பொறியியற் கணக்கு

(ENGINEERING MATHEMATICS)

[பகுதி 1]

ப. வே. நவநீதகிருஷ்ணன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—663

பொறியியற் கணக்கு

(பகுதி 1)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

ப. வே. நவநீதகிருஷ்ணன், எம்.எஸ்ஸி., பி.டி.,

விரிவுரையாளர், கணிதத்துறை,

அரசினர் பொறியியற் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—November, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 663

© Government of Tamilnadu

Engineering Mathematics — Part I

P. V. NAVANEETHAKRISHNAN

Price Rs. 9-40

Published by the Tamilnadu Text-book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by:
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந் தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தை யும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய் துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறை களில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண் டுணர்ச்சி இவற்றின்காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சி யும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழக மும், சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவிய்மைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வரு கிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பொறியியற் கணக்கு (பகுதி 1)' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 663ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 698 நூல்கள் வெளிவந் துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி சமூக நல அமைச் சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங்களை யும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங் களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள் அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர் களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

(அ) இயற்கணிதம் (Algebra)

1. பகுதி பின்னங்கள் (Partial Fractions) ... 1

விகிதமுறு பின்னம்—தகுபின்னத்தைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல்—விகிதமுறு பின்னத்தைப் பிரித்தல்—ஒரு சுருக்கு முறை—வேறு முறைகள்.

2. ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem) ... 20

விகிதமுறு அடுக்கின் ஈருறுப்புத் தேற்றம்—மிகை முழுவெண் குறியீட்டுக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம்—நடுவுறுப்பு—பொதுவுறுப்பு—சில முக்கிய விரித்தல்கள்—முதல் குறையுறுப்பு—எண்ணளவில் மிகப்பெரிய உறுப்பு—செயல்முறை விதி—தொடர் கூட்டல்—தோராயங்கள்—எல்லைகள்.

3. அடுக்குக்குறித் தேற்றம் (Exponential Theorem) ... 68

e என்ற எண்—e-யின் மதிப்பு 2, 3 ஆகிய இரண்டுக்கும் இடைப்பட்டது—e ஒரு விகிதமுரு எண்—அடுக்குக்குறித் தேற்றம்—n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுனல்—தொடர் கூட்டல்—தோராயங்களும் எல்லைகளும்.

4. மடக்கைத் தேற்றம் (Logarithmic Theorem) ... 102

மடக்கை—மடக்கைத் தேற்றம்—சில விளைவுகள்—தொடர்கூட்டல்—தோராயங்கள்—எல்லைகள்.

பக்கம்

(ஆ) வகை நுண்கணிதம் (Differential Calculus)

5. சார்புகளும் எல்லைகளும் (Functions and Limits) ... 133

மாறிகளும் மாறிலிகளும்—சார்புகள்—சார்பு வகைகள் — எல்லைகள் — எல்லைத் தேற்றங்கள் — சில செயல்முறை விதிகள்—சில நியம எல்லைகள்—தொடர்ச்சியான சார்பும் தொடர்ச்சியற்ற சார்பும்—தொடர்ச்சியறும் வகைகள்—சில தேற்றங்கள்.

6. வகையிடுதல் (Differentiation) ... 160

வரையறை—முதற்கொள்கையிலிருந்து வகையிடல்—சில தேற்றங்கள்—மாறிலியின் வகைக்கெழு ; இரு சார்புகளின் கூடுதலின், பெருக்கலின், வகுத்தலின் வகைக்கெழு—அதிபரவளைவுச் சார்புகள்—அவற்றை வகையிடல்—நேர்மாறு சார்புகளின் வகைக்கெழுக்கள்—வட்டநேர்மாறு சார்புகள்—அதிபர வளைவு நேர்மாறு சார்புகள்—சார்பின் சார்பாக வகையிடல்—பிரதியிட்டு வகையிடல்—மடக்கை எடுத்து வகையிடல்—உட்படுசார்புகளை வகையிடல்—ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பைக் குறித்து வகையிடல்—துணையலகின் மூலம் வகையிடல்.

7. தொடர்ந்து வகையிடல் (Successive Differentiation) ... 216

வகைக்கெழுவை வகையிடுதல்—குறியீடுகள்—நியம விளைவுகள்—வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்—லைபினிட்சின் தேற்றம்.

8. வகைக்கெழுவின் பொருளும் பயனும் (Meaning of the Derivative and its Applications) ... 243

வகைக்கெழுவின் இரு பொருள்கள் : சமதள வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதமாக ; வீத அளவையாக—வகைக்கெழுவின் பயன்கள் : கூடும் சார்பும் குறையும் சார்பும் ; காலத்தைக் குறித்த மாற்றுவீத அளவை—திசைவேகமும் திசைவேக வளர்ச்சி வீதமும் — சுழல்வேகமும் சுழல்வேக வளர்ச்சி

பக்கம்

வீதமும்—சமதளப்பாதையில் இயக்கம் — தொடு கோடும் செங்கோடும்—வளைகோடுகளின் வெட்டுக் கோணம்—தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் நீளமும், தொடுகோட்டடியும் செங்கோட்டடியும் — ஓர் இணைப்பு : தூரக்கோணக்கூறுகள் : வளைகோட்டின் தூரக்கோணச் சமன்பாடு ; கூறு மாற்றம்.

9. பகுதி வகைக்கெழு காணல் (Partial Differentiation) ... 309

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் சார்பு—பகுதி வகைக்கெழு—தொடர் பகுதி வகைக் கெழுக்கள்—சார்பின் சார்புவிதி—சமபடிச் சார்புகள்—ஆய்லரின் தேற்றம் — முழு வகையீடு — கிளைத் தேற்றங்கள்: முழு வகைக்கெழு ; பல சார்புகளின் சார்பின் பகுதி வகைக்கெழு ; சாராத மாறிகளை மாற்றுதல்.

சுருக்கக் குறியீடுகள் ... 342

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ... 343

கலைச்சொற்கள் ... 344

(அ) இயற்கணிதம்

(ALGEBRA)

1. பகுதி பின்னங்கள்

(Partial Fractions)

1.0 ஒரு விகிதமுறு பின்னத்தை (rational fraction), அதன் பகுதி பின்னங்கள் எனப்படும் பல எளிய பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதும் முறையை இப்பகுதியில் காண்போம்.

1·1 விகிதமுறு பின்னம்

P, Q ஆகியவை x-ல் இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளானல் (Polynomials), $\frac{P}{Q}$ என்பது x-ல் ஒரு விகிதமுறு பின்னம்.

இதன் வடிவம் :

$$\frac{P}{Q} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots\dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots\dots + b_n};$$

இதில், m, n மிகை முழுவெண்கள் ; $a_1, a_2, \dots, a_m$, $b_0, b_1, \dots, b_n$ என்பவை மெய் மாறிலிகள்.

P-யின் படி Q-வின் படியைவிடக் குறைந்திருப்பின் இப் பின்னம் தகு பின்னம் (proper fraction) எனவும், அவ்வாறு குறைந்திராவிடில் பின்னம் தகாப் பின்னம் (improper fraction) எனவும் கூறப்படும்.

ஒரு தகாப் பின்னத்தை, ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை, ஒரு தகு பின்னம் ஆகியவற்றின் கூடுதலாக எழுதலாம். எடுத்துக் காட்டாக, $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 9}$ என்பதை, தொகுதியைப் பகுதியால் வகுத்த பின், $x + 2 + \frac{9x + 19}{x^2 - 9}$ என்று எழுதலாம். இதில்

$q = x + 2$ என்பது வகுத்தபின் வரும் ஈவு; $r = 9x + 19$ என்பது மீதி. பொதுவாக, $\frac{P}{Q}$ ஒரு தகாப் பின்னமானால்,

$$\frac{P}{Q} = q + \frac{r}{Q}$$

என எழுதலாம். இதில் q ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை; $\frac{r}{Q}$ ஒரு பகுதி பின்னம்.

மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுகள் :

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 2 + \frac{11x - 11}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\frac{p^5 - p - 3}{(p - 1)\ (p^2 + 1)} = \frac{p^5 - p - 3}{p^3 - p^2 + p - 1}$$

$$= p^2 + p - \frac{3}{p^3 - p^2 + p - 1}.$$

1·2 பல தகு பின்னங்களைக் கூட்ட, வேறொரு தகு பின்னம் கிடைக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{x + 2} + \frac{3}{2x - 1}$ $= \frac{5\,(x + 1)}{2x^2 + 3x - 2}$. இதிலிருந்து, வலப்பக்கத்திலுள்ள தகு பின்னத்தை, இடப் பக்கத்திலுள்ள எளிய தகு பின்னங்களாகப் பிரித்து, அவற்றின் கூடுதலாக எழுதலாம் என்றும் தெரிகிறது.

1·3 தகு பின்னத்தைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல்

$\frac{P}{Q}$ ஒரு தகு பின்னமாகவும், இதில் Q இரு காரணிகளாக (factors) வேனும் பிரிக்கக்கூடியதாகவும் இருக்கட்டும். இக் காரணிகளைத் தம் பகுதிகளாகக் கொண்ட பல எளிய பின்னங் களின் கூடுதலாக $\frac{P}{Q}$-வை எழுதலாம். அவ் வெளிய பின்னங் களைப் பகுதி பின்னங்கள் எனவும், அவ்வாறு எழுதுவதைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல் எனவும் கூறுவோம்.

Q-வின் அமைப்பைப் பொறுத்துப் பகுதி பின்னங்களின் அமைப்பும் இருக்கும்.

அமைப்பு 1. Q-வின், மடங்குதலில்லாத (non-repeated), $(ax+b)$ போன்ற ஒவ்வொரு காரணிக்கும், $\frac{A}{ax+b}$ என்ற வடிவமுள்ள ஒரு பகுதி பின்னம் எழும்.

அமைப்பு 2. மேலும் காரணிப் படுத்த முடியாத, மடங்குதலில்லாத, (cx^2+dx+e) போன்ற ஒவ்வொரு காரணியின் பொருட்டும் $\frac{Bx+C}{cx^2+dx+e}$ என்ற வடிவமுள்ள ஒரு பகுதி பின்னம் தோன்றும்.

அமைப்பு 3. $(ax+b)^n$ என்பது Q-வின் காரணியானால், அதன் பொருட்டு $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$ என்ற பகுதி பின்னங்கள் எழும்.

அமைப்பு 4. $(cx^2+dx+e)^n$ என்பது Q-வின் காரணியானால், அதன் பொருட்டு $\frac{B_1x+C_1}{cx^2+dx+e}+\frac{B_2x+C_2}{(cx^2+ax+e)^2}$

$$+\frac{B_3x+C_3}{(cx^2+dx+e)^3}+\cdots\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(cx^2+dx+e)^n}$$ என்ற பகுதி பின்னங்கள் எழும்.

இவற்றில் $A, B, C, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ என்பவை மாறிலிகள் ; n மிகை முழுவெண்.

நிறுவல்

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{XY}$$

என்பது கொடுத்த தகு பின்னமாக இருக்கட்டும். X, Y இரண்டிற்கும் பொதுவாக 1ஐத் தவிர வேறு காரணி இல்லை எனில், அதாவது, X, Y இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகாத் தன்மை கொண்டவை (Prime to each other) எனில், இதை

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{XY}=\frac{R}{X}+\frac{S}{Y} \qquad (அ)$$

என, இரு தகு பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதலாம். இது ஒரு துணைக்கோட்பாடு (Lemma). எனவே, R, S-ன் படிகள்

முறையே X, Y-ன் படிகளை விடக் குறைந்தே இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

(1) $X = ax + b$ என வை. இது மடங்குதலில்லாத காரணி யாதலால் Y-ல் இராது. அதாவது, X, Y இரண்டும் பகாத் தன்மையன. எனவே கொடுத்த பின்னத்தை (அ) என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். X-ன் படி 1 என்பதால், R ஒரு மாறிலி யாகத்தான் இருக்கவேண்டும். ஆகவே $R = A$.

(2) $X = cx^2 + dx + e$ எனக் கொண்டு, R-ன் வடிவம் $Bx + C$ என இதேபோல் நிறுவலாம்.

(3) $X = (ax + b)^n$ எனக் கொள். x-ல் $(n-1)$-க்கு மிகாத படியுடையதாக R இருக்கவேண்டுமாதலால்,

$$R = A_1 (ax + b)^{n-1} + A_2 (ax + b)^{n-2} + \dots + An$$

என எழுதலாம். ஆகவே,

$$\frac{R}{X} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}.$$

(4) $X = (cx^2 + dx + e)^n$ எனக் கொண்டு, $\frac{R}{X}$-ன் வடிவத்தை இதே முறையில் நிறுவலாம்.

1·4 ஒரு விகிதமுறு பின்னத்தைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டுமாயின், அது தகாப்பின்னமாக விருந்தால், முதலில் அதை ஒரு முழுவெண் சார்பு, ஒரு தகுபின்னம் ஆகியவற்றின் கூடுதலாக எழுதவேண்டும். தகு பின்னத்தை மட்டும் எடுத்து, பகுதியை முழுதுமாகக் காரணிப் படுத்தி அதன் அமைப்புக்கு ஏற்ற பகுதிபின்னங்களாகப் பிரித் தெழுத வேண்டும். அதிலுள்ள தெரியாத மாறிலிகளைப் பிறகு காணவேண்டும்.

மாதிரி 1.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\frac{2}{(x-4)(2x+5)}.$

இது தகுபின்னம். இதன் பகுதியின் அமைப்பிலிருந்து,

$$\frac{2}{(x-4)(2x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{2x+5}$$

எனக் கொள்வோம். இரு பக்கங்களையும் இடப்பக்கப் பகுதியால் பெருக்கக் கிடைப்பது :

$$2 = A\,(2x + 5) + B\,(x - 4) \qquad \ldots(1)$$

இதில் $x = 4$ எனப் பிரதியிட, $2 = 13A.$

$x = -\frac{5}{2}$ எனப் பிரதியிட, $2 = -\frac{13}{2}B.$

எனவே, $A = \frac{2}{13}$, $B = -\frac{4}{13}$.

ஆகவே,

$$\frac{2}{(x-4)\ (2x+5)} = \frac{2}{13\,(x-4)} - \frac{4}{13\,(2x+5)}$$

மாதிரி 2.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\frac{x}{(x-1)\ (2x^2 + 5x + 2)}$

தரப்பட்ட பின்னத்தை $f(x)$ என்போம். இதன் பகுதியை, $(x - 1)\ (x + 2)\ (2x + 1)$ என முழுவதுமாகக் காரணிப் படுத்தலாம். எனவே,

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\,(x+2)\,(2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$+ \frac{C}{2x+1}$ எனக் கொள்வோம். இதை $(x - 1)\ (x + 2)\ (2x + 1)$-ஆல் பெருக்க,

$$x = A\,(x+2)\,(2x+1) + B\,(x-1)\,(2x+1) + C\,(x-1)\,(x+2) \ \ldots\ (2)$$

$x = 1$ என இட, $1 = 9A$

$x = -2$ என இட, $-2 = 9B$

$x = -\frac{1}{2}$ என இட, $-\frac{1}{2} = -\frac{9}{4}C.$

இவற்றிலிருந்து, $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{2}{9}$, $C = \frac{2}{9}$. எனவே,

$$f(x) = \frac{1}{9\,(x-1)} - \frac{2}{9\,(x+2)} + \frac{2}{9\,(2x+1)}.$$

குறிப்பு : சமன்பாடு (1)-லிருந்து A, B என்ற இரு மாறிலிகளையும், சமன்பாடு (2)-லிருந்து A, B, C என்ற மூன்று மாறிலிகளையும் அறிய வேண்டியிருந்தது. எனவே, முறையே இரண்டும் மூன்றுமான ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை (simultaneous equations) அவற்றிலிருந்து பெற நேர்ந்தது. பொதுவாக, n-மாறிலிகளை அறிய வேண்டுமானால், அவை அடங்கிய n ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைப் பெற்றாக வேண்டும். இவற்றை, (1), (2)-ஐப் போன்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறுவதற்கு x-க்கு எளிய எண் மதிப்புகளைப் பிரதியிடலாம்; அல்லது, இரு பக்கங்களிலுமுள்ள x-ன் ஒத்த அடுக்குகளின் கெழுக்களை (coefficients) ஒப்பிடவும் செய்யலாம்.

மாதிரி 3.

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 14x - 38}{(x-4)\ (2x+5)}$$

என்ற தகாப்பின்னத்தை, ஒரு முழுவெண் சார்பு (Integral Function), பகுதி பின்னங்கள் ஆகியவற்றின் கூடுதலாக எழுது.

தரப்பட்ட கோவையின் பகுதியை $(2x^2 - 3x - 20)$ எனப் பெருக்கி, தொகுதியை அதனால் வகுத்த பின்

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 14x - 38}{(x-4)\ (2x+5)} = x - 2 - \frac{78}{(x-4)\ (2x+5)}$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதில் $(x - 2)$ ஒரு முழுவெண் சார்பு. மற்றது தகுபின்னம். அதை

$$-\frac{78}{(x-4)\ (2x+5)} = -\frac{6}{(x-4)} + \frac{12}{(2x+5)}$$

எனப் பகுதி பின்னப்படுத்தலாம் (மாதிரி 1). ஆகவே,

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 14x - 38}{(x-4)\ (2x+5)} = x - 2 - \frac{6}{(x-4)} + \frac{12}{(2x+5)}$$

மாதிரி 4.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\dfrac{(x+3)^2}{(x-1)(x^2+x+2)}$

x^2+x+2 என்பதை மேலும் மெய்க் காரணிகளாகப் பிரிக்க முடியாது. எனவே,

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2}$$

எனக் கொள். இதிலிருந்து கிடைப்பது :

$$(x+3)^2 = A(x^2+x+2) + (Bx+C)(x-1).$$

$x=1$ என இட, $16 = 4A$. $\therefore A = 4$

$x=0$ என இட, $9 = 2A - C$ $\therefore C = -1.$

$x=0$ என இடுவதும், சார்பிலா உறுப்புகளைச் (Constants) சமப்படுத்துவதும் ஒன்றேதான் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

x^2-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த, $1 = A + B$ $\therefore B = -3.$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{4}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2+x+2}.$$

மாதிரி 5

பகுதி பின்னங்களைக் காண் : $\dfrac{1+x^2+x^3}{(1-x)(1-x^3)}$.

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

என்பதால், கொடுத்த பின்னத்தை, $\dfrac{1+x^2+x^3}{(1-x)^2(1+x+x^2)}$

என எழுதி, இதன் பகுதியின் அமைப்புக்கு ஏற்ப

$$\frac{1+x^2+x^3}{(1-x)^2(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{(1+x+x^2)}$$

எனக் கொள். இரு பக்கங்களையும் $(1-x)^2(1+x+x^2)$ ஆல் பெருக்க,

$$1 + x^2 + x^3 = A(1-x)(1+x+x^2) + B(1+x+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

$x = 1$ என இட, $3 = 3B$;

$x = 0$ என இட, $1 = A + B + D$;

x^3-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $1 = -A + C$;

x-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $0 = B + C - 2D$.

இவற்றைத் தீர்க்க,

$$A = -\frac{2}{3}, \ B = 1, \ C = \frac{1}{3}, \ D = \frac{2}{3}.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதி பின்னங்கள் :

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{3(1-x)} + \frac{x+2}{3(1+x+x^2)}.$$

மாதிரி 6

பகுதி பின்னம் காண் : $\dfrac{8x}{(x-1)^3(x+1)}$.

$$\frac{8x}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x+1)}$$

எனக் கொள்.

$$8x = A(x-1)^2(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3.$$

$x = 1$ என இட, $8 = 2C$, $C = 4$

$x = -1$ என இட, $-8 = -8D$, $D = 1$

x^3-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $0 = A + D$, $A = -D = -1$

x^2-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $0 = -A + B - 3D$,

$$B = A + 3D = 2.$$

$$\frac{8x}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

மாதிரி 7

$\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x^2+1)}$ ஐப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி.

பகுதியின் அமைப்பிலிருந்து,

$$\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

என வை. ஆகவே,

$$x^3+1 = (Ax+B)(x^2+2)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+1) + (Ex+F)(x^2+2)^2.$$

அ—து,

$$x^3+1 = (Ax+B)(x^4+3x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) + (Ex+F)(x^4+4x^2+4).$$

இரு புறங்களிலுமுள்ள x^5, x^4, x^3, x^2, x உறுப்புகளின் கெழுக்களையும், சார்பிலா உறுப்புகளையும் ஒப்பிட, பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் முறையே கிடைக்கின்றன.

$$A+E=0 \qquad \text{...(i)}$$
$$B+F=0 \qquad \text{...(ii)}$$
$$3A+C+4E=1 \qquad \text{...(iii)}$$
$$3B+D+4F=0 \qquad \text{...(iv)}$$
$$2A+C+4E=0 \qquad \text{...(v)}$$
$$2B+D+4F=1 \qquad \text{...(vi)}$$

ச—டு (iii) லிருந்து (v) ஐக் கழித்து $A=1$ எனவும், அதனுல் (i) லிருந்து $E=-1$ எனவும், மீண்டும் (iii) லிருந்து $C=2$ எனவும் பெறலாம். இதேபோல் மற்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும், $B=-1$, $F=1$, $D=-1$ எனப் பெறலாம்.

எனவே,

$$\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{2x-1}{(x^2+2)^2} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

மாதிரி 8

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\dfrac{x^6}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$

இதில் எங்கும் x இரட்டைப் படியிலேயே இருப்பதால், $x^2 = p$ என இடுக. இட்டபின் பின்னம்

$$\frac{p^3}{(p+a^2)(p+b^2)(p+c^2)}$$

என மாறும். இது தகாப்பின்னம். வகுத்தபின் இதை

$$1 - \frac{(a^2+b^2+c^2)p^2+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)p+a^2b^2c^2}{(p+a^2)(p+b^2)(p+c^2)}$$

எனவெழுதி, தகுபின்னத்தை மட்டும் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்து, இதனை,

$$1 - \frac{a^6}{(p+a^2)(b^2-a^2)(c^2-a^2)} - \frac{b^6}{(p+b^2)(c^2-b^2)(a^2-b^2)}$$
$$- \frac{c^6}{(p+c^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

என எழுதலாம். மீண்டும் $p = x^2$ என இட, கொடுத்த பின்னம் பின்வரும் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிகிறது :

$$1 - \frac{a^6}{(x^2+a^2)(b^2-a^2)(c^2-a^2)} - \frac{b^6}{(x^2+b^2)(c^2-b^2)(a^2-b^2)}$$
$$- \frac{c^6}{(x^2+c^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

1·5 ஒரு சுருக்கு முறை

(i) பிரிக்கவேண்டிய தகுபின்னத்தின் பகுதியில் $(ax+b)$ போன்ற மடங்குதலில்லாத ஒருபடிக் காரணி இருந்தால் அதற்குரிய பகுதி பின்னத்தை ஒதுக்குமுறை (Method of Suppression) என்ற ஒரு சுருக்கு முறையால் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரி 2ஐக் காண்க.

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$$

என வைத்தோம்.

A-ஐக் காண, அதன் பகுதியைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப் படுத்து : $x - 1 = 0$, அ-து, $x = 1$. சமன்பாட்டின் இடப் புறத்தில் $(x - 1)$ என்ற காரணியை ஒதுக்கிவிட்டு, மற்ற இடங் களில் $x = 1$ என இடக் கிடைப்பதே A-யின் மதிப்பு. அப்படிச் செய்ய, $A = \frac{1}{(1+2)(2+1)} = \frac{1}{9}$; B-ஐக் காண, இடப் புறத்தில் $(x+2)$ ஐ ஒதுக்கிவிட்டு, $x = -2$ என இட, $B = \frac{-2}{(-3)(-3)} = -\frac{2}{9}$; இடப் புறத்தில் $(2x+1)$-ஐ ஒதுக்கி விட்டு மற்ற இடங்களில் $x = -\frac{1}{2}$ என இட,

$$C = -\frac{1}{2}\Big/\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{9}.$$

இது, முதலில் கையாண்ட முறையின் சுருக்கமே தவிரப் புதிய முறை அல்ல என்பதை எளிதில் காணலாம்.

மற்றோர் எடுத்துக் காட்டு :

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

இதில் A-ஐக்காண, இடப்பக்கத்தில் $(x-2)$ஐ நீக்கி மற்ற இடங்களில் $x = 2$ என இட, $A = \frac{4}{7}$.

B, C ஐ இவ்வாறு காண வழியில்லை.

(ii) தரப்பட்ட பின்னத்தின் காரணி ஒன்று $(ax + b)^n$ என்ற வடிவத்தில் இருந்தால், அதைப் பகுதியாகக் கொண்ட பகுதிபின்னத்தின் மாறிலித் தொகுதியையும் இதேபோல் காண லாம். ஆயின், அதன் காரணமாக எழும் மற்றப் பகுதி பின்னங் களின் மாறிலிகளை இவ்வாறு காணமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{x}{(x-a)^3(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-b}$$

என்பதில், இம்முறையில் $C = \frac{a}{a-b}$ என அறியலாம் ; $(x-b)$ ஒரு மடங்குதலில்லாத ஒற்றைப்படிக் காரணியாதலால், (i) ல்

விளக்கியபடி, $D = \frac{b}{(b-a)^3}$ எனப் பெறலாம். ஆயின், A, B ஆகியவற்றை இவ்வாறு பெற வழியில்லை.

1·6 வேறு முறைகள்

தரப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதியின் ஒரு காரணி இரண்டுக்கு மேல் மடங்குதல் பெற்றிருந்தால் நீள வகுத்தல் முறை என்ற மற்றொரு முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரி 6ஐ நீள வகுத்தல் முறையில் செய்வோம் :

தரப்பட்ட கோவை : $\frac{8x}{(x-1)^3(x+1)}$.

$x - 1 = y$ என வை. ஆகவே, $x = 1 + y$.

$$\frac{8x}{(x-1)^3\,(x+1)} = \frac{8\,(1+y)}{y^3\,(2+y)} = \frac{1}{y^3} \cdot \frac{8\,(1+y)}{2+y}$$

இரண்டாம் காரணியின் பகுதியையும் விகுதியையும் y-ன் ஏறு படியில் எழுதி வகுத்து

$$\frac{8\,(1+y)}{2+y} = 4 + 2y - y^2 + \frac{y^3}{2+y}$$

என எழுதலாம். ஆகவே

$$\frac{8x}{(x-1)^3\,(x+1)} = \frac{1}{y^3}\left[\,4 + 2y - y^2 + \frac{y^3}{2+y}\right]$$

$$= \frac{4}{y^3} + \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2+y}$$

$$= \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

பின்வரும் மாதிரிகளில் சற்று மாறுபட்ட சில முறைகள் கையாளப்படுகின்றன.

மாதிரி 9.

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{11}{25(x-1)} + \frac{2}{5(x-1)^2} - \frac{11x-4}{25(x^2+4)}$$

எனக் காட்டு.

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

எனக் கொள்ள,

$$x^2+x = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

$x = 1$ என இட, $2 = 5B$; $B = \frac{2}{5}$

அடுத்து x-ன் ஒத்த படி உறுப்புகளை ஒப்பிடுவது வழக்கம். மாறாக, $x^2 = -4$ என இட,

$$\begin{aligned} -4+x &= (Cx+D)(x-1)^2 \\ &= -(Cx+D)(2x+3) \\ &= -2Cx^2 - (3C+2D)x - 3D \\ &= 8C - 3D - (3C+2D)x. \end{aligned}$$

இதில் ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிட,

$$8C - 3D = -4, \quad 3C + 2D = -1.$$

இவற்றைத் தீர்க்க, $C = -\frac{11}{25}$, $D = \frac{4}{25}$.

A-ஐக் காண சார்பிலிகளை ஒப்பிடுக.

$$O = -4A + 4B + D. \quad \therefore A = \frac{11}{25}.$$

எனவே, $$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{11}{25(x-1)} + \frac{2}{5(x-1)^2} - \frac{11x-4}{25(x^2+4)}.$$

மாதிரி 10.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி : $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}$

அமைப்பிலிருந்து,

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

என வை.

இரு பக்கங்களையும் இடப்பக்கப் பகுதியின் எல்லாக் காரணிகளாலும் பெருக்குவது வழக்கம். மாறுக, (x^2+2) என்ற ஒரு காரணியால் மட்டும் பெருக்க,

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2+3} = Ax+B+\frac{(Cx+D)(x^2+2)}{x^2+3}$$

வகுத்த பிறகு, இ. ப. $= x+1-\dfrac{3x+2}{x^2+3}$;

$$\text{வ. ப.} = Ax+B+\frac{Cx^3+Dx^2+2Cx+2D}{x^2+3}$$

$$= Ax+B+Cx+D-\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$= (A+C)x+(B+D)-\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

இரு பக்கங்களிலுமுள்ள முழு எண் சார்புகளையும் பின்னங்களை ஒப்பிட,

$$A+C=1, \quad B+D=1, \quad C=3, \quad D=2;$$
$$A=-2, \quad B=-1.$$

எனவே, $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \dfrac{3x+2}{x^2+3} - \dfrac{2x+1}{x^2+3}$.

பயிற்சி 1—1.

பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி. (வினக்கள் 1 முதல் 27 வரை).

1. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

2. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(2x+1)}$

3. $\dfrac{2x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$

4. $\dfrac{2x^2+3x+4}{(2x^2-x-1)(x-1)}$

5. $\dfrac{3x^2+8x-12}{x^3+7x^2+12x}$

6. $\dfrac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}$

7. $\dfrac{x^3-1}{x(x+1)^3}$

8. $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$

9. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x+2}$

10. $\dfrac{10-8x^2+3x^3}{(1-x)^4}$

11. $\dfrac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)}$

12. $\dfrac{x^3}{(x-1)^4(x^2-x+1)}$

13. $\dfrac{3(x^2+1)}{x^3+1}$

14. $\dfrac{1+x^2+x^3}{(1-x)(1-x^3)}$

15. $\dfrac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$

16. $\dfrac{1}{x^4+1}$ [கவனிக்க : $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$
$\cdot\ (x^2-\sqrt{2}\,x+1)$]

17. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2-1)(x^3+1)}$

18. $\dfrac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2(x^2+2)}$

19. $\dfrac{x^4}{(x^2+2)(x^2+1)^3}$

20. $\dfrac{x^3+2}{x^3-x}$

21. $\dfrac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{(x^2+c^2)(x^2+d^2)}$

22. $\dfrac{x^4+1}{x^2(x+1)^2}$

23. $\dfrac{x^4+4x-16}{(2-x)^2(4+x^2)}$

24. $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+x^2+1}$ [கவனிக்க : $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$]

25. $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

26. $\dfrac{x^5}{x^4-1}$

27. $\dfrac{x^6}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$

28. $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ஐப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி. அதிலிருந்து $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0$ எனக் காட்டு.

29. $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ஐப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரி. அதிலிருந்து $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}$

$$+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)}$$

$$+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1 \text{ எனக் காட்டு.}$$

30. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\dfrac{A}{1-ax}+\dfrac{B}{1-bx}$ எனில்,

$\dfrac{1}{(1-ax)^2(1-bx)}=\dfrac{A}{(1-ax)^2}+\dfrac{AB}{1-ax}+\dfrac{B^2}{1-bx}$ எனக் காட்டு. இதிலிருந்து, $\dfrac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$ -ன் பகுதி பின்னங்களைக் காண்.

விடைகள் 1—1.

1. $\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{13}{2(x-3)}$

2. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{3(x-1)}+\dfrac{1}{3(2x+1)}$

3. $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{4}{3+x}$

4. $\dfrac{4}{3(2x+1)}+\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-3)}$

6. $\dfrac{11}{8(x-3)}-\dfrac{11}{8(x-1)}-\dfrac{11}{4(x-1)^2}-\dfrac{7}{2(x-1)^3}$

7. $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^3}$

8. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+2}$

10. $-\frac{3}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{7}{(1-x)^3}+\frac{5}{(1-x)^4}$

11. $\frac{3}{2(x-1)}+\frac{1-3x}{2(1+x^2)}$

12. $\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-x+1}$

13. $\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}$

14. $-\frac{2}{3(1-x)}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x+2}{3(1-x+x^2)}$

15. $\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}$

16. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right)$

17. $-\frac{1}{8(x+1)}+\frac{17}{72(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}$
$+\frac{1}{6(x-1)^3}-\frac{x+2}{9(x^2+x+1)}$

18. $\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{x-1}{x^2+2}$

19. $\frac{4}{x^2+1}-\frac{3}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{(x^2+1)^3}-\frac{4}{x^2+2}$.

20. $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)}$

21. $1+\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{(d^2-c^2)(x^2+c^2)}+\frac{(a^2-d^2)(b^2-d^2)}{(c^2-d^2)(x^2+d^2)}$

22. $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(x+1)^2}$

23. $1-\frac{4}{2-x}+\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{1}{4+x^2}$

24. $1-\frac{x}{2(x^2+x+1)}+\frac{x}{2(x^2-x+1)}$

25. $2x + 3 + \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{3x + 1}$

26. $x + \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{2(x^2 + 1)}$

27. $x - 1 + \frac{1}{8(x - 1)} + \frac{9}{8(x + 1)} - \frac{1}{4(x + 1)^2} - \frac{x - 1}{4(x^2 + 1)}$

28. $\sum \frac{a^2}{(a - b)(a - c)(x - a)}$

29. $1 + \sum \frac{a^3}{(a - b)(a - c)(x - a)}$

30. $-\frac{1}{(1 - x)^2} - \frac{2}{1 - x} + \frac{4}{1 - 2x}$

2. ஈருறுப்புத் தேற்றம்
(Binomial Theorem)

2-0 $(a+x)$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவை. n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுனல் $(a+x)^n$ என்பதன் விரிப்பு, ஈருறுப்புத் தேற்றம் என்ற ஒன்றுல் கொடுக்கப்படும். $(a+x)^n$ என்பதை $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ என எழுதலாம் என்பதால், $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ அல்லது $(1+x)^n$ என்பதன் விரிப்பை மட்டும் அறிவது போதுமானதாகிறது.

2-1 விகிதமுறு அடுக்கின் ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for a rational index).

n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுகவும், $|x|<1$ ஆகவும் இருந்து, $(1+x)^n$ என்பதால் அதன் மிகை மதிப்பையே குறிப்போமாஞல்,

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots$$
$$+\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots.$$

நிறுவல் : ஆய்லரின் நிறுவலைத் (Euler's proof) தருவோம்:

$$n_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

எனில், இத் தேற்றத்திலுள்ள முடிவறுதொடரை (Infinite series)

$$f(n) = 1+\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2+\dots+\frac{n_r}{r!}x^r+\dots$$

எனக் குறிக்கலாம். $|x|<1$ எனில், இத் தொடர் அறவொருங்குகிறது (absolutely convergent). குறிப்பாக $f(0)=1$,

$$f(1) = 1 + x$$

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha_r}{r!}x^r + \dots$$

$$f(\beta) = 1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{\beta_r}{r!}x^r + \dots$$

$$f(\alpha+\beta) = 1 + \frac{(\alpha+\beta)_1}{1!}x + \frac{(\alpha+\beta)_2}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{(\alpha+\beta)_r}{r!}x^r + \dots$$

என்ற தொடர்களும் அறவொருங்குகின்றன. இரு அறவொருங்கு தொடர்களைப் பெருக்குவதால் கிட்டும் தொடரும் அறவொருங்கும் என்பதால், $f(\alpha).\ f(\beta)$ என்ற தொடரும், $|x| < 1$ ஆக இருக்கையில், அறவொருங்கும்.

இப் பெருக்கலில் x^r-ன் கெழு

$$\frac{\beta_r}{r!} + \frac{\beta_{r-1}}{(r-1)!}.\frac{\alpha_1}{1!} + \frac{\beta_{r-2}}{(r-2)!}.\frac{\alpha_2}{2!} + \dots + \frac{\alpha_r}{r!}$$

$$= \frac{1}{r!}[\beta_r + {}^rC_1\,\beta_{r-1}\,\alpha_1 + {}^rC_2\,\beta_{r-2}\,\alpha_2 + \dots + \alpha_r].$$

வாண்டர் மாண்டின் தேற்றத் (Vandermonde's Theorem) தின்படி,

$$(\alpha+\beta)_r = \alpha_r + {}^rC_1\,\alpha_{r-1}\,\beta_1 + {}^rC_2\alpha_{r-2}\beta_2 + \dots + \beta_r.$$

எனவே, $f(\alpha).\ f(\beta)$ வில் x^rன் கெழு

$$\frac{(\alpha+\beta)_r}{r!}.$$

$f(\alpha+\beta)$ என்பதன் தொடரில் x^rன் கெழுவும் இதுவேயாதலால்

$$f(\alpha).\ f(\beta) = f(\alpha+\beta)$$

எனத் தெரிகிறது. இதில் α, β எந்த எண்களாகவும் இருக்கலாம் ; $|x| < 1$.

இதையே மீண்டும் பயன்படுத்த,

$$f(\alpha).\ f(\beta).\ f(\gamma) = f(\alpha+\beta).\ f(\gamma) = f(\alpha+\beta+\gamma).$$

இதை விரிக்க, பின்வரும் பொது விளைவு கிடைக்கிறது :

$$f(\alpha_2)\dots\dots f(\alpha_n) = f(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n).$$

தேற்றத்தில் n ஒரு விகிதமுறு எண். அது மிகை, குறை, முழுவெண், பின்னம் என்று எவ்வாறேனும் இருக்கலாம். எனவே நிறுவலைப் பல பிரிவுகளாகக் காண்போம்.

பிரிவு (i) : n ஒரு மிகை முழுவெண்ணாக இருக்கட்டும்.

ச—டு (1) ல் $\alpha_1 = 1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ என இட,

$f(1).\ f(1) \ldots n$ பகுப்புக்கள் $= f(1 + 1 \ldots\ n$ உறுப்புக்கள்)

அ—து, $[f(1)]^n = f(n)$

அ—து $(1 + x)^n = f(n).$

கவனிக்க : n மிகை முழுவெண் எனில், $f(n)$-ன் தொடரில் $n_{n+1} = 0 = n_{n+2} = n_{n+3} = \ldots$. ஆகவே, n மிகை முழுவெண் எனில், $f(n)$-ன் தொடரில் $(n + 1)$ உறுப்புக்களே உண்டு.

பிரிவு (ii) : n மிகை பின்னமாக இருக்கட்டும். $n = \frac{p}{q}$; p, q இரண்டும் மிகை முழுவெண்கள் எனக் கொள்.

ச—டு (1) லிருந்து,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \ldots\ldots q \text{ பகுப்புக்கள்}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots\ldots q \text{ உறுப்புக்கள்}\right)$$

அ—து, $$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = f(p).$$

பிரிவு (i) லிருந்து, $f(p) = [f(1)]^p = (1 + x)^p$

$$\therefore \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = (1 + x)^p.$$

ஆகவே, $\left(f\ \frac{p}{q}\right)$, அ—து, $f(n)$ என்பது $(1+x)^p$ன் ஒரு q-மூலம்.

இதன் மெய்மிகை மூலத்தை $(1 + x)^{\frac{p}{q}}$ எனக் குறிப்பிட, x மெய் என்பதால்,

$$f(n) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \pm (1+x)^{\frac{p}{q}} = \pm (1+x)^{m}$$

இனி, $-1 < x < 1$ என்ற இடைவெளியில் $f(n)$ ஒரு தொடர் சார்பு என்பதாலும், $x = 0$ ஆக இருக்கையில் $f(n) = 1$ என்ற மிகை எண் என்பதாலும், இந்த இடைவெளியில் $f(n)$ எங்கும் பூச்சியம் ஆகாததாலும், அது குறையெண்ணாக மாற வழியில்லை. எனவே,

$$f(n) = + (1+x)^{m}$$

பிரிவு (iii): n ஒரு விகிதமுறு குறையெண்ணாக இருக்கட்டும். (முழுவெண்ணாகவோ பின்னமாகவோ இருக்கலாம்). $n = -m$, m ஒரு விகிதமுறு மிகையெண் எனக்கொள்.

ச—டு (1) லிருந்து

$$f(m).\ f(n) = f(m+n) = f(o) = 1$$

$$\therefore\ f(n) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{[f(1)]^{m}} \text{ (பிரிவு (i), (ii) லிருந்து)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^{m}} = (1+x)^{-n} = (1+x)^{m}$$

$$\therefore\ f(n) = (1+x)^{m}$$

இவ்வாறு எந்த விகிதமுறு குறியீட்டுக்கும் (Index) ஈருறுப்புத் தேற்றம் உண்மையாகிறது.

2·2 மிகை முழுவெண் குறியீட்டுக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for a positive integral index)

n ஒரு மிகை முழுவெண் எனில், $(1 + x)^{n}$ இன் விரிப்பில் $(n + 1)$ உறுப்புக்களே உண்டு என முன்பே குறித்தோம்; அவ்விரிப்பு பின்வரும் முடிவுறு தொடராகும் :

$$(1+x)^{n} = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}x^{r} + \ldots + x^{n}$$

n மிகை முழுவெண் என்பதால், ${}^nC_r = \dfrac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r\,!}$ என எழுதலாம். மேலும் ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$. எனவே, இதை $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \dots\dots + {}^nC_r\, x^r + \dots\dots + x^n$ என்றும் தரலாம். இதற்கு $|x| < 1$ என்ற நிபந்தனை இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். இதன் மற்றொரு வடிவம்.

n மிகை முழுவெண் எனில்,

$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r}\, x^r + \dots + x^n$.

2·3 நடுவுறுப்பு.

n இரட்டைப் படை மிகை எண் எனில் $\left(\dfrac{n}{2} + 1\right)$ ஆவது உறுப்பு $(a + x)^n$ ன் விரிப்பில் நடுவுறுப்பாகும்.

n ஒற்றைப்படை மிகை எண் எனில் $\left(\dfrac{n+1}{2}\right), \left(\dfrac{n+3}{2}\right)$ ஆவது உறுப்புக்கள் இரண்டுமே நடுவுறுப்புக்கள்.

2·4 பொது உறுப்பு

$(1 + x)^n$ என்பதன் விரிப்பை x இன் ஏறுபடியில் எழுதக் கிடைக்கும் x^r ஐக் கொண்ட உறுப்பை $(r + 1)$ ஆவது உறுப்பு அல்லது T_{r+1} என்ற பொது உறுப்பு என்போம்.

$(1 + x)^n$ இல் பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \dots (n-r+1)}{r\,!}\, x^r$$

இதேபோல்,

$(1 + x)^{-n}$ இல் பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = \frac{(-n)\,(-n-1)\,(-n-2)\dots\dots(-n-r+1)}{r\,!}\, x^r$$

$$= (-1)^r\, \frac{n\,(n+1)\,(n+2) \dots (n+r-1)}{r\,!}\, x^r$$

$(1 - x)^{-n}$ இல் பொது உறுப்பு.

$$T_{i+1} = (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}(-x)^r$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r=1)}{r!}x^r$$

$(1-x)^n$ இல் பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$$

மாதிரி 1

நான்கு உறுப்புக்கள்வரை $(9+2x)^{-\frac{3}{2}}$ என்பதை

(i) x-ன் ஏறுபடியில்

(ii) x-ன் இறங்குபடியில்

விரித்தெழுது. x-ன் மீதான நிபந்தனையையும் கூறு.

(i) $$(9+2x)^{-\frac{3}{2}} = \left[9\left(1+\frac{2x}{9}\right)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 9^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2x}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{27}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2x}{9}\right)+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{1\cdot2}\left(\frac{2x}{9}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{2x}{9}\right)^2+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{5x^2}{54}-\frac{35x^3}{1458}+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{27}-\frac{x}{51}+\frac{5x^2}{1458}-\frac{35x^3}{39366}+\dots .$$

$\left(1+\frac{2x}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ஐ விரித்தெழுதத் தேவையான நிபந்தனை :

$$\left|\frac{2x}{9}\right| < 1$$

அ—து, $\frac{2}{9}\,|x| < 1$

$$\therefore \quad |x| < \frac{9}{2}$$

அ—து, $-\frac{9}{2} < x < \frac{9}{2}$.

(ii) $(9+2x)^{-\frac{3}{2}} = \left[2x\left(1+\frac{9}{2x}\right)\right]^{-\frac{3}{2}}$

$$= (2x)^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{9}{2x}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (2x)^{-\frac{3}{2}}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{2x}\right)+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{1\cdot2}\left(\frac{9}{2x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{9}{2x}\right)^3+\ldots\right]$$

$$= (2x)^{-\frac{3}{2}}\left[1-\frac{27}{4x}+\frac{1215}{32x^2}-\frac{25515}{128x^3}+\ldots\right].$$

$\left(1+\frac{9}{2x}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ஐ விரித்தெழுத நிபந்தனை

$$\left|\frac{9}{2x}\right| < 1$$

அ—து, $\frac{2}{9}\,|x| > 1$

அ—து, $|x| > \frac{9}{2}$

அ—து, $x < -\frac{9}{2}$; $x > \frac{9}{2}$.

மாதிரி 2

$(4-x)^{-3}$ என்பதன் விரிப்பில் x^7-ன் கெழுவைக் காண். பொது உறுப்பை எழுது. x-ன் மீதான கட்டுப்பாடு என்ன ?

$$(4-x)^{-3} = 4^{-3}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-3}.$$

$\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-3}$-ன் விரிப்பில் x^7 உள்ள உறுப்பு

$$T_8 = \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)(-3-4)(-3-5)(-3-6)}{7\,!}\left(-\frac{x}{4}\right)^7$$

$$= \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{7\,!}\cdot\frac{x^7}{4^7} = \frac{9x^7}{4^6}.$$

$\therefore$ $(4-x)^{-3}$-ன் விரிப்பில் x^7-ன் கெழு.

$$4^{-3}\cdot\frac{9}{4^6} = \frac{9}{4^9}.$$

பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = 4^{-3}\cdot\frac{(-3)\,(-3-1)\,(-3-2)\ldots(-3-r+1)}{r\,!}\left(-\frac{x}{4}\right)^r$$

$$= (-1)^r\,\frac{1}{64}\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\,\ldots\,(r+2)}{r\,!}\cdot(-1)^r\left(\frac{x}{4}\right)^r$$

$$= \frac{1}{64}\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\,\ldots\,(r+2)}{r\,!}\left(\frac{x}{4}\right)^r.$$

$\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-3}$ ன் விரிப்புக்கான நிபந்தனை

$$\left|\frac{x}{4}\right| < 1$$

அ-து, $\quad |x| < 4.$

மாதிரி 3

$(1-x)^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ என்ற பெருக்கலைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் தொடரின் கூடுதலைக் காண்க :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\dots\dots+\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\dots(2n)}$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot2}(-x)^2$$

$$+\dots\dots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot2\dots n}(-x)^n+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\dots+\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\dots(2n)}x^n+\dots$$

$$(1-x)^{-1}=1+(-1)(-x)+\frac{(-1)(-1-1)}{1\cdot2}(-x)^2+\dots$$

$$=1+x+x^2+\dots\dots+x^n+\dots\dots.$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர், இவ்விரு தொடர்களையும் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடரில் x^n ன் கெழு. ஆகவே, அது $(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-1}$ ல் x^n ன் கெழு ; அ—து, $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ ல் x^n ன் கெழு.

$$=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n$$

$$= \frac{3.5.7 \ldots (2n+1)}{2^n\ n!}$$

$$= \frac{3\cdot5\cdot7 \ldots (2n+1)}{2\cdot4\cdot6 \ldots (2n)}.$$

2.5 சில முக்கிய விரிப்புக்கள்

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி முறையோடு விரித்துப் பார்த்துப் பின்வரும் விரித்தல்களை எளிதில் ஏற்கலாம்: $|x| < 1$).

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots + (-1)^r x^r + \ldots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^r (r+1) x^r + \ldots$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (r+1) x^r + \ldots$$

$$(1+x)^{-3} = \frac{1}{2!}\left[1.2 - 2.3x + 3.4x^2 - \ldots + (-1)^r (r+1)(r+2) x^r + \ldots\right]$$

$$(1-x)^{-3} = \frac{1}{2!}\left[1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \ldots + (r+1)(r+2) x^r + \ldots\right]$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!} x^r + \ldots$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[1.2 \ldots (n-1) + 2.3 \ldots nx + 3.4 \ldots (n+1) x^2 + \ldots + (r+1)(r+2) \ldots (n+r-1) x^r + \ldots\right]$$

$$(1-x)^{\frac{-p}{q}} = 1 + \frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+\overline{r-1}\,q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \dots$$

மாதிரி 4

$\frac{(1+2x)^3}{(1-x)^2}$ என்பதன் விரிப்பில் x^n ன் கெழுவைக் காண்க. $(n > 2)$.

$$\frac{(1+2x)^3}{(1-x)^2} = (1+2x)^3 (1-x)^{-2}$$

$$= (1 + 6x + 12x^2 + 8x^3)\,[1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)\,x^n + \dots]$$

முதற்காரணியின் முதல் இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் உறுப்புக்களுடன், அடுத்த காரணியின் x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} உறுப்புக்களை ($n > 2$ ஆக இருந்தால்தான் இத்தனை உறுப்புக்களும் கிடைக்கும்) முறையே பெருக்க, x^n உறுப்புக்கள் அத்தனையும் கிடைக்கின்றன. அவற்றின் கூடுதல்

$$[1.(n+1) + 6.n + 12.(n-1) + 8(n-2)]\,x^n$$
$$= 27(n-1)\,x^n$$

ஆகவே, ($n > 2$ ஆக இருக்கையில்) x^nன் கெழு $= 27(n-1)$

மாதிரி 5.

$\frac{(2-x)(1+3x)}{(2x-1)(x^2+1)}$ ஐ x இன் ஏறுபடியில் விரித்துப் பொது உறுப்பைக் காண்க. x இன் மீதான கட்டுப்பாடு என்ன ?

$$\frac{(2-x)(1+3x)}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{2+5x-3x^2}{(2x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{3}{(2x-1)} + \frac{1-3x}{1+x^2}$$

(பகுதி பின்னப்படுத்தக் கிடைத்தது)

$$= -3(1-2x)^{-1} + (1-3x)(1+x^2)^{-1}$$

$$= -3[1 + 2x + (2x)^2 + \dots + (2x)^r + \dots]$$
$$+ (1-3x)[1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^r (x^2)^r + \dots]$$

இவற்றில், முதல் விரிப்பில் x^rன் கெழு : $(3 \cdot 2)^r$

பிரிவு (i) : r இரட்டை (even) எனில், இரண்டாம் விரிப்பில் x^rன் கெழு : $(-1)^{\frac{r}{2}}$. எனவே மொத்தத்தில் பொதுவுறுப்பு

$$\left[-3.2^r + (-1)^{\frac{r}{2}}\right]x^r.$$

பிரிவு (ii) r ஒற்றை (odd) எனில், இரண்டாம் விரிப்பில் x^r-ன் கெழு : $-3(-1)^{\frac{(r+1)}{2}}$. எனவே, மொத்தத்தில் பொதுவுறுப்பு $\left[-3.2^r - \frac{3}{2}(-1)^{\frac{(r+1)}{2}}\right]x^r$.

$(1-2x)^{-1}$ ன் விரிப்புக்கான கட்டுப்பாடு : $|2x| < 1$; அ-து, $|x| < \frac{1}{2}$

$(1+x^2)^{-1}$ ன் விரிப்புக்கான கட்டுப்பாடு : $x^2 > 1$; அ-து; $|x<| \; 1$

எனவே, இரு விரிப்புகளுக்கும் தேவையான பொதுவான நிபந்தனை $|x| < \frac{1}{2}$.

2.6 முதல் குறையுறுப்பு

(1) $x, n > 0$ எனில், $(1+x)^n$ ன் விரிப்பில் கிடைக்கும் முதல் குறையுறுப்பைக் காண்போம்.

$(1+x)^n$ ன் விரிப்பில் $(r+1)$ ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} x^r$$

$$T_r = \frac{n(n-1)...(n-r+2)}{(r-1)!} x^{r-1}$$

$$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} x$$

T_{r+1}, T_r இரண்டிலும் ஒன்று மிகையாகவும் ஒன்று குறை வாகவும் இருக்குமெனில்,

$$\frac{T_{r+1}}{Tr} < 0$$

அ—து $\frac{(n-r+1)}{r} x < 0$

$x, r > 0.$ $\therefore$ $n - r + 1 < 0$

$\therefore$ $r > n + 1.$

இந்தச் சமனிலி தரும் ஒவ்வொரு r-மதிப்பிற்கும் T_{r+1}, T_r ஆகிய வெவ்வேறு குறியுடைய இரு உறுப்புக்கள் கிடைக்கும். எந்தவொரு ஈருறுப்பு விரிப்பும் 1 என்ற மிகையெண்ணில் துவங்கும். எனவே, இச்சமனிலி தரும் மிகக்குறைந்த r-ன் முழு எண் மதிப்பே முதலில் குறிமாறுகின்ற—முதலில் குறையாக மாறுகின்ற—உறுப்பைத் தரும்.

எனவே, A ல் உள்ள மிகப் பெரிய முழுவெண்ணை $I[A]$ எனக் குறித்தால், முதலில் குறையாக மாறும் உறுப்பு

$$T_{r+1}, \quad r = I[n+1] + 1$$
$$= I[n] + 2.$$

எ—டு : $(1 + 5x)^{\frac{7}{2}}$ன் விரிப்பில் கிடைக்கும் முதல் குறை யுறுப்பு.

$$T_{r+1}, \; r = I\left[\frac{7}{2}\right] + 2 = 5.$$

எனவே, அவ்வுறுப்பு 6வது உறுப்பாகும். அதன் மதிப்பு

$$T_6 = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{1.2.3.4.5} (5x)^5 = -\frac{21875}{256} x^5$$

(2) $x, n > 0$ எனில், $(1+x)^{-n}$, $(1-x)^{n}$ இரண்டின் விரிபிலும் இரண்டாவது உறுப்பே குறையுறுப்பு என்பதை எளிதில் விரித்துக் கண்டுகொள்ளலாம்.

எ—டு : (i) $(1+6x)^{-8}$, $0 < x < \frac{1}{6}$

(ii) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$, $x = 2$

(iii) $(1+x)^{-3}$, $x = -0{\cdot}2$

ஆகியவற்றின் விரிப்பில் இரண்டாம் உறுப்புக்களே குறையுறுப்புக்கள்.

(3) $x, n > 0$ எனில், $(1-x)^{-n}$ என்பதன் விரிப்பில் குறையுறுப்பே இல்லை.

இனி, $x\ n \geq 0$ எனில், $(1-x)^{n}$ ன் விரிப்பில் எந்த உறுப்புக்குப் பிறகு வரும் உறுப்புக்கள் குறிமாருமல் வரும் என்றும் காணலாம். அதற்கு

$$r > n + 1$$

எனக்காட்டுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்ளவும்.

2·7 எண்ணளவில் மிகப்பெரிய உறுப்பு (Numerically (Greatest Term)

$|x| < 1$ எனில், $(1+x)^{n}$ ன் விரிப்பிலுள்ள உறுப்புக்கள் எண்ணளவில் (i) முதலிலிருந்து குறைந்துகொண்டே போகும். அல்லது (ii) முதலில் உயர்ந்துகொண்டே வந்து பிறகு குறைந்து கொண்டு போகும்.

$(1+x)^{n}$ ன் விரிப்பிலுள்ள எண்ணளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பைக் காணும் முறையைப் பின்வரும் மாதிரிகளால் அறியலாம்:

மாதிரி 6

$x = \frac{1}{3}$ எனில், (i) $(1-2x)^{\frac{27}{2}}$, (ii) $(1-2x)^{-\frac{27}{2}}$,

(iii) $(1-2x)^{-\frac{1}{4}}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றின் விரிப்பிலும் எந்த உறுப்பு எண்ணளவில் மிகப்பெரியது எனக் காண்.

$(1+x)^n$-ன் விரிப்பில்

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{(n-r+1)}{r}\, x$$

$$\therefore \left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{|(n-r+1)\,x|}{r}.$$

(எப்பொழுதும் $r \geq 0$)

(i) $(1-2x)^{\frac{27}{2}}, \qquad x = \frac{1}{3}.$

இதில் $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{\left|\left(\frac{27}{2} - r + 1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\right|}{r}$

$$= \frac{|2r-29|}{3r}.$$

$2r > 29$ எனக் கொண்டால்,

$$\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{2r-29}{3r}.$$

எனவே, $\left|T_{r+1}\right| \underset{<}{\geq} \left|T_r\right|$ என்பது $2r - 29 \underset{<}{\geq} 3r$ என்பதற்கு ஏற்பவே இருக்கிறது ;

அ—து, $3r \underset{\geq}{<} 2r - 29$

அ—து, $r \underset{\geq}{<} -29.$

எப்பொழுதும் $r \geq 0$ என்பதால், இச்சமனிலி பொருளற்றது. எனவே, $2r \not> 29$.

இனி $2r < 29$ எனக் கொண்டால்

$$\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{29-2r}{3r}.$$

எனவே, $|T_{r+1}| \underset{>}{\geq} |T_r|$ என்பது $29 - 2r \underset{<}{\geq} 3x$ என்பதைப் பொருத்தது.

அ—து, $3r \underset{>}{\leq} 29 - 2r$

அ—து, $r \geq \frac{29}{5}$, $r > \frac{29}{5}$

r ஒரு முழு எண் ஆதலால், இடைக்குறியால் பயனில்லை.

எனவே, $|T_{r+1}| \gtrless |T_r|$ என்பது $r \gtrless 5\frac{4}{5}$ என்பதைப் பொருத்தது.

$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ எனில், அதற்கியைந்த பொதுவுறுப்பான T_{r+1}, அதற்கு முந்தைய உறுப்பான T_rஐ விட எண் மதிப்பில் பெரிதாகவே இருக்கிறது. அதன் பிறகு, $r = 6, 7, \ldots$ எனில், இயைந்த பொதுவுறுப்பு எண்மதிப்பில் குறைந்துகொண்டே செல்கிறது. எனவே, மிகப் பெரிய உறுப்புக்கு $r = 5$; அவ்வுறுப்பு ஆருவது உறுப்பாகும்.

(ii) $(1-2x)^{-\frac{27}{2}}$, $x = \frac{1}{3}$

முன்னைப் போலவே,

$$\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{\left|-\frac{27}{2} - r + 1\right| \cdot \left|-\frac{2}{3}\right|}{r} \quad (r \geq 0)$$

$$= \frac{|25 + 2r|}{3r} = \frac{25 + 2r}{3r}.$$

$\left|T_{r+1}\right| \lesseqgtr \left|T_r\right|$ என்பது, $25 + 2r \gtrless 3r$ என்பதைப் பொருத்தது.

அ—து, $r \leq 25$, $r > 25$.

$r = 0, 1, 2, \ldots$ என இட,

$$|T_0| < |T_1| < |T_2| < \ldots < |T_{25}| = |T_{26}| > |T_{27}| > |T_{28}| > \ldots.$$

எனவே, 25 ஆவது, 26 ஆவது உறுப்புக்கள் இரண்டும் எண்ணளவில் சமமான மிகப் பெரிய உறுப்புக்கள்.

(ii) $(1-2x)^{-1/4}$, $x = \frac{1}{3}$.

$$\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{\left|-\frac{1}{4}-r+1\right| \cdot \left|-\frac{2}{3}\right|}{r}$$

$$= \frac{|3-4r|}{6r}.$$

$4r > 3$ எனில், $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{4r-3}{6r}$.

$\therefore \quad \left|T_{r+1}\right| \gtrless \left|T_r\right|$ என்பது $4r-3 \gtrless 6r$ என்பதைப் பொருத்தது.

அ—து, $r \lesseqgtr -\frac{3}{2}$

$r \geq 0$ என்பதால், இதனுல் ஒரு பயனும் இல்லே.

$4r < 3$ எனில், $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{3-4r}{6r}$;

$\left|T_{r+1}\right| \gtrless \left|T_r\right|$ என்பது $3-4r \gtrless 6r$ என்பதைப் பொருத்தது.

அ—து, $10r \lesseqgtr 3$

அ—து, $r \lesseqgtr \frac{3}{10}$.

எனவே, எண்ணளவில் மிகப்பெரிய உறுப்புக்கு $r = 0$; அதாவது, முதலுறுப்பே மிகப்பெரிய உறுப்பாகும்.

2·8 செயல்முறை விதி (Working rule)

$(1+x)^n$-ன் விரிப்பில் $(|x| < 1)$ எண்ணளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பை $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு எனக் குறித்தால் r பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது :

(i) $n > 0$ எனில் $r = I\left[\frac{|(n+1)x|}{1+|x|}\right]$

(ii) $n < -1$ எனில் $r = I\left[\dfrac{|(n+1)x|}{1-|x|}\right]$

(iii) $-1 \leq n < 0$ எனில் $r = 0$.

சதுர அடைப்புக்குள்ளிருக்கும் எண் முழு எண்ணுனுல், T_r, T_{r+1} இரண்டும் சமமான மிகப் பெரிய உறுப்புகள்.

மாதிரி 7

$$a + \frac{b}{1+2x} + \frac{c}{1-3x^2} = 1 + x + 2x^2 + \ldots, \ (|x| < 1)$$

எனில் a, b, c ஐக் காண்.

$$a + \frac{b}{1+2x} + \frac{c}{1-3x^2} = a + b\,(1+2x)^{-1} + c\,(1-3x^2)^{-1}$$

$$= a + b\,(1 - 2x + 4x^2 + \ldots) + c\,(1 + 3x^2 + 9x^4 + \ldots)$$

$$= (a + b + c) - 2bx + (4b + 3c)\,x^2 + \ldots$$

$$= 1 + x + 2x^2 + \ldots \quad \text{(கொடுக்கப்பட்டது)}.$$

ஒத்த உறுப்புக்களை ஒப்பிட,

$$a + b + c = 1, \quad 2b = -1, \quad 4b + 3c = 2.$$

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{4}{3}.$$

மாதிரி 8

$$y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots$$

எனில், $x = \dfrac{y}{3} - \dfrac{1\cdot4}{3^2\cdot2!}\,y^2 + \dfrac{1\cdot4\cdot7}{3^3\cdot3!}\,y^3 - \ldots$ எனக் காட்டு.

$$y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots$$

$$\therefore \quad 1 + y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots$$

$$= (1 - x)^{-3}$$

$$\therefore \quad 1 - x = (1 + y)^{-1/3}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) y + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!} y^2$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!} y^3 + \ldots$$

$$\therefore \quad x = \frac{y}{3} - \frac{1\cdot4}{3^2\cdot2!} y^2 + \frac{1\cdot4\cdot7}{3^3\cdot3!} y^3 + \ldots$$

பயிற்சி 2—1

1. xன் ஏறுபடியில் விரித்து முதல் நான்கு உறுப்புக்களை எழுது.

xன் மீதான நிபந்தனையையும் எழுது.

(i) $(1 - x)^{1/2}$ (ii) $(1 - 3x)^{1/2}$

2. xன் ஏறுபடியிலும் இறங்குபடியிலும் முதல் நான்கு உறுப்புக்கள் வரை விரி. xன் மீதான கட்டுப்பாட்டையும் குறிப்பிடு.

(i) $(3 + 2x)^{-2}$ (ii) $(4a + 8x^2)^{-3/2}$

4. xன் ஏறுபடியில் விரித்தால் வரும் பொது உறுப்பு T_{r+1}ஐக் காண்.

(i) $(1 + 2x)^{\frac{5}{3}}$ (ii) $(a + x^2)^{-2}$

(iii) $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$ (iv) $(1 - x)^{-2} + 2(1 - 3x)^{-3}$

4. (i) $(x - 2x^2)^{-3}$ என்பதன் விரிப்பில் x^7ன் கெழு என்ன ?

(ii) $(1 + 2x + 3x^2 + \ldots)^{-\frac{3}{2}}$ என்பதன் விரிப்பில் x^5 ன் கெழு என்ன ?

