திரிகோண கணிதம்

-அரங்கநாதன் (வி)

திரிகோண கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

வி. அரங்கநாதன்,

முன்னாள் முதல்வர்,

தேசியக் கல்லூரி, திருச்சி.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1960

B. T. P. No. 207

© Bureau of Tamil Publications

TRIGONOMETRY for B.Sc.

V. RANGANATHAN

Net Price Rs. 3–25
(No discount

Printed by
Muthukumaran Press
Madras-1.

12 MAR 1983
MADRAS

அணிந்துரை

(திரு. செ. மாதவன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968 ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969 ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'திரிகோண கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 207 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 242 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனங்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. மாதவன்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
I.	திரிகோண கணிதச் சூத்திரப் பட்டியல் ...	1
	தேர்மாறு வட்டச் சார்புகள்	2
	திரிகோண கணிதச் சமன்பாடுகள் ...	11
	விலக்கல்	36
II.	முக்கோணங்களும் நாற்கரங்களும் ...	39
	முக்கோணங்கள்	39
	நாற்கரங்கள்	57
III.	சிறு கோணங்களின் திரிகோண கணித விகிதங்களும் தொடர்க் கூட்டலும் ...	74
	சிறு கோணங்கள்	74
	எளிய தொடர்க் கூட்டல்	76
IV.	ஒழுங்குப் பல்கோணங்கள்	90
V.	சிக்கல் எண்கள்	102
VI.	தேமாவரின் தேற்றமும் இருபடிக் காரணங்களும்	122
VII.	திரிகோண விகித விரித்தல்களும் வரம்புகளும்	159
VIII.	அதிபரவளைச் சார்புகள்	187
IX.	சிக்கல் கணியத்தின் மடக்கை	208
	கிரகரியின்றொடர்	217
X.	தொடர்க் கூட்டல்	227
	சில விரித்தல்கள்	248

அத்தியாயம் I

1. திரிகோண கணிதச் சூத்திரப் பட்டியல்

1·1. நாம் முன்பே கற்ற திரிகோண கணிதச் சூத்திரங்களின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (இச் சூத்திரங்களை நன்கு மனத்தில் கொள்ளவேண்டும்).

(1) $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(2) $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

(3) $\text{cosec}^2\theta=1+\text{cof}^2\theta.$

(4) $\sin 0^\circ=\cos 90^\circ=0.\ ;$

$\cos 0^\circ=\sin 90^\circ=1$

$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\sqrt{\frac{3}{4}}.$

$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\sin(-\theta)=-\sin\theta.$

$\cos(-\theta)=\cos\theta.$

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta.$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta.$

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta.$

$\cos(90^\circ+\theta)=\sin\theta.$

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta.$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$

$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta.$

$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta.$

(6) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B=\sin A\sin B.$

(7) $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} . \cos \frac{C-D}{2}.$

$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} . \sin \frac{C-D}{2}.$

$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} . \cos \frac{C-D}{2}.$

$\cos C - \text{ces } D = 2 \sin \frac{C+D}{2} . \sin \frac{D-C}{2}.$

(8) $2 \sin A \text{ ces } B = \sin (A+B) + \sin (A-B).$
$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B).$
$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B).$
$2 \sin A \sin B = \cos (A+B) - \cos (A+B).$

(9) $\sin 2A = \sin A . \cos A$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$
$= 1 - 2 \sin^2 A.$

(10) $\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B}$

$\tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$

(11) $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

(12) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$
$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$

$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

2. நேர்மாறு வட்டச் சார்புகள்
(Inverse circular functions)

1·2.1. ஒரு கோணம் 'θ' கொடுக்கப்பட்டால் $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ முதலியவை சுலபமாகக் கண்டுபிடிக்கக்கூடியவை. இப்பொழுது θன் மதிப்பு 'a' என்று கொடுக்கப்பட்டால்,

அதிலிருந்து θஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு நேர்மாறு சார்பு முறையை உபயோகிக்கவேண்டும்.

$\sin\theta = a$ என்றால், $\theta = \sin^{-1} a$ என்று சொல்லவேண்டும். இதற்கு நேர்மாறு வட்டச் சார்பு எனப் பெயர். இப்பொழுது, θக்கு பல மதிப்புக்கள் கண்டுபிடிக்கலாம். உதாரணமாக, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ என்றால், θன் மதிப்பு 30° அல்லது 150° அல்லது 390°.........ஆக இருக்கலாம்.

ஆனால், $\theta = \sin^{-1} a$ என்றால் θக்கு மிகக் குறைவான அளவுள்ள மதிப்பைத்தான் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இம்மதிப்பு நேர் (positive) அல்லது எதிர் (negative) ஆக இருக்கலாம். எனவே, $\sin^{-1} a$ என்பது $-90°$க்கும் $+90°$க்கும் இடையே இருக்க வேண்டும்.

இம் மாதிரியே $\cos^{-1} a$ என்பது 0°க்கும் 180°க்கும் இடையே இருக்கவேண்டும். $\tan^{-1} a$ என்பது $-90°$க்கும் $+90°$க்கும் இடையே இருக்கவேண்டும்.

எனவே, $\sin^{-1} a$க்கு முதல் மதிப்பு (principal value) ஒன்று தான் உண்டு. இது போல் $\cos^{-1} a$, $\tan^{-1} a$ இவைகளுக்கும் முதல் மதிப்பு ஒன்றுதான் உண்டு.

உ-ம் : $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$ (முதல் மதிப்பு)

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad (\;\;,, \;\;)$$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad (\;\;,, \;\;)$$

1·2.2. நாம் $\sin^{-1} a$ ஐ நிர்ணயித்து இருப்பதால் இதையே $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{a}$ என்றும் சொல்லலாம்.

ஏனென்றால் $\sin^{-1} a = \theta$ என்று வைத்தால்,

$a = \sin\theta$ என்று கிடைக்கிறது.

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sin\theta}$$

அதாவது $\frac{1}{a} = \operatorname{cosec}\theta$.

$$\therefore \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{a} = \theta.$$

$$\text{எனவே } \sin^{-1} a = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{a}$$

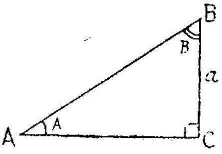
$$\text{இம்மாதிரியே } \cos^{-1} a = \sec^{-1} \frac{1}{a} \text{ என்றும்}$$

$$\tan^{-1} a = \cos^{-1} \frac{1}{a} \text{ என்றும் நாம்}$$

நிரூபிக்கலாம்.

1·2.3. நேர்மாறு சார்பின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து நாம் இப்பொழுது $\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

'a' என்பது ஒரு நேர் எண்ணாக இருக்கட்டும். ABC என்று ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை $\hat{C} = 90°$; $CB=a$; $AB=1$ என்ற அளவுகளுடன் எடுத்துக்கொள்.



படம்-1

$$\sin A = \frac{a}{1} = a;$$

$$\cos B = \frac{a}{1} = a.$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^{-1} a + \cos^{-1} a &= A + B \\ &= 90° \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(வட்ட அளவில் 90°

$= \frac{\pi}{2}$ ஆரையன் (radian)

இம்மாதிரியே aக்கு எதிர் மதிப்பு எடுத்துக் கொண்டாலும்,

$\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ என்று கிடைக்கும். மேலும்,

$\tan^{-1} a + \operatorname{cof}^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ என்றும்,

$\operatorname{see}^{-1} a + \operatorname{cosec}^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ என்றும் தக்க படங்கள் வரைந்து நிரூபிக்கலாம்

1·2.4. $\sin^{-1}a$ என்பதற்குப் பதிலாக "*arc sin a*" என்றும், $\cos^{-1}a$க்கு "*a c cos a*" என்றும் இதேபோல் $\tan^{-1}a$க்கு 'arc tan a' என்றும் சொல்லுவதுண்டு.

1·2.5.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b = \tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$ என்று நிறுவுக.

$\tan^{-1}a = x$ என்றும், $\tan^{-1}b=y$ என்றும் வைக்க.

$\therefore \quad \tan x=a\,; \quad \tan y=b.$ ....(A)

ஆனால் $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\ \tan y}$

$\therefore \quad \tan(x+y) = \dfrac{a+b}{1-ab}$. [(A)யிலிருந்து tan xக்கு aயும் tan yக்கு bயும் பிரதியிடு.]

$\therefore \quad x+y = \tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$.

அதாவது $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b = \tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$.

மாதிரி 2 : $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}$ என்று நிறுவுக.

மாதிரி ஒன்றிலிருந்து

$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b = \tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore \quad \tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \tan^{-1}1 \qquad \text{.........(A)}$$

மேலும் $$\tan^{-1}\tfrac{1}{4}+\tan^{-1}\tfrac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}$$

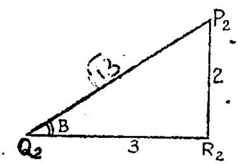
$$= \tan^{-1}1 \qquad \text{.........(B)}$$

$\therefore$ (A), (B)யிலிருந்து

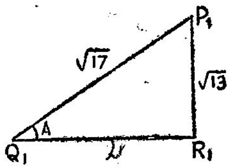
$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 3 : $\cos\left[\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{13}{17}}\right] = \sin\left[\tan^{-1}\dfrac{2}{3}\right]$ என நிறுவுக.

$\sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = A$ எனவும், $\tan^{-1}\frac{2}{3} = B$ எனவும் வைக்க.



படம்-2



படம்-3

$\therefore \quad \sin A = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}}$, $R_1P_1 = \sqrt{13}$ என்றும், $P_1Q_1 = \sqrt{17}$ என்றும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad Q_1R_1 = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{17-13}$$

$$= 2.$$

$$\cot\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}}\right] = \cot[A]$$

$$= \frac{Q_1R_1}{R_1P_1} \qquad [\text{படம் 1 (இ)}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

$\because \quad \tan B = \frac{2}{3}$, $R_2P_2 = 2$ என்றும், $Q_2R_2 = 3$ என்றும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad P_2Q_2 = \sqrt{(Q_2R_2)^2 + (R_2P_2)^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}.$$

$$\sin\left[\tan^{-1}.\frac{2}{3}\right] = \sin[B]$$

$$= \frac{R_2P_2}{Q_2P_2} \qquad [\text{படம் 1 (ஆ)}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$\therefore$ (i); (ii) லிருந்து, நமக்கு

$\cot\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}}\right] = \sin\left[\tan^{-1}.\frac{2}{3}\right]$ என்று கிடைக்கிறது.

மாதிரி 4 : தீர் :— $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

மாதிரி ஒன்றிலிருந்து $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \dfrac{a+b}{1-ab}$

என்று கிடைக்கிறது. ஆகையால்,

$$\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \tan^{-1} \frac{\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x+1}{x+2}}{1 - \dfrac{x-1}{x-2} \cdot \dfrac{x-1}{x+2}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2x^2 - 4}{-3}$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad \text{(கொள்கை)}$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} \frac{2x^2 - 4}{-3} = \frac{\pi}{4}.$$

அதாவது $\dfrac{2x^2 - 4}{-3} = \tan \dfrac{\pi}{4}$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 4 = -3.$$

அதாவது $2x^2 = 1$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

மாதிரி 5 : $\cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$ என நிறுவுக.

$x = \tan A$ எனக் கொள்.

$$\therefore \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \cos 2A \quad [\text{ சூத்திரம் } 11]$$

அதாவது $\cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2A.$ .... (i)

$\because \quad x = \tan A; \quad \tan^{-1} x = A.$

$\therefore \quad 2 \tan^{-1} x = 2. A$ .... (ii)

(i), (ii) லிருந்து நமக்கு

$\cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$ என்று கிடைக்கிறது.

அப்பியாசம் 1 (அ)

1. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]$ என நிறுவுக.

[குறிப்பு : $\sin^{-1} x = A$ என்றும் $\sin^{-1} y = B$ என்றும் வைக்க.

$\therefore \quad x = \sin A; \quad y = \sin B$

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-x^2}$

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-y^2}.$

$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B$

$= x\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}.$

$\therefore \quad A+B=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}.$

அதாவது,

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}.]$

2. $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}]$ என நிறுவுக.

3. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$ என நிறுவுக.

4. $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}[xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$ என நிறுவுக.

5. $\cos^{-1}\frac{7}{25} = 2\cos^{-1}\frac{4}{5}$ என நிறுவுக.

6. $\sin^{-1}\frac{24}{25} = 2\sin^{-1}\frac{3}{5}$ என நிறுவுக.

7. $\sin^{-1}(3x-4x^3) = 3\sin^{-1}x$ எனக் காண்க.

8. $\cos^{-1}(4x^3-3x) = 3\cos^{-1}x$ எனக் காண்க.

9. (i) $\tan^{-1}+\tan^{-2} = \tan^{-1}(-3)$ என்று நிறுவுக.

(ii) $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3 = \tan^{-1}(-1)$ என்று நிறுவுக.

(iii) $\tan^{-1}3+\tan^{-1}4=\tan^{-1}\left(-\frac{7}{11}\right)$ எனக் காண்க.

(iv) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{6}{7}$ என நிறுவுக.

10. $\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{33}{56}=\sin^{-1}\frac{12}{13}$. என நிறுவுக.

11. $a>0,\ b>0,\ ab>1$ என்றால் $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\pi+\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$ எனக் காண்க.

12. $\cot\left[\sin^{-1}\frac{4}{5}\right]=\sin\left[\cot^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$ எனக் காண்க.

13. $\tan\left[\cos^{-1}\frac{21}{29}\right]=\cos\left[\cot^{-1}\frac{20}{\sqrt{41}}\right]$ எனக் காண்க.

14. $\cos\left[\sin^{-1}\frac{12}{13}\right]=\sin\left[\sec^{-1}\frac{13}{12}\right]$ எனக் காண்க.

15. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$ எனக் காண்க.

16. $\sin^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{20}{21} = \sin^{-1}\frac{24}{155}$. எனக் காண்க.

17. $\cot^{-1}\frac{21}{20} - \sec^{-1}\frac{13}{12} = \text{cosec}^{-1}\frac{377}{135}$ எனக் காண்க.

18. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$. என நிறுவுக.

19. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ ஆனால், $xy+yz+zx = 1$ எனக் காண்க.

20. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ ஆனால் $x+y+z = xyz$ எனக் காண்க.

21. $\tan^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + \tan^{-1}\frac{ay+b}{\sqrt{b^2-ac}} = \tan^{-1} d$ ஆனால் $\sqrt{b^2-ac}\,\{a(x+y)+2b\} + ad\{axy + b(x+y)+c\} = 0$ எனக் காண்க.

22. $\cos^{-1}\left[\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right] = 2\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right]$ எனக் காண்க.

23. $\tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$ என நிறுவுக.

24. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca} = 0$ எனக் காண்க.

25. $2\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{8}{19}$ எனக் காண்க.

26. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{8}{19} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ எனக் காண்க.

27. $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$ எனக் காண்க.

28. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{4}$ எனில், $x+y+z+xy+yz+zx = 1+xyz$ என்று நிறுவுக.

29. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ ஆனால், $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ எனக் காண்க

[குறிப்பு : $\cos^{-1}x = A$, $\cos^{-1}y = B$, $\cos^{-1}z = c$ எனக் கொள்.
$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ (கொள்கை)

அஃதாவது,

$$A + B + C = \pi$$
$$\therefore\ A + B = \pi - C.$$
$$\therefore\ \cos(A+B) = \cos(\pi - C)$$
$$\therefore\ xy - \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2} = -z$$
அல்லது $xy + z = \sqrt{1-x^2}.\ \sqrt{1-y^2}$
$$\therefore\ (xy+z)^2 = (1-x^2)\ (1-y^2)$$
(அ-து.) $x^2y^2 + z^2 + 2xyz = 1 - x^2 + y^2 + x^2y^2.$
அல்லது, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$]

30. பின்வருவனவற்றைத் தீர்.

(i) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{3x+1}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

[விடை : $x = 1, -\frac{1}{8}$]

(ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+7}{4x-1}\right) - \cot^{-1}\left(2x\right) = \dfrac{\pi}{4}$

[விடை : $x = \frac{8}{9}, 1$]

(iii) $\dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{4}{9}$

[விடை : $x = \pm\frac{8}{9}$]

(iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{20}{x}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{21}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

[விடை : $x = 29$]

(v) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

[விடை : $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$]

(vi) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}(2x) = \dfrac{2\pi}{3}$ [விடை : $x = \sqrt{\dfrac{3}{28}}$]

(vii) $\cos(\cot^{-1}x) = \sin(\tan^{-1})$ [விடை : $x = \pm 2$]

31. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = 3\tan^{-1}x$ என நிறுவுக.

32. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ என்று நிறுவுக.

3. திரிகோண கணிதச் சமன்பாடுகள்

1·3.1. முற்பிரிவில் $\sin^{-1}a$க்கு முதல் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்திருக்கிறோம். இப்பொழுது $\sin^{-1}a$க்கு உள்ள எல்லா மதிப்புக்களையும் கண்டுபிடிப்போம். இம் மதிப்புக்களை எல்லாம் ஒரு பொதுக் கோவையில் அமைக்கமுடியும்.

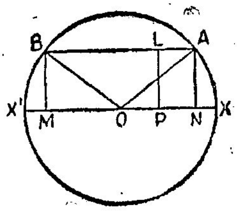
1·3.2. வரை கணித முறையில் θவினுடைய பொது மதிப்பினைக் கொடுக்கப்பட்ட $\sin \theta$ன் மதிப்பிலிருந்து கண்டுபிடிப்போம்.

அதாவது, $\sin \theta = K$ எனில், θஐக் கண்டுபிடிப்போம்.

வகை I. K ஒரு நேர் எண்.

நாம் வரைபடம் மூலம், எந்தெந்த கோணத்திற்கு sineன் மதிப்பு θவிற்குச் சமமாக இருக்கிறதோ, அவைகளைப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம் :

Oஐ மையமாய் வைத்து ஏதேனும் ஒரு நீளம், உதாரணமாக ஒரு செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தை வரை. X^1OX என்பது அதன் விட்டமாக இருக்கட்டும். P என்ற புள்ளியை X^1OXல் எடுத்து அதன் வழியாக PL ஐ K செ.மீ. நீளத்திற்குச் சமமாகவும் X^1OXக்குச் செங்குத்தாகவும் இருக்கும்படி எடு. L வழியாக X^1OXக்கு ஓர் இணைகோடு வரை. இந்த இணைகோடு வட்டத்தை A, Bயில் வெட்டட்டும். A, Bயிலிருந்து X^1OXக்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் N, M என்று இருக்கட்டும்.



படம்-4

$ANMB$ ஒரு செவ்வகம்

$\therefore \quad NA = MB = PL = K$ (அமைப்பு)

மேலும், $OA = OB$ (வட்ட ஆரங்கள்)

$\therefore \quad \triangle AON \equiv \triangle BOM.$

$A\hat{O}N = \alpha$, எனில்,

$B\hat{O}M = A\hat{O}N = \alpha$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$\therefore \quad N\hat{O}B = 180° - B\hat{O}M = 180° - \alpha.$

இப்பொழுது,

$$\sin N\hat{O}A = \frac{NA}{OA} = \frac{K}{1} = K \text{ , மேலும்}$$

$$\sin M\hat{O}B = \frac{MB}{OB} = \frac{K}{1} = K.$$

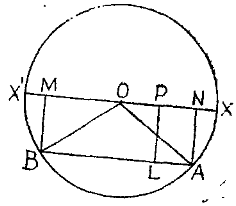
வட்ட ஆரம் OA அல்லது OB நிலையில் (position) இருந்தால் கோணத்தின் sine அஃதாவது $\sin N\hat{O}A$ அல்லது $\sin M\hat{O}B$ன் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்ட Kக்குச் சமம்.

வகை II: (K எதிர் எண்)

K எதிர் எண் ஆகையால், L, A, B முதலிய புள்ளிகள் X^1OXக்குக் கீழே இருக்கும். B என்பது மூன்றாவது கால் வட்டத்திலும், A என்பது நான்காவது கால் வட்டத்திலும் (third and fourth quadrants) இருக்கும்

$$\sin N\hat{O}A = \frac{NA}{OA} = \frac{K}{I} = K$$

$$\sin M\hat{O}B = \frac{MB}{OB} = \frac{K}{I} = K.$$



படம்-5

ஆகையால், இவ்விரண்டு வகைகளிலும் எந்த வகையாயினும் இரண்டு கோணங்கள்தாம் கிடைக்கின்றன. அவ்விரு கோணங்களும் மிகை நிரப்புக்கோணங்களாகவே (supplementary angles) அமைகின்றன. ஏனெனில், முக்கோணங்கள் AON, BOM இரண்டும் சர்வசமம்.

ஒவ்வொரு படத்திலும் (படம் 4, படம் 5) வட்ட ஆரம், OA என்னும் நிலையிலிருக்கும் பொழுது $\hat{\alpha}$ஐக் குறித்தால், அதே நிலை $2\pi+\alpha$, $4\pi+\alpha\ldots$, $-2\pi+\alpha$, $-4\pi+\alpha$, .. முதலிய கோணங்களை முறையே OAஐ இடமாக 1, 2,...முறைகள் சுற்றும்பொழுதும், வலமாக 1, 2...முறைகள் சுற்றும்பொழுதும் குறிக்கும். எனவே, ஆரம் OA பொதுவாக $2l\pi+\alpha$ என்ற கோணத்தைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம் (l என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

எனவே, ஒரு பகுதித் தீர்வாக $\theta = 2l\pi+\alpha$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது .... (a)

ஆரம், OB என்ற நிலையில் $180°-\alpha$ அதாவது $\pi-\alpha$ஐக் குறிப்பதால், அதுவே பொதுவாக $2m\pi+(\pi-\alpha)$ என்னும் கோணத்தைக் குறிப்பதாக நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம். (m என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், அல்லது பூச்சியம்.)

ஆகையால், மற்றொரு பகுதித் தீர்வாக, $\theta = (2m+1)\pi-\alpha$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது............(b)

(a), (b) என்ற இரண்டு கோவைகளையும் ஒன்று சேர்த்து $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$ என்ற பொதுக் கோவையை எழுதலாம். ………… (A)

(n என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், அல்லது, பூச்சியம்; ஏனெனில், $2m+1$ என்ற ஒற்றை எண்ணிற்கு n சமமாக இருக்கும்பொழுது $(-1)^n$ என்பது -1க்குச் சமமாக இருக்கும். அப்பொழுது கோவை (A), கோவை (b)க்குச் சருவ சமன். இம் மாதிரியே, $2l$ என்ற இரட்டை எண்ணிற்கு 'n' சமமாக இருந்தால், $(-1)^n$ என்பது $+1$க்குச் சமமாக இருக்கும். அப்பொழுது கோவை (A), கோவை (a)க்குச் சருவசமன்.

ஆகையால், $\sin\theta = K$ எனில், θவின் மதிப்புகளைக் கொடுக்கும் பொதுக் கோவையாவது,

$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$ (α என்னும் கோணத்தை, $\sin\alpha = K$ ஆக இருக்கும்படி எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.)

குறிப்பு :— $\sin\theta = \sin\alpha$ எனில், $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$.

உ. ம் :— $\sin\theta = \frac{1}{2}$ எனில், θன் பொது மதிப்பினைக் காண்க.

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} \text{ (சூத்திரம் (4))}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6}$$

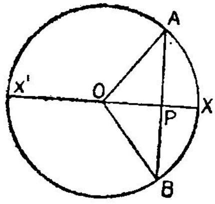
$$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

1·3·3. இப்பொழுது, θன் பொது மதிப்பினை, கொடுக்கப்பட்ட $\cos\theta$விலிருந்து கண்டுபிடிப்போம்.

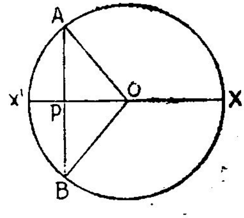
முன் போலவே, 1 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தை எடுத்துக் கொள். அதில் XOX^1 என்ற விட்டத்தையும், அதன்மீது வட்ட மையம் Oவிலிருந்து $OP = K$ செ.மீ. என்னும்படி P என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்.

கொடுத்த K என்னும் எண் நேராக இருந்தால் P என்னும் புள்ளி Oன் வலப்புறம் அமையும். K என்பது எதிராக இருந்தால், P, Oன் இடப்புறம் அமையும்.

மேற்கூறிய வகைகளில் எவ்வகையாயினும், P வழியே செல்லும் XPX^1ன் குத்துக் கோடு, வட்டத்தை A, B என்ற இரு புள்ளிகளில் வெட்டும்.



படம்-6



படம்-7

படம் 6, படம் 7 ஆகிய இவ்விரு படங்களிலும்,

$$\cos\ (X\hat{O}A) = \frac{OP}{OA} = \frac{K}{I} = K$$

மேலும்,

$$\cos\ (B\hat{O}X) = \frac{OP}{OB} = \frac{K}{I} = K.$$

முக்கோணங்கள் POA, POB இரண்டும் சருவ சமமானமையால் $X\hat{O}A = \alpha$ எனில், $X\hat{O}B$, எதிர்த் திசையில் இருப்பதாலும் அளவில் சமமாக இருப்பதாலும், $-\alpha$க்குச் சமம்.

ஆகையால், வட்ட ஆரம் OA என்ற நிலையில் இருக்கும் பொழுது, θன் ஒரு மதிப்பு α ஆகும். எனவே, வட்ட ஆரம் OA என்னும் நிலையிலிருந்து பல முறைகள் (வலமாகவோ அல்லது இடமாகவோ) சுற்றி மீண்டும் OAக்கு வந்து சேர்ந்தால், $2l\pi+\alpha$ என்ற கோணத்தை (பொதுவாக) பெறுவோம் (l என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

இம்மாதிரியே, வட்ட ஆரம் OB என்ற நிலையிலிருக்கும்பொழுது $-\alpha$ என்ற கோணம் கிடைப்பதால், OBயிலிருந்து பலமுறைகள் (வலமாகவோ இடமாகவோ) சுற்றி மீண்டும் OBக்கு வட்ட ஆரம் வந்து சேரும்பொழுது, $2m\pi-\alpha$ என்ற கோணத்தை (பொதுவாக) அடையலாம். (m என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

ஆகையால், θவிற்கு இரு பகுதித் தீர்வாகக் கிடைப்பது,

$$\theta = 2l\pi+\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$
$$\theta = 2m\pi-\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

(*a*), (*b*) இரண்டையும் இப்பொழுது ஒன்று சேர்த்தால், பொதுத் தீர்வாகக் கிடைக்கும் கோணமையாவது, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$ (*n* என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், அல்லது பூச்சியம்)........(*A*)

ஆகையால், $\cos\theta = K$ எனில் θன் மதிப்பைக் கொடுக்கும் பொதுக்கோணமை, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$ (*n* என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், அல்லது பூச்சியம்) ($\cos\alpha = K$ என்று இருக்குமாறு αஐ எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்)

குறிப்பு :— $\cos\theta = \cos\alpha$ எனில் $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

உ.ம் : $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ எனில் θன் பொது மதிப்பைக்காண்.

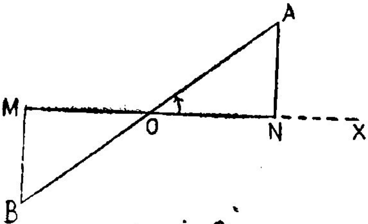
$\cos 120 = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ (சூத்திரம் (5) ; (4))

$$\therefore \cos\theta = \cos 120' = \cos\frac{2\pi}{3}.$$

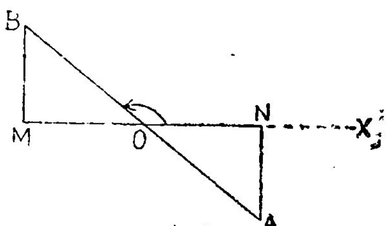
$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

13.4. கொடுக்கப்பட்ட tan θ மதிப்பிலிருந்து θன் பொது மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்க.

ஏதேனும் ஒரு நீளம், உதாரணமாக 2 செ.மீ. நீளமுள்ள *MN* என்ற நேர்க்கோட்டை வரைந்து அதன் மையப்புள்ளி *O*ஐ எடுத்துக்கொள். *N*, *M* வழியே *MN*க்குச் செங்குத்தாக *NA* = *MB* (= *K* செ.மீ.) என்ற இரு கோடுகளை வரை.



படம்-8



படம்-9

K நேர் எண்ணாக இருந்தால் படம் 8ம், *K* எதிர் எண்ணாக இருந்தால் படம் 9ம் நமக்குக் கிடைக்கின்றன. இவ்விரு படங்களிலிருந்தும்,

$$\tan X\hat{O}A = \frac{NA}{ON} = \frac{K}{1} = K.$$

மேலும்,

$$\tan X\hat{O}B = \frac{MB}{ON} = \frac{-BM}{-MO} = \frac{-K}{-1} = K.$$

முக்கோணங்கள் MOB, NOAயில்

$$BM = NA = K.$$
$$MO = ON = 1 \text{ செ.மீ.},$$
$$\hat{M} = 90^\circ = \hat{N}.$$

ஆகையால், $M\hat{O}B = N\hat{O}A$.

எனவே, BOA என்பது ஒரு நேர்க்கோடு.

$N\hat{O}A = \alpha$ எனில், $N\hat{O}B = \pi + \alpha$ (படம் 8—படம் 9)

ஆகையால், ஒரு பகுதித் தீர்வாக $\theta = 2l\pi + \alpha$ என்றும் மற்றொரு பகுதித் தீர்வாக $\theta = 2m\pi + (\pi + \alpha)$ என்றும் கிடைக்கின்றன. (l, m என்பவை நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண்கள் அல்லது பூச்சியம்)

மேற்கூறிய இரு தீர்வுகளையும் ஒன்று சேர்த்தால் $\theta = n\pi + \alpha$ என்ற பொதுத்தீர்வு கிடைக்கின்றது. (n என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்.)

ஆகையால், $\tan\theta = K$ எனில் θன் மதிப்பைக் கொடுக்கும் பொதுக்கோவை, $\theta = n\pi + \alpha$ (n என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்) ($\tan\alpha = K$ என்று இருக்குமாறு αஐ எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.)

குறிப்பு : $\tan\theta = \tan\alpha$ எனில் $\theta = n\pi + \alpha$.

உதாரணம் : $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில் θன் பொது மதிப்பை காண்போம். $\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan 150^\circ = \tan\frac{5\pi}{6}.$$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}$$

1·3.5. $\sin\theta$, $\cos\theta$ அல்லது $\tan\theta$ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து பொது மதிப்புக்கோவையை வேறு முறையில் கண்டுபிடித்தல்.

$\sin\theta = K$ எனக் கொள். கோணம் αஐ $\sin\alpha = K$ என்று இருக்குமாறு கண்டுபிடித்துக்கொள்.

ஆகையால், $\sin\theta - \sin\alpha = 0$.

அதாவது, $2\cos\frac{\theta+\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$. (சூத்திரம் (7))

$$\therefore \quad \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \qquad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

அல்லது $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ ... ... (2)

ஆகையால், $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ ((1)லிருந்து)

அல்லது, $\theta+\alpha = (2m+1)\pi$ ... ... (a)

(m என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்.)

(2) லிருந்து $\frac{\theta-\alpha}{2} = l\pi$

அல்லது, $\theta+\alpha = 2l\pi$ ... ... (b)

(l என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

(a), (b) இரண்டிலிருந்தும் வரும் பொதுக்கோவை $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$.

இம்மாதிரியே, $\cos\theta - \cos\alpha$ ஆனுல்

$\cos\theta - \cos\alpha = 0$

$\therefore\ 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}.\ \sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0$ (சூத்திரம் (7))

அல்லது, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}.\ \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0.$

ஆகையால் $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ ... ... (1)

அல்லது, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ ... ... (2)

(1) லிருந்து, $\frac{\theta+\alpha}{2} = m\pi$

அல்லது $\theta+\alpha = 2m\pi$ ... ... (a)

(m என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

(2) லிருந்து, $\frac{\theta-\alpha}{2} = l\pi$

அல்லது $\theta-\alpha = 2l\pi$ ... ... (b)

(l என்பது, ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், அல்லது பூச்சியம்)

(a), (b)லிருந்து கிடைக்கும் பொதுக்கோவை, $\theta = 2n \pm \alpha$ (n என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

$$\tan\theta = \tan\alpha \text{ எனில்,}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0.$$

அல்லது,

$\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0.$

அ∴தாவது, $\sin(\theta-\alpha) = 0.$

ஆகையால் $\theta-\alpha = n\pi$

அல்லது, $\theta = n\pi+\alpha.$ (n என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்)

1·36. சில திரிகோண விகிதச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் பொழுது $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ அல்லது $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ எனக் கிடைக்கும். அதற்காக நாம் இப்பொழுது $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ என்றும், $\sin° 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ என்றும் நிரூபிப்போம்.

நிருபணம் :-

$\theta = 18°$ எனில்.

$5\theta = 90°$

அதாவது $3\theta+2\theta = 90°$

ஆகையால் $3\theta = 90°-2\theta$

எனவே $\cos 3\theta = \cos(90°-2\theta)$

$= \sin 2\theta$ .... (A)

ஆனல் $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (சூத்திரம் (12))

$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\ \cos\theta$ (சூத்திரம் (9))

ஆகையால், (A)யிலிருந்து கிடைப்பது,

$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$

அதாவது, $\cos\theta\{4\cos^2\theta - 3 - 2\sin\theta\} = 0.$ .... (B)

ஆனல் $\theta = 18°$; ஆகையால் $\cos\theta \pm 0.$

∴ (B)யிலிருந்து $4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0.$ என்று கிடைக்கும்.

அதாவது, $4 - 4\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0.$

∴ $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தால்

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ அல்லது } \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

θ, 18° ஆனால் $\sin\theta \pm \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ ($\because$ θ முதல் கால் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளது.)

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, அதாவது, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-}{4}$

இப்பொழுது, $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ என நிரூபிப்போம்.

நிரூபணம்: $\cos 2A = 1-2\sin^2 A$ (சூத்திரம் (9))

ஆகையால் Aக்கு 18° பிரதியிட

$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது, $\cos 36° = 1-2.\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}^2$

$$= 1 - \frac{6 \quad 2\sqrt{5})}{8}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

ஆகையால், $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

குறிப்பு: 72°யும் 18°யும் நிரப்புக் கோணங்கள்.

ஆகையால் $\cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

1·37· $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

வகை I. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ (கொள்கை).

$\sqrt{a^2+b^2}$ ஆல் முழுவதும் வகுக்க.

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \ldots \text{(I)}$$

a, b கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\frac{b}{a}$ இன் மதிப்புக் கிடைக்கும்.

α என்னும் கோணத்தை $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ என்னும்படி எடுத்தால், கணித அட்டவணையிலிருந்து α இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம். எனவே, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ ஆனல், $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha$ விற்கும், $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha$ விற்கும் சமமாகும்.

(I) லிருந்து, $\cos a \cdot \cos\theta + \sin a \cdot \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் கிடைக்கிறது. கணித அட்டவணையிலிருந்து β என்னும் கோணத்தை $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என்னும்படி கண்டுபிடிக்கலாம். ஆகையால், $\cos a \cdot \cos\theta + \sin a \sin\theta = \cos\beta$.

அதாவது, $\cos(\theta - \alpha) = \cos\beta$.

ஆகையால், $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$.

அதாவது, $\theta = 2n\pi + \alpha \pm \beta$.

குறிப்பு (1): $c > \sqrt{a^2+b^2}$ ஆனல், $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$ ஆகும். ஆகையால், β என்ற கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்க இயலாது.

இம்மாதிரி நிலையில், $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகாண முடியாது.

குறிப்பு (2): c எதிர் எண்ணாயின், $-c$ நேர் எண் ஆகும். அஃது சமயம், β என்னும் கோணத்தை $\cos\beta = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என்னும்படி கண்டுபிடித்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\cos\theta \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha = -\cos\beta = \cos(\pi - \beta)$ என்று மாற்றியமைத்துத் தீர்வு காணலாம்.

குறிப்பு (3) :— α என்னும் கோணத்தை $\sin\alpha$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ க்குச்

சமமாகவும், β என்னும் கோணத்தை $\sin\beta$, $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$க்குச் சமமாகவும் இருக்கும்படி கண்டுபிடித்தால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $a\cos\theta+\beta\sin\theta=C$ ஐ, $\sin(\theta+\alpha)=\sin\beta$ என்று மாற்றியமைத்துத் தீர்வு காண இயலும்.

C நேர் எண்ணுக இருந்தால், β நேர் எண்ணுகவும் C எதிராக இருந்தால் β எதிராகவும் இருக்கும். எனவே, C நேர் எண்ணுக இருக்கும்பொழுது, $\sin(\theta+\alpha)=\sin\beta$ ஆகவும், C எதிர் எண்ணுக இருந்தால், $\sin(\theta+\alpha)=\sin(-\beta)$ ஆகவும் இருக்கும்.

வகை II $t=\tan\frac{\theta}{2}$ எனக்கொள்.

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2};\ (\text{சூத்திரம் (ii)})$$

எனவே, $a\cos\theta+b\sin\theta=C$ என்னும் சமன்பாடு,

$$a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+b\cdot\frac{2t}{1+t^2}=c \text{ என்று மாறும்.}$$

$$\therefore\quad t^2(c+a)-2bt+c-a=0. \qquad (A)$$

(A) யிலிருந்து, tக்கு இரு மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. அதாவது, $\tan\frac{\theta}{2}$க்கு இரு மதிப்புக்கள கிடைக்கின்றன. அட்டவணையிலிருந்து $\frac{\theta}{2}$க்கு இரு மதிப்புக்கள் பெறலாம். இம் மதிப்புக்களை இரட்டித்தால் θன் இரு மதிப்புக்களும் கிடைக்கும்.

குறிப்பு:— $\tan\frac{\theta}{2}$க்கு வகை ‍IIன் மூலம் கிடைக்கும் இரு மதிப்புக்களில் ஏதேனும் ஒன்றோ அல்லது இரண்டுமோ நான்கைக் (4) காட்டிலும் பெரிதாக இருக்குமாயின் அட்டவணையின் மூலம் $\frac{\theta}{2}$ இன் மதிப்புக்களைச் சரியாகக் கண்டுபிடிக்க இயலாது. (கணித அட்டவணையைப் பார்க்கவும்).

எனவே, வகை I, வகை IIஐக்காட்டிலும், எப்பொழுதும் பயன் தரத்தக்கது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1·38

மாதிரி 1. தீர்:— $3 \cos 2\theta + \sin \theta = 1$.

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2\theta$ (சூத்திரம் (9)) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $\cos 2\theta = 1-2 \sin^2\theta$ எனப் பிரதியிட $3(1-2\sin^2\theta) + \sin\theta - 1 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore \quad 6 \sin^2\theta - \sin\theta - 2 = 0.$

அதாவது $(3 \sin\theta - 2)\ (2 \sin\theta + 1) = 0$.

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{2}{3}$ அல்லது,

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

கணித அட்டவணையிலிருந்து,

$\sin 41^\circ\ 49' = \frac{2}{3}$ என்று கிடைக்கிறது. கோணம் $41^\circ\ 49'$ஐ ஆரையின் அளவில் சுலபமாகச் சொல்ல முடியாததால் θன் பொதுக் கோவையில், π^c என்பதற்கு 180° எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

ஆகையால்,

$\theta = n.\ 180^\circ + (-1)^n.\ \ 41^\circ\ 49'$ (§ 1·32) [தீர்வு (i)]

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ இலிருந்து $\theta = n\pi - (-1)^n.\ \frac{\pi}{6}$ [தீர்வு (ii)]

மாதிரி 2: தீர்:— $\cos 2\theta + 5 \cos\theta = 2$.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ (சூத்திரம் (9)) என்று கொடுத்த கோவையில் பிரதியிட,

$2\cos^2\theta - 1 + 5\cos\theta - 2 = 0$ என்று கிடைக்கிறது.

அதாவது, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$.

$\therefore \quad (2\cos\theta - 1)\ (\cos\theta + 3) = 0.$

ஆகையால், $\cos\theta = \frac{1}{2}$ அல்லது,

$\cos\theta = -3.$

[$\cos\theta \neq -3$; ஏனெனில், $\cos\theta$ன் மதிப்பு -1க்கும் $+1$க்கும் இடையேதான் இருக்க முடியும்.

ஆகையால், $\cos\theta = \frac{1}{2}$. என்ற தீர்வுதான் ஒப்புக்கொள்ளத்தக்கது.

ஆனால், $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

ஆகையால், $\cos\theta = \cos 60° = \cos\frac{\pi}{3}$.

எனவே, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (§ 1·3.3)

மாதிரி 3: தீர்:— $\tan x - \sqrt{3}\cot x + 1 = \sqrt{3}$

$\tan x + 1 - \sqrt{3}(\cot x + 1) = 0$ (கொள்கை).

அதாவது, $(\tan x + 1) - \sqrt{3}\left(\frac{1 + \tan x}{\tan x}\right) = 0$

அல்லது, $\tan x(\tan x + 1) - \sqrt{3}(\tan x + 1) = 0$.

அதாவது, $(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$.

ஆகையால், $\tan x = -1$ அல்லது
$\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = -1$ என்றால், $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$ (§ 1·3.4)

[தீர்வு (i)]

$\tan x = \sqrt{3}$ என்றால், $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ [தீர்வு (ii)]

மாதிரி 4: தீர் :— $\sin\theta = 4\cos(\theta + 30°)$

$\sin\theta = 4\cos(\theta + 30°)$ (கொள்கை)

$= 4\{\cos\theta.\cos 30° - \sin\theta.\sin 30°\}$ (சூத்திரம் (6))

$\therefore \sin\theta\{1 + 4\sin 30°\} = 4\cos\theta\cos 30°$.

அதாவது, $\sin\theta\{1 + 4.\frac{1}{2}\} = 4.\cos.\theta\sqrt{\frac{3}{2}}$ (சூத்திரம் (4))

$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$= \tan 49° 7'$

எனவே, $\theta = n\,180° + 49° 7'$ (§ 1·3.4)

மாதிரி 5: $\theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{6}$-ம்

$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$-ம் ஒரே கோணங்களைக் குறிக்கின்றனவா ? ஏன் ?

$\theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n . \frac{\pi}{6}$ என்னும் கோணவை,

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$ ன் பொதுத் தீர்வு.

அதாவது, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. (i)

$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ என்னும் கோணவை,

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ ன் பொதுத் தீர்வு.

அதாவது, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (ii)

ஆனல், சமன்பாடு (i)லிருந்து உடனடியாகவே சமன்பாடு (ii)ஐப் பின் வருமாறு கொண்டுவரலாம்.

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$ (சூத்திரம் (5))

$$\equiv \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$$

(சூத்திரம் (5))

அதாவது, $$\equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$\equiv \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

$$\equiv \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

ஆகையால்,

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ம்

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ம் ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

ஆகையால், இவ்விரு சமயங்களிலிருந்து கிடைக்கும் θஇன் பொதுக் கோணவை ஒன்றுகத்தான் இருக்கும்.

$\theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ என்னும் கோவையைக் குறிக்கும் வட்ட ஆர நிலைகள் (இரண்டு நிலைகள், ஒன்று n ஒற்றை எண்ணாக இருக்கும்பொழுதும், மற்றது n இரட்டை எண்ணாக இருக்கும்பொழுதும்), $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ என்னும் கோவையையும் குறிக்கின்றன என்பதை நாம் படம் வரைந்து நன்கு அறியலாம்.

மாதிரி 6: தீர்: $\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 2$.

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்னும் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால், $\sqrt{a^2 + b^2}$ ஆல் சமன்பாட்டை வகுக்க வேண்டும்.

$$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 2 \text{ (கொள்கை)}$$

$\sqrt{3 + 1}$ ஆல் முழுவதும் வகுக்க.

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta = \tfrac{2}{2}$$

அல்லது, $\cos 30^\circ . \sin 2\theta + \sin 30^\circ \cos 2\theta = 1$.

அதாவது, $\sin(2\theta + 30^\circ) = 1 = \sin 90^\circ$

$$\therefore \quad \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad 2\theta + \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} \quad (\S\ 1{\cdot}3.2)$$

$$\therefore \quad \theta = n\frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$$

மாதிரி 7: தீர்: $4\cos x - 3\sin x + 2 = 0$

$t = \tan\frac{x}{2}$ எனக்கொள்.

$$\therefore \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{(சூத்திரம் 11)}$$

$\cos x . \sin x$, மதிப்புக்களைக் கொடுத்த சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\therefore \quad 4 . \frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} + 2 = 0$$

அதாவது, $4(1-t^2) - 6t + 2(1+t^2) = 0$

அல்லது, $t^2+3t-3=0$

$$\therefore \quad t=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm4\ 583}{2}$$

$$= 0{\cdot}7915 \text{ அல்லது } -3{\cdot}7915$$

அதாவது, $\tan\frac{x}{2} = 0{\cdot}7915 = \tan 38^\circ\ 22'$ அல்லது

$$\tan\frac{x}{2} = -3{\cdot}7915 = \tan(-75^\circ\ 13')$$

எனவே, $x = n\cdot360^\circ+76^\circ\ 44'$ அல்லது

$$x = n\ 360^\circ-150^\circ\ 26'$$

மாதிரி 8. $5\sin x-7\cos x$ன் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடி.

$$5\sin x-7\cos x=\left[\frac{5}{\sqrt{5^2+7^2}}\sin x-\frac{7}{\sqrt{5^2+7^2}}\cos x\right]\sqrt{5^2-7^2}$$

$$= \sqrt{74}\left[\sin x.\ \cos\alpha - \cos x.\sin\alpha\right]$$

$\tan\alpha = \frac{7}{5} \quad \therefore \quad \alpha = 54^\circ\ 28')$

$$\therefore \quad 5\sin x-7\cos x= \sqrt{74}\left[\sin(x-\alpha)\right]$$

$$= \sqrt{74}\sin(x-54^\circ\ 28')$$

$\sin\theta$ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு 1 என்றும், $\sin\theta$ன் மிகச் சிறிய மதிப்பு -1 என்றும் நமக்குத் தெரிந்ததே. ஆகையால், xக்கு 144° ... ln $x-7\cos x$க்கு $\sqrt{74}\sin 90^\circ$, அதாவது $\sqrt{74}$ என்ற மிகப் பெரிய மதிப்புக் கிடைக்கிறது. இதேபோல், xக்கு $-35^\circ\ 32'$ என்று பிரதியிட்டால் $5\sin.x-7\cos x$க்கு $\sqrt{74}.\sin(-90^\circ)$ அதாவது $-\sqrt{74}$ என்ற மிகச் சிறிய மதிப்புக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 9. பெருக்கல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\sin 10x + \cos 20x = 0$ஐத் தீர்.

$$\sin 10x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) \qquad \text{(சூத்திரம் (5))}$$

$\therefore$ $\sin 10x + \cos 20x = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) + \cos 20x = 0$ என்று மாற்றியமைக்கலாம்.

அதாவது,

$$2\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(15x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad \text{(சூத்திரம் 7))}$$

ஆகையால், $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ அல்லது

$$\cos\left(15x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$\therefore$ $5x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ அல்லது

$$15x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

எனவே, $x = 2n\frac{\pi}{5} \pm \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{20}$ அல்லது

$$x = 2n\frac{\pi}{15} \pm \frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{60}$$

மாதிரி 10. $\tan p\theta = \cot q\theta$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து θன் பல்வேறு மதிப்புக்கள் கூ. வி. இல் இருக்கின்றன எனக் காண்பி. (கூ. வி.: A.P.)

$\tan p\theta = \cot q\theta$ (கொள்கை)

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - q\theta\right)$$

$$\therefore \quad p\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - q\theta$$

$$\theta(p+q) = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = n\frac{\pi}{p+q} + \frac{\pi}{2(p+q)}$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots\ldots\ldots)$

ஆகையால், θன் பல்வேறு மதிப்புக்களாவன,

..............., $-\frac{2\pi}{p+q}+\frac{\pi}{2(p+q)}$, $\frac{-\pi}{p+q}+\frac{\pi}{2(p+q)}$, $\frac{\pi}{2(p+q)}$, $\frac{\pi}{p+q}+\frac{\pi}{2(p+q)}$,............... இவைகள் ஒரு கூட்டுவிருத்தியில் (கூ.வி.) அமைகின்றன. இந்த கூ.வி.யின் பொது வித்தியாசம் (common difference) $=\frac{\pi}{p+q}$.

மாதிரி 11. தீர் :- $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$

$t=\tan x$ எனக்கொள்.

$$\therefore \quad \tan 2x=\frac{2t}{1-2t} \qquad \text{(சூத்திரம் (11))}$$

$$\tan 3x=\frac{3t-t^3}{1-3t^2} \qquad \text{(சூத்திரம் (12))}$$

$\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad t+\frac{2t}{1-t^2}+\frac{3t-t^3}{1-3t^2}=0.$$

அதாவது, $t\left\{1+\frac{2}{1-t^2}\right\}+t\left\{\frac{3-t^2}{1-3t^2}\right\}=0$

அல்லது, $t\left\{\frac{3-t^2}{1-t^2}+\frac{3-t^2}{1-3t^2}\right\}=0$

$$t(3-t^2)\cdot\left\{\frac{2-4t^2}{(1-t^2)(1-3t^2)}\right\}=0$$

$$2\cdot t(3-t^2)(1-2t^2)=0\cdot$$

$t=0$ அல்லது,

$t=\pm\sqrt{3}$ அல்லது

$t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

அதாவது, $\tan x=0=\tan 0$ அல்லது,

$\tan x=\pm\sqrt{3}=\tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

அல்லது, $\tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\tan(\pm 35^\circ\ 16')$

எனவே, $x = n\pi$ அல்லது

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ அல்லது,}$$

$$x = n180^\circ \pm 35^\circ\ 16'.$$

மாதிரி 12. தீர் : $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x . \cos 3x = \frac{3}{4}$

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$

$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ (சூத்திரம் (12))

$\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$ (கொள்கை)

$\cos^3 x(3 \sin x - 4 \sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x - 3 \cos x) = \frac{3}{4}.$

அதாவது, $3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{4}.$

அல்லது $\frac{3}{2} \cdot \sin 2x \cdot (\cos 2x) = \frac{3}{4}.$ (சூத்திரம் 9))

அல்லது, $\frac{3}{4} \sin 4x = \frac{3}{4}.$ (சூத்திரம் 9))

எனவே, $\sin 4x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}.$

$$4x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

அல்லது, $$x = n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{8}$$

அப்பியாசம் 1 (ஆ)

θன் பொதுக் கோவையைக் கண்டுபிடி : (கேள்விகள் 1 லிருந்து 10 வரை.)

1. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [விடை $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$]

2. $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ [விடை $\theta = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{4}$]

3. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ [விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$]

4. $\sec \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ [விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$]

5. $\sec \theta = -\sqrt{2}$ [விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$]

6 $\operatorname{cosec}\theta = -3$ [விடை $\theta = n\,180^\circ - (-1)^n\,19^\circ\,28'$]

7. $\tan^2\theta = 3$ [விடை $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$]

8 $\cos^3\theta = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ [விடை $\theta = n\pi - \frac{\pi}{3}$]

9. $\sec^2\theta = 4.$ [விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$;

$\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$]

10. $\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{4}{3}$ [விடை $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$;

$\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$]

11. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan\theta = 1$ என்னும் இரு சமன்பாடுகளின் பொதுக் கோணம் θன் பொது மதிப்பு (general value) $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ எனக் காண்க.

12. $\sin(\theta+\phi) = \frac{1}{2}$; $\cos(\theta-\phi) = -\frac{1}{2}$ எனில் θ, ϕஐக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை $\theta = \frac{\pi}{2}(n+2m) + (-1)^w\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3}$;

$\phi = \frac{\pi}{2}(n-2m) + (-1)^w\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3}$]

13. $\tan(\theta+\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\theta-2\phi) = \frac{1}{2}$ எனில் θ, ϕஐக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை $\theta = \frac{2\pi}{3}(n+m) + \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9}$;

$\phi = \frac{\pi}{3}(n-2m) + \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{9}$]

14. $\cos\theta = \tan\phi$; $\sin\theta = \sec\phi$ என்றால் θ, ϕஐக் கண்டு பிடிக்க.

$$\left[\text{விடை } \theta = 2(n+1)\frac{\pi}{1};\ \phi = m\pi\right]$$

பின் வருவனவற்றைத் தீர்:

15. $4\cos\theta - 3\sec\theta = 2\tan\theta$

$$\left[\text{விடை } \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{10};\quad \theta = n\pi - (-1)^n\frac{3\pi}{10}\right]$$

16. $11\sec\theta + 3\tan\theta = 20\cos\theta$

$$\left[\text{விடை } \theta = n(180^\circ) + (-1)^n\, 56^\circ\, 5[illegible]';\quad \theta = n(180^\circ) - (-1)^n\, 48^\circ\, 35'\right]$$

17. $\sin x = \cos 2x$

$$\left[\text{விடை } x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6};\quad x = n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$$

18. $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0.$

$$\left[\text{விடை } \theta = m\pi + (-1)^m\frac{\pi}{2};\quad \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right]$$

19. $4\cos 2\theta + 6\sin\theta - 5 = 0$

$$\left[\text{விடை } \theta = n(180^\circ) + (-1)^n\, 30^\circ;\quad \theta = m(180^\circ) + (-1)^m\, 14^\circ\, 29'\right]$$

20. $22\cot^2\theta - 32\operatorname{cosec}\theta + 32 = 0$

$$\left[\text{விடை } \theta = n(180^\circ) + (-1)^n\, 53^\circ\, 8';\quad \theta = m(180^\circ) + (-1)^m\, 48^\circ\, 35'\right]$$

21. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

$$\left[\text{விடை } x = (2n+1)\frac{\pi}{2};\quad x = (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]$$

22. $2\tan^2 x = 7 - 3\sec x$

[விடை $x = n(360°) \pm 48° 11'$;
$x = n(360°) \pm 109° 28'$]

23. $\tan\theta + 4\cot 2\theta + 1 = 0$

[விடை $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$;
$\theta = n(180°) + 63° 26'$]

24. $10\sin^2\theta - 21\sin\theta.\cos\theta + 9\cos^2\theta = 0$

[விடை $\theta = n(180°) + 56° 19'$;
$\theta = m(280°) + 30° 58'$]

25. $\sec^2\theta - (\sqrt{3}+2)\tan\theta + (\sqrt{3}-1) = 0$

[விடை $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$;
$\theta = m\pi + \frac{\pi}{4}$]

26. $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

[விடை $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$]

27. $\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 3\cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

[விடை $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}$]

28. $\tan\theta = 1 - \sec 2\theta$ [விடை $\theta = n\pi$;
$\theta = m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$]

29. $\cos\theta = 2\sin(\theta + 10°)$ [விடை $\theta = n(180°) + 18° 20'$]

30. $\sin x = \cos\alpha$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, $(2n + \frac{1}{2})\pi \pm \alpha$, $n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ என்ற இரு கோவைகளும் ஒரே கோணத்தைக் குறிக்கின்றன எனக் காண்க

31. $\sqrt{\sin 2\theta} + \cos 2\theta = 2$

[விடை $\theta = n\frac{\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$]

32. $\tan x - \sqrt{2} \sec x = \sqrt{3}$

$$\left[\text{விடை } x = n\pi + \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} \right]$$

33. $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

$$\left[\text{விடை } \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

34. $8 \cos^2\theta + 15 \sin \theta = -5{\cdot}1$

[விடை $\theta = n(360°) + 169° \; 24$;
$\theta = n \; 360°) + 3 \; 4° \; 29']$

35. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$ [விடை $x = 2n\pi$;
$x = 2n\pi + 2\frac{\pi}{3}$]

36. $(1{\cdot}8) \cos \theta + (7{\cdot}5) \sin \theta = 3{\cdot}2$

[விடை $\theta = n(360°) + 142°$;
$\theta = n(360°) + 11°$]

37. $80 \sin \theta + 18 \cos \theta = 41$

[விடை $\theta = n(360°) + 17° \; 21'$;
$\theta = n(360°) + 137° \; 19'$]

38. $6 \cos x - 8 \sin x = 9$

[விடை $x = n(360°) - 53° \; 8' \pm 25° \; 51'$]

39. $5 \sin \theta - 12 \cos \theta = 3{\cdot}25$

[விடை $\theta = n(360°) - 22° \; 37' \pm 104° \; 29'$]

40. $\tan x + \tan y = \sqrt{2}$; $\tan x. \; \tan y = \sqrt{2} - 1$ எனில், $\tan x$, $\tan y$ ஐக் கண்டுபிடித்து, அதிலிருந்து, x, yஐக் காண்க

$$\left[\text{விடை } x = m\pi + \frac{\pi}{8} \; ; \quad y = n\pi + \frac{\pi}{4} \; ; \right.$$

$$\left. x = n\pi + \frac{\pi}{4} \; ; \quad y = m\pi + \frac{\pi}{8} \right]$$

41. $4 \cos x - 3 \sin x + 2 = 0$. [விடை $x = n(360°) + 76° \; 44'$; $x = n(360°) - 150° \; 26'$].

பின்வரும் கோவைகளை $R \cos (\theta + \alpha)$ என்ற உருவத்தில் மாற்றி அமைக்க :— (கேள்விகள் 42லிருந்து 45 வரை)

42. $4 \cos (\theta) + 15 \sin \theta$ [விடை $\sqrt{241} \cos (\theta - 75° 4')$

43. $8 \cos \theta + 6 \sin \theta$ [விடை $10 \cos (\theta - 36° \; 52')$

44. $5 \cos \theta \sqrt{24} \sin \theta$ [விடை $7 \cos (\theta + 44° 25')$]

45. $12 \cos \theta - \sin \theta$. [விடை $13 \cos (\theta + 22° 37')$]

46. $3 \cos \theta - 40 \sin \theta$, $2 \sin \theta + 15 \cos \theta$ முதலிய கோவைகளின் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $\pm \sqrt{1609}$ $\pm \sqrt{229}$]

பின்வருவனவற்றைத் தீர் :-

47. $\sin 7\theta - \sin \theta = \sin 3\theta$ [விடை $\theta = \frac{n\pi}{6}$; $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$]

48. $\cos 8\theta - \cos 4\theta = \sin 6\theta$ [விடை $\theta = \frac{m\pi}{6}$: $\theta = \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{12}$]

49. $\sin 8\theta + \sin 6\theta = \sin 2\theta$ [விடை $\theta = \frac{m\pi}{3}$; $\theta = \frac{(2n+1)}{8}\pi$: $\theta = \frac{(2n+1)}{2}\pi$]

50. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$

[விடை $\theta = 2m\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $\theta = \frac{n\pi}{2}$]

51. $\cos 3\theta - \cos 4\theta = \cos 5\theta - \cos 6\theta$

[விடை $\theta = n\pi$; $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{9}$]

52. $4 \sin \theta . \sin (\theta - \alpha) = 2 \cos (\alpha) - 1$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெருக்கல் சூத்திரத்தின் மறுதலையை உபயோகித்து $\theta = n\pi + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$ என்று நிறுவுக.

53. $2\sqrt{2} \cos 2\theta . \cos (2\theta - \alpha) = \sqrt{2} \cos x + 1$ எனில் $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \pm \frac{\pi}{16}$ எனக் காண்க.

54. $2 \sin 4\theta \cos (3\theta - \alpha) = \sin (\theta + \alpha) + 1$ எனில் $\theta = \frac{1}{7} \left\{ n\pi + \alpha + (-1)^n \frac{\pi}{2} \right\}$ என நிறுவுக.

55. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து θக்குக் கிடைக்கும் மதிப்புகள் இரு கூ வி களில் அமையும் என நிறுவுக. அவ்விரு கூ வி களின் பொது வித்தியாசங்கள் (C. D's.) முறையே $\frac{2\pi}{5}$, 2π என்றும் நிறுவுக

பின் வருவனவற்றைத் தீர் :— (கேள்விகள் 56லிருந்து 64 வரை.)

56. $\sin 5\theta = \cos 6\theta$ [விடை $\ldots\, \iota + 1) \frac{\pi}{22}$; $\theta = -(2m + \frac{1}{2})\pi$]

57. $\tan 3\theta \cot \theta = 1$ [விடை $\theta = \frac{n\pi}{2}$]

58 $\tan 2\theta . \tan 6\theta = 1$ [விடை $\theta = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{8}$]

59. $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan \theta . \tan 2\theta = 1$

[விடை $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$]

60. $\tan \theta + \cot 2\theta = 0$ [விடை $\theta = n\pi - \frac{\pi}{2}$]

61. $2 \cos 3\theta + 6 \cot - 3\sqrt{3} = 0$

[விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$]

62. $\sin 3\theta - 3 \sin \theta + \frac{1}{2} = 0$

[விடை $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$]

63. $\tan 3x = \tan x + \tan 2x$

[விடை $x = n\pi, \frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{3}$]

64. $2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta - 1 = 0.$

[விடை $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$]

4. விலக்கல்
(Elimination)

மாறிகளை, கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சமன்பாடுகளிலிருந்து விலக்குவதற்குத் திரிகோண விகித சூத்திரங்கள் பயன்படும். மாறிகளை விலக்கும் சில முறைகளை சில உதாரணங்கள் மூலம் விளக்குகிறோம்:

1·41. ஒரு மாறி (One variable)

மாதிரி 1 : a, b, c, l, m, n நிலை எண்களாகில்,

$$a \sec \theta + b \tan \theta = c$$

$l \sec \theta + m \tan \theta = n$ என்ற இரு சாம்யங்களிலிருந்தும் θ என்ற மாறியை விலக்க.

$$a \sec \theta + b \tan \theta = c \qquad \text{(i)}$$

$$l \sec \theta + m \tan \theta = n \qquad \text{(ii)}$$

சமன்பாடு (i)ஐ l ஆலும் (ii)ஐ (a) ஆலும் பெருக்கிக் கழிக்க.

$$(bl-am) \tan \theta = cl-an$$

எனவே,
$$\tan \theta = \frac{cl-an}{bl-am} \qquad \text{(iii)}$$

சமன்பாடு (i)ஐ m ஆலும் (ii)ஐ b ஆலும் பெருக்கிக் கழிக்க.

$$(am-bl) \sec \theta = cm-bn$$

எனவே,
$$\sec \theta = \frac{cm-bn}{am-bl} \qquad \text{(iv)}$$

மேலும் $\sec^2\theta \equiv 1 + \tan^2\theta$ (சூத்திரம்)

எனவே,
$$\left(\frac{cm-bn}{am-bl}\right)^2 = 1 + \left(\frac{cl-an}{bl-am}\right)^2$$

அதாவது $(cm-bn)^2 = (bl-am)^2 + (cl-an)^2$

(ii) இரு மாறிகள் (Two variables)

மாதிரி 2. θ, ϕ என்று இரு மாறிகளையும் கீழ்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து விலக்க.

