நவ இயற்கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

க. சிவசுப்ரமணியம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் (க.வெ.) வரிசை எண்—269

நவ இயற்கணிதம்

(MODERN ALGEBRA)

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

க. சிவசுப்ரமணியம், எம்.ஏ.,
இணைப்பேராசிரியர் (கணிதத் துறை)
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—September, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 269

© Tamil Nadu Text Book Society

MODERN ALGEBRA

K. SIVASUBRAMANIAM

Net Price Rs. **3-00**

(No discount)

Printed by:

Muthukumaran Press,

14-A, Kuppier Street,

Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்.)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'நவ இயற்கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 269ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 304 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும்; அதுவே, தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

				பக்கம்
1.	அடிப்படைத் தத்துவங்கள்	...	...	1
2.	குலங்கள்	...	...	13
3.	வளையங்கள்	...	...	36
4.	எண் அரங்கம்	...	...	49
5.	வகுத்தல் இயற்கணிதம்	...	...	57
6.	களம்	...	...	66
7.	பல்லுறுப்புக் கோவை	...	...	98
8.	வெக்டார் வெளிகள்	...	...	111
9.	அணி	...	...	134
10.	எண்களின் கொள்கை	...	...	180
	பிற்குறிப்பு	...	...	203

1. அடிப்படைத் தத்துவங்கள்

(FUNDAMENTAL CONCEPTS)

1.1. முன்னுரை : இந்தப் புது இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தத்துவங்களை ஆராய்வோம். வழக்கத்திலுள்ள இயற்கணித முறையில், அன்றாட வாழ்க்கையுடன் ஒன்றிய முழு எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers) இவைகளின் கூட்டல், பெருக்கல், மடங்கு என்பவைகளின் முறைகளை ஆராய்ந்தோம். முழு எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் இவைகளில் ஏதாவது இரண்டு அல்லது மூன்று எண்களை a, b, c என்ற எழுத்துகளின்மூலம் குறித்துக் காண்பித்தோம். $a+b$ என்பதோ, $a \times b$ என்பதோ சாதாரணக் கூட்டல், அல்லது a ஐ b மடங்கு கூட்டல் என்ற அர்த்தத்திலேயே கருதினோம்.

விகிதமுரு எண்களைக் (Irrational numbers) கருதும்போது, அவற்றைக் கணித ரீதியில் கிடைக்கும் எண்ணாகவே கருதலாமே தவிர சாதாரண வழக்கத்திலுள்ள எண்களுடன் சேர்க்க இயலாது. இங்குக் கூட்டல் விதி, a எண்களுள்ள அல்லது அளவுள்ள பொருளுடன் b எண்களுள்ள அல்லது அளவுள்ள பொருளைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் பொருளின் எண்ணிக்கையோ அளவோதான் என்று குறிக்க இயலாது. எப்படியாயினும் அந்தக் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகள் சில நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருந்தது. உதாரணமாக

$$
\begin{aligned}
a+b &= b+a \\
a+(b+c) &= (a+b)+c \\
a+0 &= a \\
a \cdot b &= b \cdot a \\
a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \\
a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c \\
a \cdot 1 &= a
\end{aligned}
$$

கூட்டல், பெருக்கல் என்பனவற்றைப் பொருள்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது என்று கருதாமல் மேற்கண்ட நிபந்தனைக்கு

உட்பட்ட செய்கைகளாக எண்ணி, சிக்கல் எண்களின் (Complex Numbers) கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளை வகுத்தோம்.

'எண்கள்' என்று கொள்ளும்போது, அதை நம்மையறியாமலே நமக்குத் தெரிந்த ஒரு கருத்து என எண்ணுகிறோம். ஆனால் சிக்கல் எண்கள், மெய்யான எண்களைப்போல் விதிகளுக்குக் கட்டுப் பட்டிருக்கிறது என்பதைத்தவிர, அவைகளின் போக்கே தனி. a,b என்பது இரு சிக்கல் எண்கள் என்றால், $a+b$-யை வரையறுக்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தம் ஏற்படுகிறது. அதாவது a-விலுள்ள மெய் யான பகுதி, b-யிலுள்ள மெய்யான பகுதி இவைகளின் கூட்டுத் தொகை $a+b$-ன் மெய்யான பகுதி ; மேலும் a-விலுள்ள மெய்யிலிப் பகுதி b-யிலுள்ள மெய்யிலிப் பகுதி இவைகளின் கூட்டுத் தொகை $a+b$-ன் மெய்யிலிப் பகுதி என்ற முறையில் சிக்கல் எண் களின் கூட்டலை வரையறுத்தோம். அப்படி வரையறுக்கும்போது, சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கல் என்ற அடிப்படைச் செய்கை களுடன் முரண்பாடு ஏற்படாத வண்ணம் பார்த்துக்கொண்டோம்.

இப்போது புது இயற்கணிதத்தில், வேண்டிய நிபந்தனைகளை நன்கு வரையறுத்து அதன்மேல் படிப்படியாகக் கணித முறையை விவரிப்போம். இங்கு a, b என்ற குறியீடுகளை உறுப்புகள் என்போமே தவிர அவைகள் எதைக் குறிக்கின்றன என்பதைப் பற்றி அவ்வளவாக நேரம் செலவழிப்பதில்லை.

a, b என்பவை இரண்டு மனிதர்களையோ, இரு புத்தகங் களையோ, இரு எண்களையோ ஏதாவது இரு உறுப்புகளையோ குறிக் கட்டும்.

1 2. கணம் (Set)

வரையறை : பொருள்கள் அல்லது உறுப்புகள் இவைகளின் தொகுதியைக் கணம் எனலாம்.

கணம் A-ன் ஓர் உறுப்பு a எனின், $a \in A$ என்று சொல்லலாம்.

$a \notin A$ எனின், a, A-ன் உறுப்பன்று.

அதே போல் b-யும் A-ன் உறுப்பானால் $b \in A$ அல்லது $a,b \in A$.

உதாரணமாக A என்பது ஒரு சமதளத்திலுள்ள சமபக்க முக்கோணக் கணமெனின் அதன் உறுப்புகள் யாவும் சமபக்க முக்கோணங்களே.

1.2.1. உபகணம் (Subset)

வரையறை: A கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் B கணத்தின் உறுப்பானால் A கணத்தை B கணத்தின் உபகணமெனலாம்.

$A \subseteq B$ என்போம்.

$A \subseteq A$ என்பது தெளிவு

$A \subseteq B, B \subseteq A$, அதாவது A-ன் உறுப்புகள் எல்லாம் B-லும், B-ன் உறுப்புகள் எல்லாம் A-லும் இருந்தால் $A = B$ என்போம். அப்போதுமட்டும் கணங்கள் A-ம் B-ம் சமம் எனலாம்.

$A \subseteq B, A \neq B$ என்ருல், A ஐ B கணத்தின் சரியான (proper) உபகணம் என்போம்.

$A \subset B$ என்று எழுதலாம்.

அதாவது A-ன் எல்லா உறுப்புகளும் B-யிலும் உள்ளன. மேலும் A-ல் இல்லாத உறுப்பு குறைந்தது ஒன்ருவது B-ல் உள்ளது என்று அர்த்தம்.

$A \subset B$, $B \subset C$ எனின் $A \subset C$ என்பது தெளிவு.

1.2.2. காலிக்கணம் (Empty set) : உறுப்புகளேயில்லாத கணத்தைக் காலிக்கணம் எனலாம். அதை ϕ என்று குறிக்கிருேம்.

1.3. வெட்டுதல் (Intersection), கூடுதல் (Union)

வரையறை : A, B என்பவை இரு கணங்களாஞல், A-லும் B-லும் உள்ள பொது உறுப்புகளைக்கொண்ட கணத்தை $A \cap B$ அல்லது A, B-ன் வெட்டுதல் கணம் என்போம்.

A-க்கும் B-க்கும் பொது உறுப்புகள் இல்லையெனின் $A \cap B$ ஒரு காலிக்கணமாகும்.

A, B என்பன இரு கணங்களாஞல் A-யிலேயோ, B-யிலேயோ அல்லது இரண்டிலுமேயோ உள்ள உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தை $A \cup B$ அல்லது, A, B-ன் கூடுதல் கணம் என்போம்.

குறிப்பு: இரண்டு கணங்களின் வெட்டுதல் கணம், கூடுதல் கணம் இவைகளைப்பற்றி ஆராய்ந்தோம். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட கணங்களின் வெட்டுதல் கணம் என்பது அதன் உறுப்புகள் எல்லாக் கணங்களிலும் உறுப்புகளாக இருக்கவேண்டும். அதேபோல், கணங்களின் கூடுதல் கணம் என்பது அதன் உறுப்புகள் ஏதாவது ஒரு கணம் அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கணங்களில் உறுப்புகளாக வேண்டும்.

$$A \cup B = B \cup A$$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ என்பவற்றைச் சிந்தித்து அறிக.

1.4. பெருக்கல் கணம் (Product Set)

பகுமுறை வடிவு கணிதத்தில் ஒரு புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களை (x_1, y_1) என்கிருேம். x_1, y_1 என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜதையாகும். அதாவது (x_1, y_1) (y_1, x_1) என்ற இரு ஜதைகள், பொதுவாக ஒரே புள்ளியைக் குறிக்காது.

$\therefore (x_1,y_1) \neq (y_1x_1)$

A, B என்பன இரு கணங்களாகவும், A-ன் உறுப்பு a $(a \in A)$ என்றும் B-ன் உறுப்பு b $(b \in B)$ என்றும் கொண்டால் (a,b) என்று வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜதைகள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட கணத்தை, A, B-ன் பெருக்கல் கணம் என்போம். $A \times B$ என்று குறிப்போம்.

உதாரணமாக :

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$B = (b_1, b_2) \text{ என்க}$$

$A \times B = [(a_1b_1), (a_1b_2), (a_2b_1), (a_2b_2), (a_3b_1), (a_3b_2)]$ என்ற உறுப்புகளையுடைய கணமாகும்.

1.5 மாற்றம் (Transformation or Mapping)

ஒரு வாசகசாலையிலுள்ள புத்தகங்களின் கணத்தை B என்க. P என்பது மிகை முழு எண்களின் (Position Integers) கணமாகக் கொள்க.

வாசகசாலையிலுள்ள ஒவ்வொரு புத்தகத்தையும், அதிலுள்ள மொத்தப் பக்கத்தைப் பொறுத்து ஒரே ஒரு முழு எண்ணுக்கு ஒப்பிடலாம்.

1.5·1. மாற்றம்

வரையறை : A கணத்தை B கணத்திற்குள் மாற்றம் செய்வது எனின், A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு b இருக்க வேண்டும்.

$$a \to b \; [a \in A, \; b \in B]$$

இந்த மாற்றத்தில் bஐ a-ன் பிம்பம் என்போம். உதாரணமாக A, B-யும் பூச்சியத்தைச் சேர்ந்த மிகை முழுஎண்களின் கணங்களாகுக.

ஆனால், மாற்ற விதிப்படி A-ன் எல்லா உறுப்புகளும் B-ன் O உறுப்புக்கு மாற்றுவதாகக் கொள்ளுவோம்.

$$a \to O \; [a \in A, \; O' \in B]$$

இது Aஐ B-க்குள் மாற்றுவதாகும். A-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் பிம்பம் ஒன்றே ஒன்றுதான். B-ன் மற்ற உறுப்புகள் (1,2,3. ....) A-ன் எந்த உறுப்புக்கும் பிம்பம் அல்ல. இதை உள்மாற்றம் (into mapping) என்போம்.

ஆனால் B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A-ன் ஏதாவது உறுப்புக்குப் பிம்பம் என்றால் Aஐ B-க்கு மேல்மாற்றம் (onto mapping) என்பேரம்.

1.5.2. ஒன்றுக்கொன்றான மாற்றம் (One to one Mapping)

Aஐ B-க்கு மேல்மாற்றம் என்பது ஒன்றுக்கொன்றான மாற்றமென்றால், A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ல் தனித்தனி உறுப்புகள் இருக்கவேண்டும்.

இது ஒரு மேல்மாற்றம் (onto mapping) என்பதால்,

$$a \rightarrow a' \quad [a \in A, a' \in B]$$

$$a' \rightarrow a$$

அல்லது $a \leftrightarrow a'$

மாதிரி 1 : A, B என்ற கணங்கள் மிகை முழுஎண்களைக் குறிக்க. மாற்ற விதிப்படி,

$$a \rightarrow b = 2a \; [a \in A, b \in B]$$

அதாவது $1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 4$

$3 \rightarrow 6$

இது ஓர் உள்மாற்றமே தவிர மேல்மாற்றமாகாது. ஏனெனில், 1,3,5 ………என்ற ஒற்றைப் படை எண்கள், A-ன் எந்த உறுப்புக்கும் பிம்பமாக முடியாது.

மாதிரி 2: I என்ற முழுஎண் கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$a \in I$, $b \in I$ என்றால் a, b முழு எண்களாகும்.

மாற்ற விதிப்படி $a \rightarrow b = a+2$ என்க.

அதாவது $1 \rightarrow 3$ $\quad 0 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 4$ $\quad -1 \rightarrow 1$

$3 \rightarrow 5$ $\quad -2 \rightarrow 0$

எனவே இங்கு I கணம் தன்னுடனேயே ஒன்றுக்கொன்று கணமாகிறது.

மாதிரி 3 : சார்பு (Function) ஒரு நல்ல உதாரணமாகும்.

$f(x) = \sin x$ (x மெய்யானவை) $A = \{x\}$; $B = \{f(x)\}$

A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் தனி ஓர் உறுப்பு உண்டு.

$x = 0 \qquad \sin x = 0$

$x = \pi/4 \qquad \sin x = 1/\sqrt{2}$

$x = \pi/2 \qquad \sin x = 1$

A-யையும் B-யையும் மெய்எண் கணங்கள் என்றுகொண்டால், இந்த மாற்றம் ஓர் உள்மாற்றமே தவிர மேல்மாற்றமாகாது. B-யிலுள்ள '2' என்ற உறுப்பு, A-ன் எந்த உறுப்பின் பிம்பமும் ஆகாது.

1.6. சமத் தொடர்புகள் (Equavalence Relations)

I என்பது ஒரு முழுஎண் கணமாளுல், அதிலுள்ள இரு உறுப்புகள் i, J என்பவை $i < J, i = J, i > J$ என்ற தொடர்புடன் இருக்கும்.

அதேபோல், A ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கணமாகக் கொள்க. வரிசைப்பட்ட (a,b) என்ற ஜதை A-ன் உறுப்புகளென்க. அப்போது $a \sim b$ என்ற தொடர்பை வரையறுப்போம்.

சமத் தொடர்பு

வரையறை : $\sim$ என்ற தொடர்பைக் கணம் A-ன் சமத்தொடர்பு என்ருல், A-ல் ஏதாவது மூன்று உறுப்புகள் a, b, c கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கவேண்டும்.

(1) $a \sim a$ (தனக்குத்தானே கொள்கை—Reflexive Property)

(2) $a \sim b$ என்ருல் $b \sim a$ (சமச்சீர்க் கொள்கை—Symmetric Property)

(3) $a \sim b$. $b \sim c$ என்ருல் $a \sim c$. (மாற்றுக் கொள்கை —Transitive Property)

மாதிரி 1 : I என்ற முழு எண்கள் தொகுதியில் '$<$' என்ற தொடர்பு ஒரு சமத் தொடர்பு அன்று; ஏனெனில், இந்தத் தொடர்பு (1) (2) என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருந்ததன்று.

மாதிரி 2 : I-ல் '$=$' என்ற தொடர்பு ஒரு சமத்தொடர்பு என்பது தெளிவு.

மாதிரி 3 : ஒரு சமதளத்திலுள்ள முக்கோணங்களின் தொகுதி Tஐ எடுத்துக்கொள்க. அதில் a, b என்பவை உறுப்புகள்.

(1) $\sim$ என்ற தொடர்பு, இரு முக்கோணங்களின் சர்வ சமத் தன்மை

(2) $\sim$ என்ற தொடர்பு இரு முக்கோணங்களின் வடிவொத்த தன்மை.

'$\sim$' மேற்கண்டவற்றைக் குறிக்கும்போது '$\sim$' ஒரு சமத் தொடர்பாகுமென்பதை எளிதில் கண்டறியலாம்.

மாதிரி 4 : I என்ற முழு எண்களின் கணத்தில் a, b, c என்ற மூன்று உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

$a \sim b$ என்ருல் a-க்கும் b-க்கும் '5' என்ற எண் பொதுக் காரணியாகும்.

∴ (1) $a \sim a$ என்பது தெளிவு.

(2) $a \sim b$: a-க்கும் b-க்கும் '5' பொதுக்காரணியாயின் b-க்கும் a-க்கும் 5 பொதுக் காரணியாகும். எனவே $b \sim a$

(3) $a \sim b$, $b \sim c$: a-க்கும் b-க்கும் 5 பொதுக்காரணி. மேலும் b-க்கும் c-க்கும் பொதுக் காரணி. அப்படியானுல் a-க்கும் c-க்கும் 5 பொதுக் காரணி.

எனவே $a \sim c$ ∴ $\sim$ என்பது சமத்தொடர்பு ஆகும்.

1.6.1 சமகணம் (Equivalence Set)

வரையறை : A என்ற கணத்தைப் பொறுத்து $\sim$ என்ற சமத்தொடர்பு ஏதாவதொரு விதத்தில் வரையறுக்கப்படட்டும். $a \in A$ எனின் $x \sim a$ என்ற தொடர்புள்ள A-ன் x உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட A-ன் உபகணத்தைச் சமகணம் என்கிருேம்.

இதை $[a]$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

அதாவது $[a] = \{ x ; x \in A, x \sim a\}$

குறிப்பு : $a \sim a$ என்பதால் $a \in [a]$

1.6.2 தேற்றம் $a, b, c \in A$ என்க.

1. $b \in [a]$ எனின் $[b] = [a]$
2. $a \sim b$ என்ருல் மட்டுமே $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b]$ என்பது காலிக்கணமில்லையெனின் $[a] = [b]$
4. $a \nsim b$ என்ருல் மட்டுமே $[a] \cap [b]$ ஒரு காலிக்கணமாகும்.
5. $c \in [a]$, $d \in [b]$, $[a] \neq [b]$ எனின் $c \nsim d$ என்று ஆகும்.

1. $b \in [a]$

∴ $b \sim a$

$x \in [b]$ என்க. ∴ $x \sim b, b \sim a$. ∴ $x \sim a$

$x \in [a]$

அதாவது $[b]$-ன் உறுப்புகள் யாவும் $[a]$-ன் உறுப்புகளாகின்றன.

∴ $[b] \subseteq [a]$

அதுபோல், $y \in [a]$ எனின், $y \sim a$ ஆனுல் $b \sim a$

∴ $a \sim b$

∴ $y \sim b$

∴ $y \in [b]$

∴ $[a] \subseteq [b]$

∴ $[a] = [b]$

2. $[a] = [b]$ என்க.

அதாவது $x \in [a]$ என்றால் $x \sim a$ என்று பொருள்

$[a] = [b]$ என்பதால்

$x \in [b]$

$\therefore \quad x \sim b$

$x \sim a \quad \therefore \quad a \sim x$

$\therefore \quad b \sim a$ அல்லது $a \sim b$

இப்போது $a \sim b$ என்க

$x \in [a]$ எனின் $x \sim a$

$a \sim b$

$\therefore \quad x \sim b$

$\therefore \quad x \in [b]$

$\therefore \quad [a] \subseteq [b]$

அதேபோல் $y \in [b]$ எனின் $y \sim b$

$a \sim b, \therefore b \sim a$

$\therefore y \sim a$

$y \in [a]$

$\therefore \quad [b] \subseteq [a]$

$\therefore \quad [a] = [b]$

3. $[a] \cap [b]$ என்பது காலிக்கணமில்லையென்பதால், $[a], [b]$ இரு கணங்களுக்கும் குறைந்தது ஒரு பொது உறுப்பு x ஆவது உண்டு.

அதாவது $x \in [a] \quad \therefore \quad x \sim b$

$x \in [b] \quad x \sim b$

$a \sim b$

(2) நிபந்தனைப்படி $[a] = [b]$

4. (3)-ன்படி $a \nsim b$ என்றாக வேண்டும். அப்படியல்லாது $a \sim b$ எனின் $a \in [b]$

$a \in [a]$ என்பது தெரிந்ததே.

$\therefore \quad [a] \cap [b] = a$ என்ற ஓர் உறுப்பாவது உண்டு.

எனவே $[a] \cap [b]$ ஒரு காலிக்கணம் அன்று.

5. $c \in [a] \quad c \sim a$

$d \in [b] \quad d \sim b$

(2) நிபந்தனைப்படி $a \sim b$ என்றால்தான் $[a] = [b]$

$\therefore$ $[a] \neq [b]$, எனின் $a \nsim b$ என்றாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ $c \sim d$ என்று இருக்கமுடியாது.

குறிப்பு : $a \in [a]$ என்பதால் A-ன் எல்லா உறுப்புகளும், ஏதாவதொரு சமகணத்தில் இருக்கவேண்டும். எனவே, அதன் எல்லாச் சமகணங்களின் கூடுதல் A-யே ஆகும்.

1.7 எண்கள்

வரையறை : கார்டினல் (Cardinal) எண். $o(S) = n$

n என்பதை ஏதாவது ஒரு மிகை முழு எண்ணாகக் கொள்க. S என்ற கணத்திற்கு nஐ கார்டினல் எண்ணாகக் கொண்டால் S-ன் உறுப்புகளுக்கும், 1, 2, ..., n என்ற முழு எண்களுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருக்கவேண்டும்.

எனவே S-ன் உறுப்புகளை $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ என்று குறிப்பிடலாம்.

ஆகவே S, T என்ற இரு கணங்களுக்கு ஒரே கார்டினல் எண் இருந்தால் அவைகளிடையே ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருக்கும்.

தேற்றம் : m, n என்பவற்றை மிகை முழு எண்களாகக் கொள்க. 1, 2, 3...... m என்ற கணத்திற்கும், 1, 2, 3.......n என்ற சரியான உபகணத்திற்கும் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருக்குமெனின் $m < n$ என்று இருந்தே ஆகவேண்டும்.

$m < n$ என்றால்

$1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 2, \ldots\ldots m \leftrightarrow m$ என்று தொடர்பு இருக்கும்.

மறுதலைத் தேற்றத்தை நிரூபிக்க : $m = 1$ என்றால் தேற்றம் எளிதாக நிரூபிக்கப்படுகின்றது.

ஆனால் $1 \leftrightarrow f(1), \ldots\ldots, m \leftrightarrow f(m)$ என்று 1, 2, 3...m என்ற உறுப்புகளுக்கும் 1, 2 ......n என்ற உறுப்புகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பை உண்டாக்குக. இப்போது $i \leftrightarrow g(i)$ $[i = 1 \ldots\ldots m - 1]$ என்ற தொடர்பைக் கருதுக.

$g(i) = f(i) \quad [f(i) \neq n]$

$g(i) = f(m) \quad [f(i) = m]$

$f(i) = n$ என்ற சமன்பாடு i என்ற ஒரே ஓர் உறுப்பிற்கு மட்டும் சரியாக இருப்பதா $\leftrightarrow g(i)$ என்பதை 1, 2, 3 ... m—1, 1, 2 ......n—1 என்பவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பாகக் கொள்ளலாம்.

$f(i)$-ன் முழு எண்களின் கணமாகிய S என்பது, 1, 2 ...... n என்பதன் சரியான உபகணமாகும். எனவே S கணம் 1, 2 ... ... n என்ற எல்லா முழு எண்களையும் கொண்டிருக்கவில்லை. S-ல் இல்லாத முதல் மிகை முழு எண் k என்றால் $k \leq n$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$k < n$ என்றால் $g(i)$ k-க்குச் சமமாக இருக்கமுடியாது. $k = n$ என்றால் $f(i) = n$ என்பது சரியன்று. எனவே $g(\ )$ என்பதில் ஒன்றும் $f(m)$-க்குச் சமமாகாது. அதாவது (1), ..., $g\ (m-1)$ என்பதில் 1, 2, ..., $n-1$ என்ற எண்கள் இருக்காது. ஆகவே, $i \leftrightarrow g\ (i)$ என்பது 1, 2, ..., $n-1$ என்ற முழு எண்களுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பாகும்.

$m = 1$ என்பதற்குத் தேற்றம் சரியாக இருப்பதால், கணிதத் தொகுத்தறி தத்துவத்தின்படி (Mathematical Induction) தேற்றம் $m < n$ என்ற எல்லா முழு எண்களுக்கும் சரியாக இருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 1

மேற்கண்ட தொடர்பு இருப்பதற்கு $m \leq n$ என்றுதான் இருக்க வேண்டும்.

$m < n$ என்றால், $1 \leftrightarrow 1$, ...$m \leftrightarrow m$ என்ற தொடர்பு இருக்கும்.

மறுதலையாக 1,2,...m என்ற முழு எண்களுக்கும் 1, 2, ...n என்ற முழு எண்களுக்கும் இடையே உள்ள ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு $i \leftrightarrow f(i)$ என்றால் அதை 1,2......m என்பதற்கும் 1,2...n, $n+1$ என்ற சரியான உபகணத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பாகும். எனவே $m < n+1$ என்பதால் தேற்றம் நிரூபிக்கப் படுகிறது.

கிளைத்தேற்றம் 2

1,2..... m என்ற கணத்திற்கும் 1,2... n என்ற கணத்திற்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருந்தால் $m=n$ என்றாகும்.

ஏனெனில் $m \leq n$ என்றும், $n \leq m$ என்றும் இருக்க வேண்டும்.

எனவே $m=n$.

கிளைத்தேற்றம் 3

1,2......n என்ற கணத்தின் சரியான உபகணம் S என்றால் 1,2......n என்ற கணத்திற்கும் S என்ற கணத்திற்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருக்கமுடியாது.

குறிப்பு : S, T என்ற இரு கணங்களின் கார்டினல் எண்கள் m, n என்ருல் $m = n$ என்று இருக்கும்பொழுது S-க்கும் T-க்கும் ஒன்றுக்கொன்ருன தொடர்பு இருந்தே ஆகவேண்டும்.

1·8 எண்ணக்கூடிய கணங்கள் (Countable Sets)

வரையறை : காலியில்லாத S என்ற கணம் முடிவுள்ளது என்ருல் அதன் 'கார்டினல் எண்' ஒரு மிகை முழு எண்ணுக இருக்கவேண்டும். காலியில்லாத கணம், முடிவில்லாத கணம் இவைகளைக் கந்தழிக் (Infinite) கணம் என்போம்.

வரையறை : S என்ற கணத்தை எண்ணக்கூடியது அல்லது d என்ற கார்டினல் எண்ணை உடையது என்ருல், அந்தக் கணத்தை எல்லா மிகை முழு எண்களால் ஆன கணத்துடன் ஒன்றுக் கொன்ருன தொடர்பை உண்டாக்கவேண்டும்.

தேற்றம் : எண்ணக்கூடிய கணத்தை அதனுடைய சரியான உபகணத்துடன் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு உண்டாக்கமுடியும்.

S என்ற எண்ணக் கூடிய கணத்தின் உறுப்புகளை $s_1, s_2, s_3 \ldots$ என்று குறிப்பிடலாம்:

$$s_1 \leftrightarrow s_2,\ s_2 \leftrightarrow s_3 \ldots s_i \leftrightarrow s_{i+1} \ldots$$

என்ற முறையில் மாற்றத்தை அமைத்தால் S என்ற கணத்திற்கும் S_1 ஐத் தவிர்த்த S-ன் கணத்திற்கும் ஒன்றுக்கொன்ருன தொடர்பு இருக்கும்.

தேற்றம் : எந்த முடிவில்லாத கணத்திலும் எண்ணக்கூடிய உபகணம் இருக்கும்.

S என்பதை முடிவில்லாத கணமாகக் கொள்வோம். அதன் உறுப்புகளை $s_1, s_2, s_3 \ldots$ என்க. இது முடிவில்லாத கணமாவதால் $s_1, s_2 \ldots s_n$, என்ற எண்ணக்கூடிய உபகணத்தை உட் கொண்டிருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : S என்ற கணம் முடிவில்லாததாக இருக்க வேண்டுமெனின் அதை அதனுடைய சரியான உபகணத்துடன் ஒன்றுக்கொன்ருன தொடர்பை உண்டாக்கவேண்டும்.

கிளைத்தேற்றம் 2 : எல்லா முழு எண்களின் கணம் எண்ணக் கூடியது. அதேபோல் எல்லா விகிதமுறு எண்களின் கணமும் எண்ணக் கூடியதேயாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $A=(1,2,3)$, $B=(3,4,5)$, $C=(4,6)$ என்றால், $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$, $A\times B$, $B\times C$, $A\times C$ என்பவைகளைக் கணக்கிடுக.

2. A, B என்பவை ஏதாவது இரு கணங்களானால்
(i) $(A\cap B)\subset A$ (2) $A\subset (A\cup B)$ என்று நிரூபி.

3. A, B, C என்பவை ஏதாவது மூன்று கணங்களாயின் $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ என்று நிரூபி.

4. A என்ற கணத்திற்கு இரண்டே இரண்டு உறுப்புகளே உள்ளன. A-ன் நான்கு உபகணங்களைக் கண்டுபிடி. மூன்று உறுப்புகளையுடைய கணத்திற்கு எத்தனை உபகணங்கள் உண்டு?

5. கீழ்க்கண்ட மாற்றங்களை உள்மாற்றம், மேல்மாற்றம் என்ற வகையில் பிரிக்கவும். மேல்மாற்றங்களில் எவைகள் ஒன்றுக்கொன்றான மாற்றம் என்பதையும் கண்டுபிடி.

(1)	$a\to a+3$	$a\in I$	[முழு எண்கள் கணம்]
(2)	$a\to a^2+a$	$a\in I$	[,,]
(3)	$a\to 2a-1$	$a\in R$	[மெய் எண்கள் கணம்]
(4)	$a\to a^3$	$a\in R$	[,,]
(5)	$a\to 2-a$	$a\in R$	[,,]
(6)	$a\to 7a$	$a\in R$	[,,]

2. குலங்கள்

(GROUPS)

2.1. முன்னுரை : இயற்கணிதத் தொகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் பெருக்கல், கூட்டல் என்ற இரு அடிப்படைச் செய்கைகள் முக்கியமாகக் கருதப்படுகின்றன. இப்போது பெருக்கல் என்ற ஓர் இயற்கணிதச் செய்கையின்மூலம் ஒரு பொருளின் இனத்தை உருவாக்கலாம். இந்த இனத்தின் குணதிசயங்களைப்பற்றி ஆராய்வோம்.

2.2. குலத்தின் வரையறை : G என்பதை உறுப்புகளின் கணமாகக் கொள்க. a, b என்ற வரிசைப்பட்ட இரு உறுப்புகள் G கணத்தைச் சேர்ந்திருந்தால், ஏதாவதொரு விதியினுல் $a \circ b$ என்பது ஒரே முறையில் நிர்ணயிக்கப்பட்ட உறுப்பாகவும், $a \circ b$ என்ற உறுப்பு G கணத்தைச் சேர்ந்தோ, சேராமலோ இருக்கலாம். அந்த விதியைத் தொகுப்பு விதி (Association Law) எனலாம். அந்த விதியினுல் உண்டாகும் செய்கையை '$\circ$' என்ற குறியீட்டினுல் காட்டுவோம்.

வரையறை : G என்பது $a, b, c, \ldots \ldots$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணமெனவும், R என்பதைத் தொகுப்பு விதியாகவும் அதை '$\circ$' என்றும் காட்டுக.

G என்ற கணம், R விதியைப் பொறுத்து ஒரு குலம் என்ருல்,

1. a, b என்பவை G-ன் வெவ்வேறு அல்லது ஒரே உறுப்புகளானுல், $a \circ b$ என்பது G-ன் உறுப்பாக வேண்டும்.

[இருப்பு விதி – Existence Law]

2. எல்லா $a, b, c \in G$,

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ [தொடர்பு விதி—Association Law]

3. G, அலகு உறுப்பு (unit element) என்று கூறப்படும் 'e' உறுப்பைக் கொண்டிருக்கும். இந்த 'e' உறுப்பு G-ன் எந்த உறுப்புடனும்

$$e \circ a = a \circ e = a$$

என்ற விதிக்குட்பட்டிருக்கும். [அலகு இருப்பு விதி —Existence of unit element]

4. $a \in G$ என்ற ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் $x \in G$ என்ற உறுப்பு உண்டு. அந்த x உறுப்பு

$$a \circ x = x \circ a = e$$

என்ற விதிக்குட்பட்டிருக்கும். [நேர்மாறு விதி]

x உறுப்பை நேர்மாறு உறுப்பு (Inverse element) எனலாம்.

குலங்களின் மாதிரிகள் சிலவற்றை இப்போது காண்போம் :

1. கணம் என்பது முழு எண்களின் தொகுதியாகவும் R என்ற செய்கையை $+$ என்ற சாதாரணக் கூட்டல் விதியாகவும் கொள்க.

a, b என்பவை ஏதாவது இரு முழு எண்களானால், $a + b$ என்பது முழு எண்ணாகும்.

$(a + b) + c = a + (b + c)$ என்பது தெரிந்த முழு எண்களின் தொடர்பு விதியாகும்.

a என்ற எந்த முழு எண்ணையும் எடுத்துக்கொண்டாலும்,

$a + 0 = 0 + a$ ஆகும்.

a என்ற முழு எண்ணிற்கும், $-a$ என்ற நேர்மாறு உறுப்பு உண்டு. $a - a = - a + a = 0$ ஆகும்.

இந்தக் கணத்தை, முழு எண்களின் கூட்டல் குலம் எனலாம்.

2. கணம் என்பது '0' ஐத் தவிர்த்த விகிதமுறு எண்களின் தொகுதியாகவும், R என்ற செய்கையை $\times$ என்ற சாதாரணப் பெருக்கல் விதியாகவும் கொள்க.

a, b என்பவை ஏதாவது இரு விகிதமுறு எண்களானால் $a \times b$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

$(a \times b) \times c = (a) \times (b \times c)$ என்பது நமக்குத் தெரிந்த விகிதமுறு எண்களின் தொடர்பு விதியாகும்.

a என்ற எந்த விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டாலும், $a \times 1 = 1 \times a = a$ ஆகும். எனவே 1 அலகு உறுப்பு ஆகும்.

a என்பது ஏதாவதொரு விகிதமுறு எண் ஆனாலும் $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ என்பது தெரிந்ததே. $\frac{1}{a}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். அதுவே நேர்மாறு உறுப்பாகும்.

இந்தக் கணத்தை, F களத்தின் (Field) பெருக்கல் குலம் எனலாம்.

3. $(1, -1, i, -i)$ என்ற நான்கு உறுப்புகளைக்கொண்ட கணத்தை நோக்குக. இங்கு R செய்கை, சிக்கல் எண்களின் பெருக்கல் விதியெனக் கொள்க.

	1	−1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	—	−1	1
$-i$	i	i	1	−1

இந்த அட்டவணையை வரிசை மாற்ற அட்டவணை (Permutation Table) எனலாம். இதன்மூலம் '1' என்பது இந்தக் குலத்தின் அலகு உறுப்பாகவும்,

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & \rightarrow & 1 \\ -1 & \rightarrow & -1 \\ i & \rightarrow & -i \\ -i & \rightarrow & -i \end{array}\right\}$$
என்ற முறைப்படி நேர்மாறு உறுப்புகளாகவும் இருப்பது தெளிவு.

4. 1-ன் m மூலங்களினால் ஆன கணத்தை நோக்குக. சிக்கல் எண்களின் பெருக்கல் விதியை R செய்கையாகக் கொள்க.

1-ன் m மூலங்களை

$e^{\frac{2\pi i r}{m}}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots\ldots m - 1)$ எனலாம்.

$r = 0$ எனும்போது, மூலம் 1 ஆகிறது. அதுவே குலத்தின் அலகு உறுப்பாகும்.

$e^{\frac{2\pi ik}{m}}$ என்ற ஒரு மூலத்தை எடுத்துக்கொண்டால், அதன் நேர்மாறு உறுப்பு $e^{\frac{-2\pi ik}{m}}$ என்ற மூலமாகும்.

$$e^{\frac{-2\pi ik}{m}} = e^{\frac{-2\pi ik}{m}} \cdot e^{2\pi i}$$

$$= e^{\frac{2\pi i}{m}(m-k)}$$

$$\therefore \quad r = (m-k) \text{ என்றாகும்.}$$

குறிப்பு

(i) மாதிரி 4-ல், $m = 4$ என்றால், மாதிரி 3 கிடைக்கும்.

(ii) மாதிரி (3), (4) என்பவை முடிவுள்ள குலங்களாகும் (Finite Groups).

2·3. பரிமாற்று குலம் (Commutation Group)

வரையறை : G என்ற குலத்தில், '$\circ$' என்ற செய்கையைப் பொறுத்தவரை, எல்லா $a, b \in G$-களுக்கும், $a \circ b = b \circ a$ என்றால், G ஒரு பரிமாற்று குலமாகும்.

2.3.1 தேற்றம் 1. ஒவ்வொரு குலத்திற்கும் ஒரே ஓர் அலகு உறுப்பும், குலத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நேர்மாற்று உறுப்பும் உண்டு.

G என்ற குலத்திற்கு, e, e' என்ற இரு அலகு உறுப்புகள் இருப்பதாகக் கொள்க.

அதாவது, $a \circ e = e \circ a = a$

$a \circ e' = e' \circ a = a.$

எனவே, $e' \circ e = e \circ e' = e'$

$e \circ e' = e' \circ e = e.$

$\therefore \quad e = e'$.

G குலத்தில், 'a' என்ற ஏதாவதோர் உறுப்பை எடுத்துக் கொள்க. அதற்கு, x, y என்ற இரு நேர்மாறு உறுப்புகள் இருப்பதாகக் கொள்க.

அதாவது, $a \circ x = x \circ a = e$ ...1

$a \circ y = y \circ a = e$ ...2

$$x = e \circ x = (y \circ a) \circ x$$
$$= y \circ (a \circ x)$$
$$= y \circ e$$
$$= y$$

a-ன் நேர்மாறுகளும் ஒன்றே ஒன்றுதான்.

2·4. உபகுலம் (Sub-group)

வரையறை : G என்பதைக் குலமாகக் கொள்க. H என்பது G-ன் உபகணமாகட்டும். H தானாகவே ஒரு குலமானால், H என்பது G-ன் உபகுலமாகும்.

குறிப்பு : முக்கியமாக, $a, b \in H$ என்றால், $a \circ b \in H$ என்றும், $a \in H$ என்றால், $a^{-1} \in H$ என்றும் இருக்கவேண்டும்.

2·5 வரையறை : ஒற்றுருவு தன்மை (Isomorphism) : 'O' என்ற விதியைக்கொண்ட குலமாக G-ஐயும், '□' என்ற விதியைக் கொண்ட குலமாக G'-ஐயும் கொள்க. Gஐ G'-க்கு ஒன்றுக்கொன்று என்ற மேல்மாற்றத்தின் மூலம் $x \to x'$ என்ற முறையில் மாறினால் அந்த மாற்றத்தை 'ஒற்றுருவு மாற்றம்' என்று கொள்வதற்கு

$a \circ b \to a' \;\square\; b'$ என்று ஆகவேண்டும்.

இங்கு a, $b \in G$ என்றிருக்க வேண்டும்.

மாதிரி : G என்பது மிகை மெய்யான எண்களின் கணமானால், சாதாரணப் பெருக்கல் செய்கையைப் பொறுத்து, G ஒரு குலமாகும். G-ன் ஓர் உறுப்பு x என்க.

$$x \to \log_{10} x = x'$$

என்ற உறவுள்ள x' உறுப்புகளைக்கொண்டே G' கணத்தைக் கவனிக்க.

$$x \cdot y \to x' \cdot y' = \log (xy)$$
$$= \log_{10} x + \log_{10} y.$$

எனவே G', மெய் எண்களின் கூட்டல் விதியைப் பொறுத்து ஒரு குலமாகும்.

2.6. நிலைமாற்றமும் வரிசை மாற்றக் குலங்களும் (Mappings and Permutation Groups)

A, B என்ற இரு கணங்களை எடுத்துக்கொள்க. அவைகளின் உறுப்புகள் a, a' என்க.

நிலைமாற்றத்தின் (mapping) மூலம் $a \to a'$ என்றால், a' என்பது 'a' பிம்பம் அல்லது மாற்றம் எனலாம்.

A ஐ B-க்குள் (into) நிலைமாற்றம் உண்டாக்கினால், a' ஐ $a\alpha$ எனக் குறிப்போம். அப்போது $a \to a\alpha$. அதாவது, α என்ற நிலைமாற்றம் A ஐ B-க்குள் மாற்றுகிறது.

$A = [1,2,3,4]$; $B = [p,q,r,s]$ என்று குறிக்கும்போது,

$1 \to p,\ 2 \to q,\ 3 \to r,\ 4 \to s$

அதாவது, $1\alpha = p,\ 2\alpha = q,\ 3\alpha = r,\ 4\alpha = s$ என்றாகும்.

α_1, α_2 என்பவை Aஐ B-க்குள் மாற்றும் இரு நிலைமாற்றங்கள் என்றும் $\alpha_1 = \alpha_2$ என்றும் இருந்தால், A-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும்

$$a\,\alpha_1 = a\,\alpha_2$$ என்றாக வேண்டும்.

α, Aஐ B-க்குள் மாற்றுவதாகவும், β, Bஐ C-க்குள் மாற்றுவதாகவும் கொண்டால், $a \in A$ என்னும்போது, $a\alpha \in B$ $(a\alpha)\,\beta \in C$ என்றாகவேண்டும்.

அதாவது, $a \to a\,\alpha$.

$$a\alpha \to (a\,\alpha)\,\beta$$

எனவே, $a \to (a\,\alpha)\,\beta$

$$= a\,\alpha\,\beta$$

ஆகவே, $\alpha\beta$ என்ற நிலைமாற்றத்தின்மூலம், Aஐ C-க்குள் மாற்றுகிறோம்.

இதேபோல், α, Aஐ B-க்குள்ளும், β, Bஐ C-க்குள்ளும், γ, Cஐ D-க்குள்ளும் நிலைமாற்றுவதாகக் கொண்டால், $\alpha\beta$, Aஐ C-க்குள் மாற்றுகிறது என்று பார்த்தோம். இப்போது, $(\alpha\beta)\gamma$, Aஐ D-க்குள் நிலைமாற்றுகிறது. அதேபோல, $\alpha\,(\beta\gamma)$, Aஐ D-க்குள் நிலைமாற்றுகிறது. மேலும்,

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$$

$a[\in A]$ என்ற ஏதாவதோர் உறுப்பை எடுத்துக்கொள்க;

$$a\,[(\alpha\beta)\gamma] = [a(\alpha\beta)]\gamma$$
$$= [(a\alpha)\beta]\gamma$$
$$a\,[\alpha(\beta\gamma)] = [(a\alpha)\,(\beta\gamma)]$$
$$= [(a\alpha)\beta]\gamma$$
$$\therefore a\,[(\alpha\beta)\gamma] = a[\alpha(\beta\gamma)]$$
$$\therefore (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Aஐ, B-க்கு மேல் நிலைமாற்றும் (onto mapping) A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பும் உள்ளதென்பது தெளிவு. இந்த நிலைமாற்றம் 'α' ஒன்றுக்கொன்று ($1 \leftrightarrow 1$) என்ற நிலைமாற்றுமாதலால், αமாற்றம் B-ஐ A-க்கு மேல் மாற்றும் என்பது தெளிவு.

a என்ற A-ன் உறுப்பு, B-ன் ஒரே ஓர் உறுப்பான αa-க்கு மாற்றப்படுவதால், $a \to a\alpha$.

2 6.1. வரிசை மாற்றம் (Permutation)

வரையறை: ஒன்றுக்கொன்றான நிலைமாற்றம், Aஐ A-க்கு மேல்மாற்றினால், அதை A கணத்தின் வரிசைமாற்றம் எனலாம்.

2 6.1 தேற்றம்: A கணத்தின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களினால் ஆன கணம், நிலைமாற்றப் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு குலமென நிரூபி.

α, β என்பவை A-ன் இரு வரிசை மாற்றங்களாக எடுத்துக் கொள்க.

α, β என்பவை, Aஐ A-க்கு மேல்மாற்றுவதால்

$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$ [எல்லா $a \in A$ க்கும்.]

$\therefore$ $\alpha\beta$ என்பது, Aஐ A-க்கு மேல் மாற்றுகிறது.

$a, b \in A$ என்றும், $a \neq o$ என்றும் கொண்டால்,
$a(\alpha\beta) \neq b(\alpha\beta)$ ஆகும்.

α என்பது, ஒன்றுக்கு ஒன்றான நிலைமாற்றுவதால், $a\alpha \neq b\alpha$.

β-வும் ஒன்றுக்கொன்றான நிலைமாற்றமாவதால்,

$a(\alpha\beta) \neq b(\alpha\beta)$

$\therefore$ $\alpha\beta$ என்பது, A-ன் ஒரு வரிசை மாற்றமாகும்.

மாற்றங்களின் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

$a \in A$ என்ற எல்லா a-யுடனும், $e \in A$ என்ற வரிசை மாற்றத்தைச் சேர்த்து,

$a\epsilon = a$ என்றால், ϵ என்பது, A-யிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அதே உறுப்புகளாக மாற்றும். அதாவது, ϵ சர்வசம வரிசை மாற்றம் (Identical Permutation) ஆகும். ϵ என்பது அலகு உறுப்பாகும்.

$\therefore$ α என்பது, A-ன் ஒரு வரிசை மாற்றமாகக் கொள்க.
α^{-1} என்பது, A-ன் மற்றொரு வரிசை மாற்றமாகும்.

a என்பது, A-ன் ஏதாவதோர் உறுப்பானுல்,

$$a(\alpha\alpha^{-1}) = (a\alpha)\alpha^{-1}$$
$$= a$$
$$= a\epsilon$$
$$\therefore \alpha\alpha^{-1} = \epsilon$$

$\therefore \alpha^{-1}$, α-ன் நேர்மாறு உறுப்பாகும்.

$\therefore$ A-ன் எல்லா வரிசை மாற்றங்களினுல் ஆன கணம் ஒரு குலமாகும்.

2.7. சமச்சீர் குலம் (Symmetric Group)

வரையறை: n என்பது மிகை எண் என்க. n உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களிலான குலத்தை, n உறுப்புகளின் சமச்சீர் குலம் எனலாம். இதை S_n எனக் குறிக்கலாம்.

மாதிரி 1 : $A = \{1, 2, 3\}$ என்பது, 3 உறுப்புகளைக்கொண்ட கணமாக்குக.

$$1 \cdot \alpha_1 = 1 \qquad 1 \cdot \alpha_2 = 2 \qquad 1 \cdot \alpha_3 = 3$$
$$2 \cdot \alpha_1 = 2 \qquad 2 \cdot \alpha_2 = 1 \qquad 2 \cdot \alpha_3 = 2$$
$$3 \cdot \alpha_1 = 3 \qquad 3 \cdot \alpha_2 = 3 \qquad 3 \cdot \alpha_3 = 1$$

$$1 \cdot \alpha_4 = 1 \qquad 1 \cdot \alpha_5 = 2 \qquad 1 \cdot \alpha_6 = 3$$
$$2 \cdot \alpha_4 = 3 \qquad 2 \cdot \alpha_5 = 3 \qquad 2 \cdot \alpha_6 = 1$$
$$3 \cdot \alpha_4 = 2 \qquad 3 \cdot \alpha_5 = 1 \qquad 3 \cdot \alpha_6 = 2$$

A-ன் எல்லா வரிசை மாற்றங்களும், $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ என்ற ஆறு மாற்றங்களினுல் ஆனவை.

$(\alpha_3\alpha_4)$ என்ற வரிசை மாற்றத்தால்,

$$1 \cdot (\alpha_3\alpha_4) = (1 \cdot \alpha_3)\alpha_4 = 3 \cdot \alpha_4 = 2$$
$$2 \cdot (\alpha_3\alpha_4) = (2 \cdot \alpha_3)\alpha_4 = 2 \cdot \alpha_4 = 3$$
$$3 \cdot (\alpha_3\alpha_4) = (3 \cdot \alpha_3)\alpha_4 = 1 \cdot \alpha_4 = 1$$
$$\therefore \alpha_3\alpha_4 = \alpha_5$$

$(\alpha_4\alpha_3)$ என்ற வரிசை மாற்றத்தால்

$$1 \cdot (\alpha_4\alpha_3) = (1 \cdot \alpha_4)\alpha_3 = 1 \cdot \alpha_3 = 3$$
$$2 \cdot (\alpha_4\alpha_3) = (2 \cdot \alpha_4)\alpha_3 = 3 \cdot \alpha_3 = 1$$
$$3 \cdot (\alpha_4\alpha_3) = (3 \cdot \alpha_4)\alpha_3 = 2 \cdot \alpha_3 = 2$$
$$\therefore \alpha_4\alpha_3 = \alpha_6$$

இதேபோல், மற்ற வரிசைமாற்றப் பெருக்கல்களையும் கணக்கிட்டு பின்கண்ட வரிசைமாற்ற அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_2	α_2	α_1	α_5	α_6	α_3	α_4
α_3	α_3	α_6	α_1	α_5	α_4	α_2
α_4	α_4	α_5	α_6	α_1	α_2	α_3
α_5	α_5	α_4	α_2	α_3	α_6	α_1
α_6	α_6	α_3	α_4	α_2	α_1	α_5

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, α_1 என்பது இந்தக் குலத்தில் அலகு உறுப்பாகும்.

நேர்மாறு உறுப்புகள் :

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_1$$
$$\alpha_2 \rightarrow \alpha_2$$
$$\alpha_3 \rightarrow \alpha_3$$
$$\alpha_4 \rightarrow \alpha_4$$
$$\alpha_5 \rightarrow \alpha_6$$
$$\alpha_6 \rightarrow \alpha_5$$

மேலும், $\alpha_3\alpha_4 \neq \alpha_4\alpha_3$ என்பதால், இது ஒரு பரிமாற்று குலமன்று. இதை S_3 எனக் குறிப்போம்.

இந்த வரிசை மாற்றத்தை வேறுவிதமாகக் காண்பிக்கலாம். α_3 என்ற வரிசை மாற்றம்,

$$1 \rightarrow 3$$
$$2 \rightarrow 2$$
$$3 \rightarrow 1$$

என்று மாற்றுகிறது.

இதை $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனலாம்.

அதேபோல, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

$$\alpha_3 \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_5.$$

தேற்றம் 3 : 3 உறுப்புகளைக்கொண்ட கணத்தின் சமச்சீர்க்குலம் 6 உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கிறது. அதேபோல், n உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தின் சமச்சீர்க்குலம் S_n கொண்டிருக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க. n உறுப்புகளைக் கொண்ட A கணம் $= (1, 2, 3, ... n)$ என்க.

1ஐ, 1, 2 ...n என்ற ஏதாவதொரு n உறுப்புகளாய் மாற்றலாம்.

அப்போது, 2 ஐ மீதமிருக்கும் $(n-1)$ உறுப்புகளில் ஏதாவதொன்றாய் மாற்றலாம். இதேபோல் செய்தால், A-க்கு, $n\ (n-1)\ (n-2)...\ 3.2.1$ வரிசை மாற்றங்கள் உண்டு.

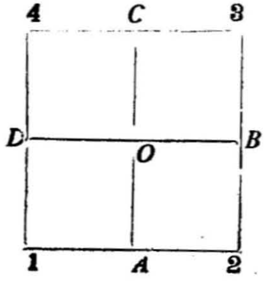
$\therefore$ A-க்கு $\angle n$ வரிசை மாற்றங்கள் உண்டு.