(iii) $(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + 2x + 3x^2 + \ldots)$

$= \frac{1}{2}(1\cdot2 + 2\cdot3\,x + 3\cdot4\,x^2 + \ldots)$ எனக் காட்டு.

5. x மிகை எனில், xன் ஏறுபடியில் விரிக்கக் கிடைக்கும் முதல் குறையிருப்பு எது ?

(i) $(1 + x)^{\frac{17}{2}}$ (ii) $(5 + 3x)^{\frac{56}{5}}$

(iii) $(2 - 3x)^{\frac{6}{5}}$ (iv) $(2 + 5x)^{-2}$

(v) $(1 - x^2)^{-18}$ (vi) $\frac{11 - 13x}{(1 - x)^3}$

6. xன் ஏறுபடியில் விரிக்கக் கிடைக்கும் எண்ணளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பு எது ?

(i) $(1 + x)^{\frac{17}{3}}$, $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ (ii) $(1 - x)^{\frac{-3}{2}}$, $x = \frac{9}{10}$

(iii) $(1 + x)^{\frac{-5}{3}}$, $x = \frac{15}{17}$ (iv) $(1 - 2x)^{-7}$, $x = \frac{1}{5}$

(v) $(1 + 3x)^{\frac{-7}{8}}$, $x = \frac{1}{6}$ (vi) $(1 + 2x)^{-1}$, $x = -\frac{1}{3}$

7. $(1 - x)^{-\frac{3}{2}}$ என்பதன் விரிப்பில் 3வது உறுப்பு எண் அளவில் மிகப் பெரியதானால், xன் மதிப்பு எந்த வரம்புக்குள் இருக்க வேண்டும் ?

8. n ஒரு மிகை முழு எண்ணானால்,

(i) $(1 + x)^{2n}$ என்பதன் விரிப்பில் நடுவுறுப்பு $\frac{1\cdot3\cdot5 \ldots (2n - 1)}{n\,!}\, 2^n x^n$ எனக் காட்டு,

(ii) $(1 + x)^{2n}$ என்பதன் நடுவுறுப்பின் கெழு, $(1 + x)^{2n-1}$ என்பதன் இரு நடுவுறுப்புக்களின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனக் காட்டு.

9. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_r x^r + \dots$

எனில் $(r+1)\, a_{r+1} - 2n\, a_r - (r-1)\, a_{r-1} = 0$

எனக் காட்டு.

10. பின்வரும் கோவைகளை xன் ஏறுபடியில் விரித்து x^nன் கெழுவைக் காண். xன் மீதான நிபந்தனை என்ன ?

(i) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^2$

(ii) $(1 + 2x + x^2)\ (1 + 2x)^{-3}$

(iii) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^3$

(iv) $\frac{(3x-2)^n}{(1-x)^2}$, $n > 0$.

(v) $\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$

(vi) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$

(vii) $\frac{x-2}{(x+2)(x+1)^2}$

(viii) $\frac{3x^2 - 10x + 14}{(x+1)(x-2)^3}$

11. (i) $\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ என்பதன் விரிப்பில் x^{2n-1}ன் கெழு $\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)$ எனக் காட்டு. xன் மீதான கட்டுப்பாடு என்ன ?

(ii) $n = 4m, 4m+1$ (m முழுவெண்) என்ற வடிவத்தில் இருந்தால் $\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$ என்பதன் விரிப்பில் x^nன் கெழு முறையே, $1, -1$ என்றும், nன் மற்ற வடிவங்களுக்கு x^n-ன் கெழு பூச்சியம் எனவும் காட்டு.

(iii) $n = 3m,\ 3m+1, 3m+2$ (m முழுவெண்) என்ற வடிவத்தில் இருந்தால் $\frac{1+2x}{1-x+x^2}$ என்பதில் x^n ன் கெழு முறையே $(-1)^{\frac{n}{3}},\ 3(-1)^{\frac{n-1}{3}},\ 2(-1)^{\frac{n-2}{3}}$ எனக்காட்டு.

(iv) $\dfrac{8-2x}{(x+2)(x^3+8)}$ என்பதன் விரிப்பில் x^nன் கெழு என்ன ?

12. (i) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ எனில்

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1.3}{2^2.2\,!}y^2 + \frac{1.3.5}{2^3.\,3\,!}y^3 - \frac{1.3.5.7}{2^4.\,4\,!}y^4 + \ldots$$

எனக் காட்டு :

(ii) $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$ எனில்

$$x = y + y^2 + y^3 + y^4$$

எனக் காட்டு.

13. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் $a, b, c, \ldots$ ஐக் காண்.

(i) $\dfrac{a+bx}{(1-x)(2+3x)^2} = 1 + x + \ldots$

(ii) $\dfrac{1+cx}{1+ax+bx^2} = 1 - 6x + 20x^2 - 56x^3 + \ldots$

(iii) $\dfrac{a+bx+cx+dx^3}{(1-x)^4} = \sum_{1}^{\infty} n^3 x^3$

(iv) $\dfrac{a}{(1-x)^2} + \dfrac{b}{(2+3x)^2} = 1 + x + \ldots + cx^n + \ldots$

(v) $\dfrac{a+bx}{(1-x)^2} = a + \ldots + (2n+1)x^n + \ldots \ldots$

விடைகள் 2.1

1. (i) $1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + \ldots, \quad |x| < 1.$

(ii) $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{27}{8}x^2 + \dfrac{135}{16}x^3 + \ldots, \quad |x| < \dfrac{1}{3}$

2. (i) (a) $\dfrac{1}{9} - \dfrac{4}{27}x + \dfrac{4}{27}x^2 - \dfrac{32}{243}x^3 + \ldots, \quad |x| < \dfrac{3}{2}$;

(b) $\frac{1}{4x^2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{27}{4x^2}-\frac{27}{2x^3}+\ldots\right)$, $|x|>\frac{3}{2}$.

(ii) (a) $\frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}x^2a^{-\frac{5}{2}}+\frac{15}{16}x^4a^{-\frac{7}{2}}$

$-\frac{35}{16}x^6a^{-\frac{9}{2}}+\ldots$, $|x|<\frac{a}{2}$;

(b) $\frac{1}{16\sqrt{2x^8}}\left(1-\frac{3a}{4x^2}+\frac{15a^2}{32x^4}-\frac{35a^3}{128x^6}+\ldots\right)$

$|x|>\frac{a}{2}$.

3. (i) $\frac{5.2.1.4.7\ldots(3r-8)}{r!}\left(\frac{2}{3}\right)^r$.

(ii) $(-1)^r(r+1)\,a^{-(r+2)}\,x^r$.

(iii) $\frac{(2r)!}{(r!)^2}x^r$.

(iv) $(r+1)\,[1+3^r(r+2)]\,x^r$.

4. (i) 67584.

(ii) 21.

5. (i) 10 ஆவது உறுப்பு (ii) 13 ஆவது உறுப்பு

(iii) 2 ஆவது உறுப்பு (iv) 2 ஆவது உறுப்பு

(v) 2 ஆவது உறுப்பு (vi) 11 ஆவது உறுப்பு.

6. (i) 3 ஆவது உறுப்பு (ii) 5 ஆவது உறுப்பு

(iii) 5 ஆவது, 6ஆவது உறுப்புக்கள்

(iv) 4 ஆவது, 5 ஆவது உறுப்புக்கள்.

(v) முதல் உறுப்பு (vi) முதல் உறுப்பு

7. $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{7}$.

10. (i) $\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3), \ |x| < 1$

(ii) $(-1)^n (n^2 + 7n + 8)\ 2^{n-3}, \ |x| < \frac{1}{2}$

(iii) $(2n^2 + 2n + 1)\ a^{-(n+1)}, \ |x| < |a|$

(iv) $1 - 2n$

(v) $\frac{1}{3}\left[11 + (-1)^{n-1}\ 2^{-(n-1)}\right], \ |x| < 1$

(vi) $\frac{1}{2}\left(1 - 2^{n+3} + 3^{n+2}\right), \ |x| < \frac{1}{3}$

(vii) $(-1)^n \left(1 - 3n - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \ |x| < 1$

(viii) $-\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+3}} - \frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n, \ |x| < 1$

11. (i) $|x| < 1$.

13. (ii) $a = 4, b = 12$; (ii) $a = 4 = b, c = -2$;

(iii) $a = 0, b = 1, c = 4, d = 1$;

(iv) $a = \frac{4}{3} = b, \quad c = \frac{1}{5}. \ \frac{(n+1)}{2^n}[4 + (-1)^n 3^n$.

(v) $a = 1 = b$.

2·9 தொடர் கூட்டல் (Summation of Series)

சில முடிவுறு (infinite) தொடர்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணப் பின்வரும் ஈருறுப்பு விரிப்புப் பயன்படும் :

$$(1 - x)^{-\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{1}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p+q)(p+2q)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots$$

$$+ \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+\overline{r-1}q)}{1\cdot 2\cdot 3\dots r}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \dots, \ |x| < 1.$$

இந்த ஈருறுப்புத் தொடரில்

(i) உறுப்புக்கள் $\binom{x}{p}$ வின் அடுக்குகளின் அமைந்தவை,

(ii) பொது உறுப்பின் தொகுதியின் காரணிகள் கூட்டுத் தொடரில் (Arithmetic Progression) அமைந்தவை,

(iii) பொது உறுப்பின் பகுதி, $r!$ அல்லது, $k \cdot 2k \cdot 3k \ldots rk$ என்ற வடிவத்தில் இருக்க, அதன் தொகுதியில் r காரணிகள் இருக்கின்றன ; $\frac{x}{q}$ வின் படியும் r

—என்பவை கவனிக்கத் தக்கவை.

ஈருறுப்புத் தொடரைக் கூட்டும் முறையைப் பின்வரும் மாதிரிகள் விளக்கும்.

மாதிரி 9

$$\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^n = 1 + n\left(\frac{x}{1+2x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2 + \ldots$$

எனக் காட்டு.

வலப்பக்கத்து முடிவறு தொடரை

$$(1-X)^{-\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{1!}\left(\frac{X}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{X}{q}\right)^2 + \ldots\ldots$$

என்ற சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்து முடிவறு தொடருடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பவை

$$p = n,\ q = 1,\ \frac{X}{q} = \frac{x}{1+2x}\ ; \quad \therefore \quad X = \frac{x}{1+2x}.$$

எனவே, தரப்பட்ட தொடர்

$$= (1-X)^{-\frac{p}{q}}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{1+2x}\right)^{-n} = \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{-n} = \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^n.$$

மாதிரி 10

முடிவிலிக்குக் கூட்டு.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot4}{4\cdot8} + \frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12} + \ldots \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

இத் தொடரை,

$$1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1\cdot4}{1\cdot2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot4\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$$ என மாற்றி

எழுதி,

$$(1-x)^{-\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{1\cdot2}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\ldots$$

என்பதன் வலப்பக்கத் தொடருடன் ஒப்பிட,

$$p=1,\ q=3,\ \frac{x}{q}=\frac{1}{4};\quad\therefore\ x=\frac{3}{4}.$$

எனவே, தொடரின் கூட்டல்

$$=(1-x)^{-\frac{p}{q}}=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}.$$

மாதிரி 11

முடிவிலிக்குக் கூட்டு.

$$2\cdot\frac{1}{7^2}-\frac{2\cdot5}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{7^4}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{7^6}-\ldots$$

கூட்டுத் தொகையை S என்போம். தொடரைக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$S=-\frac{2}{1}\left(-\frac{1}{7^2}\right)-\frac{2\cdot5}{1\cdot2}\left(-\frac{1}{7^2}\right)^2-\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\left(-\frac{1}{7^2}\right)^3+\ldots$$

$$-S=\frac{2}{1}\left(-\frac{1}{49}\right)+\frac{2\cdot5}{1\cdot2}\left(-\frac{1}{49}\right)^2+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\left(-\frac{1}{49}\right)^3+\ldots$$

$$\therefore \quad 1 - S = 1 + \frac{2}{1}\left(-\frac{1}{49}\right) + \frac{2\cdot5}{1\cdot2}\left(-\frac{1}{49}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\right)\left(-\frac{1}{49}\right)^3 + \ldots$$

இதை, $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ என்பதன் விரிப்புடன் ஒப்பிட,

$p = 2,\ q = 3,\ \frac{x}{q} = -\frac{1}{49}; \quad \therefore \ = -\frac{3}{49}.$

$$\therefore \quad 1 - S = (1-x)^{-\frac{p}{q}} = \left(1 + \frac{3}{49}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{52}{59}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{49}{52}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad S = 1 - \left(\frac{49}{52}\right)^{\frac{2}{3}}$$

மாதிரி 12

$\frac{15}{16} + \frac{15\cdot21}{16\cdot24} + \frac{15\cdot21\cdot27}{16\cdot24\cdot32} + \ldots = \frac{47}{9}$ எனக் காட்டு.

கொடுத்த தொடரின் மூன்றுவது உறுப்பை

$$\frac{15\cdot21\cdot27}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

என எழுதலாம். பகுதியை 4! என எழுதலாம். அப்பொழுது தொகுதியின் காரணிகள், கூட்டுத் தொடரில் அமைந்த நான்கு எண்களாக இருக்கவேண்டும். தற்பொழுது மூன்று எண்களே இருப்பதால், அந்த நான்காம் எண் 9 அல்லது 33 ஆக இருக்க வேண்டும். இவற்றில் 33 ஐ எல்லா உறுப்புக்களுக்கும் தேவையான பொதுக்கூடுதல் காரணியாகக் கொள்ளமுடியாது. ஆனால் 9 ஐ அப்படிக் கொள்ளலாம். மேலும் $\frac{1}{8}$ இன் படியும் 4 ஆக இருக்கவேண்டும். ஆகவே $\frac{1}{8}$ ஆலும் தொடரைப் பெருக்கவேண்டும். கொடுத்த தொடர் S எனில்,

$$9 \times \frac{1}{8} S = \frac{9 \cdot 15}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{9 \cdot 15 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots$$ தொடரில்

$1 + \frac{9}{1}\left(\frac{1}{8}\right)$ என்ற உறுப்புக்கள் இல்லாததால், அவற்றை இரு புறமும் கூட்ட,

$$1 + \frac{9}{1}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{9}{8} S = 1 + \frac{9}{1}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{9 \cdot 15}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{9 \cdot 15 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots$$

இதை, $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ இன் விரிப்புடன் ஒப்பிட,

$$p = 9,\ q = 6,\ \frac{x}{q} = \frac{1}{8};\ \therefore\ = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore\ 1 + \frac{9}{8} + \frac{9}{8} S = (1-x)^{-\frac{p}{q}} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-\frac{9}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8.$$

$$\therefore\ \frac{9}{8} S = 8 - \frac{17}{8} = \frac{47}{8}$$

$$\therefore\ S = \frac{47}{9}.$$

மாதிரி 13

n ஒரு மிகை முழுவெண் எனில், நிறுவுக :

$$1 - n\frac{(1+x)}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{(1+2x)}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-1)}{3!}\frac{(1+3x)}{(1+nx)^3} + \ldots = 0.$$

இத் தொடரின் முதல் உறுப்பு நீங்கலாக மற்ற ஒவ்வொரு உறுப்பையும் இரண்டாகப் பிரித்து, தொடரைப் பின்வரும் இரு தொடர்களின் கூடுதலாக எழுதலாம் :

$$S_1 = 1 - \frac{n}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^3 + \dots ;$$

$$S_2 = -\frac{nx}{1+nx}\left[1 - \frac{n-1}{1!}\cdot\frac{1}{1+nx} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^2 + \dots\right]$$

$$\therefore\ S_1 = \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^n = \left(\frac{nx}{1+nx}\right)^n,$$

$$S_2 = -\frac{nx}{1+nx}\left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^{n-1} = -\left(\frac{nx}{1+nx}\right)^n$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூடுதல்

$$= S_1 + S_2 = 0.$$

ஒரு கோவையை இரு முறைகளில் விரித்தும் கொடுத்த தொடரைக் கூட்டலாம்.

மாதிரி 14 :

n ஒரு மிகை முழுவெண் எனில், $\frac{[2-(1-x)]^n}{(1-n^3)}$ என்பதை இரு விதங்களில் விரித்து x^n ன் கெழுவிலிருந்து பின்வருமாறு காட்டு

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[1\cdot 2 + 2\cdot 3\,\frac{n}{1!} + 3\cdot 4\,\frac{n(n-1)}{2!} + 4\cdot 5\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots\right] = 2^{n-3}(n^2+7n+8)$$

$$\frac{[2-(1-x)]^n}{(1-x)^3} = (1+x)^n(1-x)^{-3}$$

$$= \left[1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots nx^{n-1} + x^n\right]$$

$$\times \frac{1}{1\cdot 2}\left[1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \dots + (n+1)(n+2)x^n + \dots\right]$$

இதில் x^n ன் கெழு

$$= \frac{1}{1\cdot 2}\left[1\cdot 2+2\cdot 3\frac{n}{1!}+3\cdot 4\frac{n(n-1)}{2!}+4\cdot 5\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\dots\right]$$

இதே கோவையைப் பின்வருமாறும் விரிக்கலாம் :

$$\frac{[2-(1-x)]^n}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^3}\left[2^n-n\cdot 2^{n-1}(1-x)\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}2^{n-2}(1-x)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}2^{n-3}(1-x)^3$$

$$\left.+\dots+(-1)^n(1-x)^n\right]$$

$$=2^n(1-x)^{-3}-2^{n-1}\cdot n\,(1-x)^{-2}$$

$$+2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2!}(1-x)^{-1}-2^{n-3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$+2^{n-4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(1-x)+\dots$$

$$+(-1)^n(1-x)^{n-3}.$$

இதில் x^n-ன் கெழு

$$=2^n\cdot\frac{1}{2!}(n+1)(n+2)-2^{n-1}n(n+1)$$

$$+2^{n-2}\cdot\frac{1}{2!}n(n-1)$$

$$=2^{n-3}[4(n+1)(n+2)-4n(n+1)+n(n-1)]$$

$$=2^{n-3}(n^2+7n+8)$$

இரு வகைகளிலும் கிடைத்த x^nன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த, விடை கிடைக்கிறது.

2·10 தேற்றம் :

$f(x)$ என்பது, $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a^n x^n+\dots$ என்ற அறவொருங்கு தொடர் எனில், $a_0+a_1+a_2+\dots a^n$ என்பது $\frac{f(x)}{1-x}$ என்பதன் விரிப்பில் கிடைக்கும் x^nன் கெழு.

இது எவ்வாறெனில்

$$\frac{f(x)}{1-x} = (a_0 + a_1x + a_2 x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)$$

இவ்விரு தொடர்களும் அறவொருங்குவதால் இவற்றைப் பெருக்கலாம். கிடைக்கும் தொடரில் x^n-ன் கெழு. $a_0+a_1+a_2 + \dots + a^n$

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் சில தொடர்களைக் கூட்டலாம்.

மாதிரி 15.

$(1 - x)^{-n}$ என்பதன் விரிப்பைக் கொண்டு பின்வருமாறு காட்டு. $1 + n + \frac{n(n+1)}{2!} + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}{r!}.$$

இடப்பக்கத் தொடர், $(1-n)^{-n}$ என்பதன் விரிப்பில் கிடைக்கும் முதல் n கெழுக்களின் கூடுதல். மேலே கண்ட தேற்றத்தின் படி, இது $\frac{(1-x)^{-n}}{1-x}$ -ன் விரிப்பில், அதாவது $(1-x)^{-(n+1)}$ என்பதன் விரிப்பில் x^nன் கெழுவுக்குச் சமம். இக்கெழு வலப் பக்க உறுப்பாகும். எனவே விடை தெளிவு.

மற்ளுரு மாதிரிக்கு, மாதிரி 3 ஐ மீண்டும் பார்க்க.

பயிற்சி 2—2.

பின் வருவனவற்றை [1—9] நிறுவுக.

1. $(1 - x)^{-n} = \frac{1}{2^n} \left\{ 1 + n\frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \dots \right\}$

2. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n 1 + n\left(\frac{2x}{1+x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 + \dots$

3. $x^n = 1 + n\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right) + \dots$

4. $(a-b)^n = a^n \left\{ 1 - n\left(\frac{b}{a-b}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 + \ldots \right\}$

5. n ஒரு மிகை முழுவெண் எனில்,

$$1 - \frac{n+x}{1+x} + \frac{(n+2x)(n-1)}{2!(1+x)^2} - \frac{(n+3x)(n-1)(n-2)}{3!(1+x)^3} + \ldots\ldots = 0$$

6. $(1+x)^{2n} = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2(1+x)^{n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3(1+x)^{n-3} + \ldots$

7. $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ldots,\ x > -\frac{1}{2}$

8. $1 + n.\frac{2y}{x+y} + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x+y}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{2y}{x+y}\right)^3 + \ldots\ )$

$= 1 + n.\frac{2y}{x-y} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x-y}\right)^2 + \ldots,\ |y| < \frac{|x|}{3}$

9. $a^2b^2 = (a+b)^4\left[\frac{a^2}{b^2} - \frac{4}{1}\cdot\frac{a^3}{b^3} + \frac{4.5}{1.2}\cdot - \frac{a^4}{b^4} - \frac{4.5.6}{1.2.3}\cdot\frac{a^5}{a^5} + \ldots\right]$

முடிவிலி வரை கூட்டுக [10—22]

10. $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \ldots$

11. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \dots$

12. $1 + \frac{5}{8} + \frac{5.8}{8.12} + \frac{5.8.11}{8.12.16} + \dots$

13. $1 - \frac{4}{10} + \frac{4.7}{10.15} - \frac{4.7.10}{10.15.20} + \dots$

14. $\frac{2.5}{7} + \frac{2.5.8}{7.14} + \frac{2.5.8.11}{7.14.21} + \dots$

15. $\frac{1}{4} + \frac{1.5}{4.8} + \frac{1.5.7}{4.8.12} + \frac{1.5.7.9}{4.8.12.16} + \dots$

16. $\frac{5}{3.6} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5.8}{3.6.9} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{5.8.11}{3.6.9.12} \cdot \frac{1}{4^4} + \dots$

17. $\frac{3}{2\cdot4} + \frac{3\cdot4}{2\cdot4\cdot6} + \frac{3\cdot4\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \dots$

18. $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3\cdot5}{2\cdot3} \cdot \frac{1}{2^8} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot3\cdot4} \cdot \frac{1}{2^{11}} + \dots$

19. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2\cdot4} \cdot \frac{1}{2^8} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} \cdot \frac{1}{2^{12}}$

$- \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} \cdot \frac{1}{2^{16}} + \dots$

20. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7 \dots (3n-2)}{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$$

21. $$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5 \dots (2n-1)}{2\cdot4\cdot6 \dots (2n)} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

22. $x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{3\cdot4} x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot4\cdot5} x^5 + \dots, \ |x| < \frac{1}{2}.$

நிறுவுக [23, 24]

23. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot4}{4\cdot8} + \frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12} + \dots = 1 + \frac{2}{6} + \frac{2\cdot5}{6\cdot12} + \frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18} + \dots$

24. $1 + \frac{3}{8} + \frac{3\cdot5}{8\cdot10} + \frac{3\cdot5\cdot7}{8\cdot10\cdot12} + \dots = 2\left[\frac{1}{4} + \frac{1\cdot3}{4\cdot6} + \frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8} + \dots\right]$

25. $y = \frac{1}{3} + \frac{1\cdot3}{3\cdot6} + \frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}$ எனில்

$$y^2 + 2y - 2 = 0$$

எனக் காட்டு.

26. $\frac{1}{1 - 2x + x^2}$ என்பதை, $[1 - x(2 - x)]^{-1}$, $(1-x)^{-2}$ என இருவகைகளில் எழுதி விரித்து, n மிகை முழுவெண் எனில்,

$$2^n - \frac{n-1}{1!}2^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}2^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-6} + \dots = n + 1$$

எனக் காட்டு.

27. $\frac{1}{1 - 2x - 3x^2}$ என்பதன் இருவகை விரிப்புக்களிலிருந்து

$$2^n + (n-1)\cdot 3\cdot2^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}3^2\cdot2^{n-4} + \dots\dots = \frac{1}{4}[3^{n+1} + (-1)^n]$$

எனக் காட்டு. (n மிகை முழுவெண்).

28. $\frac{1}{1 - x - 6x^2}$ என்பதைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்துப் பின்வருமாறு நிறுவுக :

$$1 + (n-1)\cdot6 + \frac{(n-2)(n-3)}{3!}\cdot6^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}\cdot6^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{5}[3^{n+1} + (-1)^{n+1}\cdot2^{n+1}]$$

29. $(1-x)^{-\frac{1}{4}}$ ன் விரிப்பிலிருந்து காட்டுக :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1\cdot4}{4\cdot8}+\frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\ldots\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots(3n-2)}{4\cdot8\cdot12\ldots(4n)}$$

$$=\frac{5\cdot9\cdot13\ldots(4n-1)}{4\cdot8\cdot12\ldots(4n)}.$$

விடைகள் 2—2

10. $2\sqrt{2}$

11. $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

12. $4\sqrt[3]{2}-2$

13. $5\left(1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}\right)$

14. $2\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{5}{3}}-1\right]$

15. $\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}$

16. $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{7}{6}\right]$

17. 1

18. $\frac{16-9\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$

19. $\frac{\sqrt{17}}{4}$

20. $4^{\frac{1}{3}}-1$

21. $\sqrt{\frac{2}{3}}-1$

2·11 தோராயங்கள் (Approximations)

x மிகச் சிறிய எண் எனில், n அதிகரிக்க அதிகரிக்க, x^n-ன் மதிப்புக் குறைந்துகொண்டே வரும். இந்நிலையில் $(1+x)^n$-ன் தோராய மதிப்புக் கிடைக்கவேண்டுமானால், அதை x-ன் ஏறுபடியில் விரித்து x-ன் பெரிய அடுக்குகளை விட்டுவிடலாம்.

x மிகப் பெரிய எண் எனில், $\frac{1}{x}$ மிகச் சிறியது ; n அதிகரிக்க அதிகரிக்க, $\frac{1}{x^n}$-ன் மதிப்புக் குறைந்துகொண்டே வரும். இந்நிலையில் $(1 + x)^n$-ன் தோராய மதிப்புக்கு, இதை x-ன் இறங்கு படியில் — அதாவது, $\frac{1}{x}$-ன் ஏறுபடியில்—விரித்து $\frac{1}{x}$-ன் பெரிய அடுக்குகளை விட்டுவிடலாம்.

எந்த அடுக்குக்குமேல் விடலாம் என்பது தேவையான தோராயத்தைப் பொருத்தது.

மாதிரி 16 : x-ன் முதல் அடுக்குக்கு மேற்பட்ட உறுப்புக்களை விடுமளவுக்கு x சிறியது எனில், பின்வரும் கோவையின் தோராய மதிப்பைக் காண் :

$$\frac{(4 - 3x)^{\frac{1}{2}}\ (8 + 3x)^{\frac{1}{3}}}{\left(9 - \frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

x சிறியது என்பதால் x-ன் ஏறுபடியில் விரிக்கவேண்டும். மேலும். ஒவ்வொரு ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிப்பிலும். விரிப்புக்களின் பெருக்கலிலும் முதல் அடுக்குக்கு மேற்பட்ட x-ன் அடுக்குகளை விட்டுவிடவேண்டும்:

$$(4 - 3x)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{3x}{4}\right) + \ldots\ldots\right]$$

$$= 2\left(1 - \frac{3x}{8} + \ldots\ldots\right)$$

எனவே, $(4 - 3x)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{3x}{8}\right)$, தோராயமாக.

இத்தோராயச் சமன்பாட்டை

$$(4-3x)^{\frac{1}{2}} \simeq 2\left(1-\frac{3x}{8}\right)$$

எனக் குறிப்போம். இதேபோல்,

$$(8+3x)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{8}\right)+\ldots\ldots\right] \simeq 2\left(1+\frac{x}{8}\right),$$

$$\left(9-\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} = 27\left(1+\frac{2x}{27}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 27\left[1+\frac{3}{2}\left(-\frac{2x}{27}\right)+\ldots\ldots\right] \simeq 27\left(1-\frac{x}{9}\right).$$

ஆகவே,

$$\frac{(4-3x)^{\frac{1}{2}}(8+3x)^{\frac{1}{3}}}{\left(9-\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{2\left(1-\frac{3x}{8}\right)\cdot 2\left(1+\frac{x}{8}\right)}{27\left(1-\frac{x}{9}\right)}$$

$$= \frac{4\left[1+\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\right)x+\ldots\ldots\right]}{27\left(1-\frac{x}{9}\right)}$$

$$\simeq \frac{4}{27}\left(1-\frac{x}{4}\right)\left(1-\frac{x}{9}\right)^{-1}$$

$$\sim \frac{4}{27}\left(1-\frac{x}{9}\right)\left(1+\frac{x}{9}\right)$$

$$\simeq \frac{4}{27}\left[1+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)x\right]$$

$$= \frac{4}{27}\left(1-\frac{5x}{36}\right)$$

எனவே,

$$\frac{(4-3x)^{\frac{1}{2}}(8+3x)^{\frac{1}{3}}}{\left(9-\frac{2}{3}x\right)^{3/2}} \simeq \frac{4}{27}\left(1-\frac{5x}{36}\right).$$

மாதிரி 18

$a-b=h$, h மிகச் சிறியது (இதை, $h<<1$ எனவும், குறிப்பதுண்டு) எனில்,

(i) $$\sqrt{\frac{a}{b}} = 1+\frac{1}{2}\frac{h}{b}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{b^2}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{b^3}-\frac{5}{128}\frac{h^4}{b^4} + \ldots\ldots$$

(ii) $$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{h}{b}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{b^2}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{b^3}-\frac{1}{32}\frac{h^4}{b^4} + \ldots\ldots$$

எனக் காட்டு. (iii) இவற்றிலிருந்து, தோராயமாக

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{a+b}+\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{b}$$

எனவும் காட்டு.

(i) வலப்புறத் தொடர் $\frac{h}{b}$-யில் ஒரு விரிப்பு. a, b, h-ல். h மட்டும் தான் மிகச் சிறியது என்பதால், $\frac{h}{b}$-யும் மிகச் சிறியது $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ஐ $\frac{h}{b}$-ல் விரிக்கவேண்டும்.

$a - b = h$ என்பதால், $a = b + h$. எனவே,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b+h}{b}} = \left(1 + \frac{h}{b}\right)^{2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{h}{b} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^{2}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{h}{b}\right)^{3}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{h}{b}\right)^{4} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{h}{b} - \frac{1}{8}\,\frac{h^2}{b^2} + \frac{1}{16}\,\frac{h^3}{b^3} - \frac{5}{128}\,\frac{h^4}{b^4} + \cdots\cdots \quad (1)$$

(ii) இதேபோல, $a = b + h$ என இட,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b+h}{2b+h} = 1 - \frac{b}{2b+h} = 1 - \frac{1}{2+\frac{h}{b}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\left(1+\frac{h}{2b}\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{2b}\right)^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{h}{2b} + \left(\frac{h}{2b}\right)^{2} - \left(\frac{h}{2b}\right)^{3} + \left(\frac{h}{2b}\right)^{4} - \cdots\cdots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{h}{b} - \frac{1}{8}\,\frac{h^2}{b^2} + \frac{1}{16}\,\frac{h^3}{b^3} - \frac{1}{32}\,\frac{h^4}{b^4} + \cdots\cdots \quad (2)$$

(iii) சமன்பாடு (1)-லிருந்து (2)-ஐக் கழிக்க,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{h}{b} - \frac{1}{128}\frac{h^4}{b^4} + \ldots\ldots \quad (3)$$

இனி, $\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{b} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2b+h}{b} = \frac{1}{4}\left(2+\frac{h}{b}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{h}{b}. \quad (4)$$

ச-டு (3) ல் $\frac{h^4}{b^4}$ ஐ மிகச் சிறியது என ஒதுக்கிவிட்டால், ச-டு (3), (4) லிருந்து, தோராயமாக,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{a}{a+b} = \frac{1}{4}\frac{a+b}{b}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{a+b} + \frac{1}{4}\frac{a+b}{b} \text{ தோராயமாக.}$$

மாதிரி 19

ஐந்து பதின் பகுப்பு இடங்களுக்குச் (decimals) சரியாகக் காண் : $998.^{1/3}$.

$$998^{1/3} = (10^3-2)^{1/3} = 10\,(1 - \cdot 002)^{1/3}$$

$$= 10\left[1 - \frac{\cdot 002}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2\,!}(\cdot 002)^2 + \ldots\right]$$

$$= 10\,[1 - \cdot 000667 - \cdot 0000004 + \ldots]$$

$$= 10 - \cdot 00667,$$

$$= 9{\cdot}99333,$$

(5 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குச் சரியாக).

2·12 எல்லைகள் (Limits)

x ன் ஒரு சார்பில் நேரடியாக x க்குச் சில மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டால், அச் சார்பின் மதிப்புத் தெளிவற்றதாகிவிடலாம். அப்பொழுது சார்பு, தேரா மதிப்பு (Indeterminate value) உடையது என்கிறோம். அந்நிலையில் சார்பின் மதிப்பைத்

தெளிவாக அறியச் சில முறைகள் உண்டு. கிடைக்கும் மதிப்பை, சார்பின் மதிப்பு என்னுமல், சார்பின் எல்லை மதிப்பு (limiting value) என்போம்.

சார்புகளின் தேரா வடிவங்கள், எல்லைகள், எல்லைகளைக் காணும் முறைகள் ஆகியவை, 'சார்புகளும் எல்லைகளும்' என்ற பிரிவில் விளக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றை ஒரு முறை படித்துக்கொண்டு, பிறகு மேலே தொடர்வது நலம்.

இங்கு, ஈருறுப்பு விரிப்புக்களைப் பயன்படுத்திச் சில சார்பு களின் எல்லைகளைக் காணும் முறை ஒரு மாதிரியால் விளக்கப் படுகிறது.

மாதிரி 20

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$

$x = 1 + y$ என இடு. $x \to 1$ எனில், $y \to 0$. காண வேண்டிய எல்லை, பின்வருமாறு மாறுகிறது.

$$\underset{y \to 0}{Lt} \frac{(1+y)^{\frac{1}{5}} - (1+y)^{\frac{1}{6}}}{(1+y)^{\frac{1}{2}} - (1+y)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{\left[1 + \frac{1}{5}y + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{1 \cdot 2} y^2 + \dots\right] - \left[1 + \frac{1}{6}y + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6} - 1\right)}{1 \cdot 2} y^2 + \dots\right]}{\left[1 + \frac{1}{2}y + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} y^2 + \dots\right] - \left[1 + \frac{1}{4}y + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{1 \cdot 3} y^2 + \dots\right]}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) y - \left(\frac{2}{25} + \frac{5}{72}\right) y^2 + \ldots}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) y - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{32}\right) y^2 + \ldots}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{y \left[\frac{1}{30} - y\text{-ன் மிகை அடுக்குகள்}\right]}{y \left[\frac{1}{4} - y\text{-ன் மிகை அடுக்குகள்}\right]}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{\frac{1}{30} - y\text{-ன் மிகை அடுக்குகள்}}{\frac{1}{4} - y\text{-ன் மிகை அடுக்குகள்}}$$

$$= \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{15}.$$

$\therefore$ எல்லை மதிப்பு $= \frac{2}{15}$.

பயிற்சி 2—3

x சிறியது ; அதன் முதல் அடுக்குக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை விட்டுவிடலாம் எனில், பின்வரும் தோராயச் சமன்பாடுகளைப் பெறுக. [1 — 5].

1. $\dfrac{(1-x)^{\frac{2}{3}} (8+x)^{\frac{1}{3}}}{1 + x + (1-3x)^{\frac{1}{2}}} \simeq 1 - \dfrac{3x}{8}$

2. $\dfrac{(2+3x)^{\frac{2}{3}} (1-4x)^{-\frac{1}{4}}}{(4+15x)^{\frac{1}{3}}} \simeq 1 + \dfrac{3x}{4}$

3. $$\frac{(1+2x)^{-\frac{4}{3}} + (4-3x)^{\frac{3}{2}}}{(27-x)^{\frac{2}{3}}} \simeq 1 - \frac{299}{648}\, x$$

4. $$\frac{(8+3x)^{\frac{2}{3}}}{(2+3x)\sqrt{4-5x}} \simeq 1 - \frac{5x}{8}$$

5. $$\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} = 4 + 2x.$$

x-ன் இரண்டாம் அடுக்குக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை விடும் அளவுக்கு x சிறியது எனில் பின்வருமாறு காட்டு. [6 — 9].

6. $$\frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}} + (1-3x)^{-\frac{1}{4}}}{(1-2x)^{\frac{1}{4}}} \sim 2 - \frac{x^2}{2}$$

7. $$(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}} \simeq 1 + \frac{13}{6}x + \frac{55}{72}x^2.$$

8. $$\frac{(1-x)^{-\frac{5}{2}} + (16+8x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{-\frac{1}{2}} + (2-x)^2} \simeq 1 + \frac{23}{40}x^2$$

9. $$\frac{(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + (1-4x)^{-\frac{3}{4}}}{(1-3x)^{-\frac{1}{3}} + (1-4x)^{-\frac{1}{4}}} \simeq 1 + \frac{3x}{2} + 4x^2.$$

$x << 1$ எனில், பின்வருமாறு காட்டுக : [10 — 13]

10. $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} \simeq 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{22}{81}x^3$

11. $\frac{(1+x+x^2)(1+x)^2}{1-x+x^2} \simeq 1 + 4x + 7x^2 + 6x^3$

12. $(1+x+x^2+x^3)^{\frac{1}{3}} \sim 1 + \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{14x^3}{81} - \frac{46x^4}{243}$

13. $(1+4x+10x^2)^{\frac{-1}{2}} \simeq 1 - 2x + x^2 - 10x^3$

$x > 1$ எனில் காட்டுக : [14 — 16].

14. $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} \simeq \frac{3}{2x} - \frac{15}{8x^3} + \frac{6^3}{16x^5}$

15. $\sqrt[3]{x^3+6} - \sqrt[3]{x^3+} \quad \simeq \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}$

16. $\frac{x\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^2} \simeq 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} - \frac{13}{2x^3}$.

17. x சிறியதானல், $\left(\frac{2+x}{4} + \frac{1+x}{2+x}\right)$ என்பதை, $\sqrt{1+x}$ எனக் கொள்வதால் ஏற்படும் பிழை தோராயமாக $\frac{x^4}{27}$ எனக் காட்டு.

18. x சிறியதானல், $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ என்பதை, $\left(\frac{1-nx}{1+nx}\right)$ எனக் கொள்வதால் ஏற்படும் பிழை தோராயமாக $\frac{2}{3}n(n^2-1)x^3$ எனக் காட்டு.

19. $c < < l$ எனில், தோராயமாக,

$$\left(\frac{l}{l+c}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3c^2}{4l^2}$$ எனக் காட்டு.

20. $z << d$ எனில், தோராயமாக

$$\sqrt{2gz}\left[1-\left(\frac{d}{d+z}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{gd} \text{ எனக் காட்டு.}$$

21. $x << 1$, $n < 1$ எனில், இரு பக்கங்களையும் விரித்து, தோராயமாக

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = \frac{2n+(n+1)x}{2n+(n-1)n} \quad \text{எனக் காட்டு.}$$

22. $x << l$, $M = l^2 + x$ எனில், தோராயமாக

$$\sqrt{M} = \frac{3l}{8} + \frac{3M}{4l} - \frac{M^2}{8l^3} \text{ எனக் காட்டு.}$$

23. தோராயமாக $(b^5 + a)^{\frac{1}{5}}\left[1 + \frac{a}{5b^5} - \frac{2a^2}{25b^{10}} + \frac{4a^3}{125b^{15}}\right]$, $(b >> a)$, எனக் காட்டு. அதிலிருந்து,

$(b^5 + a)^{\frac{1}{5}}$ என்பதன் ஒரு மதிப்பு $b\left[\frac{5b^5 + 3a}{5b^5 + 2a}\right]$ எனக் காட்டு.

24. x-ன் மதிப்பு தோராயமாக 1 எனில்,

(i) $px^q - qx^p \sim x^{p+q}$,

(ii) $\frac{px^q - qx^p}{x^q - x^p} \simeq (1-x)^{-1}$ எனக் காட்டு.

25. L, G-ன் மதிப்புக்கள், l, g-ன் மதிப்புகளிலிருந்து சற்றே தோராயமாக வேறுபட்டு, $t\sqrt{\frac{9}{l}} = T\sqrt{\frac{G}{L}}$ எனில்

தோயாரமாக $\frac{T-t}{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{L-l}{L} - \frac{G-g}{G}\right]$ எனக் காட்டுக.

26. l செ.மீ. நீளமுள்ள தனி ஊசலின் அலைவுநேரம் $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ செக; நீளம் a மி.மீ. மிகுந்தால், அலைவு நேரம் $\frac{t}{20}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{40l^2}\right)$ செக. அதிகரிக்கும் எனக் காட்டு.

27. $2l$ நீளமுள்ள காந்தத்தின் ஈர்ப்பு விசை H. அதன் மையத்திலிருந்து x தொலைவிலுள்ள புள்ளியில் அதன் திருப்புத் திறன் (moment) M எனில்,

$$H = \frac{M}{2l}\left[\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{(x+l)^2}\right]$$

lஉடன் ஒப்பிட x சிறியதெனில், தோராயமாக $H = \frac{2M}{x^3}$ எனக் காட்டு.

28. ஒரு குழாய்வழி நீரோட்டச் சோதனையில், நீரின் உண்மையான வேகம் நொடிக்கு 10 மீ. இவ் வேகத்தைப் பிழைபட, நொடிக்கு 0.2 மீ. அதிகமாக அளந்துவிட்டார்கள். குழாயின் உராய்வினால் ஏற்படும் அழுத்தக் குறைவு, நீரின் வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்குமானால், கணக்கிடப்பட்ட அழுத்தக் குறைவில் ஏற்படும் பிழை 4 நூற்று வீதம் (4 percent) எனக் காட்டு.

29. ஐந்து பதின்பகுப்பு இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண் :

(i) $\sqrt[3]{999}$ $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt[4]{630}}$

(iv) $\sqrt{1.01} - \sqrt{0.99}$ (iv) $\sqrt[3]{1003} - \sqrt[3]{997}$

30. நான்கு பதின்பகுப்பு இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண் :

(i) $\left(\frac{0.998}{1.002}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{0.997}{1.002}\right)^{-\frac{2}{3}}$

31. $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1-0.2)^{-\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டி, அதிலிருந்து 2ன் இருபடி மூலத்தை மூன்று பதின்பகுப்பு இடங்களுக்குச் சரியாய்க் காண்.

32. $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}(1 + 0.024)^{\frac{1}{3}}$ எனக்காட்டி. அதிலிருந்து 3ன் மூப்படி மூலத்தை நான்கு பதின்பகுப்பிடங்களுக்குச் சரியாய்க் காண்.

33. $\sqrt[3]{5} = \frac{5}{8}(1 + 0.08)^{\frac{1}{3}}$ எனக்காட்டி, 5ன் முப்படி மூலத்தை 5 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குச் சரியாய்க் காண்.

34. n மிகப் பெரியதெனில், $\sqrt{n}$ ஆனது, $\frac{1}{2}\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right]$ என்பதை விட $\frac{1}{8\sqrt{n^3}}$ அதிகம் எனக் காட்டு.

அதிலிருந்து தோராயமாக, $10 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{101} + \sqrt{99}\right) = 0{\cdot}00125$ எனக் காட்டு.

35. p, q ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிட $(p - q)$ சிறியதெனில் தோராயமாக

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q}$$

எனக் காட்டு. இதைக் கொண்டு, தோராயமாக

(i) $\sqrt[7]{\frac{131}{133}} = \frac{923}{925}$, (ii) $\sqrt[5]{\frac{543}{540}} = \frac{2709}{2706}$

எனக் காட்டு.

36. எல்லை மதிப்பைக் காண் :

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x}}$

(ii) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{\sqrt{2x + a}}{\sqrt{x + 3a}} - \dfrac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{x}}$

(iii) $\underset{x \to \infty}{Lt} \; x \{x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - x \}$

(iv) $\left(\underset{x \to 0}{Lt}\right) \dfrac{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - (1 - 3x)^{\frac{1}{3}}}{(1 + 2x)^{\frac{1}{2}} - (1 - 3x)^{\frac{1}{2}}}$

விடைகள் 2—11

29. 9·99667, (ii) 0·91917, (iii) 0·19960
(iv) 0·01000, (v) 0·02000

30. (l) 1·0027, (ii) 0·9960

31. $\sqrt{2} \simeq 1{\cdot}414$

$\sqrt{2} \simeq 1{\cdot}2599$

33. $\sqrt{5} \simeq 1{\cdot}70998$

36. (i) 1, (ii) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, (iii) $\dfrac{a^2}{2}$, (iv) $\dfrac{2}{5}$.

3. அடுக்குக்குறித் தேற்றம்

(Exponential Theorem)

3·1 e என்ற எண்

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{r!} + \dots$$

என்ற முடிவுறு தொடர் ஒரு முடிவுள்ள (finite) எண் மதிப்புக்கு ஒருங்குகிறது. அவ்வெண் *e* என வரையறுக்கப்படும்.

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

எனவும் காட்டலாம். எனவே *e* ன் மற்ருெரு வரையறை :

$$e = \underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3·2 e ன் மதிப்பு 2, 3 ஆகிய இரண்டுக்கும் இடைப்பட்டது ;

இதைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots$$

இத் தொடரின் முதல் இரு உறுப்புக்களின் கூடுதலே 2 என்பதால்,

$$e > 2$$

இனி, $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}, \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{r!} < \frac{1}{2^{r-1}}, \dots$

எனவே, $e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

இத்தொடரில் முதலுறுப்பு நீங்கலாக மற்றது ஒரு முடிவுறு பெருக்குத் தொடர் (Infinite Geometric Series), அப்பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. எனவே,

$$e < 1 + 2 = 3.$$

இவ்வாறு, $2 < e < 3$.

3·3. e ஒரு விகிதமுறு (Irrational) எண்

e ஒரு விகிதமுறு (Rational) எண்ணாக இருக்கக்கூடுமானால் அதன் வடிவம் $\frac{m}{n}$; (m, n இரண்டும் மிகை முழுவெண்கள்). அவ்வாறெனில்

$$\frac{m}{n} = e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right)$$

இரு பக்கங்களையும் $n!$ ஆல் பெருக்க,

$$m(n-1)! = \left[n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1\right] + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\ (n+2)} + \dots\right].$$

இவ்விரு சதுர அடைப்புகளுக்குள் உள்ள உறுப்புக்களை S_1, S_2 என முறையே குறிப்போம். S_1ன் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் முழுவெண்ணானதால், S_1 ஒரு முழுவெண். இடப் பக்க உறுப்பும் ஒரு முழுவெண், இதனால் S_2 இரு முழுவெண் களின் வேறுபாடாகிறது. எனவே, S_2 ஒரு முழுவெண்.

ஆனல்,

$$S_2 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n+1} \Big/ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}.$$

n ஒரு மிகை முழுவெண்ணுனதால், $\frac{1}{n} < 1$. எனவே, இதன்படி, S_2 ஒரு விகிதமுறு தகு பின்னம் என்ருகிறது. இவ்வாறு S_2 வைப் பற்றிய இரு முரண்பட்ட கருத்துக்கள் விளைகின்றன. எனவே, e ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனக் கொண்டது தவறு. ஆகவே, e ஒரு விகிதமுரு பின்னம்.

eன் மதிப்பு 500 பதின் பகுப்பிடங்களுக்கு மேலும் கணக்கிடப்பட்டிருக்கிறது. அதன் மதிப்பு 2·718 2 8 1 8 2 8 4 ....

3·4 அடுக்குக் குறித் தேற்றம்

தேற்றம் : x ஒரு மெய் எண்ணுனல்,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

x-ன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புக்களுக்கும் இத் தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிறுவலாம்.

நிறுவல் :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

எனக் கொள். இம்முடிவுறு தொடர் x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் அறவொருங்கும் (Absolutely converges). குறிப்பாக,

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{r!} + \cdots = e.$$

$$f(0) = 1.$$

இனி, $f(x)$, $f(\beta)$ என்ற இரு தொடர்களையும் பெருக்கிக் கிட்டும் தொடரும் அறவொருங்கும்.

$$f(x)\,f(\beta) = \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots\right] \times \left[1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \dots + \frac{\beta^r}{r!} + \dots\right]$$

$$= 1 + \left(\frac{\alpha}{1!} + \frac{\beta}{1!}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha}{1!}\cdot\frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!}\right) + \left(\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha}{1!}\cdot\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!}\right) + \dots\dots$$

இதில் $(r + 1)$ ஆவது உறுப்பு

$$\frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^{r-1}}{(r-1)}\cdot\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^{r-2}}{(r-2)}\cdot\frac{\beta^2}{2!} + \dots\dots \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{\beta^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{\alpha}{1!}\cdot\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{\beta^r}{r!}$$

$$= \frac{1}{r!}\left[\alpha^r + {}^rC_1\,\alpha^{r-1}\beta + {}^rC_2\,\alpha^{r-2}\beta^2 + \dots\dots + \beta^r\right]$$

$$= \frac{1}{r!}(\alpha + \beta)^r,$$ ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றத்தின்படி.

இது $f(\alpha + \beta)$-ல் $(r + 1)$ ஆவது உறுப்பு. எனவே,

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

இனி, $f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma) = f(\alpha + \beta)\cdot f(r) = f(\alpha + \beta + \gamma)$.

இவ்வாறே தொடர,

$$f(\alpha_1)\,f(\alpha_2)\,f(\alpha_3)\dots f(\alpha_k) = f(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k) \quad \dots (1)$$

பிரிவு (i) :

x ஒரு மிகை முழுவெண்ணாக இருக்கட்டும்.

ச—டு (1)-ல், $k = x$, $\alpha_1 = 1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_k$ எனக் கொள்ள,

$f(1)\, f(1)\, f(1) \ldots\ldots$ x பகுப்புகள் $= f\,(1 + 1 + 1 + \ldots$ x உறுப்புகள்)

அ—து, $[f(1)]^x = f(x)$

பிரிவு (ii) :

x ஒரு விகிதமுறு மிகை பின்னமாக இருக்கட்டும்.

$x = \frac{p}{q}$; p, q மிகை முழு வெண்கள் எனக் கொள்.

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \ldots q \text{ பகுப்புகள்}$$

$$= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots\ldots \text{ உறுப்புகள்}\right),$$

விஜாவு (1)-ன் படி.

$$= f(p)$$

$$= [f(1)]^p, \text{ பிரிவு (i)-ன் படி.}$$

$$\therefore \quad [f(1)]^p = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q$$

$$\therefore \quad [f(1)]^{\frac{p}{q}} = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

அ—து, $[f(1)]^x = f(x)$.

பிரிவு (iii) :

x ஒரு குறையெண்ணாக இருக்கட்டும். $x = -y$; y ஒரு மிகையெண் என வை.

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) = f(0) = 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{[f(1)]^y}, \text{ பிரிவு (ii)-ன் படி.}$$

$$= [f(1)]^{-y} = [f(1)]^x.$$

$$\therefore \quad [f(1)]^x = f(x).$$

இவ்வாறு, x எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணானாலும் (மிகை) குறை, முழுவெண், பின்னம் எதுவாயினும்),

$$[f(1)]^x = f(x)$$

அ—து, $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^r}{r!} + \ldots\ldots$$

வலப் பக்கத் தொடர் x-ல் ஒரு தொடர்புடைச் சார்பு (Continuous function) என்பதால், இவ்விளைவு x-ன் விகிதமுரு (irrational) மதிப்புக்கும் சரியே. இவ்வாறு இவ் விளைவு x-ன் எல்லா மெய் (real) மதிப்புக்கும் உண்மையாகிறது.

கிளைத் தேற்றம் (Corollary) (1) :

$a > 0$, x ஒரு மெய் யெண் எனில்,

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \ldots\ldots$$

இதையே அடுக்குக்குறித் தேற்றம் என்று குறிப்பதும் உண்டு.

கிளைத் தேற்றம் (2)

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + (-1)^r \frac{x^r}{r!} + \ldots\ldots\ldots$$

கிளைத் தேற்றம் (3)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$$

கிளைத் தேற்றம் (4)

$\sin hx$, $\cos hx$ என்ற சார்புகளின் வரையறை பின்வருமாறு :

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

எனவே, e^x, e^{-x} ஆகியவற்றின் விரிப்புக்களைக் கூட்டியும் கழித்தும் பின்வரும் விரிப்புக்களைப் பெறலாம் :

$$\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots,$$

$$\cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

3.5 n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுனால்,

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

என்பதன் எல்லைமதிப்பு ஒரு முடிவுள்ள எண் எனப் பின்வருமாறு காட்டலாம் :

பிரிவு (i) : n ஒரு மிகை முழுவெண்ணுக இருக்கட்டும். ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \ldots +$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\,\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

இவ் விரிப்பில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. n-ன் மதிப்பு மிகுந்தால், கூடவே இவ்விரிப்பில் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை மிகும்; முதலிரண்டு உறுப்புக்களைத் தவிர மற்ற உறுப்பு ஒவ்வொன்றின் மதிப்பும் மிகும். இவ்வாறு, n-ன் மதிப்பு உயர, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் மதிப்பும் உயர்ந்துகொண்டே வரும். மேலும், தொடரின் உறுப்புக்கள் அத்தனையும் மிகை. எனவே, n வளர்ந்து முடிவிலியானால், $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் எல்லைமதிப்பு முடிவிலியாகவோ, ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுகவோதான் இருக்கும்.

இனி மேற்கண்ட விரிப்பின் முதலிரண்டு உறுப்பை அடுத்த உறுப்புக்கள்,

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

என்ற தொடரின் முதலிரண்டு உறுப்பை அடுத்த உறுப்புகளுக்கு முறையே குறைவு.

எனவே,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\dots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+2\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$< 3.$$

எனவே, $\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்ற எல்லை மதிப்பு முடிவிலியாக இருக்கமுடியாது ; ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

[கவனிக்க : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்பதன் விரிப்பில் முதலிரு உறுப்புகளின் கூடுதலே 2 ஆதலால், அதன் எல்லை மதிப்பு 2-ஐ விடப் பெரியது எனவும் தெரிகிறது. இவ்வாறு அவ்வெல்லை மதிப்பு 2-க்கும் 3-க்கும் கிடைப்பட்டது.]

பிரிவு (ii) n ஒரு மிகை பின்னமாக இருக்கட்டும். $m, m+1$ என்ற இரு மிகைமுழுவெண்களுக்கு இடைப்பட்டு n இருப்பதாய்க் கொள்க.

$$m < n < m+1 \qquad (m>0)$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1}$$

$$1+\frac{1}{m}>1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{m+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1}$$

$n\to\infty$ எனில், $m\to\infty$, $m+1\to\infty$; $\frac{1}{m}\to 0$, $\frac{1}{m+1}\to 0$.

எனவே, இடக்கோடி, வலக்கோடி உறுப்புக்கள், பகுதி (i)-ல் கண்ட ஒரே எல்லையை அடைகின்றன. எனவே, நடு உறுப்பும் அதே முடிவுள்ள எல்லையை அடைகிறது.

பிரிவு : (iii) : n ஒரு குறையெண்ணுக (பின்னமாகவோ, முழு எண்ணுகவோ) இருக்கட்டும். $n=-p$, p மிகை எனக் கொள்ள,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-p}$$

$$=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}$$

$$=\left(\frac{q+1}{q}\right)^{q+1}, \quad p-1=q \text{ என இட}$$

$$=\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

$n\to\infty$ எனில், $q\to\infty$, $1+\frac{1}{q}\to 1$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}, \text{ (} q \text{ மிகை)}$$

பிரிவுகள் (i), (ii) லிருந்து, வலப்பக்க உறுப்பு, அப்பகுதிகளில் கண்ட ஒரு முடிவுள்ள எண்ணையே எல்லையாக அடைகிறது. எனவே, இடப் பக்க உறுப்பும் அந்த முடிவுள்ள எண்ணையே எல்லையாக அடைகிறது.

இவ்வாறு n எந்த விகிதமுறு எண்ணுயினும் $\underset{n\to\infty}{Lt} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எண் மதிப்பையே எல்லையாக அடைகிறது.

3·6 n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுனல்

$$\underset{n\to\infty}{Lt} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \ldots (= e)$$ எனப் பின்வருமாறு காட்டலால்:

n எந்த விகிதமுறு எண்ணுனலும், $|n| > |$ எனின், ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$\left(1=\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1}{r!}\cdot\frac{1}{n^r} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) + \ldots$$

n எந்த விகிதமுறு எண்ணுனலும், $n\to\infty$ எனும்போது, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எண்ணையே நாடி இயங்கு

கிறது (tends) என முன்பே காட்டினோம். எனவே, $n \to \infty$ என்னும்போது, வலப்பக்கத் தொடரின் வடிவம் ஓர் ஒருங்கு தொடரே என இனிக்காட்ட வேண்டியதில்லை. அவ்வெல்லையில் $\frac{1}{n} \to 0$ என்பதால், இச் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைப்பது :

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{r!} + \dots\dots$$

மாதிரி 1

$\frac{1 + ax + bx^2}{e^{cx}}$ என்பதன் விரிப்பில் x^r-ன் கெழுவைக் காண்,

$$\frac{1 + ax + bx^2}{e^{cx}} = (1 + ax + bx^2)\, e^{-cx}$$

$$= (1 + ax + bx^2) \left[1 - \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!}\right.$$

$$- \frac{(cx)^3}{3!} + \dots + (-1)^{r-2} \frac{(cx)^{c-2}}{(r-2)!} + (-1)^{r-1} \frac{(cx)^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$\left. + (-)^r \frac{(cx)^r}{r!} + \dots \dots \right]$$

இதில் x^r-ன் கெழு $= (-1)^r \frac{c^r}{r!} + (-1)^{r-1} \frac{a \cdot c^{r-1}}{(r-1)!}$

$$+ (-1)^{r-2} \frac{b \cdot c^{r-2}}{(r-2)!}$$

$$= (-1)^r \frac{c^{r-2}}{r!} [c^2 - rac + r(r-1)b]$$

$\therefore$ x^r-ன் கெழு $= (-1)^r \frac{c^{r-2}}{r!} [br^2 - (ac + b) r + c^2]$

மாதிரி 2

பின்வரும் முடிவறு தொடரில் x^{10}-ன் கெழுவைக்காண் :

$$1 + \frac{1 - x}{2} + \frac{(1 - x)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{(1 - x)^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots$$

$\frac{1-x}{2} = y$ என இட, இத்தொடர்

$$1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

என்ற அடுக்குத் தொடராகிறது. இதன் மதிப்பு

$$e^y = e^{\frac{1-x}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \sqrt{e}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^r \frac{x^r}{2^r \cdot r!} + \dots\right]$$

இதில் x^r-ன் கெழு $= \sqrt{e} \cdot (-1)^r \cdot \frac{1}{2^r\, r!}$.

$r = 10$ என இட, x^{10}-ன் கெழு $= \frac{\sqrt{e}}{2^{10} \cdot 10!}$.

மாதிரி 3

$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2$ என்பதன் விரிப்பில் x^r-ன் கெழுவைக் காண்.

r ஒற்றை (odd) எண் எனில், x^r-ன் கெழு பூச்சியம் என்பது தெளிவு. இனி,

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots\right] + \frac{1}{2}$$

r இரட்டை (even) எண் எனில், இதில் x^r-ன் கெழு

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^r}{r!} = \frac{2^{r-1}}{r!}.$$

எனவே, x^r-ன் கெழு $= 0$, r ஒற்றை எனில்

$$= \frac{2^{r-1}}{r!}, \ r \text{ இரட்டை எனில்,}$$

மாதிரி 4

n மிகை முழுவெண் எனில், $(e^x - 1)^n$-ஐ இருவகைகளில் விரித்து x^n-ன் கெழுக்களைக் கண்டு, அதிலிருந்து

$$n^n - \frac{n}{1!}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n - \dots + (-1)^{n-1} = n!$$

எனக் காட்டு.

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி, n மிகை முழுவெண்ணானால்,

$$(e^x - 1)^n = (e^x)^n - {}^nC_1 (e^x)^{n-1} + {}^nC_2 (e^x)^{n-2}$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1}\, {}^nC_1 e^x + (-1)^n$$
$$= e^{nx} - {}^nC_1 e^{(n-1)x} + {}^nC_2 e^{(n-2)x}$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1} \cdot {}^nC_1 e^x + (-1)^n.$$

$$= 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{(nx)^2}{2!} + \dots + \frac{(nx)^n}{n!} + \dots$$

$$- {}^nC_1 \left\{1 + \frac{(n-1)x}{1!} + \frac{[(n-1)x]^2}{2!} + \dots + \frac{[(n-1)x]^n}{n!} + \dots\right\}$$

$$+ {}^nC_2 \left\{1 + \frac{(n-2)x}{1!} + \frac{[(n-2)x]^2}{2!} + \dots + \frac{[(n-2)x]^n}{n!} + \dots\right\}$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot {}^nC_1 \left\{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right\} + (-1)^n.$$

இதில் x^n-ன் கெழு

$$= \frac{n^n}{n!} - \frac{n}{1!} \cdot \frac{(n-1)^n}{n!} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{(n-2)^n}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n!}.$$

அடுக்குக்குறித் தேற்றத்தின்படி,

$$(e^x - 1)^n = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n$$

இதில் x^n-ன் கெழு 1. இருவகை விரிப்புக்களிலும் கிடைத்த x^n-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தி, $n!$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க,

$$n^n - \frac{n}{1!}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n - \dots + (-1)^{n-1} = n!$$

மாதிரி 5

$\frac{1}{r!}(1^r + 2^r + 3^r + \dots + n^r)$ என்பது, $\frac{e^{nx} - 1}{1 - e^{-x}}$ என்பதன் விரிப்பில் x^r-ன் கெழு எனக் காட்டி,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

என நிறுவுக.

$$\frac{e^{nx} - 1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{nx} - 1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1}$$

$$= e^x + (e^x)^2 + (e^x)^3 + \dots + (e^x)^n$$

$$= e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}.$$

இதில் x^r-ன் கெழு $= \frac{1}{r!} + \frac{2^r}{r!} + \frac{3^r}{r!} + \dots + \frac{u^r}{r!}$

இனி, x^2-ன் கெழு $= \frac{1}{2}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]$

வேறொரு வகை விரிப்பினால்

$$\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}} = \frac{nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots}{\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots}$$

$$= \frac{n + \frac{1}{2}n^2x + \frac{1}{6}n^3x^3 + \dots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 - \dots}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}n^2x + \frac{1}{6}n^3x^2 + \dots\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \dots\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}n^2x + \frac{1}{6}n^3x^2 + \dots\right) \left[1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}x^2 + \dots\right) + \left(\frac{1}{2}x - \dots\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}n^2x + \frac{1}{6}n^3x^2 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots\right)$$

இதில் x^2-ன் கெழு

$$= \frac{n}{12} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{6} = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$

இரு வகைகளிலும் கிடைத்த x^2-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தி 2-ஆல் பெருக்க,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

பயிற்சி 3—1

x^r-ன் கெழுவைக் காண். [1 — 6]

1. $\frac{2+3x}{e^{2x}}$

2. $\frac{1-ax-x^2}{e^x}$

3. $\dfrac{1 + 2x + 3x^2}{e^{2x}}$ 4. $\dfrac{a + be^x + ce^{2x}}{e^3x}$

5. $1 + \dfrac{a + bx}{1\,!} + \dfrac{(a + bx)^2}{2\,!} + \dfrac{(a + bx)^3}{3\,!} + \dots$

6. $(1 + x)\, e^{1+x}$

நிறுவுக : [7 — 13]

7. $\dfrac{e - 1}{e + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{4\,!} + \dfrac{1}{6\,!} + \dots}{\dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{3\,!} + \dfrac{1}{5\,!} + \dots}$

8. $\left(1 + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{4\,!} + \dfrac{1}{6\,!} + \dots\right)^2 = 1 + \left(1 + \dfrac{1}{3\,!} + \dfrac{1}{5\,!} + \dfrac{1}{7\,!} + \dots\right)^2$

9. $\dfrac{(1 + e)^2}{2e} = 2 + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{4}{4\,!} + \dfrac{1}{6\,!} + \dots$

10. $\log_e 3 - \dfrac{1}{2\,!}(\log_e 3)^2 + \dfrac{1}{3\,!}(\log_e 3)^3 - \dots = \dfrac{2}{3}$

11. (i) $\log 2 + \dfrac{1}{2\,!}(\log 2)^2 + \dfrac{1}{3\,!}(\log 2)^3 + \dots = 1$

(ii) $\log 2 - \dfrac{1}{2\,!}(\log 2)^2 + \dfrac{1}{3\,!}(\log 2)^3 - \dots = \dfrac{1}{2}$

12. $n + \dfrac{1}{n} = 2\left[1 + \dfrac{(\log_e n)^2}{2\,!} + \dfrac{(\log_e n)^4}{4\,!} + \dots\right]$

13. (i) $\dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{3\,!} + \dfrac{1}{5\,!} + \dots}{1 + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{4\,!} + \dots}$

(ii) $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\dots\right)$

$$=\frac{(e-1)^2}{e}$$

14. $\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)^2$ -ன் விரிப்பில் x^{10}-ன் கெழு $\frac{2^9}{10!}$ எனக் காட்டு.

