அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர் :

ஜே. டி. சாமுவேல், எம். ஏ., எம். எஸ்., (இல்லினாய்ஸ்)

கணிதப் பேராசிரியர்,

பிஷப் ஹீபர் கல்லூரி,

திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—301

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர் :
ஜே. டி. சாமுவேல், எம். ஏ., எம். எஸ்., (இல்லினுய்ஸ்)
கணிதப் பேராசிரியர்,
பிஷப் ஹீபர் கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 301

© Tamil Nadu Text Book Society

MATRICES AND DETERMINANTS

J. D. SAMUEL

Net Price Rs. 9-50
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான ‘அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்’ என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 301ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 336 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1.	அணி என்றால் என்ன ?	... 1
2.	அணிகளின் இயல் கணிதம்	... 15
3.	தொடர்புள்ள அணிகள்	... 65
4.	சேர்ப்பு அணி, நேர் மாறுன அணி	... 91
5.	அணிகளைப் பாகுபடுத்தல்	... 136
6.	அணிகளில் சாதாரண நிரை (நிரல்) மாற்றங்கள்	... 166
7.	அணியின் அளவை	... 201
8.	ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்	... 234
9.	ஒரு படியில் மாறி மாற்றங்கள்	... 261
10.	சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள்	... 266
11.	செங்குத்தணிகள்	... 292
12.	இருபடி சமச்சீர்க் கோவைகள்	... 309
	அனுபந்தம் : அணிக்கோவைகள்	... 317
	BIBLIOGRAPHY	... 354
	கலைச்சொற்கள்	... 355

1. அணி என்றால் என்ன ?

1·0. அணி என்றால் என்ன என்று வரையறுக்குமுன் ஓர் உதாரணம் காட்டுவது நன்று.

$$\begin{bmatrix} \text{க} & \text{ர} & \text{டி} \\ \text{ர} & \text{யி} & \text{ல்} \\ \text{டி} & \text{ல்} & \text{லி} \end{bmatrix}$$

என்பது ஓர் அணி. நாம் சிறுவர்களாக இருந்தபோதே இது நம்மைக் கவர்ந்துள்ளது. இதில் $3 \times 3 = 9$ உறுப்புகளைச் சதுர வடிவில் எழுதி, அவற்றைப் பகர அடைப்புக்குள் வைத்திருக்கிறோம்.

இது $\begin{bmatrix} \text{ர} & \text{யி} & \text{ல்} \\ \text{க} & \text{ர} & \text{டி} \\ \text{டி} & \text{ல்} & \text{லி} \end{bmatrix}$ என்ற அணியிலிருந்து

வேறுபட்டது எனக் கூறத் தேவையில்லை. எனவே, 'எந்த முறையில் இதன் உறுப்புகள் அமைந்துள்ளன' என்பது முக்கியத்தும் வாய்ந்தது. இந்த உறுப்புகளை மூலகங்கள் என்றும் சொல்வோம்.

1·1. அணியின் வரையிலக்கணம்

5×3 உறுப்புகளை நீண்ட சதுர வடிவில் எழுதி அவற்றைப் பகர அடைப்புக்குள் வைத்தால் அதற்கு 5×3 அணி என்பது பெயர்.

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

இவ்வணியில் இடமிருந்து வலமாக 5 வரிசைகள் உள்ளன. இவற்றை நாம் 'நிரைகள்' (rows) என்று சொல்கிறோம்.

முதல் நிரை : (1, 7, 2)

இரண்டாம் நிரை : (2, 3, 5) முதலியன.

மேலும், மேலிருந்து கீழாக 3 வரிசைகள் உள்ளன. இவைகளுக்கு 'நிரல்கள்' (columns) என்பது பெயர்.

முதல் நிரல்	இரண்டாம் நிரல்	மூன்றும் நிரல்
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

இப்பொழுது, ஓர் அணியில் உள்ள எந்த உறுப்பையும் குறிப்பிடுவது எளிதாகிறது. உதாரணமாக, 4ஆவது நிரையில், 2ஆவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு 8. இதனை,

$$a_{42} = 8$$

என்று எழுதலாம். பொதுவாக, i ஆவது நிரையிலும், j ஆவது நிரலிலும் உள்ள உறுப்பை $(i\text{-}j)$ ஆவது உறுப்பு எனச் சொல்லி a_{ij} என்று குறிப்பிடுவோம்.

1·2. அணியின் வகையும் தரமும் (Order of a Matrix)

5 நிரைகளும் 3 நிரல்களும் உள்ள அணியினை 5×3 அணி என எழுதுவதும், ஐந்திற்கு மூன்று அணி எனச் சொல்வதும் வழக்கம். இதை ஆங்கிலத்தில் '5 *by* 3' அணி என்பர். இதில் $5 \times 3 = 15$ உறுப்புகள் (மூலகங்கள்) உண்டு.

ஆனால், 4×4 என்ற சதுர அணி இருந்தால் அதன் தரம் (order) 4 என்று சொல்வோம்.

பொதுவாக, ஒரு $m \times n$ அணியில் mn உறுப்புகள் உண்டு.

இதனை

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்று எழுதுவோம். இதையே, சுருக்கமாக

$$A = m \times n \text{ அணி } [a_{ij}]$$

அல்லது, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என எழுதலாம். மீண்டும் இதைக் குறிப்பிட A என்பதே போதுமானது.

அணிகளை

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ என்றும்,}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{Vmatrix} \text{ என்றும்}$$

குறிப்பிடுவது வழக்கத்தில் உள்ளது.

குறிப்பு :

ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

என்பது அணிக் கோவையை மட்டும் குறிக்கும். இதன் வரையறையை அநுபந்தத்தில் காண்க.

1·3. குணகங்களின் அணி

x, y, z ஆகிய 3 மாறிகளில் உள்ள 3 சமன்பாடுகளின் தொகுதி வருமாறு :

$$ax + hy + gz = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$hx + by + fz = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$gx + fy + cz = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இவற்றின் குணகங்களை முறைப்படி எழுதினால்

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

என்ற 3×3 அணி கிடைக்கிறது. இது,

$$\begin{bmatrix} h & b & f \\ g & f & c \\ a & h & g \end{bmatrix} \text{ இல்}$$

இருந்து வேறுபட்டது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

கண இயல் (Set Theory) கணிதத்தில் $\{a, b\} = \{b, a\}$ என்பது போல் அணிகள் பற்றிக் கூற இயலாது. ஆகவே, அணி என்பது வெறும் எண்களின் திரள் அல்ல.

1·4. பலவகை அணிகள்

(1) நிரை அணி (Row Matrix) : ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரை இருந்தால் அதை நிரை அணி என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் 1 : [க ச ட த ப ற] என்ற 1×6 அணி.

உதாரணம் 2 : $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}]$ என்ற 1×5 அணி. இதில் $m = 1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

(2) நிரல் அணி (Column Matrix) : ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரல் இருந்தால் அதை நிரல் அணி என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \text{ என்ற } 4 \times 1 \text{ அணி}$$

இதில் $n = 1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 2 :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ என்ற } 3 \times 1 \text{ அணி.}$$

(3) சதுர அணி (Square Matrix) : $m = n$ ஆக இருக்கும் போது, அதாவது, n நிரைகளும், n நிரல்களும் உள்ள அணியை n-சதுர அணி என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் 1 :

$$n \text{ சதுர அணி} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 :

$$3 \text{ சதுர அணி} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

தலையாய மூலைவிட்டம் (Principal Diagonal)

ஒரு சதுர அணியில் $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$, ann என்ற உறுப்புகளால் ஆன மூலைவிட்டத்திற்குத் தலையாய மூலைவிட்டம் என்பது பெயர். சாதாரணமாக, மூலைவிட்டம் என்றாலே அது தலையாய மூலைவிட்டத்தைத்தான் குறிக்கும். ஆகவே, $a_{11}, a_{22}, \ldots$, a_{nn} என்பவைகளை மூலைவிட்ட மூலகங்கள் அல்லது மூலைவிட்ட உறுப்புகள் (Diagonal Elements) என்று குறிப்பிடுவது பொருந்தும்.

(4) முக்கோண அணிகள் (Triangular Matrices): ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருந்தால் அதாவது, $i > j$ ஆக இருக்கும் போது $a_{ij} = 0$ ஆக இருந்தால் அதை மேல் முக்கோண அணி (upper triangular matrix) என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

இதே விதமாக, ஒரு சதுர அணியில், மூலை விட்டத்திற்கு மேலே உள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாக இருந்தால் அதாவது, $i < j$ ஆக இருக்கும் போது $a_{ij} = 0$ ஆக இருந்தால், அதைக் கீழ் முக்கோண அணி (lower triangular matrix) என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix): மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மீதி உறுப்புகள் எல்லாம் பூச்சியமாக இருந்தால். அதை மூலைவிட்ட அணி என்று சொல்வோம். ஒரு மூலைவிட்ட அணி, மேல் முக்கோண அணியாகவும், கீழ் முக்கோண அணியாகவும் இருப்பதை கவனி.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{bmatrix}$$

இதனை $D =$ மூலைவிட்ட அணி $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ எனக் குறிப்பிடுவதும் வழக்கம்.

$D =$ மூலைவிட்ட அணி $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ ஆனால், $|D| = d_1d_2d_3d_4d_5$ என்பது கவனிக்கத் தக்கது. $|D|$ என்பது D என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பாகும்.

உதாரணம் 2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{மூலைவிட்ட அணி } (1, 5, 7, 3)$$

(6) அளவை அணி அல்லது மூலைவரை அணி (Scalar Matrix): ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் உள்ள மூலைவிட்ட உறுப்புகள் எல்லாம் சமமாக இருந்தால்—அதாவது r இன் எல்லா மதிப்புக்கும் $a_{rr} = k$ என இருந்தால் அதை அளவை அணி என்று சொல்வோம். இதை மூலைவரை அணி என்றும் சொல்லலாம்.

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(7) அலகு அணி (Unit Matrix): ஓர் அளவை அணியின் மாறுத உறுப்பு 1 ஆக இருந்தால், அதை அலகு அணி என்று சொல்வோம். இதன் தரம் n சதுரமானால் இதனை I_n எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

உதாரணம் :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இதன் தரம் தெளிவாக இருக்கும்போது I என்றே குறிப்பிடலாம்.

(8) பூச்சிய அணி (Null or Zero Matrix) : ஓர் அணியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் பூச்சியமாக இருந்தால் அதற்குப் பூச்சிய அணி என்பது பெயர்.

உதாரணம் :

$$5 \times 4 \text{ பூச்சிய அணி} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

நிரையும் நிரலும் தெரிந்திருந்தால் $A = 0$ என்றே குறிப்பிடலாம்.

(9) கீழ் அணி (Sub-matrix) : A என்ற அணியில் இருந்து சில நிரைகளையோ அல்லது நிரல்களையோ அல்லது இரண்டையுமோ நீக்கிய பின்னர் கிடைக்கும் அணிக்கு A இன் கீழ் அணி என்பது பெயர்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

இதில் 3ஆவது நிரையையும் ; 3ஆம், 5ஆம் நிரல்களையும் நீக்கிய பின்னர் கிடைக்கும் கீழ் அணி

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

A என்ற சதுர அணியில் இருந்து, இணையான நிரைகளையும் நிரல்களையும் நீக்கிய பின்னர் கிடைக்கும் சதுர கீழ் அணியில் உள்ள மூலைவிட்ட உறுப்புகள் A இலும் மூலைவிட்ட உறுப்புகளாய் இருந்தவைதாம். இத்தகைய கீழ் அணிக்குத் தலையாய கீழ் அணி (Principal Sub-matrix) என்பது பெயர். கடைசியில் உள்ள நிரைகளையும் நிரல்களையும் மட்டும் நீக்கிக் கிடைக்கும் தலையாய கீழ் அணியைப் பிரதான கீழ் அணி (Leading Sub-matrix) என்று சொல்லுவோம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ஆக இருக்கட்டும்.

இதில் கடைசி இரண்டு நிரைகளையும், நிரல்களையும் நீக்கிய பின் கிடைக்கும் பிரதான கீழ் அணி,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

(10) ஓர் அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் (Minors of a Matrix) : ஓர் அணியின் சதுர கீழ் அணிகளின் அணிக்கோவைகளை அந்த அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் வருமாறு :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

அணி என்ருல் என்ன ?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

என்பவையாகும்.

மேலும் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் முதல்தரச் சிற்றணிக் கோவையாகக் கருதலாம். கடைசியாக, கொடுக்கப்பட்ட அணியின் அணிக்கோவையையும் இவைகளில் ஒன்ருய்க் கருதலாம்.

(11) சிக்கல் அணி (Complex Matrix) : ஓர் அணியின் மூலகங்களில் சில சிக்கல் எண்களாகவும் (complex numbers) இருக்கலாம். இவ்வாறு உள்ள அணிகளைச் சிக்கல் அணிகள் என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் :

(i) $\begin{bmatrix} 3+4i & 2-i & 1 \\ 2+3i & 2i & 3+i \\ 8 & 7-i & i \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1

1. கீழ்க்கண்ட அணிகளில் நிரைகள், நிரல்கள் இவற்றை எழுது :

(அ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் வகை யாது?

(அ) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (இ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. அணிக்கும், அணிக்கோவைக்கும் உள்ள வேறுபாடுகள் யாவை?

4. நிரை அணிக்கு நான்கு உதாரணங்கள் தருக.

5. நிரல் அணிக்கு நான்கு உதாரணங்கள் தருக.

6. சதுர அணிக்கு நான்கு உதாரணங்கள் தருக.

7. கீழ்க்கண்ட சதுர அணிகளில்

(i) தலையாய மூலைவிட்டம்,

(ii) மூலைவிட்ட உறுப்புகள்
ஆகியவற்றை எழுதுக.

(அ) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. மேல் முக்கோண அணிக்கு இரண்டு உதாரணங்கள் கொடு.

9. கீழ் முக்கோண அணிக்கு இரண்டு உதாரணங்கள் கொடு.

10. மேல் முக்கோண அணிக்கும் கீழ் முக்கோண அணிக்கும் உள்ள வேறுபாடு யாது ?

11. ஒரு மேல் முக்கோண அணியில் உள்ள நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி அமைத்தால் கிடைக்கும் அணி எத்தகையது ?

12. மூலைவிட்ட அணிக்கு இரண்டு உதாரணங்கள் கொடு.

13. மூலைவிட்ட அணி, அளவை அணி, அலகு அணி—இவைகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு யாது ?

14. $|I_n| = 1$ என நிறுவி.

15. கீழ்க்கண்ட அணிகளில்

(i) தலையாய கீழ் அணி,

(ii) பிரதான கீழ் அணி,

(iii) சிற்றணிக் கோவைகள் ஆகியவற்றை எழுது.

(அ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

விடைகள்

1. (அ) நிரைகள் :

முதல் நிரை : $[2 \quad -1 \quad 1]$

இரண்டாம் நிரை : $[0 \quad 1 \quad 2]$

மூன்றும் நிரை : $[1 \quad 0 \quad 1]$

நிரல்கள் : $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ஆ) $[1 \quad 2 \quad -1 \quad 0]$; $[4 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$;
$[2 \quad -5 \quad 1 \quad 2]$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(இ) $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$; $[-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$;
$[0 \quad -2 \quad 1 \quad 0]$; $[8 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. (அ) 3×3 அணி

(ஆ) 4×4 அணி

(இ) 4×3 அணி

3. (அ) $[4 \quad 0 \quad -3]$; $4, 0, -3$

(ஆ) $[1 \quad 3 \quad -3]$; $1, 3, -3$

(இ) $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$; $1, 1, 1, 1$

2. அணிகளின் இயல் கணிதம்

2·0. களங்கள் (Fields) பற்றிய சிறு குறிப்பு

இரண்டு அல்லது அதற்கு அதிகமான உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணத்தை (set)க் களம் என்று சொல்லவேண்டுமானால் அதில் கூட்டல் (+); பெருக்கல் (.) என்னும் செய்கைகளை (operations)ப் பின் வரும் விதிகளுக்கிணங்கச் செய்யக் கூடியதாக இருக்கவேண்டும்.

1. $a + b$ என்பது F என்ற களத்தின் ஒரே (unique) உறுப்பாக இருக்கவேண்டும்.

2. $a + b = b + a$

3. $a + (b + c) = (a + b) + c.$

4. $a + 0 = 0 + a = a.$

5. $a + (-a) = 0.$

6. $a . b = ab$ என்பது F என்ற களத்தின் ஒரே உறுப்பாக இருக்கவேண்டும்.

7. $ab = ba.$

8. $a (bc) = (ab) c$

9. $1 . a = a . 1 = a$

10. $a \neq 0$ ஆனால் $a . a^{-1} = a . a^{-1} = 1.$

11. $a (b + c) = ab + ac.$

12. $(a + b) c = ac + bc.$

களத்திற்கு உதாரணமாக விகிதமுறு (rational) எண்களைக் கூறலாம். மேலும், மெய்யான எண்களும்; சிக்கல் எண்களும் களங்களாகும் என்பதை நோக்குக.

அணிகளின் இயற்கணிதத்தை ஆராயப்போகும் நாம், களங்களில் உள்ள அணிகளையே எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் அணிகளின் மூலகங்கள் களங்களின் உறுப்புகளாக இருக்கும். இதிலும் சிறப்பாக, மெய்யான எண்களின் களத்தையும், சிக்கல் எண்களின் களத்தையும் மட்டுமே எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூட்டலும் பெருக்கலும்

2·1. ஒரே தர அணிகள் (Matrix of the same order)

இரு அணிகளின் தரங்கள் சமமாயிருந்தால், அதாவது இரு அணிகளின் நிரைகளும் நிரல்களும் தனித்தனியே சமமாயிருந்தால் அவற்றை ஒரே தர அணிகள் என்று சொல்வோம். இவைகளை ஒப்பிடத்தகு அணிகள் (Comparable matrices) என்றும் சொல்வது வழக்கம்.

2·2. சமமான அணிகள் (Equal Matrices)

$A = m \times n$ அணி $[a_{ij}]$ ஆகவும்

$B = m \times n$ அணி $[b_{ij}]$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

இவை ஒப்பிடத்தக்கவை என்பதைக் கவனி.

$a_{ij} = b_{ij}$ என்ற சமன்பாடு ஒவ்வொரு i க்கும், ஒவ்வொரு j க்கும் உண்மையாக இருக்கட்டும் (இப்படிப்பட்ட சமன்பாடுகள் mn உள்ளன). இவ்வாறு இருந்தால், இவை சமமான அணிகள் ஆகும். அதாவது, $A = B$.

(i) A என்பது ஓர் அணி ஆனால், $A = A$

(ii) $A = B$ ஆனால், $B = A$

(iii) $A = B$ ஆகவும், $B = C$ ஆகவும் இருந்தால் $A = C$ என்பவற்றை எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

2·3. அணிகளைக் கூட்டல்

எவையேனும் இரு அணிகளை எடுத்துக் கொண்டால், அவற்றைக் கூட்ட இயலாது. இரண்டு அணிகளும் ஒரேதர அணிகளாக

இருந்தால்தான் அவை கூட்டுவதற்கு இயைந்தவையாக இருக்கும் (conformable to addition).

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ என்பன $m \times n$ அணிகளாக இருக்கட்டும். இவை ஒரே தர அணிகள்; எனவே கூட்டலுக்கு இயைந்தவை. இப்பொழுது $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$= [c_{ij}]$$

$= C$ என வரையறை செய்வோம்.

குறிப்பு : C உம் $m \times n$ அணியாகத்தான் இருக்கும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

ஆனால்,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 \\ 5+3 & 2+(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

2·4. அணிகளைக் கழித்தல் :

$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$ என வரையறை செய்வோம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ஆனால், } A - B = \begin{bmatrix} 1-4 & 2-1 & -3-2 \\ 5-0 & 0-3 & 2-2 \\ 1-1 & -1+2 & 1-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2·5. சில கூட்டல் விதிகள் :

(i) $A+B=B+A$...பரிமாற்று விதி

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$...தொடர்பு விதி

(iii) $A+D=B$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு இணங்க D என்னும் ஓர் அணி உண்டு.

(i) $A + B = [a_{ij}+b_{ij}]$

$= [b_{ij}+a_{ij}]$
(சாதாரண எண்களின் பரிமாற்று விதிப்படி)

$= B+A$

(ii) உங்கள் பயிற்சிக்காக.

(iii) $A = [a_{ij}]$; $B = [b_{ij}]$ என இருக்கட்டும்.

$d_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$ என எடுத்துக்கொள்.

$D = [d_{ij}]$ ஆனால்

$A + D = [a_{ij} + d_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij} - a_{ij}]$

$= [b_{ij}]$

$= B.$

2·6. அணிகளின் கூட்டலின் பூச்சியம் உண்டு.

A, 0 என்பன $m \times n$ அணிகளானால்,

$A + 0 = A = 0 + A$ ஆக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$A + 0 = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}]$

$= A$

இதேவிதமாக

$$0 + A = [0 + a_{ij}] = [a_{ij}]$$
$$= A$$
$$\therefore \quad A + 0 = A = 0 + A$$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+0 & 2+0 \\ -1+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= A$$

$$0+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1 & 0+3 \\ 0+0 & 0+2 \\ 0-1 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= A$$

$$\therefore \quad A+0=0+A=A.$$

2·7. எதிர்க் கூட்டல் அணி (Additive Inverse)

$A+B=0$ என இருந்தால் B ஐ A-ன் எதிர்க் கூட்டல் அணி என்று சொல்வோம். இப்படிப்பட்ட அணி இருக்கிறது என்பது 2·5 (iii)-ன்படி தெளிவாகிறது.

மேலும் B, A-ன் எதிர்க் கூட்டலணியானுல் A ஆனது B-ன் எதிர்க் கூட்டலணியாக இருக்கவேண்டும். ஏனென்ருல் $A+B=O$. ஆனுல், பரிமாற்று விதியின்படி $B+A=O$.

உதாரணம்:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ஆனுல்,}$$

இதன் எதிர்க் கூட்டலணி

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

2·8. அணியை எண்ணியால் பெருக்கல் (Scalar Multiplication of a Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

$$A+A = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+3 \\ 5+5 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 2A = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 3 \\ 2\times 5 & 2\times 4 \end{bmatrix}$$

$2A$-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், A-ல் உள்ளதைப் போல் 2 மடங்காக இருப்பதைக் கவனி. எனவே, $A=[a_{ij}]$ ஆனுல், $2A=[2a_{ij}]$ என்பது பொருந்தும்.

பொதுவாக, $A=[a_{ij}]$ ஆனுல்,

$$kA = [ka_{ij}]$$

என வரையறுப்போம்.

k ஓர் அணி அல்ல. அது ஓர் எண்ணி (scalar) ஆதலால், இதை 'எண்ணியால் பெருக்கல்' என்று சொல்கிருேம்.

2·9. அணியை அணியால் பெருக்கல் (Multiplication of Matrices)

$A=[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ldots a_{1n}]$ என்ற $1\times n$ அணியாக இருக்கட்டும்.

A-ல் ஒரே நிரை இருப்பதால், அதை 'நிரை அணி' என அழைப்பது வழக்கம். இதே விதமாக,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

என்ற $n \times 1$ அணியை ஒரே நிரல் இருப்பதால் 'நிரல் அணி' என அழைப்போம்.

AB ஐ முறைப்படி பெருக்கினல் C என்ற 1×1 அணி கீழ்க் காணும் வரையறைக்கிணங்கக் கிடைக்கும்.

$$AB = C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot , + a_{1n}\, b_{n1}]$$

குறிப்பு : நிரையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் அதற்கு ஒத்த நிரலில் உள்ள உறுப்பினல் பெருக்கிக் கூட்டி விடுகிருேம்.

உதாரணம் :

$$[1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \cdot 4 + 2 \,.\, (-1) + 3 . 0]$$

$$= [2]$$

இதில் விடையானது 2 என்னும் எண்ணி (Scalar) அல்ல. அது 1×1 அணி $[2]$ என்பதை நோக்குக.

இதுவரை, ஒரு நிரை அணியை ஒரு நிரல் அணியால் பெருக்கி, கிடைக்கும் நிரை அணியைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இனி, பொதுவாக இரண்டு அணிகள் பெருக்குதற்கு இயைந்தனவா? அவற்றின் பெருக்கற்பலன் என்ன ? என்று பார்ப்போம்.

$A = m \times n$ அணி $[a_{ij}]$ ஆகவும், $B = n \times p$ அணி $[b_{ij}]$ ஆகவும் இருந்தால்

$AB = C = m \times p$ அணி $[c_{ij}]$

இதில் $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \; a_{in}b_{nj}$

i.e. $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$

1. C-ல் உள்ள நிரைகள் $= m =$ A-ல் உள்ள நிரைகள்.

2. C-ல் உள்ள நிரல்கள் $= p =$ B-ல் உள்ள நிரல்கள்.

3. A-ல் உள்ள நிரல்கள் $= n =$ B-ல் உள்ள நிரைகள். என்பதைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

A-ல் உள்ள நிரல்கள் = 3 = B-ல் உள்ள நிரைகள்

∴ AB பெருக்க இயைந்தது.

$A = 2 \times 3$ அணி; $B = 3 \times 2$. அணி.

∴ $AB = 2 \times 2$ அணி ஆதல் வேண்டும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 1.7+2.8+3.9 & 1.10+2.11+3.12 \\ 4.7+5.8+6.9 & 4.10+5.11+6.12 \end{bmatrix}$$

i.e. $AB = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}$ என்ற 2×2 அணி.

2·10. அணிகளைப் பெருக்கல் (வேறு முறை):

$A = m \times n$ அணி $[a_{ij}]$

$B = n \times p$ அணி $[b_{ij}]$ ஆக இருக்கட்டும்.

$R_1, R_2, \cdots\cdots, R_m$ என்பன A-ன் நிரைகளாகவும்,

$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_p$ என்பன B-ன் நிரல்களாகவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad R_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\cdots\ a_{in}]$$

$$C_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R_i\, C_j = [a_{i1}\ a_{i2}\ \ \ldots\ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$i.\,e.\quad R_i\, C_j = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots\cdots + a_{in}\, b_{nj}$$

இப்பொழுது

$$= \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix}$$ என்ற $m \times 1$ அணி ஆகவும்,

$B = [C_1\ C_2 \ldots\ldots C_p]$ என்ற $1 \times p$ அணி ஆகவும் கொண்டால்,

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix} [C_1\ C_2 \ldots\ldots C_p]$$

$$i.e.\ AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \ldots & R_1C_j & \ldots & R_1C_p \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \ldots & R_2C_j & \ldots & R_2C_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_iC_1 & R_iC_2 & \ldots & R_iC_j & \ldots & R_iC_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \ldots & R_mC_j & \ldots & R_mC_p \end{bmatrix}$$

என்று வரையறை செய்கிறோம்.

2·11. அணிகளின் பெருக்கலில் பரிமாற்று விதி பொருந்தாது.

அதாவது $AB \neq BA$

2·9-ல் கண்ட உதாரணத்தில் உள்ள

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ ஐயும், } \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \text{ ஐயும்}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

B-ல் உள்ள நிரல்கள் $= 2 =$ A-ல் உள்ள நிரைகள்

$\therefore$ BA பெருக்க இயைந்தது.

மேலும் $B = 3 \times 2$ அணி; $A = 2 \times 3$ அணி

$\therefore$ $BA = 3 \times 3$ அணி ஆதல் வேண்டும்.

$$BA = \begin{bmatrix} 7.1+10.4 & 7.2+10.5 & 7.3+10.6 \\ 8.1+11.4 & 8.2+11.5 & 8.5+11.6 \\ 9.1+12.4 & 9.2+12.5 & 9.3+12.6 \end{bmatrix}$$

$$i.e.\ BA = \begin{bmatrix} 47 & 64 & 81 \\ 52 & 71 & 90 \\ 57 & 78 & 99 \end{bmatrix}$$

என்ற 3×3 அணி.

ஆனால்

$$AB = \begin{bmatrix} 1.7+2.8+3.9 & 1.10+2.11+3.12 \\ 4.7+5.8+6.9 & 4.10+5.11+6.12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}$$

என்ற 2×2 அணி எனப் பார்த்தோம்.

$\therefore$ $AB \neq BA$.

குறிப்பு ; AB ஐப் பெருக்க முடிந்தால், BA உம் பெருக்க இயைந்ததாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

உதாரணமாக, $A = 1 \times 3$ அணி; $B = 3 \times 2$ அணி ஆக இருந்தால் A-ன் நிரல் $= 3 =$ B-ன் நிரை.

$\therefore$ AB பெருக்க இயைந்தது. இது 1×2 அணி ஆதல் வேண்டும்.

ஆனால் B-ன் நிரல் A-ன் நிரைக்குச் சமம் அல்ல.

$\therefore$ BA ஐப் பெருக்க இயலாது.

எனவே, முறைப்படி பெருக்குவதன் அவசியத்தைக் கவனிக்கவும்.

அணியை அணியால் பெருக்கும்போது, நாம் சாதாரணமாகக் கொள்ளும் விதிகளுக்குப் புறம்பாக மேலும் பலவற்றைக் காண்கிறோம். இந்தப் பாடத்தைப் பயிலும் நோக்கமே 'எந்தெந்த விதிகள் இதிலும் உண்மையாக இருக்கும்?' என்பதுதான்.

ஆகவே சில விதிகள் பொருந்தவில்லை என்றால் அதில் நாம் அதிர்ச்சி அடையவோ, ஆச்சரியப்படவோ வேண்டியதில்லை, இவற்றை எதிர்பார்த்தே மேற்கொண்டு செல்லவேண்டும்.

2·12. $AB=0$ ஆனால் $A=0$ அல்லது $B=0$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை.

உதாரணம் :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}; \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

எனக் கொள்க.

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\ (-1) & 1\ (-6)+2\cdot 3\\ 3\cdot 2+6\ (-1) & 3\ (-6)+6\cdot 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

2·13. நீக்கல் விதி (Cancellation Law)

இது அணிகளின் பெருக்கலுக்குப் பொருந்தாது.

$AB = AC$ ஆனால் $B=C$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை.

உதாரணம் :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix}; \; B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆக இருக்கட்டும். AB, AC ஐப் பெருக்கிப் பார்த்தால்

$AB = AC$ ஆக இருக்கும்.

ஆனால் $B \neq C$ என்பதைக் கவனி.

2·14. பூச்சியத்தால் பெருக்கல்

$A = m \times n$ அணி $[a_{ij}]$ ஆகவும், O என்பது $n \times q$ பூச்சிய அணி ஆகவும் இருக்கட்டும்,

AO பெருக்குதற்கு இயைந்தது என்பதைக் கவனி.

AO ஐப் பெருக்கிப் பார். O என்ற $m \times p$ பூச்சிய அணி கிடைக்கும் ∴ $AO = O$

இதே விதமாக $OA = O$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

O, A-ன் தரங்கள் எவ்வாறு இருக்க வேண்டும் ?

A உம் O உம் ஒரே தர சதுர அணிகளாய் இருந்தால் $AO = O = OA$ என்று சொல்லலாம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AO = \begin{bmatrix} 1.0+2.0+1.0 & 1.0+2.0+1.0 & 1.0+2.0+1.0 \\ 1.0+3.0+2.0 & 1.0+3.0+2.0 & 1.0+3.0+2.0 \\ 1.0+4.0+6.0 & 1.+04.0+6.0 & 1.0+4.0+6.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

இதே மாதிரி $0A = 0$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$\therefore\ A0 = 0 = 0A.$

2·15. சில பெருக்கல் விதிகள்

(i) $A\ (B+C) = AB+AC$ — இடப் பங்கீட்டு விதி

(ii) $(A+B)\ C = AC+BC$ — வலப் பங்கீட்டு விதி

(iii) $A(BC) \quad = (AB)C$ — தொடர்பு விதி

(i) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $B = [b_{ij}]_{n\times p}$; $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ ஆக இருக்கட்டும்.

B யும், C யும் ஒரே தர அணிகள். ஆதலின் அவை கூட்டுதற்கு இயைந்தவை.

$\therefore\ B+C$ யும் $n\times p$ அணி ஆதல் வேண்டும்.

அணிகளின் கூட்டல் விதிப்படி,

$$B+C = [b_{ij} + c_{ij}]_{n\times p}$$

இப்பொழுது $A = m\times n$ அணி.

$\therefore\ A(B+C)$ பெருக்குதற்கு இயைந்தது. $A(B+C)$ ஆனது $m\times p$ அணி ஆதல் வேண்டும்.

2·9–ல் உள்ள பெருக்கல் விதிப்படி,

$$A(B+C)\text{-ன் } (i\text{—}j) \text{ ஆவது உறுப்பு} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ \ (b_{rj}+c_{rj})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (a_{ir}\ .\ b_{rj}+a_{ir}\ .\ c_{rj})\ldots$$

(சாதாரண எண்களின் பங்கீட்டு விதிப்படி)

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj} + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது, AB என்பது பெருக்குதற்கு இயைந்தது என்றும், AB-ன் தரம் $m \times p$ என்றும், AB-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj}$ என்றும் எளிதாக நிருபிக்கலாம்.

இதேவிதமாக, AC யும் பெருக்க இயைந்தது. AC-ன் தரம் $m \times p$. AC-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, c_{rj}$

AB யும், AC யும் ஒரே தரமாக இருப்பதால் கூட்ட இயைந்தது.

கூட்டல் விதிப்படி $AB + AC$-ன் $(i\text{-}j)$ ஆவது

$$\text{உறுப்பு} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj} + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, c_{rj} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-ல் இருந்து $A(B+C)$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பும், $AB+AC$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பும் சமம் என்று அறிகிறோம்.

$\therefore \; A(B+C) = AB+AC$

(ii) உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளது.

(iii) $A(BC) = (AB)C$ என நிருபிப்போம்.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $B = [b_{ij}]_{n\times p}$; $C = [c_{ij}]_{p\times q}$ ஆக இருக்கட்டும்.

2·9-ல் உள்ளபடி BC பெருக்க இயைந்தது.

BC-ன் தரம் $n \times q$. இதன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு

$$b_{i1}\, c_{1j} + b_{i2}\, c_{2j} + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + b_{ip}\, c_{pj}$$

$\therefore$ BC-ன் j ஆவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் வருமாறு :

$$b_{11}\, c_{1j} + b_{12}\, c_{2j} + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + b_{1p}\, c_{pj}$$

$$b_{21}\, c_{1j} + b_{22}\, c_{2j} + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + b_{2p}\, c_{pj}$$

$b_{n1}\, c_{1j} + b_{n2}\, c_{2j} + \qquad\qquad + b_{np}\, c_{pj}$

A-ன் i ஆவது நிரை $a_{i1}\; a_{i2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\; a_{in}$

A யும் (BC) யும் பெருக்க இயைந்தன.

$\therefore$ A-ன் தரம் $m \times n$, (BC)-ன் தரம் $n \times q$. மேலும் $A(BC)$-ன் தரம் $m \times q$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

இப்பொழுது $A(BC)$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு கீழ்க் கண்டவாறு இருக்கவேண்டும்.

$$\begin{aligned}
& a_{i1}\,(b_{11}\, c_{1j} + b_{12}\, c_{2j} + \ldots\ldots\ldots + b_{1p}\, c_{pj}) \\
& + a_{i2}\,(b_{21}\, c_{1j} + b_{22}\, c_{2j} + \ldots\ldots\ldots + b_{2p}\, c_{pj}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_{in}\,(b_{n1}\, c_{1j} + b_{n2}\, c_{2j} + \ldots\ldots\ldots + b_{np}\, c_{pj}) \\
& = (a_{i1}\, b_{11} + a_{i2}\, b_{21} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{n1})\, c_{1j} \\
& + (a_{i1}\, b_{12} + a_{i2}\, b_{22} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{n2})\, c_{2j} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (a_{i1}\, b_{1p} + a_{i2}\, b_{2p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\, b_{nj})\, c_{pj}
\end{aligned}$$

ஆனால், இதுவே $(AB)C$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்புமாகும். ஏனெனில் (AB)-ன் i ஆவது நிரை

$$\sum_{r=1}^{n} (a_{ir} b_{r1}) \quad \sum_{r=1}^{n} (a_{ir}\, b_{r2}) \ldots\ldots\ldots \sum_{r=1}^{n} (a_{ir}\, b_{rp})$$

C-ன் j ஆவது நிரல் $\begin{bmatrix} c_{ij} \\ c_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{pj} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $(AB)\, C$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு

$= A\,(BC)$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு.

$\therefore \quad A\,(BC) = (AB)\, C.$

2·16. அணிகளின் சில அடுக்கு விதிகள்

A என்பது ஒரு சதுர அணி என்றால்

(i) $A^m \cdot A^n = A^{m+n} = A^n \cdot A^m$

(ii) $(A^m)^n = A^{mn}$

(iii) $AB = BA$ ஆனால் $(AB)^n = A^n B^n$

நிரூபணம்: (i) A ஒரு சதுர அணியாக இருந்தால்தான் AA அல்லது A^2 பெருக்க இயைந்ததாக இருக்கும்.

இப்பொழுது, $A^m = A \cdot A \cdot A \ldots\ldots m$ தடவை;

$A^n = A \cdot A \cdot A \ldots\ldots n$ தடவை

என வரையறை செய்வோம்.

$\therefore \quad A^m \cdot A^n = (A.A \ldots\ldots m$ தடவை$)\ (A.A \ldots\ldots n$ தடவை$)$

$= A.A \ldots\ldots (m+n)$ தடவை

[2·15 (iii)-ல் உள்ள தொடர்பு விதிப்படி]

$= A^{m+n}.$

இதேவிதமாக $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$

$\therefore \quad A^m \cdot A^n = A^{m+n} = A^n A^m$

இப்பொழுது, $A^\circ = I$ என வரையறை செய்வோம்.

$A^m I = A^m = I.A^m$ என்பது அலகு அணியின் பண்பாகும்.

$\therefore \quad A^m \cdot A^\circ = A^{m+\circ} = A^m$ என்பதும்,

$A^\circ \cdot A^m = A^{\circ+m} = A^m$ என்பதும்,

$A^\circ = I$ ஆக இருப்பதால் பொருத்தமாயிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

(ii) $(A^m)^n = A^m . A^m \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ n$ தடவை

$= (A.A \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ m$ தடவை$)$

$\times\ (A.A \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ m$ தடவை$)$

$\times \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ n$ தடவைகள்

$= \mathbf{A}.\mathbf{A}$ ... ... mn தடவைகள்)

$= \mathbf{A}^{mn}$

(iii) A ஒரு சதுர அணி......கொள்கை.

மேலும் $AB=BA$ $\therefore$ B உம் அதே தரச் சதுர அணியாக இருக்கவேண்டும். தவிர A, B பரிமாற்று அணிகள். இப்பொழுது $(AB) = A \,.\, B$ என்பது வெளிப்படை.

$n=2$ ஆனல் $(AB)^2 = (AB)(AB)$ ... அடுக்குகள் விதிப்படி

$= A(BA)B$ ... தொடர்பு விதி

$= A(AB)B$ ... பரிமாற்று அணிகள்

$= (AA)(BB)$ ... தொடர்பு விதி

$= A^2B^2$ ... அடுக்குகள் விதி.

இப்பொழுது $(AB)^n = A^nB^n$ எனக் கொண்டு,

$(AB)^{n+1} = A^{n+1}\, B^{n+1}$ என நிரூபிப்போம்.

$(AB)^{n+1} = (AB)^n . (AB)$ ... அடுக்கு விதி.

$= A^nB^n \,.\, AB$ ... கொள்கை.

$= A^n . B^{n-1}\,(BA)B$ ... தொடர்பு விதி

$= A^n . B^{n-1}\,(AB)B$ ... பரிமாற்று அணிகள்.

$= A^n \,.\, B^{n-1} \,.\, AB^2$

$= A^n \,.\, B^{n-2} \,.\, AB^3$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= A^n \,.\, A \,.\, B^{n+1}$

$= A^{n+1} \,.\, B^{n+1}$

ஆனல் இத்தேற்றம் $n=2$ ஆக இருக்கும்போது உண்மை என நிரூபித்துள்ளோம்.

$\therefore$ $2+1=3$ ஆக இருக்கும்போதும், அதனல் $3+1=4$ ஆக இருக்கும்போதும், அதனல் 5, 6,......... முதலிய எந்த நேர் முழு எண்ணுக்கும் உண்மையாகும்.

2·17. மூலைவிட்ட அணியால் பெருக்கல் :

A என்பது ஒரு சதுர அணியாகவும், D அதே தர மூலைவிட்ட அணியாகவும் இருக்கட்டும்.

A ஐ D ஆல் முன் பெருக்கி, P என்னும் அணி கிடைத்தால் — அதாவது,

$P = DA$ என இருந்தால்,

$$p_{ij} = \sum_{r=1}^{n} d_{ir} a_{rj} \dots\dots\dots$$ 2.9-ல் உள்ளபடி.

$$= d_{ii}\ a_{ij}$$

(இது மூலைவிட்ட அணி ஆனதால், $i \neq r$ ஆனால் $d_{ir} = O$)

∴ P-ல் உள்ள i ஆவது நிரையில் உள்ள உறுப்புகள், A-ல் உள்ள i ஆவது நிரையில் உள்ள உறுப்புகளை d_{ii} ஆல் பெருக்கிய தால் கிடைத்தவை.

இதேவிதமாக, A ஐ D ஆல் பின் பெருக்கினால் அதாவது $P = AD$ ஆனால், P-ல் உள்ள j ஆவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகள், A-ல் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளை d_{jj} ஆல் பெருக்கிக் கிடைத்தவை ஆகும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$ ஆகவும்,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$AB = \begin{bmatrix} d_1 \times b_{11} & d_1\ b_{12} & d_1\ b_{13} \\ d_2\ b_{21} & d_2\ b_{22} & d_2\ b_{23} \\ d_3\ b_{31} & d_3\ b_{32} & d_3\ b_{33} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

B-ன் முதல் நிரையை d_1ஆல் பெருக்க AB-ன் முதல் நிரையும்,

,, 2ஆம் ,, d_2 ,, ,, 2ஆம் ,, ,

,, 3ஆம் ,, d_3 ,, ,, 3ஆம் ,, ,

கிடைக்கின்றன என்பதைக் கவனிக்கவும்.

2·18. இதிலிருந்து, "வெவ்வேறு உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு மூலைவிட்ட அணியுடன் பரிமாற்று அணியாக இருக்கக் கூடியது மற்றோர் மூலைவிட்ட அணிதான்" என நிருபிப்போம்.

A என்ற n-சதுர அணியும், D என்ற அதே தர மூலைவிட்ட அணியும் $AD = DA$ என்பதற்கிணங்க இருக்கட்டும். A ஒரு மூலைவிட்ட அணி என நிருபிக்க வேண்டும்.

DA-ல் $(i-j)$, ஆவது உறுப்பு $d_{ii}\, a_{ij}$ (2·17). இதே விதமாக, AD-ல் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $d_{jj}\, a_{ij}$ என நிருபித்துள்ளோம்.

இப்பொழுது $DA = AD$ ... கொள்கை.

$$\therefore \quad d_{ii} \cdot a_{ij} = d_{jj} \cdot a_{ij}$$

ஆனால் $d_{ii} \neq d_{jj}$ ($\because$ D வெவ்வேறு உறுப்புகள் கொண்டது என்பது கொள்கை.)

$\therefore \quad i \neq j$ ஆனால், $a_{ij} = 0$

$\therefore$ A என்பது மூலைவிட்ட அணியாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1 : மூலைவிட்ட அணியால் முன் பெருக்கல்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -12 & -15 & -6 \\ 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 : மூலைவிட்ட அணியால் பின் பெருக்கல்.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 15 \\ 4 & -15 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

2·19. அளவை அணியால் பெருக்கல்

ஓர் அளவை அணியின் மாறுத உறுப்பு k ஆக இருக்கட்டும், இந்த அளவை அணியால் ஓர் அணியைப் பெருக்கினாலும், k என்ற எண்ணியால் (Scalar) அந்த அணியைப் பெருக்கினாலும், ஒரே பெருக்கற் பலன்தான் கிடைக்கும்.

உதாரணமாக 2·17-ன் படி,

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kp & kq & kr \\ kx & ky & kz \end{bmatrix}$$

$$= A$$

மேலும் 2·8-ல் உள்ள எண்ணியால் பெருக்கல் விதிப்படி

$$k \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kp & kq & kr \\ kx & ky & kz \end{bmatrix} = B$$

$A = B$ என்பதைக் கவனிக்கவும். இதிலிருந்து அளவை அணியின் பெயர்க் காரணத்தையும் தெரிந்து கொள்கிறோம்.

2·20. அலகு அணியால் பெருக்கல்

A என்பது $m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும்.

$$A \,.\, I_n = A = I_m \,.\, A$$

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

மேலும், $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

அலகு அணியின் ஏனைய சிறப்பான பண்புகள் :

(i) $I + I + I + \ldots \ldots k$ தடவை $= kI = k$ ஐ மாறுத உறுப்பாகக் கொண்ட அளவை அணி.

(ii) $I^k = I \,.\, I \ldots \ldots k$ தடவை $= I$.

குறிப்பு : சாதாரண எண்களின் கூட்டலில் 0 இருப்பதுபோல், அணிகளின் கூட்டலில் பூச்சிய அணியும்; சாதாரண எண்களின் பெருக்கலில் 1 இருப்பதுபோல், அணிகளின் பெருக்கலில் அலகு அணியும் இருப்பதைக் கவனி.

2·21. இனி 'அணிகளின் பெருக்கலுக்கும், ஒரு படியில் பிரதியிடுதலுக்கும் உள்ள சம்பந்தம் என்ன ?' என்று பார்ப்போம்.

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆக இருக்கட்டும். இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் அணி வடிவில் ஒரே சமன்பாடாக எழுதலாம்.

$$X = AY \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad I$$

இதில் $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{bmatrix}$

2.2-ல் உள்ள அணிகளின் சமன்பாட்டு விதிப்படி,

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

இப்பொழுது, $Y = BZ \quad \ldots \quad \ldots \quad II$

ஆக இருக்கட்டும்.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

என இருக்கட்டும். முன்போல,

$$y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

(1), (2), (3), (4)-ல் இருந்து

$$x_1 = a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2)$$

(அ - து.) $$x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2 \quad \ldots \quad (5)$$

$$x_2 = a_{21}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{22}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2)$$

(அ - து.) $$x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2 \quad \ldots \quad (6)$$

x_1 ஐயும் x_2 ஐயும் z_1, z_2 சார்பாகக் கண்டு பிடித்துள்ளோம். இப்பொழுது I, II-ல் இருந்து

$$X = ABZ \quad \ldots \quad \ldots \quad III$$

என்று எழுதலாம். அதாவது,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2 \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2$$

$$x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2$$

இவை (5), (6) என்பதை நோக்குக. இவற்றிலிருந்து A, B என்ற அணிகளின் பெருக்கலை நாம் வரையறுத்துள்ளது எத்துணை பொருத்தமானது என்பதை உணர்க.

2·22. இதே விதமாக, "அணிகளின் கூட்டலுக்கும் ஒரு படியில் பிரதியிடுதலுக்கும் உள்ள சம்பந்தம் என்ன ?" என்று பார்ப்போம்.

$$x_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் சமன்பாடுகளை $X = AZ$ என்று எழுதலாம்.

இதில் $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

மேலும் $y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

$y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$

என்னும் சமன்பாடுகளை $Y = BZ \quad \dots \quad \dots \quad II$

என்று எழுதலாம். இதில் $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது,

$(1)+(3), \quad x_1+y_1 = (a_{11}+b_{11})z_1+(a_{12}+b_{12})z_2 \dots \quad (5)$

$(2)+(4), \quad x_2+y_2 = (a_{21}+b_{21})z_1+(a_{22}+b_{22})z_2 \dots \quad (6)$

$(I)+(II) \quad X+Y = AZ+BZ$

$= (A+B)Z$

அதாவது,

$$\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})z_1+(a_{12}+b_{12})z_2 \\ (a_{21}+b_{21})z_1+(a_{22}+b_{22})z_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 2.2-ல் உள்ள அணிகளின் சமன்பாட்டு விதியில் இருந்து, $x_1+y_1 = (a_{11}+b_{11})z_1+(a_{12}+b_{12})z_2$

$x_2+y_2 = (a_{21}+b_{21})z_1+(a_{22}+b_{22})z_2.$

இவை (5), (6) என்பதை நோக்குக. இதிலிருந்து $A+B$ என்ற அணிகளின் கூட்டலை நாம் வரையறுத்துள்ளது எத்துணை பொருத்தமானது என்பதை உணர்க.

2·23. சதுர அணியின் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் இயல் கணிதம் (Algebra of polynomial of a Square Matrix)

சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் இயல் கணிதமும், அணியின் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் இயல் கணிதமும் ஒரே வகையைச் சேர்ந்தவை என்பது கீழே தரப்படும் உதாரணத்தால் விளங்கும்.

$$x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta \equiv (x-\alpha)\,(x-\beta).$$

$$A^2-(\alpha+\beta)\,A=\alpha\beta I \equiv (A-\alpha I)\,(A-\beta I).$$

என்ற முற்றொருமைகளைக் கவனி.

பங்கீட்டு விதிகள் அணிகளுக்குப் பொருந்தும் என்பதும், $IA^k=A^k.\ I$ என்பதும், $I^k=I$ என்பதும் நமக்குத் தெரியும். A, I என்பன ஒரே தரச் சதுர அணிகள் எனக் கூறத் தேவையில்லை. சாதாரண கோவையில் உள்ள மாருத உறுப்புக்குப் பதிலாக, அணிக்கோவையில் அந்த உறுப்பை I ஆல் பெருக்குகிறோம் என்பதைக் கவனி.

பொதுவாக,

$$x^n + p_1\,x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n \equiv (x-\alpha_1)\;(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$$

என்பதற்கேற்ப, அணிகளின் பல உறுப்புக் கோவைகளில்,

$$A^n + p_1\,A^{n-1} + \ldots\ldots + p_n \equiv (A-\alpha_1 I)\,A-\alpha_2 I)\ldots\ldots(A-\alpha_n I)$$

என்று எழுதலாம். இந்தக் கோவையின் படி n. இதன் தரம் A-ன் தரம், இதனை விடுவிப்பதால் கிடைக்கும் அணிகள் 'அளவை அணி'களாக இருக்க வேண்டும் என்பதும் நோக்கத் தக்கது.

உதாரணம்: $A^2 + I = O$ என்ற இரண்டாந்தர சமன் பாட்டை விடுவி.

இதன் தரம் 2: $\therefore$ A-ன் தரமும் 2 ஆக இருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, $x^2+1=O$ என்ற சாதாரண சமன்பாட்டை விடுவிப்போம்.

அதாவது, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

இதன் மூலங்கள் -1, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட அணிக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-I$, $\frac{1+i\sqrt{3}\,I}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}\,I}{2}$ ஆகும்.

இவை $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 :

$a_{ij} = 3i - 2j$ என்றுள்ள 3-சதுர அணியை எழுது.

a_{11} என்பதில் $i = 1$, $j = 1$

$\therefore\ a_{11} = 3 \times 1 - 2 \times 1$

i.e. $a_{11} = 1$.

இதே விதமாக $a_{12} = 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1$;

$a_{13} = -3$; $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$,

$a_{23} = 0$; $a_{31} = 7$, $a_{32} = 5$, $a_{33} = 3$.

$\therefore$ தேவையான 3-சதுர அணி $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

மாதிரி 2:

$$3\begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & y \\ w & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆனால் w, x, y, z ஐக் கண்டுபிடி.

$$\therefore \begin{bmatrix} 6 & 3x \\ 3 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2y \\ 2w & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i.e, \begin{bmatrix} 6+2 & 3x+2y \\ 3+2w & 18+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad 8 = z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$3x + 2y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$3 + 2w = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$18 + 2y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$w = -\frac{1}{2}, x = 6, y = -9, z = 8$

மாதிரி 3 [a]: $A = \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$A^2 = 0$ என நிரூபி.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 . 6 + (-18) 2 & 6(-18) + (-18)(-6) \\ 2 . 6 + (-6) 2 & 2(-18) + (-6)(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

குறிப்பு : $A = 0$ அல்ல. ஆனால், $A^2 = 0$.

பூச்சிய அடுக்கு அணி (Nil potent Matrix) : A என்ற சதுர அணி $A^k = 0$ என்றவாறு இருந்தால், A ஐ k-பூச்சிய அடுக்கு அணி என்று சொல்வோம்.

மாதிரி 3 (b) : $A^2 = 0$ என்று இருந்தால்,

$$A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$$ என இருக்க வேண்டும் என்று நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$A^2 = 0$ .... கொள்கை.

$$\therefore \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = 0$$

அதாவது $$\begin{bmatrix} p^2 + qr & pq + qs \\ rp + sr & rq + s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad p^2 + qr = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$pq + qs = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$rp + sr = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$rq + s^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(1), (4)-ல் இருந்து $p^2 - s^2 = 0 \quad \therefore \quad p = \pm s$

முதல் வகை : $p = s$ ஆக இருக்கட்டும்,

$\therefore \quad q = 0 = r \quad \ldots \quad \ldots$ (2), (3) -ல் இருந்து

$\therefore \quad p = 0 = s \quad \ldots \quad \ldots$ (1), (4)-ல் இருந்து

இது $A = 0$ என்னும் கொள்கைக்கு முரணான முடிவுக்கு வருகிறது.

இரண்டாம் வகை: $p = -s$ ஆக இருக்கட்டும். இப்பொழுது, q, r க்கு எந்த மதிப்பு கொடுத்தாலும் (2), (3) பொருந்தும். ஆகையால் p, q, r ஐ $p^2 + qr = 0$ என்பதற்கிணங்க தேர்ந்தெடுத்தால் போதும்.

$s = -p$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும். மாதிரி 3-ல் உள்ள A இத்தகையது என்பதைக் கவனி.

