 3a = -p.$

$$S_2 = (a-d)\,a + (a-d)(a+d) + a(a+d)$$
$$= 3a^2 - d^2$$
$$= q \qquad \ldots(1)$$

$a = \frac{-p}{3}$ ஆகையால் (1) லிருந்து

$$3\left(-\frac{p}{3}\right)^2 - d^2 = q$$

$$\therefore d^2 = \frac{p^2}{3} - q$$

மேலும் $S_3 = a(a^2 - d^2)$
$$= -r$$

ஆனால் $a(a^2 - d^2) = -\frac{p}{3}\left(\frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{3} + q\right)$

$$\therefore -r = -\frac{p}{3}\left(\frac{-2p^2}{9} + q\right)$$

$$\therefore 27r = -2p^3 + 9pq$$

$\therefore 2p^3 + 27r = 9pq$ என நிறுவப்படுகிறது

இம்முறையில் S_1, S_2, S_3ன் மதிப்புகள் யாவும் பயன் படுத்தப்படுகின்றன.

எ. கா. (6)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$-ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின் $c^3a = b^3d$ என நிறுவுக.

தீர்வுகள் $\frac{A}{r}$, A, Ar எனக் கொள்வோம்

$$S_3 = \frac{A}{r} \cdot A\, A r = A^3$$

$$\text{ஆனால் } S_3 = -\frac{d}{a}$$

$$\therefore \; A^3 = -\frac{d}{a}$$

A-கொடுத்திருக்கும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாதலின்

$$a A^3 + b A^2 + c A + d = 0$$

$$\text{அதாவது } A\,(b A + c) = -(a A^3 + d)$$

$$\therefore \; A^3\,(b A + c)^3 = -(a A^3 + d)^3$$

$$A^3\,[b^3 A^3 + c^3 + 3\,b\,c\,A\,(b A + c)] = -[a A^3 + d]^3$$

$$A^3\,[b^3 A^3 + c^3 - 3b\,c\,(a A^3 + d)] = -[a A^3 + d]^3$$

$$A^3 = -\frac{d}{a} \text{ என ஈடு செய்ய}$$

$$-\frac{d}{a}\left[-\frac{db^3}{a} + c^3\right] = 0 \text{ பெறப்படும்.}$$

$$\therefore \; ac^3 = db^3$$

மற்றொரு வழியிலும் இதைச் செய்யலாம்.

$$S_1 = \frac{A}{r} + A + Ar$$

$$= \frac{A + Ar + Ar^2}{r}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

$$\therefore \; A\,(r^2 + r + 1) = -\frac{b}{a}\,r \qquad \ldots(1)$$

$$S_2 = \frac{A^2}{r} + A^2 + A^2 r$$

$$= \frac{A^2 + A^2 r + A^2 r^2}{r}$$

$$= \frac{A^2\,(1 + r + r^2)}{r}$$

$$\therefore \; A^2\,(1 + r + r^2) = \frac{c}{a}\,r \qquad \ldots(2)$$

$$(2) \div (1) \qquad A = -\frac{c}{b}\,r \qquad \ldots(3)$$

$$S_3 = A^3$$

$$= -\frac{d}{a}$$

$$(3)\text{ன் படி, } A^3 = -\frac{c^3}{b^3} = -\frac{d}{a}$$

$\therefore ac^3 = b^3 d$ என நிறுவலாம்.

எ. கா. 7.

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை மற்ற இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானல் $p^3 + 8r = 4pq$ என நிறுவுக.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -p$$

$$\therefore 2(\alpha + \beta) = -p$$

$$\therefore \alpha + \beta = \gamma + \delta = -\frac{p}{2}$$

$$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q$$

அதாவது $\alpha\beta + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) + \gamma\delta = q$

அதாவது $\alpha\beta + \frac{1}{4}p^2 + \gamma\delta = q$

$$\therefore \alpha\beta + \gamma\delta = q - \tfrac{1}{4}p^2 \quad \ldots (1)$$

$$S_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -r$$

அதாவது $\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -r$

அதாவது $(\alpha\beta + \gamma\delta)(-\frac{1}{2}p) = -r$

$$\therefore \alpha\beta + \gamma\delta = \frac{2r}{p} \quad \ldots (2)$$

(1), (2)ன்படி $q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p}$

$$\therefore p^3 + 8r = 4pq$$

எ. கா. 5, 6, 7ல் தீர்வுகளிடையே ஒரு தொடர்பிருப்பின், சமன்பாட்டுக் கெழுக்களிடையே ஒரு தொடர்பிருப்பது விளக்கப் பட்டது. பொதுவாக அக்கெழுக்களிடைப்பட்ட தொடர்பைக் காணும் முறை பின் வருமாறு :

1. S_1, S_2, ………ன் மதிப்புகளை எழுதிக் கொள்க. அவை n தொடர்புகளாகும் ;

2. தீர்வுகளிடை கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பு, மேலும் மற்றொரு அதாவது $(n + 1)$வது தொடர்பாகும் ;

3. இந்த $(n+1)$ தொடர்புகளிடை $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்ற n இராசிகளை நீக்கினால், கெழுக்கள் கொண்டு மட்டும் அமைந்த ஒரு தொடர்பு கிடைக்கப் பெறும்.

இது பொதுவாகப் பயன்படுமாயினும், வேறு எளிய வகைகளிலும் கெழுக்களிடைப்பட்ட தொடர்புகளைக் காணலாம்.

பயிற்சி 13. 1 (i)

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க (1 — 5)

1. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$ தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன.

2. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0.$ தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன.

3. $x^3 - 19x^2 + 114x - 216 = 0.$ தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன.

4. $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 2 = 0.$ ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன.

5. $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் உள்ளன.

6. $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின் நிபந்தனை $3a_1^4 + 16a_0 a_1^2 a_2 - 64a_0^2 a_1 a_3 + 256a_0^3 a_4 = 0$ என நிறுவுக.

7. $4x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx - 7 = 0$ - ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின் $a, b,$ ன் மதிப்புகள் காண்க.

8. $36x^3 - 45x^2 - 22x + 24 = 0$ ன் ஒரு தீர்வு மற்றொரு தீர்வைப் போல் இருமடங்காயின் தீர்வுகள் காண்க.

9. $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ ன் இரு தீர்வுகள் $3:2$ என்ற விகிதத்தில் இருப்பின் தீர்வுகள் காண்க.

10. $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் இருப்பின் $2b^3 = c(3ab - c)$ என நிறுவுக.

11. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$ ன் இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை மற்ற இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானால் தீர்வுகள் காண்க.

12. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ ன் இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் ஆனால் தீர்வுகள் காண்க.

13. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ ன் இரு தீர்வுகள் $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ என விருப்பின் தீர்வுகள் காண்க.

14. $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 13x + 6 = 0$ ன் இரு தீர்வுகள் α, β ன் தொடர்பு $2\beta + 3\alpha = 7$ எனின் தீர்வுகள் காண்க.

15. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ ன் இரு தீர்வுகள் அளவில் சமமாயும் குறியில் மாறுபட்டும் இருப்பின் தீர்வுகள் காண்க.

16. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ன் இரு தீர்வுகள் அளவில் சமமாயும் குறியில் மாறுபட்டும் இருப்பின் $r^2 + p^2 s = pqr$ என நிறுவுக.

17. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. $\alpha\beta + \gamma\delta = 0$ ஆனுல் $p^2 s + r^2 = 4qs$ என நிறுவுக. இதன் மறுதலையையும் நிறுவுக.

18. $2x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 124x + 96 = 0$ ன் இரு தீர்வுகளுக்குள்ள வேறுபாடு 5 எனின் தீர்வுகள் காண்க.

19. $6x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 5x + 2 = 0$ ன் இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒன்று (1) எனின் தீர்வுகள் காண்க.

20. $3x^4 - 25x^3 + 50x^2 - 50x + 12 = 0$ ன் இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை 2 எனின் தீர்வுகள் காண்க.

21. $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $343r^2 + 36q^3 = 0$ என்ற தொடர்புண்டு. அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றென்றைப் போல் இருமடங்கு என நிறுவுக.

$x^3 - 7x + 6 = 0$ க்கு மேற்கூறிய நிபந்தனை பொருந்துமென நிறுவி அதன் தீர்வுகளைக் காண்க.

13·1.7 ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் ஆகிய சமச்சீர் சார்பினை அதன் கெழுக்களின் சார்பாகக் காணல்: (To express a symmetric function of the roots of an equation in terms of its Coefficients) :

ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் ஆகிய சமச்சீர் சார்பென்பது அச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெல்லாம் கொண்டதாயும் சமச்சீர் பெற்றதாயும் இருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனக் கொள்வோம். இதனை வைத்து எண்ணிலடங்கா சமச்சீர் சார்புகள் எழுதலாம்.

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad = \Sigma\, \alpha_1$

(2) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = \Sigma\, \alpha_1^2$

(3) $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_4 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_4$
$+\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_4 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2 + \alpha_4^2\alpha_1$
$+\alpha_4^2\alpha_2 + \alpha_4^2\alpha_3 \quad = \Sigma\, \alpha_1^2\alpha_2$

(4) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2$
$= \Sigma\, \alpha_1\alpha_2\alpha_3$

(5) $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} \quad = \Sigma \frac{1}{\alpha_1}$

... ...

13·1.7.1 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \alpha_n$ என்பவை

$x^n + p_1x^{n-1} + p_2\, x^{n-2} + \ldots \ldots p_rx^{n-r} + \ldots \ldots + p_{n-1}x$ $+p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம். முன்கண்ட தேற்றப்படி (13·1.4)

$$\Sigma\, \alpha_1 = -p_1$$
$$\Sigma\, \alpha_1\alpha_2 = p_2$$
$$\Sigma\, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -p_3$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \ldots \alpha_n = (-1)^n\, p_n$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_n$ களால் ஆகிய சமச்சீர் சார்பு எதுவாயினும் அதனை $p_1, p_2, \ldots \ldots p_n$ மூலம் எழுதலாம்.

(1) $\Sigma\, \alpha_3 = -p_1$

(2) $\Sigma\, \alpha_1^2$

$$(\Sigma\alpha_1)^2 = \Sigma\, \alpha_1^2 + 2\, \Sigma\, \alpha_1\alpha_2$$
$$\therefore \quad \Sigma\, \alpha_1^2 = (\Sigma\, \alpha_1)^2 - 2\, \Sigma\, \alpha_1\alpha_2$$
$$\therefore \quad \Sigma\, \alpha_1^2 = p_1^2 - 2p_2$$

(3) $\Sigma\, \alpha_1^2\alpha_2$

$\Sigma\, \alpha_1^2\alpha_2$ காண்பதற்கு $\Sigma\, \alpha_1 \cdot \Sigma\, \alpha_1\alpha_2$-ன் பெருக்குத்தொகை காண்போம். இப்பெருக்குத்தொகை இரண்டு விதமான உறுப்புகளைக் கொண்டு இருக்கும். ஒன்று $\alpha_1^2\alpha_2$; மற்றொரு வகை $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. முதல் வகையில் ஒரு தடவை மட்டும் எல்லா உறுப்புகளும் வரும். $\Sigma\, \alpha_1$-ல் உள்ள α_1, $\Sigma\, \alpha_1\alpha_2$-ல் உள்ள $\alpha_2\, \alpha_3$ உடன் பெருக்கும்போது முதல் தடவையும் $\Sigma\, \alpha_1$-ல் உள்ள α_2, $\Sigma\, \alpha_1\alpha_2$-ல் உள்ள $\alpha_1\alpha_3$ உடன் பெருக்கும்போது இரண்டாவது தடவையும் $\Sigma\, \alpha_1$-ல் உள்ள α_3, $\Sigma\, \alpha_1\alpha_2$ல் உள்ள $\alpha_1\alpha_2$ உடன் பெருக்கும்போது மூன்றாவது தடவையும் வரும்,

$$\therefore \Sigma \alpha_1 \cdot \Sigma \alpha_1\alpha_2 = \Sigma \alpha_1^2\alpha_2 + 3\Sigma \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$\therefore \Sigma \alpha_1^2\alpha_2 = \Sigma\alpha_1 \cdot \Sigma\alpha_1\alpha_2 - 3\Sigma \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$= (-p_1)p_2 - 3(-1)^3 p_3$$
$$= 3p_3 - p_1p_2$$

குறிப்பு :

பொதுவாக

$$\Sigma \alpha_1 \Sigma \alpha_1\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r = \Sigma \alpha_1^2\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r + (r+1)\Sigma \alpha_1\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{r+1}$$
$$\therefore \Sigma \alpha_1^2\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r = \Sigma \alpha_1 \Sigma\alpha_1\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r - (r+1)\Sigma \alpha_1\alpha_2 \cdots\cdots + \alpha_{r+1}$$
$$= -p_1(-1)^r p_r - (r+1)(-1)^{r+1} p_{r+1}$$

(4) $\Sigma \alpha_1^3$

$\Sigma \alpha_1^3$ காண்பதற்கு $\Sigma \alpha_1^2 \cdot \Sigma \alpha_1$-ன் பெருக்குத் தொகையைக் காண்போம். இதிலும் இரண்டு விதமான உறுப்புகள் வரும். முதல் வகை α_1^3 போன்றவை. இரண்டாவது வகை $\alpha_1^2 \alpha_2$ போன்றவை. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு முறைதான் வரும்.

எனவே $\Sigma \alpha_1^2 \cdot \Sigma \alpha_1 = \Sigma \alpha_1^3 + \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2$

$$\therefore \Sigma \alpha_1^3 = \Sigma \alpha_1^2 \cdot \Sigma\alpha_1 - \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2$$
$$= (p_1^2 - 2p_2)(-p_1) - (3p_3 - p_1p_2)$$
$$= -p_1^3 + 2p_1p_2 - 3p_3 + p_1p_2$$
$$3p_1p_2 - p_1^3 - 3p_3$$

இம்முறையிலே தீர்வுகளால் ஆகிய மற்ற சமச்சீர் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் கெழுக்கள் மூலம் கணக்கிட்ட றியலாம்.

13·1·7·2 எ. கா (1)

α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ன் தீர்வுகளாயின் $\Sigma \alpha^2, \Sigma \alpha^2 \beta, \Sigma \alpha^3$ன் மதிப்புகளை சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் மூலம் காண்க.

$$\Sigma \alpha = -p$$
$$\Sigma \alpha\beta = q$$
$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$\Sigma \alpha^2$ காண்பதற்கு $(\Sigma \alpha)^2$ன் விரிவைக் காண்போம்.

$$(\Sigma \alpha)^2 = \Sigma \alpha^2 + 2\Sigma \alpha\beta$$
$$\therefore \Sigma \alpha^2 = (\Sigma \alpha)^2 - 2\Sigma \alpha\beta$$
$$= (-p)^2 - 2p$$
$$= p^2 - 2q$$

$\sum \alpha^2 \beta$ காண்பதற்கு $\sum \alpha\beta \cdot \sum \alpha$ ன் விரிவைக் காண்போம்.

$$\sum \beta\alpha \cdot \sum \alpha = \sum \alpha^2 \beta + 3\alpha\beta\gamma$$

$$\therefore \quad \sum \alpha^2 \beta = \sum \alpha\beta \cdot \sum \alpha - 3\alpha\beta\gamma$$

$$= q(-p) - 3(-r)$$

$$= 3r - pq$$

$\sum \alpha^3$ காண்பதற்கு $\sum \alpha^2 \cdot \sum \alpha$ ன் விரிவைக் காண்போம்.

$$\sum \alpha^2 \cdot \sum \alpha = \sum \alpha^3 + \sum \alpha^2 \beta$$

$$\therefore \quad \sum \alpha^3 = \sum \alpha^2 \cdot \sum \alpha - \sum \alpha^2 \beta$$

$$= (p^2 - 2q)(-p) - (3r - pq)$$

$$= -p^3 + 2pq - 3r + pq$$

$$= 3pq - 3r - p^3$$

எ.கா. 2

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ ன் தீர்வுகளாயின்

(i) $\sum \dfrac{1}{\alpha}$

(ii) $\sum \dfrac{1}{\alpha\beta}$

(iii) $\sum \dfrac{1}{\alpha^2}$

(iv) $\sum \dfrac{\alpha}{\beta\gamma}$

ன் மதிப்புகள் காண்க.

இங்கு $\sum \alpha = -p$

$\sum \alpha\beta = q$

$\sum \alpha\beta\gamma = -r$

$\alpha\beta\gamma\delta = s$

(i) $$\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$$

$$= \frac{\beta r\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{\sum \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= -\frac{r}{s}$$

$$\text{(ii)}\quad \Sigma\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}+\frac{1}{\gamma\delta}$$

$$= \frac{\gamma\delta+\beta\delta+\beta\gamma+\alpha\delta+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{\Sigma\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{q}{s}$$

$$\text{(iii)}\quad \Sigma\frac{1}{\alpha^2} = \left(\Sigma\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\,\Sigma\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{r^2}{s^2} - 2\frac{q}{s}$$

$$= \frac{r^2-2qs}{s^2}$$

$$\text{(iv)}\quad \Sigma\frac{\alpha}{\beta\gamma} = \frac{\Sigma\alpha^2\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\Sigma\alpha^2\delta$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\Sigma\alpha^2\beta$$

$$\frac{1}{s}[\Sigma\alpha\cdot\Sigma\alpha\beta - 3\Sigma\alpha\beta\gamma]$$

$$= \frac{1}{s}[-pq-3(-r)]$$

$$= \frac{3r-pq}{s}$$

எ.கா. (3)

α, β, γ என்பன $x^3-4x^2-x+2=0$ தீர்வுகளாயின் $\Sigma\alpha^2\beta^2$ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\Sigma\alpha = 4$$

$$\Sigma\alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta\gamma = -2$$

$$\Sigma\alpha^2\beta^2 = (\Sigma\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha)$$

$$= 1-2(-2)(4)$$

$$= 1+16$$

$$= 17.$$

பயிற்சி 13·1 (ii)

1. α, β, γ என்பன $x^3+px^2+px+r=0$ன் தீர்வுகளானுல்

(i) $\Sigma \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}$

(ii) $\Sigma \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}$ன் மதிப்புகள் காண்க.

2. α, β, γ என்பன $x^3+qx+r=0$ன் தீர்வுகளானுல் $\Sigma \dfrac{1}{\beta+\gamma}$ன் மதிப்பு என்ன ?

3. α, β, γ என்பன் $x^3+px^2+qx+r=0$ன் தீர்வுகளானுல் $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=r-pq$ என நிறுவுக.

4. α, β, γ என்பன $x^3+px^2+qx+r=0$ன் தீர்வுகளானுல்

(i) $\Sigma \dfrac{1}{\alpha}$

(ii) $\Sigma \dfrac{1}{\alpha\beta}$

(iii) $\Sigma \beta^2\gamma^2$

(iv) $\Sigma \alpha^3$ ன் மதிப்புகள் காண்க.

5. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ன் தீர்வுகளானுல் (i) $\Sigma \alpha^2$

(ii) $\Sigma \alpha^2\beta$

(iii) $\Sigma \alpha^2\beta\gamma$

(iv) $\Sigma \alpha^2\beta^2$ன் மதிப்புகள் காண்க.

6. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்பன $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots \ldots+p_n=0$ன் தீர்வுகளானுல் $\Sigma (\alpha_1-\alpha^2)^2=(n-1)p_1^2+2p_2$ என நிறுவுக.

7. சமன்பாடு $x^4-22x^2+84x-49=0$ன் தீர்வுகளது முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகை என்ன ?

8. $x^3 + px^2 + qx + r= 0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனுல் $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)$ன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $x^3+ax^2+bx+c=0$ தீர்வுகள் α, β, γ ஆனுல் $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ஐத் தீர்வுகளாக உடைய சமன்பாடு காண்க.

13·1·8. சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளது படிகளின் கூட்டுத்தொகை காணல் :

(Sum of the powers of the roots of an equation)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ எனக் கொள்வோம். தீர்வுகளை 'r' படிக்கு உயர்த்தி அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $\alpha_1{}^r+\alpha_2{}^r+\alpha_3{}^r+\ldots\ldots+\alpha_n{}^r$ என்பதை S_r எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். 'படி' மிகவும் குறைவானதாக (<4) இருப்பின் சென்ற பகுதியில் செய்த முறைப்படியே S_rன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டறியலாம். 'படி' அதிகமாயின் அம்முறையில் கணக்கிட்டறிதல் எளிதன்று. உயர் 'படி'களுக்குப் பின்வரும் தேற்றங்கள், பொதுவாகப் பயன்படும்.

13·1·8 1 தேற்றம் 4.

$f(x)=0$-ன் 'r' படி கொண்ட தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகையான S_rன் மதிப்பு $\dfrac{xf^1(x)}{f(x)}$ன் விரிவில் x^{-r}ன் கெழுவிற்குச் சமமாகும்.

$f(x)=0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே $f(x)\equiv k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$

k ஒரு மாறிலி எண்.

மகை $f(x)=$ மகை $k+$ மகை $(x-\alpha_1)+$ மகை$(x-\alpha_2)$
$+\ldots\ldots+$ மகை $(x-\alpha_n)$

இருபுறமும் xஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு காணுமிடத்து

$$\frac{f(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\therefore \frac{f^1(x)}{f(x)}=\Sigma\frac{1}{x-\alpha_1}$$

$$=\Sigma\frac{1}{x\left(1-\dfrac{\alpha_1}{x}\right)}$$

$$\therefore \frac{x.f^1(x)}{f(x)}\equiv\Sigma\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{\alpha_1}{x}\right)}\right]$$

$$\equiv\Sigma\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)^{-1}$$

$$\equiv\Sigma\left(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1{}^2}{\alpha^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_1{}^r}{x^r}+\ldots\ldots\right)$$

$$\equiv n+\frac{\Sigma\alpha_1}{x}+\frac{\Sigma\alpha_1{}^2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{\Sigma\alpha_1{}^r}{x^r}+\ldots\ldots$$

இருபுறமும் x-ʳன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது,

$\Sigma S_1{}^r = \dfrac{x.f^1(x)}{f(x)}$ன் விரிவில் x^{-r}ன் கெழு ஆகும்.

எனவே $\dfrac{x f'(x)}{f(x)}$ ன் விரிவில் x^{-r}ன் கெழு

$= S_r = \alpha_1{}^r + \alpha_2{}^r + \ldots\ldots + \alpha_n{}^r$ என நிறுவப்படுகிறது.

13·1·8·2 நியூட்டன் தேற்றம் 5.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ என்பவை $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், (1) $r \leqslant n$ ஆக இருக்கும் போது $S_r + S_{r-1}\, p_1 + S_{r-2}\, p_2 + \ldots\ldots\ldots + S_1\, p_{r-1} + r p_r = 0$; (2) $r > n$ ஆக இருக்கும்போது, $S_r + S_{r-1}\, p_1 + S_{r-2}\, p_2 + \ldots\ldots + S_{r-n+1}\, p_{n-1} + S_{r-n}\, p_n = 0$

$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p^n$

$\equiv \Pi\, (x - \alpha_1)$ எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு $x = \dfrac{1}{y}$ என ஈடு செய்ய,

$$f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \Pi \left(\frac{1}{y} - \alpha_1\right)$$

$$\equiv \Pi \left(\frac{1 - \alpha_1 y}{y^n}\right)$$

$$\therefore\ y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \Pi\, (1 - \alpha_1 y)$$

ஆனால் $y^n f\left(\dfrac{1}{y}\right) \equiv y^n \left(\dfrac{1}{y^n} + \dfrac{p_1}{y^{n-1}} + \ldots\ldots \ldots + \dfrac{p_{n-1}}{y} + p_n\right)$

$$\equiv (1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots\ldots + p_n y^n)$$

$$\therefore\ (1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_n y^n) \equiv \Pi\, (1 - \alpha_1 y)$$

∴ மடக்கை காண

மகை $(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_n y^n) \equiv \Sigma$ மகை $(1 - \alpha_1 y)$

இரு பக்கங்களுக்கும் yஐ ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$\frac{p_1 + 2p_2 y + \ldots\ldots + n\, p_1 y^{n-1}}{1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_n y^n} \equiv -\Sigma\, \frac{\alpha 1}{1\ \ \alpha_1 y}$$

$\equiv -\Sigma\, (\alpha_1 + \alpha_1{}^2 y + \alpha_1{}^3 y^2 + \ldots\ldots \infty$ வரை)

$\equiv -(\Sigma\alpha_1 + \Sigma\alpha_1{}^2\, y + \Sigma\, \alpha^3{}_1\, y^2 + \ldots\ldots \infty$ வரை)

$\equiv -S_1 - S_2 y - S_3\, y^2 \ldots\ldots \infty$ வரை

$$\therefore\ (S_1 + S_2 y + S_3 y^2 + \ldots\ldots \infty)(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots\ldots p_n y^n) + (p_1 + 2p_2 y + \ldots\ldots + np_n y^{n-1}) \equiv O$$

இரு பக்கங்களிலும், மாறிலி எண்ணேயும் yன் சமன்படிகளின் கெழுக்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$$S_1 + p_1 = O \qquad \text{(மாறிலி)}$$

$$S_2 + p_1 \alpha_1 + 2p_2 = O \qquad (y\text{ன் கெழு})$$

$$S_3 + p_1 \alpha_2 + p_2 \alpha_1 + 3p_3 = O \qquad (y^2\text{ன் கெழு})$$

... ...

... ...

$\therefore$ பொதுவாக $r < n$ ஆனல்

$\alpha_r + p_1 \alpha_{r-1} + \ldots\ldots + p_{r-1} \alpha_1 + r \cdot p_r = O$ எனவும்

$r > n$ ஆனல்

$\alpha_r + p_1 \alpha_{r-1} + p_2 \alpha_{r-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} \alpha_{r-n+1} + p_n \alpha_{r-n} = O$ எனவும் பெறப்படும்.

மேலே நிறுவியுள்ள சமன்பாடுகளில் இருந்து படிப்படியாக $S_1, S_2, \ldots\ldots S_r \ldots\ldots$ காணலாம்.

13·1·8·2·1 கிளைத் தேற்றம்:

$-r$ மகை $(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_n y^n)$ ன் விரிவில் [அதாவது $-r$ மகை $\left\{y^n f\left(\frac{1}{y}\right)\right\}$ ன் விரிவில்] y^r-ன் கெழு S_rன் மதிப்பாகும்.

நியூட்டன் தேற்ற நிறுவன் முறையில்

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv 1 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + \ldots\ldots + p_n y^n$$

$\equiv \Pi(1 - \alpha_1 y)$ என நிறுவப்பட்டது.

மடக்கை கண்டு, மடக்கைத் தொடர்த் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினல்

$$\text{மகை}\left[y^n f\left(\frac{1}{y}\right)\right] \equiv \text{மகை } (1 - \alpha_1 y)$$

$$\equiv -\left(\alpha_1 y + \frac{\alpha_1^2 y^2}{2} + \frac{\alpha_1^3 y^3}{3} + \ldots\ldots\right)$$

$$-\left(\alpha_2 y + \frac{\alpha_2^2 y^2}{2} + \frac{\alpha_2^3 y^3}{3} + \ldots\ldots\right)$$

... ...

... ...

$$-\left(\alpha_n y + \frac{\alpha_n^2 y^2}{2} + \frac{\alpha_n^3 y^3}{3} + \cdots \cdots\right)$$

$$\equiv -y S_1 - \frac{y^2}{2} S_2 - \frac{y^3}{3} S_3 \cdots \cdots$$

இருபுறமும் y^rன் கெழுக்களை ஒப்பீடு செய்ய

$$-\frac{S_r}{r} = \text{மகை}\left[y^n f\left(\frac{1}{y}\right)\right] \text{ ன் விரிவில் } y^r\text{ன் கெழு}$$

$$\therefore \quad S_r = -r.\ \text{மகை}\left[y^n \cdot f\left(\frac{1}{y}\right)\right] \text{ ன் விரிவில் } y^r \text{ ன் கெழு}$$

$$= -r.\ \text{மகை}\ (1 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots \cdots + p_n y^n) \text{ ன்}$$

விரிவில் y^rன் கெழு.

13·1·3·3 எ. கா. 1.

$x^4 + 2x + 3 = 0$ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$\text{தேற்றப்படி } S_3 = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \text{ ன் விரிவில் } x^{-3}\text{-ன் கெழு}$$

$$f(x) = x^4 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2$$

$$S_3 = \frac{x(4x^3 + 2)}{x^4 + 2x + 3} \text{ ன் விரிவில் } x^{-3}\text{-ன் கெழு}$$

$$= \frac{4 + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}} \text{ ன் விரிவில் } x^{-3} \text{ ன் கெழு}$$

$$1 + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\Big)\, 4 + \frac{2}{x^3}\ \Big(4 - \frac{6}{x^3} \cdots \cdots$$

$$4 + \frac{8}{x^3} + \cdots \cdots$$

$$-\frac{6}{x^3} \cdots \cdots \cdots$$

$$-\frac{6}{x^3} \cdots \cdots \cdots$$

$$\therefore \quad S_5 = -6.$$

நியூட்டன் முறைப்படி :

$x^4 + 2x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $x^4+p_1x^3+p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$ எனக் கொண்டால் $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 2$; $p_4 = 3$.

நியூட்டன் தேற்றப்படி,

$$S_1 + p_1 = 0$$

$$\therefore\ S_1 = 0 \qquad \because\ p_1 = 0$$

$$S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$$

$$S_2 = 0 \qquad \because\ p_1 = p_2 = 0$$

$$S_3 + p_1S_2 + p_2S_1 + 3p_3 = 0$$

$$S_3 + 3 \times 2 = 0$$

$$\therefore\ S_3 = -6$$

மூன்றும் முறை :

$f(x) \equiv x^4 + 2x + 3$ எனக் கொள்க.

$x = \frac{1}{y}$ என ஈடு செய்ய

$$y^4 f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + 2y^3 + 3y^4$$

$$\text{மகை}\left[y^4 f\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \text{மகை}\left[1 + \overline{2y^3 + 3y^4}\right]$$

$$= (2y^3 + 3y^4) - \frac{(2y^3 + 3y^4)^2}{2} + \dots\dots$$

இங்கு y^3ன் கெழு 2. $\therefore\ S_3 = -3 \times 2$

$$= -6$$

எ. கா. 2

$x^7 + 5x^4 + 1 = 0$ன் தீர்வுகளின் 11-வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$x^7 + p_1x^6 + p_2x^5 + p_3x^4 + p_4x^3 + p_5x^2 + p_6x + p_7 = 0$$

எனக்கொண்டால்

$$p_1 = 0;\ p_2 = 0,\ p_3 = 5,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0,\ p_6 = 0,\ p_7 = 1$$

$$\therefore\ S_{11} + p_1S_{10} + p_2S_9 + p_3S_8 + p_4S_7 + p_5S_6 + p_6S_5 + p_7S_4 = 0$$

அதாவது $S_{11} + 5\,S_8 + S_4 = 0$ ...(1)

மேலும்

$$S_8 + p_1S_7 + p_2S_6 + p_3S_5 + p_4S_4 + p_5S_3 + p_6S_2 + p_7S_1 = 0$$

அதாவது $S_8 + 5S_5 + S_1 = 0.$ ...(2)

$$S_1 + p_1 = 0$$

$$\therefore \quad S_1 = 0 \qquad ...(3)$$

$$S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$$

$$\therefore \quad S_2 = 0 \qquad ...(4)$$

$$S_3 + p_1S_2 + p_2S_1 + 3p_3 = 0$$

$$\therefore \quad S_3 = -15$$

$$S_4 + p_1S_3 + p_2S_2 + p_3S_1 + 4p_4 = 0$$

$$S_4 + 5S_1 = 0$$

$$\therefore \quad S_4 = 0 \qquad ...(5)$$

$$S_5 + p_1S_4 + p_2S_3 + p_3S_2 + p_4S_1 + 5p_5 = 0$$

$$\therefore \quad S_5 = 0 \qquad ...(6)$$

$$\therefore \quad S_8 = 0$$

$$\therefore \quad S_{11} = 0$$

எ. கா. 3

$a + b + c = 0$ எனின்

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

என நிறுவுக.

$a + b + c = 0$ என்றிருப்பதால் a, b, c — ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இங்கு, $p_1 = 0$ ஆக இருக்கும். நியூட்டன் தேற்றப்படி,

$$S_2 + p_1 S_1 + 2 p_2 = 0$$

$$S_2 + 2 p_2 = 0$$

$$\therefore S_2 = -2 p_2$$

$$\therefore -p_2 = \frac{S_2}{2} \qquad ...(1)$$

$$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3 p_3 = 0$$

$$S_3 + 3 p_3 = 0$$

$$S_3 = -3 p_3$$

$$S_4 + p_1 S_3 + p_2 S_2 + p_3 S_1 = 0$$
$$S_4 + p_2 (-2p_2) = 0$$
$$\therefore S_4 = 2p_2^2$$
$$S_5 + p_1 S_4 + p_2 S_3 + p_3 S_2 = 0$$
$$S_5 + p_2 (-p_3) + p_3 (-2p_2) = 0$$
$$S_5 - 3p_2 p_3 - 2p_2 p_3 = 0$$
$$S_5 = 5p_2 \; p_3$$
$$\therefore \frac{S_5}{5} = p_2 \; p_3 \qquad \ldots(2)$$
$$S_7 + p_1 S_6 + p_2 S_5 + p_3 S_4 = 0$$
$$S_7 + p_2 (5p_1 p_2) + p_3 (2p_2^2) = 0$$
$$\therefore S_7 = -7p_2^2 p_3$$
$$\therefore \frac{S_7}{7} = -p_2^2 p_3 \qquad \ldots(3)$$

(1), (2) (3) லிருந்து

$$\frac{S_7}{7} = -p_2^2 \; p_3$$
$$= p_2 p_3 \cdot (-p_2)$$
$$= \frac{S_5}{5} \cdot \frac{S_2}{2}$$
$$\therefore \frac{\Sigma a^7}{7} = \frac{\Sigma a^5}{5} \cdot \frac{\Sigma a^2}{2}$$

எ. கா. 4.

$m \leqslant n$ ஆக இருப்பின் $x^n - 2x^{n-1} - 2x^{n-2} \;\ldots\ldots\ldots - 2x - 2 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 'm' படிகளின் கூட்டுத் தொகை $3^m - 1$ என நிறுவுக. $m < n$ எனின்,

$$S_m - 2S_{m-1} - 2S_{m-2} \;\ldots\ldots\ldots - S.\,2 = 0$$
$$S_{m-1} - 2S_{m-2} - \ldots\ldots\ldots - (m-1).\,2 = 0$$

கழிக்க,

$$S_m - 3S_{m-1} - 2 = 0$$
$$\therefore S_m = 2 + 3S_{m-1}$$

இது பொதுவாக. $m < n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருத்தமாகும்.

அதாவது $S_{m-1} = 2 + 3.\ S_{m-2}$

$S_{m-2} = 2 + 3.\ S_{m-3}$

... ...

... ...

$S_3 = 2 + 3.\ S_2$

$S_2 = 2 + 3.\ S_1$

$S_1 = 2$

$\therefore S_m = 2 + 3.2 + 3^2.2 + \ldots + 3^{m-2}(2+3S_{m-(m-1)})$,

$= 2 + 3.2 + 3^2 \cdot 2 + \ldots\ldots + 3^{m-2}\, 2 + 3^{m-1} S_1$

$= 2 + 3.2 + 3^2 \cdot 2 + \ldots\ldots + 3^{m-2} \cdot 2 + 3^{m-1} \cdot 2$

$= 2(1 + 3 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^{m-1})$

$$= 2\frac{(3^{m}-1)}{(3-1)} = 3^m - 1.$$

பயிற்சி 13·1 (iii)

1. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின் $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $x^3 - px^2 - r = 0$ ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை $p^3 + 3r$ என நிறுவுக.

3. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகை 36 என நிறுவுக.

4. $x^5 = x^2 + x + 1$ ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை 3 என நிறுவுக.

5. $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0$ ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை $3p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3$ என நிறுவுக.

6. $x^5 + px^3 + qx^2 + s = 0$ ன் தீர்வுகளின் நாற்படிகளின் கூட்டுத் தொகை $2p^2$ என நிறுவுக.

7. $x^3 + qx + r = 0$ ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின்

(1) $3S_2 S_5 = 5S_3 S_4$

(2) $\dfrac{\Sigma\alpha^5}{5} = \dfrac{\Sigma\alpha^3}{3} \cdot \dfrac{\Sigma\alpha^2}{2}$

என்க.

$8x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ ன் தீர்வுகளின் ஐம்படி (fifth powers) களின் கூட்டுத் தொகைகாண்க.

9. $x^3 + 3x + 9 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 9-வது படிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.

10. $x^7 - x^4 + 1 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 6-வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

11. $x^7 + 5x^4 + 1 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 11-வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.

12. $x^4 + ax + b = 0$ ன் தீர்வுகளின் 20-வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை $50a^4 b^2 - 4b^5$ என நிறுவுக.

13. $2x^4 - x + 3 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 12-வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை $-\frac{213}{16}$ என நிறுவுக.

14. $a + b + c = 0$ எனின் $3\,(\Sigma a^2)\,(\Sigma a^3) = 5\,(\Sigma a^5)\,(\Sigma a^4)$ என நிறுவுக.

15. $m < n$ ஆக இருப்பின் $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} \ldots \ldots - x - 1 = 0$ ன் தீர்வுகளின் 'm' படிகளின் கூட்டுத் தொகை $2^m - 1$ என நிறுவுக

16. $x^n - p\,x^{n-1} - p\,x^{n-2} - p\,x^{n-3} \ldots\ldots - p\,x - p = 0$ ன் தீர்வுகளின் r வது படிகளின் கூட்டுத் தொகை $(p + 1)^r - 1$ என நிறுவுக. $(r < n)$

13·2 சமன்பாடுகளின் மாற்றமைப்புக்கள்

(Transformation of Equations)

13·2·1 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\alpha_n$ என்பவை $f(x)=0$ என்ற சமன் பாட்டின் தீர்வுகளாயின், பொதுவாக $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2) \ldots\ldots \phi(\alpha_n)$ என்பனவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட மற்றெரு சமன்பாட்டை அமைப்பதே முதல் கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டின் 'மாற் றமைப்பு' எனப்படும்.

13.2·1·1 $y = \phi(x)$ எனக் கொள்வோம்.

இத் தொடர்பை $x = \phi^{-1}(y)$ என்று எழுதுவது மரபு; இதன் பொருள் யாதெனின் $y = \phi(x)$ என்பதே. [$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$, ……… போன்றவைகளோடு இஃது இணையும் முறையைக் கண் டறிக].

இப்போது

$$f(x) \equiv a_0\ (x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ \ldots\ldots\ (x-\alpha_n) = 0$$

எனக் கொள்ளலாம்.

$x = \phi^{-1}(y)$ என இங்கு ஈடு செய்தால்

$$f[\phi^{-1}(y)] \equiv a_0\ [\phi^{-1}(y)-\alpha_1]\ [\phi^{-1}(y)-\alpha_2]\ \ldots\ldots\ [\phi^{-1}(y)-\alpha_n] = 0$$

என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

இது y என்ற தேராக் கணியத்தையுடைய ஒரு சமன்பாடாகும்; இதன் அமைப்பு $F(y) = 0$ ஆகும்.

