க. நூ. வெ. இ. வரிசை எண்—247

முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப் பாடம்)

ஆசிரியர்

திரு. க. சிவசுப்ரமணியம், எம்.ஏ.,
துணைப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—September 1970

D.C.P. No. 247

© Directorate of Collegiate Publications

ANALYTICAL GEOMETRY—3 DIMENSIONS (Major)

K. SIVASUBRAMANIAM

Net Price Rs. 2-75
(No discount)

Printed by
ANURADHA ACCHAGAM,
146, T.H. Road, Madras-21.

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பத்து ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனத்தின் கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்ககம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் — கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்ககத்தின் **247** ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **282** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் ; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

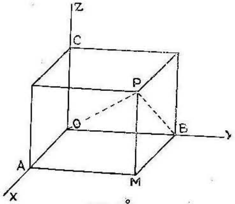
			பக்கம்
1.	அச்சு தூரங்கள்	...	1
2.	சமதளங்களும் நேர்கோடுகளும்	...	21
3.	அச்சு தூரங்களின் உருவ மாற்றம்	...	54
4.	கோளம்	...	65
5.	கூம்பு	...	89
6.	உருளை	...	112
7.	மைய இருபடி மேற்பரப்புகள்	...	117
8.	சமதள வெட்டுமுகங்களின் அச்சுகள்	...	142
	கலைச் சொற்கள்	...	154

1. அச்சு தூரங்கள்

சமதளத்தில் பொதுவாக ஒரு புள்ளியின்நிலை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்கோடுகளைப் பொருத்து அமையும் அச்சுத் தூரங்களால் கணிக்கப்படுகிறது. முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் நிலை, மூன்று அச்சுத் தூரங்களால் நிர்ணயமாகிறது. அது எப்படி என்பதை இங்குச் சற்று ஆராய்வோம்.

1·1. முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்

ஒரு சமதளத்தில் அமையாத X'OX, Y'OY, Z'OZ என்ற ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தான மூன்று நேர்கோடுகளை எடுத்துக் கொள்ளலாம். அல்லது ஒரு சமதளத்தில் X'OX, Y'OY என்று O புள்ளியின்வழியாகச் செல்லும், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான



படம் - 1

இரு நேர்கோடுகளை எடுத்துக்கொள்ளலாம். அந்தச் சமதளத்திற்கு, அதாவது XOY சமதளத்திற்கு செங்குத்தாக O-ன் வழியாக செல்லும் Z'OZ என்ற நேர்கோட்டை எடுத்துக் கொள்க. இந்த மூன்று நேர்கோடுகளை அச்சுகளாகக் கொள்வோம். ஏதாவது ஒரு புள்ளி P-ஐ எடுக்க, P-ன் வழியாக YOZ, ZOX, XOY என்ற சமதளங்களுக்கு இணையாக மூன்று

சமதளங்கள் வரைக. அவை அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கும். அப்படியானல் $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. x, y, z என்ற மதிப்புகள், P-ன் அச்சுத் தூரங்களாகும்.

இந்த மதிப்புகள் மிகை மதிப்புகளாகவோ அல்லது குறை மதிப்புகளாகவோ இருக்கலாம். மிகையாக அமைந்தால், அச்சுக்களின் நேர்த்திசையில் அளக்கப்பட்டிருக்கிறது என்று கொள்ளலாம். குறைவாக அமைந்தால், அச்சுகளின் எதிர்த்திசையில் அளக்கப்பட்டிருக்கிறது. $OA=x$, $AM=y$, $MP=z$ ஆல் குறிக்கப்படும்.

(x, y, z) என்ற அச்சு தூரங்கள்கொண்ட புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க: OX, OY, OZ என்ற அச்சுகளில் $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ என்று அமையுமாறு A, B, C என்ற புள்ளிகளைக் குறித்துக்கொள்க. இந்த மூன்று புள்ளிகளின் வழியாக YOZ, ZOX, XOY என்ற சமதளங்களுக்கு இணையாக மூன்று சமதளங்கள் வரைக. இந்த மூன்று சமதளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியே நமக்குத் தேவையானது.

குறிப்பு: இந்த மூன்று OB என்பது OP-யின் வீச்சம் எனக் காண்க. சமதளங்கள் முப்பரிமாண வெளியை எட்டுப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இந்தப் பகுதிகளுக்கு அரைக்கால் கோளங்கள் என்று பெயர். எந்த அரைக்கால் கோளத்தில் புள்ளி இருக்கிறதோ, அதற்குத் தகுந்தபடி புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களின் குறி அமையும்.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் எட்டு அரைக்கால் கோளங்களின் அடையாளங்களைக் காட்டும்.

அரைக் கால் கோளம்	oxyz	ox′yz	ox′y′z	oxy′z	oxyz′	ox′yz′	ox′yz′	oxy′z′
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

பயிற்சி 1

1. ZOX சமதளத்தில் உள்ள புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் x, y, z என்றால் $y = O$ என்று காண்பி.

2. (i) $y=o, z=o$ (ii) $z=o=x$ (iii) $x=o=y$ (iv) $y=b, z=c$ (v) $z=c, x=a$ (vi) $x=a, y=b$ என்று அமையும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

3. (x, y, z) P ன் அச்சு தூரங்கள். x-அச்சு, y-அச்சு, z-அச்சு இவைகளுடன் OP உண்டாக்கும் கோணங்களின் அளவுகள் α, β, γ ஆகிறது. அப்படியானால்

$$\text{Cos } \alpha = \frac{x}{\gamma}, \text{ Cos } \beta = \frac{y}{\gamma}$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{z}{\gamma}$$ என்று காண்பி.

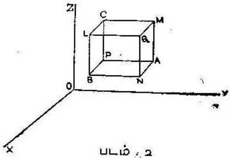
[இங்கு $\gamma = OP$]

4. (i) ஒரு புள்ளியின் x அச்சு தூரம் 3. (ii) ஒரு புள்ளியின் x அச்சு தூரம் 2, y அச்சு தூரம் -4 என்றால் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

1.2. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

இரண்டு புள்ளிகள் P, Q இவற்றின் அச்சு தூரங்கள் முறையே,

$(x_1\ y_1\ z_1)\ (x_2\ y_2\ z_2)$ என்று கொள்க.



படம் 2

PQ என்ற இரண்டு புள்ளிகளின் வழியே YOZ, ZOX, XOY என்ற அச்சு சமதளங்களுக்கு இணையாக தலா மூன்று

சமதளங்கள் வரைக. இந்த ஆறு சமதளங்களும் P Qஐ மூலை விட்டமாகக்கொண்ட ஓர் இணைகரத் திண்மமாக (Parallelopiped). அமையும்.

APCM, NB∠Q ; ∠CPB, QNAM ;

BNAP, ∠QMC இவைகள் இணைகரத் திண்மத்தின் மூன்று ஜோடி இணை முகங்களாகும்.

$\angle ANQ$ = ஒரு செங்கோணம்.

ஆதலால் $AQ^2 = AN^2 + NQ^2$

PA என்ற நேர்கோடு NAMQ என்ற சமதளத்திற்கு செங்குத்தாகிறது. இந்த சமதளத்தில் AQ என்ற நேர்கோடு அமைவதால்

$AQ \perp r\ PA$

ஆதலால், $PQ^2 = PA^2 + AQ^2$

$= PA^2 + AN^2 + NQ^2$

ஆனால் PQ என்ற புள்ளிகளின் வழியாக சமதளம் ∠YOZ க்கு இணையாக வரையப்பட்ட PBCL, AMQN என்ற சமதளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரமாக PA அமைகிறது.

ஆதலால் $PA = \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{1} +$

அதுபோல் $AN = x_2 - x_1$

$NQ = z_2 - z_1$

எனவே $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

ஆகவே $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ என்ற அச்சுத் தூரங்கள் கொண்ட இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம்

$$+\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

குறிப்பு : ஆதியிலிருந்து தூரம்: புள்ளி P ஆதியுடன் இணைந்தால்

$x_1 = y_1 = z_1 = O$

எனவே $OQ^2 = x_2^2 + y_2^2 + z^2$

பயிற்சி 2

1. $(0, 7, 10), (-1, 6, 6), (-4, 9, 6)$ என்ற புள்ளிகள் ஓர் இரு சமபக்க நேர்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்று காண்பி.

2. $(-2, 3, 5)$ $(1, 2, 3)$, $(7, 0, -1)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும் என்று நிரூபி.

3. $(a, o, o), (o, b, o), (o, o, c)$ (o, o, o) என்ற நான்கு புள்ளிகளுக்கு சம தூரத்தில்உள்ள புள்ளியின் அச்சு தூரங்களைக் கண்டு பிடி.

4. $(2, 5, -3)$ $(3, 7, -5)$ $(4, 3, 3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

5. ஆதியையும் $(2, 1, -2)$ $(3, 4, 5)$ என்ற இரு புள்ளிகளையும் உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்று நிரூபி.

6. $(1, 2, 3)$ $(3, 2, -1)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து (x, y, z) என்ற புள்ளி சமதூரத்தில் இருந்தால், $x-2z=0$ என்று காண்பி.

7. $(2, 6, 3)$ $(3, 2, 2)$ $(0, 5, 4)$ $(1, 1, 3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட ஒரு நாற்கரம், இணைகரமாக அமையும் என்று நிரூபி.

1. 3. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டைப் பிரித்தல்

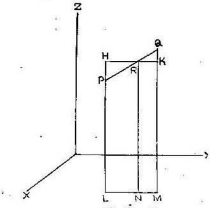
P $(x_1\ y_1\ z_1)$ Q $(x_2\ y_2\ z_2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை $k:l$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களைக் கண்டுபிடிக்க.

PQ-ஐ, $k:l$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி R $(x_1\ y_1\ z)$ என்று கொள்க.

XOY சமதளத்திற்கு செங்குத்தாக PL, QN, RN என்ற நேர்கோடுகள் வரைக. நேர்கோடுகள் PL, QN, RN ஒரு சம தளத்தில் அமைவதைக் காண்க. இந்தச் சமதளத்தில் LMN நேர் கோட்டுக்கு இணையாக, R புள்ளியின் வழியாக ஒரு நேர்கோடு

வரைக. இந்த நேர்கோடு PL-ஐ H என்ற புள்ளியிலும் MK-ஐ K என்ற புள்ளியிலும் வெட்டட்டும். HPR, QRK என்ற முக் கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக அமைகின்றன.

ஆதலால்,



படம் - 3

$$\frac{k}{l} = \frac{PR}{RQ}$$

$$= \frac{PH}{KQ}$$

$$= \frac{LH-LP}{MQ-MK}$$

$$= \frac{NR-LP}{MQ-NR}$$

$$= \frac{z-z_1}{z_2-z}$$

எனவே, $z = \dfrac{kz_2+lz_1}{k+l}$

அதுபோல் ZOX, YOZ என்ற சமதளங்களுக்கு நேர் குத்துக் கோடுகள் வரைந்து,

$$y = \frac{ky_2+ly_1}{k+l}$$

$x = \dfrac{kx_2+lx_1}{k+l}$ என்று காண்பிக்கலாம்

ஆதலின் $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை $k : l$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்கள்,

$$\left(\frac{k\,x_2+lx_1}{k+l},\quad \frac{k\,y_2+ly_1}{k+l},\quad \frac{k\,z_2+lz_1}{k+l}\right)$$

என்று ஆகும்.

குறிப்பு : I. R, P Q-ன் நடுப் புள்ளியானல்,

K : l = 1 : 1 எனவே,

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2},\ z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

பயிற்சி 3

1. (2, 4, 5), (3, 5, –4) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை, YOZ சமதளம் என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்று கண்டுபிடி.

2. (–3, 4 – 8), (5, –6, 4) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை, XOY சம தளம் என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்று கண்டுபிடி ? மேலும், இந்த நேர்கோடு அந்தச் சமதளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

3. A (4, 8. 12), B (2, 4, 6), C (3, 5, 4), D (5, 8, 5) என்பது நான்கு புள்ளிகள். AB, CD என்ற நேர்கோடுகள் சந்திக் கும் என்று காண்பி.

4. $(x_1 y_1 z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் நிர்ணயிக்கும் சமதளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங் களும்,

$$\frac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n},\quad \frac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}$$

$$\frac{lz_1+mz_2+nz_3}{l+m+n}$$ என்று இருக்குமென நிரூபி.

5. (1, 3, 4) (5, –2, 1) (2, 3, – 4) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் திணிவு மையத் தைக் கண்டுபிடி.

6. A $(2, 3, 4)$ B $(-6, -5, 8)$ C $(-1, 0, \frac{11}{2})$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன. AB-ஐ C பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

7. D (x, y, z) என்ற புள்ளி A $(0, 0, 0)$ B $(3, -4, 4)$ C $(7, 1, 4)$ என்ற புள்ளிகளுடன் சமதளத்தில் இருக்கிறது. ABCD ஓர் இணைகரமானால், D-ன் அச்சு தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

8. A $(x_1\ y_1\ z_1)$ B $(x_2\ y_2\ z_2)$ C $(x_3\ y_3\ z_3)$ D $(x_4, y_4\ z_4)$ என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒரு சரிவகத்தின் முனைகள். BCD முக்கோணத்தின் திணிவுமையம A'ன் அச்சு தூரங்கள்,

$$\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$$ என்று நிரூபி.

CDA, DAB, ABC முக்கோணங்களின் திணிவு மையங்கள் B', C', D' என்றால், AA', BB', CC', DD' என்ற நேர்கோடுகள் ஒன்றை ஒன்று $3 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்று காண்பி.

9. ஒரு புள்ளியை ஆதியாக எடுத்துக்கொண்டால், ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்கள் (a, b, o) (a, o, c) (o, b, c) என்று கொள்ளலாமென்று நிரூபி.

10. $(-2, 4, 7)$ $(3, -5, 8)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை அச்சு சமதளங்கள் பிரிக்கும் விகிதங்களை கண்டுபிடி.

11. $(-2, 2, 3)$ என்பது A என்ற புள்ளி. $(13, -3, 13)$ என்பது B என்ற புள்ளி. $3\ PA = PB$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு ஏற்ப, P நகருகிறது. P-ன் நியமப்பாதை

$$x^2+y^2+z^2+28x-12y+10z-247=0$$ என்ற கோளம் என்று நிரூபி.

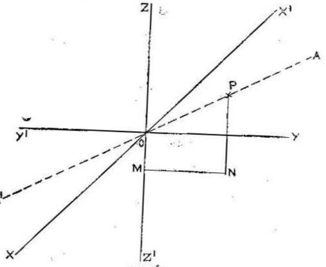
இந்தக் கோளம் AB-ஐ $2 : 3$ விகிதத்தில் உள்ளேயும் வெளியேயும் பிரிக்கிறது என்று சரி பார்.

12. $x^2+y^2+z^2=4$ என்ற கோளத்தைச் சந்திக்க $(1, -2, 3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக நேர்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. இந்த நேர்க்கோடுகள் $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்படுகின்றன. இப்படிப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $5x^2+5y^2+5z^2-6x+12y-18z+22=0$ என்ற கோளத்தின் மேற்பரப்பில் அமைகிறது என்று காண்பி.

1.4. இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்

இந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒரே சமதளத்தில் இருந்தால், அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் என்னவென்று நமக்குத் தெரியும். ஆனால், அந்தக் கோடுகள் ஒரு சமதளத்தில் அமையவில்லை என்றால், அந்தக் கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணமானது ஒரு புள்ளியின் வழியாக, அந்தக் கோடுகளுக்கு இணையாகவரையப் படும் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமேயாகும்.

திசை கொசைன்கள் : கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு, X'OX, Y'OY, Z'OZ என்ற அச்சுகளின் நேர் திசைகளுடன் α, B, γ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குமேயானால், அந்தநேர்க்கோட்டின் திசை கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ எனப்படும்.



படம் - 4

ஆதி O-ன் வழியாகச் செல்லும் A'OA என்ற நேர் கோட்டினுடையது. திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ எனக் கொள்க. A'OA இன் மேல் P (x, y, z) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள். $OP = \gamma$. XOY சமதளத்துக்குச் செங்குத்தாக PN என்ற நேர்கோடு வரை. சமதளம் XOY-ல் OX-க்குச் செங்குத்தாக NM என்ற நேர்கோடு வரைக. அப்படியானால் $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ என்று ஆகும். OM என்பது OX-ன் மேல் OP-ன் வீச்சாகும்.

ஆதலால்,

$$x = \gamma \cos\alpha$$

அதேபோல் $y = \gamma \cos \beta$

$z = \gamma \cos \gamma$

இவைகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்ட,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$ ஆகும்.

$x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2$ ஆதலின்,

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ஆகும்.

வேறுவழி

எந்த ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் OP-ன் வீச்சு, அக் கோட்டின் மேல் OM, MN, NP என்பவைகளின் விச்சுக்களின் கூட்டுத் தொகையாகும். ஆதலின் OP-ன் மேல் வீச்சை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\gamma = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

ஆனால்,

$$x = \gamma \cos \alpha$$

$$y = \gamma \cos \beta$$

$$z = \gamma \cos \gamma$$

ஆகையால்

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

கிளைத் தேற்றம் 1. $\cos \alpha = \frac{x}{\gamma}$ $\cos \beta = \frac{y}{\gamma}$

$\cos \gamma = \frac{z}{\gamma}$ ஆதலின்

$$\gamma^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

கிளைத் தேற்றம் 2. ஆதி O-ன் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் திசை கொசைன்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ என்றால்,

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma} = \gamma$$

(x, y, z) என்பது அந்தக் கோட்டின்மேல் உள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்களாகும். γ என்பது அந்தப் புள்ளி ஆதியிலிருந்து உள்ள தூரமாகும்.

ஆகவே, ஆதிவழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் $\gamma \cos \alpha$, $\gamma \cos \beta$, $\gamma \cos \gamma$ எனக்கொள்ளலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 3. $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ என்ற திசை கொசைன்களுடைய $(x^1\ y^1 z^1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகசெல்லும் நேர்கோட்டின்மேல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (x, y, z) என்றால்,

$$\frac{x-y_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma} = \gamma$$

மாதிரி கணக்குகள்

1. நிலை அச்சுகளுக்குச் சமமாக சாய்ந்திருக்கும் நேர்க்கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் யாவை? அப்படிப்பட்ட கோடுகள் எத்தனை?

2. P என்ற புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (3, 12, 4) OP என்ற கோட்டின் திசை கொசைன்களைக் கண்டுபிடி.

3. இரண்டு கோடுகளின் திசை கொசைன்கள்

$$l+m+n=o$$
$$2lm+2mn-nl=o$$

என்றஇரு சமன்பாடுகளைச் சரிசெய்கிறது. அப்படியானால் அந்தத் திசை கொசைன்களைக் கண்டுபிடி.

4. $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ என்பவை ஒரு கோட்டின் திசை கொசைன்களானால்,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$ என்று நிரூபி.

5. (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) என்பவை இரு புள்ளிகள் PQ-ன் அச்சு தூரங்களானால், l, m, n என்ற திசை கொசைன் களுடைய ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் PQ ன் வீச்சு $l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$ என்று நிரூபி.

6. அச்சுக்களின்மேல் ஒரு கோட்டின் வீச்சுகள் 2, 3, 6 அப்படியானால் அந்த கோட்டின் நீளம் என்ன?

குறிப்பு a, b, c என்பவை ஒரு கோட்டின் திசை கொசைன்களுக்கு விகித சமமானால்,

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

OP-ன் திசை கொசைன்கள்

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \; -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \; -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

PO-ன் திசை கொசைன்கள்

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2+b_2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்

[திசை கொசைன்கள் மூலமாக]

OP, OQ என்ற நேர்கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ என்று கொள்க.

OQ உடன் OP உண்டாக்கும் கோணம் Q என்று கொள்க.

(x, y, z) என்பவை P-ன் அச்சுத் தூரங்கள்.

$OP = \gamma$ என்க.

OQ-ன் மேல், OP, OM, MN, NP என்பவைகளின் வீச்சுக்களை கண்டுபிடி.

OP-ன் வீச்சு OM, MN, NP என்பவைகளின் வீச்சுக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம். ஆதலால்,

$$\gamma\cos = \theta = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$

ஆனால் $x = \gamma\cos\alpha$, $y = \gamma\cos\beta$

$$z = \gamma\cos\gamma$$

ஆகையால்,

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

கிளைத் தேற்றம் 1: லக்சான்ஜின் சர்வ சமமானது

$$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2$$
$$=(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2$$ என்று ஆகும்.

$$l=\cos\alpha \quad m=\cos\beta \quad n=\cos\gamma$$
$$l'=\cos\alpha' \quad m'=\cos\beta' \quad n'=\cos\gamma'$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1$$
$$\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1$$

எனவே,

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$
$$=[\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma][\cos^2\alpha^1+\cos^2\beta^1+\cos^2\gamma]-[\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma']^2$$
$$=(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)^2+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)^2$$

கிளைத் தேற்றம் 2:

$a, b, c; a', b', c'$ என்பவை இரு நேர்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களுக்கு விகித சமமானால்,

$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$\sin\theta=+\frac{\sqrt{(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

[θ என்பது அந்த கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின அளவு.]

கிளைத் தேற்றம் 3:

அந்தக் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் நேர் கோண மானால்,

$\cos\alpha \cos\alpha^1 + \cos\beta \cos\beta^1 + \cos\gamma \cos\gamma^1 = 0$

அல்லது

$aa' + bb' + cc' = 0.$

கிளைத் தேற்றம் 4 :

அந்தக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானால்,

$\cos\beta \cos\gamma' - \cos\beta' \cos\gamma = 0$

$\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\alpha \cos\gamma' = 0$

$\cos\alpha \cos\beta' - \cos\alpha' \cos\beta = 0$

எனவே, $\cos\alpha = \cos\alpha', \cos\beta = \cos\beta'$

$\cos\gamma = \cos\gamma'.$

அல்லது $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$

பயிற்சி 4

1. PQ-ன் அச்சு தூரங்கள் (2, 3, −6) (3, −4, 5) ஆனால், OQ உடன் OP உண்டாக்கும் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

2. மூன்று கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் (2, 1, 1) $(4, \sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1)$ $(4, -\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)$ என்பவைகளுக்கு விகித சமமாக அமைகிறது. அப்படியானால், ஒன்றுக்கொன்று இடையேயுள்ள கோணங்களின மதிப்புகள் $\pi/3$ என்று நிரூபி.

3. கனசதுரத்தின் இரு மூலைவிட்டங்களிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

4. கன சதுரத்தின் நான்கு மூலைவிட்டங்களுடன் ஒரு நேர் கோடு $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. அப்படியானால்,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 4/3$ என்று நிரூபி.

5. O-ன் வழியாக வரையப்படும் மூன்று கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் (1, −1, 1) (2, −3, 0) (1, 0, 3) என்பவைகளுக்கு விகித சமமானால் அந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு சம தளத்தில் அமையும் என்று நிரூபி.

ஒரு நேர்க்கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரம்

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்பவை திசை கொசைன்களாகவும் A (a, b, c) என்ற புள்ளியின் வழியாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டிலிருந்து P $(x'\ y'\ z')$ என்ற புள்ளியின் தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்க,

P-லிருந்து நேர்கோட்டுக்கு PN என்ற நேர் குத்துக்கோடு வரை. $PN = \delta$ என்று கொள்க. AN, அந்தக் கோட்டின்மேல் AP யின் வீச்சாகும்.

ஆதலால்,

$$AN = (x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma.$$

ஆனால்,

$$PN^2 = AP^2 - AN^2$$

ஆகையால்,

$$= [(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2] - [(x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma]^2$$

$$= [(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2]\,[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma] - [(x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma]^2$$

$$= [(y'-b)\cos\gamma - (z'-c)\cos\beta]^2 + [(z'-c)\cos\alpha - (x'-a)\cos\gamma]^2 + [(x'-a)\cos\beta - (y'-b)\cos\alpha]^2$$

கிளைத் தேற்றம்

P என்ற புள்ளி அந்தக் கோட்டின்மேல் அமையுமானால் $\delta = 0$

$$\frac{x'-a}{\cos\alpha} = \frac{y'-b}{\cos\beta} = \frac{z'-c}{\cos\gamma}$$

பயிற்சி 5

1. (3, 4, 5) என்ற புள்ளியின்வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு [திசை கொசைன்கள் 2, −3, 6 என்பவைகளுக்கு விகித சமமாக அமையும்] (−1, 2, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரம் என்று கண்டுபிடி.

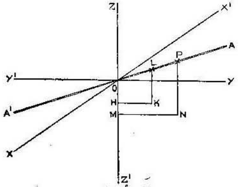
2. $(2, -3, 5)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு அச்சுகளுடன் சமகோணங்களை அமைத்தால், அந்த நேர்கோடு $(1, -2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அமைகிறது என்று கண்டுபிடி.

திசை விகிதங்கள்

PQ என்ற ஒரு நேர்கோட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதே திசையில் ஆதி O-ன் வழியாக PQ இணையாக, OL என்ற நேர்கோடு வரைக. $OL = 1$ அலகு. L-ன் அச்சு தூரங்கள் PQ-ன் திசையைப் பொருத்தது L-ன் அச்சு தூரங்கள் PQ-ன் திசை விகிதங்களாகும்.

நிலை அச்சுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால் திசை விகிதங்களும், திசை கொசைன்களும் ஒன்றே.

தேற்றம் A'OA என்ற நேர்கோட்டில் $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியிருந்தால், [A'OA-ன் திசை விகிதங்கள் l, m, n என்று கொள்க.]



படம் - 5

$$l = \frac{x}{\gamma}, m = \frac{y}{\gamma}, n = \frac{z}{\gamma} \quad [\gamma = OP].$$

படத்திலிருந்து
$$\frac{OP}{OL} = \frac{OM}{OH}$$

$$\frac{\gamma}{1} = \frac{x}{l}$$

ஆகையால்,

$$\frac{x}{l} = \gamma$$

அதுபோல்,

$$\frac{y}{m} = \gamma, \frac{z}{n} = \gamma$$

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

கிளைத் தேற்றம் 1 :

$[x', y', z']$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோட்டில் (x, y, z) என்ற புள்ளி இருந்தால்,

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}$$

கிளைத் தேற்றம் 2 :

P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்கள் (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2), PQ-ன் நீளம் γ அலகுகள் என்று இருந்தால் PQ-ன் திசை விகிதங்கள்

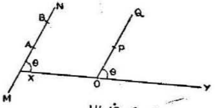
$$\frac{x_2 - x_1}{\gamma}, \frac{y_2 - y_1}{\gamma}, \frac{z_2 - z_1}{\gamma}$$

பின் குறிப்பு

வீச்சு [Projection]

ஒரு துண்டின் வீச்சு :

AB என்பது கொடுக்கப்பட்ட துண்டு. கொடுக்கப்பட்டுள்ள XY என்ற நேர்கோட்டின்மேல் A, B என்ற புள்ளிகளிலிருந்து நேர்குத்துக் கோடுகள் வரைக. A′, B′ என்ற புள்ளிகள் இந்தக் குத்துக்கோடுகளின் அடிகளாகட்டும். அப்படியானால் XY-ன் மேல் AB-ன் வீச்சு A′B′ ஆகும்.



படம் - 6

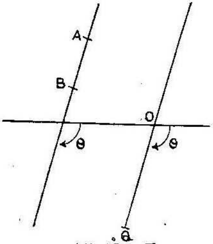
AB என்ற துண்டு MN என்ற நேர்கோட்டில் அமைந்து, MN, XY உடன் θ என்ற கோணம் உண்டாக்கினால் வீச்சின் அளவை AB. Cos θ என்று ஆகும்.

MN என்ற கோட்டிற்கு இணையாக OQ வரைக. OQ-ன் மேல் AB-ககுச் சமமாகவும் அதே திசையிலும் OP வரைக.

AB-ன் வீச்சு = OP-ன் வீச்சு

= OP $\cos\theta$

= AB $\cos\theta$



படம் - 7

AB எதிராக அமைந்தால் BA-ன் வீச்சு = BA $\cos\theta$ – (AB-ன் வீச்சு) = — AB $\cos\theta$,

அதாவது,

AB-ன் வீச்சு = AB, $\cos\theta$

A, B, C........M, N என்ற புள்ளிகள் முப்பரிமாண வெளியில் அமைந்தால், XY என்ற நேர்கோட்டின்மேல், AB, BC, MN என்பவைகளின் வீச்சின் கூட்டுத்தொகை AN-ன் வீச்சுக்கு சமமாகும்.

A, B,...... M, N என்ற புள்ளிகளிலிருந்து XY-க்கு வரையப் படும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள்,

A′, B′,........M′, N′ ஆனால்,

$$A'B' + B'C' + \dots\dots + M'N' = A'N'.$$

பயிற்சி 6

1. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உடைய இரு நேர்கோடு களின் திசைகொசைன்கள் l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 ஆகும். இந்த இருகோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள மூன்றுவது கோட்டின் திசைகொசைன்கள்

$$m_1 n_2 - m_2 n_1, \; n_1 l_2 - n_2 l_1,$$
$$l_1 m_2 - l_2 m_1$$ என்று காண்பி.

2. (l_1, m_1, n_1) (l_2, m_2, n_2) (l_3, m_3, n_3) என்ற திசை கொசைன்களையுடைய மூன்று, ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் சம தளத்தில் அமையவேண்டுமானுல்,

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$ என்று காண்பி.

3. $(4, 7, 8)$; $(2, 3, 4)$; $(-1, -2, 1)$; $(1, 2, 5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாக அமையும் என்று காண்பி.

4. A $(1, 8, 4)$ B $(0, -11, 3)$ C $(2, -3, 1)$ என்பவை மூன்று புள்ளிகள். BC-ன்மேல் A-லிருந்து வரையப்படும் செங் குத்துக் கோட்டின் அடி D ஆகும். D-ன் அச்சு தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

5. $3l+m+5n=0$; $6mn-2nl+5lm=0$ என்ற சமன்பாடு களுக்கு கட்டுப்பட்ட திசை கொசைன்களுடைய இருகோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

6. $al+bm+cn=0$ $ul^2+vm^2+wn^2=0$ என்ற சமன் பாட்டினுல் அமையும் திசைகொசைன்களையுடைய இருகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவோ, இணையாகவோ இருக்க வேண்டுமானுல் $a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v)=0$ அல்லது,

$$\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}=0$$ என்று நிரூபி.

7. (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) என்ற திசை கொசைன்களையுடைய மூன்று நேர்கோடுகளுடன் சமமாக சாய்ந்திருக்கும் நேர்கோட்டின் திசை கொசைன்கள்,

$$\frac{l_1+l_2+l_3}{3}, \frac{m_1+m_2+m_3}{3}, \frac{n_1+n_2+n_3}{3}$$

என்று காண்பி.

8. (*a*) *x*-அச்சு (*b*) *y*-அச்சு (*c*) *z*-அச்சு இவைகளின் திசை கொசைன்கள் யாவை?

9. $\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$ திசைகொசைன்களையுடைய கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறுங்கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

10. A(9, 2, —5) B(1, —3, 7) சேர்க்கும்கோடு. C(—6, 2, 3) D(2, 7, —9) சேர்க்கும் கோட்டுக்கு இணை என்று நிரூபி.

11. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்கள் முறையே (2, 4, 5) (1, 2, 3) (3, 6, 2). ஆதி 0 ஆனால், OC-ன்மேல் AB-ன் வீச்சை கண்டுபிடி.

12. $2l+2m-n=0$ $mn+nl+lm=0$ என்ற சமன்பாடுகளை சரிசெய்யும் திசைகொசைன்களையுடைய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையுமென்று காண்பி.

2. சமதளங்களும் நேர்கோடுகளும்

சமதளங்கள்

1. 2: மேற்பரப்பு:

$f(x, y, z)$ என்பதை x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட ஒரே ஒரு மதிப்பு உள்ள மெய்யான சார்பலனுகக் கொள்வோம்.

$x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் $f(x^1\ y^1\ z^1)=O$. அப்போது x_1, y_1, z_1 என்பது $f(x, y, z)=O$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரி செய்யும். (x_1, y_1, z_1) என்ற மூன்று பரிமாண கணிதத்திற்குரிய ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். இப்படிப் பட்ட புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை ஒரு மேற்பரப்பு என்று கூறுகிறோம்.