மாதிரி 4 :

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$ ஆனால்

$A^4 = I$ எனக் காண்பி.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

$$\therefore \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I.$$

மாதிரி 5 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ ஆனால்

(i) $E(\theta) = I\cos\theta + i\sin\theta$ (ii) $E(\alpha) \cdot E(\beta) = E(\alpha+\beta)$

(iii) $\{E(\theta)\}^n = E(n\theta)$ என நிரூபி.

(i) $I\cos\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos\theta$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta \times 1 & \cos\theta\times 0 \\ \cos\theta \times 0 & \cos\theta\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

இதே போல்,

$$i\sin\theta = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad I\cos\theta + i\sin\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 & 0+\sin\theta \\ 0+(-\sin\theta) & \cos\theta + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = E(\theta)$$

(ii) $E(\alpha) \cdot E(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(-\sin\beta) & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta) & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = E(\alpha+\beta).$$

(iii) இதை Induction என்னும் தொகுத்தறி முறையில் செய்வோம்.

(ii)-ல் $\alpha = \beta = \theta$ என இருந்தால்,

$\{E(\theta)\}^2 = E(2\theta)$ எனக் கிடைக்கும். ... ... (1)

இப்பொழுது $\{E(\theta)\}^n = E(n\theta)$ எனக் கொள்வோம். ... (2)

அப்படியானால் $\{E(\theta)\}^{n+1} = \{E(\theta)\}^n . E(\theta)$

$= E(n\theta). E(\theta)$ ... ... (2)-ல் இருந்து

$= E(n\theta + \theta)$.

(ii)-ல் இருந்து $\alpha = n\theta$ என்றும், $\beta = 0$ என்றும் கொள்க.

$\therefore \{E(\theta)\}^{n+1} = E\{(n+1)\theta\}$

ஆகவே, இந்தத் தேற்றம் nக்கு உண்மையாக இருந்தால் $(n+1)$ க்கு உண்மையாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் இது $n = 2$ ஆக இருக்கும்போது உண்மையென நிரூபித்துள்ளோம். ஆதலால் இது $2 + 1 = 3$ ஆக இருக்கும் போது உண்மையாக இருக்க வேண்டும். அதன் விளைவாக $3 + 1 = 4$ க்கும், இவ்வாறு எல்லா தேர் முழு எண்களுக்கும் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 6 :

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ஆனால்,

(i) $A^2 = B^2 = C^2 = I$ ... ... (1)

(ii) $AB + BA = 0 = BC + CB = CA + AC$ ... (2)

(iii) $D = kI + lA + mB + nC$ ஆனால்

$D(2kI - D) = (k^2 + l^2 + m^2 + n^2)I$ என நிரூபி.

(i)-ம், (ii)-ம் உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளன.

குறிப்பு : $AB = -BA$ என இருப்பதால் இந்த அணிகளை எதிர் பரிமாற்று அணிகள் (Anti commutative Matrices) என்று சொல்வோம்.

(iii) $D = kI + lA + mB + nC$ (கொடுக்கப்பட்டது.)

$\therefore \quad -lA - mB - nC = kI - D$

$\therefore \quad kI - lA - mB - nC = 2kI - D$

$$\therefore \quad D(2kI-D) = (kI+lA+mB+nC)(kI-lA-mB-nC)$$
$$= k^2I - kI(lA+mB+nC) + lA+mB+nC)\,kI$$
$$-(lA+mB+nC)(lA+mB+nC)$$

இது பங்கீட்டு விதியின்படி ஆகும்.

$= k^2I - (lA+mB+nC)(lA+mB+nC)$

$[\therefore \; IA = A = AI$ முதலியன$]$.

$$= k^2I - \{l^2A^2 + lm\,AB + ln\,AC + ml\,BA + m^2B^2 + mnBC + nl\,CA + nm\,CB + n^2C^2\}$$

$$= k^2I - \{l^2A^2 + m^2B^2 + n^2C^2\}$$

$\because$ இவை எதிர் பரிமாற்று அணிகள்

$= (k^2 + l^2 + m^2 + n^2)\,I$

$\because$ (i)-ன் படி $A^2 = -I$ முதலியன.

மாதிரி 7 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad AB = C \text{ ஆனால்}$$

C_{32}, C_{23}, C_{22} ஐக் கண்டுபிடி.

A என்பது 5×4 அணி. B ஆனது 4×3 அணி. எனவே, இவை பெருக்குதற்கு இயைந்தவை என்றும், C என்பது 5×3 அணி ஆக இருக்க வேண்டும் என்றும் அறிகிறோம்.

இப்பொழுது, C_{32} என்பது A-ல் உள்ள 3ஆவது நிரையையும், B-ல் உள்ள 2ஆவது நிரலையும் பெருக்கிக் கிடைப்பதாகும்.

$$\therefore \quad C_{32} = [\,3\ 1\ 0\ 0\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3\times 2 + 1\times 1 + 0\times(-1) + 0\times(-2)$$

$$= 7$$

இதே விதமாக $C_{23} = 2.3+2.0+1.3+3.0 = 9$

$C_{22} = 2.2+2.1+1(-1)+3(-2) = -1$

மாதிரி 8: பின்வரும் ஒரு படியில் உள்ள சமன்பாடுகளின் தொகுதியை அணி வடிவில் எழுதுக:

$$y_1 = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$y_2 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$y_3 = 4x_1 - x_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

விடை:
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ஏனென்றால்
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 4x_1 - x_2 + 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 2.2-ல் உள்ள அணிகளின் சமன்பாட்டு விதியில் இருந்து (1), (2), (3) கிடைக்கும்.

குறிப்பு :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணி}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் உள்ள குணகங்களை முறைப்படி எழுதக் கிடைத்ததாகும்.

மாதிரி 9 : A என்ற சதுர அணி $A^2 = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதைத் தன்னெதிர் அணி (Involutory Matrix) என்று சொல்லலாம்.

A ஒரு தன்னெதிர் அணி ஆனால் $(I + A)(I - A) = 0$ என நிரூபி. இதன் மறுதலையையும் நிரூபி.

$$\begin{aligned}(I + A)(I - A) &= I^2 - IA + AI - A^2 \\ &= I - A + A - A^2 \\ &= I - A^2 = 0 \quad \because \; A^2 = I \text{ (கொள்கை)}\end{aligned}$$

இப்பொழுது $(I + A)(I - A) = 0$ ஆக இருக்கட்டும்.

முன்மாதிரி, $I - A^2 = 0$

அதாவது $A^2 = I$

$\therefore$ A ஒரு தன்னெதிர் அணி

மாதிரி 10 : சுய அடுக்கு அணி (Idempotent Matrix): A என்ற சதுர அணி $A^k = A$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதை k-சுய அடுக்கு அணி என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ ஆனால்,}$$

$A^3 = A$

$$\because \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6-12 & -2-4+0 & -6-18+18 \\ -3-6+18 & 6+4+0 & 18+18-27 \\ 2+0-6 & -4+0+0 & -12+0+9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+18-12 & 10-12+0 & 30-54+18 \\ 9-30+18 & -18+20+0 & -54+90-27 \\ -4+12-6 & 8-8+0 & 24-36+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

மாதிரி 11 : $A^2 = A$ என்றவாறுள்ள எல்லா **4-சதுர** மூலை விட்ட அணிகளையும் கண்டுபிடி.

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}; \quad D^2 = D \ldots \text{கொள்கை.}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு: 2·17ஐப் பார்க்கவும்.

$\therefore$ 2·2-ல் உள்ள அணிகளின் சமன்பாட்டு விதிப்படி

$$d_1^2 = d_1; \quad d_2^2 = d_2; \quad d_3^2 = d_3; \quad d_4^2 = d_4$$

$\therefore$ $d_r = 0$ அல்லது 1. $(r = 1, 2, 3, 4)$

எனவே, எல்லா மூலைவிட்ட அணிகளையும் எழுதிவிடலாம்.

மாதிரி 12: A, B என்னும் அணிகள் கூட்டுவதற்கும், பெருக்குவதற்கும் இயைந்தவையாக இருந்தால் அவை ஒரே தர சதுர அணிகளாக இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

A என்பது $m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும்.

A, B கூட்டுதற்கு இயைந்தவை......... கொள்கை.

$\therefore$ B என்பதும் $m \times n$ அணி ஆதல் வேண்டும். ... (1)

மேலும் A, B பெருக்குதற்கு இயைந்தவை.

$\therefore$ B என்பது $n \times p$ அணி ஆதல் வேண்டும். ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $m = n$ ......(நிரைகள் சமம்)

$n = p$ ......(நிரல்கள் சமம்)

$\therefore$ A யும் B யும் $n \times n$ சதுர அணிகள்.

பயிற்சி 2

1. பின்வரும் அணிகளை எழுது :

(i) $a_{ij} = 3i + 2j$ என்றுள்ள 4 சதுர அணி.

(ii) $a_{ij} = i^2 + j^2$ என்றுள்ள 3×2 அணி.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ஆனால், $A+B$, $A-B$, $2A+3B$ ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடி.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

(i) $A + B$, $A - C$ ஐக் கண்டுபிடி.

(ii) $A + (B - C) = (A + B) - C$ என நிரூபி.

(iii) $A + D = B$ என்றால் D ஐக் கண்டுபிடி.

4. A, B இரண்டாம் கேள்வியில் உள்ள அணிகள் ;

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A(B - C) = AB - AC$ என நிரூபி.

5. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = 0$$

என்றால் p, q, r, s, t, u-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

6. $$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} w & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ஆனால், w, x, y, z-ன் மதிப்புகள் என்ன ?

7. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

$AB = 6B$ ஆனால், B ஐக் கண்டுபிடி.

8. கீழ்க்கண்ட அணிகளில் AB, BA-க்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ஆனல் AB ஐக் கண்டுபிடி.,

BAஐப் பெருக்க முடியுமா ? ஏன் ?

10 இரண்டுமேல்(கீழ்)முக்கோண அணிகளைப் பெருக்கினல் ஒரு மேல் கீழ்) அணி கிடைக்கும் என நிரூபி.

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$AB = C$ ஆனல், C_{32}, C_{23}, C_{32} ஐக் கண்டுபிடி.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆனல், $(AB)C = A(BC) = ABC$ என நிரூபி,

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ஆனல்,

(i) $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$ என்பவற்றை நிரூபி.

(ii) $ACB = CBA$; $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$; $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$ என்பவற்றை நிரூபி.

14. கீழ்க்கண்ட அணிகளில் A^2, A^3, A^4 ஆகியவற்றை எழுது.

(அ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{bmatrix} \left(w = e^{\frac{2\pi}{3} i} \right)$

(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$

15. (அ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$A^2 - 4A - 5I = 0$ என நிரூபி.

(ஆ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$A^3 - 2A^2 - 9A = 0$ என்றும்,

$A^2 - 2A - 9I \neq 0$ என்றும் நிரூபி.

16. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$$

என நிரூபி.

17. (அ) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n.\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ என நிரூபி.

(ஆ) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1).\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n.\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

என நிரூபி.

18. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $a \neq 1$ ஆனால்,

$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $a_n = a^n$, $b_n = \dfrac{b(a^n-1)}{(a-1)}$

என நிரூபி.

19. (i) $A = [x \ \ y \ \ z]$; $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ ஆனால்,

$ABC = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ என நிரூபி.

(ii) இதிலிருந்து பின்வரும் இரண்டாம் படியில் உள்ள சமபடித்தான கோவைகளை அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுது :

(அ) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6zx$

(ஆ) $3x^2 + z^2 - 2xy + 4yz - 6zx$

20. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$AB = BA$ என நிரூபி.

இதிலிருந்து, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ என நிரூபி.

பொதுவாக $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ என இருக்குமா ? ஏன் ?

21. A, B என்பன இரண்டாம் கேள்வியில் உள்ள அணிகள் ஆனால் $AB \neq BA$ என நிரூபி.

22. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$AB = -BA$ என நிரூபி. இவ்வாறுள்ள அணிகளை எதிர் பரிமாற்று அணிகள் (Anti-commutative Matrices) என்று சொல்வோம்.

(i) $A^2 = B^2 = I$ எனவும்,

(ii) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ எனவும் நிரூபி.

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ உம், $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ உம் எதிர் பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி.

24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

— இவ்வணிகள் ஒன்றோடு ஒன்று எதிர் பரிமாற்று அணிகளாகும் என நிரூபி.

25. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ என்பவை 2-சதுர அணிகளாகும்

(i) $AB = -C$; $BC = -A$; $CA = -B$ என நிரூபி.

(ii) $n = 4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3$ என்பதற்கேற்ப $A^n = I,\ A,\ -I,\ -A$ ஆகும் என நிரூபி.

(iii) இதேபோல் B^n ஐயும், C^n ஐயும் கண்டுபிடி.

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$AB = AC$ என நிரூபி. $B \neq C$ என்பதைக் கவனி.

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$A^2 = A$ என நிரூபி.

இந்த அணிகளுக்குரிய சிறப்புப் பெயர்கள் எவை ?

28 m, n என்பன இரு எண்ணிகள் (Scalars) ஆனால்,

(i) $(m+n)A = mA + nA$

(ii) $m(A+B) = mA + mB$

(iii) $m(nA) = (mn)A$ என நிறுபி.

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

ஆனால், A உம், B உம் சுய அடுக்கு அணிகள் என நிறுபி.

30. $AB=A$, $BA=B$ ஆனால் A உம், B உம் சுய அடுக்கு அணிகள் என நிறுபி.

31. A ஒரு சுய அடுக்கு அணி என்றால் $B=I-A$ ஒரு சுய அடுக்கு அணி என்றும் அத்துடன் $AB=BA=0$ என்றும் நிறுபி.

32. A, B சுய அடுக்கு அணிகள் என்றால் $(A+B)$ என்ற அணி, $AB=BA=0$ ஆக இருந்தால்தான், சுய அடுக்கு அணியாக இருக்கும் என நிறுபி.

33. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ஒரு பூச்சிய அடுக்கு அணி என நிறுபி.

34. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ஒரு மூன்றாம் தர பூச்சிய அடுக்கு அணி என நிறுபி.

35. A ஓர் இரண்டாம் தர (index 2) பூச்சிய அடுக்கு அணி என்றால் (அதாவது $A^2=0$ ஆனால்), $A(I\pm A)^n=A$ என்று நிறுபி.

36. A ஒரு தன்னெதிர் அணி (Involutary) (அதாவது $A^2=I$) என்றால் $\frac{1}{2}(I+A)$ உம், $\frac{1}{2}(I-A)$ உம் சுய அடுக்கு அணிகள் என்றும், $\frac{1}{2}(I+A)\cdot\frac{1}{2}(I-A)=0$ என்றும் நிறுபி.

37. பின் வருவனவற்றை Induction என்னும் தொகுத்தல் முறைப்படி செய்க.

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ஆனால், $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} \cos hx & \sin hx \\ \sin hx & \cos hx \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos hnx & \sin hnx \\ \sin hnx & \cos hnx \end{bmatrix}$$

(ii) A = மூலைவிட்ட அணி (p, q, r) ஆனால்

A^n = மூலைவிட்ட அணி (p^n, q^n, r^n) என நிரூபி.

38. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஆனால், $A^2 = 0$ எனவும்,

$(aI + bA)^n = a^n I + n.a^{n-1} bA$ எனவும் நிரூபி.

39. $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ என நிரூபி.

40. A என்ற n-சதுர அணியில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 1. B என்ற n-சதுர அணியில் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் n; மற்ற உறுப்புகள் $(n-r)$ என்றால்,

(i) $A^2 = nA$

(ii) $B = (n-r) A + rI$

(iii) $B^2 = r^2 I + (n-r)(n^2 - nr + 2r) A$

(iv) $(B - rI)[B^2 - (n^2 - nr + r)I] = 0$ என நிரூபி.

41. A ஒரு n-சதுர அணி, $B = rA + sI$ ஆனால் A, B பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி.

42. A உம் B உம் n-சதுர அணிகள் r_1, r_3, s_1, s_2 அளவைகள் (Scalars) $r_1 s_2 \neq r_2 s_1$ என்றால் $C_1 = r_1 A + s_1 B$ யும் $c_2 = r_2 A + S_2 B$-யும் பரிமாற்று அணிகளாக Aயும் Bயும் பரிமாற்று அணிகளாக இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

43. A, B என்பன இரு n-சதுர அணிகள். $A-KI$, $B-KI$ பரிமாற்று அணிகளானால் A உம் B உம் பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி. இதன் மறுதலையையும் நிரூபி.

44. $A =$ மூலைவிட்ட அணி $(1, 2, 3)$. இதனுடன் பரிமாற்று அணியாக இருக்கக் கூடிய அணியின் பொது ரூபம் என்ன ?

45. A, B பரிமாற்று அணிகள் ஆனால் A^m-ம், B^n-ம் பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி.

46. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ இவ்வணியோடு பரிமாற்று அணியாக இருக்கும் எல்லா அணிகளையும் கண்டுபிடி.

47. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ இவ்வணியோடு பரிமாற்று அணிகளாக இருக்கும் எந்த இரண்டு அணிகளும் தங்களுக்குள்ளே பரிமாற்று அணிகளாக இருக்கும் என நிரூபி.

48.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

ஆனால் A உம் B உம் பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி.

49. ஒவ்வொரு n-சதுர அணியோடும் பரிமாற்று அணிகளாக இருக்கக்கூடியவை n-சதுர அளவை அணிகள் தாம் என நிரூபி.

50. B, A உடன் பரிமாற்று அணியாக இருந்தால் அது A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையுடனும் (Polynomial in A) பரிமாற்று அணியாக இருக்கும் என நிரூபி.

51. ஒரு மூலைவிட்ட அணி, அதே தரமுள்ள எல்லா அணிகளுடனும் பரிமாற்று அணியாக இருந்தால் அது ஓர் அளவை அணி என நிறுவி.

52. இரண்டு அணிகளின் பெருக்குத்தொகை ஒரு பூச்சியமல்லாத அளவை அணிக்குச் சமமானால் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு அணிகளும் பரிமாற்று அணிகள் என நிறுவி.

53. பின் வருவனவற்றை நிறுவி.

(i) $A(B-C) = AB-AC$

(ii) $(B-C)A = BA-CA$

54. A, B பரிமாற்று அணிகளானால் $(A+B)^n = A^n + {}^nC_1 \cdot A^{n-1}B + \dots + {}^nC_r \cdot A^{n-r} \cdot B^r + \dots + B^n$ என நிறுவி.

55. A, B, C என்பன n-சதுர அணிகள், $C = A + B$; $AB = BA$; $B^2 = 0$ ஆனால்,

$C^n = A^{n-1}[A + nB]$ என நிறுவி.

56. $$A = \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln \\ lm & m^2 & mn \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq \\ pq & q^2 & qr \\ pr & qr & r^2 \end{bmatrix}$$

ஆகவும், $\Sigma l^2 = 1$, $\Sigma p^2 = 1$ ஆகவும் இருக்கட்டும். $AB = 0$ ஆனால் $\Sigma pl = 0$ என நிறுவி.

(l, m, n ஐ ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் என்று சொல்லலாம்.)

57. $$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

ஆனால், $AB = BA = 0$ என நிறுவி.

58. A என்பது ஒரு $m \times n$ அணி. AB யும், BA யும் பெருக்க இயலுந்தவையானால், B ஒரு $n \times m$ அணி என நிறுவி.

59. $A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$ ஆகவும்,

$A(\alpha) \cdot A(\beta) = 0$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$|\alpha - \beta| = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$ என நிரூபி.

60. பின்வரும் சமன்பாடுகளை அணி வடிவில் வரைக.

(i) $x+y+3=0, \; -y+x+2z=3, \; y+z=4$

(ii) $x+y+z=1, \; 2x+3y+4z=5, \; x-z+2=0$

61. $A^2-5A+7I=0$ என்னும் அணிகளின் சமன்பாட்டினை விடுவிக்கும் இரண்டாம் தர அணிகள் எவை?

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்பதும் ஒரு மூலம் என நிரூபி.

62. $A^3-2A^2-9A=0$ என்னும் அணிகள் சமன்பாட்டை விடுவிக்கும் மூன்றும் தர அளவை அணிகள் எவை?

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ என்பதும் ஒரு மூலம் என நிரூபி.

63. $d_r = r$ என இருக்கும் வண்ணம் $A = (d_1, d_2, \ldots\ldots d_n)$ என்ற மூலைவிட்ட அணி உள்ளது. $B_j\ (j=1, 2, \ldots n)$ என்பவை n-தர மூலைவிட்ட அணிகள். ஒவ்வொரு B_j இலும்

$r < j$ ஆனால் $d_r = 0$

$r \geqslant j$ ஆனால் $d_r = 1$.

அப்படியானால் $A = \sum_{j=1}^{n} B_j$ என நிரூபி.

விடைகள் :

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$ 4 சதுர அணி

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$

2. $A+B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$2A+3B=\begin{bmatrix} 13 & 6 & 3 \\ 1 & 10 & 7 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. (i) $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; $A-C=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $D=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. $p=-2,\quad q=0,\quad r=4,\quad s=-1,\quad t=9,\quad u=9.$

6. $w=2,\quad y=1,\quad x=3\quad z=7.$

9. BA ஐப் பெருக்க முடியாது. ஏனெனில் B-ன் தரம் 4×3. A-ன் தரம் 2×4.

B-ன் நிரை $=$ A-ன் நிரல்

B-ன் நிரல் $\neq$ A-ன் நிரை.

11. $$C=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 20 \\ 1 & 1 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad C_{22}=20 \quad C_{21}=8 \quad C_{32}=1.$$

13. (ii) (அ) $$[x \ \ y \ \ z]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(ஆ) $$[x \ \ y \ \ z]\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3. தொடர்புள்ள அணிகள்

(Matrices Associated with a Given Matrix)

3·1. திருப்பு அணி (Transpose of a Matrix)

A என்ற அணியில், நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி அமைத்தால் கிடைக்கும் அணிக்கு A-ன் திருப்பு அணி என்பது பெயர். இதனை A^T அல்லது A' எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

உதாரணம் : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு : (i) $A = m \times n$ அணி ஆனால், $A' = n \times m$ அணி ஆகும்.

(ii) A-ல் உள்ள $(i-j)$ ஆவது உறுப்பும்,

A'-ல் உள்ள $(j-i)$ ஆவது உறுப்பும் சமம்.

அதாவது, $a_{ij} = a'_{ji}$.

மேலே உள்ள உதாரணத்தில் $a_{23} = 7 = a'_{32}$

3·2. தேற்றம் :

(i) $(A')' = A$

(ii) $(A+B)' = A' + B'$

(iii) $(kA)' = k \cdot A'$

(i) A என்பது $m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ A' என்பது $n \times m$ அணி ஆதல் வேண்டும்.

$\therefore$ $(A')'$ என்பது $m \times n$ அணி ஆகும்.

எனவே, 2·1-ன்படி, A உம் $(A')'$ உம் ஒப்பிடத்தகு அணிகள்.

இப்பொழுது, A, A', $(A')'$ ஆகியவற்றின் $(i-j)$ ஆவது உறுப்புகள் முறையே a_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij} ஆக இருக்கட்டும்.

அப்படியானால், $a_{ij} = a'_{ji}$ $\because$ A, A' திருப்பு அணிகள்

மேலும், $a'_{ji} = a''_{ij}$ $\because$ A', $(A')'$ திருப்பு அணிகள்

$\therefore$ $a_{ij} = a''_{ij}$

$\therefore$ $A = (A')'$

(ii) உம், (iii) உம் உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளன.

3·3. தேற்றம்: இரு அணிகளின் பெருக்கற் பலனுடைய திருப்பு அணியானது, அவைகளுடைய திருப்பு அணிகளின் முன் பின்னுக்கின பெருக்கற் பலனுக்குச் சமம்.

$(AB)' = B'A'$

நிரூபணம் : $A = m \times n$ அணி $[a_{ij}]$;

$B = n \times p$ அணி $[b_{ij}]$

ஆக இருக்கட்டும். $\therefore$ $AB = m \times p$ அணி.

மேலும் $B' = p \times n$ அணி ; $A' = n \times m$ அணி.

$\therefore$ $B'A' = p \times m$ அணி

இப்பொழுது, A-ன் i ஆவது நிரை $= a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

மேலும், B-ன் j ஆவது நிரல் $= \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$

$\therefore$ AB-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj} \ldots \quad (1)$

அன்றியும், B'-ன் j ஆவது நிரை $b_{1j}, b_{2j}, \ldots b_{nj}$

A'-ன் i ஆவது நிரல் $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $B'A'$-ன் $(j-i)$ ஆவது உறுப்பு $= b_{1j} \cdot a_{i1} + b_{2j} \cdot a_{i2} + \ldots + b_{nj}\, a_{in}$

$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj}$

$= AB$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு ... [(1)-ல் இருந்து]

$\therefore$ $B'A'$ ஆனது AB-ன் திருப்பு அணியாகும்.

3·4. **கிளைத்தேற்றம்:** $A_1, A_2, \ldots \ldots A_n$ என்ற அணிகளின் தரம், $A_1 A_2 \ldots \ldots A_n$ பெருக்குதற்கு இயைந்தவாறு இருந்தால், $(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n)' = A'_n \cdot A'_{n-1} \ldots\ldots A'_1$.

நிரூபணம்: $(A_1 A_2)' = A'_2 A'_1 \ldots \quad \ldots \quad$ (3·3-ன் படி)

$\therefore$ $n = 2$ ஆக இருந்தால் தேற்றம் உண்மையானது.

இப்பொழுது, n அணிகளின் பெருக்கல் திருப்பத்திற்குத் தேற்றம் உண்மை எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \ (A_1 A_2 \ldots\ldots A_n)' = A'_n \cdot A'_{n-1} \ldots\ldots A'_1 \quad \ldots (1)$$

இப்பொழுது, $(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n A_{n+1})$

$= \{(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n) A_{n+1}\}'$ ... தொடர்பு விதி

$= A'_{n+1} (A_1 A_2 \ldots A_n)'$ ... 3·3-ன்படி

$= A'_{n+1} (A'_n \cdot A'_{n-1} \ldots\ldots A'_1)$ ...கொள்கை (1)

$= A'_{n+1} A'_n \ldots\ldots A'$ ... தொடர்பு விதி

$\therefore$ தேற்றம், $(n+1)$ மதிப்புக்கும் உண்மையாகிறது. எனவே Induction என்னும் தொகுத்தறி முறைப்படி இத்தேற்றம் உண்மையாகும்.

ஒரு சதுர அணியினை நிரலணியால் பெருக்கியதன் திருப்பு அணி:

$$AX = B \text{ ஆனால் } X'A' = B'$$

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \ldots \ldots (I)$$

என்று இருக்கட்டும். இவற்றின் திருப்பு அணிகள்

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = [4 \quad 21 \quad 22] \quad \ldots (II)$$

என்றவாறு அமையும்.

I, *II*-ல் இருந்து கிடைக்கும் இயல் கணித (algebraic) சமன்பாடுகள் ஒன்றே என்பதைக் கீழே காண்க.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21$$

$$x_2 + 4x_3 = 22$$

3·5. சமச்சீர் அணி (Symmetric Matrix)

A என்ற சதுர அணி, $A' = A$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் A ஐச் சமச்சீர் அணி என்று சொல்வோம்.

$\therefore$ ஒரு சமச்சீர் அணியில், எல்லா i க்கும், j க்கும், $a_{ij} = a_{ji}$ என இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது.

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} \text{க} & \text{ச} & \text{டி} \\ \text{ச} & \text{யி} & \text{ல்} \\ \text{டி} & \text{ல்} & \text{வி} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3·6. தேற்றம் : A என்பது ஏதாவது ஒரு சதுர அணி ஆனல், $A+A'$ என்பது சமச்சீர் அணி ஆகும்.

$(A+A')$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $a_{ij} + a_{ji}$

$(A+A')$-ன் $(j-i)$ ஆவது உறுப்பு $a_{ji} + a_{ij}$

ஆனல் $a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$

$\therefore$ $(A + A')$ ஒரு சமச்சீர் அணி

வேறு முறை : $(A+A')' = A' + (A')' \quad \because (A+B)' = A' + B'$

$= A' + A \quad \because (A')' = A$

$= A + A' \quad \because A+B = B+A$

$\therefore$ $A+A'$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

3·7. தேற்றம் : A, B என்பன ஒரே தர சமச்சீர் அணிகளானல் $(A+B)$ உம் ஒரு சமச்சீர் அணி ஆகும்.

$(A+B)' = A' + B'$

$= A + B \quad \because$ A, B சமச்சீர் அணிகள்

$\therefore$ $(A+B)$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

3·8. A ஒரு சமச்சீர் அணியனல் kA உம் ஒரு சமச்சீர் அணி ஆகும்.

$(kA)' = kA'$ . . . . . [3·2 (iii)-ல் இருந்து]

$= kA \quad \because A' = A.$

3·9. A ஏதாவது ஓர் அணியானல், (சதுர அணியாக இருக்க வேண்டியதில்லை) AA' ஒரு சமச்சீர் அணி ஆகும்.

ஏனென்ருல், $(AA')' = (A')' \cdot A' \qquad \because (AB)' = B'A'$

$= AA' \qquad \because (A')' = A$

3·10. A ஒரு சமச்சீர் அணியானல் A^n ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

ஏனென்ருல், $(A^n)' = (A \cdot A \;\ldots\; \ldots\; n$ தடவை$)'$

$= (A' \cdot A' \;\ldots\; \ldots\; n$ தடவை$)$

$= (A \cdot A \;\ldots\; \ldots\; n$ தடவை$)$

$= A^n.$

3·11. இரு சமச்சீர் அணிகளின் பெருக்கற்பலன் சமச்சீர் அணியாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

இதை ஓர் உதாரணத்தால் எடுத்துக் காட்டுவோம் :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & e \end{bmatrix}$$

என்பன சமச்சீர் அணிகள்.

ஆனல், $AB = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+be \\ bc+cd & bd+ce \end{bmatrix}$ ஒரு சமச்சீர் அணி அல்ல.

இத்தகைய நிருபணத்திற்கு 'மாருன எடுத்துக்காட்டால் நிரூபித்தல்' (Proof by counter-example) என்பது பெயர்.

3·12. ஒரு சமச்சீர் அணியில் (பொதுவாக) $\frac{n(n+1)}{2}$ உறுப்புகள் வெவ்வேருக இருக்கும்.

முதல் நிரையில் n உறுப்புகளும் வெவ்வேறு ஆகலாம்.

2 ஆம் நிரையில் $(n-1)$ உறுப்புகள்தாம் வெவ்வேறு ஆகும்.

$\because a_{21} = a_{12}$

3 ஆம் நிரையில் $(n-2)$ உறுப்புகள்தாம் வெவ்வேறு ஆகும்.

$\because a_{31} = a_{13}$ & $a_{32} = a_{23}$

4 ஆம் நிரையில் $(n-3)$ உறுப்புகள்தாம் வெவ்வேறு ஆகும்.

$\because$ . . . .

n ஆம் நிரையில் 1 உறுப்புதான் வேறு ஆகும். . . . .

$$\therefore \text{ மொத்தம் } 1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

உறுப்புகள் வெவ்வேறாக இருக்கும்.

3·13. A என்பது சமச்சீர் அணியானால், $B'AB$ உம் சமச்சீர் அணி என்று நிரூபி.

A என்பது சமச்சீர் அணி ... (கொள்கை).

$\therefore \quad A'=A \quad \ldots\ldots$ (i)

இப்பொழுது, $(B'AB)'=B'A'(B')' \qquad \because (ABC)'=C'B'A'$

$=B'A'B \qquad \because (B')'=B$

$=B'AB$ . . . . (i)-ன் படி.

$\therefore \quad B'AB$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

3·14. எதிர்ச்சீர் அணி (Skew Symmetric Matrix)

A என்ற சதுர அணி $A'=-A$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், அதை எதிர்ச்சீர் அணி என்று சொல்வோம்.

எனவே ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியில், எல்லா i க்கும் j க்கும் $a_{ij}=-a_{ji}$ என்றவாறு இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது. மேலும், $i=j$ ஆனால், $a_{ii}=-a_{ii}$ என்று இருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad a_{ii}=0$. அதாவது, மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

உதாரணம்:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

3·15. எதிர்ச்சீர் அணியில் உள்ள தேற்றங்களின் நிரூபணங்கள் சமச்சீர் அணியில் உள்ளவைகளுக்குப்போல் இருப்பதால், அவை உங்கள் பயிற்சிக்கென விடப்பட்டுள்ளன.

தேற்றம் (i): A என்பது ஏதாவது ஒரு சதுர அணியானால் $A-A'$ என்பது எதிர்ச்சீர் அணியாகும்.

தேற்றம் (ii): A, B என்பன ஒரே தர எதிர்ச்சீர் அணிகளானால் $(A+B)$ உம் ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

தேற்றம் (iii): A ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியானால் kA உம் ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

தேற்றம் (iv): A ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியானால் $B'AB$ உம் ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

3·16. ஓர் எதிர்ச்சீரணியில் (பொதுவாக) n^2-n+1 உறுப்புகள் வெவ்வேறாக இருக்கும்.

இதில் உள்ள மொத்த உறுப்புகள் n^2. மூலைவிட்ட உறுப்புகள் n-பூச்சியங்களாகும். இதில் ஒரு பூச்சியத்தை மட்டும் வேறு உறுப்பாகக் கருதலாம். ∴ இதில் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகள் n^2-n+1 ஆகும்.

3·17. தேற்றம்: எந்த சதுர அணியையும், ஒரு சமச்சீர் அணியுடன் ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியைக் கூட்டிப் பெறக் கூடியதாக ஒரே வகையில் எழுதலாம்.

நிரூபணம்: A என்பது ஒரு சதுர அணியாக இருக்கட்டும்.

எனவே, $A+A'$ ஒரு சமச்சீர் அணி ... ... 3·6

$\therefore \dfrac{A+A'}{2}$ ஒரு சமச்சீர் அணி ... ... 3·8

மேலும், $A-A'$ ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி ... ... 3·15 (i)

$\therefore \dfrac{A-A'}{2}$ ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி ... ... 3·15 (iii)

ஆனால், $A = \dfrac{A+A'}{2} + \dfrac{A-A'}{2}$

$\therefore$ ஒரு சதுர அணி = ஒரு சமச்சீர் அணி + ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி. இனி, இது ஒரே வழிதான் உண்டு என நிரூபிப்போம். கூடுமானால், $A = R + S$ எனவும் இருக்கட்டும்.

R ஒரு சமச்சீர் அணி ; S ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

$R = \dfrac{A+A'}{2}$ எனவும், $S = \dfrac{A-A'}{2}$ எனவும் நிரூபித்தால் போதுமானது.

இப்பொழுது, $A = R + S$ . . . . . . கொள்கை . . . (1)

$$\therefore \ A' = (R+S)'$$
$$= R' + S'$$
$$= R - S \qquad \ldots \ldots \ldots (2)$$

$\because$ R ஒரு சமச்சீர் அணி ; S ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

$$(1) + (2) : \ A + A' = 2R$$
$$\frac{A+A'}{2} = R \qquad \ldots \ldots (3)$$

$$(1) - (2) : \ A - A' = 2S$$
$$\therefore \ \frac{A-A'}{2} = S \qquad \ldots \ldots (4)$$

(3), (4)-ல் இருந்து R, S என்பன முறையே வேறு சமச்சீர் அணியாகவோ, எதிர்ச்சீர் அணியாகவோ, இருக்க முடியாது என்று தெரிகிறது. ஆகையால் A என்ற அணியை $\dfrac{A+A'}{2} + \dfrac{A-A'}{2}$ என்னும் ஒரே முறையில்தான் சமச்சீர் அணி, எதிர்ச்சீர் அணியின் கூடுதலாக எழுத முடியும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : A, B பரிமாற்று அணிகளானல், A$'$ உம், B' உம் பரிமாற்று அணிகளாக இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம் : A, B பரிமாற்று அணிகள் ... (கொள்கை)

$\therefore \ AB = BA \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (i)$

இப்பொழுது, $A'B' = (BA)'$ ... ... 3·3

$= (AB)'$ ... ... (i)

$= B'A'$ ... ... 3·3

$\therefore$ A', B' பரிமாற்று அணிகள்.

மாதிரி 2 : (i) A உம் B உம் சமச்சீர் அணிகளாகவும், பரிமாற்று அணிகளாகவும் இருந்தால், AB உம் ஒரு சமச்சீர் அணி என நிருபி.

(ii) இதன் மறுதலையை நிருபி.

(i) A, B சமச்சீர் அணிகள் ... ... (கொள்கை)

$\therefore$ $A' = A$; $B' = B$ ... ... (1)

மேலும், A, B பரிமாற்று அணிகள் ... (கொள்கை)

$\therefore$ $AB = BA$ ... ... (2)

இப்பொழுது $(AB)' = (BA)'$ ... ... (2)-ல் இருந்து

$= A'B'$ ... ... (3·3)

$= AB$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$\therefore$ AB ஒரு சமச்சீர் அணி.

(ii) இப்பொழுது, AB ஒரு சமச்சீர் அணியாக இருக்கட்டும்.
அதாவது $(AB)' = AB$ ... ... (1)

A, B பரிமாற்று அணிகள் என நிருபிக்க வேண்டும்.

$(AB)' = B'A'$ ... ... (3·3)

$= BA$ ... ... $\because$ இவை சமச்சீர் அணிகள்.

ஆனால் $(AB)' = AB$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$\therefore$ $AB = BA$.

$\therefore$ A, B பரிமாற்று அணிகள்.

மாதிரி 3: A என்பது ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி. இதனுடைய தரம் ஒற்றையெண் ஆனுல் $|A| = 0$ என நிருபி.

$A = -A'$ ... ... $\because$ A ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி.

$\therefore \quad |A| = |-A'|$

$= (-1)^n \cdot |A'|$

$= -|A'| \ldots\ldots \quad \because \; n$ ஓர் ஒற்றையெண்

$= -|A| \quad \because \; |A| = |A'|$

$\therefore \quad |A| = 0.$

3·18. சிக்கல் அணி (Complex Matrix) :

ஓர் அணியின் உறுப்புகளில் சில சிக்கல் எண்களாகவும் (Complex Numbers) இருக்கலாம். இவ்வாறு இருந்தால் அந்த அணியைச் சிக்கல் அணி என்று சொல்வோம்.

சிக்கல் எண்களே இல்லாத அணியை மெய்யான அணி (Real Matrix) என்று அழைப்பதும் பொருந்தும்.

3·19. இணை அணிகள் (Conjugate Matrices)

A என்ற சிக்கல் அணியில் உள்ள சிக்கல் எண்களுக்குப் பதிலாக அவற்றின் இணை எண்களை உறுப்புகள் ஆக்கினால் கிடைக்கும் சிக்கல் அணிக்கு இணை அணி என்பது பெயர். இதை $\bar{A}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 3+4i & 2 & i \\ 2-i & i & 1+i \\ 1 & 3-i & 5 \end{bmatrix} \text{ ஆனால்,}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3-4i & 2 & -i \\ 2+i & -i & 1-i \\ 1 & 3+i & 5 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு: $\bar{A} = A$ ஆனால், A ஒரு மெய்யான (Real) அணியாக இருக்க வேண்டும்.

3·20. சிக்கல் எண்களைப் பற்றிய சில குறிப்புகள் :

a, b என்பன மெய்யான எண்களாக இருக்கட்டும்.

$i=\sqrt{-1}$ ஆனால், $a+ib$ ஐச் சிக்கல் எண் என்று சொல்வோம். இதை z என்னும் எழுத்தால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$a+ib$, $a-ib$ என்பவைகளை இணை எண்கள் என்று சொல்வோம்.

$z=a+ib$ ஆனால், அதன் இணையான $a-ib$ ஐ $\bar{z}$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

$z_1=a+ib$, $z_2=c+id$ என இருக்கட்டும்.

(i) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

ஏனென்றால், $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+ib)+(c+id)}$

$$=\overline{(a+c)+i(b+d)}$$

$$=(a+c)-i(b+d)$$

$$=(a-ib)+(c-id)$$

$$=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

(ii) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

ஏனென்றால், $\overline{z_1z_2}=\overline{(a+ib)(c+id)}$

$$=\overline{(ac-bd)+i(ad+bc)}$$

$$=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

$$=(a-ib)(c-id)$$

$$=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

(iii) $\bar{\bar{z}}=z$ உங்கள் பயிற்சிக்காக.

3·21. தேற்றம் :

(i) $\overline{(\bar{A})}=A$

(ii) $\overline{(A+B)}=\bar{A}+\bar{B}$

(iii) $\overline{(kA)}=\bar{k}\cdot\bar{A}$

(iv) $\overline{(AB)}=\bar{A}\cdot\bar{B}$

நிரூபணம் : (i) $\bar{A} = [\overline{a_{ij}}]$

$\therefore \quad \bar{\bar{A}} = [\overline{\overline{a_{ij}}}]$

$= [a_{ij}] \quad \because \ \bar{\bar{z}} = z$

$= A$

(ii) $\overline{A+B} = [\overline{a_{ij}+b_{ij}}]$

$= [\overline{a_{ij}}+\overline{b_{ij}}] \quad \because \ \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$= [\overline{a_{ij}}] + [\overline{b_{ij}}]$

$= \bar{A} + \bar{B}$

(iii) $(\overline{kA}) = [\overline{ka_{ij}}]$

$= [\bar{k}.\overline{a_{ij}}] \quad \because \ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$= \bar{k} \cdot [\overline{a_{ij}}]$

$= \bar{k} \, . \, \bar{A}$

(iv) $\overline{AB} = \bar{A} \, . \, \bar{B}$ என நிருபிக்க வேண்டும்.

$A = [a_{ij}]$ என்ற $m \times n$ அணி ஆகவும்,

$B = [b_{ij}]$ என்ற $m \times p$ அணி ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore$ AB என்ற $m \times p$ அணியின் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \, . \, b_{rj}$$

$\therefore$ $\bar{A}\bar{B}$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு $= \overline{\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \, b_{rj} \right)}$

$$= \sum_{r=1}^{n} (\overline{a_{ir} \, b_{rj}}) \quad \therefore \ \overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \bar{z}_1 + \ldots + \bar{z}_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \overline{a_{ir}} \, . \, \overline{b_{rj}} \quad \because \ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, . \, \bar{z}_2$$

$= \bar{A} \, . \, \bar{B}$-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு

$\therefore \quad \overline{AB} = \bar{A} \, . \, \bar{B}$

3·22. திருப்பு - இணை அணி (Tranjugate or Transpose of a Conjugate Matrix)

A என்ற அணி கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. A-ன் இணை அணி $\bar{A}$. $\bar{A}$-ன் திருப்பு அணி $(\bar{A})'$. $(\bar{A})'$ ஐ A-ன் திருப்பு இணை என்று சொல்வோம். இதை A^* எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

தேற்றம் : (i) $(\bar{A'}) = (\bar{A})' = A^*$

(ii) $(A^*)^* = A$

(iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(iv) $(kA)^* = \bar{k} \cdot A^*$

(v) $(AB)^* = B^* A^*$

தேற்றம் 1 : ஓர் அணியின் திருப்பு அணியினுடைய இணை அணியும், இணை அணியின் திருப்பு அணியும் சமமாகும்.

அதாவது,

$$(\bar{A'}) = (\bar{A})' = A^*.$$

ஏனென்றால், $A = [a_{ij}]$

$$\therefore \quad A' = [a_{ji}], \qquad \therefore \quad (\bar{A'}) = [\overline{a_{ji}}] \quad .. \quad .. \quad (1)$$

மேலும், $\bar{A} = [\overline{a_{ij}}] \qquad \therefore \quad (\bar{A})' = [\overline{a_{ji}}] \quad .. \quad ... \quad (2)$

(1), (2)-ல் இருந்து $(\bar{A'}) = (\bar{A})' = A^*$ என தெரிகிறது.

தேற்றம் (ii) A-ன் திருப்பு இணை அணி A.

அதாவது, $(A^*)^* = A$

நிரூபணம் : $A = [a_{ij}]$ ஆனால் $A^* = [\overline{a_{ji}}]$

$$\therefore \quad \bar{A}^* = [\overline{\overline{a_{ji}}}] = [a_{ji}] \qquad \therefore \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\therefore \quad (\bar{A}^*)' = [a'_{ji}]$$

$$= [a_{ij}]$$

$$= A$$

$$\therefore \quad (A^*)^* = A.$$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 2+4i & 2-i \\ 3 & i \end{bmatrix} \text{ ஆனால்}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-4i & 2+i \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^* = (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 2-4i & 3 \\ 2+i & -i \end{bmatrix}$$

$$\text{இப்பொழுது } \overline{A^*} = \begin{bmatrix} 2+4i & 3 \\ 2-i & i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A^*)^* = (\overline{A^*})' = \begin{bmatrix} 2+4i & 2-i \\ 3 & i \end{bmatrix} = A$$

தேற்றம் (iii) : $(A+B)^* = A^* + B^*$

$\because \quad (A+B)^* = \{ (\overline{A+B}) \}' = \{ \bar{A} + \bar{B} \}' \ldots \ldots 3 \cdot 21 \text{(ii)}$

$= \bar{A}' + \bar{B}' \quad \ldots \; 3 \cdot 2 \text{ (ii)}$

$= A^* + B^*$

தேற்றம் (iv) : $(kA)^* = \bar{k} \cdot A^*$

$\because \quad (kA)^* = \{ (\overline{kA}) \}' = \{ \bar{k} \cdot \bar{A} \}' \ldots \; 3 \cdot 21 \text{ (iii)}$

$= \bar{k}(\bar{A})' \; \ldots\ldots \; 3 \cdot 2 \text{ (iii)}$

$= \bar{k} \cdot A^*$

தேற்றம் (v) : $(AB)^* = B^* A^*$

$\because \quad (AB)^* = \{ (\bar{A}\,\bar{B}) \}' = \{ \bar{A}\bar{B} \}' \ldots \; 3 \cdot 21 \text{(iv)}$

$= \bar{B}' \cdot \bar{A}' \ldots\ldots \; 3 \cdot 3$

$= B^* A^*$

3·23. ஹெர்மிஷன் அணி (Hermitian Matrix)

ஓர் அணியானது அதன் திருப்பு—இணை அணிக்குச் சமமானல் அதை ஹெர்மிஷன் அணி என்று சொல்வோம். அதாவது, $A^* = A$ ஆனல், A என்பது ஹெர்மிஷன் அணி.

∴ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியில் எல்லா i-க்கும், j-க்கும் $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ என்று இருக்கும்.

மூலைவிட்ட உறுப்புகளை நோக்குமிடத்து, $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ என்று இருக்க வேண்டும். ஆதலால், மூலைவிட்ட உறுப்புகள் சிக்கல் எண்களாய் இராமல், மெய் எண்களாய் (reals) இருக்கவேண்டும். கீழே தரப்படும் ஹெர்மிஷன் அணியைப் பார்க்கவும்.

$$\begin{bmatrix} a & h+iw & g+iv \\ h-iw & b & f+iu \\ g-iv & f-iu & c \end{bmatrix}$$

3·24. எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி (Skew Hermitian Matrix)

ஓர் அணியின் திருப்பு இணை அணி அதன் எதிர்க் கூட்டலணிக்குச் சமமானால் அதை எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி என்று சொல்வோம். அதாவது, $A^* = -A$ ஆனால், A என்பது எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.

எனவே, ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியில், எல்லா i-க்கும், jக்கும் $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ என்று இருக்கும். மூலைவிட்ட உறுப்புகளை நோக்குமிடத்து, $a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$ என்று இருக்க வேண்டும்.

∴ இவை பூச்சியமாகவோ அல்லது முழுவதும் கற்பனையான எண்களாகவோ (Purely imaginary numbers) இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம்:

$$\begin{bmatrix} ia & ih-w & ig-v \\ ih+w & ib & if-u \\ ig+v & if+u & ic \end{bmatrix}$$

குறிப்பு (i): A என்பது ஹெர்மிஷன் அணியானால், iA என்பது எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.

$A = [a_{ij}]$ என்பது ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியாக இருக்கட்டும்.

∴ $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ .... (1)

இப்பொழுது, iA-ல் உள்ள $(i\text{-}j)$ ஆவது உறுப்பு $= i \cdot a_{ij}$; $(j\text{-}i)$ ஆவது உறுப்பு $= i \cdot a_{ji}$

$\therefore\ i \cdot a_{ij} = -(\overline{i\, a_{ji}})$ என நிரூபித்தால் போதுமானது.

$$R.H.S. = -(\overline{i\, a_{ji}}) = -\bar{i} \cdot \overline{a_{ji}}$$

$$= -(-i) \cdot \overline{a_{ji}} = i \cdot \overline{a_{ji}}$$

$$= i \cdot a_{ij} \ \ldots\ldots\ (1)\text{-ல் இருந்து.}$$

$$= L.H.S.$$

குறிப்பு (ii): A ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியானால், iA ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

$B = iA$ ஆக இருக்கட்டும் …… …… (1)

$\bar{B} = \overline{iA} = \bar{i} \cdot \bar{A} = -i \cdot \bar{A}$

$$\therefore\ (\bar{B})' = (-i\bar{A})'$$

$$= -i \cdot (\bar{A})'$$

$$= -i \cdot A^*$$

$$= -i\,(-A) \quad \because\ A^* \text{ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.}$$

$$= iA$$

$$\therefore\ B^* = B \qquad \because\ B = iA \ \ldots\ (1)$$

3·25. P, Q என்பன முறையே மெய்யான (Real) சமச்சீர் அணியாகவும், எதிர்ச்சீர் அணியாகவும் இருந்தால், $P + iQ$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியாகும்; $iP - Q$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

இதை ஓர் உதாரணத்தால் விளக்குவோம்.

$$P = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & w & v \\ -w & 0 & u \\ -v & -u & 0 \end{bmatrix}$$

என்பன முறையே சமச்சீர், எதிர்ச்சீர் அணிகள்.

$$P+iQ = \begin{bmatrix} a & h+iw & g+iv \\ h-iw & b & f+iu \\ g-iv & f-iu & c \end{bmatrix}$$

என்பது ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

$$iP-Q = \begin{bmatrix} ia & ih-w & ig-v \\ ih+w & ib & ij-u \\ ig+v & if+u & ic \end{bmatrix}$$

என்பது எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

இதிலிருந்து, சிக்கல் எண்கள் இல்லாவிட்டால் ஓர் ஹெர்மிஷன் அணி மெய்யான சமச்சீர் அணியாகவும்; ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி மெய்யான எதிர்ச்சீர் அணியாகவும் இருக்க வேண்டும் என்று தெரிகிறது.

3·26. தேற்றம் (i): A என்பது ஏதாவது ஒரு n-சதுர அணியானல்,

(a) $A+A^*$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

(b) $A-A^*$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.

ஏனென்றல் (a) $(A+A^*)^* = A^*+(A^*)^*$ ...... 3·22 (iii)
$= A^* + A$ ...... 3·22 (ii)
$= A+A^*$

(b) $(A-A^*)^* = A^*-(A^*)^*$ ...... 3·22 (iii)
$= A^*-A$ ...... 3 · 22 (ii)
$= -(A-A^*)$

தேற்றம் (ii): சிக்கல் எண்களே உறுப்புகளாகக் கொண்ட எந்தச் சதுர அணியையும், ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியுடன் ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியைக் கூட்டிப் பெறக்கூடியதாக, ஒரே வகையில்தான், எழுத இயலும்.

A என்பது ஒரு சதுர அணியாக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ $A+A^*$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி ......(i) a

$\therefore \quad \frac{A+A^*}{2}$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

இதேவிதமாக, $\frac{A-A^*}{2}$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி ......(i) b

ஆனால் $A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$

$\therefore$ ஒரு சதுர அணி = ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி + ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.

இது ஒரேவகை என்பதை 3·17 ஐப்போல் நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 4 : $H = P+iQ$ ஆக இருக்கட்டும். P, Q மெய்யான சமச்சீர், எதிர்ச்சீர் அணிகள். H ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என்று நிரூபி. H^*H என்பது மெய்யான அணியானால் $PQ = -QP$ என நிரூபி.

நிரூபணம் : $H^* = (P+iQ)^*$

$= P^* + \bar{i}Q^*$

$= (\overline{P})' + \bar{i}(\overline{Q})'$

$= P' - iQ' \quad \because$ P, Q மெய்யானவை.

$= P - i(-Q) \quad \because$ P சமச்சீர் அணி, Q எதிர்ச்சீர் அணி.

$= P + iQ$

$= H$

$\therefore$ H ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

இப்பொழுது $H^*H = HH$

$= (P + iQ)(P + iQ)$

$= P^2 + iPQ + iQP - Q^2$

$= P^2 - Q^2 + i(PQ + QP)$

ஆனால், இது மெய்யான அணி. (கொள்கை)

$\therefore \quad PQ + QP = 0.$

மாதிரி 5 : H ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியானல் $\bar{A}' HA$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிருபி.

நிருபணம்: H ஒரு $n \times n$ அணி ஆகவும், A ஒரு $n \times m$ அணி ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore$ HA பெருக்க இயைந்தது.

மேலும், $\bar{A}'$ ஒரு $m \times n$ அணியாதல் வேண்டும்.

$\therefore$ $\bar{A}'\ HA$ பெருக்க இயைந்தது. இது $m \times m$ அணி.

இப்பொழுது $\bar{A}' = A^*$

$$\therefore \quad (\bar{A}'\ HA)^* = (A^* HA)^*$$

$$= A^*\ H^*\ (A^*)^* = A^*\ HA$$

$$= \bar{A}'\ HA$$

மாதிரி 6 : A, B என்பன ஹெர்மிஷன் அணிகள் ஆனுல்,

(i) $(AB - BA)$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி எனவும்,

(ii) $AB + BA$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி எனவும் நிருபி.

$$(AB - BA)^* = (AB)^* - (BA)^*$$

$$= B^*A^* - A^*B^*$$

$$= BA - AB \quad \because A, B \text{ ஹெர்மிஷன் அணிகள்}$$

$$= -(AB - BA)$$

$\therefore$ $(AB - BA)$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி.

மாதிரி 7 : ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியின் அணிக்கோவை ஒரு மெய்யான எண்ணுக்குச் சமம் என நிருபி.