இச் சமன்பாட்டில் $\phi^{-1}(y) = \alpha_1$

$\phi^{-1}(y) = \alpha_2$

……………

…………

$\phi^{-1}(y) = \alpha_n$ என்ற தீர்வுகள் பெறப் படும்.

$x = \phi^{-1}(y)$ என்பதன் பொருள் $y \equiv \phi(x)$ என்பதே யாதலின்,

$y = \phi(\alpha_1)$

$y = \phi(\alpha_2)$

……………

……………

$y = \phi(\alpha_n)$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ $F(y) = 0$ எனப் பெற்ற சமன்பாட்டில், y ன் தீர்வுகள் $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \ldots\ldots \phi(\alpha_n)$ என்பவையாகும்.

எனவே, கூர்ந்து நோக்கின், $f(x) = 0, y = \phi(x)$ என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளிடையே x ஐ நீக்கிப் பெறப்படும் தொடர்பே நாம் வேண்டும் $F(y) = 0$ என்ற சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு: இப்பொதுவான விளக்கம் முதலிலே படிக்குங்காலை முற்றிலும் புரிய வில்லையானல், இதை விடுத்துப் பின்வரும் பகுதிகளைப் படித்து விட்டுக் கடைசியாக மறுபடியும் படித்துப் பார்க்கவும்.

இவ்வித மாற்றமைப்பின் மூலம், சில சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை எளிதில் அறிய முடியும்; சில சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாலான சமச் சீர் சார்புகளின் மதிப்பையும் எளிதில் அறிய முடியும்; மேலும் சில சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் தன்மைகளைப் பற்றி ஆராய ஏதுவாகும்.

பின் வரும் எளிய எடுத்துக் காட்டைப் பார்க்கவும்.

$y = \phi(x) = x^2$ எனக் கொள்வோம்;

$f(x) \equiv x^2 + 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டையும் கொள்வோம்.

$x = \phi^{-1}(y) = \sqrt{y}$ எனப் பெறப்படும்.

$f(x) \equiv x^2 + 5x + 6 \equiv (x+3)(x+2)$

$f[\phi^{-1}(y)] \equiv (\sqrt{y})^2 + 5(\sqrt{y}) + 6 \equiv (\sqrt{y}+3)(\sqrt{y}+2) = 0$ எனக் கொண்டால் $\sqrt{y} = -3, \ 2$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

$\therefore$ $(\sqrt{y})^2 + 5(\sqrt{y}) + 6 = 0$ன் தீர்வுகள் 9, 4 ஆகும்,

அதாவது $y + 6 = -5\sqrt{y}$ ன் தீர்வுகள் 9, 4 ஆகும்.

அதாவது $y^2 - 13y + 36 = 0$ன் தீர்வுகள் 9, 4 ஆகும்.

இவை $(-3)^2, (-2)^2$ என்பது வெள்ளிடை.

13·2·1·2 சில குறிப்பிட்ட 'மாற்றமைப்பு' வழி வகைகள் பின்னர் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்பன $f(x) = 0$ன் தீர்வுகளானல் $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots\ldots -\alpha_n$ஐத் தீர்வுகள்ாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணல்:

$f(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_{n-1}x + p_n$ எனக் கொள்வோம். எனவே

$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} \ldots\ldots + p_{n-1}x + p_n \equiv p_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_n)$

$y = -x$ ஆக ஈடு செய்யின் $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ ஆகும்போது முறையே $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots\ldots -\alpha_n$ ஆகும்.

n ஒற்றைப்படையாகவோ அல்லது இரட்டைப் படையாகவோ இருந்தால் $x=-y$ என ஈடு செய்தால்,

$f(-y)\equiv(-1)^{n}[p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}\ldots\ldots]\equiv(-1)^np_0$ $(y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\ldots\ldots(y+\alpha_n)$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே $f(-y)\equiv(-1)^np_0(y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\ldots\ldots(y+\alpha_n)$. எனவே $f(-y)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $-\alpha_1, -\alpha_2\ldots\ldots -\alpha_n$ எனத் தெரிகிறது.

எனவே $f(x)=0$ல் $x=-y$ என ஈடு செய்து பெறப்படும் $f(-y)=0$ நாம் வேண்டும் சமன்பாடாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை வைத்துக்கொண்டு குறிமாற்றிய தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாடு அமைக்கவேண்டுமாயின் உறுப்புகளுக்கு ஒன்றுவிட்டு ஒன்று குறிமாற்றி அமைத்தால் போதுமானது. இடையில் விட்டுப்போன படிகளுக்குரிய உறுப்புகளுக்கு '0' கெழு இருப்பதாகக் கொண்டே குறி மாற்றம் செய்யவேண்டும்.

13·2·1·3 எ கா. 1

$x^6-3x^5-4x^4+13x^3+7x^2+5x-3=0$ன் தீர்வுகளின் குறி மாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$y=-x$; அதாவது $x=-y$ என ஈடு செய்க.

வேண்டிய சமன்பாடு,

$(-y^6)-3(-y)^5-4(-y)^4+13(-y)^3+7(-y)^2+5(-y)-3=0$

அதாவது $y^6+3y^5-4y^4-13y^3+7y^2-5y-3=0$.

இச்சமன்பாட்டை,

$x^6+3x^5-4x^4-13x^3+7x^2-5x-3=0$ எனவே எழுதலாம்.

எ.கா. 2.

$x^7-3x^4-5x^2+2x+3=0$ன் தீர்வுகளின் குறிமாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$x^7+0\cdot x^6+0\cdot x^5-3x^4+0\cdot x^3-5\cdot x^2+2x+3=0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு.

ஒன்றுவிட்டு ஒரு கெழுக்களின் குறிமாற்றியெழுதினல் $x^7-0\cdot x^6+0\cdot x^5-(-3x^4)+0\cdot x^3-(-5x^2)+2x-3=0$; அதாவது $x^7+3x^4+5x^2+2x-3=0$ என்பது மாற்றிய சமன்பாடாகும்.

13·2·2 எ.கா. 2.

$f(x)=0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\ldots\alpha_n$ எனின் $m\alpha_1, m\alpha_2,\ldots\ldots m\alpha_n$ ஐத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$f(x) \alpha p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + p_{n-1}x + p_n$ எனக் கொள்வோம்.

$y = mx$ என்ற பொதுத் தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$x = \alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ என்ற மதிப்புகளுக்கொப்ப y முறையே $m\alpha_1, m\alpha_2, \dots\dots m\alpha_n$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது.

இங்கு $p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots\dots p_{n-1}x + p_n$

$$\equiv p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_n)$$

$y = mx$ என்ற தொடர்பின் அடிப்படையில் $x = \frac{y}{m}$ என இங்கு ஈடு செய்ய

$$p_0\left(\frac{y}{m}\right)^n + p_1\left(\frac{y}{m}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{y}{m}\right)^{n-2} + \dots\dots + p_{n-1}\left(\frac{y}{m}\right)$$

$$+ p_n \alpha p_0 \left(\frac{y}{m} - \alpha_1\right)\left(\frac{y}{m} - \alpha_2\right)\dots\dots\left(\frac{y}{m} - \alpha_n\right)$$

இருபுறமும் m^nஆல் பெருக்க

$$m^nf\left(\frac{y}{m}\right) \equiv p_0y^n + mp_1y^{n-1} + m^2p_2y^{n-2} + \dots\dots + m^{n-1}p_{n-1}y + m^np_n$$

$$\equiv p_0(y - m\alpha_1)(y - m\alpha_2) \dots \dots (y - m\alpha_n)$$

எனவே $m^n f\left(\frac{y}{m}\right) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m\alpha_1$, $m\alpha_2, m\alpha_3, \dots \dots m\alpha_n$ எனத் தெரிகிறது. எனவே தேவையான சமன்பாடு $m^n f\left(\frac{y}{m}\right) = 0$

அதாவது $p_0y^n + mp_1y^{n-1} + m^2p_2y^{n-2} + \dots\dots\dots + m^{n-1}p_{n-1}y + m^ny_n = 0$

செய்முறைக்குரிய குறிப்பு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் போல் m மடங்கு உள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களை இரண்டாவது கெழுவிலிருந்து ஆரம்பித்து r, $\alpha^2, \dots\dots \alpha^n$ ஆல் பெருக்கினால் போதுமானது. இடையே விட்டுப்போன படிகளின் கெழுக்களை 0 எனக்கொள்ள வேண்டுவதை மறந்துவிடக்கூடாது.

13·2·2· சிறப்பாக, $p_0x^m + p_1x^{m-1} + \dots\dots + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப்போல் 10 மடங்கு தீர்வுகளையுடைய சமன்பாடு,

$$p_0x^m+10p_1x^{m-1}+10^2p_2x^{m-2}+\dots\dots+10^np_n=0$$

இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து உள்ள கெழுக்களை $10, 10^2, 10^3,\dots\dots$ஆல் முறையே பெருக்கிவரும் தொகைகளே, மாற்றமைப்புச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களாகும். இங்கும் இடையே 'படி'கள் விடப்பட்டிருந்தால், அப் 'படி'களின் கெழுக்களை 0 எனக் கொள்ள வேண்டுமென்பதை மறந்துவிடக் கூடாது.

$2x^7+5x^3-2x+1=0$ன் தீர்வுகளைப் போல் 10 மடங்கு தீர்வுகள் உள்ள சமன்பாடு,

$$2x^7+10(0)x^6+10^2(0)x^5+10^3(0)x^4+10^4(5)x^3+10^5(0)x^2+10^6(-2)x+10^7=0$$

அதாவது $2x^7+5\cdot10^4\cdot x^3-2\cdot10^6x+10^7=0$

இதை நேரடியாக கடிதில் எழுதப் பழக வேண்டும். பின்னர் தோராயத் தீர்வுகள் காணும் பகுதியில் இது பயன்படும்.

13·2·3 எ.கா 3.

$f(x)=0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots\dots \alpha_n$ எனின் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \dots\dots \frac{1}{\alpha_n}$ களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$y=\frac{1}{x}$ என்ற பொதுத் தொடர்பு இங்கு பொருந்தும்.

$$f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots\dots+p_{n-1}x+p_n$$
$$\equiv p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_n)$$

இங்கு $x=\frac{1}{y}$ என ஈடு செய்ய

$$f\left(\frac{1}{y}\right)\equiv p_0\left(\frac{1}{y}\right)^n+p_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2}+\dots\dots+p_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)+p_n$$
$$\equiv p_0\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\dots\dots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)$$

இருபுறமும் y^n ஆல் பெருக்க.

$$y^nf\left(\frac{1}{y}\right)\equiv y^np_n+p_{n-1}y^{n-1}+p_{n-2}y^{n-2}+\dots\dots+p_1y+p_0$$
$$\equiv p_0(1-y\alpha_1)(1-y\alpha_2)\dots\dots(1-y\alpha_n)$$

எனவே $y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha}, \dots \dots \frac{1}{\alpha_3}$ எனத் தெரிகிறது.

எனவே வேண்டிய சமன்பாடு $y^n \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$.

எ. கா. 4

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு $x^4 - 3x^3)$ $+ 2x + 1 = 0$ எனின் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

அதாவது $x^4 + 2x^3 - 3x + 1 = 0$.

13·2·4 எ.கா. 5

$f(x) = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots \alpha_n$ எனின் α_1^2, α_2^2 $\dots \dots \alpha_n^2$ களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$y = x^2$ என்ற பொதுத் தொடர்பு இங்கு பொருந்தும்.

$$f(x) \equiv p_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots \dots (x - \alpha_n)$$

$$\therefore\ f(-x) \equiv p_0 (-x - \alpha_1)(-x - \alpha_2) \dots \dots (-x - \alpha_n)$$

$$f(x) \cdot f(-x) \equiv p_0^2 (\alpha_1^2 - x^2) \alpha_2^2 - x^2) \dots \dots (\alpha_n^3 - x^2)$$

$x^2 = y$ என ஈடு செய்ய

$$f(x) \cdot f(-x) \equiv p_0^2 (\alpha_1^2 - y)(\alpha_2^2 - y) \dots \dots (\alpha_n^2 - y)$$

எனவே $f(x) . f(-x) \equiv p_0^2 (\alpha_1^2 - y)(\alpha_2^2 - y) \dots \dots$ $(\alpha_n^2 - y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டால் y-ன் தீர்வுகள் $\alpha_1^2, \alpha_2^2 \dots \dots \alpha_n^2$ எனத் தெரிகிறது, எனவே $f(x)$ $f(-x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வலது கைப்புறத்தில் $y = x^2$ என ஈடு செய்து எழுதப் பெறும் சமன்பாடே நாம் வேண்டும் சமன்படாகும்.

குறிப்பு :

$f(x) \times f(-x)$ன் பெருக்குத் தொகையில் x^2ம், x^2ன் படிகளுமே தோன்றும்; மாறிலியும் தோன்றும். எனவே $x^2 = y$ என ஈடு செய்வது முற்றிலும் சாத்தியமாகும். பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் இதை மேலும் விளக்கும்.

13.2·4.1 எ.கா. 6.

$x^3-x^2+8x-6=0$ன் தீர்வுகளாது இருபடிகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$f(x) \equiv x^3-x^2+8x-6$$
$$f(-x) \equiv -x^3-x^2-8x-6$$
$$f(x)\cdot f(-x) = -(x^3-x^2+8x-6)(x^3+x^2+8x+6)$$
$$= -[(x^3+8x)-(x^2+6)][(x^3+8x)+(x^2+6)]$$
$$= -[(x^3+8x)^2-(x^2+6)]$$
$$= -[x^2(x^2+8)^2-(x^2+6)^2]$$

$y=x^2$ என ஈடு செய்ய,

மேல் கூறப்பட்டது $= -[y(y+8)^2-(y+6)^2]$

$$= -[y^3+16y^2+64y-y^2-12y-36]$$
$$= -y^3-15y^2-52y+36$$

∴ வேண்டிய சமன்பாடு

$$y^3+15y^2+52y-36=0$$

நடைமுறையில் பின்வரும் முறையைக் கடைப்பிடிக்கலாம்.

இரட்டைப் படிகள் (மாறிலியும் கூட) உள்ள உறுப்புகளை ஒரு புறமும், ஒற்றைப் படிகள் உள்ள உறுப்புகளை மற்றொரு புறமும் கொண்டு சமன்பாட்டை யெழுதுக.

இங்கு $x^3-x^2+8x-6=0$ என்பதை

$x^3+8x=x^2+6$ என எழுதுக.

இப்போது $x(x^2+8)=x^2+6$.

இரு பக்ககங்களையும் இருபடிக்குயர்த்தினால் $x^2(x^2+8)^2=(y+6)^2$ என்பது பெறப்படும்.

$y=x^2$ என ஈடு செய்ய, நாம் வேண்டும் சமன்பாடு $y(y+8)^2=(y+6)^2$ எனப் பெறப்படும். சுருக்கியெழுதினால், $y^3+15y^2+52y-36=0$ எனப் பெறலாம்.

எ.கா. 7.

$x^4+5x^3-4x^2+6x-9=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின் இருபடிகள் கொண்ட தீர்வு காண்க :

$y=x^2$ என்பது பொதுத் தொடர்பு.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^4-4x^2-9 = -5x^3-6x.$$
$$= -x(5x^2+6)$$

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்கு உயர்த்த,

$(x^4-4x^2-9)^2 = x^2(5x^2+6)^2$ பெறப்படும்.

இங்கு $y=x^2$ என ஈடு செய்ய,

$(y^2-4y-9)^2 = y(5y+6)^2$ என்ற நாம் வேண்டும் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

13·2·5 எ.கா.8.

$f(x)=0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ ஆனுல் $\alpha_1-h, \alpha_2-h \ldots\ldots \alpha_n-h$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இங்கு $y=x-h$ என்பது பொதுத் தொடர்பு

$$f(x) \equiv p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$$

$x=y+h$ என ஈடு செய்ய

$$f(y+h) \equiv p_0(y+h-\alpha_1)(y+h-\alpha_2)\ldots\ldots(y+h-\alpha_n)$$
$$\equiv p_0(y-\overline{\alpha_1-h})(y-\overline{\alpha_2-h})\ldots\ldots(y-\overline{\alpha_n-h})$$

எனவே $f(y+h)+0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α_1-h, $\alpha_2-h, \ldots\ldots \alpha_n-h$ எனப்பெறப்படும்.

∴ தேவையான சமன்பாடு $f(y+h)=0$.

அதாவது

$$p_0(y+h)^n+p_1(y+h)^{n-1}+p_2(y+h)^{n-2}+\ldots+p_{n-1}(y+h)$$
$$+p^n = 0$$

இம் முறையை யொட்டி,

$x^3-4x^2+3x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் 2 குறைந்த சமன்பாடு காண்க.

$y=x-2$

∴ $x=y+2$.

∴ வேண்டிய சமன்பாடு :

$$(y+2)^3-4(y+2)^2+3(y+2)-1=0$$

சுருக்கி எழுதினல்,

$$y^3+2y^2-y-3=0.$$

இதை $x^3+2x^2-x-3=0$ எனவும் எழுதலாம்.

*f*13·2·5·1 $f(y+h)$ன் விரிவு காணும் முறைகள்:

1. $f(y+h) \equiv l_0y^n+l_1y^{n-1}+l_2y^{n-2}+\ldots\ldots+l_{n-1}y+l_n$ (1)

எனக்கொள்வோம்.

$y=0$ என ஈடு செய்ய

$$l_n = f(h)$$

yன் சார்பாக (1)ன் வகைக் கெழு கண்டு $y=0$ என ஈடு செய்ய

$$l_{n-1} = f'(h)$$

yன் சார்பாக (1)ஐ r முறை தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு கண்டு $y=0$ என ஈடு செய்ய

$$\angle r \cdot l_{n-r} = f^r(h)$$

$$\therefore \quad l_{n-r} = \frac{f^r(h)}{\angle r}$$

n முறை தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு கண்டு $y=0$ என ஈடு செய்ய

$$\angle n \cdot l_0 = f^n(h)$$

$$\therefore \; l_0 = \frac{f^r(h)}{\angle n}$$

எனவே,

$$f(y+h) = \frac{f^n(h)}{\angle n} y^n + \frac{f^{(n-1)}(h)}{\angle n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{f^{n-r}(h)}{\angle n-r} y^{n-r} + \ldots\ldots + \frac{f^1(h)}{\angle 1} y + f(h)$$

குறிப்பு :-

டெய்லர் (Tayl r), மக்லாரின் (McLaurin) விரிவுகளை வகை நுண் கணிதத்தில் காண்க.

2. மற்றொரு முறையில் $f(y+h)$ன் விரிவு காணல் ;

$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_n$ எனக் கொள்வோம்.

$F(y) \equiv f(y+h) \equiv l_0 y^n + l_1 y^{n-1} + \ldots\ldots = l_{n-1} y + ln$ என எழுதுவோம்.

இங்கு $l_0, l_1, l_2 \ldots\ldots l_n$ காணவேண்டும்.

மீண்டும் இங்கு $y = x-h$ என ஈடு செய்ய,

$f(x-h) = f(x) \equiv l_0(x-h)^n + l_1(x-h)^{n-1} + \ldots\ldots + l_{n-1}\;(x \quad h) + l^n$ ஆகும்.

$f(x)$ஐ$(x-h)$ஆல் வகுத்தால், மீதி l_n வகுத்து வந்ததை மறு படியும் $(x-h)$ஆல் வகுத்தால் மீதி l_{n-1} ;

அப்படி வகுத்து வந்ததை மறுபடியும் $(x-h)$ஆல் வகுத்தால், மீதி l_{n-2}.

எனவே $f(x)$ ஐ, ஒன்றன் பின் ஒன்ருக $(x-h)$ ஆல் வகுக்க, வகுக்க முறையாக வரும் மீதிகள் $l_n, l_{n-1}, l_{n-2}, \ldots\ldots$ கிடைக் கப்பெறும்.

$l_0 = p_0$ என்பது வெளிப்படை. இம்முறையைப் பயன்படுத்தி, $f(y+h)$ன் விரிவில் கடைசியிலிருந்து $l_n, l_{n-1} \ldots\ldots l_1, l_0$ யாவற்றையும் பெறுவது நடைமுறையில் மிக எளிதாகக் கடைப்பிடிக்கக் கூடிய முறையாகும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு (i)ஐக் காண்க.

13.2.5.2 எ. கா. 1.

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11 = 0$ன் தீர்வுகளைவிட நான்கு குறைவாகவுள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

அல்லது

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11 = 0$ன் தீர்வுகளை நான்கு குறைக்கவும்.

முதல் முறை :

$$f(x) \equiv x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11$$
$$f'(x) \equiv 4x^3 - 15x^2 + 14x - 17$$
$$f''(x) \equiv 12x^2 - 30x + 14$$
$$f'''(x) \equiv 24x - 30$$
$$f^{iv}(x) \equiv 24$$
$$f(4) = 256 - 320 + 112 - 68 + 11 = -9$$
$$f'(4) = 256 - 240 + 56 - 17 = 55$$
$$f''(4) = 192 - 120 + 14 = 86$$
$$f'''(4) = = 96 - 30 = 66$$
$$f^{iv}(4) = 24.$$
$$f(y+4) = \frac{f^{iv}(4)y^4}{\angle 4} + \frac{f'''(4)}{\angle 3}y^3 + \frac{f''(4)}{\angle 2}y^2 + \frac{f'(4)}{\angle 1}y + f(4)$$
$$= y^4 + 11y^3 + 43y^2 + 55y - 9$$

எனவே வேண்டிய சமன்பாட்டை

$y^4 + 11y^3 + 43y^2 + 55y - 9 = 0$ என்றே

அல்லது $x^4 + 11x^3 + 43x^2 + 55x - 9 = 0$ என்றே எழுதலாம்.

ஆனால் இந்த முறையைவிட, அடுத்து காட்டப்படும் முறையே நடைமுறையில் எளிது, பெரிதும் கடைப்பிடிக்கப்படுவதாகும்.

13.2.5·3 இரண்டாவது முறை : தொகுமுறை வகுத்தல் :

$x-4$ ஆல் வகுத்து, தொடர்ந்து வரும் மீதிகளைப் பின்வருமாறு கணக்கிடுவோம் :

4	1	-5	$+7$	-17	$+11$
	0	$+4$	-4	$+12$	-20
	1	-1	$+3$	-5	-9
	0	$+4$	$+12$	$+60$	
	1	$+3$	$+15$	$+55$	
	0	$+4$	$+28$		
	1	$+7$	$+43$		
	0	$+4$			
	1	$+11$			
	0				
	1				

வேண்டிய சமன்பாடு அல்லது மாற்றியமைத்த சமன்பாடு $x^4+11x^3+43x^2+55x-9=0$.

எ.கா. (2)

$x^5+4x^3-x^2+11=0$ன் தீர்வுகளுக்கு மூன்று குறைவாகவுள்ள எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

(அல்லது)

$x^5+4x^3-x^2+11=0$ன் தீர்வுகளை 3 குறைக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு முற்றுப்பெற்றதாக இல்லாவிடின் விட்டுப்போன உறுப்புகளின் கெழுக்களைப் பூச்சியமாகக்கொள்ள வேண்டும் இது முக்கியமாக கவனத்திலிருக்க வேண்டிய ஒன்றாகும்.

$x-3$ ஆல் வகுத்துத் தொடர்ந்து வரும் மீதிகளைப் பின்வருமாறு கணக்கிடுவோம்.

3	1	+ 0	+ 4	− 1	+ 0	+ 11
	0	+ 3	+ 9	+ 39	+ 114	+ 342
	1	+ 3	+ 13	+ 38	+ 114	+ 353
	0	+ 3	+ 18	+ 93	+ 393	
	1	+ 6	+ 31	+ 131	+ 507	
	0	+ 3	+ 27	+ 174		
	1	+ 9	+ 58	+ 305		
	0	+ 3	+ 36			
	1	+ 12	+ 94			
	0	+ 3				
	1	+ 15				
	0					
	1					

எனவே மாற்றியமைத்த சமன்பாடு

$$x^5 + 15x^4 + 94x^3 + 305x^2 + 507x + 353 = 0$$

13·2·5·4 குறிப்பு.

$f(x)$ ன் தீர்வுகளுக்கு h அதிகமான தீர்வுகளுள்ள சமன்பாடு காண $f(x)$ ன் தீர்வுகளுக்கு $(-h)$ குறைவான தீர்வுகளுள்ள சமன்பாடு கண்டால் போதுமானது.

$y = x + h$ எனக் கொண்டு

$f(x)$ ல் $x = y - h$ என ஈடு செய்ய,

$f(y-h) \equiv p_0(y-h)^n + p_1(y-h)^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1}(y-h) + p_n = 0$ என்ற சமன்பாடே நாம் வேண்டும் சமன்

பாடாகும்: இங்கும் மேற்கூறப்பட்ட இரு முறைகளையும் எடுத்தாளலாம்.

எ. கா. 3

$x^5 + 7 = 0$ ன் தீர்வுகளுக்கு 'ஒன்று' அதிகமான தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

ஒன்று அதிகப்படுத்துவதற்கு -1 குறைவு படுத்தினால் போதுமானது: தொகு முறை வகுத்தலிலும் -1 குறைவு படுத்தலாம். $x + 1$ ஆல் வகுத்து தொடர்ந்து வரும் மீதிகளைப் பின் வருமாறு காண்போம்.

−1	1	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 7
	0	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1
	1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	+ 6
	0	− 1	+ 2	− 3	+ 4	
	1	− 2	+ 3	− 4	+ 5	
	0	− 1	+ 3	− 6		
	1	− 3	+ 6	− 10		
	0	− 1	+ 4			
	1	− 4	+ 10			
	0	− 1				
	1	− 5				
	0					
	1					

மாற்றியமைத்த சமன்பாடு $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 6 = 0$

13·2·6 குறிப்பிட்ட உறுப்பு நீக்கிய மாற்றமைப்பு முறைகள் :

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ல் x^2 கொண்ட உறுப்பு இல்லாத வாறு மாற்றுயமைத்த சமன்பாடு காண்க: தீர்வுகளை விட h குறைவாக உள்ள தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடு,

$$(x + h)^3 + p(x + h)^2 + q(x + h) + r = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,

$x^3 + (3h + p)x^2 + (3h^2 + 2ph + q)x + h^3 + ph^2 + qh + r = 0$

இதில் x^2 கொண்ட உறுப்பு இல்லாமல் இருக்க வேண்டுமெனில் $h = -\frac{p}{3}$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை $-\frac{p}{3}$ குறைத்து, அதாவது $\frac{p}{3}$ அதிகப்படுத்திச் சமன்பாடு காண்போம்.

அதாவது $y = x + \frac{p}{3}$ என்ற பொதுத் தொடர்புகொள்வோம்

$\therefore \quad x = y - \frac{p}{3}$ என ஈடு செய்ய,

$$\left(y - \frac{p}{3}\right)^3 + p\left(y - \frac{p}{3}\right)^2 + q\left(y - \frac{p}{3}\right) + r = 0$$

என்ற சமன்பாடு பெறப்படும். இதில் y^2 என்ற உறுப்பு தோன்றாது.

அதாவது y^2 ன் கெழு $= 0$ ஆகும்.

விரித்தெழுதினால்

$$y^3 - py^2 + \frac{p^2}{3}y - \frac{p^3}{27} + py^2 - \frac{2p^2y}{3} + \frac{p^3}{9} + qy - \frac{pq}{3} + r = 0$$

அதாவது

$$y^3 + \left(-\frac{p^2}{3} + q\right)y + \left(r - \frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27}\right) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில், கெழுக்கள் ஈருறுப்புத் தேற்றக் கெழுக்களாகக் கொண்டால், மாற்றமைப்பு சீராகிவிருக்கும்.

அதாவது, $x^3 + 3p\,x^2 + 3\,qx + r = 0$ எனக் கொண்டு, x^2 உறுப்பு நீக்கப்பட்ட சமன்பாடு காண்போம். இங்கு $h = -p$, அதாவது, சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை p அதிகப்படுத்திச் சமன்பாடு காண்போம். $y = x + p$ என்ற பொதுத் தொடர்பு கொண்டு, $x = y - p$ என ஈடு செய்வோம்.

அப்போது கிடைக்கும் சமன்பாடு,

$(y - p)^3 + 3p\,(y - p)^2 + 3q\,(y - p) + r = 0$ ஆகும்.

அதாவது,

$$y^3 - 3p\,y^2 + 3p^2\,y - p^3 + 3p\,y^2 - 6p^2\,y + 3p^3 + 3qy - 3pq + r = 0$$

அதாவது,

$y^3 + 3\,(q - p^2)\,y + (r - 3pq + 2p^3) = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இவ்வாறே $x^4 + px^3 + qx^2 + r\,x + s = 0$ ல் x^3 கொண்ட உறுப்பு இல்லாதவாறு மாற்றியமைக்க இதன் தீர்வுகளை விட $-\frac{p}{4}$ குறைவான தீர்வுகள் கொண்ட தீர்வாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண வேண்டும்.

மேலும் சமன்பாட்டை $x^4 + 4p\,x^3 + 6q\,x^2 + 4r\,x + s = 0$ எனக் கொண்டால், தீர்வுகளை $-p$ குறைத்து, அல்லது தீர்வுகளை p அதிகப்படுத்திய தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காணவேண்டும். பொதுவாக,

$x^n + p_1\,x^{n-1} + p_2\,x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}\,x + p_n = 0$ ல் x^{n-1} உறுப்பு இல்லாதவாறு மாற்றியமைக்கும் முறையாவது :

இதன் தீர்வுகளை $-\frac{p_1}{n}$ குறைத்து அல்லது தீர்வுகளை $\frac{p_1}{n}$ அதிகப்படுத்திய தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காணவேண்டும்.

சமன்பாட்டமைப்பில் ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் தோன்றுமாயின், என்ன செய்ய வேண்டுமென எளிதில் அறியலாம்.

எ. கா.

$x^4 - 12\,x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கிய சமன்பாடு காண்க.

$y = x - h$ எனக் கொள்க

அதாவது $x = y + h$

எனவே 'h' குறைக்கப்பட்ட தீர்வுகள் உள்ள சமன்பாடு,

$$(y + h)^4 - 12\ (y + h)^3 + (y + h)^2 - (y + h) + 1 = 0$$

விரித்தெழுதினுல்,

y^3ன் கெழு $= 4h - 12$

இவ்வுறுப்பு நீக்கப்பட வேண்டுமாயின்

$4h - 12 = 0$, அதாவது $h = 3$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை '3' குறைத்த சமன்பாடு கண்டால் போதுமானது:

3	1	− 12	+ 1	− 1	+ 1
	0	+ 3	− 27	− 78	− 237
	1	− 9	− 26	− 79	− 236
	0	+ 3	− 18	− 132	
	1	− 6	− 44	− 211	
	0	+ 3	− 9		
	1	− 3	− 53		
	0	+ 3			
	1	+ 0			

எனவே இரண்டாம் உறுப்பு நீக்கிய சமன்பாடு

$$x^4 - 53\,x^2 - 211\,x - 236 = 0$$

13·2·7 பொது மாற்றமைப்பு: செயன் முறை

(The general transformation)

$f(x) = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ எனின் $\phi(\alpha_1)$ $\phi(\alpha_2), \ldots \phi(\alpha_n)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க:

முதல் தேற்றத்தை மறுபடியும் பார்க்க.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்பது $f(x) = 0$ இன் தீர்வுகள். $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2) \ldots\ldots \phi(\alpha_n)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணவேண்டும்.

$\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2) \ldots\ldots \phi(\alpha_n)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு $F(y) = 0$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே $y = \phi(\alpha_1)$ என்ற பொதுத் தொடர்பு கொள்ள வேண்டும்.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்பன $f(x) = 0$ ன் தீர்வாதலின் $x = \alpha_1$ என்ற தீர்வுக் கொப்ப

$y = \phi(\alpha_1)$; அவ்வாறே பிறவும்.

$\therefore$ $f(x) = 0, y = \phi(x)$ என்ற இரு சமன்பாடுகளில் இருந்தும் x ஐ நீக்க y-ல் நமக்குத் தேவையான சமன்பாடு $F(y) = 0$ கிடைக்கும்.

இதனைச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் எளிதில் விளக்கலாம். நீக்கல் முறைகளைப் பயிற்சி மூலமே அறிந்துகொள்ள முடியும். பொது விதிகள் என, எதுவும் பாகுபடுத்திக் கூறமுடியாது. பழக்கத்திலே தான் கைவரப்பெறும்.

13·2·8·1 எ. கா. 1.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின் $\alpha - \frac{1}{\beta\gamma}, \beta - \frac{1}{\alpha\gamma}, \gamma - \frac{1}{\alpha\beta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$\Sigma\alpha = -p$$
$$\Sigma\alpha\beta = q$$
$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$$y = \alpha - \frac{1}{\beta\gamma} \text{ என வைக்கவும்.}$$
$$= \alpha - \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$
$$= \alpha - \frac{\alpha}{-r}$$
$$= \alpha + \frac{\alpha}{r}$$

$\therefore$ $y = x + \frac{x}{r}$ [$\therefore$ α கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்] என்பது பொதுத் தொடர்பாகும்.

$$y = x\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$\therefore \quad x = \frac{yr}{1+r} \qquad \ldots(1)$$

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad \ldots(2)$$

தேவையான சமன்பாடு கிடைக்க (1), (2)லிருந்து x-ஐ நீக்கவும்.

$$\left(\frac{yr}{1+r}\right)^3 + p\left(\frac{yr}{1+r}\right)^2 + q\left(\frac{yr}{1+r}\right) + r = 0$$

$$r^2 y^3 + pr(1+r)y^2 + q(1+r)^2 y + (1+r)^3 = 0$$

என்பது வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

எ. கா. 2.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின் $\beta\gamma - \alpha^2, \gamma\alpha - \beta^2, \alpha\beta - \gamma^2$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$\Sigma\alpha = -p$$
$$\Sigma\alpha\beta = q$$
$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$y = \beta\gamma - \alpha^2$ என வைக்கவும்.

$$= \frac{\alpha\beta\gamma - \alpha^3}{\alpha} \qquad [\because \alpha\beta\gamma = -r]$$

$$= \frac{-r - \alpha^3}{\alpha}$$

α ஒரு தீர்வாதலின்

$y = \dfrac{-r - x^3}{x}$ என்பது பொதுத்தொடர்பு ஆகும்.

$$\therefore \quad x^3 + yx + r = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1), (2) லிருந்து x-ஐ நீக்கத் தேவையான சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(2) −(1) :

$$px^2 + qx - yx = 0$$

அதாவது $x(px + q - y) = 0$

அதாவது $x = 0$ அல்லது $px + q - y = 0$

$x = 0$ இருக்க முடியாதாதலின்

$$px + q - y = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{y - q}{p}$$

எனவே தேவையான சமன்பாடு

$$\left(\frac{y-q}{p}\right)^3 + p\left(\frac{y-q}{p}\right)^2 + q\left(\frac{y-q}{p}\right) + r = 0$$

அதாவது,

$$y^3 + (p^2 - 3q)\,y^2 + (3q^2 - p^2q)\,y + p^3r - q^3 = 0.$$

13.2·9 எ.கா. 3

$x^3 + qx + r = O$ ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின், $(\beta-\gamma)^2$, $(\gamma-\alpha)^2$, $(\alpha-\beta)^2$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$\Sigma\alpha = O$$

$$\Sigma\alpha\beta = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$y = (\beta-\gamma)^2$ என வைக்கவும்.

$$\therefore\ y = (\beta+\gamma)^2 - 4\beta\gamma$$

$$= (-\alpha)^2 - \frac{4\alpha\beta\gamma}{\alpha}$$

$$= \alpha^2 - \frac{4(-r)}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 4r}{\alpha} \qquad [\because\ \alpha \text{ ஒரு தீர்வு}]$$

$\therefore\ y = \dfrac{x_3 + 4r}{x}$ என்பது $\left\{\begin{array}{l} x^3 + qx + r = O. \\ \therefore x^3 + 4r = 3r - qx \end{array}\right.$

பொதுத் தொடர்பாகும்.

$$\therefore\ y = \frac{3r - qx}{x}$$

$$\therefore\ yx + qx = 3r$$

$$\therefore\ x = \frac{3r}{y+q} \qquad \ldots(1)$$

$$x^3 + px + r = O \qquad \ldots(2)$$

(1), (2) லிருந்து xஐ நீக்க

$$\left(\frac{3r}{y+q}\right)^3 + q\left(\frac{3r}{y+q}\right) + r = O \text{ பெறப்படும்.}$$

அதாவது, $27r^3 + 3qr\,(y+q)^2 + r\,(y+q)^3 = O$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$$y^3 + 6qy^2 + 9q^2y + 4q^3 + 27r^2 = O$$

13.2·9·1 சிறப்பு எடுத்துக் காட்டு 3(a)

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = O$$

இது ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு.

இதன் தீர்வுகள் α, β, γ எனக் கொண்டால், $a_0\alpha + a_1, a_0\beta + a_1, a_0\gamma + a_1$ என்ற தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண்போம்.

$y = a_0x + a_1$ என்ற பொதுத் தொடர்பு பொருந்தும்.

$\therefore \quad x = \dfrac{y-a_1}{a_0}$ என ஈடு செய்ய,

$$a_0\left(\frac{y-a_1}{a_0}\right)^3 + 3a_1\left(\frac{y-a_1}{a_0}\right)^2 + 3a_2\left(\frac{y-a_1}{a_0}\right) + a_3 = O$$

என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

இதைச் சுருக்கினால்,

$$y^3 + 3y(a_0a_2 - a_1^2) + (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3) = O$$

அதாவது $y^3 + 3Hy + G = O$ என்ற அமைப்பில் பெறப்படும்.

இங்கு $H \equiv a_0a_2 - a_1^2$

$G \equiv a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$ எனக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது.

இந்த $y^3 + 3Hy + G = O$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் p, q, r ஆனால்,

$(q-r)^2, (r-p)^2, (p-q)^2$ என்ற தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாட்டை முன் கண்ட முறைப்படி அமைக்கலாம். இப்படி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $a_0^2(\beta-\gamma)^2$, $a_0^2(\gamma-\alpha)^2, a_0^2(\alpha-\beta)^2$ ஆகும். (13·2·9ம் 13·6·5ம் காண்க.)

[சமன்பாடு $z^3 + 18Hz^2 + 81H^2z + 27(G^2 + 4H^3) = O$ எனப் பெறப்படும். (13·6·5 காண்க.)

13·2 9·2 எ. கா. 4

$x^3+2x^2+3x+3=0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின் $\Sigma\dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} = 13$ என நிறுவுக.

$$\Sigma\alpha = -2$$
$$\Sigma\alpha\beta = 3$$
$$\alpha\beta\gamma = -3$$

$y = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ என வைக்கவும்.

$= \dfrac{x}{x+1}$ [∴ α ஒரு தீர்வு]

$yx+y=x$

$\because \quad x = \dfrac{y}{1-y}$ ...(1)

$x^3+2x^2+3x+3=0$ ...(2)

(1), (2)லிருந்து xஐ நீக்க

$$\left(\frac{y}{1-y}\right)^3+2\left(\frac{y}{1-y}\right)^2+3\left(\frac{y}{1-y}\right)+3=0$$

$$y^3+2y^2(1-y)+3y(1-y)^2+3(1-y)^3=0$$

$$y^3-5y^2+6y-3=0$$

இதன் தீர்வுகள் $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \dfrac{\beta}{\beta+1}, \quad \dfrac{\gamma}{\gamma+1}$

இவைகளின் இருபடிகளைத் தீர்வாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண

$z = \dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}$ என வைக்கவும்.

