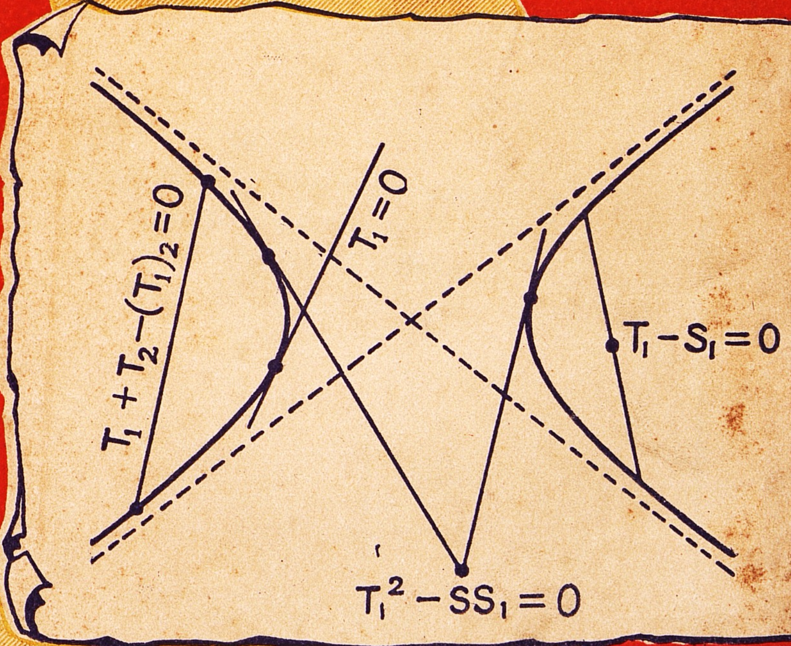
பகுமுறை வரைகணிதம்

இரு பரிமாணம்

(Analytical Geometry, 2-D)

$T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0$ $T_1 = 0$ $T_1 - S_1 = 0$

$T_1^2 - SS_1 = 0$



பெ. துரைப்பாண்டியன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—518.

பகுமுறை வரைகணிதம்

(இரு பரிமாணம்)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

பெ. துரைப்பாண்டியன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—April, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 618

© Tamilnadu Textbook Society

ANALYTICAL GEOMETRY (TWO DIMENTIONAL)

P. DURAIPANDIAN

Price Rs. 10-00

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந் தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தை யும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய் துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத்துறை களில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண் டுணர்ச்சி இவற்றின்காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சி யும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழக மும், சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வரு கிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பகுமுறை வரைகணிதம் (இரு பரிமாணம்)' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 618ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 653 நூல்கள் வெளிவந் துள்ளன இந் நூல் மைய அரசு கல்வி சமூக நல அமைச் சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களை யும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங் களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள் அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதை விட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்றவேண்டிய கட்டப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களை யும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	கார்ட்டீசியன் கூறுகள்	...	1
2.	நேர்கோடு	...	17
3.	சோடிக் கோடுகள்	...	38
4.	வட்டம்	...	58
5.	கூம்பு வளைவு	...	71
6	இரு வளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழி வரையும் வளைவுகள்	...	119
7.	நாண், தொடுகோடு, இசைக்கோடு	...	154
8.	துணையலகு குறிப்பிடல்	...	227
9.	இருபடிச் சமன்பாடு	...	281
10.	கோணதூரக் கூறுகள்	...	305
	கலைச் சொற்கள்	...	356

1. கார்ட்டீசியன் கூறுகள்

(Cartesian Coordinates)

§ 1. செவ்வகக் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (Rectangular Cartesian Coordinates)

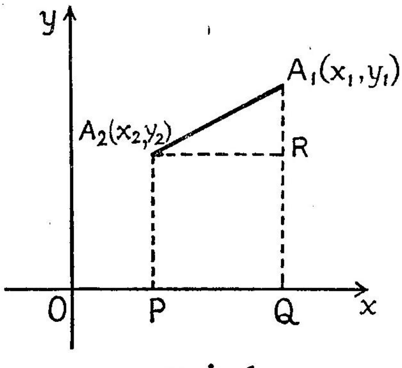
ஒரு தளத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளை வரிசைப்படுத்தப்பட்ட இரண்டு எண்களின்மூலம் தீர்மானிக்க இயலும் என்பதை முதலில் கண்டவர் ரேன் டெஸ்கார்ட் (Rene Descartes, 1596—1690) என்ற கணித மேதை ஆவார். அவர் அத் தளத்தில் அமைந்துள்ள இரண்டு வெட்டும் நேர்கோடுகளை எடுத்துக் கொண்டு, அவைகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்களை அக் கோடுகளுக்கு இணையாக அளந்து கிடைக்கும் அளவைகளை அப் புள்ளியின் இடத்தைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தினர். இவ்விதமாக எடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளுக்குக் **குறிப்பீட்டு அச்சுகள்** (axes of reference) என்று பெயர். இவ்வச்சுகள் வெட்டும் புள்ளிக்கு **ஆதி** (origin) என்று பெயர்.

நாம் குறிப்பாக xOx', yOy' என்ற இரண்டு செங்குத்தான கோடுகளைக் குறிப்பீட்டு அச்சுகளாகக் கொள்வோம். இவைகளில் xOx' ஆனது **x-அச்சு** (x-axis) என்றும் yOy' ஆனது **y-அச்சு** (y-axis) என்றும் பெயர் பெறும். O-வுக்கும் x-க்கும் இடையில் அமைந்தும் O-விலிருந்து α அலகுகள் தூரத்திலிருக்குமாறு அமைந்தும் உள்ள புள்ளி, மிகை எண் α-வைக் (positive number α) குறிக்கும் என்று கொண்டால், O-வுக்கும், x-க்கும் இடையிலுள்ள புள்ளிகள் யாவும் மிகை எண்கள் அனைத்தையும் குறிக்கும். இதேபோல் O-வுக்கும் x'-க்கும் இடையிலுள்ள புள்ளிகள் குறை எண்கள் (negative numbers) யாவையும் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம். இவ்விதமாகவே $y'Oy$-ல் உள்ள புள்ளிகளும் எல்லா மெய் எண்களையும் (real numbers) குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

இவ்விதமாகக் கொண்டால், a என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் $x'Ox$-ன் மேலுள்ள புள்ளி வழியாக $y'Oy$-க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடும், b என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் $y'Oy$-ன் மேலுள்ள புள்ளி வழியாக $x'Ox$-க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியை (a, b) என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு குறிப்பிடுதலைக் கண்ட மேதையின் பெயரைத் தழுவி, a-யும் b-யும் புள்ளியின் **கார்ட்டீசியன் கூறுகள்** (Cartesian co-ordinates) என்ற பெயரைப் பெறுகின்றன. குறிப்பாக அவைகள் முறையே x கூறு (x co-ordinate) அல்லது கிடை (அச்சுத்) தூரம் (abscissa) என்றும், y கூறு (y co-ordinate) அல்லது நிலைத்த தூரம் (ordinate) என்றும் அழைக்கப் படுகின்றன.

§ 2. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்

இப்பொழுது $A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்போம் (படம் 1). $A_1 Q$-வையும், $A_2 P$-யையும் x அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும், $A_2 R$-ஐ $A_1 Q$-வுக்குச் செங்குத்தாகவும் வரைக. அப்படியாயின்,



படம் 1.

முக்கோணம் $A_1 A_2 R$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். எனவே,

$$A_1 A_2{}^2 = A_2 R^2 + R A_1{}^2.$$

ஆனால், $A_2 R = OQ - OP = x_1 - x_2$,

$R A_1 = Q A_1 - QR = y_1 - y_2$.

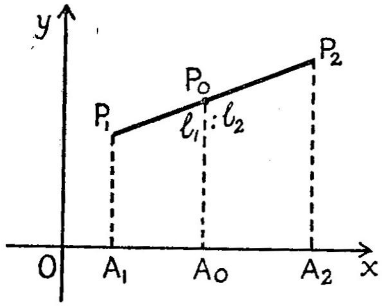
ஆகவே, $A_1 A_2{}^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$.

அதாவது, $A_1 A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

குறிப்பாக ஆதிக்கும், $P(x_1, y_1)$-க்கும் இடையிலுள்ள தூரம் $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ என்பதை எளிதில் காணலாம்.

§ 3. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டைக் கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

முதலில் $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டை $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் P_0 என்ற புள்ளியின் கூறுகளைக் காண்போம். இதற்காக, P_0-ஐ (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம். P_1, P_0, P_2 என்பவற்றிலிருந்து P_1A_1, P_0A_0, P_2A_2 என்ற இணைகோடுகளை x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரைக (படம் 2). இப்பொழுது,



படம் 2.

$$\frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{A_1A_0}{A_0A_2}.$$

ஆகவே, $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}.$$

அதாவது, $$l_1(x_2 - x_0) = l_2(x_0 - x_1)$$

அல்லது $$x_0(l_1 + l_2) = l_1x_2 + l_2x_1.$$

ஆகவே, $$x_0 = \frac{l_1x_2 + l_2x_1}{l_1 + l_2}. \quad \ldots \quad (3\cdot1)$$

இதுபோலவே P_1, P_0, P_2 என்ற புள்ளிகளிலிருந்து y அச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்தால்,

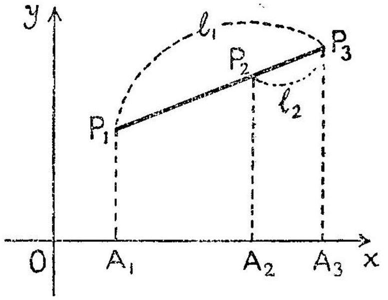
$$y_0 = \frac{l_1y_2 + l_2y_1}{l_1 + l_2} \quad \ldots \quad (3\cdot2)$$

எனக் கிட்டும். ஆகவே, $P_1 P_2$-ஐ $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி,

$$\left(\frac{l_1 x_2 + l_2 x_1}{l_1 + l_2}, \frac{l_1 y_2 + l_2 y_1}{l_1 + l_2}\right) \quad \dots (3{\cdot}3)$$

ஆகும்.

அடுத்தபடியாக. $P_1 P_2$-ஐ வெளிப்புறமாக $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை $P_3 (x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம். (படம் 3). P_1, P_2, P_3 என்ற புள்ளிகளிலிருந்து $P_1 A_1$, $P_2 A_2$,



படம் 3.

$P_3 A_3$ என்ற கோடுகளை x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

இப்பொழுது $\dfrac{P_1 P_3}{P_2 P_3} = \dfrac{A_1 A_3}{A_2 A_3}$.

ஆகவே, $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

அதாவது, $l_1 (x_3 - x_2) = l_2 (x_3 - x_1)$

அல்லது $x_3 (l_1 - l_2) = l_1 x_2 - l_2 x_1$.

ஆகவே, $$x_3 = \frac{l_1 x_2 - l_2 x_1}{l_1 - l_2}. \quad (3{\cdot}4)$$

இதுபோலவே P_1, P_2, P_3 என்ற புள்ளிகளிலிருந்து y அச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்தால்,

$$y_3 = \frac{l_1 y_2 - l_2 y_1}{l_1 - l_2} \quad (3{\cdot}5)$$

எனக் கிட்டும். எனவே $P_3 (x_3, y_3)$-ஐ

$$\left[\frac{l_1 x_2 + (-l_2) x_1}{l_1 + (-l_2)}, \frac{l_1 y_2 + (-l_2) y_1}{l_1 + (-l_2)}\right] \quad (3{\cdot}6)$$

என எழுதலாம். இங்கு, $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியை $l_1 : (-l_2)$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியாகக் கொண்டு, வெட்டும் புள்ளியைக் காண சூத்திரம் (3·3)-ஐயே பயன்படுத்தலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

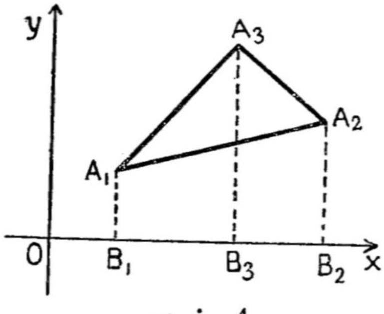
(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டின் மையப்புள்ளியானது, அத் துண்டை உட்புறமாக 1 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதால், அதனது கூறுகள்

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}$$

என்பன எளிதில் கிடைக்கின்றன.

§ 4. முக்கோணத்தின் பரப்பும் நாற்கரத்தின் பரப்பும்

முதலில் $A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$, $A_3 (x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்போம் (படம் 4). $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ என்ற கோடுகளை



படம் 4.

x அச்சுக்குச் செங்குத்தாகப் படத்தில் உள்ளபடி வரைக. முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$-ன் பரப்பு $\triangle$ என்றால்,

$\triangle$ = சரிவகம் $A_1 B_1 B_3 A_3$-ன் பரப்பு
+ சரிவகம் $A_3 B_3 B_2 A_2$-ன் பரப்பு
— சரிவகம் $A_1 B_1 B_2 A_2$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(A_1 B_1 + A_3 B_3) B_1 B_3 + \frac{1}{2}(A_3 B_3 + A_2 B_2) B_3 B_2$$

$$- \frac{1}{2}(A_1 B_1 + A_2 B_2) B_1 B_2$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)$$

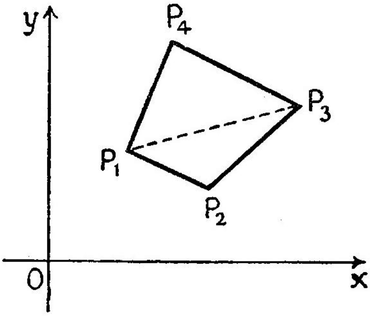
$$- \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண விரும்பும்போது, முதலில் மூன்று உச்சிகளையும் குறித்துக்கொண்டு, கெடிகார முள்ளின் சுழற்சிக்கு மாறான சுழற்சியின் போக்கில் அவைகளை A_1, A_2, A_3 என்று முறையே பெயரிடவேண்டும். அப்பொழுது தான் $\triangle$ ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கும். இன்றேல், இது ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும்.

ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்பதற்கு முதலில் நான்கு உச்சிகளையும் குறித்துக்கொண்டு, பின்பு அந்த நாற்கரத்தில் ஒரு மூலைவிட்டத்தை இணைத்து இரு முக்கோணங்களாகப் பிரித்துக்



படம் 5.

கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக, ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகள் படம் 5-ல் உள்ளவாறு $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ என்று இருந்தால், அந்த நாற்கரத்தை P_1, P_2, P_3;

P_1, P_3, P_4 என்ற இரு முக்கோணங்களாகப் பிரித்துக்கொள்ள வேண்டும். அப்படியாயின்,

நாற்கரத்தின் பரப்பு = முக்கோணம் $P_1 P_2 P_3$-ன் பரப்பு + முக்கோணம் $P_1 P_3 P_4$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_4 & x_3 \\ y_1 & y_2 - y_4 & y_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளின் நேர்வரைத் தன்மையைச் (Collinearity) சரிபார்த்தல்

புள்ளிகள் A_1, A_2, A_3 என்பன கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றைத் திருப்தி செய்தால், அப் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம்.

(i) $A_1 A_3 = A_1 A_2 + A_2 A_3$ அல்லது

$$A_1 A_3 = A_1 A_2 \sim A_2 A_3,$$

(ii) முக்கோணம் $A_1\ A_2\ A_3$-ன் பரப்பு $= 0$,

(iii) $A_1\ A_2$-ன் சரிவு $= A_1\ A_3$-ன் சரிவு. [சரிவின் (slope) வரையறையை இரண்டாம் அத்தியாயத்தில் காணலாம்.]

§ 6 மாதிரிக் கணக்குகள்

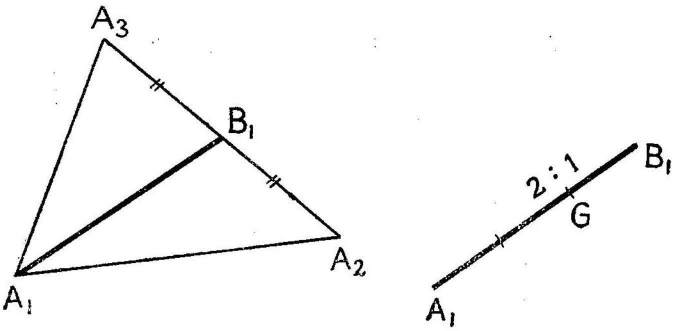
கணக்கு 1.

$A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$, $A_3 (x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி (centroid) G-யைக் காண்க.

B_1 என்பது, $A_2 A_3$-ன் மையப் புள்ளியானால், B_1 ஆனது,

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

ஆகும் (படம் 6). இப்பொழுது $A_1 B_1$, ஒரு மையக்கோடு (median). மையக்கோட்டுச் சந்தி G ஆனது, $A_1 B_1$-ஐ 2 : 1



படம் 6.

என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கிறது. ஆகவே, G-யின்

$$x \text{ கூறு} = \frac{2\,\frac{x_2+x_3}{2} + 1\,(x_1)}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y \text{ கூறு} = \frac{2\,\frac{y_2+y_3}{2} + 1\,(y_1)}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

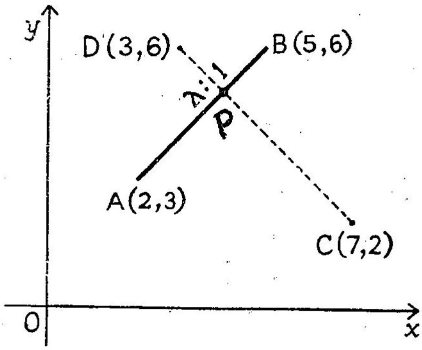
அதாவது G என்பது, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ஆகும்.

கணக்கு 2.

புள்ளிகள் A, B, C, D என்பன முறையே (2, 3), (5, 6), (7, 2), (3, 6) என்றால், AB-ஐ CD எந்த விகிதத்தில் வெட்டுகிறது எனக் காண்க.

AB-ஐ CD, P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது என்றும், $AP : PB = \lambda : 1$ என்றும் கொள்க. இப்பொழுது P ஆனது,

$$\left(\frac{\lambda\cdot 5 + 1\cdot 2}{\lambda+1}, \frac{\lambda\cdot 6 + 1\cdot 3}{\lambda+1}\right)$$



படம் 7.

ஆகும். மேலும், *P*, *C*, *D* என்பன ஒரு நேர்கோட்டில் அமைவதால் முக்கோணம் *CPD*-யின் பரப்பு பூஜ்யமாகும். ஆகவே,

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{5\lambda+2}{\lambda+1} & 7 & 3 \\ \frac{6\lambda+3}{\lambda+1} & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது

$$\begin{vmatrix} \frac{5\lambda+2}{\lambda+1} & \frac{6\lambda+3}{\lambda+2} & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

அதாவது

$$\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \frac{6\lambda+3}{\lambda+1}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

அதாவது, $(5\lambda+2)(-4)-(6\lambda+3)(4)+(36)(\lambda+1)=0.$
ஆகவே, $-8\lambda+16=0, \quad \lambda=2.$

இதிலிருந்து *CD*, *AB*-ஐ 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக வெட்டுகிறது எனத் தெரிகிறது.

§ 7. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட உருவங்கள் ஒவ்வொன்றும் அதனதன் எதிரே கொடுக்கப் பட்டுள்ள தன்மையை உடையது என்று காட்டுக.

(i) (3, —5), (—2, 1), (4, —4)-இரு சமபக்க முக்கோணம்.

(ii) (—3, 2), (1, —4), (—5, 0)-இரு சமபக்க முக்கோணம்.

(iii) (2, 0), (3, $\sqrt{3}$), (4, 0,)-சமபக்க முக்கோணம்.

(iv) (2, 1), (3, 1 + $\sqrt{3}$), (4, 1)-சமபக்க முக்கோணம்.

(v) ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$), (— 1, $\frac{1}{2}$), (— 1, 2), ($\frac{1}{2}$, 2)-சதுரம்.

(vi) (1, — 2), (4, — 2), (4, 1), (1, 1)-சதுரம்.

(vii) (— 1, 0), (2, — 2), (— 1, — 4) (— 4, 2)-சாய்சதுரம்.

(viii) (3, 2), (4, $\frac{7}{2}$), (3, 5), (2, $\frac{7}{2}$)-சாய்சதுரம்.

(ix) (1, 2), (4, 2), (4, 4), (1, 4)-செவ்வகம்.

(x) (— 2, 1), (— 2, — 3), (3, — 3), (3, 1)-செவ்வகம்.

(xi) (1, 4), (5, 4), (6, 6), (2, 6)-இணைகரம்.

(xii) (— 2, — 2), (3, — 2) (7, 3), (2, 3)-இணைகரம்.

2. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் உருவாக்கும் முக்கோணம் ஒவ்வொன்றின் பரப்பைக் காண்க.

(i) (— 2, 4), (1, 3), (5, 6)

(ii) (4, 2), (— 3, 1), (1, — 4)

3. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் அமைக்கும் நாற்கரம் ஒவ்வொன்றின் பரப்பைக் காண்க.

(i) (1, 2), (2, 4) (4, 2), (1, 1)

(ii) (2, 0), (3, 2), (— 3, 3), (— 1, — 1)

4. பின்வரும் கணங்களில் ஒவ்வொரு கணத்தைச் சார்ந்த புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(i) (— 2, — 3), (— 1, — 2), (0, — 1)

(ii) (— 2, 0), (0, 2), (2, 4)

(iii) (3, 1), (2, 4), (4, — 2)

(iv) (1, 2), (3, 4), (5, 6).

5. $P(4, -3)$, $Q(2, 3)$, $R(3, 1)$. $S(-1, -7)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். PQ-வை RS எந்த விகிதத்தில் வெட்டுகிறது எனக் காண்க.

6. பின்வரும் புள்ளிகள் அமைக்கும் முக்கோணங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகளைக் காண்க.

(i) (2, 5), (6, 3), (4, 7)

(ii) (— 1, 3), (3, — 5), (4, 5).

7. (3, 7), (5, 8), (1, 2) ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு யாது ?

8. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் மையத்தையும் (in-centre) வெளி மையங்களையும் (ex-centres) காண்க

[உதவிக் குறிப்பு : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ என்க. கோணம் A-யின் உட்சமவெட்டி BC-ஐ D-யில் சந்தித்தால்,

$BD : DC = c : b$. ஆகவே, D ஆனது $\left(\frac{bx_2 + cx_3}{b+c}, \frac{by_2 + cy_3}{b+c}\right)$

ஆகும். B-யின் உட்சமவெட்டி AD-ஐ I-யில் சந்தித்தால்

$DI : IA = BD : BA$. ஆனால், $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{BD+DC}{c+b} = \frac{a}{b+c}$

அல்லது $BD = \frac{ac}{b+c}$.]

விடைகள்

2. (i) $\frac{13}{2}$. (ii) $\frac{39}{2}$; 3. (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{27}{2}$

5. 3 : 2 6. (i) (4, 5) (ii) (2, 1) ; 7. 1

8. $\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$,

$\left(\frac{-ax_1 + bx_2 + cx_3}{-a + b + c}, \frac{-ay_1 + by_2 + cy_3}{-a + b + c}\right)$,

$\left(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a - b + c}, \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a - b + c}\right)$,

$\left(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a + b - c}, \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a + b - c}\right)$.

§ 8. இயங்கு வரை (Locus)

ஒரு புள்ளி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைகணிதக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கி நகரும்போது அதனது பாதை, அப் புள்ளியின் **இயங்கு வரை** என அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, ஒரு புள்ளி, ஆதியிலிருந்து a தொலைவில் இருக்குமாறு நகர்ந்தால், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை, ஆதியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டமாகும். இவ் வியங்குவரைமீது $P(x_0, y_0)$ என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி எனில், $OP = a$ அல்லது $OP^2 = a^2$. அதாவது $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

இதிலிருந்து இவ் வியங்குவரையின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் (x, y) கூறுகளும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்கின்றன எனத் தெரிகிறது. இந்நிலையில் $x^2 + y^2 = a^2$ என்பது, இந்த இயங்கு வரையின் **சமன்பாடு (equation)** என்று கூறப்படுகிறது. அதாவது x-க்கும், y-க்கும் உள்ள ஒரு தொடர்பை, ஓர் இயங்கு வரையின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் x, y கூறுகள் திருப்தி செய்தால், அந்தத் தொடர்பு அந்த இயங்கு வரையின் சமன்பாடாகிறது.

இதிலிருந்து இரு இயங்குவரைகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் கூறுகளைக் காண, அவ் வியங்குவரைகளின் சமன்பாடுகளை x-க்கும், y-க்கும் விடுவிக்கவேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது.

ஓர் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காணக் கீழ்க் கண்டவாறு படிப்படியாக முயல வேண்டும் :

(i) முதலில் இயங்குவரையின்மீது ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு அதை (x_0, y_0) எனக் கொளல் ;

(ii) பின், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, x_0-ஐயும், y_0-ஐயும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிலிகளையும் சார்ந்த ஒரு தொடர்பினைக் காணல் ;

(iii) கடைசியில், கண்ட தொடர்பில் x_0-ஐ x ஆகவும், y_0-ஐ y ஆகவும் மாற்றுதல்.

§ 9 மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$A(1, 2)$, $B(2, -2)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரங்களில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P(x_0, y_0)$ ஆனது இயங்குவரையின்மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி எனக் கொள்க. இப்பொழுது,

$$PA = PB$$

அல்லது

$$PA^2 = PB^2.$$

ஆகவே, $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = (x_0 - 2)^2 + ((y_0 + 2)^2.$

அதாவது, $2x_0 - 8y_0 - 3 = 0.$

ஆகவே, $2x - 8y - 3 = 0$ என்பது இயங்குவரையின் சமன்பாடாகிறது.

கணக்கு 2.

$A_1(x_1\ y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P(x_0, y_0)$ என்பது, A_1, A_2 வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி என்க

இப்பொழுது முக்கோணம் PA_1A_2-ன் பரப்பு பூச்சியம் ஆகும். அதனால்

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ஆகவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ருகிறது.

கணக்கு 3.

$C(a, b)$-யை மையமாகவும், r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P(x_0, y_0)$ என்பது, வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியானல்,

$$CP = r$$

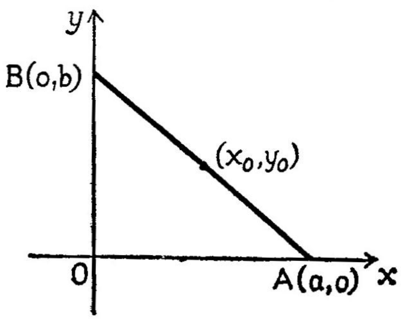
அல்லது, $CP^2 = r^2$.

அதாவது, $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$.

ஆகவே, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ என்பது, வட்டத்தின் சமன்பாடாகிறது.

கணக்கு 4.

l நீளமுள்ள நேரான கம்பி ஒன்று, அதனது முனைகளில் ஒன்று, x-அச்சின்மீது படியுமாறும், அடுத்தது, y-அச்சின்மீது படியுமாறும் நகருகிறது. அக் கம்பியின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம் 8.

AB என்பது கம்பி என்றும், A ஆனது x-அச்சின்மீது நகருகிறது என்றும், B ஆனது y-அச்சின்மீது நகருகிறது

என்றும் கொள்வோம். A-யை $(a, 0)$ என்றும், B-யை $(0, b)$ என்றும், AB-யின் மையப் புள்ளியை (x_0, y_0) என்றும் கொண்டால், a-யும், b-யும் மாறிலிகள் அல்ல ; l மட்டும்தான் மாறிலி. இப்பொழுது,

$$AB^2 = l^2 = a^2 + b^2, \tag{9·1}$$

ஆனால்

$$x_0 = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}.$$

a-யின் மதிப்பையும், b-யின் மதிப்பையும் (9·1)-ல் பிரதியிட,

$$(2x_0)^2 = (2y_0)^2 = l^2$$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து வேண்டிய சமன்பாடு $4x^2 + 4y^2 = l^2$ என்றாகிறது.

§ 10. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. (1, 3), (4,—2) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து P என்ற புள்ளியின் தூரங்கள் 1:2 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$3x^2 + 3y^2 - 28y + 20 = 0$ என நிறுவுக.

2. (1,—3), (2, 5) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரங்களில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. (2, 4), (3, 5) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையக்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. புள்ளிகள் (3, 4), (—1, 2) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. $(a, 0)$, $(0, b)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - 1 = 0$ என்ற வடிவில் காண்க.

6. ஒரு வட்டத்தின் மையம், (1, 2). அதன் ஆரம் 5 என்றால் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. P என்ற புள்ளி, $A(3, -1)$, $B(-2, 5)$ என்ற புள்ளிகளுடன் அமைக்கும் ABP என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 ஆகவே இருக்கும்படி நகர்ந்தால் P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள் $6x + 5y - 3 = 0$, $6x + 5y - 23 = 0$ என நிறுவுக.

8. l நீளமுள்ள AB என்ற நேரான கம்பி, அதனது முனை A, x அச்சின் மீது படியுமாறும், அடுத்த முனை B, y அச்சின் மீது படியுமாறும் நகருகிறது. AB-யை P என்ற புள்ளி உட்புறமாக $3 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அப்படியாயின், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

2. $2x + 16y - 19 = 0$; 3. $x + y - 7 = 0$

4. $x - 2y + 5 = 0$; 6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;

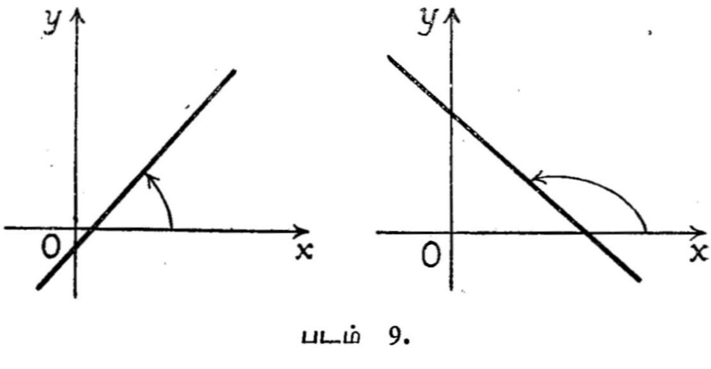
8. $225x^2 + 100y^2 = 36l^2$.

2. நேர்கோடு

(Straight Line)

§ **11. நேர்கோட்டின் சரிவும், அச்சு வெட்டுக்களும்** (Slope and Intercepts of a Straight Line).

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நிலைத்த புள்ளிகளின் வழியாக ஒரே ஒரு நேர்கோடுதான் செல்லும். ஆகவே, இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டை நிர்ணயிக்கின்றன எனலாம். மேலும், ஒரு புள்ளியும், ஒரு திசையும் ஒரு நேர்கோட்டை நிர்ணயிக்கின்றன. ஒரு நேர்கோட்டின் திசையை, அது x-அச்சுடன் உண்டாகும் கோணத்தினுல் y அச்சின் வெட்டளவாலும் குறிக்கலாம். இக் கோணத்தின் அளவை, படம் 9—இல் உள்ளபடி x-அச்சின்



படம் 9.

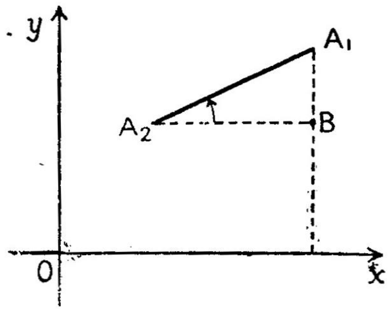
மிகைத் திசையிலிருந்து ஒரு கடிகார முள்ளின் சுழற்சிக்கு மாருக சுழலும் போக்கில் அளந்து காணவேண்டும். இந்தக் கோணம் θ ஆனுல், $\tan\theta$ ஆனது, **நேர்கோட்டின் சரிவு** என்று அழைக்கப்படுகிறது. எனவே, ஒரு நேர்கோட்டை நிர்ணயிப்பதற்கு அதனது இரு புள்ளிகள் அல்லது அதன் ஒரு புள்ளியும், அதனுடைய சரிவும் இருந்தால் போதும்.

குறிப்பாக, x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் நேர்கோட்டின் சரிவு பூச்சியமாகும். மேலும் y-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் நேர்கோட்டின் சரிவு முடிவிலியாகும்.

ஒரு நேர்கோடு, x-அச்சையும், y-அச்சையும் முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், A-யின் x கூறு, x-அச்சுவெட்டு (x-intercept) என்றும், B-யின் y கூறு, y-அச்சுவெட்டு (y-intercept) என்றும் கூறப்படுகின்றன. அச்சுவெட்டுகள் மிகையாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கலாம் என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

§ **12.** $A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$ **என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் சரிவு.**

A_2-லிருந்து x-அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு,



படம் 10.

A_1-லிருந்து x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டை B-யில் வெட்டட்டும். [படம் 10.)

$$\text{கோட்டின் சரிவு} = \tan BA_2 A_1$$

$$= \frac{A_1 B}{A_2 B}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (12{\cdot}1)$$

§ **13. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு**

$A (x_1, y_1)$-இன் வழியாகச் செல்லும், m-சரிவு கொண்ட ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டை முதலில் காண்போம். இக் கோட்டில்

$P(x_0, y_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். (12.1) லிருந்து AP-யினுடைய சரிவு $\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$ எனத் தெரிகிறது.

ஆகவே

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = m.$$

அதாவது

$$(y_0 - y_1) = m(x_0 - x_1).$$

இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \text{ என்றுகிறது.} \tag{13·1}$$

அடுத்ததாக, m சரிவும், 'c' y-அச்சு வெட்டும் கொண்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இக்கோடு புள்ளி (o, c) வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே, இக்கோட்டின்மீது (x_0, y_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால், இக்கோட்டின் சரிவு $\frac{y_0 - c}{x_0 - o}$ ஆகும். இச் சரிவு m க்குச் சமம். ஆகவே

$$\frac{y_0 - c}{x_0} = m.$$

அதாவது

$$y_0 = mx_0 + c.$$

ஆகவே

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx + c \tag{13·2}$$

என்றுகிறது.

மூன்றுவதாக, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். ஏற்கெனவே § 9-இல் உள்ள கணக்கு 2-இல் இக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுள்ளோம். தற்போது அதன் சமன்பாட்டை வேறு வடிவில் காண்போம்.

$P(x_0, y_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைக் கோட்டின்மீது எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது

$$A_1P\text{-ன் சரிவு} = A_1A_2\text{-ன் சரிவு}$$

அதாவது $\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

ஆகவே கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_2}$$

அல்லது $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (13\cdot3)$$

என்றாகிறது.

அடுத்ததாக, x-அச்சுவெட்டையும், y-அச்சுவெட்டையும் முறையே a, b ஆகக் கொண்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இக்கோடு $A(a, o)$, $B(o, b)$ வழியாகச் செல்கிறது. எனவே $P(x_0, y_0)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியானால், PA-ன் சரிவும், PB-ன் சரிவும் சமம்.

ஆகவே

$$\frac{y_0 - o}{x_0 - a} = \frac{y_0 - b}{x_0 - o}.$$

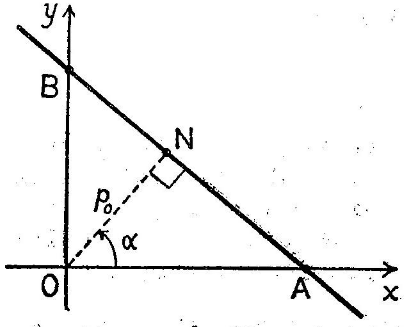
அதாவது

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1.$$

ஆகவே கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (13\cdot4)$$

என்றாகிறது.



படம் 11.

அடுத்ததாக, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டுக்கு ஆதியி லிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி N எனக் கொள்க (படம் 11).

$$ON = p_0, \quad x\hat{O}N = \alpha$$

என்ருல் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சமன்பாட்டை, p_0, α சார்ந்ததாகக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடு, x, y-அச்சுகளை முறையே A-யிலும், B-யிலும் வெட்டிஞல், OAN, OBN என்ற முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{ON}{OA} = \cos \alpha, \frac{ON}{OB} = \sin \alpha$$

எனக் கிடைக்கின்றது.

அதாவது

$$OA = \frac{p_0}{\cos \alpha}, \ OB = \frac{p_0}{\sin \alpha}$$

இப்பொழுது (13·4) லிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{p_0/\cos \alpha} + \frac{y}{p_0/\sin \alpha} = 1$$

அல்லது

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p_0$$

என்ருகிறது.

படம் 11-இல், N, முதற்காற் பகுதியில் அமைந்துள்ளது. N வேறு எக்காற் பகுதியில் அமைந்திருந்தாலும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\bar{x} \cos \alpha + y \sin \alpha = p_0$$

என்றே அமைகிறது என்பதை எளிதில் காட்டலாம். மேலும், $O \leq \alpha < 2\pi$ என்பதும் புலஞகிறது· இப்பொழுது கொடுக்கப் பட்ட நேர்கோட்டை, குறியீட்டு வடிவில் $\{ \alpha, p_0 \}$ என்று குறிப்பிடலாம்.

இக் குறியீட்டு முறையை $\{ \alpha, -p_0 \}$ க்கு விரிவுபடுத்த முடியும் என்பதை இப்பொழுது காட்டுவோம். இதற்கு $\{ \alpha, -p_0 \}$ என்பது, ஆதியிலிருந்து "α" திசைக்கு எதிர்ப்புறமாக p_0-அலகுதூரம் சென்று கிட்டும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கின்றது என்று கொள்ளவேண்டும். இக்கொள்கை சரியானது என்பதை, $\{ \alpha, -p_0 \}$ என்பதும், $\{ \alpha + \pi, p_0 \}$ என்பதும்,

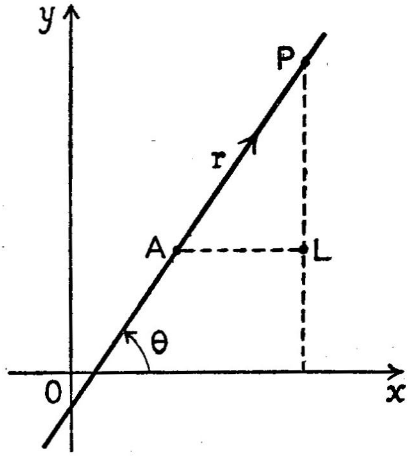
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = -p_0$$

என்ற ஒரே சமன்பாட்டையுடையன என்பதிலிருந்து காணலாம். இம்முறைப்படி ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பொதுப் படையாக

$$x \cos \alpha + x \sin \alpha = p \qquad (13.5)$$

என எழுதலாம். இங்கு p மிகையாகவோ அல்லது குறையாகவோ இருக்கலாம்.

கடைசியாக, § 12-இல் வரையறுக்கப்பட்ட முறையில் x-அச்சுடன் கோணம் θ-வை உண்டாக்கும் ஒரு நேர்கோட்டை எடுத்துக்கொள்ளுவோம் (படம் 12). இக்கோடு $A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிவழியாகச் செல்லுவதாகக் கொள்வோம். மேலும்



படம் 12.

A-யிலிருந்து " θ " திசையில் r அலகு தூரம் சென்று, $P(x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். A-யிலிருந்து x-அச்சு க்கு இணையாக வரைப்படும் கோடு P-யிலிருந்து x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டை L-இல் வெட்டினால்,

$$\cos \theta = \frac{AL}{AP}$$

$$= \frac{x_0 - x_1}{r}$$

$$\text{Sin } \theta = \frac{LP}{AP}$$

$$= \frac{y_0 - y_1}{r}$$

அல்லது $$\frac{x_0 - x_1}{\cos\theta} = \frac{y_0 - y_1}{\sin\theta} = r.$$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (13\cdot6)$$

என்ருகிறது. இதில் r ஒரு மிகை எண். r ஒரு குறை எண்ணுகவும் இருக்கமுடியும் ; குறை எண்ணுனல் A-யிலிருந்து P-ஐ அடைய "θ" திசைக்கு எதிர்த் திசையில் செல்லவேண்டும். சமன்பாடு (13·6)-ஐ நேர்கோட்டின் தொலைவுச் சமன்பாடு (distance equation) என்கிருேம்.

§ 14 முதற்படிச் சமன்பாடு (First Degree Equation)

ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு, x, y என்பனவற்றில் முதற்படியானது என்பதை § 13-ல் கண்டோம், மறுதலையாக, ஒரு முதற்படிச் சமன்பாடு, ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும் என்பதை இப்பொழுது காட்டுவோம்.

இதற்கு $lx + my + n = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்கு வரையின்மீது ஏதாவது இரு நிலைத்த புள்ளிகளாகிய $A_1 (x_1, y_1)$-ஐயும், $A_2 (x_2, y_2)$-ஐயும் எடுத்துக் கொண்டால், இப் புள்ளிகளின் கூறுகள் $lx + my + n = 0$-ஐத் திருப்தி செய்கின்றன.

ஆகவே,

$$lx_1 + my_1 + n = 0, \; lx_2 + my_2 + n = 0. \qquad (14\cdot1)$$

மேலும் நேர்கோடு $A_1 A_2$-ன் மேல் P எனும் ஏதாவதொரு புள்ளி எடுத்துக் கொண்டு, இப்புள்ளி $A_1 A_2$-ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனக் கொண்டால், P ஆனது,

$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \; \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

ஆகும். இப்பொழுது P-யின் கூறுகள் $lx + my + n =$ ஐ0-த் திருப்தி செய்கின்றனவா எனப் பார்ப்போம். இதற்காக, $lx + my + n$-இல் P-யின் கூறுகளைப் பிரதியிடக் கிடைப்பதை (14·1)-இன் உதவி கொண்டு சுருக்குவோம். அப்படியாயின்,

$$lx + my + n = l\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}\right) + m\left(\frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right) + n$$

$$= \frac{1}{\lambda + 1}[\lambda(lx_2 + my_2 + n) + (lx_1 + my_1 + n)]$$

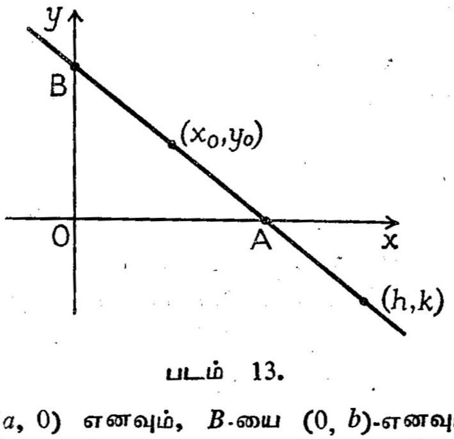
$$= 0$$

ஆகவே, P ஆனது, $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையில் உள்ளது என்ருகிறது. அதாவது, $A_1 A_2$-ன் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையில் உள்ளது எனத் தெரிகிறது. ஆகவே $lx + my + n = 0$ இயங்கு வரை, A_1, A_2 வழிச் செல்லும் நேர்கோடு தான் என்று கிட்டுகிறது.

§ 15. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

நிலைத்த புள்ளி (h, k)-யின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு ஒன்று, (h, k)-ஐப் பொருத்து சுழல்கின்றது (படம் 13). இக்கோடு x, y அச்சுகளை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டிஞல், AB-யின் மையப் புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.



படம் 13.

A-யை $(a, 0)$ எனவும், B-யை $(0, b)$-எனவும், AB-யின் மையப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனவும் கொள்வோம். அப்படி யாயின,

$$x_0 = \frac{a + 0}{2}; \quad y_0 = \frac{0 + b}{2}.$$

அதாவது

$a = 2x_0$; $b = 2y_0$.

இப்பொழுது, நேர்கோடு AB யின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

இதில் a-ன் மதிப்பையும், b-ன் மதிப்பையும் பிரதியிட சமன்பாடு,

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1.$$

என மாறுகிறது. AB-ஆனது (h, k) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\frac{h}{2x_0} + \frac{k}{2y_0} = 1$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து புள்ளி (x_0, y_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{h}{2x} + \frac{k}{2y} = 1$$

என்றாகிறது.

§ 16. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்கண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க :

(i) (3, 3) வழியாகச் செல்லும், சரிவை $\frac{1}{2}$ ஆக உடைய நேர்கோடு ;

(ii) சரிவை $\frac{1}{2}$ ஆகவும், y அச்சு வெட்டை $\frac{3}{2}$ ஆகவும் கொண்ட நேர்கோடு,

(iii) (1, 2), (5, 4) வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு.

(iv) x அச்சு வெட்டையும், y அச்சு வெட்டையும் முறையே -3, $1\frac{1}{2}$ ஆகக் கொண்ட நேர்கோடு.

2. A (2, — 3), B (3, 2) என்பன இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். P என்ற புள்ளி, PA, PB ஆகிய கோடுகள் x அச்சுடன் ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் அமைக்குமாறு நகர்ந்தால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : P-யை (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம். PA ஆனது x-அச்சுடன் கோணம் θ-வை உண்டாக்கினுல், PB ஆனது x-அச்சுடன் கோணம் $(\pi - \theta)$-வை உண்டாக்கு கிறது. ஆகவே :

$$PA\text{-யின் சரிவு} + PB\text{-யின் சரிவு} = \tan\theta + \tan(\pi - \theta)$$
$$= 0$$

ஆகவே

$$\frac{y_0 + 3}{x_0 - 2} + \frac{y_0 - 2}{x_0 - 3} = 0. \Big]$$

3. x-அச்சுடன் $135°$ கோணம் அமைத்து y அச்சு வெட்டை 5 ஆகக் கொண்ட கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $(1, 3)$, $(-4, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. x, y-அச்சுகளால் வெட்டப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டின் வெட்டுத் துண்டின் மையப்புள்ளி (h, k) ஆக இருந்தால், அந் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. ஒரு கோடு, தன் சரிவு m ஆகவே இருக்கும்படி நகர்ந்து, x, y அச்சுகளை முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினுல், AB-யின் மைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$ குறிக்கும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் கூறுகளைக் காண்க. மேலும், இவ்விரண்டு கோடுகளும் -அச்சுடன் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\frac{(c_1 \quad c_2)^2}{m_1 \quad m_2}$ என நிறுவுக.

8. $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$, $y = m_3 x + c_3$ ஆகிய மூன்று கோடுகள் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\left\{\frac{(c_1 - c_2)^2}{m_1 - m_2} + \frac{(c_2 - c_3)^2}{m_2 - m_3} + \frac{(c_3 - c_1)^2}{m_3 - m_1}\right\}$ எனக்காட்டுக.

9. $(2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, ஒரு கடிகார முள்ளின் சுழற்சிக்கு மாருகச் சுழலும் போக்கில் x-அச்சுடன் $135°$ கோணம் அமைக்கும் கோட்டின் திசையிலேயே அளந்து, $3x - y = 0$ என்ற கோட்டின் தூரத்தைக் காண்க.

10. $A(1, 2)$ வழியாகச் செல்லும் l என்ற நேர்கோடு ஒன்று, $2x + y - 9 = 0$ குறிக்கும் நேர்கோட்டை B-யில் வெட்டுகிறது. $AB = \sqrt{10}$ என்றால், l-ன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கோடு l, x-அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்க. (13·6)-ன்படி l-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x-1}{\cos\theta} = \frac{y-2}{\sin\theta} = r.$$

இப்பொழுது (1, 2) லிருந்து r தூரத்தில் உள்ளவாறும், l-இன் மேல் அமையுமாறும் உள்ள புள்ளியை

$$(1 + r\cos\theta,\ 2 + r\sin\theta)$$

எனக்குறிக்கலாம். ஆகவே, B ஆனது, $(1 + \sqrt{10}\cos\theta,\ 2 + \sqrt{10}\sin\theta)$ ஆகும். B, $2x + y - 9 = 0$ என்ற நேர் கோட்டின் மேல் இருப்பதால்,

$$2(1 + \sqrt{10}\cos\theta) + (2 + \sqrt{10}\sin\theta) - 9 = 0$$

அதாவது $(2\sqrt{10}\cos\theta + \sqrt{10}\sin\theta)^2 = 5^2$.

இதன் இரு பக்கத்தையும் $\cos^2\theta$-வினால் வகுத்து, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ எனப் பிரதியிடக் கிட்டுவதாவது :

$$(3\tan\theta + 1)(\tan\theta - 3) = 0$$

அதாவது l-இன் சரிவு 3 அல்லது $-\frac{1}{3}$ என்றாகிறது.]

விடைகள்

1. $x - 2y + 3 = 0$
2. $(x-3)(y+3) + (x-2)(y-2) = 0$
3. $x + y - 5 = 0$ 4. $2x + 5y - 17 = 0$
5. $\frac{x}{2h} + \frac{y}{2k} - 1 = 0$ 6. $y + mx = 0$
7. $\left\{-\frac{(c_1 - c_2)}{m_1 - m_2},\ \frac{m_1 c_2 - m_1 c_1}{m_1 - m_2}\right\}$ 9. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

§ 17. அச்சுகளின் நிலைமாற்றம் (Transformation of Axes)

ஒரு புள்ளியின் கூறுகள் குறிப்பீட்டச்சுகளைச் (axes of reference) சார்ந்து இருப்பதால், ஒரு புள்ளியின் கூறுகள் குறிப்பீட்டச்சுகளுக்கு ஒப்ப மாறுபடுகின்றன. ஆயினும், இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம், இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் போன்றவை குறிப்பீட்டச்சுகளைச் சாராதவை. குறிப்பீட்டு அச்சுகளைக் கீழ்க்கண்ட வகைகளில் மாற்றி அமைக்கலாம்.

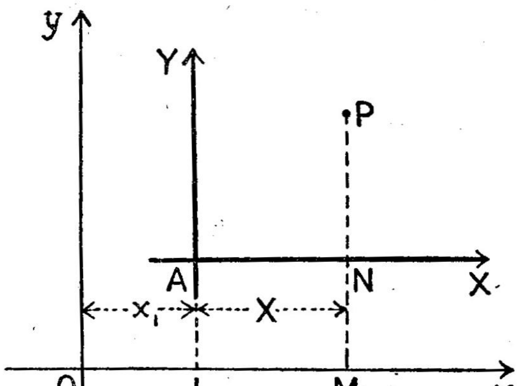
(i) அச்சுகளை அவைகளுக்கு இணையாகவே நகரச் செய்தல்.

(ii) அச்சுகளை ஆதியைப் பொருத்து சுற்றுதல்.

(iii) மேற்கூறிய இரண்டில் ஒன்றை முதலில் செய்து பின்பு அடுத்ததைச் செய்தல்.

மாறுதல் (i) **அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சி** (translation of axes) என்றும், மாறுதல் (ii) **அச்சுகளின் சுழற்சி** (rotation of axes) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

இந்தப் பகுதியில் நாம் அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சியைப் பற்றி படிப்போம். (Oxy) என்ற குறிப்பீட்டச்சுகளைப் பொருத்து,



படம் 14.

புள்ளி A-யை (x_1, y_1) என்றும், புள்ளி P-யை (x, y) என்றும் கொள்க. A-யை ஆதியாகவும், Ox, Oy என்பவற்றிற்கு

இணையான AX, AY என்பவற்றைப் புதிய அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்வோம். இப்புதிய அச்சுகளைப் பொருத்து, P ஆனது (X, Y) என்றிருக்கிறது என்றும் கொள்வோம். P-லிருந்து O -க்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு Ox-ஐ M-இலும், AX-ஐ N இலும் வெட்டட்டும். AY ஆனது Ox-ஐ L-இல் வெட்டட்டும்.

அப்படியாயின்,

$OM = x,\ MP = y,\ AN = X,\ NP = Y,\ OL = x_1,$

$MN = y_1\ ;\ OM = OL + AN,\ MP = MN + NP.$

எனவே $x = x_1 + X,\ y = y_1 + Y.$ (17.1)

(17.1) அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சியை வரையறுக்கின்றன. ஆகவே $(O\,xy)$ என்ற குறிப்பீட்டு அச்சுகளைப் பொருத்து ஒரு வளைவின் சமன்பாடு, $(f(x, y) = 0$ எனவும், A-யின் கூறுகள் (x_1, y_1) எனவும் இருந்தால் (AXY) என்ற புதிய குறிப்பீட்டச்சுக் களைப் பொருத்து அவ்வளைவின் சமன்பாடு, $f(X + x_1, Y + y_1) = 0$ என இருக்கும்.

§ 18. $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் கோட்டிலிருந்து $A(x_1, y_1)$-ன் தூரம்.

A-யை ஆதியாகவும் AX-ஐ Ox-க்கு இணையாகவும், AY-ஐ Oy-க்கு இணையாகவும் கொண்ட (AXY) என்ற புதிய குறிப்பீட்டச் சுகளைப் பொருத்து A-யின் கூறுகள் $(0, 0)$ ஆகும். மேலும் கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின், (AXY)-யைப் பொருத்த சமன்பாடு,

$l(X + x_1) + m(Y + y_1) + n = 0$ ஆகும்.

அதாவது

$$lX + mY = -(lx_1 + my_1 + n)$$

அல்லது

$$\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}X + \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} = -\frac{lx_1 + my_1 + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

இதில் X, Y இவற்றின் குணகங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆக இருப்பதால், நாம் இந்தக் குணகங்களை முறையே $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ என்று இருக்கும்படியாக, ஒரு α-வைக் காண

முடியும். இதனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டின் சமன் பாட்டை

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha = -\frac{lx_1 + m_{\ 1} + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

என்று எழுதமுடியும். ஆகவே, 13.5 மூலம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டிலிருந்து A-யின் தூரம்

$$-\frac{lx_1 + m_{\ 1} + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\Bigg| \quad \text{அல்லது} \quad \Bigg|\frac{lx_1 + m_{\ 1} + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\Bigg| \tag{18 1}$$

என்றாகிறது.

மேலும் A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) என்ற இந்த இரண்டு புள்ளிகளும், நேர்கோடு $lx + my_1 + n = 0$-ன் ஒரு பக்கமாகவே அமைந்திருந்தால், எண்கள்

$$-\frac{lx_1 + m_{\ 1} + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}, -\frac{lx_2 + m_{\ 2} + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

இரண்டும் ஒரே குறியை உடையனவாக இருக்கும்.

அதாவது

$$lx_1 + my_1 + n, \; lx_2 + my_2 + n \tag{18·2}$$

என்பன ஒரே குறியை உடையனவாக இருக்கும். புள்ளிகள் ஒரே பக்கமாக இல்லாவிடில், இவைகள் எதிர்க்குறிகளை உடையனவாக இருக்கும். மேற்கண்ட விளைவுகளிலிருந்து கீழ்க்காணும் விளைவுகளை எளிதில் பெறலாம்.

(i) $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் கோட்டிலிருந்து ஆதி இருக்கும் தூரமாவது

$$\frac{|n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}. \tag{18·3}$$

(ii) $lx + my + n_1 = 0$, $lx + my + n_2 = 0$ குறிக்கும் இணை நேர்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரமாவது,

$$\frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{l^2 + m^2}}. \tag{18·4}$$

(iii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியும், ஆதியும் $lx + my + n = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு ஒரு பக்கமாக அமைந்தால், n-உம்,

$lx_1 + my + n$-உம் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்கும். அவ்விதம் அமையாவிட்டால், எதிர்க் குறிகளைக் கொண்டிருக்கும்.

§ 19. $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகள் (bisectors)

பொதுவாக, எண்கள் n_1, n_2 இரண்டும், மிகையானவை எனக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், இவ்விதம் இல்லாத சமன் பாட்டை (-1)-ஆல் பெருக்கி, மாறிலி உறுப்பை மிகையான தாக அடையலாம்.

பொதுவாக, இரண்டு கோடுகள், தாங்கள் அமைந்துள்ள தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. இப்பகுதிகள் ஒன்றில் ஆதி அமைந்திருக்கும். இந்த ஆதிப் பகுதியில் அமைந்துள்ள கோணச் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டை முதலில் காண்போம். இச் சமவெட்டியின்மீது $P(x_0, y_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால், (18·1)-லிருந்து கிடைப்பதாவது,

$$\frac{|l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \frac{|l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2|}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \tag{19·1}$$

ஆனால், (18·5)-லிருந்து, n_1-உம், $l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1$-உம் ஒரே குறியை உடையனவாகின்றன. ஆனால், n_1 ஒரு மிகை எண். ஆகவே $l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1$-உம் ஒரு மிகை எண். இதுபோலவே $l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2$-ம் ஒரு மிகை எண்.

$$\frac{l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \frac{l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

என எழுதலாம். இதிலிருந்து ஆதிப் பகுதியிலும், அதன் எதிர்ப் பகுதியிலும் அமைந்த சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{l_1 x + m_1 y + n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \frac{l_2 x + m_2 y + n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \tag{19·2}$$

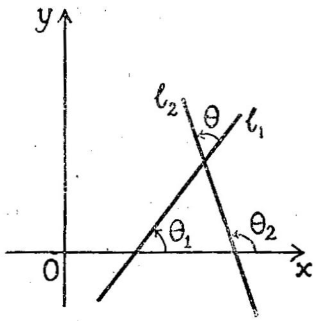
என்றாகிறது. இதுபோலவே அடுத்த சமவெட்டியின் சமன் பாடானது,

$$\frac{l_1 x + m_1 y + n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = -\frac{l_2 x + m_2 y + n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \qquad (19{\cdot}3)$$

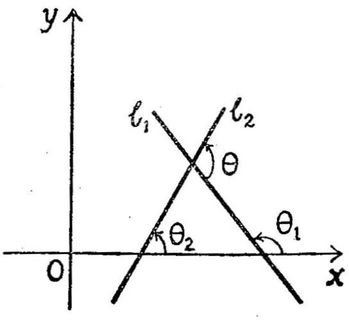
என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

§ 20. இரு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு l_1, l_2 எனப் பெயரிடுவோம். இக்கோடுகள், படம் 15-ல் உள்ளபடி, x அச்சுடன் θ_1, θ_2 என்ற கோணங்களை உண்டாக்கட்டும். l_1-லிருந்து



படம் 15 (*a*)



படம் 15 (*b*)

l_2-க்குக் கடிகாரமுள்ளின் சுழற்சிக்கு எதிர்ப் புறமாகச் சுழன்று அளக்கப்படும் கோணம் θ என்றால், படம் 15 (*a*)-யில், $\theta = \theta_2 - \theta_1$; படம் 15 (*b*)-யில், $\theta = \pi - (\theta_1 - \theta_2)$. இந்த இரண்டு விதங்களிலும் முறையே

$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$, $\quad \tan\theta = \tan\{\pi - (\theta_2 - \theta_2)\}$

என்றாகிறது. எனினும் இவ்விரண்டு விதங்களின் முடிவிலும்

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

அல்லது

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

என்றுதான் கிட்டுகிறது. ஆகவே l_1, l_2 என்பனவற்றின் சரிவுகள் m_2, m_2 என்றால்,

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \qquad (20{\cdot}1)$$

அல்லது

$$\theta = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \qquad (20{\cdot}2)$$

(10·2)-லிருந்து கீழ்க்கண்ட விளைவுகள் எளிதில் கிடைக்கின்றன.

(i) l_1, l_2 செங்குத்துக் கோடுகளாக இருந்தால்,
$m_1 m_2 = -1.$ (20·3)

(ii) $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ என்பன செங்குத்துக் கோடுகளாக இருந்தால்,

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \qquad (20·4)$$

(iii) $l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ என்பன இணைகோடுகளாக இருந்தால்,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (20·5)$$

(iv) $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் கோட்டை

$$mx - ly - h$$

அல்லது

$$\frac{1}{l} x - \frac{1}{m} y = h \qquad (20·7)$$

என எழுதலாம். அதாவது, (20·6)-ஐ அடைய, $lx + my + n$-இல் x, y என்பனவற்றின் குணகங்களில் ஒன்றின் குறியை மாற்றிப் பின் y, x என்பனவற்றின் குணகங்களாக மாற்றி எழுத வேண்டும்.

(20·7)-ஐ அடைய, x, y குணகங்களை அவைகளின் தலைகீழ் எண்களாக மாற்றி எழுதி ஒன்றின் குறியை மாற்றவேண்டும்.

(v) $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டுக்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டை $lx + my = k$ என்று எழுதலாம்.

§ 21. மூன்று நேர்கோடுகளின் சந்திப்புத் தன்மை (Concurrency).

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

என்றிருந்தால்,

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \qquad (21{\cdot}1)$$

$$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \qquad (21{\cdot}2)$$

$$l_3 x + m_3 y + n_3 = 0 \qquad (21{\cdot}3)$$

என்ற சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியாகச் செல்லும் என நிறுவுவோம். கோடுகள் (21·1)-உம், (21·2)-உம் (α, β)-வில் சந்தித்தால்,

$$\alpha = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{l_1 m_2 - l_2 m_1}\,; \quad \beta = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{l_1 m_2 - l_2 m_1}\,.$$

இப்போது கோடு (21·3), (α, β) வழியாகச் செல்லுகிறதா எனப் பார்ப்போம். இதற்காக (21·3)-ல், α-வின் மதிப்பை x-க்கும், β-வின் மதிப்பை y-க்கும் பிரதியிட்டுச் சுருக்க,

$$l_3 \alpha + m_3 \beta + n_3 = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \div (l_1 m_2 - l_2 m_1)$$

$$= 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆகவே, மூன்று கோடுகளும் ஒரே புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன.

சந்திப்புத் தன்மையை வேறு விதமாகவும் காணலாம். $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்ற மூன்று எண்களை

$$\lambda_1 (l_1 x + m_1 y + n_1) + \lambda_2 (r_2 x + m_2 y + n_2)$$
$$+ \lambda_3 (l_2 x + m_3 y + n_3) = 0 \qquad (21{\cdot}4)$$

என்றமையுமாறு கண்டால், மூன்று கோடுகளும் சந்திப்புத்தன்மை யுடையன என நிறுவலாம். சமன்பாடு (21·4) ஆனது x, y இரண்டின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகிறது. ஆகவே, $x = \alpha$, $y = \beta$ என்றாலும் (21·4) உண்மையாகிறது.

அதாவது,

$$\lambda_1 (l_1 \alpha + m_1 \beta + n_1) + \lambda_2 (l_2 \alpha + m_2 \beta + n_2)$$
$$+ \lambda_3 (l_3 \alpha + m_3 \beta + n_3) = 0 \qquad (21{\cdot}5)$$

$l_1 x m_1 y + n_1 = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ என்ற கோடுகள்

வெட்டும் புள்ளி (α, β). ஆகவே, $l_1 \alpha + m_1 \beta + n_1 = 0$, $l_2 \alpha + m_2 \beta + n_2 = 0$. ஆகையால் (21·5),

$$l_3 \alpha + m_3 \beta + n_3 = 0$$

என்றாகிறது. இதிலிருந்து $l_3 x + m_3 y + n_3 = 0$ என்ற கோடும் (α, β) வழியாகச் செல்கிறது எனத் தெரிகிறது. இங்கு λ_1, λ_2, λ_3 முதலிய மூன்றும் பூச்சியமாக இருத்தல் கூடாது என்பது எளிதில் விளங்கும்.

§ 22. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் இரண்டு நேர் கோடுகள் (h, k) விலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன. இச்சமதூரம் d என்றால், நேர் கோடுகளின் சமன்பாடு $(kx - hy)^2 = d^2 (x^2 + y^2)$ எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளில் ஒன்றின்மீதுள்ள புள்ளி ஒன்றை, (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், அக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 0}{y_0 - 0}$$

ஆகும் அதாவது, $y_0 x - x_0 y = 0$ என்பதாகும். (18·1)-ன்படி இக்கோட்டுக்கும், (h, k)-க்கும் உள்ள தூரம்

$$\frac{y_0 h - x_0 k}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \pm d.$$

ஆகவே,

$$\frac{(y_0 h - x_0 k)^2}{(x_0^2 + y_0^2)} = d^2.$$

இதனால் (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$(yh - xk)^2 = d^2 (x^2 + y^2)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

கணக்கு 2.

சமன்பாடு $3x - 4y + 5 = 0$ குறிக்கும் நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடுகளில் ஒன்று $(6, 7)$ வழியாகச் சென்றால் அதன் சமன்பாடு யாது ?

(20·6)-இன்படி வேண்டிய சமன்பாடு $4x + 3y = k$ என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடு (6, 7) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$4(6) + 3(7) = k.$$

அதாவது,

$k = 24 + 21 = 45$. ஆகவே, வேண்டிய சமன்பாடு $4x + 3y = 45$ என்பதாகும்.

கணக்கு 3.

சமன்பாடுகள் $ax + by + k = 0$, $ax + by + k' = 0$, $lx + my + k = 0$, $lx + my + k' = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு சாய்சதுரத்தை உண்டாக்கினால் $a^2 + b^2 = l^2 + m^2$ எனக் காட்டுக.

சாய்சதுரத்தில் இணைப்பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரங்கள் சமமாகும். இப்பொழுது $ax + by + k = 0$-உம், $ax + by + k' = 0$-உம் குறிக்கும் பக்கங்களுக்கு இடையில் உள்ள தூரமாவது,

$$\frac{|k - k'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ஆகும். மேலும், $lx + my + k = 0$, $lx + my + k' = 0$ குறிக்கும் பக்கங்களுக்கு இடையில் உள்ள தூரமாவது,

$$\frac{|k - k'|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

ஆகும்.

ஆகவே,

$$\frac{|k - k'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|k - k'|}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

அதாவது,

$$\sqrt{l^2 + m^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

அல்லது $l^2 + m^2 = a^2 + b^2$.

§ 23. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. புள்ளி $(a, 0)$-லிருந்தும், கோடு $x + a = 0$-லிருந்தும் சம தூரங்களில் இருக்குமாறு ஒரு புள்ளி நகர்ந்தால், அதன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $y^2 - 4ax = 0$ என நிறுவுக.

2. $12x+5y-7=0$, $3x-4y+1=0$ குறிக்கும் கோடுகள் அமைக்கும் கோணங்களின் சம வெட்டிகளின் சமன் பாடுகளைக் காண்க.

3. (6, 0)-ஐயும், (0, 3)-ஐயும் அடியின் முனைகளாகக் கொண்ட ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணமானது, ஒரு பக்கத்தின் சமன்பாட்டை $x-6=$ எனக் கொண்டுள்ளது. முக் கோணத்தின் மற்ற பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $2x-y=0$ குறிக்கும் கோட்டுடன் 45^0 கோணத்தை அமைத்து, (2, 3) வழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

5. (— 5, — 3), (— 1, 1) என்பன ஒரு சதுரத்தின் இரு எதிர் உச்சிகள். சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6. புள்ளிகள் (4, 3), (6, 7), (8, 9) என்பன அமைக்கும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

7. சமன்பாடுகள் $ax+by+1=0$, $ax+by+2=0$, $bx+ay+1=0$, $bx+ax+2=0$ குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு சாய் சதுரத்தை உண்டாக்குகின்றன எனக் காட்டுக.

8. (a_1, b_1), $(a_2\ b_2)$, $(a_3\ b_3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்தால், $a_1x+b_1y=1$ $a_2x+b_2y=1$, $a_3x+b_3y=1$ என்பன குறிக்கும் கோடுகள் யாவும், ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

9. $a_1x+b_1y=1$, $a_2x+b_2y=1$, $a_3x+b_3y=1$ என்ற சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கோடுகள் யாவும் ஒரு புள்ளி வழியாகச் சென்றால், (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(a_3\ b_3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

2. $21x+77y-48=0$, $99x-27y-22=0$
3. $x+2y-6=0$, $3x-4y+12=0$
4. $x-3y+7=0$, $3x+y-9=0$
5. $x+1=0$, $x+5=0$, $y-1=0, y+3=0$
6. $(-12, 19)$.

3. சோடிக் கோடுகள்

(Pair of Straight Lines)

§ 24. ஒரு சோடிக்கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு

$$(l_1 x m_1 y + n_1)(l_2 x + m_2 y + n_2) = 0 \qquad (24.1)$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். (x_1, y_1) என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளி,

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0. \qquad (24{\cdot}2)$$

என்ற கோட்டில் இருந்தால், $l_1 x_1 + m_1 y_1 + n_1 = 0$. இதனுல் $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளியின் கூறுகள் (24·1)-ஐத் திருப்தி செய்கின்றன. ஆகையால், (24·2) என்ற கோட்டில் இருக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளும், (24·1) குறிப்பிடும் இயங்குவரையிலும் இருக்கின்றன. இம்மாதிரியே

$$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0{\cdot} \qquad (24{\cdot}3)$$

என்ற கோட்டில் இருக்கும் எல்லாப்புள்ளிகளும் (24·1) குறிப்பிடும் இயங்கு வரையில் இருக்கின்றன எனக் காண்கிறோம்.

மறுதலையாக, (24·1) நிச்சயிக்கும் இயங்கு வரையில் இருக்கும் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் (24·2) குறிக்கும் கோட்டிலோ அல்லது (24·3) குறிக்கும் கோட்டிலோ இருக்கும். எனவே (24·2) என்ற சமன்பாடு, சமன்பாடுகள் (24·2), (24·3) குறிக்கும் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடுகளாகும்.

இதிலிருந்து இரண்டு கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகவும், மூன்று கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு முப்படிச் சமன்பாடாகவும் இருக்கும் என்பதை அறிகிறோம். மேலும் $f(x,y) = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டில் $f(x,y)$ ஆனது, இரு ஒருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க இயலுமாறு

இருந்தால், $f(x,y) = 0$ என்ற சமன்பாடு இரண்டு நேர்கோடு களின் இணைந்த சமன்பாடாகும் என்று தெரிகிறது.

§ 25. இருபடிச் சமப்படித்தான சமன்பாடு (Second Degree Homogeneous Equation).

இப்பொழுது நாம், ஒரு இருபடிச் சமப்படித்தான சமன்பாடு, ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரு நேர்க்கோடு களைக் குறிக்கிறது எனக் காட்டுவோம். இதற்காக

$$ax^3 + 2hxy + ba^2 = 0.$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். $b = 0$ ஆக இருந்தால் சமன்பாட்டை

$$x(ax + 2hy) = 0$$

என மாற்றி எழுதலாம். இச் சமன்பாடு, ஆதிவழியாகச் செல்லும் இரு கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு என்றும், இந்த இரு கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $x = 0$, $ax + 2hy = 0$ என்றும் தெரிகிறது.

$b \neq 0$ ஆக இருந்தால், $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஐ

$$b\left(y^2 + \frac{2h}{b}yx + \frac{a}{b}x^2\right) = 0$$

அல்லது $y^2 + \dfrac{2h}{b}yx + \dfrac{a}{b}x^2 = 0$

என்று மாற்றி எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்தில் உள்ள கோவையை $y - m_1 x$, $y - m_2 x$ என்ற மெய்க்காரணி களாகப் பிரிக்க முடியுமானல், சமன்பாட்டை

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0.$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 + = 0$ ஆனது $y - m_1x = 0$, $y - m_2 x = 0$ குறிக்கும். ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு என்றும், மேலும்

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \qquad (25{\cdot}1)$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} \qquad (25{\cdot}2)$$

என்றும் தெரிகிறது.

$$\frac{4h^2}{b^2} - 4 \cdot \frac{a}{b} \geq 0 \text{ அல்லது } h^2 - ab \geq 0$$

என்றிருக்கும்போதுதான் மேற்கண்ட காரணிகள் மெய்க் காரணிகளாகவும், கோடுகள் மெய்க் கோடுகளாகவும் அமையும். இதேபோல் ஒரு n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு n கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டலாம்.

§ 26. பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு.

ஒரு இருபடிச் சமப்படித்தான சமன்பாடு, ஒரு சோடிக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என அறிந்தோம். ஆனால், பொதுவாக எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளும் இரு கோடுகளைக் குறிக்கும் என்று சொல்வதற்கில்லை. இங்கு,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (26{\cdot}1)$$

என்ற பொதுவான சமன்பாடு இரண்டு கோடுகளைக் குறித்தால், சமன்பாட்டின் குணகங்களாலாகிய கோவையான

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும் எனக் காட்டுவோம்.

சமன்பாடு இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதால் அதன் இடது கைப்பக்கத்துக் கோவையானது, காரணிப்படுத்தப்படும் தன்மையுடையதாக இருக்கும். ஆகவே, இக்கோவையை

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c).$$

என்றவாறு x-ன் இருபடிக் கோவையாக எழுதினால் இதனது தன்மை காட்டி (discriminant) ஒரு நிறை வர்க்கமாகும்.

அதாவது

$$4(hy + g)^2 - 4a(by^2 + 2fy + c)$$

என்பது ஒரு நிறை வர்க்கமாகும். இவ் வர்க்கத்தை 4 ஆல் வகுத்து, பின் y-இல் கோவையாக எழுதினால், கிட்டுவது

$$(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + g^2 - ac.$$

இதுவும் ஒரு நிறை வர்க்கமாகையால், இதன் தன்மைகாட்டி பூச்சியமாகும். ஆகவே

$$4(gh - af)^2 - 4(h^2 - ab)(g^2 - ac) = 0$$

அல்லது $a(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2) = 0.$

இப்போது, $a \neq 0$ ஆனுல், கிடைக்கும் நிபந்தனை

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \qquad (26.2)$$

அல்லது

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (26{\cdot}3)$$

என்ருகிறது.

$a = 0, b \neq 0$ ஆனுல், (26·1)-லிருந்து முதலில் y-ல் இருபடிக் கோவையைக் கண்டு, பின் x-ல் இருபடிக் கோவையைக் கண்டு, கடைசியாக நிபந்தனை (26·2)-ஐயே அடையலாம்.

$a = 0, b = 0$ ஆனுல் சமன்பாடு (26·1)

$$2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்றிருக்கும். இங்கு

$$2hxy + 2gx + 2fy + c = 2h(x + c_1)(y + c_2)$$

என எழுதி, குணகங்களை ஒப்பிட்டு g, f, c என்பனவற்றின் மதிப்புகளை c_1, c_2, h சார்ந்தனவாகக் கண்டு,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

என்பது பூச்சியமாகிறது என நிறுவலாம்.

மறுதலையாக, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்ருல், சமன்பாடு (26.1) இரண்டு கோடுகளைக் குறிக்கின்றது என்றும் காட்டலாம்.

§ 27. இரு சோடிக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி

இரு இணையில்லாத கோடுகளின் சமன்பாட்டை

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

எனவும், அவைகளின் வெட்டும் புள்ளி $A(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம். AX, AY என்பன Ox, Oy என்பனவற்றிற்கு இணையானுல் குறிப்பீட்டச்சு (AXY)-யைப் பொருத்து கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 \\ + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0$$

ஆகும்.

அதாவது, $aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(ax_1 + hy_1 + g)$
$+ 2y(hx_1 + by_1 + f) + (ax_1{}^2 + 2h\, x_1\, y_1 + by_1{}^2 + 2gx_1$
$+ 2fy_1 + c) = 0.$

இச் சமன்பாடு, ஆதிவழிச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதால், இது சமபடித்தானதாய் இருக்கவேண்டும். அதாவது x-ன் குணகமும், y-ன் குணகமும், மாறிலியும் பூச்சியமாகும். ஆகவே

$$ax_1 + hy_1 + g = 0 \qquad (27{\cdot}1)$$

$$hy_1 + by_1 + f = 0 \qquad (27{\cdot}2)$$

$$ax_1{}^2 + 2hx_1\, y_1 + by_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$$

இவற்றில் மூன்றுவதைச் சுருக்குவதற்காக, அதை

$$x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$$

என மாற்றி எழுதி, (27·1)-ஐயும், (27·2)-ஐயும் பயன்படுத்தினுல்,

$$gx_1 + fy_1 + c = 0 \qquad (27{\cdot}3)$$

எனச் சுருங்குகிறது. இப்பொழுது சமன்பாடுகள் (27·1), (27·2), (27·3) ஆகியவற்றில் ஏதாவது இரண்டை x_1-க்கும், y_1-க்கும் விடுவிக்கலாம்.