A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியாக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad A = A^* = (\bar{A})'$,

$$\therefore \quad A' = \{(\bar{A})'\}' = (\bar{A}) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$|A| = |A'| = |\bar{A}| \quad \dots \quad \dots \quad (1)\text{-ல் இருந்து}$$

$$= \overline{|A|}$$

$\therefore$ $|A|$ உம், அதன் இணையான $|\bar{A}|$ உம் சமமாய் இருக்கின்றன.

$\therefore$ $|A|$ மெய்யான எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 8 : A என்னும் ஹெர்மிஷன் அணி, $A^2 = 0$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் $A = 0$ என நிரூபி.

நிரூபணம் : A என்பது $[a_{ij}]$ ஆகவும், $A^2 = [c_{ij}]$ ஆகவும் இருக்கட்டும். இதில், $a_{ij} = x_{ij} + \sqrt{-1} \cdot y_{ij}$ என இருக்கட்டும்.

$$\text{இப்பொழுது, } c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, a_{rj} \quad \dots \quad \dots \quad (2\cdot 9)$$

$$\therefore \quad c_{ii} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot a_{ri}$$

$$0 = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot a_{ri} \qquad \because \; A^2 = 0$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot \overline{a_{ir}} \qquad \because \; A \text{ ஹெர்மிஷன் அணி.}$$

$$0 = \sum_{r=1}^{n} (x^2{}_{ir} + y^2{}_{ir})$$

$$\therefore \quad x_{i1} = x_{i2} = \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots = x_{in} = 0$$

$$\text{மேலும், } y_{i1} = y_{i2} = \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots = y_{in} = 0$$

$$\therefore \quad a_{ij} = x_{ij} + \sqrt{-1} \cdot y_{ij} = 0 + \sqrt{-1} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \quad A = 0.$$

பயிற்சி 3

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்றால், AA' உம், $A'A$ உம் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆனால், $A + A'$ உம்,

$A - A'$ உம் கண்டுபிடி.

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$(AB)' = B'A'$ என நிறுபி.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ஆனால்,
$(AB)' = B'A'$ எனக் காண்பி.

5. $$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆனால்,

UU' உம், $U'U$ உம் கண்டுபிடி.

6. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ஐ

$A = BB'$ என்ற வடிவில் எழுது.

B நேர் மூலகங்கள் கொண்ட ஒரு மேல் முக்கோண அணி.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை ஒரு சமச்சீர் அணியுடன், எதிர்ச்சீர் அணியைக் கூட்டிப் பெறக்கூடிய வகையில் எழுது.

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & i & 3-i \\ -i & 0 & 2+i \\ 3+i & 2-i & 1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

(i) A', $(\bar{A}')$, $\bar{A}$, $(\bar{A})'$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி. $(\bar{A}')=(\bar{A})'$ என்று நிரூபி.

(ii) A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

(iii) P, Q மெய்யான அணிகளாக இருக்கும்படி A ஐ $P+iQ$ எனப் பிரித்து எழுது. P, Q எத்தகைய சிறப்பு அணிகள்?

(iv) iA ஐ எழுதி, அது ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

9. (அ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

(ஆ) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி எனக் காண்பி.

(இ) iB ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

(ஈ) $\bar{A}$ ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என்றும் $\bar{B}$ ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி என்றும் நிரூபி.

10. A ஒரு சமச்சீர் அணியாகவோ அல்லது எதிர்ச்சீர் அணியாகவோ இருந்தால் $AA' = A'A$ உம், A^2 உம் சமச்சீர் அணிகள் என நிறுபி.

11. A ஒரு சமச்சீர் அணியானுல், $aA^p + b \cdot A^{p-1} + \ldots + gI$ உம் ($a, b, \ldots \ldots g$ அளவைகள், p நேர் முழு எண்) சமச்சீர் அணி என நிறுபி.

12. A ஒரு சதுர அணியானுல் AA^*, A^*A என்பன ஹெர்மிஷன் அணிகள் என்று நிறுபி.

13. A என்பது ஏதாவது ஒரு சதுர அணியாக இருக்கட்டும். $A = P + iQ$ என்று இருக்கும் வண்ணம், P, Q என்ற ஹெர்மிஷன் அணிகளை ஒரே வகையில்தான் கண்டுபிடிக்க முடியும் என நிறுபி.

$\left(P = \dfrac{A + A^*}{2} \; ; \quad Q = \dfrac{A - A^*}{2i} \right.$ என எடுத்துக் கொள்ளவும்.$\Big)$

14. $A' = A$ என்றுல் $(A^*)' = A^*$ என நிறுபி.

15. $$P = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$ ஆனுல்,

$$P^* = \begin{bmatrix} -bc & -ca & -ab \\ b+c & c+a & a+b \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

எனக் காண்பி.

16. $(\alpha A)^* = \alpha^{n-1} A^*$ என நிறுபி.

17. (i) $AA^* = A^*A = |A| \, I$ என நிறுபி.

(ii) $|A^*| = |A|^{n-1}$ என நிறுபி.

(iii) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ என நிறுபி.

18. ஒவ்வொரு சதுர அணி A ஐயும் $A = B + C$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். B ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி; C ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

19. B உம் C உம் ஹெர்மிஷன் அணிகளானுல் ஒவ்வொரு சதுர அணி A ஐயும் $A = B + iC$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் என நிரூபி.

20. A உம் B உம் $AB = A$, $BA = B$ என்றவாறிருந்தால்

(அ) $B'A' = A'$, $A'B' = B'$ என நிரூபி.

(ஆ) A' உம் B' உம் சுய அடுக்கு அணிகள் என நிரூபி.

21. A உம் B உம் n-சதுர எதிர்ச்சீர் அணிகளாகவும், பரிமாற்று அணிகளாகவும் இருந்தால் AB ஒரு சமச்சீர் அணியாகும் என நிரூபி.

21. A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியானுல் A^n ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

23. A ஒரு எதிர்ச்சீர் அணியானுல்,

(i) A^{2n} ஒரு சமச்சீர் அணியெனவும்,

(ii) A^{2n+1} ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியெனவும் நிரூபி.

24. $(A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots A_n)^* = A^*_n \cdot A^*_{n-1} \ldots\ldots A^*_1$ என நிரூபி.

25. A, B ஹெர்மிஷன் அணிகளாகவும், A, B பரிமாற்று அணிகளாகவும் இருந்தால், AB உம் ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி. இதன் மாறுதலை உண்மையாகுமா? ஏன்?

26. ஒரு மெய்யான சமச்சீர் அணி, ஹெர்மிஷன் அணியாக இருக்கவேண்டும் என நிரூபி.

27. P ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியாகவும், Q ஒரு சமச்சீர் அணியாகவும் இருக்கும்படி, கொடுக்கப்பட்ட ஓர் எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியை $P + iQ$ என்று எழுதலாம் என நிரூபி. உதாரணம் கொடு.

28. A, B என்ற ஹெர்மிஷன் அணிகள் $A^2 + B^2 = 0$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் $A = 0$, $B = 0$ என நிரூபி.

விடைகள்

1, $\begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 & 7 \\ -2 & 2 & 8 & -3 \\ 8 & 8 & 14 & -1 \\ 7 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 0 & +2 & +2 & 1 \\ -2 & 0 & +4 & +5 \\ -2 & -4 & 0 & +3 \\ +1 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. சேர்ப்பு அணி, நேர் மாறுன அணி

4·1. சேர்ப்பு அணி: $A = [a_{ij}]$ என்பது n-சதுர அணியாக இருக்கட்டும்.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

இதில் மூலகமான a_{ij}க்குப் பதிலாக, அதன் இணைக் காரணியான (co-factor) A_{ij} ஐப் போட்டால் கீழ்க்கண்ட $[A_{ij}]$ என்ற அணி கிடைக்கும்.

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$[A_{ij}]'$ஐ, அதாவது, $[A_{ij}]$-ன் திருப்பு அணியை A-ன் சேர்ப்பு அணி என வரையறுப்போம்.

$$\therefore \text{ சேர்ப்பு அணி } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ji} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\therefore \quad \text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 6 & -13 \\ -5 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4·2. **தேற்றம் :** $A \,.\, \text{சேர்ப்பு } A = |A|\, I_n = \text{சேர்ப்பு } A \,.\, A$

(A சேர்ப்பு A)-ன் (i-j) ஆவது உறுப்பு

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \,.\, A_{jr}$$

$$= a_{i1} \,.\, A_{j1} + a_{i2} \,.\, A_{j2} + \ldots\ldots + a_{in}\, A_{jn}$$

$$= \begin{cases} |A| & i = j \text{ ஆக இருந்தால்;} \\ 0 & i \neq j \text{ ஆக இருந்தால்.} \end{cases}$$

∴ பெருக்கற் பலனில் மூலைவிட்ட உறுப்புகளே உண்டு.

அவை ஒவ்வொன்றும் $|A|$ க்குச் சமம்.

$$\therefore \quad A \,.\, \text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \,.\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| \,.\, I_n$$

இதே விதமாகச் சேர்ப்பு $A \cdot A = |A| I_n$

$\therefore\ A$. சேர்ப்பு $A =$ சேர்ப்பு $A \cdot A = |A| I_n$.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$ ஆனால்.

$$A \cdot \text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A| \cdot I_3$$

4·3. ஓர் ஒழுங்கு அணியும், ஒரு பூச்சிய அணிக்கோவை அணியும், A என்ற அணியில் $|A| = 0$ ஆக இருந்தால் அதை ஒரு பூச்சிய அணிக்கோவை அணி என்று சொல்வோம். இது பூச்சிய அணியிலிருந்து வேறுபட்டது என்பதை நினைவிற்கொள்வது நலம்.

$|A| \neq 0$ ஆனால், A ஐ ஒழுங்கு அணி என்று சொல்வோம்.

4·4. $|A| \neq 0$ ஆனால், $|$சேர்ப்பு $A| = |A|^{n-1}$

நிருபணம் : A . சேர்ப்பு $A = |A| I_n$ ... (4·2 இலிருந்து)

$\therefore\ |A$. சேர்ப்பு $A| = |\,|A| I_n|$

$\therefore\ |A| \cdot |$சேர்ப்பு $A| = |A|^n$

$\therefore\ |$சேர்ப்பு $A| = |A|^{n-1}$

4·5. தேற்றம்: சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= |A|^{n-2} \cdot A$

நிரூபணம்: A . சேர்ப்பு $A = |A| I_n$ ... (4·2)

$\therefore$ சேர்ப்பு A . சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $=$ | சேர்ப்பு A | . I_n

$= |A|^{n-1} . I_n$ ... (4·4)

$\therefore$ A . சேர்ப்பு A . சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)

$= A . |A|^{n-1} . I_n$

ஆனால் A சேர்ப்பு $A = |A| I_n$

$\therefore$ $|A| I_n$ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= A |A|^{n-1} I_n$

$\therefore$ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= |A|^{n-2} A$.

நேர்மாறான அணி அல்லது நேரெதிர் அணி

4·6. A, B என்ற சதுர அணிகள் $AB = BA = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால், Bஐ A-ன் நேர்மாறான அணி அல்லது நேரெதிர் அணி என்று சொல்லுவோம். இதை $B = A^{-1}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். A உம், B-ன் நேரெதிர் அணி என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே $A = B^{-1}$,

உதாரணம்:

(i) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & 2 & -\frac{13}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

இதிலிருந்து ஒவ்வோர் அணிக்கும் நேரெதிர் அணி உண்டு எனக் கருதிவிட வேண்டாம். $|A| = 0$ ஆனால் A என்ற அணிக்கு நேரெதிர் அணி கிடையாது. இதை 4·8-ல் நிரூபிப்போம்.

4·7. A என்ற அணிக்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறான அணிதான் உண்டு.

கூடுமானால், B, C என்பன A-ன் நேர்மாறான அணிகளாக இருக்கட்டும்.

$B = C$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

B ஆனது A-ன் நேர்மாறுன அணி (கொள்கை)

$\therefore \quad AB = BA = I \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

இதேவிதமாக, $AC = CA = I \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

இப்பொழுது, $B = BI$

$= B(AC) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$= (BA)\,C \quad \ldots \quad \ldots$ தொடர்பு விதி

$= IC \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$= C$

4·8. A என்னும் அணிக்கு நேர் மாறுன அணி இருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை $|A| \neq 0$ என்பதாகும்.

நிரூபணம்: (i) A^{-1} என்பது இருக்கட்டும்.

$|A| \neq 0$ என நிரூபிப்போம்.

வரையறையின்படி $AA^{-1} = I$

$\therefore \quad |AA^{-1}| = |I|$

$\therefore \quad |A| \cdot |A^{-1}| = 1$

$\therefore \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

ஆனுல் A^{-1} இருக்கிறது. $\quad \therefore \quad |A| \neq 0$

(ii) $|A| \neq 0$ ஆக இருக்கட்டும்.

A^{-1} இருக்கிறதென நிரூபிப்போம்.

$\dfrac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$ என்னும் அணியை A^{-1} எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அப்படியானல்,

$$AA^{-1} = A \cdot \left(\frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} \right)$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot A \cdot \text{சேர்ப்பு } A$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot |A| \; I \quad \ldots \quad \ldots \quad (4 \cdot 2)$$

$$= I$$

$$\therefore \; AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

அதாவது, A^{-1} என்பது A-ன் நேரெதிர் அணி.

4·9. இதிலிருந்து, "A என்ற அணியின் நேரெதிர் அணியானது $\frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$" என வரையறை செய்வோம்.

குறிப்பு: $|A| = 0$ ஆக இருக்கக் கூடாது.

அதாவது, A ஓர் ஒழுங்கு அணியாக இருக்க வேண்டும்.

4·10. A ஓர் ஒழுங்கு அணியாக இருந்தால் அதற்கு ஒரே ஒரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு. (இரண்டாம் முறை).

A-ன் நேரெதிர் அணி $= \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$ என நிரூபித்துள்ளோம்.

$\frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$ ஐ A^{-1} எனக் குறிப்பிடுவோம்.

கூடுமானல், Bஉம், $AB = BA = I$ என்பதற்கிணங்க இருக்கட்டும். $B = A^{-1}$ என நிரூபிப்போம்.

இப்பொழுது, $A(B - A^{-1}) = AB - AA^{-1}$

$$= I - I$$

$$= 0$$

$$\therefore \; A^{-1}\{A(B - A^{-1})\} = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

ஆனல் $A^{-1}\ \{A(B-A^{-1})\} = A^{-1}A(B-A^{-1})$ ... தொடர்பு விதி

$= I(B-A^{-1})$

$= B-A^{-1}$

$\therefore\ B-A^{-1}=0$

அதாவது $B = A^{-1}$

இதேவிதமாக, $BA = I$ ஆனல்,

$(B-A^{-1})A = BA - A^{-1}A = I - I = 0$

$\therefore\ (B-A^{-1})AA^{-1} = 0.\ A^{-1} = 0$

அதாவது $B - A^{-1} = 0$

$\therefore\ B = A^{-1}$

4·11. அணிகளை வகுத்தல் :

A என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு n-சதுர அணியாகவும், B என்பது ஓர் ஒழுங்கு n-சதுர அணியாகவும் இருந்தால் $A=BX$ என இருக்கும்படி ஒரே ஒரு n-சதுர அணி X தான் உண்டு. அதாவது $X = B^{-1}A$.

நிரூபணம் : $A = BX$ என்ற சமன்பாட்டில், $X = B^{-1}A$ என்று போடு.

அப்பொழுது $A = BB^{-1}A = IA = A$ என்பது பொருத்தமாக உள்ளது.

கூடுமானல், $X = C$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

அப்படியானல் $A = BC$

$\therefore\ A - BC = 0$

$\therefore\ BB^{-1}A - BC = 0$

$\therefore\ B(B^{-1}A - C) = 0,$

$\therefore\ B^{-1}\ \{B(B^{-1}A-C)\} = B^{-1}.\ 0 = 0$

$$\therefore \quad B^{-1}B(B^{-1}A-C) = 0 \ldots\ldots \text{தொடர்பு விதி}$$

$$B^{-1}A - C = 0$$

அதாவது $\quad B^{-1}A = C$

இதே விதமாக, $A = YB$ என இருக்கும் வண்ணம் ஒரே ஒரு சதுர அணி, $Y = AB^{-1}$ தான் உண்டு என நிரூபிக்கலாம்.

$B^{-1}A$ என்பதை A ஐ B ஆல் முன் வகுத்தல் என்றும்; AB^{-1} என்பதை A ஐ B ஆல் பின் வகுத்தல் என்றும் வரையறை செய்வோம். B ஓர் ஒழுங்கு அணியாக இருந்தால்தான் இந்த வரையறை பொருள் உள்ளதாகும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A ஐ B ஆல் முன் வகுத்தால்,

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

என்ற அணி கிடைக்கும்.

ஆனுல் A ஐ B ஆல் பின் வகுத்தால்,

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

என்ற அணி கிடைக்கும்.

4·12. **கோட் தேற்றம் :** A ஒரு $m \times n$ அணியாகவும், B ஓர் ஒழுங்கு m-சதுர அணியாகவும் இருக்கட்டும் $A = BX$ ஆனுல் $X = B^{-1}A$ என்ற ஒரே அணியாகத்தான் இருக்க முடியும்.

A ஒரு $m \times n$ அணி, B ஒரு $m \times m$ அணி.

$\therefore$ X ஒரு $m \times n$ அணி ஆதல் வேண்டும். ... ... (1)

B^{-1} ஒரு $m \times m$ அணி, A ஒரு $m \times n$ அணி.

$\therefore$ B^{-1} ஒரு $m \times n$ அணி ... ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $X = B^{-1}A$ ஆக இருக்க முடியும்.

மேலும், $BX = B \cdot B^{-1}A = A$

இப்பொழுது கூடுமானால் $A = BC$ ஆகவும் இருக்கட்டும். C ஒரு $m \times n$ அணி ஆக,ந்தான் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad A - BC = 0$

$\therefore \quad BB^{-1}A - BC = 0$

$\therefore \quad B(B^{-1}A - C) = 0$

$\therefore \quad B^{-1}\{B(B^{-1}A - C)\} = B^{-1} . 0 = 0$

$\therefore \quad B^{-1}B(B^{-1}A - C) = 0$ ... ... தொடர்பு விதி

$B^{-1}A - C = 0$

அதாவது, $B^{-1} = C$

இதே விதமாக, A ஒரு $m \times n$ அணியாகவும், B ஓர் ஒழுங்கு n-சதுர அணியாகவும் இருந்தால் $A = YB$ என இருக்கும் வண்ணம் ஒரே ஒரு $m \times n$ அணி $Y = AB^{-1}$ தான் உண்டு.

4·13. A என்பது ஓர் ஒழுங்கு அணியாகவும், $AB = 0$ ஆகவும் இருந்தால் $B = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

நிருபணம் : $AB = 0$ ... ... கொள்கை

$\therefore \quad A^{-1}(AB) = A^{-1} . 0 = 0$

(A ஒழுங்கு அணி ஆதலின் A^{-1} இருக்கிறது.)

$\therefore \quad (A^{-1}A)B = 0$ ... ... தொடர்பு விதி

$\therefore \quad B = 0.$

இதே விதமாக, B என்பது ஓர் ஒழுங்கு அணியாகவும், $AB = 0$ ஆகவும் இருப்பதால், $A = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும் என நிரூபிக்கலாம்.

மேலும், A என்பது ஓர் ஒழுங்கு அணியாகவும், $AB = AC$ அல்லது $BA = CA$ ஆகவும் இருந்தால் $B = C$ என நிரூபிக்கலாம்.

ஏனெனில் $AB = AC$ ஆனுல்

$$A(B-C) = 0$$

$$\therefore \; B - C = 0$$

$$\therefore \; B = C$$

2·12, 2·13-ஐ ஒப்பிட்டுப் பார்.

உதாரணம் 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ ஆனுல், சேர்ப்பு A ஐயும், A^{-1} ஐயும் கண்டுபிடி.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\therefore \text{ சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{-3} & \frac{1}{-3} & \frac{0}{-3} \\ \frac{0}{-3} & \frac{3}{-3} & \frac{-3}{-3} \\ \frac{1}{-3} & \frac{-5}{-3} & \frac{3}{-3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \text{ ஆனால்}$$

சேர்ப்பு A ஐயும், A^{-1} ஐயும் கண்டுபிடி.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & -\sin\alpha \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha.$$

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, $|A| = 1$.

$$A^{-1} = \left[\frac{A_{ji}}{|A|}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

4·14. $AB = AC$ ஆகவும், $|A| \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால் $B = C$ என நிருபித்துள்ளோம்.

இதை உபயோகித்துக் கீழ்க்கண்ட தேற்றங்களை எளிதாக நிருபிக்கலாம்.

(i) சேர்ப்பு (AB) = சேர்ப்பு B . சேர்ப்பு A

(ii) சேர்ப்பு (A') = (சேர்ப்பு $A)'$

(iii) சேர்ப்பு (A^*) = (சேர்ப்பு $A)^*$

நிருபணம்: (1) (4·2)-ல் இருந்து

(AB) . சேர்ப்பு $(AB) = |AB|\, I$ = சேர்ப்பு (AB) . (AB) ... (1)

இப்பொழுது, AB . (சேர்ப்பு B . சேர்ப்பு A)

$= A$ (B . சேர்ப்பு B) . சேர்ப்பு A ... தொடர்பு விதி

$= A \,.\, |B|\, I$. சேர்ப்பு A

$= |B|$ (A . சேர்ப்பு A)

$= |B| \,.\, |A|\, I$

$= |AB|\, I \ldots (2) \qquad \because \; |AB| = |A| \,.\, |B|$

(1), (2)-ல் இருந்து

AB . சேர்ப்பு $(AB) = AB$, (சேர்ப்பு B . சேர்ப்பு A)

இதேவிதமாக,

சேர்ப்பு $(AB) \,.\, AB =$ சேர்ப்பு B . சேர்ப்பு $A \,.\, AB$ என நிருபிக்கலாம்.

$\therefore$ சேர்ப்பு $(AB) =$ சேர்ப்பு B . சேர்ப்பு A .

(ii) A . சேர்ப்பு $A = |A|\, I$ ..... (4·2)

$\therefore \; A'$. சேர்ப்பு $A' = |A'|\, I$

ஆனால் $|A'| = |A|$

$\therefore \; A'$. சேர்ப்பு $A' = |A|\, I$ ... ... (1)

மேலும் சேர்ப்பு $A \,.\, A = |A|\, I$

$\therefore$ (சேர்ப்பு $A \,.\, A)' = (|A|\, I)'$

$\therefore \; A'$. (சேர்ப்பு $A)' = |A|\, I'$

ஆனால் $I' = I$

$\therefore \; A'$ (சேர்ப்பு $A)' = |A|\, I$ ... ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து

சேர்ப்பு $A' =$ (சேர்ப்பு $A)'$

(iii) A^* . சேர்ப்பு $A^* = |A^*|\, I =$ சேர்ப்பு $A^* \,.\, A^*$

மேலும், A . சேர்ப்பு $A = |A|\, I$

$\therefore$ (A சேர்ப்பு $A)^* = (|A|\, I)^*$

(சேர்ப்பு $A)^* \,.\, A^* = |A| \,.\, I^*$

ஆனால் $I^* = I$.

$\therefore$ (சேர்ப்பு $A)^* A^* = |A| I$ ... ... (2)

ஆனால் (சேர்ப்புA^*) . $A^* = |A| I$ ...... (1)-ல் இருந்து.

ஏனெனில் $|A^*| = |A|$

$\therefore$ (சேர்ப்பு $A)^*$ = சேர்ப்பு A^* .

(iv) A என்பது ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி ஆனால், (சேர்ப்பு A) உம் ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

நிரூபணம் : (சேர்ப்பு $A)^*$ = சேர்ப்பு (A^*) ...... (iii)

= சேர்ப்பு A $\because$ A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி

$\therefore$ சேர்ப்பு A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

கிளைத்தேற்றம் : A ஓர் ஒழுங்கு ஹெர்மிஷன் அணியானல் A^{-1} உம் ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியாக இருக்கவேண்டும்.

நிரூபணம் : சேர்ப்பு A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி

$\therefore$ $\frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$ உம் ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி.

4·15. இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலனின் நேரெதிர் அணியானது அவற்றின் நேரெதிர் அணிகளின் முன்பின்னுக்கிய பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம். அதாவது, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

வரையறையின்படி, $(AB)^{-1} . (AB) = (AB) . (AB)^{-1}$

$= I$ ... ... (1)

இப்பொழுது, $(B^{-1} A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B$...தொடர்பு விதி

$= B^{-1}IB$

$= B^{-1}B = I$ ... ... (2)

மேலும் $(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A . (BB^{-1}) . A^{-1}$... ... ... தொடர்பு விதி

$= A . I . A^{-1}$

$= AA^{-1} = I$ ... (3)

$\therefore\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆக இருக்கவேண்டும் என்பது (1), (2), (3)-களில் இருந்து தெளிவாகத் தெரிகிறது. ஏனெனில், ஒரே ஒரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

உதாரணம்: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ஆனால் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

என்பதைச் சரிபார்க்க.

$$AB = C = \begin{bmatrix} -3+10-18 & 6-16+30 & 3-12+24 \\ -1+5-6 & 2-8+10 & 1-6+8 \\ -2+10-15 & 4-16+25 & 2-12+20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -11 & 20 & 15 \\ -2 & 4 & 3 \\ -7 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 1$; $C_{12} = -1$; $C_{13} = 2$

$C_{21} = -5$; $C_{22} = -5$; $C_{23} = 3$

$C_{31} = 0$; $C_{32} = 3$; $C_{33} = -4$

$$\therefore \text{ சேர்ப்பு } C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$|C| = 1$

$$\therefore \quad \frac{\text{சேர்ப்பு } C}{|C|} = C^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = (AB)^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது

$$B_{11} = -2; \quad B_{12} = -2; \quad B_{13} = 1$$

$$B_{21} = -3; \quad B_{22} = -1; \quad B_{23} = -1$$

$$B_{31} = -4; \quad B_{32} = -1; \quad B_{33} = -2$$

$$\therefore \quad \text{சேர்ப்பு } B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } B}{|B|} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = -1; \quad A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 2; \quad A_{22} = 3; \quad A_{23} = -2$$

$$A_{31} = -2; \quad A_{32} = 0; \quad A_{33} = 1$$

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -2+3+0 & -4-9+8 & 4+0-4 \\ -2+1+0 & -4-3+2 & 4-0-1 \\ 1+1+0 & 2-3+4 & -2+0-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = (AB)^{-1} \ldots\ (1)\text{-ல் இருந்து}$$

4·16. A என்ற ஒழுங்கு அணியினுடைய திருப்பு அணியின் நேரெதிர் அணியானது, அதன் நேரெதிர் அணியின் திருப்பு அணிக்குச் சமம்.

அதாவது, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

நிரூபணம் : A ஓர் ஒழுங்கு அணி......கொள்கை.

$\therefore\ |A| \neq 0.$

$\therefore\ AA^{-1} = A^{-1}A = I$ என்பதற்கிணங்க A^{-1} உள்ளது.

$\therefore\ (AA^{-1})' = (A^{-1}A)' = I'$

$\therefore\ (A^{-1})' \cdot A' = A' \cdot (A^{-1})' = I \qquad (\because\ I' = I)$

இதிலிருந்து $(A^{-1})'$ ஆனது A'-ன் நேரெதிர் அணி எனத் தெரிகிறது. அதாவது,

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

வேறு முறை : $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

இப்பொழுது $A^{-1} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$ ... ... (4·9)

$$\therefore \quad (A^{-1})' = \left[\frac{A_{ij}}{|A|}\right]$$

மேலும் $A' = [a_{ji}]$.

$$\therefore \quad A'.(A^{-1})' = [a_{ji}] \cdot \left[\frac{A_{ij}}{|A|}\right]$$

$$= I \quad (\because \ \Sigma a_{ji} A_{ij} = |A| \,; \quad \Sigma a_{ji} A_{ik} = 0$$

$$\therefore \quad (A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

4·17. A என்ற ஒழுங்கு அணியினுடைய, திருப்பு இணை அணியின் நேரெதிர் அணியானது, அதன் நேரெதிர் அணியின் திருப்பு இணை அணிக்குச் சமம்.

அதாவது, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

நிருபணம்: A ஓர் ஒழுங்கு அணி ... ... (கொள்கை)

$\therefore \quad |A| \neq 0$

$\therefore \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I$ என்பதற்கிணங்க A^{-1} உள்ளது.

$\therefore \quad (AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^*$

$\therefore \quad (A^{-1})^* A^* = A^* \cdot (A^{-1})^* = I \qquad (\because \ I^* = I)$

$\therefore \quad (A^{-1})^*$ ஆனது A^*-ன் நேரெதிர் அணி.

அதாவது $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

4·18. $A^{-1} = \frac{[A_{ji}]}{|A|}$ என்ற வரையறை ஏன் ?

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

என்று இருக்கட்டும்.

$X = AY$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$(1) \times A_{11} + (2) \times A_{21}$:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{21} x_2 &= a_{11} A_{11} y_1 + a_{12} A_{11} y_2 \\ &\quad + a_{21} A_{21} y_1 + a_{22} A_{21} y_2 \\ &= y_1 (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21}) \\ &\quad + y_2 (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21}) \\ &= y_1 \mid A \mid + y_2 . 0 \\ &= \mid A \mid y_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{A_{11}}{|A|} x_1 + \frac{A_{21}}{|A|} \cdot x_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதேவிதமாக, $(1) \times A_{12} + (2) \times A_{22}$-ல் இருந்து

$$y_2 = \frac{A_{12}}{|A|} \cdot x_1 + \frac{A_{22}}{|A|} \cdot x_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்று கிடைக்கும்.

(3), (4) என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

அதாவது,

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{bmatrix} X$$

என எழுதலாம்.

ஆனால் $X = AY$ ஆனதால்,

$A^{-1} X = Y$ என்பது பொருந்தும்.

ஆகவே A^{-1}ஐ $\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{bmatrix}$ என வரையறை செய்வது பொருத்தமானதாகும்.

2·21 ஐயும், 2·22 ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்.

4·19. இயல் கணித சமன்பாடுகளை விடுவிடுப்பதன் மூலம் நேரெதிர் அணியைக் கண்டுபிடித்தல்.

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற மாறிகளில் உள்ள n-சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}\, x_n = b_n$$

இவற்றை அணிகள் வடிவில் பின்வருமாறு எழுத இயலும்

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

அதாவது, $AX = B$ ... ... (1)

இதில் $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & & \ldots\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

(1)-ஐ A^{-1} ஆல் பெருக்கினால் ($|A| \neq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.)

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

அதாவது, $X = A^{-1} B$ ... ... (2)

என்று கிடைக்கும். இதிலிருந்து A^{-1}-ஐக் கண்டு பிடித்து விடலாம்.

உதாரணம் 1 :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \text{ ஆனால்,}$$

A^{-1} ஐக் கண்டுபிடி.

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = b_1$ ... ... (1)

$-x_1 + 3x_2 = b_2$ ... ... (2)

$-2x_2 + x_3 = b_3$ ... ... (3)

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(1) + (2) $\quad 5x_2 - 2x_3 = b_1 + b_2$ ... (4)

2 × (3) $\quad -4x_2 + 2x_3 = 2b_3$ ... ... (5)

(4) + (5) $\quad x_2 = b_1 + b_2 + 2b_3$

(3)-ல் இருந்து ... $x_3 = 2b_1 + 2b_2 + 5b_3$

(2)-ல் இருந்து $\quad x_1 = 3b_1 + 2b_2 + 6b_3$

இவற்றை, முறைப்படி எழுதினல்,

$$x_1 = 3b_1 + 2b_2 + 6b_3$$

$$x_2 = b_1 + b_2 + 2b_3$$

$$x_3 = 2b_1 + 2b_2 + 5b_3$$

என்று கிடைக்கும். இவற்றை அணி வடிவில்

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

என எழுதலாம். அதாவது,

$$X = A^{-1}B$$

$$\therefore \; A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2 :

$$x + 3y - z = 4 \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$2x + 2y + 5z = 21 \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$y + 4z = 14 \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

இந்தச் சமன்பாடுகளின் குணகங்கள் அணியின் நேரெதிர் அணியைக் கண்டுபிடிப்பதன் மூலம் இந்தச் சமன்பாடுகளை விடுவி.

$$\text{குணகங்கள் அணி } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1), (2), (3) ஐ அணி வடிவில் எழுதினல்

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \\ 14 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $A \cdot X = B$ என இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad X = A^{-1}B.$

இப்பொழுது $A_{11} = 3; \quad A_{12} = -8; \quad A_{13} = 2$

$A_{21} = -13; \quad A_{22} = 4; \quad A_{23} = -1$

$A_{31} = 17; \quad A_{32} = -7; \quad A_{33} = -4$

$|A| = 1 \times 3 + 3 \times (-8) + (-1) \times 2$

$= -23.$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-23} & \frac{13}{23} & \frac{-17}{23} \\ \frac{8}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{1}{23} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

(5)-ல் இருந்து $X = A^{-1}B$.

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-23} & \frac{13}{23} & \frac{-17}{23} \\ \frac{8}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-1}{23} & \frac{4}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{23}(-3 \times 4 + 13 \times 21 - 17 \times 14) = 1$$

$$y = \frac{1}{23}(8 \times 4 - 4 \times 21 + 7 \times 14) = 2$$

$$z = \frac{1}{23}(-2 \times 4 + 1 \times 21 + 4 \times 14) = 3$$

4·20 : $|A| = 0$ ஆனுல் A . சேர்ப்பு A = பூச்சிய அணி.

நிரூபணம் : சேர்ப்பு $A = [A_{ji}]$

$\therefore$ A . சேர்ப்பு A-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot A_{jr}$$

$$= a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots\ldots + a_{in} \cdot A_{jn}$$

$$= \begin{cases} |A| & i = j \text{ ஆக இருந்தால்,} \\ 0 & i \neq j \text{ ஆக இருந்தால்.} \end{cases}$$

$$\therefore A \text{ சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{bmatrix}$$

ஆனுல் $|A| = 0$ ... ... (கொள்கை)

$\therefore$ A சேர்ப்பு A = பூச்சிய அணி.

4·21 : அணிகளின் சில அடுக்கு விதிகள் :

$A^{-n} = (A^n)^{-1}$ என வரையறை செய்வோம்.

(i) $A^{-n} = (A^{-1})^n$ என நிரூபிப்போம்.

(ii) $A^m \cdot A^{-n} = A^{m-n}$

நிரூபணம் :

$$(A^n)^{-1} = (A \cdot A \cdot A \ \ldots \ldots n \text{ தடவை})^{-1}$$

$$= A^{-1} \cdot A^{-1} \ \ldots \ldots n \text{ தடவை}$$

$$= (A^{-1})^n$$

ஆனுல் $A^{-n} = (A^n)^{-1}$ (வரையறை).

$\therefore$ $A^{-n} = (A^{-1})^n$

(ii) $A^m \cdot A^{-n} = A^{m-n}$

முதலாம் வகை : $m > n$ ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ $m = n + k$ என இருக்கும்படி k என்ற நேர் முழு எண் உண்டு.

இப்பொழுது,

$A^m . A^{-n} = A^{k+n} . A^{-n}$

$= A^k . A^n . A^{-n}$ ... ... தொடர்பு விதி.

$= A^k . A^n . (A^n)^{-1}$ ... வரையறை.

$= A^k . I$

$= A^k$

$= A^{m-n}$

$\therefore$ $A^m . A^{-n} = A^{m-n}$.

இரண்டாம் வகை : $m < n$ ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ $n = m + k$ என இருக்கும்படி k என்ற நேர் முழு எண் உண்டு.

இப்பொழுது, $A^m . A^{-n} = A^m . (A^{-1})^n$

$= A^m . (A^{-1})^{m+k}$

$= A^m . (A^{-1})^m (A^{-1})^k$...தொடர்பு விதி

$= A^m . A^{-m} . A^{-k}$ .... வரையறை

$= I . A^{-k}$ ... .. (i)-ல் இருந்து

$= A^{-k}$

$\therefore$ $A^m . A^{-n} = A^{m-n}$

மூன்றும் வகை : $m = n$ ஆக இருக்கட்டும்.

$A^m . A^{-n} = A^n . A^{-n} = I$ ... .. (i)-ல் இருந்து

$\therefore$ $A^{n-n} = I$ ... ... எனச் சொல்வது,

அதாவது $A^0 = I$ என வரையறை செய்வது பொருத்த மானது என்பதைக் காண்க. 2·16ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : A என்பது 2-சதுர அணியானுல்,

சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= A$ என நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

P, Q, R, S என்பன p, q, r, s-ன் இணைக் காரணிகளாக (co-factors) இருக்கட்டும். அப்படியானுல்,

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு } A) = \begin{bmatrix} p & -(-q) \\ -(-r) & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = A.$$

$\therefore$ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= A$.

மாதிரி 2 : ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணியும் மூலைவிட்ட அணியாக இருக்க வேண்டும்.

(சேர்ப்பு A)-ன் $(i-j)$ ஆவது உறுப்பு A_{ji} ஆகும்.

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் $i \neq j$ ஆனுல் $A_{ji} = 0$.

மேலும், $i = j$ ஆனுல்,

$A_{ii} = |$ மூலைவிட்ட அணி $(d_1 d_2 \ldots d_{i-1} \cdot d_{i+1} \ldots d_n)\ |$

$= d_1 d_2 \ldots d_{i-1}\, d_{i+1} \ldots d_n$. இதில் $d_r = a_{rr}$

$\therefore$ சேர்ப்பு A உம் ஒரு மூலைவிட்ட அணி.

வேறுமுறை :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

இதற்கியைந்த இயற் கணித சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$d_1x_1 \qquad = b_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$d_2x_2 \qquad = b_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$d_nx_n = b_n \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (n)$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{d_1} b_1$$

$$x_2 = \frac{1}{d_2} \cdot b_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$x_n = \frac{1}{d_n} b_n$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ldots \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|}$$

$$\therefore \quad \text{சேர்ப்பு } A = |A| \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

ஆனல் $|A| = d_1 d_2 \ldots\ldots d_n$

$$\therefore \text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} (d_2 d_3 \ldots d_n) & 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 0 \\ 0 & (d_1 d_3 \ldots d_n) \ldots \ldots \ldots \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (d_1 d_3 \ldots d_{n-1}) \end{bmatrix}$$

என்பதும் ஒரு மூலைவிட்ட அணி.

மாதிரி 3: பூச்சிய அணிகள் அல்லாத இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலன் பூச்சிய அணியானல் அவை ஒழுங்கு அணிகள் அல்ல என நிரூபி.

$A \neq 0$; $B \neq 0$; ஆனல், $AB = 0$ ... (கொள்கை)

$|A| = 0$, $|B| = 0$ என நிரூபி.

நிரூபணம்: கூடுமானல், $|A| \neq 0$ என வைத்துக் கொள்வோம். அப்படியானல் A^{-1} என்ற அணி இருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது $AB = 0$ ... (கொள்கை)

$\therefore \quad A^{-1}AB = A^{-1}.0 = 0$

$IB = 0$, அதாவது $B = 0$

இது கொள்கைக்கு முரணனது.

$\therefore \quad |A| = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

இதேவிதமாக $|B| = 0$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரி 4: A, B என்பன சமச்சீர் அணிகளாகவும், பரிமாற்று அணிகளாகவும் இருந்தால் $A^{-1}B$, AB^{-1}, $A^{-1}B^{-1}$ என்பனவும் சமச்சீர் அணிகள் என நிரூபி.

$A = A'$; $B = B'$; $AB = BA$ ... ... (கொள்கை)

(i) $(A^{-1}B)' = A^{-1}B$

(ii) $(AB^{-1})' = AB^{-1}$

(iii) $(A^{-1}B^{-1})' = A^{-1}B^{-1}$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

(i) $(A^{-1}B)' = B'.(A^{-1})'$ ... ... (3.3)

$= B'.(A')^{-1}$ ... ... (4·16)-இலிருந்து

$= B.(A)^{-1}$ $\because$ இவை சமச்சீர் அணிகள்

$= B.A^{-1}B^{-1}B$

$= B.(BA)^{-1}B$

$= B\cdot(AB)^{-1}B$ ... ...

$\because$ A, B பரிமாற்று அணிகள்

$= BB^{-1}.A^{-1}B$

$= A^{-1}B$ $\because$ $BB^{-1} = I$

(ii) உங்கள் பயிற்சிக்காக.

(iii) $(A^{-1}B^{-1})' = (B^{-1})'.(A^{-1})'$ ... ... (3·3)

$= (B')^{-1}.(A')^{-1}$ ... ... (4.16)

$= B^{-1}.A^{-1}$ ... ... $\because$ இவை சமச்சீர் அணிகள்

$= (AB)^{-1}$

$= (BA)^{-1}$ $\therefore$ இவை பரிமாற்று அணிகள்

$= A^{-1}B^{-1}$

மாதிரி 5: A ஓர் ஒழுங்கு அணியானால், $A^{-1} = (A'A)^{-1}A'$ என்று காண்பி.

நிரூபணம்: $(A'A)^{-1}A' = A^{-1}.(A')^{-1}.A'$

$= A^{-1}.(A^{-1})'.A'$

$= A^{-1}(AA^{-1})'$

$= A^{-1}I'$

$= A^{-1}I = A^{-1}$

$\therefore \quad A^{-1} = (A'A)^{-1}A'.$

மாதிரி 6 : A, B பரிமாற்று அணிகளாக இருந்தால், A^{-1} உம், B^{-1} உம் பரிமாற்று அணிகள் என நிறுபி.

$AB = BA$ ...... (கொள்கை)

$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என நிருபிக்கவேண்டும்.

நிருபணம் : $AB = BA$ ...... (கொள்கை)

$\therefore \quad (AB)^{-1} = (BA)^{-1}$

$\therefore \quad B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

மாதிரி 7 :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

என நிருபி.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = -\left(-\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$A_{21} = -\tan\frac{\theta}{2}; \quad A_{22} = 1$$

$$|A| = 1 - \left(-\tan^2\frac{\theta}{2}\right) = \sec^2\frac{\theta}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix} = \cos^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}1 & -\tan\frac{\theta}{2}\\ \tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -\tan\frac{\theta}{2}\\ \tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

மாதிரி 9: P, Q என்னும் அணிகள் $|P| = 1 = |Q|$ என்பதற்கிணங்க உள்ளன. $A =$ சேர்ப்பு B ஆனால் $PAQ =$ சேர்ப்பு $(Q^{-1}BP^{-1})$ என நிருபி.

B . சேர்ப்பு $B = |B|\,I$ ... ... (4·2)

ஆனால் $A =$ சேர்ப்பு B ... ... (கொள்கை)

$\therefore\ BA = |B|\,I$ ... ... (1)

$PAQ =$ சேர்ப்பு $(Q^{-1}BP^{-1})$ என நிருபிக்கவேண்டும்.

$\therefore\ (Q^{-1}BP^{-1})(PAQ) = |Q^{-1}BP^{-1}|\,I$ என நிருபித்தால் போதுமானது. ... ... (2)

இப்பொழுது $(Q^{-1}BP^{-1})(PAQ) = Q^{-1}B(P^{-1}P)AQ$...தொடர்பு விதி

$$= Q^{-1}BIAQ$$

$$= Q^{-1}(BA)Q$$

$$= Q^{-1}\ |B|\ IQ \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(1)-ல் இருந்து}$$

$$(Q^{-1}BP^{-1})(PAQ) = |B|\ I \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

மேலும் $|Q^{-1}BP^{-1}|\ I = |Q^{-1}|\ .\ |B|\ .\ |P^{-1}|\ .\ I$

$$= 1 \times |B| \times 1 \times I \quad \ldots \quad (4)$$

ஏனெனில் $QQ^{-1} = I$

$\therefore\ |QQ^{-1}| = 1$

$\therefore\ |Q|\ .\ |Q^{-1}| = 1$

$\therefore\ |Q^{-1}| = 1 \qquad \because\ |Q| = 1$ ... (கொள்கை)

இதேவிதமாக $|P^{-1}| = 1$.

(3), (4)-ல் இருந்து $(Q^{-1}BP^{-1})(PAQ) = |Q^{-1}BP^{-1}|\ I$

$\therefore\ PAQ =$ சேர்ப்பு $(Q^{-1}BP^{-1})$.

மாதிரி 10: A ஒரு சமச்சீர் அணி; B ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி; $A+B$ ஓர் ஒழுங்கு அணி; மேலும் $C = (A+B)^{-1}(A-B)$. ஆனால் பின் வருவனவற்றை நிருபி.

(i) $C'(A+B)\ .\ C = A+B$

(ii) $C'(A-B)\ C = A-B$

(iii) $C'AC = A$

(i) $C = (A+B)^{-1}\ .\ (A-B)$ ... ... (கொள்கை)

$$\therefore\ C' = [(A+B)^{-1}(A-B)]'$$

$$= (A-B)'\ [(A+B)^{-1}]'$$

$$= (A-B)'\ [(A+B)']^{-1}$$

$$= (A'-B')\ [A'+B']^{-1}$$

$$= (A+B)\ [A-B]^{-1}$$

$$\therefore\ C'(A+B)\cdot C=(A+B)(A-B)^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}(A-B)$$
$$=(A+B)(A-B)^{-1}I(A-B).$$
$$=(A+B)(A-B)^{-1}(A-B)$$
$$=(A+B)I$$
$$=(A+B)$$

$\therefore\ C'(A+B)\cdot C = A+B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

(ii) இதேவிதமாக $C'(A-B)C = A-B \quad \ldots \quad (2)$

(iii) (1)ஐயும் (2)ஐயும் கூட்ட

$C'\,2AC = 2A$

$\therefore\ C'AC = A$

மாதிரி 11 : c என்பது $(1, 1, \ldots 1)$ என்பவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரல் அணியாகவும், c' என்பது அதன் திருப்பு அணியான நிரை அணியாகவும் இருக்கட்டும்.

A என்பது n-சதுர அணி, $M(x) = I+xAcc'$ என இருக்கட்டும். x ஓர் எண்ணி (scalar).

(i) $k = c'Ac$ என்ற எண்ணியானால் $M(x)\cdot M(y) = M(x+y+kxy)$ என நிருபி.

(ii) $M(x)$-ன் நேரெதிர் அணி $M\left(\dfrac{-x}{1+kx}\right)$ என நிருபி.

(iii) $b_{ii}=1$ ஆகவும். $i \neq j$ ஆனால் $b_{ij}=b$ ஆகவும் உள்ள $B=[b_{ij}]$ என்னும் அணியை $(1-b)I+bcc'$ என எழுதலாம் என நிருபி. இதிலிருந்து B^{-1} ஐக் கண்டுபிடி.

நிருபணம்:

(i) $M(x), M(y)=(I+xAcc')(I+y\cdot Acc')$
$$= I+(x+y)Acc' + xyAcc'Acc'$$
$$= I+(x+y)Acc' + xy\,A\,c\,k\,c'$$
$$\because\ c'Ac = k.$$
$$= I+(x+y)Acc' + kxy\,Acc'$$

$$= I + (x + y + kxy)\, Acc'$$
$$= M\,(x + y + kxy).$$

(ii) $x+y+kxy=0$ என்று போடு. அதாவது, $y = \dfrac{-x}{1+kx}$ என்று போட்டால்,

$M(x)\,.\,M\left(\dfrac{-x}{1+kx}\right) = M(0) = I$ என்று கிடைக்கிறது,

எனவே $M\left(\dfrac{-x}{1+kx}\right) = [M(x)]^{-1}$ என்று தெரிகிறது.

(iii)
$$B = \begin{bmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ b & 1 & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\overline{1-b}+b) & 0+b & 0+b & \dots & 0+b \\ 0+b & (\overline{1-b}+b) & 0+b & \dots & 0+b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+b & 0+b & \dots & \dots & (\overline{1-b}+b) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b & \dots & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & b \end{bmatrix}$$

$= (1-b)\,I + b\,c\,c'$

$$c\,c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} [1 \;\; 1 \;\; \dots \;\; 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, $B = (1-b)\left[I + \frac{b}{1-b}\cdot cc'\right]$

$$\therefore\quad B^{-1} = \left[I + \frac{b}{1-b}\cdot cc'\right]^{-1}(1-b)^{-1}$$

$$= [M(x)]^{-1}(1-b)^{-1}$$

இதில் $x = \frac{b}{1-b}$; $A = I$; $k = c'Ic = n$.

$$= \left[I - \frac{\frac{b}{1-b}}{1 + \frac{n\cdot b}{1-b}}\cdot cc'\right](1-b)^{-1}.$$

$$B^{-1} = \left[I - \frac{b}{1+(n-1)b}\right](1-b)^{-1}$$

மாதிரி 14 : ஒரு சமச்சீர் அணியின் நேரெதிர் அணியும் சமச்சீர் அணி என நிரூபி. உதாரணம் கொடு.

நிரூபணம் : A ஒரு சமச்சீர் அணியாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore\quad A = A' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$(A^{-1}) = (A^{-1})'$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$AA^{-1} = I$ ... வரையறையின்படி.

$$\therefore\quad (AA^{-1})' = I'$$

$$(A^{-1})'\cdot A' = I \qquad \because\ I' = I$$

$$\therefore\quad (A^{-1})'\cdot A = I \qquad \because\ A' = A \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore\quad A^{-1} = (A^{-1})'.$$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ஆனால்,

$A_{11} = 1; \quad A_{12} = -1; \quad A_{13} = -1$

$A_{21} = -1; \quad A_{22} = 3; \quad A_{23} = -1$

$A_{31} = -1; \quad A_{32} = -1; \quad A_{33} = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ஆனல் $|A| = 2$.

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = (A^{-1})'.$$

மாதிரி 15 : ஓர் எதிர்ச்சீர் அணியின் தரம் இரட்டை எண்ணுக (even number) இருந்தால்தான் அதற்கு நேரெதிர் அணி உண்டு என்றும், அதுவும் எதிர்ச்சீர் அணியாக இருக்கும் என்றும் நிரூபி.

A ஒரு n-சதுர எதிர்ச்சீர் அணியாக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad A = -A'$

$\therefore \quad |A| = (-1)^n \cdot |A'| = (-1)^n \cdot |A|$

n ஒற்றை எண் (odd number) ஆக இருந்தால்

$|A| = -|A|$

$\therefore \quad |A| = 0$ ஆகிவிடும்.

$\therefore$ A ஒழுங்கு அணி அல்ல. A^{-1} என்பது அர்த்தமற்றது.

ஆகவே, n இரட்டை எண்ணுக இருந்தால்தான் அதற்கு நேரெதிர் அணி உண்டு.

மேலும், $AA^{-1} = I$,

$\therefore \quad (A^{-1})' A' = I'$

$(A^{-1})' \cdot (-A) = I \qquad \because\ I' = I;\ A' = -A$

$\therefore$ A-ன் நேரெதிர் அணி $-(A^{-1})'$.

அதாவது, $A^{-1} = -(A^{-1})'$.

$\therefore$ A^{-1} ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

உதாரணம் : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர்ச்சீர் அணியானால்

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர்ச்சீர் அணியாகும் என்பதைச் சரிபார்.

பயிற்சி 4

1. பின்வரும் அணிகளின் சேர்ப்பு அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆனுல்,

சேர்ப்பு $A = 3A'$ எனக் காண்பி.

3. $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ஆனுல்,

சேர்ப்பு $A = A$ எனக் காண்பி.

4. A ஒரு சமச்சீர் அணியானுல் சேர்ப்பு A-உம் ஒரு சமச்சீர் அணி எனக் காண்பி.

5. A ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியானுல் சேர்ப்பு A-உம் ஒரு ஹெர்மிஷன் அணி என நிரூபி.

6. ஓர் அளவை அணியின் சேர்ப்பு அணியும் ஓர் அளவை அணி என நிரூபி.

7. ஒரு மூலை விட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணியும் ஒரு மூலை விட்ட அணி என நிரூபி.

8. ஒரு முக்கோண அணியின் சேர்ப்பு அணியும் ஒரு முக்கோண அணி என நிரூபி.

9. A ஒரு n-சதுர எதிர்ச்சீர் அணியானுல், n ஒற்றையெண்ணுகவோ இரட்டையெண்ணுகவோ இருப்பதற்கேற்ப சேர்ப்பு A ஆனது சமச்சீர் அணியாகவோ எதிர்ச்சீர் அணியாகவோ இருக்கும்.

10. $|A| = 0$ ஆனுல் $|$சேர்ப்பு $A| = 0$ என நிரூபி.

11. A ஒரு 2-சதுர அணியானுல் சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= A$ என நிரூபி.

12. A ஒரு மூன்றும் தரமுள்ள பூச்சியமல்லாத அணி, சேர்ப்பு $A' = 0$ என்றவாறிருக்கிறது என்றுல் A ஐ எழுது.

13. A ஒரு n-சதுர அணியாகவும், k ஓர் எண்ணியாகவும் இருந்தால் $|Ak| = |A| \cdot k^n$ எனவும், சேர்ப்பு $(kA) = k^{n-1}$ (சேர்ப்பு A) எனவும் நிரூபி.

14. A ஒரு n-சதுர அணியாகுல் $|$ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $| = |A|^{(n-1)^2}$ என்று நிருபி.

15. பின்வரும் அணிகளின் நேர் மாருன (நேரெதிர்) அணிகளைக் கண்டுபிடி. பின்னர் $AA^{-1} = I$ எனவும் நிருபி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \sin\phi & \cos\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\phi & \cos\phi & -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

16. பின்வருவனவற்றில் Aஇன் நேர்மாருன அணியைக் கண்டுபிடித்து விடையைச் சரிபார்.

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகுல், $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ஆனுல், $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & -7 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -1 & -1 \\ -26 & 16 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ஆனுல், $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 & 4 \\ 8 & 6 & 14 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 4 \\ 14 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ஆனுல், $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ஆனுல்,

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

17. $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ என்பதைப் பின்வரும் அணிகளில் சரிபார்.

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

18. பின்வருவனவற்றை நிறுபி.