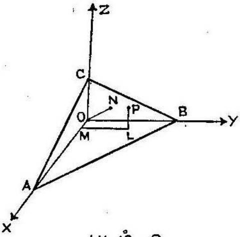
இரண்டு மேற்பரப்புகள் வெட்டும் நியமப் பாதையை வெளி வளை வரை (space curve) என்று கூறுகிறோம்.

இப்படிப்பட்ட மேற்பரப்புகளில் எளிதாக உள்ளது சமதள மாகும். கணித மேதை ஈக்குளிட் (Euclid) சமதளம் என்பது, அதன்மேல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு முழுமையாக அமையும் மேற்பரப்பு என்ற கூறினர்.

2. 2. சமதளத்தின் சமன்பாடுகள் :

1. ஆதி O-லிருந்து சமதளத்தின் மேல் வரையட்படும் செங் குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனவும், அதன் திசை கொசைன்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ எனவும் கொள்க.

ON என்பது ABC சமதளத்தின் மேல் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு ஆதலால் $ON = p$. அந்தச் சமதளத்தின் மேல்



படம் - 8

P என்று ஏதாவது புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. அதன் அச்சுத் தூரங்கள் x, y, z என்று கொள்க. P-யிலிருந்து XOY சமதளத்திற்கு PL என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. XOY சமதளத்தில், L-லிருந்து OX-க்கு LM என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. அப்படினால் $OM = x$. $ML = y$, $LP = z$. ON மேல் OP-ன் வீச்சு ON ஆகும். அந்த வீச்சு OM, ML, LP இவைகளின் வீச்சின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

எனவே $p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$

இதுவே சமதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

2. நிலை அச்சுகளின் மேல் சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகள் a, b, c எனக் கொள்க. $OA = a$,$OB + b$, $OC + c$.

$ON = ON$ மேல் OA-ன் வீச்சு

$p = a \cos\alpha$

அதேபோல் $p = b \cos\beta$

$p = c \cos\gamma$

முன்கண்ட சமன்பாடு

$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$

$x \cdot p/a + y \cdot p/b + z\, p/c = p$

என்றாகும். எனவே,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

கி. தே: $ax+by+cz=1$ என்பது சமதளத்தின் சமன்பாடாக அமைந்தால் a, b, c என்பவை சமதளத்தின் மேல் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் திசை விகிதங்களாகும்.

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ என்பவை சமதளம் நிலை அச்சுகளின்மேல் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளின் அளவுகளாகும்.

3. பொது சமன்பாட்டின்படி, ஒன்றாக அமைந்தால், அந்தச் சமன்பாடு ஒரு சமதளத்தைக் குறிக்கும்.

ஒரு படி உள்ள சமன்பாடு

$$Ax + By + Cz + D = O$$

என்று ஆகிறது.

அதை $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$ என்று எழுதலாம்.

எனவே $\frac{-D}{A}$, $+\frac{-D}{B}$, $+\frac{-D}{C}$ என்பவை நிலை அச்சுகளின் மேல் உண்டாக்கும் வெட்டுத் துண்டுகளின் அளவுகளாகும். அத்துடன் அந்தச் சமதளத்தின்மேல் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் திசை கொசைன்கள் A, B, C என்பவைகளுக்கு விகித சமமாகும். ஆதலால்,

$$\cos \alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$\cos \beta = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$\cos \gamma = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

அந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

இந்த அளவுகள் D மிகையாக இருக்குபோது தான் அமையும். D குறையாக அமையும்போது

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \text{Cos}\ \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\text{Cos}\ \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad p = \frac{-D}{\sqrt{A^2=B^2\times C^2}}$$

என்ருகும்.

கி. தே: 1. $ax+by+cz+d=o$ $a'x+b'y+c'z+d'=o$ என்ற இரு சமதளத்திற்கிடையேயுள்ள கோணம்

$$\pm\ \text{Cos}^{-1}\left[\frac{(aa'+bb'-cc')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\right]$$

என்று ஆகும்.

கி. தே: 2. சமதளங்கள் இரண்டும் இணையாக அமைந்தால் அவைகளின் மேல் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒன்ருகவே இருக்கும். ஆதலால்,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

கி. தே: 3. சமதளங்கள் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால் $aa'+bb'+cc' = o$.

பயிற்சி 7

1. $x+2y-2z = o$ என்ற சமதளம், நிலை அச்சுகளின் மேல் உண்டாக்கும் துண்டுகளைக் கண்டு பிடி. அந்தச் சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர் கோட்டின் திசை கொசைன்களையும் கண்டுபிடி.

2. $x-y+z=1$, $3x+2y-z+2=o$ என்ற சமதளங்களுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 90° என்று நிரூபி.

3. கீழ்கண்ட சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணங்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $2x-y+z=0$, $x+y+2z=7$.

(ii) $3x+4y+5z=9$, $2x+6y-6z=8$.

4. $2x+5y+4z+1=0$, $4x+7y+6z+2=0$ என்ற இரு சமதளங்களுக்கும் செங்குத்தாக அமையும் சமதளத்தின் சமன்பாடு $x+2y-3z+4=0$ என்று நிரூபி.

5. $2x+3y+4z=5$ என்ற சமதளம் ஆதியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கிறது என்று கண்டு பிடி.

6. $3x+4y-5z$ 0 என்ற சமதளத்திற்கு இணையாக $(1, 2, 3)$ புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

7. $P(2, 3, -1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக OP என்ற நேர் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு சமதளம் நிலை அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ABC முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் அச்சு தூரங்கள் (a, b, c) அப்படியானால் சமதளத்தின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ என்று நிரூபி.

2. 3. கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளின் வழியாக வரையப்படும் சமதளத்தின் சமன்பாடு.

குறிப்பு: அந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையக்கூடாது.

(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) என்பது அந்த மூன்று புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$ax+by+cz+d=o$ என்பது சமதளத்தின் சமன்பாடாகக் கொள்க.

அப்படியானால்

$$ax_1+by_1+cz_1+d=o$$

$$ax_2+by_2+cz_2+d=o$$

$$ax_3+by_3+cz_3+d=o$$

எனவே, a, b, c, d என்ற மாறிலிகளை நீக்கினுல்.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ருகும். இதுவே சமதளத்தின் சமன்பாடாகும்,

பயிற்சி 8

1. $(1, 1, 0)$ $(1, 2, 1,)$ $(-2, 2, -1)$ என்ற மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $(1, 2, 3)$ $(-1, 1, 2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை முழுமையாகக் கொண்டு, $(2, 2, 3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3 $(0, -1, 0)$ $(2, 1, -1)$ $(1, 1, 1)$ $(3, 3, 0,$ என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே சமதளத்தின்மேல் அமைகிறது என்று காண்பி.

4. $(6, -4, 4)$ $(0, 0, -4)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு $(-1, -2, -3)$ $(1, 2, -5)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும்நேர்கோட்டைச் சந்திக்கிறது என்று நிரூபி.

5. $2x + 6y + 6z = 9$ என்ற சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைந்து, $(2, 2, 1)$ $(3, 3, 4)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. $x + 2y + 2z = 5$, $3x + 3y + 2z = 7$ என்ற சமதளங் களுக்குச் செங்குத்தாக அமைந்து, $(-1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. 4. ஒரு புள்ளியிலிருந்து சமதளத்தின் தூரம்

$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = P$ என்ற சமதளத்தில் இருந்து $P(x', y', z')$ என்ற புள்ளியின் தூரத்தைக் காண்க.

P என்பது மிகையாக (Positive) இருந்தால் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ என்பது ஆதியிலிருந்து சமதளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் திசை கொசைன்களாகும்.

ஆதியை $P(x^1, y^1, z^1)$ என்ற புள்ளிக்கு மாற்றினால், சமதளத்தின் சமன்பாடு.

$$P = (X = x') \cos \alpha + (Y + y') \cos \beta + (Z + z') \cos \gamma.$$

அல்லது

$$P' = X \cos \alpha \times Y \cos \beta + Z \cos \gamma.$$

என்று அமையும்.

இங்கு,

$$p' = p - x' \cos \alpha - y' \cos \beta - z' \cos \gamma$$

ஆதலால் $p\ (x', y', z')$ என்ற புள்ளியிலிருந்து சமதளத்தின் தூரம்

$$p - x' \cos \alpha - y' \cos \beta - z' \cos \gamma$$

என்றாகும்

கி. தே: $ax + by + cz + d = o$ என்ற சமதளத்திலிருந்து x', y', z') ன் தூரம்

$$\pm \frac{ax' + by' + cz' + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

பயிற்சி 9

1. (2, 3, 4) (1, 1, 4) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து $6x - 3y + 11z + 2 = 0$ என்ற சமதளத்தின் தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

2. $2x + 2y + z + 7 = 0$, $4x + 4y + 2z = 7$ என்ற இரு இணை சமதளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

3. ஆதியிலிருந்துள்ள தூரம், $2x - y + 2z = 8$ என்ற சமதளத்திலிருந்துள்ள தூரத்தைப்போல் மூன்று மடங்காக அமையும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

4. $x + y + z = o$, $x - z = o$, $x - 2y + z = o$ என்ற மூன்று சமதளங்கள் ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 9 ஆனால், அந்த நியமப்பாதை என்ன?

2. 5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு சமதளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள்.

$ax+by+cz+d=o$, $a'x+b'y+c'z+d'=o$ என்ற சமதளங்களின் சமன்பாடாகக் கொள்க.

குறிப்பு: சமன்பாடுகளை எழுதும்போது d, d^1 என்பவைகளை மிகையாக எழுதவும்.

$$\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\frac{a'x+b'y+c'z+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

என்பது சமதளங்களுக்குச் சமதூரத்தில் அமையும் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையாகும்.

$$ax+by+cz+d, \quad a'x+b'y+c'z+d$$

என்ற கோவைகள் ஒரே குறியாக அமையும். அப்போது சம தூரத்திலுள்ள புள்ளிகள் சமதளங்களின் ஆதி இருக்கும் பக்கத்தில் அமையும் அல்லது ஆதி இல்லாத பக்கத்தில் அமையும்.

எப்படியாயினும் அந்த புள்ளிகளின் நியமப்பாதை கொடுக்கப்பட்ட சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைச் சமமாக வெட்டும் சமதளமாகும்;

அது போல்

$$\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\frac{a'x+b'y+c'z+d^1}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

என்பது சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள மற்றைய கோணத்தின் சம வெட்டியாகும்.

பயிற்சி 10

1. $x+2y+2z=9$, $4x-3y+12z+13=0$ என்ற சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள குறுங்கோணத்தைச் சமமாக வெட்டும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. அதுபோல் விரிகோணத்தைச் சமமாக வெட்டும் சமதளத்தைக் கண்டுபிடி.

2. $3x+4y-5z+1=0$, $5x+12y-13z=0$ என்ற இரு சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள விரி கோணத்தை $14x-8y+13=0$ என்ற சமதளம் சமமாக வெட்டுமென்று காண்பி.

நேர்கோடுகள்

2·6 : வரையறை :

வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஒரு படியாக அமைந்தால், அது ஒரு சமதளத்தைக் குறிக்கும். இப்படிப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளைச் சரி செய்யும் அச்சு தூரங்களையுடைய புள்ளிகள், இந்த சமன்பாடுகள் குறிக்கும் சமதளங்கள் வெட்டும் நேர்கோடுகளில் அமையும். ஆதலால், இந்த இரு சமன்பாடுகள் சேர்ந்து ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

2·7 : சமச்சீரான அமைப்புள்ள சமன்பாடுகள் :

A (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் திசை கொசைன்கள் l, m, n என்று கொள்க. அந்த நேர் கோட்டின் மேல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் P (x, y, z) என்று கொண்டால்,

$$l = \frac{x-\alpha}{r}, \quad m = \frac{y-\beta}{r}, \quad n = \frac{z-\gamma}{r}$$

இங்கு $r = AP = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$ ஆதலால் நேர்கோட்டின்மேல் உள்ள எந்த புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad (=r)$$

என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும். அதுவே, நேர்கோட்டின் தூரச் சமன்பாடெனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு :

நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் l, m, n எனின், அதன் சமன்பாடு,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = \gamma$$

இந்தக் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களையும் $\alpha+lr, \beta+mr, \gamma+n\gamma$ என்று எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 11

1. $2x+4y-z+1=0$ என்ற சமதளத்தை

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$$

என்ற நேர்கோடு எந்தப்புள்ளியில் சந்திக்கிறது என்று கண்டுபிடி.

2. $x+y+z=2$ என்ற சமதளத்தை

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$$

என்ற நேர்கோடு சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து $(3, 4, 5)$ என்ற புள்ளி எவ்வளவு தூரத்திலிருக்கிறது என்று கண்டுபிடி.

3. (α, β, γ) என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax+by+cz+d=0$ என்ற சமதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\alpha}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$ என்று நிரூபி.

4. (α, β, γ) என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-\alpha}{mvl_1-\alpha}=\frac{y-\beta}{vm_1-\beta}=\frac{z-\gamma}{vn_1-\gamma}$ என்று காண்பி.

இங்கு $\gamma=\frac{\alpha l_1+\beta m_1+\gamma n_1}{l_1^2+m_1^2+n_1^2}$.

2·8 : இரு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் நேர்கோடு.

இருபுள்ளிகளின் அச்சு தூரங்கள் $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $Q(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ என்றால், PQஇன் திசை விகிதங்கள் $(\alpha_2-\alpha_1)$, $(\alpha_2-\beta_1)$, $(\gamma_2-\gamma_1)$ என்றாகும். எனவே, PQஇன் சமன்பாடு,

$$\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}=\frac{z-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}$$

குறிப்பு : இந்த நேர் கோட்டின் மேலுள்ள எந்த புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை

$$x=\frac{\lambda\alpha^2+\alpha_1}{\lambda+1}\quad y=\frac{\lambda\beta_2+\beta_1}{\lambda+1}\quad z=\frac{\lambda\gamma_2+\gamma_1}{\lambda+1}$$

என்றுகொள்ளலாம். இங்கு λ ஒரு சாராமாறி (Parameter).

பயிற்சி 12

1. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{k}$, $\frac{x+7}{3k}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{-6}$ என்று இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால், Kஐ கண்டுபிடி.

2. $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+5}{3}$ என்ற நேர்கோட்டின் மேல்

$(2, -3, -5)$ என்ற புள்ளியின் இருபக்கங்களிலும் '3' தூரத்தி லுள்ள புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி

3. $2x+3y+4z=5$ என்ற சமதளத்தை

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4}$$

என்ற நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

4. $2x+5y-6z=16$ என்ற சமதளத்திலிருந்து $(2, 1, 2)$ என்ற எண்களுக்கு விகித சமமாக உள்ள திசை கொசைன்களையுடைய நேர்கோட்டின் வழியாக, $(3, -4, 5)$ என்ற புள்ளியின் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

5. $2x-y+z+3=0$ என்ற சமதளத்தில் $(1, 3, 4)$ என்ற புள்ளியின் எதிர் உருவத்தைக் கண்டுபிடி.

6. $2x-3y+4z=5$ என்ற சமதளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக்கண்டுபிடி. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட சமதளத்தில் ஆதியின் பிரதிபிம்பத்தைக் கண்டுபிடி.

7. $6x+4y-5z+0$, $x-5y+2z=12$ என்ற இரு சமதளங்களை, $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{1}$ என்ற நேர்கோடு ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கிறது என்று காண்பி, அப்படியானால் இந்த நேர்கோடும் கொடுக்கப்பட்ட சமதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடும் ஒரே சமதளத்தில் அமைகிறது என்று நிரூபி.

8. x. நிலை அச்சுக்கு இணையாக (a, b, c) புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{0}=$$ என்று காண்பி.

9. $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ என்ற நேர்கோடு $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற சமன்பாட்டை இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறதென்று காண்பி. இந்த இரண்டு புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளியில் அமைந்தால் அதற்கான நிபந்தனை என்ன?

10. $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{o}$ என்ற நேர்கோடு z-நிலை அச்சுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமென்று காண்பி.

9 : சமன்பாடுகளிலிருந்து திசை விகிதங்கள்.

$ax+by+cz+d=o$, $a'x+b'y+c'z+d=o$ என்பவை சமதளங்களின் சமன்பாடுகள் என்று கொண்டால், $ax+by+cz=o$, $a'x+b'y+c'z=o$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட சமதளங்களுக்கு இணையாக ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் சமதளங்களாகும். ஆதலால், $ax+by+cz=zo=a'x+b'y+c'z$ ... (1) என்பது ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். இந்த நேர்கோடு $ax+by+cz+d=o=a'x+b'y+cz'+d$... (2) என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகும்.

(1) சமன்பாட்டை

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'-a}=\frac{z}{ab'-a'b}$$

என்று எழுதலாம். எனவே $(bc'-b'c)$, $(ca'-c'a)$, $(ab'-a'b)$ என்பவை (1), (2) என்ற இரு நேர்கோடுகளின் திசை விகிதங்களாகும்.

மேலும் (2) நேர்கோடு $z=o$ என்ற சமதளத்தை $\left(\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}, \frac{da'-d'a}{ab'-a'b} o\right)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டும். ஆதலால், நேர்கோட்டின் சமச் சீரான அமைப்பு

$$\frac{x-\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}}{bc'-b'c}=\frac{y-\frac{da'-d'a}{xb'-a'b}}{ca'-ac'}=\frac{z}{ab'-a'b}$$

பயிற்சி 13

XOY சமதளத்திற்கு இணையாக (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை.

$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{o}$ என்று கொள்ளலாமென நிரூபி.

2. OZ நேர்கோட்டிற்கு இணையாக (α, β, γ) வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$\frac{x-\alpha}{0}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z-\gamma}{1}$ அல்லது $x=\alpha$, $y=\beta$ என்று கொள்ளலாமென நிரூபி.

3. $2x+3y-4z=0=3x-4y+z$

$5x-y-3z+12=0=x-7y+5z-9.$

என்ற நேர்கோடுகள் இணையாகுமென காண்பி.

4. $x-2y+z=0=x+y-z+6$

$x+2y+z+5=0=8x+12y+5z$

என்ற நேர் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் (குறுங் கோணம்) கண்டுபிடி.

5. $x-2y+z=0=3x+2y+z-6$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக $(1, 1, 2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டு பிடி.

2·10: சமதளமும் நேர்கோடும்

$$ax+by+cz+d=o\,;\quad \frac{z-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=\gamma$$

என்பவை முறையே சமதளம், நேர்கோடு இவைகளின் சமன்பாடாகும். இங்கு $l, m. n$ என்பவை நேர்கோட்டின் திசை கொசைன்களாகும். நேர்கோட்டின் மேல் உள்ள எந்த புள்ளியின் அச்சுதூரங்களும் $[(\alpha+lr), (\beta+mr). (\gamma+nr)]$ என்றாகும். இந்த புள்ளி சமதளத்தின் மேல் அமைந்தால் $a(\alpha+lr)+b(\beta+mr)+c(\gamma+nr)+d=o$

எனவே,

$$\gamma\,(al+bm+cn)+(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)=o$$

$al+bm+cn=o$ என்றும்

$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\neq o$ என்றுமிருந்தால் நேர்கோடு சமதளத்திற்கு இணையாகும்.

சமதளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டின் திசை கொசைன்கள் $(a, b. c)$ க்கு விகித சமமாகும். ஆதலால்,

$\frac{a}{l}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$ என்றால் நேர்கோடு சமதளத்திற்கு செங்குத்தாக அமையும்.

கி, தே: 1. நேர்கோடு சமதளத்தில் முழுமையாக அமைய வேண்டுமானால்,

$$al+bm+cn=0$$
$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d=0$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட வேண்டும்.

கி. தே: 2. நேர்கோட்டிற்கும் சமதளத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணம்

$$\cos\theta = \frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

பயிற்சி 14

1. $2x+3y+4z+5=0$, $x+2y+3z=4$ என்ற இரு சமதளங்களுக்கு இணையாக $(-1, 1, 2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $(3, 2, -5)$, $(0, -4, -11)$, என்ற இரு புள்ளிகளின் சேர்க்கைக்கு இணையாக $(-2, 1, -3)$, $(4, 3, 3)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாடு $4x+3x-5z=0$ என்று காண்பி,

3. $2x-3y-7z=0$, $3x-14y-13z=0$, $8x-31y-33z=0$ என்ற மூன்று சமதளங்களும் ஒரு நேர்கோட்டில் சந்திக்கின்றன என்று நிரூபி.

4. $(3, 4, -1)$, $(2, -1, 5)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் சேர்க்கைக்குச் செங்குத்தாக $(-2, 5, 3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

5. $(-2, -3, 6)$, $(4, 0, -3)$, $(0, -1, 2)$ என்ற மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்திற்கு $(2, 3, 4)$ $(3, 4, 5)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் சேர்க்கை செங்குத்தாகுமென்று நிரூபி.

6. $u_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
$u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாக உள்ளதும்

$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளதுமான சமதளத்தின் சமன்பாடு

$u_1(a_2l+b_2m+c_2n) = u_2(a_1l+b_1m+c_1n)$ என்று நிரூபி.

7. $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாக உள்ளதும் $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ளதுமான சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2·11. மூன்று சமதளங்கள் சந்திக்கும் முறை

இந்த முறைகளில் மூன்று வகைகள் உண்டு.

A. $x+y+z=5$

$2x+3y-z=7$

$4x+5y+2z=6$ என்ற மூன்று சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால் $=52, x\ y=-36, z=-11$.

எனவே இந்த சமன்பாடுகள் நிர்ணயிக்கும் சமதளங்கள $(52, -36, -11)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும்.

B. $12x - y + 2z = 35$ ... (1)

$3x+y+z=7$ ... (2

$x+2y+z=0$ ... (3)

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, (1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து z-ஐ நீக்கினால்,

$$6x - 3y = 21$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து z ஐ நீக்கினால்,

$$6x - 3y = 21$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதே மாதிரி x-ஐ நீக்கினால்

$$5y + 2z + 7 = 0$$

என்ற ஒரு சமன்பாடே கிடைக்கும். ஆதலால் மூன்று சமதளங்களின்மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியும்

$$6x - 3y - 21 = 0 = 5x + 2z + 7$$

என்ற நேர்கோட்டில் அமையும். எனவே மூன்று சமதளங்களும் ஒரு நேர்கோட்டில் சந்திக்கும்.

C. இப்போது $2x-4y+2z=5$ ... (1

$5x-y-z=8$ ... (2

$x+y-z=7$ ... (3

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கலாம்.

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து z-ஐ நீக்கினால்

$4x-2y=1$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து z-ஐ நீக்கினால்

$4x-2y=7$

அதாவது $0\cdot x+0\cdot y=6$ ... (4)

அதுபோல் (1), (2) சமன்பாடுகள், (2), (3) சமன்பாடுகள் இவைகளிலிருந்து y-ஐ நீக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது,

$6x-2z=9$

$6x-2y=15$

அதாவது $0.x+0.z=6$ ... (5)

எனவே, x, y, z மாறிகளுக்கு நிலையான மதிப்பு கிடைக்காது.

(4), (5) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{k}=\frac{y}{k}=6 \qquad \frac{x}{k}+\frac{z}{k}=6$$

என்ற சமன்பாடுகளின் எல்லையாகிறது. [k கந்தழிக்குச் செல்லும்போது].

ஆகவே, இந்த மூன்று சமதளங்களைச் சரி செய்யும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்கள் கந்தழியாகிறது. ஆனால், எந்த இரு சமதளங்களும் இணையாக அமையவில்லை. எனவே, இந்த மூன்று சமன்பாடுகளும் முக்கோண பட்டகத்தின் முகங்களைக் குறிக்கும் எந்த இரு சமதளங்களின் சந்திப்பான நேர்கோடு, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகும்.

பயிற்சி 15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமதளங்களின் சந்திப்பின் வகையைக் கண்டுபிடி.

(i) $2x-5y+z=3,\quad x+y+4z=5,\quad x+3y+6z=1$

(ii) $x+y+z=6,\quad 2x+3y+4z=20,\quad x-y+z=2$

(iii) $2x-y+z=4, \quad 5x+7y+2z=0, \quad 3x+4y-2z+3=0$

2. 12. சமதள நேர்கோடுகள் (Coplanar Lines)

கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்கோடுகள் ஒரு சமதளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனைகள்

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'} \quad \ldots \quad (2)$$

என்பனவற்றை இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகக் கொள்க.

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாடு

$$al + bm + cn = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

என்ற நிபந்தனையுடன் (1) நேர்கோட்டை முழுமையாகக்கொண்ட சமதளத்தைக் குறிக்கும்.

இந்தச் சமதளம் (2) நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொண்டால்

$$a(\alpha'-\alpha) + b(\beta'-\beta) + c(\gamma'-\gamma) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

$$al' + bm' + cn' = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

(4), (5), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து $a, b, c,$ என்ற மாறிலிகளை நீக்கினால்,

$$\begin{vmatrix} \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'-\gamma \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

என்ற நிபந்தனை கிடைக்கும்.

(3), (4), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து $a, b, c,$ என்ற மாறிலிகளை நீக்கினால்,

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இந்த சமன்பாடு (1), (2) நேர்கோடுகளை முழுமையாகக் கொண்ட சமதளத்தைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 16

1. $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$$

என்ற நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைகின்றன என்று நிரூபி.

2. $$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-7}{-3}$$
$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-1}$$

என்ற நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைகின்றன என்று காண்பி. அந்தச் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. $$\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{7}$$
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+10}{8}$$

என்ற நேர்கோடுகள் சந்திக்கின்றன என்று நிரூபி. சந்திக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

4. $$\frac{1}{3}(x+4)=\frac{1}{5}(y+6)=-\frac{1}{2}(z-1)$$
$$3x-2y+z+5=0=2x+3y+4z-4.$$

என்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைகின்றன என்று காண்பி. சந்திக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களையும், கோடுகள் முழுமையாக அமையும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

5. $$x+2y-5z+9=0=3x-y+2z-5$$
$$2x+3y-z-3=0=4x-5y+z+3$$

என்ற நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் உள்ளன என்று காண்பி

6. $$x=ay+b=cz+d$$
$$x=\alpha y+\beta=\gamma z+\delta$$

என்ற நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைந்தால் $(\gamma-c)(a\beta-b\alpha)=(\alpha-a)(c\delta-d\gamma)$ என்று நிரூபி.

7. $x = mz + a \quad x = m'z + a'$

$y = nz + b \quad y = n'z + b'$

என்ற நேர்கோடுகள் சந்திக்க வேண்டுமானால்

$$(a-a')\ (n-n') = (b-b')\ (m-m')$$

என்று காண்பி.

8. $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொண்டதும், $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{l}$ $\frac{x}{n} = \frac{y}{l} = \frac{z}{m}$ என்ற இரு நேர்கோடுகளைக் கொண்ட சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், அமையும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

9. A, A'; B, B'; C, C' என்ற மூன்று ஜோடி புள்ளிகள் நிலை அச்சுகளின்மேல் இருக்கின்றன. A'BC, AB'C'; B'CA, BC'A'; C'AB, CA'B'; என்ற சமதளங்களின் சந்திப்பான நேர் கோடுகள் ஒரே சமதளத்திலுள்ளன என்று நிரூபி.

2. 13. இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரம்.

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

$$\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$$

என்ற சமன்பாடுகள் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கட்டும். இந்தக் கோடுகளின் மேல் A (x, β, γ) A' (x', β', γ') என்ற இரு புள்ளிகள் உள்ளன. குறைந்த தூரமுள்ள நேர்கோடு, கொடுக்கப் பட்ட இரண்டு நேர்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக அமைய வேண்டும். ஆதலால் குறைந்த தூரமுள்ள நேர்கோடு அதன் மேல் AA' என்ற நேர்கோட்டின் வீச்சாகும்.

λ, μ, γ என்பவை அந்த நேர்கோட்டின் திசை கொசைன்களானால்,

$$l\lambda + m\mu + n\gamma = 0$$

$$l'\lambda = m'\mu + n'\gamma = 0$$

எனவே $\frac{\lambda}{mn'-m'n} = \frac{\mu}{nl'-n'l} = \frac{\gamma}{ml' \quad 'm}$ AA'-ன் திசை விகிதங்கள் $[(\alpha-\alpha'), \ (\beta-\beta'), \ (\gamma-\gamma')]$ என்ருகும்

$$AA'\text{-ன் வீச்சு} = \lambda(\alpha-\alpha')+\mu(\beta-\beta')+\gamma(\gamma-\gamma')$$

$$= \frac{(\alpha-\alpha')(mn'-m'n)+(\beta-\beta')(nl'-n'l)+(\gamma-\gamma')(lm'-l'm)}{\sqrt{\Sigma(mn'-m'n)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Sigma(mn'-m'n)^2}} \begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}$$

1. குறைந்த தூரமுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \gamma \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-\alpha' & y-\beta' & z-\gamma' \\ l' & m' & n' \\ \lambda & \mu & \gamma \end{vmatrix}$$

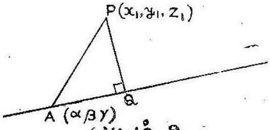
2. இரு கோடுகளும் ஒரே சமதளத்தில் அமைந்தால் குறைந்த தூரம் $=0$

ஆதலால்
$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

2. 14: ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேர்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$



படம்-9

என்றும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (x_1, y_1, z_1) என்றும் கொள்க.

$$PQ^2 = PA^2 - AQ^2$$

$$PA^2 = (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2$$

AQ = கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் மேல் AP-ன் வீச்சு

$$= \frac{l(x_1-\alpha) + m(y_1-\beta) + n(z_1-\gamma)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

அதனால்,

$$PQ^2 = [(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2] - \frac{[l(x_1-\alpha) + m(y_1-\beta) + n(z_1-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2}$$

$$= \frac{1}{l^2+m^2+n^2}\Big[\{(x_1-\alpha)^2+(y^1-\beta)+(z_1\gamma)^2\}\ \{l^2+m^2+n^2\} - \{l(x_1-\alpha)+m(y_1-\beta)+n(z_1-\gamma)\}^2\Big]$$

$$= \frac{1}{l^2+m^2+n^2}\Big[\{l(y_1-\beta)-m(x_1-\alpha)\}^2 + \{m(z_1-\gamma)-n(y_1-\beta)\}^2 + \{n(x_1-\alpha)-l(z_1-\gamma)\}^2\Big]$$

[லெகிரான்ஸின் சர்வ சமத்தின் மூலம்]

பயிற்சி 17

1. $$\frac{x-8}{3} = \frac{y+9}{-16} = \frac{z-10}{7}$$

$$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$$

என்ற இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தையும், குறைந்த தூரமுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

2. $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரம் $\frac{1}{\sqrt{6}}$ என்றும், அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$11x+2y-7z+6=0=7x+y-5z+7$$

என்றும் நிரூபி.

3. $$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள குறைந்த தூரம் $2\sqrt{29}$ என்றும், அப்படியுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

என்றும் நிரூபி.

4. $$3x-9y+5z=0=x+y-z$$

$$6x+8y+3z-13=0=x+2y+z-3$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரம் எவ்வளவு ?

5. $$5x-y-z=0=x-2y+z+3$$

$$7x-4y-2z=0=x-y+z-3$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள குறைந்த தூரத்தையும், அந்த தூரமுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

6. $$\frac{x}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$$

$$5x-2y-3z+6=0=x-3y+2z-3$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரம் என்ன ?

7. $(4,-5,3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து,

$\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-6}{5}$ என்ற நேர்கோட்டின் மேல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அளவென்ன ?

8. $$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

$$\frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma^1}{n'}$$

என்ற நேர்கோடுகளை (λ, μ, γ) திசை கொசைன்களை உடைய மூன்றாவது கோடு சந்திக்கிறது. அப்படியானால், மூன்றாவது கோட்டின்மேல் ஏற்பட்ட துண்டின் நீளம்

$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ \lambda & \mu & \gamma \end{vmatrix}$$

என்று நிரூபி. குறைந்த தூரத்தின் அளவையும் கண்டுபிடி.