15. e^{e^x} என்பதன் விரிப்பில் x^r-ன்கெழு

$$\frac{n!}{r!}\left(\frac{1^r}{1!}+\frac{2^r}{2!}+\frac{3^r}{3!}+\dots\right)$$

எனக் காட்டி அதிலிருந்து பின்வருமாறு நிறுவுக.

(i) $\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\dots\dots = 2e$

(ii) $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\dots\dots = 5e$

(iii) $\frac{1^4}{2!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\dots\dots = 15e$

16. $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ -ல் x^r-ன் $=\frac{1}{r!}(1^r+2^r+3^r+\dots\dots+n^r)$ எனக்காட்டி, அதிலிருந்து $1^3+2^3+3^3+\dots n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

17. $1+\frac{1+2x}{1!}+\frac{(1+2x)^2}{2!}+\dots$ என்ற தொடரில் x^r-ன் கெழு $\frac{2^r e}{r!}$ எனக்காட்டு.

18. $\frac{a+bx}{e^{2x}}$ -ன் விரிப்பில் x^n-ன் கெழுவைக் காண். x^2-ன் கெழு 1, x^3 உறுப்பு இல்லை எனில் a, b ஐக் காண்.

19. $(e^x - 1)^n$ ஐ இருவழிகளில் விரித்து, x^n-ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்துவதன் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு நிறுவுக :

(i) $n^r - {}^nC_1 (n-1)^r + {}^nC_2 (n-2)^r - \dots = 0, (r < n)$

(ii) $n^{n+1} - {}^nC_1 (n-1)^{n+1} + {}^nC_2 (n-2)^{n+1} - \dots$

$$= \frac{n}{2} (n+1)!$$

20. n மிகை முழுவெண் எனில் $(e^x - e^{-x})$-ஐ இரு வழிகளில் விரித்து நிறுவுக :

$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-2)(n-4)^n}{2!} - \dots$ n உறுப்புக்களுக்கு $= 2^n n!$

விடைகள் 3 – 1

1. $(-1)^r \frac{2^{r-1}(4-3r)}{r!}$

2. $(-1)^r \frac{1}{r!} [1 + (a+1) r - r^2]$

3. $(-1)^r \frac{(r-1)^2}{r!}$ 4. $-1^r \frac{1}{r!} (3^r + b.2^r + c)$

5. $\frac{e^a b^r}{r!}$ 6. $\frac{e(r+1)}{r!}$ 18. $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$.

3·7 தொடர் கூட்டல்

x எந்த மெய்யெண்ணானாலும்

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + + + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

என்பது அடுக்குக் குறித் தேற்றம்.

அ - து, $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

பொது உறுப்பை u_n எனக் குறித்தால்

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \ (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

கவனிக்கவேண்டியவை :

1. பொது உறுப்பின் பகுதி : $n!$ (ஈருறுப்புத் தொடரின் பகுதியும் இதுவே.)

2. பொது உறுப்பின் தொகுதியின் வடிவம் x^n (ஈருறுப்புத் தொடரின் பொதுவுறுப்பின் தொகுதி இவ்வடிவத்தில் இல்லை.)

எனவே, ஒரு முடிவுறு தொடரின் பொதுவுறுப்பின் பகுதி $n!$ எனில் அது ஓர் ஈருறுப்புத் தொடராகவோ, அடுக்குக் குறித் தொடராகவோ இருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். அடுத்து. அதன் தொகுதி ஈருறுப்புத் தொடரின் பொதுவுறுப்பின் தொகுதி யின் வடிவத்தில் இல்லை எனில், அடுக்குக் குறித் தொடராக இருக்கும் என்ற முடிவுடன் மேலே தொடரலாம்.

எளிய எடுத்துக்காட்டு :

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{1!} + \frac{2}{2!} - \frac{2\sqrt{2}}{3!} + \frac{4}{4!} - \ldots$$

$$= 1 + \frac{(-\sqrt{2})}{1!} + \frac{(-\sqrt{2})^2}{2!} + \frac{(-\sqrt{2})^3}{3!} + \ldots$$

$$= e^{-\sqrt{2}}.$$

பல சமயங்களில், அடுக்குக்குறித் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்திக் கூட்டவேண்டிய தொடர்களின் பொதுவுறுப்பின் தொகுதிகள் தெளிவாக x^n என்ற வடிவத்தில் இருப்பதில்லை. பொதுவுறுப்பின் தொகுதியைச் சுருக்கி நியம வடிவத்திற்குக் (Standard form) கொண்டுவர வேண்டியிருக்கும். அல்லது, ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் பிரித்தெழுதி, பொதுவுறுப்பைப் பல நியம வடிவப் பொதுவுறுப்புக்களாக எழுதவேண்டியிருக்கும்,

பொதுவுறுப்பின் தொகுதியைச் சுருக்கப் பின்வருவன பயன் படும்.

(i) $a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்ற கூட்டற் பெருக்கத்தின் (Arithmetic Progression)

n ஆவது உறுப்பு : $a + \overline{n-1}\, d$.

(ii) $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots$ என்ற கூட்டத் ரெடரின் (Arithmetic Series)

முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதல்: $\frac{n}{2}(2a + \overline{n-1}\,d)$.

(iii) $a, ar, ar^2 + \ldots$ என்ற பெருக்கற் பெருக்கத்தின் (Geometric Progression) n ஆவது உறுப்பு: ar^{n-1}.

(iv) $a + ar + ar^2 + \ldots$ என்ற பெருக்கற் ரெடரின் (Geometric Series) முதல் உறுப்புக்களின் கூடுதல்:

$$\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

(v) $1 + 2 + 3 \ldots + n$ என்ற n இயற்கை எண்களின் (Natural numbers) கூடுதல்: $\frac{n(n+1)}{2}$.

(vi) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ என்ற n இயற்கை யெண் களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(vii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ என்ற n இயற்கை எண் களின் கூடுதல்: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

மாதிரி 6

$$1 + \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+3^2}{2!} + \frac{1+3+3^2+3^3}{4!} + \ldots$$

$= \frac{1}{2}e(e^2 - 1)$ எனக் காட்டு.

இத்தொடரில் n ஆவது உறுப்பு u_n எனில்,

$$u_n = \frac{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}}{n!}$$

இதன் தொகுதி ஒரு பெருக்கற்ரெடர். அதன் முதலுறுப்பு $a = 1$; பொதுக்காரணி $r = 3$. எனவே தொகுதி $= a\frac{1 - r^n}{1 - n}$

$= \frac{3^n - 1}{2}$.

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{n!}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

அ—து, $$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n}{n!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!}$$

$n = 1$ என இட, $$u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!}$$

$n = 2$ எனில், $$u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}$$

$n = 3$ எனில், $$u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3!}$$

தொடுக்கக்கூட்ட, $$\sum_{1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots\right) - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}[e^3 - 1] - \frac{1}{2}[e - 1]$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - e) = \frac{1}{2} e (e^2 - 1).$$

எனவே, தேவையான கூடுதல்

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} e (e^2 - 1).$$

மாதிரி 7

$$\frac{1 \cdot 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{4!} + \frac{4 \cdot 7}{5!} + \ldots = 2e - 3$$ எனக் காட்டு.

உறுப்புக்களின் பகுதிகள் 2, 3, 4, ... என்ற எண்களின் காரணீயப் பெருக்கங்கள் (factorials), 2, 3, 4, ... என்ற எண்கள் கூட்டற் பெருக்கத்தில் உள்ளன. முதல் எண் $a = 2$, பொது வேறுபாடு $d = 1$. எனவே, n ஆவது எண் $= a + \overline{n-1}\, d = 2 + \overline{n-1} = n+1$. ஆகவே n ஆம் உறுப்பின் பகுதி $(n+1)!$

இனி, தொகுதிகளின் முதற்காரணிகள், 1, 2, 3, ... என்ற இயற்கை எண்கள். எனவே, n ஆம் உறுப்பின் முதற்காரணி n இரண்டாம் காரணிகள் 1, 3, 5, 7, ... என்று கூட்டற் பெருக்கத்தில் உள்ளன. $a = 1$, $d = 2$. எனவே இப் பெருக்கத்தின் n ஆம் எண் $1 + \overline{n-1} \cdot 2 = 2n - 1$.

ஆக, இத் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு :

$$u_n = \frac{n\,(2n-1)}{(n+1)}\,,\ (n = 1, 2, ...)$$

அ—து, $u_n = \dfrac{2n^2 - n}{(n-1)\,!}$

இவ்வாறு தொகுதி n-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகவரின் அதைப் பகுதியின் மிகப்பெரிய காரணி முதற்கொண்டுவரும் அடுத்தடுத்த காரணிகளின் வாயிலாக எழுதவேண்டும். தொகுதியின்படி r எனில், அதை $(r+1)$ உறுப்புக்களாக எழுத வேண்டியிருக்கும். இங்கு தொகுதியின்படி 2. எனவே அதை

$$2n^2 - n = A\,(n+1)n + B\,(n+1) + C$$

என வை. n^2-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $2 = A$

$n = -1$ என இட, $3 = C$

சார்பில் உறுப்புக்களை ஒப்பிட, $0 = B + C$

$$\therefore\ A = 2,\ B = -3,\ C = 3.$$

$$\therefore\ u_n = \frac{2\,(n+1)\,n - 3\,(n+1) + 3}{(n+1)\,!}$$

அ—து, $u_n = 2 \cdot \dfrac{1}{(n-1)\,!} - 3 \cdot \dfrac{1}{n\,!}$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{(n+1)}$$

$$\therefore \quad u_1 = 2 - 3 \cdot \frac{1}{1!} + 3 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$u_2 = 2 \cdot \frac{1}{1!} - 3 \cdot \frac{1}{2!} + 3 \cdot \frac{1}{3!}$$

$$u_3 = 2 \cdot \frac{1}{2!} - 3 \cdot \frac{1}{3!} + 3 \cdot \frac{1}{4!}$$

கூட்ட, $$\sum_{1}^{\infty} u_n = 2\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\right]$$

$$- 3\left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right]$$

$$+ 3\left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right]$$

$$= 2e - 3(e-1) + 3\left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right)$$

$$= 2e - 3.$$

எனவே, தேவையான கூட்டுத் தொகை $= 2e - 3$.

மாதிரி 8

$$1 + \frac{1+3}{2!}x + \frac{1+3+5}{3!}x^2 + \frac{1+3+5+7}{4!}x^3 + \dots = e^x(1+x)$$

எனக் காட்டு.

u_n என்பது தொடரின் n-ஆவது உறுப்பு எனில், u_n-ன் பகுதி : $n!$ என்பது தெளிவு. அதன் தொகுதியில் x^{n-1}-ன் கெழு, n உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு கூட்டற்றொடர் அதன் முதலெண் $a = 1$, பொது வேறுபாடு $d = 2$. எனவே கூட்டுத் தொகை $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2 + (n-1)2] = n^2$.

$$\therefore \quad u_n = \frac{n^2}{n!}x^{n-1} = \frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

$$n = A(n-1) + B$$

என எழுத, $A = 1$, $B = 1$. எனவே,

$$u_n = \frac{1}{(n-2)!} x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$n = 1, 2, \ldots\ldots$ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ என முறையே இட,

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = x + \frac{1}{1!} x$$

$$u_3 = \frac{1}{1!} x^2 + \frac{1}{2!} x^2$$

$$u_4 = \frac{1}{2!} x^3 + \frac{1}{3!} x^3$$

$$\vdots$$

கூட்ட, $$\sum_{1}^{\infty} u_n = \left(x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots\ldots\right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\right)$$

$$= x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\right)$$

$$= x e^x + e^x = e^x (1 + x)$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n = e^x (1 + x).$$

மாதிரி 9

மதிப்பைக் காண் : $$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+3)\, n!}$$

காணவேண்டிய கூட்டல்

$$\sum_{1}^{\infty} u_n,\ u_n = \frac{2n-1}{(n+3)\,n!}$$

பொது உறுப்பின் பகுதி $m!$ என்ற வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும். பகுதியையும் தொகுதியையும் $(n+2)\cdot(n+1)$-ஆல் பெருக்க,

$$u_n = \frac{(2n-1)(n+2)(n+1)}{(n+3)!}$$

$$= \frac{2n^3+5n^2+n-2}{(n+3)!}$$

இதன் தொகுதியின்படி 3.

$$2n^3+5n^2+n-2 = A(n+3)(n+2)(n+1)$$
$$+ B(n+3)(n+2) + C(n+3) + D$$

என வைத்து,

n^3 ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $2 = A$

n^2 ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, $5 = 6A + B$; $\therefore\ B = -7$

$n = -3$ என இட, $-14 = D$

$n = -2$ என இட, $0 = C + D$; $\therefore\ C = 14$

எனவே, $$u_n = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n+1)!} + \frac{C}{(n+2)!} + \frac{D}{(n+3)!}$$

$$\therefore\ u_1 = \frac{A}{1!} + \frac{B}{2!} + \frac{C}{3!} + \frac{D}{4!}$$

$$u_2 = \frac{A}{2!} + \frac{B}{3!} + \frac{C}{4!} + \frac{D}{5!}$$

$$u_3 = \frac{A}{3!} + \frac{B}{4!} + \frac{C}{5!} + \frac{D}{6!}$$

கூட்ட, $$\sum_{1}^{\infty} u_n = A\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)$$

$$+ B\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right)$$

$$+ C\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\right)$$

$$+ D\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots\right)$$

$$= A(e-1) + B\left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right)$$

$$+ C\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)$$

$$+ D\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)$$

$$= 2(e-1) - 7(e-2) + 14\left(e - \frac{5}{2}\right)$$

$$- 14\left(e - \frac{8}{3}\right)$$

$$= -5e + \frac{43}{3}.$$

பயிற்சி 3—2

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

1. $\frac{1}{1!} + \frac{1+5}{2!} + \frac{1+5+5^2}{3!} + \frac{1+5+5^2+5^3}{4!} + \dots$
$= \frac{e(e^4-1)}{4}$

2. $\frac{1}{2!} + \frac{1+2}{3!} + \frac{1+2+2^2}{4!} + \frac{1+2+2^2+2^3}{5!} + \dots$
$= \frac{1}{2}(e-1)^2$

3. $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^6}{6!} + \dots = \cosh 2$

4. $\frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots = 2e - 1$

5. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} + \dots = 2e^{-1}$

6. $1 + \frac{3}{1!} + \frac{5}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots = 3e$

7. $\frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \dots = 5e - 1$

8. $\frac{1^2}{3!} + \frac{2^2}{5!} + \frac{3^2}{7!} + \dots = \frac{e^2 - 3}{8e}$

9. $\frac{3^2}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{7^2}{3!} + \dots = 13e - 1$

10. $\frac{3^2}{1!} + \frac{5^2}{3!} + \frac{7^2}{5!} + \dots = 5e$

11. $\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots = \frac{27e}{4}$

12. $1^3 - \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \dots = -e^{-1}$

13. $\frac{1}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \dots = 15e$

14. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = e^{-1}.$

15. $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2 \cdot 4} + \frac{7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = 2\sqrt{e}$

16. $\frac{2 \cdot 6}{1!} + \frac{3 \cdot 7}{2!} + \frac{4 \cdot 8}{3!} + \dots = 13e - 5$

17. $\frac{2 \cdot 3}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{4!} + \frac{4 \cdot 7}{5!} + \frac{5 \cdot 9}{6!} + \dots = 2e - \frac{7}{2}$

18. $1 + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+3}{3!} + \dots = \frac{3}{2}e$

19. $1^2 + \frac{1^2+2^2}{2!} + \frac{1^2+2^2+3^2}{3!} + \dots = \frac{17e}{6}$

20. $1 - \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+5}{3!} - \frac{1+3+7}{4!} + \dots = 0$

21. $\frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \dots = 3e.$

22. $\frac{2\cdot1^2+3}{2!} + \frac{2\cdot2^2+4}{3!} + \frac{2\cdot3^2+5}{4!} + \dots = 4e - 5$

23. $\frac{1^2+2\cdot1}{1!} + \frac{2^2+2\cdot3}{2!} + \frac{3^2+2\cdot5}{3!} + \dots = 4e + 2$

24. $\frac{2_{\frac{1}{2}}}{1!} + \frac{3\frac{1}{3}}{2!} + \frac{4\frac{1}{4}}{3!} + \dots = 1 + e^{-1}$

25. $2\cdot4 + \frac{3\cdot5}{1!}x + \frac{4\cdot6}{2!}x^2 + \frac{5\cdot7}{3!}x^3 + \dots = e^x(x^2+7x+8)$

26. $\frac{2\cdot6}{1!}x + \frac{3\cdot7}{2!}x^2 + \frac{4.8}{3!}x^3 + \dots e^x(x^2+7x+5) - 5.$

27. $1 - \frac{2^3}{1!}x + \frac{3^3}{2!}x^2 - \frac{4^3}{3!}x^4 + \dots = e^x(1 - 7x$

$+ 6x^2 - x^3)$

28. $\sum_{n+0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$

29. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!} = 4e^{-2}$

30. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{(n-1)!} = 15\,e$

31. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!} = 10e$

32. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!} = 27e$

33. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n[(n+1)^2+1]}{(n+1)!} = 3e+1$

34. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+3}{(2n-1)} = \frac{5e}{2} - \frac{3}{2e}$.

35. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{n!} = 9e-4$

36. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \cdot 3^n = 23e^3 - 2$

37. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n-3)\cdot n!} = \frac{1}{3}(43-15e)$

38. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n = (1+x)e^x - 1$

39. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)\cdot n!} x^n = \frac{1}{x^2} \left\{ (x^2-3x+3)e^x + \frac{1}{2}x^2 - 3 \right\}$

40. $\sum_{0}^{\infty} \frac{n^2+5}{(n+1)!} x^n = e^x(x-1) + \frac{6}{x}(e^x-1)$

41. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+2} \cdot \frac{x^n}{n!} = e^x\left(x-2+\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}\right) + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{2}$.

3.8 தோராயங்களும் எல்லைகளும்

மாதிரி 10

eயின் இருபடி மூலத்தை மூன்று பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய் காண்க.

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}125 + 0{\cdot}0208 + 0{\cdot}0026 + 0{\cdot}0002 + 0{\cdot}0000$$

[3 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாக வேண்டியிருப்பதால் 3 பதின்பகுப்பிடங்கள் பூச்சியமாக வரும் உறுப்புவரை சேர்த்துக் கொள்கிறோம்.]

$\therefore\ e^{\frac{1}{2}} = 1{\cdot}6486.$

$= 1{\cdot}649$, மூன்று பதின் பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாக.

மாதிரி : 11

p, q இரண்டும் சிறியன, $e^p + p = 1 + q$ எனில் தோராயமாக $p = \frac{1}{2}q - \frac{1}{16}q^2$ எனக் காட்டு.

$$e^p + p = 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \ldots + p = 1 + 2p + \frac{p^2}{2} + \ldots$$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து

$$1 + q = 1 + 2p + \frac{p^2}{2} + \ldots$$

எனவே, $q = 2p + \frac{p^2}{2} + \ldots$ **(i)**

முதல் தோராயமாக p-யின் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை ஒதுக்கிவிட்டால்,

$q = 2p$; அ—து, $p = \frac{1}{2}q$.

p-யின் திருந்திய தோராய மதிப்பு $p = \frac{1}{2} q + h$, **(ii)**

(h சிறியது) எனக் கொண்டு (i)-ல் பிரதியிட,

$$q = 2\left(\frac{1}{2} q + h\right) + \frac{\left(\frac{1}{2} q + h\right)^2}{2} + \ldots$$

$$= q + 2h + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4} + qh + h^2\right) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad 0 = 2h + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4} + qh + h^2\right), \text{ தோராயமாக.}$$

q-வை விட h மிகச் சிறியது என்பதால், h^2, qh என்பவை மேலும் சிறியவை. அவற்றை ஒதுக்க,

$$0 = 2h + \frac{q^2}{8}$$

$$\therefore \quad h = -\frac{q^2}{16}.$$

$\therefore$ (ii)-ல் பிரதியிட, p-யின் திருந்திய தோராய மதிப்பு

$$p = \frac{1}{2} q - \frac{q^2}{16}.$$

மாதிரி 12

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ எனக் காட்டு.}$$

$\frac{x}{n} = \frac{1}{N}$ என இடு. $n \to \infty$ எனில், $N \to \infty$. தரப்பட்ட எல்லை பின்வருமாறு மாறுகிறது :

$$\underset{N \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{Nx} = \left\{\underset{N \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N\right\}^x = e^x.$$

மாதிரி 13

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{a^x - b^x}{x}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{a^x - b^x}{x} = \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{e^{x\log a} - e^{x\log b}}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\left[1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \dots\right] - \left[1 + x\log b + \frac{(x\log b)^2}{2!} + \dots\right]}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{x\,[\,(\log a - \log b) + x\text{-ன் மிகை அடுக்குகள்}]}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\ [\,(\log a - \log b) + (x\log a)\text{-யின் மிகை அடுக்குகள்}]$$

$$\longrightarrow (\log a - \log b).$$

$$\therefore \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b.$$

பயிற்சி 3—3

மூன்று பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய் மதிப்பிடு. [1 — 4].

1. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 2. $e^{\frac{1}{10}}$

3. $\cos h\,(0{\cdot}5)$ 4. $\sin h\ 1$

a^x-ன் விரிப்பிலிருந்து 10-ன் 5 ஆம் மூலத்தை 4 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய்க் காண். $\log_e 10 = 2{\cdot}3026$ என்பவைப் பயன்படுத்துக.

6. $e^{a + bx + cx^2} = p + qx + rx^2$ எனில், $a = \log p$,

$b = \frac{q}{p}$, $c = \frac{2pr - q^2}{2p^2}$ எனக் காட்டு.

7. $x = x_0 \left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$; x_0, R, L என்பவை மாறிலிகள். $t \longrightarrow \infty$ எனில் $x \longrightarrow x_0$-எனக் காட்டு. $R << L$ எனில், முதல் தோராயத்தில் $x \propto t$ எனவும். $x = \frac{R t x_0}{L} \left(1 - \frac{R t}{2L} + \frac{R^2 t^2}{6L^2}\right)$ என்பது மேலும் சிறந்த தோராயம் எனவும் காட்டு.

8. p சிறியதெனில் $e^x + x = 1 + p$ என்ற சகன்பாட்டினுடைய மூலம் (root) தோராயமாக $\frac{1}{2} p - \frac{1}{16} p^2$ எனக் காட்டு.

9. இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கும் ஓர் எடையுள்ள சங்கிலி அல்லது கயிறு, $y = c\ (\cosh) \frac{x}{c}$ என்னும் சமன்பாடு கொண்ட சங்கிலியம் அல்லது கயிற்றுவளை (catenary) என்ற வளைகோட்டு வடிவத்திலிருக்கும். x சிறியதெனில் இச் சங்கிலியத்தை, $x^2 = 2c\,(y - c)$ சமன்பாடு கொண்ட பரவளையமாகக் கொள்ளலாம் எனக் காட்டு.

நிறுவுக [10 — 16].

10. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x.$

11. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n/b} = e^{a/b}$

12. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 - n\right)^{1/n} = e^{-1}$

13. $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b$

14. $\underset{x \to a}{Lt} \frac{a^x - 1 - x \log a}{x^2} = \frac{1}{2} (\log a)^2$

15. $\underset{x \to \infty}{Lt} \; x^3 \left(e^{\frac{2}{x}} - 3e^{\frac{1}{x}} + 3 - e^{\frac{-1}{x}} \right) = 1$

16. $\underset{x \to 0}{Lt} \; \frac{(e^x - 1)^2}{x^2} = 1.$

விடைகள் 3—3

1. 0·607 2, 1·105 3. 1·128

4. 1·175 5. 1·0475,

4. மடக்கைத் தேற்றம்
(Logarithmic Theorem)

4·1 மடக்கை

$a^x = y$, $(a > 0)$ எனில், a யின் அடிக்கு y ன் மடக்கை (logarithm of y to the base a) என x வழங்கப்படும். அதை

$$x = \log_a y$$

எனக் குறிப்போம்.

e என்ற எண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்ட மடக்கையை, அதை வெகுவாகப் பயன்படுத்திய நேப்பியர் என்பவரின் பெயரில், நேப்பியர் மடக்கை (Napierian logarithm) என்போம். இயற்கை மடக்கை (Natural logarithm) என்றும் இது வழங்கப்படும்.

10 என்ற எண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்ட மடக்கை, பொது மடக்கை (Common logarithm) எனப்படும்.

பொதுவாக அறிமுறைப் (Theoretical) பணிகளில் நேப்பியர் மடக்கையும், செய்முறைப் (Practical) பணிகளில் பொது மடக்கையும் பயன்படுத்தப்படும். log N என்பதுபோல அடிப்படையைக் குறிக்காமல் மடக்கை கொடுக்கப்பட்டால், அடிப்படை e என அறிமுறைப் பணிகளிலும் (எனவே, இந்நூல் முழுவதிலும்), 10 எனச் செய்முறைப் பணிகளிலும் புரிந்து கொள்ள வேணடும்.

பின்வரும் மடக்கைச் சமன்பாடுகள் முன்பே தெரிந்திருக்கக் கூடும்.

(i) $\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$

(ii) $\log_a (N^k) = k \log N$

(iii) $\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a.$

அடிப்படையை மாற்ற உதவும் ச-டு (iii) ஐக் கொண்டு, பொது மடக்கையை நேப்பியர் மடக்கை வாயிலாக எழுதலாம் :

$$\log_{10} N = \log_e N. \ \log_{10} e.$$

இதில் $\log_{10} e = 0{\cdot}4342944 \ldots$ இதை μ எனக் குறித்தால்

$$\log_{10} N = \mu \log_e N.$$

4·2 மடக்கைத் தேற்றம் :

$-1 < x \leq 1$ எனில் $\log_e (1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

நிறுவல் :

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி, $|x| < 1$ எனில்,

$$(1 + x)^y = 1 + \frac{y}{1!} x + \frac{y(y-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{y(y-1) \ldots (y-r+1)}{r!} x^r + \ldots \quad \text{(அ)}$$

அடுக்குக் குறித் தேற்றத்தின்படி

$$(1 + x)^y = e^{y \log_e (1 + x)}$$

$$= 1 + y \log_e (1 + x) + \frac{y^2}{2!} [\log_e (1+x)]^2 + \ldots \quad \text{(ஆ)}$$

$|x| < 1$ எனில், தொடர் (அ) அறவொருங்குவதால் அதன் உறுப்புகளை இடம் மாற்றியமைக்கலாம் ; y-ன் படிகளில் தொடரைத் திருத்தியமைக்கலாம். அத் தொடரும், தொடர் (ஆ)-ம் ஒரே கோவையின் விரிப்புக்களாதலால் இரு தொடர்களும் அவற்றில் y-ன் ஒத்த படிகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தலாம்.

y-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த, $|x| < 1$ எனில்,

$$\log_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 2}{3!} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4!} x^4 + \ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

$x = 1$ என்றாலும் இச் சமன்பாடு உண்மை என்பது வேறு வழிகளில் அறியக் கூடியது. எனவே, $-1 < x \leq 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் மடக்கைத் தேற்றம் உண்மையாகிறது.

4·3 சில விளைவுகள்

(i) மடக்கைத் தேற்றத்தில் $x = 1$ என இட,

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

(ii) $-1 < x \leq 1$ எனில்

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \quad \ldots \quad (1)$$

x-ஐ $-x$ என மாற்ற, $-1 < -x \leq -1$, அ—து, $1 > x \geq -1$, அ—து $-1 \leq x < 1$ எனில்

$$\log (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(iii) $-1 < x < 1$ எனில் விரிப்புக்கள் (1), (2) இரண்டுமே சரி அவற்றிலிருந்து :

$$\log (1 + x) - \log (1 - x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots \right) \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots, \quad (|x| < 1). \quad \ldots \quad (4)$$

(iv) $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{n + 1}{n}$ $(n > 0)$ என (3)-ல் இட, அ—து,

$x = \frac{1}{2n + 1}$ என இட,

$$\log (n+1) - \log n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+5)^5} + \cdots\cdots\right] \quad \cdots \quad (1)$$

இதற்கான நிபந்தனை : $| x | < | \cdot n > 0$ இது நிறைவு பெறுகிறது.

(v) $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{m}{n} (m, n > 0)$ எனக் கொள்ள,

$$\log m - \log n = 2\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots\cdots\right] \quad \cdots \quad (6)$$

இதற்கான நிபந்தனை : $\left|\dfrac{m-n}{m+n}\right| < 1.$ $m < n$ எனில் இது நிறைவு பெறுகிறது.

$m = n + 1$ என ச—டு (6)-ல் இட்டும் ச—டு (5)ஐப் பெறலாம்.

ச—டு (5)-ஐப் பயன்படுத்தி, 2, 3, 4, 5, ... என்ற மிகை முழுவெண்களின் இயற்கை மடக்கைகளைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

ச—டு (5)-ல் $n = 1$ என இட, $\log 1 = 0$ என்பதால்,

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \cdots\cdots\right].$$

ச—டு (5)-ல் $n = 2$ என இட,

$$\log 3 - \log 2 = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \cdots\cdots\right]$$

முன் சமன்பாட்டுடன் கூட்ட, log 3 கிடைக்கிறது.

இனி, $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$;

ச—டு (5)-ல் $n = 4$ என இட,

$$\log 5 - \log 4 = 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \ldots\ldots\right];$$

(log 4)-ன் மதிப்புத் தெரியுமாதலால், log 5 கிடைக்கிறது.

தொடர்ந்து, அடுத்தடுத்த முழு எண்களின் இயற்கை மடக்கைகளை இவ்வாறு காணலாம்.

மாதிரி 1

2-ன் நேப்பியர் மடக்கையை 5 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய்க் காண்.

ச—டு (6)-ல் $m = 2$, $n = 1$ என்றுவது, ச—டு (5)-ல் $n = 1$ என்றுவது இட,

$$\log_e 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\ldots\right]$$

6 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குக் கணக்கிட,

	$1/3$	= 0·333	333	3
	$1/(3\cdot3^3)$	= 0·012	345	6
	$1/(5\cdot3^5)$	= 0·000	823	0
	$1/(7\cdot3^7)$	= 0·000	065	3
	$1/(9\cdot3^9)$	= 0·000	005	6
	$1/(11\cdot3^{11})$	= 0·000	000	5
கூட்ட,		0·346	573	3
				× 2
		0·693	146	6

5 பதின்பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாக,
$\log_e 2 = 0\cdot69315$.

மாதிரி 2

$\log(1 + x + x^2)$-ஐ x-ன் ஏறுபடியில் விரித்து x^n-ன் கெழுவைக் காண்க.

$$\log(1 + x + x^2) = \log\left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right)$$

$$= \log(1 - x^3) - \log(1 - x)$$

$$= -\left[x^3 + \frac{(x^3)^2}{2} + \frac{(x^3)^6}{3} + \dots \right] + \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right]$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x + \dots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2}{6} x^6 + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{2}{9} x^9 + \dots$$

எனவே, 3-ன் மடங்காக n இருந்தால்

$$x^n\text{-ன் கெழு} = -\frac{2}{n};$$

3-ன் மடங்கல்லாத எண்ணாக n இருந்தால்

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \frac{1}{n}.$$

மாதிரி 3.

α, β என்பவை, $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால்,

$$\log(1 + px + qx^2) = (\alpha + \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n + \beta^n}{n} x^n + \dots$$

எனக்காட்டு.

$$x^2 - px + q = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு α, β மூலங்கள் என்பதால்,

$$\alpha + \beta = p, \qquad \alpha\beta = q.$$

எனவே, $\log(1+px+qx^2) = \log[1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2]$

$$= \log + [(1+\alpha x)(1+\beta x)] = \log(1+\alpha x) + \log(1+\beta x)$$

$$\alpha x - \frac{\alpha^2x^2}{2} + \frac{\alpha^3x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^nx^n}{n} + \dots$$

$$+ \beta x - \frac{\beta^2x^2}{2} + \frac{\beta^3x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\beta^nx^n}{n} + \dots$$

$$= (\alpha+\beta)x \; \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n+\beta^n}{n}x^n + \dots$$

4·4 தொடர் கூட்டல்

கூட்டவேண்டிய முடிவுறு தொடரின் உறுப்புகளின் பகுதிகள் காரணீயப் பெருக்கல்களாக இராவிட்டால், அத்தொடர் ஒரு மடக்கைத் தொடராக இருக்கக்கூடும்.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, - < x \le 1 \quad \dots(1)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots, - \le x < 1 \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, - < x < 1 \quad \dots(3)$$

என்ற விரிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டு மடக்கைத் தொடர்களின் கூடுதலைக் காணவேண்டும். இவற்றில், எந்த உறுப்பின் பகுதியிலுள்ள எண்ணும், தொகுதியில் உள்ள x-ன் படியும் ஒன்றே என்பது கணிக்கத் தக்கது.

மாதிரி 4

$$\log(x+2h) = 2\log(x+h) - \log x - \left\{\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{h^4}{2(x+h)^4} + \frac{h^6}{3(x+h)^6} + \dots\right\}$$ என நிறுவுக.

$x = \frac{h^2}{(x+h)^2}$ என இட,

$$\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{h^4}{2(x+h)^4} + \frac{h^6}{3(x+h)^6}\, x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$= -\log(1-x) \qquad [ச—டு (2)]$$

$$= -\log\left(1 - \frac{h^2}{(x+h)^2}\right)$$

$$= \log\frac{(x+h)^2}{x^2+2hx} = 2\log(x+h) - \log x - \log(x+2h)$$

$$\therefore \log(x+2h) = 2\log(x+h) - \log x - \left\{\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{h^4}{2(x+h)^2} + \frac{h^6}{3(x+h)^6} + \ldots\right\}$$

மாதிரி 5

p, q, x மூன்றும் மிகை எனில்

$$2(p-q)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$= (p+q+2x)\log\frac{p+x}{q+x}$$

எனக் காட்டுக.

$$2(p-q)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$= 2(p+q+2x)\left[\frac{p-q}{p+q+2x} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q+2x}\right)^5 + \ldots\right]$$

தொடர் (3) உடன் ஒப்பிட, இது

$$= 2\,(p + q + 2x) \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1 + \dfrac{p - q}{p + q + 2x}}{1 - \dfrac{p - q}{p + q + 2x}}$$

$$= (p + q + 2x) \log \frac{q + x}{q + x}.$$

மாதிரி 6

$$x > 0 \text{ எனில், } \log x = \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 - 1}{(x + 1)^3} + \ldots$$

எனக் காட்டு.

வலப்பக்கத் தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் இரண்டாகப் பிரிக்க, அத்தொடர்

$$= \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x + 1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x + 1}\right)^3 + \ldots$$

$$-\left[\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + 1}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= -\log\left(1 - \frac{x}{x + 1}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{x + 1}\right)$$

$$= -\log \frac{1}{x + 1} + \log \frac{x}{x + 1}$$

$$= \log\left[\frac{x}{(x + 1)} \cdot (x + 1)\right] = \log x.$$

இனி, இதில் வந்த இரு தொடர் விரிப்புக்களுக்குமான நிபந்தனைகள் முறையே

$$\left|\frac{x}{x + 1}\right| < 1, \quad \left|\frac{1}{x + 1}\right| < 1.$$

$x > 0$ எனில் இவை இரண்டும் உண்மை. எனில் விரிப்புக்கள் செல்லும்,

மாதிரி 7

$$\log_4 e - \log_{16} e + \log_{64} e - \log_{256} e + \dots = \frac{1}{2}$$

எனக் காட்டு.

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ என்பதால், தரப்பட்ட தொடரைப் பின் வருமாறு எழுதலாம் :

$$\frac{1}{\log_e 4} - \frac{1}{\log_e 16} + \frac{1}{\log_e 64} - \frac{1}{\log_e 256} + \dots$$

$$= \frac{1}{\log_e 4} - \frac{1}{\log_e (4)^2} + \frac{1}{\log_e (4^3)} - \frac{1}{\log_e (4^4)} + \dots$$

$$= \frac{1}{\log_e 4} - \frac{1}{2\log_e 4} + \frac{1}{3\log_e 4} - \frac{1}{4\log_e 4} + \dots$$

$$= \frac{1}{\log_e 4}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{\log_e 4} \cdot \log 2 = \log_4 2 = \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot$$

பயிற்சி 4—1

1. $\log(1 + 3x + 2x^2) = 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{17}{8}x^4 + \dots$ எனக் காட்டு. பொதுஉறுப்பு என்ன ? xன் மீதான நிபந்தனை என்ன ?

2. $\log \dfrac{1 + 3x}{1 - 2x} = 5x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{2}x^3 - \frac{65}{4}x^4 \dots +$ எனக் காட்டு. x^n கெழு என்ன ? x-ன் மீதான நிபந்தனை என்ன?

3. $\log \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ ஐ x-ன் ஏறுபடியில் விரித்து, $4m$ என்ற வடிவத்தில் n இருந்தால் x^nன் கெழு $\dfrac{3}{n}$ எனவும் மற்ற மடி x^nன் கெழு $-\dfrac{1}{n}$ எனவும் காட்டு.

4. $\log(1-x+x^2)$ ஐ விரித்து, 3-ன் மடங்கான x-ன் படிகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $\dfrac{2}{3}\log 2$ எனக் காட்டு.

5. $\log \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$ ன் விரிப்பில் n ஒற்றைப்படை எனில், x^nன் கெழு $\dfrac{1}{n}$: $n = 4p$ எனில் அது 0 ; $n = 4p+2$ எனில் அது $\dfrac{2}{n}$ எனக் காட்டு. (p முழுவெண்).

6. α, β என்பவை $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால், நிறுவுக :

$$-\log_e(1-px+qx^2) = (\alpha+\beta)x + \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2 + \ldots + \frac{1}{n}(\alpha^n+\beta^n)x^n + \ldots$$

7. $$\log_e a - \log_e b = 2\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \ldots\right]$$

எனக் காட்டு. மேலும் : $\log_e 2 = 0{\cdot}69315$, $\log_{10} e = 0{\cdot}43429$ எனில் $\log_e 3$, $\log_{10} 3$ ஆகியவற்றைக் காண்.

8. $\dfrac{1001}{999}$ என்பதன் இயற்கை மடக்கையை 4 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய்க் காண்.

9. $$\log 50 - \log 49 = \mu\left[\frac{1}{50} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{50^2} + \ldots\right]$$

எனக் காட்டு. $\log_{10} 2 = 0{\cdot}301030$, $\mu = 0{\cdot}434294$ எனில் $\log_{10} 7$-ன் மதிப்பை 5 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குக் காண்.

10. $$\log \frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right]$$

எனக் காட்டு. $\log_e 2 = 0{\cdot}69315$ எனில், 4 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாக $\log_e 17$, $\log_e 3$ ஐக் காண்.

11. $$\log \frac{n+1}{n-1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^5 + \dots$$

எனக் காட்டு. $\log \frac{4}{5}$ ஐ 4 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குத் திருத்தமாய்க் காண்.

12. $$\log \frac{6}{5} = 2\left[\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5} + \dots\right]$$ எனக் காட்டி $\log \frac{6}{5}$ ஐ 4 பதின் பகுப்பிடங்களுக்குக் காண்.

13. $$\log(n+1) - \log(n-1) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \dots\right)$$

என விரித்துக் காட்டு. log 10-ன் மதிப்பைக் காண்.

14. $\log \frac{128}{125} = 0{\cdot}023716$ எனக் காட்டு. ($\log 2 = 0{\cdot}603147$ எனக் கொள்.)

15. $$6\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \dots\dots \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} + \dots\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1).9^{2n+1}} + \dots\right]$$

$$= \log_e 10 = 3\log_e 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

எனக் காட்டு.

16. $\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} - \dots = \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6^3} + \dots$

நிறுவுக : [17 — 29]

17. $\log x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$+\frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \dots$$

18. $\log x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \dots$

19. $x\log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(1 + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x^4} + \dots\right),\ |x| > 1$

20. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \dots = \log\frac{3}{2}$

21. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{4\cdot 5^4} + \dots = \log\frac{5}{4}$

22. $1 + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \frac{1}{7\cdot 2^6} + \dots = \log 3$

23. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{4\cdot 4^4} + \dots = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 3^2}$

$$+\frac{1}{3\cdot 3^3} - \frac{1}{4\cdot 3^4} + \dots$$

24. $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{4^2} + \dots$

$$= \frac{1}{2}\log_e 12$$

25. $\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{9^2} + \dots$

$$= 9\log 3 - 12\log 2.$$

26. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \dots$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \dots,\ (x>1)$$

27. $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{9^2}$

$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{9^3} + \dots = \log 3 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}$

$+ \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots$

28. $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{81} + \dots = \frac{1}{2}$

$+ \log \frac{3}{2}$

29. $\frac{3}{10}\left[\log 10 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2^{14}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2^{21}} + \dots\right]$

$= \log 2$

30. $y = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \dots$ எனில்

$x = y + \frac{y^3}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$ எனக் காட்டு.

31. $x^2 y = 2x - y$, $x^2 < 1$ எனில்

$y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + \dots = 2 \left(x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \right.$

எனக் காட்டு.

32. $-1 < x < \frac{1}{3}$ எனில் நிறுவுக.

$\frac{2x}{1-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^3 - \dots$

$= 2\left(x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots\right)$

33. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$

$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^3} + \dots\right)$

எனக் காட்டு.

34. x, y, z என்பவை அடுத்தடுத்த மூன்று முழு எண்கள் எனில் $\log y = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2xz+1}$

$+ \frac{1}{3(2xz+1)^3} + \frac{1}{5(2xz+1)^5} + \dots$ எனக் காட்டு.

35. $2\log x - \log(x+1) - \log(x-1) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4}$

$+ \frac{1}{3x^6} + \dots (x > 1)$ எனக் காட்டு.

36. $|x| < 1, f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ எனில்

$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ எனக்காட்டு.

37. $\frac{1}{\log_e 2} = 1 + \frac{\log_e 2}{2!} + \frac{(\log_e 2)^2}{3!} + \dots$ எனக் காட்டு.

38. $\log_3 e - \log_9 e + \log_{27} e - \log_{81} e + \dots = \log_3 2$ எனக் காட்டு.

39. $x\log_a e + x^2\log_a^2 e + x^3\log_a^3 e + \dots$

$= \log_a\left(\frac{1-x}{1}\right)$ எனக் காட்டு.

40. $\log(x+n) = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$+ \log\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2+x}\right)$

$+ \log\left(1 + \frac{1}{(n-1+x)}\right)$ எனக் காட்டு.

41. π-யின் முழு எண் மடங்காக θ இல்லை எனில்,

$\log(\operatorname{cosec}\theta) = \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\cos^4\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta + \dots$

எனக்காட்டு.

42. $\frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^4\theta + \frac{1}{6}\sin^6\theta + \ldots$

$$= 2\left[\tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^6\frac{\theta}{2} + \frac{1}{5}\tan^{10}\frac{\theta}{2} + \ldots\right]$$

எனக் காட்டு.

விடைகள் 4—1

1. $(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n+1}{n}\cdot x^n$; $|x| < \frac{1}{2}$

2. $(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{n} + \frac{2^n}{n}$; $|x| < \frac{1}{3}$

7. $\log_e 3 = 1{\cdot}09861$, $\log_{10}3 = 0{\cdot}47712$

9. $\log_{10}7 = 0{\cdot}84510$

10. $\log 17 = 2{\cdot}8334$, $\log 3 = 1{\cdot}0986$

11. $\log\frac{4}{5} = 0{\cdot}2877$

12. $\log\frac{6}{5} = 0{\cdot}1823$

13. $\log 10 = 2{\cdot}30256$.

4·5 தொடர் கூட்டல் — தொடர்ச்சி

பல நேரங்களில், கூடுதல் காணவேண்டிய தொடரின் உறுப்புக்களை பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டியிருக்கும். அப்படிப் பிரித்து அதன் பிறகு மடக்கைத் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்திக் கூடுதல் காணும் முறையைப் பின்வரும் மாதிரிகள் தெளிவாக்கும்.

மாதிரி 8

முடிவிலிவரை கூட்டுக :

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots$$

இத் தொடரின் கூடுதலை S என்போம். ஒவ்வொரு உறுப்பையும் இரண்டாகப் பிரித்து இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$\therefore \quad 1 - S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$= \log 2$$

$$\therefore \quad S = 1 - \log 2.$$

மாதிரி 9

முடிவிலிவரை கூட்டுக :

$$\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{8}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

தொடரின் n-ஆவது உறுப்பை u_n எனவும், கூடுதலை S எனவும் கொள்ள,

$$u_n = \frac{2 + (n-1)\,3}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)} = \frac{3n-1}{(2-1)\,2n\,(2n+1)}.$$

இதைப் பகுதிபின்னங்களாகப் பிரிக்க,

$$u_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2n-1)} + \frac{1}{2n} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(2n+1)}.$$

எனவே, $u_1 = \frac{1}{4} \cdot \quad + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$$u_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

$$u_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{7}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \log 2 + 1 = \frac{5}{4} - \log 2.$$

$$S = \frac{5}{4} - \log 2.$$

மாதிரி 10

முடிவிலிவரை கூட்டுக :

$$\frac{x}{1\cdot3} + \frac{x^2}{3\cdot5} + \frac{x^3}{5\cdot7} + \dots$$

பொதுவுறுப்பு

$$u_n = \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot x^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot x^n$$

$$\therefore \quad u_1 = \frac{1}{2}\cdot \quad x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot x^2$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot x^3$$

நெடுக்குக் கூட்ட, கூடுதல்

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \dots\dots\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \dots\dots\right]$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}\left[x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 + \dots\dots\right]$$

$$-\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{5}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{5}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{7}+\dots\dots\right]$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{4}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[2+\frac{x-1}{\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right].$$

பயிற்சி 4—2

முடிவிலிவரை கூட்டுக.

1. $\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\dots$

2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\dots$

3. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot7}+\dots$

4. $\frac{4}{1\cdot3}-\frac{6}{2\cdot4}+\frac{12}{5\cdot7}-\frac{14}{6\cdot8}+\dots$

5. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\dots$

6. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+$

7. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{5\cdot6\cdot7}+\ldots$

8. $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}+\ldots$

9. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5\cdot7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7\cdot9}\right)+\ldots$

10. $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\frac{1}{8\cdot9.10}+\ldots$

11. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8}+\ldots$

12. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3.4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{9}{5\cdot6\cdot7\cdot8}+\ldots$

13. $\frac{x}{1\cdot2}-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}-\frac{x^4}{4\cdot5}+\ldots$

14. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{3\cdot4}+\frac{x^2}{5\cdot6}+\frac{x^3}{7\cdot8}+\ldots$

15. $\frac{x^2}{1\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot5}+\frac{x^6}{5\cdot7}+\ldots$

16. $\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{2x^3}{3\cdot4}+\frac{3x^4}{4\cdot5}+\ldots$

17. $\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots$

18. $\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots$

19. $\sum_{1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n(n+2)}x^n$

20. $\sum_{1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{n(n+3)}x^n$

21. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}$

22. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+2)} x^n$

23. $\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n)!}\right) x^{2n+1}$

விடைகள் 4—2

1. $2 \log 2 - 1$
2. $\log 2$
3. $2 - \log 2$
4. $\log 2$
5. $\log 2 - \frac{1}{2}$
6. $2 \log 2 - \frac{5}{4}$
7. $\frac{5}{2} - 3 \log 2$
8. $\frac{3}{4} - \log 2$
9. $2 \log 2 - 1$
10. $\frac{1}{2}\left(\log 3 - 1\right)$
11. $\frac{2}{3} \log 2 - \frac{5}{12}$
12. $\frac{1}{6} \log 2 - \frac{1}{24}$
13. $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \log (1 + x) - 1$
14. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{2x} \log (1 - x)$
15. $\frac{1}{4}\left(2 + \frac{x^2 - 1}{x} \log \frac{1 + x}{1 - x}\right)$
16. $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \log (1 - x) - 2$
17. $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \log 2$
18. $4 \log \frac{3}{2} - 1$

19. $\frac{15 - x^2}{2 + x^2} \log(1 - x) + \frac{x^2 + 5x - 10}{4x(x - 1)}$

20. $\frac{x}{(1 - x)^2} - \frac{4}{9e}(2x^3 + 3x^2 + 6x) - 3 \log(1 - x)$

21. $2 \log \frac{2}{3} + 1$

22. $\frac{x^2}{(1 - x)^2} - \frac{1}{2} \log(1 - x)$

$$- \frac{3}{x^2}\left[\log(1 - x) + x + \frac{x^2}{2}\right]$$

23. $\frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{x}{2}(e^x + e^{-x})$.

4·6 தோராயங்கள்

மாதிரி 11

x மிகச் சிறியதெனில், தோராயமாக

$$\log \frac{1 + 2e^x}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9} \text{ எனக் காட்டு.}$$

$$\log \frac{1 + 2e^x}{3} = \log \frac{1 + 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)}{3}$$

$$= \log\left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} + \dots\right)$$

$$= \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} + \dots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3} + \dots\right)^2 \quad \dots$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{9} + \dots$$

x மிகச்சிறியதாகையால், 3-க்கு மேற்பட்ட x-ன் அடுக்குகளை ஒதுக்கிவிட, தோராயமாக

$$\log \frac{1 + 2e^x}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9}.$$

மாதிரி 12

n மிகப்பெரியதெனில், e^x, $\log(1+x)$ ஆகியவற்றின் விரிப்புக்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு காட்டுக :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{7}{16n^3}+\dots\right)$$

இதைக் கொண்டு,

$$2e = (1\cdot1)^{10} + (0\cdot9)^{-10}$$

என்ற சமன்பாடு e-யின் மதிப்பைத் தோராயமாகத்தருகிறது என்றும், பிழை 0·46% அளவினதாகும் என்றும் காட்டு.

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\dots\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\dots$$

எனவே, $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\dots}$$

$$= e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\dots}$$

$$= e\left[1+\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\dots\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\dots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2n}+\dots\right)^3+\dots\right]$$

$$= e\left[1-\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4\cdot2!}\right)\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot2!}+\frac{1}{8\cdot3!}\right)\frac{1}{n^3}+\dots\right]$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{7}{16n^3}+\dots\right]$$

இதில் $n = 10$ என இட,

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = e\left[1 - \frac{1}{20} + \frac{11}{2400} - \frac{7}{16000} + \cdots\right]$$

அ—து, $(1 \cdot 1)^{10} = 0 \cdot 9542\, e.$

$n = -10$ என இட,

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{-10} = e\left[1 + \frac{1}{20} + \frac{11}{2400} + \frac{7}{16000} + \cdots\right]$$

அ—து, $(0 \cdot 9)^{-10} = 1 \cdot 055\, e.$

$$\therefore \quad (1 \cdot 1)^{10} + (0 \cdot 9)^{-10} = [0 \cdot 9542 + 1 \cdot 055]\, e = 2 \cdot 0092\, e.$$

எனவே, $(1 \cdot 1)^{10} + (0 \cdot 9)^{-10} \simeq 2e$ எனக் கொள்ளலாம். இதனால் ஏற்படும் பிழை $0 \cdot 0092e$. இது $2e$-யில் $0 \cdot 46\%$.

4·7 எல்லைகள்

மாதிரி 13

மதிப்பிடு : $\displaystyle \underset{x \to 1}{Lt} \frac{1 - x + \log x}{(1 - x)^2}$.

$x = 1 + h$ என இட, இது பின்வருமாறு மாறுகிறது :

$$\underset{h \to 0}{Lt} \frac{-h + \log(1 + h)}{h^2}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-h + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \cdots}{h^2}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{h^2} \cdot h^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{3} - \cdots\right)$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{3} - \cdots\right) (h \neq 0)$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \underset{x \to 1}{Lt} \frac{1 - x \log x}{(1 - x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

மாதிரி 14

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - e^{-2x}}{\log(1+x)}$

$$\text{இவ்வெல்லை} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1 - \left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \dots\right)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2 - 2x + \dots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots}$$

$$= 2.$$

மாதிரி 15

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to \infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

இவ்வெல்லையை l எனக் குறிப்போம். $x = \dfrac{1}{y}$ என இட,

$$l = \underset{y \to 0}{Lt} (1 + y + y^2)^{\frac{1}{y}}.$$

$$\therefore \log l = \underset{y \to 0}{Lt} \frac{1}{y} \log(1 + y + y^2)$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{1}{y} \cdot \left[y + y^2 - \frac{(y + y^2)^2}{2} + \frac{(y + y^2)^3}{3} - \dots\right]$$

$= \underset{y \to 0}{Lt} \dfrac{1}{y}$ [y + y-ன் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகள்]

$= \underset{y \to 0}{Lt}$ [1 + y-ன் மிகை அடுக்குகள்]

$= 1.$

$\therefore \quad l = e.$

பயிற்சி 4—3.

x சிறியதெனில் பின்வரும் தோராயச் சமன்பாடுகளைக் காண் [1 — 7].

1. $(1+x)^{1+x} = 1 + x - x\log(1-x)$

2. $x - \sqrt{1+x}\,\log(1+x) = \dfrac{x^3}{24}$

3. $e^{e^x} = e(1+x)$

4. $(1+x)^{\frac{1}{1-x}} = 1 + x + x^2 + \dfrac{3}{2}x^3$

5. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{24}x^2\right)$

6. $\dfrac{1}{\log(1+x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{24}x^2$

7. $\dfrac{e^{2x}\log(1+3x)}{1-4x} = 3x + \dfrac{27x^2}{2}$

8. 3-க்கு மேற்பட்ட x-ன் அடுக்குகளை விடுமளவுக்கு x சிறியதெனில் தோராயமாக $(1+x)^{1+x} = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ எனக் காட்டு. இதிலிருந்து $(1{\cdot}01)^{1\cdot01}$-இன் ஒரு தோராய மதிப்பு 1·0101005 எனக் காட்டு.

9. $\log y = 1 + 2x - 2x^2$, x மிகச் சிறியது எனில், x-ன் ஒரு தோராய மதிப்பை, $y = e\left(1 + 2x - \dfrac{8}{3}x^3\right)$ என்ற சமன்பாடு தரும் எனக் காட்டு.

10. $e^x = 1 + xe^{xy}$, x சிறியதெனில், $y \simeq \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{x}{4\,!}$ எனக் காட்டு.

11. p சிறியதெனில், $x\log x + x = 1 + p$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் தோராயமாக $1 + \dfrac{p}{2}$ எனக் காட்டு.

12. x, y சிறியவை, அவற்றின் 3-க்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை விடலாம் எனில்

$$\frac{(1+y)^x}{(1+x)^y} = 1 - \frac{1}{2}xy(y-x)$$

எனக் காட்டு.

n மிகப் பெரியதெனில் பின்வரும் தோராயச் சமன்பாடுகளை நிறுவுக. [13 — 17]

13. $$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = e\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)$$

14. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e\left(1+\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n^3}\right)$$

15. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)$$

16. $$\left(n-\frac{1}{3n}\right)\log\frac{n+1}{n-1} = 2+\frac{8}{45n^4}$$

17. $$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n} = e^2\left(1+\frac{2}{3n^2}\right)\cdot$$

18. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ என்பதைப் பயன் படுத்தி, தோராயமாக

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$= 2e^{-x}\left[1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right)\right]$$

எனக் காட்டு.

பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடு [19 — 38].

19. $$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{e^{-x}-1+x}{x-\log(1+x)}$$

20. $$\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

21. $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{\log x}{x^2 - 3x + 2}$

22. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\log x - \sqrt{x - 1} + 1 - \log 2}{(x - 2)^3}$

23. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1 - \log(1 + x)}{x^2}$

24. $\underset{x \to 0}{Lt} \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1}{x}}$

25. $\underset{x \to \infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}\right)^{x^2 + 7x}$

26. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\log(1 + x^2)}$

27. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{xe^x - \log(1 + x)}{x^2}$

28. $\underset{x \to 1}{Lt} \left[\log\left(x^{\frac{5}{7}} - 1\right) - \log\left(x^{\frac{3}{7}} - 1\right)\right]$

விடைகள்

19. 1 20. $\dfrac{3}{4} - \log 2$

21. -1 22. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\log x - 1$

23. 1 24. e^2

25. e^3 26. 0

27. $\dfrac{3}{2}$ 28. iog $\dfrac{5}{3}$

(ஆ). வகைநுண் கணிதம்

(DIFFERENTIAL CALCULUS)

5. சார்புகளும் எல்லைகளும்
(Functions and Limits)

5.1 மாறிகளும் மாறிலிகளும் (Variables and Constants)

ஆண்டுகள் செல்லச்செல்ல, மனிதனின் வயதும் மாறிக் கொண்டே வருகிறது. ஆனால், மார்க்கண்டேயனின் வயது என்றும் 16 தான் என்பார்கள். மார்க்கண்டேயனின் வயது மாறிலி; மற்றவர்களின் வயதுகள் மாறிகள்.

ஒவ்வொரு சவரனில் உள்ள கிராம்களின் எண்ணிக்கை என்றும் எட்டுதான். ஆனால் ஒரு சவரன் தங்கத்தின் விலை நிலையாக இருப்பதில்லை. முன்னது மாறிலி; பின்னது மாறி.

இருகோடுகள் வெட்டிக்கொள்வதால் ஏற்படும் கோணங் களின் அளவுகள் வெவ்வேருக இருக்கலாம். அவை மாறிகள். ஆனால் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் எப்பொழுதும் 180° தான். இது மாறிலி.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணித வரம்பிற்குள் மதிப்பில் மாறும் தன்மை கொண்டவற்றை மாறிகள் எனவும், மாருத்தன்மை கொண்டவற்றை மாறிலிகள் எனவும் குறிப்போம்.

பொதுவாக, ஆங்கில எழுத்துவரிசையின் முதற்பகுதியில் வரும் $a, b, c, \ldots$ என்ற எழுத்துக்களால் மாறிலிகளாயும், இறுதியில் வரும் t, u, v, w, x, y, z என்ற எழுத்துக்களால் மாறிகளையும் குறிப்பிடுவோம்.

5.2 சார்புகள் (Functions)

ஒரு மனிதனின் வயது இன்று 20 ஆனல், இன்னும் 5 ஆண்டுகள் கழித்து அவன் வயது 25. பொதுவாக, இன்றிலிருந்து x ஆண்டுகள் கழித்து அவன் வயது $(20 + x)$. வயதை y எனக் குறித்தால், $y = 20 + x$. x தெரிந்தால் y கிடைக்கும். y ன் மதிப்பு xஐச் சார்ந்தது. எனவே, yஐ xன் சார்பு என்போம்.

இவ்வெடுத்துக்காட்டில், ஒருவனுடைய வயதைப் பொருத்துக் காலம் ஓடிக் கொண்டிருக்கிறது என்பதைவிட, ஆன காலத்தைப் பொருத்து வயது மாறுகிறது என்று சொல்வதே மிகுந்த பொருளுடன் இருப்பதால், காலத்தை (x) சாராத மாறி (Independent variable) எனவும், வயதை (y) சார்ந்த மாறி (Dependent variable) எனவும் கூறுவோம். அதை $y = f(x)$ எனக் குறிப்போம். ஆயினும், $y = x + 20$ என்பதிலிருந்து, $x = y - 20$ என, xஐ yன் சார்பாகவும் எழுதலாம். அதாவது, $x = \phi(y)$. மேலும், இதையே $x - y + 20 = 0$ என எழுதி, $F(x, y) = 0$ எனவும் குறிக்கலாம். இதில் $F(x, y)$ என்பது, x, y என்ற இரு மாறிகளைப் பொருத்த ஒரு சார்பைக் குறிக்கும்.

இவ்வாறு, x, y என்ற இரு மாறிகளில் ஒன்று மற்றதைச் சார்ந்தது என்பதை $y = f(x)$, அல்லது, $x = \phi(y)$ அல்லது, $F(x, y) = 0$ எனக் குறிப்போம்.

சார்புகளுக்கு வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

ஒரு சதுரத்தின் பரப்பு அதன் பக்கத்தின் சார்பு. ($A = x^2$).

ஒரு வண்டி கடந்த தூரம் அதன் நிலையான வேகத்தையும் எடுத்துக் கொண்ட காலத்தையும் சார்ந்தது. ($s = ut$).

தனி ஊசலின் அலைவுநேரம் அதன் நீளத்தையும் புவி ஈர்ப்பு விசையையும் சார்ந்தது. $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$.

ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு அதன் நீள, அகல, உயரத்தின் சார்பு. ($V = xyz$)

5.3 சார்பு வகைகள்

(1) ஒற்றை மாறிச் சார்பும் (Function of a single variable and Function of several variables).

ஒரு சார்பு ஒரே மாறியைச் சார்ந்ததெனில் அது ஓர் ஒற்றை மாறிச் சார்பாகும். ஒரு சார்பு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புக்கு ஏற்பத் தன் மதிப்பைப் பெறும் எனில், அது ஒரு பல மாறிச் சார்பாகும். u என்பது, x, y, z என்ற மாறிகளின் சார்பு என்பதை $u = f(x, y, z)$ எனக் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் முன் பத்தியில் கூறப்பட்டன. அவற்றில் A, ஒரே மாறியின் சார்பு. s, T இரண்டும் இரு மாறிகளின் சார்புகள்; V, மூன்று மாறிகளின் சார்பு.

(2x ஒற்றை மதிப்புச் சார்பும் பன்மதிப்புச் சார்பும் (Single valued and Multivalued Functions.)

y என்பது xன் சார்பாக இருக்கட்டும். xன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் y ஒவ்வொரு மதிப்பையே பெறுமானால், y என்பது xன் ஓர் ஒற்றை மதிப்புச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $y = \sin x$, $y = 3x^2 + 2x - 1$.

xன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் y ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்பைப் பெறுமானால், y என்பது xன் ஒரு பன்மதிப்புச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு: $y^2 = x$ ($y = \pm \sqrt{x}$; y ஓர் இரு மதிப்புச் சார்பு), $y = \sin^{-1} x$ (y ஓர் எண்ணில் மதிப்புச் சார்பு).

(3) ஒற்றைச் சார்பும் இரட்டைச் சார்பும் (Odd and Even Functions).

xன் சார்பில் xக்கு $-x$ எனப் பிரதியிட்டுச் சார்பு மாறவில்லை எனில் அது ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனவும், சார்பின் குறி மட்டும் மாறியதெனில் அது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனவும் கூறப்படும்.