உதாரணமாக, (27·1)-ஐயும் (27·2)-ஐயும் விடுவித்தால்,

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}} = \frac{-y_1}{\begin{vmatrix} a & g \\ h & f \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}}$$

இதிலிருந்து வெட்டும் புள்ளியின் கூறுகளை

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}} \; ; \; y_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a & g \\ h & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}} \qquad (27{\cdot}4)$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

(27·1), (27·2), (27·3) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து, நேரடியாக நிபந்தனை (26·3)-ஐ எளிதில் பெறலாம். ஆனுல், இம்முறை, வெட்டும் கோடுகளுக்குமட்டுமே பொருந்தும் ; இணை கோடுகளுக்குப் பொருந்தாது என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(27·1)-ஐயும், (27·2)-ஐயும் எளிதில் மனதில் இருத்த வழி அமைக்கும் முறை ஒன்றைப் படிப்போம்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$-ஐ S எனக் குறித்தால்,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x} = ax + by + g,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y} = hx + by + f$$

ஆகும். ஆகவே (27·1), (27·2) என்பவற்றை அடைய,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளில் x-க்கும், y-க்கும் பதிலாக x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் பிரதியிடவேண்டும்.

§ 28. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோடிக் கோடுகளுக்கு இணையாக, ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடு.

கொடுக்கப்பட்ட சோடிக் கோடுகளின் சமன்பாட்டை,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv (l_1 x + m_1 y + n_1)(l_2 x + m_2 y + n_2)$$

என்று எழுதலாம். இங்கு x^2, y^2, xy முதலியவற்றின் குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$$l_1 l_2 = a, \quad l_1 m_2 + l_2 m_1 = 2h, \quad m_1 m_2 = b$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆனல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு இணையாக ஆதி வழியாகச் செல்லும் சோடிக் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு,

$$(l_1 x + m_1 y)(l_2 x + m_2 y) = 0.$$

ஆகும்.

அதாவது, $l_1 l_2 x^2 + (l_1 m_2 + l_2 m_1) xy + m_1 m_2 y^2 = 0.$

அதாவது, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$

§ 29. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$25x^2 - 120xy + 144y^2 - 25x + 60y - 36 = 0$ குறிக்கும் இணைகோடுகளின் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்பொழுது

$$25x^2 - 120xy + 144y^2 = (5x - 12y)^2.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$(5x - 12y)^2 - 5(5x - 12y) - 36 = 0$$

என எழுதிக் காரணிப்படுத்தினுல்,

$$\{(5x - 12y) - 9\}\{(5x - 12y) + 4\} = 0$$

என்ருகின்றது. ஆகவே, (18·4)-இன் மூலம் இந்த இணை கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள தூரம்,

$$\frac{|(-9) - (4)|}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = 1.$$

எனக் கிடைக்கிறது.

கணக்கு 2.

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$(x^2 - 5xy + 4y^2 \equiv (x - y)(x - 4y)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$$(x - y + l)(x - 4y + m) = 0$$

என மாற்றி எழுதி, குணகங்களை ஒப்பிட்டால்,

$$l + m = 1$$

$$-4l - m = 2$$

அதாவது $l = -1$, $m = 2$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$ என்பன வேண்டிய தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்.

கணக்கு 3.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் ஒன்றின் சரிவு மற்ருென்றின் சரிவின் இரு மடங்கானது என்ருல், $8h^2 = 9ab$ என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்,

$y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$

என்ருல்

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}, \qquad (1)$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

m_1 ஆனது, m_2-ஐப் போல் இருமடங்கானது எனக் கொண்டால்,

$$m_1 = 2\, m_2. \tag{3}$$

இந்த m_1-இன் மதிப்பை (1)-இலும், (1)-இலும் பிரதியிட,

$$3\, m_2 = \frac{-2h}{b},$$

$$2\, m_2{}^2 = \frac{a}{b}.$$

எனக் கிடைக்கிறது. இவைகளிலிருந்து m_2-ஐ நீக்கினால்

$$2\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

என்று கிடைக்கிறது. அதாவது $8h^2 = 9ab$ என்று கிடைக்கிறது.

கணக்கு 4.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் (x_1, y_1)-லிருந்து இருக்கும் செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்கற்பலன்

$$\frac{|\, ax_1{}^2 + 2h\, x_1\, y_1 + b\, y_1{}^2 \,|}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$y - m_1\, x = 0$, $y - m_2\, x = 0$ என்றால், (x_1, y_1)-லிருந்து கோடுகளிலிருந்து உள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள்,

$$\frac{|\, y_1 - m_1\, x_1 \,|}{\sqrt{1 + m_1{}^2}}, \quad \frac{|\, y_1 - m_2\, x_1 \,|}{\sqrt{1 + m_2{}^2}}$$

ஆகும். இவைகளின் பெருக்கற் பலனானது,

$$\frac{|\, (y_1 - m_1\, x_1)\,(y_1 - m_2\, x_1) \,|}{\sqrt{(1 + m_1{}^2)\,(1 + m_2{}^2)}}$$

அதாவது $$\frac{|\, y_1{}^2 - (m_1 + m_2)\, x_1\, y_1 + m_1\, m_2\, x_1{}^2 \,|}{\sqrt{(1 + m_1{}^2 + m_1{}^2 + m_1{}^2\, m_2{}^2}}$$

அதாவது $$\frac{|\, y_1{}^2 - (m_1 + m_2)\, x_1\, y_1 + m_1\, m_2\, x_1{}^2 \,|}{\sqrt{1 + (m_1 + m_2)^2 - 2m_1\, m_2 + m_1{}^2\, m_1{}^2}}$$

இதில் $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$, $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{a}{b}$ எனப் பிரதியிட, வேண்டிய விளைவு கிடைக்கிறது.

கணக்கு 5.

சமன்பாடு $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$, இரண்டு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கிறது எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$(x - y + l)\ (x + y + m) = 0$$

என்ற வடிவில் எழுதி, குணகங்களை ஒப்பிடுவதனால் கிடைக்கும் l-இலும், m-இலும் அமைந்த சமன்பாடுகளை விடுவித்து, $l = -1,\ m = 2,\ lm = -2$ எனக் கண்டு, வேண்டியதை நிறுவலாம்.

இம்முறைக்கு மாற்று முறையாக நிபந்தனை (26·3)-ஐயும் பயன்படுத்தலாம். உதாரணமாக, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது :

$$a = 1, \qquad f = -\frac{3}{2},$$

$$b = -1, \qquad g = -\frac{1}{2},$$

$$c = -2, \qquad h = 0.$$

இம் மதிப்புகளை (26·3)-ல் உள்ள அணிக்கோவையில் பிரதியிடக் கிட்டுவதாவது :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(2 - \frac{9}{4}\right) - 0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= 0.$$

ஆகவே நிபந்தனை (26·3) உண்மையாகிறது. இதனால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிக்கிறது என்றாகிறது.

கணக்கு 6.

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2$ என்ற கோவையை S எனக் கொண்டு,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளை x-க்கும். y-க்கும் விடுவித்து, வெட்டும் புள்ளியின் கூறுகளைக் காணலாம்.

ஆனால் $\dfrac{\partial S}{\partial x} = 2x - 5y + 1,$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -5x + 8y + 2.$$

ஆகவே, விடுவிக்கவேண்டிய சமன்பாடுகள்

$$2x - 5y + 1 = 0,$$
$$-5x + 8y + 2 = 0$$

ஆகும். இவைகளை x-க்கும், y-க்கும் விடுவிக்க கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}$$

அதாவது $\dfrac{x}{-18} = \dfrac{-y}{9} = \dfrac{1}{-9}.$

அதாவது $x = \dfrac{-18}{-9} = 2,$

$$y = \frac{-9}{-9} = 1.$$

கணக்கு 7.

சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆனது, இரு கோடுகளைக் குறிக்கின்றன. அக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி y-அச்சின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில்,

(i) $f^2 - bc = 0$

(ii) $bg - fh = 0$

(iii) $ch - fg = 0$

(iv) $2fgh - bg^2 - ch^2 = 0$

(v) $bg^2 - ch^2 = 0.$

எனக் காட்டுக.

கோடுகளை y-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளின் y கூறுகளை, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டையும் சமன்பாடு $x = 0$-ஐயும் விடுவித்துக் காணவேண்டும். அதாவது இக்கூறுகளை

$$by^2 + 2fy + c = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாடு தருகிறது. ஆனால், இக்கூறுகள் சமமானவை. ஆகவே இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியத்துக்குச் சமம்.

அதாவது $4f^2 - 4bc = 0$

அல்லது $f^2 - bc = 0.$

மேலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) என்றால், இப்புள்ளி, y-அச்சின் மேல் உள்ளதால், $x_1 = 0$. ஆகவே (27·4)-லிருந்து

$$\begin{vmatrix} h & g \\ f & b \end{vmatrix} = hf - bg = 0.$$

எனக் கிடைக்கிறது. ஏனைய விளைவுகளை

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்ற நிபந்தனையிலிருந்து விளைவுகள் (i), (ii)-ஐப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

§ 30. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடு $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 3x - 2y - 6 = 0$ ஆனது ஒரு சோடி இணைகோடுகளைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டி, அவைகளின் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

2. சமன்பாடு $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 14x - 21y + 10 = 0$ குறிக்கும் இணைகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

3. சமன்பாடு $3x^2 - 7xy - 6y^2 + 11x + 22y - 20 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. சமன்பாடு $2x^2 + 7xy + 3y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

5. $x^2 + xy - 12y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள், $x - 2 = 0$ குறிக்கும் கோட்டுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

6. ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்துள்ள இரு பக்கங்களின் இணைந்த சமன்பாடு, $7x^2 \quad 37xy + 10y^2 = 0$ என்றும், ஒரு மூலைவிட்டத்தின் சமன்பாடு $2x + y - 11 = 0$ எனவும் இருந்தால் அவ்விணைகரத்தின் உச்சிகளைக் காண்க.

7. $20x^2 - 9xy - 20y^2 = 0$; $9xy^2 - 20y^2 + 11x + 17y - 3 = 0$ என்ற இரு சமன்பாடுகள் குறிக்கும் நான்கு கோடுகளும் ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் என நிறுவுக.

8. சமன்பாடு $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள், சமன்பாடு $x + y - 1 = 0$ குறிக்கும் கோட்டுடன் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை உண்டாக்குகின்றன எனக் காட்டுக.

9. சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறித்தால், $h^2 - ab = 0$ எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv (lx + my + n_1)(lx + my + n_2)$ இதிலிருந்து குணகங்களைச் சமப்படுத்த $a = l^2$, $h = lm$, $b = m^2$ என்றும் $h^2 - ab = 0$ என்றும் கிடைக்கிறது.]

10. சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gh + 2fy + c = 0$ இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறித்தால் $a + b = 0$ எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy + 2gx + c \equiv (lx + my + n_1)(mx - ly + n_2)$]

11. சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆதியிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள இரு இணை கோடுகளைக் குறித்தால் $h^2 - ab = 0$ என்றும், $f = 0$ $g = 0$ என்றும் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$
$\equiv (lx + my + n)(lx + my - n)$]

12. சமன்பாடு $(lx + my)^2 - 3(mx - ly)^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளும், சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் கோடும் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை உண்டாக்கும் எனக் காட்டுக.

13 சமன்பாடு $(y^3 - x^3) + 3xy(y - x) = 0$. ஒன்றோடு ஒன்று சமமாகச் சாய்ந்துள்ள மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

14. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக ஆதிவழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு, $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என நிறுவுக.

[உதவிக் குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடுகள் $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ என்றால் வேண்டிய சமன்பாடு $(m_1 y + x)(m_2 y + x) = 0$ ஆகும். இங்கு

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b},\ m_1 m_2 = \frac{a}{b}\Big]$$

15. $2x^2 - 9xy - 35y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு செங்குத்தாக ஆதி வழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. சமன்பாடு $a_1 x^2 + 2h_1 xy + b_1 y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்று, சமன்பாடு $a_2 x^2 + 2h_2 xy + b_2 y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றானால்,

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + 4(a_1 h_2 - a_2 h_1)(b_1 h_2 - b_2 h_1) = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : முதலிரண்டு கோடுகளின் சரிவுகளை m_1, m_2 எனக் கொண்டால்

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h_1}{b_1},\ m_1 m_2 = \frac{a_1}{b_1};$$

இவைகளிலிருந்து m_2-ஐ நீக்கக் கிடைப்பதாவது:

4632

$$b_1 m_1^2 + 2h_1 m_1 + a_1 = 0.$$

இதேபோல் இரண்டாவது சோடிக் கோடுகளின் சரிவுகளை m_1, m_3 எனக் கொண்டால்

$$b_2 m_1^2 + 2h_2 m_1 + a_2 = 0.$$

ஆகவே,

$$\frac{m_1^2}{\begin{vmatrix} 2h_1 & a_1 \\ 2h_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{m_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} b_1 & 2h_1 \\ b_2 & 2h_2 \end{vmatrix}}.\ \Bigg]$$

17. சமன்பாடு $a_1 x^2 + 2h_1 xy + b_1 y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்று சமன்பாடு $a_2 x^2 + 2h_2 xy + b_2 y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றுக்குச் செங்குத்தானதாய் இருந்தால்,

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + 4(a_1 h_2 + h_1 b_2)(h_1 a_2 + b_2 h_2) = 0$$

எனக் காட்டுக.

18. சமன்பாடு $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரண்டு கோடுகள், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானது என்றால்,

$$a^2 + d^2 + bd + ac = 0$$

எனக் காட்டுக.

19. புள்ளி (1, 0)-லிருந்து $y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் $y = x + c$ குறிக்கும் கோட்டுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{c^2 \sqrt{h^2 - ab}}{a + b + 2h}$$

என நிறுவுக.

21. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள், $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு,

$$\frac{n^2 \sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

எனக் காட்டுக.

22. P என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடுகளின் அடிகள் A, B. AB ஆனது மாறிலியாகவே இருக்கும்படி P நகர்ந்தால், P-யின் இயங்கு வரை $4(x^2 + y^2)(h^2 - ab) = k^2[4h^2 + (a-b)^2]$ என நிறுவுக.

23. $x^2 + by^2 + x - 3y - 2 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு சோடிக் கோடுகளைக் குறித்தால் b-ன் மதிப்பைக் காண்க.

24. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + a = 0$, ஒரு சோடிக் கோடுகளைக் குறித்தால் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

25.
$$(h^2 - ab)(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy) + (2fgh - af^2 - bg^2) = 0$$

என்ற சமன்பாடு ஒரு சோடிக் கோடுகளைக் குறிக்கிறது எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: சமன்பாட்டை $(h^2 - ab)$-ஆல் வகுக்க.]

26. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் இரு இணைகோடுகளுக்கு இணையாக, ஆதி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$ax + hy = 0$ அல்லது $hx + by = 0$

என நிறுவுக.

27. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு செவ்வகத்தை உண்டாக்குகின்றன எனக் காட்டுக.

$$2x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x + 8y + 1 = 0;$$
$$x^2 + 2xy - y^2 = 0.$$

விடைகள்

1. $\frac{5}{\sqrt{13}}$ 2. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ 3. $3x + 2y - 4 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$.

4. $2x + y + 1 = 0$; $x + 3y + 2 = 0$. 5. $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{18}\right)$

6. (0, 0), (2, 7), (7, 8), (5, 1).

15. $35x^2 - 9xy - 2y^2 = 0$.

19. $x - 3y + 1 = 0$ 23. -1 24. $-\frac{10}{9}$.

§ **31.** $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ **குறிக்கும் கோடுகளின் இடையில் உள்ள கோணங்கள் :**

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$y - m_1 x = 0$; $y = m_2 x = 0$

என்ருல்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} = m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

ஆனல் (20·1)-லிருந்து கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங்களில் ஒன்று θ என்ருல், அதை

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

என்பதிலிருந்து அடையலாம் என்று அறிகிருேம். அதாவது

$$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

அல்லது $$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}}{1 + \frac{a}{b}}$$

$$= \pm\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}. \qquad (31\cdot1)$$

அதாவது $$\theta = \pm\tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}. \qquad (31\cdot2)$$

(31·1)-லிருந்து கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் இரண்டு என்ருகிறது. அவைகளில், குறுங்கோணத்தை tan θ-வின் மிகை மதிப்பும், விரிகோணத்தை tan θ-வின் குறை மதிப்பும் தருகின்றன.

மேலும், (31·1)-லிருந்து கீழ்க்கண்ட விளைவுகள் எளிதில் கிடைக்கின்றன:

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகளானல், $\theta = 90^0$. ஆகவே $\tan\theta = \infty$. எனவே

$a + b = 0$. அதாவது

x^2-ன் குணகம் + y^2-ன் குணகம் = 0.

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் இணைகோடுகளானல் அதாவது ஒன்றன்மேல் ஒன்ருக இணைந்த கோடுகளானல் $\theta = 0$. ஆகவே $\tan\theta = 0$. எனவே $h^2 - ab = 0$.

(iii) சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் செங்குத்தானவையாய் இருப்பதற்கும், இணையாய் இருப்பதற்கும் வேண்டிய நிபந்தனைகள்,

§ 28-லிருந்து, முறையே $a + b = 0$, $h^2 - ab = 0$ ஆகும்.

§ 32. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ **குறிக்கும் கோடுகள் உண்டாக்கும் கோணங்களின் சமவெட்டிகள்.**

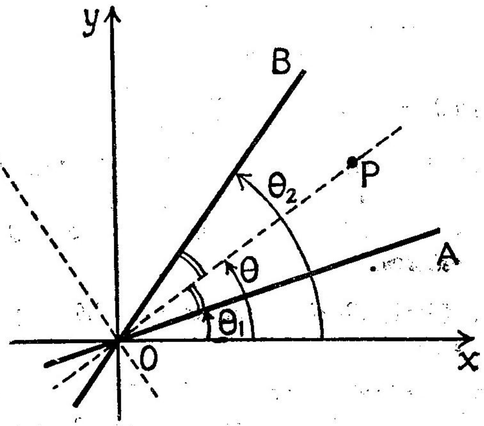
OA, OB என்பன கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் என்றும், $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ என்பன அவைகளின் சமன் பாடுகள் எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \; m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

கோணம் AOB யின் சமவெட்டியின் மேல் ($P(x_0 = y_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு OA, OB, OP முதலியன x-அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணங்களை முறையே θ_1, θ_2, θ என்று குறித்தால்,

$$m_1 = \tan\theta, \; m_2 = \tan\theta_2, \; \frac{y_0}{x_0} = \tan\theta$$

என்று கிடைக்கிறது (படம் 16). மேலும் கிடைப்பதாவது :



படம் 16.

$$\angle xOP = \angle xOA + \frac{1}{2} \angle AOB.$$

அதாவது $\theta = \theta_1 + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$

$$= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

ஆகவே $2\theta = \theta_1 + \theta_2$.

அதாவது $\tan 2\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2)$.

எனவே $\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \dfrac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \dfrac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$.

ஆகவே $$\frac{2\dfrac{y_0}{x_0}}{1 - \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2} = \frac{-2\dfrac{h}{b}}{1 - \dfrac{a}{b}}$$

இதைச் சுருக்கி மாற்றி எழுதினுல்,

$$\frac{x_0^2 - y_0^2}{a - b} = \frac{x_0 y_0}{h}$$

என்றும், இதிலிருந்து சமவெட்டியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பதால், இச் சமன்பாடு கோடுகள் உண்டாக்கும் இரண்டு கோணங்களின் சமவெட்டிகளையும் குறிக்கிறது.

§ 33. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$ax^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + c = 0$ என்பது இரு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறித்தால், a-யின் மதிப்பையும், c-யின் மதிப்பையும் காண்க.

கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகள்; ஆகையால்,

x^2-ன் குணகம் $+$ y^2-ன் குணகம் $= 0$

அதாவது $a - 2 = 0$

அல்லது $a = 2$. மேலும், (26·3)-ஐப் பயன்படுத்த,

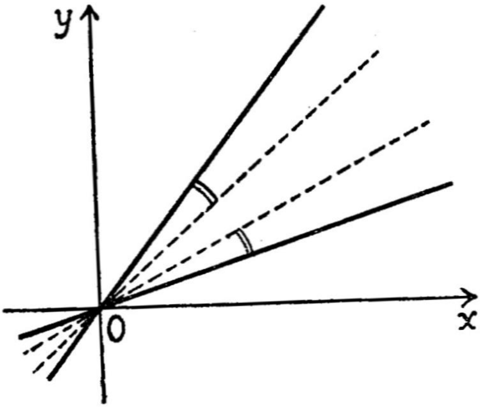
$$\begin{vmatrix} -2 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & c \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $c = -3$ என்று கிடைக்கிறது.

கணக்கு 2.

$a^2x^2 + 2h(a+b)xy + b^2y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுடன் சம கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன என நிறுவுக.

முதலிரண்டு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளும், அடுத்த இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள



படம் 17.

கோணங்களின் சமவெட்டிகளும் ஒன்றுஞல், வேண்டியது நிறுவப்படுகிறது என்பதைப் படம் 17-லிருந்து எளிதில் காணலாம். முதலிரு சமவெட்டுகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} = \frac{xy}{h(a+b)}.$$

அல்லது $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$

அடுத்த இரண்டு சமவெட்டிகளின் இணைந்த சமன்பாடு இதுதான் என்று முன்பே கண்டுள்ளோம்.

§ 34. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் இடையே உள்ள குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

2. $3x^2 + 8xy + by^2 + 16x + 8y + c = 0$ இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறித்தால் b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. m-இன் மதிப்பு எதுவாயினும், $(a + 2hm + bm^2)\, x^2 + 2\{(b-a)\, m - (m^2 - 1)\, h\}\, xy + (am^2 - 2hm + b)\, y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் இடையில் உள்ள கோணம் ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

4. λ மட்டும் மாறும்போது, சமன்பாடு

$ax^2 + 2hxy + by^2 = \lambda\,(x^2 + y^2)$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள் மாறுது எனக் காட்டுக.

5. சமன்பாடுகள் $(a-b)\,(x^2-y^2)+4hxy = 0$, $h\,(x^2-y^2) = (a-b)\,xy$ குறிக்கும் இரண்டு சோடிக் கோடுகளில் ஒரு சோடி மற்றதின் இடையிலுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகள் என நிறுவுக.

6. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் இடையுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளுள் ஒன்று $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் வழிச்சென்றால், $(a - b)\,fg + h\,(f^2 - g^2) = 0$ என நிறுவுக.

[உதவிக் குறிப்பு : வெட்டுப்புள்ளி (x_1, y_1) என்றால்

$$x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2},\; y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2},\; \frac{x_1^2 - y_1^2}{a - b} = \frac{x_1\, y_1}{h}\,.$$]

7. $2x^2 + 3xy + y^2 + y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் இடையுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளுக்கு இணையாக, ஆதிவழியாகச் செல்லும் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு $3(x^2 - y^2) - 2xy = 0$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ 2. $b = -3,\; c = 16$.

4. வட்டம்
(Circle)

§ 35. ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு :

ஆதியை மையமாகவும், a-யை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

என்று §8-ல் கண்டோம். மேலும், (a, b)-யை மையமாகவும் r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \qquad (35{\cdot}1)$$

என §9-ன் கணக்கு 3-ல் கண்டோம்.

இப்பொழுது $A_1\ (x_1, y_1)$, $A_2\ (x_2, y_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் துண்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். $P\ (x_0, y_0)$ ஆனது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொண்டால், கோணம் $A_1 P A_2$ ஒரு செங்கோணமாகும். எனவே, $A_1 P$, $A_2 P$ ஆகியவற்றின் சரிவுகளின் பெருக்கற்பலன் (-1)-க்குச் சமம்.

அதாவது $\dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \dfrac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} = -1$

அல்லது $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = 0.$

இதிலிருந்து வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \qquad (35{\cdot}2)$$

எனத் தெரிகிறது.

§ 36. ஒரு வட்டத்தின் திட்டமான சமன்பாடு (Standard Equation of a Circle.)

(35.1)-லிருந்து ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் x^2-ன் குணகம், y^2-ன் குணகத்திற்குச் சமமாகவும், $x\,y$-ன் குணகம்

பூச்சியமாகவும் இருக்கும் எனக் காண்கிறோம். மறுதலையாக, ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டில் x^2-ன் குணகம், y^2-ன் குணகத்திற்குச் சமமாகவும், xy-ன் குணகம் பூச்சியமாகவும் இருந்தால், அச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், அச் சமன்பாட்டை x^2-ன் குணகத்தால் வகுத்து, பின் மாற்றி எழுதினால்

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \tag{36·1}$$

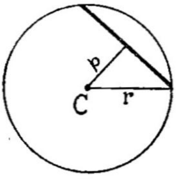
அல்லது $(x + g)^2 + (y + f)^2 - (g^2 + f^2 - c) = 0$

என்று கிடைக்கிறது. இதை (35·1) ஒப்பிடும்போது, இது $(-g, -f)$-ஐ மையமாகவும், $(\sqrt{g^2 + f^2 - c})$-யை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கிறது என்று கிடைக்கின்றது. மேலும், $g^2 + f^2 - c$ மிகையாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ அல்லது குறையாகவோ இருப்பதைப் பொருத்து, (36·1) ஆனது முறையே ஒரு மெய் வட்டத்தையோ, அல்லது ஒரு புள்ளி வட்டத்தையோ, அல்லது ஒரு கற்பனை வட்டத்தையோ குறிக்கும் எனத் தெளிவாகிறது.

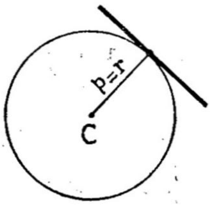
சமன்பாடு (36·1), ஒரு வட்டத்தின் திட்டமான சமன்பாடு எனப்பெறும். அதாவது திட்டமான சமன்பாட்டில் x^2-ன் குணகமும், y^2-ன் குணகமும் 1-க்குச் சமமாகும்.

§ 37. ஒரு வட்டத்தின் தன்மையிலிருந்து கிடைக்கும் விளைவுகள்

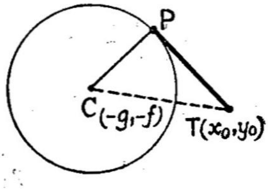
ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அவ்வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு நாணிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு அந்நாணை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது. ஆகவே, r என்பது, அவ் வட்டத்தின்



படம் 18*a*



படம் 18*b*



படம் 18*c*

ஆரமாகவும், p என்பது, மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமாகவும் இருந்தால், அந் நாணினுடைய நீளம் $2\sqrt{r^2 - p^2}$ ஆகும். (படம் 18*a*).

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (37{\cdot}1)$$

குறிக்கும் வட்டத்தில், $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் நாணின் நீளம், $2\sqrt{r^2 - p^2}$ ஆகும். இதில்

$$r^2 = g^2 + f^2 - c, \quad p^2 = \frac{(lg + mf - n)^2}{l^2 + m^2}$$

ஒரு நேர்கோடு வட்டத்தைத் தொட்டால், $p^2 = r^2$ (படம் 18b). ஆகவே

$$lx + my + n = 0$$

குறிக்கும் கோடு வட்டத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

$$(lg + mf - n)^2 = (g^2 + f^2 - c)(l^2 + m^2). \qquad (37{\cdot}2)$$

அடுத்ததாக, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் வட்டத்திற்கு, $T(x_0\ y_0)$-லிருந்து வரைப்படும் தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் காண்போம் (படம் 18c). T-லிருந்து வரையப் படும் தொடுகோடு, அவ்வட்டத்தை P என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது என்றும், அவ்வட்டத்தின் மையம் C என்றும் கொண்டால்

$$TP^2 = TC^2 - CP^2 = \{(x_0 + g)^2 + (y_0 + f)^2\} - (g^2 + f^2 - c)$$
$$= x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c.$$

அதாவது $TP = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c} \qquad (37{\cdot}3)$

மேலும் P ஆனது (x_1, y_1) என்றிருந்தால், CP-யின் சரிவும் PT-யின் சரிவும் முறையே

$$\frac{y_1 + f}{x_1 + g}, \qquad -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}$$

ஆகும். ஆகவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$$

ஆகும். அதாவது $(x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f) = 0$ அல்லது $xx_1 + yy_1 + gx + fy - (x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1) = 0$ என்றாகிறது. ஆனால் (x_1, y_1), வட்டத்தின் மேலுள்ளது. ஆகவே $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$.

இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad (37{\cdot}4)$$

என எழுதலாம். இதுபோலவே

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தில், ஏதேனும் ஒரு நாணின் மையப்புள்ளியாக $P(x_1, y_1)$ இருந்தால், அந்நாணின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

என எளிதில் அடையலாம்.

கடைசியாக, இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் தன்மையைப் பற்றிப் பார்ப்போம்: C_1-ஐயும், C_2-ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டும், முறையே r_1-ஐயும், r_2-ஐயும் ஆரங்களாகவும் கொண்ட இரு வட்டங்கள், ஒன்றையொன்று P என்ற புள்ளியில் தொடுகின்றன எனக் கொள்வோம். மேலும், $r_1 > r_2$ என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின், $C_1 C_2 = r_1 + r_2$ அல்லது $C_1 C_2 = r_1 - r_2$ என்று இருக்கும் என எளிதில் காணலாம். மேலும், இவ்விரு வட்டங்களும் வெளிப்பக்கமாகத் தொட்டால், தொடுபுள்ளி P ஆனது, $C_1 C_2$-ஐ உட்புறமாக $r_1 : r_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். இவ்விரு வட்டங்கள் உட்பக்கமாகத் தொட்டால், தொடுபுள்ளி P, $C_1 C_2$-ஐ $r_1 : r_2$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும்.

§ 38. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

(1, 2) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, x-அச்சைத் தொடுகிறது. இவ்வட்டத்தின் மையம் $x - y - 1 = 0$ குறிக்கும் நேர்கோட்டில் அமைந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

எனக் கொள்வோம். வட்டம் (1, 2) வழியாகச் செல்வதால்,

$$1^2 + 2^2 + 2g(1) + 2f(2) + c = 0.$$

அதாவது $2g + 4f + c + 5 = 0$ (1)

வட்டம் x அச்சைத் தொடுகிறது. ஆனால், x-அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$. ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப் பிரதியிட்டால் கிடைக்கும் இருபடிச் சமன்பாடாகிய

$$x^2 + 2gx + c = 0$$

என்பது இரண்டு சம மூலங்களை உடையதாக இருக்கும்.

ஆகவே, $4g^2 - 4c = 0$
அல்லது $g^2 - c = 0$. (2)

வட்டத்தின் மையமாகிய $(-g, -f)$ என்பது, $x - y - 1 = 0$ குறிக்கும் கோட்டில் இருப்பதால்,

$$-g + f - 1 = 0. \quad (3)$$

முதலில் (1)-லிருந்தும், (2)-லிருந்தும் c-ஐ நீக்க,

$$2g + 4f + g^2 + 5 = 0 \quad (4)$$

என்று கிடைக்கின்றது. பின் (3)-லிருந்தும், (4)-லிருந்தும் f-ஐ நீக்கக் கிடைப்பதாவது

$$2g + 4(g + 1) + g^2 + 5 = 0$$

அல்லது $g^2 + 6g + 9 = 0$
அல்லது $(g + 3)^2 = 0$
அல்லது $g = -3$.

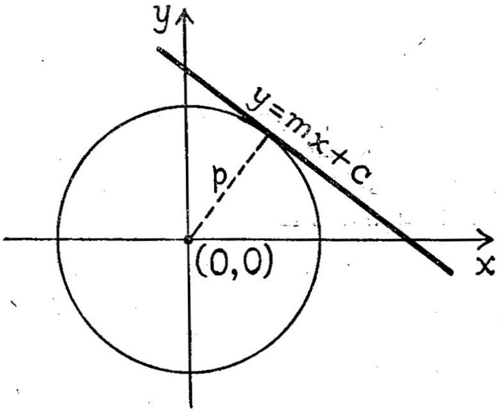
இதையும் மற்றச் சமன்பாடுகளையும் பயன்படுத்தி $f = -2$ என்றும், $c = 9$ என்றும் பெறுகிறோம். ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 2.

$y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை யாது ?



படம் 19.

இவ் வட்டத்தின் மையமாகிய ஆதியிலிருந்து, $y = mx + c$ என்ற கோட்டின் தூரம் p என்றால், $p = a$ அல்லது $p^2 = a^2$ ஆனால்

$$p^2 = \frac{c^2}{1 + m^2}.$$

ஆகவே $\frac{c^2}{1 + m^2} = a^2.$

அதாவது $c^2 = a^2 (1 + m^2)$

என்பது வேண்டிய நிபந்தனை.

§ **39 பயிற்சிக் கணக்குகள்.**

1. (1, 2) -ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 3 என்றால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. குறிப்பீட்டச்சுகளைத் தொடும் வட்டம் ஒன்று (1, 2) வழியாகச் செல்கிறது. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : சமன்பாடு $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.]

3. (5, 5)-ஐ மையமாகக் கொண்டு, $3x - 4y \cdot 5 = 0$ குறிக்கும் கோட்டைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : $r^2 = \{ 3 (5) - 4 (5, - 5 \}^2 / (3^2 + 4^2)$]

4. புள்ளி (3, 2)-ஐயும் புள்ளி (— 1, 4)-ஐயும் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் துண்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. புள்ளிகள் (1, 3), (2, 4), (1, 5) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. புள்ளிகள் (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

7. சமன்பாடு $x - 2y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின்மேல், மையத்தைக் கொண்ட வட்டம் ஒன்று, (1, 3), (7, 3) வழியாகச் செல்கிறது. இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 32 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் விட்டம் ஒன்றின் ஒரு முனை (— 1, 5), என்றால், அதன் மறு முனையின் கூறுகள் யாவை ?

9. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் மையத்தைத் தனது மையமாகக் கொண்டு, (1, 1) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$, $x^2+y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ இரண்டும் குறிக்கும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவி, அவைகளின் தொடு புள்ளியைக் காண்க.

11. சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$; $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 15 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவி, அவைகளின் தொடுபுள்ளியைக் காண்க.

12. $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$; $x^2 + y^2 = 2by + c = 0$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றையொன்று தொடும் இரண்டு வட்டங்களைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள் என்றால், $a^2 b^2 = c(a^2 + b^2)$ எனக் காட்டுக.

13. α-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும், $(x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha - r = 0$ குறிக்கும் கோடு, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ குறிக்கும் வட்டத்தைத் தொடுகிறது என நிறுவுக.

14. $3x + 4y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோட்டிலிருந்து, வட்டம் $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$ வெட்டும் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.

15. ஒரு நகரும் புள்ளி P-யிலிருந்து, $x^2 + y^2 + 5x + 4=0$, $x^2 + y^2 - 7x + 6 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் P-யின் இயங்குவரை, ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.

16. (1, 0), (6, 0), (3, 2) ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் முறையே 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ஆக இருந்தால், வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. ஆதியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் 2α ஆக இருந்தால்,

$$\cos^2 \alpha = \frac{c}{g^2 + f^2}$$ என நிறுவுக.

18. ஒரு வட்டம், x-அச்சிலும், y-அச்சிலும் தான் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் மாறிலிகளாக முறையே $2a$, $2b$ ஆக இருக்குமாறு நகர்ந்தால், அவ்வட்டத்தின் மையத்தின் இயங்குவரை $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$
   $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 46 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$
8. $(3, 7)$
9. $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$
10. $(3, -1)$
11. $(3, -3)$ 14·2, 5
16. $10x^2 + 10y^2 - 66x - 11y + 66 = 0.$

§ 40. குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal circles)

இரு வளைவுகள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டினால், P-யிடத்தில் வளைவுகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணமானது, P-யிடத்தில், வளைவுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் என்று கூறப்படுகிறது. ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் செங்கோணமாக இருந்தால், வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகிறது என்று கூறுகிறோம். இவ் வட்டங்கள் **குத்து வட்டங்கள்** என அழைக்கப்படுகின்றன.

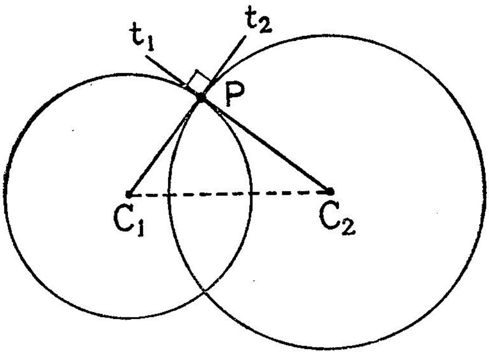
இப்போது சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1 y + c_1 = 0.$$
$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2 y + c_2 = 0$$

குறிக்கும் வட்டங்கள் குத்துவட்டங்களானால்

$$(2g_1)(2g_2) + (2f_1)(2f_2) = 2(c_1 + c_2)$$

எனக் காட்டுவோம். இதற்காக வட்டங்களின் மையங்களை C_1, C_2 எனவும், வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளில் P, ஒன்று எனவும் கொள்வோம் (படம் 20). மேலும், வட்டங்களின் P-யிடத்துத்



படம் 20.

தொடுகோடுகள் t_1, t_2 எனவும் கொள்வோம். வட்டங்கள் குத்து வட்டங்களானதால், t_2 ஆனது, t_1-க்குச் செங்குத்தானது. மேலும், இரண்டாவது வட்டத்தில் t_2, P-யிடத்துத் தொடுகோடு; PC_2 ஆனது, P வழிச் செல்லும் ஆரம்.

ஆகவே, t_2 ஆனது, PC_2-க்கும் செங்குத்தானது. எனவே t_1, PC_2-இரண்டும் P வழிச் செல்லும் ஒரே கோடுகள். அதாவது t_1ஆனது C_2 வழியாகச் செல்கிறது. இதுபோலவே t_2 ஆனது, C_1 வழியாகச் செல்கிறது என்று அறிகிறோம். அதாவது, ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் மற்ற வட்டத்தின் தொடுகோடாகிறது. தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் செங்கோணமாகையால்,

$$C_1 C_2^2 = C_1 P^2 + C_2 P^2$$

அல்லது $$(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = (g_1^2 + f_1^2 - c_1) + (g_2^2 + f_2^2 - c_2)$$

அல்லது $$-2g_1 g_2 - 2f_1 f_2 = -c_1 - c_2$$

அதாவது $$(2g_1)(2g_2) + (2f_1)(2f_2) = 2(c_1 + c_2). \quad (40{\cdot}1)$$

இந் நிபந்தனையைச் சொல் வடிவத்தில்,

(முதல்வட்ட x-இன் குணகம்) (இரண்டாவது x-இன் குணகம்) + (முதல்வட்ட y-இன் குணகம்) (இரண்டாவது y-இன் குணகம்) = 2 (முதல்வட்ட மாறிலி + இரண்டாவது மாறிலி) என்று மனதில் இருத்துவதற்கு ஏற்றவண்ணம் எழுதலாம்.

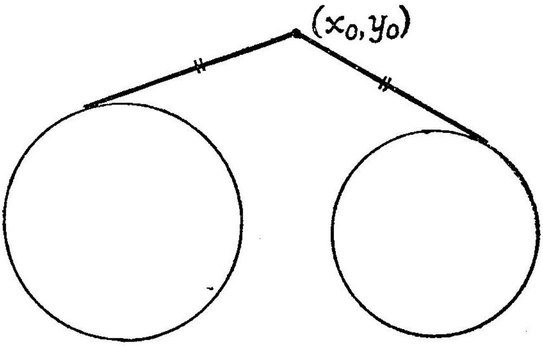
§ 41. சமத்தொடு அச்சு (Radical axis)

ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமநீளமுடையதாக இருந்தால் அப்புள்ளியின் இயங்குவரை, வட்டங்களின் **சமத்தொடு அச்சு** எனப்படும். இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (41\cdot1)$$

$$S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \qquad (41\cdot2)$$

குறிக்கும் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 21). (x_0, y_0) என்பது சமத்தொடு அச்சின்



படம் 21.

மீது ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்றால், (37·3)-இன்படி

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2+2g\,x_0+2f\,y_0+c}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+2g'\,x_0+2f'\,y_0+c'}$$

அதாவது $x_0^2 + y_0^2 + 2g\,x_0 + 2f\,y_0 + c$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2g'\,x_0 + 2f'\,y_0 + c'.$$

அதாவது $(x_0^2 + y_0^2 + 2g\,x_0 + 2f\,y_0 + c)$

$$-(x_0^2 + y_0^2 + 2g'\,x_0 + 2f'\,y_0 + c') = 0$$

அதாவது $2(g - g')\,x_0 + 2(f - f')\,y_0 + c - c' = 0.$

ஆகவே சமத்தொடு அச்சின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) - (x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c') = 0 \qquad (41\cdot3)$$

அல்லது $2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$ (41·4)
என்ருகிறது. இதிலிருந்து சமத்தொடு அச்சு ஒரு நேர்கோடு எனத் தெரிகிறது. இக்கோடு, வட்டங்களின் மையக்கோட்டிற்கு செங்குத்தாய் இருப்பதை எளிதில் காணலாம்.

அடுத்ததாக, மையப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலில்லாத மூன்று வட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டு, அவைகளில் இரண்டிரண்டாகக் கருதி, அவைகளின் சமத்தொடு அச்சுகள் ஒரு புள்ளிவழியாகச் செல்லுகின்றன என்று காண்போம் ; இதற்காக வட்டங்கள்,

$$S=x^2+y^2+2g\ x+2f\ y+c=0,$$
$$S'=x^2+y^2+2g'x+2f\ y+c'=0,$$
$$S''=x^2+y^2+2g''x+2f'\ y+c''=0.$$

என்பவற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். இம் மூன்று வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$S-S'=0 \quad S'-S''=0 \quad S'-S=0$$

என்பன. இவ்வச்சுகள் மூன்றும், ஒன்றையென்று ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றன என்பது § 21 மூலம் தெளிவாகிறது. இவ்வெட்டும் புள்ளி **சமத்தொடு அச்சுச்சந்தி** (Radical centre) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மூன்று வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுச்சந்தியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமானவை என்பது எளிதில் புலனுகும்.

§ 42. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

(3, 0) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, y-அச்சைத் தொடுகிறது. இவ் வட்டம் $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ குறிக்கும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டினுல், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

எனக் கொண்டால், வட்டம் (3, 0) வழியாகச் செல்வதால்

$$3^2+0^2+2g(3)+2f(0)+c=0 \qquad (1) \ ...$$

என்றும், வட்டம் y-அச்சைத் தொடுவதால், § 38-இல் கணக்கு 1-இல் உள்ளபடி முயன்று

$$f^2 - c = 0 \qquad \dots \quad (2)$$

என்றும் அடைகிறோம். மேலும், வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டுவதால்

$$(2g)(-6) + (2f)(4) = 2\{(c) + (-3)\} \qquad \dots \quad (3)$$

என்றும் அடைகிறோம். (1), (2), (3) என்ற சமன்பாடுகளை விடுவிக்க,

$$g = -3, \quad f = -3, \quad c = 9$$

எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ என்றாகிறது.

கணக்கு 2.

சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 + y = 0$$

குறிக்கும் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுச் சந்தியைக் காண்க.

வட்டங்களின் திட்டச் சமன்பாடுகள்,

$$S = x^2\ y^2 + 4x + 7 = 0$$
$$S' = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + \frac{9}{2} = 0$$
$$S'' = x^2 + y^2 + y = 0$$

ஆகும். ஆகவே, வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுகளில்,

$$S - S' = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{5}{2} = 0,$$
$$S - S'' = 4x - y + 7 = 0$$

என்பன, இரண்டாகும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி $(-2, -1)$ ஆகும். ஆகவே, சமத்தொடு அச்சுச்சந்தி $(-2, -1)$ என்பதாகிறது.

§ 43. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$, $x^2+y^2+3x+5y+6=0$ குறிக்கும் வட்டங்கள், ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன என நிறுவுக.

2. $x^2 + y^2 + x - 7y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$, $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 15 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 - x + 3y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 + 5y - 7x + 22 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுச் சந்தியைக் காண்க.

5. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 9y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்குமானால், அப் புள்ளியின் கூறுகள் யாவை ? அத்தொடுகோடுகளின் நீளங்களைக் காண்க.

6. $x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 9 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் மையம், $x + y - 1 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின்மீது அமைந்தால், வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஆதி வழிச்செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் மையம், $2x - y + 3 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின்மீது அமைந்துள்ளது இவ் வட்டம், $x^2 + y^2 - 4x - 3y - 2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டினுல், இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. r-ஐயும், r'-ஐயும் ஆரமாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களின் திட்டமான சமன்பாடுகள் $S = 0$, $S' = 0$ என்ருல், $\frac{S}{r} + \frac{S'}{r'} = 0$, $\frac{S}{r} - \frac{S'}{r'} = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள், ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

விடைகள்

2. $x^2 + y^2 + 4x - 9 = 0$ 3. $x^2 + y^2 - 4x - 8 = 0$

4. $\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 5. $(-4, 1)$, $\sqrt{23}$

6. $3x^2 + 3y^2 - 7x + y - 35 = 0$

7. $5x^2 + 5y^2 + 11x - 8y = 0$.

5. கூம்பு வளைவு

(Conics)

§ 44. கூம்பு வளைவு.

ஒரு புள்ளியானது, ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்தும், ஒரு நிலைத்த கோட்டிலிருந்தும், அது இருக்கும் தூரங்களின் விகிதம் மாறுத வண்ணம் நகர்ந்தால், இயங்குவரை, ஒரு கூம்புவளைவு என அழைக்கப்படுகிறது. நிலைத்தபுள்ளி, கூம்புவளைவு **குவியம்** (focus) என்றும், நிலைத்த கோடு, கூம்புவளைவின் **இயக்குவரை** (directrix) என்றும், மாறுத விகிதம், கூம்புவளைவின் **தொலைத்தகவு** (eccentricity) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. பொதுவாக, தொலைத்தகவை e எனக்குறிப்பது வழக்கம்.

$e < 1$ என்றிருக்கும்போது, **நீள்வளைவு** (ellipse) என்றும்,
$e = 1$ என்றிருக்கும்போது, **பரவளைவு** (parabola) என்றும்,
$e > 1$ என்றிருக்கும்போது, **அதிபரவளைவு** (hyperbola) என்றும் கூம்புவளைவு பெயர் படுகின்றது.

இப்பொழுது $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் l எனும் கோட்டை இயக்குவரையாகவும், $S(\alpha, \beta)$-வைக் குவியமாகவும், e-யைக் தொலைத்தகவாகவும் கொண்ட கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 22). $P(x_0\ y_0)$ என்பது கூம்புவளைவிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியென எடுத்துக் கொண்டு அதிலிருந்து FM என்ற செங்குத்துக் கோட்டை l-க்கு வரைக. அப்படியாயின்,

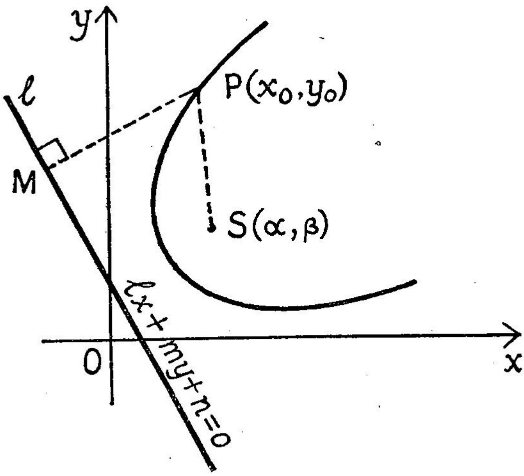
$$\frac{SP}{PM} = e$$

அல்லது $SP^2 = e^2\,(PM^2)$.

ஆனால்

$$SP^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2;$$

$$PM^2 = \frac{(lx_0 + my_0 + n)^2}{l^2 + m^2}.$$



படம் 22.

ஆகவே, $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = e^2 \dfrac{(lx_0 + my_0 + n)^2}{l^2 + m^2}$

என்று இதிலிருந்து

$$(l^2 + m^2)\{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2\}$$
$$= e^2 (lx + my + n)^2 \quad (44\cdot 1)$$

என்பது தான் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு என்றும் கிட்டுகிறது.

இரண்டு நேர்கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடும், ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடும், இருபடிச் சமன்பாடுகளாய் இருப்பது போல், ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாடும், ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாய் இருப்பதைக் காணலாம். ஆனால் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

இரண்டு கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை,

$$\triangle = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

எனக் கண்டோம். மேலும்,

$$\triangle \neq 0, \quad a = b, \quad h = 0$$

என்றிருந்தால் இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது என்றும் கண்டோம். ஆனால்,

$\triangle \neq 0,\ h^2 - ab < 0$ என்றால், ஒரு நீள் வளைவையும் (44·2)

$\triangle \neq 0,\ h^2 - ab = 0$ என்றால், ஒரு பரவளைவையும் (44·3)

$\triangle \neq 0,\ h^2 - ab > 0$ என்றால், ஒரு அதிபரவளைவையும் (44·4)

$\triangle \neq 0,\ a + b = 0$ என்றால், ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவையும் (44·5)

இச் சமன்பாடு குறிக்கும் என்பதை அத்தியாயம் 9-இல் காணலாம்.

§ 45. ஒரு பரவளைவின் எளிய சமன்பாடு.

இங்கு S-ஐக் குவியமாகவும், l-ஐ இயக்கு வரையாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளைவின் சமன்பாட்டை மிகவும் எளிய வடிவில் காண்போம். S-லிருந்து l-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு l-ஐ Z-ல் வெட்டட்டும். $SZ = 2a$ என்றும், SZ-ன் மையப்புள்ளி A என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும், A-யை ஆதியாகவும், AS-ஐ x அச்சாகவும் கொள்வோம். அப்படியாயின், S ஆனது $(a, 0)$ ஆகிறது.

இப்பொழுது பரவளைவின்மீது $P\ (x_0, y_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு அதிலிருந்து l-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு y அச்சை Q-விலும், l-ஐ M-இலும் வெட்டு கிறதெனக் கொண்டால் (படம் 23),

$$\frac{SP}{PM} = 1$$

அல்லது $SP^2 = PM^2$.

ஆனால் $SP^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - 0)^2$,

$$PM^2 = (PQ + QM)^2 = (x_0 + a)^2.$$

ஆகவே $(x_0 - a)^2 + (y_0 - 0)^2 = (x_0 + a)^2$

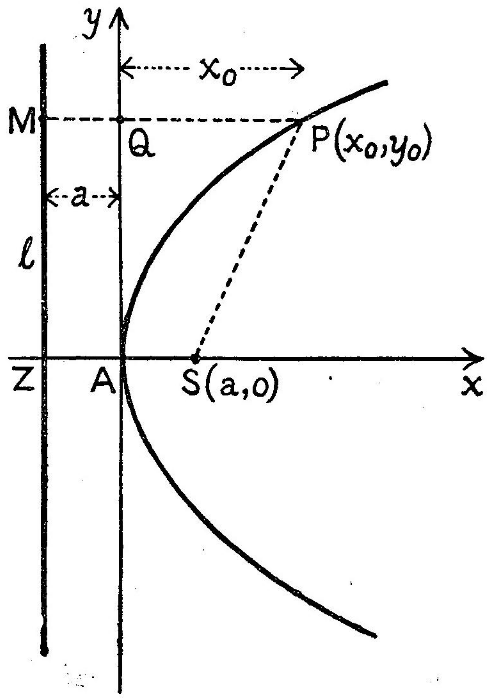
அல்லது $y_0{}^2 - 4ax_0 = 0$.

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு

$$y^2 - 4ax = 0$$

என்றுகிறது. இவ் வடிவம்தான் பரவளைவுகளின் சமன்பாடுகளிலேயே மிகவும் எளியது.

$\frac{SA}{AZ} = 1.$ எனவே, A பரவளைவின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளி.



படம் 23.

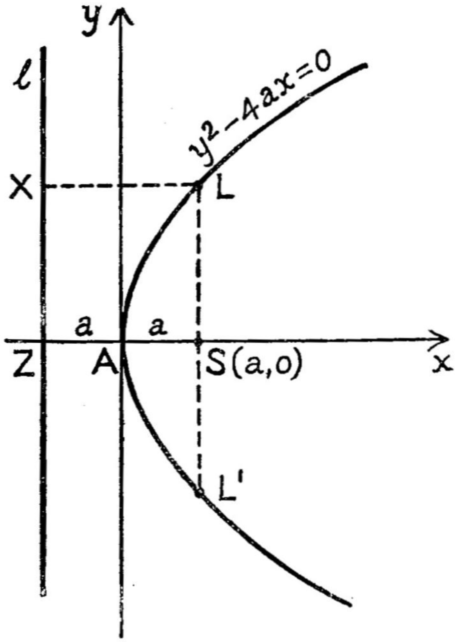
A ஆனது, பரவளைவின் **உச்சி** என்றும், ZS ஆனது, பரவளைவின் **அச்சு** என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. அதாவது $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவிற்கு $(0, 0)$ ஆனது, உச்சியாகவும், $y = 0$ குறிக்கும் கோடானது பரவளையத்தின் அச்சாகவும், $x + a = 0$ குறிக்கும் கோடானது, இயக்குவரையாகவும் அமைந்துள்ளன.

§ 46. ஒரு பரவளைவின் தன்மை

ஒரு பரவளைவின் தன்மையைக் காண, $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவை எடுத்துக்கொள்வோம். a ஒரு மிகை எண் ஆகையால், $y^2 - 4ax = 0$-லிருந்து, x ஆனது எப்போதும்

மிகையாகவே இருக்கும் எனத் தெரிகிறது. அதாவது இப் பர வளைவு முழுவதும் y அச்சுக்கு ஒரு மருங்கில் அமைந்துள்ளது.

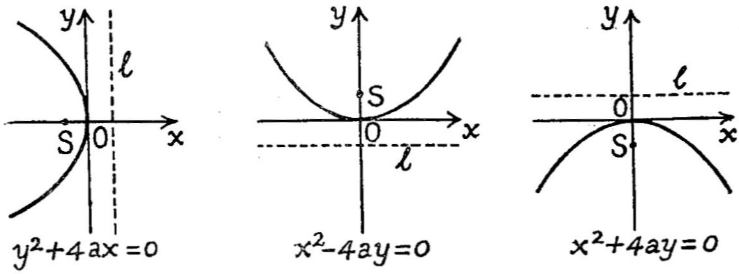
$(x_1 \ \ y_1)$ பரவளைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியானால் $(x_1, -y_1)$ என்பதும் பரவளைவில் இருக்கும். எனவே, பரவளைவுப் பகுதி



படம் 24.

யிலும் நான்காவது கால் பகுதியிலும், படம் 24-ல் உள்ளவாறு, x-அச்சைப் பொருத்துச் சமச்சீர் (symmetry) உடையதாக இருக்கிறது. அதாவது, ஒரு பரவளைவு தனது அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் உடையதாக இருக்கும்.

மேலும், $y^2 + 4ax = 0$, $x^2 - 4ay = 0$, $x^2 + 4ay = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுகள், முறையே 25*a*, 25*b*, 25*c* ஆகிய படங்களில் உள்ளவாறு அமைந்துள்ளன என்பதை எளிதில் காணலாம். படம் 24-ல் LL' என்பது குவியத்தின் வழியாகப் பரவளைவின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நாண். இந்த நாண், பரவளைவின் செவ்வகலம் (latus rectum) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதன் நீளத்தை, L-லிருந்து இயக்கு வரைக்கு LX என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்து,



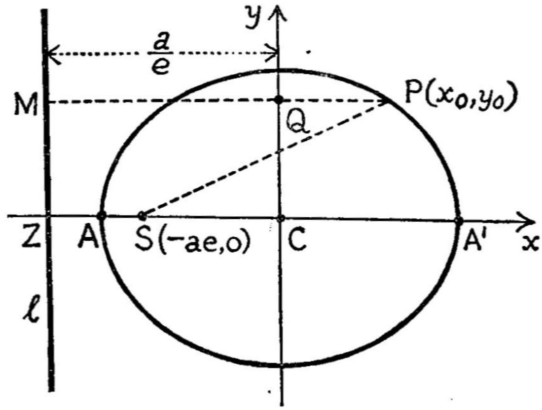
படம் 25-*a* படம் 25-*b* படம் 25-*c*

$$LL' = 2\ SL = 2\ LX = 2\ SZ = 2\ (2a) = 4a$$

எனக் காணலாம்.

§ 47. ஒரு நீள் வளேவின் எளிய சமன்பாடு

இங்கு S-ஐக் குவியமாகவும், l-ஐ இயக்கு வரையாகவும், e-யைத் தொலேத்தகவாகவும் கொண்ட ஒரு நீள் வளேவின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 26). S-லிருந்து l-க்கு SZ



படம் 26.

என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்து SZ-ஐ உட்புறமாக e : 1 என்ற விகிதத்தில் A-யிலும், வெளிப்புறமாக அதே விகிதத்தில் A' யிலும், பிரிக்கவும் $e < 1$ ஆனதால் A, A' இரண்டும் l-க்கு ஒரு மருங்கிலேயே அமைகின்றன. AA'-ன் மையப்புள்ளியை C எனக் குறித்து, அதை ஆதியாகவும், CA'-ஐ x அச்சாகவும் கொள்வோம்.

இப்பொழுது $AA' = 2a$ என்றால், $CA = CA' = a$

மேலும்,

$$\frac{SA}{AZ} = e, \quad \frac{SA'}{A'Z} = e.$$

அதாவது $SA = e\,AZ,$

$$SA' = e\,A'Z.$$

இந்தத் தொடர்புகளை CA, CA', CS, CZ சார்ந்த வகையில் எழுதினால்,

$$CA - CS = e\,(CZ - CA)$$

$$CA' + CS = e\,(CZ + CA)$$

என்று கிடைக்கிறது. இவைகளில், $CA = CA' = a$ எனப் பிரதியிட,

$$a - CS = e\,(CZ - a) \qquad (47\cdot1)$$

$$a + CS = e\,(CZ + a) \qquad (47\cdot2)$$

எனவும், $(47\cdot1) + (47\cdot2)$ மூலம்

$$CZ = a/e$$

எனவும், $(47\cdot2) - (47\cdot1)$ மூலம்

$$CS = ae$$

எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே S ஆனது $(-ae, 0)$ என்றாகிறது.

இப்பொழுது நீள்வளைவின்மீது $P(x_0, y_0)$ என்கிற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, அதிலிருந்து l-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு, y-அச்சை Q-விலும், l-ஐ M-இலும் வெட்டுகிறதெனக் கொண்டால்,

$$\frac{SP}{PM} = e$$

அல்லது $\quad SP^2 = e^2\,PM^2.$

ஆனால் $\quad SP^2 = (x_0 + ae)^2 + y_0^2,$

$$PM^2 = (PQ + QM)^2 = (PQ + CZ)^2$$

$$= \left(x_0 + \frac{a}{e}\right)^2.$$

ஆகவே $(x_0 + ae)^2 + y_0^2 = e^2 \left(x_0 + \frac{a}{e}\right)^2$

அல்லது $x_0^2 (1 - e^2) + y_0^2 - a^2 (1 - e^2) = 0$

அல்லது $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2 (1 - e^2)} - 1 = 0.$

ஆகவே, நீள்வளையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 (1 - e^2)} - 1 = 0$$

என்றாகிறது. $a^2 (1 - e^2)$-ஐ b^2 எனக் குறித்தால் இதே சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

என்ற குறுகிய வடிவில் எழுதலாம். எனினும் இங்கு $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ என்பதை மறந்து விடக்கூடாது.

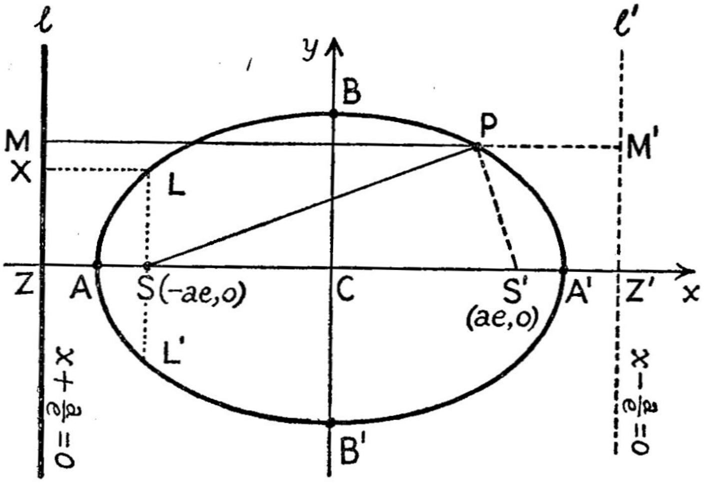
§ 48. ஒரு நீள்வளையின் தன்மை

§ 47-இல் கூறியவாறு குறிப்பீட்டச்சுகளை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

என்றாகிறது. இந் நீள்வளைவு x-அச்சை $A (-a, 0)$, $A^1 (a, 0)$ என்ற புள்ளிகளிலும், y-அச்சை $B (0, b)$, $B' (0, -b)$ என்ற புள்ளிகளிலும் வெட்டுவதைக் காணலாம் (படம்-27). A, A' என்ற புள்ளிகளை நீள்வளையின் உச்சிகள் (vertices) என்று அழைக்கிறோம். இப்பொழுது $AA' = 2a$, $BB' = 2b$. AA'-ஐ நீள்வளையின் **பேரச்சு** (major axis) என்றும், BB'-ஐ நீள்வளையின் **சிற்றச்சு** (minor axis) என்றும் அழைக்கிறோம். நீள்வளைவு, பேரச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் உடையதென்பதையும், மேலும் சிற்றச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் உடையதென்பதையும் எளிதில் காணலாம். இந்த சமச்சீர்த் தன்மையால் இந்த நீள்வளைவை $S' (ae, 0)$ ஐக் குவியமாகக் கொண்டு $x - \frac{a}{e} = 0$ குறிக்கும் கோடான l' ஐ இயக்குவரையாகக் கொண்டும் அடையலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

இப்பொழுது நீள்வளைவின் முக்கியத் தன்மை ஒன்றைப் படிப்போம். இத் தன்மையாவது, நீள்வளைவின்மேலுள்ள ஒரு



படம் 27.

புள்ளியின் குவியத் தூரங்களின் (focal distances) கூட்டுத் தொகையானது, ஒரு மாறிலி என்பதாம்.

P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை நீள்வளைவின்மீது எடுத்துக் கொண்டு, PM, PM' என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை இயக்கு வரைகளுக்கு வரைந்தால்,

$$SP + S'P = e\,PM + e\,PM'$$
$$= e\,(PM + P\,M')$$
$$= e\,MM'$$
$$= e\,ZZ'$$
$$= e\left(\frac{2a}{e}\right)$$
$$= 2a.$$

$2a$ ஒரு மாறிலி.

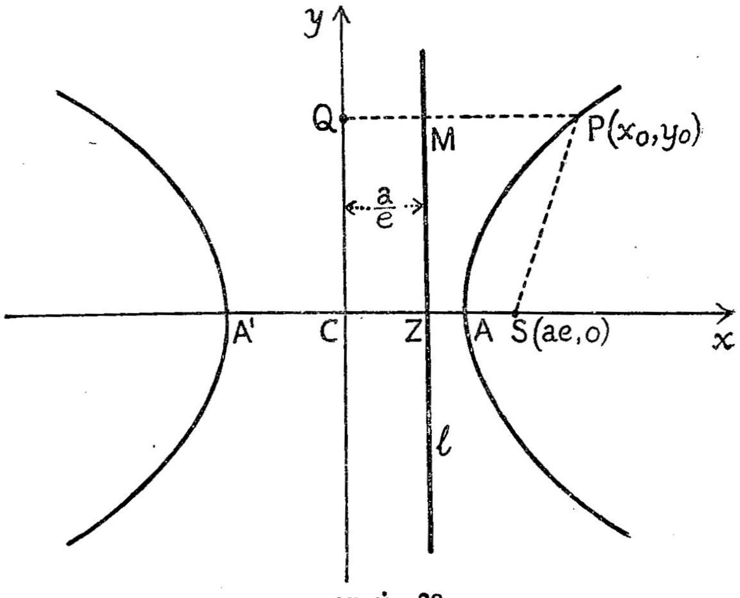
நீள் வளைவின் ஒரு குவியத்தின் வழியாகப் பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நாண், நீள்வளைவின் ஒரு **செவ்வகலம்** ஆகும். படம் 27-ல் LSL', ஒரு செவ்வகலத்தைக் குறிக்கின்றது. இப்பொழுது அதன் நீளத்தைக் காண்போம். L-இலிருந்து, S-ஐச் சார்ந்த இயக்குவரைக்கு, LX-என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்தால்,

$$LL' = 2\,SL = 2\,(eLX) = 2e\,(SZ)$$
$$= 2\,e\,(CZ - CS)$$
$$= 2\,e\,\left(\frac{a}{e} - ae\right)$$
$$= 2\,a\,(1 - e^2)$$
$$= 2\,a\,\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{2\,b^2}{a}$$

என்று கிடைக்கின்றது.

நீள்வளேவில் அதன் அரைப் பேரச்சான a யை மாற்ருது, e-யின் மதிப்பைப் பூச்சியத்தை அணுகுமாறு குறைத்துக் கொண்டே போனல் முடிவில் $(1 - e^2)$-ன் மதிப்பு 1 ஆகிறது. அதாவது $a^2\ (1 - c^2)$-ன் மதிப்பு a^2 ஆகிறது. ஆகவே, $b^2 = a^2$ என்ருகிறது. இதனுல் நீள்வளேவு ஒரு வட்டமாகிறது. ஆகவே, வட்டத்தையும் ஒரு கூம்புவளேவாகக் கருதலாம்

§ 49. ஓர் அதிபரவளேவின் எளிய சமன்பாடு



படம் 28.

இங்கு S-ஐக் குவியலாகவும், l-ஐ இயக்குவரையாகவும், e-யைத் தொலேத்தகவாகவும் கொண்ட ஓர் அதிபரவளேவின் சமன்

சமன்பாட்டை, அதன் எளிய வடிவில் காண்போம் (படம் 28). S-லிருந்து l-க்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்து, SZ-ஐ உட்புறமாக $e:l$ என்ற விகிதத்தில் A-யிலும், வெளிப் புறமாக அதே விகிதத்தில் A'-யிலும் பிரிக்கவும். $e > 1$ ஆனதால், இரண்டும் l-க்கு மருங்கிலும் அமைகின்றன. AA^1-ன் மையப்புள்ளியை G எனக் குறித்து, அதை ஆதியாகவும், CA-ஐ x-அச்சாகவும் கொள்வோம். இப்பொழுது $AA^1 = 2a$ என்றால் $CA = CA^1 = a$. மேலும்,

$$\frac{SA}{AX} = e, \quad \frac{SA^1}{A^1X} = e:$$

அதாவது $RA = eAX$, $SA^1 = eA^1X$.

இந்தத் தொடர்புகளை CA, CA^1, CS, CX சார்ந்த வகையில் எழுதினால்,

$$CS - CA = e\,(CA - CX)$$

$$CS + CB^1 = e\,(CA^1 + CX)$$

என்று கிடைக்கிறது. இவைகளில் $CA = CA^1 = a$ எனப்பிரதியிட

$$CS - a - = e\,(a - CX) \qquad (49.1)$$

$$CS + a = e\,(a + CX) \qquad (49{\cdot}2)$$

எனவும், (49·1) — (49·2) மூலம்

$$CX = \frac{a}{e}$$

எனவும், (49·2) + (49·1) மூலம்

$$CS - ae$$

எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே S ஆனது, $(ae, 0)$ என்றாகிறது.

இப்பொழுது அதிபரவளைவின்மீது $P\,(x_0, y_0)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு, அதிலிருந்து l-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு y-அச்சை Q-விலும், l-ஐ M-இலும் வெட்டுகிறதெனக் கொண்டால்,

$$\frac{SP}{PM} = e$$

அல்லது $SP^2 = e^2\,PM^2$.

ஆனால் $SP^2 = (x_0 - a_0)^2 + y_0{}^2$

$$PM^2 + (PQ - QM)^2 = (PQ - C2)^2$$

$$= \left(x_0 - \frac{a}{e} \right)^2$$

ஆகவே, $(x_0 - ae)^2 + y_0{}^2 = e^2 \left(x_0 - \frac{a}{e} \right)^2$

அல்லது, $x_0{}^2 (1 - e^2) + y_0{}^2 - a^2 (1 - e^2) = 0$

அல்லது, $\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{a^2 (1 - e^2)} - 1 = 0$

அல்லது, $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{a^2 (e^2 - 1)} - 1 = 0$.

ஆகவே, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 (e^2 - 1)} - 1 = 0$$

என்றாகிறது. இப்பொழுது $e > 1$. ஆகவே $a^2 \ (e^2 - 1)$ ஓர் மிகை எண். இம்மிகை எண்ணை b^2 எனக் குறித்தால் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 =$$

என்றாகிறது.

§ 50. ஒரு அதிபரவளைவின் தன்மை :

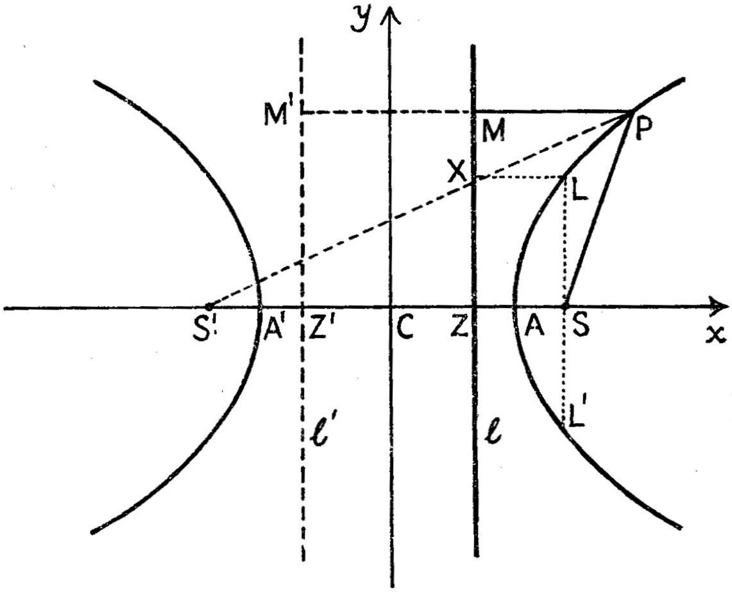
§ 49-ல் கூறியவாறு குறுப்பீட்டச்சுகளை எடுத்துக்கொண்டால், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - = 0$$

என்றாகிறது. இந்த அதிபரவளைவு x-அச்சை $A \ (a, 0)$-இலும் $A' \ (-a, 0)$ இலும் வெட்டுவதைக் காணலாம் (படம் 29).

இப் புள்ளிகளை அதிபரவளைவின் உச்சிகள் என்று அழைக்கிறோம். இப்பொழுது $AA' = 2a$. AA'-ஐ அதிபரவளைவின் **குறுக்கச்சு** (transverse axis) என்று அழைக்கிறோம். ஆனால் y அச்சின்மேல் $B \ (0, b)$, $B' \ (0, b)$ என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டால் $BB' = 2b$. இந்த BB'-ஐ அதிபரவளைவின் **துணையச்சு** (Conjugate axis) என்று அழைக்கிறோம்.

அதிபரவளைவு, குறுக்கச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் உடையது என்பதையும், மேலும் துணையச்சைப் பொருத்து சமச்சீர்



படம் 29.

உடையது என்பதையும் எளிதில் காணலாம். இந்த சமச்சீர்த் தன்மையால், இந்த அதிபரவளையை S' $(-ae, 0)$-ஐக் குவியமாகக் கொண்டும், $x+\frac{a}{e}=0$ குறிக்கும் கோடான l'-ஐ இயக்குவரையாகக் கொண்டும் அடையலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

இப்பொழுது அதிபரவளைவின் முக்கியத் தன்மை ஒன்றைப் படிப்போம். இத் தன்மையாவது, அதிபரவளைவின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் குவியத் தூரங்களின் வித்தியாசம் ஒரு மாறிலி என்பதாம்.

P-என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை அதிபரவளைவின்மீது எடுத்துக்கொண்டு, PM, PM^1 என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை இயக்குவரைகளுக்கு வரைந்தால்,

$$S'P - SP = e\,PM' - e\,PM$$

$$= e\,(PM' - PM)$$

$$= e\,MM'$$
$$= e\,ZZ'$$
$$= \left(\frac{2a}{e}\right)$$
$$= 2a.$$

$2a$ ஒரு மாறிலி.

அதிபரவளைவின் ஒரு குவியத்தின் வழியாகக் குறுக்கச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நாண், அதிபரவளைவின் ஒரு **செவ்வகலம்** ஆகும்.

படம் 29-இல் LSL', ஒரு செவ்வகலத்தைக் குறிக்கின்றது இப்பொழுது அதன் நீளத்தைக் காண்போம்: L-இலிருந்து S-ஐச் சார்ந்த இயக்குவரைக்கு, LX என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்தால்,

$$LL' = 2SL = (e\,LX) = 2e\,(SZ)$$
$$= 2e\,(CS - CZ)$$
$$= 2e\left(ae - \frac{a}{e}\right)$$
$$= 2a\,(e^2 - 1) = 2a\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{2b^2}{a}$$

என்று கிடைக்கின்றது.

அதிபரவளையின் சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 = b^2$$

என்று எழுதி, $\frac{d}{a}$ — ஐ ஒரு மாறிலி m-க்குச் சமமாக இருக்கும் தன்மையில் a-யையும் b-யையும் சிறிதாக்கிக் கொண்டே சென்று முடிவில் பூச்சியத்தை அயையுமாறு செய்தால், சமன்பாடு

$$mx^2 - y^2 = 0$$

என்றுகிறது. அதாவது அதிபரவளைவு இரண்டு வெட்டும் நேர்கோடுகளாகின்றது. ஆகவே, இரண்டு வெட்டும் நேர்கோடுகளையும் ஒரு கூம்பு வளைவு எனலாம்.

§ 51. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$S(1, 2)$-ஐக் குவியமாகவும், $2x - 3y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோட்டை இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாட்டையும், அதன் செவ்வகலத்தையும் காண்க.

$P(x_0, y_0)$ என்பது பரவளைவின்மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி என்க. PM என்பது, P-யிலிருந்து இயக்கு வரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு என்ருல்,

$$SP = PM$$

அல்லது, $SP^2 = PM^2$.

ஆனுல், $SP^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2$,

$$PM^2 = \frac{(2x_0 - 3y_0 + 1)^2}{2^2 + (-3)^2},$$

ஆகவே, $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = \dfrac{(2x_0 - 3y_0 + 1)^2}{2^2 + (-3)^2}$.

இதைச் சுருக்கினுல்

$9x_0^2 + 12x_0y_0 + 4y_0^2 - 30x_0 - 46y_0 + 64 = 0$ என்றும், இதிலிருந்து பரவளைவின் சமன்பாடு

$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 30x - 46y + 64 = 0$ என்றும் கிடைக்கின்றது.

S-ஆனது, இயக்குவரையிலிருந்துள்ள தூரம் ;

$$\frac{|2(1) - 3(2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

ஆகும். ஆனுல் செவ்வகலம் இதைப் போல் இரண்டுமடங்கானது. ஆகவே செவ்வகலம் $= \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

கணக்கு 2.