$= y^2$. $\left[\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\text{ ஒரு தீர்வாதலின், } y = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right]$

$\therefore \quad z=y^2$ ...(3)

$y^3-5y^2+6y-3=0$ ...(4)

(3), (4)லிருந்து yஐ நீக்க

$$y^3+6y=5y^2+3$$

அதாவது $y(y^2+6)=5y^2+3$

இரு பக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்த

$$y^2(y^2+6)^2=(5y^2+3)^2$$

$\therefore \quad z(z+6)^2=(5z+3)^2$

$$z^3-13z^2+6z-9=0$$

இதன் தீர்வுகள் $\dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}, \quad \dfrac{\beta^2}{(\beta+1)^2}, \quad \dfrac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2}$

தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை $\Sigma \dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} = \dfrac{-(-13)}{1}$

$$\therefore \Sigma \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}=13$$

எ. கா. 5

$x^2(x+1)^2-k(x-1)(2x^2+x+1)=0$ என்ற சமன்பாட்டில் α, ஒரு தீர்வு ஆனுல் $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ம் ஒரு தீர்வு என நிறுவுக.

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{\beta+1}{\beta-1}, \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \frac{\delta+1}{\delta-1}$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்போம்.

பொதுத் தொடர்பு $y=\frac{x+1}{x-1}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad x = \frac{y+1}{y-1} \qquad ...(1)$$

$$x^2(x+1)^2-k(x-1)(2x^2+x+1)=0 \quad ...(2)$$

(1), (2)லிருந்து xஐ நீக்க

$$\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \left\{\frac{y+1}{y-1}+1\right\}^2 -k\left\{\frac{y+1}{y-1}-1\right\} \left\{2\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2+\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+1\right\} = 0$$

$$(y+1)^2(2y)^2-k2\cdot(y-1)\ \{2(y+1)^2+y^2-1+(y-1)^2\} = 0$$

அதாவது, $4y^2(y+1)-k.2\,(y-1)\ \{4y^2+2y+2\} = 0$

அதாவது, $y^2(y+1)^2-k(y-1)(2y^2+y+1) = 0$ ஆகும்.

மாற்றியமைத்த சமன்பாடும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடும் ஒன்ருகஇருப்பதால் $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ என்பதும் $x^2(x+1)^2 - k\,(x-1)\,(2+x^2x+1) = 0$ன் ஒரு தீர்வாகும்.

எ. கா. 6

α என்பது $x^7-1=0$ன் ஒரு கற்பனைத் தீர்வானுல் $\alpha+\alpha^6, \alpha^2+\alpha^5, \alpha^3+\alpha^4$ ஐத் தீர்வாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

α ஒரு தீர்வாதலின் $\alpha^7-1=0$ அதாவது

$$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

அதாவது $(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0 \quad (1)$

$[\because \alpha \neq 1]$

நாம் வேண்டும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை

$$\Sigma_1 = (\alpha+\alpha^6)+(\alpha^2+\alpha^5)+(\alpha^3+\alpha^4)$$

$$= \alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$$

$$= -1 \qquad [(1)\text{ன் படி}]$$

தீர்வுகள் இரண்டிரண்டாக எடுத்துப் பெருக்கியதன் கூட்டுத் தொகை.

$$\Sigma_2 = (\alpha + \alpha^6)(\alpha^2 + \alpha^5) + (\alpha + \alpha^6)(\alpha^3 + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^5)(\alpha^3 + \alpha^4)$$
$$= \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{11} + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^9$$
$$= \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha + \alpha^2$$
$$= 2(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 \quad (\because \alpha^7 = 1)$$
$$= 2(-1)$$
$$= -2.$$

தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை

$$\Sigma_3 = (\alpha + \alpha^6)(\alpha^2 + \alpha^5)(\alpha^3 + \alpha^4)$$
$$= (\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{11})(\alpha^3 + \alpha^4)$$
$$= \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{11} + \alpha^{14} + \alpha^7 + \alpha^{10} + \alpha^{12} + \alpha^{15}$$
$$= \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha^4 + 1 + 1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha \qquad (\because \alpha^7 = 1)$$
$$= 2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1.$$

தேவையான சமன்பாடு

$$x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0$$

அதாவது $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 13.2

1. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha, \beta\ \gamma$ ஆனல் பின் கொடுக்கப்பட்டவைகளைத் தீர்கவுளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் காண்க :

(i) $\beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta$

(ii) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

(iii) $\alpha^2 + \alpha,\ \beta^2 + \beta,\ \gamma^2 + \gamma$

(iv) $\alpha(\beta + \gamma),\ \beta(\gamma + \alpha),\ \gamma(\alpha + \beta)$

(v) $\beta^2 + \gamma^2,\ \gamma^2 + \alpha^2,\ \alpha^2 + \beta^2$

2 $x^3 + qx + r = 0$ ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனல் பின் கொடுக்கப்பட்டவைகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் காண்க :

(i) $\beta+\gamma-2\alpha,\ \gamma+\alpha-2\beta,\ \alpha+\beta-2\gamma$

(ii) $\beta\gamma+\alpha,\ \gamma\alpha+\beta,\ \alpha\beta+\gamma$

(iii) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\quad (\beta-\gamma)(\beta-\gamma),$

$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

(iv) $\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta},\ \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}.$

(v) $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$

(vi) $\frac{1}{\beta+\gamma-\alpha},\ \frac{1}{\gamma+\alpha-\beta},\ \frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}.$

(vii) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),\ \beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right),\ \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

(viii) $\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha},\ \frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-2\beta},\ \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$

(ix) $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha},\ \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\beta},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}$

(x) $\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}-\frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3},$

$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}-\frac{1}{\gamma^3}$

3. $x^3-3x+1=0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனால் பின் கொடுக்கப்பட்டவைகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் காண்க.

(i) $\alpha-2,\ \beta-2,\ \gamma-2$

(ii) $(\alpha-2)^2, (\beta-2)^2, (\alpha-2)^2$

(iii) $\frac{1}{(\alpha-2)^2},\ \frac{1}{(\beta-2)^2},\ \frac{1}{(\alpha-2)^2}$

4. $x^4-7x^3+8x^2-5x+10=0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனால் $\Sigma(\alpha^2+2)=166$ என நிறுவுக.

5. $x^3+px^2+qx+r=0$ன் தீர்வுகள் $\alpha\cdot\beta, \gamma$ ஆனால் $\alpha^2+\alpha,\ \beta^2+\beta,\ \gamma^2+\gamma$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

6. $x^3+px^2+qx+r=0$ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனால் $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

7. $\alpha\ \beta\cdot\gamma$ என்பவை $x^3+2x^2+3x+3=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால்,

$\Sigma \frac{\alpha_3}{(\alpha + 1)^2} = 13$ என நிறுவுக.

8. α, β, γ என்பவை $x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல்,

$$\frac{\alpha + 3}{\alpha - 2} + \frac{\beta + 3}{\beta - 2} + \frac{\gamma + 3}{\gamma - 2} = \frac{-62}{11}$$ என நிறுவுக.

9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4 + px^3 + px^2 + rx + s = 0.$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல்,

$(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)(1 + \alpha^2)(1 + \delta^2) =$
$(s - q + 1)^2 + (r - p)^2$ என நிறுவுக.

10 α, β, γ என்பவை $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a^3 = O$ என்பதின் தீர்வுகளானல்,

$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)$ ன் மதிப்பறிக.

13·3 நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடுகள் (Reciprocal equations)

13·3·1 வரையலற :

$\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots \alpha_n$ என்பவை $F(x) = O$ன் தீர்வுகளாக மட்டுமில்லாமல் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots\dots \frac{1}{\alpha_n}$ம் $F(x) = O$ன் தீர்வுகளாக இருப்பின் $F(x) = 0$ ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எ. கா :

$(x-2)(x-3)(2x-1)(3x-1) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ என்பது ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு.

தீர்வுகள் $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

$f(x) = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1\ \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ ஆனல் $x^n. f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ இன் தீர்வுகள் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots\dots \frac{1}{\alpha_n}$ ஆகும் என நாம் 13·2·1·3 (எ.கா.4) ல் பார்த்தோம்.

$$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} \dots\dots + p_{n-1} x + p_n = 0 \quad (1)$$

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + p_{n-2} x^{n-2} \dots\dots + p_1x + p_0 = 0 \quad (2)$$

$f(x) = 0$ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ ஆதலால்,

$$f(x) \equiv p_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots\dots (x - \alpha_n)$$

$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots$ என்ற தீர்வுகள் பெற்ற சமன்பாடு பெற $x = \frac{1}{y}$ என ஈடு செய்ய வேண்டும்.

$$f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv p_0 \left(\frac{1}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{y} - \alpha_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{y} - \alpha_n\right)$$

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv p_0 (1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\ldots\ldots(1-\alpha_n y)$$

இதன் தீர்வுகள் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ என்பது தெளிவு.

அதாவது $y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ன் தீர்வுகள் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$

அதாவது $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ன் தீர்வுகள் $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots \frac{1}{\alpha_2} \ldots \ldots \alpha_n$.

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ தீர்வுகள் கொண்ட (1)ம் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ தீர்வுகள் கொண்ட (2)ம் ஒப்பிட்டால் கெழுக்கள் தலைகீழ் வரிசையில் இருப்பதை அறியலாம்.

13·3·2 நிகர் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் தன்மைகள்:

தேற்றம் 1: ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாட்டில் $p_{n-r} \pm p_r$. $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$.

$f(x) = 0$ ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு எனக் கொள்வோம். வரையறைப்படி அதன் n தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \ldots\ldots$

இப்போது $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ன் தீர்வுகள் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ என நாம் அறிவோம்.

எனவே,

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_r x^{n-r} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-r} x^{n-r} + \ldots\ldots + p_1 x + p_0 = 0$$

இரண்டும் சர்வசமச் சமன்பாடுகள்; அதாவது அவைகளின் தீர்வுகள் சமமானவை.

$$\therefore \frac{p_0}{p_n} = \frac{p_1}{p_{n-1}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{p_r}{p_{n-r}} = \ldots\ldots = \frac{p_n}{p_0} = k$$

என்பது பெறப்படும்.

$$\therefore \quad k + \frac{p_0}{p_n} = \frac{p_n}{p_0}$$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{p_0}{p_n} \cdot \frac{p_n}{p_0}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad k = \pm 1$$

$$\therefore \quad p_{n-r} = \pm p_r$$

ஆகவே $p_n = \pm p_0$

$$p_{n-1} = \pm p_1$$

$$p_{n-2} = \pm p_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad p_0 = \pm p_n$$

$$p_1 = \pm p_{n-1}$$

$$p_2 = \pm p_{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

அதாவது முதலிலிருந்தும், கடைசியிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள கெழுக்கள் எண் மதிப்பளவில் சமம்; ஒரே குறியீடோ அல்லது மாறுபட்ட குறியீடோ பெற்றனவாயிருக்கும்.

எ. கா :

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$$

$$x^7 \pm 1 = 0$$

$$x^6 \pm 1 = 0$$

என்பவை யெல்லாம் $p_{n-r} = \pm p_r$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கடங்குவது தெளிவு. இவை யாவும் நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடுகளாகும்.

எனவே, நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடுகளை இருவகைப் படுத்தலாம்.

$p_{n-r} = p_r$ என இருப்பின் அந்நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு முதல் வகையைச் சேர்ந்தது எனவும், $p_{n-r} = -p_r$ என இருப்பின் அந்நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்தது எனவும் கொள்ளப்படும்.

13·3·3 திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு (Standard Reciprocal equation)

வரையறை :

முதல் வகையைச் சார்ந்த இரட்டைப்படை 'படி' கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டைத் திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன் பாடு என்று வரையறுக்கிறோம்.

எ. கா. $a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

13·3·4·1. தேற்றம் 2

$f(x) = 0$ ஒரு முதல் வகை நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடெனின் $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv f(x)$; மறுதலையாக, $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv f(x)$ எனின் $f(x)$ ஒரு முதல் வகை நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

$p_{n-r} = p_r$ என்பது கொடுக்கப்பட்டதாகும். இப்போது

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv x^n \left(\frac{p_0}{x^n} + \frac{p_1}{x^{n-1}} + \dots\dots\dots\dots p_n\right)$$

$$\equiv p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + p_1 x + p_0$$

$$\because \quad p_{n-r} = p_r \quad x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots\dots\dots + p_{n-1} x + p_n$$

$$\therefore \quad x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv f(x)$$

மறுதலையாக,

$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv f(x)$ எனக் கொடுக்கப் பட்டிருப்பின்,

$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots \dots + p_1 x + p_0 \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots \dots \dots + p_{n-1} x + p_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்டதாகும்.

$\therefore \quad p_n = p_0, p_{n-1} = p_1, \dots\dots p_{n-r} = p_r$ அதாவது $f(x) = 0$ ஒரு முதல் வகை நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

13·3·4·2 தேற்றம் 3

$f(x) = 0$ ஒரு இரண்டாம வகை நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடெனின் $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv -f(x)$: மறுதலையாக, $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv -f(x)$ எனின் $f(x) = 0$ ஒரு இரண்டாம் வகை நிகர் மாற்றுச் சமன் பாடாகும்.

$p_{n-r} = -p_r$ என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப்போது

$$x_n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv x^n \left(\frac{p_0}{x^n} + \frac{p_1}{x^{n-1}} + \dots\dots + p_n\right)$$

$$\equiv p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots \dots + p_1 x + p_0$$

$\because \quad p_{n-r} = -p_r, \quad \therefore \quad x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv -p_0 x^n - p_1 x^{n-1} -$

$p_2 x^{n-2} \ldots\ldots - p_{n-1} x - p_n$

$\equiv -f(x)$

மறுதலையாக,

$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின்,

$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + p_1 x + p_0 \equiv -(p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n)$

$\therefore \quad p_n = -p_0; \quad p_{n-1} = p_1 \ldots\ldots p_{n-r} = -p_r$

அதாவது $f(x) = 0$ ஒரு இரண்டாம் வகை நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகிறது.

நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடுகளின் தன்மைகள் :

13·3·5·1 தேற்றம் 4 :

$f(x) = 0$ ஒரு முதல் வகை ஒற்றைப் படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடெனின் $f(x)$ ன் ஒரு சினை $(x+1)$ ஆகும். மேலும் அச்சினையை $f(x)$ னின்று விலக்கி, எஞ்சிய சார்பை, பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினால், ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$f(x) = 0$ என்பது ஒன்றைப் படித்தான சமன்பாடாகையால் $n = 2m + 1$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $p_{n-r} = p_r$ என்பது

$p_{2m+1-r} = p_r$ எனவாகும்.

$\therefore \quad f(x) \equiv (p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n)$

$\equiv p_0 x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots\ldots + p_m x^{m+1}$

$+ p_{m+1} x^m + \ldots\ldots + p_{2m} x + p_{2m+1}$

$\equiv (p_0 x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots\ldots + p_m x^{m+1})$

$+ (p_{m+1} x^m + \ldots\ldots + p_{2m} x + p_{2m+1})$

(ஒவ்வொரு அடைப்புக்குள்ளும் $(m+1)$ உறுப்புக்கள் இருக்கும்)

$\equiv (p_0 x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots\ldots + p_m x^{m+1})$

$+ (p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + p_1 x + p_0)$

$(\because \quad p_{n-r} = p_r)$

$f(-1) = [-p_0 + p_1 - p_2 + \ldots\ldots + (-1)^{m+1} p_m]$

$+ [(-1)^m p_m + \ldots\ldots + p_2 - p_1 + p_0]$

$= 0$

$\therefore \quad (x+1)$ என்பது $f(x)$ ன் ஒரு சினையாகும்.

அச்சினையை நீக்க $\dfrac{f(x)}{x+1} = \phi(x)$ எனக் கொள்வோம்.

($\phi(x)$ என்பது 2 ம் படி கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை)

$$\therefore \quad x^{2m}\phi\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{x^{2m} f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}+1}$$

$$\equiv \frac{x^{2m+1}.\, f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x}$$

$$\equiv \frac{x^n\, f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}$$

$$\equiv \frac{f(x)}{x+1}$$

$$\equiv \phi(x)$$

எனவே $\phi(x) = 0$ ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

13·3·5·2 தேற்றம் 5

$f(x) = 0$ ஒரு இரண்டாம் வகை ஒற்றைப்படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடெனின் $f(x)$ ன் ஒரு சினை $(x-1)$ ஆகும். மேலும் அச்சினையை $f(x)$ னின்று விலக்கி எஞ்சிய சார்பை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினால் ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$f(x) = 0$ ஒற்றைப்படித்தானதாகையால் $n = 2m+1$ எனக் கொள்வோம்.

இரண்டாம் வகையாதலின்

$$p_{n-r} = -p_r \text{ என்பது}$$

$$p_{2m+1-r} = -p_r \text{ எனவாகும்.}$$

$$\therefore \quad f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots\dots + p_{n-1}x + p_n$$

$$\equiv p_0 x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \dots\dots + p_m x^{m+1}$$

$$+ p_{m+1} x^m + p_{m+2} x^{m-1} + \dots\dots + p_{2m} x + p_{2m+1}$$

$$\equiv p_0 x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \dots\dots + p_m x^{m+1}$$

$$-(p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots\dots + p_1 x + p_0)$$

$$(\because \; p_{n-r} = -p_r)$$

$\therefore \ f(1) = p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_m - (p_m + p_{m-1} + \ldots\ldots + p_1 + p_0) = 0.$

$\therefore$ $(x-1)$ என்பது $f(x)$ ன் ஒரு சினையாகும். அச்சினையை நீக்க $\frac{f(x)}{x-1} = \phi(x)$ எனக் கொள்வோம். ($\phi(x)$ எனபது '$2m$' படிகொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை)

$$x^{2m}\phi\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{x^{2m}.f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}-1}$$

$$\equiv \frac{x^{2m+1}f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x}$$

$$\equiv \frac{x^{n}.f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x}$$

$$\equiv \frac{-f(x)}{1-x}$$

$$\equiv \frac{f(x)}{x-1}$$

$$\equiv \phi(x)$$

எனவே $\phi(x)=0$ ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன் பாடாகும்

13·3·5·3 தேற்றம் 6

$f(x)=0$ ஒரு இரண்டாம் வகை இரட்டைப் படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடெனின் $f(x)$ன் ஒரு சினை (x^2-1) ஆகும். மேலும் அச்சினையை $f(x)$னின்று விலக்கி எஞ்சிய சார்பை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்கினால் ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$f(x)=0$ இரட்டைப் படித்தானதாகையால் $n=2m$ எனக் கொள்வோம்.

இரண்டாம் வகையாதலின்

$p_{n-r} = -p_r$ என்பது

$p_{2m-r} = -p_r$ எனவாகும்.

இங்கும் $p_m = -p_m$

$\therefore p_m = 0.$

$$\therefore f(x) \equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+ \ldots\ldots\ldots +p_{n-1}x+p_n$$
$$\equiv (p_0x^{2m}+p_1x^{2m-1}+ \ldots +p_{m-1}x^{m+1})+p_mx^m$$
$$+(p_{m+1}x^{m-1}+ \ldots +p_{2m-1}x+p_{2m})$$
$$\equiv (p_0x^{2m}+p_1x^{2m-1}+ \ldots +p_{m-1}x^{m+1})$$
$$-(p_{m-1}x^{m-1}+ \ldots\ldots +p_1x+p_0)$$
$$\therefore f(1) = (p_0+p_1+ \ldots +p_{m-1})-(p_{m-1}+ \ldots +p_1+p_0)$$
$$= 0.$$

மேலும்

$$f(-1)=[p_0-p_1+p_2- \ldots\ldots +(-1)^{m+1}p_{m-1}]$$
$$-[(-1)^{m-1}p_{m-1}+ \ldots\ldots +p_2-p_1+p_0]$$
$$=0$$

$\because$ $(x-1)$ம், $(x+1)$ம் $f(x)=0$ன் சினைகள்.
அதாவது (x^2-1) என்பது $f(x)=0$ன் சினையாகும்.
அச்சினையை நீக்க

$\dfrac{f(x)}{x^2-1}=\phi(x)$ எனக்கொள்வோம். ($\phi(x)$,'$2m-2$' படிகொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை.)

$$\text{இப்போது } x^{2m-2}.\,\phi\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{x^{2m-2}.f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}$$
$$\equiv \frac{x^{2m}.f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}$$
$$\equiv -\frac{x^n.f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2-1}$$
$$\equiv \frac{f(x)}{x^2-1}$$
$$\equiv \phi(x)$$

எனவே $\phi(x)=0$ ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

13·3·6 ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறை.

(a) ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு கொடுத்திருப்பின் அவ்வவ் வகைக்கொப்ப $(x+1)$; $(x-1)$; அல்லது (x^2-1) சினையை நீக்க ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(b) முதலில் $u_r = x^r + \frac{1}{x^r}$ எனின்,

$u_r \equiv u_1 u_{r-1} - u_{r-2}$ என நிறுவுவோம்.

$$u_1 u_{r-1} \equiv \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right)$$

$$\equiv \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) + \left(x^{r-2} + \frac{1}{x^{r-2}}\right)$$

$$\equiv u_r + u_{r-2}$$

$$\therefore \quad u_r \equiv u_1 u_{r-1} - u_{r-2}$$

இங்கு,

$r = 2, 3, \ldots$ என ஈடு செய்ய

$$u_2 = u_1 u_1 - u_0$$

$$= u_1^2 - 2 \qquad [\therefore \quad u_0 = 2]$$

$$u_3 = u_1 u_2 - u_1$$

$$= u_1(u_1^2 - 2) - u_1$$

$$= u_1^3 - 3u_1$$

....

இங்கு u_n என்பதை 'u_1' ஆல் ஆகிய ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுதுகிறோம்

ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு இரட்டைப்படித் தானதாகையால் $n = 2n$ எனக் கொள்வோம்.

$$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n.$$

$$\equiv (p_0 x^{2m} + p_1 x^{2m-1} + \ldots \ldots + p_{m-1} x^{m+1})$$

$$+ (p_m x^m + p_{m+1} x^{m-1} + \ldots \ldots + p_{2m-1} x + p_{2m})$$

$$\equiv (p_0 x^{2m} + p_1 x^{2m-1} + \ldots \ldots + p_{m-1} x^{m+1})$$

$$+ (r_m x^m + \ldots \ldots + p_1 x + p_0)$$

வ. கை. புறத்தை x^m ஆல் வகுத்து முறைப்படி அடுக்கினல்,

$$p_0 \left(x^m + \frac{1}{x_m}\right) + p_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)$$

$$+ \ldots \ldots + p_{m-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) + p_m$$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு $x + \frac{1}{x} = y$ என ஈடு செய்ய

இச் சமன்பாடு yல் 'm' படி கொண்ட சமன்பாடாகிறது.

அதாவது

$$p_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+p_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\dots\dots$$

$$+p_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+p_m$$

$$= q_0\,y^m+q_1\,y^{m-1}+\dots\dots+q_{m-1}\,y+q_m$$

என எழுதலாம். எனவே, 2 m படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு, m படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடாக மாற்றப்படுகிறது.

இதற்கு m தீர்வுகள் உண்டு.

அவைகள் y_r $(r = 1, 2, \dots \dots m)$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=y_r \qquad (r = 1, 2, \dots \dots m)$$

அதாவது $x^2 - x\,y_r + 1 = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots \dots m)$

இச் சமன்பாடுகள், x-க்கு '$2m$' தீர்வுகள் கொடுக்கின்றன.

13.3·6·1 எ. கா. 1.

$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ன் தீர்வுகள் காண்க.

இச் சமன்பாடு முதல் வகையைச் சார்ந்தது. இரட்டைப் படித்தானதாக இருத்தலின் இது திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

x^2 ஆல் வகுக்க,

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

அதாவது $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

$x+\frac{1}{x}=y$ எனக் கொள்ள

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

எனவே சமன்பாடு

$$(y^2-2)-10\,y+26=0$$
$$y^2-10y+24=0$$
$$(y-6)(y-4)=0$$

$\therefore\ y = 4$ அல்லது 6.

$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=4.$ அல்லது $x+\frac{1}{x}=6.$

$\therefore \quad x^2 - 4x + 1 = 0$ அல்லது $x^2 - 6x + 1 = 0.$

$\therefore \quad x = 2 \pm \sqrt{3}$ அல்லது $3 \pm \sqrt{8}$

தீர்வுகள் $2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ 3 + \sqrt{8}\ 3 - \sqrt{8}.$

$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1;$

$(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 1$ என்பது வெளிப்படை.

எனவே நிகர் மாற்றுத் தன்மை விளக்கமாகிறது.

எ. கா. 2.

$x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$ன் தீர்வுகள் காண்க.

இச்சமன்பாடு முதல் வகையைச் சார்ந்து ஒரு படித்தானதாக இருத்தலின் சார்புக்கு $(x + 1)$ ஒரு சினையாகும்.

வகைப்படி சமன்பாட்டிற்கு $x = -1$ ஒரு தீர்வாகும்.

$$x^5 + x^4 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + x + 1 = 0$$

$$x^4(x + 1) + 3x^3(x + 1) + 3x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$$

$$\therefore \quad (x + 1)(x^4 + 3x^3 + 3x + 1) = 0$$

தீர்வு -1, நீக்கிய சமன்பாடு

$x^4 + 3x^3 + 3x + 1 = 0$

x^2-ஆல் வகுக்க

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = y$ என ஈடு செய்ய

$$(y^2 - 2) + 3y = 0$$

$$y^2 + 3y - 2 = 0.$$

$$\therefore \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

எனவே $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

அதாவது $2x^2 + (3 + \sqrt{17})x + 2 = 0.$

அல்லது $2x^2 + (3 - \sqrt{17})x + 2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-(3 + \sqrt{17}), \pm \sqrt{(3 + \sqrt{17})^2 - 16}}{4}$$

அல்லது $x = \dfrac{-(3 - \sqrt{17}) \pm \sqrt{(3 - \sqrt{17})^2 - 16}}{4}$

$x = -1$ ஒரு தீர்வு என்பது முதலில் நாம் கண்டது. மற்றைய நான்கு தீர்வுகள் மேலே பெறப்பட்டிருக்கின்றன.

எ. கா. 3.

$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 13x^2 + 6x - 1 = 0$ ன் தீர்வுகள் காண்க.

இச்சமன்பாடு இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்து ஒற்றைப் படித்தான தாதலின் சார்புக்கு $(x - 1)$ ஒரு சினையாகும். எனவே வகைப்படி $x = 1$ சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும்.

$(x - 1)$ ஆல் வகுக்க

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -6 & +13 & -13 & +6 & -1 \\ & 0 & +1 & -5 & +8 & -5 & 1 \\ \hline & 1 & -5 & +8 & -5 & +1 & +0 \end{array}$$

எனவே,

சினை $(x - 1)$ ஐ நீக்க

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ எனப் பெறப்படும். இது திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும். x^2 ஆல் வகுக்க

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \text{ என ஈடு செய்ய,}$$

$$(y^2 - 2) - 5y + 8 = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$\therefore (y - 3)(y - 2) = 0$$

$$\text{அதாவது } y = 3 \text{ அல்லது } 2$$

$$\text{அதாவது } x + \frac{1}{x} = 3 \text{ அல்லது } x + \frac{1}{x} = 2.$$

$$\text{அதாவது } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ அல்லது } x^2 - 2x + 1 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \; x = 1, 1.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $1, 1, 1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

எ. கா. 4

$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$ ன் தீர்வுகள் காண்க:

இக்கோவை இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்து இரட்டைப் படித்தானதாதலின் $(x^2 - 1)$ இதன் ஒரு சினையாகும்.

எனவே $6(x^6 - 1) - 35x(x^4 - 1) + 56x^2(x^2 - 1) = 0$

அதாவது, $6(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) - 35(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 56x^2(x^2 - 1) = 0$

அதாவது, $(x^2 - 1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0$

சினை $(x^2 - 1)$ ஐ நீக்க

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

வ. கை. புறத்தை $(x^2 - 1)$ ஆல் நேரடியாக வகுத்தும் இதைப் பெறலாம்.

இது ஒரு திட்டமான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

x^2 — ஆல் வகுக்க,

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = y$ என ஈடு செய்ய

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$$

$$6y^2 - 35y + 50 = 0$$

$$(3y - 10)(2y - 5) = 0$$

$$y = \frac{10}{3} \text{ அல்லது } \frac{5}{2}$$

அதாவது $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ அல்லது $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

அதாவது $3x^2 - 10x + 3 = 0$ அல்லது $2x^2 - 5x + 2 = 0$

அதாவது $(x - 3)(3x - 1) = 0$ அல்லது $(x - 2)(2x - 1) = 0$

$$\therefore x = 3, \frac{1}{3}, 2 \text{ அல்லது } \frac{1}{2}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$1, -1, 3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}.$$

எ. கா. 5.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. தீர்வுகள் α, β, γ, எனின் $\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}, \gamma + \frac{1}{\gamma}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$y = \alpha + \frac{1}{\gamma}$$ எனக் கொள்வோம்.

$$y = x + \frac{1}{x}$$ என்பது பொதுத் தொடர்பாகும்.

[∴ α ஒரு தீர்வு]

அதாவது

$$x^2 - xy + 1 = 0 \quad \dots (1)$$
$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \quad \dots (2)$$

(1), (2) லிருந்து xஐ நீக்கினால் வேண்டிய சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$(2) - (1) \times ax$$
$$(ay + b) x^2 + (c - a) x + d = 0 \quad \dots (3)$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி (1), (3) லிருந்து

$$\frac{x^2}{a - c - dy} = \frac{x}{ay + b - d} = \frac{1}{c - a + ay^2 + by}$$

$$\therefore \frac{a - c - dy}{c - a + ay^2 + by} = \frac{(ay + b - d)^2}{(c - a + ay^2 + by)^2} = x^2$$

$$\therefore (a - c - dy)(c - a + ay^2 + by) = (ay + b - d)^2$$

சமன்பாட்டை முறைப்படி எழுத

$$ady^3 + (ac + bd) y^2 + (ad + bc + cd - 3ad) y + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 0$$

என நாம் வேண்டிய சமன் பாடு கிடைக்கும்.

எ.கா.6.

$x^4 + 2ax^3 + 4bx^2 + 8ax + 16 = 0$ஐ ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாக மாற்றியமைக்க.

பின்னர் அதையொட்டி $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 24x + 16 = 0$ஐ தீர்க்கவும்.

$x^4 + 2ax^3 + 4bx^2 + 8xa + 16 = 0$ ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாக வேண்டுமானால் $p_{n-r} = p_r$

இங்கு $x = 2y$ என ஈடு செய்ய,

$$(2y)^4 + 2a(2y)^3 + 4b(2y)^2 + 8a(2y) + 16 = 0.$$

$$16y^4 + 16ay^3 + 16by^2 + 16ay + 16 = 0.$$

அதாவது $y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0.$

இது ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

$x^4-6x^3+16x^2-24x+16=0$ஐ முதலில் ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமனபாடாக உறுமாற்றிப் பின்னர் தீர்ப்போம். இங்கு $x=2y$ என ஈடு செய்ய,

$$(2y)^4-6(2y)^3+16(2y)^2-24(2y)+16=0.$$

$$16y^4-48y^3+64y^2-48y+16=0.$$

அதாவது $y^4-3y^3+4y^2-3y+1=0.$

இது ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு ஆகும்.

y^2-ஆல் வகுக்க

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-3\left(y+\frac{1}{y}\right)+4=0$$

$y+\dfrac{1}{y}=z$ என ஈடு செய்ய

$$z^2-2-3z+4=0$$

$$z^2-3z+2=0$$

$$(z-2)(z-1)=0$$

$z=2$ அல்லது 1

அதாவது $y+\dfrac{1}{y}=2$ அல்லது $y+\dfrac{1}{y}=1.$

அதாவது $y^2-2y+1=0$ அல்லது $y^2-y+1=0$

அதாவது $y=1, 1$ அல்லது $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

எனவே $x=2, 2$ அல்லது $1\pm\sqrt{3}\,i$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$2, 2, 1\pm\sqrt{3}\,i.$

பயிற்சி 13 3

பின் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

1. $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$
2. $4x^4-20x^3+33x^2-20x+4=0$
3. $x^4+3x^3-3x-1=0$
4. $6x^5-x^4-43x^3+43x^2+x-6=0$
5. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
6. $2x^5+x^4+x+2=12x^2(x+1)$
7. $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0$

8. $x^5+1=0$

9. $2x^6-9x^5+10x^4-3x^3+10x^2-9x+2=0$

10. $2x^6-x^5-2x^3-x+2=0$

11. $6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0$

12. $x^{10}-3x^8+5x^6-5x^4+3x^2-1=0$

13 $6x^6-17x^5+18x^4-18x^2+17x-6=0$

14. $2x^5+5x^4-5x-2=0.$

15. $12x^5-44x^4+33x^3+33x^2-44x+12=0$

16. $x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0$ன் தீர்வுகளுக்கு ஒன்று குறைவான தீர்வுகளுள்ள சமன்பாடு கண்டு அது ஓர் நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடென நிறுவுக. பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

17. $x^4-10x^3+23x^2-6x-15=0$ன் தீர்வுகளுக்கு ஒன்று குறைவான தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு கண்டு, அது ஒரு நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடென நிறுவுக. பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

18. $(x^3+qx+r)(rx^3+qx^2+1)=0$ ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடென நிறுவுக. இதன் தீர்வுகள் $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta}, \gamma, \frac{1}{\gamma}$ எனின் $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right), \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right), \left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

13·4 சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளது தன்மைகள்.
(Properties of the roots of Equations)

தேற்றம் 1 :

13·4·1 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ முழு எண்களானுல், இச்சமன்பாட்டிற்கு அளவுக் கிணங்கிய தீர்வுகள் ஏதாவது இருப்பின் அவை முழு எண்களாயிருக்கும். மேலும் அவை யாவும் p_nன் சினைகளாகும்.

தெ : முடியுமானுல் $\frac{a}{b}$ என்பது ஒரு தீர்வாக இருக்கட்டும் ; aம் bம் ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்களாயிருக்கட்டும். அப்போது $\frac{a^n}{b^n}+p_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\ldots\ldots+p_n=0$ என்பது பொருந்தும். இருபக்கங்களையும் b^{n-1} ஆல் பெருக்க,

$\frac{a^n}{b} + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} b + \dots \dots + p_n b^{n-1} = 0$ என்பது கிடைக்கும்.

இங்கு $p_1 a^{n-1}, p_2 a^{n-2} b, \dots \dots p_n$ யாவும் முழு எண்கள் ; $\frac{a^n}{b}$ ஒரு பின்னமாயிருக்கும் (a, b இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று பகா யெண்கள்)

எனவே பின்னம் + முழு எண் = 0 என்ற முடிவு கிடைக்கும்.

ஆனால் இது இயலாதாதலின், $\frac{a}{b}$ போன்ற பின்னங்கள், இச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக இருக்கமுடியாது.

எனவே, ஏதாவது அளவுக் கிணங்கிய எண்கள் தீர்வுகளா யிருப்பின் அவை முழு எண்களாய்த்தானிருக்க முடியும்.

அந்த நிலையில் α என்ற முழு எண் ஒரு தீர்வாக இருக்கட்டும். அப்போது,

$$\alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + p_2 \alpha^{n-2} + \dots \dots + p_{n-1} \alpha + p_n = 0$$

என்பது பொருந்தும்.

αஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுத்தால்,

$$\alpha^{n-1} + p_1 \alpha^{n-2} + p_2 \alpha^{n-3} + \dots \dots + p_{n-1} + \frac{p_n}{\alpha} = 0$$

என்பது பொருந்தும்.

இங்கு $\alpha^{n-1}, p_1 \alpha^{n-2}, p_2 \alpha^{n-3}, \dots \dots p_{n-1}$ யாவும் முழு, எண்கள்.

எனவே, முழு எண் + $\frac{p_n}{\alpha}$ = 0 என்பது கிடைக்கப்பெறும்.

ஆகவே $\frac{p_n}{\alpha}$ ஒரு முழு எண்ணாகத்தானிருக்க வேண்டும். எனவே, α என்பது p_nஐ மீதியின்றி வகுக்கவேண்டும். அதாவது α என்பது p_nன் ஒரு சினை (அல்லது காரணியாகும்).

13·4 1·1 எ. கா :

$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண் தீர்வுகள் உண்டெனின் அவை களைக் காண்க.

6ன் சினைகள் $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$$f(1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$$

$\therefore \; x = 1$ ஒரு தீர்வாகும்.

$f(-1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

$\therefore \quad x = -1$ம் ஒரு தீர்வாகும்.

$f(2) = 16 - 8 - 28 + 2 + 6 \neq 0$

$f(-2) = 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$

$\therefore \quad x = -2$ ஒரு தீர்வாகும்.

$f(3) = 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0$

$\therefore \quad x = 3$ மற்றொரு தீர்வாகும்.

$\therefore \quad -1, \; 1, \; -2, \; 3$ என்பவை தீர்வுகளாகும்.

குறிப்பு :

$(x^2 - 1)$ ஒரு சினை யென்று கண்டபின்,

$(x^4 - x^3 - 7x^2 - x + 6)$ ஐ $(x^2 - 1)$ ஆல் வகுத்தால்,

$(x^2 - x - 6)$ கிடைக்கப்பெறும்.

$x^2 - x - 6 = 0$ன் தீர்வுகளைக் காண, மற்றிரு தீர்வுகளான $-2, \; 3$ பெறப்படும்.

13·4·2 தேற்றம் 2

அளவுக்கிணங்கிய கெழுக்களுடைய ஒரு சமன்பாட்டின், இருபடி மூலத் தீர்வுகள் துணையிய மூலங்களாகவே தோனறும். (In an equation with rational coefficients the roots which are quadratic surds occur in their conjugate pairs)

தெ : $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $a + \sqrt{b}$ ஒரு தீர்வெனக் கொள்வோம். $(b \neq 0)$. இப்போது $(a + \sqrt{b})$ ஒரு தீர்வானால் அதன் துணையிய படி மூலமாகிய $(a - \sqrt{b})$ம் ஒரு தீர்வாகுமென நிறுவ வேண்டும்.

$(x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 - b$

$f(x)$ ஐ $(x - a)^2 - b$ஆல் வகுக்கவும் ; $Q(x)$ ஈவாகவும் $Rx + S$ மீதியாகவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad f(x) \equiv (x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b})\, Q(x) + Rx + S$

$x = a + \sqrt{b}$ என ஈடு செய்ய

$0 = f(a + \sqrt{b}) = R(a + \sqrt{b}) + S.$

$\therefore \quad Ra + R\sqrt{b} + S = 0$

$\therefore \quad Ra + S = 0 \quad \ldots(1)$

$R\sqrt{b} = 0 \quad \ldots(2)$

(2)ன் படி $\sqrt{b} \neq 0$ ஆதலின் $R = 0$.