அதாவது, $f(-x) = f(x)$, எனில் $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு. $f(-x) = -f(x)$ எனில், $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு. $f(x) \neq \pm f(-x)$ எனில், $f(x)$ ஒற்றையுமல்ல, இரட்டையுமல்ல.

எ—டு : இரட்டைச் சார்புகள் : x^2, $\cos x$. $\sin^2 x$, $x \tan x$, $(x^3 - x)^2$. $\cosh x$.

ஒற்றைச் சார்புகள் : x, $\sin x$, $\tan x$, $x \cos x$.

ஒற்றையும் இரட்டையும் அல்லாத சார்புகள் : $x + x^2$ $a \cos x + b \tan x$.

இரு ஒற்றைச் சார்புகளைப் பெருக்கக் கிடைப்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பு என்பதையும், ஓர் ஒற்றைச் சார்பையும் ஓர் இரட்டைச் சார்பையும் பெருக்கக் கிடைப்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு என்பதையும் கவனிக்கலாம்.

(4) வெளிப்படு, உட்படு சார்புகள் (Explicit and Implicit Functions)

x, y ஆகியவற்றின் சார்புத் தொடர்பில் xக்கு எந்த மதிப்பையும் நேரடியாகப் பிரதியிடுவதன்மூலம் yன் மதிப்பு உடனே கிடைக்குமானால், yஐ xன் வெளிப்படு சார்பு என்கிறோம்.

எ—டு : $y = 1 + \cos x$, $y = x^5 + \sec^2 x$. இவை $y = f(x)$ என்ற வடிவத்தில் இருப்பதைக் காணலாம்.

x, y ஆகியவற்றின் சார்புத் தொடர்பில் xன் மதிப்பை இட்டவுடன் yன் மதிப்பு உடனே கிடைக்காமல், இயற்கணித முறைகளைக் கையாண்ட பின்னரே கிடைக்கக்கூடுமானால், yஐ xன் உட்படு சார்பு என்போம்.

எ—டு : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$,

$$x^y = y^x$$

இச்சார்புத் தொடர்புகள் $F(x, y) = 0$ என்ற வடிவத்திலிருப்பதும், $y = f(x)$ என xஐயும் yஐயும் எளிதில் பிரித்து எழுத முடியாமலிருப்பதையும் காண்க.

(5) நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse Functions)

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் xன் சார்பாக y தரப்பட்டுள்ளது. இதனைத் தீர்த்து, yன் சார்பாக xஐ எழுதினால் x, yன் நேர்மாறு சார்பாக எழுதப்பட்டது என்று சொல்கிறோம். இதற்கான குறியீடு : $x = f^{-1}(y)$.

எ—டு : $y = f(x) = a^x$ எனில் $x = f^{-1}(y) = \log_a y$;

$$y = f(x) = \frac{2+x}{x} \text{ எனில் } x = f^{-1}(y) = \frac{2}{y-1};$$

$$y = f(x) = \sin x \text{ எனில் } x = f^{-1}(y) + \sin^{-1} y.$$

(6) விகிதமுறு சார்பும் இயற்சார்பும் கடந்த சார்பும் (Rational, Algebraic and Transcendental Functions)

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ என்பவை மாறிலிகள் எனில், $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ என்பது xல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை (Polynomial). ஒரு பின்னத்தின் பகுதி, தொகுதி இரண்டும் xல் பல்லுருப்புக் கோவைகளெனில் அது xல் ஒரு விகிதமுறு சார்பு எனப்படும்.

எ—டு : $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 4x^2 + 1}$.

$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ என்பவை xல் விகிதமுறு முழுச்சார்புகளாகவும் (பல்லுறுப்புக் கோவைகள்), y என்பது, $p_0 + p_1 y$

$+ p_2y^2 + ... + p_n y^n = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலுல் தரப்படுவ தாகவும் இருப்பின், y ஓர் இயற்சார்பு எனப்படும்.

எ—டு : $(x^2 + 1) y^3 - 4y^2 + x^3 = 0.$

இயற்சார்புகளாக இல்லாதவை கடந்த சார்புகள் எனப் படும்.

எ—டு : $\sin x,\ e^x,\ \log x,\ \cos^{-1} x.$

(7) அடுக்குக் குறிச் சார்பும் மடக்கைச் சார்பும் (Exponential and Logarithmic Functions)

$y = e^x$ என்பது xன் அடுக்குக் குறிச் சார்பு. $y = \log_e x$ என்பது xன் மடங்கைச் சார்பு.

வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் : $y = a^{2x},\ y = 10^x$;

$y = \log_e (x^2 + 2x + 5),\ y = 4 \log_a 3x.$

இயற்கணிதப் பகுதியில் (Algebra) இவை விரிவாகக் கூறப் பட்டுள்ளன.

(8) வட்டச் சார்புகளும் அதிபரவளைவுச் சார்புகளும் (Circular and Hyperbolic Functions)

$\sin x$, $\cos x$, மற்றும் இவற்றின் அடிப்படையில் வரையறுக்கப்பட்ட $\tan x$ முதலிய எல்லா திரிகோணத் விகிதங்களும், (Trigonometric ratios) வட்டச் சார்புகள் எனப்படும்.

$$\sin h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$\tan h\, x = \dfrac{\sin h\, x}{\cos h\, x}$ என்ற விகிதங்களும், இவற்றின் தலைகீழ் விகிதங்களான (reciprocal ratios) $\operatorname{cosec} h\, x$, $\sec h\, x$, $\cot h\, x$ என்பவையும் அதிபரவளைவுச் சார்புகள் எனப்படும்.

(9) மீள் சார்பு (Periodic Functions)

xன் எல்லா மதிப்புக்கும் $f(x + c) = f(x)$ எனில், $f(x)$ ஒரு மீள் பார்வையாகும். $f(x)$ன் காலம் (Period) 2.

எ—டு : $\sin x$, $\cos x$ முதலிய எல்லா வட்டச் சார்புகளும் ; அவற்றின் காலம் 2π.

மாதிரி 1

$f(x) = (x+1)(3x^2-5)$ எனில், $f(1), f(2), f(0), f(-1), f(y), f(x+1)$ ஆகியவற்றைக் காண்.

$$f(x) = (x+1)(3x^2-5).$$

$x = 1$ என இட, $f(1) = (1+1)(4 \cdot 1^2 - 5) = -4.$

இதேபோல், $f(2) = (2+1)(3 \cdot 2^2 - 5) = 21,$

$$f(0) = 1.\ (-5) = -5,$$

$$f(-1) = (-1+1)[3(-1)^2-5] = 0,$$

$$f(y) = (y+1)(3y^2-5),$$

$$f(x+1) = [(x+1)+1]\ [3(x+1)^2 - 5] = (x+2)(3x^2+6x-2).$$

மாதிரி 2

$\phi(x) = \log \dfrac{1-x}{1+x}$ எனில், $2\phi(x) = \phi\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ எனக் காட்டு.

$$\phi(x) = \log \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\therefore \quad \phi\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log \frac{1 - \dfrac{2x}{1+x^2}}{1 + \dfrac{2x}{1+x^2}} = \log \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$$

$$= 2 \log \frac{1-x}{1+x}$$

$$= 2\,\phi(x).$$

$$\therefore \quad \phi\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\,\phi(x).$$

மாதிரி 3

$x^3 + y^3 - 2x^2 - 3xy = 0$ எனில், $x = 2$ ஆக இருக்கும் போது y-ன் மதிப்பென்ன ?

தரப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x = 2$ என இட,

$$2^3 + y^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2y = 0$$

$$\therefore \quad y(y^2 - 6) = 0$$

$$\therefore \quad y = 0, \pm\sqrt{6}.$$

பயிற்சி 5—1.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ எனில், $f(\pm 2)$, $f(\pm 1)$, $f(0)$ ஆகியவற்றைக் காண்.

2. $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - x + 1$ எனில், $f(0, 0)$, $f(1, -1)$, $f(x, x)$, $f(y, x)$, $f(a, 0) + f(0, a)$ ஆகியவற்றைக் காண்.

3. $f(x) = \tan x$ எனில், $f(x \pm y) = \dfrac{f(x) \pm f(y)}{1 \mp f(x) f(y)}$ எனக் காட்டு.

4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ எனில், $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ எனக் காட்டு.

5. $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$ எனில் $x = f(y)$ எனக் காட்டு.

6. $f(x) = \log_a x$ எனில்,

$$f(mnp) = f(m) + f(n) + f(p),$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n),$$

$$f(x^q) = q\, f(x)$$

எனக் காட்டு

7. $f(x) = a^x$ எனில்,

$$f(m + n + p) = f(m)\, f(n)\, f(p),$$

$$f(m - n) = f(m)/f(n),$$

$$f(q^x) = [f(x)]^q$$

எனக் காட்டு.

8. $f(x) = a \sin^2 x + b \cos^4 x + c \tan^6 x + d$ எனில்,
$f(x) = f(\pi + x) = f(\pi - x)$ எனக் காட்டு.

9. பின்வரும் ஒவ்வொன்றும் x-ன் ஒற்றைச் சார்பா, இரட்டைச் சார்பா, இரண்டும் அல்லாததா எனக் காண்.

(i) $x \sin x$, (ii) $\operatorname{cosec}^2 x$, (iii) $\dfrac{\tan x}{x^2}$, (iv) $\dfrac{\sec x}{x}$,

(v) $e^x + e^{-x}$, (vi) $\sin x + \cos x$.

10. பின்வருவனவற்றில் x-ஐ y-ன் சார்பாக எழுது.

(i) $y = x^4$, (ii) $y = 1 - \sqrt{x}$,

(iii) $y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$, (iv) $y = a \tan^2 x$,

(v) $y = \sqrt{2x - x^2}$, (vi) $y = \frac{2x}{x-1}$.

11. மேற் கணக்கின் ஒவ்வொரு துணைப் பிரிவிலும் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y-க்கு எத்தனை மதிப்புக்கள் என்றும், y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் x-க்கு எத்தனை மதிப்புக்கள் என்றும் எழுது.

விடைகள் 5—1

1. 4, — 12, 3, 1, 4.
2. 1, 4, $2x^2 - x + 1$, $2y^2 - xy + x^2 - y + 1$, $3a^2 + 2$.

9. (i) இரட்டை, (ii) இரட்டை (iii) ஒற்றை (iv) ஒற்றை, (v) இரட்டை (vi) இரண்டு மற்றது.

10. (i) $x = \sqrt[4]{y}$, (iii) $x = (y - 1)^2$,

(iii) $x = 3 \sin y$, (iv) $x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{y}{a}}$,

(v) $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$, (vi) $x = \frac{y}{y-4}$.

11. (i) 1, 4 (ii) 2, 1
(iii) எண்ணிலி, 1 (iv) 1, எண்ணிலி
(v) 2, 2 (vi) 1, 1.

5·4 எல்லைகள் (Limits)

மாறியின் எல்லை. x என்ற ஒரு மாறி, ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி, எண்ணற்ற மதிப்புக்களை ஒன்றன்பின் ஒன்றாக அடைவதாகக் கொள்வோம். a ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணாகவும், ϵ ஏதேனும் ஒரு மிகச் சிறிய மிகையெண்ணாகவும் இருக்கட்டும். x, a இரண்டுக்குமான தனி மாறுபாட்டை $|x - a|$ எனக் குறிப்போம்.

ε எவ்வளவு சிறியதாயினும், $|x-a| < \varepsilon$ ஆக இருக்குமாறு xன் மதிப்பு a ஐ நெருங்கி வரக்கூடுமெனில், x என்பது a வை எல்லை மதிப்பாக அடைகிறது என்கிறோம். இதை, ' $x \to a$, அல்லது, ' எல்லை $x = a$ ' அல்லது, ' limit $x = a$ ' அல்லது, ' $Lt\, x = a$ ' எனக் குறிப்போம்.

சார்பின் எல்லை : $y = (\frac{1}{2})^x$ என்ற சார்பைக் காண்போம்: x மிகை எனவும் எண்ணிலிக்கு (∞) வளர்ந்து கொண்டே வருவதாயும் கொள்வோம். x ஐப் போதுமான அளவுக்குப் பெரியதாகக் கொண்டு, $(\frac{1}{2})^x$ ஐ, அதாவது y ஐ, பூச்சியத்திற்குத் தேவையான நெருக்கத்தில் கொண்டு வரலாம். எனவே, $y \to 0$. xன் மாற்றத்தையும் சேர்த்துச் சொன்னால், ' x, ∞ ஐ நெருங்கும் எல்லையில், y நெருங்கும் எல்லை 0 ' எனக் குறிப்பிடவேண்டும். இதற்கான குறியீடுகள் :

$$\underset{x \to \infty}{\text{எல்லை}}\, y = 0 \quad \text{அல்லது,} \quad \underset{x \to \infty}{\text{limit}}\, y = 0 \quad \text{அல்லது,} \quad \underset{x \to \infty}{Lt}\, y = 0.$$

பொதுவாக, $y = f(x)$ என்ற சார்பில், xன் மதிப்புக்களுக்குத் தகுந்த yன் மதிப்புக்களைக் காணலாம். x, ஒரு குறிப்பிட்ட a என்ற எண்ணை எல்லை மதிப்பாக அடையும் பொழுது, l வேறொரு l என்ற மதிப்பை நெருங்கி வரக்கூடும். அப்பொழுது, y ஒரு எல்லை மதிப்பை அடைகிறது என்றும், அவ்வெல்லை l என்றும் கூறுவோம்.

இதைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் :

ε என்ற மிகையெண் எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும், $|x - a| < \delta$ என இருக்கும் பொழுது, $|f(x) - l| < \varepsilon$ என இருக்குமாறு δ என்ற ஒரு மிகையெண்ணை அதற்கேற்ப நாம் காணமுடியும் என்பதே, a வை x எல்லையாக அடையும் பொழுது, l ஐ $f(x)$ எல்லையாக அடைவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதும் (Necessary and sufficient) ஆன நிபந்தனை ஆகும்.

மாதிரி 4.

வரையறையைப் பயன்படுத்தி

$$\underset{x \to 3.}{Lt}\,(2x + 1) = 7$$

எனக் காட்டு.

ε என்பது கொடுக்கப்பட்ட எவ்வளவு மிகச்சிறிய எண்ணுகவும் இருக்கட்டும். $|x - 3| < \delta$ என இருக்கும்பொழுது

$| (2x+1) - 7 | < \varepsilon$ என இருக்குமாறு ஒரு δ வை நாம் கண்டுபிடித்தாக வேண்டும்.

$$| (2x+1) - 7 | < \varepsilon$$

என்பதிலிருந்து கிடைப்பது

$$| x - 3 | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ எனக் கொண்டால் வரையறைப்படித் தேவையான நிபந்தனை நிறைவேற்றப்பட்டுவிடுகிறது. எனவே,

$$\underset{x \to 3}{Lt} (2x+1) = 7.$$

5·5 இந்த முறையில் எல்லைகளைக் காண்பது எப்பொழுதும் எளிதல்ல ; வேறு வழிகளை அடுத்துவரும் மாதிரிகளில் விளக்குவோம். அவற்றில் பின்வரும் தேற்றங்களும் பயன் படுத்தப்படும் :

தேற்றங்கள்

$$\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \alpha, \quad \underset{x \to a}{Lt} \phi(x) = \beta \text{ எனில்}$$

1. $\underset{x \to a}{Lt} [f(x) \pm \phi(x)] = \alpha \pm \beta$

2. $\underset{x \to a}{Lt} [f(x) . \phi(x)] = \alpha\beta$

3. $\underset{x \to a}{Lt} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \; (\beta \neq 0)$

4. $\underset{x \to a}{Lt} f[\phi(x)] = f(\beta).$

மாதிரி 5.

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 2}{Lt} [x^2 - 3x + 1].$

தேற்றம் 1 ஐப் பயன்படுத்த,

$$\underset{x \to 2}{Lt} [x^2 - 3x + 1] = \underset{x \to 2}{Lt} x^2 - \underset{x \to 2}{Lt} 3x + \underset{x \to 2}{Lt} 1.$$

தேற்றம் 2 ஐப் பயன்படுத்த, இது

$$= \left(\underset{x \to 2}{Lt}\ x\right)\left(\underset{x \to 2}{Lt}\ x\right) - 3\ \underset{x \to 2}{Lt}\ x + \underset{x \to 2}{Lt}\ 1$$

$$= 2 \times 2 - 3 \times 2 + 1 = -1.$$

மாதிரி 6.

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 1}{Lt}\ \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$.

இதில் $\underset{x \to 1}{Lt}\ (x^3 - x^2 + x - 1) = 0$, $\underset{x \to 1}{Lt}\ (x^2 - 1) = 0$.

எனவே, கோவை $\frac{0}{0}$ என்ற வடிவத்தைப் பெறுகிறது. இது தேரா வடிவம் (Indeterminate form) எனப்படும். கோவைக்கு எந்த மதிப்பையும் இவ் வடிவம் தெளிவாக்குவதில்லை. இச் சமயத்தில் தேற்றம் 3 ஆல் பயனில்லை. பகுதியையும் விகுதியையும் காரணிப்படுத்த,

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 1)}.$$

$\underset{x \to a}{Lt}\ f(x)$ என்பதன் வரையறையில், x, a வை நெருங்கி வருமே தவிர, $x = a$ என்று ஆவதில்லை. அ—து, $x - a \neq 0$. அதேபோல், இங்கு $x - 1 \neq 0$. எனவே, பகுதியிலும் விகுதியிலும் $(x - 1)$ என்ற காரணியை அடிக்கலாம். அவ்வாறு அடிக்க,

$$\underset{x \to 1}{Lt}\ \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \underset{x \to 1}{Lt}\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

வேறுமுறை : $x = 1 + h$ என இடு. $x \to 1$ எனில் $h \to 0$.

எனவே, $\underset{x \to 1}{Lt}\ \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ \frac{(1 + h)^3 - (1 + h)^2 + (1 + h) - 1}{(1 + h)^2 - 1}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ \frac{2h + 2h^2 + h^3}{2h + h^2} = \underset{h \to 0}{Lt}\ \frac{h(2 + 2h + h^2)}{h(2 + h)}.$$

$h \neq 0$ என்பதால், h ஆல் பகுதியையும்விகுதியையும் வகுக்க, இது

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2 + 2h + h^2}{2 + h} \to \frac{2}{2} = 1.$$

மாதிரி 7.

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{ax^2 + bx + c}{a' x^2 + b' x + c'}$.

$x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிடு. $x \to \infty$ எனில், $y \to 0$. எனவே,

$$\underset{x \to \infty}{Lt} \frac{ax^2 + bx + c}{a' x^2 + b' x + c'} = \underset{y \to 0}{Lt} \frac{\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c}{\frac{a'}{y^2} + \frac{b'}{y} + c'}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{a + by + cy^2}{a' + b'y + c'y^2} \quad (y \neq 0)$$

$$= \frac{a}{a'}.$$

5·6 சில செயல்முறை விதிகள் (Working rules)

மேற்கண்ட மாதிரிகளிலிருந்து பின்வரும் செய்முறை விதிகளை உய்த்துணரலாம்.

$x \to a$ என்ற நிலையில் ஒரு சார்பின் எல்லையைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

(i) சார்பின் பகுதி, விகுதி ஆகிய இரண்டில் ஒன்றேனும் பூச்சிய மதிப்பைப் பெறவில்லையெனில், நேரடியாக $x = a$ என இட்டு, எல்லை மதிப்பைக் காணலாம். அப்பொழுது, $k \neq 0$, எனில், $\frac{k}{0} = \infty$, $\frac{0}{k} = 0$ என்பதை நினைவில் நிறுத்தவும்.

(ii) சார்பின் பகுதி, விகுதி இரண்டும் 0 வடிவம் பெறுவதானல், பகுதி, விகுதி இரண்டையும் காரணிப்படுத்தி, $(x - a)^n$ என்ற பொதுக்காரணிகளை அடிக்கவும் ; பிறகு $x = a$ என இடவும். அல்லது, $x = a + h$ என இடுக. அப்பொழுது $h \to 0$. பகுதியிலும் விகுதியிலும் h^n என்ற பொதுக்காரணிகளை அடித்து, பிறகு $h = 0$ என இடுக.

(iii) $x \to \infty$ எனில் $x = \frac{1}{y}$ என இடுக. அப்பொழுது $y \to 0$.

5·7 சில நியம எல்லைகள் (Standard Limits)

1. ஓர் இயல்முறை எல்லை (An Algebraic limit) : எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணாக n இருப்பினும்

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

நிறுவல்

பிரிவு (i) : n ஒரு முழு வெண்ணாக இருக்கட்டும்.

$x = a + h$ என இட,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a} = \frac{(a+h)^n - a^n}{h}.$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தித் தொகுதியை விரிக்க, இது

$$= \frac{a^n + n\,a^{n-1}\,h + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,a^{n-2}\,h^2 + \dots\dots + h^n - a^n}{h}$$

$$= na^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,a^{n-2}\,h + \dots\dots + h^{n-1},\ (h \neq 0).$$

$x \to a$ எனில் $h \to 0$. இவ் வெல்லையில், முதலுறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் மறைகின்றன. எனவே,

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{h \to 0}{Lt} \left\{ na^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,a^{n-2}h + \dots\dots + h^{n-1} \right\}$$

$$= na^{n-1}.$$

பிரிவு (ii) : n ஒரு விகிதமுறு மிகை எண் என வை.

$n = \frac{p}{q}$; p, q மிகை முழு வெண்கள் எனக் கொள். $x = y^q$, $a = b^q$ என வை. $x \to a$ எனில் $y^q \to b^q$, அ-து, $y \to b$.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x - a} = \frac{(y^q)^{p/q} - (b^q)^{p/q}}{y^q - b^q} = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q};$$

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{y \to b}{Lt} \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} = \underset{x \to b}{Lt} \left[\frac{y^p - b^p}{y - b} \Big/ \frac{y^q - b^q}{y - b}\right]$$

$$= \left[\underset{y \to b}{Lt} \frac{y^p - b^p}{y - b}\right] \Big/ \left[\underset{y \to b}{Lt} \frac{y^q - b^q}{y - b}\right]$$

$= (p\, b^{p-1})/(q\, b^{q-1})$, பிரிவு (i)-லிருந்து.

$$= \frac{p}{q} (b^q)^{\left(\frac{p}{q} - 1\right)} = na^{n-1}.$$

பிரிவு (iii) : n ஒரு குறை மெய்யெண்ணாக இருக்கட்டும்.

$n = -m$, m ஒரு மிகை முழு வெண் அல்லது மிகை பின்னம் என வை.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} = \frac{a^m - x^m}{x^m a^m (x - a)}$$

$$= -\frac{1}{x^m a^m} \cdot \frac{x^m - a^m}{x - a};$$

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{Lt} \left(-\frac{1}{x^m a^m} \cdot \frac{x^m - a^m}{x - a}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^m} \underset{x \to a}{Lt} \frac{1}{x^m} \cdot \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$= -\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdot m\, a^{m-1},$$ பிரிவுகள் (i), (ii) ன் படி.

$$= -m\, a^{-m-1}$$

$$= na^{n-1}.$$

இவ்வாறு, n-ன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புக்கும்

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

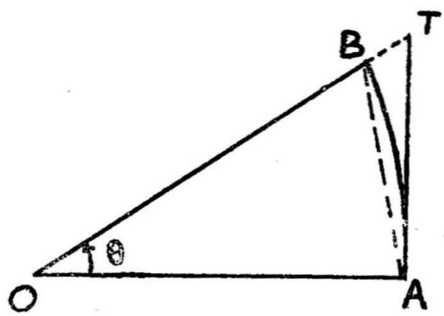
2. ஒரு கோணவிகித எல்லை (A trigonometric limit)

θ ஆரையனில் அளக்கப்பட்டதெனில்,

$$\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

நிறுவல்

படத்தில் AOB ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி. O வட்ட மையம், $A\hat{O}B = \theta$ ஆரையன்கள், ஆரம் $= r$. ஆரம் OB-ன் தொடர்ச்சியும் A-ல் வில்லுக்கு வரைந்த AT என்ற தொடு கோடும் வெட்டுமிடம் T.



படம் 1

படத்தில், பரப்பில் $\triangle AOB <$ கோணப் பகுதி $AOB < \triangle AOT$

$$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin A\hat{O}B < \frac{1}{2} OA^2. \; A\hat{O}T < \frac{1}{2} OA \cdot AT$$

அ-து, $\frac{1}{2} r^2 \sin \theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \tan \theta.$

$\frac{1}{2} r^2 \sin \theta$ என்ற மிகையெண்ணால் வகுக்க,

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore 1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ என்பது 1-க்கும் $\cos\theta$-க்கும் இடைப்பட்டிருக்கிறது. $\theta \to 0$ என்ற எல்லையில், $\cos \to 1$. எனவே, அவ்வெல்லையில், $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$.

அ-து, $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$

3. அடுக்குக்குறி எல்லை (Exponential Limit)

$\underset{n \to \infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதமுறு எண்ணின் எல்லைவடிவம். அது e என்று குறிக்கப்படும். ‘ அடுக்குக்குறித் தேற்றம் ’ என்ற கூறில் இது விரிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 8 :

$\underset{x \to a}{Lt} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a^2}}$ என்பதன் மதிப்பைக் காண்.

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a^2}} = \underset{x \to a}{Lt} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x - a} \Big/ \frac{x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{x - a} \right]$$

$$= \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x - a} \Big/ \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{x - a}$$

$$= \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2} - 1} \Big/ \left(\frac{2}{3} a^{\frac{2}{3} - 1} \right)$$

$$= \frac{3}{4} a^{-\frac{1}{6}}.$$

மாதிரி 9 :

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan x}{x}$ (x ஆரையனில்)

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan x}{x} = \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} \cdot \underset{x \to 0}{Lt} \sec x$$

$$= 1 \times 1 = 1.$$

மாதிரி 10 :

மதிப்பைக் காண் : $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \dfrac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$.

$x - \frac{\pi}{2} = y$ என இட, தேவையான எல்லை

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{y^2}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \underset{y \to 0}{Lt} \frac{2 \sin^2 \frac{y}{2}}{y^2}$$

$$= \underset{y \to 0}{Lt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underset{\frac{y}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

பயிற்சி 5—2

மதிப்பைக்காண் :

1. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{5x^2 + 6x + 2}{3x^2 + 4}$

2. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{5x^2 + 6x + 2}{3x^4 + 4}$

3. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{ax + b}{cx^2 + d}$

4. $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 14x - 3}{x^2 - x - 6}$

5. $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{1 + 3x - 5x^2 + x^3}{2 - 3x^3 + x^4}$

6. $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

7. $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^5 - a^5}{x^3 - a^3}$

8. $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x^2 - a^2}$

9. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{(1 + x)^5 - 1}{x}$

10. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{(1 + x)^4 - 1}{(1 + x)^2 - 1}$

11. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{x}}{x}$

12. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{1}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{x}}$

13. $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{(2x + 1)(3x - 4)}{(x + 1)(x - 2)}$

14. $\underset{n \to \infty}{Lt} \dfrac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$

15. $\underset{n \to \infty}{Lt} \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dots + \dfrac{1}{3^n}\right)$

16. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$

17. $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{\sqrt{3a - x} - \sqrt{x + a}}{x - a}$

18. $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}$

19. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$

20. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$

21. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin p\theta}{\tan q\theta}$

22. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta}$

23. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos m\theta}{1 - \cos n\theta}$

24. $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\tan^2 \pi x}$

25. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

26. $\underset{x \to 0}{Lt} x(\operatorname{cosec} x + 2 \operatorname{cosec} 2x)$

27. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} (\sec x - \tan x)$

28. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

29. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \dfrac{\sec x - \operatorname{cosec} x}{\tan x - \cot x}$

30. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

31. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^3 x}{\sin x - \tan x}$

32. $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin\theta \sin 2\theta}{1 - \cos\theta}$

33. $\underset{x \to \alpha}{Lt} \dfrac{\sin(x - \alpha)}{x^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}}$

கவனிக்க : வேறு எல்லைக்கணக்கு மாதிரிகளுக்கும் பயிற்சி வினுக்களுக்கும், இதே நூலில் இயற்கணிதப் பகுதியில் 2, 3, 4 அத்தியாயங்களின் கீழ்க் காண்க.

விடைகள் 5—2

1. $\frac{1}{2}$	2. $\frac{5}{8}$	3. 0	4. 5	5. $\frac{5}{4}$
6. 12	7. $\dfrac{5a^2}{3}$	8. $\dfrac{a^{-\frac{3}{2}}}{4}$	9. 5	10. 2
11. 1	12. ∞	13. 6	14. $\frac{1}{2}$	15. $\frac{1}{2}$
16. $-\frac{1}{2}$	17. $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$		18. -8	19. $-\frac{1}{2}$
20. $\dfrac{n}{m}$	21. $\dfrac{q}{p}$	22. 0	23. $\dfrac{m^2}{n^2}$	24. $\frac{1}{2}$
25. $\frac{1}{2}$	26. 2	27. 0	28. $\frac{1}{2}$	29. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
30. 1	31. -2	32. 4	33. $\dfrac{2}{3\sqrt{a}}$	

5.8 தொடர்ச்சியான சார்பும் தொடர்ச்சியற்ற சார்பும் (Continuous and Discontinuous Functions)

$f(x)$ என்ற சார்பு, $x = a$ என்ற புள்ளியில் x-ன் தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பாக இருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு :

(i) $f(a)$ முடிவுள்ளதாக (finite) வரையறுக்கப்பட்டு இருத்தல்;

(ii) $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f(x)$ முடிவுள்ளதாக இருத்தல் ;

(iii) $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f(x) = f(a)$ என இருத்தல்.

எடுத்துக்காட்டாக, $f(x) = 3x + 4$ என்ற சார்பு, $x = 1$ என்ற புள்ளியில் x-ன் தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பு. ஏனெனில்,

$f(1) = 7$;

$\underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} f(x) = 7$;

மேலும், $\underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} f(x) = f(1)$.

இம் மூன்று நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்று பொய்த்து விட்டாலும், சார்பு அப் புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்றதாகிவிடும்.

5.9 தொடர்ச்சியறும் வகைகள்

1. புள்ளியில் தொடர்ச்சி அறுதல் (Point discontinuity) : $y = f(x)$ என்ற சார்பு, $x = a$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப் படாததாகவும், ஆனால் $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எல்லையாக வருவதாகவும் இருக்கட்டும். $x = a$ என்ற புள்ளி யில் நிபந்தனை (i) நிறைவுபடுத்தப்படாததால், அங்குச் சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாகி விடுகிறது. சார்பின் வரைபடம் (graph) நம் கண்களுக்குத் தொடர்ச்சியான ஒரு கோடாகத் தெரியலாம். ஆனால், அக் கோட்டில் $x = a$ என்பதற்கான ஒற்றைப் புள்ளி காணப்படாது. அப் புள்ளியில் கோடு அறுந்து இருக்கும்.

$x = a$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$-ன் மதிப்பு முடிவுள்ளதாக வரையறுக்கப்பட்டே இருந்தும் அது $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} f(x)$-ன் மதிப்பி லிருந்து மாறுபட்டதாக இருப்பினும், நிபந்தனை (iii) நிறைவு படுத்தப்படாததால், அப் புள்ளியில் சார்பு தொடர்பறுந்ததாகி விடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 11x + 15}{x - 3}$$

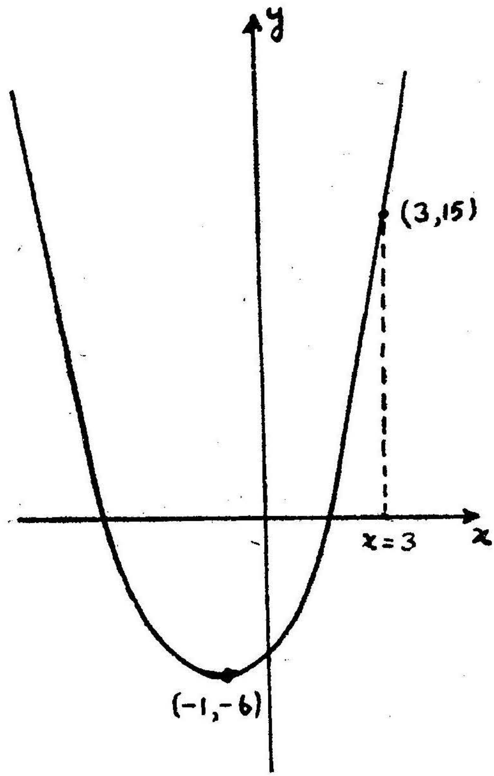
என்ற சார்பு $x = 3$ என்ற புள்ளியில் வரையறுக்கப்படாதது. அப் புள்ளியில் பகுதி, விகுதி இரண்டும் பூச்சியமாகிவிடும். அதே நேரத்தில்,

$$\underset{x \to 3}{\text{எல்லை}} f(x) = \underset{x \to 3}{\text{எல்லை}} \frac{(x-3)(x^2+2x-5)}{x-3}$$

$$= \underset{x \to 3}{\text{எல்லை}} (x^2+2x-5) = 3$$

ஆனால், $x \neq 3$ எனில், $f(x) = \dfrac{(x-3)(x^2+2x-5)}{x-3}$

$$= x^2 + 2x - 5.$$



படம் 2

எனவே, $x \neq 3$ எனில் இது ஒரு பரவளையம். $x = 3$ என்பது இதற்கு ஒரு தொடர்பறுக்கும் புள்ளி **(Point of discontinuity).**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 11x + 15}{x - 3}, \; x \neq 3$$
$$= 3, \; x = 3$$

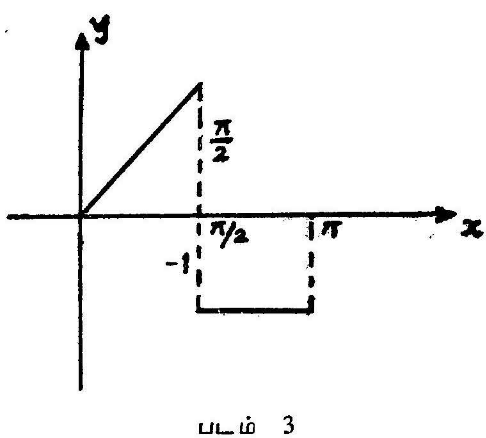
என்று வரையறை செய்யப்பட்ட $f(x)$, $x = 3$ என்ற புள்ளியிலும் தொடர்ந்த சார்பாக இருப்பதைக் காண்க.

2. முடிவுள்ள தாவல்கள் (Finite Jumps)

$f(x)$ என்ற ஒரு சார்புக்கு, $x = a$ என்ற புள்ளியின் இடப் பக்கத்திலிருந்து அப் புள்ளியை அணுகிக் கண்ட எல்லையை $\underset{x \to a^-}{\text{எல்லை}} f(x)$ எனவும், வலப்புறத்திலிருந்து அப் புள்ளியை அணுகிக் கண்ட எல்லையை $\underset{x \to a^+}{\text{எல்லை}} f(x)$ எனவும் குறிப்போம். இவை இரண்டும் முடிவுள்ளவையாக இருக்கலாம்; ஆயின் இவை சமமாக இல்லை எனில், அதாவது,

$$\underset{x \to a^-}{\text{எல்லை}} f(x) \neq \underset{x \to a^+}{\text{எல்லை}} f(x)$$

எனில், அச் சார்பு $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சி யற்றதாகிவிடும்.



படம் 3

எடுத்துக்காட்டு 1 :

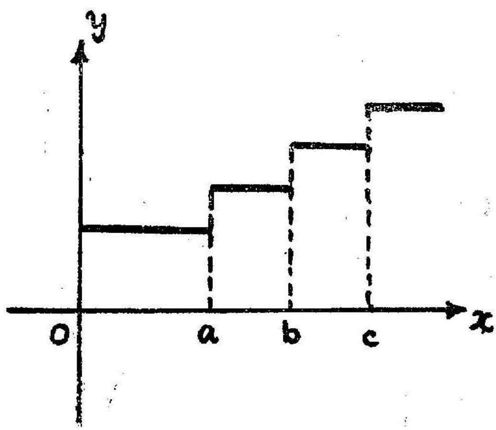
$$f(x) = x, \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= -1, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

என்ற சார்புக்கு $x = \frac{\pi}{2}$ தொடர்பறு புள்ளி.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மூடிய தபால் உறையின் அஞ்சல் கட்டணம், அதன் எடையின் ஒரு தொடர்ச்சியிலாச் சார்பு.



படம் 4

எடை $= a, b, c, \ldots$ கிராம்கள் என்பவை, கட்டணத்தின் தொடர்ச்சியறுக்கும் புள்ளிகள்.

3. முடிவிலாத் தொடர்ச்சியின்மை (Infinite discontinuities)

$x \to a$ எனில் $f(x)$-ன் மதிப்பு முடிவின்றி வளர்ந்து கொண்டே போனால், $x = a$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ முடிவிலாத் தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கிறது என்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$f(x) \tan x$;

தொடர்ச்சியறு புள்ளிகள்

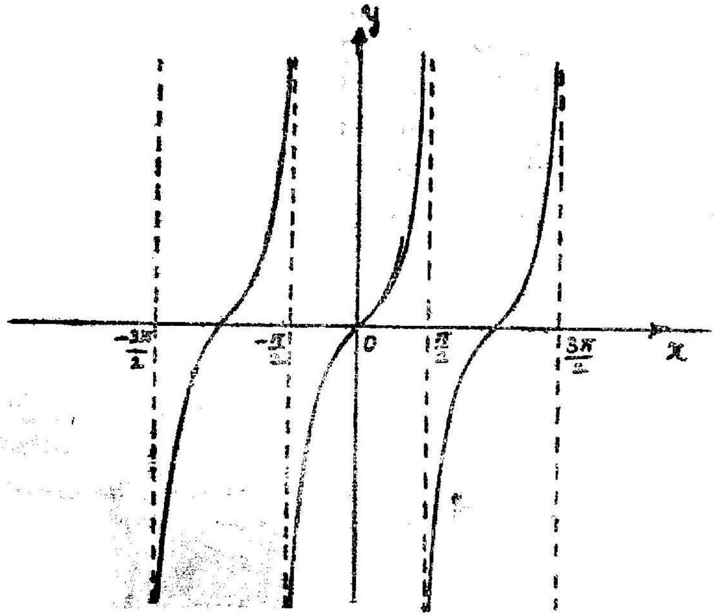
$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \quad \pm\frac{5\pi}{2} \ldots$$

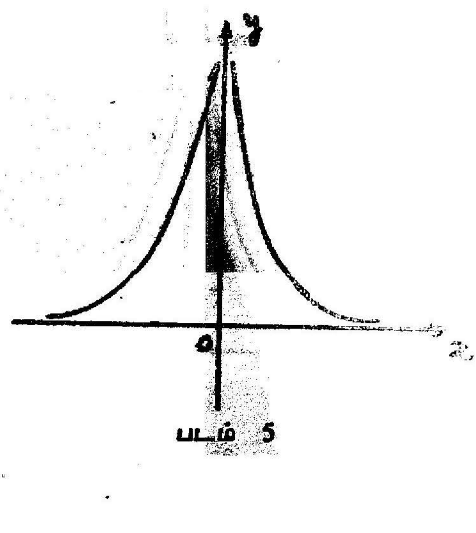
எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = \frac{1}{x^2}$;

தொடர்ச்சியறு புள்ளி :

$x = 0.$





படம் 5

5.10 சில தேற்றங்கள்

சில பயனுள்ள தேற்றங்கள் பின்வருமாறு :

1. $u(x)$, $v(x)$ என்ற இரண்டும் $x = a$ என்ற புள்ளி x-ன் தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனில், $u(x) \cdot v(x)$, $u(x) + v(x)$ ஆகியவையும் $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானவையே ; $v(a) \neq 0$ எனில் $u(x)/v(x)$ என்பதும் $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானதே.

2. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் x-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் தொடர்ச்சியானவை.

3. விகிதமுறு பின்னங்கள், பகுதி பூச்சியமாகும் புள்ளிகளைத் தவிர மற்ற எல்லா x-மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானவை.

4. ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு, ஒரு மதிப்பிலிருந்து இன்னொரு மதிப்பை அடைவதானால், அவ்விரு மதிப்புகளுக்கும் இடைப்பட்ட ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரு முறையேனும் ஏற்றிருக்கும்.

5. ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு குறிமாறினால் அது பூச்சிய மதிப்பை இடையில் ஒரு முறையேனும் அடைந்திருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 5—3

தொடர்ச்சியறுக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க :

1. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$

2. $\dfrac{2x - 3}{4x^2 + 4x + 1}$

3. $\dfrac{x^2 - x}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

4. $\cos x$

5. $\operatorname{cosec} x$

6. $\sec x \tan x$

7. $f(x) = \sin x, \; -\pi < x < 0$

$\quad = \cos x, \; 0 < x < \pi$

8. தூரத்தைப் பொறுத்த பஸ் கட்டணம்.

விடைகள் 5—3

1. $x = \pm 3$
2. $x = -\frac{1}{2}$
3. $x = 0$
4. கிடையாது.
5. $x = n\pi$
6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n முழுவெண்.
7. $x = 0$
8. கட்டணம் மாறும் நிலைகள்.

6. வகையிடுதல்*

(Differentiation)

6·1 வரையறை

$y = f(x)$ என்பது x-ன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனக் கொள்வோம். $\triangle x$ என்பது x-ல் ஏதோ ஒரு சிறு கூடுதல் (increment) எனவும், $\triangle y$ அதற்கேற்ப y-ல் ஏற்படும் ஒரு கூடுதல் எனவும் கொள்வோம். $\triangle x$ பூச்சியத்தை நெருங்கினுல் $\triangle y$- யும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். ஆயின், $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ என்பதன் எல்லை ஒரு முடிவுள்ள மதிப்பாக இருக்கலாம். அவ்வாறு, எல்லை $_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எல்லை எனில், அதை, xஐக் குறித்த y-ன் வகைக்கெழு என்கிறோம்; $\frac{dy}{dx}$ என்று குறிக்கிறோம்.

இனி, y-ன் புதிய மதிப்பு $f(x + \triangle x)$, பழைய மதிப்பு $f(x)$ என்பதால், y-ல் ஏற்பட்டுள்ள அதிகரிப்பு

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

$$\text{எனவே,}\quad \frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt}\ \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

---

* உலகின் மிகச் சிறந்த கணிதமேதைகளில் நியூட்டன் (Sir Isaac Newton, 1642 — 1727) ஒருவர். இவர் 1665-ல் வகையீட்டு நுண்கணிதத்தைக் (Differential Calculus) கண்டு பிடித்தார். (வகையிடுதலை,இவர், 'Direct method of fluxions' எனக் குறிப்பிட்டார்.) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தையும் இதே ஆண்டில் கண்டார்.

எனவே, $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

இதையே, $\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

என்றும் குறிக்கலாம்.

$\frac{dy}{dx}$க்கு வேறு குறியீடுகள் : $y'(x)$, Dy, $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ என்பன.

$x = x_0$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற தொடர்சலின் x-ஐக் குறித்த வகைக் கெழு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

என வரையறுக்கப்படும்.

6·2 முதற்கொள்கையிலிருந்து வகையிடல் (Differentiation from first principles)

வரையறையை மட்டுமே பயன்படுத்திச் சார்புகளின் வகைக் கெழுவைக் காண்பதை, முதற்கொள்கையிலிருந்து வகையிடல் என்போம்.

முதற்கொள்கையிலிருந்து x ஐக் குறித்து வகையிட்டுப் பின்வரும் நியம விளைவுகளை (Standard results) முதலில் நிறுவுவோம்.

6·3 வகையிடலின் சில நியமவிளைவுகள்

1. $\frac{dx}{d}(x^n) \quad = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(e^x) \quad = e^x$

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) \quad = \frac{1}{x}$

4. $\frac{d}{dx}(\sin x) \quad = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}(\cos x) \quad = -\sin x$

6. $\frac{d}{dx}(\tan x) \quad = \sec^2 x$

7. $\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cot x$

8. $\frac{d}{dx}(\sec x) \quad = \sec x \tan x$

9. $\frac{d}{dx}(\cot x) \quad = -\text{cosec}^2 x$

நிறுவல் :

1. $y = x^n = f(x)$ என வை. எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$x + \Delta x = z$ என இட, $\Delta x \to 0$ என்னும்பொழுது, $z \to x$. எனவே இந்த எல்லை

$$= \underset{z \to x}{Lt} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$

$$= nx^{n-1}.$$

இவ்வாறு,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

2. $y = e^x = f(x)$ என வை.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= e^x \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

இனி, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = 1.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x \cdot 1.$$

அ—து,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

3. $y = \log_e x = f(x)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$\frac{x}{h} = n$ என இட,

$$\text{இது} = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

எனவே,

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}.$$

4. $y = \sin x = f(x)$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= (\cos x).\ 1$$

$$= \cos x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

5. $y = \cos x = f(x)$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\underset{h\to 0}{Lt}\ \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\underset{h\to 0}{Lt}\ \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -(\sin x).\ 1$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

6. $y = \tan x = f(x)$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}\ \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin h}{h}\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{1}{\cos(x+h)}$$

$$= \frac{1}{\cos x}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos x} = \sec^2 x.$$

இவ்வாறு,

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.$$

7. $y = \text{cosec}\, x = f(x)$ எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\text{cosec}\,(x+h) - \text{cosec}\, x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\dfrac{1}{\sin(x+h)} - \dfrac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h) \sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h \sin(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h \sin(x+h)} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot 1$$

$$= -\text{cosec}\, x \cot x.$$

இவ்வாறு,

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\text{cosec}\, x \cot x.$$

8. $y = \sec x = f(x)$ என இட,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos(x+h) \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h \cos(x+h)}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)} \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 1$$

$$= \sec x \tan x.$$

இவ்வாறு,

$$\frac{dy}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x.$$

9. $y = \cot x = f(x)$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin x \cos(x+h) - \cos x \sin(x+h)}{h \sin(x+h) \sin x}$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x}\right) \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-\sin h}{h \sin(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin h}{h} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{\sin (x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

எனவே,

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

மேலே கண்டவை, நினைவில் நிறுத்தவேண்டிய சில நியம வகைக்கெழுக்கள். இவற்றை நிறுவுவதில் கையாளப்பட்ட முறைகள், இவைபோன்ற வேறு சார்புகளையும் முதற்கொள்கையிலிருந்து வகையிடும் முறைகளை விளக்கும்.

மாதிரி 1.

முதற்கொள்கையிலிருந்து x-ஐக் குறித்து வகையிடுக : $\sqrt{x+1}$.

$y = \sqrt{x+1} = f(x)$ என வை. Δx என்பது x-ல் ஏதேனும் ஒரு சிறு கூடுதல் எனில், Δy என்பது, அதற்கேற்ப y-ல் சேர்ந்த சிறு கூடுதலாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x+1}$$

$$\therefore \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{(x+\Delta x+1) - (x+1)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{1}{\sqrt{x + \triangle x + 1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

இவ்வாறு,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

மாதிரி 2

முதற் கொள்கையிலிருந்து x-ஐக் குறித்து வகையிடு : $\cos(3x + 4)$.

$y = \cos(3x + 4) = f(x)$ என வை. முதற் கொள்கையிலிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\cos[3(x + \triangle x) + 4] - \cos(3x + 4)]}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{-2\sin\left(3x + 4 + \frac{3\triangle x}{2}\right)\sin\frac{3\triangle x}{2}}{\triangle x}$$

$$= -3 \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \sin\left(3x + 4 + \frac{3\triangle x}{2}\right)$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin\frac{3\triangle x}{2}}{\frac{3\triangle x}{2}}$$

$$= -3\sin(3x + 4).\ 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -3\sin(3x + 4).$$

மாதிரி 3

x-ஐக் குறித்து முதற் கொள்கையிலிருந்து வகையிடு : e^{4x+5}.

$y = e^{4x+5} = f(x)$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{4(x + \Delta x) + 5} - e^{4x + 5}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{4x + 5} \cdot e^{4\Delta x} - e^{4x + 5}}{\Delta x}$$

$$= e^{4x+5} \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{4\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

இதில், $e^{4\Delta x} - 1 = z$ என வை. $\Delta x \to 0$ எனில் $z \to 0$;

$$e^{4\Delta x} = z + 1 \; ; \quad \Delta x = \frac{1}{4} \log(z + 1).$$

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{4\Delta x} - 1}{\Delta x} = \underset{z \to 0}{Lt} \frac{4z}{\log(z + 1)}$$

$$= 4 \underset{z \to 0}{Lt} \frac{1}{\frac{1}{z}\log(z + 1)} = 4 \cdot \frac{1}{\log e} = 4 \times 1.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^{4x+5}.$$

மாதிரி 4

$\log(ax + b)$ என்ற சார்பின் x-ஐக் குறித்த வகைக் கெழுவை முதற் கொள்கையிலிருந்து காண்.

$y = \log(ax + b) = f(x)$ எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\log[a(x + h) + b] - \log(ax + b)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\log \left[\dfrac{a(x+h)+b}{ax+b}\right]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\log \left(1 + \dfrac{ah}{ax+b}\right)}{h}.$$

$\dfrac{ah}{ax+b} = z$ எனில், $h = \dfrac{1}{a}(ax+b)z$;

$h \to 0$ எனில், $z \to 0$.

$$\therefore \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\log \left(1 + \dfrac{ah}{ax+b}\right)}{h} = \underset{z \to 0}{Lt} \frac{a \log(1+z)}{(ax+b)z}$$

$$= \frac{a}{ax+b} \cdot \underset{z \to 0}{Lt} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \frac{a}{ax+b} \log e$$

$$= \frac{a}{ax+b} \cdot 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}.$$

மாதிரி 5

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ என்ற சார்பை முதற் கொள்கையிலிருந்து x-ஐக் குறித்து வகையிடு.

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = (x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+)h - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{[(x+h)^2+(x+h)+1]^{-\frac{1}{3}} (x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{[x^2+x+1+(2x+1)h]^{-\frac{1}{3}}-(x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}}{h}$$

$x^2 + x + 1 + (2x + 1)\ h = X$, $x^2 + x + 1 = Y$ என இடு.

$h \to 0$ எனில், $X \to Y$; $X - Y = (2x + 1)\ h$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{X\to Y}{Lt} \frac{X^{-\frac{1}{3}} - Y^{-\frac{1}{3}}}{\frac{X-Y}{2x+1}}$$

$$= (2x+1) \underset{X\to Y}{Lt} \frac{X^{-\frac{1}{3}} - Y^{-\frac{1}{3}}}{X-Y}$$

$$= (2x+1)\left(-\frac{1}{3}\right) Y^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}\ (2x+1)\ (x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}.$$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1).$$

மாதிரி 6

$y = \sin^3 x$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ ஐ முதற் கொள்கையிலிருந்து காண்.

$y = \sin^3 x = f(x)$ என வை,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin^3(x+h) - \sin^3 x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{[\sin(x+h) - \sin x][\sin^2(x+h) + \sin(x+h)\sin x + \sin^2 x]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \; [\sin(x+h) + \sin(x+h)\sin x$$

$$+ \sin^2 x] \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= 3\sin^2 x \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= 3\sin^3 x \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \; 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot$$

$$\underset{\frac{h}{2} \to 0}{Lt} \; \frac{\sin\frac{h}{2}}{2\frac{h}{2}}$$

$$= 3\sin^2 x \cdot \cos x \; 1$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = 3\sin^2 x \cos x$$

மாதிரி 7

$y = a^{\sqrt{x}}$ எனில் முதற்கொள்கையிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$y = a^{\sqrt{x}} = f(x)$ எனில், $y = e^{\sqrt{x}\log a}$.

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{e^{\sqrt{x+h}\log a} - e^{\sqrt{x}\log a}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \; e^{\sqrt{x}\log a} \cdot \frac{[e^{\sqrt{x+h}\log a - \sqrt{x}\log a} - 1]}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}\log a} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{e^{(\log a)[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}]} - 1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}\log a} \cdot$$

$$\underset{h \to 0}{Lt} \frac{e^{(\log a)\left[\sqrt{x}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x}\right]} - 1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x} \log a} \cdot$$

$$\underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{h} \left\{ e^{(\log a)\left[\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{x} + \dots\right) - 1\right]} - 1 \right\}$$

$$= e^{\sqrt{x} \log a} \cdot \underset{h - 0}{Lt} \frac{1}{h} \left\{ e^{\log a \cdot \frac{h}{2\sqrt{x}}} - 1 \right\},$$

h-ன் மற்ற படிகளை விடுத்து.

$$= e^{\sqrt{x} \log a} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1 + (\log a) \cdot \frac{h}{2\sqrt{x}} + \dots - 1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x} \log a} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \left[\frac{\log a}{2\sqrt{x}} + h\text{-ன் மிகைப்படிகள்} \right]$$

$$= e^{\sqrt{x} \log a} \cdot \frac{\log a}{2\sqrt{x}} = \frac{a^{\sqrt{x}} \log a}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a^{\sqrt{x}} \log a}{2\sqrt{x}} .$$

பயிற்சி 6—1

முதற்கொள்கையிலிருந்து x-ஐப் பொருத்து வகையிடுக.

1. $\sqrt{x}$
2. $\frac{1}{2x + 3}$
3. $\frac{2x + 3}{3x + 4}$
4. $3x^3 + \frac{1}{x}$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

6. $\sqrt[3]{x^2 + 1}$

7. $\sin 4x$

8. $\sin^2 x$

9. $\sin x^2$

10. $\cos^3 2x$

11. $x \cos x$

12. $x^2 \sin x$

13. $\sec 3x$

14. $\operatorname{cosec} 2x$

15. $\cot (2x + 1)$

16. $\tan^2 3x$

17. $e^{2x + 3}$

18. a^x

19. $e^{\sqrt{x}}$

20. e^{x^2}

21. $\log (2x + 3)$

22. $(\log x)^{-1}$

விடைகள் 6—1

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $-\dfrac{2}{(2x + 1)^2}$

3. $-\dfrac{1}{(3x + 4)^2}$

4. $9x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

5. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, x^{-\frac{3}{2}}$

6. $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$

7. $4 \cos 4x$

8. $\sin 2x$

9. $2x \cos x^2$

10. $-3 \cos^2 2x \sin 2x$

11. $\cos x - x \sin x$

12. $2x \sin x + x^2 \cos x$

13. $3 \sec 3x \tan 3x$

14. $-2 \operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

15. $-2 \operatorname{cosec}^2 (2x+1)$

16. $6 \tan 3x \sec^2 3x$

17. $2 e^{2x + 3}$

18. $a^x \log a$

19. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$

20. $2x\, e^{x^2}$

21. $\dfrac{2}{2x + 3}$

22. $-\dfrac{1}{x (\log x)^2}$

6·4 சில தேற்றங்கள்

மேலே கண்ட முறையில் எல்லாச் சார்புகளையும் முதற் கொள்கையிலிருந்தே வகையிடுவது எளிதல்ல; தேவையும் அல்ல. நியமச் சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களைப் பயன்படுத்தி, அவை அடங்கிய மற்ற சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களைக் காணலாம். அதற்குப் பின்வரும் தேற்றங்கள் பயன்படும்.

1. மாறிலியின் வகைக் கெழு பூச்சியம்.

$y = c$ என்ற மாறிலியாக இருக்கட்டும். இதில் x இல்லை. எனவே, x என்பது $x + \triangle x$ ஆக மாறும்போது y-ன் புதிய மதிப்பு y தான்.

$$\therefore \quad \triangle x = 0. \quad \therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0 \; (\triangle x \neq 0)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} 0 = 0.$$

2. இரு சார்புகளின் கூடுதலின், பெருக்கலின், வகுத்தலின் வகைக் கெழு.

u, v என்பவை x-ன் இரு சார்புகள் எனில்,

(i) $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{du}$

(ii) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

நிறுவல்

$\triangle x$ என்பது x-ல் ஏதேனுமொரு கூடுதலாகவும், $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle y$ என்பவை முறையே u, v, y-ல் அதற்கேற்ற கூடுதல் தொகைகளாகவும் இருக்கட்டும்.

(1) $y = u + v$ என வை.

$$y + \triangle y = u + \triangle u + v + \triangle v$$

$$\therefore \quad \triangle y = \triangle u + \triangle v$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

எனவே,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

(ii) $y = uv$ என வை.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{u\,\Delta v}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{v\,\Delta u}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$= u \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \Delta v$$

$$= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot 0, \left(\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \Delta v = 0 \right)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

(iii) $y = \frac{u}{v}$ என வை.

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle u}$$

$$\therefore \quad \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\,(u + \triangle u) - u\,(v + \triangle v)}{(v + \triangle v)\,v}$$

$$= \frac{v\triangle u - u\triangle v}{(v + \triangle v)\,v}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{v\dfrac{\triangle u}{\triangle x} - u\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{(v + \triangle u)\,v}$$

$$= \frac{v \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} - u \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{\underset{\triangle v \to 0}{Lt} (v + \triangle v)\,v}$$

$$= \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

இத் தேற்றங்களைச் சொற்களில் பின்வருமாறு நினைவில் வைத்துக் கொள்வது நலம்.

(i) இரு சார்புகளின் கூடுதலின் வகைக் கெழு, அவ்விரு சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் கூட்டக் கிடைக்கிறது.

(ii) இரு சார்புகளின் பெருக்கலின் வகைக் கெழு, முதற் சார்பு, இரண்டாம் சார்பின் வகைக் கெழு ஆகியவற்றைப் பெருக்கி அத்துடன், இரண்டாம் சார்பு, முதற்சார்பின் வகைக் கெழு ஆகியவற்றின் பெருக்கலைக் கூட்டக் கிடைக்கிறது.

(iii) ஒரு பின்னத்தின் வகைக்கெழு, பகுதியைத் தொகுதி யின் வகைக்கெழுவில் பெருக்கிக் கிடைத்த தொகையிலிருந்து, தொகுதியைப் பகுதியின் வகைக்கெழுவால் பெருக்கிக் கிடைத்த தொகையைக் கழிக்கக் கிட்டுவதைப் பகுதியின் வர்க்கத்தால் வகுக்கக் கிடைக்கிறது.

விரிப்பு : u, v, w ஆகியவை x-ன் சார்புகள் எனில்,

$$\frac{d}{dx}(uvw) = \frac{du}{dx} vw + u \frac{dv}{dx} w + uv \frac{dw}{dx}.$$

தேற்றம் 2 (ii)-ன் படி,

$$\frac{d}{dx}(uvw) = \frac{d}{dx}[(uv)w] = uv\frac{dw}{dx} + w\frac{d}{dx}(uv)$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + w\left[u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(uvw) = \frac{du}{dx} vw + u \frac{dv}{dx} w + uv \frac{dw}{dx}.$$

பொதுவாக, $\frac{d}{dx}(uvw...z) = u'vw...z + uv'w...z + uvw'...z$

$$... + uvw...z'.$$

கிளைத்தேற்றம் 1 : u என்பது x-ன் சார்பு, c ஒரு மாறிலி எனில்,

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

தேற்றம் 2 (ii) ன் படி,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$u = c$ எனில், $\frac{du}{dx} = 0.$ எனவே,

$$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

கவனிக்க : $(c + u)$ என்பதன் வகைக்கெழுவில் c மறைந்து விடுகிறது. cu என்பதன் வகை கெழுவில் c மறையாமல் அப்படியே தோன்டுகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 2 : v என்பது x-ன் சார்பு, c ஒரு மாறிலி எனில்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{c}{-v^2}\frac{dv}{dx}.$$

தேற்றம் 2 (iii) ல், $u = c$ எனக் கொள்ள, இது உடனே கிடைக்கிறது.

மாதிரி 8.

x ஐக் குறித்து வகைக்கெழுகாண் : $\log x + \sin x - e^x$.

$$\frac{d}{dx}(\log x + \sin x - e^x) = \frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}(\sin x) - \frac{d}{dx}(e^x).$$

$$= \frac{1}{x} + \cos x - e^x$$

மாதிரி 9.

x ஐக் குறித்து $(3 \operatorname{cosec} x + 4)$ ஐ வகையிடு.

$$\frac{d}{dx}(3 \operatorname{cosec} x + 4) = 3\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= -3 \operatorname{cosec} x \cot x.$$

மாதிரி 10.

x ஐக் குறித்து வகையிடு : $\sqrt{x} \sec x$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sec x) = \sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

இதில் $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x} \sec x) = \sqrt{x} \sec x \tan x + \sec x . \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \left(\sqrt{x} \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sec x.$$

மாதிரி 11.

$y = \frac{\cot x}{x}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{x}\right) = \frac{x\frac{d}{dx}\cot x - (\cot x)\frac{d}{dx}x}{x^2}$$

$$= -\frac{x \operatorname{cosec}^2 x + \cot x}{x^2}$$

மாதிரி 12.

$y = x^5 \tan x + \frac{\log x}{x^2 + 2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 \tan x + \frac{\log x}{x+2}\right) = \frac{d}{dx}(x^5 \tan x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{x^2+2}\right)$$

$$= x^5 \frac{d}{dx}\tan x + \tan x \frac{d}{dx}x^5 + \frac{(x^2+2)\frac{d}{dx}\log x - \log x \frac{d}{dx}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= x^5 \sec^2 x + 5x^4 \tan x + \frac{\frac{x^2+2}{x} - 2x\log x}{(x^2+2)^2}$$

$$= x^5 \sec^2 x + 5x^4 \tan x + \frac{x^2 + 2 - 2x^2 \log x}{x(x^2+2)^2}$$

மாதிரி 13

$x \log x \cos x + \frac{2}{x^3 e^x}$ என்ற கோவையை x ஐக் குறித்து வகையிடு.

கொடுத்த கோவை y எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x \log x \cos x] + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3 e^x}\right)$$

$$= \log x \cos x \frac{d}{dx}x + x \cos x \frac{d}{dx}\log x + x \log x \frac{d}{dx}\cos x - 2\,\frac{\frac{d}{dx}(x^3 e^x)}{(x^3 e^x)^2}.$$

இதில் $\frac{d}{dx}(x^3e^x) = x^3\frac{d}{dx}e^x + e^x\frac{d}{dx}x^3 = x^3e^x + 3x^2e^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \log x.\cos x + x.\cos x.\frac{1}{x} + x\log x(-\sin x)$$
$$-2\frac{(3x^2e^x + x^3e^x)}{x^6e^{2x}}$$

$$= \log x.\cos x + \cos x - x\log x.\sin x$$
$$-\frac{2(3+x)}{x^4e^x}.$$

மாதிரி 14

$y(t) = t\cos t$ எனில் $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ஐக் காண்.

$y(t) = t\cos t.$

$$\therefore y'(t) = \frac{dy}{dt} = t(-\sin t) + \cos t$$

$t = \frac{\pi}{2}$ என இட,

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\cos\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

பயிற்சி 6—2

x ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண்க. [1 — 31]

1. $3x^2 + 4x - 1$
2. $ax^3 - b\sqrt{x} + c$
3. $\frac{l}{x} + m\,x^{\frac{3}{2}}$
4. $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$
5. $5x^{-2} + x^{-3}$
6. $6x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$

7. $(1 + x^2)(3 - 2x)$

8. $(x^2 + 3)(x^2 - x + 1)$

9. $(1 + x^2)(1 - 2x^3)$

10. $(7 - 3x^2)(2x + 5)$

11. $\dfrac{1}{3x - 4}$

12. $\dfrac{1}{1 - 2x^3}$

13. $\dfrac{x}{x^2 - 1}$

14. $\left(\dfrac{2x - 3}{x}\right)^2$

15. $\dfrac{x(x + 1)}{2x - 1}$

16. $\dfrac{x^n + 1}{x^n - 1}$

17. $(1 + x) \cos x$

18. $\operatorname{cosec} x \cot x$

19. $x \cos x - x^2 \sin x$

20. $xe^x \sin x$

21. $x^3 \sin x \tan x$

22. $(x^3 + 1)(x^4 + 1)(x^5 + 1)$

23. $\dfrac{x^4 + x^{-3} - 6}{2x + x^{-1} - 1}$

24. $\sqrt{x}\,(x - 1)(x^2 + 2)$

25. $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{6(x + 1)(x + 2)}$

26. $\dfrac{\sin x}{1 + \tan x}$

27. $\dfrac{\log x}{\sin x}$

28. $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

29. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

30. $x^2 \log x + \dfrac{\cos x}{\log x}$

31. $\dfrac{e^x}{1 + x} - e^{-x} \cot x + 4$

32. $y(x) = x^3 - 5x + 4$ எனில் $y'(1)$ ஐக் காண்.