$\therefore$ S_n-க்கு $\angle n$ உறுப்புகள் உண்டு.

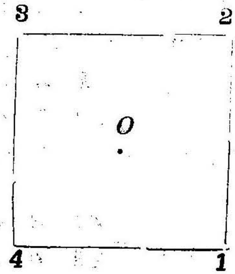
குறிப்பு: ஒரு குலத்தில் எல்லா உறுப்புகளும் வரிசை மாற்றங்களானால், அவைகளை வரிசைமாற்றக் குலங்களெனலாம். மேற்கண்ட அட்டவணையின்மூலம், $(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)$ கொண்ட உபகணம் ஓர் உபகுலமாகிறது. இதை ஒரு வரிசைமாற்று குலமெனலாம். ஆனால், இது சமச்சீர்க் குலமாகாது. ஏனெனில், குலத்தின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களைச் சேர்ந்த குலமில்லை.

[ஒவ்வொரு குலமும், ஒரு வரிசைமாற்று குலத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்றானவை.]

மாதிரி 2 : அட்டையினால் செய்த சதுரத்தை எடுத்துக்கொள்க. இதைச் சமதளத்திலோ, பரந்தவெளியிலோ சுற்றி இயக்குக. இதனால் ஏற்படும் மாறுதலைக் கவனிப்போம்:

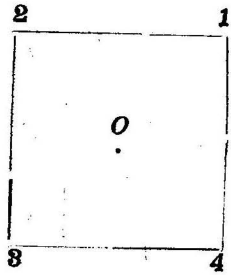


O என்ற புள்ளியைச் சுற்றி 90° நகர்த்துக. சதுரத்தின் படம்



இந்த வரிசை மாற்றத்தை, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha$ எனலாம்.

மேலும் 90°, அதாவது மொத்தம் 180° சுற்றுக.
சதுரத்தின் படம்

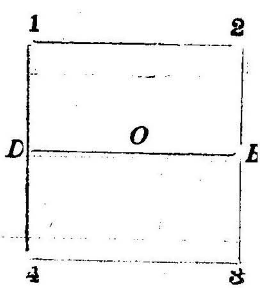


இந்த வரிசை மாற்றம், $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்கிறது.

அதேபோல், $\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha^4 = \epsilon$ என்பது தெளிவு.

DB என்ற நேர்கோட்டைச் சுற்றி 180° நகர்த்துக.
மாற்றலின் படம்



∴ இந்த வரிசை மாற்றம் $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

அதேபோல், AC சுற்றி 180° நகர்த்தும்போது,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

மேலும், சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களைச் சுற்றி 180° நகர்த்தும்போது,

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ என்றாகும்.

$\epsilon, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ என்ற கணம் ஒரு குலமாவதை வரிசைமாற்ற அட்டவணையின் மூலம் காணலாம்.

	ϵ	α	α^2	α^3	β	γ	δ	σ
ϵ	ϵ	α	α^2	α^3	β	γ	δ	σ
α	α	α^2	α^3	ϵ	σ	δ	β	γ
α^2	α^2	α^3	ϵ	α	γ	β	σ	δ
α^3	α^3	ϵ	α	α^2	δ	σ	γ	β
β	β	δ	γ	σ	ϵ	α^2	α	α^3
γ	γ	σ	β	δ	α^2	ϵ	α^3	α
δ	δ	γ	σ	β	α^3	α	ϵ	α^2
σ	σ	β	δ	γ	α	α^3	α^2	ϵ

ϵ, அலகு உறுப்பாகும்.

நேர்மாற்று உறுப்புகள் $\alpha \rightarrow \alpha^3$

$\alpha^2 \rightarrow \alpha^2$

$\alpha^3 \rightarrow \alpha$

$\beta \rightarrow \beta$

$\gamma \rightarrow \gamma$

$\delta \rightarrow \delta$

$\sigma \rightarrow \sigma$

எனவே, இந்தக் குலத்தை, ஆக்டிக் (Octic) குலமெனலாம்.

2.8 வட்டக் குலம் (Cyclic Group)

வரையறை: H என்ற குலத்தின் ஓர் உறுப்பு 'a' என்றால், H-ன் எல்லா உறுப்புகளும் ..ன் அடுக்கு, அதாவது a^m (m ஒரு முழு எண்) என்றாக வேண்டும். அப்போது Hஐ ஒரு வட்டக் குலமெனலாம். மேலும் a ஐ, H-ன் பிறப்பாக்கி (Generator) எனவும் கூறலாம்.

a என்பது, H வட்டக்குலத்தின் பிறப்பாக்கியானால், $a^m \in H$ (m ஒரு மிகை முழு எண் என்றால்)

a^0 அலகு உறுப்பாகும்.

எனவே, a^m-ன் நேர்மாற்ற உறுப்பு a^{-m} என்பதால்

$a^{-m} \in H$

$\therefore a^k \in H$ (k ஒரு முழு எண் ஆனால்)

குறிப்பு: மேற்கண்ட எல்லா உறுப்புகளும் வெவ்வேறாக இருக்க வேண்டுவதில்லை.

மாதிரி: (1, 2, 3, 4) என்ற 4 எண்கள் கொண்ட கணத்தை நோக்குக. R என்ற செய்கையின்மூலம் எண்களையோ, அல்லது 5 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியையோ எடுத்துக் கொள்க.

$2^1 = 2$	அதேபோல,	
$2^2 = 4$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$
$2^3 = 3$	$3^2 = 4$	$4^2 = 1$
$2^4 = 1$	$3^3 = 2$	$4^3 = 4$
$2^5 = 2$	$3^4 = 1$	$4^4 = 1$

எனவே இது ஒரு வட்டக்குலமாகும்.

2.9 வரிசை (Order)

வரையறை: 1. G என்ற குலத்தில் n உறுப்புகள் இருந்தால் G, 'n' வரிசையெனலாம். இங்கு, n ஒரு மிகை முழு எண் என்பதை

நோக்குக. அப்படி ஒரு முழு எண் G-க்கு இல்லையென்றால், G, கந்தழி வரிசையைச் (Infinite Order) சேர்ந்தது என்போம்.

2. G-ன் உறுப்பு 'a'-ன் வரிசை என்பது a-யினால் உருவாக்கப்படும் வட்ட உபகுலம், H-ன் வரிசையேயாகும்.

தேற்றம் 4

G வட்டக் குலத்தின் ஒவ்வோர் உபகுலம் H-ம் வட்டக் குலமாகும்.

G-ன் பிறப்பாக்கி 'a' எனவும், G-ன் ஓர் உபகுலம் H என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

$a^m \in H$ என்பதில், m என்பது, மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண்ணாகுக.

$H \leq G$ என்பதால், H-ன் உறுப்புகள் a^k (k ஒரு முழு எண்) வடிவத்தில்தான் இருக்கவேண்டும். k முழு எண் ஆவதால்,

$$k = qm+r \quad (\text{இங்கு } 0 \leq r < m)$$

$$\therefore \quad a^k = a^{qm+r}$$

$$= (a^m)^q \cdot a^r$$

$$\therefore \quad a^r = (a^m)^{-q} \cdot a^k$$

$a^m \in H$, $a^k \in H$ என்பதால், $a^r \in H$ ஆகும். ஆனால், $a^m \in H$ என்பதில் 'm' என்பது மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண் ஆவதாலும், $r < m$ என்பதாலும், $r = 0$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore \quad a^k = (a^m)^q.$$

$\therefore$ H என்ற குலம் a^m ஆல் பிறப்பாக்கப்பட்ட வட்டக் குலமாகும்.

2.10. உடன்குலம் (Co-set)

வரையறை : G குலத்தின் உபகுலம் H என்றும், $a \in G$ என்றும் கொண்டால், aH என்பதை G-ல் H-ன் உடன் குலமெனலாம்.

குறிப்பு : e, G-ன் அலகு உறுப்பு,

$eH = H$ என்பது தெளிவு.

எனவே, He, H-ன் உடன்குலமாகும்.

தேற்றம் 5

aH, bH என்ற உடன்குலங்களுக்கு ஓர் உறுப்புப் பொதுவானால், $aH = bH$.

H-ன் உறுப்புகள் h_1, h_2 என்பவைகளை எடுத்துக்கொள்க.

$$ah_1 = bh_2 \text{ என்றால்,}$$

$$a = bh_2h_1^{-1}.$$

எனவே உடன்குலம் aH என்பதில், ஏதாவதோர் உறுப்பு ah எடுத்துக்கொண்டால், அதை $bh_2 h_1^{-1}h$ என்று எழுதலாம். மேலும், $h_2h_1^{-1}h \in H$ என்பதால்,

$bh_2h_1^{-1}h \in bH$.

எனவே, $ah \in bH$.

அதாவது, $aH \subseteq bH$.

அதேபோல், $bH \subseteq aH$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

ஆதலால், $aH = bH$ என்றாகிறது.

குறிப்புகள்

1. H-ன் மாறுபட்ட உடன்குலங்களுக்குப் பொது உறுப்புகள் இருக்கமுடியாது.

2. பகுதி 7-ல் உள்ள வரிசைமாற்ற அட்டவணையை நோக்குக.

$K = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ என்பது S_3-ன் உபகுலமாகும்.

$\alpha_1 K = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. $\quad \alpha_4K = \{\alpha_4, \alpha_5\}$

$\alpha_2 K = \{\alpha_2, \alpha_1\}$. $\quad \alpha_5K = \{\alpha_5, \alpha_4\}$

$\alpha_3 K = \{\alpha_3, \alpha_6\}$. $\quad \alpha_6K = \{\alpha_6, \alpha_3\}$

என்பது தெளிவு.

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\{\alpha_3, \alpha_6\}$, $\{\alpha_4, \alpha_5\}$ என்ற மூன்று உபகுலங்களே S_3-க்கு உண்டு.

தேற்றம் 6 : [லேகரான்ஜியின் தேற்றம்]

G என்ற குலத்தின் வரிசை 'n' என்றால், G-ன் ஒவ்வோர் உபகுலம் H-ன் வரிசையும் 'n'-ன் வகுக்குமெண்ணாகும்.

G-ன் வரிசை முடிவுள்ளதானால், G-க்கு H-ல் K உடன் குலங்களேதாம் உண்டு (K முடிவுள்ள எண்). இந்த k உடன் குலங்களுக்கும் பொது உறுப்புக் கிடையாது என்பதைப் பார்த்தோம். மேலும் $a \in aH$ என்பதால் G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஏதாவது ஒரே ஓர் உடன்குலத்தில்தான் இருக்க முடியும்.

உபகுலம் H-ன் வரிசை 'm' என்க.

$h_1, h_2 \in H$ என்றும், $ah_1 = ah_2$ என்றும் இருந்தால், h_1 h_2-க்குச் சமமாகவேதான் இருக்கமுடியும். எனவே aH-ன் வரிசையும் 'm' என்பது தெளிவு.

மேலும், G-ல் H-ன் உடன்குலங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் 'm' வரிசைகளே உண்டு.

ஆகவே, G-ன் உறுப்புகள், H-னுடைய K-உடன்குலங்களிலுள்ள 'm' உறுப்புகளில் ஒன்ருகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

G-ன் உறுப்புகள் இரு உடன்குலங்களில் இருந்தால் அந்த உடன்குலங்களுக்குப் பொது உறுப்பு உண்டாகிவிடுகிறது. உடன் குலங்கள் மாறுபட்டிருந்தால் பொது உறுப்பு இருக்க முடியாது. எனவே G-க்கு km உறுப்புகள் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad n = km.$

கிளைத்தேற்றம் 1: முடிவுள்ள வரிசையுள்ள குலத்தினுடைய உறுப்பின் வரிசை, குலத்தின் வரிசையின் வகுக்குமெண்ணுகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2: ஒரு குலத்தின் வரிசை பகாவெண் என்ருல் அது ஒரு வட்டக் குலமாகும்.

குலத்தின் வரிசை பகாவெண் p என்ருல் குலத்தினுடைய உறுப்பு 'a'-ன் வரிசை p ஆகவேண்டும். அதாவது, a என்ற உறுப்பினுல் உருவாகும் வட்டக்குலத்தின் வரிசை p ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் 3: n வரிசையுள்ள குலத்தின் உறுப்பு 'a' என்ருல் $a^n = e$ ஆகும்.

'a'-ன் வரிசை k என்ருல்,

$n = mk$ ஆகும். [k ஒரு மிகை முழு எண்ணுகும்.]

$a^m = e$ என்பதால், $a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e^k = e$.

2.11. S_n. சமச்சீர்க் குலம்

S_n என்பது A குலத்திலுள்ள எல்லா வரிசை மாற்றங்களால் ஏற்படும் குலமாகும்.

வரையறை: 'k' நீளமுள்ள வட்டம் (Cycle of Length 'k')

$A = [1, 2, \ldots\ldots n]$ என்ற முடிவுள்ள கணமாகக் கொள்க. அதன் உறுப்புகள் $a_1, a_2, \ldots\ldots a_k (\cdot \geq 1)$ என்க.

S_n-ன் உறுப்பு α, k நீளமுள்ள வட்டமென்ருல்,

$$a_1\alpha = a_2, \quad a_2\alpha = a_3 \ldots\ldots a_{k-1}\alpha = a_k, \quad a_k\alpha = a_1$$

என்றாகவேண்டும். மேலும் $a_1, a_2, \ldots\ldots a_k$ என்ற A-ன் உறுப்புகளைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்புகள் 'i' என்றால் $i\,\alpha = i$ என்றும் இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : '1' நீளமுள்ள வட்டம் சர்வசம வரிசை மாற்றமாகும்.

தேற்றம் : k நீளமுள்ள வட்டம் k வரிசை (Order) ஆகும்.

S_n-ன் உறுப்பாகிய α $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_k)$ என்பது k நீளமுள்ள வட்டமாகக் கொள்க.

α^2 என்ற மாற்றத்தைக் கவனிக்க.

$$\begin{aligned} a_1\alpha^2 &= (a_1\alpha)\cdot\alpha \\ &= a_2\cdot\alpha \\ &= a_3 \end{aligned}$$

அதேபோல் $a_1\alpha^3 \quad = a_4 \ldots\ldots a_1\alpha^k = a_1$

மேலும் $a_2\alpha^k \quad = a_2 \ldots\ldots a_i\alpha^k = a_i$ [எல்லா i-களுக்கும்]

$\therefore \alpha^k \quad = \in$ [சர்வசம வரிசைமாற்றம்]

மேலும் α-ன் குறைந்தபட்ச அடுக்கு k ஆகும்.

$\therefore$ k என்பது α-ன் வரிசையாகும்.

தேற்றம் : வட்டமாக இல்லாத S_n-ன் உறுப்பு γ என்பது, சேர்க்கையில்லாத வட்டங்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம்.

S_n -ன் இருவட்டங்கள் $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_k)$ $(b_1 b_2 \ldots\ldots b_l)$ என்பவை சேர்க்கையில்லாத வட்டங்கள் என்றால், அந்த இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் கிடையாது.

முதல் வட்டத்தின் ஓர் உறுப்பு a_1 ஐ எடுக்க.

$a_1\,\gamma \neq a_1$ என்றும் $a_1\gamma = a_2$, $a_2\gamma = a_3 \ldots\ldots$ என்றும் கொண்டால் $a_k\gamma$ என்பது $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{k-1}$ என்ற ஏதாவதோர் உறுப்புக்குச் சமமாகவேண்டும். a_1ஐத் தவிர்த்த மற்ற உறுப்புகள் $a_2, a_3 \ldots\ldots a_{k-1}$ என்பவை வேறு ஏதாவதோர் உறுப்பின் பிம்பம் ஆவதால்,

$$a_k\,\gamma = a_1 \text{ என்றாகவேண்டும்.}$$

முதல் வட்டத்தில் இல்லாத உறுப்பு b_1 என்க.

$b_1\gamma \neq b_1$ என்றால், மேற்கண்ட முறைப்படி $(b_1, b_2, \ldots b_l)$ என்ற வட்டத்தை நிர்ணயிக்கலாம்.

$$\therefore\ \gamma = (a_1\, a_2 \ldots\ldots a_k)\ (b_1\, b_2 \ldots\ldots b_l)$$

C_1 என்ற வேறு ஏதாவதோர் உறுப்பு $C_1 \gamma \neq C_1$ என்று இருந்தால் $(C_1\ C_2 \ldots\ldots C_m)$ என்ற மற்றொரு வட்டத்தையும் உருவாக்கலாம்.

வரையறை : '2' நீளமுள்ள வட்டத்தை இடமாற்றம் (Transposition) எனலாம்.

தேற்றம் : α என்ற எல்லா வரிசை மாற்றங்களும் இடமாற்றங்களின் பெருக்குத்தொகையாகக் கொள்ளலாம். α என்ற வரிசை மாற்றத்தை, 'r' இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகவோ 's' இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகவோ கொண்டால், 'r', 's' என்ற இரண்டும், இரட்டையெண்களாகவோ அல்லது ஒற்றைப்படை எண்களாகவோதான் இருக்கவேண்டும்.

$A = [1,2,\ldots\ldots n]$ என்ற கணத்தின் வரிசைமாற்றம் α என்க. மேலும்,

$\alpha = \beta_1\ \beta_2 \ldots\ldots \beta_r = \gamma_1\ \gamma_2 \ldots\ldots \gamma_s$ என்க. இங்கு β-க்களும் γ-க்களும் இடமாற்றங்கள் என்றால் r, s இரண்டும் இரட்டை எண்களாகவோ ஒற்றைப்படை எண்களாகவோதான் இருக்கவேண்டுமென நிரூபிக்க.

'2'-க்கு அதிகமான நீளமுள்ள எந்த வட்டத்தையும், இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் கொள்ளலாம்; அதாவது,

$$(a_1\ a_2 \ldots\ldots a_k) = (a_1\ a_k)\ (a_2\ a_k) \ldots\ldots (a_{k-1}\ a_k)$$

மேலும், α என்ற எந்த வரிசை மாற்றத்தையும் இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் கொள்ளலாம் என்பதால், α என்ற வரிசை மாற்றத்தை, இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாக அமைக்கலாம்.

$P = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ என்று எடுத்துக்கொள்க. இங்கு,

$x_1\ x_2 \ldots x_n$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்டு $(x_i - x_j)\ [i < j]$ என்ற எல்லாவிதமான உறுப்புகளைக் கண்டுபிடித்து, அதன் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிடுக.

$P\alpha = \prod_{i<j} (x_{i\alpha} - y_{j\alpha})$ என்று $P\alpha$ஐ வரையறுக்க.

அதாவது

$$P = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3)\ \cdots\ (x_1 - x_n)$$
$$(x_2 - x_3)\ \cdots\ (x_2 - x_n)$$
$$(x_3 - x_4)\ \cdots\ (x_3 - x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_{n-1} - x_n)$$

என்று கொள்க.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 5 & 10 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix}$$ என்றால்

$$P\alpha = (x_5 - x_{10})\ (x_5 - x_4)\ (x_5 - x_n)$$
$$(x_{10} - x_4)\ (x_{10} - x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_l - x_n)$$

என்றாகும்.

$\therefore\ P\alpha = \pm P$ என்பது தெளிவு.

இணைத்தேற்றம் : $\delta = (kl)$ என்பது இடமாற்றமென்றால் $P\delta = -P$ என்றாகும்.

$k \neq l$ என்க. $k < l$ என்று எடுத்துக்கொள்வதால், தவறில்லை.

P-ல் $(x_k - x_l)$ என்ற உறுப்பு, $P\delta$-ல் $(x_l - x_k)$ என்றாகும். இந்த உறுப்பு மாற்றத்தால், குறி (sign) மாறுகிறது.

$(x_i - x_j)$ $[i, \alpha \neq k, l]$ என்ற உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டால் δ என்ற மாற்றத்தால், $(x_i - x_j)$ என்ற உறுப்பு வகைகள் மாறுவதில்லை.

$(x_i - x_k)$ என்ற உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டால் அதனுடன் $(x_i - x_l)$ என்ற உறுப்பைச் சேர்த்து,

$(x_i - x_k)$ $(x_i - x_l)$ என்ற தொடரைக் கருதுக. இது δ என்ற மாற்றத்தால், மாறுவதில்லை.

எனவே, δ என்ற மாற்றத்தால், $(x_k - x_l)$ என்பது $(x_l - x_k)$ என்று மாறுகிறது. மற்ற உறுப்புகள் மாறுவதில்லை.

$$\therefore\ P\delta = -P$$

$\therefore$ α என்பது r இட மாற்றங்களின் பெருக்குத்தொகை என்றால்

$$P\alpha = (-1)^r \cdot P$$

அதேபோல் $P\alpha = (-1)^s \cdot P$ [α ஐ s இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் கருதினால்]

$$\therefore \quad (-1)^r = (-1)^s$$

$\therefore$ r, s இரண்டும் இரட்டையெண்கள் அல்லது r, s என்ற இரண்டும் ஒற்றைப்படை எண்கள் ஆக இருக்கவேண்டும்.

வரையறை : α என்ற வரிசை மாற்றம் இரட்டை யெண்களால் ஆன இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் கொண்டால், α ஐ இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றம் என்போம்.

ஒற்றைப்படை எண்களால் ஆன இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையென்றால், α ஓர் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றமாகும்.

α என்ற வரிசை மாற்றத்தை, m இட மாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகவும், β வரிசை மாற்றத்தை 'n' இடமாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகவும் கொண்டால் $\alpha\beta$ என்ற வரிசைமாற்றம், $m+n$ என்ற இட மாற்றங்களின் பெருக்குத் தொகையாகும். எனவே, m ஒற்றைப்படை, n ஒற்றைப்படை எண்கள் என்றால், $m+n$ என்பது இரட்டைப்படை எண்ணாகும். இம்முறையில் பார்க்கும் போது, இரண்டு ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றங்கள் அல்லது இரண்டு இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றங்கள் இவைகளின் பெருக்கம் ஓர் இரட்டைப்படை வரிசை என்பது தெளிவு. அதே போல், ஓர் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றத்தை இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றத்தால் பெருக்கினால், ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றமே கிடைக்கும்.

தேற்றம் : சமச்சீர்குலம் S_n-ன் இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றங்களின் கணம் A_n, S_n-ன் **உப**குலமெனவும் அதன் வரிசை $\frac{\angle n}{2}$ எனவும் நிரூபிக்க.

α, β இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றங்களானால், $\alpha\beta$ ஓர் இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றமாகும்.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k$ என்பவை இடமாற்றங்கள் எனவும்,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_k)$.

இங்கு k ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணாகும்.

இடமாற்றங்களின் நேர்மாறு உறுப்பு அதுவேயாதலால்,

$\alpha^{-1} = \alpha_k \cdot \alpha_k \cdot \alpha_{k-1} \ldots\ldots \alpha_3 \cdot \alpha_1$

$\therefore$ α^{-1}-ம் இரட்டைப்படை வரிசை மாற்றமே.

$\therefore$ $\alpha^{-1} \in A_n$.

β என்பதை மாறாத ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றமாக எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore$ βA_n என்ற உடன்கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளும் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றமே. ஏனெனில், A_n-ன் உறுப்புகள் இரட்டைப்படை வரிசைமாற்றங்கள் ; β ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றம்.

γ என்பது, ஏதாவதோர் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்ற மென்றால்,

$\gamma = \beta(\beta^{-1}\gamma)$ என்று எழுதலாம்.

β-ம் γ-ம் ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றங்கள். ஆதலால், $\beta^{-1}\gamma$ என்பது இரட்டைப்படை வரிசையாகும். எனவே, $\beta^{-1}\gamma \in A_n$.

$$\gamma \in \beta A_n.$$

அதாவது, βA_n என்ற உடன்கணம் S_n-லுள்ள ஒற்றைப்படை வரிசை மாற்றங்கள் எல்லாவற்றையும் கொண்டிருக்கிறது.

S_n-ன் உறுப்புகள் A_n, βA_n என்ற இரு உடன்கணங் களிலேயே இருக்கும். உடன்கணங்களின் வரிசை ஒன்றேயாவ தால், A_n, βA_n என்பவைகளிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாகும். அவை m என்றால்,

$m + m = 2m$ என்பது, S_n-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும்.

$$2m = \angle n$$

$$\therefore \quad m = \frac{n!}{2}$$

$\therefore$ A_n என்பது, $\frac{n!}{2}$ வரிசையையுடைய S_n-ன் உபகுல மாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு குலத்தின் அலகு உறுப்பு தன்னுடைய நேர்மாறு உறுப்பென நிரூபி.

2. G ஐ ஒரு குலமாகக் கொள்க. G-லுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் பரிமாற்றும் உறுப்புகளைக்கொண்ட H கணம் G-ன் உபகுலமெனக் காண்பி.

3. $|z| = 1$ என்னும்படியான சிக்கல் எண்கள் z-களைக் கொண்ட கணம், பெருக்கல் விதியைப்பொறுத்து ஒரு குலமென நிரூபி.

4. $0 < x \leq 1$ என்னும்படியான விகிதமுறு எண்களின் கணம், பெருக்கல் விதியைப் பொறுத்து ஒரு குலமெனக் காண்பி.

5. முழு எண்களின் கணத்தில் '$\circ$' என்ற செய்கையை, $a \circ b = a+b+1$ என்று இருக்கும்போது, ஒரு குலமென நிரூபி.

6. எண்களை 'm' என்ற மிகை முழு எண்ணுல் வகுக்கும் போது ஏற்படும் மீதியை x என்ருல், அவைகளை C_x தொகுதி எனவும், C_x $(0 \leq x < m)$ கணம் மீதித் தொகுதியின் கூட்டலைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாற்று குலமென நிரூபி. மேலும், அந்தக் குலம் 1-ன் ■ மூலங்களிலான குணத்துக்கு ஒன்றுக்கொன்ருனவை என்று காண்பி.

7. m உடன் பொதுக் காரணியில்லாத தொகுதிகளிஞல் ஆன கணம், மீதித் தொகுதியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாற்று குலமென நிரூபி.

8. G என்ற குலத்தின் உறுப்புகள் a, b என்ருல், $(ab)^2$, a^2b^2-க்குச் சமமாகவே வேண்டுமாஞல் G ஒரு பரிமாற்று குலமாகத் தான் இருக்கவேண்டுமெனக் காண்பி.

9. சமச்சீர் குலம் S_3-ன் எல்லா உபகுலங்களையும் கண்டுபிடி.

10. ஆக்டிக் குலத்தில் உபகுலங்கள் எல்லாவற்றையும் கண்டு பிடி.

11. சமபக்க முக்கோணத்தை விறைப்பு இயக்கங்களின் (Rigid Motion) மூலம் மாற்றும்போது உண்டாகும் செய்கைகளா லான குலம், ஒரு சமச்சீர் குலம் S_3 என்று நிரூபி.

12. $$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

என்ற வரிசை மாற்றங்களாலான கணம் சமச்சீர் குலம் S_4-ன் பரிமாற்று உபகுலமென நிரூபி.

13. $$A = [1, 2, 3, 4, 5].$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \alpha &= 2 & 1 \cdot \beta &= 1 \\ 2 \cdot \alpha &= 1 & 2 \cdot \beta &= 4 \\ 3 \cdot \alpha &= 3 & 3 \cdot \beta &= 2 \\ 4 \cdot \alpha &= 5 & 4 \cdot \beta &= 3 \\ 5 \cdot \alpha &= 4 & 5 \cdot \beta &= 5, \end{aligned}$$

என்ருல், $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^2, β^2 என்பவைகளைக் கணக்கிடுக.

14. *1*-ன் *n* மூலங்களாலான கணம் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு வட்டக் குலமென நிரூபி.

15. ஆக்டிக் குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பின் வரிசையையும் கண்டுபிடி.

16. சமச்சீர் குலம் S_4-ல் உள்ள வரிசை 4 உள்ள உறுப்பைக் கண்டுபிடி.

17. ஆக்டிக் குலத்தின் உபகுலம் $(\in, \alpha, \alpha^2\ \alpha^3)$ என்பதன் எல்லா உடன்குலங்களையும் கண்டுபிடி.

18. $(i \cdot j)$ என்பது இடமாற்றத்தைக் குறித்தால்,

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (14)\ (24)\ (34) = (32)\ (12)\ (14)$$
$$= (13)\ (24)\ (34)\ (12)\ (24)$$

என விளக்கிக் காட்டு.

3. வளையங்கள்

(RINGS)

3.1 வரையறை: காலியில்லாத ஒரு கணமாக R ஐக் கொள்க. அதனைப் பொறுத்து இரு உறுப்பின் செய்கைகள் (Binary Operations) இரண்டைக் கவனிப்போம். அந்தச் செய்கைகளைக் கூட்டல், பெருக்கல் என வழக்கப்படி வருணிப்போம். அவைகளை $+, \cdot$ எனக் குறியிட்டுக் கருதுவோம்.

a, b என்பவை R-ன் உறுப்புகளானல் $(a, b \in R)$ $a+b$, $a \cdot b$ என்பவை, ஒரே முறையில் வரையறுக்கப்பட்ட R-ன் உறுப்புகளாகுக. மேலும் a, b, c என்பவை R-ன் ஏதாவது மூன்று உறுப்புகளானல்,

D-1 : $a+b=b+a$ [கூட்டற் பரிமாற்று விதி]

D-2 : $(a+b)+c=a+(b+c)$ [கூட்டல் சேர்ப்பு விதி].

D-3 : R-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு 'a'-ம் $a+0=a$ என்பதற்குக் கட்டுப்பட்டிருக்க வேண்டும். $[0 \in R]$ [பூச்சிய இருப்பு]

D-4 : $a \in R$ என்ருல் $a+x=0$ என்று இருக்கும்படி $x \in R$ ஆக வேண்டும். [கூட்டல் எதிர்மாறு இருப்பு].

D-5 : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ [பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி]

D-6 : $a \cdot (b+c) = a \cdot b+a \cdot c$ [பங்கீட்டு விதி]

D-7 : $(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ [பரவு விதி]

இவ்வளவு நிபந்தனைக்குட்பட்ட உறுப்புகளைக்கொண்ட கணம் R ஐ ஒரு வளையமென்க.

குறிப்பு : 1. *D*-1—*D*-6 நிபந்தனைகளைக் கொண்டு R ஐ ஒரு பரிமாற்று குலமெனலாம்.

2. D-8 நிபந்தனையிலுள்ள பூச்சிய உறுப்பை 0 என்று குறிப்பிட்டிருந்தாலும், அதை இயற்கணிதப் பூச்சியமாகக் கருதக்கூடாது.

3.2 பரிமாற்று வளையம் (Commutative Ring)

வரையறை: மேற்கண்ட நிபந்தனைகளுடன் (D-8) $a \cdot b = b \cdot a$. என்றால் R ஒரு பரிமாற்று வளையமாகுக. D-8 நிபந்தனைக்கு a, b கட்டுப்படவில்லை என்றால் அதாவது $a \cdot b \neq b \cdot a$, R ஓர் பரிமாற்றல்லா வளையமெனலாம் (Non-commutative Ring).

3.3 ஒருமையுடன்கூடிய வளையம் (Ring with Unity)

வரையறை: மேற்கண்ட நிபந்தனைகளுடன் (D-9) R-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு 'a'-க்கும் $ae = ea = a$ என்ற நிபந்தனைக்குட் படக்கூடிய $e \in R$ இருக்கவேண்டும். அப்போது Rஐ ஒருமையுடன் கூடிய வளையம் எனலாம்.

மாதிரி 1: முழு எண்களைக் கொண்ட கணம் I ஒரு வளையமாகும். அது ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையம்.

மாதிரி 2: விகிதமுறு எண்களால் ஆன கணம் R, சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கல் இவைகளைப் பொறுத்து ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும்.

மாதிரி 3: மெய்யான எண்கள் கணம், சிக்கல் எண்கள் கணம் இவைகள் இரண்டும் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையங்களே.

மாதிரி 4: m, n என்பவைகள் முழு எண்கள் என்றால், $m + n\sqrt{2}$ என்ற வடிவிலுள்ள $I[\sqrt{2}]$ என்ற மெய்யான எண்களின் கணம் ஒரு வளையமாகும்.

$$m+n\sqrt{2},\ m'+n'\sqrt{2} \in I[\sqrt{2}]$$

$$(m+n\sqrt{2})+(m'+n'\sqrt{2}) = (m+m') + (n+n')\sqrt{2} \in I[\sqrt{2}]$$

$$(m=n\sqrt{2}).(m'+n'\sqrt{2}) = (mm'+2nn') + (mn'+m'n)\sqrt{2} \in I[\sqrt{2.}]$$

மேலும் மற்ற நிபந்தனைகளுக்கும் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

$\therefore\ I[\sqrt{2}]$ ஒரு வளையமாகும்.

மாதிரி 5: அதேபோல் $m+n\sqrt{-1}$ என்ற வடிவத்திலுள்ள சிக்கல் எண்கள் கணம் $I[\sqrt{-1}]$ ஒரு வளையமென்பது தெளிவு

மாதிரி 6 : 0, 1 என்ற இரு எண்களைக் கொண்ட கணம் கீழ்க் கண்ட கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளுக்குட்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க.

அதாவது,

(+)	0	1
0	0	1
1	1	0

(·)	0	1
0	0	0
1	0	1

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1 \qquad \therefore 0 + 1 = 1 + 0$$
$$1 + 1 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0 \qquad \therefore 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

இதில் இயற்கணித '0' வே வளையப் பூச்சியமாகும்.

$\left.\begin{matrix} 0-0 \\ 1-1 \end{matrix}\right\}$ என்றபடி எதிர்மாறு உறுப்புகளாகும்.

மேலும் $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$ என்பதால் இது ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும். இங்கு அலகு உறுப்பு இல்லை. எனவே, இது ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய உறுப்பு இல்லை.

மாதிரி 7 : p, q, r, s என்ற நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட R கணத்தில் கீழ்க்கண்ட கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளை நோக்குக.

(+)	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	p	s	r
r	r	s	p	q
s	s	r	q	p

(·)	p	q	r	s
p	p	p	p	p
q	p	q	r	s
r	p	r	r	p
s	p	s	p	s

அதாவது $q + s$ என்றால் இடக்கைப் பக்கம் இருக்கும் நிரல் உறுப்புகளில் ஒன்ருக q-வையும், மேல்பக்கம் இருக்கும் நிரை உறுப்புகளில் ஒன்ருக sஐயும் கொண்ட அணிநிரல்நிரைகள் சந்திக்கும் இடத்திலுள்ள r ஐ $q + s = r$ என்க.

அதேபோல் $r \cdot s = p$

$s \cdot r = p$ என்பதைக் கவனித்துச் சரிபார்க்க.

கூட்டல், பெருக்கல் இவைகளைப் பொறுத்து R கணம் அடைபட்ட (closed) கணமென்பதை நோக்குக. இங்குள்ள பூச்சிய உறுப்பு p ஆகும்.

$$q + r = s = r + q$$
$$r + s = q = s + r$$
$$s + q = r = q + s$$

$q + q = p$ என்பதால் q-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு q
$r + r = r$ என்பதால் r-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு r
$s + s = s$ என்பதால் s-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு s
என்ருகிறது.

சேர்ப்பு விதி, பரவு விதி இவைகளுக்குக் கணம் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

$$p \cdot q = p = q \cdot p$$
$$p \cdot r = p = r \cdot p$$
$$p \cdot s = p = s \cdot p$$
$$q \cdot r = r = r \cdot q$$
$$q \cdot s = s = s \cdot q$$
$$r \cdot s = p = s \cdot r$$

என்பதால் பெருக்கல் பரிமாற்று விதியைச் சார்ந்திருக்கிறது.

$$p \cdot q = q \cdot p = p$$
$$r \cdot q = q \cdot r = r$$
$$s \cdot q = q \cdot s = s$$

என்பதால் q-வே இந்தக் கணத்தின் ஒருமையாகும். எனவே, R ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும்.

குறிப்பு : இதில் இந்த வளையத்தில் பூச்சிய உறுப்பு 'p' ஒருமை உறுப்பு 'q' என்பதை நோக்குக.

மாதிரி 8 : இரட்டைப்படை எண்களால் ஆன கணம் (E) ஒரு வளையமெனவும், ஒற்றைப்படை எண்களால் ஆன கணம் (O) ஒரு வளையமன்றெனவும் காண்பது எளிது.

$a, b \notin 0$, $a + b$ ஓர் இரட்டைப்படை எண் (E) வளையத்தின் பூச்சிய எண் '0' ஆகும். $(\in)$ வளையத்தின் பூச்சிய எண் '0' ஆகும்.

அது பரிமாற்று வளையமாகும். ஆனால், அதற்கு ஒருமை எண் கிடையாது. ஒருமை எண்ணாகக்கூடிய '1' $\in$ கணத்தின் உறுப் பன்று.

$\therefore$ ($\in$) ஒரு பரிமாற்று வளையம் மட்டுமே.

மாதிரி 9 : A என்பதை ஒரு கணமாகக் கொள்க.

A-ன் எல்லா உபகணங்களை உடைய கணத்தை R என்க.

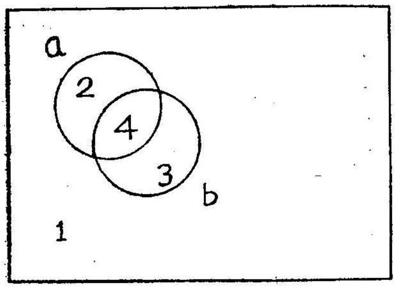
$a; b$ என்ற A-ன் உபகணங்களில் இரண்டை எடுத்துக் கொள்க.

அதாவது $a, b \in R$

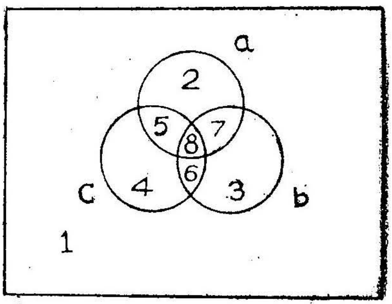
$a; b$ என்ற இரு உபகணங்களிலுமுள்ள பொது உறுப்புகளைத் தவிர்த்து, A-யிலுள்ள a-ன் எல்லா உறுப்புகள்; b-ன் எல்லா உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தை $a+b$ என்போம். அதாவது $a \cap b$ பூச்சிய கணமாக இருந்தாலொழிய, $a+b \neq a \cup b$

$a \cdot b$ என்பதை $a \cap b$ என்க.

இந்தவிதமாக, கூட்டலையும் பெருக்கலையும் வரையறுத்து' R என்பது பரிமாற்று வளையம் என நிரூபிப்போம்.



படம் 1



படம் 2

படம் 1-ன் மூலம் a-யிலுள்ள உறுப்புகளை வட்டம் a-யிலுள்ள புள்ளிகளாகக் கருதுவோம். அதேபோல் B-யிலுள்ள உறுப்புகளை 'b' வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளாகக் கொள்க.

$a+b$ என்பது பகுதி 2, 3-லுள்ள புள்ளிகளாகும்.

$a \,.\, b$ என்பது பகுதி 4-லுள்ள புள்ளிகளாகும்.

$\therefore\ a+b = b+a$ என்பது வெகு தெளிவு.

$(a+b) + c = a + (b+c)$ என்று நிரூபிக்கப் படம் 2ஐ எடுத்துக்கொள்க.

$a+b$ என்பது பகுதிகள் 2, 3, 5, 6-லுள்ள புள்ளிகள். C என்பது பகுதிகள் 4, 5, 6, 8-லுள்ள புள்ளிகள்.

$\therefore (a+b)+c$ என்பது பகுதிகள் 2, 3, 4-லுள்ள புள்ளிகளாகும்.

$a+(b+c)$ என்பதும் அதுவே.

$$\therefore (a+b)+c = a+(b+c)$$

'0' என்பதைப் பூச்சிய கணமாகக்கொண்டால் $a + 0 = a$.

$\therefore$ பூச்சியகணமே வளையம் R-ன் பூச்சியமாகும். கணம் A-யே வளையத்தில் ஒருமை உறுப்பு. $a+a = 0$. ஏனெனில் a-க்கும் a-க்கும் பொதுவான உறுப்புகளைத் தவிர வேறு உறுப்புகள் கிடையாது.

மேலும் $a \cdot b = a \cap b$

$$b \cdot a = b \cap a$$

$$\therefore a \cdot b = b \cdot a$$

எனவே R ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும். இதைக் கணம் A-ன் எல்லா உபகணங்களையுடைய வளைய மெனலாம்.

3.4. வளையத்தின் சில தன்மைகள்

தேற்றம் : பூச்சிய இருப்புவிதி (D-3)-ன் மூலம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் R-க்குள்ள பூச்சியம் ஒன்றே ஒன்று ஆகும்.

R-க்கு '0' '0'' என்று இரு பூச்சியங்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது R-ன் எல்லா உறுப்புகள் a-க்கும்

$$a + 0 = a$$

$$a + 0' = a$$

இங்குள்ள o, o' R-ன் உறுப்புகளாக வேண்டும்.

$$\therefore 0' + 0 = 0'$$

$$0 + 0' = 0$$

ஆனல் D-1 விதிப்படி $0 + 0' = 0' + 0' \;\therefore\; 0 = 0'$

$\therefore$ வளையம் R-க்கு ஒரே ஒரு பூச்சியமேயுண்டு.

தேற்றம் : R வளையத்தின் உறுப்புகள் a, b, c என்றால்,

(1) $a + c = b + c$ என்றல் $a = b$

(2) $c + a = c + b$ என்றல் $a = b$

$$a + c = b + c$$

c-ன் நேர்மாறு உறுப்பு c' என்க. அதாவது

$$c + c' = 0$$

$$\therefore a + c + c' = b + c + c'$$

$$\therefore a + 0 = b + 0$$

$$\therefore a = b$$

(2)ஐ நிரூபிக்க D-1, விதிப்படி $c + a = a + c$
$c+b = b+c$ ஆகும்; எனவே $a = b$.

தேற்றம்: R வளையத்திலுள்ள 'a' உறுப்பின் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு ஒன்றே ஒன்றுதான்.

முடியுமென்றால் a-க்கு x, y என்ற இரு எதிர்மாறு உறுப்புகள் இருப்பதாகுக.

$$\text{அதாவது} \quad a+x = 0$$
$$a+y = 0$$
$$\therefore \quad a+x = a+y$$

முன் தேற்றத்தின்படி $x = y$ ஆகும்.

எனவே a-க்கு ஒரே ஒரு எதிர்மாறு உறுப்புதான் உண்டு.

அதை '$-a$' என்று குறிப்போம்.

3·4.1. மேலும் சில தன்மைகள்

(1) $-(-a) = a$; $-a$-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு a ஆகும்

(2) $-(a+b) = -a-b$; $a+b$-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு $-a$, $-b$-ன் கூட்டல்.

(3) $-(a-b) = -a+b$; $a-b$-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு $-a$, b-ன் கூட்டல்

(4) $(a-b)-c = a-(b+c)$

(1)
$$a+(-a) = 0$$
$$a+(-a) = (-a)+a$$
$$\therefore (-a)+a = 0$$
$$-(-a) = a$$

(2)
$$\begin{aligned}(a+b)-a-b &= (a+b)+[(-a)+(-b)]\\ &= [a+b+(-a)]+(-b)\\ &= [b+a+(-a)]+(-b)\\ &= [b+0]+(-b)\\ &= b+(-b)\\ &= 0\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(a-b)+[(-a)+b] &= [a+(-b)]+[(-a)+b]\\ &= [(-b)+a+(-a)]+b\\ &= [(-b)+0]+b\\ &= (-b)+b\\ &= 0\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(a-b)-c &= [a+(-b)]+(-c)\\ &= a+[(-b)+(-c)]\\ &= a-(b+c)\end{aligned}$$

3.4.2 தேற்றம்: R வளையத்தின் உறுப்புகள் a, b என்றால் $a+x=b$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரே ஒரு மூலம்

$$x=b-a \text{ என்பதே.}$$

$x=(b-a)$ என்பதை $a+x=b$ என்பதன் மூலமாக நிரூபிப்பது எளிது.

$$\begin{aligned} a+(b-a) &= a+[b+(-a)] \\ &= a+[(-a)+b] \\ &= [a+(-a)]+b \\ &= 0+b \\ &= b. \end{aligned}$$

x, y என்பது சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களானால்

$$a+x=b$$
$$a+y=b$$
$$\therefore a+x=a+y$$
$$\therefore x=y$$

3.4.3 தேற்றம்: R வளையத்திற்கு ஒருமை உறுப்பு உண்டெனில் அது ஒன்றே ஒன்றுதான்.

முடியுமானால், R-க்கு e, e^{I} என்ற இரு ஒருமை உறுப்புகள் இருப்பதாகக் கொள்க.

$a \in R$ என்றால்

$$ae=ea=a \quad \dots 1$$
$$ae^{I}=e^{I}a=a \quad \dots 2$$

இங்கு e, $e^{I} \in R$ என்றிருக்கவேண்டும்.

1-ல் $a=e^{I}$ என்க. $\therefore e^{I}e=ee^{I}=e^{I}$

2-ல் $a=e$ என்க $\therefore ee^{I}=e^{I}e=e$

$$\therefore e=e^{I}$$

குறிப்பு: வளையத்தின் வரையறை D-4-ன்படி ஒவ்வொரு வளையத்திற்கும் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு உண்டு. ஆனால், பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பைப் பொறுத்தவரை, நிலைமை மாறுபட்டிருக்கிறது. மெய்யான எண்களாலான வளையத்தில் பூச்சியத்தைத் தவிர மற்ற எண்களுக்குப் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்புகள் உண்டு. ஆனால், முழு எண்கள் வளையம் I-ல் 1, -1 என்ற உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற முழு எண்களுக்குப் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்புகள் I-ன் உறுப்புகள் அல்ல. எனவே, பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்புகள் இல்லையெனலாம்.

3.4.4 தேற்றம்: ஒருமையுடன் R வளையத்தின் உறுப்பு 'a'-க்குப் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பு இருந்தால் அது ஒன்றே ஒன்றாகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

a-க்கு s, t என்று இரு பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்புகள் இருப்பதாகக் கொண்டால்

$$as=sa=e$$
$$at=ta=e$$

மேலும் $ae=ea=a$ என்பது தெரிந்ததே.

$$\begin{aligned} s &= se \\ &= s(at) \\ &= (sa)t \\ &= et \\ &= t \end{aligned}$$

எனவே a-க்குப் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பு இருந்தால் அதை 'a^{-1}' எனக் குறிப்போம்.

3.4·5 தேற்றம் : R வளையத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பு 'a'-ம் $a\cdot 0=0\cdot a=0$ என்று இருக்கவேண்டும்

$a+0=a$ என்பது தெரிந்ததே.

$$\begin{aligned} a\cdot a &= a\cdot(a+0) \\ &= a\cdot a+a\cdot 0 \end{aligned}$$

மேலும் $a\cdot a=a\cdot a+0$

அதாவது $a\cdot a+0=a\cdot a+a\cdot 0$

$$0=a\cdot 0$$

R பரிமாற்று வளையமென்றால் $a\cdot 0=0\cdot a=0$

R அப்படிப்பட்ட வளையம் இல்லை யென்றால்

$$\begin{aligned} a\cdot a &= (a+0)\cdot a \\ &= a\cdot a+0\cdot a \end{aligned}$$

$$a\cdot a=a\cdot a+0$$

$$\therefore a\cdot a+0=a\cdot a+0\cdot a$$

$$\therefore 0=0\cdot a$$

எனவே கீழ்க்கண்ட தன்மைகள் எளிதானவை.

(1) $a\cdot(\ b)=-(ab)$

(2) $(-a)\cdot b=-(ab)$

(3) $(-a)\cdot(-b)=ab$

(4) $a\cdot(b-c)=ab-(ac)$

(5) $(b-c)\cdot a=ba-(ca)$

(1) $ab+a(-b)=a+[b+(-b)]$

$$\begin{aligned} &= a\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a\cdot(-b)=-(ab)$$

$$(2)\quad (-a)\cdot b + (ab) = [(-a)+a]\cdot b$$
$$= 0 \cdot b$$
$$= 0$$

3·5 உபவளையம் : Rஐ ஒரு வளையமென்க. R-ன் காலியில்லாத உபகணமாக s ஐக் கொள்க. s என்பது ஓர் உபவளையமென்றால் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு s கட்டாயம் கட்டுப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(1) R-ல் குறிப்பிட்ட கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைப் பொறுத்து s ஓர் அடைப்புக் கணமாக வேண்டும்.

(2) $a \in s$ என்றால், $-a \in s$.

ஒற்றுருவு தன்மை (Isomorphism) : R, s என்ற இரு வளையங்களை எடுத்துக்கொள்க.

$a \leftrightarrow a^{\prime}$, $b \leftrightarrow b^{\prime}$ என்னும்படி a, b என்ற உறுப்புகள் R வளையத்தைச் சேர்ந்தும், $a^{\prime}$, $b^{\prime}$ உறுப்புகள் s வளையத்தைச் சேர்ந்தும் எடுத்துக்கொள்க.

$$\left.\begin{array}{c}(a+b) \leftrightarrow (a^{\prime}+b^{\prime}) \\ a \cdot b \leftrightarrow a^{\prime} \cdot b^{\prime}\end{array}\right| A$$

என்றால் R ஒற்றுருவு தன்மை விதியின் மூலம் s ஆக மாறும். அதாவது $1 \to 1$ மாற்றத்தின்மூலம் Rஐ s-க்குமேல் மாற்றி, R வளையத்தின் கூட்டல், பெருக்கல் செய்கைகள் பாதுகாக்கப்பட்டால், R ஒற்றுருவு தன்மையினால் s ஆக மாறும்.

(A) ஐ $(a+b)^{\prime} = a^{\prime}+b^{\prime}$

$(a \cdot b)^{\prime} = a^{\prime} \cdot b^{\prime}$ என்றும் எழுதலாம்.

$x \to x'$ என்பது R-ன் ஒற்றுருவு தன்மையின்மூலம் s-க்கு மேல் மாற்றினால்,

$x' \to x$ என்பதன்மூலம் s-ன் ஒற்றுருவு தன்மையின்மூலம் R-க்கு மேல் மாற்றலாம்.

அதாவது R, s-க்கு ஒற்றுருவு தன்மையுடையதானால், s, R-க்கு ஒற்றுருவு தன்மையுடையது. எனவே, R, s என்பவைகள் ஒற்றுருவு தன்மைகளையுடைய வளையங்களாகும்.

3·5·1 தேற்றம் : $x \to x'$ என்பது R வளையத்தை ஒற்றுருவு தன்மையின்மூலம் s வளையத்திற்கு மேல் மாற்றினால்,

1. R-ன் பூச்சியம் 0 என்று இருந்து $0 \to 0'$ என்றால் s-ன் பூச்சியம் $0'$.

2. $a \in R$ என்றால் $-a \to -a'$

3. R-க்கு ஒருமையுறுப்பு e-யாக இருந்து $e \to e'$ என்றால் e', s-ன் ஒருமையுறுப்பு.

4 R ஒரு பரிமாற்று வளையமென்றால், s ஒரு பரிமாற்று வளையமாகத்தான் இருக்கவேண்டும்.

1. $b \to b'$ என்க.

$b + 0 = b$

$b = b + 0$

$\to b' + 0'$

ஆனால் $b \to b'$

$\therefore b' = b' + 0'$

$\therefore 0'$ s-ன் பூச்சிய உறுப்பாகும்.

2. $a + x = 0$ எனின் $x = -a$

$0 \to 0'$

$\therefore (a + x) \to (a + x)'$

$= a' + x'$

$a + x = 0$

$\therefore a' + x' = 0'$

$\therefore \quad x' = -a'$

$\therefore -a \to -a'$.