எனவே (1)ன் படி $0 + S = 0$

$\therefore \quad S = 0.$

$\therefore\ f(x) \equiv (x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b})\, Q(x)$

$\therefore\ f(x) = 0$ன் ஒரு தீர்வு $a + \sqrt{b}$ ஆனால் $(a - \sqrt{b})$ம் மற்றொரு தீர்வாகிறது.

13 4·2·1 எ, கா :

$(3 + \sqrt{10})$ என்பது $x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 11x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ; மற்ற தீர்வுகளைக் காண்க.

$(3 + \sqrt{10})$ ஒரு தீர்வானால் $(3 - \sqrt{10})$ம் ஒரு தீர்வு. இவை களுக்குரிய சினைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= (x - 3 - \sqrt{10})(x - 3 + \sqrt{10})$$
$$= (x - 3)^2 - 10$$
$$= x^2 - 6x - 1.$$

$\therefore\ x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 11x + 2$ஐ $(x^2 - 6x - 1)$ மீதியின்றி வகுக்கும். அப்படி வகுத்து வரும் ஈவு $x^2 + x - 2$

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$\therefore$ மற்றிரு தீர்வுகள் $1, -2$.

எனவே தீர்வுகள் $1, -2,\ 3 \pm \sqrt{10}$ ஆகும்.

13 4·3 தேற்றம் 3

மெய்யெண் கெழுக்களுடைய, சமன்பாட்டின் கற்பனைத் தீர்வுகள், துணையிய கற்பனை எண்களாகத் தோன்றும் (In an equation with real coefficients, imaginary roots occur in their conjugate pairs)

தெ : $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $(a + ib)$ ஒரு தீர் வெனக்கொள்வோம் $(b \neq 0)$. அப்போது $(a - ib)$ம் ஒரு தீர்வாகத் தோன்றுமென நிறுவ வேண்டும்.

$$\{x - (a + ib)\}\{x - (a - ib)\} = (x - a)^2 + b^2$$

$f(x)$ ஐ $[(x - a)^2 + b^2]$ஆல் வகுக்கவும். $Q(x)$ ஈவெனவும் $Rx + S$ மீதி யெனவும் கொள்வோம்.

எனவே $f(x) \equiv \{x - (a + ib)\}\{x - (a - ib)\}\, Q(x) + Rx + S$.

இங்கு $x = a + ib$ என ஈடு செய்க.

அப்போது

$$O = f(a + ib) = R(a + ib) + S \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ Ra + Rib + S = O$$

$$\therefore\ Ra + S = O \qquad ...(1)$$

$$Rib = O \qquad ...(2)$$

(2)ன்படி $b \neq O$ ஆதலால், $R = O$

$\therefore$ (1)ன்படி $O + S = O$

$\therefore \quad S = O$

$\therefore \quad f(x) \equiv \{x-(a+ib\} \quad \{x-(a-ib\} \; Q(x)$

$\therefore$ $(a+ib)$ என்பது $f(x) = O$ ஒரு தீர்வானுல், $(a-ib)$ என்பதும் மற்ரெருரு தீர்வாகும்.

கி. தே: (1). ஒற்றைப்படைப் படியுள்ள சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் உண்டு.

கி. தே: (2) இரட்டைப்படைப் படியுள்ள சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகளே இல்லாமலிருக்கலாம்; அப்படி மெய்யெண் தீர்வுகளிருப்பின், அவைகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையெண்ணுக விருக்கும்.

13 4·3·1

எ கா. $(3-2i)$ என்பது $2x^4 - 13x^3 + 31x^2 - 7x - 13 = O$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வானுல், மற்றைய தீர்வுகளைக் காண்க.

$(3-2i)$ ஒரு தீர்வாயின் $(3+2i)$ம் ஒரு தீர்வாகும். அவைகளுக்குரிய சினைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= \{x-(3-2i)\} \quad \{x-(3+2i)\}$$
$$= (x-3)^2 + 4$$
$$= x^2 - 6x + 13.$$

$\therefore$ $(x^2 - 6x + 13)$ என்பது $(2x^4 - 13x^3 + 31x^2 - 7x - 13$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும். வகுத்து வரும் ஈவு $= 2x^2 - x$ $x-1$.

$2x^2 - x - 1 = O$ன் தீர்வுகள் $1, -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ தீர்வுகளாவன $1, -\frac{1}{2}, 3 \pm 2i$ ஆகும்.

13·4·4 மடங்கு தீர்வுகள் (Multiple roots):

ஒரு சமன்பாட்டில் ஒரே தீர்வு, இருமுறை அல்லது பன்முறை தோன்றுமாயின், அது ஒரு மடங்கு தீர்வெனப்படும்.

எ. கா: $(x-1)^2 (x-2)^3 (x+4) = O$ன் தீர்வுகள் $1, 1, 2, 2, 2, -4$. இங்கு '1' இருமுறை மடங்கு தீர்வெனவும் '2' மும்முறை மடங்கு தீர்வெனவும் கூறப்படும்.

இவ்வாறே $(x-a)^r (x-b)^s = O$ன் தீர்வுகளில் 'a' r-முறை மடங்கு தீர்வெனவும் 'b' s-முறை மடங்கு தீர்வெனவும் கொள்ளப் படும்.

13·4·4·1 தேற்றம் 4 :

α என்பது $f(x) = 0$ன் r-முறைமடங்கு தீர்வாயிருக்குமாயின், அது $f^1(x) = 0$ன் $(r-1)$-முறை மடங்கு தீர்வாயிருக்கும்.

தெ: α என்பது r-முறை மடங்கு தீர்வாதலின், $f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$ என எழுதப்படலாம்.

அப்போது, இருபக்கங்களுக்கும் x— ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$f^1(x) = r(x-\alpha)^{r-1}\phi(x) + (x-\alpha)^r \phi^1(x)$$
$$= (x-\alpha)^{r-1}[r\phi(x) + (x-\alpha)\phi^1(x)]$$
$$= (x-\alpha)^{r-1}\psi(x) \text{ என்ற அமைப்பில் வரும்.}$$

எனவே $f^1(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α- என்பது $(r-1)$-முறை மடங்கு தீர்வாகிறது.

கி. தே: (1)

α என்பது $f(x) = 0$ன் r-முறை மடங்கு தீர்வானுல் முறையே $f^1(x) = 0, f''(x) = 0, \ldots\ldots\ldots f^{(r-1)}(x) = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு α-என்பது முறையே $(r-1)$, (-2), …. …2, 1-முறை மடங்கு தீர்வாகும். அதாவது.

$f^{(r-1)}(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ என்ற அமைப்பில், α என்பது $f^{(r-1)}(x) = 0$ன் மடங்காத் தீர்வாக விருக்கும்.

13.4·4·2 மறுதலைத் தேற்றம்:

α என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகி, (அதாவது $f(\alpha) = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தி) $f^1(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α என்பது $(r-1)$-முறை மடங்கு தீர்வானுல் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α என்பது r—முறை மடங்கு தீர்வாகும்.

தெ. $f(\alpha) = 0$ ஆனபடியால்,

$f(x) = (x-\alpha)^p \phi(x)$ என்பது பொருந்தும். இங்கு குறைந்தது $p = 1$ ஆகக் கட்டாயமிருக்கும்; அதற்கு உயர்ந்தும் pன் மதிப்புகள் இருக்கக் கூடும்.

ஆகவே $(f_1(x) = p(x-\alpha)^{p-1}\phi(x) + (x-\alpha)^p \phi^1(x)$
$$= (x-\alpha)^{p-1}[p\phi(x) + (x-\alpha)\phi^1(x)]$$
$$= (x-\alpha)^{p-1}\psi(x) \text{ என்ற அமைப்பு}$$

பொருந்தும். ஆனுல் $f^1(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α என்பது $(r-1)$- முறை மடங்கு தீர்வெனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்

$r-1 = p-1$ என்பது உண்மை

$\therefore \quad r = r.$

அல்லது $p = r$ எனப் பெறப்படுகிறது.

$\therefore \; f(x) = (x - \alpha)^r \phi(x)$ என்பது பெறப்படும்.

$\therefore \quad \alpha$ என்பது $f(x) = 0$ன் r-முறை மடங்கு தீர்வாகும்.

கி. தே: α என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகி, $f^{(r-1)}(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α ஒரு மடங்காத் தீர்வாக விருக்குமானுல் α என்பது $f(x) = 0$ன் r-முறை மடங்கு தீர்வாக விருக்கும்.

13.4·5 தேற்றம் 5.

$f(x)$ என்பது அளவுக்கிணங்கிய கெழுக்களைப் பெற்று $f(x) = 0$ என்பது ஒரே ஒரு பன்முறை மடங்கு தீர்வும் பெற்றிருக்குமாயின், அத்தீர்வு அளவுக்கிணங்கிய மெய் யெண்ணுகவே இருக்கும்.

α ஒரு r-முறை மடங்கு தீர்வெனக் கொள்வோம். முதற்கண் α ஒரு கற்பனை யெண் தீர்வாக விருக்க முடியாது. ஏனெனில் $\alpha = a + ib$ ஆனுல் $(a-ib)$ம் ஒரு தீர்வாக விருக்கும். ஆகவே αன் துணையிய கற்பனை யெண்ணுகிய $(a-ib)$ம் r—முறை மடங்கு தீர்வாக விருக்க வேண்டும். ஆனுல் ஒரே ஒரு பன்மடங்கு தீர்வே இருப்பதாகக் கொள்ளப்பட்டதால் $(a-ib)$ம் ஒரு r-முறை மடங்குத் தீர்வாவது கொள்கைக்கு முரண்பட்டதாகும். எனவே, α ஒரு மெய்யெண்ணுகவேயிருக்க வேண்டும்.

இரண்டாவதாக, 13·4·2 தேற்றம் 2ஐயொட்டி, முன் கூறப்பட்ட ஒத்த காரணங்களுக்காக, α ஒரு அளவுக் கிணங்காத மெய் யெண்ணுக (படிமூலமாக) இருக்கமுடியாது. ஆகவே, α ஒரு அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண்ணுகத் தானிருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு: $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், ஒரே ஒரு r-பன் முறை மடங்கு தீர்வுதான் உள்ளதெனக் கொடுக்கப்படின், $f(x) = 0$ன் அளவுக் கிணங்கிய தீர்வுகளை மாத்திரம் கண்டு, மேல் செல்க.

குறிப்பு 2: $f(x) = 0$ ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாயின் அதற்கு ஒரே ஒரு மடங்கு தீர்வுதான் இருக்கமுடியும் அது அளவுக் கிணங்கியதாயிருக்கும்

குறிப்பு 3: $f(x) = 0$ ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடாயின், அதற்கு இரண்டு மடங்கு தீர்வுகளிருக்கலாம், அல்லது ஒரு மடங்கு தீர்வுதானிருக்கலாம். இரண்டு மடங்கு தீர்வுகள் உண்டெனில் $f(x)$ ஒரு இருபடிக் கோவையின் இருபடியாகும் ஒரே ஒரு மடங்கு

தீர்வு தான் உண்டெனில் அது தேற்றப்படி அளவுக் கிணங்கிய தாயிருக்கும். எனவே $f(x) = 0$ ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடாயின் அது ஒரு சரியான இரு படியாவென முதலிலறிக ; இல்லையெனில் அளவுக் கிணங்கிய மெய்யெண் தீர்வு கண்டு மேலே செல்க. இங்கு x சார்பற்ற மாறிலி குறையெண்ணுயிருப்பின், $f(x)$ என்பது ஒரு சரியான இருபடியாகா தென்பது உடனுக்குடனே தெரிந்து விடும்.

13·4·5·1

எ.கா. 1. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 = 0$ என்ற சமன் பாட்டில் மடங்கு தீர்வுகள் உண்டெனின் அவைகளை அறிக.

13·4·5 தேற்றம் 5, குறிப்பு மூன்றின்படி இங்குள்ள $f(x)$ ஒரு இருபடியா எனப் பார்ப்போம்.

$$(x^2 - 3x + 6)^2 = x^4 + 9x^2 + 36 - 6x^3 + 12x^2 - 36x$$
$$= x^4 - 6x^3 + 21x^2 - 36x + 36$$

ஆகவே $f(x)$ ஒரு சரியான இருபடியல்ல.

எனவே $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 \equiv (x - \alpha)^2 (x - \beta)(x - \gamma)$

அல்லது $\equiv (x - \delta)^3 (x - \varepsilon)$

என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும். மேலும் மடங்கு தீர்வு அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்ணுயிருக்க வேண்டும்.

எனவே, $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மெய்யெண் தீர்வு காண்போம். 36 ன் சினைகள் $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$.

$$f(\pm 1) \neq 0$$
$$f(2) \neq 0$$
$$f(-2) \neq 0$$
$$f(3) = 0$$

$\therefore$ 3 என்பது மடங்கு தீர்வாயிருக்கும். முதலில் $f(x)$ ஐ $(x - 3)^2$ ஆல் வகுப்போம்.

3	1 6 + 13 − 24 + 36
	0 + 3 − 9 + 12 − 36
3	1 − 3 + 4 − 12
	0 + 3 + 0 + 12
	1 + 0 + 4

$\therefore \quad f(x) \equiv (x-3)^2 (x^2+4)$

$\therefore$ மடங்கு தீர்வுகள் 3, 3.

மடங்காத் தீர்வுகள் $\pm 2i$

எ. கா. 2

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மடங்கு தீர்வு உண்டெனில், தீர்வுகள் காண்க.

$$f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$
$$f'(x) \equiv 6x^2 - 18x + 12$$

$f(x)$ க்கும் $f'(x)$ க்கும் பொதுவான பெரிய சினை (H. C. F.) கண்டுபிடித்தால், மடங்கு தீர்வு பெறலாம்.

$$\frac{f'(x)}{6} = x^2 - 3x + 2.$$

$$x^2 - 3x + 2)\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\ (2x - 3$$
$$2x^3 - 6x^2 + 4x$$
$$-3x^2 + 8x - 4$$
$$3x^2 + 9x - 6$$
$$-x + 2$$

$$x - 2)\ x^2 - 3x + 2\ (x - 1$$
$$x^2 - 2x$$
$$-x + 2$$
$$-x + 2$$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $f(x)$ க்கும் $f'(x)$ க்கும் உள்ள பெரிய பொதுச் சினை.

$$\therefore \quad f(x) = (x-2)^2 (2x-1)$$
$$f'(x) = 6(x-2)(x-1)$$

$\therefore$ இரு முறை மடங்கு தீர்வு 2, மற்றொரு தீர்வு $\frac{1}{2}$.

13·4·5·2

குறிப்பு (1)

$f(x)$ க்கும் $f'(x)$ க்கும் பொதுவான பெருஞ்சினை கண்டு, மடங்கு தீர்வுகள் காண்பது ஒரு நேரான முறை.

ஒரு திட்டமான முறையாகக் கூறுமிடத்து :

(1) முதலில் $f'(x)$ காண்க ;

(2) $f(x)$ க்கும் $f'(x)$ க்கும் மீப்பெரு பொதுச் சினை (H.C.F.) காண்க.

(3) அப்பொதுச் சினை = 0 எனக் கொண்டு, அதன் தீர்வுகள் காண்க.

அத் தீர்வுகள் மற்றோர் முறை $f(x) = x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயிருக்கும்.

(4) இங்கு $f''(x)$ கண்டும், அதிலிருந்து $f'(x) = 0$ ன் மடங்கு தீர்வுகள் கண்டு, பிறகு அதிலிருந்து $f(x) = 0$ ன் மடங்கு தீர்வுகளைக் காணலாம்.

குறிப்பு (2)

ஆனால் தேற்றம் 5ல் உள்ள குறிப்புகளை யொட்டியும் மடங்கு தீர்வுகள் காணலாம்.

குறிப்பு (3)

மற்றும் நேரடியான முறைகளில் $f(x) = 0$ அல்லது $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$......என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வேறு எளிதான முறைகளில் கண்டு அதைப் பயன்படுத்தியும், மடங்கு தீர்வுகளைக் காணலாம். எது எளிதான முறையோ, அதைக் கையாள்வதே பொருத்தமாகும். ஓரிரண்டு எடுத்துக் காட்டுகளால் இம் முறைகளை விளக்குவோம்:

13·4·5.3 எ. கா. 3

$x^5 - x^4 - 4x^2 + 7x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், மடங்கு தீர்வுகள் உண்டெனின், அதன் தீர்வுகள் காண்க.

$$f(x) \equiv x^5 - x^4 - 4x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) \equiv 5x^4 - 4x^3 - 8x + 7$$

$f(1) = 0$; $f'(1) = 0$ என்பது பார்த்தாலே தெரிகிறது. எனவே '1' குறைந்தது மும்முறை மடங்கு தீர்வாகவிருக்கும்.

$f(x) \equiv (x - 1)^3 (x^2 + 2x + 3)$ என்பதை அறியலாம். $x^2 + 2x + 3 = 0$ எனக் கொண்டால்,

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

எனவே தீர்வுகள் $1, 1, 1, -1 \pm \sqrt{2}\, i$ ஆகும்.

எ. கா. 4

$x^3 - 3q\,x + 2r = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டு மடங்கு தீர்வுகள் உண்டெனின், $q^3 = r^2$ என நிறுவுக.

$$f(x) \equiv x^3 - 3q\,x + 2r$$

$$f'(x) \equiv 3x^2 - 3q.$$

$f'(x) = 0$ ஆனால் $x = \pm\sqrt{q}$

எனவே $x = +\sqrt{q}$ அல்லது $x = -\sqrt{q}$ என்பது $f(x) = 0$-ன் இரு மடங்கு தீர்வுகளாகும்.

$\therefore \quad (q)^{\frac{3}{2}} - 3q(q)^{\frac{1}{2}} + 2r = 0$

அதாவது $-2(q)^{\frac{3}{2}} + 2r = 0$

அதாவது $\quad q^{\frac{3}{2}} = r$

அதாவது $\quad q^3 = r^2$

அல்லது $(-\sqrt{q})^3 - 3q(-\sqrt{q}) + 2r = 0$

அதாவது $-q^{\frac{3}{2}} + 3q^{\frac{3}{2}} + 2r = 0$

அதாவது $\quad +2q^{\frac{3}{2}} = -2r$

அதாவது $\quad q^{\frac{3}{2}} = -r$

அதாவது $\quad q^3 = r^2$

எனவே, எவ்விதத்திலும் $q^3 = r^2$ என நிறுவப்படுகிறது.

எ. கா. 5. $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு இரு முறை வருமானல் அதற்குரிய கட்டுப்பாடு கண்டு மூன்றும் தீர்வையும் காண்க.

$f(x) \equiv x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ .. (1)

$f^1(x) \equiv 3x^2 + 6ax + 3b.$ ...(2)

α என்பது இரு மடங்கு தீர்வானல்,

$f^1(\alpha) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α ஒரு மடங்காத் தீர்வாகும்.

மேலும் $\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0$ ...(3)
என்பதும் பொருந்தும்

மற்றும் $\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c = 0$ ...(4)
என்பதும் பொருந்தும்.

$\alpha \times (3) - (4)$ எடுத்தால்

$\alpha^3 + 2a\alpha^2 + b\alpha - \alpha^3 - 3a\alpha^2 - 3b\alpha - c = 0$ ...(5)

அதாவது $-a\alpha^2 - 2b\alpha - c = 0$

அல்லது $\quad a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ ...(6)

நாம் கண்டபடி, $\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0$ .. (3)

குறுக்கிப் பெருக்கல் முறைப்படி,

$$\frac{\alpha^2}{2b^2 - 2ac} = \frac{\alpha}{c - ab} = \frac{1}{2a^2 - 2b}$$

$$\therefore \alpha = \frac{c - ab}{2(a^2 - b)}$$

$$\text{மேலும் } \alpha^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2 - b} = \frac{1}{4}\left(\frac{c - ab}{a^2 - b}\right)^2$$

8

அதாவது $4(b^2 - ac)(a^2 - b) = (c - ab)^2$ என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும் :

இப்போது,

$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c \equiv (x - \alpha)^2 (x - \beta)$

எனவே $\alpha^2 \beta = -c$

$$\therefore \quad \beta = -\frac{c}{\alpha^2}$$

$$= \frac{c(b - a^2)}{(b^2 - ac)}$$

எனவே $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள்

$$\frac{c - ab}{2(a^2 - b)}, \; \frac{c - ab}{2(a^2 - b)}, \; \frac{c(b - a^2)}{b^2 - ac} \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 13·4

1. பின் வரும் சமன்பாடுகள், அளவுக் கிணங்கிய தீர்வுகள் கொண்டவை. அவைகளின் தீர்வுகள் காண்க.

   (i) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

   (ii) $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$

   (iii) $x^3 - 5x^2 - 18x + 72 = 0$

   (iv) $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0$

2. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$-ன் தீர்வுகள் காண்க.

3. $2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 4x + 6 = 0$ இரு முழு எண் தீர்வுகள் பெற்றிருக்குமாயின் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்க.

4. $(-2 + \sqrt{3})$ என்பது $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்வாயின் மற்ற தீர்வுகள் காண்க.

5. $2 + \sqrt{3}$ என்பது $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்வாயின் மற்ற தீர்வுகள் காண்க.

6. $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ என்பது $x^4 \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$-ன் ஒரு தீர்வாயின் மற்ற தீர்வுகள் காண்க

7. $(2 + i\sqrt{3})$ என்பது $x^4 - 4x^3 + 8x + 35 = 0$-ன் ஒரு தீர்வானல் மற்றைய தீர்வுகள் காண்க.

8. $-2 + i\sqrt{7}$ என்பது $x^4 + 2x^2 - 16x + 77 = 0$-ன் வானல், மற்றைய தீர்வுகள் காண்க.

9. $(\sqrt{2} + i)$ என்பது $2x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 27x + 81 = 0$-ன் ஒரு தீர்வானல் மற்ற தீர்வுகள் காண்க

10. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c$ மெய் யெண்களானல்,
$\frac{a^2}{x-\alpha} + \frac{b^2}{x-\beta} + \frac{c^2}{x-\gamma} = x - \delta$ என்பது மெய்யெண் தீர்வுகளே பெற்றிருக்குமென நிறுவுக.

11. $\frac{a_1^2}{x-\alpha_1} + \frac{a_2^2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x-\alpha_n} = 1$ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்களென நிறுவுக ($a_1, a_2, \dots a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ மெய் யெண்கள்)

12. $a, b, c, \dots k$; $a^1, b^1, c^1, \dots k^1, m$; யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சமனில்லாத மெய் யெண்களாயின்,

$\frac{a^2}{x-a^1} + \frac{b^2}{x-b^1} + \frac{c^2}{x-c^1} + \dots + \frac{k^2}{x-k^1} = x - m$ என்றசமன்பாடு கற்பணைத் தீர்வுகள் பெற்றிருக்க முடியா தென நிறுவுக.

13. பின் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் மடங்கு தீர்வுகள் பெற்றிருக்கு மாயின் அவைகளைத் தீர்க்கவும்.

(i) $8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$

(ii) $27x^3 - 36x + 16 = 0$

(iii) $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$

(iv) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$

(v) $x^5 + 13x^4 + 55x^3 + 103x^2 + 88x + 28 = 0$

(vi) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 = 0$

(vii) $8x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 11x - 2 = 0$

14. $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு தீர்வுகள் சமமானல் $27r^2 + 4q^3 = 0$ என நிறுவுக.

15. $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகள் சமமானல், $3a^2 = 4b$, $27a^4 + 16c = 0$ என நிறுவுக.

16. $x^3 - 3p\,x^2 + 3\,q\,x - r = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு தீர்வுகள் சமமானல், மூன்ருவது தீர்வு $\dfrac{3\,p^3 - 4\,pq + r}{p^2 - q}$ என நிறுவுக.

17. $x^4 + a\,x^3 + bx^2 + c\,x + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகள் சமமானல் அவை ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{6\,c - a\,b}{3a^2 - 8\,b}$ என நிறுவுக.

18. $2\,x^3 - 9x^2 + 12\,x + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு தீர்வுகள் சமமானல் $k = -5$ அல்லது -4 என நிறுவுக. அப்போது அதன் தீர்வுகள் காண்க.

13.5 சமன்பாடுகளின் பண்புகள்

(Properties of Equations)

13.5.1 குறிமாற்றங்கள்—எண்ணிக்கை
(Number of changes of sign)

$x^5 - 4x^3 + x^2 + x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில்,

முதல் உறுப்பு + குறியும்

இரண்டாவது உறுப்பு − குறியும்

மூன்றாவது உறுப்பு + குறியும்

நான்காவது உறுப்பு + குறியும்

ஐந்தாவது உறுப்பு − குறியும் பெற்றிருக்கின்றன.

இக்குறிகளை நாம் நோக்குமிடத்து அவை முறையே + − + + − என அமைகிறது. இங்கு,

+ லிருந்து − க்கு ஒரு குறி மாற்றமும்

பிறகு − லிருந்து + க்கு மற்றொரு குறி மாற்றமும்

பிறகு + லிருந்து + க்குக் குறி மாற்ற மின்மையும்

மேலும் + லிருந்து − க்கு மற்றொரு குறி மாற்றமும் அதாவது 3 குறி மாற்றங்கள் உள்ளன வெனக் கூறப்படும்.

அவ்வாறே $x^6 + x^5 - 4x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் 2 குறி மாற்றங்கள் உள்ளன ;

$x^n + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் குறிமாற்றங்கள் இல்லை

$x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு குறி மாற்றம் உண்டு,

ஒரு சமன் பாட்டிலுள்ள உறுப்புக்களிடையே உள்ள குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் அச்சமன்பாட்டின் மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் ஒரு தொடர்பு உள்ளது என கணித மேதை டேகார்ட் கண்டுபிடித்திருக்கிறார். அத் தொடர்பே டேகார்ட்டின் குறி விதி எனக் கூறப்படுகிறது.

அவ் விதி பின்வருமாறு :

13·5·2 டேகார்ட்டின் குறிவிதி (Descartes Rule of sign)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை, அச்சமன் பாட்டில் தோன்றும் குறி மாற்ற எண்ணிக்கைக்கு மிகைபடாது.

இவ் விதியை நாம் முறைப்படி நிறுவாமல், பொதுவாக, இவ் விதியின் உண்மையை எடுத்துக் காட்டுவோம்.

[இவ்விதியும், இதுபோன்ற மற்ற சில விதிகளும், பூடான் பூரியர் (Budan and Fourier) அவர்களால் விரிவாக நிறுவப்பட்ட சில பொதுத் தேற்றங்களின் கிளைத் தேற்றங்களாக அமையும். அப்பொதுத் தேற்றங்களின் தெரிப்புக்கள் இந்நூல் திட்டத்திற்குப் புறம்பானவை யாகையால் கொடுக்கப்படவில்லை].

$f(x) = 0$ என்ற ஒரு சமன்பாட்டின் இடது கைப்புற உறுப்புக்கள் முறையே பின் குறிக்கப்பட்ட குறிகள் பெற்றுள்ளன வென வைத்துக் கொள்வோம்.

$$+ + - + - - - + + - + -$$
$$(1)\ (2)\ (3)\quad (4)\ (5)\ (6)\ (7)$$

இங்கு மேல் காட்டியபடி, மொத்தமாக ஏழு குறி மாற்றங்கள் உள்ளன.

$f(x)$ ஐ $(x - a)$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவோம். a கூட்டு மெய்யெண். எனவே $f(x) \times (x - a) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $f(x) = 0$ என்பதற்குள்ள கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளைவிட, a என்ற ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு அதிகமாக இருக்கும் என்பது வெள்ளிடை. இப்படி ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு அதிகமாகும் போது, $f(x)$ ல் உள்ள குறி மாற்ற எண்ணிக்கையை விட, $f(x) \times (x - a)$ ன் பெருக்கத்தில் குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றம் மிகையாக விருக்கும் என இப்போது காண்போம்.

(1) $+ + - + - - - + + - + -$: $f(x)$ ன் குறிகள்

(2) $+ -$: $(x - a)$ ன் குறிகள்

x ஆல் பெருக்கல்,

(3) $+ + - + - - - + + - + -$

$-a$ ஆல் பெருக்கல்

(4) $- - + - + + + - - + - +$

பெருக்கம்

(5) $+ \pm - + - \pm \pm + \pm - + - +$: $f(x) \times (x - a)$ ன் குறிகள்.

வரி (5) ல் உள்ள குறி மாற்றங்கள் எத்தனை எனக் காண்போம்:

(i) (3) லும் (4) லும் + − அல்லது − + எனக் கூட்ட வேண்டி வருமாயின் + அல்லது —, அதாவது ± என (5) ல் கொடுக்கப்படிருக்கிறது.

(ii) $f(x)$-ல், அதாவது (1)-ல் 12 உறுப்புக்களும் 7 குறி மாற்றங்களும் உள்ளன.

$f(x) \times (x-a)$-ல், அதாவது (5)-ல் முதல் 12 உறுப்புக்களில் குறிகளும் அப்படியே $f(x)$-ல் உள்ள 12 உறுப்புக்களின் குறிகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என வைத்துக் கொண்டால்கூட, $f(x) \times (x-a)$-ல் 13 வது உறுப்பை யொட்டிய வரையில் ஒரு குறி மாற்றம் மிகையாக உள்ளது — அதாவது $f(x)$-ல் 7 குறிமாற்றங்கள் இருப்பின் $f(x) \times (x-a)$-ல் குறைந்தது 8 குறி மாற்றங்கள் இருக்கும்.

எனவே $f(x)$-ல் உள்ள குறி மாற்றங்களை விட $f(x) \times (x-a)$-ல் குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றம் அதிகமிருக்கு மென்பது தெரிகிறது. அதாவது a என்ற கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுக்காக குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றம் ஏற்படுகிறது. இவ்வாறே b என்ற கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு கொள்வோமானல்,

$f(x) \times (x-a) \times (x-b) = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்; $f(x) \times (x-a)$-ல் உள்ள குறி மாற்றங்களை விட, $f(x) \times (x-a) \times (x-b)$-ல் குறைந்தது கூடுதல் ஒரு குறி மாற்றம் தோன்றும்.

இவ்வாருக, இவ்வுண்மையைப் பொதுப் படுத்தினுல் n கூட்டு எண் தீர்வுகளுக்கு குறைந்தது n குறி மாற்றங்கள் கூடுதலாகும் என்பது தெரிகிறது.

'குறைந்தது' ஒரு குறி மாற்றமெனக் கூறினேம், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட குறி மாற்றங்களும் வரலாம்.

இப்போது, $f(x) \times (x-a)$-ன் பெருக்கத்தின் குறிகள்,

(6) + − + − − + + − − + − +

அல்லது

(7) + + − + − + − + − − + − +

அல்லது

(8) + − − + − + + + − − + − +

என்ற அமைப்புக்களிலும் வரலாம். (5) ஐப் பார்க்கவும்.

இங்கு (6)-ல் 8 குறி மாற்றங்களும்,

(7)-ல் 10 குறி மாற்றங்களும்,

(8)-ல் 8 குறி மாற்றங்களும்,
வருவதைப் பார்க்கலாம்.

எனவே ‘குறைந்தது’ என்று கூறுவதின் தேவை புலப்படும்.

13. 5·2·1 குறை மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கு, டேகார்ட்டின் குறி விதி (உச்சவரம்பு)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை, $f(-x)$-ல் தோன்றும் குறி மாற்ற எண்ணிக்கைக்கு மிகை படாது.

$f(x) = 0$-ல் தோன்றும் குறை மெய்யெண் தீர்வுகள், யாவும் $f(-x) = 0$-ல் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளாகத் தோன்றும். எனவே இவ்விதி யுண்மையாகிறது.

13· 5·2·2 எ. கா· 1.

$x^3 + 10x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை மெய் யெண் தீர்வுகள் உள்ளன ?

$f(x) = x^3 + 10x - 6$-ல் ஒரு குறி மாற்றம் உள்ளது; எனவே ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுக்கு மேல் இருக்கமுடியாது. அதாவது கூட்டு மெய்யெண் தீர்வே இல்லாமலிருப்பினும் இருக் கலாம் இருப்பின் ஒன்றுக்கு மேல் இருக்கமுடியாது.

$f(-x) = (-x)^3 + 10(-x) - 6$-ல் அதாவது $-x^3 \quad 10x - 6$-ல் குறி மாற்றமே இல்லை. எனவே சமன்பாட்டிற்கு ஒரு குறை யெண் தீர்வு கூட இருக்க முடியாது.

எனவே ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு கூட இல்லையானால் இம் முப்படிச் சார்புக்கு உள்ள மூன்று தீர்வுகளும் கற்பனை யெண் களாக விருக்கவேண்டும். ஆனால் கற்பனை யெண் தீர்வுகள் இரட்டைப் படையாகத்தான் தோன்றும். ($\alpha + i\beta$ ஒரு தீர்வு ஆயின் $\alpha - i\beta$ ம் ஒரு தீர்வாகும்)

ஆகவே, ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் இரண்டு கற்பனை யெண் தீர்வுகளும், இச்சமன்பாட்டிற்கு உள்ளன.

எ. கா. 2.

$x^n - 1 = 0$-ன் தீர்வுகளின் தன்மை காண்க.

(1) n ஒரு இரட்டைப் படை யெண்ணெனக் கொள்வோம்:

$f(x) \equiv x^n - 1$-ல் ஒரு குறி மாற்றம் உண்டு; எனவே $x^n - 1 = 0$ க்கு ஒரு கூட்டு மெய் யெண் தீர்வுக்கு மேல் இருக்க முடியாது; அதாவது இல்லாமலே இருந்தாலும் இருக்கலாம்; இருப்பின் ஒன்றுக்கு மேற்படாது.

$$f(-x) \equiv (-x)^n - 1$$
$$\equiv x^n - 1 \text{ (} n \text{ இரட்டைப் படையெண்)}$$

இங்கு $f(-x)$-ல் ஒரு குறிமாற்றம் உண்டு. எனவே $x^n - 1 = 0$ க்கு ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வுக்கு மேல் இருக்க முடியாது; அதாவது இல்லாமலே இருந்தாலும் இருக்கலாம்; இருப்பின் ஒன்றுக்கு மேற்படாது.

ஆனால் $x = 1$; $x = -1$ என்பவை இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளென்பது வெளிப்பவட, எனவே உச்சவரம்பு விதிக்கொப்ப,

(1) ஒரே ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும்,

(2) ஒரே ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும்,

(3) மீதி $(n-2)$ தீர்வுகளும் கற்பனைத் தீர்வுகள். இங்கு n இரட்டைப்படை யெண்ணுதலின், $(n-2)$ம் இரட்டைப்படையெண்; ஆகவே கற்பனையெண் தீர்வுகள் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை.

2 n ஒரு ஒற்றைப்படை யெண்ணெனக் கொள்க.

$f(x) \equiv x^n - 1$ல் ஒரு குறிமாற்றம் உண்டு;

எனவே ஒரு கூட்டு மெய்யெண்தீர்வுக்கு மேல் இருக்க முடியாது; $x = 1$ அத்தீர்வாகும்.

$$f(-x) \equiv (-x)^n - 1$$

$$\equiv -x^n - 1 \qquad (n \text{ ஒற்றைப்படையெண்})$$

$f(-x)$ல் குறி மாற்றங்களே யில்லை. எனவே $x^n - 1 = 0$க்கு ஒரு குறை மெய்யெண்தீர்வுகூட இருக்கமுடியாது.

எனவே உச்சவரம்பு விதிக்கொப்ப

(1) ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும்,

(2) மீதி $(n-1)$ கற்பனை யெண் தீர்வுகளும் உண்டு. n ஒற்றைப்படையாதலின் $(n-1)$ இரட்டைப் படையாகும்.

எ. கா. 3.

$x^7 - x^4 + x^3 - 28 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனையெண் தீர்வுகள் உள்ளனவென நிறுவுக.

முதலில், இது ஒரு எழுபடிச் சமன்பாடாதலின் இதற்கு ஏழு தீர்வுகள் உண்டு.

அவைகளில் குறைந்தது ஒன்றேனும் மெய்யெண் தீர்வாக இருக்கவேண்டும்; மீதி ஆறும் வேண்டுமானுல் கற்பனையெண் தீர்வுகளாகவிருக்கலாம்; ஏனெனில் கற்பனையெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை எப்போதும் இரட்டைப் படையெண்.

$f(x) \equiv x^7 - x^4 + x^3 - 28$இல் மூன்று குறி மாற்றங்கள் உண்டு; எனவே கூட்டுமெய்யெண் தீர்வுகளுக்கு உச்சவரம்பு 3.

$f(-x) \equiv -x^7-x^4-x^3-28$ ல் குறிமாற்றங்களேயில்லை. எனவே குறை மெய்யெண் தீர்வுகளே இருக்கமுடியாது.

ஆகவே, மெய்யெண் தீர்வுகளெனச் சொல்லக்கூடிய தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையின் (கூட்டு, குறை மெய்யெண் யாவும்) உச்ச வரம்பு 3. எனவே, குறைந்தது நாலு கற்பனைத் தீர்வுகள் இருந்தாகவேண்டுமென்பது நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 13·5 (1)

1 ஒரு சமன்பாட்டின் உறுப்புக்கள் யாவும் கூட்டுக்குறி பெற்றிருக்குமானால், அச்சமன்பாட்டிற்கு கூட்டு மெய்யெண்தீர்வே இருக்கமுடியாதென நிறுவுக.

2. எல்லா உறுப்புக்களும் உடைய (complete equation) ஒரு சமன்பாட்டில் ஒன்றுவிட்டு ஒரு உறுப்பு, கூட்டுக் குறி மாறி குறைக்குறி பெற்றிருப்பின், அச் சமன்பாட்டிற்கு குறைமெய்யெண் தீர்வே இருக்கமுடியாதென நிறுவுக.

3. ஒரு சமன்பாட்டில் முதலில் தொடர்ச்சியாகக் கூட்டுக்குறி உறுப்புக்களும் பின்னர் தொடர்ச்சியாக குறைக் குறி உறுப்புக்களும் இருப்பின் அதற்கு ஒரே ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுதானிருக்குமென நிறுவுக.

4. ஒரு சமன்பாட்டில் இரட்டைப் படை 'படி'யுள்ள உறுப்புக்கள் மட்டுமே இருந்து, எல்லாம் கூட்டுக் குறி பெற்றிருப்பின் அதற்கு மெய்யெண் தீர்வே இருக்கமுடியாதென நிறுவுக.

5 ஒரு சமன்பாட்டில் ஒற்றைப் படை 'படி'யுள்ள உறுப்புக்கள் மட்டுமே இருந்து, எல்லாம் கூட்டுக்குறி பெற்றிருப்பின் 0 என்ற தீர்வும் மற்றயாவும் கற்பனைத் தீர்வுமாக இருக்குமென நிறுவுக.

6 $x^6-x^2-x+7=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளனவென நிறுவுக.

7. $x^4+5x^2+17x-11=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, ஒரு கூட்டு, ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும், இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உள்ளனவென நிறுவுக.

8. p, q கூட்டெண்கள். $x^3+px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும், இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உள்ளனவென நிறுவுக.