(i) $(x-a) \cos \theta + y \sin \theta = a;$

(ii) $(x-a) \cos \phi + y \sin \phi = a;$

(iii) $\tan \dfrac{\theta}{2} - \tan \dfrac{\phi}{2} = 2e.$

$$\cos A = \frac{1-\tan^2 A/2}{1+\tan^2 A/2}; \ \sin A = \frac{2 \tan A/2}{1 + \tan^2 A/2}$$

$\tan A/2 = t$ என்க.

$\tan \frac{\phi}{2} = t_1$, $\tan \frac{\theta}{2} = t_2$ எனில், சமன்பாடுகள் (i), (ii) லிருந்து, t_1, t_2 என்பவை.

$(x-a)\frac{1-t^2}{1+t^2} + y. \frac{2t}{1+t^2} = a$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். அதாவது, t_1, t_2 என்பவை

$$(x-a)(1-t^2) + 2t(y) = a(1+t^2)$$

அல்லது $xt^2 - 2yt + 2a - x = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங் களாகும்.

எனவே, $t_1 + t_2 = \frac{2y}{x}$; $t_1 t_2 = \frac{2a-x}{x}$ ....(A)

ஆனல் சமன்பாடு (iii)லிருந்து $t_1 - t_2 = 2e$ ....(B)

மேலும் $(t_1 + t_2)^2 = (t_1 - t_2)^2 + 4t_1t_2$.

ஆகையால், (A), (B)யிலிருந்து,

$$\frac{4y^2}{x^2} = 4e^2 + 4\left(\frac{2a-x}{x}\right)$$

அதாவது, $y^2 = e^2x^2 + x(2a-x)$

அல்லது, $x^2(1-e^2) + y^2 = 2ax$.

அப்பியாசம் 1 (இ)

1. கீழ் வருவனவற்றில் θஐ விலக்குக.

(i) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$; $a\sin\theta - b\cos\theta = d$.
[விடை : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$]

(ii) $a\cos\theta + b\sin\theta + c = O = l\cos\theta + m\sin\theta + n$
[விடை : $(bn-cm)^2 + (cl-an)^2 = (am-bl)^2$]

(iii) $\frac{a}{b}\cos\theta = 1 = \frac{a}{c}\sin(\theta-\phi)$ [ϕ நிலையானது]
[விடை : $(c + b\sin\phi)^2 + b^2\cos^2\phi = a^2\cos^2\phi$]

(iv) $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - 1 = O = \frac{y}{b}\cos\theta - \frac{x}{a}\sin\theta$
[விடை : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$]

(v) $a\tan\theta = 1 = b\cos\theta$
[விடை : $a^2 + 1 = a^2b^2$]

(vi) $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$; $y\cos\theta = x\sin\theta + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$.

[விடை: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a + b$ அல்லது

$\{a(y^2 - b^2 + b(x^2 - a^2)\}^2 + 4ab\,x^2y^2 = 0$]

(vii) $a\sin^3\theta = 1 = b\cos^3\theta$.

[விடை: $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} = 1$]

2. கீழ்வருவனவற்றில் θ, ϕஐ விலக்க:

(i) $(x-a)\cos\theta + y\sin\theta = x + a$;

$(x-a)\cos\phi + y\sin\phi = x + a$.

$\tan\frac{\theta}{2} \cdot \tan\frac{\phi}{2} = -1$. [விடை: $x + a = 0$]

(ii) $ax\cos\theta + by\sin\theta = c$;

$ax\cos\phi + by\sin\phi = c$;

$\tan\theta . \tan\phi = -\frac{a^2}{b^2}$

[விடை: $a^2b^2(x^2 + y^2) = c^2(a^2 + b^2)$]

(iii) $\cos\theta + \cos\phi = a$.

$\sin\theta + \sin\phi = b$.

$\tan\frac{(\theta-\phi)}{2} = c$ [விடை: $(a^2 + b^2)(1 + c^2) = 4$]

(iv) $x\cos\theta + y\sin\theta = a$.

$x\cos\phi + y\sin\phi = a$.

$\sin\theta\sin\phi = 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$

[விடை: $y^2 = 2 = xa + a^2$]

அத்தியாயம் II

முக்கோணங்களும், நாற்கரங்களும்

முதற்பிரிவு (முக்கோணங்கள்)

2·11. நாற்கர உண்மைகளை விளக்கக்கூடிய சூத்திரங்களை நிறுவுவதற்கு முன்பு, கீழ்க்கண்ட முக்கோண சூத்திரங்களை மனத்தில் வைத்துக்கொள்வது மிகவும் அவசியம்.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad \ldots\ldots(a)$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \sin A = \tfrac{1}{2} ca \sin B = \tfrac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A.\ \sin B.\ \sin C. \qquad \ldots\ldots(b)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(c)$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= C \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(d)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\triangle}{s} \\ r_1 &= \frac{\triangle}{s-a} \\ r_2 &= \frac{\triangle}{s-b} \\ r_3 &= \frac{\triangle}{s-c} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(e)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(B+C) &= \sin(180^\circ - A) = \sin A \\ \cos(B+C) &= \cos(180^\circ - A) = \cos A \\ \tan(B+C) &= \tan(180^\circ - A) = -\tan A \\ \sin\frac{(B+C)}{2} &= \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \\ \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) &= \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2} \\ \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) &= \tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \mathrm{cof}\,\frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(f)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}.\\ \sin B + \sin C - \sin A &= 4\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.\\ \sin C + \sin A - \sin B &= 4\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}.\\ \sin A + \sin B - \sin C &= 4\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (g)$$

2·12. இப்பொழுது $r = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ என நிரூபிப்போம். (R என்பது சுற்றுவட்ட ஆரம்)—(circum radius).

$$r = \frac{\Delta}{s}. \qquad \text{(சூத்திரம் } (e))$$

ஆனால், $\Delta = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C.$ (சூத்திரம் (b))

$$= 2R^2 . 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}.$$

$$2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$\left[\because \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}. \quad \text{(சூத்திரம் (9)}\right]$$

§ 1·1

$$= 16R^2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

.... (i)

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C\}$$

(சூத்திரம் (a))

$$= R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= R\left(4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right) \text{(சூத்திரம் (g)} \ldots \text{(ii)}$$

∴ (i), (ii)லிருந்து,

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{16R^2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{4R\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

இம்மாதிரியே,

$$r_1=\frac{\Delta}{s-a}=\frac{16R^2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$=\frac{16R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{R(\sin B+\sin C-\sin A)}$$

$$=\frac{16R^2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

[சூத்திரம் (v)]

$$\therefore\ r_1=4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

2·13. $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$

என நிரூபிப்போம்.

$$s-a=\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2R\sin B+2R\sin C-2R\sin A)$$
$$=R(\sin B+\sin C-\sin A)$$
$$=4R\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$ (சூத்திரம் (g))

$$\therefore\ (s-a)\tan\frac{A}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$
$$=r$$ (§ 2·12)

இம்மாதிரியே,

$$(s-b)\tan\frac{B}{2}=r=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$$

இப்பொழுது, $r_1=s\tan\frac{A}{2}$ என நிரூபிப்போம்.

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$= R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \qquad \text{(சூத்திரம் (g))}$$

$$\therefore\ s\tan\frac{A}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$= r_1 \qquad (\S\ 2{\cdot}12)$$

இம்மாதிரியே

$$s\tan\frac{B}{2} = r_2;\quad s\tan\frac{C}{2} = r_3$$

2·14. இப்பொழுது $r_1+r_2+r_3-r=4R$ என நிரூபிப்போம்.

$$r_1+r_2+r_3-r$$

$$= 4R\left\{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$+4R\left\{\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right\} \qquad (\S\ 2{\cdot}12)$$

$$= 4R.\cos\frac{C}{2}\left\{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right\}$$

$$+4R.\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right\}$$

$$= 4R.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{A+B}{2}+4R.\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2} \qquad \text{சூத்திரம் (6))}$$

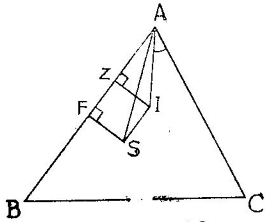
$$= 4R.\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+4R\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \qquad \text{(சூத்திரம் (f))}$$

$$= 4R\left\{\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right\}$$

$$= 4R.$$

2·15. முக்கோணம் ABC இன் சுற்று மையம் (circum centre) S க்கும் உள் மையம் I க்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டு பிடிக்க.

S என்பது ABC முக்கோணத்தின் சுற்று மையம். ஆகையால், Sஇலிருந்து ABக்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து அதற்கு F என்பது அடிப்புள்ளியாக இருந்தால், F என்பது ABன் மையப்புள்ளி ஆகும். இம்மாதிரியே, IZ என்பது ABக்குச் செங்குத்துக்கோடு.



படம்-10

$$\frac{IZ}{AI} = \sin\frac{A}{2}$$ [∵ IA கோணம் Aன் உள் இருசம வெட்டி]

$$AI = \frac{IZ}{\sin A/2}$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$= 4R.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{c}{2} \qquad \text{............(i)}$$

$$SA = R \qquad \text{............(ii)}$$

$$F\hat{A}S = 90° - A\hat{S}F = 90° - C;$$

$$F\hat{A}I = I\hat{A}C = \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad S\hat{A}I = \frac{A}{2} - 90° - C;$$

$$= \frac{A}{2} - 90° + C$$

$$= \frac{A}{2} + C - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$(\because A + B + C = 180°)$$

$$= \frac{C - B}{2} \qquad \text{............(iii)}$$

இப்பொழுது, $\triangle SAI$ இலிருந்து,

$$SI^2 = AS^2 + AI^2 - 2AS.\ AI \cos S\hat{A}T \text{ (சூத்திரம் (C)}$$

$$= R^2 + 16R^2 \sin^2\frac{B}{2}.\ \sin^2\frac{C}{2} - 2R.\ 4R.$$

$$\sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.\ \cos\frac{C-B}{2}$$

[(i), (ii), (iii) லிருந்து]

$$= R^2 + 16R^2 \sin^2\frac{B}{2}.\ \sin^2\frac{C}{2}$$

$$- 8R^2 \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}$$

$$\left\{\cos\frac{B}{2}.\ \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$= R^2 + 16R^2 \sin^2\frac{B}{2}.\ \sin^2\frac{C}{2} - 8R^2 \sin^2\frac{B}{2}$$

$$\sin 2\frac{C}{2} - 8R^2 \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.\ \cos\frac{B}{2}.\ \cos\frac{C}{2}.$$

$$= R^2 + 8R^2 \sin^2\frac{B}{2}.\ \sin^2\frac{C}{2} - 8R^2 \sin\frac{B}{2}.$$

$$\sin\frac{C}{2}.\ \cos\frac{B}{2}.\ \cos\frac{C}{2}$$

$$= R^2 - 8R^2 \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.$$

$$\left\{\cos\frac{B}{2}.\ \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$= R^2 - 8R^2 \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.\ \cos\frac{B+C}{2}$$

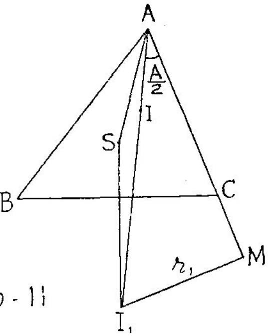
$$R^2 - 8R^2 \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.\ \sin\frac{A}{2} \text{ (சூத்திரம் } (\gamma))$$

$$= R^2 - 2R.\ 4R.\ \sin\frac{A}{2}.\ \sin\frac{B}{2}.\ \sin\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ ST^2 = {}^2r - 2R.\ r.$$

2·16. முக்கோணம் ABCயின் சுற்று மையம் Sக்கும் வெளி மையம் I_1க்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

படம் 11ல் I_1 என்பது வெளி மையம் I_1லிருந்து ACக்கு வரையப்படும் லம்பத்தின் அடிப்புள்ளி M. ஆகையால், $I_1M = r_1$.



படம் - 11

மேலும், I_1 ஐ மையமாக வைத்து I_1Mஐ ஆரமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வெளிதொடு வட்டம் AB, ACன் நீட்டிய பாகங்களை யும், BCஐயும் தொடும். ACன் நீட்டிய பாகத்தை இவ்வட்டம் தொடும் புள்ளிதான் M.

I_1 என்பது, கோணம் Aன் உள் இரு சமவெட்டி, கோணங்கள் B, Cன் வெளி இரு சமவெட்டிகள் ஆகிய இம்மூன்று நேர் கோடு களும் சந்திக்கும் புள்ளி. (ஆகையால், A, I, I_1 இம்மூன்று புள்ளி களும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும்)

$$\frac{I_1M}{AI_1} = \sin\frac{A}{2}.$$

அல்லது, $$AI_1 = \frac{I_1M}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}$$

அதாவது, $$AI_1 = 4R\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \qquad \text{.................(i)}$$

$$SA = R \qquad \text{.................(ii)}$$

$$S\hat{A}T_1 = S\hat{A}I = \frac{C-B}{2} \qquad \text{.................(iii)}$$

$\triangle SAI_1$ லிருந்து, $SI_1^2 = SA^2 + AI_1^2 - 2SA.\ AI_1 . \cos S\hat{A}I_1$

$$= R^2 + 16R^2 \cos^2 \frac{B}{2} . \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$- 2R.\ 4R.\ \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} . \cos \frac{C-B}{2}$$

$$\therefore\ SI_1^2 = R^2 + 16 R^2 \cos^2 \frac{B}{2} . \cos^2 \frac{C}{2} - 8R^2 \cos \frac{B}{2} .$$

$$\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right.$$

$$= R^2 + 16R^2 \cos^2 \frac{B}{2} . \cos^2 \frac{C}{2} - 8R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{2}{C}$$

$$= 8R^2 . \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos^2 \frac{B}{2} . \cos^2 \frac{C}{2} - 8R^2 \cos \frac{B}{2} .$$

$$\cos \frac{C}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2}$$

$$\left\{ \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2} \right\}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} . \cos \frac{B+C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} . \sin \frac{A}{2}$$

$$= R^2 + 2R.\ 4R. \sin \frac{A}{2} . \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2}$$

$$\therefore\ SI_1^2 = R^2 + 2R.\ r_1$$

இம்மாதிரியே, $SI_2^2 = R^2 + 2\ R.\ n_2$; $SI_3^2 = R^2 + 2R.\ n3$.

குறிப்பு : $SI^2 + SI_1{}^2 = SI^2{}_2 + SI^2{}_3 = 12R^2$

$\because\ SI^2 = R^2 - 2R\ r$ ....(§ 2.15)

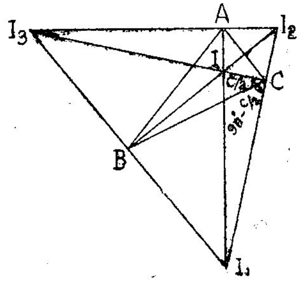
$SI^2{}_1 = R^2 + 2Rr_1$

$SI^2{}_2 = R^2 = 2Rr_2$

$SI^2{}_3 = R^2 + 2R\ r_3$ ....(§ 2·16)

$$\therefore \; SI^2 + SI_1^2 + SI_2^2 + SI_3^2$$
$$= 4R^2 + 2R\,(r_1 + r_2 + r_3 - r)$$
$$= 4R^2 + 2R \cdot 4R \qquad \text{..........} (\S\ 2.14)$$
$$= 12R^2.$$

2·17. வெளிமையங்கள் I_1, I_2, I_3 ஐச் சேர்க்கும் முக்கோணம்



படம்-11 (அ)

AII_1, BII_2, CII_3 ஆகிய இம்மூன்றும் நேர்க்கோடுகள் (I, உள்மையம்). CI, CI_1 கோணம் Cஇன் உள், இரு சமவெட்டிகள்

ஆகையால், $B\hat{C}I = \frac{C}{2}$;

$$B\hat{C}I_1 = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

இம்மாதிரியே, $C\hat{B}I_1 = 90^\circ - \frac{B}{2}$. ஆகையால்,

கோணம். $I_3I_1I_2 = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$

$$= \frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

$\triangle\ I_1I_2I_3$ல் $\hat{I}_1 = 90^\circ - \frac{A}{2}$; இம்மாதிரியே,

$$\hat{I}_2 = 90^\circ - \frac{B}{2};$$

$$\hat{I}_3 = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

முக்கோணம் AI_2Cலிருந்து $\frac{AI_2}{AC} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)}$

(சூத்திரம் (a))

ஆகையால், $AI_2 = b. \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

$$= 2R \sin B \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 4R \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 4R \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

இம்மாதிரியே, $\triangle BAI_3$ இருந்து, $\frac{I_3A}{AB} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{c}{2}\right)}$

அல்லது, $I_3A = C \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

$$= 4R. \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4R. \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2} \qquad (ii)$$

$\therefore \quad I_3A + AI_2 \quad = 4R\left\{\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$

$$= 4R \left\{ \sin \frac{(B + C)}{2} \right\}$$

$$= 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \qquad \text{(சூத்திரம் } (f))$$

ஆகையால் ; $I_2 I_3 = 4R \cos \frac{A}{2}$

இம்மாதிரியே, $I_3 I_1 = 4R \cos \frac{B}{2}$

$$I_1 I_2 = 4R \cos \frac{C}{2}$$

குறிப்பு (1): $\triangle\ I_1 I_2 I_3$க்கு I என்பது செங்குத்து மையம் (Orthocentre).

குறிப்பு (2): $\triangle\ I_1 I_2 I_3$இன் சுற்று ஆரம்

$$= \frac{I_2 I_3}{2 \sin \hat{I}_1} \qquad \text{(சூத்திரம் } (a))$$

$$= \frac{4R \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{4R \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}}$$

$$= 2R.$$

அதாவது, $= 2$ (சுற்று ஆரம்)

(R முக்கோணம் ABC யின்சுற்று ஆரம்)

குறிப்பு (3) : $\triangle\ I_1 I_2 I_3$ன் பரப்பு

$$= \frac{I_1 I_2 \quad I_2 I_3 \quad I_3 I_1}{4 \quad 2R} \qquad \text{(சூத்திரம் } (b))$$

$$= \frac{64 R_3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{8R}$$

$$= 8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2R^2 \; 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$= 2R.\{\sin A + \sin B + \sin C\}$ (சூத்திரம் (x))

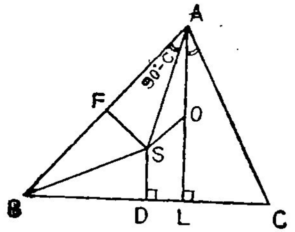
$= 2R^2 \left\{ \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right\}$ (சூத்திரம் (a))

$= R(a+b+c)$

$= R; 2s$

$= 2Rs.$

2.18. $\triangle ABC$இன் சுற்று மையம் S-க்கும் செங்குத்து மையம் Oக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 12

BCக்கு, Aயிலிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு AL மீது O அமையும்

$\triangle ALC$யிலிருந்து..

$L\hat{A}C = 90° - L\hat{C}A = 90° - C.$ $(\because \hat{L} = 90°)$

மேலும், $F\hat{S}A = \hat{C}$ ($FS \perp AB$ (அமைப்பு)

$\therefore$ $F\hat{A}S = 90° - C$ $(\because \hat{F} = 90°)$

மேலும் $S\hat{A}O = \hat{A} - F\hat{A}S - O\hat{A}C$

$= A - (90° - C) - (90 - C)$

$= A - 2(90° - C)$

$= 2C + A - (A+B+C)$

$(\because A+B+C = 180°)$

$= C - B.$ ....(1)

$SA = R$ ....(ii)

$AO = 2SD$ (வடிவகணிதத் தேற்றம்)

ஆனால், $\frac{SD}{BS} = \cos D\hat{S}B = \cos \hat{A}$

$\therefore$ $SD = BS.\cos A = R\cos A$

$\therefore \quad AD = 2SD \qquad = 2R \cos A$ .... (iii)

$\triangle\ SAO$ விலிருந்து,

$SO^2 = AS^2 + AO^2 - 2AS.\ AO \cos S\hat{A}O$ (சூத்திரம் (c))

$= R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 2.\ R.\ 2R.\ \cos A.\ \cos(C - B)$

$= R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A.\ \cos(C - B)$

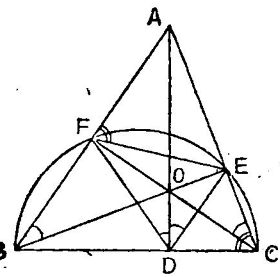
$= R^2 - 4R^2 \cos A \{ \cos(C - B) - \cos A \}$

$= R^2 - 4R^2 \cos A \{ \cos(C - B) + \cos(B + C) \}$ (சூத்திரம் (f))

$= R^2 - 4R^2 \cos A \{ 2 \cos B.\ \cos C \}$ (சூத்திரம் (7))

$\therefore \quad SO = R^2 - 8R^2 \cos A.\ \cos B.\ \cos C.$

2.9 பாத முக்கோணம் (Pedal triangle)



படம் 13

AD, BE, CF என்பவை BC, CA, ABக்கு வரையப்பட்ட குத்துக் கோடுகள். ஆகையால், $B\hat{F}C = 90° = B\hat{E}C$.

எனவே, $BFEC$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்

$\therefore \quad A\hat{F}E = E\hat{C}B$ (உள் எதிர்க்கோணம்)

$= \hat{C}$

இம்மாதிரியே, $A\hat{E}F = \hat{B}$.

ஆகையால், முக்கோணங்கள் AEF, ABC வடிவொத்தவை. (similar trianngles)

$\therefore \quad \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC} = \cos F\hat{A}C \quad (\because \hat{F} = 90°)$

$= \cos \hat{A}$

அல்லது, $EF = BC \cos A = a \cos \hat{A}$

இம்மாதிரியே,

$FD = b \cos \hat{B}; \quad DE = C \cos \hat{C}$

மேலும் $ODBF$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்

$\therefore \quad O\hat{D}B + O\hat{F}B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ)$

ஆகையால், $O\hat{D}F = O\hat{B}F.$

$= A\hat{B}E = 90^\circ - \hat{A} \quad (\because \; A\hat{E}B = 90^\circ)$

இம்மாதிரியே $O\hat{D}E = O\hat{C}E = F\hat{C}A = 90^\circ - A.$

ஆகையால், $E\hat{D}F = O\hat{D}F + O\hat{D}E = 90^\circ - A$

$+ 90^\circ - A = 180^\circ - 2\hat{A}.$

அதேபோல், $D\hat{E}F = 180^\circ - 2\hat{B}; \quad E\hat{F}D = 180^\circ - 2\hat{C}$

குறிப்பு (1) : (மேல் கண்ட பாத முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், கோணங்கள் இவைகளின் மதிப்பிலிருந்து) பாத முக்கோணத்தின் சுற்று ஆரம் $= \dfrac{EF}{2 \sin \hat{D}} = \dfrac{a \cos A}{2 \sin (180^\circ - 2A)}$

$= \dfrac{2R \sin A \cos A}{2. \sin 2A}$

$= \dfrac{R \sin 2A}{2 \sin 2A} = \dfrac{R}{2}.$

$= \frac{1}{2}.$ ($\triangle ABC$ன் சுற்று வட்ட ஆரம்)

$\triangle$ DEF இன் சுற்று வட்டம் $\triangle$ ABC இன் ஒன்பது புள்ளி வட்டம். ஆகையால் $\triangle$ DEF இன் சுற்று வட்ட ஆரம் $\triangle$ ABC இன் சுற்று வட்ட ஆரத்தில் பாதி....

குறிப்பு (2) : DO, $F\hat{D}E$ன் உள் இரு சமவெட்டி.

ஏனெனில், $F\hat{D}O = 90^\circ - \hat{A} = O\hat{D}E$ இதேபோல் OE, OF; $\hat{E}$, $\hat{F}$ ன் உள் இருசமவெட்டிகள். ஆகையால், O என்னும் புள்ளி $\triangle$ DEFன் உள் மையம். அதாவது, ஒரு முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் அதனுடைய பாத முக்கோணத்திற்கு உள் மையமாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

2. 110.

மாதிரி 1. r_a, r_b, r_c முக்கோணம் ABCன் வெளி ஆரங்களானால் $\dfrac{1}{r^2} + \sum_{a,b,c} \dfrac{1}{ra^2} = \sum_{a,b,c} \dfrac{a^2}{\Delta^2}$ என நிறுவுக. (r, $\triangle$ ABCன் உள் ஆரம்)

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a};\quad r_b = \frac{\Delta}{s-b};\quad r_c = \frac{\Delta}{s-c};\quad r = \frac{\Delta}{s}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\left\{ s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{ 4s^2 - 2s(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{ 4s^2 - 2s.2s + a^2 + b^2 + c^2 \right\}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2}$$

ஆகையால் $\frac{1}{r^2} + \sum_{a,b,c} \frac{1}{r_a^2} = \sum_{a,b,c} \frac{a^2}{\Delta^2}$

மாதிரி 2. ΔDEF, ΔABCன் பாத முக்கோணமானால், அதன் பரப்பு $\frac{R^2}{2}\sin 2A.\ \sin 2B\ \sin 2C$ எனக் காண்க.

ΔABCன் பரப்பு $= \Delta = 2R^2 \sin A, \sin B. \sin C.$

(சூத்திரம் (b)

ΔDEFன் சுற்று ஆரம் $= \frac{R}{2}$ (குறிப்பு (1), ¢ (2·19)) மேலும், ΔDEFன் மூன்று கோணங்களும் முறையே $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$ (¢ 2·19)

ஆகையால், ΔDEFன் பரப்பு

$$= 2\left(\frac{R}{2}\right)^2 \sin(180°-2A).\ \sin(180°-B).\ \sin(180°-2C)$$

$$= \frac{R^2}{2}\sin 2A.\ \sin 2B.\ \sin 2C.$$

மாதிரி 3. $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ என நிறுவுக.

(ΔABCன் உள் ஆரம் r; வெளி ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2, r_3)

$$\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{abc}\left\{ ar_1 + br_2 + cr_3 \right\}$$

$$= \frac{2}{abc}\left\{ \Delta BI_1C + \Delta CI_2A + \Delta AI_3B \right\} \quad ...(i)$$

(I_1, I_2, I_3 முறையே $\triangle ABC$ன் வெளி மையங்கள்)

மேலும், $\frac{1}{2R} = \frac{2}{abc} \cdot \triangle$ ($\because abc = 4R\triangle$ சூத்திரம் (b) ...(ii)

$$\therefore \frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{abc} \left\{ \triangle BI_1C + \triangle CI_2A + \triangle AI_3B + \triangle ABC \right\}$$

$$= \frac{2}{abc} \cdot \triangle I_1I_2I_3$$

$$= \frac{2}{abc} \cdot 2R \cdot s \text{ (குறிப்பு (3); } \phi \text{ 2·17)}$$

$$= \frac{4R}{abc} \cdot s$$

$$= \frac{1}{\triangle} \cdot s = \frac{s}{\triangle} = \frac{1}{r}.$$

$$\therefore \frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}.$$

அப்பியாசம் 2 (அ)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r_2} + \frac{a-b}{r_3} = O.$
2. $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = s^2.$
3. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$
4. $r_1r_2 = rr_3$ ஆனால் $\triangle ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.
5. $\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) = 3$ ஆனால் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.
6. $(r_2 + r_3) \sqrt{\frac{rr_1}{r_2r_3}} = a.$
7. $a(rr_1 + r_2r_3) = b(rr_2 + r_3r_1) = c(rr_3 + r_1r_2) = abc$
8. $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{2Rr}.$

9. $\frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_3 - r}{b} = \frac{C}{r_3}$

10. $r_1 = r_2 + r_3 + r$ எனில் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

11. $(r_2 - r)(r_3 + r_1) = b^2$.

12. $(r - r_3) + (r_1 + r_2) = 4R \cos C$.

13. $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{4R}{r_2 s_3}$.

14. $\frac{(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)} = \frac{r_2}{s^2}$.

15. $\frac{bc}{r_1} + \frac{ca}{r_2} + \frac{ab}{r_3} = 2R$.

$$\left\{\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 3\right\}$$

16. $2(R + r) = a \cot A + b \cot B + C \cot C$.

17. $a\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} = \sqrt{_1}\sqrt{_2} + r_3 r_1$

18. $\sqrt{^2} + \sqrt{_1}^2 + \sqrt{_2}^2 + \sqrt{_3}^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

19. (i) $r_1 r_2 r_3 = r^2 \cot^2\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cot^2\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \cot^2\left(\frac{C}{2}\right)$

(ii) $r r_1 r_2 r_3 = \triangle^2$

(iii) $r r_1 = \triangle \tan \frac{A}{2}$

20. BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களிலிருந்து A, B, Cன் குத்துயரங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3 ஆனால்

(i) $\Sigma \frac{1}{p_1} = \Sigma \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}$

(ii) $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{r_1}$

(iii) $R p_1 p_2 p_3 = 2\triangle^2$.

21. முக்கோணம் ABCன் சுற்று மையம், உள் வட்டத்தின்மீது அமைந்தால் $\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}$.

22. $\triangle ABC$ல் $R = 2r$ ஆனால் $a = b = c$.

23. $a \cdot AI^2 + b \cdot BI^2 + c \cdot cI^2 = abc$.

24. $a. AI_1^2 - b. BI_1^2 - c. CI_1^2 = abc.$

25. $AI^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + BI^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + CI^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$
$= O.$

26. (i) $IA. IB = 4R. IC \sin^2 \frac{C}{2}.$

(ii) $AI_1. BI_1. = 4R. CI \cos^2 \frac{C}{2}$

(iii) $AI. BI\ CI = 4R. r^2.$

(iv) $(a + b + c)\, II_1. II_2. II_3 = 8R\, abc.$

27. உள் வட்டம், $\triangle ABC$ன் பக்கங்களை C, E, Fல் தொட்டால் $EF : FD : DE\ : \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}.$

28. $\triangle ABC$ன் சுற்று மையம் S: BC, CA, ABயிலிருந்து x, y, z தூரங்களில் முறையே இருந்தால் $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{4xyz}.$

29. O, முக்கோணம் ABC ன் செங்குத்து மையமானால்,
$a. OB. OC + b. OC. OA + c. OA. OB = abc.$

30. $\triangle ABC$ன் பாத முக்கோணத்தின்

(i) சுற்றளவு $= 4R \sin A \sin B. \sin C.$

(ii) உள் ஆரம் $= 2R. \cos A. \cos B. \cos C$

31. $\triangle ABC$ன் பாத முக்கோணம் DEF. என்றால் $\triangle DEF$ன் பரப்பு ABCன் பரப்பின் கால்பாகத்தைவிட அதிகமாக இராது என நிறுவுக

ABCன் பரப்பு $= 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$ (சூத்திரம் (b))

$\triangle DEF$ன் பரப்பு $= \frac{R^2}{2} \sin 2A. \sin 2B. \sin 2C.$

(மாதிரி 2. ϕ 2·110)

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sin 2A. \sin 2B. \sin 2C}{4. \sin A. \sin B. \sin C.}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A. 2 \sin B. \cos B. 2 \sin C \cos C}{4. \sin A. \sin B. \sin C}$$

$$= 2. \cos A. \cos B. \cos C \qquad \text{..............(1)}$$

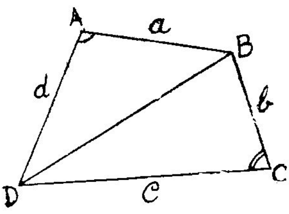
ஆனால் $\triangle ABC$ன் சுற்று மையம் S, செங்குத்து மையம் O, எனில், $SO^2 = R^2 \{1 - 8\cos A.\cos B.\cos C\}$ (§ 2·18) ஆகையால்,
$8\cos A.\cos B.\cos C < 1$. ....(ii)

(i), (ii) லிருந்து $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} \leq \frac{1}{4}$.

இரண்டாம் பிரிவு (நாற்கரங்கள்)

2. 21.

ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பை அதனுடைய பக்கங்கள் $AB, BC. CD, DA$; ஒரு சோடி எதிர்கோணங்களின் கூடுதல் இவ்வுறுப்புக்கள் மூலம் கண்டுபிடிக்க.



படம் - 13 (அ)

$AB = a;\ BC = b:\ CD = C;$

$DA = d;\ 2s = a+b+c+d.$

$b + c + d - a = a + b + c + d - 2a$

$= 2s - 2a$

$\therefore\ b + c + d - a = 2(s - a).$

இம்மாதிரியே,

$c + d + a - b = 2(s - b)$

$d + a + b - c = 2(s - c)$

$a + b + c - d = 2(s - d)$

$\triangle ABD$யிலிருந்து $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$ (சூத்திரம் (c)

$\triangle BCD$யிலிருந்து $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos C.$

$\therefore\ b^2 + c^2 - 2bc\cos C = a^2 + d^2 - 2ad\cos A.$

அல்லது $2\{ad\cos A - bc\cos C\} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$ ..... (i)

$\triangle ABD$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} ad\sin A$

$\triangle BCD$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} bc\sin C.$

நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு $= \triangle = \frac{1}{2} ad\sin A + \frac{1}{2} bc\sin C.$

$\therefore\ 2\{ad\sin A + bc\sin C\} = 4\triangle$ .... (ii

(i) ஐயும் (ii) ஐயும் வர்க்கம் செய்து கூட்டினால்,

$4\{a^2d^2\cos^2 A + b^2c^2\cos^2 C - 2abcd\cos A\cos C$

$+ a^2d^2\sin^2 A + b^2c^2\sin C + 2abcd\sin A\sin A\sin C\}$

$= 16\triangle^2 + (a^2+d^2-b^2-c^2)^2.$

அதாவது,

$4\{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A\cos C - \sin A\sin c)\}$

$= 16\triangle^2 + (a^2 d^2 - b^2 - c^2)^2$

ஆகையால், $A + C = 2\alpha$ எனில்,

$$4\{ a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.\cos 2\alpha \} = 16\,\triangle^2 + (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

ஆனால், $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

ஆகையால்,

$$4\{ a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd - 4\,abcd\cos^2\alpha \} = 16\,\triangle^2 + (a^2+d^2-b^2-c^6)^2$$

அதாவது,

$$16\,\triangle^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - 16abcd\cos^2\alpha$$
$$= (2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2) - 16abcd.\cos^2\alpha$$

அல்லது,

$$16\,\triangle^2 = \{(a+d)^2-(b-e)^2\}.\{(b+c)^2-(a-d)^2\} - 16\,abcd\cos^2\alpha$$
$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d) - 16\,abcd\cos^1\alpha$$
$$= 2(s-c).2(s-b).2(s-d).2(s-a) - 16abcd\cos^2\alpha$$

எனவே,

$$16\,\triangle^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 16abcd\cos^2\alpha$$
$$(\text{அ-து})\ \triangle^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\alpha.$$

குறிப்பு (1) :— கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் $a, b, c. d$ஐக் கொண்டு வரையப்படும், மிகப் பெரிய நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும்.

ஏனெனில், $\cos^2\alpha$. வின் மிகச் சிறிய மதிப்பு$=0$. ஆகையால், $\alpha = 90°$. அதாவது $2\alpha = 180°$. ஆகையால், $\hat{A} + \hat{C} = 180°$. அதாவது $ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

குறிப்பு (2) :— பக்கங்கள் a, b, c, dல் d பூச்சியமாயின், நாற்கரம் முக்கோணமாக மாறும் அந்நிலையில், $2s = a+b+c$ என்றும் $\triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ எனறும் மாறும்.

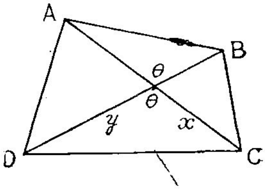
குறிப்பு (3) :— நாற்கரத்தின் கோணங்கள் நான்கினில் ஏதேனும் ஒன்றுக்கு கொசைன் (cosine) கண்டுபிடிப்பதற்கு சூத்திரம் (c)ஐயும், சைன் (sin) கண்டுபிடிப்பதற்கு சூத்திரம் (b)ஐயும் உபயோகிக்க வேண்டும்.

2.22. மூலை விட்டங்களின் நீளம் x, y; அவைகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ ஆயின், நாற்கரத்தின் பரப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

மூலை விட்டம் $= AC = x$; மூலை விட்டம் $BD = y$;

$A\hat{D}B = D\hat{O}C = \theta$ என்றால்,

$\triangle AOB$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} OA.OB. \sin\theta$...(i) சூத்திரம் (b)



படம் 14

இம்மாதிரியே,

$\triangle OCB$ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}.OB.OC \sin(180° - \theta)$

$= \frac{1}{2} OB.OC. \sin\theta$ ...(ii)

$\triangle ODC$ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2} OD.OC \sin\theta$ ......(iii)

$\triangle OAD$ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}. OA.OD \sin(180° - \theta) = \frac{1}{2} OA.OD. \sin\theta$ ....(iv)

(i); (ii); (iii); (iv)ஐக் கூட்ட

நாற்கரப் பரப்பு $= \frac{1}{2} \sin\theta \{ OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \}$

$= \frac{1}{2} \sin\theta \{ (OA + OC)(OB + OD) \}$

$= \frac{1}{2} \sin\theta (AC)(BD)$

ஆகையால், $\triangle = \frac{1}{2} xy \sin\theta$.

2·23. நாற்கரம் $ABCD$ன பரப்பை அதன் பக்கங்கள், அதன் மூலை விட்டங்கள் இவற்றின் மூலம் கண்டுபிடிக்க.

வழக்கம்போல், $AB = a$; $BC = b$ $CD = c$; $DA = d$ $AC = x$; $BD = y$ எனக் கொள். (படம் 14ஐப் பார்)

இப்பொழுது $\triangle OBC$யிலிருந்து,

$$a^2 = OA^2 + OB^2 - 2\ OA \cdot OB \cos\theta.$$

இம்மாதிரியே $c^2 = OC^2 + OD^2 - 2\ OC \cdot OD \cos\theta$.

$$b^2 = OB^2 + OC^2 - 2\ OB \cdot OC \cos(180° - \theta)$$

$\therefore$ $b^2 = OB^2 + OC^2 + 2\ OB \cdot OC \cos\theta$.

இம்மாதிரியே $d^2 = OA^2 + OD^2 + 2\ OA \cdot OD \cos\theta$.

ஆகையால்,

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = \{ OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \} + 2\cos\theta \{ OA \cdot OD + OB \cdot OC \}$$

$$- \{ OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \} + 2\cos\theta \{ OA \cdot OB + OC \cdot OD \}$$

$$= 2\cos\theta \{ OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \}$$

$$= 2\cos\theta \{ (OA + OC)(OB + OD) \}$$

$$= 2\cos\theta (AC)(BD)$$

$\therefore \quad b^2+d^2-a^2-c^2=2\,xy\cos\theta.$ ....(i)

ஆனால், $4\triangle \quad = 2\,xy\sin\theta$ (§ 2·22) ....(ii)

(i), (ii)ஐ வர்க்கம் செய்து கூட்ட.

$$16\triangle^2+(b^2+d^2-a^2-c^2)^2=4x^2y^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=4x^2y^2.$$

அதாவது $16\triangle^2 \quad = 4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2$

எனவே $\triangle \quad = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$

குறிப்பு :—$ABCD$ என்பது வட்ட நாற்கரமாயின், மேற்கண்ட பரப்பு சூத்திரம் பின்வருமாறு மாறும் :

தொலமியின் (Ptolemy's Theorem) தேற்றப்படி, வட்ட நாற்கரத்தின் மூலை விட்டப் பெருக்கற் பலன் $xy=ac+bd$.

ஆகையால், $\triangle=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd)^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$

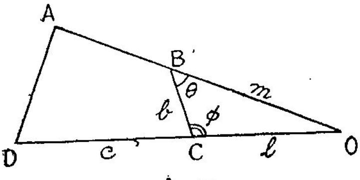
$$=\frac{1}{4}\cdot 4.\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (\S\ 2{\cdot}21)$$
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

2·24.

மாதிரி 1. நாற்கரம் $ABCD$ல், AB, BC, CD முறையே a, b, c என்னும் நீளத்திற்கு சமமாகவும்' Bன் மிகை நிரப்புக்கோணம் θ, Cன் மிகை நிரப்புக் கோணம் ϕ ஆகவும் இருப்பின், இந்நாற்கரத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\{ab\sin(\theta)+bc\sin\phi+ca\sin(\theta+\phi)\}$ எனக் காண்க.

AB, CD இவ்விரு பக்கங்களும் Oல் சந்திக்கட்டும். $CO=l$; $BO=m$ எனக்கொள்.



படம் 15

$$B\hat{O}C=180°-\theta-\phi$$

$$\therefore \quad \triangle OAD=\tfrac{1}{2}(a+m)(c+l)\sin(180°-\theta-\phi)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{ac+al+mc+ml\}\sin(\theta+\phi) \quad ....(i)$$

$$\triangle \quad OBC = \tfrac{1}{2}\, ml \sin(180° - \theta - \phi) \qquad \ldots\ldots(i)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, ml \sin(\theta + \phi) \qquad \ldots\ldots(ii)$$

(i)லிருந்து (ii)ஐக் கழிக்க.

நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு $= \tfrac{1}{2} \sin(\theta+\phi). \{ ac + al + mc + ml - ml \}$
$$= \tfrac{1}{2} \sin(\theta+\phi). \{ ac + al + mc \} \quad \ldots\ldots(A)$$

ஆனால். $\triangle OBC$விருந்து, $\dfrac{m}{\sin\phi} = \dfrac{l}{\sin\theta} = \dfrac{b}{\sin(180° - \theta - \phi)}$

(சூத்திரம் (a))

ஆகையால், $m \sin(\theta+\phi) = b \sin\phi.$ $\ldots\ldots(B)$

மேலும், $l \sin(\theta+\phi) = b \sin\theta.$ $\ldots\ldots(C)$

(A), (B), (C)யிலிருந்து,

நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு $= \tfrac{1}{2}\, ac \sin(\theta+\phi) + \tfrac{1}{2}\, a{\cdot}l \sin(\theta+\phi)$
$$+ \tfrac{1}{2}\, c{\cdot}m \sin(\theta+\phi)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ac \sin(\theta+\phi) + \tfrac{1}{2}a.\, b \sin\theta + \tfrac{1}{2}c{\cdot}b \sin\phi.$$

$$= \{ ab \sin\theta + bc \sin\phi + ca \sin(\theta+\phi) \}$$

மாதிரி 2. a, b, c, d என்னும் நீளங்களைக்கொண்டு வரையப் பட்ட இரு சமபரப்புள்ள நாற்கரங்களில் முறையே a, bக்கு இடையே உள்ள கோணம் 90° ஆகவும், cdக்கு இடையே உள்ள கோணம் 90° ஆகவும் இருந்தால் $ab = cd$ அல்லது $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ என நிறுவுக.

$AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $\hat{B} = 90°$ உள்ள நாற்கரம் $ABCD$ஐயும், $A_1B_1 = a$; $B_1C_1 = b$; $C_1D_1 = c$; $D_1A_1 = d$.

$\hat{D}_1 = 90°$ உள்ள நாற்கரம் $A_1B_1C_1D_1$ஐயும் எடுத்துக்கொள். $\triangle$, இரு நாற்கரங்களின் பரப்பைக் குறிக்கட்டும்.

நாற்கரம் $ABCD$யிலிருந்து

$$\triangle\, ADC + \triangle\, ABC = \triangle.$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}cd \sin\hat{D} + \tfrac{1}{2}ab = \triangle.$$

அதாவது, $2cd \sin\hat{D} = 4\triangle - 2ab.$ $\ldots\ldots(i)$

மேலும், $2cd \cos\hat{D} = C^2 + d^2 - AC^2$

$$= C^2 + d^2 - (a^2 + b^2)$$

$$(\because \hat{ABC} = 90°)$$

$$= c^2 + d^2 - a^2 - b^2 \qquad \ldots\ldots(ii)$$

(i), (ii)ஐ வர்க்கம் செய்து கூட்ட.

$$4c^2d^2 = (4\triangle - 2ab)^2 + (c^2+d^2-a^2-b^2)^2 \ldots (A)$$

இம்மாதிரியே நாற்கரம் $A_1B_1C_1D_1$யிலிருந்து,

$$4a^2b^2 = (4\triangle - 2cd)^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2) \ldots (B)$$

(B)லிருந்து (A)ஐக் கழிக்க.

$$4(a^2b^2-c^2d^2) = (4\triangle - 2cd)^2 - (4\triangle - 2ab)^2$$

ஆகையால், $a^2b^2 - c^2d^2 = (2\triangle - cd)^2 - (2\triangle - ab)^2$

$$= (2\triangle - cd + 2\triangle - ab)(2\triangle - cd - 2\triangle + ab)$$

அதாவது,

$$(ab-cd)(ab+cd) = (ab-cd)(4\triangle - ab - cd)$$

ஆகையால் $ab-cd = O$ .... (iii)

அல்லது $ab+cd = 4\triangle - ab - cd$

$\therefore \quad ab+cd = 2\triangle$.

அதாவது, $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd = \triangle$ .... (iv)

ஆனல்,

$$\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}cd \sin D = \triangle.$$

ஆகையால், $\sin \hat{D} = 1$.

அதாவது, $\hat{D} = 90°$.

ஆகையால், முதல் நாற்கரம் $ABCD$ல், $A\hat{B}C = C\hat{D}A = 90°$.

எனவே $a^2+b^2 = AC^2 = c+d^2$ ... .(v)

(iii), (v) லிருந்து, $ab = cd$ அல்லது $a^2b^2 = c^2+d^2$.

2.25. பொதுவாக, ஒரு $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தின் நான்கு பக்கங்கள் AB BC, CD, DAஐத் தொடும் வட்டம் வரைய முடியாது. ஏனெனில், ஏதேனும் மூன்று பக்கங்கள், உதாரணமாக AB, BC, CD, ஐத் தொடக்கூடிய ஒரு வட்டம் நான்காவது பக்கம் DAஐத் தொடவேண்டிய அவசியமில்லை.

2.26. உள் வட்டம் உள்ள (circumscribed about a circle) நாற்கரத்தின் பரப்பை, அதன் பக்கங்கள், ஒரு ஜதை எதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் இவ்வுறுப்புக்கள் மூலம் கண்டு பிடிக்க.

நாற்கரம் $ABCD$ன் பக்கங்கள் முறையே a,b,c,d; $\hat{A}+\hat{C} = 2\alpha$ எனக் கொள்.

நாற்கரத்தின் பரப்பு $\triangle$ எனில்,

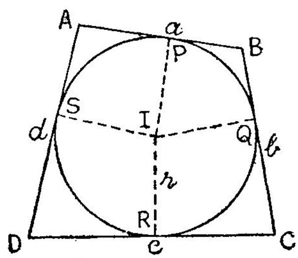
$$\Delta^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\alpha. \quad (\S\ 2{\cdot}21) \quad \ldots\ldots\ldots(i)$$

P, Q, R, S முறையே AB, BC, CD, DA வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகள் ஆனால், $AP = AS$ ($\therefore$ AP, AS இரண்டும் AS இலிருந்து (வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள்) $= x$ எனக்கொள்க.

இம்மாதிரியே, $BP = BQ = Y$ எனவும், $CR = CQ = Z$ எனவும், $DR = DS = u$ எனவும் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} 2s &= a+b+c+d \\ &= (x+y) + (y+z) + (z+u) + (u+x) \\ &= 2(x+y+z+u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ s &= x+y+z+u \\ &= (x+y) + (z+u) \\ &= AB + CD = a+c. \end{aligned}$$



படம் 16

இம்மாதிரியே,

$$\begin{aligned} s &= x+y+z+u \\ &= (y+z) + (x+u) \\ &= BC + AD = b=d. \end{aligned}$$

எனவே, உள்வட்டம் உள்ள நாற்கரத்திற்கு,

$$s = a+c = b+d \quad \ldots\ldots\ldots(A)$$

ஆகையால், (i)லிருந்து,

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\alpha \\ &= (a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d) - abcd\cos^2\alpha \\ &= c.\,d.\,a.\,b - abcd\cos^2\alpha \\ &= abcd\,(1-\cos^2\alpha) \\ &= abcd\sin^2\alpha \end{aligned}$$

எனவே,

$$\Delta = \sin\alpha\cdot\sqrt{abcd}$$

2·2·7. உள் வட்டமுள்ள நாற்கரத்தின் உள் ஆரத்தை நாற்கரத்தின் பரப்பு, நாற்கரத்தின் சுற்றளவு, இவ்வுறுப்புகள் மூலம் கண்டு பிடிக்க.

படம் (16)லிருந்து,

$\triangle AIB$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}. IP. AB$

$= \frac{1}{2}. r. a$

இம்மாதிரியே,

$\triangle BIC$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}. r. b;$

$\triangle CID$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}. r. c;$

$\triangle DIA$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}. r. d$

இந்நான்கு முக்கோணங்களின் பரப்பைக் கூட்டினால்,

$\triangle AIB + \triangle BIC + \triangle CID + DIA = \frac{1}{2} r (a+b+c+d)$

அதாவது, நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} r (2s)$

அல்லது, $\triangle = rs.$

ஆகையால், $r = \frac{\triangle}{s}$ ....(B)

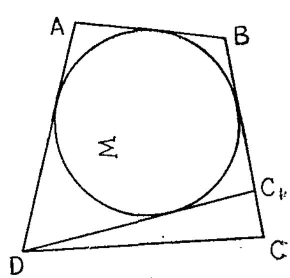
குறிப்பு :— § 2.11, முக்கோண சூத்திரம் (c)ஐ மேற்கண்ட நாற்கர சூத்திரம் (B)யுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்.

2·28. § 2·26 தேற்றத்தின் மறுதலை. $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில், $AB + CD = BC + DA$ ஆயின் நாற்கரத்தின் பககங்கள் ஒரு வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் DA, AB, BCஐயத் தொடும் வட்டம் Σஐ வரை. (மூன்று கோடுகளைத் தொடும வட்டத்தை, எப்பொழுதும் வரைய முடியும்)

Σஐ, DC தொடவில்லை எனக் கொள்வோம் ....(A)

DC_1 என்னும தொடு கோட்டை Dயிலிருந்து Σவிற்கு வரை அது, BCஐ C_1ல் வெட்டட்டும்.



படம் 17

ஆகையால், $AB + C_1D = BC_1 + DA$ (§ 2·26 (A))

ஆனல், $AB + CD = BC + DA$ (கொள்கை)

எனவே, $CD - C_1D = BC - BC^1 = C_1C.$

அல்லது, $DC = DC_1 + C_1C.$

அதாவது, $\triangle DCC_1$ல் இரு பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை மூன்ருவது பக்கத்திற்கு சமம்.

ஆகையால், C_1 என்னும் புள்ளி, DCல் அமையும்.

ஆனல், C^1, BCன் மீது உள்ளது.

ஆகையால், C_1, BC DC என்ற இரு கோடுகளின் மீதும் அமையும.

அதாவது, C_1, Cயுடன் இணையும். (C_1, C coincide)

ஆகையால், DC, DC, உடன் இணையும்.

ஆனல், DC_1, Σஐத் தொடுகிறது. (அமைப்பு)

அதாவது, DC, Σஐத் தொடுகிறது. ....(B)

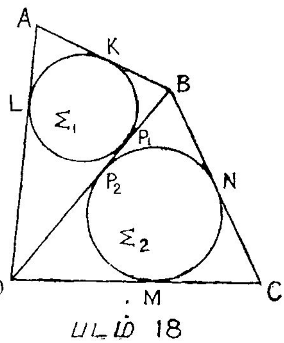
(A), (B) இவ்விரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று மாருக இருப்பதால் நாற்கரத்தின் பக்கம் DC, Σஐத தொடவில்லை என்று நாம் வைத்துக் கொண்டது தவறு.

எனவே, நாற்கரம் $ABCD$ன் நான்கு பக்கங்களும் Σஐத் தொடுகின்றன.

மாதிரிக் கணக்குகள்

2.29.

மாதிரி 1. $ABCD$ என்னும் நாற்கரத்தில் $AB+CD=BC+DA$ ஆயின், $\triangle ABD$ன் உள் வட்டம் $\triangle BCD$ன் உள் வட்டத் தொடும் என நிறுவுக.



படம் 18

$\triangle ABD$ன் உள் வட்டம் AB, BD, DAஐ முறையே K, P_1 Lல் தொடட்டும். $\triangle BCD$ன் உள் வட்டம், BC, CD, DBஐ முறையே N, M p_2ல் தொடட்டும்

$AK=AL$ ($\because$ AK, AL, வட்டம் Σ_1ன் தொடுகோடுகள்)

இம்மாதிரியே

$BP_1=BK$,

$DL=DP_1$

ஆகையால்,

$$\begin{aligned}2(BP_1+DA) &= 2(BP_1+DL+LA)\\ &= 2BP_1+2DL+2LA\\ &= BP_1+BK+DL+DP_1+AL+AK\\ &= (BP_1+P_1D)+(DL+LA)+(AK+KB)\\ &= BD+DA+AB\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2BP_1 = BD + DA + AB - 2DA$$
$$= BD + AB - DA \qquad \text{..........(i)}$$

இம்மாதிரியே, $\triangle BDC$யிலிருந்து,

$$2BP_2 = BC + BD - CD. \qquad \text{..........(ii)}$$

ஆனால், $AB + CD = BC + DA$ (கொள்கை)

ஆகையால்.

$$AB - DA = BC - CD$$

இரு பக்கமும் BDஐக் கூட்ட.

$$BD + AB - DA = BC + BD - CD$$

(i), (ii) லிருந்து.

$$2BP_1 = 2BP_2.$$

அதாவது, P_1, P_2 உடன் இணையும.

ஆகையால், வட்டங்கள் Σ_1. Σ_2 ஒன்றுக்கொன்று வெளியே தொட்டுக் கொள்ளும். மேலும், இவ்வட்டங்கள் தொடும் புள்ளி BD மீது அமையும்.

மாதிரி 2. உள் வட்டமுள்ள ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவ் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே x, y, z, u எனில் அவ்வட்டத்தின் ஆரம், $\sqrt{\frac{\Sigma xyz}{\Sigma x}}$ என்றும். அந்நாற்கரத்தின் பரப்பு $\sqrt{\Sigma x \cdot \Sigma xyz}$ என்றும் நிரூபி.

படம் 16 (§ 2·26)லிருந்து,
$AP = AS = x$ என்றும்
$BP = BQ = y$ என்றும்
$CQ = CR = z$ என்றும்
$DR = DS = u$ என்றும் வைக்க
$\triangle IPA \equiv \triangle ISA$.

$$\therefore \quad I\hat{A}P = \frac{A}{2}$$

$$\frac{AP}{PI} = \cot\frac{A}{2} \quad (\because \quad I\hat{P}A = 90^\circ)$$

(அ-து) $x = r \cot\frac{A}{2}$ $(\because IP = r, AP = P)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{அல்லது, } r = x\tan\frac{A}{2} \\ &\text{இம்மாதிரியே} \\ &\quad r = y\tan\frac{B}{2} \\ &\quad r = z\tan\frac{C}{2} \\ &\quad r = u\tan\frac{D}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

$$A+B+C+D=360^\circ$$

$$\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{D}{2}=180^\circ$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(180^\circ-\overline{\frac{C}{2}+\frac{D}{2}}\right)$$

$$= -\tan\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}} = -\frac{\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{D}{2}}$$

$$(\text{அ-து})\ \left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right)$$

$$=\Sigma\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{D}{2}.$$

$$\text{அல்லது, } \Sigma\tan\frac{A}{2}=\Sigma\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{D}{2}.$$

ஆகையால், (A)யிலிருந்து, $\Sigma\frac{r}{x}=\Sigma\frac{r^3}{xyz}$.

எனவே, $$r^2=\frac{\Sigma\, xyz}{\Sigma\, x}.$$

அல்லது, $$r=\sqrt{\frac{\Sigma\, xyz}{\Sigma x}}$$

$$s = a+c \qquad (\S\ 2\cdot 26\ (A))$$

$$= x+y+z+u$$

$$= \Sigma\, x \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

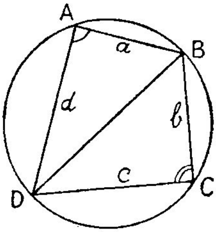
நாற்கரத்தின் பரப்பு $\triangle = rs$ (§ 2·27 (*B*))

$$= \sqrt{\frac{\Sigma_1 xyz}{\Sigma_1 x} \times (\sqrt{\Sigma_1 x})^2}$$

$$= \sqrt{\Sigma_1 x \times \Sigma_1 xyz}.$$

2·210. வட்ட நாற்கரம் (Quadrilateral inscribed in a circle)

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் a, b, c, d எனில் அதன் பரப்பை a, b, c, d மூலம் கண்டுபிடிக்க.



படம் 19

$\triangle DBA$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, ad \sin A.$

$\triangle DCB$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, bc \sin C.$

நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு $= \triangle$

$= \triangle DBA$ன் பரப்பு $+ \triangle DCB$ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\, ad \sin A + \frac{1}{2}\, bc \sin C.$

$= \frac{1}{2}\, ad \sin A + \frac{1}{2}\, bc \sin A \quad (\because \quad \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ)$

$= \frac{1}{2} \sin A\, (ad + bc)$

ஆகையால், $\sin A = \dfrac{2\triangle}{ad + bc}$ .... (i)

$\triangle DBA$, $\triangle DCB$யிலிருந்து,

$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = BD^2 = C^2 + b^2 - 2bc \cos C$

$= b^2 + c^2 + 2bc \cos A \quad (\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ)$

ஆகையால், $2 \cos A\, (ad + bc) = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$

அதாவது, $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^6 - c^2}{2(ad + bc)}$ ....(ii)

(i), (ii)ஐ வர்க்கம் செய்து கூட்ட

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{4\triangle^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4(ad+bc)^2}$$

அதாவது, $\dfrac{4\triangle^2}{(ad+bc)^2} = 1 - \dfrac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2}$

ஆகையால் $16\triangle^2 = 4(ad+bc)^2-(a^2+a^2-b^2-c^2)^2$

$= \{2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2\} \times$

$\{2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2\}$

அதாவது, $16\triangle^2 = \{(a+d)^2-(b-c)^2\} \times$

$\{(b+c)^2-(a-d)^2\}$

$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)\times(b+c+a-d)$

$(b+c-a+d)$

$=2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-d)\;\; 2(s-a)$

$16\triangle^2 = 16(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)$

ஆகையால் ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு=

$\triangle = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

2·211. வட்ட நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களை அதன் பக்கங்கள் மூலம் விவரிக்க.

படம் 19 (§ 2·210)லிருந்து,

$BD^2 = a^2+d^2-2ad\cos A$

$= a^2+d^2-2ad\left\{\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(aa+bc)}\right\}$ (§ 2·210 (ii))

$= \dfrac{(a^2+d^2)(ad+bc)-ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}{(ad+bc)}$

$= \dfrac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{(ad+bc)}$

$= \dfrac{bca^2+bcd^2+adb^2+adc^2}{(ad+bc)}$

$= \dfrac{(bca^2+adb^2)+(bcd^2+adc^2)}{(ad+bc)}$

$= \dfrac{ab(ac+bd)+cd(ac+bd)}{(ad+bc)}$

$\therefore\;\; BD^2 = \dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$

இம்மாதிரியே,

$AC^2 = \dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}$

குறிப்பு:—மூலை விட்டங்கள் AC, BDயிலிருந்து,

$AC \cdot BD = (AB \cdot CD) + (BC \cdot DA)$ எனத் தொலமியின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

$$AC^2 - BD^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)} \times \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$$

$$= (ac+bd)^2$$

$$\therefore \quad AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

2.212. வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் மூலம் அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

$\triangle BDA$ன் சுற்று ஆரம் $= \triangle BCD$ன் சுற்று ஆரம்

$=$ நாற்கரம் $ABCD$ன் சுற்று ஆரம்.

(படம் 19. § 2·210)

சூத்திரம் (b) (§ 2·11)லிருந்து,

$$\triangle DBA\text{ன் பரப்பு} = \frac{AB.\ BD.\ DA}{4R}$$

($R =$ சுற்றுவட்ட ஆரம்)

இம்மாதிரியே,

$$\triangle DCB\text{ன் பரப்பு} = \frac{BC.\ CD.\ DB}{4R}$$

நாற்கரம் $ABCD$ன் பரப்பு

$= \triangle DBA$ன் பரப்பு $+ \triangle DCB$ன் பரப்பு

$$= \frac{BD}{4R} \cdot \left\{ AB.\ DA + BC.\ CD \right\}$$

$$= \frac{BD}{4R} \cdot \left\{ ad+bc \right\}$$

அதாவது, $\Delta = \dfrac{ad+bc}{4R} \cdot \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$

ஆகையால், $R = \dfrac{1}{4\Delta} \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$

மாதிரிக் கணக்கு

2.213.

$ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்கரம், $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; $2s=a+b+c+d$. AC, BD, O என்னும், புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. $A\hat{O}B=\theta$ எனில், $\tan \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}}$ எனக் காண்க.

மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் x, y ஆனால்

$$\cos\theta = \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2xy} \qquad (\S\ 2{\cdot}23\ (i))$$

$$= \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2.(ac+bd)} \qquad \text{(i) } (\S\ 2{\cdot}211 \text{ குறிப்பு})$$

ஆனால் $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$ (சூத்திரம் (9) § 1·1)

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta.$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

(i), (ii) லிருந்து,

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)}}{1+\dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)}}$$

$$= \frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{(b+d)^2-(a-c)^2}$$

$$= \frac{(a+c+b-d)(a+c-b+d)}{(b+d+a-c)(b+d-a+c)}$$

$$= \frac{2(s-d).2(s-b)}{2(s-c).2(s-a)}$$

$$\therefore \quad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}.$$

$$\text{ஆகையால் } \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}}.$$

2·214. ஒரு வட்ட நாற்கரத்திற்கு உள் வட்டம் இருந்தால் அதன் பரப்பை, பக்கங்கள் மூலம் கண்டுபிடிக்க.

வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் a, b, c, d எனில்,

அதன் பரப்பு $= \triangle = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (§ 2·210)

ஆனால் $s = a+c = b+d$. (§ 2·26)

ஆகையால், $\triangle = \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)}$

$= \sqrt{abcd}$

எனவே, உள் வட்டமுள்ள, வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு =

$\triangle = \sqrt{abcd}$ (a, b, c, d அந்நாற்கரத்தின் பக்கங்கள்)

மாதிரிக் கணக்கு

2·215

a, b, c, d என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட, உள் வட்ட நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களுக் கிடையில் உள்ள கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{ac-bd}{cc+bd}\right)$ என நிறுவுக.

x, y நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளமானால்,

$$\cos\theta = \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2xy} \quad (\S\ 2{\cdot}23.\ \text{(i)}) \quad \ldots\ldots\text{(i)}$$

$$= \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)} \quad (\S\ 2{\cdot}211,\ \text{குறிப்பு})$$

$$= \frac{(b+d)^2-(a+c)^2+2(ac-bd)}{2(ac+bd)}$$

$$= \frac{(a+c)^2-(a+c)^2+2(ac-bd)}{2(ac+bd)} \quad (\S\ 2{\cdot}26)$$

$$= \frac{ac-bd}{an+bd}.$$

ஆகையால், $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{ac-bd}{ac+bd}\right)$

அப்பியாசம் 2 (ஆ)

1. a, b, c, d என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட உள்ள வட்டமுள்ள நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் ϕ. இந்நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 2α என்றால், $\tan^2\phi = \frac{4abcd\sin^2\alpha}{(ac-bd)^2}$ என நிறுவுக.

2. a, b, c, d என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ன் மூலை விட்டங்கள் Eல் வெட்டிக் கொண்டால், $\frac{AE}{EC} = \frac{ad}{bc}$ எனக் காண்க.

3. வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ன் பக்கங்கள் a, b, c, d. $2s = +b+c+d$ ஆனால் $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$ என நிறுவுக.

4. a, b, c, d என்ற பக்கங்களையும், x, y என்ற மூலை விட்டங்களையும் கொண்ட, உள் வட்டமுள்ள வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு $\frac{1}{4}\sqrt{x^2y^2-(ac-bd)^2}$ எனக் காண்க.

5. a b, c, d என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட, உள் வட்டமுள்ள வட்ட நாற்கரத்தின் உள் வட்ட ஆரம் $\sqrt{\dfrac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ எனக் காண்க.

உள் வட்டமுள்ள வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ன் பக்கங்கள் a, b, c, d. $2s=a+b+c+d$ ஆனால், பின் வருவனவற்றை நிறுவுக,

6. $\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A = \triangle = \sqrt{abcd}$ ($\triangle$, $ABCD$ன் பரப்பு)

7. $\cos A=(ad-bc)\div(ad+bc)$.

8. $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{bc}{ad}}$

9. உள் வட்ட ஆரம் $\dfrac{\sqrt{abcd}}{s}$.

10. A, B, C, Dயிலிருந்து, உள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $\dfrac{ad}{s}$, $\dfrac{ab}{s}$, $\dfrac{bc}{s}$, $\dfrac{cd}{s}$.

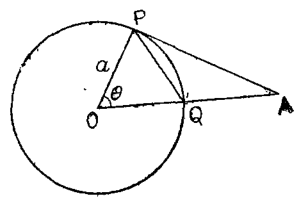
அத்தியாயம் III

சிறு கோணங்களின் திரிகோண கணித விகிதங்களும், தொடர்க்கூட்டலும்

முதற் பிரிவு (சிறு கோணங்கள்)

3·11. ஆரையன் அளவில் எடுக்கப்பட்ட θ, குறுங்கோண மாகவும் நேர் ஆகவும் இருந்தால், $\sin\theta < \theta \tan\theta$ என நிரூபிக்க.

Oஐ மையமாகவும், $OP\ (=a)$ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரை. OA என்னும் ஒரு நேர் கோட்டை எடுத்துக் கொள். OA வட்டத்தை Qல் வெட்டட்டும். P என்ற புள்ளியை $Q\hat{O}P=\theta$ என்னும் படி எடு. Pல் வரையப்பட்ட தொடு கோடு OAஐ Aல் வெட்டட்டும்.



படம் 20

$\triangle POQ$ன் பரப்பு $<$ வட்டக் கோணப் பகுதி (Sector of a circle) POQன் பரப்பு

$< \triangle POA$ன் பரப்பு. ....(i)

$\triangle POQ$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, OP\cdot OQ \sin\theta$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\sin\theta$

வட்டக் கோணப்பகுதி POQன் பரப்பு $= \frac{a^2}{2}\cdot\theta.$

$\triangle POA$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\, OP.PA$

$= \frac{1}{2}\, a.\, a\tan\theta \quad = \frac{a^2}{2}\tan\theta.$

ஆகையால், (i)லிருந்து,

$\frac{1}{2}a^2\sin\theta < \frac{1}{2}a^2\theta < \frac{1}{2}a^2\tan\theta.$

அதாவது, $\sin\theta < \theta < \tan\theta.$

3·12. $\lim\limits_{\theta\to O}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$; $\lim\limits_{\theta\to O}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$ என நிரூபிக்க.

§ 3·11லிருந்து $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது. முழுவதும் $\sin\theta$ஆல் வகுக்க.

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}. \quad \left(\because \frac{\tan\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

θ பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது, $\cos\theta$, $\cos O$ஐ அணுகும். ஆகையால், $\cos\theta$ன் வரம்பு (limit) = 1.

அதாவது, $\lim_{\theta \to O} \cos\theta = 1.$

ஆகையால், θ பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது $\frac{\theta}{\sin\theta}$ ன் வரம்பு 1க்கும் 1க்கும் இடையே உள்ளது.

அதாவது, $\lim_{\theta \to O} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1.$

ஆகையால், $\lim_{\theta \to O} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$

இம்மாதிரியே, $\lim_{\theta \to O} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta \leftarrow O} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$

அல்லது, $\lim_{\theta \to O} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$

குறிப்பு : $\lim_{\theta \to O} \frac{\tan^{-1}\theta}{\theta} = 1.$

ஏனெனில் $x = \tan\theta$ என்றால். $\theta = \tan^{-1}x$. மேலும் θ பூச்சியத்தை நெருங்கும் பொழுது xம் பூச்சியத்தை அணுகுகிறது ($\because \tan O = O$). ஆகையால், $\lim_{\theta \to O} \frac{x}{\tan^{-1}x} = 1$

அதாவது, $\lim_{x \to \theta} \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1.$

மாதிரிக் கணக்கு

3·13.

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0{\cdot}87$ எனில், xன் மதிப்பை ஆரையன் அளவில் இரு தசமத்தான சுத்தமாகக் கண்டுபிடிக்க.

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{\cdot}732}{2} = 0{\cdot}866$ .... (i)

(தோராய மதிப்பு)

(approximate value)

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0{\cdot}87$ (கொள்கை) ....(ii)

(i), (ii)லிருந்து, xன் மதிப்பு, ஆரையன் அளவில் மிகச் சிறியது எனப் புலப்படுகிறது. ஆகையால், $\sin x$, xஐயும்; $\cos x$, 1ஐயும் அணுகும்.

(ii)லிருந்து, $\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x, = 0{\cdot}87.$ ......(*iii*)

(iii)ல் $\sin x = x$; $\cos x = 1$ என்னும் தோராய மதிப்புக்களைப் பொருத்த'

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot x = 0{\cdot}87.$$

ஆகையால், $\tfrac{1}{2}\cdot x = 0{\cdot}87 - 0{\cdot}866$

$= 0{\cdot}004$

அதாவது, $x = 0{\cdot}008^c$ (ஆரையன் அளவு)

$= 0°27'$ (பாகை அளவு)

அப்பியாசம் 3 (அ)

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து ஆரையன் அளவில் xன் தோராய மதிப்பைக் காண்க

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = 0{\cdot}49$ [விடை. $x = 0{\cdot}0117$]

2. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = 0{\cdot}721$ [விடை. $x = 0{\cdot}0198$]

3 $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right) = 0{\cdot}82$ [விடை. $x = 0{\cdot}019$]

கீழ்க்கண்ட வற்றைத் தீர்த்து, பாகை அளவில், xன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

4. $\sin(30°+x) = 0{\cdot}519$ [விடை. $x = 1°16'$]

5. $\cos(30°-x) = 0{\cdot}878$ [விடை. $x = 1°22'$]

இரண்டாம் பிரிவு (எளிய தொடர்க்கூட்டல்)

3·21 n-வது உறுப்பு u_nஐ, $v_n - v_{n-1}$ என்று சுலபமாகப் பிரிக்கக்கூடிய திரிகோண கணித வரிசைகளை மட்டும் நாம் இப்பொழுது காண்போம்

இத்தகைய திரிகோண கணித வரிசையில் $u_n = v_n - v_n - 1$. nஐ, $(n-1)$, $(n-2)$ ......2, 1, என மாற்றினல், கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$u_n = v_n - v_{n-1} \qquad \text{———(1)}$$

$$u_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2} \qquad \text{———(2)}$$

$$v_{n-2} = u_{n-2} - v_{n-3} \qquad \text{———(3)}$$

....

....

$$u_2 = v_2 - v_1 \qquad \text{---}(n-1)$$
$$u_1 = v_1 - v_0 \qquad \text{---}(n)$$

கூட்ட

$u_1+u_2+\dots+u_n=v_n-v_0$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட $u_1+u_2+\dots$வரிசையில், S_n என்பது முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் குறித்தால்,

$$S_n = v_n - v_0 \qquad \text{---}(A)$$

3 22 $\sin \alpha + \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\dots\dots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\,\beta)$

$$= \frac{\sin\left\{\alpha+(n-1)\frac{\beta}{2}\right\} \cdot \sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$ என நிரூபிக்க.

கொடுக்கப்பட்ட திரிகோண கணித வரிசையில், n-வது உறுப்பு $=$

$$u_n = \sin(\alpha+\overline{n-1}\,\beta)$$

இரு பக்கமும் $2\sin\frac{\beta}{2}$ ஆல் பெருக்க.

$$2u_n \sin\frac{\beta}{2} = 2\sin(\alpha+\overline{n-1}\,\beta).\sin\frac{\beta}{2}$$

$$= \cos\left\{\alpha+(\overline{n-1})\,\beta-\frac{\beta}{2}\right\}-\cos\left\{\alpha+\overline{n-1}\,\beta+\frac{\beta}{2}\right\}$$

(§ 1·1 சூத்திரம் (8))

$$\therefore\ 2u_n\sin\frac{\beta}{2} = \cos\left\{\alpha+(2n-3)\frac{\beta}{2}\right\}$$
$$-\cos\left\{\alpha+(2n-1)\frac{\beta}{2}\right\} \qquad \dots\ \dots(1)$$

இம்மாதிரியே, nஐ $(n-1)$, $(n-2)$..... 2, 1 ஆக மாற்றினால்,

$$2u_{n-1}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\left\{\alpha+(2n-5)\frac{\beta}{2}\right\}$$
$$-\cos\left\{\alpha+(2n-3)\frac{\beta}{2}\right\} \qquad \dots\dots (2)$$

....

$$2u_2 \sin\frac{\beta}{2} = \cos\left\{\alpha+\frac{\beta}{2}\right\}-\cos\left\{\alpha+3\frac{\beta}{2}\right\} \qquad \dots\dots (n-1)$$

$$2u_1 \sin\frac{\beta}{2} = \cos\left\{\alpha - \frac{\beta}{2}\right\} - \cos\left\{\alpha + \frac{\beta}{2}\right\} \quad \ldots\ldots(n)$$

மேலே உள்ள n சமன்பாடுகளைக் கூட்ட.

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\left\{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n\right\}$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2\overline{n-1}\,\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left\{\frac{\alpha - \frac{\beta}{2} + \alpha + 2\,\overline{n-1}\,\frac{\beta}{2}}{2}\right\}$$

$$\sin\left\{\frac{\alpha + 2\overline{n-1}\,\frac{\beta}{2} - \alpha + \frac{\beta}{2}}{2}\right\}$$

$$= 2\sin\left\{\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right\}\cdot\sin\left\{n\,\frac{\beta}{2}\right\}.$$

அதாவது, $$S_n = \frac{\sin\left(\alpha + \overline{n-1}\,\frac{\beta}{2}\right).\ \sin n\,\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

3.23 $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+\overline{n-1}\,\beta)$

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$ என நிரூபிக்க.

§ 3·22 லிருந்து

$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+\overline{n-1\beta})$

$$= \frac{\sin\left\{\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

αஐ $\alpha + \frac{\pi}{2}$ என மாற்ற.

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\beta\right)$$

$$+\dots+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\overline{n-1}\beta\right)$$

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{\beta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

அதாவது,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\dots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\,\beta)$$

$$=\frac{\cos\left\{\alpha+(n-1)\frac{\beta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

குறிப்பு (1) :— § 3·22, § 3·23ல் βஐ $\beta+\pi$ என்று மாற்றினால்,

$$\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)\dots\dots+(-1)^{n-1}\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+(n-1)\frac{(\beta\pi)}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\frac{(\beta+\pi)}{2}};$$

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)\dots\dots+(-1)^{n-1}\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\cos\left\{\alpha+(n-1)\frac{(\beta+\pi)}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\frac{(\beta+\pi)}{2}}$$

குறிப்பு (2) : $\beta=\frac{2\pi}{n}$ எனில், $\sum_{r=1}^{n}\sin\{\alpha+r-1)\beta)\}$

$$=\sum_{r=1}^{n}\cos\{\alpha+(r-1)\beta\}=0\quad[\;\therefore\sin(n\pi)=0\;]$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

3·24.

மாதிரி 1. கூட்ட :— $\sin^2x+\sin^2(x+y)+\sin^2(x+2y)+\dots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad(\S\ 1\cdot1\ \text{சூத்திரம் } (9))$$

இம்மாதிரியே,

$$\sin^2 (x+y) = \frac{1-\cos (2x+2y)}{2}$$

$$\sin^2 (x+2y) = \frac{1-\cos (2x+4y)}{2}$$

....

ஆகையால்,

$\sin^2 x+\sin^2(x+y)+\sin^2(x+2y)+\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos (2x+2y)}{2} + \frac{1-\cos (2x+4y)}{2} + \ldots\ldots$$

(n உறுப்புக்கள்)

$= \frac{1}{2}\{ 1+1+1+\ldots\ldots$ (n தடவைகள்) $\}$

$- \frac{1}{2}\{ \cos 2x+\cos (2x+2y)+\cos (2x+4y)+\ldots\ldots$

(n உறுப்புக்கள்)

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\cos \left\{2x + \frac{(n-1)\, 2y}{2}\right\} \cdot \sin \frac{n\cdot 2y}{2}}{\sin \frac{2y}{2}} \qquad (\S\ 3\cdot23)$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\cos (2x+\overline{n-1}\,y)\cdot \sin ny}{\sin y}$$

குறிப்பு :- இம்மாதிரியே $\sin 3A = 3\sin A-4\sin^3 A$;

$\cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A$

என்னும் சூத்திரங்களை உபயோகித்து

$\sin^3 x+\sin^3(x+y)+\sin^3(x+2y)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$\cos^3 x+\cos^3(x+y)+\cos^3(x+2y)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

ஆகிய இவ்விரு வரிசைகளின் கூடுதல்களைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

மேலும், $8\sin^4 A = 3-4\cos 2A+\cos 4A$;

$8\cos^4 A = 3+4\cos 2A+\cos 4A$ என்னும் சூத்திரங்களை உபயோகித்து,

$\sin^4 x+\sin^4(x+y)+\sin^4(x+2y)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$\cos^4 x+\cos^4(x+y)+\cos^4(x+2y)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

ஆகிய இவ்விரு வரிசைகளின் கூடுதல்களையும் கண்டு பிடிக்கலாம்.

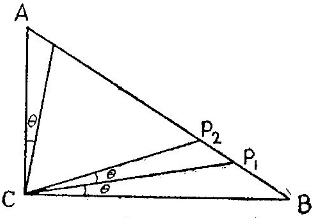
மாதிரி 2. ABC என்னும் முக்கோணத்தில், கோணம் Cஐ n சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் நேர்க் கோடுகள் ABஐ $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$ என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $\hat{C}=90°$ ஆனால்,

$$\frac{1}{CP_1}+\frac{1}{CP_2}+\frac{1}{CP_3}+\dots+\frac{1}{CP_{n-1}}=\frac{CA+CB}{2CA\cdot CB}\left\{\cot\frac{\pi}{4n}-1\right\}$$

எனக் காண்க

$$B\hat{C}P_1 = P_1CP_2 = \dots = P_{n-1}CA$$
$$= \theta \text{ எனக் கொள்.}$$

ஆகையால், $\theta = \dfrac{\pi}{2n}$.



படம் 21

$$\frac{CP_1}{\sin B}=\frac{CB}{\sin CP_1B}$$
$$=\frac{CB}{\sin(180^\circ-\overline{B+\theta})}$$
$$=\frac{CB}{\sin(B+\theta)}$$

இம்மாதிரியே,

$$\frac{CP_2}{\sin B}=\frac{CB}{\sin(B+2\theta)};\quad \frac{CP_3}{\sin B}=\frac{CB}{\sin(B+3\theta)};\dots;$$
$$\frac{CP_{n-1}}{\sin B}=\frac{CB}{\sin(B+\overline{n-1}\,\theta)}$$

ஆகையால்,

$$\frac{1}{CP_1}+\frac{1}{CP_2}+\frac{1}{CP_3}+\dots+\frac{1}{CP_{n-1}}$$
$$=\frac{\sin(B+\theta)}{CB\sin B}+\frac{\sin(B+2\theta)}{CB\sin B}+\frac{\sin(B+3\theta)}{CB\cdot\sin B}+\dots$$
$$+\frac{\sin(B+\overline{n-1}\theta)}{CB\sin B}$$

$$=\frac{1}{CB\cdot\sin B}\left\{\sin(B+\theta)+\sin(B+2\theta)+\sin(B+3\theta)+\dots\dots+\sin(B+\overline{n-1}\theta)\right\}$$

($n-1$ உறுப்புகள்)

$$=\frac{1}{CB\sin B}\left\{\frac{\sin\left\{B+\theta+\frac{(n-2)\theta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{CB\sin B}\left\{\frac{\sin\left(B+\frac{n\theta}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2CB\sin B'}\left\{\frac{2\sin\left(B+\frac{n\theta}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2CB\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin B'}\left\{\cos\left(B+\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(B+\overline{2n-1}\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2CB.\sin\frac{\pi}{4n}\sin B'}\left\{\cos\left(B+\frac{\pi}{4n}\right)-\cos\left(B+\overline{(2n-1)}\frac{\pi}{4n}\right)\right\}$$

$$\left(\because\ \theta=\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2CB\cdot\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\sin B'}\left\{\cos\left(B+\frac{\pi}{4n}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2CB\cdot\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\sin B'}\left\{\cos B\cdot\cos\frac{\pi}{4n}-\sin B\cdot\sin\frac{\pi}{4n}\right.$$

$$\left.-\cos B.\ \sin\frac{\pi}{4n}+\sin B\cos\frac{\pi}{4n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2CB.\sin\frac{\pi}{4n}\sin B}$$

$$\left\{(\sin B+\cos B)\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\sin\frac{\pi}{4n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\,CB}\left\{(1+\operatorname{cof} B)\left(\operatorname{cof}\frac{\pi}{4n}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\,CB}\cdot\left\{\left(1+\frac{CB}{CA}\right)\left(\operatorname{cof}\frac{\pi}{4n}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{CA+CB}{2CA.\ CB}\left\{\operatorname{cof}\left(\frac{\pi}{4n}-1\right)\right.$$

மாதிரி 3. கூட்டுக:—

$$\frac{1}{\cos\theta+\cos 3\theta}+\frac{1}{\cos\theta+\cos 5\theta}+\frac{1}{\cos\theta+\cos 7\theta}+$$

... (n உறுப்புக்கள்)

$$U_n = n\text{—வது உறுப்பு}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + \cos(3\theta + \overline{n-1}\,2\theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + \cos(2n+1)\theta}$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{\theta + \overline{2n+1}\,\theta}{2}\cdot\cos\frac{\overline{2n+1}\,\theta - \theta}{2}} \quad (\S 1\cdot1.\ \text{சூத்திரம் (7)})$$

$$= \frac{1}{2.\cos(n+1)\theta.\cos n\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{2\sin\theta.\cos(n+1)\theta.\cos\theta}$$ (பகுதி, தொகுதி இரண்டையும் $\sin\theta$ ஆல் பெருக்க)

$$= \frac{\sin(\overline{n+1}\,\theta - n\theta)}{2\sin\theta\cos(n+1)\theta.\cos n\theta}$$

$$= \frac{\sin\overline{n+1}.\theta\cos n\theta - \cos(n+1)\theta\sin n\theta}{2\sin\theta.\cos(n+1)\theta.\cos n\theta}$$

$$U_n = \frac{1}{2\sin\theta}\left\{\tan(n+1)\theta - \tan n\theta\right\}$$

$= V_n - V_{n-1}$ எனக் கொண்டால்,

$$V_o = \frac{1}{2\sin\theta}.\ (\tan\theta - O)$$

$$\therefore\ S_n = V_n - V_o \qquad (\S 3.21.(A))$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta}.\ \left\{\tan(n+1)\theta - \tan\theta\right\}$$

மாதிரி 4. கூட்டுக :—

$$\tan^{-1}\frac{4}{1+3\cdot4} + \tan^{-1}\frac{6}{1+8\cdot9} + \tan^{-1}\frac{8}{1+15\cdot16} + \ldots\ldots\ (n\ \text{உறுப்புக்கள்})$$

3, 8, 15, ... என்னும் வரிசையில் n-வது உறுப்பு, u_n ஆகில் u வரிசை : 3, 8, 15, ..., u_n

$u_2 - u_1$ஐ v_1 என்றும், $u_3 - u_2$ v_2 என்றும், ... $u_n - u_{n-1}$ ஐ v_{n-1} என்றும் எழுதினால், நமக்குக் கிடைக்கும்

v வரிசை : $v_1, u_2, \ldots, v_{n-1}$

ஆகையால், $v_1 = u_2 - u_1$

$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$v_{n-1} = v_n - u_{u-1}$$

கூட்ட: $v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_1$

ஆகையால், $u_n = u_1 + (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1})$

$= 3 + (5 + 7 + \dots (n-_1$ உறுப்புகள்))

$$= 3 + \frac{n-1}{2}\left\{ 2\cdot5 + (n-2)\cdot2 \right\}$$
$$= 3 + (n-1)(3+n)$$
$$= r_2 + 2n$$
$$= n(n+2).$$

இம்முறையில், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வரிசையின் n-வது உறுப்பைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு வித்தியாசங்கள் முறை (Method of differences) எனப் பெயர்)

இம்மாதிரியே, 4, 9, 16, ... என்ற வரிசையின் n-வது உறுப்பு = $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$.

4, 6, 8, ... என்னும் வரிசை கூ. வி. ல் இருப்பதால் இதன் n-வது உறுப்பு $= 4 + (n-1)2 = 2n + 2$.

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட,

$\tan^{-1}\frac{4}{1+3\cdot4} + \tan^{-1}\frac{6}{1+8\cdot9} + \tan^{-1}\frac{8}{1+15\cdot16} + \dots$ என்ற வரிசையின் n-வது உறுப்பு

$$= \tan^{-1}\frac{2n+2}{1+n(n+2)(n+1)^2} \quad \dots\dots\dots\text{(i)}$$

அதாவது, $U_n = \tan^{-1}\frac{2n+2}{1+n(n+2)(n+1)^2}$

$$= \tan^{-1}\frac{(n+2)(n+1)-(n+1)n}{1+(n+2)(n+1)\cdot(n+1)n}$$
$$= \tan^{-1}(n+2)(n+1) - \tan^{-1}(n+1)n$$

(கேள்வி 23, அப்பியாசம் 1(அ)

$= V_n - V_{n-1}$ எனக் கொண்டால்

$$V_0 = \tan^{-1} 2.$$

$S_n = V_n - V_0$ (§ 3·21 (A)

$$= \tan^{-1}(n+2)(n+1) - \tan^{-1} 2$$
$$= \tan^{-1}\frac{(n+2)(n+1)-2}{1+(n+2)(n+1)\cdot2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{n(n+3)}{1+2(n+1)(n+2)}$$

மாதிரி 5. $\tan\theta = \text{cof}\,\theta - 2\,\text{cof}\,2\theta$ என நிரூபித்து, அதைப் பயன்படுத்தி $\tan\theta + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்) என்னும் வரிசையின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$ { பகுதியையும், தொகுதியையும் $2\sin\theta$ஆல் பெருக்க.

$$= \frac{2\cos^2\theta - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} - \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$\therefore\quad \tan\theta = \text{cof}\,\theta - 2\,\text{cof}\,2\theta.$ (§ 1·1. சூத்திரம் (9))

θஐ, $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2^2}, \frac{\theta}{2^{n-1}}$ என்று மாற்றினால் நமக்குக் கிடைக்கும் n சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு.

$$\tan\theta = \text{cof}\,\theta - 2\,\text{cof}\,2\theta \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\frac{\theta}{2} - \text{cof}\,\theta \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} = \frac{1}{2^2}\text{cof}\frac{\theta}{2^2} - \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,\frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\text{cof}\frac{\theta}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\text{cof}\frac{\theta}{2^{n-2}} \qquad \ldots\ldots(n)$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்ட

$$\tan\theta + \tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \ldots\ldots (n \text{ உறுப்புக்கள்})$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\text{cof}\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\,\text{cot}\,2\theta$$

எனவே, $S_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\text{cof}\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\,\text{cof}\,2\theta.$

குறிப்பு (1):—ஒரு வரிசையின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதல் S_n எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\quad \underset{n\to\infty}{\text{lt}}\, S_n = l$ (முடிவுள்ள எண், finite) எனில், இவ்வரிசைக்கு

குவித்தொடர் (convergent series) எனப் பெயர். மேலும்,

l என்பது இம் முடிவிலித் தொடரின் (infinite series) கூட்டுத் தொகையாகும் (Sum to Infinity).

குறிப்பு (2) :—$n \to \infty$ (n மிகப் பெரியதாகில்) $\frac{\theta}{2^{n-1}} \to 0$

ஆகையால் $\lim_{\frac{\theta}{2^{n-1}} \to 0} \left\{ \frac{\tan \frac{\theta}{2^{n-1}}}{\frac{\theta}{2^{n-1}}} \right\} = 1$ (§ 3·12)

அதாவது, $2^{n-1} \tan \frac{\theta}{2^{n-1}} \to \theta$

ஆகையால், $\frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{\theta}{2^{n-1}} \to \frac{1}{\theta}$

மாதிரி 5லிருந்து $n \to \infty$ எனில்

$$S_n \to \frac{1}{\theta} - 2 \cot 2\theta$$

அதாவது, $\tan \theta + \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{\theta}{2^2} + \ldots\ldots$ முடிவிலிவரை

$$= \frac{1}{\theta} - 2 \cot 2\theta$$

அப்பியாசம் 3 (ஆ)

கீழ்க்கண்ட வரிசைகளின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதலைக் காண்க. (கேள்விகள் (1—7)

1. $\sin^3 \alpha + \sin^3 2\alpha + \sin^3 3\alpha + \ldots\ldots$

$$\left\{ \text{விடை.} \quad \frac{\frac{3}{4} \sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\frac{1}{4} \sin\frac{3(n+1)\alpha}{2} \sin\frac{3n\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}} \right\}$$

2. $\sin^3 \frac{\theta}{3} + 3 \sin^3 \frac{\theta}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{\theta}{3^3} + \ldots\ldots$

$$\left[\text{விடை :} \quad \frac{3^n}{4} \sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{1}{4} \sin\theta \right]$$

3. $\cos^4\theta + \cos^4\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \cos^4\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\ldots$

$$\left[\text{விடை :} \quad \frac{3n}{8} \right]$$

4 $1^2 \cos\theta + 2^2 \cos 2\theta + 3^2 \cos 3\theta + \ldots\ldots$

$$\left[\text{விடை : } -\frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ \frac{\cos (n+1)\frac{\theta}{2} \cdot \sin n \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right\} \right]$$

5 $\sin\alpha \ \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sin 4\alpha + \ldots\ldots$

$$\left[\text{விடை : } \tfrac{1}{2} \left\{ n \cos\alpha - \frac{\cos(n+2)\alpha \cdot \sin n\alpha}{\sin\alpha} \right\} \right]$$

6. $\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha + \sin 5\alpha \cdot \cos 7\alpha + \ldots\ldots$

$$\left[\text{விடை : } \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\sin 2(n+1)\alpha \cdot \sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha} - n \sin 2\alpha \right\} \right]$$

7. $\cos\alpha \cdot \cos 5\alpha + \cos 3\alpha \cdot \cos 7\alpha + \cos 5\alpha \cdot \cos 9\alpha + \ldots$

$$\left[\text{விடை : } \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\cos 2(n+2)\alpha \cdot \sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha} + n \cos 4\alpha \right\} \right]$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2^2} \cdot \cos\frac{\theta}{2^3} \ldots\ldots \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin\theta}{\theta}$ என நிறுவுக.

9. $1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots\ldots + 2\cos(n-1)\theta = S_n$ எனில்,

$$S_n = \frac{\sin(2n-1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ என்றும், } 1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \frac{\sin^2\frac{n\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

என்றும் நிறுவுக.

10. $\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2^2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2^2} + \ldots$ (n உறுப்புகள் $= \tfrac{1}{2} \cdot \left[\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}} - \cos 4\alpha \right]$ என நிறுவுக.

பின் வருவனவற்றைக் கூட்டுக:

11. $\sec\theta \cdot \sec 2\theta + \sec 2\theta \cdot \sec 3\theta + \sec 3\theta \cdot \sec 4\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left[\text{விடை } \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \tan(n+1)\theta - \tan n\theta \right\} \right]$$

12. $\operatorname{cosec}\theta \cdot \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2\theta \cdot \operatorname{cosec} 3\theta + \operatorname{cosec} 3\theta \cdot \operatorname{cosec} 4\theta + \ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left[\text{விடை : } \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \cot\theta - \cot(n+1)\theta \right\} \right]$$

13. $\tan\theta : \sec 2\theta = \tan 2\theta - \tan\theta$ என்று நிரூபித்து, அதைப் பயன்படுத்தி, $\tan\theta \cdot \sec 2\theta + \tan 2\theta \cdot \sec 4\theta + \tan 4\theta \cdot \sec 8\theta + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்) கூடுதலைக் காண்க.

[விடை : $\tan 2^n\theta - \tan\theta$]

14. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{2}{9} + \tan^{-1}\frac{4}{33} + \ldots +$

$\tan^{-1}\frac{2^{n-1}}{1+2^{2n-1}} + \ldots\ldots$ மு. வ.

(மு. வ : ad inf.) [விடை. $\frac{\pi}{4}$]

15. $\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2} + \tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2} + \tan^{-1}\frac{1}{1+3+3^2}$

$+ \ldots$ (n, உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$]

16. $\tan^{-1}\frac{2x}{1+3\cdot1x^2} + \tan^{-1}\frac{2x}{1+5\cdot3x^2} + \tan^{-1}\frac{2x}{1+7\cdot5x^2}$

$+ \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\tan^{-1}(2n+1)x - \tan^{-1}x$]

17. $\tan^{-1}\frac{x}{1+2\cdot1x^2} + \tan^{-1}\frac{x}{1+3\cdot2x^2} + \tan^{-1}\frac{x}{1+4\cdot3x^2}$

$+ \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\tan^{-1}(n+1)x - \tan^{-1}n$]

18. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{21}$

$+ \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$]

19. $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 2^2\tan 2^2\alpha + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\cot\alpha - 2^n \cot 2^n\alpha$]

20. $\tan\frac{\theta}{2} \cdot \sec\theta = \tan\theta - \tan\frac{\theta}{2}$ என்று நிரூபித்து, அதைப் பயன்படுத்தி $\tan\frac{\theta}{2} \cdot \sec\theta + \tan\frac{\theta}{4} \sec\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{8} \sec\frac{\theta}{4}$ $+ \ldots$ (n உறுப்புக்கள் கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை. $\tan\theta - \tan\frac{\theta}{2^n}$]

21. $\frac{\sin x}{\cos 3x} = \frac{1}{2}\left\{\tan 3x - \tan x\right\}$ என்று நிரூபித்து, அதைப் பயன்படுத்தி, $\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3^2 x} + \frac{\sin 3^2 x}{\cos 3^3 x} + \dots\dots$ (n உறுப்புக்கள்) கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை. $\frac{1}{2}\left\{\tan 3^n x - \tan x\right\}$]

22. $\tan\alpha \cdot \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha + \tan 3\alpha \cdot \tan 4\alpha + \dots\dots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\frac{\tan (n+1)\alpha}{\tan\alpha} - (n+1)$]

23. $\cot\theta \cdot \cot 2\theta + \cot 2\theta \cdot \cot 3\theta + \cot 3\theta \cdot \cot 4\theta + \dots\dots$ (n உறுப்புக்கள்)

[விடை. $\cot\theta\left\{\cot\theta - \cot(n+1)\theta\right\} - n$].

24. $\operatorname{cosec}\theta = \cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta$ என்று நிரூபித்து, $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2^2\theta + \operatorname{cosec} 2^3\theta + \dots\dots$ (n உறுப்புக்கள்) $= \cot\frac{\theta}{2} - \cot 2^{n-1}\theta$ என நிறுவுக.

25. $\cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13}$, $\cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}$ ஆகிய இவை $2x^2 + 2x - 3 = 0$ன் மூலங்கள் எனக் காண்க

அத்தியாயம் IV

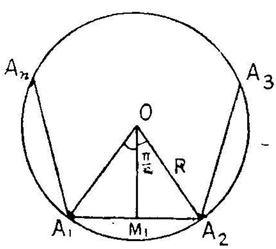
ஒழுங்குப் பல் கோணங்கள்

4·1. எந்தப் பல்கோணத்திற்கு உட்கோணங்கள் எல்லாம் சமமாகவும் பக்கங்களின் நீளங்களும் சமமாகவும் இருக்கின்றனவோ அதற்கு ஒழுங்குப்பல்கோணம் (Regular polygon) எனப் பெயர்.

n பக்கங்களும் n உச்சிகளும் உள்ள பல்கோணத்திற்கு n கோணம் (n-gon) எனப் பெயர்.

ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் ஏதேனும் மூன்று உச்சிகளின் வழியாக வரையப்படும் வட்டம் மற்ற உச்சிகள் வழியாகவும் செல்லும். இவ்வட்டத்திற்கு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் வெளி வட்டம் எனப் பெயர்.

இம்மாதிரியே, ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் ஏதேனும் மூன்று பக்கங்களைத் தொடும் வட்டம் மற்றப் பக்கங்களையும் தொடும். இவ்வட்டத்திற்கு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் உள் வட்டம் எனப் பெயர்.



படம் 22

4.2. n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பை அதன் சுற்று ஆரத்தின் மூலம் கண்டு பிடிக்க.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் உச்சிகளாக இருக்கட்டும்.

O என்னும் புள்ளி இப் பல் கோணத்தின் சுற்று மையத்தைக் குறிக்கட்டும். (படம் 22)

Oவிலிருந்து இப் பல கோணத்தின் பக்கங்கள் $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் முறையே $M_1, M_2, \ldots$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$A_1\hat{O}A_2 = A_2\hat{O}A_3 = \ldots = A_n\hat{O}A_1$$

$$(\because\ A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots\ldots = A_nA_1)$$

ஆனால் $A_1\hat{O}A_2 + A_2\hat{O}A_3 + \ldots + A_n\hat{O}A_1 = 2\pi$

$$\therefore\ A_1\hat{O}A_2 = \frac{2\pi}{n}$$

மேலும் $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OAn = R$ (சுற்று ஆரம்)

$\triangle\ OA_1OA_2$ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\ OA_1 \cdot OA_2 \sin A_1\hat{O}A_2$

$= \frac{1}{2}\ R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$. (§ 2·11 சூத்திரம் ($b$))

முக்கோணங்கள் OA_1A_2, OA_2A_3, ... $OAnA_1$ சர்வ சமமாகையால், $\triangle OA_1A_2 + \triangle OA_2A_3 + \triangle OAnA_1$ன் பரப்பு $= n \times \triangle OA_1A_2$ன் பரப்பு.

$$= n \times \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

அதாவது, ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1A_2A_3 \ldots An$ன் பரப்பு

$$= \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

4·3

n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்றளவை அதன் சுற்று ஆரத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்க.

$OM_1 \perp A_1A_2$ (படம் 4 (அ))

$\therefore\ \triangle OA_1M_1 \equiv \triangle OA_2M_1$

ஆகையால், $A_1\hat{O}M_1 = A_2\hat{O}M = \frac{1}{2}\ A_1\hat{O}A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$.

$$\frac{M_1A_1}{OA_1} = \sin M_1\hat{O}A_1 = \sin \frac{\pi}{n}.$$

அல்லது, $M_1A_1 = OA \sin \frac{\pi}{n} = R \sin \frac{\pi}{n}$.

ஆகையால், $A_1A_2 = 2\ A_1M_1 = 2\ R \sin \frac{\pi}{n}$.

அதாவது, $a = 2\ R \sin \frac{\pi}{n}$ ($a = A_1A_2$, ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பக்க நீளம்)

எனவே, ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1A_2A_3 \ldots An$ன்

சுற்றளவு $= A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots AnA_1$

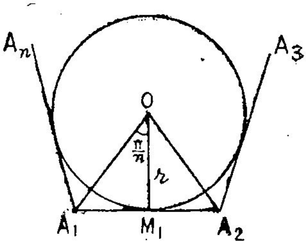
$= na$

$\therefore$ சுற்றளவு $= n.\ 2\,R \sin \frac{\pi}{n}\ 2n\,R \sin \frac{\pi}{n}$

4·4

n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பை அதன் உள் வட்ட ஆரத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்க.

n பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1A_2A_3 \dots An$ன் உள் வட்டம் அதன் பக்கங்கள் A_1A_2, A_2A_3, $\dots AnA_1$ ஐ முறையே M_1, M_2, $\dots$, Mnல் தொட்டால், M_1, M_2, $\dots$ Mn அப் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளாக இருக்கவேண்டும்.



படம் 23

இத் தொடு வட்டத்தின் மையம் O, ஆரம் r எனில்

$$OM_1 = OM_2 = \dots = OMn = r.$$

$$\triangle\, OA_1A_2\text{ன் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\, A_1A_2 \cdot OM_1$$

$$= A_1M_1 \cdot OM_1$$

$$= OM_1 \tan\frac{\pi}{n} \cdot OM_1$$

$$\left(\because\ \frac{M_1A_1}{M_1O} = \tan\frac{\pi}{n} \right)$$

$$= r^2 \tan\frac{\pi}{n}.$$

மேலும், முக்கோணங்கள் OA_1A_2, $OA_2A_3, \dots OAnAn$ ஒன்றுக்கொன்று சருவசமனுகையால்,

ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1A_2A_3, \dots An$ன் பரப்பு $= n.\ \triangle\ OA_1A_2$ன் பரப்பு

$$= n \cdot r^2 \tan\frac{\pi}{n}.$$

அதாவது, *n* பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின்

$$\text{பரப்பு} = n\, r^2 \tan\frac{\pi}{n}$$

4·5. *n* பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் சுற்றளவை அதன் உள் ஆரத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்க

n பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணம்

$A_1A_2A_3 \dots An$ல் $A_1A_2 = A_2A_3 = \quad = AnA_1 = a$ எனில்

$$a = 2A_1M_1 \quad (\text{படம் } 4\ (\text{ஆ}))$$

$$= 2 \cdot OM_1 \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \quad a = 2r \tan \frac{\pi}{n}$$

ஆகையால், சுற்றளவு $= na = n \cdot 2r \tan \frac{\pi}{n}$

$$= 2nr \tan \frac{\pi}{n}.$$

4·6. n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் பரப்பை அதன் பக்கங்கள் மூலம் கண்டுபிடிக்க.

n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பலகோணத்தின் பக்கம் 'a' எனில்

$$a = 2R \sin \frac{\pi}{n} \quad (= R \text{ சுற்று வட்ட ஆரம்})$$

(§ 4·3)

ஆகையால், $R = \dfrac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ .... (i)

ஆனால், ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் பரப்பு $= \dfrac{nR_2}{2} \cdot \sin \dfrac{2\pi}{n}$ (§ 4 2)

$$= \frac{nR^2}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$

$$= n \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{na^2}{4} \cdot \cot \frac{\pi}{n}.$$

எனவே, பக்க நீளம் a கொண்ட n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு $= \dfrac{na^2}{4} \cdot \cot \dfrac{\pi}{n}$.

குறிப்பு (1):—மேற்கண்ட சூத்திரத்தை, § 4·4, § 4·5ஐ உபயோகித்தும் நிறுவலாம்.

குறிப்பு (2):—§ 4·3, § 4·5லிருந்து $r = R \cos \frac{\pi}{n}$ எனப்புலப்படும்.

4·7. இப்பொழுது § 3·11, § 4·2ஐ உபயோகித்து ஒரு வட்டத்தின் பரப்பைக் கண்டுபிடிப்போம்.

n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ldots A_n$ ஐயும், ஆரம் R உள்ள அதன் சுற்று வட்டத்தையும் எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 22)

இவ்வொழுங்குப் பல்கோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை nஐ, அதிகரிக்க, அதிகரிக்க அதன் பரப்பும் அதிகரித்துக்கொண்டே வரும்.

ஆகையால் $n \to \infty$ எனில், ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பின் வரம்பு, சுற்று வட்டத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாகும்.

அதாவது, வட்டப்பரப்பு $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right) \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \pi R^2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \pi R^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \pi R^2 \lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \pi R^2 \cdot 1 \qquad (\S\ 8 \cdot 11)$$

ஆகையால், வட்டத்தின் ஆரம் R எனில் அதன் பரப்பு $= \pi R^2$.

குறிப்பு :—ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோணம் θ^c எனில் அதன் பரப்பு $= \frac{1}{2}R^2\theta$. ($R =$ வட்ட ஆரம்)

ஏனெனில், $\frac{\text{வட்டக்கோணப் பகுதியின்பரப்பு}}{\theta} = \frac{\text{வட்டப்பரப்பு}}{2\pi}$

$$= \frac{\pi R^2}{2\pi}$$

$$= \frac{R^2}{2}$$

4·8.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. ஒரு வட்டத்தினுள் வரைந்த (inscribed) $2n$ பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு, அதே வட்டத்தினுள் வரைந்த n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் பரப்புக்கும் அந்த வட்டத்தை உள் வட்டமாகக் கொண்ட n பக்க்ங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்புக்கும் இடை விகித சமன் (mean proportional) என நிறுவுக

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் வட்டத்தின் ஆரம் R எனில் அதைச் சுற்று வட்டமாகக் கொண்ட n பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு$=\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$. (§ 4·2 ......(i)

இதே வட்டத்தை உள் வட்டமாகக் கொண்ட n பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு$=nR^2\tan\dfrac{\pi}{n}$. (§ 4·4......(ii

இவ்விரண்டு பல்கோணங்களின் பரப்புகளின் இடை

$$\text{விகித சமன்} = \sqrt{\frac{nR^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot nR^2\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$= nR^2\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\pi/n}{\cos\pi/n}}$$

$$= nR^2\sin\frac{\pi}{n}.$$

$$(\text{அதாவது}) = \frac{2nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{2n}$$

= கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைச் சுற்று வட்டமாகக் கொண்ட $2n$ பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல் கோணத்தின் பரப்பு (§ 4·2)

மாதிரி 2. ஒன்றுவிட்ட (alternate) பக்க நீளங்கள் a, b உள்ள ஒரு அறுகோணத்தின் சுற்று ஆரம் R எனில் $3R^2=a^2+ab+b^2$ என நிறுவுக.

ஒன்று விட்ட பக்க நீளங்கள் a, b உள்ள அறுகோணம் $ABCDEF$ன் சுற்று மையம் O ஆரம் R எனில்,

$AB=CD=EF=a$;

$BC=DE=FA=b$;

$A\hat{O}B=C\hat{O}D=E\hat{O}F=\alpha$;

$B\hat{O}C=D\hat{O}E=F\hat{O}A=\beta$ எனக் கொள்.

ஆகையால், $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l}\because A\hat{O}B=\alpha \\ \therefore ACB=\frac{\alpha}{2}\end{array}\right\}$$ (§ 2·11. சூத்திரம் (a)) ...... (i)

இம்மாதிரியே, $b=2R\sin\frac{\beta}{2}$ ....(ii)

$$A\hat{O}B+B\hat{O}B+C\hat{O}D+D\hat{O}E\pm E\hat{O}F+F\hat{O}A=2\pi.$$

ஆகையால், $3\alpha+2\beta=2\pi.$

அதாவது, $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$

$=120°.$

$$a^2+ab+b^2=4R^2\left\{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right\}$$

$$=2R^2\left\{1-\cos\alpha+1-\cos\beta+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}$$

$$=2^2\left\{2-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\left(\because\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos 60°=\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=2R^2\left\{\tfrac{3}{2}-2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}$$

$$=2R^2\,\tfrac{3}{2}$$

$$=3R^2.$$

மாதிரி 3. P என்னும் புள்ளி n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் உள் மையத்திலிருந்து C என்னும் தூரத்தில் இருக்கிறது. உள் வட்ட ஆரம் r எனில், Pயிலிருந்து இப் பல்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்து நீளங்களின் வர்க்கக்கூடுதல் $n\left(r^2+\frac{C^2}{2}\right)$ என நிறுவுக.

n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணம் $A_1A_2A_3\ldots An$ உள் மையம் O எனவும், உள் வட்ட ஆரம் r எனவும் கொள். Oவிலிருந்து $OM_1, OM_2, \ldots\ldots, OMn$ முதலிய குத்துக் கோடுகளை முறையே $A_1A_2, A_2A_3, \ldots\ldots AnA_1$க்கு வரை. (படம் 23)

$$OP = C \text{ (கொள்கை)}$$

$P\hat{O}M_1 = \alpha$ எனில்,

$$P\hat{O}M_2 = \alpha + \frac{2\pi}{n};$$

$$P\hat{O}M3 = \alpha + \frac{4\pi}{n};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P\hat{O}Mn = \alpha + (n-1).\ \frac{2\pi}{n}$$

Pயிலிருந்து A_1A_2க்கு வரையப்படும் செங்குத்து PP_1 எனில்

$$PP_1 \parallel OM_1$$

மேலும் $PP_1 = OM_1 - OP\cos\alpha$

$$= r - c\cos\alpha.$$

இம்மாதிரியே, $PP_2PP_3\ldots,PPn$ முறையே $A_2A_3 \cdot A_3A_4 \ldots AnA_1$க்கு செங்குத்துகள் $PP_2 = r - c\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)$

$$PP_3 = r - c\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$PPn = r - c\cos\left(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

ஆகையால், $PP_1{}^2 + PP^2{}_2 + PP^2{}_3 + \ldots + PPn^2$

$$= nr^2 - 2rc\left\{\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)\right.$$

(+ ......n உறுப்பு)

$$+\ c^2\left\{\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)\right.$$

+ ...... (n உறுப்புக்கள்)

$$nr^2 - 2rc\frac{\cos\left\{\alpha + (n-1)\frac{\pi}{n}\right\}.\sin\frac{n\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$+\frac{c^2}{2}\left\{\left[1+\cos 2\alpha\right]+\left[1+\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\left[1+\cos\left(2\alpha+\frac{8\pi}{n}\right)\right]+\ldots\ \ldots(n\ \text{உறுப்புக்கள்})\right\}$$

$$nr^2-2rc.\frac{\cos\left\{\alpha+(n-1)\frac{\pi}{n}\right\}.\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$+\frac{c^2}{2}\left\{n+\frac{\cos\left\{2\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right\}\sin 2\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\right\}$$

$$=nr^2+\frac{nc^2}{2}\quad(\because\ \sin\pi=\sin 2\pi=0)$$

மாதிரி 4. சம சுற்றளவுள்ள ஒழுங்கு ஐங்கோண (Pentagon) தச கோணங்களின் (Decagon) பரப்பு விகிதம் $2:\sqrt{5}$ எனக் காண்க.

ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் பக்க நீளம் a எனவும், ஒழுங்கு தசகோணத்தின் பக்க நீளம் b எனவும் கொள்.

இவ்விரண்டிற்கும் சுற்றளவு சமம் (கொள்கை)

ஆகையால், $5a = 10b.$

அதாவது, $a = 2b$ ....(1)

ஐங்கோணப் பரப்பு $= 5\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\cot\frac{\pi}{5}$ (§ 4·6)

$$=\frac{5a^2}{4}\cdot\cot 36^\circ$$

தசகோணப் பரப்பு $= 10\cdot\frac{b^2}{4}\cdot\cot\frac{\pi}{10}$ (§ 4·6)

$$=\frac{5b^2}{2}\cdot\cot 18^\circ$$

ஆகையால், பரப்பு விகிதம் $=\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{\cot 36^\circ}{\cot 18^\circ}$

$$=2\cdot\frac{\cot 36^\circ}{\cot 18^\circ}\quad((1)\ \text{லிருந்து})$$

$$= \frac{2\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ \cos 18^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{2\sin 36^\circ \cos 18^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ + \sin 18^\circ}$$

(§ 1·1 சூத்திரம் (8)

$$= \frac{4\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ + \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}} \qquad (\S\ 1\cdot 36)$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

மாதிரி 5. ஒரே வட்டத்தை, உள் வட்டமாகவும், சுற்று வட்டமாகவும் கொண்ட, n பக்கங்களுள்ள இரு ஒழுங்குப் பல் கோணங்கள் வரையப்பட்டால், முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு, இரண்டாவது ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பாதிச் சுற்றளவுக்கும், முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று ஆரத்திற்கும் உள்ள பெருக்கல் பலன் எனக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் ஆரம் r எனக் கொள். முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பக்க நீளம் a எனில்

$a = 2r\tan\frac{\pi}{n}$; அதன் பரப்பு A என்றால்

$$A = n\frac{a^2}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{n} \quad (\S\ 4\ 5;\ \S\ 4\cdot 6) \qquad \text{.........(i)}$$

இரண்டாவது ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பக்க நீளம் b எனில்

$b = 2r\sin\frac{\pi}{n}$. அதன் சுற்றளவு $= nb$.

ஆகையால் அதன் பாதிச் சுற்றளவு $= \frac{nb}{2} = nr\sin\frac{\pi}{n}$.

$= s$ எனக் கொள் ....(ii)

முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று ஆரம் R எனில்

$R = r \sec \pi/n$ (§ 4·6. குறிப்பு 2) ....(iii)

ஆகையால்,

(இரண்டாமது ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பாதிச் சுற்றளவு) × (முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று ஆரம்)

$$= s \times R$$

$$= nr \sin\frac{\pi}{n} \times \frac{r}{\cos \pi/n}$$

$$= nr^2 \tan\frac{\pi}{n}$$

$$= n \cdot \frac{4r^2}{4} \tan^2\frac{\pi}{n} \times \cot\frac{\pi}{n}$$

$$= n \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{n} \qquad \left((\text{i}) \text{ லிருந்து } a = 2r \tan\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= A$$

= முதல் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் பரப்பு.

அப்பியாசம் 4

1. ஒரே வட்டத்தைச் சுற்று வட்டமாகவும், உள் வட்டமாகவும் கொண்டு வரையப்பட்ட, n பக்கங்களுள்ள இரு ஒழுங்குப் பல்கோணங்களின் பரப்பு விகிதம் 3 : 4 ஆனால் nன் மதிப்பு என்ன?

[விடை : $n = 6$]

2. n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை இப் பல்கோணத்தின் உச்சிகளுடன் சேர்க்கக்கூடிய நாண்களின் வர்க்கக்கூடுதல் $2nr^2$ எனக் காண்க. (r = வட்ட ஆரம்)

3. சுற்று ஆரம் R உள்ள, n பக்கங்களைக் கொண்ட ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் ஒரு உச்சியை மற்ற உச்சிகளுடன் சேர்க்கும் நாண்களின் கூடுதல் $2R \cot\frac{\pi}{2n}$ எனக் காண்க

4. ஆரம் r உள்ள ஒரு வட்டத்தில் அமையும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்விடத்தைத் தொடும் ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் n பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்து நீளங்கள் $p_1, p_2, \ldots p_n$ ($n > 3$) எனில்

(i) $2\sum_{r=1}^{n} p_r^2 = 3nr^2$ (ii) $2\sum_{r=1}^{n} p_r^3 = 5nr^3$ எனக் காண்க.

5. n, $2n$ பக்கங்கள் உள்ள இரு ஒழுங்குப் பல்கோணங்களின் சுற்றளவுகள் சமமாகில், அவைகளின் பரப்பு விகிதம்

$$2\cos\frac{\pi}{n} : \left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)$$ என நிறுவுக.

6. பக்க நீளம் a உள்ள ஏதேனும் ஒரு ஒழுங்குப் பலகோணத்தின் சுற்று வட்டத்திற்கும் உள் வட்டத்திற்கும் இடையிலிருக்கும் பரப்பு, அப்பல்கோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை ஏதாயினும், மாறாது என நிறுவுக

7. n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் உள் வட்ட ஆரம் r_n, சுற்று ஆரம் R_n எனில் $r_n + R_n = 2r_{2n}$ எனக் காண்க.

8. சம சுற்றளவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்புக்கும் ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்புக்கும் உள்ள விகிதம் 2 : 3 எனக் காண்க.

9. ஒரு ஒழுங்கு எண் கோணத்தின் (Octagon) உள்வட்ட ஆரம் a. மற்றொரு ஒழுங்கு எண் கோணத்தின் சுற்றுவட்ட ஆரம் b. இவைகளின் பரப்புக்கள் சமமாகில் $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ எனக் காண்க

10. a, $2a$ என்ற சுற்று ஆரங்களைக் கொண்ட இரு ஒழுங்கு ஐங்கோணப் பரப்புக்களின் கூடுதல், bஐ உள் ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் பரப்புக்குச் சமமாகில் $4b = (5+\sqrt{5})a$ என நிறுவுக.

11. ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்திற்கும், ஒரு ஒழுங்குப் பன்னிரு கோணத்திற்கும் (Regular Dodecagon)

(i) சுற்று வட்டம் ஒன்றாகில் அவைகளின் பரப்பு விகிதம் $\sqrt{3} : 2$ என்றும் சுற்றளவு விகிதம் $1 : \sqrt{6}-\sqrt{2}$ என்றும்

(ii) உள் வட்டம் ஒன்றாகில், அவைகளின் பரப்பு விகிதமும் சுற்றளவு விகிதமும் $1 : 2\sqrt{3}-3$ என்றும் காண்க.

12. சம சுற்றளவுள்ள ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்திற்கும், பன்னிரு கோணத்திற்கும் உள்ள பரப்பு விகிதம் $4\sqrt{3}-6 : 1$ என நிறுவுக.

அத்தியாயம் V

சிக்கல் எண்கள்

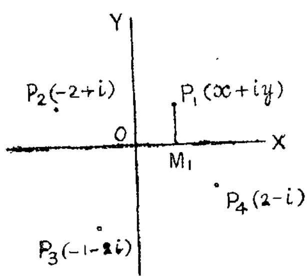
5·1. வரைவிலக்கணம். -1ன் வர்க்கமூலம் $\sqrt{-1}$ ஒரு கற்பனையான எண். அதை i எனக்குறிப்பது வழக்கம். x, y என்பவை முழுவதும் மெய்யான எண்களாகில், $x+iy$ என்னும் கணியத்திற்குச் சிக்கலெண் (complex number) எனப்பெயர்.

5·2. $i=\sqrt{-1}$ ஆகையால்,

$$i^2=-1;\quad i^3=i^2 i=-i;\quad i^4=i^2 i^2=(-1)\ (-1)=+1.$$

இம்மாதிரியே, i^nன் மதிப்பைக் காணலாம் (n என்பது ஒரு முழு எண்)

5·3. வரை கணித முறையில் சிக்கலெண்ணைக் குறிப்பது. (Geometrical representation of a complex number)



படம் 24

வழக்கம் போல் இரு செங்குத்து அச்சுக்கள் OX, OYஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

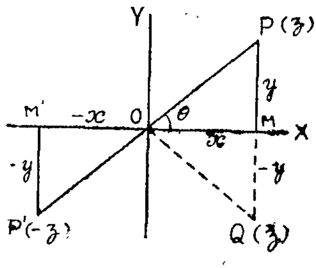
$OM_1=x$; $M_1P_1=y$ புள்ளி P_1 லிருந்து OY, OX அச்சுக்கள் வரையில் உள்ள செங்குத்து நீளங்கள் (அதாவது) P_1 என்னும் புள்ளியின் கூறுகள் (coordinates) (x, y) எனில் P_1 என்பது $x+iy$ என்னும் சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கும். இவ்வாறு Pஐ எடுத்துக்கொண்டால் இப் படத்திற்கு ஆர்கண்ட் வரைபடம் (Argand Diagram) என்று பெயர்.

இப்படத்தில் x அச்சை மெய்யான அச்சு என்றும் y அச்சைக் கற்பனையான அச்சு என்றும் சொல்லுகிறோம்.

இவ்வார்கண்ட் படத்தில் (படம் 24)) P_2ன் கூறுகள் $(-2, 1)$ எனில் அது குறிக்கும் சிக்கலெண் $-2+i$. P^3ன் கூறுகள் $(-1,-2)$ எனில் அது குறிக்கும் சிக்கலெண் $-1-2i$. இம்மாதிரியே $P_4(2,-1)$ குறிக்கும் சிக்கலெண் $2-i$.

குறிப்பு :— பல்வேறு சிக்கலெண்களைக் குறிக்கக்கூடிய புள்ளிகள் ஆர்கண் தளத்தில் (Argand Plane) நான்கு காற்பகுதிகளிலும் (Quadrants) அமையும்.

5·4. பொதுவாக $x+iy$ என்னும் சிக்கலெண்ணை z, எனக் குறிப்பது வழக்கம். P என்னும் புள்ளி z என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கட்டும். குத்துக் கோடு PMஐ Pயிலிருந்து X அச்சுக்கு வரை.



படம் 25

ஆகையால், $OM=x$, $MP=y$.

$$OP=+\sqrt{x^2+y^2};\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

எனவே O ஆதியானுல் (origin) OPயின் நீளம் zன் குணகம் (modulus) என்று சொல்லப்படுகிறது. இக்குணகத்தை $|z|=OP=+\sqrt{x^2+y^2}$ என்று குறியீட்டு விளக்குகின்றோம்.

இக் குணகத்திற்குக் கூட்டல் குறிதான் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். அதாவது, $x+y$ன் குணகம் $+\sqrt{x^2+y^2}$.

கோணம் θஐ, சிக்கலெண் zன் வீச்சம் (amplitude) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. $-\pi$க்கும், $+\pi$க்கும் இடையே உள்ள எந்தக் கோணம் θ, $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும் தகுதியாயிருக்கிறதோ, அதுதான், $x+iy$ன் வீச்சத்தினுடைய முதல் மதிப்பு (principal value). $\theta+2n\pi$ என்பது வீச்சத்தின் பொது மதிப்பாகும் (General value)

மெய்யான அச்சில் (x அச்சு) Pன் பிரதிபிம்பம் (Reflection) Q எனில், Q குறிக்கும் சிக்கல் எண்ணிற்கு zன் இணைச்சிக்கலெண் (conjugate) எனப் பெயர். இதன் குறியீட்டு விளக்கம் $\bar{z}$. படம் 25லிருந்து. $\bar{z}=x-iy$. என விளங்கும்.

P^1 என்னும் புள்ளியை OPல் $PO=OP^1$ என்னும்படி எடுக்க. படம் 25லிருந்து, P_1 என்னும் புள்ளி $-x-iy$ஐ, அதாவது $-z$ஐ குறிக்கும் என விளங்குகிறது.

சிக்கலெண்ணின் குணகம், வீச்சம் (முதல் மதிப்பு) இவைகளைப் பற்றிய குறிப்பு : (படம் 24ஐ பார்க்கவும்)

(a) P_1 குறிக்கும் சிக்கலெண்ணின் குணகம் $=+OP_1$: வீச்சத்தின் முக்கிய மதிப்பு $=\angle \bar{X}OP_1$ [இது ஒரு நேர் குறுங் கோணம்]

(b) P_2 குறிக்கும் சிக்கலெண்ணின் குணகம் $=+OP_2$; வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $=\angle XOP_2$ [இது ஒரு நேர் விரி கோணம்]

(c) P_3 குறிக்கும் சிக்கலெண்ணின் குணகம் $= +OP_3$; வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $= \angle XOP_3$ [இது ஒரு எதிர் விரி கோணம்]

(d) P_4 குறிக்கும் சிக்கலெண்ணின் குணகம் $= +OP_4$; வீச்சத்தில் முதல் மதிப்பு $= \angle XOP_4$ [இது ஒரு எதிர் குறுங் கோணம்.

5·5. **ஒரு சிக்கலெண்ணை அதன் குணகம் வீச்சம் இவைகளின் மூலம் விவரிக்க.**

கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலெண்ணை $z = x + iy$ என்க.