3. $a \in R$

$ae = ea = a$

$ae \to a'e'$

$ea \to e'a'$

$a \to a'$

$ae = ea = a$ என்பதால்

$a'e' = e'a' = a'$ என்றாகும்.

$\therefore$ e' என்பது s-ன் ஒருமை உறுப்பாகும்.

4. a, b என்பவை R-ன் ஏதாவது இரு உறுப்புகளாகக் கொள்க.

R ஒரு பரிமாற்று வளையமென்றால்

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot b \to a' \cdot b'$

$b \cdot a \to b' \cdot a'$

$\therefore a' \cdot b' = b' \cdot a'$

$\therefore$ s ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும்.

அவ்விதமே s ஒரு பரிமாற்று வளையமெனின் R ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்கண்ட கணங்களில், எவைகள் வளையங்களெனக் கண்டு, பூச்சியம், கூட்டல், எதிர்மாறு உறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

(a) 5 ஆல் வகுபடும் எல்லா முழு எண்களின் கணம் (சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(b) x, y என்பவை மிகை எண்கள் கணத்தின் உறுப்பு களானல் $x + y\sqrt{3}$ வடிவத்திலுள்ள எல்லா மெய்யான எண்கள் கணம்—(சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(c) x, y, z முழு எண்கள் கணத்தைச் சேர்ந்திருந்தால் $x + y\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$ வடிவத்திலுள்ள மெய்யான எண்களின் கணம் – (சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(d) ஒற்றைப்படை எண்களாலான கணம் (சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(e) m என்பது ஒரு முழு எண்ணுகவும், n என்பதை மிகை ஒற்றைப்படை எண்ணுகவும் கொண்ட m/n என்ற விகிதமுறு எண்களால் ஆன கணம் (சாதாரணக் கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(f) $(0, 1, 2)$ என்ற மூன்று எண்களாலான கணம் (கீழ்க்கண்ட கூட்டல், பெருக்கலைப் பொறுத்து)

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(·)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

(g) (a, b, c, d) என்ற நான்கு கணியங்களாலான கணம் (கீழ்க்கண்ட கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைப் பொறுத்து)

(+)	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

(·)	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

2. எல்லா முழு எண்களாலான கணம் S-ல் கூட்டல் சாதாரண முறையில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அந்தக் கணத்திலுள்ள இரு கணியங்களின் பெருக்குத்தொகை '0' என்னும்படி பெருக்கல் வரையப்பட்டிருக்கிறது. இந்தக் கூட்டல் பெருக்கல் விதிகளைப் பொறுத்து s ஒரு வளையமா என்று ஆராய்க.

3. a, b என்பன முழு எண்களாகக் கொள்க. $a \oplus b = ab$; $a \otimes b = a + b$ என்று வரையறுக்க. $\oplus$ விதியைக் கூட்டலாகவும் $\otimes$ விதியைப் பெருக்கலாகவும் கொண்டு முழு எண்கள் கணம் ஒரு வளையமா என்று ஆராய்க.

4. மேற்கண்ட கணத்தில் $a \oplus b = a + b - 1$; $a \otimes b = a + b - ab$. என்ற விதிகளின்படி, முழு எண்கள் கணம் ஒரு வளையமென நிரூபி.

5. ஒரு கணத்தின் எல்லா உபகணங்களாலான வளையத்தின் இரு உறுப்புகள் a, b என்க.

(1) $a = -a$

(2) $a + x = b$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம்

$x = a + b$ என்று நிரூபி.

6. R என்ற வளையத்தின் உபவளையங்கள் S, T என்க. $S \cap T$ என்பது -ன் உபவளையமெனக் காண்பி.

7. R என்ற வளையத்தில் $a^2 = a$ $(a \in R)$ என்றால் பூலியன் வளையம் (Boolean ring) எனலாம். R என்பது பூலியன் வளையமெனின் $2 = 0$ என்று நிரூபி. மேலும் R ஒரு பரிமாற்று வளையமெனவும் நிரூபி.

8. R, S என்பவைகளை வளையங்களாகக் கொள்க. $r \in R$, $s \in S$ என்றிருக்கும்போது (r, s) என்று வரிசைப்படுத்திய ஜதைகளாலான கணத்தை $T = R \times S$ எனக் கொள்க.

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = [(r_1 + r_2), (s_1 + s_2)]$$
$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

என்று வரையறுத்த T ஒரு வளையமென நிரூபி. T வளையத்தின் பூச்சிய உறுப்பைக் கண்டுபிடி. T-க்கு ஒருமை உறுப்பு இருக்க வேண்டின் அதற்கான நிபந்தனை என்ன ?

9. $(f + g)x = f(x) + g(x)$

$(fg)x = f(x) \cdot g(x)$

என்ற விதிகளின்படி $(0, 1)$ இடைவெளியிலுள்ள மெய்யான மதிப்புகளையுடைய தொடர்ச்சியான சார்புகளான கணம் ஒரு வளையமென நிரூபி.

4. எண் அரங்கம்

(INTEGRAL DOMAIN)

4·1. முன்னுரை : முழு எண்களின் தொகுதி, ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமெனினும், முழு எண்களின் தொகுதிக்குச் சில தனித்தன்மைகள் இருப்பதைக் காண்கிறோம். இந்தத் தனித் தன்மைகள் மற்ற வளையங்களில் இருப்பதில்லை. இப்போது இந்தத் தனித் தன்மைகளில் சிலவற்றைக் கொண்ட தொகுதியை வருணிப்போம்.

4·2. எண் அரங்கம்

வரையறை : ஒருமையுடன் கூடிய ஒரு பரிமாற்று வளையத்திற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் இருப்பின், அந்த வளையத்திற்குக் கீழ்க்கண்ட தன்மை பொருந்தியிருந்தால், அதை எண் அரங்கம் 'D' என்போம்.

$rs = 0$ என்னும்படியாக $r, s \in D$ என்றால் $r=0$ அல்லது $s=0$ என்றிருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு : எண் அரங்கத்திற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் இருக்கவேண்டுமெனக் குறிப்பிட்டதை நோக்கின், அதற்குக் குறைந்தது ஒரு பூச்சியமில்லாத உறுப்பாவது இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி : முழு எண்கள் வளையம், விகிதமுறு எண்கள் வளையம், மெய் எண்கள் வளையம், சிக்கல் எண்கள் வளையம் யாவும் எண் அரங்கங்களே.

4·2·1. தேற்றம்: கீழ்வரும் இரண்டு நிபந்தனைகளும் ஒன்றே என்று நிரூபி.

(i) $rs=0$ என்னும் படியாக $r, s \in D$ என்றால், $r=0$ அல்லது $s=0$

(ii) $c \neq 0$, $ac = bc$ என்னும் படியாக $a, b, c \in D$ என்றால், $a = b$. $c \neq 0$, $ac = bc$ என்னும்படியாக $a, b, c \in D$ என்றால் $a = b$.

$xy = 0$ என்றால் $x, y \in D$; $x = 0$ அல்லது $y = 0$ ஆகும்.

$ac = bc$, $c \neq 0$ என்க.

$\therefore \quad ac - bc = 0$

$\therefore \quad (a - b)c = 0$

$c \neq 0$ என்பதால் $a - b = 0 \quad \therefore a = b$

இப்போது,

$ac = bc$, $c \neq 0$ என்றால் $a = b$ ஆகும்.

$xy = 0$, $x, y \in D$ என்க.

$y \neq 0$ என்றும் கொள்க.

$0 \cdot y = 0$ என்பதால்,

$x\,y \neq 0y$

$y \neq 0$ என்பதால்,

$x = 0$

அதேபோல் $x \neq 0$ என்று கொண்டால் $y = 0$ ஆகும்.

4·3 வரிசை எண் அரங்கம் (Ordered Integral Domain)

வரையறை : D என்ற எண் அரங்கத்தை, வரிசை எண் அரங்கமெனக் கொள்வதற்கு, D-க்குக் கீழ்க்கண்ட தன்மைகளை யுடைய D_p என்ற உபகணம் இருக்கவேண்டும்.

1. $a, b \in D_p$ எனின் $a + b \in D_p$ (கூட்டலில் அடைப்பு)

2. $a, b \in D_p$ எனின் $a\,b \cdot \in D_p$ (பெருக்கலில் அடைப்பு)

3. D-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-யும் $a = 0$, $a \in D_p$, $-a \in D_p$ என்ற மூன்று நிபந்தனைகளில் ஏதாவது ஒன்றே ஒன்றுக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கவேண்டும். (முப்பகுதி விதி)

D_p-ன் உறுப்புகளை, D-ன் மிகை உறுப்புகள் எனலாம். D_p-ல் இல்லாத பூச்சியமாகாத உறுப்புகளை D-ன் குறை உறுப்புகள் எனலாம்.

மாதிரி 1 : I என்ற முழு எண் கணத்திற்கு, I_p என்ற மிகை முழு எண் கணமுள்ளது. எனவே, I ஒரு வரிசை எண் அரங்கமாகும்.

மாதிரி 2 : விகிதமுறு எண்கள் கணம் R-க்கு, I என்பது D_p போல் ஓர் உபகணமாகும். எனவே, R ஒரு வரிசை எண் அரங்கமாகும்.

4·4. D ஒரு வரிசை எண் அரங்கமாகவும் D_p, D-ல் உள்ள மிகை உறுப்புகளைக்கொண்ட கணமாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

$a, b \in D$ என்றும் கொள்க.

$a-b \in D_p$ என்றால், $a > b$ அல்லது $b > a$ என்று கூறலாம். அதேபோல் $a > 0$ எனின், $a \in D_p$ $\therefore$ a, D-ன் மிகை உறுப்பாகும். அதேபோல் $a < 0$ எனின் $-a \in D_p$ $\therefore$ a, D-ன் குறை உறுப்பாகும்.

4·4·1 தேற்றம்

1. $a > 0, b > 0$ என்றால், $a+b > 0$ ஆகும்.
2. $a > 0, b > 0$ என்றால் $ab > 0$ ஆகும்.
3. $a \in D$ என்றால் a-க்கு $a=0$ அல்லது $a > 0, a < 0$ என்ற ஏதாவதொரு தன்மைதான் இருக்கவேண்டும்.

1. $a > 0, \quad \therefore a \in D_p$
   $b > 0, \quad \therefore b \in D_p$
   $\therefore \quad a+b \in D_p$
   $\therefore \quad a+b > 0$
2. $\therefore ab \in D_p$
   $ab > 0$

3. $a \in D$ எனின்,

$a = 0$, $a \in D_p$, $-a \in D_p$ என்ற ஏதாவதொரு தன்மையாக இருக்கவேண்டும்.

அதை $a = 0, a > 0, a < 0$ என்று கூறலாம்.

4·4·2 கிளைத்தேற்றம்

1. $a > b$ எனின், ஒவ்வொரு $c \in D$-க்கும் $a + c > b + c$
2. $a > b, c > 0$ எனின், $ac > bc$
3. $a > b, c < 0$ எனின் $ac < bc$
4. $a > b, b > c$ எனின் $a > c$
5. $a \neq 0$ எனின், $a^2 > 0$

1. $a > b$ என்பதால், $(a-b) > 0$

$$(a+c) - (b-c) = (a-b)$$
$$> 0$$
$$\therefore (a+c) > (b+c)$$

2. $a > b \therefore (a-b) > 0$

$c > 0$

$\therefore (a-b)c > 0$

$\therefore ac - bc > 0$

$ac > bc$

3. $a > b, c < 0$

$\therefore -c > 0$

$\therefore -ac > -bc$

$\therefore ac < bc$

4. $a > b, b > c$

$\therefore ab > bc$

$\therefore a > c$

5. $a \neq 0$ என்பதால்,

$a > 0$ என்றோ $-a > 0$ என்றோதான் இருக்க வேண்டும்.

$a > 0$ என்றால் $a > 0$

$a > 0$

$\therefore a.a > 0$

$\therefore a^2 > 0$

$-a > 0$ என்றால் $(-a)^2 > 0$

$\therefore a^2 > 0$

குறிப்பு : $a \geq 0$ என்றால் $a > 0$ அல்லது $a = 0$ எனக் கொள்க.

4·5 a-ன் நிறைந்த மதிப்பு (Absolute Value)

வரையறை: D ஒரு வரிசை எண் அரங்கமாகவும் $a \in D$ என்றும் கொள்க.

(1) $a > 0$ $|a| = a$

(2) $a < 0$ $|a| = -a$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு a உட்பட்டிருந்ததால், $|a|$ ஐ a-ன் நிறைந்த மதிப்பு என்போம்.

4·6 கணிதத் தொகுத்தறி தத்துவம் (Mathematical Induction)

கணிதத் தொகுத்தறி முறைக்கு உதவியான தேற்றத்தை இப்போது நிரூபிப்போம்.

4·6·1 **தேற்றம்:** கீழ்க்கண்ட இரு தன்மைகளையுடைய மிகை முழு எண்களின் கணமாக K என்பதைக் கொள்க.

1. $1 \in K$

2. $k \in K$ என்னும்படியாக k ஒரு மிகை முழு எண் என்ருல் $k+1 \in K$. அப்போது K என்பது மிகை எண்கள் எல்லா வற்றையும்கொண்ட ஒரு கணமாகும்.

K -ல் இல்லாத மிகை முழு எண் ஒன்று இருப்பதாகக் கொள்க.

K -ல் இல்லாத மிகை முழு எண்கள் கணத்தை U என்க. U ஒரு காலிக் கணமன்று. அதன் மிகக் குறைந்த உறுப்பு m என்க.

$m \neq 1 \qquad 1 \in K$

$\therefore \quad m > 1$

$\therefore \quad m - 1 > 0$

m என்பது U-ன் மிகக் குறைந்த உறுப்பு 'm' என்பதால் $m-1 \notin U \qquad \therefore\ m-1 \in K$.

$K = m - 1$ என்ருல்,

$K + 1 = m$

$\therefore \quad m \in K$ இது சாத்தியமன்று.

$\therefore \quad K$-ல் இல்லாத மிகை எண் கிடையாது.

4.6.2. தொகுத்தறி தத்துவம்: n என்ற ஒவ்வொரு மிகை முழு எண்ணுக்கும் S_n என்ற ஒரு கருத்து நிலவட்டும். எல்லா மிகை எண்களும் S_n கருத்துச் சரியென்பதற்கு,

1. S_1 கருத்துச் சரியாயிருக்கவேண்டும்.

2. S_k சரியாக இருக்கும்படியான K என்ற மிகை முழு எண் இருக்குமாஞல், S_{k+1} கருத்தும் சரியாகவே இருக்கும்.

மாதிரி: $1 + 2 + 3 \ldots\ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ என்ற கருத்தை S_n என்க.

$$S_1 \equiv 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$\therefore \quad S_1$ சரியே.

$$S_k \equiv 1 + 2 + 3 \ldots\ldots\ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

S_k சரியென்று கொள்க.

$$1+2+3\ldots\ldots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1.$$

$$=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

∴ S_{k+1} கருத்துச் சரி.

∴ தொகுத்தறி தத்துவத்தின்படி S_n கருத்து எல்லா மிகை முழு எண்கள் 'n'-க்கும் சரியே.

4.6.3. $a \in R$ (R ஒரு வளையம்) என்க.

$a^1 = a$ என்க.

$a^{k+1} = a^k . a$ என்று வரையறுக்க.

தொகுத்தறி தத்துவத்தின்படி S_n ($= a^n$) கருத்து எல்லா மிகை முழு எண்களுக்கும் சரியே.

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$S_1 \equiv a^m . a^1 = a^m . a$$

$$= a^{m+1}.$$

$$S_k \equiv a^m . a^k = a^{m+k} \text{ என்க.}$$

$$S_{k+1} \equiv a^m . a^{k+1} = a^m . a^k . a^1$$

$$= a^{m+k} . a$$

$$= a^{m+k+1}$$

∴ S_{k+1} சரியே.

∴ தத்துவத்தின்படி S_n கருத்து எல்லா மிகை முழு எண்களுக்கும் சரியே.

மாதிரி: $(a^m)^n = a^{mn}$ [m, n ஏதாவது இரு மிகை முழு எண்கள்]

$$S_n \equiv (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$S_1 = (a^m)^1 = a^m \text{ சரியே.}$$

$$S_k \equiv (a^m)^k = a^{mk}$$

$$S_{k+1} \equiv (a^m)^{k+1}$$

$$= (a^m)^k . (a^m)$$

$$= a^{mk} . a^m$$

$$= a^{mk+m}$$

$$= a^{m(k+1)}$$

∴ S_{k+1} கருத்துச் சரியே.

தத்துவத்தின்படி S_n கருத்து எல்லா மிகை முழு எண்களுக்கும் சரியே.

4·7 பியானோவின் வெளிப்படை உண்மைகள் (Peano's Axioms)

எல்லா முழு எண்களின் தொகுதியும் வரிசை எண் அரங்கத்தின் தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கிறது என்று கண்டோம்.

இங்கு மிகை முழு எண்களின் சில தன்மைகளைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டு, மற்றத் தன்மைகளை இலேசாக நிரூபிப்போம்.

இந்தச் சில தன்மைகளைப் பியானோவின் வெளிப்படை உண்மைகள் என்போம். (ஏனெனில் இவை இத்தாலியக் கணித மேதை G. பியானோ என்பவரால் எடுத்தாளப்பட்டது.)

எல்லா மிகை முழு எண்களின் கணத்தை N என்க.
வெளிப் படை உண்மை **1 :** $1 \in N$.

உண்மை 2 : N-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு 'm'-க்கும் அடுத்த உறுப்பு m' ($\in N$) என்ற ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் உண்டு.

உண்மை **3 :** எந்த உறுப்பின் அடுத்ததும் (m'-ம்) $\neq 1$ (அதாவது '1' என்ற முழு எண் எந்த ஒரு மிகை முழு எண்ணுக்கும் அடுத்த உறுப்பன்று.)

உண்மை **4 :** $m' = n'$ என்னும் படியாக $m, n \in N$ என்றால் $m = n$ என்றாகும்.

உண்மை 5 : N-ன் உறுப்புகளையுடைய ஒரு கணம் K என்க.

(i) $1 \in K$

(ii) $k \in K$ எனின் $k' \in K$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் $K = N$ என்றாகும்.

4·7·1

$m' = m + 1$ என்றும்

$m+k' = (m+k)'$ என்றும் வரையறுப்போம். இதன்மூலம் $m+k$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது என்று கொள்வோம். இப்படி வரையறுக்கப்பட்ட உறுப்புகளையுடைய கணம் k-ம் N-ம் ஒன்றே. எனவே கூட்டல் செய்கை என்பதை, Nஐப் பொறுத்து வரையறுக்கலாம்.

பெருக்கல் வரையறை

$m \cdot 1 = m$

இதன்மூலம் தொகுத்தறி தத்துவத்தினால் $m.\ k$ என்பது வரையறுக்க முடிகிறது.

$m \cdot k' = mk+m$ என்று வரையறுப்போம்.

குறிப்பு : நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம்(Well-ordered set): **காலியில்லாத** மிகை முழு எண்கள் கணத்தில், s என்ற உறுப்பும் $l < s$ என்று அமையும்படி, கணத்தின் மிகக் குறைந்த எண் 'l' இருக்கும். இந்தத் தன்மையை மிகை முழு எண் கணத்தின் நன்கு வரிசைப்படுத்தும் தன்மை என்போம்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $a > b$ என்றால் $-a < -b$ என்று நிரூபி.
2. $a > b$, $c > d$ என்றால் $a + c > b + d$ என்று நிரூபி.
3. $a > 0$, $ab > ac$ என்றால் $b > 0$ என்று நிரூபி.
4. $|ab| = |a| \cdot |b|$ என்று காண்பி.
5. $-|a| \leq a \leq |a|$ என்று காண்பி.
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$ என்று காண்பி.
7. பரிமாற்று வளையத்தின் உறுப்புகள் a, b என்றால் $(ab)^n = a^n b^n$ (n என்பது ஏதாவதொரு மிகை முழு எண் என்க) என்று காண்பி.
8. m என்ற ஒவ்வொரு முழு எண்ணுக்கும் $m(a+b) = ma+mb$ என்று காண்பி.
9. m, n என்ற எல்லா முழு எண்களுக்கும் $ma+na=(m+n)a$ என்பது சரியென்று காண்பி.

5. வகுத்தல் இயற்கணிதம்

(DIVISION ALGEBRA)

5·1 முன்னுரை : வளையங்களின் தன்மைகளைப்பற்றி ஆராயும் போது, முழு எண்கள் வளையம் I எப்படி ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமெனக் கண்டோம். மேலும் I, ஒரு வரிசைப் படுத்தப்பட்ட எண் அரங்கமெனவும், அதில் P என்ற மிகை முழு எண்கள் வளையம், ஒரு நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண் அரங்க மெனவும் விளக்கினேம்.

இப்போது I வளையத்தின் வேறு சில தன்மைகளைக் கவனிப் போம்.

5·2 வகுக்குமெண் (காரணி — Factor)

வரையறை : $a\ b \in I$ எனக் கொள்க. $c \in I$ என்றபடி $a = bc$ என்றமைந்தால், b என்பது a-யின் வகுக்குமெண் அல்லது காரணி என்போம்.

a ஐ bஆல் வகுக்கமுடியும். a ஐ b-ன் மடங்கு எனவும் கூறலாம்.

குறிப்பு 1 : $0 = b \cdot 0\ (b \in I)$ என்பதால், ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் 0-ன் காரணியாகும்.

குறிப்பு 2 : $a \in I$ என்றால் $\pm\ 1, \pm a$ என்பவை a-ன் வகுக்குமெண்களாகும்.

குறிப்பு 3 : b என்பது a-ன் வகுக்குமெண் ஆனால், $a = bc$ என்றிருக்கும்படி $c \in I$ அமையவேண்டும்.

$\therefore\quad -a = b\ (-c)$

$\therefore\quad b$ என்பது $-\ a$-ன் வகுக்குமெண்ணுகவும் இருக்கும்.

எனவே $a\ ,\ -a$ என்பவைகளுக்கு ஒரே வகுக்குமெண்தான் உண்டு என்பது தெளிவு.

குறிப்பு 4 : a என்ற மிகை முழு எண்ணின் வகுக்குமெண் 'b' என்ற மிகை முழு எண் என்ருல் $b \leq a$ என்று இருக்க வேண்டும்.

ஏனெனின், $a = bc$ என்பதிலுள்ள c ஒரு மிகை முழு எண் ஆவதால் $c \geq 1, b \geq 0$.

$$\therefore bc \geq b$$

$$\therefore a \geq b$$

இந்தக் குறிப்பு $a \neq 0$ என்ருல் மட்டும் பொருந்தும். மேலும் $+1$, எனவே -1 என்பவைகளின் வகுக்குமெண்கள் ± 1 மட்டுமே.

5·3 பகாவெண் (Prime Number)

வரையறை : 1 அல்லது -1 தவிர்த்த பூச்சியமில்லாத முழு எண் 'U' என்பது பகாவெண்ணுக வேண்டின், அதன் வகுக்கு மெண்கள் ± 1, $\pm U$ என்பவை மட்டுமே இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 1 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 என்பவை பகாவெண்களுக்குச் சில உதாரணங்களாகும்.

குறிப்பு 2 : U என்பது ஒரு பகாவெண் எனின் $-U$-வும் ஒரு பகாவெண்ணே.

5·4 வகுத்தல் கணக்கு (Division Algorithum)

$a, b \in I$, $b > 0$ என்ருல் $a = qb + r$ $[0 \leq r < b]$ என்றிருக்கும்படி q, r என்ற ஒரே ஒரு முறை முழு எண்கள் உண்டு.

நிரூபணம் : $a = qb + r$ என்ருல்,

$$r = a - qb \text{ ஆகும்.}$$

$x \in I$ என்றபடி $(a - xb)$அமைப்பிலுள்ள பூச்சியமில்லாத முழு எண்கள் தொகுதியை எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.

அதாவது,

$$S = \{a - xb;\, x \in I,\ a - xb \geq 0\}$$

$b > 0$ என்ற முழு எண் என்பதால்

$$b \geq 1 \quad \therefore |a| \cdot b \geq |a|$$

$$\therefore \quad a + |a| \cdot b \geq a + |a|$$

$$\geq 0$$

$\therefore$ $x = -|a|$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் S கணத்திற்கு $a - (-|a|)b$ என்ற ஓர் உறுப்பாவது இருப்பது தெரி

கிறது. $0 \in S$ என்ருல், S-ன் மிகக் குறைந்த எண் 0 ஆகும்.

$0 \notin S$ என்ருல் S என்பது காலியில்லாத மிகை முழு எண்களைக் கொண்ட கணமாகும். மிகை முழு எண்கள் கணம் நன்கு வரிசைப் படுத்தப்பட்டது. எனவே, அதற்கு மிகை குறைந்த எண் உண்டு. அதை r என்க.

$\therefore a-qb=r$ என்று அமையும்படி q என்ற முழு எண் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore a=qb+r$$

இங்கு $r \geq 0$,

இப்போது $r<b$ என்று நிரூபிப்போம்.

$r \geq b$ = என்ருல், $r-b \geq 0$

$$r-b=a-qb-b$$
$$=a-(q+1)b$$
$$\therefore r-b \in S.$$

$b>0$ $r-b<r$. அதாவது $(r-b)$என்ற S-ன் உறுப்பு, S-ன் மிகக் குறைந்த உறுப்பான 'r'ஐ விடச் சிறிதாயிருக்கிறது. இது முடியாத ஒன்று. எனவே $r<b$.

இப்போது கண்ட q, r என்பவைகள் ஒன்றே $a=qb+r$ சமன் பாட்டைச்சரிசெய்யும் எனக் காண்போம். முடியுமாளுல் q', r' என்ற வேறு இரு முழு எண்கள் $a=qb+r$ சமன்பாட்டைச் சரி செய்யட்டும்.

அதாவது $a=q'b+r'$ $\quad 0 \leq r'<b$

$$a=qb+r$$
$$\therefore qb+r=q'b+r'$$
$$\therefore b(q-q')=r'-r$$
$$\therefore |b|\,|(q-q')|=|r'-r|$$

$b>0$ என்பதால் $|b|=b$

$$\therefore b|q-q'|=|r'-r|$$

$0 \leq r<b$, $0 \leq r'<b'$ $\therefore |r'-r|<b$

$$\therefore b|q-q'|<b$$

ஆளுல் $|q-q'|$ மிகை முழு எண் ஆகும்.

எனவே,

இந்தச் சமனின்மை சரியென்ருல் $|q-q'| = 0$

$\therefore q = q'$

$\therefore r = r'$

$\therefore a = qb+r$ என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள q, r என்பவைகளின் மதிப்புகள் ஒரே வகையானவையே,

குறிப்பு : q என்பதை ஈவு என்றும் r என்பதை மீதி என்றும் கூறலாம்.

$r = 0$ என்ருலொழிய b, a-ன் வகுக்குமெண் ஆக முடியாது.

5·4·1 தேற்றம்

b என்பது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மிகை முழு எண்ணைக் கொள்க. a என்பதை ஏதாவது ஒரு மிகை முழு எண்ணைக் கொண்டால் $a = r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \dots\dots\dots + r_1 b + r_0$ என்றிருக்கும்படி m என்ற குறையில்லாத முழு எண் இருக்கவேண்டும்.

[இங்கு $0 < r_m < b, 0 \leq r_i < b — i = 0,1 \dots, m-1$]
$a > b$ என்ருல் $r_0 = a$ என்ருகும். அப்போது $m = 0$,

$a \geq b$ என்ருல் $a = q_0 b + r_0$ $(0 \leq r_0 < b)$ இங்கு $q_0 => 0$

$q_0 < b$ என்ருல் $r_1 = q_0$, $m = 1$.

$q_0 \geq b$ என்ருல் q_0ஐ

$q_0 = q_1 b + r_1$ $(q_1 > 0, 0 \leq r_1 < b)$ என்று எழுதலாம்.

அப்போது $a = q_1 b^2 + r_1{}^b + r_0$

இங்கு $q_1 < b$ என்ருல் $r_2 + q_1$, $m = 2$ என்று கொள்ளலாம்.

ஆனுல் $q_1 \geq b$ என்ருல் q_1ஐ

$q_1 = q_2 b + r_2$, $(q_2 > 0, 0 \leq r_2 < b)$ என்று கொள்ளலாம்.

அப்போது $a = q_2 b^3 + r_2 b^2 + r_1 b + r_0$ என்ருகும்.

இவ்வாறு படிப்படியாகச் செல்லும்பொழுது நமக்கு வேண்டிய விதத்தில் a ஐ எழுதலாம்.

இங்கு $a > q_0 > q_1 > q_2 > \dots\dots$

$0 < q_{m-1} < b$ என்னும் படியாக முதல் q_{m-1} இருந்தால்

$r_m = q_{m-1}$ என்று கொண்டு aஐ மேற்கண்ட விதத்தில் எழுதலாம்.

5·5 மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி (Greatest Common Factor)

வரையறை : பூச்சியமில்லாத முழு எண்கள் a, b இவைகளின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி 'f' என்றால்

(1) f என்பது a, b என்ற இரண்டு எண்களுக்கும் வகுக்கும் எண்ணாக வேண்டும். மேலும்

(2) a, b என்ற எண்களின் மற்ற பொது வகுக்குமெண்கள் f-க்கும் வகுக்குமெண்களாக வேண்டும்.

5·5·1 ஒருபடித் தொடர்பு (Linear Combination)

வரையறை : $a, b \in I$ எனக் கொள்க. $ax+by$ $[x, y \in I]$ என்ற வடிவத்திலுள்ள முழு எண்ணை, a, b இவைகளின் ஒருபடித் தொடர்பு எனலாம்.

5-5-2. தேற்றம்: a, b என்பவை பூச்சியமில்லாத முழுஎண்கள் என்றால், a, b இவைகளின் ஒருபடித் தொடர்பாய் உள்ள மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண்ணே, a-க்கும் b-க்கும் மிகப்பெரிய பொதுக் காரணியாகும்.

$S = \{ ax+by \,;\, x, y \in I,\ ax+by > 0 \}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்.

$x = a, y = b$ என்க. $\therefore a^2+b^2 > 0$, a^2+b^2, a, b இவைகளின் ஒருபடித் தொடர்பு.

$\therefore$ S ஒரு காலியில்லாத கணமாகும். எனவே, மிகை முழு எண்கள் கணம் நன்கு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண் அரங்கமாவதால், அதற்கு மிகக் குறைந்த எண் உண்டு. அதை f என்போம்.

$$\therefore f = ax_1 + by_1 \quad [x_1, y_1 \in I]$$

வகுத்தல் கணக்குப்படி $a = qf+r \quad 0 \leq r < f$

$$\therefore r = a - qf$$
$$= a - q(ax_1 + by_1)$$
$$= a(1-qx_1) + b(-qy_1)$$

$\therefore r > 0$ என்றால் $r \in S$.

ஆனால் $r < f$, f என்பது S கணத்திலுள்ள மிகக் குறைந்த எண் எண்பதால் $r = 0$ என்றாகும்.

$$\therefore\ a - qf = 0$$

$$\therefore\ a = qf$$

$\therefore$ f, a-ன் வகுக்குமெண்ணாகும். அதேபோல் f ஐ b-ன் வகுக்குமெண் என்று நிரூபிக்கலாம். எனவே f, a-க்கும், b-க்கும் பொதுக் காரணியாகும்.

மேலும் a-க்கும், b-க்கும், g என்பது வேறொரு பொதுக் காரணி என்றால்

$$a = a_1 g$$

$$b = b_1 g$$

$$\therefore f = a_1 g x_1 + b_1 g y_1$$

$$= (a_1 x_1 + b_1 y_1) g$$

$\therefore$ f, g-ன் காரணியாகும்.

குறிப்பு : f ஐத் தவிர a-க்கும் b-க்கும் வேறு மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி இருக்கமுடியாது.

ஒரு வேளை f' என்ற காரணி இருப்பதாகக் கொள்வோம். $\therefore$ வரையறையில் (2) ஆவது நிபந்தனைப்படி f, f'ன் காரணியாகவும், f', f-ன் காரணியாகவும் அமையவேண்டும்.

$$\therefore f = f'$$

5·5·3 ஈக்குலிடியன் கணக்கு (Euclidean Algorithm)

a, b என்ற இரு எண்களுக்கிடையே மிகப்பெரிய பொதுக் காரணியைக் கண்டுபிடித்தல்:

a, b என்பவைகளை மிகை முழு எண்கள் என்று கருதுவது தவறில்லை.

$$a = qb + r \qquad 0 \leq r < b \qquad \ldots\ldots 1$$

$r \neq 0$ என்றால் bஐ rஆல் வகுக்க

$$b = q_1 r + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < r \qquad \ldots\ldots 2$$

$r_1 \neq 0$ என்றால் r ஐ r_1 ஆல் வகுக்க

$$r + q_3 r_1 + r_3 \qquad 0 \leq r_2 < r_1 \qquad \ldots\ldots 3$$

இவ்வாறு படிப்படியாகச் செல்லும்போது, பூச்சியம் மீதி கிடைக்கும் $r_{k+1} = 0$ என்க.

$\therefore r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < r_2 \qquad \ldots\ldots 4$

$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k+1)$

$r_{k-1} = q_{k+1} r_k \qquad 0 \leq r_k < r_{k-1} \qquad \ldots\ldots (k+2)$

$\therefore$ இங்கு $r > r_1 > r_2 . \quad > r_k$

$r_k =$ என்பதே a-க்கும் b-க்கும் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணியாகும்.

$(k+2)$ சமன்பாட்டிலிருந்து r_k, r_{k-1}-ன் காரணியாகும்.

எனவே $(k+2)$ சமன்பாட்டிருந்து r_k, r_{x-1}ன் காரணியாகும்

எனவே $(k+1)$ சமன்பாட்டிலிருந்து r_k என்பது $r_{k-1}, r_{k-2} \ldots$ …… என்பவைகளின் பொதுக்காரணியாகும்.

இப்படியாக r_k, a, b என்பவைகளின் பொதுக்காரணியாகும்.

அதேபோல, c என்பது a, b-ன் பொதுக்காரணியானால் (1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து c என்பது r, r_1 என்பவைகளின் பொதுக்காரணியாக வேண்டும்.

அதேபோல் படிப்படியாக நிரூபித்து, c என்பது r_k-க்குக் காரணியெனலாம்.

$\therefore$ r_k என்பது a, b என்பவைகளின் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணியாகும்.

4·5·4 ஒன்றுக்கொன்று பகாக்காரணி (Prime to each other

a, b என்ற முழு எண்களின் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணி 1 எனின் a, b என்பவைகள் ஒன்றுக்கொன்று பகாக்காரணிகளாகும்.

4·6 மிகக் குறைந்த பொதுமடங்கு (Least Common Multiple)

வரையறை : இரண்டு பூச்சியமல்லாத முழு எண்கள் a, b என்பவைகளின் மிகக் குறைந்த பொதுமடங்கு m என்ற மிகை முழு எண் எனின்,

(1) m என்பது a, b என்ற இரு எண்களுடைய மடங்காக வேண்டும். மேலும்

(2) a, b என்பவைகளின் பொதுமடங்குகள் யாவும் m-ன் மடங்குகளாகவும் இருக்கவேண்டும்.

[$\sqrt{2}$ என்பதை விகிதமுறு எண் அன்று என்று நிரூபிக்க. முடிந்தால், $\sqrt{2}$ = விகிதமுறு எண் என்று கொள்க.

$= \dfrac{a}{b}$ [இங்கு a, b என்பவைகள் முழு எண்களே.

மேலும் a, b ஒன்றுக்கொன்று பகாக்காரணிகள்]

$$\therefore a^2 = 2b^2$$

எனவே a^2, 2 ஆல் வகுபடும். 2, ஒரு பகாவெண் என்பதால் a, 2ஆல் வகுபடும்.

$\therefore a^2$, 4ஆல் வகுபடும்.

$\therefore a^2 = 4 \cdot k$

$4k = 2b^2$

$\therefore b^2 = 2k.$

b^2-க்கு, எனவே b-க்கு 2 காரணியாகும். அதாவது a, b என்பவைகளுக்கு 2 பொதுக்காரணியாகிறது. ஆனால் a, b என்பவைகளை ஒன்றுக்கொன்று பகாக்காரணிகள் என்று எடுத்துக்கொண்டிருக்கிறோம்.

$$\therefore \sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$$

[அதாவது $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அன்று].

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $p = q + r$ என்றால், p, q, r என்ற மூன்று முழு எண்களில் இரண்டின் காரணி மூன்றாவதற்கும் காரணியாகுமென நிரூபி.

2. p, q என்ற இரு முழு எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று காரணிகளெனின், $p = \pm q$ என்று நிரூபி.

3. $p_1, p_2 \dots p_n$ என்பவை வெவ்வேறான மிகைப் பகாவெண் என்றால் $(p_1, p_2, p_3 \dots p_n) + 1$ என்ற முழு எண்ணுக்கு, $p_1, p_2 \dots p_n$ என்பவைகள் ஒன்றும் காரணிகள் அல்லவென்று காண்பி.

4. a, b என்ற முழு எண்களின் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணி f எனின் அதாவது $a=fa_1$, $b=fb_1$ எனின், a_1, b_1 என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகாக் காரணிகளெனக் காண்பி.

5. 1 என்ற முழு எண்ணை p, q என்ற முழு எண்களின் ஒரு படித் தொடர்பாகக் கொண்டால் ஒழிய p_1, q_1 என்பவைகள் ஒன்றுக் கொன்று பகாக் காரணிகள் ஆகாதென நிரூபி.

6. p, q என்ற முழு எண்களின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி fஐ (p, q) என்று குறியிடுக.

$x = yz + t$ என்றால்,

$(x, z) = (z, t)$ என்று காண்பி.

7. $p=p_1f$, $q=q_1f$, $f=(p, q)$ என்றால் p, q என்பவைகளின் மிகக் குறைந்த பொதுமடங்கு $p_1 \cdot q_1 \cdot d$ எனக் காண்பி.

8. $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அன்றென நிரூபி.

6. களம்

(FIELD)

6·1. களம் (Field)

வரையறை : ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்று மேற்பட்ட உறுப்புகள் இருந்து, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்டிருந்தால், அந்த வளையத்தைக் களம் F என்போம்.

F-ல் பூச்சியமல்லாத ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் F-லேயே, பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பு இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு : எதிர்மாறு உறுப்பு ஒன்றே ஒன்றுதான் என்று நிரூபித்திருக்கிறோம். எனவே F-ல் பூச்சியமல்லாத உறுப்பு r எனின், அதன் எதிர்மாறு உறுப்பு r^{-1} என்று குறிப்போம்.

6·1·1. தேற்றம் : ஒரு களம் 'F' எண் அரங்கமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். F ஓர் ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும்.

$r, s \in F$ மேலும் $rs = 0$

$r = 0$ எனின் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது. $r \neq 0$ என்றால், r-க்கு F-ல் r^{-1} என்ற எதிர்மாறு உறுப்பு உண்டு.

$$\therefore \quad r^{-1}(rs) = (r^{-1}r)s$$
$$= 1 \cdot s$$
$$= s$$

ஆனால் $rs = 0$

$$r^{-1}(rs) = r^{-1} \cdot 0$$
$$= 0$$
$$\therefore \quad s = 0$$

$\therefore$ $r = 0$ அல்லது $s = 0$ என்றுதான் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ F ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

6·1·2. $r, s \in F$, $r \neq 0$ **என்றால், $ry = s$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும்படி F-ல் y என்ற ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் உண்டு.**

$r \neq 0$ என்பதால் r^{-1} என்ற எதிர்மாறு உறுப்பு F-ல் இருக்கும்.

$y = r^{-1}s$ என்ற மதிப்பை $ry = s$ என்ற சமன்பாட்டில் இடுக.

$$r \cdot (r^{-1}s) = (r\, r^{-1})\, s$$
$$= s$$

$\therefore$ $ry = s$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $y = r^{-1}s$ என்பது ஒரு மூலமாகும்.

முடிந்தால் மேற்கண்ட சமன்பாட்டிற்கு y_1, y_2 என்ற இரு மூலங்கள் இருப்பதாகக் கொள்க.

$$ry_1 = s$$
$$ry_2 = s$$
$$ry_1 = ry_2$$

$r \neq 0$ என்பதால் $y_1 = y_2$

எனவே $r^{-1}s$ என்ற ஒரே மூலம்தான் உண்டு.

களத்தின் மாதிரிகள்

1. விகிதமுறு எண்களின் தொகுதி.

2. $a + b\sqrt{3}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள மெய் எண்கள் தொகுதி $(a, b \in I)$

6·1·3. தேற்றம் : முடிவுள்ள எண்களையுடைய உறுப்புகளினுலான எண் அரங்கம் S, ஒரு களமாகத்தான் இருக்கும்.

$a_1, a_2, \ldots \ldots a_n$ என்ற வெவ்வேறான பூச்சியமில்லாத 'n' உறுப்புகள் S-க்கு உரித்தாகுக.

$A = \{ a_1, a_2 \ldots\ldots a_n \}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்க.

A-ன் நிலையான உறுப்பு a_p என்க.

$B = \{ a_1 a_p, a_2 a_p, \ldots \ldots a_n a_p \}$ என்ற கணத்தை நோக்குக.

a_p, a_s என்பவை எண் அரங்கம் S-ன் உறுப்புகளாதலால் $a_p \neq 0, a_s \neq 0$ $\therefore$ $a_s a_p \neq 0$.

$\therefore$ B-ன் உறுப்புகள் யாவும் பூச்சியமில்லாதவை.

$a_s \cdot a_p$ என்பது S-ன் உறுப்பாக வேண்டும்.

$\therefore$ $B \subseteq A$

$$a_s\, a_p = a_t \,.\, a_p \text{ எனின்}$$
$$a_s = a_t$$

ஆனால் a_s, a_t s-ன் வெவ்வேறான உறுப்புகள்.

$$\therefore \quad a_s\, a_p \neq a_t\, a_p$$

$\therefore$ B-க்கு வெவ்வேறான 'n' உறுப்புகள் உண்டு.

A-க்கும் அதே மாதிரி வெவ்வேறான உறுப்புகள் இருப்பதால் B, A-ன் சரியான உபகணமாக முடியாது.

$$B = A.$$

எனவே, S-ன் ஒருமை உறுப்பு A-யிலும் B-யிலும் இருக்க வேண்டும். அதாவது a_k. $a_p = 1 \leq k \leq n$

$\therefore$ a_k, a_p-ன் எதிர்மாறு உறுப்பு.

$\therefore$ S' ஒரு களமாகும்.

6·2 சிறப்பு எண் (Characteristic)

வரையறை : R ஐ ஒரு வளையமாகக் கொள்க. R-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும், n என்ற மிகை முழு எண் இருந்து $na = 0$ என்றால், அந்த மிகை முழு எண் 'n'-களில் மிகச் சிறிய எண்ணை R-ன் **சிறப்பு எண்** எனலாம்.

குறிப்பு 1 : அப்படி ஒரு மிகை முழு எண் இல்லை என்றால் R-ன் சிறப்பு எண் பூச்சியமென்போம்.

குறிப்பு 2 : சாதாரணமாக R-ன் சிறப்பு எண் பூச்சியமாக இருக்கும். கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தை நோக்குக.

P என்ற மிகை முழு எண்கள் கணத்தை எடுத்துக்கொள்க. அந்தக் கணத்திலுள்ள முழு எண்களை, 3ஆல் வகுக்கும்போது, மீதம் 0 அல்லது 1 அல்லது 2 ஆகவே இருக்கும். எனவே, P என்ற கணத்தை ஈவைப் பொறுத்து s_0, s_1 s_2 மூன்று உபகணங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$s = \{s_0, s_1, s_2\}$ என்ற மூன்று உறுப்புகள்கொண்ட கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$$s_0 + s_1 = s_1 = s_1 + s_0$$

$$s_0 + s_2 = s_2 = s_2 + s_0$$

$$s_1 + s_2 = s_0 = s_2 + s_1$$

$\therefore$ s_0 இந்தக் கணத்தின் பூச்சியமாகும்.

$$s_0 \cdot s_1 = s_0 = s_1 \cdot s_0$$
$$s_1 \cdot s_3 = s_3 = s_3 \cdot s_1$$
$$s_0 \cdot s_3 = s_0 = s_3 \cdot s_0$$
$$s_1 \cdot s_1 = s_1$$

$\therefore s_1$ இந்தக் கணத்தின் ஒருமை உறுப்பு.

$\therefore s$ ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும்.

$s_r \cdot s_s = s_0$ என்க.

$s_r = s_3$ என்றால் $s_r \cdot s_3 = s_0$ ஆகும்

$\therefore r = 3.$

$\therefore s$-ன் சிறப்பு எண் 3 ஆகும். (பூச்சியமில்லாத சிறப்பு எண் உண்டு என்பதை நோக்குக).

6·2·1. தேற்றம்: D என்ற ஒவ்வோர் எண் அரங்கின் சிறப்பு எண்ணும் பூச்சியமாகவோ அல்லது பகாவெண்ணாகவோ இருக்க வேண்டும்.

முடிந்தால் D என்ற எண் அரங்கத்திற்குப் பூச்சியமில்லாத பகு எண் 'n' உண்டு என்று கொள்க.

அதாவது $n > 0$

மேலும் $n = n_1 \cdot n_2$. $\quad 1 < n_1 < n$

$1 < n_2 < n$

D-ன் ஒருமை உறுப்பு e எனின் $ne = 0$

$$\therefore (n_1 n_2)e = 0$$

இதை $(n_1 e)(n_2 e) = 0$ என்றும் எழுதலாம்.

$\therefore n_1 e = 0$ அல்லது $n_2 e = 0$ [D ஓர் எண் அரங்கமாதலால்]

$n_1 e = 0$ என்க.

$$n_1 a = n_1 (ea)$$
$$= (n_1 e) a$$
$$= 0.$$

$\therefore n_1 a = 0 \qquad n_1 < n.$

ஆனால் D-ன் சிறப்பு எண் 'n' ஆகவே $n_1 \nless n$.

$\therefore n$ ஒரு பகாவெண்ணே.

6·3. விகிதமுறு எண்கள் களம் (Field of Rational Numbers)

$a, b \in I$, $b > 0$ என்று இருக்கும்படி (a, b) என்ற வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஜதைகளால் ஆகிய கணம் Sஐ எடுத்துக்கொள்க.

அதாவது $S = \{(a, b) ; a, b \in I, b > 0\}$.

(a,b) ; (c,d) என்ற S உறுப்புகளிடையே

$(a,b) \sim (c,d)$ என்ற தொடர்பை வரையறுக்க.

$(a,b) \sim (c,d)$ எனின் $ad = bc$ ஆகும்.

$\sim$ என்ற தொடர்பைச் சமத்தொடர்பென நிரூபிப்போம்.

1. $(a,b) \sim (a,b)$ எனின் $ab = ab$ ஆகும்.

2. $(a,b) \sim (c,d)$ எனின் $(,d) \sim (a,b)$

ஏனெனில் இரண்டு தொடர்புகளின் வரையறையும் $ad = bc$ என்பதேயாகும்.

3. $(a,b) \sim (c,d)$; $(c,d) \sim (e,f)$ எனின்

$(a,b) \sim (e,f)$.

$(a,b) \sim (c, d)$ என்றால் $ad = bc$.........(1)

$(c,d) \sim (e,f)$ என்றால் $cf = de$......... 2)

$(1) \times f : \quad adf = bcf$

$(2) \times b : \quad cfb = deb$

$\therefore \quad adf = deb$

$\therefore \quad af = be$

$\therefore \quad (a,b) \sim (e,f)$

6·3·1. தேற்றம் : மேற்குறித்த '$\sim$' சமத்தொடர்பைப் பொறுத்து அமையும் S ன் எல்லாச் சமத்தொடர்புடைய கணங்களை யும் உடைய கணத்தை R என்க $[a,b] + [c,d] = [ad + bc, bd]$.

$[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$ என்ற முறையில் வரையறுக்கப்படும் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைக் கொண்டு R ஒரு களமென நிரூபி.

மேலும் $a \in R$ எனின், $[a, 1]$ என்ற அமைப்பிலுள்ள R-ன் எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணம் I, R-ன் உபவளைய மெனவும், $[a, 1] \rightarrow a$ என்ற மாற்றம் I'ஐ I-க்குமேல் ஒற்றுருவ மாற்றம் எனவும் நிரூபி.

$[a,b] \in S$ எனின் (a,b)ஐக் கொண்ட சமத்தொடர்புள்ள கணத்தை (a,b) என்போம்.

அதாவது $[a,b] = [a_1 b_1]$ என்றால் $(a,b) \sim (a_1 b_1)$ என்று பொருள்.

∴ சமத்தொடர்புள்ள கணம் $[a,b] = \{(x,y) ; [x,y) \in S, xb = ya]$ என்று வரையறுப்போம்.

$(a,b), (c,d) \in S \quad \therefore b \neq 0, d \neq 0. \therefore bd \neq 0.$

∴ $(ad+bc, bd) ; (ac, bd) \in S$ என்றாகும்.

∴ $[ad+bc, bd] ; [ac, bd]$ என்பவை சமத்தொடர்புள்ள கணங்களாகும்.

$[a,b] = [a_1 b_1] ; [c,d] = [c_1, d_1]$ என எடுத்துக் கொள்க.

$[a,b] + [c,d] = [ad + bc, bd]$.

$[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_1 d_1 + b_1 c_1 ; b_1 d_1]$

$ab_1 = ba_1 ; cd_1 = dc_1$

$ab_1 d d_1 = b a_1 d d_1 ; c d_1 b b_1 = d c_1 b b_1$

$\therefore (ad+bc) b_1 d_1 = (a_1 d_1 + b_1 c_1) bd.$

∴ சமத்தொடர்புள்ள கணங்களின் கூட்டல் ஒரு சமத்தொடர்புள்ள கணமாகும்.

$[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$.

$[a_1 b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_1 c_1 b_1 d_1]$

$ab_1 = ba_1 ; cd_1 = c_1 d.$

$\therefore ab_1 \cdot cd_1 = ba_1 c_1 d.$

அதாவது $ac \cdot b_1 d_1 = bd \cdot a_1 c_1$.

எனவே, பெருக்கலும் ஒரு சமத்தொடர்புள்ள கணமே. கூட்டல், பெருக்கல் இவைகளின் பரிமாற்று விதிகள், இவைகளுக்குச் சமத்தொடர்புள்ள கணங்கள் உட்பட்டிருக்கு மென்பது தெளிவு.

$[a,b], [c,d] [e,f]$ என்ற R-ன் மூன்று உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

$$([a,b] + [c,d]) + [e,f] = [ad+bc, bd] + [e f]$$
$$= adf + bcf, + bde, bdf]$$

$$[a, b] + ([c, d]+[e, f]) = [a, b]+[cf+de ; df]$$
$$= (adf+bcf+bde, bdf]$$

∴ கூட்டல் தொடர்பு விதிக்கு R கட்டுப்பட்டிருக்கிறது.

$[0, 1]+ [a, b]=[a,b]$.

$[1, 1] \cdot [a, b]=[a,b]$ என்பதால்

$[0, 1]$ R-ன் பூச்சியமாகவும் $[1, 1]$, ஒருமையுறுப்பாகவும் இருக்கும். ஆனால் d என்பது பூச்சியமில்லாத முழு எண் என்றால்,

$[d, d] = [1, 1]$

அதேபோல்

$[0, 1] = [0, d]$

எனவே, d என்ற பூச்சியமில்லாத முழு எண்ணுக்குப் பூச்சிய உறுப்பு $[0, d]$, ஒருமையுறுப்பு $[d, d]$ என்பதும் தெளிவு.