9. p, q கூட்டெண்கள்; $x^3-px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வு கட்டாயமுண்டு எனவும், மீதி இரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனையெண்கள் அல்லது கூட்டு மெய்யெண்களென வும் நிறுவுக.

10. $x^n + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் n இரட்டைப்படையெண்ணுயின் கூட்டுமெய்யெண் தீர்வேயில்லை யெனவும், n ஒற்றைப்படையெண்ணுயின் -1 என்ற தீர்வு தவிர மற்றயாவும் கற்பணேத் தீர்வுகளெனவும் நிறுவுக.

11. $x^4 + 5x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மெய், இரண்டு கற்பணேத் தீர்வுகள் உள்ளனவென நிறுவுக.

12 $x^7 - x^5 - x^4 - 6x^2 + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது இரண்டு கற்பணேத் தீர்வுகள் உள்ளனவென நிறுவுக.

13. $x^{2n} - x^4 + x^3 - x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது (2 1 6) கற்பணேத் தீர்வுகள் உள்ளனவென நிறுவுக.

14. $x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, ஒரே ஒரு குறைமெய்யெண் தீர்வும், மீதி கற்பணேத் தீர்வுகளும் உள்ளனவென நிறுவுக.

பின் வரும் 13·53; 13·5·4; 13·5·5 பகுதிகளை இந் நூலை முதலில் படிப்பவர்கள் விலக்கலாம்.

13·5·3 xன் மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு, $f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p^2 x^{n-2} + \ldots + p_n$ என்ற கோவையின் மதிப்பு: ($p_1, p_2, \ldots p_n$ யாவும் மெய்யெண்கள்)

விளக்கம்: $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\alpha_1, \ldots \alpha_2, \ldots$ என்ற r மெய்யெண் தீர்வுகளும் $a \pm ib, c + id \ldots\ldots k \pm il$ என்ற $\frac{n-r}{2}$ இரட்டை, இரட்டையான துணையிய கற்பணேத் தீர்வுகளும் உள்ளனவெனக் கொள்வோம்.

$$\therefore f(x) \quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_r)[x-(a+ib)] [x-(a-ib)] \times \ldots + [x-(k+il)][x-(k-il)] \ldots$$

$$\equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_r)[(x-a)^2+b^2] [(x-k)^2+l^2]$$

$$\equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_r)\phi(x)$$ எனவிருக்கும்.

இங்கு $\phi(x) \equiv [(x-a)^2+b^2][(x-c)^2+d^2] \ldots [(x-k)^2+l^2]$

ஆதலால், எல்லா xன் மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும் $\phi(x)$ மதிப்பு கூட்டு மெய்யெண்ணுயிருக்கும் என்பது உடனடியாகவே தெரிகிறது.

மேலும் $\phi(x)$ன் படி 'இரட்டைப் படைப்படி' இப்போது $f(x)$ன் மதிப்பு xன் எம் மதிப்புக்களுக்கு குறை மதிப்பும் பெறும் எனப்பார்ப்போம்.

$(f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)......(x-\alpha_r)\phi(x))$

(i) (a) $x<\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ ஆனால், $f(x)$ன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாகும்.

(b) $x \rightarrow +\alpha$ ஆனால் $f(x$ன்) மதிப்பு $\rightarrow +\alpha$.

(ii) $x<\alpha_1, \alpha_2 ......\alpha_r$ ஆகி,

(a) r ஒற்றைப்படை எண்ணாயின் $f(x)$ன் மதிப்புக் குறை மதிப்பாகும்.

(b) r இரட்டைப்படை எண்ணாயின் $f(x)$ன் மதிப்புக் கூட்டு மதிப்பாகும்.

இங்கு r ஒற்றைபடை எண்ணாயின் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாடு ஓர் ஒற்றைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாகும்;

r இரட்டைப் படை எண்ணாயின் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாடு ஓர் இரட்டைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாகும். எனவே,

(iii) (a) $f(x)=0$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சமன்பாடாகி, $x<\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ (இங்கு r ஒற்றைப்படையெண்ணுகுமென்பதை அறிக) ஆனால் $f(x)$ன் மதிப்பு குறை மதிப்பாகும்;

(b) $f(x)=0$ ஒரு இரட்டைப் படைப் படிச் சமன்பாடாகி, $x<\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ (இங்கு r இரட்டைப்படை யெண்ணுகுமென்பதை அறிக) ஆனால் $f(x)$ன் மதிபபு கூட்டு மதிப்பாகும்.

(iv) (a) $f(x) = 0$ ஒற்றைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாகி, $x \longrightarrow -\infty$ ஆனால் $f(x)$-ன் மதிப்பு $\longrightarrow -\alpha$

(b) $f(x)=0$ இரட்டைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாகி, $x \longrightarrow -\alpha$ ஆனால் $f(x)$-ன் மதிப்பு $\longrightarrow +\alpha$

(v) (a) $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ ...... $(x-\alpha_r)$ என்ற சினைகளில் ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள சினைகள் குறை மதிப் பேற்பின், அதாவது x-க்கு ஈடு செய்யப்படும் மதிப்பு ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகளுக்குக் குறைந்திருக்குமாயின் $f(x)$-ன் மதிப்பு குறைமதிப்பாகும்;

அவைகளுள் இரட்டைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள சினைகள் குறைமதிப் பேற்பின், அதாவது x-க்கு ஈடு செய்யப்படும் மதிப்பு இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகளுக்குக் குறைந்திருக்குமாயின் $f(x)$-ன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாகும்.

(b) (v)(a)-ல் காணும் இயல்பு $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒற்றைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாயினும், அல்லது இரட்டைப் படைப் 'படி'ச் சமன் பாடாயினும் பொருந்தும்.

(vi) (a) $f(x) = 0$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகளே இல்லையானல், $f(x) \equiv \phi(x) \equiv \Pi\ [(x-a)^2 + b^2]$ என்ற

அமைப்பிலே இருக்கும்; $f(x)$-ன் மதிப்பு எப்போதும் கூட்டு மதிப்பாயிருக்கும்; அதாவது எப்போதும் $f(x) > 0$ ஆகும்.

(b) மறுதலையாக x-ன் எந்த மெய்யெண் மதிப்புக்கும் $f(x) > 0$ ஆனால், $f(x) = 0$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகளே இராது.

இவ்விரு நிலைகளிலும் $f(x) = 0$ ஒரு இரட்டைப்படைப் 'படி'ச் சமன்பாடாகவே விருக்கு மென்பதையும் அறிக.

13. 5·4 தேற்றம் : 1

$f(a)$ ம் $f(b)$ ம் மாற்றுக்குறியீடுகள் பெற்றிருப்பின், a-க்கும் b-க்குமிடையே $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். (குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் இருக்கும்; மேற்கொண்டிருப்பின் அத்தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை யெண்ணாய் இருக்கும்)

தெ: $f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_n = 0$. பொதுத்தன்மை மாறாமல் $f(a)$ கூட்டுமதிப் பெனவும் $f(b)$ குறை மதிப்பெனவும் கொள்ளலாம்.

$f(a) > 0$, ஆகையால் 13. 5·3 (v) (a)-ன் பிற்பகுதிப்படி, 'a'-ன் மதிப்பு $2m$ தீர்வுகளுக்குக் குறைந்திருக்கும்.

$f(b) \angle 0$, ஆகையால் v (a)-ன் முன் பகுதிப்படி, 'b'-ன் மதிப்பு $2l + 1$ தீர்வுகளுக்குக் குறைந்திருக்கும்.

எனவே $2m \backsim (2l + 1)$ தீர்வுகள் 'a'-க்கும் 'b'-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும்.

$2n \backsim 2l + 1 =$ ஓர் ஒற்றைப் படையெண். எனவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு:

கோட்டுருவப்பட வாயிலாக இத் தேற்ற விளக்கம் பின்னர் ரோல் தேற்றத்திற்குரிய படம் (8) பார்க்கவும் (13. 5·8·1)

13. 5·5 தேற்றம். 2 :

$f(a)$-ம் $f(b)$-ம் ஒரே குறியீடு பெற்றிருப்பின், 'a'-க்கும் 'b'-க்குமிடையே, $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, இரட்டைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். (மெய்யெண் தீர்வே இல்லாமல் இருக்கலாம்; அல்லது மெய்யெண் தீர்வுகளிருப்பின் அவைகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை யெண்ணாயிருக்கும்)

தெ: (a)-ம் $f(b) > 0$ எனக்கொள்வோம்

13. 5·3. i (a)-ன் படி, 'a'-ன் மதிப்பும் 'b'-ன் மதிப்பும் எல்லா மெய்யெண் தீர்வுகளைவிட மிகைப்பட்ட மதிப்புடையதாய் இருக்கலாம் ;

அல்லது

13. 5·3 v (a)-ன் பிற்பகுதிப்படி, 'a'-ன் மதிப்பு $2m_1$ தீர்வு களுக்கும் 'b'-ன் மதிப்பு $2m_2$ தீர்வுகளுக்கும் குறைந் திருக்கும்

இங்கு முதல் கூறப்பட்ட நிலையில் 'a'-க்கும் 'b'-க்குமிடையே மெய்யெண் தீர்வுகளே இராது.

இரண்டாவது கூறப்பட்ட நிலையில் 'a'-க்கும் 'b'-க்குமிடையே $2m_1 \backsim 2m_2$ தீர்வுகள் இருக்கும்.

$2m_1 \backsim 2m_2$ = ஓர் இரட்டைப் படை யெண். எனவே, தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு: கோட்டுருவப்பட வாயிலாக இத்தேற்ற விளக்கம் பின்னர் ரோல் தேற்றத்திற்குப் பின்பு படம் (8) பார்க்கவும். (13. 5·8·1)

13·5·6 தேற்றம். 3 ஓர் ஒற்றைப் படைப் ' படி ' ச் சமன் பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய் யெண் தீர்வேனும் உண்டு.

தெ: $f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0$ (n ஒற்றைப் படை கூட்டு முழு எண்) என்பது சமன்பாடு.

13.5·3. iv (a) ன் படி, $f(-\alpha) = -\alpha$

$$f(0) = p_n$$

13.53. I (b) ன் படி, $f(+\alpha) = +\alpha$

இங்கு p_n கூட்டு மதிப்புடையதாயின், $f(-\alpha)$ம் $f(0)$ம் மாற்றுக் குறியீடு பெறும். எனவே தேற்றம். 1, (13.5.4.) படி $-\alpha$ க்கும் '0' க்கும் இடையே குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. ($-\alpha$ க்கும் '0' க்கும் இடையே இருக்கும் மெய்யெண் குறைக்குறியுடையதாகும்) அல்லாது p_n குறை மதிப்புடையதாயின். $f(0)$ம் $f(+\alpha)$ம் மாற்றுக் குறியீடு பெறும். எனவே தேற்றம் 1, (13·5.4) படி, '0' க்கும் $+\alpha$ க்கும் இடையே குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு ('0' க்கும் α க்கும் இடையே இருக்கும் தீர்வு மெய்யெண், கூட்டுக் குறியுடையதாகும்.)

குறிப்பு: ஒற்றைப் படைப் ' படி ' ச் சமன்பாட்டில் கடைசியாக உள்ள மாறிலி கூட்டெண்ணுயின் குறைந்தது ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும், அம்மாறிலி குறையெண்ணுயின், குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் அச்சமன்பாட்டிற்கு உண்டு என்பது கவனத்திற்குரியது.

13.5.7. தேற்றம்: 4. ஓர் இரட்டைப் படைப் 'படி' ச் சமன் பாட்டில், கடைசி மாறிலி உறுப்பு குறையெண் மதிப்பு உடைய தாயின், அதற்குக் குறைந்தது ஒரு கூட்டு எண் தீர்வும் ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு.

தெ: $f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + \dots - p_n = 0$ என்பது சமன் பாடு (ı ஒரு இரட்டைப்படைக் கூட்டு முழு எண்; p_n கூட்டெண்).

13.5.3 .v (b) ன் படி $f(-\alpha) = +\alpha$

$f(0) = -p_n$ (குறையெண்)

13.5.3 i (b) படி $f(+\alpha) = +\alpha$

எனவே $f(-\alpha)$ ம் $f(0)$ ம் மாற்றுக் குறியீடு பெற்றிருப்பதால், தேற்றம் 1. (13·5·4) ன்படி, $-\alpha$ க்கும் 0 க்கு மிடையே குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்விருக்கும். ($-\alpha$க்கும் 0க்கும் இடையே இருக்கும் மெய்யெண் தீர்வு குறைக் குறியீடு உடையதாகும்.)

மேலும் $f(0)$ ம் $f(+\alpha)$ ம் மாற்றுக் குறியீடு பெற்றிருப்பதால் தேற்றம் 1, (13 5.4) ன் படி 0க்கும் $+\alpha$ க்கு மிடையே குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்விருக்கும். (0க்கும் $+\alpha$க்குமிடையே இருக்கும் மெய்யெண் தீர்வு கூட்டுக் குறிபீடுடையதாகும்).

எனவே இவ்விதமான இரட்டைப் படைப் 'படி' ச் சமன் பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும், ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு:

குறிப்பு :

ஆனல் மாறிலியுறுப்பு கூட்டு மதிப்புடையதாயின் தேற்றம் 2: (13·5·5) படி மெய்யெண் தீர்வேயில்லாமலிருப்பினும் இருக்கலாம்; அப்படி இருப்பின் அவைகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாயிருக்கும்.

13.5 8. ரோல் தேற்றம். 5. (Rolle's Theorem)

$f(x) = 0$ ன் இரண்டிரண்டு அடுத்தடுத்த மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கிடையில் $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் உள்ளன; குறைந்தது ஒரு தீர்வேனும் உண்டு.

[Between any two consecutive real roots of $f(x) = 0$ there lie an odd number of real roots of $f^1(x) = 0$; at least one real root of $f^1(x) = 0$.]

தெ· $f(x) = 0$ க்கு அடுத்தடுத்த இரண்டு தீர்வுகள் α_1, α_2 எனக் கொள்க. (அதாவது α_1, α_2 க்கு இடையில்

உள்ள எந்த மெய்யெண்ணும் $f(x)=0$க்குத் தீர்வாக இல்லை என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.)

$f(x) \equiv (x-\alpha_1)^l (x-\alpha_2)^m \phi(x)$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\phi(x) = 0$ க்கு α_1, α_2 க் கிடையே ஒரு மெய்யெண் தீர்வுமில்லை. அப்படியிருக்குமாயின் அது $f(x) = 0$ ன் தீர்வு மாகும். அது, நாம் எடுத்துக் கொண்ட கட்டுப் பாட்டுக்கு ஒவ்வாது.

மேலும் $\phi(\alpha_1) \neq 0$; $\phi(\alpha_2) \neq 0$, மற்றும் $\phi(\alpha_1)$-ன் மதிப்பும் $\phi(\alpha_2)$-ன் மதிப்பும் ஒரே குறியீடு பெற்றிருக்கும் (+ அல்லது —). ஏனெனில் அவை மாறுபட்ட குறியீடு பெற்றிருப் பின் α_1-க்கும் α_2-க்கும் இடையில் $\phi(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது ஒரு தீர்வு தோன்ற ஏதுவுண்டு. இதுவும் நாம் எடுத்துக் கொண்ட கட்டுப்பாட்டுக்கு ஒவ்வாது.

இப்போது $f(x) \equiv (x-\alpha_1)^l (x-\alpha_2)^m \phi(x)$

$$f^1(x) = l(x-\alpha_1)^{l-1}(x-\alpha_2)^m \phi(x) + m(x-\alpha_1)^l (x-\alpha_2)^{m-1}\phi(x) + (x-\alpha_1)^l (x-\alpha_2)^m \phi^1(x)$$

$$= (x-\alpha_1)^{l-1}(x-\alpha_2)^{m-1}[l(x-\alpha_2)^m \phi(x) + m(x-\alpha_1)\phi(x) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\phi^1(x)]$$

$$= (x-\alpha_1)^{l-1}(x-\alpha_2)^{m-1} F(x)$$

$F(x) = l(x-\alpha_2)\phi(x) + m(x-\alpha_1) + \phi(x) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\phi^1(x)$

இப்போது $F(\alpha_1) = l(\alpha_1-\alpha_2)\phi(\alpha_1)$

$$F(\alpha_2) = m(\alpha_2-\alpha_1)\phi(\alpha_2)$$

$\phi(\alpha_1)$-ம் $\phi(\alpha_2)$-ம் ஒரே குறியீடு பெற்றிருப்பதால், $F(\alpha_1)$-ம் $F(\alpha_2)$-ம் மாற்றுக் குறியீடு பெறும்.

$\therefore$ $F(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α_1-க்கும் α_2-க்கும் இடையே ஓர் ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையுடைய மெய்யெண் தீர்வுகள் உண்டு (தேற்றம் 1—18·5·4).

ஆனால் $f^1(x) \equiv (x-\alpha_1)^{l-1}(x-\alpha_2)^{m-1} F(x)$. ஆகவே $f^1(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு α_1-க்கும் α_2-க்கு மிடையே ஓர் ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கையுடைய மெய்யெண் தீர்வுகள் உண்டு; குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு இருந்தாக வேண்டும்.

கிளைத் தேற்றங்கள்:

(i) $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள் யாவும் வெவ்வேறு மெய் யெண்களாயின், $f'(x) = 0$; $f'(x) = 0$ .... என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் யாவும் மெய்யெண்களாகும்.

$f(x) = 0$ ஒரு n படிச்சமன்பாடு ; $f'(x) = 0$ ஒரு $(n-1)$ படிச்சமன்பாடாகும். $f(x) = 0$-ன் n தீர்வுகளும் வெவ்வேறு மெய் யெண்களாயின் அவைகளுக்கிடையே $f'(x) = 0$-ன் $(n-1)$ தீர்வுகள் மெய்யெண்களாய்க் கிடைக்கப்பெறும். அவ்வாறே $f''(x) = 0$; $f'''(x) = 0$... என்பவற்றிற்கு.

(ii) $f'(x) = 0$-ன் இரு மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கிடையே $f(x) = 0$-ன் மெய்யெண் தீர்வு ஒன்றுக்கு மேல் இருக்கமுடியாது ; $f(x) = 0$-க்கு மெய்யெண் தீர்வு அவைகளுக்கிடையே இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

(iii) $f'(x) = 0$-க்கு r மெய்யெண் தீர்வுகளே இருப்பின் $f(x) = 0$-க்கு $(r+1)$ மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கு மேல் இருக்க முடியாது. ஆனால் குறைவான மெய்யெண் தீர்வுகளும் இருக்கலாம்

(iv) $f'(x) = 0$-க்குக் கற்பனைத் தீர்வுகள் இருக்குமாயின் $f(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது அத்தனை கற்பனைத் தீர்வுகளேனும், இருக்கும்.

(v) $f'(x) = 0$-ன் தீர்வுகள் $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{n-1}$ என வெவ்வேறு தீர்வுகளாகி $f(\beta)$, $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$ .... $f(\beta_{n-1})$, $f(\alpha)$-ன் மதிப்புக்கள் ஒன்று விட்டு ஒன்று கூட்டு குறைக் குறிகள் பெறின், $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள் யாவும் வெவ்வேறு மெய்யெண்களாகும்

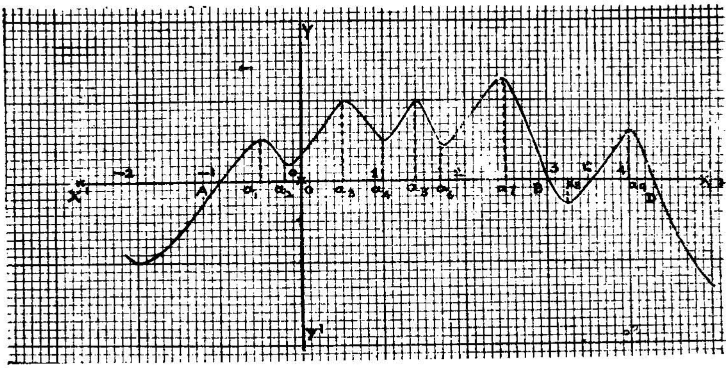
(vi) $f'(x) = 0$-ன் மீச்சிறு தீர்வு β ஆனல், $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்றே ஒன்று β-க்குக் குறைவாக விருக்கலாம் ; அல்லது β-க்குக் குறைந்த தீர்வு எதுவும் இல்லாமலும் இருக் கலாம்.

$f'(x) = 0$-ன் மீப்பெறு தீர்வு γ ஆனல், $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்றே ஒன்று γ-க்கு மிகையாக விருக்கலாம் ; அல்லது γ-க்கு மிகையான தீர்வு எதுவும் இல்லாமலும் இருக்கலாம்

13 5·8-ல் முன் நிறுவப்பட்ட ரோல் தேற்றம், அதன் கிளைத் தேற்றங்கள் சிலவும் கோட்டுருவப்பட மூலமாக எளிதில் விளங்கும். அவ்விளக்கம் பின் வருவதாகும்

13·5·8·1 ரோல் தேற்றமும் கிளைத் தேற்றங்களும் கோட்டுருவப் பட விளக்கம்.

படம் (3) $f(x)$-ன் கோட்டுருவப்படமெனக் கொள்க.



படம் 3

தேற்ற விளக்கம் :

$f(x)$ ன் வரைபடம் (3) காண்க.

0 — ஆய ஆதி

x — அச்சு : 1 அங்குலம் = 1 அலகு = 10 சிறு இடை-வெளிகள்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், கோட்டுருவப் படத்திலுள்ளபடி

$x = -1$ (புள்ளி A);

$x = 3$ (புள்ளி B);

$x = 3·5$ (புள்ளி C);

$x = 4·3$ (புள்ளி D);

$f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பின்வரும் புள்ளிகள், அவைகளின் மதிப்புக்கள்.

$-0·5\ (a_1)$; $-0·2\ (a_2)$; $+0·5\ (a_3)$; $+1\ (a_4)$; $+1·4\ (a_5)$; $+1·7\ (a_6)$; $+2·5\ (a_7)$; $+3·25\ (a_8)$; $+4\ (a_9)$

$f(x) = 0$ ன் இரண்டு அடுத்தடுத்த தீர்வுகள் -1; 3; அவைகளுக்கிடையில் $f'(x) = 0$ ன் தீர்வுகளாவன: $-0·5$, $-0·2$; $+0·5$; $+1$; $+1·4$; $+1·7$; $+2·5$ என 7 தீர்வுகள் —ஒற்றைப்படை— உள்ளன.

$f(x) = 0$ ன் மற்ற இரண்டு அடுத்தடுத்த தீர்வுகள் 3,3·5. அவைகளுக்கிடையில் $f'(x) = 0$ ன் ஒரே தீர்வு 3·25 உள்ளது மேற் கூறியவை ரோல் தேற்றத்தை விளக்குகிறது.

கிளைத்தேற்றம் (ii)

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_6, a_7, a_8, a_9$ யாவும் $f'(x) = 0$ ன் தீர்வுகளாகும்.

$(a_1 \to a_2)$; $(a_2 \to a_3)$; $(a_3 \to a_4)$; $(a_4 \to a_5)$; $(a_5 \to a_6)$, $(a_6 \to a_7)$ என்ற இடைவெளிகளில் $f(x) = 0$ க்குத் தீர்வுகளே கிடையாது; $(a_7 \to a_8)$ இடைவெளியில் $f(x) = 0$ ன் ஒரே ஒரு தீர்வு 3 (B) மட்டும் இருக்கிறது;

$(a_8 \to a_9)$ இடைவெளியில் $f(x) = 0$ ன் ஒரே ஒரு தீர்வு 3·5 (C) இருக்கிறது. இது கிளைத் தேற்றம் (ii) ஐ விளக்குகிறது.

கிளைத் தேற்றம் (iii)

$f(x)$ ன் முழுப்படம் படம் (8) ல் காட்டியபடி அமைகிறது எனக் கொள்வோம்.

$f'(x) = 0$ ன் மீச்சிறு தீர்வு $-$ 0·5; மீப்பெரு தீர்வு + 4. $f(x) = 0$ ன் மீச்சிறு தீர்வு $-$ 1; மீப்பெரு தீர்வு 4·3 (D). கிளைத் தேற்றம் (iii) இதனல் விளக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: இக் கோட்டுருவப் படங் கொண்டு, முன்னர் இப் பகுதியில் நிறுவப்பட்டிருக்கும் இருதேற்றங்களின் விளக்கமும் பார்க்கலாம் (13 5·4; 13·5 5)

தேற்றம் (1) பார்க்க. அத் தேற்றத்தில் $a = 1$ எனவும் $b = 5$ எனவும் கொண்டால் $f(a)$ ன் மதிப்பு + குறி பெற்றது; $f(b)$ ன் மதிப்பு $-$ குறி பெற்றது. 1 க்கும் 5 க்கும் இடையில் $f(x) = 0$ ன் தீர்வுகள் (படத்திலுள்ள படி B, C, D) மூன்று (ஒற்றைப்படை) 3; 3·5; 4·3

$a = 2{\cdot}5$ எனவும் $b = 3{\cdot}2$ எனவும் கொண்டால், $f(a)$ ன் மதிப்பு + குறி பெற்றது. $f(b)$ ன் மதிப்பு $-$ குறி பெற்றது. 2·5 க்கும் 3·2 க்கும் இடையில் $f(x) = 0$ ன் தீர்வு ஒன்றேயொன்று (ஒற்றைப்படை) 3 (B).

$a = -2$ எனவும் $b = 4$ எனவும் கொண்டால் $f(-2) = -$; $f(4) = +$. $-$ 2 க்கும் 5 க்கும் இடையில் $f(x) = 0$ ன் தீர்வுகள் (A, B, C) மூன்று (ஒற்றைப் படை) $-$ 1; 3; 3·5.

தேற்றம் (2) பார்க்க: அத்தேற்றத்தில் $a = 0$ எனவும் $b = 2{\cdot}5$ எனவும் கொண்டால் $f(0) = +$; $f(2{\cdot}5) = +$ 0 க்கும் 2 5 க்கும் இடையில் $f(x) = 0$ க்குத் தீர்வுகளே கிடையாது.

$a = -2$ எனவும், $b = +5$ எனவும் கொண்டால் $f(-2) = -$; $f(+5) = -$; -2 க்கும் 5 க்கும் இடையில் $f(x) = 0$ன் தீர்வுகள் (படத்திலுள்ளபடி A, B, C, D) நான்கு (இரட்டைப் படை) -1; 3; 3·5; 4·3.

13·5·8·2 எ.கா.

$4x^3-21x^2+18x+30=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மை காண்க.

$$f(x)\equiv 4x^3-21x^2+18x+30=0$$

$$f^1(x)\equiv 12x^2-42x+18=0$$

$f^1(x)=0$ என்ற சமன்பாடு

$2x^2-7x+3=0$ ஆகும்.

அதன் தீர்வுகள் $\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}$

$= 3, \frac{1}{2}$.

$$f(\alpha) = \alpha$$
$$f(3) = 3$$
$$f(\tfrac{1}{2}) = 34\tfrac{1}{4}$$
$$f(-\alpha) = -\alpha$$

$-\alpha$க்கும் $\frac{1}{2}$க்கும் இடையே ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு.

தேற்றம் 3 (13·5·6)படி, கடைசியுறுப்பு $+30$ ஆக இருப்பதால் அம்மெய்யெண் தீர்வு குறை மதிப்புடையதாகும். மீதி இரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனைத் தீர்வுகளாகும்.

13·5·9 சட்டரும் தேற்றம் (Sturm's Theorem):

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெவ்வேறானவை எனக் கொள்வோம் (அதாவது சமத் தீர்வுகள் இல்லை). $f_1(x)$ என்பது $f(x)$ன் முதல் வகைக்கெழு எனக் கொள்க.

$f(x)$க்கும் $f_1(x)$க்கும் உ.பொ.அ.(Highest Common factor) கண்டுபிடிக்கும் முறைப்படி, $f(x)$ஐ $f_1(x)$ஆல் வகுக்க, மீதி $F_2(x)$ இருக்கட்டும். $F_2(x)$ஐ அப்படியே கொள்ளாமல் $F_2(x)$ன் குறிமாற்றி $F_2(x) = -f_2(x)$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

அப்போது $f(x)=q_1f_1(x)-f_2(x)$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

இவ்வாறே தொடர்ச்சியாக,

$$f_1(x) = q_2f_2(x)-f_3(x)$$
$$f_2(x) = q_3f_3(x)-f_4(x)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

என வகுத்து, மீதிகளின் குறி மாற்றி எழுதுவோம்.

$f(x)=0$க்கு சமத்தீர்வுகளில்லை யெனக் கொள்ளப்பட்டதால் $f(x)$க்கும் $f_1(x)$க்கும் ஒரு சினைகூடப் பொதுவாக இருக்காது. ஒவ்வொரு வகுத்தலிலும் கோவைகளின் 'படி' ஒன்று ஒன்றுகக் குறைந்து கடைசியாக x சார்பற்ற ஒரு மீதி கிடைக்கும். அது f_m என இருக்கட்டும். இந்தச் சார்புகள்,

$f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_{m-1}(x)$, f_m என்பவை. இவைகள் சட்டரும் சார்புகள் (S:i rms functions) எனப்படும்.

தேற்றம் 6 :

சட்டரும் தேற்றம் பின்வருமாறு :

இச் சட்டரும் சார்புகள் ஒவ்வொன்றிலும $x=a$ என ஈடு செய்து பிறகு $x=b$ $(b>a)$ என ஈடு செய்து, அம் மதிப்புக்களின் குறியீடுகளை எழுதினால், அக்குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை களுக்கு உள்ள வேறுபாடு $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, aக்கும் bக்தும் இடைப்பட்ட தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைச் சரியாகக் கொடுக்கும்.

விளக்கம் :

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$ x-சார் பற்றது	குறிமாற்ற எண்ணிக்கை
$x=a$	+	−	+	−	+	4
$x=b$	+	+	−	−	+	2

இந்த அமைப்பில், $f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு aக்கும் bக்குமிடையே $4-2=2$ தீர்வுகளே உள்ளன என்பது தேற்ற முடிவாகும். (தேற்றத் தெரிப்பு Smith : A Treatise on Algebra pp 585—586 அல்லது Burnside and Panton : The Theory of Equations. Vol I pages 198–201 பார்க்க)

13·5·9·1 தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை :

$f(x), f_1(x)\, f_2(x)\ldots\ldots f_m(x)$ என்ற சட்டரும் சார்புகளை எழுதிக் கொள்க.

முதலில் $x=-\infty$ என ஈடு செய்து, இச்சார்புகளின் குறியீடுகளை எழுதி, குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிக்க. (m, குறிமாற்றங்கள்) பிறகு $x=0$ என ஈடு செய்து இச் சார்புகளின் குறியீடுகளை எழுதி, குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க (m_1 குறிமாற்றங்கள்).

இச்சார்புகளின் குறியீடுகளை எழுதி, குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிக்க (m_2 குறிமாற்றங்கள்).

பிறகு $x = +\infty$ என ஈடு செய்து குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க (m_3 குறி மாற்றங்கள்).

தேற்றப்படி, $m_1 \frown m_2$ குறை மெய்யெண் தீர்வுகளும், $m_2 \frown m_3$ கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளும் $m_1 \frown m_3$ மெய்யெண் தீர்வுகளும் உள்ளனவென்பது தேற்ற முடிவாகும்.

$m_1 = m_2$ ஆனால் குறைமெய்யெண் தீர்வுகளே கிடையாது;

$m_2 = m_3$ ஆனால் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளே கிடையாது;

$m_1 = m_3$ ஆனால் மெய்யெண் தீர்வுகளே கிடையாது

இதே முறையில் $f(x) = 0$க்கு aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையை அறியலாம்.

முதலில் $x = a$ என சட்டரும் சார்புகளில் ஈடு செய்து, அவைகளிலுள்ள குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க (r_1— குறிமாற்றங்கள்)

பிறகு $x = b$ என ஈடு செய்து, குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (r_2 குறிமாற்றங்கள்). அப்போது $f(x) = 0$க்கு aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்டு $r_1 + r_2$ மெய்யெண் தீர்வுகளிருக்கும். ஆனால் aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்டுத் தீர்வேயில்லை.

13·5·9·2 எ. கா. 1

$x^4 + 4x^3 - 4x - 13 = 0$ன் மெய்யெண் தீர்வுகள் எத்தனை?

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 13$$

$$f_1(x) = 4(x^3 + 3x^2 - 1)$$

$$x^3 + 3x^2 - 1 \,)\, x^4 + 4x^3 - 4x - 13 \,(\, x + 1$$

$$\underline{x^4 + 3x^3 - x}$$

$$x^3 - 3x - 13$$

$$\underline{x^3 + 3x^2 - 1}$$

$$-3x^2 - 3x - 12$$

$\therefore \; f_2(x) = 3x^2 + 3x + 12$ (குறியீடு மாற்றப்பட்ட மீதி)

$$= 3(x^2 + x + 4)$$

$$x^2 + x + 4 \,)\, x^3 + 3x^2 - 1 \,(\, x + 2$$

$$\underline{x^3 + x^2 + 4x}$$

$$2x^2 - 4x - 1$$

$$\underline{2x^2 + 2x + 8}$$

$$-6x - 9$$

$\therefore f_3(x) = 6x + 9$ (குறியீடு மாற்றப்பட்ட மீதி)
$= 3(2x + 3)$

$$
\begin{array}{l}
2x + 3)\ 2x^2 + 2x + 8\ (x - 1 \\
\qquad\quad 2x^2 + 3x \\
\qquad\quad \overline{(-x + 8)} \times 2 \\
\qquad\quad -2x + 16 \\
\qquad\quad \underline{-2x - 3} \\
\qquad\qquad\quad 19
\end{array}
$$

$\therefore f_4(x) = -19$ (குறியீடு மாற்றப்பட்ட மீதி)

$\therefore$ சட்டரும் சார்புகள்

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 13$
$f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ (எனவும் கொள்ளலாம்)
$f_2(x) = x^2 + x + 4$ (,,)
$f_3(x) = 2x + 3$ (,,)
$f_4(x) = -19$

சட்டரும் சார்புகளின் மதிப்புக் குறியீடுகள்
மதிப்புக்குறிகள்

$x =$	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	குறிமாற்ற எண்ணிக்கை	
$-\infty$	+	−	+	−	−	3	(1)
0	−	−	+	+	−	2	(2)
∞	+	+	+	+	−	1	(3)
1	−	+	+	+	−	2	(4)
2	+	+	+	+	−	1	(5)
−1	−	+	+	+	−	2	(6)
−2	−	+	+	−	−	2	(7)
−3	−	−	+	−	−	2	(8)
−4	+	−	+	−	−	3	(9)

முதல் இரண்டு நிரைகளிலிருந்து $f(x) = 0$ க்கு ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும் (2)வது, (3)வது நிரைகளிலிருந்து ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் உள்ளன வெனத் தெரிகிறது.

எனவே, $f(x) = 0$ க்கு, மெய்யெண் தீர்வுகள் இரண்டு, கற்பனைத் தீர்வுகள் இரண்டு என்றும், அவ்விரண்டு மெய்யெண் தீர்வுகளில் ஒன்று கூட்டு, ஒன்று குறை மெய்யெண்ணென்றும் தெரிகிறது.

(4)வது (5)வது நிரைகளிலிருந்து அக்கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு 1க்கும் 2க்கும் இடைப்பட்டிருக்கிறதெனத் தெரிகிறது.

(8)வது (9)வது நிரைகளிலிருந்து குறை மெய்யெண் தீர்வு -3க்கும் -4க்கும் இடைப்பட்டிருக்கிறதெனத் தெரிகிறது.

எ. கா. 2.

$x^3 + px + q = 0$ன் தீர்வுகள் யாவும் மெய்யெண்களாயிருக்க வேண்டுமெனின், என்ன கட்டுப்பாடு தேவை ?

$$f(x) = x^3 + px + q$$
$$f_1(x) = 3x^2 + p.$$

$$x^2 + p)\ 3x^3 + 3px + 3q\ (x$$
$$\underline{3x^3 + px}$$
$$2px + 3q$$

$$\therefore\ f_2(x) = -(2px + 3q)$$

$$2px + 3q)\ 6px^2 + 2p^2\ (3x - 9q$$
$$\underline{6px^2 + 9qx}$$
$$(-9qx + 2p^2) \times 2p$$
$$-18pqx + 4p^3$$
$$\underline{-18pqx - 27q^2}$$
$$4p^3 + 27q^2$$

$$\therefore\ f_3(x) = -(4p^3 + 27q^2)$$
$$f(x) = x^3 + px + q$$
$$f_1(x) = 3x^2 + p$$
$$f_2(x) = -(2px + 3q)$$
$$f^3(x) = -(4p_3 + 27q^2)$$

சார்பு மதிப்புக்களின் குறிகள்.

$x =$	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
$-\infty$	$-$	$+$	$+\ 2p$ன் குறி	$-(4p^3+27q^2)$ ன் குறி	(1)
$+\infty$	$+$	$+$	$-\ 2p$ன் குறி	$-(4p^3+27q^2)$ ன் குறி	(2)

மூன்று தீர்வுகளும் மெய்யெண்களாயிருக்க வேண்டுமானால்

(a) நிரை (1)ல் மூன்று குறிமாற்றங்களும்,

(b) நிரை (2)ல் குறிமாற்றம் ஏதும் இல்லாமலும் இருப்பது, தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடுகளாகும். இந்தக் கட்டுப்பாடுகள் நிலவ,

pம், $(4p^3+27q^2)$ம் குறை மதிப்புடையவைகளாயிருக்க வேண்டும்.

இரண்டாவது கட்டுப்பாடு, முதல் கட்டுப்பாட்டைத் தன்னகத்தே அடக்கியிருக்கிறது.

ஏனெனில் $4p^3+27q^2$ன் மதிப்பு குறை மதிப்புப் பெறவேண்டுமானால் pன் மதிப்பு கட்டாயம் குறை மதிப்பாயிருந்தாக வேண்டும். இந்தக் கட்டுப்பாடுகள் இருப்பின்

$-\infty$க்குரிய குறிகள் முறையே $-+-+$ (3 குறி மாற்றங்கள்)

$+\infty$க்குரிய குறிகள் முறையே $++++$ (குறி மாற்றமேயில்லை).

எனவே, $x^3+px+q=0$ன் தீர்வுகள் மூன்றும் மெய்யெண்களாயிருக்கவேண்டுமெனில் $4p^3+27q^2<0$ என்பது தேவையான போதுமான கட்டுப்பாடு.

[முப்படிச் சமன்பாடு பகுதி பார்க்க. $4p^3+27q^2$ என்பது முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளது தன்மைகாட்டியெனப்படும். (Discriminant of the cubic)]. 13·6ல் விரிவாகக் காண்க.

குறிப்பு : சட்டரும் தேற்றம் பொதுவாக உண்மையானாலும், நடைமுறையில் அதைப் பயன்படுத்துவதற்கு மிகையான உழைப்பு தேவைப்படும். மற்ற எளிய முறைகளிலும், தீர்வுகளின் எண்ணிக்கைகளையும், அவைகளின் வரம்புகளையும் காண இயலுமாதலின் இத்தேற்றம் பெரிதும், இன்றியமையாத நிலைகளில் தவிர, பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

பயிற்சி 13·5 (ii)

1. $2x^3-3x^2-12x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் யாவும் வெவ்வேறு மெய்யெண்களென நிறுவுக.