படம் 25லிருந்து, $z = r \cos\theta$; $y = r \sin\theta$

ஆகையால் $x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$

அல்லது, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

உதாரணமாக, $2 + i = 2 + i\cdot 1 = \sqrt{2_2 + 1_2}$

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2_2+1_2}} + i\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right]$$

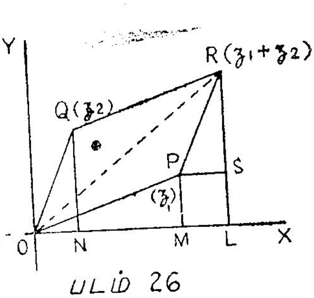
$$= \sqrt{5}\left[\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$$

$$= \sqrt{5}\,[\cos\alpha + i\sin\alpha] \qquad (\text{இங்கு } \alpha = \tan^{1^-}\tfrac{1}{2})$$

5·6. **z_1, z_2 என்னும் இரு சிக்கலெண்களின் கூடுதலை ஆர்கண் தளத்தில் குறிக்க.**

P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1\,(= x_1 + iy_1)$; $z_2\,(= x_2 + iy_2)$ என்ற சிக்கலெண்களை ஆர்கண் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.

O, ஆதியானால் *R* என்னும் புள்ளியை *OPRQ* ஒரு இணைகரமாக இருக்கும்படி எடுத்துக்கொள்.



படம் 26

*Q, P R*லிருந்து *OX*க்கு (மெய் அச்சு) வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளை *N, M, L* எனக்கொள் மேலும் *P*யிலிருந்து *RL*க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி *S* ஆக இருக்கட்டும்.

முக்கோணங்கள் *ONQ, PSR*ல். *OQ, PR* சம இணைகோடுகள். மேலும் *QN, RS*க்கும் இணையாக உள்ளன.

ஆகையால், $QN = PS$; $NQ = SR$. $(\because \triangle ONQ \equiv \triangle PSR)$

$$\therefore \quad OL = OM + ML$$

$$= OM + PS$$

$$= OM + ON$$
$$= x_1 + x_2$$
$$LR = LS + SR$$
$$= LS + NQ$$
$$= MP + NQ$$
$$= y_1 + y_2.$$

எனவே, R என்னும் புள்ளி $x_1 + x_2 + i\ (y_1 + y_2)$, அதாவது, $(x_1 + i\, y_1) + (x_2 + i\, y_2)$ அதாவது $z_1 + z_2$ஐக் குறிக்கிறது

ஆகையால், z_1, z_2 என்ற இரு சிக்கலெண்களை P, Q என்னும் புள்ளிகள் குறித்தால், $z_1 + z_2$ஐக் குறிக்கும். புள்ளி (R) OP, OQஐ அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட நாற்கரத்தினுடைய, O வழியே செல்லும் மூலைவிட்டத்தின் முனைப்புள்ளியாகும்.

குறிப்பு (1):—$PR = OQ = |z_2| = |(z_1 + z_2) - z_1|$

குறிப்பு (2):—ஒரு முக்கோணத்தில் எதேனும் ஒரு பக்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் கூடுதலைவிட அதிகமாய் இருக்கமுடியாது. ஆகையால் முக்கோணம் OPRலிருந்து, $OR \leq OP + PR$

அதாவது, $OR \leq OP + OQ$ ($\because$ $PR = OQ$)

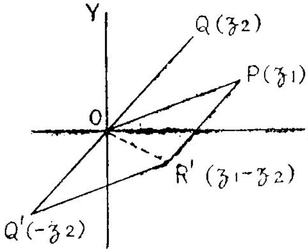
$z_1 + z_2$ஐ R குறிப்பதால் $OR = |z_1 + z_2|$; மேலும் $OP = |z_1|$; $OQ = |z_2|$.

ஆகையால், $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5·7. z_1, z_2 என்னும் இரு சிக்கலெண்களின் வித்தியாசத்தை ஆர்கண் தளத்தில் குறிக்க.

P, Z_1ஐயும் Q, Z_2ஐயும் குறிக்கட்டும்.

Q^1 என்னும் புள்ளி $-Z_2$ஐக் குறித்தால் Q^1Qன் மையப்புள்ளி O (ஆதி) ஆகும். (§ 5·4)



படம் 27

R^1 என்னும் புள்ளியை $OPR^1\ Q^1$ ஒரு இணைகரமாக இருக்கும்படி எடுத்துக்கொள். P, Z_1ஐயும், Q^1, $-Z_2$ஐயும் குறிப்பதால் R^1 $Z_1 + (-Z_2)$ஐக் குறிக்கும். (§ 5·6)

அதாவது R^1, $Z_1 - Z_2$ஐக் குறிக்கும்.

குறிப்பு:—ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வித்தியாசத்தைவிடக் குறைவாய் இருக்க முடியாது. ஆகையால், முக்கோணம் $OQ^1\ R^1$லிருந்து

$$OR^1 \geqslant, Q^1R^1 \sim OQ^1$$

அதாவது, $OR^1 \geqslant, OP \sim OQ^1$

$OQ^1 \geqslant, OP \sim OQ$ $\quad (\because \; Q^1O = OQ)$

(அ-து. $|-Z_2| = |Z_2|$)

$Z_1 - Z_2$ஐ R^1 குறிப்பதால் $OR^1 = |Z_1 - Z_2|$. இம்மாதிரியே, $OP = |Z_1|$, $OQ = |Z_2|$.

ஆகையால், $|Z_1 - Z_2| \geqslant, |Z_1| \sim |Z_2|$. ………(A)

$|Z_1| > |Z_2|$ எனில், (A)ஐ

$|Z_1 - Z_2| \geqslant, |Z_1| - |Z_2|$ என்றும்

$|Z_1| < |Z_2|$ எனில் (A)ஐ

$|Z_1 - Z_2| \geq, |Z_2| - |Z_1|$ என்றும் எழுதலாம்.

அல்லது $|Z_1 - Z^2| >, [|Z_1| - |Z^2|]$ $\quad (|Z_1| >< |Z_2|)$

………(B)

5·8. x, y இவ்விரண்டிற்கும் வெவ்வேறு மதிப்புக்களிட்டால் $Z = x + iy$ என்ற சிக்கலெண் வெவ்வேறு மதிப்புக்களைப் பெறும். இத்தகைய சிக்கலெண் Zக்கு சிக்கல் மாறி (complex variable) எனப் பெயர்.

Z ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனைக்கு உட்பட்டால், Zஐக் குறிக்கும் புள்ளி Pன் நியமப்பாதையைச் (locus) சுலபமாகக் கண்டுபிடிக்கலாம். உதாரணமாக, $|Z_1| = 1$ எனில் Zஐக் குறிக்கும் Pன் நியமப்பாதை ஆதி Oஐ மையமாகவும் ஆரம் $= 1$ உள்ளதாகவும் வரைந்த வட்டமாகும்.

5·9. ஒரு முக்கிய நியமப் பாதை

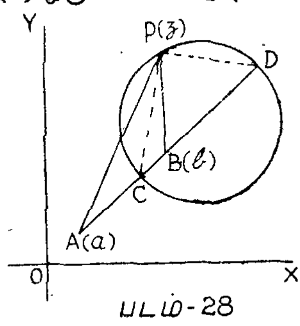
a, b இரு நிலைச் சிக்கலெண்களாகவும், K ஒரு மெய்யான நிலையெண்ணாகவும் $\dfrac{|Z-a|}{|Z-b|} = K$ஆகவும் இருந்தால் $P(Z)$ன் நியமப்பாதை (i) ஒருவட்டம் ($K \neq 1$) (ii) ஒரு நேர்கோடு ($K = 1$)

a, b என்ற இரு நிலைச் சிக்கலெண்களையும் A, B என்ற இரு புள்ளிகள் குறிக்கட்டும். P, Z என்ற சிக்கலெண்ணைக் குறிப்பதால், $|Z-a| = PA$. [குறிப்பு (1), § 5·6]

இம்மாதிரியே,

$|Z-b| = PB$

ஆகையால், $\dfrac{PA}{PB} = K$



படம்-28

ABஐ உள்ளும் வெளியும் $K : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டும்படி C, D என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்.

$$\therefore \quad \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}; \quad A,\ C,\ B,\ D \text{ நிலையான புள்ளிகள்.}$$

ஆகையால், வரை கணிதத்திலிருந்து, $K \neq 1$ எனில் Pன் நியமப் பாதை CDஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட அபலோனியஸ் (Apollonius) வட்டமாகும்.

$K=1$ எனில், C என்பது ABன் மையப்புள்ளியாகும். இப்பொழுது, $\triangle PAC \equiv \triangle PBC$. ஆகையால், Pன் நியமப்பாதை PC என்னும் நேர்க் கோடு, அதாவது, ABன் மையக் குத்துக்கோடு.

5·10. a,b,c,d என்னும் மெய்யான எண்களைக் கொண்ட, இரு சிக்கலெண்கள் $a+ib=c+id$ சமமாயிருப்பின் $a=c$; $b=d$

ஏனெனில் $a+ib=c+id$ என்பதை

$$(a-c)+i(b-d)=0 \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

$a-c$ என்பது ஒரு மெய்யான எண். $i(b-d)$ என்பது ஒரு கற்பனை யான எண். இவ்விரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகில் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும். எனவே, $a=c$; $b=d$.

5·11.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $1+i\sqrt{3}$ஐ ஆர்கண் தளத்தில் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு இரு சமபக்க முக்கோ ணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

A, B, C முறையே $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $1+i\sqrt{3}$ஐ ஆர்கண் தளத்தில் குறித்தால்,

$$AB = |(\sqrt{3}+i)-(\sqrt{2}+i\sqrt{2})| \qquad (\S\ 5\cdot6,\ \text{குறிப்பு (i)})$$
$$= |(\sqrt{3}-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})|$$
$$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2} \qquad (\S\ 5\cdot4)$$
$$= \sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$$

இம்மாதிரியே

$$BC = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$$
$$CA = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2}$$
$$= \sqrt{8-4\sqrt{3}}$$
$$AB = BC \ (=\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}})$$

எனவே ABC ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம்.

மாதிரி 2. $\frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}$ என்னும் சிக்கலெண்ணின் குணகத்தையும் வீச்சத்தின், முதல், பொது மதிப்புக்களையும் கண்டு பிடிக்க.

$4-2i\sqrt{3}$ என்னும் சிக்கலெண் பகுதியிலிருப்பதால் அதனுடைய இணைச் சிக்கலெண் (அ.து.) $4+2\sqrt{3}i$ ஆல் தொகுதியையும், பகுதியையும் பெருக்க.

$$\therefore \frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}} = \frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}} \times \frac{4+2i\sqrt{3}}{4+2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{20+14\sqrt{3}\,.\,i+6i^2}{16-12i^2}$$

$$= \frac{20+14\sqrt{3}i-6}{16+12} \quad (\because\ i^2=-1)$$

$$= \frac{14(1+\sqrt{3}i)}{28}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ஆகையால், $\left|\frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}} \qquad (\S\ 5\ 4)$$

அதாவது,

$\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}\right)$ ன் குணகம் $= 1$

$\frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}$ ன் வீச்சம் $= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ன் வீச்சம்.

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{3}$$

அதாவது,

$\frac{5+i\sqrt{3}}{4-2i\sqrt{3}}$ ன் வீச்சம் $= \frac{\pi}{3}$. (முதல் மதிப்பு)

$= \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ (பொது மதிப்பு)

மாதிரி 3. $1+2i$, $-1+i$, $3i$ இவைகளை சிக்கற் றளத்தில் (complex plane) குறிக்கும் புள்ளிகளை, ஆதியைச் சுற்றி

முறையே 30°, 60°, 45° இடமாகச் சுழற்றினுல் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிகள் குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆர்கண்ட் தளத்தின் மாற்றுப் பெயர் சிக்கற்றளம்.

$P(z)\,(=r\,(\cos\theta+i\sin\theta))$ஐ ஆதியைச் சுற்றி α இடமாகச் சுழற்றினுல் (counter clockwise) கிடைக்கும் புதிய புள்ளி $P^1(z^1)$ எனில்

$$z^1=r\{\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)\}.$$

இப்பொழுது, $1+2i=\sqrt{1^2+2^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}+\frac{2}{\sqrt{1^2+2}}i\right\}$

$$=\sqrt{5}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2i}{\sqrt{5}}\right\}$$

$$=\sqrt{5}\,(\cos\theta^\circ+i\sin\theta^\circ)$$

$$\left\{\cos=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

ஆகையால், $1+2i$ஐக் குறிக்கும் புள்ளியை, ஆதியைச் சுற்றி 30° இடமாகச் சுழற்றினுல் கிடைக்கும் புதிய புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் $\sqrt{5}\{\cos(\theta^\circ+30^\circ)+i\sin(\theta^\circ+30^\circ)\}$

அதாவது, $\sqrt{5}\{\cos\theta^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin\theta^\circ\sin 30^\circ$

$$+i(\sin\theta^\circ\cos 30^\circ+\cos\theta^\circ\sin 30^\circ)\}$$

$$=\sqrt{5}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\tfrac{1}{2}+i\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+i(\sqrt{3}+\tfrac{1}{2})$$

இம்மாதிரியே, $-1+i$ஐக் குறிக்கும் புள்ளியை, ஆதியைச் சுற்றி 60° இடமாகச் சுழற்றினுல் கிடைக்கும் புதிய புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் $-\frac{1}{2}\{\sqrt{3}+i+i(\sqrt{3}-1)\}$ மேலும், $3i$ஐக் குறிக்கும் புள்ளியை, ஆதியைச் சுற்றி 45° இடமாகச் சுழற்றினுல் கிடைக்கும் புதிய புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் $\frac{3}{\sqrt{2}}\{-1+i\}$

மாதிரி 4. சிக்கலெண்கள் z, α, β இல் முதல் எண் சிக்கல் மாறியாகவும் மற்ற இரண்டும் நிலையாகவும் இருப்பின் கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளுக்கொத்த, ஆர்கண் தளத்திலுள்ள நியமப் பாதைகள் யாவை?

(i) $|z-\alpha|=|z-\beta|$

(ii) $|z-\alpha|=|\beta|$

$z=x+iy;\quad \alpha=a+ib.\quad \beta=c+id$ எனில்,

$|z-\alpha| = |x-a+i(y-b)|$

$= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$|z-\beta| = |x-c+i(y-d)|$

$= \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$

$|z-\alpha| = |z-\beta|$ எனில்.

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$

இருபக்கமும் வர்க்கம் செய்ய.

$(x-a)^2+(y-b)^2=(x-c)^2+(y-d)^2$

(அ-து) $2x(c-a)+2y(d-b)=c^2+d^2-a^2-b^2$.

ஆகையால், $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடு.

[§ 5·9ஐ ஒப்பிட்டுப் பார்]

$|z-\alpha| = |\beta|$, எனில்,

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \sqrt{c^2+d^2}$

இருபக்கமும் வர்க்கம் செய்ய

$(x-a)^2+(y-b)^2 = c^2+d^2$

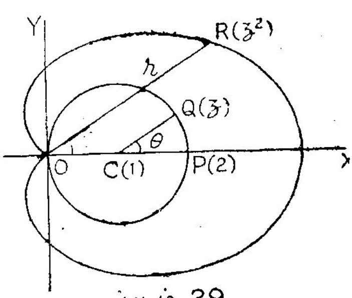
ஆகையால் $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம். இவ்வட்டத்தின் மையம் αஐக் குறிக்கும் புள்ளி; ஆரம் $= |\beta|$

[§ 5·8ஐ ஒப்பிட்டுப் பார்]

மாதிரி 5. $z=2$, $z=0$ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் முறையே P, O. z என்னும் சிக்கல் மாறியைக் குறிக்கும் புள்ளி OPஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரைந்த வட்டத்திலிருந்தால், z^2ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்க

O குறிக்கும் எண் $z=0$ $\therefore$ O என்பது ஆர்கண் தளத்தின் ஆதி.

P குறிக்கும் எண் $z=2$. ஆகையால், P என்பது, மெய்யான அச்சு OX அச்சு)மீது உள்ளது. மேலும் $OP=2$. C, $z=1$ என்னும் எண்ணைக் குறிக்குமாயின் C, OPன் மையப் புள்ளியாகும். ஆகையால், OPஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மையப்புள்ளி C



படம்-29

Q, (z) என்பது இவ்வட்டத்தின் மீதிருப்பதால், $P\hat{C}Q=\theta$ எனில் $z=OC+CQ\cos\theta+i\,CQ\sin\theta$.

அதாவது, $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$. ($\because$ $OC=CQ=CP=1$)

ஆகையால், $z=2\cos^2\theta/2+2i\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2.$

$$=2\cos\theta/2\cdot\{\cos\theta/2+i\sin\theta/2\}$$

$$\therefore\quad z^2=4\cos^2\theta/2\cdot\{\cos\theta/2+i\sin\theta/2\}^2$$

$$=4\cos^2\theta/2\cdot\{\cos^2\theta/2+2i\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2+i^2\sin^2\theta/2\}$$

$$=4\cos^2\theta/2\cdot\{\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2+2i\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2\}$$

$$=4\cos^2\theta/2\cdot\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

$$=2(1+\cos\theta)\cdot\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

எனவே, R என்னும் புள்ளி z^2ஐக் குறித்தால்,

$$OR=|z^2|$$

$$=\sqrt{\{2(1+\cos\theta)\cos\theta\}^2+\{2(1+\cos\theta)\sin\theta\}^2}$$

$$=2(1+\cos\theta)\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$2(1+\cos\theta)$$

அதாவது, $OR=r$ எனில்,

$$r=2(1+\cos\theta)\qquad\ldots\ldots\ldots(i)$$

z^2ன் வீச்சம் $=\tan^{-1}\dfrac{2(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta}{2(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta}$

$$=\tan^{-1}(\tan\theta)$$

$=\theta.$ (முதல் மதிப்பு) $\ldots\ldots\ldots$(ii)

ஆகையால், $X\hat{O}R=\theta.$

(i), (ii)லிருந்து, $R(z^2)$ன் நியமப்பாதையின் கோண தூரச் சமன்பாடு (Polar equations)

$r=2\,(1+\cos\theta)$ என்று விளங்குகிறது.

எனவே, $R(z^2)$ன் நியமப்பாதை ஒரு இதயவுரு (cardioid)

அப்பியாசம் 5 (அ)

1. பின்வருவனவற்றின் குணகத்தையும் வீச்சத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

(i) $\dfrac{1+2i}{3+4i}$ [விடை: $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\tan^{-1}\frac{2}{11}$]

(ii) $\dfrac{2+3i}{1-i}$ [விடை: $\sqrt{\frac{13}{2}}$, $\pi-\tan^{-1}5$]

(iii) $\dfrac{5-2i}{i}$ [விடை: $\sqrt{29}$, $\pi+\tan^{-1}\frac{5}{2}$]

(iv) $\frac{3}{i}\left(1-\frac{6}{i}+7i\right)$ [விடை: $3\sqrt{170}, -\tan^{-1}\frac{1}{18}$]

(v) $\frac{(2-i)(1+i)}{1-i}$ [விடை: $\sqrt{5}, \tan^{-1} 2$]

(vi) $\frac{(1+i)(1+2i)}{1+3i}$ [விடை: $1, \tan^{-1}\frac{3}{4}$]

2. $\sqrt{x+iy}=a+ib$ எனில் $x=a^2-b^2$, $y=2ab$ என்று நிரூபி. இதை உபயோகித்து $3+4i$ன் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: $\pm(2+i)$]

3. $5-12i$ன் வர்க்கமூலத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: $\pm(3-2i)$]

4. $\frac{2-i}{(1-2i)^2}$ன் இணைச்சிக்கலெண் $-\frac{(2+11i)}{25}$ எனக் காண்க

5. $\frac{(1+2i)^2}{1+3i}$ன் இணைச்சிக்கலெண் $\frac{9-13i}{10}$ என நிறுவுக.

6. $\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ன் இணைச்சிக்கலெண் $\frac{\sin\theta+i(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$ எனக் காண்க

7. $\frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ ன் குணகம், வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு, இணைச் சிக்கலெண் ஆகிய இவற்றைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: $\frac{3}{\sqrt{5+4\cos\theta}}, -\tan^{-1}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}; \frac{3[(2+\cos\theta)+i\sin\theta]}{5+4\cos\theta}$]

8. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகணங்கள் (Sets of points) செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காண்க.

(i) $4+5i$, $-1+2i$, $2-3i$

(ii) $8-10i$, $7-3i$, $-4i$

(iii) $3+4i$, $12-i$, $5+6i$

(iv) $3-2i$, $-26i$, $-5-i$

9. கீழ்க்கண்ட புள்ளிக்கணங்கள், இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $7+3i$, $-2i$, $-5+5i$

(ii) $-7+i$, $1-6i$, $8+2i$

(iii) $5+2i$, $-6i$, $-8-i$

(iv) $4+2i$, $2-2i$, $2-8i$

10. கீழ்க்கண்ட புள்ளிக்கணங்கள், இருசமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காண்க.

(i) $3+4i, -13+2i, 1-6i$

(ii) $-5+i, -3-3i, i$

(iii) $-3i, -5-3i, 3+i$

(iv) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), i$

11. கீழ்க்கண்ட புள்ளிக்கணங்கள், சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனக் காண்க.

(i) $-2, 1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i$

(ii) $2\sqrt{3}+2i, -2\sqrt{3}+2i, -4i$

(iii) $2+2i, -2-2i, -2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$

12. கீழ்க்கண்ட புள்ளிக்கணங்கள், சதுரத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.

(i) $7-3i, 4+i, 8+4i, 11$

(ii) $7-i, 4-3i, 2, 5+2i$

(iii) $-5+2i, -7+3i, -8+i, -6.$

13. கீழ்க்கண்ட புள்ளிக்கணங்கள் இணைகரத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.

(i) $5-3i, -2+7i, -1-3i, 6-13i$

(ii) $-6, 7-8i, 4+9i, -9+17i$

(iii) $-7-5i$ $3-4i, -1+2i, -11+i$

14. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு உச்சியும், மையப்புள்ளியும் முறையே $4+7i$, $1+3i$ எனில் அதன் மற்ற உச்சிகளைக் காண்க.

[விடை: $-3+6i, -2-i, 5$]

15. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு உச்சியும், மையப்புள்ளியும் முறையே $-1+i$, $2-i$ எனில் அதன் மற்ற உச்சிகளைக் காண்க.

[விடை: $-4i, 5-3i, 4+2i$]

16. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு உச்சியும், மையப்புள்ளியும் முறையே $\frac{5}{2}(1+i)$, $\frac{3}{2}(1+3i)$ எனில் மற்ற உச்சிகளைக் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: $\frac{-1+7i}{2}, \frac{1+13i}{2}, \frac{7+11i}{2}$]

17. $2+(2+\sqrt{3})i$; $2+(2-\sqrt{3})i$; $5+iy$ என்னும் புள்ளிகள் ஆர்கண் வரைபடத்தில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளை குறித்தால் yக்கு மெய்யான மதிப்பு உண்டு என நிறுவுக.

[விடை: $y=2$]

18. α, β இரு நிலைச் சிக்கலெண்கள்; t ஒரு மெய்யான மாறி $z = \alpha + t(\beta - \alpha)$ எனில், $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஓர் நேர்கோடு என நிறுவுக.

19. $\dfrac{|z-1|}{|z-i|} = 1$ எனில், $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஆதியின்மூலம் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

20. $2|z-2i| = |z-2|$ எனில், ஆர்கண் தளத்தில் $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அவ்வட்டமையம் குறிக்கும் சிக்கலெண் யாது? [விடை: $-\frac{2}{3}(1-4i)$]

21. $2|z+1| = |z-1|$ எனில், ஆர்கண் தளத்தில் $P(z)$ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் எனக் காண்பி. அவ்வட்டமையம் குறிக்கும் எண்ணையும் வட்ட ஆரத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

[விடை: $-5, \frac{4}{3}$]

22. $|2z-1| = |z-2|$ எனில் $P(z)$ன் நியமப் பாதை (ஆர்கண் தளத்தில்) ஒரு வட்டமெனக் காண்க.

23. $z=2$, $z=0$ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் முறையே P, O. z என்னும் சிக்கல் மாறியைக் குறிக்கும் புள்ளி OPஐ விட்டமாய்க் கொண்டு வரைந்த வட்டத்திலிருந்தால் $1/z$ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதை X அச்சுக்கு (மெய்யான அச்சுக்கு) குத்துக்கோடு என நிறுவுக.

24. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து $P(z)$ன் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்க.

(i) $\left(\dfrac{2z+i}{z-i}\right)$ன் வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $=\pi/6$

[விடை: $2x^2+2y^2-3\sqrt{3}\,x-y=1$]

(ii) $\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$ன் வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $=\pi/4$

[விடை: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$]

(iii) $\left(\dfrac{z+2i}{2z+1}\right)$ன் வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $=\pi/3$

[விடை: $\sqrt{3}(2x^2+2y^2+x+4y)=4x+y+2$]

(iv) $\left(\dfrac{2z-1}{z+2}\right)$ன் வீச்சத்தின் முதல் மதிப்பு $=\pi/2$

[விடை: $2x^2+2y^2+3x-2=0$]

25. $w(=u+iv)$ என்னும் சிக்கல் மாறிக்கும் $z(=x+iy)$ என்னும் சிக்கல் மாறிக்கும் உள்ள தொடர்பும், zன் மீதுள்ள நிபந்தனையும் கீழே

கொடுக்கப்பட்டு இருக்கின்றன. அவைகளிலிருந்து $Q(w)$ன் நியமப் பாதையைக் கண்டுபிடிக்க.

(i) $w=\frac{z-2-i}{z+2-i}$; zன் மெய்யான பகுதி$=0$.

[குறிப்பு: zன் மெய்யான பாகம்$=x$ $(\because \quad z=x+iy)$

$$=0$$

$$u+iv=\frac{x+iy-2-i}{x+iy+2-i}$$

$$=\frac{-2+i(y-1)}{2+i(y-1)}$$

இதிலிருந்து u, vஐ yன் சார்புகளாகக் கண்டுபிடித்து, அவைகளி லிருந்து yஐ நீக்கினால் (eliminate) $Q(w)$ன் நியமப்பாதை $u^2+v^2=1$ என்ற வட்டம் சுலபமாகக் கிடைக்கும்.

(ii) $w=z^2$; zன் மெய்யான பகுதி$=1$

[விடை: $v^2=4(1-w)$ என்னும் பரவளைவு (parabola)]

(iii) $w=\frac{z-1+i}{z-1-i}$; zன் கற்பனையான பகுதி$=0$

[குறிப்பு: zன் கற்பனையான பாகம்$=iy$

$$=0$$

அதாவது, $y=0$]

[விடை: $u^2+v^2=1$ என்னும் வட்டம்]

(iv) $w=z+\frac{1}{z}$; $|z|=2$

[குறிப்பு: $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ என எடுத்துக்கொள்]

[விடை: $\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}=\frac{1}{4}$ என்னும் நீள்வட்டம் (ellipse)]

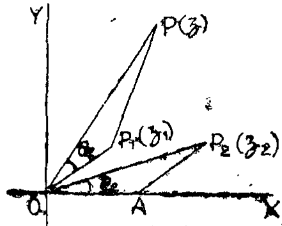
5·12. இப்பொழுது சிக்கலெண்கள் z_1, z_2ன் பெருக்கற் பலனை வரைகணித முறைப்படி காண்போம்.

($z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ எனில் $z_1 z_2=r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. ஆகையால் $|z_1, z_2|=r_1 r_2$; z_1, z_2ன் வீச்சம் (முதல் மதிப்பு)$=(\theta_1+\theta_2)$. இவ்வீச்சம், குணகம் இரண்டையும் வரைகணித முறைப்படி இப்பொழுது காண்போம்].

சிக்கலெண்கள் z_1, z_2ஐக் குறிக்கும் (ஆர்கண் தளத்தில்) புள்ளி களை P_1, P_2 எனக் கொள்வோம்.

zன் வீச்சத்தினுடைய முதற்மதிப்பு $(=\theta_1)$, z_2ன் வீச்சத்தினுடைய முதல் மதிப்பு, θ_2ஐக் காட்டிலும் பெரியது எனக் கொள்ளலாம்.

A என்ற புள்ளியை $OA=1$ என்று இருக்குமாறு OX (மெய்யான அச்சு)மீது அமையுமாறு எடு. (O என்பது ஆதி)



படம்-30

OP_1மீது OP_1P என்ற முக்கோணத்தை $\triangle OAP_2$க்கு வடிவொத்ததாக வரை. P என்னும் புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் $z=z_1\times z_2$ என பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்

$$\triangle OP_1P \;|||\; \triangle OAP_2 \quad (\text{அமைப்பு})$$

$$\therefore \quad \frac{OP_1}{OP} = \frac{OA}{OP_2} = \frac{1}{OP_2}.$$

$$\therefore \quad OP = OP_1 \times OP_2.$$

எனவே $P(z)$ன் குணகம் $|z| = OP_1 \times OP_2 = |z_1| \times |z_2|$ ....(i)

$$\text{மேலும் } X\hat{O}P = X\hat{O}P_1 + P_1\hat{O}P$$
$$= X\hat{O}P_1 + A\hat{O}P_2$$
$$= \theta_1 + \theta_2.$$

அதாவது zன் வீச்சம் $= \theta_1+\theta_2$ (முதல் மதிப்பு)

$= z_1$ன் வீச்சம் $+ z_2$ன் வீச்சம் ......(ii)

ஆகையால், P என்னும் புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் z

$= OP\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ (§ 5·4, § 5·5)

$= OP\{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= OP\{\cos\theta_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2\}$

$= OP\{\cos\theta_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+i.\sin\theta_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\}$

$= OP.\{(\cos_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\}$

$= OP_1.(\cos\theta_1+i\sin\theta).OP_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ ((i)லிருந்து)

$= z_1\times z_2.$

இதேபோல், z_2ன் வீச்சம், z_1ன் வீச்சத்தைவிடப் பெரியதாக இருப்பின், OP_2P என்ற முக்கோணத்தை OAP_1 என்ற முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாக அமைத்து $P(z)$ $(z=z_1\times z_2)$ஐக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

குறிப்பு (1) (i)லிருந்து $|z| = |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
(ii)லிருந்து zன் வீச்சம் $= z_1 z_2$ன் வீச்சம்

குறிப்பு (2) இம்மாதிரியே $z^2, z^3, \ldots$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$|z^2| = |z \cdot z| = |z| \, |z| = |z|^2;$$

z^2ன் வீச்சம் $= z \cdot z$ன் வீச்சம் $= z$ன் வீச்சம் $+ z$ன் வீச்சம்
$= 2.(z$ன் வீச்சம்$)$

இம்மாதிரியே,

$$|z|^n = |z| \, |z| \ldots\ldots (n \text{ தடவைகள்}) = |z|^n.$$

மேலும் z^nன் வீச்சம் $= z$ன் வீச்சம் $+ z$ன் வீச்சம் $+$
......(n உறுப்புக்கள்)
$= n\,(z$ன் வீச்சம்$)$

குறிப்பு (3) z_2ன் வீச்சத்தின் குறி கழித்தல் குறியானால் (θ_2 எதிர்) OP_1 மீது வரையும் முக்கோணம் OP_1P, OP_1க்குக் கீழே அமையும்.

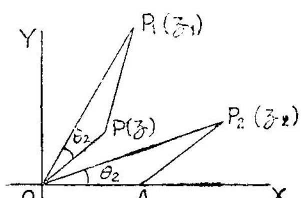
5·13 : $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ஐ வரைகணித முறைப்படி காண்போம்.

$[z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$, $z_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ எனில்

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ஆகையால், $\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\} = \dfrac{r_1}{r_2}$; $\dfrac{z_1}{z_2}$

வின் வீச்சம் (முதல் மதிப்பு)
$= \theta_1 - \theta_2$. இவ்வீச்சம், குணகம் இவற்றை வரை கணித முறைப்படி இப்பொழுது காண்போம்]



படம் - 31

முன்போல P_1 P_2 என்ற புள்ளிகள் z_1, z_2ஐக் குறிக்கட்டும் (z_1ன் வீச்சம் $\theta_1 > z_2$ன் வீச்சம் θ_2)

A என்ற புள்ளியை OX (மெய்யான அச்சு) மீது, $OA = 1$ இருக்குமாறு எடு.

$P(z)$ என்ற புள்ளியை OP_1க்கு கீழ் இருக்குமாறும், $\triangle OP_1P$, $\triangle OP_2A$க்கு வடிவொத்ததாக இருக்குமாறும் எடுத்துக்கொள்.

$$\therefore \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_2}{OP} = OP_2$$

$$OP = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{மேலும் } X\hat{O}P = X\hat{O}P_1 - P\hat{O}P_1$$
$$= X\hat{O}P_1 - A\hat{O}P_2$$
$$= \theta_1 - \theta_2.$$

அதாவது, (z)ன் வீச்சம் $= \theta_1 - \theta_2$

$= z_1$ன் வீச்சம் $- z_2$ன் வீச்சம்..... (ii)

எனவே P குறிக்கும் சிக்கலெண் z.

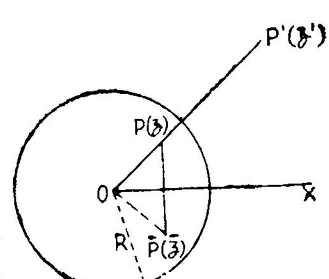
$$= OP\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$
$$= OP.\{\cos\theta_1.\cos\theta_2+\sin\theta_1.\sin\theta_2+i(\sin\theta_1.\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$
$$= OP\{\cos\theta_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)-i^2\sin\theta^1\sin\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2\}$$
$$= OP\{\cos\theta_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)-i\sin\theta_2(\cos\theta_1 - +i\sin\theta_1)\}$$
$$= OP.\{\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)\}$$
$$= OP\frac{\{\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2).(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\}}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$
$$= \frac{OP_1}{OP_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$= \frac{z_1}{z_2}.$$

குறிப்பு :— (i)லிருந்து $|z| = \left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(ii)லிருந்து zன் வீச்சம் $= \frac{z_1}{z_2}$ ன் வீச்சம்

$= z_1$ன் வீச்சம் $-- z_2$ன் வீச்சம்.

5·14. ஆதியை மையமாகவும் ஆரம் $= R$ உள்ளதாகவும் வரையப்பட்ட வட்டத்தைக் குறித்து (with respeect to a circle $P(z)$ என்னும் புள்ளிக்கு எதிர்மாருக (Inverse) உள்ள P^1 (z^1) ஐக் கண்டு பிடிக்க.



படம் - 32

வரைவிலக்கணம் : P^1 என்னும் புள்ளி ஒரு வட்டத்தைக் குறித்து Pன் எதிர்மார் எனில், $OP \cdot OP^1 = R^2$. (O வட்ட மையம், $R =$ ஆரம்). (இவ் வரைவிலக்கணத்தை வரை கணிதத்தில் கண்டிருக்கலாம்) மேலும், O, P, P^1 ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

ஆகையால், $|z^1| \cdot |z| = OP^1 \cdot OP = R^2$. ......(i)

z^1ன் வீச்சம் = zன் வீச்சம் = $X\hat{O}P$ ......(ii)

(i), (ii)லிருந்து,

$$z^1 = \frac{R^2}{|z|}\left\{\cos X\hat{O}P + i \sin X\hat{O}P\right\}$$

$$= \frac{R^2}{OP}\cdot\left\{\cos X\hat{O}P + i \sin X\hat{O}P\right\} \times \frac{\{\cos X\hat{O}P - i \sin X\hat{O}P\}}{\{\cos X\hat{O}P - i \sin X\hat{O}P\}}$$

$$= \frac{R^2}{OP\{\cos X\hat{O}P - i\sin X\hat{O}P\}}$$

$$= \frac{R^2}{\bar{z}}$$ { $\bar{z}$ என்பது zன் இணைச் சிக்கலெண் }

(படம் 32ல் zஐக் குறிக்கும் புள்ளி $\bar{p}$)

5.15.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1 : $(2+i)(1+i)$ஐ வரை கணித முறையில் கண்டு பிடிக்க.

P_1, P_2 இரு புள்ளிகள் $1+i$, $2+i$ஐக் குறிக்கட்டும்.

$1+i$ ன் குணகம் = $\sqrt{2}$; வீச்சம் = tan = $\frac{\pi}{4}$ (முதல் மதிப்பு)

$2+i$ன் குணகம் = $\sqrt{5}$; வீச்சம் = $\tan^{-1}\frac{1}{2} = \theta$ (எனக் கொள்)

A என்னும் புள்ளியை $OA = 1$ என்று இருக்குமாறு OX (மெய்யச்சு) மீது எடு. OP_1 மீது OP_1P என்ற முக்கோணத்தை OAP_2 என்ற முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாக இருக்குமாறு அமை.

ஆகையால் § 5·12ல் கூறியதுபோல்

$OP = \sqrt{10}$ என்றும் $X\hat{O}P = \theta + \frac{\pi}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}$

$= \tan^{-3}$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

எனவே, P குறிக்கும் சிக்கலெண் $= z$

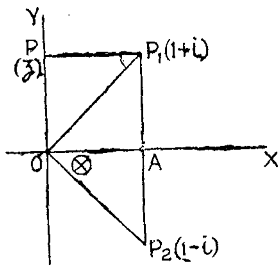
$$= OP\{\cos X\hat{O}P + i\sin X\hat{O}P\}.$$

$$= \sqrt{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{10}} + i.\frac{3}{\sqrt{10}}\right\}$$

$$= 1+3i = (1+i)(2+i)$$

மாதிரி 2. வரைகணித முறைப்படி $\frac{1+i}{1-i} = i$ என நிறுவுக.

P_1 என்ற புள்ளி $1+i$ஐயும், P_2 என்ற புள்ளி $1-i$ஐயும் குறிக்கட்டும். A என்ற புள்ளியை $OA = 1$ என்று இருக்குமாறு OX மீது எடு. (A என்பது P_1 P_2 மையப் புள்ளி என எளிதில் புலப்படும்).



படம்-33

$1-i$ன் வீச்சம் $= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

$1+i$ன் வீச்சம் $= \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$.

OP_1 மீது OP_1P என்ற முக்கோணத்தை OP_2A என்ற முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாக அமை.

$$\therefore \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_2}{OA}. \quad \therefore OP = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

மேலும் (z)ன் வீச்சம் $= A\hat{O}P_1 - A\hat{O}P_2$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

எனவே, § 5·13ல் கூறியதுபோல் P என்ற புள்ளி $z\left(=\frac{1+i}{1-i}\right)$ என்ற சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும்.

அதாவது, $OP\left\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right\}$

$= 1\cdot(i)$ என்ற சிகலெண்ணைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 3. வரைகணித முறைப்படி $(1+i)^4 = -4$ என நிறுவுக.

§ 5·12 லிருந்து, வரைகணித முறைப்படி,

$(1+i)^4$ன் வீச்சம் $= 4\ \{(1+i)$ன் வீச்சம்$\}$

$= 4\ \{+\tan^{-1} 1\}$

$= 4\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

மேலும், $|(1+i)4| = |1+i|^4 = \{\sqrt{2}\}^4 = 4$

ஆகையால், $(1+i)^4 = 4\ \{\cos\pi + i\sin\pi\}$

$= 4(-1)$

$= -4.$

அப்பியாசம் 5 (ஆ)

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பை வரைகணித முறைப்படி காண்க (1—10)

1. $(1+i)(1+i\sqrt{3})$
2. $(2+3i)(1-i)$
3. $(1+2i)(-1+i)$
4. $(-3+i)(-2+i)$
5. $(-1-i)(-2-3i)$
6. $\dfrac{1-i}{1+i}$
7. $\dfrac{1+2i}{1-3i}$
8. $\dfrac{-1+2i}{-1+3i}$
9. $\dfrac{-10+10i}{1+3i}$

10. $P(z_1)$, $Q(z_2)$, $R(z_3)$ என்று மூன்று புள்ளிகளிருந்தால், $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z}$ன் வீச்சம் (முதல் மதிப்பு) $= \hat{QPR}$ என நிறுவுக.

11. z_1, z_2, z_3ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள், ஆதியை மையக் கோட்டுச் சந்தியாக (Centroid) கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளானால், $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2$ எனக் காண்க.

[குறிப்பு: z_1ன் வீச்சம் θ எனில், z_2ன் வீச்சம் $\theta + \frac{2\pi}{3}$, z_3ன் வீச்சம் $\theta + 4\pi/3$. ஆகும்.]

12. a, b இரு மெய்யான எண்கள், $w = \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}$ எனில் $a+b$, $a+bw$, $a+bw^2$ என்ற இம்மூன்று எண்களையும் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும் என நிறுவி மேலும், இம்முக்கோணத்தினுடைய சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாடு $|z-a| = b$ எனவும் நிறுவுக.

அத்தியாயம் VI

தே மாவரின் தேற்றமும் இருபடிக் காரணிகளும்

6 1. தேமாவரின் தேற்றம். (De Moiures theorem) n என்பது ஒரு விகித முறுகின்ற குறியாய் (Rational index) இருப்பின் $\cos n\theta + i \sin n\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ன் ஒரு மதிப்புக்குச் சமம்.

வகை *I.* (n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha.\cos\beta$$
$$-\sin\alpha.\sin\beta + i\{\cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta\}$$
$$(\because \quad i^2 = -1)$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

இம்மாதிரியே,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos r + i\sin r)$$
$$= \{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}.\quad(\cos r + i\sin r)$$
$$= \cos(\alpha+\beta+r) + i\sin(\alpha+\beta+r)$$

எனவே,

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
$$= \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3\ldots+\theta_n)$$

$\therefore\quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_n = \theta$ எனில்.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad (n \text{ தடவைகள்})$$
$$= \cos(\theta+\theta+\theta+\ldots n \text{ உறுப்புக்கள்}) + i\sin(\theta+\theta+\theta+\ldots$$
$$n \text{ உறுப்புகள்})$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

அல்லது, $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos + i\sin\theta)^n$.

வகை II. n என்பது ஒரு எதிர் முழுவெண். ($= -m_1$ m ஒரு நேர் முழுவெண்.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$
$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \quad \text{[வகை Iலிருந்து]}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{(\cos m\theta + i \sin m\theta)(\cos m - i \sin m\theta)}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$

$$= \cos m\theta - i \sin m\theta$$

$$= \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)$$

$$= \cos u\theta + i \sin n\theta \qquad (\because n = -m)$$

வகை III. n என்பது ஒரு பின்னம் ($= p/q$, p என்பது ஒரு நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண், q என்பது நேர் முழுவெண். p, q ஒன்றுக்கொன்று பகாவெண்கள் (prime to cahe other))

$$\left\{\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}\right\}^q = \cos\left(q\cdot\frac{\theta}{q}\right) + i \sin\left(q\cdot\frac{\theta}{q}\right)$$

[வகை I லிருந்து]

$$= \cos\theta + i \sin\theta.$$

$\therefore \quad \cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}$ என்பது, $(\cos + i \sin\theta)^{1/q}$ ன் ஒரு மதிப்புக்குச் சமம்.

இதை p-வது அடுக்குக்கு உயர்த்திறல்,

$\left\{\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}\right\}^p$ என்பது $(\cos\theta + i \sin\theta)^{p/q}$ ன் ஒரு மதிப்புக்குச் சமம்.

ஆகையால், வகைகள் I, II லிருந்து,

$\cos\frac{p\theta}{q} + i \sin\frac{p8}{q}$ என்பது $(\cos\theta + i \sin\theta)^{p/q}$ ன் ஒரு மதிப்புக்குச் சமம். அல்லது,

$\cos n\theta + i \sin n\theta$ என்பது $(\cos\theta + i \sin\theta)^n$ன் ஒரு மதிப்புக்குச் சமம் ($\therefore \quad n = p/q$)

குறிப்பு (1): $(\cos + i \sin\theta)^{p/q} = \{\cos(\theta + 2K\pi) + i \sin(\theta + 2K\pi)\}^{p/q}$ [K என்பது ஒரு முழு எண்]

$$= \cos\frac{p(\theta + 2K\pi)}{q} + i \sin\frac{p(\theta + 2K\pi)}{q}$$

Kக்கு O, 1, 2,...$(q-1)$ வரையில் மதிப்புக்களிட,

$\cos \frac{p(\theta+2K\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\theta+2K\pi)}{q}$.க்கு வெவ்வேறு q மதிப்புக்கள் கிடைக்கும். இப்பொழுது Kக்கு q என்ற மதிப்பிட்டால்

$$\frac{p(\theta+2K\pi)}{q} = \frac{p(\theta+2q\pi)}{q} = \frac{p\theta}{q} + 2p\pi$$

ஆகையால்; $K = q$ எனில்

$$\cos \frac{p(\theta+2K\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\theta+2K\pi)}{q} = \cos\left(\frac{p\theta}{p} + 2p\pi\right) + i \sin\left(\frac{p\theta}{q} + 2p\pi\right)$$

$$= \cos \frac{p\theta}{q} + i \sin \frac{p\theta}{q}$$

எனவே, $K=0$ அல்லது $K=q$ எனில் $\cos \frac{p(\theta+2K\pi)}{q}$ $i \sin \frac{p(\theta+2K\pi)}{q}$க்கு ஒத்த இரு மதிப்புக்களும் சமமாகும்.

இம்மாதிரியே, $K=1$ அல்லது $K=q+1$ எனில் $\cos \frac{p(\theta+2K\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\theta+2K\pi)}{q}$க்கு ஒத்த இரு மதிப்புக்களும் சமமாகும்.

ஆகையால் $(\cos \theta + i \sin \theta)^{p/q}$ க்கு q மதிப்புக்கள் தான் உண்டு. இம் மதிப்புக்களில் ஒரு மதிப்புத்தான் $\cos \frac{pq}{q} + i \sin \frac{p\theta}{q}$.

குறிப்பு (2): $(\cos \theta - i \sin \theta)^n$ன் ஒரு மதிப்பு $\cos n\theta - i \sin n\theta$

குறிப்பு (3): $(\sin \theta + i \cos \theta)^n$ன் ஒரு மதிப்பு அல்லது,

$(\cos \phi + i \sin \phi)^n$ன் ஒரு மதிப்பு $\left(\phi = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$= \cos n\phi + i \sin n\phi.$$

$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

இம்மாதிரியே $(\sin \theta - i \cos \theta)^n$

$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

6·2.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ எனில் $2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r}$

எனக் காண்க.

(r என்பது ஒரு முழுவெண்)

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$$

அல்லது, $x^2+1 = 2x\cos\theta$

$$x^2-2x\cos\theta+1 = 0.$$

$$x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$= \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில் $\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta.$
$x = \cos\theta - i\sin\theta$ எனில் $\frac{1}{x} = \cos\theta + i\sin\theta.$ } (A)

$$\therefore\ x^r + \frac{1}{x^r} = (\cos\theta + i\sin\theta)^r + (\cos\theta - i\sin\theta)^r$$

((A)யிலிருந்து)

$$= \cos r\theta + i\sin r\theta + \cos r\theta - i\sin r\theta$$

($\because$ r ஒரு முழுவெண்)

$$= 2\cos r\theta.$$

மாதிரி 2. $x+\frac{1}{x} = 2\cos a;\ y+\frac{1}{y} = 2\cos b;\ z+\frac{1}{z} = 2\cos c$ எனில் $x^p.y^q.z^r + \frac{1}{x^p.y^q.z^r}$ன் ஒரு மதிப்பு $= 2\cos(pa+qb+rc)$ என நிறுவுக. (p, q, r விகித முறுகின்ற குறிகள்)

$x+\frac{1}{x} = 2\cos a$யிலிருந்து,

$x = \cos a \pm i\sin a$ எனக் கிடைக்கும் [மாதிரி 1.]

இவ்வாறே

$$y = \cos b \pm i\sin b,$$

$$z = \cos c \pm i\sin c.$$

$x = \cos a + i \sin a$ என்றும்

$y = \cos b + i \sin b$ என்றும்

$z = \cos c + i \sin c$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால்

$\frac{1}{x} = \cos a - i \sin a$ என்றும்

$\frac{1}{y} = \cos b - i \sin b$ என்றும்

$\frac{1}{z} = \cos c - i \sin c$ என்றும் கிடைக்கும்.

ஆகையால் $x^p.y^q.z^r + \frac{1}{x^p y^q z^r}$ ன் ஒரு மதிப்பு

$= (\cos pa + i \sin pa)(\cos qb + i \sin qb)(\cos rc + i \sin rc)$

$+ (\cos pa - i \sin pa)(\cos qb - i \sin qb)(\cos rc - i \sin rc)$

$= \cos (pa+qb+rc) + i \sin (pa+qb+rc)$

$+ \cos (pa+qb+rc) - i \sin (pa+qb+rc)$

$= 2 \cos (pa+qb+rc)$.

மாதிரி 3. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos r = 0$; $\sin \alpha + \sin \beta + \sin r = 0$ எனில் $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3r = 3 \cos (\alpha + \beta + r)$ என்றும் $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3r = 3 \sin (\alpha + \beta + r)$ என்றும் நிறுவுக.

$a = \cos \alpha + i \sin \alpha$,

$b = \cos \beta + i \sin \beta$,

$c = \cos r + i \sin r$ எனக் கொண்டால்,

$a+b+c = (\cos \alpha + \cos\beta + \cos r) + i(\sin \alpha + \sin \beta + \sin r)$

$= 0.$

ஆகையால், $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

அதாவது, $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 + (\cos \beta + i \sin \beta)^3 + (\cos r + i \sin r)^3$

$= 3 (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos r + i \sin r)$

அல்லது, $\Sigma (\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) = 3 \{ \cos (\alpha + \beta + r) + i \sin (\alpha + \beta + r) \}$

$\therefore \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3r = 3 \cos (\alpha + \beta + r)$

$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3r = 3 \sin (\alpha + \beta + r)$

(§. 5. 10)

மாதிரி 4. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos r = 0$; $\sin \alpha + \sin \beta + \sin r = 0$ எனில் $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 r = \frac{3}{2}$ என்றும் $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 r = \frac{3}{2}$ என்றும் நிறுவுக.

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$
$$b = \cos\beta + i\sin\beta,$$
$$c = \cos r + i\sin r$$ எனில்

$$a+b+c = 0.$$

ஆகையால், $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$

அதாவது, $\Sigma(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$
$$= -2\,\Sigma\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= -2\,\Sigma\,\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2r$$
$$= -2\,\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta+r) + \cos(r+\alpha)\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\begin{cases}\cos\alpha + \cos\alpha + \cos r = 0\\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin r = 0\end{cases}$$ (கொள்கை)

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \cos^2 r + \sin^2 r = 1.$$

அல்லது, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta) = 1$

$$\therefore\ 2\cos(\alpha-\beta) = -1$$

இம்மாதிரியே,
$$2\cos(\beta-r) = -1$$
$$2\cos(r-\alpha) = -1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1), (2)லிருந்து,
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2r = -2\cos(\alpha+\beta) - 2\cos(\beta+r) - 2\cos(r+\alpha)$$
$$= 2\{2\cos(\alpha-\beta)\}\cos(\alpha+\beta) + 2\{2\cos(\beta-r)\}\cos(\beta+r) + 2\{2\cos(r-\alpha)\}\cos(r+\alpha)$$
$$= 2\{\cos 2\alpha + \cos 2\beta\} + 2\{\cos 2\beta + \cos 2r\} + 2\{\cos 2r + 2\cos 2\alpha\}$$
$$= 4\Sigma\cos 2\alpha$$

எனவே, $\Sigma\cos 2\alpha = 4\Sigma\cos 2\alpha.$

$$\therefore\quad \Sigma\cos 2\alpha = 0.$$
$$\Sigma(2\cos^2\alpha - 1) = 0.$$
$$2\Sigma\cos^2\alpha - 3 = 0.$$
$$\Sigma\cos^2\alpha = \tfrac{3}{2}.$$

மேலும், $\Sigma\sin^2\alpha = \Sigma(1-\cos^2\alpha)$

$$= 3 - \Sigma \cos^2 \alpha$$
$$= 3 - \tfrac{3}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2}.$$

மாதிரி 5. $\left\{\dfrac{1 - \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}}{1 - \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}}\right\}^n = 1$ எனக் காண்பி.

(n ஒரு ஒற்றை முழுவெண்)

$$1 - \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} + 2i\sin\frac{\pi}{2n}.\ \cos\frac{\pi}{2n}$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{2n}.\ \left\{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}\right\}$$

$$1 - \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{2n}\ \left\{\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}\right\}$$

$$\therefore\quad \left\{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}}\right\}^n = \left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}}\right\}^n$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{2n}$$

$$= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{2n}$$

$$= \cos 2n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) + i\sin 2n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

(§ 6·1)

$$= \cos(n\pi - \pi) + i\sin(n\pi - \pi)$$
$$= \cos(\pi - n\pi) - i\sin(\pi - n\pi)$$
$$= -\cos n\pi - i\sin n\pi$$
$$= -(-1)^n - i\cdot(0)$$

$= 1$ ($\because$ n ஒரு ஒற்றை முழுவெண்)

6·3. இப்பொழுது ± 1ன் n—வது மூலங்களைக் கண்டுபிடிப்போம் முதலில் $+1$ன் n-வது மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்க. (nth roots of unity), xன் மதிப்புக்களை $x =\, ^{n}1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஏற்றவாறு கண்டுபிடித்தல்வேண்டும். அதாவது, $x^n = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவேண்டும்.

$$x^n = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$
$$= \cos(0+2K\pi) + i \sin(0+2K\pi)$$
$$= \cos 2K\pi + i \sin 2K\pi$$
$$\therefore \quad x = (\cos 2K\pi + i \sin 2K\pi)^{1/n}$$
$$= \cos \frac{2K\pi}{n} + i \sin \frac{2K\pi}{n} \qquad \text{.........(i)}$$

$K = 0, 1, 2, ...(n-1)$ என (i)ல் பிரதியிட்டால், xக்கு n வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் கிடைக்கும்.

அவைகளாவன, $\cos 0 + i \sin 0 \; (= 1)$ (முதல் மதிப்பு)

$$\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \qquad \text{(2-வது மதிப்பு)}$$

$$\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \qquad \text{(3-வது மதிப்பு)}$$

....

$$\cos \frac{2(n-1)\pi}{2} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \qquad (n\text{-வது மதிப்பு})$$

இந்த n மதிப்புக்களும் $+1$ன் n-வது மூலங்களாகும்.

இப்பொழுது -1ன் nவது மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்க $x^n = 1$ என்று எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

$$x^n = -1 = \cos\pi + i \sin\pi$$
$$= \cos(\pi+2K\pi) + i \sin(\pi+2K\pi)$$
$$= \cos[(2K+1)\pi)] + i \sin[(2K+1)\pi]$$
$$x = \{\cos[(2K+1)\pi] + i \sin[(2K+1)\pi]\}^{1/n}$$
$$= \cos\left[\frac{(2K+1)\pi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{(2K+1)\pi}{n}\right] \qquad \text{.........(ii)}$$

$K = 0, 1, 2, 3, ... (n-1)$ என (ii)ல் பிரதியிட.

$$x = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \qquad \text{(முதல் மதிப்பு)}$$

$$x = \cos \frac{3\pi}{n} + i \sin \frac{3\pi}{n} \qquad \text{(2-வது மதிப்பு)}$$

$$x = \cos \frac{5\pi}{n} + i \sin \frac{5\pi}{n} \qquad \text{(3-வது மதிப்பு)}$$

$$x = \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2n-1)\pi}{n} \qquad (n\text{-வது மதிப்பு})$$

இந்த n மதிப்புக்களும் -1ன் x-வது மூலங்கள்.

6·4. +1ன் n-வது மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிரூபிப்போம்.

n மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \cos 0 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$+ i\left\{\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}$$

$$= \frac{\cos\left\{0 + (n-1)\frac{\pi}{n}\right\} \cdot \sin n.\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (\S\ 3{\cdot}23)$$

$$+ i\,\frac{\sin\{0 + (n-1)\pi/n\} \cdot \sin n.\pi/n}{\sin \pi/n} \qquad (\S\ 3{\cdot}22)$$

$$= \left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right\} \cdot \frac{\sin\pi}{\sin\pi/n}$$

$$= 0 \qquad (\because\ \sin\pi = 0)$$

6·5. இப்பொழுது, +1ன் n-வது மூலங்கள் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் (Geometric Progression) அமையும் என நிரூபிப் போம்.

§ 6·3இலிருந்து xன் $(r+1)$-வது மதிப்பு

$$= \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}. \qquad \ldots\ldots\ldots (a)$$

xன் r-வது மதிப்பு

$$= \cos\frac{2(r-1)}{n} + i\sin\frac{r-1)\pi}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots (b)$$

(a)ஐ (b) ஆல் வகுக்க.

$$\frac{x\text{-ன் } (r+1)\text{-வது மதிப்பு}}{x\text{ன் } r\text{-வது மதிப்பு}} = \frac{\cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}}{\cos\frac{2(r-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(r-1)\pi}{n}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\cos\frac{2(r-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(r-1)\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n}\right)}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

= ஒரு நிலை எண். (rஐச் சாராதது)

எனவே, $+1$ன் n-வது மூலங்கள் ஒரு பெ.வி. (G.P.)யில் அமைகின்றன. இந்த பெ.வி.யின் பொது விகிதம் (common ratio) $=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

6·6. இப்பொழுது, $+1$ன் n-வது மூலங்களின் தொடர் பெருக்கற் பலனைக் (continued product) கண்டுபிடிப்போம்.

§ 6·3யிலிருந்து, $+1$ன் n-வது மூலங்களின் மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. அவைகளின் தொடர் பெருக்கற் பலன்

$$=(\cos 0+i\sin 0)\times\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)$$

$$\ldots\ldots\times\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\cos\left\{0+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}+\ldots\ldots+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}$$

$$+i\sin\left\{0+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}+\ldots\ldots+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}$$

$$=\cos\left\{\frac{n}{2}\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\right\}$$

$$+i\sin\left\{\frac{n}{2}\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\right\}$$

$$=\cos(n-1)\pi+i\sin(n-1)\pi$$

$$=\cos(\pi-n\pi)-i\sin(\pi-n\pi)$$

$$=-\cos n\pi-i\sin n\pi$$

$$=(-1)^n\quad(\because\ \cos n\pi=(-1)^n,\ \sin n\pi=0)$$

$$=(-1)^{n+1}$$

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. α, β இரண்டும் $x^2-2x+2=0$ன் மூலகங்களெனில் $\alpha^n+\beta^n=2^{\frac{n+2}{n}}\cdot\cos\frac{n\pi}{n}$ என நிரூபி. (n ஒரு நேர் முழுவெண்)

$$x^2-2x+2=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$$

$$=1\pm i$$

$\alpha=1+i$ எனில், $\beta=1-i$

அல்லது $\alpha=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$; $\beta=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$ (§ 5·5)

$$\therefore\quad \alpha=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right\};$$

$$\beta=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\alpha^n+\beta^n=\left[\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right\}\right]^n$$

$$+\left[\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right\}\right]^n$$

$$=2^{n/2}\cdot\left\{\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$$

$$+2^{n/2}\left\{\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$$

$$=2^{n/2}\cdot\left\{2\cos\frac{n\pi}{4}\right\}$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

மாதிரி 2. $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{7}}$ன் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடித்து அவற்றை ஆர்கண் வரைபடத்தில் குறிக்க.

$$\sqrt{3}-i=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\cdot\left\{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{i}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right\}$$

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\} \qquad (\S\ 5 \cdot 5)$$

$$= 2 \cdot \left\{ \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right\}$$

$$= 2 \quad \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) \right\}$$

$(\sqrt{3} - i)^{\frac{1}{7}}$

$$= \left[2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right\} \right]^{\frac{1}{7}}$$

$$= 2^{\frac{1}{7}} \left\{ \cos \frac{(12n+1)\pi}{42} - i \sin \frac{(12n+1)\pi}{42} \right\} \quad (\S\ 6 \cdot 1)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots 6$ எனப் பிரதியிட,

$\therefore$ $(\sqrt{3} - i)^{\frac{1}{7}}$ன் ஏழு மதிப்புக்களும் முறையே

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{\pi}{42} - i \sin \frac{\pi}{42} \right\};$$

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{13\pi}{42} - i \sin \frac{13\pi}{42} \right\};$$

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{25\pi}{42} - i \sin \frac{25\pi}{42} \right\};$$

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{37\pi}{42} - i \sin \frac{\pi 37}{42} \right\};$$

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{49\pi}{42} = i \sin \frac{49\pi}{42} \right\};$$

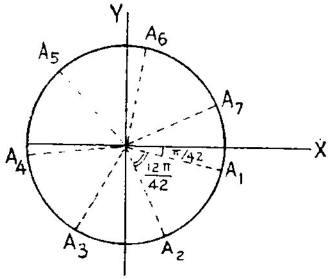
$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{61\pi}{42} - i \sin \frac{61\pi}{42} \right\};$$

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot \left\{ \cos \frac{73\pi}{42} - i \sin \frac{73\pi}{42} \right\}.$$

இவ்வேழு மதிப்புகளுக்கும் குணகம் $\frac{1}{7}$ ஆகையால், ஆர்கண் வரைபடத்தில் ஆதியை மையமாக வைத்து, ஆரம் $=2^{\frac{1}{7}}$ என்ற வட்டத்தை வரை.

$A_1, A_2, A_7......$ என்ற புள்ளிகள் மேற்கூறிய மதிப்புகளைக் குறித்தால், அவைகள் வட்டத்தின் மீது அமையும்.

மேலும் முதல் மதிப்பின் வீச்சம் $=-\frac{\pi}{42}$.



படம் - 34

ஆகையால், A_1 என்ற புள்ளியை $X\hat{O}A_1=-\pi/42$ என்று இருக்குமாறு எடுக்கவேண்டும். இம்மாதிரியே, $A_2, A_3\ A_7$ என்ற புள்ளிகளை $A_1\hat{O}A_2=A_2\hat{O}A_3=...=A_6\hat{O}A_7=-\frac{12\pi}{42}$ என்று இருக்குமாறு எடுத்தால் புள்ளிகள் $A_1 A_2 ......, A_7$ மேற்கூறிய மதிப்புக்களை ஆர்கண் வரைபடத்தில் குறிக்கும். [படம் 34]

மாதிரி 3. தீர் : $x^{15}+x^8+x^7+1 = 0.$

$$x^{15}+x^8+x^7+1 = x^8(x^7+1)+1(x^7+1)$$
$$= (x^8+1)(x^7+1)=O$$

$$\therefore \qquad x^8+1 = 0 \qquad ......(i)$$
$$x^7+1 = 0. \qquad ......(ii)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க வேண்டும்.