$[a, b] = [0, 1]$ என்றால் $a=0$.

$a \neq 0$ என்றால் $[a, b]$ஐ R-ன் பூச்சியமில்லாத உறுப்பாகக் கொள்ளலாம்.

$[a, b]+[-a, b]=[0, b^2]$. இங்கு $[0, b^2]$ R-ன் பூச்சிய உறுப்பு என்பதால், $[-a, b]$ என்பது $[a,b]$-ன் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு.

அதாவது $-[a, b]=[-a, b]$.

$[a,b] ([c, d]+[e, f])=[a, b]. [cf+de, df]$

$=[acf+ade, bdf]$

$[a, b]. [c, d] + [a, b]\cdot[e, f]$

$= [ac, bd]+[ae, bf] = [acbf+bdae, b^2df]$.

$= [acf+ade, bdf] [b, b]$

$= [acf+ade, bdf]$ [$\because$ $[b, b]$ ஒருமையுறுப்பு].

∴ பரவு விதிக்கு R கட்டுப்பட்டு இருக்கும்.

∴ R என்பது ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும்.

$[a,b]$ என்பது R-ன் பூச்சியமில்லாத உறுப்பாகக் கொள்க.

∴ $a \neq 0$, $b \neq 0$. ∴ $[b, a] \in R$.

$[a, b] \cdot [b, a]=[ab, ab]$.

$=[1, 1]$

∴ $[a, b]$-ன் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பு $[b, a]$ என்பது தெளிவு.

எனவே R ஒரு களமாகும்.

$a \in I$ என்று இருக்குமாறு $[a, 1]$ என்ற அமைப்பிலுள்ள R-ன் எல்லாக் கணங்களைக் கொண்ட கணத்தை I' என்க.

$[a, 1] \longrightarrow a$ என்ற I'ஐ I-க்கு மாற்றும் மேல் மாற்றத்தைக் கவனிக்க.

$[a, 1] = [b, 1]$ என்றிருக்க, $a = b$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ I'ஐ I-க்கு மேல் மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்ருனதுதான்.

மேலும் $[a,1] + [b, 1] = [a+b, 1] \longrightarrow a+b.$

$[a, 1] [b, 1] = [ab, 1 \longrightarrow ab.$

$\therefore$ $[I'$ஐ I-க்கு மேல் மாற்றம் ஓர் ஒற்றுருவமாகும்.

6·4. R-ன் உறுப்புகளை விகிதமுறு எண்கள் எனவும், Rஐ விகிதமுறு எண்களாலான களம் எனவும் வரையறுப்போம்.

மாதிரி : $\frac{1}{3}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக்கொள் $\frac{1}{3}$ ஐ $[1, 3]$ என்ற சமத்தொடர்புகளின் கணத்துக்கு ஈடாக எழுதுகிறோம்.

$$\frac{1}{3} = \frac{k}{3k} \text{ என்பதால்,}$$

$$(1, 3) = (k, l)$$

i.e., $1 \cdot l = 3k.$

i.e., $l = 3k.$

$\therefore$ $[1, 3] = [k, 3k].$

6·5. தேற்றம் : $ab > 0$ என்று இருக்கும்படியான முழு எண்கள் a, b-களைக் கொண்டு $\frac{a}{b}$ என்ற விகிதமுறு எண்கள் கணத்தை R_p என்று குறிக்க. R_p என்பதை வரிசைப்படுத்திய எண் அரங்கமெனவும், R களத்தை, R_p-ன் உறுப்புகளில் மிகை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வரிசைப்படுத்திய களமெனவும் நிரூபி.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}, \; ab > 0.$$

$\therefore$ $ad = bc.$

$ab > 0.$ என்பதால் a, b என்ற இரண்டும் மிகைஎண்களாகவோ, இரண்டு குறை எண்களாகவோதான் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ c, d-யும் அதே மாதிரிதான் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ $cd > 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in R_p \text{ எனக் கொள்க.} \right]$$

$$(ad+bc)\, bd = abd^2 + b^2cd$$
$$= d^2ab + b^2cd > 0$$

$\therefore$ கூட்டலைப் பொறுத்தவரை R_p என்ற கணம், ஓர் அடைப்புக் கணமாகும்.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$ac \cdot bd = ab \cdot cd$$
$$> 0.$$

$\therefore$ பெருக்கலைப் பொறுத்தும் R_p ஓர் அடைப்புக் கணமாகும்.

$\frac{a}{b}$ பூச்சியமில்லாத விகிதமுறு எண் என்ருல் $ab > 0$ அல்லது $ab < 0$.

$\therefore$ ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண் $\frac{a}{b}$ -ம் $\frac{a}{b} = 0$, $\frac{a}{b} > 0$, $-\frac{a}{b} > 0$ என்பதால் R களம் ஓர் வரிசைப்படுத்திய ஒன்றே.

6·6. தேற்றம் : வெவ்வேருன இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையே ஒரு விகிதமுறு எண் இருக்கும்.

$r, s \in R$. $r < s$ எனக் கொள்க.

$r < \frac{r+s}{2} < s$ என்பதை நிருபிப்போம்.

$r < s$ என்பதால்,

$$r + r < r + s.$$
$$\therefore \quad 2r < r + s$$
$$\therefore \quad r < \frac{r+s}{2}$$

அதேபோல் $\frac{r+s}{2} < s$ என்று நிருபிக்கலாம்.

குறிப்பு : இந்தத் தேற்றத்தின் முடிவைக்கொண்டு, விகிதமுறு எண்கள் அடர்த்தி (dense) எனலாம்.

6·7. தேற்றம் : a, b என்பவை மிகை விகிதமுறு எண்கள் என்றால், $na > b$ என்ற அசமம் இருக்கும்படியாக 'n' என்ற மிகை முழுஎண் இருக்கும்.

$$a = \frac{p}{q}$$

$$b = \frac{r}{s}\ p, q, r, s \in P.\ [P = \text{மிகை முழு எண்கள் கணம்}]$$

$$\frac{np}{q} > \frac{r}{s} \text{ என்றால்.}$$

$n\ (ps) > qr$ என்றிருக்கவேண்டும்.

$n = 2qr$ எனக்கொண்டால் மேற்கண்ட அசமம் சரியாக இருக்கும்.

p, s முழு எண்கள் என்பதால் $ps \geqslant 1$

$$\therefore\ 2ps > 1$$

$$2qr \cdot 2ps > 2qr$$

$$\therefore\ 2qr\ (ps) > qr$$

$$\therefore\ na > b.$$

6·8. எல்லா முழு எண்களையும் கொண்ட கணத்தை எண் அரங்கமெனக் கொண்டோம்.

D என்ற முழு எண்களாலான எண் அரங்கத்தை எடுத்துக் கொண்டு, D-ன் உறுப்புகள் $\frac{a}{b}$ என்ற ஈவுகளாலான களம் Fஐ நிர்ணயிக்கலாம். இந்த F என்ற களத்தை D-ன் ஈவுக்களமென் போம். எனவே, விகிதமுறு எண்களாலான களம், முழு எண்க ளாலான எண் அரங்கத்தின் ஈவுக்களமென ஆகிறது.

6·9. டெடிகீண்டு வெட்டு (Dedekind's cut)

வரையறை : விகிதமுறு எண்கள் களத்தை R என்க. அதன் உபகணமாக Aஐக் கொள்க. $[A \in R]$.

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால், A ஒரு டெடி கீண்டு வெட்டு எனலாம்.

1. A ஒரு காலிக் கணமன்று ; மேலும் $A \neq R$.

2. $a \in A$ என்னும் $b < a$ என்னும்படி b என்பது R-ன் ஏதாவதோர் உறுப்பு எனின் $b \in A$.

3. $a \in A$ என்றால், $c > a$ என்றிருக்கும்படி $c \in A$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

மாதிரி: 3-க்குக் குறைவாகவுள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களின் கணத்தை A என்க. அதாவது $A = \{ a ; a \in R, a < 3 \}$

1. A-ல் 1 என்ற எண் உள்ளது. 4 என்ற எண் A-ல் இல்லை.

ஆனால் R-ல் உள்ளது. $\therefore A \neq R$.

2. $a < 3, b < a$ என்றால் $b < 3$. $\therefore b \in A$.

3. $a, 3$ என்பவை இரு விகிதமுறு எண்கள். எனவே a-க்கும் 3-க்கும் இடையே ஒரு விகிதமுறு எண் உண்டு என்று நிரூபித்தோம் (6·6). அதை c என்போம். அதாவது, $a < c < 3$

$\therefore c > a$ மேலும் $c \in A$

$\therefore$ A என்பதை 3-ல் உள்ள வெட்டு என்போம். இதை C_3 எனலாம்.

அதேபோல் $A = \{a, a \in R, a < r\}$ என்பதை C_r என்றும், $A' = \{ a ; a \in R, a \geq r\}$ என்பதை C'_r என்றும் அழைப்போம்.

C_r மிகப் பெரிய விகிதமுறு எண் இல்லையெனக் கொண்டோம். C_r'-ல் மிகச் சிறிய விகித எண் 'r' உள்ளது. ஆனால், D என்ற வெட்டை வரையறுத்து, D' என்பதில் மிகச் சிறிய எண் இல்லையெனக் காண்பிக்கலாம். அப்போது D, ஒருவிகிதமுறு எண்ணில் உள்ள வெட்டாகாது. உதாரணமாக,

$$D = \{ d ; d \in R \; d^2 < 2 \}$$

1. $1 \in D$; $2 \notin D$ ஆனால் $\in R$ $\therefore D \neq R$.

2. $e < d$ எனின் $e^2 < d^2 < 2$. $\therefore e \in D$

3. $d \in D$ $d > 0$ என்க. $d^2 < 2 \therefore d^2 - 2 < 0$ அல்லது $2 - d^2 > 0$. $\therefore n(2-d^2) > 2d+1$ என்றிருக்கும்படி 'n' என்ற மிகை முழு எண் உள்ளது (6·7). $\therefore \dfrac{2d+1}{n} < 2 - d^2$

$\therefore n > 1$ என்பதால்,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\therefore \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 = d^2 + \frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq d^2 + \frac{2d+1}{n}$$

$$\leq d^2 + 2 - d^2$$

$$= 2.$$

$$\therefore d + \frac{1}{n} \in D$$

$$d + \frac{1}{n} > d$$

∴ 3ஆவது நிபந்தனை நிரூபிக்கப்பட்டது.

இப்போது D-ல் மிகச் சிறிய விகிதமுறு எண் கிடையாதென நிரூபிப்போம்.

$$D' = \{ d' ; d' \in R, d' > 0, d'^2 > 2 \}$$

$d' \in D$ என்க. d'ஐ விட D'-ல் சிறிய எண் உண்டு எனக் காண்பிப்போம். $d'^2 > 2$

$m(d'^2 - 2) > 2d$ (m = மிகை முழு எண்)

$$\therefore \frac{2d'}{m} < d'^2 - 2$$

$$\therefore \frac{2d'}{m} > 2 - d'^2$$

$$\therefore \left(d' - \frac{1}{m}\right)^2 = d'^2 - \frac{2d'}{m} + \frac{1}{m^2}$$

$$> d'^2 - \frac{2d'}{m}$$

$$> d'^2 + 2 - d'^2$$

$$> 2$$

$$\therefore \left(d' - \frac{1}{m}\right) \in D'$$

$$d' - \frac{1}{m} > 0 \quad \left(\because \; d' > 1 \;\; m \geqslant 1; \; \frac{1}{m} \leq 1 \right)$$

$$d' - \frac{1}{m} < d'$$

எனவே, D ஒரு விகிதமுறு எண்ணில் உள்ள வெட்டு ஆக முடியாது.

6·9·1. தேற்றம் : A என்பதை ஒரு வெட்டு என்றும், rஐ ஏதாவதொரு விகிதமுறு எண்ணாகவும் கொண்டால் $a+r \in A'$ என்று இருக்கும்படி A-ல் 'a' என்ற உறுப்பு இருக்கும். A-ல் சில மிகை விகிதமுறு எண்களாவது இருக்குமெனக் கொள்க. $r \in A'$ $0+r \in A'$ மேலும் $0 \in A$ தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. $r \notin A'$ $\therefore \; r \in A$

இப்பொழுது $b \in A'$ என்க.

$\therefore \; nr > b$ என்றிருக்கும்படி n என்ற மிகைமுழு எண் உண்டு.

$$\therefore \; nr \in A'$$

$\{ n \}$ என்ற இந்தக் கணத்திற்கு m என்ற மிகக் குறைந்த முழு எண்ணைக் கொள்க.

$$\therefore \; m > 1$$

$$\therefore \; (m-1)\, r \in A$$

$$(m-1)^r + r \in A'$$

$$\therefore \; a = (m-1)^r$$

6·9·2. K என்பதை விகிதமுறு எண்களிலுள்ள வெட்டுகள் எல்லாவற்றையும் கொண்ட கணமாகக் கொள்க.

வரையறை: $AB \in K. \;\; A + B \{ a + b \; ; \; a \in A, \;\; b \in A \}$ $A+B$ என்பது $\{ a+b; \; (a \in A, \; b \in B) \}$ என்ற உறுப்பு வடிவிலுள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களின் கணமாகும். இதை ஒரு வெட்டு என்பதற்கு, வெட்டுகளின் மூன்று நிபந்தனைகளை ஆராய்வோம்:

1. A, B என்பவைகளே காலிக்கணங்கள் அல்லவாதலால், $A+B$-யும் காலிக்கணமில்லை. $A \neq R, \; B \neq R$ என்பதால் $A+B \neq R$.

2. $a+b \in A+B, \; a \in A, \; b \in B$ என்க.

$c < a+b$ என்றால், $c-b < a, \; a \in A$

$\therefore \; c-b \in A \quad c = (c-b)+b$

இங்கு $(c-b) \in A, \quad b \in B$

$\therefore \ (c-b)+b = c \in A+B$

3. $a \in A$ என்றால் $d > a \quad d \in A$ என்றபடி d இருக்கும்.

$\therefore \ d+b > a+b$

$d+b$ என்பதால் $d \in A, \ b \in A$

$\therefore \quad d+b \in A+B. \quad \therefore \quad A+B$ ஒரு வெட்டாகும்.

மேலும் $A+B$ என்பது K கணத்தில் கூட்டல் விதியை வரையறுக்கிறது.

6·9·2·1. குறிப்பு: $A+B$ என்றகூட்டல் விதியை வரையறுத்த முறையிலேயே, கூட்டல் பரிமாற்று விதி, கூட்டல் சேர்ப்பு விதி இரண்டிற்கும் கூட்டல் விதி கட்டுப்பட்டிருக்கிறது என்பது தெளிவு.

C_0 என்ற வெட்டை நோக்குக.

$C_0 = \{ r; \ r \in R \ r > 0 \}$

$\therefore \quad A+C_0 = \{ a+r; \ a \in A, r \in R, r < 0 \}$

r என்ற குறை விகிதமுறு எண் என்பதால் $a+r < a, \ a \in A$

$\therefore \quad a+r \in A$

$\therefore \quad A+C_0 \leqslant A.$

மேலும் $a \in A, a_1 > a$ என்று இருக்கும்படி,

$a_1 \in A$ என்ற எண் உண்டு.

$\therefore \quad a_2 - a_1 < 0 \ \therefore \ a - a_1 \in C_0,$

$a = a_1 + (a - a_1).$

இங்கு $a_1 \in A, \ a - a_1 \in C_0.$

$\therefore \quad a \in A+C_0.$

$\therefore \quad A \subseteq A+C_0.$

$\therefore \quad A = A+C_0$

எனவே பூச்சிய உறுப்பு C_0 ஆகும்.

$A \in K$ என்றால்

$-A = \{ x; \ \ x \in R, x < -a', \ \ a' \in A' \}$

இப்போது $-A$ஐ ஒரு வெட்டு என நிரூபிப்போம்.

1. $A \in K$ A' ஒரு காலிக் கணமன்று ∴ $-A$-யும் காலிக் கணமன்று. மேலும் A-யும் காலிக் கணமன்று. ∴ $a \in A$

∴ $-a \notin -A$ [ஏனெனில் $-a < -a'$]

∴ $a' < a$-அதாவது A'-ன் உறுப்பு A-ன் உறுப்பைவிடச் சிறிது. இது நடவாத ஒரு காரியம். ∴ $-A \neq R$.

2. $y < x$ ∴ $y < -a', a' \in A'$ ∴ $y \in -A$

3. $x \in -A$

∴ $x < -a', \; a' \in A'$

$$x < \frac{x-a'}{2} < -a' \quad ∴ \quad \frac{x-a'}{2} \in -A$$

$$\frac{x-a'}{2} > x$$

∴ $-A$-ல் மிகப்பெரிய எண்ணே கிடையாது.

∴ $-A$ ஒரு வெட்டாகும்.

$a+x \in A+(-A)$ என்றால், $a \in A, x \in -A$ என்று பொருள்.

∴ $x < -a', \; a' \in A$ என்றாகும். $a+x < a-a'$

$a-a' < 0$ [∵ $a' > a$].

∴ $a+x < 0$.

∴ $a+x \in C_0$.

∴ $A+(-A) \subseteq C_0$.

$y \in C_0$ என்க. ∴ $y < 0$.

y ஐ விடப் பெரிய எண் y'ஐ எடுத்துக்கொள்.

$y < y' < 0$ ∴ $y'-y > 0$.

6·9·1. தேற்றத்தின்படி, $a \in A$, $a' \epsilon' A'$, $y'-y > 0$ என்பதால் $a+(y'-y) = a'$ என்றாகும்.

∴ $y = a + (y'-a')$

$y' < 0$ என்பதால் $y'-a' < 0$.

∴ $y'-a' \in -A$.

$a \in A$.

∴ $y \in A+(-A)$.

∴ $C_0 \subseteq +A(-A)$.

∴ $A+(-A) = C_0$.

6·9·3 K-ன் மிகை உறுப்புகள்

வரையறை : K-ன் மிகை உறுப்புகள் கணத்தை K_p என்றால் $K_p = \{ A, A \in K.$ A-யில் மிகை விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும் $\}$.

$A,\ B \in K_p$

$A + B \in K_p$ என்பது தெளிவு.

இப்போது, $A \in K$ என்றால் $A = C_0$

$A \in K_p$; $A \in K_p$ என்ற ஏதாவதொரு நிபந்தனை அடைய வேண்டும். $C_0 \notin K_p$, $-C_0 = C_0$ என்பதால் $-C_0 \notin K_p$ என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

$A \neq C_0$, $A \in K_p$ எனக் கொள்க.

$-A \in K_p$ என்பதை நிரூபிப்போம்.

$A \in K_p$ என்பதால் A-யில் மிகை விகிதமுறு எண்களே கிடையாது. மேலும் $A \in C_0$ என்பதால் எல்லாக் குறை விகிதமுறு எண்களும் A-யில் இல்லை. அதாவது A-ல் இல்லாத குறை விகிதமுறு எண் a' உண்டு என்பது தெளிவு.

அதாவது $a' \in A$ $a' \in C_0$.

$\therefore\ a' \in A'$.

$a' \in C_0$ என்பதால் $a' < 0$.

மேலும் $a' < \dfrac{a'}{2} < 0$

$\therefore\ 0 < -\dfrac{a'}{2} < -a'$.

$\therefore\ -\dfrac{a'}{2} \in -A$.

$-\dfrac{a'}{2} > 0$ என்பதால் $-A \in K_p$

அதேபோல் $A \in K_p$ என்றால் $-A \in k_p$ என்று நிரூபிப்போம்.

$A \in K_p$ என்பதால், A-யில் மிகை விகிதமுறு எண்கள் உண்டு:

$\therefore$ A-யில் முழுக்க முழுக்க மிகை எண்களே உண்டு.

$\therefore$ $x < -a'$ என்பதால் $(a' \in A')$ $-A$-யில் முழுக்க முழுக்க குறையெண்களே இருக்கும். $\therefore$ $-A \in K_p$.

[$A > C_0$ என்று குறித்து A-யை மிகைவெட்டு என்போம்.]

6

6·9·4 $AB \in K$ என்றால் $A > B$ ஆகவேண்டுமானால் $B \subset A$ என்றுதான் இருக்கவேண்டும். $B \subset A$ என்க. எனவே B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A-யில் உறுப்பாகும். மேலும் B-ல் இல்லாத உறுப்பு ஒன்றுவது A-யில் இருக்கவேண்டும். $a \in A$ $a \in B'$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$a < a_1 < a_2$ என்றபடி $a_1, a_2 \in A$ இரு உறுப்புகள் எடுத்துக் கொள்க.

$$a \in B'$$
$$-a_1 < -a$$
$$-a_1 \in -B$$
$$\text{மேலும் } a_2 - a_1 > 0$$
$$a_2 - a_1 \in A - B$$
$$\therefore A - B \in K_p$$
$$\therefore A - B > C_0$$
$$\text{அல்லது } A > B$$

$A > B$ என்க. மேலும் $A - B$ என்ற கணத்தில் $a \in A, r < -b'$ $b' \in B'$ என்றபடியான $(a+r)$ என்ற விகிதமுறு எண் இருப்பதாகக் கொள்க.

$$a + r > 0$$
$$r < -b'$$
$$\therefore a > -r$$
$$> b'$$
$$\therefore a \notin B$$
$$\therefore A \neq B \, (a \in A)$$

B என்ற கணத்தில் b என்ற ஏதாவது ஓர் உறுப்பை எடுத்துக் கொள்க.

$$b < b'$$
$$\therefore b < a$$
$$\therefore b \in A$$
$$\therefore B \subset A$$

குறிப்பு : $A \in K$ எனக் கொள்க. A-ன் தனிமதிப்பை $|A|$ என்று குறிப்போம்.

$A > C_0$ என்றால், $|A| = A$

$A < C_0$ என்றால் $|A| = -A$

$\therefore$ $|A| \in K$ மேலும் $A \neq C_0$ $|A| > C_0$

$A \in K_p$ எனின் $A > C_0$; எனவே A-ல் உள்ள மிகை விகித முறு எண்களின் கணத்தை A_p என்போம்.

$\therefore$ A_p காலிக் கணமன்று.

6·9·5 வெட்டுகளின் பெருக்கல்

வரையறை : A $B \in K$ என்றால் AB என்பதைக் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் வரையறுக்கலாம்.

1. $A > C_0$, $B > C_0$ என்றால், AB என்பது அதன் மிகை உறுப்புகள் $(AB)_p = \{ab;\ a \in A_p = b \in B_p\}$ என்று அமை யும்படி ஒரு வெட்டாகும்.

2. $A > C_0$, $B < C_0$ அல்லது $A < C_0$, $B > C_0$ என்றால். $AB = -(|A| \cdot |B|)$.

3. $A < C_0 = B < C_0$ என்றால் $|AB| = |A| \cdot |B|$

4. $AC_0 = C_0A = C_0$ [இந்தச் சமன்பாடு K-ன் எல்லா உறுப்புகள் A-க்கும் சரியாக இருக்கவேண்டும்.] இப்போது AB என்பதை ஒரு வெட்டு என்று நிரூபிப்போம்.

1. $A > C_0$, $B > C_0$ $\therefore$ A_p, B_p என்பவை காலிக் கணங்கள் அல்ல.

$\therefore$ $(AB)_p$ காலிக் கணம் இல்லை. எனவே, AB ஒரு காலிக் கணம் இல்லை. A ஒரு வெட்டு என்பதால் $a' \notin A$ என்றபடி a' உள்ளது. $\therefore$ A_p எல்லா உறுப்புகள் a-யும் $a < a'$ என்றபடி அமையும். அதேபோல் $b' \notin B$, $b < b'$ என்றபடி B-ன் எல்லா உறுப்புகளும் அமையும்.

$\therefore$ $ab < a'b'$ $[a \in A_p,\ b \in B_p]$

$\therefore$ $a'b'$ என்பது $(AB)_p$-ல் இல்லாத மிகை விகிதமுறு எண்,

$\therefore$ $AB \neq R$.

2. $ab \in (AB)_p$ $[a \in A_p,\ b \in B_p]$.

$0 < c < ab$ என்று அமையும்படி c இருந்தால்.

$$\frac{c}{a} < b \quad \therefore \quad \frac{c}{a} \in B.$$

$$c = a\left(\frac{c}{a}\right)$$

$a \in A.$

$$\frac{c}{a} \in B.$$

$\therefore \quad c \in (AB)_p$

3. $ab \in (AB)_p \quad [a \in A_p, b \in B_p]$ என்க.

B ஒரு வெட்டு என்பது $b_1 > b$ என்றிருக்கும்படி $b_1 \in B$ அமையவேண்டும்.

$\therefore \quad ab_1 \in (AB)_p.$

மேலும் $ab_1 > ab.$

$\therefore \quad (AB)_p$ எனவே (AB)-ல் மிகப் பெரிய எண் கிடையாது.

$\therefore \quad AB$ ஒரு வெட்டாகும்.

குறிப்பு 1: இங்கு வெட்டுகளின் பெருக்கலில் முதல்விதமான வரையறையைக் கொண்டு AB ஒரு வெட்டென்று நிருபித்தோம். அதேபோல் மற்ற விதத்தில் வெட்டுகளின் பெருக்கலை வரையறுக்கும்போதும் AB ஒரு வெட்டாகவே இருக்கும்.

குறிப்பு 2: பெருக்கல் வரையறையின்மூலம் பரிமாற்று விதியும் பெருக்கல் ஒருமையின் இருப்பும் உள்ளது என்பது தெளிவு.

எனவே, K என்ற கணம், மேலே வரையறுத்த முறைப்படி கூட்டல், பெருக்கல் இவைகளைப் பொறுத்தது. C_0ஐப் பூச்சிய உறுப்பாகவும் C_1ஐ ஒருமை உறுப்பாகவும் கொண்ட ஒரு களமாகும். இதை ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட களமெனவும் கூறலாம்.

K-ன் உறுப்பை மெய்எண் எனவும், Kஐ மெய் எண்களாலான களமெனவும் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 3: K-ன் உறுப்புகளின் பெருக்குத் தொகை K_p உறுப்பு ஆதலால், K_p-ல் K களத்தின் மிகை மெய் உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே, Kஐ வரிசைப்படுத்தப்பட்ட களமெனலாம்.

6.10 C_r என்ற வடிவிலுள்ள K-ன் உறுப்புகளைக்கொண்ட கணத்தை R' என்க. $r \in R.$

$r \longrightarrow C_r$ என்ற மாற்றம் Rஐ R'-க்குமேல் ஒன்றுக் கொன்ருன மாற்றமெனக் காண்பி. R' ஒரு களமாதலால், இந்த மாற்றத்தை ஒற்றுருவ மாற்றமெனக் காண்பி.

$r \neq s$ என்ருல் $C_r \neq C_s$ என்பது தெளிவு.

$\therefore$ $r \longrightarrow C_r$ என்பது Rஐ R'-க்குமேல் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றமாகும்.

மேலும் R' என்ற கணம் கூட்டலைப் பொறுத்தவரை ஒரு அடைப்புக் கணமாகும்.

$r, s \in R \qquad C_r \cdot C_s = C_{rs}$

இனிச் சமன்பாடு $r = 0$ அல்லது $s = 0$ என்ருல் சரியாக இருக்கும்.

$r > 0, s > 0$ என்ருல் $C_r > C_0, C_s > C_0$.

$\therefore \quad (C_r\, C_s)_p = C_r\, C_s$-ல் உள்ள மிகை உறுப்புகள்

$= \{ ab,\ a, b \in R,\ 0 < a < r, 0 < b < r \}$

$\therefore \quad ab < rs.$

$\therefore \quad ab \in C_{rs}.$

$\therefore \quad C_r \cdot C_s \subseteq C_{rs}.$

$0 < c < rs$ என்றிருக்கும்படி $c \in R$ என்று அமைந்தால், $0 < c < d < rs$ என்று இருக்கும்படி d என்ற விகிதமுறு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\therefore \quad \frac{d}{s} < r$$

$$\frac{d}{s} \in C_r$$

$$\frac{c}{d} < 1$$

$$\therefore \quad \frac{C_s}{d} < s$$

$$\therefore \quad \frac{c}{d} \in C_s$$

$$\therefore C = \left(\frac{d}{s}\right) \cdot \left(\frac{C_s}{d}\right)$$

$$\in C_r \cdot C_s.$$

$\therefore \quad C_{rs} \subseteq C_r \cdot C_s.$

$\therefore \quad C_{rs} = C_r \cdot C_s.$

மற்றவகைகளை நிரூபிக்க -- $C_t = C_{-t}$ என்பதைக் கொள்ளலாம்.

அதாவது $r < 0, \quad s > 0$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$$\begin{aligned} C_r \cdot C_s &= -[(-C_r) \cdot (C_s)] \\ &= -[C_{-r} \cdot C_s] \\ &= -C_{-rs} \\ &= C_{rs} \end{aligned}$$

$\therefore$ R' என்பது பெருக்கலைப் பொறுத்து ஓர் அடைப்புக் குணமாகும். $C_r \; C_{r^{-1}} = C_1$ என்பதால் $C_{r^{-1}}$ என்பது C_r-ன் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பாகும்.

$\therefore$ $r \longrightarrow C_r$ என்ற மாற்றம். Rஐ R'-க்கு மேல் ஒற்றுருவ மாற்றமாகும்.

6·11 மெய் எண்களின் சில தன்மைகள்

6·11·1 இரு வெவ்வேறான மெய்யெண்களிடையே ஒரு விகிதமுறு எண் இருக்கும்.

$A, B \in K \quad A < B$ என்று எடுத்துக்கொள்க.

$A < B$ என்பதால் $x \in B, \; x \notin A$ என்றிருக்கும்படியான ஒரு விகிதமுறு எண் x உள்ளது.

B ஒரு டெடிகீண்ட் வெட்டு என்பதால், B-யில் மிகப் பெரிய உறுப்புக் கிடையாது. $x < y$ என்ற அசமமாகவுள்ள $y \in B$ இருக்கும்.

$\therefore \; A \leqslant C_x < C_y < B.$

$\therefore \; C_y$ நமக்கு வேண்டிய உறுப்பாகும்.

6·11·2 A, B என்பவை மிகை மெய் எண்கள் எனின், $nA > B$ என்று இருக்கும்படி n என்ற மிகை முழு எண் உள்ளது.

A ஒரு மிகை மெய் எண் என்பதால் $C_0 < C_s < A$ என்று அமையும்படி $s \in R$ உள்ளது. மேலும் $B < C_t$ என்று இருக்கும்படி $t \in R$-ம் உள்ளது. (6·7) தேற்றத்தின்படி $ns > t$ என்று இருக்கும் படியாக n என்ற மிகைமுழு எண் உள்ளது.

$\therefore \quad C_n C_s > C_t.$

$C_n A > C_n C_s > C_t > B.$

$C_n = n$ என்று கொள்ளலாமாதலால்

$nA > B.$

6·11·3 வரிசைப்படுத்தப்பட்ட களம் F-ன் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணத்தை s என்க. s-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு $x \leqslant b$ என்று இருக்கும்படி F-ல் b என்ற உறுப்பு இருந்தால், F-ல் s-ன் மேல்எல்லை (upper bound) b எனலாம்.

b மேல் எல்லை எனின், $b+1$, $b+c$ என்றவிதமான உறுப்புகள் யாவையும் மேல்எல்லையாகக் கொள்ளலாம். எனவே, s-ல் உள்ள C என்ற உறுப்பைவிட F-ல் குறைந்த உறுப்பு, மேல் எல்லையாக முடியவில்லை. என்றால், C ஐ மிகக்குறைந்த மேல்எல்லை (least upper bound) என்போம்.

தேற்றம் : மெய் எண்களாலான வரிசைப்படுத்திய களம் K-ன் உபகணம் S காலிக் கணமில்லை என்றும், அதற்கு K-ல் மேல்எல்லை உண்டென்றும் கொண்டால், K-ல் s-க்கு மிகக் குறைந்த மேல் எல்லை இருக்கும்.

$$S = (A, B, C\ldots\ldots\ldots)$$

$$S \subset K$$

s-ன் மேல் எல்லை எனக் கொள்க.

A, B, C......என்பவைகள் விகிதமுறு எண்களின் கணங்களாகும். அவைகளின் கூட்டு 'L' என்க. எனவே A, B, C இவைகளில் உள்ள விகிதமுறு எண்களைக்கொண்ட கணமாக Lஐ எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

L என்பதை ஒரு வெட்டு என்று நிரூபிப்போம்.

1. S காலியில்லாத கணமாதலால் அதில் A என்ற ஓர் உறுப்பாவது இருக்கும். A ஒருவெட்டு என்பதால் A-ன் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாவது இருக்கும். $A \subseteq L$ என்பதால் L காலிக் கணமில்லை.

M, s-ன் மேல்எல்லை என்பதால் $A \leqslant M$, $B \leqslant M$ ......

$\therefore\ A \subseteq M, B \subseteq M$ என்றாகும்.

$\therefore\ L \subseteq M$ என்றும் இருக்கும்.

M ஒரு வெட்டு என்பதால் $M \neq R \quad \therefore L \neq R$

2. $b < a$ என்று இருக்கும்படி, $a \in L$, $b \in R$ என்ற இடை உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

$a \in L$ என்பதால், a என்பது, A, B, C என்ற கணத்தில் ஏதாவது ஒன்றிலாவது உறுப்பாக இருக்கவேண்டும். $a \in A$ என்போம். A ஒரு வெட்டு என்பதாலும் $b < a$ என்பதாலும் $b \in A \quad \therefore b \in L$ என்றாகும்.

3. A ஒரு வெட்டு என்பதால் $a \leq c$ என்று அமையும்படி $c \in A$ என்றிருக்கும்; $A \subseteq L$ என்பதால் $c \in L$ என்றாகும்.

எனவே L ஒரு வெட்டாகும். $\therefore L$ ஒரு மெய் எண்ணை நிர்ணயிக்கும்.

s-ன் எல்லா உறுப்புகள் A-யும் $A \subseteq L$ என்பதால் $A \leq L$ என்று கொள்ளலாம். [இங்கு A L ஐ மெய் எண்கள் என்று கொள்வோம்].

S கணத்தின் மேல்எல்லை L ஆகும்.

s-ன் மேல்எல்லை L' என்ற உறுப்பாகவும் இருந்தால்

$$A \leqslant L' \quad \therefore A \subseteq L'$$

$$\therefore L = \cup \ (A, B, \ldots\ldots) \quad \therefore L \subseteq L'$$

மெய் எண்களாகக் கொண்டால்

$$L \leqslant T$$

$\therefore$ L ஒரு மிகக்குறைந்த மேல் எல்லையாகும்.

குறிப்பு : மெய் எண்களின் களம், ஒரு வரிசைப்படுத்திய களமாகும். மேலும், அதற்கு மேல்எல்லை இருந்தால் மிகக் குறைந்த எல்லையும் இருக்கும்.

6·12 தேற்றம் : மெய் எண்களாலான களம் K-ன் உறுப்புகள் இரண்டை வரிசைப்படுத்தி (a, b) என்ற உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் C என்க.

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, \ b+d) \quad \text{[கூட்டல் வரையறை]}$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac-bd, \ ad+bc) \quad \text{[பெருக்கல் வரையறை]}$$

என்ற விதிகளை வரையறுப்போம். இந்தக் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகளைப் பொறுத்து Cஐ ஒரு களமென நிரூபிக்க.

மேலும் $a \in K$, $(a, 0)$ என்ற உறுப்பிலுள்ள C-ன் எல்லா உறுப்புகளைக்கொண்ட கணத்தை C-ன் உபகணமெனவும், அது K-க்கு ஒற்றுருவ மாற்றமாக அமையுமெனவும் நிரூபிக்க.

கூட்டல் வரையறையிலிருந்து பரிமாற்றுவிதி, சேர்ப்புவிதி இரண்டுக்கும் வரையறை கட்டுப்பட்டிருக்குமென்பது தெளிவு. C-யின் பூச்சிய உறுப்பு $(0, 0)$ என்பதும், (a, b)-ன் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு $(-a, -b)$ என்பதும் தெளிவு.

$$[(a, b)(c, d)](e, f) = (ac-bd, \ ad+bc)(e, f)$$
$$= [(ace-bde-adf-bcf) \ (acf-bdf+ade+bce)]$$

$$(a, b)[(c, d)(e, f)] = (a, b)(ce-df,\ cf+de)$$
$$= (ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf)$$

∴ பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்குப் பெருக்கல் வரையறை கட்டுப் பட்டிருக்கிறது.

$$(a, b)[(c, d)+(e, f)] = (a, b)(c+e,\ d+f)$$
$$= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be)$$
$$(a, b)(c, d)+(a, b)(e, f) = (ac-bd,\ ad+bc)+(ae-bf,\ af+be)$$
$$= (ac-bd+ac-bf,\ ad+bc+af+be)$$

எனவே பரவுவிதிக்கும் வரையறைகள் கட்டுப்பட்டு இருக்கின்றன.

$$(a, b)(c, d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$
$$(c, d)(a, b) = (ca-db)(cb+da)$$
$$\therefore\ (a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$$

∴ பரிமாற்று விதிக்குப் பெருக்கல் வரையறை கட்டுப்பட்டிருக் கிறது).

(1, 0) என்பது பெருக்கல் ஒருமை உறுப்பாகும்.

∴ C என்பது ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும். C-யின் பூச்சிய உறுப்பு $(0, 0)$ என்பதால், (a, b) பூச்சிய உறுப்பு இல்லையென்றால், a-யும் b-யும் 0-க்குச் சமமல்ல. a என்பது K என்ற வரிசைப்படுத்திய களத்தின் உறுப்பாதலால் $a^2 > 0$ ($a \neq 0$ என்க). அதேபோல் $b \neq 0$ என்றால் $b^2 > 0$

∴ (a, b) என்பது C-ன் பூச்சிய உறுப்பு இல்லையென்றால்

$a^2+b^2 > 0$. மேலும் $a^2+b^2 \neq 0$.

எனவே $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ C-ன் உறுப்பாகும்.

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},\ \frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$
$$= (1, 0)$$
$= C$-ன் ஒருமையுறுப்பு.

(a, b)-ன் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பு $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$a^2+b^2 \neq$ என்பதால் இது C-ல் ஓர் உறுப்பாகும்

$\therefore$ C ஒரு களமாகும்.

$a \in K$ என்றுள்ளபடி $(a, 0)$ என்ற வடிவத்திலுள்ள C-ன் உறுப்பாக எடுத்துக் கொள்க. அவைகளாலான கணத்தை K' என்க.

$(a, 0) \longrightarrow a$ என்ற மாற்றம் K'ஐ K-க்கு மேல் ஒன்றுக்கொன்றுன மாற்றமாகும்.

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0) \longrightarrow (a+b)$$
$$(a, 0) \quad (b, 0) = (ab, 0) \longrightarrow ab$$

எனவே, இந்த மாற்றத்தில் கூட்டல் பெருக்கல் என்பவைகள் அப்படியே இருப்பதால் இந்த மாற்றத்தை ஒற்றுருவ மாற்றமெனலாம்.

குறிப்பு : C களத்தின் உறுப்பைச் சிக்கல் எண் (Complex Number) என்றும், Cஐச் சிக்கல் எண்களின் களமென்றும் குறிப்பிடுவோம்.

6·12·1 C என்பது ஒரு வரிசைப்படுத்திய களமன்று. C என்பது ஒரு வரிசைப்படுத்திய களமென்றுல், அதிலுள்ள உறுப்புகளைக்கொண்ட களம் C_p ஒரு வரிசைப்படுத்திய அரங்கமாக வேண்டும்.

$(0, 1)$ என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்க.

$$(0, 1)^2 = (0, 1)\,(0, 1)$$
$$= (-1, 0)$$
$$(-1, 0) \longrightarrow -1 \text{ குறை உறுப்பு.}$$

எனவே, $a = (0, 1)$ என்ற உறுப்பின் a^2 ஒரு குறை உறுப்பாகிறது.

$\therefore$ C ஒரு வரிசைப்படுத்திய களமன்று.

6·12·2 ஒரு சிக்கலெண்ணின் இணையெண் (Conjugate of a Complex Number)

$u = (a, b)$ என்ற எண்ணின் இணையெண்.

$u^* = (a, -b)$ என்போம்.

$u = (a, b) \quad v = (c, d)$ என்க.

$$\begin{aligned}
(u+v) &= ((a, b) + (c, d)]^* \\
&= (a+c, b+d)^* \\
&= (a+c, -b-d) \\
u^*+v^* &= (a, -b)+(c-d) \\
&= (a+c, -b-d) \\
&= (u+v)^* \\
(u\,v)^* &= ((a, b)\,(c, d))^* \\
&= (ac-bd, ad+bc)^* \\
&= [ac-bd, -(ad+bc)] \\
u^*v^* &= (a, -b)\,(c, -d) \\
&= (ac-bd, -ad-bc) \\
&= (uv)^*
\end{aligned}$$

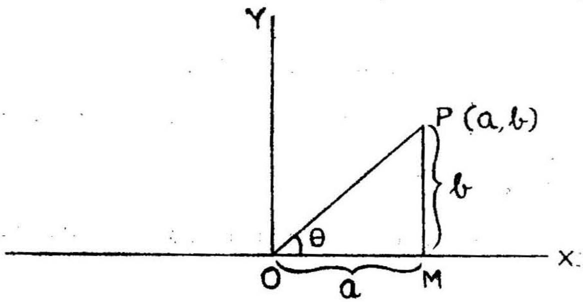
∴ $u \longrightarrow v$ என்ற Cஐ C-க்கு மேலுள்ள ஒன்றுக்கொன்றுன மாற்றத்தில் கூட்டலிலும் பெருக்கலிலும் மாறுபடாமலிருக்கும்.

∴ $u \longrightarrow u^*$ என்ற மாற்றம் ஒற்றுருவ மாற்றமாகும்.

6·12·3 சிக்கலெண்ணை வடிவ கணித முறையில் குறிக்க

(a, b) என்ற சிக்கலெண்ணை $a+ib$ என்று எழுதுவோம். எனவே $i=(0, 1)$ ஆகும்.

(a, b) என்ற எண்ணை, a, b என்பன x, y என்ற அச்சுத் தூரங்களாகக் கொண்டு பகுமுறை வடிவ கணிதத்தில் x, y அச்சுகளை எடுத்துக் குறிப்பிடவும்.



∴ $OP = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\tan\theta = \tan \times \hat{O}P$$

$$= \frac{b}{a}.$$

$\sqrt{a^2+b^2} = r$ = மட்டு (modulus)

$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \theta$ = வீச்சம் (amplitude) என்றும் குறிக்க.

மேலும் $a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$ என்பதால்

$a+ib = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்ருகும்.

$u = (a, b) = a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

$v = (\ , a) = c+id=R(\cos\theta+i\sin\theta)$.

என்று எடுத்துக் கொள்க.

$uv = (ac—b1, ad+bc)$

$= (c \ \ bd)+i(ad+bc)$

$= (r\cos\theta \ R\cos\phi-r\sin\theta \ R\sin\phi)$

$+ i(r\cos\theta \ R\sin\phi+r\sin\theta \ R\cos\phi)$

$— Rr[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]$

எனவே u, v என்ற இரு சிக்கலெண்களைப் பெருக்கிஞல் அவைகளின் மட்டுகள் பெருக்கப்படுகின்றன. ஆஞல், வீச்சம் கூட்டப்பட்டிருக்கிறது என்பதையும் கவனிக்க.

6·12·4 தேமாய்வரின் தேற்றம் (De-Moivere's Theorem)

n என்பது ஒரு மிகை முழு எண்ணுகவும் $u=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்றும் கொள்க.

$u^n=r^n(\cos n\theta+ i\sin\theta)$ என்று நிரூபிக்க.

$u^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ என்பதை S_n என்ற கூற்ருகக் கொள்க.

S_1 என்ற கூற்றுச் சரியே.

$S_k = u^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$ என்று கொள்க.

$\therefore \ u^{k+1}=u^k u.$

$=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\, r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta.$

எனவே S_{k+1} கூற்றுச் சரியே. ஆகவே, தொகுத்தறி முறைப்படி தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

6 12·5. வரையறை $u, v \in C$ என்வும், $n > 1$ என்பதை மிகை முழு எண்ணாகவும் கொள்க. $v^n = u$ என்றால்; v ஐ u-ன் n மூலம் என்போம்.

தேற்றம் : $u = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்பதில் n, n மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்க.

இதன் ஒரு மூலம் $v = s(\cos\phi + i\sin\phi)$ என்க.

$$\therefore v^n = s^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = u$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore s^n = r$$

$$\therefore s = r^{1/n}$$

மேலும் $n\phi = \theta$ என்றாகும்.

அல்லது $n\phi = \theta + 360^\circ k$ என்றாகும்.

$$\therefore \phi = \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \text{ என்றாகும்.}$$

$$v = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + k.360^\circ}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$$

என்றாகும்.

இங்கு k என்பது ஏதாவதொரு முழு எண்ணாகும்.

கிளைத் தேற்றம் : $u = 1$ என்றால்

$$u = 1(\cos\theta + \sin\theta) \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore v = 1\left(\cos\frac{k\cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{k\cdot 360^\circ}{n}\right)$$

$$\left(\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)^k$$

v-ன் வெவ்வேறான மதிப்புகளும் $\left(\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)$,

என்பதன் மடங்குகளாகவே இருக்கிறது.

$$\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n} = w \text{ என்றால்,}$$

1-ன் மற்ற மூலங்கள் w^2, $w, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w^n$ என்பவையே.

$w^n = 1$ என்பது தெளிவு.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. R என்பதை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளையுடைய பரிமாற்று வளையமெனக் கொள்க. $a, b \in R$, $a \neq 0$ எனின், $ax = b$ என்று இருக்குமாறு $x \in R$ உள்ளது. Rஐ ஒரு களமெனக் காண்பி.

2. மிகைமெய்யான எண்கள் எல்லாவற்றையும்கொண்ட கணமாக s ஐ எடுத்துக்கொள்க. '1'-க்குச் சமமாக இல்லாத மிகை மெய் எண்ணாக x ஐக் கொள்க. $a\ b \in s$ என்ற உறுப்புகளினிடையே $\oplus$, $\otimes$ என்ற கூட்டல் பெருக்கல் விதிகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுப்போம் :

$$a \oplus b = ab$$

$$a \otimes b = a \log x^b$$

இந்தக் கூட்டல் பெருக்கல் விதிகளைப் பொறுத்து, Pஐ ஒரு களமென நிரூபி.

3. R என்ற வளையத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாகக் கொள்க. $r \in R, r \neq 0$

(1) $m\,r = 0$ என்று இருக்கும்படி, m என்ற மிகை முழு எண் உள்ளதென்று காண்பி. (2) R-க்குப் பூச்சியச் சிறப்பெண் கிடையாதெனவும் காண்பி.

4. D என்ற எண் அரங்கத்தில், பூச்சியமில்லாத உறுப்பு 'a' என்பது, m என்ற மிகை முழு எண்ணுக்கு, $ma = 0$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்கிறது. அப்படிப்பட்ட முழு எண்களில் மிகக் குறைந்த எண் D-யின் சிறப்பெண் என நிரூபி. ஆனால், D ஒரு வளையமெனின், மேற்கண்ட முடிவு இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை யெனவும் நிரூபி.

5. F என்ற களத்தின் உறுப்புகள் a, b, c, d என்க.

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(3) $$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

(4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ என்ற சமன்பாடுகள் சரி எனக் காண்பி.

6. $a < b$ என்ற அமைப்பில் a, b என்ற மிகை விகிதமுறு எண்கள் இருந்தால் $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ எனக் காண்பி.

7. $r, s \in R$; $r < s$; $u, v \in R_p$ என்றால் $r < \frac{ur+vs}{u+v} < s$ எனக் காண்பி.

8. $r, s \in R$; n என்பது மிகை முழு எண் என்றால் $r < t_1 < t_2 \ldots < t_n < s$ என்றிருக்கும்படியாக $t_1\ t_2 \ldots t_n$ என்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளனவென்று காண்பி.

9. D என்பது வரிசைப்படுத்திய எண் அரங்கமெனின், D-ன் ஈவுகளும் வரிசைப்படுத்தப்பட்டதென்று நிரூபி.

10. A என்பது ஒரு வெட்டையும், A' என்பது A-யில் இல்லாத விகிதமுறு எண்களான கணம் எனவும் கொண்டு, கீழ்க் கண்டவற்றை நிரூபி.

(1) A'-ன் ஒவ்வொர் உறுப்பும், A-ன் உறுப்புகளைவிடப் பெரியது.

(2) A' ஒரு காலிக் கணமன்று.

(3) $A' \neq R$

(4) $a \in A'$, $b > a$ என்றால் $b \in A'$

11. $r, s \in R$ என்றால், $r < s$ என்று இருந்தாலொழிய $C_r \subset C_s$ என்று இருக்கமுடியாதெனக் காண்பி.

12. $A \neq B$ என்றிருக்கும்படியாக A, B என்பவை வெட்டுகளென்றால் $A \subset B$ ஆகவோ, $B \subset A$ ஆகவோதான் இருக்க வேண்டுமென நிரூபி.

13. A ஒரு வெட்டென்றும் $t \in R$ என்றும் கொண்டால் $E = [t+a, a \in A]$ என்பது ஒரு வெட்டென நிரூபி.

14. 11ஆம் கணக்கின் மறுதலையை எழுதி நிரூபி.

15. $A \in K$, $r \in R$ என்றால் $Cr < A$ என்றால் மட்டுமே $r \in A$ என நிரூபி.

16. வெவ்வேறான இரு மெய்யெண்களுக்கிடையே வெவ்வேறான 'n' விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்று காண்பி.

17. வெவ்வேறான இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே ஒரு விகிதமுறு எண் உள்ளதெனக் காண்பி.

18. வெவ்வேறான இரு மெய் எண்களுக்கிடையே ஒரு விகிதமுறு எண் இருக்குமென நிரூபி.

19. u, u^* என்பவை ஒரு சிக்கல் எண்ணையும், அதன் இணை எண்ணையும் குறித்தால், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

(1) $uu^* \in K$.

(2) $u+u^* \in K$.

(3) $(u^*)^* = u$

(4) $u \neq 0$ எனின் $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

(5) $u \in k$ என்றால்தான் $u = u^*$ ஆகும்.

20. S என்பதை ஒரு வளையமாகக் கொள்க. அதிலுள்ள உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்திய ஜதை (a, b) ஆல் ஆன கணத்தை T என்க. சிக்கல் எண்களுக்கான கூட்டல், பெருக்கல் வரையறைகளைப்போல் உள்ள வரையறைகளைக் கொண்டு T ஒரு வளையமெனக் காண்பி. எப்போது T ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும்?

21. கீழ்க்கண்டவற்றை, மட்டு, வீச்சு வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

1. $\sqrt{3} + i$
2. $1 - i\sqrt{3}$
3. $-\sqrt{3} + i$
4. $-3 - 4i$
5. 1
6. -1
7. i

22. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

1. $(1+i)^8$
2. $(\sqrt{2} - i)^{12}$
3. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$
4. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

23. u என்ற சிக்கலெண்ணின் இணை எண் u^* என்றால்,

1. $|u^*| = u$
2. $uu^* = |u|^2$
3. $u^{-1} = \frac{u^*}{|u|^2}$ $[u \neq 0]$ என்று காண்பி.

24. $u \neq 0$ என்றால் டிமாவேரேயின் தேற்றம் எல்லாக் குறை முழு எண் 'n'-க்கும் நிரூபிக்கலாமெனக் காண்பி.

25. $uv \in c$, 1. $|v+u| \leqslant |u| + |v|$.