சமன்பாடு $y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$ குறிக்கும் பரவளைவின் செவ்வகலம், உச்சி, குவியம், அச்சின் சமன்பாடு, இயக்கு வரையின் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு படிப் படியாக மாற்றி எழுதலாம் :

$$(y^2 + 2y) \qquad + (-4x + 3) \qquad = 0$$

$$(y^2 + 2y + 1) + (-4x + 3 - 1) = 0$$

$$(y + 1)^2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

இப்பொழுது, $y + 1 = Y,\ x - \frac{1}{2} = X$ என்பன விளை விக்கும் அச்சுகளின் இடப் பெயர்ச்சியைச் செய்தால்,

புதிய குறிப்பீட்டச்சுகளைப் பொருத்துப் பரவளைவின் சமன்பாடு
$$Y^2 - 4X = 0\ .$$

என்றுகிறது. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட வளைவுகள் கிடைக் கின்றன :

(i) செவ்வகலம் $= 4$

(ii) உச்சி ; $(0, 0)$; அதாவது கோடுகள் $X = 0$
$Y = 0$ இவற்றின் வெட்டும் புள்ளி.;

(iii) குவியம் : $(1, 0)$; அதாவது கோடுகள் $X = Y$, $Y = 0$ ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளி

(iv) அச்சு : $Y = 0 \left(\frac{3}{2}, -1\right)$

(v) இயக்குவரை ; $X = -1$.

ஆனால், இவ்வளைவுகள் பழைய குறிப்பீட்டச்சைப் பொருத்து கீழ்க்கண்டவாறு உள்ளன :

(i) செவ்வகலம் $= 4$

(ii) உச்சி : $x - \frac{1}{3} = 0,\quad y + 1 = 0$ வெட்டும் புள்ளி ;

அதாவது $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

(iii) குவியம் : $x - \frac{1}{2} = 1$, $y + 1 = 0$ வெட்டும் புள்ளி ;

அதாவது $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$.

(iv) அச்சு : $y + 1 = 0$.

(v) இயக்கு வரை : $x - \frac{1}{2} = -1$; அதாவது

$$x + \frac{1}{2} = 0.$$

கணக்கு 3.

கீழ்க்கண்ட அமைப்புக்களைப் பெற்ற நீள்வளைவுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு, அவைகளின் பேரில் குறிப்பிடத்தக்க விளக்கம் ஏதாவது இருந்தால் அதைத் தருக.

(i) தொலைத்தகவு : $\frac{1}{\sqrt{12}}$

குவியம் : $(0, 1)$

இயக்கு வரை : $x + 2y - 7 = 0$.

(ii தொலைத்தகவு : $\frac{1}{\sqrt{12}}$

குவியம் : $(-2, -3)$

இயக்குவரை : $x + 2y + 13 = 0$

(i) $P(x_0, y_0)$-ஐ நீள் வளைவின்மேல் எடுத்துக்கொண்டு, வழக்கமான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்த

$SP = e\,PM$, $SP^2 = e^2\,PM^2$ என்றும்,

$$SP^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 1)^2$$

$$PM^2 = \frac{(x_0 + 2y_0 - 7)^2}{1 + 2^2}$$

என்றும் கிடைக்கிறது. ஆகவே

$$x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = \frac{1}{12} \times \frac{(x_0 + 2y_0 - 7)^2}{5}.$$

இதிலிருந்து நீள்வளேவின் சமன்பாடு,

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 14x + 8y - 39 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

(ii) இங்கு நீள்வளேவின் சமன்பாடு,

$$(x_0 + 2)^2 + (y_0 + 3)^2 = \frac{1}{12} \times \frac{(x_0 + 2y_0 + 13)^2}{5}$$

என்பதிலிருந்து,

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 14x + 8y - 39 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இரண்டு விதங்களிலும் ஒரே சமன்பாட்டை அடைகிறோம். இதிலிருந்து, இரண்டு விதங்களிலும் ஒரே நீள்வளேவை அடைகிறோம் எனத் தெரிகிறது. மேலும், (0, 1) என்பது ஒரு குவியம் என்றும், $x + 2y - 7 = 0$ என்பது அதைச் சார்ந்த இயக்குவரை என்றும், (— 2, — 3) என்பது அடுத்த குவியம் என்றும், $x + 2y + 13 = 0$ என்பது அதைச் சார்ந்த இயக்குவரை என்றும் தெரிகிறது.

§ 52. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. புள்ளி (2, 3)-ஐக் குவியமாகவும், $x + y - 3 = 0$ குறிக்கும் கோட்டை இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளேவின் சமன்பாட்டையும், உச்சியையும், அதன் செவ்வகலத்தையும் காண்க.

2. புள்ளி (1, 3)-ஐ உச்சியாகவும் $2x + y = 0$ குறிக்கும் கோட்டை இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளேவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. குவியத்தையும்; உச்சியையும் முறையே (2, 3), (4, 1) எனக்கொண்ட பரவளேவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட பரவளேவுகள் ஒவ்வொன்றின் உச்சி, குவியம், ஆகியவற்றையும், அச்சு, செவ்வகலம் முதலியவற்றின் சமன்பாடுகளேயும் காண்க :

(i) $y^2 - 16x = 0$

(ii) $(y - 2)^2 - 16(x - 1) = 0$

(iii) $y^2 - 2y - 8x - 23 = 0$

(iv) $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$

5. ஒரு பரவளைவின் உச்சி, A. அதன் குவியம், S. பரவளைவின் மீதுள்ள P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவின் அச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் அடி N என்றால்,

$$PN^2 = 4\ AS \cdot AN$$

எனக் காட்டுக.

6. ஒரு நீள்வளைவின் குவியங்கள் $S(2, 3)$, $S^1(0, 1)$ என்பன. அதன் தொலைத்தகவு, $\frac{1}{2}$. அதன் பேரச்சு, S-ஐச் சார்ந்த இயக்குவரையை Z என்ற புள்ளியில் வெட்டினால், SS^1-ஐ Z வெளிப்புறமாக $1 + e^2 : 1 - e^2 = 5 : 3$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டுகிறது எனவும், இவ்வியக்குவரை, நீள்வளைவு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x + y - 11 = 0$;
$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 10x - 26y - 17 = 0$ எனவும் நிறுவுக.

7. கீழ்க்கண்ட நீள்வளைவுகள் ஒன்வொன்றின் குவியங்கள், பேரச்சின் முனைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க :

(i) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

(ii) $9(x + 2)^2 + 5(y - 3)^2 - 45 = 0$

(iii) $5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0$

(vi) $5(x + 3)^2 + 9(y - 1)^2 - 45 = 0$

8. ஒரு நீள்வளைவில், குவியம் ஒன்றுக்கும் சிற்றச்சின் முனை ஒன்றுக்கும் இடையில் உள்ள தூரம், அரைப்பேரச்சுக்குச் சமம் என நிறுவுக.

9. $2a$-யைப் பேரச்சாகவும், $2b$-யைச் சிற்றச்சாகவும் கொண்ட நீள்வளைவின்மேலுள்ள P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து பேரச்சு AA'-க்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடி N என்றால்

$$\frac{PN^2}{A'N \cdot AN} = \frac{b^2}{a^2}$$

எனக் காட்டுக.

10. தொலைத்தகவினை 2 ஆகவும், (1, 1)-ஐ ஒரு குவியமாகவும், $x + y - 1 = 0$ ஐ அதனைச் சார்ந்த இயக்குவரையாகவும் கொண்ட அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. கீழ்க்கண்ட அதிபரவளைவுகளின் குவியங்கள், செவ்வகலம் முதலியவற்றைக் காண்க :

(i) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

(ii) $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$

(iii) $9(x+2)^2 - 16(y-1)^2 - 144 = 0$

(iv) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

(v) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

12. t ஒரு மாறியாக இருப்பின், $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}$ குறிக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை, ஓர் அதிபரவளைவு என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y + 17 = 0$, $(1, 2)$, $2\sqrt{2}$

2. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 30x - 40y + 125 = 0$

3. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

4. (i) $(0, 0)$, $(4, 0)$, $y = 0$, $x - 4 = 0$

(ii) $(1, 2)$ $(5, 2)$, $y - 2 = 0$, $x - 5 = 0$

(iii) $(-3, 1)$, $(-1, 1)$, $y - 1 = 0$, $x + 1 = 0$

(iv) $(2, 3)$, $(2, 5)$, $x - 2 = 0$, $y - 5 = 0$

7. (i) $(0, 2)$, $(0, -2)$; $(0, 3)$, $(0, -3)$

(ii) $(-2, 5)$, $(-2, 1)$, $(-2, 6)$, $(-2, 0)$

(iii) $(1, 2)$, $(-3, 2)$, $(2, 2)$, $(-4, 2)$

(iv) $(-1, 1)$, $(-5, 1)$, $(0, 1)$, $(-6, 1)$

10. $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y = 0$

11. (i) $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $\frac{9}{2}$ (ii) $(0, 5)$, $(0, -5)$, $\frac{32}{3}$

(iii) $(-7, 1)$, $(3, 1)$, $\frac{9}{2}$ (iv) $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $\frac{32}{3}$

(v) $(0, -5)$, $(0, 5)$, $\frac{9}{2}$.

§ 53. ஒரு கூம்பு வளைவை ஒரு நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகள்.

கூம்பு வளைவினுடைய சமன்பாட்டையும், கோட்டின் சமன்பாட்டையும் முறையே

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + k = 0 \qquad (53\cdot1)$$

$$y = mx + c \qquad (53\cdot2)$$

எனக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடுகளை x-க்கு விடுவித்தால்,

$$ax^2 + 2hx(mx + c) + b(mx + c)^2 + 2gx + 2f(mx + c) + k = 0$$

அல்லது $(a + 2hm + bm^2)x^2 + (2hc + 2bmc + 2g\ 2fm)x + (bc^2 + 2fc + k) = 0$

என்ற இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதன் இருமூலங்களும், கூம்பு வளைவை நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளி x-கூறுகளைக் குறிக்கின்றன. y-கூறுகளை (53·2) மூலம் பெறலாம். ஆகவே, கூம்பு வளைவை ஒரு நேர்கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என்றாகிறது.

குறிப்பாக, ஒரு நேர்கோடு ஒரு கூம்பு வளைவை இரண்டு இணைந்த புள்ளிகளில் வெட்டினால், அந் நேர்கோடு அந்தக் கூம்பு வளைவின் தொடுகோடாகிறது.

இப்போது, $y = mx + c$ குறிக்கும் நேர்கோ $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். கோடும், பரவளைவும் வெட்டும் புள்ளிகள், இணைந்த புள்ளிகள் ஆகும் என்பதிலிருந்து நிபந்தனையை அடைவோம். இதற்காக, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை x-க்கு விடுவித்துக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டியை பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்தவேண்டும். சமன்பாடுகளை விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$(mx + c)^2 - 4ax = 0.$$

அதாவது $m^2x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0$

இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டியைப் பூச்சியத்துக்குச் சமன் படுத்தக் கிடைப்பதாவது

$$4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0\cdot$$

அதாவது, $(m^2c^2 - 4mca + 4a^2) - m^2c^2 = 0.$

அதாவது, $4mca = 4a^2$.

அதாவது, $c = \frac{a}{m}$ (53.3)

என்பது, வேண்டிய நிபந்தனை.

அடுத்தபடியாக, $y = mx + c$ குறிக்கும் கோடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். சமன்பாடுகளை விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

அதாவது $$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 + \frac{2mc}{b^2} x + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

கொடுக்கப்பட்ட கோடு தொடுகோடானால், இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம்.

ஆகவே, $$\frac{4m^2 c^2}{b^4} - 4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

அல்லது $$\frac{m^2 c^2}{b^4} - \left(\frac{c^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{m^2 c^2}{b^4} - \frac{m^2}{b^2}\right) = 0.$$

அதாவது, $$\frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{m^2}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

ஆகவே, $c^2 = a^2 m^2 + b^2$ (53·4)

என்பது வேண்டிய நிபந்தனையாகிறது.

இதேபோல், கோடு $y = mx + c$, அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

-ஐத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையை

$$c^2 = a^2 m^2 - b^2 \qquad (53·5)$$

என்றும், வட்டம்

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

-ஐத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையை

$$c^2 = a^2 (m^2 + 1) \qquad (53·6)$$

என்றும் பெறலாம். நிபந்தனை (53·6)-ஐ ஏற்கெனவே § 38-ல் கணக்கு 2-ல் வேருெரு முறையில் கண்டுள்ளோம் என்பது இங்கு கவனிக்கத்தக்கது.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் தொடுகோடு ஒன்று 'm' சரிவு கொண்டிருந்தால், அதன் சமன்பாட்டை

$$y = mx + c$$

எனக் கொண்டு, c-ன் மதிப்பை மேற்கண்ட முறையில் கண்டு, சமன்பாட்டை

$$y = mx + \frac{a}{m} \tag{53·7}$$

என எழுதலாம். இதேபோல், கீழ்க்கண்ட விளைவுகள் கிடைக்கின்றன என்பது எளிதில் தெரிகிறது.

கூம்பு வளைவு	m-ஐச் சரிவு கொண்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடு	
$x^2 + y^2 - a^2 = 0$	$y = mx + a\sqrt{m^2 + 1}$	(53·8)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$	(53·9)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$	(53·10)

§ 54. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கூம்புவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கை

ஒரு புள்ளியிலிருந்து $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்: இப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவு m-என்ருல் அதன் சமன்பாடு, (53·7)-ன்படி,

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

ஆகும். இந்தத் தொடுகோடு (h, k) என்ற புள்ளிவழியாகச் சென்ருல்

$$k = mh + \frac{a}{m}.$$

அதாவது, $m^2 h - km + a = 0.$

இந்த இருபடிச் சமன்பாடு m_1, m_2 என்ற இரு சரிவுகளைத் தருகின்றது. ஆகவே, (h, k)-லிருந்து பரவளைவுக்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம். அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$y = m_1 x + \frac{a}{m_1}$$

$$y = m_2 x + \frac{a}{m_2}$$

என்பன,

இதுபோலவே, (h, k)-விலிருந்து ஒரு நீள்வளைவுக்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம் என்பதை

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}\text{-ல்}$$

$x = h, \ y = k$ எனப் பிரதியிட்டு,

$$k = mh + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

அல்லது $\qquad (k - mh)^2 = a^2m^2 + b^2$

அல்லது, $\qquad (h^2 - a^2)m^2 - 2\,hkm + (k^2 - b^2) = 0$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெற்று, அதன் மூலம் அறியலாம்.

மேலும், ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதிபரவளைவுக்கும் இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம் என இதுபோலவே எளிதில் காணலாம்.

§ 55. செங்குத்தான தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை :

முதலாவதாக, $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தான தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்போம் : இவ்வியங்குவரையின் மீது (x_0, y_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, அப்புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவு m — என்றால், அதன் சமன்பாடு

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

ஆகும். இத் தொடுகோடு (x_0, y_0) வழியாகச் செல்லுவதால்

$$y_0 = mx_0 + \frac{a}{m}$$

அதாவது $\qquad x_0m^2 - y_0m + a = 0.$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும், (x_0, y_0)-லிருந்து வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகளின் சரிவுகளைக் குறிக்கின்றன. ஆனால், தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவை. ஆகவே, அவைகளின் சரிவுகளின் பெருக்கற்பலன் (— 1)-க்குச் சமம். ஆனால், மூலங்களின் பெருக்கற் பலன் $\left(\frac{a}{x_0}\right)$-க்குச் சமம்.

ஆகவே,

$$\frac{a}{x_0} = -1$$

அல்லது $$x_0 + a = 0. \qquad (55\cdot1)$$

ஆகவே, இயங்குவரையின் சமன்பாடு, $x + a = 0$ என்றாகிறது. இந்த இயங்குவரை, பரவளைவின் இயங்குவரைதான் என்பது தெளிவாகிறது.

அடுத்தபடியாக, ஒரு நீள் வளைவுக்கான இத்தகைய இயங்கு வரையைக் காண்போம். நீள்வளைவின் சமன்பாடு

$$a^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ஆக இருக்கும் வகையில் குறிப்பீட்டு அச்சுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும், $P(x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியை இயங்குவரையின் மீது எடுத்துக் கொண்டு, அதிலிருந்து நீள்வளைவுக்கு வரையப் படும் தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவை m எனக் கொண்டால், தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

என்றும், தொடுகோடு (x_0, y_0) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$y_0 = mx_0 + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

என்றும் கிடைக்கிறது. அதாவது

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2$$

அல்லது $$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2m\,x_0\,y_0 + (y_0^2 - b^2) = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் பெருக்கற் பலன்

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}$$

ஆகும். ஆகையால்

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1$$

அல்லது $y_0^2 - b^2 = -x_0^2 + a^2$

அதாவது $x_0^2 + y_0^2 - (a^2 + b^2) = 0$

ஆகவே இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = 0 \qquad (55{\cdot}2)$$

என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து இயங்குவரை ஒரு வட்டம் என்றும், இவ் வட்டத்தின் மையம், நீள் வரையின் மையம் என்றும் தெரிகிறது. இவ் வட்டத்திற்கு நீள்வரையின் **குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம்** (director circle) என்பப் பெயர்.

இதுபோலவே, அதிபரவளைவு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

-இன் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை

$$x^2 + y^2 - (a^2 - b^2) = 0 \qquad (55{\cdot}3)$$

என நிறுவலாம் இவ் வட்டத்திற்கும் **குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம்** எனப் பெயர்.

மேலும், வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$- ன் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரை

$$x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$$

என்ற வட்டம் எனக் காணலாம். இந்த இயங்குவரையை வரை கணிதம் மூலமும் மிகவும் எளிதில் காணலாம்.

56. குவியத்திலிருந்து கூம்புவளைவின் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடியின் இயங்குவரை.

முதலாவதாக, பரவளைவு

$y^2 - 4ax = 0$—ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் குவியம், $(a, 0)$. பரவளைவின் தொடுகோடொன்று,

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

அல்லது
$$mx - y = -\frac{a}{m} \qquad (56.1)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். இத் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு,

$x + my = k.$

என்ற வடிவில் இருக்கும். செங்குத்துக் கோடு $(a, 0)$ வழியாகச் சென்றால்

$$a + m(0) = k.$$

எனவும், அதனால் அச் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + my = a \tag{56.2}$$

என்றும் ஆகிறது. கோடுகள் (56.1)—உம், (56.2) - உம் வெட்டும் புள்ளியின் சமன்பாட்டை (56. 1)-லிருந்தும், (56.2) -லிருந்தும் m-ஐ நீக்கிக் காணலாம். இதற்காக (56.1) m + (56.2) -ஐக் கண்டால்,

$$(m^2 + 1)x = 0$$

அதாவது $\quad x = 0$

எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே, இந்த இயங்குவரை பரவளைவை அதன் உச்சியில் தொடும் தொடுகோடு எனத் தெரிகிறது,

இதேபோல், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற நீள்வளையின் ஏதாவதொரு தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

அல்லது $$mx - y = -\sqrt{a^2m^2 + b^2} \tag{56.3}$$

என்று எடுத்துக்கொண்டு, குவியம் $(ae, 0)$-லிருந்து அத் தொடு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$x + my = K$$

என எழுதலாம். இச் செங்கோடு $(ae, 0)$ வழியே செல்லுவதால்

$$ae + m(0) = K.$$

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + my = ae \tag{56·4}$$

என்றாகிறது (56·3)-லிருந்தும் (56·4)-லிருந்தும் m-ஐ நீக்குவோம். இதற்காக $(56\cdot3)^2 + (56\cdot4)^2$ - ஐக் கவனிப்போம். இதனால் கிடைப்பதாவது .

$$(mx - y)^2 + (x + my)^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2.$$

அதாவது, $(1 + m^2)x^2 + (1 + m^2)y^2 = a^2m^2 + a^2(1 - e^2) + a^2e^2.$

அதாவது, $(1 + m^2)(x^2 + y^2) = a^2(1 + m^2).$

ஆகவே, $\quad x^2 + y^2 = a^2.$

அதாவது, செங்கோட்டின் இயங்குவரை, நீள்வரையின் மையத்தை மையமாகவும், a-யை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டமெனத் தெரிகிறது. இவவட்டத்திற்குக் துணை வட்டம் (auxiliary Circle) எனப் பெயர்.

கூம்பு வளைவை, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற அதிபரவளை வாக எடுத்துக் கொண்டாலும், குவியத்திலிருந்து தொடு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடியின் இயங்குவரை

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

என்ற வட்டம் என்றுதான் வரும். இவ்வட்டம் அதிபரவளைவின் துணைவட்டம் என்றழைக்கப்படுகிறது.

§ 57. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

சரிவு 1 கொண்ட ஒரு தொடுகோடு பரவளைவு $y^2 - 4x = 0$-ஐத் தொடுகிறது. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(53·7)-ன் படி தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$\text{“} y = mx + \frac{a}{m} \text{”}$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $m = 1$, $a = 1$ என்றுள்ளதால், தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது,

$$y = x + 1$$

ஆகும்.

கணக்கு 2.

$(-1, 1)$-லிருந்து நீள்வளைவு $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$-க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

நீள்வளைவின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0$$

அல்லது $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1)^2} - 1 = 0$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவு, m எனக் கொண்டால், அத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது,

"$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$."

இங்கு, a^2-1, $b^2 = 1$. அதனால் சமன்பாடானது,

$$y = mx + \sqrt{2m^2 + 1}$$

என்றாகிறது. மேலும், தொடுகோடு $(-1, 1)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$(1) = m(-1) + \sqrt{2m^2 + 1}.$$

ஆகவே, $(1 + m)^2 = 2m^2 + 1$.

அதாவது $m^2 - 2m = 0$

அதாவது $m = 0$ அல்லது $+2$. ஆகவே தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$y - 1 = 0\,(x + 1),$$

$$y - 1 = 2\,(x + 1);$$

அல்லது $y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$

என்றாகின்றன.

கணக்கு 3.

வட்டம் $x^2 + y^2 - r^2 = 0$-ஐயும், பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐயும் தொடும் கோடு, x-அச்சுடன் கோணம் θ-ஐ உண்டாக்கினால்

$$\tan^2 \theta = \frac{\sqrt{r^2 + 4a^2} - r}{2r}$$

எனக் காட்டுக.

கோட்டின் சரிவு m-என்றால், கோடு பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐத் தொடுவதால் அதன் சமன்பாடு,

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

என்றிருக்கும். மேலும், இக் கோடு வட்டம் $x^2 + y^2 - r^2 = 0$-ஐத் தொடுவதால், (53·6)-ன்படி

$$\left(\frac{a}{m}\right)^2 = r^2\,(m^2 + 1)$$

எனக் கிடைக்கின்றது. அதாவது

$$r^2 m^4 + r^2 m^2 - a^2 = 0.$$

ஆகவே, $$m^2 = \frac{-r^2 \pm \sqrt{r^4 + 4a^2 r^2}}{2r}.$$

ஆனால் m^2 ஒரு மிகை எண்ணாகத்தான் இருக்கும்.

மேலும், $m^2 = \tan^2 \theta$ · ஆகவே

$$\tan^2 \theta = \frac{\sqrt{t^2 + 4a^2} - r}{2r}.$$

கணக்கு 4.

ஒரு நகரும் புள்ளி P-யிலிருந்து, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் மாறாத 'α' என்றால், P-யின் இயங்குவரையைக் காண்க.

P-யை (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம். P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவு, m என்றால் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

ஆகும். இத் தொடுகோடு (x_0, y_0) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$y_0 = mx_0 + \frac{a}{m}.$$

அதாவது $x_0 m^2 - y_0 m + a = 0.$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், (x_0, y_0) லிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகளாகும். இச் சரிவுகளை m_1, m_2 எனக் கொண்டால்,

$$m_1 + m_2 = \frac{y_0}{x_0},$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{x_0}$$

ஆனால் தொடுகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் α எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே

$$\tan \alpha = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

அதாவது $\tan^2 \alpha = \frac{(m_1 \quad m_2)^2}{(1 + m_1 m_2)^2}$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4 m_1 m_1}{(1 + m_1 m_2)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{x_0}\right)}{\left(1 + \frac{a}{x_0}\right)^2}$$

இதைச் சுருக்கினால்,

$(x_0 + a)^2 \tan^2 \alpha = {y_0}^2 - 4ax_0$

என்றும், இதிலிருந்து (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரை

$(x + a)^2 \tan \alpha = y^2 - 4ax$

என்றும் கிடைக்கிறது.

§ 58. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $y = mx + c$ குறிக்கும் நேர்கோடானது,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவை A, B என்ற புள்ளி களில் வெட்டுகிறது. AB-யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$\{(b^2 + a^2m^2)\, x^2 + 2mca^2\, x + a^2\,(c^2 - b^2)\}$$
$$+ \{(b^2 + a^2m^2)\, y^2 - 2b^2cy + b^2\,(c^2 - a^2m^2)\} = 0$$

என நிறுவுக.

[உதவிக் குறிப்பு : A-யின் x-கூறும், B-யின் x-கூறும், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m \cdot + c)^2}{a^2} - 1 = 0$$

-ன் மூலங்களாகும். A-யின் y-கூறும், B-யின் y-கூறும் சமன்பாடு

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y - c}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

-ன் மூலங்களாகும். ஆகவே, A-யும், B-யும், (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றால்,

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m_2}{b^2}\right)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} - 1$$

$$\left(\frac{1}{a_2 m^2} + \frac{1}{b^2}\right)(y - y_1)(y - y^2) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{y - c}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

என்றும், இவைகளிலிருந்து AB-யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடான

$$(x - x_1)(x - x^2) + (y - y_1)(y - y^2) = 0$$

-ஐக் கொடுத்துள்ள வடிவத்தில் பெறலாம்.]

2. $x - y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோடு, $2x^2 + y^2 - 5 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$ எனவும் $AB = \frac{2\sqrt{26}}{3}$ எனவும் நிறுவுக

3. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவானது, $2x - y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோட்டிலிருந்து வெட்டும் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.

4. சரிவு 2 கொண்ட ஒரு தொடுகோடு. பரவளைவு $x^2 - 8x = 0$-ஐத் தொடுகிறது அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. நீள்வளைவு $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$-ன் தொடுகோடுகள் $4x - y = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6 $2x^2 - y^2 - 4 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகள் $2x - y = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

7. ஒரு பரவளைவின் இரண்டு செங்குத்துத் தொடுகோடுகள், பரவளைவின் அச்சைக் குவியத்திலிருந்து முறையே d_1, d_2 தூரங்களில் வெட்டினால், $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$ என்பது ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

[**உதவிக் குறிப்பு :** பரவளைவை $y^2 - 4ax = 0$ என்றும், தொடுகோடுகளை $y+mx = \frac{a}{m}$, $y - \frac{1}{m}x = -a/\left(\frac{-1}{m}\right)$ என்றும் கொள்க.]

8. $y^2 - 8x = 0$ குறிக்கும் பரவளைவையும் $x^2+y^2-a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தையும் தொடும் கோடுகள் $x - y + 2a = 0$ $x + y + 2a = 0$ என நிறுவுத,

உதவிக் குறிப்பு : பரவளைவின் தொடுகோடு ஒன்றின் சரிவு m என்றால், அதன் சமன்பாடு $y+mx = \frac{2}{m}$ என்றிருக்கும். மேலும் தொடுகோடு வட்டத்தையும் தொடுகிறது.]

9. $y^2 - 8x = 0$ குறிக்கும் பரவளைவையும், $3x^2 + y^2 - = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவையும், தொடும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

10. (2, 3)-லிருந்து $y^2 - 4x = 0$ குறிக்கும் பரவளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகளைக் காண்க.

11. $25(x^2 + y^2) - 81 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்திற்கு, (0, 3) வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

12. (0, 3) வழியாகச் செல்லும், $2x^2 + y^2 - 6 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவின் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

13. ஒரு பரவளைவிற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடு கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி, அதன் செவ்வகலத்தின்மீது இருந்தால், தொடுகோடுகள் x-அச்சுடன் உண்டாகும் குறுங் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $90°$ என நிறுவுக.

[**உதவிக் குறிப்பு :** வெட்டுப்புள்ளியை (a, k) எனவும், k மாறுகிறது எனவும் கொள்க.]

14. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வளைவுகள் ஒவ் வொன்றிற்கும், அக்கூம்பு வளைவிற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள் இரண்டின் இடையிலுள்ள கோணம் α-ஆக இருந்தால், அத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும் என நிறுவுக:

கூம்புவளைவு	கோணம் α	P-யின் இயங்குவரை
$x^2 + y^2 - a^2 = 0$	90°	$x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$
$y^2 - 4ax = 0$	60°	$y^2 - 3x^2 - 10ax - 3a^2 = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	45°	$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	30°	$(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^2 = 12(-b^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 b^2)$

15. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\ \ _2} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவிற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகள் x-அச்சுடன் ஒரே திசையில் அமைக்கும் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை, ஒரு மாறிலி k என்றால், அத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

16. ஒரு நீள் வளைவு, இரண்டு நிலைத்த செங்குத்துக் கோடுகளைத் தொட்டுக் கொண்டே நகர்ந்தால், அதன் மையத்தின் இயங்குவரை, அக் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டும், நீள் வளைவின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் ஆரத்தை ஆரமாகக் கொண்டும் இருக்கும் வட்டமாகும் என நிறுவுக.

[உதவிக் குறிப்பு: ஒரு நீள்வளைவின் இரு செங்கோட்டுத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி, நீள்வளைவின் மையத்திலிருந்து இருக்கும் தூரம் ஒரு மாறிலி.]

விடைகள

3. $\frac{\sqrt{20}}{3}$ 4. $2x - y + 1 = 0$ 5. $x + 4y - 9 = 0$, $x + 4y + 9 = 0$ 6. $2x - y - 2 = 0$, $2x - y + 2 = 0$,

9. $x - y + 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$ 10. $1, \frac{1}{2}$

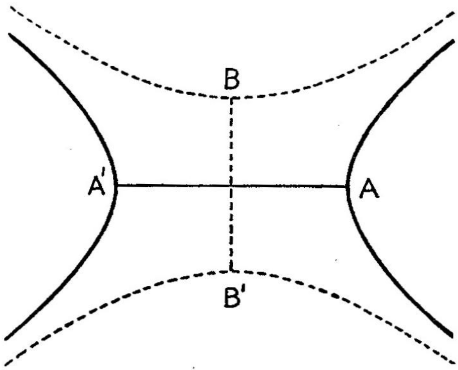
11. $4x + 3y - 9 = 0,\ 4x - 3y + 9 = 0$

12. $x + y - 3 = 0,\ x - y + 3 = 0$

15. $2xy = ({}^2 - y^2 - a^2 - b^2) \tan k.$

§ 59. துணையிய அதிபர வளைவு (Conjugate hyperbola)

AA', BB' என்பவற்றை ஒரு அதிபர வளைவு, முறையே குறுக்கச்சாகவும், துணையச்சாகவும் கொண்டிருந்தால், BB'-ஐக் குறுக்கச்சாகவும், AA-ஐத் துணை அச்சாகவும் கொண்ட அதிபர வளைவு, முதல் அதிபர வளைவின் துணையிய அதிபர வளைவு (Conjugate hyperbola) என்று அழைக்கப்படுகின்றது (படம் 30). இவ்வரையறையிலிருந்து, மேற்கூறிய அதிபர வளைவுகளில் ஒன்று மற்றதின் துணையிய அதிபரவளைவு என்பதை எளிதில் காணலாம்.



படம் 30.

ஒரு அதிபர வளைவின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (59{\cdot}1)$$

என்றால், அதன் துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடானது

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

அல்லது $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (59{\cdot}2)$$

ஆகும்.

இப்பொழுது, எந்த ஒரு அதிபர வளைவும், அதன் துணையிய அதிபர வளைவும், e-ஐயும், e'-ஐயும் தொலைத் தகவாகக் கொண்டிருந்தால்,

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

எனக் காட்டுவோம். இதற்கு அதிபரவளைவுகள் (59·1) -ஐயும் (59·2)-ஐயும் எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$b^2 = a^2 (e^2 - 1),$$
$$a^2 = b^2 (e'^2 - 1)$$

இவைகளைப் பெருக்கிச் சுருக்கினல் கிடைப்பதாவது :

$$a^2b^2 = a^2b^2 (e^2 - 1)(e'^2 - 1)$$

அல்லது $1 = (e^2 - 1)(e'^2 - 1)$

அல்லது $1 = e^2 e'^2 - e^2 - e'^2 + 1$

அல்லது $e^2 + e'^2 = e^2 e'^2$

அல்லது $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$

§ 60. தொலைத் தொடுகோடு.

ஒரு வளைவை அதன் தொடுகோடு முடிவிலிப்புள்ளியில் தொட்டால் அத் தொடு கோட்டுக்குத் **தொலைத் தொடுகோடு** (Asymptote) என்று பெயர். இப்பொழுது, அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

இரண்டு தொலைத் தொடுகோடுகளை உடையது எனக்கண்டு, அதன் சமன்பாடுகளைக் காண்போம்.

இதற்காக,

$$y = mx + c$$

என்ற நேர்கோடு அதிபரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். இரண்டு சமன்பாடுகளையும் x-க்கு விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + c)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

அதாவது $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 - 2\left(\frac{mc}{b^2}\right) x - \left(\frac{c^2}{b^2} + 1\right) = 0.$

வெட்டும் புள்ளிகள் முடிவிலியில் இருந்தால், இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் முடிவிலிகளாகும். ஆகவே, x^2-ன் குணகமும், x-ன் குணகமும் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும். அப்போது

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) = 0,$$

$$\frac{mc}{b^2} = 0.$$

இவைகளில், முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{m^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}$$

எனவும், அதாவது $m = +\frac{b}{a}$ அல்லது $-\frac{b}{a}$ எனவும்,

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $c = 0$ எனவும் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து அதிபரவளைவுக்கு இரண்டு தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளன என்றும், அவைகளின் சமன்பாடுகள்,

$$y - \frac{b}{a}x = 0, \quad y + \frac{b}{a}x = 0.$$

அதாவது, அவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

என்றும் அவைகளின் இணைந்த சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

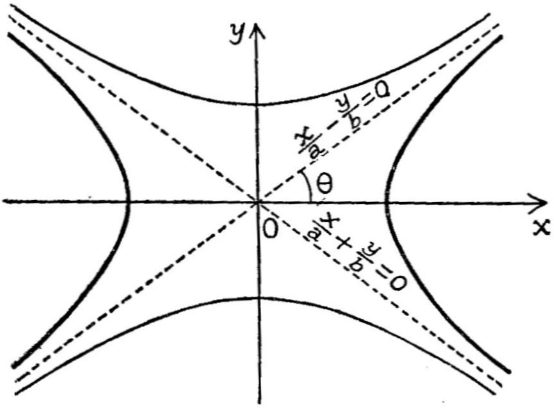
என்றும் தெரிகிறது.

இப்பொழுது கீழ்க்கண்ட விளைவுகளை எளிதில் காணலாம்.

(i) ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் அதிபரவளைவின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லுகின்றன.

(i) ஓர் அதி பரவளைவுக்கு அதன் மையத்திலிருந்து தொடுகோடுகள் வரைந்தால் அவைகள் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளாகின்றன.

(iii) ஓர் அதிபரவளேவின் தொலேத் தொடுகோடுகள் அதிபரவளேவின் அச்சுக்கள் ஒவ்வொன்றுடனும் சமமான கோணங்களே உண்டாக்குகின்றன.



படம் 31

(iv) θ என்பது, ஒரு தொலேத்தொடுகோடு, குறுக்கச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணமாளுல்,

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

அல்லது $\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + a^2 (e^2 - 1)}{a^2}}$$

$$= e$$

ஆகவே, $\theta = \sec^{-1} e$ என்றும், தொலேத் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $2 \sec^{-1} e$ என்றும் ஆகிறது.

(v) சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \lambda = 0 \qquad (60.1)$$

அதிபரவளேவு, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \lambda = 0 \qquad (60.2)$$

அதன் துணையிய அதிபரவளைவு இரண்டும்,

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = O \qquad (60\cdot3)$$

என்ற கோடுகளையே தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டுள்ளன. இச் சமன்பாடுகள் (Oxy) என்ற குறிபீட்டச்சுகளைப் பொருத்தன என்றால் ஆதியை O' (x_1, y_1)க்கு மாற்றி, பின் அச்சுகளை θ கோணம் சுழற்றி உண்டாகும் புதுக் குறிப்பீட்டச்சுகளை $O'XY$ எனக் கொண்டால்

$$x = x_1 + X\,\mathrm{Cos}\,\theta - Y\sin\theta$$
$$y = y_1 + X\sin\theta + Y\,\mathrm{Cos}\theta$$

என (122.2) மூலமும், (122·3) மூலமும் அறியலாம்.

இப் புதுக் குறிப்பீட்டச்சுக்களைப் பொருத்துத் தொலைத் தொடு கோடுகள் (60·3)-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{(x_1 + X\cos\theta - Y\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(y_1 + X\sin\theta + Y\cos\theta)^2}{b^2} = 0$$

என்றாகிறது. இங்கு கோவை

$$\frac{(x_1 + X\cos\theta - Y\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(y_1 + X\sin\theta + Y\cos\theta)^2}{b^2}$$

என்பது X இலும், Y-இலும் இருப்படியுள்ளது. இந்தக் கோவையை S எனக் குறித்தால், அதிபரவளைவு, தொலைத் தொடுகோடு, துணையிய அதிபரவளைவு முதலியவற்றின் சமன் பாடுகள் முறையே

$$S - \lambda = 0$$
$$S = 0$$
$$S + \lambda = 0$$

என்றாகிறது. இதிலிருந்து, அதிபரவளைவின் சமன்பாடும், அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடும், அவைகளின் பொதுத் தொலைத்தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரே மாறிலியால் மாறுபட்டிருக்கும் எனத் தெரிகிறது. அதாவது பொதுத்தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு

$$(lx + my + n)\,(l'x + m'y + n') = 0$$

என்றால் அதிபரவளைவுகளின் சமன்பாடுகள்

$$(lx + my + n)\,(l'x + m'y + n') + k = 0$$
$$(lx + my + n)\,(l'x + m'y + n') - k = 0$$

என்றிருக்கும்.

§ 61. செவ்வக அதிபரவளைவு (Rectangular Hyperbola)

ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவை ; ஆனால், அவ்வதிபரவளைவு செவ்வக அதிபரவளைவு என்று அழைக்கப்படுகின்றது. இப்பொழுது ஓர் அதிபரவளைவு செவ்வக அதிபரவளைவாய் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம்; இதற்கு அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் தொலைத்தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

இக் கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகளானால்,

$$(x^2\text{-ன் குணகம்}) + (y^2\text{-ன் குணகம்}) = 0.$$

அதாவது $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 0.$

அதாவது $a = b.$

ஆகவே, செவ்வக அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சும், துணையச்சும் சமமானவை. மேலும், e தொலைத்தகவானால் $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$a^2 = a^2 (e^2 - 1)$$

அதாவது $e = \sqrt{2}$

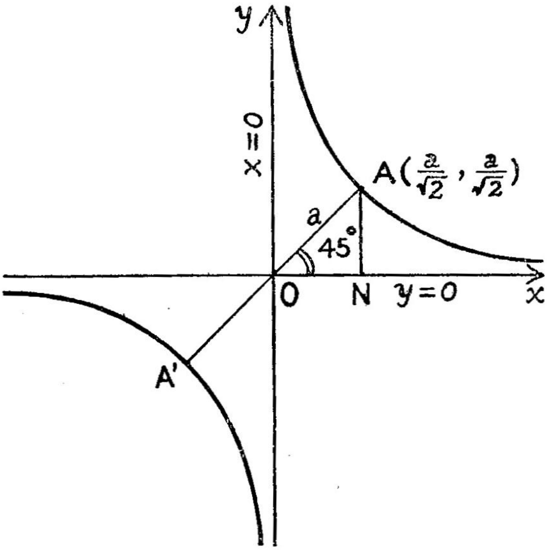
என்று கிடைக்கின்றது.

§ 62. செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகளைக் குறிப்பீட்டச்சுகளாகக் கொள்ளும்போது அதன் சமன்பாடு

தொலைத்தொடுகோடுகளை x, y-அச்சுகளாகக் கொள்வோம் (படம் 32). அப்போது தொலைத்தொடுகோடுகளின் தனித்த சமன்பாடுகள் $y = 0$, $x = 0$ என்றும், அவைகளின் இணைந்த சமன்பாடு $xy = 0$ என்றும் இருக்கும். ஆகவே, செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு,

$$xy + k = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். AA' ஆனது அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சாகுல், A-யிலிருந்து AN என்ற செங்குத்துக் கோட்டை x-அச்சுக்கு வரைவோம் இப்பொழுது $AA' = 2a$ என்ருல்,



படம் 32.

$$ON = OA \cos AON = a \cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$NA = OA \sin AON = a \sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

ஆகவே $A \equiv \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$

இப்பொழுது புள்ளி A-யின் கூறுகள் $xy + h = 0$-ஐத் திருப்தி செய்கின்றன. ஆகவே,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} + k = 0.$$

அதாவது $h = -\frac{a^2}{2}.$

இதனுல் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy - \frac{a^2}{2} = 0 \qquad (62{\cdot}1)$$

என்ருகிறது. இங்கு $\frac{a^2}{2}$-ஐ c^2 எனக் குறிப்பிட்டுச் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை

$$xy - c^2 = 0 \qquad (62{\cdot}2)$$

என எழுதலாம்.

§ 63. குறியீடுகள்

பின்வரும் பகுதிகளில் பயன்படுத்தப்படும் சில குறியீடு களின் விளக்கங்களை இப்போது பார்ப்போம். இக் குறியீட்டுத் தன்மையால் ஒரு நீண்ட கோவையை ஓர் எழுத்தால் மட்டுமே கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்க இயலுகிறது:

கோவை	குறியீடு
$lx + my + n$	L
$lx_1 + my_1 + n$	L_1
$lx_2 + my_2 + n$	L_2
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$	$S.$
$ax_1^2 + 2hx_1y_2 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$	S_1
$ax_2^2 + 2hx_1y_2 + by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c$	S_2

அதாவது L-லிருந்தும், S-லிருந்தும் முறையே L_1-ஐயும், S_1-ஐயும் பெற x-க்குப் பதிலாக x_1-ஐயும், y-க்கும் பதிலாக y_1-ஐயும் பிரதியிடவேண்டும்.

அடுத்தபடியாக, S என்ற ஒருபடிக் கோவையிலிருந்து விளையும் T_1 என்ற இருபடிக் கோவையைக் காண்போம். T_1-ஐ அடைவதற்கு S-ல்

x^2-க்குப் பதிலாக $x\,x_1$-உம்

y^2-க்குப் பதிலாக $y\,y_1$-உம்

xy-க்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}\,(xy_1 + x_1y)$-உம்

x-க்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}\,(x + x_1)$-உம்

y-க்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}(y + y_1)$-உம்

பிரதியிடவேண்டும். அதாவது,

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

என்றால்,

$$T_1 = ax\,x_1 + 2h\,\frac{x\,y_1 + x_1\,y}{2} + by\,y_1 + 2g\,\frac{x + x_1}{2} + 2f\,\frac{y + y_1}{2} + c,$$

$$T_2 = ax\,x_2 + 2h\,\frac{x\,y_2 + x_2\,y}{2} + by\,y_2 + 2g\,\frac{x + x_2}{2} + 2f\,\frac{y + y_2}{2} + c$$

ஆகும். இங்கு

(i) $(T_1)_1 = S_1$

(ii) $(T_1)_2 = (T_2)_1$

என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். உதாரணமாக, இப்பொழுது

$$S = y^2 - 4ax$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$(T_1)_1 = \left(y\,y_1 - 4a.\,\frac{x + x_1}{2}\right)_{x = x_1,\ y = y_1}$$

$$= y_1\,y_1 - 4a.\,\frac{x_1 + x_1}{2}$$

$$= y_1^2 - 4a\,x_1 = S_1.$$

$$(T_1)_2 = \left(y\,y_1 - 4a.\,\frac{x + x_1}{2}\right)_{x = x_2,\ y = y_2}$$

$$= y_2\,y_1 - 4a\,\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

ஆனல்,

$$(T_2)_1 = \left(y\,y_2 - 4a\,\frac{x + x_2}{2}\right)_{x = x_1,\ y = y_1}$$

$$= y_1\,y_2 - 4a\,\frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

ஆகவே,

$$(T_1)_2 = (T_2)_1.$$

§ 64. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

ஓர் அதிபரவளேவின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொலேத் தொடுகோடுகள் இருக்கும் தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

அதிபரவளேவின் குறுக்கச்சையும், துணேயச்சையும், x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால், அதிபரவளேவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

என்ற வடிவில் அமைகிறது. மேலும், தொலேத் தொடுகோடு களின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

என்றிருக்கின்றன. இப்பொழுது (x_1, y_1) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை அதிபரவளேவின்மீது எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

என்று கிடைக்கிறது. மேலும் தொலேத் தொடுகோடுகளிலிருந்து (x_1, y_1)-ன் தூரங்கள்

$$\frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},\quad \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

ஆகும். அவைகளின் பெருக்கற்பலன்,

$$\frac{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

ஆகும். ஆனால் இதன் மதிப்பு (1) -ஆல்

$$\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

என்றாகிறது. இது ஒரு மாறிலி.

கணக்கு 2.

ஓர் அதிபரவளையின் தொலைத் தொடுகோடுகளும், அதன் ஏதாவதொரு தொடுகோடும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

கணக்கு 1-ல் உள்ளபடி அச்சுக்களை எடுத்துக்கொண்டால் அதிபரவளையின் சமன்பாடும், தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடும் முறையே

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad (2)$$

ஆகும். அதிபரவளைவின், m சரிவு கொண்ட தொடுநாண்,

$$y = mx + c \qquad (3)$$

-ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$c^2 = a^2 m^2 - b^2 \qquad (4)$$

ஆகும். இப்பொழுது (1)-ம், (3)-ம் வெட்டும் புள்ளி $A_1 (x_1, y_1)$ என்றால்,

$$x_1 = \frac{ac}{b - am}, \; y_1 = \frac{bc}{b - am}$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதில் b-க்குப் பதிலாக $-b$ பிரதியிட்டால் (2)-உம், (3)-உம் வெட்டும் புள்ளியாகிய A_2 (x_2, x_2)-ல்

$$x_2 = \frac{-ac}{b+am}, \; y_2 = \frac{ac}{b+am}$$

ஆகும். இப்பொழுது முக்கோணம் OA_1, A_2-ன் பரப்பானது,

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_2 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{abc^2}{b^2 - a^2 m^2} + \frac{abc^2}{b^2 - a^2 m^2}\right]$$

$$= ab\left[\frac{c^2}{b^2 - a^2 m^2}\right]$$

$$= ab\frac{a^2 m^2 - b^2}{b^2 - a^2 m^2}$$

$$= -ab.$$

ஆகவே, முக்கோணத்தின் பரப்பு ab என்றாகிறது. இங்கு ab ஒரு மாறிலி.

கணக்கு 3.

ஒரு அதிபரவளையின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடுகள், $2x - y - 3 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ என்பன, அதிபரவளைவு, (1, 1) வழியாகச் சென்றால் அதன் சமன்பாடு யாது? அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன் பாடு யாது?

தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு,

$$(2x - y - 3)(3x + y - 7) = 0.$$

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு, இச் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறியில் தான் வித்தியாசப்படுகிறது. ஆகவே இதன் சமன்பாட்டை

$$(2x - y - 3)(3x + y - 7) + k = 0$$

என்று எழுதலாம். ஆனால், அதிபரவளைவு (1, 1) வழியாகச் செல்லுகிறது. அதனால்,

$$(2 - 1 - 3)(3 + 1 - 7) + k = 0.$$

அல்லது $k = -6$. ஆகவே அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(2x - y - 3)(3x + y - 7) - 6 = 0.$$

என்றும், துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(2x - y - 3)\ 3x + y - 7) + 6 = 0$$

என்றும் தெரிகிறது.

§ 65· பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடு $(x + y + 2)(2x + y + 3) + 4 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் தனித்த சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. $2x^2 + 7xy + 6y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க·

[உதவிக் குறிப்பு: தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டை $2x^2 + 7xy + 6y^2 + 3x + 5y + k \quad 0$ எனக் கொள்க.]

3. $3x^2 - 4xy + y^2 - x - y + 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள், துணையிய அதிபர வளைவு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $(h^2 - ab)\ \lambda = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ என்ருல், சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda = 0$ என நிறுவுக.

5. $xy + 3x + 2y + 5 = 0$ குறிக்கும் செவ்வக அதிபரவளை வின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க·

6. $3x^2 + 8xy + 4y^2 + 10x + 8y + 5 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின், துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ என்பன. அவ்வதிபரவளைவு. புள்ளி $(0, 3)$ வழியாகச் சென்ருல், அதன் சமன்பாட்டையும், அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

8. $x - y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளை தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டு, $(-1, 1)$ வழியாகச் செல்லும் அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. (2, 1)-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x - y = 0$, $3x + y = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளன. அவ்வதிபரவளைவு (1, 1) வழியாகச் சென்றால் அதன் சமன்பாட்டையையும், அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

10. (2, 1)-ஐக் குவியமாகவும், $x - y + 1 = 0$ ஐ இப் புள்ளி சார்ந்த இயக்குவரையாகவும் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : இங்கு தொலைத்தகவு, $\sqrt{2}$.]

11. $2x - y + 4 = 0$ குறிக்கும் கோட்டினை ஒரு தொலைத்தொடு கோடாகக் கொண்டு, (6, 0) , (0, 0) வழியாகச் செல்லும் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: சமன்பாடு, $(2x - y + 4)(x + 2y + k_1) + k_2 = 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.]

12. (5, 4)-ஐயும் , (− 3, 2) - ஐயும் உச்சிகளாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும் அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

விடைகள்

1. $x + y + 2 = 0, \quad 2x + y + 3 = 0$
2. $2x + 3y + 1 = 0, \; x + 2y + 1 = 0$
3. $x - y - 1 = 0, \; 3x - y + 2 = 0,$
   $3x^2 - 4xy + y^2 - x - y - 5 = 0$
5. $x + 2 = 0, \quad y + 3 = 0$
6. $3x^2 + 8xy + 4y^2 + 10x + 8y + 1 = 0.$
7. $6x^2 - 11xy + 3y^2 + 19x - 11y + 6 = 0,$
   $6x^2 - 11xy + 3y^2 + 19x - 11y + 14 = 0$
8 $2x^2 - xy - y^2 + 4x - y + 3 = 0$
9. $6x^2 - xy - y^2 - 23x + 4y + 15 = 0$
   $6x^2 - xy - y^2 - 23x + 4y + 27 = 0$
10. $2xy - 6x + 4 = 0$
11. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 12x + 16y = 0$
12. $5x^2 + 16xy - 15y^2 - 78x + 74y - 361 = 0$
    $5x - 3y + 4 = 0, \; 3x + 5y - 18 = 0.$

6. இரு வளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிவரையும் வளைவுகள்.

(Curves Through Common Points of Two Curves)

§ **66.** $L + \lambda L' = 0$ என்னும் சமன்பாடு

இப் பகுதியில் $L + \lambda L' = (lx + my + n) + \lambda(l'x + m'y + n') = 0$ (66·1)

எனும் சமன்பாடு,

$$L = lx + my + n = 0, \qquad (66{\cdot}2)$$

$$L' = l'x + m'y + n' = 0 \qquad (66{\cdot}3)$$

குறிக்கும் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு என்பதை நிறுவுவோம். இதற்காக, இவ்வெட்டும் புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$L + \lambda L' = 0$ ஆனது, ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால், அது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது. இந்நேர்கோடு (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகின்றதாவெனப் பார்ப்போம். $L = 0$, $L' = 0$ குறிக்கும் நேர்கோடுகளின் மேல் (x_1, y_1) உள்ளதால்

$$L_1 = 0, \ L_1' = 0.$$

இப்பொழுது $x = x_1$, $y = y_1$ என $L + \lambda L'$-ல் பிரதியிட,

$$L_1 + \lambda L_1' = 0 + 0 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து, $L + \lambda L' = 0$ குறிக்கும் நேர்கோடு, (x_1, y_1) வழியாகச் செல்கிறது என்ருகிறது.

λ ஆனது பல மதிப்புகளைப் பெறும்போது, $L + \lambda L' = 0$, ஒரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தைக் குறிப்பிடுகிறது. இங்கு, இந்தக்

கோடுகள் எல்லாம், $L = 0$, $L' = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன.

§ 67. ஆதியின் வழியாகவும், ஒரு கூம்பு வளைவை ஒரு நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும் சோடிக் கோடுகள்

ஆதிவழியாகவும், சமன்பாடுகள்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \qquad (67{\cdot}1)$$

$$lx + my + n = 0 \qquad (67{\cdot}2)$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவும், கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும் சோடிக் கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்கு (67·2)-ஐ

$$\frac{lx + my}{-n} = 1$$

என்ற வடிவில் எழுதி, இதைப் பயன்படுத்தி. கூம்பு வளைவின் சமன்பாட்டை இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடாக மாற்றி எழுத வேண்டும். இவ்விதமாகக் கிடைப்பதாவது :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + (2gx + 2fy)\left(\frac{lx + my}{-n}\right) + c\left(\frac{lx + my}{-n}\right)^2 = 0. \qquad (67.3)$$

இச் சமன்பாடு இருபடிச் சமபடித்தானதால், இது, ஆதிவழிச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளைக் குறிக்கின்றது.

கூம்பு வளைவு (67·1)-உம், கோடு (67·2)-உம் வெட்டும் புள்ளிகளை (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றால்,

$$ax_1^2 + 2hx_1, y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \qquad (67{\cdot}4)$$

மேலும், $lx_0 + my_1 + n = 0$

அல்லது $\dfrac{lx + my_1}{-n}$ (67·5)

சமன்பாடு (67·3)-இல் இடது பக்கத்துள்ள கோவையில் x-க்கும், y-க்கும் பதிலாக x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் பிரதியிட்டால், அதன் மதிப்பு, (67·4), (67·5)- ஆகிய தொடர்புகளால், பூச்சியமாகிறது. ஆகவே (67·3) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளில்

ஒன்று, (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகிறது. இதுபோலவே, அடுத்த கோடு, (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லுகிறது என்று தெரிகிறது. ஆகவே (67 3) தான், வேண்டிய சமன்பாடு.

§ 68. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று வட்டங்களின் திட்டமான சமன்பாடுகள். $k + k' + k'' = 0$ என்றால், சமன்பாடு $kS + k'S' + K''S'' = 0$, ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கிறது என்றும், அந்நேர்கோடு வட்டங்களின் சமத்தொடுவச்சுச் சந்தி வழியாகச் செல்லுகிறது என்றும் காட்டுக.

இப்பொழுது, $k + k' + k'' = 0$ என்பதிலிருந்து $k'' = -(k + k')$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு,

$$kS + k'S' - (k + k')S'' = 0$$

அல்லது $k(S - S'') + k'(S' - S'') = 0$

அல்லது $$(S - S'') + \frac{k'}{k}(S' - S'') = 0 \qquad (1)$$

என்றாகிறது. ஆனால் $S - S'' = 0$ என்பது, வட்டங்கள் $S = 0$, $S'' = 0$ ஆகியவற்றின் சமத்தொடுவச்சு என்பதும் $S' - S'' = 0$ என்பது வட்டங்கள் $S' = 0$, $S'' = 0$ ஆகியவற்றின் சமத்தொடு வச்சு என்பதும் தெரிந்ததே. ஆகவே சமன்பாடு (1) இந்தச் சமத்தொடுவச்சுகளின் வெட்டுப்புள்ளி, அதாவது வட்டங்களின் சமத்தொடுவச்சுச்சந்தி வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது எனத் தெரிகிறது.

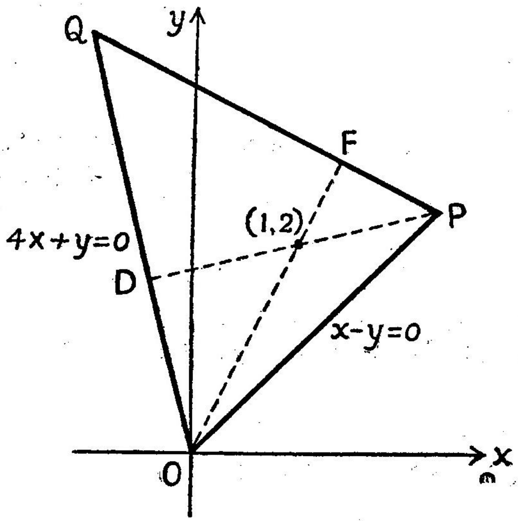
கணக்கு 2.

OPQ என்ற முக்கோணத்தில் OP-யின் சமன்பாடு, $x - y = 0$, OQ-வின் சமன்பாடு, $4x + y = 0$. இங்கு O என்பது ஆதி. முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம், $(1, 2)$ என்றால், PQ-வின் சமன்பாட்டை காண்க (படம் 33).

PD, OF என்பன இரு குத்துக் கோடுகள் எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது OF-ஆனது $(0, 0)$ வழியாகவும், $(1, 2)$ வழியாகவும் செல்லுகிறது. ஆகவே, அதன் சரிவு, 2 ஆகும். ஆகவே, PQ-வின் சரிவு $-\frac{1}{2}$ ஆகும். எனவே PQ-வின் சமன்பாடு

$$x + 2y + k = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது k யின் மதிப்பைக் காண வேண்டும். ஆனால் PQ, PO என்பனவற்றில் சமன்பாடுகள்,



படம் 33.

$x + 2y + k = 0$, $x - y = 0$. ஆகவே, PD-யின் சமன்பாட்டை

$$(x + 2y + k) + \lambda (x - y) = 0$$

என்று எழுதலாம். அதாவது

$$(1 + \lambda) x + (2 - \lambda) y + k = 0$$

என்றும் எழுதலாம். ஆனால் PD-யும், OQ-வும் செங்குத்தானவை.

இங்கு OQ-வின் சமன்பாடு, $4x + y = 0$ ஆகவே (20·4)-லிருந்து

$$4 (1 + \lambda) + 1 (2 - \lambda) = 0$$

என்றும் பெறுகிறோம். அதாவது $\lambda = -2$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, PD-யின் சமன்பாடு

$$x - 4y - k = 0$$

என்றாகிறது. ஆனால், PD, (1, 2) வழியாகச் செல்லுகிறது. எனவே

$$(1) - 4 (2) - k = 0.$$

அதாவது $k = -7$.

ஆகவே PQ-வின் சமன்பாடு $x + 2y - 7 = 0$ என்றாகிறது.

கணக்கு 3.

$7x^2 + 8y^2 - 4xy + 2x - 4y - 8 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவை, $3x - y - 2 = 0$ குறிக்கும் கோடு, A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், AB, ஆதியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கும் எனக் காட்டுக.

கோட்டின் சமன்பாடு,

$$3x - y - 2 = 0$$

அல்லது $$3x - y = 2$$

அல்லது $$\frac{3x - y}{2} = 1.$$

இதைப் பயன்படுத்தி, கூம்பு வளைவின் சமன்பாட்டை சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடாக்கினால்,

$$7x^2 + 8y^2 - 4xy + (2x - 4y)\left(\frac{3x - y}{2}\right) - 8\left(\frac{3x - y}{2}\right)^2 = 0$$

அல்லது $7x^2 + 8y^2 - 4xy + (x - 2y)(3x - y) - 2(3x - y)^2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாடு, OA, OB என்ற கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு. இச் சமன்பாட்டில்,

$$\begin{aligned} x^2\text{-ன் குணகம்} + y^2\text{-ன் குணகம்} &= (7+3-18)+(8+2-2) \\ &= (-8) + 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

ஆகவே, OA-உம், OB-உம் செங்குத்துக் கோடுகள்.

கணக்கு 4.

ஒரு பரவளைவின் நகரும் நாண் ஒன்று, பரவளைவின் உச்சியில் எப்போதும் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது என்றால், இந்நாண் எப்போதும், ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லுகிறது எனக் காட்டுக.

பரவளைவின் சமன்பாடு, $y^2 - 4ax = 0$ என்றிருக்குமாறு குறிப்பீட்டச்சுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது பரவளைவின் உச்சி, ஆதி O-வில் உள்ளது. நகரும் நாணை AB எனவும், அதன் சமன்பாட்டை

$$lx + my = 1$$

எனவும் கொண்டால், l-உம், m-உம் நாணின் இடத்திற்கு ஏற்ப மாறுகின்றன. மேலும், OA, OB ஆகியவற்றின் இணைந்த சமன்பாடு

$$y^2 - 4\,ax\,(lx + my) = 0$$

ஆகும். OA, OB செங்கோடுகளாகையால்,

$$x\text{-ன் குணகம்} + y\text{-ன் குணகம்} = 0.$$

அதாவது $(-\,4\,al) + (1) = 0.$

அதாவது $l = \dfrac{1}{4a}.$

ஆகவே, நகரும் நாணின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{1}{4a}\right) x + my = 1$$

என்றாகிறது. அதாவது,

$$\left(\frac{1}{4a}\,x - 1\right) + my = 0.$$

இதில் m, ஒரு மாறி. ஆகவே நாண்

$$\frac{1}{4a}\,x - 1 = 0,\; y = 0.$$

குறிக்கும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியாகிய $(4\,a,\,0)$ வழியாகச் செல்லுகிறது என்றாகிறது. இங்கு $(4\,a,\,0)$ ஒரு நிலைத்த புள்ளி

கணக்கு 5.

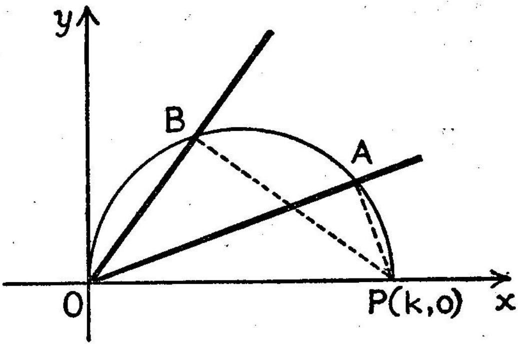
$(k, 0)$ லிருந்து, $ax + 2^2\,hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,
$(a - b)\,x + 2\,hy + bk = 0$ எனக் காட்டுக (படம் 34.)

செங்கோட்டடிகளை A, B எனவும், $(k, 0)$-ஐ P எனவும் பெயரிடுவோம். இப்பொழுது, கோணங்கள் OAP, OBP இரண்டும் செங்கோணங்கள். ஆதலால், OP-ஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் A, B வழியாகச் செல்லுகின்றது. இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

அல்லது $$x^2 + y^2 - kx = 0. \qquad (1)$$

இப்பொழுது AB-ன் சமன்பாட்டை $lx + my = 1$ எனக் கொண்டு l-ன் மதிப்பையும், m-ன் மதிப்பையும் காண்போம்.



படம் 34.

இதற்காக சமன்பாடு (1)-ஐ, $lx + my = 1$-ன் உதவியால் சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடாக்கினால், அச் சமன்பாடு, OA-யையும், OB-யையும் குறிக்கின்றது. அதாவது

$$x^2 + y^2 - kx\,(lx + my) = 0$$

அல்லது $(1 - kl)\,x^2 + (-\,km)\,xy + y^2 = 0$,

OA-யையும், OB-யையும் குறிக்கும் இணைந்த சமன்பாடாகிறது. ஆனால்

$$ax^2 + 2\,hxy + by^2 = 0$$

என்ற சமன்பாடும் OA-யையும், OB-யையும் குறிக்கின்றது. ஆகவே, இச் சமன்பாடுகளிலுள்ள குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{1 - kl}{a} = -\,\frac{km}{2h} = \frac{1}{b}\,.$$

இதிலிருந்து $l = -\,\frac{1}{h}\left(\frac{a}{b} - 1\right)$ என்றும், $m = -\,\frac{2h}{kb}$ என்றும் கிடைக்கின்றது. ஆகவே, AB-யின் சமன்பாடாகிய $lx + my = 1$ என்பது,

$$-\,\frac{1}{k}\left(\frac{a}{b} - 1\right)x - \frac{2h}{kb}\,y = 1$$

அல்லது $(a - b)\,x + 2\,hy + bk = 0$

என்றாகிறது.

§ 69. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. λ-வின் பல மதிப்புகளுக்கு, சமன்பாடு $(2+\lambda)x + (3+\lambda)y + 4 = 0$, குறிக்கும் கோடுகள் யாவும் நிலைத்த புள்ளி ஒன்றின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக. அந்நிலைத்த புள்ளியையும் காண்க.

2. $x - 2y = 0$, $2x - y = 0$ குறிக்கும் கோடுகளை இரண்டு பக்கங்களாகவும், $(2, 3)$-ஐக் குத்துக்கோட்டு மையமாகவும் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தின் சமன்பாட்டை $2x + 3y - 14 = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $m^2 x^2 - y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளை இரண்டு பக்கங்களாகவும், (a, b)-ஐ குத்துக் கோட்டு மையமாகவும் கொண்ட முக்கோணத்தினது மூன்றாவது பக்கத்தின் சமன்பாடு,

$$(1 - m^2)(ax + by) = a^2 - m^2 b^2$$

எனக் காட்டுக.

4. $x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவை. $x + y - 2 = 0$ குறிக்கும் நேர்கோடு, A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ஆதி என்றால், OA, OB என்பன இரு செங்குத்துக் கோடுகள் எனக் காட்டுக.

5. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் நாண் ஒன்றின் சமன்பாடு $x + y - 1 = 0$ என்றால், இந்நாண் வட்டத்தின் மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கும் எனக் காட்டுக.

6. $7x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவின் நாண் ஒன்றின் சமன்பாடு $3x + y - 2 = 0$ என்றால், இந்நாண் நீள் வளைவின் மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கும் எனக் காட்டுக.

7. $y^2 - 4x = 0$ குறிக்கும் பரவளைவினது நாண் ஒன்றின் சமன்பாடு $x - 3y - 4 = 0$ என்றால் இந்நாண், பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணதைதைத் தாங்கும் எனக்காட்டுக.

8. வட்டம் $(a^2+b^2)(x^2+y^2) - a^2 b^2 = 0$-க்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடுகோடு, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ஐ E, F-ல் வெட்டினால், EF ஆனது, நீள்வளைவின் மத்தியில் ஒரு செங் கோணத்தைத் தாங்குகிறது எனக் காட்டுக.

உதவிக் குறிப்பு : தொடுகோட்டின் சரிவு m என்றால் அதன் சமன்பாடு $y = mx + ab \sqrt{\frac{1+m2}{a+b^2}}$.]

9. $2x^2 + 6y^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவின் நாண் ஒன்றின் சரிவு 1. இந்நாண், நீள்வளைவின் மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கினால், நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $x + y^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் நாண் வட்டத்தின் மையத்தில் கோணம் α-வைத் தாங்கினால்,

$$\{a^2 (l^2 + m^2) - 2\}^2 \tan^2 \alpha = 4 \{a^2 (l^2 + m^2) - 1\}$$

எனக் காட்டுக.

11. ஒரு பரவளைவின் நாண் ஒன்று, பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கிக்கொண்டே மாறுகிறது. இந்நாண் எப்பொழுதும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. (4, − 4)

9. $2y = 2x + 1, \; 2y = 2x - 1$.

§ 70. சுற்று வட்டம் (Circum Circle).

இந்தப் பகுதியில்

$$L = 0, \; L' = 0, \; L = 0$$

குறிக்கும் கோடுகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இப்பொழுது சமன்பாடு

$$LL' + \lambda L' L'' + \mu L'' L = 0,$$

ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால், இது ஒரு கூம்புவளைவைக் குறிக்கிறது. இக் கூம்புவளைவானது ஒரு வட்டமாகவும் அல்லது சோடிக் கோடுகளாகவும்கூட இருக்கலாம். இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கவேண்டுமானால்,

$$x^2\text{-ன் குணகம்} = y^2\text{-ன் குணகம்},$$
$$xy\text{-ன் குணகம்} = 0$$

என்றிருக்குமாறு λ, μ-ன் மதிப்புக்களைக் காண வேண்டும்.

§ 71. சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$.

இங்கு, குறிப்பாக,

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தையும்

$$L = lx + my + n = 0$$

குறிக்கும் கோட்டையும் எடுத்துக்கொண்டு, சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$, அதாவது சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda (lx + my + n) = 0$-ஐக் கவனிப்போம். இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டில்,

x^2 ன் குணகம் $=$ y^2-ன் குணகம்,

xy-ன் குணகம் $= 0$

என்று உள்ளது. ஆகவே, அச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. மேலும், $A (x_1, y_1)$ ஆனது, வட்டம் $S = 0$-ஐ, கோடு $L = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்றானால்,

$$S_1 = 0, \ L_1 = 0.$$

இதிலிருந்து வட்டம் $S + \lambda L = 0$, வழிச் செலுகிறது என்று தெரிகிறது. இதேபோல் வட்டம் $S = 0$-ஐ கோடு $L = 0$ வெட்டும் இரண்டாவது புள்ளி B வழியாகவும், வட்டம் $S + \lambda L = 0$ செல்லுகிறது என்பதைக் காணலாம்.

ஆகவே λ, பல வேறுபட்ட மதிப்புக்களைப் பெறும்போது, $S + \lambda L = 0$ பல வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது. இவ் வட்டங்கள் அனைத்தும் A, B வழியாகச் செல்லுகின்றன. இவ் வட்டக் குடும்பத்துக்கு, கோடு $L = 0$, பொது நாணாக அமைகிறது.

A-யும், B-யும் ஒரு புள்ளியாக இணைந்திருந்தால், அதாவது கோடு $L = 0$, வட்டம் $S = 0$ ஐத் தொட்டால், இந்த இணைந்த புள்ளியில், $S + \lambda L = 0$ குறிக்கும் எல்லா வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. இங்கு, கோடு $L = 0$, எல்லா வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடுகோடாக அமையும்.

கோடு $L = 0$, வட்டம் $S = 0$-ஐ

வெட்டாவிட்டால், $S + \lambda L = 0$, ஒன்றையொன்று வெட்டா வட்டங்களைக் குறிக்கும் என்பதை எளிதில் காட்டலாம்.

§ **72.** **சமன்பாடு** $S + \lambda' = 0.$

இங்கு, குறிப்பாக,

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

என்ற வட்டங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது, $\lambda \neq -1$ என்றால் சமன்பாடு $S + \lambda S' + 0$-ல்

$$x^2\text{-ன் குணகம்} = y^2\text{-ன் குணகம்},$$

$$xy\text{-ன் குணகம்} = 0$$

ஆகவே, இச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது. மேலும், வட்டங்கள் $S = 0$, $S' = 0$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால்,

$$S_1 = 0,\ S'_1 = 0\ ;\ S_2 = 0,\ S'_2 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$\lambda = -1$ என்றால், $S + \lambda S' = 0$ ஆனது $S - S' = 0$ ஏன்றுகிறது. இது A, B வழிச் செல்லும் நேர் கோட்டைக் குறிக்கிறது. λ-ஆனது பல மதிப்புக்களைப் பெறும்போது, கீழ்க்காணும் விளைவுகளையும், § 71-ல் பயன்படுத்தப்பட்ட முறைகளாலேயே, அடையலாம்.

(i) வட்டம் $S = 0$-ஐ வட்டம் $S' = 0$ ஆனது A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், வட்டங்கள் $S + \lambda S' = 0$ அனைத்தும் A, B வழியே செல்லுகின்றன. இங்கு AB, பொது நாணாக அமைகிறது. AB-இன் சமன்பாடு, $S - S' = 0$ ஆகும்.

(ii) வட்டம் $S = 0$-ஐ வட்டம் $S' =$ ஆனது A-இல் தொட்டால், வட்டங்கள் $S + \lambda S' = 0$ ஆனது ஒன்றையொன்று A-யில் தொடுகின்றன. இங்கு $S - S' = 0$ குறிக்கும் கோடு பொதுத்தொடு கோடாகிறது.

(iii) வட்டம் $S{=}0$-ஐ வட்டம் $S'{=}0$ ஆனது வெட்டாவிடில், $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் யாவும் ஒன்றையொன்று வெட்டா வட்டங்களாகின்றன. $\lambda = -1$ ஆக இருக்கும்போது $S + \lambda S' = 0$ ஆனது $S - S' = 0$ என்றாகி, மேற்கண்ட எல்லா வட்டத்தையும் வெட்டா நேர் கோடாகிறது.

§ 73. $S+\lambda L=0$, $S+\lambda S'=0$ குறிக்கும் வட்டக் குடும்பங்களின் சமத்தொடு அச்சுகள்

முதலில் வட்டக்குடும்பம் $S+\lambda L=0$-இல், $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ தரும் இரண்டு வட்டங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்.

$$S+\lambda_1 L=0,\ S+\lambda_2 L=0.$$

இச் சமன்பாடுகள் திட்டமானவை. ஆகவே, இவைகளின் சமத்தொடு அச்சின் சமன்பாடு.

$$(S+\lambda_1 L)-(S+\lambda_2 L)=0,$$

அல்லது $(\lambda_1-\lambda_2)L=0.$

ஆனால் $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, ஆகவே, இச் சமன்பாடானது

$$L=0$$

என்றுகிறது. இதிலிருந்து, $S+\lambda L=0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் அனைத்தும் இரண்டு இரண்டாக எடுக்கப்பட்டபோது, $L=0$ குறிக்கும் ஒரே கோட்டை சமத்தொடு வச்சாகக் கொண்டுள்ளன எனத் தெரிகிறது. மேலும்,

(i) வட்டங்கள், வெட்டும் வட்டங்கள் என்றால் $L=0$, பொதுச் சமவச்சாகவும்,

(ii) வட்டங்கள் தொடும் வட்டங்கள் என்றால் பொதுத் தொடு கோடாகிய $L=0$ பொதுச் சமத்தொடுஅச்சாகவும் உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது.

(ii) வட்டங்கள் வெட்டா வட்டங்கள் என்றால் அவ்வட்டங்களை வெட்டாத கோடாகிய $L=O$, பொதுச் சமத் தொடு அச்சாகவும்.

அடுத்ததாக, வட்டக் குடும்பம் $S+\lambda S'=0$-ல், $\lambda=\lambda 1$, $\lambda=\lambda_2$ தரும் இரண்டு வட்டங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இவ் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$S+\lambda_1 S'+0,\quad S+\lambda_2 S'=0.$$

இவைகளைத் திட்டமான தன்மையில் அமைக்க முறையே, $1+\lambda_1$, $1+\lambda_2$ என்பனவற்றால் வகுக்கவேண்டும். அப்போது, சமன்பாடுகள்

$$\frac{S+\lambda_1 S'}{1+\lambda_1}=0,\ \frac{S+\lambda_2 S'}{1+\lambda_2}=0$$

என்றுகின்றன. ஆகவே, இவ்வட்டங்களின் சமத் தொடுவச்சின் சமன்பாடாவது,

$$\frac{S + \lambda_1 S'}{1 + \lambda_1} - \frac{S + \lambda_2 S'}{1 + \lambda_2} = 0$$

அல்லது, $(1 + \lambda_2)(S + \lambda_1 S) - (1 + \lambda_1)(S + \lambda_2 S') = 0$

அல்லது, $(\lambda_2 - \lambda_1)(S - S') = 0$

அல்லது, $S - S' = 0$.

இதிலிருந்து, $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் அனைத்தும், இரண்டு இரண்டாக எடுக்கப்பட்டபொழுது, $S - S' = 0$ குறிக்கும் ஒரே கோட்டை சமத்தொடுவச்சாகக் கொண்டுள்ளன என்றும், இப் பொதுக்கோடு,

(i) வட்டங்கள், வெட்டும் வட்டங்களானுல்; பொது நாணகவும்,

(ii) வட்டங்கள், தொடு வட்டங்களானுல், பொதுத் தொடு கோடாகவும்,

(iii) வட்டங்கள், வெட்டா வட்டங்களானுல், இவ் வட்டங்களில், ஒன்றையும் வெட்டாத கோடாகவும் அமைகின்றன என்பது வெளியாகின்றது

§ 74. **வட்டக் குடும்பங்களின் சமன்பாடுகளைக் காணும் முறை:**

ஒரு வட்டக் குடும்பத்தில் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $S = 0$ என்றும், பொதுத்தொடுவச்சின் சமன்பாடு $L = 0$ என்றும் இருந்தால், வட்டக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டை

$$S = \lambda L + 0$$

என எழுதலாம்.