(i)லிருந்து, $x^8 = -1-\cos\pi\pm i\sin\pi$

$$= \cos(2K+1)\pi\pm i\sin(2K+1)\pi$$

$$\therefore \qquad x = \cos\left\{\frac{(2K+1)\pi}{8}\right\}\pm i\sin\left\{\frac{(2K+1)\pi}{8}\right\} \qquad ......(iii)$$

$K = O,\ 1,\ 2,\ 3$ என (iii)ல் பிரதியிட்டால்

xக்கு 4 சோடி (அதாவது 8) மதிப்புக்கள் கிடைக்கும்.

$x^7+1 = 0$ எனில்

$$x^7 = -1 = \cos\pi \pm i \sin\pi$$
$$= \cos(2K+1)\pi \pm i \sin(2K+1)\pi$$
$$\therefore\quad x = \cos\left\{\frac{(2K+1)\pi}{7}\right\} \pm i \sin\left\{\frac{(2K+1)\pi}{7}\right\} \quad \text{(iv)}$$

$K = 0, 1, 2,$ என (iv)ல் பிரதியிட்டால்

xக்கு 3 சோடி (அதாவது 6) மதிப்புக்கள் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது, $K = 3$ என்று பிரதியிட

$$x = \cos\pi \pm i \sin\pi$$
$$= -1 \pm O$$

$= -1$ என்ற ஒரு மதிப்புத்தான் கிடைக்கும்.

எனவே, $x = -1$

$$x = \cos\left\{\frac{(2K+1)\pi}{7}\right\} \pm i \sin\left\{\frac{(2K+1)\pi}{7}\right\} \quad \text{...(v)}$$
$$(K = 0; 1, 2)$$

என்ற 7 மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

(iii); (v)லிருந்து, xக்கு 15 மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

6·8. n ஒரு நேர் முழுவெண் எனில், $x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$ஐ மெய்யான இருபடிக்காரணிகளாகப் பிரிக்க.

$x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^2 n = 0$ எனக்கொள் ......(A)

$$\therefore\quad x^n = \frac{2a^n \cos n\theta \pm \sqrt{4a^{2n}\cos^2 n\theta - 4a^{2n}}}{2}$$
$$= a^n(\cos n\theta \pm i a^n \sin n\theta.$$
$$= a^q(\cos n\theta \pm i \sin n\theta)$$
$$= a^n.\{\cos(2K\pi + n\theta) \pm i \sin(2K\pi + n\theta)\}$$
$$\therefore\quad x = a.\{\cos(2K\pi + n\theta) \pm i \sin(2K\pi + n\theta)\}^{1/n}$$
$$= a\cdot\left\{\cos\left(\frac{2K\pi + n\theta}{n}\right) \pm i \sin\left(\frac{2K\pi + n\theta}{n}\right)\right\}$$
$$x = a\left\{\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\} \quad \text{...(B)}$$

சமன்பாடு (A)யிலிருந்து xக்கு $2n$ மதிப்புக்கள் கிடைக்கும் ஆகையால். $K = O, 1, 2, \ldots (n-1)$ என்று (B)ல் பிரதியிட்டால் xக்கு n சோடி மதிப்புக்கள் (அதாவது $2n$ வெவ்வேறு மதிப்புக்கள்) கிடைக்கும்.

எனவே,

$$\left\{x - a\left[\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]\right\}.$$

$$\left\{x-a\left[\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)-i\sin\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

$(K = 0, 1, 2, \ldots (n-1))$ $x^{2n}-2x^na^n \cos n\theta+a^{2n}$ன் காரணிகள்,

ஆனால்,

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)-ai\sin\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)+ai\sin\theta+\frac{2K\pi}{n}\right\}$$

$$= \left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)\right\}^2+a^2\sin^2\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)$$

$(\therefore \quad i^2=-1)$

$$= x^2-2xa\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)+a^2. \qquad \ldots\ldots\ldots (C)$$

இந்த, மெய்யான இரு படிக்கோவையானது, $x2^n$ $2x^na^n$ cos $n\theta+a^{2n}$ன் மெய்யான இருபடிக் காரணியாகும்.

$K = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ என்று (C)ல் பிரதியிட.

$x^{2n}2x^na^n \cos n\theta+a^{2w}$

$$\equiv \lambda \left\{x^2-2xa\cos\theta+a^2\right\} \cdot \left\{x^2-2xa\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$

$$\times \ldots\ldots\ldots \left\{x^2-2xa\cos\left(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$

(λ என்பது ஒரு நிலையான எண்)

x^{2n}ன் குணகத்தின் இரு பக்கமும் சமன்படுத்த, $\lambda = 1$ என கிடைக்கிறது.

ஆகையால்,

$$x^{2n}-2x^na^n\cos n\theta+a^{2n} = \overset{n-1}{\underset{K=0}{\sigma\pi}}\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2K\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$

($\sigma\pi$ என்பது, தொடர் பெருக்கற்குறி)

6·9. மேற்கூறிய காரணிகள் சூத்திரத்தை வரைபடம் மூலம் இப்பொழுது விவரிப்போம்.

O ஐ மையமாகவும் 'a' என்பதை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரை. P என்னும் புள்ளியை $OP = x$ என்று இருக்குமாறு எடு. $x>a$ ஆனால், P வட்டத்திற்கு வெளியேயும், $x<a$ எனில் P வட்டத்திற்கு உள்ளேயும் அமையும். A_1 என்னும் புள்ளியை $P\hat{O}A_1 = \theta$ வாக இருக்குமாறு வட்டத்தின் பரிதியில் எடுத்துக்கொள்.

A_1ஐ முதல் உச்சியாகக் கொண்ட n பக்கமுள்ள ஒரு ஒழுங்கு பல்கோணம் $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ஐ வட்டத்தின் பரிதியில் அமையுமாறு எடு.

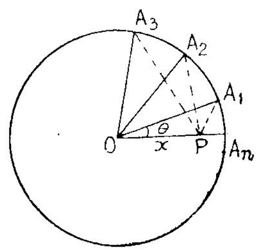
$$P\hat{O}A_1 = \theta \text{ (கொள்கை)}$$

$$\therefore\ P\hat{O}A_2 = P\hat{O}A_1 + A_1\hat{O}A_2 = \theta + 2\pi/n \qquad (\S\ 4{\cdot}2)$$

$$P\hat{O}A_3 = P\hat{O}A_2 + A_2\hat{O}A_3 = \theta + 2\pi/n + 2\pi/n = \theta + 4\pi/n.$$

....

$$P\hat{O}A^n = \theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$



படம்-35

$\triangle\ P\hat{O}A_1$லிருந்து,

$$PA_1^2 = OP^2 + OA_1^2 - 2OP\ OA_1 \cos\theta$$
$$= n^2 + a^2 - 2\,xa \cos\theta$$

இம்மாதிரியே, $PA_2^2 = x^2 + a^2 - 2xa \cos(\theta + 2\pi/n)$ ($\triangle POA_2$லிருந்து)

....

$$PA^2{}_n = x^2 + a^2 - 2xa \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \quad (\triangle POAn\text{லிருந்து})$$

ஆகையால்,

$$PA_1^2 .\ PA_2^2 .\ PA^2{}_3 \ldots PA^2 n = \underset{K=O}{\overset{n-1}{a\pi}} \left\{ x^2 - 2ax \cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2 \right\}$$

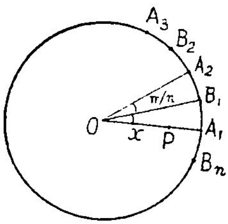
$$= x^{2n} - 2x^n a_n \cos(n\theta) + a^{2n}$$

இதற்குத் தேமாரின் வட்டப்பண்பு எனப் பெயர்.

(De Moivre's Property of the eirele)

6·10. §6·9-ல் எடுத்துக்கொண்ட P என்பது OA_1ன் மீது அமைந்தால் $\theta - O$ ஆகும். எனவே, இப்பொழுது $OP = x$ எனில்

$$PA_1^2 \cdot PA_2^2 \cdot PA_3^2 \ldots PA_n^2 = x^{2n} - 2x^n a^n \cos(0) + a^{2n}$$
$$= x^{2n} - 2x^n a^n + a^{2n}$$
$$= (x^n - a^n)^2 \ldots \text{(i)}$$



படம்-36

இரு பக்கமும் வர்க்க மூலம் எடுக்க.

$PA_1\ PA_2\ PA_3 \ldots PA_n$

$= a^n - x^n \quad (x > a)$, அல்லது

$= x^n - a^n \quad (x > a)$ ...... (ii)

வட்ட விற்கள் $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ...$A_n A_1$ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே $B_1, B_2, \ldots B_n$ எனில்,

$A_1 \hat{O} B_1 = \frac{1}{2}(2\pi/n) = \pi/n.$

$B_1 \hat{O} A_2 = \pi/n$

$A_2 \hat{O} B_2 = \pi/n$

$B_n \hat{O} A_1 = \pi/n$

ஆகையால், $A_1\ B_1\ A_2\ B_2 \ldots B_n$ ஒரு ($2n$ பக்கமுள்ள) ஒழுங்குப் பல்கோணம்.

எனவே, (i) லிருந்து,

$$PA_1 \cdot PB_1\ PA_2 \cdot PB_2 \ldots PB_n = a^{2n} - x^{2n}\ (x < a), \text{ அல்லது,}$$
$$= x^{2n} - a^{2n}\ (x > a) \quad \text{------}$$

அதாவது,

$$(PA_1 \cdot PA_2 \ldots PA_n) \times (PB_1 \cdot PB_2 \ldots PB_n) = a^{2n} - x^{2n}\ (x < a) \text{ அல்லது}$$
$$= x^{2n} - a^{2n}\ (x > a) \quad \text{(iii)}$$

∴ (ii), (iii) லிருந்து,

$$PB_1\ PB_2\ PB_n = x^n + a^n\ (x \gtrless a)$$

எனவே, P வட்டத்தினுள்ளிருந்தாலும், வெளியிலிருந்தாலும்,

$$PB_1\ PB_2 \ldots PB_n = x^n + a^n$$

இதற்கு கோட்சின் வட்டப் பண்பு எனப் பெயர்.

(Cotes Property of Circle)

6·11. $x^n - a^n$ஐக் காரணிப்படுத்த. (n ஒரு நேர் முழுவெண்)

வகை I. n ஒரு ஒற்றை எண்

$x^n - a^n = 0$ என்றால்,

$x=a$ என்பது ஒரு தீர்வு. (அல்லது x^n-a^nன் ஒரு காரணி $x-a$) ....(i)

எனவே, xன் மற்ற $(n-1)$ தீர்வுகளைத்தான் நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, $x^n-a^n=0$ ஆகையால்,

$$x^n=a^n\ 1$$
$$=a^n(\cos 0^\circ\pm i\sin 0^\circ)$$
$$=a^n(\cos 2K\pi\pm i\sin 2K\pi)$$

ஆகையால்,
$$x=a\{\cos 2K\pi\pm i\sin 2K\pi\}^{1/n}$$
$$=a\left\{\cos\frac{2K\pi}{n}\pm i\sin\frac{2K\pi}{n}\right\}$$
$$\left(K=1,\ 2\ldots\ldots\frac{(n-1)}{2}\right)$$

xன் ஒரு சோடி மதிப்பு $a\left\{\cos\frac{2K\pi}{n}\pm i\sin\frac{2K\pi}{n}\right\}$ ஆகையால் x^n-a^nன் ஒரு சோடிக் காரணி

$$=\left[\left\{x-a\cos\frac{2K\pi}{n}\right\}-ai\sin\frac{2K\pi}{n}\right]\times\left[\left\{x-a\cos\frac{2K\pi}{n}\right\}+ai\sin\frac{2K\pi}{n}\right]$$
$$=\left\{x-a\cos\frac{2K\pi}{n}\right\}^2 a^2\sin^2\frac{2K\pi}{n}\qquad(\because\ i^2=-1)$$
$$=x^2-2xa\cos\frac{2K\pi}{n}+a^2\qquad\ldots\ldots\ldots(ii)$$

(i), (ii)லிருந்து,

$$x^n-a^n=(x-a)\prod_{K=1}^{(n-1/2)}\left\{x^2-2xa\cos\frac{2K\pi}{n}+a^2\right\}$$

வகை II. n ஒரு இரட்டை எண்

முன்போல, $x^n-a^n=0$ எனில்,

$x=\pm a$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும். எனவே x^n-a^nன் இரு காரணிகள் முறையே $(x-a)$, $(x+a)$ ....(i)

நாம் இப்பொழுது $x^n-a^n=0$ன் மற்ற $(n-2)$ தீர்வுகளைத்தான் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

$x^n = a^n$ ஆகையால்

$= a^n \cdot 1 = a^n (\cos 0° \pm i \sin 0°)$

$= a^n (\cos 2K\pi \pm i \sin 2K\pi)$

$\therefore \quad x = a \{ \cos 2K\pi \pm i \sin 2K\pi \}^{1/n}$

$$= a \left\{ \cos \frac{2K\pi}{n} \pm i \sin \frac{2K\pi}{n} \right\}$$

$$\left(K = 1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{n-2}{2} \right)$$

xன் ஒரு சோடி மதிப்பு $a \left\{ \cos \frac{2K\pi}{n} \pm i \sin \frac{2K\pi}{n} \right\}$ ஆகையால் $x^n - a^n$ன் ஒரு இருபடிக் காரணி

$$= x^2 - 2ax \cos \frac{2K\pi}{n} + a^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i), (ii)லிருந்து,

$$x^n - a^n = (x - a)(n + a) \prod_{K=1}^{\frac{(n-2)}{2}} \left\{ x^2 - 2ax \cos \frac{2K\pi}{n} + a^2 \right\}$$

$$= (x^2 - a^2) \prod_{K=1}^{\frac{(n-2)}{2}} \left\{ x^2 - 2ax \cos \frac{2K\pi}{n} + a^2 \right\}$$

6·12.

$x^n + a^n$ஐக் காரணிப்படுத்துக. (n ஒரு நேர் முழுவெண்)

வகை *I*. n ஒற்றை எண்.

$x^n + a^n = 0$க்கு,

$x = -a$ என்ற ஒரு மெய்யான தீர்வு உண்டு. அல்லது ($x^n - a^n$ன் ஒரு காரணி $x + a$) .... (i)

மற்ற $(n - 1)$ தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்க.

$x^n = -a^n$

$= a^n (\cos \pi \pm i \sin \pi)$

$= a^n (\cos (2K + 1)\pi \pm i \sin (2K + 1)\pi)$

$\therefore \quad x = a \left\{ \cos (2K + 1)\pi \pm i \sin (2K + 1)\pi \right\}^{\frac{1}{n}}$

$$= a\left\{ \cos \frac{(2R+1)}{n}\pi \pm i \sin \frac{(2K+1)}{n}.\ \pi \right\}$$

$\left(K = O, 1, 2, \ldots, \frac{(2K+3}{2}\right.$; அதாவது,

$\left.\frac{(n-1}{2} \text{ சோடி மதிப்புக்கள்}\right)$

§ 6·11ல் விளக்கியதுபோல, இப்பொழுது,

$x^n + a^n$க்கு ஒரு மெய்யான இரு படிக்காரணி,

$n^2 - 2ax \cos \frac{(2K+1}{n}\pi + a^2$ என புலப்படும். .... (ii)

(i), (ii) லிருந்து,

$$x^n + a^n = (x+a) \prod_{K=O}^{\frac{(n-3)}{2}} \left\{ x^2 - 2ax \cos \frac{(2K+1)}{n}\pi + a^2 \right\}$$

வகை *II.* n ஒரு இரட்டை எண்.

$n^n = -a^n$க்கு $x = \pm a$ போன்ற மெய்யான தீர்வுகள் கிடையா.

ஆனல் மேற் கூறியபடி $x^n + a^n$க்கு ஒரு மெய்யான இரு படிக்காரணி,

$x^2 - 2ax \cos \frac{(2K+\ )}{n}\pi + a^2$. $\left(K = O, 1, 2 \ldots \frac{(n-2)}{2}\right)$

உண்டு.

$$\therefore\quad x^n + a^n = \prod_{K=O}^{\frac{1}{2}(n-2)} \left\{ x^2 - 2ax \cos \frac{(2K+1)}{n}\pi + a^2 \right\}$$

$\left(\frac{n}{2}\right.$ இரு படிக்காரணிகள் $\left.\right)$

6·13.

இப்பொழுது, நாம் சில முக்கிய சூத்திரங்களைக் காண்போம்.

(i) $\sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta.\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \ldots\ldots \sin$

$\left(\theta + \frac{n-1}{n} + \right)$

§ 6·8லிருந்து,

$$x^{2n} - 2x^n a^n.\quad \cos n\theta + a^{2w} \prod_{K=O}^{n-1}$$

$$\left\{ x^2 - 2ax.\ \cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2 \right\}$$

$x = a = 1$ என்றும், $\theta = 2\phi$ என்றும் இதில் பிரதியிட.

எனவே, $2 - 2\cos 2n\phi = \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ 2 - 2\cos\left(2\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$

அதாவது, $4 \sin^2 n\phi = \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ 4 \sin^2\left(\phi + \frac{K\pi}{n}\right)\right\}$

$$= 2^{2(n-1)} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \sin^2\left(\phi + \frac{K\pi}{n}\right)\right\}$$

ஆகையால், $\sin^2 n\phi = 2^{2n-2} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \sin^2\left(\phi + \frac{K\pi}{n}\right)\right\}$

அல்லது, $\sin n\phi = 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \sin\left(\phi + \frac{K\pi}{n}\right)\right\}$

ϕக்குப் பதிலாக θ என்று எழுதினால் கீழ்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$\sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(\theta + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

(ii) $\cos n\theta = 2^{n-1}.\ \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right) \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right)$

$$\ldots \sin\left(\theta + \frac{2n+1}{2n}\pi\right)$$

சென்ற சூத்திரத்தில், θவிற்குப் பதிலாக $\theta + \frac{\pi}{2n}$ என்று ழுதினால்,

$$\sin n\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) = 2^{n-1}.\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\right) \ldots$$

என்று நமக்குக் கிடைக்கும்.

அதாவது, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) = 2^{n-1}.\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right).\ \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right) \ldots\ldots$

அல்லது. $\cos n\theta = 2^{n-1} . \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) . \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right)$

$$\ldots \sin\left(\theta + \frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

6·14.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. n ஒரு நேர் முழுவெண்ணுகில் $x^{2n}-1$ ஐ இரு படிக்காரணிகளாகப் பிரித்து $\sin\frac{\pi}{2n} . \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ என நிறுவுக.

$2n$ ஒரு இரட்டை எண்ணாகையால்,

$$x^{2n}-a^{2n} = (x^2-a^2)\prod_{K=1}^{n-1}\left\{x^2 - 2ax\cos\frac{2K\pi}{2n} + a^2\right\}$$

(§ 6·11 வகை II)

$$\therefore \quad x^{2n}-1 = (x^2-1)\prod_{K=1}^{n-1}\left\{x^2-2x\cos\frac{2K\pi}{2n}+1\right\}$$

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{K=1}^{n-1}\left\{x^2-2x\cos\frac{2K\pi}{2n}+1\right\}$$

வகை நுண் கணிதத்திலிருந்து (Differential Calculus) x ஆனது 1ஐ அணுக இரு பக்க எல்லை மதிப்புக்களும் சமமாகும். அதாவது,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{K=1}^{n-1}\left\{1-2\cos\frac{2K\pi}{2n}+1\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{2n}{2} = 2^{n-1}\prod_{K=1}^{n-1}\left\{1-\cos\frac{2K\pi}{2n}\right\}$$

$$= 2^{n-1}.\prod_{K=1}^{n-1}\left\{2\sin^2\frac{K\pi}{2n}\right\}$$

(அ-து) $$n = 2^{n-1}.2^{n-1}.\prod_{K=1}^{n-1}\left\{\sin^2\frac{K\pi}{2n}\right\}.$$

இரு பக்கமும் வர்க்க மூலம் எடுக்க.

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \pm \prod_{K=1}^{(n-1)} \left\{ \sin \frac{K\pi}{2n} \right\} \qquad \ldots \quad (i)$$

ஆனால் கோணங்கள் $\frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, ;\ldots\ldots \frac{(n-1)}{2n}\pi$ ஒவ்வொன்றும் π ஐ விட சிறியதாகையால், $\sin\frac{\pi}{2n}$, $\frac{2\pi}{2n}$, $\sin\frac{3\pi}{2n}, \ldots$ $\sin\frac{(n-1)}{2n}\pi$ முதலிய அத்துணைக்கும் கூட்டற்குறிதான் உண்டு. (plus sign)

$$\therefore \prod_{K=1}^{(n-1)} \sin\frac{K\pi}{2n} = +\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

அதாவது, $\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

மாதிரி 2. $x^{10}-x^5+1$ ஐ இருபடிக்காரணிகளாகப் பிரிக்க.

$x^{10}-x^5+1 = 0$ லிருந்து

$$x^5 = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} \pm \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(2K\pi+\frac{\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(2K\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

(K ஒரு முழுவெண்)

$$x = \left\{\cos\left(2K\pi+\frac{\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(2K\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$$

$$= \cos\frac{(6K+1)\pi}{15} \pm i\sin\frac{(6K+1)\pi}{15}$$

($K=0, 1, 2, 3, 4$)

$$\therefore x^{10}-x^5+1 = \prod_{K=0}^{4}\left\{x^2-2x\cos\frac{(6K+1)}{15}\pi+1\right\}$$

மாதிரி 3.

$$\cos n\theta - \cos n\phi = 2^{n-1} \prod_{K=0}^{(n-1)} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

என நிறுவுக.

$$x^{2n} - 2x^n \cos n\phi + 1 = \prod_{K=0}^{(n-1)} \left\{ x^2 - 2x\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right) + 1 \right\} \quad (\S\ 6\cdot8)$$

இரு பக்கங்களையும் x^n ஆல் வகுக்க.

$$x^n - 2\cos n\phi + \frac{1}{x^n} = \prod_{K=0}^{(n-1)} \left\{ x - 2\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right) + \frac{1}{x} \right\}$$

$$(\text{அ.து.})\ xn + \frac{1}{x^n} - 1\cos n\phi = \prod_{K=0}^{(n-1)} \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\} \quad \ldots\ldots(\text{i})$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில் $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$; $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

$\therefore$ (i)லிருந்து.

$$2\cos n\theta - 2\cos n\phi = \prod_{K=0}^{(n-1)} \left\{ 2\cos\theta - 2\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

அதாவது, $$2(\cos n\theta - \cos n\phi) = 2^n \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

எனவே, $$\cos n\theta - \cos n\phi = 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

குறிப்பு: $\phi = \left(\frac{-\pi}{2n}\right)$ எனில்,

$$\cos n\theta - \cos n\left(\frac{-\pi}{2n}\right) = 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2K\pi}{n}\right)\right\}$$

$$= 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\frac{4K-1}{2n}\right)\pi \right\}$$

$$\cos n\theta - 0 \qquad = 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \left\{ \cos\theta - \cos\left(\frac{4K-1}{2n}\right)\pi \right\}$$

எனவே,

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots$$

$$\times\left(\cos\theta - \cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

மாதிரி 4.

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2\prod_{p=1}^{n}\left\{x^2 + \tan^2\frac{(2p-1)\pi}{4n}\right\}$$

இம்முடிவிலிருந்து $\sum_{p=1}^{n} \tan^4 \frac{(2p-1)}{4n}\pi$ ன் மதிப்பை எழுதுக.

$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 0$ எனக்கொள்.

$$\therefore \qquad (1+x)^{2n} = -(1-x)^{2n}$$

$$= (1-x)^{2n} \cdot \{\pi \pm i\sin\pi\}$$

$$= (1-x)^{2n} \cdot \{\cos(2p-1)\pi \pm i\sin(2p-1)\pi\}$$

(p ஒரு நேர் முழுவெண்)

எனவே, $1+x = (1-x)\cdot\{\cos(2p-1)\pi \pm i\sin(2p-1)\pi\}^{1/2n}$

அல்லது, $$\frac{1+x}{1-x} = \cos\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi$$

எனவே, $$\frac{2x}{2} = \frac{\cos\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi - 1}{\cos\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi - 1}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi - 1}{2\cos^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2p-1}{2n}\right)\pi}$$

$$= \frac{2i^2\sin^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \pm 2i\sin\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi\cdot\cos\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi}{2\cos^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \pm 2i\sin\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi\cdot\cos\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi}$$

$$= \frac{i \sin\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \left\{ i \sin\left(\frac{2p-1}{4n}\right) \pm \cos\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \right\}}{\cos\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \left\{ \cos\left(\frac{2p-1}{4n}\right) \pm i \sin\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \right\}}$$

அல்லது $x = \pm i \tan\left(\frac{2p-1}{n}\right)\pi.$

எனவே, $x + i \tan\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi,$

$$x - i \tan\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \,(P = 2, \ldots\ldots (n)$$

ஆகியவை, $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$ என்ற கணியத்தின் (quantity) காரணிகளாகும். (§ 6·12ஐப் பார்க்க):

ஆகையால்

$$(1+x)^{2n} + (1-x)2n. = K \underset{p=1}{\overset{n}{\sigma\pi}} \left\{ x + i \tan\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \right\}$$

$$\left\{ x - i \tan \frac{2p-1}{4n}\pi \right\}$$

$$= K \underset{p=1}{\overset{n}{\pi}} \left\{ x^2 + \tan^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \right\}.$$

இருபக்கமும் x^{2n}ன் குணகத்தை சமன்படுத்தினுல்

$2 = K$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே, $(1+n)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2 \underset{p=1}{\overset{n}{\sigma\pi}} \left\{ x^2 + \tan^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \right\}$

இருபக்கமும் x^{2n-2}ன் குணகத்தைச் சமன்படுத்த.

$$2 \times 2^n C_2 = 2 \times \sum_{p=1}^{n.} \tan^2 \frac{(2p-1)}{4n}\pi.$$

இருபக்கமும் $x2^{n-4}$ன் குணகத்தை சமன்படுத்த

$$2 \times {}^{2n}C_4 = 2 \times \Sigma \tan^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \times \tan^2\left(\frac{2q-1}{4n}\right)\pi.$$

(p, q இரண்டும் முழுவெண்கள் ஒன்றிலிருந்து, n வரையுள்ள மதிப்புகளைப் பெறும் இவைகள், ஒன்றுக்கொன்று சமமல்ல. $(p \neq q)$)

ஆகையால்

$$\sum_{p=1}^{u} \tan^4\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi = \left\{\Sigma \tan^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi\right\}$$

$$-2\left\{\Sigma \tan^2\left(\frac{2p-1}{4n}\right)\pi \times \tan^2\left(\frac{2q-1}{4n}\right)\pi\right\}$$

$$= \left\{{}^{2n}C2\right\}^2 - 2.\left\{{}^{2n}C4\right\}$$

$$= \tfrac{1}{8}\, n(n-1)\,(4n^2+2n-3)$$

மாதிரி. 5. $$\frac{x^n - a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}} \sum_{K=O}^{n-1} \frac{x - a\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)}{x^2 - 2an\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2}$$

என்று நிறுவுக.

§ 6·8லிருந்து,

$$x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} = \underset{K=O}{\overset{n-1}{a\pi}} \left\{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2\right\}$$

இருபக்கமும் c அடிக்கு மடக்கை எடுக்க.

$$wz\,(x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + {}^{2n}) = \sum_{K=O}^{n-1} wz\left\{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2\right\}$$

xஐக் குறித்து வகையிட (differentiate)

$$\frac{2nx^{2n-1} - 2a^n.\, nx^{n-1}.\cos n\theta}{x^{2n} - 2a^n.\, nx^n \cos n\theta + a^{2n}} = \sum_{K=O}^{n-1} \left\{\frac{2x - 2a\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)}{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2}\right\}$$

எனவே,

$$\frac{2n\,(x^{n-1})\,(x^n - a^n \cos n\theta)}{x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}} = \sum_{K=O}^{n-1} \left\{ \frac{2\left[x - a\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]}{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2} \right\}$$

அல்லது, $$\frac{x^n - a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}} \sum_{K=O}^{n-1} \left\{ \frac{x - a\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right)}{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2K\pi}{n}\right) + a^2} \right\}$$

மாதிரி 6. $P_1P_2P_3 \ldots P_{2n}$ என்று ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணம் ஆரம் r கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. P என்னும் புள்ளி இவ்வட்டத்தின்மீது, வில் P_1P_{2n}ன் நடுவில் அமைந்தால் (i) $PP_1 \times PP_2 \times PP_3 \times \ldots\ldots PP_n = r^n\sqrt{2}$ என்றும்
(ii) $P_1P_2 \times P_1P_3 \times P_1P_4 \ldots \times P_1P_n = r^{n-1}\sqrt{n}$
என்றும் நிறுவுக.

$P_1P_2P_3 \ldots P_{2n}$ என்ற $2n$ பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணம் ஒரு வட்டத்தினுள் வரையப்பட்டுள்ளதால், ஒவ்வொரு பக்கமும் வட்ட மையத்தில் சமகோணத்தைத் தாங்கும். எனவே,

O என்பது வட்ட மையமானால்

$$P_1\hat{O}P_2 = P_2\hat{O}P = \ldots = P_{2n}\hat{O}P_1 \quad \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

மேலும் P என்ற புள்ளி வில் $P_1 P_2$ன் நடுவில் உள்ளதால்

$$P\hat{O}P_1 = P\hat{O}P_{2n} = \frac{\pi}{2n}.$$

எனவே, $$P\hat{O}P_2 = P\hat{O}P_1 + P_1\hat{O}P_2 = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}.$$

$$P\hat{O}P_3 = P\hat{O}P_2 + P_2\hat{O}P_3 = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}.$$

இம்மாதிரியே, $P\hat{O}P_n = \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}$.

எனவே, $PP_1 = 2r \sin \frac{\pi}{4n}$.

$$PP_2 = 2r \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{n}\right)$$

$$PP_3 = 2r \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2\pi}{n}\right)$$

....

$$PP_n = 2r \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

ஆகையால், $PP_1 \times PP_2 \times PP_3 \times \ldots\ldots \times PP_n$

$$= 2r \sin \frac{\pi}{4n} + 2r \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{n}\right) \times \ldots\ldots \times 2^r \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= 2^n . r^n . \sin \frac{\pi}{4n} \times \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{n}\right) \times \ldots\ldots \times \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= 2^n . r^n . \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sin n \frac{\pi}{4n} \ldots\ldots\ldots\ldots (\S\ 6{\cdot}13.\ (i))$$

$$= 2 \cdot r^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= r^n \sqrt{2}.$$

மேலும், $P_1 P_2 = 2r \sin \frac{\pi}{2n}$.

$$P_1 P_3 = 2r \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)$$

....

$$P_1 P_n = 2r \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)$$

மேலும் $P_1 \hat{O} P_2 = \frac{\pi}{n}$.

$$\therefore \quad P_1 P_2 = 2r \sin \frac{\pi}{2n}.$$

$$P_1 \hat{O} P_3 = \frac{2\pi}{n} \quad (\because \; P_1\hat{O}P_3 = P_1\hat{O}P_2 + P_2\hat{O}P_3)$$

$$\therefore \quad P_1 P_3 = 2r \sin \frac{2\pi}{2n}.$$

இம்மாதிரியே, $P_1 P_n = 2r \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}.$

ஆகையால், $P_1 P_2 \times P_1 P_3 \times P_1 P_4 \times \ldots\ldots \times P_1 P_n$

$$= 2r \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \times 2r \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \times \ldots (n-1) \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= 2^{n-1}.\ r^{n-1}.\ \sin\frac{\pi}{2n}.\ \sin\frac{2\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$= 2^{n-1}.\ r^{n-1}.\ \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$ (மாதிரி 1 லிருந்து) (§ 6·13)

$$= r^{n-1}.\ \sqrt{n}$$

மாதிரி 7. $ABCD$ என்ற, n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்றுமையம் O, சுற்றுவட்ட ஆரம் a. P என்னும் புள்ளி Oவிலிருந்து r என்னும் தூரத்திலுள்ளது. நீட்டப்பட்ட கோடுகள் OA, OB, OC,..... வுடன் முறையே AP, BP, CP.........உண்டாக்கும் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $\tan^{-1}\frac{r^n \sin n\theta}{r^n \cos n\theta - an}$ $(\theta = P\hat{O}A)$ என்று நிறுவுக.

நீட்டப்பட்ட கோடுகள் OA, OB, OC,...வுடன் முறையே AP, BP, CP,...உண்டாக்கும் கோணங்கள் ϕ, ϕ^1, ϕ^{11}...எனில்,

$$PA \cdot \cos\phi = r\cos\theta - a$$

$$PA \sin\phi = r\sin\theta$$

எனவே, $PA(\cos\phi + i\sin\phi) = (r\cos\theta + ir\sin\theta) - a$

இம்மாதிரியே,

$$PB(\cos\phi^1 + i\sin\phi^1) =$$

$$\left\{r\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + ir\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\right\} - a$$

$$(\because A\hat{O}B = 2\pi/n)$$

... ...

ஆகையால், $PA(\cos\phi+i\sin\phi)\times PB(\cos\phi^1+i\sin\theta^1)\ldots\ldots$

$$= \left\{r(\cos\theta+i\sin\theta)-a\right\}$$

$$\times\left\{r\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right]-a\right\}$$

$\times\ldots\ldots$(n உறுப்புக்கள்)

$= (-1)^{n-1}\{r^n(\cos n+i\sin n\theta)-a^n.\}$ (§6·11)

மெய்யான கற்பனையான பகுதிகளை இருபக்கமும் சமன்படுத்த.

$PA\times PB\times\ldots\cos(\phi+\phi^1+\ldots)=\{r^n\cos n\theta-a^n\}(-1)^{n-1}\ldots$(i)

$PA\times PB\times\ldots\sin(\phi+\phi^1+\ldots)=\{r^n\sin n\theta\}(-1)^{n-1}\ldots\ldots$(ii)

(ii)ஐ (i) ஆல் வகுக்க,

$$\tan(\phi+\phi^1+\ldots)=\frac{r^n\sin n\theta}{r^n\cos n\theta-a^n}.$$

$$\therefore\quad \phi+\phi^1+\ldots=\tan^{-1}\left\{\frac{r^n\sin n\theta}{r^n\cos n\theta-a^n}\right\}.$$

அப்பியாசம் 6

1. $x=\cos\theta+i\sin\theta$ எனில், $\dfrac{x^{2n}+1}{x^{2n-1}+x}=\dfrac{\cos n\theta}{\cos(n-1)\theta}$

என நிறுவுக (n முழு எண்)

2. $$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^3(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^4}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^2(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-5}}$$

ஐச் சுருக்குக.

[விடை 1]

(ii) $$\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^4(\cos 4\theta+\sin 4\theta)^{-5}}{(\cos 5\theta+i\sin(3\theta))^2(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^{-6}}$$

ஐச் சுருக்குக.

[விடை $\cos 7\theta-i\sin 7\theta$]

(iii) $$\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^3(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^4}{(\cos 10\theta+i\sin 10\theta)^2(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^4}$$

ஐச் சுருக்குக.

[விடை $\cos 2\theta+i\sin 2\theta$]

3. $x_r=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^r}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2^r}\right)$ எனில்,

$x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots\ldots$மு.வ. $=1$ என நிறுவுக.

4. $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$; $y+\dfrac{1}{y}=2\cos\phi$ எனில்

$\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^2}{x^3}$ன் ஒரு மதிப்பு $= 2\cos(3\theta-2\phi)$ எனக் காண்க.

5. $\left(\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\phi\right)$

$+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\phi\right)$ என நிறுவுக.

(n ஒரு முழு எண்.

6. $(1+x)^n = P_0+P_1x+P_2x^2+\ldots+P_nx^n$ எனில்,

$P_0-P_2+P_4-\ldots\ldots = 2^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ என்றும்,

$P_1-P_3+P_5-\ldots\ldots = 2^{n/2}.\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ என்றும் நிறுவுக.

n ஒரு நேர் முழுவெண்)

[குறிப்பு :— $(1+i)^n$ன் விரித்தல் கண்டுபிடித்து, இருபக்கமும் மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன்படுத்து].

7. $\left\{\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right\}^8 = -1$ என நிறுவுக.

8. $x=\cos\theta+i\sin\theta;\quad \sqrt{1-c^2}=nc-1$ எனில்

$1+c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1+n)\left(1+\frac{n}{x}\right)$ என்று நிறுவுக.

9. $x^2-2x+2 \equiv (x-\alpha)(x-\beta)$ எனில்

$\frac{(x+\alpha)^{-n}(x+\beta)^n}{\alpha-\beta} = \frac{\sin n\phi}{\sin^n\phi}$ $(\cot\phi=x+1)$ என்று நிறுவுக.

10. $(x-p)^2+q^2\equiv(x+\alpha)(x+\beta)$ எனில்

$\frac{(x+\alpha)^n-(x+\beta)^n}{\alpha-\beta} = q^{n-1}\frac{\sin n\phi}{\sin^n\phi}$

என்று நிறுவுக. $(q\cot\theta=x+p)$

[குறிப்பு :- $(x+p)^2+q^2=(x+p+iq)(x+p-iq)$

எனவே $(x+p+iq)(x+p-iq)\equiv(x+\alpha)(x+\beta)$

ஆகையால், $\alpha = p+iq;\quad \beta=p-iq$

மேலும், $x+\alpha = (x+p)+iq$

$$= q\cot\theta + iq = \frac{q(\cos\theta + i\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$x+\beta = x+p-iq = \frac{q(\cos\theta + i\sin\theta)}{\sin\theta}$$

11. $x \equiv \cos\theta + i\sin\theta$; $y \equiv \cos\phi + i\sin\phi$ எனில்,

$$\sin(\theta-\phi) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{x^2-y^2}{xy}\right\}$$ என்றும்,

$$\cos(\theta+\phi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+x^2y^2}{xy}\right\}$$ என்றும் நிறுவுக.

[குறிப்பு :- $\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi-i\sin\phi)$$

$$= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\phi+i\sin\phi)} = \frac{y}{x}.$$

இம்மாதிரியே, $\cos(\theta-\phi)-i\sin(\theta-\phi) = \frac{y}{x}$.]

12. $(-1+\sqrt{3}i)^{3n}+(-1-\sqrt{3}i) = 2^{3n+1}$ என்று நிறுவுக.

13. $(-i)^{\frac{1}{5}}$ன் மதிப்புக்களை எழுதுக.

[விடை. $\cos\frac{(4n+1)\pi}{10} - i\sin\frac{(4n+1)\pi}{10}$; $n=0, 1, ...4$]

m $\frac{m}{n}$

n

14. $(a+ib)+(a-ib)$ ன் ஒரு மதிப்பு

$$= 2(a^2+b^2)\frac{m}{2n}\cos\left(\frac{m}{n}+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$ என நிறுவுக.

15. $3\sqrt{2+2i}$ன் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடித்து $x^6-4x^3+8=0$ ஐத் தீர்.

[விடை $2\sqrt{2}\left\{\cos\frac{(8n+1)}{12}\pi \pm i\sin\frac{(8n+1)}{12}\pi\right\}$;

$n = 0, 1, 2, 4$]

16. $(i-1)^{1/5}$ன் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடித்து அவைகளை ஆர்கண் வரை படத்தில் குறிக்க.

[விடை $2^{1/10}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)\right\}$]

17. $(\sqrt{3}-i)^{1/5}$ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $2^{1/5}\left\{\cos\frac{(12n+1)}{30}\pi-\sin\frac{(12n+1)}{30}\pi\right\}$;

$n = 0, 1, 2, 3, 4,$]

18. $(-1)^{1/10}$ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $\cos\frac{(2n+1)}{10}\pi \pm i\sin\frac{(2n+1)}{10}\pi$; $n = 0, 1, 2, 3, 4,$]

19. $(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ+\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)^{1/3}$ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $\left(2\cos\frac{15^\circ}{2}\right)^{1/3}\left\{\cos\frac{n\cdot 360^\circ+52\frac{1}{2}^\circ}{3}\right.$

$\left.+i\sin\frac{n\cdot 360^\circ+52\frac{1}{2}^\circ}{3}\right\}$]

$n = 0, 1, 2.$

20. $1+i\sqrt{3}$ன் 6-வது மூலங்களின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $2^{1/6}\left\{\cos\frac{(6n+1)}{18}\pi+i\sin\frac{(6n+1)}{18}\pi\right\}$;

$n = 0, 1, 2, \ldots 5.$]

21. $4\sqrt{i}$ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

[விடை $\cos\frac{4n+1}{8}\pi+i\sin\frac{4n+1}{8}\pi$; $n = 0, 1, 2, 3$]

22 $(\sqrt{3}-i)^{3/15}$ன் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடித்து அவைகளின் தொடர்பெருக்கற் பலனைக் காண்க. [விடை $2-2i\sqrt{3}$]

23. $5\sqrt{1+i}$ன் மதிப்புக்களின் தொடர் பெருக்கற் பலன் $= 1+i$ எனக் காண்க.

24. $(a+ib)^{\frac{1}{n}}\cdot(a+ib)^{\frac{1}{n}}$ ன் மதிப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் எனக் காண்க.

25. $3\sqrt{1}$ன் ஒரு கற்பனையான மதிப்பு w எனில் மற்ற மதிப்புக்கள் $1, w^2$ என்றும், $1+w+w^2 = 0$ என்றும், $\frac{1}{1+2w}-\frac{1}{1+w}$ $+\frac{1}{2+w} = 0$ என்றும் நிறுவுக.

26. $x^8 - x^5 + 32x^3 = 32$ஐத்தீர்.

[விடை: $x = 2,\ 2\left\{\cos\frac{2n+1}{5}\pi \pm i\sin\frac{2n+1}{5}\pi\right\}$; $n = 0, 1$;

$x = 1\ \left\{\cos\frac{2m\pi}{3} \pm i\sin\frac{2m\pi}{3}\right\}$; $m = 1$]

27. தீர்:—(i) $x^{16} - 17x^8 + 16 = 0$.

[விடை: $\sqrt{2}\left\{\cos\frac{K\pi}{4} \pm i\sin\frac{K\pi}{4}\right\}$ $(K = \phi, 1, 2, 3, 4)$;

$\left\{\cos\frac{K\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi K}{4}\right\}$ $(K = 1, 2, 3, 4)$]

(ii) $x^{11} - x^7 + x^4 - 1 = 0$

[விடை: $\pm 1, \pm i; -1, \left\{\cos\frac{2K+1}{7}\pi \pm i\sin\frac{2K+1}{7}\pi\right\}$

$(K = 0, 1, 2)$]

28. $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \alpha$ எனில் $\alpha + \alpha^4$; $\alpha^2 + \alpha^3$ என்பவை $x^2 + x - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் காண்க.

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$= (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^{1/5}$$

$$\therefore\ \alpha^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$= 1$ · ஆகையால், α என்பது $x^5 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு.

எனவே, $x^5 = 1$ன் ஐந்து தீர்வுகள் முறையே $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, (§ 6·5)

மேலும், $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. (§ 6·4 ......(i)

$\alpha + \alpha^4 = p$ என்றும், $\alpha^2 + \alpha^3 = q$ என்றும் கொண்டால்,

$p + q = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$ ((i)லிருந்து)......(ii)

$$pq = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3) = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha\cdot\alpha^5 + \alpha^2\cdot\alpha^5$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 \quad (\because\ \alpha^5 = 1)$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \ ......(iii)$$

p, q என்பவை, $x^2 - x(p+q) + pq = 0$ன் தீர்வுகள். அதாவது p, q என்பவை $x^2 + x - 1 = 0$ ((ii), (iii)லிருந்து) என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

29. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}=\alpha$ எனில் $\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ம்

$\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$ம் $x^2+x+2=0$ன் மூலங்கள் எனக் காண்க.

30. $x^{10}-1$ஐ மெய்யான இருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க.

$$\left[\text{விடை. } (x^2-1)\prod_{n=1}^{4}\left\{x^2-2x\cos\frac{n\pi}{5}+1\right\}\right]$$

31. $x^{14}-1$ஐ மெய்யான இருபடிக்காரணிகளாகப் பிரிக்க.

$$\left[\text{விடை. } (x^2-1)\prod_{n=1}^{6}\left\{x^2-2x\cos\frac{n\pi}{7}+1\right\}\right]$$

32. n ஒரு ஒற்றை முழு எண் எனில் $\dfrac{x^n+1}{x+1}$ ஐ மெய்யான இருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க.

$$\left[\text{விடை. } \prod_{K=0}^{(n-1)/2}\left\{x^2-2x\cos\frac{2K+1}{n}\pi+1\right\}\right]$$

33. $x^7+1=(x+1)\left\{x^2-2x\cos\dfrac{\pi}{7}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\dfrac{3\pi}{7}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\dfrac{5\pi}{7}+1\right\}$ என்று நிரூபித்து, $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}=4\sin\dfrac{\pi}{14}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{14}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{14}=\frac{1}{2}$ எனக் காண்க.

34. $x^8+1=\displaystyle\prod_{K=1}^{4}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2K-1)}{8}\pi+1\right\}$ என நிரூபித்து, $\sin\dfrac{\pi}{16}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{16}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{16}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{16}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$ எனக் காண்க.

35. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $x^{12}-1=\displaystyle\prod_{n=0}^{5}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n+1)}{12}\cdot\pi+1\right\}.$

(ii) $x^{12}-x^6+1=\displaystyle\prod_{n=0}^{5}\left\{x^2-2x\cos\frac{6n+1}{12}\cdot\pi+1\right\}$

36. $x^{12}-1$ஐக் காரணிப்படுத்தி அவைகளுள் எந்தக் காரணிகள் x^4+x^2+1க்கும் காரணிகள் எனக் கண்டுபிடிக்க.

$$\left[\text{விடை.}\quad x^{12}-1=\prod_{n=0}^{5}\left\{x^2-2x\cos\frac{n\pi}{6}+1\right\};\quad n=2,\ n=4\right]$$

37. $\dfrac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2x}=A\prod_{K=1}^{p}\left(x^2+\tan^2\dfrac{K\pi}{n}\right)$ என்று நிரூபித்து n ஒற்றை எண்ணெனில், $A=1$; $p=\frac{1}{2}(n-1)$ என்றும் n இரட்டை எண்ணெனில் $A=n$; $p=\frac{1}{2}(n-2)$ என்றும் நிறுவுக.

38. $(1+x)^{2n}\,(1-x)^{2n}=4nx\prod_{K=1}^{n-1}\left\{x^2+\cot^2\dfrac{K\pi}{2n}\right\}$ என்று நிரூபித்து இதிலிருந்து $\sum_{1}^{n-1}\operatorname{cosec}^2\dfrac{K\pi}{2n}=\frac{1}{2}(4n-3)$ என்று காண்க.

39. (i) $A_1A_2\ldots\ldots A_n$ என்னும் ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று மையம் O, ஆரம் a. P என்னும் புள்ளி வட்டப் பரிதியில் அமைந்தால் $PA_1\times PA_2\times PA_3\ldots\ldots PA_n=2a^n\sin\dfrac{n\theta}{2}$ $\quad(POA_1=\theta)$ என்று நிறுவுக.

[குறிப்பு: § 6·9ல் $x=a$]

(ii) மேற்கூறிய ஒழுங்குப் பல்கோணத்தில், Pயிலிருந்து OA_1, $OA_2\ldots\ldots\ldots OA_n$க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் முறையே $PP_1, PP_2\ldots\ldots, PP_n$ எனில்,

$PP_1\times PP_2\times\ldots\ldots\ldots\times PP_n=2^{1-n}\cdot a^n\sin n\theta$ என்று நிறுவுக.

(iii) மேற்கூறிய பல்கோணத்தில்,

$A_1A_2\times A_2A_3\times\ldots\ldots\ldots\times A_{n-1}A_n=$

$=n^{n/2}\cdot a^{(n(n-1))/2}$ என்று நிறுவுக.

40. $P_1P_2\ldots\ldots P_{2n+1}$ என்னும் ஒரு ஒழுங்குப் பல்கோணத்தின் சுற்று ஆரம் a. P என்னும் புள்ளி P_1P_{2n+1} என்னும் வில்லின் நடுவில் அமைந்தால், $PP_1\times PP_2\ldots\ldots\times PP_n=a^n$ என்று நிறுவுக.

அத்தியாயம் VII

திரிகோண விகித விரித்தல்களும், வரம்புகளும்.

7·1. தேமாவரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, $\tan n\theta$ இவைகளின் விரித்தல்களைக் (expansions) கண்டுபிடிக்கலாம்.

n ஒரு நேர் முழுவெண்ணாகில், $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$. ......(i) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை (Binomial Theorem) பயன்படுத்தி,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\cos^{n-2}\theta.\ (i\sin\theta)^2+\ldots\ldots$$

$$=\cos^n\theta+ni\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\cos^{n-2}\theta\cdot i^2\cdot\sin^2\theta+\ldots\ldots$$

$$=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2}\cdot\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta+\ldots\ldots$$

$$+i\left\{n\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\ldots\ldots\right\}$$

$\therefore$ (i)லிருந்து, மெய்யான பாகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta-\ldots\ldots$$

வகை I. n ஒரு ஒற்றை எண்ணாகில்,

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-nC_2\cdot\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1/2}\cdot nC_{n-1}\cdot\cos\theta\cdot\sin^{n-1}\theta.\left(\frac{n+1}{2}\text{ உறுப்புகள்}\right)$$

வகை II. n ஒரு இரட்டை எண்ணாகில்,

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-nC_2\cos^{n-2}\sin^2\theta+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n/2}.nC_n.\sin^n\theta.\quad\left(\frac{n}{2}+1\text{ உறுப்புக்கள்}\right)$$

இம்மாதிரியே (i)லிருந்து, கற்பனையான பாகங்களைச் சமன் படுத்த

$$\sin n\theta = n\cdot\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + \ldots\ldots$$

வகை I. n ஒரு ஒற்றை எண்ணாகில்,

$$\sin n\theta = nC_1\cdot\cos^{n-1}\theta - nC_3\cdot\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + \ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1/2}\cdot nC_n\cdot\sin^n\theta. \quad \left(\frac{n+1}{2}\text{ உறுப்புக்கள்}\right)$$

வகை II. n ஒரு இரட்டை எண்ணாகில்,

$$\sin n\theta = nc_1\cdot\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - nc_3\cdot\cos^{n-3}\theta.\sin^3\theta + \ldots$$

$$+(-1)^{n/2-1}ncn_{-1}\cdot\cos\theta.\sin^{n-}\theta. \quad (n/2\text{ உறுப்புக்கள்})$$

7·2 n ஒரு நேர் முழுவெண்ணாகில் $\tan n\theta = \dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$

$$= \frac{nc_1.\cos^{n-1}\theta\sin\theta - nc_3.\cos^{n-3}\sin^3\theta + \ldots}{\cos^n\theta - nc_2.\cos^{n-2}.\sin^2\theta + \ldots} \quad \ldots\ldots(A)$$

தொகுதியையும் பகுதியையும் $\cos^n\theta$ ஆல் வகுக்க.

$$\tan n\theta = \frac{nc_1.\tan\theta - nc_3\tan^3\theta + nc_5.\tan^5\theta - \ldots}{1 - nc_2.\tan^2\theta + nc_4.\tan^4\theta\ldots}$$

7·3. இப்பொழுது $\tan(\theta_1+\theta_2\ldots+\theta n)$ன் விரித்தலைக் காண்போம்.

$$\cos(\theta 1+\theta_2+\theta_3\ldots\theta n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta n)$$

$$= (\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)\ldots(\cos\theta^n+i\sin\theta^n)$$

$$= \cos\theta_1(1-i\tan\theta^1).\cos\theta_2.(1+i\tan\theta_2).\cos\theta_3(1+i\tan\theta_3)\ldots\cos\theta n(1+i\tan\theta^n)$$

$$= \cos\theta_1.\cos\theta_2\cos\theta_3\ldots\cos\theta n(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)(1+i\tan\theta_3)\ldots(1+i\tan\theta^n)$$

$$= \cos\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3\ldots\cos\theta n.$$

$$[1 + i(\Sigma\tan\theta_1)$$
$$+ i^2(\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2)$$
$$+ i^3(\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2.\tan\theta_3)$$
$$+ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$+ i^n\tan\theta_1.\tan\theta_2.\tan\theta_3\ldots\tan\theta^n]$$

$$\cos\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3\ldots\cos\theta^n\,[1+is_1-s_2-is_3+ \quad \ldots(i)$$

{$s_1=\Sigma\tan\theta_1$; $s_2=\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2$, $s_3 = \Sigma\tan\theta_2\tan_2\tan\theta_3$) ......என்று குறிக்க }.

∴ (i)லிருந்து மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்சடுத்தினல்,

$\cos \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta^n.$

$= \cos\theta_1 \cos\theta_2 . \cos\theta_3 \ldots \cos\theta^n \cdot [1 - s_2 + s_4 - \ldots]$

என்றும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினல்,

$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots \theta^n)$

$= \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \cos\theta_3 \ldots \cos\theta_n \quad [s_1 - s_3 + s_5 \ldots].$ என்றும் கிடைக்கும்.

$$\therefore \tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots \theta_n)$$

$$= \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n}{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n}$$

$$= \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \ldots \cos\theta_n [s_1 - s_3 + s_5 - \ldots]}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 . \cos\theta_3 \ldots \cos\theta_n [1 - s_2 + s_4 - \ldots]}$$

$$= \frac{s_1 - s_3 + s_5 - \ldots}{1 - s_2 + s_4 - \ldots}$$

7·4. இயற்கணிதத்திலிருந்து நமகு

$\underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$ எனத்தெரியும்.

இவ்வரம்பினைப் பயன்படுத்தி

$\underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = 1$ என கீழ்க்கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

$$\cos\frac{x}{n} \sqrt{1 - \sin^2\frac{x}{n}}$$

$$\therefore \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \sin^2\frac{x}{n}\right)^{n/2}$$

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \left(1 - \sin^2\frac{x}{n}\right)^{n/2}$$

$$= \underset{n\leftarrow\infty}{\mathrm{lt}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}.\right)^{n/2}$$

$$\left(\therefore \underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} \sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}\right)$$

(§ 3·12)

$$= \underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} e^{-x/^2 n^2 . n/2} \quad -x^2/2n$$

$$= \underset{n\to\infty}{\mathrm{lt}} e$$

$= e_0$ (∴ x என்பது ஒரு முடிவுள்ள கணியம் (finite quantity)

$= 1.$ ...... (i)

மேலும், § 3·11லிருந்து, $O<\theta<\frac{\pi}{2}$ எனில்,

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

$$\therefore \quad \sin\frac{x}{n}<\frac{x}{n}<\tan\frac{x}{n} \quad (n\to\infty)$$

∴ $\dfrac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}$ என்பது 1க்கும் $\dfrac{1}{\cos\frac{x}{n}}$ க்கும் இடையே உள்ளது

∴ $\left\{\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right\}^n$ என்பது 1க்கும் $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ க்கும் இடையே உள்ளது

∴ $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right\}^n$ என்பது 1க்குப் 1க்கும் இடையே உள்ளது

((i) லிருந்து)

அதாவது $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right\}^n=1$ ...... (ii)

7·5. x என்பது ஒரு முடிவுள்ள (ஆரையன் முறையில் அளக்கப்பட்ட) கணியம எனில், இப்பொழுது $\sin x$ன் விரித்தலை xன் அடுக்குகள் மூலம் ஒரு ஒருங்குகின்ற ஒரு சீரான முடிவிலி தொடராகக் காண்போம்.

§ 7·1லிருந்து

$$\sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta\,\frac{\sin n-n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta+\ldots\ldots$$

$\frac{x}{n}=\theta$ எனக் கொள். அதாவது $x=n\theta$; இப்பொழுது $n\to\infty$ எனில், $\theta\to 0$ ஆகும்; அப்பொழுது,

$$\therefore \quad \sin x=\frac{n}{\theta}.\cos^{n-1}\theta\,\frac{\sin\theta-\frac{x}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}-1\right)\left(\frac{n}{\theta}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta+\ldots\ldots$$

$$= x \cdot \cos^{n-1}\theta \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) - \frac{x^3}{3!} \cdot \cos^{n-3}\theta \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots(i)$$

§ 7·4லிருந்து, $(\cos\theta)^{n-1} \to 1$; $(\cos\theta)^{n-3} \to 1$.........

இம்மாதிரியே, $\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \to 1$; $\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 \to 1$,.........

ஆகையால்,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \text{மு.வ.}$$

7·6. இப்பொழுது, cos xன் விரித்தலை xன் அடுக்குகள் மூலம் ஒரு ஒருங்குகின்ற ஒரு சீரான முடிவிலி தொடராகக் காண்போம்.

§ 7·1லிருந்து,

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos^{n-2}\theta \cdot \sin^2\theta + \ldots\ldots$$

$\frac{x}{n} = \theta$ எனக்கொள். அதாவது, $x = n\theta$. இப்பொழுது $n \to \infty$ எனில், $\theta \to 0$ ஆகும். ஆகையால்,

$$\cos x = \cos^n\theta - \frac{\frac{x}{\theta}\left(\frac{x}{\theta} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \cos^{n-2}\theta \cdot \sin^2\theta + \ldots\ldots$$

$$= \cos^n\theta - \frac{x^2}{2!} \cdot \cos^{n-2}\theta \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \text{மு.வ.}$$

$$\left(\because \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^k \to 1 \quad (\theta \to 0) \quad (\cos\theta)^k \to 1\right)$$

குறிப்பு (1) :— x என்பது ஆரையன் அளவில்தான் இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு (2) :— மேற்கண்ட இருதொடர்களில், ஒன்றுவிட்ட உறுப்புக்களுக்குப் கூட்டல் குறியும் கழித்தல் குறியும் வரும்.

குறிப்பு (3) :— sin xன் விரித்தலில் xன் அடுக்குகள் ஒற்றையாகவும், cos xன் விரித்தலில் xன் அடுக்குகள் இரட்டையாகவும் இருக்கும்.

7·7. xன் 6-வது, 7-வது, ... முதலிய மேல் அடுக்குகள் தவிர்க்கத் தக்கவை எனில் tan xன் விரித்தலைக் காண்போம் (தோராயமாக)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}$$

$$= \left\{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)\right\}^{-}$$

$$= \left\{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right\} \cdot \left\{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)\right\}$$

$$= \left\{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right\} \cdot \left\{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4}\right\}$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}.$$

அதாவது,

$$\tan x \simeq x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

7.8. இப்பொழுது $\sin\theta$ அல்லது $\cos\theta$ இவைகளின் அடுக்குகளை (powers) θன் மடங்குகளுடைய (multiples) சைன், கொசைன் மூலம் காண்போம்.

$x = \cos + i \sin\theta$ எனில்,

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

ஆகையால், $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, $x - \frac{1}{x} = 2i\sin\theta$.

மேலும், $x^r + \frac{1}{r} = 2\cos r\theta$; $x^r - \frac{1}{x^r} = 2i\sin\theta$. ($x$ ஒரு முழு எண்) எனவே,

$$(2i\sin\theta)^m = \left(x - \frac{1}{x}\right)^m$$

$$= x^m - mC_1 . x^{m-1} . \frac{1}{x} + mC2 . x^{m-2} . \frac{1}{x^2} + C_3 . x^{m-3} . \frac{1}{x^3} + ... \quad ...(A)$$

வகை I. m ஒரு ஒற்றை எண்.

(A)விலிருந்து,

$$2^m . (-1)^{\frac{m-1}{2}} i \sin^m\theta$$

$$= \left(x^m - \frac{1}{x^m}\right) - mC_1 . \left(x^{m-2} - \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \cdots$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} mC_{\frac{m-1}{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2i \left\{ \sin m\theta - mC_1 . \sin(m-2)\theta + mC_2 . \sin(m-4)\theta + \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} . mC_{\frac{m-1}{2}} . \sin\theta \right\}$$

இருபக்கமும் $2i$ஆல் வகுக்க.

$$2^{m-1} . (1-)^{\frac{m-1}{2}} . \sin^m\theta . = \sin^m\theta - mC_1 . \sin(m-2)$$

$$+ mC_2 . \sin(m-4)\theta - \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} . mC_{\frac{m-1}{2}} \sin\theta.$$

வகை II. m ஒரு இரட்டை எண்.

(A)விலிருந்து,

$$2^m . (-1)^{\frac{m}{2}} . \sin^m\theta$$

$$= \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) - mC_1 \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \cdots$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}} . m^c \frac{m}{2}$$

$$= 2 \{ \cos m\theta - mC \cos(m-2)\theta + mC_2 . \cos(m-4)\theta - \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} . (-1)m^{/2} . mC_{m/2} \} .$$

இருபக்கமும் 2ஆல் வகுக்க.

$$2^{m-1}(-1)^{m/2}\cdot\sin^m\theta = \cos m\theta - mC_1\cdot\cos(m-2)\theta + mC_2\cdot\cos(m-4)\theta\ldots\ldots + \tfrac{1}{2}\cdot(-1)^{m/2}\cdot mC_{m/2}.$$

7·9. மேற்கூறியவாறு, இப்பொழுது cos θன் அடுக்குகளை, θன் மடங்குகளுடைய கொசைன் மூலம் காண்போம்.

முன்போல், $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$

$$x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos r\theta \text{ (r ஒரு முழுவெண்)}$$

எனவே, $(2\cos\theta)^n=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$

$$=x^n+nC_1\cdot x^{n-1}\cdot\frac{1}{x}+nC_2\cdot x^{n-2}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x^n}.$$

$$=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+nC_1\cdot\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots\ldots\quad\text{(A)}$$

வகை I. n ஒரு ஒற்றை எண்.

(A)யிலிருந்து, $(2\cos\theta)^n=\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)+nC_1\left(x^{n-2}+\dfrac{1}{x^{n-2}}\right)$

$$+nC_2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\ldots\ldots+nC_{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=2\left\{\cos n\theta+nC_1\cdot\cos(n-2)\theta+nC_2\cos(n-4)\theta+\ldots+nC_{\frac{n-1}{2}}\cdot\cos\theta\right\}$$

இருபக்கமும் 2 ஆல் வகுக்க,

$$2^{n-1}\cdot\cos^n\theta=\cos n\theta+nC_1\cdot\cos(n-2)\theta+nC_2\cdot\cos(n-4)\theta+\ldots+nC_{\frac{n-1}{2}}\cdot\cos\theta.$$

வகை II. n ஒரு இரட்டை எண்.