(i) $(-A)^{-1} = -(A)^{-1}$

(ii) $(\bar{A})' = (\overline{A^{-1}})$

(iii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

19. A உம் B உம் n-சதுர அணிகள். Aக்கு நேர்மாறு அணி உண்டானல்,

$$(A + B) . A^{-1} (A - B) = (A - B) . A^{-1} (A + B).$$

20. (a) $x_1 + 2x_2 = b_1$; $3x_2 = b_2$;

$2x_3 + x_4 = b_3$; $3x_4 = y_4$

என்னும் சமன்பாடுகளை அணி வடிவில் எழுது.

$$x_1 = b_1 - \frac{2}{3} b_2; \quad x_2 = \frac{b_2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{6} b_4; \quad x_4 = \frac{1}{3} b_4$$

என்று கண்டுபிடித்து, இவற்றையும் அணி வடிவில் எழுது.

இவற்றிலிருந்து,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(b) இதே முறையை உபயோகித்து, பின்வரும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. விடுவி (அணிகள் முறையில்) ;

(i) $x + 2y + 3z = 5$
$3x - y + z = 1$
$2x + y - z = 4$

(ii) $-x + y + 4z = 0$
$2x - y + z = 7$
$3x + 2y - z = 1.$

(iii) $2x - 3y + 3z = 9$
$x + y + z = 6$
$x - y + z = 2$

(iv) $9x + 7y + 3z = 6$
$5x - y + 4z = 1$
$6x + 8y + 2z = 4.$

22. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ஆனல்.

$A^3 = A^{-1}$ என நிறுவி.

23. A ஒரு n-சதுர அணியாகவும், B அதன் சேர்ப்பு அணியாகவும் இருந்தால் $|AB + kI| = (|A| + k)^n$ என நிறுவி.

குறிப்பு : k என்பது ஓர் எண்ணி (scalar).

24. A என்னும் அணி $A^2 - A + I = 0$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் A^{-1} இருக்கிறது என்றும் அதன் மதிப்பு $I - A$ என்றும் நிரூபி.

25. $|I + A| \neq 0$ ஆனால் $(I + A)^{-1}$ உம், $(I - A)$ உம் பரிமாற்று அணிகள் என நிரூபி.

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ஆனால் அதன் ஒரு வலது நேரெதிர் அணி (Right Inverse)யைக் கண்டுபிடி.

27. $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$-ஐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$-ன் இடது நேரெதிர் அணி (Left Inverse) யாக எழுது. a, b, c மாறிலிகள்.

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு இடது அல்லது வலது நேரெதிர் அணி கிடையாது எனக் காண்பி.

விடைகள்

1. (i) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 7 & -11 & -5 \\ 8 & -14 & -5 \\ 6 & -13 & -5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

15. (i) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (v) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

20. (b) (i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5. அணிகளைப் பாகுபடுத்தல்

5·1. அணிகளைப் பாகுபடுத்திக் கூட்டல் :

A, B என்ற அணிகள் ஒரே தரம் உள்ளவைகளாக $m \times n$ அணிகளாக இருக்கட்டும். இவற்றை ஒரே விதமாகப் பிரித்தால் தான் அவை கூட்ட இயைந்தவையாக இருக்கும். ஆதலால் A ஐ m_1 நிரைகளுக்குப் பின்னும், n_1, n_1+n_2 நிரல்களுக்குப் பின்னும் பிரித்தால் B ஐயும் அதேவிதமாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

A_{11}, B_{11} என்பவை	$m_1 \times n_1$	அணிகள்
A_{12}, B_{12} ,,	$m_1 \times n_2$	,,
A_{13}, B_{13} ,,	$m_1 \times n_3$	,,
A_{21}, B_{21} ,,	$m_2 \times n_1$	,,
A_{22}, B_{22} ,,	$m_2 \times n_2$	,,
A_{12}, B_{23} ,,	$m_3 \times n_3$	,,

$\therefore$ இவற்றுள் ஒவ்வொரு ஜோடியும் கூட்ட இயைந்தவை. $m_1 + m_2 = m$ ஆகவும், $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும் என்பது வெளிப்படை.

இப்பொழுது $A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} = C$$

உதாரணம் :

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right];$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{11}+B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = C_{11}$$

$$A_{12}+B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = C_{12}$$

$$A_{13}+B_{13} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = C_{13}$$

$$A_{21}+B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = C_{21}$$

$$A_{22}+B_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = C_{22}$$

$$A_{23}+B_{23} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = C_{23}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5·2. அணிகளைப் பாகுபடுத்திப் பெருக்கல் :

$A = [a_{ij}]$ என்ற $m \times n$ அணியாகவும்,

$B = [b_{ij}]$ என்ற $n \times p$ அணியாகவும் இருக்கட்டும்.

AB-ன் பெருக்கற் பலனைக் கணக்கிடும்போது, Aஐ m நிரை அணிகளாகவும், B ஐ n நிரல் அணிகளாகவும் பாகுபடுத்தித்தான் பெருக்கினோம்.

உதாரணம் :

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array}\right] ; \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} [C_1 \quad C_2]$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \\ R_3C_1 & R_3C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4+1 & 0+2+2 \\ 6+0+1 & 0+0+2 \\ 9+2+2 & 0+1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$$ என்ற 3×2 அணி.

ஆனால் இந்த ஒரே வழியில்தான் பாகுபடுத்தக் கூடும் எனக் கருத வேண்டாம். இதைப் பல்வேறு முறைகளில் பாகுபடுத்தலாம்.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} m_1 \times n_1 & m_1 \times n_2 & m_1 \times n_3 \\ \hline m_2 \times n_1 & m_2 \times n_2 & m_2 \times n_3 \end{array}\right]$$

$A = m \times n$ அணி $\quad \therefore \quad m = m_1 + m_2;$

$n = n_1 + n_2 + n_3$

$$B = \begin{bmatrix} n_1 \times p_1 & n_1 \times p_2 \\ n_2 \times p_1 & n_2 \times p_2 \\ n_3 \times p_1 & n_3 \times p_2 \end{bmatrix}$$

$B = n \times p$ அணி $\quad \therefore \quad n = n_1 + n_2 + n_3; \quad p = p_1 + p_2$

இவற்றை $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$ எனவும்,

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$ எனவும், முறையே

குறிப்பிடுவோம்.

அப்படியானால்,

$$AB=\begin{vmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=C$$

குறிப்பு: A, B ஐப் பாகுபடுத்தும்போது, ஒவ்வொரு பகுதியும் பெருக்குவதற்கு இயைந்ததாக இருக்கிறதா என்பதைக் கவனித்தல் வேண்டும். A ஐ நம் விருப்பம்போல் பிரிக்கலாம். ஆனால் B ஐ அதற்கு இயைந்தவாறு பிரித்தல் இன்றியமையாதது. நாம் எடுத்துக்கொண்ட உதாரணத்தில் A_{11}, A_{21} என்பன முறையே $m_1 \times n_1$ அணி, $m_2 \times n_1$ அணி. ஆகவே B_{11}, B_{12} என்பவைகளின் நிரைகள் n_1 ஆக இருக்கவேண்டும். p_1, p_2ஐ நம் விருப்பம் போல் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இதை மாதிரிக் கணக்குகள் மூலம் நன்ருகத் தெரிந்து கொள்க.

உதாரணம்:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

இதில் $A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A_{21}=[\,3 \quad 0\,]; \quad A_{22}=[\,1\,]$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{21}=[\,0 \quad 3 \quad 2\,]; \quad B_{22}=[\,1\,]$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left| \begin{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [3 \ 0 \ 3] + [0 \ 3 \ 2] & [0] + [1] \end{matrix} \right|$$

$$= \left| \begin{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [3 \ 3 \ 5] & [1] \end{matrix} \right|$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

5·3. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ஆனால் A^{-1}ஐக் கண்டுபிடி.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = B$ ஆக இருக்கட்டும்.

அப்படியானால் $AB = BA = I$.

இப்பொழுது,

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\therefore \ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I$ ... ... (1)

$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$ ... ... (2)

மேலும்,

$$BA = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad B_{21} A_{11} + B_{22} A_{21} = O \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$B_{21} A_{12} + B_{22} A_{22} = I \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$B_{22} = X^{-1}$ என வைத்துக்கொள்வோம். ... (5)

(2)-ல் இருந்து $A_{11} B_{12} = - A_{12} B_{22}$

$\therefore \quad B_{12} = - A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot X^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$

(3)-ல் இருந்து $B_{21} A_{11} = - B_{22} A_{21}$

$\therefore \quad B_{21} = - X^{-1} \cdot A_{21} \cdot A_{n}^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$

(1)-ல் இருந்து $A_{11} B_{11} = I - A_{12} B_{21}$

$$= I + A_{12} \cdot X^{-1} \cdot A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$\therefore \quad B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot X^{-1} \cdot A_{21} \cdot A^{-1}{}_{11} \quad (8)$$

(4), (5), (7)-ல் இருந்து,

$$-X^{-1} \cdot A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} + X^{-1} A_{22} = I$$

$$\therefore \quad -A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} + A_{22} = X \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

(9)-ல் இருந்து X ஐயும், (5), (6), (7), (8)-ல் இருந்து B_{22}, B_{12}, B_{21}, B_{11} ஐயும் கண்டுபிடித்து விடலாம்.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

நேரெதிர் அணியைக் கண்டுபிடி.

இதில் $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$;

$A_{21} = [\,2 \quad 2\,]$; $A_{22} = [\,5\,]$

என்றவாறு கொடுக்கப்பட்ட அணியைப் பிரித்துக்கொள்வோம்.

$$A_{11}^{-1}=\frac{1}{|A_{11}|}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A_{11}^{-1}\cdot A_{12}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$A_{21}\cdot A_{11}^{-1}=[2\quad 2]\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=[0\quad 2]$$

$$X=A_{22}-A_{21}\,(A_{11}^{-1}\cdot A_{12})=[5]-[2\quad 2]\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=[5]-[4]=[1]$$

$$\therefore\ X^{-1}=[1]$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+(A_{11}^{-1}\cdot A_{12})\cdot X^{-1}\cdot(A_{21}\cdot A_{11}^{-1})$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}[1]\ [0\quad 2]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$B_{12}=-(A_{11}^{-1}\cdot A_{12})\cdot X$$

$$=-\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}\cdot[1]=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=-X^{-1}\cdot(A_{21}\cdot A_{11}^{-1})$$

$$=-[1]\cdot[0\quad 2]=[0\quad -2]$$

$$B_{22}=X^{-1}=[1]$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\\ & -2 & 1\end{bmatrix}$$

5·4. A_{11} ஆக எதனை எடுத்துக்கொள்வது?

ஒரு n-சதுர அணி கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், A_{11}ஐ $(n-1)$ சதுர அணியாக எடுத்துக்கொள்வது மிகவும் அனுகூலமானது. இப்பொழுது, A_{11}^{-1}ஐக் கண்டுபிடிப்பது எப்படி?

இதற்கு $G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$;

$$G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

என்று வைத்துக் கொள்வோம். G_2^{-1} ஐக் கண்டுபிடிப்பது எளிது. இதுதான் G_3-ல் A_{11}^{-1}.

$\therefore$ G_3^{-1}ஐக் கண்டுபிடித்து விடலாம். G_3^{-1} தான் G_4-ல் A_{11}^{-1} $\therefore$ G_1^{-1} ஐக் கண்டு பிடித்துவிடலாம். இவ்வாறு G_4^{-1} ஐக் கண்டு பிடித்து விடலாம்.

உதாரணம் 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியின்}$$

நேர்மாறுன (நேரெதிர்) அணியைக் கண்டுபிடி.

இதில் $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A_{21} = [1\ 0\ 1]$; $A_{22} = [2]$.

${A_{11}}^{-1}$ஐ, உதாரணம் 1-ல் உள்ளதுபோல்,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$${A_{11}}^{-1} \cdot A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} \cdot {A_{11}}^{-1} = [\,1\ \ 0\ \ 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\,1\ \ 0\ \ -1\,]$$

இப்பொழுது, $X = A_{22} - A_{21}({A_{11}}^{-1} \cdot A_{12})$

$$= [\,2\,] - [\,1\ \ 0\ \ 1\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= [\,2\,] - [\,1\,] = [\,1\,]$$

$\therefore\ B_{22} = X^{-1} = [\,1\,]$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1} (A_{21} \cdot A_{11}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} [1] [1 \quad 0 \quad -1]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -X^{-1} \cdot (A_{21} \cdot A_{11}^{-1})$$

$$= -[1] \cdot [1 \quad 0 \quad -1] = [-1 \quad 0 \quad 1]$$

∴ வேண்டிய நேர்மாறுன அணி $= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5·5. ஒரு சமச்சீர் அணியின் நேர்மாறுன அணி

ஒரு சமச்சீர் அணியின் நேர்மாறுன அணியும் சமச்சீர் அணி யாகத்தான் இருக்கும். ஏனெனில்,

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4 \cdot 16)$$

$$= (A)^{-1} \qquad \because \; A \text{ ஒரு சமச்சீர் அணி.}$$

$\therefore$ A^{-1} ஒரு சமச்சீர் அணி.

ஆகையால், $B_{11} = A_{11}{}^{-1} + (A_{11}{}^{-1} A_{12}) X^{-1} (A_{21} \cdot A_{11}{}^{-1})$ என்பதை $B_{11} = A_{11}{}^{-1} + (A_{11}{}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1} (A_{11}{}^{-1} \cdot A_{12})'$ என எழுதலாம்.

$$B_{12} = -(A_{11}{}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1}$$

$$B_{21} = B_{12}'$$

$$B_{22} = X^{-1}.$$

$$X = A_{22} - A_{21} (A_{11}{}^{-1} . A_{12})$$

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

இதில் $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \; A_{11}{}^{-1} = \frac{1}{|A_{11}|} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because \; |A_{11}| = 1.$$

$$A_{11}{}^{-1} \cdot A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1} \cdot A_{12})$$

$$= [\,8\,] - [\,0 \;\; 3\,]\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = [\,8\,] - [\,9\,] = [\,-1\,]$$

$$\therefore \; X^{-1} = [\,-1\,] = B_{22}$$

இப்பொழுது,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1} \cdot (A_{11}^{-1} \cdot A_{12})'$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}[\,-1\,][\,-6 \;\; 3\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -31 & 16 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1} \cdot A_{12}) \cdot X^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}[\,-1\,] = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = B_{12}' + [\,-6 \;\; 3\,]$$

$$\therefore \; \text{வேண்டிய நேர்மாறுன அணி} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -31 & 16 & -6 \\ 16 & -8 & 3 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

A என்பது சமச்சீர் அணியாக இல்லாவிட்டால் $A'A$ என்பது சமச்சீர் அணியாக இருக்கவேண்டும்.

ஏனெனில் $(A'A)' = A' \cdot (A')' = A' \cdot A$

$\therefore$ இந்த முறையை உபயோகித்து $(A'A)^{-1}$ஐக் கண்டு பிடிக்கலாம். பின்பு, $A^{-1} = (A'A)^{-1} \cdot A'$ என்பதை உபயோகித்து A^{-1}ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

நேரடிக் கூட்டலணி : $A_1, A_2, \ldots\ldots A_k$ என்பன முறையே $n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots n_k$ தரங்களையுடைய சதுர அணிகளாக இருக்கட்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & A_k \end{bmatrix} = \text{மூலைவிட்ட அணி } (A_1 A_2 \ldots A_k)$$

என்பதை $A_1, A_2, \ldots A_k$ என்பவற்றின் நேரடிக் கூட்டலணி என்று வரையறை செய்வோம்.

உதாரணம் :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad A_2 = [\,1\,]; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ஆனால் A_1, A_2, A_3-ன் நேரடிக் கூட்டலணி

$= \text{மூலைவிட்ட அணி } (A_1\ A_2\ A_3)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$A =$ மூலைவிட்ட அணி $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ஆகவும்,

$B =$ மூலைவிட்ட அணி $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ ஆகவும்,

A_r, B_r என்பன ஒரே தரமுடைய சதுர அணிகளாகவும்,

$C_r = A_r \cdot B_r$ ஆகவும் இருந்தால்,

$AB =$ மூலைவிட்ட அணி $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ என நிறுபி.

நிரூபணம் :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_n \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_n \end{array}\right]$$

இவை பெருக்க இயைந்தவாறு பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஏனெனில் A_r, B_r ஒரே தரமுடையவை எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக் கிறது.

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_nB_n \end{bmatrix}$$

A_1, A_2, A_3-ன் நேரடிக் கூட்டலணியின் நேரெதிர் அணி = மூலைவிட்ட அணி $(A_1^{-1},\ A_2^{-1},\ A_3^{-1})$ என நிரூபி.

நிரூபணம் :

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & W & X \end{bmatrix} = I$$

ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} A_1P & A_1Q & A_1R \\ A_2S & A_2T & A_2U \\ A_3V & A_3W & A_3X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad P = A_1^{-1}; \quad Q = 0; \quad R = 0$$

$$S = 0; \quad T = A_2^{-1}; \quad U = 0$$

$$V = 0; \quad W = 0; \quad X = A_3^{-1}$$

$\therefore$ [மூலைவிட்ட அணி $(A_1, A_2, A_3)]^{-1}$ = மூலைவிட்ட அணி $(A_1^{-1}, A_2^{-1}, A_3^{-1})$

பொதுவாக,

$$[\text{மூலைவிட்ட அணி } (A_1\, A_2 \ldots A_n)]^{-1} = [\text{மூலைவிட்ட அணி } (A_1^{-1}\, A_2^{-1} \ldots A_n^{-1})]$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : A ஒரு சதுர அணியானால் $\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline B & A \end{array}\right]$ என்ற அணியின் நேரெதிர் அணியைக் கண்டுபிடி. இதை உபயோகித்து

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியின் நேர்மாறுள (நேரெதிர்) அணியைக் கண்டுபிடி.

$$\begin{bmatrix} A & O \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = I \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆக இருக்கட்டும்.

இதில் A ஒரு $n \times n$ அணியானால் O, B, P, Q, R, S உம் n சதுர அணிகளாக இருக்கவேண்டும்.

இப்பொழுது, (1)-ல் இருந்து

$$\begin{bmatrix} AP & AQ \\ BP+AR & BQ+AS \end{bmatrix} = I$$

$\therefore \quad AP = I$ ... ... (2)

$AQ = 0$ ... ... (3)

$BP + AR = 0$ ... ... (4)

$BQ + AS = I$ ... ... (5)

(2)-ல் இருந்து $P = A^{-1}$ ... ... (6)

(3)-ல் இருந்து $Q = 0$ ... ... (7)

(4), (6)-ல் இருந்து ... $BA^{-1} + AR = 0$

$\therefore \quad AR = -B \cdot A^{-1}$

$\therefore \quad A^{-1} \cdot AR = -A^{-1} \cdot BA^{-1}$

$R = -A^{-1} B \cdot A^{-1}$ ... ... (8)

(5), (7)-ல் இருந்து $S = A^{-1}$ ... ... (9)

$$\therefore \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட 6-சதுர அணியில்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} ஐக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

4·19-ல் உள்ளபடி,

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore \ -A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} =$

$$-\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -9 & -3 & -16 \\ -2 & 0 & -3 \\ -7 & -2 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட 6-சதுர அணியின் நேரெதிர் அணி

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 16 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 12 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

மாதிரி 2 :

$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$-ல் A, B, C, D என்பன n-சதுர அணிகள்.

L என்ற n-சதுர அணிகள்,

L என்ற n-சதுர அணி

$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ LA+C & LB+D \end{bmatrix}$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் $|P| = |Q|$ என நிருபி.

மேலும் $AC = CA$ ஆனால் $|P| = |AD - CB|$ என நிறுவி.

$$\begin{bmatrix} I & O \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IA & IC \\ LA+IC & LB+ID \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ LA+C & LB+ID \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix} P = Q$$

$$\left|\begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix}\right| \, |P| = |Q|$$

$$|P| = |Q|$$

ஏனெனில் $\left|\begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix}\right| = 1$

மேலும்,

$$\begin{bmatrix} C & -A \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA-AC & CB-AD \\ IA & IB \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C & -A \\ I & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & CB-AD \\ A & B \end{bmatrix} \quad \because \quad CA = AC$$

$$\therefore \left|\begin{bmatrix} C & -A \\ I & 0 \end{bmatrix} P\right| = \left|\begin{bmatrix} 0 & CB-AD \\ A & B \end{bmatrix}\right|$$

$$\therefore \quad |I| \, |A| \, |P| = |A| \, . \, |CB-AD|$$

$$\therefore \quad |P| = |CB-AD|$$

மாதிரி 3 : (i) A, B, C, D என்பன n-சதுர அணிகள் L, M என்னும் n-சதுர அணிகள்,

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

என்பதற்கிணங்க இருக்கின்றன என நிறுவி.

(ii) மேலும் $|G| = (-1)^n \, . \, |C - D \, . \, B^{-1}A| \; |B|$ என நிறுவி.

(iii) $(C-DB^{-1}A)$ ஓர் ஒழுங்கு அணியானால் G-ன் நேரெதிர் அணியைக் கண்டுபிடி.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IA & IB \\ LA+MI & LB \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad LA + M = C \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$LB = D \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகையால் $L = DB^{-1}$

$\therefore$ (1)-ல் இருந்து $M = C - DB^{-1}A$

இப்பொழுது,

$$G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$|G| = (-1)^n \cdot |M| \cdot |B| \quad \therefore$ I-ன் தரம் n

$$= (-1)^n \cdot |C - DB^{-1}A| \; |B|.$$

இனி, G^{-1}ஐக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$Ax_1 + Bx_2 = b_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$Cx_1 + Dx_2 = b_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆக இருக்கட்டும்.

$$B^{-1}A\,x_1 + x_2 = B^{-1}b_1$$

$$x_2 = B^{-1}b_1 - B^{-1}Ax_1$$

(4)-ல் இருந்து $Cx_1 + DB^{-1}b_1 - D \cdot B^{-1}Ax_1 = b_2$

$$(C - DB^{-1}A)\,x_1 = -DB^{-1}b_1 + b_2$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-DB^{-1}}{(C - DB^{-1}A)} \cdot b_1 + \frac{1}{C - DB^{-1}A} \cdot b_2$$

$$\therefore \quad x_2 = B^{-1}b_1 + \frac{B^{-1}A \cdot DB^{-1}}{(C - DB^{-1}A)} \cdot b_1 - \frac{B^{-1}A}{C - DB^{-1}A} \cdot b_2$$

$$\therefore\quad G^{-1} = \begin{bmatrix} -D\,.\,B^{-1}X & X \\ B^{-1}+B^{-1}ADB^{-1}X & -B^{-1}AX \end{bmatrix}$$

இதில் $X = (C - DB^{-1}A)^{-1}$

$\therefore\quad C - DB^{-1}A$ ஓர் ஒழுங்கு அணியாக இருக்க வேண்டும் என்பதைக் கவனி.

மாதிரி 4 : A, B, C என்பன ஒழுங்கு சதுர அணிகள்; ஆனால் ஒரே தரமுடையன அல்ல.

$$G = \begin{bmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$ ஆனால் G^{-1} ஐக் கண்டுபிடி.

$$\begin{bmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & W & X \end{bmatrix} = I$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore\quad \begin{bmatrix} AP+DS+EV & AQ+DT+EW & AR+DU+EX \\ BS+FV & BT+FW & BU+FX \\ CV & CW & CX \end{bmatrix} = I$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$\therefore\quad AP+DS+EV=I \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$AQ+DT+EW=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$AR+DU+EX=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$BS+FV=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$BT + FW = I$ ... ... (5)

$BU + FX = 0$ ... ... (6)

$CV = 0$ ... ... (7)

$CW = 0$ ... ... (8)

$CX = I$ ... ... (9)

(9)-ல் இருந்து $X = C^{-1}$ ... ... (10)

$\because \; |C| \neq 0$

$\therefore$ (7), (8)-ல் இருந்து $V = 0,\; W = 0$ ... (11)

(4), (11)-ல் இருந்து $S = 0$ ... ... (12)

(5), (11)-ல் இருந்து $BT = I \quad \therefore \; T = B^{-1}$ (13)

$\therefore \; |B| \neq 0$

(6), (10)-இலிருந்து $BU + FC^{-1} = 0$

$\therefore \; B^{-1}BU + B^{-1}FC^{-1} = 0$

$\therefore \quad U = -B^{-1}FC^{-1}$ ... ... (14)

(1), (11), (12) இலிருந்து $P = A^{-1}$ ... (15)

$\because \; |A| \neq 0$

(2), (11) இலிருந்து $AQ + DT = \ldots$ ... (16)

(13) இலிருந்து $AQ + DB^{-1} = 0$

$\therefore \; A^{-1}AQ + A^{-1}DB^{-1} = 0$

$\therefore \; Q = -A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1}$. ... ... (17)

(3), (10), (14)-ல் இருந்து

$AR - DB^{-1} \cdot FC^{-1} + EC^{-1} = 0.$

$\therefore \; A^{-1}AR - A^{-1} \cdot DB^{-1} + FC^{-1} + A^{-1}E \cdot C^{-1} = 0.$

$$\therefore \quad R = A^{-1}D \,.\, B^{-1} \,.\, FC^{-1} - A^{-1}EC^{-1}$$

$$\therefore \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} & A^{-1}DB^{-1} \,.\, FC^{-1} - A^{-1}EC^{-1} \\ 0 & B^{-1} & B^{-1} \,.\, F \,.\, C^{-1} \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 5

1. பின்வரும் அணிகளைப் பாகுபடுத்திக் கூட்டுக.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2. மேற்கண்ட பாகுபாட்டைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கக் கூடுமானால் செய்க. இன்றேல், காரணம் கூறி, வேறுமுறையில் பாகுபடுத்திப் பெருக்குக.

3. AB-ஐக் கண்டுபிடி.

(i) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ \hline 3 & 0 \end{array}\right]$

(ii) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$

(iii) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$; $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(iv) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$; $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(v) $A = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 16 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 7 & 2 & 12 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right]$;

$$B = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

$A^2 = I$ என நிரூபி.

5. $A =$ மூலைவிட்ட அணி $(A_1\ A_2\ \dots\ A_n)$

$B =$ மூலைவிட்ட அணி $(B_1\ B_2\ \dots\ B_n)$

A_r, B_r என்பன ஒரே தர அணிகளாயிருந்தால்

(i) $A + B =$ மூலைவிட்ட அணி $(A_1+B_1,\ A_2+B_2,\ \dots,\ A_n+B_n)$

(ii) $AB =$ மூலைவிட்ட அணி $(A_1B_1,\ A_2B_2,\ \dots\ A_nB_n)$ எனவும் நிரூபி.

6. A என்பது ஒரு சதுர அணியாக இருக்கட்டும். அதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை A-ன் பிரதி அல்லது பிரதி A என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ஆனால்

பிரதி $A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

(i) பிரதி $(A+B) =$ பிரதி $A +$ பிரதி B.

(ii) பிரதி $(kA) = k$. பிரதிA என நிரூபி.

(iii) A, B என்பன 5ஆம் வினவில் உள்ள அணிகளானல் பிரதி $AB =$ பிரதி $A_1B_1 +$ பிரதி $A_2B_2 + \dots +$ பிரதி A_nB_n என நிரூபி.

7. P, Q என்பன ஒழுங்கு சதுர அணிகளாகவும்,

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$ ஆகவும் இருந்தால்

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix}$$ என நிறுபி.

8. A, C என்பன ஒழுங்கு சதுர அணிகளாக இருந்தால்

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$-ன் நேரெதிர் அணியானது

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிறுபி.

9. பின்வரும் அணிகளைப் பெருக்குவதற்கு எத்தகைய பாகுபாடு சிறந்தது எனக் காண்பி.

(i) $$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

10. பின்வரும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைப் பாகு படுத்திச் செய்யும் முறையினால் கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

11. பின்வரும் சமச்சீர் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளை 5·5 முறைப்படி கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ ஆக இருக்கட்டும்.

இதில் $E = m$ சதுர அணி, $F = m \times n$ அணி, $G = n \times m$ அணி; $H = n$-சதுர அணியாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1} \cdot F \cdot H^{-1} \\ -H^{-1} \cdot GX^{-1} & H^{-1} \cdot (I_n + GX^{-1} \cdot F \cdot H^{-1}) \end{bmatrix}$$

என நிரூபி. இதில் $X = E - FH^{-1}G$.

13. $P = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{bmatrix}$;

$R = [r]$ என்னும் அணிகள். இவற்றில் p, q, r பூச்சிய மல்ல. மேலும்,

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \text{ ஆனால்,}$$

(i) $A^2 = \begin{bmatrix} P^2 & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}$ என்றும்,

(ii) $A^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix}$ என்றும் நிரூபி.

மேலும் $f(A) = a_0 A^n + a_1 . A^{n-1} + a_2 . A^{n-2} + \ldots + a_n$ (இதில் $a_0, a_1, a_2 \ldots \ldots a_n$ என்பன எண்ணிகள்) ஆனால்,

(iii) $f(A) = \begin{bmatrix} f(P) & 0 & 0 \\ 0 & f(Q) & 0 \\ 0 & 0 & f(R) \end{bmatrix}$ என நிரூபி.

$f(A)$ ஓர் ஒழுங்கணியானால்,

(iv) $\frac{1}{f(A)} = [f(A)]^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{f(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(Q)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f(R)} \end{bmatrix}$$

என நிரூபி.

$g(A)$ என்பது மற்றோர் பல்லுறுப்புக் கோவையாகவும், $|g(A)| \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால்

(v) $\frac{f(A)}{g(A)} = \begin{bmatrix} \frac{f(P)}{g(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f(Q)}{g(Q)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f(R)}{g(R)} \end{bmatrix}$

என நிரூபி.

விடைகள்.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 16 & 43 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ -8 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. அணிகளில் சாதாரண நிரை (நிரல்) மாற்றங்கள்

6·1. அணிகளின் வேறு சில பண்புகளை இந்த அதிகாரத்தில் காணலாம். அணிகளில் எந்தெந்த கணிதச் செய்கைகள் (operations) புரியலாம் என்பதை இதில் ஆராய்வோம். சிறப்பாக, அணிகளின் வகுத்தல் விதியின் விளக்கத்தையும், ஒருபடி சமன்பாடுகளை விடுவிக்கும் வகையையும் இங்குக் காண்போம்.

உதாரணமாக,

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

$$x_1 + 5x_2 = 8 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (2)$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றை விடுவிக்க நாம் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றுவோம்.

$$2 \times (2) \qquad 2x_1 + 10x_2 = 16 \qquad \dots \qquad (3)$$

$$(3)-(1) \qquad 7x_2 = 7$$

$$\therefore \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = 3$$

இதில் இரண்டாம் சமன்பாட்டை 2 என்னும் எண்ணியால் பெருக்கி, பின்பு முதல் சமன்பாட்டை மூன்ருவதிலிருந்து கழிக்கிறோம்.

இப்பொழுது $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற குணங்களாலான அணியை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டாவது நிரையை 2 ஆல் பெருக்கினல் $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ என்ற அணி கிடைக்கின்றது.

இதில் முதல் நிரையை இரண்டாவதிலிருந்து கழித்தால் $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ என்ற அணி கிடைக்கிறது. இவற்றை நாம் சாதாரண நிரை மாற்றங்கள் என அழைக்கின்றோம்.

6·2. ஓர் அணியின் நிரைகளில் 2 வகையான மாற்றங்களைச் செய்யலாம். இவற்றைச் சாதாரண நிரை மாற்றங்கள் என்று சொல்வோம். இவையாவன :

(i) இரு நிரைகளை இடம் மாற்றி அமைத்தல்

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) ஒரு குறிப்பிட்ட நிரையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $k\ (\neq 0)$ என்ற எண்ணியால் (scalar) பெருக்கல்.

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(iii) j ஆவது நிரையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடன், i ஆவது நிரையிலுள்ள அதற்கு இயைந்த உறுப்பை k ஆல் பெருக்கிக் கூட்டுதல்,

உதாரணம் :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A என்ற ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணியில் இந்த நிரை மாற்றங்களைச் செய்வதும், A ஐத் தகுந்ததோர் அணியால் முன்

பெருக்குவதும் ஒன்றே ஆகும். இதனை முன் காட்டிய உதாரணங் களால் விளக்குவோம்.

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = H_{13}$$

இதில் 1 ஆம், 3 ஆம் நிரைகள் இட மாற்றம் பெற்றுள்ளன இதை H_{13} எனக் குறிப்பிடுவோம்.

இப்பொழுது $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அலகு அணியில் இதே மாற்றத்தைச் செய்தால் $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணி கிடைக் கிறது. இதனைக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்ட அணியை முன் பெருக்குவோம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = R_1(3)$$

இதில் முதல் நிரையை 3 ஆல் பெருக்கி இருக்கிறோம். இதை $R_1(3)$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்பொழுது I_3-ன் முதல் நிரையை 3 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும்

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியால் கொடுக்கப்பட்ட அணியை

முன் பெருக்குவோம்.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = H_{23(-1)}$$

இதில் 3 ஆவது நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை (-1)ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரையிலுள்ள அதற்கியைந்த உறுப்புகளுடன் கூட்டியுள்ளோம். இதை $H_{23}(-1)$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்பொழுது I_3-ல் 3 ஆவது நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை 3ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரையில் உள்ள அதற்கியைந்த உறுப்புகளுடன் கூட்டினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ற அணி கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணியை, இந்த அணியால் முன்பெருக்கினால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6·3. இதே விதமாகச் சாதாரண நிரல் மாற்றங்கள் மூன்று உண்டு. இவற்றை அலகு அணியில் இயைந்த மாற்றங் ள் செய்து கொடுக்கப்பட்ட அணியைப் பின் பெருக்கி அடையலாம்.

உதாரணம் :

(i) இரு நிரல்களை இடம் மாற்றி அமைத்தல் C_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = C_{12}$$

மேலும் $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) ஒரு குறிப்பிட்ட நிரலின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $C_j(k)$; $k(\neq 0)$ என்ற எண்ணியால் பெருக்கல்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = C_1(3)$$

மேலும், $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

(iii) j ஆவது நிரலில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடன் i ஆவது நிரலில் உள்ள அதற்கு இயைந்த உறுப்பை, k ஆல் பெருக்கிக் கூட்டுதல். $C_{ij}(k)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 13 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} = C_{12}(4).$$

மேலும், $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 13 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$

6·4. சாதாரண அணிகள்

ஓர் அலகு அணியிலிருந்து சாதாரண நிரை அல்லது நிரல் மாற்றங்களுக்குப் பிறகு கிடைக்கும் அணிகளுக்குச் சாதாரண அணிகள் என்பது பெயர்.

உதாரணமாக, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஐ

எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_{12}$$

$$R_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = C_3(k)$$

$$R_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_{12}(k)$$

ஆகவே, இவை எல்லாம் சாதாரண அணிகளாகும்.

6·5. தேற்றம்: அணிகளில் ஒரு சாதாரண நிரை (நிரல்) மாற்றத்தைச் செய்வது, அதற்கியைந்த சாதாரண அணியால் முன்(பின்) பெருக்குவதற்குச் சமமாகும்.

$AB = C$ என்னும் அணிகளின் பெருக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் முன் காரணியான A-ல் ஒரு சாதாரண

நிரை மாற்றத்தைச் செய்து A_0 கிடைக்கிறது என வைத்துக் கொள்வோம். $A_0B = C_0$ ஆக இருக்கட்டும். C_0 என்பது C-ல் நாம் அதே சாதாரண நிரை மாற்றத்தைச் செய்தால் கிடைக்கும் என்று நிரூபிப்போம்.

இதே விதமாக, பின் காரணியான B-ல் ஒரு நிரல் மாற்றத்தைச் செய்து B_0 கிடைக்கிறது என வைத்துக் கொள்வோம். $AB_0 = C_0$ ஆக இருக்கட்டும். C_0 என்பது C-ல் நாம் அதே சாதாரண நிரல் மாற்றத்தைச் செய்தால் கிடைக்கும் என நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம் :

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Rm \end{bmatrix}, \quad B = [\, C_1 C_2 \ldots . C_n \,]$$

ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \ldots & R_1C_n \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \ldots & R_2C_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \ldots & R_mC_n \end{bmatrix}$$

இதிலிருந்து A-ல் உள்ள $R_1, R_2, \ldots R_m$-ல் நாம் என்ன சாதாரண நிரை மாற்றத்தைச் செய்தாலும் அது AB யிலும் அதே விதமாகப் பிரதிபலிக்கும் என்று காண்கிறோம்.

இதேவிதமாக B-ல் உள்ள $C_1, C_2 \ldots C_n$-ல் நாம் எந்த வித மான சாதாரண நிரல் மாற்றத்தைச் செய்தாலும், AB யிலும் அதேவிதமாகப் பிரதிபலிக்கும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது, $IA = A$ என்பதிலிருந்து $I_0A = A_0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

அதாவது A-ல் நிரை மாற்றம் செய்வது, A ஐ ஒரு சாதாரண அணியால் (அலகு அணியில் அதே நிரை மாற்றம் செய்து கிடைக்கப் பெற்ற அணியால்), முன் பெருக்குவதற்குச் சமம்.

இதேவிதமாக $AI = A$ என்பதிலிருந்து $AI_0 = A_0$ என்று கிடைக்கும். ∴ A-ல் ஒரு நிரல் மாற்றம் செய்வது, A ஐ ஒரு சாதாரண அணியால் (அலகு அணியில் அதே நிரல் மாற்றம் செய்து கிடைக்கப் பெற்ற அணியால்) பின் பெருக்குவதற்குச் சமம்

6·6. கொள்கைத்தேற்றம் : சாதாரண அணிகளின் நேர்மாறுன (நேரெதிர்) அணிகள் அதே வகைச் சாதாரண அணிகள்.

மேலும், சாதாரண அணிகள் பூச்சியமில் கோவை அணிகள் (அல்லது ஒழுங்கணிகள்) ஆக இருக்க வேண்டும்.

R_{ij}, $R_i(k)$, $R_{ij}(k)$ என்பன நிரை மாற்றல் வழி வந்த சாதாரண அணிகள்.

R_{ij}-ன் i, j நிரைகளை மீண்டும் மாற்றி அமைத்தால் I கிடைக்கும் என்பது வெளிப்படை.

$$\therefore \quad R_{ij} \cdot R_{ij} = I$$

$$\therefore \quad R_{ij}^{-1} = R_{ij}.$$

R_{ij} என்ற சாதாரண அணியின் நேரெதிர் அணி அதே வகைச் சாதாரண அணி என்பதைக் கவனிக்கவும். மேலும் R_{ij}-க்கு நேரெதிர் அணி இருப்பதால் $|R_{ij}| \neq 0$. அதாவது, R_{ij} ஓர் ஒழுங்கணி.

மேலும், $R_i(k)$ ஐ k^{-1} ஆல் பெருக்கினால் திரும்பவும் I கிடைக்கும் என்பது வெளிப்படை. அதாவது, $R_i(k)$ ஐ $R_i(k^{-1})$ ஆல் முன் பெருக்கினால் I கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad R_i(k^{-1}) \cdot R_i(k) = I$$

$$\therefore \quad R_i^{-1}(k) = R_i(k^{-1})$$

∴ $R_i(k)$ ஓர் ஒழுங்கணி. இதன் நேரெதிர் அணியும் இதே வகைச் சாதாரண அணி.

கடைசியாக, $R_{ij}(-k) \cdot R_{ij}(k) = I$

$$\therefore \quad R_{ij}^{-1}(k) = R_{ij}(-k)$$

$\therefore$ $R_{ij}(k)$ ஓர் ஒழுங்கணி. இதன் நேரெதிர் அணியும் இதே வகைச் சாதாரண அணி,

இதே விதமாக நிரல் மாற்று வழி வந்த சாதாரண அணிகளுக்கும் நிருபணம் செய்யலாம்.

6·7. நேரெதிர் அணிகளைச் சாதாரண அணிகளின் துணை கொண்டு கண்டுபிடித்தல்,

நாம் இதுவரை நேரெதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடிக்கப் பல் வேறு முறைகளை விளக்கினோம். இவைகள் எல்லாவற்றையும் விட இந்த முறை சிறந்ததாகும். சிறப்பாக அணிகளின் தரம் மூன்றுக்கு மேற்பட்டால் இதன் எளிமை தெளிவாகும். இந்த முறையை மூன்று உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

உதாரணம் 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ஆனால் } A^{-1} \text{ ஐக் கண்டுபிடி,}$$

A ஓர் ஒழுங்கு அணி என்பதைக் கவனி. இதில் பலவித நிரை மாற்றங்கள் செய்து I என்ற அணியாக்குவோம். இது P, Q, R, S என்ற சாதாரண அணிகளால் முறையே முன் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) முதல் நிரையை $\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்கல்

$$PA = R_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) முதல் நிரையை (-1) ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$Q\cdot(PA) = R_{21}(-1)\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(3) இரண்டாம் நிரையை $\frac{2}{5}$ ஆல் பெருக்கல்,

$$R(QPA) = R_2\left(\tfrac{2}{5}\right)\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) இரண்டாம் நிரையை $-\frac{3}{2}$ ஆல் பெருக்கி, முதல் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$S(RQPA) = R_{12}(-\tfrac{3}{2})\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad SRQPA = I$$

$$\therefore \quad SRQPA \, . \, A^{-1} = I \, . \, A^{-1} = A^{-1}$$

$$\therefore \quad SRQPI = A^{-1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = SRQPI = R_{12}(-\tfrac{3}{2}) \, . \, R_2(\tfrac{2}{5}) \, . \, R_{31}(-1) \, . \, R_1(\tfrac{1}{2}) \, . \, I$$

$$\therefore \quad A^{-1} = R_{12}(-\tfrac{3}{2}) \, . \, R_3(\tfrac{2}{5}) \, . \, R_{21}(-1) \, .$$

$$\left\{ R_1(\tfrac{1}{2}) \, . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= R_{12}(-\tfrac{3}{2}) \, . \, R_2(\tfrac{2}{5}) \, . \, R_{31}(-1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(நாம் முதலில் A க்குச் செய்த அதே நிரை மாற்றத்தை I க்கும் முதலாவதாகச் செய்வதைக் கவனி.)

$$= R_{12}(-\tfrac{3}{2}) \, . \, R_2(\tfrac{2}{5}) \, . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= R_{12}(-\tfrac{3}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

நாம் முதலில் செய்த நிரை மாற்றங்களை, முறையே அலகு அணியிலும் செய்து A^{-1} ஐக் கண்டுபிடிக்கிறோம். இந்த மாற்றங்களைப் பலவிதமாகச் செய்யலாம். ஆனால் A^{-1} ஐப் பெற அவற்றை முறையே அலகு அணியிலும் செய்யவேண்டும்.

உதாரணம் 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ ஆனால் A^{-1} ஐக் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $P = R_{31}(-3)$. முதல் நிரையை -3 ஆல் பெருக்கி, மூன்றும் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad PI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $Q = R_{21}(-2)$. முதல் நிரையை -2 ஆல் பெருக்கி இரண்டாம் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$QPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad QPI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $R = R_{23}(-1)$. மூன்றும் நிரையை (-1) ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரையுடன் கூட்டல்,

$$RQPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad RQPI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $S = R_{32}^{(+1)}$. இரண்டாம் நிரையை (1-ஆல் பெருக்கி) மூன்றும் நிறையுடன் கூட்டல்.

$$SRQPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$SRQPI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $T = R_3(-1)$. மூன்றும் நிரையை (-1) ஆல் பெருக்கல்,

$$TSRQPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; TSRQPI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. $U = R_{23}(-2)$. மூன்றும் நிரையை (-2) ஆல் பெருக்கி இரண்டாம் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$UTSRQPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; UTSRQPI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $V = R_{13}(-3)$. மூன்றும் நிரையை (-3) ஆல் பெருக்கி முதல் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$VUTSRQPA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; VUTSRQPI = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. $W = R_{12}(-2)$. இரண்டாம் நிரையை (-2) ஆல் பெருக்கி முதல் நிரையுடன் கூட்டல்.

$$WVUTSRQPA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$WVUTSRQPI = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad WVUTSRQPA = I$$

$$WVUTSRQPAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$$

$$WVUTSRQPI = A^{-1}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

இதில் 7, 8 ஐத் தனித்தனியே செய்யவேண்டிய தேவை யில்லை. அலகு அணியை அடையவேண்டியதுதான் குறிக் கோள். இவ்வளவு விவரமாக ஒவ்வொரு நிலையையும் விளக் காமல் அடுத்த உதாரணத்தில் செய்து காட்டுவோம்.

உதாரணம் 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ஆனால் A^{-1} ஐக் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ஆனால்,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_{21}(-1). \\ R_{31}(-2). \\ R_{41}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_{12}(-2). \\ R_{13}(1). \\ R_{42}(+1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{34}(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{43}(-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_{24}(-1). \\ R_{3}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \ (Z\ldots\ldots\ldots P)\, A = I$

$\therefore \ (Z\ldots\ldots\ldots P)\,.\, AA^{-1} = IA^{-1}$

$(Z\ldots\ldots\ldots P)\, I = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

6·8. சம மாற்று அணிகள்

A, B என்ற அணிகளில் ஒன்றை, அடுத்ததிலிருந்து சாதாரண நிரை அல்லது நிரல் மாற்றங்களினுல் பெற முடிந்தால் அவற்றைச் சம மாற்று அணிகள் என்று சொல்வோம். இதை $A \sim B$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இது ஒரு 'சமான உறவு' (Equivalence Relation) ஆகும். ஏனென்றுல்,

(i) $A \sim A$, ஏனெனில் $IA = A$

(ii) $A \sim B$ ஆனுல் $B \sim A$

ஏனெனில் $B = RA$ ஆனுல் $R^{-1}B = A$.

R சாதாரண அணியானுல் R^{-1} உம் சாதாரண அணி என்பதை நினைவிற் கொள்ளவும்.

(iii) $A \sim B$; $B \sim C$ ஆனுல் $A \sim C$.

ஏனெனில் $B = R_1 A$ ஆகவும், $C = R_2 B$ ஆகவும் இருந்தால் $C = R_2 R_1 A = R_3 A$.

இரு சாதாரண அணிகளின் பெருக்கற்பலன் மற்றுேர் சாதாரண அணியாதலின் $R_3 = R_2 R_1$ என்பது பொருந்தும்.

6·9. சமநிரை மாற்று அணிகள்

A, B என்ற அணிகளில் ஒன்று அடுத்ததிலிருந்து சாதாரண நிரை மாற்றங்களினுல் மட்டுமே பெற முடிந்தால் அவற்றைச் "சம நிரை மாற்று அணிகள்" என்று சொல்வோம். இதுவும் "ஒரு சமன்பாட்டுத் தொடர்பே" ஆகும்.

6·8. (ii)-ல் R என்பது அலகு அணியிலிருந்து சாதாரண நிரை மாற்றங்களால் கிடைத்த அணி ஆனுல், R^{-1}உம் அதே வகையைச் சேர்ந்தது.

6.8. (iii)-ல் R_1, R_2 என்பன இத்தகைய அணிகளானல் $R_3 = R_2 R_1$ உம் இத்தகைய அணியேதான். இதேவிதமாகச் சம நிரல் மாற்று அணிகளையும் வரையறை செய்யலாம்.

உதாரணம் 1 : சம நிரை மாற்று அணிகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = B$$

உதாரணம் 2 : சம நிரல் மாற்று அணிகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 12 \end{bmatrix} = B.$$

உதாரணம் 3 : சம மாற்று அணிகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

3 ஆவது உதாரணத்தில், C என்ற அணியை A-ன் ஒரு நியமன வடிவம் (canonical form) என்று சொல்லலாம். இதன் வரையறையிலிருந்து இதற்கும் அணி மாற்றத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காணலாம்.

6·10, A-க்கு ஒரு நியமன வடிவ அணி :

A என்பது (பூச்சிய அணி அல்லாத) ஓர் அணியாக இருக்கட்டும். அதைச் சில சாதாரண நிரை மாற்றங்கள் மூலம் பின் வரும் பண்புகள் உள்ள C என்னும் நியமன வடிவ அணியாக மாற்றலாம்.

(i) முதல் r நிரைகளில் $(r \geqslant 0)$ மட்டும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பூச்சியமில்லாது உறுப்புகள் இருக்கும்.

(ii) அத்தகைய ஒவ்வொரு நிரையிலும், பூச்சியமில்லாத முதல் உறுப்பு (இடமிருந்து வலம் வரும்போது) 1 ஆக இருக்கும்.

(iii) ஒரு நிரையிலுள்ள முதல் பூச்சியமல்லாத உறுப்பு (அது 1) அதற்கு மேலே உள்ள நிரைகளில் உள்ள முதல் பூச்சியமில்லாத உறுப்புக்கு வலப்புறம் இருக்கும்.

(iv) முதல் r நிரைகளுக்குக் கீழே உள்ள எல்லா நிரைகளிலும் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாக இருக்கும்.

உதாரணம் :

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

என்பன நியமன வடிவ அணிகள்.

குறிப்பு : A என்று கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அணிக்குப் பல நியமான வடிவ அணிகள் இருக்கலாம்,

6·11. இனிமேல், "கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நியமான வடிவ அணியைக் கண்டுபிடிப்பது எங்ஙனம்" என விளக்குவோம்.

முதல் நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமில் உறுப்பு j ஆவது நிரலில் உள்ள p ஆக இருக்கட்டும். முதல் நிரையில் பூச்சியமில் உறுப்பு இல்லாமல் i ஆவது நிரையில் இருந்தால் முதன் முதலாக

இவ்விரு நிரைகளையும் மாற்றிக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது முதல் நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை p ஆல் வகுக்க, முதல் நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமில் உறுப்பு 1 ஆவதைக் கவனி. இதன் பின்னர், முதல் நிரையின் தகுந்த மடங்குகளை இரண்டாம், மூன்றும் நிரைகளில் இருந்து கழிக்கவும். அப்படியானல் j ஆவது நிரலில் மீதியுள்ள நிரைகளில் பூச்சியம்தான் உண்டு.

இப்பொழுது, முதல் நிரையைத் தவிர மீதி நிரைகளில் எல்லாம் பூச்சியம் இருந்தால், இதுதான் நியமான அணி. இல்லாவிட்டால், இதே விதமாக இரண்டாம் நிரையில் $(j+1)$ ஆவது நிரலில் (இதில் பூச்சியம் இருந்தால் $(j+2)$ ஆவது நிரலில், அன்றி அதிலும் பூச்சியமிருந்தால் அதற்கடுத்த நிரலில்) 1 வரும்படி மாற்றங்கள் செய்வோம்.

இப்பொழுது, முதலிரு நிரைகளைத் தவிர மீதி நிரைகளில் எல்லாம் பூச்சியமிருந்தால், இதுதான் நியமன அணி. இல்லாவிட்டால், முன்போல் தொடர்ந்து மாற்றங்கள் செய்க.

உதாரணம் 1 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை நியமன வடிவில் எழுதுக.

R_{12} $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ இது முதல் நிரையின் தொடக்கத்தில் பூச்சியமில் உறுப்பைத் தருகிறது.

$R_1(\frac{1}{3})$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ இது முதல் நிரையின் முதல் உறுப்பை, a_{11} ஐ 1 ஆக மாற்றுகிறது.

$$R_{31}(-1).\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

இது a_{31} ஐப் பூச்சியமாக்குகிறது.

$$R_{32}(-2).\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

இது a_{32} ஐப் பூச்சியமாக்குகிறது.

$$R_{3}(\tfrac{1}{3}).\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இது a_{33} ஐ, 1 ஆக்குகிறது. இது A-ன் நியமன வடி அணி.

உதாரணம் 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை நியமன வடிவில் எழுதுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{21}(-3);\; R_{31}(-2);\; R_{41}(-5);\; R_{51}(3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{24}(-1);\; R_3(-\tfrac{1}{5});\; R_4(-1).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{24};\; R_{32}(-1)\; R_{42}(4).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3(\tfrac{1}{2});\; R_{43}(10)$$

$= C =$ நியமன வடிவ அணி.

உதாரணம் 8 : பின்வரும் அணியை நியமன வடிவில் எழுது.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & b & d \\ 1 & 0 & c & e \\ b & c & 2bc & cd+be \\ d & e & cd+be & 2de \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & e \\ 0 & 1 & b & d \\ b & c & 2bc & cd+be \\ d & e & cd+be & 2de \end{bmatrix} \quad \because \; R_{12}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & e \\ 0 & 1 & b & d \\ 0 & c & bc & cd \\ 0 & e & be & de \end{bmatrix} \quad \because \; R_{31}(-b); \quad R_{41}(-d)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & e \\ 0 & 1 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{31}(-c); \; R_{41}(-d)$$

6·12. கொடுக்கப்பட்ட ஓர் அணியின் இயல் வடிவம் (Normal form of a given Matrix) :

A என்ற கொடுக்கப்பட்ட பூச்சியமில் அணியை நிரை, நிரல் மாற்றங்களால்

$$I_r, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; [I_r, \; 0], \; \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

என்னும் வடிவங்களில் ஒன்றாக மாற்றலாம். இதனை A-ன் இயல் வடிவம் என்று சொல்வோம். இதனை N என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

குறிப்பு: ஒரு பூச்சிய அணியின் இயல் வடிவம் அதுவே தான்.

கொடுக்கப்பட்ட அணியினை நியமன வடிவமாக்க நிரை மாற்றங்களை மட்டுமே உபயோகித்தோம். இதில் நிரல் மாற்றங்களையும் உபயோகிக்கலாம். ஆகவே, 1ஐ முதல் நிரையிலும் முதல் நிரலிலும் இருக்குமாறு எழுதலாம். பின்னர், முதல் நிரையிலும் முதல் நிரலிலும் உள்ள மீதி உறுப்புகளையெல்லாம் பூச்சியமாக்குவோம். அதன்பின், இரண்டாம் நிரை, இரண்டாம் நிரலில் உள்ள உறுப்பை 1 ஆக மாற்றலாம். பின்பு, 2 ஆம் நிரையிலும், 2 ஆம் நிரலிலும் உள்ள மீதி உறுப்புகளைப் பூச்சியமாக்க வேண்டும். இவ்வாறு தொடர்ந்து a_{33}ஐ 1 ஆக்க வேண்டும்... இறுதியில் இயல் வடிவம் கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து, A என்னும் $m \times n$ அணி கொடுக்கப்பட்டால், R ($= m \times m$ அணி); C ($= n \times n$ அணி) என்பவைகளை $RAC = N$ என இருக்கும் வண்ணம் எழுத முடியும் எனத் தெரிகிறது. இதில் R என்பது சாதாரண நிரை அணிகளின் பெருக்கற் பலன் என்பதும், C என்பது சாதாரண நிரல் அணிகளின் பெருக்கற் பலன் என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது.