குடும்பத்தைச் சேர்ந்த இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $S = 0, = S' = 0$ என்றிருந்தால், குடும்பத்தின் சமன் பாட்டை

$$S + \lambda S' = 0$$

என்ற வடிவிலும் அல்லது மாற்று வடிவில்

$$S + \lambda (S - S') = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இதில் இரண்டாவது வடிவம் கணக்குகளை எளிதில் செய்யப் பயன்படுகிறது.

§ **75. மாதிரிக் கணக்குகள்**

கணக்கு 1.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ கோடு $x - 5y + 1 = 0$ இரண்டும் A, B, என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. A, B, வழியாகவும், $(1, -2)$ வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க,

A, B வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$(x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1) + \lambda\ (x - 5y + 1) = 0$$

என்று எழுதலாம். இவ் வட்டம் $(1, -2)$ வழியாகவும் செல்லுவதால்,

$$(1 + 4 + 2 - 12 + 1) + \lambda\ (1 + 10 + 1) = 0.$$

அதாவது $12\lambda - 4 = 0$

அல்லது $\lambda = \frac{1}{3}$.

ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1) + \frac{1}{3}\ (x - 5y + 1) = 0$$

அல்லது $3x^2 + 3y^2 + 7x\ 13y + 4 = 0$
என்ருகிறது.

கணக்கு 2.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$-ஐக் கோடு $2x + 3y - 1 = 0$ ஆனது A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A, B வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5) + \lambda\ (2x + 3y - 1) = 0$$

அல்லது $x^2 + y^2 + 2(1 + \lambda)x + 3x(1 + \lambda)y - (5 + \lambda) = 0$
என்று எழுதலாம். இவ் வட்டம் AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்டுள்ளதால், இதன் மையம், AB-ன் மேல் அமையும். ஆனல் வட்டத்தின் மையமானது,

$$\left\{ -(1 + \lambda), -\frac{3}{2}(1 + \lambda) \right\}.$$

ஆகவே, $-2(1+\lambda)-\frac{9}{2}(1+\lambda)- = 0$

அல்லது $\lambda = -\frac{15}{13}$.

இதனால், வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2x+3y-5-\frac{15}{13}(2x+3y-1)=0$$

அல்லது, $13x^2+13y^2-4x-6y-50=0$
என்றாகிறது.

கணக்கு 3.

வட்டம் $S = x^2+y^2-x+2y=0$-ஐ வட்டம் $S'=0$ $x^2+y^2-5x-6y+4=0$ ஆனது A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. A, B வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, கோடு $2x-y+3=0$-ஐத் தொடுகிறது என்றால், அதன் சமன் பாட்டைக் காண்க.

$S=0$, $S'=0$ என்ற வட்டங்களின் பொது நாண் AB-ன் சமன்பாடு $S-S'=0$ ஆகும். அதாவது,

$$(x^2+y-x+2y)-(x^2+y^2-5x-6y+4)=0$$

அல்லது, $L=x+2y-1=0$ என்பது ABயின் சமன்பாடும் A, B என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச்சென்று, $2x-y+3=0$ என்ற கோட்டைத் தொடுமாறும் உள்ளவட்டத்தின் சமன்பாடு, $S+\lambda L=0$ என்பதாகும்.

அதாவது, $x^2+y^2-x+2y+\lambda(x+2y-1)=0$ ... (1)
அல்லது, $x^2+y^2+(-1+\lambda)x+2(1+\lambda)y-\lambda=0$
என்று எழுதலாம். இவ் வட்டத்தின் மையத்தை C எனவும், ஆரத்தை r எனவும் C-யிலிருந்து தொடுகோடு $2x-y+3=0$-க்கு உள்ள தூரத்தை p எனவும் குறித்தால், $p^2=r^2$ ஆகும். இப்பொழுது

$$C \equiv \left\{\frac{1-\lambda}{2}, -(1+\lambda)\right\},$$

$$p^2 = \frac{\{(-\lambda)+(1+\lambda)+3\}^2}{4+1} = 5,$$

$$r^2 = \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^2 + (1+\lambda)^2 + \lambda.$$

ஆகவே, $\frac{(1-\lambda)^2}{2^2} + (1+\lambda)^2 + \lambda = 5.$

அதாவது, $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$

ஆகவே, $(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0.$

அதாவது $\lambda = 1$ அல்லது -3. (1)-இல் $\lambda = 1$ எனவும், $\lambda = -3$ எனவும் பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு உகந்தவாறு இரண்டு வட்டங்கள் உண்டு எனவும், அவைகளின் சமன்பாடுகள்

$x^2 + y^1 + 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

என்பன என்றும் தெரிகிறது.

கணக்கு 4.

ஒரு வட்டக் குடும்பத்தில், எந்த இரண்டு வட்டங்களும் $x + 2y + 9 = 0$ என்ற கோட்டை சமத் தொடுவச்சாகக் கொண்டுள்ளன. இவ் வட்டக் குடும்பத்தில் ஒன்று, $x^2 + y^2 - 4 = 0$-ஐச் சமன்பாடாக் கொண்டிருந்தால், புள்ளி (1, 1) வழியாகச் செல்லும் உறுப்பினரின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வேண்டிய சமன்பாட்டை $(x^2 + y^2 - 4) + \lambda(x + 2y + 9) = 0$ என்று எழுதலாம். இச்சமன்பாட்டை (1, 1) திருப்தி செய்வதால்,

$$(1 + 1 - 4) + \lambda(1 + 2 + 9) = 0$$

அல்லது, $\lambda = \frac{1}{6}.$

ஆகவே, $6(x^2 + y^2 - 4) + (x + 2y + 9) = 0$ என்பது வேண்டிய சமன்பாடாகிறது.

§ 76. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடுகள் $y - 2x = 0$, $y - 3x = 0$, $5x - y + 4 = 0$, ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் குறித்தால், அம் முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு :

சமன்பாட்டை $\lambda(y - 2x)(y - 3x) + \mu(y - 3x)(5x - y + 4) + (5x - y + 4)(y - 2x) = 0$ எனக்கொண்டு

x^2-ன் குணகம் $= y^2$- ன் குணகம் என்றும், xy- ன் குணகம் $= 0$ என்றும் இருக்குமாறு λ -வையும், μ வையும் காண்க.]

2. சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 3x - y - 30 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, சமன்பாடு $x + y - 10 = 0$ குறிக்கும் கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும், புள்ளி $(-2, 4)$ வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $x^2 + y_1 - 3x - 9y + 10 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, $x - 7y + 30 = 0$ குறிக்கும் கோடு, வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகவும், புள்ளி $(7, 1)$ வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை $y - 4 = 0$ குறிக்கும் கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் மையம், $x + 2y - 5 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின் மேல் அமைந்தால், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

5. $x^2 + y^2 - x - y - 42 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, $3x + y - 22 = 0$ குறிக்கும் கோடு ஒன்று, வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் மையம், $3x + y - 22 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின் மேல் அமைந்தால், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

6. $x^2 + y^2 + x - 2y - 41 = 0$ குறிக்தும் வட்டத்தை $12x + 5y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோடு, வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் ஆரம் $6\frac{1}{2}$ என்ருல், வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

7. $x^2 + y^2 + 3x + y + 2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, $7x + 3y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் ஆரம் 2 என்ருல், வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

8. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, $y - 4 = 0$ குறிக்கும் சோடு, வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $x - 7 = 0$ குறிக்கும் கோட்டைத் தொட்டால், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 + 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, $3x + 3y + 1 = 0$ குறிக்கும் கோடு, வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $x + 3y - 7 = 0$ குறிக்கும் கோட்டைத் தொட்டால், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $x_1 + y^2 + x^2 + 6y + 1 = 0$ குறிக்கும் வட்டமானது, $x^2 + y^2 + 3x + y + 2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $(1, -2)$வழியாகச் செல்லுகின்றது. இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

11. $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + 4y - 12 = 0$ என்பன குறிக்கும் வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 + x + 2y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ குறிக்கும் மட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் ஆரம் 1 என்ருல், அவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5=0$, $x^2 + y^2-5x-6y+4= 0$ குறிக்கும் வட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $2x - y + 3 = 0$ குறிக்கும் கோட்டைத் தொடுகிறது. இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $(x - a)^2 + (y - b^2) = c^2$, $(x - b)^2 + (y - a)^2=c^2$ குறிக்கும் வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளமானது,

$$\sqrt{4c^2 - 2(a - b)^2}$$

எனக் காட்டுக.

15. வட்டங்கள் $x^2 + y^2 - 400 = 0$-உம் $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120 = 0$-உம் ஒன்றை ஒன்று தொடுகின்றன எனக் காட்டுக. இவ் வட்டங்களின் தொடுபுள்ளியிடத்து, இவ் வட்டங்களைத் தொடும் மூன்ருவது வட்டம் ஒன்று, (100,0) வழியாகச் செல்லுகிறது என்ருல், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. புள்ளி (1, 2) வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று, $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது. மேலும் இவ் வட்டம், $x^2 + y^2 - 9 = 0$

குறிக்கும் வட்டத்தின் பரிதியை (circumference) இரண்டு சம கூறுக்குகிறது. இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : வேண்டிய சமன்பாட்டை $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக்கொள்க. இது குறிக்கும் வட்டத்திற்கும், $S' = x^2 + y^2 - 9 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்திற்கும் பொதுவான நாணாகிய $S - S' = 2gx + 2fy + c + 9 = 0$ ஆனது, வட்டம் $x^2 + y^2 - 9 = 0$-ன் மையத்தின் வழியாகச் செல்லுகிறது.]

17. $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு, $x^2 + y^2 + 2x^2 + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தை A, B என்ற புள்ளிகளிலும், $l'x + m'y + n' = 0$ என்ற கோடு, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ என்ற வட்டத்தை A', B' என்ற புள்ளிகளிலும் வெட்டுகின்றன. A, B, A', B' ஆகியவை ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமைந்தால்,

$$\begin{vmatrix} 2(g - g') & 2(f - f') & c - c' \\ l & m & n \\ l & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : A, B, A', B' வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை இருவிதமாக

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda(lx + my + n) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2gx' + 2f'y + c' + \mu(l'x + m'y + n') = 0$$

என்று எழுதலாம். பின்பு குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது.

$$2g + \lambda l = 2g' + \mu l'$$

$$2f + \lambda m = 2f'' + \mu m'$$

$$c + \lambda n = c' + \mu n'.]$$

விடைகள்

1. $3x^2 + 3y^2 - 60x + 40y = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

3. $x^2 + y^2 4x - 2y - 20 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x - 3y - 16 = 0$

5. $x^2 + y^2 - 13x - 5y + 46 = 0$

6. $x^2 + y^2 + x - 2y - 41 = 0$

7. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, \quad 29(x^2 + y^2) + 136x + 50y + 65 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0, \; x^2 + y^2 - 4x - 14y + 28 = 0$

9. $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0, \; 9(x^2 + y^2) + 291x + 291y + 82 = 0$

10. $3(x^2 + y^2) + 7x + 13y + 4 = 0$

11. $5(x^2 + y^2) - 8x - 16y + 12 = 0$

12. $5(x^2 + y^2) - 6x - 12y + 4 = 0, \; x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

13. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, \; x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$

15. $x^2 + y^2 - 200x - 480y + 10{,}000 = 0$

16. $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$

§ 77. பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி (Coaxal System of Circles.)

ஒரு வட்டக்குழுவில் எந்த இரண்டு வட்டங்களை எடுத்துக் கொண்டாலும், அவைகள் ஒரே கோட்டை, சமத்தொடுவச்சாகக் கொண்டிருந்தால், இவ் வட்டக்குழுவிற்குப் பொதுவச்சு வட்டத் **தொகுதி** எனப் பெயர். இவ் வரையறையிலிருந்து, § 73-ல் கண்ட சமன்பாடுகள், $S + \lambda L = 0$-உம், $L + \lambda L' = 0$-உம் இரண்டு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிகளைக் குறிக்கின்றன என்பது தெளிவாகிறது. இத் தொகுதிகளின் பொதுச் சமத்தொடு அச்சுகளை முறையே $L = 0$-உம், $S - S' = 0$-உம் குறிக்கின்றன என்பதை அங்கு கண்டோம்.

இப்பொழுது, ஒரு பொதுவச்சு வட்டங்களின் மையங்களின் இட அமைப்மைப் பச்றிப்படிப்போம். இவ் வட்டங்களில் மூன்றின் மையங்களை C_1 C_2, C_3 எனக் கொள்வோம். இரண்டு வட்டங்களின் மையக் கோடு, அவ் வட்டங்களின் சமத்தொடுவச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளதால், $C_1 C_2$, $C_1 C_3$. இரண்டுமே தொகுதியின்

பொதுச் சமத் தொடுகோட்டு அச்சுக்கு செங்குத்தாக உள்ளன. ஆகவே கோடுகள் $C_1 C_2$-உம், $C_1 C_3$-உம் பொருந்திய கோடுகள் என்று தெரிகிறது. அதாவது புள்ளிகள் C_1, C_2, C_3 மூன்றும், பொதுச்சமத் தொடுவச்சுக்குச் செங்குத்தான ஒரு கோட்டில் இருக்கின்றன எனத் தெரிகிறது. அதாவது வட்ட மையங்கள் அனைத்தும் ஒரே கோட்டில் இருக்கின்றன.

§ 78. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் எளிய சமன்பாடு

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் வட்டங்களின் மையங்கள் ஓர் கோட்டில் அமைகின்றன் என்றும், இந்தக் கோடு, பொதுச் சமத்தொடுவச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது என்றும் கண்டோம். இப்பொழுது, வட்டங்களின் மையக் கோட்டை x-அச்சாகவும், பொதுச் சமதொடுவச்சை y- அச்சாகவும் கொள்வோம்.

பொதுப் படையாகத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

எனக் கொண்டால், g, f, c முதலியவற்றின் மதிப்புகள் வட்டத்திற்கு வட்டம் மாறும். இம் மாறும் தன்மையை இப்போது ஆராய்வோம். வட்டங்களின் மையங்கள் $(-g, -f)$, அவைகள் x-அச்சின் மேல் உள்ளதாலும், f, எல்லா வட்டங்களுக்கு பூச்சிய மாகிறது. ஆனால், g மாத்திரம் வட்டத்திற்கு வட்டம் மாறுகிறது.

இப்பொழுது c-ன் தன்மையைப் பார்ப்போம். இதற்காக, y-அச்சின்மீது ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு அதனை $(0, k)$ எனக் கொள்வோம். இப் புள்ளியிலிருந்து தொகுதியின் வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் சமமாகும். குறிப்பாக, சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c_1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c_2 = 0,$$

குறிக்கும் தொகுதியின் வட்டங்களை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\sqrt{0^2 + k_2 + 0 + c_1} = \sqrt{0^2 + k^2 + 0 + c_2}$$

என்றாகிறது. அதாவது $c_1 = c_2$ என்றாகிறது. இதிலிருந்து, எல்லா வட்டங்களுக்கும் c மாருதது எனத் தெரிகிறது. ஆகவே தொகுதியின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$$

என எழுதினுல், வெவ்வேறு வட்டங்களுக்கு λ, வெவ்வேறு மதிப்புகளையுடையது என்றும், ஆனுல், c மாறிலி என்றும் கிடைக்கிறது. இவ்விதமான λ-வுக்குத் தொகுதியின் சாரா மாறி (Parameter) என்று பெயர்.

§ 79. எல்லைப் புள்ளி (Limiting Points)

பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிகள், வெட்டும் தொகுதி, தொடும் தொகுதி, வெட்டாத் தொகுதி என மூன்று வகைப்படும் என்பதை § 73-லிருந்து காணலாம். வெட்டாத் தொகுதியிலும், தொடும் தொகுதியிலும், மிகச் சிறிய வட்டத்தின் ஆரமானது பூச்சியமாய் இருக்கும். இவ் வட்டங்கள், தொகுதியின் **புள்ளி வட்டங்கள்** (Point circles) என்றும், இவ் வட்டங்களின் மையங்கள், தொகுதியின் எல்லைப் **புள்ளிகள்** என்று அழைக்கப் படுகின்றன. இப்பொழுது

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$$

குறிக்கும் புள்ளி வட்டங்களையும், எல்லைப் புள்ளிகளையும் காண்போம். இத் தொகுதியைச் சார்ந்த வட்டங்களின் ஆரங்கள்

$$\sqrt{\lambda^2 - c}$$

ஆகும் ஆகவே, c ஒரு மிகை எண்ணுயிருந்தால், புள்ளி வட்டங்களைத் தரும் λ-வின் மதிப்புகளை, $\lambda^2 - c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\lambda = +\sqrt{c}, \quad \lambda = -\sqrt{c}$$

எனப் பெறுகிறோம். இப் புள்ளிவட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{c}\,x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{c}\,x + c = 0$$

ஆகும். மேலும், வட்டங்களின் மையங்களான $(-\sqrt{c}, 0)$, $(\sqrt{c}, 0)$ இரண்டும் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகின்றன.

குறிப்பாக, c பூச்சியமானுல் இந்த இரண்டு எல்லைப் புள்ளிகளும் ஆதியுடன் இணைந்து ஒரு புள்ளியாக மாறுகின்றன.

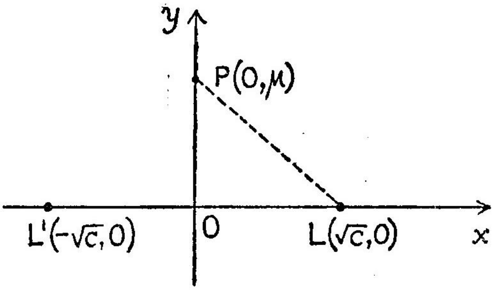
§ 80. செங்குத்துப் பொதுவச்சுத் தொகுதி (Orthogonal Co-axal System).

ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு வட்டமும் தொகுதியின் எல்லா

வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டும் என்பதை இப் பகுதியில் காண்போம். இதற்காக, குறிப்பீட்டச்சுகளை, § 78-ல் உள்ளவாறு கொண்டு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0 \qquad (80{\cdot}1)$$

என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். (படம் 35) அப்படியாயின், புள்ளிகள் $L(\sqrt{c}, 0)$, $L'(-\sqrt{c}, 0)$ இரண்டும் தொகுயிதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் ஆகின்றன.



படம் 35

இப்பொழுது L, L' வழியாகச் செல்லும் எந்த வட்டத்தின் மையமும் y-அச்சின் மேல் அமையும். இம் மையமும் $P(0, \mu)$ என்றால், இவ் வட்டத்தின்

$$\text{ஆரம்} = Ph$$
$$= \sqrt{OP^2 + OL^2}$$
$$= \sqrt{\mu^2 + c}$$

ஆகவே இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடானது,

$$(x - 0)^2 + (y - \mu)^2 = \mu^2 + c$$

அல்லது $$x^2 + y^2 - 2\mu y - c = 0. \qquad (80{\cdot}2)$$

μ-வைச் சாரா மாறி ஆகக்கொண்டால், இச் சமன்பாடானது, L, L வழியாகச் செல்லும் பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியைக் குறிப்பதைக் காணலாம். மேலும், (80·2) குறிக்கும் வட்டங்கள் யாவும் (80·1) குறிக்கும் வட்டங்கள் யாவற்றையும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம்.

§ 81. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

ஒரே கோட்டைத் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்ட மூன்று வட்டங்களில், ஒரு வட்டத்தின்மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி யிலிருந்து மற்ற இரண்டு வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள், மாருவிகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

வட்டங்களின் மையக் கோட்டையும், பொதுச் சமத் தொடுவச்சையும், x-அச்சாகவும், y-அச்சாகவும் கொண்டால், வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2\lambda_3 x + c = 0,$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். முதல் வட்டத்தின்மேல் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_1 x + c = 0$$

அதாவது $x_1^2 + y_1^2 + c = -2\lambda_1 x_1$ ...(1)

இப்பொழுது (x_1, y_1)-லிருந்து இரண்டாவது வட்டத்திற்கும், மூன்ருவது வட்டத்திற்கும் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்களின் விகிதம்

$$= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_2 x_1 + c}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda_3 x_1 + c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2 + c) + 2\lambda_2 x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + c) + 2\lambda_2 x_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-2\lambda_1 x_1) + 2\lambda_2 x_1}{(-2\lambda_1 x_1) + 2\lambda_3 x_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}}$$

இது ஒரு மாறிலி.

கணக்கு 2.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$. தொகுதியின் பொதுச் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாடு $x + y - 5 = 0$ என்றால், தொகுதியின் எல்லையான புள்ளிகளைக் காண்க.

தொகுதியின் சமன்பாடாவது,

$$x^2 + y^2 - x - 3y + \lambda (x + y - 5) = 0.$$

அதாவது $x^2 + y^2 + (-1 + \lambda) x$
$$+ (-3 + \lambda) y \quad 5\lambda = 0, \qquad (1)$$

தொகுதியின் புள்ளி வட்டங்களின் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கும் λ-வின் மதிப்புகளை அடைய, (1)-ல் ஆரத்தைக் கண்டு, அதைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தவேண்டும்.

ஆகவே,

$$\sqrt{\left(\frac{-1 + \lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3 + \lambda}{2}\right)^2 + 5\lambda} = 0.$$

அதாவது, $(-1 + \lambda)^2 + (-3 + \lambda)^2 + 20\lambda = 0.$

அதாவது, $2\lambda^2 + 12\lambda + 10 = 0.$

அதாவது, $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$

அதாவது, $(\lambda + 1)(\lambda + 5) = 0.$

ஆகவே, $\lambda = -1$, $\lambda = -5$. இவ் விரு மதிப்புகளையும் (1)-ல் பிரதியிட, புள்ளி வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

எனக் கிடைக்கின்றன. எல்லையான புள்ளிகள், இப் புள்ளி வட்டங்களின் மையங்களாகையால், அவைகள் (1, 2), (3, 4) எனவும் கிடைக்கின்றன.

கணக்கு 3.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் வட்டங்கள் இரண்டின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$$

என்றால், தொகுதியின் எல்லையான புள்ளிகளைக் காண்க.

தொகுதியின் பொதுச் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாடானது,

$$(x^2 + y^2 - 2y - 5) - (x^2 + y^2 + 2x - 15) = 0$$

அல்லது $-2x - 2y + 10 = 0$

அல்லது $x + y - 5 = 0.$

ஆகவே, தொகுதியின் சமன்பாட்டை,

$$x^2 + y^2 - 2y - 5 + \lambda (x + y - 5) = 0$$

அல்லது $x^2 + y^2 + \lambda x + (-2 + \lambda) y - 5(1 + \lambda) = 0 \quad \ldots (1)$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து ஆரத்தின் வர்க்கத்தைப் பூச்சியத்துக்குச் சமப்படுத்தக் கிடைப்பதாவது :

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2 + \lambda}{2}\right)^2 + 5(1 + \lambda) = 0$$

அல்லது $\lambda^2 + (4 - 4\lambda + \lambda^2) + (20 + 20\lambda) = 0$

அல்லது $2\lambda^2 + 16\lambda + 24 = 0$

அல்லது $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$

அல்லது $(\lambda + 2)(\lambda + 6) = 0.$

ஆகவே, $\lambda = -2$, $\lambda = -6$ இம் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட புள்ளி வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

எனக் கிடைக்கின்றன. இதிலிருந்தும் அல்லது வேறு விதமாகவும் எல்லையான புள்ளிகள் (1, 2), (3, 4) என்று பெறலாம்.

கணக்கு 4.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியில் ஓர் எல்லைப் புள்ளி (3, 4) என்றும், பொதுச்சமத்தொடு அச்சு $x+y-5 = 0$ என்றும் இருந்தால், தொகுதியின் அடுத்த எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

(3, 4)-ச் சார்ந்த புள்ளிவட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-3)^2+(y-4)^2=0^2.$$

அதாவது, $x^2+y^2-6x-8y+25=0.$

ஆகவே, தொகுதியின் சமன்பாட்டையும், அதன் வட்ட மையங்களையும்,

$$(x^2+y^2-6x-8y+25)+\lambda(x+y-5)=0$$

$$\left\{\frac{6-\lambda}{2},\ \frac{8-\lambda}{2}\right\} \quad \dots (1)$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து எல்லையான புள்ளியை

$$\left(\frac{6-\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{8-\lambda}{2}\right)^2-(25-5\lambda)=0$$

அல்லது $(6-\lambda)^2+(8-\lambda)^2-(100-20\lambda)=0$

அல்லது $2\lambda^2-8\lambda=0$

என்பதிலிருந்து $\lambda=0$, $\lambda=4$ எனப் பெற்று (1)-ல் பிரதியிட்டு, எல்லையான புள்ளிகளை (3, 4), (1, 2) எனப் பெறலாம். இப் புள்ளிகளில் (1, 2) தான் வேண்டிய புள்ளி.

கணக்கு 5.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியில் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+3x+y-20=0$ என்றிருக்கிறது. (1, 2) ஆனது தொகுதியின் ஓர் எல்லைப் புள்ளி என்றால், தொகுதியின் அடுத்த எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

எல்லைப் புள்ளி (1, 2)-ஐச் சார்ந்த புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0^2.$$

அதாவது, $x^2+y^2-2x-4y+5=0.$

ஆகவே, தொகுதியின் பொதுச்சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு,

$$(x^2+y^2+3x+y-20)-(x^2+y^2-2x-4y+5)=0.$$

அதாவது, $5x+5y-25=0.$

அதாவது, $x+y-5=0.$

ஆகவே, தொகுதியின் சமன்பாட்டை

$$(x^2 + y^2 + 3x + y - 20) + \lambda (x + y - 5) = 0$$

அல்லது,

$$x^2 + y^2 + (3 + \lambda) x + (1 + \lambda) y - (20 + 5\lambda) = 0 \quad (1)$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து ஆரத்தின் வர்க்கத்தைக் கண்டு பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தினுல் கிடைப்பதாவது :

$$\left(\frac{3 + \lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right)^2 + (20 + 5\lambda) = 0.$$

அதாவது, $(3 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + 80 + 20\lambda = 0.$

அதாவது, $2\lambda^2 + 28\lambda + 90 = 0.$

அதாவது, $\lambda^2 + 14\lambda + 45 = 0.$

அதாவது, $(\lambda + 5)(\lambda + 9) = 0.$

ஆகவே, $\lambda = -5$, $\lambda = -9$. (1)-ல், வட்ட மையமானது

$$\left(-\frac{3 + \lambda}{2}, \frac{-1 + \lambda}{2}\right)$$

ஆகும். ஆகையால் இதில் $\lambda = -5$ எனப் பிரதியிட்டு, ஓர் எல்லைப் புள்ளியை (1, 2) என்றும், $\lambda = -9$ எனப் பிரதியிட்டு அடுத்த புள்ளியை (3, 4) என்றும் பெறுகிறேம். ஆகவே, வேண்டிய எல்லைப் புள்ளி (3, 4) என்ருகிறது.

§ 82. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. P என்ற ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து நிலையான இரண்டு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்களின் விகிதம் ஒரு மாறிலியாஞல், P-யின் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் எனவும், இம் மூன்று வட்டங்களும் ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியை அமைக்கின்றன எனவும் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c = 0, \quad x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c = 0$$

என்றிருக்குமாறு x, y-அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க. P ஆனது (x_0, y_0) என்ருல்,

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\lambda_1 x_0 + c = k^2 (x_0^2 + y_0^2 + 2\lambda_2 x_0 + c)].$$

2. மூன்று வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2-2\lambda_1 x-c^2=0,\ x^2+y^2-2\lambda x_2-c^2=0,$$
$$x^2+y^2-2\lambda_3 x-c^2=0$$

என்பன. இவ்வட்டங்களின் மையங்கள், ஆதியிலிருந்து இருக்கும் தூரங்கள் ஒரு பெருக்கல் தொடரில் (geometric progression)-ல் இருந்தால், சமன்பாடு $x^2+y^2-c^2=0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் எப் புள்ளியிலிருந்தும், இம் மூன்று வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்களும் ஒரு பெருக்கல் தொடரில் அமையும் எனக் காட்டுக.

3. இரண்டு வடடங்களை மூன்றாவதொரு வட்டம் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது என்றால், முதலிரு வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சானது, மூன்றாவது வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லுகிறது எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு :— முதலிரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை

$$x^2+y^2+2\lambda_1 x+c=0,\ x^2+y^2+2\lambda_2 x+c=0$$

என்றிருக்குமாறு x, y அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க.

மேலும், மூன்றாவது வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2+y^2+2gx+2fy+c_1=0$ எனக் கொள்க.]

4. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் பொதுச் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாடு, $x+y-5=0$, தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2+y^2-5x-3y+8=0$ என்றால், தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

5. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் பொதுச் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாடு, $x+y-3=0$, தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-4=0$ என்றால், தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

6. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2+y^2+x-2y-5=0$$
$$x^2+y^2+3x+2y-23=0$$

என்றால், தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

7. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் இரண்டு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2 + y^2 + 4x + - 6y - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 7y - 5 = 0$$

என்றால், தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

8. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள், (3, 2), (2, 3) என்றால் தொகுதியின் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$. $(-1, 3)$ என்ற புள்ளி தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்றானால், தொகுதியின் சமத்தொடுவச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. ஒரு சமத்தொடுவச்சுத் தொகுதியின் பொதுச் சமத் தொடுவச்சின் சமன்பாடு, $3x - y + 1 = 0$. இத் தொகுதியின் எல்லையான புள்ளிகளில் ஒன்று, $(-1, 3)$ என்றால், அடுத்த எல்லையான புள்ளியைக் காண்க.

11. ஒரு சமத்தொடுவச்சுத் தொகுதியின் பொதுச் சமத் தொடுவச்சின் சமன்பாடு, $2x + 4y - 5 = 0$. இத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று ஆதியானால், அடுத்த எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

12. ஒரு சமத் தொடுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 - 6 = 0$. இத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று $(1, 1)$ என்றால், அடுத்த எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

13. ஒரு சமத் தொடுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. இத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று $(2, 2)$ என்றால், அடுத்த எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

விடைகள்

4. (3, 2), (3, 2)
5. (1, 1), (1, 1)
6. (0, 2), (2, 6)
7. (0, 2), (4, 0)

8. $x - y = 0$ 9. $x - 7y + 14 = 0$

10. (2, 2) 11. (1, 2)

12. (3, 3) 13. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

§ 83. இரண்டு கூம்புவளைவுகளின் பொதுப்புள்ளிகள் (Common Points of Two Conics)

பொதுவாக, ஒரு கூம்புவளைவை மற்றொரு கூம்புவளைவு நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறதென்பதை இப் பகுதியில் காட்டுவோம். இதற்காகச் சமன்பாடுகள்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \quad (83{\cdot}1)$$

$$a'_1x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \quad (83.2)$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது,

$$a_0 = b, \qquad a'_0 = b',$$

$$a_1 = 2(hx + f), \qquad a'_1 = 2(h'x + f')$$

$$a_2 = ax^2 + 2gx + c, \qquad a_2' = a'x^2 + 2g'x + c'$$

எனக் குறித்து, (83·1)-ஐயும், (83·2)-ஐயும்

$$a_0y^2 + a_1y + a_2 = 0,$$

$$a'_0y^2 + a'_1y + a_2' = 0$$

என்று எழுதலாம். இதனால்,

$$\frac{y^2}{a_1 a_2' - a_2 a_1'} = \frac{y}{a_2a_0' - a_0a_2'} = \frac{1}{a_0a_1' - a_1a_0'}$$

என்று கிடைக்கிறது. இவைகளிலிருந்து y-ஐ நீக்க

$$(a_2a_0' - a_0a_2')^2 - (a_1a_2' - a_2a_1')(a_0a_1' - a_1a_0') = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாடு x-ல் நான்கு படிகள் கொண்டது என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, கூம்புவளைவு (83·1), கூம்புவளைவு (83.2) இரண்டும், பொதுவாக நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

§ 84. சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$-ன் தொடர்ச்சி.

சமன்பாடுகள்

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

$$S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

இரண்டு கூம்புவளைவுகளைக் குறிக்கின்றன என்பதை அறிவோம். இப்பொழுது, $S + \lambda S' = 0$ என்பதும் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால், அதுவும் ஒரு கூம்புவளைவைக் குறிக்கின்றது. இக் கூம்புவளைவானது கூம்புவளைவு $S = 0$, கூம்புவளைவு $S' = 0$ இரண்டின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லுகின்றது என்பது எளிதில் தெரிகின்றது.

சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$-ல், λ-வின் மதிப்புகளை மாற்றி, எண்ணிக்கையில்லாக் கூம்புவளைவுகளைப் பெறலாம். எனினும், இந்தக் கூம்புவளைவுகளில் இரண்டுதான் பரவளைவாய் இருக்கும் என்பதையும், ஒன்றுதான் செவ்வக அதிபரவளைவாய் இருக்கும் என்பதையும் இப்பொழுது நிறுவுவோம். $S + \lambda S' = 0$-ஐ விரித்தெழுத

$$(a + \lambda a')x^2 + 2(h + \lambda h')xy + (b + \lambda b')y^2$$
$$+ 2(g + \lambda g')x + 2(f + \lambda f')y + (c + \lambda c') = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. (44·3)-ல் கூறியபடி

$$(h + \lambda h')^2 - (a + \lambda a')(b + \lambda b') = 0 \qquad (84{\cdot}1)$$

என்றால், $S + \lambda S' = 0$ ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கின்றது. ஆனால், (84.1)-க்கு உகந்தவாறு λ-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உண்டு. ஆகவே, இரண்டு பரவளைவுகள் உண்டு என்றாகிறது.

மேலும், (44·5)-ல் கூறியபடி

$$(a + \lambda a') + (b + \lambda b') = 0 \qquad (84{\cdot}2)$$

என்றால், $S + \lambda S' = 0$ ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவைக் குறிக்கின்றது. இங்கு (84·2)-க்கு உகந்தவாறு λ-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உள்ளது. ஆகவே, $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் கூம்புவளைவுகளில் ஒன்றுதான் செவ்வக அதிபரவளைவாய் இருக்கும் என்றாகிறது.

§ 85. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

சமன்பாடுகள்

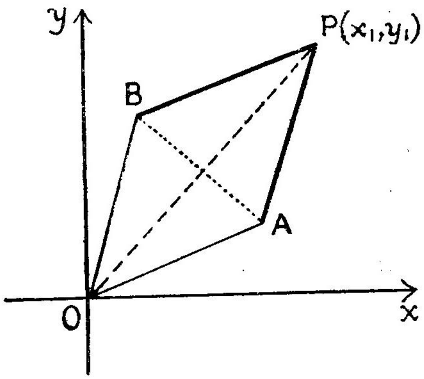
$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(1)$$

$$S' = ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad ...(2)$$

குறிக்கும் கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட உருவம் ஒரு சாய்சதுரம் என்றால்,

$$fg(a-b) + h(f^2 - g^2) = 0$$

எனக் காட்டுக (படம் 36).



படம் 36.

சமன்பாடு (1) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளை PA, PB எனவும், சமன்பாடு (2) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளை OA, OB எனவும் பெயரிடுகிறோம். இப்பொழுது, சமன்பாடு $S - S' = 0$, இந்த இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் A, B வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவைக் குறிக்கிறது. ஆனால்

$$S - S' = 2gx + 2fy + c = 0$$

என்பது ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால், இது ஒரு நேர் கோட்டை, அதாவது AB-ஐக் குறிக்கிறது. ஆகவே, AB-ன் சரிவு $-\frac{g}{f}$ என்றாகிறது. மேலும், P-ஐ (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் OP-ன் சரிவு,

$$\frac{y_1}{x_1}.$$

இப்பொழுது $OAPB$ ஒரு சாய்சதுரம். ஆகவே, அதன் மூலை விட்டங்கள் செங்குத்தானவை. அதனால், அவைகளின் சரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் (— 1)-க்குச் சமம். அதாவது,

$$\left(-\frac{g}{f}\right)\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = -1$$

அல்லது $fx_1 - gy_1 = 0$ (1)

ஆனால், (27·4) மூலம்,

$$x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad y_1 = \frac{hg - af}{ab - h^2}$$

ஆகவே, நிபந்தனை (1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

86. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஓர் இணைகரத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் இணைந்த சமன்பாடு, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$. அடுத்த இரண்டு பக்கங்களின் இணைந்த சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2by + c = 0$ என்றால், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு $2gx + 2fy + c = 0$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

2. சமன்பாடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் கோடுகளைப் பக்கமாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{h^2 - ab}}$$

எனக் காட்டுக.

3. புள்ளி (x_1, y_1) வழியாக, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடுகள், இக் கோடுகளை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டினால், AB-ன் சமன்பாடு,

$$2(ax_1 + hy_1)x + 2(hx_1 + by_1)y - (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2) = 0$$

எனக் காட்டுக.

4. சமன்பாடு $S = 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5x + 10y - 25 = 0$ குறிக்கும் சோடிக் கோடுகள், C-ல் ஒன்றையொன்று வெட்டு

கின்றன. இக் கோடுகளை $L = x + 2y - 5 = 0$ குறிக்கும் கோடு, A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறது. உருவம் $OABC$ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $S - 5L = 0$ குறிப்பதின் தன்மையைக் காண்க.]

5. $S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0$ என்ற கூம்பு வளைவை, $S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0$

என்ற கூம்புவளைவு இரு முறை ஆதியில் வெட்டுகிறதெனக் காட்டுக. மேலும், ஆதியையும் கூம்புவளைவுகளின் மற்ற இரு வெட்டுப் புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், $(a + b) g' = (a' + b') g$ எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $g'S - gS' = 0$ குறிக்கும் இயங்குவரையின் தன்மையைக் காண்க.]

7. நாண், தொடுகோடு, இசைக்கோடு

(Chord, Tangent, Polar)

§ 87. நாணும் தொடுகோடும்

முதலாவதாக, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகள் $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ வழியாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே,

$$x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 - a^2 = 0.$$

இவற்றில் ஒன்றிலிருந்து ஒன்றைக் கழிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

அல்லது $$(y_1^2 - y_2^2) = -(x_1^2 - x_2^2)$$

அல்லது $$(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = -(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

அல்லது $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

இதில் இடப் பக்கத்திலுள்ள கோவை (x_1, y_1)-ஐயும், (x_2, y_2)-ஐயும் சேர்க்கும் கோட்டின் சரிவைக் குறிப்பதால்; நாணின் சரிவு

$$-\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

என்றும், இதனால் நாணின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இதேபோல், $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடானது,

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$$

என்றிருக்கும் என்பதைக் காணலாம். மேலும், கீழ்க்காண்பனவற்றையும் இதுபோலவே காணலாம். இவ் விளைவுகள் மாணவர்களுக்கும் பயிற்சிகளாக விடப்படுகின்றன.

கூம்புவளைவு $S = 0$	$S = 0$-ன் மேலுள்ள (x_1, y_1), (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லும் நாண்
$y^2 - 4ax = 0$	$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$y - y_1 = - \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}(x - x_1)$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$y - y_1 = \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}(x - x_1)$
$xy - c^2 = 0$	$y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}(x - x_1)$

அடுத்ததாக, ஒரு வளைவை A_1-ல் தொடும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். புள்ளி A_2 ஆனது, வளைவின் மீதே நகர்ந்து A_1 உடன் இணைந்தால் A_1, A_2 வழிச் செல்லும் நேர்கோடு, வளைவை A_1-ல் தொடும் தொடுகோடாகின்றது. ஆகவே, வளைவின் மேலுள்ள A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாட்டிலிருந்து, வளைவை A_1-யிடத்துத் தொடும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண, x_2-ஐயும், y_2-ஐயும் முறையே x_1, y_1-ஆக மாற்றவேண்டும்.

உதாரணமாக, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள (x_1, y_1)-என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை,

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1) \text{ -ல்,}$$

y_2-க்குப் பதிலாக y_1-ஐப் பிரதியிட்டுக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம் :

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_1}(x - x_1).$$

அதாவது $(y - y_1)\, y_1 = 2a\,(x - x_1)$.

அதாவது $yy_1 - 2ax - y_1^2 + 2ax_1 = 0$. ஆனால் (x_1, y_1) ஆனது பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ மேலுள்ளதால்

$$y_1^2 - 4ax_1 = 0.$$

இதைப் பயன்படுத்திப் பரவளைவின் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டை

$$yy_1 - 2a\,(x + x_1) = 0$$

அதாவது, $\quad yy_1 - 4a\left(\frac{x + x_1}{2}\right) = 0$

என்று எழுதலாம்.

§ 63-ல் கூறப்பட்ட குறியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தினால், இச் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

என்றாகிறது. இதுபோலவே, $S = 0$ என்ற இருபடிச் சமன் பாட்டைக் கொண்ட எவ் வளைவையும் அதன் மேலுள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $T_1 = 0$ என்பதைக் காணலாம்.

அடுத்தபடியாக, நாணின் சமன்பாட்டையும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும், முற்றுமே குறியீட்டு முறையில் வெகு எளிதிலும், மனத்தில் இருத்தப் பயன்படும் அழகான வடிவத்திலும் காணலாம் என்பதைக் காட்டுவோம். இதற்காக, $S = 0$ குறிக்கும் வளைவின்மீது $A_1\,(x_1, y_1)$, $A_2\,(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு, சமன்பாடு

$$T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0\text{-ஐக்}$$

கவனிப்போம். இது ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடு, ஆகவே,

இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது. மேலும், (x_1, y_1) வளைவின் மேலுள்ளதால், சமன்பாட்டின் இடப் பக்கத்திலுள்ள கோவையில் x-க்கும், y-க்கும் முறையே x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் பிரதியிட்டுக் கிடைக்கும் வளைவில் $S_1 = 0$ என்பதைப் பயன் படுத்தி அடைவதாவது :

$$\{T_1 + T_2 - (T_1)_2\}_{x = x_1,\ y = y_1} = (T_1)_1 + (T_2)_1 - (T_1)_2$$
$$= S_1 + (T_1)_2 - (T_1)_2$$
$$= S_1$$
$$= 0$$

இதிலிருந்து, $T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0$ குறிக்கும் நேர்கோடு (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகிறது என்று கிடைக்கிறது. இதே போல், இந் நேர்கோடு (x_2, y_2) வழியாகவும் செல்லுகின்றது என்றாகிறது. அதாவது, (x_1, y_1), (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடு

$$T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0$$

என்றாகிறது.

இச் சமன்பாட்டில் x_2-க்கும், y_2-க்கும் பதிலாக முறையே x_1-ஐயும் y_1-ஐயும் பிரதியிட்டு, $S_1 = 0$ என்பதைப் பயன்படுத்தினால், வளைவை (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$T_1 + T_1 - (T_1)_1 = 0$$

அல்லது $$2T_1 - S_1 = 0$$

அல்லது $$T_1 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது.

இங்கு, பொதுப்படையாக $S = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டுள்ளதால், வளைவு எத்தகைய கூம்பு வளைவானாலும், நாணின் சமன்பாடு $T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0$ என்றும், தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $T_1 = 0$ என்றும் சீரிய தன்மையில் அமைகின்றன. இவைகளை அடையும் முறையின் எளிமையும், சுருக்கமான தன்மையும், முறையின் சிறப்பை நன்கு

எடுத்துக் காட்டுகின்றன. இம் முறையையே, குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தாமலும் கையாளலாம். உதாரணமாக, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின்மேலுள்ள (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண, சமன்பாடு

$$(xx_1 + yy_1 - a^2) + (xx_2 + yy_2 - a^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 - a^2) = 0 \qquad (87.1)$$

-ஐக் கவனிப்போம். இது ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால், இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது. இச் சமன்பாட்டின் இடப் பக்கத்திலுள்ள கோவையில் x-க்கும், y-க்கும் பதிலாக x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் பிரதியிட,

$$(x_1^2 + y_1^2 - a^2) + (x_2 x_1 + y_2 y_1 - a^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 - a^2) = x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஏனென்றால், (x_1, y_1) என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. ஆகவே, இந் நேர்கோடு (x_1, y_1) வழியாகவும், இதுபோலவே (x_2, y_2) வழியாகவும் செல்லுகிறது. ஆகவே, நாணின் சமன்பாடு (87.1) ஆகிறது.

மேலும், (87.1)-இல் x-க்கும், y-க்கும் பதிலாக x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் பிரதியிட்டு (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இச் சமன்பாடாவது,

$$(xx_1 + yy_1 - a^2) + (xx_1 + yy_1 - a^2) - (x_1^2 + y_1^2 - a^2) = 0.$$

அல்லது $2(xx_1 + yy_1 - a^2) - 0 = 0.$

அல்லது $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0.$

இப்பொழுது சில குறிப்பிட்ட வளைவுகளின் (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை வரிசைப்படுத்தி எழுதுவோம்.

வளைவு $S = 0$	தொடுகோடு $T_1 = 0$	
$x^2 + y^2 - a^2 = 0$	$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$	(87·2)
$y^2 - 4ax = 0$	$yy_1 - 4a\dfrac{(x+x_1)}{2} = 0$	(87·3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (87{\cdot}4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (87{\cdot}5)$$

$$xy - c^2 = 0 \qquad \frac{x_1 y + x y_1}{2} - c^2 = 0 \qquad (87{\cdot}6)$$

§ 88. செங்கோடு (Normal)

ஒரு வளைவின் செங்கோடானது அவ்வளைவின் தொடுகோட்டுக்குச் செங்குத்தானதால், தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து, (20.6)-ஐ அல்லது (20.7)-ஐப் பயன்படுத்திச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணலாம். உதாரணமாக, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ல் (x_1, y_1)-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். ஆனால் (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$$

அல்லது $yy_1 - 2ax - 2ax_1 = 0$

ஆகும். ஆகவே (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$2ay + y_1 x = k$$

என்ற வடிவத்தில் இருக்கும். ஆனால் செங்கோடு, (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$2ay_1 + y_1 x_1 = k$$

இதனால், (x_1, y_1)-இடத்து வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2ay + y_1 x = 2ay_1 + x_1 y_1 \qquad (88{\cdot}1)$$

என்றாகிறது. இதேபோல்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவின், (x_1, y_1)-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை, தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகிய

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} - 1 = 0\text{-லிருந்து,}$$

(20·7)-ஐப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = k$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். செங்கோடு, (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$a^2 - b^2 = k$$

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2 \qquad (88{\cdot}2)$$

என்ருகிறது. இம்மாதிரியே

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad xy - c^2 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுகளின் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$$

$$xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2 \qquad (88{\cdot}3)$$

என்று அடையலாம்.

§ 89. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கோடு தொடுகோடாவதற்கோ அல்லது செங்கோடாவதற்கோ வேண்டிய நிபந்தனை

ஏற்கெனவே § 53-ல், கோடு $y = mx + c$ ஆனது குறிப்பிட்ட வளைவுகளுக்குத் தொடுகோடாவதற்கான நிபந்தனைகளைக் கண்டோம். இப்பொழுது, § 87-ல் கண்ட தொடுகோடுகளின் உதவி கொண்டு, இதே நிபந்தனைகளை மாற்று முறையில் அடைவோம். உதாரணமாக, முதலில் பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐக் கோடு $y = mx + c$, அதாவது

$$y - mx - c = 0, \qquad (89{\cdot}1)$$

தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். இக் கோடு பரவளைவை (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்துத் தொட்டால் இக் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0 \qquad (89{\cdot}2)$$

என்றும் எழுதலாம். இப்போது (89·1)-விலுள்ள குணகங்களை (89·2)-விலுள்ள குணகங்களோடு ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{y_1}{1} = \frac{-2a}{-m} = \frac{-2ax_1}{-c}.$$

அதாவது, $x_1 = \frac{c}{m}$, $y_1 = \frac{+2a}{m}$

புள்ளி (x_1, y_1)-ஆனது, $y^2 - 4ax = 0$-ஐத் திருப்தி செய்யுமாகையால்,

$$\left(\frac{2a}{m}\right)^2 - 4a\left(\frac{c}{m}\right) = 0$$

அல்லது $c = \frac{a}{m}$.

அடுத்ததாக, $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் கோடு, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-க்குச் செங்கோடாக அமைய வேண்டிய நிபந்தனையைப் பார்ப்போம். இதற்காக, செங்கோட்டின் அடியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டு, x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் காண்போம். ஆனால் (x_1, y_1)-ஐ அடியாகக் கொண்ட செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2$$

ஆகும். இதை $lx + my + n = 0$-உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{l}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{m}{\left(\frac{-b^2}{y_1}\right)} = \frac{n}{-(a^2 - b^2)}$$

அதாவது, $\frac{lx_1}{a^2} = -\frac{my_1}{b^2} = -\frac{n}{(a^2 - b^2)}$

ஆகவே, $x_1 = -\frac{a^2 n}{l(a^2 - b^2)}$; $y_1 = \frac{b^2 n}{m(a^2 - b^2)}$

ஆனால், (x_1, y_1), $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ஐத் திருப்தி செய்யும்.

ஆகவே,

$$l^2 \frac{a^4 n^2}{(a^2 - b^2)^2 a^2} + m^2 \frac{b^4 n^2}{(a^2 - b^2) b^2} - 1 = 0.$$

அதாவது, $$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}.$$

இதுதான், $lx + my + n = 0$ என்ற கோடு, நீள்வளைவுக்கு ஒரு செங்கோடாவதற்குரிய நிபந்தனை.

§ 90. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவின் குவியத்தின் வழியாகச் செல்லும் நாண் ஒன்றின் முனைகள், (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றால், $y_1 y_2 = -4a^2$, $x_1 x_2 = a^2$ எனக் காட்டுக.

நாணின் சமன்பாடு $T_1 + T_2 - (T_1)_2 = 0$. அதாவது,

$$\{ yy_1 - 2a(x + x_1) \} + \{ yy_2 - 2a(x + x_2) \} - \{ y_1 y_2 - 2a(x_1 + x_2) \} = 0.$$

இந் நாண், குவியம் $(a, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\{ -2a(a + x_1) \} + \{ -2a(a + x_2) \} - \{ y_1 y_2 - 2a(x_1 + x_2) \} = 0.$$

இதைச் சுருக்க, $y_1 y_2 = -4a^2$ எனக் கிடைக்கின்றது. மேலும், $y_1{}^2 = 4ax_2$-ஐயும், $y_2{}^2 = 4ax_2$-ஐயும் பெருக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$(4ax_1)(4ax_2) = y_1{}^2 y_2{}^2$$

$$16a^2 x_1 x_2 = (-4a^2)^2$$

ஆகவே, $$x_1 x_2 = a^2.$$

கணக்கு 2.

$y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுக்கு அதன் செவ்வகலத்தின் ஒரு முனையான $(a, -2a)$ இடத்துத் தொடுகோடும், $x^2 - 4ay = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுக்கு அதன் செவ்வகலத்தின் ஒரு முனையான $(-2a, a)$-இடத்துத் தொடுகோடும் ஒரே கோடாகும் எனக் காட்டுக.

முதல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y(-2a) - 4a\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0.$$

அதாவது, $x + y + a = 0.$

இரண்டாவது தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$x(-2a) - 4a\left(\frac{y+a}{2}\right) = 0.$$

இதுவும் $x + y + a = 0$ என்றே சுருங்குகிறது. ஆகவே, இரண்டு தொடுகோடுகளும் ஒரு கோடே.

கணக்கு 3.

$4x - 3y + 2 = 0$ குறிக்கும் தொடுகோடு, $x^2 + xy - y^2 + 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்புவளைவைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

தொடும் புள்ளியை (x_1, y_1) என்றால், தொடுகோட்டின் சமன்பாடு, $T_1 = 0.$ அதாவது

$$x_1 + \frac{xy_1 + x_1y}{2} - yy_1 + 1 = 0$$

அல்லது, $2x_1 + xy_1 + x_1y - 2yy_1 + 2 = 0.$

அதாவது, $(2x_1 + y_1)x + (x_1 - 2y_1)y + 2 = 0.$

இச் சமன்பாட்டை $4x - 3y + 2 = 0$-உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{2x_1 + y_1}{4} = \frac{x_1 - 2y_1}{-3} = \frac{2}{2} \qquad (\cdot2)$$

ஆகவே, முதல் இரண்டு கோவைகளிலிருந்து

$$-3(2x_1 + y_1) = 4(x_1 - 2y_1)$$

அல்லது $$2x_1 - y_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

எனக் கிடைக்கிறது. இரண்டாவது, மூன்றாவது கோவைகளிலிருந்து

$$x_1 - 2y_1 = -3 \qquad \ldots (2)$$

எனக் கிடைக்கிறது. (1)-ஐயும், (2)-ஐயும் விடுவிக்க $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே, தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளி, (1, 2) என்றாகிறது.

கணக்கு 4.

நீள் வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மாறும் தொடுகோடு ஒன்று, x-அச்சை A-யிலும், y-அச்சை B-யிலும் வெட்டுகிறது. AB-யின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியை நீள்வளைவின்மீது எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

என்றும், (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாட்டையும், x-அச்சின் சமன்பாடான $y = 0$ —யும் விடுவித்து A-யை $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ எனவும்,

இதே போல் B-யை

$$\left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$$

எனவும் அடைகிறோம். இப்பொழுது AB-யின் மையப்புள்ளி, (x_0, y_0) என்றால்,

$$x_0 = \frac{a^2}{2x_1}, \; y_0 = \frac{b^2}{2x_1}.$$

ஆகவே, $x_1 = \frac{a^2}{2x_0}, \; y_1 = \frac{b^2}{2y_0}.$

இம் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{a^4}{4x_0a^2} + \frac{b^4}{4y_0^2b^2} - 1 = 0$$

என்றும், இதிலிருந்து (x_0, y_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{a^2}{(2x^2)} + \frac{b^2}{(2y)^2} - 1 = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது.

§ 91. பயிற்சிக் கணக்குகள்.

1. A_1, A_2, A_3, A_4 என்பன $y^2 - 4ax = 0$ என்ற பரவளைவின் மேலுள்ள புள்ளிகள். A_1, A_2 ஆகியவற்றின் y-கூறுகளின் கூட்டுத் தொகை, A_3, A_4 ஆகியவற்றின் y-கூறுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானல், நாண் A_1, A_2 ஆனது, நாண் $A_3 A_4$-க்கு இணையானது எனக் காட்டுக.

2. கீழ்க்காணும் கூம்புவளைவு ஒவ்வொன்றுக்கும் அதன் எதிரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க :

(i) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (3, 4)

(ii) $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$ (1, − 2)

(iii) $y^2 - 2x = 0$ (2, 2)

(iv) $xy - 6 = 0$ (2, 3)

(v) $(x + 2)(y + 4) - 15 = 0$ (1, 1)

3. தொடுகோடு $3x + 4y - 40 = 0$, வட்டம் $x^2 + y^2 - 10x = 0$-ஐத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

4. தொடுகோடு $x + y - 1 = 0$, செவ்வக அதிபரவளைவு $(x + 2)(y + 3) - 9 = 0$-த் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

5. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நகரும் தொடுகோடு ஒன்று, x-அச்சை A-யிலும், y-அச்சை B-யிலும் வெட்டினுல், AB-ன் மையப்புள்ளியின இயங்குவரையின் சமன்பாடு $2y^2 + ax = 0$ எனக் காட்டுக.

6. வட்டம் $x^2 + y^2 - 10x = 0$-ன் நகரும் தொடுகோடு ஒன்று, x-அச்சை A-யிலும், y-அச்சை Bயிலும் வெட்டினுல், AB-ன் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, $4xy^2 - 20y^2 - 25x = 0$ என நிறுவுக.

7. PP' என்பது அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ன் ஒரு நகரும் விட்டம் P-யிடத்துத் தொடுகோடு, P' வழியாக ஒரு தொலைத் தொடுகோடுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோட்டை வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $xy + 3c^2 = 0$ எனக் காட்டுக

[உதவிக் குறிப்பு : P-யை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் P'-ஆனது $(-x_{13} - y_1)$ ஆகும்]

8. $2a$-யைப் பேரச்சாகவும், $2b$-யைச் சிற்றச்சாகவும், C-யை மையமாகவும் கொண்ட ஒரு நீள்வளைவின் செங்கோடு, பேரச்சை G-யிலும், சிற்றச்சை g-யிலும் வெட்டினால், $a^2CG^2 + b^2Cg^2 = (a^2 - b^2)^2$ என நிறுவுக.

9. P என்பது, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 =$ குறிக்கும் நீள்வளைவின் மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. இப் புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு, பேரச்சை G-யிலும், சிற்றச்சை g-யிலும் வெட்டுகிறது. C வழியாக y அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோட்டை, g வழியாக x-அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு, வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, $a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 - b^2)^2$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரு நீள்வளைவின் ஒரு செவ்வகலத்தின் ஒரு முனையிடத்துச் செங்கோடு, பேரச்சை வெட்டும் புள்ளிக்கும், நீள்வளைவின் மையத்துக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் ae^3 எனக் காட்டுக, இங்கு $2a$ என்பது பேரச்சின் நீளம், e என்பது தொலைத்தகவு.

11. ஒரு நீள்வளைவின் ஒரு செவ்வகலத்தின் ஒரு முனையிடத்துச் செங்கோடு, சிற்றச்சின் ஒரு முனைவழியாகச் செல்லுகிறதென்றால் நீள்வளைவின் தொலைத்தகவு $e^4 + e^2 - 1 = 0$-ன் மூலமாகும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

2. (i) $3x + 4y - 25 = 0$

(ii) $2x - 2y - 6 = 0$

(iii) $x - 2y + 2 = 0$

(iv) $3x + 2y - 12 = 0$

(v) $5x + 3y - 8 = 0$

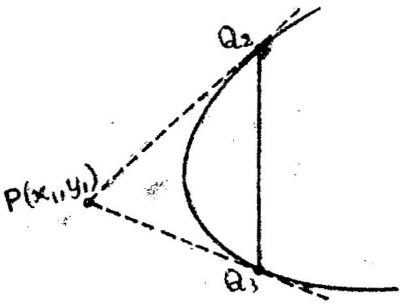
3. (8,4)

4. (1,0)

§ 92. தொடு நாண் (Chord of Contact).

ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கூம்பு வளைவுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளிகளை இணைக்கும் நாணானது, அப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் **தொடு நாண்** எனப்படுகிறது.

இப்பொது $S = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுக்கு $P(x_1, x_1)$ லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன் பாட்டைக் காண்போம் (படம் 37). இதற்காக, தொடுகோடுகளின்



படம் 37.

தொடுபுள்ளிகளை $Q_2\,(x_2, y_2)$, $Q_3\,(x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம். Q_2-இடத்துக் தொடுகோட்டின் சமன்பாடாவது

$$T_2 = 0$$

இத் தொடுகோடு $P(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$(T_2)_{x = x_1,\ y = y_1} = 0$$

அல்லது, $(T_2)_1 = 0.$

அதாவது $(T_1)_2 = 0.$ (92.1)

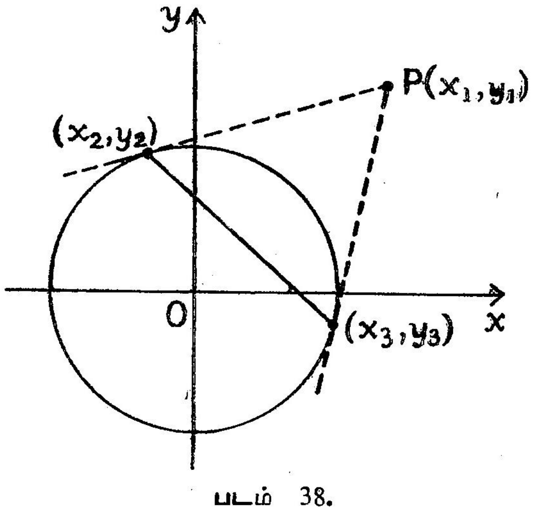
இதேபோல், Q_3-இடத்துத் தொடுகோட்டிலிருந்து

$$(T_1)_3 = 0 \tag{92.2}$$

எனக் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது, சமன்பாடு $T_1 = 0$-ஐ எடுத்துக்கொண்டு அது குறிக்கும் வளைவுபற்றி ஆராய்வோம். இது ஒருபடிச் சமன் பாடு. ஆகவே, இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கின்றது. மேலும், (92·1)-ன்மூலம், இக்கோடு $(\cdot_2, y_2)$ வழியாகச் செல்லுகிறது என்றும், (92·2) -ன் மூலம் (x_3, y_3) வழியாகச் செல்லுகிறது என்றும் காண்கிறோம். ஆகவே, சமன்பாடு $T_1 = 0$ ஆனது, நாண் $Q_2 O_3$-க் குறிக்கிறது.

இக் குறியீட்டு முறையில் சமன்பாடு $S = 0$, பொதுப் படை யானது. ஆகையால், இம் முறை மிகவும் சிறப்பானது. எனினும் இப்பொழுது குறிப்பாக, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை எடுத்துக் கொண்டு குறியீகளைப் பயன்படுத்தாமலே, $P(x_1, y_1)$ லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 38). P-யிலிருந்து வரையப்



படம் 38.

படும் தொடுநாணின் தொடுபுள்ளிகளை (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்போம். (x_2, y_2)-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$xx_2 + yy_2 - a^2 = 0$ ஆகும். இத் தொடுகோடு (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - a^2 = 0. \qquad (92.3)$$

இதேபோல் (x_3, y_3)-இடத்துத் தொடுகோடு (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 - a^2 = 0 \qquad (92.4)$$

இப்போது, சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 ,$$

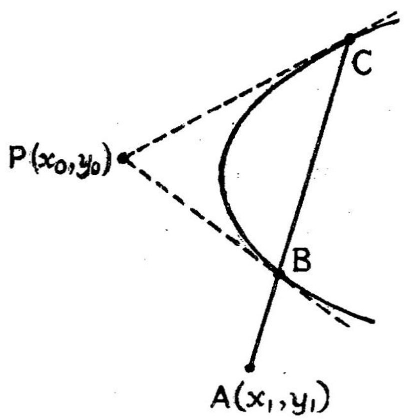
குறிக்கும் வளைவின் தன்மையைப் பற்றி ஆராய்வோம். இச் சமன்பாட்டின்படி ஒன்றுகையால், இச் சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது. மேலும், (93·3), (92.4) என்பவற்ருல் இக்கோடு (x_2, y_2), (x_3, y_3) வழியாகச் செல்லுகிறது எனத் தெரிகிறது.

ஆகவே, (x_2, y_2)-ஐயும், (x_3, y_3)-ஐயும் இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$x x_1 + y y_1 - a^2 = 0$-என்ருகிறது. அதாவது $P(x_1, y_1)$-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0.$$

§ 93. இசைக்கோடு (Polar)



படம் 39.

ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கூம்புவளைவின் நாணின் முனைகளிடத்து அந்த வளைவுக்கு வரையப்பட்ட தொடு

கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரையை, அப் புள்ளியின், கூம்புவளைவு சார்ந்த இசைக்கோடு என்கிறோம். இப் பொழுது $A(x_1, y_1)$-ன், $S = 0$ சார்ந்த இசைக்கோட்டின் சமன்பாட்டைம் பெறுவோம் (படம் 39). A-ன் வழியாக வரையப்படும் நேர்கோடு ஒன்று, கூம்புவளைவு $S = 0$-ஐ B-யிலும், C-யிலும் வெட்டட்டும். மேலும், B-யிடத்துத் தொடுகோடும், C-யிடத்துத் தொடுகோடும், $P(x_0, y_0)$-என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். இப்பொழுது P-ன் இயங்குவரை, A-ன் இசைக்கோடாகும்.

P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணான BC-ன் சமன்பாடு,

$$T_0 = 0.$$

ஆனல், BC, $A(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$(T_0)_{x=1,\ y=1} = 0$$

அல்லது, $(T_0)_1 = 0.$

அதாவது $(T_1)_0 = 0.$

இதிலிருந்து (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரை

$$T_1 = 0$$

என்றாகிறது.

அடுத்தபடியாக, குறியீட்டு முறையைத் தவிர்த்து, $S = 0$-ஐக் குறிப்பாக $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

எனக் கொண்டு P-யின் இசைக் கோட்டைக் காண்போம். இங்கு BC-யின் சமன்பாடு,

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

ஆனல், BC-ஆனது, $A(x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே, $$\frac{x_1\,x_0}{a^2} + \frac{y_1\,y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

இதிலிருந்து P-யின் இயங்குவரை

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (93{\cdot}2)$$

என்றாகிறது.

சமன்பாடுகள் (93·1), (93·2)-ஆகிய இரண்டும் ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால் இசைக்கோடு, ஒரு நேர்கோடாக உள்ளது. புள்ளி P-ஆனது, இந்நேர்கோட்டின் இசைப்புள்ளி (pole) எனப் படுகிறது.

இப்பொழுது கீழ்க்கண்ட விளைவுகள் தெளிவாகின்றன :

(i) (x_1, y_1) என்ற புள்ளி கூம்புவளைவு $S = 0$-க்கு வெளியே அமைந்தால், சமன்பாடு $T_1 = 0$ ஆனது, (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோட்டையும், (x_1, y_1)-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணையும் குறிக்கின்றது.

(ii) (x_1, y_1) கூம்புவளைவின்மேல் அமைந்தால், $T_1 = 0$ ஆனது (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடுகோட்டைக் குறிக்கிறது.

(iii) (x_1, y_1) கூம்புவளைவுக்கு உள்அமைந்தால், $T_1 = 0$ ஆனது (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோட்டை மாத்திரம் குறிக்கிறது.

§ 94. துணையியப் புள்ளிகளும், துணையியக் கோடுகளும். (Conjugate Points and Conjugate Lines)

சமன்பாடு $S = 0$ குறிக்கும் ஒரு கூம்பு வளைவையும், A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளையும் எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது, இந்தக் கூம்புவளைவைச் சார்ந்த இசைக்கோடுகளில், A_1-ன் இசைக்கோடு, A_2-வழியாகச் சென்றால், A_2-ன் இசைக்கோடு, A_1-ன் வழியாகச் செல்லும் என நிறுவுவோம்.

A_1-ன் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0.$$

இந்த இசைக்கோடு A_2 வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$(T_1)_2 = 0$$

அல்லது $$(T_2)_1 = 0 \qquad (94\cdot1)$$

ஆனால் A_2-ன் இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு

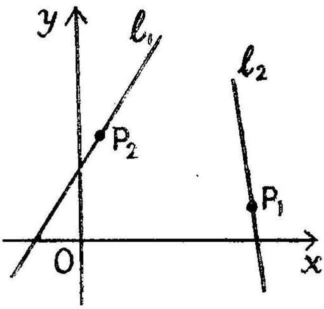
$$T_2 = 0$$

ஆகவே, (94·1)-லிருந்து A_2-ன் இசைக்கோடு, A_1 வழியாகச் செல்லுகிறது எனத் தெரிகிறது.

மேற்கூறியவாறு A_1-ஐயும், A_2-ஐயும் போன்று அமைந்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளைக் கூம்புவளைவைச் சார்ந்த **துணையியப் புள்ளிகள்** என்று அழைக்கின்றோம். மேலும், இத்தகைய புள்ளிகளில் ஒன்று மற்றதின் துணையியப் புள்ளி என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

அடுத்தபடியாக, l_1, l_2 என்ற கோடுகளை எடுத்துச் கொள்வோம். கூம்புவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளில் l_1-ன் இசைப்புள்ளி l_2-ன் மேல் அமைந்தால் l_2-ன் இசைப்புள்ளி l_2-ன் மேல் அமையும் என நிறுவுவோம்.

அதாவது, l_1-ன் இசைப்புள்ளியாகிய P_1 ஆனது, l_2-ன் மேல் அமைகிறது எனக் கொண்டு, l_2-ன் இசைப்புள்ளியாகிய P_2-ஆனது, l_1 மேல் அமைகிறது எனக் காட்டுவோம் (படம் 40).



படம் 40

இப்பொழுது P_2-ன் இசைக்கோடாகிய l_2, P_1 வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே, P_1-ன் இசைக்கோடாகிய l_1, P_2 வழியே செல்லும், அதாவது P_2, l_1 மேல் அமைகிறது என்றாகிறது.

மேற்கூறியவாறு l_1-ஐயும், l_2-ஐயும் போன்று அமைந்துள்ள இரண்டு கோடுகளைக் கூம்புவளைவைச் சார்ந்த **துணையியக் கோடுகள்** என்று அழைக்கப்படுகின்றன. மேலும், இத்தகைய கோடுகளில் ஒன்று மற்றதின் துணையியக்கோடு என்று அழைக்கப் படுகிறது.

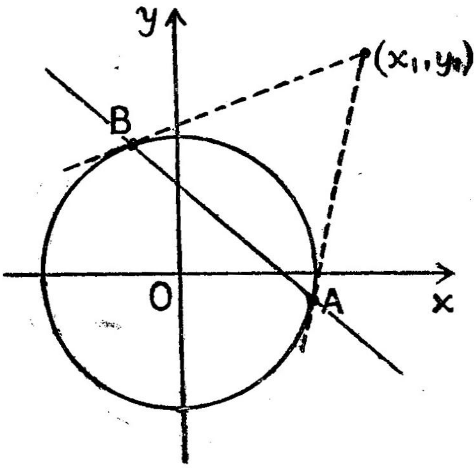
§ 95. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

$3x + 4y - 5 = 0$ குறிக்கும் கோடு, $x^2 + y^2 - 5 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறதென்றால்,

A-யிடத்துத் தொடுகோடும் B-யிடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க (படம் 41).

வெட்டும் புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம். AB-ஆனது, (x_1, y_1)-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாண். ஆகவே, அதன் சமன்பாடு,



படம் 41

$$xx_1 + yy_1 - 5 = 0.$$

ஆகும். ஆனால் AB-யின் சமன்பாடு,

$$3x + 4y - 5 = 0$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, இச் சமன்பாடுகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

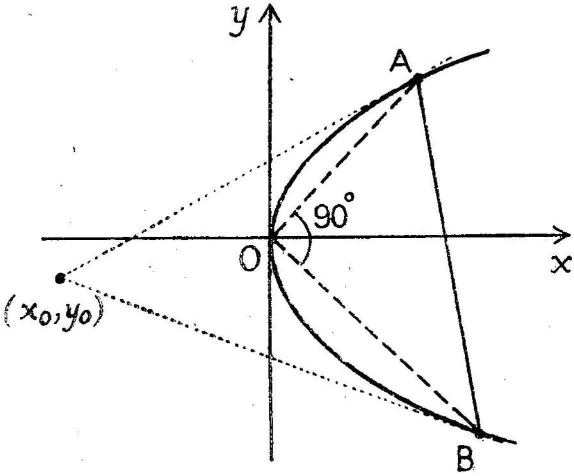
$$\frac{x_1}{3} = \frac{y_1}{4} = \frac{-5}{-5}.$$

அதாவது, $x_1 = 3$. $y_1 = 4$. ஆகவே, தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (3, 4)

கணக்கு 2.

$y^2 - 4ax = 0$-ன் நகரும் நாண் ஒன்று, பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது. நாணின் முனை

களிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க படம் 42 .



படம் 42:

வெட்டும் புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால் தொடுநாண் AB-ன் சமன்பாடு,

$$yy_0 - 2a\ (x + x_0) = 0$$

அல்லது $$\frac{yy_0 - 2ax}{2ax_0} = 1$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $y^2 - 4ax = 0$ -ஐச் சமபடித்தானதாக மாற்றி எழுத, கிடைக்கும் சமன்பாடாகிய

$$y^2 - 4ax \left[\frac{yy_0 - 2ax}{2ax_0}\right] = 0$$

ஆனது, OA, OB கோடுகளைக் குறிகின்றது. கோணம் AOB, ஒரு செங்கோணமாகையால், இச் சமன்பாட்டில் x^2 — ன் குணகம் $+ y^2$ — ன் குணகம் $= 0$

ஆகவே, $$1 + \frac{4a}{x_0} = 0$$

அல்லது $$x_0 + 4a = 0.$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையில் சமன்பாடு $x + 4a = 0$ என்ருகிறது.

கணக்கு 3.

வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$-ஐத் தொட்டுக் கொண்டே நகரும் கோடொன்று, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐ A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறது என்ருல், பரவளைவின் A-யிடத்துத் தொடு கோடும், B-யிடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டை $4x^2 - y^2 - 4a^2 = 0$ எனக் காட்டுக (படம் 43).

தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியை $P(x_0\ y_0)$ எனக் கொண்டால், AB-யின் சமன்பாடு,

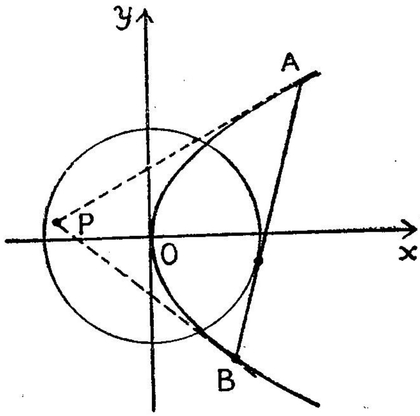
$$yy_0 - 2a(x + x_0) = 0$$

அல்லது, $yy_0 - 2ax - 2ax_0 = 0$

ஆகும். வட்டத்தின் மையமான $(0, 0)$-லிருந்து AB-யின் தூரம் p என்ருல் $p^2 = a^2$. ஆனல்

$$p^2 = \frac{(2ax_0)^2}{y_0^2 + (-2a)^2} .$$

ஆகவே, $\dfrac{4a^2x_0^2}{y_0^2 + 4a^2} = a^2.$



படம் 43.

அதாவது $4x_0 - y_0^2 - 4a^2 = 0$

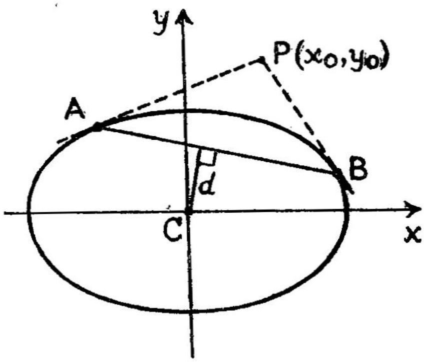
இதிலிருந்து (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $4x^2 - y^2 - 4a^2 = 0$ என்ருகிறது.

கணக்கு 4.

ஒரு நகரும் புள்ளி P-யிலிருந்து நீள் வளைவு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடு நாண், நீள்வளைவின் மையத்திலிருந்து d தூரத்தில் உள்ளது என்றால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}-\frac{1}{d^2}=0$$

என நிறுவுக (படம் 44).



படம் 44.

P யை (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம், அப்படியாயின், தொடு நாண் AB-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0$$

ஆகும். ஆனால் AA-யிலிருந்து $C\,(0,\,0)$ இருக்கும் தூரத்தின் வர்க்கமானது,

$$\frac{1}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$$

ஆகவே,
$$\frac{1}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}=d^2$$

அல்லது
$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2=\frac{1}{d^2}.$$

இதிலிருந்து, (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{1}{d^2} = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

கணக்கு 5.