(A)யிலிருந்து, $(2\cos\theta)^n = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + nC_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots$

$$+ \ldots + nC_{n/2}$$

$$= 2\{\cos n\theta + nC_1 \cdot \cos(n-2)\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}\, nC_{n/2}\}.$$

இரு பக்கமும் 2ஆல் வகுக்க,

$$2^{n-1}\cdot\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1 \cos(n-2)\theta + nC_2\cdot\cos(n-4)\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}\cdot nC_{n/2}$$

7·10. மேற்கண்ட சூத்திரங்களிலிருந்து. m ஒற்றையாகில் $\sin^m\theta$ன் கோவை θன் மடங்குகளுடைய சைன்களிலும், m இரட்டையாகில், $\sin^m\theta$ன் கோவை, θன் மடங்குகளுடைய கொசைன்களிலும் தான் இருக்கும் எனப் புலனாகிறது.

குறிப்பு (2):— m ஒற்றையாகிலும், இரட்டையாகிலும், $\cos^m\theta$ன் கோவை θன் மடங்குகளுடைய கொசைன்களில்தான் இருக்கும்.

குறிப்பு (3) குறிப்புகள் :— (1), (2)லிருந்து, n எவ்வெண்ணாகிலும், $\sin^m\theta\cos^n\theta$ன் கோவை, m ஒற்றையாகில், θன் மடங்குகளுடைய சைன்களிலும், m இரட்டையாகில், θன் மடங்குகளுடைய கொசைன்களிலும் இருக்கும்.

மாதிரிக்கணக்குகள்

7.11.

மாதிரி 1. $\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta}$ன் மதிப்பை $\cos\theta$ன் அடுக்குகளின் மூலம் காண்க.

$$\begin{aligned}
\cos 6\theta + i\sin 6\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^6 \\
&= \cos^6\theta + 6C_1.\ \cos^5\theta.\ (i\sin\theta) \\
&\quad + 6C_2.\ \cos^4\theta\ (i\sin\theta)^2 + 6C_3.\ \cos^3\theta\ (i\sin\theta)^3 \\
&\quad + 6C_4.\ \cos^2\theta\ (i\sin\theta)^4 + 6C_5.\ \cos\theta.\ (i\sin\theta)^5 \\
&\quad + 6C_6\ (i\sin\theta)^6 \\
&= \cos^6\theta + 6i\cos^5\theta.\ \sin\theta \\
&\quad - 15\cos^4\theta\sin^2\theta - 20i\cos^3\theta.\ \sin^3\theta \\
&\quad + 15\cos^2\theta.\ \sin^4\theta + 6i\sin^5\theta\cos\theta \\
&\quad - \sin^6\theta
\end{aligned}$$

இருபக்கமும்; கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

$$\sin 6\theta = 6\cos^5\theta.\ \sin\theta - 20\cos^3\theta.\ \sin^3\theta + 6\cos\theta.\ \sin^5\theta$$

$$\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 6\cos^5 - 20\cos^3\theta.\sin^2\theta + 6\cos\theta.\sin^4\theta$$

$$= 6\cos^5\theta - 20\cos_3\theta\,(1-\cos^2\theta) + 6\cos\theta\,(-\cos^2\theta)^2$$

$$= 32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta.$$

மாதிரி 2. $\cos 8\theta$ஐ $\sin\theta$ன் அடுக்குகள் மூலம் காண்க.

$$\cos 8\theta = 1 - 2\sin^4\theta.$$

$$1-\cos 8\theta = 2\sin^2 4\theta$$

$$= 2.\ \{(2\sin 2\theta\ \cos 2\theta)^2\}$$

$$= 8.\sin^2 2\theta.\cos^2 2\theta$$

$$= 8.\ \{(2\sin\theta.\cos\theta)^2\}.\ \{1-2\sin^2\theta\}^2.$$

$$= 32\sin^2\theta\ \cos^2\theta.\{1-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta\}$$

$$= 32\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta)\{1-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta\}$$

$$= 32\sin^2\theta-160\sin^4\theta+256\sin^6\theta$$

$$-128\sin^8\theta.$$

அதாவது $\cos 8\theta = 1-32\sin^2\theta+160\sin^4\theta-256\sin^6\theta$

$$+128\sin^8\theta$$

குறிப்பு :— மேற்கண்ட சமன்பாட்டை § 7·1ஐப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம்.

மாதிரி 3: $\tan\frac{\pi}{11}.\tan\frac{2\pi}{11}.\tan\frac{3\pi}{11}.\tan\frac{4\pi}{11}\ \tan\frac{5\pi}{11} = \sqrt{11}$

என நிறுவுக.

$t = \tan\theta$ என்க.

§ 7·2லிருந்து,

$\tan 11\theta =$

$$\frac{11C_1.t-11C_3.t^3+11C_5.t^5-11C_7.t^7+11C_9.t^9-11C_{11}.t^{11}}{1-11C_2.t^2+11C_4.t^4-11C_6.t^6+11C_8.t^8-11C_{10}.t^{10}}$$

.........(A)

$\theta = \frac{\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \ldots\ldots \frac{11\pi}{1}$ எனில்

$\tan 11\theta = \tan\pi,\ \tan 2\pi,\ \tan 3\pi,\ \ldots\ldots\ \tan 11\pi.$

$= 0$(ஏனெனில், $\tan n\pi = 0$.)

எனவே, (A) யிலிருந்து, $\theta = \frac{\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}, \ldots\ldots \frac{11\pi}{11}$ எனில்

$$11C_1\cdot t-11C_3\cdot t^3+11C_5\cdot t^5-11C_7\cdot t^7+11C_9\cdot t^9-11C_{11}\cdot t^{11} = 0.$$

.........(B

அதாவது, (B) என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து, tன் மூலங்கள் முறையே, $\tan\frac{\pi}{11}, \tan\frac{2\pi}{11}, \tan\frac{3\pi}{11} \ldots \tan\frac{11\pi}{11}$. $t = 0 \; (= \tan\pi)$ என்பது (B)ன் ஒரு மூலம்.

எனவே, $\tan\frac{\pi}{11}, \tan\frac{2\pi}{11}, \tan\frac{3\pi}{11}, \ldots\ldots \tan\frac{10\pi}{11}$, ஆகியவை

$$11C_1 - 11C_3 \cdot t^2 + 11C_5 \cdot t^4 - 11C_7 \cdot t^6 + 11C_9 \cdot t^8 - 11C_{11} t^{10} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள். அல்லது,

$t^{10} + 55t^8 + 330t^6 - 4620t^4 + 165t^2 - 11 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

$$\therefore \left\{\tan\frac{\pi}{11} \times \tan\frac{2\pi}{11} \times \tan\frac{3\pi}{11} \times \tan\frac{4\pi}{11} \times \tan\frac{5\pi}{11} \times\right\}\pi$$

$$\times \left\{\tan\frac{6\pi}{11} \times \tan\frac{7\pi}{11} \times \tan\frac{8\pi}{11} \times \tan\frac{9\pi}{11} \times \tan\frac{10\pi}{11}\right\}$$

$$= -11 \qquad \ldots\ldots \text{(C)}$$

ஆனால், $\tan\frac{6\pi}{11} = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = -\tan\frac{5\pi}{11}$

இம்மாதிரியே, $\tan\frac{7\pi}{11} = -\tan\frac{4\pi}{11}$

$\tan\frac{8\pi}{11} = -\tan\frac{3\pi}{11}$

$\tan\frac{9\pi}{11} = -\tan\frac{2\pi}{11}$

$\tan\frac{10\pi}{11} = -\tan\frac{\pi}{11}$

ஆகையால், (C)யிலிருந்து,

$$(-1)^5 \tan^2\frac{2\pi}{11} \times \tan^2\frac{2\pi}{11} \times \tan^2\frac{3\pi}{11} \times \tan^2\frac{4\pi}{11}$$

$$\times \tan^2\frac{5\pi}{11} = -11$$

எனவே, $\tan\frac{\pi}{11} \times \tan\frac{2\pi}{11} \times 3\pi\frac{3\pi}{11} \times \tan\frac{4\pi}{11} \times \tan\frac{5\pi}{11} = \pm\sqrt{11}$

ஆனால், $\frac{\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \frac{5\pi}{11}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும்

குறுங்கோணம், $(< \pi 12)$. ஆகையால், $\tan\frac{\pi}{11}, \tan\frac{2\pi}{11}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan\frac{3\pi}{11}, \tan\frac{4\pi}{11}, \tan\frac{5\pi}{11}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றுக்கும் கூட்டற்குறி தான் உண்டு.

எனவே, (D)யிலிருந்து,

$$\tan\frac{\pi}{11}, \tan\frac{2\pi}{11}, \tan\frac{3\pi}{11}, \tan\frac{4\pi}{11}, \tan\frac{5\pi}{11} = \sqrt{11}.$$

குறிப்பு :— $\tan^2\frac{\pi}{11}, \tan^2\frac{2\pi}{11}, \tan^2\frac{3\pi}{11}, \tan^2\frac{4\pi}{11}, \tan^2\frac{5\pi}{11}$ ஆகிய இவ் ஐந்தையும் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு :

$$x^5 - 55x^4 + 330x^3 - 4620x^2 + 165x - 11 = 0.$$

மாதிரி 4. $\cos^7\theta$ஐ θன் மடங்குகளுடைய கொசைன்கள் மூலம் காண்க.

$2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ எனில்

$$2\cos r\theta = x^r + \frac{1}{x^r}$$

$$(2\cos\theta)^7 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^7$$

$$= x^7 + 7C_1 x^6 . \frac{1}{x} + 7C_2 . x^5 . \frac{1}{x^2} + 7C_3 . x^4 . \frac{1}{x^3} + 7C_4 . x^3 \frac{1}{x^4}$$

$$+ 7C_5 . x^2 . \frac{1}{x^5} + 7C_6 . x . \frac{1}{x^6} + 7C_7 \frac{1}{x^7}$$

$$= x^7 + 7x^6 . \frac{1}{x} + 21 . x^5 . \frac{1}{x^2} + 35 . x^4 . \frac{1}{x^3}$$

$$+ 35 . x^3 . \frac{1}{x^4} + 21 . x^2 . \frac{1}{x^5} + 7\ x\ \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7}$$

$$= \left(x^7 + \frac{1}{x^7}\right) + 7\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 21\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2\{\cos 7\theta + 7 . \cos 5\theta + 21 . \cos 3\theta + 35 \cos\theta\}$$

$$\therefore \cos^7\theta = \tfrac{1}{64}\{\cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta\}$$

மாதிரி 5. $\cos^5\theta . \sin^3\theta$ஐ θன் மடங்குகளுடைய சைன்கள் மூலம் விவரி.

$$\cos^5\theta . \sin^3\theta = \cos^2\theta . (\cos\theta \sin\theta)^3$$

$$= \left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{\sin 2\theta}{2}\right\}^3$$

$$= \tfrac{1}{16} \cdot (1+\cos 2\theta).(\sin^3 2\theta)$$

$$= \tfrac{1}{16}(1+\cos 2\theta). \left\{\frac{3\sin 2\theta - \sin 6\theta}{4}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{64}\{3\sin 2\theta - \sin 6\theta + 3\sin 2\theta\cos 2\theta - \sin 6\theta \cos 2\theta\}.$$

$$= \tfrac{1}{64}\{3\sin 2\theta - \sin 6\theta + \tfrac{3}{2}\sin 4\theta - \tfrac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 4\theta)\}.$$

$$= \tfrac{1}{128}\{6\sin 2\theta + 2\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \sin 8\theta\}.$$

குறிப்பு :- மேற்கண்ட சமன்பாட்டை,

$(2\cos\theta)^5 . (2i\sin\theta)^3$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3$ என்பதன் மூலமாகவும் நிறுவலாம்.

மாதிரி 6. $8x^3-6x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{8\pi}{9}$ என நிறுவுக.

$$\theta = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

எனில் $y=\cos\theta+i\sin\theta$விற்கு $\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$,

$\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$

... ...

$\cos 2\pi + i\sin 2\pi$ என்ற ஒன்பது மதிப்புக்கள் உண்டு. இந்த ஒன்பது மதிப்புக்களும்

$$= y^9\left(\cos\frac{2r\pi}{9}+i\sin\frac{2r\pi}{9}\right)^9 (r=1,2,..9)$$

$$= \cos 2r\pi + i\sin 2r\pi$$

$= 1$ என்னும் சாம்யத்தின் மூலங்களாகும்.

ஆனால் $y^9-1=(y-1)\times(y^8+y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)$

$y=1$ என்ற மதிப்பு $\theta = \frac{18\pi}{9}(=2\pi)$க்கு ஒத்தது

$\therefore \quad y^8+y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1=0$ (A) என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\cos\theta+i\sin\theta$, $\left(\theta=\frac{2r\pi}{9},\ r=1, 2, \ldots 8\right)$ θக்கு இந்த எட்டு மதிப்புக்களிருக்கும்பொழுது

$$y=\cos\theta+i\sin\theta.$$

$$\frac{1}{y}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

$$y+\frac{1}{y}=2\cos\theta. \qquad \ldots(i)$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2$$

$$=4\cos^2\theta-2; \qquad \ldots\ldots(ii)$$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

$$=8\cos^3\theta-6\cos\theta; \qquad \ldots\ldots(iii)$$

$$y^4+\frac{1}{y^4}=\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)^2-2$$

$$=16\cos^4\theta+4-16\cos^2\theta-2$$

$$=16\cos^4\theta-16\cos^2\theta+2 \qquad \ldots\ldots(iv)$$

(A)ஐ y^4 ஆல் வகுக்க.

$$\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=$$

ஆகையால், (i) (ii), (iii), (iv)லிருந்து,

$$16\cos^4\theta-16\cos^2\theta+2+8\cos^3\theta-6\cos\theta+4\cos^2\theta-2+2\cos\theta+1=0.$$

அதாவது, $16\cos^4\theta+8\cos^3\theta-12\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0.$ ......(B)

θவிற்கு $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{6\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$, $\frac{10\pi}{9}$, $\frac{12\pi}{9}$, $\frac{14\pi}{9}$, $\frac{16\pi}{9}$ என்ற எட்டு மதிப்புக்கள் இருந்தபோதிலும், $\cos\theta$விற்கு $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9}$, $\cos\frac{8\pi}{9}$ என்ற நான்கு மதிப்புக்கள்தான் உண்டு.

(ஏனெனில், $\cos\frac{16\pi}{9}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{9}\right)=\cos 2\pi/9, \ldots\ldots$)

மேலும் $\cos\frac{6\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

ஆகையால், (B)ஐ $(2\cos\theta+1)$ ஆல் வகுக்க
$8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0$ என்று கிடைக்கும்.

எனவே, இந்த சமன்பாட்டிற்கு $\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{4\pi}{9}, \cos\frac{8\pi}{9}$ ஆகிய இம் மூன்றும் தான் மூலங்கள். அதாவது, $8x^3-6x+1=0$ன் மூன்று மூலங்கள் $\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{4\pi}{9}, \cos\frac{8\pi}{9}$.

மாதிரி 7 $\tan^2\frac{\pi}{9}, \tan^2\frac{2\pi}{9}, \tan^2\frac{3\pi}{9}, \tan^2\frac{4\pi}{9}$ என்பவைகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டு பிடித்து $\tan^4\frac{\pi}{9} + \tan^4\frac{2\pi}{9} + \tan^4\frac{3\pi}{9} + \tan^4\frac{4\pi}{9} = 1014$ என்றும், $\sec^4\frac{\pi}{9} + \sec^4\frac{2\pi}{9} + \sec^4\frac{3\pi}{9} + \sec^4\frac{4\pi}{9} = 1120$ என்றும் நிறுவுக.

மாதிரி 3ல் விளக்கியது போல்,
$9C_1 - 9C_3 t^2 + 9C_5 t^4 - 9C_7 t^6 + 9C_9 t^8 = 0$ (A) என்ற சமன்பாட்டிற்கு உள்ள எட்டு மூலகங்களாவன :- $t = \tan\frac{2r\pi}{9}$ ($r = 1, 2, \ldots 8$

$$\text{ஆனால், } \tan 16\frac{\pi}{9} = \tan\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -\tan\frac{2\pi}{9}$$

இம்மாதிரியே, $\tan 14\frac{\pi}{9} = -\tan\frac{4\pi}{9}$;

$$\tan\frac{12\pi}{9} = -\tan\frac{6\pi}{9};$$

$$\tan\frac{10\pi}{9} = -\tan\frac{8\pi}{9}$$

ஆகையால், (A)ல் $x = t^2$ எனக்கொண்டால்,
$x^4 - 36x^3 + 126x^2 - 84x - 9 = 0$ (B)ன் நான்கு மூலங்கள்,
$\tan^2\frac{\pi}{9}, \tan^2\frac{2\pi}{9}, \tan^2\frac{3\pi}{9}, \tan^2\frac{4\pi}{9}$.

ஆகையால், (B)யிலிருந்து,
$$\tan^2\frac{\pi}{9} + \tan^2\frac{2\pi}{9} + \tan^2\frac{3\pi}{9} + \tan^2\frac{4\pi}{9} = 36. \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\Sigma_1 \tan^2 \frac{\pi}{9} \cdot \tan^2 \frac{2\pi}{9} = 126 \ldots\ldots (\text{ii})$$

(i) (ii)லிருந்து,

$$\Sigma \tan^4 \frac{\pi}{9} = \left\{\Sigma \tan^2 \frac{\pi}{9}\right\}^2 - 2\Sigma \tan^2 \frac{\pi}{9} \cdot \tan^2 \frac{2\pi}{9}$$

$$= 1296 - 252$$

$$= 1044$$

$$\sec^4 \frac{\pi}{9} = \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{9}\right)^2$$

$$\Sigma \sec^4 \frac{\pi}{9} = \Sigma \left\{\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{9}\right)^2\right\}$$

$$= 4 + 2\Sigma \tan^2 \frac{\pi}{9} + \Sigma \tan^4 \frac{\pi}{9}$$

$$= 4 + 72 + 1044$$

$$= 1120.$$

குறிப்பு: $y = \cos^2 \frac{\pi}{9}, \cos^2 \frac{2\pi}{9}, \cos^2 \frac{3\pi}{9}, \cos^2 \frac{4\pi}{9}$

என்ற நான்கு மதிப்புக்களை எடுத்துக்கொண்டால் $y = \frac{1}{1+x}$ அதாவது, $1 + x = \frac{1}{y}$, அதாவது, $x = \frac{1}{y} - 1$ என (B)ல் பொருத்த $256y^4 - 448y^3 + 240y^2 - 40y + 1 = 0$ன் மூன்று மூலங்கள் $\cos^2 \frac{\pi}{9}$, $\cos^2 \frac{2\pi}{9}$, $\cos^2 \frac{3\pi}{9}$, $\cos^2 \frac{4\pi}{9}$ எனப் புலப்படுகிறது.

7·12. § 7·5, § 7·6லிருந்து

$$\cos\theta + i \sin\theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots \text{மு.வ.}\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots \text{மு.வ.}\right)$$

$$= 1 + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \ldots\ldots \text{மு.வ.}$$

$$+ i\theta + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \ldots\ldots \text{மு.வ.} \qquad (\because \; -1 = i^2)$$

$$= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots\ldots \text{மு.வ.}$$

$$= c^{i\theta} \text{ (இயற் கணிதத்திலிருந்து)} \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

இம்மாதிரியே,

$$\cos\theta - i \sin\theta = c^{i\theta} \text{ என நிரூபிக்கலாம்.} \qquad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$\therefore \quad 2\cos\theta = c^{i\theta} + c^{-i\theta};$$

$$2i\sin\theta = c^{i\theta} - c^{-i\theta}.$$

எனவே, $\cos = \dfrac{c^{i\theta} + c^{-i\theta}}{2}$ (cos θன் அடுக்குக் குறி மதிப்பு)

(Exponential Value of cos)

$\sin\theta = \dfrac{c^{i\theta} - c^{i-\theta}}{2i}$. (sinθன் அடுக்குக் குறி மதிப்பு)

7·13. பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளில், θ சிறியதெனில், sin θ, cos θன் தோராய மதிப்புக்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

மாதிரி 1. ஒரு வட்டவில்லின் நாணின் நீளம் a, அதே வட்டவில்லின் மூன்றில் இரு பாகத்தின் நாணின் நீளம் b, மூன்றில் ஒரு பாகத்தின் நாணின் நீளம் c எனில், அந்த வில்லின் நீளம் தோராயமாக $\dfrac{a - 9b + 45C}{10}$ என நிறுவுக.

வட்ட ஆரம் = r. வட்டவில், வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 6 θ என்றும் கொள். வட்டவில், பரிதியில் தாங்கும் கோணம் = 3θ.

இம் மாதிரியே, வில்லின் மூன்றில் இரு பாகம் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் = 2 θ; வில்லின் மூன்றில் ஒரு பாகம் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் = θ.

ஆகையால், $a = 2r \sin 3\theta$

$a = 2r \sin 2\theta$

$c = 2r \sin\theta$.

$$\text{எனவே, } \frac{a - 9b + 45c}{10} = \frac{2r(\sin 3\theta - 9\sin 2\theta + 45\sin\theta)}{10}$$

$$= \frac{r}{5}\Big[\left\{3\theta - \frac{27\theta^3}{6} + \frac{243\theta^5}{120} - \frac{2187\theta^7}{5040} + \ldots\right\}$$

$$-9\left\{2\theta - \frac{8\theta^3}{6} + \frac{32\theta^5}{120} - \frac{128\theta^7}{5040} + \ldots\right\}$$

$$+45\left\{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \ldots\right\}$$

$$\frac{r}{5}\cdot\left[+30\theta-\frac{216\theta^7}{1008}+\ldots\right]$$ (θ^3, θ^5ன் குணகங்கள் பூச்சியம்)

$$6r\theta-\frac{216}{5040}r\theta^7+\ldots \qquad \ldots(1)$$

θ என்பது சிறியதாகில், θ^4, θ^5, θ^6,... முதலிய அடுக்கு மதிப்புகள் குறைந்துகொண்டே வரும்.

ஆனால் வில் வட்ட மையத்தில் 6θஐத் தாங்குவதால், அதன் நீளம் $=6r\theta$

ஆகையால், வில்லின் நீளத்திற்கும், $\frac{a-9b+45c}{10}$ன் மதிப்புக்கும், உள்ள வித்தியாசம் $=\frac{216}{5040}r\theta^7\ldots$ அதாவது

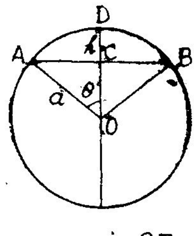
$$=\frac{216\ \theta^7}{5040}$$ (θ^9, θ^{11},... முதலியவை தவிர்க்கத்தக்கவை)

ஆகையால், வில்லின் நீளம் $\simeq \frac{a-9b+45c}{10}$

குறிப்பு:—வில்லின் நீளத்தை $\frac{a-9b+45c}{10}$ என்று எடுத்துக்கொள்வதினால் ஏற்படும் பிழையின் முக்கிய மதிப்பு $\frac{216}{5040}r\theta^7$.

மாதிரி 2. h உயரமுள்ள ஒரு வட்டத்துண்டு, c நீளமுள்ள நாணின் மீது அமைந்தால், அவ்வில்லின் நீளத்திற்கும் நாணின் நீளத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம், தோராயமாக, $\frac{8h^2}{3c}$ என நிறுவுக.

$\left(\frac{h}{c}\text{ சிறியது}\right)$



படம் -37

ADB என்னும் வட்டத் துண்டின் உயரம் $=CD=h$ (படம் 37)

C என்பது ABன் மையப் புள்ளி. ஆகையால், DC, ABக்குக் குத்துக்கோடு. மேலும், DC வட்ட மையம். O வழியே சென்று வட்டத்தை மீண்டும் Eல் வெட்டுகிறது.

வட்ட ஆரம் $OA=a$ என்றும், $C\hat{O}A=\theta$ என்றும் கொள்.

இப்பொழுது, $h = CD = OD - OC$

$= a - a\cos\theta$

$= 2a\sin^2\theta/2.$

அதாவது, $\sin^2\theta/2 = h/2a.$ ......(i)

ஆனால், வட்ட பண்பிலிருந்து,

$$AC\,CB = DC\cdot CE$$

அதாவது, $\frac{C^2}{4} = h.(2a-h)$

ஆகையால், $2a-h = C^2/4h.$

அல்லது, $a = \frac{C^2}{8h} + \frac{h}{2}.$

$= \frac{C^2}{8h}\left\{1 + \frac{4h^2}{C^2}\right\}$

$\frac{C^2}{8h}$ (தோராயமாக) ......(ii)

$\left(\therefore \frac{n}{C}\right.$, சிறியது.

$\left.\therefore \frac{h^2}{C^2} \text{ தவிர்க்கத்தக்கது}\right)$

(i), (ii)லிருந்து $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{n}{2a}$

$= n\cdot\frac{4h}{C^2}$

$= 4.\frac{h^2}{C^2}$

எனவே, $\sin\frac{\theta}{2} = 2\frac{h}{C}$

$\frac{h}{C}$ சிறியதாகையால், $\frac{\theta}{2}$ம் சிறியதாக இருக்கவேண்டும்.

ஆகையால், $\sin\frac{\theta}{2} \to \frac{\theta}{2}$. அதாவது, $\frac{\theta}{2} = \frac{2h}{C}$.

எனவே, $\theta = \frac{4h}{C}$ ......(iii)

வட்டவில்லின் நீளம் $= a\cdot 2\theta$

வட்டத்துண்டின் நாண் $= AB = C = 2a\sin\theta.$

இவ்விரண்டிற்கும் உள்ள வித்தியாசம்

$$= 2a\theta - 2a\sin\theta$$

$$= 2a\left\{\theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}\right\} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= \frac{a\theta^3}{3}$$

$$= \frac{a}{3}\cdot\frac{64h^3}{C^3} \quad \text{((iii)லிருந்து)}$$

$$= \frac{C^3}{8h}\cdot\frac{64h^3}{3C^3} \quad \text{((ii)லிருந்து)}$$

$$= \frac{8h^2}{3C}.$$

மாதிரி 3. $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2165}{2166}$ எனில், θன் தோராய மதிப்பு $3°1'$ என நிறுவுக.

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2165}{2166}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \approx 1.$$

$$\therefore \quad \theta \to 0. \text{ (}\theta\text{ மிகவும் சிறியது)}$$

ஆனால் $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\ldots$

$$= \theta - \frac{\theta^3}{6} \left(\theta^5, \theta^7, \ldots\ldots \text{ தவிர்க்கத்தக்கவை}\right)$$

ஆகையால் $\frac{2165}{2166} = \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\cdot\frac{1}{\theta}$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{6}$$

அதாவது, $\frac{\theta^2}{6} = 1 - \frac{2165}{2166}$

$$= \frac{1}{2166}$$

ஆகையால், $\theta^2 = \frac{1}{361}$

அல்லது, $\theta = \frac{1}{19}$ (ஆரையன் அளவில்)

ஆனால் $1^C = 57° \, 18'$

θன் மதிப்பு $= \frac{1}{19}\left(57^\circ\ 18'\right)$

$= 3^\circ\ 1'$ (கிட்டத்தட்ட)

7·14 θன் அடுக்குகளை ஒன்றையும் தவிர்க்காமல் (θ சிறியது அல்ல; $\sin^m \theta . \cos^n \theta$ஐ θன் அடுக்குகள் மூலம் (ஏறுவரிசை) முடிவிலி வரை உள்ள விரித்தலைக் காணலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

$\sin^2 \theta \cos \theta$ன் விரித்தலை θன் அடுக்குகள் மூலம் காண்க.

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} . \cos$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos \theta - \cos \theta . \cos 2\theta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \{\cos \theta - \tfrac{1}{2}(\cos \theta + \cos 3\theta)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \{.\ \tfrac{1}{2}\cos \theta - \tfrac{1}{2}\cos 3\theta\}$$

$$= \tfrac{1}{4} . (\cos \theta - \cos 3\theta) \qquad \text{.........(i)}$$

ஆனால், $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + (-1)^n . \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots\dots$ மு.வ.

இம்மாதிரியே,

$$\cos 3\theta = 1 - \frac{(3\theta)^2}{2!} + \frac{(3\theta)^4}{4!} - \dots\dots + (-1)^n . \frac{(3\theta)^{2n}}{(2n)!}$$

$+ \dots\dots$ மு.வ.

ஆகையால், (i)லிருந்து,

$$\sin^2 \theta \cdot \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{4 . (2n)!} \cdot (1 - 3^{2n})\, \theta^{2n} \right]$$

7·15. இப்பொழுது $\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{-x}, $\log_e (1+x)$, $\log_e (1-x)$ இவைகளின் விரித்தல்களைப் பயன்படுத்தி, சில வரம்புகளைக் காண்போம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. $\underset{\theta \to 0}{\text{lt}} \left\{ \frac{\theta (a + b \cos \theta) - C \sin \theta}{\theta 5} \right\} = 1$ எனில்,

a, b ன் மதிப்புக்களைக் காண்க.

பகுதியில் θ^5 இருப்பதால், $\sin \theta$, $\cos \theta$ ஆகிய இவற்றின் விரித்தல்களை θ^5 வரை எடுத்துக்கொண்டால் போதும் (ஏனெனில், $\theta \to 0$).

எனவே, θ பூச்சியத்தை அணுகுமானால்,

$$\theta (a + b \cos \theta) - C \sin \theta = a\theta + b\theta \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \right\}$$

$$-c\left\{\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}\right\} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= (a+b-c)\,\theta-\left(b-\frac{C}{3}\right)\frac{\theta^3}{2}$$

$$+\left(\frac{b}{24}-\frac{c}{120}\right)\theta^5$$

ஆகையால்

$$\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\theta(a+b\cos\theta)-c\sin\theta}{\theta^5}\right\}=1 \text{ எனில்,}$$

அதாவது, $a+b-c \quad = 0;$ ......(i)

$$b-\frac{c}{3}=0 \qquad \text{......(ii)}$$

$$\frac{b}{24}-\frac{c}{120}=1 \qquad \text{......(iii)}$$

(i), (ii), (iii)லிருந்து, $a = 120$; $b = 60$; 180 எனக் கிடைக்கும்.

மாதிரி 2. $\lim_{\beta\to\alpha}\left\{\frac{\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha}{\alpha\cos\beta-\beta\cos\alpha}\right\}$

$= \tan\{\alpha-\tan^{-1}\alpha\}$ எனக் காண்க.

$\beta = \alpha+x$ எனக் கொண்டால், β, αஐ அணுகும்பொழுது, பூச்சியத்தை அணுகும்.

$$\therefore \lim_{\beta\to\alpha}\left\{\frac{\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha}{\alpha\cos\beta-\beta\cos\alpha}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\alpha\sin(\alpha+x)-(\alpha+x)\sin\alpha}{\alpha\cos(\alpha+x)-(\alpha+x)\cos\alpha}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\alpha\cdot(\sin\alpha\cdot\cos x+\cos\alpha\sin x)-(\alpha+x)\sin\alpha}{\alpha(\cos\alpha\cdot\cos x-\sin\alpha\sin x)-(\alpha+x)\cos x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{x(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)}\right\} \text{ (ஏனெனில், } \cos x\to 1,\ \sin x\to x)$$

$$=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\alpha}.$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan^{-1}\tan\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\tan\tan^{-1}\alpha}$$

$$=\tan(\alpha-\tan^{-1}\alpha)$$

மாதிரி 3. $\lim_{x\to 0} \operatorname{cosec}^4 x \{ x(e^x-1)-2(1-\cos x)-3(x-\sin x) \} = \frac{1}{4}$ என நிறுவுக.

x பூச்சியத்தை அணுகும்பொழுது, $\operatorname{cosec}^4 x$, $\frac{1}{x^4}$ ஐ அணுகும்.

இப்பொழுது, $x(e^x-1)-2(1-\cos x)-3(x-\sin x)$

$$= x\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots 1\right)$$

$$-2\left(1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\dots\right)$$

$$-3\left(x-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\dots\right)$$

$$= x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}$$

$$-x-x^2+\frac{x^4}{12}$$

$$-3x-\frac{x^3}{2}$$

$$+3x$$

(அ.து.) $= \frac{1}{4}x^4$ (தோராயமாக)

$$\therefore \lim_{x\to 0} \operatorname{cosec}^4 x \{ x(e^x-1)-2(1-\cos x)-3(x-\sin x) \}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4}{x^4}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

அப்பியாசம் 7

1. $\sin 7x$ஐ $\sin x$ன் அடுக்குகள் மூலம் விரிக்க.

[விடை: $7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x$]

2. $\frac{1+\cos 7\theta}{1+\cos\theta} = (x^3-x^2-2x+1)^2$ என நிறுவுக $(x = 2\cos\theta)$

3. $\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta}$ஐ $\cos\theta$ன் அடுக்குகளின் மூலம் விவரிக்க.

[விடை: $64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1$]

4. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ எனில் $\tan 7\theta$ன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை: $\frac{29}{278}$]

5. $\tan 2\theta = \lambda \tan(\theta + \alpha)$ என்பதிலிருந்து $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ என்னும் மூன்று தீர்வுகள் θக்குக் கிடைத்தால், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha = \pi$ ன் ஒரு மடங்கு என நிறுவுக.

x என்பது $\tan\theta$ ஐக் குறித்தால் $\dfrac{2x}{1-x^2} = \lambda \dfrac{(x+K)}{1-Kx}$ $(K = \tan\alpha)$

$\therefore$ $\lambda x^3 + Kx^2(\lambda - 2) + x(2-\lambda) - \lambda K = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு $\tan\theta_1$ (t_1), $\tan\theta_2$ (t_2); $\tan\theta_3$ (t_3) என்னும் மூன்று மூலங்கள் உண்டு. ஆகையால் $t_1 \; t_2 \; t_3 = K\dfrac{(2-\lambda)}{\lambda}$.

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{(2-\lambda)}{\lambda}.$$

$$t_1t_2t_3 = K.$$

$$\therefore S_1 = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 + \tan\alpha.$$

$$= \frac{2K}{\lambda} - K + K = \frac{2K}{\lambda}.$$

$$S_3 = \tan\theta_2 \cdot \tan\theta_3 \cdot \tan\alpha + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_3 \cdot \tan\alpha$$
$$+ \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 \tan\alpha + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 \cdot \tan\theta_3.$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{2\lambda}{\lambda} + K$$

$$= K\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right) + K$$

$$\frac{2K}{\lambda}$$

$$\therefore \tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4} = 0.$$

$\therefore$ $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha = \pi$ ன் மடங்கு.

6. $\sin^6\theta$ ஐ θன் மடங்குகளின் கொசைன்கள் மூலம் விரிக்க.

[விடை : $\frac{1}{32}(-\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta + 10)$]

7. $\sin^7\theta$ ஐ θன் மடங்குகளின் சைன் மூலம் விரிக்க.

[விடை : $\frac{1}{2^6}(-\sin 7\theta + 7\sin 5\theta - 21\sin 3\theta + 35\sin\theta)$]

8. $128\sin^8\theta = \cos 8\theta - 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta - 56\cos 2\theta + 35$ என நிறுவுக.

9. $64(\cos^8\theta + \sin^8\theta) = \cos 8\theta + 28\cos 4\theta + 35$ எனக் காண்க.

10. $\sin^5\theta \cdot \cos^2\theta = \frac{1}{64}\{5\sin\theta + \sin 3\theta - 3\sin 5\theta + \sin 7\theta\}$ என நிறுவுக.

11. $\cos^8\theta \cdot \sin^4\theta = \frac{1}{64}\{3\cos\theta - 3\cos 3\theta - \cos 5\theta + \cos 7\theta\}$ எனக் காண்க.

12. $\cos^5\theta \cdot \sin^2\theta$ஐ θன் மடங்குகளின் கொசைன் மூலம் விரிக்க.
[விடை : $\frac{1}{64}(5\cos\theta - \cos 3\theta - 3\cos 5\theta - \cos 7\theta)$]

13. $\cos^5\theta \cdot \sin^6\theta = -2^{-10}\{\sin 11\theta + 5\sin 9\theta + 7\sin 7\theta - 5\sin 5\theta - 22\sin 3\theta - 14\sin\theta\}$ என நிறுவுக.

14. $\cos^2\frac{\pi}{7}, \cos^2\frac{2\pi}{7}, \cos^2\frac{3\pi}{7}$ என்பவை, $64x^3 - 80x^2 + 24x - 1 = 0$ன் மூலங்கள் என நிறுவுக.

15. $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \equiv 8\left(x - \cos\frac{\pi}{7}\right)\left(x - \cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(x - \cos\frac{5\pi}{7}\right)$ எனக் காண்க.

16. $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ இம் மூன்றும் $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ன் மூலங்கள் எனக் காண்பி. மேலும் $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$ என நிறுவுக.

17. $\sin 5x$ஐ $\sin x$ன் அடுக்குகளின் மூலம் விரித்து $\sin\frac{\pi}{10}, \sin\frac{5\pi}{10}, \sin\frac{9\pi}{10}, \sin\frac{13\pi}{10}, \sin\frac{17\pi}{10}$ என்பவை ஐந்தும் $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ன் மூலங்கள் எனக் காண்க.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக. (18—21)

18. $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

19. $\tan^2\frac{\pi}{13} + \tan^2\frac{2\pi}{13} + \tan^2\frac{3\pi}{13} + \tan^2\frac{4\pi}{13} + \tan^2\frac{5\pi}{13} + \tan^2\frac{6\pi}{13} = 78$.

20. $\operatorname{cosec}^4\frac{\pi}{13} + \operatorname{cosec}^4\frac{2\pi}{13} + \operatorname{cosec}^4\frac{3\pi}{13} + \ldots\ldots + \operatorname{cosec}^4\frac{6\pi}{13} = 336$.

21. $\tan\frac{\pi}{16} \cdot \tan\frac{5\pi}{16} \cdot \tan\frac{9\pi}{16} \cdot \tan\frac{13\pi}{16} = 1$.

22. n பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்கு பல்கோணத்தின் சுற்றளவுக்கும் அதன் சுற்று வட்டத்தின் பரிதிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் $= \frac{\pi^2 p}{6n^2}$ (தோராயமாக) என நிறுவுக. (p பல்கோணத்தின் சுற்றளவு)

23 2000 பக்கங்களுள்ள ஒரு ஒழுங்கு பல்கோணத்தின் சுற்று வட்ட ஆரம் 1 மைல் எனில், அப்பல்கோணத்தின் பரப்புக்கும், சுற்று வட்டத்தின் பரப்புக்கும் உள்ள வித்தியாசம் $\simeq$ 16 ச. கெஜம்

24. ஒரு வட்ட வில்லின் நீளம் a அதனுடைய நாண் $= A$; அந்த வில்லின் அரை பாகத்தினுடைய நாணின் நீளம் $= H$ எனில், $a \simeq \frac{8H-A}{3}$ என்று எடுத்துக்கொள்வதினால் ஏற்படும் பிழை என்ன?

$$\left[\text{விடை : } \frac{a^5}{7680r^4} \quad (r = \text{வட்ட ஆரம்})\right]$$

25. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் a பாதி வில்லின் நாணின் நீளம் b, கால்பகுதி வில்லின் நாணின் நீளம் c எனில், அவ்வில்லின் நீளம் தோராயமாக $\frac{a-40b+256c}{45}$ என்று நிறுவுக.

26. ஒரே வட்டத்தைச் சுற்று வட்டமாகவும், உள் வட்டமாகவும் கொண்ட இரு n பக்கங்களுள்ள ஒழுங்குப் பல்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே, l, m எனில், வட்டப் பரிதி தோராயமாக $\frac{n}{8}(2l+m)$ என்று நிறுவுக. A_1, A_2 என்பவை இவ்விரு பல்கோணங்களின் பரப்பைக் குறித்தால், வட்டத்தின் பரப்பு தோராயமாக $\frac{A_1+2A^2}{3}$ என்று காண்க.

27. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வில்லின் நாணின் நீளம் l அவ்வில்லின் மூன்றில் இரு பகுதியினுடைய நாணின் நீளம் m, அவ்வில்லின் மூன்றில் ஒரு பகுதியினுடைய நாணின் நீளம் n எனில் அவ்வில்லின் நீளம் தோராயமாக $\frac{1}{10}(l-9m+45n)$ என்று நிறுவுக.

28. θ சிறியதாகில், அதனை $\frac{1}{3}\left(8\sin\frac{\theta}{2}-\sin\theta\right)$ என்று மாற்றுவதால் உண்டாகும் பிழை $\frac{\theta^5}{480}$ (தோராயமாக) என்று நிறுவுக.

29. x சிறியதாகில் $\sin(x+\alpha) = \sin\alpha + x\cos\alpha - \frac{x^2}{2!}\sin\alpha \dots$ என்றும் $\cos(\alpha+x) = \cos\alpha - x\sin\alpha - \frac{x^2}{2}\cos\alpha + \frac{x^3}{6}\sin\alpha$ என்றும் நிறுவுக.

30. $(\sin x+\cos 2x)^2$ஐ xன் அடுக்குகள் மூலம் விரித்து x^nன் குணகத்தை எழுதுக.

[விடை : n இரட்டை எண்ணெனில்
$$\frac{(-1)^{(n+2)/2}}{2\,n!}(2^n-4^n);$$
n ஒற்றை எண்ணெனில்
$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}(3^n-1)\Bigg]$$

31. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\tan\theta=\frac{1}{15}$ எனில் ஆரையன் அளவில் $\theta=\frac{1}{15}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15^3}$

(தோராயமாக)

(ii) $\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{4997}{5000}$ எனில் $\theta\simeq 3^\circ\,26'$

(iii) $\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{5045}{5046}$ எனில் $\theta\simeq 1^\circ\,58'$

(iv) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(v) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=-1$

(vi) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{\cos 1-\cos(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}\sin 1.$

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{2x^2+2x+\cos 2x-2\sin x-1}{x^3}=\frac{1}{3}$

(viii) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{2\sin x-\sin 2x}{x^2\log(1+x)}=1$

(ix) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{x-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}=\frac{1}{3}$

(x) $\underset{x\to 0}{\text{lt}}\ \frac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}-2\tan x}{\tan x-x}=-2.$

(xi) $\underset{x\to\pi/2}{\text{lt}}\ (\sin x)^{\tan x}=1$

(குறிப்பு : $x=\pi/2-y$ என்க.

(xii) $\underset{x\to\pi/2}{\text{lt}}\ (\sec x-\tan x)=0.$

(xiii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 2\sin x}{x^3} = 3$

(xiv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{n^3}\left\{e^x - 1 + \log(1-x) = -\frac{1}{6}\right\}$

(xv) $\lim_{x\to 0} \{\log(1-2x) + e^{2x} - 1\}\operatorname{cosec}^3 x = -\frac{4}{3}$

(xvi) $\lim_{x\to 0} (\cos ax)^{\cot^2 bx} = e^{-a^2/2b^2}$

(xvii) $\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1-\sin\theta}{(\cos^2\theta - 2\cos^2 3\theta)} = -\frac{1}{34}$

(xviii) $\lim_{\theta\to 0} \frac{n\sin\theta - \sin n\theta}{\theta(\cos\theta - \sin n\theta} = 0$

(xix) $\lim_{\theta\to 0} \frac{a - \theta\sin\theta - b\cos\theta}{\theta 4} = \frac{1}{12}$ எனில், $a = 2$; $b = 2$.

(xx) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta + p\,\theta^3}{\theta^5} = l$ எனில், $p = -\frac{1}{3}$.

32. x சிறியதாகவு, x^4 மற்றும் xன் உயர்ந்த அடுக்குகள் தவிர்க்கத்தக்கவையாகவும் இருப்பின் (i) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - e^{-x} + \sin^3 x \simeq \frac{2}{3}x^3$ (ii) $e^{2x} + \log(1 - x^2) + 2\cos x - 3 \simeq \frac{2}{3}x^3$ என்று நிறுவுக.

அத்தியாயம் VIII

அதிபரவளைச் சார்புகள்

8.1.

x எந்த எண்ணாகிலும் $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ என்பதை அதிபரவளை சைன் (Hyperbolic sine) என்றும் $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ என்பதை அதிபரவளைக் கொசைன் (Hyperbolic cosine) என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. மேலும் $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ஐ $\sin hx$ என்றும், $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ என்றும் நாம் குறியிட்டு விளக்குகின்றோம்.

சைன், கொசைன் இவைகளிலிருந்து கொசீக்கன் (Cesecant), சீக்கன் (Secant), டாஞ்சன் (tangent), கொடாஞ்சன் (Cotangen) முதலியவற்றை அடைவதுபோல், அதிபரவளை சைன், அதிபரவளைக் கொசைன் ஆகியவற்றிலிருந்து அதிபரவளை கொசீக்கன், அதிபரவளை டாஞ்சன், அதிபரவளை கொடாஞ்சன் முதலியவற்றை அடைகிறோம்,

உதாரணமாக, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ என்று கூறுவதுபோல

$$\tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx} \text{ என்று கூறுகிறோம்.}$$

எனவே,

$$\operatorname{cosec} hx = \frac{1}{\sin hx}$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cos hx}$$

$$\tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx}$$

$$\cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx} \text{ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது.}$$

குறிப்பு:— $\sin hx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ஆகையால்

$\sin h O = O$ என்றும்

$\cos hx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ஆகையால்

$\cos hO = 1$ என்றும் நன்கு புலனாகின்றது.

குறிப்பு (2) :— cos hxன் பெறுமானம் (numerical value) sin hxன் பெறுமானத்தைவிடப் பெரியது.

$$\left[\because \quad \cosh^2 x = \left\{\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right\}^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \tfrac{1}{2}\right.$$

$$\left.\sinh^2 x = \left\{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\}^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \tfrac{1}{2}.\right]$$

8·2. இயற்கணிதத்திலிருந்து.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ என்றும்

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$ என்றும் நாம் அறிவோம்.

எனவே, $e^x - e^{-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right\}$

அதாவது, $\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ (மு.வ.(A)

$e^x + e^{-x} = 2\left\{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right\}$

அதாவது, $\cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ ..... (B)

முன்பு நாம் (§ 7·5 § 7·6)ல்

$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\ldots$ என்றும்

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}\ldots$ என்றும் பார்த்துள்ளோம்.

இங்கு, $\theta = ix$ என பிரதியிட்டால்,

$\sin ix = ix - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!}\ldots$ என்றும்

$\cos ix = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!}\ldots$ என்றும் கிடைக்கிறது.

அதாவது, $\sin ix = i\left\{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right\}$ ......(C)

$\cos ix = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ ......(D)

[$\because \quad i^2 = -1,\ i^3 = -i;\ i^4 = 1$]

(A), (B), (C), (D)யிலிருந்து

$\sin ix = i \sin hx$ என்றும் ......(1)

$\cos ix = \cos hx$ என்றும் புலனாகும். ......(2)

(A), (B)யில் $x = i\theta$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\sin hi\theta = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots \text{என்றும்}$$

$$\cos hi\theta = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots \text{என்றும் கிடைக்கும்.}$$

அதாவது, $\sin hi\theta = i \left\{ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \right\}$

$$\cos hi\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \ldots\ldots$$

அல்லது, $\sin hi\theta = i \sin \theta$, ...(3)

$\cos hi\theta = \cos \theta$ என்று கிடைக்கிறது. ......(4)

8·3. அதிபரவளைச் சார்புகளின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து, அவைகளிடையே உள்ள தொடர்புகளை நிறுவ முடியும். உதாரணமாக,

$$\cos h^2x - \sin h^2x = \left\{\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\}^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\}$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot 4e^x \cdot - e^{-x}$$

$$= 1.$$

$$\cos h^2x + \sin h^2x = \left\{\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\}^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2\}$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \{2(e^{2x} + e^{-2x})\}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

$$= \cos h2x.$$

ஆனால், அதிபரவளைச் சார்புகளிடையே உள்ள தொடர்புகளை சைன், கொசைன் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளின் மூலம் நிறுவுவது சாத்தியமே. உதாரணமாக,

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ என்று நமக்குத் தெரிந்ததே.

$\theta = ix$ எனப்பிரதியிட.

$\cos^2 ix + \sin^2 ix = 1$ அதாவது,

$(\cos hx)^2 + (i \sin hx)^2 = 1$. (§ 8·2, (1), (2)). அதாவது, $\cos h^2x - \sin h^2x = 1$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.
என்று அறிவோம். $\theta = ix$ என பிரதியிட்டால்,

$\cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = 2\cos^2 ix - 1 = 1 - 2\sin^2 ix$,
அதாவது,

$\cos h\, 2x = (\cos h\, x)^2 - (i \sin h\, x)^2 = 2(\cos h\, x)^2 - 1 = 1 - h\,(i \sin h\, x)^2$ அல்லது,

$\cos h\, 2x = \cos h^2 x + \sin h^2 x = 2\cos h^2 x - 1 = 1 + 2\sin h^2 x$.
எனவே, திரிகோண விகித சூத்திரங்களிலிருந்து, அவைகளுக்கொத்த அதிபரவளைச் சூத்திரங்களை மேற்கூறிய வழியில் நாம் மிகவும் சுலப மாகப் பெறலாம். இத்தகைய முறைக்கு ஒசுபோன் விதி (Osborn's rule) எனப் பெயர்.

குறிப்பு: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ என்று நாம் அறிவோம். ஆகையால் $(\cos\theta, \sin\theta)$ என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டத்தில் அமையும். எனவே, $\cos\theta$, $\sin\theta$ ஆகியவற்றை வட்டச்சார்புகள் என நாம் கூறுகிறோம். அதுபோலவே, $(a \cos h\, \theta, b \sin h\, \theta)$ என்ற புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையில் அமைகின்றது. ஏனெனில் $\cos h^2\theta - \sin h^2\theta = 1$. ஆகவே, நாம் $\cos h\,\theta$, $\sin h\,\theta$ ஆகியவற்றை அதிபரவளைச்சார்புகள் என்று கூறுகின்றோம்.

8·4. அதிபரவளைச்சார்புகளின் கால வட்டங்கள் (Periods) :

§ 8·2. (I)லிருந்து, $\sin ix = i \sin h\, x$ என்று நாமறிவோம்.

எனவே, $\sin h\, x = \frac{1}{i} \sin ix$

$= \frac{1}{i} \sin(2n\pi + ix)$ [n முழுவெண்

$= \frac{1}{i} \sin i(x - 2n\pi i)$

$\frac{1}{i} \sin h(x - 2n\pi i)$

$= \sin h(x - 2n\pi i)$ .... (I)

மேலும் $\cos ix = \cos h\, x$ ஆகையால்

$\cos hx = \cos(2n\pi + ix)$ [n முழுவெண்]

$= \cos i(x - 2n\pi i)$

$= \cos h(x - 2n\pi i)$ ......(II)

(I), (II)லிருந்து, n எம்மதிப்பாயினும் $\sin h\,(x - 2n\pi i)$ன் மதிப்பும், $\cos h\,(x - 2n\pi i)$ன் மதிப்பும் முறையே $\sin h\, x$, $\cos 2$

xஇலிருந்து மாறுதலை என்று விளங்குகிறது. எனவே, $\sin h\,x$, $\cos h\,x$ என்ற இரு அதிபரவளைச்சார்புகளும் காலவட்ட ஒழுங்கு உடையவை (periodic) என்று கூறுகிறோம்.

அவைகளின் காலவட்ட மதிப்பு $2\pi i$

$$\text{மேலும், } \tan h\,x = \frac{\sin h\,x}{\cos h\,x}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\sin i\,x}{\cos i\,x}$$

$$= \frac{1}{i}\tan i\,x$$

$$= \frac{1}{i}\tan(n\pi + i\,x) \qquad [n \text{ முழுவெண்}]$$

$$= \frac{1}{i}\tan i\,(x - n\pi i)$$

$$= \frac{1}{i}\tan h\,(x - n\pi i)$$

$$= \tan h\,(x - n\pi i)$$

n எம்மதிப்பாயினும் $\tan h\,(x-n\pi i)$ன் மதிப்பு $\tan h\,x$இலிருந்து மாறுததால், மேற்கூறியதுபோல், $\tan h\,x$ என்ற என்ற அதிபரவளைச் சார்பும் காலவட்ட ஒழுங்குடையது. ஆனால் இதன் காலவட்ட மதிப்பு πi ஆகும்.

8·5. நேர்மாறு அதிபரவளைச்சார்பு (inverse hyperbolic function) x என்பது θன் அதிபரவளைச் சைன் ஆகில் θ என்பது xன் நேர்மாறு அதிபரவளை சைன் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $x = \sin h\,\theta$ எனில்

$$\theta = \sin h^{-1}x.$$

இம்மாதிரியே, $x = \cos h\,\theta$ எனில், $\theta = \cos h^{-1} x$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$\sin h^{-1}x$, $\cos h^{-1}x$, $\tan h^{-1}x$, $\cot h^{-1}x$ன் மதிப்புக்களை, மடக்கைச் சார்புகள் (logarithmic functions) மூலம் நாம் இப்பொழுது விவரிப்போம்.

(i) $\sin h^{-1}x = \theta$ எனில், $x = \sin h\,\theta$

$$= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

அல்லது,
$$2x = e^{\theta} - e^{-\theta}$$

அல்லது $e^{2\theta} - 2xe^{\theta} - 1 = 0.$

ஆகையால, $e^{\theta} = \frac{2n \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$

$= n \pm \sqrt{1+x^2}.$

$e^{\theta} > 0$ ஆகையால் $e^{\theta} = x + \sqrt{1+x^2}$ ($\because \sqrt{1+x^2} > x$)

e அடிக்கு இருபக்கமும் மடக்கை எடுப்பின் (logarithm to the base e)

$\theta = \log_e (x + \sqrt{1+x^2})$ என்று கிடைக்கும்

எனவே, $\sin h^{-1} = \log_e (x + \sqrt{1+x^2})$

(ii) $\cos h^{-1} x = \theta$ எனில் $x = \cos h\theta$

$= \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$

எனவே, $2x = e^{\theta} + e^{-\theta}$

அல்லது, $e^{2\theta} - 2xe^{\theta} + 1 = 0.$

ஆகையால், $e^{\theta} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$

$= x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

$\sqrt{x^2 - 1} < x$ ஆகையால் e^{θ} இருமதிப்புக்களையும் பெறும்.

எனவே $e^{\theta} = x + \sqrt{x^2 - 1}$ அல்லது

$e^{\theta} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

இருபக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுப்பின்

$\theta = \log (x + \sqrt{x^2 - 1})$ அல்லது

$\theta = \log \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

$= -\log (x + \sqrt{x^2 - 1})$ என்ற

இருமதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

இவைகளில் நேர்குறியுள்ள மதிப்பை எடுப்பதுதான் வழக்கம்.

எனவே, $\cos h^{-1} x = \log (x + \sqrt{x^2 - 1})$

(iii) $\tan h^{-1} x = \theta$ எனில், $x = \tan h\theta$

$$= \frac{\sin h\theta}{\cos h\theta}$$

அல்லது,
$$\frac{x}{} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$$

ஆகையால்,
$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{2e^{\theta}}{2c^{-}\theta}$$
$$= e^{2\theta}.$$

e அடிக்கு இரு பக்கமும் மடக்கை எடுப்பின்

$$\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 2\theta \text{ என்று கிடைக்கும்.}$$

எனவே, $\theta = \tan h^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{(1+x)}{1-x}\right)$

(iv) $\cot h^{-1}x = \theta$ எனில், $x = \cot h\theta$

$$= \frac{\cos h\theta}{\sin h\theta}$$

அல்லது,
$$\frac{x}{1} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$$

ஆகையால்:
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2e^{2}}{2e^{-\theta}}$$
$$= e^{2\theta}.$$

இரு பக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுப்பின்

$$2\theta = \log\frac{x+1}{x-1} \text{ என கிடைக்கும்.}$$

எனவே, $\theta = \cot h^{-1}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$

8·6.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. $\tan h\, 3x = \dfrac{3\tan hx + \tan h^{3}x}{1 + 3\tan h^{2}x}$ என நிறுவுக.

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^{3}\theta}{1 - 3\tan^{2}\theta} \quad (\S\, 1{\cdot}1, \text{ சூத்திரம் } 12)$$

$\theta = ix$ எனப் பிரதியிட.

$$\tan 3ix = \frac{3\tan ix - \tan^3 ix}{1 - 3\tan^2 ix}$$

§ 8·2லிருந்து, $\tan ix = i \tan hx$

$$\therefore \quad i \tan h3x = \frac{3(i \tan hx) - (i \tan hx)^3}{1 - 3(i \tan hx)^2}$$

$$= \frac{3i \tan hx + i \tan h^3 x}{1 + 3 \tan h^2 x}$$

$$(\quad i^3 = -i, i^2 = -1)$$

$$\therefore \quad \tan h3x = \frac{3 \tan hx + \tan h^3 x}{1 + 3 \tan h^2 x}$$

மாதிரி. 2. $u = \log \tan \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right\}$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(i) $\tan h \frac{u}{2} = \tan \frac{x}{2}$

(ii) $\cos hu = \sec x$

(iii) $\sin hu = \tan x$.

$$u = \log \tan \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right\}$$

$$e^u = \tan \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right\}$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}} \qquad \text{......(i)}$$

$$\therefore \quad \frac{e^u - 1}{e^u - 1} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{2}$$

அல்லது, $\frac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{e^{u/2} + e^{-u/2}} = \tan \frac{x}{2}$.

அதாவது, $\tan h \frac{u}{2} = \tan \frac{x}{2}$. (§ 8·1)

$$\therefore \quad \tan h^2 \frac{u}{2} = \tan^2 \frac{x}{2}.$$

அல்லது $\frac{\sin h^2 \frac{u}{2}}{\cos h^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{\cosh^2\frac{u}{2}+\sinh^2\frac{u}{2}}{\cosh^2\frac{u}{2}-\sinh^2\frac{u}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

அதாவது, $\frac{\cosh u}{1}=\frac{1}{\cos x}$ (§ 8·3)

(i)லிருந்து, $e^u=\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}$

$$\therefore \quad e^{-u}=\frac{1-\tan x/2}{1+\tan x/2}$$

$$\therefore \quad e^u-e^{-u}=\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}-\frac{1-\tan x/2}{1+\tan x/2}$$

$$=\frac{(1+\tan x/2)^2-(1-\tan x/2)^2}{1-\tan^2 x/2}$$

$$=\frac{4\tan x/2}{1-\tan^2 x/2}$$

அதாவது, $\frac{e^u-e^{-u}}{2}=\frac{2\tan x/2}{1-\tan^2 x/2}=\tan x.$

$$\therefore \quad \sinh u=\tan x.$$

மாதிரி. 3. $\tanh^{-1}x=\sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ என நிறுவுக.

$$\tanh^{-1}x=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (§\ 8·5)$$

$$=\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{(1+x)^2}{(1-x^2)}\right\}$$

$$=\log\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\log\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$=\log\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\right\}$$

$$=\sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (§\ 8·5).$$

குறிப்பு : $\tanh^{-1}x=\theta$ எனக்கொண்டால்,

$$x=\tan h\theta. \quad \therefore \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sin h^{-1}(\sin h\theta)=\theta.$$

மாதிரி 4. $\cos^{-1}(u+iv)=\alpha+i\beta$ எனில் $\cos^2\alpha$, $\cos h^2\beta$ ஆகிய இரண்டும் $x^2-x(1+u^2+v^2)+u^2=0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்கள் என நிறுவுக.

$$\cos^{-1}(u+iv) = \alpha+i\beta.$$

$$\therefore \quad u+iv = \cos(\alpha+i\beta)$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos i\beta-\sin\alpha\cdot\sin i\beta$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos h\beta-i\sin\alpha\cdot\sin h\beta \quad (\S\ 8{\cdot}2)$$

மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன் படுத்த.

$$u = \cos\alpha\cos h\beta \qquad \ldots\ldots(i)$$

$$v = -\sin\alpha.\sin h\beta.$$

$$\therefore \quad u^2+v^2 = \cos^2\alpha.\cos^2h\beta+\sin^2\alpha.\sin h^2\beta.$$

$$= \cos^2\alpha.\cos h^2\beta+(1-\cos^2\alpha)(\cos h^2\beta-1) \qquad (\S.\ 8{\cdot}3)$$

$$= \cos^2\alpha\cdot\cos h^2\beta+\cos h^2\beta-1-\cos^2\alpha\cos h^2\beta+\cos^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha+\cos h^2\beta-1.$$

$$\therefore \quad 1+u^2+v^2= \cos^2\alpha+\cos h^2\beta. \qquad \ldots\ldots(ii)$$

(i)லிருந்து $u^2= \cos^2\alpha.\cos h^2\beta.$ ......(iii)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு : $x^2-x(1+u^2+v^2)+u^2=0$

அதாவது, $x^2-x(\cos^2\alpha+\cos h^2\beta)+\cos^2\alpha.$
$\cos h^2\beta=0$ [(ii); (iii)லிருந்து)

எனவே $\cos^2\alpha$, $\cos h^2\beta$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு, $x^2-x(1+u^2+v^2)+u^2=0$ன் மூலங்களாகும்.