2. $x^3-21x+30=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் யாவும் வெவ்வேறு மெய்யெண்களென நிறுவுக.

3. $x^3-18x+20=0$; $x^3-3x^2-72x+8=0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் மெய்யெண்களென நிறுவுக.

4. $x^3-3x+C=0$ன் தீர்வுகள் யாவும் மெய்யெண்களாயின் Cன் வரம்புகள் யாவை?

5. $3x^4-8x^3-6x^2+24x+6=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மெய்யெண் தீர்வுகளும் இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உள்ளனவென நிறுவுக.

6. $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 0க்கும் 1க்கும் இடையில் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு என நிறுவுக.

7. $f(x)\equiv(x-p)^3+(x-q)^3+(x-r)^3=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய்யெண்தீர்வும், இரு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உள்ளனவென நிறுவுக.

8 $3x^4+8x^3-30x^2-72x+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் தன்மையை, kன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்குக் காண்க.

9. $3x^4-4x^3$ $12x^2+k=0$ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்களாயிருக்கவேண்டுமெனில் kன் வரம்புகள் காண்க.

10 சட்டரும் சார்புகள் கொண்டு, பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளது எண்ணிக்கையையும், அவையிருக்கும் இடங்களையும் அறிக.

(i) $x^4-4x^3+7x^2-6x-4=0$

(ii) $x^4+3x^3-x^2-3x+11=0$

(iii) $3x^5+5x^3+2=0.$

13·6 முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகள்

The cubic and the biquadratic Equations)

13·6·1 $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்ற வாய்பாடாக நாம் அறிவோம்.

அவ்வாறே, முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளுக்கும், வாய்பாடாக நாம் தீர்வுகள் காணமுடியுமாயினும், நடைமுறையில் குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண அவை பெரிதும் பயன் படுவதில்லை. அவையல்லாத முறைகளிலேயே நேரடியாகத் தீர்வுகாண்பது எளிதாக அமைகின்றது. சிறப்பாக, முப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண்பது கடினமாகவேயிருக்கும். இருப் பினும், பொதுவாக, வாய்பாடு முறைகளையறிவது, சமன்பாட்டுக் கொள்கை அறிவை முழுமைப்படுத்தும்.

13·6·2. முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்பதில் 'ஒன்றின்' முப்படி மூலங்கள், அதாவது $x^3-1=0$ என்ற சமன் பாட்டின் தீர்வுகள், வழக்கில் பயன்படுமாதலின் அவைகளைப் பற்றி முதலில் அறிவோம்.

ஒன்றின் முப்படி மூலங்கள் (The cube roots of Unity)

$x^3-1=0$ என்ற சமன்பாட்டையெடுத்துக் கொள்வோம்.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$.

$x=1$ ஒரு தீர்வு; மற்றிரு தீர்வுகள் $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\omega$ எனக்கொண்டால்,

$$\omega^2 = \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

அவ்வாறே $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \omega$ எனக்கொண்டால்,

$$\omega^2 = \frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

எனவே ஒரு தீர்வு ω எனக்கொண்டால் மற்றொரு தீர்வு ω^2 எனப் பெறப்படுகிறது.

எனவே $x^3-1=0$ன் தீர்வுகள் $1, \omega, \omega^2$ என்ற தொடர் முறையில் அமையும்; $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ அல்லது $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ என்று இருக்கும்; அப்போது முறையே $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ அல்லது $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ என்று இருக்கும்.

$$\therefore \quad 1+\omega+\omega^2=0$$
$$1\cdot\omega+1\cdot\omega^2+\omega^3=0$$
$$1\cdot\omega\cdot\omega^2=1$$

என $x^3-1=0$ன் தீர்வுகளுக்கும் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகள் எழுதப்படலாம்.

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned}1+\omega+\omega^2&=0\\ \omega^3&=1\end{aligned}\right\}$$ என்ற இரு தொடர்புகள் வரும்.

மேலும், பின்வருவன எளிதில் புலப்படும் :

(i) $\omega+\omega^2=-1$

$\omega^{3r}=1$ (r ஒரு கூட்டு முழு எண்)

$\omega^{3r+1}=\omega$

$\omega^{3r+2}=\omega^2$

(ii) a^3ன் முப்படி மூலங்கள் $a, a\omega, a\omega^2$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \quad (x^3-a^3) &\equiv (x-a)(x-a\omega)(x-a\omega^2)\\ &\equiv (x-a)\omega^3(x-a\omega)(x-a\omega^2)\\ &\equiv (x-a)\omega^2(x-a\omega)\omega(x-a\omega^2)\\ &\equiv (x-a)(\omega^2x-a)(\omega x-a)\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}(x^3+a^3) &\equiv (x+a)(x+a\omega)(x+a\omega^2)\\ &\equiv (x+a)(\omega x+a)(\omega^2x+a)\end{aligned}$$

(iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$

$\omega^3 = \omega^6 = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$x^3 + (\omega y)^3 + (\omega^2 z)^3 - 3x(\omega y)(\omega^2 z) \equiv (x + \omega y^2 + \omega^2 z) \times \text{மற்ருேர் சினை;}$$

மேலும்,

$$x^3 + (\omega^2 y + \omega z)^3 - 3x(\omega^2 y)(\omega z) \equiv (x + \omega^2 y + \omega z) \times \text{மற்ருேர் சினை.}$$

எனவே 1, ω, ω^2 என்பவை 1'ன் படி மூலங்களாயின்,

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)\ (x + wy + w^2 z)$ $(x + \omega^2 y + \omega z)$ என்ற வகையிலும் சினைகள் காணலாம்.

13.6.3 முப்படிச் சமன்பாடு — திட்ட அமைப்பு :

பொது அமைப்பு : $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a^3 = 0$

சில வசதிகளை முன்னிட்டு, ஈருறுப்புத் தேற்றக் கெழுக்களோடு, பொது அமைப்பு

$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ என்று கொள்ளப்படுவதும் வழக்கிலுண்டு.

13 2.9.1; சிறப்பு எடுத்துக் காட்டு 3 (a)ன் படி, $y = a_0 x + a$ என ஈடு செய்தால், இச் சமன்பாடு,

$y^3 + 3Hy + G = 0$ என்ற அமைப்பில் வரும் எனவும், $H = (a_0 a_2 - a_1^2)$;

$G = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$ எனவும் பார்த்தோம்.

$y^3 + 3Hy + G = 0$ என்பது முப்படிச் சமன்பாட்டின் 'திட்ட அமைப்பு' (Standard form) எனப்படும்.

இங்கு y^2ன் கெழு பூச்சியமாகும். எந்த முப்படிச் சமன் பாட்டையும் இத்திட்ட அமைப்பில் கொண்டு வரலாம்.

$3x^3 + 6x^2 \quad 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், $y = 3x + 2$ என ஈடு செய்தால் இத்திட்ட அமைப்பு கிடைக்கும். y^2 உள்ள உறுப்பு இராது.

$x = \dfrac{y - 2}{3}$; இவ்வாறு ஈடு செய்ய மாற்றியமைத்த

சமன்பாடு,

$y^3 - 24y + 49 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது $y^3 + 3(-8)y + 49 = 0$

$H = a_0 a_2 - a_1^2 = -4 - 4 = = -8$ எனவும்

$G = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$

$= 9 + 24 + 16$

$= 49$ எனவும் வருவதைக் காண்க

13·6·4. $a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டையும் $y^3 + 3 H y + G = 0$ என்ற சமன்பாட்டையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

x ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனல்

y ன் தீர்வுகள் $a_0 \alpha + a_1 ; a_0 \beta + a_1 ; a_0 \gamma + a_1$

அல்லது $a_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_0}\right) ; a_0 \left(\beta + \frac{a_1}{a_0}\right) ; a_0 \left(\gamma + \frac{a_1}{a_0}\right)$

ஆனல் $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3 a_1}{a_0}$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தினுல்,

y ன் தீர்வுகள், $a_0 \left(\alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \frac{a_0}{3}(2\alpha - \beta - \gamma)$

$a_0 \left(\beta - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \frac{a_0}{3}(2\beta - \gamma - \alpha)$

$a_0 \left(\gamma - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \frac{a_0}{3}(2\gamma - \alpha - \beta)$

என்பனவாகும்.

13.6·5. $y^3 + 3Hy + G = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் p, q, r ஆனுல்,

$(q - r)^2, (r - p)^2, (p - q)^2$ என்ற தீர்வுகளைப் பெற்ற சமன்பாடு காண்போம் (13·29 காண்க). இப்படிக் காணவிருக்கும் சமன்பாடு, 'முப்படிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின் வேறு பாடுகளின் 'இருபடி' களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு" எனப்படும்) (Equation of the squared differences of the cubic),

$$p + q + r = 0$$

$$qr + rp + pq = 3H$$

$$pqr = -G$$

என நாம் அறிவோம்.

$z = (q - r)^2$

$= q^2 + r^2 - 2qr$

$= p^2 + q^2 + r^2 - p^2 - 2\frac{pqr}{p}$

$$= (\Sigma p)^2 - 2(\Sigma pq) - y^2 + \frac{2G}{y}$$

$$= 0 - 6H - y^2 + \frac{2G}{y}$$

அல்லது $y^3 + (z + 6H)y - 2G = 0$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\Big\}\ y^3 + 3Hy + G = 0$

கழிக்க $\overline{(z + 3H)y - 3G = 0}$

$$y = \frac{3G}{z + 3H}$$

எனவே $(q - r)^2$, $(r - p)^2$, $(p - q)^2$ தீர்வுகளுடைய சமன்பாடு

$$\left(\frac{3G}{z + 3H}\right)^3 + 3H\left(\frac{3G}{z + 3H}\right) + G = 0$$

சுருக்கினால்

$$z^3 + 18Hz^2 + 81H^2z + 27(G^2 + 4H^3) = 0$$

முதல் முதலாக,

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

என்ற சமன்பாடு இருக்குமாயின், அதன் தீர்வுகள் α, β, γ எனக் கொண்டால்,

$y^3 + 3Hy + G = 0$ன் தீர்வுகளான p, q, r என்பவை முறையே,

$$a_0\left(\alpha + \frac{a_1}{a_0}\right);\ a_0\left(\beta + \frac{a_1}{a_0}\right);\ a_0\left(\gamma + \frac{a_1}{a_0}\right)$$

ஆகும்.

$z^3 + 18Hz^2 + 81H^2z + 27(G^2 + 4H^3) = 0$ன் தீர்வுகள்,

$$\left[a_0\left(\beta + \frac{a_1}{a_0}\right) - a_0\left(\gamma + \frac{a_1}{a_0}\right)\right]^2;$$

$$\left[a_0\left(\gamma + \frac{a_1}{a_0}\right) - a_0\left(\alpha + \frac{a_1}{a_0}\right)\right]^2;$$

$$\left[a_0\left(\alpha + \frac{a_1}{a_0}\right) - a_0\left(\beta + \frac{a_1}{a_0}\right)\right]^2$$

அதாவது $a_0^2(\beta - \gamma)^2$; $a_0^2(\gamma - \alpha)^2$, $a_0^2(\alpha - \beta)^2$ ஆகும்.

$$\therefore \quad a_0^6 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2 = -27 (G^2 + 4H^3)$$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கும்.

$$G^2 + 4H^3 \equiv a_0^2 [a_0^2 a_3^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2]$$

13. 6.6. முப்படிச் சமன் பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மை : (Nature of the roots of a Cubic)

இதுவரை நாம் கண்டது.

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \qquad (A)$$

ன் தீர்வுகள் α, β, γ, ஆயின்,

$$x^3 + 18Hx^2 + 81H^2 x + 27(G^2 + 4H^3) = 0 \qquad (B)$$

ன் தீர்வுகள் $a_0^2 (\beta - \gamma)^2$; $a_0^2 (\gamma - \alpha)^2$; $a_0^2 (\alpha - \beta)^2$ ஆக இருக்கும்.

(*i*) (*B*) ன் தீர்வுகளில் ஒன்று குறை யெண்ணுயிருப்பின், (*A*) க்கு இரண்டு கற்பணைத் தீர்வுகள் இருக்கும்.

(*ii*) (*B*) ன் தீர்வுகள் யாவும் கூட்டெண்களாயிருப்பின் (*A*) ன் தீர்வுகள் யாவும் மெய்யெண் களாயிருக்கும்.

இப்போது நான்கு வெவ்வேறு நிலைகள் காணலாம்.

(*a*) $(G^2 + 4H^3)$ ன் மதிப்பு குறை யெண்ணுயின் (*A*) ன் தீர்வுகள் யாவும் மெய்யெண் களாயிருக்கும்.

ஏனெனில் $(G^2 + 4H^3)$ ன் மதிப்பு குறை யெண்ணுயிருக்க வேண்டுமாயின், H குறை யெண்ணுகவும் $|4H^3| > G^2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும். அப்போது

$x^3 + 18Hx^2 + 81H^2x + 27(G^2 + 4H^3) = 0$ என்ற சமன் பாட்டில் கெழுக்களின் குறிகள் + − + − என இருக்கும் ;

மேலும் $(-x)^3 + 18H(-x)^2 + 81H^2(-x) + 27(G^2 + 4H^3) = 0$ என்ற சமன் பாட்டில் கெழுக்களின் குறிகள் − − − − என இருக்கும். எனவே குறை மெய்யெண் தீர்வே யிருக்க முடியாது. அதாவது $a_0^2(\beta - \gamma)^2$; $a_0^2(\gamma - \alpha)^2$; $a_0^2(\alpha - \beta)^2$ எதுவும் குறை யெண் மதிப்புப்பெறுது ; அவை இருபடியாகையால் கூட்டு மெய்யெண் மதிப்புக்களே பெற முடியும். எனவே α, β, γ, என்ற (*A*) ன் தீர்வுகள் யாவும் மெய் யெண் களாயிருந்தாக வேண்டும்.

(*b*) $(G^2 + 4H^3)$ன் மதிப்பு கூட்டு மெய்யெண்ணுயின் சமன்பாட்டிற்கு இரு கற்பனை யெண் தீர்வுகள் இருக்கும்.

கடைசி (மாறிலி) உறுப்பான $G^2 + 4H^3$ கூட்டுக் குறி பெறுவதால் (B)க்குக்கட்டாயம் ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வுஇருக்க வேண்டும் (13· 5·6). எனவே (A)ன் இரு தீர்வுகள் கற்பனை யெண் களாயிருக்கவேண்டும்.

(*c*) $G^2 + 4H^3 = 0$ ஆனல், சமன்பாட்டிற்கு இரு சமத் தீர்வுகள் உண்டு.

(B)ல் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமாதலின் (β)ன் ஒரு தீர்வு பூச்சியமாகும். அப்போது $(\beta - \gamma)^2$; $(\gamma - \alpha)^2$; $(\alpha - \beta)^2$ என்ற மூன்றில் ஒன்று பூச்சியமாகும். எனவே (A)ன் இரு தீர்வுகள் சமம்.

(*d*) $G = O, H = O$ ஆனல், சமன் பாட்டின் மூன்று தீர்வு களும் சமமாகும்.

(B)ன் அமைப்பு $x^3 = 0$ ஆகும். எனவே,

$$(\beta-\gamma)^2 = 0 = (\gamma - \alpha)^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$\therefore \ \alpha = \beta = \gamma$ எனப் பெறப்படும்.

மற்றும் $H = 0$; $G = 0$ ஆனல்

$$a_0 a_2 = a_1^2 ; \ a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 = 0$$

$$\therefore \ \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$$

இப்போது $\dfrac{a_0}{a_1} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{1}{k}$ எனக் கொள்க.

அப்படியானல், $a_1 = a_0 k$

$$a_2 = a_1 k = a_0 k^2$$
$$a_3 = a_2 k = a_0 k^3$$

$$\therefore \ a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2 x + a_3 = a_0x^3 + 3a_0 k x^2 + 3a_0 k^2 x + a_0 k^3 = a_0 (x + k)^3$$

இம் முறையிலும் மூன்று தீர்வுகளும் சமமென்பது அறியப் படுகிறது.

13.6·6·1 எ. கா:

$x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் வேறுபாடுகளின் இருபடிகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன் பாட்டைக் காண்க.

முதலில் $x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டாம் உறுப்பில்லாத சமன்பாடு காண்க.

$y = x - h$ எனக் கொண்டால்,

$x = y + h$

இதைச் சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்,

$$(y + h)^3 + 6(y + h)^2 + 7(y + \quad) + 2 = 0$$

அதாவது $y^3 + y^2(3h + 6) + y(3h^2 + 12h + 7) + (h^3 + 6h^2 + 7h + 2) = 0$

இரண்டாவது உறுப்பான y^2 விலக்கப்பட வேண்டுமாயின் $3h + 6 = 0$ அல்லது $h = -2$ எனக் கொண்டால் போதும்.

அதாவது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை -2 குறைக்கவேண்டும், அதாவது 2 கூட்ட வேண்டும். அச் சமன்பாடு

$$y^3 + y^2(-6 + 6) + y(12 - 24 + 7) + (-8 + 24 - 14 + 2) = 0$$

அதாவது $y^3 - 5y + 4 = 0$.

$x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = 0$ ன் தீர்வுகள் α, β, γ ஆனால்

$y^3 - 5y + 4 = 0$ ன் தீர்வுகள்

$(\alpha + 2), (\beta + 2), (\gamma + 2)$ ஆகும்.

$\alpha + 2 = p$

$\beta + 2 = q$

$\gamma + 2 = r$ ஆனால்.

$(q - r)^2 = (\beta - r)^2$

$(r - p)^2 = (\gamma - \alpha)^2$

$(p - q)^2 = (\alpha - \beta)^2$

எனவே $y^3 - 5y + 4 = 0$ ன் தீர்வுகளின் வேறுபாடுகளின் இருபடிகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$ ஆகும்.

$y^3 - 5y + 4 = 0$

$p + q + r = 0$

$pq + qr + rp = -5$

$pqr = -4$

$$(q-r)^2 = q^2 + r^2 - 2qr$$
$$= p^2 + q^2 + r^2 - p^2 - \frac{2\,pqr}{p}$$
$$= (p+q+r)^2 - 2\,\Sigma pq - y^2 + \frac{8}{y}$$

$$\therefore \quad z = 0 + 10 - y^2 + \frac{8}{y}$$

$$zy = 10\,y - y^3 + 8$$
$$y^3 + y\,(z - 10) - 8 = 0$$
$$y^3 - 5y + 4 = 0$$

கழித்தால் $y\,(z-5) - 12 = 0$

$$\therefore \quad y = \frac{12}{z-5}$$

இதை $y^3 - 5y + 4 = 0$ ல் ஈடு செய்தால், நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\left(\frac{12}{z-5}\right)^3 - 5\left(\frac{12}{z-5}\right) + 4 = 0$$

$\therefore \quad 4\,(z-5)^3 - 60\,(z-5)^2 + 1728 = 0$

அதாவது $(z-5)^3 - 15\,(z-5)^2 + 432 = 0$

அதாவது $z^3 - 30\,z^2 + 225\,z - 68 = 0$

எனவே நாம் வேண்டும் சமன்பாடு

$$x^3 - 30\,x^2 + 225\,x - 68 = 0$$

பயிற்சி 13·6 (i)

1. பின் வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளது வேறுபாடுகளின் இருபடிகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

(i) $x^3 - 7\,x + 6 = 0$

(ii) $x^3 - 6\,x^2 + 9x + 4 = 0$

2. 1 (ii)-ன் விடையிலிருந்து $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$-ன் தீர்வுகளின் தன்மை பற்றி என்ன கூறலாம்?

13·6·7 திட்ட அமைப்பிலுள்ள முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்—கார்டான் முறை (Cardan's method)

$a_0\,x^3 + 3a_1\,x^2 + 3a_2\,x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் திட்ட அமைப்பான

$y^3 + 3\,Hy + G = 0$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம் என நாம் 13·6·3-ல் பார்த்தோம். இப்போது $y^3 + 3\,Hy + G = 0$-ன் தீர்வுகளைக் கார்டான் முறைப்படி அறிவோம்.

$y = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$ எனக்கொள்வோம்..

$\therefore \quad y^3 = p + q + 3p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} \left(p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} \right)$

$\qquad = p + q + 3p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} y.$

அதாவது

$$y^3 - 3 p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} y - \left(p + q\right) = 0 \qquad ...(1)$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $y^3 + 3 H y + G = 0$ ...(2)

(1)-ம் (2)-ம் ஒப்பிட்டால்

$$p + q = - G \qquad ...(3)$$

$p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} = - H$ என்ற தொடர்புகள் காண்கிறோம்.

$$\therefore \quad pq = - H^3 \qquad ...(4)$$

ஆனால் $p - q = \{ (p + q)^2 - 4pq \}^{1/2}$

$$\therefore \quad (p - q) = (g^2 + 4H^3)^{1/2} \qquad ...(5)$$

(3)-ம் (5)-ம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$p = \frac{- G + \sqrt{G^2 + 4 H^3}}{2}$$

$$q = \frac{- G - \sqrt{G^2 + 4 H^3}}{2}$$

$\therefore \quad y = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. இங்கு $\sqrt[3]{p}$ - க்கு மூன்று வெவ்வேறு மதிப்புக்களும் $\sqrt[3]{q}$-க்கு மூன்று வெவ்வேறு மதிப்புக்களும் உண்டு. ஆகவே y-க்கு $3 \times 3 = 9$ வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் உள்ளன. ஆனால் முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகளே உண்டு.

இந்த முரண்பாட்டை நீக்க வேண்டும். $\sqrt[3]{p}$ - ன் மூன்று மதிப்புக்கள் α, β, γ, எனக்கொள்வோம்.

$p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} = - H$ ஆகையால் உரிய $\sqrt[3]{q}$-ன்மூன்றுமதிப்புக்கள்.

$$\frac{- H}{\alpha}, \frac{- H}{\beta}, \frac{- H}{\gamma}$$

எனவே மூன்று தீர்வுகள்

$$\alpha - \frac{H}{\alpha}; \ \beta - \frac{H}{\beta}; \ \gamma - \frac{H}{\gamma}$$ ஆகும்.

13·6·7·1 எ.கா

கார்டான் முறையில் $x^3 - 9x + 28 = 0$-ன் தீர்வு காண்க.

$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$ எனக் கொள்க.

$$x^3 = p + q + 3p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} x$$

$$\therefore \quad x^3 - 3x\, p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} - (p + q) = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$x^3 - 9x + 28 = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1)-ம் (2)-ம் ஒப்பிட, $p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} = 3$

$$\therefore \quad pq = 27$$

$$p + q = -28$$

ஆனால் $p - q = \sqrt{(p + q)^2 - 4pq}$

$$= \sqrt{784 - 108}$$

$$= \sqrt{676}$$

$$= 26$$

$$\therefore \quad p = \frac{-28 + 26}{2} = -1.$$

$$q = \frac{-28 - 26}{2} = -27.$$

$$\therefore \quad x = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-27}$$

$= -1 - 3 = -4$ ஒரு தீர்வு.

$$x^3 - 9x + 28 \equiv (x + 4)(x^2 - 4x + 7) = 0.$$

$$\therefore \quad x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x = 2 \pm i\sqrt{3}$$

$\therefore$ தீர்வுகள் $-4,\ 2 \pm i\sqrt{3}$

பயிற்சி 13·6 (ii)

கார்டான் முறைப்படி பின்வரும் முப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x^3 + 6x - 20 = 0$
2. $x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$
3. $x^3 + x^2 - 9x + 12 = 0$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

13·6·8 நாற்படிச் சமன்பாடு (The Biquadratic)

நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண, பல முறைகள் உள்ளன. ஆனால் அவை யாவும் முப்படிச் சமன்பாடுகளின்

தீர்வுகளோடு தொடர்பு பெற்றவை. பெராரி முறை மிக எளிய முறையாகும் (Ferrari's Method).

பெராரி முறை : $x^4 + px^3 + q^2 + rx + s = 0$ என்பது ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடு.

இரு பக்கங்களுக்கும் $(\alpha x + \beta)^2$ கூட்டுக.

அப்போது,

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + (\alpha x + \beta)^2 = (\alpha x + \beta)^2$$

அதாவது,

$$x^4 + px^3 + x^2 (q + \alpha^2) + (r + 2\alpha\beta) x + (s + \beta^2) = (\alpha x + \beta)^2$$

இடது கைப்புறம் $\left(x^2 + \frac{p}{2} x + \lambda\right)^2$ என எழுதுவோமாயின்,

$$2\lambda + \frac{p^2}{4} = q + \alpha^2 ; \quad ...(1)$$

$$p\lambda = r + 2\alpha\beta ; \quad ...(2)$$

$$\lambda^2 = s + \beta^2 \quad ...(3)$$ என்ற

கட்டுப் பாடுகள் தேவை.

இம்மூன்று சமன்பாடுகளினின்றும் α, β இரண்டையும் விலக்க முற்படுவோம்.

(2) லிருந்து $2\alpha\beta = p\lambda - r$ ...(4)

(1) லிருந்து $\alpha^2 = 2\lambda + \frac{p^2}{4} - q$ ...(5)

(3) லிருந்து $\beta^2 = \lambda^2 - s$ ...(6)

$$\therefore \quad 4\alpha^2\beta^2 = 4 (\lambda^2 - s) \left(2\lambda + \frac{p^2}{4} - q\right) = (p\lambda - r)^2$$

அதாவது $(\lambda^2 - s)(8\lambda + p^2 - 4q) - (p\lambda - r)^2 = 0$...(7)

இது λல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாடு.

இதற்குக் கட்டாயம் ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. அதைக் கண்டு பிடித்தால், α, βன் மதிப்புக்களை அறியலாம்.

எனவே λ, α, β என்ற கணிக்கப்பட்ட இராசிகளைக் கொண்டு,

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} x + \lambda\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2$$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காணலாம்.

$$x^2 + \frac{p}{2} x + \lambda = + (\alpha x + \beta)$$

$$x^2 + \frac{p}{2} x + \lambda = - (\alpha x + \beta)$$

என்ற இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகளின் நான்கு தீர்வுகள் கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எனவே, நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண (7)ல் கண்ட முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு தேவைப்படுகிறது.

13·6·7ல் முன் பத்தியில் கண்ட, λஐத் தேராக்]கணியமாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு (7)க்கு, அதாவது,

$(\lambda^2 - s)(8\lambda + p^2 - 4q) - (p\lambda - r)^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகளும் மெய்யெண் தீர்வுகளாயிருப் பினும் ஒவ்வொரு λ மதிப்புக்கும், கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டிற்கு நான்கு, நான்கு தீர்வுகள் என 3 விதமான தீர்வுகள் அதாவது 12 தீர்வுகள் வராது. (7)க்கு $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, என்ற மூன்று மெய்யெண் தீர்வுகள் உள்ளனவெனக் கொள்வோம்.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்பவற்றை முறையாக எடுத்துக் கொண்டால்

$$(x^2 + px + \lambda_1) \pm (\alpha_1 x + \beta_1) = 0 \quad \ldots(1)$$
$$(x^2 + px + \lambda_2) \pm (\alpha_2 x + \beta_2) = 0 \quad \ldots(2)$$
$$(x^2 + px + \lambda_3) \pm (\alpha_3 x + \beta_3) = 0 \quad \ldots(3)$$

நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் a,b,c,d என விருந்தால்

$(x^2 + px + \lambda_1) + (\alpha_1 x + \beta_1) \equiv (x-a)(x-b)$

$(x^2 + px + \lambda_1) - (\alpha_1 x + \beta_1) \equiv (x-c)(c-d)$ எனவும்

$(x^2 + px + \lambda_2) + (\alpha_2 x + \beta_2) \equiv (x-a)(x-c)$

$(x^2 + px + \lambda_2) - (\alpha_2 x + \beta_2) \equiv (x-b)(x-d)$ எனவும்

$(x^2 + px + \lambda_3) + (\alpha_3 x + \beta_3) \equiv (x-a)(x-d)$

$(x^2 + px + \lambda_3) - (\alpha_3 x + \beta_3) \equiv (x-b)(x-c)$ எனவும்

பெறப்படும். ஆகவே தீர்வுகள் a,b,c,d என்ற நான்கு தீர்வுகள் மட்டுமே கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டிற்குக் கிடைக்கும். ஆகவே (7)ன் ஒரு தீர்வு கண்டால் போதுமானது. அது கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகள் பெற்றால் போதுமானது.

எ. கா.

$x^4 + 2x^3 + 14x + 15 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்க.

$x^4 + 2x^3 + 14x + 15 + (\alpha x + \beta)^2 = (\alpha x + \beta)^2$ என எழுதுவோம்.

அதாவது $x^4 + 2x^3 + \alpha^2x^2 + x(14 + 2\alpha\beta)$
$+ (15 + \beta^2) = (\alpha x + \beta)^2$

இடது கைப்புறத்தை

$(x^2 + x + \lambda)^2$ என எழுதினால்,

$$2\lambda + 1 = \alpha^2$$
$$2\lambda = 14 + 2\alpha\beta$$
$$\lambda^2 = 15 + \beta^2$$

$\therefore\ (2\lambda - 14)^2 = 4\alpha^2\beta^2 = 4(2\lambda + 1)(\lambda^2 - 15)$

$\therefore\ 4(\lambda - 7)^2 = 4(2\lambda^3 + \lambda^2 - 30\lambda - 15)$

$\therefore\ \lambda^2 - 14\lambda + 49 = 2\lambda^3 + \lambda^2 - 30\lambda - 15$

$\therefore\ 2\lambda^3 - 16\lambda - 64 = 0.$

அதாவது $\lambda^3 - 8\lambda - 32 = 0.$

$\lambda = 4$ ஒரு தீர்வென நேரடியாகத் தெரிகிறது.

$$\therefore\ \alpha^2 = 9$$
$$\beta^2 = 1$$
$$2\alpha\beta = -6$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}\alpha &= \pm 3\\ \beta &= \pm 1\\ \alpha\beta &= -3\end{aligned}\right\}$$

எனவே $\alpha = 3,\ \beta = -1$ எனவோ அல்லது
$\alpha = -3, \beta = 1$ எனவோ எடுக்க வேண்டும்.

அப்போது

$(x^2 + x + 4)^2 = (3x - 1^2)$ அல்லது $(1 - 3x)^2$

$$x^2 + x + 4 + 3x - 1 = 0$$
$$x^2 + x + 4 - 3x + 1 = 0$$

என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

அதாவது $x^2 + 4x + 3 = 0$
$x^2 - 2x + 5 = 0$

இவைகளின் தீர்வுகள் $-1, -3, 1 \pm 2i$

எனவே நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$-1, -3, 1 \pm 2i.$$

பயிற்சி 13·6 (iii)

1. பெராரி முறைப்படி, பின்வரும் நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(a) $x^4 - 12x - 5 = 0$

(b) $x^4 - 12x^2 + 24x + 140 = 0$

(c) $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x - 12 = 0$

(d) $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0$

(e) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 2 = 0$.

2. $x^4 + 6ax^2 + 4bx + c \equiv m(x-n)^4 - n(x-m)^4$ என்ற முற்றொருமை பொருந்துமாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $a^3 + b^2 = ac$

(ii) m, n என்பவை $at^2 + bt - a^2 = 0$ ன் தீர்வுகளாகும்; இதையொட்டி $x^4 + 12x^2 + 8x + 6 = 0$ன் தீர்வு காண்க.

13.7 தோராயத தீர்வுகள்

(Approximate Solutions)

13·7·1 ஒரு சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்காத (irrational) தீர்வுகள் இருக்குமாயின், அவைகளின் தோராய மதிப்புக்கள் காண சில முறைகள் வகுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(1) நியூட்டன் முறை;

(2) ஹார்னர் முறை.

கோட்டுருவப் படங்கள் மூலமாகவும், சில சமன்பாடுகளின் அளவுக்கிணங்கிய தீர்வுகள், அளவுக் கிணங்காத தீர்வுகள் யாவும், முடியுமளவு தோராயமாக அறியமுடியும். அம் முறைகள் பின்னர் விளக்கப் பட்டிருக்கின்றன.

13·7·2 நியூட்டன் முறை:

வகை நுண் கணிதத்தில் நிறுவப்படும் டெய்லர் தொடர் இங்கு பயன்படும்.

டெய்லர் தொடர்:

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{h}{\angle 1} f^{1}(\alpha) + \frac{h^2}{\angle 2} f''(\alpha) + \cdots\cdots$$

எனப்படும். (விரிவான விளக்கத்திற்கு ஏதாமொரு வகை நுண் கணிதநூல் காண்க)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 'α' என்ற மதிப்புக்கு மிக அருகாமையில், ஒரு தீர்வு இருக்கிறது என்று நமக்குத் தெரியுமானல், அதாவது 'α' ஒரு தோராயத் தீர்வு எனக்கொண்டால், சரியான தீர்வு $(\alpha + h)$ எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $f(\alpha + h) = 0$

$\therefore$ $f(x) = 0$ன் ஒரு தீர்வு $(\alpha + h)$

எனவே டெய்லர் விரிவுப்படி,

$$0 = f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{h}{\angle 1} f^1(\alpha) + \frac{h^2}{\angle 2} f''(\alpha) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^3}{\angle 3} f'''(\alpha)$$

h^2, h^3 ...... முதலியன மிகச் மிக சிறியன வென விலக்கி விட்டால்

$0 \simeq f(\alpha) + h f^1(\alpha)$ என்பது பொருந்தும்.

$\therefore$ தோராயமாக $h = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ αக்கு அண்மையில் தோராயத் தீர்வு

$$= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

இப்போது $\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha_1$ ஒரு சற்று அதிகம் தெருங்கிய தோராயத் தீர்வு எனக் கொள்வோம்.

$\alpha_1 + h_1$ சரியான தீர்வு எனக் கொண்டால்,

$$0 = f(\alpha_1 + h_1) = f(\alpha_1) + \frac{h_1}{\angle 1} f^1(\alpha)_1 + \frac{h_1^2}{\angle 2} f''(\alpha_1) + \ldots\ldots$$

h_1^2, h_1^3 ...... முதலியன மிக மிகச் வென்று விலக்கி விட்டால்

$$0 \simeq f(\alpha_1) + h_1 f^1(\alpha_1)$$

$$\therefore \quad h_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{f^1(\alpha_1)}$$

அடுத்த நெருங்கிய தோராயத் தீர்வு,

$$\left[\alpha - \frac{f(\alpha)}{f^1(\alpha)}\right] - \frac{f(\alpha_1)}{f^1(\alpha_1)}$$

இவ்வாறே, திரும்பத் திரும்ப, இம்முறையைப் பயன் படுத்தினுல் எந்த நுட்ப அளவுக்குத் தோராயத்தீர்வு வேண்டுமோ, அந்த அளவுக்குத் தோராயத் தீர்வு அறியலாம்.

13 7.2.1 எ.கா $x^3 + x^2 + x - 85 = 0$க்கு 4 ஒரு தோராயத் தீர்வெனில் இருமுறைத் தோராய மதிப்பளந்து கூறுக.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 85$$

$$f^1(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(4) = 64 + 16 + 4 - 85 = -1$$

$$f^1(4) = 48 + 8 + 1 = 57$$

$$\therefore \quad h(\text{முதல் திருத்தம்}) = -\frac{f(4)}{f^1(4)}$$

$$= -\frac{(-1)}{57}$$

$$.018$$

$\therefore$ முதல் தோராயத் தீர்வு $= 4{\cdot}018$

$f(4.018) = 85{\cdot}028 - 85 = 0.028$

$f^1(4.018) = 57.486$

$\therefore$ h_1 (இரண்டாம் திருத்தம்) $= -\dfrac{0.028}{57{\cdot}486}$

$= -{\cdot}0005$

$\therefore$ இரண்டாம் தோராயத் தீர்வு

$= 4{\cdot}018 - 0.0005$

$= 4{\cdot}0175$

ஆனல் ஒரிரு முறை டெய்லர் தொடரைப் பயன் படுத்திய பின்பு இராசிகளைச் சுருக்குவது மிக அலுப்பாக விருக்கும்.

13 7.3 ஹாானர் முறை :

இம் முறையும் அலுப்புத் தரும் முறைதான். இருப்பினும், தோராயத் தீர்வுகாண வேண்டிய இன்றியமையாமை ஏற்படு மிடத்து, இம் முறையைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

இங்கு, பின் கூறப்படும் வகையில் படிப்படியாக நாம் தோராயத் தீர்வு காண்கிறோம். முதலில் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகள் காணும் முறையைப் பார்ப்போம்.

$f(x) = 0$ என்பது சமன்பாடு

(1) முதலில் $f(\alpha); f(\alpha + 1)$ என்ற மதிப்புக்கள் மாற்றுக் குறியீடு பெறும் வகையில், $\alpha; \alpha + 1$ என அடுத்தடுத்த இரு கூட்டு முழு எண்கள் காண வேண்டும். அப்போது $f(x) = 0$ ன் ஒரு தீர்வு αக்கும் $(\alpha+1)$க்கும் இடைப் பட்டிருக்கும். அத்தீர்வின் முழு எண் பகுதி α. தீர்வு $\alpha.\ abc$ ... ... என்ற அமைப்பி லிருக்கும். [$\cdot abc$ ... ... என்பது பதின் பகுப்புப் பகுதி]

(2) பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 'α' அளவு குறைத்து, கிடைக்கப் பெறும் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

(சமன்பாட்டு மாற்றமைப்புக்கள்)

இப்படிக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டில் நாம் வேண்டும் தீர்வு $0.\ abc$...... என மாறும்; அதாவது இத்தீர்வு 0க்கும் 1க்கும் இடைப் பட்டிருக்கும்.

(3) முதலில் 'a' பகுதியைப் பெற, a ன் மதிப்பைப் பின் வருமாறு காண்போம்.

மாற்றமைப்புச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்கிப் பெறப்படும், புதியதோர் சமன்பாடு காண்போம். இரண்டாவது மாற்றமைப்புடைய இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் aக்கும் $(a+1)$க்கும் இடையே இருக்கும்.

இந்த aஐ ($\alpha, \alpha+1$ என்ற அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்கள் கண்ட முறையில்) கண்டறிவோம்.

(4) இந்த வழியாக படிப்படியாகப் பதின் பகுப்புப் பின்னத்தில் தோன்றும் 'b', 'c' ... ... ன் எண் மதிப்புக்களைப் பெறுவோம்.

தீர்வு $\alpha.abc$ ... ... என நாம் அறிய இயலும்

13.7.3.1 குறையெண் தீர்வுகள் காணும் முறை

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறையெண் தீர்வுகள் காணும் முறையை யொட்டியேயிருக்கிறது.

$f(x)=0$க்கு $-\alpha$ ஒரு குறையெண் தீர்வாயின்

$f(-x)=0$க்கு α ஒரு கூட்டெண் தீர்வாகும்.

எனவே $f(-x)=0$ன் கூட்டெண் தீர்வை ஹார்னர் முறைப்படி அறிந்து, அத்தீர்வுக்கு $-$ குறியிட்டால், அதுவே $f(x)=0$க்குரிய ஒரு குறையெண் தீர்வாகும்

எ. கா. 1

$x^3+3x-15=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்யெண் தீர்வை இரண்டு பதின் பகுப்புப் பகுதிவரை காண்க.

$$x^3+3x-15=0$$

ஒரே ஒரு குறி மாற்றம் இருப்பதால் இதற்கு ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுக்கு மேல் இருக்கமுடியாது.