33. $f(x) = 7 - x^2 + 4x^3$ எனில் $f'(-1)$-ன் மதிப்பென்ன ?

34. $x(t) = \dfrac{1 - 3t + t^3}{t^2}$ எனில், $t = \dfrac{1}{2}$ என்று இருக்கும்பொழுது, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t = \frac{1}{2}}$ ன் மதிப்பென்ன ?

35. $y(t) = \dfrac{\cot t}{t^2 + t + 1}$ எனில், $\dfrac{dy}{dt}(0)$-ன் மதிப்பென்ன ?

விடைகள் 6—2

1. $6x + 4$

2. $3ax^2 - \frac{b}{2\sqrt{x}}$

3. $-\frac{l}{x^2} + \frac{3}{2} m \sqrt{x}$

4. $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

5. $-10x^{-3} - 3x^{-4}$

6. $4x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$

7. $-2 + 6x - 6x^2$

8. $4x^3 - 3x^2 + 8x - 3$

9. $1 - 2x - 8x^3$

10. $14 - 30x - 18x^2$

11. $-\frac{3}{(3x-4)^2}$

12. $\frac{24x^2}{(1-2x^3)^2}$

13. $-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

14. $\frac{12}{x^2} - \frac{18}{x^3}$

15. $\frac{2x^2 - 2x - 1}{(2x-1)^2}$

16. $-\frac{2n\, x^{n-1}}{(x^n - 1)^2}$

17. $\cos x - (1 + x)\sin x$

18. $-\operatorname{cosec} x (\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)$

19. $(1 - x^2)\cos x - 3x \sin x$

20. $e^x (\sin x + x \sin x + x \cos x)$

21. $3x^2 \sin x \tan x + x^3 \sin x (1 + \sec^2 x)$

22. $x^2 (12x^9 + 9x^6 + 8x^5 + 7x^4 + 5x^2 + 4x + 3)$

23. $\frac{6x^9 - 4x^8 + 5x^7 + 12x^5 - 6x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{x^3 (2x^2 - x + 1)^2}$

24. $\frac{1}{2} (7x^3 - 5x^2 + 6x - 2)/\sqrt{x}$

25. $\frac{x^2 - 2}{(x+1)^2 (x+2)^2}$

26. $\frac{\cos x (1 - \tan^3 x)}{(1 + \tan x)^2}$

27. $\dfrac{\sin x - x \log x \cdot \cos x}{x \sin^2 x}$

28. $\dfrac{1}{\cos x - 1}$ 29. $\dfrac{2}{1 - \sin 2x}$

30. $x(1 + \log x) - \dfrac{x \log x \sin x - \cos x}{x \log^2 x}$

31. $\dfrac{xe^x}{(1 + x)^2} + \dfrac{\cot x + \operatorname{cosec}^2 x}{e^x}$

32. -2 33. 14

34. -3 35. -1.

6·5 அதிபர வளைவுச் சார்புகள் (Hyperbolic Functions)

அதிபர வளைவுச் சார்புகளின் பின்வரும் வரையறைகள் முன்பே கூறப்பட்டவை :

$$\sin h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tan h\, x = \frac{\sin h\, x}{\cos h\, x}, \quad \operatorname{cosec} h\, x = \frac{1}{\sin h\, x}$$

$$\sec h\, x = \frac{1}{\cos h\, x}, \quad \cot h\, x = \frac{1}{\tan h\, x}.$$

இவற்றிலிருந்து

$$\cos h^2 x - \sin h^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{4 \cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1$$

$\therefore \cos h^2 x - \sin h^2 x = 1.$

$$\cos h^2 x + \sin h^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{4} = \cos h\, 2x$$

$\therefore \cos h^2 x + \sin h^2 x = \cos h\, 2x.$

இதேபோல் பின்வரும் பல விளைவுகளையும் எளிதில் நிறுவலாம் :

$$\tan h\,(x+y) = \frac{\tan h\,x + \tan h\,y}{1 + \tan h\,x \tan h\,y}$$

$$\sin h\,x + \sin h\,y = 2 \sin h\,\frac{x+y}{2} \cos h\,\frac{x-y}{2}$$

$$\cos h\,3x = 4 \cos h^3 x - 3 \cos h\,x$$

$$\sin h\,3x = 3 \sin h\,x \;+ \sin h^3 x.$$

கவனிக்க : வட்டச் சார்புகளின் (Circular functions) சமன்பாடுகளில் $\sin x$, $\cos x$ ஆகியவற்றிற்குப் பதிலாக, $i \sin h\,x$, $\cos h\,x$ என முறையே இட, தகுந்த அதிபர வளைவுச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

6·6 வகையிடலின் நியம விளைவுகள் — தொடர்ச்சி

10. $\dfrac{d}{dx}(\sin h\,x) = \cos h\,x$

11. $\dfrac{d}{dx}(\cos h\,x) = \sin h\,x$

12. $\dfrac{d}{dx}(\tan h\,x) = \sec h^2\,x$

13. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} h\,x) = -\operatorname{cosec} h\,x \cot h\,x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\sec h\,x) = -\sec h\,x \tan h\,x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\cot h\,x) = -\operatorname{cosec} h^2\,x.$

நிறுவல்

10. $y = \sin h\,x$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin h\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos h\,x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos h\,x.$$

11. $y = \cos hx$ எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos hx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sin hx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin hx.$$

12. $y = \tan hx$ எனில்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan hx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin hx}{\cos hx}\right)$$

$$= \frac{\cos hx \frac{d}{dx}(\sin hx) - \sin hx \frac{d}{dx}(\cos hx)}{\cos h^2 x}$$

$$= \frac{\cos hx \cdot \cos hx - \sin hx \cdot \sin hx}{\cos h^2 x}$$

$$= \frac{\cos h^2 x - \sin h^2 x}{\cos h^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos h^2 x} = \sec h^2 x.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec h^2 x.$$

இதே முறையில் வினாவுகள் 13, 14, 15 ஐ நிறுவுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்க.

6·7 நேர்மாறு சார்புகளின் வகைக் கெழுக்கள்

y என்பது x-ன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், x என்பது y-ன் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகவே பொதுவாக இருக்கும்.

$\triangle x$ என்பது x-ல் ஒரு சிறு கூடுதலாகவும், அதைப் பொருத்த y-ன் கூடுதல் $\triangle y$ ஆகவும் இருக்கட்டும். $\triangle x \to 0$ எனில் $\triangle y \to 0$. அப்பொழுது

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\frac{\triangle x}{\triangle y}}$$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\triangle y \to 0}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle y \to 0}{Lt} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle y \to 0}{Lt} \frac{1}{\left(\frac{\triangle x}{\triangle y}\right)} = \frac{1}{\underset{\triangle y \to 0}{Lt} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \left(\frac{dx}{dy} \neq 0\right).$$

அதாவது, x-ஐக் குறித்த y-ன் வகைக் கெழு, y-ஐப் பொருத்த x-ன் வகைக் கெழுவின் தலைகீழ் மதிப்புக்குச் சமம்.

6·8 வட்டநேர்மாறு சார்புகள்

$\sin y = x$ எனில் y-ஐ 'x-ன் நேர்மாறு சைன் சார்பு' (inverse sine function of x) என்போம். அதை

$y = \sin^{-1} x$ அல்லது $\text{arc} \sin x$ எனக் குறிப்போம். இதேபோல் மற்ற வட்டநேர்மாறு சார்புகளும் குறிக்கப்படும்.

கவனிக்க :

ஒரே வட்ட நேர்மாறு சார்பைப் பல விதங்களில் குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$\sin^{-1} x = k$ எனில்,

$\sin k = x$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} k = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad k = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

இவ்வாறு, $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

மேலும் $\cos k = \sqrt{1 - \sin^2 k} = \sqrt{1 - x^2}$,

$$\sec k = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \tan k = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \cot k$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\therefore \sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} = \cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$$

$$= \sec^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \cot^{-1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

6·9 வகையிடலின் நியம விளைவுகள் — தொடர்ச்சி

16. $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

18. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

19. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

நிறுவல்

16. $y = \sin^{-1} x$ எனக் கொள்ள,
$x = \sin y$.

y-ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

17. $y = \cos^{-1} x$ எனக் கொள்ள,
$x = \cos y$.

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

18. $y = \tan^{-1} x$ எனக் கொள்ள,

$x = \tan y.$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

19. $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ எனக் கொள்ள

$x = \operatorname{cosec} y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cot y = -\operatorname{cosec} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}.$$

$$= -x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

இதேபோல் வினாவுகள் 20, 21 ஐ நிறுவுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்க.

6.10 அதிபர வளைவு நேர்மாறு சார்புகள்

$\sin hy = x$ எனில், y என்பது 'x ன் நேர்மாறு அதிபர வளைவு சைன் சார்பு' (inverse hyperbolic sine function of x) எனப்படும். குறியீடு :

$y = \sin h^{-1}x$ அல்லது, are $\sin hx$.

இதேபோல் மற்ற அதிபர வளைவு நேர்மாறு சார்புகளும் குறிக்கப்படும்.

கவனிக்க : அதிபர வளைவு நேர்மாறு சார்புகளுக்கு மடக்கை வடிவம் தரலாம். பின்வருவனவற்றை நிறுவுவோம்.

(i) $\sin h^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

(ii) $\cos h^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(iii) $\tan h^{-1}x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$.

நிறுவல் :

(i) $y = \sin h^{-1}x$ எனக் கொள்.

$\therefore \quad x = \sin hy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$\therefore \; 2xe^y = e^{2y} - 1$

$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

e^y ல் இந்த இருபடிச் சமன்பாடு தருவது

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

e^y மிகை ஆதலால் குறைக் குறி பொருந்தாது.

$\therefore \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\therefore \quad y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}$

(ii) $y = \cos h^{-1}x$ என இடு.

$x = \cos hy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$\therefore \quad e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$

குறைக் குறியை விட,

$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$\therefore \quad y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

(iii) $y = \tan h^{-1}x$ என இடு.

$\therefore \quad x = \tan hy = \frac{\sin hy}{\cos hy} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

$\therefore \quad x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}$

$e^y(1 - x) = e^{-y}(1 + x)$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \quad 2y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

6·11 வகையிடுதலின் நியம விளைவுகள்—தொடர்ச்சி

22. $\dfrac{d}{dx}(\sin h^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\cos h^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\tan h^{-1} x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

25. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} h^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

26. $\dfrac{d}{dx}(\sec h^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

27. $\dfrac{d}{dx}(\cot h^{-1} x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$

நிறுவல் :

22. $y = \sin h^{-1} x$ எனில்

$x = \sin hy.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos hy = \sqrt{1+\sin h^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

23. $y = \cos h^{-1} x$ எனில்

$x = \cos hy.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sin hy = \sqrt{\cos h^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

24. $y = \tan h^{-1} x$ எனில்

$x = \tan hy$;

$$\frac{dx}{dy} = \sec h^2 y = 1 - \tan h^2 y = 1 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}.$$

இதேபோல் வினாவுகள் 25, 26, 27-ஐ நிறுவுவதைப் பயிற்சியாகக் கொள்க.

பயிற்சி 6—3

x-ஐக் குறித்து வகைக்கெழு காண்க.

1. $\cos hx - x \operatorname{cosec} hx$
2. $\tan hx \sec hx$
3. $x \tan^{-1} x$
4. $x^2 \sec^{-1} x$
5. $e^x \cos^{-1} x + \cos h^{-1} x$
6. $\dfrac{\cot hx}{\cot h^{-1} x \cdot \cot^{-1} x}$
7. $\dfrac{\cos x \cdot \sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
8. $\dfrac{1}{x} e^x \operatorname{cosec}^{-1} \dfrac{1}{x}$

விடைகள் 6—3.

1. $\sin h\,x - \operatorname{cosec} h\,x + x \operatorname{cosec} h\,x \cot h\,x$
2. $\sec h^3 x + \sec h^2 x \tan hx$
3. $\tan^{-1} x + \dfrac{x}{1+x^2}$
4. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 2x \sec^{-1} x$
5. $e^x \left(\cos^{-1} x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
6. $\dfrac{-\coth^{-1} x \cot^{-1} x \cos h^2 x + \cot hx \left(\dfrac{\coth^{-1} x}{1+x^2} + \dfrac{\cot^{-1} x}{x^2-1}\right)}{(\coht^{-1} x \ \cot^{-1} x)^2}$

7. $$\frac{(\cos^{-1}x)\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x \sin^{-1} x\right) + \dfrac{\cos x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\cos^{-1}x)^2}$$

8. $$e^x\left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sin^{-1} x}{x^2} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$$

6·12 சார்பின் சார்பு

x-ன் சார்பாக y தரப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். பல சமயங்களில் y-ஐ u என்ற ஓர் இடைப்பட்ட மாறியின் சார்பாகவும், u-வை x-ன் சார்பாகவும் கொள்வது வகையிடுவதற்குப் பயனுடையதாக இருக்கும்.

அதாவது, $y = y\ (u)$, $u = u\ (x)$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $y = \sin (x^2 + 5)$ எனில்,

$y = \sin u$, $u = x^2 + 5$ எனக் கொள்ளவேண்டும்.

(ii) $y = \log \tan^{-1} x^2$ எனில்,

$y = \log u$, $u = \tan^{-1} v$, $v = x^2$

எனக் கொள்ளவேண்டும். இதில் u, v என்பவை இரு இடைப்பட்ட சார்புகள்.

6·13 சார்பின் சார்பாக வகையிடல்

$$y = y\,(u),\ u = u\,(x)$$

எனக் கொள்க. x-ல் ஒரு சிறிய கூடுதல் Δx, அதற்கேற்ப u, y ஆகியவற்றில் நேர்ந்த கூடுதல்கள் Δu, Δy என இருக்கட்டும்.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

என எழுதலாம். $\Delta x \to 0$. எனவே,

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta u \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{Lt}$$

அ—து, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \ldots \quad (1)$$

இதைச் சங்கிலித் தொடர் விதி என்றும் கூறுவர்.

நீட்சி :

$y = y(u),\ u = u(v),\ v = v(x)$ எனில்,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$. முதலியன.

கிளைத் தேற்றங்கள்

ச—டு (1) ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}.$$

u-ஐயும் x-ஐயும் இதில் மாற்றி எழுத,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}},\ \frac{dx}{du} \neq 0 \quad \ldots \quad (2)$$

இதில் $u = y$ என இட,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},\ \frac{dx}{dy} \neq 0 \quad \ldots \quad (3)$$

விளைவு (3), முன்பே கண்டது.

மாதிரி 15

x ஐக் குறித்து வகையிடு : $(x^3 + 1)^2$

$y = (x^3 + 1)^2$ எனக் கொள். இதை

$y = u^2,\ u = x^3 + 1$

என எழுதலாம். இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{dy}{du} = 2u,\ \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{au} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 3x^2 = 6(x^3 + 1)x^2.$$

மாதிரி 16

x ஐக் குறித்து $\tan(2x+1)$ ஐ வகையிடு.

$y = \tan(2x+1)$ எனக் கொள். இதை

$y = \tan u,\ u = 2x+1$

என எழுதலாம். இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{dy}{du} = \sec^2 u = \sec^2(2x+1),\quad \frac{du}{dx} = 2.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2\sec^2(2x+1).$$

மாதிரி 17

$y = \log\sin(ax+b)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$y = \log\sin(ax+b).$

இதை $y = \log u,$

$u = \sin(ax+b) = \sin v,$

$v = ax+b$

என எழுதலாம். (இம் மூன்று சமன்பாடுகளும், வகைக் கெழுக்களை உடனே எழுதக்கூடிய வகையில் நியம வடிவங் களில் இருத்தலைக் காண்க.)

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u},\ \frac{du}{dv} = \cos v,\ \frac{dv}{dx} = a.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\cos v\cdot a = \frac{a\cos(ax+b)}{\sin(ax+b)}$$

$$= a\cot(ax+b).$$

மாதிரி 18

$y = \tan^{-1}\left(e^{\cos\sqrt{x}}\right)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$y = \tan^{-1}\left(e^{\cos\sqrt{x}}\right)$ என்பதை,

$y = \tan^{-1} u,$

$$u = e^{\cos\sqrt{x}} = e^{v},$$

$$v = \cos\sqrt{x} = \cos w,$$

$$w = \sqrt{x}$$

என எழுதலாம். இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}, \quad \frac{du}{dv} = e^{v},$$

$$\frac{dv}{dw} = -\sin w, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{1+v^2} \cdot e^{v} \cdot -\sin w \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{e^{\cos\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(1 + e^{2\cos\sqrt{x}}\right)}.$$

பயிற்சி 6—4

x-ஐக் குறித்து வகையிடுக.

1. $(2x^2+1)^2$
2. $\sin^2 x$
3. $\cos(3x+4)$
4. $\tan^{-1} x^2$
5. $(\tan^{-1} x)^2$
6. $\cos \log x$
7. $\log \cos x$
8. $\sqrt{ax^2+bx+c}$
9. $\log(ax^2+bx+c)$
10. $\sin \cos x$
11. $\tan e^{x}$
12. $e^{\tan x}$
13. $x^2(x+1)^3$
14. $x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$
15. $x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$
16. $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-1}$
17. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
18. $(2+x)^2(1-x)^3$

19. $\frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + 1}$ 20. $[1 + (x^2 - 1)^3]^{\frac{3}{2}}$

21. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$ 22. $\frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x})^2}$

23. $\sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$ 24. $2 \cos^2 \frac{x}{2}$

25. $\tan (x \sin x)$ 26. $(1 + x^2) \tan^{-1} x - x$

27. $(\tan^{-1} x^3)^2$ 28. $\sqrt{\sin^{-1} x}$

29. $(x - 1) \sqrt{2x - x^2} + \sin^{-1} (x - 1)$

30. $2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{2}}$ 31. $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sin^{-1} \frac{x}{a}$

32. $\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ 33. $\text{arc} \tan \frac{x}{a}$

34. $\log (7 - 3x)$ 35. a^x

36. $\log_{10} \sin \frac{x}{a}$ 37. $\log_{10} (1 - 4 \tan x)$

38. $\log \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ 39. $\log \sqrt{\frac{1 - x^3}{1 + x^3}}$

40. $x \log (a^2 + x^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x$

41. $\log \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ 42. $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

43. $x^2 + x^4 e^{-2 \log x}$ 44. $e^{-2x} (1 - e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$

45. $(1 + e^{-x})^2 (1 - e^{-x})^{\frac{1}{2}}$ 46. $\log (e^{-3x} \sin 4x)$

47. $\cot (e^{4x} \operatorname{cosec} x)$ 48. $x^2 e^{2x} \log \operatorname{cosec} x$

49. $\tan^{-1} \tan h \frac{x}{2}$ 50. $\tan h^{-1} \tan \frac{x}{2}$

51. $(\tan^{-1} e^x)^{\frac{1}{3}}$

52. $\cos h^{-1} \left(\frac{2x^2 - 3}{5}\right)$

53. $\sin^{-1} \left(\frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}\right)$

54. $\operatorname{cosec}^{-1} e^{3x+1}$

55. $\cot^{-1} \operatorname{cosec} 4x$

56. $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

57. $\sin^{-1} [(2x + 1) \sqrt{2 - x^3}]$

58. $\tan^{-1} (1 + \log^2 x)^{\frac{1}{2}}$

விடைகள் 6—4

1. $8x (2x^2 + 1)$

2. $\sin 2x$

3. $-3 \sin (3x + 4)$

4. $\frac{2x}{1 + x^4}$

5. $\frac{2 \tan^{-1} x}{1 + x^2}$

6. $-\frac{1}{x} \sin \log x$

7. $-\tan x$

8. $\frac{2ax + b}{2 \sqrt{ax^2 + bx + c}}$

9. $\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$

10. $-\sin x \cdot \cos \cos x$

11. $e^x \sec^2 e^x$

12. $e^{\tan x} \sec^2 x$

13. $x (x + 1)^2 (5x + 2)$

14. $x^2 (4x^2 - 3a^2) (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

15. $-a^2 (x^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}}$

16. $-a^2 x^{-2} (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

17. $a^2/(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

18. $-(2+x)(1-x)^2(4+5x)$

19. $2x(x^2-1)(x^2+3)(x^2+1)^{-2}$

20. $9x(x^2-1)^2\sqrt{1+(x^2-1)^3}$

21. $-1/(4\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x}})$

22. $1/[\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})^3]$

23. $\frac{1}{2}(3a-2x)\sqrt{x}(a-x)^{\frac{3}{2}}$

24. $-\sin x$

25. $(x\cos x+\sin x)\sec^2(x\sin x)$

26. $2x\tan^{-1}x$

27. $\frac{6x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}$

28. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\cdot\sin^{-1}x}$

29. $2\sqrt{2x-x^2}$

30. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

31. $x^2/(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$

32. $-\sqrt{a^2-x^2}/x^2$

33. $-\frac{a}{a^2+x^2}$

34. $\frac{3}{3x-7}$

35. $a^x\log a$

36. $\frac{1}{a}\log_{10}e\cdot\cot\frac{x}{a}$

37. $-\frac{4\log_{10}e\cdot\sec^2 x}{1-4\tan x}$

38. $\frac{4x}{1-x^4}$

39. $-\frac{3x^2}{1-x^6}$

40. $\log(a^2+x^2)$

41. $\sec x$

42. $\sec x$

43. $4x$

44. $-e^{-2x}(2+e^{-2x})(1+c^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$

45. $-\frac{1}{2} e^{-x} (1 + e^{-x}) (3 - 5e^{-}) (1 - e^{-x})^{-\frac{1}{2}}$

46. $4 \cot 4x - 3$

47. $-e^{4x} \operatorname{cosec} x \cdot (4 - \cot x) \operatorname{cosec}^2 (e^{4x} \operatorname{cosec} x)$

48. $e^{2x} [\, 2(x+1)\, x \log \operatorname{cosec} x - x^2 \cot x \,]$

49. $\left(\frac{1}{2} \sec h^2 \frac{x}{2}\right) \Big/ \left(1 + \tan h^2 \frac{x}{2}\right)$

50. $\frac{1}{2} \sec x$

51. $e^x \left[3 (1 + e^{2x}) (\tan^{-1} e^x)^{\frac{2}{3}} \right]^{-1}$

52. $\dfrac{4x}{\sqrt{(2x^2 - 3)^2 - 25}}$

53. $-\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b + a \cos x}$

54. $-3/\sqrt{e^{6x+2} - 1}$

55. $\dfrac{4 \operatorname{cosec} 4x \cdot \cot 4x}{1 + \operatorname{cosec}^2 4x}$

56. $\dfrac{1}{1 + x^2}$

57. $\dfrac{8 - 3x^2 - 10x^3}{2\sqrt{(2 - x^3)}\, [\, 1 - (2x+1)^2 (2 - x^3) \,]}$

58. $\dfrac{\log x}{x (2 + \log^2 x) \sqrt{1 + \log^2 x}}$

6·14 பிரதியிட்டு வகையிடல்

சில சார்புகளை, குறிப்பாக நேர்மாறு வட்டச் சார்புகளை, பிரதியிடலின் மூலம் உருமாற்றி, பின்வரும் மாதிரிகளில் காட்டியபடி, எளிதில் வகையிடலாம்.

மாதிரி 19

x ஐக் குறித்து வகையிடு : $\sin^{-1} (3x - 4x^3)$.

$y = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$ என்க.

$x = \sin\theta$ எனப் பிரதியிட,

$$y = \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta.$$

எனவே, $y = 3\theta,\ x = \sin\theta$;

அ—து, $y = 3\sin^{-1} x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

மாதிரி 20

$$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} \text{ ஐக்}$$

காண். தரப்பட்ட கோவையில் $x^2 = \cos 2\theta$ என இட,

$$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\pi}{4}-\theta.$$

$$\therefore \quad y = \frac{\pi}{4}-\theta,\ x^2 = \cos 2\theta.$$

அ—து, $y = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\cos^{-1} x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

பயிற்சி 6—5

பொருத்தமான பிரயீடுகளின் மூலம் x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

1. $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$
2. $\cos^{-1}(1 - 2x^2)$
3. $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$
4. $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1 - x^2}$
5. $\tan^{-1}\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}$
6. $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1 + x}{2}}$
7. $\cos^{-1}\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$
8. $\cot^{-1}\sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{x^2}}$
9. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
10. $\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2}$
11. $\cot^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$
12. $(x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \sin^{-1}(x - 1)$
13. $\dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$
14. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$
15. $\tan^{-1}\dfrac{x - \sqrt{a^2 - x^2}}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$
16. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$

விடைகள் 6 – 5

1. $-\dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$
3. $-\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$
4. $\dfrac{2}{1 + x^2}$
5. $\dfrac{3a}{a^2 + x^2}$
6. $-\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

7. $\frac{2}{1+x^2}$

8. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

9. $\frac{1}{2}$

10. $\frac{2a^2x}{a^4+x^4}$

11. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

12. $2\sqrt{2x-x^2}$

13. $\sqrt{a^2-x^2}$

14. $\frac{1}{2(1+x^2)}$

15. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

16. $\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

6·15 மடக்கை எடுத்து வகையிடல் (Logarithmic differentiation)

வகைப்படுத்தவேண்டிய சார்பை y எனக் குறித்துக் கொண்டு, e-இன் அடிப்படையில் மடக்கையெடுத்து வகையிட்டு, அதிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணும் முறையைக் கீழ்க் கண்ட இடங்களில் கையாள வேண்டும்.

(1) வகைப்படுத்தவேண்டிய சார்பு பல காரணிகளை உடையதாய் இருத்தல். (இதை, மடக்கை எடுக்காமலேயே வகையிடலாம் என்றாலும், மடக்கை எடுத்து வகையிடல் எளிது).

எடுத்துக்காட்டு :

$x\sqrt{x^2+1}\,/\,(3x^2+4)$

(2) சார்பின்படி, மாறிலியாகவின்றி, மாறியைக் கொண்டிருத்தல். (இங்கு, மடக்கை எடுத்து வகையிடலைத் தவிர வேறு முறை இல்லை).

எடுத்துக்காட்டு :

x^x, $(\log x)^{\sin x}$.

மாதிரி 21

x குறித்த வகைக் கெழு காண் : $\frac{(1+x)\sqrt{2+x}}{(1-x)^2\sqrt[3]{2-x}}$.

$y=\frac{(1+x)\sqrt{2+x}}{(1-x^2)\sqrt[3]{2-x}}$ எனக் கொள்.

$$\therefore \quad \log y = \log(1+x) + \frac{1}{2}\log(2+x) - 2\log(1-x) + \frac{1}{3}\log(2-x).$$

x-ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(2+x)} + \frac{2}{1-x} - \frac{1}{3(2-x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)\sqrt{2+x}}{(1-x)^2\sqrt{2-x}}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(2+x)} + \frac{2}{1-x} - \frac{1}{3(2-x)}.\right]$$

மாதிரி 22

x ஐக் குறித்து வகையிடுக : $(x^2+1)^n e^x \tan x) \log(ax+b)$

$y = (x^2+1)^n e^x . \quad \tan x . \log(ax+b)$ எனில்,

$\log y = n\log(x^2+1) + x + \log\tan x$
$+ \log\log \quad (ax+b)$ x-ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = n.\frac{2x}{x^2+1} + \cot x. \sec^2 x + \frac{1}{\log(ax+b)}\cdot\frac{a}{(ax+b)}$$

$$= \frac{2nx}{x^2+1} + 1 + 2\operatorname{cosec}^2 x + \frac{a}{(ax+b)\log(ax+b)}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2nx}{x^2+1} = 1 + 2\operatorname{cosec} 2x \quad \frac{a}{(ax+b)\log(ax+b)}\right],$$

$$y = (x^2+1)^n e^x \tan x . \log(ax+b).$$

மாதிரி 23

$y = x^{\sin x}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$y = x^{\sin x}.$

$\therefore \quad \log y = \sin x . \log x$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x).\frac{1}{x} = \cos x \log x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x . \log x\right]$

மாதிரி 24

$y = (\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

$y = (\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

$= u + v$ என வை.

$u = (\cos x)^{\sin x}$

$\therefore \quad \log u = \sin x . \log \cos x$

$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \cos x . \log \cos x + \sin x - \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \cos x . \log \cos x - \sin x + \tan x.$

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x . \log \cos x - \sin x \tan x\right]$

$v = (\sin x)^{\cos z}$

$\log v = \cos x . \log \sin x.$

$\therefore \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = - \sin x . \log \sin x + \cos x . \frac{\cos x}{\sin x}$

$= - \sin x \log \sin x + \cos x \cot x$

$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left[\cos x \cot x - \sin x . \log \sin x\right]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = (\cos x)^{\sin x}$

$\left[\cos x \log \cos - \sin x \tan x\right]$

$+ (\sin x)^{\cos x}\left[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x\right]$

பயிற்சி 6—6

x ஐக் குறித்த வகைக் கெழு காண் :

1. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(2x+3)}{3x+2}}$

2. $\dfrac{\sqrt{x(4x+1}}{(7-)^3\, 2x}$

3. $\dfrac{(x^2+1)\sqrt[3]{3x-7}}{(2-5x)^4}$

4. $\dfrac{(a-x)^4(6-2x)^3}{(c-3x)^2}$

5. $3^{\cos x + 1}$

6. $\dfrac{e^{x^2}\tan^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$

7. $\dfrac{\cos^m x \sin^n x}{\cosh^2 x}$

8. a^x

9. x^x

10. x^{x^x}

11. $(\sin x)^{\log x}$

12. $(\log x)^x$

13. $(\tan x)^{\log x}$

14. $x^{\log \log x}$

15. $(\log x)^x + x^{\log x}$

16. $x^x + x^{\frac{1}{x}}$

17. $\dfrac{x^x}{\log(1+x^3)}$

விடைகள் 6—6

1. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(2x+3)}{3x+2}}\cdot\left[\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2x+3}-\dfrac{3}{2(3x+2)}\right]$

2. $\dfrac{\sqrt{x(4x-1)}}{(7-2x)^3}\left[\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{4x+1}+\dfrac{6}{7-2x}\right]$

3. $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{3x-7}}{(2-5x)^{\frac{3}{4}}}\left[\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(3x-7)}+\dfrac{15}{4(2-5x)}\right]$

4. $\dfrac{(a-x)^4(b-2x)^3}{(c-3x)^2}\left[-\dfrac{4}{a-x}-\dfrac{6}{b-2x}+\dfrac{6}{c-3x}\right]$

5. $-3^{\cos x+1}\sin\log 3$

6. $\dfrac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}\left[2x+\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right]$

7. $\dfrac{\cos^m x\sin^n x}{\cos h^2 x}[n\cot x-m\tan x-2\tan h\, x]$

8. $a^x\log a$

9. $x^x(1+\log x)$

10. $x^{x^x}\cdot x^x\cdot\log x\cdot\left(1+\log x+\dfrac{1}{x\log x}\right)$

11. $(\sin x)^{\log x}\left[\cot x\cdot\log x+\dfrac{1}{x}\log\sin x\right]$

12. $(\log x)^x\left[\dfrac{1}{\log x}+\log\log x\right]$

13. $(\tan x)^{\log x}\left[\dfrac{\log x}{\sin x\cos x}+\dfrac{\log\tan x}{x}\right]$

14. $x^{\log\log x}\left[\dfrac{1+\log\log x}{x}\right]$

15. $2\log x\cdot x^{\log x-1}+(\log x)^x\log\log x+(\log x)^{x-1}$

16. $x^x(1+\log x)+\dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1+\log x)}{x^2}$

17. $\dfrac{(1+x)^3x^x\log(1+x)^3\cdot(1+\log x)-3x^2x^x}{(1+x^3)\log^2(1+x^3)}$

6.16 உட்படுசார்புகளை வகையிடல்

தரப்பட்ட கோவையிலிருந்து xன் சார்பாக yஐ, அல்லது yன் சார்பாக xஐ எழுதமுடியாமற் போனாலும், அப்படி எழுதுவது எளிதாக இல்லாமற் போனாலும், கோவையை உறுப்புவாரியாக வகையிட்டு, அதிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காணலாம்.

மாதிரி 25.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ஐக் காண்க.

தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் xஐக் குறித்து வகையிட,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

அ-து, $(y + f)\frac{dy}{dx} = -(x + g)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x + g}{y + f}.$$

மாதிரி 26

$x^y = y^x$ எனில் $\frac{yd}{dx} = \frac{y\,(y - x\log y)}{x\,(x - y\log x)}$ எனக் காட்டு.

$$x^y = y^x$$

$$\therefore \quad y\log x = x\log y$$

ஒவ்வோர் உறுப்பையும் xஐக் குறித்து வகையிட,

$$y\frac{1}{x} + \log x.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \left(\log x - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log y - \frac{y}{x}}{\log x - \frac{x}{y}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x\log y - y)}{\frac{1}{y}(y\log x - x)}$$

$$= \frac{y(y - x\log y)}{x(x - y\log x)}$$

மாதிரி 27.

$y = \sin x^{\sin x^{\sin x^{\cdots \infty}}}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$$y = \sin x^{\sin x^{\sin x^{\cdots}}}$$

$$= \sin x^{\left(\sin x^{\sin x^{\cdots}}\right)}$$

$$= \sin x^{y}$$

$$\therefore\ y = (\sin x)^{y}$$

$\log y = y \log \sin x,$

x ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y.\frac{\cos x}{\sin x} + \log \sin x.\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{y} - \log \sin x\right)\frac{dy}{dx} = y \cot x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{y\cot x}{\frac{1}{y} - \log\sin x} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y\log\sin x}$$

பயிற்சி 6–7

பின்வரும் கோவைகளிலிருந்து, x ஐக் குறித்த yன் வகைக் கெழுவைக் காண்க. [1—19]

1. $x^2 + y^2 = a^2$

2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

5. $x + y^2 = 3\,axy$

6. $xy^2 = (x + y)^3$

7. $\sin(x + y) = \cos xy$

8. $x^{y-1} = y^{x+1}$

9. $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy$

10. $x\sqrt{1+y} + \sqrt{1+x} = 0$

11. $\sin y = x \sin(a + y)$

12. $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$

13. $\frac{x}{a} = \tan\frac{y}{b} - \tan^{-1}\frac{y}{x}$

14 $y = \qquad (x + y)^2$

15. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}}}$

16. $y = x^{x^{x^{\cdots}}}$

17. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

18. $(\sin x)^{\cos y} = (\sin y)^{\cos x}$

19. $(\sin x)^y = x + y$

20. $x^y = e^{x-y}$, எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ எனக் காட்டு.

21. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = (x - y)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$ எனக் காட்டு.

விடைகள் 6—7

1. $-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2. $-\frac{ax + hy}{hx + by}$

3. $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$

4. $-\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$

5. $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

6. $-\frac{3x^2 + 2y^2 + 6xy}{3x^2 + 3y^2 + 4xy}$

7. $-\dfrac{y \sin xy + \cos (x+y)}{\cos (x+y) + x \sin xy}$

8. $\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{x \log y - (y-1)}{y \log x - (x+1)}$ 9. $\dfrac{a^2y - x^3 - xy^2}{x^2y + y^3 - a^2x}$

10. $-\dfrac{2\sqrt{(1+x)(1+y)} + y}{x + 2\sqrt{(1+x)(1+y)}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}}$

11. $\dfrac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$ 12. $\dfrac{3y}{2(x-2a)}$

13. $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{b} \sec^2 \dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

14. $\dfrac{2(x+y)\cos (x+y)^2}{1 - 2(x+y)\cos (x+y)^2}$

15. $\dfrac{\cos x}{2y-1}$ 16. $\dfrac{y^2}{x(1 - y \log x)}$

17. $\dfrac{\log \sin y + y \tan}{\log \cos x - x \cot y}$

18. $\dfrac{\cos y \cot x + \sin x \log \sin y}{\cos x \cot y + \sin y \log \sin x}$

19. $\dfrac{x - (x+y)\, y \cot x}{(x+y) \log \sin x - 1}$

6.17 ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பைக் குறித்து வகையிடல் — துணையலகின்மூலம் வகையிடல்

$u(x)$, $v(x)$ என்பவை xல் இரு சார்புகள் எனில், $v(x)$ ஐக் குறித்த $u(x)$ ன் வகைக்கெழுவை,

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} \Big/ \frac{dv}{dx}$$

என்ற வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இதில் u, v இரண்டும் x என்ற துணையலகு (parameter) மூலமாகக் கொடுக்கப்பட்டதாகவும் கொள்ளலாம்,

மாதிரி 28

$\sqrt{x^2+1}$ என்பதை $2x^3$ என்பதைக் குறித்து வகையிடு.

$u(x) = \sqrt{x^2+1}$,

$v(x) = 2x^3$ என வை.

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\frac{dv}{dx} = 6x^2.$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} \Big/ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{6x\sqrt{x^2+1}}$$

மாதிரி 29

$\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ என்பதை, $\sqrt{1-x^2}$ ஐக் குறித்து வகையிடு.

$\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1} = \cos^{-1}(2x^2-1) = u(x)$ எனவும்,

$v(x) = \sqrt{1-x^2}$ எனவும் வை.

$x = \cos\theta$ என இட,

$u = \cos^{-1}(2\cos^2\theta - 1) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta$,

$v = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sin\theta$.

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{du}{d\theta} \Big/ \frac{dv}{d\theta} = \frac{2}{\cos\theta} = \frac{2}{a}.$$

மாதிரி 30

$y = a(1-\cos\theta)$, $x = a(\theta+\sin\theta)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக்காண்

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}.$$

மாதிரி 31

$x = e^{\cos^{-1} t}$, $y = \sin^{-1} t$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\cos^{-1} t}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = -e^{\cos^{-1} t}.$$

பயிற்சி 6—8

1. $a \cos x$ ஐக் குறித்து $b \sin x$ ஐ வகையிடு.
2. $a \sec \theta$ ஐக் குறித்து $b \tan \theta$ ஐ வகையிடு.
3. $\frac{3at}{1+t^3}$ என்பதைக் குறித்து $\frac{3at}{1+t^3}$ ஐ வகையிடு.
4. $10^{\sin \theta}$ ஐக் குறித்து $\cos \theta$ ஐ வகையிடு.
5. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^2 t$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?
6. $\cos 2\theta$ ஐக் குறித்து $\sin \theta$ ஐ வகையிடு.
7. $\sec ax$ ஐ, e^{ax} ஐக் குறித்து வகையிடு.
8. $u = 3 \cos \theta - \cos^3 \theta$, $v = 3 \sin \theta - \sin^3 \theta$ எனில் $\frac{du}{dv}$ ஐக் காண்.
9. $u = a (2 \cos t + \cos 2t)$, $v = a (2 \sin t + \sin 2t)$ எனில் $\frac{du}{dv}$ என்ன ?
10. $x = a \cos h\, 2t$, $y = b \sin h\, 2t$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?
11. $x = a \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$, $y = a \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.
12. $\sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1}$ ஐக் குறித்து $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ஐ வகையிடு.

13. $u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-t^2} - t}{t}$, $v = \tan^{-1} t$ எனில் $\frac{dv}{du}$ ஐக் காண்.

14. $x = \tan^{-1} \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \sin^{-1} \frac{2t}{1+t^2}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

15. $(\sin x)^{\sin x}$ ஐக் குறித்து x^x ஐ வகையிடு.

விடைகள் 6—8

1. $-\frac{b}{a} \cot \theta$

2. $\frac{b}{a} \cot \theta$

3. $\frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}$

4. $-10^{-\sin \theta} \cdot (\log_{10} e) \tan \theta$

5. $-\frac{b}{a} \tan \theta$

6. $-\operatorname{cosec} \theta$

7. $\frac{\sec ax \tan ax}{e^{ax}}$

8. $-\cot^3 \theta$

9. $-\cot \frac{3\theta}{2}$

10. $\frac{b}{a} \cot h\, 2t$

11. $\frac{\sin \theta\, (2 \cos 2\theta - 1)}{\cos 3\theta}$

12. $-\frac{1}{2}$

13. $\frac{1}{3}$

14. 1

15. $\frac{x^x (1 + \log x)}{(\sin x)^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (1 + \log \sin x)}$

7. தொடர்ந்து வகையிடல்

(SUCCESSIVE DIFFERENTIATION)

7·1 x ன் ஒரு சார்பான y ஐ x ஐக் குறித்து வகையிடக் கிடைப்பது x ன் மற்றொரு சார்பாக இருக்கும். அதையே மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிடக் கிடைப்பது y ன் இரண்டாம் வகைக்கெழு எனப்படும். இதை மீண்டும் வகையிட, y ன் மூன்றாம் வகைக்கெழு கிடைக்கும்.

7·2 குறையீடுகள் : x ஐக் குறித்த y ன் முதல், இரண்டாம் மூன்றும், ... பொதுவாக n ஆம் வகைக்கெழுக்கள் முறையே

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

என்று குறிக்கப்படும். இவற்றின் வேறு வடிவங்கள் :

$$y^1(x), \quad y^{11}(x), \quad y^{111}(x), \ldots, y^{n)}(x);$$

$$y_1, (x), \quad y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x);$$

$$Dy, \quad D^2y, \quad D^3y, \ldots, \quad D^ny, \left(D \equiv \frac{d}{dx}\right).$$

$y = f(x)$ என்பது சார்பு எனில், இவற்றை

$f^{I}(x), \quad f^{II}(x), \quad f^{III}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ எனவும் குறிக்கலாம். சாராத மாறி இன்னதென்று தெளிவாகத் தெரிவதானல் அதை அடைப்பில் குறிப்பிடாமலும் இருக்கலாம். சாராத மாறி என்ற நேரம் எனில் அதைப்பொருத்த y ன்வகைக்கெழுக்களை, y, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, எனக் குறிப்பதும் உண்டு.

மாதிரி 1

x ஐக் குறித்த மூன்றும் வகைக்கெழுவைக் காண்: $(4x-3)^{\frac{3}{2}}$

$y=(4x-3)^{\frac{3}{2}}$ எனில்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 4=6(4x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6\cdot\frac{1}{2}(4x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4=12(4x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx^3}=12\left(-\frac{1}{2}\right)(4x-3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4=-24(4x-3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3}=-24(4x-3)^{-\frac{3}{2}}$$

மாதிரி 2

x, y இரண்டும் t ன் சார்புகள் எனில்

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

எனக் காட்டு. $x=t^2+3t$, $y=2t+t^3$ எனில் $\frac{dy^2}{dx^2}$ ன் மதிப்பை $t=1$ ஆக இருக்கையில் காண்க.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

இதை மீண்டும் வகையிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

$x = t^2 + 3t$ எனில்,

$\dot{x} = 2t + 3, \quad \ddot{x} = 2.$

$y = 2t + t^3$ எனில்,

$\dot{y} = 2 + 3t^2, \; \ddot{y} = 6t.$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{(2t+3)\,6t - (2+3t^2)\,2}{(2t+3)^3}$$

$$= \frac{2(3t^2 + 9t - 2)}{(2t+3)^3}.$$

$t = 1$ என இட,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1} = \frac{20}{125} = \frac{4}{25}.$$

கவனிக்க :

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y}{dt^2} \Big/ \frac{d^2x}{dt^2}.$$

மாதிரி 3

$y^3 - 3ax^2 + x^3 = 0$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$ எனக் காட்டு.

$$y^3 = 3ax^2 - x^3.$$

வகையிட,

$$3y^2y_1 = 6ax - 3x^2$$

$$\therefore \quad y^2y_1 = 2ax - x^2.$$

மீண்டும் வகையிட,

$$y^2y_2 + 2yy_1^2 = 2a - 2x.$$

$$\therefore \quad y_2 = \frac{2a - 2x - 2y\,y_1^2}{y^2}$$

$$= \frac{2}{y^2}\left[a - x - y\left(\frac{2ax - x^2}{y^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{y^5}\left[y^3(a - x) - (2ax - x^2)^2\right]$$

$$= \frac{2}{y^5}\ [3ax^2 - x^3)(a - x) - (2ax - x^2)^2]$$

$$= -\frac{2a^2x^2}{y^5}.$$

$$\therefore\ y_2 + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0.$$

7·3 நியம வினாவுகள்

1. $y = (ax + b)^m$ எனில்

$$y_1 = m\,(ax + b)^{m-1} \cdot a$$

$$y_2 = m\,(m - 1)\,a^2\,(ax + b)^{m-2}$$

இவ்வாறு தொடர்ந்து வகையிட,

$$y_n = m(m - 1)(m - 2) \ldots (m - n + 1)\,a^n\,(ax + b)^{m-n}.$$

m ஒரு மிகை முழுவெண் எனில்,

$$y_m = m!\ a^m$$

$$y_{m+1} = 0 = y_{m+2} = y_{m+3} = \ldots$$

அதாவது,

$$y_n = m!\ a^m,\ n = m$$

$$= 0,\ n > m.$$

2. $y = (ax + b)^{-1}$ எனில்

$$y_1 = (-1)\,a\,(ax + b)^{-2}$$

$$y_2 = (-1)(-2)\,a^2\,(ax + b)^{-3}$$

இவ்வாறே தொடர்ந்து வகையிட,

$$y_n = (-1)(-2)(-3) \ldots (-n)\,a^n\,(ax + b)^{-(n+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n\,n!\,a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

இதேபோல்,

$$y = (ax + b)^{-2}$$ எனில்

$$y_n = \frac{(-1)^n\,(n + 1)!\,a^n}{(ax + b)^{n+2}}$$

எனக் காட்டலாம்

3. $y = \log(ax+b)$ எனில்

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a\,(ax+b)^{-1}$$

முன் விளைவைப் பயன்படுத்தி, இதன் $(n-1)$ ஆவது வகைக் கெழுவை எழுத,

$$y_n = a.\ \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,a^{n-1}}{(ax+b)^n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$$

4. $y = \sin(ax+b)$ எனில்

$$y_1 = a\cos(ax+b)$$
$$y_2 = -a^2\sin(ax+b)$$
$$y^3 = -a^3\cos(ax+b)$$
$$y^4 = a^4\sin(ax+b)$$

... ...

இவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$y_1 = a\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_2 = a^2\sin\left(2.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_3 = a^3\sin\left(3.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_4 = a^4\sin\left(4.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

... ...

எனவே, n ஆவது வகைக் கெழு

$$y_n = a^n\sin\left(n\,\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

5. $y = \cos(ax+b)$ எனில்,

$$y_n = a^n\cos\left(n\,\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

என இதேபோல நிறுவுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்க.

குறிப்பாக, $y = \sin x$ எனில்,

$$y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right);$$

$y = \cos x$ எனில்,

$$y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

6. $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ எனில்

$$y_1 = b\,e^{ax} \cos(bx + c) + a\,e^{ax} \sin(bx + c)$$

$a = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha$ என இட, இதை

$$y_1 = r\,e^{ax}[\sin\alpha\cos(bx + 1) + \cos\alpha\sin(bx + c)]$$

என எழுதலாம்.

அ-து, $y_1 = r\,e^{ax}\sin(bx + c + \alpha)$

இதை மீண்டும் வகையிட,

$$y_2 = rb\,e^{ax}\cos(bx+c+\alpha) + ra\,e^{ax}\sin(bx+c+\alpha)$$
$$= r^2 e^{ax}[\sin\alpha\cos(bx + c + \alpha) + \cos\alpha\sin(bx + c + \alpha)]$$
$$= r^2 e^{ax}\sin(bx + c + 2\alpha).$$

இவ்வாறே தொடர,

$$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\alpha),$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

7. $y = e^{ax}\cos(bx + c)$ எனில்

$$y_n = r^n e^{ax}\cos(bx + c + n\alpha),$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

இதை, விளைவு 6 ஐப் போலவே நிறுவுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்க.

கவனிக்க : $\tan \alpha = \frac{b}{a}$. இதிலிருந்து, $-\pi, +\pi$ க்கு இடைப்பட்ட α-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். இச்சமன்பாடு α-வுக்கு இரு மதிப்புக்களைத்தரும். அவ்விரண்டில் தேவையான மதிப்பு, $r \sin \alpha = b$, $r \cos \alpha = a$, $(r > 0)$, என்ற சமன்பாடுகளில் ஒன்றையும் நிறைவுபடுத்தவேண்டும்.

மாதிரி 4

$$y = \frac{x}{(4x^2 - 1)(x - 1)} \text{ எனில் } y_n \text{ ஐக் காண்.}$$

$$y = \frac{x}{(4x^2-1)(x-1)} = \frac{x}{(x-1)(2x-1)(2x+1)}.$$

பகுதி பின்னப்படுத்த,

$$y = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{6(2x+1)}.$$

$$\therefore \quad y_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!\, 2^n}{(2x-1)^{n+1}} + \frac{1}{6} \frac{(-1)^n \cdot n!\, 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$$

அ—து, $$y_n = (-1)^n n! \left[\frac{1}{3(x-1)^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} + \frac{2^{n-1}}{3(2x+1)^{n+-}} \right]$$

மாதிரி 5

n ஆவது வகைக்கெழுவைக் காண் : $\frac{x^4}{(x-1)(x+2)^2}$.

தரப்பட்ட கோவையை y எனக் கொண்டு அதைப் பின்வருமாறு பகுதி பின்னப்படுத்தி எழுதலாம் :

$$y = x - 3 + \frac{1}{9(x-1)} + \frac{80}{9(x+2)} - \frac{16}{3(x+2)^2}.$$

$(x - 3)$ என்ற உறுப்பின் காரணமாக y_1-ல் நான்கு உறுப்புக்களும், மற்ற வகைக் கெழுக்களில் மூன்றே உறுப்புக்

களும் இருக்கும். எனவே, விடையை $n = 1$ க்கும், $n > 1$ க்கும் தனித்தனியே குறிப்பிடவேண்டும்.

$$\left.\begin{aligned} \text{எனவே, } y_1 &= 1 - \frac{1}{9(x-1)^2} - \frac{80}{9(x+2)^2} + \frac{32}{3(x+2)^3} \\ y_n &= \frac{(-1)^n n!}{9(x-1)^{n+1}} + \frac{80(-1)^n n!}{9(x+2)^{n+1}} \\ &\quad - \frac{16(-1)^n (n+1)!}{3(x+2)^{n+2}}, \quad n > 1 \end{aligned}\right\}.$$

மாதிரி 6

$y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ எனில், y_n, y_4 ஐக் காண்க.

$$y = \sin x \sin 2x \cos 3x$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x)\cos 3x$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos^2 3x - \cos x \cos 3x]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 6x) - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\right]$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{4}[1 + \cos 6x - \cos 4x - \cos 2x].$$

$$\therefore \; y_n = -\frac{1}{4}\left[6^n \cos\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right) - 4^n \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

$n = 4$ என இதில் இட,

$$y_4 = -\frac{1}{4}[6^4 \cos(6x + 2\pi) - 4^4 \cos(4x + 2\pi) - 2^4 \cos(2x + 2\pi)]$$

$$= 64 \cos 4x + 4 \cos 2x - 324 \cos 6x.$$

மாதிரி 7

$y = e^{3x} \sin^2 x \cos^3 x$ எனில் y_n என்ன ?

$$y = e^{3x} \sin^2 x \cos^3 x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$= \frac{1}{8} e^{3x} (\cos 3x + 3 \cos x - \cos 2x \cos 3x - 3 \cos 2x \cos x)$$

$$= \frac{1}{8} e^{3x} \left[\cos 3x + 3 \cos x - \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) - \frac{3}{2} (\cos 3x + \cos x)\right]$$

$$= \frac{1}{8} e^{3x} \left(- \frac{1}{2} \cos 3x + \cos x - \frac{1}{2} \cos 5x\right)$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{16} e^{3x} (2 \cos x - \cos 3x - \cos 5x)$$

$$\therefore \quad y = u - v - w ;$$

$$u = \frac{1}{8} e^{3x} \cos x, \quad v = \frac{1}{16} e^{3x} \cos 3x, \quad w = \frac{1}{16} e^{3x} \cos 5x.$$

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{8} r_1^n e^{3x} \cos (x + n \alpha_1),$$

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \tan \alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_1 = \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

n

$$\therefore \quad u_n = \frac{10}{8} e^{3x} \cos \left(x + n \tan^{-1} \frac{1}{3}\right).$$

$$v_n = \frac{1}{16} r_2^n e^{3x} \cos (3x + n \alpha_2),$$

$$r_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{\;}\ \tan \alpha_2 = \frac{3}{3} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \quad v_n = \frac{(3 \sqrt{2})^n}{16} e^{3x} \cos \left(3x + n \frac{\pi}{4}\right).$$

$$w_n = \frac{1}{16} r_3{}^n e^{3x} \cos\left(5x + n \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$r_3 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},\ \tan \alpha_3 = \frac{5}{3},\quad \alpha_3 = \tan^{-1} \frac{5}{3}.$$

$$\therefore\ w_n = \frac{34^{\frac{n}{2}}}{16} e^{3x} \cos\left(5x + n \tan^{-1} \frac{5}{3}\right).$$

$$\therefore\ y_n = u_n - v_n - w_n$$

$$= \frac{1}{16} e^{3x} \left[2\cdot10^{\frac{n}{2}} \cos\left(x + n \tan^{-1} \frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left. - 18^{\frac{n}{2}} \cos\left(3x + \frac{n\pi}{4} - 34^{\frac{n}{2}} \cos\left(5x + n \tan^{-1} \frac{5}{3}\right)\right]$$

மாதிரி 8

$\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ யின் n ஆம் வகைக்கெழு என்ன ?

$y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ எனில்

$$y_1 = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

$$= a. \frac{1}{(x + ia)(x - ia)} = \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{x + ia} + \frac{1}{x - ia}\right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x + ia} - \frac{1}{x - ia}\right].$$

இதை $(n - 1)$ முறை வகையிட,

$$y_n = \frac{(-1)^{n-1} (n - \quad ! i}{2} \left[\frac{1}{(x + ia)^n} - \frac{1}{(x - ia)^n}\right].$$

பயிற்சி 7—1

x ஐக் குறித்த இரண்டாம் வகைக்கெழுவை காண் [1, 2].

1. $\dfrac{\log x}{x}$ 2. $e^{3x}(ax+b)$

x ஐக் குறித்த மூன்றும் வகைக்கெழுவை காண் [3, 4].

3. $x^2 \sin 2x$ 4. $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

xஐக் குறித்த yன் இரண்டாம் வகைக் கெழுவைக் காண் [5 — 7].

5. $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$

6. $x = a\cos^3 t,\quad y = b\sin^3 t$

7. $x = \tan\theta,\quad y = \sin^2\theta$

8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ எனில், $y''(x) = \dfrac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$ எனக் காட்டு.

9. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ எனில், $D^2y = \dfrac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$ எனக் காட்டு.

10. $y^2 = (x-a)(x-b)$ எனில்

$$\frac{dx}{dx^3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0$$ எனக் காட்டு.

x ஐக் குறித்த n ஆம் வகைக் கெழுவைக் காண் [11 — 31]

11. $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$ 12. $\dfrac{x}{(x+1)^2(2x+1)}$

13. $\log(4-x^2)$ 14. $\dfrac{x^3}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)}$

15. $\dfrac{x^3}{(x-3)(x+1)}$ 16. $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

17. $\sin^3 x$ 18. $\cos^4 x$

19. $\sin 3x\cos 2x$ 20. $\cos x\cos 2x\cos 3x$

21. $\sin^2 x\cos^3 x$ 22. $\sin^3 x\cos^5 x$

23. $e^x \sin x$ 24. $e^{4x}\cos 3x$

25. $e^{-4x} \cos 2x$

26. $e^{-2x} \sin 3x$

27. $e^{4x} \sin^2 x$

28. $e^{x} \sin 2x \sin x$

29. $e^{2x} \sin 2x \cos 4x$

30. $e^{5x} \sin^3 x$

31. $\dfrac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b)^2}$

32. $e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ என்பதன் மூன்றும் வகைக் கெழுவைக் காண்க.

33. $e^{3x} \sin 3x$ ன் 4 ஆம் வகைக் கெழு என்ன ?

34. $\sin x \sin 4x$ ன் 8 ஆம் வகைக் கெழுவைக் காண்க.

35. $\cos^2 x \sin^3 x$ ன் 8 ஆம் வகைக் கெழு என்ன ?

விடைகள் 7—1

1. $\dfrac{2 \log x - 3}{x^3}$

2. $e^{3x} (9ax + 6a + 9b)$

3. $4 (3 - 2x^2) \cos 2x - 24 x \sin 2x$

4. $\dfrac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$

5. $-\dfrac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 t$

6. $\dfrac{b}{3a^2} \operatorname{cosec} t \sec^4 t$

7. $2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)$

11. $n! \left[-\dfrac{1}{(1 - x)^{n+1}} + \dfrac{2^{n+1}}{(1 - 2x)^{n+1}} \right]$

12. $(-1)^n n! \left[\dfrac{n + 1}{(x + 1)^{n+2}} + \dfrac{1}{(x + 1)^{n+1}} - \dfrac{2^{n+1}}{(2x + 1)^{n+1}} \right]$

13. $(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\dfrac{1}{(x+2)^n}+\dfrac{1}{(x-2)^n}\right]$

14. $(-1)^n\, n!\ \sum \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)^{n+1}}$

15. $\frac{1}{4}(-1)^n\, n!\left[\dfrac{27}{(x-3)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right],\ n>1;$

$1-\dfrac{27}{4(x-3)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2},\ n=1.$

16. $\frac{1}{2}(-1)^n\, n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)}\right],\ n>2;$

$2x-\frac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right],\ n=1;$

$2+\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3},\ n=2.$

17. $\frac{1}{4}\left[3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

18. $\frac{4^n}{8}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$

19. $\frac{1}{2}\left[5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

20. $\frac{1}{4}\left[6^n\cos\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)\right.$

$\left.+2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

21. $-\frac{1}{16}\left[5^n\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)+3^n\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right.$

$\left.-2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

22. $$\frac{1}{2^7}\left[6\cdot 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+2\cdot 4^n \sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\,2\cdot 6^n \sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)-8^n \sin\left(8x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

23. $$2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

24. $$5^n e^{4x} \cos\left(3x+n\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

25. $$(2\sqrt{5})^n e^{-4x} \cos\left(2x+\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

26. $$13^{\frac{n}{2}} e^{-2x} \sin\left(3x+\pi-\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)$$

27. $$2^{n2-1} e^{4x}-\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{5})^n e^{4x}\cos\left(2x+n\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

28. $$\frac{1}{2} e^x\left[2^{\frac{n}{2}}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)-10^{\frac{n}{2}}\cos(3x+n\tan^{-1}3)\right]$$

29. $$\frac{1}{2} e^{2x}\left[53^{\frac{n}{2}}\sin\left(7x+n\tan^{-1}\frac{7}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\,5^{\frac{n}{2}}\sin\left(x+n\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

30. $$\frac{3}{4} e^{5x}(25+a^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(ax+n\tan^{-1}\frac{a}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{4} e^{5x}(25+9a^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(3ax+n\tan^{-1}\frac{3a}{5}\right)$$

31. $\dfrac{(-1)^n\, n!\, i}{2\,(a^2-b^2)}\left[\dfrac{1}{b}\left\{\dfrac{1}{(x+bi)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-bi)^{n+1}}\right\}\right.$

$$\left.-\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}\right\}\right]$$

32. $e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

33. $-324\, e^{3x}\sin 3x$

34. $\dfrac{1}{2}(3^8\cos 3x-5^8\cos 5x)$

35. $\dfrac{1}{16}(3^8\sin 3x+2\sin x-5^8\sin 5x)$.

7·4 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்

வகைக்கெழுக்கள் உள்ள சமன்பாடு, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

x, y என்ற இரு மாறிகள் அடங்கிய ஒரு சமன்பாடு தரப்பட்டால், அதை வகையிட்டு, x ஐக் குறித்த y ன் வகைக்கெழுக்களும், x, y ஆகியவையும் அடங்கிய ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைத்தல் கூடும். அம் முறையைப் பின்வரும் மாதிரிகள் விளக்கும்.

மாதிரி 9

$y = a\sin(x^2+b)+\dfrac{x^2}{4}$ எனில், a, b ஆகியவற்றை நீக்கக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க.

நீக்கவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை எதுவோ அத்தனை முறை சமன்பாட்டை வகையிட வேண்டும்.

தரப்பட்ட சமன்பாடு :

$$y = a\sin(x^2+b)+\frac{x^2}{4}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2a\,x\cos(x^2+b) + \frac{x}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a\cos(x^2+b) - 4a\,x\sin^2(x^2+b) + \frac{1}{2}$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து 9, 6 ஐ நீக்க வேண்டும்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$a\sin(x^2+b) = y - \frac{x^2}{4}.$$

இதை மூன்றும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4x^2\left(y - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

அ-து, $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x^2(4y - x^2) - 1 = 0.$

இதுவே தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

மாதிரி 10.

$\sin^{-1} x = \sqrt{y}$ எனில்,

$(1-x^2)\,y'' - xy' - 2 = 0$ எனக் காட்டுக.

$\sin^{-1} x = \sqrt{y}.$

$\therefore \quad y = (\sin^{-1} x)^2.$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{dy}{dx} = 2\,\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

இரு பக்கங்களையும் வர்க்கப்படுத்தி, குறுக்கே பெருக்க,

$(1-x^2)\,y_1^2 = 4(\sin^{-1} x)^2 = 4y$

$\therefore \quad (1-x^2)\,y_1^2 - 4y = 0.$

வகையிட,

$2(1-x^2)\,y_1 y_2 - 2x\,y_1^2 - 4y_1 = 0.$

$2y_1$ ஆல் முழுவதும் வகுக்க,

$(1-x^2)\,y_2 - xy_1 - 2 = 0.$

மாதிரி 11

$y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ எனில்

$(1 + x^2)\, y_2 + x\, y_1 - m^2 y = 0$ எனக் காட்டு.

$$y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m.$$

$$\therefore \quad y_1 = m\,(x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= m \quad (x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1} \frac{(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{m\,(x + \sqrt{1 + x^2})^m}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{m\,y}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{m\,y}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

இரு பக்கங்களுக்கும் வர்க்கம் எடுத்து, குறுக்கே பெருக்க,

$$(1 + x^2)\, y_1^2 = m^2 y^2.$$

இதை வகையிட,

$$2\,(1 + x^2)\; y_1\, y_2 + 2x\, y_1^2 = 2m^2\, y y_1.$$

$2y_1$ ஆல் வகுக்க,

$$(1 + x^2)\, y_2 + x y_1 - m^2 y = 0.$$

மாதிரி 12

$y = x^2 \cos x$ எனில்

$x^2\, y_2 - 4xy_1 + (x^2 + 6)\, y = 0$ எனக் காட்டு.

$$y = x^2 \cos x.$$

$$\therefore \quad y_1 = 2x \cos x - x^2 \sin x,$$

$$y_2 = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x.$$

$$\therefore \quad x^2\, y_2 - 4xy_1 = x^2\,(2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x) - 4x\,(2x \cos x - x^2 \sin x)$$

$$= -\,(x^2 + 6)\, x^2 \cos x$$

$$= -\,(x^2 + 6)\, y$$

$$\therefore \quad x^2\, y_2 - 4xy_1 + (x^2 + 6)\, y = 0.$$

பயிற்சி 7—2

மாறிலிகள் a, b ஆகியவற்றை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமை [1 — 7].