பரவளைவு $y^2 - 4dx = 0$-ன் நகரும் தொடுகோடு ஒன்று, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ஐ A-யிலும், B-யிலும் வெட்டு கிறது. A-யிடத்தும், B-யிடத்தும் வரையப்பட்ட தொடு நாண்களின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வெட்டுப் புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், AB-யின்

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

ஆகும். அதாவது,

$$y = \left(\frac{-b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\right) x + \frac{b^2}{y_0}$$

ஆகும். ஆனல், AB-ஆனது பரவளைவு $y^2 - 4dx = 0$-ஐத் தொடுவதால், நிபந்தனை (52·3)-லிருந்து

$$\frac{b^2}{y_0} = \frac{d}{\left(\frac{-b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\right)}$$

என்றும், அதாவது,

$$da^2 y_0{}^2 + b^4 x_0 = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து, (x_0, y_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$da^2 y^2 + b^4 x = 0$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 6.

புள்ளிகள் (1, 2), (− 2, 2) இரண்டும் $x^2 + y^2 + 4x = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையிய புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(1, 2)-ன் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x(1) + y(2) + 2(x + 1) = 0$$

அல்லது $3x + 2y + 2 = 0$

ஆகும். இந்த இசைக்கோடு (— 2. 2) வழியாகச் செல்கிறதென் பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, (1, 2)-உம் (— 2, 2)-உம் வட்டத்தைச்சார்ந்த துணையிய புள்ளிகள்.

கணக்கு 7.

$3x + 2y - 10 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின் $xy - 10 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவு சார்ந்த இசைப் புள்ளியைக் காண்க.

இசைப்புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{xy_1 + yx_1}{2} - 10 = 0$$

ஆகும். அதாவது,

$$xy_1 + x_1y = 20 = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு $3x + 2y - 10 = 0$ -ஐயும் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{y_1}{3} = \frac{x_1}{2} = \frac{-20}{-10} = 2.$$

அதாவது, $y_1 = 6$, $x_1 = 4$. ஆகவே, வேண்டிய இசைப்புள்ளி (4, 6) என்றாகிறது.

கணக்கு 8.

• ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடு ஒன்றின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் அதிபரவளைவு சார்ந்த இசைக்கோடு, தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு இணையானது எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் அச்சுகளை x, y-அச்சுகளாகக் கொள்வோம். அப்படியாயின், அதன் சமன்பாடு, அதனது தொலைத்தொடு கோடுகள் ஒன்றின் சமன்பாடும் முறையே

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

என்றிருக்கும். தொலைத்தொடுகோட்டின் சரிவு

$$\frac{b}{a}.$$

இப்பொழுது, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியை இத் தொலைத்தொடு கோட்டின் மேல் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} = 0$$

அல்லது $\frac{x^1}{y_1} = \frac{a}{b}$

என்றும, மேலும், (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இவ் விசைக்கோட்டின் சரிவு

$$= \frac{b^2}{a_2} \quad \frac{x_1}{y_1}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{b}{a}.$$

ஆகவே, இசைக்கோடு, தொலைத்தொடுகோட்டுக்கு இணையானது என்றாகிறது.

கணக்கு 9.

P என்ற ஒரு புள்ளியின், ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் வட்டங்களைச் சார்ந்த இசைக் கோடுகள் யாவும், மற்றொரு புள்ளி Q வழியாகச் செல்லும் என்றும், தொகுதியின் பொதுச் சமத்தொடு அச்சு PQ-வை இரண்டு சமதுண்டுகளாக வெட்டும் என்றும் காட்டுக.

தொகுதியின் வட்டங்களின் மையங்கள் அமையும் கோட்டை x-அச்சாகவும் பொதுச் சமத்தொடு வச்சசை y-அச்சாகவும் கொண்டால், தொகுதியின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$$

என்றுகிறது. இங்கு, λ துணை அலகு. P-யை (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம். (x_1, y_1)-ன், தொகுதியின் வட்டங்கள் சார்ந்த இசைக்கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$xx_1 + y\ _1 + \lambda\ (x + x_1) + c = 0$$

அல்லது $(xx_1 + yy_1 + c) + \lambda\ (x + x_1) = 0$

ஆகும். இதிலிருந்து, இசைக்கோடுகள் அனைத்தும் கோடு

$xx_1 + yy_1 + c = 0$-உம், கோடு $x + x_1 = 0$-உம் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லுகிறது எனக் கிடைக்கிறது.

இவ் வெட்டும் புள்ளி Q-வின் x-கூறுனது x_1 என எளிதில் காணலாம். மேலும் P-ன் கூறு, x_1 ஆகையால் PQ-ன் மையப் புள்ளியின் x-கூறு பூச்சியம் என்றும், இதனுல், இம் மையப்புள்ளி பொதுச் சமற்தொடு வச்சாகிய y-அச்சின்மேல் அமைகிறது என்றும் தெரிகிறது.

கணக்கு 10.

P என்பது y-அச்சின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி P-யிலிருந்து, $y^2 - 4ax = 0$ சார்ந்த P-ன் இசைக்கோட்டுக்கு, வரையப்பட்ட செங்கோடு, x- அச்சின்மேலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

A-யை $(0, \lambda)$ எனக் கொண்டால், λ ஒரு மாறி. P-ன் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y\lambda - 2a\,(x + 0) = 0$$

அல்லது $y\lambda - 2ax = 0$

ஆகும். P-யிலிருந்து இவ்விசைக் கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$2ay + \lambda x = k$$

என்ற வடிவத்தில் இருக்கும். ஆனுல், செங்கோடு P வழியாகச் செல்லுகிறது. அதனுல்,

$$2a\,\lambda + 0 = k.$$

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2ay + \lambda x = 2a\lambda$$

அல்லது $2ay + \lambda\ (x - 2a) = 0$

என்றுகிறது. இதிலிருந்து இச் செங்கோடானது, சமன்பாடுகள்

$y = 0$, $x - 2a = 0$ குறிக்கும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி வழியாக, அதாவது $(2a, 0)$ வழியாகச் செலுகிறது என்றுகிறது.

கணக்கு 11.

P என்பது y-அச்சின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. P-யிலிருந்து, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ சார்ந்த P-யின் இசைக் கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்கோடு, இசைக்கோட்டை வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முந்திய கணக்கில்,

$y\lambda - 2ax = 0$, $2ay + \lambda(x - 2a) = 0$ என்பன இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு, செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு எனக் கண்டோம். ஆகவே, இக்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை, இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து λ-வை நீக்கிக் காணலாம். அதாவது, வேண்டிய சமன்பாடு

$$2ay + \frac{2a}{y}(x - 2a) = 0$$

அல்லது $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

என்றுகிறது.

கணக்கு 12.

அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் நகருகின்ற நாண் ஒன்று, அதிபரவளைவின் மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது, இந்நாணின் இசைப்புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.

இசைப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_0}{a^2} \quad \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

அல்ல்து $$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

ஆகும். இந்த நாண் AB என்றுல், அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை நாணின் சமன்பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடாக்கி, OA, OB

ஆகியவற்றின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காணலாம். இச் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2}\right)^2 = 0.$$

ஆகவே, இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{d^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

என்றுகிறது.

கணக்கு 13.

ஒரு கோடு, $x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டே நகருகிறது. இக் கோட்டின், பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ சார்ந்த, இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இசைப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், நகரும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$yy_0 - 2a(x + x_0) = 0$$

ஆகும். இக் கோடு, வட்டம் $x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$-ஐத் தொடுவதால்

$$\frac{(-2ax_0)^2}{y_0{}^2 + (-2a)^2} = 4a^2.$$

அல்லது $x_0{}^2 = y_0{}^2 + 4a^2.$

இதிலிருந்து, இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, $x^2 - y^2 - 4a^2 = 0$ என்றுகிறது.

கணக்கு 14.

A என்பது, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி.

இப் புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின், நீள்வளைவு சார்ந்த, இசைப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(x_0, y_0)-ஐ இசைப்புள்ளி என்றும், A-யை (x_1, y_1) என்றும் கொள்வோம். (x_0, y_0)-ன் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0. \text{ ஆகும்.}$$

A-யிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} - (a^2 - b^2) = 0$$

ஆகும். இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிக்கின்றன. ஆகவே, அவைகளை ஒப்பிடலாம். இதனால் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)}{\left(\frac{-b^2}{y_1}\right)} = \frac{1}{a^2 - b^2}.$$

அதாவது, $\frac{x_0 x_1}{a^4} = -\frac{y_0 y_1}{b^4} = \frac{1}{a^2 - b^2}$

அல்லது $x_1 = \frac{a^4}{(a^2 - b^2) x_0}$, $y_1 = \frac{-b^4}{y_0 (a^2 - b^2)}$.

ஆனால், $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$

ஆகவே, $\frac{1}{a^2}\left[\frac{a^4}{x_0 (a^2 - b^2)}\right]^2 + \frac{1}{b^2}\left[\frac{-b^4}{(a^2 - b^2) y_0}\right]^2 - 1 = 0.$

அதாவது, $\frac{a^6}{x_0^2} + \frac{b^6}{y_0^2} - (a^2 - b^2)^2 = 0.$

இதிலிருந்து, இசைக்கோட்டின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} - (a^2 - b^2)^2 = 0$$

என்றாகிறது.

§ 96. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $x + 3y - 6 = 0$ குறிக்கும் கோடு, $x^2 + y^2 - 12 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறதென்றால், A-யிடத்துத் தொடுகோடும், B-யிடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

2. பரவளைவு $y^2 - 8x = 0$-ன் நாண் $x + y + 1 = 0$-ன் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

3. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ -ன் நகரும் நாண் ஒன்று மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது. நாணின் முனையிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டை

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2} - (a^2 + b^2) = 0$$ எனக் காட்டுக.

4. ஒரு நகரும் புள்ளி P-யிலிருந்து அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாண், அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து d தூரத்தில் உள்ளது என்றால், P யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{1}{d^2} = 0$ எனக் காட்டுக.

5. பரவளைவு $y^2 - 4dx = 0$-ஐத் தொட்டுக்கொண்டே நகரும் கோடொன்று, அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ -ஐ A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறது என்றால், அதிபரவளைவின் A-யிடத்துத் தொடுகோடும், B-யிடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை $da^2y^2 + b^4x = 0$ எனக் காட்டுக.

6. புள்ளிகள் (2, 1), (5, — 3) என்பன நீள்வளைவு $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ சார்ந்த, துணையிய புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

7. கோடுகள் $3x + 2y - 8 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ என்பன, செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - 4 = 0$ சார்ந்த துணையியக் கோடுகள் எனக் காட்டுக.

8. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ சார்ந்த குவியம் $(a, 0)$-ன் இசைக் கோடானது, இயக்குவரை $x + a = 0$ எனக் காட்டுக

9. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ சார்ந்த, குவியம் $(ae, 0)$-ன் இசைக்கோடானது, இயக்குவரை $x - \frac{a}{e} = 0$ எனக் காட்டுக.

10 ஒரு புள்ளிக்கும் ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் மையத்துக்கும் இடையிலுள்ள தூரமும், மையத்துக்கும் அப் புள்ளியின் இசைக்கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள தூரமும், நேர்மாறு விகிதசமன் (inversely proportinal) உடையது எனக் காட்டுக.

11. குவியம் S-உம், இயக்குவரை l-உம் நிர்ணயிக்கும் ஒரு கூம்புவளைவு சார்ந்த S-ன் இசைக்கோடு, l என நிறுவுக.

12 P_1, P_2 என்பன கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள். P_1-லிருந்தும், P_2-லிருந்தும் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் t_1, t_2 என்றால்,

$$P_1 P_2^2 = t_1^2 + t_2^2$$

என நிறுவுக.

உதவிக் குறிப்பு : வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S = 0$ எனவும், P_1-ஐ(x_1, y_1) எனவும் கொண்டால், P_1-ன் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு $T_1 = 0$. இது (x_2, y_2) வழியாகச் செல்லுவதால்

$(T_1)_2 = 0$. இப்பொழுது

$$P_1P_2^2 = P_1P_2^2 + 2(T_1)_2 = S_1 + S_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

13. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியில், எல்லைப் புள்ளிகள், ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் துணையிய புள்ளிகள் ஆகும் என நிறுவுக.

[**உதவிக் குறிப்பு :** தொகுதியின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ எனக் கொண்டால், $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ என்பன தொகுதியின் எல்லையான புள்ளிகள்.]

14. கோடு $y - k = 0$-ன்மீது இயங்கும் புள்ளியிலிருந்து, அப் புள்ளியின் $y^2 - 4ax = 0$ சார்ந்த பரவளைவின் இசைக் கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[**உதவிக் குறிப்பு :** $y - k = 0$-ன்மீது நகரும் புள்ளியை (λ, k) எனக் கொள்க. இங்கு λ ஒரு மாறி.]

15. வட்டம் $x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ ன்மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் வட்டம் $x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ சார்ந்த இசைக்கோடு, பரவளைவு $y^2 + 4ax = 0$-ஐத் தொடும் எனக் காட்டுக.

16. $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவினது நாண் ஒன்று இடம் மாறிக்கொண்டே பரவளையின் உச்சியில் ஒரு செங் கோணத்தைத் தாங்குகிறது. நாணின், பரவளைவு சார்ந்த, இசைப் புள்ளியின் இயங்குவரையின்க் சமன்பாட்டை காண்க.

ஒரு நகரும் புள்ளியின், அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ சார்ந்த இசைக்கோடு, அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து d-தூரத்தில் உள்ளது என்றால், புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

18. ஒரு நேர்கோடு, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - = 0$-ன் துணை வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டே நகருகிறது இக் கோட்டின் இயங்குவரையைக் காண்க.

19. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் குவியங்களை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தைக் தொட்டுக்கொண்டே ஒரு நேர்கோடு நகர்கிறது. இக்கோட்டின், அதிபரவளைவு சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

20. $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவினது தொடுகோடு களின், பரவளைவு $y^2 - 4bx = 0$ சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரையைக் காண்க.

21. வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ சார்ந்த ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடு $xy - c^2 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் தொடுகோடானால், அப் புள்ளி செவ்வக அதிபரவளைவு $4c^2 xy - a^4 = 0$-ன் மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

22. A என்பது. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A-யிடத்துச் செங்கோட்டின், பரவளைவு சார்ந்த இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை $y^2 (x + 2a) + 4a^3 = 0$ எனக் காட்டுக.

23. A-என்பது, அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} 1 = 0$ ன்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A-யிடத்துச் செங்கோட்டின் அதிபரவளைவு சார்ந்த,

இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை
$\frac{a^6}{x^2} - \frac{b^6}{y^2} - (a^2 + b^2)^2 =$ எனக் காட்டுக.

24. A-என்பது, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A-யிடத்து செங்கோட்டின் வட்டம் $x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)$ சார்ந்த, இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. (2, 6)

2. (1, — 4)

14. $(k^2 - 4a^2)\, y - 4akx + 4a^2 k = 0$

16. $x + 4a = 0$

17. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{1}{d^2} = 0$

18. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{1}{a^2} = 0$

19. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{1}{a^2 + b^2} = 0$

20. $ay^2 - 4b^2x = 0.$

§ 97. (x_1, y_1)-ஐ மையமாகக் கொண்ட நாண் முதலில் ஒரு பொது இருபடிச் சமன்பாடு

$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் ஒரு நாண், புள்ளி (x_1, y_1)-ஐ மையப்புள்ளியாகக் கொண்டிருந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 45).

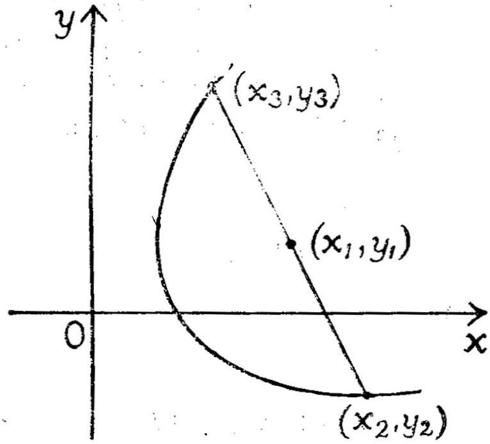
நாணின் முனைகளை (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொள்வோம்.

இதனுல் $x_2 + x_3 = 2x_1,$

$y_2 + y_3 = 2y_1,$

என்றும், நாணினது, x_2, y_2, x_3, y_3 சார்ந்த சமன்பாடு

$$T_2 + T_3 - (T_2)_3 = 0$$



படம் 45·

என்றும் ஆகிறது. இச் சமன்பாட்டில் x_1-ஐயும், y_1-ஐயும் நுழைத்து, x_2, y_2, x_3, y_3 ஆகியவற்றை நீக்கவேண்டும். இதற்காக, முதலில் $T_2 + T_3$ -ஐக் கவனிப்போம்.

$$T_2 = T_3 = \{ axx_2 + h(xy_2 + x_2y) + byy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c \}$$
$$+ \{ axx_3\ h(xy_3 + x_3y) + byy + g(x + x_3\} + g(y + y_2) + c \}$$

$$= ax(x_2 + x_3) + h\{ x(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y \} + b(y_2 + y_3)$$
$$+ g(2x + x_2 + x_3) f(2y + y_2\ y_3) + 2c$$

$$= ax(2x_1) + h\{ x(2y_1) + (2x_1)y + by(2y_1) + g(2x + 2x_1) + f(2y + 2y_1) + 2c$$

$$= 2\{a\bar{x}x_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}$$

$$= 2T.$$

ஆகவே, நாணின் சமன்பாடு

$$2T_1 - (T_2)_3 = 0$$

என்றாகிறது. இங்கு, $(T_2)_3$ ஆனது, x, y சாராத ஒரு மாறிலி யும் மாறிலியை k எனக் குறித்தால், சமன்பாடு,

$$2T_1 - k = 0$$

என்றாகிறது. ஆனால், நாண் (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகின்றது. ஆகவே,

$$(2T_1 - k)_{(x_1,\ y_1)} = 0.$$

அதாவது, $2\,(T_1)_{(x_1,\ y_2)} - k = 0$

அல்லது $(T_1)_1 - k = 0$

அல்லது $2S_1 - k = 0.$

ஆகவே, சமன்பாடு $2T_1 - 2S_1 = 0$ அல்லது

$$T_1 - S_1 = 0$$

என்றாகிறது.

$S = 0$ என்ற பொது இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு, (x_1, y_1)-ஐ மையப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாட்டை குறியீட்டு முறையில் எளிதில் கண்டோம். சமன்பாடு $S = 0$ எளிய வடிவில் அமைந்தால், நாணின் சமன்பாட்டை இன்னும் மிக எளிதில் காணலாம். உதாரணமாக, $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவில், (x_1, y_1)-ஐ மையமாகக் கொண்டுள்ள நாணின் சமன்பாட்டை இப்போது காண்போம். இங்கு குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தாமலேயே நாணின் சமன் பாட்டைக் காண முடியும் என்பதையும் காட்டுவோம் :

(x_2, y_2), (x_3, y_3) என்பன நாணின் முனைகள் என்றால், நாணின் சமன்பாடு,

$\{yy_2 - 2a\,(x + x_2)\} + \{yy_3 - 2a\,(x + x\ )\} - \{y_2\, y_3 - 2a\,(x_2 + x_3)\} = 0.$ ஆகும். இச் சமன்பாட்டில்.

$$\begin{aligned}\{yy_2 + 2a\,(x + x_2)\} + \{yy_3 - 2a\,(x + x_3)\} &= y\,(y_2 + y_3) - 4ax - 2a\,(x_2 + x_3)\\ &= y\,(2y_1) - 4ax - 2a\,(2x_1)\\ &= 2\,\{\,yy_1 - 2a\,(x + x_1)\,\}.\end{aligned}$$

ஆகவே, நாணின் சமன்பாட்டை,

$$2\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - \{y_2 y_3 - 2a(x_2 + x_3)\} = 0$$

எனவும், மேலும் $y_2 y_3 - 2a(x_2 + x_3)$-ஐ k எனக் குறித்து

$$2\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - k = 0$$

எனவும் எழுதலாம். ஆனால், நாண், (x_1, y_1) வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே, சமன்பாட்டில் x-க்கும், y-க்கும் பதிலாக x_1-உம், y_1-உம் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$2(y_1^2 - 4ax_1) - k = 0$$

அல்லது $k = 2(y_1^2 - 4ax_1)$

ஆகவே, நாணின் சமன்பாடு,

$$2\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - 2\{y_1^2 - 4ax_1\} = 0,$$

அல்லது $\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - \{y_1^2 - 4ax_1\} = 0$

என்றாகிறது.

இதேபோல், (x_1, y_1)-ஐ மையப்புள்ளியாக கொண்ட நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். நாணின் முனைகளை (x_2, y_2), (x_3, y_3) ஆகக் கொண்டால், அதன் சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கிறது :

$$\left(\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} - 1\right) = 0.$$

அதாவது, $\left\{\frac{x}{a^2}(x_2 + x_3) + \frac{y}{b^2}(y_2 + y_3) - 2\right\}$

$$- \left(\frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} - 1\right) = 0.$$

அதாவது, $\left\{\frac{x}{a^2}(2x_1) + \frac{y}{b^2}(2y_1) - 2\right\}$

$$- \left(\frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} - 1\right) = 0.$$

அதாவது, $2\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)-k=0.$

இங்கு, $2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)-k=0$ அல்லது

$$k=2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right).$$

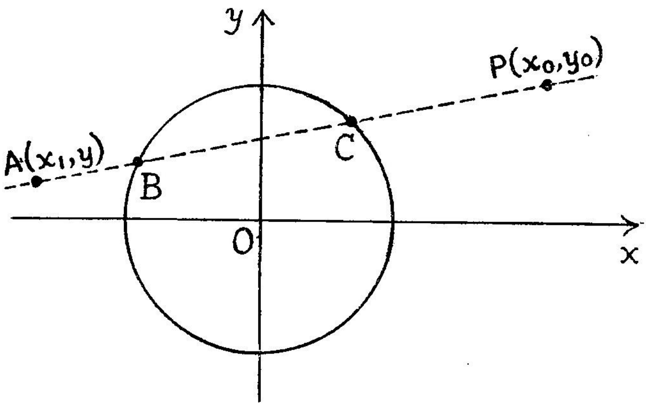
ஆகவே, நாணின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)=0$$

ஆகும்.

§ 98. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கூம்புவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள்

§ 97-ல் செய்ததுபோல், ஒரு பொதுச் சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்புவளைவை எடுத்துக் கொள்ளாமல், முதலில் $S=x^2+y^2-a^2=0$ குறிக்கும் வட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு, அதற்கு $A(x_1, y_1)$-லிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்காக, A வழியாகச் செல்லும்



படம் 46.

ஒரு நேர்கோட்டை எடுத்துக்கொள்வோம் (படம் 46). இக் கோட்டின்மேல் $P(x_0, y_0)$ என்பது ஏதாவது ஒரு புள்ளி

எனவும் கொள்வோம் இக் கோடு வட்டத்தை B-யிலும் C-யிலும் வெட்டட்டும். இப்பொழுது, AP-யை, B-யும், C-யும் வெட்டும் விகிதங்களைக் காண்போம். B-ஆனது, AP-யை $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டினால், B-ஆனது,

$$\left(\frac{\lambda\, x_0 + x_1}{\lambda + 1}\, ,\, \frac{\lambda\, y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

ஆகும். மேலும், B வட்டத்தின் மேலுள்ளதால்,

$$\left(\frac{\lambda\, x_0 + x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\, y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)^2 - a^2 = 0.$$

அதாவது, $(\lambda\, x_0 + x_1)^2 + (\lambda\, y_0 + y_1)^2 - a^2 (\lambda + 1)^2 = 0.$

அதாவது, $\lambda^2 (x_0^2 + y_0^2 - a^2) + 2\lambda (x_0\, x_1 + y_0\, y_1 - a^2)$
$+ (x_1^2 + y_1^2 - a^2) = 0.$

அல்லது $S_0\, \lambda^2 + 2\, (T_0)_1\, \lambda + S_1 = 0.$

இது λ-வில் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் மூலங்கள் இரண்டும், AP-யை, B-யும், C-யும் வெட்டும் விகிதங்களைக் குறிக்கின்றன. எனவே, B-யும், C-யும் இணைந்தால், அதாவது AP, வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆனால், இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானவையாக இருக்கும். அப்போது சமன்பாட்டின் தன்மைகாட்டி பூச்சியமாகும். ஆகவே, AP-தொடுகோடானால்,

$$4\, \{ (T_0)_1 \}^2 - 4\, S_0\, S_1 = 0.$$

அதாவது, $\{ (T_0)_1 \}^2 - S_0\, S_1 = 0.$

அல்லது $\{ (T_1)_0 \}^2 - S_0\, S_1 = 0.$

ஆகவே, $A\, (x_1, y_1)$ வழியாகச் செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

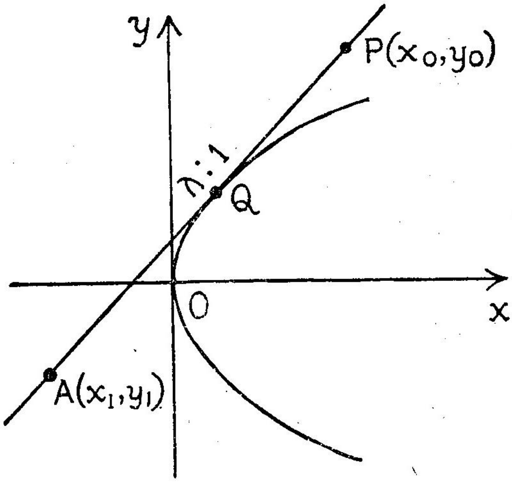
$$(T_1)^2 - SS_1 = 0$$

அல்லது $(xx_1 + yy_1 - a^2)^2 - (x^2 + y^2 - a^2)$
$(x_1^2 + y_1^2 - a^2) = 0.$

என்றாகிறது. இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால், இது A வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் இரண்டு தொடுகோடுகளையும் குறிக்கிறது.

அடுத்தபடியாக, $A\, (x_1, y_1)$-லிருந்து $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்போம் :

A-யிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். இத் தொடுகோடு பரவளைவை இரண்டு இணைந்த புள்ளிகளில் வெட்டும். இந்த இணைந்த புள்ளியை Q எனக் கொள்வோம்.



படம் 47.

இத் தொடுகோட்டின்மீது $P\,(x_0, y_0)$ என்பது ஏதாவதொரு புள்ளியானால், மேலும் AP-யை Q-ஆனது $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டினால், Q-ஆனது

$\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டினால், Q-ஆனது

$$\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1},\ \frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

ஆகும். Q, பரவளைவின் மேலுள்ளதால்,

$$\left(\frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)^2 - 4a\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}\right) = 0.$$

அல்லது $$(\lambda y_0 + y_1)^2 - 4a\,(\lambda x_0 + x_1)\,(\lambda + 1) = 0.$$

அல்லது $$(y_0{}^2 - 4ax_0)\,\lambda^2 + 2\lambda\,\{y_0\,y_1 - 2a\,(x_0 + x_1)\} + (y_1{}^2 - 4ax_1) = 0$$

அல்லது $$S_0\,\lambda^2 + 2\lambda\,(T_0)_1 + S_1 = 0,$$

Q-ஆனது இரண்டு இணைந்த புள்ளிகளைக் குறிப்பதால் இச் சமன்பாட்டின் தன்மைகாட்டி பூச்சியமாகும். அதாவது

$$4\{(T_0)_1\}^2 - 4\,S_0\,S_1 = 0.$$

அல்லது $$\{(T_1)_0\}^2 - S_0\,S_1 = 0.$$

ஆகவே, தொடு நாண் AP-யின் சமன்பாடு

$$(T_1)^2 - SS_1 = 0$$

இச் சமன்பாட்டின்படி இரண்டாகையால், இது (x_1, y_1)-லிருந்து வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகளையும் குறிக்கின்றது. இச் சமன்பாட்டை விரித்து எழுதினால்,

$$\{yy_1 - 2a(x + x_1)\}^2 - (y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1) = 0 \quad (98{\cdot}1)$$

என்று கிடைக்கிறது.

இதேபோல் (x_1, y_1)-லிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0 \quad (98.2)$$

என்றும்,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டை,

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 0 \quad (98{\cdot}3)$$

என்றும் அடையலாம்.

இப்பொழுது $(98{\cdot}1)$-ஐப் பயன்படுத்தி பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின்

இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். வெட்டுப் புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$\{ yy_0 - 2a(x + x_0) \}^2 - (y^2 - 4ax)(y_0^2 - 4a x_0) = 0$$

ஆகும். தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவை; ஆகையால்,

$$x^2\text{-ன் குணகம்} + y^2\text{-ன் குணகம்} = 0.$$

அதாவது, $(4a)^2 + (y_0^2 - y_0^2 + 4a x_0) = 0.$

அதாவது, $4a(x_0 + a) = 0.$

அதாவது, $x_0 + a = 0.$

எனவே, பரவளைவின் செங்குத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$x + a = 0$$

என்றாகிறது.

அடுத்தபடியாக, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். வெட்டுப்புள்ளி (x_0, y_0) என்றால், தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

ஆகும். இதில்

$$x^2\text{-ன் குணகம்} = \frac{x_0^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - 1\right).$$

$$y^2\text{-ன் குணகம்} = \frac{y_0^2}{b^4} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right).$$

ஆகவே $-\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)=0.$

அதாவது, $b^2\left(\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)+a^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)=0.$

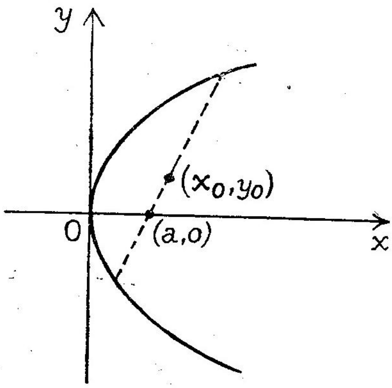
அதாவது, $y_0^2+x_0^2-(a^2+b^2)=0.$

இதிலிருந்து, செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $x^2+y^2-(a^2+b^2)=0$ என்றாகிறது.

§ 99. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

ஒரு பரவளைவின் குவிய நாண் ஒன்று, குவியத்தைப் பொருத்துச் சுழல்கின்றது என்றால், அதன் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரை, இக் குவியத்தை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவு எனக் காட்டுக (படம் 48).



படம் 48.

பரவளைவின் சமன்பாடு, $y^2-4ax=0$ என்றிருக்குமாறு குறிப்பீட்டச்சுக்களை எடுத்துக்கொள்வோம், குவிய நாணின்

மையப் புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், நாணின் சமன்பாடு

$$\{ yy_0 - 2a(x + x_0) \} - \{ y_0^2 - 4ax_0 \} = 0$$

ஆகும். இந்நாண், குவியம் $(a, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\{ 0 - 2a(a + x_0) \} - \{ y_0^2 - 4ax_0 \} = 0$$

அல்லது, $y_0^2 - 2a(x_0 - a) = 0.$

ஆகவே, குவிய நாணின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$y^2 - 2a(x - a) = 0$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாடு ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கின்றது என்பதும், இப் பரவளைவு $(a, 0)$ வழியாகச் செல்கின்றது என்பதும், இப் பரவளைவின் அச்சும், பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் அச்சும் ஒன்றுதான் என்பதும் எளிதில் தெரிகிறது.

கணக்கு 2.

ஒரு நீள்வளைவின் நாண் ஒன்று, நீள்வளைவின் உச்சிகளில் ஒன்றின் வழியாகச் சென்று கொண்டே சுழல்கின்றது. நாணின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள்வளைவு என்றும், அந் நீள்வளைவின் அச்சுக்களின் நீளங்கள், கொடுத்துள்ள நீள்வளைவின் அச்சுக்களின் நீளங்களில் பாதியாகும் என்றும் காட்டுக.

நீள்வளைவின் சமன்பாடு, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்று இருக்குமாறு குறிப்பீட்டச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்போது (a, o) நீள்வளைவின் ஒரு உச்சி சுழலும் நாணின் மையப்புள்ளி (x_0, y_0) என்றால் நாணின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 \right) - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

ஆகும். நாண், $(a, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\left(\frac{ax_0}{a^2} - 1 \right) - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - 1 \right) = 0.$$

ஆகவே மையப்புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{ax}{a^2} = 0$$

அல்லது $$\frac{\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$$

அல்லது $$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$$

அல்லது $$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

இச் சமன்பாடு, ஒரு நீள்வளைவைக் குறிக்கிறது என்றும், அதன் அச்சுக்களின் நீளங்கள் a, b என்றும் எளிதில் தெரிகின்றது.

கணக்கு 3.

பரவளைவு $y^2 + 4bx = 0$-ன் நகரும் தொடுகோடு ஒன்று, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐ P-யிலும், Q-விலும் வெட்டுகிறது. PQ-வின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PQ-வின் மையப்புள்ளி (x_0, y_0) என்றால், PQ-வின் சமன்பாடு,

$$\{ yy_0 - 2a(x + x_0) \} - \{ y_0^2 - 4ax_0 \} = 0$$

அல்லது $$yy_0 = 2ax + (y_0^2 - 2ax_0)$$

$$y = \frac{2a}{y_0} x + \frac{y_0^2 - 2ax_0}{y_0}.$$

ஆனால், PQ பரவளைவு $y^2 - 4(-b)x = 0$-ஐத் தொடுகிறது. ஆகவே, (53·1)-ன் மூலம்,

$$\frac{y_0^2 - 2ax}{y_0} = \frac{(-b)}{\left(\frac{2a}{y_0}\right)}$$

என்று கிடைக்கிறது. அதாவது

$$2a\,(y_0^2 - 2ax) = -\,by_0^2$$

அல்லது $(2a + b)\,y_0^2 - 4a^2x = 0.$

ஆகவே, PQ-வின் மையப்புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$(2a + b)\,y^2 - 4a^2x = 0$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 4.

பரவளைவு $x^2 - 4\,ay = 0$-ன் நகரும் தொடுகோடு ஒன்று அதி பரவளைவு $xy = c^2 = 0$ — ஐ P-யிலும், Q-விலும் வெட்டுகிறது. PQ-வின் மையப்புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PQ-வின் மையப்புள்ளி (x_0, y_0) என்றால், PQ-வின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{xy_0 + x_0y}{2} - c^2\right) - (x_0y_0 - c^2) = 0$$

அல்லது, $xy_0 + x_0y - 2x_0y_0 = 0.$

PQ-வின் சமன்பாட்டையும், $x^2 - 4ay = 0$ - ஐயும் yக்கு விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது.

$$\left(\frac{2x_0y_0 - x_0y}{y_0}\right)^2 - 4ay = 0$$

அதாவது, $(2x_0y_0 - x_0y)^2 - 4ay\,y_0^2 = 0.$

அதாவது, $(x_0^2)y^2 - 4\,(x_0^2y_0 + ay_0^2)y + 4x_0^2y_0^2 = 0.$

இச்சமன்பாடு y-யில் இருபடியுடையது. PQ, பரவளைவைத் தொடுவதால் இச்சமன்பாட்டின் தன்மைகாட்டி பூச்சியத்துக்குச் சமமாகும். ஆகவே

$$16\,(x_0^2y_0 + ay_0^2)^2 - 16x_0^4y_0^2 = 0.$$

அதாவது, $(x_0^2 + ay_0)^2 - (x_0^2)^2 = 0.$

அதாவது, $(x_0^2 + ay_0 + x_0^2)\,(x_0^2 + ay_0 - x_0^2) = 0.$

அல்லது, $(2x_0^2 + ay_0)\,(ay_0) = 0.$

ஆனால் $y_0 \neq 0$. ஆகவே $2x_0^2 + ay_0 = 0$. அதாவது (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$2x^2 + ay = 0$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 5.

வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$-ன் மேல் நகரும் P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதிபரவளைவு $x^2 - y^2 - a^2 = 0$-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் மையப்புள்ளி இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை $(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ எனக் காட்டுக.

P-யை (x_1, y_1) எனவும், தொடுநாணின் மையப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனவும் கொண்டால் சமன்பாடுகள்

$$xx_1 - yy_1 - a^2 = 0,$$

$$(xx_0 - yy_0 - a^2) - (x_0^2 - y_0^2 - a^2) = 0$$

இரண்டுமே தொடுநாணைக் குறிக்கின்றன. ஆகவே இவைகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{-y_1}{-y_0} = \frac{-a^2}{-(x_0^2 - y_0^2)}$$

அதாவது, $x_1 = \dfrac{a^2 x_0}{x_0^2 - y_0^2}$; $y_1 = \dfrac{+a\ y_1}{x_0^2 - y_0^2}$.

ஆனால், $x_1^2 + y_1^2 - a^2 =$.

ஆகவே, $\dfrac{a^4\ x_{02}}{(x_0^2 - y_0^2)^2} + \dfrac{a^4\ y_0^2}{(x_0^2 - y_0^2)^2} - a^2 = 0$

அல்லது $a^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - (x_0^2 - y_0^2)^2 = 0.$

இதிலிருந்து, (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

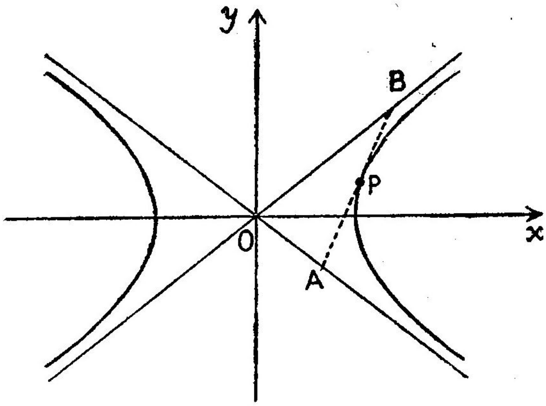
என்றாகிறது.

கணக்கு 1.

ஒரு அதிபரவளைவின் தொடுகோடு, அதன் தொலைத் தொடு கோடுகளை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகிறது. தொடுபுள்ளி P, AB-யை இருசமமாகப் பிரிக்கிறது எனக் காட்டுக.

குறிப்பீட்டச்சுக்களைக் தக்கவாறு தேர்ந்தெடுத்து அதிபர வளைவின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$



படம் 49

எனப் பெறுவோம். P-யை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், தொடுகோடு AB-யின் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

ஆகும். தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு

$$S = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ஆகவே, P வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு, தொலைத்தொடு கோடுகளை A'-யிலும், B'-யிலும் வெட்டி, P ஆனது $A' B'$-ன் மையப்புள்ளியாக இருந்தால், $A' B'$-யின் சமன்பாடாகிய $T_1 - S_1 = 0$ என்பது,

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0$$

என்றிருக்கும். ஆனால் (x_1, y_1), அதிபரவளைவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி ஆகவே

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

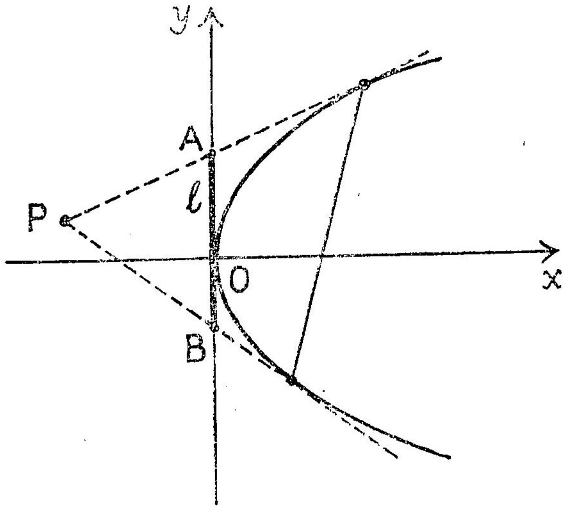
இதனுல் $A'B'$-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad (2)$$

என்ருகிறது. (1), (2)-லிருந்து, AB-யும், $A'B'$-உம் ஒரே கோடுதான் எனத் தெரிகிறது. அதாவது A', A-யுடனும், B', B-யுடனும் இணைகின்றன. மேலும் $A'B$-ன் மையப் புள்ளியாகிய P, AB-யின் மையப் புள்ளியாகிறது.

கணக்கு 7.

ஒரு நகரும் புள்ளி P-யிலிருந்து, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் y-அச்சை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. AB-ஆனது மாறிலி l-க்குச் சமமானுல், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 50).



படம் 50.

P-யை (x_0, y_0) எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது தொடு. கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு,

$$\{ yy_0 - 2(x + x_0) \}^2 - \{ y^2 - 4ax \} \{ y_0^2 - 4ax_0 \} = 0$$

ஆகும். ஆனுல் y-அச்சின் சமன்பாடு, $x=0$. இச் சமன்பாடுகளை y-க்கு விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது:

$$[yy_0 - 2a(O + x_0)]^2 - [y^2 - 4aO][\ {}_0^2 - 4ax_0] = 0$$

அதாவது, $(4ax_0)\, y^2 - (4ax_0\, y_0)\, y + 4a^2\, x_0^2 = 0$

அல்லது, $y^2 - y_0\, y + ax_0 = 0.$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், y_1, y_2 ஆனால் $A\,(O, y_1)$, $B\,(O, y_2)$ ஆகும்.

மேலும் $y_1 + y_2 = y_0$, $y_1\, y_2 = ax_0$

என்றிருக்கும். ஆனால் $AB^2 = l^2$. ஆகவே,

$$(y_1 - y_2)^2 = l^2$$

அல்லது $(y_1 + y_2)^2 - 4\, y_1\, y_2 = l^2.$

ஆகவே, $y_0^2 - 4\,(a\, x_0) = l^2$

இதிலிருந்து P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$y^2 - 4ax - l^2 = 0$$

என்றாகிறது.

§ 100. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நாண் ஒன்று, புள்ளி $(1, 2)$-ஐ மையப் புள்ளியாகக் கொண்டுள்ளது. இந் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நாண் ஒன்றின் சமன்பாடு $x - y + 1 = 0$ என்றால், நாணின் மையப் புள்ளியைக் காண்க.

3. வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$-ன் நாண் ஒன்று புள்ளி (h, k)-யின் வழியே சென்று கொண்டே நகருகிறது. நாணின் மையப்புள்ளியின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - hx + ky = 0$ எனக் காட்டுக.

4. ஒரு பரவளைவின் நாண் ஒன்று, பரவளைவின் உச்சியின் வழியாகச் சென்ற கொண்டே நகருகின்றது. நாணின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு பரவளைவு எனக் காட்டுக.

5. ஒரு பரவளைவின் நாண், பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கிக் கொண்டே நகருகிறது. நாணின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை $y^2 - 2a\,(x - 2a) = 0$ எனக் காட்டுக.

6. அதிபரவளைவு $x^2 - y^2 - a^2 = 0$-ன் நாண் ஒன்று, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐத் தொட்டுக் கொண்டே நகருகிறது.

நாணின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. A என்பது, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. A-யிடத்துச் செங்குத்துக் கோட்டின் மையப் புள்ளியுன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. A-என்பது, நீள்வளை $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மீது நகரும் நகரும் ஒருபுள்ளி. A-யிடத்துச் செங்கோட்டின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. A-என்பது, அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A-யிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. P-என்பது, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. இப் புள்ளியின் நீள்வளைவு சார்ந்த, இசைக்கோடு நீள்வளைவை A, B-ல் வெட்டினுல், AB-ன் மையப் புள்ளியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. k-ன் எம்மதிப்பிற்கும், புள்ளி $(-a, k)$-யிலிருந்து, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

12. ஒரு நீள்வளைவின் குத்துத்தொடுகோட்டு வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளியிலிருந்து, நீள்வளைவுக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள், செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

13. ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள், x-அச்சில் துண்டிக்கும் நீளம் L என்ருல், புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து பரவளைவு $y^2-4ax = 0$-க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள், பரவளைவின் இயங்குவரையில்

துண்டிக்கும் துண்டின் நீளம் l என்றால், புள்ளியின் இயங்கு-வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள். ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக. மேலும் அவைகளின் வடிவெப்பமையத்தைக் (Centre of Similitude) கண்டு, அவைகளின் பொதுத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தை, சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 41 = 0$ குறிக்கும் வட்டம், வெட்டாது எனக் காட்டுக. மேலும், அவைகளின் வடிவொப்பமையங்களைக் கண்டு, அவைகளின் பொதுத் தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடுகளைக் காண்க.

விடைகள்

1. $ax - y - a + 2 = 0$

2. $[2a - 1, 2a]$

6. $x(x^2 - y^2) + ay^2 = 0$

7. $y^2(y^2 - 2ax + 4a^2) + 8a^4 = 0$

8. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2}\right) = (a^2 - b^2)^2$

9. $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{a^6}{x^2} - \frac{b^6}{y^2}\right) = (a^2 + b^2)^2$

10. $(a^2 + b^2)(b^2 x^2 + a^2 x^2)^2 - (x^2 + y^2) a^4 b^4 = 0$

13. $4y^2(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) - l^2 (y^2 - b^2)^2 = 0$

14. $(x + a)^2 (y^2 - 4ax) = l^2 x^2$

15. $(4, 1)$, $x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + 13 = 0$

16. $3x^2 - 4xy + 2x + 4y - 5 = 0$,
$35x^2 + 8y^2 - 36xy - 6x - 12y - 45 = 0$.

§ 101. நேர்கோட்டின் தொலைவுச் சமன்பாட்டைப் பயன் படுத்துதல்.

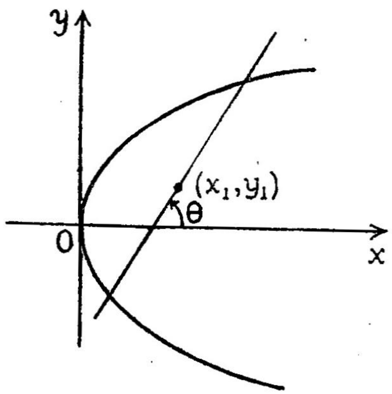
நேர்கோட்டின் தொலைவுச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் கண்டவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்;

(i) ஒரு கூம்புவளைவை அதன் மேலுள்ள புள்ளி ஒன்றில் தொடும் தொடுகோடு;

(ii) ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை மையப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாண்;

(iii) ஒரு புள்ளியிலிருந்து கூம்புவளைவுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள்.

உதாரணமாக, முதலில் (x_1, y_1)-ஐ மையமாகக் கொண்ட, பரவளை $y^2 - 4ax = 0$-ன் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 51).



படம் 51.

இந் நாண் x அச்சுடன் கோணம் θ-வை உண்டாக்கினால், நாணின் தொலைச் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

என்றாகிறது. இந் நாணின் மேல் (x_1, y_1)-லிருந்து r-அலகு தூரத்திலுள்ள புள்ளியானது

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$$

ஆகும். இப் புள்ளி பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேல் அமைந் தால்,

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 - 4a(x_1 + a\cos\theta) = 0$$

என்று கிடைக்கும். அதாவது

$$(\sin^2\theta)r^2 + 2(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)r + (y_1^2 - 4ax_1) = 0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் r_1, r_2 என்றால், (x_1, y_1) ஆனது, நாணின் மையப் புள்ளியால் இருப்பதால்,

$$r_1 = -r_2,$$

அதாவது, $r_1 + r_2 = 0.$

ஆகவே, $y_1\sin\theta - 2a\cos\theta = 0$

அல்லது $y_1\sin\theta = 2a\cos\theta.$

அதாவது, $\tan\theta = \dfrac{2a}{y_1}.$

இதிலிருந்து, நாணின் சரிவு $\dfrac{2a}{y_1}$ எனத் தெரிகிறது. ஆகவே நாணின் சமன்பாடு,

$$(y - y_1) = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

அல்லது $yy_1 - y_1^2 - 2ax + 2ax_1 = 0$

அல்லது $(yy_1 - 2ax) - (y_1^2 - 2ax_1) = 0$

அல்லது $\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - \{y_1^2 - 4ax_2\} = 0$

அல்லது $T_1 - S_1 = 0.$

அடுத்த படியாக, $x_2, y_1)$ ஆனது, பரவளைவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாய் இருந்து, அதனிடத்துத் தொடுகோடு x அச்சுடன் கோணம் θ-ஐ உண்டாக்கினால், சமன்பாடு

$(\sin^2\theta)r^2 + 2(x_1\sin\theta - 2a\cos\theta) + (y_1^2 - 4ax_1) = 0$-ன் மூலங்கள் இரண்டும் பூச்சியமாகும். ஆகவே,

$$r_1 + r_2 = 0, \; r_1 \cdot r_2 = 0.$$

எனவே $y_2\sin\theta - 2a\cos\theta = 0, \; y_1^2 - 4bx_1 = 0.$

அல்லது, $\tan\theta = \dfrac{2a}{y_1}, \; y_1^2 - 4ax_1 = 0$

இவைகளிலிருந்து, தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1).$$

அல்லது $(yy_1 - 2ax) - (y_1^2 - 2ax_1) = 0.$

அதாவது, $\{ yy_1 - 2a(x + x_1) \} - (y_1^2 - 4ax_1) = 0.$

அதாவது, $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0.$

அதாவது, $T_1 = 0.$

கடைசியாக, (x_1, y_1)-ஐ பரவளைவுக்கு வெளியில் எடுத்துக் கொண்டு, அதிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடு கோடு களின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்போம். ஒரு தொடுகோடு x-அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ என்றால், அத்தொடு கோட்டின் தொலைவுச் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (101\cdot1)$$

ஆகும். இத்தொடுகோடு பரவளைவை வெட்டும் புள்ளியை

$(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta) = 0)$

எனக்கொண்டால், இருபடிச் சமன்பாடாகிய

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 - 4a(x_1 + r\cos\theta) = 0$$

என்பது. அதாவது

$$(\sin^2\theta) r^2 + 2(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta) r + (y_1^2 - 4ax_1) = 0$$

என்பது, சமமான மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

ஆகவே இதன் தன்மைகாட்டி பூச்சியமாகும். இதனால்

$$(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)^2 - \sin^2\theta(y_1^2 - 4ax_1) = 0 \qquad (101\cdot2)$$

என்று கிடைக்கிறது. இப்பொழுது தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டைக் காண, (101·1) - லிருந்தும், (101·2) - லிருந்தும் θ-வை நீக்க வேண்டும். இதற்காக (101·1) - லிருந்து

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}$$

எனப் பெற்று, (101·2) - ல் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\left\{ y_1\left(\frac{y - y_1}{r}\right) - 2a\left(\frac{x - x_1}{r}\right) \right\}^2 - \left\{\frac{y - y_1}{r}\right\}^2 (y_1^2 - 4ax_1 = 0.$$

அல்லது,

$$\{ y_1 (y-y_1) - 2a (x-x_1) \}^2 - (y-y_1)^2 (y_1^2-4ax_1) = 0.$$

அல்லது,

$$\{ (yy_1-2ax) - (y_1^2-2ax) \}^2 - (y-y_1)^2 (y_1^2-4ax_1) = 0$$

இந்நிலையில் வழக்கமான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம். இதற்காக, $(T_1 - S_1)$ — இன் மதிப்பையும், $(S - 2T_1 + S_1)$. இன் மதிப்பையும் காண்போம்.

$$T_1 - S_1 = \{ yy_1 - 2a (x + x_1) \} - y_1^2 - 4ax_1 \}$$
$$= (yy_1 \quad 2ax) - (y_1^2 - 2ax_1)$$

$$S - 2T_1 + S_1 = (y^2 - 4ax) - 2 \{ yy_1 - 2a (x + x_1) \} + (y_1^2 - 4ax_1)$$
$$= y^2 - 2yy_1 + y_1^2$$
$$= (y - y_1)^2$$

ஆகவே, $(x_1 y_1)$- லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.

$$(T_1 - S_1)^2 - (S - 2T_1 + S_1) S_1 = 0$$

அல்லது, $(T_1^2 + 2T_1S_1+S_1^2) - (SS_1 - 2T_1S_1+S_1^2)=0$

அல்லது, $T_1^2 - SS_1 = 0.$

என்றாகிறது. இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால், இது (x_1, y_1) லிருந்து வரையப்பட்ட இரண்டு தொடுகோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடாகும்.

கூம்பு வளைவு, நீள்வளைவானாலும், அதிபரவளைவானாலும் இம்முறைகளையே கையாண்டு, தொலைவுச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். எனினும், புள்ளி (x_1, y_1) லிருந்து நீள்வளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

-க்கு வரையப்பட்ட தொடு நாண்களின் இணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்போம். ஒரு தொடு நாணின் தொலைவுச் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r.$$

என்றால், தொடு நாண் நீள்வளைவை வெட்டும் புள்ளிகள், புள்ளி $(x_1\ y_1)$-லிருந்து இருக்கும் தூரங்களை, சமன்பாடு

$$\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

கொடுக்கிறது. இச்சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதினால்

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2 + 2\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)r + S_1 = 0.$$

என்று கிடைக்கிறது. இதன் மூலங்கள் சமமாகையால் இதன் தன்மைகாட்டி பூச்சியத்திற்குச் சமம். இதனால்

$$\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) S_1 = 0 \quad (101\cdot3)$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண, அதன் தொலைவுச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, (101·3)-லிருந்து θ-வை நீக்கவேண்டும். ஆனால், தொலைவுச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r},\ \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, θ-வை நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\left\{\frac{x_1(x - x_1)}{a^2 r} + \frac{y_1(y - y_1)}{b^2 r}\right\}^2 - \left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{x - x_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{y - y_1}{r}\right)^2\right\} S_1 = 0.$$

அதாவது,
$$\left\{\frac{x_1(x - x_1)}{a^2} + \frac{y_1(y - y_1)}{b^2 r}\right\}^2 - \left\{\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - x_1)^2}{b^2}\right\} S_1 = 0$$

அல்லது $(T_1 - S_1)^2 - (S - T_1 + S_1)\,S_1 = 0$

அல்லது $T_1^2 - SS_1 = 0.$

இச் சமன்பாட்டின் படி இரண்டாகையால், இச் சமன்பாடு (x_1, y_1)-லிருந்து நீள்வளைவுக்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடு கோடுகளையும் குறிக்கின்றது.

§ 102. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நாண் ஒன்றின் மையப்புள்ளி, (h, k). இந் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

நாணின் தொலைவுச் சமன்பாட்டை

$$\frac{x - h}{\cos\theta} = \frac{y - k}{\sin\theta} = r$$

எனக் கொள்வோம். இந் நாணின் மேலுள்ள புள்ளியைப் பொதுவாக

$$(h + r\cos\theta, k + r\sin\theta)$$

எனக் குறிக்கலாம். இப் புள்ளி, பரவளைவின்மீதும் அமைந்தால்,

$$(k + r\sin\theta)^2 - 4a(h + r\cos\theta) = 0.$$

அதாவது, $(\sin^2\theta)\, r^2 + 2(k\sin\theta - 2a\cos\theta)\, r + (k^2 - 4ah) = 0$. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், நாண் பரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகள், (h, k)-விலிருந்து இருக்கும் தூரங்களைக் குறிக்கின்றன.

ஆகவே, நாணின் நீளத்தை l எனக் கொண்டால், $\frac{1}{2}l, -\frac{1}{2}l$ என்பன இம் மூலங்கள் ஆகின்றன. எனவே, இம் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகையையும், பெருக்கற்பலனையும் கவனித்தால்,

$$\left(-\frac{1}{2}l\right) + \frac{1}{2}l = \frac{2(k\sin\theta - 2a\cos\theta)}{\sin^2\theta},$$

$$\left(-\frac{1}{2}l\right)\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{k^2 - 4ah}{\sin\theta}$$

என்றும், அதாவது

$$0 = k\sin\theta - 2\cos\theta,$$

$$-\frac{l^2}{4} = \frac{k^2 - 4ah}{\sin^2\theta}$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இவைகளிலிருந்து θ-வை நீக்கி, l-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். ஆனால்,

$$\cos \theta = \frac{k}{2a}.$$

ஆகவே, $$l^2 = \frac{-4(k^2 - 4ah)}{\sin^2 \theta}$$

$$= 4(4ah - k^2) \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$= 4(4ah - k^2)(1 + \cot^2 \theta)$$

$$= 4(4ah - k^2)\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)$$

$$= (4ah - k^2)\left(4 + \frac{k^2}{a^2}\right).$$

கணக்கு 2.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நாண் ஒன்று, தன் நீளம் மாருத வண்ணத்தில் நகருகிறது. இந் நாணின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முந்திய கணக்கில் மையப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால்,

$$l^2 = (4ax_0 - y_0^2)\left(4 + \frac{y_0^2}{a^2}\right)$$

என்றும், இதிலிருந்து, மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$(4ax - y^2)\left(4 + \frac{y^2}{a^2}\right) = l^2$$

அல்லது $(y^2 - 4ax)(y^2 + 4a^2) + a^2 l^2 = 0$

என்றும் கிடைக்கிறது.

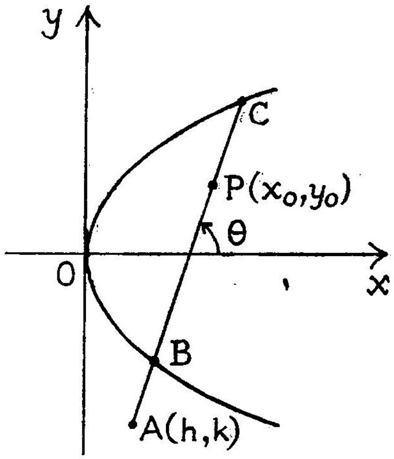
கணக்கு 3.

நிலைத்த புள்ளி $A(h, k)$ வழியாகச் சென்றுகொண்டே இடம் மாறுகின்ற ஒரு கோடு, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ஐ B-யிலும், C-யிலும் வெட்டுகிறது. P, இக் கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி.

A-யிலிருந்து B, C, P ஆகியவற்றின் நுண் கணிதத் தூரங்களாகிய (algebraic distances) r_1, r_2, r_3 என்பன,

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்டிருந்தால், P-யின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (படம் 52).



படம் 52.

கோடு x-அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தை θ எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், θ ஒரு மாறி ஆகும். கோட்டின் தொலைவுச் சமன்பாடு

$$\frac{x-h}{\cos\theta} = \frac{y-k}{\sin\theta} = r$$

என்பதாகும். மேலும், (h, k)-யிலிருந்து r-அலகு தூரத்திலுள்ளவாறும், இக் கோட்டின்மீது அமையுமாறும் உள்ள புள்ளி,

$$(k + r\cos\theta,\ k + r\sin\theta) \qquad \ldots (1)$$

என்பதாகும். இப் புள்ளி, பரவளைவின்மீது இருப்பதாகக் கொண்டால்,

$$(k + r\sin\theta)^2 - 4a\ h + r\cos\theta) = 0\cdot$$

அதாவது, $(\sin^2\theta)\, r^2 + 2\,(k\sin\theta - 2a\cos\theta)\, r$

$$+ (k^2 - 4ah) = 0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், r_1, r_2 என்பன. ஆகவே,

$$r_1 + r_2 = \frac{-2(k \sin\theta - 2a\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$r_1 r_2 = \frac{k^2 - 4ah}{\sin^2\theta}.$$

ஆனால், $$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}.$$

ஆகவே, $$\frac{1}{r_3} = -\frac{2(h\sin\theta - 2a\cos\theta)}{k^2 = 4ah}$$

அல்லது, $k^2 - 4ah = -2k(r_3 \sin\theta) + 4a(r_3 \cos\theta)$ ... (2)

(h, k)-யிலிருந்து r_3 அலகு தூரத்திலுள்ள P-யை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால், (1)-லிருந்து,

$$x_0 = h + r_3 \cos\theta$$
$$y_0 = k + r_3 \sin\theta$$

என்றுகும். அதாவது,

$$r_3 \cos\theta = x_0 - h,$$
$$r_3 \sin\theta = y_0 - k.$$

இவைகளைப் பயன்படுத்தி, (2)-லிருந்து θ-வை நீக்கினல் கிடைப்பதாவது :

$$-2k(y_0 - k) + 4a(x_0 - h)$$

அல்லது, $k^2 + 4ax_0 \cdot 2hy_0 = 0.$

இதிலிருந்து, P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $4ax - 2ky + k^2 = 0$ என்று தெரிகிறது.

103. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$—ன் ஒரு நாணின் மையப்புள்ளி, $(h_1 k)$ என்றல், நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

2. செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$—ன் ஒரு நாணின் மையப்புள்ளி, (h, k) என்றல், நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

3. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ —ன் ஒரு நாண் தன் நீளம் மாருவண்ணம் நகருகிறது. நாணின் மையப்புள்ளியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. செவ்வக அதிபரவளைவு $xy-c^2=0$ — இன் ஒரு நாண் தன் நீளம் மாருவண்ணம் நகருகிறது. நாணின் மையப் புள்ளியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. நிலைத்த புள்ளியின் (h,k) வழியாகச் சென்று கொண்டே இடம் மாறுகின்ற ஒரு கோடு, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$-ஐ B-யிலும், C-யிலும் வெட்டுகிறது. p, இக் கோட்டின்மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. (h,k)-யிலிருந்து B,C,P-ஆகியவற்றின் நுண் கணிதத் தூரங்களாகிய (algebraic distances) r_1, r_2, r_3 என்பன,

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்டிருந்தால், P-யின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. நிலைத்த புள்ளி (h,k) வழியாகச் சென்றுகொண்டே இடம் மாறுகின்ற ஒரு கோடு, பரவளைவு. $y^2-4ax=0$ ஐ B-யிலும், C-யிலும் வெட்டுகிறது. P, இக்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி (h_1k)-யிலிருந்து B, C, P ஆகியவற்றின் நுண் கணிதத் தூரங்களாகிய r_1, r_2, r_3 என்பன, $r_3=r_1+r_2$ என்ற நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்டிருந்தால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை, $y^2-4ax-(k^2-4ah)=0$ எனக் காட்டுக.

7. O என்பது, ஒரு நகரும் புள்ளி. AOA', BOB' என்பன குறிப்பட்ட இரு திசைகளுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட,பரவளைவு $ax^2+by^2-1=0$-ன், நாண்கள். விகிதம்

$$\frac{OA \cdot OA'}{OB \cdot OB}$$

ஆனது ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

8. O என்பது ஒரு நிலைத்த புள்ளி. AOA', BOB', என்பன, ஒரு நீள்வளைவின் நாண்கள். இந்த நாண்கள் செங்குத்தானவையாகவே இருந்து கொண்டு நகருகின்றன என்ருல்,

$$\frac{1}{OA.OA}+\frac{1}{OB \cdot OB'}$$

ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. $2\left\{\left(1\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b_2}\right)(a^4k^2+b^4h^2)/(a^2k^2+b^2h^4)\right\}^{\frac{1}{2}}.$

2. $2\sqrt{(h^2+k^2)(hk-c^2)}/hk$

3. $4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)(b^4x^2+a^4y^2)+l^2(b^2x^2+a^2y^2)=0.$

4. $4(x^2+y^2)(xy-c^2)=l^2xy.$

5. $\frac{2hx}{a^2}+\frac{2ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1.$

§ 104. விட்டங்கள்

ஒரு நீள்வளேவின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் நாண், அதனின் ஒரு விட்டமாகும். இதேபோல் ஒரு அதிபரவளேவின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் நாண், அதனின் ஒரு விட்டமாகும். அல்லது ஒரு கூம்பு வளேவில் ஒரு தொகுதி இணையான நாண்களின் (system of parallel chords) மையப்புள்ளியின் இயங்குவரை அதன் விட்டம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு பரவளேவின் நாண் ஒன்று, ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டிற்கு இணையாகும்படியாகவே நகருகின்றது. இந்நாணின் மையப் புள்ளியின் இயங்கு வரையைப் பரவளேவின் ஒரு விட்டமாகும் எனக் காட்டுவோம்.

பரவளேவின் அச்சை x- அச்சாகவும், உச்சியில் வரையப் பட்ட தொடு கோட்டை y-அச்சாகவும் கொண்டால், பரவளேவின் சமன்பாடு, $y^2-4ax=0$ என்ற வடிவின் அமையும். நகரும் நாணின் சரிவை m எனக் கொள்வோம். இங்கு m ஒரு மாறிலி நாணின் மையப்புள்ளி (x_0, y_0) என்ருல், அதன் சமன்பாடு,

$$\{yy_0-2a(x+x_0)\}-\{y_0^2-4ax_0\}=0$$

ஆகும் அதாவது,

$$yy_0-2ax=y_0^2-2ax_0$$

அல்லது, $y = \frac{2a}{y_0} x + \frac{y_0^2 - 2a x_0}{y_0}$

ஆகும். ஆகவே, நாணின் சரிவை m-க்குச் சமப்படுத்த,

$$\frac{2a}{y_0} = m$$

அல்லது, $y_0 = \frac{2a}{m}$

என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து நாணின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{2a}{m}$$

என்றாகிறது. மேலும் இந்த இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடென்றும், இந்நேர்கோடு பரவளையின் அச்சுக்கு இணையானது என்றும் தெரிகிறது.

அடுத்தபடியாக, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ - ன் நாண் ஒன்று, m-ஐச் சரிவாகக் கொண்ட கோட்டுக்கு இணையாகவே இருக்குமாறு நகரும்பொழுது அதன் மையப் புள்ளியின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். மையப்புள்ளி (x_0, y_0) என்றால் நாணின் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2}\right) - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

ஆகும். இந் நாணின் சரிவு,

$$\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

ஆகவே, $\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} = m.$

அல்லது $b^2 x_0 + ma^2 y_0 = 0.$

இதிலிருந்து, மையப்புள்ளியின் இயங்கு வரை

$$b^2 x + ma^2 = 0.$$

எனக் கிடைக்கிறது: மேலும் இச் சமன்பாடு ஒரு நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கிறது என்றும், இந் நேர்க்கோடு நீள்வளைவின் விட்டம் என்றும் தெளிவாகிறது,

அடுத்தபடியாக, இவ்விட்டத்திற்கு இணையாக இருந்து கொண்டே நகரும் நாணின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரை காண்போம். இங்கு, விட்டத்தின் சரிவு

$$\frac{-b^2}{a^2 m}$$

ஆகவே, இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$b^2 x + \left(\frac{-b^2}{a^2 m}\right) a_2 y = 0$$

அல்லது $$x - \frac{y}{m} = 0$$

அல்லது $$y = mx.$$

இச் சமன்பாடு குறிக்கும் நேர்கோடு நீளவளையின் மையப் புள்ளி வழியாகச் செல்லுவதால் இக் கோடு ஒரு விட்டமாகும். இதிலிருந்து, ஒரு வெகு முக்கியமான விளைவு கிடைக்கிறது. அதாவது, ஒரு நீள்வளையில் ஒரு விட்டத்திற்கு இணையான நாண்களை, மற்ருெரு விட்டம் சம துண்டுகளாக வெட்டுகிறது. மேலும், இரண்டாவது விட்டத்திற்கு இணையான நாண்களை, முதல் விட்டம் சமதுண்டுகளாக வெட்டுகிறது.

இத்தகைய இரு வட்டங்கள் துணையில் விட்டங்கள் (conjugate diametres) என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இப்பொழுது, ஒரு சோடி துணையிய விட்டங்களின் சரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுவோம். ஒரு விட்டத்தின் சரிவு m என்ருல் அடுத்த விட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$b^2 x + ma^2 y = 0$$

என்றும், அதன் சரிவு

$$\frac{b^2}{ma^2}$$

என்றும் தெரியும். ஆகவே, அவைகளின் பெருக்கற்பலன்

$$= (m)\left(\frac{-b^2}{ma^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \qquad (104.1)$$

இது, m-ஐச் சார்ந்ததாக இல்லை. ஆகவே இது ஒரு மாறிலி.

இம் மாதிரியே, அதிபர வளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ —ல், ஒரு சோடி துணையிய விட்டங்களில் ஒன்றின் சமன்பாடு

$$y - mx = 0$$

$$b^2 x - ma^2 y = 0$$

ஆகும். இங்கு துணையிய விட்டங்களின் பெருக்கற்பலன்

$$\frac{b^2}{a^2}$$

என எளிதில் காணலாம்.

இப்பொழுது, துணையிய விட்டங்களில், ஒன்று அதிபர வளைவை வெட்டினல், அடுத்தது அதிபரவளைவை வெட்டாது எனக் காட்டுவோம்.

இதற்காக

$$y - mx = 0$$

என்ற விட்டம் அதிபரவளைவை வெட்டுகிறது எனக்கொள்வோம். அப்படியாயின், அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும், $y - mx = 0$ ஐயும், x-க்கு விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2}{b^2} - 1 = 0.$$

அதாவது, $$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 = 1.$$

அதாவது, $$\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} > 0 \qquad (104{\cdot}2)$$

ஆனல், அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும், அடுத்த விட்டத்தின் சமன்பாடாகிய $b^2 x - ma^2 y = 0$-ஐயும், x-க்கு விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2 x}{ma^2}\right)^2 - 1 = 0.$$

அதாவது, $$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{m^2 a^4}\right) x^2 = 1$$

அதாவது, $$\frac{a^2 m^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{m^2 a^4}\right) x^2 = \frac{a^2 m^2}{b^2}.$$

அதாவது, $\left(\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2=\frac{a^2\ m^2}{b^2}$.

அதாவது, $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)x^2=-\frac{a^2\ m^2}{b^2}$.

இதிலிருந்தும். (104·2)-லிருந்தும் x^2 ஒரு குறை எண் என்றாகிறது. ஆகவே, அதிபரவளைவை விட்டம் $b^2\ x-ma^2\ y=0$, வெட்டவில்லை என்றாகிறது.

ஆயினும், இவ் விட்டம் துணையிய அதிபரவளைவான $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$-ஐ வெட்டுகிறது. இதைக் காட்டுவதற்காக, இவ் விட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும், x-க்கு விடுவிப்போம். இதனுல் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2\ x}{ma^2}\right)x^2+1=0.$$

அதாவது, $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{m^2\ a^4}\right)x^2=-1.$

அதாவது, $\frac{a^2\ m^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{m^2\ a^4}\right)x^2=-\frac{a^2\ m^2}{b^2}$.

அதாவது, $\left(\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2=-\frac{a^2\ m^2}{b^2}$.

அதாவது, $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)x^2=\frac{a^2\ m^2}{b^2}$.

இதிலிருந்தும், (104·2)-லிருந்தும் x^2 ஓர் மிகை எண் எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே துணையிய அதிபரவளைவை விட்டம் $b^2x-ma^2y=0$, வெட்டுகிறது என்றாகிறது.

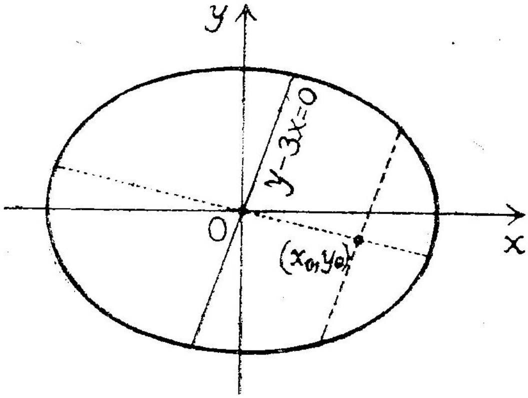
கடைசியாக, ஒரு கூம்புவளைவின் விட்டத்தின் ஒரு முனையிடத்து வரையப்பட்ட தொடு நாண் பற்றிப் படிப்போம். விட்டமானது, குறிப்பிட்ட இணையான நாண்களை சமதுண்டாங்

களாக வெட்டுகின்றது என அறிந்தோம். இந் நாண்களில் ஒன்று, இணையாகவே இருந்துகொண்டு, விட்டத்தின் முனையை நோக்கி நகர்ந்தால், முடிவில் நாண் முனையிடத்துத் தொடுகோடாகிறது என்பது எளிதில் தெரிகிறது. அதாவது முனையிடத்துத் தொடுகோடு, இணை நாண்களுக்கு இணையாயுள்ளது எனத் தெரிகிறது.

§ 105. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

நீள்வளைவு $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$-ன் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்களில் ஒன்றின் சமன்பாடு, $y - 3x = 0$ என்றால், மற்றதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம் 51.

முதல் விட்டத்தின் சரிவு 3, (x_0, y_0) என்பது இரண்டாவது விட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி என்றால், (x_0, y_0)-ஐ மையமாகக் கொண்ட நாண், முதல் விட்டத்திற்கு இணையானது. ஆனால் இந்நாணின் சமன்பாடு,

$$(2x\,x_0 + 3yy_0 - 6) - (2x_0^2 + 3y_0^2 \quad 6) = 0.$$

ஆகவே, $\dfrac{-2x_0}{3y_0} = 3$

அல்லது, $2x_0 + 9y_0 = 0$

எனவே, இரண்டாவது விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$5x + 9y = 0$$

என்பதாகும்.

கணக்கு 2.

ஒரு நீள்வளையின் பேரச்சு, x-அச்சின் மேல் அமைந்துள்ளது. $x + y = 0$, $3x - 4y = 0$ என்பன நீள்வளையின் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்களைக் குறித்தால், நீள்வளையின் தொலைத்தகவைக் காண்க.

பேரச்சின் நீளத்தை $2a$ எனவும், சிற்றச்சின் நீளத்தை $2b$ எனவும், தொலைத்தகவை 'e' எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின் துணையிய விட்டங்களின் சரிவின் பெருக்குத் தொகை

$$= -\frac{b^2}{a^2}$$

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட விட்டங்களின் சரிவுகள் $-1, \frac{3}{4}$.

ஆகையால்,

$$-\frac{b^2}{a^2} = (-1)\left(\frac{3}{4}\right).$$

அல்லது $4b^2 = 3a^2$

அதாவது, $4a^2(1 - e^2) = 3a^2$.

அதாவது, $4 - 4e^2 = 3$

அதாவது, $e^2 = \frac{1}{4}$; $e = \frac{1}{2}$.

கணக்கு 3.

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$S^1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுகளின் பொதுப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் விட்டங்கள், முதல் நீள் வளையின் துணையிய விட்டங்களானால்,

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 2.$$

எனக் காட்டுக.

சமன்பாடு $S - S^1 = 0$ என்பது, அதாவது,

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)y^2 = 0$$

என்பது, பொதுப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் இரண்டு நேர் கோடுகளைக் குறிக்கின்றது என்பதை எளிதில் காணலாம். (25.2)-லிருந்து இக் கோடுகளின் சரிவுகளின் பெருக்கற்பலன்

$$= \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\beta^2}}$$

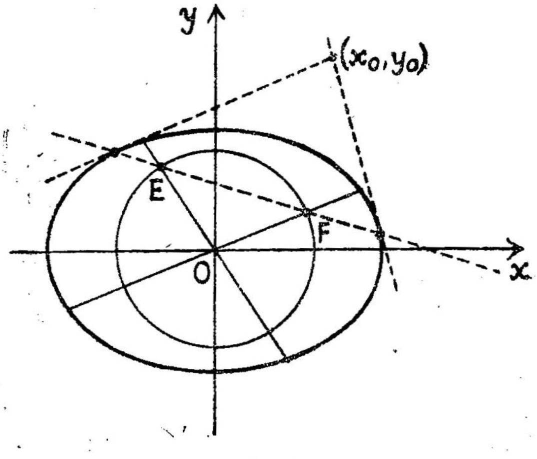
எனத் தெரிகிறது. ஆனால், இக்கோடுகள் முதல் நீள வளையின் துணையிய விட்டங்களாகையால் இப் பெருக்கற்பலன் $-\frac{b^2}{a^2}$ க்குச் சமம். ஆகவே,

$$-\frac{b^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\beta^2}}$$

அதாவது, $-b^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) = a^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right).$

அதாவது, $-1 + \frac{b^2}{\beta^2} = 1 - \frac{a^2}{\alpha^2}.$

அதாவது, $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 2.$



படம் 54.

கணக்கு 4.

நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-இன் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்கள், வட்டம் $x_2 + y^2 - r^2 = 0$-ஐ E, F என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. EF-இன் நீள்வளைவு சார்ந்த, இசைப் புள்ளி,

$$\frac{^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(a^2 + b^2)}{r^2} = 0.$$

குறிக்கும் நீள்வளைவின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

(x_0, y_0)-ஐ இசைப் புள்ளி எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், EF-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

அல்லது $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{y_0}{h^2} = 1$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $x^2 + y^2 - r^2 = 0$-ஐச் சமபடித்தான சமன்பாடாக்கினால்; கிடைப்பது, OE, OF ஆகியவற்றின் இணைந்த சமன்பாடாகும். அதாவது

$$x^2 + y^2 - r^2 \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b_2}\right)^2 = 0$$

அல்லது $$\left(1 - \frac{r^2 x_0^2}{a^2}\right) x^2 - \left(2r^2 \frac{x_0}{a^2} \frac{y_0}{b^2}\right) xy$$

$$+ \left(1 - \frac{r^2 y_0^2}{b^2}\right) y^2 = 0$$

OE-ஐயும், OF-ஐயும் குறிக்கின்றது. (25·2)-லிருந்து, இக்கோடுகளின் சரிவுகளின்

$$\text{பெருக்கற் பலன்} = \frac{1 - \frac{r^2 x_0^2}{a^2}}{1 - \frac{r^2 y_0^2}{b^2}}$$

என்றிருக்கிறது. ஆனால் OE, OF என்பன நீள்வளையின் துணையிய விட்டங்களாகையால், இப் பெருக்கற் பலன் $\left(\frac{-b^2}{a^2}\right)$-க்குச் சமமாகவும். ஆகவே

$$-\frac{a^2}{b^2} = \frac{1 - \frac{r^2 x_0^2}{a^2}}{1 - \frac{r^2 y_0^2}{b^2}}$$

அல்லது $\quad -b^2 + r^2 y_0^2 = a^2 - r^2 x_0^2$

அல்லது $\quad r^2 (x_0^2 + y_0^2) - (a^2 + b^2) = 0$

அல்லது $\quad x_0^2 + y_0^2 - \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 0.$

இதிலிருந்து, (x_0, y_0), நீள்வளைவு,

$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 0$-ன் மேல் அமைகிறது

எனத் தெளிவாகிறது.

§ 106. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. பரவளைவு $y^2 - 8x = 0$-ன் நாண் $2x + y - 3 = 0$-ஐ இரு சம துண்டுகளாக்கும், பரவளையின் விட்டத்தைக் காண்க.

2. நீள்வளைவு $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$-ன் துணையிய விட்டங்களில் ஒன்றின் சமன்பாடு, $y - 2x = 0$ என்றால், மற்றதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. A_1, A_2 என்பன, இரண்டு நிலைத்த புள்ளிகள். இரண்டு மாறும் கோடுகளாகிய l_1, l_2 என்பன, ஒரு நீள்வளையின் துணையிய விட்டங்களாகவே உள்ளன. A_1 வழியாக l_1-க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடும், A_2 வழியாக l_2-க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடும், வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையை ஒரு நீள்வளைவு எனக் காட்டு.

[உதவிக் குறிப்பு : நீள் வளையின் பேரச்சை x-அச்சாகவும் சிற்றச்சை y-அச்சாகவும்கொள்க. நீள்வளையின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும். A_1 ஐ (α_1, β_1) என்றும், A_2-ஐ (α_2, β_2) என்றும், இணைகோடுகளின் வெட்டும்புள்ளியை (x_0, y_0) என்றும் கொண்டால்,

$$\left(\frac{y_0 - \beta_1}{x_0 - \alpha_1}\right)\left(\frac{y_0 - \beta_2}{x_0 - \alpha_2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}.$$]

4. $px^2 + 2rxy + qy^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளையின் துணையிய விட்டங்கள் என்ருல், $pa^2 + qb^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

5. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் ஒரு சோடிக் துணையிய விட்டங்களின் முனைகளை இணைக்கும் நாணின் சமன் பாடு $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ என்ருல், $a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha = 2p^2$ எனக்காட்டுக.

6. PP', DD' என்பன, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ -ன் ஒரு மாறும் சோடித் துணையிய விட்டங்கள். P, D ஆகிய வற்றினிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.

7. PP', DD' என்பன நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ன் ஒரு மாறும் சோடித் துணையிய விட்டங்கள். PD-யின் மத்தியப் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

8. ஒரு நீள்வளைவின் தொடுகோடொன்று நீள் வளைவின் குத்துத்தொடுகோட்டு வட்டத்தை E-யிலும், F-யிலும் வெட்டு கிறது. C என்பது நீள்வட்டத்தின் மையமாளுல், CE, CF என்பன நீள்வளைவின் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு நீள்வளைவினது இரண்டு இணையான தொடுகோடு களை மூன்ருவது தொடுகோடொன்று E-யிலும், F-யிலும் வெட்டு கிறது. CE, CF என்பது, நீள்வளைவின் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. $y + 2 = 0$

2. $9x + 8y = 0$

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 = 0$

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{2} = 0$

8. துணையலகுக் குறிப்பிடல்

(Parametric Representation)

§ 107. துணையலகுக் குறிப்பிடல்

சில குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகளையுடைய கூம்பு வளைவுகளின் மேலுள் புள்ளிகளைத் துணையலகுகளைப் பயன்படுத்திக்குறிப்பிடலாம். உதாரணமாக, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளைப் பொதுவாக

$$(a \cos, a \sin \theta)$$

என்று குறிப்பிடலாம். ஏனெனில் இங்கு θ துணையலகாகும். இத் துணையலகு, $(a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 - a^2 = 0$. பூச்சியம் முதல் 2π வரை எல்லா மதிப்புகளையும் பொறும்போது $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ வட்டத்தின்மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும்குறிக்கின்றது என்பதை எளிதில் காணலாம். எனினும் θ-வின் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு, $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ குறிக்கும் புள்ளிகள் கீழே தரப் பட்டுள்ளன.

	θ	$(a \cos \theta, a \sin \theta)$
(i)	0	$(a, 0)$
(ii)	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$
(iii)	$\frac{\pi}{2}$	$(0, a)$
(iv)	π	$(-a, 0)$

புள்ளி $a \cos \theta, a \sin \theta)$-ஐ சுருக்கமாக " θ " எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.

இதேபோல், சமன்பாடுகள் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $y^2-4ax=0$, $xy-c^2=0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுகளின் மேலுள்ள புள்ளிகளைத் துணையலகு வடிவில் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

கூம்பு வளைவு		புள்ளி	குறியீட்டு வடிவில்
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$		$(a\cos\theta, b\sin\theta)$	" θ "
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	(i)	$(a\sec\theta, b\tan\theta)$	" θ "
	(ii)	$(a\cosh\theta, b\sinh\theta)$	" θ "
$y^2-4ax=0$		$(at^2, 2at)$	" t "
$xy-c^2=0$		$\left(ct, \frac{c}{t}\right)$	" t "

நீள் வளைவு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$-ன் துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-a^2=0$ ஆகும். நீள் வளைவின்மேல் P புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு, P-யிலிருந்து பேரச்சு AA^1-க்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைவோம் (படம் 55). NP ஐ நீட்டப்படும்பொழுது அது துணைவட்டத்தை p என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். கோணம் Aop-ஐ θ எனக் குறித்தால்,

$$ON = op\cos\theta = a\cos\theta,$$

$$Np = op\sin\theta = a\sin\theta$$

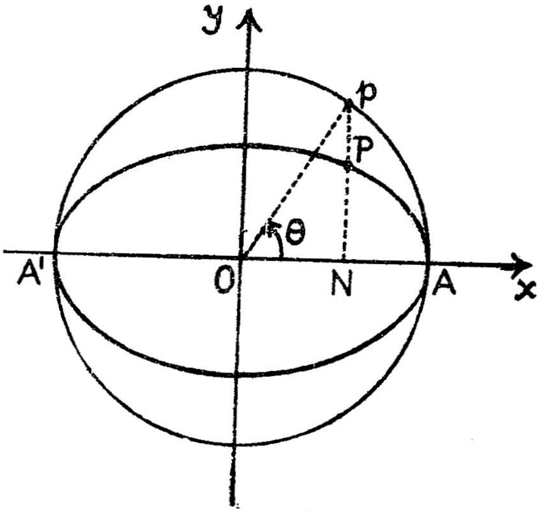
ஆகும். ஆகவே, p ஆனது, $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ஆகும். இப்பொழுது p-ன் x கூறும் $a\cos\theta$ ஆகும். P-ன் y கூறுன PN-ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு அடையலாம் :

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{PN^2}{b^2}-1=0.$$

அதாவது, $\frac{PN^2}{b^2}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta.$

அதாவது, $PN^2 = b^2 \sin^2 \theta$.

ஆகவே, $PN = b \sin \theta$



படம் 55

அதாவது P ஆனது, $(a\cos \theta, b \sin \theta)$ ஆகும். இங்கு θ குறிக்கும் கோணமாகிய AOP-ஆனது, புள்ளி P-யின் **மையவகற்சிக் கோணம் (eccentric angle)** என்று அழைக்கப்படுகிறது. p ஆனது, துணைவட்டத்தின் மேலுள்ள, P சார்ந்த புள்ளி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

§ 108. நாணும் தொடுகோடும்

முதலில், துணையலகு வடிவத்தில் நீள்வளைவு $y^2-4ax=0$ன் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இந் நாணின் முனைகள் "t_1", "t_2" என்றால், அதாவது

$$(at_1^2,\ 2at_1)\ ;\quad (at_2^2,\ 2at_2)$$

என்றால், அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{x - at_1^2}{at_2^2 - at_1^2} = \frac{y - 2at_1}{2a\,t_2 - 2at_1}$$

ஆகும். அதாவது

$$\frac{x - at_1^2}{a(t_2 - t_1)(t_1 + t_2)} = \frac{y - 2at_1}{2a(t_2 - t_1)}$$

ஆகும். ஆனல், $t_1 \neq t_2$ ஆகவே, இச் சமன்பாட்டைச் சுருக்கினல் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x - at_1^2}{t_1 + t_2} = \frac{y - 2at_1}{2}$$

அல்லது, $2x - 2at_1^2 = (t_1 + t_2)\,y - (t_1 + t_2)\,2at_1$

அல்லது, $2x - (t_1 + t_2)\,y + 2at_1\,t_2 = 0.$ (108·1)

இச் சமன்பாட்டில் t_2-ன் மதிப்பு t_1-ன் மதிப்பை அணுகி, முடிவில் t_1-ன் மதிப்புக்குச் சமமானல், கிடைக்கும் சமன்பாடு, $(at_1^2, 2at_1)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகும்.

அதாவது,

$$2x - (t_1 + t_1)\,y + 2at_1\,t_1 = 0$$

அல்லது $x - t_1 y + at_1^2 = 0$

என்பது $(at_1^2, 2at_1)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகும். ஆகவே, பொதுவாக $(at^2, 2at)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$x - ty + at^2 = 0 \qquad (108{\cdot}2)$$

ஆகும். அடுத்தபடியாக, "t_1", "t_2" என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்போம். தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$x - t_1 y + at_1^2 = 0$$

$$x - t_2 y + at_2^2 = 0$$

ஆகும். இவற்றில் ஒன்றிலிருந்து மற்ருென்றைக் கழிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$(-t_1 + t_2)\,y + a\,(t_1^2 - t_2^2) = 0.$$

அல்லது $-(t_1 - t_2)\,y = -a\,(t_1 - t_2)\,(t_1 + t_2)$.

ஆகவே, $y = a\,(t_1 + t_2),$

இம்மதிப்பை $x - t_1 y + at_1^2 = 0$-ல் பிரதியிடக்கிடைப்பதாவது:

$$x - at_1\,(t_1 + t_2) + at_1^2 = 0$$

அல்லது $x - at_1\,t_2 = 0$

அல்லது $x = at_1\,t_2.$

ஆகவே, $\{\,at_1\,t_2,\ a\,(t_1 + t_2)\,\}$ (108·3)

என்பது தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியாகிறது.

இவ் வெட்டுப்புள்ளியை, "t_1"-ஐயும், "t_2"-ஐயும் முனைகளாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியும் காணலாம். இந் நாணின் சமன்பாடு,

$$2x - (t_1 + t_2)\, y + 2at_1 t_2 = 0.$$

வெட்டுப்புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால் இந் நாணின் சமன்பாட்டை

$$yy_1 - 2a\,(x + x_1) = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இந்த இரு சமன்பாடுகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{2a}{2} = \frac{y_1}{-(t_1 + t_2)} = \frac{-2ax_1}{2at_1 t_2}$$

அல்லது $a = \dfrac{y_1}{t_1 + t_2} = \dfrac{x_1}{t_1 t_2}$

அதாவது, $x_1 = at_1 t_2 \,;\; y_1 = a\,(t_1 + t_2)$

அடுத்தபடியாக, செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ன் நாணின் துணையலகுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். நாணின் முனைகள்,

$$\left(ct_1,\ \frac{c}{t_1}\right),\ \left(ct_2,\ \frac{c}{t_2}\right)$$

என்றால், அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{x - ct_1}{ct_2 - ct_1} = \frac{y - \dfrac{c}{t_1}}{\dfrac{c}{t_2} - \dfrac{c}{t_1}}$$

ஆகும். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x - ct_1}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{\left(y - \dfrac{c}{t_1}\right) t_1 t_2}{c\,(t_1 - t_2)}$$

அல்லது $x - ct_1 = -\left(y - \dfrac{c}{t_1}\right) t_1\ t_2.$

அல்லது $x + t_1 t_2 y - c\,(t_1 + t_2) = 0.$ (108·4)

இதிலிருந்து, $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டை

$$x + t_1^2 y - 2ct_1 = 0$$

என்றும், அதாவது $(ct, c/t)$-இடத்துச் சமன்பாட்டை

$$x + t^2 y - 2ct = 0 \qquad (108{\cdot}5)$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

அடுத்து, $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடு நாண்களின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்போம். இப் புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், நாண் $A_1 A_2$-ன் சமன்பாடு $T_1 = 0$ ஆகும். அதாவது

$$\frac{xy_1 + x_1 y}{2} - c^2 = 0.$$

அல்லது $\qquad y_1 x + x_1 y - 2c^2 = 0.$

மேலும், சமன்பாடு,

$$x + t_1 t_2 y - c(t_1 + t_2) = 0$$

-உம் $A_1 A_2$-ஐக் குறிக்கிறது. ஆகவே, சமன்பாடுகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{y_1}{1} = \frac{x_1}{t_1 t_2} = \frac{-2c^2}{-c(t_1 + t_2)}$$

அதாவது, $\qquad y_1 = \frac{2c}{t_1 + t_2}, \; x_1 = \frac{2c\, t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$

ஆகவே, $\left(\frac{2c\, t_1 t_2}{t_1 + t_2}, \frac{2c}{t_1 + t_2}\right)$ என்பது வெட்டுப்புள்ளி யாகிறது.

அடித்தபடியாக, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$-ன் நாணின் துணையலகுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். நாணின் முனைகள்,

$$(a \cos \theta, b \sin \theta), (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$$

என்றால், நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x - a\cos\theta}{a(\cos\varphi - \cos\theta)} = \frac{y - b\sin\theta}{b(\sin\varphi - \sin\theta)}$$

ஆகும். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{\frac{x}{a} - \cos\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} = \frac{\frac{y}{b} - \sin\theta}{\sin\varphi - \sin\theta}$$

அதாவது, $\left(\frac{x}{a} - \cos\theta\right)\left(\sin\varphi - \sin\theta\right)$

$$= \left(\frac{y}{b} - \sin\theta\right)\left(\cos\varphi - \cos\theta\right)$$

அதாவது, $\frac{x}{a}(\sin\varphi - \sin\theta) - \frac{y}{b}(\cos\varphi - \cos\theta)$

$$= -\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$
$$= \sin(\phi - \theta)$$

அதாவது, $\frac{x}{a}\left(2\sin\frac{\theta - \varphi}{2}\cos\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$

$$+ \frac{y}{b}\left(2\sin\frac{\theta - \varphi}{2}\sin\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\theta - \varphi}{2}\cos\frac{\theta - \varphi}{2}$$

அதாவது, $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta + \varphi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta + \varphi}{2} = \cos\frac{\theta - \phi}{2}$ (108·6)

இதிலிருந்து, $(a\cos\theta, b\sin\theta)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta + \theta}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta + \theta}{2} = \cos\frac{\theta - \varphi}{2}$$

அல்லது, $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - 1 = 0$ (108·7)

என்று பெறுகிறோம்.

அடுத்து, $A(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $B(a\cos\varphi, b\sin\phi)$ என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்போம். இப் புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், AA-ன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

ஆகும். மேலும் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\theta}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\theta}{2} = \cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

-உம், AB-யையே குறிக்கின்றது. ஆகவே, இச்சமன்பாடுகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{1}{a}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{1}{b}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}$$

ஆகவே, $$x_1 = a\,\frac{\cos\frac{\theta+\theta}{2}}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}, \quad {}_1 = b\,\frac{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}} \qquad (108\cdot8)$$

கடைசியாக அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் நாணின் துணையலகுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். நாணின் முனைகள்,

$$(a \sec\theta,\ b\tan\theta),\ (a\sec\varphi,\ b\tan\varphi)$$

என்றால், அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x - a\sec\theta}{a(\sec\varphi - \sec\theta)} = \frac{y - b\tan\theta}{b(\tan\varphi - \tan\theta)}$$

ஆகும். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x - a\sec\theta}{a\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos\theta}\right)} = \frac{y - b\tan\theta}{b\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

அதாவது $$\frac{\frac{x}{a} - \sec\theta}{\frac{\cos\theta - \cos\varphi}{\cos\theta\cdot\cos\varphi}} = \frac{\frac{y}{b} - \tan\theta}{\frac{\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\cdot\sin\theta}{\cos\varphi\cdot\cos\theta}}$$

அதாவது $$\frac{\frac{x}{a} - \sec\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} = \frac{\frac{y}{b} - \tan\theta}{-\sin(\theta-\varphi)}$$

அதாவது $$\frac{\frac{x}{a} - \sec\theta}{-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{y}{b} - \tan\theta}{-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}$$

அதாவது $$\frac{\frac{x}{a} - \frac{1}{\cos\theta}}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}} = \frac{\frac{y}{b} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}$$

அதாவது $$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cos\frac{\theta-\varphi}{2} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos\frac{\theta-\varphi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left\{\cos\frac{\theta-\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2} - \cos\frac{3\theta+\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\cos\theta}\left\{\cos\frac{\theta-\varphi}{2} + \cos\frac{3\theta+\varphi}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\cos\theta}\left\{2\cos\theta\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right\}$$

$$= \cos\frac{\theta+\varphi}{2}$$

இதிலிருந்து, $(a\sec\theta, b\tan\theta)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\theta}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\theta}{2} = \cos\frac{\theta+\phi}{2}$$

அல்லது $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \sin\theta = \cos\theta$

அல்லது $\frac{x}{a} \sec\theta - \frac{y}{b} \tan\theta - 1 = 0$ (108·9)

என்று பெறுகிறோம்.

§ 109. தொடுகோடுகளின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகள்.

§ 87-ல் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை $T_1 = 0$ எனக் கண்டோம். இச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, (108·2), (108·5), (108·7), (108·8) என்ற சமன்பாடுகளை வெகு எளிதில் எழுதலாம் உதாரணமாக, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் (x_1, y_1)-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$yy_1 - 2a(x + {}_1) = 0$$

ஆகும். இதில், $x_1 = at^2$, $y = 2at$ எனப் பிரதியிட, $(at^2, 2at)$ — இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகக் கிடைப்பதாவது :

$$y(2at) - 2a(x + at^2) = 0.$$

அதாவது, $yt - x - at^2 = 0.$

அதாவது, $x - ty + at^2 = 0.$

இதுபோலவே நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன்

$(a \cos, b \sin\theta)$ இடத்துச் சமன்பாட்டை

$$\frac{x(a\cos\theta)}{a^2} + \frac{y(b\sin\theta)}{b^2} - 1 = 0$$

அல்லது $\frac{x\cos\theta}{a} = \frac{y\sin\theta}{b} - 1 = 0$

என்று எளிதில் காணலாம். இம் முறையானது, தொடுகோடுகளின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகளை எளிதில் மனதில் இருத்தப் பயன்படுகிறது.

§ 110. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

A_1, A_2, A_3, A_4 என்பன ஒரு பரவளைவின்மீது நகரும் புள்ளிகள். A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 என்பன முறையே பரவளையின்

அச்சின் மேலுள்ள மூன்று நிலைத்த புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லு கின்றன என்றால், $A_4 A_1$ -உம் அச்சின் மேலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றது எனக் காட்டுக.

பரவளைவின் அச்சை x-அச்சாகவும் உச்சியிடத்துத் தொடு கோட்டை y-அச்சாகவும் கொண்டால், பரவளைவின் சமன்பாடு, $y^2 - 4ax = 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது A_1, A_2, A_3, A_4 என்ற புள்ளிகளை " t_1 ", " t_2 ", " t_3 " " t_4 " எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் $A_1 A_2$ -ன் சமன்பாடு

$$2x - (t_1 + t_2)\, y + 2at_1 t_2 = 0$$

ஆகும். இதில் $y = 0$ என்று பிரதியிட,

$$2x + 2at_1 t_2 = 0$$

என்றும், இதிலிருந்து $A_1 A_2$ ஆனது x-அச்சை வெட்டும் புள்ளி,

$$(-at_1 t_2,\, 0)$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இப்புள்ளி ஒரு நிலைத்த புள்ளி. ஆகையால், $t_1 t_2$ ஒரு மாறிலி. இதுபோலவே $t_2 t_3$ -உம் $t_3 t_4$-உம் மாறிலிகள். இம் மாறிலிகளை k_1, k_2, k_3 எனக் கொண்டால்,

$$t_1 t_2 = k_1$$
$$t_2 t_3 = k_2$$
$$t_3 t_4 = k_3$$

ஆகும். இவைகளில் முதலாவதையும், மூன்றாவதையும் பெருக்கி இரண்டாவதால் வகுத்தால் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{(t_1\, t_2)\,(t_3\, t_4)}{t_2\, t_3} = \frac{k_1\, k_3}{k_2}.$$

அதாவது, $t_1\, t_4 =$ ஒரு மாறிலி.

ஆகவே, $A_4\, A_1$ ஆனது பரவளைவின் அச்சை வெட்டும் புள்ளியாகிய $(-at_1\, t_4,\, 0)$ என்பது ஓர் நிலைத்த புள்ளியாகிறது.

கணக்கு 2.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-இன் குவிய நாண் ஒன்றின் முனைகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றால், $x_1\, x_2 = a^2$, $y_1\, y_2 = -4a^2$ எனக் காட்டுக.

முனைகளை " t_1 ", " t_2 " எனக் கொண்டால்,

$$x_1 = at_1{}^2, \quad y_1 = 2at_1,$$
$$x_2 = at_2, \quad y_2 = 2at_2.$$

மேலும், நாணின் சமன்பாடு

$$2x - (t_1 + t_2)\, y + 2a\, t_1 t_2 = 0$$

ஆகும். ஆனால், நாண் $(a, 0)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$2a - (t_1 + t_2)(0) + 2at_1\, t_2 = 0$$

அல்லது, $t_1\, t_2 = -1.$

எனவே, $x_1\, x_2 = (at_1^2)(at_2^2) = a^2\, (t_1\, t_2)^2$

$$= a\,(-1)^2 = a,$$

$$y_1\, y_2 = (2at_1)\,(2at_2) = 4a^2\,(t_1\, t_2) = -4a^3$$

கணக்கு 3.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மூன்று தொடுகோடுகள், x-அச்சுடன் முறையே 30°, 45°, 60° அளவுள்ள கோணங்களை உண்டாக்கினால், தொடுபுள்ளிகளின் x கூறுகள் ஒரு பெருக்கல் தொடரில் அமையும் எனக் காட்டுக.

பரவளையின் $(at^2,\ 2at)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$x - ty + at^2 = 0.$$

ஆகும். இதிலிருந்து, தொடுகோட்டின் சரிவு $\dfrac{1}{t}$ எனத் தெரிகிறது. ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட மூன்று தொடுகோடுகளின் சரிவுகள்,

$$\tan 30^\circ,\ \tan 45^\circ,\ \tan 60^\circ$$

என்பன. இதில் முதல் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி $(at^2,\ 2at)$ என்றால்,

$$\frac{1}{t} = \tan 30^\circ$$

அல்லது, $t = \dfrac{1}{\tan 30^\circ}.$

ஆகவே, இத் தொடுபுள்ளியின்

$$x \text{ கூறு} = \frac{a}{\tan^2 30}$$

அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று தொடுகோடுகளின் x-கூறுகள்,

$$\frac{a}{\tan^2 30^\circ}, \quad \frac{a}{\tan^2 45^\circ}, \quad \frac{a}{\tan^2 60^\circ}$$

ஆகும். அதாவது,

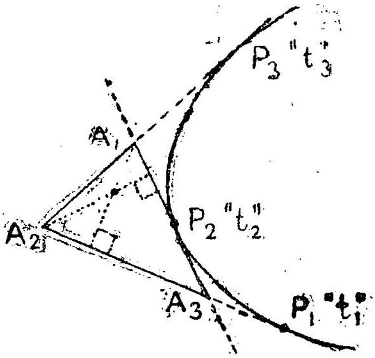
$$3a, \quad a, \quad \frac{a}{3}.$$

ஆகும். இவைகள் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது.

கணக்கு 4.

ஒரு பரவளைவின் மூன்று தொடுகோடுகள் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் (ortho-centre) பரவளைவின் இயங்கு வரையின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

பரவளைவின் சமன்பாடு, $y^2 - 4ax = 0$ ஆக இருக்குமாறு குறிப்பீட்டச்சுக்களைக் கொண்டு, பரவளைவின்மீது P_1 $(at_1^2, 2at_1)$ P_2 $(at_2^2, 2at_2)$; P_3 $(at_3^2, 2at_3)$ என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 56).



படம் 56.

மேலும், P_2-இடத்துத் தொடுகோடும், P_3-இல் வெட்டுகின்றன என்றும், P_3-இடத்துத் தொடுகோடும், P_1-இடத்துத் தொடு கோடும், A_2-இல் வெட்டுகின்றன என்றும், P_1-இடத்துத் தொடு கோடும், P_2 இடத்துத் தொடுகோடும் A_3-இல் வெட்டுகின்றன என்றும் கொள்வோம்.

முதலில் முக்கோணம் $A_1 A_1 A_3$-ன், A_1 — வழியாகச் செல்லும் குத்துக்கோட்டின் **(altitude)** சமன்பாட்டைக்காண் போம். இப்பொழுது A_1 ஆனது,

$$\{at_2 t_3, a(t_2 + t_3)\}$$

ஆனல், A_1-வழியாகச் செல்லும் குத்துக்கோடு $A_2 A_3$ க்குச் செங்குத்தாக உள்ளதால் $A_2 A_3$-ன் சமன்பாடாகிய

$$x - t_1 y + at_1^2 = 0$$

—லிருந்து குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$t_1 x + y = k$$

என்ற வடிவில் இருக்கிறது என அறிகிறோம். இக் குத்துக்கோடு A_1-வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$t_1 (a t_2 t_3) + a(t_2 + t_3) = k.$$

ஆகவே, A_1-வழிச் செல்லும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$t_1 x + y = a(t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3)$$

ஆகும். இதேபோல் A_2 வழிச் செல்லும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$t_2 x + y = a(t_1 + i_3 + t_1 t_2 t_3)$ என்றிருக்கும். இச் சமன் பாடுகளில் முதலாவதிலிருந்து இரண்டாவதைக் கழித்தால் கிடைப்பதாவது:

$$(t_1 - t_2) x = a(t_2 - t_1)$$

அல்லது $x = -a.$

ஆகவே, செங்கோட்டு மையமானது $x + a = 0$ ஐச் சமன் பாடாகக் கொண்ட இயங்கு வரையின் மேல் அமைகிறது.

கணக்கு 5.

A_1, A_2 என்ற புள்ளிகள், தங்களது x கூறுகள், $k : 1$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளவாறு, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ -ன் மேல் நகருகின்றன. A_1-இடத்துத் தொடுகோடும், A_2-இடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளை $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$\frac{at_1^2}{at_2^2} = k.$$

அதாவது, $t_1 = k^{\frac{1}{2}} t_2$, மேலும், வெட்டுப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால்

$$x_0 = at_1t_2,$$

$$y_0 = a\,(t_1 + t_2)$$

அதாவது, $x_0 = ak^{\frac{1}{2}} t_2^2,$

$$y_0 = a\left(k^{\frac{1}{2}} t_2 + t_2\right) = at_2\left(k^{\frac{1}{2}} + 1\right)$$

அதாவது $\dfrac{x_0}{y_0^2} = \dfrac{ak^{\frac{1}{2}} t_2^2}{a^2\left(k^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 t_2^2} = \dfrac{k^{\frac{1}{2}}}{a\left(k^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2}$

$$= \frac{1}{a\left(k^{\frac{1}{4}} + k^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

அதாவது, $yo^2 = a\left(k^{\frac{1}{4}} + k^{\frac{1}{4}}\right) x.$

ஆகவே, தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$y^2 = a\left(k^{\frac{1}{4}} + k^{\frac{1}{4}}\right) x$$

என்றுகிறது.

கணக்கு 6.

ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் மீது அமைந்த உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம், அதிபரவளைவின் மேலேயே அமையும் எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகளை x, y-அச்சுக்களாகக் கொண்டால் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $xy - c^2 = 0$ என்ற வடிவில் அமையும். மேலும், முக்கோணத்தின் உச்சிகளை

$$P_1\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right),\quad P_1\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right),\quad P_2\left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right)$$

எனக் கொண்டால், பக்கம் P_2P_3 -ன் சமன்பாடு

$$x + t_2t_3y - c(t_2 + t_3) = 0$$

ஆகும். இப் பக்கத்திற்கு P_1-லிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$t_2t_3x - y = k$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இதை $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ திருப்தி செய்யும்.

$$t_2\, t_3\, (ct_1) - \frac{c}{t_1} = k.$$

ஆகவே, P_1 வழியாகச் செல்லும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$t_2\, t_3\, x - y = c\, t_1\, t_2\, t_3 - \frac{c}{t_1} \qquad \ldots(1)$$

ஆகும். இதேபோல், P_2 -வழியாகச் செல்லும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$t_3\, t_1\, x - y = c\, t_1\, t_2\, t_3 - \frac{c}{t_2} \qquad \ldots(2)$$

எனப் பெறலாம். இப்பொழுது (1) — (2) தருவதாவது :

$$(t_1 - t_2)\, t_3\, x = -c\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$$

அல்லது $(t_2 - t_1)\;\; t_3\;\; x = -c\,\dfrac{(t_2 - t_1)}{t_1\, t_2}.$

அல்லது $x = -\dfrac{c}{t_1\, t_2\, t_3}.$

மேலும், (1) $\times\, t_1$ — (2) $\times\, t_2$ தருவதாவது ,

$$(-t_1 + t_2)\, y = c\, t_1\, t_2\, t_3\, (t_1 - t_2)$$
$$y = -c\, t_1\, t_2\, t_3.$$

ஆகவே, முக்கோணம் $P_1\, P_2\, P_3$-ன் செங்கோட்டு மையம்,

$$\left(-\frac{c}{t_1\, t_2\, t_3}, -c\, t_1\, t_2\, t_3\right)$$

ஆகும். இது அதிபரவளைவின்மேல் அமைகிறது என்பதை எளிதில் காணலாம்.

கணக்கு 7.

A_1, A_2, A , A_4 என்பன ஒரு நீள்வளேவின்மீது நகரும் புள்ளிகள், $A_1 A_2$, $A_2 A$, $A_3 A_4$ என்பன மூன்று குறிப்பிட்ட திசைகளுக்கு இணையாகவே இருந்தால் $A_4 A_1$-உம் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாயிருக்கும் எனக் காட்டுக.

நீள்வளேவின் அச்சுக்களே x-அச்சாகவும், y-அச்சாகவும் கொண்டால், நீள்வளேவின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது A_1, A_2, A_3, A_4 என்பனவற்றை "θ_1", "θ_2", "θ ", "θ_4" என்ருல் $A_1 A_2$-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

ஆகும். $A_1 A_2$-ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாய் இருப்பதால் இதன் சரிவு ஒரு மாறிலி. ஆனல் இதன் சரிவு

$$-\frac{b\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{a\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

ஆகும். ஆகவே, $\theta_1 + \theta_2$ ஒரு மாறிலி. இதுபோலவே $\theta_2 + \theta_3$, $\theta_3 + \theta_4$ முதலியனவும் மாறிலிகள். இம் மாறிலிகளே k_1, k_2, k_3 எனக் கொண்டால்,

$$\theta_1 + \theta_2 = k_1$$
$$\theta_2 + \theta_3 = k_2$$
$$\theta_3 + \theta_4 = k_3$$

இவைகளில் முதலாவதையும், மூன்ருவதையும் கூட்டி, கூட்டுத் தொகையிலிருந்து இரண்டாவதைக் கழித்தால் கிடைப்பதாவது :

$$(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_3 + \theta_1) - (\theta_2 + \theta_3) = k_1 + k_3 - k_2.$$

அல்லது $2(\theta_1 + \theta_2) = k_1 + k_3 - k_2$.

ஆகவே, $\theta_1 + \beta_2$ ஒரு மாறிலி. எனவே, $A_4 A_1$-ன் திசையும் ஒரு நிலேத்த திசையாகும்.

கணக்கு 8.

ஒரு நீள்வளையின் குவியங்களிலிருந்து, ஏதாவதொரு தொடு கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் நீளத்தின் பெருக்கற்பலன், அரைச் சிற்றச்சின் வர்க்கத்துக்குச் சமமாகும் எனக் காட்டுக.

நீள்வளையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

ஆக இருக்குமாறு x, y-அச்சுக்களைக் கொள்வோம். மேலும் "θ" என்ற புள்ளியை நீள்வளையின்மீது எடுத்துக் கொண்டால், "θ"-விடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}-1=0$$

ஆகும். இப்பொழுது குவியங்கள் $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$. இவைகளிலிருந்து தொடுகோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் நீளங்கள் p, p' என்றால்

$$p=\frac{\frac{ae\cos\theta}{a}-1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}},$$

$$p'=\frac{\frac{-ae\cos\theta}{a}-1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

$$pp'=\frac{1-e^2\cos^2\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2(1-e^2\cos^2\theta)}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{a^2b^2(1-e^2\cos^2\theta)}{a^2(1-e^2)\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{b^2(1-e^2\cos^2\theta)}{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-e^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{b^2 (1 \quad e^2 \cos^2 \theta)}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

$$= b^2.$$

§ 111. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. பரவளைவு $y^2 - 4a = 0$-ன் குவிய நாண் ஒன்றின் முனைகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என்றால், $t_1 t_2 = -1$ எனக் காட்டுக.

2. A_1, A_2, A , A_4 என்பன, ஒரு பரவளைவின்மீது நகரும் புள்ளிகள். $A_1 A_2$, $A_2 A$, A A_4 என்பன, மூன்று குறிப்பிட்ட திசைகளுக்கு இணையாகவே இருந்தால், $A_4 A_1$-உம் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாயிருக்கும் எனக் காட்டுக.

3. ஒரு பரவளைவின் நாண் PP', பரவளைவின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. P யையும், பரவளைவின் அச்சும் இயக்குவரையும் வெட்டும் புள்ளியையும், இணைக்கும் கோடு பரவளைவை Q-வில் வெட்டினால், QP' ஒரு குவிய நாண் எனக் காட்டுக.

4. ஒரு பரவளைவில் ஒரு குவிய நாணின் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

5. PA_1, PA_2 என்பன, ஒரு பரவளைவின் நாண்கள். A_1B_1, A_2B_2 என்பன, PA_2, PA_1 என்பவற்றிற்கு இணையாக உள்ள நாண்கள் என்றால், $B_1 B_2$ ஆனது, P-யிடத்துத் தொடு கோட்டுக்கு இணையாகும் எனக் காட்டுக.

6. பரவளைவு $y^2 \quad 4ax = 0$-ல் "t_1" இடத்துத் தொடு கோடும், "t_2"-இடத்துத் தொடுகோடும் x- அச்சுடன் நிரப்புக் கோணங்களை (Complementary angles) உண்டாக்கினால், $t_1 t_2 = 1$ எனக் காட்டுக.

7. $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள "t_1", "t_2", "t_3" என்ற புள்ளிகளின் y-கூறுகள் ஒரு பெருக்கல் தொடரில் உள்ளன. "t_1", "t_2" என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி, t_3-லிருந்து x-அச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின்மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

8. S-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட பரவளைவின், P, Q என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் T-யில் சந்தித்தால், $ST^2 = SP$. SQ எனக் காட்டுக.

9. ஒரு பரவளைவில் இரண்டு தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி, பரவளைவின் செவ்வகலத்தின் நீட்சியின்மீது அமைந்தால், தொடுகோடுகள் பரவளைவின் அச்சுடன் நிரப்புக்கோணங்களை உண்டாக்கும் எனக் காட்டுக.

10. பரவளைவு $y^2-4ax=0$-க்கு P-யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள், y-அச்சை A-யிலும், B-யிலும் வெட்டுகின்றன. முக்கோணம் PAB-யின் பரப்பு c-ஆக இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு (h, k)-விலிருந்து வரையப்படும் தொடுநாண்களின் நீளத்தை

$$\frac{1}{a}\sqrt{(k^2 + 4a^2)(k^2 - 4ah)}$$

எனக் காட்டுக.

12. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு புள்ளி (h, k)-விலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளும், தொடுகோடுகளின் தொடு நாணும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பை

$$\frac{1}{2a^2}(k^2 - 4ah)^{\frac{3}{2}}$$

எனக் காட்டுக.

13. அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ன் நாண் ஒன்று, ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாக இருக்குமாறு நகருகிறது. இந் நாணின் முனைகள் "t_1", 't_2" என்றால், $t_1 t_2 =$ ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

14. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின்மேல் அமைந்துள்ள எந்த மூன்று புள்ளிகளாலும் உண்டாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் அதிபரவளைவின் மேலேயே அமையும் எனக் காட்டுக. இதைப் பயன்படுத்திச், செவ்வக அதிபரவளைவின் இரண்டு செங்குத்தான நாண்களின் முனைகள் நான்கில், மூன்றால் உண்டாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம், நான்காவது முனையாகும் எனக் காட்டுக.

15. வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$-ன் மேலுள்ள புள்ளிகள் "θ"-வையும், "θ"-வையும் இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மேலுள்ள புள்ளிகள் "$\theta$"-வையும், ϕ-ஐயும் இணைக்கும் நாண் $(c, 0)$ வழியாகச் சென்றால்,

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2} = \frac{c-a}{c+a}$$

எனக் காட்டுக.

17. e-ஐத் தொலைத்தகவாகக் கொண்ட நீள்வளைவு ஒன்றின் குவிய நாணின் முனைகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள், θ_1, θ_2 என்றால்,

$$\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = e\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

எனக் காட்டுக.

18. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மேலுள்ள இரண்டு மாறும் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள் θ, $\theta + 120°$ என்றால், இப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு a-யைப் பேரச்சாகவும், b-ஐச் சிற்றச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நீள்வளைவைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}\cos(\theta + 60°) + \frac{y}{b}\sin(\theta + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

அதாவது, $$\frac{x\cos(\theta + 60°)}{\left(\frac{1}{2}a\right)} + \frac{y\sin(\theta + 60)}{\left(\frac{1}{2}b\right)} = 1.$$]

19. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன்மேல் நகரும் இரண்டு புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள், θ, ϕ என்பன. $\theta - \phi$ ஆனது மாறிலி k-க்குச் சமமானால், இப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண், எப்பொழுதும் நீள்வளைவு

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} - 1 = 0$$

-ஐத் தொடும் எனக் காட்டுக.

20. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மேல் நகரும் இரண்டு புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள், θ, φ என்பன $\theta - \varphi$ ஆனது மாறிலி k-க்குச் சமமானுல், இப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{k^2 x^2}{a^2} + \frac{k^2 y^2}{b^2} - 1 = 0$$

எனக் காட்டுக.

21. A, A' என்பன ஒரு நீள்வளைவின் உச்சிகள். 2 அதன் சிற்றச்சு. ஒரு தொடுகோடு, A-யிடத்துத் தொடுகோட்டை Q-விலும், A'-இடத்துத் தொடுகோட்டை Q'-லும் வெட்டிஞல், $AQ \cdot AQ' = b^2$ எனக் காட்டுக.

22. ஒரு நீள்வளைவில் குவியங்களிலிருந்து ஏதாவதொரு தொடுகோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத்தொகை, அரைச் சிற்றச்சின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாகும் எனக் காட்டுக.

23. P என்பது. ஒரு நீள்வளைவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. p ஆனது துணைவட்டத்தின் மேலுள்ள p சார்ந்த புள்ளி. P-யிடத்துத் தொடுகோடும், p-யிடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளி நீள்வளைவின் பேரச்சின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

24. ஒரு நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-இல் "$\theta$"-இடத்துத் தொடுகோடு, துணைவட்டத்தை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB-நீள்வளைவின் மையத்தில் ஒரு செங் கோணத்தைத் தாங்கிஞல், நீள்வளைவின் தொலைத்தகவு

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2 \theta}}}$$

எனக் காட்டுக.

25. Q என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு நீள்வளைவின் பேரச்சுக்கு வரையப்பட்ட செங்கோடு, நீள்வளைவை P-யில் வெட்டுகிறது. Q-ன் நீள்வளைவு சார்ந்த இசைக்கோடும், P-இடத்துத் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளி பேரச்சின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

26. ஓர் அதிபரவளைவின் எந்தத் தொடுகோடும், தொலைத் தொடுகோடுகளும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

27. ஓர் அதிபரவளைவின் மாறும் தொடுகோடு ஒன்றும், தொலைத் தொடுகோடுகள் இரண்டும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரையும் ஓர் அதிபரவளைவாகும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

0. $x^2 (y^2 - 4ax) = 4c^2$

15 $x \cos \frac{\theta + \phi}{2} + y \sin \frac{\theta + \phi}{2} = a \cos \frac{\theta - \phi}{2}$

§ 112. செங்கோடு

செங்கோடானது தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் உள்ளதால், செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை (20·6)-ஐ அல்லது (20·7)-ஐப் பயன்படுத்திக் காணவேண்டும்.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் $(at^2, 2at)$ இடத்துந் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x - ty + at^2 = 0.$$

ஆகவே, (20·6)-லிருந்து, $(at^2, 2at)$-இடத்துத் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$tx + y = k,$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என அறிகிறோம். ஆனால் இச் செங்கோடு $(at^2, 2at)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$t (at^2) + 2at = k.$$

எனவே, செங்கோட்டுன் சமன்பாடு,

$$tx + y = at^3 + 2at \qquad (112·1)$$

என்றாகிறது.

இதேபோல், செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ன் $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடான

$$x + t^2 y - 2ct = 0$$

என்பதிலிருந்து, $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$t^2x - y = k.$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம். இச் செங்கோடு, $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$t^2 (ct) - \frac{c}{t} = k$$

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$t^2x - y = ct^3 - \frac{c}{t} \qquad (112\cdot2)$$

என்ருகிறது.

அடுத்தபடியாக, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் $(a \cos \theta.\ b \sin \theta)$-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இப் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} - 1 = 0$$

ஆகும். இதிலிருந்து, (20·7)-ஐப் பயன்படுத்தி செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = k$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என அறிகிருேம். இச் செங்கோடு $(a \cos \theta,\ b \sin \theta)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\frac{a\,(a \cos \theta)}{\cos \theta} - \frac{b\,(b \sin \theta)}{\sin \theta} = k.$$

அதாவது, $h = a^2 - b^2$.

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2 \qquad (112\cdot3)$$

என்ருகிறது. இதேபோல் அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன்

$(a \sec \theta, b \tan \theta)$-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{ax}{\sec \theta} + \frac{by}{\tan \theta} = a^2 + b^2 \qquad (112\cdot4)$$

என்றிருக்கும் என்பதைக் காட்டலாம்.

§ 113. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் "t_1", "t_2" என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்க.

$$t_1 x + y = at_1^3 + 2at_1 \qquad \ldots (1)$$

$$t_2 x + y = at_2^3 + 2at_2 \qquad \ldots (2)$$

என்பன செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் ஆகும். இப்பொழுது (1) — (2) கொடுப்பதாவது :

$$(t_1 - t_2) x = a (t_1^3 - t_2^3) + 2a (t_1 - t_2)$$

அதாவது,
$$x = a (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 2a$$
$$= 2a + a (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)$$

x-ன் இம்மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$t_1 \{ 2a + a (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \} + y = at_1^3 + 2at_1.$$

அதாவது,
$$y = at_1^3 - at_1 (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)$$
$$= - at_1 (t_1 t_2 + t_2^2)$$
$$= - a t_1 t_2 (t_1 + t_2).$$

எனவே, $\{2a + a (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2), - at_1 t_2 (t_1 + t_2)\}$ என்பது செங்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியாகிறது.

கணக்கு 2.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மாறும் நாண் ஒன்று, $(-a, 0)$ வழியாகவே செல்லுகிறது. நாணின் முனைகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நாணின் முனைகளை "t_1", "t_2" எனவும், செங்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியை (x_0, y_0) எனவும் கொண்டால்,

$$x_0 = 2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2), \quad \ldots (1)$$

$$y_0 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2) \quad \ldots (2)$$

ஆகும். மேலும், நாணின் சமன்பாடு

$$2x - (t_1 + t_2) y + 2a t_1 t_2 = 0$$

ஆகும். இந்நாண் $(-a, 0)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$2(-a) + 2a t_1 t_2 = 0$$

அதாவது, $t_1 t_2 = 1$ ... (3)

இப்பொழுது, (1), (2), (3) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து t_1-ஐயும், t_2-ஐயும் நீக்க வேண்டும், இதற்காக, (3)-ஐ

$$x_0 = 2a + a\{(t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2\}$$

என்றும், மேலும் $t_1 t_2 = 1$ என்பதைப் பயன்படுத்தி

$$x_0 = 2a + a\{(t_1 + t_2)^2 - 1\} \quad \ldots (4)$$

என்றும், (2)-ஐ

$$y_0 = -a(t_1 + t_2) \quad \ldots (5)$$

என்றும் எழுதுவோம். $(t_1 + t_2)$-ன் மதிப்பை (5)-லிருந்து கண்டு, (4)-ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பதாவது :

$$x_0 = 2a + a\left\{\left(-\frac{y_0}{a}\right)^2 - 1\right\}.$$

அதாவது, $x_0 = 2a + \frac{y_0^2}{a} - a.$

அதாவது, $x_0 = a + \frac{y_0^2}{a}.$

அதாவது, $y_0^2 - a(x_0 - a) = 0.$

ஆகவே, (x_0, y_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$y^2 - a(x - a) = 0$$

என்றாகிறது.

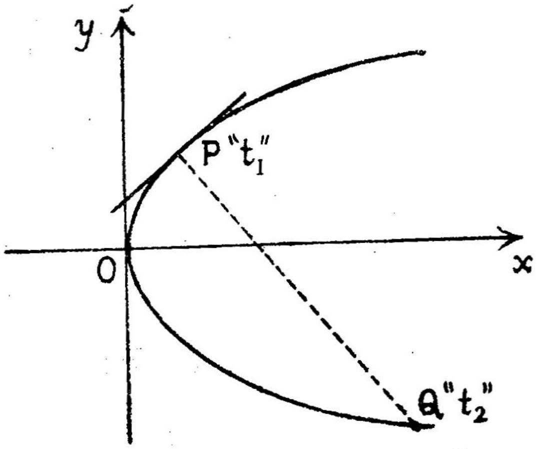
கணக்கு 3.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ல், P-யிடத்துச் செங்கோடு, பரவளைவை Q-வில் மீண்டும் சந்திக்கிறது. கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவுக.

(i) P, PQ-வின் மையப்புள்ளி ஆகியவற்றின் y-கூறுகளின் பெருக்குத் தொகை $4a^2$ ஆகும்.

(ii) P-ஆனது " t_1 " என்றால், $PQ = \frac{4a(1+t_1^2)^{\frac{3}{2}}}{t_1^2}$.

(i) இப்பொழுது P-ஆனது $(at_1^2, 2at_1)$ என்றும் Q ஆனது $(at_2^2, 2at_2)$ என்றும் கொள்வோம் (படம் 57).



படம் 57.

அப்படியாயின், P-இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$t_1x + y = at_1^3 + 2at_1$$

ஆகும். மேலும், செங்கோடு, $(at_2^2, 2at_2)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$t_1(at_2^2) + (2at_2) = at_1^3 + at_1,$$

அதாவது, $(at_1t_2^2 - at_1^3) = 2at_1 - 2at_2$.

அதாவது, $at_1(t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 2a(t_1 - t_2)$.

அதாவது, $t_1(t_2 + t_1) = -2$.

அதாவது, $t_2 + t_1 = -\frac{2}{t_1}$

அல்லது, $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$.

இதிலிருந்து, Q-வின் x, y-கூறுகள் கிடைக்கின்றன. இப்பொழுது, P-யின் y கூறு, PQ-வின் மையப்புள்ளியின் y கூறு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலன்

$$= (2at_1)\left(\frac{2at_1 + 2at_2}{2}\right)$$

$$= 2a^2 t_1 (t_1 + t_2)$$

$$= 2a^2 t_1 \left\{ t_1 + \left(- t_1 - \frac{2}{t_1}\right)\right\}$$

$$= 2a^2 t_1 \left(- \frac{2}{t_1}\right) = - 4a^2$$

(ii)
$$\begin{aligned} PQ^2 &= (at_1^2 - at_2^2)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2 \\ &= a^2 (t_1 - t_2)^2 (t_1 + t_2)^2 + 4a^2 (t_1 - t_2)^2 \\ &= a^2 (t_1 - t_2)^2 \{ (t_1 + t_2)^2 + 4 \} \\ &= a^2 \left\{ t_1 - \left(- t_1 - \frac{2}{t_1}\right)\right\}^2 \left\{\left(t_1 - t_1 - \frac{2}{t_1}\right)^2 + 4\right\} \\ &= a^2 \left\{2 \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right)^2\right\} \left\{\frac{4}{t_1^2} + 4 \right\} \\ &= 16a^2 \left\{\frac{t_1^2 + 1}{t_1}\right\}^2 \left\{\frac{1 + t_1^2}{t_1^2}\right\} \\ &= 16a^2 \frac{(1 + t_1^2)^3}{t_1^4} \end{aligned}$$

ஆகவே, $PQ = \dfrac{4a (1 + t_1^2)^{\frac{3}{2}}}{t_1^2}$.

§ 1·14. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. S-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஓர் பரவளைவின் P என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, இயக்குவரையை Q-யிலும்,

பரவளைவின் அச்சை T-யிலும் வெட்டுகிறது. P-இடத்துச் செங்கோடு அச்சை G-யில் வெட்டினுல், கீழ்க்காண்பவற்றை நிறுவுக:

(i) PQ, S-ல் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது

(ii) $ST = SP = SG$.

2. P என்பது, பரவளைவு ஒன்றின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. P-யிலிருந்து பரவளைவின் அச்சுக்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடி, N. P-யிடத்துச் செங்கோடு, அச்சை G-யில் வெட்டினுல், NG ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

3. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ - ன் செங்கோட்டு நாண் ஒன்று பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கினுல் நாணில் சரிவு $\sqrt{2}$ அல்லது $-\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

4. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ — ன் குவிய நாண் ஒன்று மாறிக்கொண்டே இருக்கிறது நாணின் முனைகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $y^2 - a(x - 3a) = 0$ எனக் காட்டுக.

5. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ ன் இரண்டு செங்குத்தான செங்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

6. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் நகரும் செங்கோடுகள் இரண்டு, x-அச்சுடன் நிரப்புக் கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. செங்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. P_1, P_2 என்பன, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ ன் மேல் நகரும் இரண்டு புள்ளிகள் இவைகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி, $x = k$ குறிக்கும் கோட்டில் அமைந்தால், இவைகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரை

$$y^2 - ax - ak + 2a^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

8. P என்பது, ஒரு பரவளைவின் இயக்குவரையின்மீது நகரும் புள்ளி. P-யிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளியிடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையும் ஒரு பரவளைவாகும் எனக் காட்டுக.

9. PQ என்பது, ஒரு பரவளைவின் நகரும் நாண். PQ வின் சரிவு ஒரு மாறிலியானல், P, Q விடத்துச் செங்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரை பரவளைவின் ஒரு செங்கோடகும் எனக் காட்டுக.

10. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள $(at^2_1, 2at_1)$ என்ற புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பரவளைவை பறுபடியும் $Q(at^2_2, 2at_2)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது என்ருல், கீழ்க் காணும் விளைவுகளை நிறுவுக.

(i) $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

(ii) m_1 என்பது P-யிடத்துச் செங்கோட்டின் சரிவு, m_2 என்பது Q-யிடத்துச் செங்கோட்டின் சரிவு என்ருல்,

$m_1{}^2 + m_1 m_2 + 2 = 0.$

(iii) P-இன் x கூறு, P-இன் y கூறுக்குச் சமமானல், PQ, குவியத்தில் ஒரு செங்கோணத்தை தாங்கும்.

(iv) PQ, பரவளைவின் உச்சியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கினல், $SP = 3a$, $SQ = 3SP$, இங்கு S என்பது குவியம்.

(v) P ஆனது $(2a, 2\sqrt{3}a)$ என்ருல், $PQ = 6\sqrt{3}a$

11. PP' என்பது, ஒரு பரவளைவின் ஒரு குவிய நாண். P-இடத்துச் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் Q-விலும், P'-இடத்துச் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் Q'-இலும் சந்தித்தால், PP'-ஆனது QQ'-க்கு இணையானது, என்றும், $3PP' = QQ'$ என்றும் காட்டுக.

[உதவிக்குறிப்பு :— P, P', Q, Q' என்பனவற்றை "t_1", "t_2", "t_3", "t_4" எனக் கொண்டால் $t_1 t_2 = -1$, $t_3 = t_1 - \frac{2}{t_1}$, $t_4 = -t_2 - \frac{2}{t_2}$. அதாவது $t_3 = -t_1 + 2t_2$, $t_4 = -t_2 + 2t_1$.]

12. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் P-இடத்துத் தொடு கோடு, தொலைத்தொடு கோடுகளை Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டு கிறது. P-இடத்துச் செங்கோடு, அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சை G-யில் வெட்டுகிறது. கோணம் QGQ, ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

13. ஒரு செவ்வக அதிபரவளேவின் மேலுள்ள A என்ற புள்ளியில் நாண் PQ, ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது. A-யிடத்துச் செங்கோடு PQ-க்கு இணையானது என நிறுவுக.

14. C-ஐ மையமாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளேவு $xy - c^2 = 0$-ல், P-யுடத்துச் செங்கோடு, அதிபரவளேவை Q-ல் மீண்டும் சந்திக்கிறது. கீழ்க் காணும் வினவுகளை நிறுவுக :

(i) P ஆனது, $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்றால் Q ஆனது $\left(-\frac{c}{t^3}, -ct^3\right)$ ஆகும்.

(ii) PQ ஆனது, CP^3-க்கு நேர்விகிதத்தில் சமம் ஆகும்.

(iii) $3CP^2 + CQ^2 = PQ^2$.

15. P என்பது நீள்வளேவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி p ஆனது, துணைவட்டத்தின் மேலுள்ள P சார்ந்த புள்ளி. P யிடத்துச் செங்கோடும், p-யிடத்துச் செங்கோடும், வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - (a + b)^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

16. நீள்வளேவு $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$-ன் " θ " விடத்துச் செங்கோடு, நீள்வளேவை மறுபடியும் " 2θ "-வில் வெட்டினால் $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

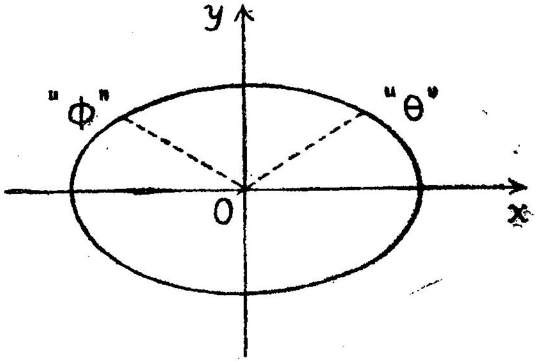
5. $y^2 - a(x - 3a) = 0$

6. $y^2 - a(x - a) = 0$

§ 115. இரு துணையிய விட்டங்களின் முனேகளின் மையவகற்சிக் கோணங்கள்

நீள்வளேவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் துணையிய விட்டங்களின் இரு முனேகள் " θ ", " ϕ " எனக் கொண்டு, அவைகளுக்குள்

ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா எனக் காண முயற்சிப்போம் (படம் 58).



படம் 58.

" θ "-வை முனையாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சரிவு

$$\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta}$$

ஆகும். " ϕ "-யை முனையாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சரிவு

$$\frac{b \sin \phi}{a \cos \phi}$$

ஆகும். இவைகளின் பெருக்கற் பலன் $-\frac{b^2}{a^2}$-க்குச் சமமாகும்.

ஆகவே,

$$\left(\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta}\right) \left(\frac{b \sin \phi}{a \cos \phi}\right) = -\frac{b^2}{a^2}.$$

அதாவது, $\frac{\sin \theta \sin \phi}{\cos \theta \cos \phi} = -1.$

அதாவது, $\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0.$

ஆகவே, $\cos (\theta - \phi) = 0.$

இதிலிருந்து, $\theta - \phi$ ஆனது $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒரு ஒற்றை மடங்காகும் எனத் தெளிவாகிறது. மேலும், துணையிய விட்டங்களில் ஒன்றின்

முனை " θ " என்றால், அடுத்த விட்டத்தின் ஒரு முனையை " $\frac{\pi}{2} + \theta$ " எனக் கொள்ளலாம். அதாவது ஒன்றின் முனை,

$$(a \cos \theta, b \sin \theta)$$

என்றால், அடுத்ததின் முனை,

$$(-a \sin \theta, b \cos \theta)$$

ஆகும்

இதைப் பயன்படுத்தி, இப்பொழுது சில விளைவுகளைப் பெறுவோம். முதலில், இரண்டு துணையிய அரை விட்டங்களின் பெருக்கற்பலனை ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுவோம். இதற்காக CP, CD என்ற துணையிய அரை விட்டங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு P-யும், D-யும்

$$(a \cos \theta, b \sin \theta), (-a \sin \theta, b \cos \theta)$$

என்றால்,

$$\begin{aligned} CP^2 + CD^2 &= (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \\ &= a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

இது ஒரு மாறிலி. அடுத்தபடியாக துணையிய விட்டங்களாகிய PP'-உம், DD'-உம் சமமானால்,

அதாவது, $CP = CD$ ஆனால்,

$$a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

அதாவது, $(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta = 0.$

அதாவது, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0.$

ஆகவே, $$\cos 2\theta = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

எனவே, $2\theta = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{4}$. இங்கு,

$$P \equiv \left(a \cos \frac{\pi}{4}, b \sin \frac{\pi}{4} \right), D \equiv \left\{ a \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right), \right.$$

$$\left. b \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

அதாவது, $P \equiv \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $D \equiv \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

சமமான துணையிய விட்டங்களின் நீளம்

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} \text{ நீளம்}$$

அல்லது $$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

ஆகும். இந்தச் சமமான துணையிய விட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

என்பதை எளிதில் அடையலாம்.

§ 116. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ல் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்களுக்கு இடையில் உள்ள குறுங்கோணத்தின் குறைந்த மதிப்பைக் காண்க.

துணையிய விட்டங்களின் முனைகளில் இரண்டை

$$(a \cos \theta, b \sin \theta), (-a \sin \theta, b \cos \theta)$$

எனக் கொண்டால், விட்டங்களின் சரிவுகள்

$$\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta}, -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}$$

ஆகும். ஆகவே, துணையிய விட்டங்கள் உண்டாக்கும் குறுங்கோணத்தை α எனக் கொண்டால்,

$$\tan \alpha = \left| \frac{\dfrac{b \sin \theta}{a \cos \theta} + \dfrac{b \cos \theta}{a \sin \theta}}{1 - \dfrac{b^2 \sin \theta \cos \theta}{a^2 \cos \theta \sin \theta}} \right|$$

$$= \left| \frac{ab(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta} \right|$$

$$= \left| \frac{ab}{(a^2 - b^2) \sin\theta \cos\theta} \right|$$

$$= \left| \frac{2ab}{(a^2 - b^2) 2 \sin\theta \cos\theta} \right|$$

$$= \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{|\sin 2\theta|}$$

இதிலிருந்து, $\sin 2\theta$ மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும்போது α ஆனது, மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் என்பது தெளிவாகிறது. ஆனால், $2\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும்போது $\sin 2\theta$ மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது. ஆகவே, α-வின் மீச்சிறு மதிப்பை

$$\tan \alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

என்பதிலிருந்து அடைகிறோம்.

கணக்கு 2.

நீள்வளைவு $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ல், P, D என்பன, மாறும் இரு துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். இம் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை காண்க.

P-யை $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ எனவும், D-யை $(-a \sin\theta, b \cos\theta)$ எனவும் கொள்வோம். P, D இவைகளிடத்துத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x \cos\theta}{a} + \frac{y \sin\theta}{b} - 1 = 0,$$

$$-\frac{x \sin\theta}{a} + \frac{y \cos\theta}{b} - 1 = 0$$

ஆகும். தொடுகோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியை (x_0, y_0) எனக் கொண்டால்,

$$\frac{x_0 \cos\theta}{a} + \frac{y_0 \sin\theta}{b} = 1$$

$$-\frac{x_0 \sin\theta}{a} + \frac{y_0 \cos\theta}{b} = 1$$

என்று கிடைக்கிறது. இவைகளை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டினால் கிடைப்பதாவது :

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}\cos^2\theta + \frac{2x_0 y_0 \cos\theta \sin\theta}{ab} + \frac{y_0^2}{b^2}\sin^2\theta\right)$$

$$+\left(\frac{x_0^2}{a^2}\sin^2\theta - \frac{2x_0 y_0 \cos\theta \sin\theta}{ab} + \frac{y_0^2}{b^2}\cos^2\theta\right) = 2$$

அதாவது, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 2.$

ஆகவே, வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 3.

நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ல் P, D என்பன மாறும் இரு துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் PD-யின் மையப்புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P-யை $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ எனவும், D-ஐ $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ எனவும், PD-யின் மையப்புள்ளியை $(x_0,\ y_0)$ எனவும் கொண்டால்,

$$x_0 = \frac{a(\cos\theta - \sin\theta)}{2}$$

$$y_0 = \frac{b(\sin\theta + \cos\theta)}{2}$$

என்னும், அதாவது

$$\frac{2x_0}{a} = \cos\theta - \sin\theta$$

$$\frac{2y_0}{b} = \cos\theta + \sin\theta$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இவைகளை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டினால் கிடைப்பதாவது:

$$\left(\frac{2x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{2y_0}{b}\right)^2 = (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2$$

$$= (\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) + (\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)$$

$$= 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= 2.$$

அதாவது, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{2}$.

ஆகவே, PD-யின் மையப்புள்ளியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{2} = 0$$

என்ருகிறது.

கணக்கு 4.

ஒரு நீள்வளைவில் இரு துணையிய விட்டங்களின் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடுகள், உண்டாக்கும் இணைகரத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

நீள்வளைவின் பேரச்சையும், சிற்றச்சையும் x, y-அச்சுகளாகக் கொண்டால், நீள்வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

என்ற வடிவில் அமைகிறது. மேலும், துணையிய விட்டங்களை PCP', DCD' எனக் கொண்டால், புள்ளிகள் P-யும், D-யும்

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ என்ற வடிவில் அமையும், இப்புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு E-யில் வெட்டினுல், கொடுக்கப்பட்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

$= 4$ (இணைகரம் $CPED$-ன் பரப்பு)

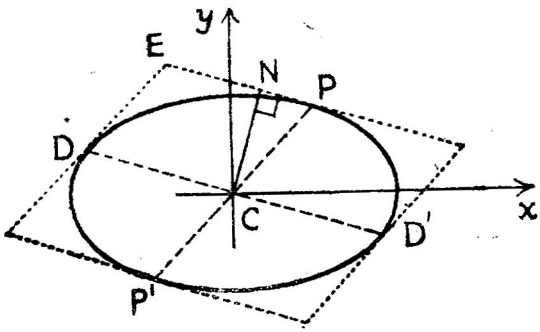
$= 4\,(CN.\ CD)$ (படம் 59).

இங்கு CN என்பது, C-யிலிருந்து PE-க்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக்கோடு, இப்பொழுது,

$$CD^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

மற்றும், PE-யின் சமன்பாடு,

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}-1=0$$



படம் 59.

ஆகும். ஆகவே,

$$CN^2=\frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}.$$

எனவே, $CD^2 . CN^2 = a^2 b^2$. இதிலிருந்து வேண்டிய பரப்பு, அதாவது $4CD. CN$ என்பது $4ab$ ஆகிறது; இது ஒரு மாறிலி.

கணக்கு 5.

C-யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வளையின் இணையான தொடு கோடுகள் இரண்டை, மூன்றாவது தொடுகோடு, E-யிலும், F-யிலும் வெட்டினால், CE, CF என்பன துணையிய அரை விட்டங்கள் எனக் காட்டுக (படம் 60).

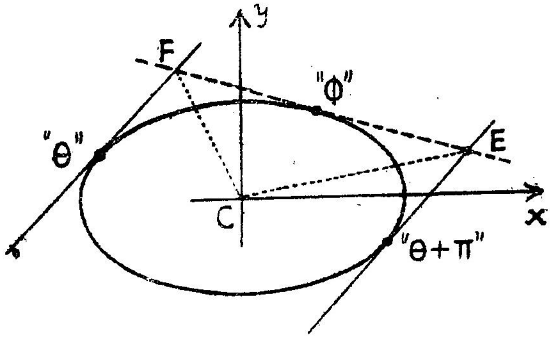
நீள்வளையின் சமன்பாட்டை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

எனவும், இணையான தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளியை

$$(a\cos\theta, b\sin\theta)\ ;\quad (-a\cos\theta, -b\sin\theta)$$

எனவும், மூன்ருவது தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளியை

$(a \cos \phi,\ b \sin \phi)$



படம் 60.

எனவும் கொள்வோம். இப்பொழுது இணையான தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} - 1 = 0$$

$$-\frac{x \cos \theta}{a} - \frac{y \sin \theta}{b} - 1 = 0$$

ஆகும். ஆகவே, இவைகளின் இணைந்த சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{x \cos\theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} - 1\right)\left(\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} + 1\right) = 0$$

அல்லது, $$\left(\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

என்று எழுதலாம். C, ஆதி ஆகையால், CE, CF என்பவற்றின் இணைந்த சமன்பாட்டை, (1)-ஐ மூன்ருவது தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகிய

$$\frac{x \cos \phi}{a} + \frac{y \sin \phi}{b} = 1$$

ஆல் சமபடித்தானதாக மாற்றி அடையலாம். அதாவது,

$$\left(\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b}\right)^2 - \left(\frac{x \cos \phi}{a} + \frac{y \sin \phi}{b}\right)^2 = 0$$

என்ற சமன்பாடு CE, CF - ஐக் குறிக்கிறது. இப்பொழுது CE, CF-இன் சரிவுகளின்

$$\text{பெருக்கற்பலன்} = \frac{\text{coef of } x^2}{\text{coef of } y^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} - \dfrac{\cos^2\phi}{a^2}}{\dfrac{\sin^2\theta}{b^2} - \dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}$$

$$= \frac{b^2(\cos^2\theta - \cos^2\phi)}{a^2(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}$$

$$= \frac{b^2(1-\sin^2\phi - 1+\sin^2\phi)}{a^2(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}$$

$$= -\frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}{a^2(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}$$

ஆகவே CE, CF துணையிய விட்டங்களாகின்றன.

§ 117. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. PP', DD' என்பன ஒரு நீள்வளையின் நகரும் துணையிய விட்டங்கள்; நாண் PD, எப்பொழுதும் ஒரு நிலைத்த நீள் வளையைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

[**உதவிக் குறிப்பு :** PD என்ற நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$

என்ற வடிவில் இருக்கும், இந்த நாண்

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}-1=0$$

என்ற நீள்வளையைத் தொடுகிறது.]

2. S-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வளைவு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ ன், துணையிய அரைவிட்டங்கள் இரண்டின் முனைகள் P,D ஆகும். P- ஆனது " θ " என்றால்,

(i) $SP = a(1 - e\cos\theta)$

(ii) $PD^2 - (SP - SD)^2 = 2b^2$

எனக் காட்டுக.

3. C-யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வளையின் தொடு கோடு ஒன்று, குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தை E, F என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. CE, CF என்பன நீள்வளையின் துணையிய விட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

4. C-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓர் அதிபரவளையின் தொடு கோடு, ஒன்று, குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தை E-யிலும், Fஇலும் வெட்டுகிறது. CE, CF என்பன அதிபரவளையின் துணையிய விட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

5. நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் மாறுகின்ற ஒரு துணையிய விட்டங்கள்; வட்டம் $x^2 + y^2 - r^2 = 0$-ஐ E-யிலும், F-யிலும் வெட்டுகின்றன. EF-ன், நீள்வளைவு சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 0$$

எனக் காட்டுக.

6. CP, CD என்பன, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ன் துணையிய அரைவிட்டங்கள் என்றால், முக்கோணம் CPD-ன் செங்கோட்டு மையத்தின் இயங்வரையின் சமன்பாடு,

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)^2 (a^2x^2 - b^2y^2)^2$$

எனக் காட்டுக.

§ 118, இணைச்செங்கோட்டுப் புள்ளிகள். (Co-normal Points)

இப் பகுதியில் முதலில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒருபரவளைவுக்கு எத்தனை செங்கோடுகள் வரையமுடியும் என்பதைக் காண்போம். பரவளையின் சமன்பாடு,

$$y^2 - 4ax = 0$$

என்றிருக்குமாறு x, y-அச்சுக்களை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். மேலும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை (h, k) எனவும் கொள்வோம்.

(h, k)-விலிருந்து பரவளைவிக்கு வரையப்பட்ட ஒரு செங்கோட்டின் அடி, $(at^2, 2at)$ என்றால், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$tx + y = at^3 + 2at$$

ஆகும். இச் செங்கோடு $(h\ k)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$th + k = at^3 + 2at.$$

அல்லது $at^3 = t(2a - h) + k = 0$.

இச் சமன்பாடு t-ல் முப்படிச் சமன்பாடாகையால், இது மூன்று மூலங்களை உடையது. இம்மூலங்களை t_1, t_2, t_3 என்றால் (h, k) யிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் அடிகளின் எண்ணிக்கை மூன்று என்றாகிறது. அதாவது (h, k)-யிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கை மூன்று எனத் தெரிகிறது. இச்செங்கோடுகளின் அடிகளின் கணத்தை (set) பரவளைவின் ஓர் இணைச்செங்கோட்டுப்புள்ளிகளின் கணம் என்கிறோம்.

மூலங்களில், மூன்றுமே மெய்யாக இருக்கலாம் அல்லது ஒன்று மாத்திரம் மெய்யாக இருக்கலாம். இதற்கேற்ப, $h, k)$-விலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடுகளில் மூன்று அல்லது ஒன்று மெய்யானதாய் இருக்கும்.

$$at^3 + t(2a - h) + k = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3 ஆகையால், கீழ்க்கண்ட விளைவுகளும் கிடைக்கின்றன :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a - h}{a},$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{k}{a}. \qquad (118\cdot 1)$$

இதேபோல், (h, k) விலிருந்து செவ்வக அதிபரவளைவு, $xy - c^2 = 0$-க்கு வரையப்படும் செங்கோடு ஒன்றின் அடி, $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்றால், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$t^2 x - y = ct^3 - \frac{c}{t}$$

என்றும், செங்கோடு (h, k) வழிச் செல்லுவதால்

$$t^2h - k = ct^3 - \frac{c}{t}$$

என்றும், அதாவது

$$ct^4 - ht^3 + kt - c = 0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. ஆகவே, (h, k)-விலிருந்து செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கை நான்கு என்றாகிறது. மேலும், சமன்பாட்டின் மூலங்களை t_1, t_2, t_3, t_4 என்றால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{h}{c}$$

$$\begin{aligned} t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 &= 0, \\ t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 + t_1t_2t_4 + t_1t_2h &= -k/c, \\ t_1t_2t_3t_4 &= -1 \end{aligned} \tag{118·2}$$

என்றும் தெரிகிறது.

கடைசியாக, (h,k)-விலிருந்து, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-க்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கை பற்றிப் படிப்போம். (h, k)-விலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடு ஒன்றின் அடி, $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ என்றால், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$$

என்றாகிறது. மேலும், செங்கோடு (k, h) வழியாகச் செல்லுவதால்

$$\frac{ah}{\cos \theta} - \frac{bk}{\sin \theta} = a^2 - b^2$$

என்றும் கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$\frac{ah}{\dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}} - \frac{bk}{\dfrac{2 \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}} - (a^2 - b^2) = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இங்கு, $tan\frac{\theta}{2}$-ஐ t எனக் குறித்தால், கிடைப்பதாவது :

$$\frac{ah(1+t^2)}{1-t^2} - \frac{bk(1+t^2)}{2t} - (a^2-b^2) = 0\cdot$$

அதாவது, $ah(1+t^2)(2t) - bk(1-t^4)$
$$-(a^2-b^2)(1-t^2)2t = 0.$$

அதாவது, $bkt^4 + 2(ah+a^2-b^2)t^3 + 2(ah-a^2+b^2)t$
$$-bk = 0.$$

இச் சமன்பாட்டிற்கு நான்கு மூலங்கள் உண்டு. இம் மூலங்களை t_1, t_2, t_3, t_4 எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$tan\frac{\theta_1}{2} = t_1, tan\frac{\theta_2}{2} = t_2, tan\frac{\theta_3}{2} = t_3, tan\frac{\theta_4}{2} = t_4$$

என்றிருக்குமாறு θ_1, θ_2, θ , θ_4 என்பனவற்றைக் காணலாம். இங்கு (h, k)-யிலிருந்து நீள்வளைவுக்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் பாதங்கள்,

" θ_1 ", " θ_2 ", " θ_3 ", " θ_4 "

ஆகின்றன. ஆகவே, (h, k)-யிலிருந்து நீள்வளைக்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையலாம்· இச் செங்கோடுகளின் இரண்டு அல்லது நான்குமே மெய்யாய் இருக்கும். மேலும்.

$$t_1+t_2+t_3+t_4 = -\frac{2(ah+a^2-b^2}{bh},$$

$$t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4 = 0.$$

$$t_2t_3t_4 + t_1t_2t_4 + t_1t_2t_3 = -\frac{2(ah-a^2+b^2)}{bk}$$

$$t_1t_2t_3t_4 = -1.$$

ஆகவே, $tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right)$

$$=\frac{(t_1+t_2+t_3+t_4)-(t_2t_3t_4+t_1t_3t_4+t_1t_2t_4+t_1t_2t_3)}{1-(t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4)+t_1t_2t_3t_4}$$

$$= \frac{\dfrac{-2(ah + a^2 - b^2)}{bk} + \dfrac{2(ah - a^2 + b^2)}{bk}}{1 + 0 + (-1)} = \infty.$$

அதாவது, $\tan \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{\pi}{2}$.

எனவே, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ ஆனது, $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒரு ஒற்றை மடங்குக்குச் சமமாகிறது. அதாவது $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ ஆனது, π-ன் ஒரு ஒற்றை மடங்குக்குச் சமமாகிறது. ஆகவே, ஒரு கண இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை, π-ன் ஒரு ஒற்றை மடங்காகும்.