6·13. கிளைத்தேற்றம் (i)

A என்பது ஒரு n-சதுர ஒழுங்கணியானல் R, C என்னும் அணிகள் $RAC = I_n$ என்பதற்கிணங்க உண்டு.

ஏனெனில், $N = I_n$.

கிளைத்தேற்றம் (ii)

A என்பது ஒரு n-சதுர ஒழுங்கணியானல் அதனைச் சாதாரண அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத இயலும்.

A என்பது ஓர் ஒழுங்கணி ... ... (கொள்கை)

$\therefore$ 6·13 (i)-ல் இருந்து, $RAC = I_n$ ... (1)

இதில் $R = R_1 \, R_2 \, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad R_j$

$C = C_1 \, . \, C_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad C_k$

R_j என்பது ஒரு சாதாரண நிரை அணி.

C_k என்பது ஒரு சாதாரண நிரல் அணி.

(1)-ல் இருந்து $R^{-1} \, . \, R \, . \, AC \, . \, C^{-1} = R^{-1} \, I C^{-1}$

$$\therefore \quad A = R^{-1} \, . \, C^{-1} \, .$$

$$= (R_1 \cdot R_2 \ldots R_j)^{-1} \cdot (C_1 \cdot C_2 \ldots C_k)^{-1}$$
$$= R_j^{-1} \cdot \ldots R_1^{-1} \cdot C_k^{-1} \ldots C_1^{-1}$$
= சாதாரண அணிகளின் பெருக்கற் பலன்

(ஏனென்றால், ஒரு சாதாரண அணியின் நேரெதிர் அணியும் சாதாரண அணிதான் ... ... 6·6)

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

அணியினை இயல் வடிவில் எழுது.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\because \; R_{21}(-1);\; R_{31}(-1);\; R_{41}(-1).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; C_{21}(-1);\; C_{31}(-2);\; C_{41}(-3).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{32}(3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; C_{32}(1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_3\left(-\tfrac{1}{8}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; C_{43}\left(-\tfrac{3}{4}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = N$$

உதாரணம் 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ ஆனல்

P, Q என்னும் அணிகளை $PAQ = I_3$ என்றிருக்கும்படி கண்டுபிடி.

$A = 3 \times 3$ அணி $\quad \therefore\ P, Q$ உம் 3×3 அணிகள்

$A = I_3 A I_3$ என எழுதலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{21}(-1);\ R_{31}(-2)\ .\ A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{21}(-2);\ C_{31}(-1)\ .\ A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\ .\ A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{32}(3) \cdot A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{32}(-\tfrac{3}{2}) \cdot A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3(-2) \cdot A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix};\ Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

சரி பார்த்தல் :

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & -2+2+0 & 2-3+1 \\ -1+0+0 & 2+0+0 & -2+0+2 \\ 2+0+0 & -4+1+0 & 4-\frac{3}{2}-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 1+3-4 & 0+6+6 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

உதாரணம் 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ ஆனால்,}$$

A ஐ அதன் இயல் வடிவத்தில் எழுது. P, Q ஐ $PAQ = N$ என இருக்கும்படி கண்டுபிடி.

$A = 3\times 4$ அணி. $\therefore\ P = 3\times 3$ அணி. $Q = 4\times 4$ அணி.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \because R_{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -19 & -26 & 2 \\ 0 & -10 & -17 & 5 \end{bmatrix} \quad \because R_{21}(-5);\ R_{31}(-3)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -26 & 2 \\ 0 & -10 & -17 & 5 \end{bmatrix} \quad \because \; C_{21}(-4); \; C_{31}(-6)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -26 & 2 \\ 0 & 7 & -17 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -26 & 2 \\ 0 & 1 & -17 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -26 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{10}{63} & -\frac{4}{6} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{26}{63} & -\frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{13}{63} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\, I_3 \quad O\,] = N$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{10}{63} & -\frac{22}{21} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{26}{63} & -\frac{32}{21} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{19}{63} & \frac{25}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{10}{63} & -\frac{22}{21} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{26}{63} & -\frac{32}{21} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{19}{63} & \frac{25}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இதைச் சரிபார்க்க, முதலில் PA ஐக் கண்டுபிடித்து, பின் PAQஐக் கண்டுபிடிப்பது எளிதாகும்.

பயிற்சி 6

1. பின்வரும் நிரை மாற்றங்களைக் கீழ்க்கண்ட அணிகளில் முறைப்படி செய்து, கடைசியில் கிடைக்கும் அணிகள் A, B என நிறுபி.

(i) $R_3(2)$ (ii) R_{14} (iii) $R_{24}(-2)$ (iv) $R_{24}(2)$

(v) R_{41} (vi) $R_3(\frac{1}{2})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. பின்வரும் நிரல் மாற்றங்களை முதல் கேள்வியில் உள்ள அணிகளில் முறைப்படி செய்து கடைசியில் கிடைக்கும் அணிகள் A, B என நிரூபி.

(i) $C_3(-2)$; (ii) $C_{23}(2)$ (iii) C_{13} (iv) C_{12}

(v) $C_{23}(-2)$ (vi) $C_3(-\frac{1}{2})$.

3. முதல் இரண்டு வினாக்களில் கடைசியில் A, B கிடைக்கக் காரணம் என்ன?

4. பின்வரும் 3-சதுர சாதாரண அணிகளை எழுது. பின்பு, அவற்றின் நேரெதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $R_{32} \,.\, R_{13}(-1) \,.\, R_2(-2) \,.\, I_3$.

(ii) $C_{32} \,.\, C_{13}(-1) \,.\, C_2(-2) \,.\, I_3$

(iii) $R_{32} \,.\, C_{33} \,.\, C_1(3) \,.\, R_{12}(2) \,.\, I_3$.

5, பின்வரும் 4-சதுர அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளை உடனே (அந்த அணிகளைக் கண்டுபிடிக்காமலேயே) எழுது.

(i) $R_{32}(-4)$; $R_4(2)$; R_{23}

(ii) C_{12}; $C_{13}(1)$; $C_1(2)$.

6. பின்வரும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$; (விடை $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{21}{20} & -\frac{7}{20} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$)

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (விடை $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$)

$$\text{(iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \text{ (விடை } \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -2 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{)}$$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ (விடை } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{)}$$

$$\text{(v)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ (விடை } \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{)}$$

7. கீழ்க்கண்ட n-சதுர சாதாரண அணிகளில் எந்த ஜோடியை எடுத்தாலும் அவை பரிமாற்று அணிகளாக இருக்கும் என நிறுவி.

$$R_{21}(k_1); \quad R_{31}(k_2); \ldots\ldots; \quad R_{n1}(k_{n-1})$$

8. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் நியமன வடிவங்களைக் கண்டுபிடி.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 12 & 1 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

9. 8-ஆம் கேள்வியில் உள்ள அணிகளின் இயல் வடிவத்தைக் கண்டுபிடி.

10. $A \sim B$ ஆக இருந்தால்,

$B = P_m . P_{m-1} \ldots \ldots P_1 . A\, Q_1\, Q_2 \ldots Q_n$ என நிரூபி.

11. P, Q என்னும் அணிகளை PAQ இயல் வடிவில் இருக்கும்படி கண்டுபிடி.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

12. பின்வரும் அணிகளைச் சாதாரண அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுது.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

விடைகள்

11. (i) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{17}{9} & -2 \\ 1 & \frac{2}{9} & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. அணியின் அளவை

(Rank of a Matrix)

7·1. ஓர் அணியின் சிற்றணிக் கோவைகள் :

A என்பது ஒரு $m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும். இதில் குறிப்பிட்ட r நிரைகளிலும், r நிரல்களிலும் உள்ள உறுப்புகளைத் தவிர மீதி உறுப்புகளை நீக்கி விடுவோம். [இந்த உறுப்புகள் குறிக்கப்பட்ட நிரைகளிலும் இருக்கவேண்டும்; நிரல்களிலும் இருக்க வேண்டும்.] அப்படியானல் நமக்கு ஒரு r-சதுர அணி கிடைக்கும். இந்த அணிக் கோவையை A-ன் சிற்றணிக் கோவை என்று சொல்வோம். இதன் தரம் r.

இவ்வாறு நோக்குமிடத்து, A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் A-ன் 1 தரமுள்ள சிற்றணிக்கோவை என்று சொல்லலாம்.

உதாரணம் 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியில் } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{-ஐயே}$$

3ஆம் தரமுள்ள சிற்றணிக் கோவை எனலாம். $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ என்பது 2ஆம் தரமுள்ள சிற்றணிக் கோவை. 1, 2, ..., 9 என்பவை முதல்தரச் சிற்றணிக் கோவைகள்.

உதாரணம் 2 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின்

எல்லாச் சிற்றணிக் கோவைகளையும் எழுது.

கொடுக்கப்பட்ட அணியின் வகை 3×4

∴ நமக்குக் கிடைக்கக் கூடிய பெரிய சிற்றணிக் கோவையின் தரம் 3. இவ்வாறு 4_{c_3} சிற்றணிகள் உண்டு. அதாவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

இனி, 2×2 சிற்றணிகள் $3_{c_2} \times 4_{c_2} = 18$ உண்டு.

நாம் முதலிரண்டு நிரைகளை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டு 6 சிற்றணிகளை எடுத்துக் காட்டுவோம்.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

இதேவிதமாய் முதல், மூன்றும் நிரைகளிலிருந்து மற்றோர் 6 சிற்றணிகளும், இரண்டாம் மூன்றும் நிரைகளிலிருந்து 6 சிற்றணிகளும் பெறலாம். முதல்தரச் சிற்றணிகள்

$3_{c_1} \times 4_{c_1} = 12$. இவையாவன $1, 2, \ldots, 12$

7·2. ஓர் அணியின் அளவை : ஓர் அணியில் அந்த அணியுடன் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு நேர் முழு எண், கொடுக்கப்பட்ட A என்ற அணியில்,

(i) ஒரு r-சதுர சிற்றணிக் கோவையாவது பூச்சியத்தி லிருந்து வேறுபட்டிருக்க வேண்டும் ;

(ii) ஒவ்வொரு $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக் கோவையும் பூச்சிய மாக இருக்கவேண்டும் ;

என்ற இரு நிபந்தனைகளையும் பூர்த்தி செய்தால் அதன் அளவை அல்லது மதிப்பிடம் r என வரையறை செய்வோம்.

இதை $\rho(A) = r$ என எழுதுவோம்.

இதிலிருந்து பூச்சிய அணியின் அளவை, பூச்சியம் என்று வரையறை செய்வது பொருத்தமானது என்பது விளங்கும்.

A என்ற n-சதுர அணி, $|A| \neq 0$ என்றவாறு இருந்தால் அதன் அளவை n ஆக இருக்கவேண்டும். அதாவது $\rho(A) = n$.

குறிப்பு: ஒவ்வொரு $(r+1)$ சதுர சிற்றணியும் பூச்சியமாக இருந்தால், ஒவ்வொரு $(r+2)$ சதுர சிற்றணியும் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும். ஏனென்றால் ஒரு $(r+2)$ சதுர அணியை முதல் நிரையினடியாக விரித்து எழுதினால், ஒவ்வோர் இணைக் காரணி (co-factor) யும் $(r+1)$ சதுர சிற்றணியாக இருப்பதால் நிச்சியமாகும். ஆகவே அந்த அணிக்கோவையும் பூச்சிய மாகும்.

ஆதலால், ஓர் அணியின் அளவை r ஆனால் அதன் மிகப் பெரிய பூச்சியமில் சிற்றணிக் கோவையின் தரம் r ஆக இருக்க வேண்டும் என்று சொல்லலாம்.

எச்சரிக்கை: ஒவ்வொரு $(r+1)$ சதுர அணியும் பூச்சிய மானல் r-சதுர சிற்றணி பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்க்கவும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ஆனல்} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

உதாரணம்:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் அளவையைக் கண்டுபிடி.

இது ஒரு பூச்சிய அணி அல்ல. ஆகவே, இதன் அளவை $\geqslant 1$ ஆக இருக்கவேண்டும். இது ஒரு 3×4 அணி. $\therefore$ இதன் மிகப் பெரிய சிற்றணிக் கோவை 3×3 தரமுடையது.

∴ இதன் மதிப்பிடம் $\leqslant 3$

மேலும் இந்த அணியைப் பார்த்தவுடன் $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

எனத் தெரிகிறது. எனவே இதன் மதிப்பிடம் $\geqslant 2$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

∴ இதில் இருக்கக்கூடிய 4_{C_3}. 3 சதுர அணிகளும் பூச்சியமா இல்லையா என்று பார்க்க வேண்டும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

கடைசியாக,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

∴ இதன் மதிப்பிடம் அல்லது அளவை 2. இந்த முறையில் ஒரு பெரிய அணியின் மதிப்பிடத்தைக் கண்டுபிடிப்பது 'கம்ப்யூட்டர்' உதவியால் கூடச் சிரமமானது ஆகும். ஆகவே, ஓர் எளிய முறையைக் கையாளுவதற்கு ஏதுவாகப் பின்வரும் தேற்றத்தை நிரூபிப்போம்.

7·3. தேற்றம் : சாதாரண நிரை அல்லது நிரல் மாற்றங்கள் ஓர் அணியின் அளவையைப் பாதிக்காது.

(i) முதலாவதாக "இரு நிரைகளை இடமாற்றி அமைப்பதால் ஓர் அணியின் அளவை அல்லது மதிப்பிடம் மாறாது" என நிரூபிப்போம்.

A என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியாக இருக்கட்டும். இதன் மதிப்பிடம் r எனக் கொள்வோம். இரு நிரைகளை இடமாற்றிய பின் கிடைக்கும் அணி B ஆக இருக்கட்டும். இதன் மதிப்பிடம் r' ஆக இருக்கட்டும். $r = r'$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

B-ல் உள்ள $|B_0|$ என்ற $(r+1)$ தரச் சிற்றணிக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் நிரைகள் A-ல் உள்ள நிரைகளே தாம். ஒருகால், இரு நிரைகள் இடமாறியிருக்கலாம். இத்தகைய இடமாற்றம் ஓர் அணிக்கோவையின் குறியை (sign) மட்டுமே மாற்றும்.

ஆகவே,

$|B_0| = |A_0|$ அல்லது $|B_0| = -|A_0|$ ஆக இருக்க வேண்டும். ஆனால் A-ன் மதிப்பிடம் r. $\therefore$ $(r+1)$ நிரையுள்ள A_0 என்ற சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு $|A_0| = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ $|B_0| = 0$. அதாவது, ஒவ்வொரு $(r+1)$ நிரையுள்ள B_0 என்ற சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு $|B_0| = 0$.

$\therefore$ B-ன் மதிப்பிடமான $r' \leqslant r$. ... ... (1)

இப்பொழுது, A-ஐ B-யிலிருந்து 2 நிரைகளை இடமாற்றியதால் கிடைத்த அணியாகக் கருதலாம். ஃ $r \leqslant r'$ ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $r = r'$.

இரண்டாவதாக, (ii) "ஒரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை $k (\neq 0)$ என்னும் எண்ணியால் பெருக்கினால் அந்த அணியின் மதிப்பிடம் மாறாது."

A என்ற அணியின் மதிப்பிடம் r ஆக இருக்கட்டும். A-ல் உள்ள ஒரு நிரையை k ஆல் பெருக்கியதால் கிடைக்கும் அணி B ஆகவும், இதன் மதிப்பிடம் r' ஆகவும் இருக்கட்டும். $r = r'$ என நிரூபிப்போம். B-ல் உள்ள ஏதாவது ஒரு $(r+1)$ சிற்றணிக் கோவை $|B_0|$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதற்கு இசைவாக

A-ல் $|A_0|$ இருக்கும். நாம் k ஆல் பெருக்கிய நிரை இந்த அக்ணிகோவையில் இல்லாவிட்டால் $|B_0| = |A_0|$ ஆகவும்; k ஆல் பெருக்கிய நிரை இதில் இருந்தால் $|B_0| = k\,|A_0|$ ஆகவும் இருக்கும். A-ன் மதிப்பிடம் r ஆனதால் $|A_0| = 0$ ஆக இருக்கவேண்டும். $\therefore\ |B_0| = 0$

$$\therefore\ r' \leqslant r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும், A-ல், B-ல் இருந்து ஒரு நிரையை $\frac{1}{k}$ஆல் பெருக்கிக் கிடைத்ததாகக் கருதலாம்.

$$\therefore\ r \leqslant r' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-ல் இருந்து $r = r'$

மூன்றுவதாக, (iii) ஓர் அணியில் ஒரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளுடன் மற்றொரு நிரையிலுள்ள இசைந்த உறுப்புகளை k ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால் அதன் மதிப்பிடம் மாறுது.

A என்பதன் மதிப்பிடம் r எனக் கொள்க. A-ல் உள்ள i ஆவது நிரையின் உறுப்புகளோடு மற்றோர் நிரையான j-ன் இசைந்த உறுப்புகளை k ஆல் பெருக்கிக் கூட்டியதால் கிடைத்த அணி B ஆகவும், B-ன் மதிப்பிடம் r' ஆகவும் இருக்கட்டும். $r = r'$ என நிரூபிப்போம்.

B-ல் உள்ள $(r+1)$ தரச் சிற்றணிக் கோவையான $|B_0|$ ஐயும், அதற்கிசைய A-ல் உள்ள சிற்றணிக்கோவையான $|A_0|$ ஐயும் கவனி.

முதல் வகை :

i ஆவது நிரை A_0-ல் இல்லாவிடில் $|B_0| = |A_0| \quad \ldots \quad (1)$

இரண்டாம் வகை :

i ஆவது நிரையின் பகுதி A_0-ல் இருந்து, j ஆவது நிரையின் பகுதி A_0-ல் இல்லாவிட்டால் $|B_0| = |A_0| + k\,|C_0|$. இதில் C_0 என்பதும் A-ல் உள்ள $(r+1)$ தரச் சிற்றணிக் கோவை.

$$\therefore\ |C_0| = 0 \qquad \therefore\ |B_0| = |A_0| \quad \ldots \quad (2)$$

மூன்றும் வகை :

i ஆவது நிரையின் பகுதியும், j ஆவது நிரையின் பகுதியும் A-ல் இருந்தால்,

$$| B_0 | = | A_0 | + k | D_0 |$$

$| D_0 |$ -ல் i ஆவது j ஆவது நிரைகள் சமமாயிருப்பதால்,

$$| D_0 | = 0 \quad \therefore \quad | B_0 | = A_0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆனுல் $(r+1)$ சிற்றணிக் கோவை $| A_0 | = 0$

$\because$ A-ன் மதிப்பிடம் r $\quad \therefore \quad | B_0 | = 0$

$$\therefore \quad r' \leqslant r$$

A ஐ B-ல் உள்ள i ஆவது நிரையிலுள்ள உறுப்புகளோடு j ஆவது நிரையிலுள்ள இசைந்த உறுப்புகளை-k ஆல் பெருக்கிக் கிடைத்ததாகக் கருதலாம்.

$$\therefore \quad r \leqslant r'$$

$$\therefore \quad r = r'$$

இதே விதமாக மூன்று வகையான நிரல் மாற்றங்களும் ஓர் அணியின் அளவையை அல்லது மதிப்பிடத்தை மாற்றுது என நிரூபிக்கலாம்.

7·4. கிளைத்தேற்றம் : (i) சாதாரண அணிகளால் ஓர் அணியை முன் பெருக்கினுலும், பின் பெருக்கினுலும் அந்த அணியின் அளவை மாருது.

ஏனென்றல், இவை முறையே ஒரு நிரை மாற்றத்தையும், நிரல் மாற்றத்தையுமே ஏற்படுத்தும்.

கிளைத்தேற்றம் : (ii) ஓர் அணியின் அளவை அதனை ஓர் ஒழுங்கணியால் பெருக்கினல் மாருது.

அதாவது P ஓர் ஒழுங்கணியானல்,

$$\rho(PA) = \rho(A)$$

ஏனெனில், எந்த ஒழுங்கணியையும் சாதாரண அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத இயலும். 6·18 (ii).

இதே விதமாக, Q ஓர் ஒழுங்கணியானால் $\rho(AQ) = \rho(A)$ என நிரூபிக்கலாம்.

உதாரணம் 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் மதிப்பிடத்தைக் கண்டுபிடி.

$H_{32}(1)$ இரண்டாம் நிரையை (1 ஆல் பெருக்கி) மூன்றும் நிரையுடன் கூட்டுவோம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

$H_{31}(-3)$. முதல் நிரையை (-3) ஆல் பெருக்கி, மூன்றும் நிரையுடன் கூட்டுவோம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இதில் $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\therefore$ இதன் மதிப்பிடம் 2; அதாவது $\rho(A) = 2$.

உதாரணம் 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 15 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 11 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$ ஆனால் $\rho(A)$ ஐக் கண்டுபிடி.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 15 \\ 6 & 1 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \because \; C_{15}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 & -14 & -19 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_{31}(-4); \\ R_{41}(-6). \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 & -14 & -19 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} C_{21}(-2); \\ C_{31}(-2); \\ C_{41}(-3); \\ C_{51}(-5). \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 & -14 & -19 \end{bmatrix} \quad R_{23}(-2);\; R_{24}(1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -63 \end{bmatrix} \quad R_{32}(5);\; R_{42}(11)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -63 \end{bmatrix} \quad C_{43}(-1);\; C_{53}(4)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -63 \end{bmatrix} R_4(-3);\ R_{45}(1).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 69 \end{bmatrix} R_{43}(11)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 \end{bmatrix} C_{53}(-12);\ R_4(-\tfrac{1}{3}).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_{54}(23)$$

$\therefore$ இதன் மதிப்பிடம் 4.

அதாவது $\rho(A) = 4$

7·5. தேற்றம் (i) : A என்பது ஒரு $m \times n$ அணி. $\rho(A) = r$ ஆனால், P என்ற ஒழுங்கணியை $PA = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$ என்பதற்கிணங்க கண்டுபிடிக்க இயலும். இதில் $R = r \times n$ அணி; $O = (m-r) \times n$ அணி; $P = m \times m$ அணி.

நிருபணம் : $\rho(A) = r$ ... ... (கொள்கை) 6·12-ல் உள்ளபடி

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என இருக்கும் வண்ணம் P, Q என்னும் ஒழுங்கணிகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். இதில் $P = P_1 . P_2 \ldots\ldots P_h$ ஆகவும்,

$Q = Q_1 . Q_2 \ldots\ldots Q_k$ ஆகவும் இருக்கும்.

P_h, Q_k என்பன முறையே சாதாரண நிரை, நிரல் அணிகள்.

$\therefore$ P, Q ஒழுங்கணிகளாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \; PAQ_1 Q_2 \ldots\ldots Q_k = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; PA . Q_1 . Q_2 \ldots Q_k . Q_k^{-1} \ldots \ldots Q_2^{-1} . Q_1^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . Q_k^{-1} \ldots\ldots Q_2^{-1} . Q_1^{-1}$$

இப்பொழுது சாதாரண அணிகளால் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஐப் பின் பெருக்குவதால், கீழே உள்ள $(m - r)$ பூச்சிய நிரைகளும் மாறுது.

$$\therefore \; PA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இதில் $R = r \times n$ அணி; $0 = (m-r) \times n$ அணி.

(1)-ல் இருந்து $\rho\,(PAQ) = r$

$\therefore \; \rho\,(PAQ . Q^{-1}) = r$

ஏனெனில், ஓர் அணியின் மதிப்பிடம் அதைச் சாதாரண அணிகளால் பெருக்குவதால் மாறுது.

$Q^{-1} = Q_k^{-1} \ldots Q_2^{-1} . Q_1^{-1}$ என்பதில் ஒவ்வோர் அணியும் சாதாரண நிரல் அணியின் நேரெதிர் அணியாக இருப்பதால், அதேவகைச் சாதாரண நிரல் அணியாகத்தான் இருக்கவேண்டும்,

$\therefore \; \rho\,(PA) = r$

$\therefore \; \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$-ன் மதிப்பிடம் $= r$.

$\therefore \; \rho\,(R) = r$

தேற்றம் (ii) : A என்பது ஒரு $m+n$ அணி. $\rho(A)=r$ ஆனால் Q என்ற ஒழுங்கணியை $AQ=[S\ \ O]$ என்பதற்கிணங்க, கண்டுபிடிக்க இயலும். இதில் $S=m\times r$ அணி; $O=m\times(n-r)$ அணி ; $Q=n\times n$ அணி.

நிரூபணம் : $\rho(A)=r$ ... ... (கொள்கை)

6·12-ல் உள்ளபடி

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என இருக்கும்படி, P, Q என்னும் ஒழுங்கணிகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். இதில் $P=P_1 \cdot P_2 \ldots\ldots P_h$ ஆகவும்,

$Q=Q_1 \cdot Q_2 \ldots\ldots Q_k$ ஆகவும் இருக்கும்.

P_h, Q_k என்பன முறையே சாதாரண நிரை, நிரல் அணிகள்.

$\therefore$ P, Q ஒழுங்கணிகள் ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ P_1P_2 \ldots P_h AQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ P_h^{-1} \ldots\ldots P_2^{-1} \cdot P_1^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2 \ldots P_h \cdot AQ$$

$$=P_h^{-1} \ldots\ldots P_2^{-1} \cdot P_1^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, சாதாரண அணிகளால் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஐ முன் பெருக்குவதால், வலப்புறம் உள்ள $(n-r)$ பூச்சிய நிரல்களும் மாறுது.

$$\therefore\ AQ=[S\ \ O] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இதில் $S=m\times r$ அணி; $O=m\times(n-r)$ அணி

(1)-ல் இருந்து $\rho(PAQ)=r$

$\therefore\ \rho(P^{-1}PAQ)=r.$

ஏனெனில், ஓர் அணியின் மதிப்பிடம் அதைச் சாதாரண அணிகளால் பெருக்குவதால் மாறாது.

$P^{-1} = P_h^{-1} \ldots P_2^{-1} . P_1^{-1}$ என்பதில் ஒவ்வோர் அணியும் சாதாரண நிரை அணியின் நேர் மாறுன அணியாகஇருப்பதால், அதே வகைச் சாதாரண நிரை அணியாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \rho(AQ) = r.$$

$$\therefore \quad [S \;\; O]\text{-ன் அளவை} = r.$$

$$\therefore \quad \rho(S) = r.$$

7·6. பெருக்கற் பலனின் அளவைத் தேற்றம் :

இரு அணிகளின் பெருக்கற் பலனின் அளவை அந்த அணிகள் ஒவ்வொன்றின் அளவையை விடச் சிறியது.

அதாவது, (i) $\rho(AB) \leqslant \rho(A)$.

(ii) $\rho(AB) \leqslant \rho(B)$.

இவ்விரண்டையும் இணைத்து,

$$\rho(AB) \leqslant \text{சிறியது}\,(\rho(A),\ \rho(B))$$

$$\rho(AB) \leqslant \text{Min}\,(\rho(A), \rho(B))$$

என எழுதுவது வழக்கம்.

நிரூபணம்: A, B என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ அணிகளாக இருக்கட்டும். இவை பெருக்க இயைந்தன என்பதைக் கவனி. மேலும், இவைகளின் மதிப்பிடங்கள் முறையே r_1, r_2 ஆக இருக்கட்டும்.

7·5-ல் இருந்து $PA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

இதில் $R = r_1 \times n$ அணி; $0 = (m - r_1) \times n$ அணி.

$$\therefore \quad PAB = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B$$

$$\therefore \quad \rho(PAB) = \rho\left\{ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B \right\}$$

ஆனால், $\rho(PAB) = \rho(AB)$.

ஏனெனில், ஓர் அணியின் மதிப்பிடம், அதை P என்ற ஒழுங் கணியால் பெருக்குவதால் மாறாது.

$$\therefore\ \rho(AB) = \rho\left\{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B\right\}$$

$\rho(AB) = r$ என இருக்கட்டும்.

அப்படியானால்,

$$\rho\left\{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B\right\} = r.$$

$\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$-ல் கீழே உள்ள $(m-r_1)$ நிரைகள் பூச்சிய நிரைகள்.

$\therefore \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B$யிலும் $(m-r_1)$ நிரைகள் பூச்சிய நிரைகளாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ \rho\left\{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B\right\} \leqslant r_1$$

அதாவது, $r \leqslant r_1$

அதாவது, $r \leqslant$ முன்காரணி அணியின் மதிப்பிடம் ... (1)

[இதே விதமாக $r \leqslant r_2$ என நிரூபிக்கலாம்]

இப்பொழுது $\rho(AB) = r$

$\therefore\ \rho(AB)' = r$

$\therefore\ \rho(B'A') = r.$

ஆனால், $r \leqslant$ முன் காரணி அணியின் மதிப்பிடம்... (1)-ல் இருந்து,

$$\leqslant \rho(B')$$
$$\leqslant \rho(B)$$
$$\leqslant r_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$\therefore\ \rho \leqslant$ சிறியது (r_1, r_2)

வேறு முறை :

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்ற A-ன் இயல் வடிவை எடுத்துக்கொள்.

இதில் P, Q ஒழுங்கணிகள் என்பதைக் கவனி.

$$\therefore\ P^{-1}\,PAQ \cdot Q^{-1} = P^{-1}\,N\,Q^{-1}$$

$$\therefore\ A = P^{-1}\,N\,Q^{-1}$$

$$\therefore\ AB = P^{-1}\,NQ^{-1}\,.\,B$$

$$\therefore\ \rho\,(AB) = \rho\,(NQ^{-1}\,B) \quad \because\ P^{-1} \text{ ஓர் ஒழுங்கணி.}$$

இப்பொழுது $NQ^{-1}\,B$-ல் முதல் r நிரைகளைத் தவிர, கீழே உள்ள $(m-r)$ நிரைகளும் பூச்சிய நிரைகளாய் இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ \rho\,(AB) \leqslant r$$

$$\therefore\ \rho\,(AB) \leqslant \rho\,(A)$$

இதேவிதமாக $\rho\,(AB) \leqslant \rho\,(B)$.

7·7. "A என்பது ஓர் ஒழுங்கு சதுர அணியானால் AA'-ன் அளவையும் A-ன் அளவையும் ஒன்றே என நிரூபி.

$B = AA'$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore\ \rho\,(B) = \rho\,(AA')$$

$\therefore\ \rho\,(B) \leqslant \rho\,(A)$ ... ... 7·6-ல் இருந்து (1)

மேலும் A ஒழுங்கு சதுர அணியாதலால் A^{-1} என்ற அணி அர்த்தமுள்ளது.

$$\therefore\ A^{-1}B = A^{-1}AA' = A'$$

$$\therefore\ \rho(A') = \rho(A^{-1}B)$$

$\rho(A) = \rho(A^{-1}B) \quad \because\ \rho(A) = \rho(A')$.

$\rho(A) \leqslant \rho(B)$ ... ... 7.6-ல் இருந்து (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $\rho(A) = \rho(B) = \rho(AA')$.

7·8. திசையிகளைப் பற்றிய சில குறிப்புகள் (Vectors and Vector Spaces)

$a_1 i + a_2 j + a_3 k$ என்ற திசையி (vector) யைப் பற்றி வாசகர்கள் அறிந்திருப்பார்கள். அதை $(a_1\ a_2\ a_3)$ எனக் குறிப்பிடுவதையும் அறிவார்கள். இதேவிதமாக $A = (a_1 a_2 \ldots \ldots a_n)$ என்பதை n-தர வெக்டர் அல்லது n-வெக்டர் என்றே சொல்லலாம். இதில் $(a_1, a_2 \ldots \ldots, a_n)$ வரிசைப்படுத்தியதாகையால் இதை $1 \times n$ அணியோடு ஒத்து நோக்குவது பொருந்தும். வெக்டர்களைக் கூட்டல், வெக்டர்களின் சமத்துவம், வெக்டர்களை எண்ணியால் (scalar) பெருக்கல் முதலியவை அணிகளின் கூட்டல், சமத்துவம், எண்ணியால் பெருக்கல் ஆகியவற்றுடன் இயைந்திருப்பதைக் கவனி. மேலும்,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்ற $(m \times n)$ அணியை $A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix}$

என எழுதி, $R_1, R_2, \ldots R_m$ என்பவற்றை $1 \times n$ வெக்டர்களாகக் கருதலாம்.

7·9. வெக்டர்களின் ஒருபடித்த சார்புக் குழு.

$X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்ற r வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கட்டும். எல்லாம் பூச்சியமில்லாத $k_1, k_2, \ldots, k_r$ என்ற எண்ணிகளை $\sum_{i=1}^{r} k_i X_i = 0$ என்றவாறு காணமுடியுமாயின், $X_1, X_2, \ldots X_r$ஐ ஒரு படித்த சார்பு வெக்டர்கள் என்று கூறுவோம். $\sum_{i=1}^{r} k_i X_i = 0$

என்ற சமன்பாட்டில் இருந்து $k_1 = k_2 = \quad = k_r = 0$ என்ற ஒரே முடிவு கிடைக்குமாயின் $X_1, X_2, \ldots X_r$ என்பன ஒருபடித்த சார்பற்ற வெக்டர்கள் என்று கூறுவோம்.

7·10. வெக்டர்களின் ஒருபடிக் கூட்டு வெக்டர்.

$$X = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_r X_r \qquad (1)$$

ஆனால், X ஐ $(X_1, X_2, \ldots X_n)$-ன் ஒருபடிக் கூட்டு வெக்டர் என்று சொல்லலாம்.

குறிப்பு : இவ்வாறு இருந்தால் $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ என்பன ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழு.

ஏனெனில் (1)-ல் இருந்து,

$$X - k_1X_1 - k_2X_2 - \ldots \ldots - k_rX_r = 0$$

என்று தெரியும். இதில் X-ன் குணகம் $= 1 \neq 0$ என்பதைக் கவனி.

7·11. கிளைத்தேற்றம் (i) :

$X_1, X_2, \ldots \ldots X_n$ என்பன ஒருபடித்த சார்பற்ற வெக்டர் குழுவாகவும், X, X_1, X_2, X_n என்பன ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழுவாகவும் இருந்தால் X ஐ $(X_1, X_2, \ldots \ldots X_r)$-ன் ஒருபடிக் கூட்டு வெக்டராக எழுதலாம்.

கிளைத்தேற்றம் (ii) :

$(X_1, X_2, \ldots \ldots X_r)$ என்பன ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழு வானால், $(X_1, X_2, \ldots \ldots X_r, X_r+1)$-ம் ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழு ஆதல் வேண்டும்.

ஏனெனில் $k_1X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_r X_r = 0$ என்பதில் எல்லா k-களும் பூச்சியமல்ல என்பது கொள்கை. இப்பொழுது $k_{r+1} = 0$ ஆக எடுத்துக் கொண்டு,

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots \ldots + k_rX_r + k_{r+1}\, X_{r+1} = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டில் எல்லா k-களும் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனி.

7·12. வெக்டர் வெளி (Vector Space)

$X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots \ldots + k_nX_n \quad \text{என்ற}$$

ஒருபடித்த கூட்டு வெக்டர்களின் குழுவை வெக்டர் வெளி என வரையறை செய்யலாம். இதையே, (i) X_1, X_2 என்பன இரு வெக்டர்களானால் X_1+X_2-ம் இந்த வெக்டர் வெளியைச் சேர்ந்ததாக இருக்கவேண்டும். மேலும் (ii) X ஒரு வெக்டரானால் kX-ம் இந்த வெக்டர் வெளியைச் சேர்ந்ததாக இருக்க வேண்டும் என்ற இரு நிபந்தனைகளாகக் கூறலாம். அதாவது,

$$X_1, X_2 \epsilon V \Longrightarrow (X_1+X_2) \epsilon V_n$$

$$X \; V \Longrightarrow kX \epsilon \; V_n$$

7·13. வெக்டர் உள் வெளி :

S என்பது V_n என்பதன் பூச்சியமில் உட்குழுவாக இருக்கட்டும். மேலும்,

(i) X_1, X_2 என்பன S-ல் இருந்தால் $X_1 + X_2$-ம் S-ல் இருக்கவேண்டும்.

(ii) X என்பது S-ல் இருந்தால் kX-ம் S-ல் இருக்க வேண்டும்.

இவ்வாறுள்ள S ஐ V_n இன் வெக்டர் உள் வெளி என்று சொல்வோம்.

V_n-ல் உள்ள குறிப்பிட்ட r-வெக்டர்களின் எல்லாவித ஒரு படித்த கூட்டு வெக்டர்கள் S என்ற வெக்டர் உள் வெளியை நிரப்பும் என்று சொல்லலாம்.

7·14. உள் வெளியின் அடிப்படை வெக்டர் குழு :

(i) இந்த வெக்டர்களின் ஒரு படித்த கூட்டு வெக்டர்கள் (Linear combination of basic Vectors) உள் வெளியான S ஐ நிரப்ப வேண்டும்;

(ii) இந்தக் குழு ஒரு படித்த சார்பற்ற குழுவாய் இருக்க வேண்டும்

என்ற நிபந்தனைகளுக்கிணங்க உள்ள வெக்டர்களின் குழுவை உள்வெளி அடிப்படை வெக்டர் குழு என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் : $c_1 = (1, 0, 0)$; $c_2 = (0, 1, 0)$ என்பது V_3-ன் உள்வெளியான V_2 ஐ நிரப்பும் அடிப்படை வெக்டர் குழு.

ஒரு குழுவில் உள்ள வெக்டர்களின் ஒருபடித்த கூட்டு வெக்டர்கள், உள்வெளியான S ஐ நிரப்பினுல் இதிலிருந்து ஓர் அடிப்படைக் குழுவைப் பிரித்தெடுக்க முடியும்.

தேற்றம்: ஓர் உள்வெளியை நிரப்பும் அடிப்படை வெக்டர் குழுவில் உள்ள எண்ணிக்கை மாருத எண்ணுகும். அதாவது $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ என்ற இரு அடிப்படைக் குழுக்கள் இருந்தால் $m = n$.

$X_1, X_2, \ldots X_r$ என்பன ஒரு படித்த சார்பற்ற வெக்டர் குழுவாக இருந்தால், இதனுடன் $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots \ldots X_{r+s}$ ஐச் சேர்த்து ஓர் அடிப்படைக் குழுவாக மாற்ற இயலும்.

V_n-ல் உள்ள எந்த $(n+1)$ வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழுவாக இருக்க வேண்டும்.

7·15. வெக்டர் உள் வெளியின் பரிமாணம் :

ஒரு வெக்டர் உள் வெளியின் அடிப்படைக் குழுவில் உள்ள வெக்டர்களின் எண்ணிக்கையை அந்த உள் வெளியின் பரிமாணம் என்று வரையறை செய்வோம்.

அடிப்படைக் குழுக்களும், கூறுகளும்

$i = [1, 0, 0]'$; $j = [0, 1, 0]'$; $k = [0, 0, 1]'$ என்ற அலகு அணிகள் V_3-ன் அடிப்படைக் குழு என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே, $V = [x, y, z]'$ என்ற வெக்டரை $xi + yj + zk$ என்ற எழுத இயலும். (x, y, z)-ஐ (i, j, k) அடிப்படைக் குழுவின் சார்பான கூறுகள் (co-ordinates) என்பது பொருந்தும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : $X_1 = [2, 2]$; $X_2 = [1, 3]$;

$X_3 = [-1, -3]$ ஆனுல்,

$3X_1 + 4X_2$, $X_1 - X_2 + 2X_3$ என்ற திசையிகளைக் கண்டுபிடி.

$$3X_1 = [6, 6] \; ; \; 4X_2 = [4, 12]$$

$$\therefore \; 3X_1 + 4X_2 = [10, 18]$$

$$X_1 - X_2 = [(2-1), (2-3)] = [1, -1]$$

$$2X_3 = 2[-1, -3] = [-2, -6]$$

$$\therefore \; X_1 - X_2 + 2X_3 = [-1, -7]$$

மாதிரி 2 : $X_1 = [2, 2, -2]$; $X_2 = [1, 3, -1]$

$X_3 = [-1, -3, 3]$; $X_4 = [3, 9, -1]$ ஆனால்,

(i) $X_1 \, X_2 \, X_3$ என்பன ஒருபடித்த சார்பற்ற வெக்டர் குழு என்றும்,

(ii) $X_2 \, X_3 \, X_4$ என்பன ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழு என்றும் நிரூபி.

(i) $k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

$$k_1 [2, 2, -2] + k_2 [1, 3, -1] + k_3 [-1, -3, 3] = 0$$

$$[2k_1, 2k_1, -2k_1] + [k_2, 3k_2, -k_2] + [-k_3, -3k_3, 3k_3] = 0.$$

$$\therefore \; [2k_1 + k_2 - k_3, \; 2k_1 + 3k_2 - 3k_3, \; -2k_1 - k_2 + 3k_3] = 0.$$

$$\therefore \; 2k_1 + k_2 - k_3 = 0; \; 2k_1 + 3k_2 - 3k_3 = 0; \; -2k_1 - k_2 + 3k_3 = 0.$$

$$\therefore \; 2k_2 - 2k_3 = 0; \; 2k_3 = 0;$$

$$\therefore \; k_3 = 0.$$

$$\therefore \; k_1 = 0.$$

$\therefore \; \{X_1, X_2, X_3\}$ ஒரு சார்பற்ற வெக்டர் குழு,

(ii) $k_2X_2 + k_3X_3 + k_4X_4 = 0$ எனக் கொள்க.

$$k_2 [1, 3, -1] + k_3 [-1, -3, 3] + k_4 [3, 9, -1] = 0.$$

$$[k_2 - k_3 + 3k_4, \; 3k_2 - 3k_3 + 9k_4, \; -k_2 + 3k_3 - k_4] = 0$$

$\therefore \quad k_2 - k_3 + 3k_4 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$3(k_2 - k_3 + 3k_4) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$-k_2 + 3k_3 - k_4 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$(1) + (3) \quad 2k_3 + 2k_4 = 0 \; ; \quad k_3 = -K_4$

$\therefore \quad k_2 = k_3 - 3k_4 = -4k_4$

k_4-க்கு எந்த மதிப்பும் கொடுக்கலாம்.

உதாரணமாக $k_4 = 1$ ஆனல் $k_3 = -1 \; ; k_2 = -4$

$\therefore \quad k_2, k_3, k_4$ பூச்சியமல்ல.

$\therefore \quad \{X_2, X_3, X_4\}$ ஒரு சார்புக் குழு ஆகும்.

மாதிரி 3: $A_r = [a_{r1}, a_{r2}, a_{r3}]$, $r = 1, 2, 3$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடித்த சார்பு வெக்டர் குழுவானுல்,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுபி.

A_1, A_2, A_3 என்பன ஒரு படித்த சார்புக் குழுவானுல் x_1, x_2, x_3 என்ற எண்ணிகள்,

$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0. \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

என்றவாறு இருக்கவேண்டும்.

எல்லா எண்ணிகளும் பூச்சியமாயிருக்க முடியாது.

(1)-ல் இருந்து,

$$x_1 [a_{11}, a_{12}, a_{13}] + x_2 [a_{21}, a_{22}, a_{23}] + x_3 [a_{31}, a_{32}, a_{33}] = 0.$$

$$\therefore \; [a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 \; ; \; a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 \; ; \; a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3] = 0.$$

$$\therefore \quad a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

இவை ஒரு படியில் சமபடித்தான சமன்பாடுகள். இவைகளின் மூலங்கள் (roots) எல்லாமே பூச்சியமில்லாமல் இருக்க

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7·16. ஓர் அணியின் நிரை அளவை (Row Rank)

A என்ற $m \times n$ அணியின் m நிரைகளையும் ஒரு n-வெக்டராகக் கருதலாம். ஏனெனில்,

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix}$$

இதில் $R_1 = [a_{11}, \ a_{12}, \ \dots \ \dots \ a_{1n}]$ என்ற n-வெக்டர். இந்த m-நிரைகளால் நிரப்பப்படும் V_n என்பதன் உள் வெளிக்கு நிரை வெளி (Row space) என்பது பெயர்.

இந்த நிரை வெளியின் பரிமாணமே (Dimension) இதன் நிரை அளவை (Row rank) ஆகும்.

இதே விதமாக நிரல் வெளியையும் (Column space), நிரல் அளவையையும் (Column rank) வரையறுக்கலாம்.

7·17. தேற்றம் : ஓர் அணியின் அளவை அந்த அணியின் நிரை அளவிற்கும், அதன் நிரல் அளவிற்கும் சமம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

$m \times n$ அணியாக இருக்கட்டும் $(m < n)$ இதில் $R_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots \dots a_{in}]$ என m வெக்டர்கள் இருப்பதைக் கவனி. இந்த அணியின் மதிப்பிடம் $r\ (<m)$ ஆக இருந்தால், $\{R_1, \dots R_m\}$ என்ற வெக்டர் குழுவில் r வெக்டர்கள் மட்டும் ஒருபடித்த சார்பற்ற குழுவாக இருக்கும் என்றும், மீதியான $m - r$ வெக்டர்களை இவற்றின் சார்பாக எழுதலாம் என்றும் நிரூபி. அதாவது, இந்த வெக்டர் உள் வெளிக்குப் பரிமாணம் r. இதையே இன்னும் வேறு விதமாகக் கூறினால், இந்த வெக்டர் வெளியின் அடிப்படைக் குழுவில் (basis) r வெக்டர்கள் இருக்கும்.

நிரூபணம் : A-ன் மதிப்பிடம் $= r$ ... . கொள்கை

$\therefore$ ஒரு r-சதுர சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பாவது பூச்சியத்தினின்று வேறுபட்டிருக்க வேண்டும். இதை (வேண்டிய நிரை மாற்றங்கள் செய்து)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

என எழுதலாம்,

இப்பொழுது,

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1r} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2r} & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & \dots & a_{rr} & a_{rq} \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & \dots & a_{pr} & a_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

என்ற $(r+1)$ தரச் சிற்றணியை எடுத்துக் கொள். இதன் மதிப்பு பூச்சியம் என்பதைக் கவனி. (ஏனெனில் இந்த அணியின் அளவை $=r$) இதனை $(r+1)$ ஆவது நிரலின் அடியாக விரித்தால்,

$$a_{1q}k_1 + a_{2q} \cdot k_2 + \dots + a_{rq} \cdot k_r + a_{pq} k_{r+1} = 0 \dots (I)$$

எனக் கிடைக்கும். $k_1, k_2, \dots k_r$ என்பன $a_{1q}, a_{2q}, \dots a_{rq}$-ன் இணை காரணிகள். k_{r+1} ஆனது a_{pq}-ன் இணை காரணி.

இப்பொழுது, $(r+1)$ ஆவது நிரலை q-க்கு $r+1, r+2, \dots r+\overline{n-r}$ மதிப்புகள் கொடுத்து $(n-r)$ சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். மேலும், $q = 1, 2, 3, \dots r$ ஆக இருந்தாலும் சமன்பாடு I உண்மையாக இருக்கும்.

∵ ஓர் அணியில் ஒரு நிரலின் உறுப்புகளை மற்றொரு நிரலின் இசைந்த (corresponding) இணை காரணிகளைக் கொண்டு பெருக்கிக் கூட்டிய தொகை பூச்சியம் என்பது நமக்கு தெரியும்.

∴ I-ல் $q = 1, 2, \dots, r, \dots n$ எனப் போட்டுக் கூட்டினால்

$$k_1 [a_{11} a_{12} \dots a_{1n}] + k_2 [a_{21} a_{22} \dots a_{2n}] + \dots$$
$$+ k_r [a_{r1} a_{r2} \dots a_{rn}] + k_{r+1} [a_{p1} a_{p2} \dots a_{pn}] = 0$$

அதாவது $k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r + k_{r+1} X_p = 0.$

இதில் $k_1, k_2, \dots g_r, k_{r+1}$ என்பவை எண்ணிகள் (scalars) என்பதையும் $k_{r+1} = D \neq 0$ என்பதையும் கவனி.

$$\therefore \quad X_p = -\frac{1}{k_{r+1}} [k_1 X_1 + \dots + k_r X_r]$$

$$X_p = -\frac{1}{D} \cdot [k_1 X_1 + \dots + k_r X_r] \quad \dots \quad (1)$$

இதில் $p = r+1, r+2, \dots m$ ஆக இருக்கலாம். இனிமேல், $\{X_1, X_2 \dots X_r\}$ ஒருபடித்த சார்பற்ற குழு என நிரூபிப்போம்.

$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r = 0$ எனக் கொள்க.

$$k_1 [a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}] + k_2 [a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}] + \dots$$
$$\dots + k_r [a_{r1}, a_{r2}, \dots a_{rn}] = 0$$

$$\therefore \quad a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{r1}k_r = 0$$
$$a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{r2}k_r = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{rn}k_r = 0$$

இதில் முதல் r சமன்பாடுகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோம். $D \neq 0$ ஆனதால், கிரேமர் விதிப்படி,

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

$\therefore$ $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ என்பது ஒரு படித்த சார்பற்ற குழு. ... ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $\{X_1, \ldots, X_2, \ldots, X_r\}$ ஓர் அடிப் படை வெக்டர் குழு எனலாம்.

$\therefore$ இந்த அணியின் நிரை மதிப்பிடம் $= r$. இப்பொழுது,

A-ன் நிரல் மதிப்பிடம் $=$ A'-ன் நிரை மதிப்பிடம்.

$=$ A'-ன் மதிப்பிடம்

$=$ A-ன் மதிப்பிடம்,

$\therefore$ ஓர் அணியின் மதிப்பிடம் $=$ அதன் நிரை மதிப்பிடம்

$=$ அதன் நிரல் மதிப்பிடம்.

7·18. A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியை ஓர் ஒழுங்கணியால் முன் பெருக்கினுல் அதன் நிரை மதிப்பிடம் மாறுது.

ஓர் அணியை ஒழுங்கணியால் பெருக்கினுல் அதன் மதிப் பிடம் மாறுது. ஆனுல் அதன் மதிப்பிடம்$=$நிரை மதிப்பிடம். $\therefore$ அதன் நிரை மதிப்பிடம் மாறுது.

வேறு முறை :

A என்பது $m \times n$ அணியாகவும், X என்பது m-சதுர ஒழுங் கணியாகவும் இருக்கட்டும்.

$XA = B$ எனக் கொள்க. A-ன் மதிப்பிடம் $=$ B-ன் மதிப் பிடம் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, $XA = B$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = B$$

∴ B-ன் நிரைகள் பின்வருமாறு இருக்கும்.

முதல் நிரை : $X_{11} R_1 + X_{12} R_2 + \ldots + X_{1m} R_m$

இரண்டாம் நிரை : $X_{21} R_1 + X_{22} R_2 + \ldots + X_{2m} R_m$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

mஆவது நிரை ; $X_{m1} R_1 + X_{m2} R_2 + \ldots + X_{mm} R_m$

இவை $\{R_1, R_2, \ldots R_m\}$ -ன் ஒரு படித்த கூட்டு வெக்டர்கள் (linear combination of vectors).

∴ B-ன் ஒவ்வொரு நிரையையும் A-ன் நிரைவெளியிலிருந்து (Row space) பெறலாம். மேலும், $A = X^{-1}B$. இதில் X^{-1} ஓர் ஒழுங்கணி ∴ முன்மாதிரியே, A-ன் ஒவ்வொரு நிரையையும் B-ன் நிரை வெளியிலிருந்து பெற முடியும் என நிருபிக்க முடியும்.

∴ A-ன் நிரை வெளியும், B-ன் நிரை வெளியும் சமம்.

∴ அவைகளின் பரிமாணம் (Dimension) சமம்.

∴ அவைகளின் நிரை மதிப்பிடம் சமம்.

7·19. இதே விதமாக, ஓர் அணியை ஓர் ஒழுங்கணியால் பின் பெருக்கினால் அதன் நிரல் மதிப்பிடம் மாறாது என நிரூபிக்கலாம்.

7·20. தேற்றம் : A என்ற $m \times n$ அணியின் நிரை மதிப்பிடம் r ஆக இருந்தால், X என்னும் ஒழுங்கணியை,

$$XA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$ என இருக்கும் வண்ணம்

கண்டு பிடிக்கலாம். இதில் $R = r \times n$ அணி; $0 = (m-r) \times n$ அணி.

நிரூபணம் : முதலாவது, கொடுக்கப்பட்ட A என்ற அணியின் நிரை வெளிக்கு அடிப்படை நிரை வெக்டர்களான r நிரைகளைத் தெரிந்து கொள்வோம். தகுந்த நிரை மாற்றங்கள் மூலமாக இந்த r நிரைகளையும் மேலே இருக்குமாறு செய்யலாம். இது கொடுக்கப்பட்ட அணி A-ஐச் சாதாரண நிரை அணிகளால் முன் பெருக்குவதற்குச் சமம்.

இப்பொழுது கீழே உள்ள $(m-r)$ நிரைகளையும், மேலேயுள்ள நிரைகளைத் தகுந்த எண்ணியால் பெருக்கிக் கூட்டியோ கழித்தோ, பூச்சிய நிரைகள் ஆக்கிவிடலாம். இவையும் சாதாரண நிரையணிகளால் முன் பெருக்குவதற்குச் சமமே.

மேலும் சாதாரண நிரையணிகளின் பெருக்கற் பலன் ஓர் ஒழுங்கணி. இது X ஆக இருக்கட்டும். ஆகையால்,

$$XA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

இதேவிதமாக, s என்பது A-ன் நிரல் மதிப்பிடமாக இருந்தால் Y என்ற ஒழுங்கணியை $AY\ [S\ O]$ என இருக்கும் வண்ணம் கண்டு பிடிக்க முடியும். இதில் $S = m \times s$ அணி; $O = m \times (n-s)$ அணி.