1. $y = a \sin mx + b \cos mx$

2. $y = ae^{px} + be^{-px}$

3. $y = (a + bx) e^{mx}$

4. $2xy = ax^2 + b + x^2 \log^x$

5. $xy = ae^x + be^{-x}$

6. $xy = a \cos mx + b \sin mx$

7. $xy = ax^2 + \dfrac{b}{x}$

8. $y = \sin^{-1} x$ அல்லது, $\cos^{-1} x$ எனில்

$$(1 - x^2) y'' = xy' = 0$$ எனக் காட்டு.

9. $y = e^{ax} \sin bx$ எனில்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2) \ (a^2+b^2)y = 0$$ எனக்காட்டு.

10. $y = e^{-x} \cos x$ எனில், y பின்வரும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தும் எனக் காட்டு :

$$D^4 y + 4y = 0, \ D \equiv \frac{d}{dx}.$$

11. $y = \dfrac{\log x}{x}$ எனில்,

$$x^3 y_3 + 6x^2 y_2 + 4xy_1 - 4y = 0$$ எனக் காட்டு.

12. $y = e^x \tan^{-1} x$ எனில்

$$(1 + x^2) y_2 - 2 \ (1 - x + x^2) y_1 + (1 - x^2) y = 0$$

எனக் காட்டு.

13. $y = Ae^{x} + Be^{x^2}$ எனில்

$$(2x - 1) y_2 - (4x^2 + 1) y_1 + 2 (2x^2 - x + 1) y = 0$$

எனக் காட்டு.

14. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{1 - x}$ எனில் $(1 - x) \dfrac{d^3y}{dx^3} = 3 \dfrac{d^2y}{dx^2}$

எனக் காட்டு.

15. $y = A \quad (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + B \quad (x - \sqrt{x^2 - 1})^m$ எனில்,

$(x^2 - 1)\, y_2 + xy_1 - m^2\, y = 0$ எனக் காட்டு.

16. $y \sqrt{x} = \sin^{-1} \sqrt{x}$ எனில்

$4x\,(1 - x)\, y_2 + 2\,(3 - 4x)\, y_1 = y$ எனக் காட்டு.

17. $y = a \cos \log x + b \sin \log x$ எனில்

$x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ எனக் காட்டு.

18. $y = \sin (m \sin^{-1} x)$ எனில்

$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 + m^2\, y = 0$ எனக் காட்டு.

19. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனில்

$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - a^2\, y = 0$

எனக் காட்டு.

20. $x = Ae^{-kt} \cos (nt + \alpha)$ $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2k \dfrac{dx}{dt} + (k^2 + n^2)x = 0$

எனக் காட்டு.

21. $x = A \cos (nt + \alpha) + \dfrac{a}{n^2 - p^2} \cos pt$ எனில்

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2\, x = a \cos\; pt$ எனக் காட்டு.

விடைகள் 7—2

1. $y_2 + m^2y = 0$
2. $y_2 - p^2y = 0$
3. $y_2 - 2ny_1 + n^2y = 0$
4. $x^2y_2 = xy_1 - y \;= 0$
5. $xy_2 + 2y_1 - xy = 0$
6. $y_2 + \dfrac{2}{x} y_1 + m^2y = 0$
7. $x^2y_2 + 2xy_1 - 2y = 0$

7·5 *லைபினிட்சின் தேற்றம் (Leibnitz's Theorem)

இரு சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n ஆவது வகைக் கெழுவைக்காண லைபினிட்ஸ் தந்த ஒரு தேற்றம் பயன்படுகிறது.

தேற்றம்

u, v என்பவை x-ன் இரு சார்புகள் எனில்,

$$D^n (uv) = u_n v + {}^n c_1 u_{n-1} v_1 + {}^n c_2 u_{n-2} v_2 + \dots + {}^n c_r u_{n-r} v_r + \dots + uv_n.$$

நிறுவல்.

தொகுத்தறி முறையைப் (Method of Induction) பயன்படுவோம்.

தேற்றத்தின்படி

$$D^n (uv) = u_n v + {}^n c_1 u_{n-1} v_1 + {}^n c_2 u_{n-2} v_2 + \dots + {}^n c_r u_{n-r} v_r + \dots + uv_n. \quad \dots (1)$$

n ன் மதிப்பு m ஆக இருக்கையில் இது உண்மை எனக் கொள்வோம். எனவே,

$$D^m (uv) = n_m v + {}^m c^1 u_{m-1} v_1 + {}^m c_2 u_{n-2} v_2 + \dots + {}^m c_r u_{m-r} v_r + \dots uv_m. \quad \dots (2)$$

இரு பக்கங்களையும் x ஐக் குறித்து வகையிட,

$$D^{m+1} (uv) = u_{m+1} v + u_m v_1 + {}^m c_1 (u_m v_1 + u_{m-1} v_2) + {}^m c_2 (u_{m-1} v_2 + u_{m-2} v_3) + \dots + {}^m c_{r-1} (u_{m-r+2} v_{r-1}) + u_{m-r+1} v_r) + {}^m c_r (u_{m-r} v_{r+1}) + \dots + u_1 v_m + uv_{m+1}$$

$$= u_{m+1} v + (1 + {}^m c_1) u_m v_1$$

---

*லைபினிட்ஸ் (Gottfried Wilhelm von Leibnitz) [1646 — 1716] ஒரு ஜெர்மானியக் கணித மேதை. நியூட்டனுடன் தொடர்பின்றித் தனியாக நுண் கணிதம் (Calculus) கண்டவர். பல துறை அறிஞர். ஈரெண்முறையைப் (Binary System) போற்றி வளர்த்தவர். கணக்கீட்டுப் பொறியை (Calculating machine) 1672-ல் செய்தவர். (இரண்டாம் உலகப் போர் நிகழும் வரையில் ஹனோவரில் 'லைபினிட்ஸ் மியூசிய'த்தில் அது வைக்கப்பட்டிருந்தது.)

$$+ ({}^mc_2 + {}^mc_1)\, u_{m-1}\, v_2 + \ldots$$
$$+ ({}^mc_{r-1} + {}^mc_r)\, u_{m-r+1}\, v_r + \ldots$$
$$+ uv_{m+1}.$$

ஆயின், ${}^mc_{r-1} + {}^mc_r = {}^{m+1}c_r$.

அ-து, ${}^mc_0 + {}^mc_1 = {}^{m+1}c_1$,

${}^mc_1 + {}^mc_2 = {}^{m+1}c_2$, இன்ன பிற.

எனவே,

$$D^{m+1}(uv) = u_{m+1}\, v + {}^{m+1}c_1\, u_m\, v_1 + {}^{m+1}c_2\, u_{m-1}\, v_2 + \ldots + {}^{m+1}c_r\, u_{m-r+1}\, v_r + \ldots + uv_{m+1}. \quad \ldots (3)$$

(2) ஐயும் (3) ஐயும் ஒப்பிடுவோம். இரண்டும் ஒரே அமைப்பில் இருப்பதோடு, முன்னதில் m க்குப் பதிலாக $(m+1)$ ஐ இட்டால் பின்னது கிடைக்கிறது. எனவே, தேற்றம், $n = m$ என்ற மதிப்புக்கு உண்மையாக இருப்பின், $n = m + 1$ என்ற மதிப்புக்கும் உண்மையாகவே இருக்கும்.

இனி, $n = 1$ என்ற மதிப்புக்குத் தேற்றம் உண்மை என்பது எளிதில் தெரிகிறது.

$$D(uv) = u_1\, v + uv_1$$

எனவே, $n = 2$ என்ற மதிப்புக்கும், இதேபோல் $n = 3, 4, \ldots$ முதலிய nன் எல்லா முழுவெண் மதிப்புக்களுக்கும் தேற்றம் உண்மையாகிறது.

குறிப்பு : n ஆம் வகைக்கெழு காணவேண்டிய இருகாரணிப் பெருக்கலில் ஒன்றின் வடிவம் x^r (n மிகை முழுவெண், $< n$) எனில் அதை v எனக் கொள்ளவேண்டும். வகைக்கெழுவில் மொத்தம் $(n+1)$ உறுப்புக்களே இருக்கும்.

மாதிரி 13.

$y(x) = x^2 \cos 2x$ என்பதன் n ஆம் வகைக் கெழுவைக் காண். குறிப்பாக y-இன் ஆறும் வகைக் கெழுவை, $x = 0$ என இருக்கும்பொழுது கண்டுபிடி.

$$u_n = \cos 2x,\ v = x^2 \text{ எனக் கொள்.}$$

$$\therefore\ u_n = 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$v_1 = 2x,\ v_2 = 2,\ v_3 = 0,\ v_4 = \ldots$$

$$\therefore\ y_n(x) = D^n[(\cos 2x)\cdot x^2] = D^n(uv)$$

$$= u_n\, v + n\, u_{n-1}\, v_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u_{n-2}\, v_2 + \ldots + uv_n$$

$$= 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot x^2$$

$$+ n \cdot 2^{n-1} \cos\left(2x + \overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2x$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-2} \cos\left(2x + \overline{n-2}\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2.$$

$$\therefore \quad y_n(x) = 2^n \left[x^2 \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right.$$

$$+ nx \cos\left(2x + \overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{4} \cos\left(2x + \overline{n-2}\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

$n = 6$, $x = 0$ என இட,

$$y_6(0) = 2^6 \cdot \frac{6 \cdot 5}{4} \cdot \cos\frac{4\pi}{4} = 480.$$

மாதிரி 14

$\sin^{-1} x = \sqrt{y}$ எனில் பின்வரும் விளைவுகளை நிறுவுக.

(i) $(1 - x^2) y_2 - xy_1 - 2 = 0$

(ii) $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) xy_{n+1} - n^2 y_n = 0.$

மாதிரி 10 ல் விளைவு (i) நிறுவப்பட்டுவிட்டது.

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 - 2 = 0.$$

இதன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் லீபினிட்சின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி *n* முறை வகையிட,

$$(1 - x^2) y_{n+2} + n(-2x) y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (-2) y_n.$$

$$- [xy_{n+1} + n y_n] = 0$$

அ—து, $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) xy_{n+1} - n^2 y_n = 0.$

மாதிரி 15

$x = \sin t,\ y = \cos mt$ எனில்

$(1 - x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + (m^2 - n^2)\,y_n = 0$
எனக் காட்டு. $y_8\,(0)$-ன் மதிப்பைக் காண்.

$y = \cos mt,\ t = \sin^{-1} x.$

t-ஐ விலக்க,

$y = \cos\,(m \sin^{-1} x).$

$\therefore\quad y_1 = -\dfrac{m \sin\,(m \sin^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}}.$

குறுக்கே பெருக்கி வகைப்படுத்த,

$(1 - x^2)\,y_1^{\,2} = m^2 \sin^2\,(m \sin^{-1} x)$

அ—து, $(1 - x^2)\,y_1^{\,2} = m^2\,(1 - y^2).$

வகையிட,

$2\,(1 - x^2)\,y_1\,y_2 - 2xy_1^{\,2} = -\,2m^2\,yy_1.$

$2y_1$ ஆல் வகுக்க,

$(1 - x^2)\,y_2 - xy_1 + m^2 y = 0.$ ... (i)

இதன் உறுப்புக்களை n முறை வகையிட,

$(1 - x^2)\,y_{n+2} + n\,(-2x)\,y_{n+1} + \dfrac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}\,(-2)\,y_n$
$- [xy_{n+1} + n\,y_n] + m^2 y_n = 0$

அ—து, $(1 - x^2)\,{}^2{}_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1}$
$+ (m^2 - n^2)\,y_n = 0$ ... (ii)

$x = 0$ என இட,

$y_{n+2}\,(0) = (n^2 - m^2)\,y_n\,(0).$

$n = 6, 4, 2$ என வரிசையாக இட,

$y_8\,(0) = (6^2 - m^2)\,y_6\,(0)$
$y_6\,(0) = (4^2 - m^2)\,y_4\,(0)$
$y_4\,(0) = (2^2 - m^2)\,y_2\,(0)$
$y_2\,(0) = \quad m^2\ y\ (0)$
$y\ (0) = \cos\,(m \sin^{-1} 0) = \pm\,1.$

நெடுகப் பெருக்கிப் பொதுக் காரணிகளை அடிக்க,

$y_8\,(0) = \mp\,(6^2 - m^2)\,(4^2 - m^2)\,(2^2 - m^2)\,m^2$ ... (iii)

பயிற்சி 7—3

x ஐக் குறித்த n ஆம் வகைக் கெழுவைக் காண் [1 — 6].

1. $x^2 e^{3x}$
2. $x^2 \cos x$
3. $x^3 \sin^3 x$
4. $x^3 \log x$
5. $e^x \log x$
6. $x^3 e^x \cos x$
7. $(x^2 \log 3x)$ என்பதன் பத்தாம் வகைக் கெழு என்ன ?
8. $x^2 e^{2x}$ என்பதன் எட்டாம் வகைக் கெழு என்ன ?
9. $y(x) = x^3 \sin x$ எனில் $y_{10}(0)$ என்ன ?
10. $y = x^2 e^x$ எனில்

$$y_n =_{2} n(n-1)y_2 - n(n-2)y_1 + (n-1)(n-2)y$$

எனக் காட்டு.

11. $y = x^n \log x$ எனில்

$$y_n = n!\left(\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}\right)$$

எனக் காட்டு

12. $y = \dfrac{\log x}{x}$ எனில்

$$y_n = \frac{n!}{x^{n+1}}\left\{\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}\right\}$$

எனக் காட்டு.

13. $y = x^{n-1} \log x$ எனில்

$$xy_1 = (n-1)y + x^{n-1}$$

எனக் காட்டு. இதை $(n-1)$ முறை வகையிட்டு

$$y_n = \frac{(n-1)!}{x}$$ எனக் காட்டு.

14. $y = \sin^{-1} x$ எனில் காட்டுக :

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

(ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$

15. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனில் காட்டுக :

(i) $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - a^2 y = 0$

(ii) $(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)\, xy_{n+1} - (n^2 + a^2) y_n = 0$

16. $y = \dfrac{\sin h^{-1} x}{\sqrt{1 + x^2}}$ எனில் காட்டுக :

$$(1 - x^2)\, y_{n+2} + (2n + 3)\, xy_{n+1} + (n + 1)^2\, y_n = 0.$$

17. $y = (\sin h^{-1} x)^2$ எனில் காட்டுக :

$$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + n^2 y_n = 0.$$

18. $y = \tan^{-1} x$ எனில்

$$(1 + x^2)\, y_{n+2} + 2\,(n + 1)\, xy_{n+1} + n\,(n + 1)\, y_n = 0.$$

எனக் காட்டு. இதிலிருந்து, பின்வருமாறு காட்டு :

$$(1 + x^2)\, y_{n+1} + 2n\, xy_n + n\,(n - 1)\, y_{n-1} = 0.$$

19. $y = a \cos \log x + b \sin \log x$ எனில்

$$x^2\, y^{(n+2)}(x) + (2n + 1)\, x\, y^{(n+1)'}(\bar{x}) + (n^2 + 1)\, y^{(n)} = 0$$

எனக் காட்டு.

20. $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m$ எனில்

$$(x^2 - 1)\, y_{n+2}(x) + (2n+1)\, xy_{n+1}(x) + (n^2 - m^2)\, y_n(x) = 0$$

எனக் காட்டு. $y_{n+2}(0)$-ன் மதிப்பை $y_n(0)$ மூலம் எழுது. $y_6(0)$-ன் மதிப்பென்ன ?

21. $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ எனில்

$$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

எனக் காட்டு.

22. $y = \sin h\,(m \sin h^{-1} x)$ எனில்

$$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

எனக் காட்டு.

23. $y = (x^2 - 1)^n$ எனில்

$$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n\,(n+1)\, y_n = 0$$

எனக் காட்டு.

விடைகள் 7—3

1. $e^{3x}\,\{\,3^n x^2 + 3^{n-1} \cdot 2nx + 3^{n-2}\, n\,(n-1)\,\}$

2. $$x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n\,(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)}{2}\pi\right)$$

3. $$x^3\left[\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{3}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right] + 3nx^2\left[\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) - \frac{3^{n-1}}{4}\sin\left(3x + \frac{n-1}{2}\pi\right)\right] + 3n\,(n-1)\,x\left[\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n-2}{2}\pi\right) - \frac{3^{n-2}}{4}\sin\left(3x + \frac{n-2}{2}\pi\right)\right].$$

4. $$x^{3-n}\,[\,(-1)^{n-1}(n-1)\,! + 3n\,(-1)^{n-2}(n-2)\,! + 3n\,(n-1)\,(-1)^{n-3}(n-3)\,! + n\,(n-1)\,(n-2)\,(-1)^{n-4}(n-4)\,!\,]$$

5. $$e^x\left[\log x + {}^nC_1 \cdot \frac{1}{x} - {}^nC_2 \cdot \frac{1}{x^2} + {}^nC_3\,\frac{1 \cdot 2}{x^3} - {}^nC_4\,\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)\,!}{x^n}\right]$$

6. $$e^x \left[x^2\, 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2nx \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right) + n(n-1)\, 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right) \right]$$

7. $\dfrac{-7\,!\,2}{x^8}$

8. $256\, e^{2x} (x^2 + 8x + 14)$

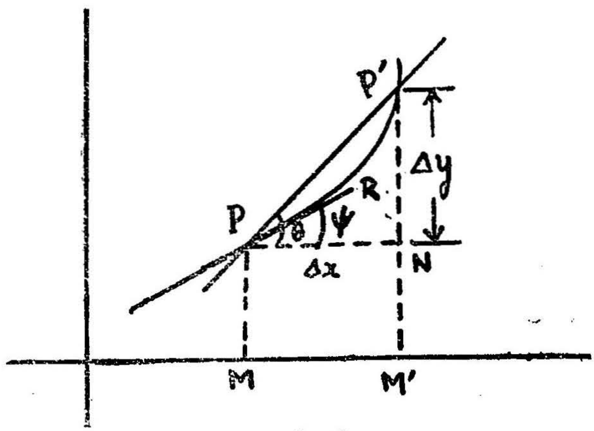
9. $-720.$

8. வகைக் கெழுவின் பொருளும் பயனும்

(Meaning Of The Derivative And Its Applications)

8·1 வகைக் கெழுவின் பொருளை இரு வகைகளில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

8·1. 1. சமதள வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதமாக வகைக் கெழு (Derivative as slope of a plane curve).



படம் 6.

$y = f(x)$ என்பது x-ன் தொடர்ச்சியான ஒரு சார்பாக இருக்கட்டும். இதன் வளைகோடு, $x - y$ என்ற ஒரே தளத்தில் அமையும். $P\ (x,\ y)$, $P'\ (x + \triangle x,\ y + \triangle y)$ என்பவை அவ்வரையில் நெருங்கிய இரு புள்ளிகள் எனவும், PM, $P'M'$ ஆகியவை x-அச்சின்மீது P, P' ஆகியவற்றிலிருந்து வரையப் பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் எனவும், PN என்பது $P'M'$ன்-

மீது P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு எனவும் கொள்வோம்.

P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டுக்கு வரையப்பட்ட தொடு கோடு (tangent) PR எனவும், $P'\hat{P}N = \theta$, $R\hat{P}N = \psi$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$\triangle x \to 0$ எனில், P' என்ற புள்ளி வளைகோட்டின்மீதே நகர்ந்து P-யுடன் ஒன்றுகிறது ; PP' என்ற நாண் (chord) PR என்ற தொடுகோட்டுடன் ஒன்றுகிறது ; θ என்ற கோணம், ψ ஆக மாறுகிறது. எனவே, $\tan\theta \to \tan\psi$.

இவற்றில், $\tan\psi$ என்பது PR என்ற தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம். இதுவே P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதமும் ஆகும். $\tan\theta$ என்பது, $PP'N$ என்ற முக்கோணத்தில் $\dfrac{P'N}{PN} = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$. எனவே,

P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$\tan\psi = \underset{\theta \to \psi}{\text{எல்லை}} \tan\theta = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \tan\theta$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \left| \frac{dy}{dx} \right|_P$$

எனவே, P என்ற புள்ளியில் y-ன் வகைக் கெழு, அப்புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதத்தைத் தருகிறது.

8·1.2. வீத அளவையாக வகைக் கெழு (Derivative as a Rate-measurer)

$y = f(x)$ என்பது x-ல் ஒரு தொடர்புடைய சார்பாகவும், $\triangle x$ என்பது x-ல் ஏதேனுமொரு சிறு கூடுதலாகவும், $\triangle y$ என்பது அதற்கேற்ப y-ல் நேர்ந்த கூடுதலாகவும் இருக்கட்டும். $\triangle y$ மிகையாகவும், குறையாகவும் இருக்கலாம்.

$\frac{\triangle y}{\triangle x}$ என்பதை, இந்த மாறுதலின்போது, x-ஐப் பொருத்து y-ல் நேர்ந்த சராசரி மாறுதலாகக் கொள்ளலாம். $\triangle x$ பூச்சியத்தை நெருங்குகையில் இந்த விகிதம் ஒரு எல்லையை அடையுமானால் அதுவே, x-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பில், x-ஐக் குறித்த y-ன் மாற்று வீத அளவை (rate of change of y with respect to x) ஆகும்.

8·2 வகைக் கெழுவின் பயன்கள்

8·2.1. கூடும் சார்பும் குறையும் சார்பும் (Increasing and Decreasing Functions).

$y = f(x)$ என்பது x-ன் ஒரு சார்பு எனில், $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$, அதாவது, $f'(x_0)$ என்பது, $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் இச் சார்பு குறிக்கும் வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதத்தைத் தருகிறது எனவும், அப்புள்ளியில் x-ஐப் பொருத்து y அதிகரிக்கும் வீதத்தைத் தருகிறது எனவும் அறிந்தோம்.

இனி, $f'(x) > 0$ எனில், $x = x_0$ என்ற புள்ளியில், அவ்வளைவரையின் தொடுகோடு, x மிகும் திசையில், மேல் நோக்கிப் போகிறது என்றும், x வளர y-யும் வளர்கிறது என்றும் தெரிகிறது. இதேபோல், $f(x_0) < 0$ எனில் அத் தொடுகோடு கீழ்நோக்கிச் செல்கிறது என்றும், அப்புள்ளியில் x வளர, y தேய்கிறது என்றும் தெரிகிறது.

எனவே, $f'(x_0) > 0$ எனில், $x = x_0$ என்ற புள்ளியில், $f(x)$ ஒரு கூடும் சார்பு எனவும், $f'(x_0) < 0$ எனில் அப்புள்ளியில் $f(x)$ ஒரு குறையும் சார்பு எனவும் தெரிகிறது.

$f'(x_0) = 0$ எனில், $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் $f(x)$ கூடவும் இல்லை, குறையவும் இல்லை. அப்புள்ளி அச்சார்புக்கு ஒரு கண நிலைப்புள்ளி (stationary point) எனப்படும்.

மாதிரி 1

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ என்ற சார்பு, x-ன் எந்த மதிப்புக்களுக்கு ஒரு கூடும் சார்பு, எந்த மதிப்புக்களுக்கு ஒரு குறையும் சார்பு எனக் காண்.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$= 3(x-1)(x+3).$$

$x = 1, -3$ எனில் $f'(x) = 0.$

இவ்விரு மதிப்புக்களுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்பாகிய $x = 0$ என்பதை இட,

$$f'(0) = 3(-1)(3) > 0.$$

$f(x)$ ஒரு தொடர்புடையச் சார்பு ஆனதால், $x = 1, -3$ என்ற இரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட வேறு எந்த x மதிப்புக்கும் $f'(x) < 0$. அதாவது, $f(x)$ ஒரு குறையும் சார்பு.

மற்ற x மதிப்புக்களுக்கு $f(x)$ ஒரு கூடும் சார்பு.

அ—து, $-3 < x < 1$ எனில் $f(x)$ ஒரு குறையும் சார்பு;

$x < -3$, $x > 1$ எனில் $f(x)$ ஒரு கூடும் சார்பு.

மாதிரி 2

$\tan^{-1} x$ என்பது தன் தலையாய மதிப்பை (Principal value) மட்டும் பெறுவதானால், $x > 0$ எனில்

$$x > \tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}$$

எனக் காட்டு.

(i) $y = x - \tan^{-1} x$ என வை.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

எனவே, y ஒரு கூடும் சார்பு.

மேலும், x-ன் அனுமதிக்கப்பட்ட குறைந்த மதிப்பில், அ—து, $x = 0$ எனில், $y = 0 - \tan^{-1} 0 = 0.$

எனவே, $x > 0$ எனில் $y > 0.$

அ—து, $x - \tan^{-1} x > 0 \quad \therefore \quad x > \tan^{-1} x.$

(ii) $z = \tan^{-1} x - \frac{x}{1+x^2}$ என வை.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0.$$

எனவே, z ஒரு கூடும் சார்பு.

மேலும், $x = 0$ எனில், $z = 0$.

$\therefore$ $x > 0$ எனில் $z > 0$.

அ—து $\tan^{-1} x - \dfrac{x}{1+x^2} > 0$. $\therefore$ $\tan^{-1} x > \dfrac{x}{1+x}$.

$$\therefore \quad x > \tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

பயிற்சி 8—1

எந்த இடைவெளியில் x இருந்தால் பின்வரும் கோவைகள் (i) கூடுகின்றன, (ii) குறைகின்றன எனக் காண் [1 — 4].

1. $2x^3 + 3x^2 - 36x - 12$
2. $x^3 - 6x^2 - 36x + 3$
3. $84x + 15x^2 - 2x^3$
4. $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 1$.
5. a யின் எந்த மதிப்புக்கு $x^3 - ax^2 + 48x + 1$ என்பது x ன் ஒரு கூடும் சார்பாக இருக்கும் ?

$x > 0$ எனில், தொடர் விரிப்புக்களைப் பயன்படுத்தாமல், பின் வருமாறு காட்டு [6 — 14].

6. $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{}$ 7. $(x-1)e^x + 1 > 0$
8. $\log(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$
9. $\log(x + \sqrt{1+x^2}) > \tan^{-1} x$
10. $x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$
11. $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1$
12. $x - \dfrac{x^2}{6} < \sin < x$

13. log $(1+x)$ ன் மதிப்பு, $\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)$ க்கும் $\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)$ க்கும் இடைப்பட்டது.

14. log $(1+x)$ ன் மதிப்பு, $\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ க்கும்

$\left(x-\frac{x^2}{2(1+x)}\right)$ க்கும் இடைப்பட்டது.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனில் பின்வருமாறு காட்டுக. [15 — 18].

15. $\tan x > x$ 16. $\sec^2 x > 1 + x^2$

17. $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ 18. $2x + x\cos x > 3\sin x$

19. $\frac{1-2x-x^2}{1+x-2x^2}$ என்பது, x வளர எப்பொழுதும் குறைகிறது· எனக் காட்டு

0. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ என்ற கோவை, x வளர, $|x| < 1$ எனில் குறைகிறது எனவும், $x < 1$, $x > 1$ எனில் கூடுகிறது எனவும் காட்டு.

21. $\frac{a\sin x+b\cos x}{a\cos x-b\sin x}$ என்பது எப்பொழுதும் x உடன் சேர்ந்து வளர்கிறது எனக் காட்டு.

22. பூச்சியத்திலிருந்து x மிக பின்வருவன நெடுகக் குறைகின்றன என்று காட்டு.

(i) $\frac{1}{x}\log(1+x)$, (ii) $\frac{x}{(1+x)\log(1+x)}$.

. x ன் எல்லா மதிப்புக்கும் x உடன் சேர்ந்து $x - \sin x$ என்பதும் வளரும் எனக் காட்டு. $ax - \sin x$ என்பது a யின் எந்த மதிப்புக்கு, x வளர, நெடுக வளரும், தேயும் எனக் காண்.

24. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனில், x வளர, $x\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x$ என்ற கோவை தேய்கிறது எனக் காட்டு.

25. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் x இருக்கும்பொழுது $\frac{1}{2}\sin x \tan x - \log \sec x$ என்பது மிகையாகவும், x ன் கூடும் சார்பாகவும் இருக்கிறது எனக் காட்டு.

26. $x \geq e$ எனில், $\frac{\log x}{x}$ என்பது x ன் ஒரு குறையும் சார்பு எனக் காட்டு. இதன் மீப்பெரு (maximum) மதிப்பென்ன ?

27. x ன் மதிப்பு 0 விலிருந்து π க்கு வளரும்போது, $\frac{\sin x}{x}$ ன் மதிப்பு 1 லிருந்து 0 வுக்குக் குறைகிறது எனக் காட்டு.

விடைகள் 8—1

1. $-2 < x < 3$ எனில் குறையும் ; $x > 3, x < -2$ எனில் கூடும்.

2. $-2 < x < 6$ எனில் குறையும் ; $x > 6, x < -2$. எனில் கூடும்.

3. $-7 < x < 2$ எனில் கூடும் ; $x > 2, x < -7$ எனில் குறையும்.

4. $-2 < x < -1$, $x >$ எனில் குறையும் ; $x < -2$, $-1 < x < 1$ எனில் கூடும்.

5. $-12 < a < 12$.

23. வளர, $a = 1$; தேய, $a = -1$.

8.2.2 காலத்தைக் குறித்த மாற்றுவீத அளவை (Rate of change with respect to time).

$y = f(x)$ என்ற சார்பில், x, y இரண்டும் காலம் t யின் சார்புகளாக இருக்கட்டும். இவற்றின் காலத்தைக் குறித்த மாற்று வீதங்கள் $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. மேலும்

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

மாதிரி 3.

ஓர் வட்டத்தகட்டின் ஆரம் நொடிக்கு 0·02 செ.மீ. வீதம் கூடுகிறது. (i) ஆரம் 4 செ.மீ. ஆக இருக்கையில் அதன் பரப்பு அதிகரிக்கும் வீதத்தையும், (ii) பரப்பு நொடிக்கு 0·1 π ச.செ.மீ ஆகக் கூடும்பொழுது ஆரம் கூடும் வீதத்தையும் காண்க.

நேரம் t நொடி எனில் பரப்பு A ச.செ.மீ., ஆரம் r செ.மீ. எனக் கொள்.

$$A = \pi r^2.$$

t ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}.$$

$\frac{dr}{dt} = 0{\cdot}02$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\frac{dA}{dt} = 0{\cdot}04\, \pi r.$$

(i) $r = 4$ செ.மீ. எனில் பரப்பு மாறும் வீதம்

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=4} = 0{\cdot}04\, \pi r \Big|_{r=4}$$

$$= 0{\cdot}16\pi \text{ ச.செ.மீ/நொடி}.$$

(ii) $\frac{dA}{dt} = 0{\cdot}1\, \pi$ ச.செ.மீ/நொடி எனில்,

$$0{\cdot}1 = 0{\cdot}04\pi r$$

$$\therefore\ r = \frac{0{\cdot}1}{0{\cdot}04\pi} = 2{\cdot}5 \text{ செ.மீ.}/\pi \text{ செ.மீ.}$$

மாதிரி 4.

எப்பொழுதும் கோளவடிவத்தில் இருக்கும் ஒரு பலூனில் நொடிக்கு 10 க.செ.மீ. காற்று அடைக்கப்படுகிறது. பந்தின் ஆரம் 15 செ.மீ. ஆக இருக்கையில், அதன் ஆரமும் பரப்பும் மிகும் வீதங்களைக் காண்.

நேரம் t நொடியாக இருக்கையில் கோளப் பந்தின் ஆரம் r செ.மீ. எனில், அதன் கன அளவு

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$\frac{dV}{dt} = 10$ எனத் தரப்பட்டிருக்கிறது. எனவே,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r = 15} = \frac{10}{4\pi \times 15^2} = \frac{1}{90\pi}$$

$\therefore$ ஆரம் நொடிக்கு $\frac{1}{90\pi}$ செ.மீ. என்ற வேகத்தில் மிகுகிறது. நேரம் t ஆக இருக்கையில் அதன் பரப்பு

$$A = 4\pi r^2$$

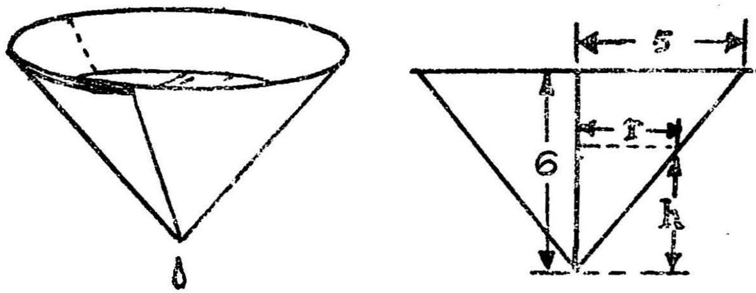
$$\therefore \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r = 15} = \frac{1}{90\pi}$ என்பதால்,

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r = 15} = 8\pi \cdot 15 \cdot \frac{1}{90\pi} = \frac{4}{3} \text{ ச.செ.மீ/நொடி.}$$

மாதிரி 5.

ஒரு வடிதாள் 6 செ.மீ. உயரமும் 5 செ.மீ. ஆரமும் உள்ள ஒரு கூம்பாக மடிக்கப்பட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதில் ஊற்றப்பட்ட திரவம் நிமிடத்திற்கு 1·25 க செ. மீ. வீதம் வடிகிறது. திரவ மட்டத்தின் உயரம் 3 செ.மீ. ஆக இருக்கையில் அம்மட்டம் தாழும் வீதத்தைக் காண்.



படம் 7

நேரம் t ஆக இருக்கையில் திரவமட்ட உயரம் h ஆகவும், ஆரம் r ஆகவும் இருக்கட்டும். அப்பொழுது திரவத்தின் கன அளவு V எனில்,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

படத்திலிருந்து $\frac{r}{h} = \frac{5}{6}$. $\therefore r = \frac{5h}{6}$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5h}{6}\right)^2 \quad h = \frac{25\pi}{108} h^3$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{36} h^2 \frac{dh}{}$$

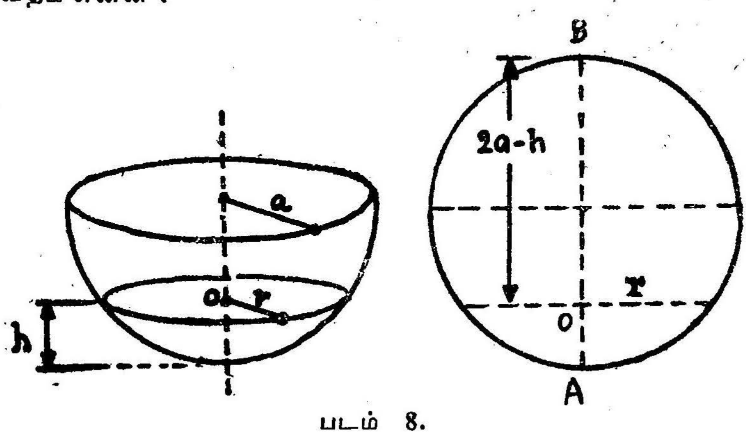
$\frac{dV}{dt} = -1{\cdot}25$ க.செ.மீ/நிமிடம்; $h = 3$ செ.மீ. ஆக இருக்க,

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=7} = -1.25 \times \frac{36}{25\pi} \times \frac{1}{3^2} = -\frac{1}{5\pi}$$

எனவே, திரவமட்டம் நிமிடத்திற்கு $\frac{1}{5\pi}$ செ.மீ. என்ற வீதத்தில் தாழ்கிறது.

மாதிரி 6.

ஒரு மீட்டர் ஆரமுள்ள ஓர் அரைக்கோள வடிவமுள்ள தொட்டியில் நிமிடத்திற்கு ஒரு கன மீட்டர் நீர் நிறைகிறது. நீர் 40 செ.மீ. ஆழத்திற்கு இருக்கையில், நீரின் ஆழம் மிகும் வீதம் என்ன ?



படம் 8.

ஆழம் h, அடிவட்ட ஆரம் r உடைய கோளப்பகுதியின் கொள்ளளவு

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)\text{ ; ஆயின், } r^2 = 2ah - h^2.$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi(3ah^2 - h^3).$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(6ah - 3h^2)\frac{dh}{ht}\cdot$$

தரப்பட்டது : $\dfrac{dV}{dh} = 1$ க.மீ./நிமி.

$h = 0{\cdot}4$ மீ., $a = 1$ மீ.

$$\therefore \quad 1 = \frac{1}{3}\pi\,[6 \times 0{\cdot}4 - 3 \times 0{\cdot}4^2]\cdot\frac{dt}{dh}$$

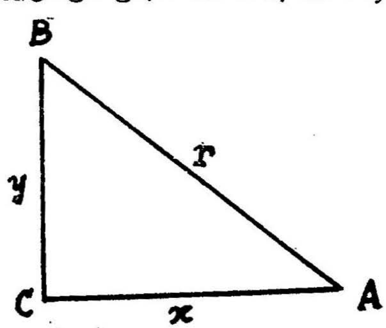
$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi} \times \frac{1}{1{\cdot}92} = \frac{1}{0{\cdot}64\,\pi}\text{ மீ./நிமி.}$$

எனவே, ஆழம் நிமிடத்திற்கு $\dfrac{1}{0{\cdot}64\,\pi}$ மீ. வீதம் உயருகிறது.

மாதிரி 7.

கரையில் நிற்கும் ஒருவன் நீர்ப்பரப்பிலுள்ள ஒரு படகை நொடிக்கு 2 மீட்டர் வீதம் இழுக்கிருன். இழுத்தவாறே, செங்குத்தான பாறையில் நொடிக்கு 0·5 மீட்டர் வீதம் ஏறுகிருன். படகு கரையிலிருந்து 16 மீட்டர் தொலைவிலிருக்கும்பொழுது, கயிற்றின் நீளம் 20 மீட்டர். அப்பொழுது படகு கரையை நெருங்கும் வேகம் என்ன ?

நேரம் t ஆக இருக்கையில் கயிற்றின் நீளம் $AB = r$, படகு கரையிலிருந்து இருக்கும் தூரம் $AC = x$, $CB = y$ என வை.



படம் 9.

முக்கோணம் ABC யிலிருந்து

$$r^2 = x^2 + y^2 \,;$$

$r = 20$ மீ., $x=16$ மீ. எனில் $y=\sqrt{20^2-16^2}=12$ மீ.

$$\therefore \quad r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}.$$

கயிற்றின் நீளம் நொடிக்கு 2 மீ. வீதம் குறைகிறது. எனவே, $\frac{dr}{dt} = -2.$

$$\frac{dy}{dt} = +0{\cdot}5,\ r = 20,\ x = 16,\ y = 12.$$

$$\therefore \text{ அப்பொழுது, } \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dr}{dt} - y\frac{dy}{dt}}{x} = \frac{-20\times 2-12\times 0{\cdot}5}{16}$$

$$= -2\frac{7}{8} \text{ மீ./நொடி.}$$

இது குறையெண்ணாய் வருவதால், படகுக்கும் கரைக்கும் உள்ள இடைவெளி இந்த வீதத்தில் குறைகிறது எனத் தெரிகிறது.

பயிற்சி 8—2

1. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் நொடிக்கு 8 செமீ. வீதம் கூடுகிறது. விட்டம் 30 செ.மீ. ஆக இருக்கையில் பரப்பு கூடும் வீதம் என்ன ?

2. அசைவற்ற நீர்ப்பரப்பில் ஒரு கல் விழ, அது விழுந்த இடத்தை மையமாகக் கொண்டு வட்ட அலைகள் கிளம்பிச் சுற்றிலும் பரவுகின்றன. ஒரு வட்ட அலையின் ஆரம் 50 செ.மீ. ஆரம் கூடும் வீதம் நொடிக்கு 5 செ.மீ. அவ்வலையின் பரப்பு அப்பொழுது கூடும் வீதம் என்ன ?

3. 10 ச.செ.மீ. பரப்புள்ள ஒரு வட்டப் பலகை ஒரு சுவரிலிருந்து 30 செ.மீ. தொலைவில் சுவருக்கு இணையாக நிறுத்தப் பட்டுள்ளது. ஒரு மெழுகுவர்த்தி நொடிக்கு 60 செ.மீ. வேகத்தில் அதை விட்டு விலகி, அதன் மையத்தின் வழியே அதற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டுப் பாதையில் கொண்டு

செல்லப்படுகிறது. சுவரிலிருந்து மெழுகுவர்த்தி 240 செ.மீ தொலைவிலிருக்கையில், சுவரில் பலகையின் நிழலின் பரப்பு குறையும் வீதம் என்ன ?

4. கோளவடிவ சோப்பு நீர்க் குமிழ் ஒன்று நொடிக்கு 0.1 க.செ.மீ வீதம் வளருகிறது. அதன் ஆரம் 1.2 செ.மீ ஆக இருக்கையில் ஆரம் எவ்வீதத்தில் கூடும் ?

5. கோளவடிவ பலூன் ஒன்றிலிருந்து நொடிக்கு 2 க.செ.மீ. காற்று வெளியேறுகிறது. ஆரம் 3செ.மீ. ஆக இருக்கையில் பரப்பு குறையும் வீதம் என்ன ?

6. கூம்பு வடிவப் புனலின் அடியிலிருந்து நொடிக்கு 2 க.செ.மீ. தண்ணீர் வடிகிறது. அதன் அச்சு செங்குத்தாக இருக்குமாறு நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. கூம்பின் கோணம் 60°. கூம்பின் அடியிலிருந்து நீர்மட்டத்தின் சாயுயரம் 5 செ.மீ ஆக இருக்கையில் சாயுயரம் குறையும் வீதத்தையும் நீர்ப்பரப்பு சுருங்கும் வீதத்தையும் காண்.

7. ஒரு குழாயிலிருந்து நிமிடத்திற்கு 10 க.செ.மீ வீதம் கொட்டும் மணல் தரையில் கூம்புவடிவத்தில் குவிகிறது. குவியலின் அடி வட்ட ஆரம் எப்பொழுதும் உயரத்தில் பாதியாக இருக்கிறது. குவியலின் உயரம் 5மீ. ஆக இருக்கையில் குவியல் உயர்ந்து வரும் வீதம் என்ன ?

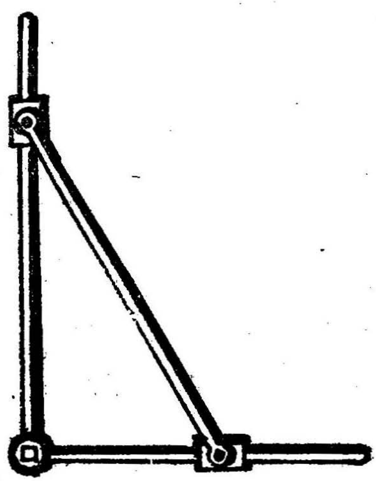
8. கூம்பு வடிவப் புனல் ஒன்றின் மேல் விட்டம் 14 செ.மீ. ஆழம் 12 செ.மீ. அதில் நொடிக்கு 30 க.செ.மீ வீதத்தில் திரவம் ஊற்றப்படுகிறது. நொடிக்கு 10 க.செ.மீ வீதம் வெளியேற்றப் படுகிறது. 6 செ.மீ ஆழத்திற்குத் திரவம் இருக்கும்பொழுது, திரவமட்டம் உயரும் வீதம் என்ன ?

9. ஒரு வட்டக் கூம்பின் ஆரம் நிமிடத்திற்கு 5 செ.மீ. வீதம் கூடுவதாயும், உயரம் 2 செ.மீ. வீதம் குறைவதாயும் இருந்தால், அதன் ஆரம் 15 செ.மீ. ஆகவும். உயரம் 24 செ.மீ ஆகவும் இருக்கையில் அதன் கன அளவு எந்த வீதத்தில் மாறும் எனக் காண்க.

10. 1.8 மீ உயரமுள்ள ஒருவன் மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு விளக்குத் தூணின் அடியை விட்டு நேர்க்கோட்டில் நடக்கிறான். தரையிலிருந்து 3மீ. உயரத்தில் விளக்கு இருந்தால் அவனது நிழலின் முனை எந்த வீதத்தில் நகருகிறது எனக் காண்.

11. 5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓர் ஏணி ஒரு முனை தரையிலும் மறுமுனை சுவரிலும் படியச் சாத்தப்பட்டிருக்கிறது. கீழ்முனை தரையில் நழுவுகிறது. கீழ்முனை சுவரிலிருந்து 4மீ. தொலைவில் இருக்கும்போது, அம்முனையின் வேகத்தைப் போல் $\frac{4}{3}$ மடங்கு வேகத்துடன் மேல்முனை நழுவுகிறது எனக் காட்டு.

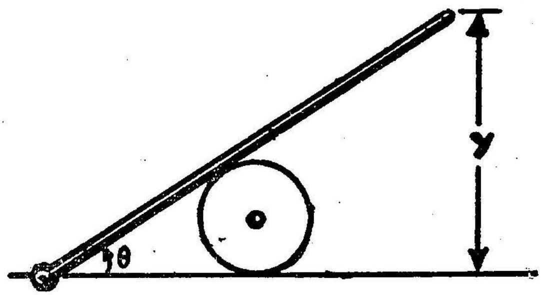
12. 20 செ.மீ. நீளமுள்ள ஓர் இரும்புச்சட்டம் தன் ஒவ்வொரு முனையிலும் ஒரு கழுத்துப்பட்டையைக் (collar) கொண்டது. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு மழமழப்பான நிலைத்த நேர்க்கம்பிகளைத் தழுவியே இப்பட்டைகள் இருக்கும். ஒரு முனை மற்ற கம்பியிலிருந்து 12 செ.மீ. தொலைவிலிருக்கையில் அம்முனையின் வேகம் நொடிக்கு 4 செ.மீ. எனில் மற்ற முனையின் வேகம் என்ன ?



படம். 10.

13. 15 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு சட்டத்தின் ஒரு முனை தரையில் கீல்மூட்டால் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. 1 மீட்டர் ஆரமுள்ள வழ வழப்பான உருளை ஒன்றின்மீது அதன் நீளம் படிந்திருக்கிறது. அந்தக் கீலை நோக்கி நொடிக்கு 2 மீட்டர் வீதம் உருளை உருளு கிறது. உருளை தரையில் தொடும் புள்ளி, கீலிலிருந்து 8 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கையில், (i) சட்டம் தரையில் உண்டாக்கும்

கோணம் கூடும் வீதத்தையும், (ii) சட்டத்தின் வெற்று முனை தரையிலிருந்து எழும் வீதத்தையும் காண்.



படம் 11

14. நிமிர்த்தி வைக்கப்பட்ட உருளை வடிவத்திலிருக்கும் ஓர் எண்ணெய்ப் பீப்பாயிலிருந்து நிமிடத்திற்கு 500 க.செ.மீ. எண்ணெய், நிமிர்த்திய உருளை வடிவத்திலிருக்கும் ஒரு சிறிய பாத்திரத்தில் பிடிக்கப்படுகிறது. பீப்பாயின் ஆரம் 40 செ.மீ., பாத்திரத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ. எனில், எண்ணெய் மட்டம் பீப்பாயில் இறங்கும் வீதத்தையும், பாத்திரத்தில் உயரும் வீதத்தையும் காண்.

15. ஒரு வெப்ப விரிவுச் சோதனையில், ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் வெப்பத்தால் நிமிடத்திற்கு 0·2 செ.மீ. வீதம் விரிவடைகிறது. ஒவ்வொரு பக்கமும் 10 செ.மீ. ஆக இருக்கையில் அதன் பரப்பு கூடும் வீதம் என்ன ?

16. அரைக் கோள வடிவமுள்ள ஒரு நீர்த் தொட்டியின் ஆரம் 3 மீட்டர். அதிலிருந்து நிமிடத்திற்கு 2 கன மீட்டர் நீர் குழாய் வழியே வெளியேறினால், அதில் முழுவதும் நீர் நிறைந்திருக்கையில், எந்த வீதத்தில் நீர்மட்ட உயரம் குறையத் துவங்கும் ?

17. ஒரு கோள வடிவக் கோப்பையின் ஆரம் 5 செ. மீ. அதில் திரவம் நொடிக்கு 1 க.செ.மீ. வீதம் ஊற்றப்படுகிறது. திரவம் 3 செ.மீ. உயரத்தில் இருக்கும்பொழுது திரவ மட்டம் உயரும் வீதம் என்ன ?

18. θ என்ற ஒரு கோணம் மாறுத வீதத்தில் கூடுகிறது. அது 60° ஆக இருக்கையில் $\sin\theta$ கூடும் வீதத்தைப் போல் 8 மடங்கு வீதத்தில் $\tan\theta$ கூடும் எனக்காட்டு.

19. ஒரு கோளத்தின் மையத்திலிருந்து நொடிக்கு 3 மீட்டர் வேகத்தில் ஒரு விளக்கு நகருகிறது. கோளத்தின் ஆரம் 5மீட்டர். அதன் மையத்திலிருந்து விளக்கு 15 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கையில் விளக்கால் ஒளியூட்டப்படும் கோளத்தின் பரப்பு எந்த வீதத்தில் கூடுகிறது என்று காண்.

20. $y = 3x^2 + 5$ என்ற வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம் (1, 8) என்ற புள்ளியில் x கூடும் வீதத்தைப்போல் 6 மடங்கு வீதத்தில் கூடுகிறது எனக் காட்டு.

21. ஒரு வளரும் கனசதுரவடிவப் படிகத்தின் பக்கம் 4 மி.மீ. ஆக இருக்கையில் அதன் பரப்பு கூடும் வீதம் நாள் ஒன்றுக்கு 0·5 க.மி.மீ. அதே சமயத்தில் அதன் கன அளவு கூடும் வீதம் என்ன ?

22. காற்றுடி ஒன்று h மீட்டர் உயரத்தில் பறக்கையில் கயிற்றின் நீளம் x மீட்டர். அப்பொழுது காற்றுடி நொடிக்கு v மீட்டர் வீதத்தில் கிடையாகப் பறந்தால், கயிறு விடப்பட வேண்டிய வீதம் என்ன ?

விடைகள் 8—2

1. நொடிக்கு 120 π ச.செ.மீ.
2. நொடிக்கு 500 π ச.செ.மீ.
3. நொடிக்கு $\frac{320}{343}$ ச.செ.மீ.
4. நொடிக்கு $\frac{1}{5{\cdot}76\pi}$ செ.மீ.
5. நொடிக்கு $\frac{4}{3}$ ச.செ.மீ.
6. நொடிக்கு $\frac{16}{25\sqrt{3}\pi}$ செ.மீ. $\frac{8}{5\sqrt{3}}$ ச.செ.மீ.
7. நிமிடத்திற்கு $\frac{8}{5\pi}$ மீ.
8. நொடிக்கு $\frac{80}{49\pi}$ செ.மீ.
9. நிமிடத்திற்கு 1050π க.செ.மீ.

10. மணிக்கு $\frac{25}{2}$ கி.மீ.

12. நொடிக்கு 3 செ.மீ.

13. நொடிக்கு $\frac{4}{65}$ ஆரையன்கள் ; $\frac{756}{845}$ மீட்டர்கள்.

14. நிமிடத்திற்கு $\frac{5}{16\pi}$ செ.மீ ; $\frac{20}{\pi}$ செ.மீ.

15. நிமிடத்திற்கு $\sqrt{3}$ ச.செ.மீ.

16. நிமிடத்திற்கு $\frac{2}{9\pi}$ க.மீ.

17. நொடிக்கு $\frac{3}{63\pi}$ க.செ.மீ.

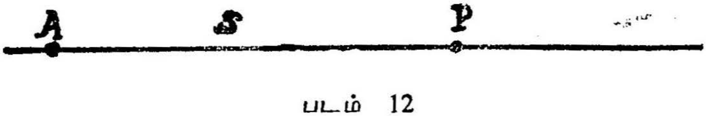
19. நொடிக்கு $\frac{10\pi}{3}$ ச.மீ.

21. நாளொன்றுக்கு 3 க.மி.மீ.

22. நொடிக்கு $\frac{\sqrt{x^2 - h^2}}{x}$ மீ.

8·2. 3. திசைவேகமும் திசைவேக வளர்ச்சி வீதமும் (Velocity and Acceleration).

y என்பது x-ன் ஒரு தொடர் சார்பானல், $\frac{dy}{dx}$ என்பது x-ஐக் குறித்த y-ன் மாற்று வீத அளவை எனக் கண்டோம்.



படம் 12

இனி, A என்ற ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து நேர்க் கோட்டில் கிளம்பிய ஒரு துகள் (particle) நேரம் t ஆக இருக்கையில் s என்ற இடப்பெயர்ச்சியை அடைந்திருக்கட்டும். மேலும் s, t-யின் தொடர் சார்பாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது $\frac{ds}{dt}$ என்பது, நேரத்தைக் குறித்த s-ன் மாற்று வீத அளவையைத் தருகிறது.

நேரத்தைக் குறித்த இடப்பெயர்ச்சியின் மாற்று வீத அளவையைத் திசைவேகம் v என்போம். எனவே,

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \ldots (1)$$

இனி, t-யின் தொடர்புள்ள சார்பாக, v இருப்பின், $\frac{dv}{dt}$ என்பது, நேரத்தைப் பொருத்த திசைவேகத்தின் மாற்று வீத அளவை. இதைத் **திசைவேக வளர்ச்சி வீதம்** அல்லது **திசை முடுக்கம்** f என்போம். எனவே,

$$f = \frac{dv}{dt} \quad \ldots (2) \quad (i)$$

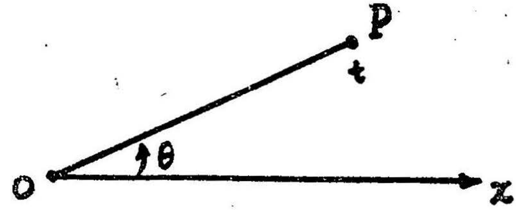
இவற்றிலிருந்து,

$$f = \frac{d^2s}{d^2t} \quad \ldots (2) \quad (ii)$$

என வருவது கண்கூடு. மேலும், $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ என எழுதலாம் என்பதால்,

$$f = v\frac{dv}{ds} \quad \ldots (2) \quad (iii).$$

8.2.4 சுழல் வேகமும் சுழல்வேக வளர்ச்சி வீதமும் (Angular Velocity and Angular Acceleration)



படம் 13.

O என்ற நிலைத்த புள்ளியில் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு, t என்ற நேரத்தில், Ox என்ற நிலைத்த நேர்க்கோட்டோடு உண்டாக்கும் கோணம் θ ஆரையன்களாக இருக்கட்டும்.

நேரம் t ஆக இருக்கையில், அதன் சுழல் வேகம் w வும், சுழல்வேக வளர்ச்சி வீதம் அல்லது சுழல் முடுக்கம் α வும் பின் வருமாறு தரப்படுகின்றன :

$$w = \frac{d\theta}{dt} \quad \dots (3)$$

$$\alpha = \frac{dw}{dt} \quad \dots (4) \quad (i)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \dots (4) \quad (ii)$$

$$\alpha = w\frac{dw}{d\theta} \quad \dots (4) \quad (iii)$$

நேர்க்கோட்டில் நகரும் ஒரு துகள் t நொடிகளில் கடக்கும் s மீட்டர் தூரம் $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 6$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது. (i) எப்பொழுது திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் பூச்சிய மாகிறது என்றும் அப்பொழுது துகளின் திசை வேகம் என்ன என்றும் காண். (ii) திசை வேகம் மறையும்பொழுது திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் என்ன?

t நொடிகளில் துகளின் வேகம் $v(t)$ எனவும், திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் $f(t)$ எனவும் இருக்கட்டும். கடக்கும் தூரம்:

$$s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 6.$$

$$\therefore \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$$

$$= 6(t-1)(t-2)$$

$$f(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 18 = 6\ (2t - 3)$$

(i) திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் பூச்சியம் எனில்,

$$a(t) = 0\ ; \quad 2t - 3 = 0, \ \therefore \ t = \frac{3}{2} \text{ நொடிகள்}$$

அப்பொழுது திசை வேகம்

$$\left(v\,\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{2}\right) + 12 = -\frac{3}{2} \text{ மீ./நொடி.}$$

(ii) திசைவேகம் மறைந்தால், $v(t) = 0$

$$\therefore \quad 6(t-1)(t-2) = 0$$

$\therefore \quad t = 1$ நொடி அல்லது, $t = 2$ நொடி.

அப்பொழுது வேக வளர்ச்சி வீதங்கள்

$$f(1) = 12 + 1 \times 18 = -6 \text{ மீ./நொடி}^2;$$

$$f(2) = 12 + 2 \times 18 = \quad 6 \text{ மீ./ நொடி}^2.$$

மாதிரி 9.

நேர்க்கோட்டில் நகரும் ஒரு புள்ளி, துவக்கப்புள்ளியிலிருந்து s தொலைவில் இருக்கையில் அதன் திசை வேகமான v யின் வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

$$a + bv^2 = s^2.$$

அப்பொழுது அதன் திசை முடுக்கம் $\frac{s}{b}$ எனக் காட்டு.

$$a + bv^2 = s^2.$$

s ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$2b\, v \frac{dv}{ds} = 2s$$

$$\therefore \quad v \frac{dv}{ds} = \frac{s}{b}.$$

எனவே, திசை முடுக்கம்

$$f = v \frac{dv}{ds} = \frac{s}{b}.$$

மாதிரி 10.

ஒரு சக்கரம் t நொடிகளில் சுழலும் θ ஆரையன்களை $\theta = 50t - t^2$ என்ற சமன்பாடு தருகிறது. 5 நொடிகள் கழித்து அது நொடிக்கு எத்தனை சுற்றுக்கள் வீதம் சுற்றும், சுழல் முடுக்கம் என்ன, எப்பொழுது நிற்கும் எனக் காண்க.

$$\theta = 50t - t^2.$$

t நொடிகளில் சக்கரத்தின் சுழல் வேகம் $w(t)$ எனவும், சுழல் முடுக்கம் $\alpha(t)$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad w(t) = \frac{d\theta}{dt} = 50 - 2t = 2(25 - t);$$

$$\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = -2.$$

5 நொடிகளில் சுழல்வேகம்

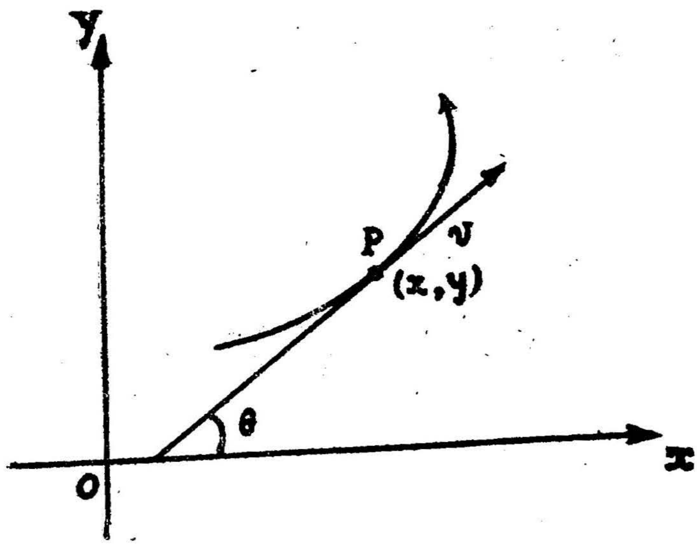
$$w(5) = 2(25 - 5) = 40 \text{ ஆரையன்கள்/நொடி.}$$

அப்பொழுது நொடிக்குச் சுற்றும் சுற்றுகள் $= \frac{w(5)}{2\pi} = \frac{20}{\pi}$.

சுழல் முடுக்கம் எப்பொழுதும் (நொடி)^2 க்கு -2 ன் ஆரையன்கள். சக்கரம் t நொடிகளில் நின்றுல் $w(t) = 0 \therefore t = 25$.

$\therefore$ 25 நொடிகளில் சுழற்சி நிற்கும்.

8.2.5 சமதளப் பாதையில் இயக்கம் (Motion in a plane curve)



படம். 14

காலம் t ஆக இருக்கையில், xy - தளத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியான P யின் அச்சுத்தூரங்கள் x, y ஆக இருக்கட்டும். திசை வேகமும் திசை முடுக்கமும் முறையே v, f ஆக இருக்கட்டும் ; இவை அனைத்தும் t ன் சார்புகள்.

P யின் இயக்க திசை v யின் திசையாகும். P யின் பாதைக்கு அப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டால் அது தரப்படுகிறது. இத் தொடுகோடு x அச்சுக்கு $\theta°$ யில் சாய்ந்திருந்தால்,

$$V_x = v\cos\theta, \quad V_y = v\sin\theta$$

என்பவை திசைவேகத்தின் x, y கூறுகள் (components).

இடப்பெயர்ச்சியின் x, y கூறுகள் $x(t), y(t)$.

$\therefore$ திசை வேகத்தின் x, y கூறுகள் : $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

இனி, $v = \sqrt{(v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

$$\tan\theta = \frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

மேலும், f_x, f_y என்பவை திசை முடுக்கத்தின் x, y கூறுகள் எனில்,

$$f_x = \frac{dv_x}{dt_y} = \frac{d^2x}{dt^2}, \; f_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

$$\therefore \; f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2};$$

f ன் திசை, x-அச்சுக்கு கோணம் ϕ யில் சாய்ந்திருந்தால்,

$$\tan\phi = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

மாதிரி 11

நேரம் t ஆக இருக்கையில் நகரும் புள்ளி ஒன்றின் அச்சுத் தூரங்கள் :

$$x = a(wt + \sin wt), \quad y = a(1 - \cos wt).$$

இவற்றில், a, w இரண்டும் மாறிலிகள். திசை வேகத்தின் அளவையும் திசையையும், நேரம் t ஆக இருக்கையில் காண். திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டு.

$$x = a\,(wt + \sin wt), \quad y = a\,(1 - \cos wt).$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = aw\,(1 + \cos wt), \; \frac{dy}{dt} = a\,w \sin wt\,;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,a\,w^2 \sin wt, \; \frac{d^2y}{dt^2} = aw^2 \cos wt.$$

$$\therefore \quad v\,(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= aw \cdot \sqrt{(1 + \cos wt)^2 + \sin^2 wt}$$

$$= aw\,\sqrt{2\,(1 + \cos wt)} = 2aw \cos \frac{wt}{2}\,.$$

v யின் திசை, x அச்சுக்கு θ^c யில் சாய்ந்திருக்குமானால்,

$$\tan \theta = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{aw \sin wt}{aw\,(1 + \cos wt)} = \tan \frac{wt}{2}\,.$$

திசை வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$f\,(t) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$= a\,w^2 \sqrt{(-\sin wt)^2 + (\cos wt)^2}$$

$$= aw^2.$$

இது, நேரம் t ஐயும் வேறு மாறிலிகளையும் சார்ந்ததல்ல. எனவே இது ஒரு மாறிலி.

மாதிரி 12

t நொடிகளில் ஒரு நகரும் புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்கள் : $x = a + c \cos t$, $y = b + c \sin t$. திசை வேகத்தையும், திசை வேக வளர்ச்சி வீதத்தையும் காண். பாதையின் சமன்பாடு என்ன ?

$$x = a + c \cos t, \qquad y = b + c \sin t.$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\,c \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = c \cos t\,;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,c \cos t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\,c \sin t.$$

திசை வேகம் $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$$= c\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = c;$$

திசைவேக வளர்ச்சி வீதம்

$$f(t) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$= c\sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} = c.$$

இவை இரண்டும் மாறிலிகள்.

பாதையின் சமன்பாடு, x, y ஆகியவற்றிலிருந்து t-ஐ விலக்குவதால் கிடைக்கிறது.

$x = a + c + \cos t. \quad \therefore \quad x - a = c\cos t.$

இதேபோல் $\quad y - b = c\sin t.$

வர்க்கமெடுத்துக் கூட்ட, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2.$

இதுவே பாதையின் சமன்பாடு. இது ஒரு வட்டம்.

பயிற்சி 8—3

1. பின்வருவனவற்றில் நேரம் t ஆக இருக்கையில் ஒரு புள்ளி கடந்த தூரம் s. ஒவ்வொன்றிலும், திசைவேகம், திசைவேக வளர்ச்சிவீதம் ஆகியவற்றைக் காண்.