மாதிரி 5. $\cos(x+iy)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ எனில்,

$$y=\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(a+\alpha)}$$ என நிறுவுக.

$$\cos(x+iy)=r(\cos\alpha+ir\sin\alpha)$$

அதாவது, $\cos x\cdot\cos iy-\sin x\cdot\sin iy=r\cos\alpha+ir\sin\alpha$

அல்லது, $\cos x\cos hy-i\sin x\cdot\sin hy=r\cos\alpha+ir\sin\alpha.$

மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன் படுத்த,

$$\cos x\cdot\cos hy=r\cos\alpha$$

$$-\sin x\cdot\sin hy=r\sin\alpha.$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x \cdot \sin hy}{\cos x \cdot \cos hy} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

எனவே $\dfrac{\sin hy}{\cos hy} = \dfrac{-\sin \alpha \cdot \cos x}{\cos \alpha \cdot \sin x}$

அதாவது, $\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{-\sin \alpha \cdot \cos x}{\cos \alpha \cdot \sin x}$

$$\therefore \quad \frac{2\, e^y}{2\, e^{-y}} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin x - \sin \alpha \cdot \cos x}{\cos x \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x}$$

அதாவது, $e^{2y} = \dfrac{\sin (x-\alpha)}{\sin (x+\alpha)}$

இருபக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுப்பின்,

$$2y = \log_e \frac{\sin (x-\alpha)}{\sin (x+\alpha)}$$

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin (x-\alpha)}{\sin (x+\alpha)}$$

மாதிரி 6. $\sin(x+iy) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ எனில், $2r^2 = \cos h\, 2y - \cos 2x$ என்றும் $\tan x \cdot \tan \alpha = \tan hy$ என்றும் நிறுவுக.

$$\sin (x+iy) = r\,(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy = r \cos \alpha + ir \sin \alpha.$$

அதாவது, $\sin x .\ \cos hy + i \cos x .\ \sin hy = r \cos \alpha + ir \sin \alpha.$

இருபக்கமும், மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன்படுத்த.

$$\sin x .\ \cos hy = r \cos \alpha \qquad \text{..............} \quad \text{(i)}$$

$$\cos x .\ \sin hy = r \sin \alpha \qquad \text{..............} \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii)ஐ வர்க்கம் செய்து கூட்ட.

$$r^2 \cos^2 \alpha . + r^2 \sin^2 \alpha = \sin^2 x .\ \cos h^2 y + \cos^2 x .\ \sin h^2 y$$

அதாவது, $r^2 = \left\{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right\} \cdot \left\{\dfrac{1 + \cos h2y}{1}\right\}$

$$+ \left\{\frac{1 \cos 2x}{2}\right\} \left\{\frac{\cos h2y - 1}{2}\right\}$$

அல்லது, (§ 8·3)

$$4r^2 = (1 - \cos 2x)(1 + \cos h2y) + (1 + \cos 2x)(\cos h2y - 1)$$

$$= 1 + \cos h2y - \cos 2x - \cos 2x .\ \cos h2y$$

$$- 1 + \cos h2y - \cos 2x \cos 2x .\ \cos h2y$$

$$= 2 \cos h2y - 2 \cos 2x$$

$\therefore \quad 2r^2 = \cos h2y - \cos 2x$

(ii) ஐ (i)ஆல் வகுக்க.

$$\frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha} = \frac{\cos x . \sin hy}{\sin x . \cos hy}$$

அதாவது, $\tan \alpha . \tan x = \tan hy$.

மாதிரி 7. $\tan (x + iy)$ன் மெய்யான பகுதியையும், கற்பனை யான பகுதியையும் பிரிக்க.

$\tan (x + iy) = u + iv$ எனக் கொள்.

ஆகையால், $u + iv = \dfrac{\sin (x + iy)}{\cos (x + iy)}$

$$= \frac{2 \sin (x + iy) . \cos (x - iy)}{2 \cos (x + iy) . \cos (x - iy)}$$

$$= \frac{\sin 2x + \sin (2iy)}{\cos 2x + \cos 2iy}$$

$$= \frac{\sin 2x + i \sin h2y}{\cos 2x + \cos h2y}$$

ஆகையால், இருபக்கமும் மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன்படுத்த,

$$u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cos h2y}$$

{ $\tan (x + iy)$ன் மெய்யான பகுதி }

$$v = \frac{\sin h2y}{\cos 2x + \cos h2y}$$

{ $\tan (x + iy)$ன் கற்பனையான பகுதி }

மாதிரி. 8. $(x + iy = C \tan (\alpha + i\beta)$ எனில், கீழ்வருவன வற்றை நிறுவுக. (i) $x^2 + y^2 + 2cx \text{ cof } 2\pm - c^2 = 0$·

(ii) $x^2 + y^2 - 2cy \cot h2\gamma + c^2 = 0$.

$$x + iy = c \tan (\alpha + i\beta)$$

$$\therefore \quad \tan (\alpha + i\beta) = \frac{x + iy}{c}.$$

ஆகையால்,

$$\tan (\alpha - iB) = \frac{x - iy}{c}.$$

[i என்பதை $-i$ என்று மாற்ற]

இப்பொழுது,

$$\tan 2\alpha = \tan \{ \alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) \}$$

$$= \frac{\tan(\alpha+i\beta)+\tan(\alpha-i\beta)}{1-\tan(\alpha+i\beta).\tan(\alpha-i\beta)}$$

$$= \frac{\frac{x+iy}{c}+\frac{x-iy}{c}}{1-\left(\frac{x+iy}{c}\right)\left(\frac{x-iy}{c}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2x}{c}}{1-\left(\frac{x^2+y^2}{c^2}\right)} \qquad (\because \; i^2=-1)$$

அதாவது, $\tan^2\alpha = \dfrac{2cx}{c^2-x^2-y^2}$ ......(i)

அல்லது,

$c^2-x^2-y^2 = 2cx \cot 2\alpha$.

எனவே, $x^2+y^2+2cx\cot 2\alpha - c^2 = 0$.

மேலும், $\tan 2i\beta = \tan\{(\alpha+i\beta)-(x-i\beta)\}$

$$= \frac{\tan(\alpha+i\beta)-\tan(\alpha-i\beta)}{1+\tan(\alpha+i\beta).\tan(\alpha-i\beta)}$$

$$= \frac{\frac{x+iy}{c}-\frac{(x-iv)}{c}}{1+\left(\frac{x+iy}{c}\right)\left(\frac{x-iy}{c}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2iy}{c}}{1+\left(\frac{x^2+y^2}{c^2}\right)}$$

அதாவது, $\tan 2i\beta = \dfrac{2\,ciy}{c^2+x^2+y^2}$

அல்லது, $\tan h2\beta = \dfrac{2\,cy}{c^2+x^2+y^2}$ $\qquad (\because \; \tan ix = i\tan hx)$

......(ii)

ஆகையால், $c^2+x^2+y^2 = 2cy\cdot\cot h\,2\beta$.

எனவே, $x^2+y^2-2cy\cot h\,2\beta+c^2=0$.

குறிப்பு:—$c=1$ எனில் $x+iy)=\alpha+i\beta)$ என்றாகும்.

எனவே, $\tan^{-1}(x+iy)=\alpha+ip$

$$=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2-y^2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\tan h^{-1}\frac{2y}{1+x^2+y}$$

((i), (ii)லிருந்து)

அதாவது, $\tan^{-1}(x+iy)$ன் மெய்யான பகுதி $\frac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2-y^2}$

$\tan^{-1}(x+iy)$ன் கற்பனையான பகுதி $\frac{1}{2}\tan h^{-1}\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$

மாதிரி 9. $\tan^{-1}(x+iy)=a+ib$ எனில் a, bஐ x, y மூலம் காண்க.

$$\because \quad \tan^{-1}(x+iy)=a+ib$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}(x-iy)=a-ib$$

$$\therefore \quad 2a=(a+ib)+(a-ib)=\tan^{-1}(x+iy)+\tan^{-1}(x-iy)$$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{(x+iy)+(x-iy)}{1-(x+iy)(x-iy)}\right\}=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right) \quad \text{(i)}$$

இம்மாதிரியே $2ib=(a+ib)-(a-ib)=\tan^{-1}(x+iy)-\tan^{-1}(x-iy)$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{(x+iy)-(x-iy)}{1+(x+iy)(x-iy)}\right\}=\tan^{-1}\left(\frac{2iy}{1+x^2+y^2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{2iy}{1+x^2+y^2}=\tan(2ib)=i\tan h\,2b$$

(ie) $\tan h\,2b=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$ (ii)

(i), (ii)லிருந்து $\tan^{-1}(x+iy)$இன் மெய்யான பாகம் $=a$.

$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2-y^2}\right)$என்றும் கற்பனையான பாகம் $=$

$b=\frac{1}{2}\tan h^{-1}\left(\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$என்றும் கிடைக்கிறது

மாதிரி 10. $\tan h(\alpha+i\beta)$ன் மெய்யான பகுதியையும், கற்பனையான பகுதியையும் பிரிக்க.

$$\tan h(\alpha+i\beta)=\frac{\sin h(\alpha+i\beta)}{\cos h(\alpha+i\beta)}=\frac{1}{i}\,\frac{\sin i(\alpha+i\beta)}{\cos i(\alpha+i\beta)} \quad [\S\ 8\cdot2,\ (1),\ (2)]$$

$$=\frac{1}{i}\,\frac{\sin(\alpha i-\beta)}{\cos(\alpha i-\beta)}=\frac{1}{i}\,\frac{2\sin(\alpha i-\beta)\cos(\alpha i+\beta)}{2\cos(\alpha i-\beta)\cos(\alpha i+\beta)}$$

$$=\frac{1}{i}\,\frac{\sin(2\alpha i)-\sin(2\beta)}{\cos(2\alpha i)+\cos(2\beta)}=\frac{1}{i}\left\{\frac{i\sin h\,2\alpha\times i^2\sin 2\beta}{\cos h\,2\alpha+\cos 2\beta}\right\}$$

$$[\therefore\quad i^2=-1)]$$

$$=\frac{\sin h\,2\alpha+i\sin 2\beta}{\cos 2\beta+\cos h\,2\alpha}$$

எனவே, $\tan h(\alpha+i\beta)$இன் மெய்யான பகுதி$\left[\dfrac{\sin h\,2\alpha}{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}\right]$

கற்பனையான பகுதி $=\left[\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta+\cos h\, 2\alpha}\right]$

குறிப்பு :—மாதிரி 7ஐயும், மாதிரி 10ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

மாதிரி 11. $\sin h^7 x$ன் மதிப்பை xன் மடங்குகளைக்கொண்ட அதிபரவளை சைன்கள் மூலம் காண்க.

$\sin hx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ என்று நாம் வரைவிலக்கணத்தில் கண்டுள்ளோம்.

எனவே, $\sin h^7 x=\left\{\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right\}^7$

$$=\frac{1}{2^7}\cdot\Big\{e^{7x}-7c_1\cdot e^{6x}e^{-x}+7c_2\cdot e^{5x}\cdot e^{-2x}$$
$$-7c_3\, e^{4x}\cdot e^{-3x}+7c_4 e^{3x}\cdot e^{-4x}$$
$$-7c_5\cdot e^{2x}\cdot e^{-5x}+7c_6\cdot e^{x}\cdot e^{-6x}-e^{-7x}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2^7}\Big\{(e^{7x}-e^{-7x})-7(e^{5x}-e^{-5x})$$
$$+21(e^{3x}-e^{-3x})-35(e^{x}-e^{-x})\Big\}$$

$$=\frac{1}{2^7}\Big\{2\sin h\, 7x-7\cdot 2\sin h5x$$
$$+21\cdot 2\sin h\, 3x-35\, 2\sin hx\Big\}$$

$$\frac{1}{2^6}\Big\{\sin h7x\times 7\sin h5x-21\sin h\, 3x$$
$$-35\sin hx\Big\}$$

மாதிரி 12. $\sin h^2 x+\sin h^2 2x+\sin h^2 3x+$ .... (n உறுப்புக்கள்) என்ற தொடரின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\sin h^2 x=\frac{\cos h2x-1}{2}\quad (\S\, 8\, 3)$$

இம்மாதிரியே, $\sin h^2 2x=\dfrac{\cos h\, 4x-1}{2}$

$$\sin h^2 3x=\frac{\cos h\, 6x-1}{2}$$

... ...

எனவே, $S_n \equiv \sin h^2 x+\sin h^2 2x+\sin h^2 3x+\ldots\ldots n$ உறுப்புக்கள்

$$=\left(\frac{\cos h2x-1}{2}\right)+\left(\frac{\cos h4x-1}{2}\right)+\left(\frac{\cos h\,6x-1}{2}\right)$$

$\ldots\ \ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$= \frac{1}{2}\ \{\cos h\ 2x+\cosh\ 4x+\cosh\ 6n+\ldots n$ உறுப்பு $\} - n$

$\therefore\quad S_n+\frac{n}{2}$

$= \frac{1}{2}\ \{\cos i2x+\cos i4x+\cos i6x+\ldots n$ உறுப்புக்கள் $\}$

(§ 8·2, (2)

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\left(2ix+\frac{n-1}{2}\cdot 2ix\right)\cdot\sin\frac{n.(2ix)}{2}}{\sin\frac{2ix}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos i(n+1)x.\ \sin i(nx)}{\sin ix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\ (n+1)x.\sin hnx}{\sin\ hx}$$

$$\therefore\qquad S=\frac{1}{2}\ \frac{\cos h(n+1)x.\sin hnx}{\sin hx}-\frac{n}{2}$$

மாதிரி 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin hx-\sin 2x}{x^3}$ ஐ கண்டுபிடிக்க.

x மிகவும் சிறியதாகையால் $\tan x \simeq x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}$

$\therefore\quad \tan x+\sin hx-\sin 2x$

$$=\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots\right\}+\left\{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\right\}$$

$$-\left\{2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}-\ldots\ldots\right\}$$

$$=x(1+1-2)+x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{8}{6}\right)+x^5\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{120}-\frac{32}{120}\right)$$

$+\ldots\ldots$

$$=x^3\left(\frac{11}{6}\right)+x^5\left(-\frac{1}{8}\right)+\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin hx-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\frac{11x^3}{6}+\ldots\ldots\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{11}{6} + \cdots\cdots \right\}$$

$$= \frac{11}{6}.$$

அப்பியாசம் 8

1 கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(1) $\sin h2\theta = 2 \sin h\theta \cdot \cos h\theta.$

(2) $\sin h3\theta = 3 \sin h\theta + 4 \sin h^3\theta$

(3) $\cos h3\theta = 4 \cos h^3\theta + 3 \cos h\theta$

(4) $\sin h2\theta = \dfrac{2+\tan h\theta}{1-\tan h^2\theta}$

(5) $\cos 2\theta = \dfrac{1+\tan h^2\theta}{1-\tan h^2\theta}$

(6) $\sin h\, 2\theta + \cos h\, 2\theta \; \dfrac{1+\tan h\theta}{1-\tan h\theta}$

(7) $\dfrac{\cos h3\theta}{\cos h\theta} + \dfrac{\sin h\, 3\theta}{\sin h\, \theta} = 4 \cos h2\theta$

(8) $\dfrac{\cos h2\theta - 1}{\sin h2\theta} = \dfrac{\sin h\, 2\theta}{\cos h2\theta + 1} = \tan h\theta$

(9) $2\sin h(x+y).\ \sin h(x-y) = \cos 2x - \cos h2y.$

(10) $2\sin hnx.\cos hx + \sin h(n+1)x + \sin h(n-1)x$

(11) $(\cos hx + \sin hx)(\cos hy + \sin hy) = \cos h(x+y).$
$\sin h(x+y)$

(12) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tan hx + \tan hy}{1 + \tan x.\ \tan hy}$

(13) $\tan h2\theta = \dfrac{2 \tan h\theta}{1 + \tan h^2\theta}.$

(14) $\tanh(x-y) = \dfrac{\tan hx - \tan hy}{1 - \tan hx.\ \tan hy}$

(15) $\cos h\,(\alpha + \beta) + r) + \cos h\alpha + \cos h\, \beta + \cos hr$

$$= 4\cos h\, \frac{\beta + r}{2}.\ \ \cos h\, \frac{r+\alpha}{2}.\ \ \cos h\, \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2. $\tan A = \tan\alpha.\ \tan h\beta$; $\tan B = \cot\alpha.\ \tan h\beta$ எனில், $\tan(A+B) = \sin h\, 2\beta.\ \operatorname{cosec} 2\alpha$ என நிறுவுக.

3. $\cos hx = \sec\alpha$ எனில், $\sin hx = \tan\alpha$ என்றும், $\tan hx = \sin\alpha$ என்றும் நிறுவுக.

4. $\sin(x + iy) = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில், $\cos^2 x = \sinh^2 y$ என நிறுவுக.

5. $\sin(x + iy) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில் $\rho^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)$ என்றும் $\tan x . \tan\alpha = \tanh y$ என்றும் நிறுவுக

6. $\sin(x + iy) = A + iB$ எனில்,

$$\frac{A^2}{\cosh^2 y} + \frac{B^2}{\sinh^2 y} = 1 \text{ என்றும், } \frac{A^2}{\sinh^2 y} - \frac{B^2}{\cos^2 x} \text{ என்றும்}$$

நிறுவுக.

7. $\sin(x + iy) = \tan\alpha + i\sec\alpha$ எனில், $\cos 2x . \cosh^2 y = 3$ எனக் காண்க.

8. $\sin(x + iy) = u + iv$ எனில் $\sin^2 x$, $\cosh^2 y$ ஆகிய இரண்டும் $\theta^2 - \theta(1 + v^2) = u^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என நிறுவுக.

9. $\sin(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin$ எனில், $\cos^2\theta = \pm\sin\alpha$ நிறுவுக.

10. $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$ எனில் $x^2 \operatorname{cosec}^2\alpha - y^2\sec^2\alpha = 1$ என்றும் $x^2 \operatorname{sec} h^2\beta + y^2 \operatorname{cosec} h^2\beta = 1$ என்றும் நிறுவுக.

11. $\cos(x + iy) = \alpha + i\beta$ எனில், $(1 + \alpha)^2 + \rho^2 = (\cosh y + \cos x)^2$ என்றும் $(1 - \alpha)^2 + \beta^2 = (\cosh y - \cos x)^2$ என்றும் நிறுவுக. (x, y, α, β மெய்யானவை)

12. $\cos(x + iy) = \cos + \sin\theta$ எனில், $\cos 2x + \cosh 2y = 2$ நிறுவுக.

13. $\cos(A + i\beta) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ எனில், $\sin^2 A = \pm\sin\alpha$ என நிறுவுக.

14. $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ எனில், $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

என்றும், $\phi = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ என்றும் காண்க.

15. $\tan(\theta + i\phi) = (x + iy)$ எனில், $\cot hy \sin h2\phi = \cot x$, $\sin 2\theta$ என நிறுவுக.

16. $\cos(\alpha + i\beta).\cos h(x + iy) = 1$ எனில், $\tan\alpha.\tan\beta = \tan hx . \tan hy$ என நிறுவுக. (α, β, x, y மெய்யானவை)

17. கீழ்வருவனவற்றின் மெய்யான பகுதிகளையும் கற்பனையான பகுதிகளையும் பிரித்தெழுதுக,

(i) $\sin h(\alpha + i\beta)$

[விடை: $\sin h\cos\beta + i\cos h\,\alpha\sin\beta$]

(ii) $\cos h(\alpha+i\beta)$

[விடை: $\cos h\alpha\cos\beta+i\sinh\alpha\sin\beta$]

(iii) $\cot h(\alpha+i\beta)$

[விடை: $\dfrac{1}{\cos h\,2\alpha-\cos\beta}\cdot(\sin h\,2\alpha+i\sin 2\alpha)$]

(iv) $\sec h(\alpha+i\beta)$

[விடை: $2(\cos h\alpha\cos\beta-i\sinh\alpha\sin\beta)\cdot\dfrac{1}{\cos h\,2x+\cos 2\beta}$]

(v) $\operatorname{cosec} h\,(\alpha+i\beta)$

[விடை: $2(\sinh\alpha\cos\beta-i\cos h\alpha\sin\beta)/(\cos h2\alpha-\cos 2\beta)$]

(vi) $\cot(\alpha+i\beta)$

[விடை: $(\sin 2\alpha-i\sin h\,2\beta)\div(\cos h2\beta-\cos 2\alpha)$]

(vii) $\cot^{-1}(\alpha+i\beta)$

[விடை: $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2-1}\right)-\dfrac{i}{2}\tan h^{-1}\left(\dfrac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}\right)$]

(viii) $\tan h\,(2\alpha-3i\beta)$.

[விடை: $(\sin h4\alpha-i\sin 6\beta)/(\cos 6\beta+\cos h4\alpha)$]

(ix) $\sin^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)$

[விடை: $\cos^{-1}(\sqrt{\sin\theta})+i\sin h^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$]

(x) $\cos^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)$

[விடை: $\sin^{-1}(\sqrt{\sin\theta})-i\sin h^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$]

18. $\tan(\alpha+i\beta)=i$ எனில், α தேரப்பெறுதகளன் (Indeterminate) என்றும், B முடிவிலி என்றும் நிறுவுக. (α, β மெய்யானவை)

19. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\cosh^5\theta=\dfrac{1}{16}\left\{\cosh 5\theta+5\cosh 3\theta+10\cos h\theta\right\}$

(ii) $\cosh^6\theta=\dfrac{1}{32}\left\{\cosh 6\theta+6\cosh 4\theta+5\cosh 2\theta\right.$

$$+ 10\Big\}$$

(iii) $\cosh^8\theta = \frac{1}{2^7}\Big\{\cosh 8\theta + \cosh 6\theta + 28\cosh 4\theta$

$$+ 56\cosh 2\theta + 35\Big\}$$

(vi) $\sinh^5 x = \frac{1}{2^4}\Big\{\sin 5x - 5\sinh 3x + 10\sin h x\Big\}$

(v) $\sinh^6 x = \frac{1}{32}\Big\{\cos h6x - 6\cos h4x + 15\cosh$

$$2x - 10\Big\}$$

(vi) $\sinh^7 b = \frac{1}{2^6}\Big\{\sinh 7x - 7\sinh 5x + 21\sin h\, 3x$

$$- 35\sin hx\Big\}$$

(vii) $\sinh^8 x = \frac{1}{2^7}\Big\{\cosh 8x - 8\cosh 6x + 28\cos h\, 4x$

$$- 56\cos h\, 2x + 35\Big\}$$

(viii) $\cos h\, 5\theta = 16\cosh^5\theta - \cos^3\theta + 5\sinh\theta$

(ix) $\sinh 5\theta = 16\sin h^5\theta + 20\sinh^3\theta + 5\sin h\,\theta$

(x) $\frac{\sinh 6x}{\sin hx} = 32\cosh^5 x - 32\cosh^3 x + 6\cosh x$

(xi) $\frac{\sinh 6x}{\cosh x} = 32\sinh^5 x + 33\sinh^3 x + 6\sin hx$

(xii) $\frac{\sinh 7x}{\sinh x} = 64\sinh^6 x + 112\sinh^4 x + 56\sin h^2 x + 7$

20. கீழ்வருவனவற்றைக் கூட்ட :

(i) $\sin hx + \sin h(x+y) + \sin h(x+2y) + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left\{ \text{விடை : } \frac{\sin h\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\sin h\frac{ny}{2}}{\sin h\frac{y}{2}} \right\}$$

(ii) $\cos hx + \cos h(x+y) + \cos h(x+2y) + \ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left\{ \text{விடை} : \frac{\cos h\left(x+\frac{n-1}{2}y\right)\cdot \sin h\frac{ny}{2}}{\sin h\frac{y}{2}} \right\}$$

(iii) $\cos h^2 x + \cos h^2(x+y) + \cos h^2(x+2y) + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left[\text{விடை} : \frac{n}{2} + \frac{\cos h\,(2x+\overline{n-1}y)\sin hny}{2\sin hy)} \right]$$

(iv) $\sin h^2 x + \sin h^2(x+y) + \sin h^2(x+2y) + \ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$\left[\text{விடை} : \frac{n}{2} + \frac{\cos h\,(2x+\overline{n-1}y)\sin hny}{2\sin hy} \right]$$

21. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $\underset{\theta\to 0}{\text{lt}} \dfrac{\sin h\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ $\left[\text{விடை} : \dfrac{1}{3}\right]$

(ii) $\underset{\theta\to 0}{\text{lt}} \dfrac{x\cos hx - \tan hx}{x^3}$ $\left[\text{விடை} : \dfrac{5}{6}\right]$

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \dfrac{\log(1+x)+e^x-1-2\sin hx}{\log(1-x)-e^{-x}-1+2\cos hx}$ [விடை: -1]

(iv) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \dfrac{2\sqrt{1-x}-2\cos hx+\sin hx}{1-\cos hx+x\sin hx}$ [விடை -2]

22. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(i) $\cos h^{-1}x = \sin h^{-1}\sqrt{x^2-1}$

(ii) $\tan h^{-1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \log x \cdot (x > 0)$

(iii) $\tan h^{-1} x + \tan h^{-1} y = \tan h^{-1}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

(iv) $\tan h^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$,

(v) $\cos h^{-1}(\sec\theta) = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$

அத்தியாயம் IX

சிக்கல் கணியத்தின் மடக்கை

9·1. வரைவிலக்கணம்: இரு சிக்கலெண்கள் w, z என்பவை $w = e^z$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குட்பட்டால் zஐ, e அடிக்கு wன் ஒரு மடக்கை என்று கூறப்படும்.

$$w = u+iv\,;\ z=x+iy \text{ என்று கொள்வோம்.}$$

எனவே, $w = u+iv = e^z$ (வரைவிலக்கணம்)

$$= e^{x+iy}$$

$$= e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{i(y+2n\pi)} \quad [n \text{ ஒரு முழுவெண்}]$$

$$= e^{x+iy+2n\pi i}$$

$$= e^{z+2n\pi i}$$

எனவே, வரைவிலக்கணத்திலிருந்து,

e அடிக்கு wன் மடக்கை $= z+2n\pi i$

அல்லது, wன் மடக்கை $= z+2n\pi i$ [e அடிக்கென்பது எப்பொழுதும் தொக்கி நிற்கும்]

(i)லிருந்து, wன் மடக்கை nஐ சார்ந்தது என்று புலனாகிறது. nஐ சார்ந்ததால், wன் மடக்கை ஒரு பன்மதிப்புடைச் சார்பாகிறது (many Valued function). இச் சார்பினை $\text{Log}_e w$ அல்லது $\text{Log}\, w$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

எனவே, (i)லிருந்து $\text{Log}\,w = z+2n\pi i.$ ......(ii)

$n = 0$ என்று (ii)ல் பிரதியிட்டால் Log wன் ஒரு மதிப்பு z என்று கிடைக்கும். இதனை Log wன் முதல் மதிப்பு என்று கூறுகிறோம். மேலும், இம்முதல் மதிப்பை $\text{Log}_e w$ அல்லது Log w என்று குறிப்பது வழக்கம். ஆகையால், $\text{Log} = z.$ ......(iii)

(ii), (iii)லிருந்து $\text{Log}\, w = \text{Log}\, w+2n\pi i$ ......(iv) என்று கிடைக்கிறது.

9·2. இப்பொழுது நாம் $\log w$; $\log w$ ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்போம். முதலில் log wன் மதிப்பைக் காணலாம்.

§ 9·1 கூறியதுபோல் $w = u+iv$

$z = x+iy$ என்று கொள்ளலாம்.

(x, y, u, v ஆகியவை மெய்யான எண்களே)

ஆகையால், $u+iv=w = e^z$

$$= e^{x+iy}$$

$$= e^x \{ \cos y+i \sin y \}.$$

மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் பிரித்தால்,

$u = e^x \cos y$ என்றும்

$v = e^x \sin y$ என்றும் கிடைக்கும்.

எனவே, $u^2+v^2 = e^{2x}$. .... (i)

$\tan y = \frac{v}{u}$. ....(ii)

(i)லிருந்து, $x = \frac{1}{2} \log (u^2+v^2)$ (வரைவிலக்கணம்) என்றும்

(ii)லிருந்து $y = \tan^{-1} \frac{v}{u}$ என்றும் கிடைக்கும்.

ஆகையால், § 9·1லிருந்து,

$$\log w = z$$
$$= x+iy$$

அல்லது, $\log (u+iv)=\log w$

$$= \frac{1}{2} \log (u^2+v^2)+i \tan^{-1}\frac{v}{u}.$$

எனவே, $\log (u+iv)=\log w$

$$= \frac{1}{2} \log (u^2+v^2)+i \tan^{-1} \frac{v}{u} + 2n\pi i \quad (\S 9{\cdot}1 \text{ (iv)})$$

குறிப்பு (1):- $v = 0$

$$\text{Log } u = \frac{1}{2} \log u^2+i \tan^{-1}0+2n\pi i$$
$$= \log u+ip\pi+2n\pi i$$ (p ஒரு முழுவெண்)

குறிப்பு (2): x ஒரு மெய்யான எண்ணாகில் $\log \frac{1}{x} = -\log$ என்று நாம் அறிந்துள்ளோம். இப்பொழுது w ஒரு சிக்கலெண்ணாகில், $\text{Log} \left\{ \frac{1}{w} \right\} = -\text{Log } w$ என்று நாம் நிருபிப்போம்.

§ 9·1ல் உள்ளதுபோலவே, $w=e^z$ என்று கொள்ளலாம்.

ஆகையால், $\frac{1}{w}=\frac{1}{ez}= e^{-z}$

$$=e-(x+iy)$$
$$=e-x \cdot {}_e-iy$$
$$=e-x \{ \cos y-i \sin y \}$$
$$=e-x \{ \cos (2n\pi+y) -i \sin (2n\pi+y) \}$$
$$=e-x \cdot {}_e-i(2n\pi+y)$$

$$= e^{-x-iy-2n\pi i}$$
$$= e^{-z-2n\pi i}.$$

எனவே, வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\text{Log}\frac{1}{w} = -z-2n\pi i$$
$$= -\text{Log}\, w \qquad (\S\, 9{\cdot}1.\ \ (ii))$$

மேலும், x, y இரு மெய்யான எண்களாகில்,

$$\text{Log}\, xy = \log x + \log y$$

$\log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$ என்று நாம் அறிவோம்.

இதுபோலவே, w_1, w_2 இரு சிக்கலெண்ணுகிலும்,

$\text{Log}\, w_1, w_2 = \text{Log}\, w_1 + \text{Log}\, w_2$ என்றும்

$\text{Log}\dfrac{w_1}{w_2} = \text{Log}\ w_1 - \text{Log}\ w_2$ என்றும் நாம் சுலபமாக நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு (3):—$u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ எனில்,

$$\text{Log}\,(u+i+v) = \text{Log}\,(r\cos\theta + ir\sin\theta)$$
$$= \text{Log}\, r\,\{\cos(2n\pi+\theta) + i\sin(2n\pi+\theta)\}$$

(n ஒரு முழுவெண்)

$$= \text{Log}\,[r \cdot e^{i(2n\pi+\theta)}]$$
$$\text{Log}\, r + \text{Log}\,[e^{i(2n\pi+\theta)}]$$

9.3. வரை விலக்கணம்: w, z இரு சிக்கலெண்களாகில், $w^z = e^{z \log w}$.

$\log w$, பன் மதிப்புடையச் சார்பாகையால், w^zம் பன் மதிப்புடையச் சார்பாகும். எனவே, w^zன் முதல் மதிப்பு $e^{z\log w}$ ஆகும்.

முன்புபோலவே, $w = u + iv$ என்றும், $z = x + iy$ என்றும் கொள்ளுவோம்.

எனவே, $$w^z = (u+iv)^{x+iy}$$
$$= e^{(x+iy)\log(u+iv)} \text{ (வரை விலக்கணம்)}$$
$$= e^{(x+iy)\left\{\frac{1}{2}\log(u^2+v^2) + i\tan^{-1}\frac{v}{u} + 2n\pi i\right\}}$$

இப்பொழுது $u = r\cos\theta$ என்றும், $v = r\sin\theta$ என்றும் இருப்பின், $r^2 = u^2 + v^2$ என்றும்,

$\tan\theta = \frac{v}{u}$ அல்லது $\theta = \tan^{-1}\frac{v}{u}$ என்றும் கிடைக்கும்

ஆகையால், $w^z = e^{(x+iy)\{\frac{1}{2}\log r^2 + i\theta + 2n\pi i\}}$

$= e^{(x+iy)\{\log r + i(\theta + 2n\pi)\}}$

$= e^{x\log r - y(\theta+2n\pi) + i\{y\log r + x(\theta+2n\pi)\}}$

$= e^{x\log r} \cdot e^{-y(\theta+2n\pi)} \cdot e^{i\{y\log r + x(\theta+2n\pi)\}}$

$= r^x \cdot e^{-y(\theta+2n\pi)} [\cos\{y\log r + x(\theta+2n\pi)\} + i\sin\{y\log r + x(\theta+2n\pi)\}]$

$n = 0$ என்று பிரதியிட்டால் w^zன் முதல் மதிப்பு கிடைக்கும். எனவே, w^zன் முதல் மதிப்பு $= r^x \cdot e^{-y\theta} \cdot [\cos\{y\log r + x\theta\} + i\sin\{y\log r + x\theta\}]$

குறிப்பு—1: மேற்கண்ட வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $\log w^z = z\log w$ என்று நாம் சுலபமாக நிரூபிக்கலாம்.

$\log w^z = z$ எனில்,

$w^z = e^z$ (வரைவிலக்கணம் § 9·1)

ஆனால், $w^z = e^{z\log w}$ (வரைவிலக்கணம் § 9·3)

ஆகையால், $= e^{z\,\mathrm{Log}\,w} = e^z$

எனவே, $= z\,\mathrm{Log}\,w = z = \mathrm{Log}\,w^z$.

குறிப்பு 2: w^zன் மதிப்பு (முதல் மதிப்பு) முழுவதும் மெய்யானால் $\sin\{y\log r + x\theta\} = 0$. அதாவது, $y\log r + x\theta = n\pi$ (n ஒரு முழுவெண்). அல்லது $y\log\sqrt{x^2+y^2} + x\tan^{-1}\frac{y}{x} = (2n)\frac{\pi}{2}$.

w^zன் மதிப்பு முழுவதும் கற்பனையானால் $\cos\{y\log r + x\theta\} = 0$. அதாவது, $\frac{1}{2}y\log\sqrt{x^2+y^2} + x\tan^{-1}\frac{y}{x} = m\frac{\pi}{2}$. ($m$ ஒரு ஒற்றை முழுவெண். எனவே, $(u+iv)^{x+iy}$ன் மதிப்பு (முதல் மதிப்பு) முழுவதும் மெய்யாகவோ அல்லது கற்பனையாகவோ இருக்கவேண்டுமாயின் $\frac{1}{2}y\log(u^2+v^2) + x\tan^{-1}\frac{v}{u}$ என்பது $\frac{\pi}{2}$ன் இரட்டை அல்லது ஒற்றை மடங்காக இருக்கவேண்டும்.

9·4.

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1. $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots\ldots(a_n+ib_n) = A+iB$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(i) $(a_1^2+b_1^2)\ (a_2^2+b_2^2)\ldots(a_n^2+b_n^2) = A^2+B^2$

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}\ \tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2}+\ldots+\tan^{-1}\dfrac{bn}{an}+n\pi\ \tan^{-1}\dfrac{B}{A}$

$\therefore\ (a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(an+ibn) = A+iB,$ (n ஒரு முழுவெண்)

இரு பக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுக்கவும் (மடக்கையின் முதல் மதிப்பு).

$\therefore\ \log[(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(an+ibn)] = \log(A+iB)$

அதாவது,

$\log(a_1+ib_1)+\log(a_2+ib_2)+\ldots+\log(an+ibn) = \log(A+iB)$

(§ 9·2. குறிப்பு (2))

அதாவது,

$\frac{1}{2}\log(a_1^2+b_1^2)+i\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}+\frac{1}{2}\log(a_2^2+b_2^2)+i\tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2}$

$+\ldots+\frac{1}{2}\log(a_n^2+b_n^2)+i+\tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n}+in\pi = \frac{1}{2}\log(A^2+B^2)$

$+i\tan^{-1}\dfrac{B}{A}$ (§ 9·2).

அதாவது,

$\frac{1}{2}\{\log(a_1^2+b_1^2)+\log(a_2^2+b_2^2)+\ldots+\log(an^2+bn^2)\}$

$+i\left\{\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2}+\ldots+\tan^{-1}\dfrac{b_n}{b_n}+n\pi\right\}$

$= \frac{1}{2}\log(A^2+B^2)+i\tan^{-1}\dfrac{B}{A}$

அதாவது, $\frac{1}{2}\log[(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\ldots(an^2+bn^2)]$

$+i\left\{\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2}+\tan^{-1}\dfrac{bn}{an}+n\pi\right\}$

$= \frac{1}{2}\log(A^2+B^2)+i\tan^{-1}\dfrac{B}{A}.$

இரு பக்கமும், மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன்படுத்த,

$\frac{1}{2}\log[(a^2{}_1+b^2{}_1)(a_2{}^2b_2{}^2)\ldots an^2+bu^2)] = \frac{1}{2}\log(A^2+B^2)$

அல்லது, $(a^2{}_1+b^2{}_1)(a^2{}_2+b^2{}_2)\ldots(an^2+bn^2) = A^2+B^2.$

மேலும், $n\pi+\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\dfrac{b^2}{a^2}$

$+\ldots\tan^{-1}\dfrac{b^n}{a^n} = \tan^{-1}\dfrac{B}{A}.$

மாதிரி 2. $\tan\log(x+iy) = a+ib\ (a^2+b^2 1\neq 1)$ எனில்

$$\tan \log (x^2+y^2) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$ என்று நிறுவுக.

$$\tan \log (x+iy) = a+ib \text{ ஆகையால்,}$$

$$\log (x+iy) = \tan^{-1}(a+ib) \qquad \ldots\ldots(A)$$

§ 9·2லிருந்து, $\log (x+iy) = \frac{1}{2}\log (x^2+y^2)+i\tan^{-1}\frac{y}{x}$.

§ 8·6 (மாதிரி 8, குறிப்பு)லிருந்து,

$$\tan^{-1}(a+ib) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a}{1-a^2-b^2}\right)+i.\tfrac{1}{2}\tan h^{-1}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$

எனவே, (A)யிலிருந்து,

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)\times i\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2-b^2}+i.\ \tfrac{1}{2}\tan h^{-1}\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

இரு பக்கமும் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்டுத்த.

$$\tfrac{1}{2}\log (x^2+y^2) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2-b^2}.$$

அதாவது, $\tan \log (x^2+y^2) = \dfrac{2a}{1-a^2-b^2}$.

$$(\because \quad a^2+b^2 \neq 1)$$

மாதிரி 3. i^iன் எல்லா மதிப்புக்களும் மெய்யானவை என நிறுவுக. மேலும் அவைகளில், ஒன்றைவிட சிறியதாக இருக்கும் மதிப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}e^{\pi/2}$ cosec π என்றும் நிறுவுக.

$$z = i^i \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே,}\quad \text{Log } z = \text{Log } i^i$$

$$= i \text{ Log } i$$

$$= i \text{ Log } e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$= i \text{ Log } e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$$

$$= i.i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$= -(2n+\tfrac{1}{2})\pi \quad [n \text{ ஒரு முழுவெண்}]$$

எனவே, $z = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$ (§ 9·1 வரைவிலக்கணம்)

அல்லது, $i^i = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$ (iஐ சாரா தது)

ஆகையால், i^iன் மதிப்புக்கள் எல்லாம் மெய்யானவை.

இம் மதிப்புக்களில் ஒன்றைவிடச் சிறியதாயிருப்பவையின் கூட்டுத் தொகையைக் கண்டுபிடிக்க.

$i^i < 1$ எனில்,

$$e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi} < 1.$$

அதாவது $\log e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi} < \log 1.$

அல்லது, $-(2n+\frac{1}{2})\pi < 0.$

அதாவது, $(2n+\frac{1}{2})\pi < 0.$

எனவே, $n > 0.$

ஆகையால், $n > 0$ எனில் i^iன் மதிப்பு ஒன்றைவிட சிறியதாகும். இம் மதிப்புக்கள் பின்வருமாறு.

$$e^{-\pi/2},\ e^{-(2+\frac{1}{2})\pi},\ e^{-(4+\frac{1}{2})\pi},\ldots\ldots$$

அதாவது, $e^{\frac{-\pi}{2}},\ e^{-(2+\frac{1}{2})\pi},\ e^{-(4+\frac{1}{2})\pi},\ldots\ldots$

இவைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= e^{-\pi/2}.\left\{1+e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+\ldots\ldots\right\}$$

$$= e^{\frac{-\pi}{2}}\left\{\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\right\}$$ { $\because 1, e^{-2\pi}, e^{-4\pi}$ .... ஒரு பெருக்கற் குவித்தொடர். இதன் பொது வித்தியாசம் $= e^{-2\pi}$ }.

$$= e^{-\pi/2}.\left\{\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{\pi/2}.\frac{2}{e^{\pi},e^{-\pi}}$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{\pi/2}\ \text{cosec}\ h\pi.$$

மாதிரி 4: $\log_i i$ன் பொதுமதிப்பைக் காண்க.

$z = \log_i i$ என்று கொள்ளலாம்.

ஆகையால், §9·1 வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$i = i^z.$

இரு பக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுக்கவும்.

எனவே, $\text{Log}\ i = \text{Log}\, i^z$

$= z\text{Log}\, i.$

ஆகையால் $z = \dfrac{(2p+\frac{1}{2})\pi i}{(2q+\frac{1}{2})\pi i}$ (p, q முழுவெண்கள்)

$$= \frac{4p+1}{4q+1}.$$

மாதிரி 5: $(1+i\cot\theta)^{(1+\cot\theta)}$ ன் மதிப்பு முழுவதும் மெய் யாகில்,

அதன் ஒரு மதிப்பு $\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\sin^2\theta}}$ என்று நிறுவுக.

$z = (1 + i\cot\theta)^{(1+i\cot\theta)}$ எனக் கொள்.

$\therefore$ $\text{Log } z = \log (1 + i\cot\theta^{(1+i\cot\theta)}$ எனக் கொள்.

$$= (1+i\cot\theta) \text{ Log } (1+i\cot\theta)$$

$$= (1+i\cot\theta)\left\{\tfrac{1}{2}\log(1+\cot^2\theta)+i\tan^{-}(\cot\theta)+2n\pi i\right\}$$

$$= (1+i\cot\theta)\left\{\log \text{cosech}+i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2n\pi i\right\}$$

$$= \left[\log\text{cosec}\theta - \{\cot\theta\}\left\{\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right\}\right]$$

$$+i\left[\cot\theta\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right]$$

எனவே $z = e^{\left[\log\text{cosec}\theta-(\cot\theta)\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right)\right]}\times$

$$= \frac{i}{e}\left[\cot\theta\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right]$$

$$= e^{\left[\log\text{cosec}\theta-(\cot\theta)\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right)\right]}\times$$

$$\left[\cos\left\{\cot\theta\cdot\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right\}\right.$$

$$\left.+i\sin\left\{\cot\theta\cdot\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right\}\right].$$

zன் மதிப்பு மெய்யாகையால்,

$$\sin\left\{\cot\theta\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right\} = 0.$$

அதாவது, $\cot\theta\cdot\log\text{cosec}\theta+\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi = m\pi.$ ($m>0$ முழுவெண்)

$\cot\theta\log\text{cosec}\theta + \frac{\pi}{2} - \theta + 2n\pi = 0$ ($\because$ mன் ஒரு மதிப்பு $= \theta$)

அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta + 2n\pi = -\cot\theta.\log\operatorname{cosec}\theta.$

ஆகையால் zன் முதல் மதிப்பு (அல்லது ஒரு மதிப்பு)

$$= {}_e[\log\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\,(-\cot\theta\log\operatorname{cosec}\theta)]\cdot\ [\cos O + i\sin O]$$

$$= {}_e[\log\operatorname{cosec}\theta + \cot^2\theta.\log\operatorname{cosec}\theta]$$

$$= {}_e(1 + \cot^2\theta)\log\operatorname{cosec}\theta$$

$$= {}_e(\log(\operatorname{cosec}\theta)^{\operatorname{cosec}^2\theta} \quad (\therefore e^{\log x} = x$$

$$= (\operatorname{cosec})^{\operatorname{cosec}^2\theta} \ (e \log x = x$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\sin^2\theta}}.$$

மாதிரி 6. $i^{i\ldots\infty}$

$i^{i} = A + iB$ எனில் $A^2B^2 = {}_e^{-(4\pi n+1)\pi B}$ என்றும்

$B = A\tan\left[\left(\frac{4n+1}{1}\right)\right]$ என்றும் நிறுவுக.

$$A + iB = i^{i^{i\ldots\ldots\infty}}$$

$$= i^{(i^{i\ldots\ldots\infty})}$$

$$= i^{A+iB}$$

$$= {}_e^{(A+iB)\log i} \text{ (வரைவிலக்கணம் § 9.3)}$$

$$= {}_e^{(A+iB)\left\{\frac{\pi}{2}i + 2n\pi i\right\}}$$

$$= {}_e^{(A+iB)\frac{(4n+1)}{2}\pi i}$$

$$= {}_e^{-B\frac{(4n+1)}{2}\pi + A\frac{(4n+1)}{2}\pi i}$$

$$= {}_e^{-B\frac{(4n+1)}{2}\pi}\ {}_e^{A\frac{(4n+1)}{2}\pi i}$$

$$= e^{-\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi B}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi A + i\sin\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi A\right\}$$

$$A = e^{-\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi B}\cos\left[\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi A\right] \quad \text{......(i)}$$

$$B = e^{-\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi B}\sin\left[\left(\frac{4n+7}{2}\right)\pi A\right] \quad \text{......(ii)}$$

(i)ஐயும், (ii)ஐயும் வர்க்கம் செய்து கூட்ட,

$$A^2+B^2 = \left[e^{-\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi B}\right]^2$$

$$= e^{-(4n+1)\pi B}.$$

(ii)ஐ (i)ஆல் வகுக்க.

$$\frac{A}{B} = \tan\left[\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi A\right]$$

அல்லது, $B = A\tan\left[\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi A\right]$

9·5. கிரகிரியின் தொடர் (Gregory's series)

$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ எனில் $\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots$ (மு. வ.)

$$1+i\tan\theta = 1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$$

எனவே, $1+i\tan\theta = \sec\theta \cdot e^{i\theta}$)

இருபக்கமும் மடக்கை எடுக்கவும்.

$$\therefore \log(1+i\tan\theta) = \log(\sec\theta \cdot e^{i\theta})$$

$$= \log\sec\theta + i\theta. \quad \text{......(A)}$$

$\because -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, ஆகையால் $|\tan\theta| < 1$.

ஆனால், $\log(1+i\tan\theta) = i\tan\theta - \frac{(i\tan\theta)^2}{2} + \frac{(i\tan\theta)^3}{3} \ldots\ldots$

$$= i\tan\theta + \frac{\tan^2\theta}{2} - \frac{i\tan^3\theta}{3} - \frac{\tan^4\theta}{4} + \frac{i\tan^5\theta}{5} \ldots\ldots\infty$$

$$= i\{\tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta \ldots\ldots\}$$

$$+ \{\tfrac{1}{2}\tan^2\theta - \tfrac{1}{4}\tan^4\theta + \tfrac{1}{6}\tan^6\theta \ldots\ldots\} \quad \text{......(B)}$$

ஆகையால், (A), (B)யிலிருந்து,

$$\log \sec\theta + i\theta = \{ \tfrac{1}{2}\tan^2\theta - \tfrac{1}{4}\tan^4\theta + \tfrac{1}{6}\tan^6\theta + \ldots \} + i\{ \tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta \ldots \}$$

இருபக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$\theta = \tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta \ldots \qquad \ldots(C)$$

குறிப்பு (1) $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ ஆகையால் $-1 \leq \tan\theta \leq 1$.

$\tan\theta = x$ என்று (C)யில் பிரதியிட்டால்,

$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots (-1 \leq x \leq 1)$ என்று கிடைக்கும்.

இதற்கும் கிரகரியின் தொடர் என்றுதான் பெயர்.

குறிப்பு (2):- $\tan^{-1}x$ன் விரித்தலை நாம் மற்றுமொரு முறையிலும் பெறலாம்.

$\log(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\tan^{-1}\frac{y}{x}$ என்று நாம் அறிவோம். இங்கு, $x-1$ என்று பிரதியிட்டால்

$$\log(1+iy) = \tfrac{1}{2}\log(1+y^2) + i\tan^{-1}y. \qquad \ldots(i)$$

மேலும் $|x| < 1$ எனில், இயற்கணிதத்திலிருந்து

$\log(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே $|iy|\ 1$ (அதாவது $|y| \leq 1$) எனில்

$$\tfrac{1}{2}\log(1+iy) = iy - \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3} + \frac{(iy)^4}{4} + \frac{(iy)^5}{5} - \ldots$$

$$= i\left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots\right) + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right) \quad (\because\ i^2 = -1, \ldots)$$

$$\ldots(ii)$$

எனவே (i), (ii)லிருந்து,

$|y| \geq 1$ எனில்,

$$\tfrac{1}{2}\log(1+y^2) + i\tan^{-1}y = \tfrac{1}{2}\left(y^2 - \frac{y^4}{2} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots\right)$$

இரு பக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

$$\tan^{-1}y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots$$

எனவே, $$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad (|x| \leq 1)$$

குறிப்பு (3) :- $\tan\theta$ன் மதிப்பு xக்குச் சமமாகில் $\tan(n\pi+\theta)$ன் மதிப்பும் xக்குச் சமமாகும். (n ஒரு முழுவெண்).

எனவே, n எவ்வெண்ணாகிலும் $\tan(n\pi+\theta)$ $(=x)$ என்பது ஒரு தனிப் பெறுமானச் சார்பாகும் (sinlge valued function).

மேலும், $x=\tan\theta=\tan(n\pi+\theta)$ ஆகையால்,

$\tan^{-1}x=n\pi+\theta$ இம் மதிப்பு nஐச் சார்ந்ததால் $\tan^{-1}x$ ஒரு பன் மதிப்புடைச் சார்பாகும். இப்பன்=மதிப்புடைச் சார்பு $\tan^{-1}x$ஐ $\mathrm{Tan}^{-1}x$ என்று எழுதுவது வழக்கம். இதன் முதன் மதிப்பு $x(n=0)$. இம் மதிப்பைத்தான் $\tan^{-1}x$ என்று எழுதுவோம். எனவே,

$$\tan^{-1}x=n\pi+\tan^{-1}x.$$

9·6. தேற்றம்: $n\pi-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n ஒரு முழுவெண்) எனில் $\theta-n\pi=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\ldots\ldots$

$\theta-n\pi=\phi$ என்று கொள்ளலாம்.

ஆகையால் $\theta=n\pi+\phi$.

மேலும், θ என்பது $n\pi-\frac{\pi}{4}$க்கும் $n\pi+\frac{\pi}{4}$க்கும் இடையிலிருப்பதால், ϕ என்பது $-\frac{\pi}{4}$க்கும் $\frac{\pi}{4}$க்கும் இடையே அமையும்.

$$\begin{aligned}1+i\tan\theta&=1+i\tan(n\pi+\theta)\\&=1+i\tan\phi\\&=\frac{\cos\phi+i\sin\phi}{\cos\phi}\\&=\sec\phi\cdot e^{i\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\log(1+i\tan\theta)&=\log[\sec\phi\cdot e^{i\phi}]\\&=\log\sec\phi+\log e^{i\theta}\\&=\log\sec\phi+i\phi.\qquad\ldots\ldots\text{(i)}\end{aligned}$$

$n\pi-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq n\pi+\frac{\pi}{4}$ ஆகையால் $-1\leq\tan\theta\leq 1$.

எனவே, $\log(1+i\tan\theta)=i\tan\theta-\frac{(i\tan\theta)^2}{2}+\frac{(i\tan\theta)^3}{3}-\ldots\ldots$

$$=i\left\{\tan\theta-\frac{\tan^3\theta}{3}+\frac{\tan^5\theta}{5}-\ldots\ldots\right\}$$

$$+\left\{\frac{\tan^2\theta}{2}-\frac{\tan^4\theta}{4}+\ldots\ldots\right\}\qquad\ldots\ldots\text{(ii)}$$

எனவே, $|\tan\theta| < 1$ எனில், (i), (ii)லிருந்து,

$$\log\sec\phi + i\phi = \left\{\frac{\tan^2\theta}{2} - \frac{\tan^4\theta}{4} + \ldots\ldots\right\} + i\left\{\tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \ldots\ldots\right\}$$

இருபக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த,

$$\phi = \tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \ldots\ldots$$

அதாவது, $\theta - n\pi = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots$

குறிப்பு : மேற்கண்ட தொடரை கிரகரியின்றொடரைப் பயன் பயன்படுத்தியும் நிரூபிக்கலாம்.

$$\theta = \tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots \left(-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan(n\pi+\theta) - \tfrac{1}{3}\tan^3(n\pi+\theta) + \tfrac{1}{5}\tan^5(n\pi+\theta) - \ldots\ldots$$

$n\pi + \theta = \phi$ என்க.

ஆகையால் $n\pi - \frac{\pi}{4} \le \phi \le n\pi + \frac{\pi}{4}$. மேலும்,

$$\phi - n\pi = \tan\phi - \tfrac{1}{3}\tan^3\phi + \tfrac{1}{5}\tan^5\phi - \ldots\ldots$$

9·7

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி. 1. $2(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots)$

$$= \frac{2x}{1-x^2} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \ldots\ldots$$

$2(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots)$

$= 2\tan^{-1}x$

$= \tan^{-1}x + \tan^{-1}x$

$= \tan^{-1}\dfrac{x+x}{1-x\cdot x}$

$= \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

$$\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \tfrac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \ldots$$

குறிப்பு :- $|x| > 1$ எனில் இடது புறம் இருக்கும் தொடர் ஒரு குவித்தொடர் என்று நாம் அறிவோம். மேலும் வலதுபுறம் இருக்கும் தொடர் குவித் தொடராக இருக்கவேண்டுமாயின் $\left|\dfrac{2x}{1-x^2}\right|$ ஒன்றினைவிடச் சிறியதாயிருக்கவேண்டும்.

எனவே $\left\{\frac{2x}{1-x^2}\right\}<1$ அதாவது $|2x| < |1-x^2|$

x மெய்யானதால் x^2 ஒரு நேர் எண்ணாகும்.

எனவே $|1-x^2| = 1-|x^2|$

ஆகையால் $|2x| < 1-|x^2|$ என்று x இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $|x2| + |2x| <|$

அல்லது $|x^2| + |2x—+| < 2.$

அல்லது $|x+1|^2 > 2.$

எனவே, $|x+1| < \sqrt{2}.$

ஆகையால், வலதுபுறம் இருக்கும் தொடர் குவித்தொடராக வேண்டுமாயின் $|x+1| < \sqrt{2}$ என்றிருக்கவேண்டும். இடதுபுறம் இருக்கும் தொடர் குவித்தொடராக இருக்கவேண்டுமாயின் $|x| <|$ எனவே, இவ்விரு தொடர்களும் சமமாயிருக்கவேண்டுமாயின் $|x| < \sqrt{2}-1$ என்று இருத்தல்வேண்டும்.

மாதிரி 2. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ என்று நிறுவுக.

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{1}{3(\sqrt{3})^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^4}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^6}+\ldots\ldots$$

$$=\sqrt{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{5})^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^7}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\text{(முதல் மதிப்பு)}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

மாதிரி 3. $\frac{17}{21}-\frac{713}{81\cdot 343}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3}\cdot 9^{1-n}+7^{1-2n}\right\}$ $+\ldots\ldots$

$=\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

$$\tfrac{17}{21}-\frac{713}{81\cdot 343}+\ldots\ldots+\frac{-(1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3}\cdot 9^{1-n}+7^{1-2n}\right\}+\ldots\ldots$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{2}\cdot 9^{1-}+{}^{n}7^{1-2n}\right\}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3}\cdot 3^{2-2n}+7^{1-2n}\right\}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3^{2n-1}}+\frac{1}{7^{2n-1}}\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)-\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)+\ldots\ldots$$

$$=2\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\ldots\ldots\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}-\ldots\ldots\right\}$$

$$=2.\ \tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}:$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3\cdot 3\cdot 7}}{1-\frac{1}{3\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 3}}$$

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+x-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{50}{50}$$

$$=\frac{\pi}{4}\ \text{(முதல் மதிப்பு)}$$

மாதிரி. 4. θ மிகவும் சிறியதாகில்

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\,\log(1-\theta)+\tan^{-1}\theta\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\frac{\sqrt{3}-1}{3}\,\theta$$

என நிரூபி. (θ^3 மற்றும் θன் உயர்ந்த அடுக்குகள் தவிர்க்கத் தக்கவை)

θ^3 மற்றும் θன் உயர்ந்த அடுக்குகள் தவிர்க்கத்தக்கவைகையால்

$$\sin\pi\simeq\theta.$$

$$\cos\theta\simeq 1-\frac{\theta^3}{2}.$$

$$\tan^{-1}\theta\simeq\theta.$$

$$\log(1-\theta\simeq\left(-\theta-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

மேலும் $\sqrt{1+\sin\theta} = (1+\sin\theta \log(1-)\theta \simeq \left(-\theta-\frac{\theta^2}{2}\right)^{1/2}$

$$= \left(1+\tfrac{1}{2}\sin\theta-\tfrac{1}{8}\sin^2\theta+\frac{3}{48}\sin^3\theta \ldots\right)$$

$$\simeq (1+\tfrac{1}{2}\theta-\tfrac{1}{8}\theta^2)$$

எனவே $\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\quad \log(1-\theta)+\tan^{-1}\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$

$$\simeq \tfrac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{8}\right)\cdot\left(-\theta-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$+\theta\cdot\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta+\tfrac{1}{2}\sin\theta\right\}$$

$$\simeq -\tfrac{1}{2}\theta\left(1+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{8}\right)\left(1+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$+\theta\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\theta\right\}$$

(அ. து.) $= \frac{1}{2}\theta\left\{-\left(1+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{8}\right)\left(1+\frac{\theta}{2}\right)\right.$

$$\left.+\theta+\sqrt{3}\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\theta\cdot\left\{\sqrt{3}-1-\frac{4\sqrt{3}+1}{8}\theta^2\right\}$$

$\simeq \frac{\sqrt{3}-1}{2}\theta$ ($\because \theta^3$ தவிர்க்கத்தக்கது)

அப்பியாசம் 9

1. கீழ்க் கண்டவற்றின் பொது மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\log 1$ [விடை : $2n\pi i$]

(ii) $\log(-1)$ [விடை: $2n+1)\pi i$]

(iii) $\log i$ [விடை: $2n+\frac{1}{2})\pi i$]

(iv) $\log(-i)$ [விடை: $2n+\frac{1}{2})\pi i$]

(v) $\log a$ [விடை : $a>0$ எனில்]
$\log a+2n\pi i$;
$a<0$ எனில் $\log a+(2n+1)\pi i$

(vi) $\log ai$ [விடை : $a<0$ எனில் $\log a+(2n+\frac{1}{2})\pi i$
$a<0$ எனில் $\log a+(2n-\frac{1}{2})\pi i$].

(vii) $\log e$ [விடை: $1+2n\pi i$].

(viii) $\log(-e)$ [விடை: $(1+2n+1)\pi i$].

(ix) $\dfrac{\log(-i)}{(-i)}$ [விடை: $\dfrac{4n-1}{4m-1}$ n, m முழுவெண்கள்].

(x) $\log(1+i)$ [விடை: $\frac{1}{2}\log 2 + i(8n+1)\frac{\pi}{4}$].

(xi) $\log(1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

[விடை: $2\log 2\cos\theta + i(2n\pi+\theta)$]

(xii) $\log(a-bi)$

[விடை: $\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) - i\tan^{-1}\dfrac{b}{a} + 2n\pi i$]

(xiii) $\dfrac{\log(a\pm bi)}{i}$

[விடை: $\dfrac{\log\sqrt{a^2+b^2} \pm i\tan^{-1}\dfrac{b}{a} + 2n\pi i}{(2m+\frac{1}{2})\pi i}$]

(xiv) $\log\dfrac{a+ib}{a-ib}$. [விடை: $2i\left(\tan^{-1}\dfrac{b}{a} + n\pi\right)$]

(xv) $\log\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$. [விடை: $2i(n\pi+\alpha)$].

2. $\log\sin(x+iy) = A+iB$ எனில், $2e^{2A} = \cosh 2y - \cos 2x$ என்று நிறுவுக.

3. $\pm i^{\pm i}$ ன் மதிப்பு முழுவதும் மெய்யானது என்று காண்க.

4. $i^a = \cos\{(2n+\frac{1}{2})\pi a\} + i\sin\{(2n+\frac{1}{2})\pi n\}$ என்று நிறுவுக.

5. $(1+i)^{1+i} = A+iB$ எனில் $\tan^{-1}\dfrac{B}{A}$ ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{1}{2}\log 2 + \dfrac{\pi}{4}$ என்று நிறுவுக.

6. $(1-i)^{(1-i)} = A+iB$ ன் முதல் மதிப்பை எடுத்துக் கொண்டால், $A+B = (AB-1)\tan\log\sqrt{2}$ என்று நிறுவுக.

7. $(1+i)^{1-i}$, $(1-i)^{1+i}$ ஆகிய இரு சிக்கலெண்களின் முதல் மதிப்புக்களின் விகிதம் 2^i என்று நிறுவுக.

8. $\underset{i}{\log}(1+i)$ன் முதல் மதிப்பு $e^{-\frac{\pi^2}{8}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\log 2\right)\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\log 2\right)\right\}$ என்று காண்க.

9. $\frac{(1+i)^{1+i}}{(1-i)^{1-i}}=A+iB$ எனில் $\tan^{-1}\frac{B}{A}$ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{\pi}{2}+\log 2$ என்று நிறுவுக.

10. $i^{\alpha+i\beta}=\alpha+i\beta$ எனில் $\alpha^2+\beta^2=e^{-(4n+1)\pi\beta}$ என்றும், $\frac{\beta}{\alpha}$ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{2\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}}{\log(\alpha^2+\beta^2)}$ என்றும் நிறுவுக.

11. $(a+ib)^{\log(a+ib)}$ன் முதல் மதிப்பு

$$e^{\log r\cdot e-\theta^2}\cdot\{\cos(2\theta\log r)+i\sin(2\theta\log r)\}\cdot$$

$\left(r^2=a^2+b^2,\ \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ என்று நிறுவுக.

12. $x^{x+iy}=(x+iy)^{\alpha+i\beta}$ எனில் (முதல் மதிப்பை மட்டும் எடுத்துக்கொள்ள) $x=\alpha\log_x(x^2+y^2)-\beta\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\log_x e$ என்றும் $2(\alpha x+\beta y)=(\alpha^2+\beta^2)\cdot\log_x(x^2+y^2)$ என்றும் நிறுவுக.