7·21. தேற்றம் : ஓர் அணியின் மதிப்பிடம் அதன் நிரை மதிப்பிடத்திற்கும், அதன் நிரல் மதிப்பிடத்திற்கும், சமமாகும். (வேறு முறை)

A என்ற அணியின் மதிப்பிடம் r ஆகவும், அதன் நிரை மதிப்பிடம் r_1 ஆகவும் இருக்கட்டும்.

ஓர் அணியின் மதிப்பிடமும், நிரை மதிப்பிடமும் ஓர் ஒழுங்கணியால் முன் பெருக்கிஞல் மாருது என்று தெரியும் (7·4 (ii); 7·18).

இதன் நிரை மதிப்பிடம் r_1 ஆனதால்

$$XA = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{என எழுதலாம்} \quad (7{\cdot}20)$$

இதில் R_1 என்பது $r_1 \times n$ அணி.

$\therefore$ $(r_1 + 1)$ தரச் சிற்றணிகள் பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ $\rho(XA) \leqslant r_1$.

$\therefore \quad \rho(A) \leqslant r_1 \qquad \because \quad \rho(XA) = \rho(A)$

$\therefore \quad r \leqslant r_1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$

மேலும், $\rho(A) = r$ ஆனதால்,

$PA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம் $\quad \ldots \quad \ldots \quad (7{\cdot}5)$

இதில் R என்பது $r \times n$ அணி.

$\therefore$ PA-ன் நிரை மதிப்பிடம் $\leqslant r$

ஆனால், PA-ன் நிரை மதிப்பிடம்

$= A$-ன் நிரை மதிப்பிடம் ($\because$ ஓர் ஒழுங்கணியால் பெருக்கினால் நிரை மதிப்பிடம் மாறாது)

$\therefore \quad r_1 \leqslant r \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$

(1), (2)ல் இருந்து $r = r_1$

இதேவிதமாக, ஓர் அணியின் மதிப்பிடமும் அதன் நிரல் மதிப்பிடமும் சமம் என நிரூபிக்கலாம்.

7·22. கூட்டலணியின் (மதிப்பிடம்) அளவை

A, B என்பன ஒரேதர அணிகளானால்

$\rho(A + B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$

நிரூபணம்: A, B என்பன $m \times n$ அணிகளானால் $A + B$-ம் $m \times n$ அணி என்பதைக் கவனி. r_1, r_2 என்பன முறையே A, B-ன் மதிப்பிடங்களாக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது S என்பது A-ன் நிரைகளாலும், B-ன் நிரைகளாலும் சேர்ந்து நிரப்பப்படும் உள்வெளி (Sub space) யாக இருக்கட்டும். S_A, S_B, S_{A+B} என்பன முறையே A-ன் நிரைகளாலும், B-ன் நிரைகளாலும், $(A+B)$-ன் நிரைகளாலும் நிரப்பப்படும் உள்வெளிகளாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்

S_{A+B}-ன் பரிமாணம் $\leqslant$ S-ன் பரிமாணம்

$\leqslant$ (S_A-ன் பரிமாணம்) + (S_B-ன் பரிமாணம்)

$r \leqslant r_1 + r_2$

அதாவது, $\rho(A+B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$

7·23. A, B என்பன n-சதுர அணிகளானல்,

$\rho(AB) \geqslant \rho(A) + \rho(B) - n$ என நிரூபி.

நிரூபணம் : $\rho(A) = r$ ஆக இருக்கட்டும். அப்படியானல் P, Q என்னும் ஒழுங்கணிகள்

$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என இருக்கும்படி உண்டு.

$\therefore\ P^{-1}PAQ \cdot Q^{-1} = A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$ ... (1)

இப்பொழுது $C = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} Q^{-1}$ ... (2)

என்ற அணியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$A + C = P^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \right\} Q^{-1}$$

... ... தொடர்பு விதி

$= P^{-1} I_n Q^{-1}$

$= P^{-1} Q^{-1}$

$\therefore\ A + C$ ஓர் ஒழுங்கணி.

$\therefore\ \rho(A + C) = n.$

இப்பொழுது $\rho(B) = \rho[(A+C)B]$

$\therefore$ ஓர் அணியின் ρ அதை ஓர் ஒழுங்கணியால் பெருக்கிஞல் மாருது.

$\therefore\ \rho(B) = \rho[(AB+CB)]$

$\leqslant \rho(AB) + \rho(CB)$ ... ... (3)

7·22-ல் இருந்து

ஆனல் $\rho(CB) \leqslant \rho(C)$ 7.6

$= n - r$ ... ... (2)-ல் இருந்து

$= n - \rho(A)$

$\therefore$ (3)-ல் இருந்து $\rho(B) \leqslant \rho(AB) + n - \rho(A)$.

$\therefore\ \rho(A) + \rho(B) - n \leqslant \rho(AB).$

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : A என்ற n-சதுர அணி சுய அடுக்கு அணியாக இருந்தால் (Idempotent) $\rho\,(I-A) = n-\rho\,(A)$ என நிறுபி.

A ஒரு சுய அடுக்கு அணி.

$\therefore\quad A^2 = A$

$A - A^2 = 0$

$A\,(I-A) = 0$

$\rho\,\{A(I-A)\} = \rho\,(0)$ ... இதில் 0 பூச்சிய அணி.

$= 0$ ... ... பூச்சிய எண். (1)

இப்பொழுது $\rho\,(AB) \geqslant \rho\,(A) + \rho\,(B) - n$

$$0 \geqslant \rho\,(A) + \rho\,(I-A) - n$$

$$n - \rho\,(A) \geqslant \rho\,(I-A).$$

மாதிரி 2 : பின்வரும் அணியின் (மதிப்பிடம்) அளவை 2க்கு அதிகமாயிருக்க முடியாது என நிரூபி.

$$\begin{bmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2 & a_1\beta_1+a_2\beta_2 & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2 & b_1\beta_1+b_2\beta_2 & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2 & c_1\beta_1+c_2\beta_2 & c_1\gamma_1+c_2\gamma_2 \end{bmatrix}$$

A என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியாய் இருக்கட்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம்.

$A = BC$ ஆனால்

$\rho\,(A) \leqslant$ சிறியது $[\rho\ (B),\ \rho\,(C)\ ]$

இதில் C-ன் கடைசி நிரை பூச்சிய நிரை

ஆதலால் $\rho\,(C) = 2$

$\therefore\quad \rho\,(A) \leqslant 2$

பயிற்சி 7

1. பின்வரும் அணிகளின் அளவைகளை (மதிப்பிடத்தை)க் கண்டுபிடி :

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ -2 & -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. ஓர் அணியில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 1 ஆனால் அதன் மதிப்பிடமும் 1 என நிரூபி.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ ஆனால்,

A, B, $A+B$, AB, BA-ன் மதிப்பிடங்கள் 2, 1, 2, 0, 1 என நிரூபி.

4. பின்வரும் அணிகளை இயல் வடிவில் எழுது. அதிலிருந்து அவற்றின் அளவைகளை (மதிப்பிடத்தை)க் கண்டுபிடி.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

5. PAQ என்பது இயல் வடிவில் இருக்குமாறு P, Q என்னும் அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & -11 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

6. பின் வரும் வெக்டர்கள் ஒரு படித்த சார்புக் குழுவா அல்லவா என ஆராய்க.

(i) $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$

(ii) $(1, 2, 3)$; $(1,-1, 0)$.

(iii) $[1, 1, -2, -3]$, $[2, 4, -1, 1]$, $[-3, 2, -3, -1]$ $[0, 7, -6, -3]$

(iv) $[-3, -4, 1, 2]$ $[1, -2, 0, -1]$, $[-1, -8, 1, 5]$ $[-8, -14, 3, 7]$

7. $\rho(A)=2$ ஆக உள்ள A என்ற ஏதாவதொரு 3 சதுர அணியை எடுத்துக் கொண்டு அதன் நிரை வெக்டர்களும், நிரல் வெக்டர்களும் ஒரு படித்த சார்புக் குழுக்கள் என நிரூபி.

விடைகள்

1. (i) 2 (ii) 2

   (iii) 2 (iv) 4

4. (i) 2 (iii) 3 (iv) 4

5. (i) $= P\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (ii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (iii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

6. (i) சார்பற்ற குழு

   (ii) சார்பற்ற குழு

   (iii) சார்புக் குழு

   (iv) சார்பற்ற குழு.

8. ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்

8·1. அணிகள் பற்றிப் பயில்வதால், சமன்பாடுகளை விடு விக்கும் முறைகளைத் தெரிந்து கொள்வது உதவியாக இருக்கும் என்று முதலிலேயே குறிப்பிட்டோம். இவற்றிற்கிசைய கூட்டல், பெருக்கல் முதலியவைகளை வரையறை செய்ததையும் நினைவு படுத்தினேம்; ஒரு சில சமன்பாடுகளை விடுவிக்கும் கணக்குகள் கூடச் செய்து காட்டியுள்ளோம். இப்பொழுது இந்தச் சமன் பாடுகளை விடுவிப்பதில் உள்ள கொள்கைகளை (theory) முறையாக உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \qquad \ldots \quad (1)
\end{aligned}
$$

$X = [x_1, x^2, \ldots . x_n]'$ ஆகவும்,

$B = [b_1, b_2, \ldots . b_n]'$ ஆகவும்,

A என்பது குணகங்களின் அணியாகவும் இருந்தால் (1)-ஐ $AX = B$ என எழுதலாம்.

இனி, இந்தச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க (solve) இயலுமா, அவை ஏற்கத்தக்கனவா என்ற கேள்விகள் எழும். இவற்றிற்கும் மேலாக தீர்வு காணும் வகை யாது ? என்பதையெல்லாம் நாம் அறிந்துகொள்ள வேண்டும்,

முதலாவதாக, 'தீர்வு' என்ருல் $x_1, x_2, \ldots x_n$-க்கு நாம் கண்டு பிடிக்கும் $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்ற எண் மதிப்புகள் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்துவதாக இருக்க வேண்டும். இதனுல் தான் நாம் இவற்றை ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் என்று சொல்

கிரேும், சதாரணமாக $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பன சிக்கல் எண்களாக (complex numbers) இருக்கக் கூடாதென நாம் எதிர்பார்ப்பது இயற்கை. ஆனல் தூய (pure) கணிதம் பயில்வோர் இதை ஏற்க மாட்டார்கள். வேறு சில சந்தர்ப்பங்களில் நாம் நேர் முழு எண்களேயே விடைகளாக எதிர்பார்க்க வேண்டியதும் இருக்கும். இவற்றை நாம் தேவைக்கேற்றவாறு மாற்றிச் செய்ய வேண்டும் எனக் கூற தேவையில்லை.

8·2. இப்பொழுது, நாம் சில எளிய உதாரணங்களைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 1 : ஒரே மாறியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு $a_{11}x_1 = b_1$.

இதில் a_{11}, b_1 என்ற எண்ணிகளின் மதிப்பு நமக்குத் தெரியும். ஆகையால் x_1ஐக் கண்டுபிடிப்பது எவ்வளவு எளிது !

$x_1 = b_1/a_{11}$. ஆனல் a_{11} பூச்சியமாயிருந்தால்? கேட்க வேண்டிய கேள்விதான் என ஒப்புக்கொள்வீர்கள்!

(i) $a_{11} \neq 0$ ஆனல் x_1க்கு b_1/a_{11} என்ற ஒரே மதிப்புதான் உண்டு.

(ii) $a_{11} = 0$ ஆனல், x_1-ன் மதிப்பு b_1-ன் மதிப்பைப் திருக்கிறது.

(அ) $b_1 \neq 0$ ஆக இருந்தால், இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க இயலாது. ஏனெனில் x_1-ன் மதிப்பு எதுவானலும் இடப் புறம் $a_{11}\, x_1 = 0$ ஆகவும், வலப்புறம் பூச்சியமில்லாமலும் இருக்கும். இது பொருந்தாததொன்று.

(ஆ) $b_1 = 0$ ஆக இருந்தால், இதை எண்ணற்ற விதமாகத் தீர்க்கலாம். x_1-க்கு எந்த மதிப்புக் கொடுத்தாலும் பொருந்துவதாக அமையும் என்பதை நோக்குக.

இந்தச் சிறிய உதாரணத்தையே எவ்வளவு ஆழ்ந்து நோக்க வேண்டி இருக்கிறது என்பதை வாசகர்கள் உணர்வார்களாக.

உதாரணம் 2 : $x_1 + x_2 = 7$ ... ... (1)

$x_1 - x_2 = 1$ ... ... (2)

$x_2 = 7 - x_1$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$\therefore\ x_1 - (7 - x_1) = 1$

$2x_1 - 7 = 1;\ 2x_1 = 8;\ x_1 = 4$

$\therefore\ x_2 = 3.$

மேலும் $4+3=7$; $4-3=1$ ஆனதால் x_1, x_2களுக்கு நாம் கண்டு பிடித்துள்ள மதிப்புகள் சரியான தீர்வு எனக் காண்கிறோம்- வேறு தீர்வு இருப்பதாகவும் தெரியவில்லை.

உதாரணம் 3 : $x_1 + x_2 = 7$ ... ... (1)

$2x_1 + 2x_2 = 10$ ... ... (2)

இதைத் தீர்க்க உதாரணம் 2-ல் காட்டியபடி செய்ய முற்பட்டால் தோல்வியே அடைவோம். (2) ஆவது சமன்பாட்டின் இ.ப. (இடப் பக்கம்) முதல் சமன்பாட்டின் இ. ப. ஐப்போல் இரு மடங்கு. ஆனல் 2ஆம் சமன்பாட்டின் வ.ப. முதல் சமன்பாட்டின் வ. ப. ஐப்போல் இரு மடங்காக இல்லை!

ஆதலின் இதன் சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று முரணானவை (Inconsistent Equations) என்பதைக் காண்கிறோம். $\therefore$ x_1, x_2-க்கு எந்த மதிப்புக் கொடுத்தாலும் இரு சமன்பாடுகளிலும் பொருந்தாது. ஏனெனில் முதல் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் மதிப்புகள் இரண்டாம் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தா. இவற்றை ஒருங்கமையா சமன்பாடுகள் என்பது பொருந்தும்!

உதாரணம் 4 :

$x_1 + x_2 = 7$ ... ... (1)

$2x_1 + 2x_2 = 14$ ... ... (2)

இதில் இரண்டாவது சமன்பாட்டின் இடப்பக்கமும், வலப் பக்கமும் முதல் சமன்பாட்டின் இ. ப. வ. ப.-ஐப் போல் இரு மடங்காக உள்ளன. ஆகவே, இவற்றை இரு சன்பாடுகளாகக் கருதாது, ஒரே சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஏனெனில் ஒரு சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்தும் x_1, x_2-ன் எந்த மதிப்பும் அடுத்த சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்தும். இதில் குணகங்களின் அணியான $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$-ன் மதிப்பிடம் 1 என்பது நோக்கத் தக்கது.

இதில் $x_1 = t$ எனக் கொள்வோம். அப்படியானால் $x_2 = 7 - t$

$\therefore$ தீர்வு $(x_1, x_2) = (t, 7-t)$. இதில் t எந்த எண் மதிப்பும் கொள்ளலாம். t ஒரு சாரா மாறி (parameter) என்பதை நோக்குக.

8·3. தேற்றம் : n என்ற வெவ்வேறு மாறிகளில் n சமன்பாடுகள் இருக்கட்டும். மேலும் A என்ற குணகங்கள் அணி ஒழுங்கணியாக இருக்கட்டும். அப்படியானால் $AX = B$ என்ற சமன்பாடு களுக்கு ஒரே வகைத் (Unique) தீர்வுதான் உண்டு.

நிரூபணம் :

A ஓர் ஒழுங்கணி . . . (கொள்கை)

$\therefore \quad A^{-1}$ இருக்கிறது. இப்பொழுது, $AX = B \quad \ldots \quad (1)$

$$\therefore \quad A^{-1} . A . X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே ஒருவகைத் தீர்வைக் கண்டு விட்டோம். இனி இது ஒரே வகைத் தீர்வுதான் உண்டு என நிரூபிப்போம். கூடுமானால் $X = Y$ என்பது மற்றோர் தீர்வாக இருக்கட்டும். அதாவது,

$$AY = B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$(1) - (3) \quad AX - AY = 0$

$$\therefore \quad A(X - Y) = 0$$

$$\therefore \quad X - Y = A^{-1} . 0 = 0$$

$$\therefore \quad X = Y$$

உதாரணம் 2 ஐ மீண்டும் கவனிப்போம்.

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 - x_2 = 1.$$

இதில் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| \neq 0$

A^{-1}ஐப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிப்பது சுலபம் என்பதும் நமக்குத் தெரியும்.

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(2)-ல் இருந்து $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 3.$$

இதையே, இன்னும் சுருக்கமாகச் செய்ய பெரிதாக்கிய அணியை (Augmented Matrix)ப் பயன்படுத்தலாம். A உடன் B ஐச் சேர்த்து $[AB]$ என எழுதி, முந்தைய நிரல், நிரை மாற்றங்களைச் செய்தால் $A^{-1}B$ கடைசி நிரலாக இருக்கும். இது எவ்வாறு என்று சுருக்கமாக விளக்குவோம்.

$R_1 \,.\, R_2 \ldots R_n A = I$ ஆனால்

$R_1 R_2 \ldots R_n AA^{-1} = I \,.\, A^{-1}$

அதாவது $R_1 R_2 \ldots R_n I = A^{-1}$

மேலும் $R_1 \,.\, R_2 \ldots R_n B = A^{-1}B$.

இப்பொழுது, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

இதில் $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

இதையே மற்றோர் உதாரணத்தால் விளக்குவோம்.

$$2x_1+3x_2+4x_3-x_4 = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 9 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இதில், இரண்டாவது சமன்பாட்டை முதலில் எழுதுவோம். (இதனால் குணக அணியில் $a_{11} = 1$ ஆகும்.)

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2$$

$$4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 7$$

இப்பொழுது, பெரிதாக்கிய $A = [AB]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & -3 & 9 \\ 3 & 2 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & -10 & -15 & -19 \\ 0 & 5 & -10 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & -1 & -10 & -15 & -19 \\ 0 & 5 & -10 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{8}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -10 & -\frac{82}{50} & -\frac{107}{5} \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{8}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{82}{50} & \frac{107}{50} \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{42}{25} & \frac{8}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{82}{50} & -\frac{107}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{97}{5} & \frac{97}{5} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{42}{25} & \frac{8}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{82}{50} & \frac{107}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1}B = [2 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 1]$

$\therefore \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = 1.$

8·4. $AX = B$ என்ற சமன்பாடு, முரண்பாடு இல்லாது ஒருங்கமைய வேண்டிய போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = \rho[AB]$ ஆகும். இதில் $[AB]$ என்பது A-உடன் Bஐச் சேர்த்துப் பெரிதாக்கிய அணி.

நிருபணம்: $c_1, c_2, \ldots c_n$ என்பன A-ன் நிரல் அணிகளாக இருக்கட்டும். அப்படியானல் $AX = B$ஐ

$$[c_1 \; c_2 \ldots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \text{ என எழுதலாம்.}$$

அதாவது, $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n = B \quad \ldots \quad (1)$

இப்பொழுது, A-ன் மதிப்பிடம் rஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ $c_1, c_2, \ldots c_r$ என்ற முதல் r நிரல்களும் சார்பற்ற வெக்டர் குழு ஆகும். [ஏனைய நிரல்களாயிருந்தால் தகுந்த நிரல் மாற்றங்கள் செய்து இவற்றை முதலில் வருமாறு வரிசைப்படுத்த இயலும்].

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் முரண்பாடு இல்லாதிருந்தால் ஒரு தீர்வு காண இயலும், அதாவது $k_1, k_2, \ldots k_n$ என்ற எண்ணிக்கை $k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots + k_n c_n = B \quad \ldots \quad (2)$ என இருக்கும் வண்ணம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

ஆனால் c_{r+1} c_{r+2}, ……, c_n ஐ c_1, c_2, …, c_r சார்பாக எழுத இயலும். $\because$ $\rho(A) = r$

$\therefore$ (2)-ல் இருந்து B ஐயும் c_1 c_2 ….. c_r சார்பாக எழுதலாம்.

$\therefore$ $\rho[AB] \leqslant r$

$$\therefore \quad \rho[AB] \leqslant \rho(A) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

மேலும் $\rho(A) \leqslant \rho[AB]$ என்பது வெளிப்படை,

$\therefore$ A ஆனது AB யிலிருந்து B ஐ நீக்கியதால் கிடைத்தது.

$\therefore$ $\rho[AB] = \rho[A]$.

(ii) இப்பொழுது $\rho(A) = \rho[AB] = r$ (கொள்கை)

$\therefore$ $[AB]$-ல் உள்ள எந்த $(r+1)$ நிரல்களும் ஒரு சார்புக் குழு ஆகும்.

$$\therefore \quad k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k_r c_r + k_{r+1} B = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

இதில் முதல் r நிரல்களையும், கடைசி நிரலான B ஐயும் எடுத்திருக்கிறோம், இனி $k_{r+1} = 0$ ஆக இருக்க முடியுமா ? என ஆராய்தல் அவசியம். அது 0 என வைத்துக் கொள்வோம்.

அப்படியானால், $k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots\ldots + k_r c_r = 0$

ஆனால் c_1, c_2……c_r ஒரு சார்பற்ற குழு.

$\therefore$ $k_1 = 0$; $k_2 = 0$, … ……., $k_r = 0$

$\therefore$ சமன்பாடு (1) பொய்யாகும். இது ஒவ்வாதது.

$\therefore$ $k_{r+1} \neq 0$

$$\therefore \quad B = \frac{-(k_1 c_1 + k_2 c_2 + \ldots\ldots + k_r c_r)}{k_{r+1}}$$

$$= x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots \ldots + x_r c_r$$

இதில், $x_j = \dfrac{-k_j}{k_{r+1}}$

அதாவது $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots \ldots + a_{1r} x_r = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots \ldots + a_{2r} x_r = b_2$

ஆகவே, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_r$ என்ற எண்ணிகளை இந்தச் சமன்பாடுகளில் முரண்பாடில்லாதவாறு அமையக் கண்டு பிடித்து விட்டோம். இதில் $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots\ldots, x_n$ என்ற $(n-r)$ மாறிகளை 0 ஆகக் கொண்டுள்ளோம். ஆனாலும் இது ஒரு தீர்வு என்பதை நிரூபித்து விட்டோம்.

குறிப்பு : வேறு தீர்வுகள் உண்டா, அவை எத்தகையன என்பதை இங்கு நாம் ஆராயவில்லை.

8·5. **கிளைத்தேற்றம் :** $\rho(A) < \rho[AB]$ ஆக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு (Solution) இல்லை.

உதாரணம் 1 : பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கூடுமானால் விடுவி.

$$x_1 + 3x_2 = 7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 = 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$2x_1 + 6x_2 = 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதில் $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Bஆல் பெரிதாக்கிய $A = [AB]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \rho(A) = 2;\ \rho[AB] = 3.$

$\therefore\ \rho(A) < \rho[AB].$

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு இல்லை.

இனி, இந்த நிரை மாற்றங்கள் நமக்கு எதைத் தெரிவிக்கின்றன எனப் பார்ப்போம்.

கடைசி அணியிலிருந்து $0.x_1 + 0.x_2 = 1$ ஆக இருக்க வேண்டும். x_1, x_2-ன் எந்த மதிப்பும் இதற்குப் பொருந்தாது. நமக்குக் கடைசியாக இருக்கும் சமன்பாடுகளின் அணி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றதுதான்,

$$(2)-2\times(1) \qquad -5x_2 = -10 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\therefore\ x_2 = 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

மேலும் $(5)-2\times(1)$ $\quad 0.x_1 + 0.x_2 = -9 \quad \ldots \quad (6)$

(5)-ம் (6)-ம் முரண்பாடானவை என்பதைக் காண்க.

உதாரணம் 2 :

பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கூடுமானால் விடுவி.

$$x_1 + 3x_2 = 7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 = 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$2x_1 + 6x_2 = 14 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இப்பொழுது $[AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 14 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad \rho(A) = 2 = \rho[AB]$

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு உண்டு,

$x_1 = 1;\ x_2 = 2$ என்பதைக் கடைசி நிரலிலிருந்து உடனே எழுதி விடலாம்.

8·6. ஒரே படியில் (homogeneous) உள்ள ஒருபடி (linear)ச் சமன் பாடுகள்

$AX = B$ என்பதில் $B = 0$ ஆனால், அதாவது

$AX = 0$ என்பன ஒரே படியில் உள்ள ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$\rho(A) = \rho(A.0)$

$\therefore$ இதற்குத் தீர்வு உண்டு.

$X = 0$ ஒரு தீர்வு என்பது வெளிப்படை.

8·7. தேற்றம் :

$AX = 0$ என்பதன் தீர்வுகளின் குழுவானது V_n-ன் ஓர் உள் வெளி ஆகும்.

(i) X_1, X_2 என்பன தீர்வுகளானால் $X_1 + X_2$ -ம் ஒரு தீர்வு என்றும்,

(ii) X_1 ஒரு தீர்வு ஆனால் kX_1 ஒரு தீர்வு என்றும் நிரூபிக்க வேண்டும்.

(i) $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$

(ii) $A(kX_1) = k.AX_1 = k.0 = 0$

8·8. தேற்றம் : $AX = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

என்ற சமன்பாடுகளை விடுவிக்கும் போது,

$\rho(A) = r$ ஆனால், $X_1, X_2, \dots \dots X_{n-r}$

என்ற ஒரு படியில் சார்பற்ற தீர்வுக் குழு கிடைக்கும்.

நிரூபணம் : $\rho(A) = r$ — — கொள்கை

$\therefore$ முதல் r நிரல்களான $C_1, C_2, \dots, C_r$ ஐ ஒரு படியில் சார்பற்ற நிரல்களாக (தகுந்த நிரல் மாற்றங்களுக்குப் பின்) எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad A = [c_1\ c_2 \ldots c_n] \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii)-ல் இருந்து $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n = 0$ ... (iii)

இப்போது $c_1, c_2, \ldots c_r$ சார்பற்ற நிரல் குழு

$$\therefore \quad c_{r+1} = k_{11}c_1 + k_{12}c_2 + \ldots + k_{1r}c_r \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$c_{r+2} = k_{21}c_1 + k_{22}c_2 + \ldots + k_{2r}c_r \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$c_n = k_{p1}c_1 + k_{p2}c_2 + \ldots + k_{pr}c_r \qquad \ldots \qquad (n-r)$$

இதில் $p = n-r$ ... ... சமன்பாடுகள் (iv)

(iii) ஐயும் (iv)-ல் (1) ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்.

$$X_1 = [k_{11} \quad k_{12} \quad \ldots \quad k_{1r} \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]'$$

இதேவிதமாக

$$X_2 = [k_{21} \quad k_{22} \quad \ldots \quad k_{2r} \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]'$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$X_{n-r} = [k_{p1} \quad k_{p2} \quad \ldots \quad k_{pr} \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad -1]'$$

என்பன $(n-r)$ தீர்வுகள். ... ... (v)

இனி இவை ஒருபடியில் சார்பற்ற குழு என்று நிருபிப்போம்.

கூடுமானுல்,

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} \cdot X_{n-r} = 0 \qquad \ldots \quad \text{(vi)}$$

ஆக இருக்கட்டும். $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_{n-r} = 0$ என நிருபிக்கவேண்டும்.

(v)-ல் இருந்து, $\lambda_1 \ X_1 + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} \ X_{n-r}$-ன் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு,

$\lambda_1(-1) + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots\ldots + \lambda_{n-r} \cdot 0 = -\lambda_1$ என்று பார்க்கிறோம்.

ஆனுல் (vi)-ன் வ. ப. பூச்சிய அணி ஆதலால் $\lambda_1 = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

இதே விதமாக $\lambda_2 = 0, \ldots\ldots \lambda_{n-r} = 0$. கடைசியாக $X = [x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n]'$ என்ற ஏதாவது ஒரு தீர்வை $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-r}$ சார்பாக எழுதலாம் என்று நிரூபிப்போம்.

X ஒரு தீர்வு..................(கொள்கை)

மேலும் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-r}$ முன்பே கண்டுபிடித்த தீர்வுகள்

∴ 8·7-ன் படி,

$Z = X + x_{r+1} X_1 + x_{r+2} \cdot X_2 \ldots + x_n \cdot X_{n-r}$ என்பதும் ஒரு தீர்வாக இருக்க வேண்டும். ... ... (vii)

அதாவது, $Z = [z_1\ z_2 \ldots\ldots z_r\ 0\ 0\ \ldots\ldots 0]$ என்பது ஒரு தீர்வு ... ... (v)-ல் இருந்து,

$$\therefore\ AZ = 0$$

$$\therefore\ Z_1 c_1 + Z_2 c_2 + \ldots\ldots + Z_r c_r = 0$$

ஆனால் $c_1, c_2, \ldots\ldots c_r$ ஒரு படியில் சார்பற்ற குழு.

$$\therefore\ Z_1 = 0,\ Z_2 = 0, \ldots\ldots Z_r = 0$$

$$\therefore\ Z = 0.$$

∴ (vii)-ல் இருந்து,

$$X = -x_{r+1} \cdot X_1 - x_{r+2} \cdot X_2 - \ldots\ldots - x_n \cdot X_{n-r}$$

ஆகவே, X-ஐ $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n-r}$ சார்பாகக் கண்டு பிடித்து விட்டோம்.

8·9. ஓர் அணியின் பூச்சிய அளவு (Nullity of a Matrix)

$AX = 0$ என்பதற்கிணங்க இருக்கும்

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-r})$ என்ற ஒரு படியில் சார்பற்ற வெக்டர் குழுவால் பிறப்பிக்கப்படும் உள் வெளியை (Generated space) பூச்சிய உள் வெளி (Null space) என்று சொல்வோம். இதன் பரிமாணமான $(n-r)$ ஐ இந்த அணியின் (நிரல்) பூச்சிய அளவு என்று சொல்வோம்.

∴ A என்ற ஓர் அணியை எடுத்துக் கொண்டால், அணியின் மதிப்பிடம் + (நிரல்) பூச்சிய அளவு$=n$ (நிரல்களின் எண்ணிக்கை).

இதேவிதமாக,

அணியின் மதிப்பிடம் + (நிரை) பூச்சிய அளவு $= m$ (நிரைகளின் எண்ணிக்கை) என நிரூபிக்கலாம்.

பூச்சிய அளவை $\gamma(A)$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\therefore \ \rho(A) + \gamma(A) = n$$

8·10. $AX = 0$ என்பதன் ஒரு படியில் சார்பற்ற தீர்வுக் குழு $(X_1, X_2, \ldots \ldots X_{n-r})$ ஆகவும், $AX_0 = B$ ஆகவும் இருந்தால், $X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_{n-r} . X_{n-r}$ என்பது $AX = B$ என்பதன் தீர்வாக இருக்கும் என நிரூபி.

நிரூபணம் :

$X_1, X_2, \ldots \ldots X_{n-r}$ என்பன $AX = 0$-ன் தீர்வுகள்.

$\therefore \ k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_{n-r} . X_{n-r}$-ம், $AX = 0$-ன் தீர்வாக இருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$A(X_0 + k_1 X_1 + \ldots \ldots + k_{n-r} X_{n-r})$$

$$= AX_0 + A(k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_{n-r} X_{n-r})$$

$$= B + 0 = B$$

இனி $X = Y$ என்பது ஏதாவது ஒரு தீர்வாக இருந்தால்

$$Y \text{ ஐ } X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_{n-r} . X_{n-r}$$

என்று எழுத முடியும் என நிரூபிப்போம்.

இதற்கு $Y - X_0$ ஆனது $AX = 0$ என்பதன் தீர்வு என நிரூபித்தால் போதுமானது. (8·8)

$$A(Y - X_0) = AY - AX_0 = B - B = 0$$

ஆகவே, $AX = B$ என்பதன் மிகப் பொதுவான தீர்வு (most general solution),

$X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_{n-r} X_{n-r}$ எனத் தெளிவாகிறது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : விடுவி :

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$

$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 28$

A என்பது குணகங்களின் அணி ஆனால்,

பெரிதாக்கிய $A = [AB]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 28 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore \; x_1 - x_3 = 2$

$x_2 + 2x_3 = 4$

$\therefore \; x_1 = 2 + x_3 ; \quad x_2 = 4 - 2x_3$

இதில் x_3-ஐச் சாரா மாறி (parameter) t ஆகக் கொண்டு $[2+t, 4-2t, t]$ என்பது தீர்வுக் குழு எனக் கூறலாம்.

தீர்வுக் குழுவின் ரூபம் வெவ்வேறாக இருக்கலாம் ; ஆனால் மதிப்பு ஒன்றே.

இதே கணக்கில் x_3 ஐயும் x_2 ஐயும் மாற்றி,

$x_1 + 3x_3 + 2x_2 = 10$

$4x_1 + 6x_3 + 5x_2 = 28$ என எழுதுவோம்.

இப்பொழுது $[AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 4 & 6 & 5 & 28 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & -6 & -3 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 + \frac{x_2}{2} = 4$$

$$x_3 + \frac{x_2}{2} = 2$$

$$\therefore \quad x_1 = 4 - \frac{x_2}{2}\ ; \ x_3 = 2 - \frac{x_2}{2}$$

இதில் x_2 ஐச் சாரா மாறி u ஆகக் கொண்டால்,

$$\left[4 - \frac{u}{2},\ u,\ 2 - \frac{u}{2} \right] \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

என்பது தீர்வுக் குழு ஆகும்.

(1)-ல் $4 - 2t = u$ என்று போட்டால் (2) கிடைக்கும் என்பதை நோக்குக:

பின்னரும் $\rho(A) = \rho[AB] = 2 = r$

$$m = 2 \qquad n = 3$$

ஆகவே நாம் புறக்கணிக்கக் கூடிய நிரைகள்

$$= m - r = 2 - 2 = 0$$

இதில் உள்ள சாரா மாறி $= n - r = 3 - 2 = 1$ என்பதையும் கவனி.

மாதிரி 2 : விடுவி :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6$$

பெரிதாக்கிய $A = [AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -5 & -8 & 5 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & -1 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & -1 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_1 - \frac{x_3}{5} + x_4 = \frac{22}{5}$$

$$x_2 + \frac{8x_3}{5} - x_4 = \frac{14}{5}.$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{x_3}{5} - x_4 + \frac{22}{5}.$$

$$x_2 = -\frac{8x_3}{5} + x_4 + \frac{14}{5}.$$

$\therefore$ x_3, x_4 ஐ முறையே t, u என்ற சாரா மாறிகளாகக் கொண்டு, தீர்வுக் குழுவை

$$\left[\frac{t}{5} - u + \frac{22}{5}\ ,\ \frac{-8t}{5} + u + \frac{14}{5}\ ,\ t, u\right]$$

என எழுதலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வுக் காண $t = 3$, $u = 4$ என்று போடு. $[1, 2, 3, 4]$ என்ற விடை கிடைக்கிறது.

இதில் $n = 4$ ஆனுல் $r = 2$.

$\therefore$ நமக்கு வேண்டிய சாரா மாறிகள் $n - r = 4 - 2 = 2$ என்பதைக் கவனி.

மாதிரி 3 : $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

என்பதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு கண்டு, அதிலிருந்து தீர்வுக் குழுவின் பொது ரூபத்தைக் கண்டுபிடி.

x_1-க்கு நாம் ஏதாகிலும் மதிப்புக் கொடுத்து பின் x_2, x_3 ஐக் கண்டுபிடிப்போம்.

$x_1 = 1$ என வை. அப்படியானுல் $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. அதாவது $X_0 = [1,\ 1,\ 2]'$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வுக் குழு. இனி $AX = 0$ என்பதை விடுவித்தால் போதுமானது.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_1 + 4x_3 = 0;\ \ x_2 - 2x_3 = 0$

$\therefore\ x_1 = -4x_3;\ \ x_2 = 2x_3$

x_3ஐ t என்ற சாரா மாறியாகக் கொண்டால், $[-4t, 2t, t]'$ என்பது தீர்வுக் குழு ஆகும்.

$\therefore\ AX = B$ என்பதன் தீர்வுக் குழு

$$= [-4t,\ 2t,\ t]' + [1,\ 1,\ 2]'$$

$$= [1-4t,\ 1+2t,\ 2+t]'$$

மாதிரி 4 : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + px_3 = q$$

என்னும் சமன்பாடுகளில்,

(i) தீர்வு காண இயலாவிட்டால்

(ii) ஒரே தீர்வு இருந்தால்

(iii) எண்ணிறந்த தீர்வுகள் இருந்தால் p, q-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

குணகங்கள் அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix}$

பெரிதாக்கிய $A = [\ AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & p & q \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & p-1 & q-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & p-3 & q-10 \end{bmatrix}$$

(i) $\rho(A) \neq [AB]$ ஆனால் தீர்வு காண இயலாது.

$p = 3$ ஆனால் $\rho(A) = 2$

$q \neq 10$ ஆனால் $\rho[AB] = 3$.

$\therefore$ $p = 3,\ q \neq 10$ ஆனால் தீர்வு இல்லை.

(ii) $p \neq 3$ ஆனால் A ஓர் ஒழுங்கணி.

$\therefore$ 8·3-ன் படி ஒரே தீர்வுதான் உண்டு.

(iii) $p = 3$ ஆகவும், $q = 10$ ஆகவும் இருந்தால் $\rho(A) = 2$ $= \rho[AB] = r$ ஆனால், $n = 3$.

$\therefore$ இதற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

மாதிரி 5 :

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்னும் தளங்களின் (planes) சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கண்டு அவை எவ்வாறு அமைந்துள்ளன என்பதைக் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; \ [AB] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

(i) $\rho(A) = \rho[AB] = 3 = r$

ஆனால் (i) க்கு ஒரே தீர்வுதான் உண்டு,

$\therefore$ 3 தளங்களும் ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

(ii) $\rho(A) = \rho[AB] = 2$

இப்பொழுதும் தீர்வு உண்டு. மேலும் $n = 3$ ஆனால் $r = 2$ ஆனதால் விடையில் ஒரு சாரா மாறி இருக்க முடியும். $\therefore$ 3 தளங்களும் ஒரு நேர் கோட்டில் (ஒரு பரிமாணம்–single dimension) வெட்டிக் கொள்ள வேண்டும்.

(iii) $\rho(A) = \rho[AB] = 1$

இப்பொழுதும் தீர்வு உண்டு. மேலும் $n = 3$ ஆனுல் $r = 1$ ஆனதால் விடையில் இரு சார மாறிகள் இருக்க முடியும். ஆகவே விடை 2 பரிமாணம் (சதுர அளவு) உள்ளது. ∴ 3 தளங் களும் ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டும். ஆகவே தளத்தில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் கூறுகளும் (co-ordinates) தீர்வுக் குழுவில் அமையும்.

(iv) $\rho(A) = 2$. $\rho[AB] = 3$. தீர்வு இல்லை.

$\rho(A) = 2$ ஆனதால்,

$a_3 = k_1a_1 + k_2a_2$ ஆகவும், $b_3 = k_1b_1 + k_2b_2$ ஆகவும், $c_3 = k_1c_1 + k_2c_2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும். ஆனுல் $\rho[AB] = 3$ ஆனதால் $d_3 = k_1d_1 + k_2d_2$ ஆக இருக்க முடியாது.

∴ 3 ஆம் தளத்தை

$$k_1(a_1x+b_1y+c_1z) + k_2(a_2x+b_2y+c_2z) = k(\neq k_1d_1+k_2d_2)$$

என எழுதலாம்.

இந்தச் சமன்பாட்டில் இருந்து 3 ஆம் தளமானது முதலிரண்டு தளங்கள் வெட்டும் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளது எனத் தெரிகிறது.

∴ 3 தளங்களும் ஒரு பட்டகம் (Prism) உண்டாக்குகின்றன எனக் கூறலாம்.

(v) $\rho(A) = 1$, $\rho[AB] = 3$ தீர்வு இல்லை.

இவ்வாறு இருக்க இயலாது.

(vi) $\rho(A) = 1$; $\rho[AB] = 2$. தீர்வு இல்லை. இப்பொழுது எல்லாத் தளங்களும் இணையாக இருக்கும்.

உதாரணம் :

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$x + 2y + 3z = 9\tfrac{1}{2}$$

$$x + 2y + 3z = 17$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 9\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\rho[AB] = 3$ எனக் கொள்ளலாமா? (v) ஐப் பார்.

$$[AB] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \because \; R_{32}\left(-\tfrac{16}{9}\right)$$

(vii) $\rho(A) = 1$; $\rho[AB] = 1$

இப்பொழுது எல்லாத் தளமும் ஒரே தளம் தான்!

மாதிரி 6 : விடுவி :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \; x_1 - x_3 - 2x_4 = 0; \quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$

$\therefore \; x_1 = t + 2u; \quad x_2 = -2t - 3u$

இதில் x_3, x_4 ஐ t, u என்ற சாரா மாறிகளாகக் கொண்டுள்ளோம்.

$\rho(A) = 2 = r;\quad n = 4$

$\therefore\quad n - r = 2$

$\therefore$ இதில் 2 சாரா மாறிகள் உள்ளன.

மாதிரி 7 :

$$2x_1 + 6x_2 + 11 = 0$$
$$6x_1 + 20x_2 - 6x_3 = -3$$
$$6x_2 - 18x_3 + 1 = 0$$

என்பவை முரண்பாடான சமன்பாடுகள் என நிரூபி.

A என்பது குணகங்கள் அணியானல்

பெரிதாக்கிய $[AB] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 6 & 20 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 6 & 20 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 15 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -10\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{bmatrix}$$

$\therefore\quad \rho(A) = 2$ ஆனல் $\rho[AB] = 3$

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு இல்லை.

மாதிரி 8 : A என்ற n-சதுர அணி பூச்சிய அணியல்ல. ஆனல் $|A| = 0$. அப்படியானல் $B (\neq 0)$ என்னும் அணியை $AB = 0$ என்பதற்கிணங்க இருக்கும்படி கண்டுபிடிக்க இயலும் என நிரூபி.

நிருபணம்: $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$, என்பன B-ன் நிரல் அணிகளாக இருக்கட்டும்.

$AB=0$ ... ... (கொள்கை)

$\therefore\ AB_1=0,\ AB_2=0,\ \ldots\ldots\ldots\ AB_n=0$

இதில் $AB_1=0$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}\,b_{n1}=0$$
$$a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}\,b_{n1}=0$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$a_{n1}\,b_{11}+a_{n2}\,b_{21}+\ldots\ldots+a_{nn}\,b_{n1}=0$$

இதில் | குணகங்களின் அணி A | $=0$

$\therefore$ இதனை விடுவிக்கும்போது பூச்சியமல்லாத தீர்வுக் குழு கிடைக்கும்.

$\therefore\ B_1\neq 0$

$\therefore\ B\neq 0.$

குறிப்பு: இதேவிதமாக $B_2, B_3, \ldots\ \ldots\ \ldots, B_n$ஐக் கண்டு பிடித்தால் Bஐக் கண்டு பிடித்து விடலாம்.

பயிற்சி 8

1. விடுவிக்க:

(i) $x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5$

(ii) $x_1+2x_2+3x_3=5$
$3x_1+4x_2+5x_3=9$

(iii) $x_1+2x_2+3x_3=5$
$3x_1+4x_2+5x_3=9$
$5x_1+6x_2+7x_3=13$

(iv) $x_1+2x_2+3x_3=8$
$2x_1-x_2-3x_3=2$
$3x_1+x_2+x_3=12$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கூடுமானால் விடுவி :

(i) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2$

$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$

(ii) $x - y + 2z = 1$

$x - y - z = 2$

$x - y + 3z = 0$

(iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 12 \cdot 5$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 15 \cdot 5$

$x + y + z = 39$

(iv) $4x - 3y + 2z = 8$

$3x + 2y - 5z = 8$

$-x + 4y + 3z = 8$

(v) $w + 2x + 3y + 4z = 29$

$w - 22x + y + 2z = 7$

$3w - 2x + 5y + 8z = 43$

(vi) $w + x + y + z = 0$

$w - 3x - y - z = 0$

$4w + 2y + 2z = 0.$

(vii) $x + y + z = 1$

$x + 2y + 3z = 4$

$x + 3y + 5z = 7$

$x + 4y + 7z = 10$

(viii) $3w + 4x - y - 6z = 0$

$2x + 3y + 2z - 3w = 0$

$2x + y - 14z - 9w = 0$

$x + 3y + 13z + 3w = 0.$

3. $x_1+x_2+x_3=1$

$x_1+2x_2+4x_3=k$

$x_1+4x_2+10x_3=k^2$

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, k-க்கு எந்த மதிப்புகள் இருக்கலாம்? தீர்வையும் கண்டுபிடி.

4. $kx+2y-2z=1$

$4x+2ky-z=2$

$6x+6y+kz=3$

என்ற சமன்பாடுகளை விடுவி. $k=2$ ஆனால் தீர்வு என்ன?

[Ans : $\frac{1}{2}$, 0, 0

5. $x+ay+a^2z=a^4+\lambda a^2$

$x+by+b^2z=b^4+\lambda b^2$

$x+cy+c^2z=c^4+\lambda c^2$

இதில் $a\neq b$; $b\neq c$; $c\neq a$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

(i) $a+b+c=0$ ஆனால் தீர்வு எவ்வாறு இருக்கும்?

(ii) இல்லாவிடில் எவ்வாறு இருக்கும் எனக் கண்டுபிடி.

6. பின்வரும் சமன்பாடுகள் முரண்பாடு இல்லாமல் இருக்கும் வண்ணம் k-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$3x+ky-2=0$; $kx-3y+k+4=0$

$3x-y+4=0$.

7. விடுவி :

$x+2y+3z=\lambda x$

$3x+y+2z=\lambda y$

$2x+3y+z=\lambda z$

இதற்கு, பூச்சியமல்லாத வேறு தீர்வு காண $\lambda=6$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிரூபி.

8. $2w-3x+4y+z=0$

$w+y-z=0$

$3w-3x+5y=0$

$4w-3x+6y-z=0$

என்பதற்கு இரண்டே தீர்வுக் குழுக்கள் தாம் உண்டெனவும், ஏனைய தீர்வுகள் இவையிரண்டின் ஒருபடியில் கூட்டுகள் (Linear combinations) எனவும் நிறுபி.

9. $AX=0$ என்பதற்குப் பூச்சியமல்லாத தீர்வு காண, வேண்டிய போதிய நிபந்தனை $\rho(A) < n$ (இதில் n என்பது நிரல்களின் எண்ணிக்கை) என நிறுபி.

10. n மாறிகளில் m-சமன்பாடுகள் ஒருபடியில் ஒரே படியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $n > m$ ஆனால் பூச்சியமில் தீர்வு காண இயலும் என நிறுபி.

11. பெரியது $\{r(A), r(B)\} \leqslant r(AB) \leqslant r(A) + r(B)$ என நிறுபி.

12. பின்வரும் தளங்கள் ஒரே நேர் கோட்டில் வெட்டிக் கொள்ள நிபந்தனை என்ன ?

$$bx + ay - z = 0$$
$$cy + bz - x = 0$$
$$az + cx - y = 0$$

விடைகள்

1. (i) $x_1 = -2t - 3u - 4v + 5$; $x_2 = t$; $x_3 = u$; $x_4 = v$
   (ii) $x_1 = t$; $x_2 = 1 - 2t$; $x_3 = 1 + t$
   (iii) $x_1 = t$; $x_2 = 1 - 2t$; $x_3 = 1 + t$
   (iv) $x_1 = 3$; $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

2. (i) முரணானவை
   (ii) முரணானவை
   (v) $x = t$, $y = -2t$, $z = t$
   (viii) $x = t - 2$, $y = 3 - 2t$, $z = t$
   (ix) $w = 11t + 6u$
   $x = -3t - 3u$
   $y = t$, $z = u$

4. $\frac{1}{2}$, 0, 0

6. $k = 3, 14$

9. ஒரு படியில் மாறி மாற்றங்கள்

(Linear Transformations)

9·0. இந்த அதிகாரத்தைப் படிக்கும் முன்பு, வெக்டர்கள், அடிப் படைக் குழுக்கள், கூறுகள் பற்றிய கருத்துகளை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளல் நலம். 7·8-ல் இருந்து 7·16 வரை உள்ளவற்றை யாவது மீண்டும் படித்தல் நலம்.

9·1. $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ஆக இருக்கட்டும். மேலும்,

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$$

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$$ என்பன

2n வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். இவற்றின் கூறுகள் (co-ordinates) ஒரே அடிப்படைக் குழுவைச் (same basis) சார்ந் தனவாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ &\dots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

ஆக இருந்தால்,

$$Y = AX \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

என எழுதலாம். X-ன் பிம்பமான (Image) Y-ஐ (1)-லிருந்து பெறுகிறோம். A ஐ மாறி மாற்ற அணி (Matrix of transformation) என்று சொல்வோம்.

(i) X_1, X_2-ன் பிம்பங்கள் Y_1, Y_2 ஆனுல் $(X_1 + X_2)$-ன் பிம்பம் $(Y_1 + Y_2)$ ஆக இருக்கும்;

(ii) X_1-ன் பிம்பம் Y_1 ஆனுல், kX_1-ன் பிம்பம் kY_1 ஆக இருக்கும்

என்பவை (1) சமன்பாட்டிலிருந்து தெளிவாகத் தெரிகிறது. ஆதலால் இதை ஒருபடியில் (linear) மாறி மாற்றம் என அழைக்கிறோம்.

(i) ஐயும் (ii) ஐயும் இணைத்து

(iii) $(k_1 X_1 + k_2 X_2)$-ன் பிம்பம் $k_1 Y_1 + k_2 Y_2$ என்று சொல்வதும் உண்டு.

உதாரணம் 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ஆனுல்,}$$

$Y = AX$ என்பதில் இருந்து $X = [1, 0, 2]'$-ன் பிம்பத்தைக் கண்டுபிடி.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 2:

ஒரு வெக்டரின் பிம்பம் $[12, 3, 2]'$ ஆனுல் முந்தின மாறி மாற்ற அணியின் துணை கொண்டு அந்த வெக்டரைக் கண்டுபிடி.

$$Y = AX$$

$$\therefore \quad A^{-1} Y = X.$$

$$\text{பெரிதாக்கிய } A = [AY] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[AY] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad X = [1, 0, 2]'$

குறிப்பு: கடைசியாக உள்ள அணியில் $I = AA^{-1}$ முதல் மூன்று நிரல்களாக உள்ளது. கடைசி நிரல் Y. A ஐ A^{-1} ஆல் பெருக்கினுல்தான் I கிடைக்கும்.

$\therefore$ Yஐயும் A^{-1} ஆல் பெருக்கியுள்ளோம்.

$\therefore \quad A^{-1}Y = X$

நான்காவது நிரலில் கிடைக்கிறது.

9·2. இரு மாறி மாற்றங்களின் விளைவு

$X = AY$ ஆகவும்; $Y = BZ$ ஆகவும் இருந்தால் $X = ABZ$ ஆகும்.

2·21ஐப் பார்த்து, நாம் அணிகளின் பெருக்கல் விதியை, இதைக் கருத்திற் கொண்டுதான் வரையறுத்தோம் என்பதை நினைவுபடுத்துகிறோம்.

9·3. V_n என்ற n வெக்டர் வெளிக்கு,

$E_1 = [1, 0, \ldots, 0]'$; $E_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]'$;

$E_n = [0, 0, \ldots, 1]'$

என்னும் அலகு (unit) வெக்டர்கள் முக்கியமான அடிப்படைக் குழு (basis) ஆகும்.

$X = [e_1, e_2, \ldots, e_n]'$ என்ற வெக்டரை $X = e_1E_1 + e_2E_2 + \ldots + e_nE_n$ என ஒரே முறையில்தான் எழுத இயலும். $e_1, e_2, \ldots, e_n$-ஐ, E-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட X-ன் கூறுகள் (co-ordinates) எனக் கூறலாம் $E = [E_1, E_2, \ldots E_n]$.

இப்பொழுது, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ என்பது V_n உடைய மற்ஹேர் அடிப்படைக் குழுவாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்

$$X = f_1 F_1 + f_2 F_2 + \ldots + f_n F_n$$

என எழுதலாம். $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்பன $F = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$ ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட X-ன் கூறுகள்.

$$X_F = [f_1, f_2, \ldots f_n]' \text{ ஆனால்,}$$
$$X = [F_1 F_2 \ldots F_n] X_F$$
$$= F X_F$$

F என்னும் அணியில் உள்ள நிரல்கள் $F_1, F_2, \ldots, F_n$ என்ற அடிப்படை வெக்டர்கள் ஆகும்.

உதாரணம் 3 : $F_1 = [3, 2, 4]'$; $F_2 = [1, 0, 2]'$; $F_3 = [1, -1, -1]'$ ஆனவை V_3-ன் அடிப்படைக் குழுவாகவும், $X_F = [1, 2, -1]'$ ஆகவும் இருந்தால் X_E-ஐக் கண்டுபிடி.

$$X = X_E = FX_F = [F_1\ F_2\ F_3]\ X_F$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= [4\ \ 3\ \ 9]'$$

இனி, $G = [G_1, G_2, \ldots G_n]$ என்பது V_n உடைய மற்ஹேர் அடிப்படைக் குழுவாகவும், $X_G = [g_1, \ldots, g_n]'$ ஆகவும் இருந்தால்

$$X = [G_1\ G_2\ \ldots\ G_n]\ X_G = GX_G \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும் $X = F X_F$

$$\therefore\ F X_F = G X_G$$

$$\therefore\ X_G = G^{-1} FX_F$$

$$= PX_F. \quad \text{இதில் } P = G^{-1}F.$$

எனவே, V_n என்ற வெக்டர் வெளிக்கு F, G என்ற இரண்டு அடிப்படைக் குழுக்கள் இருந்தால் P என்ற அணியை $X_G = PX_F$ என இருக்கும்படி கண்டுபிடிக்கலாம்.