§ 119. வட்டவரைப் புள்ளிகள் (Concyclic Points)

ஒரு கூம்புவளைவை ஒரு வட்டம் வெட்டும் நான்கு புள்ளிகளின் கணத்தை ஒரு வட்டவரைப் புள்ளிகளின் கணம் என்கிறோம். பரவளைவு,

$$y^2 - 4ax = 0$$

-ஐ வட்டம்

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

வெட்டும் புள்ளிகளைப் பற்றிக் கவனிப்போம். இப்புள்ளிகளில் ஒன்றை $(at^2, 2at)$ என்றால்,

$$(at^2)^2 + (2at)^2 + 2g\,(at^2) + 2f\,(2at) + c = 0.$$

அதாவது, $a^2 t^4 + 2a(2a + g)\, t^2 + 4aft + c = 0.$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 என்றால், வட்டவரைப் புள்ளிகளை

$$(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2), (at_3^2, 2at_3), (at_4^2, 2at_4)$$

என்று அடைகிறோம். மேலும்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \tag{119·1}$$

இதேபோல் வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$ ஆனது, செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ஐ வெட்டும், புள்ளிகள் ஒன்றை $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ எனக் கொண்டால்,

$$(ct)^2 + \left(\frac{c}{t}\right)^2 + 2g\,(ct) + 2f\left(\frac{c}{t}\right) + k = 0$$

அல்லது, $c^2 t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0.$
இதன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 என்றால்,

$$t_1 \, t_2 \, t_3 \, t_4 = 1 \tag{119·2}$$

என்றும் வட்டவரைப் புள்ளிகளை

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right), \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right), \left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

கடைசியாக, வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆனது, நீள்வளைவு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளைக் கவனிப்போம். இப்புள்ளிகளில் ஒன்று $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ஆனால்,

$$(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 + 2g\,(a \cos \theta) + 2f\,(b \sin \theta) + c = 0 ;$$

இங்கு $\tan \frac{\theta}{2}$-ஐ t எனக் குறிப்பிட்டால், இச் சமன்பாடு

$$(a^2 + c - 2ag)\, t^4 + 4bf\, t^3 + 2\,(c + 2b^2 - a^2)\, t^2 + 4bft + (c + ab + 2ag) = 0$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை t_1, t_2, t_3, t_4 எனவும்,

$$\tan \frac{\theta_1}{2} = t_1, \; \tan \frac{\theta_2}{2} = t_2, \; \tan \frac{\theta_3}{2} = t_3, \; \tan \frac{\theta_4}{2} = t_4$$

என்றிருக்குமாறு $\theta_1, \theta_2, \theta_3\; \theta_4$ என்பவற்றையும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\tan \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} = \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} \right)$$

$$= \frac{\dfrac{-4bf}{a^2 + c - 2ag} - \dfrac{-4bf}{a^2 + c - 2ag}}{1 - \dfrac{2\,(c + 2b^2 - a^2)}{a^2 + c - 2ag} + \dfrac{c + a^2 + 2ag}{a^2 + c - 2ag}} = 0$$

ஆகவே, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ ஆனது, $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒரு இரட்டை மடங்கிற்குச் சமமாகிறது. அதாவது $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ ஆனது π-ன் ஒரு இரட்டை மடங்கிற்குச் சமமாகிறது. எனவே, ஒரு கன வட்டவரைப் புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை, π-ன் ஓர் இரட்டை மடங்காகும் என்றாகிறது.

§ 120. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

புள்ளி $(6a, 0)$-விலிருந்து பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் அடிகளைக் காண்க.

செங்கோடு ஒன்றின் அடியை $(at^2, 2at)$ எனக் கொண்டால், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$tx + y = at^3 + 2at$$

ஆகும். ஆனால் செங்கோடு $(6a, 0)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$t(6a) + 0 = at^3 + 2at$$

அல்லது $t^3 - 4t = 0.$

அதாவது, $t(t - 2)(t + 2) = 0.$

இதிலிருந்து, $t = 0$, $t = 2$, $t = -2$ எனக் கிடைக்கிறது. இவைகளை $(at^2, 2at)$-யில் ஒவ்வொன்ருகப் பிரதியிட்டுச் செங்கோட்டு அடிகள்

$$(0, 0), \quad (4a, 4a), \quad (4a, -4a)$$

என்று பெறுகிரேம்.

கணக்கு 2.

பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடுகளில் இரண்டு, ஒன்றின்மேல் ஒன்று அமையுமாறு இணைந்துள்ள செங்கோடுகளானுல், புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

நகரும் புள்ளியை (x_0, y_0) எனவும், செங்கோடுகளின் அடியை "t_1", "t_2", "t_3" எனவும் கொண்டு, (118·1)-ஐப் பயன்படுத்திஞல், கிடைப்பதாவது :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{2a - x_0}{a}$$

$$t_1 t_2 t_3 = \frac{y_0}{a}.$$

ஆனால், இரண்டு செங்கோடுகள் இணைவதால், $t_1 = t_2$ எனக் கொள்வோம். இதனால் இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் t_1-ஐ நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$2t_2 + t_3 = 0, \quad \cdots \quad (1)$$

$$t_2^2 + 2t_2\, t_3 = \frac{2a - x_0}{a}, \quad \cdots \quad (2)$$

$$t_2^2\, t_3 = \frac{y_0}{a}. \quad \cdots \quad (3)$$

(1)-லிருந்து t_3-ன் மதிப்பை $-2t_2$ எனக் கண்டு, இதைப் பயன்படுத்தி (2), (3)-லிருந்தும் t_3-ஐ நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$t_2^2 + 2t_2(-2t_2) = \frac{2a - x_0}{a},$$

$$t_2^2(-2t_2) = \frac{y_0}{a}.$$

அதாவது, $$t_2^2 = \frac{x_0 - 2a}{3a},$$

$$t_2^3 = -\frac{y_0}{2a}$$

ஆகவே, $$\left(\frac{x_0 - 2a}{3a}\right)^3 = \left(-\frac{y_0}{2_2}\right)^2,$$

அதாவது, $4(x_0 - 2a)^3 = 27ay_0^2$

எனவே, (x_0, y_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$4(x - 2a)^3 = 27ay^2$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 3.

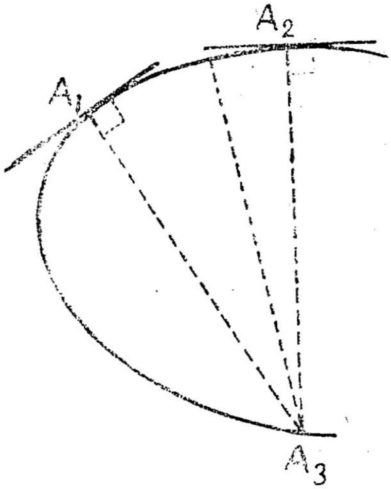
A_1, A_2, A_3 என்பன பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். இவைகளின் துணையலகுகள், t_1, t_2, t_3 என்பன. A_1, A_2-இடத்துச் செங்கோடுகள் A_3-ல் சந்தித்தால், கீழ்க் காண்பனவற்றை நிறுவுக (படம் 61).

(i) $t_1 + t_2 + t_3 = 0,$

(ii) $t_1 t_2 = 2$,

(iii) முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$-ன் மையக் கோட்டுச்சந்தி, பரவளைவின் அச்சின்மேல் அமைகிறது,

(iv) நாண் $A_1 A_2$-ன் சமன்பாடு $2x + t_3 y + 4a = 0$ ஆகும்.



படம் 61.

ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பரவளைவுக்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரையலாம் என்பது தெரியும். இப்பொழுது A_3-லிருந்து வரையப்படும். செங்கோடுகளைப் பார்ப்போம். இவைகளில் இரண்டு $A_3 A_1$, $A_3 A_2$ என எளிதில் தெரிகிறது. இந்த இரண்டு செங்கோடுகளின் அடிகள் A_1, A_2 ஆகும். மூன்ருவது செங் கோடாவது, A_3-இடத்துச் செங்கோடாகும். இதன் அடி A_3 ஆகும். ஆகவே A_3-லிருந்து வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் அடிகள் A_1, A_2, A_3 ஆகின்றன. இவைகளின் துணை அலகுகள் t_1, t_2, t_3. ஆகையால், (118·1)-ல் $h = at_3{}^2$, $k = 2\,at$ எனப் பிரதியிட்டு

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{2a - (at_3{}^2)}{a} \qquad \text{... (2)}$$

$$t_1 t_2 t_3 = \frac{2\,at_3}{a} \qquad \text{... (3)}$$

என்று அடைகிறோம். (1)-லிருந்து

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

என்றும், (2)-லிருந்து

$$t_1 t_2 = 2.$$

என்றும் எளிதில் கிடைக்கின்றன. மேலும், முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$-ன் மையக்கோட்டுச் சந்தியின் y-கூறுகிய

$$\frac{2at_1 + 2at_2 + 2at_3}{3} \text{ — உம்,}$$

பூச்சியமாகிறது. ஆகவே இச்சந்தி x அச்சின்மேல் அமைகிறது.

கடைசியாக, நாண் $A_1 A_2$-ன் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இப்பொழுது

$A \equiv (at_1^2, 2at)$, $A_2 \equiv (at_2^2, 2at_2)$

ஆகையால், $A_1 A_2$ -ன் சமன்பாடு

$$2x - (t_1 + t_2)\, y + 2at_1t_2 = 0$$

ஆகும். இதில் $t_1 + t_2 = -t_3$ எனவும், $t_1 t_2 = 2$ எனவும் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$2x + t_3 y + 4a = 0.$$

கணக்கு 4.

C யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் அடிகள் Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 என்றால், $CP^2 = CQ_1^2 + CQ_2^2 + CQ_3^2 + CP_4^2$ எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளை x, y-அச்சுகளாகக் கொண்டு அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை $xy - c^2 = 0$ எனக் கொள்வோம். மேலும், P ஆனது (h, k) என்றும், Q_1, Q_2 Q_3, Q_4 என்பன

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct^2, \frac{c}{t_2}\right); \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right) \left(ct^4, \frac{c}{t_4}\right)$$

என்றும் கொண்டால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{h}{c}.$$

$$\Sigma t_1 t_2 = 0,$$

$$\Sigma t_2 t_3 t_4 = -\frac{k}{c},$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இப்பொழுது

$$CQ_1^2 + CQ_2^2 + CQ_3^2 + CQ_4^2$$

$$= c^2 \left\{ \left(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(t_2^2 + \frac{1}{t_2^2}\right) + \left(t_3^2 + \frac{1}{t_3^2}\right) + \left(t_4^2 + \frac{1}{t_4^2}\right) \right\}$$

$$= c^2 \left\{ (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) + \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{t_4^2}\right) \right\}$$

$$= c^2 \left[\{ (\Sigma t_1)^2 - 2 (\Sigma t_1 t_2) \} + \left\{ \left(\frac{\Sigma t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4}\right)^2 - \frac{2 (\Sigma t_1 t_2)}{t_1 t_2 t_3 t_4} \right\} \right]$$

$$= c^2 \left[\left(\frac{h^2}{c^2}\right) + \frac{k^2}{c^2} \right] = h^2 + k^2$$

$$= CP^2.$$

கணக்கு 5.

ஒரு பரவளைவின் ஒரு கண இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டமானது, பரவளைவின் உச்சியின் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 - 4ax = 0$ என்றிருக்குமாறு x, y அச்சுகளைக் கொள்வோம். இப்பொழுது இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகளை $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$, $(at_3^2, 2at_3)$ எனக் கொண்டால்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

என்பதை அறிவோம். மேலும், இப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் பரவளேவை $(at_4^2, 2at_4)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டினல், (119·1)-லிருந்து

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து $t_4 = 0$ என்றும், இதனல் இந்த நான்காவது புள்ளி (0, 0) என்றும் தெரிகிறது. அதாவது, வட்டம், பரவளேவின் உச்சியின் வழியாகச் செல்லுகிறது எனத் தெரிகிறது.

கணக்கு 6.

A, B C, D என்பன, ஒரு செவ்வக அதிபரவளேவின் வட்ட வரைப் புள்ளிகள். முக்கோணம் ABC-யின் செங்கோட்டு மையம் G என்றல், G-யும், D-யும் அதிபரவளேவின் ஒரு விட்டத்தின் முனேகள் எனக் காட்டுக.

அதிபரவளேவின் சமன்பாடு $xy - c^2 = 0$ என்றிருக்குமாறு x, y- அச்சுகளேக் கொள்வோம். இப்பொழுது A, B, C, D என்பன,

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right);\ \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right);\ \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right):\ \left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$$

என்றல், (119·2)-லிருந்து

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1$$

என்றும் தெரிகிறது. மேலும், முக்கோணம் ABC-யின் செங்கோட்டு மையமாகிய G ஆனது,

$$\left(-\frac{c}{t_1\, t_2\, t_3}, -c\, t_1\, t_2\, t_3\right)$$

என்று § 110-ல் கணக்கு 6-லிருந்து தெரிகிறது. இப்பொழுது, $t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1$ என்பதைப் பயன்படுத்தி G-யை

$$\left(-\frac{ct_4}{t_1\, t_2\, t_3\, t_4}, -\frac{ct_1\, t_2\, t_3\, t_4}{t_4}\right)$$

அல்லது, $$\left(-ct_4, -\frac{c}{t_4}\right)$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். இதிலிருந்து D-யும், G-யும் அதிபரவளேவின் ஒரு விட்டத்தின் முனேகள் என்று எளிதில் தெரிகிறது.

§ 121. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் ஒரு கண இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகளின் x-கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும் எனக் காட்டுக.

2. ஒரு பரவளைவின் ஒரு கண இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகள் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி, பரவளைவின் அச்சின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

3. ஒரு நகரும் புள்ளியாகிய P-யிலிருந்து பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகளின் அடிகளின் x-கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை k என்ற மாறிலியானால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $2x = 4a + k$ எனக் காட்டுக.

4. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலே நகரும் A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளைவின் மேலேயே A_3 என்ற புள்ளியில் சந்தித்தால், A_1A_2 எப்பொழுதும் $(-2a, 0)$ வழிவாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

5. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளைவின்மேலுள்ள A_3-ல் சந்தித்தால், கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவுக.

(i) A_1, A_2 ஆகியவற்றின் x-கூறுகளின் பெருக்கற் பலனும், y-கூறுகளின் பெருக்கற் பலனும் மாறிலிகள்.

(ii) A_1 ஆனது (x_1, y_1) என்றும், A_2 ஆனது (x_2, y_2) என்றும், A_3 ஆனது (x_3, y_3) என்றும் இருந்தால்,

$$\frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 8a^2}{4a} = x_3, \quad \frac{y_1y_2(y_1 + y_2)}{8a^2} = -y_3$$

(iii) A_3 ஆனது $(at_3^2, 2at_3)$ என்றால்

$$A_3A_2, \; A_3A_1 = 4a^2(1 + t_3^2)^{\frac{3}{2}}$$

[உதவிக் குறிப்பு : (iii)-ஐ நிறுவ § 113-ல் கணக்கு 3-ஐயும், § 120-ல் கணக்கு 3 ஐயும் பயன்படுத்துக.]

6. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$-ன் மேலுள்ள $(ap^2, 2pa)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் இரண்டு செங்கோடுகளின் அடிகளின் துணை அலகுகள் t_1, t_2 என்றால், சமன்பாடு $t^2 + pt + 2 = 0$-ன் மூலங்கள் t_1, t_2 ஆகும் எனக் காட்டுக.

7. A-ஐ உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவின் A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள், பரவளைவின்மீதுள்ள A_3-ல் சந்தித்தால், கோணம் $A_1A_3A_2$ ஆனது கோணம் A_1AA_2-க்குச் சமமாகும் எனக்காட்டுக.

8. பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ மேலுள்ள A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளைவின் மேலுள்ள (18, 12)-ல் சந்தித்தால் A_1, A_2-ன் கூறுகளைக் காண்க.

9. செவ்வக அதிபரவளைவு $xy - c^2 = 0$-ன், (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) (x_4, y_4) என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) வழியாகச் சென்றால்

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = h, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = k$$

எனக் காட்டுக.

10 ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின், A, B, C என்ற புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் மூன்றும் அதிபரவளைவின் மேலுள்ள P என்ற புள்ளியில் சந்தித்தால், முக்கோணம் ABC-ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி அதிபரவளைவின் மையத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக

11. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒரு கண இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகள் நான்கில் ஒன்று மற்ற மூன்று புள்ளிகளால் ஆகிய முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம், எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : § 110-ல் கணக்கு 6-ஐயும் (118·2)-ஐயும் பயன்படுத்துக.]

12. $xy - c^2 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் ஒருகண வட்டவரைப் புள்ளிகளின் x-கூறுகளின் பெருக்கத்தொகை c^4-க்குச் சமம் எனக் காட்டுக.

13, ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒருகண வட்டவரைப் புள்ளிகள், ஒரு தொலைத்தொடுகோட்டிலிருந்து p_1, p_2, p_3, p_4 தூரங்களிலும், அடுத்த தொலைத்தொடுகோட்டிலிருந்து q_1, q_2 q_3, q_4 தூரங்களிலும் இருந்தால்,

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = q_1 q_2 q_3 q_4$$

எனக் காட்டுக.

விடைகள

8. (2, — 4), (8, — 8)

9. இருபடிச் சமன்பாடு

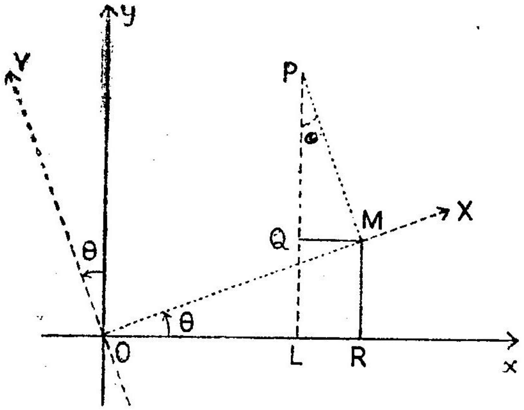
(Second Degree Equation)

122. அச்சுகளின் சுழற்சியால் ஏற்படும் நிலைமாற்றம் (Transformation by rotation of axes)

C என்ற வளைவின், குறிப்பீட்டச்சுகள் (Oxy)-ஐப் பொருத்த சமன்பாடு,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (122\cdot1)$$

எனக் கொள்வோம். இந்த அச்சுகளை, ஆதியைப் பொருத்து θ கோணம், படத்திலுள்ளவாறு சுழற்றினால் கிடைக்கும் அச்சுகளை (OXY) எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது, குறிப்பீட்டச்சுகள் (OXY)-ஐப் பொருத்த C-யின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 62).



படம் 62.

P என்ற புள்ளி, குறிப்பீட்டச்சுகள் (Oxy)-ஐப் பொருத்து (x, y) என்றும், குறிப்பீட்டச்சுகள் (OXY)-ஐப் பொருத்து (X, Y)

என்றும் உள்ளது எனக் கொண்டு x, y ஆகியவற்றுக்கும் X, Y ஆகியவற்றுக்கும் உள்ள தொடர்புகளைக் காண்போம். இதற்காக, PL-ஐ Ox-க்குச் செங்குத்தாகவும், MQ-வை PL-க்குச் செங்குத்தாகவும், MR-ஐ Ox-க்குச் செங்குத்தாகவும் வரைவோம். இப்பொழுது

$$OL = x, \quad LP = y,$$
$$OM = X, \quad MP = Y,$$

ஆகவே,

$$x = OL = OR - LR = OR - QM$$
$$= OM \cos\theta - PM \sin\theta$$
$$= X\cos\theta - Y\sin\theta \qquad (122{\cdot}2)$$
$$y = LP = LQ + QP = RM + QP$$
$$= OM \sin\theta + PM \cos\theta$$
$$= X\sin\theta + Y\cos\theta. \qquad (122{\cdot}3)$$

மேலும், (OXY)-ஐப் பழைய குறிப்பீட்டச்சுகளாகவும், (Oxy)-ஐப் புதிய குறிப்பீட்டச்சுகளாகவும் கொண்டால், (122·2), (122·3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$X = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta)$$
$$= x\cos\theta + y\sin\theta, \qquad (122{\cdot}4)$$
$$Y = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta)$$
$$= -x\sin\theta + y\cos\theta \qquad (122{\cdot}5)$$

என்று எளிதில் கிடைக்கின்றது.

இப்பொழுது (122·2)-ஐயும், (122·3)-ஐயும் பயன்படுத்தினால், C-யின் (OXY)-ஐப் பொருத்த சமன்பாடு,

$$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2$$
$$+ 2g(X\cos\theta - Y\sin\theta) + 2f(X\sin\theta + Y\cos\theta) + c = 0$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாட்டை

$$AX^2 + 2HXY + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0$$

எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$A = a\cos^2\theta + h\sin 2\theta + b\sin^2\theta,$$

$$H = -\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta + h\cos 2\theta,$$

$$B = a\sin^2\theta - h\sin 2\theta + b\cos^2\theta,$$

$$G = g\cos\theta + f\sin\theta$$

$$F = -g\sin\theta + f\cos\theta, \qquad (122\cdot 6)$$

$$C = c$$

என்றிருக்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம். இங்கு

$$A + B = a + b$$

$$H^2 - AB = h^2 - ab$$

என்ற விளைவுகள் கிடைக்கும் என்பதை நிறுவுவோம்.

$$\begin{aligned} A + B &= (a\cos^2\theta + h\sin 2\theta + b\sin^2\theta) \\ &\qquad + (a\sin^2\theta - h\sin 2\theta + b\cos^2\theta) \\ &= a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a + b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^2 - AB &= H^2 - \frac{1}{4}(A+B)^2 + \frac{1}{4}(A-B)^2 \\ &= \left\{-\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta + h\cos 2\theta\right\}^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{4}\{a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2h\sin 2\theta \\ &\qquad + b(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\}^2 \\ &= \frac{1}{4}\{-(a-b)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta\}^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{4}\{(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\}^2 \\ &= \frac{1}{4}[(a-b)^2 + 4h^2 - (a+b)^2] \\ &= h^2 - ab. \qquad (122\cdot 8) \end{aligned}$$

123. இருபடிச் சமன்பாடு

இங்கு, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (123·1) குறிக்கும் C-என்ற வளைவுபற்றிப் படிப்போம். இதற்காக,

$$H = -\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta + h\cos 2\theta =$$

என்றிருக்குமாறு, அதாவது

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

என்றிருக்குமாறு அமைந்துள்ள θ-வைக் கண்டு, கொடுக்கப் பட்டுள்ள குறிப்பீட்டச்சுகள் (Oxy)-ஐக் கோணம் θ அளவிற்குச் சுழற்றினால், கிடைக்கும் புதுக் குறிப்பீட்டச்சுகளை (OXY) எனக் கொள்வோம் அப்படியாயின், குறிப்பீட்டச்சுகள் (OXY)-ஐப் பொருத்த C-யின் சமன்பாடு,

$$AX^2 + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0 \qquad (123{\cdot}2)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது,

(i) $h^2 - ab = 0$,

(ii) $h^2 - ab < 0$,

(iii) $h^2 - ab > 0$

என்ற நிலைகள் ஒவ்வொன்றிலும் C-யின் தன்மை பற்றிப் படிப்போம்.

(i) முதலில் $h^2 - ab = 0$ என்றிருக்கும்போது, C-யின் தன்மையைப் பார்ப்போம். ஆனால், $h^2 - ab = H^2 - AB$. ஆகவே, $H^2 - AB = 0$. ஆனால் $H = 0$ என்றுள்ளவாறு θ-வை எடுத்துள்ளோம். எனவே, $AB = 0$. இதிலிருந்து A, B ஆகியவற்றில் ஒன்று பூச்சியமாகும் எனத்தெரிகிறது. குறிப்பாக, A-யைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டால், சமன்பாடு (123·2-ஐ)

$$\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2 + \frac{2G}{B}\left(X + \frac{BC - F^2}{2BG}\right) = 0$$ என்று எழுதலாம்.

ஆதியை $\left(\frac{F^2 - BC}{2BG}, -\frac{F}{B}\right)$ க்கு மாற்றினால் சமன்பாட்டை

$$Y'^2 = -\frac{2G}{B}X'$$

என்று எழுதலாம். ஆகவே, C ஒரு பரவளைவாகிறது.

(ii) அடுத்ததாக, $h^2 - ab < 0$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $-AB < 0$ அல்லது $AB > 0$ என்றாகிறது. அதாவது A-யும், B-யும் ஒரே குறியையுடைய எண்களாக உள்ளன. இப்பொழுது, சமன்பாடு (123·2)-ஐ

$$A\left(X + \frac{G}{A}\right)^2 + B\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2 = \frac{BG^2 + AF^2 - ABC}{AB}$$

என்று மாற்றி எழுதலாம்.

λ-வை $\frac{(BG^2 + AF^2 - ABC)}{AB}$ எனக் கொண்டு, சமன்பாட்டை

$$\frac{\left(X + \frac{G}{A}\right)^2}{\frac{\lambda}{A}} + \frac{\left(Y + \frac{F}{B}\right)^2}{\frac{\lambda}{B}} - 1 = 0$$

என்று மேலும் மாற்றி எழுதலாம். ஆதியை $\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B}\right)$ க்கு மாற்றினால், இச்சமன்பாடு $\frac{X^2}{\frac{\lambda}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{\lambda}{B}} - 1 = 0$ என்றாகிறது. இதிலிருந்து C, ஒரு நீள்வளைவு என்று தெரிகிறது.

(iii) மூன்றாவதாக, $h^2 - ab > 0$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $-AB > 0$ அல்லது $AB < 0$ என்றாகிறது. அதாவது A-யும், B-யும் எதிர் குறிகளையுடைய எண்களாக உள்ளன இப்பொழுது (123·2)-ஐ

$$\frac{\left(X + \frac{G}{A}\right)^2}{\frac{\lambda}{A}} + \frac{\left(Y + \frac{F}{G}\right)^2}{\frac{\lambda}{B}} - 1 = 0$$

என்ற எழுத, அது ஒரு அதிபரவளைவைக் குறிக்கின்றது. அதாவது C, ஒரு அதிபரவளைவாய் உள்ளது. மேலும் $a+b=0$ என்றால், அதாவது $A + B = 0$ என்றால், A-யும், B-யும் எதிர்க் குறிகளையுடையன. ஆகவே, C, ஓர் அதிபரவளைவு ஆகிறது. இங்கு C ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு என்பதை B-யிக்குப் பதிலாக $(-A)$-யைப் பிரதியிட்டு, எளிதில் காணலாம்.

மேற்கண்ட விளைவுகளை இப்போது வரிசைப்படுத்தி எழுதுவோம்.

(i) $h^2 - ab = 0$ என்றால், C ஒரு பரவளைவு.

(ii) $h^2 - ab < 0$ என்றால், C ஒரு நீள்வளைவு.

(iii) $h^2 - ab > 0$ என்றால், C ஒரு அதிபரவளை.

(iv) $a + b = 0$ என்றால், C ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு.

இங்கு $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ ஆனது, பூச்சியமாக இருக்கக்கூடாது. பூச்சியமாய் இருந்தால், C, ஒரு சோடிக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என்பதை முன்பே கண்டோம்.

§ 124. ஒரு பரவளைவு

$h^2 - ab = 0$ என்றிருந்தால் சமன்பாடு,

$$ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (124{\cdot}1)$$

ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கின்றது என்று அறிவோம். இப்பொழுது இப் பரவளைவின்

(i) அச்சின் சமன்பாடு,

(ii) உச்சியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

(iii) செவ்வகம்,

(iv) உச்சி

ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

சமன்பாடு $y^2 - 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவின் அச்சு, x-அச்சு என்றும், அதன் உச்சியிடத்துத் தொடுகோடு y-அச்சு என்றும் அறிவோம். ஆகவே P, (x, y) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை $y^2 \quad 4ax = 0$ குறிக்கும் பரவளைவின்மீது எடுத்துக் கொண்டால், $|y|$ என்பது, பரவளைவின் அச்சிலிருந்து P-யின் தூரத்தையும், x என்பது. பரவளைவின் உச்சியிடத்துத் தொடு கோட்டிலிருந்து P-யின் தூரத்தையும் குறிக்கின்றன எனக் கொள்ளலாம்.

எனவே, ஒரு பரவளைவின் சமன்பாட்டைப் பொதுவாக,

$$\begin{pmatrix}\text{பரவளைவின் அச்சிலிருந்து} \\ P\text{-யின் தூரம்}\end{pmatrix}^2 - 4a\begin{pmatrix}\text{பரவளைவின் உச்சிடத்துத் தொடு} \\ \text{கோட்டிருந்து } P\text{-யின் தூரம்.}\end{pmatrix} = 0$$

என்று எழுதலாம். அதாவது,

$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0$-ஐ அச்சாகவும்,

$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$-ஐ உச்சியிடத்துத் தொடு கோடாகவும்

$4a$-யைச் செவ்வகலமாகவும் பரவளைவுகளின் சமன் பாடுகள்,

$$\left\{\frac{l_1 x + m_1 y + n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}\right\}^2 \mp 4a \frac{l_2 x + m_2 y + n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} = 0 \qquad (124{\cdot}2)$$

ஆகும் என்பது தெளிவாகிறது. இப் பரவளைவுகளில் ஒன்று, $l_2 x + m_2 y + n_2 = 0$ குறிக்கும் கோட்டிற்கு ஒரு மருங்கிலும், அடுத்தது மற்றொரு மருங்கிலும் உள்ளது. இவைகளில் ஒரு பரவளைவு, இக்கோட்டின் எம் மருங்கில் உள்ளது என்பதை, இப்பரவளைவு, x-அச்சையாவது, y-அச்சையாவது வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டு, நிர்ணயிக்கலாம்.

இப்பொழுது சமன்பாடு (124·1)-ஐக் கவனிப்போம். இதில் $h^2 - ab = 0$. அதாவது, சமன்பாட்டின் இருபடி உறுப்புக ளடங்கிய கோவை $ax^2 + 2hxy + by^2$-ன் தன்மைகாட்டி பூச்சியத்திற்குச் சமம். ஆகவே இக்கோவை ஒரு நிறை வர்க்க மாகும். எனவே

$$ax^2 + 2hxy + by^2\text{-ஐ } (lx + my)^2$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம். ஆனால் $(lx + my)^2$-ஐ

$$(lx + my + \lambda)^2 - 2\lambda(lx + my) - \lambda^2$$

என்று λ-வை நுழைத்து எழுதலாம். ஆகவே, சமன்பாடு (124·1)-ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$(lx + my + \lambda)^2 - 2\lambda(lx + my) - \lambda^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

அதாவது, $$(lx + my + \lambda)^2 + (-2\lambda l + 2g)x + (-2\lambda m + 2f)y + (-\lambda^2 + c) = 0. \qquad (124{\cdot}3)$$

இப்பொழுது சமன்பாடுகள்,

$$lx + my + \lambda = 0,$$

$$(-2\lambda l + 2g)x + (-2\lambda m + 2f)y + (-\lambda^2 + c) = 0$$

குறிக்கும் கோடுகள், செங்குத்தானவையாக இருக்குமாறு λ-வைத் தேர்ந்தெடுத்தால், அதாவது

$$l(-2\lambda l + 2g) + m(-2\lambda m + 2f) = 0 \qquad (124\cdot4)$$

என்றிருக்குமாறு λ-வைத் தேர்ந்தெடுத்தால், கோடுகளில் முதலாவது கோடு, பரவளைவின் x-அச்சாகவும், இரண்டாவது கோடு, பரவளைவின் உச்சியிடத்துத் தொடுகோடாகவும் இருக்கும். பின்பு λ-வின் மதிப்பை (124·3)-ல் λ-வுக்குப் பதிலாகப் பிரதியிட்டு, (124·3)-ஐ (124·2)-ன் வடிவத்திற்குக் கொண்டு வந்து வந்து பரவளைவின் செவ்வகலத்தையும் காணலாம். மேலும் அச்சு, உச்சியிடத்துத் தொடுகோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளை விடுவித்து உச்சியையும் காணலாம்.

§ 125. ஒரு மையக் கூம்புவளைவின் மையம்

இங்கு $S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் மையக் கூம்புவளைவின் மையத்தைக் காண்போம். இதற்காக, மையத்தை (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம் (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லும் ஒரு விட்டம், x-அச்சுடன் கோணம் θ-வை உண்டாக்கினால், (x_1, y_1)-லிருந்து r தூரத்தில் இருக்குமாறு விட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளி,

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$$

ஆகும். இப் புள்ளி, கூம்புவளைவின் மேல் அமைந்தால்,

$$a(x_1 + r\cos\theta)^2 + 2h(x_1 + r\cos\theta)(y_1 + r\sin\theta) + b(y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0.$$

இது r-ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு, (x_1, y_1) விட்டத்தின் மையப் புள்ளி. ஆகையால், இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டில், r-ன் குணகம் பூச்சியமாகும். எனவே,

$$(ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta = 0.$$

இது θ-வின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், அதாவது $\cos\theta$, $\sin\theta$ ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் உண்மையாகிறது. இவ்விதமாவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகள்,

$$ax_1 + hy + g = 0,$$
$$hx_1 + by + f = 0$$

ஆகும். இவைகளை x_1-க்கும், y_1-க்கும் விடுவித்துக் கூம்பு வளைவின் மையத்தைக் காணலாம். அதாவது சமன்பாடுகள்

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

என்பவற்றை விடுவித்தும் கூம்புவளைவின் மையத்தைக் காணலாம். ஏனெனில்

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\,(ax + hy + g), \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\,(hx + by + f).$$

§ 126. ஒரு மையக் கூம்புவளைவின் அச்சுக்கள் (Axes of a Central Conic)

கூம்புவளைவுன் சமன்பாட்டை

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (126{\cdot}1)$$

எனக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடு (xy)-ஐப் பொருத்தது என்றும் கொள்வோம். இக் கூம்புவளைவின் மையம் $A\,(x_1, y_1)$ என்றால்,

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + hy_1 + g &= 0 \\ hx_1 + by_1 + f &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (126{\cdot}2)$$

ஆகும். இப்பொழுது Ox-க்கு இணையாக AX-ஐயும், Oy-க்கு இணையாக AY-ஐயும் எடுத்துக்கொண்டு, (AXY)-ஐப் புதுக் குறியீட்டச்சுகளாகக் கொண்டால், கூம்புவளைவின், (AXY)-ஐப் பொருத்த சமன்பாடு,

$$a\,(X + x_1)^2 + 2h\,(X + x_1)\,(Y + y_1)$$
$$+ b\,(Y + y_1)^2 + 2g\,(X + x_1) + 2f\,(Y + y_1) + c = 0$$

என்றிருக்கும். அதாவது

$$aX^2 + 2hXY + by^2 + 2X\,(ax_1 + hy_1 + g)$$
$$+ 2Y\,(hx_1 + by_1 + f) + S_1 = 0$$

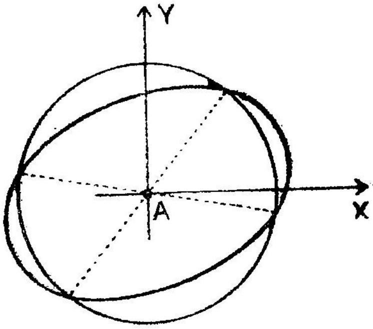
என்றிருக்கும். இச் சமன்பாடு, (126·2)-ஆல்

$$C = aX^2 + 2hXY + by^2 + S_1 = 0$$

என்று சுருங்குகிறது. மேலும், S_1-ஐ

$$x_1 (ax_1 + hy_1 + g) + y_1 (hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c)$$

என்று எழுதலாம். ஆகவே, S_1 ஆனது, $gx_1 + fy_1 + c$ என்று சுருங்குகிறது.



படம் 63.

அடுத்தபடியாக, கூம்புவளைவின் மையமான A-யை மையமாகவும், r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 63). இவ் வட்டத்தின், (AXY)-ஐப் பொருத்த சமன்பாடு,

$$C' = X^2 + Y^2 - r^2 = 0$$

ஆகும். இப்பொழுது சமன்பாடு $(r^2)\,C + (S_1)\,C' = 0$.ஐக் கவனிப்போம். இச் சமன்பாடாவது,

$$r^2 (aX^2 + 2hXY + by^2) + S_1 (X^2 + Y^2 - r^2) = 0.$$

அதாவது, $$(a r^2 + S_1)\,X^2 + 2hr^2\,XY + (br^2 + S_1)\;Y^2 + X_1 = 0. \qquad (126{\cdot}3)$$

இது, ஒரு சமபடித்தான சமன்பாடாகையால், இது A வழியாகச் செல்லும், சோடிக் கோடுகளைக் குறிக்கிறது, மேலும், இக் கோடுகள், கூம்புவளைவை வட்டம் வெட்டும் நான்கு புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லுகின்றன. இக்கோடுகள் ஒன்றின்மேல் ஒன்ருக இணைந்த கோடுகள் ஆனுல், இந்தக் கோடுகள் கூம்புவளைவின் அச்சுகளில் ஒன்றின்மேல் அமையும். அப்பொழுது வட்டத்தின் ஆரம், அரையச்சின் நீளத்திற்குச் சமமாய் இருக்கும். அதாவது,

$$(h r^2)^2 - (ar^2 + S_1)\,(br^2 + S_1) = 0 \qquad (126{\cdot}4)$$

ஒன்றால், சமன்பாடு (126·3) ஆனது கூம்புவளைவின் அச்சுக்களைக் குறிக்கிறது. சமன்பாடு (126.4)-ஐ

$$(h^2 - ab)\, r^4 - (a + b)\, S_1 r^2 - S_1^2 = 0 \qquad (126{\cdot}5)$$

என்று எழுதலாம்· இதனில் மூலங்கள், கூம்புவளைவுன் அரை அச்சுகளின் நீளங்களைக் குறிக்கின்றன.

அடுத்தபடியாக, அரையச்சுக்களின் நீளங்களை r_1, r_2 எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், (126·4)-லிருந்து

$$h^2 r_1^4 - (ar_1^2 + S_1)(br_1^2 + S_1) = 0 \qquad (126{\cdot}6)$$

என்று கிடைக்கிறது. இதைப் பயன்படுத்தி $2r_1$ - ஐ நீளமாகக் கொண்ட அச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். (126.3)-லிருந்து இச் சமன்பாடானது,

$$(ar_1^2 + S_1) X^2 + 2hr_1^2 + XY + (br_1^2 + S_1) Y^2 = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டை $(ar_1^2 + S_1)$-ல் பெருக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$(ar_1^2 + S_1)^2 X^2 + 2\,(ar_1^2 + S_1)\, hr_1^2$$
$$+ XY + (ar_1^2 + S_1)(br_1^2 + S_1)^2 Y = 0$$

இங்கு, (126·6)-ஐப் பயன்படுத்தினால், இச் சமன்பாடு

$$(ar_1^2 + S_1)^2 X^2 + 2\,(ar_1^2 + S_2)\, h\, r_1^2 XY + h^2 r_1^4 Y^2 = 0$$

அல்லது, $\{(ar_1^2 + S_1) X + hr_1^2 Y\}^2 = 0$

அல்லது, $(ar_1^2 + S_1) X + hr_1^2 Y = 0$

எனச் சுருங்குகிறது. இதுபோலவே $2r_2$-ஐ நீளமாகக் கொண்ட அச்சின் சமன்பாடு,

$$(ar_2^2 + S_1) Y + hr_2^2 Y = 0$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து $(0xy)$-ஐப் பொருத்த அச்சுகளின் சமன்பாடுகளை எளிதில் காணலாம்.

§ 127. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

சமன்பாடு $4x^2 - 4xy + y - 8x - 6y + 5 = 0$ குறிக்கும் கூம்புவளைவை வரைக.

இங்கு $a = 4$, $b = 1$, $h = -2$. ஆகவே,

$$h^2 - ab = (-2)^2 - (4)(1) = 0.$$

எனவே, கூம்புவளைவு ஒரு பரவளைவு எனக் கிடைக்கிறது.

இப்போது

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$
$$= (2x - y + \lambda)^2 \quad [2\lambda(2x - y) + \lambda^2].$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$(2x - y + \lambda)^2 - 2\lambda(2x - y) - \lambda^2 - 8x - 6y + 5 = 0.$$

அதாவது, $(2x - y + \lambda)^2 + (-4\lambda - 8)x + (2\lambda - 6)y$
$$+ (-\lambda^2 + 5) = 0 \quad \ldots (1)$$

அடுத்தபடியாக, (124·4)-ஐப் பயன்படுத்தி, λ-வைக் காண்போம்.

$$(2)(-4\lambda - 8) + (-1)(2\lambda - 6) = 0.$$

அதாவது, $(-8 - 2)\lambda + (-16 + 6) = 0.$

அதாவது, $\lambda = -1.$

இம் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட்டுப் பரவளைவின் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$(2x - y - 1)^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

அதாவது, $(2x - y - 1)^2 - 4(x + 2y - 1) = 0.$

அதாவது, $$\frac{(2x - y - 1)^2}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} - \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$$

அதாவது, $$\left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right) = 0$$

இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் விளைவுகள் கிடைக்கின்றன :

பரவளைவின் அச்சின் சமன்பாடு : $2x - y - 1 = 0$

உச்சியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு : $x + 2y - 1 = 0$

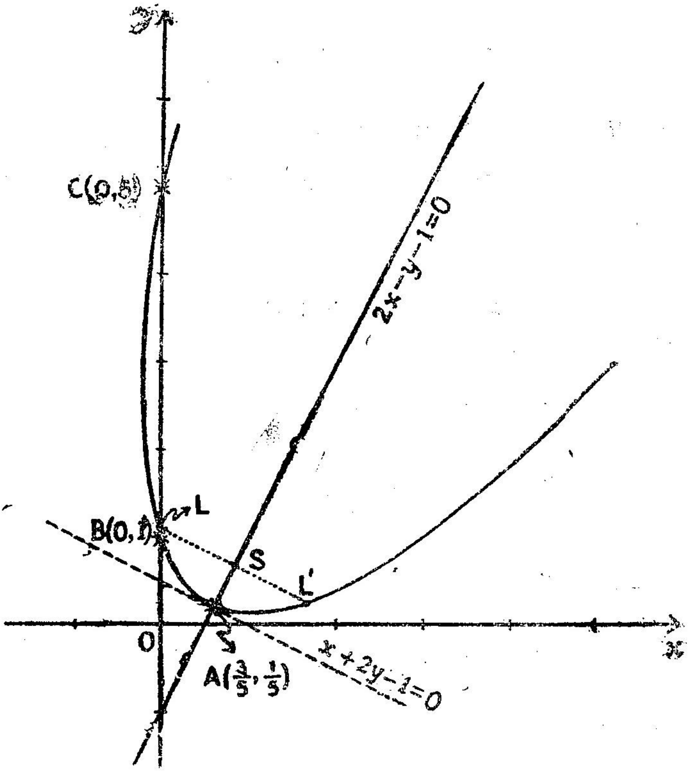
செவ்வகலம் : $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

பரவளைவின் உச்சி A-யைச் சமன்பாடுகள் $2x - y - 1 = 0$ ஐயும், $x + 2y - 1 = 0$ ஐயும் விடுவித்து, $A\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ என்று அடைகிறோம்.

அடுத்தபடிமாக, பரவளைவின் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப் பிரதியிட்டு பரவளைவை x-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளின் x கூறுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம் :

$$4x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - (4)(4)(5)}}{8}$$



படம் 64.

இங்கு, x-ன் மதிப்புகள் கற்பனையாயுள்ளன. ஆகவே, x-அச்சு பரவளைவை வெட்டவில்லை. அடுத்ததாக, y-அச்சு, பரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் y கூறுகளை,

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

அதாவது, $(y - 1)(y - 5) = 0$

$$y = 1, \quad y = 5$$

என்றடைந்து, புள்ளிகளை

$$B\ (0,\ 1),\ C\ (0,\ 5)$$

எனப் பெறலாம்.

பரவளைவை வரைவதற்கு முதலில் பரவளைவின் அச்சை வரைந்துகொள்ள வேண்டும். A, B, C ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும் (படம் 64). இப்பொழுது ஓரளவிற்கு பரவளைவை வரைய முடியும். பரவளைவின் வேறு சில முக்கியப் புள்ளிகள் வேண்டும் என்ருல், $AS = a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ என்றுள்ளவாறு குவியம் S-ஐ எடுத்துக் கொண்டு, $SL = SL' = \frac{2}{\sqrt{5}}$ என்றுள்ள வாறு, செவ்வகத்தின் முனைகளாகிய L-ஐயும், L'-ஐயும் குறிக்க வேண்டும்.

கணக்கு 2.

சமன்பாடு $x^2 + xy + y^2 + x + y - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்புவை வரைக.

$$a = 1 \qquad f = \frac{1}{2}$$

$$b = 1 \qquad g = \frac{1}{2}$$

$$c = -1 \qquad h = \frac{1}{2}$$

$$h^2 - ab = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

எனவே, கூம்புவளைவு ஒரு நீள்வளைவு எனக் கிடைக்கிறது. இந் நீள்வளைவின் மையப்புள்ளியை (x_1, y_1) எனக் கொண்டால்,

$$ax_1 + hy_1 + g = 0,$$
$$hx_1 + by_1 + f = 0$$

என்பவற்றிலிருந்து

$$x_1 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{2}x_1 + y_1 + \frac{1}{2} = 0$$

என்றும், இவைகளை x_1-க்கும் y_1-க்கும் விடுவிக்க, மையப் புள்ளியானது

$$C\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது ஆதியை இம்மையத்திற்கு மாற்றுவோம். இந்நிலை மாற்றத்தை விளைவிக்கும் சமன்பாடுகள்,

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \left(-\frac{1}{3}\right) \\ y &= Y + \left(-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (1)$$

ஆகும். இங்கு புதிய குறிப்பீட்டச்சுகள் (OXY)-ஐப் பொருத்து, கூம்புவளைவின் சமன்பாடு,

$$x^2 + xy + y^2 + S_1 = 0$$

என்றிருக்கும். இதில்,

$$S_1 = gx_1 + fy_1 + c = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{4}{3}$$

ஆகும். அடுத்தபடியாக, நீள்வளைவின் அரையச்சுகளின் நீளங்களைக் காண்போம்: இந் நீளங்களைச் சமன்பாடு (126·5), தரும் என்று, அதாவது சமன்பாடு

$$(h^2 - ab)r^4 - (a + b)\,S_1 r^2 - S_1{}^2 = 0$$

தரும் என்று முன்பே கண்டோம். இங்கு இச் சமன்பாடு,

$$\left(-\frac{3}{4}\right)r^4 - (1 + 1)\left(-\frac{4}{3}\right)r^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

என்றிருக்கிறது. இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது:

$$-27r^4 + 96ry^2 - 64 = 0.$$

அதாவது, $27r^4 - 96r^2 + 64 = 0.$

அதாவது, $(3r^2 - 8)\,(9r^2 - 8) = 0.$

அதாவது, $r^2 = \dfrac{8}{3}$ அல்லது $\dfrac{8}{9}$.

எனவே, நீள்வளையின் அரைப் பேரச்சின் நீளம் r_1 என்றும், அரைச் சிற்றச்சின் நீளம் r_2 என்றும் இருந்தால்

$$r_1^2 = \frac{8}{3}, \; r_2^2 = \frac{8}{9}.$$

ஆகும். இதிலிருந்து

$$r_1 = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \; r_2 = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

என்று கிடைக்கின்றது.

அடுத்தபடியாக, அச்சுக்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம்: பேரச்சின் சமன்பாடு,

$$(ar_1^2 + S_1)\, X + hr_1^2\, Y = 0$$

என்றிருக்கும் என்று § 126-ல் கண்டோம். இங்கு இச்சமன்பாடு,

$$\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right) X + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right) Y = 0$$

அல்லது $$X + Y = 0$$

என்றாகிறது. ஆகவே, பேரச்சின், குறிப்பீட்டச்சு (OXY)-ஐப் பொருத்த சமன்பாடு,

$$\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(y + \frac{1}{3}\right) = 0$$

அதாவது

$$3x + 3y + 2 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. சிற்றச்சு, பேரச்சுக்கு செங்குத்தானதால், சிற்றச்சின் $(0xy)$-ஐப் பொருத்த சமன்பாட்டை

$$3x - 3y = k$$

என்று எழுதலாம். ஆனால் சிற்றச்சு $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ வழியாகச் செல்கிறது.

ஆகவே,

$$3\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = k$$

அல்லது $$k = 0.$$

ஆகவே, சிற்றச்சின் சமன்பாடு

$$3x - 3y = 0$$

அல்லது $$x - y = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது. அடுத்தபடியாக, நீள்வளேவை x-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளின் x-கூறுகளைக் கீழ்க்காணும் வகையில் அடைகிறோம்.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

அதாவது $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

அல்லது

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ அல்லது } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

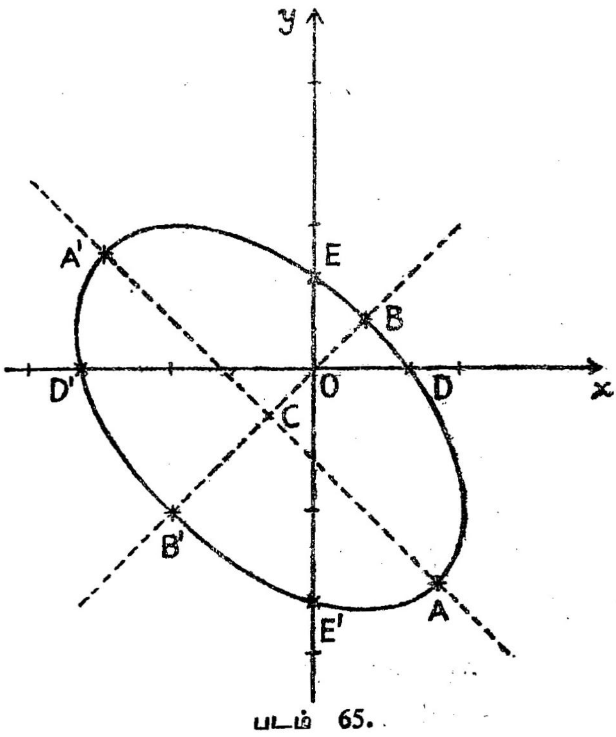
ஆகவே, வெட்டும் புள்ளிகள்

$$D\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right),\ D'\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

என்றாகின்றன. இதேபோல், y-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளை

$$y^2 + y - 1 = 0$$

என்பதிலிருந்து:



படம் 65.

$$E\left(0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad E'\left(0, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

என்று அடைகிறோம்.

நீள்வளைவை வரைவதற்கு, முதலில் பேரச்சையும், சிற்றச்சையும் வரைந்து, பின் அவைகளின்மேல் அச்சுக்களின் முனைகளான A, A', B, B' ஆகியவற்றை அவற்றின்மேல் குறிக்கவேண்டும் (படம் 65). இதற்கு

$$CA = CA' = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad CB = CB' = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

என்பவற்றைப் பயன்படுத்தவேண்டும். பின் D, D', E, E' ஆகியவற்றையும் குறிக்கவேண்டும். இந்த எட்டுப் புள்ளிகளும் நீள்வளைவை வரையப் பயன்படுகின்றன.

கணக்கு 3.

சமன்பாடு $x^2 - 6xy + y^2 - 8x - 8y - 20 = 0$ குறிக்கும் கூம்புவளைவை வரைக.

இங்கு

$$a = 1 \qquad f = -4$$
$$b = 1 \qquad g = -4$$
$$c = -20 \qquad h = -3.$$

ஆகவே,

$$h^2 - ab = 9 - 1 = 8 > 0.$$

எனவே, கூம்புவளைவு அதிபரவளைவு எனக் கிடைக்கிறது. இவ்வதிபரவளைவின் மையப்புள்ளியை, $C(x_1, y_1)$ எனக் கொண்டால்,

$$ax_1 + hy_1 + g = 0,$$
$$hx_1 + by_1 + f = 0$$

என்பவற்றிலிருந்து

$$x_1 - 3y_1 - 4 = 0$$
$$-3x_1 + y_1 - 4 = 0$$

என்றும், இவைகளை x_1-க்கும், y_1-க்கும் விடுவிக்க, மையப் புள்ளியானது

$$C(-2, -2)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது, ஆதியை மையத்திற்கு மாற்றுவோம். இந் நிலை மாற்றத்தை விளைவிக்கும் சமன்பாடுகள்,

$$\left.\begin{aligned} x &= X - 2 \\ y &= Y - 2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ஆகும். இங்கு, புதிய குறிப்பீட்டச்சுகள் (OXL)-ஐப் பொருத்து, கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு,

$$X^2 - 6XY + Y^2 + S_1 = 0$$

என்றிருக்கும். இதில்

$$S_1 = g\,x_1 + fy_1 + c = -4(-2) - 4(-2) - 20 = -4$$

ஆகும். அடுத்தபடியாக, அதிபரவளைவின் அரையச்சுகளின் நீளங்களைக் காண்போம். இந் நீளங்களைச் சமன்பாடு (126·5) தரும் என்று, அதாவது சமன்பாடு

$$(h^2 - ab)\,r^4 - (a + b)\,S_1\,r^2 - S_1{}^2 = 0$$

தரும் என்று முன்பே கண்டோம். இங்கு இச் சமன்பாடு,

$$8\,r^4 - (1 + 1)\,(-4)\,r^2 - (-4)^2 = 0$$

என்றிருக்கிறது. இதிலிருந்து கிடைப்பதாவது

$$r^4 + r^2 - 2 = 0$$

அதாவது

$$(r^2 - 1)\,(r^2 + 2) = 0$$

அல்லது

$$r^2 = 1, \qquad r^2 = -2.$$

எனவே, அதிபரவளைவின் அரைக் குறுக்கச்சின் நீளத்தை r_1 எனவும், அரைத் துணையச்சின் நீளத்தை r^2 எனவும் கொண்டால்,

$$r_1{}^2 = 1, \qquad r_2{}^2 = 2$$

ஆகும். அதாவது

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = \sqrt{2}$$

ஆகும்.

அடுத்தபடியாக, குறுக்கச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இவ்வச்சின் சமன்பாடு,

$$(ar_1{}^2 + S_1)\,X + hr_1{}^2\,Y = 0$$

ஆகும். அதாவது,

$$(1 - 4)\,X + (-3)\,(1 \quad Y = 0$$

அல்லது $$X + Y = 0$$

ஆகும். ஆகவே, குறுக்கச்சின், குறிப்பீட்டச்சு (OXY) ஐப் பொருத்த சமன்பாடாவது,

$$(x + 2) + (y + 2) = 0$$

அல்லது $$x + y + 4 = 0$$

ஆகும்.

அடுத்தபடியாக, அதிபரவளைவை x-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளை,

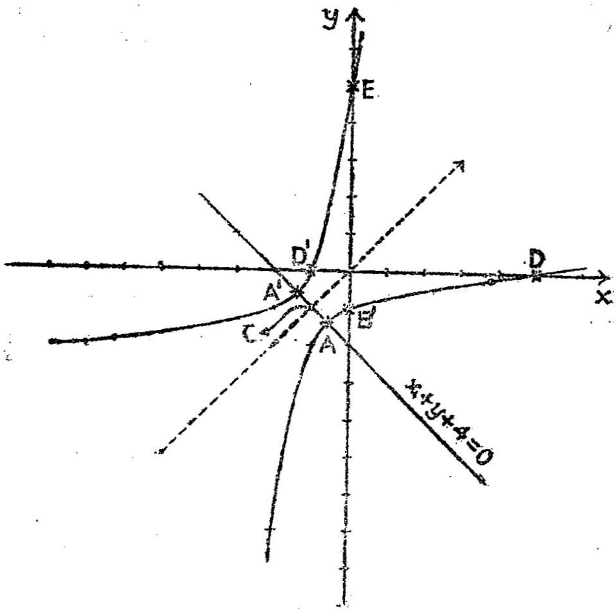
$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

என்பதிலிருந்து $x = 10$ அல்லது -2 எனப் பெற்று,

$$D\,(10,\ 0),\ D\ (-2,\ 0)$$

என்று அடைகிறோம். இதேபோல் y-அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளை,

$$y^2 - 8y - 20 = 0$$



படம் 66.

என்பதிலிருந்து $y = 0$ அல்லது -2 எனப் பெற்று,

$$E(0, 10), E(0, -2)$$

என்று அடைகிறோம்.

அதிபரவளையை வரைவதற்கு, முதலில் குறுக்கச்சை வரைந்து, பின் அதன்மேல் C-ஐயும், அச்சின் முனைகளான A, A' ஆகியவற்றையும் குறிக்க வேண்டும் (படம் 66). இதற்கு,

$$CA = CA' = 1$$

என்பதைப் பயன்படுத்தவேண்டும். பின் புள்ளிகள் A, A', D, D', E, E வழியாகச் செல்லும் அதிபரவளையை வரைய வேண்டும்.

§ 128. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்பு வளைவுகளை வரைக.

(i) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5y - 6 = 0$

(ii) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$

(iii) $x^2 - 2xy + y^2 + 24x - 8y + 80 = 0$

(iv) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 10x - 70y + 15 = 0.$

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்பு வளைவுகளை வரைக.

(i) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 10x - 26y - 17 = 0$

(ii) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 14x + 8y - 39 = 0$

(iii) $9x^2 - 6xy + 17y^2 - 24x - 56y - 640 = 0$

(iv) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0.$

3. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்பு வளைவுகளை வரைக.

(i) $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$

(ii) $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$

(iii) $11x^2 + 96xy + 39y^2 + 52x - 114y - 1984 = 0$

(iv) $x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 8y = 11 = 0.$

விடைகள்

1.

பரவளைவுகள்	1 (i)	1 (ii)	1 (iii)	1 (iv)
அச்சு	$x + 2y + 1 = 0$	$2x + 2y - 1 = 0$	$x - y + 8 = 0$	$3x + 4y - 5 = 0$
உச்சியிடத்துத் தொடுகோடு	$2x - y + 7 = 0$	$4x - 4y + 5 = 0$	$x + y + 2 = 0$	$4x - 3 - 1 = 0$
செவ்வகலம்	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$4\sqrt{2}$	2
உச்சி	$(-3, 1)$	$\left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$	$(-5, 3)$	$(\cdot76, \cdot58)$
x-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$	$[(1 + \sqrt{2}), 0]$, $(1 - \sqrt{2}, 0)$	$(-20, 0)$ $(4, 0)$	இல்லை
x-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$\left(0, \frac{3}{4}\right), \left(0, -2\right)$	$(0, 1), (0, -1)$	இல்லை	$\left(0, \frac{35 + \sqrt{985}}{16}\right)$ $\left(0. \frac{35 - \sqrt{985}}{16}\right)$

2.

நீள்வளைவுகள்	2 (i)	2 (ii)	2 (iii)	2 (iv)
மையம்	$(1, 2)$	$(-1, -1)$	$(2, 2)$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
அரைப் பேரச்சின் நீளம்	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$3\sqrt{10}$	$\frac{3}{2}$
அரைச் சிற்றச்சின் நீளம்	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{10}$	1
பேரச்சின் சமன்பாடு	$x - y + 1 = 0$	$2x - y + 1 = 0$	$x - 3y + 4 = 0$	$2x - y - 1 = 0$
சிற்றச்சின் சமன்பாடு	$x + y - 3 = 0$	$x + 2y + 3 = 0$	$3x + y - 8 = 0$	$2x + 4y - 11 = 0$
x-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$(-1, 0)\ \left(\frac{17}{7}, 0\right)$	$(-3, 0)\ \left(\frac{13}{9}, 0\right)$	$\left(\frac{4 + 4\sqrt{41}}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{4 - 4\sqrt{41}}{3}, 0\right)$	இல்லை
y-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$\left(0, \frac{26 + \sqrt{1033}}{14}\right)$, $\left(0, \frac{26 - \sqrt{1033}}{14}\right)$	$\left(0, \frac{4 + 5\sqrt{10}}{6}\right)$ $\left(0, \frac{-4 - 5\sqrt{10}}{6}\right)$	$(0, 8)$, $\left(0, -\frac{8}{17}\right)$	இல்லை

3.

அதிபரவளைவுகள்	3 (i)	3 (ii)	3 (iii)	3 (iv)
மையம்	$(-2, 2)$	$(-1, 1)$	$(2, -1)$	$(1, 2)$
அரைப் பேரச்சின் நீளம்	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	5	$2\sqrt{2}$
அரைத்துணை அச்சின் நீளம்	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	2	$5\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$
குறுக்கச்சின் சமன்பாடு	$x - y + 4 = 0$	$x - y + 2 = 0$	$4x - 3y - 11 = 0$	$x - y + 1 = 0$
x-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$(-3, 0), (-7, 0)$	$(1 + \sqrt{7}, 0)$, $(1 - \sqrt{7}, 0)$	$\left(\frac{124}{11}, 0\right) (-16, 0)$	$(11, 0), (-1, 0)$
y-அச்சின் வெட்டுப் புள்ளிகள்	$(0, 3), (0, 7)$	$(0, -1 + \sqrt{7})$, $(0, -1 - \sqrt{7})$	$\left(0, \frac{57 + 25\sqrt{129}}{39}\right)$ $\left(0, \frac{57 - 25\sqrt{129}}{39}\right)$	$(0, 4 + 3\sqrt{3})$, $(0, 4 - 3\sqrt{3})$

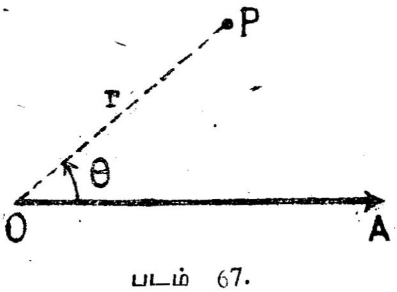
10. கோணதூரக் கூறுகள்

(Polar Co-ordinates)

§ 129. **கோணதூரக் கூறுகள்**

இதுவரை கார்ட்டீசியன் கூறுகளைக் கொண்டு ஒரு புள்ளியின் இருப்பிடத்தைக் குறிப்பிட்டோம். மற்றொரு முறையில் ஒரு புள்ளியின் இடத்தைக் குறிப்பதுபற்றி இப்பொழுது பார்ப்போம்.

புள்ளி அமைந்துள்ள தளத்தில் O என்ற நிலைத்த புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். பின் O-விலிருந்து OA என்ற கோட்டை வரைவோம். மேலும், தளத்தில் P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 67). OA-யுடன், OP ஆனது படத்தில்



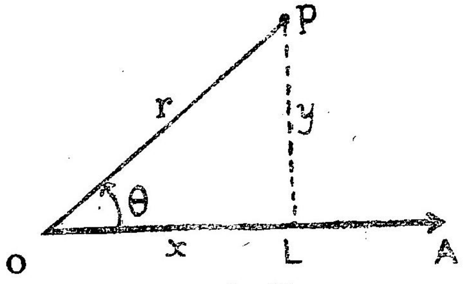
படம் 67.

உள்ளவாறு θ என்ற இடஞ்சுழியாகக் கோணத்தை உண்டாக்கினால், P-யின் இருப்பிடத்தை OP, θ ஆகியவற்றால் நிர்ணயிக்கலாம். அதாவது OP-யை r எனக் குறித்தால், r-உம், θ-வும், P-யின் இடத்தை நிர்ணயிக்கின்றன. இதனால், P-யை (r, θ) என்பதால் குறிப்பிடலாம்.

இங்கு, O ஆனது, முனைவு (Pole) என்றும்,
OA ஆனது, தொடக்கக் கோடு (initial line) என்றும்,
r ஆனது, ஆரைத்திசையி (radius vector) என்றும்,
θ ஆனது, ஆரைக்கோணம் (vectorial angle) என்றும்,

r, θ என்பன புள்ளி P-யின் **கோணதூரக்கூறுகள்** (polar co-ordinates) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. r ஆனது, எப்பொழுதும் ஒரு மிகை எண்ணாகும்.

இப்பொழுது முனைவை ஆதியாகவும், தொடக்கக் கோட்டை x-அச்சாகவும் கொண்டால், ஒரு புள்ளி P-யின் கோணதூரக் கூறுகளாகிய r-க்கும், θ-க்கும், கார்ட்டீசியன் கூறுகளாகிய x-க்கும், y-க்கும் இடையில் உள்ள தொடர்புகளைக் காண்போம் (படம் 59):. P-யிலிருந்து OA-க்கு PL என்ற செங்குத்துக்



படம் 68.

கோட்டை வரைவோம். அப்படியாயின்,

$$x = OL = r\cos\theta,$$
$$y = PL = r\sin\theta.$$

இத் தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு நேர்கோட்டின் கோணதூரச் சமன்பாட்டை (polar equation) அதன் பொதுவான வடிவில் காண்போம். கார்ட்டீசியன் சமன்பாட்டின் பொதுவான வடிவம்,

$$ax + by + k = 0$$

என்று தெரியும். ஆகவே, இதில் x-க்குப் பதிலாக $r\cos\theta$-வையும் y-க்குப் பதிலாக $r\sin\theta$-வையும் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$a\,r\cos\theta + b\,r\sin\theta + k = 0.$$

அ-து $\quad -\dfrac{k}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta.$

இதில் $(-k)$-யை c எனக் குறித்தால் இச் சமன்பாடு,

$$\frac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta \tag{129.1}$$

என்றுகிறது. இதிலிருந்து,

$$\frac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

$$\frac{c'}{r} = a'\cos\theta + b'\sin\theta$$

குறிக்கும் கோடுகள், செங்குத்தானவையாய் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனையும், கோடுகள், $ax + by + k = 0$-உம் $a'x + b'y + k = 0$-உம், செங்குத்தாய் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனையும் ஒன்றுதான் எனத் தெரிகிறது. இந்த நிபந்தனையாவது,

$$aa' + bb' = 0$$

என்று (20·4)-லிருந்து எளிதில் காணலாம்.

எனவே,

$$\frac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

குறிக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{c'}{r} = b\cos\theta - a\sin\theta \quad \ldots \quad (129{\cdot}2)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என்பதை

$$(a)(b) + (b)(-a) = 0$$

என்பதிலிருந்து காணலாம்.

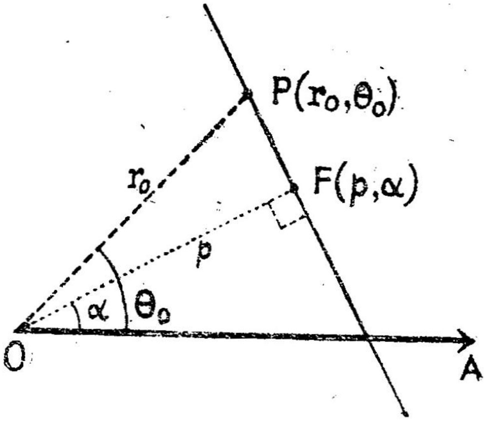
§ 130. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு பொதுவாக

$$\frac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என்று கண்டோம். முனைவிலிருந்து ஒரு நேர்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் அடி $F(p, \alpha)$

என்றால், அந்நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை இப்பொழுது காண்போம் (படம் 69). இதற்காக,



படம் 69.

$P(r_0, \theta_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைக் கோட்டின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியாயின், முக்கோணம் OFP, ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இதில் கோணம் $FOP = \theta_0 -$. ஆகவே,

$$\cos(\theta_0 - \alpha) = \frac{OF}{OP} = \frac{p}{r_0}.$$

அதாவது, $\dfrac{p}{r_0} = \cos(\theta_0 - \alpha)$.

எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{p}{r} = \cos(\theta - \alpha) \qquad \dots \quad (130\cdot1)$$

என்றாகிறது.

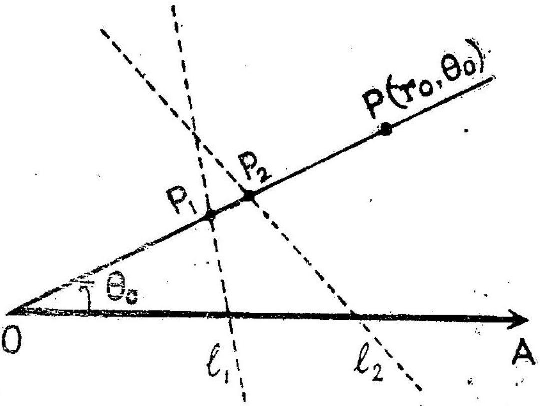
§ 131. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

O என்ற ஓர் நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் சென்றுகொண்டே O-வைப் பொறுத்துச் சுழலும் ஒரு நேர்கோடு, l_1, l_2 என்ற நிலைத்த கோடுகளை P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இச் சுழலும் கோட்டின்மீது P என்ற புள்ளியை

$$\frac{k}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2}$$

என்றிருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டால், P-யின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக (படம் 70).



படம் 70.

O-வை முனைவாகவும். OA என்ற ஏதாவதொரு கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம். இப்பொழுது l_1, l_2 ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{p_1}{r} = \cos(\theta - \alpha_1), \quad \frac{p_2}{r} = \cos(\theta - \alpha_2)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு p_1, α_1 p_2, α_2 என்பன மாறிலிகள்; தற்போது p_1, p_2, p_3 ஆகியவற்றை

(r_1, θ_0), (r_2, θ_0), (r_0, θ_0)

எனக் கொண்டால், P_1, l_1 மேல் உள்ளதால்,

$$\frac{p_1}{r_1} = \cos(\theta_0 - \alpha_1) \quad \ldots (1)$$

என்றும், P_2, l_2 மேல் உள்ளதால்,

$$\frac{p_2}{r_2} = \cos(\theta_0 - \alpha_2) \quad \ldots (2)$$

என்றும், கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையிலிருந்து

$$\frac{k}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \ldots (3)$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. r_1, r_2 ஆகியவை மாறிகள்; ஆகையால் அவைகளை (3) லிருந்து நீக்கவேண்டும். ஆனால், (1) லிருந்தும், (2)-லிருந்தும் கிடைப்பதாவது

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\cos(\theta_0 - \alpha_1)}{p_1}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\cos(\theta_0 - \alpha_2)}{p_2}$$

இவைகளைப் பயன்படுத்தி, (3)- ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{k}{r_0} = \frac{\cos(\theta_0 - \alpha_1)}{p_1} + \frac{\cos(\theta_0 - \alpha_2)}{p_2}.$$

அதாவது, $$\frac{k}{r_0} = \left(\frac{\cos\alpha_1}{p_1} + \frac{\cos\alpha_2}{p_2}\right)\cos\theta_0 + \left(\frac{\sin\alpha_1}{p_1} + \frac{\sin\alpha_2}{p_2}\right)\sin\theta_0.$$

ஆகவே, p-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{k}{r} = \left(\frac{\cos\alpha_1}{p_1} + \frac{\cos\alpha_2}{p_2}\right)\cos\theta + \left(\frac{\sin\alpha_1}{p_1} + \frac{\sin\alpha_2}{p_2}\right)\sin\theta.$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது என்பதை (129·1)-லிருந்து அறியலாம்.

கணக்கு 2.

முனைவிலிருந்து நேர்கோடு

$$\frac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

வுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டின் அடியைக் காண்க.

இங்கு c-ஐ ஒரு மிகை எண் எனக் கொள்வோம். சமன்பாட்டை $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ வகுத்தால்,

$$\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\frac{1}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta$$

என்று கிடைக்கிறது; இப்பொழுது

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \quad \dots (1)$$

என்று கொண்டால், சமன்பாடு

$$\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\frac{1}{r} = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

அல்லது

$$\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\frac{1}{r} = \cos(\theta - \alpha)$$

என்றாகிறது. இதை (130·1) உடன் ஒப்பிடச் செங்கோட்டின் அடி

$$\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \alpha\right)$$

என்று கிடைக்கிறது. இப்பொழுது α-வை (1)-லிருந்து காணலாம்.

§ 132. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $A_1(r_1, \theta_1)$, $A_2(r_2, \theta_2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(உதவிக் குறிப்பு : OA_1A_2 என்ற முக்கோணத்தில் $A_1A_2^2 = OA_1^2 + OA_2^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos A_1OA_2$.)

2. O என்பது முனைவு. A_1, A_2 என்பன, (r_1, θ_1) (r_2, θ_2) என்றால், முக்கோணம் OA_1A_2-ன் பரப்பைக் காண்க.

3. (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), (r_3, θ_3) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{1}{2}\left| r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2) + r_2r_3\sin(\theta_2-\theta_3) + r_3r_1\sin(\theta_3-\theta_1)\right|$$

எனக் காட்டுக.

4. $\frac{p_1}{r} = \cos(\theta - \alpha_1)$, $\frac{p_2}{r} = \cos(\theta - \alpha_2)$ என்ற கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

5. O என்பது ஒரு நிலைத்த புள்ளி, OPQ என்ற முக்கோணம் தனது முக்கோணங்கள் மாறா வண்ணம் மாறுகிறது. P-யின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடென்றால், Q-யின் இயங்குவரையும் ஒரு நேர்கோடாகும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$

2. $\left| \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right|$

4. $| \alpha_1 - \alpha_2 |$

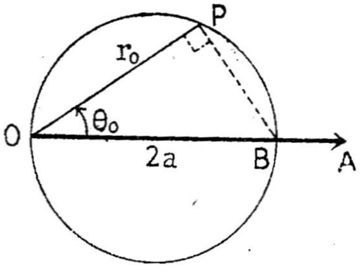
133. ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு

ஒரு வட்டத்தின் மையத்தை முனைவாகக் கொண்டால், வட்டத்தின் மேல் உள்ள எப் புள்ளியின் ஆரைத்திசையியும் வட்டத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமாகும். ஆகவே, வட்டத்தின் மையத்தை முனைவாகக் கொண்டால், வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$r = a$$

என்ற எளிய வடிவில் இருக்கிறது. இங்கு a என்பது வட்டத்தின் ஆரமாகும்.

அடுத்தபடியாக, a-யை ஆரமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை அதன் மேலுள்ள O என்ற புள்ளியை முனை



படம் 71.

வாகவும், O வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு காண்போம் (படம் 71). O வழிச்

செல்லும் விட்டம் OB ஆகட்டும். $P\ (r_0,\ \theta_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை வட்டத்தின்மேல் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\cos BOP = \frac{OP}{OB}.$$

அ-து, $$\cos \theta_0 = \frac{r_0}{2a}.$$

அல்லது, $$r_0 = 2a \cos \theta_0.$$

இதிலிருந்து வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r = 2a \cos \theta \qquad (133 \cdot 1)$$

என்றுகிறது. வட்டத்தின் விட்டத்தின் அளவை d எனக் கொண்டால், இச் சமன்பாட்டை

$$r = d \cos \theta$$

என்றும் எழுதலாம்.

கடைசியாக, $C\ (c,\ \alpha)$-வை மையமாகவும், a-யை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை, வட்டத்தின் மேல், $P\ (r_0,\ \theta_0)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு,

$$CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC \cdot OP \cdot \cos POC$$

என்பதிலிருந்து,

$$r^2 - 2rc \cos (\theta - \alpha) + (c^2 - a^2) = 0 \qquad (133 \cdot 2)$$

என்று அடையலாம்.

§ 134. வட்டத்தின் ஒரு நாணின் சமன்பாடு

இங்கு

$$r = 2a \cos \theta$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் மேலுள்ள $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். (130·1)-லிருந்து நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{p}{r} = \cos (\theta - \alpha)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என அறிகிறோம். இப்பொழுது நாம் p-யின் மதிப்பையும், α-வின் மதிப்பையும் காணவேண்டும்.