மேலும் $(-x^3)+3(-x)-15=0$ என்ற சமன்பாடு $-x^3-3x-15=0$ அல்லது $x^3+3x+15=0$ ஆகும். குறிமாற்றம் ஒன்றும் இல்லையாதலால், இதற்குக் குறை மெய்யெண் தீர்வே இருக்கமுடியாது. கற்பனைத் தீர்வுகள் கட்டாயம் இரட்டை இரட்டையாக இருக்க வேண்டுமாதலின், இச்சமன்பாட்டிற்கு, இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும், ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு.

$$f(x)=x^3+3x-15$$
$$f(1)=-11 \quad (-)$$
$$f(2)=-1 \quad (-)$$
$$f(3)=21 \quad (+)$$

எனவே, தீர்வு 2க்கும் 3க்கும் இடைப்பட்டது. அதாவது $2 \cdot abc$ ... ... என்ற அமைப்பிலிருக்கும். முதலில் தீர்வுகளை 2 குறைக்கவும்.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & +0 & +3 & -15 \\
  & 0 & +2 & +4 & +14 \\
\hline
  & 1 & +2 & +7 & -1 \\
  & 0 & +2 & +8 & \\
\hline
  & 1 & +4 & +15 & \\
  & 0 & +2 & & \\
\hline
  & 1 & +6 & &
\end{array}
$$

மாற்றமைப்புச் சமன்பாடு

$$x^3 + 6x^2 + 15x - 1 = 0$$

$$F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

இதன் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்க, வரும் சமன்பாடு

$$x^3 + 60x^2 + 1500x - 1000 = 0 \quad (13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \text{ காண்க})$$

$$F_1(x) = x^3 + 60x^2 + 1500x - 1000$$

$$F_1(0) = -$$

$$F_1(1) = +$$

∴ இதன் தீர்வு 0க்கும் 1க்கும் இடைப்படும். எனவே $a = 0$ ஆக, மறுபடியும் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்க, வரும் சமன்பாடு

$$x^3 + 600x^2 + 150000x - 1000000 = 0$$

(13·2·2·1 காண்க)

$$F_2(x) = x^3 + 600x^2 + 150000x - 1000000$$

$$F_2(0) = -$$

$$F_2(6) = -$$

$$F_2(7) = -$$

எனவே $b = 6$ எனப் பெறப்படும்.

∴ தோராயத் தீர்வு 2·06 எனக் கொள்ளலாம். வேண்டுமானால் $F_2(x) = 0$ன் தீர்வுகளை 6 குறைத்து, வரும் சமன்பாட்டின்

தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்கி c (அதாவது மூன்றுவது பதின் பகுப்பு எண்ணை) அறியலாம்.

குறுக்கு வகுத்தல் முறையில் மூன்றுவது பதின்பகுப்பு பின்னம் அறியும் வகை, பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

```
  |  1  +  0  +  3  −  15
2 |  0  +  2  +  4  +  14
  |------------------------
  |  1  +  2  +  7 | −  1
  |  0  +  2  +  8 |
  |-----------------
  |  1  +  4 | + 15
  |  0  +  2 |
  |-----------
  |  1 | +  6 |
0    1  +   60  +   1500  −    1000
6    1  +  600  + 150000  −  1000000
     0  +    6  +   3636  +   921816
  |----------------------------------
  |  1  +  606  + 153636 |  −  78184
  |  0  +    6  +   3672 |
  |-----------------------------------
  |  1  +  612 |  −  157808
  |  0  +    6 |
  |-------------
     1  + | 618
     1  +6180+1573080 — 78184000
```

$x = 3 +$

$x = 4 -$

∴ தீர்வு 2·063......

இரண்டு இடங்களுக்குத் தோராயமாக மதிப்பு 2·06

மேற்கண்ட குறுக்கு வகுத்தல் முறையைப்பயன்படுத்தப் பழக்கிக் கொள்ளவும்.

எ. கா. 2

$2x^3 - 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மெய்யெண் தீர்வை ஹார்னர் முறையில் இரண்டு பதின்பகுப்பு இடம் வரை காண்க.

$f(x) \equiv 2x^3 - 4x + 1 = 0$ எனக் கொள்வோம். 13·7 3·1 படி $f(x) = 0$ன் குறையெண் தீர்வு காண, $f(-x) = 0$ன் கூட்டெண் தீர்வு கண்டால் போதும்.

$$F(x) \equiv f(-x) \equiv -2x^3 + 4x + 1 = 0.$$

அல்லது $2x^3 - 4x - 1 = 0.$

இதற்கு ஒரு கூட்டெண் தீர்விருக்கிறது என்பது 13·5·6ன் படி நமக்குத் தெரியும்.

$F(x) \equiv 2x^3 - 4x - 1 = 0.$

$F(0) = -$

$F(1) = -$

$F(2) = +$

எனவே தீர்வு 1க்கும் 2க்கும் இடைப்பட்டது.

1. *ab*......என விருக்கும்.

தீர்வுகள் 1 குறைக்கப்பட்ட சமன்பாடு காண்க.

1	2	+ 0	− 4	− 1
	0	+ 2	+ 2	− 2
	2	+ 2	− 2	− 3
	0	+ 2	+ 4	
	2	+ 4	+ 2	
	0	+ 2		
	2	+ 6		

$$2x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0.$$

தீர்வுகளைப் பத்தால் பெருக்கிய சமன்பாடு

$$2x^3 + 60x^2 + 200x - 3000 = 0$$

$x = 0$க்கு இடது கைப்புற மதிப்பு —
$x = 4$க்கு ,, ,, —
$x = 5$க்கு ,, ,, —
$x = 6$க்கு ,, ,, +

∴ தீர்வு 5க்கும் 6க்கும் இடைப்பட்டது.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தீர்வின் முதல் தோராய மதிப்பு = 1.5.

$2x^3 + 60x^2 + 200x - 3000 = 0$ன் தீர்வுகளில் 5 குறைத்த சமன்பாடு காண்க.

5	2	+ 60	+ 200	− 3000
	0	+ 10	+ 350	+ 2750
	2	+ 70	+ 550	− 250
	0	+ 10	+ 400	
	2	+ 80	+ 950	
	0	+ 10		
	2	+ 90		
	0			
	2			

$$2x^3 + 90x^2 + 950x - 250 = 0$$

இதன் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்கிய சமன்பாடு

$$2x^3 + 900x^2 + 95000\,x - 250000 = 0$$

$x = 0$க்கு இடது கைப்புற மதிப்பு —
$x = 1$க்கு ,, ,, —
$x = 2$க்கு ,, ,, —
$x = 3$க்கு ,, ,, +

∴ கொடுக்கப்பட்ட தீர்வின் இரண்டாவது தோராய மதிப்பு = 1.52

எனவே $2x^3 - 4x + 1 = 0$ ன் குறையெண் தீர்வு = $-1{\cdot}52$

எ கா. 3

25 ன் முப்படி மூலம் ஹார்னர் முறையில் இரண்டு பதின் பதிப்பு இடங்களுக்குக் கண்டு பிடிக்க.

$x^3 - 25 = 0$ என்பது இதற்குரிய சமன்பாடாகும்.

$$2^3 = 8$$
$$3^3 = 27$$

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{25}$ 2 க்கும் 3 க்கும் இடைப்பட்டது. அதாவது, $2 \cdot ab\ldots\ldots$ என்ற அமைப்பிலிருக்கும்.

$x^3 - 25 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை இரண்டு குறைக்கவும்.

2	1	+ 0	+ 0	− 25
	0	+ 2	+ 4	+ 8
	1	+ 2	+ 4	− 17
	0	+ 2	+ 8	
	1	+ 4	+ 12	
	0	+ 2		
	1	+ 6		
	0			
	1			

மாற்றமைந்த சமன்பாடு $x^3 + 6x^2 + 12x - 17 = 0$

அதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்கி வரும் சமன்பாடு

$x^3 + 60x^2 + 1200x - 17000 = 0.$

$x =$ 8 க்கு இடது கைப்புற மதிப்பு −
$x =$ 9 க்கு ,, −
$x =$ 10 க்கு , +

தீர்வு 9 க்கும் 10 க்கும் இடைப்பட்டது. எனவே $\sqrt[3]{25}$ ன் முதல் தோராய மதிப்பு = 2·9.

$x^3 + 60x^2 + 1200x - 17000 = 0$ ன்தீர்வுகளை 9குறைக்கவும்.

1 + 60	+ 1200	− 17000	
0 + 9	+ 621	+ 16389	
1 + 69	+ 1821	− 611	
0 + 9	+ 702		
1 + 78	+ 2523		
0 + 9			
1	+ 87		
0			
1			

மாற்றமைந்த சமன்பாடு

$$x^3 + 87x^2 + 2523x - 611 = 0$$

இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்க

$$x^3 + 870x^2 + 252300x - 611000 = 0$$

$x = 2$ க்கு இடதுகைப்புற மதிப்பு —

$x = 3$ க்கு ,, +

எனவே தீர்வு 2 க்கும் 3 க்கும் இடைப்படும்.

∴ $\sqrt[3]{25}$ ன் இரண்டாம் தோராய மதிப்பு = 2·92

$(2{\cdot}92)^3 = 24{\cdot}89$ (தோராயமாக)

பயிற்சி 13·7

1. நியூட்டன் முறைப்படி பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள், முதல் தோராய மதிப்பு வரையும், இரண்டாம் தோராய மதிப்பு வரையும் காண்க.

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $x^3 - 6x - 13 = 0$

2. ஹார்னர் முறைப்படி பின்வரும் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தீர்வுகள் காண்க. (இரண்டு பதின்பகுப்பு வரை).

(a) $x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$
(கூட்டு மெய்யெண் தீர்வு)

(b) $x^3 + 3x - 1 = 0$ (மெய்த் தீர்வு)

(c) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$
(மீப்பெரு தீர்வு)

(d) $x^4 - 3x + 1 = 0$
(எல்லா மெய்யெண் தீர்வுகளும்)

(e) $x^3 - x^2 + 12x + 24 = 0$
(குறை மெய்யெண் தீர்வு)

3. ஹார்னர் முறைப்படி பின்வரும் படி மூலங்கள் காண்க. (இரண்டு பதின் பகுப்பு வரை)

(a) $\sqrt[3]{7}$

(b) $\sqrt[4]{100}$

(c) $\sqrt[5]{100}$

13·8 கோட்டுருவப் படங்களைக் கொண்டு தோராயத் தீர்வுகள் காணல் (Graphical solutions for equations)

13·8·1. $(x) = 0$ன் தீர்வுகளைக் காண $y = f(x)$ என்ற கோட்டுருவப் படம் வரைக.

அவ்வரை கோடு எங்கெங்கு x-அச்சை வெட்டுகிறதோ அங்கெல்லாம் ($f(x) = 0$; எனவே வெட்டுகின்ற இடங்களுக்குரிய xன் மதிப்பெல்லாம் $f(x) = 0$ன் தீர்வுகளாம். ஆனால் சில படங்கள் வரைவதில் பொழுது அதிகமாகும். பல தீர்வுகள் இருக்குமாயின் படமே மிகப் பெரிதாகி விடும் .படம், 3, 13·5 3·1 காண்க)

13·8 2 சிறப்பாக முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகள் தீர்வுகாண, கோட்டுருவப் படங்கள் வரைந்து அவைகள் வெட்டுமிடங்களைக் கொண்டு தீர்வுகள் காண்பது பற்றி பின்னர் காண்போம்.

13·8 2·1 முப்படிச் சமன்பாடு

$x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு x^2 உள்ள உறுப்பு இல்லை யென்பதைக் காண்க.

முறை 1

$$y = x^3 \qquad (1)$$

$$y = -(ax + b) \qquad (2)$$

என்ற இரண்டு படங்களை வரைவோம். (2) ஒரு நேர்க்கோடு; (1) ஒரு முப்படிவளை வரை. நேர்க்கோடும், முப்படி வளை வரையும் வெட்டுகின்ற இடங்களில்

$$x^3 = -ax - b$$

அல்லது $x^3 + ax + b = 0$ ஆகும்.

எனவே (1)ம் (2)ம் வெட்டுகின்ற இடங்களின் x-மதிப்பு எல்லாம் $x^3 + ax + b = 0$ன் தீர்வுகளாம். (1)ம் (2)ம் மூன்று இடங்களில் வெட்டலாம்; அப்போது மூன்று மெய்யெண் தீர்வுகள் உண்டு.

அல்லது (1)ம் (2)ம் ஒரே இடத்தில் வெட்டலாம். அப்போது ஒரு மெய்யெண் தீர்வும், இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உண்டு.

ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டென நாம் 13·5·6ல் கண்டிருக்கிறோம்.

முறை 2

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

x ஆல் பெருக்க

$$x^4 + ax^2 + bx = 0 \text{ எனப் பெறப்படும்} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad (x^2)^2 + x^2 + x^2(a-1) + bx = 0 \qquad (3)$$

$y = x^2$ எனக் கொண்டால், (3)

$$y^2 + x^2 + (a-1)y + bx = 0 \qquad (4)$$

என மாறுகிறது.

$$\text{அதாவது } x^2 + y^2 + bx + (a-1)y = 0 \qquad (5)$$

இது $\left[-\frac{b}{2}, -\frac{(a-1)}{2}\right]$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒருவட்டம். இந்த வட்டமும் $y = x^2$ என்ற பரவளையமும் (Parabola) வெட்டுகின்ற இடங்களின் x- மதிப்புக்கள் $x^3 + ax + b = 0$ன் தீர்வுகளாம்.

இங்கு $x = 0$ என்பது விலக்கப்பட்டது; ஏனெனில் x ஆல் சமன்பாட்டைப் பெருக்குகிறோம்.

குறிப்பு :

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ எனச் சமன்பாடு இருக்குமானால் தீர்வுகளை $\frac{a}{3}$ அதிகமாக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து (அதில் இருபடி உறுப்பு இராது) அதன் பிறகு முன் கூறப்பட்ட ஏதாமொரு முறையைக் கொள்ளவும். (13·2·6 காண்க). அம்

முறையைக் கையாண்டு x^2 உள்ள உறுப்பை நீக்கலாம். நேரடியான முறை 13·8·2·2 ல் காண்க.

எ.கா.

$x^3 - 2x - 7 = 0$ ன் தீர்வுகளை கோட்டுருவப் பட முறையில் காண்க.

முறை (1).

(1) $y = x^3$ (ஒரு முப்படிப்பரவளையம்) (Cubical Parabola)

(2) $y = 2x + 7$ (ஒரு நேர்க் கோடு)

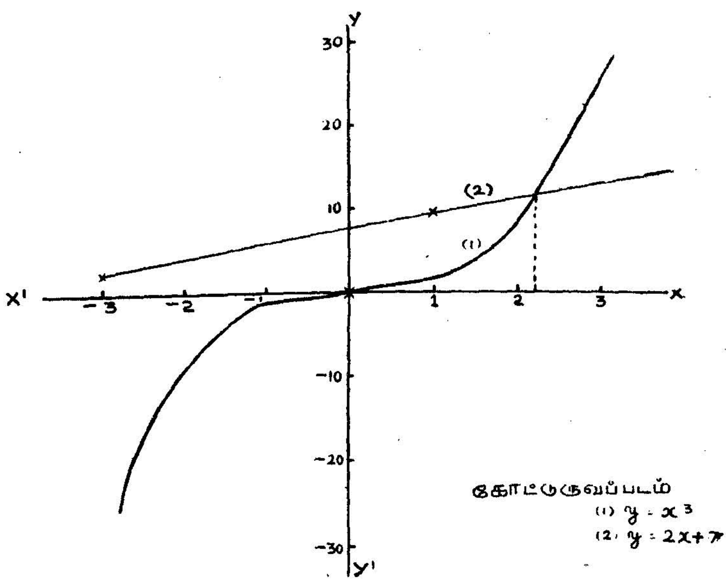
$x^3 = 2x + 7$.

அல்லது $x^3 - 2x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாடு வருகிறது.

(1) ம் (2) ம் படமாக வரைக.

$y = x^3$

x	0	1	2	3	—1	—2	—3
y	0	1	8	27	—1	– 8	—27



படம் (4)

$y = 2x + 7$

x	1	−3
y	9	1

வெட்டு மிடம் $x = 2{\cdot}3$ தீர்வு.
மீதி இரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனை யெண்களாம்.

முறை (2)

$$x^3 - 2x - 7 = 0 \qquad \text{......(1)}$$

x ஆல் பெருக்க

$$x^4 - 2x^2 - 7x = 0 \qquad \text{......(2)}$$

(அ-து) $x^4 + x^2 - 3x^2 - 7x = 0$ ......(3)

$y = x^2$ எனக் கொண்டால்

$$y^2 + x^2 - 3y - 7x = 0 \qquad \text{......(4)}$$

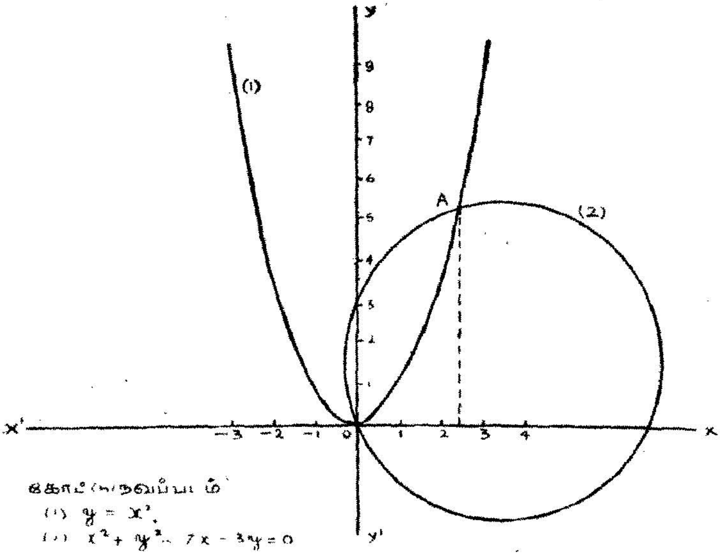
(அ-து) $x^2 + y^2 - 7x - 3y = 0$ ......(5)

இது ஒரு வட்டம்; வட்டமையம் $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$; வட்ட ஆரை $= 3{\cdot}8$ (தோராயமாக)

$y = x^2$ ன் படமும் (5) ன் படமும் வரைந்து வெட்டுமிடங்களின் x — மதிப்பைக் காண்க.

$y = x^2$

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9



படம் 5

வெட்டு மிடம் $x = 2.3$ தீர்வு; மற்றிரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனை யெண்கள்.

13·8·2·2 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டை இரண்டாம் உறுப்பை நிக்காமலும் கோட்டுருவப் படம் வரைந்து தீர்க்கலாம்,

$y = x^3$ ......(1)

$\therefore \quad x^3 = -(ax^2 + bx + c)$

$\therefore \quad y = -(ax^2 + bx + c)$ ......(2)

(1) ஒரு முப்படிப்பரவளையம்

(2) ஒரு பரவளையம் (Parabola)

இவ்விரண்டு வளையங்களும் வெட்டுமிடங்களின் x — ஆயத் தொலைகள் வேண்டிய தீர்வுகளைக் கொடுக்கும்.

கட்டாயம் இரண்டும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும்; மேலும் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் வெட்டலாம்; அல்லது வட்டாது போயினும் போகலாம்.

ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால், சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய் ண் தீர்வு உண்டு; மீதி இரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனையெண்கள்,

மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டினால், மூன்றும் மெய்யெண் தீர்வு கக் கிடைக்கும்.

ப்படியும், ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் கிடைக்கும்.

எ. கா.

$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கோட்டுருவப் படம் வரைந்து காண்க.

$$y = x^3$$

$$(x^3 =)\ y = x^2 + 9x - 9$$

என்ற இரண்டு பரவளையப் படங்களும் வரைந்து, வெட்டுமிடங்களின் x — ஆயத் தொலைகள் காண்க.

$y = x^3$-ன் படம் நாம் முன்னர் வரைந்திருக்கிறோம்.

$y = x^2 + 9x - 9$ படம் வரையப் பின்வரும் ஆயத் தொலை அட்டவணை காண்க.

x	0	1	2	3	−1	−2	−3	−4	−5	−6
x^2	0	1	4	9	1	4	9	16	25	36
$9x$	0	9	18	27	−9	−18	−27	−36	−45	−54
−9	−9	−9	−9	−9	−9	−9	9	−9	−9	9
y	−9	1	13	27	−17	−23	27	−29	−29	27

படம் வரைந்து வெட்டுமிடங்களைக் காண்க. வெட்டும் இடங்கள் $x = 1, 3, -3$ மூன்றும் மெய்யெண் தீர்வுகள். படம் வரைந்து காட்டப்படவில்லை.

13.3 நாற்படிச் சமன்பாடுகள். கோட்டுருவ முறைப்படி தீர்வுகாணல்.

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு.

பொதுவாக, இதை இரண்டு கூம்பு வெட்டுகளாக வரைந்து விட்டால், நான்கு வெட்டுமிடங்கள் கிடைக்கும். அவ்விடங்களின் x-மதிப்பு நான்கு தீர்வுகளாம்.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \dots(1)$$

இதை

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \dots(2)$$

என எழுதலாம்

அதாவது

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + x^2 + \left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d = 0 \ldots (3)$$

$y = x^2 + \frac{ax}{2}$ எனக் கொள்க. அப்போது (3)

$$y^2 + x^2 + y\left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{ax}{2}\left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$+ cx + d = 0 \qquad \ldots(4)$$

என ஆகிறது.

(அ-து) $x^2 + y^2 + Ax + By + d = 0 \qquad \ldots(5)$

என்ற அமைப்பில் பெறப்படும்.

இது ஒரு வட்டம் ; மையம் $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

ஆரம் $= \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - d}$

$y = x^2 + \frac{ax}{2}$ ஒரு பரவளையம் ...(6)

(5)-ம் (6)-ம் வெட்டும் இடங்களின் x-மதிப்புக்கள் தீர்வுகளாகும்.

13. 8·3·1· எ. கா.

$x^4 - 5x^2 - 10x + 18 = 0$ தீர்வுகளைக் கோட்டுருவப் படமூலம் அறிக.

$$x^4 - 5x^2 - 10x + 18 = 0 \qquad \ldots(1)$$

இதை $x^4 + x^2 - 6x^2 - 10x + 18 = 0 \qquad \ldots(2)$

எனக் கொள்ளலாம்.

$y = x^2$ எனக் கொள்க.

அப்போது (2)

$$y^2 + x^2 - 6y - 10x + 18 = 0 \qquad \ldots(3)$$

என மாறும்.

அதாவது $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0 \qquad \ldots(4)$

இது ஒரு வட்டம் மையம் (5, 3)

வட்ட ஆரை $\sqrt{25 + 9 - 18} = 4$

$y = x^2$ ஒரு பரவளையம் $\qquad \ldots(5)$

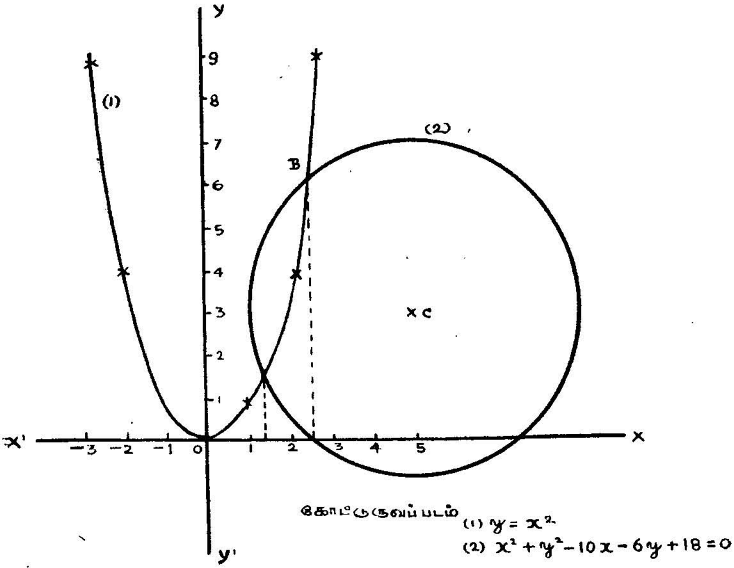
(4), (5)-ன் படங்கள் வெட்டு மிடங்களின் x-மதிப்பைக் காண்க.

(4), (5) வெட்டுமிடங்கள் இரண்டு ; எனவே இரண்டு தீர்வுகள் மெய்யெண்கள்.

அவை $x = 1{\cdot}2$

$x = 2{\cdot}5$

மற்றிரண்டு தீர்வுகள் கற்பனை யெண்களாம்.



படம் 6

13·3·3·2 $x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 3x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை 13.33 ல் குறிப்பிட்டபடி எழுதலாம்.

$$(x^2 + 4x)^2 - 16x^2 + 4x^2 - 3x - 7 = 0$$

அதாவது $(x^2 + 4x)^2 + x^2 - 13x^2 - 3x - 7 = 0$

இங்கு $y = x^2 + 4x$ எனக் கொண்டால்

$y^2 + x^2 - 13(x^2 + 4x) + 52x - 3x - 7 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore x^2 + y^2 - 49x - 13y - 7 = 0 \qquad \ldots(1)$$

இது ஒரு வட்டம் : மையம் $\left(\frac{49}{2}, \frac{13}{2}\right)$;

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 7}$$

வட்டம் (1) ம், $y = x^2 + 4$ என்ற பரவளையமும் x − அச்சை வெட்டுமிடங்கள், சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். ஆனுல், சற்று எளிதான முறையிலும் இதைச் செய்யலாம்.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 2 அதிகப்படுத்தினுல் x^3 உறுப்பு நீக்கப்பட்ட மற்றோர் சமன்பாடு பெறலாம்.

$z = x + 2$, அதாவது $x = z - 2$ என ஈடு செய்க; அப்படிப் பெறப்படும் சமன்பாடு,

$$(z-2)^4 + 8(z-2)^3 + 4(z-2)^2 - 3(z-2) - 7 = 0$$

அதாவது $z^4 - 20z^2 + 45z - 33 = 0$

இதை $x^4 - 20x^2 + 45x - 33 = 0$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு $y^2 = x^2$ என ஈடு செய்ய,

$$y^2 + x^2 - 21x^2 + 45x - 33 = 0$$

அதாவது $x^2 + y^2 + 45x - 21y - 33 = 0$ ...(1)

இவ்வட்டமும், $y = x^2$ என்ற பரவளையமும் வெட்டு மிடங்கள் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

இப்படிப் பெறப்பட்ட தீர்வுகளினின்றும் 2 குறைத்துவிட்டால், முதல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பெறலாம் (இதை மறந்து விடக் கூடாது).

பயிற்சி 13. 8

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு, கோட்டுருவப் படம் வரைந்து தீர்வுகள் காண்க. எத்தனை மெய்யெண்கள், எத்தனை கற்பனைத் தீர்வுகள் எனவும் குறிப்பிடுக.

(1) $x^3 - 6x - 9 = 0$

(2) $x^3 - x^2 - 33x - 61 = 0$ (செ. ப. க).

(3) $4x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$ (செ. ப. க).

(4) $x^4 + 5x^2 + 4x - 17 = 0$ (செ. ப. க).

(5) $3x^4 - x^2 + 3x - 4 = 0$ (செ. ப. க).

(6) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 8x + 12 = 0$

விடைகள்

பயிற்சி 11 (ii)

14. $3x^2 + 14x + 18 = 0; \quad x = \dfrac{-14 \pm [illegible]}{6}$

24. (1) $-3;\ \pm i$

(2) $0, 0, 0, -(a + b + c + 1)$

(3) $b;\ c.$

பயிற்சி 11 (iv)

1. $x = 1; \quad y = 3; \quad z = -1$

2. $x = \dfrac{(c-1)(1-b)}{(c-a)(a-b)};$

$y = \dfrac{(1-c)(a-1)}{(b-c)(a-b)};$

$z = \dfrac{(1-a)(b-1)}{(b-c)(c-a)}.$

4. (i) $a^3 + b^3 + c^3 = 3ab..$

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

பயிற்சி 12 (i)

1. 10. 4. 240. 5. 200

பயிற்சி 12 (ii)

1 (i) 97; 24; 16; 9; 7.

(ii) 494; 124; 82; 49; 40.

2. (i) 14; (ii) 24; (iii) 63

பயிற்சி 12 (*iii*)

6. 27; 245.

29. 3; 7; 9; 11; 13; 19.

பயிற்சி 13·1 (*i*)

1. 2; 3; 4.
2. -5; -2, 1; 4.
3. 4; 6; 9
4. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9.
5. 1, $\frac{1}{2}$, 3
7. $a = 4$ அல்லது $-\frac{1}{9}$
   $b = 24$ அல்லது $\frac{296}{9}$.
8. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{-3}{4}$.
9. 6; 4; -1
11. -1; 5; 1; 3.
12. $\pm\sqrt{3}$, $1 \pm i\sqrt{6}$
13. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
14. 1, 2, $1 \pm i\sqrt{2}$.
15. $\pm\sqrt{3}$; $1 \pm i\sqrt{6}$.
18. 3; 3; $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$
19. $\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$
20. 6; $\frac{1}{3}$; $1 \pm i$
21. 1; 2; -3.

பயிற்சி 13.1 (*ii*)

1. (i) $\frac{pq}{r} - 3$;

   (ii) $\frac{p^2 - 2q}{r^2}$.

2. $\frac{q}{r}$.

4. (i) $-\frac{q}{r}$;

(ii) $\frac{p}{r}$;

(iii) $q^2 - 2pr$;

(iv) $3pq - p^3 - 3r$

5. (i) $p^2 - 2q$;

(ii) $3r - pq$;

(iii) $pr - 4s$;

(iv) $q^2 - 2pr + 2s$.

7. -252

8. $(r-p)^2 + (q-1)^2$.

9. $x^3 - bx^2 + acx - c^2 = 0$

பயிற்சி 13·1 (iii)

1. $3pq - p^3 - 3r$

8. 123

10. 3

பயிற்சி 13.2

1. (i) $y^3 + 2py^2 + (p^2 + q)y + (pq - r) = 0$

(ii) $y^3 + (2q - p^2)y^2 + (q^2 - 2pr)y - r^2 = 0$

(iii) $y^3 + (2q + p - p^2)y^2 + (q^2 + q + 3r - pq - 2pr)y + r(q + 1 - p - r) = 0$

(iv) $y^3 - 2qy^2 + (q^2 + p)y + (r^2 - pq) = 0$

(v) $y^3 - 2(p^2 - 2q)y^2 + (p^4 - 4p^2q + 5q^2 - 2pr)y - (p^2q^2 - 2p^3r + 4pqr - 2q^3 - r^2) = 0$

2. (i) $y^3 + 9qy - 27r = 0$

(ii) $y^3 - qy^2 + (q + 3r)y + r - (q + r)^2 = 0$

(iii) $y^3 + 3qy^2 - (4q^3 + 27r^2) = 0$

(iv) $r^2y^3 + 3r^2y^2 + (3r^2 + q^3)y + (r^2 + 2q^3) = 0$

(v) $y^3 + 3ry^2 + (q^3 + 3r^2)y + r^3 = 0$.

(vi) $8ry^3 - 49y^2 - 1 = 0$

(vii) $r^2y^3 + 3r^2y^2 + (3r^2 + q^5)\,y + r^2 = 0$

(viii) $27ry^3 - 9q^2y^2 + q^3 = 0$

(ix) $ry^3 - 2q^2y^2 - 5qry - (r^2 + 2q^3) = 0$

(x) $r^9y^3 + r^6(q^3 + 3r^2)y^2 + [12r^7 - r^2(q^3 + 3r^2)^2]y$
$\qquad - [(q^3 + 3r^2)^3 - 12r^4(q^3 + 3r^2) + 8r^6] = 0$

3. ( ) $y^3 + 6y^2 + 9y + 3 = 0$

(i) $z^3 - 18z^2 + 45z - 9 = 0$

(ii) $9u^3 - 45u^2 + 18u - 1 = 0$

5. $y^3 + (2q + p - p^2)y^2 + (q^2 + q + 3r - pq - 2pr)y$
$\qquad + r(q + 1 - p - r) = 0$

6. $y^3 + (p^3 + 3r - 3pq)\,y^2 + (q^3 + 3r^2 - 3pqr)\,y$
$\qquad + r^3 = 0$

10. $\dfrac{-27(a_0^2 a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)}{a_0^2}$

பயிற்சி 13·3

1. $1, 1, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$
2. $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
3. $\pm 1, \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
4. $1, 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$
5. $-1, \dfrac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
6. $-1, -2, -\frac{1}{2}, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
7. $-1\ \ 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$.
8. $-1, \dfrac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4},$

$\qquad \dfrac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-2\sqrt{5} - 10}}{4}$

9. $2, \frac{1}{2}, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
10. $-1, -1, \pm i, \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$

11. $\pm 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$

12. $\pm 1, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$

13. $\pm 1, \frac{2 \pm i\sqrt{5}}{3}, \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$

14. $1, \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}\right), \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

15. $-1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

16. $\frac{(3 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{3 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

17. $\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{21})$; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

18. $ry^3 + qy^2 + r(q - 3)y + r^2 + (q - 1)^3 = 0$

பயிற்சி 13.4

1. (i) $\pm 1, 3, -2$.
   (ii) $-1, 3, 4, 6$
   (iii) $3, 6, -4$.
   (iv) $2, 2, 3, -5$.

2. $1, 2 \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

3. $1, 6, -\frac{1}{2}, \pm i\sqrt{2}$

4. $-2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i$

5. $2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i$

6. $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}), -i \pm i\sqrt{2}$.

7. $2 \pm i\sqrt{3}, -2 \pm i$

8. $-2 \pm i\sqrt{7}, 2 \pm i\sqrt{3}$.

9. $\pm\sqrt{2} \pm i, \frac{3}{4}(1 \pm i\sqrt{7})$

13. (i) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.
    (ii) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$.
    (iii) $3, 3, \frac{\pm i}{\sqrt{2}}$.
    (iv) $-1, -1, -2, -3$.

(v) $-1, -1, -2, -2, -7$.

(vi) $3, 3, \pm 2i$.

(vii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2$.

18. $k = -5$; $x = 1\ 1, \frac{3}{2}$.
$k = -4$; $x = 2, 2, \frac{1}{2}$.

பயிற்சி 13·5 (*ii*)

4. $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

8. $-37 < k < 27$ ஆயின் எல்லாத் தீர்வுகளும் மெய் யெண்கள் ;

$27 < k < 152$, இரு மெய்யெண் தீர்வுகள், இரு கற்பனைத் தீர்வுகள் ;

$k > 152$, எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

9. $0 \leqslant k \leqslant 5$.

10. (*i*) இரு கற்பனைத் தீர்வுகள் ; இரு மெய்யெண் தீர்வுகள் ;
தீர்வுகளிடை : $-1 < x < 0$;
$2 < x < 3$.

(*ii*) எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(*ii*) எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

பயிற்சி 13·6 (*i*)

1. (i) $x^3 - 42x^2 + 441x - 400 = 0$
(i) $x^3 - 18x^2 + 81x = 0$.

2. இரண்டு தீர்வுகள் சமம்.

பயிற்சி 13·6 (ii)

1. $2, -1 \pm 3i$

2. $2 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$;
$2 + \omega \sqrt[3]{3} + \omega^2 \sqrt[3]{9}$;
$2 + \omega^2 \sqrt[3]{3} + \omega \sqrt[3]{9}$.

3. $-4, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{3})$

4. $1, -1, -2$.

பயிற்சி 13·6 (ii)

1. (a) $1 \pm \sqrt{2};\ -1 \pm 2i$

   (b) $3 \pm i\sqrt{5};\ -3 \pm i$

   (c) $-2;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15})$

   (d) $2;\ 2;\ 3;\ -5;$

   (e) $1,\ 2,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. $C = \mp \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}(\pm i)$ ஆனால் $\dfrac{c+2}{c-1}$.