2. 15: நான்முகியின் (Tetrahedron) கன அளவு

A (x_1, y_1, z_1) B (x_2, y_2, z_2) C (x_3, y_3, z_3)

D (x_4, y_4, z_4) என்ற புள்ளிகளாலான நான்முகியின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

ABC சமதளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது,

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x^3 & 1 \\ z_3 & x & 1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

ABC-யின் சமன்பாட்டை

$x \cos\alpha + y \cos + z \cos \gamma = \rho$

என்றும் எழுதலாம்.

ABC முக்கோணத்தின் பரப்பளவு Δ என்று கொள்கை. YOZ, ZOX, XOY சமதளங்களின் மேல் ABC-ன் வீச்சு $\Delta \cos\alpha$, $\Delta \cos\beta$, $\Delta \cos\nu$ என்றாகும்.

YOZ சமதளத்தின் மேல் A, B, C புள்ளிகளின் வீச்சு (o, y_1, z_1) (o, y_2, z_2) (o, y_3, z_3)

YOZ சமதளத்தின் மேல் ABC–ன் வீச்சு

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

எனவே $\cos\alpha \cdot \triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$

இதுபோல் $\cos\beta\,\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\cos\gamma\,\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

எனவே சமன்பாடு (1)

$$2\triangle(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x^2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

என்றாகும்.

அதாவது, $2\triangle p = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

OABC நான் முகியின் கன அளவு

$= \frac{1}{3}p\ \triangle$

$=$ OCAB நான்முகியின் கன அளவு

$=$ OBCA நான்முகியின் கன அளவு

எனவே, OABC ன் கன அளவு

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y^1 & z^1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

D புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (x_4, y_4, z_4) எனவே, ஆதியை D-க்கு மாற்றினால்,

DABC ன் கன அளவு

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & 0 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 & 0 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x^1 & y^1 & z^1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y^3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x^1 & y^1 & z^1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

அடுத்தடுத்துள்ள நிறைகள் (rows) அல்லது நிரல்கள் (columns) மாற்றப்பட்டால், அணிக் கோவையின் குறி மாறுகிறது. எனவே,

DABC ன் கன அளவு $= -$ ADBC ன் கன அளவு

$=$ ABDC ன் கன அளவு

$= -$ ABCD ன் கன அளவு

பயிற்சி 18

1. A, B, C ன் அச்சு தூரங்கள முறையே (3, 2, 1), (− 2, 0, − 3), (0, 0, 2) PABC நான்முகியின் கன அளவு = 5 என்றல் P-ன் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

2. நான்முகியின் எதிர் விளிம்புகளின் நீளங்கள் a, b அவைகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரம d. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ. அப்படியாஞல் நான்முகியின் கன அளவு $\dfrac{abd \ \text{Sin} \ \theta}{6}$ எனக் காண்பி.

3. நான்முகியின் நான்கு முகங்களின் சமன்பாடுகள் $a_r x + b_r y + c_r z + d_r = o \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$

அப்படியாஞல், அதன் கன அளவு $\dfrac{\Delta^3}{6 \ D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

D_1, D_2, D_3, D_4, என்பவை அணிக் கோவையில் d_1, d_2, d_3, d_4, இவற்றின் இணைக் காரணிகளாகும்.

4. $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=1$ என்ற நான்கு சமதளங்களாலான நான்முகியின் கன அளவைக் கண்டுபிடி.

5. A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒரே சமதளத்தில் உள்ளன. A′, B′, C′, D′ என்ற புள்ளிகள், ஏதாவது ஒரு சமதளத்தின்மேல் A, B, C, D என்ற புள்ளிகளின் வீச்சாகும். அப்படியாஞல், AB′C′D′இன் கன அளவு = — A′BCDஇன் கன அளவு என்று காண்பி.

பயிற்சி 19

A

1. நிலை அச்சுகளில் $-6, 3, 4$ என்ற துண்டுகளை உண்டாக்கும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. அந்த சமதளத்தின் மேல் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமென்ன ?

2. நிலை அச்சுகளில் சமமாக துண்டுகளை உண்டாக்கும் சமதளம் $(1, 2, 3)$ புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

3. (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாக $ax+by+cz=0$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாக உள்ள சமதளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz=a\alpha+b\beta+c\gamma$ என்று காண்பி.

4. $(4, -1, 3)$, $(-5, 2, 1)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செலலும் சமதளம் $3x-3y-z=9$ என்ற சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

5. $(2, 2, 1)$, $(5, 1, 2)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளம் $x+3y+3z=4$ என்ற சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைந்தால் அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் சமதளம் $x+2y+2z=5$ என்ற சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைந்தால், சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

7. $x+2y+2z=5$, $3x+3y+2z=8$ என்ற சமதளங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் செங்குத்தாக அமையும் சமதளம் $(-1, 3, 2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், சமதளத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

8. $x+2y+3z=4$, $2x+y-z+5=0$ என்ற சமதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடு முழுமையாகக்கொண்ட சமதளம், $5x+3y+6z+8=0$ என்ற சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

9. $5x+3y+6z+8=0$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாக உள்ள சமதளம்,

$$x+2y+3z+4=0=3x-2y+z-1$$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக்கொண்டால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

10. $x+2y+2z=0$, $2x+y-2z=0$ என்ற சமதளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கிறதென்றுநிரூபி. ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் சமதளம் மேற்கண்ட இரு சமதளங்களுக்கும் செங்குத்தாக அமைந்தால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

11. $2x+6y-9z+3=0$, $2x+6y+3z-4=0$ என்ற இரு சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் கண்பிடி.

12. $(1,-1,3)$, $(3,3,3)$ என்ற புள்ளிகள் $5x+2y-7z+9=0$ என்ற சமதளத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்கின்றன என்று நிரூபி. அத்துடன் புள்ளிகள் சமதளத்தின் எதிர்பக்கத்தில் அமைகின்றன எனக் காண்பி.

13. $x+y+z=0$, $x-z=0$, $x-2y+z=0$ என்ற மூன்று சமதளங்களிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆனல், அந்த புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

14. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்றசமன்பாடு ஒரு சமதள ஜோடியைக் குறிக்குமானுல்,

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

என்று நிரூபி.

B

1. $$\frac{x-7}{k}=\frac{y-9}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-3k}=\frac{z+3}{2}$$

என்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால், 'k' இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

2. $$\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{5}$$

$$\frac{x-8}{7}=y-4=\frac{z+5}{3}$$

என்ற கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைகின்றன என்று காண்பி.

3.
$$x - 2 = 2y - 6 = 3z$$
$$4x - 11 = 4y - 13 = 3z$$

என்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன என்று காண்பி. மேலும், அந்த கோடுகள் அமையும் சமதளத்தின் சமன்பாடு $2x-6y+3z+14=0$ என்றும் காண்பி.

4.
$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$
$$\frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma}$$
$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

என்ற மூன்று நேர்கோடுகள் ஒரே சமதளத்தில் அமைந்தால்,
$$\frac{l}{\alpha}(b-c) + \frac{m}{\beta}(c-a) + \frac{n}{\gamma}(a-b) = 0$$
என்று நிரூபி.

5.
$$4x = 3y = -z$$
$$3(x-1) = -(y+2) = -4z+2$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

6.
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z-3$$
$$y - mx = 0 = z$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் கண்டுபிடி. அவைகள் சந்திக்கவேண்டுமானால், அதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடி.

7.
$x = y = z$ என்பது
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$$
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$$

என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரக்கோடு என்று நிரூபி.

8. $(2, -1, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்று,

$$2x + y - 4 = 0 = y + 2z$$
$$x + 3z - 4 = 0 = 2x + 5z - 8$$

என்ற நேர்கோடுகளைச் சந்திக்கும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

9. $$2x + y - 1 = 0 = x - 2y + 3z$$
$$3x - y + z + 2 = 0 = 4x + 5y - 2z - 3$$

என்ற நேர்கோடுகளைச் சந்தித்து, $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

10. $$3x+2y+4z-5=0=2x-3y+4z+1$$
$$2x-4y+z+6=0=3x-4y+z-3$$

என்ற நேர்கோடுகளைச் சந்தித்து, ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

11. $(7, 4, -1)$ என்ற எண்களுக்கு விகித சமமாக உள்ள திசை கொசைன்களையுடைய நேர்கோடு,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{1}$$
$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{4}$$

என்ற நேர்கோடுகளைச் சந்தித்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

12. $(-4, 3, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச்சென்று $x+2y-z=5$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாகவும்,

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

என்ற நேர்கோட்டை சந்திக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

13. $bx-ay=n$, $cy-bz=l$, $az-cx=m$ என்ற சமதளங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் சந்தித்தால், $al+bm+cn=0$ என்று காண்பி, மேலும், அந்த நேர்கோட்டின் திசை, விகிதங்கள் a, b, c என்று காண்பி.

14.
$$x = cy + bz$$
$$y = az + cx$$
$$z = bx + ay$$

என்ற சமதளங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் சந்தித்தால், $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ என்று நிரூபி. அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$

என்றும் நிரூபி.

15.
$$\frac{x+2}{3} = \frac{2y+3}{4} = \frac{3z+4}{5}$$

என்ற நேர்கோட்டிற்கு $(-2, 3, -4)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x+12y-3z+1=0$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாக அளக்கப் படும் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

16.
$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{l}, \quad \frac{x}{n} = \frac{y}{l} = \frac{z}{m}$$

என்ற நேர்கோடுகள் நிர்ணயிக்கும் சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும் சமதளம்,

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொண்டால் அதன் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி.

17. ஆதியிலிருந்து $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும், அந்த கோட்டின் அடியின் அச்சுதூரங்களையும் கண்டுபிடி.

18. $(8, 9, -10)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{4}$, $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+3}{2}$ என்ற நேர்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், அதன் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி.

19.
$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக்கொண்ட சமதளம் (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால் அதன் சமன்பாடு என்ன?

Accession No.

20.
$$lx+my+nz=p$$
$$lx+my=o$$
$$my+nz=o$$
$$nz+lx=o$$

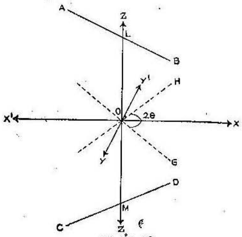
என்ற சமதளங்கள் உருவாக்கும் நான்முகியின் கன அளவைக் கண்டுபிடி.

21. நான்முகியின் இரு எதிர் விளிம்புகள் ஒரே நீளமாகவும், அதன் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்தால், மற்றைய இரு எதிர் விளிம்புகளின் ஜோடிகள் அதே தன்மைகளை உடையன என்று நிரூபி.

22. ABCD நான் முகியின் எதிர் விளிம்புகள் AB, CD ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. AD, BC இவைகளின் நடுப்புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் AC, AD இவைகளின் நடுப்புள்ளிககிளுக்டையேயுள்ள தூரத்திற்குச் சமமென்று நிரூபி.

பின்குறிப்பு (Appendix)

வெட்டிக் கொள்ளாத (skew) நேர்கோடுகளின் சுருக்கமான சமன்பாடு.



படம் - 10

AB, CD என்பவை கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளாத இரு நேர்கோடுகளாகக் கொள்க. அவைகளுக்டையேயுள்ள குறைந்த தூரம் 2C என்க. அந்தக் குறைந்த தூர நேர்கோடு AB-ஐ L என்ற புள்ளியிலும் CD-ஐ M என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கட்டும். LM என்ற நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளியான

O வழியாக AB, CD இவைகளுக்கு இணையாக, OG, OH என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சம வெட்டிகளை X-நிலை அச்சு, Y-நிலை அச்சு என்று கொள்க. ML-ஐ z-நிலை அச்சாகக்கொள்க. OG, OH இவைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் மதிப்பு 2θ என்று கொள்க.

அப்படியானல், OG, — OX, OY, OZ என்ற நிலை அச்சுகளோடு θ, $\frac{\pi}{2}-\theta$, $\frac{\pi}{2}$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. எனவே, OG-ன் திசை கொசைன்கள் $(\cos\theta, \sin\theta, O)$ என்ருகிறது.

ஆனல், OH, — நிலை அச்சுகளுடன் $-\theta$, $\frac{\pi}{2}+\theta$, $\frac{\pi}{2}$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. ஆதலால், OH-ன் திசை கொசைன்கள் $(\cos\theta, -\sin\theta, O)$ என்ருகிறது.

L, M இவைகளின் அச்சு தூரங்கள் (O, O, C)(O, O, —C) என்ருகிறது.

எனவே, AB-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z-c}{O}$$

அல்லது $y=\tan\theta . x$

$z=C$

CD-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{-\sin\theta}=\frac{z+c}{O}$$

அல்லது $y=-\tan\theta\cdot x$

$z=-C.$

எனவே, வெட்டிக்கொள்ளாத இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாக,

$$y=\pm x\tan\theta$$

$$z=\pm c$$

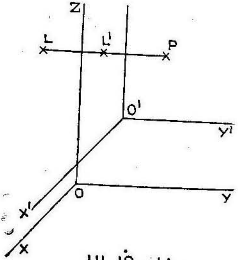
என எழுதலாம்.

3. அச்சு தூரங்களின் உருவ மாற்றம்

1. **ஆதியை மாற்றுதல் :**

நிலை அச்சுகளின் திசைகளை மாற்றாமல், ஆதியை மாற்றுதல் :

OX, OY, OZ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட நிலை அச்சுகளாகும். O'X', O'Y', O'Z' என்பவை, OX, OY, OZ என்பவைகளுக்கும் இணையாக வரையப்படும் புதிய நிலை அச்சுகளாகும் பழைய நிலை அச்சுகளை பொருத்து. O'-ன் அச்சு தூரங்கள் (α, β, γ) எனக் கொள்க.



படம் - 11

P என்று ஏதாவதொரு புள்ளியையெடுக்க. அதன் அச்சு தூரங்கள் பழைய, புதிய நிலை அச்சுகளை (x, y, z), பொருத்தவரை (x', y', z') என்க.

Pயிலிருந்து YOZ சமதளத்திற்கு PL என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. அதே செங்குத்துக்கோடு Y′ O′ Z′ சமதளத்தை L′ என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

$$PL = x$$
$$PL' = x'$$
$$\alpha = L'L$$

= O′விருந்து YOZ சமதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.

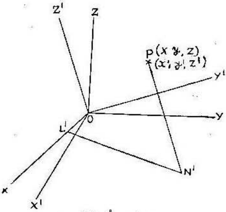
எனவே, $x = x' + \alpha$

அதுபோல், $y = y' + \beta$

$z = z' + \gamma$

2. நிலை அச்சுகளின் திசைகளை மாற்றுதல்: ஆதியை மாற்றாமல், நிலை அச்சுகளின் திசைகளை மாற்றவேண்டியது.

$l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ என்பவை OX, OY, OZ என்ற நிலை அச்சுகளைப் பொருத்து, OX′, OY′, OZ′ என்ற புதிய நிலை அச்சுகளின் திசை கொசைன்களாக கொள்க.



படம் - 12

இரண்டுவகை நிலை அச்சுகளை பொருத்து, ஏதாவது ஒருபுள்ளி Pஇன் அச்சு தூரங்கள் முறையே, (x, y, z); (x', y', z') என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

Pயிலிருந்து X′OY′ சமதளத்திற்கு PN′ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. X′OY′ சமதளத்தில் OX′ செங்குத்தாக N′ L′ என்ற நேர்கோடு வரைக. அப்படியானல், $OL' = x'$, $L'N' = y'$; 'P = z'.

OXஇன்மேல் OPஇன் வீச்சு, OL′, L′N′, N′P என்பவைகளின் வீச்சுக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

ஆதலால்,

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z'$$

அதேபோல்,

$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z'$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'$$

இதே மாதிரி முறையைப் பயன்படுத்தி,

$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z$$
$$y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z$$
$$z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z$$

எனக் காண்பிக்கலாம்.

(A), (B) இவைகளின் மூலம் கிடைத்த முடிவுகளைக் கீழ்க் கண்ட அட்டவணையில் எழுதலாம்.

	x	y	z
x_1	l_1	m_1	n_1
y_1	l_2	m_2	n_2
z_1	l_3	m_3	n_3

பயிற்சி 20

1. ஆதியை மாற்றுமல், $(1, 0, 0)$; $(2, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ என்பவற்றை திசை விகிதங்களாகக்கொண்ட நிலே அச்சுகளை பொருத்து

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 5zx = 0$$

என்ற மேற்பரப்பின் புதிய சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

மா. க. 2. ஆதியை மாற்றுமல்,

$$\left[\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}},\ \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\ 0\right];\ \left[\frac{-ln}{\sqrt{l^2+m^2}},\ \frac{-mn}{\sqrt{l^2+m_2}},\ \sqrt{l^2+m^2}\right]$$

$[l, m, n]$ என்பவைகளை திசை கொசைன்களுடைய நிலே அச்சுகளைப் பொருத்து $lx + my + nz = 0$ என்ற சமன்பாடு $z = 0$ என்று மாறும்.

இதை உபயோகப்படுத்தி,

$ax^2 - by^2 = 2z$; $lx + my + nz = 0$ என்ற வரைகோடு ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவாக அமையவேண்டுமானல்,

$(a + b)n^2 + am^2 + bl^2 = 0$ என்று காண்பி.

3. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று நேர்கோடுகளின் திசை கொசைன்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு.

மூன்று நேர்கோடுகளின் திசை கொசைன்களை l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$\begin{aligned} l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 &= 0 \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

(B)இல் உள்ள இரண்டாவது, மூன்ருவது சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{l_1}{m_2 n_3 - m_3 n_2} = \frac{m_1}{n_2 l_3 - n_3 l_2} = \frac{n_1}{l_2 m_3 - l_3 m_2}$$

ஒவ்வொன்றும், $= \dfrac{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}{\Sigma\, l_1 (m_2 n_3 - m_3 n_2)}$

$$= l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

மேலும்,
$$= \frac{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}{\sqrt{\Sigma(m_2n_3-m_3n_2)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}{\sqrt{(l_2^2+m_2^2+n_2^2)(l_3^2+m_3^2+n_3^2)-(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)^2}}$$
$$= \pm 1$$

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$
$$\pm = 1$$

ஆகவே,
$$l_1=D(m_2n_3-m_3n_2)\ ;\ m_1=D(n_2l_3-m_3l_2)\ ;$$
$$n_1=D(l_2m_3-l_3m_2)$$

அதுபோல்,
$$l_2=D(m_3n_1-m_1n_3)\ ;\ m_2=D(n_3l_1-n_1l_3)\ ;$$
$$n_2=D(l_3m_1-l_1m_3)$$
$$l_3=D(m_1n_2-m_2n_1)\ ;\ m_3D(n_1l_2-n_2l_1)\ ;$$
$$n_3=D(l_1m_2-l_2m_3)$$

எனவே,
$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=D\ \Sigma\ l_1(m_2n_3-m_3n_2)$$
$$=D\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$
$$=D^2$$
$$=1$$

அதுபோல்,
$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 \qquad \text{(C)}$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$
$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=D\ \Sigma\ n_1(n_2l_3-n_3l_2)$$
$$=D\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}$$
$$=O$$

அதுபோல்,

$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0 \qquad (D)$$
$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

(C) (D) தொடர்புகளை வேறுவிதமாக எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்கொண்ட மூன்று நேர்கோடுகளை நிலை அச்சுகளாககொண்டால். OX, OY, OZ என்ற நேர்கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் l_1, l_2, l_3 ; m_1, m_2, m_3 ; n_1, n_2, n_3 என்றாகும்.

ஆகவே,

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1$$
$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=1$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$
$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0$$
$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0$$
$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

கிளைத் தேற்றம் :

l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 என்பவை மூன்று ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நேர்கோடுகளின் திசைகொசைன்களானால்,

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

ஏனெனில்,

$$D^2 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1^2+m_1^2+n_1^2 & l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3 \\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & l_2^2+m_2^2+n_2^2 & l_2l_3+m_2n_3+n_2n_3 \\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3 & l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3 & l_3^2+m_3^2+n_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1$ எனவே, $D=\pm 1$.

3.4. மாற்றமிலிகள் [Invariants]

ஆதியை மாற்றாமல், நிலை அச்சுகளின் திசைகளைமட்டும் மாற்றினால்,

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ என்ற கோவை

$a'x^2+b'y^2+c'z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy$ என்ற கோவையாக மாறினால்.

(1) $a+b+c=a'+b'+c'$

(2) $ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2=a'b'+b'c'+c'a'-f'^2-g'^2-h'^2$

(3)
$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$$

Ox, Oy, Oz; OX, OY, OZ என்று இருவிதமான, O என்ற ஒரே ஆதியின் வழியாகச்செல்லும் நிலை அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க. P என்ற புள்ளியின் அச்சுகள் முறையே (x, y, z); (X, Y, Z) என்றால்,

$$OP^2=x^2+y^2+z^2$$
$$=X^2+Y^2+Z^2$$

எனவே, $x^2+y^2+z^2$ என்பது $X^2+Y^2+Z^2$ என்றாகிறது.

மேலும், $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ என்பது,

$a^1X^2+b^1Y^2+c^1Z^2+2f^1YZ+2g'ZX+2h'XY$ என்றாகிறது.

λ என்பது ஏதாவது ஒரு மாறிலியானால்

$(a+\lambda)x^2+(b+\lambda)y^2+(c+\lambda)z^2+2fyz+2gzx^1+2hxy$ என்பது,

$(a'+\lambda)X^2+(b'+\lambda)y^2(c'+\lambda)Z^2+2f^1YZ+2g^1Z^2X+2h'XY$ என்றாகிறது.

1. கோவை இரண்டு நீட்டலுக்குரிய காரணிகளின் பெருக்கமாக இருக்கவேண்டுமானால்,

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & h & g \\ h & b+\lambda & f \\ g & f & c+\lambda \end{vmatrix} = O$$

அதாவது,

$$\lambda^3+\lambda^2(a+b+c)+\lambda(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)+D=O \quad \text{...(3)}$$

அதேமாதிரி (2) கோவை அமைய வேண்டுமானால்,

$$\begin{vmatrix} a'+\lambda & h' & g' \\ h' & b'+\lambda & f' \\ g' & f' & c'+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3+\lambda^2(a'+b'c')+\lambda(b'c'+c'a'+a'b'-f'^2-g'^2-h'^2)+D'=0 \quad —(4)$$

(3), (4) சமன்பாடுகளின் மூலம் கிடைக்கும் λ-ன் மதிப்புகள் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் ஆதலால்,

$$a+b+c \quad = \quad a'+b'+c'$$

$$ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2 = a'b'+b'c'+c'a'-f'^2-g'^2-h'^2$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} a & g & h \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = D' \equiv \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$$

குறிப்பு 1 : $(a+b+c)$; $(ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2)$; D என்பவை மாறாமல் இருப்பதால் அவைகளை மாற்றமிலிகள் எனக் கூறுகிறோம்.

குறிப்பு 2 : $bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2$
$= (bc-f^2)-(ca-g^2)+(ab-h^2)$
$= A+B+C$

A, B, C என்பவை D அணி கோவையின் a, b, c என்பவைகளின் இணைகாரணிகளாகும். அதாவது,

$(a+b+c)$; $(A+B+C)$; D என்பவை மாற்றமிலிகள்.

பயிற்சி 21

1. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள் OA, OB, OC என்பவைகளின் திசை கொசைன்கள் $(l_1, m_1, n_1,)$ (l_2, m_2, n^2). (l_3, m_3, n_3) என்றும், OA=OB=OC=a என்றும் இருந்தால், ABC சமதளத்தின் சமன்பாடு $(l_1+l_2+l_3)\,x+(m_1+m_2+m_3)\,y+(n_1+n_2+n_3)\,z=0$ என்றாகிறதென்று நிரூபி.

மா.க2.
$$3x-6y-5z+3=0$$
$$6x-9y-8z+3=0$$
$$x-y-z+2=0$$

என்ற சமதளங்கள் ஒரு பட்டகத்தை உருவாக்குமென்று நிரூபி.

3·5. சமதளம் உண்டாக்கும் மேற்பரப்பின் வெட்டுமுகம்

சமதளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=0$ என்று கொள்க. இங்கு $l^2+m^2+n^2=1$ அப்படியில்லையென்றால் கொடுக்கப்பட்ட கோவையை, $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ என்பதால் வகுக்க.

OΣ என்பதை புதிய z-நிலை அச்சாகக் கொள்க. OΣ-ஐ கொடுக்கப்பட்ட சமதளத்திற்கு O-ன் வழியாக வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடாகக் கொள்க. மேலும், OΣ, OZ-னுடன் குறுங் கோணம் உண்டாக்குமாறு செய்க. அப்படியானால், OX, OY, OZ என்ற நிலை அச்சுகளைப் பொருத்து OΣ-ன் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \text{ என்றாகிறது}$$

OΣ-க்கு செங்குத்தாக ZOΣ சமதளத்தில், Oζ என்ற கோடு வரைக. இதுவும் OZ-னுடன் குறுங்கோணமே உண்டாக்கும்.

OΣ-க்கும் Oζ-க்கும் செங்குத்தாக Oξ-வை எடுத்துக் கொள்க.

அப்படியென்றால் Oξ, Oζ, OΣ புதிய நிலை அச்சாகக் கொள்ளலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமதளம் ξ O ζ என்றாகிறது. Oξ, Oζக்கும், OΣ-க்கும் செங்குத்தாக இருப்பதால் அது O ζ ξ சமதளத்திற்கு செங்குத்தாகும். அதனால் அந்த சமதளத்தில் உள்ள OZ நேர்கோடு Oξ-க்கு செங்குத்தாகும். எனவே, Oξ, XOY சமதளத்தில் அமையும். அதாவது Oξ, XOY சமதளம், ξO ζ சமதளம் இவை இரண்டிற்கும் பொதுவான நேர் கோடாகும்.

ΣO ζ-ன் சமன்பாடு

$\frac{x}{l} = \frac{y}{m}$ என்பதாகும். O ρ-ன் திசைகொசைகள், λ, μ, ν

என்றால்,

$$l\nu + m\mu + n\nu = 0$$

(O ζ, ξO ζ சமதளத்தில் அமைகிறது)

$$m\nu - l\mu = 0$$

(O ζ, ΣOζ சமதளத்தில் அமைகிறது.)

எனவே,

$$\frac{\lambda}{ln} = \frac{\mu}{mn} = \frac{\nu}{-(l^2+m^2)}$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{\mu}{m} = \frac{\nu}{l^2+m^2/-n}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2/n}}$$

O ζ வானது OZ-னுடன் குறுங்கோணத்தை உண்டாக்குவதால் ν மிகையாகும்.

± குறியில் −1 குறியைக் கொள்க.

$$\therefore \quad \lambda = \frac{-ln}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad \mu = \frac{-mn}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad \nu = \sqrt{l^2+m^2}$$

Oξ, Oζ, OΣ என்ற இரு நேர்கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக இருப்பதால், அதன் திசை கொசைன்கள்

$$n\mu - m\nu,\ l\nu - n\lambda,\ m\lambda - l\mu$$

அதாவது,

$$\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \ 0$$

அப்படியென்றால் நிலை அச்சுகள் மாறுவதால் ஏற்படும் அச்சு தூரங்களின் மாறுதலை விளக்க கீழ்கண்ட பட்டியல் உபயோகமாகும்.

	x	y	z
ξ	$\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$	0
ζ	$\frac{-ln}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\frac{-mn}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\sqrt{l^2+m^2}$
Σ	l	m	n

எனவே, $lx+my+nz=0$ என்ற சமதளம் $\Sigma=0$ என்றும் மாறும்.

மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை, பட்டியலை உபயோகித்து அதற்கான புதிய சமன்பாட்டை கணிக்கவும். எந்தவிதமான சமன்பாடாக இருந்தாலும் $\Sigma=0$ என்பதால், ஏற்படும் வெட்டு முகத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிப்பது மிக சுலபம்.

பயிற்சி 22

1. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பில் $lx+my+nz=P$ என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகம் (1) பரவ வளைவு (2) நீள்வட்டம் (3) அதி பரவ வளைவு என்பதற்கான நிபந்தனைகளைக் கண்டுபிடி.

2. $lx+my=0$ என்பது $ax^2+by^2+cz^2+2hxy\quad 1$ என்பதின் வட்ட வெட்டு முகமானால்,

$$(b\quad c)\,l^2-2blm+(a-c)m^2\quad 0$$

3. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d$ என்ற கோவை ஆதியை மாற்றாமல், நிலை அச்சுகளின் திசைகளை மாற்றுவதால் ஏற்படும் மாறுதலினால்,

$a+b+c$; $u^2+v^2+w^2$ என்ற கோவைகள் மாற்றமிலிகள் என்று நிரூபி.

4. கோளம்

வரையறை: நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நியமப் பாதையே கோளமாகும்.

நிலையான புள்ளியை கோளத்தின் மையமென்றும் மாறாத தூரத்தை ஆரை (Radius) என்றும் கூறுவோம்.

4.1. கோளத்தின் சமன்பாடு

மையத்தின் அச்சு தூரங்கள் (a, b, c) என்போம். கோளத்தின் ஆரை 'r' எனக் கொள்வோம்.

(x, y, z) என்பது கோளத்தின் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்களானால் (a, b, c) என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரம் $= r$.

அதாவது, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz$$
$$+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0.$$

இது கோளத்தின் சமன்பாடாகும்.

கவனிக்க வேண்டியவை.

1. சமன்பாடு இரண்டாம் படியாகும்.

2. x^2, y^2, z^2 இவைகளின் குணகம் சமமாகும்.

3. xy, yz, zx என்ற உறுப்புகள் இங்கு இல்லை.

அப்படியானால், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விதிகளைக்கொண்ட சமன்பாடு கோளத்தைக் குறிக்க வேண்டும்.

$$a(x^2+y^2+z^2)+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad (1)$$
என்பது மூன்று விதிகளைக் கொண்டது.

எனவே,

$$\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+\left(y+\frac{v}{a}\right)^2+\left(z+\frac{w}{a}\right)^2 = \frac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}$$

அதாவது (1) சமன்பாடு,

$\left(\frac{-u}{a}, -\frac{v}{a}, -\frac{w}{a}\right)$ என்பதை மையமாகவும்

$\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2-ad}}{a}$ என்பதை ஆரையாகவும்,

கொண்ட கோளத்தைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு 1 : $u^2+v^2+w^2-ad<0$ என்றால்

ஆரையும் அதனால் கோளமும் மெய்யிலாததாக அமையும்.

குறிப்பு 2 : $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்பதை கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாடாகக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 23

1. $(-1, -3, 2)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக செல்லும்படியாகவும் அமையும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ என்ற கோளத்தின் மையத்தையும், ஆரையையும் கண்டுபிடி.

3. A $(2, -3, 4)$ B $(2, 1, -1)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை விட்டமாகக்கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. (a, b, c) என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின்மேல் ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ என்ற கோளத்தில் அமையுமென்று நிரூபி.

4.2. நான்கு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோளம்

கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டில் நான்கு மாறிலிகள் உள்ளன. இந்த நான்கு மாறிலிகளை நிர்ணயிக்க, நான்கு கட்டுப்

பாடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும். அந்த நான்கு கட்டுப்பாடுகள் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகவும், அவை ஒன்றையொன்று சாராததாகவும் இருந்தால் நான்கு மாறிலிகளின் மதிப்புகள் ஒரே முறையில் நிர்ணயிக்கப்படும்.

உதாரணமாக ஒரே சமதளத்தில் அமையாத நான்கு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3) ; (x_4, y_4, z_4) என்பவை அவைகளின் அச்சு தூரங்களாகும்.

அவைகளில் ஒன்று (x_1, y_1, z_1) கோளத்தின்மேல் இருந்தால்,

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+2ux_1+2vg_1+2wz^2+d=0$$

இது போல் மூன்று கட்டுப்பாடுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

[கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனக் கொள்க].

எனவே இவைகளிலிருந்து u, v, w, d என்ற நான்கு மாறிலிகளை நீக்கினால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே நான்கு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 24

(0, 0, 0) ; (—1, 1, 1); (1, —1, 1) ; (1, 1, —1) என்ற நான்கு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. அதன் மையத்தையும் ஆரையையும் நிர்ணயி.

2. $(0, 0, 0)$; $(-a, b, c)$; $(a, -b, c)$; $(a, b, -c)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. அதன் ஆரையை நிர்ணயி.

3. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ என்ற முகங்களையுடைய நான்முகியைச் சுற்றி வரையும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

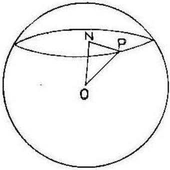
4. $(0, 0, 0)$; $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$; $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

5. $(3, 0, 2)$; $(-1, 1, 1)$; $(2, -5, 4)$, என்ற மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் மையம் $4x+3y+2z=1$ என்ற சமதளத்திலிருந்தால் அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4.3: கோளத்தின் சமதள வெட்டு முகம்

கோளத்தின் சமதள வெட்டு முகம் அதாவது கோளத்திற்கும் சமதளத்திற்கும் பொதுவாக உள்ள புள்ளியின் நியமப் பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

'O' என்பது கோளத்தின் மையமாகக் கொள்க.



படம் - 13

'P' என்பது சமதள வெட்டு முகத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியாகக் கொள்க. அந்தச் சமதளத்திற்கு ON என்ற செங்குத்துக் கோடு வரை. N அதன் அடியாகட்டும்.

NP என்ற நேர்கோடுள்ள சமதளத்திற்கு ON செங்குத்தாக இருப்பதால் ON $\perp r$ NP.

$$\therefore \quad OP^2 = NP^2 + ON^2$$

இதில் O, N என்பவை மாறுத புள்ளிகள். OP=கோளத்தின் ஆரை,

அதனால் $NP^2 =$ மாறிலி

இதில் N மாருத புள்ளி. ஆதலால், P-ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

குறிப்பு: சமதளம், கோளத்தின் மையத்தின் வழியாகச் சென்ருல் வெட்டு முகம் ஒரு பெரு வட்டமாகும் (Great circle).

பயிற்சி 25

1. (a, b, c) என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளம் நிலை அச்சுகளை A, B, C, புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ABC கோளத்தின் மையத்தின் நியமப்பாதை $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ என்று நிரூபி.

2. (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகவும் $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4.4. கொடுக்கப்பட்ட விட்டத்தையுடைய கோளம்:

$A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளின் சேர்க்கையை விட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

அப்படி வரையப்பட்ட கோளத்தின்மேல் $P(x, y, z)$ என்ற பொதுவான புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. PAB சமதளத்தினுல் கோளத்திற்கு ஏற்படும் வெட்டு முகம் ஒரு வட்டமாயும், அந்த வட்டத்திற்கு AB விட்டமாக அமைவதாலும்,

$$\angle APB = 90^\circ$$

அல்லது PA $\perp$r PB

PA, PB என்ற நேர்கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் முறையே,

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1$$

$x - x_2$, $y - y_2$, $z - z_2$ என்பவைகளுக்கு விகித சமமாகும்.

எனவே,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

இதுவே கோளத்தின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 26

1. $(2, 7, 5)$, $(8, -5, 1)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை விட்டமாக உடைய கோணத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $x^2 + y^2 + z^2 \quad 2ux_1 + 2v_1 y + 2w_1 z + d_1 = 0$ என்ற கோளம்,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2 x + 2v_2 y + 2w_2 z + d_2 = 0$$

என்ற கோளத்தைப் பெருவட்டத்தில் வெட்டுவதற்கான நிபந்தனை

$$2u_1 u_2 + 2v_1 v_2 + 2w_1 w_2 - d_1 d_2 = 2r_2^2$$

r_2 என்பது இரண்டாவது கோளத்தின் ஆரையெனக் கொள்க.

4·5. மூன்று பரிமாண வரை கணிதத்தில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டமென்பது அதன் சமதளத்தை ஏதாவது ஒரு கோளம் வெட்டும் வெட்டு முகமாகும். அதாவது, வட்டத்தின்மேல் உள்ள புள்ளிகள், கோளம், சமதளம் இவைகளின்மேல் உள்ள பொதுப் புள்ளிகளாகும். எனவே வட்டத்தை, கோளம், சமதளம் இவைகளின் சமன்பாடுகளினால் குறிக்கலாம்.

உதாரணமாக,

$$x^2 + y^2 + {}^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$
$$lx + my + nz = p$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் கூட்டாக ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு—இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகளும் கூட்டாக ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 27

1. (O, O, O); (a, O, O); $(O, b\, O)$; (O, O, c) என்ற நான்கு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின்மேல் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} =$ என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. (x^1, y^1, z^1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளங்கள், $(x^2 + y^2 + z^2) = r^2$ கோளத்தின்மேல் ஏற்படுத்தும்வெட்டு முகங்களின் மையங்கள் $x\,(x - x^1) + y\,(y - y^1) + z\,(z - z^1) = 0$ என்ற கோளத்தின்மேல் அமையுமென்று காண்பி.

3. $(2, 3, -4)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக்கொண்ட வட்டம் $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$ என்ற கோளத்தின் மேலிருந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ என்ற கோளத்தின்மேல் ஒரு சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகமான வட்டத்தின் மையம் $(-2, 3, 4)$ என்றுகும். எனின், சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

5. $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின்மேல் (α, β, γ) என்ற புள்ளி அமைந்தால், கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியை மையமாகவுள்ள $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ கோளத்தின் வெட்டுமுகத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

7. $(5, 0, 2)$; $(2, -6, 0)$; $(7, -3, 8)$; $(4, -9, 6)$ என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டவரையில் அமைகின்றன என்று நிரூபி.

8. $x + 2y + 2z = 15$; $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 11 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரையையும் கண்டுபிடி.

4·6. கொடுக்கப்படும் வட்டத்தின்மூலம் வரையப்படும் கோளம் :

$S + \lambda^1 u = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கவனி.

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

என்பது ஒரு கோளத்தையும்,

$$U \equiv lx + my + nz - p = 0$$

என்பது ஒரு சமதளத்தையும் குறிக்கும்.

அப்படியெனின், (1) $S = 0$, $U = 0$ என்ற வட்டத்தின் மூலம் வரையப்படும் கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டைக் குறிக்கும். λ-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொடுக்கப்படும்போது 1) வெவ்வேறு கோளங்களைக் குறிக்கும்.

அதேபோல்,

$$S + \lambda S' = 0 \text{ என்பது}$$

$S = 0$, $S' = 0$ என்ற இருகோளங்கள் சந்திக்கும் வட்டத்தின் மூலம் வரையப்படும் கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 28

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y + 6 = 0$$

$x - 2y + 4z - 9 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மூலம்வரையப்படும் கோளம், $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ என்ற கோளத்தின் மையத்தின் வழியாகச் சென்றால், அதன் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $$x^2 + y^2 + z^2 + 10y - 4z - 8 = 0$$

$x + y + z = 3$ என்ற, பெருவட்டத்தையுடைய கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ என்ற வட்டத்தின் மூலம் வரையப் படும் கோளம் $x + 2y + 2z = 0$ என்ற சமதளத்தினுல் '3' ஆரையையுடைய வட்டத்தில் வெட்டப்பட்டால், அதன் சமன் பாடு என்ன ?

4. $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0,$$
$$5x + 6z + 1 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0,$$
$$x + 2y - 7z = 0$$

என்ற இரு வட்டங்களும் ஒரே கோளத்தில் அமையும் என்று நிரூபி. மேலும், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4·7. கோளம், நேர்கோடு இவைகளின் சந்திப்பு :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$
$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$

என்பவை முறையே கோளம், நேர்கோடு இவைகளின் சமன் பாடுகளாகக் கொள்க.

நேர்கோடுகளின்மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களையும்,

$$\alpha + l\gamma + \beta + m\gamma + \gamma = n\gamma$$

என்று எடுத்துக்கொள்ளலாம். புள்ளி கோளத்தின் மேலிருந்தால்,

$$(\alpha + l\gamma)^2 + (\beta + m\gamma)^2 + (\gamma + n\gamma)^2 + 2u(\alpha + p\gamma)$$
$$+ 2v(\beta + m\gamma) + 2w(\gamma + n\gamma) + d = 0$$
$$\gamma^2(l^2 + m^2 + n^2) + 2\gamma[l(\alpha + u) + m(\beta + v)$$
$$+ n(\gamma + w)] + [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma$$
$$+ d] = 0.$$

இது γ-ல் இருபடி சமன்பாடாகும். ஆதலின், இரண்டு மதிப்புகள் γ_1, γ_2 என்று கிடைக்கும். γ_1, γ_2 என்பவை கோளம், நேர் கோடு சந்திக்கும் புள்ளிகள் (α, β, γ) என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள தொலைவின் விகிதங்களாகும்.

எனவே, நேர்கோடு கோளத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றதென்று கூறலாம்.

4·8. புள்ளியின் திறன் (Power of a point) :

A என்ற புள்ளியின் வழியாக கோளத்திற்கு ஒரு நாண் வரைந்து, அது P, Q என்ற புள்ளிகளின்மேல் கோளத்தில் வெட்டினால்,

$$AP = \gamma_1, \quad AQ = \gamma_2$$

AP, AQ = கோணத்தைப் பொறுத்து A ன் திறன்.

$$= \gamma_1 \gamma_2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2uL + 2v\beta + 2w\gamma + d$$

இந்த மதிப்பு P, Q, இவைகளின் அச்சு தூரங்களைப் பொறுத்து இல்லாததால், AP, AQ = மாறிலி என்று கொள்ளலாம்,

பயிற்சி 29

ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகளின்மேல் ஒரு கோளம் வெட்டுத் துண்டுகளை உண்டாக்கினால், வெட்டுத் துண்டுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

4·9. தொடுதளத்தின் சமன்பாடு :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ என்ற கோளத்திற்கு, (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

(α, β, γ)வின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \text{எனக்கொள்ளலாம்}$$

நேர்கோடு, கோளம் இவைகளுக்குப் பொதுவான புள்ளி (α, β, γ) என்ற புள்ளியிலிருந்து, γ என்ற தூரத்தில் இருந்தால் γ-ஐ உடைய சமன்பாடு,

$$\gamma^2 (l^2 + m^2 + n^2), + 2\gamma [\, l(\alpha + u) + m(\beta + v) + n(\gamma + w) \,] + [\, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d \,] = 0 \quad \text{என்றாகும்.} \qquad (A)$$

(α, β, γ) என்ற புள்ளி,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2hx + 2vy + 2wz + d = 0$ என்ற கோளத்தின்மேல் இருப்பதால்,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2h\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d = 0 \qquad (1)$$

(A)இல் மாறிலி உறுப்பு $= 0$ என்பதால் γன் ஒரு மதிப்பு $= 0$. அடுத்த மதிப்பும் பூச்சியமாகவேண்டுமானால்,

$$l(\alpha + u) + m(\beta + v) + h(\gamma + w) = 0 \qquad (2)$$

(1), (2) நிபந்தனைகளால், $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n}$ (3)

என்ற நேர்கோடு கோளத்தை (α, β, γ) என்ற இரு பொருந்தும் புள்ளிகளில் (Coincident points) சந்திக்கிறது. எனவே, நேர்கோடு கோணத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைகிறது.

இம்மாதிரி (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நியமப் பாதையைத் தொடு தளமெனக் கூறலாம்.

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து, l, m, n இவைகளை நீக்கினல், நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(x-\alpha)(\alpha+u) + (y-\beta)(\beta+v) + (z-\gamma)(\gamma+w) = 0$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+u(x+\alpha) + v(y+\beta) + w(z+\gamma) + d$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d = 0$$

எனவே,

$$\alpha x+\beta y-\gamma z+u(x+\alpha)+v(y+\beta)+w(z+\gamma)+d=0.$$

என்பது தொடுதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 30

$lx+my+nz=p$ என்ற சமதளம் $x^2+y^2+z^2=2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்தைத் தொட்டால் $(up+vm+wn+p)^2 =(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2)$ என்றாகுமென்று காண்பி.

2. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ என்ற கோளத்திற்கு $2x+2y=z$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

3. $x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+5=0$ என்ற கோளத்திற்கு $(1, 2, -1)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. $[a \cos\theta \sin\theta,\ a \sin\theta \sin\theta,\ a\cos\theta]$ என்ற புள்ளியில் $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2.
$$x^2+y^2+z^2+5x-7y-8=0$$
$$3x-2y+4z+7=0$$
என்ற வட்டத்திற்கு (3, 4, —5) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

6. $x^2+y^2+z^2=5,\ 2a+3y+4z=5$ என்ற வட்டத்தின் மூலம் செல்லும் கோளம் $4x+3y=15$ என்ற சமதளத்தைத் தொட்டால், அதன் சமன்பாடென்ன?

7. $2x-2y+z+12=0$ என்ற சமதளம் $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=3$ என்ற கோளத்தைத் தொடுமென்று நிரூபி. தொடும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

8. $4(x^2+y^2+z^2)+10x-25y-2z=0$ என்ற கோளத்தை (1, 2, —2) என்ற புள்ளியில் தொடும் கோளம் (— 1, 0, 0) என்ற புள்ளியின் வழிபாகச் சென்றால், கோளத்தின் சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடி.

9. $x^2+y^2+z^2+6x-2z+1=0$ என்ற கோளத்திற்கு $3(16-x)=2y+30=3z$ என்ற நேர்கோட்டின் வழியாக வரையப்படும் தொடு தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

10. ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் $2(a+1)=2-y=z+3$ என்ற நேர்கோட்டைச் சந்தித்தால், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

4.10. தொடு நாண் தளம் (Plane of contact)

(α, β, α) என்ற புள்ளியின் வழியாக கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு தளத்தின் தொடு புள்ளிகளின் நியமப் பாதையே தொடு நாண் தளம் எனப்படும்.

(x', y', z') என்ற புள்ளி
$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்தின் மேல் இருக்கட்டும். அந்தப் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$xx'+yy'+zz'+u(x+x')+v(y+y')+w(z+z')+d=0$$

அதாவது,

$$x(x'+u)+y(y'+v)+z(z'+v)$$
$$+(ux'+vy'+wz'+d)=0$$

இந்தச் சமதளம் (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால்,

$$\alpha(x'+u)+\beta(y'+v)+\gamma(z'+w)+(ux'+vy'+wz'+d)=0$$

அதாவது,

$$x'(\alpha+u)+y'(\beta+v)+z'(\gamma+w)+(u\alpha+v\beta+w\gamma+d)=0 \quad (1)$$

இந்த நிபந்தனை

$x(\alpha+u)+y(\beta+v)+z(\gamma+w)+(\alpha+v\beta+w\gamma+d)=0$ என்ற தளத்தின்மேல் x', y', z' என்ற புள்ளி அமைவதற்கானது. எனவே (x', y', z') என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை சமன்பாடு 1 ஆகும். 1 சமன்பாடு குறிக்கும் சமதளம் கோளத்தை வெட்டும் வட்டத்தில் (x', y', z) என்ற புள்ளி இருக்கும்.

பயிற்சி 31

$$\frac{x}{2}=\frac{y-a}{3}=\frac{z+3a}{4}$$

என்ற நேர்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் தொடு நாண் தளம், $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தைப் பொருத்தவரை

$$\frac{-(2x+3a)}{13}=\frac{(y-a)}{3}=\frac{z}{1}$$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொடுளுமென்று நிரூபி.

4·11. இசைத்தளம் (polar plane) :

A என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் யாதேனுமொரு கோடு கோளத்தை P, Q என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்து, (AR, PQ) = -1 என்று அமையும். R புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால், R புள்ளியின் நியமப்பாதையே கோளத்தைப் பொறுத்தவரை Aன் இசைத்தளமாகும்.

Aஐ (α, β, γ) என்று எடுத்துக்கொண்டால், Aயின் வழியாகச் செல்லும் எந்த நேர்கோட்டையும்,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$ என்று கொள்ளலாம்.

இந்த நேர்கோடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், AP = γ_1, AQ = γ_2. இங்கு, γ_1, γ_2 என்பவை, $\gamma^2(l^2+m^2+n^2)+2\gamma[p(\alpha+u)+m(\beta+v)+n(\gamma+w)]+[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2u\alpha+2v\beta+2w\gamma+d]=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

AR = γ என்று கொண்டால்,

$-1 = (AR, PQ)$

$$\gamma = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

$$= \frac{\not{2}\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d\right]}{-\not{2}\left[l(\alpha+u) + m(\beta+v) + n(\gamma+w)\right]} \quad (1)$$

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = \gamma. \quad (2)$$

(1), (2) இவைகளிலிருந்து, l, m, n என்பவைகளை நீக்கினல்,

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d}{-\frac{(\alpha+\mu)(x+\alpha)}{\gamma} + \frac{(\beta+\gamma)(y-\beta)}{\gamma} + \frac{(\gamma+w)(z-\gamma)}{\gamma}}$$

$$-\left[x\alpha + xu - \not{\alpha^2} - \not{\alpha u} + \beta y + \gamma y - \not{\beta^2} - \not{\beta\gamma} + z\gamma + zw - \not{\gamma^2} - \not{\gamma w}\right] = \not{\alpha^2} + \not{\beta^2} + \not{\gamma^2} + 2\not{u}\alpha + 2\not{v}\beta + 2\not{w}\gamma + d.$$

$$x(\alpha+u) + y(\beta+v) + z(\gamma+w) + u\alpha + v\beta + w\gamma + d = 0$$

இதுவே இடைத்தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

4·12. சமதளத்தின் இசைப்புள்ளி (Pole of a plane) :

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தைப் பொறுத்தவரை $lx + my + nz = p$ (1) என்ற சமதளத்தின் இசைப்புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க,

(α, β, γ) என்பதை இசைப்புள்ளியாக எடுத்துக்கொண்டால், இசைத்தளம் $x\alpha + y\beta + z\gamma = a^2$ (2)

(1) (2) இவைகளை ஒப்பிட்டால்,

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n} = \frac{a^2}{p}$$

$$\alpha = \frac{a^2 l}{p}, \ \beta = \frac{a^2 m}{p}, \ \gamma = \frac{a^2 n}{p}$$

எனவே, $\left(\frac{a^2 l}{p}, \frac{a^2 m}{p}, \frac{a^2 n}{p}\right)$ என்பதே சமதளத்தின் இசைப் புள்ளியாகும்.

4·13. துணையியப் புள்ளிகள் Conjugate points) :

ஒரு புள்ளியின் இசைத்தளம் மற்றொரு புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், இந்த இரண்டு புள்ளிகளைத் துணையியப் புள்ளிகள் என்கிறோம்.

π_1 என்ற சமதளத்தின் இசைப்புள்ளி; π_2 சமதளத்திலிருந்தால், π_2 சமதளத்தின் இசைப்புள்ளி π_1 சமதளத்தில் அமையும்.

π_1 சமதளத்தின் சமன்பாடு

$l_1 x + m_1 y + n_1 z = p_1$ என்றால்,

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தைப் பொருத்தவரை π_1ன் இசைப்புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்,

$$\left(\frac{a^2 l_1}{p_1}, \quad \frac{a^2 m_1}{p_1}, \quad \frac{a^2 n_1}{p_1} \right)$$

இந்த இசைப்புள்ளி $l_2 x + m_2 y + n_2 z = p$ என்ற π_2 சமதளத்தில் இருந்தால்,

$$\frac{l^2 a^2 l_1}{p_1} + \frac{m_2 a^2 m_1}{p_1} + \frac{n_2 a^2 n_1}{p_1} = p_2$$

அதாவது, $a_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = p_1 p_2$ இதுவே π_2ன் இசைப்புள்ளி π_1ன் சமதளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனையாகும்.

துணையிய தளங்கள் (Conjugate planes) :

ஒரு தளத்தின் இசைப்புள்ளி மற்றொரு தளத்தின் மேலமைந்தால், அந்த இரு தளங்களையும் துணையிய தளங்களென்கிறோம்.

ஒரு கோளத்தைப் பொறுத்தவரை A புள்ளியின் இசைதளம் B புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், B-ன் இசைத்தளம் A-ன் வழியாகச் செல்லும்.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ எனக் கொள்வோம். A-ன் அச்சு தூரங்கள் $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ என்றால் A-ன் இசைதளத்தின் சமன்பாடு

$x\alpha_1, + y\beta_1 + z\gamma_1 = a^2$ என்றாகும்.

இந்தத்தளம் $\beta\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால்,

$\alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 = a^2$

இந்த நிபந்தனையே நன் இசைத்தளம் A-ன் வழியாகச் செல்வதற்கானது.

41.4. இசைக்கோடுகள் (Polar Lines)

'l' என்ற நேர்கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் இசைத் தளங்கள் எல்லாம் 'l'' என்ற நேர்கோட்டைக் முழுமையாகக் கொண்டிருக்கும் அப்படிப்பட்ட இரு கோடுகளை இசைக்கோடுகள் என்கிறோம்.

l-ன் சமன்பாட்டை

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$ எனக் கொள்வோம்.

அதன்மேல் உள்ள புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை $(\alpha+l\gamma,\ \beta+m\gamma + \gamma + n\gamma)$ எனக் கொள்க,

கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=a^2$ எனக் கொண்டால், புள்ளியின் இசைத்தளம் $x(\alpha + l\gamma) + y(\beta+m\gamma) + z(\gamma+n\gamma) = a^2$ எனவாகும்.

அதாவது,

$$[\alpha x+\beta y+\gamma z-a^2] + \gamma(px+my+nz)=0$$ எனவாகும்.

'γ'-ன் மதிப்பு எதுவாக விருந்தாலும் இந்த மாறும் தளம்

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-a^2=0$$
$$lz+my+nz=0$$

என்ற நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொள்ளும். இந்த நேர் கோட்டை l' எனக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 32

1. $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தைப் பொறுத்தவரை $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ என்ற கோட்டின் இசைக் கோட்டைக் கண்டுபிடி.

2. l' என்ற நேர்கோட்டின் இசைக்கோடு l என்ற கோட்டுடன் ஒரே சமதளத்திலிருந்தால் l-ன் இசைக்கோடு l' நேர்கோட்டுடன் ஒரு சமதளத்திலமையுமென்று நிரூபி.

3. P, Q என்ற புள்ளிகளிலிருந்து, Q, P என்ற புள்ளிகளின் இசைத் தளங்களுக்கு PA, QB என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால்,

$$\frac{PA}{QB} = \frac{OP}{OQ}$$ என நிரூபி.

(O கோளத்தின் மையப் புள்ளியாகும்)

4·15. இரண்டு கோளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோணம் :

வரையறை :

இரண்டு கோளங்களுக்குப் பொதுவான புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணமே இரண்டு கோளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோணமாகும்.

பொதுவான புள்ளியில் வரையப்படும் ஆரைகள் தொடுதளங்களுக்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால், ஆரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் மேற்கண்ட கோணத்திற்கு சமமாகும்.

மேலும், பொதுவான புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அமையும் கோணங்களெல்லாம் சமம். ஏனெனில், C_1, C_2 என்ற மையத்தையுடைய இரண்டு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று P, P^1 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், $C_1 C_2, P$; $C_1 C_2 P^1$ என்ற முக்கோணங்கள் சர்வ சமமாகும். எனவே,

$$\angle C_1 P C_2 = \angle C_2 P^1 C_1$$

இரண்டு கோளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைவதற்கான நிபந்தனை

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wy+d=0$$
$$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$$

என்ற இரு கோளங்களிடையேயுள்ள கோணம் $90°$ என்க.

$C_1 C_2 P$ என்பவை முறையே முதல் கோளத்தின் மையம், இரண்டாம் கோளத்தின் மையம், பொதுவான புள்ளியென்றால்,

$$\angle C_1PC_2 = 90°$$
$$C_1C_2^2 = C_1P^2+C_2P^2$$
$$= \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$
$$(u-u')^2 + (v+v')^2 + (w-w')^2 = (u^2+v^2+w^2-d^2) + (u'^2+v'^2+w'^2-d'^2)$$
$$2uu'+2vv'+2ww'=d+d'$$

பயிற்சி 33

1. $x^2+y^2+z^2+2x+3y+4z+5=0$
   $5x+4y+z+2=0$

என்ற வட்டத்தின் வழியாகச்செல்லும் கோளம்,

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+11=0$$

என்ற கோளத்தை செங்குத்தாக வெட்டினால், அந்தக் கோளத்தின் சமன்பாடென்ன ?

2. $x^2+y^2+z^2+x-3z-2=0$

$2(x^2+y^2+z^2)+x+3y+4=0$ என்ற நேர் கோளங்களை செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம் (0, 3, 0) ; (—2, —1, 4) என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் சென்றால் அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+29=0$ என்ற கோளத்தை செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம், $x+y+z=5$ என்ற சமதளத்தை (1, 2, 3) என்ற புள்ளியில் தொடுமானால் அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. $x^2+y^2-2ax+\gamma^2=0$; $z=0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக வரையப்படும் எந்தக் கோளமும் $x^2+y^2=\gamma^2$, $y=0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக எந்தக் கோளத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டும் என்று நிரூபி.

5. γ_1, γ_2 என்ற எண்களை ஆரைகளாக உடைய கோளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. அவைகளுக்குப் பொதுவான வட்டத்தின் ஆரை,

$$\frac{\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}$$ என்று நிரூபி.

4.16 : சமத் தொடு வரைதளம் :

இரு கோளங்களைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளியின் திறன்கள் சமமாக இருந்தால், அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு சமதளமாகும். அந்தத் தளம், கோளங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$
$$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$$

என்ற இரு கோளங்களைப் பொறுத்து P (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் திறன்கள் $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wy_1+d_1$

$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2u'x_1+2v'y_1+2w'z_1+d'$ இவைகள் சமமானால்,

$$2x_1(u-u')+2y_1(v-v')+2z_1(w-w')+(d-d')=0$$

எனவே, P (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை $2x(u-u')+2y(v-v')+2z\cdot(w-w')+(d-d^1)=0$ அல்லது $(S-S')=0$

[இங்கு $S=0$, $S'=0$ என்பவை கோளங்களின் சமன்பாடுகளாகும். முக்கியமாக இரண்டு சமன்பாடுகளிலும், இரண்டாவது படி உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.]

குறிப்பு :

இரண்டு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொண்டால் அவை இரண்டுக்கும் பொதுவான வட்டத்தின் தளமே சமத்தொடு வரைத்தளமாகும்.

4·17. சமத்தொடு கோடு :

மூன்று கோளங்களை இரண்டிரண்டாக எடுக்கும்போது அவைகளின் சமத்தொடுதளங்கள் ஒரு கோட்டில் சந்திக்கும்.

$S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ என்பவை கோளங்களின் சமன்பாடாகக்கொள்க. அப்படியானால், சமத்தொடு தளங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$S_2-S_3=0,\ S_3-S_1=0,\ S_1-S_2=0$$

எனவே, இந்த மூன்று தளங்களும், $S_1=S_2=S_3$ என்ற நேர் கோட்டில் சந்திக்கும். இந்த நேர்கோட்டை மூன்று கோளங்களின் சமத்தொடு கோடு என்போம்.

4·18. சமத் தொடுபுள்ளி

நான்கு கோளங்களை மூன்று மூன்றாக எடுக்கும் பொழுது, அவைகளின் சமத் தொடுகோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் $S_1=S_2=S_3=S_4$ என்ற புள்ளியேயாகும்.

4.19. பொதுவச்சுக் கோளங்கள்

தேற்றம் : $S_1=0$, $S_2=0$ என்பவை இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகளானால், $S_1+\lambda S_2=0$ என்பது ஏதாவது இரண்டு கோளங்களின் சமத் தொடுதளம் ஒன்றாக உள்ள கோளங்களின் தொகுதியாகும். [இங்கு λ ஒரு சாரா மாறியாகும்]

$S_1+\lambda_1 S_2=0$ $S_1+\lambda_2 S_2=0$ என்று கோளங்களின் தொகுதியிலிருந்து இரண்டு கோளங்களை எடுத்துக் கொள்க.

இரண்டாம்படி உறுப்புகளின் குணகங்களை ஒன்றாக ஆக்க, சமன்பாடுகள்

$$\frac{S_1+\lambda_1 S_2}{1+\lambda_1}=0 \quad \frac{S_1+\lambda_2 S_2}{1+\lambda_2}=0 \text{ என்றாகும்.}$$

கோளம்

இந்த இரண்டு கோளங்களின் சமத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு,

$$\frac{S_1+\lambda_1 S_2}{1+\lambda} - \frac{S_1+\lambda_2 S_2}{1+\lambda_2}=0.$$

$$S/_1+\lambda_2 S_1+\lambda_1 S_2+\lambda_1\lambda/_2 S_2-S/_1-\lambda_1 S_1$$

$$-\lambda_2 S_2-\lambda_1\lambda/_2 S_2=0$$

$$(\lambda_2-\lambda_1)(S_1-S_2)=0$$

$$\lambda_2\pm\lambda_1$$

$$(S_1-S_2)=0$$

இந்த சமன்பாட்டில் λ_1, λ_2 என்ற உறுப்புகள் இல்லாததால், எந்த இரண்டு கோளங்களின் சமத் தொடுதளமும் இதுவேயாக அமையும்.

குறிப்பு: இப்படிப்பட்ட தொகுதியை பொதுவச்சுள்ள கோளங்களின் தொகுதியென்கிறோம்.

கிளைத் தேற்றம்:

பொதுவச்சுள்ள கோளங்களின் மையப்புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின்மேல் அமையும்.

$S_1+\lambda S_2=0$ என்பது கோளத்தின் சமன்பாடானல், அதன் மையப்புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்,

$$x=\frac{u_1+\lambda u_2}{1+\lambda}$$

$$y=\frac{v_1+\lambda v_2}{1+\lambda}$$

$$z=\frac{w_1+\lambda w_2}{1+\lambda}$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து λ-வை நீக்கினுல் நமக்குக் கிடைப்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும். நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-u_1}{u_1-u_2}=\frac{y-v_1}{v_1-v_2}=\frac{z-w_1}{w_1-w_2}$$

குறிப்பு: இந்த நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் (u_1-u_2), (v_1-v_2), (w_1-w_2). என்வே, இந்த நேர்கோடு சமத் தொடு தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

4·20. பொதுவச்சுள்ள கோளங்களின் சுருக்கிய சமன்பாடு

இந்தக் கோளங்களின் மையப்புள்ளி ஒரே நேர்கோட்டிலிருப்பதால் அந்தக் கோட்டை X நிலை அச்சாகக் கொள்வோம்.

அப்படியானல், கோளங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2+y^2+2u_1x+d_1=0$$

$$x^2+y^2+2u_2x+d_2=0 \text{ என்ருகும்.}$$

சமத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$2x(u_1-u_2)+(d_1-d_2)=0$$

அந்தத் தளத்தை YOZ என்ற தளமாகக் கொண்டால்,

அதாவது $x=0$ என்ருல் $d_1=d_2$

அதாவது கோளங்களின் சுருக்கிய சமன்பாடு,

$x^2+y^2+2ux+d=0$. இங்கு u ஒன்றுதான் மாறும்.

4·21. எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting points)

$x^2+y^2+2kx+d=0$ என்பதைப் பொதுவச்சுள்ள கோளத்தின் சுருக்கமான சமன்பாடாகக் கொண்டால் $(x+k)^2+y^2=k^2-d)$

$k=\pm\sqrt{d}$ என்ருல் இந்தக் கோளங்களின் ஆரைகள் பூஜ்யமாகும்.

$(\sqrt{d}, 0, 0)$; $(-\sqrt{d}, 0, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளை மையமாகக்கொண்டு, ஆரையேயில்லாத இரு கோளங்களை எல்லைப் புள்ளிகளெனலாம்.

எல்லைப் புள்ளிகளை, பொதுவச்சுள்ள கோளங்களின் தொகுதியில் புள்ளிக் கோளங்களெனலாம்.

பயிற்சி 34

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து,

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0$$

$$x^2+y^2+z^2+4x+4z+4=0$$

$$x^2+y^2+z^2+x+6y-4z-2=0$$

என்ற மூன்று கோளங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமானால், அந்தப் புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் கண்டுபிடி.

2. பொதுவச்சுள்ள தொகுதியில், பொதுவாக இரண்டு கோளங்களே ஒரு சமதளத்தைத் தொடுமென்று நிரூபி.

$$x^2+y^2+z^2-5+\lambda(2x+y+3z-3)=0$$

என்ற பொதுவச்சுள்ள தொகுதியில் $3x+4y=15$ என்ற சமதளத்தைத் தொடும் இரண்டு சமதளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

3. $$x^2+y^2+z^2+2\mu y+2\gamma z-d=0$$

(μ, γ என்பவை சாராமாறிகளாகும்) என்பது, $x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$ என்ற பொதுவச்சுள்ள தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளின் வழியாகச் சென்று, தொகுதியின் ஒவ்வொரு கோளத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டும் ஒரு கோளங்களின் தொகுதியாகுமென நிரூபி.