(i) $s = 4t^3 - 3t^2 + 1,$

(ii) $s = \cos 2t + 2\sin t,$

(iii) $s = e^t \cos t.$

2. மேலே எறியப்பட்ட கல் ஒன்று t நொடிகளில் s மீட்டர் தூரம் கடக்கிறது. $s = 20t - \frac{g}{2}t^2$ (g ஒரு மாறிலி), எனில் திசைவேகம் எப்பொழுது மறையும்? கடக்கும் மிக அதிக உயரம் என்ன? துவக்கத் திசைவேகம் என்ன?

2. x அச்சில் நகரும் P என்ற புள்ளி, நேரம் t ஆக இருக்கையில் துவக்கப் புள்ளியிலிருந்து கடந்த தூரம் $x = 10 + 8\sin 2t + 6\cos 2t$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது. துவக்கப் புள்ளியில் அதன் திசைவேகம் பூச்சியம் எனக் காட்டு.

4. நேரம் t ஆக இருக்கையில் ஒரு துகள் கடக்கும் தூரம் $x = a \cos wt + b \sin wt$. துகளின் திசைவேக வளர்ச்சிவீதம், கடக்கும் தூரத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கிறது. எனக் காட்டு. v, a ஆகியவை, திசைவேகம், திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் எனில் $v^2 + w^2 x^2$, $a^2 - w^2 v^2$ ஆகியவை மாறிலிகள் எனக் காட்டு.

5. நேர்க்கோட்டில் நகரும் புள்ளியொன்று, நேரம் t ஆக இருக்கையில் அக் கோட்டில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து இருக்கும் தூரம் $s = 3 \cos 2t$. அதன் திசைவேகமும் திசை முடுக்கமும் முறையே $2\sqrt{9 - s^2}$, $-4s$ எனக் காட்டு.

6. t நொடிகளில் ஒரு புள்ளி கடந்த தூரம் $s = ae^t + be^{-t}$ எனில், அதன் திசைமுடுக்கம் கடந்துவந்த தூரத்திற்குச் சமம் எனக் காட்டு.

7. நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் காலதூரச் சமன்பாடு $t = as^2 + bs + c$ (காலம் t, தூரம் s) எனில், அதன் திசைமுடுக்கம், திசைவேகத்தின் கனத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டு.

8. நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் துகள் ஒன்றின் காலதூரச் சமன்பாடு $s^2 = at^2 + bt + c$ எனில், அதன் திசைமுடுக்கம், கடந்த தூரத்தின் கனத்திற்குத் தலைகீழ் விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டு.

9. $s = at^2$ என்பது, ஒருபுள்ளியின் நேர்க்கோட்டியக்கத்தின் காலதூரச் சமன்பாடு எனில், அதன் திசைவேகம் காலத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் எனவும், திசைமுடுக்கம் ஒரு மாறிலி எனவும் காட்டு.

10. $s^2 = at^3$ என்ற விதிப்படி நேர்க்கோட்டில் இயக்கம் நிகழுமானால், திசைமுடுக்கம் திசைவேகத்திற்குத் தலைகீழ் விகிதசமத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டு.

11. நேர்க்கோட்டுப் பாதையில் செல்லும் ஒரு பொருள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கடந்துவந்த தூரம், அப்போதைய அதன் திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் எனில், அதன் திசைமுடுக்கம் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டு.

12. ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேர்கோட்டில் இடம் பெயர்ந்து வந்த தூரம், எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தின் வர்க்கமூலத்தின் நிலைமடங்கு எனில், திசைமுடுக்கம் திசைவேகத்தின் கனத்தின் நிலைமடங்கு எனக் காட்டு.

13. நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் காலதூரச் சமன்பாடு $t = \sqrt{2ax - x^2} + 2a \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{2a}}$ (காலம் t, தூரம் x) எனில் x-ன் சார்பாகத் திசைவேகத்தையும் திசை முடுக்கத்தையும் எழுது.

14. ஒரு புள்ளி, நேர்க்கோட்டில், $s = \frac{1}{2} vt$ என்ற விதிப்படி நகர்கிறது. t, s, v ஆகியவற்றிற்கு வழக்கமான பொருள் எனில் திசைமுடுக்கம் மாறிலி எனக் காட்டு.

15. $s = a \sin (wt + \varepsilon)$ என்ற விதிப்படி ஒரு பொருள் நேர்க்கோட்டில் இயங்குகிறது. a, w, ε மாறிலிகள். v, f ஆகியவை திசைவேகம், திசைமுடுக்கம் எனில் பின்வருமாறு காட்டு :

(i) $v^2 - fs$ ஒரு மாறிலி, (ii) $\frac{df}{ds}$ ஒரு மாறிலி,

(iii) $s \frac{df}{dt} = vf$.

16. ஒரு மின் விசிறியில் விசை துண்டிக்கப்பட்ட பிறகு t நொடிகளில் சுழல் கோணம் $\theta = -\frac{1}{10} \pi t^2 + 15\pi t$ என்ற சமன்பாட்டினுல் தரப்படுகிறது. (θ ஆரையனில்). விசை துண்டிக்கப்பட்டபோது நொடிக்கு எத்தனை சுழற்சிகள் சுழன்றிருக்கும் என்றும், இனி எவ்வளவு காலம் கடந்து அது சுழற்சியற்று நிற்கும் என்றும் காண். நொடிக்கு எத்தனை சுழற்சிகள் வீதம் அது வேகம் இழக்கிறது என்றும் காண்.

17. நொடிக்கு 50 முறை சுழலும் ஒரு சக்கரத்தின் சுழல் வேகம் ஒவ்வொரு சுழற்சியின்போதும் நொடிக்கு $\frac{1}{2}$ சுற்று என்ற வீதத்தில் கூடுகிறது. அதன் சுழல் முடுக்கம் என்ன ?

18. xy-தளத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்கள்

$$x = 3t^2 (2 - t^3), \ y = 8t^3$$

என்ற சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன. நேரம் $t = 1$ ஆக இருக்கையில் திசை முடுக்கம் என்ன ?

19. ஒரு பொருள் $x = at$, $y = b \sin at$ என்ற பாதையில் இயங்குகிறது. t என்பது நேரம். அதன் திசை வேகத்தின் x கூறு மாறிலி என்றும், எப்பொழுதும் x-அச்சிலிருந்து அது

இருக்கும் தூரத்தின் நிலமடங்காக அதன் திசை முடுக்கம் இருக்கும் என்றும் காட்டு.

20. $y = f(x)$ என்ற பாதையில் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. அதன் திசைவேகத்தின் x-கூறு c என்ற மாறிலி எனில், y-கூறு $cf'(x)$ எனக் காட்டு. அதன் முழு திசை வேகத்தின் அளவை யும், திசைமுடுக்கத்தின் அளவையும் காண்.

21. $y^2 = 25x$ என்ற பரவளையத்தில் இயக்கும் ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தின் x பகுப்பு எப்பொழுதும் நொடிக்கு 10 மீ. (4,10) மீட்டர்கள் என்ற புள்ளியில் அதன் திசை வேகத்தையும் இயங்கு திசையையும் காண்.

22. $y^2 = 4x + 1$ என்ற பரவளையப் பாதையில் இயங்கும் புள்ளியின் திசை வேகத்தின் y-பகுப்பு எப்பொழுதும் 4. அதன் திசை வேகத்தின் x-பகுப்பையும், திசை முடுக்கத்தின் x-, y-பகுப்புக்களையும் காண்.

23. $x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்தில் இயங்கும் ஒரு பொருவின் x-பகுப்பு எப்பொழுதும் 3. y- பகுப்பு வேகத்தையும் திசை முடுக்கத்தையும் காண்.

24. ஒரு தள வளைகோட்டுப்பாதையில் நிலயான திசை வேகத்துடன் செல்லும் பொருளுக்கு எப்பொழுதும் திசை முடுக்கம் அப்பாதைக்குச் செங்குத்தாகவே (அதே தளத்தில்) இருக்கும் எனக்காட்டு.

[$v_x^2 + v_y^2 = k$; இரு பக்கங்களையும் tக்கு வகையிடு].

விடைகள் 8—3

1. (i) $v = 12t^2 - 6t, \qquad f = 24t - 6$

(ii) $v = 2(\cos t - \sin 2t)$,

$f = -2(\sin t + 2\cos 2t)$

(iii) $v = e^t(\cos t - \sin t), f = -2e^t \sin t$.

2. $\frac{20}{g}$ நொடி; $\frac{200}{g}$ மீட்டர்; நொடிக்கு 20 மீட்டர்.

13. $v = -\sqrt{\frac{2a - x}{x}}\ , \ f = -\frac{a}{x^2}$.

16. நொடிக்கு $7\frac{1}{2}$ சுழற்சிகள் ; 75 நொடிகள் ; $\frac{1}{10}$ சுழற்சிகள்.

17. $\alpha = v\frac{dv}{ds} = 50 \times \frac{1}{2} = 25$ சுழற்சிகள்/(நொடி)^2.

18. திசை முடுக்கத்தின் அளவு $24\sqrt{5}$; x அச்சுக்கு $\tan^{-1}2$ என்ற கோணத்தில்

20. $c\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, $cf''(x)$.

21. நொடிக்கு $\frac{5}{2}\sqrt{41}$ மீட்டர்கள் : x அச்சுக்கு $\tan^{-1}\frac{5}{4}$ என்ற கோணத்தில் .

22. 6 ; 8,0.

23. $\frac{3}{2}$; திசை முடுக்கம் y திசையில், $-\frac{25}{16}$ என்ற அளவில்.

8.2.6. தொடுகோடும் செங்கோடும் (Tangent and Normal) தொடுகோடு

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, அதன்மீதுள்ள $p(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழியே வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன் பாடு

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1).$$

எவ்வாறெனில், $p(x_1, y_1)$ யில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$$

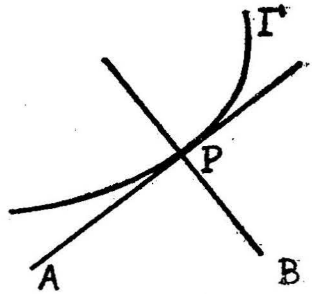
இத் தொடுகோடு, (x_1, y_1) என்ற புள்ளிவழியே செல்வதும், இதைச் சாய்வு விகிதமாகக் கொண்டதுமான ஒரு நேர்க்கோடு எனவே அதன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x x_1)$$

அ—து, $$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1).$$

செங்கோடு

ஒரு வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் அதற்கு வரையப்படும் செங்கோடானது, அப்புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டுக்குச் செங்கோணத்தில் இருப்பதும் அப்புள்ளி வழியே செல்வதுமான ஒரு நேர்க்கோடாகும்.



படம் 15

படத்தில் Γ என்ற வளைகோட்டுக்கு P என்ற புள்ளியில் PA, PB என்பவை முறையே தொடுகோடும் செங்கோடும் ஆகும்.

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் உண்டாகும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1) = \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1).$$

எவ்வாறெனில், m_1, m_2 என்பவை, அப்புள்ளியில் உண்டாகும் தொடுகோட்டுக்கும், செங்கோட்டுக்குமான சாய்வு விகிதங்கள் எனில், அவ்விரண்டு நேர்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகையால்,

$$m_1 m_2 = -1.$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y_1)}} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m_2 (x - x_1);$$

$$\text{அ-து,}\quad y - y_1 = -\left(\frac{dx}{ay}\right)_{(x_1,\, y_1)} . (x - x_1).$$

$$\text{இதையே,}\ (y - y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)} + (x - x_1) = 0$$

எனவும் எழுதலாம்.

மாதிரி 13

$y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ என்ற வளைகோட்டில் $(a, -a)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டையும் காண்க.

வளைகோட்டின் சமன்பாடு : $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

xஐப் பொருத்து வகையிட,

$$2y\ \frac{dy}{dx} = \frac{(2a - x)(3x^2) - x^3(-1)}{(2a - x)^2}$$

$$= \frac{6ax^2 - 2x^3}{(2a - x)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a - x)^2}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,\, -a)} = \frac{3a^3 - a^3}{-a(2a - a)^2} = -2.$$

அ-து, தொடுவரையின் சாய்வு விகிதம் $m = -2$. எனவே, $(a, -a)$ வழிச் செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - (-a) = -2(x - a)$$

அ-து, $2x + y = a.$ ... (i)

செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{2}$.

எனவே, $(a, -a)$ வழிச் செல்லும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y + a = \frac{1}{2}(x - a)$$

அ-து, $x - 2y - 3a = 0$ ... (ii)

மாதிரி 14

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்திற்கு, அதன் மீதான (x, y) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு காண்க.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0.$$

$$y' = - \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

(x_1, y) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$m = \frac{- b^2 x_1}{a y^2{}_2}$$

எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{- b^2 x_1}{a^2} (x - x_1)$$

அ—து, $$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2}.$$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி கொடுத்த நீள்வளையத்தில் உள்ளது என்ற உண்மையை நாம் இன்னும் பயன்படுத்தவில்லை. $x = x_1$, $y = y_1$ என்பவை அச்சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தவேண்டும். (முன் மாதிரியில் இது தேவையில்லை; புள்ளியின் அச்சுத் துவாரங்கள் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தும் வகையிலேயே தரப்பட்டுள்ளன.)

$$\therefore \quad \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1.$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y x_1}{b^2} = 1.$$

கவனிக்க : $b = a$ என இடக் கிடைப்பது :

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு : $x x_1 + y y_1 = a^2$.

மாதிரி 15.

$y = x^3 - 2x + 3$ என்ற வளைகோட்டைத் தொட்டுக் கொண்டும், $10x - y = 3$ என்ற நேர்க்கோட்டுக்கு இணையாகவும் இருக்கும் நேர்க் கோடுகளைக் காண்.

$$y = x^3 - 2x + 3.$$

என்ற வளைகோட்டின் மீது (x, y) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$y' = 3x^2 - 2.$$

தரப்பட்ட நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 10x - 3.$$

இதன் சாய்வு விகிதம்: 10. தொடுகோடு இக் கோட்டுக்கு இணை எனில்,

$$y' = 10.$$

$$\therefore \quad 3x^2 - 2 = 10$$

$$\therefore \quad x = \pm 2.$$

வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் இதைப் பிரதியிட

$$y = (\pm 2)^3 - 2(\pm 2) + 3$$
$$= \pm 8 \mp 4 + 3$$
$$= 7 \text{ அல்லது, } -1$$

எனவே, தொடுபுள்ளிகள் : $P(2, 7), (-2, -1)$

P வழித் தொடுகோடு:

$$y - 7 = 10(x - 2)$$

அ—து, $10x - y = 13.$

Q வழித் தொடுகோடு:

$$y + 1 = 10(x + 2)$$

அ—து, $10x - y + 19 = 0.$

மாதிரி 16.

$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ என்ற வளைகோட்டின் எந்தப் புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்தாலும், Ox, Oy என்ற அச்சுக்களை அது A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், $OA + OB = a$ எனக்காட்டு. இவ் வளைகோடு, அச்சுக்களை $(a, o), (o, a)$ என்ற புள்ளிகளில் தொடுகிறது எனவும் காட்டு.

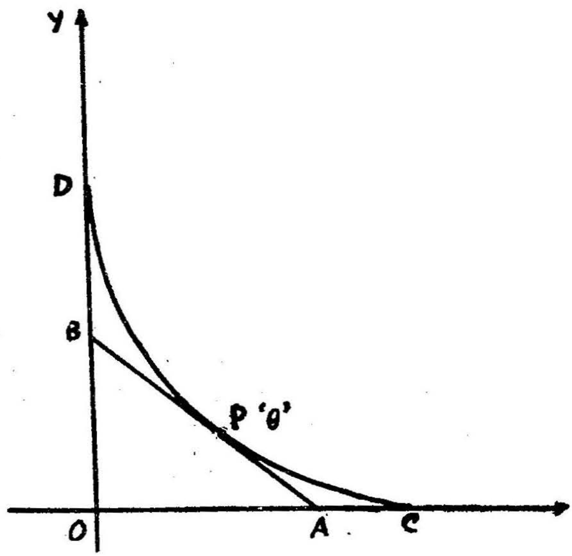
இவ் வளைகோட்டின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் :

$x = a\cos^4\theta$,

$y = a\sin^4\theta$.

எனவே, $\frac{dx}{d\theta} = -4a\cos^3\theta\sin\theta$.

$\frac{dy}{d\theta} = 4a\sin^3\theta\cos\theta$.



படம் 16.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta} = -\tan^2\theta$$

$P(a\cos^4\theta,\ a\sin^4\theta)$. என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - a\sin^4\theta = -\tan^2\theta\,(x - a\cos^4\theta)$$

$$\cos^2\theta\,(y - a\sin^4\theta) = -\sin^2\theta\,(x - a\cos^4\theta)$$

$$\begin{aligned} x\sin^2\theta + y\sin^2\theta &= a\sin^2\theta\cos^4\theta + a\cos^2\theta\sin^4\theta \\ &= a\sin^2\theta\cos^2\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= a\sin^2\theta\cos^2\theta \end{aligned}$$

அ—து AB யின் சமன்பாடு :

$$x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad \ldots \quad (1)$$

இதில் $y = 0$ என இடக் கிடைப்பது Aயின் x அச்சுத்தூரம்.

$$x \sin^2 \theta = a \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\therefore \quad OA = x = a \cos^2 \theta.$$

ச—டு (1) ல் $x = 0$ என இடக் கிடைப்பது Bயின் y அச்சுத்தூரம் :

$$OB = y = a \sin^2 \theta.$$

$$\therefore \quad OA + OB = a (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a,$$

தொடுகோடு, x-, y-அச்சுக்களை C, Dயில் சந்திக்கட்டும். Cயின் x-கூறு பூச்சியம். எனவே,

$$a \sin^4 \theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 0$$

$$\therefore \quad C\text{யின் } x\text{-அச்சுத்தூரம்} = a \cos^4 \theta = a.$$

$$\therefore \quad C \equiv (a, o).$$

ச—டு (1)ல் $\theta = 0$ என இட, Cயின் வளைகோட்டுக்கு வரையப் படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = 0$ எனக்கிடைக்கிறது. இது x-அச்சின் சமன்பாடு என்பதால், x-அச்சு, வளைகோட்டை (a, o)-வில் தொடுகிறது என்பது தெளிவு.

இதேபோல் y-அச்சும் வளைகோட்டை Dயில் தொடுகிறது எனக் காட்டுவதை ஒரு பயிற்சியாகக் கொள்ளவும்.

மாதிரி 17.

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைகோட்டுக்கு அதன் எப்புள்ளி யிலும் வரையப்படும் தொடுகோட்டுக்கும் செங்கோட்டுக்கும் துவக்கப்புள்ளியிலிருந்து குத்துக்கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p, q எனில் $4 p^2 + q^2 = a^2$ எனக்காட்டும்.

(ii) அச்சுக்களால் வெட்டப்படும் தொடுகோட்டின் துண்டு எப்பொழுதும் மாருத நீளமுடையது என்றும் காட்டு.

(iii) செங்கோடு x-அச்சுடன் ϕ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கினுல், செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2 \phi \text{ எனவும் காட்டு.}$$

தரப்பட்ட வளைகோட்டின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் :

$x = a\,\text{cas}^3\,\theta,$

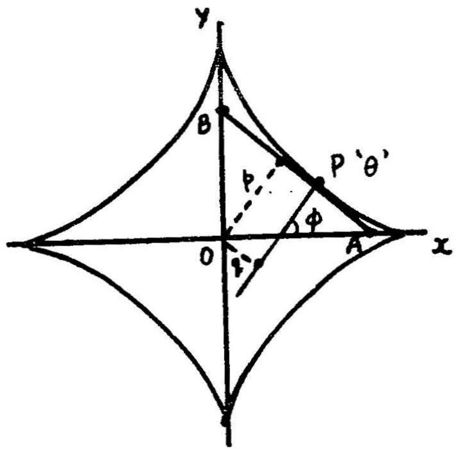
$y = a \sin^3 \theta.$

எனவே, $\dfrac{dx}{d\theta} = -3a \cos^2\theta \sin\theta,$

$\dfrac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2\theta \cos\theta\,;$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} \Big/ \dfrac{dx}{d\theta} = -\tan\theta.$

'θ' என்ற புள்ளியில், அ-து $(a \cos^2\theta,\ a \sin^3\theta)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :



படம் 17.

$y - a \sin^3\theta = -\tan\theta\,(x - a\cos^3\theta),$

$(\cos\theta)$ வினால் இருபுறமும் பெருக்கி மாற்றியமைக்க,

$x \sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

அ-து $x\sin\theta + y\cos\theta = \dfrac{a}{2}\sin 2\theta.$ (1)

'θ' என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$y - a\sin^3\theta = \cot\theta\,(x - a\cos^3\theta)$

அ—து, $x\cos\theta - y\sin\theta = a(\cos^4\theta - \sin^4\theta)$

இதில், $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ $= \cos 2\theta$.

∴ செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta. \quad \dots \quad (2)$$

இனி, $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு $(x, y,)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் நீளம்

$$\pm \frac{lx_1 + my_1 + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

எனவே, $(0, 0)$விலிருந்து தொடுகோடு (1) க்கும் செங்கோடு (2)க்கும் வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே,

$$p = \pm \frac{\frac{a}{2} \sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = \pm \frac{a}{2} \sin 2\theta,$$

$$q = \pm \frac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2 + \sin^2\theta}} = \pm a \cos 2\theta$$

$$\therefore \quad 4p^2 + q^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} \sin^2 2\theta\right) + a^2 \cos^2 2\theta = a^2$$

அ—து, $4p^2 + q^2 = a^2$.

(ii) தொடுகோடு (1), x, y-அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகள் முறையே A, B என்க. Aயின் y-கூறு பூச்சியம். $y = 0$ என (1)ல் இட

$$x \sin\theta = \frac{a}{2} \sin 2\theta = a \sin\theta \cos\theta,$$

அ—து, $x = a \cos\theta$,

இது Aயின் x-கூறு. ∴ $OA = a \cos\theta$.

இதேபோல் $OB = a \sin\theta$ எனப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = a.$$

(iii) 'θ' என்ற புள்ளியில் செங்கோடு (2)ன் சாய்வு விகிதம் $\cot\theta$. இச்செங்கோடு, x அச்சுடன் ϕ என்ற கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பின் இச்சாய்வு விகிதம் $\tan\phi$.

$$\therefore \quad \cot\theta = \tan\phi.$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

இதைச் ச-டு (2)ல் பிரதியிட, செங்கோட்டின் சமன்பாடு ;

$$x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = a \cos\left(\pi - 2\phi\right)$$

அ—து, $y \cos\phi - x \sin\phi = a\cos 2\phi$.

மாதிரி 18

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற நேர்க்கோடு,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

என்ற வளைகோட்டுக்கு ஒரு தொடுகோடு எனில்,

$$p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$$

எனக் காட்டு.

θ என்ற துணையலகின்மூலம். தரப்பட்ட வளைகோட்டின் எந்தவொரு புள்ளியையும்

$$x = a \cos^{2(n-1)/n} \theta, \quad y = b \sin^{2(n-1)/n} \theta$$

எனக் குறிக்கலாம்.

[இதைப் பெற, வளைகோட்டின் சமன்பாட்டின் முதலுறுப்பை $\cos^2 \theta$ எனவும், இரண்டாம் உறுப்பை $\sin^2 \theta$ எனவும் இடுக.]

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -\frac{2(n-1)}{n} a \cos^{[2(n-1)/n]-1} \theta \cdot \sin \theta$$

$$= -\frac{2(n-1)}{n} a \cos^{(n-2)/n} \theta \cdot \sin \theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2(n-1)}{n} b \sin^{[2(n-1)/n]-1} \theta \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{2(n-1)}{n} b \sin^{(n-2)/n} \theta \cdot \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta} = -\frac{b \sin^{\left(1-\frac{2}{n}\right)} \theta \cos \theta}{a \cos^{\left(1-\frac{2}{n}\right)} \theta \sin \theta}$$

$$= -\frac{b}{a} \cot^{\frac{2}{n}} \theta.$$

எனவே, ' θ ' வில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y = b \sin^{2(n-1)/n} \theta = -\frac{b}{a} \cot^{2/n} \theta \left(x - a \cos^{2(n-1)/n} \theta\right)$$

அ—து, $$a \sin^{2/n} \theta \left[y - b \sin^{2(n-1)/n} \theta \right] + b \cos^{2/n} \theta \left[x - a \cos^{2(n-1)/n} \theta \right] = 0$$

அ—து, $$x\, b \cos^{2/n} \theta + y\, a \sin^{2/n} \theta = ab.$$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்பது ' θ ' வில் தொடுகோடு எனில் இவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஒத்த உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் விகிதசமத்திலிருக்கும். எனவே,

$$\frac{b \cos^{2/n} \theta}{\cos \alpha} = \frac{a \sin^{2/n}}{\sin \alpha} = \frac{ab}{p}$$

$$\therefore \frac{\cos^{2/n} \theta}{a \cos \alpha} = \frac{\sin^{2/n} \theta}{b \sin \alpha} = \frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{\cos^2 \theta}{(a \cos \alpha)^n} = \frac{\sin^2 \theta}{(b \sin \alpha)^n} = \frac{1}{p^n}$$

$$\therefore \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n} = \frac{1}{p^n}$$

$$\therefore (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n = p^n.$$

பயிற்சி 8—4

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [1— 20], குறிப்பிட்டுள்ள புள்ளிகளில் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்.

1. $y = x^3 - 3x^2 - 2$, $(1, -4)$
2. $x^2 + 5y^2 = 14$, $(3, 1)$
3. $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$, $(0, 0)$
4. $y(x^2 - 1) = 6x$, $(x = 2)$
5. $y^2(4 - x) = x^3$, $(2, -2)$
6. $x^3 + 5x - 2y = 0$, $(1, 3)$
7. $y = 4x^3 - 2x^5$, $(0, 0)$
8. $y = x^3 - 7x + 6$, x-அச்சை இது வெட்டும் புள்ளிகளில்.
9. $x^2 - xy + 2y - 2 = 0$, $x = -2$.
10. $y^2 = 4ax$, $(at^2, 2at)$
11. $x^2 + y^2 = a^2$, $(a \cos t, a \sin t)$
12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, '$\theta$' $\equiv (a \cos \theta, b \sin \theta)$
13. $xy = c^2$, $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$
14. $x^3 + y^3 = 3axy$, $x = \frac{3a}{2}$
15. $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, $x = 2\sqrt{2}\, a$
16. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$, (a, b)
17. $y = be^{-x/a}$, y-அச்சை இது வெட்டுமிடம்.
18. $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$; $\theta = \frac{\pi}{2}$
19. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$; $t = \frac{\pi}{6}$

20. $x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, $y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

21. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $\theta = \frac{\pi}{4}$.

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [22 — 28] அவற்றின் எந்தப் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள், கொடுக்கப் பட்டுள்ள நேர்க்கோடுகளுக்கு இணையாக இருக்கும் ?

22. $y = 3x - x^2$; $2x + 2y + 1 = 0$ க்கு இணையாக.

23. $xy = 20$; $5x + 2y = 30$ க்கு இணையாக.

24. $y = x^3 - 12x + 18$; x-அச்சுக்கு இணையாக.

25. $x^2 + y^2 = 5$; $y = 2x + 6$ க்கு இணையாக.

26. $2y = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$; $5x - y = 10$ க்கு இணையாக.

27. $y^3 = x^2(2a - x)$; x, y-அச்சுகளுக்கு இணையாக.

28. $y = \frac{x^3}{3} - x^2$; x-அச்சுக்கு இணையாக.

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [29 — 35] கேட்கப்பட்டுள்ள படி தொடுகோடுகள் காண்க.

29. $y = 2x^2 - 3x + 5$; x-அச்சுக்கு 45° யில்.

30. $y = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$; $y + x = 0$ க்குச் செங்குத்தாக.

31. $x^2 + 4y^2 = 8$: சாய்வு விகிதம் -2 ஆக.

32. $x^2 + 2y^2 = 9$; $4x - y = 5$ க்குக் குத்தாக.

33. $y^2 = 6x - 3$; $x + 3y = 10$ க்குக் குத்தாக.

34. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - 10$: $y = 4x + 5$ க்கு இணையாக.

35. $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3x + 70$; $x = 3x$ க்கு இணையாக.

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [36 — 39] கேட்கப்பட்டுள்ள படிச் செங்கோடுகள் காண்க.

36. $ay^2 = x^3$; சாய்வு விகிதம் $\frac{1}{3}$.

37. $x^2 + 2y^2 = 3$; $y = 2x$ க்கு இணையாக.

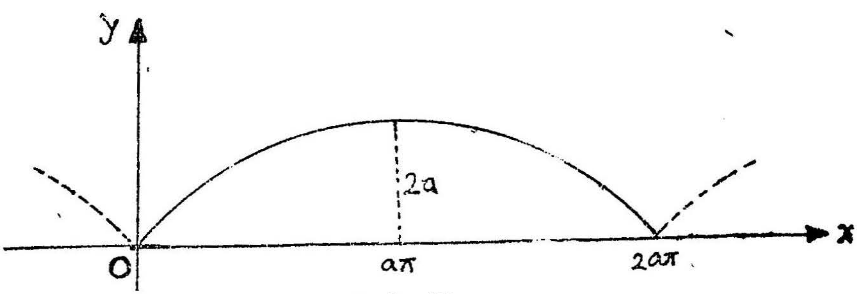
38. $y = x^2 - 2x$; $4x - y = 0$ க்குக் குத்தாக.

39. $a^2y = x^3$; $y = 4x + a$ க்கு இணையாக.

40. $y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (1, 1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு காண்க. இத் தொடுகோடு, வளைகோட்டை எங்கு வெட்டும்? இத் தொடுகோடும், இது வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளியில் உண்டாகும் தொடுகோடும், $x = 2$ என்ற கோடும் அடக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்.

41. $x^3 + y^3 = 3axy$, $y^2 = ax$ இரண்டும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளில் முதல் வளைகோட்டுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள்-y அச்சுக்கு இணை எனக் காட்டு.

42. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையில் (Cycloid) 'θ' என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு காண்க.



படம் 18.

'θ' வில் உண்டாகும் செங்கோடு, $(a\theta, 2a)$ வழிச் செல்லும் எனக் காட்டு.

43. மேற் கணக்கில், 'θ' வில் வரையப்படும் தொடு கோட்டின்மீது துவக்கப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $a\,\theta \sin\frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டு.

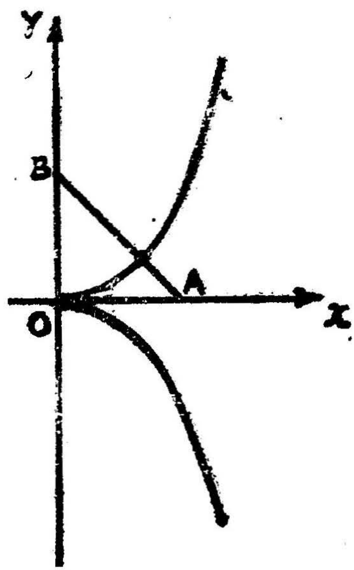
44. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையில் 'θ' வில் தொடுகோட்டைக் காண். 'θ', '$\theta + \pi$' என்ற புள்ளிகளில் உண்டாகும் தொடுகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனக் காட்டு.

45, ஒரு வளைகோட்டின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் :

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta,\quad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$. '$\theta$' என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண். $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில் எழும் செங்கோடு, துவக்கப் புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டு.

46. $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைகோட்டில், 'θ' வில் வரையப்படும் செங்கோடு $16(x\cos^2\theta - y\sin^2\theta) = a(15\cos 2\theta + \cos 6\theta)$ எனக் காட்டு.

47. $ay^2 = x^3$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $P(am^2, am^3)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டைக் காண். இது மீண்டும் வளைகோட்டை $Q(am'^2, am'^3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டினால், m, m' இரண்டுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்.



படம் 19.

48. $ay^2 = x^3$ என்ற வளைவரையின் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, அச்சுக்களில் சம வெட்டுத் துண்டங்களை உண்டாக்குகிறது. அப் புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரம் என்ன ?

49. $x^m y^n = a^{m+n}$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டில் அச்சுக்கள் வெட்டும் துண்டின் நீளத்தை, மாறு விகிதத்திலுள்ள இரு பகுதிகளாகத் தொடுபுள்ளி பிரிக்கும் எனக் காட்டு.

50. $x = 2a/(1 + t^2)$, $y = 2at^3/(1 + t^2)$ என்ற வளை கோட்டிற்கு 't' என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு காண். $y = x$ என்ற கோடு இவ் வளைகோட்டை வெட்டுமிடத்தில் வரையப் படும் தொடுகோடும், இரு அச்சுக்களும் உண்டாக்கும் முக்கோணம் மாறுப் பரப்புடையது எனக் காட்டு.

51. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற நேர்க்கோடு, $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ என்ற வளைகோட்டைத் தொடுமானால், பின் வருமாறு காட்டு :

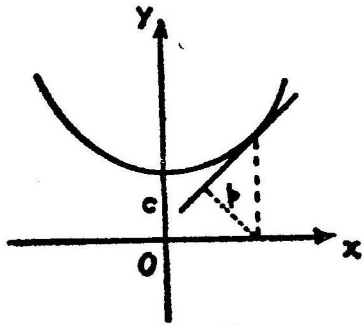
$$p^{m/(m-1)} = (a \cos \alpha)^{m/(m-1)} + (b \cos \alpha)^{m/(m-1)}.$$

52. $lx + my + n = 1$ என்ற நேர்க்கோடு, $(ax)^n + (by)^n = 1$ என்ற வளைகோட்டைத் தொடுவதானால்,

$$\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

எனக் காட்டு.

53. $x = at^3$, $y = at^4$ என்ற வளைகோட்டுக்கு 't' என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டைக் காண். தொடு புள்ளியின்



படம் 20.

கிடையச்சுத் தூரத்தைத் தொடுகோடு 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனக் காட்டு.

54. $y = c \cos h \frac{x}{c}$ என்ற கயிற்று வளையின் (Catenary) எப் புள்ளியின் நிலைக் கோட்டின் அடியிலிருந்தும் (foot of the ordinate), அப் புள்ளியில் எழும் தொடுகோட்டுக்கு வரையப் படும் குத்துக்கோட்டின் நீளம் நிலையானது எனக் காட்டு.

விடைகள் 8—4

1. $3x + y + 1 = 0, \; x - 3y = 13$
2. $3x + 5y = 14, \; 5x - 3y = 12$
3. $y = 3x, \; 3y + x = 0$
4. $10x + 3y = 32, \; 3x - 10y + 34 = 0$
5. $2x + y = 2, \; x - 2y = 6$
6. $4x - y = 1, \; x + 4y = 13.$
7. $y = 0, \; x = 0$
8. (1, 0) இல் : $4x + y = 4, \; x - 4y = 1$
   (2, 0) இல் : $5x - y = 10, \; x + 5y = 2$
   (− 3, 0) இல் : $20x - y + 60 = 0, \; x + 20y + 3 = 0$
9. $7x - 8y + 10 = 0, \; 16x + 14y + 39 = 0$
10. $y = \frac{x}{t} + at, \; y + tx = 2at + at^3$
11. $x \cos t + y \sin t = a$
12. $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$
13. $x + t^2 y = 2ct, \; y - t^2 x = \frac{c}{t}(1 - t^4)$
14. $x + y = 3a, \; x - y = 0$
15. $x + y = \frac{a}{\sqrt{2}}, \; x - y = 0$

16. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2,\ ax - by = a^2 - b^2$

17. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ ax - by + b^2 = 0.$

18. $y - x + \frac{a}{2}(\pi - 4) = 0, \quad x + y = \frac{a\pi}{2}$

19. $4x + 2y = 3,\ 2x - 4y + 1 = 0$

20. $x + y - 3a = 0,\ x - y + a = 0$

21. $x = y$

22. $(2, 2)$

23. $(2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}), \quad (-2\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$

24. $(2, 2), (-2, 34)$

25. $(-2, 1), (2, -1)$

26. $x = -1,\ x = \frac{4}{3}$

27. $\left(\frac{4a}{3}, \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}\right), \quad (2a, 0)$

28. $(0, 0), \left(2, -\frac{4}{3}\right)$

29. $x - y + 3 = 0$

30. $y = x + 4, \quad y = x + 8$

31. $x + 2y = \pm 4$

32. $4x - y = 6$

33. $3x - y = 1$

34. $4x - y = 3,\ 4x - y = 19$

35. $3x - y + 70 = 0, \quad 3x - y + 67 = 0. \quad 3x - y = 58.$

36. $x - 3y = 28a$

37. $2x - y = \pm 1$

38. $x + 4y = 15$

39. $y - 4x = \pm 3a.$

40. $2x - y = 1,\ \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, பரப்பு : $\frac{5}{4}$

42. $x = y \cot \frac{\theta}{2} + a\,\theta$

44. $x = y \tan \frac{\theta}{2} + a\theta$

45. $4x \sin^3 \theta = 4y \cos^3 \theta - 3 \sin 4\theta.$

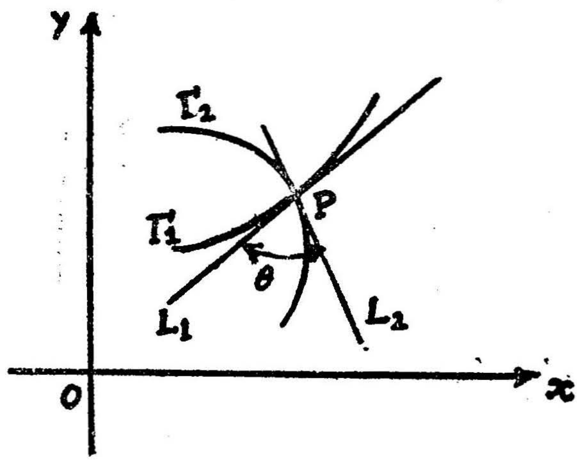
47. $3mx = 2y + am^3, \quad m + 2m' = 0.$

48. $\frac{4a}{9}$

50. $2y + t(3 + t^2)\,x = 6at,$ பரப்பு : $\frac{9a^2}{4}.$

8·2·7 வளைகோடுகளின் வெட்டுக் கோணம் (Angle of Intersection of Curves)

இரு வளைகோடுகளின் பொதுப்புள்ளியில் இரண்டுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உண்டாகும் கோணம், அப்புள்ளியில் அவ்வளைகோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் கோணம் எனப்படும்.



படம் 21.

Γ_1 Γ_2 என்ற இரு வளைகோடுகளுக்கு P ஒரு பொதுப் புள்ளியாக இருக்கட்டும். L_1 L_2 என்பவை அப்புள்ளியில் இவ் வளைகோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளாகவும்,

அவற்றின் சாய்வு m_1 m_2 ஆகவும் அவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ ஆகவும் இருப்பின்,

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| .$$

இதில் m_1, m_2 என்பவை, P-யில் Γ_1 Γ_2 வின் சாய்வு விகிதங்களும் ஆகும். எனவே,

$$m_1 = \Gamma_1 \text{ ல் } \left(\frac{dy}{dx}\right)_P$$

$$m_2 = \Gamma_2 \text{ ல் } \left(\frac{dy}{dx}\right)_P$$

குறிப்பு : (1) செங்கோண வெட்டு (Orthogonal eutting) :

Γ_1, Γ_2 இரண்டும் செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளுமாயின், வெட்டும் புள்ளியில், $\tan \theta = \infty$; $1 + m_1 m_2 = 0$; அ—து, $m_1 m_2 = -1$.

(2) தொடுதல் (Touching)

Γ_1 Γ_2 இரண்டும் p யில் ஒன்றை யொன்று தொடுவதானல், ஒரே நேர்க்கோடு இரண்டுக்கும் p யில் தொடுகோடாக இருக்கும். அப்பொழுது $\theta = 0$; அ—து, $m_1 = m_2$.

மாதிரி 19

$x^2 + y^2 = 8ax$, $y^2 (2a - x) = x^3$ என்ற இரு வளைகோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் கோணங்களைக் காண்.

தரப்பட்ட வளைகோடுகள்

$$x^2 + y^2 = 8ax \quad \ldots (1)$$

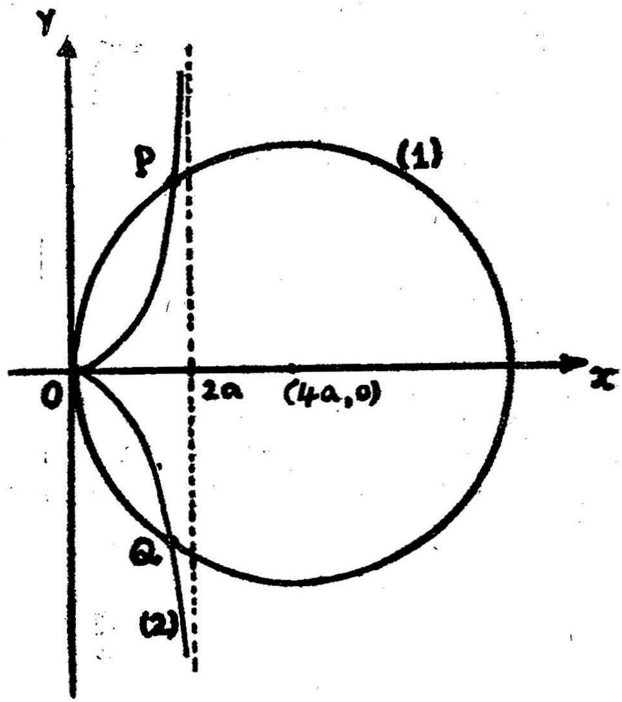
$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \ldots (2)$$

இவற்றைத் தீர்த்து இவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் காணவேண்டும்.

இவற்றிலிருந்து y ஐ நீக்க,

$$8ax - x^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

$$x (8a - x) (2a - x) - x^3 = 0$$



படம் 22.

$x\,(16a^2 - 10\,ax) \qquad = 0$

அ—து, $2ax\,(8a - 5x) \qquad = 0$

$\therefore \quad x = 0, \quad \dfrac{8a}{5}$

$x = 0$ எனில், (1) அல்லது (2) லிருந்து, $y = 0$.

$x = \dfrac{8a}{5}$ எனில், (1) லிருந்து, $y^2 = 8ax - x^2 = \dfrac{256a^2}{25}$;

$$y = \pm\,\frac{16a}{5}.$$

எனவே, வெட்டும் புள்ளிகள் : (0, 0), $\left(\dfrac{8a}{5}, \pm\dfrac{16a}{5}\right)$.

இவை, O, P, Q என இருக்கட்டும்.

ச—டு (1) லிருந்து, $2y\dfrac{dy}{dx} = 8a - 2x$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a - x}{y}.$$

∴ (x, y) என்ற புள்ளியில் வளைகோடு (1) ன் சாய்வு விகிதம்

$$m_1 = \frac{4a - x}{y}.$$

ச—டு (2) லிருந்து, $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2a - x)\,3x^2 + x^3}{(2a - x)^2}$

$$= \frac{2x^2\,(3a - x)}{(2a - x)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\,(3a - x)}{y\,(2a - x)^2}.$$

∴ (x, y) என்ற புள்ளியில் வளைகோடு (2) ன் சாய்வு விகிதம்

$$m_2 = \frac{x^2\,(3a - x)}{y\,(2a - x)^2}.$$

O என்ற புள்ளியில்

$$m_1 = \left[\frac{4a - x}{y}\right]_{(0,\,0)} = \infty.$$

$$m_2 = \left[\frac{x^2\,(3a - x)}{y\,(2a - x)^2}\right]_{(0,\,0)}.$$

இது, தேரு வடிவமான $\frac{0}{0}$ ஐப் பெறுவதால், இதை வேறு வடிவத்தில் எழுதிப் பார்க்கலாம் :

(x, y) ல் $m_2 = \dfrac{x^2\,(3a - x)}{y\,(2a - x)^2} = \dfrac{x^2\,(3a - x)}{\sqrt{\dfrac{x^3}{2a - x}}\cdot(2a - x)^2}$

$$= \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)^{3/2}}$$

$$\therefore \quad 0 \text{ ல் } m_2 = \left[\frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{\frac{3}{2}}}\right]_{x=0} = 0.$$

O வில், வளைகோடு (1) y-அச்சுக்கும், வளைகோடு (2) x-அச்சுக்கும் இணையாக இருப்பதால், அவை அங்கு வெட்டும் கோணம் 90°.

P என்ற புள்ளியில்

$$m_1 = \left[\frac{4a-x}{y}\right]_{\left(\frac{8a}{5},\ \frac{16a}{5}\right)} = \frac{3}{4},$$

$$m_2 = \left[\frac{x^2\,(3a-x)}{y\,(2a-x)^2}\right]_{\left(\frac{8a}{5},\ \frac{16a}{5}\right)} = 7.$$

எனவே, வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\,m_2}\right| = \left|\frac{\frac{3}{4}-7}{1+\frac{3}{4}\cdot 7}\right| = 1\,;$$

$\therefore \quad \theta = 45°.$

Q என்ற புள்ளியிலும்

வெட்டுக்கோணம் 45° என இதேபோல் காட்டலாம்.

மாதிரி 20

$y = x^3, \quad 6y = 7 - x^2$ என்ற இரு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டும் எனக் காட்டு.

வளைகோடுகள் :

$y = x^3$ ... (1)

$6y = 7 - x^2.$ ... (2)

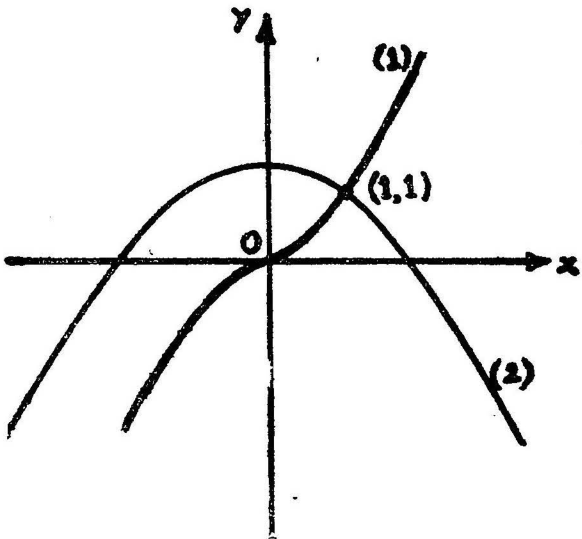
y ஐ விலக்க,

$6x^3 = 7 - x^2$

$6x^3 + x^2 - 7 = 0$

அ—து, $(x-1)\,(6x^2 + 7x + 7) = 0.$

$6x^2 - 7x + 7 = 0$ எனக் கொண்டால், x ன் மதிப்புக்கள் சிக்கல் எண்களாகக் (Complex numbers) கிடைக்கின்றன. இரு



படம் 23.

வளைகோடுகள் மெய்யாக வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் மெய்யெண்களாகவே இருக்கவேண்டும் என்பதால் $x = 1$ என்ற x ன் மெய் மதிப்பை மட்டும் எடுத்துக் கொள்க. அதற்கேற்ற y ன் மதிப்பு 1.

எனவே, (1, 1) என்ற புள்ளியில் மட்டும் வளைகோடுகள் மெய்யாக வெட்டுகின்றன.

(1) லிருந்து, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

எனவே, (1, 1) ல் (1) ன் சாய்வு விகிதம் :

$$m_1 = \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,\ 1)} = 3.$$

(2) லிருந்து, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3}$

எனவே, (1, 1) ல் (2) ன் சாய்வு விகிதம் :

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\ 1)} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad m_1 \ m_2 = -1.$$

ஆகவே, (1, 1) இல் வளைகோடுகள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன.

மாதிரி 21

$y = x^2 - 3x + 3$, $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9$ என்ற இரு வளைகோடுகளும் (2, 1) என்ற புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன எனக் காட்டு. அப்பொழுத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்.

$x = 2$, $y = 1$ என இடுவது, இரு சமன்பாடுகளையும் நிறைவுபடுத்துகிறது. எனவே, (2, 1), இரு வளைகோடுகளுக்கும் பொதுப்புள்ளி.

$$y = x^2 - 3x + 3 \qquad \dots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 3.$$

(2, 1) என்ற புள்ளியில் வளைகோடு (1)-ன் சாய்வு விகிதம்

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\ 1)} = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

$$y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9. \qquad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 13.$$

(2, 1) என்ற புள்ளியில் வளைகோடு (2)-ன் சாய்வு விகிதம்

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\ 1)} = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 13 = 1.$$

$m_1 = m_2$ என்பதால் இரு வளைகோடுகளும் அப்புள்ளியில் தொடுகின்றன. அத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - 1 = 1\,(x - 2)$$

அ—து, $x - y = 1$.

பயிற்சி 8—5

பின்வரும் வளைகோடுகள் [1 — 14] எந்தக் கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனக் காண்.

1. $y^2 = x, \quad x^2 = y$; $(1, 1)$ என்ற புள்ளியில்.

2. $y = \dfrac{x+3}{x^2+1}, \quad y = \dfrac{x^2+11-7x}{x+1}$; $(2, 2)$-ல்

3. $y^2 = \dfrac{x^3}{5} - x, \; y = 2x$; துவக்கப்புள்ளியல்லாத மற்ற பொதுப் புள்ளியில்.

4. $xy = 2a^2, \; y^2 = 4ax.$

5. $x^2 + y^2 = 8, \quad x^2 = 2y.$

6. $x^2 - y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}.$

7. $x^2 + 4y^2 = 32, \; x^2 - y^2 = 12$

8. $y^2 = 4x, \; 8x^2 + y^2 - 6y = 0$

9. $y^2(5 - x) = x^3, \quad y = 2x$

10. $y = x^2, \; 6y = 7 - x^3$; $(1, 1)$-ல்

11. $x^3 + y^3 = 6xy, \quad y = 2x$

12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \; x^2 + y^2 = ab$

13. $y = x^2 - 3x, \quad 9y = 2x^2 - 4x + 20$

14. $y^2 = 4x, \quad 2x^2 = 12 - 5y$

பின்வரும் வளைகோடுகள் [15 — 23] செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன எனக் காட்டு.

15. $x = y^2, \; 6x = 7 - y^3$; $x = 1$ என்ற புள்ளியில்

16. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad x^2 - y^2 = 8$

17. $4x^2 + 9y^2 = 79, \; x^2 - y^2 = 5$

18. $xy = 4, \; 17x^2 - 16xy + 17y^2 = 225$

19. $y^2 = 4(x + 1), \; y^2 = 36(9 - x)$

20 $x^2 + y^2 = a^2, \quad xy + c^2.$

21. $x^3 + y^3 + x + 2y = 0, \quad xy + 2x = y$; துவக்கப் புள்ளியில்.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1.$

23. $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0, \ 3x^2y - y^3 + 2 = 0$

பின்வரும் வளைகோடுகள் [24 — 28], தரப்பட்ட புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன எனக்காட்டி, பொதுத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்.

24. $y = 6 + x - x^2, \ y(x - 1) = x + 2$; (2, 4)

25. $y = x^3 + x + 1, \ 2y = x^3 + 5x$; (1, 3)

26. $y = x^3 - 3x^2 - 8x - 4, \ y = 3x^2 + 7x + 4$; $x = -1$.

27. $y = 3 \sin x - \sqrt{3}, \ y = \frac{3x^2}{2\pi} - \frac{\pi}{6}$; $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

28. $y^2 = 8x, \ x^2 = 4y - 12$; (2, 4)

29. $x^2 = ax, \ x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைகோடுகள் துவக்கப்புள்ளியில் தொட்டுக்கொள்கின்றன எனக் காட்டு. அவை வெட்டிக்கொள்ளும் மற்றப் புள்ளியில் வெட்டுக்கோணம் என்ன ?

30. $ax^2 + by^2 = 1, \ cx^2 + dy^2 = 1$ இரண்டும் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொண்டால், $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ எனக் காட்டு.

31. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையம், $xy = c^2$ என்ற அதிபரவளையத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டினால் $c^4 = 32a^4$ எனக் காட்டு. பொதுத் தொடுகோடும் பொதுச் செங்கோடும் x அச்சை T, G என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், $TG = 6a$ எனக் காட்டு.

விடைகள் 8—5

1. $\tan^{-1} \frac{3}{4}$

2. 45°

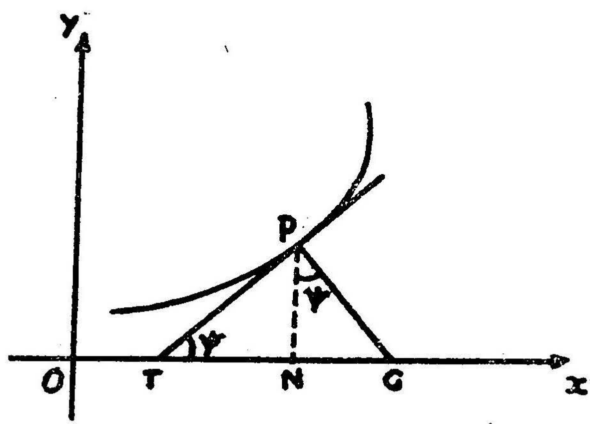
3. $\tan^{-1} \frac{1}{3}$

4. $\tan^{-1} 3$

5. $\tan^{-1} 3$	6. $45°$
7. $90°$	8. $\tan^{-1} \frac{7}{9}$
9. $\tan^{-1} \frac{1}{3}$, $\tan^{-1} 2$.	10. $90°$
11. $\tan^{-1} \frac{6}{13}$, $\tan^{-1} 2$.	12. $\tan^{-1} \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$
13. $\tan^{-1} \frac{11}{23}$	14. $\tan^{-1} \frac{14}{3}$
24. $3x + y = 10$	25. $4x - y = 1$.
26. $y = x + 1$	27. $x = y + \frac{\pi}{3}$
28. $x - y + 2 = 0$.	29. $\tan^{-1} 2\sqrt[3]{2}$.

8·2·8 தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் நீளமும், தொடுகோட்டடியும் செங்கோட்டடியும். (Lengths of Tangent and Normal, Subtangent and Subnormal)

ஒரு வளைகோட்டில் P என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடும் செங்கோடும் x-அச்சை முறையே T, G யில் வெட்டட்டும். PT, PG ஆகியவை P யில் இவ் வளைகோட்டுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் நீளங்கள் என முறையே வழங்கப்படும்.



படம் 24.

P யின் நிலைக் கோட்டடி (foot of the ordinate) N எனில் TN, NG ஆகியவை, P யில் இவ் வளைகோட்டிற்கு வரையப் பட்ட தொடுகோட்டடி, செங்கோட்டடி என முறையே கூறப் படும்.

வளைகோட்டின் சமன்பாடு $y = f(x)$ எனவும், $P \equiv (x, y)$ எனவும், P யில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $\tan \psi$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$PN = y, \quad G\hat{P}N = P\hat{T}N = \psi.$

எனவே, $\triangle PTN$ ல், $PT = PN \operatorname{cosec} P\hat{T}N = y \operatorname{cosec} \psi$

$$= y\sqrt{1 + \cot^2\psi} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= y \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}.$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் நீளம் $= y\dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}$ ... (1)

$\triangle GPN$ ல்

$PG = PN \sec G\hat{P}N = y \sec \psi$

$\quad = y\sqrt{1 + \tan^2\psi} = y\sqrt{1 + y'^2}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் நீளம் $y = \sqrt{1 + y'^2}$. ... (ii)

$\triangle PTN$ ல்

$$TN = PN \cot P\hat{T}N = y \cot \psi = \frac{y}{\tan\psi} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

தொடுகோட்டடி $= \dfrac{y}{y'}$. ... (iii)

$\triangle GPN$ ல்

$$NG = PN \tan G\hat{P}N = y \tan\psi = y\frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$ செங்கோட்டடி $= yy'$. ... (iv)

மாதிரி 22

$y = a \log (x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, தொடு கோடு, தொடுகோட்டடி ஆகியவற்றின் நீளங்களின் கூடுதல், அப் புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களின் பெருக்கலுக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டு.

வளைகோட்டின் சமன்பாடு :

$$\therefore \quad y = a \log (x^2 - a^2)$$

$$y' = \frac{2a\,x}{x^2 - a^2}.$$

$\therefore$ (x, y) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு

$$= y\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'};$$

$$\text{தொடுகோட்டடி} = \frac{y}{y'}.$$

$$\text{இவற்றின் கூடுதல்} = \frac{y}{y'}\left[\sqrt{1 + y'^2} + 1\right]$$

$$= \frac{y(x^2 - a^2)}{2ax}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)^2} + 1\right]$$

$$= \frac{y(x^2 - a^2)}{2ax}\left[\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} + 1\right]$$

$$= \frac{y(x^2 - a^2)}{2ax}\cdot\frac{2x^2}{(x^2 - a^2)}$$

$$= \frac{xy}{a}$$

$$\propto xy.$$

எனவே, விடை.

மாதிரி 23

$x = a \log \cot \frac{\theta}{2} - a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (tractrix) $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டடியையும் செங்கோட்டடியையும் காண்க.

$$x = a \log \cot \frac{\theta}{2} - a \cos \theta$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = -\frac{1}{2} a \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} + a \sin \theta$$

$$= a (\sin \theta - \operatorname{cosec} \theta).$$

$$y = a \sin \theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta - \operatorname{cosec} \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta - 1} = -\tan \theta.$$

θ-வில் தொடுகோட்டடி $= \dfrac{y}{y'} = -\dfrac{a \sin \theta}{\tan \theta} = -a \cos \theta$,

செங்கோட்டடி $= yy' = -a \sin \theta \tan \theta.$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில் இவை இரண்டின் எண் மதிப்பும் $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

பயிற்சி 8—6

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [1 — 7], தரப்பட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோடு, செங்கோடு, தொடுகோட்டடி, செங்கோட்டடி ஆகியவற்றைக் காண்க.

1. $y^2 = 4(x + 5)$, $(4, 6)$-இல்.
2. $xv = -12$, $(-4, 3)$-இல்
3. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$, (a, a)-யில்.
4. $x^m y^n = a^{m+n}$, (a, a)-யில்.
5. $x - a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$, $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$; θ-வில்.

6. $x = a(t - \sin t),\ y = (1 - \cos t)$; t-ல்

7. $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$; θ-வில்

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு [8 — 13], உடன் தரப்பட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோட்டடியையும், செங்கோட்டடியையும் காண்க.

8. $y = b\sin\dfrac{x}{a}$, (x, y)-யில்

9. $9x^2 + 16y^2 = 1152$, $(8, 6)$-இல்

10. $y^2 = (x + 1)^2(5 - x)$. $(1, 4)$ இல்

11. $x^3 + y^3 = 3axy$, $\left(\dfrac{2a}{3}, \dfrac{4a}{3}\right)$-இல்

12. $x = a\sin^2\theta,\ y = a\tan\theta$; θ-வில்

13. $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta),\ y = a(2\sin\theta + \sin 2\theta)$; θ-வில்.

14. $y = a^{x},\ y = be^{\frac{x}{e}}$ ஆகிய வளைகோடுகளுக்குத் தொடுகோட்டடி மாறிலி என்றும், செங்கோட்டடியானது, புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரத்தின் வர்க்கத்தின் நிலையான மடங்கு என்றும் காட்டு.

15. $y = ae^{-bx^2}$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடு, தொடுபுள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டு.

16. $xy = c^2$ என்ற வளைகோட்டின் எப்புள்ளியிலும் செங்கோட்டடி, அப்புள்ளியின் நிலைத்தூரத்தின் முப்படிக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கிறது எனக் காட்டு.

17. $x^2y^2 = a^2(x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோட்டின் எப்புள்ளியிலும் செங்கோட்டடி அப்புள்ளியின் கிடைத்தூரத்தின் முப்படிக்குத் தலைகீழ் விகிதத்திலிருக்கிறது எனக் காட்டு.

18. $y^{n+1} = a^n x$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டடி, x-அச்சுத்தூரத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் மாறும் எனக் காட்டு. செங்கோட்டடியின் நீளம் என்ன ? செங்கோட்டடியின் $(n + 1)$ ஆவதுபடி, x-அச்சுத்தூரத்தின் $(n - 1)$ ஆவது படிக்குத் தலைகீழ் விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டு.

19. $x^m y^n = a^{m+n}$ என்ற வளைகோட்டின் எப்புள்ளியிலும் தொடுகோட்டடி, அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டு.

20. $x^{m+n} = a^{m-n} y^{2n}$ என்ற வளைகோட்டின் எப்புள்ளியிலும் தோன்றும் தொடுகோட்டடியின் m ஆவது படி, செங்கோட்டடியின் n ஆவது படிக்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டு.

21. ஒரு வளைகோட்டுக்கு (x, y) என்ற புள்ளியில் சாய்வு வீதம் $-\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. தொடுகோடு நிலையான நீளம் கொண்டது எனக் காட்டு.

22. $ay^2 = (x + b)^3$-ல் செங்கோட்டடி, வளைகோட்டடியின் வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளதெனக் காட்டு.

23. $ax^2 + by^2 = c$ என்ற வளைகோட்டில், செங்கோட்டடியும் x-அச்சுத் தூரமும் நிலைத்த விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டு.

24. $y = c \cos h \frac{x}{c}$ என்ற கயிற்று வளைக்கு (catenary)

செங்கோட்டின் நீளம் $= \frac{y^2}{c}$,

தொடுகோட்டடி $= c \cot h \frac{x}{c}$

செங்கோட்டடி $= \frac{c}{2} \sin h \frac{2x}{c}$

எனக் காட்டு.

25. $xy^n = a^{n+1}$ என்பதன் செங்கோட்டடி மாறிலி எனில், $n = -2$ எனக் காட்டு.

26. $x = a\left(\cos\theta + \log\tan\frac{\theta}{2}\right)$, $y = a\sin\theta$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடு நிலைத்த நீளமுடையது எனக் காட்டு.

27. $x = a[\log(1 + \cos\theta) - \cos\theta]$, $y = a\sin\theta$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டடி, செங்கோட்டடி ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டு.

விடைகள் 8—6

1. $6\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$, 18, 2.   2. 5, $\frac{15}{4}$, 4, $\frac{9}{4}$

3. $a\frac{\sqrt{5}}{2}$, $a\sqrt{5}$, $\frac{a}{2}$, $2a$

4. $\frac{a}{m}\sqrt{m^2+n^2}$, $\frac{a}{n}\sqrt{m^2+n^2}$, $-\frac{na}{m}$, $-\frac{ma}{n}$.

5. $a \operatorname{cosec}\theta(\sin\theta-\theta\cos\theta)$, $a\sec\theta(\sin\theta-\theta\cos\theta)$,
$a\cos\theta\ (\sin\theta-\theta\cos\theta)$, $a\tan\theta(\sin\theta-\theta\cos\theta)$.

6. $a\sin t$, $2a\sin\frac{t}{2}$, $a(1-\cos t)\tan\frac{t}{2}$,
$a(1-\cos t)\cot\frac{t}{2}$.

7. $a\sin^2\theta\cos\theta$, $a\sin^4\theta\sec\theta$, $a\sin^2\theta$, $a\sin^3\theta\ \sec\theta$.

8. $a\tan\frac{x}{a}$, $\frac{b^2}{2a}\sin\frac{2x}{a}$.

9. -8, $-\frac{9}{2}$.   10. $\frac{8}{3}$, 6.

11. $\frac{5a}{3}$, $\frac{16a}{15}$ 12. $2a\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\frac{a}{2}\sec^4\theta$.

13. $a(2\sin\theta+\sin 2\theta)\tan\frac{3\theta}{2}$, $a(2\sin\theta+\sin 2\theta)\cot\frac{3a}{2}$.

18. செங்கோட்டடி $=\frac{y^2}{(n+1)}$.