2. $|vv| = |v| \cdot |v|$

என நிரூபி.

26. $u, v \in c \quad v \neq 0$ என்றால்

$$\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|}$$ என நிரூபி.

27. $x^8 = 1$ என்பதன் எட்டு மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

28. $x^6 = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் ஆறு மூலங்கள் $x^3 = 1$ என்பதன் மூன்று மூலங்களும் அவைகளின் குறை எண்களும் எனக் காண்பி.

29. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

1. $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{5}}$
2. $(-i)^{\frac{1}{4}}$
3. $(2i-2)^{\frac{1}{3}}$

30. $x^n = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் ஒன்றின் பெருக்கல் எதிர்மாறு உறுப்பும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் மூலமெனக் காண்பி.

7. பல்லுறுப்புக் கோவை

(POLYNOMIAL)

7·1 S என்பதை ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமெனக் கொள்க. x ஐ நிர்ணயிக்கப்படவேண்டிய ஓர் உறுப்பாக எடுத்துக் கொள்க.

$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$ [n = குறையில்லாத முழு எண்]; $a_i \in S$ [$i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$] என்ற கோவையை எடுத்துக்கொள்க. இதை S-ன் மேல் x-ல் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை (Polynomial in x on S) என்போம்.

7·2 $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots\ldots\ldots a_n x^n$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots\ldots\ldots b_m x^m \quad [m \geq 0]$$

$$b_i \in S \quad [i = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots m]$$

$f(x) = g(x)$ என்றால் பூச்சிய குணகங்களையுடைய உறுப்புகளைத் தவிர்த்து $f(x)$-ம் $g(x)$-ம் சர்வசமம். எனவே, பூச்சிய குணகங்களையுடைய உறுப்புகளைச் சேர்ப்பதாலோ, விட்டுவிடுவதாலோ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மாறாதென்பது இதன் பொருள்.

7·3 S ஐப் பொறுத்து நிர்ணயிக்கவேண்டிய x ஐக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எல்லாவற்றையும்கொண்ட கணத்தை $S[x]$ எனக் குறிப்போம்.

$f(x), g(x) \in S[x]$ என்றால்.

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + \ldots\ldots\ldots$ என்று கூட்டலையும்,

$f(x) \cdot g(x) = (a_0 b_0) x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots\ldots + (a_n b_m) x^{n+m}$ என்று பெருக்கலையும் வரையறுப்போம்.

அதாவது கூட்டல் வரையறையின்படி,

$f(x) + g(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^i-ன் குணகம், $f(x)$, $g(x)$ இவைகளில் x_i-ன் குணகங்களின் கூட்டல் ஆகும். மேலும், பெருக்கல் வரையறையின்படி $f(x) . g(x)$ என்ற கோவையில் x^i-ன் குணகம், $a_r b_s$ என்ற வடிவிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகும். [இங்கு r, s என்பவை குறையில்லா முழு எண்களாகவும் $r + s = i$ என்று அமையும்படியும் இருக்க வேண்டும்.]

7·3·1 தேற்றம்: மேற்கண்ட கூட்டல், பெருக்கல் வரையறைகளைப்பொறுத்து $S[x]$ என்பது ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமென நிரூபி.

கூட்டல் வரையறையிலிருந்து, அது கூட்டல் பரிமாற்று விதி, கூட்டல் சேர்ப்பு விதி இரண்டுக்கும் கட்டுப்பட்டிருக்கிறதென்பது தெளிவு.

$$\begin{aligned} f(x) + 0 \cdot x^0 &= (a_0 + 0)\, x^0 + a_1 x^1 + \ldots\ldots + a_n x^n \\ &= a_0 x^0 + a_1 x^1 \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n \\ &= f(x). \end{aligned}$$

எனவே, பூச்சிய உறுப்பு $0 . x^0$ அதாவது எல்லாக் குணகங்களும் பூச்சியமாகவுடைய கோவையே பூச்சிய உறுப்பாகும்.

மேலும்,

$$[a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots\ldots a_n x^n] + [(-a_0)\ x^0 + (-a_1)\, x^1 + (-a_n)\, x^n] = 0\, x^0$$

$\therefore\ a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots\ldots + a_n x^n$ என்ற கோவையின் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு.

$(-a_0 x^0 + (-a_1)\, x^1 + \ldots\ldots\ldots + (-a_n)\, x^n$ என்றுகும்.

$f(x) \cdot g(x)$ என்பதில் x^i-ன் குணகம்

$a_0 b_i + a_1 b_i - 1 \ldots\ldots\ldots + a_i b_0$

$g(x) \cdot f(x)$ என்பதில் x^i-ன் குணகம்

$b_0 a^i + b_1 a_i - 1 \ldots\ldots\ldots + b_i a_0$

இங்குள்ள a, b என்பவை எல்லாம் S-ன் உறுப்புகள் என்பதாலும் S ஒரு பரிமாற்று வளையமென்பதாலும்,

$$a_0 b_i + a_1 b_i - 1 \ldots\ldots + a_i b_0 = b_0 a_i + b_1 a_i - 1 \ldots\ldots\ldots + b_i a_0.$$

$$\therefore\ f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x)$$

எனவே $S[x]$-ல் பெருக்கல் வரையறை பரிமாற்று விதிக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கிறது.

$h(x) = c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots\ldots\ldots + c_p x^b$ என மூன்றுவது பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க.

$[f(x) \cdot g(x)]\ h(x)$ என்பதில் x^i-ன் குணகம் $(a_r b_s) c_t$ என்ற வடிவிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகும். [இங்கு r, s, t குறையில்லா முழு எண்கள் என்பதும் $r + s + t = i$ என்பதும் நினைவு கூர்க.]

அதேபோல் $f(x)\ [g(x) \cdot h(x)]$ என்பதில் x^i-ன் குணகம் $a_r (b_s c_t)$ என்ற வடிவிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

$$a, b, c \in S$$
$$(a_r b_s)\ c_t = a_r (b_s c_t) \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ $S[x]$-ல் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

$S[x]$-ன் ஒருமையுறுப்பு $1 \cdot x^0$ என்பதும் தெளிவு.

$\therefore$ $S[x]$ என்பது ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமென்பது புலனாகும்.

7·3·2 தேற்றம் : S உடன் ஒற்றுருவமாகவுள்ள உபவளையம் $S[x]$-ல் இருப்பதென நிரூபி.

$S[x]$-ல் $a \cdot x^0$ என்ற வடிவிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணத்தை S' என்க.

$a \cdot x^0 \longrightarrow a$ என்ற மாற்றம் S' ஐ S-க்குமேல் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுமென்பது தெளிவு.

மேலும், $a x^0 + b x^0 = (a + b) x^0 \longrightarrow a + b$

$$(a x^0) \cdot (b x^0) = (a b) x^0 \longrightarrow ab$$

என்பதால் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகள் இந்த மாற்றத்தினால் பாதிக்கப்படவில்லை.

$\therefore$ S' என்பது S-ன் ஒற்றுருவமாகும்.

மேலும் S', $S[x]$-ன் ஓர் உபவளையமாகும்.

7·3·3 தேற்றம்: S என்பது ஓர் எண் அரங்கமாயிருந்தால் ஒழிய $S[x]$ ஓர் எண் அரங்கமாகாது.

உதவித் தேற்றம் (Lemma)

வரையறை : $S[x]$ என்ற வளையத்தில் $f(x)$ என்பது பூச்சியமல்லாத உறுப்பாகக் கொள்க. $f(\ )$ ல் x^n-ன் குணகம் பூச்சியமாகாத படியாகக் குறையில்லாத முழு எண் 'n' என்பது மிக அதிகமான எண் என்றால் $f(x)$-ன் படி (degree) 'n' ஆகும். $a_n x^n$ என்பது $f(x)$ முன்னிற்கும் உறுப்பாகும்.

S என்பதை ஓர் எண் அரங்கமாகவும் $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றை $S[x]$-ன் பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

$[f(x)\ g(x)]$-ன் படி $= f(x)$-ன் படி $+ g(x)$-ன் படி என்று நிரூபி.

$f(x)$, $g(x)$ என்பவை பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளாதலால் அவைகளுக்குப் படியுண்டு. அவைகளை முறையே n, m என்க. அதாவது $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. எனவே, $f(x) \cdot g(x)$ என்பதன் படி 'n' + 'm'-க்கு மேல் அதிகமாக இருக்கமுடியாது.

மேலும், S என்பது ஓர் அரங்கமாதலாலும் $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ என்பதாலும் $a_n b_m \neq 0$

$a_n b_m$ என்பது x^{n+m}-ன் குணகம்

$\therefore$ $f(x) \cdot g(x)$ என்பதன் படி $n + m$ ஆகும்.

$f(x)$, $g(x)$ என்பவை $S[x]$-ல் பூச்சிமில்லாத உறுப்புகள் என்பதாலும் S என்பது எண் அரங்கம் என்பதாலும் $S[\ ]$-ன் உறுப்பாகிய $f(x) \cdot g(x)$-க்குப் படி உண்டு. அது பூச்சியமன்று.

$\therefore$ $S[x]$-ம் ஓர் எண் அரங்கமே.

மேலும், $S \subset S[x]$ என்பதால், $S[x]$ எண் அரங்கமாக இருக்கும்போது S-ம் எண் அரங்கமாக அமையும்.

7·4 ஒப்புறவு மாற்றம் (Homomorphism)

வரையறை : $t \longrightarrow t'$ என்ற மாற்றம் U என்ற வளையத்தை U' என்ற வளையத்திற்குமேல் மாற்றி, கூட்டல், பெருக்கல் விதிகள் பாதுகாக்கப்பட்டதால் இந்த மாற்றத்தை ஒப்புறவு மாற்றம் என்போம்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்றாகவும் இருந்தால், அது ஒற்றுருவ மாற்றமாகும்.

மாதிரி : $f(x) \longrightarrow f(s)$. $f(x) \in S[x]$ $s \in S$ என்ற மாற்றத்தை நோக்குக.

இதன் மூலம் $S[x]$, S-க்குமேல் மாற்றப்பட்டிருக்கிறது. கூட்டல், பெருக்கல் விதிகள் பாதுகாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஆனால், $f(x)$ போல் வேறு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $f(s)$-க்கு மாற்றமுடியுமாதலால், இது ஒன்றுக்கொன்றுன மாற்றமில்லை.

வரையறை : $f(x) \in S[x]$; $f(r) = 0$ என்றிருக்கும்படி $r \in S$ என்றும் $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் $[f(x) = 0$ எனச் சமமாகும்படி இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை$]$ மூலம் 'r' என்போம்.

குறிப்பு : வளையம் Sஐ ஒரு களமாகக் கொள்வதால் சில நன்மைகள் உண்டு. எனவே, Sஐக் களமாகக் கொண்டு F என்று குறித்து நோக்குவோம்.

7·5 F என்பது களமாகும்போது $F[x]$ ஓர் எண் அரங்கமாக இருக்கும்.

F என்ற களத்தின்மேல் நிர்ணயிக்கப்படவேண்டிய உறுப்பு x ஐக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் ஆன வளையத்தை $F[x]$ என்போம். $f(x), g(x) \in F[x]$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ என்று அமையும்படியாக $h(x) \in F[x]$ இருந்தால் $g(x)$ஐ $f(x)$-ன் காரணி என்போம்.

குறிப்பு : F-ன் பூச்சியமில்லாத உறுப்பு λ என்க. அதாவது $\lambda \cdot x^0 \in F[x]$

$\lambda(\lambda^{-1} f(x) = f(x)$ என்பதால் $F[x]$-ன் எந்த உறுப்பு $f(x)$-க்கும் λ ஒரு காரணியாகும்.

மேலும், $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ என்றால்

$f(x) = [\lambda\, g(x)]\ [\lambda^{-1} h(x)]$ என்றாகும். எனவே $g(x)$ என்பது $f(x)$-ன் காரணியானால் $\lambda g(x)$-ம் $f(x)$-ன் காரணியாகும்.

7·5·1 $f(x), g(x) \in F[x]$; $g(x) \neq 0$ என்றால், $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ என்று அமையும்படி $q(x)$-ம் $r(x)$-ம் $F[x]$ உறுப்புகளாகும். மேலும், $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$-ன் படி $<$ $g(x)$-ன் படியாகும்.

1: $f(x) = 0$ அல்லது $f(x)$-ன் படி $r <$ $g(x)$-ன் படி என்றால் $q(x) = 0$ $\quad r(x) = f(x)$ என்றாகும்.

2. $g(x)$-ன் படி $= 0$ என்றால் $g(x) = \lambda$ $[\lambda \in F, \lambda \neq 0]$

$\therefore f(x) = [\lambda^{-1} f(x)]\ \lambda$

$\therefore q(x) = \lambda^{-1} f(x)$; $r(x) = 0$ என்றாகும்.

3. இப்போது, n படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$-க்கும் பூச்சியமில்லாத பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x)$-க்கும், $q(x), r(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள் உள.

$f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும் என்ற கொள்கையை s_n என்க.

S_1 கொள்கையை எடுத்துக் கொள்க.

$f(x) = a x + b$; $g(x) = c x + d$ என்க.

$f(x) = a c^{-1} (c x + d) + b - a c^{-1} d$.

இங்கு $q(x) = a c^{-1}$; $r(x) = b - a c^{-1} d$ ஆகும்.

$\therefore$ S_1 என்பது சரியே.

இந்தக் கொள்கை s-க்குச் சரியென்று எடுத்துக் கொள்க.

s_{k+1} : $f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + \dots\dots\dots (a_{k+1} \neq 0)$

$0 < g(x)$-ன் படி $\leq k + 1$ என்க.

$g(x)$-ன் படி 'm' என்றால் $g(x) = b_m x^m + \dots\dots\dots\ b_m \neq 0$; $0 < m \leq k + 1$

$\therefore f(x) = b_m^{-1}\ a_{k+1} x^{k+1-m} g(x) + [f(x) - b_m^{-1}\ a_{k+1} x^{k+1} g(x)$

$t(x) = f(x) - b_m^{-1}\ a_{k+1}\ x^{k+1} g\ (x)$ என்பதன் x^{k+1} குணகம் $= 0$ என்பது தெளிவு.

$\therefore r(x) = 0$ அல்லது $t(x)$-ன் படி $< k + 1$

$\therefore t(x) = s(x)\, g(x) + r(x)$ $[\because t(x)$-ன் படி $k]$

ஆகவே, அதற்குக் குறைந்து இருக்கும்:

$\therefore f(x) = [b_m^{-1}\ a_{k+1}\ x^{k+1-m} + s(x)]\ g(x) + r(x)$

$\therefore s_{k+1}$ என்பது சரியே.

ஆகவே, தொகுத்தறியும் முறையின்படி தேற்றம் 'n' என்ற எல்லா மிகை முழு எண்களுக்கும் நிறுவப்பட்டிருக்கிறது.

கிளைத்தேற்றம்

$g(x) = x - c$; $c \in F$ என்றால்

$f(x) = q(x)(x-c) + r, r \in F$

$\therefore\ f(x) = r$

எனவே, $f(x) = q(x)(x-c) + f(c)$

$\therefore\ f(x) \in F[x]$; $c \in F$ என்றால் $f(x)$ஐ $(x-c)$ வகுக்கும் போது ஏற்படும் மீதி $f(c)$ ஆகும். மேலும் $f(x)$-ன் காரணி $(x-c)$ என்றால் $f(c) = 0$. அல்லது c, $f(x)$-ன் மூலமாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

7·5·2 $f(x) \in F[x[$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 'n' என்றும், $a\,x^n$ என்பது முன்னிற்கும் உறுப்பு என்றும் கொள்க. $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ என்ற $f(x)$-ன் மூலகங்கள் F களத்தின் வெவ்வேறான உறுப்புகள் என்றால்,

$f(x) = a(x-c_1)(x-c_2) \ldots\ldots (x-c_n)$ என நிரூபி.

c_1 என்பது $f(x)$-ன் ஒரே மூலமாகவும், $f(x)$-ன் படி '1' என்றும் கொண்டால்,

$f(x) = a(x-c_1)$ என்பது தெளிவு.

இப்போது $f(x)$-ன் படி $(k+1)$ என்க. c_1, $f(x)$-ன் மூலமெனின்

$f(x) = q(x)(x-c_1)$

$\therefore\ q(x)$-ன் படி k ஆகும்.

தேற்றம் தொகுத்தறி முறையின்படி 'k'-க்குச் சரியென்று கொள்வோம்.

c_i என்பது $f(x)$-ன் வேறு ஏதாவது மூலமெனின்,

$$f(c_i) = 0$$

அதாவது $q(c_i)(c_i - c_1) = 0$

'c'-க்கள் எல்லாம் வெவ்வேறானவை. ஆதலால்

$c_i - c_1 \neq 0$

$\therefore\ q(c_i) = 0$

அதாவது $c_i\ (\neq c_1)$ $q(x)$-க்கு மூலமாகும்.

$\therefore\ c_2, c_3 \ldots\ldots c_{k+1}$ என்பவை, $q(x)$-ன் வெவ்வேறான மூலங்கள் ஆகும்.

$\therefore\ q(x) = a(x-c_2)(x-c_3) \ldots\ldots (x-c_{k+1})$

$\therefore\ f(x) = a\,(x - c_1)\,(x - c_2) \ldots\ldots (x - c_{k+1})$

$\therefore$ தேற்றம் $(k + 1)$-க்கும் சரியென்றாகிறது.

$\therefore$ தேற்றம் 'n' என்ற எல்லா முழு எண்களுக்கும் நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

கிளைத்தேற்றம் 1

F என்ற களத்தின்மேல் உள்ள 'n' படி பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$-க்கு n-க்கு மேற்பட்ட வெவ்வேறான மூலங்கள் கிடையா.

$f(x) = a\,(x - c_1)\,(x - c_2) \ldots\ldots (x - c_n)$ என்று நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

c என்பது $f(x)$-ன் வேறு ஏதாவது மூலமானால்

$a\,(c - c_1)\,(c - c_2) \ldots\ldots (c - c_n) = 0$

$a \neq 0 \quad \therefore\ c = c_1$ அல்லது $c = c_2 \ldots\ldots$

அல்லது $c = c_n$ என்றே அமைய வேண்டும்.

$\therefore\ f(x)$-ன் மூலங்கள் $c_1, c_2 \ldots\ldots c_n$ என்ற 'n' மூலங்களேதான் இருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 2

F என்ற களத்தின் மேலுள்ள இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $g(x)$, $h(x)$ என்பவை F-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு 's'-க்கும்.

$g(s) = h(s)$ என்று அமைந்தால்,

$g(x) = h(x)$

$f(x) = g(x) - h(x)$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

$f(s) = 0$ [இங்கு s என்பது F என்ற களத்திலுள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.]

$f(x)$-ன் படி $g(x)$, $h(x)$ என்ற கோவைகளின் படிகளைவிட அதிகமாக இருக்கமுடியாது. ஆனால், மூலங்கள் $f(x)$-ன் படியைவிட அதிகமாக இருக்கின்றன. இது நடவாத காரியம்.

$\therefore\ f(x) = 0$

$\therefore\ g(x) = h(x)$

7·6 வரையறை : $F[x]$-ன் பூச்சியமில்லாத உறுப்பைப் (monic) பல்லுறுப்புக் கோவை என்றால், அதன் முன்னிற்கும் உறுப்பின் குணகம் '1' ஆக வேண்டும்.

வரையறை : $F[x]$-ல் உள்ள மானிக் மல்லுறுப்புக் கோவை $d(x)$ என்பதை $F[x]$-ல் பூச்சியமில்லாத இரு உறுப்புகள் $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றின் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணி என்றால்,

1. $f(x)$-க்கும் $g(x)$-க்கும், $d(x)$ காரணி ஆகவேண்டும். மேலும்,

2. $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றின் எல்லாப் பொதுக் காரணிகளும் $d(x)$-ன் காரணியாக வேண்டும்.

வரையறை : $f(x)\, s(x) + g(x)\, t(x)$

$(f(x), g(x), s(x), t(x) \in F[x])$

என்பதை $f(x)$, $g(x)$ ஒருபடிச் சேர்ப்பு என்போம்.

7·6·1 $f(x)$, $g(x)$ என்பவை $F[x]$-ன் பூச்சியமில்லா உறுப்புகளெனின், $f(x)$, $g(x)$ என்பவைகளின் ஒருபடிச் சேர்ப்புகளின் குறைந்த படியுள்ள மானிக் பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றின் மிகப்பெரிய பொதுக் காரணியென நிரூபி.

$f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$ $\quad r(x)$-ன் படி $< g(x)$-ன் படி

$g(x) = q_1(x)\, r(x) + r_1(x)$ $\quad r_1(x)$-ன் படி $< r(x)$-ன் படி

$r(x) = q_2(x)\, r_1(x) + r_2(x)$ $\quad r_2(x)$-ன் படி $< r_1(x)$-ன் படி

....

....

$r_{k-2}(x) = q_k(x)\, r_{k-1}(x) + r_k(x)$ $\quad r_k(x)$-ன் படி $< r_{k-1}(x)$-ன் படி

$r_{k-1}(x) = q_{k+1}\, r_k(x)$

$r_k(x)$ என்பது கடைசிப் பூச்சியமில்லாத மீதி ஆகும். இதில் இருந்து $r_k(x)$ என்பது $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றுக்குப் பொதுக் காரணியாகிறது.

மேலும், $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றின் பொதுக் காரணிகள் யாவையும் $r_k(x)$-ன் காரணியாகின்றன.

$r_k(x)$-ன் முன்னிற்கும் உறுப்பின் குணகம் c என்றால் $c^{-1}\, r_k(x)$ என்பதை மானிக் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கொள்ளவும்.

∴ $r_k(x)$ என்பது $f(x)$, $g(x)$ என்பவற்றின் மிகப்பெரிய காரணி ஆகும்.

வரையறை : $F[x]$-ன் பூச்சியமல்லா இரு உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று பகா உறுப்புகள் எனின், அவற்றின் மிகப் பெரிய காரணி 1 ஆகும்.

7·7 வரையறை : F என்ற களத்தின்மேல் மிகை படியையுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ஐப் பகாப் பல்லுறுப்புக் கோவை என்றால், அதை மிகை படியையுள்ள இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதமுடியாது.

குறிப்பு 1 : $f(x) = c^{-1}\ [cf(x)]$ என்பதால், $f(x)$ ஒரு பகாப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்போது அதன் காரணிகள் $cf(x)$ $(c \neq 0)$ என்பவையாகத்தான் இருக்கமுடியும்.

குறிப்பு 2 : இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கலின் படி (degree) அதன் காரணிகளின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை என்பதால் $F[x]$-ன் முதல் படிஉறுப்பு எல்லாம் பகா உறுப்புகளே.

உதவித் தேற்றம் : F-ன் பூச்சியமில்லாத பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரண்டும், $f(x) \cdot g(x)$ என்பது $p(x)$ என்ற $F[x]$-ன் பகா உறுப்பினால் வகுக்கப்படும்படி அமைந்தால், $f(x)$ என்பது $p(x)$ ஆல் வகுக்கப்படவேண்டும். மேலும் $g(x)$ என்பதும் $p(x)$ ஆல் வகுக்கப்பட வேண்டும்.

7·7·1 தேற்றம் : $F[x]$ என்பதிலுள்ள பூச்சியமல்லாத பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $f(x)$, $g(x)$ என்பதில் இக்குலிடியன் ஆல்கோரிதம் (Euclidean Algorithm) என்ற முறைப்படி $r_k(x)$ என்பது கடைசியான பூச்சியமல்லாத மீதியானால், அதன் முன்னிற்கும் குணகம் c என்பதாகக் கொள்க. அப்போது $c^{-1}r_k(x)$ என்பது $f(x)$, $g(x)$ என்பதன் அதிகபட்சப் பொதுக் காரணியாகும்.

$$f(x) = q(x)\,g(x) + r(x) \quad [\text{படி } r(x) < \text{படி } g(x)]$$

$$g(x) = q_1(x)\,r(x) + r_1(x) \quad [\text{படி } r_1(x) < \text{படி } r(x)]$$

$$r(x) = q_2(x)\,r_1(x) + r_2(x) \quad [\text{படி } r_2(x) < \text{படி } r_1(x)]$$

....

$r_{k-2}(x) = q_k(x)\,r_{k-1}(x) + r_k(x)$ [படி $r_k(x)$ < படி $r_{k-1}(x)$]

$r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)\,r_k(x)$.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து $r_k(x)$ என்பது $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும் வகுக்கும். மேலும், $f(x)$, $g(x)$ என்பதன் பொதுக் காரணி $r_k(x)$ஐ வகுக்கும்.

$r_k(x)$-ன் முன்னிற்கும் குணகம் c என்றால் $c^{-1}r_k(x)$ என்பது பொதுக் காரணியாகும். மேலும், இது ஒரு மானிக் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். எனவே, இது $f(x)$ $g(x)$-ன் அதிகபட்சப் பொதுக் காரணியாகும்.

ஒரே முறையில் காரணிப்படுத்தும் தேற்றம் (Unique Factorisation Theorem)

$f(x)$ என்பது F என்ற களத்திலுள்ள மிகைபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை என்றும், 'a' என்பதை முன்னிற்கும் உறுப்பின் குணகம் என்றும் கொள்க.

$f(x) = a\,[p_1(x)]^{n1}\,[p_2(x)]^{n2}\ldots\ldots[p_k(x)]^{nk}$ என்று அமையும் படியாக $p_1(x), p_2(x)\ldots\ldots p_k(x)$ என்ற வெவ்வேறான பகாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் உண்டு எனக் காண்பிக்க. மேலும், இப்படியாகக் காரணிப்படுத்தும் முறை ஒரு முறைதான் என்றும் காண்பிக்க.

[மேற்கண்ட உதவித் தேற்றத்துக்கும், மூலத் தேற்றத்திற்கும் நிரூபணம் தேவையில்லை. ஏனெனில், இவற்றில் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள், பகா எண்களைப்போல் அமைகின்றன].

வரையறை : $f(x)$ என்பது $(x-c)^m$ $[m \geq 1]$ என்பதால் வகுபட்டு $(x-c)^{m+1}$ என்பதால் வகுபடாமல் இருந்தால் F-ன் உறுப்பாகிய c ஐ F-ன் மேலுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$-ன் m மடங்கு மூலம் என்போம். $m = 2$ என்றால் c ஐ இருமடங்கு மூலம் என்போம்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. s என்பது ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமாகும். $s(x)$-ல் உள்ள பூச்சியத்தை மாதிரி உறுப்பாககொண்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணமும் $s(x)$-ன் உபவளையமெனக் காண்பி.

2. $a \longrightarrow a'$ என்ற மாற்றம் வளையம் U ஐ வளையம் V-க்கு மேல் ஒற்றுருவு மாற்றம் என்க. $f(x) = a_0 + a_1 x \ldots\ldots + a_n x^n$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை Uஐப் பொறுத்து உள்ளது. $f'(x) = a_0' + a_1' x + \ldots\ldots a_n' x^n$ என்ற $f'(x)$ ஐ வரையறுத்தால் $f(x) \longrightarrow f'(x)$ என்ற மாற்றம் $U[x]$ ஐ $V(x)$-க்குமேல் ஒற்றுருவு மாற்றம் எனக் காண்பி.

3. $f(x) = g(x)\,h(x)$ $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$) என்றும் $f(x)$ எல்லாக் குணகங்களும் p என்ற பகா எண்ணால் வகுபடும் என்றும் கொண்டால், $g(x)$-ன் எல்லாக் குணகங்களாவது அல்லது $h(x)$-ன் எல்லாக் குணகங்களாவது k ஆல் வகுபடுமென நிரூபி.

4. $f(x) \in F[x]$ என்க. $f(x)$-ன் காரணி $F[x]$ ன் ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை என்றால், $f(x)$-ன் ஒரு மூலம் F-ல் இருந்தாக வேண்டுமெனக் காண்பி.

5. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $f(x), g(x)$ என்பவைகளின் மிகப்பெரிய காரணிகளைக் கண்டுபிடி.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$; $g(x) = x^3 - x^2 - x^{-2}$
2. $f(x) = x^6 - 1$; $g(x) = x^2 + x + 1$
3. $f(x) = x^2 - 2x^2 + x + 4$; $g(x) = x^2 + x + 1$

6. கீழ்க்கண்ட $f(x), g(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மிகப் பெரிய காரணிகளைக் கொடுக்கப்பட்ட களத்தைப் பொறுத்துக் கண்டுபிடி.

1. $f(x) = x^3 + (2i + 1)\,x^2 + cx + i + 1$
   $g(x) = x^2 + (i-1)\,x - 2i - 2$
   (F = சிக்கல் எண் களம்)

2. $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})\,x - \sqrt{2}$
   $g(x) = x^2 - 2$
   (F = மெய் எண்கள் களம்)

7. F, F' என்பவை $F \subset F'$ என்ற வடிவிலுள்ள களங்கள். எனவே, $F[x] \subset F'[x]$ ஆகும்.

$f(x) = g(x)\,h(x)$ என்ற அமைப்பிலுள்ள $f(x)$, $g(x)\,h(x)$ என்பவை $F'[x]$-ன் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளாகும். இவை

கள் ஏதாவது இரண்டு $F(x)$-ன் உறுப்பானுல் மூன்ருவதும் அதன் உறுப்பு ஆகுமென நிரூபி.

8. F களத்தின் இரண்டு அல்லது மூன்றுபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ என்பது Fஐப் பொறுத்து பகாப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனின், $f(x)$-க்கு F-ல் மூலமே இருக்கக்கூடாதென நிரூபி.

9. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் எவை பகாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்று கண்டுபிடி. களத்தைச் சிக்கல் எண்கள் எனக் கொள்க. அப்படிப் பகா உறுப்பு இல்லையெனின் காரணீயப்படுத்து.

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 + 2x - 2$
3. $x^2 + 5x - 6$
4. $x^3 + 3$
5. $x^2 + 12$

10. கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்களின் மடங்கைக் கண்டுபிடி.

1. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 2$

   மூலம் $= -1$

   ($F =$ விகிதமுறு எண்கள் களம் R)

2. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

   மூலம் $= i$

   ($F =$ சிக்கல் எண் களம் C).

8. வெக்டார் வெளிகள்

(VECTOR SPACES)

8·1 வெக்டார் வெளி

வரையறை : F என்பதைக் களமாகவும், V என்பதைக் காலி இல்லாத கணமாகவும், எடுத்துக்கொள்ள F-ன் உறுப்புகளை எண்ணிகள் (scalars) என்றும், V-ன் உறுப்புகளை வெக்டார்கள் என்றும் வழங்குவோம். இந்த வெக்டார்கள், பௌதிகவியலில் கையாளும் வெக்டார்களின் பொதுப்படையானவை.

V என்பதை F-ன் மேல் உள்ள வெக்டார் வெளி என்று கூற வேண்டுமானால், கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு அது கட்டுப் பட்டிருக்க வேண்டும்.

1. கூட்டலைப் பொறுத்து V ஒரு பரிமாற்றுக் குலமாக இருக்க வேண்டும்.

2. $a(X+Y) = aX + aY \qquad a \in F; \qquad X, Y \in V$

3. $(a+b)X = aX + bX \qquad a, b \in F; \qquad X \in V$

4. $a(bX) = (ab)X \qquad a, b \in F; \qquad X \in V$

5. $1 \,.\, X = X \qquad 1 = F$-ன் ஒருமையுறுப்பு

மாதிரி : $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ $\{a_i \in F\}$ என்ற 'n' உறுப்புகளை வரிசையாக உள்ள கணம் V ஐ நோக்குக.

$(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n) + (b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots a_n + b_n)$ என்று கூட்டலையும்,

$\lambda(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2 \ldots\ldots \lambda a_n)$ என்று எண்ணி பெருக்கலையும் (scalar multiplication) வரையறுத்தால் இந்தக் கணம் ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

8·2 தேற்றம்

வரையறை: பூச்சிய வெக்டார் (Zero vector): V என்ற வெக்டார் வெளி ஒரு பரிமாற்று குலமாக இருக்க வேண்டுமெனக் கண்டோம். அந்தக் குலத்தில் சர்வசம உறுப்பை (identity element) '0' என்று குறிப்பிடுவோம். X என்ற வெக்டாரின் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பை $-X$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க

1. $a \in F$ என்றால் $a \cdot 0 = 0$
2. $X \in V$ என்றால் $0 \cdot X = 0$
3. $a \in F, X \in F$ என்றால் $a(-X) = (-a)X$ $= -(aX)$
4. $aX = 0$ என்றால் $a = 0$ அல்லது $X = 0$ ஆகும்.

1. $aX = a(X + 0)$

$= aX + a \cdot 0$

$a \cdot 0$ என்பது பூச்சிய வெக்டார் ஆகும்.

எனவே $a \cdot 0 = 0$

2. $aX = (a + 0)X$

$= aX + 0X$

$\therefore$ $0X$ என்பது பூச்சிய வெக்டார் ஆகும்.

$\therefore \; 0X = 0$

3. $0 = a0$

$= a(X - X)$

$= aX + a(-X)$

$\therefore$ $a(-X)$ என்பது aX என்பதன் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பாகும்.

$\therefore \; a(-X) = -(aX)$

$0 = 0X$

$= (a - a)X$

$= aX + (-a)X$

$\therefore \; (-a)X = -(aX)$

4. $aX = 0$ என்க.

$a = 0$ எனின் $aX = 0$

$X = 0$ எனின் $aX = 0$

$a \neq 0$ என்றால் $X = \frac{1}{a} 0 = 0$

$X \neq 0$ என்றால் $a(-X) = -(aX) = 0$

$$a(X - X) = 0$$

$$a0 = 0$$

$$\therefore \quad a = 0$$

8·3 F என்ற களத்தைப் பொறுத்து V என்ற வெக்டார் வெளியின் உபகணம் U என்பது உபவெளியெனின், அது கூட்டல், எண்ணி பெருக்கல் இவற்றைப் பொறுத்து அடைக்கப் பட்டிருக்க (closed) வேண்டும்.

U என்பது V-ன் உபவெளியெனின், அது கூட்டல், எண்ணி பெருக்கல் இவற்றைப் பொறுத்து அடைக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

மறுதலையாக, V-ன் உபகணமான 'U'-வைக் காலியில்லாத கணமாக எடுத்துக் கொள்க.

$X \in U, \quad 1 \in F$ என்றால்

$(-1) X \in U$

மேலும் $(-1) X = -(1X) = -(X)$

$\therefore$ U-ல் X-ன் கூட்டல் எதிர்மாறு உறுப்பு $-X$ ஆகும்.

$\therefore$ U கூட்டலைப் பொறுத்து அடைபட்டிருக்கிறது.

$\therefore$ U, V-ன் உபகுலமாகும்.

மேலும், (2), (3), (4), (5) என்ற நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப் பட்டிருக்கிறது.

$\therefore$ U என்பது ஒரு வெக்டார் வெளியாகும்.

8·4 ஒருபடி சார்பு (Linear Dependence)

வரையறை: V என்ற வெக்டார் வெளியின் 'n' வெக்டார்கள் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ கொண்ட கணம் $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$ ஒருபடி சார்புடையது என்ருல்.

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n = 0 \ldots\ldots (A)$$

என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும்படியான $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற எண்ணி உறுப்புகள் எல்லாம் பூச்சியமாக இருக்கக் கூடாது.

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்புடையது அன்றென்ருல், அதை ஒருபடி சார்பிலாக் கணம் (Linearly Independent Set) என்போம்.

குறிப்பு: (A) என்ற சமன்பாட்டில் $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots\ldots a_n = 0$ என்ருல் அந்தச் சமன்பாடு சரிசெய்யப்படும். $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்ற எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும்படியான நிலையிருந்தால் கணம் சார்பிலாக் கணமாகும். ஆனல், 'n' a-க்களில் ஒரு 'a' ஆவது பூச்சியமில்லாமல் இருந்தால், கணம் ஒருபடி சார்பு கணமென்போம்.

மாதிரி:
$$X_1 = (1, 2, 3)$$
$$X_2 = (7, 3, -2)$$
$$X_3 = (-31, -18, -1)$$
$$3 X_1 + 4 X_2 + X_3 = 0.$$

இங்கு $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 1$.

$\therefore$ X_1, X_2, X_3 என்பவை ஒருபடி சார்புள்ளவை.

8·5 தேற்றம்: F ஐப் பொறுத்து V என்பதை வெக்டார் வெளியாகக்கொண்டு கீழ்க்கண்டவற்றை நிருபிக்க.

1. $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_m\}$ என்ற கணத்தில், ஒரு வெக்டாராவது பூச்சிய வெக்டார் என்ருல், அது ஒருபடி சார்புள்ளது.

2. X என்ற ஒரே ஒரு வெக்டாரை உடைய $\{X\}$ என்ற கணம், $X \neq 0$ என்று இருந்தாலொழிய ஒருபடி சார்பு உள்ளது ஆகாது.

3. $V = \{X_1, X_2, \ldots\ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமென்ருல், V-ன் காலியில்லாத எந்த உபகணமும் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

4. $\{X, X_2, \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பு உள்ளது எனின். $\{X_1, X_2, \ldots X_m, X\}$ என்ற கணமும் ஒருபடி சார்பு உள்ளதேயாகும் $[X \in V]$.

5. $\{X_1, X_2, \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமென்றும் $b_i, c_i \in F \quad (i = 1, 2, \ldots m)$ என்ற உறுப்புகள்

$b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_m X_m = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots$ $c_m X_m$ என்றும் இருந்தால்,

$$b_i = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

6. $X_i \in V, r_i \in F \; [i = 1, 2, \ldots m]$ என்ற உறுப்புகள் $\{X_2 + r_2 X_1, X_3 + r_3 X_1 \ldots X_m \in r_m X_1\}$ என்ற கணத்தை ஒருபடி சார்புள்ளதாகச் செய்தால் $\{X_1, X_2, \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பு உள்ளதாகும்.

நிரூபணம்

1. $X_1 = 0$ என்க.

$1 \cdot X_1 \cdot 0 \cdot X_2 + \ldots + 0 \cdot X_m = 0.$

இங்கு X-ன் குணகம் 1 என்பதைக் கவனிக்க.

$\therefore \{X_1, X_2, \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பு உள்ளது.

2. $X \neq 0$ என்றால் $a X = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $a = 0$ ஆகும்.
$\therefore \{X\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.
$X = 0$ என்றால் $1X = 0$. $\therefore \{X\}$ சார்புள்ள கணமாகும்.

3. $\{X_1, X_2 \ldots X_m\}$ என்ற கணத்தின் உபகணத்தை $\{X_1, X_2, \ldots X_i\}$ $(1 \leq i < m)$ என்று கொள்வோம்.

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_i X_i = 0$ என்றால்

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + 0 X_i + 1 + \ldots + 0 X_m = 0$
ஆனால் $\{X_1 X_2 \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாதது.

$\therefore \quad a_1 = 0, a_2 = 0 \ldots a_i = 0.$

$\therefore \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_i X_i = 0$ என்பதால் $a_1 = 0$, $a_2 = 0 \ldots a_i = 0$ என்றுதான் இருக்கவேண்டும்;

எனவே, உபகணமும் ஒருபடி சார்பிலாதது.

4. $\{X_1, X_2 \ldots\ldots X_n\}$ ஒருபடி சார்புள்ளது எனின் $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_m X_m = 0$ என்பதில் ஏதாவது ஒரு $a_j \neq 0 \quad 1 \leq j \leq m$.
மேலும் $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_m X_m + 0 X = 0$
இங்கும் $a_j \neq 0$

$\therefore \{X_1, X_2, \ldots\ldots X_m, X\}$ என்பது ஒருபடி சார்புள்ளது.

5. $b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots\ldots + b_m X_m = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots \ldots + c_m X_m$

$\therefore (b_1 - c_1) X_1 + (b_2 - c_2) X_2 + \ldots \ldots + (b_m - c_m) X_m = 0$,

$\{X_1 X_2 \ldots X_m\}$ என்பது ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணம். எனவே,

$b_1 - c_1 = 0 \quad \therefore \quad b_1 = c_1$

$b_2 - c_2 = 0 \quad \therefore \quad b_2 = c_2$.

....

$b_m - c_m = 0 \quad \therefore \quad b_m = c_m$.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணம் ஒருபடி சார்புள்ளது என்பதால்

$a_2 (X_2 + r_2 X_1) + a_3 (X_3 + r_3 X_1) \ldots + a_m (X_m + r_m X_1) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள 'a'-க்கள் எல்லாம் பூச்சியமாகக் கூடாது.

$(a_2 r_2 + a_3 r_3 + \ldots \ldots + a_m r_m) X_1 + a_1 X_2 + \ldots\ldots + a_m X_m = 0$

$\therefore \{X_1, X_2 \ldots\ldots X_m\}$ ஒரு ஒருபடி சார்புள்ள கணமாகும்.

8·6 வரையறை

$X_i \in V, a_i \in F \quad (i = 1, 2, \ldots m)$ என்றால்,

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_m X_m$ என்பதை $X_1, X_2 \ldots X_m$ என்ற வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கை (Linear Combination) என்று கூறலாம்.

தேற்றம் : $X_1, X_2, \ldots \ldots X_m$ என்ற V-ன் வெக்டார்களின் எல்லா ஒருபடி சேர்க்கைகளும்கொண்ட கணம் U என்பதை V-ன் உபவெளியென நிரூபிக்க.

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots \dots + c_m X_m$$

$$Z = d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots \dots + d_m X_m$$

$$[c_i \in F, d_i \in F (i = 1, 2, \dots \dots m)]$$

$\therefore \quad Y + Z = (c_1 + d_1) X_1 + (c_2 + d_2) X_2 + \dots \dots (c_m + d_m) X_m$ எனவே $Y + Z$ என்பது $X_1, X_2, \dots \dots X_m$ என்பதன் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

$$\lambda Y = \lambda (c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots \dots + c_m X_m)$$

$$= (\lambda c_1) X_1 + (\lambda c_2) X_2 + \dots \dots + (\lambda c_m) X_m$$

$\therefore$ λY-யும் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

$\therefore$ U என்ற கணம், கூட்டலையும் எண்ணி பெருக்கலையும் பொறுத்து அடைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

U என்பது V-ன் உபவெளியாகும்.

வரையறை: மேற்கண்ட U உபவெளியை $U = [X_1, X_2, \dots \dots X_m]$ எனக் குறிக்கலாம். U என்ற உபவெளி, $X_1, X_2, \dots \dots X_m$ என்ற வெக்டார்களால் பிறப்பிக்கப்படுகிறது (generated).

குறிப்பு 1: $X_1 = 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 0 \cdot X_n$ என்பதால்

$$X_1 \in [X_1, X_2, \dots \dots X_n]$$

அதே போல் $\{X_1, X_2, \dots X_n\} \leq [X_1, X_2, \dots X_n]$ என்பதும் தெளிவு.

$$E_1 = (1, 0, 0, \dots \dots 0)$$

$$E_2 = (0, 1, 0, \dots \dots 0)$$

... ...

... ...

$$E_n = (0, 0, \dots \dots \dots \dots 1)$$

என்பதை V-ன் அலகு வெக்டார்கள் என்போம்.

$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots \dots + a_n E_n = (a_1, a_2 \dots a_n)$ என்பதால், V-ன், எல்லா வெக்டார்களின் பொதுப் பிறப்பாக்கியாக $(E_1, E_2 \dots E_m)$ ஐக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: தேற்றம் (8·5)-ல் (5)ஆவது பிரிவின்படி $X_1, X_2, \dots \dots X_n$ என்ற வெக்டார்கள் ஒருபடி சார்பிலாதவை என்றால், அதன் ஒருபடி சேர்க்கை அதே விதமாக இருக்குமெனக் கண்டோம்.

8·7 F என்ற களத்தைப் பொறுத்து, V என்ற வெக்டார் வெளியின் உறுப்புகள் $X_1, X_2 \dots \dots X_n$ என்க.

1. $U = [X_1, X_2, \dots X_n]$ என்ற உபவெளி, X_k-க்குப் பதில் $a_k X_k$ என்றால் மாறுபடாது.

$\{(1 \le k \le m)\ a \in F;\ a \neq 0\}$

2. X_k என்ற வெக்டாரை $X_k + b X_l$ $[1 \le k \le m,$ $1 \le l \le m;\ l \neq k,\ b \in F]$ என்று மாற்றினால் U உபவெளி மாறாது.

3. X_k என்ற வெக்டாரை $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ என்ற வெக்டாரால் மாற்றினால் U மாறாது.

4. $X \in V$ என்க. X என்பது $X_1, X_2 \dots X_m$ என்பதன் ஒருபடி சேர்க்கையாக இருந்தாலொழிய $[X_1, X_2 \dots X_m\ X] = [X_1\ X_2 \dots X_m]$ என்றாகாது.

5. $\{X_1, X_2 \dots \dots X_n\}$ என்பது ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகவும் $X \in [X_1, X_2 \dots X_n]$ என்றும் இருந்தால், $\{X_1, X_2, \dots X_n, X\}$ ஒரு சார்பிலாக் கணமாகும்.

நிரூபணம்

1. $A = \{X_1, X_2, \dots X_k \dots X_m\}$

$B = \{X_1, X_2, \dots a X_k \dots X_m\}.$

$X_k = a X_k$

$= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + a X_k + \dots + 0 \cdot X_m$

$\therefore$ X_k என்பது B-யிலுள்ள வெக்டார் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

மேலும், $X_j (j = k)$ என்ற வெக்டார்கள் A, B என்ற கணங்கள் இரண்டிலும் இருக்கின்றன.

$\therefore$ $[X_1, X_2, \dots X_k, \dots X_m] = [X_1, X_2, \dots a X_k, \dots X_m]$

2. இங்கு X_k என்பதை $X_k + b X_l$ என்று மாற்றுகிறோம்.

$\therefore$ $X_k = 1 (X_k + b X_l) - b x_l$

$\therefore$ $\bar{X}_k$ என்பது B-யிலுள்ள வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

3. இங்கு $X_k = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m$ என்று மாறும் போதும்,

$$X_k = \frac{1}{a_k}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m)$$

$$- \frac{a_1}{a_k} X_1 - \frac{a_2}{a_k} X_2 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} X_{k-1}$$

$$- \frac{a_{k+1}}{a_k} X_{k+1} \dots \dots \frac{a_m}{a_k} X_m$$

$\therefore$ X_k என்பது B-யிலுள்ள வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

4. $A = \{ X_1, X_2, \dots X_m \}$
$B = \{X_1, X_2, \dots X_m, X \}$ என்க.

$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots + a_m X_m$ என்றால், X என்பது $X_1, X_2 \dots X_m$ என்பவற்றின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

$$\therefore \quad Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_m X_m + b X$$

$$= b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_m X_m + b(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m)$$

$$= (b_1 + b a_1) X_1 + (b_2 + b a_2) X_2 + \dots + (b_m + b a_m) X_m$$

$$\therefore \quad Y \in [X_1, X_2 \dots \dots X_m]$$

$$\therefore \quad [X_1, X_2, \dots \dots X_m, X] \leq [X_1, X_2, \dots X_m]$$

அதே போல்

$Z \in [X_1, X_2, \dots X_m]$ என்றால்

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m$$

$$= (c_1 + a_1) X_1 + (c_2 + a_2) X_2 + \dots + (c_m + a_m) X_m - X$$

$$\therefore \quad Z \in [X_1, X_2, \dots X_m, X]$$

$$\therefore \quad [X_1, X_2, \dots X_m] \leq [X_1, X_2, \dots X_m, X].$$

எனவே, $[X_1, X_2, \dots X_m] = [X_1, X_2, \dots X_m, X]$

5. $\{ X_1, X_2, \dots X_m, X\}$ என்ற கணத்தை நோக்குக.

$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m + c X = 0 \dots\dots\dots (A)$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும்படி $c_1, c_2, \dots \dots c_m, c$ என்ற எண்ணி உறுப்புகள் இருக்கும்.

$c \neq 0$ என்றால்

$X = -c^{-1} \quad (c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m)$ என்று எழுதலாம்.

$\therefore X \in [X_1, X_2, \dots X_m]$.

ஆனால் $X \notin [X_1, X_2, \dots X_m]$

$\therefore \quad c = 0.$

$\therefore \quad c_1 X_1 + c_2 X_2 \dots + c_m X_m = 0.$

$\{X_1, X_2 \dots X_m\}$ என்பது ஒருபடி சார்பிலாக் கணமென்பதால் $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots c_m = 0.$

$\therefore$ (A) சமன்பாட்டில் $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots c_m = 0, c = 0.$

$\therefore$ $\{X_1, X_2, \dots X_m, X\}$ என்ற கணம் ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

8·8 தேற்றம்: V என்ற வெக்டார் வெளியின் உறுப்புகள் $X_1, X_2, \dots X_m$ என்றால், $U = [X_1, X_2, \dots X_m]$ என்ற உபவெளியிலுள்ள எந்த $m+1$ வெக்டார்கள் கணமும் ஒருபடி சார்புள்ள கணமாகும்.

$m = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்ள

$U = [X_1]$

$Y_1 = a_1 X_1, \; Y_2 = a_2 X_2$ என்று இரு வெக்டார்களை எடுத்துக் கொள்க.

$a_1 = 0$ என்றால் $Y_1 = 0.$

$\therefore \quad 1 \cdot Y_1 + 0 \cdot Y_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $Y_1, \; Y_2$ என்பவை ஒருபடி சார்புள்ளவை.

$m = k$ என்பதற்குத் தேற்றம் சரியாக இருப்பதாகக் கொள்ளுவோம்.

$m = k + 1$ என்றால்

$U = [X_1, X_2, \dots X_{k+1}]$ ஆகும்.

$\therefore \quad Y_1, Y_2, \dots Y_{k+2} \in U$ என்று $k+2$ வெக்டார்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore \quad Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{k+1} X_{k+1}.$$
$$Y_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_{k+1} X_{k+1};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_{k+2} = s_1 X_1 + s_2 X_2 + \dots + s_{k+1} X_{k+1}$$ என்றுகும்.

X_1-ன் எல்லாக் குணகங்கள் $a_1, b_1, \dots s_1$ என்பவையெல்லாம் பூச்சியமானுல்,

$Y_1, Y_2, \dots Y_{k+1}$ என்பவை $X_2, X_3, \dots X_{k+1}$ என்ற 'k' வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும். $m=k$ என்பதற்குத் தேற்றம் சரி என்றதால் $Y_1, Y_2, \dots Y_{k+2}$ என்ற '$k+2$' வெக்டார் களின் எந்த '$k+1$' வெக்டார்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடி சார்புள்ளவையாக இருக்கும். அவற்றுடன் '$k+2$' ஆவது வெக்டாரைச் சேர்க்கும்போது அவை யாவும் ஒருபடி சார்புள்ளவையாகவே இருக்கும்.

X_1-ன் எல்லாக் குணகங்களும் பூச்சியமில்லை என்று கொள்க. $a_1 \neq 0$ என்றுல்

$$a_1^{-1} Y_1 = X_1 + a_1^{-1} a_2 X_2 + \dots + a_1^{-1} a_{k+1} X_{k+1}$$
$$Y_2 - b_1 a_1^{-1} Y_1 = (b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_{k+1} X_{k+1}) - (b_1 X_1 + b_1 a_1^{-1} a_2 X_2 + \dots + b_1 a_1^{-1} a_{k+1} X_{k+1})$$

$\therefore \quad Y_2 - b_1 a_1^{-1} Y_1$ என்பது $X_2, X_3, \dots X_{k+1}$ என்ற 'k' வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

$\therefore$ அது $[X_2, X_3 \dots X_{k+1}]$ என்பதன் உறுப்பாகும்.