13. $(1+\sqrt{3}i)^{3+2i}$ன் மதிப்புக்களின் குணகங்கள் ஒரு பெருக்கு விருத்தியிலும், வீச்சம் ஒரு கூட்டு விருத்தியிலும் இருப்பதாக நிறுவுக.

14. $(1+i)^{1+4i}$ன் மதிப்புக்களின் குணகங்கள் ஒரு பெருக்கு விருத்தியிலும், வீச்சம் ஒரு கூட்டு விருத்தியிலும் இருப்பதாக நிறுவுக.

15. $\log\log(1+i)=\alpha+i\beta$ எனில், $e^{\pi\cot\beta}=4$ என்று நிறுவுக.

16. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4}$ எனில் $\theta=\pi+\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\ldots$

(ii) $\frac{7\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{9\pi}{4}$ எனில் $\theta=2\pi+\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\ldots\ldots$

(iii) $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$ எனில் $\frac{\pi}{2}-\theta=\cot\theta-\frac{\cot^3\theta}{3}+\frac{\cot^5\theta}{5}-\ldots$

(iv) $-\frac{3\pi}{4} \le \theta \le -\frac{\pi}{4}$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{2} - \cot\theta + \frac{\cot^3\theta}{3}$

$$- \frac{\cot^5\theta}{5} + \ldots\ldots$$

(v) $0 < x < 1$ எனில்

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 - \ldots\ldots$$

$$= \tan^{-1}x - \frac{\pi}{4}.$$

(vi) $-1 < x < 1$ எனில்,

$$x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left\{\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right\}$$

17. கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \ldots$

(ii) $\frac{\pi}{12} = (1 - 3^{-1/2}) - \frac{1}{3}(1 - 3^{-3/2}) + \frac{1}{5}(1 - 3^{-5/2}) - \ldots\ldots$

(iii) $\frac{5}{3\cdot 2} - \frac{13}{3\cdot 3^2\cdot 2^2} + \frac{35}{5\cdot 3^3\cdot 2^3} - \frac{97}{7\cdot 3^4\cdot 2^4} + \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}.$

(iv) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[2^{1-2n} + 5^{1-2n} + 2^{3-6n}\right] = \frac{\pi}{4}.$

(v) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{2}{3^3} + \frac{1}{7^3}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right)\frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$

(vi) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \frac{\tan x . \tan^{-1}x - x^2}{x^6} = \frac{2}{9}.$

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \frac{\tan^{-1}x - x\cos x}{x - \frac{x^2}{2} + e^{-x} - 1} = -1.$

(viii) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \frac{\tan^{-1}x - \sin x}{x\cos x + \log(1-x) - x^2/2} = \frac{1}{5}.$

(ix) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \frac{a\tan^{-1}x - b\sin x = ex\cos x}{x^5} = -\frac{7}{20}$ எனில்

$a = -2;\ b = -1;\ c = 1.$

(x) $\underset{x\to 0}{\text{lt}} \frac{axe^{-x} + bx\sqrt{1+x} + c\sin 2x}{x^3} = -\frac{3}{2}$ எனில்

$a = -\frac{2}{3};\ b = -\frac{4}{3};\ c = 1.$

அத்தியாயம் X

தொடர்க் கூட்டல்

10·1. நாம் முன்பே (அத்தியாயம் III, அத்தியாயம் VIII)இல் ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டலைக் கண்டிருக்கிறோம். இப்பொழுது முடிவிலி வரையுள்ள ஒரு தொடரின் கூட்டலைக் காண்போம்.

இத்தொடரின் கூட்டலைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு முன்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடருக்கு ஏற்ற இணையுள்ள மற்றொரு தொடரை நாம் கண்டுபிடித்தல் அவசியம். உதாரணமாக, சைன் தொடர் $(\equiv S)$ கொடுக்கப்பட்டால் அதற்கு ஏற்ற இணையுள்ள கொசைன் தொடர் $(\equiv e)$ நாம் கண்டுபிடிக்கலாம். e, S இரண்டும் தெரிந்தவுடன் $e+iS$ என்னும் தொடரை எழுதுவது சாத்தியமே. இத்தொடர் கீழ்வரும் தொடர்களில் ஏதேனும் ஒன்றாகத்தான் இருக்கும்.

(i) பெருக்குத்தொடர்

(ii) கூட்டல் பெருக்குத்தொடர் (Arithmetico Geometric Series)

(iii) ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series)

(iv) அடுக்குக் குறித்தொடர் (Exponential Series)

(v) மடக்கைத் தொடர்.

(vi) கிரகிரியின்றொடர்.

மேற்கூறிய தொடர்களின் மதிப்பு நமக்குத் தெரியுமாகையால், $e+iS$ன் மதிப்பை $A+iB$ என்று நாம் பெறமுடியும். மெய்யான பகுதிகளையும், கற்பனையான பகுதிகளையும் சமன்படுத்தினால் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடரின் மதிப்பு கிடைக்கும். சில மாதிரிக் கணக்குகள் இம்முறையை நன்கு விளக்கும்.

10·2

மாதிரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1: $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$=\frac{\cos\left\{\alpha+(n+1)\frac{\beta}{2}\right\}\sin\left\{\frac{n\beta}{2}\right\}}{\sin(\beta/2)}$$ என்றும்

$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots\ldots$ (n உறுப்புக்கள்)

$$=\frac{\sin\left\{\alpha+(n-1)\frac{\beta}{2}\right\}\sin\left\{\frac{r\beta}{2}\right\}}{\sin(\beta/2)}$$ என்றும் காண்க.

{ § 3·22, 3·23 உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க }

$C = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \quad + \cos[\alpha+(n-1)\beta]$ என்றும்

$S = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin[\alpha+(n-1)\beta]$

என்றும் கொள்

இப்பொழுது

$$C+iS = [\cos\alpha + i\sin\alpha] + [\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + \ldots + [\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta) + i\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)]$$

$$= e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\beta)} + \ldots + e^{i(\alpha+\overline{n-1}\beta)}$$

[n உறுப்புக்கள்]

$$= e^{i\alpha}\left[1 + e^{i\beta} + e^{2i\beta} + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[\frac{1-e^{in\beta}}{1-e^{i\beta}}\right] \quad \text{[§ 7·12லிருந்து]} \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\left[1-e^{in\beta}\right] = 1 - \cos n\beta - i\sin n\beta$$

$$= 2\sin^2\left[\frac{n\beta}{2}\right] - 2i\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right) - i\cos\left(\frac{n\beta}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{n\beta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\beta}{2} - \pi/2\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{n\beta}{2} - \pi/2\right)}$$

இம்மாதிரியே

$$\left[1-e^{i\beta}\right] = 2\sin(\beta/2)e^{i(\beta/2-\pi/2)}$$

ஆகையால் (A)லிருந்து

$$C+iS = \frac{e^{i\alpha}2\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{n\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin(\beta/2)e^{i(\beta/2-\pi/2)}}$$

$$= \frac{e^{i(\alpha + \overline{n-1}\beta/2)} \cdot \sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin(\beta/2)}$$

இப்பொழுது மெய்யான பாகங்களைச் சமன்படுத்த

$$C = \frac{\cos(\alpha + \overline{n-1}\beta/2)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin(\beta/2)}$$

கற்பனையான பாகங்களைச் சமன்படுத்த

$$S = \frac{\sin(\alpha + \overline{n-1}\,\beta/2)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin(\beta/2)}$$

குறிப்பு (1) :- $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots\dots + \sin n\theta$

$$= \frac{\sin\left[(n+1)\theta/2\right]\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)} \quad \text{(i)}$$

இரு பக்கமும் 'θ'வைக் குறித்து வகையிட

$$\cos\theta + 2\cos\theta + \dots + n\cos n\theta = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin[(n+1)\theta/2]\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right] \quad \text{(ii)}$$

மீண்டும் xஐ பொருத்தி இருபக்கமும் வகையிட

[அதாவது, இரண்டாம் வகைக்கெழு எடுத்தால்]

$1^2\sin\theta + 2^2\sin 2\theta + \dots + n^2\sin n\theta.$

$$= -\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{\sin(n+1)\,\theta/2\,(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right] \quad \text{(iii)}$$

இம்மாதிரியே

$\cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$

$$= \left[\frac{\cos(n+1)\theta/2\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right] \quad \text{(iv)}$$

இதிலிருந்து

$\sin\theta + 2\sin 2\theta + \dots + n\sin n\theta =$

$$-\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\cos(n+1)\theta/2\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right] \quad \text{(v)}$$

$$1^2\cos\theta+2^2\cos 2\theta+\ldots+n^2\cos n\theta$$

$$=\frac{-d^2}{d\theta^2}\left[\frac{\cos\overline{n+1}\,\theta/2\ \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right]\quad\text{(vi)}$$

[அப்பியாசம் 3(ஆ) கேள்வி 4ஐப் பார்க்கவும்]

குறிப்பு 2 : $3\sin\theta+5\sin 2\theta+7\sin 3\theta+\ldots$ [n உறுப்புக்கள்] கொண்ட தொடரைக் கூட்ட,

$$\text{கொடுக்கப்பட்ட தொடர்} = \sum_{r=1}^{n}(2r+1)\sin r\theta$$

$$=-2\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\cos\overline{n+1}\,\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{(\sin(\theta/2)}\right]+\left[\frac{\sin(\overline{n+1}\,\frac{\theta}{2})\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{(\sin(\theta/2)}\right]$$

என்று கிடைக்கும்.

இம் மாதிரியே $3\cos\theta+5\cos\theta+\ldots$ [n உறுப்புக்கள்]

$$=-2\frac{d}{d\theta}\left\{\left[\frac{\sin(\overline{n+1}\,\frac{\theta}{2})\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right]+\left[\frac{\cos(\overline{n+1}\,\theta/2)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right]\right\}$$

மாதிரி 2 : $1+x\cos\theta+x^2\theta\cos 2\theta+x^3\cos 3\theta+\ldots\infty$ என்ற தொடரைக் கூட்டுக. $(|x|<1)$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, ... முதலியவைகள் இருக்கின்றன. ஆகையால் இற்றொடர் ஒரு கொசைன் தொடர்.

எனவே $e\equiv 1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+x^3\cos 3\theta+\ldots\ldots$

இத்தொடருக்கு ஏற்ற இணையான சைன் தொடரை நாம் S என்று கொள்ளலாம்.

எனவே, $S\equiv x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+x^3\sin 3\theta+\ldots\ldots\infty$

$$\therefore\ e+iS=1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+x^3\cos 3\theta+\ldots\infty$$
$$+i\{x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+x^3\sin 3\theta+\ldots\infty$$
$$=1+x(\cos\theta+i\sin\theta)+x^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$
$$+\ldots\infty$$
$$=1+x\cdot e^{i\theta}+x^2e^{2i\theta}+x^3\cdot e^{3i\theta}+\ldots\infty$$

இத் தொடரின் உறுப்புக்கள் பெருக்கு விருத்தியில் அமைந்துள்ளன. எனவே, இப் பெருக்கு விருத்தியின் பொது வித்தியாசம்

ஒன்றைவிடச் சிறியதாக இருந்தால்தான், இத் தொடரின் கூடுதலைக் காணமுடியும். இப் பெருக்கு விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் $xe^{i\theta}$

இப்பொழுது, $|x| < 1$ (கொள்கை)

மேலும், $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

ஆகையால் $\left|xe^{i\theta}\right| < 1$. எனவே, இத் தொடர் குவித் தொடராகும்.

∴ இத் தொடரின் மதிப்பு $= e + iS$

$$= \frac{1}{1-xe^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-xe^{i\theta}}{\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)}$$

$$= \frac{1-xe^{-i\theta}}{1-x\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+x^2}$$

$$= \frac{1-x(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2} \qquad (\S\ 7\cdot12)$$

இருபக்கமும் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

$$e = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

மாதிரி 3. $\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 3\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin 5\theta+\ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூடுதலைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர் சைன் தொடராகையால் S என்று கொள்ளலாம்.

எனவே $S \equiv \sin\theta+\frac{1}{2}\sin 3\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin 5\theta+\ldots$

இதற்கு ஏற்ற இணையான கொசைன் தொடரை C என்று கொள்ளுவோம்.

$$C \equiv \cos\theta+\frac{1}{2}\cos 3\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos 5\theta+\ldots$$

எனவே, $C+iS \equiv \cos\theta+\frac{1}{2}\cos 3\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos 5\theta+\ldots$

$$+i\left\{\sin\theta+\tfrac{1}{2}\sin 3\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin 5\theta+\dots\right\}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)+\tfrac{1}{2}(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 5\theta+i\sin 5\theta)+\dots$$

$$=e^{i\theta}+\tfrac{1}{2}\cdot e^{3i\theta}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{e^{5i\theta}}{2^2}+\dots$$

$$=e^{i\theta}\cdot\left[1+\frac{1\cdot}{1}\cdot\frac{e^{2i\theta}}{2}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{e^{4i\theta}}{2^2}+\dots\right]$$

$e^{2i\theta}=z$ என்று கொள்க.

$$\therefore C+iS=e^{i\theta}\cdot\left[1+\frac{1}{1}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2+\dots\right]$$

$$=e^{i\theta}(1-z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{i\theta}\left(1-e^{2i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{i\theta}(1-\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{i\theta}(2\sin^2\theta-2i\sin\theta.\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{i\theta}.\left(2\sin\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\theta-i\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{i\theta}\left(2\sin\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}.\ e^{i\theta}.\left[e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)i}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}.\ e^{i\theta}\ e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)i}$$

$$=(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\ e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)i}$$

$$=(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right\}\right.$$

இரு பக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

$$S = (2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right). \qquad (\theta \neq n\pi.)$$

மாதிரி 4. $\sin\alpha + n\cos\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cos^2\beta \cdot \sin(\alpha+2\beta) + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^3\beta \cdot \sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின்கூடுதலைக் காண்.

மாதிரி 1, மாதிரி 2, ஆகியவற்றில் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் உறுப்புக்கள் முறையே கொசைனிலும், சைனிலும் இருப்பதால் அவற்றின் கூடுதலைக் கண்டுபிடிப்பது சாத்தியமாக இருந்தது ஆனால், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் கொசைன் சைன் ஆகியவற்றின் பெருக்கலாக இருப்பதால் இத் தொடரின் கூடுதலைக் காண்பது சிறிது கடினமே

மாதிரி 1ஐ கவனித்தால், அத் தொடரின் உறுப்புக்கள் கொசைன்களில் மட்டுமல்லாமல், அக் கொசைன்களின் கோணங்கள் ஒரு கூட்டு விருத்தியிலுள்ளன என்று புலனாகும். நாம் அத் தொடரைக் கொசைன தொடர் என்றோம். இம் மாதிரியே, மாதிரி 2ல் உள்ள தொடரை சைன் தொடர் என்றோம். இம் முறையை அனுசரித்தால் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் சைன் தொடராகத்தான் இருக்கும் என்று நாம் முடிவுகொள்ளுகிறோம். ஏனெனில், இத் தொடரில இருக்கும் கொசைன்கள் ஒரு பெருக்கு விருத்தியில் உள்ளனவே தவிர அவைகளின் கோணங்கள் கூட்டுவிருத்தியில் அமையவில்லை. எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சைன் தொடரை S என்க. ஆகையால்

$$S \equiv \sin\alpha + n\cos\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cos^2\beta\sin(\alpha+2\beta) + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^3\beta\sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\infty$$

மேலும், மாதிரி 1ல் மேற்கூறிய நிபந்தனைக்குட்பட்ட கொசைனுக்குப் பதில் சைன் என்று எழுதி சைன் தொடரையும் மாதிரி 2ல், சைனுக்குப் பதில் கொசைன் என்று எழுதி கொசைன் தொடரையும் நாம் அடைந்தோம். இம் மாதிரியே, மேற்கொடுக்கப்பட்ட சைன் தொடருக்கு ஏற்ற இணையான கொசைன் தொடரை பின்வருமாறு எழுதலாம். எனவே,

$$c \equiv \cos\alpha + n\cos\beta(\alpha+\beta) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cos^2\beta\cos(\alpha+2\beta) + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^3\beta\cdot\cos(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\infty$$

$$\therefore \quad c+is \equiv \cos\alpha + n\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cos^2\beta\cos(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots$$

$$+i\left\{\sin\alpha + n\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^2\beta.\sin(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots\right\}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + n\cos\beta\,[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)] + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.\cos^2\beta.\,[\cos(\alpha+2\beta)+i\sin(\alpha+2\beta)] + \ldots\ldots$$

$$= e^{i\alpha} + n\cos\beta\; e^{i(\alpha+\beta)} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.\cos^2\beta\cdot e^{i(\alpha+2\beta)} + \ldots\ldots\infty$$

$$= e^{i\alpha}.\left[1+n\cos\beta.\,e^{i\beta} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.\cos^2\beta.\,e^{2i\beta} + \ldots\ldots\right]$$

$\cos\beta e^{i\beta} = z$ என்று கொள்க.

$$\therefore\; C+iS = e^{i\alpha}\left[1+nz+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.\; z^2+\ldots\ldots\right]$$

$$= e^{i\alpha}(1-z)^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1-\cos\beta e^{i\beta}\right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1-\cos\beta\,(\cos\beta+i\sin\beta)\right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1-\cos^2\beta - i\sin\beta\cos\beta\right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}\left[\sin^2\beta - i\sin\beta\cos\beta\right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}.\,(\sin\beta)^{-n}.\,(\sin\beta - i\cos\beta)^{-n}$$

$$= e^{i\alpha}(\sin\beta)^{-n}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha} \cdot (\sin\beta)^{-n} \cdot \left[e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)i} \right]^{-n}$$

$$= e^{i\alpha} \cdot (\sin\beta)^{-n} \cdot e^{n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)i}$$

$$= (\sin\beta)^{-n} \cdot e^{i\left[\alpha + n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]}$$

$$= (\sin\beta)^{-n} \cdot \left[\cos\left\{\alpha + n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\} + i\sin\left\{\alpha + n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\}\right]$$

இரு பக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

எனவே, $S = (\sin\beta)^{-n} \cdot \sin\left\{\alpha + n\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\}$

மாதிரி 5. $1 + \frac{c^2\cos 2\phi}{2!} + \frac{e^4\cos 4\phi}{4!} + \ldots\ldots\infty \quad (|e| < 1)$

என்ற தொடரின் கூடுதலைக் காண்.

கொடுக்கப்பட்ட கொசைன் தொடரை C என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad c \equiv 1 + \frac{c^2\cos 2\phi}{2!} + \frac{c^4\cos 4\phi}{4!} + \ldots\ldots\infty$$

$$\equiv \cos 0 + \frac{c^2\cos 2\phi}{2!} + \frac{c^4\cos 4\phi}{4!} + \ldots\ldots [\because \cos 0 = 1]$$

இதற்கு ஏற்ற இணையான சைன் தொடரைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\therefore \quad S \equiv \sin 0 + \frac{c^2\sin 2\phi}{2!} + \frac{c^4\sin 4\phi}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad e + iS \equiv \cos 0 + \frac{c^2}{2!}\cos 2\phi + \frac{c^4}{4!}\cos 4\phi + \ldots\ldots + i\left\{\sin 0 + \frac{c^2}{2!}\sin 2\phi + \frac{c^4}{2!}\sin 4\phi + \ldots\right\}$$

$$= (\cos 0 + i\sin 0) + \frac{c^2}{2!}(\cos 2\phi + i\sin 2\phi) + \frac{c^4}{4!}(\cos 4\phi + i\sin 4\phi) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{c^2 c^{2i\phi}}{2!} + \frac{c^4 \cdot c^{4i\phi}}{4!} + \ldots\ldots$$

$ce^{i\phi} = z$ என்று கொள்க, $\therefore \quad z = c(\cos\phi + i\sin\phi)$

$$\therefore \quad c + iS = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ cos hy (§ 8·1லிருந்து)

$= \cos h\,(ce^{i\phi}) = \cos\,(ice^{i\phi})$ (§ 8·2லிருந்து)

$= \cos\,(-c\sin\phi + ic\cos\phi)$

$= \cos\,(c\sin\phi)\cos\,(ic\cos\phi) + \sin\,(c\sin\phi)\sin\,(ic\cos\phi)$

$= \cos\,(c\sin\phi)\cos h\,(c\cos\phi) + i\sin\,(c\sin\phi)\sin h\,(c\cos\phi)$ ......(A)

ஆகையால் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த,

$c = \cos\,(c\sin\phi)\cos h\,(c\cos\phi)$

குறிப்பு: மேற்கண்ட (A) என்னும் சமன்பாட்டில் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த,

$$S = \frac{c^2\sin 2\phi}{\angle 2} + \frac{c^4\sin 4\phi}{\angle 4} + \ldots\ldots\infty \quad (|c| < 1)$$

$= \sin\,(c\sin\phi)\sin h\,(c\cos\phi)$ என்று கிடைக்கிறது.

மாதிரி 6. $1 - \cos\alpha\cdot\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha\cdot\cos 2\beta}{2!} - \frac{\cos^3\alpha\cdot\cos\beta}{3!}$ + ...(மு.வ.என்ற தொடரின் கூடுதலைக்காண்க.

மாதிரி 3ல் கொடுக்கப்பட்ட விளக்கத்திலிருந்து, மேற்கொடுக்கப்பட்ட தொடர் கொசைன் தொடர் என்று எளிதில் அறியலாம். இக் கொசைன் தொடரை C என்போம்.

$$\therefore \quad C \equiv 1 - \cos\alpha.\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha.\cos 2\beta}{2!} - \frac{\cos^3\alpha.\cos 3\beta}{3!} + \ldots\ldots$$

இதற்கு ஏற்ற இணையான சைன் தொடரில் நிலை எண் (தனிமையாக) இருக்காது என்பதை நாம மாதிரி 3லிருந்து அறியலாம். சைன் தொடரை S என்க.

$$\therefore \quad S \equiv -\cos\alpha\sin\beta + \frac{\cos^2\alpha\sin 2\beta}{2!} - \frac{\cos^3\alpha\sin 3\beta}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad C + iS \equiv 1 \ldots \cos\alpha.\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha.\sin 2\beta}{2!} - \frac{\cos^3\alpha\sin 3\beta}{3!} + \ldots$$

$$+ i\left\{-\cos\alpha\sin\beta + \frac{\cos^2\alpha.\sin^2\beta}{2!} - \frac{\cos^3\alpha.\sin 3\beta}{3!} + \ldots\right\}$$

$$= 1 - \cos\alpha(\cos\beta + i\sin\beta) + \frac{\cos^2\alpha}{2!}(\cos 2\beta + i\sin 2\beta) + \ldots$$

$$= 1 - \cos\alpha . e^{i\beta} + \frac{\cos^2\alpha}{2!} . e^{2i\beta} - \frac{\cos^3\alpha}{3!} e^{3i\beta} + \ldots$$

$\cos\alpha e^{i\beta} = z$ என்க. $\therefore$ $z = \cos\alpha \cos\beta + i \cos\alpha \sin\beta$.

$$\therefore \quad C + iS = 1 - z \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{-z} = e^{-(\cos\alpha \cdot \cos\beta + i\cos\alpha \cdot \sin\beta)}$$

$$= e^{-\cos\alpha \cdot \cos\beta} . e^{-i\cos\alpha \sin \cdot \beta}$$

$$= e^{-\cos\alpha \cdot \cos\beta} . \{\cos(\cos\alpha \sin\beta) - i \sin(\cos\alpha \sin\beta)\}$$

இரு பக்கமும் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$\therefore \qquad C = e^{-\cos\alpha \cdot \cos\beta} . \cos(\cos\alpha \cdot \sin\beta).$$

மாதிரி 7. $\cos\alpha - c\cos(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2}\cos(\alpha+2\beta) - \frac{c^3}{3}\cos(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots$ (மு வ.)

என்ற தொடரின் கூடுதலைக் காண்க. $(|c| < 1)$

கொடுக்கப்பட்ட கொசைன் தொடரை C என்றும் அதற்கு ஏற்ற சைன் தொடரை S என்றும் கொள்வோம்.

$$C \equiv \cos\alpha - c\cos(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2}\cos(\alpha+2\beta) - \frac{c^3}{3}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$$

$$S \equiv \sin\alpha - c\sin(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2} \cdot \sin(\alpha+2\beta) - \frac{c^3}{3}\sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad C + iS \equiv (\cos\alpha + i\sin\alpha) - c(\cos\overline{\alpha+\beta} + i\sin\overline{\alpha+\beta}) + \frac{c^2}{2}(\cos\overline{\alpha+2\beta} + i\sin\overline{\alpha+2\beta}) \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} - ce^{i(\alpha+2\beta)} + \frac{c^2}{2} e^{i(\alpha+2\beta)} - \frac{c^3}{3} e^{i(\alpha-3\beta)} + \ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} \left\{1 - ce^{i\beta} + \frac{c^2}{2} e^{2i\beta} - \frac{c^3}{3} e^{3i\beta} + \ldots\ldots\right\}$$

$ce^{i\beta} = z$ என்க.

$$\therefore \quad C + iS = e^{i\alpha} \left\{1 - z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right\}$$

$$= e^{i\alpha}\left\{1-\left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots\dots\right]\right\}$$

$$= e^{i\alpha}.\{1-\log(1+z)\}$$

$$\left(|z|<1, \because |ce^{i\beta}|<1\right)$$

$$= e^{i\alpha}.\{1-\log(1+ce^{i\beta})\}.$$

$$= e^{i\alpha}.\{1-\log 1+c\cos\beta+ic\sin\beta)\}.$$

$$= e^{i\alpha}\left\{1-\tfrac{1}{2}\log[1+c\cos\beta)^2+c^2\sin^2\beta]\right.$$

$$\left.-i\tan^{-1}\frac{c\sin\beta}{1+c\cos\beta}\right\}$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left\{1-\tfrac{1}{2}\log(1+2c\cos\beta+c^2)\right.$$

$$\left.-i\tan^{-1}\frac{c\sin\beta}{1+c\cos\beta}\right\}$$

இருபக்கமும் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த .

$$c=\cos\alpha\{1-\tfrac{1}{2}\log(1+2c\cos\beta+c^2)\}+\sin\alpha\cdot\tan^{-1}\frac{c\sin\beta}{1+c\cos\beta}$$

மாதிரி 8. $S\equiv\cos\theta\cdot\sin\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot\sin 3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\sin 5\theta$ $+\dots\dots$ (மு வ.)

எனில் $\tan 2S=2\cot\theta$ என்று நிறுவுக.

$S\equiv\cos\theta\cdot\sin\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot\sin 3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\sin 5\theta+\dots\dots$

(கொள்கை)

இந்த சைன் தொடருக்கு இணையான கொசைன் தொடரை C என்க.

$C\equiv\cos\theta\cdot\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot\cos 3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\cdot\cos 5\theta+\dots\dots$

$\therefore\quad C+iS\equiv\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{3}\cos^3\theta(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$ $+\dots\dots$

$$=\cos\theta\cdot e^{i\theta}+\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\cdot e^{3i\theta}+\tfrac{1}{5}\cos^5\theta\cdot e^{5i\theta}+\dots\dots$$

$\cos\theta\, e^{i\theta}=z$ என்க. ஆகையால் $z=\cos^2\theta+i\cos\theta\sin\theta.$

$\therefore\quad C+iS\equiv z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots\dots(|z|=|\cos\theta\, e^{i\theta}|<1)$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \qquad \text{......(i)}$$

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\cos^2\theta+i\sin\theta\cdot\cos\theta}{1-\cos^2\theta-i\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\cos^2\theta+i\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta\cdot(\sin\theta-i\cos\theta)}$$

$$=\frac{(1+\cos^2\theta+i\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta+i\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+i(2\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$=1+i(2\cot\theta) \qquad \text{......(ii)}$$

$\therefore$ (i), (ii)லிருந்து.

$$c+iS=\frac{1}{2}\log(1+i\,2\cot\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\log(1+4\cot^2\theta)+i\tan^{-1}(2\cot\theta)\right\}$$

இருபக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$S=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\cot\theta)$$

$$\therefore\quad 2S=\tan^{-1}(2\cot\theta)$$

அல்லது, $\tan 2S=2\cot\theta$.

மாதிரி 9 : $C\equiv\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\cos3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\cos5\theta-\ldots\ldots\infty$ எனில் $\tan 2C=2\cot^2\theta$ என்று நிறுவுக.

$C\equiv\cos\theta\cdot\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot\cos3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\ \cos5\theta-\ldots\infty$ கொடுக்கப்பட்ட கொசைன் தொடருக்கு ஏற்ற சைன் தொடரை S என்று கொள்ளுவோம்.

$$S\equiv\cos\theta\cdot\sin\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot\sin3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\cdot\sin5\theta-\ldots\ldots\infty$$

$$\therefore\quad C+iS\equiv\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{3}\cos^3\theta(\cos3\theta+i\sin3\theta)+\ldots\ldots$$

$$\equiv\cos\theta\cdot e^{i\theta}-\frac{1}{3}\cos^3\theta\cdot e^{3i\theta}+\frac{1}{5}\cos^5\theta\cdot e^{5i\theta}-\ldots\ldots$$

$\cos\theta e^{i\theta}=z$ என்க. ஆகையால் $z=\cos^2\theta+i\sin\theta\cos\theta$.

$$\therefore\quad C+iS=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots\ldots \qquad \text{(கிரகரியின் தொடர்)}$$

$$=\tan^{-1}z.$$

$$=\tan^{-1}(\cos^2\theta+i\sin\theta\cdot\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2\cos^2\theta}{1-(\cos^4\theta+\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta)}\right\}$$

$$+i\,\tfrac{1}{2}\tan h^{-1}\left\{\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{1+\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}\right\}$$

[§ 8·6, மாதிரிக் கணக்குக் குறிப்பு]

இருபக்கமும் மெய்யான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$C=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}\right\}$$

$$\therefore\quad 2C=\tan^{-1}.\left\{\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right\}$$

அல்லது $\tan 2C = 2\cot^2\theta$.

மாதிரி 10: $\cos h\alpha+\dfrac{\cos\theta}{\angle 1}\cos h(\alpha+\beta)+\dfrac{\cos^2\theta}{\angle 2}$ $\cos h(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூடுதலைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளை கொசைன் தொடரை C என்றும் அதற்கு ஏற்ற அதிபரவளை சைன் தொடரை S என்றும் கொள்க.

$$C\equiv\cos h\alpha+\frac{\cos\theta}{\angle 1}\cos h(\alpha+\beta)+\frac{\cos^2\theta}{2!}\cos h(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots\infty$$

$$S\equiv\sin h\alpha+\frac{\cos\theta}{1!}\sin h(\alpha+\beta)+\frac{\cos^2\theta}{2!}\cos h(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad C+S=(\cos h\alpha+\sin h\alpha)+\frac{\cos\theta}{1!}\left\{\cos h(\alpha+\beta)+\sin h(\alpha+\beta)\right\}$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{2!}\left\{\cos h(\alpha+2\beta)+\sin h(\alpha+2\beta)\right\}+\ldots\ldots\infty$$

$$=e^{\alpha}+\frac{\cos\theta}{1!}e^{(\alpha+\beta)}+\frac{\cos^2\theta}{2!}e^{(\alpha+2\beta)}e\ldots\ldots\infty$$

(§ 8·1 வரைவிலக்கணம்)

$$=e^{\alpha}\left\{1+\frac{\cos\theta}{1!}.e^{\beta}+\frac{\cos^2\theta}{2!}e^{2\beta}+\ldots\ldots\infty\right\}.$$

$\cos\theta.e^{\beta}=z$ என்று கொள்க. $\therefore\quad z=\cos\theta(\cos h\beta+\sin h\beta)$

$$\therefore\ C+S=e^{\alpha}\left\{1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$=e^{\alpha}.e^{z}$$

$$= e^{\alpha}.e^{\cos\theta(\cos h\beta+\sin h\beta)}$$

$$= e^{\alpha}.e^{\cos\theta\cos h\beta}.e^{\cos\theta\cdot\sin h\beta}. \qquad \ldots\ldots(i)$$

$$C-S = (\cos h\alpha-\sin h\alpha)+\frac{\cos\theta}{1!}\{\cos h(\alpha+\beta)-\sin h(\alpha+\beta)\}$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{2!}\left\{\cos h(\alpha+2\beta)-\sin h(\alpha+2\beta\right\}+\ldots\ldots\infty$$

$$= e^{-\alpha}+\frac{\cos\theta}{1!}e^{-(\alpha+\beta)}+\frac{\cos^2\theta}{2!}e^{-(\alpha+2\beta)}+\ldots\infty$$

$$= e^{-\alpha}\left\{1+\frac{\cos\theta}{1!}e^{-\beta}+\frac{\cos^2\theta}{2!}e^{-2\beta}+\ldots\ldots\infty\right\}$$

$\cos\theta e^{-\beta}=z^1$ என்க. ஆகையால் $z^1=\cos\theta(\cos h\beta-\sin h\beta)$

(அ து,) $C-S=e^{-\alpha}\left\{1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z1^2}{2!}+\ldots\ldots\infty\right\}$

$$= e^{-\alpha}.e^{+z^1}$$

$$= e^{-\alpha}.e^{\cos\theta(\cos h\beta-\sin h\beta)}$$

$$= e^{-\alpha}.e^{\cos\theta.\cos h\beta}.e^{-\cos\theta\cdot\sin h\beta}. \qquad \ldots\ldots(ii)$$

(i); (ii)ஐக் கூட்ட.

$$2C = e^{\alpha}.e^{\cos\theta\cdot\cos h\beta}.e^{\cos\theta\sin h\beta}$$

$$+e.^{-\alpha}e^{+\cos\theta\cos h\beta}e^{-\cos\theta\sin h\beta}$$

$$= e^{\cos\theta.\cos h\beta}\left\{e^{\alpha+\cos\theta\cdot\sin h\beta}+e^{-(\alpha+\cos\theta\cdot\sin h\beta)}\right\}$$

$$= e^{\cos\theta\cdot\cos h\beta}\cdot 2\cos h(\alpha+\cos\theta\cdot\sin h\beta).$$

$$\therefore\quad C = e^{\cos\theta.\cos h\beta}.\cos h(\alpha+\cos\theta.\sin h\beta)$$

மாதிரி 11: முக்கோணம் ABCல் கோணம் Aன் அடுத்துள்ள (adjacent) பக்கங்கள் முறையே bc, எனில் $(b>c)$, $\frac{b}{c}$ $\sin A+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2}\sin 2A+\frac{1}{3}\frac{b^3}{c^3}\sin 3A+\ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூடுதலைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சைன் தொடரை S என்றும் அதற்கு ஏற்ற இணையுள்ள கொசைன் தொடரை C என்றும் கொள்க.

$$S\equiv\frac{b}{c}\sin A+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2}\sin 2A+\frac{1}{3}\frac{b^3}{c^3}\cos 3A+\ldots\ldots\infty$$

$$C\equiv\frac{b}{c}\cos A+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2}\cos 2A+\frac{1}{3}\frac{b^3}{c_8}\cos 3A+\ldots\ldots\infty.$$

$$\therefore\quad C+iS\equiv\frac{b}{c}(\cos A+i\sin A)+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2}(\cos 2A+i\sin 2A)+\ldots\infty$$

$$=\frac{b}{c}e^{iA}+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c^2}e^{2iA}+\frac{1}{3}\frac{b^3}{c^3}e^{3iA}+\ldots\ldots\infty$$

$\frac{b}{c}e^{iA}=z$ என்க. ஆகையால் $z=\frac{b}{c}(\cos A+i\sin A)$

$$\therefore\quad C+iS=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{3}+\ldots\ldots\infty$$

$$=-\log(1-z)\quad\left(|z|=\left|\frac{b}{c}e^{iA}\right|<1\right)$$

$$=-\log\left(1-\frac{b}{c}\cos A-i\frac{b}{c}\sin A\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\log\left\{\left(1-\frac{b}{c}\cos A\right)^2+\frac{b^2}{c^2}\sin^2 A\right\}$$

$$-i\tan^{-1}\frac{-\frac{b}{c}\sin A}{1-\frac{b}{c}\cos A}$$

இருபக்கமும் கற்பனையான பகுதிகளைச் சமன்படுத்த.

$$S=\tan^{-1}\frac{b\sin A}{c-b\cos A}\qquad\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

முக்கோணம் ABCல் $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$$\therefore\quad\frac{b\sin A}{C-b\cos A}=\frac{2R\sin B.\sin A}{(2R\sin C-2R\sin B\cos A)}$$

$$=\frac{\sin B\sin A}{\sin(180-\overline{A+B})-\sin B\cos A}$$

$$(\because\quad\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ)$$

$$=\frac{\sin A.\sin B}{\sin A.\cos B+\cos A\sin B-\cos A.\sin B}$$

$= \tan B.$ ....(i)

$\therefore$ (i), (ii) லிருந்து, [$\because \sin(180°-\theta) = \sin\theta$]

$S = \tan^{-1}(\tan B) = B.$

அப்பியாசம் 10 (அ)

கீழ்க்கண்டவற்றின் கூடுதலைக் காண்க :-

1. $\frac{\sin\alpha}{3} + \frac{\sin 2\alpha}{3^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^3} + \ldots$ மு.வ.

[விடை : $\frac{3\sin\alpha}{10-6\cos\alpha}$]

2. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha +$ மு.வ.

[விடை : $\frac{4\sin\alpha}{5-4\cos\alpha}$]

3. $r\sin x + r^2\sin 2x + r^3\sin 3x + \ldots$ மு.வ.

[விடை : $\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}$]

4. $1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 3x + \ldots$ மு.வ.

[விடை : $\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$]

5. $x\sin\alpha + x^2\sin(\alpha+\beta) + x^3\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots \infty$

[விடை : $\frac{x^2\sin(\beta-\alpha)+x\sin\alpha}{1-2x\cos\beta+x^2}$]

6. $\sin\alpha + \sec\beta\sin(\alpha+\beta) + \sec^2\beta\sin(\alpha+2\beta) + \ldots \infty$

[விடை : $\cos\alpha\cot\beta$]

7. $\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\cos^2\beta + \cos(\alpha-2\beta)\cdot\cos^3\beta + \ldots \infty$ [விடை : $\cot\beta\sin(\alpha+\beta)$]

8. $\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 3\theta + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 4\theta + \ldots \infty$

[விடை : $\sqrt{2\sin\frac{\theta}{2}}:\cos\frac{\pi+3\theta}{4}$]

9. $1 - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 2\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 3\theta + \ldots$ மு.வ.

$$\left\{\text{விடை : } \frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}\right\}$$

10. $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin 2\alpha + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\sin 3\alpha +$ மு.வ.

$$\left\{\text{விடை : } \frac{\sin\frac{\pi-\alpha}{4}}{\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}}\right\}$$

11. $1+\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2\cdot4}\cos 4\theta + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cos 6\theta - \ldots$ மு.வ.

$$\left[\text{விடை : } 2-\sqrt{2\sin\theta}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

12. $n\sin\alpha + \frac{n(n+1)}{1\cdot2}\sin 2\alpha + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}$

$\sin 3\alpha + \ldots$ மு.வ.

$$\left[\text{விடை : } \sin\left\{n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} \div \left\{2\sin\frac{\alpha}{2}\right\}^n\right]$$

13. $1+h\cos^2\alpha + \frac{n(n+1)}{1\cdot2}\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha \ldots + \infty$

$$\left[\text{விடை : } \cos\left\{n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\} \div \sin^n\alpha.\right]$$

14. $1+\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2!}+\frac{\cos 3\theta}{3!}+\ldots\infty$

$$\left[\text{விடை : } e^{\cos\theta}.\cos(\sin\theta)\right]$$

15. $\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2!}+\frac{\sin 3\theta}{3!}+\ldots\ldots\infty.$

$$\left[\text{விடை : } e^{\cos\theta}.\sin(\sin\theta)\right]$$

16. $\sum_{1}^{\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n!}\quad(-1<r<1)$

$$\left[\text{விடை : } e^{r\cos\theta}.\cos(r\sin\theta)-1\right]$$

17. $C \equiv 1+\frac{r\cos\theta}{1!}+\frac{r^2\cos 2\theta}{2!}+\frac{r^3\cos 3\theta}{3!}+\ldots\ldots$ மு.வ. ;

$S \equiv \frac{r\sin\theta}{1!}+\frac{r^2\sin 2\theta}{2!}+\frac{r^3\sin 3\theta}{3!}$

$+\ldots\ldots$ மு.வ. எனில்,

$S = C\tan(r\sin\theta)$ என்றும், $C^2+S^2 = e^{2r\cos\theta}$

என்றும் நிறுவுக.

18. $\cos x+\frac{\cos 3x}{3!}+\frac{\cos 5x}{5!}+\ldots\ldots\infty.$

[விடை : $\sin h(\cos x).\cos(\sin x)$]

19. $\frac{c^2\sin 2\theta}{2!}+\frac{c^4\sin 4\theta}{4!}+\frac{c^6\sin 6\theta}{6!}$

$+\ldots\ldots\infty.\quad (|c|>1)$

[விடை : $\sin h(c\cos\theta)\sin(c\sin\theta)$]

20. $\sin\alpha+c\sin(\alpha+\beta)+\frac{c^2}{2!}\sin(\alpha+2\beta)$

$+\ldots\ldots\infty\quad(|c|<1)$

$$\left[\text{விடை : } e^{c\cos\alpha}.\sin(c\sin\beta+\alpha)\right]$$

21. $\cos x+\cos(x+y)\cdot\cos y+\cos(x+2y)\cdot\frac{\cos^2 y}{2!}$

$+\ldots\ldots\infty.$

$$\left[\text{விடை : } e^{\cos^2 y}.\cos(x+\sin y\cos y)\right]$$

22. $\cos x\sin x+\frac{\cos^2 x}{2!}\cdot\sin 2x+\frac{\cos^3 x}{3!}\sin 3x$

$+\ldots\ldots\infty$;

$$\left[\text{விடை : } e^{\cos^2 x}.\sin(\sin x\cos x)\right]$$

23. $\cos\theta\cdot+\cos 2\theta\cdot\sin\theta+\cos 3\theta\cdot\frac{\sin 2\theta}{2!}+\ldots\ldots\infty.$

$$\left[\text{விடை : } e^{\sin\theta\cos\theta}.\cos(\theta+\sin\theta)\right]$$

24. $\cos\theta \cdot \tan\theta + \cos 2\theta \cdot \frac{\tan^2\theta}{2!} + \cos 3\theta \cdot \frac{\tan^3\theta}{3!} + \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை : } e^{\sin\theta} \cdot \cos\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) - 1 \right]$

25. $1 + e^{\cos\theta} \cdot \cos(\sin\theta) + e^{2\cos\theta} \cdot \frac{\cos(2\sin\theta)}{2!} + \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை : } e^{e^{\cos\theta} \cdot \cos(\sin\theta)} \cdot \cos(e^{\cos\theta} \cdot \sin\sin\theta) \right]$

26. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ $\left[\text{விடை : } \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right]$

27. $\frac{\sin\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{3} + \frac{\sin 3\theta}{4} + \ldots\ldots\infty$

$\left[\text{விடை : } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\theta + \sin\theta \cdot \log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \right]$

28. $C\cos\alpha + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha \ldots\ldots$ மு.வ.

$\left[\text{விடை : } -\frac{1}{2}\log(1 - 2c\cos\alpha + c^2) \right]$

29. $\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை : } \frac{1}{2}\theta \right]$

30. $C\sin\theta + \frac{c^3}{3} \cdot \sin 3\theta + \frac{c^5}{5} \cdot \sin 5\theta + \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2c\sin\theta}{1-c^2}\right) \right]$

31. $\cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{2} \cdot \sin 2\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{3} \cdot \sin 3\alpha + \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை: } \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$

32. $\sin^2\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{3} \cdot \sin 3\alpha + \frac{\sin^5\alpha}{5} \sin 5\alpha + \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan^2\alpha) \right]$

33. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + \frac{1}{5}\sin^5\alpha \cdot \cos 5\alpha \ldots\ldots\infty$.

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan\alpha) \right]$

34. $r\cos\theta-\frac{r^3}{3}\cos 3\theta+\frac{r^5}{5}\cos 5\theta-\ldots\ldots\infty \quad (|r|<1)$

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2r\cos\theta}{1-r^2}\right)\right]$

35. (i) $\cos\alpha\cdot\cos\beta-\frac{\cos^3\alpha}{3}\cos 3\beta+\frac{\cos^5\alpha}{5}\cdot\cos 5\theta-\ldots\ldots\infty.$

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha}\right)\right]$

(ii) $\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{3\,2^3}\cos 3\theta+\frac{1}{5\,2^5}\cos 5\theta\ldots\ldots\infty.$

$[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{4}{3}\cos\theta)]$

36. $\cot\alpha\cdot\cos\alpha-\frac{1}{3}\cot^3\alpha\cdot\cos 3\alpha+\frac{1}{5}\cot^5\alpha\cdot\cos 5\alpha-\ldots\infty$

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}\right)\right]$

37. $\tan\beta\cdot\sin\alpha-\frac{1}{3}\tan^3\beta\cdot\sin(\alpha+2\beta)+\frac{1}{5}\tan^5\beta\cdot\sin(\alpha+4\beta)$

$-\ldots\ldots\infty \left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\tan^{-1}\left(\frac{2\sin\beta}{1-\tan^2\beta}\right)\right.$

$\left.+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\tan^{-1}(\sin\beta\sin 2\beta)\right]$

38. $1+\cosh\alpha+\frac{\cosh 2\alpha}{2!}+\frac{\cosh 3\alpha}{3!}+\ldots\ldots\infty.$

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\left\{e^{e^{\alpha}}+e^{e^{-\alpha}}\right\}\right]$

39. $\sinh\alpha-\frac{1}{2}\sinh 2\alpha+\frac{1}{3}\sinh 3\alpha-\ldots\ldots\infty.$

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1+e^{\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right\}\right]$

40. $\cosh\alpha-\frac{1}{2}\cosh 2\alpha+\frac{1}{3}\cosh 3\alpha-\ldots\ldots\infty$

$[\text{விடை: } \frac{1}{2}\log(2+2\cosh\alpha)]$

41. $\cosh\alpha+\sin\alpha\cdot\cosh 2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{2!}\cosh 3\alpha+\ldots\ldots\ldots$ மு.வ.

$\left[\text{விடை: } \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha}\cdot e^{\sin\alpha\cdot e^{\alpha}}+\frac{1}{2}e^{-\alpha}\cdot e^{\sin\alpha\cdot e^{-\alpha}}\right]$

42. $\sinh\alpha + \sinh 2\alpha + \sinh 3\alpha + \ldots\ldots \infty$.

$$\left[\text{விடை: } \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1+c^{\alpha}}{1-c^{\alpha}}\right\}\right]$$

43. $c\cosh\alpha + c^2\cosh(\alpha+\beta) + c^3\cosh(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots \infty$

$(|c| < 1)$

$$\left(\text{விடை: } \frac{c}{2}\left\{\frac{c^{\alpha}}{1-ce^{\beta}} + \frac{e^{+\alpha}}{1-ce^{-\beta}}\right\}\right)$$

44. முக்கோணம் ABCல் கோணம் Aன் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் $b, c\ (b < c)$ எனில் $\sin A + \frac{b}{c}\sin 2A + \frac{b^2}{c^2}\sin 3A + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரின் கூடுதல் $\frac{c \sin c}{a}$ என்று நிறுவுக.

45. முக்கோணம் ABCல் கோணம் Cஇன் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் $a, b, (a<b)$ எனில் $1 + n\frac{a}{b}\cos e + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{b^2}\cos 2C + \ldots\ldots \infty\ (n<1)$ என்ற தொடரின் கூடுதல் $\left(\frac{b}{c}\right)^n \cos nA$ என்று நிறுவுக.

10·3. முடிவிலி வரையுள்ள தொடர்களின் கூடுதலைக் கண்டநாம், இப்பொழுது சில கணியங்களின் விரித்தலைக் காண்போம். அதாவது, ஏதேனும் ஒரு சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்குமாயின் அதனை முடிவிலி வரையுள் தொடராக விரிக்க முயலுவோம். சில உதாரணங்கள் இம் முறையை நன்கு விளக்கும்.

10·4.

மாதிரிக்கணக்குகள்

மாதிரி 1. $\frac{c\sin\alpha}{1-2c\cos\alpha+c^2} = c\sin\alpha + c^2\sin 2\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ என்று நிறுவுக. $(|c| < 1)$

$$\frac{c\sin\alpha}{1-2c\cos\alpha+c^2} = \frac{c}{2i}\,\frac{(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{\{1 - c(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+c^2\}}$$

$$= \frac{ce^{i\alpha} - ce^{-i\alpha}}{2i\{(1-ce^{i\alpha})(1-ce^{-i\alpha})\}}$$

$$=\frac{(1-ce^{-i\alpha})-(1-ce^{i\alpha})}{2i(1-ce^{i\alpha})(1-ce^{-i\alpha})}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{1-ce^{i\alpha}}-\frac{1}{1-ce^{-i\alpha}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{(1-ce^{i\alpha})^{-1}-(1-ce^{-i\alpha})^{-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{1-ce^{i\alpha}+c^2e^{2i\alpha}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.-(1+ce^{-i\alpha}+c^2e^{-2i\alpha}+\ldots\ldots)\right\}\ (\because |c|<1)$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{c\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)+c^2\left(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}\right)+\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{c\cdot 2i\sin\alpha+c^2.2i\sin 2\alpha+\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$=c\sin\alpha+c^2\sin 2\alpha+c^3\sin 3\alpha+\ldots\ldots\infty.$$

மாதிரி. 2. முக்கோணம் ABCல் கோணம் Cன் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் a, b ($b<a$) எனில்,

$$\log c=\log a-\frac{b}{a}\cos c-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2c-\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3c-\ldots\ldots\infty.$$

என்று நிறுவுக (c, கோணம் cன் எதிர்ப்பக்கம்)

முக்கோணம் ABCல்,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos c$$

$$=a^2\left\{1-2\frac{b}{a}\cos c+\frac{b^2}{a^2}\right\}$$

$$=a^2.\left\{1-\frac{b}{a}\left(e^{ic}+e^{-ic}\right)+\frac{b^2}{a^2}\right\}$$

$$=a^2.\left(1-\frac{b}{a}e^{ic}\right)\left(1-\frac{b}{a}e^{-ic}\right)$$

இருபக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுக்க.

$$\log c^2=\log\left[a^2\left(1-\frac{b}{a}c^{ic}\right)\left(1-\frac{b}{a}e^{-ic}\right)\right]$$

$$\therefore\ 2\log c = 2\log a + \log\left(1 - \frac{b}{a}e^{ic}\right) + \log\left(1 - \frac{b}{a}e^{-ic}\right)$$

$$= 2\log a - \left\{\frac{b}{a}e^{-ic} + \frac{b^2}{2a^2}e^{2ic} + \frac{b^3}{3a^3}e^{3ic} + \dots\infty\right\}$$

$$- \left\{\frac{b}{a}e^{-ic} + \frac{b^2}{2a^2}e^{-2ic} + \frac{b^3}{3a^3}e^{-3ic} + \dots\infty\right\}$$

$$(\because \quad |c| < 1)$$

$$= 2\log a - \frac{b}{a}\left(e^{ie} + e^{-ie}\right) - \frac{b^2}{2a^2}\left(e^{2ic} + e^{-2ic}\right) + \dots\dots\infty$$

$$= 2\log a - \frac{b}{a}.\ 2\cos c - \frac{b^2}{2a^2}\ 2\cos 2c - \dots$$

$$\therefore\ \log c = \log a - \frac{b}{a}\cos c - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2c - \dots\infty\ .$$

மாதிரி 3. $\log\left\{\dfrac{a^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\right\} = 4\left\{x\ \sin^2\theta - \tfrac{1}{2}x^2\right.$ $\left.\sin^2 2\theta + \dots\dots\infty\ .\right\}$ என்றும் நிறுவுக. $\left(x = \dfrac{a-b}{a+b}\right)$

$x = \dfrac{a-b}{a+b}$ ஆகையால், $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{a^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2\cos^2\theta + (x-1)^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{1 + 2x\ (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + x^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{1 + 2x\cos 2\theta + x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^2}{1 + x\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^2}{\left(1 + xe^{2i\theta}\right)\left(1 + xe^{-2i\theta}\right)}$$

$$\therefore \log\left\{\frac{a^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\right\}$$

$$= \log\left\{\frac{(1+x)^2}{\left(1+x\,e^{2i\theta}\right)\left(1+x\,e^{-2i\theta}\right)}\right\}$$

$$= 2\log(1+x)-\log\left(1+x\,e^{2i\theta}\right)-\log\left(1+x\,e^{2i\theta}\right)$$

$$= 2\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots-\infty\right\}$$

$$-\left\{x\,e^{2i\theta}-\frac{x^2\,e^{4i\theta}}{2}+\frac{x^3\,e^{6i\theta}}{3}-\ldots\infty\right\}$$

$$-\left\{x\,e^{-2i\theta}-\frac{x^2\,e^{-4i\theta}}{2}+\frac{x^3\,e^{-6i\theta}}{3}-\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$= 2\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$-x\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+\frac{x^2}{2}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)+\ldots\ldots$$

$$= 2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\infty\right)$$

$$-x\,(2\cos 2\theta)+\frac{x^2}{2}\,(2\cos 4\theta)-\ldots\ldots\infty$$

$$= 2x\,(1-\cos 2\theta)-2\cdot\frac{x^2}{2}\,(1-\cos 4\theta)+\ldots\ldots\infty$$

$$= 4\left\{x\sin^2\theta-\frac{x^2}{2}\sin^2 2\theta+\ldots\ldots\infty\right\}$$

மாதிரி 4: $(1+x)\tan\theta = (1-x)\tan\phi$ $(\,|x|<1\,)$ எனில் θஐ xன் அடுக்குகள் மூலம் விரிக்க.

$$\tan\theta = \frac{1-x}{1+x}\tan\phi$$

$$\therefore \quad \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{(1-x)\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)}{(1+x)\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{2\,e^{i\theta}}{2\,e^{-i\theta}} = \frac{(1-x)\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)+(1+x)\left[e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right]}{(1+x)\left(e^{i\phi}+e^{i\phi}\right)-(1-x)\left[e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right]}$$

$$= \frac{2\left(e^{i\phi} + xe^{-i\phi}\right)}{2\left(e^{i\phi} + xe^{i\phi}\right)}$$

எனவே, $$e^{2i\theta} = \frac{e^{i\phi}\left(1+xe^{-2i\phi}\right)}{e^{-i\phi}\left(1+xe^{2i\phi}\right)}$$

$$= \frac{e^{2i\phi}\left(1+xe^{-2i\phi}\right)}{\left(1+xe^{2i\phi}\right)}$$

இருபக்கமும் e அடிக்கு மடக்கை எடுக்கவும்.

$$\therefore \ \log e^{2i\theta} = \log\left\{e^{2i\phi}\frac{\left(1+xe^{-2i\phi}\right)}{\left(1+xe^{2i\phi}\right)}\right\}$$

எனவே, $$2i\theta = 2i\phi + \log\left(1+xe^{-2i\phi}\right) - \log\left(1+xe^{2i\phi}\right)$$

ஆகையால் $$2i(\theta-\phi) = \log\left(1+xe^{-2i\phi}\right) - \log\left[1+xe^{2i\phi}\right]$$

$$= xe^{-2i\phi} - \frac{x^2}{2}e^{-4i\phi} + \frac{x^3}{3}e^{-6i\phi} - \ldots\ldots\ldots\infty$$

$$-\left\{xe^{2i\phi} - \frac{x^2}{2}e^{4i\phi} + \frac{x^3}{3}e^{6i\phi} - \ldots\ldots\infty\right\}$$

$$= x\left(e^{-2i\phi} - e^{2i\phi}\right) + \frac{x^2}{2}\left(e^{4i\phi} - e^{-4i\phi}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\infty.$$

$$= x(-2i\sin 2\phi) + \frac{x^2}{2}(2i\sin 4\phi)$$

$$+ \frac{x^3}{3}(-2i\sin 6\phi) + \ldots\ldots\infty.$$

எனவே, $$\theta - \phi = -x\sin 2\phi + \frac{x^2}{2}\sin 4\phi - \frac{x^3}{3}\sin 6\phi + \ldots\ldots\infty$$

அல்லது, $$\theta = \phi - x\sin 2\phi + \frac{x^2}{2}\sin 4\phi - \frac{x^3}{3}\sin 6\phi + \ldots\ldots\infty.$$

மாதிரி 5: $|x| >$ ' எனில்,

$$\tan^{-1}\left\{\frac{x \sin\theta}{1-x\cos\theta}\right\} = x\sin\theta + \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2\theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\theta$$

$+ \ldots\ldots \infty$ என்று நிறுவுக.

$i\cdot\tan^{-1}\left\{\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right\}$ என்பது $\log\{(1-x\cos\theta)+ix\sin\theta\}$ ன் கற்பனையான பகுதி என்று நாம் அறிவோம்.

$$\log\{1-x\cos\theta+ix\sin\theta\} = \log\{1-(x\cos\theta-ix\sin\theta)\}$$

$$= \log\{1-xe^{-i\theta}\}$$

$$= -\left\{xe^{-i\theta} + \frac{x^2e^{-2i\theta}}{2} + \ldots\ldots\ldots\infty\right\}$$

$$= -\left\{x(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{x^2}{2}(\cos 2\theta - \right.$$

$$\left.\theta i \sin 2 + \frac{x^3}{3}(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

எனவே, $\log\{1-x\cos\theta+ix\sin\theta\}$ ன் கற்பனையான பகுதி

$$= i\left\{x\sin\theta + \frac{x^2}{2}\sin 2\theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\theta + \ldots\ldots\infty\right\}.$$

அதாவது $\tan^{-1}\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right) = x\sin\theta + \frac{x^2}{2}\sin 2\theta + \ldots\infty$.

அப்பியாசம் 10 (ஆ)

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக :-

1. $\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots\ldots\ldots\infty$

$(|x| < 1)$

2. $\frac{1+x\cos\theta}{1+2x\cos\theta+x^2} = 1 - x\cos\theta + x^2\cos 2\theta - \ldots\infty$

$(|x| < 1)$

3. $\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + 2x\cos\theta - 2x^2\cos 2\theta +$

$2x^3 . \cos 3\theta \pm \ldots\infty \quad (|x| < 1)$

4. $\frac{(1-c)\cos\theta}{1-2c\cos 2\theta+c^2}=\cos\theta+c\cos 3\theta+c^2\cos 5\theta+\ldots\infty$

$(|c|<1)$

5. ABC என்னும் முக்கோணத்தில், கோணம் Cன் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் a, $b\,(b>a)$ எனில்,

$$B=\frac{b}{a}\sin C+\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\sin 2C+\tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\sin 3C+\ldots\infty$$

என நிறுவுக.

6. $\log(2\cos\theta)=\cos 2\theta-\frac{1}{2}\cos 4\theta+\frac{1}{3}\cos 6\theta-\ldots\infty$

7. $\log\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}}=x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\cos 2\theta+$

$\frac{1}{3}x^3\cos 3\theta+\ldots\infty\quad(|x|<1)$

8. $\sin x=n\sin(\alpha+x)\quad(|n|<1)$ எனில்,

$x=n\sin\alpha+\frac{1}{2}n^2\sin 2\alpha+\frac{1}{3}n^3\sin 3\alpha-\ldots\infty$.

9. $\tan\alpha=\cos 2\theta.\tan\beta$ எனில்,

$\beta=\alpha+\tan^2\theta\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\tan^4\theta\cdot\sin 4\alpha+\frac{1}{3}\tan^6\theta.$

$\sin 6\alpha+\ldots\infty$

10. $\tan 2x=2\cot y$ எனில்

$x=\cos y\sin y+\frac{1}{3}\cos^3 y.\sin 3y+\frac{1}{5}\cos^5 y$

$\sin 5y+\ldots\infty$

11. $\tan 2\alpha=2\cot^2\beta$ எனில்

$\alpha=\cos^2\beta-\frac{1}{3}\cos^3\beta.\cos 3\beta+\frac{1}{5}\cos^5\beta.$

$\cos 5\beta-\ldots\infty$

12. $\tan 2c=\tan 2\alpha.\cos\theta$ எனில்

$c=\tan\alpha.\cos\theta-\frac{1}{3}\tan^3\alpha.\cos 3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\alpha.$

$\cos 5\theta-\ldots\infty$

13. $\alpha=2\sin 2\alpha-\sin 2\alpha+\frac{2}{3}\sin 3\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{2}+$

$2\frac{\sin 5\alpha}{5}\ldots$ மு வ.

[குறிப்பு :— $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)$ன் மதிப்பைக் காண்க.]

14. $|c| < 1$ எனில்

$$\tan^{-1}\left(\frac{2c\sin\alpha}{1-c^2}\right) = 2(c\sin\alpha + \tfrac{1}{3}c^3\sin 3\alpha + \tfrac{1}{5}c^5\sin 5\alpha + \ldots\ldots \infty$$

15. $$\tan^{-1}\left(\frac{c\sin\alpha}{1+c\cos\alpha}\right) = c\sin\alpha - \tfrac{1}{2}c^2\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}c^3\sin 3\alpha \ldots\ldots \infty \quad (|c| < 1)$$

16. $$e^{ax}\cos bx = 1 + \sum_{1}^{\infty}\frac{r^n x^n.\cos n\alpha}{n!}$$

$$\left(r^2 = a^2 + b^2;\ \tan\alpha = \frac{b}{a}\right)$$

17. $$e^{ax}.\sin bx = \sum_{1}^{\infty}\frac{r^n x^n.\sin n\alpha}{n!} \quad (r^2 = a^2 + b^2,\ \tan\alpha = b/a)$$

18. $$e^{\cos h\,\alpha}\cos h(\sin h\alpha) \sum_{0}^{\infty}\frac{\cos hn\alpha}{n!}$$

19. $$\cos h(\cos\theta).\sin(\sin\theta) = \sum_{0}^{\infty} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)!}$$

20. $$e^{\cos\alpha}.\cos(\beta + \sin\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{\angle n}$$