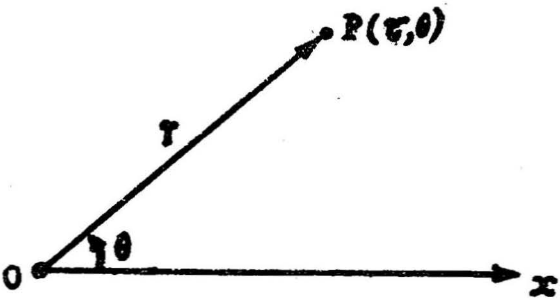
8.3 ஓர் இணைப்பு : தூரக்கோணக் கூறுகள் (Polar Co-ordinates)

8. 3. 1. ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் இடத்தை அறிந்து கொள்ள உதவும் எந்த அளவுகளும் அதன் தளக் கூறுகள் (Plane Co-ordinates) எனப்படும்.

xOx', yOy' என்ற இரு செங்குத்தான நேர்க் கோடுகளை அச்சுக்களாகக் (axes) கொண்டு, அவற்றின் பரப்பில், O விலிருந்து x-அச்சுக்கும் இணையாக அளக்கும்தூரம் x-ஆகவும்

y-ஆகவும் உள்ள ஒரு புள்ளியின் கூறுகளை (x, y) எனக்குறிக்கும் முறை இதுவரை பழகியதே. இந்த x-, y- கூறுகள் * தெக்காட்டின் கூறுகள் (Cartesian Coordinates) எனப்படும்.

இனி, தூரக் கோணக் கூறுகள் என்பனவற்றைப் பார்ப்போம் :



படம் 25

தரப்பட்ட தளத்தில் O ஒரு நிலைப்புள்ளியாகவும், Ox ஒரு நிலைக்கோடாகவும் இருக்கட்டும். இவற்றைப் பொருத்து Pஎன்ற எப்புள்ளியின் நிலையையும் இத்தளத்தில் வரையறுக்கலாம். தூரம் OP யும், கோணம் $x\hat{O}P$ யும் முறையே r, θ எனில், இவையிரண்டும் P-யின் இருப்பிடத்தை உடனே தருகின்றன. r-என்பது P-யின் தூரக்கூறு ; θ என்பது, கோணக்கூறு. எனவே, P-யின் தூரக் கோணக் கூறுகள் (r, θ) எனக் குறிப்போம்.

---

* ரீனே தெக்காட்டி (Rene Descartes) [1596—1650] அன்றைய தத்துவச் சாத்திரத்தை எதிர்த்தவர். புதுமைத் தத்துவத்தின் தந்தை எனலாம். இவரது Discours de la Methode என்ற தத்துவநூலும் La Geometrie என்ற வரைகணக்கு (Geometry) நூலும் இன்னும் சில நூல்களும், ஒரே ஆண்டில்—1637-இல்—வெளியிடப்பட்டன.

இவர் ஓர் ஓய்வுப் பிரியர் தினமும் 10 மணிநேரம் தூங்கும் இவரது இளமைப்பழக்கம், வளர்ந்த பிறகும் இவரைவிடவில்லை ; அதைப்பற்றி இவர் கவலைப்படவும் இல்லை.

இவர் உளவியலுக்கு ஒரு வழிகாட்டி. மூளை ஆராய்ச்சியின் தந்தை. பகுமுறை வரைகணக்கினை (Analytical Geometry) உருவாக்கியவர்.

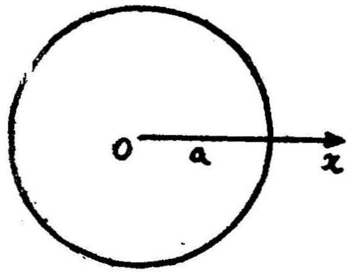
O துருவம் (Pole), Ox தொடக்கக்கோடு (initial line), OP ஆரை ஏவரை (radius vector), $x\hat{O}P$ ஏவரைக் கோணம் (vectorial angle) எனப்படும்.

8-3. 2. வளைகோட்டின் தூரக்கோணச் சமன்பாடு

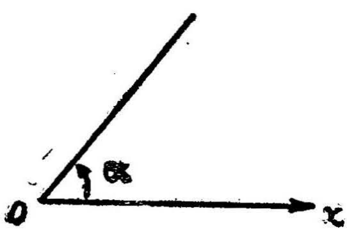
வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை $r = f(\theta)$ என்ற வடிவத்திலும் எழுதலாம். இது, அதன் தூரக் கோணச் சமன்பாடு (Polar equation) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $r = a$. இது, துருவத்தை மையமாகக் கொண்ட a அலகுகள் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம்.



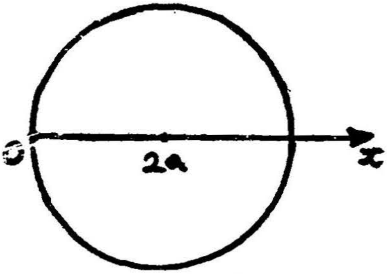
படம் 26



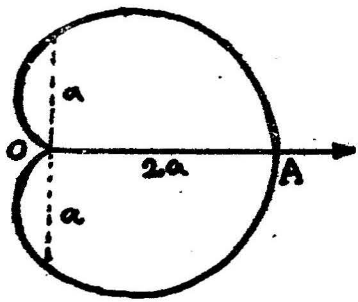
படம் 27

2. $\theta = \alpha$. இது துருவம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர் கோடு. அச்சுக்கு α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது.

3. $r = 2a \cos\theta$. இது, a ஆரமுள்ள துருவம் வழிச் செல்கின்ற ஒரு வட்டம். தொடக்கக் கோடு இதன் மையத்தின் வழிச் செல்கிறது.



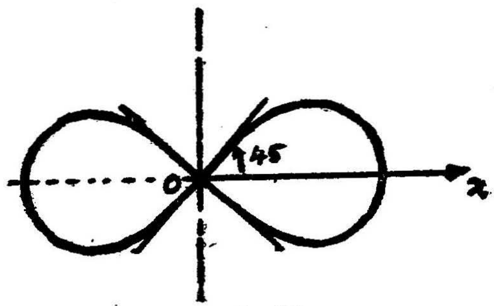
படம் 28



படம் 29

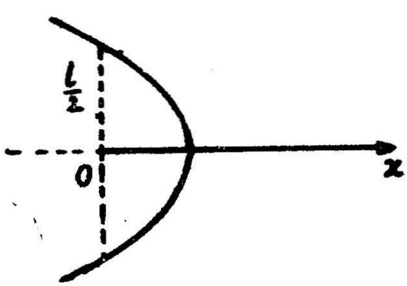
4. $r = a\ (1 + \cos\theta)$. இதை நெஞ்சுவளை (cardioid) என்பார்கள். O-ல் இவ் வளை கோடு தொடக்கக் கோட்டைத் தொடுகிறது.

5. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. இது பெர்னேலியின் லெம்னிஸ்கேட் (Lemniscate of Bernoulli) எனப்படும். O-ல் இவ் வளை கோட்டின் சாய்விகிதம் $\pm$ 1.

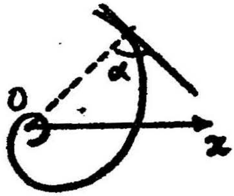


படம் 30

6. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$. இது ஒரு கூம்பு வெட்டி. $e \lesseqgtr 1$ என்பதற்கு ஏற்ப, இது நீள் வளையமாகவும் (ellipse), பரவளையமாகவும் (parabola), அதிபரவளையமாகவும் (hyperbola) இருக்கும்.



படம் 31

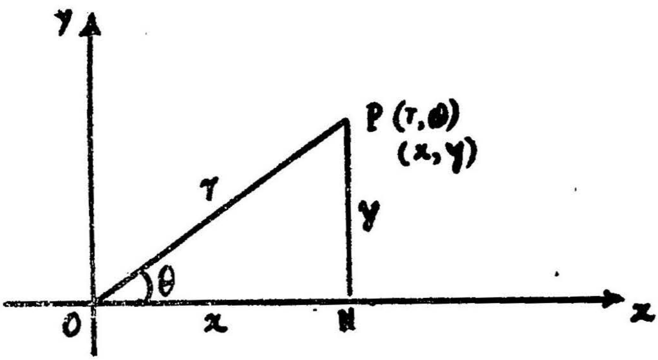


7. $r = ae^{\theta \cot \alpha}$. இது ஒரு சம கோணச் சுருள் (Equiangular spiral). இதன் எப்புள்ளியிலும் ஆரைத்திசைக்கும் தொடுகோட்டுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் α.

படம் 32

8-3·3. கூறுமாற்றம் (Transformation of co-ordinates)

துருவம் O, அச்சு OX ஆகியவற்றைப் பொறுத்து P என்ற ஒரு புள்ளியின் தூரக்கோணக் கூறுகள் (r, θ) ஆக இருக்கட்டும்.



படம் 33

OX-க்குச் செங்குந்தாக OY ஐ வரை. OX, OY ஐப் பொறுத்து P-ன் தெக்காட்டிக் கூறுகள் (x, y) ஆக இருக்கட்டும்.

PN என்பது OX-ன் மீது P-லிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக் கோடு எனில் $ON = x$, $PN = y$, $OP = r$, $P\hat{O}N = \theta$.

படத்திலிருந்து இருவகைக் கூறுகளுக்குமுள்ள தொடர்பு தெளிவாகக் கிடைக்கிறது.

$$x = r \cos \theta, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = r \sin \theta, \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

r-ன் மதிப்பை மிகையாகவே எடுத்துக்கொள்வது வழக்கம். θ-வின் மதிப்பு $-\pi$, $+\pi$ ஆகிய இரண்டுக்கும் இடைப்பட்டது. $\cos 6 = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ஆகிய மூன்று சமன்பாடுகளில் எவையேனும் இரண்டு, θ வின் மதிப்பைத் திட்டமாகத் தருகின்றன.

$(r, \theta + 2k\pi)$ என்ற கூறுகள், k முழுவெண் அல்லது பூச்சியம் எனில் (r, θ) என்ற புள்ளியைக் குறிப்பதைக் கவனிக்க.

பகுதி வகைக்கெழு காணும் பகுதியில், வகைக்கெழுக்களின் மாறிகளை (x, y), (r, θ) ஆகியவற்றில் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு மாற்றவேண்டியிருக்கும். அதற்கு, மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் பயன்படும்.

9. பகுதி வகைக்கெழு காணல்
(Partial Differentiation)

9-1 ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் சார்பு : 'சார்புகள்' என்ற பகுதியில்,ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின்சார்புகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கண்டோம். மேலும் ஓர் எடுத்துக் காட்டு : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் (hypotenuse) அதன் இரு பக்கங்களின் சார்பு. கர்ணம் u, மற்ற இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் x, y எனில், பிதகோரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

u என்பது, x, y ஆகியவற்றின் சார்பு என்பதை, $u = f(x, y)$ அல்லது, $u = u(x, y)$ எனக் குறிக்கலாம். பொதுவாக u என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற n மாறிகளின் சார்பெனில், $u = f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n)$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

9-2 பகுதி வகைக்கெழு : $u = f(x, y)$ என்பது x, y என்ற மாறிகளின் ஒரு தொடர் சார்பாக இருக்கட்டும். yஐ மாறிலியாகவும் x ஐ மாறியாகவும் கொண்டு,xஐக் குறித்து u-வை வகையிடக் கிடைப்பதை 'xஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைக்கெழு' என்போம். அதை,

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ u_x,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y),\ u_x(x, y)$$

என்ற குறியீடுகளால் குறிக்கலாம். இவற்றில் u-வுக்குப் பதில் f ஐயும் பயன்படுத்தலாம். இதேபோல் yஐ மட்டும் மாறியாகக் கொண்டு y-க் குறித்து வகையிடக் கிடைப்பது, y ஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைக்கெழு.

இப்பகுதி வகைக் கெழுக்களைப் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம் :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underset{\triangle y \to 0}{Lt} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x, y)}{\triangle y}.$$

9-3 தொடர் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Successive Partial derivatives) : $u = f(x, y)$ என்பது x, y-ன் தொடர்புள்ள ஒரு சார்பு எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ என்பவையும் பொதுவாக x, y-ன் தொடர்புடைச் சார்புகளாக இருக்கும். x, y இரண்டில் எதைக் குறித்தும் இவற்றை மீண்டும் பகுதிவகையிடல் இயலும்.

xஐக் குறித்து u-வை n முறை வகையிடக் கிடைப்பது $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $u_{xx\ldots x}$ (n முறை) எனக் குறிக்கப்படும்.

கவனிக்க : xஐக் குறித்து uஐப் பகுதிவகையிடக் கிடைப்பதை u_x எனக் குறிப்பிடுகிறோம். yஐக் குறித்து u_x ஐப் பகுதி வகையிடக் கிடைப்பதை, இதே குறியீட்டுமுறைப்படி, u_{xy} என்றே குறிப்பிட வேண்டும்; u_{yx} என்றல்ல. எனவே, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \equiv u_{xy}$.

இனி, சாதாரணச் சார்புகளுக்கு, பகுதிவகையீட்டு வரிசை (order) முக்கியமானதன்று;

அ-து, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$;

அ-து, $u_{xy} = u_{yx}$.

இவ் வகைக்கெழுக்கள் தொடர்ச்சியுடையனவாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பது இதற்கான நிபந்தனை. அதை நாம் இந் நூலில் நிறுவப் போவதில்லை.

9-4 சார்பின் சார்பு விதி (Function of a Function rule)

u என்பது v-ன் தொடர் சார்பாகவும், v என்பது x, y ஆகியவற்றின் தொடர் சார்பாகவும் இருக்கட்டும். $\triangle x, \triangle y$ என்பவை முறையே x, y-ல் சிறிய கூடுதல்கள் எனில், அவற்றிற்கேற்ப v, u இல் $\triangle v, \triangle u$ கூடுதலாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$\triangle x \to 0$ என்ற எல்லையில்

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

இதேபோல்,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

கவனிக்க : u என்பது v என்ற ஒரே மாறியின் சார்பு ஆதலின், v ஐக் குறித்த u-வின் வகைக்கெழு ஒரு பகுதி வகைக்கெழு அன்று; சாதாரண வகைக்கெழு. எனவே, அதை $\frac{du}{dv}$ எனக் குறிக்கிறோம்.

மாதிரி 1 :

$u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில்

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு.

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1} v, \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{1+v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \dots (1)$$

இதை மீண்டும் xஐக் குறித்துப் பகுதி வகையீடு செய்ய,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \dots (2)$$

இதேபோல்,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \dots (4)$$

(1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots (i)$$

(2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (ii)$$

குறிப்பு : விளைவு (ii) லாப்லாஸின் இருபரிமாணச் சமன்பாடு (Laplace's Equation in two dimensions) எனப்படும்.

மாதிரி 2 :

$$u = \log(x^2+y^2+z^2) \text{ எனில்}$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = y\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = z\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \text{ எனக் காட்டு.}$$

இவற்றின் மதிப்பையும் காண்க.

$$u = \log(x^2+y^2+z^2).$$

எனவே, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$

இதை yஐக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\therefore\ x\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \dots (1)$$

கொடுக்கப்பட்ட கோவையில் $x \to y \to z \to x$ என இட, அதில் மாற்றம் ஏதும் ஏற்படவில்லை. [அப்படிப்பட்ட கோவையை வட்டச் சமச்சீர் (Cyclic Symmetry) உடையது என்போம்]. எனவே, அக் கோவையிலிருந்து கிடைத்த ச-டு

(1)-ல் இம் மாற்றத்தைச் செய்யக் கிடைப்பதும் உண்மை. ச-து (1)-ல் இருமுறை இம் மாற்றங்கள் செய்ய,

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \dots (2)$$

$$z\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \dots (3)$$

ச-டு (1) — (3)-லிருந்து விடை உடனே கிடைக்கிறது.

மாதிரி 3 :

$u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ எனில்

(i) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \frac{3}{x+y+z}$,

(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}$

எனக் காட்டு.

$$u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

(i) $\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3zx}{x^3+y^3+z^3-3xyz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

கூட்ட,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)}$$

$$= \frac{3}{x+y+z}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \frac{3}{x+y+z}$$

(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) u=\frac{3}{x+y+z}=v$ என வை.

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) u$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) v$$

இனி, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)=-\frac{3}{(x+y+z)^2}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{3}{(x+y+z)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) v=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{9}{(x+y+z)^2};$$

அ-து, $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=-\frac{9}{(x+y+z)^2}$

மாதிரி 4:

$x^x y^y z^z = c$ எனில், $y = z = x$ ஆக இருக்கையில்,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-(x\log ex)^{-1}$ எனக் காட்டு.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ என்ற உறுப்பிலிருந்து, x, y இரண்டும் சாராத மாறிகளாகவும் (Independent variables), z அவற்றைச் சார்ந்த மாறியாகவும் கருதப்படவேண்டும் எனத் தெரிகிறது.

$x^x y^y z^z = c.$

எனவே, $x\log x + y\log y + z\log z = \log c.$

y ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையீடு செய்ய,

$$y \cdot \frac{1}{y} + \log y + z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \log z = 0$$

அ-து, $(1 + \log z) \dfrac{\partial z}{\partial y} = -(1 + \log y)$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + \log y}{1 + \log z}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -(1 + \log y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 + \log z} \right)$$

$$= (1 + \log y) \cdot \frac{1}{(1 + \log z)^2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= -\frac{(1 + \log y)^2}{z (1 + \log z)^3}$$

$y = z = x$ என இட,

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \right|_{y = z = x} = -\frac{(1 + \log x)^2}{x (1 + \log x)^3}$$

$$= -\frac{1}{x (1 + \log x)}$$

$$= -\frac{1}{x (\log e + \log x)}$$

$$= -\frac{1}{x \log (ex)} = -(x \log ex)^{-1}.$$

மாதிரி 5

ஒரு புள்ளியின் தெக்காட்டியின் கூறுகள் (Cartesian Co-ordinates) (x, y) ஆகவும், தூரக் கோணக் கூறுகள் (Polar Co-ordinates) (r, θ) ஆகவும் இருப்பின்,

$$\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

தெக்காட்டியின் கூறுகளுக்கும் தூரக்கோணக் கூறுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு முன்பே விளக்கப்பட்டது [பிரிவு 8-3·3].

x, y இரண்டையும், r, θ என்ற இரு சாரா மாறிகளின் சார்புகளாகக் கொண்டால்,

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$;

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \frac{x}{r},\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta = -y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta = \frac{y}{r},\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta = x$$

இனி, r, θ இரண்டையும், x, y என்ற சாராமாறிகளின் சார்புகளாகக் கொண்டால்,

$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$;

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$
$$= \sin\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

கவனிக்க :

இங்கு $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}$. எனவே பொதுவாக $\frac{\partial x}{\partial r} \neq 1 \Big/ \frac{\partial r}{\partial x}$. ஆயின், $\frac{dx}{dr} = 1 \Big/ \frac{dr}{dx}$. இது, பகுதி வகைக்கெழுவுக்கும் சாதாரண வகைக்கெழுவுக்கும் உள்ள ஒரு வேறுபாடு.

பயிற்சி 9—1

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ காண்க. [1 — 5].

1. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $u = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

3. $n = \sin^{-1}(xy)$

4. $u = x^2 \log(x^2 + y^2)$

5. $u = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $u = \log(\tan x + \tan y + \tan z)$ எனில்

$$\sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 2$$

எனக் காட்டு.

7. $u = (y - z)(z - x)(x - y)$ எனில்

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ எனக் காட்டு.

8. பின்வரும் கோவைகளில் ஒவ்வொன்றையும் u எனக் கொண்டு $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ எனக் காட்டு.

(i) $\log \frac{x^2 + y^2}{xy}$ (ii) $e^x \cos y + e^y \cos x$

(iii) $\cos^{-1} \frac{x}{y}$ (iv) $x \tan y$

(v) $\sqrt{x^2 + y^2}$

9. $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ எனக் கொண்டு

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y}$$

என்பதைச் சரிபார்.

10. $u = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ எனக் காட்டு.

11. $u = x \tan^{-1} \frac{y}{x} + x e^{\frac{y}{x}}$ எனில் $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு.

12. $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ எனில்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$ எனக் காட்டு.

13. $u = \frac{xz}{x^2 + y^2}$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ எனக்காட்டு.

14. $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு.

15. $x = e^{-t} \cos\theta, \quad y = e^{-t} \sin \theta$ எனில்

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$ எனக் காட்டு.

16. ஒரு புள்ளியின் தெக்காட்டிக் கூறுகள் (x, y), தூரக் கோணக் கூறுகள் (r, θ) எனில், பின்வருமாறு காட்டு :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \theta} = -\sin \theta, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \theta} = \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -y,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \theta}{r}$$

17. $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$ எனில்

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 (\log r)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 (\log r)}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \cos 2\theta$$ எனக் காட்டு.

18. $r^2 = x^2 + y^2$ எனில், $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$

$$= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \right]$$ எனக் காட்டு.

19. $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; u = f(r)$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$= \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$ எனக் காட்டு.

20. $u = f(x^2 + y^2)$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial y} = y\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

எனக் காட்டு.

21. $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ எனில்

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{2}{r}$ எனக் காட்டு.

22. $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ எனில்

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial z^2} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$ எனக் காட்டு.

23. $u = \log r,\ r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$

எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ எனக் காட்டு.

24. முன் வினுவில் $u = \frac{1}{r}$ எனக்கொண்டு அதே விடையை நிறுவு.

25. $u = (y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4$ எனில்

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ எனக் காட்டு.

26. $u = \frac{1}{\ },\ r^2 = x^2 + y^2$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3}$

எனக் காட்டு.

27. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பின்வருவன நிறைவுபடுத்துகின்றனவெனக் காட்டு.

(i) $u = \left(Ar^n + \frac{B}{r^n}\right)\cos n\theta$

(ii) $u = e^{a\theta}\cos(a\log r)$

28. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4y}}$ எனில் $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$ எனக் காட்டு.

29. $u = e_x{}^y$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$ எனக் காட்டு.

30. $u = f(x + iy) + \phi(x - iy)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு.

இதைப் பயன்படுத்தியோ, தனியாகவோ, பின்வரும் கோவைகளுக்கு $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு :

(i) $u = \frac{x}{x^2 + x^2}$, (ii) $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$,
(iii) $u = e^x \sin y$.

31. $u = f(x + at) + g(x - at)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ எனக் காட்டு.

[இச் சமன்பாடு, ஒருதிசை வெப்பக் கடத்தலைக் குறிக்கிறது என மேல் வகுப்பில் காணலாம்]. இதைப் பயன்படுத்தியோ, தனியாகவோ, பின்வரும் கோவைகளுக்கும் இது உண்மை எனக் காட்டு :

(i) $u = \sqrt{y + ax} - 2\log(y - ax)$,
(ii) $u = \cos x \sin y$, (iii) $u = e^y \sinh x$.

32. $u = \frac{1}{r}[f(ct + r) + \phi(ct - r)]$ எனில்

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$ எனக் காட்டு.

33. $u = 3(ax+by+cz)^2 - (x^2+y^2+z^2)$, $a^2+b^2+c^2 = 1$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ எனக் காட்டு.

34. $u = e^{xyz}$ எனில்

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3u (\log u)^2$$

எனக் காட்டு.

35. $u^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 1$ எனில்

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$

(ii) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} + u = 0$

எனக் காட்டு.

விடைகள் 9—1

1. $-\frac{1}{2 (x + y)^{3/2}}, -\frac{1}{2 (x + y)^{3/2}}$

2. $\frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

3. $\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$

4. $2x \left\{ \log (x^2 + y^2) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right\}, \frac{2x^2 y}{xx + y^2}$

5. $\frac{y \cos xy}{\sqrt{x^2 + xy}} - \frac{x \sin xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{x \cos xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$- \frac{y \sin xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

9·5 சமபடிச் சார்புகள் (Homogenous Functions)

$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x_n^{-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$ என்ற கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் x, y ஆகியவற்றின் படிகளின் கூடுதல் n. ஆக, x, y ல் ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் n. இதனால், $f(x, y)$ ஐ, x, y ல் n-படித்தான ஒரு சமபடிச் சார்பு (*a* homogeneous function of degree n in x and y) என்போம்.

இச் சார்பை

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n$$

$$= x^n \left[a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{y}{x}\right)^n \right]$$

$$= x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \text{ என எழுதலாம்.}$$

$f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பதை $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இவ்வாறு, $f(x, y)$ என்பது x, y ல் n-படித்தான ஒரு சமபடிச் சார்பு எனில், அதை

$$f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

என எழுதலாம்.

பொதுவாக, $x_1, x_2, \dots, x_m$ என்ற m மாறிகளின் ஒரு சார்பு, n-படித்தான சமபடிச் சார்பு எனில் அதை

$$x_i^n \phi\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

என எழுதலாம். இவற்றின் மறுதலையும் (Converse) சரியே.

எடுத்துக்காட்டு 1

$$f(x, y) = 2x^4 + 3x^3y + 5\frac{y^5}{x} \text{ எனில்,}$$

$$f(x, y) = x^4 \left[2 + 3\frac{y}{x} + 5\left(\frac{y}{x}\right)^5\right]$$

$$= x^4 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^4 \phi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ என எழுதலாம்.}$$

எனவே f என்பது x, y ல் - சமபடித்தான ஒரு கோவை; இதன் படி 4.

2. $f(x, y, z) = \dfrac{ax^5 + by^5 + cz^5}{lx^2 + my^2 + nz^2}$ எனில், இதை

$$f(x, y, z) = \frac{x^5 \left[a + b\left(\frac{y}{x}\right)^5 + c\left(\frac{z}{x}\right)^5\right]}{x^2 \left[l + m\left(\frac{y}{x}\right)^2 + n\left(\frac{z}{x}\right)^2\right]}$$

$$= x^3 f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$= x^3 \phi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

என எழுதலாம். எனவே, f என்பது x, y, z ல் ஒரு சமபடித் தான சார்பு ; படி 3.

9·6 ஆய்லரின் தேற்றம் (Euler's Theorem)

சமபடித்தான சார்புகளைக் குறித்த *ஆய்லர் என்பாரின் தேற்றம் பின்வருமாறு :

$f(x, y)$ என்பது, x, y ல் n-படித்தான ஒரு சமபடிச் சார்பு எனில்,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

---

*லீனோர்ட் ஆய்லர் (Leonhard Euler) —[1707 — 1783] ஸ்விட்ஸர்லாந்தின் மாபெரும் விஞ்ஞானி. " மனிதனுக்கு மூச்சு விடுவதும், கழுகுக்கு வானில் மிதப்பதும் எவ்வளவு இயல்பானவையோ அதைப்போல கணக்கிடுவதும் இவருக்கு இயல்பாக இருந்தது." இவர் கண்டறிந்து எழுதியவை எளிதில் 100 நூல்களை நிரப்பிவிடுமாம். எங்கும் எந்தச் சூழலிலும் இவர் இயங்கக் கூடியவர். தம் பதின்மூன்று குழந்தைகளில் (!) ஒன்று தம் மடியில் அமர்ந்திருக்க, மற்றவை தம் கால்களைச் சுற்றி விளையாட அந் நிலையிலேயே தம் ஆராய்ச்சி விளக்கங்களை எழுதி முடிப்பார் ... சாப்பிட மனைவி அழைத்துவிட்டு மறுமுறை அழைப்பதற்கு முன் கிடைக்கக் கூடிய அரைமணிக்கும் குறுகிய நேரத்தில் ஒரு கணித ஆராய்ச்சித் தாளையே எழுதி விடுவாராம்.

நிறுவல்

$f(x, y)$ என்பது, x, y ல் n-படித்தான சமபடிச் சார்பு என்பதால்,

$$f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ என எழுதலாம்.}$$

எனவே, $\frac{y}{x}$ ஐக் குறித்த ϕ-யின் சாதாரண வகைக்கெழுவை $\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$ எனக் குறித்தால்,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n\, x^{n-1} \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \phi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = n\, x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1}\, y\, \phi'\left(\frac{y}{x}\right); \qquad \dots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^n \phi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x},$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1}\, y\, \phi'\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \dots (2)$$

$\therefore$ (1), (2)-லிருந்து

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n\, x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right) = n\, f(x, y).$$

பொதுவாக, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ என்பது $x_1, x_2, \dots, x_m$-ல் n-படித்தான ஒரு சமபடிக்கோவை எனில்,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots\dots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = n\, f.$$

நீட்சி : $f(x, y)$ என்பது, x, y-ல் n-படித்தான ஒரு சமபடிச் சார்பு எனில்,

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1) f$$

எனக் காட்டு.

நிறுவல்

ஆய்லரின் தேற்றப்படி,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

அ—து, $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f=nf.$

எனவே, $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)(nf).$$

(nf) ஒரு n-படித்தான சமபடிச்சார்பு என்பதால், ஆய்லர் தேற்றத்தின்படி, வலப்பக்கம்

$$=n(nf)=n^2 f. \qquad \dots (3)$$

இனி, இடப்பக்கம் $=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=x\left(\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+y\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$; மேலும் $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ எனில், இது

$$=nf+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \qquad \dots (4)$$

(3), (4)-ஐச் சமப்படுத்த,

$$nf+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n^2 f$$

எனவே, $$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$= n^2 f - nf = n(n-1) f.$$

மாதிரி 6

$f(x, y, z) = 2x^3 + 4x^2 y - 5xy^2 + z^3$ எனக் கொண்டு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

$$f(x, y, z) = x^3 \left[2 + 4\frac{y}{x} + 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3\right]$$
$$= x^3 f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

என எழுத முடிகிறது. எனவே, $f(x, y, z)$ என்பது, x, y, z-ல் ஒரு சமபடிக்கோவை ; படி 3. ஆய்லரின் தேற்றப்படி,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 3f$$

எனக் கிடைக்கவேண்டும். இனி,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 8xy - 5y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - 10xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$$

$$\therefore \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = x(6x^2 + 8xy - 5y^2)$$
$$+ y(4x^2 - 10xy) + z(3z^2)$$
$$= 3(2x^3 + 4^2 y - 5xy^2 + z^3)$$
$$= 3f.$$

எனவே, ஆய்லரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டுவிட்டது.

மாதிரி 7

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$$ எனில்

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5}{2} \tan u$$

எனக் காட்டு.

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

$\therefore \quad \sin u = \dfrac{x^3 + 2^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = v$ என்க.

இனி, $v(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{x^3 \left(1 + \dfrac{y^3}{x^3}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)}$

$$= x^{5/2} v\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

எனவே, v என்பது x, y-ல் ஒரு சமபடிச் சார்பு ; படி $\frac{5}{2}$.

ஆய்லரின் தேற்றப்படி,

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{5}{2} v. \qquad \dots (1)$$

இனி, $v = \sin u$

$$\therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \cos u \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \cos u \frac{\partial u}{\partial y}.$$

(1)-ல் பிரதியிட்டு இரு புறமும் $\cos u$ ஆல் வகுக்க,

$$x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5}{2} \frac{v}{\cos u} = \frac{5}{2} \tan u.$$

மாதிரி 8 :

$u = \log \tan \dfrac{y}{x} + \cos^{-1} \dfrac{x}{y}$ எனில்

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x} \dfrac{\partial u}{\partial y}$ எனக் காட்டு.

$$u = \log \tan \frac{y}{x} + \cos^{-1} \frac{x}{y}$$

இதை, $u(x, y) = x^0 \left[\log \tan \frac{y/x}{1} + \cos^{-1} \frac{1}{y/x}\right]$

$$= x^0 \cdot u\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

எனக் கருதலாம். எனவே, u என்பது. x, y-ல் ஒரு சமபடிச் சார்பு ; படி 0. ஆய்லரின் தேற்றப்படி,

$$\therefore \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

அ—து, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y}$.

பயிற்சி 9—2

பின்வரும் சார்புகளுக்கு [1 — 5] ஆய்லர் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

1. $2x^4 + y^4 + 5x^2 y^2 - xy^3$
2. $(x + 4y)(x^2 - y^2)$
3. $\frac{x^4 + y^4}{x - y}$ 4. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^3 + y^3}$ 5. $e^{y/x} + 5$
6. $u = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x - y}}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5}{2} u$ எனக் காட்டு.
7. $u = \frac{x^{5/4} + y^{5/4}}{x + y}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} u$ எனக் காட்டு.
8. $u^2(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ எனில் $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + u = 0$ எனக் காட்டு.
9. $u = \sin \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ எனில்

$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, $\cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ எனக் காட்டு.

10. $u = \sin^{-1} \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ எனில் $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \tan u$ எனக் காட்டு.

11. $u = \sin^{-1} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ எனில் $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u$ எனக் காட்டு.

12. $u = \tan^{-1} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ எனில், $x \dfrac{\partial u}{\partial y} + y \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \sin 2u$ எனக் காட்டு.

13. $u = \tan^{-1} \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{3/2}$ எனில், $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x} \dfrac{\partial u}{\partial x}$ எனக் காட்டு.

14. $u = e^{x^3+y^3}$ எனில், $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ எனக் காட்டு.

15. $u = \log \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ எனில், $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$ எனக் காட்டு.

16. $u = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ எனில், $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டு.

17. $u = x\, \phi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ எனில்,

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ எனக் காட்டு.

9·7 முழு வகையீடு (Total Differential)

$u = f(x, y)$ என்பது x, y என்ற மாறிகளின் ஒரு தொடர் சார்பாக இருக்கட்டும். Δx, Δy என்பவை x, y-ல் எவையோ இரு மிகச்சிறிய கூடுதல்களாகவும், அவற்றின் காரணமாக u-வில் நேர்ந்த கூடுதல் Δu ஆகவும் இருக்கட்டும். அப்பொழுது u-வில் சேர்ந்த முழுக்கூடுதல்

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y).$$

இது, $\triangle x$, $\triangle y$ இரண்டிலுைம் நேர்ந்தது. $\triangle x \to 0$, $\triangle y \to 0$ என்ற எல்லையில் $\triangle u$ அடையும் மதிப்பை u-வின் முழு வகையீடு (Total Differential of u) என்கிறோம் ; அதை du என்று குறிக்கிறோம்.

இனி, $\triangle u$-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\triangle u = f(x + \triangle x, \ y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y) + f(x, y + \triangle y) - f(x, y)$$

$$= \frac{f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y)}{\triangle x} \cdot \triangle x + \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \triangle y.$$

இதை, $\triangle u = A \triangle x + B \triangle y$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$A = \frac{f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y)}{\triangle x}.$$

$\triangle x \to 0$ எனில், $A \to \frac{\partial f(x, y + \triangle y)}{\partial x}$; உடன் $\triangle y \to 0$ எனில், $A \to \frac{\partial f}{\partial x}$. இதேபோல், $\triangle x \to 0$, $\triangle y \to 0$ எனில், $B \to \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\therefore \quad du = \frac{\partial f}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial f}{\partial y} \triangle y.$$

x, y ஆகியவற்றின் நுண்மதிப்பை $dx = \triangle x$, $dy = \triangle$, என் வரையறுக்க,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

9·8 கிளைத்தேற்றங்கள் :

9·8·1 முழுவகைக் கெழு (Total Differential coefficient).

(i) $u = u(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ எனில், t-ஐக் குறித்த u-வின் முழுவகைக் கெழு :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(ii) $u = u(x, t)$, $x = x(t)$ எனில், ($y = t$ என இட)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

கவனிக்க : $\dfrac{du}{dt} \neq \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

(iii) $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ எனில்,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

9·8·2. பல சார்புகளின் சார்பின் பகுதி வகைக்கெழு (Partial Derivative of a function of several functions)

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$: $x_1 = x_1(t_1\ t_2, \dots, t_n)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $x_m = x_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ எனில்,

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

... ...

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_n}.$$

9·8·3 சாராத மாறிகளை மாற்றுதல் (Change of independent variables)

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் இடப்பக்கங்களில் $t_1, t_2, \dots, t_n$ என்ற மாறிகளைக் குறித்தும், வலப்பக்கங்களில் $x_1, x_2, \dots, x_m$ என்ற மாறிகளைக் குறித்தும் u-வின் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன. ஆகவே, $t_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$-ஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை, $x_j\ (j = 1, 2, \dots, m)$-ஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைத்கெழுக்களின் மூலமாக இச்சமன்பாடுகள் தருவதாகக் கொண்டு, இவற்றைத்தீர்த்து, $x_j\ (j = 1, 2, \dots, m)$ ஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை, $t_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$ ஐக் குறித்த u-வின் பகுதி வகைக்கெழு மூலம் எழுதலாம் எனத் தெரிகிறது.

இவை அனைத்தும் மாதிரிகளால் விளக்கப்படும்.

மாதிரி 9:

$u = \sin(ax^3 + by^2 + cz)$ எனில் u-வின் முழு வகையீட்டைக் காண்.

$$u = u(x, y, z).$$

$\therefore$ u-வின் முழு நுண்மதிப்பு

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$= \cos(ax^3 + by^2 + cz) \cdot 3ax^2\, dx$$
$$+ \cos(ax^3 + by^2 + cz) \cdot 2by\, dy$$
$$+ \cos(ax^3 + by^3 + cz) \cdot c\, dz$$

$$= (3ax^2\, dx + 2by\, dy + cz\, dz) \cos(ax^3 + by^3 + cz).$$

மாதிரி 10:

$u = x^2 y^3 z^2$, $x = e^{-t}$, $y = \sin t$, $z = -t$ எனில் t-ஐப் பொருத்த u-வின் முழு வகைக்கெழுவைக் காண்.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= 2xy^3 z^2 (-e^{-t}) + 3x^2 y^2 z^2 \cos t + 2x^2 y^3 z (-1)$$

$$= -2xy^3 z^2 e^{-t} + 3x^2 y^2 zb^2 \cos t - 2x^2 y^3 z.$$

மாதிரி 11:

$u = \sin(3x + 2y)$, $y = \tan x$ எனில், $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{du}{dx}$ ஆகியவற்றைக் காண்.

$$u = \sin(3x + 2y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 2y).$$

இனி, $u = \sin(3x + 2y) = u(x, y)$, $y = \tan x = y(x)$.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$= 3\cos(3x + 2y) + 2\cos(3x + 2y) \cdot \sec^2 x.$$

$$= (3 + 2\sec^2 x)\cos(3x + 2y).$$

மாதிரி 12:

$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2.$$

ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வகையீடு எடுக்க,

$$2(x-a)\,dx+2(y-b)\,dy=0\,;$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}.$$

மாதிரி 13

$u=f(ax-by,\ by-cz,\ cz-ax)$ எனில்

$$bc\frac{\partial u}{\partial x}+ca\frac{\partial u}{\partial y}+ab\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

எனக் காட்டு.

தரப்பட்ட சார்பை,

$u=f(Z,X,Y)$, $X=by-cz$, $Y=cz-ax$, $Z=ax-by$ என எழுதலாம்.

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$=a\frac{\partial u}{\partial Z}-a\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$=-b\frac{\partial u}{\partial Z}+b\frac{\partial u}{\partial X},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$=-c\frac{\partial u}{\partial X}+c\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

இவற்றை முறையே bc, ca, ab ஆல் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$bc\frac{\partial u}{\partial x}+ca\frac{\partial u}{\partial y}+ab\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

மாதிரி 14:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ என்ற பகுதிவகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் சார்பிலா மாறிகளை (x, y) என்ற தெக்காட்டியின் கூறுகளிலிருந்து, (r, θ) என்ற தூரக்கோணக் கூறுகளுக்கு மாற்றினால், $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும் எனக் காட்டு.

தெக்காட்டியின் கூறுகளின் வாயிலாக தூரக்கோணக் கூறுகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன :

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \qquad \ldots(1)$$

$u = u\,(r, \theta)$, r, θ இரண்டும் x, y-ன் சார்புகள் எனக் கொள்ள,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

சமன்பாடுகள் (1) லிருந்து,

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \cos\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}. \quad \text{(மாதிரி 5)}$$

ச—டு (2) லிருந்து, $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$;

இதேபோல், $$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

இவற்றில் u-வுக்குப் பதில் v என இட,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

எனவே, தெக்காட்டியின் கூறுகளில் தரப்பட்ட

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;(3), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \ldots(4)$$

என்ற சமன்பாடுகள்,

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\quad\ldots(5),$$

$$\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\ldots(6)$$

என மாறுகின்றன.

ச—டு (5)-ஐ $\cos\theta$ விஞலும், (6)-ஐ $\cos\theta$ விஞலும் பெருக்கிக் கூட்டக் கிடைப்பது :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\quad\ldots(7).$$

ச—டு (5)-ஐ $\sin\theta$ விஞலும், (6)-ஐ $\cos\theta$ விஞலும் பெருக்கிக் கழிக்கக் கிடைப்பது :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}\quad\ldots(8).$$

இவ்வாறு, (3), (4) என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதி, தூரக் கோணக் கூறுகளில், (7), (8) என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியாக மாறுகிறது.

மாதிரி 15

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ என்பது லாப்லாஸின் இரு பரிமாணச் சமன்பாடு (Laplace's equation in two dimensions) எனப்படும். தெக்காட்டியின் கூறுகளிலுள்ள இதைத் தூரக்கோணக் கூறுகளுக்கு மாற்று.

முன்மாதிரியில்

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

எனக் காட்டினேம். இவற்றிலிருந்து பின்வரும் வகையீட்டுச் செயலிகள் (Differential Operators) கிடைக்கின்றன :

$$\frac{\partial}{\partial x}\equiv\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad\frac{\partial}{\partial y}\equiv\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

இதேபோல் பின்வருமாறும் காட்டலாம் :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

இரண்டையும் கூட்ட,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

எனவே, தூரக்கோணக் கூறுகளில் லாப்லாஸின் இருபரிமாணச் சமன்பாடு :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 0.$$

பயிற்சி 9—3

முழு நுண்மதிப்பைக் காண்க [1 — 5].

1. $u = x^4 - 4x^3 y$
2. $v = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $w = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. $\theta = \arc \tan \dfrac{x}{y}$

5. $\psi = \arc \sin \dfrac{x}{r}$

t ஐப் பொறுத்த முழுவகைக் கெழுவைக் காண்க [6 — 9]

6. $u = xy + yz + zx,\ x = \dfrac{1}{t},\ y = e^t,\ z = e^{-t}$

7. $u = x^2 y^3,\ x = \log t,\ y = e^t$

8. $u = \log (x + y + z),\ x = e^{-t},\ y = \sin t,\ z = \cos t$

9. $u = \sin (xy)^2,\ x = \log t,\ y = e^t.$

$\dfrac{du}{dx}$ ஐக் காண்க [10 — 12]

10. $u = x^2 + y^2 + a^2,\ x^3 + y^3 = a^3$

11. $u = \cos (x^2 + y^2),\ a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2$

12. $u = \tan^{-1} \dfrac{x}{y},\ x^2 + y^2 = c^2$

$\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க [13 — 15]

13. $x^3 + y^3 = 3axy$

14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

15. $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$

16. $u = f(x - y,\ y - z,\ z - x)$ எனில் $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ எனக் காட்டு.

17. $u = f(x^2 - y^2,\ y^2 - z^2,\ z^2 - x^2)$ எனில்

$$yz \frac{\partial u}{\partial x} + zx \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ எனக் காட்டு.

18. $V = f(x, y)$, $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$ எனில்

$$\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} = x\frac{\partial V}{\partial x} - y\frac{\partial V}{\partial y}$$ எனக் காட்டு.

19. $V = f(x, y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = 2uv$ எனில்

$$u\frac{\partial V}{\partial u} - v\frac{\partial V}{\partial v} = 2\sqrt{x^2 + y^2}\frac{\partial V}{\partial x}$$ எனக் காட்டு.

20. $V = f(x, y)$, $x = u - v$, $y = uv$ எனில்

(i) $$(u + v)\frac{\partial V}{\partial x} = u\frac{\partial V}{\partial u} - v\frac{\partial V}{\partial v},$$

(ii) $$(u + v)\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}$$

எனக் காட்டு.

21. $V = f(x, y)$, $x = u + v$, $y = uv$ எனில்

$$u\frac{\partial V}{\partial u} + v\frac{\partial V}{\partial v} = x\frac{\partial V}{\partial x} + 2y\frac{\partial V}{\partial y}$$ எனக் காட்டு.

22. $V = f(x, y)$, $x = e^u \sin v$, $y = e^u \cos v$ எனில்

(i) $$\frac{\partial V}{\partial u} = x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y},$$

(ii) $$\frac{\partial V}{\partial v} = -y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y},$$

(iii) $$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-u}\left(\sin v\frac{\partial V}{\partial u} + \cos v\frac{\partial V}{\partial v}\right)$$

எனக் காட்டு.

23. $V = f(x, y)$, $x = cuv$, $y = c\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}$ எனில், $$\frac{1}{y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}\right) \Big/ [c(u^2 + v^2)]$$ எனக் காட்டு.

24. $V = f(x, y)$, $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$, $y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$ எனில்,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$$

எனக் காட்டு.

25. $V = f(x, y)$, $u = ax + by$, $v = ax - by$ எனில்,

(i) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (a^2 + b^2)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right),$$

(ii) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = ab\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)$$ எனக் காட்டு.

26. $V = f(x, y)$, $u = ax^2 + by^2$, $v = ax^2 - by^2$ எனில்,

(i) $$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = 2\left(u\frac{\partial V}{\partial u} + v\frac{\partial V}{\partial v}\right),$$

(ii) $$x\frac{\partial V}{\partial x} - y\frac{\partial V}{\partial y} = 2\left(v\frac{\partial V}{\partial v} + u\frac{\partial V}{\partial v}\right),$$

(iii) $$x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$= 4\left(v^2\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v} + u^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)$$

$$+ 2\left(u\frac{\partial V}{\partial u} + v\frac{\partial V}{\partial v}\right)$$ எனக் காட்டு.

27. $V = f(x, y)$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ எனில்,

(i) $$u\frac{\partial V}{\partial u} - y\frac{\partial V}{\partial y} = 2(u^2 + v^2)\frac{\partial V}{\partial x},$$

(ii) $$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right],$$

(iii) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right]$$

எனக் காட்டு.

28. $V = f(x, y)$, $x = e^u + e^v$, $y = e^u - e^v$ எனில்,

(i) $$\frac{\partial V}{\partial u} = e^u \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

(ii) $$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y},$$

(iii) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left(e^{-2u}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + e^{-2v}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)$$

எனக் காட்டு.

29. $V = f(x, y)$, $x = \cos hu \cos hv$, $y = \sin hu \sin hv$ எனில், $$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = (\sin h^2 u - \sin h^2 u)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$ எனக் காட்டு.

30. $u = x + iy$, $v = x - iy$ எனில், $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0$ என்ற லாப்லாஸின் சமன்பாடு, $\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v} = 0$ என மாறும் என நிறுவு.

31. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $u = f(x, y)$ எனில்,
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$
என நிறுவு.

32. தெக்காட்டியின் கூறுகளிலுள்ள $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ என்ற லாப்லாஸின் இருபரிமாணச் சமன்பாடு, தூரக்கோணக் கூறுகளில் $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$ என மாறும் என்று நிறுவு.

விடைகள் 9-3

1. $du = 4(x^3 - 3x^2 y)\,dx - 4x^3\,dy$

2. $dv = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3. $dw = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. $d\theta = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$

5. $d\Psi = \dfrac{r\,dy - x\,dr}{r\sqrt{r^2 - x^2}}$

6. $-\dfrac{(y+z)}{t^2} + (z+x)\,e^t - (x+y)\,e^{-t}$

7. $\dfrac{2xy^3}{t} + 3x^2\,y^2\,e^t$

8. $\dfrac{-e^{-t} + \cos t - \sin t}{x+y+z}$

9. $y^2\left(\dfrac{1}{t} + 2x\right)\cos(xy)^2$

10. $2x\,(y - x)/y$

11. $\dfrac{2\,(a^2 - b^2)\,x}{b^2}\sin(x^2 + y^2)$

12. $\dfrac{1}{y}$

13. $\dfrac{x^2 - ay}{ax - y^2}$

14. $-\dfrac{b^2\,x}{a^2\,y}$

15. $-\dfrac{ax + hy}{hx + by}$

சுருக்கக் குறியீடுகள்

அ-து	அதாவது
எ-டு	எடுத்துக்காட்டு
ச-டு	சமன்பாடு
தோ-க	தோராயமாக
$\therefore$	எனவே
$a \neq b$	b-க்கு a சமமன்று
$a \sim b$	b-க்கு a தோராயமாகச் சமம்
$\lvert z \rvert$	z-ன் எண் மதிப்பு
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$
${}^nC_r$	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
$A\hat{B}C$	கோணம் ABC
$AB \perp CD$	CD க்கு AB செங்குத்து
$AB \parallel CD$	CD க்கு AB இணை
$\triangle$	முக்கோணம், முக்கோணத்தின் பரப்பு
∞	முடிவிலி
$x \to a$	a யை x நெருங்குகிறது
$\underset{x \to a}{Lt} f(x)$, $\underset{x \to a}{\text{எல்}}$	$f(x)$ a யை x நெருங்க, $f(x)$ ன் எல்லை.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. *Benny, L. B.*—Mathematics for Students of Engineering and Applied Science
2. *Barnard, S and Child, J. M.*—Higher Algebra
3. *Caunt* :—Elementary Calculus
4. *Kreyszig, E.*—Advanced Engineering Mathematics
5. *Love and Rainville*—Differential and Integral Calculus.

இவை தவிர, புழக்கத்திலுள்ள வேறு பல நூல்களும் இந் நூலை எழுதுவதில் ஆசிரியருக்கு உதவின. அவற்றிற்கு ஆசிரியரின் நன்றி.

கலைச்சொற்கள்

A

Abscissa	— கிடைத்தூரம், x - கூறு
Absolute	
convergence	— அறவொருங்கல்
value	— மிகை மதிப்பு
Acceleration	— வேகவளர்ச்சிவீதம், முடுக்கம்
angular	— கோணமுடுக்கம், சுழல்வேக வளர்ச்சி வீதம்
Addition	— கூட்டல்
Algebra	— இயற்கணிதம்
Angle	— கோணம்
acute	— குறுங்கோணம்
vectorial	— திசையிக் கோணம்
Angular	
acceleration	— சுழல்வேக வளர்ச்சி வீதம், கோணமுடுக்கம்
velocity	— சுழல்வேகம்
Answer	— விடை
Antilogarithm	— எதிர்மடக்கை
Approximately	— தோராயமாக, சற்றேறக் குறைய
Approximation	— தோராயம்
successive	— அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பைக் காணல்
Argument of a function	— சார்பின் மாறி
Arithmetic	
progression	— கூட்டு வளர்ச்சி
series	— கூட்டு வளர்ச்சித் தொடர், கூட்டுத்தொடர்
Ascending order	— ஏறுவரிசை
Axes of co-ordinates	— கிடை நிலை அச்சுகள் ; X, Y அச்சுகள்
Axis	— அச்சு

B

Binomial — ஈருறுப்பு
co-efficient — ஈருறுப்புக் கெழு
expression — ஈருறுப்புக் கோவை
theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
theorem for a rational index — விகிதமுறு அடுக்கின் ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bound — வரம்பு

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculus — நுண்கணிதம்
Calculator — கணக்கீட்டுப் பொறி
Capacity — கொள்ளளவு
Cardioid — நெஞ்சுவளை, இதயவுரு
Cartesian co-ordinates — தெக்காட்டின் கூறுகள்
Catenary — கயிற்றுவளை, சங்கிலியம்
Change of co-ordinates — கூறுமாற்றம்
Cipher — பூச்சியம்
Circle — வட்டம்
segment of a — வட்டத்துண்டு
Circular function — வட்டச்சார்பு
Co-efficient — கெழு
differential — வகைக் கெழு
partial differential — பகுதி வகைக்கெழு, பகுப்பு வகைக்கெழு
Component — கூறு
horizontal — கிடைக்கூறு
vertical — நிலைக்கூறு
Condition — நிபந்தனை
necessary and sufficient — வேண்டிய-போதிய நிபந்தனை
Cone — கூம்பு
Consecutive — அடுத்தடுத்த
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous curve — தொடர்வரை
Continuous function — தொடர்ச்சியான சார்பு
Convergence — ஒருங்கல்
absolute — அறவொருங்கல்
uniform — சீரான வொருங்கல்

Co-ordinates	—	கூறுகள்
Cartesian	—	தெக்காட்டின் கூறுகள் (x, y)
polar	—	தூரக்கோணக் கூறுகள் (r, θ)
Corollary	—	கிளைத்தேற்றம் (கி. தே.)
Cube	—	கன சதுரம், முப்படி
root	—	கனமூலம், முப்படி மூலம்
Curve	—	வளைகோடு, வளைவரை
Cycloid	—	உருள்வளை
Cylinder	—	உருளை

D

Decimal	—	பதின்பகுப்பு, தசமம்
Decreasing function	—	குறையும் சார்பு
Define	—	வரையறு
Definite	—	வரையறுத்த
Definition	—	வரையறை
Degree of an equation	—	சமன்பாட்டுப்படி
Dependent	—	சார்ந்த
variable	—	சார்ந்த மாறி, சார்புடை மாறி
Derivative	—	வகைக்கெழு
Descending order	—	இறங்கு வரிசை
Differential	—	வகையீடு
Total	—	முழு வகையீடு
Calculus	—	வகைநுண் கணிதம்
co-efficient	—	வகைக்கெழு
equation	—	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Differentiate	—	வகையிடு
y with respect to x	—	xஐப் பொறுத்து yஐ வகையிடு
Differentiation	—	வகையிடல்
logarithmic	—	மடக்கை வகையிடல்
partial	—	பகுதி வகையிடல்
successive	—	தொடர்ந்து வகையிடல்
Displacement	—	இடப்பெயர்ச்சி
Divide	—	வகு
Division, long	—	நீள வகுத்தல்

E

Ellipse	—	நீள் வளையம்
Equation	—	சமன்பாடு
degree of	—	சமன்பாட்டுப் படி
homogeneous	—	சமபடிச் சமன்பாடு
Equation, linear	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு

Equation, simultaneous	—	ஒருங்கமை சமன்பாடு
Equilateral	—	சமபக்க
Estimate	—	தோராய மதிப்பிடு
Evaluate	—	மதிப்பைக் காண்
Expansion	—	விரிப்பு
Explicit function	—	வெளிப்படு சார்பு
Exponent	—	அடுக்குக் குறி
Exponential theorem	—	அடுக்குக்குறித் தேற்றம்
Expression	—	கோவை
Extension	—	நீட்சி

F

Factor	—	காரணி, பகுப்பு
Formula	—	வாய்பாடு
Fraction	—	பின்னம்
partial	—	பகுதிப் பின்னம்
proper	—	தகுபின்னம்
Function	—	சார்பு
circular	—	வட்டச்சார்பு
continuous	—	தொடர்சார்பு
decreasing	—	குறையும் சார்பு
discontinuous	—	தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
even	—	இரட்டைச் சார்பு
explicit	—	வெளிப்படு சார்பு
exponential	—	அடுக்குக்குறிச் சார்பு
homogeneous	—	சமபடிச் ச்சார்பு
hyperbolic	—	அதிபரவளைவுச் சார்பு
implicit	—	உட்படு சார்பு
increasing	—	கூடும் சார்பு
integral	—	முழுவெண் சார்பு
inverse	—	நேர்மாறு சார்பு
linear	—	ஒருபடிச் சார்பு
many valued	—	பன்மதிப்புச் சார்பு
periodic	—	மீள் சார்பு
rational	—	விகிதமுறு சார்பு
rational integral	—	விகிதமுறு முழுச்சார்பு
single valued	—	ஒருபதிப்புச் சார்பு

G

Geometry	—	வரைகணிதம், வடிவகணிதம்
Gradient	—	சாய்வு விகிதம்

H

Harmonic motion, simple — தனியிசை இயக்கம்
Hyperbola — அதி பரவளைவு
Hypotenuse — கர்ணம்

I

Illustration — எடுத்துக்காட்டு
Increment — கூடுதல்
Indefinite — குறிப்பிடாத
Independent — சாராத
    variable — சாராத மாறி
Indeterminate — தேரா
Induction, Method of — தொகுத்தறி முறை
Infinite — முடிவிலாத
    series — முடிவறு தொடர்
Infinity — முடிவிலி
Integer — முழுவெண்
Interval — இடைவெளி
Inverse ratio — தலைகீழ் விகிதம்
Irrational — விகிதமுறுத

L

Lateral surface — பக்கப்பரப்பு
Lemma — துணைத் தேற்றம்
Like terms — ஒத்த உறுப்புகள்
Limit — எல்லை
Line — கோடு, வரை
    horizontal — கிடைக்கோடு
    straight — நேர்கோடு
    vertical — நிலைக்கோடு
Linear — நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒரு படித்தான
    acceleration — நேர்கோட்டு வேகவளர்ச்சி
    equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
    velocity — நேர்கோட்டுத் திசைவேகம்
Locus — இயங்குவழி
Logarithm — மடக்கை
    Common — பொது மடக்கை
    Napierian — நேப்பியர் மடக்கை
Logarithmic differentiation — மடக்கை எடுத்து வகையிடல்

M

Metre	—	மீட்டர் (மீ.)
centi	—	சென்டிமீட்டர் (செ.மீ.)
cubic centi	—	கனசென்டிமீட்டர் (க.செ.மீ)
kilo	—	கிலோ மீட்டர் (கி.மீ.)
Minus	—	குறை
Motion, rectilinear	—	நேர்கோட்டியக்கம்
Multiple	—	மடங்கு

N

Nearly	—	ஏறத்தாழ, தோராயமாக
Negative	—	குறை
Negligible	—	புறக்கணிக்கத்தக்க
Number	—	எண்
even	—	இரட்டையெண்
fractional	—	பின்ன எண்
irrational	—	விகிதமுருவெண்
natural	—	இயற்கை யெண்
negative	—	குறையெண்
odd	—	ஒற்றை யெண்
positive	—	மிகையெண்
rational	—	விகிதமுறு எண்
real	—	மெய்யெண்
Numerator	—	தொகுதி
Numerical value	—	எண் மதிப்பு
Numerically	—	எண்ணளவில்

O

Obtuse angle	—	விரிகோணம்
Odd function	—	ஒற்றைச் சார்பு
Operator	—	செயலி
Opposite	—	எதிரான
Order	—	வரிசை
ascending	—	ஏறு வரிசை
descending	—	இறங்கு வரிசை
Ordinate	—	நிலைத்தூரம்
Origin	—	தொடக்கப் புள்ளி
Orthogonal	—	செங்குத்தான
Oscillate	—	அலைதல்

P

Parabola	—	பரவளைவு, பரவளையம்
Parallel	—	இணை

Parameter	—	துணையலகு
Parametric equation	—	துணையலகு சமன்பாடு
co-ordinates	—	துணையலகு கூறுகள்
Partial	—	பகுதிக்குரிய
derivative	—	பகுதி வகைக்கெழு
differentiation	—	பகுதி-வகையிடல்
fraction	—	பகுதி-பின்னம்
Particle	—	துகள்
Path	—	பாதை
Percent	—	நூற்றுவீதம்
Percentage error	—	நூற்றுவீதப் பிழை
Period	—	காலம்
Periodic	—	காலவட்ட ஒழுங்குடைய
function	—	மீள்சார்பு, திரும்பு சார்பு
Perpendicular	—	செங்குத்தான
Plane	—	சமதளம்
Point	—	புள்ளி
stationary	—	கணநிலைப் புள்ளி
turning	—	திரும்பற் புள்ளி
Polar co-ordinates	—	தூரக் கோணக் கூறுகள் (r, θ)
Positive	—	மிகை
Power	—	அடுக்கு
Progression	—	வளர்ச்சி
arithmetic	—	கூட்டுவளர்ச்சி
geometric	—	பெருக்கு வளர்ச்சி
harmonic	—	இசைவளர்ச்சி
Projection	—	வீழல்
Proof	—	நிறுவல்
Proportion	—	விகித சமம்
direct	—	நேர்விகிதசமம்
inverse	—	தலைகீழ் விகிதசமம்
Prove	—	நிறுவு
Pythagoras Theorem	—	பிதகோரஸின் தேற்றம்

Q

Quotient	—	ஈவு

R

Radian	—	ஆரையன்
Radius	—	ஆரம்
vector	—	ஆரைத்திசையி

Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
constant — மாறு விகிதம்
direct — நேர்விகிதம்
inverse — தலைகீழ் விகிதம்
Rational — விகிதமுறும்
fraction — விகிதமுறு பின்னம்
function — விகிதமுறு சார்பு
integral function — விகிதமுறு முழுவெண் சார்பு
Real — மெய்யான
Rectilinear motion — நேர்கோட்டியக்கம்
Right angle — செங்கோணம்
Root — மூலம்
Rotation — சுழற்சி

S

Second — விநாடி, நொடி
Sector — வட்டக்கோணப் பகுதி
Series — தொடர்
absolutely convergent — அறவொருங்குத் தொடர்
arithmetic — கூட்டற்றொடர்
binomial — ஈருறுப்புத் தொடர்
convergent — ஒருங்குத் தொடர்
exponential — அடுக்குக்குறித் தொடர்
geometrical — பெருக்கற் றொடர்
harmonic — இசைத் தொடர்
infinite — முடிவறு தொடர்
logarithmic — மடக்கைத் தொடர்
Show — காட்டு
Simplify — சுருக்கு
Simultaneous equations — ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்
Slope — சாய்வு விகிதம், சரிவு
Solve — தீர்
Speed — வேகம்
Sphere — கோளம்
Spiral, equiangular — சமகோணச் சுருளி
Standard — நியம
Subnormal — செங்கோட்டடி
Subtangent — தொடுகோட்டடி
Substitution — பிரதியிடல்
Subtraction — கழித்தல்

Successive	— தொடர்ந்த, அடுத்தடுத்த
differentiation	— தொடர்ந்து வகையிடல்
Sum	— கூடுதல்
Summation	— கூட்டுதல், கூட்டல்
of series	— தொடர் கூட்டல்
Surface	— மேற்பரப்பு
Symbol	— குறியீடு
Symmetrical	— சமச்சீருள்ள
Symmetry	— சமச்சீர்
cyclic	— வட்டச்சமச்சீர்
T	
Tangent (geometry)	— தொடுகோடு
Terms	— உறுப்புகள்
like	— ஒத்த உறுப்புகள்
Theorem	— தேற்றம்
binomial	— ஈருறுப்புத் தேற்றம்
exponential	— அடுக்குக்குறித் தேற்றம்
logarithmic	— மடக்கைத் தேற்றம்
Time	— நேரம், காலம்
Transformation	— மாற்றம்
V	
Value	— மதிப்பு
absolute	— தனிமதிப்பு
limiting	— எல்லை மதிப்பு
Variable	— மாறி
dependent	— சார்ந்த மாறி
independent	— சாராத மாறி
Vector	— ஏவரை
Velocity	— திசைவேகம்
angular	— சுழல்வேகம்
Verify	— சரிபார்
Vertical angle	— உச்சிக்கோணம்
Volume	— கனஅளவு
X	
X-axis	— *X*-அச்சு, கிடை அச்சு
Y	
Y-axis	— *Y*-அச்சு, நிலை அச்சு
Z	
Zero	— பூச்சியம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600031.

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

இதுவரை 606 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன

★

மேலும் விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	....	39	நூல்கள்
சட்டம்	....	17	,,
மருத்துவம்		18	,,
இயற்பியல்	....	23	,,
வேதியியல்	....	20	,,
தாவரவியல்	....	13	,,
விலங்கியல்	....	14	,,
கணிதம்	....	17	,,
வணிகவியல்	....	37	,,
பொருளாதாரம்	....	21	,,
புவியியல்	....	11	,,
வரலாறு	....	29	,,
மனையியல்	....	1	,,
தத்துவம்	....	4	,,
உளவியல்	....	8	,,
புள்ளியியல்	....	8	,,
கல்வி	....	14	,,
நிலப்பொதியியல்	....	6	,,
அரசியல்	....	19	,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட் ப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூ க் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)

கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை-600006

கல்லூரிப் பாடநூ 20% கழிவு வழங்கப்படும்