4. $x^2+y^2+z^2-20x+30y-40z+29+\lambda(2x-3y+4z)=0$ என்ற பொதுவச்சுள்ள கோளங்களின் தொகுதியில் எல்லைப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

பயிற்சி 35

1. ஒரு கனசதுரத்தின் ஆறுமுகங்களிலிருந்து, ஒரு புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியானால், அதன் நியமப்பாதை ஒரு கோளமென்று நிரூபி.

2. ஒரு சமதளம், (a, b, c) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்று, நிலை அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. O, A, B, C வழியாக வரையப்படும் கோளத்தின் மையப்புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$ என்று நிரூபி.

3. ஒரு மாறும் சமதளம், $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாகவுள்ளது. அது நிலை அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. ABC விட்டம்

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$

என்ற மேற்பரப்பில் அமையுமென்று நிரூபி.

4. ஆரை ஒரு மையமாகவுள்ள கோளத்தின் மையப்புள்ளி O ஆகும். A, B என்ற புள்ளிகள் O புள்ளியுடன் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்து $OA.OB=1$ என்று ஆகிறது. P என்பது கோளத்தின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியானால், $PA \cdot PB =$ மாறிலி என்று காண்பி.

5. $2k$ என்ற மாறு ஆரையையுடைய கோளம், ஆதியின் வழியாகச் சென்று, நிலை அச்சுகளை A. B. C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. நான்முகி OABC-ன் திணிவு மையத்தின் நியமப் பாதை $x^2+y^2+z^2=k^2$ என்று நிரூபி.

6. (a, o, o), (o, b, o), (o, o, c) என்ற புள்ளிகளில் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தைச் சுற்றி வரையும் வட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி. அதன் மையத்தின் அச்சு தூரங்களையும் கண்டுபிடி.

7. $x^2+y^2+z^2=29$ என்ற கோளத்தின் பெருவட்டத்தின் வழியாக, அதன் விட்டத்தைப் பொருத்து சுற்றி, $(4, -3, 2)$ என்ற புள்ளி, $(5, 0, -2)$ என்ற புள்ளியாக மாறினால், அந்த விட்டத்தின் சமன்பாடென்ன?

8. $(-8, 5, 2)$; $(-5, 2, 2)$; $(-7, 6, 6)$; $(-4, 3, 6)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோளத்தில் அமைகின்றனவென்று நிரூபி.

9. $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \frac{z}{c}+\frac{x}{a}=0; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ என்ற தளங்களை முகங்களாகவுடைய நான்முகியைச் சுற்றி வரையும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

10. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=8$ என்ற கோளத்தை $(1, 2, 2)$ என்ற புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டு $(0, 1, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

11. $x+y+z=k$ என்ற சமதளம் $x^2 \; y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$ என்ற கோளத்தைத் தொட வேண்டுமானால் 'k'-ன் மதிப்பென்ன?

12. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+6=0$ என்ற கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடுதளங்கள் $x+y+z=1$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக விருந்தால், அந்த தொடுதளங்களின் தொடுபுள்ளிகள் யாவை?

13. $x^2+y^2+z^2=9$; $2x+3y+4z=5$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் (i) ஆதியின் வழியாக (ii) $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், அந்தக் கோளங்களின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

14. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-3=0$;, $2x+y+z=4$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் $2x+4y=14$ என்ற தளத்தைத் தொட்டால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

15. $x^2+y^2+z^2=25$; $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z-547=0$ என்ற இரு கோளங்களின் வெளிப்பக்கமாகத் தொடுகின்றன என்று நிரூபி. மேலும், தொடும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

16. $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தைத் தொடும் கோணம் $4x+3y=47$ என்ற சமதளத்தை $(8, 5, 4)$ என்ற புள்ளியில் தொட்டால், அதன் சமன்பாடென்ன? இம்மாதிரி எத்தனை கோளங்களுள்ளன?

17. $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ என்ற கோளத்தை செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம் $4x+3y-2z+8=0$ என்ற சமதளத்தை $(1, -2, 3)$ என்ற புள்ளியில் தொட்டால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

18. $y=mx$, $z=c$, $y=-mx$, $z=-c$ என்ற நேர்கோடுகளைத் தொடும் கோளங்களின் மையத்தின் நியமப்பாதை $mxy+cz(1+m^2)=0$ என்று நிரூபி.

19. $x^2+y^2+z^2+2vy+2wz-d=0$ என்ற பொதுவச்சுத் தொகுதியின் புள்ளி கோளங்களின் நியமப்பாதை $x^2+y^2+z^2+2ux+d=0$ என்ற தொகுதியின் பொது வட்டமாகுமென்று நிரூபி. [u, v, w என்பவை சாராமாறியாகவும், d-ஐ மாறிலியாகவும் கொள்க.]

20. கொடுக்கப்பட்ட சமதளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியை மையமாகவும், அந்தப் புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கோளத்

திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டை ஆரையாகவும் கொண்டு ஒரு கோளம் வரையப்படுகிறது. அப்படி வரையப்படும் எல்லா கோளங்களும் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லு மென்று நிரூபி.

22. r_1, r_2, r_3, என்ற எண்களை ஆரைகளாகக் கொண்ட மூன்று கோளங்கள் A (a, o, o), B (o, b, o), c, (o, o, c) என்ற புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டவை. மேலும் $r_1^2+r_2^2+r_3^2=a^2+b^2+c^2$. நான்காவது ஒரு கோளம், ஆதியின் வழியாகவும், A, B, C என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும் செல்லுகிறது. இந்த நான்கு கோளங்களின் சமத் தொடுபுள்ளி $ax+by+cz=0$ என்ற தளத்தின் மேலுள்ளதென்று நிரூபி.

23. பொதுவச்சுள்ள கோளத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு கோளம், கொடுக்கப்பட்ட வேறொரு கோளம், இவற்றின் சமத் தொடு வரைத்தளம் ஒரு நேர்கோட்டை முழுமையாகக் கொள்ளு மென்று காண்பி.

24.
$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$
$$lx+my+nz=0$$

என்ற வட்டத்தின் ஆரை 'r' ஆனால்,

$$(r^2+d)(l^2+m^2+n^2)=(mw-nv)^2+(nu-pw)^2+(lv-mu)^2$$

என்று நிரூபி.

25.
$$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0$$
$$5y+6z+1=0$$

என்ற வட்டமும்,

$$x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0$$
$$x+2y-7z=0$$

என்ற வட்டமும் ஒரே கோளத்தின்மேல் அமைகின்றனவென்று நிரூபி. மேலும், அந்தக் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

26.
$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0,$$
$$lx+my+nz=p\ ;$$
$$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0,$$
$$l'x+m'y+n'z=p'$$

என்ற இருவட்டங்கள் ஒரே கோளத்தின்மேல் அமையுமென்று நிரூபி.

5. கூம்பு

5·1: வரையறை

ஒரு நிலையானப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டை சந்திக்கவோ, அல்லது கொடுக்கப் பட்ட மேற்பரப்பைத் தொடவோ செய்தால், அந்த நேர்கோடு பிறப்பிக்கின்ற மேற்பரப்பே கூம்பாகும்.

நிலையான புள்ளியை உச்சியென்றும், கொடுக்கப்பட்ட வளை கோட்டை உதவி வளைகோடு என்றும் கூறலாம்.

கூம்பை பிறப்பிக்கின்ற நேர்கோட்டை பிறப்பாக்கி எனலாம்.

குறிப்பு :

இங்கு நாம் இருபடி கூம்பை (Quadric Cones) பற்றியே படிப்போம்.

5·2. கூம்பின் சமன்பாடு :

(α, β, γ) என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும், $ax^2 = 2hxy + by^2 + 2gn + 2fy + c = 0$; $z = 0$ —(1) என்ற இருபடி வளைவரையை உதவி வளை கோடாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டு பிடிக்க :

(α, β, γ)வின் வழியாகச் செல்லும் ஏதாவது ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \dots \quad (2)$$

எனக்கொள்ளலாம். இந்த நேர்கோடு $z = 0$ என்ற தளத்தை

$$\left[\left(\alpha - \frac{e\gamma}{n}\right), \quad \left(\beta - \frac{m\gamma}{n}, 0\right)\right]$$

என்ற புள்ளியில் வெட்டும். இந்தப் புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வளை வரையின் மேல் அமைந்தால்,

$$a\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}\right)^2+2h\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}\right)\left(\beta-\frac{m\gamma}{n}\right)+b\left(\beta-\frac{m\gamma}{n}\right)^2$$

$$+2g\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}\right)+2f\left(\beta-\frac{m\gamma}{n}\right)+c=0 \qquad \ldots (3)$$

என்றாகும்.

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால்,

$$a\left(\alpha-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)^2+2h\left(\alpha-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)$$

$$\left(\beta-\frac{y-\beta}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)+b\left(\beta-\frac{y-\beta}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)^2+2g$$

$$\left(\alpha-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)+2f\left(\beta-\frac{y-\beta}{z-\gamma}\cdot\gamma\right)+c=0$$

அதாவது,

$$a(\alpha z-x\gamma)^2+2h(\alpha z-x\gamma)(\beta z-y\gamma)+b(\beta z-y\gamma)^2$$

$$+2g(\alpha z-x\gamma)(z-\gamma)+2f(\beta z-y\gamma)(z-\gamma)+c(z-\gamma)^2=0$$

இதுவே நமக்கு வேண்டிய கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 36

1. (α, β, γ) என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும்,

(i) $ax^2+by^2=1, z=0$ (ii) $y^2=4an, z=0$.

என்பதில் ஏதாவது ஒன்றை உதவி வளை கோடாகவும்கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு கூம்பின் பிறப்பாக்கிகள் (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்று, அவைகளின் திசை கொசைன்கள் $ab^2+bm^2+cn^2=0$ என்ற உறவைச் சரிசெய்தால், அந்தக் கூம்பின் சமன்பாடு என்ன?

3. (0, 1, 1) என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும், $x^2+y^2=9, z=0$ என்ற வட்டத்தை உதவி வளைகோடாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. P என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும்,

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$$

என்ற நீள் வட்டத்தை உதவி வளை கோடாகவும் கொண்ட கூம்பில் $y=0$ என்ற தளம் உண்டாக்கும் வெட்டுமுகம் ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவாகும்.

P-ன் நியமப்பாதை,

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2+x^2}{c^2}=$$ என்று நிரூபி.

5. (a, o, o) (o, b, o), (o, o, c) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தை உதவி வளை கோடாகவும், ஆதியை உச்சியாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு $a(b^2+c^2)yz+b(c^2+a^2)zx+c(a^2+b^2)xy=0$ என்று நிரூபி.

5·3. தழுவும் கூம்பு (Enveloping cone) :

(α, β, γ) என்ற புள்ளியை உச்சியாகக்கொண்ட ஒரு கூம்பின் பிறப்பாக்கிகள் $n^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தைத் தொட்டால், அந்த கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

உச்சியின் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கியின் சமன்பாட்டை $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ — (1) எனலாம். பிறப்பாக்கியின் மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களையும் $(\alpha+lr, \beta+mr, \gamma+nr)$ என்று கொள்ளலாம். அந்தப் புள்ளி கோளத்தின் மேல் அமைந்தால்,

$$(\alpha+lr)^2+(\beta+mr)^2+(\gamma+nr)^2=a^2$$

அதாவது,

$$r^2(l^2+m^2+n^2)+2r(l\alpha+m\beta+n\gamma)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)=0$$

இந்த γ-ல் உண்டாகும் இருபடி சமன்பாடு γ_1, γ_2 என்று இரு மூலங்களைக் கொடுக்கும்.

பிறப்பாக்கி கோளத்தை தொடவேண்டுமானால்,

$$r_1=\gamma_2$$

எனவே,

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2) \quad -(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால்,

$$[\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) + \gamma(z-\gamma)]^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)$$
$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]$$
$$[(x\alpha + y\beta + z\gamma - a^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma - a^2)]^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2)$$
$$[x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2$$
$$- 2(x\alpha + y\beta + z\gamma - a^2]$$
$$(T - S_1)^2 = S_1[S + S_1 - 2T]$$
$$S = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$
$$S_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2$$
$$T = x\alpha + y\beta + z\gamma - a^2$$
$$T^2 = SS_1$$

இதுவே கோளத்தை அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 37

1. (1, 1, 1) என்ற புள்ளியை உச்சியாகவுடைய

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 7$$

என்ற கோளத்தை அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ என்ற கோளத்தை அணைத்துக் கொள்ளும் கூம்பின் உச்சி (1, 2, 4) என்றால், $z = 0$ என்ற தளம் கூம்பை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவில் வெட்டுமென்று நிரூபி.

5·4. ஆதியை உச்சியாக உடைய இருபடிக் கூம்பு :

ஆதி உச்சியாக இருந்தால் கூம்பின் சமன்பாடு, ஒரு சமபடித் தானதாகும்.

கூம்பின் மேல் உள்ள, ஏதாவதொரு புள்ளி P-ன் அச்சு தூரங்கள் x', y', z' என்று கொள்க. ஆதி உச்சியினுல், OP ஒரு பிறப்பாக்கியாகிறது. ஆதலால் OP-ன் மேல் உள்ள எந்த புள்ளியும் கூம்பின் மேல இருக்கவேண்டும். அந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (rx', ry', rz'). இங்கு r என்ற உறுப்புக்கு எந்த மதிப்பும் கொடுக்கலாம்.

(rx', ry', rz') என்ற அச்சு தூரங்கள் ஒரு சமன்பாட்டை சரி செய்ய வேண்டுமானுல், அந்த சமன்பாடு ஒரு சமபடித்தானமாகத் தான் இருக்கவேண்டும்.

5-4-1. சமபடித்தான இருபடி சமன்பாடு எல்லாம்ஆதியை உச்சியாகவுள்ள கூம்பைக் குறிக்கும் ;

சமன்பாடு, சமபடித்தானமாக இருப்பதால், (x', y', z') என்ற அச்சு தூரங்கள், சமன்பாட்டை சரிசெய்தால், $(\lambda x', \lambda y', \lambda z')$ என்ற அச்சு தூரங்களும் சமன்பாட்டை சரிசெய்யும். அதாவது, P என்ற புள்ளி கூம்பின்மேல் இருந்தால், OP என்ற நேர் கோட்டின்மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியும் கூம்பின்மேல் இருக்கும். எனவே, OP என்ற நேர்கோடு முழுமையாக கூம்பின் மேல் இருக்கும். OP உருவாக்கும் மேற்பரப்பு கூம்பேயாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 1

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பின் பிறப்பாக்கியின் திசைகொசைன்கள் l, m, n என்றுல், பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=r$$

எனவே, பிறப்பாக்கியின்மேல் எந்தப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களும் (l_r, m_r, n_r) என்றுகின்றன. அவை கூம்பின் சமன்பாட்டைச் சரிசெய்தால்

$$al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=0$$

கிளைத்தேற்றம் 2

(α, β, γ) என்ற புள்ளியை உச்சியாகக்கொண்ட கூம்பின் பொதுச் சமன்பாடு.

$$(a(x-\alpha)^2+b(y-\beta)^2+c(z-\gamma)^2+2f(y-\beta)(z-\gamma)+$$
$$2g(z-\gamma)(x-\alpha)+2h(x-\alpha)(y-\beta)=0$$

பயிற்சி 38

1. $ax^2+by^2+cz^2=1$, $lx+my+nz=p$ என்ற வளைகோட்டின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் உச்சி (o, o, o) என்றால், அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $2l^2+3m^2-5n^2=0$ என்ற நிபந்தனை உள்ள நேர்கோடு,

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},$$

$2x^2+3y^2-5z^2=0$ என்ற கூம்பின் பிறப்பாக்கியாக இருக்குமென்று நிரூபி.

3. (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோடுகளின் திசைகொசைன்கள் $al^2+bm^2+cn^2=0$ என்ற கூம்பைப் பிறப்பிக்குமெனக் காண்பி.

4. ஒரு கூம்பின் பிறப்பாக்கிகள் $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும். அதன் திசைகொசைன்கள் (l, m, n), $l^2+m^2=3n^2$ என்ற உறவை சரிசெய்யும். அப்படியானால் கூம்பின் சமன்பாடென்ன?

5·4·2. நிலை அச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் பொதுச் சமன்பாடு

உச்சி ஆதியாக இருப்பதால், கூம்பின் சமன்பாட்டை $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்று கொள்ளலாம்.

X-ன் அச்சு ஒரு பிறப்பாக்கியாக உள்ளதால், அதன் திசை கொசைன்கள் $(1, 0, 0)$ கூம்பின் சமன்பாட்டை சரிசெய்யும்.

எனவே, $Q=0$

அதேமாதிரி y-அச்சு, z-அச்சு பிறப்பாக்கிகளாக இருப்பதால்,

$$b=0$$
$$c=0$$

ஆதலால் கூம்பின் சமன்பாடு $fyz+gzx+hxy=0$

$$\text{அல்லது}\quad \frac{f}{x}+\frac{g}{y}+\frac{h}{z}=0$$

கிளைத்தேற்றம்

ஒரே ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் இருஜதைச் செங்குத்து அச்சுகளைப் பிறப்பாக்கிகளாகக் கொண்ட கூம்பைக் காண்க.

ஒரு தொடரை நிலை அச்சுகளாகக் கொள்ளலாம். அதைப் பொருத்து மற்றொரு தொடர் நேர்கோடுகள் OP, OQ, OR. இவைகளின் திசை கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1); (l_2, m_2, n_2); (l_3, m_3, n_3) என்க.

கூம்பின் சமன்பாடு

$$fyz+gzx+hxy=0$$

இரண்டு நேர்கோடுகளை (OP, OQ) பிறப்பாக்கியாகக் கொண்டால்

$$fm_1n_1 + gn_1l_1 + hl_1m_1 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$fm_2n_2 + gn_2l_2 + hl_2m_2 = 0 \quad \cdots (2)$$

OP, OQ, OR என்ற நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால், அதன் திசைகொசைன்கள் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்படும்

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0 \quad (A)$$

$$n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0 \quad (B)$$

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0 \quad (C)$$

(1) + (2)

$$f(m_1n_1+m_2n_2)+g(n_1l_1+n_2l_2)+h(l_1m_1+l_2m_2)=0$$

(A), (B), (C) நிபந்தனைகளை உபயோகித்தால்,

$$fm_3n_3+gn_3l_3+hl_3m_3=0$$

அதாவது, OR-ம் கூம்பின் பிறப்பாக்கியாகிறது.

பயிற்சி 39

1. மூன்றுநிலை அச்சுகளின் வழியாகவும்

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3};\ \frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$$

என்ற நேர்கோடுகளின் வழியாகவும் செல்லும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. நிலை அச்சுகளை பிறப்பாக்கிகளாகவும் (l_1, m_1, n_1); (l_2, m_2, n_2) என்பவைகளைத் திசைகொசைன்களாக உடைய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளை பிறப்பாக்கிகளாகவும் உடைய கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

5.5. இருபடி பொதுச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பை குறிக்கவேண்டுமானால், அதற்கான நிபந்தனைகள்

$$an^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$$

என்பதை இருபடி பொது சமன்பாடாகக் கொள்க.

கூம்பின் உச்சியின் அச்சுதூரங்கள் (α, β, γ) என்க.

ஆதியை உச்சிக்கு மாற்றவும்.

அப்போது சமன்பாடு

$$a(x+\alpha)^2+b(y+\beta)^2+c(z+\gamma)^2$$
$$+2f(y+\beta)(z+\gamma)+2g(x+\gamma)(x+\alpha)$$
$$+2h(x+\gamma)(y+\beta)+2u(x+\alpha)+2v(x+\beta)$$
$$+2w(z+\gamma)+d \quad 0$$ என்றாகும்.

அதாவது,

$$(ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy)$$
$$+2[x(a\alpha+h\beta+g\gamma+u)+y(h\alpha+b\beta+f\gamma+v)$$
$$+z(g\alpha+f\beta+c\gamma+w)]$$
$$+[\alpha(a\alpha+h\beta+g\gamma+u)+\beta(h\alpha+b\beta+f\gamma+v)$$
$$+r(g\alpha+f\beta+c\gamma+w)+(\mu\alpha+v\beta+w\gamma+d)]=0.$$

இது உச்சியை ஆதியாக உடைய கூம்பின் சமன்பாட்டை குறிப்பதால், அதன் சமன்பாடு இருபடித்தானதாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே,

$$a\alpha+h\beta+g\gamma+u=0$$
$$h\alpha+b\beta+f\gamma+v=0$$
$$g\alpha+f\beta+c\gamma+w=0$$
$$u\alpha+v\beta+w\gamma+d=0$$

(α, β, γ) என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால் நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & b & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனையாகும்.

மா. க. $4x^2-y^2+2z^2+2xy-3yz+12x-11y+6z+4=0$ என்ற சமன்பாடு (—, —2, —3) என்ற புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டக் கூம்பைக் குறிக்குமென்று நிரூபி.

5.6. கூம்பின் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள்

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பிற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் உண்டென்றால், அதற்கான நிபந்தனை கண்டுபிடிக்க.

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}-(1)$$

என்ற கோட்டை கூம்பின் ஒரு பிறப்பாக்கியாகக் கொண்டால்,

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+2f\mu\nu+2g\nu\lambda+2h\lambda\mu=o \qquad (4)$$

1. நேர்கோட்டிற்கு செங்குத்தாக, ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் சமதளத்தின் சமன்பாடு,

$$\lambda x+\mu y+\nu z=o \text{ என்றாகும்.}$$

இந்த சமதளம் கூம்பை இரண்டு பிறப்பாக்கிகள் வெட்டும். இப்படிப்பட்ட பிறப்பாக்கியின் திசைகொசைன்கள் $(l, m, n,)$ என்றானால்,

$$al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=o \qquad (2)$$

$$\lambda l+\mu m+\nu n=0 \qquad (3)$$

(2, (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து 'n' என்ற உறுப்பை நீக்கினால்,

$$l^2(a\nu^2+c\lambda^2-2gh\lambda\nu)+2\,lm(c\lambda\mu+h\nu^2-g\mu\nu+f\lambda\mu)+m^2(b\nu^2+c\mu^2-2f\mu\nu)=o$$

எனவே, இரண்டு பிறப்பாக்கிகளின் திசைகொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1) (l_2, m_2, n_2) என்று கொண்டால்,

$$\frac{l_1l_2}{b\nu^2+c\mu^2-2f\mu\nu}=\frac{m_1m_2}{a\nu^2+c\lambda^2-2g\lambda\nu}=k$$

இதுபோல, 'l' என்ற உறுப்பை நீக்கினால்,

$$\frac{m_1m_2}{a\nu^2+c\lambda^2-2g\lambda\nu}=\frac{n_1n_2}{a\mu^2+b\lambda^2-2h\lambda\mu}=k.$$

ஆகவே,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = k[b\nu^2+c\mu^2-2f\mu\nu+a\nu^2+c\lambda^2-2g\lambda\gamma+ +a\mu^2+b\lambda^2-2h\lambda\mu]$$

$$=k[a(\mu^2+\nu^2)+b(\nu^2+\lambda^2)+c(\lambda^2+\mu^2)-2f\mu\nu-2g\gamma\nu -2h\gamma\mu]$$

$$=k[(a+b+c)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)]$$

(சமன்பாடு (4)-ஐ உபயோகித்து)

இந்த இரண்டு பிறப்பாக்கிகள் செங்குத்தாக இருப்பதால்

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=o$$

ஆதலால்,

$$\underline{a+b+c=o}$$

பயிற்சி 40

1. $5yz-8zx-3xy=0$ என்ற கூம்பிற்கு $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ என்ற நேர்கோடு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகளில் ஒன்ருனல், மற்ற இரண்டின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு நேர் வட்டகூம்பு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகளை கொண்டால், அதன் அரை உச்ச கோணம் $\tan^{-1}\sqrt{2}$ என்று நிரூபி.

3. $an+by+cz=0$, $yz+zx+xy=0$ என்ற சமன்பாடுகள் நிர்ணயிக்கும் இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால், $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ என்று நிரூபி.

4. $(b-c)x^2+(c-a)y^2+(a-b)z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பை $lx+my+ny=0$ என்ற சமதளம் செங்குத்தான இரு கோடுகளில் வெட்டினுல், $(b-c)l^2+(c-a)m^2+(a-b)n^2+2fmn+2gnl+2hlm=0$ என்று நிரூபி.

5.7. கூம்பை நேர்கோடுகள் வெட்டும் விதம்

கூம்பின் சமன்பாடு

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்றும், நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=$$ என்றும் கொள்க.

நேர்கோட்டின் மேல்உள்ள புள்ளி $[(\alpha+lr, (\beta+mr), (\gamma+nr)]$ கூம்பின் மேல் அமைந்தால்,

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm)$$
$$+2r[l(a\alpha+h\beta+g\gamma)+m(h\alpha+b\beta+f\gamma)$$
$$+n(g\alpha+f\beta+c\gamma)]+[a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2$$
$$+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta]=0$$

இந்த சமன்பாடு 'γ'-க்கு, γ_1, γ_2 என்ற இரண்டு மூலங்களைக் கொடுக்கிறது.

எனவே இருபடி கூம்பை ஒரு நேர்கோடு இரண்டு புள்ளி களில் சந்திக்கிறது.

கிளைத் தேற்றம்

இருபடிக் கூம்பை ஒரு சமதளம் இருபடி வரையில் சந்திக்கிறது.

பயிற்சி 41

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பிற்கு $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் நாண்களின் மையப் புள்ளிகள் $x(al+hm+gn)+y(hl+bm+fn)+z(gl+fm+cn)=0$ என்ற சமதளத்தின்மேல் அமைகின்றன என்று நிரூபி.

5.71. தொடுதளம்

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பிற்கு (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்க:

(α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாக ஏதாவதொரு நேர் கோடு வரைக. அதன் சமன்பாடு.

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=r \quad \text{---} (1)$$

இந்த நேர்கோடு கூம்பை சந்திக்கும் புள்ளிகள், (α, β, γ) என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரங்களை,

$$\gamma^2(al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm)$$
$$+2\gamma[l(a\alpha+h\beta+g\gamma)+m(h\alpha+b\beta+f\gamma)+n(g\alpha+f\beta+c\gamma)]$$

$$+[a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta]=0$$

என்ற சமன்பாடு கொடுக்கிறது. (α, β, γ) கூம்பின்மேல் இருப்பதால்,

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0$$

ஆதலின் γ-ன் ஒரு மூலம் $=0$

அடுத்த மூலமும் 'o' ஆகவேண்டுமானால்

$$l(a\alpha+h\beta+g\gamma)+m(h\alpha+b\beta+f\gamma)+n(g\alpha+f\beta+c\gamma)=0$$

இதிலிருந்து சமன்பாடு (1)-ஐ உபயோகப்படுத்தி l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினல்,

$$(x-\alpha)(a\alpha+h\beta+g\gamma)+(y-\beta)(h\alpha+b\beta+b\gamma)+(z-\gamma)(g\alpha+f\beta+c\gamma)=0$$

அல்லது,

$$x(a\alpha+h\beta+g\gamma)+y(h\alpha+b\beta+f\gamma)+z(g\alpha+f\beta+c\gamma)$$
$$=a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta r+2gr\alpha+2h\alpha\beta=0.$$

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z+f(y\gamma+z\beta)+g(z\alpha+x\gamma)+h(x\beta+y\alpha)=0$$

இதுவே கூம்பின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

கிளைத்தேற்றம்

(α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கியின்மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களும் $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$ எனக்கொள்ளலாம் $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் கூம்பின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடும் இதுவே. எனவே, கூம்பின் எந்த புள்ளயில் வரையப்படும் தொடுதளம் அந்தப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் பிறப்பாக்கியின்மேல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் தொடும். ஆகவே, தொடுதளம் கூம்பை பிறப்பாக்கியின்மேல் தொடுகிறது என்கிறோம்.

5-7.2. தளம் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ற கூம்பை

$lx+my+nz=0$—(1) என்ற சமதளம் தொடவேண்டுமானால் அதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடிக்க.

சமதளம் கூம்பை (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் தொட்டால்,

(α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு,

$$x(a\alpha+h\beta+g\gamma)+y(h\alpha+b\beta+f\gamma)+z(g\alpha+f\beta+c\gamma)=0 \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே சமதளத்தையே குறிக்கின்றன.

எனவே,

$$\frac{a\alpha+h\beta+g\gamma}{l}=\frac{h\alpha+b\beta+f\gamma}{m}=\frac{g\alpha+f\beta+c\gamma}{n}=\lambda$$

$$a\alpha+h\beta+g\gamma-\lambda l=0 \quad (3)$$

$$h\alpha+b\beta+f\gamma-\lambda m=0 \quad (4)$$

$$g\alpha+f\beta+c\gamma-\lambda n=0 \quad (5)$$

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0 \quad (6)$$

[(6) ஆம் சமன்பாடு (1) சமதளத்தின்மேல் (α, β, γ) என்ற புள்ளி அமைவதால்] (3), (4), (5), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து α, β, γ, $-\lambda$ என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால்,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & o \end{vmatrix}=o$$

இதுவே வேண்டிய நிபந்தனையாகும். இதைச் சுருக்கினால், $Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn\times 2Gnl-2Hlm=0$ என்றாகும்.

இங்கு A, B, C, F, G, H என்பவை

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & l & b \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையில், a, b, c, f, g, h என்பவைகளின் இணைக் காரணிகளாகும். அதாவது A $bc-f^2$; $B=ca-g^2$ $C=ab-h^2$; $F=gh-af$; $G=hf-bg$; $H=fg-ch$.

பயிற்சி 42

1. $lyz+mzx+nxy=0$ என்ற கூம்பின் தொடுதளங்கள், $l^2x^2+m^2y^2-n^2z^2-2mnyz-2nlzx-2lmxy=0$ என்ற கூம்பின் பிறப்பாக்கிகளை செங்குத்தாக வெட்டுமென்று நிரூபி.

2. $3x^2+4y^2+5z^2+2yz+4zx+6xy=0$ என்ற கூம்பின் தொடுதளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள்

$19x^2+11y^2+3z^2+6yz-10zx-26xy=0$ என்ற கூம்பின்மேல் அமையுமென்று நிரூபி.

3. நிலை அச்சு தளங்களை தொடும் கூம்பின் பொது சமன்பாடு $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxy=0$ என்று காண்பி.

5.8. தலைகீழான கூம்புகள் (Reciprocal Cones)

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ (1) என்ற கூம்பின் உச்சியின் வழியாக, அதன் தொடு தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நியமப்பாதை:

கூம்பு (1)-க்கு $lx+my+nz=0$ (6) என்பது தொடுதளமானால், $Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm=0$ (2) என்ற நிபந்தனைக்கு $l_1\ m_1\ n_1$ கட்டுப்படவேண்டும்.

சமதளம் (6)-க்கு செங்குத்தாக உச்சியின் வழியாக செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n} \quad 3)\text{ என்றாகும்.}$$

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n உறுப்புகளை நீக்கினால், நமக்கு கிடைப்பது

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ (5). இதுவே சமன்பாடு (3) நிர்ணயிக்கும் நேர்கோடுகளின் நியமப்பாதையாகும். அந்த நியமப்பாதை ஆதியை உச்சியாகக்கொண்ட கூம்பைக் குறிக்கிறது. இந்த கூம்பை தலைகீழான கூம்புகள் என்கிறோம்.

கிளைத் தேற்றம் :

1. இப்போது $Ax^2+By^2+Cz^2+2\ Fyz+2Gzx+2\ Hxy=0$ என்ற கூம்பின் தொடுதளங்களிலிருந்து செங்குத்தாக வரையப் படும் நேர்கோடுகளின் நியமப்பாதை

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+2F'yz+2G'zx+2\ H'xy=0 \qquad \ldots(4)$$

இங்கு A', B', C', F', G', H' என்பவை.

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையில்

A, B, C, F, G, H என்பவைகளின் இணைகாரணிகளாகும்.