9·4. அடிப்படைக் குழுவின் மாற்றம்

F ஐ அடிப்படைக் குழுவாகக் கொண்டு

$$Y_F = AX_F$$

என்ற ஒருபடி மாற்றம் (linear transformation) இருக்கட்டும். அடிப்படைக் குழுவை F-லிருந்து G ஆக மாற்ற ; X_G, Y_G என்பன முறையே X_F, Y_F-ன் புதிய கூறுகளாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$X_G = PX_F$$

$$Y_G = PY_F$$

என்பதற்கிணங்க P என்ற அணி இருக்கும். இப்பொழு, $P^{-1} = Q$ ஆனால்,

$$X_F = QX_G;\ Y_F = QY_G$$

என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore\quad Y_G = Q^{-1}Y_F = Q^{-1}AX_F = Q^{-1}AQX_G$$

அதாவது, $Y_G = BX_G$

இதில் $B = Q^{-1}AQ.$

இவ்வாறு இருந்தால் A, B ஆகியவற்றை வடிவொத்த அணிகள் என்று சொல்வோம்.

10. சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள்

10·1. $A = [a_{ij}]$ என்ற n-சதுர அணியால் $Y = AX$ என்ற மாறி மாற்றத்தைச் செய்யும்போது $X = [x_1 x_2 \; .. \; x_n]'$ என்ற வெக்டர் $Y = [y_1 y_2 \; .. \; y_n]'$ என்னும் வெக்டர் ஆகின்றது.

இப்பொழுது, இந்த மாற்றத்தால் X ஆனது λX ஆவது எப்போது என ஆராய்வோம். λ ஒரு திசையிலி (scalar) என்பதை நினைவிற் கொள்க.

X என்னும் பூச்சியமில் வெக்டர், $AX = \lambda X$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் X ஐ மாற்றமிலா வெக்டர் அல்லது சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்றும், λ ஐச் சிறப்பியல்பு மூலம் என்றும் சொல்வோம்.

குறிப்பு 1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரே சிறப்பியல்பு வெக்டருக்கு, இரண்டு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் இருக்க முடியாது.

ஏனெனில்,

$AX = \lambda_1 X$; $AX = \lambda_2 X$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ஆக இருந்தால்,

$\lambda_1 X = \lambda_2 X$ ஆகும்.

$$\therefore \; (\lambda_1 - \lambda_2) X = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால் $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $X \neq 0$

$$\therefore \; (\lambda_1 - \lambda_2) X \neq 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ம் (2)-ம் எதிர்மறையானவை.

$\therefore \; \lambda_1 = \lambda_2$.

குறிப்பு 2. ஒரே சிறப்பியல்பு மூலத்திற்குப் பல்வேறு சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் உடன்பாடாக இருக்கலாம்.

ஏனெனில், $AX = \lambda X$ ஆனால்,

$A(kX) = \lambda(kX)$

$\therefore$ kX-ம் ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டர்.

X-ம், kX-ம் ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை (dependent) என்பதையும் நோக்குக.

10·2 சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$AX = \lambda X = \lambda IX$ என இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad (A-\lambda I)\, X = 0.$

$$\therefore \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

இதில் $|\, A-\lambda I \,|$ 0 ஆக இருக்கவேண்டும்.

$\because$ X என்பது பூச்சிய வெக்டர் அல்ல.

$$\therefore \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

இதனைச் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு என வரையறை செய்வோம். இதன் மூலங்களுக்குச் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என்று பெயர் இடுவோம்.

உதாரணம் 1. பின் வரும் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

இதனுடைய சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதனை விரித்தெழுதினால்

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0.$$

என்று கிடைக்கும். இதனுடைய மூலங்கள், அதாவது, சிறப்பியல்பு மூலங்கள் 2, 2, −2 என எளிதாகக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

உதாரணம் 2. ஒரு சம மூலை வரை அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் அதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் என நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு சம மூலை வரை அணியாக இருக்கட்டும். இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (a_{22}-\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

ஆகும். இதனை விரித்தெழுத,

$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) = 0$ ஆகும். இதன் மூலங்கள் $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ என்ற மூலைவிட்ட உறுப்புகளாம்.

இதேவிதமாக, ஒரு முக்கோண அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களும் அதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகள்தாம் என நிரூபிக்கலாம்.

உதாரணம் 3 : A' என்பது A-ன் திருப்பு அணி ஆனால் A'-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என நிரூபி.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ஆக இருக்கட்டும். இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (1)$$

ஆக இருக்கும். இப்பொழுது,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

∴ A'-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (2)$$

ஆகும். (1), (2)-ல் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் நிலை மாறவில்லை. மேலும், ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது அதன் நிரல்களையும், நிரைகளையும் மாற்றி அமைத்தால் மாருது. எனவே (1), (2)-ல் இருந்து A-ம், A'-ம் ஒரே சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டை உடையன என்பதும்; ஆகவே, அவற்றின் சிறப்பியல்பு மூலங்களும் சமமாய் இருக்கவேண்டும் என்பதும் தெரிகிறது.

உதாரணம் 4. λ_1, λ_2, λ_3 என்பன ஒரு சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் வெவ்வேறு மூலங்கள் ஆனுல், அவற்றிற்கு இயைந்த

சிறப்பியல்பு வெக்டர்களான X_1, X_2, X_3 என்பன ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிருபி.

நிரூபணம் : கூடுமானால், k_1, k_2, k_3 என்பன

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 = 0 \quad — \quad — \quad (1)$$

என்பதற் கிணங்க இருக்கட்டும்.

$$\therefore\ k_1 AX_1 + k_2 AX_2 + k_3 AX_3 = 0 \quad — \quad (2)$$

ஆனால் $\left.\begin{array}{l} AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \\ AX_3 = \lambda_3 X_3 \end{array}\right\}$ — — — (3)

$$\therefore\ k_1\lambda_1 X_1 + k_2\lambda_2 X_2 + k_3\lambda_3 X_3 = 0 \quad — \quad (4)$$

$$\therefore\ k_1\lambda_1 AX_1 + k_2\lambda_2 AX_2 + k_3\lambda_3 AX_3 = 0 \quad — \quad (5)$$

$\therefore$ (3)-ஐ மீண்டும் உபயோகித்து

$$k_1\lambda_1^2 X_1 + k_2\lambda_2^2 X_2 + k_3\lambda_3^2 X_3 = 0 \quad — \quad (6)$$

(1), (4), (6)-ல் இருந்து

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 X_1 \\ k_2 X_2 \\ k_3 X_3 \end{bmatrix} = 0$$

ஆனால் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)$

மேலும், $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_2 \neq \lambda_3$; $\lambda_3 \neq \lambda_1$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} k_1 & X_1 \\ k_2 & X_2 \\ k_3 & X_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \quad k_1 = 0 = k_2 = k_3.$

அதாவது, X_1, X_2, X_3 ஒருபடிச் சார்பு அற்றவை.

உதாரணம் 5 : A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ஆனால்,

(i) kA-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $k\lambda_1, \ldots k\lambda_n$.

(ii) $(A-kI)$-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1-k, \ldots, \lambda_n-k$.

நிரூபணம் :

(i) A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$|A-\lambda I| = 0.$$

இதன் மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$\therefore \quad |A-\lambda I| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n) \quad \ldots (1)$$

இப்பொழுது kA-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது

$$|kA-\lambda I| = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\left| k\left(A-\frac{\lambda}{k}I\right)\right| = 0$

அதாவது, $k^n \left| A-\frac{\lambda}{k}I\right| = 0 \qquad \because \quad |kA| = k^n|A|$.

ஆனால் $k \neq 0$

$$\therefore \quad \left| A-\frac{\lambda}{k}I\right| = 0$$

$\therefore$ (1)-ல் இருந்து

$$\left| A-\frac{\lambda}{k}I\right| = \left(\frac{\lambda}{k}-\lambda_1\right)\left(\frac{\lambda}{k}-\lambda_2\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{k}-\lambda_n\right)$$

இதன் மூலங்கள் $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots k-\lambda_n$.

(ii) $(A-kI)$-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$|A-kI-\lambda I| = 0$$

அதாவது $|A-(k+\lambda)I| = 0$.

$\therefore$ (1)-ல் இருந்து

$$(k+\lambda-\lambda_1)(k+\lambda-\lambda_2)\ldots(k+\lambda-\lambda_n)=0.$$

இதன் மூலங்கள் $\lambda_1-k,\ \lambda_2-k,\ \ldots\ \lambda_n-k.$

உதாரணம் 6 :

α ஆனது A-ன் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், $\dfrac{|A|}{\alpha}$ ஆனது சேர்ப்பு A-ன் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்கும்.

நிருபணம் :

$$A(\text{சேர்ப்பு } A)=(\text{சேர்ப்பு } A)\,A=|A|\,I \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது, $|A-\lambda I|$

$$=\left|A-\frac{\lambda}{|A|}\,(A\ \text{சேர்ப்பு } A)\right| \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)\text{-ல் இருந்து}$$

$$=\left|A\left(I-\frac{\lambda}{|A|}\ \text{சேர்ப்பு } A\right)\right|$$

$$=|A|\left|I-\frac{\lambda}{|A|}\ \text{சேர்ப்பு } A)\right|$$

$$=|A|\left|-\frac{\lambda}{|A|}\left(\text{சேர்ப்பு } A-\frac{|A|}{\lambda}\,I\right)\right|$$

$$=-\frac{\lambda}{|A|}\,|A|\left|\text{சேர்ப்பு } A-\frac{|A|}{\lambda}\,I\right|$$

$$=-\lambda\left|\text{சேர்ப்பு } A-\frac{|A|}{\lambda}\,I\right|$$

$\therefore\quad |A-\alpha I|=0$ ஆனால்

$\left|\text{சேர்ப்பு } A-\dfrac{|A|}{\alpha}\,I\right|=0$ ஆகும்.

அதாவது, α ஆனது A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் ஆனால், $\dfrac{|A|}{\alpha}$ ஆனது (சேர்ப்பு A)-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் ஆகும்.

உதாரணம் 7 : A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α ஆனால், A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α^{-1} ஆகும்.

நிருபணம் : $AA^{-1}=A^{-1}A=I \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

இப்பொழுது, $|A-\lambda I|$

$= |A-\lambda AA^{-1}|$ ... (1)-ல் இருந்து

$= |A(I-\lambda A^{-1})|$

$= |A| \quad |I-\lambda A^{-1}|$

$= |A| \left| -\lambda \left(A^{-1}-\frac{I}{\lambda}\right) \right|$

$= -\lambda \, |A| \left| A^{-1}-\frac{1}{\lambda} I \right|$

$\therefore \quad |A-\alpha I| = 0$ ஆனால் $\left| A^{-1}-\frac{1}{\alpha} I \right| = 0.$

($|A| \neq 0$ என்பதைக் கவனிக்கவும்).

அதாவது, α ஆனது A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம்

ஆனால், $\frac{1}{\alpha}$ ஆனது A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் ஆகும்.

உதாரணம் 8 :

A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α ஆனால், A^2-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α^2 என நிரூபி.

நிரூபணம் : $|A-\alpha I| = 0$ ... ... (1)
எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$|A^2-\alpha^2 I| = |A^2-\alpha^2 I^2|$

$= |(A+\alpha I)(A-\alpha I)|$

$= |A+\alpha I| \; |A-\alpha I|$

$= 0$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$\therefore$ A^2-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் α^2.

குறிப்பு : பொதுவாக, $f(A)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomial) அணியின் மூலம் $f(\alpha)$ என நிரூபிக்கலாம்.

10·3. கேலி—ஹாமில்டன் தேற்றம் :

ஒவ்வொரு சதுர அணியையும், அதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனலாம்.

A என்பது கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணியாக இருக்கட்டும். இதன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு

$$|A-\lambda I| = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும். இதனை,

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n = 0 \quad \dots \quad (2)$$

என விரித்து எழுதலாம்.

A ஆனது இதன் மூலம் என நிரூபிக்கவேண்டும். அதாவது,

$$a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$(A-\lambda I)\,(\text{சேர்ப்பு}\,(A-\lambda I)) = |A-\lambda I|\, I \quad \dots \quad (4)$$

$(A-\lambda I)$ என்ற அணியின் உறுப்பில் உள்ள λ-ன் படி ஒன்று. ஆதலால் சேர்ப்பு $(A-\lambda I)$-ன் உறுப்புகளில் λ-ன் படி $(n-1)$ ஆகவோ, அல்லது, அதற்குக் குறைவாகவோதான் இருக்கவேண்டும். ஆதலால்,

$$\text{சேர்ப்பு}\,(A-\lambda I) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \quad \dots \quad (5)$$

என எழுதலாம். இதில் $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ என்பன a_{ij} களின் சார்புகளை (functions of a_{ij}) உறுப்புகளாகக் கொண்ட n-சதுர அணிகள் என்பதைக் கவனிக்கவும். மேலும், (4), (5)-ல் இருந்து,

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda I)\,(B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) \\
&= (A-\lambda I)\,(\text{சேர்ப்பு}\,(A-\lambda I)) \\
&= |A-\lambda I|\, I \\
&= a_0 I + a_1\lambda I + a_2\lambda^2 I + \dots + a_n\lambda^n I \quad \dots \quad (6)
\end{aligned}$$

என இருக்கட்டும். (6)-ல் இட, வலப்பக்கங்களிலுள்ள λ-ன் அடுக்குகளின் குணகங்களைச் சமன்படுத்தினால்

$$\begin{aligned}
AB_0 &= a_0 I \\
AB_1 - IB_0 &= a_1 I \\
AB_2 - IB_1 &= a_2 I \\
\dots \quad &\dots \quad \dots
\end{aligned}$$

$$AB_{n-1} - IB_{n-2} = a_{n-1}I$$

$$-IB_{n-1} = a_nI$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். இவற்றை, முறையே $I, A, A^2, \ldots A^n$ ஆல் முன் பெருக்கிக் கூட்டினுல்

$$AB_0 + (A^2B_1 - AB_0) + (A^3B_2 - A^2B_1) + \ldots$$
$$\ldots + (A^nB_{n-1} - A_{n-1}B_{n-2}) - A^nB_{n-1}$$
$$= a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$$

ஆதாவது, $0 = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$ .. (7)

குறிப்பு : இடப்புறம் உள்ள 0, பூச்சிய அணியைக் குறிக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : A பூச்சியமில் அணியாக இருந்தால்

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}[a_1I + a_2A + \ldots + a_nA^{n-1}]$$

நிருபணம் : (1), (2)-ல் இருந்து

$$|A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n.$$

இதில் $\lambda = 0$ என்று போட்டால்,

$$|A| = a_0 \neq 0.$$

(7) ஐ A^{-1} ஆல் பெருக்கினுல்

$$0 = a_0A^{-1} + a_1I + a_2A + \ldots + a_nA^{n-1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{a_0}[a_1I + a_2A + \ldots + a_nA^{n-1}]$$

கிளைத்தேற்றம் 2. m என்னும் நேர் முழு எண் $m \geqslant n$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் A^m ஐ A-ன் (m ஐ விட) குறைந்த அடுக்குகளால் ஒரு படியில் எழுத முடியும்.

ஏனெனில், (7)ஐ A^{m-n} ஆல் பெருக்கினுல்

$$a_0A^{m-n} + a_1A^{m-n+1} + \ldots + a_nA^{m+n} = 0$$

உதாரணம் 9.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ஆனுல், A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி. அதில் இருந்து A^{-1}ஐக் கண்டுபிடி.

A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad (3-\lambda)(-\lambda)-4 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad — \qquad — \qquad (1)$$

$$\therefore \quad A^2 - 3A - 4I = 0 \qquad — \qquad \text{(கேலி—ஹாமில்டன்)}$$

இதை A^{-1}ஆல் பெருக்கினுல்

$$A - 3I - 4A^{-1} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{4}(A-3I) = A^{-1}.$$

உதாரணம் 10. முந்தின உதாரணத்தில், சிறப்பியல்பு மூலங் களையும், வெக்டர்களையும் கண்டுபிடி.

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad — \qquad — \qquad \text{(1)-ல் இருந்து}$$

$$\therefore \quad (\lambda-4)(\lambda+1) = 0. \qquad \therefore \quad \lambda = 4 \text{ அல்லது } -1.$$

முதல்வகை : $\lambda = 4$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 3-4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்பது $AX = 4X$ என்ற சமன்பாட்டிற் கிணங்க உள்ளது.

இரண்டாம் வகை : $\lambda = -1$ ஆனுல் $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ என்ற சிறப்பியல்பு வெக்டர் கிடைக்கும்.

இந்த உதாரணத்தில் இருந்து சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டின் கீழ்க்கண்ட பண்புகளை அறிகிருேம்.

1. சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது ஓர் இயல் கணித சமன் பாடாகும் (Algebraic Eqn).

2. இந்தச் சமன்பாட்டின் படியானது A என்ற அணியின் தரமாகும்.

3. இந்தச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அணியின் தரத்தை விட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

4. ஒவ்வொரு சிறப்பியல்பு மூலத்தில் இருந்து, ஒரு சிறப் பியல்பு வெக்டரைக் கண்டு பிடிக்க இயலும்.

5. X ஒரு சிறப்பியல்பு வெக்டர் ஆனுல் kX-ம் ஒரு சிறப் பியல்பு வெக்டர் ஆகும்.

உதாரணம் 10-ல் $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்பதும்,

$kX = \begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix}$ என்பதும் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் என் பதை நோக்குக.

மேலும், நாம் எடுத்துக்கொண்ட உதாரணத்தில்

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு சமச் சீர் அணி என்பதைக் கவனிக்கவும். இதன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களான

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ என்பன செங்குத்தான வெக்டர்கள்.

ஏனெனில், $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2.1 + 1.-2 = 0.$

இது இவ்வாருகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்பது பின் வரும் தேற்றத்தால் விளங்கும்.

10·4. *A* என்ற சமச்சீரணியின் வெவ்வேறு சிறப்பியல்பு மூலங்களான λ, μ-ல் இருந்து கிடைக்கும் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் *X*, *Y* ஆனால் $X \cdot Y = 0$

நிரூபணம் :

$$AX = \lambda X \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$AY = \mu Y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ல் இருந்து $AX.Y = \lambda X.Y$ ... ... (3)

(2) ,, $X.AY = X.\mu Y$ ... ... (4)

$\therefore\ AX.Y - X.AY = (\lambda - \mu)\, X.Y$ ... ... (5)

இப்பொழுது, $X \cdot AY = A'X \cdot Y$

$= AX \cdot Y \quad (\because\ A' = A)$

$\therefore\ 0 = (\lambda - \mu)\, X \cdot Y$

$\lambda \neq \mu$ ... ... கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore\ X \cdot Y = 0.$

10·5. ஓர் அணியைச் சம மூலைவரை அணியாக மாற்றுதல்

உதாரணம் 11. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியைச் சம மூலைவரை அணியாக மாற்றுக.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ என 10 ஆம் உதாரணத்தில் பார்த்தோம். இவற்றை நிரல்களாகக் கொண்ட அணி $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = P$ ஆகும்.

$$\therefore\ P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

இந்தச் சம மூலைவரை அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்களான $4, -1$ என்பதை நோக்குக.

தேற்றம்: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பன A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்களாக இருக்கட்டும். $X_1, X_2, \ldots, X_n$, இவற்றிற்கு இயைந்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். $P = [X_1, X_2, \ldots X_n]$ ஆனால் $P^{-1}AP =$ சம மூலைவரை அணி $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

$$AX_1 = \lambda_1 X_1; \; A_2X_2 = \lambda_2 X_2; \; \ldots \; AX_n = \lambda_n X_n$$

(கொள்கை)

இப்பொழுது, $X_1 = [x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}]'$

$X_2 = [x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}]'$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$X_n = [x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}]'$

ஆக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$P = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

மேலும், $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

ஆக இருக்கட்டும். அப்படியானல்

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_{11} & \lambda_2 X_{12} & \dots & \lambda_n X_{1n} \\ \lambda_1 X_{21} & \lambda_2 X_{22} & \dots & \lambda_n X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 X_{n1} & \lambda_2 X_{n2} & \dots & \lambda_n X_{nn} \end{bmatrix}$$

$= [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n]$

$= [AX_1, AX_2, \dots, AX_n]$ ... ... (கொள்கை)

$= A[X_1, X_2, \dots, X_n]$

$= AP.$

$\therefore\ D = P^{-1}AP.$

உதாரணம் 12.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ஐச் சமமூலைவரை அணியாக மாற்று.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ஆக இருக்கட்டும்.

A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \ (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2 = 0.$$

$\therefore$ 3, 0, 0 என்பன சிறப்பியல்பு மூலங்கள்,

$\lambda_1 = 3$ என்பதை முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad -2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$\therefore$ $X = [1, 1, 1]'$ என்பது இதன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்.

$\lambda_2 = 0 = \lambda_3$. இரு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் சமமாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

ஆக மூன்று சமன்பாடுகளும் ஒன்றேதான். இதிலிருந்து நமக்கு இரண்டு வெக்டர் குழுக்கள் கிடைக்கின்றன. அவை $[2, -1, -1]'$; $[0, 1, -1]'$.

$\therefore$ சிறப்பியல்பு வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

இதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகளான 3, 0, 0 என்பவை A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என்பது கவனிக்கத் தக்கது.

10·6. வடிவொத்த அணிகள் (Similar Matrices)

A, B என்னும் அணிகள் $B = P^{-1}AP$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் இவற்றை வடிவொத்த அணிகள் என அழைப்போம்.

குறிப்பு : $B = P^{-1}AP$ ஆனால்

$$PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A \text{ ஆகும்.}$$

தேற்றம் 1 : A, $P^{-1}AP$ என்ற வடிவொத்த அணிகளுக்கு ஒரே சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு உண்டு.

நிரூபணம் : $|P^{-1}AP-\lambda I|$

$= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP|$

$= |P^{-1}(A-\lambda I)P|$

$= |P^{-1}|\ |A-\lambda I|\ |P|$

$= |P^{-1}|\ |P|\ |A-\lambda I|$

$= |A-\lambda I|$

$\therefore$ இவற்றின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள் ஒன்றே,

$\therefore$ இவற்றின் சிறப்பியல்பு மூலங்களும் சமமாகும்.

கிளைத்தேற்றம். AB, BA என்பன ஒரே சிறப்பியல்பு மூலங்கள் உடையவை. $\because AB = B^{-1}(BA)B$

தேற்றம் 2. $B = P^{-1}AP$ என்னும் அணியின் λ என்ற சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு இயைந்த மாற்றமிலா வெக்டர் Y ஆனால், $X = PY$ என்பது A என்ற அணியின் λ மூலத்திற்கு இயைந்த மாற்றமிலா வெக்டர் ஆகும்.

$BY = \lambda Y$ ... ... (கொள்கை)

மேலும் $PB = PP^{-1}AP = AP$.

$\therefore AX = APY = PBY = P\lambda Y = \lambda PY = \lambda X.$

உதாரணம் 12.

உதாரணம் 10-ல் $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் 4 என்ற சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு இயைந்த மாற்றமிலா வெக்டர் $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்று பார்த்தோம்.

இப்போது, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ஆனால்

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

$$\therefore \; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

அதாவது,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -25 & -11 \end{bmatrix}$$

A, B வடிவொத்த அணிகள் ஆகும். இப்பொழுது, இவற்றின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகள் ஒன்றுயிருக்கின்றனவா எனச் சரி பார்ப்போம்.

B-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} (14-\lambda) & 6 \\ -25 & (-11-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

இதுவே A-ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு என்பதை 9ஆம் உதாரணத்தில் காண்க. எனவே, இவற்றின் சிறப்பியல்பு மூலங் களும் சமமாம். அவை, 4, -1.

இனி 10·6 தேற்றம் 2-ல் உள்ளபடி, 4 என்ற சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கு இயைந்த B-ன் வெக்டர் Y ஆனுல் $X = PY$ என இருக்கிறது என்பதைச் சரி பார்ப்போம்.

$$B - 4I = \begin{bmatrix} (14-4) & 6 \\ -25 & (-11-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -25 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; 10y_1 + 6y_2 = 0$$

$$-25y_1 - 15y_2 = 0$$

அதாவது, $5y_1 + 3y_2 = 0.$

$\therefore \; Y_1 = 3$ ஆனுல் $Y_2 = -5$

$$\therefore \; Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் 10-ல், இதே மூலத்திற்கு (4) இயைந்த வெக்டர் $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்று பார்த்தோம். இப்பொழுது,

$$PY = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2X.$$

இங்கு உதாரணம் 10-ன் அடியில் உள்ள 5ஆம் குறிப்பு நோக்கத்தக்கது.

10·7. A என்ற சதுர அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n$ ஆக இருந்தால், இந்த மூலங்களை மூலைவிட்ட உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோண அணியை A-க்கு வடிவொத்த அணியாகக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

இதை ஓர் உதாரணத்தால் விளக்குவோம்.

உதாரணம் 13.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 13\lambda + 12 = 0$$

$\therefore$ இதன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $1, 3, -4$.

$\lambda = 1$ என்பதற்கு இயைந்த மாற்றமிலா வெக்டர் X ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad (A - \lambda I)X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore\ x_1+2x_2=0;\ \ 2x_1+x_3=0;\ \ -7x_1+2x_2-4x_3=0$

$x_2=1$ ஆனால் $x_1=-2;\ x_3=4.$

$\therefore\ X=[-2,\ 1,\ 4]$

இப்பொழுது, Xஐ P என்ற பூச்சியமில் அணியின் முதல் நிரலாகக் கொள்க. (மற்ற நிரல்கள் $|P|\neq 0$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் போதுமானது.)

$$\therefore\ P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \therefore\ P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$AP=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

AP-ன் முதல் நிரல் $=AX=\lambda_1X=1\cdot X=X$ என்பதைக் கவனி. ... ... (1)

$$\therefore\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ P^{-1}AP\begin{bmatrix}1 & B_1\\ 0 & A_1\end{bmatrix}\quad \ldots\quad \ldots\quad (2)$$

(1)-ல் இருந்து $P^{-1}AP$-ன் முதல் நிரல் $P^{-1}\lambda_1X$ ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும், இதுவே $P^{-1}\lambda_1P$-ன் முதல் நிரல்.

∴ முதல் நிரலானது $[\lambda_1, 0, 0]'$

$= [1, 0, 0]' \quad \because \lambda_1 = 1.$

(2)-ல் இருந்து A_1-ன் தரம் $(n-1)$ என்பது தெளிவு. மேலும் $|\lambda I - P^{-1}AP| = (\lambda - \lambda_1)\ |\lambda I - A_1|$ ஆனால், A-ன் மூலங்களும், $P^{-1}AP$-ன் மூலங்களும் சமம்.

∴ A_1-ன் மூலங்கள் $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_4$; இங்கு $3, -4$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

இனிமேல், A ஐப்போல் A_1ஐ மாற்றி A_1-ன் முதல் உறுப்பாக 3ஐக் கொண்டுவந்துவிடலாம்.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

இதன் மூலங்கள் $3, -4$.

$$(A_1 - 3I)\ Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore\ -y_1 + y_2 = 0; \qquad 6Y_1 - 6y_2 = 0$$

$$\therefore\ y_1 = y_2$$

$$Y = [1, 1]'$$

இப்போது, Yஐ Q என்ற பூச்சியமில் அணியின் முதல் நிரலாகக் கொள்க.

$$\therefore\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$Q^{-1} A_1 Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது, $M = P \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$

என்பதுதான் தேவையான அணி.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} AM = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

இதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகளான 1, 3, —4 என்பவை A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்.

பயிற்சி 10

1. பின்வரும் அணிகளின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் கண்டு பிடி.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. பின்வரும் அணிகளின் சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் அவற்றிற்கியைந்த வெக்டர்களையும் கண்டுபிடி.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. பின்வரும் அணிகளின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி. மேலும், கேலி-ஹாமில்டன் தேற்றத்தை உபயோகித்து இவற்றின் நேரெதிர் அணிகளைக் கண்டுபிடி.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சிறப்பியல்பு மூலத்திற்குப் பல்வேறு சார்பற்ற வெக்டர்கள் இருக்கலாம் என்பதை அடியிற்கண்ட அணியைக் கொண்டு நிரூபி.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. பின் வரும் அணிகள் ஒரே சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு கொண்டவை. ஆனால் அவை வடிவொத்தன அல்ல என நிரூபி.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. பின்வருவன வடிவொத்த அணிகளா, அல்லவா எனக் கண்டுபிடி.

(i) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ b+1 & b \end{bmatrix}$ என்ற மெய்யான அணியைச் சம மூலைவரை அணியாக மாற்றுக. இதன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் கண்டுபிடி.

விடைகள்

1. (a) $-1, 2, 2$ (b) $2, 1 \pm \sqrt{3}$

(c) a, b, c (d) $2, 2, -2$

2. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8. (a) $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6A + 9I)$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 13I)$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{11}(A^2 - 3A - 7I)$

(d) $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 6A + 7I)$.

6. (i) ஆம்

(ii) இல்லை.

11. செங்குத்தணிகள்

11·0 செங்குத்தான வெக்டர்கள்

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ ஆகவும்,

$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ ஆகவும் இருந்தால்

$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots \ldots + x_ny_n$

என்பதை X, Y-ன் உட்பெருக்கு (Inner Product) என்று சொல்வோம். X, Y-ன் உட்பெருக்கு பூச்சியமானல் அவற்றைச் செங்குத்து வெக்டர்கள் என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் : $X = [1, 1, 1]'$; $Y = [1, 1, -2]'$

ஆனுல், $X \cdot Y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$

$\therefore$ X, Y செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

வெக்டரின் நீளம் : $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ ஆனுல்

$$X \cdot X = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \ldots \ldots + x_n \cdot x_n$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$\therefore \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

X, X-ன் உட்பெருக்கினுடைய வர்க்க மூலத்தை X என்ற வெக்டரின் நீளம் என வரையறை செய்வோம். இதை

$\| X \|$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore \| X \| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

வெக்டரின் இயல் வடிவம்

X என்ற வெக்டரின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $\|X\|$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் வெக்டரை X-ன் இயல் வடிவம் (normalised form of X) என்று சொல்வோம்.

உதாரணம் : $X = [3, 4, 12]'$

$$\|X\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

$$\therefore \quad X\text{-ன் இயல் வடிவம்} = \left[\frac{3}{13}, \ \frac{4}{13}, \ \frac{12}{13}\right]'$$

குறிப்பு : இயல் வடிவ வெக்டர்கள் அலகு வெக்டர்களாக இருக்க வேண்டும். அதாவது அவற்றின் நீளம் 1 (unit).

11·1. செங்குத்தணிகள் :

A என்னும் சதுர அணி $A'A = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதைச் செங்குத்தணி என வரையறை செய்வோம்.

குறிப்பு 1 : $A^{-1} = A'$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : $|A'A| = |I| = 1$

$$\therefore \quad |A|^2 = 1 \qquad \because \quad |A'| = |A|.$$

$$\therefore \quad |A| = \pm 1.$$

எனவே, A ஒரு பூச்சியமில் அணியாக இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ஒரு செங்குத்தணியாக இருக்கட்டும். $\therefore \quad A'A = I.$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$
$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

$$a_{11}\cdot a_{12} + a_{21}\cdot a_{22} + a_{31}\cdot a_{32} = 0$$
$$a_{11}\cdot a_{13} + a_{21}\cdot a_{23} + a_{31}\cdot a_{33} = 0$$
$$a_{12}\cdot a_{13} + a_{22}\cdot a_{23} + a_{32}\cdot a_{33} = 0.$$

ஆகவே, A-ன் 9 உறுப்புகளுக்குள் 6 சமன்பாடுகள் இருக்க வேண்டும். மீதமான 3 உறுப்புகளையும் நம் விருப்பம்போல் எடுத்துக்கொள்ள முடியாது. உதாரணமாக ஒரு மெய்யான அணியில் எந்த உறுப்பும் $-1 \leqslant a_{ij} \leqslant 1$ ஆக இருக்க வேண்டும் என்பது முதல் மூன்று சமன்பாடுகளில் இருந்து தெரிகிறது.

பொதுவாக, n வெக்டர்கள் கொண்ட குழுவில் இருந்து $n+(n-1)+\dots+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ உட்பெருக்குகள் கிடைக்கும்.

(இதில் ஒரு வெக்டரை அதனுடன் உட்பெருக்கியதும் அடங்கும்.)

எனவே, $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ உறுப்புகளைத் தெரிந்து கொள்ளலாம். இவை $|a_{ij}| < |$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டவை.

11·2. தேற்றம் 1:

A, B என்பன செங்குத்தணிகள் ஆனால் AB-ம், BA-ம் செங்குத்தணிகள் ஆதல் வேண்டும்.

$A'A = I = B'B$ ... ... கொள்கை

$\therefore\ (AB)'\,AB = B'A'\,AB = B'IB = I$

$\therefore$ AB ஒரு செங்குத்தணி.

இவ்வாறு, BA-ம் ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

தேற்றம் 2: A என்னும் செங்குத்தணி, $|A| = +1$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதனதன் இணை காரணிக்குச் சமமாய் இருக்கும்.

நிருபணம் : A ஓர் இரு சதுர செங்குத்தணி.

$$\therefore\ A^{-1} = A' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால், $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \div |A|$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \because \quad |A| = 1$$

$\therefore\ A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$$\therefore\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = A_{11},\ a_{21} = A_{21},\ a_{12} = A_{12},\ a_{22} = A_{22}$$

குறிப்பு 1 : இந்த நிருபணம் n-சதுர அணிக்கும் எளிதாகப் பொருந்தும்.

குறிப்பு 2 : $|A| = +1$ ஆக இருக்கும் செங்குத்தணியைத் தகு செங்குத்தணி (Proper orthogonal Matrix) என்று சொல்வதுண்டு.

உதாரணம் 2 : ஓர் இரு சதுர மெய்யான செங்குத்து அணி $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ அல்லது $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ என்று இருக்க வேண்டும் என நிருபி.

நிருபணம் : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு செங்குத்தணியாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore\ A'A + I$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\quad a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2\,;\quad ab + cd = 0$

ஆனால் a, b, c, d மெய்யானவை.

$\therefore$ அவற்றின் மதிப்பு 1 ஐ விடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore\quad a = \cos\theta,\ b = \cos\phi$ எனக் கொள்க.

அப்படியானால் $c = \pm\sin\theta;\quad d = \pm\sin\phi$

மேலும் $ab + cd = 0$

$\therefore\quad \cos\theta\,.\cos\phi \pm \sin\theta\,.\sin\phi = 0$

$\therefore\quad \cos(\phi \pm \theta) = 0$

$\therefore\quad \phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ அல்லது $\phi = \dfrac{\pi}{2} + \theta.$

$\therefore\quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ அல்லது $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

என்பது தேவையான அணியின் பொது ருபமாகும்.

11·3. செங்குத்தான மாற்றங்கள் (Orthogonal transformations)

A என்பது ஒரு செங்குத்தணியாக இருக்கட்டும். $Y = AX$ என்னும் மாற்றத்தைச் செங்குத்தான மாற்றம் என்று சொல்வோம்.

தேற்றம் 3 : ஒரு செங்குத்தான மாற்றத்தால் ஒரு வெக்டரின் நீளம் மாறுது.

$Y = AX$ என்ற மாற்றத்தை எடுத்துக்கொள். இதில் $A' = A^{-1}$

$Y'Y = (AX)'\,.\,AX = X'A'AX = X'IX = X'X$

$\therefore$ Y-ன் நீளம் $=$ X-ன் நீளம்.

தேற்றம் 4 : (1-ன் மறுதலை) **:** A என்ற அணி கொண்டு ஒரு வெக்டரை மாற்றும் பொழுது அதன் நீளம் மாறுதிருந்தால் A ஒரு செங்குத்தணியாக இருக்க வேண்டும்.

$(AX)'AX = X'X$ ... ,,, ... (கொள்கை)

$\therefore\quad X'A'AX = X'X$

$\therefore \quad X'(A'A - I)X = 0$

$B = A'A - I$ ஆனால்

$$X'BX = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இதில் X எந்த வெக்டராகவும் கொள்ளலாம். $B = 0$ என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

($\because$ அப்பொழுது $A'A = I$ ஆக இருக்கும்.)

(1)-ல் $B = 0$ எனப் போட்டால் அது பொருந்தும் என்பது தெளிவு. ஆனால் அது 0 ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

முதலாவதாக, B ஒரு சமச்சீர் அணி என்பதைக் கவனி.

$$\because \quad B' = (A'A - I)' = A'A - I = B$$

B-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு $b_{ij}\ (= b_{ji})$ ஆகவும் X-ன் ஓர் உறுப்பு x_i ஆகவும் இருந்தால்,

$$X'BX = b_{11}x_1^2 + b_{nn}x_n^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{ij}x_ix_j + \ldots$$

இதில் $X' = (1, 0, \ldots, 0)$ எனப் போடலாம்.

$\therefore \quad b_{11}x_1^2$ தவிர மீதியெல்லாம் பூச்சியம்.

$$\therefore \quad X'BX = b_{11}x_1^2 = 0 \qquad \therefore \quad b_{11} = 0$$

இதேவிதமாக எல்லா i-க்கும் $b_{ii} = 0$ என நிரூபிக்கலாம்.

இப்பொழுது $x_i = 1 = x_j$ ஆகவும், மீத உறுப்புகளும் 0 ஆகவும் இருக்கும்படி X ஐ எடுத்துக்கொள். அப்படியானால் 2 . $b_{ij}\, x_i\, x_j$ தவிர மீதி எல்லாம் பூச்சியமாகும். ($b_{ii} = b_{jj} = 0$ என நிரூபித்துவிட்டோம் என்பதை நினைவிற் கொள்க.)

$$\therefore \quad X'BX = 2b_{ij}\, x_i\, x_j = 2b_{ij} = 0$$

$$\therefore \quad B = 0 \qquad \therefore \quad A'A - I = 0 \qquad \therefore \quad A'A = I$$

$\therefore \quad A$ ஒரு செங்குத்தணி.

11·4. செங்குத்தணிகளின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்

முதலாவதாக, ஒரு மெய்யான அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் சிக்கல் எண்களாக (Complex numbers) இருக்கக்கூடும் என்பதை நினைவுபடுத்திக் கொள்வோம்.

தேற்றம் 5: ஒரு செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலத்தின் மட்டு (Modulus of the characteristic root) ஒன்றாக இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்: A என்ற செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலம் λ ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore\ \lambda X = AX$

$\therefore\ \overline{\lambda}\ \overline{X} = A\ \overline{X} \qquad (\because\ \overline{A} = A).$

A ஒரு மெய்யான அணி.

$\therefore\ \overline{\lambda}\ \overline{X}' = \overline{X}' \,.\, A'$

$\therefore\ \overline{\lambda}\ \lambda \,.\, \overline{X}'\, X = \overline{X}'\, A'\, AX \qquad \because\ AX = \lambda X$

$= \overline{X}'\, X \qquad \because\ A$ ஒரு செங்குத்தணி.

$\therefore\ \overline{\lambda}\ \lambda = 1 \qquad \therefore\ |\lambda| = 1.$

குறிப்பு: ஒரு செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலத்தை $\cos\alpha + i \sin\alpha$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

$\because\ |\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1.$

தேற்றம் 6: ஒரு சிக்கலெண் செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருந்தால், அதன் இணைச் சிக்கலெண்ணும் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்கவேண்டும்.

λ என்பது A என்ற செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்கட்டும்.

$\therefore\ \lambda X = AX$

$\therefore\ \lambda^{-1}\lambda \,.\, A^{-1}X = \lambda^{-1}A^{-1}AX$

$A^{-1}X = \lambda^{-1}X$

$\therefore\ A'\, X = \lambda^{-1}X \qquad \therefore\ A$ ஒரு செங்குத்தணி

$\therefore\ 0 = |\lambda^{-1}I - A'| = |(\lambda^{-1}I - A)'| = |\lambda^{-1}I - A|$

$\therefore\ \lambda^{-1}$-ம் A-ன் சிறப்பியல்பு மூலமாகும்.

ஆனால் $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$

$\therefore\ \lambda, \overline{\lambda}$ என்பன A-ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்.

தேற்றம் 7 : A என்ற செங்குத்தணியின் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு ஒரு தலைகீழ்ச் சமன்பாடு (Reciprocal equation) ஆகும்.

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$$

$$= |\lambda A I A' - A| \qquad \because \quad A'A = I$$

$$= \left| -A\lambda \left(\frac{I}{\lambda} - A' \right) \right|$$

$$= \pm \lambda^n \left| \frac{I}{\lambda} - A \right| \qquad \because \quad |A| = \pm 1$$

$$= \pm \lambda^n \cdot \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

உதாரணம் 3 : $c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ என இருக்கும்படி

$A = [c_1 \; c_2 \; c_3]$ என்ற ஒரு செங்குத்தணியைக் கண்டுபிடி.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a & x \\ \frac{2}{3} & b & y \\ \frac{2}{3} & c & z \end{bmatrix}$$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$A'A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a & x \\ \frac{2}{3} & b & y \\ \frac{2}{3} & c & z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$a + 2b + 2c = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$x + 2y + 2z = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

$$ax + by + cz = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

(3)-ல் $a = 0;\ b = 1;\ c = -1$ எனப் போடலாம்.

ஆனால் (1)-ல் இருந்து $a = 0;\ b = \frac{1}{\sqrt{2}};\ c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆக இருக்கவேண்டும் என்பது தெரிகிறது.

$\therefore$ (4), (5)-ல் இருந்து $\frac{x}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

$\therefore$ (2)-ல் இருந்து $x = \frac{4}{3\sqrt{2}};\ y = \frac{-1}{3\sqrt{2}};\ z = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$

$$\therefore\ = A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

11·5. சிக்கல் செங்குத்தணி (Unitary Matrix)

A என்ற சதுர அணி $A^* A = I$ என்பதற்கிணங்க இருந்தால் அதைச் சிக்கல் செங்குத்தணி என்று சொல்வோம்.

$$|A^*| = |\bar{A}'| = |\bar{A}|$$

$$|A^* A| = |A^*|\ |A| = |\bar{A}|\ |A|$$

$\therefore\ A^* A = I$ ஆனால் $|\bar{A}|\ |A| = 1$

அதாவது, ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணியின் அணிக் கோவையின் மட்டு (modulus) 1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம் 4: $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணி என்று காண்பி.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}; \quad (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A^* A = (\bar{A})' A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore \; A^* A = I$$

$\therefore A$ ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணி.

தேற்றம் 8 : A, B என்பன சிக்கல் செங்குத்தணிகள் ஆனால் AB-ம், BA-ம் செங்குத்தணிகள்.

நிருபணம் : $(AB)^* \cdot AB = B^* A^* \cdot AB$

$$= B^* IB$$

$$= B^* B$$

$$= I$$

$\therefore$ AB ஒரு செங்குத்தணி.

இவ்வாறே BA-ம் ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

அச்சுகளைச் சுழற்றல் (Rotation of Axes)

$V = xi + yj + zk$ என்பது நமக்கு நன்றாகத் தெரிந்த வெக்டர். இது V^3 வெக்டர் வெளியில் உள்ளது. i, j, k, என்பன X, Y, Z அச்சுகள் வழி உள்ள அலகு வெக்டர்கள் ஆகும். இவை ஓர் அடிப்படை வெக்டர் குழு (*basis*) என்றும் நாம் அறிவோம்.

இப்பொழுது,

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

என்ற செங்குத்தணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதன் மூலம் கிடைக்கும்,

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$
$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$
$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

என்ற u, v, w வெக்டர்கள் அலகு வெக்டர்களாக இருக்க வேண்டும். ஏனெனில்

$$u \, . \, u = (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \, . \, u_1 i + (u_2 j + u_3 k)$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$= 1 \quad \because A \text{ ஒரு செங்குத்தணி.}$$

இதே விதமாக $v \, . \, v = 1 = w \, . \, w$.

மேலும், அதே ஆதியை (*origin*) எடுத்துக் கொண்டு u, v, w-ன் திசைகளில் U, V, W அச்சுகளை எடுத்துக்கொண்டால் இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும். ஏனெனில்,

$$u \, . \, v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$= 0 \quad \because A \text{ ஒரு செங்குத்தணி.}$$

இதேவிதமாக, $u.w = 0 = v.w$.

ஆகவே, (u, v, w) என்ற அலகு வெக்டர்கள் மற்றோர் அடிப்படைக் குழு ஆகும்.

$$\therefore \; V = (x, y, z)$$
$$= xi + yj + zk$$
$$= x' u + y' v + z' w$$
$$= (x', y', z')$$
$$= V^*$$

என்று கொள்வது தகும். மேலும்,

$$xi + yj + zk = x' u + y' v + z' w$$
$$= x' (u_1 i + u_2 j + u_3 k)$$
$$+ y' (v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$
$$+ z' (w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$\therefore\; x = u_1 x' + v_1 y' + w_1 z'$$
$$y = u_2 x' + v_2 y' + w_2 z'$$
$$z = u_3 x' + v_3 y' + w_3 z'$$

இதை $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

அல்லது $V = A' V^*$

என்று குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore\; AV = AA' V^* = V^* \qquad (\because AA' = I.)$$

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

என்ற அணியால் விளையும் அச்சு நிலை மாற்றத்தை ஆராய்க.

முதலாவதாக, A ஒரு செங்குத்தணி என்பதைக் கவனி. ஏனெனில்

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = I.$$

இப்பொழுது,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore\; x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

மேலும், $V = A' V^*$

$$\therefore\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

பகுமுறை வரை கணிதத்தில் (Analytical geometry)

$$x' = r\cos(\theta - d)$$
$$= r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha$$
$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y' = r\sin(\theta - \alpha)$$
$$= r\sin\theta\cos\alpha - r\cos\theta\sin\alpha$$
$$= -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

என்பதை உற்று நோக்குக.

பொதுவாக, ஒரு செங்குத்தணி கொண்டு விளையும் மாற்றம் அநேகமாக (almost) அச்சுகளின் சுழற்சியாக இருக்கும் எனக் கூறலாம். இது எவ்வாறுகும் என்ருல், A என்ற செங்குத் தணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு $|A| = 1$ அல்லது -1 ஆக இருக்க வேண்டும். மேலும்,

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$
$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$
$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

என்ற சமன்பாடுகளின் துணைகொண்டு

$$u \times v = |A|\, w$$

என நிருபிக்கலாம்.

$|A| = 1$ ஆனுல் u, v, w-ன் திசைக் கோட் சேர்க்கை (right of left handed orienlation) i, j, k ஐ ஒத்தே இருக்கும். இப்போது, சாதாரண சுழற்சிகள் மூலமே இரு அச்சுகளையும் ஒன்ருக்கிவிடலாம்.

$|A| = -1$ ஆனுல் $u \times v = -w$ ஆகும். இப்பொழுது வெறும் சுழற்சிகளோடு மட்டுமன்றி, ஓர் அச்சின் திசை மாற்றமும் செய்யவேண்டியதாகும்.

உதாரணம்: XYZ ; $X'Y'Z'$ என்பன ஒரே ஆதியையுடைய இரு கூற்றுத் தொகுதிகளாக (coordinate system) இருக்கட்டும். $v=(x, y, z)$; $v^* = (x', y', z')$ என்பவை ஒரே புள்ளியின் கூறு களாக இருக்கட்டும்.

$v^* = Av$ ஆகவும்

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ஆகவும் இருந்தால்,

(அ) ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு $9x' - 6y' - 3z' - 1 = 0$ ஆனால் (x, y, z)-ல் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

(ஆ) $(x, y, z) = (3, 6, 9)$ என்ற புள்ளியின் (x', y', z') என்ன ?

(இ) $(x', y', z') = (11, -2, 1)$ என்ற புள்ளியின் (x, y, z) என்ன ?

(ஈ) $3x - 6y - 9z + 1 = 0$ என்ற தளத்தின் (x', y', z') சமன்பாடு என்ன?

முதலாவதாக, A ஒரு செங்குத்தணி என்றும், $|A| = 1$ என்றும் இருப்பதைக் கவனி. எனவே இதனால் விளையும் அச்சுகளின் சுழற்சியாக மட்டுமே இருக்க வேண்டும்.

$X'\ Y'\ Z'$ கூற்றுத் தொகுதியை நிர்ணயிக்க, அதன் அடிப்படைக் குழுவின் அலகு வெக்டர்களைக் கண்டுபிடித்தால் போதுமானது. இவைகளின் முடிவுப் புள்ளிகள் (terminal points) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$; $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ஆகும்.

{ ஏனெனில் $V = A'\ V^*$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \}$$

(அ) $V^* = AV$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} \\ y' &= \frac{2x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} \\ z' &= \frac{2x}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{z}{3} \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$$\therefore \quad 9x' - 6y' - 3z' - 1 = 0$$

அதாவது, $3x + 6y + 6z - 2(2x + y - 2z)$
$-(2x - 2y + z) - 1 = 0$.

அதாவது, $-3x + 6y + 9z - 1 = 0$.

(ஆ) (I)-ல் $x = 3,\ y = 6,\ z = 9$ எனப் போடு.

$x' = 11,\ y' = -2,\ z' = 1$.

$\therefore \quad (x', y', z') = (11, -2, 1)$

(இ); (ஈ) - உங்கள் பயிற்சிக்கு.

பயிற்சி 11

1. உதாரணம் 1-ல், a_{11}, a_{12}, a_{13} ; a_{21}, a_{22}, a_{23} ; a_{31}, a_{32}, a_{33} என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் மூன்று கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் என நிருபி.

2. பின்வருவன செங்குத்தணிகள் என நிருபி.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\phi \\ -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. பின்வருவன சிக்கல் செங்குத்தணிகள் என நிருபி.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$

4. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ஐ முதல் நிரையாகக் கொண்ட சமச்சீர் செங்குத்தணியைக் கண்டுபிடி.

5. A என்பது எதிர் ஹெர்மிஷன் அணியாக இருந்தால் $(I-A)(I+A)^{-1}$ ஒரு சிக்கல் செங்குத்தணி என நிருபி.

இதை உபயோகித்து, பின் கண்ட எதிர் ஹெர்மிஷன் அணிகளிலிருந்து சிக்கல் செங்குத்தணிகளை உருவாக்குக.

(i) $\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 3i \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} i & 1-i & 1 \\ -1-i & 3i & i \\ -1 & i & 0 \end{bmatrix}$

12. இருபடி சமச்சீர்க் கோவைகள்

(Quadratic Forms)

12·1. $ax^2 + 2hxy + by^2$ என்பது இரு மாறிகளில் உள்ள இருபடி சமச்சீர்க் கோவையாகும். இதே மாதிரி மூன்று மாறிகளில் உள்ள இருபடி சமச்சீர்க் கோவையானது $ax^2+by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ ஆகும். பொதுவாக,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

என்பது n மாறிகளில் உள்ள இருபடி சமச்சீர்க் கோவையாகும். இதில் $a_{ij} = a_{ji}$ ஆக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

என்று எழுதலாம்.

12·2. இருபடி சமச்சீர்க் கோவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம் என்பது நோக்கத் தக்கது.

(i) $ax^2+2hxy+by^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(ii) $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$

$$= [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(ii) ஆம் உதாரணத்தில் நடுவில் உள்ள அணியின் மூலே விட்ட உறுப்புகள் x^2, y^2, z^2-ன் குணகங்கள் என்றும், முதல் நிரையில் உள்ள எஞ்சிய உறுப்புகளான h, g என்பன முறையே xy, xz-ன் குணகங்களை 2 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கின்றன என்றும், இரண்டாம் நிரையில் உள்ள f ஆனது yz-ன் குணகத்தை 2 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் என்பதையும் கவனித்துக் கொள்க.

ஆதலால், ஓர் இருபடி சமச்சீர்க் கோவை கொடுத்தால் அதற்கியைந்த ஒரு சமச்சீர் அணியைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். மேலும், ஒரு சமச்சீர் அணி கொடுக்கப்பட்டால் அதற்கியைந்த இருபடி சமச்சீர்க் கோவையைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

உதாரணம் 1 : $3x^2+4y^2-z^2+2yz-4zx+6xy$ ஐச் சமச்சீர் அணிக்கோவையாக மாற்று.

இங்கு $a=3$, $b=4$, $c=-1$, $f=1$, $g=-2$, $h=3$.

$$\therefore \text{ வேண்டிய சமச்சீரணி } = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

12·3. பல்வகை இருபடி சமச்சீர்க் கோவைகள்

(i) நிச்சய நேர்க்கோவை (Positive Definite Form): இந்தக் கோவையின் மதிப்பு $x=0$, $y=0$ என இருந்தால் மட்டும் பூச்சியமாக இருக்கும். வேறு எல்லா மதிப்புகளுக்கும் நேராக (positive) இருக்கும். உதாரணம் :

$$x^2 + y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(ii) நேர்க்கோவை (Positive Semi-Definite Form): இந்தக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகவோ, அல்லது நேராகவோ இருக்கும். உதாரணம் :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$= [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

இது $x = -y$ ஆக இருக்கும்போதும், பூச்சியமாவதைக் கவனி.

(iii) நிச்சய குறைக் கோவை (Negative Definite Form): இதன் மதிப்பு $x=0$, $y=0$ ஆக இருந்தாலொழிய குறையாக (negative) இருக்கும். உதாரணம்:

$$-x^2 - y^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(iv) குறைக் கோவை (Negative Semi Definite Form): இதன் மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கும்.

உதாரணம்:

$$-(x+y)^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(v) வரையறுத கோவை (Indefinite Form):

இதன் மதிப்பு நேராகவோ குறைவாகவோ இருக்கலாம். உதாரணம்:

$$x^2 - y^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$x > y$ ஆனால் இதன் மதிப்பு நேராகவும்,

$x < y$ ஆனால் இதன் மதிப்பு குறைவாகவும் இருப்பதைக் கவனி.