அதே போல்

$$Y_3 - c_1 a_1^{-1} Y_1 \in [X_2, X_3, \dots X_{k+1}]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_{k+1} - s_1 a_1^{-1} Y_1 \in [X_2, X_3 \dots X_{k+1}].$$

$\therefore \quad Y_2 - b_1 a_1^{-1} Y_1, \; Y_3 - b_1 a_1^{-1} Y_1, \dots Y_{k+2} - s_1 a_1^{-1} Y_1$ என்ற '$k+1$' வெக்டார்கள் ஒருபடி சார்புள்ளவை. $\therefore \; Y_1, Y_2, \dots Y_{k+2}$ என்பவை ஒருபடி சார்புள்ளவை.

8·9 ஆதாரம் (Basis)

வரையறை: V என்ற வெக்டார் வெளியின் உறுப்புகளைக் கொண்ட $\{X_1, X_2, \dots X_m\}$ என்ற கணம் Vன் ஆதாரமென்றுல், கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு அது உட்பட்டிருக்க வேண்டும்.

1. $\{X_1, X_2, \ldots X_m\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாக வேண்டும்.

2. V என்ற வெளி, $X_1, X_2, \ldots\ldots X_m$ என்ற வெக்டார்களால் பிறப்பாக்கிக்க வேண்டும்.

அதாவது $V = [X_1, X_2, \ldots\ldots X_m]$

8·9·1 தேற்றம்: V என்ற வெக்டார் வெளியின் ஓர் ஆதாரம் 'n' வெக்டார்களைக் கொண்டிருந்தால், V-ன் ஒவ்வோர் ஆதாரமும் 'n' வெக்டார்களைக் கொண்டிருக்கும்.

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$, $\{Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_m\}$ என்று இரண்டு ஆதாரங்கள் V-க்கு இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad V = [X_1, X_2 \ldots\ldots X_n] = [Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_m]$$

$m > n$ என்ருல், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_m$-ல் ஏதாவது $(n+1)$ வெக்டார்களை எடுத்துக்கொண்டால் அது ஒருபடி சார்புள்ளதாக வேண்டும்.

$\therefore$ $\{Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_m\}$ என்ற பூராக் கணமும் ஒருபடி சார்புள்ளதாகவே இருக்கவேண்டும்.

ஆனல், $\{Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_m\}$ என்பது 'V'-ன் ஓர் ஆதாரமாகும்.

$\therefore \quad m \not> n$, அதாவது $m \leq n$

அதேபோல் $n \not> m$ அதாவது $n \leq m$

$\therefore \quad m = n.$

8·10 வகையளவு (Dimension)

வரையறை: V என்ற வெக்டார் வெளியின் ஆதாரத்தில் 'n' வெக்டார்கள் இருந்தால், V-ன் வகையளவை 'n' எனலாம்.

குறிப்பு: பூச்சிய வெக்டாரைமட்டும் கொண்டுள்ள வெக்டார் வெளிக்கு வகையளவு '0' என்று கொள்ளுவோம்.

8·10·1 V-ன் வகையளவு 'n' (>0) என்ருல், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க.

1. V-யிலுள்ள எந்த $(n+1)$ வெக்டார்களும் ஒருபடி சார்புள்ளவை.

2. V-ன் எந்த 'n' ஒருபடி சார்பிலா வெக்டார்கள் கணமும் V-க்கு ஆதாரமாகும்.

3. n வெக்டார்களுக்குக் குறைந்து Vஐப் பிறப்பாக்கமுடியாது.

4. $V = [Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n]$ என்றால், $\{ Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n \}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாதது. மேலும், அது V-ன் ஆதாரமாகும்.

1. V-ன் ஓர் ஆதாரம் $\{ X_1, X_2 \ldots\ldots X_n \}$ என்க.

$\therefore \quad V = [X_1, X_2 \ldots\ldots X_n]$ என்றாகும்.

எனவே, (8·8) தேற்றத்தின்படி V-ன் எந்த $(n + 1)$ வெக்டார்கள் கணமும் ஒருபடி சார்புள்ளவையே.

2. $\{ Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n \}$ என்ற கணம் V-ன் 'n' ஒருபடி சார் பிலா வெக்டார்களைக் கொண்டிருக்கட்டும். இந்தக் கணம் V-ன் ஆதாரமில்லையென்றால்

$Y \notin [Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n]$ என்றபடி V-ல் Y என்ற உறுப்பு இருக்க வேண்டும்.

$\therefore \quad \{ Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n, Y \}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும். ஆனால், இந்தத் தேற்றத்தின் (1) பகுதியின்படி எந்த $(n + 1)$ வெக்டார்களும் ஒருபடி சார்புள்ளவை.

$\therefore \quad \{ Y_1, Y_2, \ldots . Y_n \}$ என்பது V-ன் ஓர் ஆதாரமாகும்.

3. முடிந்தால், V என்ற வெளி $m \; (< n)$ வெக்டார்களால் பிறப்பாக்குவதாகக் கொள்ளுவோம்.

$\therefore$ n வெக்டார்கள்கொண்ட எந்தக் கணமும் (8·8) தேற்றத்தின்படி ஒரு ஒருபடி சார்புள்ள கணமாக வேண்டும்.

ஆனால் V-ன் வகையளவு 'n' என்பதால், V-ல் 'n' ஒரு படி சார்பிலா உறுப்புகள் உண்டு என்பது தெளிவு.

$\therefore$ V என்ற வெளி 'n' ஐ விடக் குறைந்த அளவுள்ள வெக்டார்களால் பிறப்பாக்க முடியாது.

4. $V = [Z_1, Z_2 \ldots\ldots Z_n]$ என்க. முடிந்தால் $\{ Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n \}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்புள்ளவை எனக் கொள்க. அதாவது இதிலுள்ள 'n' வெக்டார்களில் ஒன்றுவது மற்ற $(n - 1)$ வெக்டார்களின் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்.

$\therefore$ V என்ற வெளி, $(n-1)$ வெக்டார்களால் பிறப்பாக்கப் படுகிறது. இது முடியாத ஒன்று.

$\therefore \quad \{ Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n \}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

8·10·2 தேற்றம் : V என்பதை n (> 1) என்ற வகையள வுள்ள வெக்டார் வெளி என்க.

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_r\}$ $(1 \leq r < n)$ என்பதை V-ன் ஒரு படி சார்பிலாக் கணமாகக் கொள்க.

அப்போது, $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots\ldots X_n$ என்ற வெக்டார்களைக் கண்டுபிடித்து $\{X_1, X_2 \ldots\ldots X_r, \ldots\ldots X_n\}$ என்ற கணத்தை V-ன் ஆதாரமாக்க முடியும்.

இதை 'ஆதாரத்தைப் பூர்த்திசெய்தல்' (Completion of basis) எனலாம்.

$V < n$ என்றால் $\{X_1, X_2 \ldots\ldots X_r\}$ என்ற கணம் V-ன் ஆதாரமாக முடியாது.

$[X_1, X_2, \ldots\ldots X_r]$ என்ற உபவெளியில் இல்லாத X_{r+1} என்ற V-ன் உறுப்பை எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore$ $X_1, X_2 \ldots\ldots X_r, X_{r+1}\}$ என்பது ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

இப்போதும் $r + 1 < n$ என்றால் இதே முறையில் X_{r+2} என்ற வெக்டாரைக் கண்டுபிடிக்க. இப்படியாக, $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots\ldots X_n$ என்ற வெக்டார்களைக் கண்டுபிடித்தால்,

$\{X_1, X_2 \ldots\ldots X_r, X_{r+1}, \ldots\ldots X_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடி சார் பிலாக் கணமாகும். இதில் 'n' உறுப்புகள் இருப்பதால், இது V-ன் ஓர் ஆதாரமாகும்.

8·10·3 தேற்றம்: V-ன் வகையளவு 'n' என்க. U என்பது V-ன் உபவெளியாகும் என்றால் 'U'-வின் முடிவுள்ள வகையளவு m உண்டு. மேலும் $m \leq n$.

$m = n$ என்று இருந்தாலொழிய $U = V$ என்றாகாது.

$n = 0$ என்றால் V-ல் பூச்சிய வெக்டார் ஒன்றேதான் இருக்கும்.

$\therefore \; m = 0. \;\; \therefore \; m = n.$

$n > 0$ என்க. இப்போது 'U'-ல் பூச்சிய வெக்டார் மட்டுமிருந் தால் $m = 0$, $\therefore$ $m < n$.

X_1 என்பதை 'U'-ன் பூச்சியமல்லாத வெக்டாராகக் கொள்க.

$U \neq [X_1]$ என்றால், $[X_1]$-ல் இல்லாத உறுப்பு X_2 இருக்கும். X_1, X_2 என்ற உறுப்புகள் ஒருபடி சார்பிலாதவையாகும்.

$U \neq [X_1, X_2]$ என்றால், $[X_1, X_2]$-ல் இல்லாத உறுப்பு X_3, U-ன் உறுப்பாகும். மேலும் X_1, X_2, X_3 என்பவை ஒருபடி சார்பிலாதவை.

$\therefore \quad U = [X_1 \quad X_2 \ldots \quad X_r]$ $(r \leq n)$ என்றுதான் இருக்க வேண்டும். ஏனெனின், n வெக்டார்களுக்கு மேலாக ஒருபடி சார்பிலாமல் இருக்கமுடியாது.

$\therefore \quad r \leq n.$

$U \leq V$ என்றால் $m \leq n$.

$m = n$ என்பதால் $n \leq m$ என்றாகும்.

$\therefore \quad V \leq U$ எனலாம்.

$\therefore \quad U = V.$

8·10·4 தேற்றம்

V-ன் இரு உபவெளிகள் U_1, U_2 என்க.

1. $U_1 \cap U_2$; $U_1 \cup U_2$ என்பவையும் V-ன் உபவெளிகளே.

2. $(U_1 + U_2)$-ன் வகையளவு $= U_1$-ன் வகையளவு $+ U_2$-ன் வகையளவு $-(U_1 \cap U_2)$-ன் வகையளவு என்றாகும்.

நிரூபணம்

1 $\quad U_1 \cap U_2$ என்ற உபகணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$U_1 \cap U_2 = \{ X ; X \in U_1, X \in U_2 \}$ என்க.

$X \in U_1 \quad Y \in U_1$ என்றால்

$X + Y \in U_1$ அதேபோல் $X + Y \in U_2$.

$\therefore \quad X + Y \in U_1 \cap U_2.$

மேலும் $c X \in U_1$.

$c X \in U_2$.

$\therefore \quad c X \in U_1 \cap U_2$

$\therefore \quad U_1 \cap U_2$ என்பது கூட்டல், எண்ணி பெருக்கலைப் பொறுத்தவரை ஓர் அடைபட்ட கணமாகும்.

$\therefore \quad U_1 \cap U_2$ என்பது V-ன் உபவெளியாகும்.

$U_1 + U_2 = \{ X + Y ; \quad X \in U_1, \ Y \in U_2 \}$

$Z_1 = X_1 + Y_1 \qquad X_1 \in U_1, Y_1 \in U_2$

$Z_2 = X_2 + Y_2 \qquad X_2 \in U_1, Y_2 \in U_2$

$\therefore \quad Z_1 + Z_2 = (X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2)$

$X_1 + X_2 \in U_1 ; \quad Y_1 + Y_2 \in U_2.$

$\therefore \quad Z_1 + Z_2 \in U_1 + U_2.$

அதே போல் $c Z_1 \in U_1 + U_2$.

$\therefore$ $U_1 + U_2$ கூட்டல், எண்ணி பெருக்கலைப் பொறுத்த வரை ஓர் அடைபட்ட கணமாகும்.

$\therefore$ $U_1 + U_2$ என்பது ஓர் உபவெளியாகும்.

2. $U_1 \cap U_2$ என்பது U_1-ன் உபவெளியாகும்.

$\therefore$ $U_1 \cap U_2$-ன் வகையளவு $\leq$ U_1-ன் வகையளவு.

அதே போல்

$U_1 \cap U_2$-ன் வகையளவு $\leq$ U_2-ன் வகையளவு.

$U_1 \cap U_2$-ன் வகையளவு $= r$ என்க.

$\therefore$ U_1-ன் வகையளவு $= r + s$

U_2-ன் வகையளவு $= r + t$ என்க.

$\{ X_1, X_2 \dots X_r \}$ என்பன $U_1 \cap U_2$-ன் ஆதாரமாகக் கொள்க.

இதனுடன் $Y_1, Y_2, \dots Y_s$ என்ற வெக்டார்களைச் சேர்த்து $\{X_1 \; X_2 \dots X_r; Y_1 \; Y_2 \dots Y_s\}$ என்ற $r+s$ வெக்டார்களின் கணம் U_1-ன் ஆதாரமாகக் கொள்ளமுடியும். அதே போல் $Z_1, Z_2, \dots Z_t$ என்ற வெக்டார்களைச் சேர்த்து $\{ X_1 \; X_2 \dots X_r ; Z_1 \; Z_2 \dots Z_t \}$ என்ற $r+t$ வெக்டார்கள் கணம் U_2-ன் ஆதாரமாகக் கொள்ள முடியும்.

எனவே,

$(X_1, X_2, \dots\dots X_r, Y_1, Y_2 \dots Y_s, Z_1, Z_2, \dots\dots Z_t)$ என்ற $r + s + t$ வெக்டார்களைக் கொண்டு $U_1 + U_2$ கணத்தைப் பிறப்பாக்கலாம்.

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_r X_r + b_1 Y_1 + \dots + b_s Y_s$$
$$+ c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots + c_t Z_t = 0 \qquad \dots\dots (A)$$

$Z = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots + c_t Z_t$ என்றால் $Z \in U_2$.

$\therefore \quad Z = - a_1 X_1 - a_2 X_2 - \dots - a_r X_r - b_1 Y_1 \dots - b_s Y_s.$

$\therefore \quad Z \in U_1.$

எனவே, $Z \in U_1 \cap U_2$. ஆதலால், $U_1 \cap U_2$-ன் ஆதாரம் $(X_1\ X_2 \dots X_r)$ என்பதன் ஒருபடி சேர்க்கை Z ஆகும்.

$$\therefore \quad Z = d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots + d_r X_r.$$

$$Z = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots + c_t Z_t.$$

$\therefore \quad d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots + d_r X_r - c_1 Z_1 - c_2 Z_2 - c_t Z_t = 0$ $(X_1, X_2, \dots X_r, Z_1, Z_2, \dots Z_t)$ என்ற கணம் U_2-ன் ஆதாரமென்பதால், இந்தக் கணம் ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

$$\therefore \quad d_1 = 0, d_2 = 0, \dots d_r = 0, c_1 = 0, c_2 = 0 \dots c_t = 0.$$

(A)-ல் $c_1 = 0, c_2 = 0, \quad c_t = 0$ என்றால் $(X_1, X_2 \dots X_r, Y_1, Y_2 \dots Y_s)$ என்ற கணம் ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

$$\therefore \quad a_1 = 0, a_2 = 0 \dots\dots a_r = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, \dots\dots b_s = 0$$

$\therefore$ (A)-ல் எல்லாக் குணகங்களும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$\therefore$ $\{X_1\ X_2 \dots X_r,\ Y_1, Y_2 \dots Y_s,\ Z_1, Z_2, \dots Z_t\}$ என்ற கணம் ஒரு ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகும்.

$\therefore$ இந்தக் கணம் $U_1 + U_2$ என்ற உபவெளியின் ஓர் ஆதாரமாகும்.

$\therefore$ அதன் வகையளவு $r + s + t$ ஆகும்.

$r + s + t = (r + s) + (r + t) - r$ என்பது தெளிவு.

8·11 ஒற்றுருவு (Isomorphism)

வரையறை : F என்ற களத்தைப் பொறுத்து, V, V' என்பவற்றை வெக்டார் வெளிகளாகக் கொள்க $X \longrightarrow X'$ என்ற V வெளியை V' வெளிக்குமேல் செய்யும் ஒன்றுக்கொன்றுன மாற்றத்தை, ஒற்றுருவு மாற்றமென்றால் கீழ்க்கண்ட கொள்கைகள் சரியாக இருக்கவேண்டும்.

1. $X + Y \longrightarrow X' + Y' \qquad X, Y \in V$
2. $\lambda X \longrightarrow \lambda X' \qquad \lambda \in F, X \in V$

அதாவது $X \longrightarrow X'$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றுன மேல்மாற்றம், வெக்டார் கூட்டலையும், எண்ணி பெருக்கலையும் பாதிக்காமல் இருக்கவேண்டும்.

வரையறை : $V_n\ (F)$ என்ற வெக்டார் வெளி என்பது அதன் பொதுஉறுப்பு $(a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_n)$ $(a_i \in F)$ என்ற F களத்திலுள்ள 'n' உறுப்புகள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டதாக வேண்டும்.

(1, 2, 3) என்பது $V_3(F)$-ன் உறுப்பு எனலாம்.

8·11·1 தேற்றம் : F என்ற களத்தைப் பொறுத்து V என்ற வெக்டார் வெளியின் வகையளவு 'n' ($n > 0$) என்றால், அது $V_n(F)$ என்ற வெளிக்கு ஒற்றுருவாகும்.

V-ன் ஓர் ஆதாரம் $\{X_1, X_2, \ldots \ldots X_n\}$ என்க.

$X \in V$ என்றால்.

$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots \ldots + a_n X_n$

$A = (a_1, a_2, \ldots . a_n)$ என்ற வெக்டாரை எடுத்துக் கொள்க.

$X \longrightarrow A$ என்ற மாற்றத்தைக் கவனிக்க. V என்ற வெளியின் எந்த உறுப்பும், $\{X_1, X_2, \ldots \ldots X_n\}$ என்ற ஆதாரத்தைப் பொறுத்து ஒரே வழியில்தான் எழுத முடியும். அப்போது, $X_1, X_2, \ldots . X_n$ என்பவற்றின் குணகங்களினால் ஆன வெக்டார் $(a_1, a_2, \ldots \ldots a_n)$ ஒரே முறையில்தான் அமையும். எனவே, இந்த மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்றான மேல்மாற்றமாகும்.

மேலும்,

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots \ldots + a_n X_n$$

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots \ldots + b_n X_n$$

என்றால்

$$X + Y = (a_1 + b_1)X_1 + (a_2 + b_2) X_2 + \ldots \ldots + (a_n + b_n) X_n$$

$$\therefore \quad X + Y \longrightarrow \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \ldots a_n + b_n\}$$

$$= \{a_1, a_2, \ldots \ldots a_n\} + \{b_1, b_2, \ldots \ldots b_n\}$$

$$= A + B$$

அதேபோல்

$$\lambda X = \lambda a_1 X_1 + \lambda a_2 X_2 + \ldots \ldots + \lambda a_n X_n$$

$$\longrightarrow (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \ldots \lambda a_n)$$

$$= \lambda (a_1, a_2, \ldots \ldots a_n)$$

$$= \lambda A$$

$\therefore$ இந்த மாற்றம் ஓர் ஒற்றுருவு மாற்றமாகும்.

8·12 $V_n(F)$ என்ற வெக்டார் உட்பெருக்கல் (Inner Product)

வரையறை :

$$X = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$
$$Y = (b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$$

$a_i, b_i \in F \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ என்க.

X, Y என்பவற்றின் உட்பெருக்கல்

$X \cdot Y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n$ என்று வரையறுக்கப்படும்.

எனவே, X, Y என்ற வெக்டார்களின் உட்பெருக்கல் ஓர் எண்ணி கணியமாகும்.

8·12·1 தேற்றம்

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$
2. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
3. $(\lambda X) \cdot Y = X \cdot (\lambda Y) = \lambda (X \cdot Y)$
4. $(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n) \cdot Y = a_1 (X_1 \cdot Y) + a_2 (X_2 \cdot Y) + \ldots\ldots + a_n (X_n \cdot Y)$

என்று நிரூபிக்க.

1. $X \cdot Y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n$.

$Y \cdot X = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots\ldots + b_n a_n$.

$\therefore \quad X \cdot Y = Y \cdot X$

2. $Z = (c_1, c_2, \ldots\ldots c_n)$

$X + Y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots a_n + b_n)$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad (X + Y) \cdot Z = \{(a_1 + b_1) c_1 + (a_2 + b_2) c_2 + \ldots\ldots + (a_n + b_n) c_n\}$$
$$= \{(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots\ldots + a_n c_n) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots\ldots + b_n c_n)\}$$
$$= \{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots\ldots + a_n c_n\} + \{b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots\ldots + b_n c_n\}$$
$$= X \cdot Z + Y \cdot Z$$

$$3.\ (\lambda X)\cdot Y = (\lambda a_1, \lambda a_2 \ldots\ldots \lambda a_n)\cdot(b_1, b_2 \ldots\ldots b_n)$$
$$= (\lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \ldots\ldots + \lambda a_n b_n)$$
$$= (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)\cdot(\lambda b_1, \lambda b_2, \ldots\ldots \lambda b_n)$$
$$= X\cdot(\lambda Y)$$

மேலும்,

$$(\lambda X)\cdot Y = \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n)$$
$$= \lambda(X\cdot Y)$$

$$4.\ (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n)\cdot Y$$
$$= (a_1 X_1)\cdot Y + (a_2 X_2)\cdot Y + \ldots\ldots + (a_n X_n)\cdot Y$$
$$= a_1(X_1\cdot Y) + a_2(X_2\cdot Y) + \ldots + a_n(X_n\cdot Y)$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்கண்ட கணங்களில் எவையெல்லாம் வெக்டார் வெளி என்று கண்டுபிடி.

1. $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ ($a, b, c \in R$ — விகிதமுறு எண்கள் களம்) என்ற மெய் எண்கள் கணம்.
2. $f(x+1) = f(x)$ என்றபடி இருக்கும் மெய்சார் பலன்களால் ஆன கணம்.
3. F என்ற களத்தைப் பொறுத்து, பூச்சியத்தை மாதிரி உறுப்பாகவும், 1ஐ x-ன் குணகமாகவும் கொண்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளான கணம்.

2. $a, b \in F$; X என்பது V என்ற வெக்டார் வெளியின் பூச்சியமல்லாத உறுப்பு.

$aX = bX$ என்றால் $a = b$ என்று நிரூபி.

3. F என்ற களத்தில் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்ற மாறுத உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்க.

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ என்றுள்ளபடியான (x_1, x_2, x_3) என்ற வரிசைப்படுத்தப்பட்ட F-ன் மூன்று உறுப்புகளைக்கொண்ட வெக்டார்களால் ஆன கணத்தை, $V_3(F)$-ன் உபவெளியெனக் காண்பி.

4. K என்பது மெய் எண்கள் களமென்க. $V_3(K)$ என்ற வெளியின் உபவெளிகள் கீழ்க்கண்டவற்றிலிருந்து கண்டுபிடி.

1. $(2x, 3x, 4z)$ என்ற உருவிலுள்ள கணம்.
2. $(x, 3x, x+5)$ என்ற உருவிலுள்ள கணம்.
3. $(x, 0, 1)$ என்ற வடிவிலுள்ள கணம்.
4. $(x-2y, x+4z, x+y+z)$ என்ற உருவிலுள்ள கணம்.

5. கீழ்க்கண்ட $V_3(K)$ என்ற வெளியின் வெக்டார்கள் ஒருபடி சார்புள்ளவையா? சார்பில்லாதவையா? என்று கண்டுபிடி.

1. $(1, -2, -1)$; $(-3, -1, 2)$
2. $(1, 1, 1)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 2, 3)$
3. $(1, 1, 1)$; $(1, 2, 3)$; $(0, 1, 0)$
4. $(1, 0, -1)$; $(2, 1, 3)$; $(-1, 0, 0)$; $(1, 0, 1)$

6. வெக்டார் வெளியின் இரு வெக்டார்களைக்கொண்ட கணம் ஒருபடி சார்புள்ள கணமாக வேண்டுமானுல், ஒரு வெக்டார் மற்றதன் எண்ணி மடங்காக வேண்டுமென நிரூபி.

7. F என்ற களத்தைப் பொறுத்து, X_1, X_2 என்பவை வெக்டார் வெளிகளாகக் கொள்க.

$a, b \in F$.

$\{X_1, X_2, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\}$ என்ற கணம் ஓர் ஒருபடி சார்புள்ள கணமெனக் காண்பி.

8. M என்ற வெக்டார் வெளியின் பிறப்பாக்கிகள் $X_1, X_2 \ldots X_k$ என்க. Y_1 Y_2, ... Y_l என்பவை M-ன் உறுப்புகளாகும். $X_1, X_2 \ldots X_n, Y_1, Y_2, \ldots Y_l$ என்பவை M-ன் பிறப்பாக்கிகள் எனக் காண்பி.

9. $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்ற கணம் வெக்டார்களால் ஆன ஒருபடி சார்புள்ள கணமெனின், இதிலுள்ள ஏதாவது ஒரு வெக்டார் மற்றவற்றின் ஒருபடி சேர்க்கையாக வேண்டுமென நிரூபி.

10. $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ என்பது ஒருபடி சார்பிலாக் கணமாகவும் $\{X_1, X_2, \ldots X_n, X\}$ என்பது ஒரு சார்புள்ள கணமாகவும் இருந்தால், X என்பது $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பதன் ஒருபடி சேர்க்கையெனக் காண்பி.

11. $[X_1, X_2, \quad X_n] = [Y_1, Y_2, \ldots Y_m]$ $n \neq m$ என்றால் மேற்கண்ட வெளிகளில் ஏதாவது ஒரு கணமாவது ஒருபடி சார்புள்ள கணமாக இருக்கவேண்டுமென நிரூபி.

12. $(a, b); (c, a)$ என்ற வெக்டார்கள் V_3 (F) என்ற வெளியின் ஓர் ஆதாரமென்றால் $a\,d \neq bc$ என்று காண்பி.

13. இரண்டு வெக்டார் வெளிகளும் ஒரே வகையளவு கொண்டிருந்தால், அவை ஒற்றுருவு உள்ளவை எனக் காண்பி.

14. V_4 (F)-ன் உபவெளி $(2, -1 - 0, 1)$; $(6, 1, 4, -5)$ $(4, 1, 3, -4)$ என்ற வெக்டார்களால் பிறப்பாக்கப்படுகிறது. அதன் ஓர் ஆதாரத்தைக் கண்டுபிடி.

15. $(2, -3, 1)$; $(0, 1, 2)$; $(1, 1, 2)$ என்ற வெக்டார்கள் ஆன கணம் V_3 (F) என்ற வெளியின் ஓர் ஆதாரமென நிரூபி. மேலும் (α, β, γ) என்ற உறுப்பை இந்த ஆதாரத்தைக்கொண்டு எழுதும்போது அதன் குணகங்களால் கிடைக்கும் வெக்டாரைக் கண்டுபிடி.

16. $(1, -1, 0)$; $(2, 1, 3)$ என்ற உறுப்புகளை உடைய V_3 $(K$ என்ற வெளியின் ஓர் ஆதாரத்தைக் கண்டுபிடி.

17. $[(1,2,1,0)$; $(-1, 1, -4,3)$; $(2,3,3,-1)$, $(0, 1, -1,1)]$ என்ற V_4 (K)-ன் உபவெளியின் வகையளவைக் கண்டுபிடி.

18. $V_4\ (K)$ என்ற வெளியின் உபவெளிகள்

$$U_1 = [(1, 2, -1, 0) ; (2, 0, 1, 1)]$$

$$U_2 = [(0, 0, 0, 1) ; (1, 0, 1, 0) ; (0, 4, -3, 1)]$$

ஆகும்.

U_1, U_2 என்பவற்றின் வகையளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க. மேலும் $(U_1 \cap U_2)$; $(U_1 + U_2)$ என்பவற்றின் வகையளவுகளையும் கண்டுபிடி.

19. Y என்பது $V_n\ (F)$-ன் ஒரு மாருத உறுப்பாகக் கொள்க. $X \cdot Y = 0$ என்ற வடிவிலுள்ள $V_n\ (F)$-ன் எல்லா வெக்டார்களும் சேர்ந்த கணம் $V_n\ (F)$-ன் உபவெளியெனக் காண்பி.

9. அணி

(MATRIX)

அணியின் இயற்கணிதம் முதன்முதலாக கேயிலி (Cayley) என்ற கணித மேதையால், 1857ஆம் ஆண்டு முறையாகத் தொகுக்கப்பட்டது. இந்த இயற்கணிதத்திற்கு அணி (Matrix) என்று பெயரிட்ட பெருமை சில்வெஸ்டர் (Sylvester) என்பவரையே சாரும். சென்ற நூற்றுண்டின் பிற்பகுதியில்தான் இந்தக் கணிதத்திற்குரிய முக்கியமான முடிவுகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டன.

9·1 தொடக்க இயற்கணிதம்

சில சமயங்களில் புதுவகையான எண்ணங்களை உருவாக்கி, அதற்கான செய்ம்முறைகளை வரையறுக்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தம் கணித ஆசிரியர்களுக்கு ஏற்படுவதுண்டு. அப்போது இயற்கணித முறையில் வழக்கமாக உபயோகிக்கப்படும் செய்ம்முறைகளை மனத்திற் கொண்டு, அவற்றை யொட்டியே புதிய கணிதத்திற்குச் செய்ம்முறைகளை அமைப்பது இயற்கை. ஆதலின், இயற்கணிதத்திற்குரிய விதிகளைச் சற்று ஆராய்வோம். இக் கணிதம் மெய் எண்கள், சிக்கல் எண்கள் என்பவைகளுக் கிடையேயுள்ள செயல்முறைகளை விரிவாகக் கூறும்.

'a', 'b' என்று இரு எண்களை எடுத்துக்கொண்டால், அவை சமமாகவோ ($a = b$) அசமமாகவோ ($a \neq b$) தான் இருக்க முடியும்.

எண் இயற்கணிதத்தில் அடிப்படையான செயல்முறைகள் கூட்டலும் பெருக்கலும்தான். a, b எண்களைக் கூட்டும்போது ஏற்படும் கூட்டுத்தொகையை $a + b$ என்று குறிக்கிறோம். அதே மாதிரி, பெருக்கும்போது ஏற்படும் பெருக்குத்தொகையை $a \cdot b$ அல்லது ab என்று குறிக்கலாம். கூட்டலும் பெருக்கலும் பரிமாற்று விதிகளுக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

அதாவது,

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

மேலும், கூட்டலும் பெருக்கலும் சேர்ப்பு விதியைச் சார்ந்திருக்கும்.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a (bc) = (ab) c$$

எனவே, இருபொருள் படுமெனப் பயமில்லாமல் அடைப்புகளை நீக்கி $a + b + c$ என்று எழுதலாம். அதே மாதிரி abc என்றும் எழுதலாம். கூட்டலும் பெருக்கலும் பரவு விதியைச் சாரும்.

$$a (b + c) = ab + ac$$

எண் முறையில், 1 (ஒருமை)-ம் 0 (பூச்சியம்)-ம் முக்கியமான சில தன்மைகளையுடையன. அதாவது 'a' என்ற எந்த எண்ணை எடுத்துக்கொண்டாலும்

$$a + 0 = a, 0 \cdot a = 0, 1 \cdot a = a$$

மேலும், $ab = 0$ என்றால், a, b இவற்றுள் ஏதாவதொன்றுவது 0-க்குச் சமமாக வேண்டும்.

இதை வகுமுறை விதி (Division Law) எனலாம். இதையே, மெய் (சிக்கல்) எண்கள் கணிதத்தில் பூச்சியத்திற்கு வகுக்குமெண்கள் இல்லையெனக் கூறலாம். இதிலிருந்து நீக்கு விதியை (Cancellation Law) நிர்ணயிக்கலாம். அதாவது,

$ax = by$ என்றும் $a \neq 0$ என்றுமிருந்தால் $x = y$ ஆகும்.

$a + x = b$ என்ற சமன்பாட்டில் x-க்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு. அதை $x = b - a$ எனலாம். குறிப்பாக $0 - a$ ஐ $-a$ எனலாம். $b-a$ஐ b-க்கும் a-க்குமுள்ள வித்தியாசமெனக் குறிப்பிடலாம். இதையே கழித்தல் விதியென அறிவோம்.

கழித்தலில் இயற்கணித விதிகளில் சில :

$$a - a = 0, \quad (-1) a = -a, \quad a (-b) = -ab,$$

$$a (b-c) = ab-ac.$$

$a \neq 0$ என்றால், $ax = 1$ என்பதில் x-க்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு. அதை $x = \dfrac{1}{a}$, அல்லது a^{-1} எனக் குறிக்கலாம்.

a^{-1} என்ற எண்ணை a-ன் தலைகீழ் எண் எனக் கூறலாம். அதே போல் $a \neq 0$ என்றால் $ax = b$ என்பது x-க்கு b/a அல்லது $a^{-1}b$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வையே கொடுக்கும். $\frac{b}{a}$ என்ற எண்ணை bஐ aஆல் வகுக்கும்போது ஏற்படும் ஈவு எனக் கூறலாம். இந்த ஈவு முறைக்குரிய விதிகளைப் பார்ப்போம்.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad [b \neq 0,\ d \neq 0]$$

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{ac} \quad [b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0]$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad [b \neq 0,\ d \neq 0]$$

r என்பது ஒரு மெய் எண்ணானால்,

a^r, $a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a$ (r காரணிகள்) என்பதைக் குறிக்கும்.

$a \neq 0$ என்றும், r குறையெண்ணாகவும் இருந்தால் a^r என்பது $(a^{-1})^{-r}$ என்பதைக் குறிக்கும். ஒவ்வொரு a-க்கும், $a^0 = 1$ என்றாகும்.

$$a \neq 0 \text{ என்றால் } a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

இம் முறைகளையும் விதிகளையும் மனத்தில் கொண்டு, நாம் அணியின் வரையறையைக் கூறலாம்.

9·2 அணியின் வரையறை 1 : F என்ற களத்தைப் பொறுத்த $m \times n$ என்ற அணியாவது, m நிரைகளும், n நிரல்களும் கொண்ட ஒரு நீண்ட சதுர வரிசையாகும்.

குறிப்பு : அணி என்பது வரிசையின் அமைப்பையே குறிப்பதால், அணிக்கு மதிப்புக் கிடையாது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

எனக் குறிக்கலாம். a_{11}, a_{12}, ... a_{mn} என்ற எண்களை அணியின் உறுப்புகள் எனலாம். 'i'-த்து நிரை, 'j'-த்து நிரல் இவற்றில் அமையும் உறுப்பை a_{ij} என்று கூறும்போது,

அணி $A = (a_{ij})$ எனக் குறிக்கலாம்.

வரையறை 2: சதுர அணி (Square Matrix) : $n \times n$ வகை அணியை n வரிசை சதுர அணி எனலாம்.

$$\text{சதுர அணி} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a_{11}, a_{22}, ...a_{nn} என்பவை ஒரு மூலைவிட்டத்தை உண்டாக்கும். அந்த எண்களை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் எனலாம்.

வரையறை 3: பூச்சிய அணி (Zero Matrix) : எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகக் கொண்ட $m \times n$ அணி, பூச்சிய அணியாகும். அதை $\underset{m}{0}^{n}$ அல்லது சுருக்கமாக 0 என்று குறிக்கலாம்.

வரையறை 4: அணி அலகு (Unit Matrix) : மூலைவிட்ட உறுப்புகள் ஒன்றாகவும் மற்ற உறுப்புகள் பூச்சியமாகவும்கொண்ட n வரிசை சதுர அணியே அணி அலகாகும். இதை I_n அல்லது சுருக்கமாக I எனலாம்.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})$$

இங்கு $i = j$ என்றால் $\delta_{ij} = 1$

$i \neq j$ என்றால் $\delta_{ij} = 0$ என்றாகும்.

δ_{ij} ஐக் கிரானாக்கர் டெல்டா (Kronecker delta) எனலாம்.

வரையறை-5: மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix): மூலைவிட்டத்தைத் தவிர்த்து மற்ற இடங்களிலுள்ள உறுப்புகளைப் பூச்சியமாகக்கொண்ட அணியை, மூலைவிட்ட அணி எனலாம். மூலை விட்ட அணி ஒரு சதுர அணியாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= dg\,(a_{11}, a_{22}, \cdots \quad , a_{nn})$$

வரையறை 6: எண் அணி (Scalar Matrix): மூலைவிட்ட அணியில் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் சமமாகவுள்ள அணியை எண் அணி யெனலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$$

$$= dg\,(\alpha, \alpha, \cdots\cdots, \alpha).$$

குறிப்பாக, அலகு அணியும், சதுர பூச்சிய அணியும் எண் அணிக்கு உதாரணங்களாகும்.

வரையறை 7: முக்கோண அணி (Triangular Matrix): மூலைவிட்டத்திற்கு மேலேயுள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாகும்போது, அந்த அணியைக் கீழ் முக்கோண அணி (Lower triangular matrix)

எனலாம். அதேபோல் மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழேயுள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாகும்போது, மேல் முக்கோண அணி (Upper triangular matrix) உருவாகிறது. இந்த இரு அணிகளும் சதுர அணிகள் என்பது நோக்கத்தக்கது. ஓர் அணி, கீழ் முக்கோண அணியாகவும் மேல் முக்கோண அணியாகவும் ஒரே நேரத்தில் அமையும்போது, அந்த அணி ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும்.

வரையறை 8: இடமாற்ற அணி (Transpose Matrix): A என்ற அணியின் இடமாற்ற அணியை A^T என்று குறிக்கலாம். A என்ற அணியின் நிரைகளையும், நிரல்களையும் மாற்றும்போது உண்டாகும் அணியே A^T ஆகும். A என்பது $m \times n$ அணியானால், A^T என்பது $n \times m$ அணியாகும்.

$A = (a_{ij})$ என்றும் $A^T = (b_{ij})$ என்றும் கொண்டால்

$b_{ij} = a_{ji}$ $(i=1, 2 \ldots\ldots n; j=1, 2\ldots\ldots m)$ ஆகும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ என்றால்}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $(A^T)^T = A$ ஆகும். ஒரு மேல் முக்கோண அணியின் இடமாற்றம், ஒரு கீழ் முக்கோண அணியை உண்டாக்கும். அதே போல, ஒரு கீழ் முக்கோண அணியின் இடமாற்றம் ஒரு மேல் முக்கோண அணியாகும்.

வரையறை 9 : நிரல் அணி (Column Matrix) : ஒரு $n \times 1$ அணியை ஒரு நிரல் அணியெனலாம்.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ - \\ x_n \end{bmatrix}$$ எனக் கொள்ளலாம்.

அதே போல் ஒரு நிரை அணியானது (Row Matrix) ஒரு $1 \times m$ அணியாகும். அதாவது $[x_1 \; x_2 \; \cdots \quad x_m]$ என்றாகும்.

குறிப்பு 1 : இந்த நிரல், நிரை அணிகளை வெக்டார்களாகக் கருதி, அவற்றை முறையே நிரல் வெக்டார், நிரை வெக்டார் எனக் கூறலாம். எனவே, வெக்டாரின் பொதுத் தன்மையே அணியாகும்.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ என்றால் $X^T = [x_1 \; x_2 \; \cdots\cdots \; x_n]$

அதாவது ஒரு நிரல் அணியின் இடமாற்றம் நிரை அணியாகவும், ஒரு நிரை அணியின் இடமாற்றம் நிரல் அணியாகவும் ஆகிறது.

வரையறை 10 : ஓர் அணியின் இணை (Conjugate Matrix) : கொடுக்கப்பட்ட அணி A-ல் உள்ள உறுப்புகளை அதன் இணைச் சிக்கலெண்களால் மாற்றி அமைக்கும்போது ஏற்படும் அணியை அணியின் இணையெனலாம். அதை $\overline{A}$ எனக் குறிக்கலாம்.

வரையறை 11 : சீர் அணி (Symmetric Matrix) : ஒரு சதுர அணி $A = (a_{ij})$-ல் $a_{ij} = a_{ji}$ என்றால், A சீர் அணியாகும்.

குறிப்பு 2 : சீர் அணி அதன் இடமாற்ற அணிக்குச் சமமாகும். அதாவது $A^T = A$ ஆகும்.

வரையறை 12 : எதிர்ச் சீர் அணி (Skew Symmetric Matrix): ஒரு சதுர அணி $A=(a_i)$-ல் $a_i = -a_i$ என்றால், அந்த அணி ஓர் எதிர்ச் சீர் அணியாகும்.

குறிப்பு 3 : $a_{ii} = -a_{ii}$ ஆகும். எனவே, $a_{ii} = 0$ ஆதலின், எதிர்ச் சீர் அணியில், மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூச்சியங்களாகும்.

9·3 அணி இயற்கணிதம்

இக் கணிதத்தில், கீழ்க்கண்ட செய்கைகளைப்பற்றி விரிவாகக் கவனிப்போம்.

1. அலகால் பெருக்கல்
2. அணிகளின் கூட்டல்
3. அணிகளின் பெருக்கல்

வரையறை 13 : அலகால் பெருக்கல் : ஒரு $m \times n$ அணி Aஐ α என்ற அலகால் பெருக்கினால், A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் αஆல் பெருக்க வேண்டும். அப்படிக் கிடைக்கும் அணியை αA அல்லது $A\alpha$ எனலாம்.

$A = (a_{ij})$ என்றால் $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$ என்றாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ என்றால்}$$

$$\alpha A = A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்றாகும்.

குறிப்பு 4: $|A|$ என்ற ஓர் அணிக்கோவையை எடுத்துக் கொண்டால், $\alpha \cdot |A|$ என்ற அணிக்கோவையானது $|A|$ அணிக் கோவையிலுள்ள ஏதாவதொரு நிரல் உறுப்புகள் அல்லது நிரை உறுப்புகள் இவை தமை α ஆல் பெருக்கும்போது உண்டாவதாகும். இந்த ஒரு பண்பு, $|A|$ அணிக்கோவைக்கும் A அணிக்கும் உள்ள ஒரு முக்கியமான வித்தியாசமாகும். மேற்கண்ட வரையறையைக் கொண்டு, கீழ்க்கண்ட விளைவுகளைக் காணலாம்.

$$1 \cdot A = A$$

$$(-1) \cdot A = (-1)(a_{ij}) = (-a_{ij})$$

$$0 \cdot A = 0$$

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$$

$$\alpha I = dg(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$$

குறிபபு 5: ஓர் அணி அலகை α என்ற அலகால் பெருக்கும் போது, ஓர் எண் அணி உருவாகிறது

வரையறை 14: அணிகளின் கூட்டல்: ஒரே வகையான, அதாவது $m \times n$ வகையான இரு அணிகள் A, B இருந்தால், அவைகளின் கூட்டுத்தொகையை $A + B$ என்ற அணியால் குறிப்பிடலாம்.

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \qquad \begin{bmatrix} i = 1, 2 \ldots \ldots m \\ j = 1, 2 \ldots \ldots n \end{bmatrix}$$

அல்லது

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ என்றால்

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ ஆகும்.

குறிப்பு 1: கூட்டுத்தொகைக்கு எடுத்துக்கொள்ளும் அணி களுக்கு நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் ஒரே மாதிரி இருக்க வேண்டும். மாறுபட்டிருந்தால் A அணியையும் B அணியையும் கூட்ட முடியாது.

தேற்றம் 1: அணிகளின் கூட்டல், மாற்று விதி, சேர்ப்பு விதி இவற்றுக்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கும்.

அதாவது $A + B = B + A$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

மேலும், அணிகளின் கூட்டலும், அலகால் பெருக்கலும் பரவு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும்: அதாவது

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$A = (a_{ij})$ என்றும் $B = (b_{ij})$ என்றும் கொண்டால், வரையறையிலிருந்து

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$B + A = (b_{ij} + a_{ij})$$

a_{ij}, b_{ij}, F என்ற களத்திலுள்ள உறுப்புகள் ஆதலால்

$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ ஆகும்.

எனவே $A + B = B + A$

அதேபோல் $[A + (B + C)]_{ij} = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$

$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$$

$$= [(A + B) + C]_{ij}$$

$$[\alpha (A + B)]_{ij} = \alpha (a_{ij} + b_{ij})$$

$$= (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})$$

$$= [\alpha A + \alpha B]_{ij}$$

$$[(\alpha + \beta) A]_{ij} = [(\alpha + \beta) a_{ij}]$$

$$= (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})$$

$$= \alpha A + \beta A$$

வரையறை 15: அணிகளின் கழித்தல்: ஒரே வகையான இரு அணிகள் A, B ஐ எடுத்துக்கொண்டால் $A + X = B$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு. அதாவது $X = B - A$ ஆகும். $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ என்றால் $X = (b_{ij} - a_{ij})$ ஆகும்.

எனவே $0 - A = -A$ என எழுதலாம்.

$A - A = 0$; $(-1) A = -A$; $-(-A) = A$

$\alpha (A - B) = \alpha A - \alpha B$, $(\alpha - \beta) A = \alpha A - \beta A$

என்பவை சர்வ சமங்களாகும்.

வரையறை 16: அணிகளின் பெருக்கல்: A என்ற அணி $m \times p$ வகையாகவும், B என்ற அணி $p \times n$ வகையாகவும் இருந்தால், $A \times B$ ஐ வரையறுக்க முடியும்.

$A \times B$ அணி $m \times n$ வகையாகும்,
$A \times B = C = (c_{ij})$ என்ற அணியானல்

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} \times \ldots\ldots a_{ip} b_{pj}$$

அதாவது A அணியின் 'i'-த்து நிரையிலும் B அணியின் 'j'-த்து நிரலிலும் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைப் பெருக்கிக் கூட்டும்போது ஏற்படும் கூட்டுத்தொகை $A \times B$ அணியின் 'ij'-த்து உறுப்பாகும்,

குறிப்பு 7: (1) $A \times B$ அணியை வரையறுக்க வேண்டுமானல், A அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

2. $A \times B$ என்ற அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை A அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவும், $A \times B$ ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை B அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவும் அமையும்.

3. A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இல்லையென்ருல் $A \times B$ஐ வரையறுக்க முடியாது.

4. $A \times B$-ம் $B \times A$-ம் தனித் தன்மைகள் பொருந்தியன. சில சமயங்களில் $A \times B$ அணிக்கு வரையறை உண்டு. ஆனல் $B \times A$ அணிக்கு வரையறை இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. $A \times B$ அணியும், $B \times A$ அணியும் ஒரே சமயத்தில் வரையறுக்கப்பட வேண்டுமானல், A அணி $m \times n$ வகையாகவும் B அணி $n \times m$ வகையாகவும் இருக்கவேண்டும். ஆனல் $A \times B$ அணி $m \times m$ வகையாகவும், $B \times A$ அணி $n \times n$ வகையாகவும்தான் அமையும். ஆகவே $A \times B$ அணியையும் $B \times A$ அணியையும் ஒத்துப் பார்க்கக்கூட முடியாது. A, B என்ற இரு அணிகளும் n வரிசை சதுர அணிகளானல், $A \times B$, $B \times A$ அணிகளும் n வரிசை சதுர அணிகளாகும். அப்படியும் அவை சமமாக இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. உதாரணமாக

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

கொண்டால்,

$$A \times B = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$$

எனவே $A \times B \neq B \times A$.

ஆதலின் அணிகளின் பெருக்கல் மாற்று விதிக்கு உட்படாது.

வரையறை 17: $A \times B$ என்ற அணிகளின் பெருக்கலில், A அணி B அணியை முன் பெருக்குவதாகவும் (Premultiplication) அதே சமயத்தில் B அணி A அணியைப் பின் பெருக்குவதாகவும் (Post multiplication) கொள்ளலாம்.

தேற்றம் 2: அணிகளின் பெருக்கல் சார்புவிதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். அதாவது,

$$A(BC) = (AB)C$$

[$A(BC)$, $(AB)C$ என்ற அணிகளை வரையறுக்க வேண்டின் A, B, C அணிகள் முறையே $m \times p$, $p \times q$, $q \times n$ வகைகளில் அமைய வேண்டும்]

BC அணி $p \times n$ வகையாகும். எனவே $A(BC)$ அணி $m \times n$ வகையாகும். அதேபோல் (AB) அணி $m \times q$ வகையாகும். எனவே $(AB)C$ அணி $m \times n$ வகையாகும். ஆகவே $A(BC)$ அணியும், $(AB)C$ அணியும் ஒரே வகையைச் சேர்ந்தவை.

$A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$; $C = (c_{ij})$ என்றும் எடுத்தும் கொள்வோம்.

$BC = (d_{ij})$ என்றால்

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik} c_{kj}$$

அதேபோல்

$A(BC) = (e_{ij})$ என்றால்

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} d_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{q} b_{lk} c_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

அதேபோல்

$(AB) = (f_{ij})$ என்ருல்

$[(AB)\, C] = (g_{ij})$ என்றும் கொண்டால்

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}\, b_{lj}$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{q} f_{ik}\, c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} c_{kj} \sum_{l=1}^{q} a_{il}\, b_{lk}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} c_{kj}\, a_{il}\, b_{lk}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{il}\, b_{lk}\, c_{kj}$$

எனவே $e_{ij} = g_{ij}$ [எல்லா i, j-க்களுக்கும்]

$$\therefore \quad A\,(BC) = (AB)\,C.$$

குறிப்பு 8 : $A\,(BC) = (AB)\,C$ என்பதால், இரு பொருள் படாமல் ABC என்று அடைப்புகளில்லாமல் எழுதலாம். சார்பு விதியை மூன்றுக்கு மேற்பட்ட எத்தனை காரணிகளுக்கும் விஸ்தரிக்கலாம். அதாவது

$(AB)\,(CD) = A\,(BC)\,D = (ABC)\,D = A\,(BCD)$ எனலாம். இதையே $ABCD$ என்றும் எழுதலாம்.

தேற்றம் 3 : சர்வ சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களும் வரையறுக்கப்பட்டால், அணிப்பெருக்கல் பரவு விதியைச் சாரும்.

$$A\,(B+C) = AB+AC$$

$$(B+C)\,A = BA+CA$$

இந்த இரு சர்வ சமன்பாட்டில் முதல் சமன்பாட்டை நிருபிக்கலாம்.

A, B, C என்ற அணிகள் முறையே $p \times q$, $r \times s$, $t \times n$ வகைகளானுல், Bஐயும் Cஐயும் கூட்டவேண்டுமானுல் அவையிரண்டும் ஒரே வகையாக இருக்கவேண்டும். அதாவது $r=t, s=n$

என்றுகும். மேலும் $(B+C)$ஐ A அணி முன் பெருக்குவதானுல் $q=r=t$ ஆகும். $A(B+C)$ அணி $p\times n$ வகையைச் சாரும். அதே போல் AB அணியை வரையறுக்க வேண்டின் $q=r$ என்றும் AC அணியை வரையறுக்க வேண்டின் $q=t$ என்றும் இருக்கவேண்டும். அதாவது $q=r=t$ ஆகும். மேலும் AB-ம் AC-ம் முறையே $p\times s$, $p\times n$ வகைகளாகும். ABஐயும் ACஐயும் கூட்டவேண்டுமானுல் $s=n$ ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே இருபக்கங்களை வரையறுக்க வேண்டின், $q=r=t$ என்றும், $s=n$ என்றும் இருக்கும். மேலும் இருபக்க அணிகளும் $p\times n$ என்ற வகையைச் சாரும்.

$A=(a_{ij})$; $B=(b_{ij})$; $C=(c_{ij})$ என்று கொள்ளுவோம்.

$$[(A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(B+C)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{q} a_{ik}c_{kj}$$

$$= [AB+AC]_{ij}$$

எனவே $A\ (B+C) = AB+AC$ ஆகும்.

இந்த விதியை விஸ்தரித்து

$(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD$ என்று கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 9: இந்தப் பரவுவிதியில் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டியதென்னவெனில், அணிகளின் பெருக்கு மாற்றுவிதிக்குட் படாதிருப்பதால் $A\ (B+C)$ஐ $AB+AC$ என்றே கொள்ள வேண்டும். மறந்தும் $BA+CA$ என்று கொள்ளலாகாது.