ஆனல்,

$$BC-F^2=aD$$
$$CA-G^2=bD$$
$$AB-H^2=cD$$
$$GH-AF=fD$$
$$HF-BG=GD$$
$$FG-CH=HD$$

சமன்பாடு (4)

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ என்ருகிறது. அதாவது (4) சமன்பாடு (1) சமன்பாடாகிறது. எனவே (1), (5) சமன்பாடுகள் நிர்ணயிக்கும் கூம்புகளை **தலைகீழ் கூம்புகள்** என்கிறோம்.

கிளைத் தேற்றம்: 2.

$ax^2+by^2+cz^2+2\,fyz+2\ fyz+2gzn+2hxy=0$ என்ற கூம்பிற்குஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானமூன்று தொடுதளங்கள் இருக்கவேண்டுமாளுல்,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2\ Fyz+2\ Gzx+2\ Hxy=0$$

என்ற கூம்பிற்கு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப் பாக்கிகள் அமையவேண்டும்.

அதற்கான நிபந்தனை $A+B+C=0$ என்பதாகும்.

பயிற்சி 43

1. $ax^2+by^2+cz^2=0$, $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{f}+\frac{z^2}{c}$ என்ற கூம்புகள், தலைகீழ் கூம்புகளென நிரூபி.

2. மூன்று நிலை அச்சுதளங்களை தொடும் கூம்பின் பொது சமன்பாடு,

$\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz}=0$ என்று காண்பி.

3. $ayz+bzx+cxy=0$, $(ax)^{\frac{1}{2}}+(by)^{\frac{1}{2}}+(cz)^{\frac{1}{2}}=0$ என்ற கூம்புகள், தலைகீழ் கூம்புகளென நிரூபி.

5—9. நேர்வட்ட கூம்புகள் (Right circular Cones)

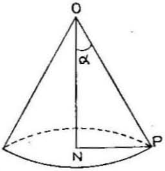
வரையறை :

நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு, வேறொரு நிலையான நேர்கோட்டுடன் மாருத கோணத்தை உண்டாக்கினால், அந்த நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் மேற்பரப்பே நேர்வட்ட கூம்பாகும்.

நிலையான புள்ளியை உச்சியென்றும், நிலையான நேர் கோட்டை அச்சு என்றும், மாருத கோணத்தை அரை உச்ச கோணமென்றும் கூறுவோம்.

5—9. 1. நேர்வட்ட கூம்பின் சமதள முக வெட்டு ஒரு வட்டமாகும்.

அந்த சமதளம் கூம்பின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக இருக்க வேண்டும்.



படம் - 14

ON அச்சுக்கு செங்குத்தான சமதளம் கூம்பின் அச்சை N என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். முகவெட்டின்மேல் P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுக்கவும்.

$ON \perp NP$

$\frac{PN}{NO} = \tan \alpha$; α = அரை வட்டக்கோணம்.

$NP = ON \tan \alpha$.

எனவே P-ன் நியமப்பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

5—9. 2. நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன்பாடு.

(α, β, γ) என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும்,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

என்ற நேர்கோட்டை அச்சாகவும், 'θ' என்ற கோணத்தை அரை உச்ச கோணமாகவும் உடைய கூம்பின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்க :

கூம்பின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (x, y, z) என்க. OP-ன் திசை விகிதங்கள் $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; அச்சின் திசை விகிதங்கள் l, m, n அவைகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ எனவே,

$$\cos\theta = \frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\ \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$$

எனவே கூம்பின் சமன்பாடு,

$$[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2=(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta \times [(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]$$

கிளைத் தேற்றம் 1.

உச்சியின் அச்சு தூரங்களை $(0, 0, 0)$ என்றால்,

$$(lx+mx+nz)^2 = (l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

என்பதே கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

கிளைத் தேற்றம் 2.

உச்சி ஆதியாகவும், அச்சு, z-நிலை அச்சாகவும் அமைந்தால், கூம்பின் சமன்பாடு

$$z^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

அல்லது,

$$x^2+y^2=z^2 \tan^2\theta$$

கிளைத் தேற்றம்3

ஒரு நேர்வட்ட கூம்பு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகளை கொண்டால்

$$1+1-\tan^2\theta=0$$

$$\tan^2\theta=2$$

$$\theta=\tan^{-1}\sqrt{2}$$

கிளைத்தேற்றம் 4

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்களை கொண்டால்,

$$1-\tan^2\theta-\tan^2\theta=0 \quad [\text{கி. தே. } 2]$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

பயிற்சி 44

1. உச்சி ஆதியாகவும், அச்சு x-நிலை அச்சாகவும், அரை உச்சகோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆகவும் உள்ள நேர்வட்ட கூம்பின் சமன்பாடென்ன ?

2. ஆதியை உச்சியாகவும், அரை உச்சகோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆகவும், $x=y=z$ என்ற நேர்கோடு அச்சாகவும் உடைய நேர்வட்ட கூம்பின் சமன்பாடு $(x^2+y^2+z^2)-4\ (yz+zx+xy)=o$ என்று நிரூபி.

3. ஆதியை உச்சியாகவும், $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ என்ற கோட்டை அச்சாகவும் உடைய கூம்பு $(2, 1, 1,)$ என்ற புள்ளியின்வழியாகச் சென்றால், அதன் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

4. oy, oz, $x=y=z$ என்ற நேர்கோடுகளை பிறப்பாக்கிகளாகக் கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பின் அரை உச்ச கோணம் 'α' என்றால் $\text{Cos}\,\alpha=[9-4\sqrt{3}]^{-2}$ என்று நிரூபி.

5. மிகையாகவுள்ள (Positive) மூன்று நிலை அச்சுகளை கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

5—10. ஒரு சமதளம் கூம்பை வெட்டும்போது உண்டாகும் நேர் கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்.

இங்கு,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ என்ற அணி கோவையை D

என்றும்,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \mu \\ h & b & f & \gamma \\ g & f & c & w \\ \mu & \gamma & w & o \end{vmatrix}$$ என்ற அணிகோவையை P^2

என்றும் கூறுவோம.

$$P^2 \equiv -(Au^2+Bv^2+C\mu+2\,Fvw+2\,Hu\omega$$

$ux+vy+wz=o$ என்ற சமதளம் $f(x,y,z)\equiv ax^2$ $+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=o$ என்ற கூம்பை வெட்டினால் ஏற்படும் நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தை கண்டுபிடிக்க:

$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}\ \frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோடு சமதளத்தின்மேல் அமைந்தால்,

$$ul+vm+wn=o \qquad ...(1)$$

அதுவே கூம்பின் மேலிருந்தால்

$$al^2+lm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=o \qquad ...(2)$$

(1), (2), சமன்பாடுகளிலிருந்து 'n' ஐ நீக்கினால்,

$$l^2\,(cu^2+av^2-2\,gwu)+2\,lm\,(hw^2+cuv-fuw-gvw)+vh^2(cv^2+bw^2-2fvw)=o$$

எனவே கூம்பிற்கும், தளத்திற்கும் பொதுவாக இரண்டு கோடுகள் உள்ளன. அவைகளின் திசை கொசைன்கள்

$l_1, m_1, n_1,)$; (l_2, m_2, n_2) என்றால்,

$$\frac{l_1 l_2}{lw^2+cv^2-2fvw} = \frac{m_1 m_2}{cu^2+aw^2-2guw} = \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{-2(hw^2+cuv-fuw-gvw}$$

$$= \frac{l_1 m^2 - l^2 m_1}{\pm 2[(hw^2+cuv-fuw-gvw}$$

$$-(bw^2+cv^2-2fvw) \times (cu^2+aw^2-2guw]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{\pm 2 \, wP}$$

இதுபோல இவைகள்

$$\frac{n_1 n_2}{av^2+bu^2-2huv} = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{\pm 2uP} = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{\pm 2 \, vP}$$

என்பவைகளுக்கு சமமாகும்.

எனவே, இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் θ ஆனால்,

$$\frac{\text{Cos } \theta}{l_1 l^2 + m_1 m^2 + n_1 n^2} = \frac{\sin \theta}{[\Sigma(m_1 n_2 - m_2 n_1)_2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \frac{\text{Cos } \theta}{(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)} = \frac{\sin \theta}{\pm_2 (u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}} P}$$

$$-f(u, v, w)$$

பயிற்சி 45

1. ஆதியை உச்சியாகவும், $x = a$, $y^2 + z^2 = b^2$ என்ற வட்டத்தை அடியாகவுமுள்ள கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டு பிடி.

2. ஒரு கூம்பின் உச்சி (α, β, γ) என்ற புள்ளியாகவும், கூம்பின் பிறப்பாக்கிகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_2} = 1, z = 0$ என்ற இருபடி வளைவரையின் வழியாகச் சென்றும் அமைந்தால், கூம்பின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு கூம்பைக் குறிக்க வேண்டுமானால்,

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$ என்று நிரூபி.

4. $$2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 10yz - 10zx + 2x + 2y + 26z - 17 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் $(-\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ $(2, 2, 1)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாக உடைய கூம்புகளை குறிக்கின்றன என்று நிரூபி.

5. எந்த சமதளத்தின் செங்குத்துக்கோடு $(b+c)x^2 + (c+a)y^2 + (a+b)z^2 = 0$ என்ற கூம்பின்மேல் விழுகிறதோ, சமதளம், $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பை செவ்வக அதிபரவளைவில் சந்திக்கிறதென்று காண்பி.

6. $ax^2 - by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ என்ற கூம்பு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்களைக் கொண்டால், $bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$ என்று காண்பி.

7. $ax^2 + by^2 + cz^7 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ என்ற கூம்பை $x(al + hm + gn) + y(hl + bm + fn)$

$+ z(gl + fm + cn) = 0$ என்ற சமதளம் வெட்டும் நேர்கோடுகளில் வரையப்படும் தொடுதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடு $\frac{x}{l} = \frac{y}{\mathrm{m}} = \frac{z}{n}$ என்று நிரூபி.

8. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ என்ற கூம்பிற்கு அதன் செங்குத்தான பிறப்பாக்கிகளை தொடும், தொடுதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடுகளின் நியமப்பாதை $a^2(b+c)\,x^2 + b^2\,(c+a)\,y^2 + c^2\,(a+b)\,z^2 = 0$ என்று காண்பி.

9. $x - 1 = y - 2 + z + 1$ என்ற நேர்கோடு $z^2 - xy + 2x + y + 2z - 1 = 0$ என்ற மேற்பரப்பில் முழுமையாக அமைகிறதென்று காண்பி.

10. $(0, 0, 3)$ என்ற புள்ளியை உச்சியாகவும் $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ என்ற வட்டத்தை உதவி வளைகோடாகவும் கொண்ட நேர் வட்ட கூம்பின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

11. (1, 2, 2), (2, 1 —2), (2. —2, 1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தை வெட்டி ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடுகள் பிறப்பிக்கும் நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன் பாட்டை கண்டுபிடி.

12. x-நிலை அச்சு, y-நிலை அச்சு இவைகளின் வழியாக வரையப்படும் சமதளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ அப்படியானல் அந்த சமதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடுகளின் நியமப்பாதை $z^2(x^2+y^2+z^2) = x^2y^2 \tan 2\theta$ என்று காண்பி.

13. $x+y+z=o$, $\frac{yz}{b-c} + \frac{zx}{c-a} + \frac{xy}{a-b} = o$ என்ற நேர் கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள கோணத்தை கண்டுபிடி.

14. $a+b+c=o$ என்றால், $x+y+z=o$, $ayz+bzx+cxy=o$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள கோணம் $\pi/2$ என்றும், $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = o$ என்றால் கோணம் $\pi/3$ என்றும்நிரூபி.

15. $fyz+gzx+hxy=o$, $ax^2+by^2+cz5=o$ என்ற கூம்புகளை $lx+my+nz=o$ என்ற சமதளம் வெட்டும் கோடுகள் பொருந்துவதற்கான (Coincident) நிபந்தனைகளைக் கண்டுபிடி.

16. $ayz+bzx+cxy=o$ என்ற கூம்பை $ux+vy+wz=o$ என்ற சமதளம் வெட்டு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தை கண்டுபிடி.

17. $ax^2+by^2+cz^2=o$ என்ற கூம்பை $ux+vy+wz=o$ என்ற சமதளம் வெட்டும் நேர்கோடுகளின் சமவெட்டிகள்

$$\frac{u(b-c)}{x} = \frac{v(c-a)}{y} = \frac{w(a-b)}{z} = o$$ என்ற கூம்பின்

மேல் அமையுமென்று காண்பி.

18. $x-2y-1=o$, $z=o$ என்ற நேர்கோட்டை x-நிலைஅச்சை பொருத்து சுற்றும்போது ஏற்படும் கூம்பின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி. அந்தக் கூம்பின் உச்சியின் அச்சு தூரங்களையும் கண்டுபிடி.

19. $yz+zx+xy=o$ என்ற கூம்பு $x^2+y^2+z5=a5$ என்ற கோளத்தை இருசம வட்டங்களில் வெட்டுகிறதென்று காண்பி. அவைகளின் பரப்புகளையும் கண்டுபிடி.

20. (1, −2, 1) என்ற புள்ளியை அச்சாகவும், 60° கோணத்தை அரை உச்சி கோணமாகவும்,

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}$$

என்ற கோட்டை அச்சாகவும் உடைய கூம்பின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி. $3x-4y+5z=28$ என்ற சமதளம் கூம்பை வட்டத்தில் வெட்டுகிறதென்று நிரூபி. இந்த வட்டத்தை அடியாகவுள்ள நேர் வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

6. உருளை

(Cylinder)

6.1. வரையறை

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும், இந்த நேர்கோட்டிற்கு இணையாக அமையாமல் உள்ள சமதளத்திலுள்ள வளைகோட்டின் வழியாகவும் செல்லும் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் மேற்பரப்பே உருளை என்கிறோம். வளைகோட்டின் வழியாக செல்லுவதற்குப் பதிலாக கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மேற்பரப்பை தழுவலாம்.

உருளை பிறப்பிக்கும் நேர்கோட்டை பிறப்பாக்கி என்றும் வளைகோட்டை உதவி வளைகோடு என்றும் கூறலாம்.

6.2. உருளையின் சமன்பாடு

$2gx$ உருளையின் பிறப்பாக்கிகள் $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, $z=0$ என்ற இருபடி வளைவரையை வெட்டிக்கொண்டும் $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமைந்தால் அதன் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்க :

(α, β, γ) என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளி உருளையின்மேல் அமைவதாகக் கொள்க. அதன் வழியாக வரையப்படும் பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

இந்த நேர்கோடு $z=0$ என்ற தளத்தை

$$\left[\alpha-\frac{lr}{n}, \beta-\frac{mr}{n}, 0\right]$$

என்ற புள்ளியில் வெட்டும். இந்தப் புள்ளி இருபடி வளைவரையின்மேல் இருந்தால்,

$$a\left(\alpha-\frac{lr}{n}\right)^2+2h\left(\alpha-\frac{lr}{n}\right)\left(\beta-\frac{mr}{n}\right)+b\left(\beta-\frac{mr}{n}\right)^2$$

$$+2g\left(\alpha-\frac{lr}{n}\right)+2f\left(\beta+\frac{mr}{n}\right)+c=0$$

இந்த நிபந்தனை, (α, β, γ) என்ற புள்ளி,

$$a\left(x-\frac{lz}{n}\right)^2+2h\left(x-\frac{lz}{n}\right)\left(y-\frac{my}{n}\right)+b\left(y-\frac{my}{n}\right)^2$$

$$+2g\left(x-\frac{ly}{n}\right)+2f\left(y+\frac{my}{n}\right)+c=0$$

என்ற மேற்பரப்பின்மேல் அமைவதற்கானது.

எனவே,

$$a(nx-ly)^2+2h(nx+ly)(ny-mz)$$

$$+b(ny-mz)^2+2g(nx+lz)+2f(ny-mz)$$

$+cn^2=0$ என்ற சமன்பாடு உருளையினுடையது என்று கொள்ளலாம்.

கிளைத் தேற்றம் 1

பிறப்பாக்கி z-நிலை அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால்

$$l=0,\ m=0,\ n=1$$

எனவே, உருளையின் சமன்பாடு

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்பதாகும். இது நமக்கு முன்பே தெரிந்தது.

பயிற்சி 46

1. $x^2+2y^2=1, z=0$ என்ற நீள் வட்டத்தை உதவி வளைகோடாகவும் $x=-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}z$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள பிறப்பாக்கியாகவும் உள்ள உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $ax^2+cz^2=2y,\ lx+my+nz-p$ என்ற வளைகோட்டை சந்திக்கும் பிறப்பாக்கி y-நிலை அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால்,

அந்தப் பிறப்பாக்கி பிறப்பிக்கும் உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற உருளைக்கு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கியின்மேல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அந்தத்தளம் தொடுமெனக் காண்பி.

6·3 கோளத்தை அணைத்துக் கொள்ளும் உருளை

$x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தைத் தொடும் பிறப்பாக்கிகளையுடைய உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க, அந்தப் பிறப்பாக்கிகள் $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக அமைவதாக (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியை உருளையின்மேல் எடுத்துக்கொள்க. அதன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடு.

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

இது $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தின் தொடுகோடாக இருக்க வேண்டுமானல்,

$(lx_1+my_1+nz_1)^2 = (l^2+m^2+n^2)\ (x_1^2+y_1^2+z_1^2-a^2)$ எனவே, (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை $(lx+my+nz)^2 = (l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2-a^2)$ இது கோளத்தை அணைத்துக் கொள்ளும் உருளையின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 47

$x=y=z$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள பிறப்பாக்கியாக உடையதும் $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+29=0$ என்ற கோளத்தை அணைத்துக் கொள்ளுவதுமான உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6.4 நேர்வட்ட உருளை (Right circular cylinder)

வரையறை: உதவி வளைசோடு வட்டமாகவும், பிறப்பாக்கி வட்டத்தின் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் அமைந்தால், உருளை நேர்வட்ட உருளையாகும்.

வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாக அதன் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவுள்ள நேர்கோட்டை உருளையின் அச்சு என்கிறோம்.

தேற்றம் : உருளையின் அச்சின் சமன்பாடு

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \text{ என்றும்,}$$

உதவி வளைகோடு வட்டத்தின் ஆரை 'r' என்றும் கொண்டால் நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்க :

உருளையின்மேல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை $x, y, z,$ என்று கொள்க. உருளையின் அச்சிலிருந்து புள்ளியின் தூரம் $=\gamma$ எனவே,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 - \frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2}=\gamma^2$$

இதுவே நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 48

1. '5' என்ற எண்ணை ஆரையாகவும் $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{4}$ என்ற நேர்கோட்டை அச்சாகவும் கொண்டுள்ள நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $x^2+y^2+z^2-9=0, \quad x-y+z=3$ என்ற வட்டத்தை உதவி வளைகோடாகவுள்ள நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாடென்ன ?

3. $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தை உதவி வளைகோடாகக் கொண்டுள்ள நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy-1=0$ என்று நிரூபி.

பயிற்சி 49

1. உதவி வளைகோடு $x^2+y^2=9, \quad z=1$ என்றும், $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள பிறப்பாக்கிகளையுடையதுமான உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $4x^2+y^2=1$, $z=0$ என்ற நீள் வளையத்தை உதவி வளை கோடாகவும் $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக வுள்ள கோட்டை பிறப்பாக்கியாகவும் உள்ள உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு உருளையின் உதவி வளைகோடு $x^2+y^2=z$, $x+y+z=1$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. அதன் பிறப்பாக்கி z நிலை அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4. ஒரு உருளையின் பிறப்பாக்கி $ax^2+by^2=\theta 1$ $z=0$ என்ற சமதள வளைகோட்டை வெட்டிக் கொண்டும் $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமைந்தால் அந்த உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

5. $x^2+y^2+z^2=9$, $x-y+z=3$ என்ற வட்டத்தை உதவி வளைவு கோடாக உள்ள நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரை '2' என்றும், அதன் அச்சு (1, 2, 3,) என்ற புள்ளியின் வழியாகச்சென்று (2, −3, 6) என்ற எண்களை திசைவிகிதங்களாகக் கொண்டும் இருந்தால் அந்த உருளையின் சமன்பாடு என்ன ?

7. $x^2+y^2-2x-4y-12=0$ என்ற சமன்பாடு $x=1$, $y=2$ என்ற நேர்கோட்டை அச்சாக உடைய நேர்வட்ட உருளையைக் குறிக்கிறதென்று நிரூபி.

8. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் உதவி வளைகோடு (1, 0, 1), (0, 1, 1) (1, 1, 0) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டமாகும். அப்படியானால் உருளையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

9. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரை '2' ஆகவும் அதன் அச்சின் சமன்பாடு $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ என்றும் இருந்தால், உருளையின் சமன்பாடு $8x^2+5y^2+5z^2+4xy+8yz-4zx-36=0$ என்று காண்பி.

7. மைய இருபடி மேற்பரப்புகள்

7.1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற சமன்பாடுகளை கவனிக்கலாம்.

(1) ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் (x, y, z) மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை சரிசெய்தால், $(-x, -y, -z)$ என்ற அச்சுதூரங்களும் சமன்பாடுகளை சரிசெய்யும். ஆனால் இந்த புள்ளிகளை சேர்க்கும் நேர்கோடு ஆதியின் வழியாக செல்லுகிறது. நேர்கோட்டின்மேல் உள்ள இந்த புள்ளிகள் ஆதியிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கின்றன. எனவே ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் எந்த நாணையும் ஆதி இரு சமதுண்டுகளாக பிரிக்கிறது. எனவே ஆதியை இந்த சமன்பாடுகள் குறிக்கும் மேற்பரப்பின் மையப் புள்ளி என்கிறோம்.

(ii) (x, y, z) என்ற அச்சுதூரங்கள் உள்ள புள்ளிமேற் பரப்பில்மேல் அமைந்தால், $(+x, +y, -z)$ என்ற புள்ளியும் அமையும். ஆனால், (x, y, z) ; $(x, y, -z)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை XOY என்ற சமதளம் செங்குத்தாகவும். இரு சமதுண்டுகளாகவும் வெட்டுகிறது. எனவே, XOY சமதளத்திற்கு செங்குத்தாகவுள்ள எந்த நாணையும் XOY சமதளம் இருசம துண்டுகளாக வெட்டுகிறது. எனவே மேற் பரப்புகள் XOY சமதளத்திற்கு சமச்சீராக அமைகின்றன. அதே

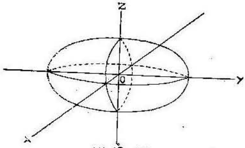
போல்மேற்பரப்புகள் YOZ. ZOX என்ற சமதளங்களுக்கும் சமச்சீராக அமைகின்றது.

இந்த மூன்று சமதளங்களை தலையாய சமதளங்கள் என்றும், இந்த சமதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோடுகளை தலையாய அச்சுகள் என்றும் கூறலாம்.

(iii) (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற மேற்பரப்பை எடுத்துக் கொண்டால், $|x| \ngtr |a|$. $|n|>|a|$ என்றால் y^2 அல்லது z^2 குறையாக இருக்கவேண்டும். அதேபோல் $|y| \ngtr (b), |z| \ngtr (c)$ எனவே, இந்த மேற்பரப்பு $x=a$; $x=-a$; $y=b$, $y=-b$; $z=c$; $z=-c$ என்ற சமதளங்களுக்கிடையேதான் அமைய வேண்டும். ஆகையால் இதை மூடின மேற்பரப்பு என்கிறோம்.

இதுவே நீள்வளைய கோளமாகும் [Ellipsoid]

(iii) (b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற மேற்பரப்பை எடுத்துக் கொண்டால், X-நிலை அச்சு இந்த மேற்பரப்பை $(a, 0, 0)(-a, 0, 0)$



படம் 15

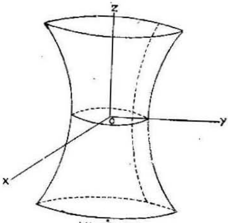
என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அதுபோல் Y-நிலை அச்சு $(o, b, o)(o, -b, o)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆனால், Z-நிலை அச்சு மேற்பரப்பை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டுவதில்லை.

XOY சமதளத்திற்கு இணையாகவுள்ள $z=k$ என்றசமதளம் மேற்பரப்பை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$; $z=k$ என்ற வளை கோட்டில் வெட்டுகிறது. k என்ற எண்ணிற்கு வரம்பு இல்லை. ஆதலால், $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$; $z=k$ என்ற வளைகோடு வடிவொத்த நீள் வளையங்களைக் குறிக்கின்றன.

ஆனால், $x = k, y = k$ என்ற சமதளங்கள் மேற்பரப்பை,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \; ; \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

$$x = k \qquad ; \qquad y = k$$



படம் - 16

என்ற அதிபர வளையங்களில் வெட்டுகின்றன. இந்த மேற் பரப்பை ஒரு தகடு கன அதிபர வளைவுரு எனலாம் [Hyberbroid of one sheet].

(iii) (c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

என்ற மேற்பரப்பை எடுத்துக்கொண்டால், $y = k, z = k$ என்ற சம தளங்கள்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k$$

என்ற அதிபர வளைவுகளில் வெட்டுகின்றன.

ஆனால், $x = k$ என்ற சமதளம்

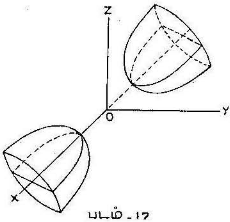
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1, \; x = k$$

என்ற நீள் வளையத்தில் வெட்டும்.

$k^2 > a^2$ என்று இருக்க வேண்டும். $-a < k < a$ என்று இருந்தால், நீள் வளையம் மெய்யிலா மையாக இருக்கும். எனவே,

$x = -a$, $x = a$ என்ற சமதளங்களுக்கிடையே மேற்பரப்பு இருக்காது.

இதை இரு தகடு கன அதிபரவளைவுரு என்கிறோம்.(Hyberbroid of two sheet).



படம் - 17

7·11. நாம் விவாதித்த மூன்று சமன்பாடுகளும்,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

என்ற சமன்பாட்டில் அமைகிறது.

a, *b*, *c* என்ற மூன்று எண்களும் மிகையாக இருந்தால், மேற்பரப்பு நீள் வளைய கோளமாகும்.

a, *b*, *c*, என்ற மூன்று எண்களில் ஏதாவது இரண்டு மிகையாகவும், மூன்ருவது குறையாகவும் அமைந்தால், மேற்பரப்பு ஒரு தகடு கன அதிபர வளைவுரு ஆகும்.

a, *b*, *c* என்ற எண்களில் ஏதாவது ஒன்று மிகையாகவும், மற்ற இரண்டு குறைவாகவும் அமைந்தால் இரு தகடு கன அதிபரவளைவுரு ஆகும்.

எனவே, $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற சமன்பாடு மைய இருபடி மேற்பரப்பை குறிக்குமெனலாம். இவைகளுக்கு, $(0, 0, 0)$ மையப்புள்ளியாகவும், நிலே சமதளங்கள் தலேயாய சமதளங்களாகவும், நிலே அச்சுகள் தலேயாய அச்சுகளாகவும் அமைகின்றன.

7·2. இருபடி மேற்பரப்பை நேர்கோடு சந்திக்கும் விதம் :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \dots \quad (1)$$

என்ற இருபடி மேற்பரப்பை,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற நேர்க்கோடு சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்க.

(2) சமன்பாடு குறிக்கும் நேர்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். இந்தப் புள்ளி (i) மேற்பரப்பில் மேல் இருந்தால்,

$$a(\alpha + lr)^2 + b(\beta + mr)^2 + c(\gamma + nr)^2 = 1$$

$$r^2(al^2 + bm^2 + cn^2) + 2r(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n)$$

$$+ (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) = 0 \quad \ldots \quad (A)$$

இந்த சமன்பாட்டிற்கு γ_1, γ_2 என்று இரு மூலங்கள் உள்ளன.

எனவே, நேர்க்கோடு இருபடி மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

குறிப்பு

சமதளத்தில் மேலுள்ள நேர்க்கோடுகள் மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இருபடி மேற்பரப்பின் சமதள வெட்டுமுகம் ஒரு இருபடி வரையாகும்.

பயிற்சி 50

1. $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 = 8$ என்ற மேற்பரப்பை,

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{3}=2(z+1)$$

என்ற நேர்க்கோடு சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

2. இருபடி மேற்பரப்பின் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக மூன்று அரை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் தலைகீழான எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலி என்று காண்பி.

7·3. தொடுதளம், தொடுகோடுகள் :

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பின் மேலுள்ள (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின்

சமன்பாடு

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \text{ என்க.} \quad \ldots \quad (1)$$

(α, β, γ) என்ற புள்ளி மேற்பரப்பின் மேல் இருப்பதால்,

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 1$$

எனவே,

$$r^2 (al^2 + bm^2 + cm^2) + 2r\,(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n)$$
$$+ (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் பூச்சியமாகிறது நேர்க்கோடு மேற்பரப்பை தொடவேண்டுமானுல், இன்னொரு மூலமும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

எனவே,

$$a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினுல்,

$$a\alpha\,(x-\alpha) + l\beta\,(y-\beta) + c\gamma\,(z-\gamma) = 0$$

இது தொடுகோடுகளின் நியமப்பாதையாகும்.

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1 \quad \ldots \quad (3)$$

இது ஒரு சமதளத்தைக் குறிக்கிறது.

(3) சமன்பாடு (α, β, γ) புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு தளத்தைக் குறிக்கும்.

7·3 I. தொடு தன்மைக்கான நிபந்தனை

$lx + my + nz = p$ என்ற சமதளம் $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பை தொட்டால், அதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடிக்க.

இந்த சமதளம் மேற்பரப்பை (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் தொட்டால். அந்தப் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு,

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே சமதளத்தைக் குறிக்கிறது.

எனவே,

$$\frac{a\alpha}{l} = \frac{b\beta}{m} = \frac{c\gamma}{n} = \frac{1}{p}$$

$$\alpha = \frac{l}{ap}, \beta = \frac{m}{bp}, \gamma = \frac{n}{cp}.$$

எனவே, சமதளத்தின் தொடுபுள்ளி

$$\left(\frac{l}{ap}, \quad \frac{m}{bp}, \quad \frac{n}{cp}\right)$$

இந்தப் புள்ளி $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பில் மேல் இருப்பதால்,

$$\frac{a\ l^2}{a^2p^2} + \frac{b\ m^2}{b^2\ p^2} + \frac{c\ n^2}{c^2p^2} = 1$$

$$p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}$$

ஆகவே,

$$lx + my + nz = \pm \sqrt{\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}}$$

என்ற சமதளம், இருபடி மேற்பரப்பைத் தொடுகிறது.

7·311. குத்துத் தொடுதள கோளம்

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக மூன்று தொடுதளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்க.

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பின் மூன்று தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகளை,

$$l_1x + m_1y + n_1z = \sqrt{\frac{l_1^2}{a} + \frac{m_1^2}{b} + \frac{n_1^2}{c}} \quad \ldots \quad (1)$$

$$l_2x + m_2y + n_2z = \sqrt{\frac{l_2^2}{a} + \frac{m_2^2}{b} + \frac{n_2^2}{c}} \quad \ldots \quad (2)$$

$$l_3x + m_3y + n_3z = \sqrt{\frac{l_3^2}{a} + \frac{m_3^2}{b} + \frac{n_3^2}{c}} \quad \ldots \quad (3)$$

இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால்,

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$$
$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$
$$n_1 l_1 + n l_{22} + n_3 l_3 = 0$$

l, m, n **என்ற உறுப்புகள் திசை கொசைன்களைக் குறிப்பதால்,**

அதுபோல்,

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \qquad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \qquad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$
$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \qquad n_{12} + n_{_}^2 + n_3^2 = 1$$

1, 2, 3, சமன்பாடுகளை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டினால்,

$$x^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + y^2 (m_1^2 + m_3^3 + m_3^2)$$
$$+ z^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + 2yz (m_1 u_1 + m_2 n^2 + m_3 n_3)$$
$$+ 2zx (n_1 l_1 + n^2 l^2 + n_3 l_3) + 2xy (l_1 m_1 + l^2 m^2 + l_3 m_3)$$
$$= \frac{1}{a} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + \frac{1}{b} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$
$$+ \frac{1}{c} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

ஆகையால்,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} .$$

இது ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கிறது. இந்தக் கோளத்தைக் குத்துத் தொடு தள கோளம் என்கிறோம்.