பயிற்சி 13·7

1. (a) 2·1 ; 2·095

   (b) 3·2 ; 3·18

2. (a) 2·41

   (b) 0·32

   (c) 1·24

   (d) 0·34 ; 1·35

   (e) − 1·51

3. (a) 1·91

   (b) 3·16

   (c) 2·51

கலைச்சொற்கள்—கணிதம்—இயற் கணிதம்

A

Abbreviation	—	குறுக்கம்
Abcissa	—	மட்டாயம், x — அச்சு ஆயத் தொலை
Absolute	—	அற, தனி
,, value	—	தனி மதிப்பு, மட்டு மதிப்பு
Abstract	—	அகநிலை, வெற்று
Abstract value	—	வெற்று மதிப்பு
Accurate	—	பிழையற்ற, மிகச் சரியான, திட்டமான
Ad Infinitum	—	முடிவின்றி, கந்தழிவரை
Add	—	கூட்டு
Addend	—	கூட்டெண்
Addition	—	கூட்டல்
Adjacent	—	அடுத்த, அடுத்துள்ள
Admissible	—	ஏற்கத்தக்க
Aggregate	—	சேர்ப்புத் தொகை
Aggregation	—	சேர்ப்பு கூட்டணி
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Algebraic	—	இயற்கணித
,, expression	—	இயற்கணிதக் கோவை
,, function	—	இயற்கணிதச் சார்பு
,, symbol	—	இயற்கணிதக் குறி
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட, ஒன்று விட்டொன்று
Analysis	—	கணிதப்பகுப்பு முறை
Answer (*n*)	—	விடை
,, (*v*)	—	விடை காண்க, விடை கூறு
Anticlockwise	—	இடஞ்சுழியாக, இடமாக

Antilogarithm	—	இன மடக்கை (இன மகை)
Apply	—	பயன்படுத்து, பொருத்து
Approximate	—	தோராயமான, அணித்தான, ஏறத்தாழ
,, solution	—	தோராயத் தீர்வு
,, value	—	தோராய மதிப்பு, அண்ணளவு
Approximately	—	தோராயமாக
Approximation	—	தோராயம்
,, successive	—	அடுத்தடுத்த தோராயம்
Arbitrary	—	யாதாமொரு, கட்டுப் பாடில்லாத
Argument (of a function)	—	சார்பின் மாறு எண்
Arithmetic	—	எண் கணிதம், எண் கணக்கு
Array	—	வரிசை
As (: :)	—	போல (விகிதசமக் குறி)
Ascending	—	ஏறும், ஏறுகின்ற
,, order	—	ஏறு வரிசை
Associative law	—	சேர்ப்பு விதி, தொகுப்பு விதி
Average	—	சராசரி
Axiom	—	வெளிப்படை உண்மை
Axis	—	அச்சு, ஆயம்

B

Base	—	அடி
,, of a logarithm	—	மடக்கை அடி, மகையடி
Binomial	—	ஈருறுப்பு
,, expansion	—	ஈருறுப்பு விரிவு
,, theorem	—	ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Biquadratic	—	நாற்படிய
,, equation	—	நாற்படிச் சமன்பாடு
Bound	—	வரம்பு
,, lower	—	கீழ் வரம்பு
,, upper	—	மேல் வரம்பு
Bounded	—	வரம்புடைத்து
,, above	—	மேல் வரம்புடைத்து
,, below	—	கீழ் வரம்புடைத்து
,, function	—	வரம்புடைச் சார்பு
Boundless	—	வரம்பற்ற

Brackets	—	அடைப்புக்கள்
,, curved	—	பிறை அடைப்புக்கள் ( )
,, double	—	இரட்டை அடைப்புக்கள் { }
,, square	—	பகர அடைப்புக்கள், சதுர அடைப்புக்கள் [ ]

C

Calculate	—	கணக்கிடு
Calculation	—	கணக்கீடு, கணிப்பு
Cancel	—	நீக்கு
Case	—	வகை
,, general	—	பொது வகை
,, particular	—	குறிப்பிட்ட வகை
,, special	—	சிறப்பு வகை
Central	—	மையமான, நடுவான
Centre	—	மையம்
Characteristic (logarithm)	—	(மடக்கை) முழு எண்
Cipher	—	பூச்சியம்
Circle	—	வட்டம்
Clock wise	—	வலஞ்சுழியாக, வலமாக
Coefficient	—	கெழு
,, Binomial		ஈருறுப்புக் கெழு
Co-factor	—	இணைச்சிறை
,, of an element (determinant)	—	அணி கோவை மூலகத்தின் இணைச்சிறை
Coincide	—	ஒன்றுபடு, பொருந்து
Coincident	—	ஒன்றிய, ஒன்றுபட்ட
,, roots	—	சமத்தீர்வுகள், ஒன்றிய தீர்வுகள்
Column	—	நிரல்
,, in a determinant	—	அணி கோவையின் நிரல்
Combination	—	சேர்வு
Componendo	—	கூட்டல் விகித (தகவு) சமம், கூட்டு விகித (தகவு) சமம்.
,, et dividendo	—	கூட்டல் — கழித்தல் வுகித (தகவு) சமம்,
Composite		கலவை, தொகுப்பு, பகு நிலை
,, number	—	தொகுப் பெண்
Compound	—	கூட்டு

Conclusion	—	முடிவு
Condensation	—	ஒடுக்கல்
,, test	—	ஒடுக்கற் சோதனை
,, test (Cauchy)	—	(கோசியின்) ஒடுக்கற் சோதனை
Condition	—	கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
Conditional	—	கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட, நிபந்தனைக் குட்பட்ட
,, equation	—	நிபந்தனைச் சமன்பாடு
Conditions, necessary and sufficient	—	வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Congruence	—	சர்வசமம்
Congruent	—	சர்வசமமுடைய
Conjugate	—	துணையிய, இணை
,, algebraic numbers	—	துணையிய இயல் எண்கள்
,, complex number	—	துணையிய சிக்கலெண்
,, numbers	—	துணையிய யெண்கள்
,, roots	—	துணையிய தீர்வுகள்
Commensurable	—	பொது அளவுள்ள, அளவுக்கிணங்கிய
Common	—	பொதுவான
,, denominator		பொதுப் பகுவெண், பொது பின்னக் கீழெண்.
,, difference	—	பொது வேறுபாடு
,, divisor	—	பொது வகுக்குமெண்
,, factor	—	பொதுச்சினை
,, fraction	—	பொதுப் பின்னம்
,, logarithm	—	பொது மடக்கை
,, measure	—	பொது அளவு
,, multiple	—	பொது மடங்கு
,, ratio	—	பொது விகிதம் (தகவு)
Commutative law	—	மாற்று விதி
,, law of addition	—	கூட்டற்பரிமாற்று விதி
,, law of multiplication	—	பெருக்கற்பரி மாற்றுவிதி
Companion series	—	துணைத் தொடர்
Compare	—	ஒப்பிடு
Comparison	—	ஒப்பீடு
,, test	—	ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Completing the square	—	இருபடி நிறை வாக்கல் வர்க்க நிறைவாக்கல்
Complex	—	சிக்கலான, கலப்பு

Complex number — சிக்கலெண், கலப்பெண்
,, quantity — சிக்கற் கணியம்
Consecutive — அடுத்தடுத்த, தொடர்ச்சியான
,, numbers — அடுத்து வரும் எண்கள்
Consequent (Ratio) பின்னுறுப்பு
Consistency இசைவு, பொருத்தமுடைமை
,, conditions for — இசைவு நிபந்தனைகள்
,, of equations — சமன்பாடுகளின் இசைவு நிலை
Consistent — இசைவுள்ள, பொருத்தமுள்ள
Constant — மாறிலி, நிலையெண்
Construct — அமை, வரை
Construction — வனை வழி, வரைவு முறை, அமைப்பு
Contiguous — அடுத்த
Cantinued fraction — தொடர் பின்னம்
,, product — தொடர் பெருக்கம்
,, proportion தொடர் விகித சமம்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
,, at a point — ஒரு புள்ளியிலே தொடர்ச்சியான
,, Curve — தொடர் வளையி, தொடர் வரை
,, function — தொடர்புடைச் சார்பு
,, in an interval — ஓர் இடையிலே தொடர்ச்சியான
,, variable — தொடர் மாறி
Contract (v) — சுருக்கு
Contraction — சுருக்கம்
Contradiction - முரண்பாடு, எதிர் மறுப்பு
Contradictory — முரண்பாடான, எதிர் மறையான
Convention — வழக்கு, மரபு
Converge — குவி, ஒருங்கு
Convergence — குவிதல், ஒருங்கல்
,, absolute — அறக்குவிதல்
,, conditional — நிபந்தனைக் குவிதல்
,, of a continued fraction — தொடர் பின்னக் குவிதல்
,, uniform — ஒரு சீராகக் குவிதல்
Convergent — குவியும், ஒருங்கும்

Convergent of a continued fraction — தொடர் பின்ன ஒருங்கி
,, Penultimate — தொடர் பின்ன ஈற்றயல் ஒருங்கி
,, sequence — குவி தொடர் முறை
,, series — குவிதொடர்
Converse — மறுதலை
Conversely — மறுதலையாக
Conversion — மாற்றம்
Corollary — கிளைத்தேற்றம்
Correct — திருத்து, திருத்தமான
,, to the first place of decimals — முதல் பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
,, to n th place of decimals — n-வது பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Corresponding — ஒத்த, ஒப்பிய
Counter-clockwise — இடஞ்சுழியாக, இடமாக
Cross multiplication — குறுக்குப் பெருக்கல்
Cube root — முப்படி மூலம்
Cubic — முப்படியான
Cubic equation — முப்படிச் சமன்பாடு
Cyclic — வட்டமான
,, Change — வட்டமாற்றம்
,, Order — வட்டவரிசை
,, permutation — வட்டவரிசை மாற்றம்

D

D' Alembert's Ratio test — தாலம் பெயரின் விகிதச் சோதனை
Decimal — பதின் பகுப்பு
,, fraction — பதின் பகுப்புப் பின்னம்
,, recurring — மடங்கு பதின் பகுப்பு
Decrease — குறைதல்
Dedekind cut — தெடிக்கண்டின் பாகுபாடு
Deduce — பகுத்தறி
Deduction — தள்ளு படி, பகுத்தறிதல்
Define — வரையறு
Definite — வரையறுத்த
Definition — வரையறை

Denominator — பகு(க்கும்) எண், பின்னக் கீழெண்
Dense set — அடர் கணம்
,, subset — அடர் கண உட் பகுதி
Dependent — சார்ந்த, சார்புடைய
Deranged series — ஒழுங்கு மாறிய தொடர்
Derived — வழி வந்த
Derived equation — வழிச் சமன்பாடு
,, function — வழிச் சார்பு
,, quantities — வழிக் கணியங்கள்
,, set — வழிக் கணம்
,, units — வழி அலகுகள்
Descarte's rule of sign — டேகார்ட்டின் குறி விதி
Descending order — இறங்கு வரிசை
,, series — இறங்கு தொடர்
Determinant — அணி கோவை
,, element of a — ஒரு அணி கோவையின் மூலகம்
Determinate — தேர்ந்த, தேரக் கூடிய
Difference — வேறு பாடு
,, common — பொது வேறு பாடு
,, mean — சராசரி வேறு பாடு
,, of first order — முதல் வரிசை வேறு பாடு
,, of n th order — n-வது வரிசை வேறுபாடு
Differential — வகையீடு
,, coefficient — வகைக் கெழு
Differentiate — வகைக் கெழு காண்
Differentiation — வகைக் கெழு காணல்
,, logarithmic — மடக்கை வகைக் கெழு காணல்
Digit — இலக்கம்
Dimension — வகையளவு
Direct proportion — நேர் விகிதசமம்
Discontinuity — தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous — தொடர்ச்சியற்ற
,, function — தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Discriminant — தன்மை காட்டி
Distributive law — பங்கீட்டு விதி
Diverge — விரி
Divergent — விரிகின்ற, விரியும்

Divergent sequence	—	விரி தொடர் முறை
,, series	—	விரி தொடர்
Divide	—	வகு
Dividend	—	வகுபடும் எண்
Devidendo	—	கழித்தல் விகித சமம்
Divisibility	—	வகுபடு தன்மை
Division	—	வகுத்தல், பிரித்தல்
,, synthetic	—	தொகு முறை வகுத்தல்
Divisor	—	வகுக்கும் எண்
Domain	—	(எண்) அரங்கம்
Double root	—	இரட்டைத் தீர்வு, இரு முறை மடங்கு தீர்வு

E

Element	—	மூலகம், மூலக உறுப்பு,
,, of a determinant	—	அணிகோவையின் மூலகம்
Eliminate	—	நீக்குரு, நீக்கற்பலன்
Eliminate	—	விலக்கு, நீக்கு
Elimination	—	விலக்கல், நீக்கல்.
Equal	—	சமம், சமன்
,, in all respects	—	சர்வசமம்
Equate	—	சமன் செய், சமன் படுத்து
Equation	—	சமன்பாடு
,, algebraic	—	இயற்கணிதச் சமன்பாடு
,, binomial	—	ஈருறுப்புக்கெழுச் சமன்பாடு
,, biquadratic	—	நாற்படிச் சமன்பாடு
,, conditional	—	நிபந்தனைச் சமன்மாடு
,, cubic	—	முப்படிச் சமன்பாடு
,, homogeneous	—	ஒருபடித்தான சமன்பாடு
,, identical	—	சர்வ சமன்பாடு
,, indeterminate	—	தேராச் சமன்பாடு
,, linear	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
,, member of an	—	சமன்பாட்டு உறுப்பு
,, numerical	—	எண் தழுவிய சமன்பாடு
,, quadratic	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, reciprocal	—	நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு, தலைகீழ்ச் சமன்பாடு
,, roots of an	—	சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (மூலங்கள்)
,, simple	—	ஒருபடி, ஓரினச் சமன்பாடு
Equations, simultaneous	—	ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்

Equation, solution of an — சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்
,, transformation — சமன்பாட்டு மாற்றம், சமன்பாட்டு மாற்றமைப்பு
Equivalent — சமம்
Evaluate — மதிப்பிடு, மதிப்புகாண்
Even function — இரட்டைச் சார்பு
,, number — இரட்டைப் படையெண்
Exceptional case — விலக்கு வகை
Expand — விரி
Expansion — விரிவு
Explicit function — வெளிப்படைச் சார்பு
Exponent — படிக் குறி
Exponential function — படிக்குறிச் சார்பு
,, series — படிக்குறித் தொடர்
,, theorem — படிக்குறித் தேற்றம்
Expression — கோவை
,, binomial — ஈருறுப்புக் கோவை
,, irrational — அளவுக்கிணங்காத கோவை
,, linear — ஒருபடிக் கோவை
,, monomial — ஓருறுப்புக் கோவை
,, multinomial — பல்லுறுப்புக் கோவை
,, rational — அளவுக்கிணங்கிய கோவை
,, trinomial — மூவுறுப்புக் கோவை
Extend — விரிதல், நீட்டுதல்
Extension — விரிவு
Extremes (Ratios) — ஈற்றுருப்புக்கள், இறுதிகள், ஈறுகள்

F

Factor — சினை
,, common — பொதுச்சினை
,, highest common — பெரிய பொதுச்சினை, மீப்பெரு பொதுச் சினை, உத்தமப் பொது அளவு
,, Prime — பகாச்சினை
Factorial — தொடர்ப் பெருக்கம்
,, n — ($\angle n$ அல்லது $n!$)-n தொடர்ப் பெருக்கம், n படி வரிசைப் பெருக்கம்
Factorisation — சினைகாணல்

Factorise	— சினைகாண்
Finite	— முடிவுள்ள
,, Series	— முடிவுள்ள தொடர்
,, set	— முடிவுள்ள கணம்
First approximation	— முதல் தோராயம்
Formula	— வாய்பாடு
Fourth proportional	— விகிதசம நான்காம் உறுப்பு
Fraction	— பின்னம்
continued	— தொடர் பின்னம்
,, decimal	— பதின்பகுப்பு பின்னம், தசம பின்னம்
,, partial	— பகுதிப் பின்னம்
Function	— சார்பு

G

General	— பொதுவான
Genaralise	— பொதுமைப்படுத்து, பொது விதிகாண்
Generalisation	— பொது விதி
General solution	— பொதுத்தீர்வு
Generating function	— பிறப்பிக்கும் சார்பு
Geometric mean	— பெருக்கிடை
,, progression	— பெருக்குத் தொடர்
,, series	— பெருக்குத் தொடர்
,, ,,to infinity	— கந்தழி வரை பெருக்குத் தொடர்
Graph	— கோட்டுருவப்படம், வரைபடம், கோட்டுப்படம்
Graphical solution (of an equation)	— கோட்டுருவப்பட வழியான தீர்வு

H

Harmonic mean	— இசையிடை
,, progression	— இசைத் தொடர்
Homogeneous	— ஒரு படித்தான
,, products	— சமபடிப் பெருக்கங்கள்

I

Identical	— முழுதும் ஒத்த
Identity	— முற்றொருமை
Illustration	— எடுத்துக் காட்டு

Imaginary	—	கற்பனையான, மெய்யிலா
,, number	—	கற்பனை எண்
,, root	—	கற்பனைத் தீர்வு
Incommensurable	—	அளவுக்கிணங்காத, பொது அளவற்ற
Inconsistent	—	பொருந்தாத, முரணான
,, equations	—	பொருந்தாச் சமன்பாடுகள்
Indefinite	—	வரையறுத, அளவுப்படாத
Independent	—	சார்பற்ற, சார்பிலாத
,, variable	—	சார்பில் மாறி
Indeterminate	—	தேரப்பெருத, தேரா
,, quantity	—	தேராக்கணியம்
Index	—	படிக்குறி, குறி அட்டவணை
,, of a root	—	அடிக்குறி, மூலக்குறி
Inequality	—	சமனின்மை
Induction	—	உய்த்தறிதல்
,, Mathematical	—	கணித முறை உய்த்தறிதல்
,, proof by	—	தொடர் முறைத் தெரிப்பு
Inference	—	தேற்றப்பாடு, முடிவு
Infinite	—	முடிவிலா
,, sequence	—	முடிவிலாத் தொடர் முறை, கந்தழித் தொடர் முறை
,, series	—	முடிவிலாத் தொடர்; கந்தழித் தொடர்
Infinity	—	கந்தழி
Integer	—	முழு எண்
,, positive		கூட்டு முழு எண்
,, negative	—	குறை முழு எண்
Inverse	—	நேர் மாறான
,, ratio	—	தலை கீழ்த்தகவு (விகிதம்)
Irrational	—	அளவுக்கிணங்காத
Is to (:)	—	தகவுக் குறி, விகிதக் குறி

K

Known quantity	—	தெரிந்த கணியம்

L

Like signs	—	ஒத்த குறிகள்
Like terms	—	ஒத்த உறுப்புக்கள்
Limit	—	எல்லை

Limit finite — திட்டமான எல்லை
,, infinite — கந்தழி எல்லை
,, tends to a — எல்லையை அணுகுகிறது, எல்லையை நாடுகிறது, எல்லையை நெருங்குகிறது;
,, does not tend to a finite — திட்டமான எல்லையை நெருங்கவில்லை
,, Lower — கீழ் எல்லை
,, upper — மேல் எல்லை
Limits, within finite — திட்டமான எல்லைகளுக்குள் உள்ளது
Limited — எல்லைக் குட்பட்ட
Logarithm மடக்கை (மகை)
,, common — பொது மடக்கை (மடக்கையடி 10)
,, Napierian — நேப்பியர் மடக்கை (மடக்கையடி *e*)
Logarithmic function — மடக்கைச் சார்பு
,, series — மடக்கைத் தொடர்
Lower bound — கீழ் வரம்பு

M

Mantissa — மடக்கை பின்னம்
Mathematics — கணிதம்
,, advanced — உயர் கணிதம்
,, applied — பயன் வழிக்கணிதம்
,, pure — தூய கணிதம்
Mathematical — கணிதத்திற்குரிய
,, induction — கணித முறை உய்த்தறிதல்
Maximum — மீப்பெரு
,, value — மீப்பெரு மதிப்பு
Mapping — உருமாற்றம், அமைப்பு மாற்றம்
Mean — சராசரி, இடை
,, arithmetic — கூட்டிடை
,, geometric — பெருக்கிடை
,, harmonic — இசையிடை
Minimum — மீச்சிறு
Minimum value — மீச்சிறு மதிப்பு
Minor (of a determinant) — சீறி (அணி கோவை)

Minus	— கழி, குறை, எதிர்
Minus sign	— கழித்தற் குறி, குறைக் குறி
Modulus	— மட்டு, தனி மதிப்பு
Monomial	— ஓருறுப்பு, ஓருறுப்புக்குரிய
Monotonic	— ஓரியல்பான
,, decreasing function	— ஓரியல்பாக இறங்கும் சார்பு
,, ,, sequence	— ஓரியல்பான இறங்கும் தொடர் முறை
,, function	— ஓரியல்புச் சார்பு
,, increasing function	— ஓரியல்பாக ஏறும் சார்பு
,, increasing sequence	— ஓரியல்பான ஏறும் தொடர் முறை
Multinomial	— பல்லுறுப்புக்குரிய
,, expression	— பல்லுறுப்புக் கோவை
,, theorem	— பல்லுறுப்புத் தேற்றம்
Multiple	— மடங்கு
Multiple, common	— பொது மடங்கு
,, least common	— அதமப் பொது மடங்கு (அ.பொ.ம.)
Multiplication	— பெருக்கல்
Multiplicand	— பெருக்கப்படும் எண்
Multiplier	— பெருக்குமெண்
Multiply	— பெருக்கு

N

Negative	— குறை, எதிர்
,, number	— குறை யெண்
,, quantity	— குறைக் கணியம்
,, sign	— குறைத்தற் குறி
Notation	— குறியீடு, குறியீட்டு முறை
,, abridged	— சுருக்குக் குறியீடு
Number	— எண்
,, abstract	— வெற்றெண்
,, even	— இரட்டை யெண்
,, odd	— ஒற்றை யெண்
,, prime	— பகா வெண்
,, relation	— எண் தொடர்பு
,, whole	— முழுவெண்
Numeration	— எண்ணீடு
Numerator	— மேலெண்
Numerical	— எண்ணாலாகிய

O

One and only one root — ஒரேயொரு தீர்வு
One to one correspondence — ஒன்றுக்கொன்ருன ஒத்தியைபு
Open interval — திறந்த இடைவெளி
Open set — திறந்த கணம்
Order — வரிசை
Ordinate — குத்தாயம்
Origin — ஆய ஆதி

P

Pair இணையான
Parabola — தொடுவளைவு
Particular — சிறப்பான
Partial — பகுதியான
Perimeter — சுற்றளவு
Permutation — வரிசைமாற்றம், அடுக்கு
Plus — கூட்டு
Plus-sign — கூட்டற்குறி
Point — புள்ளி
Position — இடம்
Positive — மிகை, கூட்டு
,, number — கூட்டெண்
,, quantity — கூட்டுக் கணியம்
Power — படி
Principle — விதி
Problem — கணக்கு
Process — வழி, செய்முறை
Product — பெருக்குத் தொகை
Progression — தொடர்
,, arithmetic — கூட்டுத் தொடர்
,, geometric — பெருக்குத் தொடர்
,, harmonic — இசைத் தொடர்
Proof — தெரிப்பு, நிறுவல்
Property — பண்பு
Proportion — விகிதசமம்
,, continued — தொடர் விகிதசமம்
,, direct — நேர் விகிதசமம்
,, inverse — நேர்மாறு விகிதசமம்
Proportional — விகிதசமமான
,, mean — விகிதசம இடை

Q

Quadratic equation	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, expression	—	இருபடிக் கோவை
,, surd	—	அளவுக் கிணங்காத இருபடி மூலம்
Quantity	—	கணியம்
,, unknown	—	தேராக் கணியம்
Quarter	—	கால்
Quotient	—	ஈவு

R

Radical	—	படிமூலம், படிமூலமுடைய
Radius	—	ஆரை
Rate	—	வீதம்
Ratio	—	விகிதம்
,, antecedent of a	—	ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்பு
,, common	—	பொது விகிதம்
,, constant	—	மாரு விகிதம்
,, consequent of a	—	ஒரு விகிதத்தின் பின்னுறுப்பு
,, direct	—	நேர் விகிதம்
,, duplicate	—	இருபடி விகிதம்
,, inverse	—	நேர் மாறு விகிதம்
,, mean		இடைவிகிதம்
Recurring	—	மடங்குகின்ற
,, continued fraction	—	மடங்கு தொடர் பின்னம்
,, series	—	மடங்கு தொடர்
Reductio ad absurdum	—	பொருந்தா முடிவு
Relation	—	தொடர்பு
Remainder	—	மீதி, மிச்சம்
,, Theorem	—	மீதித் தேற்றம், மிச்சத் தேற்றம்
Represent	—	குறி, வகை
Residue	—	எச்சம்
Root	—	தீர்வு
Root, cube	—	முப்படி மூலம்
,, imaginary	—	கற்பனைத் தீர்வு
,, irrational	—	அளவுக்கிணங்காத் தீர்வு
,, rational	—	அளவுக்கிணங்கிய தீர்வு
,, real	—	மெய்யெண் தீர்வு
,, square	—	இருபடி மூலம்

S

Sequence	—	தொடர் முறை
Series	—	தொடர்

Series absolutely convergent — அறக்குவியும் தொடர்
,, arithmetic — கூட்டுத் தொடர்
,, ascending — ஏறு தொடர்
,, conditionally convergent — நிபந்தனைக் குவி தொடர்
,, convergent — குவி தொடர்
,, descending — இறங்கு தொடர்
,, divergent — விரி தொடர்
,, exponential — படிக்குறித் தொடர்
,, geometrical — பெருக்குத் தொடர்
,, harmonical — இசைத் தொடர்
,, infinite — கந்தழித் தொடர், முடிவிலாத் தொடர்
,, logarithmic — மடக்கைத் தொடர்
,, oscillating — அலை தொடர்
,, power — வலுத்தொடர், அடுக்குத் தொடர்
,, recurring — மடங்கு தொடர், மடங்கிவரும் தொடர்
,, summation — தொடர்க் கூட்டல்
Set algebra — கண இயற் கணிதம்
,, of points — புள்ளித் தொடை, புள்ளிக் கணம்
Sieve of Eratosthenes — எரற்றொத் தெனிசுவின் வடிதட்டு (எண் சல்லடை)
Sign — குறி
Simple — தனியான, ஒருபடியான, எளிய
,, continued fraction — சாமானியத் தொடர் பின்னம்
,, equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
Simultaneous — ஒருங்கமை
Smooth curve — மெல்விழைவரை
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்வுகாண்
Square — சதுரம்
,, root — வர்க்க மூலம்
Squared (x^2) — இருபடி — x ன்
Standard — திட்டமான
,, form — திட்ட அமைப்பு
Substitute — ஈடு செய்
Subtract — கழி

Sum — கூட்டுத்தொகை, மொத்தம்
,, algebraic — இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை
,, to infinity — கந்தழிக் கூட்டுத்தொகை
Summation — கூட்டல்
Symbol — குறியீடு
Symmetric — சமச்சீரான, சமச்சீருள்ள
,, expression — சமச்சீர் கோவை
Symmetry — சமச்சீர்

T

Table — அட்டவணை
Tend — நோக்கு, அணுகு, நெருங்கு, நாடு
Term — உறுப்பு
,, absolute — தனி உறுப்பு
,, negative — குறை உறுப்பு
,, positive — கூட்டு உறுப்பு
Test — சோதனை
,, Cauchy's condensation — கோசியின் ஒடுக்கற் சோதனை
,, D'Alembert's — தாலம்பெயரின் சோதனை
,, of convergence — குவி சோதனை, குவிதற் சோதனை, ஒடுங்கற் சோதனை
,, of divergence — விரிசோதனை, விரிதற் சோதனை
Theory — கொள்கை
,, of Equation — சமன்பாட்டுக் கொள்கை
,, of Numbers — எண் கொள்கை, எண்ணியல்
Transformation — மாற்றம், உருவமாற்றம், நிலை மாற்றம்
,, Of Equation — சமன்பாட்டு மாற்றம்
Transposition — இடமாற்றம்

U

Undetermined — தேரா
Unit — அலகு
Unlike — ஒவ்வாத
Unlimited — எல்லையில்லாத

V

Value — மதிப்பு
,, indeterminate — தேரமுடியாத மதிப்பு
,, limiting — எல்லை மதிப்பு
,, real — உண்மை மதிப்பு

Variable — மாறி
,, dependent — சார்புடை மாறி
,, independent — சார்பில் மாறி
Variate — மாறி
Variation — மாறல், மாறுபாடு
Verification — சரிபார்த்தல்
Verify — சரிபார்
Vinculum — தொகுப்புக் கோடு

W

Whole number — முழு எண்

X

X-axis — X- அச்சு

Y

Y-axis — Y-அச்சு

Z

Zero — பூச்சியம்

LIST OF TECHNICAL TERMS

Abscissa	—	கிடை (அச்சுத்) தூரம்
Abstract Number	—	வெற்றெண்
Adjacent	—	அடுத்துள்ள
Algebra	—	அல்ஜிப்ரா
Algebraical Symbol	—	அல்ஜிப்ரா சங்கேதம்
Alternate angle	—	ஒன்றுவிட்ட கோணம்
Angle	—	கோணம்
Angle, Acute	—	குறுங்கோணம்
Angle, Arms of an	—	கோண புயங்கள்
Angle, Complementary	—	நிரப்பு கோணம்
Angle, Corresponding	—	ஒத்த கோணம்
Angle, Exterior	—	வெளிக் கோணம்
Angle, Interior	—	உட் கோணம்
Angle, Interior opposite	—	உள் எதிர் கோணம்
Angle, Obtuse	—	விரி கோணம்
Angle, Reflex	—	பின்வளை கோணம்
Angle, Right	—	செங்கோணம்
Angle, Straight	—	நேர் கோணம்
Angle, Supplementary	—	மிகை நிரப்பு - கோணம்
Angle, Vertically opposite	—	குத்தெதிர் கோணம்
Area	—	பரப்பளவு, விஸ்தீரணம்
Arithmetic	—	எண் - கணிதம்
Axiom	—	வெளிப்படை உண்மை
Axis	—	அச்சு
Brackets	—	அடைப்புகள்
Co-efficient	—	குணகம்
Commission	—	தரகு, கமிஷன்
Congruent	—	சர்வசம
Corresponding side	—	ஒத்த பக்கம்
Cost price	—	கொள் விலை
Degree	—	பாகை (angle) : டிகிரி (temp.)
Diagonal	—	மூலை விட்டம்
Digit	—	சிற்றிலக்கம்
Directed Numbers	—	திசை எண்கள்
Discount	—	தள்ளுபடி
Equation	—	சமன்பாடு
Equation, Simple	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Equiangular	—	சம கோண
Equilateral	—	சம பக்க
Expression	—	கோவை
Formula	—	சூத்திரம்

Fraction, Representative	— பிரதி பின்னம்
Geometry	— வடிவியல்
Geometry Practical	— செய்முறை வடிவியல்
Geometry Theoretical	— அறிமுறை வடிவியல்
Graph	— வரை படம்
Gross	— குரோசு, (மொத்த)
Gross income	— மொத்த வருமானம்
Index (of a power)	— அடுக்குக் குறி
Interest, Simple	— தனி வட்டி
Loss	— நஷ்டம்
Marked Price	— குறித்த விலை
Octagon	— எண்கோணம்
Ordinate	— நிலை (அச்சுத்) தூரம்
Origin	— மூலம்
Parallel lines	— ஒரு போகுக் கோடுகள்
Partnership	— கூட்டு வியாபாரம்
Percent	— சதவீதம்
Polygon	— பல கோணம்
Power	— அடுக்கு
Principal	— அசல்
Product	— பெருக்கல் பலன்
Profit	— லாபம்
Proportion	— விகித சமம்
Proportion, Direct	— நேர் விகித சமம்
Proportion, Inverse	— தலைகீழ் விகித சமம்
Quadrant	— கால் பகுதி
Ratio	— விகிதம்
Ratio, Inverse	— தலைகீழ் விகிதம்
Term	— உறுப்பு
Theorem	— தேற்றம்
Transversal	— குறுக்கு வெட்டி
Triangle	— முக்கோணம்
Triangle, Acute-angled	— குறுங்கோண முக்கோணம்
Triangle, Equilateral	— சம பக்க முக்கோணம்
Triangle Isosceles	— இருசமபக்க முக்கோணம்
Triangle, Right Angled	— செங்கோண முக்கோணம்
Triangle, Scalene	— அசமபக்க முக்கோணம்
Unit	— அலகு
Vertex	— உச்சி

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை

1970 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1-A	,, II	,,	9	00
*2	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	,,	4	50
*4	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	சோமசலம்	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	மு. ஆரோக்கியசாமி	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	தி. சி. மோகன்	12	00
8.	,, II	எம்.ஏ. அபூர்வசாமி பி.வி.ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும் — I	சி. வேலாயுதம்	6	75
*11.	,, II	,,	11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7	50
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75
15.	இந்தியப் பொருளியல் I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25

*மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
17	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29	பணம் — சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	கு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம்பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50

42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு.வி சீனிவாசன்	6	25
	வரலாறு			
*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி ர. அனுமந்தன்	4	50
*46	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி வி. சொக்கப்பா	4	50
49.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
50.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
51	,, II	பா மாணிக்கவேலு	13	00
52.	,, III	என். ஜே ராஜகோபால்	8	00
53.	,, IV	,,	8	00
54	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
55.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
56.	,, III	,,	5	00
57.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
58.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
59.	,, III	அ பாண்டுரங்கன்	11	00
60.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
61.	,, II	,,	7	00
62.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
63	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி வெ. குப்புசாமி	8	25
64.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
65.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50

*மூலநூல் (Original book)

			ரூ.	பை.
66.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
67.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
68.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
69.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணுமலை	6	75
70.	,, III	இரா. அண்ணுமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
71.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
72.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
73.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
74.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
75.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
76	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

77.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
78.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*79.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
80	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
81.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
82.	பன்னாட்டு அரசியல—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
83	,, II	,,	13	25
84.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
85.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
86	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
87.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50

88.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
89.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
90.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
91.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	—	
*92.	மக்கள் ஆட்சி	க சந்தானம்	4	25
93.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
94.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
95.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
96	,, II	பா சூரியநாராயணன், கி ர. அனுமந்தன்	6	00
97.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

98.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
99.	,, II	,,	7	00
100	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
101.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா அரங்கராசன்	12	00
102.	,, II	,,	9	00
103	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
104.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
105.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*106.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

தத்துவம்

107.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50

* மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	பை
*108.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*109.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ் தேசிகன்	3	50
110.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
111.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
112	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுந்தரம்	3	50
113	,, II	,,	6	00
114	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

115.	அறவியல் - ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

116.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50

மானிடவியல்

*117	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
118.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5	50
119	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

120.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50

புவியியல்

121.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
122.	,, II	,,	8	75
123.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*124.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*125.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
*126.	தென்அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*127.	தென் கண்டங்கள் - ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*128.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*129.	புவிப்புறவியல்—II	நா அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*130.	செய்முறைப் புவியியல்	சு ஜெயச்சந்திரன்	9	00
*131.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*132.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
133.	காலநிலை இயல் - I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
134.	,, II	,,	5	00
135.	காலநிலை இயல்	திருமதி இராதா	10	00
136	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
137.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
138.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ இராமசாமி	6	00
139.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல் – I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
140.	,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
141.	,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5	75

புள்ளியியல்

*142.	புள்ளியியல் – அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00

*மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.பை
143.	புள்ளியியல் முறைகள் – I	கோ சண்முகசுந்தரம்	... 10 00
144.	„ II	... இராஜகோபாலன்	... 14 00
145.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6 50

உயர்கணிதம்

*146.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 12 50
*147.	வகை நுண்கணிதம்	... „	... 8 00
*148.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி கோவிந்தராசன்	... 9 00

விலங்கியல்

*149.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	... 12 00

பௌதிகவியல்

150.	ஒளி நூல்	... ச. சம்பத்து	... 10 00

விஞ்ஞானம்

*151.	வானவெளி வெற்றி	.. டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6 00
*152.	ரேடியோ	.. டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4 75
*153.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே.பி. மாணிக்கம்	... 4 50
*154.	பாம்புகள்	. பெ. மா. அண்ணாமலை	... 3 50
*155.	தாவரம் - வாழ்வும் வரலாறும்	.. டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	.. 8 00
*156.	கரும்பு	.. கு. பெரியசாமி	... 4 00
*157.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	... எஸ். சுந்தரம்	... 6 50

மருத்துவம்

*158.	நீரிழிவு — க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
159.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*160.	பாக்டீரியா	சு சுந்தரம்	2	50
161.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
162.	உடலியங்கியல் — I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
163.	„ II	„	5	50
164.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ கதிரேசன்	7	25

பொறியியல்

165.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே வி கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

166.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

*167.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

*மூல நூல் (Original Book)

பொது நூல்கள்

			ரூ.	பை.
168.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
169.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
*170	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*171.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ் ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*172.	உணவும் ஊட்டமும்	தி வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50

புகுமுக (P.U C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

			ரூ.	பை.
*173	உலக வரலாறு	டி ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*174.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*175.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம் I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*176	,, II	,,	2	25
*177.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*178.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*179	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம் — I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*180.	,, II	,,	3	00
*181.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் —I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	0
*182.	,, II	,,	4	50
*183.	கணிதம் - ஓர் அறிமுகம் — I	ஆர், மகாதேவன்	4	75
*184.	, II	,,	3	25
*185.	வேதியியல்	பி டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*186.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*187.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*188.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா அண்ணாமலை	7	25
*189.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	50

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (B.Sc.) நூல்கள்

பௌதிகம் (Physics)

			ரூ.	பை.
*190.	எந்திரவியல் — சிறப்புப்பாடம் (Book I)	ஆர். நாகராசன்	6	25
*191.	வெப்பவியல் - சிறப்புப்பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*192.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், எஸ். கிருட்டிணசாமி	4	50
*193.	பௌதிகம் — துணைப்பாடம் - I (Book I)	பி தங்கராஜன்	4	00
*194.	(Book II)	,,	3	00
*195	செய்முறை பௌதிகம் — துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50
*196.	மின்னியல்-காந்தவியல் (Book I)	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*197.	ஒளியியல் சிறப்புப்பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7	75

*வேதியியல் (Chemistry)

*198.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப்பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*199.	பௌதிக வேதியியல் (Book I)	டி. சக்திவேலு	4	00
*200.	கனிம வேதியியல் — துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*201.	கனிம வேதியியல் (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*202	பொது பௌதிக வேதியியல் — துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75

கணிதம் (Mathematics)

*203	இயற்கணிதம் — சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*204	தொகுமுறை வரைகணிதம் — சிறப்புப்பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00

* மூல நூல் (Original Book)

			ரூ	பை.
*205.	எண்சார் கணிதம் — சிறப்புப்பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*206.	திரிகோண கணிதம் — சிறப்புப்பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*207.	கணிதம் — துணைப்பாடம்	ஆர் அனுமந்தராவ்	6	00
*208.	நிலையியல் — சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*209	புள்ளியியல் — துணைப்பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*210.	முதுகெலும்பற்றவை I — சிறப்புப்பாடம்	ஆர். முருகேசன்	11	50
*211	,, II — சிறப்புப்பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	11	25
*212.	முதுகுநாணுள்ளவை I — சிறப்புப்பாடம் (Book I)	திருமதி ராணி கந்தசுவாமி	8	00
*213.	,, (Book II)	,,	9	75
*214.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை II - சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*215.	முதுகெலும்பற்றவை — துணைப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*216.	முதுகுநாணுள்ளவை — துணைப்பாடம்	வி. சேது	10	00

தாவரவியல் (Botany)

*217.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும் — சிறப்புப்பாடம்	கே. ராஜசேகரன்	11	00
*218.	தாவரப் புற அமைப்பியல்	கே பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*219.	தாவர உள்ளமைப்பியல்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25

*மூல நூல் (Original Book)

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

பட்டப்படிப்பு

அறிவியல் பாட நூல்கள், 1969

1.	இயற்கணிதம்-1	—திரு. டி. கோவிந்தராசன், ,, கே. முத்துசாமி.
2.	வெப்பவியல்	— ,, கே. நாச்சிமுத்து
3.	கனிம வேதியியல்	— ,, பி. டி. முனியப்பா
4.	முதுகெலும்பற்றவை-துணைப்பாடம்	— ,, என். இராமலிங்கம்
5.	ஒளியியல்	—டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், —டாக்டர் ஆர். சபேசன்.
6.	முதுகுநாணுள்ளவை (பகுதி-1)	—திருமதி ராணி கந்தசுவாமி
7.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை (பகுதி-2)	—திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்
8.	தொகுமுறை வரைகணிதம்	—திரு. ஆர். மகாதேவன்
9.	செய்முறை பௌதிகம்-1	— ,, டி. கமலக்கண்ணன், ,, சீ. கிருட்டிணசாமி.
10.	திரிகோண கணிதம்	— ,, வி. அரங்கநாதன்
11.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம் (பகுதி-1)	— ,, பி. தங்கராசன்
12.	எந்திரவியல்-1	— ,, ஆர். நாகராசன்
13.	கனிம வேதியியல்-துணைப்பாடம்	— ,, சி. ஏ. பத்மநாபன்
14.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்	— ,, டி. இராமலிங்கம்
15.	முதுகெலும்பற்றவை (பகுதி-2)	—திருமதி எஸ். கே வள்ளி
16.	தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்	—திரு. கே. ராஜசேகரன்
17.	மின்னியல் - காந்தவியல்	— ,, டி. ஏ. கருப்பண்ணன்
18.	செய்முறை பௌதிகம்-துணைப்பாடம்	- ,, ஜி. பாஸ்கரன், ,, ஆர். செயராமன்.
19.	முதுகுநாணுள்ளவை-துணைப்பாடம்	— ,, வி. சேது
20.	எண்சார் கணிதம்	— ,, எம். எம். இராமசுவாமி
21.	புள்ளியியல்-துணைப்பாடம்	— ,, எஸ். கருப்பையா
22.	தாவர உள்ளமைப்பியல்	— ,, டாக்டர் எ. கோவிந்தராஜலு

மற்றும் எட்டு நூல்கள்

இவை அடக்க விலை வெளியீடுகள் — கழிவு இல்லை.