வரையறை 18: A என்பது n வரிசை சதுர அணியானுல்

$$A^0 = I_n \text{ மேலும்}$$

$$A^r = A^{r-1}A \quad (r \geq 1)$$

எனவே $A^2 = A\cdot A$

$A^3 = A\cdot A\cdot A$ எனலாம்.

$A^r A^s = A^{r+s}$ என்றும்

$(A^r)^s = A^{rs}$ என்றும் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 10: பூச்சிய அணியும், அலகு அணியும் இந்த இயற்கணிதத்தில் ஒரு முக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றன.

A என்ற அணி $m \times n$ வகையைச் சார்ந்தால்,

$$A + 0_m^n = A$$

$$A \cdot 0_n^r = 0_m^r$$

$$0_l^m \cdot A = 0_l^n$$

என்பவை தெளிவாகத் தெரிகின்றன.

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{kj} \quad [\delta_{kj} = 0 \;\; k \neq j \text{ என்றால்};\; \delta_{kj} = 1 \;\; k = j \text{ என்றால்}]$$

$$= a_{ij}$$

$$= [A]_{ij}$$

எனவே $A\,I_n = A$ ஆகும்.

$I_m\,A = A$ ஆகும்.

இதிலிருந்து, அணி இயற்கணிதத்தில், பூச்சிய அணியும் அணி அலகும் தொடக்க இயற்கணிதத்தில் 0-ம், 1-ம் வகிக்கும் இடங்களை வகிக்கின்றனவென்பது புலனாகிறது.

குறிப்பு 11: $|A|$ என்பது a_{ij} $[i = 1, 2 \ldots n;\ j = 1, 2 \ldots n]$ உறுப்புகளையுடைய அணிக்கோவையைக் (Determinant) குறிக்கும்.

$|A| = 0$ அல்லது $|A| \neq 0$ என்பதைப் பொறுத்து, A அணியைச் சிறப்பு அணி (Singular Matrix) என்றும் சிறப்பிலா அணி (Non Singular Matrix) என்றும் கூறலாம்,

தேற்றம் 4: $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$

$A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ $AB = (c_{ij})$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \text{ என்றாகும்.}$$

$|A|$ ஐயும் $|A|$ ஐயும் பெருக்கும்போது

ஏற்படும் $|A| \cdot |B|$-ன் 'ij'-த்து உறுப்பு $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

என்றேயாகும்.

எனவே $|A| \cdot |B| = |AB|$

அதே போல் Aஐயும் Bஐயும் இடமாற்றினால்

$$|B| \cdot |A| = |BA| \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $|A| \cdot |B| = |AB| = |BA|$

வரையறை 19: சேர்ப்பு அணி [Adjugate Matrix]: A அணியின் உறுப்புகளின் இணைக்காரணிகளைக் கொண்ட அணியின் இடமாற்ற அணியே, A-ன் சேர்ப்பு அணியாகும். அதை A^* என்று குறிக்கலாம்.

அதாவது $A = (a_{ij})$ என்றால், A_{ij}ஐ $|A|$-ல் a_{ij}-ன் இணைக் காரணியாகக் கொண்டால், $A^* = (A_{ij})^T$

தேற்றம் 5: $AA^* = A^*A = |A| \cdot I$

$A = (a_{ij})$, $A^* = (b_{ij})$ என்றும் கொண்டால்

$$b_{ij} = A_{ij} \text{ ஆகும்.}$$

$$(AA^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\, A_{jk}$$

$$= |A|\, \delta_{ij}$$

அதே போல், $(A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, a_{kj}$$

$$= |A|\, \delta_{ji}$$

எனவே $(AA^*) = (A^*A) = |A| \cdot I$

கிளைத்தேற்றம்: $|A^*| = |A|^{n-1}$

$$|AA^*| = |A|\;|A^*|$$

ஆனால் $|AA^*| = |\,|A| \cdot I\,|$

$$= |A|^n$$

எனவே $|A^*| = |A|^{n-1}$ ஆகும்.

தேற்றம் 6 : $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

$$A^*(A^*)^* = |A^*| I$$
$$= |A|^{n-1} I$$
$$A \cdot A^*(A^*)^* = A\ |A|^{n-1} I$$
$$|A|\ I(A^*)^* = |A|^{n-1} A$$

அணிக்கோவை $|A|$ பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இல்லாததால்

$$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

தேற்றம் 7 : $(AB)^* = B^* A^*$

$$|A| \cdot |B|\ B^* A^* = |AB|\ I\ B^* A^*$$
$$= (AB)^* (AB)\ B^* A^*$$
$$= (AB)^* A\ (BB^*)\ A^*$$
$$= (AB)^* A\ |B| \cdot I\ A^*$$
$$= |B|\ (AB)^* (AA^*)$$
$$= |B|\ (AB)^*\ |A| \cdot I$$
$$= |A|\ |B|\ (AB)^*$$

அணிக்கோவைகள் $|A|, |B|$ பூச்சியத்திற்குச் சர்வ சமமாக இல்லாததால்

$$B^* A^* = (AB)^*$$

தேற்றம் 8 : A, B நீண்ட சதுர அணிகளானால்

$$(AB)^T = B^R A^T$$

[குறிப்பு : மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களும் வரையறுக்கப்பட வேண்டும்]

A, B அணிகள் முறையே $p \times q$; $r \times s$ வகைகளானால் AB வகையறுக்க $q = r$ ஆக வேண்டும். $(AB)^T\ s \times p$ வகையாகும்.

B^T, A^T முறையே $s \times r$, $q \times p$ வகைகளாகும்.

$B^T A^T$ வகையறுக்க $r = q$ ஆக வேண்டும்.

அப்போது $B^T\ A^T$ அணி $s \times p$ வகையாகும். எனவே, சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களிலுமுள்ள அணிகளும் $s \times p$ வகையாகும்.

$$[(AB)^T]_{ij} = (AB)_{ij}$$
$$= \sum_k a_{jk}\, b_{ki}$$

$$= \sum_{k} b'_{ik} a'_{kj} \qquad [B^T = (b'_{ij}) \quad A^T = (a'_{ij})]$$

$$= (B^T A^T)_{ij}$$

எனவே $(AB)^T = B^T A^T$ ஆகும்.

வரையறை 20 : எதிர்மாறு அணி [Inverse Matrix]: $|A| \neq 0$ என்றால் $AX = I$, $XA = I$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்குப் பொதுவான ஒரே ஒரு மூலத்தை A அணியின் எதிர்மாறு அணி யென்கிறோம். அதை A^{-1} எனக் குறிக்கிறோம்.

தேற்றம் 10 : இப்போது $AX = I$, $XA = I$ என்ற சமன்பாடு களுக்குப் பொதுவான ஒரே ஒரு மூலம் $X = \frac{A^*}{|A|}$ என நிரூபிப் போம்.

$AA^* = A^*A = |A| \cdot I$ என்பதால்

$$A \left(\frac{A^*}{|A|} \right) = \left(\frac{A^*}{|A|} \right) A = I \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $AX = XA = I$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $X = \frac{A^*}{|A|}$ என்ற ஒரு மூலம் இருக்கிறதென்று காண்கிறோம். இது ஒன்றுதான் சமன்பாடுகளின் மூலமென்று நிரூபிக்க, Y என்பதை $AX = I$-ன் வேறொரு மூலமாகக் கொள்க.

அதாவது $AY = I$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } X &= XI \\ &= X(AY) \\ &= (XA)Y \\ &= IY \\ &= Y \end{aligned}$$

ஆகையால், $AX = I$-ன் மூலம் ஒன்றே ஒன்றுதான். அதேபோல் $XA = I$-ன் மூலமும் ஒன்றே ஒன்றுதான்.

உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்றும்

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$ என்றும்

கொண்டால் $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$$\frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= A^{-1}$$

குறிப்பு 12 : $AX = B$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரே ஒரு மூலம் $X = A^{-1}B$ ஆகும். அதேபோல் $YC = D$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $Y = DC^{-1}$ என்பதே ஒரே ஒரு மூலமாகும்.

தேற்றம் 9

1. A அணி சிறப்பு அணியன்றென்றால், அதேபோல் A^{-1}-ம் $(A^{-1})^{-1}$-ம்

2. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

3. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. A, B அணிகள் சிறப்பு அணிகளல்லவென்றால் அதே போல்தான் AB அணியும்

5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(1) A சிறப்பு அணி இல்லையென்றால் $|A| \neq 0$.

எனவே $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

$$|A^{-1}| = \left|\frac{A^*}{|A|}\right|$$

$$= \frac{|A|^{n-1}}{|A|^n}$$

$$= \frac{1}{|A|}$$

அதாவது $|A^{-1}| \neq 0$.

(2) எனவே $|A|^{-1} = |A^{-1}|$

(3) $A^{-1}X = I$ என்ற சமன்பாட்டை $X = A$ என்ற மூலம் சரி செய்கிறது. எனவே $(A^{-1})^{-1} = A$ ஆகும்.

(4) $|AB| = |A| \cdot |B|$

$\neq 0.$

(5) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= AIA^{-1}$

$= AA^{-1}$

$= I$

எனவே $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆகும்.

குறிப்பு 13: வகுமுறை விதி அணி இயற்கணிதத்திற்குப் பொருந்தாது. இந்தக் கணிதத்தில் $AB=0$ என்ருல், A, B அணியின் பூச்சிய அணி 0-க்குச் சமமாக இருக்கவேண்டுவதில்லை.

உதாரணமாக

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$ என்றும்

எடுத்துக்கொண்டால் $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0^3_3$ ஆகும்.

இங்கு $A \neq 0$, $B \neq 0$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

தேற்றம் 10: சதுர அணிகள் A, B என்பவை $A \cdot B = 0$ என்ருல், $A=0$ அல்லது $B=0$ அல்லது A, B என்ற இரு அணிகளும் சிறப்பு அணிகளாகும்.

$A=0$, $B=0$ என்றே கொண்டால்,

$A \cdot B = 0$ ஆகும்.

$A \neq 0$, $B \neq 0$ என்றும் A சிறப்பு அணியன்று என்றும் கொண்டால், A^{-1} வரையறுக்கப்படுகிறது. எனவே

$$A^{-1}\cdot(AB) = A^{-1}\cdot 0$$
$$= 0$$
$$B = 0$$

ஆனல் $B \neq 0$ என்று எடுத்துக்கொண்டிருக்கிறேம் எனவே A சிறப்பு அணியாகும். அதேபோல் B-யும் சிறப்பு அணியாகும்.

வரையறை 21 : பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண் : பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண் நீண்ட சதுர அணி A ஆகக் கொள்ள முதலில் $A \neq 0$ ஆகவும், $B \neq 0$ என்ற அணியிலிருந்து $AB=0$ ஆகவும் வேண்டும்.

[அல்லது $C \neq 0$ என்ற அணியைக் கொண்டு $CA=0$ ஆக வேண்டும்]

குறிப்பு 13-ல் கொடுக்கப்பட்ட உதாரணத்தில் A-ம் B-ம் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்களாகும்.

குறிப்பு 14 : சதுர அணி A, பூச்சியத்தின் வகுக்கும் எண்ணுகவேண்டுமானுல் A ஒரு சிறப்பு அணியாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

வரையறை 22 : செங்குத்தணி (Orthogonal Matrix) : A என்ற அணி மெய்யாகவும், $A_T\cdot A = I$ ஆகவும் கொண்டால், A ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

$$|A^TA| = |I|$$
$$|A|^2 = I$$
$$\therefore\ |A| = \pm I$$

எனவே A சிறப்பு அணியன்று.

ஆதலால் $A^{-1} = A^T$ ஆகும்.

$\therefore\ AA^T = I$ ஆகவும் கொள்ளலாம்.

$A^TA = I$ ஆதலால்

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\, a_{kj}\ [A^T = (a'_{ij})\ \ (a_{ji})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}$$

அதேபோல் $AA^T = I$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk}$$

$i \neq j$ என்றால் $\delta_{ij} = 0.$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = 0.$$

'i'-த்து நிரல் வெக்டாரும், 'j'-த்து நிரல் வெக்டாரும் செங்குத்து வெக்டார்களாகின்றன.

$i = j$ என்றால் $\delta_{ij} = 1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\quad a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$$

ஆகவே, செங்குத்தணியின் நிரல்கள், இயல்நிலை செங்குத்து வெக்டார்களை [Orthonormal Vectors] உண்டாக்குகின்றன.

அதேபோல் $AA^T = I$ என்பதால், அதாவது

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij}$$ என்பதால்,

நிரைகளும், இயல்நிலை செங்குத்து வெக்டார்களை உண்டாக்குகின்றன.

கிளைத்தேற்றம் 1: ஒரு மெய் அணியின் நிரல்கள் இயல்நிலை செங்குத்து வெக்டார்களை உண்டாக்கினால், நிரைகளும் அவ்வாறே வெக்டார்களை உண்டாக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 2: நிரல்களின் (நிரைகள்) வரிசைகளை மாற்றி அமைத்தால், ஏற்படும் அணியும் ஒரு செங்குத்தணியே யாகும்.

தேற்றம் 11: A-ம் B-ம் செங்குத்தணிகளானால் A^T, A^{-1}, AB யாவும் செங்குத்தணிகளே.

A ஒரு செங்குத்தணியாதலால்

$$A^TA = I$$

$$\therefore (A^TA)^T = I$$

$$A^T (A^T)^T = I$$

எனவே A^T ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

$A^TA = I$ ஆதலால் $A^{-1} = A^T$ ஆகும்.

எனவே A^{-1}-ம் ஒரு செங்குத்தணியே.

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB$$
$$= B^T I B$$
$$= B^T B$$
$$= I$$

எனவே AB-ம் ஒரு செங்குத்தணியே.

9·4 அணியின் மதிப்பிடம் (Rank of a Matrix)

முதலில் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகளையும், அதன் மூலங்களைக் (roots) கண்டுபிடிக்கும் முறைகளையும் சற்று ஆராய்வோம்:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\ [i = 1, 2, 3, \dots, m] \dots I$$

என்பவை 'm' ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தொகுதியாகக் கொள் வோம். இதில் x-களின் குணகங்களும், மாறிலிகள் 'b'-களும் F என்ற களத்திலுள்ளதென்றும் கொள்க.

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$$
$$A_2 = (a_{21}, b_{22}, b_{23}, \dots, a_{2n})$$

.. ..

....

$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn})$ என்பவை $V_n(F)$ என்ற வெக்டார் வெளியை உண்டாக்கட்டும்.

$X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ என்று எடுத்துக் கொள்க.

I.ல் கண்ட சமன்பாடுகளை

$(A_1 \cdot X) = b_1$, $(A_2 \cdot X) = b_2, \dots\dots, (A_m \cdot X) = b_m$ என்று எழுதலாம்.

[$(A_1 \cdot X)$ என்பது A_1-க்கும் X-க்கு மிடையேயுள்ள உட் பெருக்கைக் குறிக்கும்]

இந்தச் சமன்பாடுகளின் தொகுதியின் மூலங்கள் $V_n(F)$ வெக்டார் வெளியின் ஓர் உறுப்பு. $\tau = (t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)$ ஆகும். அதாவது $(A_1 \cdot \tau) = b_1, (A_2 \cdot \tau) = b_2, \ldots\ldots, (A_m \cdot \tau) = b_m$.

வரையறை 23 : I-ல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுதி ஒப்பிடும் தன்மையுள்ளதென்றால், F களத்திலுள்ள

எந்த உறுப்பும் $\sum_{i=1}^{m} S_i A_i = 0$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரி

செய்தால் $\sum_{i=1}^{m} S_i b_i = 0$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும்.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i b_i = \sum_{i=1}^{m} S_i (A_i \cdot \tau)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (S_i \cdot A_i) \cdot \tau$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} S_i A_i \right] \cdot \tau$$

$$= 0 \cdot \tau$$

$$= 0.$$

அதாவது சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்கு மூலங்கள் உண்டென்று கொண்டு, F களத்திலுள்ள உறுப்புகளைக்கொண்டு சமன்பாடுகளின் இருபக்கங்களையும் பெருக்கிக் கூட்டும்போது, இடக்கைப் பக்கம் பூச்சியத்துக்குச் சமமானால், வலக்கைப் பக்கமும் பூச்சியத்துக்குச் சமமென்பது இதன்மூலம் தெளிவு.

வரையறை 24 : இரு சமன்பாடுகளின் தொகுதிகள் சமமென்றால், அவை இரண்டுக்கும் ஒரே மூலங்கள் இருக்க வேண்டும்.

வரையறை 25 : ஒரு சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்குத் தொடக்கச் செய்கை (Elementary Operation) உண்டாக்குவதானால், கீழ்க்கண்ட ஏதாவதொன்றைச் செய்யவேண்டும்;

1. இரண்டு சமன்பாடுகளை இடமாற்றுதல்
2. ஒரு சமன்பாட்டை F களத்தின் பூச்சியமல்லாத உறுப்பால் பெருக்குதல்

3. ஒரு சமன்பாட்டை k-ஆல் பெருக்கி மற்றொரு சமன் பாட்டுடன் கூட்டுதல். [KEF]

தேற்றம் 12: ஒரு சமன்பாடுகளின் தொகுதியில் குறிப்பிட்ட தொடக்கச் செய்கைகளை உண்டாக்கி, இரண்டாவது தொகுதியை அமைத்தால், இந்த இரண்டு தொகுதிகளும் சமம்.

1, 2 வகைத் தொடக்கச் செய்கைகள் தொகுதியின் சம நிலையைச் மாற்றுதென்பது தெளிவு.

3 வகைத் தொடக்கச் செய்கையைப்பற்றிச் சற்று ஆராய்வோம்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியிலுள்ள இரண்டாவது சமன் பாட்டை $k (k \in F)$ ஆல்பெருக்கி முதல் சமன்பாட்டுடன் கூட்டுக,

$(A_1 \cdot X) + k (A_2 \cdot X) = (A_1 + kA_2) \cdot X$ என்று ஆகும். எனவே புதுத் தொகுதியின் சமன்பாடுகள்

$(A_1 + kA_2) \cdot X = b_1 + kb_2, (A_2 \cdot X) = b_2, \ldots, (A_m \cdot X) = b_m$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் மூலங்கள் வெக்டார் T ஆனால், அதாவது

$$(A_1 \cdot T) = b_1, (A_2 \cdot T) = b_2, \ldots\ldots, (A_m \cdot T) = b_m \text{ என்றால்}$$

$$(A_1 + k A_2) \cdot T = b_1 + k b_2 \text{ ஆகும்.}$$

அதேபோல் T இரண்டாவது தொகுதியின் மூலங்களைக் குறித்தால்

$$(A_1 + k A_2) \cdot \mathrm{T} = b_1 + kb_2.$$

அதாவது $(A_1 \cdot T) + k (A_2 \cdot T) = b_1 + k b_2$

$$\therefore \quad A_1 \cdot T = b_1 \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே இரண்டு தொகுதிகளும் சமம்.

9·4·1 எக்லென் முறை (Echelon System)

கீழ்க்கண்ட முறைப்படி எப்படிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் கண்டுபிடிப்பதென்பதை ஆராய்வோம்.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \quad \ldots \quad (2)$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்க.

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1ஐ நீக்குக.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \ldots \quad (4)$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \quad \ldots \quad (5)$$
$$-2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \quad \ldots \quad (6)$$

இப்போது (5)ஐத் தவிர்த்து (4), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து x_2ஐ நீக்குக.

$$x_1 - x_3 - 2x_4 = -3 \quad \ldots \quad (7)$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \quad \ldots \quad (8)$$
$$3x_3 + 7x_4 = 12 \quad \ldots \quad (9)$$

(9)ஐத் தவிர்த்து (7), (8) சமன்பாடுகளிலிருந்து x_3ஐ நீக்குக.

$$3x_1 + x_4 = 3 \quad \ldots \quad (10)$$
$$x_2 - 5/3x_4 = -4 \quad \ldots \quad (11)$$
$$3x_3 + 7x_4 = 12 \quad \ldots \quad (12)$$

$$x_1 = 1 - \frac{x_4}{3}$$

$$x_2 = -4 + \frac{5}{3}x_4$$

$$x_3 = 4 - \frac{7}{3}x_4$$

எனவே $x_4 = t$ என்று கொண்டால்

$x_1 = 1 - t/3, \; x_2 = -4 + 5/3\, t, x_3 = 4 - 7/3t,$

$x_4 = t$ என்ற மூலங்கள் கிடைக்கின்றன.

't' என்பதை மெய்யெண்களின் ஏதாவதொரு உறுப்பாகக் கொள்ளலாமாதலால், x_1, x_2, x_3, x_4 என்பவற்றுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலங்கள் உள்ளன என்பது தெளிவு.

இப்போது மூலங்கள் இல்லாத சமன்பாடுகளின் தொகுதியைக் கவனிப்போம்.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad \ldots \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \quad \ldots \quad (2)$$
$$x_2 + 2x_3 = 6 \quad \ldots \quad (3)$$

(1)ஐத் தவிர்த்து (2) ஆவது சமன்பாட்டிலிருந்து x_1ஐ நீக்குக.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 7 \quad \dots \quad (4)$$
$$x_2 + 2x_3 = 1 \quad \dots \quad (5)$$
$$x_2 + 2x_3 = 6 \quad \dots \quad (6)$$

(5)ஐத் தவிர்த்து (4), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து x_2ஐ நீக்குக.

$$x_1 - x_3 = 6 \quad \dots \quad (7)$$
$$x_2 + 2x_3 = 1$$
$$0 = 5$$

எனவே, இம்மாதிரிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்கள் கிடையா.

மேற்கண்ட இரு மாதிரிக் கணக்குகளில் கண்ட முறைகளை ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம். அது எப்படி என்பதை இப்போது ஆராய்வோம்.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a^{m}_{n} x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (A)$$

என்ற 'm' சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம். இவற்றின் மூலம் $x_1, x_2 \dots x_n$ என்ற 'n' தெரியாத x-களின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும்.

இந்தச் சமன்பாடுகளிலுள்ள குணகங்களை எல்லாம் பூச்சியங் களாகக் கொள்ள வேண்டாம். மேலும் x_1 என்பதின் m குணகங்கள் $a_{11}, a_{21}, \dots a-$, என்பவை எல்லாம் பூச்சியங்களாக இருந்தால் x_1 தவிர்த்து, $x_2, x_3, \dots x_n$ என்பவற்றின் மதிப்புகளை மட்டும் கணக்கிட்டால் போதும். எதற்கும் x_1, $x_2 \dots x_n$ என்பவற்றில், எல்லாக் குணகங்களும் பூச்சியங்களாக இல்லாத முதல் xஐ x_{k_1} எனலாம். முதல் சமன்பாட்டை x_{k_1}-ன் குணகத்தினுல் வகுக்கவும். முதல் சமன்பாட்டை உபயோகப்படுத்தி மற்றச் சமன்பாடுகளி லிருந்து x_{k_1}ஐ நீக்குக.

$$
\begin{aligned}
x_{k_1} + b_{1k_1+1}\, x_{k_1+1} + \cdots + b_{1n}\, x_n &= c_1 \\
b_{2k_1+1}\, x_{k_1+1} + \cdots + b_{2n}\, x_n &= c_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\
b_{mk_1+1}\, x_{k_1+1} + \cdots + b_{mn}\, x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

$x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots x_n$ என்பவற்றில் குணகங்கள் எல்லாம் பூச்சியமில்லாத முதல் xஐ x_{k_2} என்க. அவசியமேற்பட்டால், சமன்பாடுகளை மாற்றி, இரண்டாவது சமன்பாட்டிலுள்ள x_{k_2}-ன் குணகம் பூச்சியமாக இல்லாதவாறு பார்த்துக் கொள்வோம். இப்போது இரண்டாவது சமன்பாட்டில் x_{k_2}-ன் குணகத்தை '1' ஆகவும் மற்ற எல்லாச் சமன்பாடுகளில் [முதல் சமன்பாட்டையும் சேர்த்து] x_{k_2}ஐ நீக்கியும் புதுச் சமன்பாடுகளின் தொகுதி உண்டாக்கவும். இம்மாதிரியே சமன்பாடுகளைச் சுருக்கினால் நமக்குக் கிடைக்கும் தொகுதி

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{k_1} + 0\, x_{k_2} + \cdots + 0 \cdot x_{k_r} &= d_1 \\
x_{k_2} + \cdots + 0 \cdot x_{k_r} &= d_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\
x_{k_r} &= d_r \\
0 &= d_{r+1} \\
\cdots &\cdots\cdots \\
\cdots &\cdots\cdots \\
0 &= d_m
\end{aligned}
\right\} \quad (B)
$$

இந்தத் தொகுதியில் $1 \le i \le r$ என்ற முறையில் i ஒரு முழு எண் என்றால், 'i'-சமன்பாடு ஒன்றில்தான், x_{k_i}-ன் குணகம் பூச்சியமில்லாமல் இருக்கிறது. முதல் சமன்பாட்டில் $x_{k_2}, x_{k_3} \dots x_{k_r}$ இவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியமாகும். இது போக உள்ள மற்ற

x-களின் குணகங்கள் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டுவதில்லை. இரண்டாவது சமன்பாட்டில் $j < k_2$ என்றால் x_j-ன் குணகம் பூச்சியமாகும். மேலும் $x_{k_3} \cdots x_{k_r}$ இவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியங்களே. இப்படியாகவே மற்றச் சமன்பாடுகள் அமையும். எனவே (A) தொகுதியும் அதற்குச் சமமான (B) தொகுதியும் மூலங்களை உடையதாயிருக்கின்றன.

இப்போது F களத்திலிருந்து $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_r}$ என்பவற்றைத் தவிர்த்து மற்றவற்றுக்கு ஏதாவதொரு மதிப்பைக் கொடுத்தால் $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_r}$ இவற்றின் மதிப்புகள் ஒரே வழியாக நிர்ணயிக்கப் படுகின்றன. இங்கு $r = m$ என்க. எனவே 0 என்பதை இடப் பக்க உறுப்பாக உள்ள சமன்பாடு இல்லை எனலாம்.

அப்படியல்லாது $0 = d$ என்ற ஏதாவதொரு சமன்பாடு மிஞ்சி விட்டால், இந்தச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு மூலங்களே கிடையா. இப்படிப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுதியை எக்லென் முறை என்கிறோம்.

9·4·2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்பது அணி என்க.

$$R_1 = [a_{11}, \ a_{12}, \ \ldots\ldots, \ a_{1n}]$$

$$R_2 = [a_{21}, \ a_{22}, \ \ldots\ldots, \ a_{2n}]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_m = [a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots, a_{mn}]$$

என்பவை A அணியின் நிரை வெக்டார்களாகும்

அதேபோல்

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்பவை A அணியின் நிரல் வெக்டார்களாகும்.

A அணியின் நிரை வெக்டார்கள் R_1, R_2 .... R_m என்பவை உருவாக்கும் உபவெளியை, A-ன் நிரை வெளி (Row Space) எனலாம். இந்த நிரை வெளியின் வகையளவு (Dimension A அணியின் நிரை மதிப்பிடமாகும்.

அதேபோல், A அணியின் நிரல் வெக்டார்கள் $C_1, C_2, \cdots C_n$ என்பவை உருவாக்கும் உபவெளியை A-ன் நிரல்வெளி (Column Space) எனலாம். இந்த நிரல் வெளியின் வகையளவு A அணியின் நிரல் மதிப்பிடமாகும்.

வரையறை 26: F என்ற களத்தைக்கொண்டு A என்ற அணியைக் கருதுக. இந்த அணியின்மீது கீழ்க்கண்ட ஏதாவதொரு காரியத்தைச் செய்தால் அது A-ன் மேல் செய்யப்பட்ட ஆரம்ப நிரை (நிரல்) செயலாகும் (elementary row column operation).

மாதிரி 1: இரு நிரைகளை (நிரல்களை) இடமாற்றுதல்.

மாதிரி 2: ஒரு நிரையின் (நிரலின்) உறுப்புகளை F களத்திலுள்ள பூச்சியமில்லாத உறுப்பால் பெருக்குதல்.

மாதிரி 3: ஒரு நிரையின் (நிரலின்) உறுப்புகளுடன் மற்றொரு நிரையின் (நிரலின்) ஒத்த உறுப்புகளை k மடங்கு அதிகரித்துக் கூட்டுதல்.

இந்த நிரைச் செய்கைகள் மூலம் கிடைக்கும் B என்ற அணியும் A என்ற அணியும் ஒரே நிரைவெளியை உடையதாக இருக்கும். எனவே ஒரே நிரை மதிப்பிடம் கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 1 என்ற நிரைச் செய்கையால் A, B என்ற அணிகளின் நிரை வெளிகள் ஒன்றுக இருக்கும் என்பது தெளிவு. சிந்தித்துப் பார்த்தால், மாதிரிகள் 2, 3 என்ற நிரைச் செய்கைகளால், A, B அணிகளின் நிரை வெளி, நிரை மதிப்பிடம் மாருது.

எனவே, இதை உபயோகப்படுத்தி ஓர் அணியின் மதிப்பிடத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை எடுத்துக்கொள்க.

எக்லென் முறையை உபயோகப்படுத்துவோம். முதல் இரண்டு நிரைகளை இடமாற்றி, புது முதல் நிரையை -1 ஆல் பெருக்கவும்

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$ என்றுகும்.

மாதிரி 3ஐ உபயோகப்படுத்தி, முதல் நிரலில் முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து மற்றெல்லா உறுப்புகளையும் பூச்சியமாக மாற்றலாம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ என்றுகிறது.

மூன்ருவது நிரையை மற்ற நிரைகளுடன் கூட்டுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

இரண்டாவது மூன்ருவது நிரைகளை இடமாற்றுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

மூன்ருவது நிரையை -1 ஆல் பெருக்கி நாலாவது நிரையுடன் கூட்டுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

மூன்ருவது நிரையை $1/3$ ஆல் பெருக்கவும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இப்போது மூன்றுவது நிரையை -2 ஆல் பெருக்கி முதல் நிரையுடன் கூட்டுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/3 & -2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) என்ற அலகு வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்பில்லாமலிருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட அணியின் முதல் மூன்று நிரைகளும் ஒருபடிச் சார்பில்லாமலிருக்குமென்பது தெளிவு. எனவே, இதன் மதிப்பிடம் 3 ஆகும். இதுவே கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மதிப்பிடமாகும்.

தேற்றம் 13 : எந்த அணியின் நிரை மதிப்பிடமும், நிரல் மதிப்பிடமும் சமமாகும் ?

F களத்தைப் பொறுத்து A என்பதை $m \times n$ வகை அணியாகக் கொள்க. A-ன் நிரை மதிப்பிடம் 'r' எனவும், நிரல் மதிப்பிடம் 's' எனவும் எடுத்துக் கொள்க.

A-ன் $(r+1)$ நிரல் வெக்டார்கள் ஒருபடிச் சார்புள்ளவை என்று முதலில் காண்பிப்போம். அப்போது $s \leq r$ என்றாகும்.

$r = m$ என்றால், இது மிகத் தெளிவு.

$r < m$ என்க. A அணியின் நிரை வெளியின் ஆதாரம் (base) ஆக r நிரல் வெக்டார்கள் அமையவேண்டும். A அணியிலுள்ள நிரைகளை மாற்றி, முதல் r நிரைகள் A-ன் நிரைவெளியின் ஆதாரமாகச் செய்யலாம். $n > r$ ஆகவேண்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ஆகக் கொள்க. $R_1\ R_2 \ldots R_m$ என்பவை நிரை வெக்டார்களாகவும் $C_1\ C_2 \ldots . C_n$ என்பவை நிரல் வெக்டார்களாகவும் கொள்ளு வோம்.

$$C^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{r1} \end{bmatrix} \quad C^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{r2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots C^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$$

என்பவற்றை A அணியின் முதல் r நிரை வெக்டார்களிலிருந்து, எடுத்த நிரல் வெக்டார்களாகக் கொள்க.

உபதேற்றம்

$\sum_{i=1}^{n} t_i C^i = 0$ என்னும்படி $t_i \in F\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ என்றால்

$$\sum_{i=1}^{n} t_i C^i = 0.$$

$$T = (t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) \text{ என்க.}$$

$\sum_{i=1}^{n} t_i C_i = 0$ என்பது

$R_1 \cdot T = 0,\ R_2 \cdot T = 0,\ \ldots\ldots,\ R_r \cdot T = 0$ என்றாகும்.

R_k என்பது ஏதாவதொரு நிரை வெக்டாராகும். R_k என்பது $R_1, R_2, \ldots, R_r$ என்பவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகவேண்டும். அதாவது $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_r$ என்ற கள உறுப்புகள்

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_r R_r = R_k$$

ஆக வேண்டும்.

$$\begin{aligned} R_k \cdot T &= (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_r R_r) \cdot T \\ &= \lambda_1 (R_1 \cdot T) + \lambda_2 (R_2 \cdot T) + \ldots + \lambda_r (R_r \cdot T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

எனவே $\sum_{i=0}^{n} t_i c_i = 0$ ஆகிறது.

$C_1, C_2 \ldots\ldots, C_r, C_{r+1}$ என்ற நிரல் வெக்டார்களை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$C^1, C^2, \ldots\ldots, C^{r+1}$ என்ற வெக்டார்கள் ஒருபடி சார்ந்திருக்க வேண்டும். ஏனெனில், இவற்றிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டார்களும் $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கிறது. அதாவது F களத்தில், $b_1, b_2, \ldots b_{r+1}$ என்ற எல்லாப் பூச்சியமில்லாத உறுப்புகள் எடுத்து

$$\sum_{i=1}^{r+1} b_i c^i = 0 \text{ எனலாம்.}$$

உபதேற்றத்தின் படி

$$\sum_{i=1}^{r+1} b_i c_i = 0 \text{ ஆகிறது.}$$

$\therefore \quad C_1, C_2, \ldots\ldots, C_{r+1}$ என்பவை ஒருபடிச் சார்புள்ளவை.

$$\therefore \quad s \leq r$$

இப்போது A^T என்ற அணியை நோக்குக. இவற்றின் நிரை வெளியும், நிரல் வெளியும் A அணியின் நிரல் வெளி, நிரை வெளியாகிறது. எனவே A^T நிரை மதிப்பிடம் s ஆகவும், நிரல் மதிப்பிடம் r ஆகவும் மாறுகிறது.

$\therefore \quad A^T$ என்பது ஏதாவதோர் அணியாவதால்

$$r \leq s$$

$$\therefore \quad r = s$$

எனவே, நிரை மதிப்பிடம், நிரல் மதிப்பிடம் இவற்றின் பொது மதிப்பே அணியின் மதிப்பிடமாகும்.

9.4.3 $A = (a_{ij})$ என்பது $n \times n$ வகை அணியாகவும், λ ஓர் எண் மாறியாகவும் கொள்க.

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

என்பதை A அணியின் சிறப்பியல்பு கோவை (Characteristic Function) எனலாம்.

$\phi(\lambda) = 0$ என்பதைச் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு என்றும், அதன் மூலங்களை A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் என்றும் வழங்கலாம். சிறப்பியல்பு கோவை $\phi(\lambda)$, ஒரு 'n' மடங்கு கோவையாதலால், சிறப்பியல்பு கோவைக்கு 'n' மூலங்கள் இருக்கும். ஆனால், இந்த மூலங்கள் வெவ்வேறானவையாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை.

தேற்றம் 14: A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள்

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றால்,

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda = 0$ என்க.

$$|-A| = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\therefore \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

கிளைத்தேற்றம்: ஓர் அணி சிறப்பு அணியாக வேண்டின், அதாவது $|A| = 0$ என்றால், சிறப்பியல்பு மூலங்களில் ஒன்றாவது பூச்சியமாக வேண்டும்.

வரையறை 27: வடிவொத்த அணிகள் (Similar Matrices): A, B என்பவற்றைச் சதுர அணிகளாகவும், Sஐச் சிறப்பிலா அணியாகவும் கொள்க.

$B = S^{-1} AS$ என்றால்,

B, A-க்கு வடிவொத்த அணியாகும்.

மேலும் A-யிலிருந்து, Bஐ வடிவொத்த மாற்றத்தினால் கிடைக்கப்பெற்றது எனலாம்.

தேற்றம் 15: ஓர் அணியின் சிறப்பியல்பு கோவை, வடிவொத்த மாற்றத்தினுல் மாறுபடாது.

A என்ற அணியை வடிவொத்த மாற்றத்தினுல் $B = S^{-1} AS$ என்று மாற்றுக. [S ஒரு சிறப்பிலா அணியாகும்.]

$$\begin{aligned}\therefore \quad \phi'(\lambda) &= |\lambda I - B| \\ &= |\lambda I - S^{-1} AS| \\ &= |S^{-1}(\lambda I - A) S| \\ &= |S^{-1}|\ |\lambda I - A|\ |S| \\ &= |\lambda I - A| \\ &= \phi(\lambda)\end{aligned}$$

தேற்றம் 16: மூலைவிட்ட அணிகள் வடிவொத்த அணிகளாக வேண்டுமெனின், அவற்றில் ஒன்றின் பூச்சியமாகாத உறுப்புகள் மற்றதன் பூச்சியமாகாத உறுப்புகளின் மாற்றமாகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

$$A = dg(\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots, \alpha_n)$$
$$B = dg(\beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_n)$$

என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

A, B அணிகள் வடிவொத்த அணிகளாதலால்

$$\phi_A(\lambda) = \phi^B(\lambda)$$

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_3)\dots\dots(\lambda - \alpha_n)$$

$$\phi_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\dots\dots(\lambda - \beta_n)$$

$\phi_A(\lambda) = \phi_B(\lambda)$ என்பதால்,

$(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\dots\dots(\lambda - \alpha_n) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\dots\dots(\lambda - \beta_n)$ ஆகும்.

$\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots, \alpha_n$ இவற்றை மாற்றி அமைக்கப்பட்ட உறுப்பு களே $\beta_1, \beta_2, \dots\dots \beta_n$ ஆகும்.

தேற்றம் 17: A, B என்ற ஏதாவதோர் இரு அணிகளை எடுத்துக்கொண்டால், AB, BA என்ற அணிகளுக்கு ஒரு சிறப்பியல்பு கோவைதான் உண்டு.

$|A| \neq 0$ என்ருல்

$$BA = (A^{-1}A)(BA)$$
$$= (A^{-1}(AB)A$$

$\therefore$ BA, AB என்ற அணிகள் வடிவொத்த அணிகளாகும்.

சாதாரணமாக எல்லா t-களுக்கும்.

$|A-tI| = 0$ என்பதில்லை.

அந்த t ஐ எடுத்துக் கொள்க. அதாவது

$|A-tI| \neq 0.$

$\therefore$ $(A - tI)B$, $B(A - tI)$ என்ற அணிகளுக்கு ஒரு சிறப்பியல்பு கோவைதான் உண்டு.

$$\therefore \quad |\lambda I-(A-tI)B| = |\lambda I - B(A-tI)|$$

$t = 0$ என்க.

$$|\lambda I-AB| = |\lambda I-BA|$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு X-ல் λ^r-ன் குணகம் $C_r(X)$ என்ருல்,

$$C_r(AB) = C_r(BA) \quad r=0, 1, 2 \ldots\ldots n \ldots \;. \; I$$

இங்கு A சிறப்பிலா அணியாக இருக்கவேண்டும். $C_r(X)$ என்பது X-ன் உறுப்புகளையுடைய தொடர்ச்சியான சார்பலனுகும். எனவே A சிறப்பு அணியாகும்போதுகூட I-சமன்பாடு நியாயமானதே.

9·5 ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள்

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

என்ற 'm' ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைப்பற்றி முன்பே படித்தோம். இவை $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற n கணியத்தைப் பொறுத்தவை.

இப்போது சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிப்பதுபற்றிச் சற்று ஆராய்வோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்ற $m \times n$ வகை அணியை எடுத்துக் கொள்க. இந்த அணியின் உறுப்புகள், தீர்வுகள் காணவேண்டிய x-களின் குணகங்கள். எனவே, இந்த அணியைக் குணகங்கள் அணி (Matrix of Coefficients) என்று கூறலாம்.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b^m \end{bmatrix}$$

என்ற $m \times (n+1)$ வகை அணியை விளிம்பு அணி (Augmented Matrix) என்க. இந்த விளிம்பு அணியின் $n+1$ நிரலின் உறுப்புகள், சமன்பாடுகளின் மாறிலி உறுப்புகளாகும்.

தொடக்க நிரைச் (நிரல்) செய்கைகளின் மூலம் A அணியும் B அணியும் ஒரே மாதிரி பாதிக்கப்படுகின்றன.

எக்லென் முறை, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுதிகளைச் சுருக்குக. எக்லென் முறையிலான விளிம்பு அணி, கொடுக்கப்பட்ட விளிம்பு அணியிலிருந்து அவசியமான தொடக்க நிரைச் (நிரல்) செய்கைகளினால் அடையலாம்.

மாதிரி :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

இதன் விரிம்பு அணி

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

எக்லென் முறைப்படி இதைச் சுருக்குக.

$R_2' = R_2 - R_1.$

$R_3' = R_3 - 2\,R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & -3 & -16 \end{bmatrix}$$

$R_2' = -\frac{1}{5}\,R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -16 \end{bmatrix}$$

$R_3' = R_3 = 5R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = -\frac{1}{3} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_1' = R_1 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_1' = R_1 - 2R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

குறிப்பு 15: இங்கு எல்லாத் தொடக்கச் செய்கைகளும் நிரை தொடக்கச் செய்கைகள் தாம். எக்லென் முறைப்படி நிரை தொடக்கச் செய்கையோ, நிரல் தொடக்கச் செய்கையோ ஏதாவதொன்றைத்தான் உபயோகப்படுத்த வேண்டும். ஒரே கணக்கில், ஒன்று நிரை தொடக்கச் செய்கையாகவும் மற்றது நிரல் செய்கையாகவும் இருக்கக் கூடாது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட அணிகளின் பெருக்கலைக் கணக்கிடுக :

1. (a) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. (i) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

என்றால் AB, BA என்பவற்றைக் கணக்கிடுக.

3.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$ என்றால்

$AB = 0, BA \neq 0, AC \neq 0, CA = 0$ என்று நிரூபி.

4.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்றால்

A^T, A^2, A^3 என்பவற்றைக் கணக்கிடுக.

5.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \quad \left[\omega = e^{2\pi i/3}\right]$$

என்றால் A^2 A^3 என்பவற்றைக் கணக்கிடுக.

6. ஒரு சதுர அணியில் A-யின் எல்லா உறுப்புகளும் 'a' என்றால், A^nஐக் கணக்கிட்டு எழுது.

7. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

என்றால் A^*, B^* இவற்றைக் கணக்கிடு.

8. A என்பது ஓர் எதிர்ச் சீர் அணியெனின் $A^T = -A$ என்று நிரூபி.

9. ஓர் அணி அந்த வகையைச் சேர்ந்த எல்லா அணிகளுடன் பரிமாற்றுதல் செய்தால் A ஓர் அலகு அணியாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என நிரூபி.

10. A என்பது ஏதாவதோர் அணியெனின் AA^T, A^TA என்பவை சீர் அணிகளாகுமெனக் காண்பி.

11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

என்பதன் எதிர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடி.

12. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

-ன் எதிர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடி.

13. இரு அணிகளின் பெருக்கல் ஒரு பூச்சியமில்லா எண் அணி ஆனால், இரு அணிகளும் பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டிருக்கு மெனக் காண்பி.

14.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ எனின்,

$A^{-1} = A^3$ என நிரூபி.

15. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் (நிரல்) மதிப்பிடத்தைக் கணக்கிடு.

(i)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

16.
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியைத் தொடக்கச் செய்கைகளின் மூலம்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்ற அணிக்குச் சுருக்கி, முதல் அணியின் மதிப்பிடத்தைக் கண்டுபிடி.

17. $[(1, 2, -1); \quad (3, 1, 2); \quad (1, -3, 4)]$ என்ற உபவெளியின் வகையளவைக் கண்டுபிடி.

18. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் தொகுதியைத் தீர்க்க:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \qquad &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

10. எண்களின் கொள்கை

(THEORY OF NUMBERS)

10·1 பகா எண்கள் (Prime Numbers)

வரையறை : ஒன்றுக்கு அதிகமான முழுஎண்ணுக்கு ஒன்றையும் தன்னையும் தவிர வேறு காரணிகள் இல்லையென்றால், அதைப் பகா எண் என்போம்.

உதாரணமாக 2, 3, 5, 7 என்பவை பகா எண்களாகும்.

12 என்ற எண்ணுக்கு, 1, 12 என்ற காரணிகளைத் தவிர, 2, 3, 4, 6 என்ற காரணிகள் இருக்கின்றன. எனவே, தனக்குக் குறைந்த முழு எண்கள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகையாக அமையும் எண்ணைக் கலவை எண்(Composite Number) எனலாம்.

10·2 எராடொதனஸின் சீவ் (The sieve of Erotosthanes)

எராடொதனஸ், என்ற கணித விஞ்ஞானி பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கினார். உதாரணமாக 100-க்குக் குறைவான பகா எண்களைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டுமெனின், 1-லிருந்து 100 வரையுள்ள முழு எண்களை எழுதிக் கொள்ளவும். பிறகு, 2-ன் மடங்குகளை (Multiples) மட்டும் அடித்துவிடவும். அதேபோல் 3-ன் மடங்கு, 4-ன் மடங்கு, 7-ன் மடங்குகளையும் அடித்துவிடவும். இம்மாதிரி மடங்குகளையெல்லாம் அடித்தபின் மீதம் இருக்கும் எண்களே 100-க்குக் குறைவான பகா எண்கள் ஆகும்.

எனவே, 1-லிருந்து 100-க்குள் இருக்கும் பகா எண்கள் 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 என்பவை ஆகும். அவற்றின் எண்ணிக்கை 25.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	47	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

10·3 தேற்றம்: பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது [ஈக்குலிட்டின் தேற்றம்].

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது என்றும், அவை $a_1, a_2 \ldots a_n$ என்றும் கொள்க. எனவே, மற்ற எண்கள் எல்லாம் கலவை எண்கள் ஆகும். அவற்றைப் பகா எண்களில் குறைந்தது ஒன்ருே வகுக்கவேண்டும்.

$N = a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots a_n + 1$ என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்க.

Nஐ $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ என்பவற்றின் ஏதாவது ஒரு பகா எண்ணுல் வகுத்தாலும் மீதி 1 இருக்கும். எனவே, N ஒரு கலவை எண் அன்று. அது பகா எண்ணுகத்தான் இருக்கவேண்டும். எனவே, பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது என்ற கருத்துத் தவறு.

குறிப்பு: N என்ற எண்ணுக்குச் சமமாகவோ, குறைந்தோ உள்ள பகா எண்களின் எண்ணிக்கையை $\pi(N)$ என்று குறிப்போம். $\pi(1) = 1, \pi(2) = 2, \pi(3) = 3, \pi(4) = 3$, $\pi(5) = 4 \ldots \pi(100) = 25$ என்ருகும்.

10·4 தேற்றம்: ஒவ்வொரு கலவை எண்ணையும் ஒரே ஒரு முறையில் பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

N என்ற கலவை எண்ணை எடுத்துக்கொண்டால் அதற்கு, N, 1 என்ற எண்களைத் தவிர வேறு காரணிகள் இருக்கவேண்டும். 'a' ஒரு காரணியானுல்,

$N = a \cdot b$ என்ருகும்.

a, b என்பவை கலவை எண்கள் என்ருல் $a = c \cdot d$, $b = e \cdot f$ என்று பிரிக்கலாம்.

$$\therefore \quad N = c \cdot d \cdot e \cdot f$$

இப்படியே பிரித்துக்கொண்டு சென்ருல் கடைசியில் Nஐப் பகாஎண்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் கருதலாம். ஆனுல், எல்லாப் பகா எண்களும் வெவ்வேருக இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை.

$$N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots\ldots$$

[இங்கு p, q, r என்பவை பகா எண்கள்; a, b, c என்பவை மிகை முழு எண்கள்.]

முடிந்தால்,

$$N = P^A \cdot Q^B \cdot R^C \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots\ldots = P^A \cdot Q^B \cdot R^C \ldots\ldots$$

∴ p என்ற பகா எண் $p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொகையின் வகுபடுமெண்ணுக வேண்டும். ஆனல் p, q, r என்பவை பகா எண்கள். ஆதலால், P என்ற எண், மேற்கண்ட பகா எண்களில் ஏதாவதொன்றிற்குச் சமமாக வேண்டும். அதே போல் Q, R ... என்ற எண்களும் $p \cdot, q \cdot r$ என்ற பகா எண்களில் ஏதாவதொன்றுக்குச் சமமாக வேண்டும்.

$$\therefore \quad N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \ldots = p^A \cdot q^B \cdot r^C \ldots$$

$A \neq a$ என்றல் $A = a + k$

$$\therefore \quad p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots = p^{a+k} \cdot q^B \cdot r^C \ldots$$

$$\therefore \quad q^b r^c \ldots = p^k \cdot q^B \cdot r^C \ldots$$

அதாவது p என்பது சமன்பாட்டில் இடக்கைப் பக்கம் உள்ள கோவையின் வகுபடுமெண்ணுகும். இது இயலாத ஒன்று. $R = 0$.

∴ $A = a$ அதேபோல் $B = b$, $C = c$ ... என்ருகும். எனவே, கலவை எண்கள் காரணிப்படுத்தல் ஒரே ஒரு முறையில்தான் நடக்கும்.

10·5 தேற்றம்: N என்ற எண்ணின் வகுக்குமெண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டுபிடிக்க.

$N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots$ என்ற விதத்தில் பிரிக்கலாம்.

N-ன் வகுக்குமெண்கள் $p, p^2 \ldots p^a, p \cdot q, p^2 q \ldots, pq^r, p^2 q^r \ldots$ என்ற முறையில் இருக்கும். எனவே N-ன் வகுக்குமெண்கள்

$$(1+p+p^2 \ldots\ldots + p^a)(1+q+q^2 \ldots + q^b)(1+r+r^2 \ldots\ldots r^c)\ldots$$

என்ற தொடர்பெருக்கத் தொகையின் உறுப்புகள் ஆகும்.

∴ வகுக்குமெண்களின் கூட்டுத்தொகை = தொடர் பெருக்கலில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{p^{a+1} - 1}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q-1} \cdot \frac{r^{c+1} - 1}{r-1} \ldots\ldots\ldots$$

இந்தக் கூட்டுத்தொகையில், 1, N என்ற இரு எண்களால் அடங்கியுள்ளது நோக்கத்தக்கது.

மாதிரி 1 : 480 என்ற எண்ணின் வகுக்குமெண்களின் கூட்டுத்தொகை, அவற்றின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்க.

$$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$$

வகுக்குமெண்களின் எண்ணிக்கை $= (5+1)(1+1)(1+1)$

$= 6 \cdot 2 \cdot 2$

$= 24$

அவற்றின் கூட்டுத்தொகை $= \dfrac{2^6-1}{2-1} \cdot \dfrac{3^2-1}{3-1} \cdot \dfrac{5^2-1}{5-1}$

$= \dfrac{63}{1} \cdot \dfrac{8}{2} \cdot \dfrac{24}{4}$

$= 63 \cdot 24$

$= 1512$

மாதிரி 2 : 12 வகுக்குமெண்கள் உள்ள குறைந்த கலவை எண்ணைக் கண்டுபிடி.

$N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \ldots$ என்று கொள்க.