பயிற்சி 51

1. $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 5$ என்ற இருபடி மேற்பரப்பிற்கு, $5x - 6y + 7 = 0, z = 0$ என்ற நேர்க் கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

2. $3x + 12y - 6z - 17 = 0$ என்ற சமதளம் $3x^2 - 6y^2 + 9z^2 + 17 = 0$ என்ற இருபடி மேற்பரப்பைத் தொடுகிறதென்று நிரூபி.

3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ என்ற நீள் வளைய கோணத்தை $4x-3y+2z=\sqrt{209}$ என்ற சமதளம் தொடுகிறதென்று காண்பி.

7·4. செங்குத்துக்கோடு

இருபடி மேற்பரப்பிற்கு அதன் மேலுள்ள புள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அந்தப் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

$ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பிற்கு (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு,

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=1$$

எனவே, (α, β, γ) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-\alpha}{a\alpha}=\frac{y-\beta}{b\beta}=\frac{c-\gamma}{c\gamma}.$$

7·4 I· ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

(α, β, γ) என்ற புள்ளியில் $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற இருபடி மேற்பரப்புக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால்,

$$\frac{x_1-\alpha}{a\alpha}=\frac{y_1-\beta}{b\beta}=\frac{z_1-\gamma}{c\gamma}=\lambda \text{ (என்க)}$$

$$\alpha=\frac{x_1}{1+a\lambda},\ \beta=\frac{y_1}{1+b\lambda},\ \gamma=\frac{z_1}{1+c\lambda}$$

(α, β, γ) மேற்பரப்பின் மேல் இருப்பதால்,

$$a\frac{x_1^2}{(1+\lambda^2 a)}+b\frac{y_1^2}{(1+b\lambda)^2}+c\frac{z_1^2}{(1+c\lambda)^2}=1$$

இது λ ல் ஆறுவதுபடி சமன்பாடாகும்.

இதன் மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ என்பவை ஆறு மூலங்களுள் ஒவ்வொன்றனுக்கும் தக்கவாறு (α, β, γ)க்கு ஆறு மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் வழியாக ஒரு இருபடி மேற்பரப்புக்கு ஆறு செங்குத்துக்கோடுகள் வரையலாம்.

7.4 II. செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளின் வழியாகச் செல்லும் வளைகோடு

செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் வழியாகச் செல்லும் வளைகோட்டின் சாராமாறி சமன்பாடு

$$x=\frac{x_1}{1+a\lambda},\ y=\frac{y_1}{1+b\lambda},\ z=\frac{z_1}{1+c\lambda} \text{ --- (A)}$$

இந்த வளைகோடு $lx+my+nz=p$ என்ற சமதளத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்

$$\frac{lx_1}{1+a\lambda}+\frac{my_1}{1+b\lambda}+\frac{nz_1}{1+c\lambda}=p$$

என்ற சமன்பாட்டால் கிடைக்கும்.

இங்கு $-$க்கு மூன்றுமதிப்புகள்தான் கிடைக்கும்.

ஆகையால் (A) என்ற வளைகோடு எந்த சமதளத்தையும் மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. எனவே வளைகோட்டை முப்படி வளைகோடு என்கிறோம்.

7.4 III. ஒரு புள்ளி வழி செங்குத்துக்கோடுகளின் வழியே வரையப் படும் இருப்பு கூம்பு

(x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஏதாவதொரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \text{ --- (1)}$$

இந்த நேர்கோடு, ஒரு புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழி செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளின் வழியாகச் செல்லும் மூன்றும்படி வளைகோட்டை,

$$\left[x=\frac{x_1}{1+a\lambda},\ y=\frac{y_1}{1+b\lambda},\ z=\frac{z_1}{1+c\lambda}\right]$$

சந்தித்தால்

$$\frac{\frac{x_1}{1+a\lambda}-x_1}{l}=\frac{\frac{y_1}{1+b\lambda}-y_1}{m}=\frac{\frac{z_1}{1+c\lambda}-z_1}{n}$$

$$\frac{ax_1/l}{1+a\lambda} = \frac{by_1/m}{1+b\lambda} = \frac{cz_1/n}{1+c\lambda}$$

இதிலிருந்து λ-ஐ நீக்கினால்,

$$\frac{ax_1}{l}(b-c)+\frac{by_1}{m}(c-a)+\frac{cz_1}{n}(a-b)=0 \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால் நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{ax_1(b-c)}{n-n_1}+\frac{by_1(c-a)}{y-y_1}+\frac{cz_1(a-b)}{z-z_1}=0 \text{ (A)}$$

இது ஒரு இருபடி கூம்பை குறிக்கும். (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் நேர்கோடு

$$x=\frac{n_1}{1+a\lambda}, y=\frac{y_1}{1+b\lambda}, z=\frac{z_1}{1+c\lambda}$$

என்ற மூன்றும் படி வளைகோட்டை சந்தித்தால் அந்த நேர்கோடு மேற்கண்ட கூம்பின் பிறப்பாக்கியாகும். அப்படி வரையப்படும் நேர்கோடுகளில், ஒரு புள்ளி வழி செங்குத்துக் கோடுகளும் சேரும். எனவே, ஒரு புள்ளி வழி செங்குத்துக்கோடுகள் ஆறும் (A) சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பின் பிறப்பாக்கிகளாகும்.

பயிற்சி 52

1. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

என்ற நீள்வளைய கோளத்திற்கு வரையப்படும் இரு செங்குத்துக் கோடுகள் $px+gy+vz=0$ என்ற சமதளத்தின்மேல் இருக்குமென காண்பி. அந்தக் கோடுகளின் அடிகளை கண்டுபிடி.

2. (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்று,

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

என்ற இருபடி மேற்பரப்புக்கு செங்குத்து கோடுகளாக உள்ளவை $z=0$ என்ற சமதளத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்,

$$(b^2-c^2)\beta x+(c^2-a^2)\alpha y+(a^2-b^2)xy=0 \quad z=0$$

என்ற இருபடி வளைவரையின்மேல் அமையுமென்று நிரூபி.

3. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

என்ற நீள்வளைய கோளத்திற்கு $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளில் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்க வேண்டுமானால்,

$$\frac{(b^2-c^2)\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{(c^2-a^2)\beta_1}{\beta_1-\beta_2}=\frac{(a^2-b^2)\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}$$

என்று நிரூபி.

4. ஒரு மைய இருபடி மேற்பரப்புக்கு வரையப்படும் ஒரு புள்ளி வழி செங்குத்துக் கோடுகள் தலையாய சமதளம் ஏதாவதொன்றை ஆறு புள்ளிகள் சந்திக்கிறதென்றும் அந்த புள்ளிகள் ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின்மேன் அமையுமென்றும் நிரூபி.

7·5· ஒரு புள்ளியின் இசைத்தளம்

A என்ற புள்ளியின் வழியாக இருபடி மேற்பரப்புக்கு வரையப்படும் ஏதாவதொரு நாண் மேற்பரப்பை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால்,

(AR, PQ) = −1 என்ற விகிதத்திலுள்ள புள்ளி R-ன் நியமப் பாதையே A ன் இசைதளமாகும்.

$(\alpha\ \beta\ \gamma)$ என்பவை A–ன் அச்சு தூரங்களாகவும் (x_1, y_1, z_1) என்பவை R-ன் அச்சு தூரங்களாகவும் கொள்க. AR என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள்,

$$\left(\frac{\lambda x_1+\alpha}{\lambda+1},\ \frac{\lambda y_1+\beta}{\lambda+1},\ \frac{\lambda z_1+\gamma}{1+\lambda}\right)$$

என்றாகும்.

இந்த புள்ளி $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின்மேல் இருந்தால்,

$$a\left(\frac{\lambda x_1+\alpha}{1+\lambda}\right)^2+b\left(\frac{\lambda y_1+\beta}{\lambda+1}\right)^2+c\left(\frac{\lambda z_1+\gamma}{\lambda+1}\right)=1$$

என்றாகும்.

அதாவது

$$\lambda^2(ax_1^2+by_1^2+cz_1^2-1)+2\lambda(a\alpha x_1+b\beta y_1+c\gamma z_1-1)$$
$$+(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)=0$$

இதன் இரண்டு மூலங்களான λ_1. λ_2 P, Q என்ற புள்ளிகளை குறிக்கும். $(AR, PQ)=-1$ என்றால் $\lambda_1-\lambda_2=0$

எனவே, $a\alpha x_1+b\beta y_1+c\gamma z_1=1$ ஆகையால் (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=1$$

இதை (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் இசைத்தளமென்கிறோம்.

7.51. இசைப்புள்ளி

$ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பை பொருத்து, $lx+my+nz=p$ என்ற சமதளத்தின் இசைப் புள்ளியை கண்டு பிடிக்க.

இசைப் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (α, β, γ) எனக்கொள்க. அப்படியாயின் (α, β, γ)-ன் இசைத்தளத்தின் சமன்பாடு

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=1$$

எனவே,

$$\frac{a\alpha}{l}=\frac{b\beta}{m}=\frac{c\gamma}{n}=\frac{1}{p}$$

ஆகையால்,

$$\alpha=\frac{l}{ap},\ \beta=\frac{m}{lp},\ \gamma=\frac{n}{cp}$$

$$\left[\frac{l}{ap},\ \frac{m}{bp},\ \frac{n}{cp}\right]$$

என்ற அச்சு தூரங்கள் $lx+my+nz=p$ என்ற சமதளத்தின் இசைப்புள்ளியாகும்.

7, 52. இணையியப் புள்ளிகள்—இணையிய தளங்கள்

மைய இருபடி மேற்பரப்பைப் பொருத்தவரை, P என்ற புள்ளியின் இசைத்தளம் Q என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், P-ன் இசைத்தளம் P-ன் வழியாகச் செல்லும்.

P-ன் அச்சு தூரங்கள் $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ என்று கொள்க. அதன் இசைத்தளம்,

$a\alpha_1 x+b\beta_1 y+c\gamma_1 z=1$ இது Q $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால்,

$$a\alpha_1\alpha_2+b\beta_1\beta_2+c\gamma_1\gamma_2=1$$

என்ற நிபந்தனைக்கு கட்டுபட வேண்டும். இந்த நிபந்தனை α_1, α_2 என்ற உறுப்புகளில் சமச்சீராக அமைவதால், Q-ன் இசைத்தளம் P-ன் வழியாகச் செல்லும். இப்படிபட்ட இரு புள்ளிகளை **இணையியப் புள்ளிகள்** என்கிறோம்.

$L_1 \equiv l_1x+m_1y+n_1z-p_1=0$ என்ற தளத்தின் இசைப்புள்ளி $L_2 \equiv l_2x+m_2y+n_2z-p_2=0$ என்ற தளத்தின்மேல் அமைந்தால், L_1-ன் இசைப்புள்ளி

$$\left(\frac{l_1}{ap},\ \frac{m_1}{bp_1},\ \frac{n_1}{cp_1}\right)$$

ஆகும். இந்த புள்ளி γ_2-ன் மேல் இருந்தால்,

$$l_2\ \frac{l_1}{ap_1}+m_2\ \frac{m_1}{bp_1}+n_2\ \frac{n_1}{cp_1}=p_2$$

அதாவது,

$$\frac{l_1\ l_2}{a}+\frac{m_1\ m_2}{b}+\frac{n_1\ n_2}{c}=p_1\,p_2$$

இது l_1, l_2 என்ற உறுபபுகளில் சமச்சீராக உள்ளதால் L_2-ன் இசைப்புள்ளி L_1-ன் மேல் இருக்கும்.

இப்படிபட்ட இரு தளங்களை **இணையிய தளங்கள்** என்கிறோம்.

7.53. இசைக்கோடுகள்.

$ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற இருபடி மேற்பரப்பைப் பொருத்தவரை, l_1 நேர்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளின் இசைத்தளங்கள் l_2 என்ற நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும்.

l_1, l_2 என்ற நேர்கோடுகளை **இசைக்கோடுகள்** என்கிறோம். l_1-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{y-\gamma}{n}$$

எனக் கொள்க. அதன் மேலுள்ள புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் $(\alpha+lr,\ \beta+mr,\ \gamma+nr)$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். $ax^2+by^2+cz^2=1$ ஐப் பொருத்து $(\alpha+lr,\ \beta+mr,\ \gamma\times nr)$-ன் இசைத்தளத்தின் சமன்பாடு $ax(\alpha+lr)+by(\beta+mr)+cz(\gamma+nr)=1$ அதாவது,

$$[a\alpha x+b\beta y+c\gamma z-1]$$
$$+r[alx+bmy+cnz]=0$$

இங்கு 'γ' மாறும். எப்படியாயினும் இந்த சமதளம்

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z - 1 = o$$

$$alx + bmy + cnz = o$$

என்ற நிலையான சமதளங்கள் சந்திக்கும் நேர்கோட்டின் மூலமாக செல்லும். இந்த நேர்கோட்டை l^1 எனலாம்.

7. 54. இணையியக் கோடுகள்

l, m என்று இருகோடுகளை எடுத்துக் கொள்க. l', m' என்பவை இவைகளின் இசைக்கோடுகளாகக் கொள்க.

m' என்ற நேர்கோடு l என்ற நேர்கோட்டை சந்தித்தால், l' என்ற நேர்கோடு m என்ற நேர்கோட்டை சந்திக்கும்.

l, m என்ற நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-\alpha_1}{l_1} = \frac{y-\beta}{m_1} = \frac{z-\gamma_1}{n_1}$$

$$\frac{x-\alpha_2}{l_2} = \frac{y-\beta_2}{m_2} = \frac{z-\gamma_2}{n_2}$$

என்க.

l'-ன் சமன்பாடு

$$a\alpha_1 x + b\beta_1 y + c\gamma_1 z - 1 = o$$

$$al_1 x + bm_1 y + cn_1 z = o$$

m' என்ற சமன்பாடு

$$a\alpha_2 x + b\beta_2 y + c\gamma_2 z - 1 = o$$

$$al_1 x + bm_2 y + cn_2 z = o$$

m' என்ற நேர்கோடு l என்ற நேர்கோட்டை சந்திப்பதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடிக்க.

l என்ற நேர்கோட்டின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை $(\alpha_1 + l_1 r_1,\ \beta_6 + m_1 r_1,\ \gamma_1 - n_1 r_1)$ என்று கொள்ளலாம், இந்த புள்ளி m' என்ற நேர்கோட்டின்மேல் இருந்தால்,

$$a\alpha_2(\alpha + l_1 r_1) + d\beta_2(\beta_1 + m_1 r) + c\gamma_2(\gamma_1 + n_1 r_1 - 1 - o = o \quad ...(1)$$

$$al_2(\alpha_1 + l_1 r_1) + bm_2(\beta_1 + m_1 r_1) + cn_2(\gamma_1 + n_1) = o \quad ...(2)$$

(1) சமன்பாட்டை சுருக்கினால்

$$[a\alpha_1 \alpha_2 + b\beta_1 \beta_2 + c\gamma_1 \gamma_2 - 1] + r_1[al_1\alpha_2 + bm_1\beta_2 + cn_1\gamma_2] = o$$

$$r_1 = \frac{-[a\alpha_1\alpha_2 + b\beta_1\beta_2 + c\gamma_1\gamma_2 - 1]}{[al_1\alpha_2 + bm_1\beta_2 + cn_1\gamma_2]}$$

(2) சமன்பாட்டை சுருக்கினால்,

$$[al_2\alpha_1 + bm_2\beta_1 + cn_2\gamma_1] + r_1[al_1l_2 +$$
$$+ bm_1m_2 + cn_1n_2] = 0$$
$$r_1 = \frac{-[al_2\alpha_1 + bm_2\beta_1 + cn_1\gamma_1]}{[al_1l_2 + bm_1m_2 + cn_1n_2]}$$

எனவே,

$$(a\alpha_1\alpha_2 + b\beta_1\beta_2 - c\gamma_1\gamma_2 - 1)\ (al_1l_2 + bm_1m_2 + cn_1n_2)$$
$$= (al_1\alpha_2 + bm_1\beta_2 + cn_1\gamma_2)\ .\ (al_2\alpha_1 + bm_2\beta_1 + cn_2\gamma_1)$$

இது $\alpha_1, \alpha_2 \ldots;\ l_1,\ l_2$ - என்பவைகளில் சமச்சீராக இருப்ப தால், இதே நிபந்தனை l' என்ற நேர்கோடு n என்ற நேர்கோட்டை சந்திப்பதற்கானது,

$l_1 m$ என்ற நேர்கோடுகளை **இணையியக் கோடுகள்** எனலாம்.

பயிற்சி 53

$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பை பொருத்து, $a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பின் தொடுதளங்களின் இசைப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

என்ற மேற்பரப்பின் தொகுதியைப் பொருத்தவரை $lx + my + nz = p$ என்ற சமதளத்தின் இசைப் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடென நிரூபி.

3. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4 = 0$ என்ற மேற்பரப்பைப் பொருத்த வரை,

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

என்ற நேர்கோட்டின் இசைக்கோட்டைக் கண்டுபிடி.

4. (α, β, γ) என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல லும் நேர்கோடுகளின் இசைக் கோடுகள்,

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 = ;\quad a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 = 1$$

என்ற இரு மேற்பரப்புகளைப் பொருத்தவரை, ஒரே சமதளத்தின் மேல் அமையுமென நிரூபி.

5. $ax^2 + by_2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பைப் பொருத்த வரை,

$$\frac{x-\alpha_1}{l_1} = \frac{y-\beta_1}{m_1} = \frac{z-\gamma_1}{n_1}$$

$$\frac{x-\alpha_2}{l_2} = \frac{y-\beta_2}{m_2} = \frac{z-\gamma_2}{n_2}$$

என்ற நேர்கோடுகள் இசைக்கோடுகளாக இருக்கவேண்டுமானால், அதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடி.

6. அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பு :

ஒரு மேற்பரப்புக்கு, ஒரு புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நியமப்பாதை கூம்பாகும்.

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $ay^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்றும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள் (α, β, γ) என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

அந்தப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஏதாவதொரு நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை,

$$\frac{x-\lambda}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \dots (1)$$

எனலாம். இந்த நேர்கோடு மேற்பரப்பைப் பொருத்தும் (Coincident) புள்ளிகளில் சந்தித்தால்,

$$(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n)^2 = (al^2 + bm^2 + cn^2)$$
$$(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) \quad \dots (2)$$

1, 2, சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, n என்ற உறுப்புகளை நீக்கினால்,

$$[a\alpha(x-\alpha) + b\beta(y-\beta) + c\gamma(z-\gamma)]^2$$
$$[= a(x-\alpha)^2 + b(y-\beta)^2 + c(z-\gamma]^2$$
$$[a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1] \quad \dots (A)$$
$$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$$
$$S_1 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1$$
$$T = a\alpha x + b\beta y + c\gamma z - 1$$

எனவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

(A) சமன்பாடு

$$(T - S_1)^2 = (S + S_1 - 2T)\, S_1$$

$$T^2 = S\, S_1$$

இதுவே, அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 54

1. P-ஐ உச்சியாகக்கொண்ட நீள் வளையக் கோளத்தை,

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right],$$

அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பை $z = 0$ என்ற சமதளம் வெட்டு முகம் ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவு என்று காண்பி.

2. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மைய இருபடி மேற்பரப்புக்கு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், அந்தப் புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

3. P என்ற புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற நீள் வளையக் கோளத்தை அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பு $z = 0$ என்ற சமதளத்தால், ஒரு வட்டத்தில் வெட்டப்படுகிறது. அப்படியானால், P-ன் நியமப்பாதை என்ன ?

7·7. அணைத்துக்கொள்ளும் உருளை :

இருபடி மேற்பரப்புக்கு, கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள தொடுகோடுகளின் நியமப்பாதையே மேற்பரப்பை அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையாகும்.

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு,

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள பிறப்பாக்கிகளைக் கொண்ட அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையைக் கண்டுபிடி.

அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையின் மேல் (α, β, γ) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. அதன் வழியே செல்லும் பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

இந்த நேர்கோடு இருபடி மேற்பரப்பைத் தொட்டால்,

$$(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n)^2 = (al^2 + bm^2 + cn^2)$$
$$(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1$$

எனவே, (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை,

$$(alx + bmy + cnz)^2 = (al^2 + bm^2 + cn^2)$$
$$(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$$

என்றாகும். இதுவே, அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 55

1. z-நிலை அச்சுக்கு இணையாக $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற நீள்வளையக் கோளத்தை அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையின் சமன்பாடென்ன ?

2. $$\frac{x}{o} = \frac{y}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z}{c}$$

என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள பிறப்பாக்கிகளையுடைய,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற நீள்வளையக் கோளத்தை அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பு $z = 0$ என்ற சமதளத்தை வட்டங்களில் சந்திக்கிறதென்பது நிரூபி.

3. ஒரு மைய இருபடி மேற்பரப்பை பொருத்து, A என்ற புள்ளியை உச்சியாகவுடைய அணைத்துக்கொள்ளும் கூம்பின் தொடுதளங்களும், AB என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள பிறப்பாக்கிகளையுடைய அணைத்துக்கொள்ளும் உருளையின் தொடுதளங்களும் சந்திக்கும் நேர்கோடே AB-ன் இசைக் கோடென்று நிரூபி.

7.8. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை மையமாகவுடைய வெட்டுமுகம் :

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

என்ற நாணின் மையப்புள்ளி $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ என்றால், $r^2(al^2+bm^2+cn^2)+2r(a\alpha l+b\beta m+c\gamma n)+(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)=0$ என்ற சமன்பாடு $r^2=k^2$ என்ற விதத்தில் இருக்கவேண்டும். ஆதலால், $a\alpha l+b\beta m+c\gamma n=0$ எனவே, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ என்ற புள்ளியை மைய மாகவுள்ள நாண்கள் $a\alpha(a-\alpha)+b\beta(y-\beta)+c\gamma(z-\gamma)=0$ என்ற சமதளத்தின்மேல் அமையும். இந்தச் சமதள மேற்பரப்பை, இருபடி வளைவரைவெட்டும். அந்த வளைவரைக்கு $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ மையப்புள்ளியாகிறது.

பயிற்சி 56

1. $x^2+4y^2-5z^2=1$ என்ற மேற்பரப்பை $(2,\ 3,\ 4)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவுள்ள இருபடி வளைவரையில் வெட்டும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு இருபடி மேற்பரப்பின், இணையான சமதள வெட்டு முகங்களின் மையப் புள்ளிகள், மேற்பரப்பின் விட்டத்தின்மேல் இருக்குமென்று காண்பி.

3. மைய இருபடி மேற்பரப்பின் வெட்டுமுகங்கள் ஒரு நேர் கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால், அந்த வெட்டுமுகங்களின் மையப்புள்ளிகள் ஒரு சமதளத்தின்மேல் இருக்குமென நிரூபி.

4. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின் வெட்டுமுகங்கள் $\alpha n^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ என்ற மேற்பரப்பைத் தொட்டால், அதன் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை கண்டுபிடி.

7.81 இணை நாண்களின் மையங்களின் நியமப்பாதை :

நாண்கள் $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கவேண்டுமானால், அவைகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

எனக் கொள்ளலாம்.

இவைகளின் மேலுள்ள எந்த புள்ளியும் $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின்மேல் இருந்தால்,

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2)+2r(a\alpha l+b\beta m$$
$$+c\gamma n)+(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)=0$$

(α, β, γ) என்பதை நாண்களின் மையப்புள்ளியாகக் கொண்டால் $a\alpha l+b\beta m+c\gamma n=$ என்றாகும்.

எனவே, (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை,

$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=0$ என்ற சமதளத்தைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி 57

1. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்புக்கு (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நாண்களின் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

2. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின் நாண்கள் $x=0$ என்ற சமதளத்திற்கு இணையாகவும், $x^2+y^2+z^2=r^2$ என்ற மேற்பரப்பை தொட்டுக்கொண்டும் இருந்தால், அவைகளின் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை கண்டுபிடி.

பின் குறிப்பு: மைய இருபடி மேற்பரப்பில்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2}=\frac{2z}{c}\ ;\ \frac{x^2}{a_2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

என்ற சமன்பாடுகள் குறிக்கும் மேற்பரப்புகளும் சேர்ந்தவை. இவைகளை முறையே நீள்வட்ட கனபரவளைவு (Elliptic paraboloid) என்றும், அதிபரவளைவு கனபரவளைவு (Hyberbrlic paraboloid) என்றும் அழைக்கலாம். இவைகளைப்பற்றி பிறகு விவாதிப்போம்.

பயிற்சி 58

1. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற இருபடி மேற்பரப்புக்கு $u\equiv lx+my+nz-p=0$ $u'\equiv l'x+m'y+n'z-p'=0$ என்ற நேர் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் இரு தொடுதளங்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$u^2\left(\frac{l'^2}{a}+\frac{m'^2}{b}+\frac{n'^2}{c}-p'^2\right)-2uu'\left(\frac{ll'}{a}+\frac{mm'}{b}\right.$$

$$+\frac{nn'}{c}-pp'\Big)+u'^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}-p^2\right)=0$$

என்று நிரூபி.

2. $2x^2-6y^2+3z^2=5$ என்ற மேற்பரப்புக்கு $x+9y-3z=0$ $=3x-3y+6z-5$ என்ற நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகளை கண்டுபிடி.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள்வளைய கோளத்திற்கு வரையப்படும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு தொடுதளங்களின் சந்திக்கும் நேர்கோடு (o, o, k) என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் சென்றால், அந்த நேர்கோடு $x^2(b^2+c^2-k^2)+y^2(c^2+a^2-k^2)+(z-k)^2(a^2+b^2)=0$ என்ற கூம்பின் பிறப்பாக்கி யாகுமெனக் காண்பி.

4. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற இருபடி மேற்பரப்புக்கு வரையப்படும் தொடுதளங்கள் (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லுகின்றன. அவைகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் $(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}$. என்ற கூம்பைப் பிறப்பிசகுமென்று காண்பி.

5. $2x^2-25y^2+2z^2=1$ என்ற மேற்பரப்பை பொருத்து $-2x=25y-1=2z$ என்ற நேர்கோட்டின் இசைக்கோட்டை கண்டுபிடி.

6. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பை பொருத்து, (α, β, γ) என்ற நிலையான புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோடுகள் அவைகளின் இசைக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், அந்த நேர்கோடுகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி

7. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற இருபடி மேற்பரப்பை பொருத்தவரை,

$$\frac{a-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

$$\frac{a-\alpha'}{l}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma'}{n}$$

என்ற நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இசைக்கோடுகளாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடி.

8. மேற்கண்ட நேர்கோடுகள் இணையிக்கோடுகளாக அமைவதற்கான நிபந்தனையைக் கண்டுபிடி.

9. (2, 3, 4) என்ற புள்ளியை மையமாகவுடைய இருபடி வளைவரை, $x^2+4y^2-5z^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின் சமதள வெட்டு முகமானால், அந்த சமதளத்தின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

10. ஒரு நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள சமதளங்கள் மைய இருபடி மேற்பரப்பை வெட்டும் இருபடி வளைவரைகளின் மையப் புள்ளிகள் ஒரு நிலையான சமதளத்தின்மேல் அமையுமென்று நிரூபி.

11. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற் பரப்பின் சமதளங்கள் $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2-1$ என்ற மேற்பரப்பின்மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகங்களின் மையப்புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை கண்டுபிடி.

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள்வளையக் கோளத்திற்கு, (α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நாண்களின் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையை கண்டுபிடி.

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற அதிபரவவளை மேற்பரப்புக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகள் வரைய முடிந்தால், அந்த புள்ளியின் நியமப் பாதை என்ன ?

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள் வட்ட கோளத்திற்கு, P என்ற புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு வரையப்படும் அணைத்துக் கொள்ளும் கூம்பு, $z=0$ என்ற சமதளத்தால் ஒரு பரவளைவில் வெட்டப்பட்டால், P-ன் நியமப்பாதையை கண்டுபிடி. அதுவே ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவானால் P-ன் நியமப்பாதையென்ன ?

15. $\frac{x}{0}=\frac{y}{\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z}{c}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள நேர்கோடுகள்.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ என்ற}$$

நீள்வட்ட கோளத்திற்கு அணைத்துக் கொள்ளும் உருளைகளின் பிறப்பாக்கிகளானால், அந்த உருளைகள் $z=o$ என்ற சமதளத்தை வட்டங்களில் வெட்டுமென்று காண்பி.

16. P என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு நீள் வட்ட கோளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் தலையாய தளங்களை G_1, G_2, G_3 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$ என்று காண்பி.

17. $PG_1{}^2+PG_2{}^2+PG_3{}^2=$ மாறிலி என்றால் P-ன் நியமப் பாதையைக் கண்டுபிடி.

18. ஒரு நீள் வட்ட கோளத்தின்மேல் உள்ள இரு புள்ளிகள் P, Q-ல் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் சந்தித்தால், PQ, நீள் வட்ட கோளத்தை பொருத்து, அதன் இசைக்கோட்டிற்கு செங்குத்தாக அமையுமென்று காண்பி.

19. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள வட்ட கோளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டிற்கும் x—நிலை அச்சுக்குமிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தின் மிக அதிகமான மதிப்பு $b—c$ என்று நிரூபி.

20. ஓர் இருபடி மேற்பரப்பின்மேல், நிலையான தூரத்தி லுள்ள சமதளங்கள் ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகங்களின் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

21. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள் வட்ட கோளத்திற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையட்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் P, Q, R, P′, Q′, R′ என்பவை. PQR, P′Q′R′ என்ற இரு சமதளங்களின் இசைப்புள்ளிகள்,

$$\Sigma\left[\frac{b^2z^2+c^2y^2}{b^2-c^2}(x^2-a^2)\right]=o$$

என்ற மேற்பரப்பின்மேல் அமையுமென்று காண்பி.

22. $lyz+mzx+nxy=o$ என்ற மேற்பரப்பு,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

என்ற நீள் வட்ட கோளத்தை வெட்டும் புள்ளிகளில், நீள் வட்ட கோளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள்

$$\frac{a^2x}{l(a^2-b^2)(c^2-a^2)} = \frac{b^2y}{m(b^2-c^2)(a^2-b^2)} = \frac{c^2z}{n(c^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

என்ற நேர்கோட்டை சந்திக்குமென்று நிரூபி.

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற நீள் வட்ட கோளத்திற்கு, அது

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ என்ற சமதளத்தை

வெட்டும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள்

$$\Sigma\left[\frac{abxy+bcyz+cazx}{b(a^2-c^2)y+c(a^2-b^2)z}\right] = 0$$ என்ற

மேற்பரப்பின்மேல் அமையுமென்று காண்பி.

24. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற மேற்பரப்பின் செங்குத்துக் கோடுகள் இரண்டு $lx+my+nz=p$ என்ற சமதளத்தின்மேல் இருக்குமென்று காண்பி. அந்த கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால்,

$abcp^2\Sigma[a(b+c)l^2]=\Sigma[a^2(b-c)^2m^2n^2]$ என்று நிரூபி.

8. சமதள வெட்டுமுகங்களின் அச்சுகள்

ஓர் இருபடி மேற்பரப்பின் சமதள வெட்டுமுகமெல்லாம் இருபடி வளைவரைகளே என்று நாம் அறிவோம். அப்படிபட்ட வளைவரைகளின் அச்சுகளின் அளவுகளையும் அவைகளின் திசைகளையும் கண்டுபிடிப்போம்.

8. 1. ஒரு மைய இருபடி மேற்பரப்புக்கு அதன் மையப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகத்தின் அச்சுகளை கண்டு பிடிக்க.

மேற்பரப்பு, சமதளம் இவைகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

$lx+my+nz=o$ என்று கொள்க.

மேற்பரப்பின் மையமும், வெட்டுமுக வளைவரையின் மையமும் ஒன்றே.

ஏதாவதொரு விட்டத்தின் திசைகொசைன்கள் λ, μ, γ என்றும், அதன் நீளம் 2γ என்றும் கொண்டால், $(\lambda r, \mu r, \gamma r)$ என்ற புள்ளி மேற்பரப்பின்மேல் அமையும்.