12·4 லக்ராஞ்சே முறைப்படி $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ ஐ $a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2$ ஆக ஒடுக்குதல் (Reduction):

இதை நாம் ஓரிரு உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

உதாரணம் 2: $x^2 + 6y^2 + 18z^2 - 4yz + 8zx + 4xy$ ஐ ஒடுக்குக.

$$\begin{aligned} & x^2+6y^2+18z^2-4yz+8zx+4xy \\ &= x^2+2x(2y+4z)+6y^2+18z^2 \\ &= (x+\overline{2y+4z})^2 - (2y+4z)^2 + 6y^2 + 18z^2 \\ &= (x+2y+4z)^2 - 4y^2 - 16yz - 16z^2 + 6y^2 + 18z^2 \\ &= (x+2y+4z)^2 + 2y^2 - 16yz + 2z^2 \end{aligned}$$

$$= (x+2y+4z)^2 + 2\,[y^2-8yz] + 2z^2$$
$$= (x+2y+4z)^2 + 2\,[(y-4z)^2-16z^2] + 2z^2$$
$$= (x+2y+4z)^2 + 2\,(y-4z)^2-30z^2$$
$$= x'^2+2y'^2-30z'^2.$$

குறிப்பு 1 : இது ஒரு வரையறுத (Indefinite form) கோவை.

குறிப்பு 2 :
$$x' = x + 2y + 4z$$
$$y' = y - 4z$$
$$z' = z$$

என்பவை மாறி மாற்றச் சமன்பாடுகள்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பது மாறி மாற்ற அணி.

எனவே, ஒருபடியில் மாறி மாற்றத்தால், இருபடி சமச்சீர்க் கோவையை, சதுரங்களின் எண்ணி பெருக்கல்களின் கூடுதலாக எழுத முடியும் எனத் தெரிகிறது. இதையே லக்ராஞ்சே முறைப் படி ஒடுக்கல் (Reduction) என்று சொல்கிறோம்.

உதாரணம் 3 : $xy+yz+zx$ ஐ ஒடுக்குக.

$$xy+yz+zx$$
$$= \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4} + yz+zx$$
$$= \frac{1}{4}\,(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + z\,(x+y)$$
$$= \frac{1}{4}\,[\,(x+y)^2 + 4\,(x+y)z] - \frac{1}{4}\,(x-y)^2$$
$$= \frac{1}{4}\,[(x+y+2z)^2 - 4z^2\,] - \frac{1}{4}\,(x-y)^2$$
$$= \frac{1}{4}\,(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}\,(x-y)^2 - z^2$$
$$= \frac{1}{4}\,x'^2 - \frac{1}{4}\,y'^2 - z'^2$$

இதில், $x' = x + y + 2z$

$y' = x - y$

$z' = z.$

இதுவும் ஒரு வரையறுத கோவையே.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ இதன் மாறிமாற்ற அணியாகும்.

12·5. இருபடி சமச்சீர்க் கோவையின் ஒருபடி மாற்றம் (Linear Transformations of a Quadratic Form)

$X' A X$ என்ற இருபடி சமச்சீர்க் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் A ஒரு சமச்சீர் அணி.

$X = P Y$

என்பதில் P பூச்சியமில் அணி ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad X' A X = (P Y)' A P Y$$
$$= Y' P' A P Y$$
$$= Y' B Y.$$

[இதில் $B = P' A P$-ம் சமச்சீர் அணியாகும்.

$\because \quad (P' A P)' = P' A' (P')' = P' A P.$

ஏனெனில், A ஒரு சமச்சீர் அணி.]

ஆகவே A ஐ அணியாகக் கொண்ட $X' A X$ என்ற கோவையில் $X = P Y$ என்ற மாற்றம் செய்தால், $B = P'AP$ ஐ அணியாகக் கொண்ட $Y'BY$ என்ற கோவை கிடைக்கிறது.

12·6. $Q = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ என்பது நிச்சய நேர்க் கோவையாக இருந்தால்,

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவைகள் நேராக (positive) இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம் : $X = [x_1, x_2, \ldots x_n]'$ ஆனல்,

$Q = X'AX$ ஆகும். இதில் A ஒரு சமச்சீர் அணியாக இருக்க வேண்டும்.

மேலும், ஒரு மாறி மாற்றத்தின்படி Q ஐச் சதுரங்களின் எண்ணிப் பெருக்கல்களின் கூடுதலாக எழுத முடியும் என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad X = PY$ எனப் போடு.

இதில் P என்பது மாறி மாற்ற அணி ;

$Y = [y_1, y_2, \ldots y_n]'$ ஆக இருக்கட்டும். அப்படியானல்,

$$Q = X'AX = (PY)'A(PY)$$
$$= Y'P'APY$$
$$= Y'BY. \quad \text{இதில் } B = P'AP$$

மேலும், B-ல் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மட்டுமே இருக்க வேண்டும். $\because$ Q ஐ ''ஒடுக்கி'' விட்டதால் வர்க்கங்கள் மட்டுமே இருக்கும்.

$$\therefore \quad B = P'AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |B| = |P'|\;|A|\;|P| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \ldots \lambda_n$$

$$\therefore \quad |P|^2 \; |A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \qquad \because \; |P^1| = |P|$$

இப்பொழுது, Q நிச்சய நேர்க்கோவை ஆதலால் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ஒவ்வொன்றும் நேராக (positive) இருக்க வேண்டும். $|P|^2$ நேராக இருக்கும். $\therefore \ |A| > 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

இனிமேல், $Q_r = \sum_{i,\, j=1}^{r} a_{ij}\, x_i\, x_j$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

Q_r-ம் நிச்சய நேர்க்கோவையாகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

$\because$ இல்லாவிடில், $x_1, x_2, \ldots x_r$-களுக்கு அதே மதிப்புகள் கொடுத்து, x_{r+1}, x_{r+2} முதலானவைகளுக்குப் பூச்சிய மதிப்புக் கொடுத்தால் Q-ம் குறை (negative) ஆகிவிடும். ஆனால் Q நிச்சய நேர்க்கோவை எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ Q_n-ம் நிச்சய நேர்க்கோவை. எனவே, முன்மாதிரி

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0$$

என நிரூபித்து விடலாம்.

பயிற்சி 12

1. பின்வரும் இருபடி சமச்சீர்க் கோவைகளை $X'AX$ என்னும் ரூபத்தில் எழுது.

(a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6yz + 8zx$.

(b) $3x^2 - y^2 + z^2 - 2yz + 10zx + xy$.

2. பின்வரும் கோவைகளை லக்ராஞ்சே முறைப்படி ஒடுக்கி அவை நிச்சய நேர்க்கோவைகளா, அல்லவா எனக் கூறு.

(i) $x_1^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2$

(ii) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 6yz + 7zx + 8xy$

(iii) $6x^2 + 3y^2 + 14z^2 + 4yz + 18zx + 4xy$

(iv) $x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 4xy + 8xz$

(v) $8x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 8yz - 4zx$

விடை : (1) (iii) (v) ஆம்.

3. 12·6-ன் மறுதலையை நிரூபி.

4. $5x^2 + 26y^2 + 10z^2 + 4yz + 14zx + 6xy$ ஒரு நேர்க்கோவை என நிரூபி. (Positive Semi Definite)

5. A ஒரு நிச்சய நேர்க்கோவைக்கிசைந்த சமச்சீர் அணியாகவும், B, C என்பன $B'AB = I$, $A = C'C$ என்பதற்கிணங்கவும் இருந்தால் CB ஒரு செங்குத்தணி என நிரூபி.

$[(CB)' CB = B'C'CB = B'AB = I]$

6. $ax^2 - 2b\,xy + cy^2$ என்பது நிச்சய நேர்க்கோவையாக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனைகள் யாவை? $[a > o;\ ac > b^2]$

அநுபந்தம்

அணிக்கோவைகள்

1. வரையறையின் வரலாறு :

$$a_1x + b_1y = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவைகளிலிருந்து x, y ஐ நீக்க, கிடைக்கும் நீக்கற் பலன் (eliminant) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ஆகும்.

இதனை $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ எனக் குறிப்பிட்டனர்.

ஆகவே, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவை

$a_1b_2 - a_2b_1$ என்ற கோவையைக் குறிக்கிறது என வரையறுக்கலாம்.

இவ்வாறே, $a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(2), (3)-ல் இருந்து,

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2} = \frac{y}{-(a_2c_3-a_3c_2)} = \frac{z}{a_2b_3-a_3b_2} = K$$

∴ (1)-ல் இருந்து

$$k\ [a_1\ (b_2c_3-b_3c_2) - b_1\ (a_2c_3-a_3c_2) + c_1\ (a_2b_3-a_3b_2)] = 0$$

$$\therefore\ a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

இதையே $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ எனக் குறித்தால்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

என்பது விளங்கும்.

ஆகவே, மடங்கு முறைப்படி (Recursion), ஒரு n-தர அணிக் கோவையை,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & k_3 & l_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n & l_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ b_3 & c_3 & \cdots & l_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ a_3 & c_3 & \cdots & l_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\ \cdots + (-1)^n\cdot l_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ a_3 & b_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

என்று விரித்தெழுதலாம்.

உதாரணம் (i) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 5 \times 4 = -2$

(ii) $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}$$

$$= a(bc-f^2) - h(hc-fg) + g(hf-bg)$$
$$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

2. அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (Properties of Determinants)

தேற்றம் 1 : ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பு, நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றியமைப்பதால் மாறாது.

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

L.H.S. = இ.u. $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

= வ.u. = R.H.S.

குறிப்பு : இதிலிருந்து, முதல் நிரலின் அடியாகவோ, அன்றி நிரையின் அடியாகவோ, ஓர் அணிக்கோவையை விரித்தெழுதலாம் என்று தெரிகிறது.

தேற்றம் 2 : அடுத்தடுத்த இரு நிரைகளை (நிரல்களை) மாற்றியமைப்பதால், ஓர் அணிக்கோவையின் குறி (sign) மாறுமே தவிர மதிப்பு மாறாது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$இ.ப. = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

$$= - [a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) - b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) + c_3 (a_1 b_3 - a_3 b_1)]$$

$$= வ.ப.$$

குறிப்பு : இதிலிருந்து, நாம் விருப்பப்பட்ட நிரையை (நிரலை) முதல் நிரை (நிரல்) ஆக்க இயலும் என்பது தெரிகிறது. எனவே, எந்த நிரையின் (நிரலின்) அடியாகவும் ஓர் அணிக்கோவையை விரித்தெழுதலாம்.

தேற்றம் 3 : ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) முழுதும் ஒத்தவாறு இருந்தால் அதன் மதிப்பு பூச்சிய மாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் மதிப்பு Δ ஆக இருக்கட்டும். ஒத்தவாறுள்ள நிரைகளை மாற்றியமைத்தால் அதன் மதிப்பு 2 ஆம் தேற்றத்தின்படி $-\Delta$ ஆகும். ஆனால் இவை முழுதும் ஒத்த நிரைகள்.

$$\therefore \quad -\Delta = \Delta$$

அதாவது $2\Delta = 0$

$$\Delta = 0$$

தேற்றம் 4 : ஒரு நிரலில் (நிரையில்) உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் k ஆல் பெருக்கினால், Δ மதிப்புள்ள அணிக்கோவையின் மதிப்பு $k\Delta$ ஆகும். அதாவது,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\because \quad இ.ப. = ka_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - ka_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + ka_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

$$= k [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)]$$

$$= வ.ப.$$

கிளைத் தேற்றம் ; ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரலில் (நிரையில்) உள்ள உறுப்புகள், மற்ருெரு நிரலில் (நிரையில்) உள்ள இசைந்த உறுப்புகளைப்போல் k மடங்காக இருந்தால், அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

தேற்றம் 5 : ஒரு நிரலில் (நிரையில்) உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் இரு உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருந்தால் அந்த அணிக் கோவையை இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம். அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{இ.ப.} = (a_1+\alpha_1)(b_2 c_3-b_3 c_2)-(a_2+\alpha_2)(b_1 c_3-b_3 c_1) + (a_3+\alpha_3)(b_1 c_2-b_2 c_1).$$

$$= [a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]$$
$$+ [\alpha_1(b_2c_3-b_3c_2)-\alpha_2(b_1c_3-b_3c_1)+\alpha_3(b_1c_2-b_2c_1)]$$
$$= \text{வ.ப.}$$

தேற்றம் 6 : ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடன் மற்ருேர் நிரையின் (நிரலின்) இசைந்த உறுப்புகளை k ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினுல் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாருது. அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

நிரூபணம் : $$\text{வ.ப.} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

... ... (தேற்றம் 5)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

... ... (தேற்றம் 4)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k.0 \ldots\ldots \text{(தேற்றம் 3)}$$

= இ.ப.

தேற்றம் 7 : Δ என்ற அணிக்கோவையின் உறுப்புகளில் x-ன் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் இருக்கட்டும். $x=a$ எனப் பிரதியிடும்போது $\Delta=0$ ஆனால் $(x-a)$ ஆனது Δ-ன் காரணியாக இருக்கவேண்டும்.

$\Delta = f(x)$ ஆக இருக்கட்டும்.

$f(a) = 0$ ... கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ மீதித் தேற்றத்தின்படி $(x-a)$ ஆனது $f(x)$-ன் அதாவது Δ-ன் காரணியாகும்.

3. சிற்றணிக் கோவை (Minor) :

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ஆக இருக்கட்டும். இதில் a_1 என்ற உறுப்பு இருக்கும் நிரையையும், நிரலையும் நீக்கி விட்டால் $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்ற சிற்றணிக் கோவை கிடைக்கிறது. இதை a_1-ன் சிற்றணிக் கோவை என்று அழைப்பதும், A_1' எனக் குறிப்பிடுவதும் உண்டு. இதிலிருந்து $\Delta = a_1 A_1' - b_1 B_1' + c_1 C_1'$ என்பது தெளிவாகிறது.

4. இணைக் காரணி (Co-factor) :

$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$ ஆக இருந்தால் A_1, B_1, C_1-ஐ a_1, b_1, c_1-ன் இணைக் காரணிகள் என்று சொல்வோம்,

3, 4-ல் இருந்து ஓர் உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவையும் இணைக் காரணியும் ஒரே மதிப்புடையன என்றும், ஆனால் குறியில் (sign) வேறுபட்டிருக்கலாம் என்றும் அறிகிறோம்.

குறிப்பு : $A_1 = A_1'$; $B_1 = -B_1'$; $c_1 = C_1'$. பொதுவாக எந்தக் குறியை எடுத்து கொள்வது என்பதை,

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$ என்பதிலிருந்து தெரிந்து

கொள்ளலாம். பொதுவாக ஓர் உறுப்பை மேலே இடது மூலைக்குக் கொண்டுவர இரட்டையெண் — தடவை நகர்த்த வேண்டியதானல் அது + ஆகும். இல்லாவிடில் — ஆகும்.

தேற்றம் 8 : ஒரு நிரலில் (நிரையில்) உள்ள உறுப்புகளை, மற்ரெரு நிரலின் இசைந்த உறுப்புகளின் இணைக் காரணிகளைக் கொண்டு பெருக்கிக் கூட்ட பூச்சியம் கிடைக்கும். அதாவது,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ஆனல் } b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0$$

$$\text{ஏனெனில் } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3.$$

$$0 = b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 \ldots \ldots \text{ (தேற்றம் 3)}$$

உதாரணம் 1 : பின்வரும் அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \ldots R_2 - R_1;\ R_3 - R_2;\ R_4 - R_3.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \ldots R_3 - R_2;\ \ R_4 - R_3$$

$= 0$

உதாரணம் 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவி. $w = \sqrt[3]{1}.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + w + w^2 & w & w^2 \\ 1 + w + w^2 & w^2 & 1 \\ 1 + w + w^2 & 1 & w \end{vmatrix} \ldots \ldots c_1 + c_2 + c_3$$

ஆனால் $1 + w + w^2 = 0 \quad \because \quad w^3 - 1 = 0$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & w & w^2 \\ 0 & w^2 & 1 \\ 0 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$$

உதாரணம் 3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$ ஐ விரித்தெழுதுக.

Δ-ல் $x = y$ எனப் பிரதியிடுக.

இரு நிரல்கள் முழுவதும் ஒத்தவையாகின்றன.

$\therefore$ $(x-y)$ ஆனது Δ-ன் காரணி (தேற்றம் 7). இதே விதமாக $(y-z)$, $(z-x)$-ம் காரணிகள். மேலும் Δ-ன் படி 5 என்பதை நோக்குக.

$$\therefore \Delta = (x-y)(y-z)(z-x)\ [k(x^2+y^2+z^2) + l(yz+zx+xy)]$$

இப்பொழுது $x = 0,\ y = 1,\ z = 2$ எனப் பிரதியிடு.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\,2\,[5k + 2l]$$

$\therefore 2 = 5k + 2l$ ... ... (1)

இதே விதமாக $x = 0,\ y = 1,\ z = -1$ ஆனால்

$-1 = 2k - l$ ... ... (2)

(1), (2)-ல் இருந்து $l = 1,\ k = 0$

$$\therefore \Delta = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

உதாரணம் 4 : $$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$= 2abc\,(a+b+c)^3$ என நிரூபி.

Δ-ல் $a = 0$ எனப் பிரதியிடு.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix} = c^2b^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & 1 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

∴ a ஆனது Δ-ன் காரணி. இதேபோல் b, c-ம் காரணிகள்.

பின்னும் $(b+c) = -a$ எனப் பிரதியிடு.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (-c)^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

இதில் மூன்று நிரல்களும் சமமாயிருக்கின்றன. ஆகையால் $(a+b+c)^3$ காரணியாக இருக்க வேண்டும். மேலும் Δ ஆனது 6 ஆவது படியில் உள்ளது.

∴ அடுத்த காரணியும் $(a+b+c)$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும் (சமச்சீர்க் கோவை).

$$\therefore \quad \Delta = k.abc(a+b+c)^3$$

$a=1$, $b=1$, $c=1$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k.3^3$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore \quad \Delta = 2.abc\,(a+b+c)^3$$

உதாரணம் 5 :

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என நிரூபி.

$$\text{இ. ப.} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + 0$$

$$+ 0 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0+0+0+0+ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற் பலன்

$$\left.\begin{aligned} a_1X+b_1Y+c_1Z&=0 \\ a_2X+b_2Y+c_2Z&=0 \\ a_3X+b_3Y+c_3Z&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad I$$

என்னும் சமன்பாடுகளில்

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z \\ Y &= \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z \\ Z &= \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad II$$

ஆக இருக்கட்டும்.

I-ல் இருந்து $X=Y=Z=0$ ... ... (i)

அல்லது

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

என்பது தெரிகிறது.

(i)-ல் இருந்து

$$\begin{aligned} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z &= 0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z &= 0 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z &= 0 \end{aligned}$$

ஆக இருக்கவேண்டும். $\therefore\ x=y=z=0$

அல்லது

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

ஆகவே, $x=y=z=0$ ஆக இல்லாவிட்டால் I-ல் இருந்து $\Delta_1 = 0$ அல்லது $\Delta_2 = 0$ என்பது பெறப்படுகிறது. ... (அ)

இப்பொழுது II-ன் துணை கொண்டு, I ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3)\,x + (a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3)\,y + (a_1\gamma_1+b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3)\,z = 0$$

$$(a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3)\,x + (a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3)\,y + (a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3)\,z = 0$$

$$(a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3)x + (a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3)y + (a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3)z = 0 \quad \ldots \quad III$$

$x = y = z = 0$ ஆக இல்லாவிட்டால், III-ல் இருந்து

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_2 & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3 & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (ஆ)$$

ஆக இருக்கவேண்டும் என்பது தெரிகிறது.

ஆனல் III ஆனது I-ல் இருந்து கிடைத்தது தான். ஆகவே, (அ), (ஆ)-ல் இருந்து $\Delta_1 = 0$ அல்லது $\Delta_2 = 0$ ஆனல் $\Delta = 0$ ஆக வேண்டும் என்பது விளங்குகிறது.

$$\therefore \ \Delta = k\,\Delta_1\,\Delta_2$$

என்று சொல்லலாம். இதில் $a_1\,b_2\,c_3\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3$-ன் காரணியைக் கொண்டு $k = 1$ என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \Delta = \Delta_1\,\Delta_2.$$

உதாரணம் 6 (a):

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

ஆனல் $|AB| = |A| \times |B|$ என நிரூபி.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1.3+2.0+1.2 & 1(-1)+2.1+1.5 & 1.2+2.2+1.3 \\ 2.3+4.0+3.2 & 2(-1)+4.1+3.5 & 2.2+4.2+3.3 \\ 3.3+1.0+2.2 & 3(-1)+1.1+2.5 & 3.2+1.2+2.3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 12 & 17 & 21 \\ 13 & 8 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \because R_2 - 2R_1, \; R_3 - R_1.$$

$$= 5\,(25-6) - 2\,(30-18) + 8\,(18-45)$$

$$= -145. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times (8-3) - 2\,(4-1) + 3\,(6-4) = 5 \quad \ldots \quad (2)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(3-10) - 0\,(-3-10) + 2\,(-2-2)$$

$$= -29 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$\therefore |A|\ |B| = 5 \times (-29) = -145$ ... ... (2) (3)-ல் இருந்து ... ... (4)

$\therefore$ (1), (4)-ல் இருந்து

$$|AB| = |A|\ |B|.$$

உதாரணம் 6 (b) ;

$$\begin{vmatrix} 2b_1 + c_1 & c_1 + 3a_1 & 2a_1 + 3b_1 \\ 2b_2 + c_2 & c_2 + 3a_2 & 2a_2 + 3b_2 \\ 2b_3 + c_3 & c_3 + 3a_3 & 2a_3 + 3b_3 \end{vmatrix}$$

என்பதன் காரணி $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்று நிரூபி.

அதன் அடுத்த காரணி 13 என்றும் நிரூபி.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2b_1+c_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2+c_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3+c_3 & c_3+3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ அடுத்த காரணி$=-2(0-2)+1.(9-0)=13$.

உதாரணம் 7 : $A_1, B_1, C_1, \ldots$ என்பன, $a_1, b_1, c_1 \ldots$ என்பவைகளின் இணைக் காரணிகள் ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ஆகவும்; } D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

ஆகவும் இருக்கட்டும், அப்படியானால்,

$$\Delta\, D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 \\ a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$

$\therefore \ \Delta D = \Delta^3$ அல்லது $D = \Delta^2$

உதாரணம் 8 :

$$\begin{vmatrix} B_1 + C_1 & C_1 + A_1 & A_1 + B_1 \\ B_2 + C_2 & C_2 + A_2 & A_2 + B_2 \\ B_3 + C_3 & C_3 + A_3 & A_3 + B_3 \end{vmatrix} = 2\Delta^3$$

என நிருபி.

உதாரணம் 5-ல் உள்ளபடி இ. ப. $= 2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

உதாரணம் 7-ல் இருந்து $= 2\Delta^2$.

(வேறு முறை)

இ. ப. $= \begin{vmatrix} 2C_1 & C_1 + A_1 & A_1 + B_1 \\ 2C_2 & C_2 + A_2 & A_2 + B_2 \\ 2C_3 & C_3 + A_3 & A_3 + B_3 \end{vmatrix} \ldots C_1 + C_2 - C_3$

$$= 2 \begin{vmatrix} C_1 & C_1 + A_1 & A_1 + B_1 \\ C_2 & C_2 + A_2 & A_2 + B_2 \\ C_3 & C_3 + A_3 & A_3 + B_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 & A_1 + B_1 \\ C_2 & A_2 & A_2 + B_2 \\ C_3 & A_3 & A_3 + B_3 \end{vmatrix} \ldots C_2 - C_1.$$

$$= 2 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 & B_1 \\ C_2 & A_2 & B_2 \\ C_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} \ldots C_3 - C_2$$

$$= 2\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$= 2\,\Delta^2$ (உதாரணம் 7-ல் இருந்து)

உதாரணம் 9 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

என நிரூபி. $S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$ ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

என நிரூபி.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$-ல் $\alpha=\beta$ எனப் பிரதியிட்டால் இரு நிரல்கள் முழுவதும் ஒத்தனவாகின்றன. $\therefore\ \Delta = 0$.

$\therefore\ \alpha-\beta$ ஆனது Δ-ன் காரணி. இதே விதமாக, $(\beta-\gamma)$, $(\gamma-\alpha)$-ம் Δ-ன் காரணிகள்.

மேலும் Δ-ன் படி 3.

$\therefore\ \Delta = k(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

$\beta\gamma^2$-ன் குணகத்தைக் கணக்கிட, $k = 1$.

$\therefore\ \Delta = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

இப்பொழுது, $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & \alpha+\beta+\gamma & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 & \alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

உதாரணம் 10 : $u = ax + by + cz$; $v = ay + bz + cx$; $w = az + bx + cy$ ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$$

என நிறுவி.

$$\text{இ. ப.} = \begin{vmatrix} ax+by+cz & ay+bz+cx & az+bx+cy \\ bx+cy+az & by+cz+ax & bz+cx+ay \\ cx+ay+bz & cy+az+bx & cz+ax+by \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{vmatrix} = u(u^2 - vw) - w(uv - w^2) + v(v^2 - uw)$$

$$= u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw.$$

உதாரணம் 11 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$$

ஐ இரண்டு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதி அதன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+c^2+ba & -ac+ac+b^2 \\ -ab+ab+c^2 & -b^2+ca+ac & -bc+a^2+bc \\ -ac+b^2+ac & -bc+bc+a^2 & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$

$$= [a(bc-a^2)-b(b^2-ca)+c(ab-c^2)]^2$$

$$= [3abc-a^3-b^3-c^3]^2$$

$$= [a^3+b^3+c^3-3abc]^2.$$

உதாரணம் 12 :

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-bi \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix}$$ என்று காண்பி.

இதிலிருந்து $(9^2+2^2+3^2+4^2)$ $(5^2+6^2+7^2+8^2)$ ஐ நான்கு சதுரங்களின் கூடுதலாகக் காண்பி.

முதல் இரு அணிக்கோவைகளைப் பெருக்கினல்,

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta - i(a\beta - b\alpha + c\delta - d\gamma) & a\gamma - b\delta - c\alpha - d\beta - i(a\delta + b\gamma - c\beta - d\alpha) \\ -a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta - i(a\delta + b\gamma - c\beta - d\alpha) & +a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + i(a\beta - b\alpha + c\delta + d\gamma) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix}.$$

இதில் $A = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta$; $B = a\beta - b\alpha + c\delta - d\gamma$

$C = a\gamma - b\delta - c\gamma + d\beta$; $D = a\delta + b\gamma - c\beta - d\alpha$ ... (1)

மேலும் $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-bi \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2$

$$\begin{vmatrix} \alpha - i\beta & \gamma - i\delta \\ -\gamma - i\delta & \alpha + \beta i \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

$$\begin{vmatrix} A - iB & C - iD \\ -C - iD & A + iB \end{vmatrix} = A^2+B^2+C^2+D^2$$

$\therefore \quad (a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = A^2+B^2+C^2+D^2$

இதில் $a=9$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $\alpha=5$, $\beta=6$, $\gamma=7$, $\delta=8$ எனப் பிரதியிட்டால் $A=110$, $B=40$; $C=56$, $D=48$ (1)

$\therefore \quad (9^2+2^2+3^2+4^2)(5^2+6^2+7^2+8^2)$

$= 110^2+40^2+56^2+48^2$.

உதாரணம் 13 :

பின்வரும் (சமச்சீர்) அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் கண்டு பிடி.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} \ldots c_1+c_2+c_3+c_4.$$

$\therefore \quad a+b+c+d$ ஆனது Δ-ன் காரணி.

மேலும் $c_1+c_2-c_3-c_4$ ஐ எடுத்துக்கொண்டு $a+b-c-d$ ஆனது Δ-ன் காரணி என நிரூபிக்கலாம். இதேவிதமாக, $a+c-b-d$-ம், $a+d-b-c$-ம் Δ-ன் காரணிகள்.

$$\therefore \quad \Delta = k(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d) \times (a+d-b-c).$$

Δ-ன் படி 4 என்பதைக் கவனி. a^4-ன் குணகத்தைக் கொண்டு $k=1$ எனக் கொள்க.

உதாரணம் 14 : இரட்டையெண் தரமுள்ள அணிக்கோவையின் சதுரமானது எதிர்ச்சீரணிக் கோவை (skew symmetric) என நிரூபி.

ஒரு 4 சதுர அணிக்கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -b_3 & a_3 & -d_3 & c_3 \\ -b_4 & a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -b_3 & a_3 & -d_3 & c_3 \\ -b_4 & a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} O_1 & A & B & C \\ -A & O_2 & D & E \\ -B & -D & O_3 & F \\ -C & -E & -F & O_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ -A & 0 & D & E \\ -B & -D & 0 & F \\ -C & -E & -F & 0 \end{vmatrix}.$$

இதில் $O_1 = -a_1b_1 + a_1b_1 - c_1d_1 + c_1d_1 = 0$

$O_2 = O_3 = O_4 = 0.$

மேலும் $A = -a_1\, b_2 + b_1\, a_2 - c_1\, d_2 + c_2\, d_1$

$B = -a_1\, b_3 + b_1\, a_3 - c_1\, d_3 + c_3\, d_1$

$C = -a_1\, b_4 + b_1\, a_4 - c_1\, d_4 + c_4\, d_1$

$$D = -a_3 b_3 + b_3 a_3 - c_3 d_3 + c_3 d_3$$
$$E = -a_3 b_4 + b_3 a_4 - c_3 d_4 + c_4 d_3$$
$$F = -a_3 b_4 + b_3 a_4 - c_3 d_4 + c_4 d_3.$$

$\triangle^2$ ஓர் எதிர்ச் சீரணி என்பது தெளிவு.

உதாரணம் 15 : ஒற்றையெண் தரமுள்ள ஓர் எதிர்ச் சீரணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

$\triangle$ ஐ 5 சதுர அணியாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதன் நிரல்களையும் நிரைகளையும் மாற்றியமைத்தால் $\triangle$-ன் மதிப்பு மாறாது.

$$\therefore \quad \triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c & -d \\ a & 0 & -e & -f & -g \\ b & e & 0 & -h & -i \\ c & f & h & 0 & -j \\ d & g & i & j & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ல் ஒவ்வொரு நிரலையும் -1 ஆல் பெருக்குவோம்.

$$(-1)^5 \ \triangle = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix}$$

அதாவது $-\Delta = \Delta$ ... ... (1)-ல் இருந்து

$\therefore \Delta = 0.$

6. கிரேமர் முறைப்படி விடுவித்தல்

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்னும் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \Delta x = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இப்பொழுது (5)-ல் இரண்டாம் நிரலை y ஆலும், மூன்றும் நிரலை z ஆலும் பெருக்கி, முதல் நிரலுடன் கூட்டினால்

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ldots \ldots \text{(1) (2) (3)-ல் இருந்து}$$

$$\therefore x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \Delta$$

இதேவிதமாக, $y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \Delta$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div \Delta .$$

உதாரணம் 16 : கிரேமர் முறைப்படி விடுவி.

$$x + y + z = 4$$
$$2x + 5y - 2z = 3$$
$$x + 7y - 3z = 2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 12.$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 12.$$

$$\therefore\ x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \Delta = \frac{12}{12} = 1.$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & b_3 \end{vmatrix} \div \Delta$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \div 12 = \frac{12}{12} = 1.$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div \Delta$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \div 12$$

$$= 24 \div 12 = 2.$$

$$\therefore \quad x = 1, \; y = 1, \; z = 2.$$

பயிற்சிகள்

1. பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$(a) \begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix} \qquad (b) \begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 38 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \qquad (d) \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

என நிரூபி.

$$3.\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^4 + a^8$$

என நிறுவி.

$$4.\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

என நிறுவி.

$$5.\quad \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (ax-by+cz)^2$$

என நிறுவி.

$$6.\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

என நிறுவி.

$$7.\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

என நிறுவி.

8. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

$= abcd\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ என நிரூபி.

9. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 + bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3 + cda \\ 1 & c & c^2 & c^3 + dab \\ 1 & d & d^2 & d^3 + abc \end{vmatrix} = 0$$ என நிரூபி.

குறிப்பு :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

எனப் பிரித்துக் கொள்க.

10. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$ என நிரூபி.

11. $$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\gamma)^2 \\ (\beta-\alpha)^2 & 0 & (\beta-\gamma)^2 \\ (\gamma-\alpha)^2 & (\gamma-\beta)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2$ என நிரூபி.

12. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \cos(n-1)x & \cos nx & \cos(n+1)x \\ \sin(n-1)x & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix}$$

$= \sin x\,(1-2a\cos x + a^2)$ என நிரூபி.

13. $$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$$

என நிரூபி.

14. $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+\dots+x_n$$

என நிரூபி.

15. $$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin 2\alpha & \sin 3\alpha \\ \sin\beta & \sin 2\beta & \sin 3\beta \\ \sin\gamma & \sin 2\gamma & \sin 3\gamma \end{vmatrix}$$

$= 8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta-\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos\alpha)$ என நிரூபி.

குறிப்பு. C_3-C_1 ஐ எடுத்துக் கொள்க.

16. $$\triangle_n = \begin{vmatrix} (1+x^2) & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & (1+x^2) & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & (1+x^2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & (1+x^2) \end{vmatrix}$$

என்பது n-சதுர அணிக்கோவையானால்

$$\Delta_n = (1+x^2)\,\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} \text{ என நிரூபி.}$$

17. $$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ என நிரூபி.

18. $$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2$$

என நிரூபி.

குறிப்பு: $R_1+R_3-2R_2$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

19. $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix}$$

என நிரூபி.

20. $$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆனால்,}$$

$xyz = -1$ என நிரூபி.

21. விடுவி:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$$

22. $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0.$

23. விடுவி :

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0.$$

குறிப்பு : $R_3 - 2R_1$; $R_3 - 3R_1$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

24. $a+b+c=0$ ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$ என்பதன் மூலங்கள்

$0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$ என நிரூபி.

25. விடுவி.

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

26. w ஆனது 1-ன் கனமூலம் ஆனால் $a + bw + cw^2$; $a + cw + bw^2$ ஆனவை,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ -ன் காரணிகள் என நிரூபி. இதிலிருந்து

$$\Delta = -(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+cw+bw^2)$$
$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$ என நிரூபி.

குறிப்பு. $C_1 + w^2C_2 + wC_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bw^2+cw & b & c \\ b+cw^2+aw & c & a \\ c+aw^2+bw & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+bw^2+cw & b & c \\ w(a+bw^2+cw) & c & a \\ w^2(a+bw^2+cw) & a & b \end{vmatrix}$$

27. $(q-r)^2 \neq (p-r)(p-q)$ ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} p+x & q+x & r+x \\ q+x & r+x & p+x \\ r+x & p+x & q+x \end{vmatrix} = 0$$

என்பதன் மூலம் $-\frac{p+q+r}{3}$ எனக் காண்பி.

28. $$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

என நிறுபி. இதிலிருந்து வ.ப. $= 4a^2b^2c^2$ என நிறுபி.

29. $$\begin{vmatrix} 0 & b & c & 1 \\ a & 0 & c & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix}$$

என நிறுபி. இதிலிருந்து வ. ப. $= (bc+ca+ab)^2$ என நிறுபி.

30. $$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_3\alpha_1+b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3+b_1\beta_3 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

என்பதை இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதி அதன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

31. (i) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(ii) $$\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$$

$= 2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x).$

என நிரூபி.

32. w ஆனது 1-ன் மெய்யிலா கன மூலம் ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

என நிரூபி.

33. (i) $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில் X, Y, Z என்பன x, y, z-ன் இணைக் காரணிகள் ஆனால்,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix} = \Delta^2$$ என நிரூபி.

குறிப்பு : உதாரணம் 7 ஐப் பார்க்கவும்.

(ii) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $u^2 = yz + zx + xy$ ஆனால்,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$$ என நிரூபி.

(iii) $$\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

என நிரூபி.

34. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+1 & 2x+xy & 2y+x^2 \\ 2x+xy & 1+2x^2 & 2x+xy \\ 2y+x^2 & 2x+xy & x^2+y^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2 & xy-x & x^2-y \\ xy-x & 1-y^2 & xy-x \\ x^2-y & xy-x & 1-x^2 \end{vmatrix}$$ என நிரூபி.

35. $$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda^3 (a^2+b^2+c^2+\lambda^2)^3$ என்று நிரூபி.

36. $x_r = \dfrac{1}{r!}$ ஆனால்

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_n \end{vmatrix} = x_n$$

என்று நிரூபி.

37. $\begin{vmatrix} a & (a-1) & \dots & (a-n) \\ (a-1) & a & \dots & (a-n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a-n) & (a-n+1) & \dots & a \end{vmatrix} = 2^{n-1}(2a-n)$

என நிரூபி.

38. $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$ என நிரூபி.

39. $2s = a + b + c$ ஆனால்,

$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$ என நிரூபி.

40. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

$= x^4+y^4+z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$ என நிரூபி.

41. கிரேமர் முறைப்படி விடுவி :

(i) $x + 2y + 3z = 10$
$4x + 5y + 6z = 28$
$7x - 8y - 9z = -4.$

(ii) $x + y + z = d$
$ax + by + cz = d^2$
$a^2x + b^2y + c^2z = d^3$

(iii) $2x - y + 3z = 9$
$x + y + z = 6$
$x - y + z = 2$

(iv) $9x + 7y + 3z = 6$
$5x - y + 4z = 1$
$6x + 9y + 2z = 4$

(v) $x + y + z + w = 2$
$2x - y + 2z - w = -5$
$3x + 2y + 3z + 4w = 7$
$x - 2y - 3z + 2w = 5.$

42. x, y, z-ன் நீக்கற்பலனைக் கண்டுபிடி.

(i) $ax + by + cz = 0$
$bx + cy + az = 0$
$cx + ay + bz = 0.$

(ii) $x + y + z = 0$
$ax + by + cz = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = 0.$

43. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் நீக்கற்பலனைக் கண்டுபிடி.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2w = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3w = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4w = 0. \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

இதில் x, y, z, w ஆகிய நான்கும் பூச்சியம் என்பது மிக எளிதான (அதனால் புறக்கணிக்கத்தக்க) தீர்வாகும் (trivial solution). எனவே $w \neq 0$ எனக்கொண்டு (2), (3), (4) ஆவது சமன்பாடுகளை w ஆல் வகுக்க.

$$a_2 \frac{x}{w} + b_2 \frac{y}{w} + c_2 \left(\frac{z}{w} \right) = -d_2 \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$a_3 \frac{x}{w} + b_3 \frac{y}{w} + c_3 \frac{z}{w} = -d_3 \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$$a_4 \frac{x}{w} + b_4 \frac{y}{w} + c \frac{z}{w} = d_4 \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

இதை § 8-ல் உள்ள கிரேமர் முறைப்படி விடுவித்தால்,

$$\frac{x/w}{\begin{vmatrix} -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d_3 & b_3 & c_3 \\ -d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{y/w}{\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_2 \\ a_3 & -d_3 & c_3 \\ a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{z/w}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & -d_4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$$

எனக் கிடைக்கும். இவற்றை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$a_1 \begin{vmatrix} -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d_3 & b_3 & c_3 \\ -d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_2 \\ a_3 & -d_3 & c_3 \\ a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$+c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & -d_4 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

எல்லாவற்றையும் (-1) ஆல் பெருக்கினால்,

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

விடைகள்

1. (a) 0; (b) 9; (c) 1; (d) 0.

21. $x=4$. 22. $x=0, 3$. 23. $-2, -1, -1$.

25. 1, 2, −3. 30. 0.

41. (i) $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$.

(ii) $x = \dfrac{d(c-d)(d-b)}{(c-a)(a-b)}$

$y = \dfrac{d(d-c)(a-d)}{(b-c)(a-b)}$

$z = \dfrac{d(d-a)(b-d)}{(b-c)(c-a)}$

(iii) 1, 2, 3. (iv) 1, 0, −1. (v) 0, 1 −1, −2.

BIBLIOGRAPHY

1. ALGEBRA ... A text book of Determinants, Matrices and Algebraic Forms. W. L. FERRAR. Clarendon Press.
2. ELEMENTARY MATRICES ... **FRAZER—DUNCAN —COLLAR**—Cambridge University Press.
3. THEORY OF MATRICES ... C. C. Mac DUFFEE.
4. THEORY OF EQUATIONS ... **BURNSIDE AND PANTON.**
5. MATRICES ... Theory and Problems of ... **FRANK AYRES** - Schaum Publishing Co.
6. HIGHER ALGEBRA ... **FERRAR.** O.U.P.
7. MATRICES ... SHANTI NARAYAN.
8. A SURVEY OF MODERN ALGEBRA ... **Garret Birkhoff and Saunders Mac Lane,** Macmillàn.
9. Introduction to Algebraic Theories ... A. A. ALBERT. University of Chicago Preess.
10. **Theory of Matrices.** S. PERLIS. Addison Wesley Prees.

கலைச்சொற்கள்

A

Adjoint Matrix — சேர்ப்பு அணி
Algebra — இயல் கணிதம்
Algebraic Expression — இயற் கணிதக் கோவை
Applied Mathematics — பயன் முறைக் கணிதம்
Arrays — வரிசைகள்
Associative Law — சேர்ப்பு விதி
Augmented Matrix — பெரிதாக்கிய அணி
Axes of co-ordinates — கிடைநிலை அச்சுகள், ஆயங்கள்

B

Binomial — ஈருறுப்பு
Binomial coefficient — ,, க்கெழு
Binomial expression — ,, க்கோவை
Bordered matrix — கரையுற்ற அணி
Brackets — அடைப்புகள்
Brackets square — பகர அடைப்புகள்

C

Case — வகை
Case general — பொது வகை
Change of Basis Vector — அடிப்படை வெக்டர் குழு மாற்றம்
Characteristic Equation — சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Characteristic roots — ,, மூலங்கள்
Cofactor — இணைக் காரணி
Cofactor of an element of a determinant — ஓரணிக் கோவை மூலகத்தின் இணைக்காரணி
Column — நிரல்

Column in a determinant — ஓரணிக்கோவையின் நிரல்
Column matrix — ஓரணியின் நிரல்
Column vector — நிரல் வெக்டர்
Commutative Law — பரிமாற்று விதி
Complex number — சிக்கல் எண்
Conditions நிபந்தனைகள்
Conditions necessary and sufficient — வேண்டிய-போதிய நிபந்தனைகள்
Congruence — சர்வசமம்
Conjugate matrix — இணை அணி
Converse — மறுதலை
Coordinate System — கூற்றுத் தொகுதி

D

Determinant — அணிக்கோவை
Determinant constituent of a — ஓர் அணிக்கோவையின் அங்கம்
Determinant element of a — ஓர் அணிக்கோவையின் மூலகம்
Determinant of a matrix — ஓர் அணியின் அணிக்கோவை
Diagonal — மூலை விட்டம்
Diagonal of a determinant — அணிக்கோவையின் மூலை விட்டம்
Diagonal of a matrix — அணியின் மூலை விட்டம்
Dimension — வகையளவு
Directed — திசை கொண்ட
Directed numbers — திசையெண்கள்
Distributive Law — பங்கீட்டுவிதி
Dot Product — புள்ளிப் பெருக்கம்

E

Element — மூலகம், உறுப்பு
Element of a determinant — ஓர் அணிக் கோவையின் மூலகம்
Element of a matrix — ஓர் அணியின் மூலகம்
Eliminant — நீக்கற்பலன்
Eliminate — நீக்கு
Equation — சமன்பாடு
Expand — விரி

Expansion — விரித்தல்
Expression — கோவை
Expression homogenous — ஒருபடித்தான கோவை
Expression linear — ஒருபடிக் கோவை
Expression quadratic — இருபடிக் கோவை

F

Factor — காரணி
Fields (number) — (எண்) களங்கள்
Function — சார்பு, சார்பலன்

I

Idem factor — மாற்றுக்காரணி
Indeterminate — தேரப்பெருத
Inner product — உட்பெருக்கு
Invariant — மாற்றமிலி
Inverse — நேர்மாருன

M

Matrix — அணி
Matrix augmented — பெரிதாக்கிய அணி
Matrix adjoint — சேர்ப்பு அணி
Matrix column — நிரல் அணி
Matrix diagonal — சம மூலை வரை அணி, மூலை விட்ட அணி
Matrix element of a — ஓர் அணியின் மூலகம்
Matrix inverse — நேரெதிர் அணி
Matrix non-singular — பூச்சியமில் கோவை அணி
Matrix null — முற்றும் பூச்சிய அணி
Matrix order of — அணியின் தரம்
Matrxi orthogonal — செங்குத்தணி
Matrix regular — ஒழுங்கணி
Matrix rank of — அணி அளவை
Matrix row — நிரை அணி
Matrix scalar — மூலைவரை (அளவை) அணி
Matrix skew symmetric — எதிர்ச்சீர் அணி
Matrix square — சதுர அணி

Matrix symmetric	—	சமச்சீர் அணி
Matrix transpose	—	திருப்பு அணி; நிரை, நிரல் மாற்று அணி
Matrix reciprocal	—	நேரெதிர் அணி
Matrix unity	—	அணி அலகு
Matrix zero	—	பூச்சிய அணி
Minor of a determinant	—	ஓர் அணிக்கோவையின் சிறிய பகுதி
Motion of rotation	—	சுழற்சி இயக்கம்

N

Non-rivial	—	அற்பமல்லாத, திரணமல்லாத
Notation	—	குறியீடு
Null matrix	—	முற்றும் பூச்சிய அணி
Null vector	—	பூச்சிய வெக்டர்
Number field	—	எண் களம்

P

Position vector	—	வெக்டர் நிலை
Principal diagonal of a determinant	—	ஓர் அணிக்கோவையின் தலையாய மூலைவிட்டம்
Proof by Induction	—	தொகுத்தறிமுறை நிறுவல்

Q

Quotient	—	ஈவு

R

Rank	—	தரம், மதிப்பிடம்
Reduction	—	ஒடுக்கம்
Resolution	—	பிரிப்பு, கூறுபாடு
Right handed screw convention	—	வலக்கைத் திருகாணி வழக்கு
Rotating axis	—	சுழல் அச்சு
Rows and columns	—	நிரையும் நிரலும்

S

Scalar — திசையிலி, எண்ணி(அளவை)
Similar — வடிவொத்த
Simultaneous equations — ஒருங்கை (ஒருங்கமை)ச் சமன்பாடுகள்
Solution — தீர்வு
Solution general — பொதுத் தீர்வு
Solution particular — குறிப்பிட்ட தீர்வு
Statistics (as science) — புள்ளியியல்
Suffix — கீழ்க்குறி

T

Term — உறுப்பு

U

Unit Matrix — அணி அலகு
Unit Vector — வெக்டர் அலகு
Upper triangular Matrix — மேல் முக்கோண அணி

V

Variate — மாறி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

1971 ஜூலைவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1-A	,, II	,,	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	,,	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	சோணாசலம்	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	மு. ஆரோக்கியசாமி	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	தி. சி. மோகன்	12	00
8.	,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	சி. வேலாயுதம்	6	75
*11.	,, II	,,	11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00

35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறாத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857-1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	9	50
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. இராஜகோபால்	8	00

*மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
54.	இங்கிலாந்து வரலாறு—IV	என். ஜே. இராஜகோபால்	8	00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00

73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
77.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	,, II	,,	13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

*மூலநூல் (Original Book)

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	காசு
92.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—III ...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	7	25
•93.	மக்கள் ஆட்சி ...	க. சந்தானம்	...	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I...	என். ஜே. இராஜகோபால்	...	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள் ...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I...	பா. சூரியநாராயணன்	...	5	75
97.	,, II...	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	...	6	00
98.	,, III...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல்—I ...	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	...	8	00
100.	,, II ...	,,	...	7	00
101.	உட்கவர் மனம் ...	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	...	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I ...	தி. இரா. அரங்கராசன்	...	12	00
103.	,, II ...	,,	...	9	00
104.	சமூக உளவியல் ...	என். வேதமணி மானுவேல்	...	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல் ...	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	...	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம் ...	,,	...	3	00
•107.	குமர உள்ளம் ...	டாக்டர் மு. அறம்	...	6	25
•108.	உளநலவியல் ...	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	...	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	... ஞா. ராஜாபகதூர்	...	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	... ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	...	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	... ஆர். எஸ். தேசிகன்	...	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	... கோ. மோ. காந்தி	...	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	5	50
114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	... வ. ஆ. தேவசேனாபதி, ப. நா. சண்முகசுந்தரம்	...	3	50
115.	,, —II	... ,,	...	6	00
116.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	...	6	00

அறவியல்

117.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	... கோ. மோ. காந்தி	...	8	50

அளவையியல்

118.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	...	2	50

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	...	4	75
120.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	... கி. பூ. சுப்பிரமணியன்	...	5	50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	... எஸ். இலட்சுமி	...	3	50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	... ஜெ. நாராயணன்	...	10	50

*மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

				ரூ.	காசு
*123.	ஆசியா—I	கெ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	9	50
*124.	,, II	,,	...	8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	...	8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	...	8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	...	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	...	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	...	3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	...	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	...	6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	...	5	50
*133.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	...	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	...	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	கெ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	10	00
136.	,, II	,,	...	5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	திருமதி இராதா	...	9	50
*138.	,, II	,,	...	8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	...	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விசுவநாதன்	...	4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	...	6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	...	9	50
143.	,, II	ம. கார்த்திகேயன்	...	12	00
144.	,, III	கெ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	... சு. வைத்தியநாதன்	... 10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	... கோ. சண்முகசுந்தரம்	... 10	00
147.	,, II	... கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	... 14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 4	25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	... ,,	... 3	00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி. கோவிந்தராசன்	... 3	25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	... 12	00

பௌதிகவியல்

153.	ஒளி நூல்	... ச. சம்பத்து	... 10	00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6	00
*155.	ரேடியோ	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	... 4	75
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	... 4	50
*157.	பாம்புகள்	... பெ. மா. அண்ணாமலை	... 3	50
*158.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	... டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	... 8	00
*159.	கரும்பு	... டாக்டர் கு. பெரியசாமி	... 4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	... எஸ். சுந்தரம்	... 6	50

*மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	காசு
மருத்துவம்				
•161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர்நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) ந. மணிமேகலை	8	25
•163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
166.	,, II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50
கூட்டுறவு				
169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
•170.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00
பொது நூல்கள்				
171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
173.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியன்	2	50
•174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00

•175.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கடகிருஷ்ண அய்யங்கார்	... 4	50
•176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	... எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	... 6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

•177.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	... 4	00
•178.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	... 2	75
•179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடையபிள்ளை	... 2	50
•180.	,, II	... ,,	... 2	25
•181.	பௌதிகம்	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	... 6	00
•182.	புகுமுக பௌதிகம்	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 5	75
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	... எஸ். சம்பத்	... 7	00
•184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	... கே. இராஜகோபாலன்	... 7	00
•185.	,, II	... ,,	... 3	00
•186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	... டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	... 7	00
•187.	,, II	... ,,	... 4	50
•188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	... ஆர். மகாதேவன்	... 4	75
•189.	,, II	... ,,	... 3	25
•190.	வேதியியல்	... பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	... 7	00
•191.	புகுமுக வேதியியல்	... சி. ஏ. பத்மநாபன்	... 5	50
•192.	விலங்கியல்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 4	00
•193.	புகுமுக விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணாமலை	... 7	25
•194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	... எஸ். சுந்தரம்	... 4	00

*மூல நூல் (Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்க விலைப் பதிப்புகள்-கழிவு இல்லை)

பௌதிகம்

			ரூ.	காசு
*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	ஆர். நாகராசன்	6	25
*196.	,, II	,,	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி	4	50
*199.	,, II	,,	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்-I (Book I)	பி. தங்கராஜன்	3	60
*201.	,, (Book II)	,,	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50
*203.	மின்னியல் காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*204.	,, II	,,	4	50
*205.	,, III	,,	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7	75
*207.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம் (பகுதி 2) (முதல் புத்தகம்)	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	6	00
*208.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம் (பகுதி 2) (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	4	50
*209.	பொது பௌதிகம்-சிறப்புப் பாடம்	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம்	4	50

*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*211.	ஒலி நூல்-சிறப்புப் பாடம்	டி. முருகையன்	5	00

வேதியியல்

*212.	செய்முறை கனிம வேதியியல்-துணைப்பாடம்	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. சக்திவேலு	4	00
*215.	,, ,, II	,,	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*218.	,, ,, II	,,	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*221.	,, II	,,	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	என். ஆறுமுகம்	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	பிஎல். இராமசாமி	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்—I	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-I (2-ஆம் புத்தகம்)	கி. கண்ணபிரான்	4	75
*226.	,, (3-ஆம் புத்தகம்)	,,	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-II (1-ஆம் புத்தகம்)	,,	5	75
*228.	,, (2-ஆம் புத்தகம்)	,,	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

கணிதம்

			ரு.	காசு
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப் பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம் —சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும் —சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்-துணைப் பாடம்-பகுதி—2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—முதல் புத்தகம்	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	5	50
*240.	,, இரண்டாம் புத்தகம்	,,	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல்

*243.	முதுகெலும்பற்றவை —I சிறப்புப் பாடம்	... ஆர். முருகேசன்	... 6	00
*244.	,, II—சிறப்புப் பாடம்	... திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	... 6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை—I—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	... திருமதி ராணி கந்தசாமி	... 5	00
*246.	,, II (Book II)	,,	... 9	75
*247.	முதுகு தண்டுள்ளவை—II—சிறப்புப் பாடம்	... திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	... 5	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப் பாடம்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை - துணைப் பாடம்	... என். இராமலிங்கம்	... 9	00
*250.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப் பாடம்	... வி. சேது	... 6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம்	... என். இராமலிங்கம்	... 5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	... பெ. மா. அண்ணாமலை	... 5	25
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற்செயலியல் சிறப்புப் பாடம்—I	... டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	... 4	75
*254.	சூழ்நிலையியல்—உடற்செயலியல் ,, —II	... ,,	... 6	50
*255.	பரிணாமம்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 6	25

தாவரவியல்

*256.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம்	... கே. இராஜசேகரன்	... 11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	... கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	... 9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	... டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	... 7	25

*மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப் பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மருஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப் பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணமம், மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. ஆர். பாலசந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னேஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

*மூல நூல் (Original Book)