இங்கு $a+1 = 3$

$b+1 = 2$

$c+1 = 1$ என்றுதான் கொள்ளவேண்டும். [$a+1=1$, $b+1=2$, $c+1=3$ என்று கொண்டால், குறைந்த கலவை எண் கிடைக்காது.]

$\therefore \quad a = 2, b=1, c=1$

$\therefore \quad N = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$= 4 \cdot 3 \cdot 5$

$= 60$

மாதிரி 3 : N என்ற எண்ணின் வகுக்குமெண்களின் பெருக்குத் தொகையைக் கண்டுபிடி.

$N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots$ என்று கொள்க. x என்பது N-ன் ஒரு வகுக்குமெண் என்றால் $\dfrac{N}{x}$-ம் வகுக்குமெண்ணாகும். அவற்றின் பெருக்குத் தொகை $= N$.

எனவே $(a+1)$ $(b+1)$ $(c+1)$ என்ற எண்ணிக்கையுள்ள வகுக்குமெண்களை $x, \frac{N}{x}$ என்ற விதத்தில் பிரித்தால், $\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$ ...... என்ற ஜதைகள் கிடைக்கும். அவற்றில் ஒவ்வொன்றின் பெருக்குத்தொகையும் N ஆகும்.

∴ வகுக்குமெண்களின் பெருக்குத் தொகை

$$N^{\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots\ldots}$$

10·6 Q (N) என்ற ஆய்லரின் சார்பலன்

வரையறை : N என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்க. அதற்குக் கீழான எண்களில் N-க்குப் பகாவெண்ணாக உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை $Q(N)$ என்று குறிப்போம்.

6 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். 1, 5 என்ற எண்களே 6-க்குப் பகா எண்களாகும்.

∴ $Q(6) = 2$.

குறிப்பு : $Q(1) = 1$ என்று கொள்வோம்.

10·6·1 தேற்றம் : $Q(N)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

$N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots\ldots$ என்று எழுதுக.

இங்கு p, q, r என்பவை பகா எண்கள் என்பது தெளிவு. N-க்குப் பகா எண்ணாக உள்ள முழு எண், $p, q, r \ldots\ldots$ என்பவற்றால் வகுபடக்கூடாது.

∴ $Q(N)$ என்பது, 1, 2, 3 ...... N என்ற எண்களில் p, q, r என்பவற்றால் வகுக்கப்படாத எண்களின் எண்ணிக்கையாகும். முடிந்தால், 1, 2, 3, ... N என்ற எண்களில் p, q, r ... என்பவற்றால் வகுக்கப்படும் எண்களைக் கண்டுபிடிப்போம்.

p ஆல் வகுக்கப்படும் எண்கள் $p, 2p, 3p \ldots\ldots \frac{N}{p} \cdot p$ என்பவையாகும்.

∴ pஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{p}$ ஆகும்.

அதேபோல் qஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{p}$ ஆகும்.

மேலும், pqஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{pq}$ ஆகும்

$$\Sigma \frac{N}{p} - \Sigma \frac{N}{pq} + \Sigma \frac{N}{pqr} \ldots$$ என்ற தொடரைக் கவனிக்க.

N-க்குக் கீழான ஓர் எண்ணை எடுத்துக் கொள்க. அதை $p, q, r \ldots\ldots$ என்ற பகா எண்களில் k = பகா எண்களால் வகுக்க முடியுமெனின் $\Sigma \frac{N}{p}$-ல் kc_1 முறையும், $\Sigma \frac{N}{pq}$-ல் kc_2 முறையும் $\Sigma \frac{N}{pqr}$-ல் kc_3 முறையும் இந்த எண்கள் உண்டு.

∴ வரிசையில், இந்த எண்ணைக் கணிக்கும் எண்ணிக்கை

$$kc_1 - kc_2 + kc_3 \ldots\ldots = 1 - (1-1)^k$$

$$= 1$$

∴ N-க்குக் கீழானதும், அதற்குப் பகு எண்ணாகவும் உள்ள எண் இந்த வரிசையில் ஒரே ஒரு முறைதான் கணக்கிடமுடியும்.

$$\therefore \quad Q(N) = N - \Sigma \frac{N}{p} + \Sigma \frac{N}{pq} - \Sigma \frac{N}{pqr} + \ldots\ldots$$

$$= N\left(1 - \Sigma \frac{1}{p} + \Sigma \frac{1}{pq} - \Sigma \frac{1}{pqr} + \ldots\ldots\right)$$

$$= N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \ldots\ldots$$

என்று ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : $N = a \cdot b$ என்க. a-யும் b-யும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் என்றால்,

$$Q(N) = Q(a) \cdot Q(b)$$

அதேபோல் $a, b, c, d \ldots\ldots$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் என்றால்,

$$Q(a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots\ldots) = Q(a) \cdot Q(b) \cdot Q(C) \ldots\ldots$$

மாதிரி 1 : 360-க்குக் குறைந்தும் அதற்குப் பகா எண்களாகவும் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\therefore \quad Q(360) = 360(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})$$

$$= \overset{12}{\cancel{360}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{4}{\cancel{5}}$$

$$= 96$$

மாதிரி 2 : N-க்குக் குறைந்தும் அதற்குப் பகா எண்ணுகவும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டுபிடிக்க.

$x < N$. x, N-க்குப் பகா எண் என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore$ $N-x$-க்கும் N-க்கும் பகா எண்ணுகும். இந்த இரு எண் களின் கூட்டுத்தொகை N.

$\therefore$ $Q(N)$ எண்களை இம்மாதிரி $\dfrac{Q(N)}{2}$ ஜதைகளாகப் பிரிக் கலாம்.

$$\therefore \quad \text{கூட்டுத்தொகை} = \frac{Q(N)}{2} \cdot N$$

10·7 $n!$-ல் உள்ள பகா எண் p-ன் அதிகபட்ச அடுக்கைக் கண்டுபிடிக்க.

குறிப்பு : x என்ற கூட்டு எண்ணில் உள்ள அதிகபட்ச முழு எண்ணை $[x]$ என்று குறிப்போம்,

$[10] = 10$; $[9\frac{1}{2}] = 9$ என்ருகும்.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n.$

$p > n$ என்ருல் $n!$-ல் உள்ள ஓர் எண்ணும் pஆல் வகுபடாது.

$\therefore$ $p \leq n$ என்று இருக்கவேண்டும்.

pஆல் வகுபடும் $n!$-ல் உள்ள காரணிகள்

$$p,\ 2p,\ 3p \ldots\ldots \left[\frac{n}{p}\right] \cdot p$$

$\therefore$ $n!$-ல் p-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு

$$= p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \ldots\ldots \left[\frac{n}{p}\right] \text{-ல் } p\text{-ன்}$$

அதிகப்பட்ட அடுக்காகும்.

இப்போது,

$1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots \left[\frac{n}{p}\right]$-ல் p ஆல் வகுபடும் காரணிகள்

$p, \ 2p, \ 3p \ldots \ldots \left[\frac{n}{p^2}\right] \cdot p$

$\therefore \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \left[\frac{n}{p}\right]$-ல் p-ன் அடுக்கு

$= p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left[\frac{n}{p^2}\right]$-ல் p-ன் அடுக்காகும்.

$\therefore \quad n!$-ல் p-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு.

$= p^{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \ldots \left[\frac{n}{p^2}\right]$-ல் p-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு.

இப்படியாக நடத்தும்போது $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$

என்று இருக்கும்படி k என்ற மிகை முழு எண் இருக்கும்.

$\therefore \quad n!$-ல் p-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] \cdots + \left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]$$

(இங்கு $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ என்றாக வேண்டும்).

மாதிரி 1 : 500!-ல் 3-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கைக் கண்டு பிடிக்க.

$$\left[\frac{500}{3}\right] = 166$$

$$\left[\frac{500}{3^2}\right] = 55$$

$$\left[\frac{500}{3^3}\right] = 18$$

$$\left[\frac{500}{3^4}\right] = 6$$

$$\left[\frac{500}{3^5}\right] = 1$$

$$\left[\frac{500}{3^6}\right] = 0$$

∴ 500!-ல் 3-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு

$$= 166 + 55 + 18 + 6 + 1 + 0$$

$$= 246$$

மாதிரி 2 : 59!-ன் கடைசியில் உள்ள பூச்சியங்கள் எவ்வளவு ?

2, 5 என்பவற்றின் அதிகப்பட்ட அடுக்கைக் கண்டு பிடிப்போம்.

$$\left[\frac{59}{2}\right] = 29, \quad \left[\frac{59}{2^2}\right] = 14 \quad \left[\frac{59}{2^3}\right] = 7$$

$$\left[\frac{59}{2^4}\right] = 3 \quad \left[\frac{59}{2^5}\right] = 1$$

∴ 2-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு $= 29 + 14 + 7 + 3 + 1$

$$= 54$$

$$\left[\frac{59}{5}\right] = 11, \quad \left[\frac{59}{5^2}\right] = 2$$

∴ 5-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு $= 11 + 2 = 13$

∴ 10-ன் அதிகப்பட்ட அடுக்கு $= 13$

∴ 59! என்ற எண் 13 பூச்சியங்களைக் கடைசியில் கொண்டிருக்கும்.

10·8 தேற்றம் : அடுத்தடுத்த 'r' முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகை r ! ஆல் வகுபடும்.

$(n + 1), (n + 2) \ldots\ldots (n + r)$ என்று அடுத்தடுத்த 'r' முழு எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்குத் தொகை

$$= (n + 1)(n + 2) \ldots\ldots (n + r) = \frac{(n + r)!}{n!}$$

ஆனல் $\frac{n + r!}{n!\,r!} = (n + r) c_r$

= முழு எண்.

$\therefore$ $(n + 1) \cdot (n + 2) \ldots\ldots (n + r)$ என்ற பெருக்குத் தொகை 'r' ஆல் வகுபடும்.

10·9 ஒருங்கிசைவு (Congruence)

m என்ற மட்டைப் (Modulus) பொறுத்து, a, b என்ற முழு எண்கள் ஒருங்கிசைவு அடைந்தால்,

$a - b = km$ என்று இருக்க வேண்டும். இங்கு k ஒரு முழு எண் ஆகும்.

$a - b = 0$ (மட்டு m)

அல்லது $a \equiv b$ (மட்டு m) என்று குறிக்கலாம்.

$25 \equiv 7$ (மட்டு 3) என்பது சரியென்பதை நோக்குக.

அதன் சில தன்மைகளை நோக்குவோம்.

தன்மை 1: $a \equiv b$ (மட்டு m) $a_1 \equiv b_1$ (மட்டு m) என்றும் k, l என்பவற்றை முழு எண்கள் என்றும் கொண்டால்,

$ka + la_1 \equiv kb_1 + lb_1$ (மட்டு m) என்ருகும்.

$a \equiv b$ (மட்டு m) $\quad \therefore \; a - b = \lambda m.$

$\therefore \; ka - kb = \lambda km$

$a_1 \equiv b_1$ (மட்டு m) $\quad \therefore \; a_1 - b_1 = \mu m.$

$\therefore \; la_1 - lb_1 = \mu lm$

$$\therefore \; (ka + la_1) - (kb_1 + lb_1) = (\lambda k + \mu l) m$$

$$\therefore \; (ka + la_1 \equiv (kb + lb_1) \text{ (மட்டு } m)$$

கிளைத்தேற்றம்

தன்மை 1 : $a \equiv b$ (மட்டு m) $a_1 \equiv b_1$ (மட்டு m)

$$a + a_1 \equiv b + b_1 \text{ (மட்டு } m)$$

$$a - a_1 \equiv b - b_1 \text{ (மட்டு } m)$$

தன்மை 2 : $a \equiv b$ (மட்டு m)

$a_1 = b_1$ (மட்டு m) என்றால்

$a a_1 = b b_1$ (மட்டு m) என்றாகும்.

$$a \equiv b \text{ (மட்டு } m) \quad \therefore \quad a \equiv b + \lambda m$$

$$a_1 \equiv b_1 \text{ (மட்டு } m) \quad \therefore \quad a_1 \equiv b_1 + \mu m$$

$$\therefore \quad a a_1 = b b_1 + \mu bm + \lambda b_1 m + \lambda \mu m^2$$

$$= b b_1 + m (\mu b + m\lambda b_1 + \lambda \mu m)$$

$$\therefore \quad a a_1 = b b_1 \text{ (மட்டு } m)$$

தன்மை 3 : $a x \equiv b x$ (மட்டு m) என்றால்

$$a \equiv b \left(\text{மட்டு } \frac{m}{h} \right)$$

இங்கு h என்பது x-க்கும், m-க்கும் உள்ள அதிகப்பட்ட பொதுக் காரணி ஆகும்.

$$\therefore \quad x = p^h$$

$$m = q^h$$

இங்கு p-யும் q-வும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

$$a x \equiv b x \text{ (மட்டு } m)$$

$$\therefore \quad a x - b x = \lambda m$$

$$a p^h - b p^h = \lambda q^h$$

$$\therefore \quad a - b = \lambda \frac{q}{p}$$

q, p-க்குப் பகா எண் என்பதால் $a - b$ஐ q வகுக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad a - b = \mu q$$

$$\therefore \quad a = b \,(\text{மட்டு } q)$$

$$= b \left(\text{மட்டு } \frac{m}{n}\right)$$

குறிப்பு : $h = 1$ என்றால் $a = b$ (மட்டு m) என்பதைக் கவனிக்க.

மாதிரி 1 : ஒரே எண் 3 ஆல் வகுபட வேண்டுமெனின் அதற்கான நிபந்தனை

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d \text{ என்போம்.}$$

$$10 = 1 \,(\text{மட்டு } 3)$$

$$100 = +1 \,(\text{மட்டு } 3)$$

$$1000 = 1 \,(\text{மட்டு } 3)$$

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d$$

$$\equiv a + b + c + d \,(\text{மட்டு } 3)$$

$a + b + c + d$ என்பது 3 ஆல் வகுபட்டால் N ஐ 3 ஆல் மீதி இன்றி வகுக்கலாம்.

மாதிரி 2 : 11 ஆல் வகுபட வேண்டிய நிபந்தனை

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d$$

$$10 \equiv -1 \,(\text{மட்டு } m)$$

$$100 \equiv 1 \,(\text{மட்டு } m)$$

$$1000 = -1 \,(\text{மட்டு } m)$$

$$\therefore \quad N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d$$

$$\equiv a - b + c - d \,(\text{மட்டு } m)$$

$a - b + c - d$ என்பது 11 ஆல் வகுபட்டால், N, 11 ஆல் மீதி இன்றி வகுபடும்.

மாதிரி 3 : 5, 4, 3, 2 என்பவற்றால் வகுபடும்போது முறையே 4, 3, 2, 1 என்பவற்றை மீதிகளாகக் கொண்ட எண்களைக் கண்டுபிடி.

எண்ணை 'N' என்போம்.

$N \equiv 4$ (மட்டு 5) $\equiv -1$ (மட்டு 5)

$N \equiv 3$ (மட்டு 4) $\equiv -1$ (மட்டு 4)

$N \equiv 2$ (மட்டு 3) $\equiv -1$ (மட்டு 3)

$N \equiv 1$ (மட்டு 1) $\equiv -1$ (மட்டு 2)

$\therefore$ $N \equiv -1$ (மட்டு 1, 2, 3, 4, 5 என்பவற்றின் குறைந்தபட்சப் பொதுமடங்கு)

$\equiv -1$ (மட்டு 60)

$\therefore$ $N = 60K - 1$

எனவே, மிகக் குறைந்த எண் $= 59$

மாதிரி 4 : 3^{1000} ஐ 10ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் கண்டுபிடி.

$3^2 = 9$

$\equiv -1$ (மட்டு 10)

$\therefore$ $3^{1000} \equiv (3^2)^{500}$

$\equiv (-1)^{500}$ (மட்டு 10)

$\equiv 1$ (மட்டு 20)

எனவே மீதி 1 என்ருகும்.

மாதிரி 5 : 2^{46} ஐ 47 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் கண்டுபிடி.

$2^5 = 32$

$\equiv -15$ (மட்டு 47)

$2^{10} \equiv (-15)^2$ (மட்டு 47)

$\equiv 225$ (மட்டு 47)

$\equiv -10$ (மட்டு 47)

$2^{20} \equiv 100$ (மட்டு 47)

$\equiv 6$ (மட்டு 47)

$2^{40} \equiv 36$ (மட்டு 47)

$$\therefore \quad 2^{45} \equiv -540 \text{ (மட்டு 47)}$$

$$2 \equiv 2 \quad \text{(மட்டு 47)}$$

$$\therefore \quad 2^{46} \equiv 1080 \quad \text{(மட்டு 47)}$$

$$\equiv 1 \quad \text{(மட்டு 47)}$$

∴ மீதி = 1 ஆகும்.

10·10 தேற்றம்: $x_1, \ x+a, \ x+2a, \dots x + \overline{n-1}\, a$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் உள்ள n உறுப்புகளை n ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் 0, 1, 2 ... $\overline{n-}$

(இங்கு n, a-க்குப் பகா எண்ணுக வேண்டும்.)

$x + pa, x + qa$ என்ற எண்களை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி ஒன்ருகவும் அதை 'r' என்றும் கொள்க.

அதாவது $x + pa = \lambda n + r$

$$x + qa = \mu n + r$$

$$\therefore \quad (p-q)\, a = (\lambda + \mu)\, n$$

$p-q < n$.

∴ n, a ஆல் வகுபட வேண்டும்.

ஆனல் n-ம் a-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

∴ $n + pa, n + qa$ என்ற எண்களை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி வெவ்வேருக இருக்கும். எந்த மீதிகளும் n-க்குக் குறைவாகவே இருக்கவேண்டும்.

∴ $n, n+a \dots n + \overline{n-1}\, a$ என்ற n உறுப்புகளை 'n' ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் வெவ்வேருனவையாக இருக்க வேண்டும்.

∴ அவை 0, 1, 2, $\overline{n-1}$ என்றுதான் இருக்கவேண்டும்.

மாதிரி 1: N^3 என்ற எந்த எண்ணும் $7p$ அல்லது $7p \pm 1$ என்ற வடிவிலேயே இருக்கும்.

N என்ற எந்த எண்ணையும் 7 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று இருக்கவேண்டும்.

∴ $N = 7m$ அல்லது $7m+1$ அல்லது $7m+2$ அல்லது $7m+3$ அல்லது $7m+4$ அல்லது $7m+5$ அல்லது $7m+6$.

$= 7m$ அல்லது $7m \pm 1$ அல்லது $7m \pm 2$ அல்லது $7m \pm 3$

ஐ $(7m \pm r)^3 = (7m)^3 \pm 3(7m)^2 r + 3(m) r^2 \pm r^3$

$= M(7) \pm r^3$

$\therefore \quad N^3 = (7m)^3 \equiv 0$ (மட்டு 7)

அல்லது $N^3 = (7m \pm 1)^3 \equiv \pm 1$ (மட்டு 7)

அல்லது $N^3 = (7m \pm 2)^3 \equiv \pm 2^3$ (மட்டு 7)

$\equiv \pm 1$ (மட்டு 7)

அல்லது $N^3 = (7m \pm 3)^3 \equiv \pm 27$ (மட்டு 7)

$\equiv \pm 1$ (மட்டு 7)

எனவே $N^3 = \pm 1$ (மட்டு 7)

அல்லது $\equiv 0$ (மட்டு 7)

$\therefore \quad N^3 = 7p$ அல்லது $7p \pm 1$ என்றுதான் இருக்க வேண்டும்.

10·11 வெர்மாட்டின் தேற்றம் (Fermat's Theorem)

p என்பது ஒரு பகா எண்ணாகவும், p-க்குப் பகா எண்ணாக a-யும் அமைந்தால்,

$a^{p-1} - 1$ என்பது p ஆல் வகுபடும்.

முதல்முறை : n என்பது ஒரு பகா எண் எனின் ncr ஐ n ஆல் வகுக்க முடியுமென்று கண்டோம்.

$$\therefore \quad (a+1)^p = a^p + pc_1 a^{p-1} + pc_2 a^{p-c} \dots + pc_{p-1} a + 1$$

$$\therefore \quad (a+1)^p - a^p - 1 = pc_1 a^{p-1} + pc_2 a^{p-c} \dots pc_{p-1} a$$

p என்பது ஒரு பகா எண் என்பதால், $pc_1, pc_2 \dots\dots pc_{p-1}$ என்பவை p ஆல் வகுபடும்.

$\therefore \quad (a+1)^p - a^p - 1 = p$-ன் மடங்கு ஆகும்.

$\therefore \quad (a+1)^p \equiv a^p + 1$ (மட்டு p)

$\therefore \quad a^p \equiv (a-1)^p + 1$ (மட்டு p)

$(a-1)^p \equiv (a-2)^p + 1$ (மட்டு p)

$3^p \equiv 2^p + 1$ (மட்டு p)

$2^p \equiv 1^p + 1$ (மட்டு p)

$$\therefore\ a^p + (a-1)^p \ldots\ldots + 3^p + 2^p \equiv (a-1)^p + (a-2)^p$$

$$\ldots\ldots 2^p + 1^p + (a-1)\ (\text{மட்டு } p)$$

$$\therefore\ a^p \equiv 1^p + a - 1\ (\text{மட்டு } p)$$

$$\equiv a\ (\text{மட்டு } p)$$

$\therefore\ a^p - a$, p ஆல் வகுபடும்.

$a(a^{p-1} - 1)$, p ஆல் வகுபடும்.

$\therefore\ a$, p-க்குப் பகா எண். $\therefore\ a^{p-1} - 1 = ம(p)$

இரண்டாவது முறை.

$$(x+y)^p = x^p + pc_1\, x^{p-1} y \ldots - + pc_{p-1}\, xy^{p-1} + y^p$$

$pc_1, pc_2 \ldots\ldots pc_{p-1}$ என்பவை p ஆல் வகுபடும்.

$$\therefore\ (x+y)^p \equiv x^p + y^p\ (\text{மட்டு } p)$$

$$(x+y+z)^p \equiv (x+y)^p + z^p\ (\text{மட்டு } p)$$

$$\equiv (x^p + y^p + z^p)\ (\text{மட்டு } p)$$

இப்படிச் செய்யும்போது

$$(x + y + z \ldots\ldots + \omega)^p \equiv x^p + y^p + z^p \ldots\ldots + \omega^p\ (\text{மட்டு } p)$$

$x = y = z \ldots\ldots = \omega = 1$ என்க.

$x, y, z \ldots\ldots \omega$ என்ற 'a' எண்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$a^p \equiv a\ (\text{மட்டு } p)$$

a, p-க்குப் பகா எண் என்பதால் $a^{p-1} \equiv 1\ (\text{மட்டு } p)$

மூன்றுவது முறை: $a, 2a \ldots\ldots (p-1)\,a$ என்ற எண்களை p ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் $1, 2 \ldots\ldots p-1$ என்றுகும்.

$$\therefore\ a, 2a, 3a \ldots (p-1)\,a \equiv 1\cdot 2 \ldots\ldots p-1\ (\text{மட்டு } p)$$

$$(p-1)!\ a^{p-1} \equiv (p-1)!\ (\text{மட்டு } p)$$

$(p-1)!\,(a^{p-1} - 1)$ என்பது pஆல் வகுபடும்.

$(p-1)!$ p ஆல் வகுபடாது.

$\therefore\ a^{p-1} - 1$, p ஆல் வகுபடும்.

10·11·1 வெர்மாட் தேற்றத்தின் பொது உருவம் (Generalisation of Fermat's theorem)

n ஐ ஏதாவதோர் எண்ணுகவும், a-யை அதற்குப் பகா எண்ணுகவும் கொண்டால்,

$a^{\phi(n)} \equiv 1\ (\text{மட்டு } n)$ என்று நிரூபிக்க.

n-க்குக் குறைவாகவும், அதற்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள எண்களை

$a_1, a_2 \ldots\ldots a_{Q(n)}$ என்க.

இப் $a \cdot a_1$, $a \cdot a_2 \ldots\ldots a \cdot a_{Q(n)}$ என்ற பெருக்குத் தொகையைக் கவனிக்க.

$a \cdot a_r$ ஐ n ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி R என்க.

$$\therefore \quad a \cdot a_r = \lambda n + R.$$

a, a_r என்பவை n-க்குப் பகா எண் என்பதால் R-ம் 'n'-க்குப் பகா எண்ணாக வேண்டும்.

$a \cdot a_s$ என்ற பெருக்குத் தொகையை n ஆல் வகுத்தால் R என்ற அதே மீதி கிடைத்தால்

$$a \cdot a_s = \mu \cdot n + R$$

$$\therefore \quad a(a_r - a_s) = (\lambda - \mu)\, n$$

a, n-க்குப் பகா எண். a_r, a_s என்ற இரண்டும் n-க்குச்சிறியவை.

$$a(a_r - a_s) \neq (\lambda - r)\, n.$$

$\therefore$ $a \cdot a_s$, R என்ற அதே மீதியைக் கொடுக்கமுடியாது.

$\therefore$ $a \cdot a_1$, $a \cdot a_2, \ldots\ldots a \cdot a_{Q(n)}$ என்பவற்றை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள்

$R_1, R_2 \ldots R_{Q(n)}$

அவை யாவும் 'n'-க்குப் பகா எண்களே.

$\therefore$ அவை $a_1, a_2 \ldots a_{Q(n)}$-க்குச் சமமாக வேண்டும்.

$$\therefore \quad a \cdot a_1, a \cdot a_2 \ldots\ldots a \cdot a_{Q(n)}$$

$$\equiv a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{Q(n)} \text{ (மட்டு } n)$$

$$\therefore \quad a^{Q(n)} \equiv 1 \text{ (மட்டு } n)$$

கிளைத்தேற்றம்: p என்பது பகா எண்.

$$Q(p) = p - 1$$

$$\therefore \quad a^{p-1} \equiv 1 \text{ (மட்டு } p)$$

10·12 வில்சனின் தேற்றம் (Wilson's Theorem)

p என்பது பகா எண் எனின் $(p-1)!+1$ என்பது p ஆல் வகுபடும்.

p என்பது பகா எண் என்பதால், அதற்குக் குறைந்து 1, 2, 3 ... $p-1$ எண்களில் ஏதாவதொன்றை x என்க.

$\therefore$ $x, 2x, 3x \ldots\ldots (p-1)x$ என்பவற்றை p ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள் $1, 2, 3, \ldots\ldots p-1$ என்பவை ஆகும்.

$x, 2x, 3x \ldots\ldots (p-1)x$ என்பவற்றில்

rx என்ற எண்ணை p ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 1 என்ருகட்டும்.

$$\therefore \quad rx \equiv 1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$r = x \text{ என்ருல் } x^2 \equiv 1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$\therefore \; x^2 - 1 \equiv 0 \text{ (மட்டு } p)$$

$$(x+1)(x-1) \equiv 0 \text{ (மட்டு } p)$$

$$\therefore \quad x < p \text{ என்பதால்}$$

$$x + 1 = p \quad x - 1 = 0 \text{ என்றுதான் இருக்கவேண்டும்.}$$

$$\therefore \quad x = p - 1 \text{ அல்லது } 1$$

$1, p-1$ என்ற இரு எண்களைத் தவிர்த்து, மீதமுள்ள $2, 3, 4 \ldots . \; p-2$ என்ற $p-3$ எண்களை, $\frac{p-3}{2}$ ஜதைகளாகப் பிரித்து, அங்குள்ள ஒவ்வொரு ஜதையிலுமுள்ள உறுப்புகளின் பெருக்குத் தொகை $\equiv 1$ (மட்டு p) என்ருகும்.

$$\therefore \; 2 \cdot 3 \ldots\ldots p - 2 \equiv \; 1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$1 \cdot (p-1) \equiv -1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$\therefore \quad (p-1)! \equiv -1 \text{ (மட்டு } p)$$

$$\therefore \quad (p-1)! + 1 \; \equiv \; 0 \text{ (மட்டு } p)$$

10·13 இலேக்ராஞ்சின் தேற்றம் (Lagrange's Theorem)

p ஒரு பகா எண் என்றும்

$(x+1)(x+2) \ldots\ldots (x+p-1) = x^{p-1} + A_1 x^{p-2} \ldots\ldots + A_{p-2}\, x + A_{p-1}$ என்றும் அமைந்தால் $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{p-2}$ என்பவை எல்லாம் pஆல் வகுபடும்.

$$(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+p-1) = x^{p-1} + A_1 x^{p-c}\ldots\ldots A_{p-1}.$$

$x = x + 1$ என்க.

$$\therefore\ (x+2)\ (x+3)\ \ldots\ (x+p) = (x+1)^{p-1} + A_1(n+1)^{p-2}\ldots\ldots A_{p-1}.$$

$$\therefore\ (x+1)\ (x+2)\ldots(x+p) = (x+1)\ [(x+1)^{p-1} + A_1(x+1)^{p-2}\ldots\ldots + A_{p-1}]$$

$$= (x+1)^{p-1} + A_1(x+1)^{p-1}\ldots\ldots A_{p-1}(x+1)$$

$$\therefore\ (x+p)[x^{p-1} + A_1 x^{p-2}\ldots + A_{p-2}x + A_{p-1}]$$

$$= (x+1)^p + A_1(x+1)^{p-1}\ldots\ldots + A_{p-2}(x+1)^2 + A_{p-1}(x+1)$$

$$\therefore\ x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots A_{p-2}x^2 + A_{p-1}x + px^{p-1} + pA_{p-3}x^3 + pA_{p-2}x + pA_{p-1}$$

$$= (x+1)^p + A_1(x+1)^{p-1}\ldots + A_{p-2}(x+1)^2 + A_{p-1}(x+1)$$

எனவே

$$[(x+1)^p - x^p] + A_1[(x+1)^{p-1} - x^{p-1}]$$

$$+ A_2[(x+1)^{p-2} - x^{p-2}] + A_{p-1}[(x+1) - x]$$
$$= px^{p-1} + \ldots + pA_{p-2}x + pA_{p-1}.$$

மேலுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து, x^{p-2}, x^{p-3}...என்பவற்றின் குணங்களைச் சமன்படுத்து.

$$pA_1 = pc_2 + (p-1)c_1 A_1 \qquad \ldots(1)$$
$$pA_2 = pc_2 + (p-1)c_2 A_1 + (p-2)c_1 A_2 \qquad \ldots(2)$$
$$p\,A_{p-1} = 1 + A_1 + A_2 \ldots + A_{p-1} \ldots (p-1)$$

p என்பது பகா எண் என்பதால், $(p-1)c_1$, $(p-2)c_1$, $(p-3)c_1$ ...... என்பவை p ஆல் வகுபடாது.

எனவே (1) சமன்பாட்டிலிருந்து A_1, அதை உபயோகப் படுத்தி (2) சமன்பாட்டிலிருந்து A_2, ... A_{p-2} என்பவை p ஆல் வகுபடும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : தேற்றத்தில் உள்ள $n = 0$ என்றால்

$(p-1)! = A_{p-1}$

$n = 1$ எனின் $2 \cdot 3 \ldots p = 1 + A_1 + A_2 \ldots + A_{p-1}$

$\therefore \quad A_{p-1} + 1 = p! - (A_1 + A_2 \ldots + A_{p-2})$

$(p-1)! + 1 = p! - (A_1 + A_2 \ldots + A_{p-2})$

$p!$, p ஆல் வகுபடும்.

$(A_1 + A_2 \ldots + A_{p-2})$ pஆல் வகுபடும்.

$\therefore \quad (p-1)! + 1$, p ஆல் வகுபடும்.

இதுவே வில்சனின் தேற்றம்.

$$x(x+1)(x+2) \ldots (x+p-1) = x(x^{p-1} + A_1 x^{p-2} \ldots + A_{p-2}x + A_{p-1})$$

$$= x^p + A_1 x^{p-1} \ldots + A_{p-2}x^2 + A_{p-1}x$$

$$= (x^p - x) + [A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-2}x^2 + (A_{p-1}+1)x]$$

$x, (x+1) \ldots\ldots (x+p-1)$ என்ற அடுத்தடுத்த p முழு எண்கள் pஆல் வகுபடும்.

$A_1, A_2, \ldots A_{p-2}$, pஆல் வகுபடும்.

$A_{p-1} + 1$-ம் pஆல் வகுபடும்;

$\therefore \quad x^p - x$, pஆல் வகுபடும்.

$x^p - x = 0$ (மட்டு p) இதுவே வெர்மாட்டின் தேற்றமாகும்.

மாதிரி 1 : $18! + 1$ என்பது 437 ஆல் வகுபடுமெனக் காண்பி.

19 ஒரு பகா எண் என்பதால்

$(19-1)! + 1 = 0$ (மட்டு 19)

$18! + 1 = 0$ (மட்டு 19)

23 ஒரு பகா எண் என்பதால்

$22! + 1 = 0$ (மட்டு 23)

$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot (18!) + 1 = 0$ (மட்டு 23)

$(23-1)(23-2)(23-3)(23-4) \cdot 18! + 1 = 0$ (மட்டு 23)

(மடங்கு $23 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 18! + 1 = 0$ (மட்டு 23)

$$(\text{மடங்கு } 23 + 1)\ 18! + 1 = 0\ (\text{மட்டு } 23)$$
$$(\text{மடங்கு } 23 \cdot 18! + \text{மடங்கு } 23 + 18! + 1 = 0\ (\text{மட்டு } 23)$$
$$\therefore \quad 18! + 1 = 0\ (\text{மட்டு } 23)$$
$$18! + 1 = 0\ (\text{மட்டு } 23 \times 19)$$
$$= 0\ (\text{மட்டு } 437)$$

10·14 தேற்றம்: n என்பது பகா எண் என்ருல், $(a + b)^n$-ன் விரித்தலில் (expansion) உள்ள உறுப்புகளின் குணகங்களில் முதல், கடைசிக் குணங்களைத் தவிர, மற்றவெல்லாம் 'n' ஆல் வகுபடுமென நிரூபி.

$(a + b)^n$-ன் விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் குணகங்கள்

$$= ncr \qquad r = 1, 2 \,..\, (n - 1)$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$$

$n \cdot (n - 1) \,..\, (n - r + 1)$ என்பது r அடுத்த அடுத்த எண்களின் பெருக்குத் தொகை, எனவே, அது $\lfloor r$ ஆல் வகுக்கப் படும். ஆனுல் n ஒரு பகா எண். மேலும் $r < n$

$\therefore$ $(n - 1)\ (n - 2) \cdots (n - r + 1)$ என்பது $\lfloor r$ ஆல் வகுபடும்.

$$\therefore \quad \frac{(n-1)\ (n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r} = \text{ஒரு முழு எண்}$$
$$= K \text{ என்க.}$$

$\therefore$ குணகம் $= n \cdot K$

$\therefore$ $\dfrac{\text{குணகம்}}{n} = K$

$\therefore$ ஒவ்வொரு குணகமும் n ஆல் வகுபடும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $\lfloor 50$-ல் 2, 7 என்ற எண்களின் அதிகபட்ச அடுக்குகளைக் கண்டுபிடி.

2. $\lfloor 1000$-ல் 7 என்ற எண்ணின் அதிகபட்ச அடுக்கைக் கண்டுபிடி.

3. $n(n + 1)(2n + 1)$ என்பதை 6-ன் மடங்கெனக் காண்பி.

4. n என்பது ஒற்றைப்படை எண் என்ருல் $(n^2 + 3)(n^2 + 7)$ என்பது 32-ன் மடங்கென நிரூபி.

5. $1+7^{2^n+1}$ = ம (8) (multiple of 8) என்று காண்பி.

6. $19^{2n}-1$ = ம (360) எனக் காண்பி.

7. 3-க்கு அதிகமான பகா எண்ணாக 'n' ஐ எடுத்துக் கொண்டால் $n(n^2-1)(n^2-4)$ = ம (360) என நிரூபி.

8. n-க்கு a-யும் b-யும் பகா எண் எனின் $a^{n-1}-b^{n-1}$ = ம (n) என நிரூபி.

9. n^7-n = ம (42) எனக் காண்பி.

10. m-ம் n-ம் பகா எண்கள் என்றால் $m^{n-1}+n^{m-1}$ = ம (mn) என நிரூபி.

11. எந்த எண்ணின் 4 ஆவது மடங்கு, $5m$ அல்லது $5m+1$ என்ற வடிவில் அமையுமெனக் காண்பி.

12. எந்த எண்ணின் 8ஆவது மடங்கு, $17m$ அல்லது $17m\pm1$ என்ற வடிவில் இருக்குமென நிரூபி.

13. 6 வகுக்குமெண்கள் உள்ள மிகக் குறைந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

(விடை 12)

14. 20 வகுக்குமெண்கள் கொண்ட மிகக் குறைந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

(விடை 240)

15. 100-க்குக் குறைந்தும் அதற்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி. (விடை 39)

16. $N\,(>2)$ என்ற எண்ணுக்குக் குறைவாகவும் அதற்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கை ஒன்றையும் சேர்த்து, ஓர் இரட்டைப் படை எண் எனக் காண்பி. மேலும், அந்த எண்ணிக்கையில் பாதி எண்கள் $\frac{N}{2}$-க்குக் குறைவாக இருக்குமென நிரூபி.

17. $4^{2n-1}+3^{n+2}\equiv 0$ (மட்டு 13) எனக் காண்பி.

18. $3^{4n+1}+2\cdot 4^{3n+1}$ = ம (17) என நிரூபி.

19. n-க்குக் குறைவாகவும் அதற்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள எண்களின் (ஒன்றையும் சேர்த்து) கூட்டுச் சராசரி $\frac{n}{2}$ எனக் காண்பி.

20. n ன் வெவ்வேறான வகுக்குமெண்கள் $d_1\; d_2 \ldots\ldots$ என்றால்

$$\sum_r \phi(d_r) = n$$ என நிரூபி.

பிற்குறிப்பு

I. மட்டு 'n' உள்ள முழு எண்களின் வளையம்

(A) [$a \equiv b$ (மட்டு n) என்றால் $a-b$, n ஆல் வகுபடவேண்டும். இப்போது n மட்டைப் பொறுத்து b-க்குச் சர்வசமமாக 'a' இருக்கிறது என்போம் (a is congruent to b modulo n)]

தேற்றம் : n மட்டைப் பொறுத்துச் சர்வசமனின்மை ஒரு சமத்தொடர்பென நிரூபிக்க.

1. a தனக்கே n மட்டைப் பொறுத்துச் சர்வசமமென்பது தெளிவு.

2. $a \equiv b$ (மட்டு n) என்றால் $a-b =$ ம (n). எனவே $b-a$-யும் ம (n) ஆகும்.

$\therefore \quad b \equiv a$ (மட்டு n)

3. $a \sim b$; $b \sim c$ என்றால் $a \equiv b$ (மட்டு n) ; $b \equiv c$ (மட்டு n)

$\therefore \quad a-b=\lambda n \quad ; \quad b-c=\mu n$

(இங்கு λ, μ என்பவை முழு எண்களே)

$\therefore \quad a-b+b-c=(\lambda+\mu)n$

$\therefore \quad a \equiv c$ (மட்டு n)

(B) **தேற்றம் :** $a \equiv b$ (மட்டு n); $c \equiv d$ (மட்டு n) என்றால் $a+c \equiv b+d$ (மட்டு n); $ac \equiv bd$ (மட்டு) என்று கூட்டலையும், பெருக்கலையும் வரையறுக்க. அப்போது n மட்டைப் பொறுத்து I என்ற முழு எண்களின் தொகுதியின் சமத்தொடர்புள்ள கணங்கள் எல்லாம், ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமென நிரூபிக்க.

n ஐப் பொறுத்துச் சமத்தொடர்பு கணம் $[k]$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$[k] = \{x ; x \in I, x \equiv k$ (மட்டு n)$\}$

$[k] + [l] = [k+l]$

$[k] \cdot [l] = [kl]$ என்றாகும்.

(1) $[k]+[l] = [l] + [k]$ (ஏனெனில் இரண்டும் $[k+l]$-க்குச் சமம்.

(2) $([k] + [l]) + [m] = [k + l] + [m]$

$= [k + l + m]$

$[k] + ([l] + [m]) = [k] + [l+m]$

$= [k+l+m]$

$\therefore ([k]+[l]) + [m] = [k] + ([l] + [m])$

(3) $[0]$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$[k] + [0] = [k]$

$\therefore$ $[0]$ என்பது பூச்சிய உறுப்பாகும்.

(4) $[k]$ என்ற கணத்திற்கு $[-k]$ கணத்தை எடுத்துக் கொண்டால்

$[k] + [-k] = [0]$

(5) $([k]\cdot [l])\cdot [m] = [kl]\cdot [m]$

$= [klm]$

$[k]\cdot ([l]\cdot [m]) = [k]\cdot [lm]$

$= [klm]$

$\therefore ([k]\cdot[l])\cdot[m] = [k]\cdot ([l]\cdot [m])$

(6) $([k]\cdot([l]+[m]) = [k]\cdot [l+m]$

$= [k(l+m)]$

$= [kl+km]$

$= [kl]+[km]$

$= [k]\cdot [l] + [k]\cdot[m]$

(7) $[k]\cdot [l] = [kl]$

$[l]\cdot [k] = [lk]$

$kl = lk$

$\therefore [k]\cdot [l] = [l]\cdot[k]$

(8) $[1]$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்க.

$[k]\cdot [1] = [k]$

$[1]\cdot [l] = [l]$ என்பதால்

$[1]$ என்பது ஒருமை உறுப்பாகும்.

எனவே, 'm' மட்டைப் பொறுத்துச் சமத்தொடர்புள்ள கணங்கள் யாவும், ஒருமையுடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமென்பது தெளிவு. இதை $I(m)$ எனக் குறிப்போம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

1971 ஜூலைவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

			ரூ.	காசு.
பொருளாதாரம்				
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1-A	,, II	,,	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	,,	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	சோணாசலம்	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	மு. ஆரோக்கியசாமி	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12	00
7.	பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I	தி. சி. மோகன்	12	00
8.	,, ,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
9	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	சி வேலாயுதம்	6	75
*11.	,, II	,,	11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு.
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு - I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு - I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	கு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00

35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ் இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II		7	00
39.	வளர்ச்சியுறாத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857 - 1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395 – 1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00

* மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு.
54.	இங்கிலாந்து வரலாறு—IV	என். ஜே. இராஜகோபால்	8	00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	5	00
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு - I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ, உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70	, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணுமலை	6	75
71	,, III	இரா. அண்ணுமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00

73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	...	6	50
74.	,, II	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	...	6	75
75.	,, III	...	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	...	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	5	00
77.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	...	6	00

அரசியல்

78.	அரசியல் அமைப்புகள்	...	ஜே. இராமச்சந்திரன்	...	4	62
79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	...	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	...	7	50
*80	இந்திய அரசியலமைப்பு	...	வீ. கண்ணையா	...	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	டி. செல்லப்பா	...	8	50
82	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	...	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	...	16	00
84.	,, II	...	,,	...	13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல் I	...	வீ. கண்ணையா	...	9	00
86.	,, II	...	அ். ஜெகதீசன்	...	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	7	50
88.	,, II	...	டி. செல்லப்பா	...	7	50
89.	இந்தியஅரசியலமைப்புத் திட்டம்	...	தி. வெ குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	...	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	...	வீ. கண்ணையா	...	6	25
91.	,, II	...	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	...	5	75

*மூல நூல் (Original Book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு.
92.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி - III	கி ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம் —I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
97.	,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல் - I	சி ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, I	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்- I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	8	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	... ஞா. ராஜா்பகதூர்	... 5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	... ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	... 3	50
*111.	மேலநாட்டுத் தத்துவம்	... ஆர். எஸ். தேசிகன்	... 3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 5	50
114.	இந்தியத் தத்துவம் – I	... வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	... 3	50
115.	,, II	... ,,	... 6	00
116.	மெய்ப்பொருளியல் - ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	... 6	00

அறவியல்

117.	அறவியல் - ஓர் அறிமுகம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 8	50

அளவையியல்

118.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 2	50

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	... 4	75
120	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	... கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	... 5	50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	... எஸ். இலட்சுமி	... 3	50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	... ஜே. நாராயணன்	... 10	50

*மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

			ரூ.	காசு.
*123.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
*124.	,, II	,,	8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	5	50
*133	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ நரசிம்மன்	10	00
136.	,, II	,,	5	00
*137.	காலநிலை இயல் I	திருமதி இராதா	9	50
*138.	,, II	,,	8	00
139	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
142	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
143.	,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
144.	,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	... சு. வைத்தியநாதன்	... 10 75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	... கோ. சண்முகசுந்தரம்	... 10 00
147.	,, II	... கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	... 14 00
148	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6 50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 4 25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	... ,,	... 3 00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி. கோவிந்தராசன்	... 3 25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	... 12 00

பௌதிகவியல்

153.	ஒளி நூல்	... ச. சம்பத்து	... 10 00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6 00
*155.	ரேடியோ	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	... 4 75
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே பி. மாணிக்கம்	... 4 50
*157	பாம்புகள்	... பெ. மா. அண்ணுமலை	... 3 50
*158.	தாவரம் – வாழ்வும் வரலாறும்	... டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	... 8 00
*159.	கரும்பு	... கு. பெரியசாமி	... 4 00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	... எஸ். சுந்தரம்	... 6 50

* மூல நூல் (Original Book)

மருத்துவம்			ரூ.	காசு.
*161.	நீரிழிவு க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
166.	,, II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50
கூட்டுறவு				
169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
*170.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00
பொது நூல்கள்				
171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
173.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00

*175.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எய், ஏ. துரைசிங்	6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*177.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*178.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*180.	,, II	,,	2	25
*181.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	எஸ். சம்பத்	7	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*185.	,, II	,,	3	00
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*187.	,, II	,,	4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*189.	,, II	,,	3	25
*190.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*192.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணமலை	7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	00

*மூல நூல் (Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்
(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள் — கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)

			ரூ.	காசு.
*195	எந்திரவியல்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	ஆர். நாகராசன்	6	25
*196.	,, II	,,	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், எஸ். கிருட்டிணசாமி	4	50
*199.	,, II	,,	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்- I (Book I)	பி. தங்கராஜன்	4	00
*201.	,, (Book II)	,,	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50
*203.	மின்னியல்-காந்தவியல் —சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*204.	,, II	,,	4	50
*205.	,, III	,,	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 2) முதல் புத்தகம்	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	6	00
*208.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 2) இரண்டாம் புத்தகம்	,,	4	50
*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பி. கந்தசாமி	4	50

*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப்பாடம்	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. முருகையன்	5	00

வேதியியல் (Chemistry)

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்-துணைப்பாடம்	டாக்டர் முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00
*213.	செய்முறைக்கனிமவேதியியல்-சிறப்புப்பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல் - சிறப்புப் பாடம் (Book I	டி. சக்திவேலு	4	00
*215.	,, II	,,	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்-சிறப்புப் பாடம் (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*218.	,,	,,	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*221.	,, II	,,	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்-சிறப்புப் பாடம்	என். ஆறுமுகம்	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்-துணைப்பாடம்	பி. எல். இராமசாமி	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்-I	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-1 (2-ம் புத்தகம்)	திரு கண்ணபிரான்	4	75
*226.	,, (3-ம் புத்தகம்)	,,	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-2 (1-ம் புத்தகம்)	,,	5	75
*228.	,, (2-ம் புத்தகம்)	,,	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

ணிதம் (Mathematics)

			ரூ.	காசு.
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப்பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம் —சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும் —சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்—துணைப்பாடம்—பகுதி-2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—முதல் புத்தகம்	திரு. தி. கோவிந்தராசன், திரு. கோ. முத்துசாமி	5	50
*240.	,, —இரண்டாம் புத்தகம்	,,	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல் (Statistics)

			ரூ.	காசு.
*242.	புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*243.	முதுகெலும்பற்றவை—I—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். முருகேசன்	6	00
*244.	,, II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை—I—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	திருமதி ராணி கந்தசாமி	5	00
*246.	,, (Book II)	,,	9	75
*247.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை—II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப்பாடம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*250.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம்	வி. சேது	6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப்பாடம்	பெ. மா. அண்ணாமலை	5	25
*253.	சூழ்நிலையில்—உடற்செயலியல் சிறப்புப்பாடம்—I	டி. ஆர் கிருஷ்ணன்	4	75
*254.	சூழ்நிலையியல் உடற்செயலியல் ,, II	,,	6	50
*255.	பரிணாமம்	எல். ஆப்ரகாம்	6	25

தாவரவியல் (Botany)

*256.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல் ,,	கே. பாலசந்திரகணேசன்	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல் ,,	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25

*மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல் (தொடர்ச்சி)

				ரூ.	காசு.
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப்பாடம்	...	எஸ். சுந்தரம்	... 9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப்பாடம்	—	பா. இராசாராம்	... 4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல் உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	...	கே. பெரியசாமி	... 4	00
*262.	சூழ்நிலையியல்; பரிணாமம்; மரபியல் - சிறப்புப்பாடம்	...	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன்	... 8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா; ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	...	கே. இராஜசேகரன்	... 10	25
*264.	தாலோபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்) சிறப்புப் பாடம்	...	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	... 9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	ஆ. சம்பத்குமார்	... 10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	...	கே. இராஜசேகரன்	... 6	00

* மூலநூல் (Original Book)

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பட்டப்படிப்பு

அறிவியல் பாட நூல்கள், 1970

1. சூழ்நிலையியல் – உடற்செயலியல்	—	திரு. டி. ஆர். கிருஷ்ணன்
2. அறிமுறை வேதியியல்	—	,, ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்
3. பொது பௌதிகம்	—	,, க. ப. கந்தசாமி, ,, மு. தியாகசுந்தரம்
4. வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்	—	,, ஆர். மகாதேவன்
5. தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல் – துணைப்பாடம்	—	டாக்டர் கு. பெரியசாமி
6. பௌதிகம் – துணைப்பாடம் (பகுதி 2)	—	திரு. கா. வே. சுப்பிரமணியன்
7. இன்றைய பௌதிகம்	—	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்
8. ஒலி நூல்	—	திரு. டி. முருகையன்
9. கணிதம் – துணைப்பாடம் (பகுதி 2)	—	,, ஆர். அய்யாசுவாமி
10. முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்	—	,, க. சிவசுப்ரமணியம்
11. தாவரவியல் – துணைப்பாடம்	—	,, பா. இராசாராம்
12. செல்லியல்	—	,, என். இராமலிங்கம்
13. மரபியல்	—	,, பெ. மா. அண்ணுமலை
14. தாவரங்களின் வாழ்க்கை	—	,, எஸ். சுந்தரம்
15. அங்கக வேதியியல் – துணைப்பாடம்	—	,, பிஎல். இராமசாமி
16. செய்முறைக் கரிம வேதியியல்	–	டாக்டர் என். ஆறுமுகம்
17. முதுகெலும்பிகளது கருவியல்	–	திரு. எஸ். ஆபிரகாம்
18. சூழ்நிலையியல், பரிணுமம், மரபியல்	—	,, கே. ஆர். பாலச்சந்திர கணேசன்
19. டெரிடோ:பைட்டா – ஜிம்னேஸ்பெர்மி	—	,, கே. இராசசேகரன்
20. கரிம வேதியியல் (பகுதி 1)	—	,, கி. கண்ணபிரான்
21. கரிம வேதியியல் (பகுதி 2)	—	,, கி. கண்ணபிரான்
22. வானியல்	—	,, தி. கோவிந்தராசன், ,, கொ. முத்துசாமி
23. தாலோபைட்டா— பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்	—	டாக்டர் வே.சோ. சுந்தரலிங்கம்
24. தாவர வகைப்பாட்டியல்	—	திரு. ஆ. சம்பத்குமார்

இவை அடக்கவிலை வெளியீடுகள் – கழிவு இல்லை