இப்பொழுது $(r_1,\ \theta_1)$ உம், $(r_2,\ \theta_2)$-உம் வட்டத்தின் மேலும் நாணின் மேலும் உள்ளன. ஆகவே

$$r_1 = 2a\cos\theta_1$$
$$r_2 = 2a\cos\theta_2$$
$$\frac{p}{r_1} = \cos(\theta_1 - \alpha)$$
$$\frac{p}{r_2} = \cos(\theta_2 - \alpha)$$

என்று கிடைக்கின்றது: இவைகளிலிருந்து, r_1-ஐயும், r_2-ஐயும் நீக்க,

$$\frac{p}{2a\cos\theta_1} = \cos(\theta_1 - \alpha), \qquad (134{\cdot}1)$$

$$\frac{p}{2a\cos\theta_2} = \cos(\theta_2 - \alpha) \qquad (134{\cdot}2)$$

என்றும், மேலும் p-ஐ நீக்க

$2a\cos\theta_1\cos(\theta_1 - \alpha) = 2a\cos_2\ \cos(\theta_2 - \alpha)$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

எனவே, $2\cos\theta_1\cos(\theta_1 - \alpha) = 2\cos\theta_2\cos(\theta_2 - \alpha)$.

அ-து $\cos(2\theta_1 - \alpha) + \cos\alpha = \cos(2\theta_2 - \alpha) + \cos\alpha$.

அ-து, $\cos(2\theta_1 - \alpha) = \cos(2\theta_2 - \alpha)$.

அ-து $2\theta_1 - \alpha = \pm(2\theta_2 - \alpha)$.

அதாவது $\theta_1 = \theta_2$ அல்லது $2(\theta_1 + \theta_2) = 2\alpha$. ஆனல் $\theta_1 \neq \theta_2$

ஆகவே $\alpha = \theta_1 + \theta_2$.

இம் மதிப்பை (134·1)-ல் பிரதியிட்டு α-வை நீக்கினல்,

$$\frac{p}{2a\cos\theta_1} = \cos(\theta_1 - \overline{\theta_1 + \theta_2})$$

அல்லது $p = 2a\cos\theta_1\cos\theta_2$

என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, நாணின் சமன்பாடாகிய

$$\frac{p}{r} = \cos(\theta - \alpha)$$

என்பது, $$\frac{2a\cos\theta_1\cos\theta_2}{r} = \cos\{\theta - (\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (134{\cdot}3)$$

என்றுகிறது.

இச் சமன்பாட்டில் θ_1-க்கும், θ_2-க்கும் α-வைப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{2a\cos\alpha\cos\alpha}{r} = \cos\{\theta - (\alpha + \alpha)\}$$

அல்லது

$$\frac{2a\cos^2\alpha}{r} = \cos(\theta - 2\alpha) \qquad (134 \cdot 4)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடானது, வட்டம் $r = 2a\cos\theta$-வின், α-வை ஆரைக் கோணமாகக் கொண்ட புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டைக் குறிக்கின்றது.

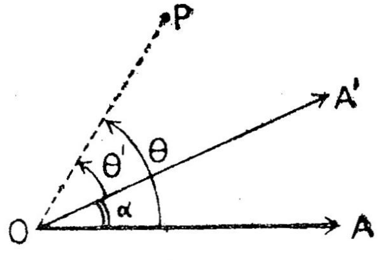
135. தொடக்கக் கோட்டின் சுழற்சி

O என்பது முனைவு. OA என்பது தொடுகோடு. C என்ற ஒரு வளைவின் சமன்பாடு, O-வையும் OA-யையும் பொறுத்து,

$$r = f(\theta)$$

என்றிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

OA-யை, கோணம் α அளவிற்குப் படத்தில் உள்ளவாறு, O-வைப் பொறுத்துச் சுழற்றிக் கிடைக்கும் கோட்டை OA' எனக் குறிப்போம் (படம் 72). இப்பொழுது O-வை முனைவாகவும்,



படம் 72.

OA'-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால், Cயின் சமன்பாடு என்னவாகும் எனப் பார்ப்போம்:

இதற்காக, P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். P-ஆனது

[O-வையும், OA-வையும் பொறுத்து (r, θ) என்றும்],

O-வையும், OA'-ஐயும் பொறுத்து $(r_1\ \theta')$ என்றும் இருக்கிறது எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$A'\hat{O}P = A\hat{O}P + A\hat{O}A'$$

அ-து, $\theta = \theta' + \alpha$.

ஆகவே, C-யின் சமன்பாடு, OA'-ஐப் பொறுத்து,

$$r = f(\theta' + \alpha)$$

என்றிருக்கும் எனத் தெரிகிறது. அதாவது O-வையும் O வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டையும் பொறுத்து, ஒரு வளைவின் சமன்பாடு,

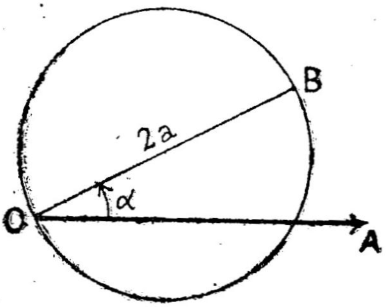
$$r = f(\theta)$$

என்றால், O-வையும், அக்கோட்டை α கோணதூரம் சுழற்றிப் பெறப்படும் கோட்டையும் பொறுத்து, அவ்வளைவின் சமன்பாடு,

$$r = f(\theta + \alpha) \qquad (135.1)$$

என்றிருக்கும்.

உதாரணமாக, O வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் ஒரு பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.



படம் 73.

O வழியாகச் செல்லும் விட்டம் OB எனவும், B ஆனது $(2a, \alpha)$ எனவும் கொள்வோம் (படம் 73). O-வை முனைவாகவும் OB-யை தொடர்கோடாகவும் கொண்டால் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$r = 2a \cos \theta$$

ஆகும். ஆனால் OB-யை $(-\alpha)$ கோணதூரம் சுழற்றினால் OA கிடைக்கிறது. ஆகவே, OA-யைத் தொடக்கக் கோடாகக் கொண்டால் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

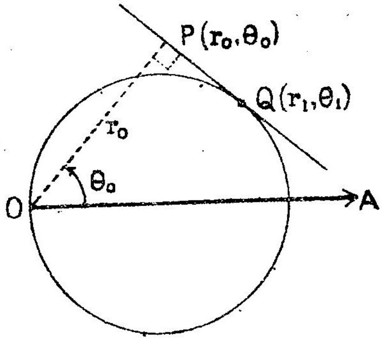
$$r = 2a \cos(\theta - \alpha) \qquad (135.2)$$

ஆகும்.

§ 136. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

Q என்பது, $r = 2a\cos\theta$ குறிக்கும் வட்டத்தின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. P-என்பது முனைவிலிருந்து Q-விடத்துத் தொடு கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி. P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 74).



படம் 74.

P-யை (r_0, θ_0) எனவும், Q-வை (r_1, θ_1) எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின், r_1, θ_1 மாறிகள். இப்பொழுது Q-விடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{2a\cos^2\theta_1}{r} = \cos(\theta - 2\theta_1)$$

என்று (134·4)-லிருந்து அறிகிறோம். $P(r_0, \theta_0)$ என்பது, O-விலிருந்து இத்தொடுகோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடாகையால் (130·1)-லிருந்து இத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{r_0}{r} = \cos(\theta - \theta_0)$$

என்று எழுதலாம். இச் சமன்பாடுகளை ஒப்பிட,

$$r_0 = 2a\cos^2\theta_1, \quad \theta_0 = 2\theta_1$$

என்றும், இவைகளிலிருந்து மாறியான θ_1-ஐ நீக்க,

$$r_0 = 2a\cos^2\frac{\theta_0}{2} = a(1 + \cos\theta_0)$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. இதிலிருந்து, P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$r = a\,(1 + \cos\theta)$$

என்றுகிறது.

கணக்கு 2.

$r = a\cos\theta + b\sin\theta$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

இச் சமன்பாட்டை

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta\right)$$

என்று எழுதலாம்.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha$$

என்று கொண்டால், சமன்பாடு

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha).$$

அல்லது $r = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(\theta - \alpha)$

என்றுகிறது. இச் சமன்பாட்டை (135·2)-உடன் ஒப்பிட, இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது எனத் தெரிகிறது.

கணக்கு 3.

சமன்பாடு, $\dfrac{c}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$ ... (1)

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு $r = 2c\cos\theta$ குறிக்கும் வட்டத்தைத் தொட்டால்,

$$b^2 + 2a = 1$$

எனக் காட்டுக.

தொடுபுள்ளியின் ஆரைக் கோணத்தை α என்று கொண்டால், கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{2c\cos^2\alpha}{r} = \cos(\theta - 2\alpha)$$

என்றும் எழுதலாம். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{2c\cos^2\alpha}{r} = \cos\theta \cdot \cos 2\alpha + \sin\theta \sin 2\alpha.$$

அ-து
$$\frac{c}{r} = \left(\frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos^2\alpha}\right)\cos\theta + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\sin\theta.$$

அ து,
$$\frac{c}{r} = \left(\frac{2-\sec^2\alpha}{2}\right)\cos\theta + \left(\tan\alpha\right)\sin\theta.$$

இதை (1)-உடன் ஒப்பிட,

$$\frac{2-\sec^2\alpha}{2} = a, \quad \tan\alpha = b$$

அல்லது $2 - \sec^2\alpha = 2a$, $\tan\alpha = b$ என்று கிடைக்கிறது. இவைகளிலிருந்து α-வை நீக்க

$$2 - (1 + b^2) = 2a$$

அல்லது, $1 = b^2 + 2a$

என்று கிடைக்கிறது.

§ 137. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடுகள் $r = d_1 \cos(\theta - \alpha_1)$; $r = d_2 \cos(\theta - \alpha_2)$ குறிக்கும் வட்டங்களின் முனைவு வழியாகச் செல்லும் விட்டங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணம்

$$|\alpha_1 - \alpha_2|$$

எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $r = d_1 \cos(\theta - \alpha)$, $r = d_2 \sin(\theta - \alpha)$ குறிக்கும் வட்டங்கள் குத்துவட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

2. கோடுகள் $\theta = 0$ ஐயும் $\theta = \frac{\pi}{2}$ ஐயும் தொடும் வட்டம் ஒன்றின் ஆரம் a என்றால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 = 2ar(\cos\theta + \sin\theta) + a^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[**உதவிக் குறிப்பு :** வட்டத்தின் மையம் C என்றால், C-ஆனது $\left(\sqrt{2}\,a, \frac{\pi}{4}\right)$ ஆகும். $P(x_0, y_0)$ வட்டத்தின்மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால்,

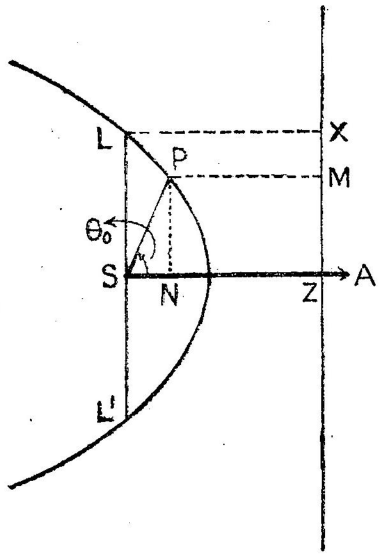
$$CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC.\ OP \cos COP$$

அல்லது, $a^2 = 2a^2 + r_0{}^2 - 2(\sqrt{2}\, a)\, r_0 \cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)$].

3. O, ஒரு நிலைத்த புள்ளி. OPQ என்ற முக்கோணம், தன் கோணங்கள் மாருதவண்ணம் மாறும் முக்கோணம். P-யின் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் என்ருல், Q-வின் இயங்குவரையும் ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக.

§ 138. ஒரு கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

ஒரு கூம்பு வளைவின் குவியத்தை முனைவாகவும் குவியத்திலிருந்து, இக்குவியம் சார்ந்த இயக்குவரைக்கு வரையப்படும் செங்கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால், கூம்பு



படம் 75.

வளைவின் சமன்பாடு மிகவும் எளிதாக இருக்கும் e-ஐத் தொலைத்தகவாகவும், $LL' = l$-ஐச் செவ்வகலமாகவும், S-ஐக் குவியமாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டை இப்பொழுது காண்போம் (படம் 75). இதற்காக, S-லிருந்து SZ என்ற செங்கோட்டை, S சார்ந்த இயக்குவரைக்கு வரைந்து, S-ஐ முனைவாகவும், SZ-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம்.

$P(r_0\ \theta_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை கூம்புவளைவின் மீது எடுத்துக்கொண்டு, PN-ஐ தொடக்கக் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகவும், PM-ஐயும், LXஐயும் இயக்குவரைக்குச் செங்குத்தாகவும் வரைவோம். இப்பொழுது P-யும், L-உம் கூம்புவளைவின் மேலுள்ள புள்ளிகளாகையால்,

$$\frac{SP}{PM}=e,\ \frac{SL}{LX}=e.$$

ஆகவே, $r_0 = SP = ePM$

$$= e(LX - SN)$$

$$= e\left(\frac{SL}{e}\ SP\cos NSP\right)$$

$$= SL - e\,SP\cos NSP$$

$$= 1 - er_0\cos\theta_0.$$

எனவே, $l = r_0 + er_0\cos\theta_0$

அல்லது, $\dfrac{l}{r_0} = 1 + e\cos\theta_0.$

இதிலிருந்து, கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

என்று கிடைக்கிறது.

§ 139. அதிபரவளைவின் மறுகிளையின் (Branch) சமன்பாடு

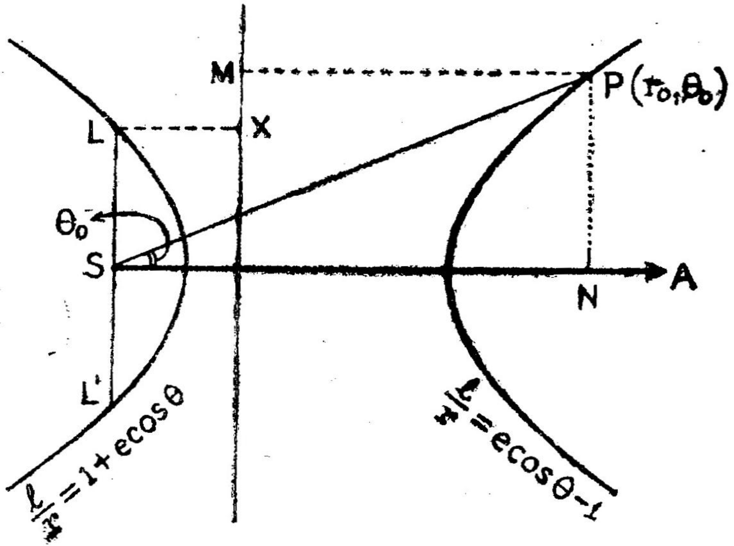
ஓர் அதிபரவளைவுக்கு இரண்டு கிளைகள் உண்டு. அவைகளில் ஒன்று, ஒரு குவியத்திற்கு அண்மையிலும் அடுத்தது, அக் குவியத்திலிருந்து தொலைவிலும் இருக்கின்றது. இக்குவியத்தை முனைவாகவும்: இக்குவியம் சார்ந்த இயக்குவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால், அண்மைக் கிளையின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

ஆகும் என்று § 138-ல் கண்டோம்.

இப்பொழுது இதே முனைவையும், தொடக்கக் கோட்டையும் எடுத்துக் கொண்டு, தொலைவுக்கிளையின் சமன்பாட்டைக்

காண்போம் (படம் 76). $P(r_0, \theta_0)$ என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியைத் தொலைவுக்கிளையின்மீது எடுத்துக்கொண்டு, PM-ஐ



படம் 76.

இயக்குவரைக்குச் செங்குத்தாகவும், PN-ஐத் தொடக்கக் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகவும், LX-ஐ இயக்குவரைக்குச் செங் தாகவும் வரைவோம்; இப்பொழுது,

$$\frac{SP}{PM} = e, \frac{SL}{LX} = e.$$

ஆகவே, $r_0 = SP = e\,PM$

$$= e\,(SN - LX)$$

$$= e\left((SP \cos NSP - \frac{SL}{e}\right)$$

$$= e\left(r_0 \cos \theta_0 - \frac{l}{e}\right)$$

$$= er_0 \cos \theta_0 - l$$

எனவே, $l = r_0 e \cos \theta_0 - r_0$

அல்லது, $\frac{l}{r_0} = e \cos \theta - 1$

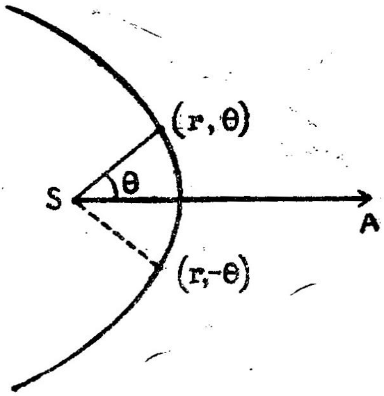
ஆகவே, தொலைவுக் கிளையின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta - 1$$

§ 140. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$

இங்கு சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ... (140.1)

குறிக்கும் கூம்புவளைவின் அமைப்பு பற்றிப் படிப்போம். புள்ளி (l_1, θ_1) என்பது கூம்புவளைவின் மீது ஒரு புள்ளியானால், $(l_1, -\theta_1)$, என்பதும் கூம்புவளைவின்மீது ஒரு புள்ளியாகும் என்பதை $\cos(-\theta) = \cos\theta$ என்பதிலிருந்து எளிதில் காண்கிறோம் (படம் 77). ஆகவே, கூம்புவளைவு, தொடக்கக் கோட்டைப் பொருத்துச் சமச்சீர் உடையது என்று தெரிகிறது.



படம் 77.

$e = 1$ ஆக இருக்கும்போது, அதாவது கூம்புவளைவு ஒரு பரவளைவாக இருக்கும்போது, சமன்பாடு (140·1) ஆனது,

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

என்றுகிறது. ஆகவே, ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அரைக் கோணமாகிய θ-க்குப் பொருத்தமான ஆரைத்திசையின் மதிப்பை

$$r = \frac{l}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

என்று பெறுகிறோம். இதிலிருந்து r-ன் மிகச்சிறிய மதிப்பை $\frac{1}{2} l$ என்று அடைகிறோம். இம் மதிப்பைத் தரும் θ-வின் மதிப்பு பூச்சியம். r-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு முடிவிலி. இதைத் தருவது $\theta = \pi$ என்பதாகும். இதேபோல், θ-ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து $-\pi$-க்குக் குறையும்போது, r-ஆனது $\left(\frac{1}{2} l\right)$-லிருந்து ∞ வரை கூடுகிறது.

ஆனால் $e < 1$ ஆக இருக்கும்போது அதாவது கூம்புவளைவு ஒரு நீள்வளைவாக இருக்கும்போது r-ன் குறைந்த மதிப்பும், கூடிய மதிப்பும்

$$\frac{l}{1+e}, \frac{l}{1-e}$$

என்பதை எளிதில் காணலாம். இம் மதிப்புகளைத் தரும் θ-வின் மதிப்புக்கள் முறையே 0, π ஆகும்.

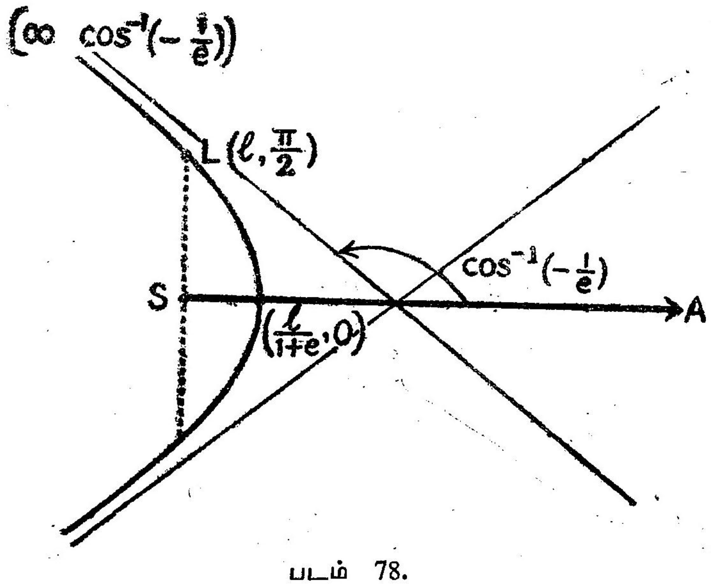
கடைசியாக, $e > 1$ ஆக இருக்கும்போது அதாவது கூம்பு வளைவு ஓர் அதிபரவளைவாக இருக்கும்போது

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$$

குறிக்கும் அண்மைக் கிளை பற்றிப் படிப்போம். இங்கு θ-ஆனது, பூச்சியத்திலிருந்து தொடர்ந்து அதிகரிக்கும்போது, $\cos\theta, 1+e\cos\theta$, $\frac{l}{1+e\cos\theta}$ ஆகியவற்றின் மாற்றங்களில் சிலவற்றைக் கீழ்க் காணுமாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

θ	$\cos\theta$	$1+e\cos\theta$	$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}$	மேற்குறிப்பு
0	1	$1+e$	$\frac{l}{1+e}$	r-ன் மீச் சிறு மதிப்பு
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1+\frac{e}{\sqrt{2}}$	$\frac{l}{1+\frac{e}{\sqrt{2}}}$	
$\frac{\pi}{2}$	0	1	l	
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$	$-\frac{1}{e}$	0	∞	r-ன் மீப் பெரு மதிப்பு
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) < \theta \leq \pi$	$< -\frac{1}{e}$	ஒரு குறை எண்	ஒரு குறை எண்	

இதிலிருந்து, θ ஆனது, பூச்சியத்திலிருந்து, வரிகோணமாகிய $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$ வரை அதிகரிக்கும்போது; $(1+e\cos\theta)$



படம் 78.

ஆனது, $(1 + e)$-விலிருந்து பூச்சியம்வரை குறைகிறது. ஆகவே, r ஆனது

$$\left(\frac{l}{1 + e}\right)\text{-விருந்து } \infty \text{ வரை}$$

அதிகரிக்கிறது. ஆனால் θ ஆனது $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$-ஐத் தாண்டி அதிகரிக்கும்போது $1 + e$ ocs θ ஒரு குறை எண் ஆகிறது. ஆகவே r-உம் ஒரு குறை எண்ணாகிறது (படம் 78).

எனவே, அதிபரவளைவின் இக்கிளையின் ஒரு பாதியின்மீதுள்ள புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணமாகிய θ ஆனது

$$o \leq \theta \leq \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

என்றிருக்கும். கிளையின் அடுத்த பாதியையும் சேர்த்துக் கொண்டால் புள்ளியின் ஆரைக் கோணமாகிய θ ஆனது,

$$-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) \leq \theta \leq \cos\theta^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

என்றிருக்கும்.

இங்கு $-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$, $+\cos^{-\theta}\left(-\frac{1}{e}\right)$ ஆகியவற்றை ஆரைக் கோணங்களாகக் கொண்ட புள்ளிடத்துத் தொடுகோடுகள், அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகளாகின்றன என்றும் தெரிகின்றது.

மேற்கண்டதுபோல், தொலைவுக் கிளையின் புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணம் θ

$$-\cos^{-1}\left(+\frac{1}{e}\right) \leq \theta \leq \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$$

என்றிருக்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம். இக் கோணம் எப்பொழுதும் ஓர் குறுங்கோணமாகவே இருக்கிறது.

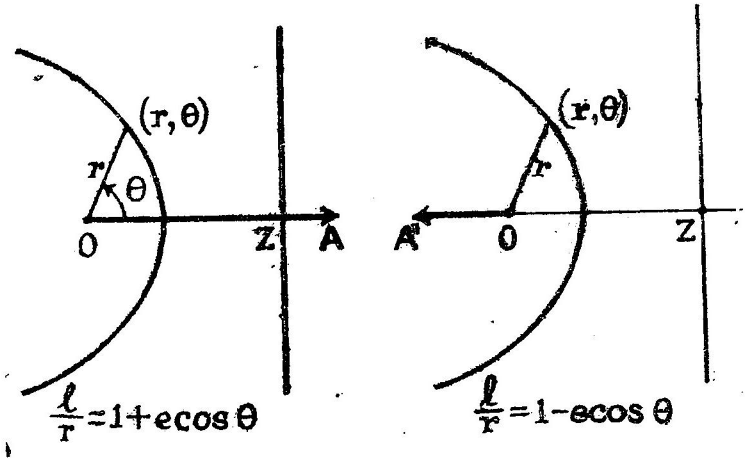
§ 141 சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$

ஒரு கூம்பு வளைவின் ஒரு குவியத்தை முனைவு O-ஆகவும் முனைவிலிருந்து, இந்தக் குவியம் சார்ந்த இயக்குவரைக்கு வரையப்

பட்ட செங்குத்துக்கோடு OZ-ஐத்தொடக்கக் கோடு OA- ஆகவும் கொண்டால் கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

என்றிருக்கும் என்று கண்டோம் (படம் 79). இப்பொழுது OA-வுக்குப் பதிலாகOA-வை π கோணதூரம் சுழற்றிக் கிடைக்கும் OA கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகக் கொண்டால், கூம்பு வடிவின் சமன்பாடு,



படம் 79.

$$\frac{l}{r} = e \cos\theta \; (\theta + \pi)$$

அல்லது, $\dfrac{l}{r} = 1 - e \cos\theta$

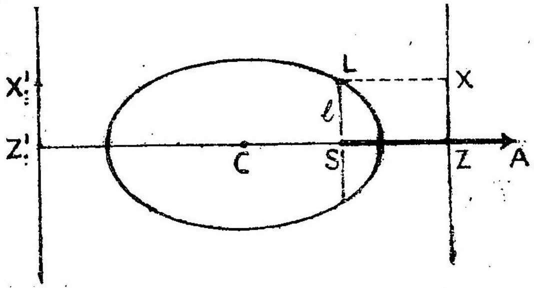
§ 142. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1.

சமன்பாடு $\dfrac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ குறிக்கும் நீள்வளைவின் இயக்கு வரைகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

முனைவாகவுள்ள குவியத்தை S என்றும், S சார்ந்த இயக்கு வரையைப், படம் 80-ல் உள்ளவாறு, ZX என்றும், அடுத்த

இயக்குவரையை $Z'X'$ என்றும் குறிப்போம். மேலும் நீள்வளை வின் அரைப் பேரச்சையும், அரைச் சிற்றச்சையும், a, b எனவும் கொள்வோம்.



படம் 80.

SZ-ஆனது, ZS-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு. $Z(SZ, 0)$ என்ற புள்ளி, அதன் அடி. ஆகவே ZX-ன் சமன் பாடு,

$$\frac{SZ}{r} = \cos(\theta - 0)$$

ஆகும். ஆனல்,

$$\frac{SL}{LX} = e.$$

அதாவது, $SL = e\,LX = e\,SZ$

ஆகவே, $SZ = \dfrac{SL}{e} = \dfrac{l}{e}$.

எனவே, ZX-ன் சமன்பாடு,

$$\left(\frac{\frac{l}{e}}{r}\right) = \cos\theta$$

அல்லது, $$\frac{l}{r} = e\cos\theta$$

ஆகிறது, ஆனல், Z' ஆனது, (SZ, π) ஆகும். ஆகவே ZX'-ன்சமன்பாடு,

$$\frac{SZ'}{r} = \cos(\theta - \pi)$$

ஆகும். ஆனால்,

$$SZ' = CS + CZ' = ae + \frac{a}{e}$$

$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) a$$

$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) \left(\frac{b^2}{a}\right) \left(\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) l \left(\frac{1}{1 - e^2}\right)$$

$$= \frac{l(1 + e^2)}{e(1 - e^2)}$$

ஆகவே, SZ-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{l(1 + e^2)}{e(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r} = \cos(\theta - \pi)$$

அல்லது,
$$\frac{l(e^2 + 1)}{e(e^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r} = \cos\theta$$

ஆகிறது.

கணக்கு 2.

S-ஐக் குவியமாகவும், e-ஐ அரைச் செவ்வகலமாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்புவளைவில், $P_1 P_2$ என்பது, ஒரு குவிய நாண் என்றால்,

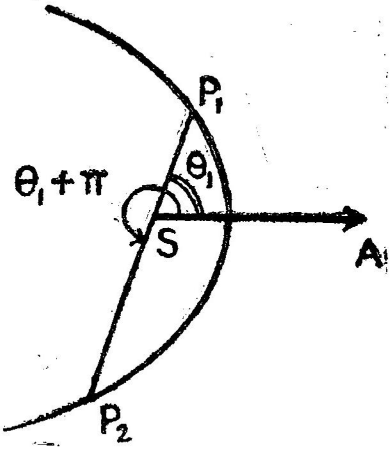
$$\frac{1}{SP_1} + \frac{1}{SP_2} = \frac{2}{l}$$

எனக் காட்டுக (படம் 81).

S-ஐ முனைவாகவும், S-லிருந்து S-சார்ந்த இயங்குவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால், கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

ஆகும். இப்பொழுது P_1-ஐ (SP_1, θ_1) எனக் கொண்டால், P_2-ஆனது $(SP_2, \theta_1 + \pi)$ ஆகும். P_1 -உம், P_2-உம் கூம்பு வளைவின்மேல் உள்ளதால்,



படம் 81.

$$\frac{l}{SP_1} = 1 + \cos\theta_1 , \quad \frac{l}{SP_2} = 1 + \cos(\theta_1 + \pi)$$

ஆகவே, $$\frac{l}{SP_1} + \frac{l}{SP_2} = 1 + \cos\theta_1 + 1 + \cos(\theta_1 + \pi)$$
$$= 1 + \cos\theta_1 + 1 - \cos\theta_1$$
$$= 2.$$

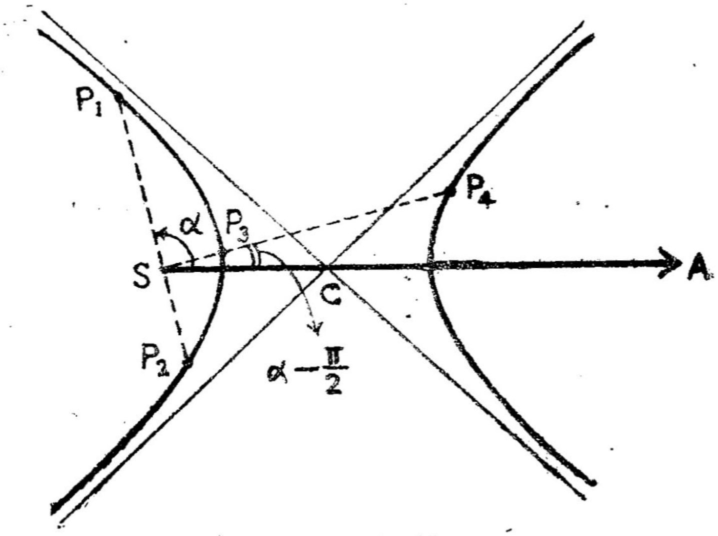
எனவே, $$\frac{1}{SP_1} + \frac{1}{SP_2} = \frac{2}{l}.$$

கணக்கு 3.

ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவில் இரண்டு செங்குத்தான குவிய நாண்கள், சமமான நீளங்களை உடையன எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் ஒரு குவியமாகிய S-ஐ முனையாகவும், முனையிலிருந்து முனைவு சார்ந்த இயக்குவரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டைத் தொடுகோடாகவும் கொள்வோம் (படம் 82.) P_1P_2, P_3P_4 என்பன அதிபரவளைவின் செங்குத் தான நாண்கள். இவைகள் S-வழியாகச் செல்லுகின்றன.

இவைகளில் ஒன்றின் முனைகளாகிய P_1, P_2 என்பன, S-க்கு அண்மையிலுள்ள கிளையின் மேல் அமைந்தால், அடுத்ததின் முனைகளாகிய P_3, P_4 என்பவற்றில் ஒன்று அண்மைக்கிளை மீதும், மற்றது தொலைவுக் கிளை மீதும் அமையும். குறிப்பாக, P_3 ஆனது அண்மைக் கிளை மீது அமைகிறது எனக் கொள்வோம்.



படம் 82

இப்பொழுது P_1-ன் ஆரைக்கோணத்தை α எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், P_2, P_3, P_4 ஆகியவற்றுன் ஆரைக் கோணங்கள்.

$$\alpha + \pi,\ \alpha - \frac{\pi}{2},\ \alpha - \frac{\pi}{2}$$

ஆகும். ஆனல் அண்மைக்கிளையின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

ஆகும். இக்கிளையின்மீது P_1, P_2, P_3 அமைவதால்,

$$\frac{l}{SP_1} = 1 + e\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\frac{l}{SP_2} = 1 + e\cos(\alpha + \pi), \qquad (2)$$

$$\frac{l}{SP_3} = 1 + e\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3)$$

ஆனால் தொலைவுக் கிளையின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta - 1$$

ஆகும். P_4 ஆனது, தொலைவுக் கிளையின் மீதுள்ள புள்ளி யாகையால்,

$$\frac{l}{SP_4} = e\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 1. \qquad (4)$$

அதிபரவளையின் தொலைத் தகவு $\sqrt{2}$. இதையும் (1) - ஐயும், (2)-ஐயும் பயன்படுத்தி, முதலில் நாண் $P_1 P_2$-இன் நீளத்தைக் காண்போம்.

$$P_1 P_2 = SP_1 + SP_2$$

$$= \frac{l}{1 + e\cos\alpha} + \frac{l}{1 + e\cos(\alpha+\pi)}$$

$$= l\left(\frac{1}{1 + e\cos\alpha} + \frac{1}{1 - e\cos\alpha}\right)$$

$$= l\left(\frac{1 - e\cos\alpha + 1 + e\cos\alpha}{1 - e^2\cos^2\alpha}\right.$$

$$= \frac{2l}{1 - e^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2l}{1 - 2\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

அடுத்தபடியாக, $P_3 P_4$-இன் நீளத்தைக் காண்போம்.

$$P_3 P_4 = SP_4 - SP_3$$

$$= \frac{l}{e\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 1} - \frac{l}{e\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 1}$$

$$= l\left(\frac{1}{e\sin\alpha - 1} - \frac{1}{e\sin\alpha + 1}\right)$$

$$= l \left(\frac{e \sin \alpha + 1 - e \sin \alpha + 1}{e^2 \sin^2 \alpha - 1} \right)$$

$$= \frac{2l}{e^2 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$= \frac{2l}{2 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$= \frac{2l}{2(1 - \cos^2 \alpha) - 1}$$

$$= \frac{2l}{1 - 2\cos^2 \alpha} \qquad (6)$$

(5) - லிருந்தும், (6) - லிருந்தும் $P_1 P_2 = P_3 P_4$ எனக் கிடைக்கின்றது,

§ 143. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ குறிக்கும் பரவளைவின் இயக்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. ஒரு அதிபரவளைவின் ஒரு கிளையின் சமன்பாடு $\frac{6}{r} = 1 + 4\cos.$ $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ஆனது [இக் கிளையின் மேல் அமைகிறது என்றும், $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ ஆனது அடுத்த கிளையின் மேல் அமைகிறது என்றும் காட்டுக.]

3. ஒரு அதிபரவளைவின் ஒரு கிளையின்சமன்பாடு $\frac{12}{r} = 1 + 6\cos\theta$ என்றால், $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ என்ற புள்ளிகள் அதிபரவளைவின் வெவ்வேறு கிளைகளில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

4. ஒரு கூம்புவளைவின் S என்ற ஒருடிவியம் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று கூம்புவளைவை P_1, P_2, P_3, P_4 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. கூம்புவளைவின் செவ்வகலம் $2l$ என்றால்,

$$\frac{1}{SP_1} + \frac{1}{SP_2} + \frac{1}{SP_3} + \frac{1}{SP_4} = \frac{2}{l}$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக்குறிப்பு : கூம்புவளேவின் சமன்பாட்டையும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta, r=d\cos(\theta-\alpha)$ எனக்கொள்க. இவற்றிலிருந்து θ-வை நீக்கி r-ல் ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்க. இப்பொழுது,

$$r=d(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$

அல்லது, $(r-d\cos\theta\cos\alpha)^2=d^2\sin^2\theta\sin^2\alpha$

அல்லது, $(r-d\cos\alpha\cos\theta)^2=d^2(1-\cos^2\theta)\sin^2\alpha$

இதில் $\cos\theta=\frac{1}{e}\left(\frac{l}{r}-1\right)$ என்ற பிரதியிட்டால், r-ல் ஒரு நான்குபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் r_1, r_2, r_3, r_4 என்றால்,

$$r_2, r_3, r_4, +r_1, r_3, r_4+r_1, r_2 r_4+r_1, r_2, r_3$$

-இன் பதிப்பைக் கண்டு, அதை r_1, r_2, r_3, r_4-ன் மதிப்பால் வகுக்க வேண்டும்.]

5. $2l$-ஐச் செவ்வகலமாகக் கொண்ட ஒருநீள்வளேவின் P_1P_2 என்ற நாண், S என்ற குவியத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது என்றால்,

$$\left(\frac{1}{SP_2}-\frac{1}{l}\right)^2+\left(\frac{1}{SP_2}-\frac{1}{r}\right)^2=\frac{e^2}{P^2}$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக்குறிப்பு : நீள்வளேவின் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$$

என்றும், P_1-ஐ (SP_1, α) என்றும், P_2-ஐ $\left(SP_2, \alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ என்றும் சொண்டால்,

$$\frac{l}{SP_2}=1+e\cos\theta, \quad \frac{l}{SP_2}=1+e\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

அல்லது, $\frac{1}{SP_1}-\frac{1}{l}=\frac{e}{l}\cos\theta, \frac{l}{SP_2}-\frac{1}{l}$

$$=-\frac{e}{l}\sin\theta.]$$

6. S-ஐக் குவியமாகவும் $2l$-ஐச் செவ்வகலமாகவும், e-ஐத் தொலைத்தகவாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்புவளைவின் குவிய நாண்களாகிய $P_1 SP_2$-உம், $P_3 SP_4$-உம் செங்குத்தானவையாய் உள்ளன. குறிப்பாக, கூம்புவளைவு ஒரு அதிபரவளைவானால், P_1, P_2, P_3, P_4 என்பன அண்மைக்கிளையில் அமைந்துள்ளன. அப்படியாயின் கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவுக :

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{SP_1 \cdot SP_2} + \frac{1}{SP_3 \cdot SP_4} = \frac{2 - e^2}{l^2}.$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_3P_4} = \frac{2 - e^2}{2l}.$$

7. S-ஐக் குவியமாகவும், $2l$-ஐச் செவ்வகலமாகவும் e-ஐத் தொலைத்தகவாகவும் கொண்டஒரு அதிபரவளைவின் நாண்களாகிய $P_1 SP_2$-ம், S_3SP_4-ம் செங்குத்தானவையாய் உள்ளன. P_1, P_3, P_4 என்பன அண்மைக்கிளையும் அமைந்து, P_2 என்பது, தொலைவுக்கிளையில் அமைந்தால், கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவுக :

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{SP_1 \cdot SP_2} - \frac{1}{SP_3 \cdot SP_4} = \frac{e^2}{c^2 - 2},$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{P_1P_2} - \frac{1}{P_3P_4} = \frac{e^2 - l_2}{2l}.$$

விடைகள்

1. $\frac{l}{r} = \cos\theta.$

§ 144. ஒரு கூம்புவளைவின் நாணின் சமன்பாடு.

இங்கு சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவின் மேலுள்ள புள்ளிகள்,

$$P_1\,(r_1, \alpha - \beta)\,;\; P_2\,(r_2, \alpha + \beta)$$

ஆகியவற்றை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$$

எனக் கொள்வோம். P_1-உம், P_2-உம் கூம்புவளைளின் மேலும், நாணின் மேலும் உள்ளதால்,

$$\frac{l}{r_1} = 1 + e\cos(\alpha - \beta), \tag{144·1}$$

$$\frac{l}{r_2} = 1 + e\cos(\alpha + \beta), \tag{144·2}$$

$$\frac{l}{r_1} = A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta), \tag{144·3}$$

$$\frac{l}{r_2} = A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha + \beta). \tag{144·4}$$

இப்பொழுது, (144·3) — (144·1) கொடுப்பதாவது :

$$A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha-\beta) - e\cos(\alpha - \beta) - 1 = 0.$$

அதாவது, $(A-e)\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha-\beta) = 1.$ (144·5)

இதேபோல் (144·4) — (144·2)-லிருந்து கிடைப்பதாவது :

$$(A-e)\cos(\alpha+\beta) + B\sin(\alpha+\beta) = 1. \tag{144·6}$$

(144·5)-ஐயும், (144·6)-ஐயும் $(A - e)$-க்கும் B-க்கும் விடுவிக்க,

$$A - e = \cos\alpha\sec\beta,$$
$$B = \sin\alpha\sec\beta$$

அல்லது,

$$A = e + \cos\alpha\sec\beta,$$
$$B = \sin\alpha\sec\beta$$

என்றும், இதனுல் நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = (e + \cos\alpha\sec\beta)\cos\theta + \sin\alpha\sec\beta\sin\theta$$

அல்லது, $$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta(\cos\theta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\theta)$$

அல்லது, $$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha) \tag{144·7}$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

§ **145. தொடுகோட்டின் சமன்பாடு** § **144**-ல் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவின் மீது P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டு, நாணின் $P_1 P_2$-இன் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha)$$

என்று கண்டோம். இதில் $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ என்பன, P_1, P_2 ஆகியவற்றின் ஆரைக்கோணங்கள். இவ்வாரைக் கோணங்களின் மதிப்புகளில், β-ஆனது, படிப்படியாகக் குறைந்து, முடிவில் பூச்சியத்திற்குச் சமமானால், P_1-உம், P_2-உம், α-வை ஆரைக்கோணமாக உடைய P என்ற புள்ளியுடன் இணைகின்றன. இந்நிலையில் நாண் P_1P_2- ஆனது, P-யிடத்துத் தொடு கோடாகிறது. ஆகவே, P-யிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டை

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha)$$

-வில், β-வுக்குப் பதிலாக பூச்சியத்தைப் பிரதியிட்டு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \qquad (145 \cdot 1)$$

என்று அடைகிறோம். அதாவது இச் சமன்படானது, $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ குறிக்கும் கூம்புவளைவின், α-வை ஆரைக் கோணமாகவுடைய புள்ளி P-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன் பாடாகும். மேலும், மேற்கண்டவற்றில் எல்லா இடங்களிலும் e-க்குப் பதிலாக $-e$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவின், α-வை ஆரைக்கோணமாகக் கொண்ட புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = - e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha)$$

என்று கிடைக்கும்.

§ 146. செங்கோட்டின் சமன்பாடு

இங்கு சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவின், α-வை ஆரைக்கோணமாகக் கொண்ட புள்ளியாகிய $P(r_1, \alpha)$-இடத்துச் செங்கோட்டைக் காண்போம். இப் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)$$

ஆகும். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

அல்லது, $$\frac{l}{r} = (e + \cos \alpha) \cos \theta + (\sin \alpha) \sin \theta.$$

இதிலிருந்தும், (129·2)-லிருந்தும், P-யிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{k}{r} = (\sin \alpha) \cos \theta - (e + \cos \alpha) \sin \theta \quad (146{\cdot}1)$$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது k-யின் மதிப்பைக்காண முயல்வோம். $P(r_1, \alpha)$ ஆனது, கூம்புவளைவின்மீதும், செங்கோட்டின்மீதும் உள்ள புள்ளி. ஆகவே,

$$\frac{l}{r_1} = 1 + e \cos \alpha;$$

$$\frac{k}{r_1} = (\sin \alpha) \cos \alpha - (e + \cos \alpha) \sin \alpha$$

அல்லது $$\frac{k}{r_1} = -e \sin \alpha.$$

அதாவது, $$k = -r_1 (e \sin \alpha)$$

$$= \frac{l}{1 + e \cos \alpha} (-e \sin \alpha)$$

ஆகவே, (146·1) லிருந்து, α-வை ஆரைக்கோணமாகக் கொண்ட புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{-le \sin \alpha}{1+e\cos\alpha}\right)\frac{1}{r}=\sin\alpha\cos\theta-(e+\cos\alpha)\sin\theta$$

அல்லது $$\left(\frac{le \sin \alpha}{1+e\cos\alpha}\right)\frac{1}{r}=e\sin\theta+(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)$$

அல்லது $$\left(\frac{le \sin \alpha}{1+e\cos\alpha}\right)\frac{1}{r}=e\sin\theta+\sin(\theta-\alpha) \quad (144\cdot2)$$

என்று அடைகிறோம்.

§ 147. தொலைத்தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

இங்கு சமன்பாடு

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம். தொலைத்தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்கள்

$$-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right),\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

என்று § 140-ல் கண்டோம். ஆனால் ஆரைக்கோணத்தை α-வாகக் கொண்ட புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$$

என்று அறிவோம். இதை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha.$$

அதாவது $$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\left(\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right)$$

ஆகவே, தொலைத்தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை, இதில்

$$\alpha=-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right),\ \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

என்று பிரதியிட்டு, அதாவது

$$\cos \alpha = -\frac{1}{e}$$

என்று பிரதியிட்டு,

$$\frac{l}{e} = e \cos \theta + \left(-\frac{1}{e}\right) \cos \theta + \sin \theta \left(\pm \sqrt{1-\frac{1}{e_2}}\right)$$

அல்லது $$\frac{l}{r} = \left(e - \frac{1}{e}\right) \cos \theta \pm \sqrt{\frac{e^2-1}{e^2}} \sin \theta$$

என்று அடைகிறோம்.

§ 148. மாதிரிக் கணக்குகள்

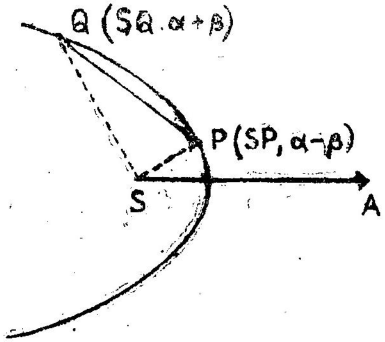
கணக்கு 1.

ஒரு கூம்புவளைவின் நாண் ஒன்று, குவியம் S-இடத்து ஒரு மாறுத கோணத்தைத் தாங்கிக் கொண்டே நகருகிறது. இந் நாண், S-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவைத் தொட்டுக் கொண்டே செல்லுகிறது எனக் காட்டுக.

குவியத்தை முனைவாகவும், குவியத்திலிருந்து இயக்கு வரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால், கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

என்றிருக்கும் என அறிவோம்.



படம் 83.

இப்பொழுது நாணை PQ என்றும், P-யின் ஆரைக்கோணத்தை $\alpha-\beta$ என்றும், Q-வின் ஆரைக் கோணத்தை $\alpha+\beta$ என்றும் கொள்வோம் (படம் 83). அப்படியாயின்,

$$\underline{|PSQ} = ASQ - ASP$$
$$= (\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)$$
$$= 2\beta$$

ஆகவே, 2β ஒரு மாறிலி. எனவே, $\cos\beta$-வும் ஒரு மாறிலி. இம் மாறிலியைக் k எனக் குறிப்போம். இப்பொழுது PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta-\alpha).$$

அதாவது, $$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \frac{1}{k}\cos(\theta-\alpha).$$

அதாவது $$\frac{lk}{r} = (ek)\cos\theta + \cos(\theta-\alpha).$$

இச் சமன்பாட்டை சமன்பாடு (145·1)-உடன் ஒப்பிட்டால், இச்சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு

$$\frac{lk}{r} = 1 + (ek)\cos\theta$$

வைத் தொடும் தொடுகோடு ஒன்றைக் குறிக்கிறது எனக் கிடைக்கிறது.

S-ஆனது இக் கூம்பு வளைவின் குவியம் என்று எளிதில் தெரிகிறது. மேலும்,

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta$$

ஆகையால், சமன்பாடு

$$\frac{lk}{r} = 1 + ek\cos\theta$$

குறிக்கும் கூம்புவளைவின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு,

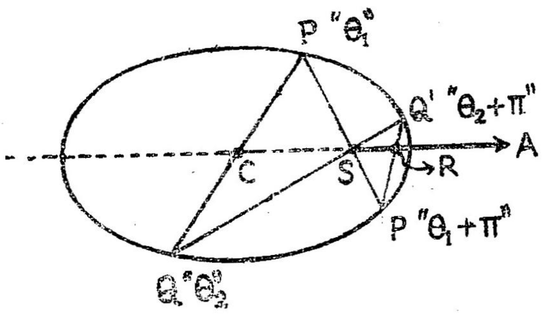
$$\frac{lk}{r} = ek\cos\theta$$

அல்லது $$\frac{l}{r} = e\cos\theta$$

என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து இரண்டு கூம்பு வளைவுகளும் ஒரே கோட்டை இயக்குவரையாகக் கொண்டுள்ளன என்றும் தெரிகிறது.

கணக்கு 2.

PSP′, *QSQ′* என்பன ஒரு நீள்வளைவின் இரண்டு குவிய நாண்கள், *PQ* ஆனது, நீள்வளைவின் ஒரு விட்டமானல், நாண் *P′Q′* ஆனது, நீள்வளைவின் பேரச்சின் நிலைத்த புள்ளி ஒன்றின் வழியாகச் செல்லுகின்றது எனக் காட்டுக



படம் 84

P,*Q* *P*,*Q* ஆகிய புள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்களை

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_1+\pi,\ \theta_2+\pi$$

எனக் கொள்வோம் (படம் 84). இப்பொழுது,

$$\theta_1 = \alpha - \beta.$$
$$\theta_2 = \alpha + \beta.$$

என்று கொண்டால், $\alpha = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$, $\beta = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ ஆகும்.

மேலும், *PQ*-வின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta-\alpha)$$ ஆகும்.

அதாவது,

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

ஆகும். இதுபோலவே PQ ன் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \cos\left\{\theta - \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi\right)\right\}$$

அல்லது $\frac{l}{r} = e\cos\theta - \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \cos\left(- \frac{(\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

என்று அடையலாம். இப்பொழுது நீள்வளையின் மையம் $C(ae, \pi)$ ஆகும் இது PQ மேல் அமைந்துள்ளதால்,

$$\frac{l}{ae} = e\cos\pi + \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

அதாவது, $\frac{l}{ae} = -e \quad \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. ... 1)

அடுத்தபடியாக, $P'Q$ ஆனது, பேரச்சை R-ல் வெட்டட்டும். இப்பொழுது R ஆனது, (SR, O) என்றிருக்கும். R, $P'Q'$ மேலுள்ளதால்,

$$\frac{l}{SR} = e\cos O - \sec\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\cos\left(O, -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

அல்லது $\frac{l}{SR} = e - \sec\frac{\theta_1 \quad \theta_2}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

ஆகும். இங்கு (1)-ஐப் பயன்படுத்திஞல்,

$$\frac{l}{SR} = e + \left(\frac{l}{ae} + e\right)$$

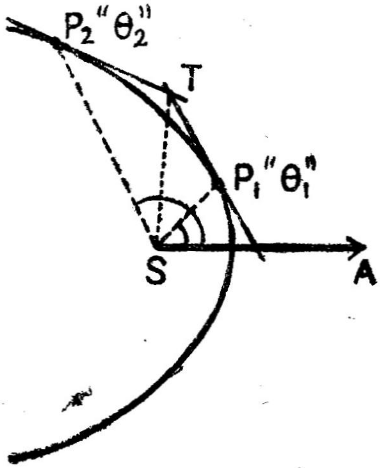
$$= 2e + \frac{l}{ae}$$

என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து, SR ஒரு மாறிலி என்றும், ஆகவே, R ஒரு நிலைத்த புள்ளி என்றும் கிடைக்கிறது.

கணக்கு 3.

ஒரு கூம்புவளைவில் P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் T-ல் சந்திக்கின்றன. S என்பது குவியமானால், ST ஆனது, கோணம் $P_1 S P_2$ ன் சமவெட்டி எனக் காட்டுக.

(கூம்புவளைவு ஒரு அதிபரவளைவானால், P_1, P_2 இரண்டும் ஒரே கிளையில் உள்ளதாகக் கொள்.)



படம் 85.

கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

என்றிருக்குமாறு முனைவையும், தொடுகோட்டையும் எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது P_1, P_2 ஆகியவற்றின் ஆரைக் கோணங்கள் θ_1, θ_2 என்றால், இப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு களின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \theta_1),$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \theta_2)$$

ஆகும். இவைகளை θ-வுக்கு விடுவித்தால், வெட்டுப் புள்ளியின் ஆரைக்கோணம் கிடைக்கும். இச் சமன்பாடுகளில் ஒன்றி லிருந்து ஒன்றைக் கழிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\cos(\theta - \theta_1) = \cos(\theta - \theta_2)$$

அதாவது, $\theta - \theta_1 = \pm(\theta - \theta_2)$.

அதாவது, $\theta = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

ஆகவே, T-யின் ஆரைக்கோணம் $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ ஆகும். இப் பொழுது,

$$P_1\hat{S}T = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \theta_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2},$$

$$P_2\hat{S}T = \theta_2 - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

என்று கிடைக்கின்றது.

இதிலிருந்து, P_1ST ஆனது கோணம் $P_2\,ST$-க்குச் சமம் என்பதைக் காணலாம். ஆகவே, ST ஆனது கோணம் $P_1\,S\,P_2$-ன் சமவெட்டியாகிறது.

கணக்கு 4.

நேர்கோடு $\dfrac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$

ஆனது, கூம்பு வளைவு $\dfrac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$-வைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

தொடுபுள்ளியின் ஆரைக்கோணத்தை α எனக் கொண்டால், கோட்டின் சமன்பாடாவது :

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta + \alpha)$$

அதாவது, $\dfrac{l}{r} = e\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$.

அதாவது, $\dfrac{l}{r} = (e + \cos\alpha)\cos\theta + (\sin\alpha)\sin\theta$.

இதைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு வேண்டிய நிபந்தனையைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம் :

$$1 = \frac{e + \cos \alpha}{A} = \frac{\sin \alpha}{B}.$$

அதாவது, $e + \cos \alpha + A, \ \sin \alpha = B\cdot$

அதாவது, $\cos \alpha = A - e, \ \sin \alpha = B.$

அதாவது, $(A - e)^2 + B^2 = 1.$

கணக்கு 5.

புள்ளி $P(r_1, \theta_1)$-லிருந்து கூம்பு வளைவு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \qquad \dots \quad (1)$$

-க்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தொடுபுள்ளிகளை Q, R என்றும் அவைகளின் ஆரைக் கோணங்களை $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ என்றும் கொள்வோம் (படம் 86). அப்படியாயின், தொடுநாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha) \qquad \dots \quad (2)$$

ஆகும். இதில் r_1-ஐயும், θ_2-ஐயும் புகுத்தி, α-வையும், β-வையும் நீக்கவேண்டும். இப்பொழுது, θ-இடத்துத் தொடு காட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \left(\theta - \overline{\alpha - \beta}\right)$$

ஆகும். இத் தொடுகோடு, $P(r_1, \theta_1)$ வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha + \beta) \qquad \dots \quad (3)$$

இதேபோல், R-இடத்துத் தொடுகோட்டிலிருந்து

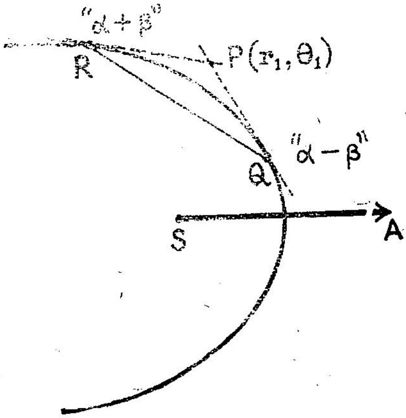
$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 - \alpha - \beta) \qquad \dots \quad (4)$$

என்று பெறுகிறோம். இப்பொழுது (3) — (4) கொடுப்பதாவது :

$$\cos (\theta_1 - \alpha + \beta) = \cos (\theta_1 - \alpha - \beta)$$

அல்லது $\theta_1 - \alpha + \beta = \pm(\theta_1 - \alpha - \beta)$

அல்லது $\theta_1 - \alpha + \beta = -(\theta_1 - \alpha - \beta)$



படம் 86.

அல்லது $2\theta_1 = 2\alpha$

அல்லது $\alpha = \theta_1$

α-வின் இம் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பதாவது:

$$\frac{l}{r_1} = e \cos \theta_1 + \cos \beta.$$

அதாவது, $\cos \beta = \frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1.$

இதைப் பயன்படுத்தி (2)-லிருந்து $\sec \beta$-வை நீக்கி, பின் α-க்கு θ_1-ஐப் பிரதியிட, தொடுநாணின் சமன்பாடு

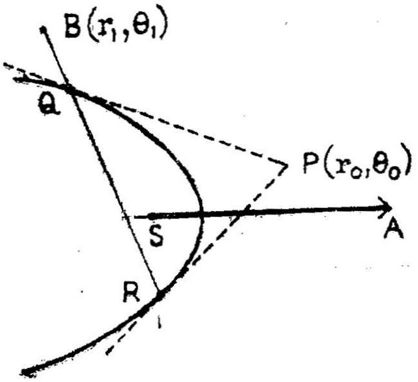
$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \frac{1}{\left(\frac{l}{r_1} - e \cos \theta_1\right)} \cos (\theta - \theta_1)$$

அல்லது $$\left(\frac{l}{r} - e \cos \theta\right) \left(\frac{l}{r_1} \; e \cos \theta_1\right) = \cos (\theta - \theta_1)$$

என்று கிடைக்கிறது.

கணக்கு 6.

புள்ளி $B(r_1, \theta_1)$-ன், கூம்பு வளைவு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ சார்ந்த, இசைக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம் 87.

B வழியாகச் செல்லும் QR என்ற நாணை எடுத்துக்கொள்வோம். Q-யிடத்துத் தொடுகோடும், R-யிடத்துத் தொடுகோடும் $P(r_0, \theta_0)$-ல் வெட்டட்டும் (படம் 87). இப்பொழுது P-யின் இயங்குவரை B-யின் இசைக்கோடாகும்.

இப்பொழுது QR ஆனது, P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுநாணாகும். ஆகவே, இதன் சமன்பாடு

$$\left(\frac{l}{r} - \cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_0} - e\cos\theta_0\right) = \cos(\theta - \theta_0)$$

ஆகும். இந் நாண் $B(r_1, \theta_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$\left(\frac{l}{r_1} - \cos\theta_1\right)\left(\frac{l}{r_0} - e\cos\theta_0\right) = \cos(\theta_1 - \theta_0)$$

ஆதலால், P-யின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{l}{r_1} - \cos\theta_1\right)\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) = \cos(\theta_1 - \theta)$$

அல்லது $$\left(\frac{l}{r_1} - \cos\theta_1\right)\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) = \cos(\theta - \theta_1)$$

என்றாகிறது.

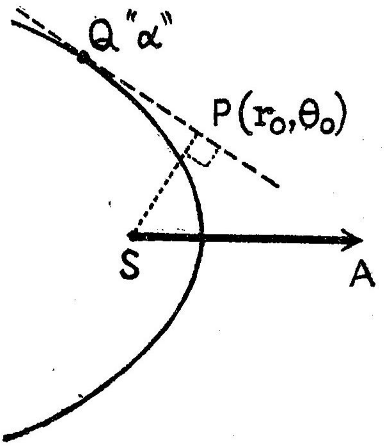
கணக்கு 7.

ஒரு கூம்புவளைவின் மாறும் தொடுகோடு ஒன்றுக்கு, ஒரு குவியத்திலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

குவியம் S-ஐ முனைவாகக் கொண்டு கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

என்று கொள்வோம் (படம் 88). α-வை ஆரைக்கோணமாகக் கொண்ட Q என்ற புள்ளியைக் கூம்புவளைவின்மீது எடுத்துக்



படம் 88.

கொள்வோம். அப்படியாயின், Q-விடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \qquad \dots \quad (1)$$

ஆகும். அதாவது,

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

அல்லது $$\frac{l}{r} = (e + \cos \alpha) \cos \theta + (\sin \alpha) \sin \theta$$

ஆகும். இப்பொழுது S-லிருந்து இத் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{p}{r} = (\sin \alpha) \cos \theta - (e + \cos \alpha) \sin \theta$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால், S-ன் ஆரைத்திசையி பூச்சியமாக உள்ளதாலும், செங்கோடு S வழியாகச் செல்வதாலும் $p = 0$ என்றாகும். ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$0 = (\sin \alpha) \cos \theta - (e + \cos \alpha) \sin \theta.$$

ஆகும். மேலும் இதைச் சுருக்க, இது

$$0 = e \sin \theta + \sin (\theta - \alpha) \qquad \ldots \quad (2)$$

என்றாகிறது. இப்பொழுது செங்கோட்டின் அடியை (r_0, θ_0) எனக் கொண்டால், (1)-லிருந்தும், (2)-லிருந்தும்

$$\frac{l}{r_0} = e \cos \theta_0 + \cos (\theta_0 - \alpha),$$

$$0 = e \sin \theta_0 + \sin (\theta_0 - \alpha)$$

என்று கிடைக்கிறது. இவைகளிலிருந்து மேலும் கிடைப்பதாவது :

$$\cos (\theta_0 - \alpha) = \frac{l}{r_0} - e \cos \theta_0,$$

$$\sin (\theta_0 - \alpha) = - e \sin \theta_0.$$

இவைகளை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டக் கிடைப்பதாவது :

$$1 = \left(\frac{l}{r_0} - e \cos \theta_0 \right)^2 + (- e \sin \theta_0)^2.$$

அதாவது, $$1 = \left(\frac{l^2}{r_0^2} - \frac{2le}{r_0} \cos \theta_0 + e^2 \cos^2 \theta_0 \right) + e^2 \sin^2 \theta_0.$$

அதாவது, $r_0^2 = l^2 - 2le\, r_0 \cos \theta_0 + e^2 r_0^2.$

அதாவது, $(1 - e^2) r_0^2 + 2le\, r_0 \cos \theta_0 - l^2 = 0.$

இதிலிருந்து, செங்கோட்டு அடியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(1 - e^2) r^2 + 2le\, r \cos \theta - l^2 = 0$$

என்றாகிறது. $e \neq 1$ என்று இருக்கும்போது இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தையும், $e = 1$ என்று இருக்கும்போது ஒரு நேர் கோட்டையும் குறிக்கின்றது என்பது எளிதில் தெரிகின்றது.

கணக்கு 8.

ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு கூம்புவளைவுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவையானால், புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

கூம்புவளைவின் சமன்பாட்டை

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

என்று இருக்குமாறு முனையையும், தொடுகோட்டையும் தேர்ந்தெடுப்போம். நகரும் புள்ளியை $P(r_0, \theta_0)$ என்றும், இதிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்களை α, β என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின், தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{r} &= e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha), \\ \frac{l}{r} &= e \cos \theta + \cos (\theta - \beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

ஆகும். அதாவது,

$$\frac{l}{r} = (e \cos \alpha) \cos \theta + (\sin \alpha) \sin \theta,$$

$$\frac{l}{r} = (e + \cos \beta) \cos \theta + (\sin \beta) \sin \theta$$

ஆகும். ஆனால், தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவை ஆகையால் § 129-லிருந்து, கிடைப்பதாவது :

$$(e + \cos \alpha)(e + \cos \beta) + \sin \alpha \sin \beta = 0.$$

அதாவது, $$e^2 + 2e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$+ 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

ஆனால், தொடுகோடுகள் P-யின் வழியாகச் செல்லுகின்றன. ஆகவே,

$$\frac{l}{r_0} = e \cos \theta_0 + \cos (\theta_0 - \beta) \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{l}{r_0} = e \cos \theta_0' + \cos (\theta_0 - \beta) \quad \ldots \quad (4)$$

இப்பொழுது r_0, θ_0, l, e இவற்றுள் உள்ள தொடர்பைக் காண (3)-லிருந்தும், (4)-லிருந்தும் α-வையும், β-வையும் நீக்க வேண்டும். இதற்காக $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (3)-லிருந்தும், (4)-லிருந்தும் பெற்று, (2)-ல் பிரதியிட வேண்டும். ஆனால், (3) — (4)-லிருந்து கிடைப்பதாவது :

$$\cos(\theta_0 - \alpha) = \cos(\theta_0 - \beta)$$

அதாவது, $(\theta_0 - \alpha) = \pm(\theta_0 - \beta)$

அதாவது, $\theta_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

அதாவது, $\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\theta_0$ ... (5)

$\theta_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$-ஐ (3) அல்லது (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{l}{r_0} - e\cos\theta_0 \quad \ldots (6)$$

எனக் கிட்டும். இப்பொழுது (5), (6) ஆகியவற்றின் உதவியால் (2)-லிருந்து α-வையும், β-வையும் நீக்கினால்,

$$r_0^2(1 - e^2) + 2le\, r_0\cos\theta_0 - 2l^2 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆதலால், P-யின் இயங்குவரை

$$r^2(1 - e^2) + 2le\, r\cos\theta - 2l^2 = 0$$

என்றாகிறது. $e \neq 1$ என்று இருக்கும்போது இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தையும், $e = 1$ என்று இருக்கும்போது ஒரு நேர் கோட்டையும் குறிக்கின்றது என்று எளிதில் தெரிகின்றது.

§ 149. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ குறிக்கும் கூம்புவளைவின் PQ என்ற நாண் இடம் மாறிக் கொண்டே, முனைவிடத்து ஒரு மாறிலிக் கோணமாகிய 2β-ஐத் தாங்குகிறது. கோணம் PSQ-வின்

உட்சமவெட்டியானது, நாணை வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டை

$$\frac{l \cos \beta}{r} = 1 + (e \cos \beta) \cos \theta$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P, Q ஆகியவற்றின் ஆரைக் கோணங்களை $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் PQ ஆனது கோணம் 2β-ஐத் தாங்கும். மேலும் PQ, உட் சமவெட்டி ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha), \quad \theta = \alpha$$

ஆகும். இவைகளிலிருந்து α-வை நீக்குக.]

2. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ குறிக்கும் கூம்புவளைவின் நாண் ஒன்றின் முனைகளின் ஆரைக் கோணங்கள் $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ என்பன. முனைவிலிருந்து இந் நாணுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$e \sin \theta + \sec \beta \sin (\theta - \alpha) = 0$$

எனக் காட்டுக.

3. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ குறிக்கும் கூம்புவளைவின் நாண் ஒன்று, முனைவிடத்து மாறிலிக் கோணம் 2β-ஐத் தாங்குகிறது. முனைவிலிருந்து இந் நாணிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை

$$(e^2 - \sec^2 \beta) r^2 - 2el\, r \cos \theta + l^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

4. PSP', QSQ' என்பன, ஒரு நீள்வளைவின் குவிய நாண்கள். PQ ஆனது, அடுத்த குவியமாகிய S' வழியாகச் சென்றால், $P'Q'$ ஆனது, பேரச்சின் நிலைத்த புள்ளி ஒன்றின் வழியாகச் செல்லுகின்றது எனக் காட்டுக.

5. ஒரு கூம்புவளைவின் P-யிடத்துத் தொடுகோடு, இயக்கு வரையைச் சார்ந்த குவியம் S என்றால், கோணம் PSR ஒரு செங்கோணம் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P-யின் ஆரைக் கோணத்தை α எனக் கொண்டால், P-யிடத்துத் தொடுகோடு, இயக்குவரை ஆகிய வற்றின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha), \quad \frac{l}{r} = e \cos \theta$$

இவைகளை θ-வுக்கு விடுவித்து $(\theta - \alpha)$-வைக் காண்க.]

6. கூம்பு வளைவு $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$-வின் நகரும் நாணாகிய $P_1 P_2$ என்பது, முனைவிடத்து மாறிலிக் கோணமாகிய 2β-வைத் தாங்குகிறது. P_1-இடத்துத் தொடுகோடும், P_2-இடத்துத் தொடு கோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : P_1-ஐ "$\alpha - \beta$" எனவும், P_2-ஐ "$\alpha + \beta$" எனவும் கொண்டால் $P_1 P_2$ ஆனது, முனைவிடத்தில் கோணம் 2β-வைத் தாங்கும். மேலும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \{ \theta - (\alpha - \beta) \}$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos \{ \theta - (\alpha + \beta) \}$$

ஆகும். இவைகளிலிருந்து மாறி α-வை நீக்குவதற்காக

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \cos \beta - \sin (\theta - \alpha) \sin \beta \quad \ldots (1)$$

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \cos \beta + \sin (\theta - \alpha) \sin \beta \quad \ldots (2)$$

எனக் கண்டு (1) + (2) என்பதிலிருந்தும், (1) — (2) என்பதி லிருந்தும்

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \cos \beta, \quad \alpha = \theta$$

எனப் பெறுக.]

7. சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e \cos \theta$ குறிக்கும் கூம்புவளைவில் $P_1 SP_2$ என்பது, ஒரு குவிய நாண். P_1-இடத்துத் தொடுகோடும்,

P_2-இடத்துத் தொடுகோடும் தொடக்கக் கோட்டை Q_1, Q_2 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால்,

$$\frac{1}{SQ_1} + \frac{1}{SQ_2} = \frac{2e}{l}$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P_1-ஐ "α", P_2-ஐ "$\alpha + \pi$" என்றும் Q_1-ஐ $(SQ_1, 0)$, Q_2-ஐ $(SQ_2, 0)$ என்றும் கொண்டால்,

$$\frac{l}{SQ_1} = e + \cos\alpha, \quad \frac{l}{SQ_2} = e - \cos\alpha.\Big]$$

8. ஒரு கூம்பு வளைவில், ஒரு மாறும் குவிய நாணின் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்கு வரை, குவியம் சார்ந்த இயக்குவரையாகும் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு கூம்பு வளைவில் P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் செவ்வகலத்தின் LSL'-ன் நீட்சியின்மீது சந்தித்தால்,

$$\frac{1}{SP_1} + \frac{1}{SP_2} = \frac{2}{l}$$

எனக் காட்டுக.

10. e-ஐத் தொலைத்தகவாகக் கொண்ட ஒரு கூம்புவளைவின் P-யிடத்துச் செங்கோடு, குவியம் S-வழியாகச் செல்லும் அச்சை G-யில் வெட்டினால், $SG = eSP$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

6. $\frac{l \sec\beta}{r} = 1 + (e \sec\beta)\cos\theta$.

கலைச்சொற்கள்

அ

அச்சு	— Axis
அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சி	— Translation of axes
அச்சுகளின் சுழற்சி	— Rotation of axes
அச்சுகளின் நிலைமாற்றம்	— Transformation of axes
அச்சுவெட்டு	— Intercept
x-அச்சுவெட்டு	— X-intercept
y-அச்சுவெட்டு	— Y-intercept
அடி	— Foot
அதிபரவளைவு	— Hyperbola

ஆ

ஆதி	— Origin
ஆரம்	— Radius
ஆரைக்கோணம்	— Vectorial angle
ஆரைத் திசையி	— Radius vector

இ

இசைக்கோடு	— Polar
இசைப்புள்ளி	— Pole
இணை	— Parallel
இணைகரம்	— Parallelogram
இணைச் செங்கோட்டுப் புள்ளிகள்	— Conormal points
இணைந்த சமன்பாடு	— Combined equation

இயக்குவரை — Directrix
இயங்குவரை — Locus
இயற்கணித தூரம் — Algebraic distance

உ

உச்சி — Vertex
உள்மையம் — Incentre

எ

எல்லைப் புள்ளிகள் — Limiting points

க

கணம் — Set
காரணி — Factor
கார்ட்டீசியன் கூறுகள் — Cartesian co-ordinates
காற்பகுதி — Quadrant
கிளை — Branch
குத்துக்கோடு — Altitude
குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் — Director circle
குத்து வட்டங்கள் — Orthogonal circles
குணகம் — Coefficient
குவியம் — Focus
குவிய தூரம் — Focal distance
குவிய நாண் — Focal chord
குறி — Sign
குறுக்கச்சு — Transverse axis
குறை எண் — Negative number
கூறு — Co-ordinate
கோணதூரக் கூறுகள் — Polar co-ordinates
கோணதூரச் சமன்பாடு — Polar equation
கோவை — Expression

ச

சந்திப்புத்தன்மை — Concurrency
சமச்சீர் — Symmetry
சமத்தொடு வச்சு — Radical axis

சமத்தொடுவச்சு மையம் — Radical centre
சமபடித்தான சமன்பாடு — Homogeneous equation
சமவெட்டி — Bisector
சமன்பாடு — Equation
சரிவகம் — Trapezium
சரிவு — Slope
சாய்சதுரம் — Rhombus
சிற்றச்சு — Minor axis
சுற்றுவட்டம் — Circumcircle
செங்குத்தாக — Perpendicularly
செங்குத்துக் கோடு — Perpendicular line
செங்கோடு — Normal
செங்கோட்டு மையம் — Orthocentre
செங்கோணம் — Right angle
செவ்வக அதிபரவளைவு — Rectangular hyperbola
செவ்வகக் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் — Rectangular cartesian coordinates
செவ்வகம் — Rectangle
செவ்வகலம் — Latus rectum
சோடிக்கோடுகள் — Pair of lines
தன்மைகாட்டி — Discriminant
துணையச்சு — Conjugate axis
துணையலகு — Parameter
துணையிய — Conjugate
துணையிய அதிபரவளைவு — Conjugate hyperbola
துணையிய விட்டம் — Conjugate diameter
துணை வட்டம் — Auxiliar circle
தொடக்கக் கோடு — Initial line
தொடுகோடு — Tangent
தொடு நாண் — Chord of contact
தொடு புள்ளி — Point of contact
தொலைத் தகவு — Eccentricity
தொலைத் தொடுகோடு — Asymptote
தொலைவுச் சமன்பாடு — Distance equation

ந

நாண் — Chord
நாற்கரம் — Quadrilateral

நிரப்புக் கோணங்கள்	—	Complementary angles
நிலைத்த	—	Fixed
நிறை வர்க்கம்	—	Perfect square
நீள்வளைவு	—	Ellipse
நேர்வரைத்தன்மை	—	Colinearity

ப

படி	—	Degree
பரவளைவு	—	Parabola
பரிதி	—	Circumference
பூச்சியம்	—	Zero
பெருக்கல் தொடர்	—	Geometric progression
பேரச்சு	—	Major axis
பொதுப்படைச் சமன்பாடு	—	General equation

ம

மடங்கு	—	Multiple
மாறி	—	Variable
மாறிலி	—	Constant
மிகை எண்	—	Positive number
மிகைநிரப்புக்கோணம்	—	Supplementary angle
முடிவிலி	—	Infiinity
முனைவு	—	Pole
மூலம்	—	Root
மெய் எண்		Real number
மையக்குத்துக் கோடு	—	Perpendicular bisector
மையக் கூம்புவளைவு		Central conic
மையக்கோட்டுச் சந்தி	—	Centroid
மையவகற்சிக் கோணம்	—	Eccentric angle

வ

வடிவொப்ப மையம்	—	Centre of similitude
வட்டவரைப் புள்ளிகள்	—	Cyclic points
வரைகணிதம்	—	Geometry
வளைவரை	—	Curve
விட்டம்	—	Diameter
விடுவி	—	Solve
வெளிமையம்	—	Ex-centre

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600031.

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

இதுவரை 606 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன.

★

மேலும் விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	—	43	நூல்கள்
சட்டம்	—	19	,,
மருத்துவம்	—	9	,,
இயற்பியல்	—	27	,,
வேதியியல்	—	21	,,
தாவரவியல்	—	17	,,
விலங்கியல்	—	7	,,
கணிதம்	—	19	,,
வணிகவியல்	—	30	,,
பொருளாதாரம்	—	21	,,
புவியியல்	—	12	,,
வரலாறு	—	36	,,
மனையியல்	—	2	,,
தத்துவம்	—	5	,,
உளவியல்	—	4	,,
புள்ளியியல்	—	2	,,
கல்வி	—	3	,,
நிலப்பொதியியல்	—	3	,,
அரசியல்	—	25	,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)

கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை-600006

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்