எனவே,

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\gamma^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2}{\gamma^2}$$

$$\left(a - \frac{1}{\gamma^2}\right)\lambda^2 + \left(b - \frac{1}{\gamma^2}\right)\mu^2 + \left(c - \frac{1}{\gamma^2}\right)\gamma^2 = 0 \quad \dots (1)$$

ஆகையால், 'γ' அளவுள்ள அரைவிட்டம்

$$\left(a - \frac{1}{\gamma^2}\right)x^2 + \left(b - \frac{1}{\gamma^2}\right)y^2 + \left(c - \frac{1}{\gamma^2}\right)z^2 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற கூம்பின் பிறப்பாக்கியாகும். சமதளம், கூம்பை வெட்டும் நேர்கோடுகள், இருபடி வளைவரையின் அரை விட்டங்களாகும். இந்த அரை விட்டங்கள், அரை அச்சுகளாக வேண்டுமானல், சமதளம், கூம்பின் தொடுதளமாக அமைய வேண்டும்.

அதற்கான நிபந்தனை,

$$\frac{l^2}{a\gamma^2 - 1} + \frac{m^2}{b\gamma^2 - 1} + \frac{n^2}{c\gamma^2 - 1} = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

அதாவது,

$$\gamma^4 \left[bcl^2 + eam^2 + aln^2 \right]$$
$$- \gamma^2 \left[(b+c)\,l^2 + (c+a)\,m^2 + (a+b)\,n^2 \right]$$
$$+ (l^2 + m^2 + n^2) = 0$$

இந்த 'γ''ல் உள்ள இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் γ_1^2, γ_2^2 என்பவை வெட்டு முகத்தின் அரை அச்சுகளின் நீளங்களின் வர்க்கங்களாகும்.

அச்சுகளின் திசைகொசைன்களை (λ, μ, γ) என்ருல், சமதளம் கூம்பை,

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\gamma}$$

என்ற நேர்கோட்டில் தொடுகிறது. அதனுல், சமதளத்தின் சமன்பாடு,

$$\lambda x\left(a - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \mu y\left(b - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \gamma z\left(e - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 0$$

எனவே,

$$\frac{\lambda\left(a - \frac{1}{\gamma^2}\right)}{l} = \frac{\mu\left(b - \frac{1}{\gamma^2}\right)}{c} = \frac{\gamma\left(c - \frac{1}{\gamma^2}\right)}{n} \quad -(4)$$

இங்கு γ^2க்கு, γ_1^2, γ_2^2 என்ற இரு மதிப்புகள் கொடுக்கும்போது, இரு அச்சுகளின் திசைகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

பயிற்சி 59

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடி வளைவிரையின் அரை அச்சுகளின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

$$1.\quad 3x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$2.\quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$3x + 4y + 5z = 0$$

2. $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற மேற்பரப்பை $lx + my + nz = 0$ என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டுமுகத்தின் அரை அச்சுகளின் நீளங்கள்,

$$a,\ ac\,(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}\ \{a^2(l^2 + m^2) + c^2n^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

என்று நிரூபி. மேலும், அச்சுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{-l} = \frac{z}{o}\ ;\ \frac{x}{nl} = \frac{y}{mn} = \frac{z}{-(l^2 + m^2)}$$

என்றும் காண்பி.

3. $lx + my + nz = 0$ என்ற சமதளம்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற நீள் வட்டக்கோளத்தின்மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டு முகத்தின் பரப்பு $\frac{\pi abc}{p}$ என்று நிரூபி. { p என்பது ஆதியிலிருந்து நீள் வட்டக் கோளத்தின் கொடுக்கப்பட்ட சமதளத்திற்கு இணையாக உள்ள தொடுதளத்திற்கு வரைப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்} .

4. $$\frac{x^2}{b + c} + \frac{y^2}{c + a} + \frac{z^2}{a + b} = 0$$

என்ற கூம்பின் தொடுதளம், $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பின்மேல் உண்டாக்கும் வெட்டுமுகம் ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு என்று காண்பி.

5. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ என்ற மேற்பரப்பின் வெட்டு முகங்களின் அச்சுகள்,

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{x}{n}$$

என்ற நேர்கோட்டின் வழியாகச் சென்றால், அந்த அச்சுகள்

$$\frac{b-c}{x}(mz + my) + \frac{c-a}{y}(nx - lz) + \frac{a-b}{z}(ly - mx) = 0$$

என்ற கூம்பின்மேல் அமையும் என்று நிரூபி.

8·2. மைய இருபடி மேற்பரப்பின் வெட்டு முகத்தின் அச்சுகள் :

மேற்பரப்பு, சமதளம் இவைகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ என்று கொள்க.

வெட்டு முகத்தின் மையப்புள்ளியின் அச்சு தூரங்கள், $(\alpha, \beta, \gamma,)$ என்றால், வெட்டுமுக சமதளத்தின் சமன்பாடு $(x-\alpha)$ $a\alpha + (y - \beta)\, b\beta + (c - \gamma)\, c\gamma = 0$

எனவே,

$$\frac{a\alpha}{l} = \frac{b\beta}{m} = \frac{c\gamma}{n} = \frac{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2}{p} \quad \dots (1)$$

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = \frac{p^2}{\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}} = \frac{p^2}{po^2} \text{ என்க.}$$

(α, β, γ) என்ற புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் இணை அச்சுகளைப் பொருத்து, மேற்பரப்பின் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(a\alpha x + b\beta y + c\gamma z) +$$
$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1 = 0 \text{ அல்லது}$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(a\alpha x + b\beta y + c\gamma z) - k^2 = 0$$

$$\text{இங்கு } k^2 \equiv 1 - \frac{p^2}{po^2}$$

சமதளத்தின் சமன்பாடு $lx + my + nz = 0$ என்றுகிறது. 'r' நீளமுள்ள கோட்டின் திசைக்கொசைன்கள் (λ, μ, γ) என்றால்,
$r^2(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\gamma^2) + 2r(a\alpha\lambda + b\beta\mu + c\gamma\gamma) - k2 = 0 \dots 2)$
நேர்கோடு சமதளத்தின் மேல் அமைந்தால்,

$$l\lambda + m\mu + n\gamma = 0$$

(1)ஐ உபயோகப்படுத்தி

$a\alpha\lambda + b\beta\mu + c\gamma u = 0$ என்றாகும்.

எனவே,

(2) $r^2 (a\lambda + b\mu^2 + c\gamma^2) - k^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2) = 0$ என்றாகிறது.

$$\lambda^2 (ar^2 - k^2) + \mu^2 (br^2 - k^2) + \gamma^2 (cr^2 - k^2) = 0$$

அதாவது, இந்த நேர்கோடுகள்

$x^2 (ar^2 - k^2) + y^2 (br^2 - k^2) + z^2 (cr^2 - k^2) = 0$ என்ற கூம்பின் மேல் அமையும். ஆனால், 'r' என்பது வெட்டு முகத்தின் அரை அச்சின் நீளமானால், சமதளம் கூம்பைத் தொட வேண்டும். அதற்கான நிபந்தனை,

$$\frac{l^2}{ar^2 - k^2} + \frac{m^2}{br^2 - k^2} + \frac{n^2}{cr^2 - k^2} = 0 \qquad \dots (3)$$

சமதளம், கூம்பைத்தொடும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\gamma} \quad \text{என்றால்,}$$

$$\frac{\lambda (ar^2 - k^2)}{l} = \frac{\mu (br^2 - k^2)}{m} = \frac{\gamma (cr^2 - k^2)}{n} \qquad \dots (4)$$

என்றாகும்.

8·1. பகுதியிலுள்ள (3), (4) சமன்பாடுகளுடன் ஒப்பிட்டால், அரை அச்சுகளின் நீளங்கள் 'k' மடங்கு பெரிதாகின்றன.

பயிற்சி 60

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற நீள் வட்டக்கோளத்தின் மேல்

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டுமுகத்தின் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

2. $ax^2+by^2+cz^2=0$ என்ற கூம்பின்மேல், $lx+my+nz=p$ என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகத்தின் அச்சுகளை கண்டுபிடி.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள்வட்ட கோளத்தின் வெட்டு முகங்கள் ஒரே பரப்பளவு உள்ளவைகளாயின், அவைகளின் மையங்களின் நிபமப்பாதை என்ன?

வட்ட வெட்டு முகங்கள்

$F=0$ என்ற இருபடி மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை $S+kuv=0$ என்ற சமன்பாடாக மாற்றவும். இங்கு $S=0$ என்பது ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு $u=0$, $v=0$, இரண்டு சமதளங்களைக் குறிக்கின்றன. மேற்பரப்பு, சமதளங்கள் இவைகளின் பொதுப் புள்ளிகள் கோளத்தின்மேல் இருக்கின்றன. ஆதலின் இந்தச் சமதளங்கள் மேற்பரப்பின் உண்டாக்கும் வெட்டு முகங்கள், வட்டங்களாகும்.

8.3. நீள்வட்ட கோளத்தின் வட்ட வெட்டு முகங்கள்

நீள்வட்ட கோளத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்று கொள்க.

இந்தச் சமன்பாட்டைக் கீழ்கண்ட மாதிரியில் எழுதலாம்.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}-1+x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0$$

எனவே,

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0 \qquad \ldots \text{(iii)}$$

என்ற சமதளங்கள் நீள்வட்ட கோளத்தை முறையே, a, b, c என்ற ஆரைகளையுடைய வட்டங்களில் வெட்டும். $a > b > c$ என்றால், இரண்டாவது சமன்பாடு குறிக்கும் சமதளங்கள் நீள் வட்ட கோளத்தை மெய்யான வட்டவெட்டு முகங்களில் வெட்டும். அவைகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=p_1$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=p_2$$

என்ற சமதளங்களும் வட்ட முகங்களைக் கொடுக்கும்.

8.31. அதி பரவளைவின் வட்ட வெட்டு முகங்கள்

அதி பரவளைவுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (1) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (2)$$

என்று கொள்க.

இங்கும் $a>b>c$ என்றால்,

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0$$

என்ற சமதளங்கள் முறையே (1), (2) என்ற மேற்பரப்புகளின் மெய்யான வட்டவெட்டு முகங்களாகும்.

பயிற்சி 61

1. $x^2+2y^2+6z^2=8$ என்ற நீள்வட்ட கோளத்தின் சமதளமான வட்ட வெட்டு முகங்களைக் கண்டுபிடி.

2. $x^2-3y^2-12z^2+75=0$ என்ற அதிபரவளைவை $2x+3z-5=0$, $2x-3z+7=0$ என்ற சமதளங்கள் வட்டங்களில் வெட்டுமென்று காண்பி.

3. $k^2 > a^2+c^2$ என்றால், $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற அதிபர வளைவை $\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=k$ என்ற சமதளம் வெட்டும் வெட்டு முகங்கள், மெய்யானவை என்று நிரூபி.

8.32. மைய இருபடி மேற்பரப்பின் வட்டவெட்டு முகங்கள் :

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு

$$f(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=1$$

எனக்கொள்க. இதை

$$f(x, y, z) - k(x^2+y^2+z^2)+k\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{k}\right)=0$$ என எழுதலாம்.

எனவே, $f(x, y, z) - k(x^2+y^2+z^2)$—(A)$=0$ என்பது இரு சமதளங்களைக் குறிக்குமேயானால், இந்தச் சமதளங்கள் மேற்பரப்பை வட்டங்களின் வெட்டும்.

(A) சமன்பாடு இருசமதளங்களை குறிப்பதற்கான நிபந்தனை,

$$\begin{vmatrix} a-k & h & g \\ h & -k & f \\ g & & c-k \end{vmatrix} = 0$$ என்று ஆகும்.

பயிற்சி 62

1. $3x^2+5y^2+3z^2+2xz=4$ என்ற மேற்பரப்பின் மெய்யான வட்டவெட்டு முகங்களைக் கண்டுபிடி.

2. $6x^2+13y^2+6z^2-10yz+4zx-10xg=1$ என்ற மேற்பரப்பின் மெய்யான வட்ட வெட்டு முகங்களைக் கண்டுபிடி.

3. $yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zn\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$

என்ற இருபடி மேற்பரப்பின் மெய்யான வட்ட வெட்டு முகங்களை கண்டுபிடி.

8·4. அம்பிளிக்குகள் (Umblics)

ஒரு இருபடி மேற்பரப்பின்மேல் இணை சமதளங்கள் ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகங்களின் மையப் புள்ளிகள் மேற்பரப்பின் ஒரு விட்டத்தின்மேல் அமையும். இந்த விட்டம் மேற்பரப்பை வெட்டும் இரு புள்ளிகளின் வரையப்படும் தொடு தளங்கள் மேலே கொடுக்கப்பட்ட சமதளங்களுக்கு இணையாக இருக்கும்.

ஆனால், இந்த சமதளங்கள் மேற்பரப்பின்மேல் வட்டவெட்டு முகங்களை உண்டாக்கினால், வட்டங்களின் மையப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதையான ஒரு விட்டத்தின் இரு எல்லைகளிலும் வரையப்படும் தொடுதளங்கள் மேற்பரப்பை வெட்டும் தொடு புள்ளிகள், மேற்கண்ட வட்டங்களின் எல்லைகளாகும். அந்த புள்ளிகளை 'o' ஆரையையுடைய வட்டங்கள் எனலாம். அவைகளை அம்பிளிக்குகள் (umablics) என்கிறோம்.

8·41 நீள்வட்டக் கோளத்தின் அம்பிளிக்குகளைக் கண்டுபிடிக்க.

P என்ற அம்பிளிக்கின் அச்சுதூரங்கள் (ξ, ζ, Σ) என்றால், OP-ன் விட்ட சமதளம் (Dianetral plane) ஒரு வட்டவெட்டு முகத்தை உண்டாக்கும்.

எனவே,

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\zeta}{b^2} + \frac{z\Sigma}{c^2} = o$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{c^2-c^2} = o \text{ என்ற}$$

சமன்பாடுகள் ஒரு சமதளத்தையே குறிக்கின்றன. ஆகையால்

$$\frac{\xi/a}{\sqrt{a^2-l^2}} = \frac{\zeta/b}{o} = \frac{\Sigma/c}{\pm\sqrt{b^2-c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\xi^2/a^2+\zeta^2/b\Sigma^2/c^2}}{\pm\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\text{எனவே } \xi = \pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\zeta = o$$

$$\Sigma = \pm\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

இவைகள் நான்கு அம்பிளிக்குகளின் அச்சு தூரங்களைக் கொடுக்கின்றன.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ என்ற}$$

இரு தகடு கன அதிபர வளைவின் அம்பிளிக்குகள் மெய்யானவை. அவைகளின் அச்சு தூரங்கள்

$$\xi = \pm \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+c^2}} \quad \zeta = o$$

$$\Sigma = \pm \frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

என்று ஆகின்றன.

பயிற்சி 63

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ என்ற}$$

நீள் வட்டக்கோளத்தின் அம்பிளிக்குகள் $x^2+y^2+z^2=a^2-b^2+c^2$ என்ற கோளத்தின்மேல் இருக்குமென நிரூபி.

2. $$\frac{x^2}{a+b} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a-b} = 1 \text{ என்ற}$$

மேற்பரப்பின் அம்பிளிக்குகளைக் கண்டுபிடி.

பயிற்சி கணக்குகள்

1. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ என்ற நீளங்களையுடைய ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அரை விட்டங்களின் விட்ட சமதளங்கள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ என்ற}$$

நீள் வட்ட கோளத்தின்மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டு முகங்களின் பரப்புகள் முறையே A_1, A_2, A_3 என்றால்,

$$\frac{A_1^2}{\gamma_1^2} + \frac{A_2^2}{\gamma_2^2} + \frac{A_3^2}{\gamma_3^2}$$

$$= \pi\left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2}\right)$$

என்று காண்பி.

2. $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ என்ற நேர்

கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் சமதளங்கள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்ற நீள் வட்ட கோளத்தின்மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகங்களின் பரப்புகளில் அதிகமானது $\frac{\pi abc}{\gamma_1}$ என்றும் குறைந்தது $\frac{\pi abc}{\gamma_2}$ என்றும் நிரூபி [γ_1, γ_2 என்பவை,

$$\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c} = 0$$

என்ற சமதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகங்களின் அரை அச்சுகளாகும்]

3. $a>b>c$ என்றால் $ax^2+by^2+cz^2=0$ என்ற கூம்பின் விட்ட வெட்டு முகங்கள்

$$x\sqrt{a-b} \pm z\sqrt{b-c} = p$$ என்று காண்பி.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற

நீள்வட்ட கோளத்தின் வட்ட வெட்டு முகங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள் (Nounals), வெட்டு முகத்துடன் $\cos^{-1} \frac{ac}{b\sqrt{a^2-b^2+c^2}}$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கும் சமதளத்திற்கு இணையாகுமென்று நிரூபி.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற

நீள் விட்டக் கோளத்தின் மைய வெட்டு முகங்களின் அச்சுகள் γ_1, γ_2 என்றும், இந்த முகங்களுக்கும் மேற்பரப்பின் வட்ட வெட்டு முகங்களுக்கும் இடையே யுள்ள கோணங்கள் θ_1, θ_2 என்றும் அமைந்தால்,

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 = \frac{a^2c^2}{a^2-c^2} \left(\frac{1}{\gamma_1^2} \sim \frac{1}{\gamma_2^2}\right)$$

என்று நிரூபி.

6. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{ என்ற}$$

நீள் வட்ட கோளத்தின் ஒரு மைய வெட்டு முகத்தின் பரப்பு மாறிலியாகிறது. அதன் அச்சுகள்

$$\Sigma \frac{a^2-p^2}{a^4}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2}\frac{z}{y} - \frac{a^2-b^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)^2 = 0$$

என்ற கூம்பின்மேல் அமையுமென்று காண்பி.

[இங்கு p என்பது, வெட்டு முகத்திற்கு இணையாகவுள்ள தொடுதளம், மேற்பரப்பின் மையப் புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரமாகும்].

கலைச் சொற்கள்

	A
Angle	—கோணம்
—Semi vertical	—அரை உச்சிக் கோணம்
	B
Bisector	—சமவெட்டி
	C
Central conicoid	—மைய இருபடி மேற்பரப்பு
Centroid	—திணிவு மையம்
Chord	—நாண்
Coaxial spheres	—ஒரே தொடுதளக் கோளங்கள்
Coefficient of *x*	—*x*-ன் குணகம்
Cofactor	—இணைக் காரணி
Coincident lines	—பொருந்தும் நேர்கோடுகள்
Column	—நிரல்
Cone	—கூம்பு
—Enveloping cone	—அணைத்துக் கொள்ளும் கூம்பு
—Reciprocal cone	—தலைகீழ்க் கூம்பு
—Right circular cone	—நேர் வட்டக் கூம்பு
Conjugate line	—இணையியக் கோடு
Conjugate plane	—இணையியத் தளம்
Conjugate point	—இணையியப் புள்ளி
Constant	—மாறிலி
Coordinates	—அச்சுதூரங்கள்
Coordinate axis	—நிலை அச்சு
Curve	—வளைகோடு
—Guiding curve	—உதவி வளைகோடு
Cylinder	—உருளை
—Enveloping cylinder	—அணைத்துக் கொள்ளும் உருளை
—Right circular cylinder	—நேர்வட்ட உருளை

D

Determinant	—அணிக்கோவை
Direction cosine	—திசைக் கொசைன்
Direction ratio	—திசை விகிதம்
Director sphere	—குத்துத் தொடு கோட்டுக் கோளம்
Distance Equation	—தூரச் சமன்பாடு

E

Edge	—விளிம்பு
Ellipse	—நீள் வட்டம்
Ellipsoid	—நீள் வட்டக் கோளம்
Equation	—சமன்பாடு

F

Foot	—அடி

G

Generate	—பிறப்பாக்கும்
Generators	—பிறப்பாக்கிகள்
Great circle	—பெரு வட்டம்

H

Homogeneous	—சமப்படித்தானம்
Hyperbol	—அதிபர வளைவு
—Rectangular hyperbola	—செவ்வக அதிபர வளைவு
Hyperboloid of one sheet	—ஒரு தகடு கன அதிபர வளைவு
Hyperboloid of two sheet	—இரு தகடு கன அதிபர வளைவு

I

Identical	—சர்வ சமம்
Imaginary	—மெய்யிலா
Intercept	—வெட்டுத் துண்டு
Invariant	—மாற்றமிலி

L

Langarange's Identity	—லகாரன்ஸின் சர்வசமம்
Limiting points	—எல்லைப் புள்ளிகள்
Locus	—நியமப்பாதை

N

Negative	—குறை
Normal	—செங்குத்துக்கோடு

O

Octant —அரைக் காற்கோளம்
Origin —ஆதி

P

Parabola —பர வளைவு
Parallel —இணை
Parallelopiped —இணைகரத்தின் திண்மம்
Parameter —சாரா மாறி
Plane —
—Tangent —தொடுதளம்
Plane of contact —தொடு நாண் தளம்
Point of contact —தொடு புள்ளி
Pole —இசைப் புள்ளி
Polar line —இசைக் கோடு
Polar plane —இசைத் தளம்
Positive —மிகை
Power of a point —ஒரு புள்ளியின் திறன்
Principal plane —தலையாய தளம்
Projection —வீச்சு

R

Radius —ஆரை
Radical line —சமத்தொடு கோடு
Radical plane —சமத்தொடு வரைத் தளம்
Radical point —சமத்தொடு புள்ளி
Row —நிரை

S

Section —வெட்டுமுகம்
Space —வெளி
—Three dimensional —முப்பரிமாண வெளி
—Curve —வெளிவரை
Sphere —கோளம்
Surface —மேற்பரப்பு
Symmetry —சமச்சீர்

T

Tangent line —தொடுகோடு
Tangent plane —தொடுதளம்
Tetrahedron —நான்முகி

V

Variable —மாறி
Vertex —உச்சி

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

சென்னை

1970 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

			ரூ.	பை.
பொருளாதாரம்				
* 1.	பொருளாதாரம்—I	... சி. வேலாயுதம்	... 6	50
* 1-A	,, —II	... ,,	... 9	00
* 2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	... டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	... 4	25
* 3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	... ,,	... 4	50
* 4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	... சோணாசலம்	... 7	00
* 5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	... மு. ஆரோக்கியசாமி	... 6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	... திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	... 12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	... தி. சி. மோகன்	... 12	00
8.	,, ,, —II	... எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	... க. முத்தையன்	... 7	00
10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	... சி. வேலாயுதம்	... 6	75
*11.	,, II	... ,,	... 11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	... க. வெற்றிவேல்	... 7	50
*13.	இந்தியச் செலவாணியும் பாங்கு முறையும்	... பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 5	50

*மூலநூல் (Original book)

பொருளாதாரம் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, —II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, ,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, ,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, ,, I	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்—வாணிகப் புரட்சி	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00

35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	... ஏ. குழந்தை	... 7	50
36.	,, ,, II	... கே. எஸ். இராமசாமி	... 9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	... கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	... 7	75
38.	,, ,, II	... ,,	... 7	00
39.	வரர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	... க. வெற்றிவேல்	... 4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிககல்கள்	... மா. குமாரசாமி	... 5	50
41	1939முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	... சி. சுந்தரராஜன்	... 7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள்	... எம். கே. சுப்பிரமணியம்	... 7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	... ம. திருநாவுக்கரசு	... 7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	... பு. வி. சீனிவாசன்	... 6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	... கி. ர. அனுமந்தன்	... 4	50
*46.	,, ,, II	... ,,	... 3	50
*47.	,, ,, III	... ,,	... 7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	... டி. வி. சொக்கப்பா	... 4	50
49.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றாண்டு காலச் சரித்திரம்	... வை. விருத்தகிரீசன்	... 15	00
50.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	... இரா. அண்ணாமலை	... 13	00

*மூல நூல் (Original book)

வரலாறு (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
52.	,, ,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
53.	,, ,, IV	,,	8	00
54.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
55.	,, ,, I	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
56.	,, ,, II	,,	5	00
57.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
58.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
59.	,, ,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	00
60.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஜ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
61.	,, ,, II	,,	7	00
62.	,, ,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
63.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
64.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
65.	,, ,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
66.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
67.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
68.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. வைத்தகிரீசன்	7	50
69.	,, ,, II	வை. வைத்தகிரீசன், இரா. அண்ணமலை	6	75
70.	,, ,, III	இரா. அண்ணமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
71.	,, ,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
72.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ச. இராமச்சந்திரன்	6	50

73.	,, ,, II	... சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலாசுத்தரம்	... 6	75
74.	,, ,, III	... ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	... 6	50
75.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	... பா. மாணிக்கவேலு	... 5	00
76.	,, ,, —II	... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	... 6	00

அரசியல்

*77.	அரசியல் அமைப்புகள்	... ஜே. இராமச்சந்திரன்	... 4	62
78.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	... மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	... 6	50
*79.	இந்திய அரசியலமைப்பு	... வீ. கண்ணையா	... 4	75
80.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	... டி. செல்லப்பா	... 8	50
81.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 8	50
82.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	... திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	... 16	00
83.	,, II	... ,,	... 13	25
84.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	... வீ. கண்ணையா	... 9	00
85.	,, ,, II	... அ. ஜெகதீசன்	... 7	25
86.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... வீ. கண்ணையா	... 7	50
87.	,, II	... டி. செல்லப்பா	... 7	50
88.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	... தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	... 9	25
89.	இந்திய ஆட்சி அமைப்பு முறை வளர்ச்சி—I	... வீ. கண்ணையா	... 6	25
90.	,, ,, II	... வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	... 5	75

*மூலநூல் (Original book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
91.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—III	கி. ர. அனுமந்தன்		
*92.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
93.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
94.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
95.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
96.	,, ,, II	பா. சூரியநாராயணன் கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
97.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

98.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
99.	,, II	,,	7	00
100.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
101.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
102.	,, ,, —II	தி. இரா. அரங்கநாதன்	9	00
103.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
104.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
105.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*106.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

தத்துவம்

			Rs.	P.
107.	இந்து சமயத் தத்துவம்	... ஞா. ராஜாபகதூர்	... 5	50
*108.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	... ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	... 3	50
*109.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	... ஆர். எஸ். தேசிகன்	... 3	50
110.	அத்துவித் தத்துவம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 6	50
111.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 5	50
112.	இந்தியத் தத்துவம்—I	... வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுந்தரம்	... 3	50
113.	,, II	... ,,	... 6	00
114.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	... 6	00

அறவியல்

115.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 8	50

அளவையியல்

116.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 2	50

மானிடவியல்

117.	மானிடவியல்	... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	... 4	75
118.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	... கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	... 5	50
*119.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	... எஸ். இலட்சுமி	... 3	50

சமூகவியல்

120.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	... ஜே. நாராயணன்	... 10	50

புவியியல்

121.	ஆசியா—I	... கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 9	50
122.	,, II	... ,,	... 8	75
123.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	... ஏ. எஸ். நாராயணன்	... 8	50
*124.	தென் கிழக்கு ஆசியா	... ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 8	50

*மூலநூல் (Original book)

புவியியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*125.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
*126.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*127.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*128.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக்கரையாளர்	3	25
*129.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*130.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயசந்திரன்	9	00
*131.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*132.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
133.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
134.	,, II	,,	5	00
135.	காலநிலை இயல்	திருமதி இராதா	10	00
136.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
137.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
138.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
139.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
140.	,, ,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
141.	,, ,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5	75
புள்ளியியல்				
*142.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00
143.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
144.	,, II	இராஜகோபாலன்	14	00
145.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50
உயர்கணிதம்				
*146.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12	50
*147.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8	00
*148.	தொகை நுண்கணிதம்	கோவிந்தராசன்	9	00

விலங்கியல்				
*149.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	12	00
பௌதிகவியல்				
150.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து.	10	00
விஞ்ஞானம்				
*151.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*152.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*153.	எக்ஸ்—கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*154.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3	50
*155.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*156.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*157.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50
மருத்துவம்				
*158	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
159.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*160.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
161.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
162.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
163.	,, II	,,	5	50
164.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
165.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

*மூலநூல் (Original Book)

கூட்டுறவு

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
166.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
*167.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00
பொது நூல்கள்				
168.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
169.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
*170.	சேமக் கை நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*171	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*172.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கிடகிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50
புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை				
*173	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*174.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*175.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*176.	,, ,, II	,,	2	25
*177.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்,	7	50
*178	புகுமுக பௌதிகம்	ஆர். நாகராஜன்	5	75
*179.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	7	00
*180.	,, II	கே. ராஜகோபாலன்	3	00
*181	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	கே. இராஜகோபாலன்	7	00
*182.	,, II	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	4	50
*183.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	,, ,,	4	75
*184.	,, ,, II	ஆர். மகாதேவன்	3	25
*185.	வேதியியல்	,, பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00

*186.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5 50
*187.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4 00
*188.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை	7 25
*189.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4 50

பட்டப் படிப்புக்குரிய (B.Sc.) நூல்கள்

பௌதிகம் (Physics)

*190.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	ஆர். நாகராசன்	6 25
*191.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5 25
*192.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், எஸ். கிருட்டிணசாமி	4 50
*193.	பௌதிகம்—துணைப் பாடம்—I (Book I)	பி. தங்கராஜன்	4 00
*194.	,, (Book II)	,,	3 00
*195.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப் பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4 50
*196.	மின்னியல் காந்தவியல் (Book I)	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4 75
*197.	ஒளியியல் சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வி. சுண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7 75

வேதியியல் (Chemistry)

*198.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2 25
*199.	பௌதிக வேதியியல் (Book I)	டி. சக்திவேலு	4 00
*200.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6 50
*201.	கனிம வேதியியல் (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4 00
*202.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப் பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4 75

*மூலநூல் (Original Book)

கணிதம் (Mathematics)

			ரூ.	பை.
*203.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*204.	தொகுமுறை வரைகணிதம்-சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*205.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*206.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*207.	கணிதம்—துணைப் பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*208.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*209.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*210.	முதுகெலும்பற்றவை—I—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். முருகேசன்	11	50
*211.	,, II—சிறப்புப் பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	11	25
*212.	முதுகுநாணுள்ளவை—I—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	திருமதி ராணி கந்தசாமி	8	00
*213.	,, (Book II)	,,	9	75
*214.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை - II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*215.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம்	என். ராமலிங்கம்	9	00
*216.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம்	வி. சேது	10	00

தாவரவியல் (Botany)

*217.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப் பாட்டியலும்—சிறப்புப்பாடம்	கே. ராஜசேகரன்	11	00
*218.	தாவரப் புற அமைப்பியல்	கே. பாலசந்திரகணேசன்	9	25
*219.	தாவர உள்ளமைப்பியல் *மூலநூல் (Original Book)	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
பட்டப்படிப்பு

அறிவியல் பாடநூல்கள் - 1970

1.	சூழ்நிலையியல்-உடற் செயலியல்	... திரு டி. ஆர். கிருஷ்ணன்
2.	அறிமுறை வேதியியல்	... திரு ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்
3.	பொது பௌதிகம்	... திரு க. ப. கந்தசாமி, மு. தியாகசுந்தரம்
4.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்	... திரு ஆர். மகாதேவன்
5.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர் மரூஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	... டாக்டர் கு. பெரியசாமி
6.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் பகுதி-2	... திரு கா. வே. சுப்பிரமணியன்
7.	இன்றைய பௌதிகம்	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்
8.	ஒலி நூல்	... திரு டி. முருகையன்
9.	கணிதம்—துணைப்பாடம் பகுதி -2	... திரு ஆர். அய்யாசாமி
10.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்	... திரு க. சிவசுப்பிரமணியம்
11.	தாவரவியல்—துணைப்பாடம்	... திரு பா. இராசாராம்
12.	செல்லியல்	... திரு என். இராமலிங்கம்
13.	மரபியல்	... திரு பி. எம். அண்ணாமலை
14.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை	... திரு எஸ். சுந்தரம்
15.	அங்கக வேதியியல்-துணைப்பாடம்	... திரு பி. எல். இராம்சாமி
16	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்	... டாக்டர் என். ஆறுமுகம்
17.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்	... திரு. எஸ். ஆபிரகாம்

இவை அடக்கவிலை வெளியீடுகள்—கழிவு இல்லை